INSCRIPCIONES

CENTRO DE EDUCACION CONTINUA DE LA DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA FACULTAD DE INGENIERIA, U. N. A. M.

Cuota de inscripción $ 3,500.00

La cuota de inscripción incluye:
- **una carpeta con las notas de los profesores**
- **bibliografía sobre el tema**
- **servicio de cafetería**

Palacio de Minería Calle de Tacuba No. 5 México 1, D.F.

Horario de oficinas:
lunes a viernes de 9 a 18 h

Para mayores informes hablar a los teléfonos:
521-40-20 521-73-35 512-31-23

CONSTANCIA DE ASISTENCIA

La Facultad de Ingeniería de la U N A M, otorgará una constancia de asistencia a los participantes que concurran regularmente y que realicen satisfactoriamente los trabajos que se les asignen durante el curso

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, u n a m

Palacio de Minería
Calle de Tacuba No. 5
México 1, D.F.

6057
D39

métodos numéricos y aplicacicaciones con la computadora digital

Coordinador: M. en C. Verónica Czitrom.

En colaboración con el Colegio de Ingenieros Civiles de México, A.C.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, u n a m

PRESENTACION DEL CURSO

La revolución característica del siglo XX ha sido el computador. Para resolver modelos de problemas de ingeniería, administración, economía y planeación, es necesario conocer las técnicas de solución numérica utilizando la más importante herramienta de cálculo, el computador digital.

OBJETIVO

En este curso se darán al profesionista las técnicas modernas para la solución numérica de complejos modelos de situaciones del ejercicio profesional.

A QUIEN SE DIRIGE

Este curso está dirigido a profesionales de las ramas de ingeniería, administración, planeación y economía que necesita emplear el computador digital para resolver problemas numéricos de su aprecio profesional.

PRERREQUISITO

Es deseable tener un conocimiento básico de programación.

TEMARIO

1. **Repaso de Fortran**
   - 1.1 Introducción
   - 1.2 Lenguaje Fortran

2. **Algebra Matricial**
   - 2.1 Suma
   - 2.2 Multiplicación
   - 2.3 Operaciones elementales de matrices
   - 2.4 Inversión
   - 2.5 Eigenvalores y eigenvectores

3. **Sistemas de Ecuaciones Lineales**
   - 3.1 Método de Gauss-Jordan
   - 3.2 Método de Gauss-Seidel

4. **Raíces de Funciones Trascendentes y Polinomios**
   - 4.1 Funciones trascendentes
   - 4.2 Funciones polinomiales

5. **Interpolación**
   - 5.1 Polinomios de Lagrange
   - 5.2 Polinomios de Hermíticos

6. **Integración y Diferenciación Numérica**
   - 6.1 Método trapezoidal
   - 6.2 Método de Simpson
   - 6.3 Diferenciación numérica

7. **Solución de Ecuaciones Diferenciales**
   - 7.1 Método de Runge-Kutta
   - 7.2 Método de Milne
   - 7.3 Método de Diferencias Finitas
   - 7.4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

8. **Optimización**
   - 8.1 Programación Lineal
   - 8.2 Programación Dinámica

PROFESORES

M. EN C. VERONICA CZITROM
DR. VICTOR GEREZ GREISER
M. EN C. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON
ING. ARMANDO TORRES FENTANES

Métodos Numéricos y Aplicaciones con la Computadora Digital (del 23 de septiembre al 15 de octubre, 1977).

Fecha	Duración		Tema	Profesor
Sept. 23	17 a 21 h	I	Repaso de Fortrán	Ing. Heriberto Olguín Romo
" 24	9 a 13 h		Repaso de Fortrán	Ing. Ricardo Ciria Merce
	13 a 14 h		Comida	
	14 a 17 h	II	Algebra Matricial	Ing. José Horacio Sandoval Rodríguez
" 30	17 a 21 h		Algebra Matricial	M. en C. Verónica Czitrom
Oct. 1°	9 a 13 h	III	Sistemas de Ecuaciones Lineales	M. en C. Marcial Portilla Robertson
	13 a 14 h		Comida	
	14 a 17 h		Sistemas de Ecuaciones Lineales	En Ciudad Universitaria
Oct. 7	17 a 19 h	IV	Raíces de Funciones Trascedentales y Polinomios	M. en C. Verónica Czitrom
	19 a 21 h	V	Interpolación	M. en C. Verónica Czitrom
Oct. 8	9 a 13 h	VI	Integración y Diferenciación Numérica	M. en C. Verónica Czitrom
	13 a 14 h		Comida	
	14 a 17 h		Integración y Diferenciación Numérica	En Ciudad Universitria
Oct. 14	17 a 21 h	VII	Solución de Ecuaciones Diferenciales	M. en C. Marcial Portilla Robertson
Oct. 15	9 a 13 h		Optimización	Dr. Víctor Gerez Greiser
	13 a 14 h		Comida	
	14 a 17 h		Optimización	Dr. Víctor Gerez Greiser

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL.

M. EN C. VERONICA CZITROM
PROFESORA DE MATEMATICAS
D E S F I
UNAM
TEL.: 548.09.50

DR. VICTOR GEREZ GREISER
PROFESOR TITULAR
INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA
UNAM
TEL.: 550.52.15 E.3750

M. EN C. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON
JEFE DE LA SECCION DE COMPUTACION
EDIFICIO DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA
UNAM
TEL.: 550.52.15 E.3750

ING. JOSE HORACIO SANDOVAL RODRIGUEZ
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM
TEL.: 548.65.60 E.208

'edcs. 13, IX.77.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA I: REPASO DE FORTRAN

SEPTIEMBRE DE 1977.

FORTRAN

INTRODUCCION.- Desde el inicio de las computadoras digitales, uno de los campos de más aplicación de estos dispositivos ha sido el científico, donde existen necesidades de cálculos y operaciones muy complicadas o largas, siendo la computadora un auxiliar poderoso en la solución de estos problemas.

Inicialmente, la programación de las computadoras se hacía a nivel de lenguaje de máquina, ésto es, instrucciones numéricas que obligan a la máquina a ejecutar una operación sencilla (sumar, restar, etc.). Esta manera de programar a la computadora exigía al usuario un profundo conocimiento de las características del equipo usado, tanto de hardware como de operación.

Por la dificultad que entrañaba el usar una computadora para un uso científico, se pensó en simplificar la programación mediante un lenguaje más parecido al lenguaje matemático, por lo tanto más sencillo de aprender, y que pudiera ser compatible con distintas marcas de computadoras. Uno de los primeros lenguajes de alto nivel (o sea que para ser ejecutados tienen que ser traducidos mediante un compilador) fue el Fortran (Fórmula Translation) que es un lenguaje para uso eminentemente científico, con instrucciones muy fáciles de entender y con compiladores en casi todas las computadoras del mercado.

Estas notas estarán orientadas a él "cómo resolver el problema utilizando la computadora". Pues durante el resto del curso la computadora será una herramienta para el dise

ño de mecanismos.

La estructura del problema tiene 4 pasos a seguir, los cuales son:

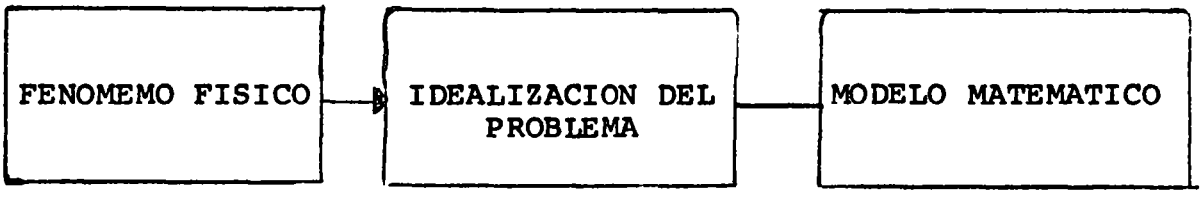
1.- La formulación precisa del problema

2.- Modelo matemático

3.- Análisis matemático

4.- Solución del problema con computadora

Resulta importante poder pasar del fenómeno físico al modelo matemático, esta relación se muestra en la siguiente figura:

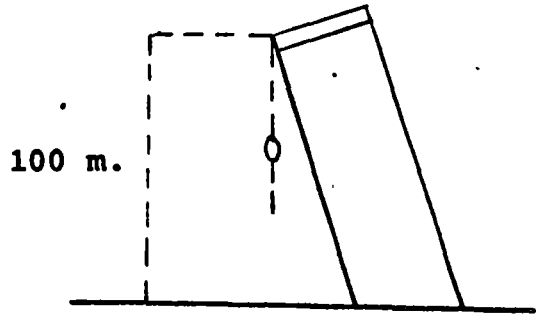


Veamos como sucede ésto en la solución de un problema científico. Por ejemplo veamos el caso de la Ley de Movimiento de Newton, la cual dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración:

$$f = ma$$

Supongamos que esta relación es exacta, sin tomar en cuenta la teoría de la relatividad.

Este típico problema se estudió en un curso elemental de Física conocido como el problema de la piedra que cae.



LA TORRE DE PISA

Queremos preguntarnos cuánto tarda la piedra en caer.

Si analizamos la situación vemos que la distancia d que viaja en un tiempo t con aceleración constante es:

$$d = \frac{a\,t^2}{2}$$

$$\text{si } a = 9.8 \text{ m/seg.}^2$$

$$t = \frac{9.8 \times (100)}{2}^{1/2}$$

Bien ahora preguntémonos qué tan realista fue nuestra respuesta. Notemos que NO consideramos efectos tales como:

1.- La variación de la dirección de la gravedad
2.- Variación de la gravedad dependiente de la - altura sobre el nivel del mar.
3.- Resistencia del aire (sobre la piedra)
   a) Forma de la piedra
   b) Velocidad de la piedra
   c) Densidad del aire (varía con la altitud y la temperatura).
   d) Densidad de la piedra.
4.- Atracción gravitacional entre sol y luna
5.- Vientos y corrientes de aire, etc.

Es posible incluir todos estos factores en nuestro modelo matemático, analizar estas ecuaciones y mejorar

el tiempo de caída real (pregunta original). Creo yo que hemos llevado el problema a un extremo, como conclusión podemos decir que el modelo debe ser lo suficientemente exacto para obtener de este resultados útiles, -- sin caer en el extremo anterior, donde el precio que -- hay que pagar en el análisis matemático y esfuerzos de computación, tal vez no sea lo que queremos.

Una vez que se ha hecho el diseño matemático - del modelo del problema, es necesario determinar un "algoritmo" para resolverlo, ésto es, una serie finita de pasos que nos lleve a la solución del problema.

Para el problema anterior, el algoritmo sería - el siguiente:

1.- Leer el valor de la altura (d)

2.- Hacer a = 9.8 $m/seg.^2$

3.- Hacer $t = \frac{9.8 \times d}{2}^{1/2}$

4.- Escribir el valor de t como respuesta.

Una de las técnicas más populares para describir algoritmos es por medio de diagramas de flujo, los - cuales se explicarán a continuación.

DIAGRAMAS DE FLUJO

Los diagramas de flujo son representaciones grá

ficas de los programas. Cada decisión y operación a desarrollar será colocada en una caja, la forma de la caja nos indicará el tipo de instrucción a desarrollar. Se utilizarán flechas para interconectar estas cajas, las flechas nos indicarán la secuencia de las operaciones, usualmente debemos empezar por la parte superior y bajar siguiendo las flechas (top down).

El análisis del problema se facilita utilizando diagramas de flujo, pues no son ambiguos y tienen una estructura similar a la del problema. Desafortunadamente, no existe hoy en día una convención estandard para estas representaciones, a lo largo de estas notas se usará la notación IBM, que resulta ser la más general aunque no es universal.

Las siguientes reglas serán usadas.

1.- Cada proposición será colocada en una caja. (Es válido colocar varias proposiciones en la misma caja).

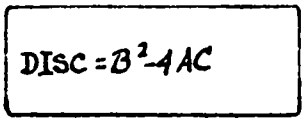
2.- La secuencia de las operaciones se indica con segmentos de línea dirigidos (flechas) entre las cajas.

3.- Se utilizan diferentes tipos de cajas según sea la proposición.

DESCRIPCION DE LOS SIMBOLOS

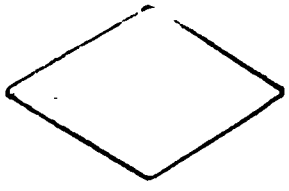
Indica inicio del programa o de un subprograma.

Operación a ejecutar por ejemplo de la figura 1.

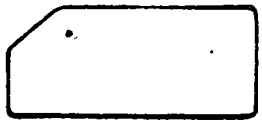


Indica que se debe de hacer la - operación:

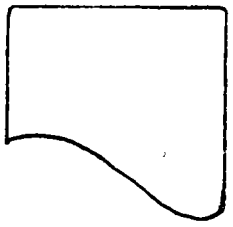
B^2 - 4 AC y su valor asignar lo a DISC.



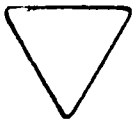
Proposición IF (# pag 7) comparación, compara lo que está dentro de la caja dependiendo de - esta comparación se podrán seguir 3 caminos. La comparación se indica con: si queremos comparar I con N, lo indicaremos (dentro de la caja) por I : N.



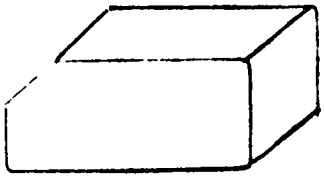
Indica que hay que leer tarjetas perforadas con datos o proposiciones.



Indica que queremos imprimir en la impresora algún mensaje o resultado.



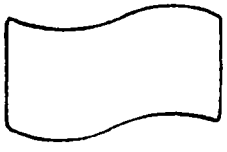
Este símbolo es un conector



Paquete de tarjetas (usualmente un programa).

Operación DO (la cual se explicara en la siguiente sección.

Fin o alto del programa.



Cinta magnética o cinta de papel perforado.

Primer problema de clase.

Este problema trata de determinar la precipitación pluvial total y su promedio en el Distrito Federal durante un lapso, digamos un año.

Los datos con los que se cuenta son las lecturas diarias efectuadas en milímetros, (notemos que no es posible tener números negativos) o sea la cantidad de lluvia.

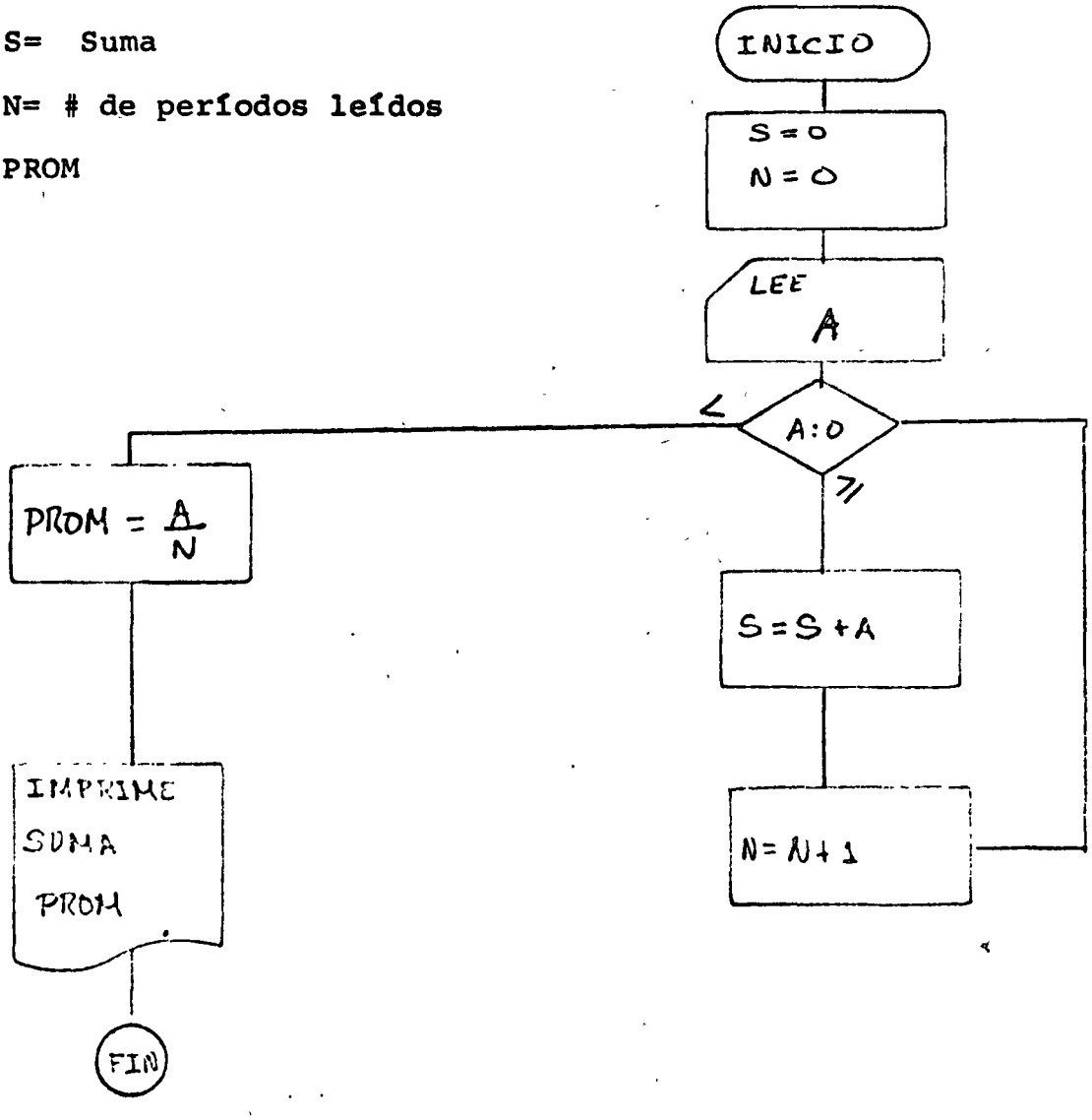
Procederemos a resolver el problema de la siguiente forma, (utilizando primero un diagrama de flujo).

A= cantidad de lluvia (agua)

S= Suma

N= # de períodos leídos

PROM



A continuación procederemos a explicar el diagrama de flujo.

La primera caja de inicio nos indica el comienzo de nuestro programa. La siguiente caja asigna el valor cero a las variables A y N donde A es el valor (cantidad de lluvia) leído, y N va a ser el número de lecturas tomadas. A continuación procedemos a leer el primer dato, notemos que no es posible tener, valor negativo de lluvia, por lo que valiéndonos de esta propiedad en la siguiente caja preguntamos si el valor leído es negativo, si es negativo calculamos el promedio de lluvia en el Distrito Federal, e imprimimos la suma y el promedio, para poder hacer esta operación en la última tarjeta de datos se pondrá un número negativo. Si el valor leído no es cero, se procede a sumar, lo cual s efectúa haciendo la asignación de la suma del valor anterior de suma más el valor leído, cosa similar ocurre en el "contador" del número de datos leídos. Notemos que este ciclo se repite hasta que leamos un número negativo, al suceder ésto, el programa imprime el resultado y termina.

CODIFICACION FORTRAN DEL PROGRAMA

```
XXX     TARJETAS DE CONTROL
C       INICIO DE LAS VARIABLES
        SUMA  =  0
        N  =  0
   1    READ ( 2, 2)  A
   2    FORMAT  (15)
        IF  (A)  3, 3, 4
   4    SUMA = SUMA + A
        N = N + 1
        GO TO 1
   3    PROM = SUMA/N
        WRITE ( 3,5 ) PROM, SUMA
   5    FORMAT ( 10X, F10.4, 5X, I5 )
        CALL EXIT
        END.
```

DESCRIPCION.

Como todo lenguaje (ya sea de programación o natural) el Fortran tiene un alfabeto, ésto es, una serie de símbolos que sirven para formar expresiones e instrucciones. El alfabeto de Fortran para B - 6500 consta de:

Letras: A, B, C. D, . . . , X, Y, Z.

Dígitos: 0, 1, 2, 3, . . . , 9 .

CARACTERES ESPECIALES.

+	MAS
-	MENOS
*	ASTERISCO (MULTIPLICA)
/	DIAGONAL (SLASH) DIVIDE
=	ASIGNA (NO CONFUNDIR CON IGUALDAD)
,	COMA (USADA COMO SEPARADOR)
(	ABRE PARENTESIS
)	CIERRA PARENTESIS
⌀	ESPACIO EN BLANCO
"	COMILLAS (UTILIZADA EN FORMATOS)
**	DOS ASTERISCOS (ELEVA AL CUADRADO)

Todo programa en Fortran contiene instrucciones de los s iguientes tipos:

a) Asignación

b) Control

c) Entrada/Salida

d) Información para el compilador

e) Funciones y subprogramas

La forma de codificar (escribir) un programa en Fortran es la siguiente.

Cada tarjeta contiene 80 columnas que deben distribuirse de la siguiente manera:

COLUMNAS	USO
1 - 5	Número de proposición (etiqueta)
6	Continuación
7 - 72	Proposición
73 - 80	Identificación o número de secuencia

Un programa completo en Fortran se vería codificado como sigue: (PROGRAMA MOSTRADO EN DIAGRAMA DE FLUJO ANTERIORMENTE).

```
    5   6   7                                   72      73      80
|       |   READ 10, A, B, C                    |       |
|   10  |   FORMAT ( 3 F10.0 )                  |       |
|       |   IF (A(  20, 50, 20                  |       |
|   20  |   DISC = B **2 - 4*A*C                |       |
|       |   IF (DISC) 40, 25, 25                |       |
|   25  |   DISC = SORT (DISC)                  |       |
|       |   X1 = (-B + DISC)  / (2*A)           |       |
|       |   X2 = (-B - DISC)  / (2*A)           |       |
|       |   PRINT 30, X1, X2                    |       |
|   30  |   FORMAT (1H, 2 F10. 3 )              |       |
|       |   GO TO 50                            |       |
|   40  |   PRINT 45                            |       |
|   45  |   FORMAT ("DISCRIMINANTE NEGATIVO")   |       |
|   50  |   CALL EXIT                           |       |
|       |   END                                 |       |
```

CONSTANTES.

Una constante en Fortran puede ser de 2 tipos:

a) Entera (Integer)

b) Real (Real)

a) Una constante entera es cualquier número - sin punto decimal. Ejemplo:

0, 91, - 173, + 327

si un entero se escribe sin signo, se supone positivo. Los valores que pueden tomar las constantes en IBM-1130 son los comprendidos en el rango:

- 32767	a	32767
$(-(2^{15} - 1)$	a	$2^{15} - 1)$

No se permite introducir comas en una constante entera. Ejemplo de constantes enteras ilegales:

3.2	tiene punto decimal
27.	
31459036	demasiado grande
5,496	contiene una coma

b) Una constante real es cualquier número con - punto decimal. Ejemplo:

0.
91.3
-145.8
5.E3

Que escribiremos como:

5.0×10^3	5. E03
$-5. \times 10^3$	-5. E03
4.1×10^0	4. E00

La maginitud de una constante real n o debe ser mayor que 2^{127} ó menor que 2^{-128}

VARIABLES. Una variable en Fortran es la representación simbólica de una cantidad que puede tomar diferentes valores.

Por ejemplo, en la instrucción

A = 5.0 + B

A y B son variables, el valor de B está determinado por alguna instrucción previa y puede cambiar. El valor de A está variando para cada nuevo valor de B.

NOMBRES DE VARIABLES.- Un nombre de una variable consiste - en una cadena de 1 a 5 caracteres alfanuméricos, excluyendo caracteres especiales, y siendo el primero una letra.

Ejemplo: de nombres de variables permisibles.

DET

AB1

I

LL4E

Ejemplo: de nombres de variables ilegales:

1LL4 Empieza con caracter no alfabetico
ABCDEFGHIJ Demasiado grande
A-B Caracter ilegal
A/B Caracter ilegal

El tipo de cantidad (real o entera) que representa se puede especificar de dos maneras: explícita e implícitamente.

La forma implícita de especificar una variable es como sigue:

a) si la primera letra del nombre de la variable es: I, J, K, L, M, N, la variable se considera como una variable entera.

b) Si la primera letra del nombre de la variable NO es: I, J, K, L, M, N, la variable se considera como una variable real.

La forma explícita de especificar una variable es usando una Declaración de tipo, la cual hace que el compilador ignore la especificación implícita, por ejemplo: si por medio de una declaración de tipo, designamos a la variable ITEM como de tipo real, será manejada por el compilador como una variable real, sin importar que su primera letra sea una I.

EXPRESIONES ARITMETICAS

Una expresión aritmética (e.a.) es una sucesión de constantes, variables y símbolos de operaciones aritméticas que siguen las reglas que a continuación se darán.

Los siguientes son los símbolos de operación aritmética:

Símbolo u operador:	Significado:
+	SUMA
-	RESTA
*	MULTIPLICACION
/	DIVISION
**	EXPONENCIACION

Ejemplo:

Expresión algebraíca	Equivalente en Fortran
$a + b$	A + B
$a - b$	A _ B
ab	A * B
$\frac{a}{b}$	A/B
a^b	A**B

REGLAS.

1.- Dos operadores no deben estar juntos. Deben estar separados por cantidades o paréntesis en la expresión por ejemplo; A +$^{-}$ B es inválida, mientras que $^{-}$B + A ó A + ($^{-}$B) son válidas.

2.- No se pueden omitir operadores, por ejemplo:

3A NO significa 3*A.

MODOS COMPUTACIONALES.

Los cálculos aritméticos son hechos en dos formas: entera y real, dependiendo del tipo de las cantidades envueltas en el cálculo. Las constantes o variables que forman una expresión aritmética no necesitan ser del mismo tipo.

El modo de la expresión es entero, real o mixto, dependiendo de si las constantes son enteras, reales o estan -- mezcladas.

Por ejemplo:

EXPRESION	TIPO DE CANTIDAD	MODO DE LA EXPRESION
3	Constante entera	entera
I + J	Variables enteras	entero
3.0	Constante real	real
A	Variable real	real
5*JOB + ITEM	Variables enteras, Constante entera	entera
A**B	Variables reales	real
A + B/ITEM	Variables reales	mixto (el resultado se guarda como real).

Se pueden usar paréntesis en las expresiones aritméticas como en algebra, para especificar el orden en el cual se van a efectuar las operaciones aritméticas que forman la expresión.

PROPOSICION DE ASIGNACION

La forma general de esta proposición es:

(variable) = (expresión aritmética)

Ejemplo:

```
A = 5
AB2 = A* ( B ** 2 )
DISCR = B ** 2 - 4* A* C
```

El objeto de esta instrucción es el de asignar a la (variable) el valor de la (expresión aritmética), borrando el valor anterior de dicha variable.

PROPOSICIONES DE ENTRADA/SALIDA

Las proposiciones de entrada/salida permiten al programador introducir (obtener) datos al (del) programa.

La forma general de dichas instrucciones es:

READ (2 , n_f) (lista de variables)

WRITE (3 , n_f) (lista de variables

n_1 Es el número de la unidad (física) de lectura de datos: Lectora de tarjetas perforadas, lectora de cinta perforada, cinta magnética, etc. En IBM-1130 este número es el 2 para lectora de tarjetas.

n_f Es el número de una proposición de formato. Para que el programa pueda leer datos, debe tener conocimiento de la forma en que se le van a presentar. Esto se hace mediante la proposición FORMAT.

LA FORMA GENERAL DE ESTA POSICION ES

n_f FORMAT (lista de especificaciones)

La lista de Especificaciones le indica al compilador en qué forma están perforados los datos. Básicamente hay dos tipos de especificaciones

I entera

F Flotante (cant. reales)

E Exponencial

El formato I tiene la forma

Iw donde w es el ancho del campo

Este formato se utiliza para leer (o escribir) valores de variables enteros, con un ancho máximo de w dígitos.

Por ejemplo, si queremos leer un valor de la variable L de tarjeta, tendremos que escribir:

```
    READ   ( 2, 10 ) L
10 FORMAT (I4)
```

Las dos proposiciones anteriores hacen que la computadora lea un valor entero de a lo más 4 dígitos, y lo asigne a la variable L.

Para leer (o escribir) valores que corresponden a -- cantidades reales, se usa el formato F el cual tiene la forma general Fw.d, donde w es el número máximo de dígitos y d es el número de dígitos decimales. (d puede ser 0).

Por ejemplo, para leer el valor de la variable R podemos usar:

```
READ  (2,3) R
3 FORMAT (F10.3)
```

Esto le indica al compilador que va a leer un valor real de 9 digitos, de los cuales 3 son decimales.

Para la impresión de resultados, el número asignado a la impresora en línea en IBM-1130 es 3.

Existe un formato que permite mejorar la impresión de resultados, este es el fomato X, el cual hace que la impresora (y en algunos casos la lectora) se "salte" tantos espacios como lo indique la especificación, por ejemplo, la especificación 4x hará que el programa, en impresión, deje 4 espacios en blanco, libres.

A continuación veremos las conversiones en entrada-salida, de distintos valores bajo diferentes especificaciones.

(Ø significa espacio en blanco)

ENTRADA

Campo de Entrada	Especificación	Valor Interno
567	I3	+ 567
- 329	I6	- 329
- 27	I7	- 27
27	I5	+ 27000
234	I7	234

SALIDA

Valor Interno	Especificación	Campo de Salida
+ 23	I4	+ 23

Valor Interno	Especificación	Campo de Salida
- 79	I 4	- 79
+ 30145	I 5	30145
- 30145	I 5	*****
+ 978	I 1	*
0	I 3	0

ENTRADA

Campo de Entrada	Especificación	Valor Interno
36725931	F8.4	+ 3672.5931
3.672593	F8.4	+ 3.672593
- 367259.	F8.4	- 367259
367259	F6.6	+ 0.367259

SALIDA

Valor Interno	Especificación	Campo de Salida
+ 36.7929	F7.3	36.763
+ 36.7934	F9.3	36.793
- 0.0316	F6.3	- 0.032
+ 579.645	F4.2	***
+ 579.645	F6.2	579.65
-579.645	F6.2	*****

En algunos de los casos, es necesario imprimir títulos o encabezados de tal manera de que los resultados del pro-- grama sean más legibles y comprensibles. Para este tipo de problemas es común poner el texto a ser impreso entre comi- las, dentro del formato que le corresponda.

Por ejemplo, si queremos imprimir los valores de tres variables A, B, C, en una forma legible, podríamos usar el siguiente formato:

```
WRITE  ( 3, 10 ) A, B, C,
10 FORMAT ('A = ', F10.4, B = ', F10.4,'C =  'F10.4)
```

Lo cual provoca que la máquina imprima lo siguiente:
(suponiendo que A = 5.6, B = - 4.85, C = 1.492)

A = _ _ _ _ 5.6000 _ B = ___ - 4.8500 C = _ _ _ _ 1. 4920

Es importante hacer notar que la primera posición de impresión (i-e la columna 1) sirve para el control del ca rro de impresión, por lo que es necesario tener presente este hecho siempre que se vaya a imprimir.

El control de carro posible se reduce a las siguien- tes:

PRIMERA COLUMNA

∅	Espaciamiento sencillo antes de imprimir
0	Espaciamiento doble antes de imprimir
1	Salto a otra página antes de imprimir
+	Sobre - escritura antes de imprimir

Proposiciones de Control

Normalmente, las instrucciones de un programa en Fortran

se van ejecutando en forma secuencial, por lo que es necesario alterar (en algunos problemas) esta forma de ejecución.

Las instrucciones que alteran el flujo de las instrucciones en un programa son las instrucciones de control que son:

GO TO

IF Aritmético

IF Lógico

STOP

CONTINUE

Proposición GO TO

Esta proposición es llamada de transferencia incondicional y su forma general es:

GO TO n donde n es un número de proposición

El efecto de esta proposición es el de transferir el flujo de las instrucciones a aquella que tiene el número de proposición n. Esto se puede visualizar como un "salto" en el orden de ejecución del programa.

Por ejemplo:

En el segmento de programa siguiente, el orden de ejecución es: 1,2,3,5,6,2,3,5,6,7

```
1  A = 0                    4  C = A * B
2  B = A + 3                5  WRITE (3,8), A,B,C
3  GO TO  5                 6  GO TO  2
                            7  END
```

Proposición IF

Generalmente, en el transcurso de un programa, es necesario hacer "preguntas" sobre algunos valores de las variables del programa, y tomar "decisiones" según el resultado de la pregunta.

Esta "toma de decisiones se efectúa por medio de la proposición IF, la cual tiene las versiones formadas Aritmética Lógica.

El IF Aritmético tiene la forma

IF (exp. aritmética) n_1, n_2, n_3

Donde n_1, n_2 y n_3 son 3 etiquetas ó números de proposición.

El funcionamiento de este IF es el siguiente:

1.- Evalúa la expresión aritmética

2.- Compara el resultado con cero y toma cualquiera de las siguientes acciones:

a) Si el resultado es 0, transfiere el control a la proposición con el número n_1

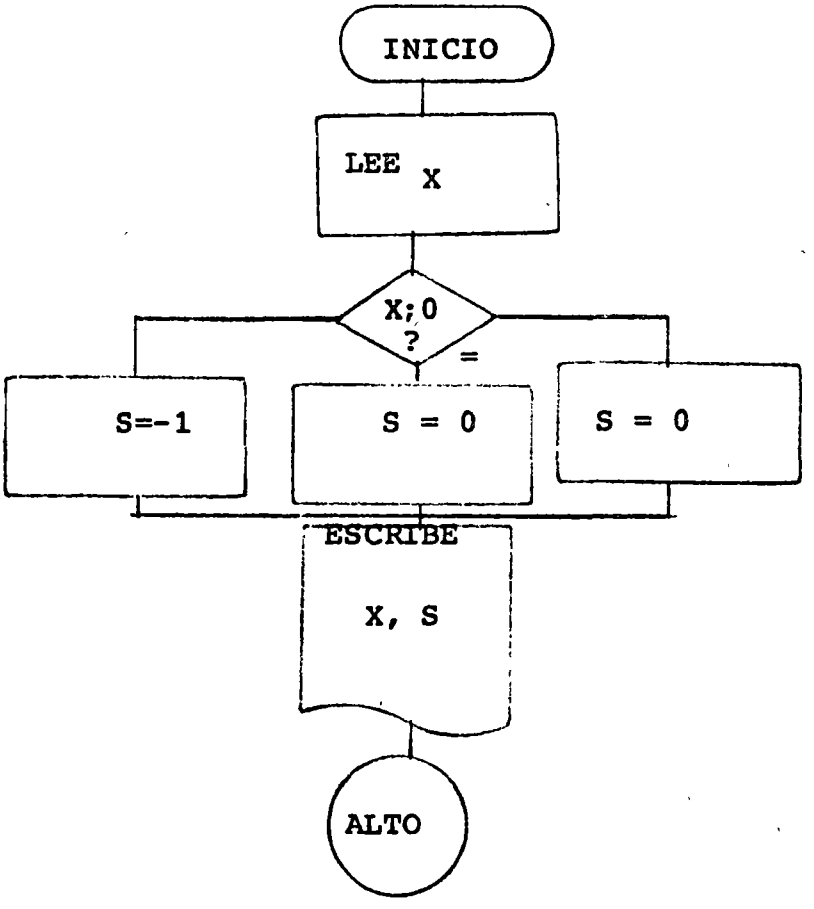
b) Si el resultado es = 0, transfiere el control a la proposición con el número n_2

c) Si el resultado es 0, transfiere el control a la proposición con el número n_3

Como ejemplo, veamos un programa que calcula la función SIGNUM (x), ((x)) definida como:

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Hagamos primero un diagrama de Flujo:



La codificación en Fortran IB-1130 queda como sigue:

```
1     READ ( 2,2 ) X
2     FORMAT  ( F10.0 )
3     IF (X) 4,6,8
4     S = - 1
5     GO TO 9
6     S = 0
```

```
7    GO TO 9
8    S = 1
9    WRITE  (3,10) X,S
10   FORMAT  (F10.6, 3)
     END
```

El IF lógico tiene la forma

IF (expresión lógica) proposición ejecutable

Una expresión lógica es una expresión que puede ser cierta o falsa, como es el caso de las comparaciones:

¿ Es A B ?

¿ Es sen x + y log. z ?

Este tipo de expresionaes son llamadas expresiones de relación y consisten de dos expresiones aritméticas (reales o enteras) separadas por un operador de relación. Los operadores de relación son las 6 comparaciones matemáticas: = ≠ = = que en Fortran quedan expresadas como se muestra en la tabla:

OPERADOR DE RELACION	NOMBRE EN FORTRAN
=	.EQ.
≠	.NE.
	.LT.
=	.LE.
	.GT.
=	.GE.

Además de estos operadores, se usan tres operadores lógicos para construir expresiones más elaboradas. Estos operadores son llamados disyunción, conjunción y negación; sus nombres en Fortran son .OR., .AND., NOT. Respectivamente. Su funcionamiento es el siguiente:

Si X y Y son expresiones lógicas, entonces X.OR. Y es cierta. a menos que X o Y sean ambas falsas.

X. AND. Y es falsa, a menos que X y Y sean ambas ciertas.

NOT.X es falsa si X es cierta y viceversa

Veamos el siguiente ejemplo comparativo del uso del IF Lógico y del IF aritmético.

Supongamos que queremos hacer R = R1 solamente si S = 3 y T = 4, hay 3 maneras de hacer esto:

IF ARITMETICO		IF LOGICO	
IF (S - 3) 1,2,1	a)		b)
2 IF (T-4) 1,3,1	IF(S.NE.3) GO TO 1		IF(S.EQ.3.AND.
	IF (T.EQ.4) R = R1		T. EQ.4) R=R1
1 - - - -			

Vemos que usando el IF aritmético necesitamos 3 etiquetas. En el IF Lógico, el funcionamiento es el siguiente:

a) Se evalúa (n) la (s) expresión (es) aritmética (s) involucrada (s) en la expresión lógica.

b) Se va evaluando el valor lógico (cierto o falso) de la expresión lógica, siguiendo un orden de - prioridad de operadores lógicos. El orden es el siguiente: La más alta prioridad es dada. NOT. Después se evalúa .AND.
y finalmente .OR.

c) Una vez que se ha evaluado la expresión lógica entre los paréntesis del IF, se observa su valor y ocurre una de dos situaciones:

Si la expresión lógica es cierta, se procede a - ejecutar la proposición a la derecha del If;

Si la expresión lógica es falsa, se ignora dicha proposición y se contínua con la secuencia normal del programa.

ARREGLOS.- Generalmente, en los problemas científicos, es necesario usar vectores, matrices o estructuras con más dimensiones.

Debido a que todas las variables usadas en el programa ocupan un lugar en la memoria de la computadora, los problemas deben ser "declarados" (esto es, se le debe dar información al compilador) a fin de que se les asignen localidades en la Memoria. La manera de declarar un arreglo en Fortran es por medio de la proposición "dimension" y es como sigue:

DIMENSION A (n_1, n_2), B (n_3), C(n_4, n_5, n_6)
Donde A, B, C son los nombres de los arreglos y n_1, n_2, ...n_6 son las dimensiones máximas de dichos arreglos.

Por Ejemplo:

Dimension NOM (10,10)

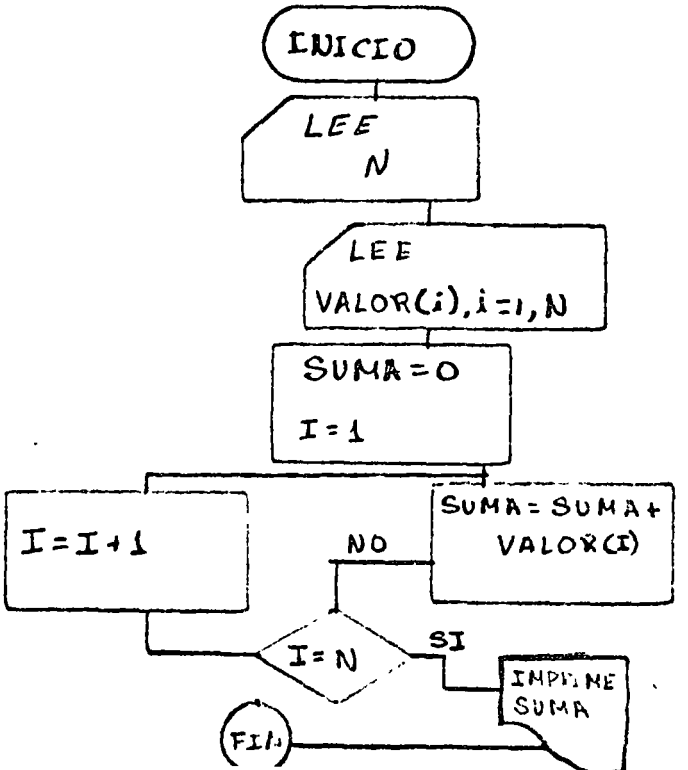
Hará que el compilador reserve 100 localidades para una matriz llamada NOM con 10 renglones y 10 columnas.

Para referirse a algún elemento de un arreglo, basta con poner el nombre del arreglo, seguido por el índice - (o los índices) encerrado entre paréntesis por ejemplo, - si queremos sumar los dos primeros elementos del arreglo A y guardar el resultado en el tercero, lo haríamos por medio de la siguiente proposición.

A (3) = A (1) + A (2)

En general, los índices de un arreglo son variables - enteras, que van cambiando de valores en el transcurso del programa. Como ejemplo, veamos un programa que lee un vector llamado valor, de a lo más 100 elementos; y calcula la suma de sus elementos.

EL DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA ES:



La codificación del programa en Fortran quedaría como sigue:

567

```
C           SE DECLARA EL ARREGLØ
            DIMENSION VALOR (100)
C           SE LEE EL NUMERO REAL DE ELEMENTOS A PROCESAR
            READ  (2,1) N
          1 FØRMAT (13)
C           LA SIGUIENTE PROPOSICION LEE LOS ELEMENTOS DEL
            ARREGLO  MEDIANTE UNA PROPOSICION DE ITERACION
            QUE SE EXPLICARA CON MAS DETALLE
            READ (2,2) ( VALOR (I), I - 1,N )
          2 FORMAT ( 8F 10.0 )
C           DE AQUI EN ADELANTE SON LOS CALCULOS
            SUMA = 0.0
            I = 1
          3 SUMA = SUMA + VALOR (I)
            IF (I.EQ.N) GO TO 4
            I = I + 1
            GO TO 3
          4 WRITE (3,5) SUMA
          5 FORMAT  ( 1H, 'SUMA = ' , F12.4 )
            CALL EXIT
            END
```

En el programa usamos una proposición de la forma

(VALOR (I), I = 1, N)

La cual es usada con mucha frecuencia para lectura e impresión de arreglos (de cualquier dimensión) y su - funcionamiento es equivalente a escribir.

(VALOR (1), VALOR (2), VALOR (3), . . ., VALOR (N)

Este tipo de proposiciones de iteracción son las que quizá dan más poder al lenguaje, ya que es posible realizar grandes cantidades de cálculos mediante pocas proposiciones.

Una de las proposiciones de interación más usadas por los programadores en Fortran en la proposición DO.

PROPOSICION DO.

La proposición de control DO nos permite efectuar una serie de iteraciones con una sola proposición, por ejemplo: si queremos inicializar un arreglo 4 de N elementos a ceros, se puede hacer usando If's o usando una proposición Do. Veamos las dos formas:

Con If's	Con Do
I = 1	Do 1 I = 1,N
1 A(I) = 0	1 A (I) = 0
I = I + 1	

La forma general de la proposición Do es:

Do etiqueta variable entera = valor inicial, valor final, incremento

La etiqueta que aparece en la proposición DO le indica a la máquina hasta donde llegar el alcance del DO, esto es, define los límites dentro de los cuales se efectuará - la iteración.

La variable que servirá como un "contador" para el DO su valor inicial está dado en la proposición y se irá incrementando cada vez que llegue al final del DO, comparando su valor con el valor final especificado. En el caso de -- que sea mayor o igual, el ciclo termina y se ejecuta la proposición siguiente del bloque definido por el 00.

La última proposición en el bloque de un DO no puede - ser Go To, If Return o Do. En el caso en que sea necesario usar algunas veces estas proposiciones, se recurre a una proposición "muda" que es el Continue cuya única función es la de definir a una etiqueta.

Se puede dar el caso de tener varios bloques de DO's -- "anidados", esto es, uno dentro sel otro, siempre y cuando - cada uno está completamente abarcado por el más largo.

Para ejemplificar lo que se ha dicho, veamos un segmento de programa que multiplica dos matrices A, B cada una de NxN y guarda el producto en la matriz C de N x N.

Recordemos que si $C = A*B$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}$$

El programa quedaría como:

```
                .
                .
                .
                DO 1 I = 1, N
                DO 1 J = 1, N
                C (I,J) = 0
                DO 2 K = 1, N
2 C (I,J) = C(I,J) + A(I,K) * B(K,J)
1 CONTINUE
```

SUBRUTINAS Y FUNCIONES

Muy frecuentemente sucede que una Sección de programa, o secuencia de instrucciones es frecuentemente usada. Si tal caso sucede tal sección del programa es usualmente -- identificada como una rutina separada llamada SUBROUTINE en Fortran (PROCEDURE ALGOL).

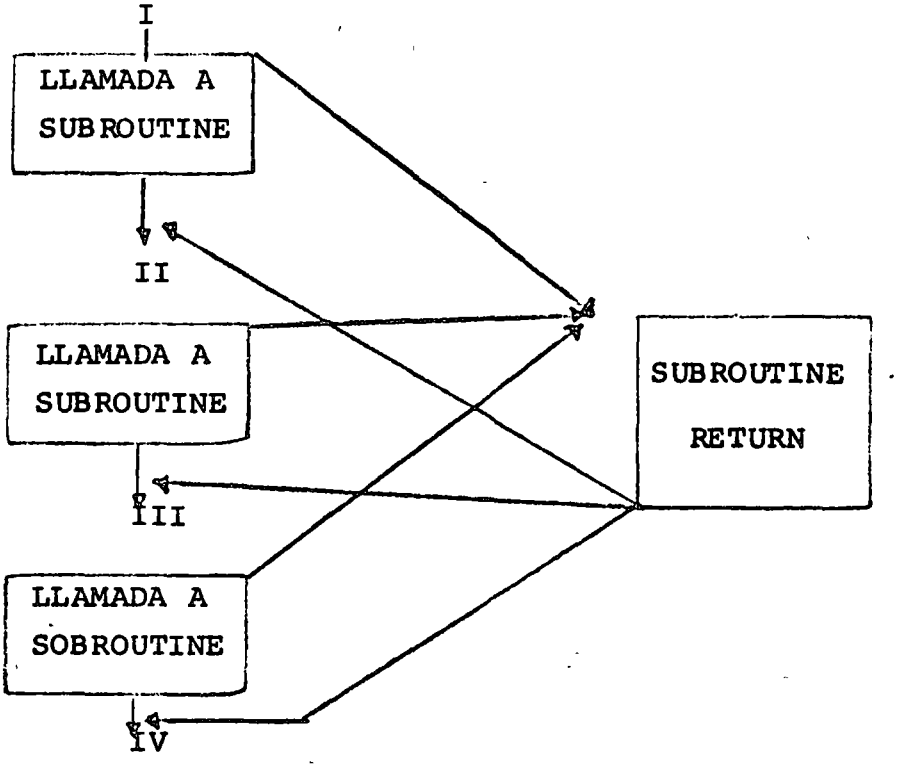
Cuando una subrutina es definida, se le dá un nombre - de identificación, y sus argumentos son identificados, estos argumentos son sus variables. A continuación estudiaremos - la naturaleza, uso y objeto de las subrutinas.

Cada subrutina debe de empezar con la proposición subru tina, su nombre, y una lista de argumentos y terminar con - las PROPOSICIONES RETURN Y END.

```
      SUBROUTINE SUMPRO ( A, B, SUM, PRO ).
      REAL A (20), B (20), SUM (20), PRO (20).
1     SUM (1) = A (I)  + B (I)
      PROD (I) =  A(I) * B(I)
      1 = I + 1
```

```
      IF  (I - 20) 1, 1, 2
2     RETURN
      END
```

La manera como se transfiere el control se ilustra en la siguiente figura. El control se transfiere a la subrutina cada vez que es llamada. El control se transfiere al programa principal (u otra subrutina) cuando encuentra la proposición RETURN. La siguiente proposición a ejecutar es la siguiente A la llamada.



La estructura de la subrutina es la siguiente:

```
# Tarjetas de control
  Real a  (1000)
      .
      .
      .
      .
  Call error
      .
      .
      .
      .
   End.
   Subroutine error
   (WRITE)  (6, 1)

1  Format ("un error del tipo a ocurrió")
   Return
   End
```

Cuando una subrutina es usada, algunos de los argumentos (argumentos en la subrutina de referencia) pueden ser expresiones, veamos a través de un ejemplo como son estos tratados.

```
                .
   Programa     .
                .
   Principal    .
                Call suma (  A * A, B )
                .
                .
                .
                .
                End
```

Cuando ejecuta la preposición call suma (A * B, B), - la expresión A * A, es valuada y su valor es asignado a una variable temporal no accesible al programador llamémosle t. El segundo argumento es simplemente una variable, su nom-- bre es pasado a la subrutina suma. O sea que call suma (A* A, B) es equivalente A;

$$t = A * A$$

A esta manera de tratar argumentos se le conoce como "Llamada por valor;

En general, una subrutina admite determinados valores de entrada y "regresa" al programa principal otros valores, por ejemplo, en la subrutina SUMPRO (A, B, SUM, PRO) los valo-- res de entrada son A, B; y los valores de regreso son SUM y PRO.

Existe otro tipo de subrutinas que regresan un solo valor, por lo que son llamadas funciones. En este tipo de sub rutinas todos los argumentos representan valores de entrada y el valor de salida queda asociado al nombre de la subrutina.

Veamos un ejemplo: queremos una subrutina que admita -- tres valores A, B, C y calcule $A^2 + B^2 + C^2$ si A y B son positivos o $\frac{-C}{A + B}$ si A ó B son negativos, se procede a declarar la subrutina:

```
      FUNCION      F ( A, B, C )
      IF (A, GE. O. OR. B. GE. O)  GO TO 2
      F = - (C/ ( A + B ) ) .
      RETURN
2     F + SORT  ( A * * 2 + B ** 2 + C ** 2 )
      RETURN
      END
```

METODO DE NEWTON

Este método sea tal vez el método más popular para encontrar los ceros (raíces) de una función de una variable f (X). Es decir se encuentra una X tal que f (X) = 0.

El método de Newton es un método iterativo que produce una secuencia de aproximación a la raíz, siempre y cuando:

a) f (X) sea continua y diferenciable en la vecindad de la raíz, y que las segundas derivadas de f (X) no lleguen a ser excesivamente grandes.

b) Se puede dar un intento inicial del valor de la - raíz "bueno".

Para funciones de variables reales, el método de Newton tiene una interpretación geométrica simple somo se ilustra en la siguiente figura:

Suponga que queremos encontrar una raíz de la función f (x), es decir el punto donde f (x) corta el eje x. Suponemos que la curva tiene la forma de la figura anterior, si nuestro primer intento es x_1, x_2 será una mejor aproximación de la raíz la cual se obtiene encontrando la intersección de la tangente (x_1, f (x_1)) en el eje x. Este proceso se repite varias veces, cada vez utilizando la x_2 calculada de la x_1 anterior; hasta encontrar la raíz con la aproximación deseada.

Refiriéndose nuevamente a la figura anterior deje que f^1 (x) sea la derivada de f (x) valuada en el punto x_1, por consideraciones geométricas.

$$f^1 (x_1) = \frac{f (x_1)}{x_1 - x_2} \qquad 1$$

Y la nueva aproximación de la raíz

$$x_2 = x_1 - \frac{f (x_1)}{f^1(x_1)} \qquad 2$$

Ejemplo:

Método para calcular la raíz cuadrada.

Si la ecuación $x^2 = A$, la ecuación a resolver será:

$$f (x) = A - x^2 = 0$$

$$f^1 (x) = - 2x$$

De la fórmula 2

$$x_2 = x_1 \frac{- A - x1^2}{- 2 x_1} \quad \text{ESCRIBIENDO:} \quad x_2 = \frac{1}{2} \frac{A}{x_1} + x_1$$

METODO DE NEWTON

```
c       PROGRAMA ENCONTRAR LOS CEROS DE UNA FUNCION
c
c
c       AQUI SE DEFINEN LA FUNCION  Y SU DERIVADA
c
        F (X)  =
        DF (X) =
c       LEE EL VALOR INICIAL DE LA SOLUCION Y LA TOLERANCIA
        DE ERROR
        READ (5, 1 )  XVIEJA, EPS
    1   FORMAT  ( 2 F10.0)
c       COMIENZAN LAS ITERACIONES
    2   XNUEVA = XVIEJA - F (XVIEJA)  /  DF (XVIEJA)
        DIF =  ABS  (XVIEJA  - XNUEVA)
        IF ( DIF. LT. EPS ) GO TO  3
        XVIEJA = XNUEVA
        GO TO 2
    3   WRITE (6, 4) XNUEVA, DIF
    4   FORMAT ( " X = " , F12.4, 5 X, "ERROR = ", E14.10 )
        END
```

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA I. LENGUAJE FORTRAN (complemento)

ING. HERIBERTO OLGUIN ROMO
ING. RICARDO CIRIA MERCE

SEPTIEMBRE DE 1977

H E R I B E R T O O L G U I N R O M O

R I C A R D O C I R I A M E R C E

F Œ D R T R A N

ELEMENTOS DE UN SUPERLENGUAJE DE PROGRAMACION: FØRTRAN

..2

1.- Introducción al lenguaje FØRTRAN

El lenguaje FØRTRAN, cuyo nombre corresponde a las primeras letras de las palabras inglesas FORmula (fórmula) y TRANslation (traducción), es un lenguaje de programación orientado a problemas matemáticos y se emplea en casi todas las computadoras del mundo. Debido a su parecido con el lenguaje aritmético común, el FØRTRAN simplifica la preparación de problemas que pueden resolverse mediante una computadora. Los datos e instrucciones se pueden organizar mediante una secuencia de enunciados fortran; estos constituyen el llamado Programa Fuente.

Todas las computadoras que "entienden" el lenguaje FØRTRAN, tienen lo que se llama un Compilador Fortran, llamado también traductor o interprete, el cual analiza los enunciados fortran y los traduce a un Programa Objeto, el cual queda en Lenguaje de Máquina.

Un programa escrito en lenguaje FØRTRAN se puede procesar en cualquier máquina que tenga un Compilador Fortran. Esto nos indica que el lenguaje es independiente para cada máquina, o sea que el compilador se debe preparar en cada caso teniendo en cuenta la máquina que ha de usarse en particular; puesto que las máquinas difieren en su organización interna, se ha desarrollado un número de "dialectos" del Lenguaje FØRTRAN, cada uno de los cuales es apropiado para una clase de máquinas. Las diferencias entre los

varios dialectos son mínimas y se ajustan el uno al otro facilmente.

1.1 El alfabeto

El alfabeto FØRTRAN esta constituido de caracteres que son símbolos familiares de escritura y de teclados de máquinas de escribir, asi como de dispositivos especiales de perforación; dichos caracteres son:

Alfabéticos: A B C D E F G H
I J K L M N
* Ø P Q R S T U V W X Y Z

Numéricos: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Símbolos: + - * / = . , ( ) ' @

De este alfabeto se construyen todos nuestros símbolos, expresiones y enunciados que se utilizan en el lenguaje FØRTRAN.

2.- Números

Los números pueden representarse en diferentes formas, las cuales se asemejan a los símbolos de la aritmética general; pero debido a la estructura interna de las computadoras se establecen las convenciones de: Punto Fijo y Punto Flotante que proporcionan facilidades para su manejo en FØRTRAN. Los símbolos de punto fijo

* La letra O la expresaremos como Ø para diferenciarla del N° cero.

se usarán solamente con números enteros y los cálculos asociados se denominarán aritmética de los enteros o modo entero; mientras que la aritmética de los números reales se hará en la forma de punto flotante y se llamará aritmética de los reales o modo real. Debido a que también es necesario distinguir las constantes (números que no cambian durante toda la ejecución de un programa) de las variables (números que pueden cambiar), surgen cuatro clases de símbolos para los números.

2.1 Constantes enteras.

Dependiendo del tipo de computadora se podrán representar por un cierto número de dígitos, asi para IBM-1130 se representan mediante cinco dígitos sin el punto decimal. Si el entero es negativo, los dígitos deberán ser precedidos del signo menos; si el entero es positivo el signo es opcional.

Ejem. Símbolos para constantes enteras pueden ser entre otras:

1976 +1 0 +1976 -1976

Símbolos que no se aceptan para constantes enteras:

7483282 (más de cinco dígitos)

1976. (el punto decimal no se permite)

2.2 Constantes reales

Dependiendo del tipo de computadora, las constantes reales se podrán representar por varios dígitos, pero en el caso de la

IBM-1130 sólo se admiten siete dígitos con punto decimal pudiendo-se colocar al principio de los dígitos, al final o entre dos dígitos cualesquiera. Cuando aparece un punto en una constante su tratamiento será de punto flotante. Si la constante real es precedida de un signo menos, se indicará que es negativa, si es positiva el signo es opcional.

Ejem. Símbolos para constantes reales pueden ser entre otras:

1976.	-.00001976	+12,345	-12.345
-.007	.007	5.348	0.3

Símbolos que no se aceptan para constantes reales:

123456789.32 (más de siete dígitos significativos)

5343 (falta el punto decimal)

Para representar las constantes reales existe también la llamada forma exponencial; esta la podemos representar mediante una letra E y una constante entera de uno o dos dígitos, positiva o negativa. Esta constante entera es un exponente del número diez; el signo menos es para los exponentes negativos y para los positivos, el signo es opcional. En FØRTRAN, la presencia del exponente hace que el uso del punto decimal sea opcional.

Ejem.

Forma exponencial	Forma no exponencial
1.328E2	132.8
1.328E02	132.8

1.328E00	132.8
-4.724E-03	-.004724
+7.61E3	7610.
-6432E-3	-6.432

2.3 Variables enteras

Estas se representan por combinaciones de una a cinco letras y dígitos (IBM-1130), no se permiten otros caracteres y el primer caracter deberá ser una de las letras I, J, K, L, M ó N. El primer caracter de una variable es el que indica si es entera o real. Durante la ejecución de un programa, las variables enteras deberán restringirse a valores enteros.

Ejem. Símbolos para variables enteras pueden ser, entre otros:

NUMCT, KILO, N1, N2, M10, KONT

IIALC, JCLAV, MARY, KONT1, L1976.

Símbolos no aceptables para variables enteras:

CUENT (el primer caracter debe ser I, J, K, L, M ó N).

KONTADOR (demasiados caracteres).

12.34 (sólo se aceptan letras y números)

2.4 Variables reales

Estas se representan por combinaciones de una a cinco letras y dígitos (IBM-1130), no se permiten otros caracteres y el primer

...ter tiene que ser necesariamente una letra diferente a I, J, K, L, M ó N. Durante la ejecución de un programa dichas variables se deben restringir a valores reales.

Ejem. Símbolos para variables reales pueden ser, entre otros:

FUERZ VELOC ACEL1 CUENT A1 A2

ALFA VIELA RAIZ2 X1 PROD SUMA

Símbolos no aceptables para variables reales:

A3.8 (el punto no es letra o número)

CORRIEN (demasiados caracteres)

3 BASO (el primer caracter debe ser una letra)

NUMCT (el primer caracter no puede ser M)

3.- ...raciones aritméticas

Las operaciones aritméticas y los símbolos que se utilizan en FORTRAN son:

		Ejem.	Algebra	FORTRAN
Adición	+		a + b	A + B
Sustracción	-		a - b	A - B
Multiplicación	*		a b	A * B
División	/		$\frac{a}{b}$	A / B
Exponenciación	**		a^2	A * A
			a^2	A** 2

4.- Expresiones aritméticas

En base a lo expuesto anteriormente podemos ahora formular

expresiones aritméticas en lenguaje FØRTRAN y nos daremos cuenta que son muy similares a las expresiones aritméticas del algebra común.

Expresiones FØRTRAN	Expresiones Comunes
A**2-B**2	a^2-b^2
B**2-4.*A*C	b^2-4ac
(A+B)/2.	$\frac{1}{2}(a+b)$
2*K-J+N	2k-j+n
C+B-3.*A	c+b-3a

4.1 Reglas para las expresiones aritméticas

Las reglas a las que debemos sujetar las expresiones aritméticas son necesarias debido a la estructura de las computadoras y al observarlas tendremos un ahorro en el tiempo de ejecución de un programa.

Regla 1 Si nos fijamos en las expresiones FØRTRAN anteriores nos damos cuenta que: Todas las constantes y variables en una expresión deben estar en el mismo modo, esto es, todas deben ser enteras o todas deben ser reales. (Como toda regla existe su excepción que mencionaremos más adelante).

Es necesario consultar los manuales de cada máquina, ya que como hemos mencionado anteriormente dependerá esta regla del tipo de computadora. Por lo pronto la consideraremos como se ha indicado.

Regla 2 A**1, I**J y A**B son exponenciaciones permitidas. En el caso A**1 se mezclan los modos y es la excepción a la Regla 1, pero sabemos que esta exponenciación significa multiplicaciones sucesivas (así B**3=B*B*B), mientras que las potencias no enteras implican cálculos más sofisticados. Nos damos cuenta que I**A, no es forma de exponenciación permitida (en algunas máquinas sí se permite).

Regla 3 Deberá tenerse en cuenta que las operaciones se ejecutarán con las siguientes prioridades:

1) Las operaciones indicadas dentro de los paréntesis más internos se ejecutan en primer lugar.
2) Exponenciación.
3) Multiplicación y división.
4) Adición y sustracción.

Entre las operaciones de igual prioridad, el orden de ejecución es de izquierda a derecha.

Ejem. Si A=5., B=8. y C=2.

A+8-3.*C se calculará en el siguiente orden:

3.*2.=6. 5.+8.=13. 13.-6.=7.

B**2-4.*A*C se calcula en el siguiente orden:

8.**2=64. 4.*5.=20. 20.*2.=40.

64.-40.=24.

Si A=5., B=8., C=2. y D=1.6

Entonces (A+B)/C se calcula en el siguiente orden:

5.+8.=13. 13./2.=6.5

Mientras que A+B/C se calcula en el siguiente orden:

8./2.=4. 5.+4.=9.

Ahora si deseamos calcular (A+C)**2 conducirá a:

5.+2.=7. 7.**2=49.

Mientras que A+C**2 conducirá a.

2.**2=4. 5.+4.=9

Ahora si: (A*B)/(C*D)=40./3.2=12.5

Entonces: A*B/C*D=40./C*D=20.*D=32.

Finalmente si tenemos paréntesis dentro de otros paréntesis se tiene:

(A*(B+C))**2=(A*10.)**2=50.**2=2500.

B+C tiene la más alta prioridad por encontrarse en el paréntesis más interno.

(A*B+C)**2=(40.+2)**2=42.**2=1764.

A*(B+C)**2=A*10.**2=A*100.=500.

A*B+C**2=A*B+4.=40.+4.=44

Debemos tener cuidado en expresar lo que deseamos realizar.

Regla 4 No deberemos colocar un signo de operación antes de un signo más o menos, esto es, no deberemos poner dos signos de operación juntos.

Ejem. A*-B I+-J M-+N A/-B

Estas expresiones deberán sustituirse por:

A*(-B) I+(-J) M-(+N) A/(-B)

4.2 Funciones predefinidas en lenguaje FØRTRAN

Estas funciones predefinidas que proporciona el lenguaje FØRTRAN son de tipo de biblioteca. Para utilizarlas usaremos el nombre de la función seguido de un argumento que deberá estar entre paréntesis. Dichos argumentos pueden ser variables simples ó con subíndices, constantes, expresiones aritméticas u otras funciones predefinidas en FØRTRAN.

Para IBM - 1130 tenemos:

NOMBRE	FUNCION EJECUTADA	NUM. DE ARGUMENTOS	TIPO DE ARGUMENTO(S)	TIPO DE FUNCION
SIN	Seno trigonométrico (argumento en radianes)	1	Real	Real
COS	Coseno trigonométrico (argumento en radianes)	1	Real	Real
ALOG	Logaritmo natural	1	Real	Real
EXP	Argumento de potencia del número e	1	Real	Real
SQRT	Raíz cuadrada	1	Real	Real
ATAN	Arco tangente	1	Real	Real

del número e

ABS	Valor absoluto	1	Real	Real
IABS	Valor absoluto	1	Entero	Entero
FLOAT	Convertir argumento de entero a real	1	Entero	Real
IFIX	Convertir argumento de real a entero	1	Real	Entero
SIGN	Transferencia de signo (Arg.$_1$ recibe signo de Arg.$_2$)	2	Real	Real
ISIGN	Transferencia de signo (Arg.$_1$ recibe signo de Arg.$_2$)	2	Entero	Entero
TANH	Tangente Hiperbólica	1	Real	Real

Ejem. SQRT (B**2-4.*4.*A*C) indica que a lo que se encuentra entre paréntesis se le sacará la raíz cuadrada. SIN (BETA) indica que se obtendrá el seno trigonométrico de el valor de la variable BETA.

5.- Enunciados

Los enunciados son las unidades basicas con las cuales se construyen los programas FØRTRAN. Podemos clasificarlos de acuerdo a su función en grupos como:

1.- Aritméticos de asignación

2.- De control

3.- De entrada y salida

4.- De especificación

5.1 Los enunciados aritméticos de asignación

Se forman con las expresiones presentadas anteriormente y

nes indican los cálculos particulares que deben hacerse. Su for-
ma es:

Variable = Expresión aritmética

El significado del signo = es el de asignación, esto es, que deberá calcularse el valor de la expresión a la derecha del signo = y su valor se asignará a la variable que se encuentre a la izquierda del signo, la cual tiene una localidad en la memoria de la computadora.

Ejem. Si A=5., B=8., C=2. y D=1.6

X=(A+B)/C se le asignará a la X el valor 6.5

ALO=(A+B)**2 se le asignará a ALO el valor 169.

RAI=SQRT(B*C) se le asignará a RAI el valor 4.

Algo diferente al algebra normal es el enunciado A=A+3. el cual no debe alarmarnos ya que indica que a la localidad de memoria con el nombre A se le asignará el nuevo valor A+3. esto es:

Si A=5. y A=A+3. entonces:

A=5.+3. A=8. ;o sea que la variable A se le asigna el valor de 8. y el valor anterior que fué 5. se pierde.

5.2 Los enunciados de control

Debido a que los enunciados de un programa FØRTRAN se ejecutan en el orden que aparecen y que en muchas ocasiones queremos transferir la ejecución a otros enunciados si se satisface una

erta condición, FØRTRAN nos permite numerar dichos enunciados. .n número de enunciado debe ser una constante entero de uno a cinco caracteres.sin el signo más o menos; el número se colcca a la izquierda del enunciado.

Ejem.
```
      3 CONT = CONT+1.
     24 RAIZ = SQRT (A**2+B**2)
```

5.2.1 El enunciado GØ TØ

Este toma la forma GØ TØ N en donde N es un número de enunciado.

El GØ TØ produce un salto incondicional; así GØ TØ 3 envia la ejecución al enunciado número 3 que puede ser la instrucción de conteo del ejemplo anterior. GØ TØ 24 pasa el control al enunciado 24 que puede ser el del ejemplo anterior.

Ejem. Supongamos que unos de los enunciados de un programa son:

```
      I = 1
      ISUM = 0
    1 ISUM = ISUM+I
      I = I+1
      GØ TØ 1
```

Esto nos representa la suma de los números enteros, desde luego es necesario ponerle otros enunciados pero por el momento nos aclara lo indicado.

5.2.2 El enunciado IF

Debido a que las computadoras estan diseñados a base de circultos lógicos y el pensamiento del ser humano debe

ser de este tipo, nos concretaremos al IF lógico, además de que el alumno ya tiene elementos de algunos operadores de relación como OR, AND y NOT.

El IF lógico es de la forma:

IF (L) S

L= expresión lógica que puede tener dos valores: Verdadero o Falso.

S= cualquier enunciado FØRTRAN diferente de: un DØ, un enunciado de especificación o de otro IF lógico.

Si L es falso (.FALSE.) entonces se ignora S y la computación continúa al siguiente enunciado. Si L es verdadero (.TRUE.) el enunciado S se ejecuta en seguida.

Resulta interesante hacer notar que si L es relativamente complicada, éste IF puede ser el equivalente de varios IF aritméticos.

Para formar las expresiones lógicas (L) utilizaremos los operadores de comparación y los de relación.

Operadores de comparación:

Símbolo Matemático	Significado	Símbolo FØRTRAN	Significado Inglés
<	Menor que	.LT.	Less than
>	Mayor que	.GT.	Greater than
≤	Menor o igual	.LE.	Less or equal
≥	Mayor o igual	.GE.	Greater or equal

=	Igual a	.EQ.	Equal
≠	Diferente a ó No igual a	.NE.	Not equal

Operadores de relación:

U	Unión	.OR.	ó ("o inclusive")
∩	Intersección	.AND.	y ("al mismo tiempo")
—	Complemento	.NOT.	no

Para valuar una expresión lógica se hará con las siguientes prioridades:

1.- Expresiones entre paréntesis

2.- Operadores aritméticos

3.- Operadores de comparación (.LT., .GT., .LE., .GE., EQ. y .NE.)

4.- .NOT.

5.- .AND.

6.- .OR.

En caso de igual jerarquía la evaluación será de ezquierda a derecha.

Ejem. (1) X=5. y=0.5

IF (X.GT.3..AND. Y .LE.2.) Z=X**3+X*Y

Significa que si X>3. y (al mismo tiempo) y≤2. se asignará a Z el valor que se obtenga al calcular X^3+XY, esto es Z=125.+2.5=127.5

(2) IF (A.LE.X.AND.B.GE. Y .OR.C.GT.Z) GØ TØ 12

Significa que si A≤X y (al mismo tiempo) B≥Y es

verdadero ó C>Z es verdadero ó ambos, entonces se transfiere el control al enunciado 12.

```
(3)     I = 1
        ISUM = 0                        Esto nos indica
      1 ISUM = ISUM+I                   que sólo sumare-
        I = I+1                         mos los números
        IF (I.LE.100) GØ TØ 1           enteros del 1 al 100
        STOP
```

5.2.3 El enunciado DØ

Este toma la forma:

DØ K I = L, M, N

DØ K I = L, M

La segunda forma sólo se aplica cuando N=1, lo que es bastante frecuente.

K representa un número de enunciado

I representa una variable entera

L, M, N son variables enteras ó constantes sin signo.

El DØ produce la ejecución repetida de todos los enunciados que le siguen, hasta el enunciado número K. La primera vez que se ejecutan estos enunciados la variable I es igual a L, en cada paso subsiguiente I se incrementa en la cantidad N, hasta hacerse mayor ó igual a M en el paso final; en este momento se termina el llamado

lazo DØ y el control pasa al enunciado que está a continuación del enunciado K. Así, L es el valor inicial de la variable I y M su valor final. I se llama el índice del enunciado DØ y su valor corriente se puede usar en cálculos durante la ejecución del lazo. Todos los enunciados que le siguen al DØ hasta el número K inclusive constituyan el rango del DØ. También es posible que la variable I no se encuentre en ninguno de los enunciados del rango del DØ y esto nos indica que se realice la ejecución de todos los enunciados del rango del DØ M entre N veces (la parte entera de este cociente M/N). Debemos tomar en cuenta que: el índice I se incrementa secuencial y automáticamente durante la ejecución del lazo y que se puede, en estos momentos, tratar como cualquier variable entera; el índice I queda indefinido después de terminado el lazo del DØ y puede utilizarse para cualquier uso general. El enunciado K no debe ser un enunciado de especificación ni una transferencia de control esto incluye cosas como GØ TØ, IF y DØ, así como FORMAT, END y algunos otros. Debemos considerar que no se puede desde ningún punto del programa llegar a un enunciado dentro del rango de un DØ. Y que la entrada a un DØ deberá hacerse a través del enunciado DØ. Y por último es muy frecuente que un DØ esté completamente dentro de otro.

Ilustrando gráficamente tenemos:

Correcto		Incorrecto	
DØ	DØ	DØ	DØ
DØ	DØ	DØ	DØ
DØ			DØ

Ejem. Utilizaremos un DØ para sumar los números enteros del 1 al 100, ejemplo que ya hemos visto anteriormente.

```
      ISUM = 0
      DØ 1 I = 1,100
    1 ISUM = ISUM+1
      STOP
```

Nos damos cuenta que el DØ tiene la misma función que un IF, un GØ TØ y un contador; como podrá observarse con el ejemplo anterior.

3.2.4 El enunciado STØP

Este aparece simplemente como STØP y es el que nos indica que ha terminado la ejecución y en el caso de IBM - 1130 la computadora se detiene y el operador tendrá que hacer que continúe trabajando. Debido a ello se recomienda que se utilice el enunciado CALL EXIT, el cual pasa el control a un programa monitor que hace que la computadora continúe ejecutando los otros programas que siguen a continuación.

Tanto el STØP como el CALL EXIT podrán aparecer después de cualquier enunciado.

5.3 Los enunciados de entrada y salida

Estos, como su nombre lo indica, sirven para introducir y sacar información de la computadora.

5.3.1 El enunciado READ

Este enunciado tiene la forma READ (I, N) LISTA I y N son enteros sin signo y LISTA representa una lista de nombres de variables para las cuales se leerán valores. I designa el tipo de periférico de entrada que se utilice (lectora de tarjetas, consola, etc.). N es el número de un enunciado FØRMAT asociado al READ.

Ejem. El enunciado READ (2, 101) J, B, H

Producirá la lectura de tres números: un entero y dos reales y se almacenarán en las localidades de la memoria de la computadora designadas con las variables J, B y H en su orden. Las comas que separan éstos nombres de variables en el READ son indispensables, 2 es la unidad de entrada y 101 un FØRMAT.

5.3.2 El enunciado WRITE

Este tiene la forma WRITE (I, N) LISTA I y N son enteros sin signo y LISTA representa una lista de variables para las cuales se imprimen valores. I designa el tipo de periférico de salida que se utilice (impresora, cinta, etc.). N es el número de un enunciado FØRMAT aso-

ciado al WRITE.

Ejem. El enunciado WRITE (3, 108) L, X, Y

Producirá que se impriman los valores de las variables L, X y Y que se encuentren en las localidades de memoria con esos nombres, en el formato especificado por el enunciado número 108 y por la unidad de salida número 3; las comas que separan éstos nombres de variables en el WRITE son indispensables.

2.4 Los enunciados de especificación

Este tipo de enunciados no inician por si mismos los cálculos, no producen transferencia de control ni estimulan el flujo de información, pero proveen al compilador FØRTRAN de los detalles esenciales para la traducción del programa fuente en FØRTRAN al programa objeto en lenguaje de máquina ó para la conversión de datos a la entrada o la salida.

Si queremos introducir datos a la computadora lo podemos hacer mediante un enunciado que esté dentro del programa, como A = 3.1416, ésto es lo que podíamos llamar inicializar una variable; y el programa se compilaría cada vez que quisiéramos darle un valor diferente a A, lo cual resulta muy costoso, ya que las compilaciones son laboriosas. Para evitar esto se usa el enunciado READ y los valores que se le den a A podrán estar en tarjetas de datos, los cuales son independientes del progra-

ma fuente.

5.4.. El enunciado FØRMAT

Este tiene la forma: N FØRMAT (, , , ...) en la cual N es el número del enunciado FØRMAT y corresponde al N de los enunciados READ y WRITE. Los espacios entre las comas están disponibles para las especificaciones del tipo que se describen más adelante, siendo el número de espacios uno o más, de acuerdo a las necesidades el programador.

5.4.1.1 La especificación I:Iw

Aquí I indica un valor entero y W es un entero que indica el número de columnas o ancho de campo, que ocupa ese valor en la tarjeta de entrada o en el papel de impresión. El número w deberá incluír un lugar para el signo de ese valor, siendo + opcional.

Ejem.

Valor de los datos de entrada o salida:	1130	+1620	-370	0	14
Especificación:	I4	I5	I4	I1	I3

5.4.1.2 La especificación F:Fw.d

Aquí F indica un valor real, w indica el número de columnas que ocupará el valor en la tarjeta de entrada o en el papel de impresión; d indica el número de cifras que se encontrarán des-

pués del punto decimal. w deberá incluir un lugar para el signo y otro para el punto decimal.

Ejem. Valor de los datos de

entrada ó salida: 32.787 -.007 1130. +3.70

Especificación: F6.3 F5.3 F5.0 F5.2

5.4.1.3 La especificación E:Ew.d

Aquí E indica un valor real en forma exponencial y w indica la anchura de campo para ese valor y debe de incluir el signo, si lo hay, el punto decimal, el lugar para la letra E, un lugar para el signo del exponente, si es negativo, y dos lugares para el exponente; d indica el número de dígitos a la derecha del punto decimal.

Ejem Valor de los datos

de entrada o salida: .1403E04 -.7E-02 .1442E+04

Especificación: E8.4 E7.1 E9.4

Es conveniente que cuando deseemos sacar información de la computadora, tomemos en cuenta para el ancho del campo lo siguiente:

1.- El signo, aún cuando el + generalmente no se imprime.

2.- El punto decimal para las especificaciones F y E.

3.- Por lo menos un dígito a la izquierda

del punto decimal, puesto que muchas máquinas imprimirán allí un cero si otro dígito no ocurre.

4.- Suficientes lugares para todos los dígitos significativos deseados, debido a que para los dígitos que no se les deja espacio se truncan o redondean.

5.- Cuatro lugares para el exponente de la especificación E.

6.- El primer lugar se deja en blanco para el control de carro.

5.4.2 El enunciado END

Este se lee simplemente END e informa al compilador que el programa fuente ha terminado y debe ser el último enunciado de cualquier programa FØRTRAN.

6.- Arreglos

Frecuentemente tratamos con un grupo de variables que forman ó pertenecen a una clase ó colección. Cuando las variables forman un conjunto ordenado, pueden relacionarse unas con otras por la notación de subíndices; entonces desígnamos esa colección como arreglo y las variables que pertenecen a ésta serie son los elementos del arreglo. A veces se emplea como sinónimo de

arreglo el nombre de matríz y, en consecuencia, hablamos de elementos de la matríz.

6.1 Variables con subíndices

Un conjunto de números que pueda arreglarse en un renglón ó columna se considera como un arreglo lineal ó unidimensional. y ésta serie puede llamarse vector. Identificamos los elementos de un vector renglón ó columna por un sólo subíndice.

Ejem. La columna de números del vector llamado A, consiste de los elementos A, hasta An inclusive y se representa como sigue:

Notación asoctumbrada.	Notación FORTRAN
A1	A (1)
A2	A (2)
A3	A (3)
⋮	⋮
Ai	A (I)
⋮	⋮
An	A (N)

Cada una de estas A(I), en donde I varía de 1 a N, son el nombre de una variable, el conjunto de todas ellas es lo que llamamos arreglo.

Si se usan dos subíndices para identificar los elementos de un arreglo se considera éste como un arreglo bidimensional. Los cuadros de un tablero de ajedrez, pueden considerarse como un arreglo bidiminsional. Y si llamamos a cualquiera de los cua-

dros con la variable CTAJ tendremos 64 variables; pero como el tablero tiene 8 renglones y 8 columnas, podemos referirnos al cuadro que se encuentra en el renglón 3 y la columna 5 con la variable CTAJ·(3,5).

Dependiendo del tipo de computadora será el número de subíndices que podremos asignarle a un arreglo; en IBM - 1130 sólo se admiten arreglos con un máximo de tres subíndices.

Las variables que se utilicen para designar arreglos deberán observar las reglas que se dieron anteriormente al hablar de variables enteras y reales considerando que para los cinco caracteres alfanuméricos son independientes de los índices que se encuentran entre paréntesis.

6.1.1 Reglas para los subíndices.

Regla 1 Un subíndice debe ser un entero, puede ser constante, variable ó una de las expresiones aritméticas siguientes:

A * V + b A * V - b

en donde v es una variable entera y a y b son constantes enteras sin signo.

Ejem. Algunos subíndices pueden ser:

1 1972 10*KONT 2*I J

1976*N-8 2*I-4 2*I+3

No se pueden usar como subíndice:

1+I -I 2-10*CONT -1932 -KILO

Regla 2 Un subíndice sólo debe tomar valores positivos.

Regla 3 Un subíndice en sí no debe ser una variable con subíndices. Así X(I(2)) no es permitido.

Regla 4 Un símbolo que representa un arreglo, una variable con subíndice, no debe usarse sin subíndices para representar otra variable diferente en el mismo programa. Esto es A(I) y A no deben referirse a variables diferentes. Como siempre hay una excepción que por ahora no tocaremos.

Ejem. Los símbolos para variables reales con subíndices podrían incluir:

X(I) SUM(K+2) A(I, 2*J+1) B(INT) C(I,J

Para variables enteras con subíndices podemos tener:

INT(M,N) I(J) ICTA(J,2*I)

6.2 El enunciado DIMENSIØN

Siempre que en un programa utilicemos variables con subíndices deberemos poner como primer enunciado el DIMENSIØN, el cual indica al compilador qué tanto espacio de memoria se debe reservar para las variables con subíndices. Su forma es:

DIMENSIØN u, v, w, ...

Donde u, v, w, ... son nombres de variables, cada una de las cuales va seguida por el máximo número de elementos en el

arreglo correspondiente. Deberán observarse las siguientes reglas:

Regla 1 Cada variable con subíndices se debe mencionar en un enunciado DIMENSIØN antes de su primer uso en el programa.

Regla 2 Los símbolos representados anteriormente por u, v, w, ... deben tener la forma:

nombre de variable (máximo número de elementos)

el número entre paréntesis debe ser una constante entera sin signo.

Ejem. DIMENSION A(20), B(4,8), CARR(5,3,4)

Esto indica que el compilador reservará 20 localidades para el arreglo A, sus veinte variables serán A(1), A(2), ..., A(20) al mismo tiempo se reservarán 32 (4x8) localidades para las variables B(1,1), B(1,2), B(1,3), ..., B(1,8), B(2,1), B(2,2), ..., B(2,8), B(3,1), B(3,2), ..., B(3,8), B(4,1), B(4,2) ..., B(4,8) y por último se reservarán 60 (5x3x4) localidades para las variables del arreglo CAR, con tres subíndices cada una.

Regla 3 El arreglo que se use en particular, dentro del programa podrá tener menos elementos que los especificados en la magnitud del enunciado DIMENSION, pero no más.

Regla 4 La variable tal como aparece en el enunciado DIMENSION debe tener exactamente el mismo número de subíndices que en cualquier otra parte del programa.

7 - SUBPROGRAMAS.

Los subprogramas, también llamados subrutinas, son programas que pueden ser puestos en uso por otros programas cuando sea necesario.

Las funciones de biblioteca ó funciones del sistema constituyen una variedad de subprogramas.

7.1- FUNCIONES

Cuando el valor de una variable depende de una ó más variables ó constantes y además de una serie de cálculos, y dicha variable ha de calcularse repetidamente y en diferentes puntos de un programa, es posible definirla como una Función. En otras palabras, Además de las funciones con que cuenta la biblioteca del sistema, el usuario puede escribir sus propias funciones para uso específico de su programa.

Tomemos un ejemplo para visualizar lo anterior:

Supongamos que para un programa en especial, en el cual trabajamos con grados en lugar de radianes, deseamos calcular continuamente SENØ (X), sin el uso de funciones sería necesario transformar el argumento deseado de grados a radianes y después llamar a la función del sistema SIN (X). A continuación presentamos una función que calculará SENO (X), (X en grados) .

```
FUNCTION SENØ  ( X )
 X = X * 3,14 15 92/180.
 SENØ = SIN (X)
 RETURN
 END
```

que es llamada desde el programa como:

```
GRAD= SENØ (CRADØS)
```

En base a éste ejemplo podemos generalizar el uso de la proposición FUNCTION .

a) Debe ser codificada en forma independiente del programa que la usará, es decir, no debe aparecer "dentro" del programa.

b) Debe empezar con la palabra FUNCTIØN

FUNCTION nombre (parámetro)

c) A continuación se escribe el nombre con que será llamada.

d) Después, entre paréntesis y separados por comas, aparecen los argumentos.

7.1.1 EJEMPLOS.-

```
      FUNCTION RAIZ 1 (A,B,C )
      RAIZ1= (-B + SQRT (B **2 - 4. * A * C )) / ( 2.* A )
      RETURN
      END
      FUNCTIØN  RAIZ2 ( A, B, C )
      RAIZ2 = ( -B - SQRT (B**2.4.* A * C )) / (2.* A )
      RETURN
      END
```

```
C     EC. SEGUNDØ GRADØ
      READ ( 2,100) A, B, C
100   FORMAT ( 3F10.5)
      X1 = RAIZ1 (A,B,C)
      X2 = RAIZ2 (A,B,C)
      WRITE (3,200) A,B,C, X1,X2
200   FORMAT ( 5 ( ,F10,5')
      CALL EXIT
      END
```

Este ejemplo es solamente para mostrar el uso de la proposición FUNCTIØN y no contempla algunas situaciones como raíces complejas,

7.2. SUBRUTINAS

Como es fácil notar, la proposición FUNCTIØN nos "regresa" un sólo valor y lo hace a través de su nombre. En muchos casos es conveniente ó necesario que se nos regrese más de un valor, para éstos casos usamos la proposición o enunciado:

SUBRØUTINE.

Una subrutina es un subprograma que puede "recibir" cualquier número de parámetros (desde cero hasta un número determinado por el tipo de compilador) y puede "regresar" diferentes valores calculados.

Veamos algunos ejemplos:

Supongamos que al imprimir resultados de un cierto programa tenemos que escribir algún título usando los primeros renglones de la hoja. En tal caso podemos hacer uso de una subrutina como sigue:

```
      SUBRØUTINE  ENCA
      WRITE (3,200)
200   FØRMAT-(/,1X,- 'REPORTE SEMANAL' , / ,
      RETURN
      END
```

Como vemos no hemos pasado ningún parámetro ó valor a la subrutina. Para que se ejecute ésta se debe hacer uso de la proposición CALL, de la siguiente forma:

```
CALL ENCA
```

dentro del programa y en el lugar donde deseemos que ocurra la impresión.

Discutamos ahora un ejemplo muy simple para ejemplificar el uso de parámetros. Hagamos una subrutina que "reciba" como entrada dos números, los sume y el resultado lo "regrese" en otra variable. Sean A y B los numeros a sumar, y C la variable en donde se pondrá el resultado.

```
      SUBROUTINE  SUMA  (A,B,C )
         C = A + B
         RETURN
      END
```

Es importante detenerse a ver el significado de los parámetros para las subrutinas:

La subrutina anterior SUMA puede ser llamada de diversas formas:

```
CALL  SUMA (AA,BB,CC)
CALL  SUMA (4, 7, X )
etc.
```

Como vemos, las variables A,B y C que aparecen en la subrutina son variables

mudas o dormidas y solo tienen sentido dentro de la subrutina. Veamos lo - anterior:

Supóngase el siguiente programa.

```
      X1= 3.
      X2= 4.
      CALL  SUMA ( X1,X2,X3)
      SUM= X3
      WRITE (3,200) X1,X2,X3, SUM
200   FORMAT(4 F10.5)
      CALL EXIT
      END
```

Se propone como ejercicio al lector que haga las veces de la máquina y escriba lo que ésta imprimiría.

La máquina imprimirá .

3.0 4.0 7.0 7.0

Una de las facilidades más utiles en subrutinas es la de pasar arreglos como parámetros, ej:

```
      SUBROUTINE MAXIM  (A, MAX )
      DIMENSION         A ( 10)
      - - - - -
      - - - - -
      - - - - -
      - - - - -
      - - - - -
      RETURN
    END
```

Supóngase que ésta subrutina encuentra el elemento del arreglo A (10) con mayor valor y lo regresa a través de la variable MAX. Es importante notar que si pasamos como parámetro uno ó más arreglos hay que dimensionarlos otra vez dentro de la subrutina, lo cual se puede hacer de al menos dos formas: 1) poniendo la dimensión que aparece en el programa que lo llama;

2) Poniéndole dimensión 1 (uno)

Ejemplo:

```
      DIMENSION  A (10) ,  B  (20).
      CALL ØRDEN    (A)
      CALL MAXIM    (B)
      CALL MAXIM    (A)
      CALL EXIT
      END
```

Caso 1:

```
      SUBRØUTINE ØRDEN  (X)
      DIMENSION         X (10)
      RETURN
      END
```

Caso 2:

```
      SUBRØUTINE MAXIM  (Y)
      DIMENSION     Y     (1)
      RETURN
      END
```

7.2.1 COMMON.

Como es posible visualizar en los párrafos anteriores, las variables usadas en las subrutinas, o mejor dicho, dentro de las subrutinas, son totalmente independientes a las variables usadas en el programa principal. Muchas veces es conveniente que tanto las subrutinas como el programa que las llama tengan variables en COMUN. Para lograr-ésto-existe la declaración

COMMON

La forma general de ésta proposición es:

COMMON lista de variables

donde "lista de variables" es un conjunto de variables y/o arreglos separado por comas a las cuales queremos adjudicarles la propiedad anterior, es decir, sean comunes a varios subprogramas.

Ej.

```
COMMON    A,B,  X (10), AB (30)
```

Esta declaración debe aparecer al principio de cualquier programa o subrutina en que se desee usar. Veamos un ejemplo:

```
C     SUMA DE DOS NUMEROS
      COMMON  A, B, C
      A= 3
      B= 7
      CALL SUMA
      Z = C
      WRITE (3,200) A, B, C, Z
200   FORMAT( 4 F10.5 )
      CALL EXIT
      END
```

```
SUBROUTINE SUMA
COMMON A, B, C
C = A + B
RETURN
END
```

Este programa debe imprimir :

3.0 7.0 10.0 10.0

Una propiedad importante del COMMON es que si un arreglo es especificado en COMMON que dá automáticamente dimensionado, es decir, no hay que especifi - car dicho arreglo a través de la declaración DIMENSION .

En las siguientes páginas se muestran veintiún programas, que incluyen sus - diagramas de flujo, codificaciones, datos y resultados; el objeto es que el - lector pueda complementar la parte teórica con la práctica, amén de que debe rá hacer los propios y procesarlos en una computadora a su alcance.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- J.K. Hughes : Programación del Sistema IBM-1130
Limusa-Wiley-1969

2.- D.D. McCracken :Fortran IV
Limusa-Wiley-1964

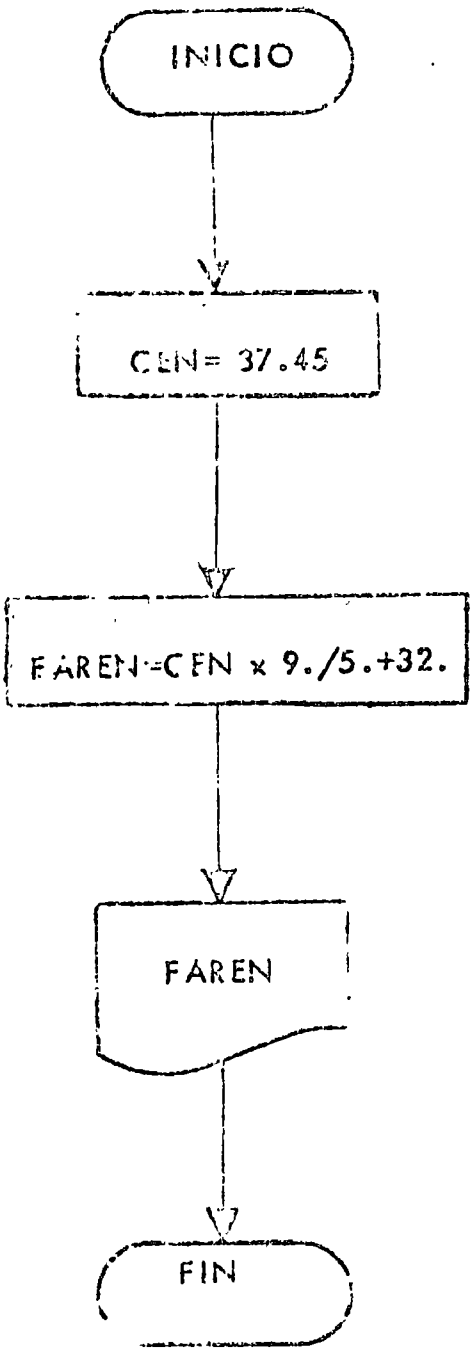
3.- E.I. Organick :Fortran IV
Fondo Educativo Interamericano, S. A.
1966

4 - Francis Scheid :Introducción a la Ciencia de
las Computadoras.
Serie de Compendios Schaum.
McGraw-Hill-1970

5.- w.Schick y Ch. J. Merz, Jr. :Fortran para Ingeniería.
McGraw-Hill - 1972

6.- R.E. Smith y D.E. Johnson :Fortran, Texto Programado.
Limusa Wiley - 1971

"CONVERSION DE GRADOS CENTIGRADOS A GRADOS FARENHEIT"

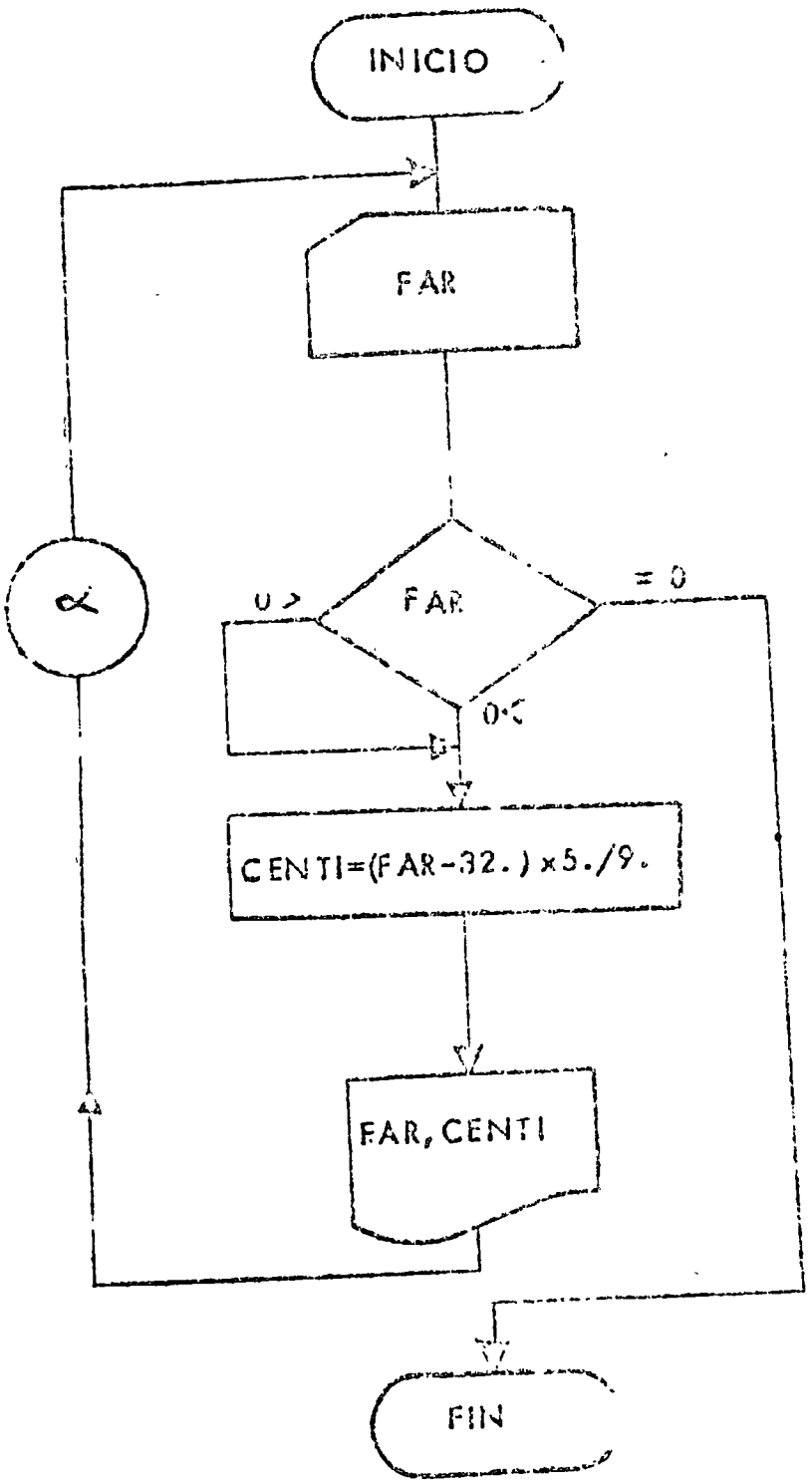


```
// JOB T
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1.32 PRINTER)
C-----U N O-----
C       CONVERSION DE GRADOS CENTIGRADOS A
C       GRADOS FARENHEIT
  100 FORMAT(F10.4)
      IMP=3
      CEN=37.45
      FAREN=CEN*9./5.+32.
      WRITE(IMP,100)FAREN
      CALL EXIT
      END
// XEQ
/*
```

R E S U L T A D O S

~~99.4000~~

"CONVERSION DE GRADOS FARENHEIT A GRADOS CENTIGRADOS"

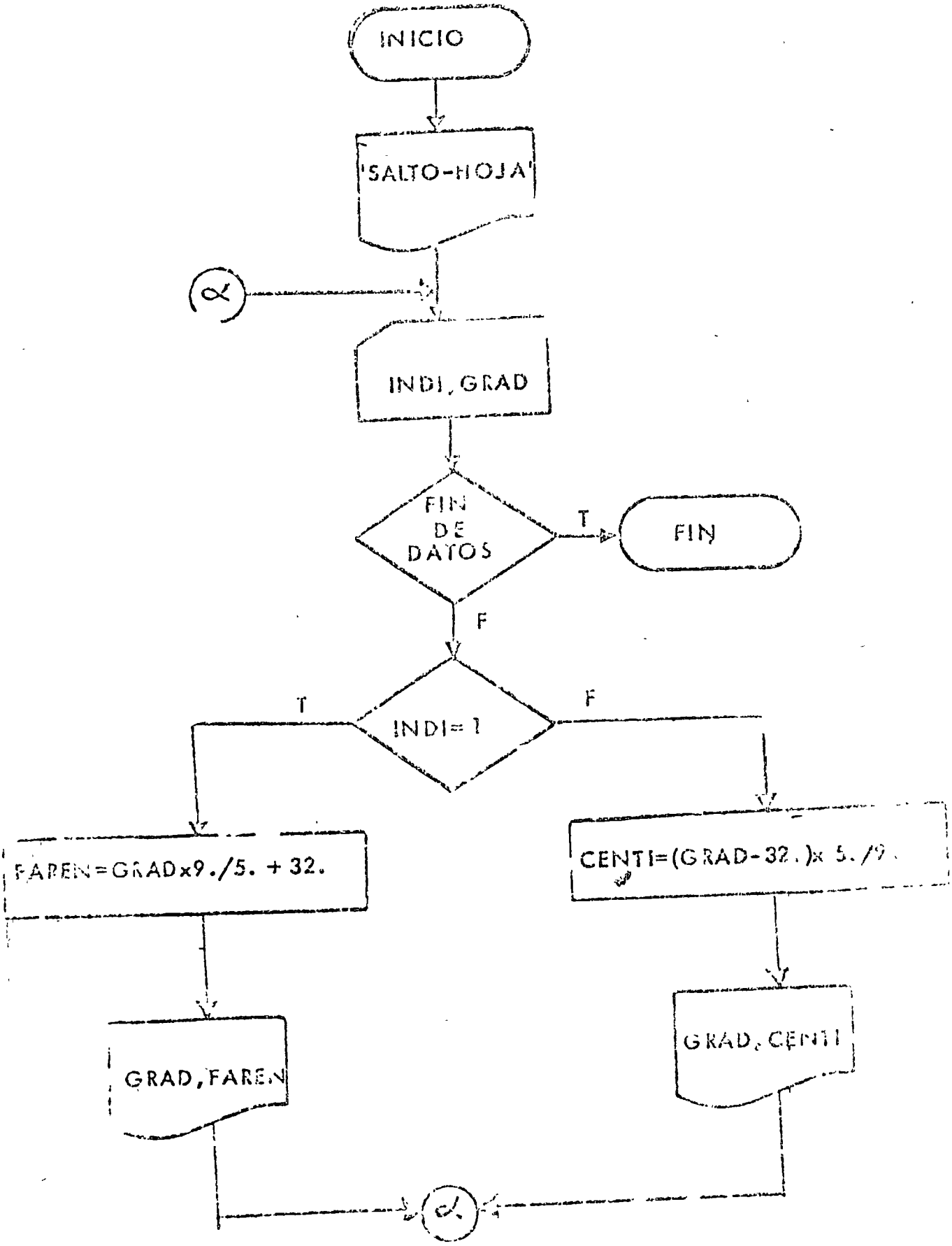


```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C--------------O O S----------
C      CONVERSION DE GRADOS FARENHEIT A
C                    GRADOS CENTIGRADOS
  100 FORMAT(F10.4)
  101 FORMAT(F10.4,22H GRADOS FARENHEIT SON ,F10.4,20H GRADOS CENTIGRADO
     1S.)
      LIE=2
      IMP=3
  200 READ(LIE,100)FAR
C     FAR TOTAL CERO INDICA TERMINO DE DATOS.
      IF(FAR)210,220,210
  210   CENTI=(FAR-32.)*5./9.
        WRITE(IMP,101)FAR,CENTI
        GO TO 200
  220 CALL EXIT
      END
// XEQ
  1260000
12.
  .14.
   18.26
0.0
/*
```

RESULTADOS

```
 26.0000 GRADOS FARENHEIT SON     52.2222 GRADOS CENTIGRADOS.
126.0000 GRADOS FARENHEIT SON     52.2222 GRADOS CENTIGRADOS.
-13.0000 GRADOS FARENHEIT SON    -25.5556 GRADOS CENTIGRADOS.
 18.2000 GRADOS FARENHEIT SON     -7.6333 GRADOS CENTIGRADOS
```

"CONVERSION ENTRE GRADOS FARENHEIT Y GRADOS CENTIGRADOS"

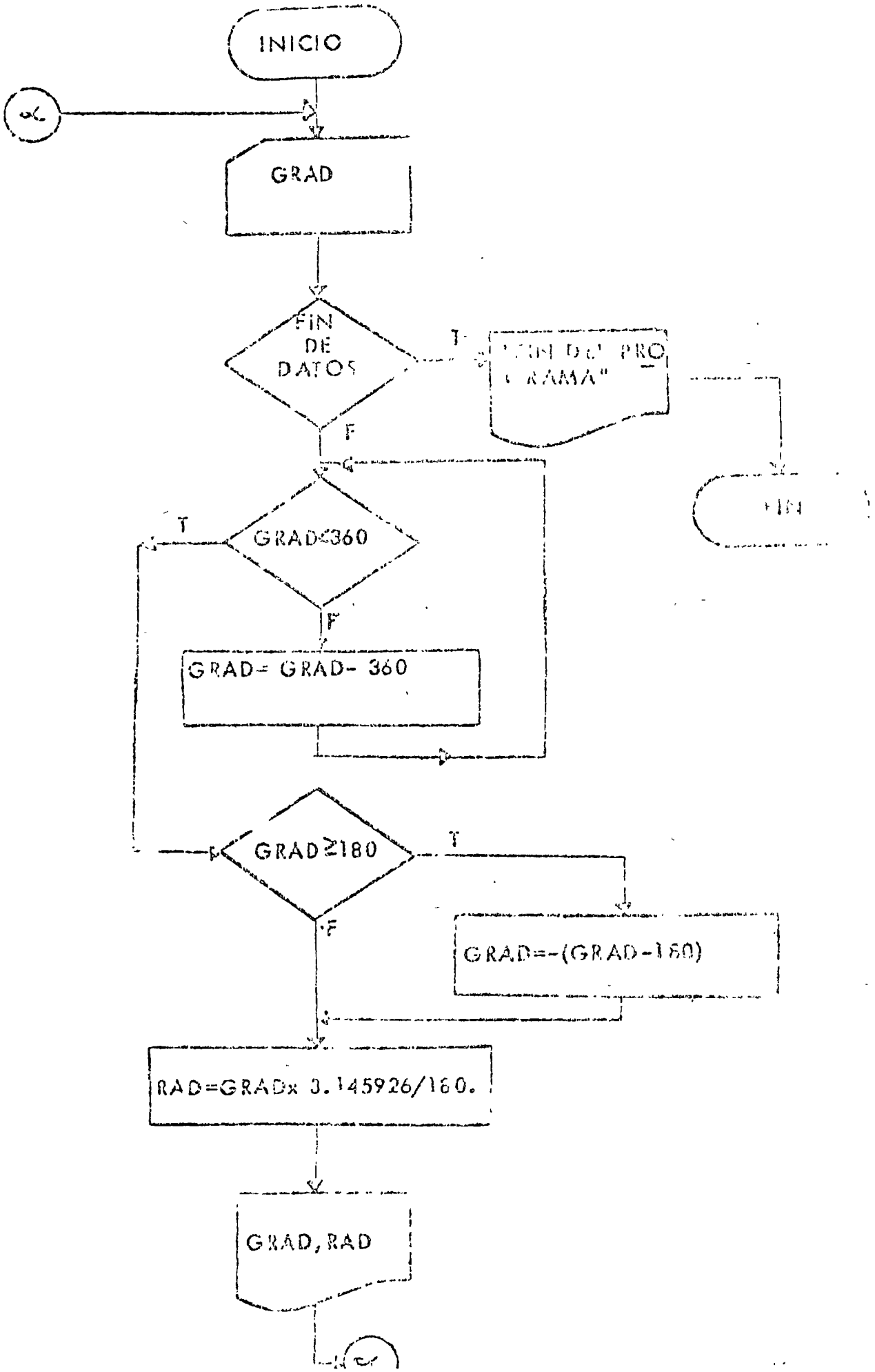


```
// JOB 1
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD, 132 PRINTER)
C********** P R E S **********
C      CONVERSION ENTRE GRADOS FARENHEIT
C                 Y GRADOS CENTIGRADOS
  100 FORMAT(1H1)
  101 FORMAT(I1,F10.3)
  102 FORMAT(F10.2,15H FARENHEIT SON ,F11.3,13H CENTIGRADOS.)
  103 FORMAT(F10.2,17H CENTIGRADOS SON ,F9.3,11H FARENHEIT.)
      LEE=2
      IMP=3
      WRITE(IMP,100)
  200 READ(LEE,101,END=220)INDI,GRAD
      IF(INDI.EQ.1)GO TO 210
C     INDI DIFERENTE DE 1 DATO EN GRADOS FARENHEIT.
C     SE CONVIERTE A CENTIGRADOS.
        CENTI=(GRAD-32.)*5./9.
        WRITE(IMP,102)GRAD,CENTI
        GO TO 200
  210 CONTINUE
C       EL DATO ES EN GRADO CENTIGRADO.
C       SE CONVIERTE A FARENHEIT.
        FAREN=GRAD*9./5.+32.
        WRITE(IMP,103)GRAD,FAREN
        GO TO 200
  220 CALL EXIT
      END
// XEQ
1      12000
0     11.48
1   0.
2     32.00
1   -16.
1       18.
/*
```

RESULTADOS

```
   12.00 CENTIGRADOS SON      53.600 FARENHEIT.
   11.48 FARENHEIT SON       -11.400 CENTIGRADOS.
    0.00 CENTIGRADOS SON      32.000 FARENHEIT.
   32.00 FARENHEIT SON         0.000 CENTIGRADOS.
  -16.00 CENTIGRADOS SON       3.200 FARENHEIT.
   18.00 CENTIGRADOS SON      64.400 FARENHEIT.
```

"CONVERSION DE GRADOS A RADIANES"

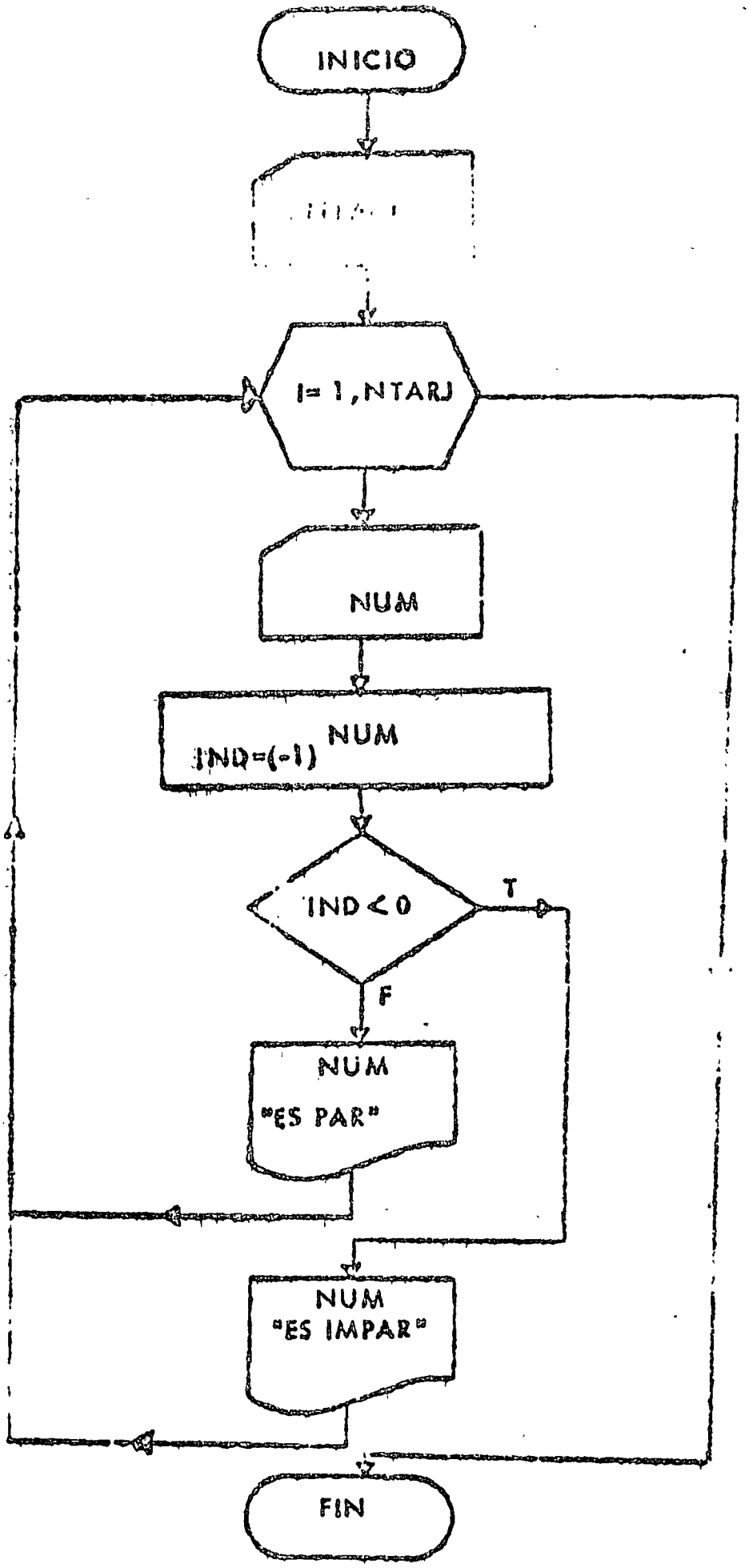


```
// JOB T
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C---------- C A P T R O ----------
C       CONVERSION DE GRADOS A RADIANES
  101 FORMAT(F8.3)
  102 FORMAT(F9.3,12H GRADOS SON ,F6.3,10H RADIANES.)
  103 FORMAT(///,16X,16HFIN DEL PROGRAMA)
      LEE=2
      IMP=3
  200 READ(LEE,101,END=230)GRAD
  210 IF(GRAD.LT.360)GO TO 220
C         EL DATO ES IGUAL O SOBREPASA LOS 360 GRADOS(SE AJUSTA..
        GRAD=GRAD-360.
        GO TO 210
  220 CONTINUE
C       SE TRABAJA ENTRE +180 Y -180 GRADOS.
      IF(GRAD.GT.180.)GRAD=-(GRAD-180.)
      RAD=GRAD*3.14159265/180.
      WRITE(IMP,102)GRAD,RAD
      GO TO 200
  230 WRITE(IMP,103)
      CALL EXIT
      END
// XEQ
   90000
-90.
  3600.
  -380.
  0.0
 185.27
 132.4
-79.9
/*
```

R E S U L T A D O S

```
   90.000 GRADOS SON  1.571 RADIANES.
  -90.000 GRADOS SON -1.571 RADIANES.
    0.000 GRADOS SON  0.000 RADIANES.
 -380.000 GRADOS SON -6.632 RADIANES.
    0.000 GRADOS SON  0.000 RADIANES.
   -5.270 GRADOS SON -0.092 RADIANES.
  132.400 GRADOS SON  2.311 RADIANES.
  -79.900 GRADOS SON -1.395 RADIANES.

          FIN DEL PROGRAMA
```

"DETERMINACION DE NUMEROS PARES E IMPARES"

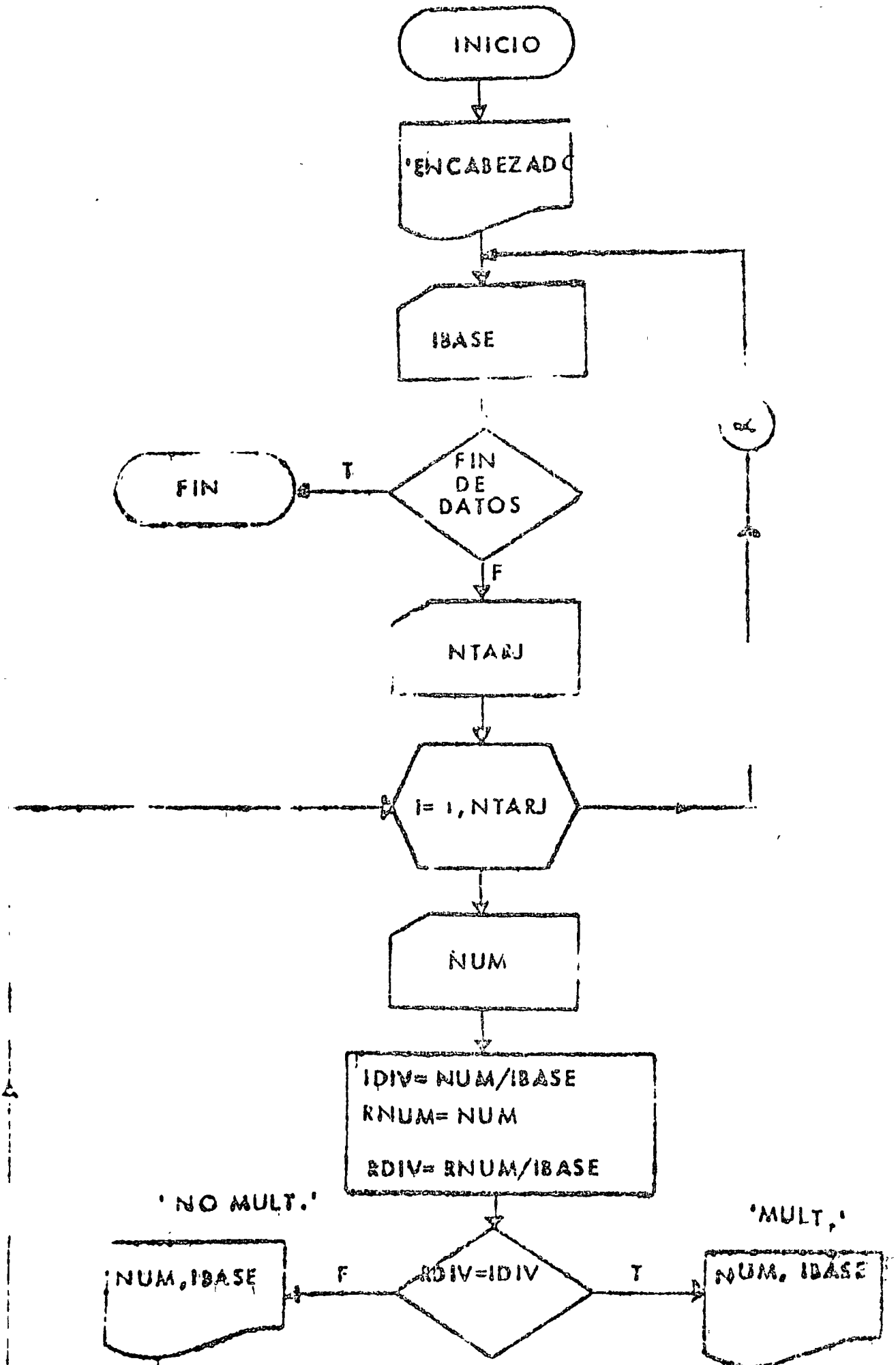


```
// JOB
// FOR
*LIST SOUR E PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-------------C I N C O--------
C       DETERMINACION DE NUMEROS PARES
C       E IMPARES
  100 FORMAT(I3)
  101 FORMAT(I4,8H ES PAR.)
  102 FORMAT(I4,10H ES IMPAR.)
      LEE=2
      IMP=3
      READ(LEE,100)NTARJ
C     NTARJ INDICA NO. DE TARJETAS CON DATOS.
      DO 202 I=1,NTARJ
        READ(LEE,100)NUM
        IND=(-1)**NUM
        IF(IND.LT.0)GO TO 200
C         EL NUMERO ES PAR
          WRITE(IMP,101)NUM
          GO TO 201
  200   CONTINUE
C         EL NUMERO ES IMPAR.
          WRITE(IMP,102)NUM
   201  CONTINUE
  202 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
// XEQ
005
 17
  1
 14
291
  8
/*
```

RESULTADOS

```
 17 ES IMPAR.
  1 ES IMPAR.
 14 ES PAR.
291 ES IMPAR.
  8 ES PAR.
```

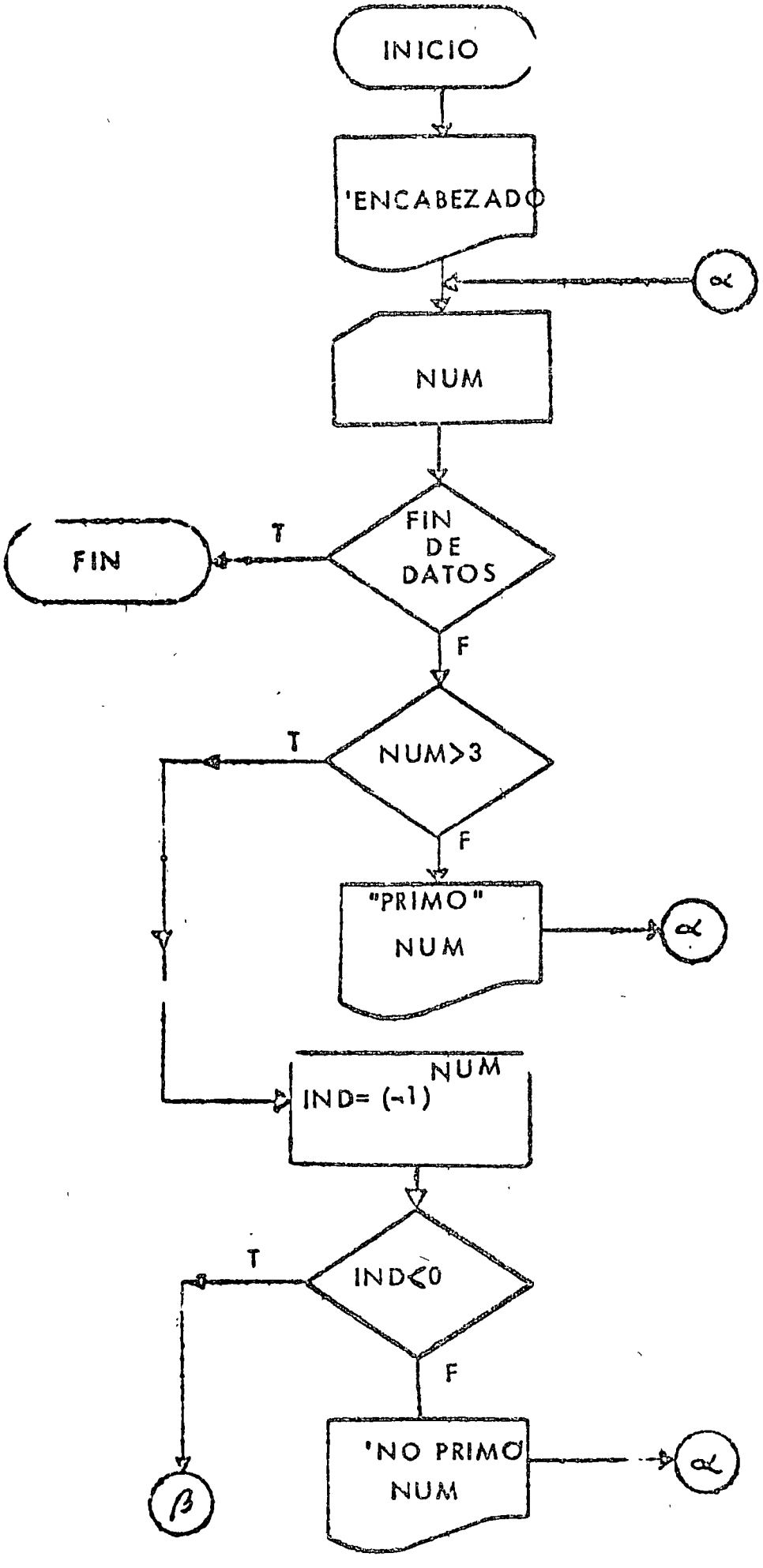
DETERMINACION DE MULTIPLOS DE UN NUMERO



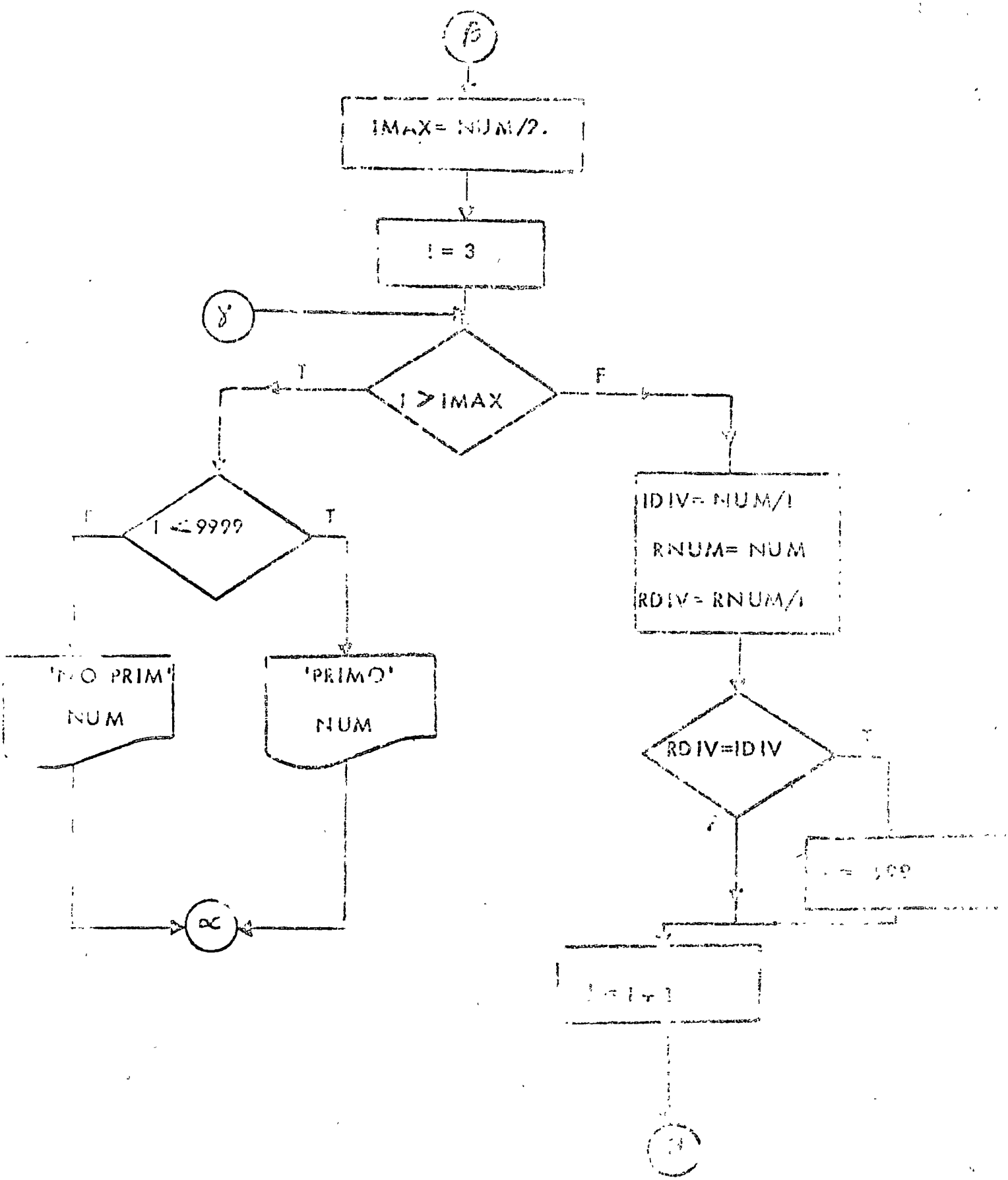
```
 / JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-----------------------------------
C       DETERMINACION DE MULTIPLOS
C       DE UN NUMERO
  100 FORMAT(I3)
  101 FORMAT(34H1NUMERO-MULTIPLO DE-NO MULTIPLO DE)
  102 FORMAT(2X,I3,7X,I3)
  103 FORMAT(2X,I3,21X,I3)
      LEE=2
      IMP=3
      WRITE(IMP,101)
  200 READ(LEE,100,END=240)IBASE
      READ(LEE,100)NTARJ
      DO 230 I=1,NTARJ
        READ(LEE,100)NUM
        IDIV=NUM/IBASE
        IF(NUM.LT.0)NUM=-NUM
        RDIV=RNUM/IBASE
        IF(RDIV.EQ.IDIV)GO TO 210
          NUM NO ES MULTIPLO DE IBASE.
          WRITE(IMP,102)NUM,IBASE
          GO TO 220
  210   CONTINUE
C         NUM SI ES MULTIPLO DE IBASE.
          WRITE(IMP,102)NUM,IBASE
  220   CONTINUE
  230
 
  240 CALL EXIT
      END
// XEQ
002
005
 17
001
 14
291
 8
003
00
 
 11
105
 01
 09
```

R E S U L T A D O S :

NUMERO	MULTIPLO DE	NO MULTIPLO DE
17		2
1		2
14	2	
291		2
8	2	
6	3	
11		3
9		5


INICIO
'ENCABEZADO
α
NUM
FIN DE DATOS
T
FIN
F
NUM>3
T
F
"PRIMO"
NUM
α
NUM
IND= (-1)
IND<0
T
F
'NO PRIMO
NUM
α
β

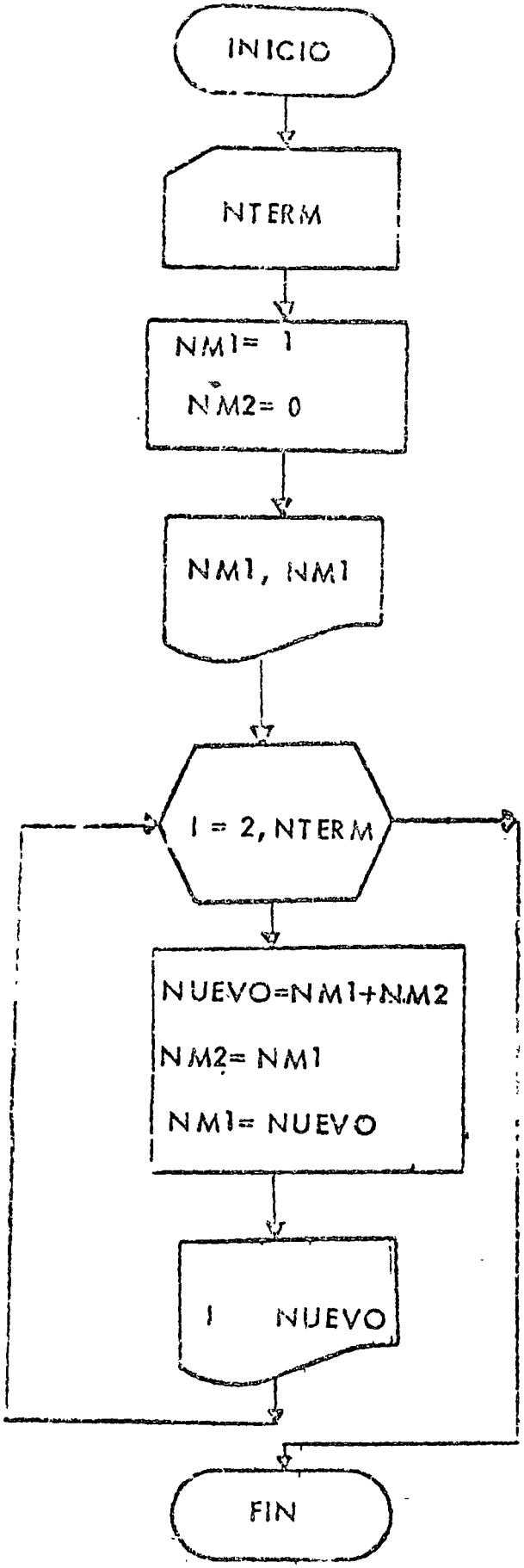
PROG - 7


β
IMAX= NUM/2.
I = 3
γ
I > IMAX
T
F
I <= 9999
T
F
'NO PRIM'
NUM
'PRIMO'
NUM
IDIV= NUM/I
RNUM= NUM
RDIV= RNUM/I
RDIV=IDIV
T
I = I + 1
α

```
// JOB 1
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-------------S I E T E-------
C      NUMEROS PRIMOS
  100 FORMAT(I3)
  101 FORMAT(19H1PRIMOS  -NO PRIMOS)
  102 FORMAT(2X,I3)
  103 FORMAT(14X,I3)
      LEE=2
      IMP=3
      WRITE(IMP,101)
  200 READ(LEE,100,END=290)NUM
      IF(NUM.GT.3)GO TO 210
C       NUM ES MENOR O IGUAL A 3(TODO NUMERO NATURAL MENOR O IGUAL A 3
        WRITE(IMP,102)NUM
        GO TO 280
  210 CONTINUE
C      NUM ES MAYOR QUE 3.
        IND=(-1)**NUM
        IF(IND.LT.0)GO TO 220
C         NUM ES PAR(TODO NUMERO PAR MAYOR QUE 3 NO ES PRIMO).
          WRITE(IMP,103)NUM
          GO TO 270
  220   CONTINUE
C         NUM ES IMPAR(SE INICIA PROCESO DE PRIMO O NO-PRIMO).
          IMAX=NUM/2
          I=3
  230     IF(I.GT.IMAX)GO TO 240
C           SE OBTIENEN LAS DIVISIONES ENTERA Y REAL DE NUM/I
C           CON I DE 3 HASTA NUM/2.
            IDIV=NUM/I
            RNUM=NUM
            RDIV=RNUM/I
            IF(RDIV.EQ.IDIV)I=9999
            I=9999 INDICA QUE NUM ES PRIMO.
            I=I+1
            GO TO 230
  240     CONTINUE
          IF(I.LT.9999)GO TO 25
C           NUM NO ES PRIMO.
            WRITE(IMP,103)NUM
            GO TO 260
  250     CONTINUE
C           NUM ES PRIMO.
            WRITE(IMP,102)NUM
  260     CONTINUE
  270   CONTINUE
  280 CONTINUE
      GO TO 200
  290 CALL EXIT
      END
/ XEQ
    1
    2
    3
    4
    5
    6
    7
```

RESULTADOS

PRIMOS	NO PRIMOS
1	
2	
	4
5	
7	
	8
	9
	10
11	
	12
13	
	15
17	
19	
	21

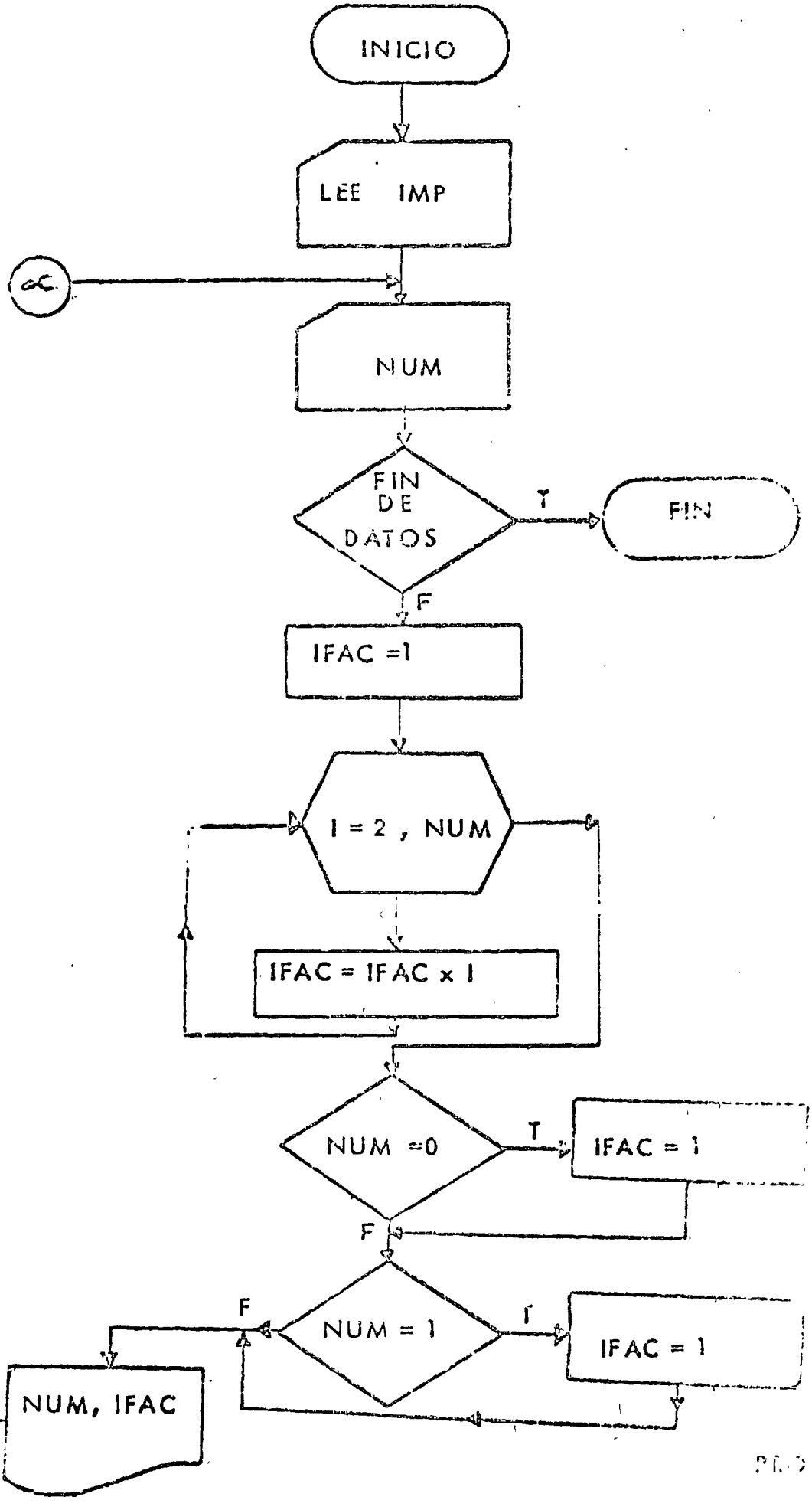

INICIO
NTERM
NM1= 1
NM2= 0
NM1, NM1
I = 2, NTERM
NUEVO=NM1+NM2
NM2= NM1
NM1= NUEVO
I NUEVO
FIN

```
// J
// JOB
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C- ----------=0 C H ----------
C       SERIE DE FIBONACCI
  100 FORMAT(I3)
  101 FORMAT(I4,3X,I5)
      LEE=2
      IMP=3
      READ(LEE,100)NTERM
C     NTERM REPRESENTA EL NUMERO DESEADO DE TERMINOS
      NM1=1
      NM2=0
      WRITE(IMP,101)NM1,NM1
      DO 200 I=2,NTERM
        NUEVO=NM1+NM2
        NM2=NM1
        NM1=NUEVO
C       SE IMPRIME LA POSICION   EL VALOR DEL TERMINO
        WRITE(IMP,101)I,NUEVO
  200 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
// XEQ
015
/*
```

R E S U L T A D O S

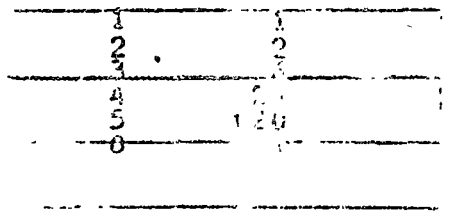
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610

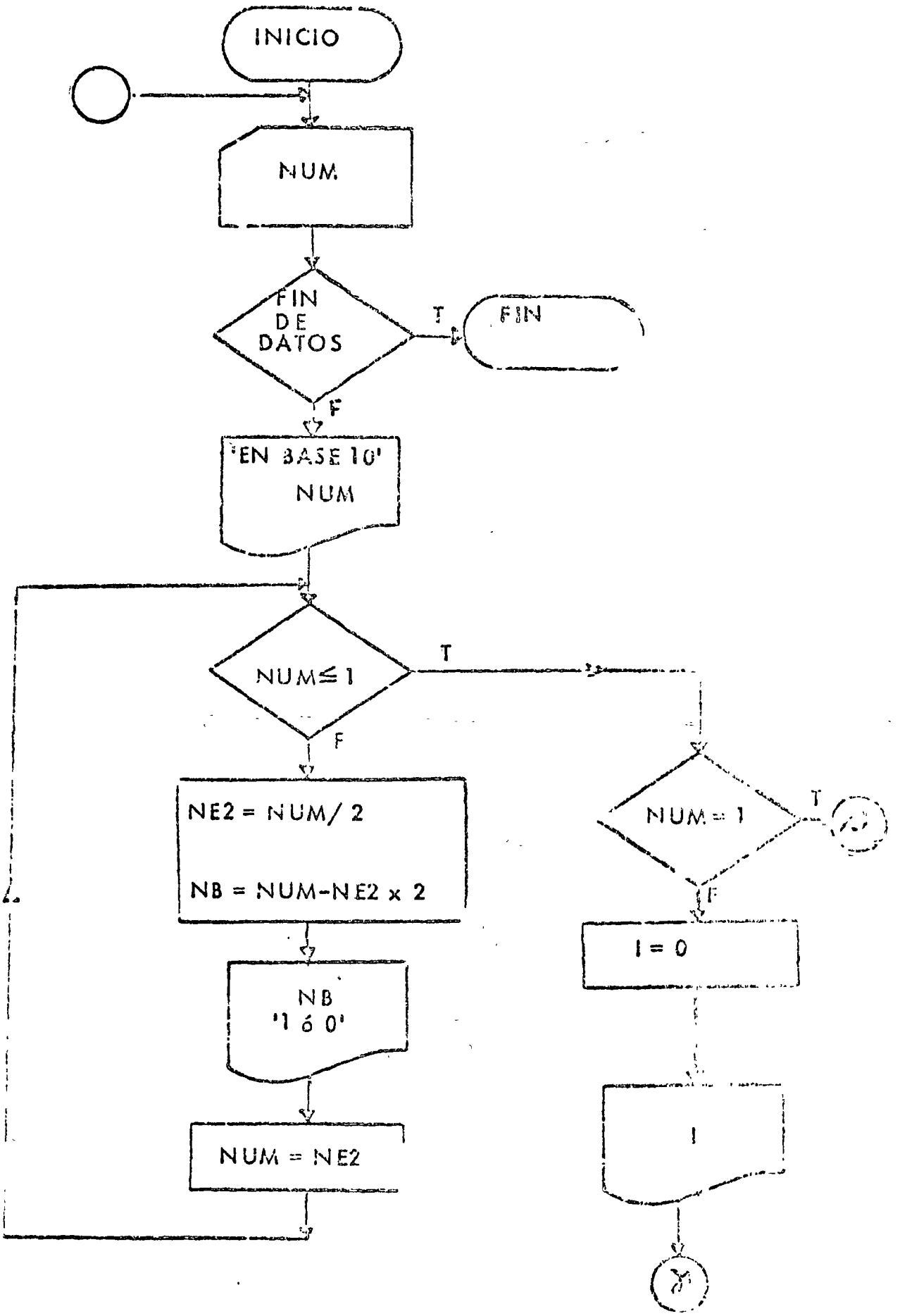
" FACTORIAL "


INICIO
LEE IMP
∝
NUM
FIN DE DATOS
T
FIN
F
IFAC =1
I = 2 , NUM
IFAC = IFAC x I
NUM =0
T
IFAC = 1
F
NUM = 1
F
T
IFAC = 1
NUM, IFAC
∝

```
C        FACTORIAL
   1    FORMAT(2I1)
   10   FORMAT(I2)
   100  FORMAT(I3,3X,I5,
C       SE LEEN LAS UNIDADES LOGICAS DE LECTURA E IMPRESION
        READ(2,100)LEE,IMP
   200  READ(LEE,101,END=220)NUM
        IFAC=1
        DO 210 I=2,NUM
          IFAC=IFAC*I
   210  CONTINUE
        IF(NUM.EQ.0)IFAC=1
        IF(NUM.EQ.1)IFAC=1
C       SE IMPRIME EL NUMERO Y SU FACTORIAL
        WRITE(IMP,102)NUM,IFAC
        GO TO 200
   220  CALL EXIT
        END
// XEQ
```

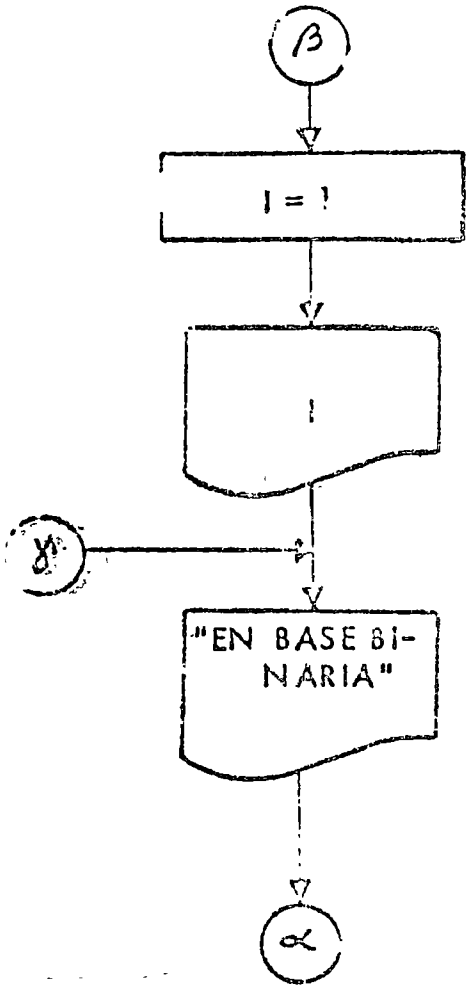
RESULTADOS



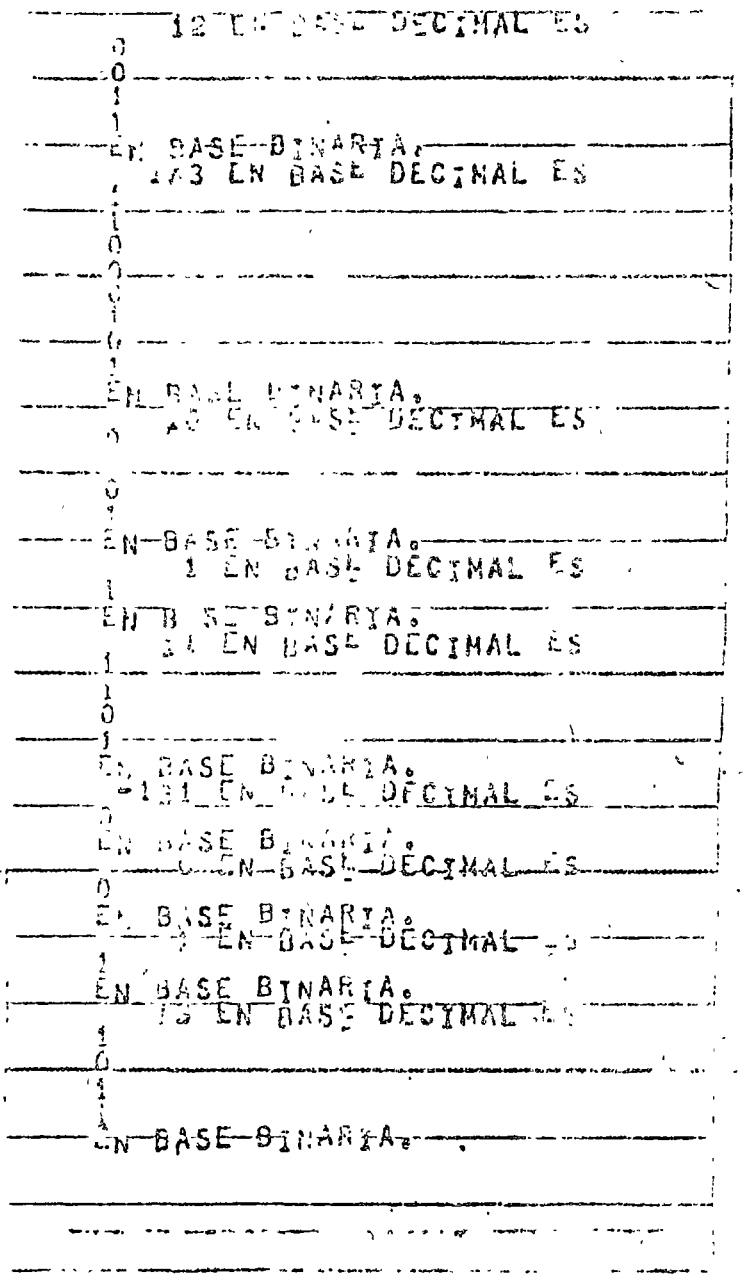

INICIO
NUM
FIN DE DATOS
T
FIN
F
'EN BASE 10' NUM
NUM≤1
T
F
NE2 = NUM/ 2
NB = NUM-NE2 x 2
NB '1 ó 0'
NUM = NE2
NUM = 1
T
F
I = 0
I

PROG - 10

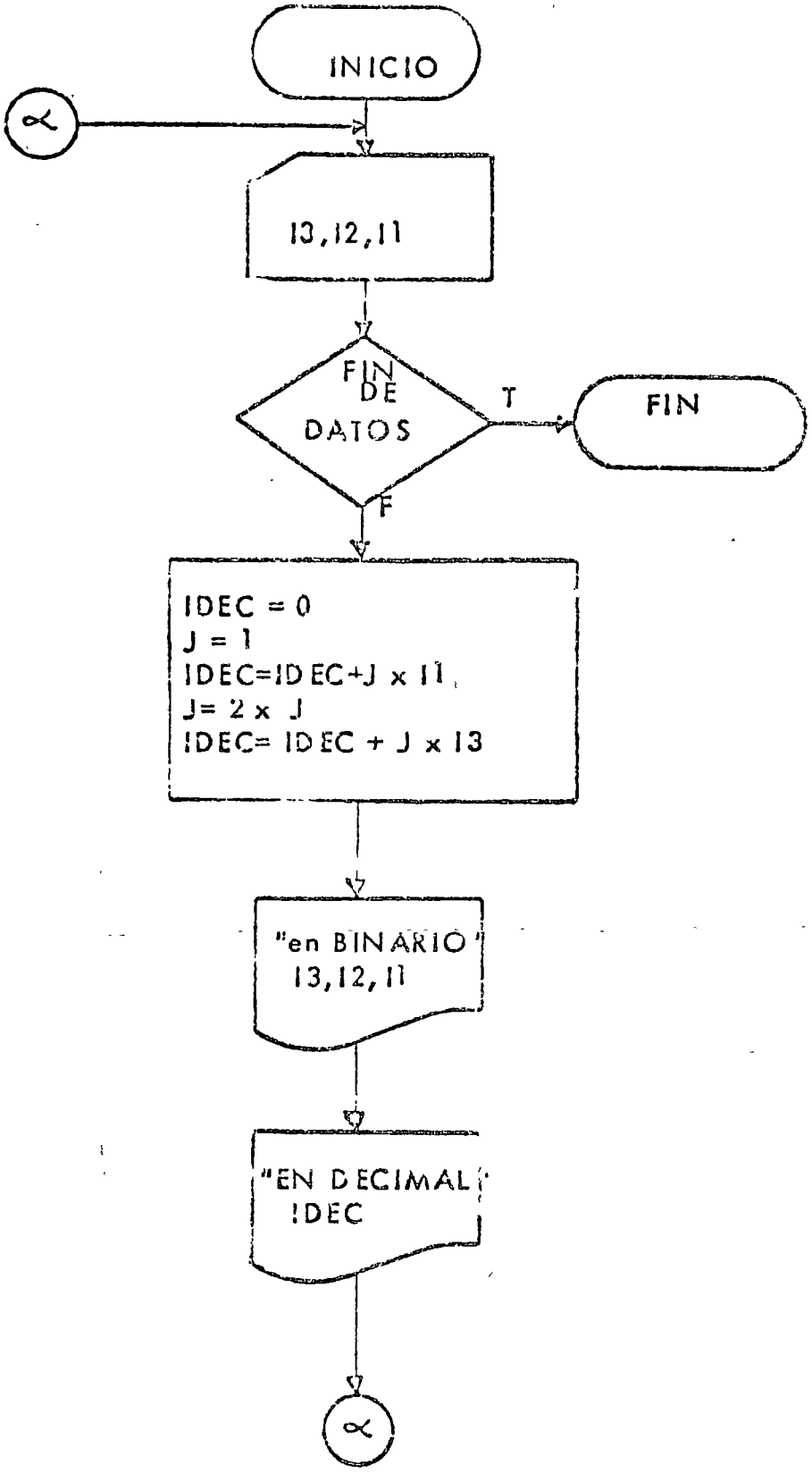
```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-- ----------D I E Z----------
C      CAMBIO DE BASE 1 DECIMAL A BINARIA
  100 FORMAT(I5)
  101 FORMAT(1X,15,19H EN BASE DECIMAL ES)
  102 FORMAT(1X,I1)
  103 FORMAT(17H EN BASE BINARIA.)
      LEE=2
      IMP=3
  200 READ(LEE,100,END=250)NUM
      WRITE(IMP,101)NUM
  210 IF(NUM.LE.1)GO TO 220
C       NUM ES MAYOR QUE UNO. SE SIGUE DESCOMPONIENDO
        NE2=NUM/2
        NB=NUM-NE2*2
C       NB ES UNO O CERO
        WRITE(IMP,102)NB
        NUM=NE2
        GO TO 210
  220 CONTINUE
      IF(NUM.EQ.1)GO TO 230
C       SE IMPRIME EL ULTIMO CERO EN LA REPRESENTACION BINARIA
        I=0
        WRITE(IMP,102)I
        GO TO 240
  230 CONTINUE
C       SE IMPRIME EL ULTIMO 1 EN LA REPRESENTACION BINARIA
        I=1
        WRITE(IMP,102)I
  240 CONTINUE
      WRITE(IMP,103)
      GO TO 200
  250 CALL EXIT
      END
// XEQ
   12
   53
   .0
00001
  011
 -131
    0
    1
   13
/*
```


B
I = 1
I
γ
"EN BASE BI-
NARIA"
α

RESULTADOS


12 EN BASE DECIMAL ES
0
0
1
1
EN BASE BINARIA.
173 EN BASE DECIMAL ES
1
0
0
1
0
1
1
EN BASE BINARIA.
93 EN BASE DECIMAL ES
0
1
EN BASE BINARIA.
1 EN BASE DECIMAL ES
1
EN BASE BINARIA.
31 EN BASE DECIMAL ES
1
1
0
1
1
EN BASE BINARIA.
-131 EN BASE DECIMAL ES
2
EN BASE BINARIA.
0 EN BASE DECIMAL ES
0
EN BASE BINARIA.
0 EN BASE DECIMAL ES
1
EN BASE BINARIA.
75 EN BASE DECIMAL ES
1
0
1
1
EN BASE BINARIA.

"CAMBIO DE BASE , BINARIO A DECIMAL"

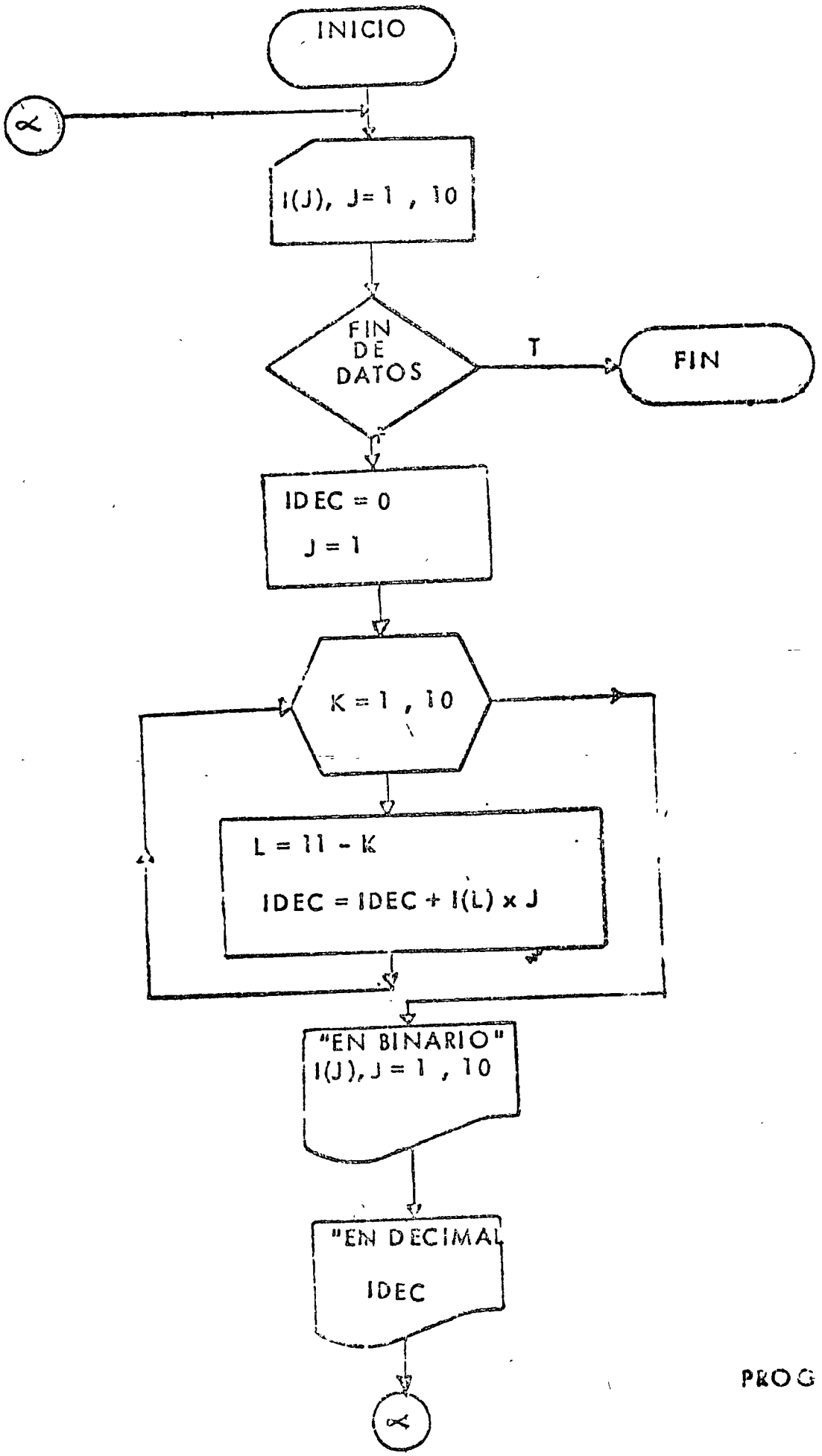


```
// JOB 1
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C ------------- D A C E ----------
      CAMBIO DE BASE 2 BINARIA A DECIMAL
  100 FORMAT(3I1)
    1 FORMAT(1X, 3I1,19H EN BASE BINARIA )
    2 FORMAT(1X,I5,13H EN BASE DECIMAL)
      LEE=2
      IMP=3
  200 READ(2,100,END=210)I3,I2,I1
      IDEC=0
C     J CONTIENE LAS POTENCIAS DE 2.
      J=1
      IDEC=IDEC+J*I1
      J=2*J
      IDEC=IDEC+J*I2
      J=2*J
      IDEC=IDEC+J*I3
      WRITE(IMP,1)I3,I2,I1
C     IDEC CONTIENE LA REPRESENTACION DECIMAL DEL NUMERO
      WRITE(IMP,102)IDEC
      GO TO 200
  210 CALL EXIT
      END
// XEQ
000
010
011
100
101
110
111
/*
```

R E S U L T A D O S

001	EN BASE BINARIA ES
	1 EN BASE DECIMAL.
010	EN BASE BINARIA ES
	2 EN BASE DECIMAL.
011	EN BASE BINARIA ES
	3 EN BASE DECIMAL.
100	EN BASE BINARIA ES
	4 EN BASE DECIMAL.
101	EN BASE BINARIA ES
	5 EN BASE DECIMAL.
110	EN BASE BINARIA ES
	6 EN BASE DECIMAL.
111	EN BASE BINARIA ES
	7 EN BASE DECIMAL.

"CAMBIO DE BASE, BINARIA A DECIMAL USANDO ARREGLOS"

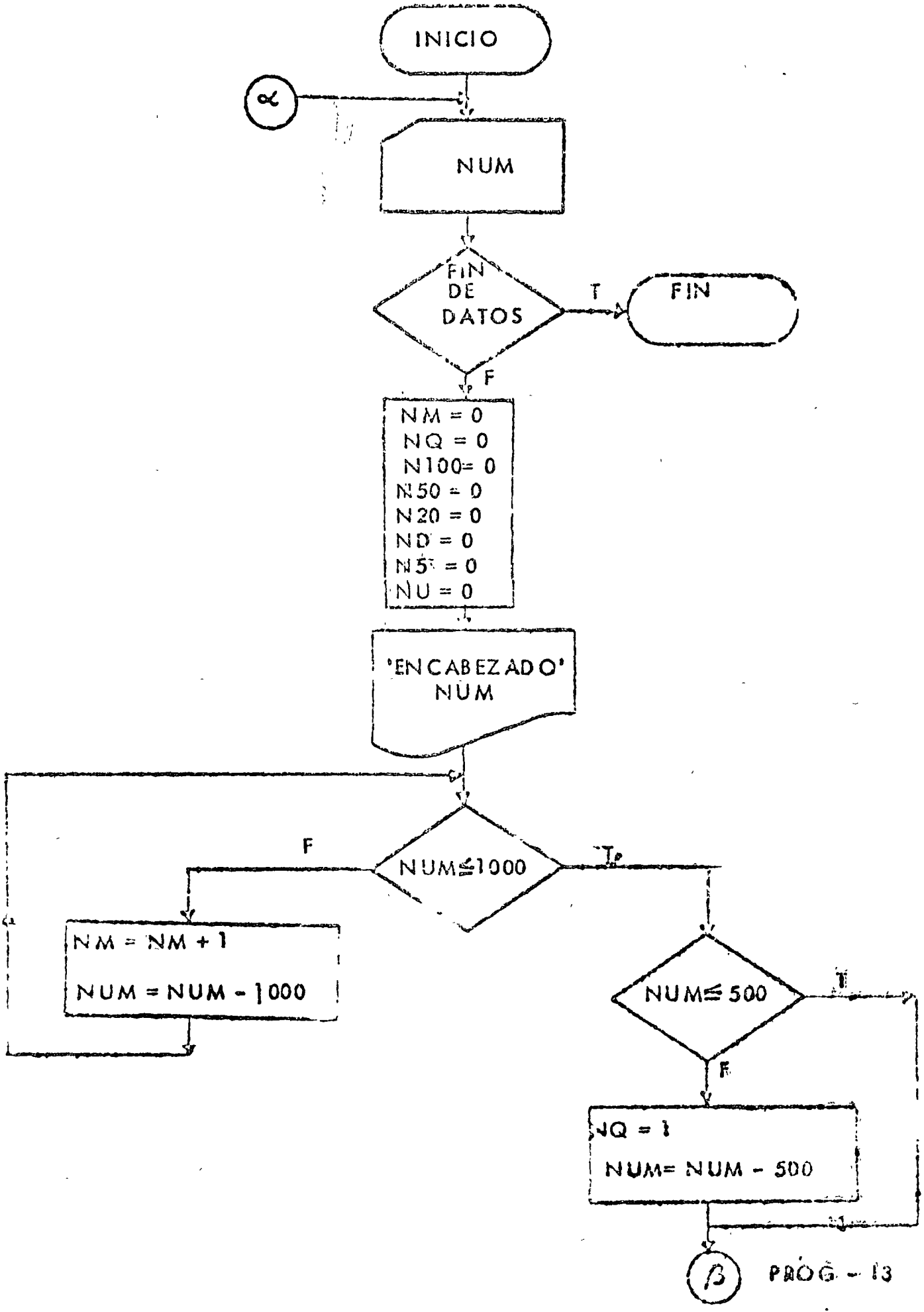


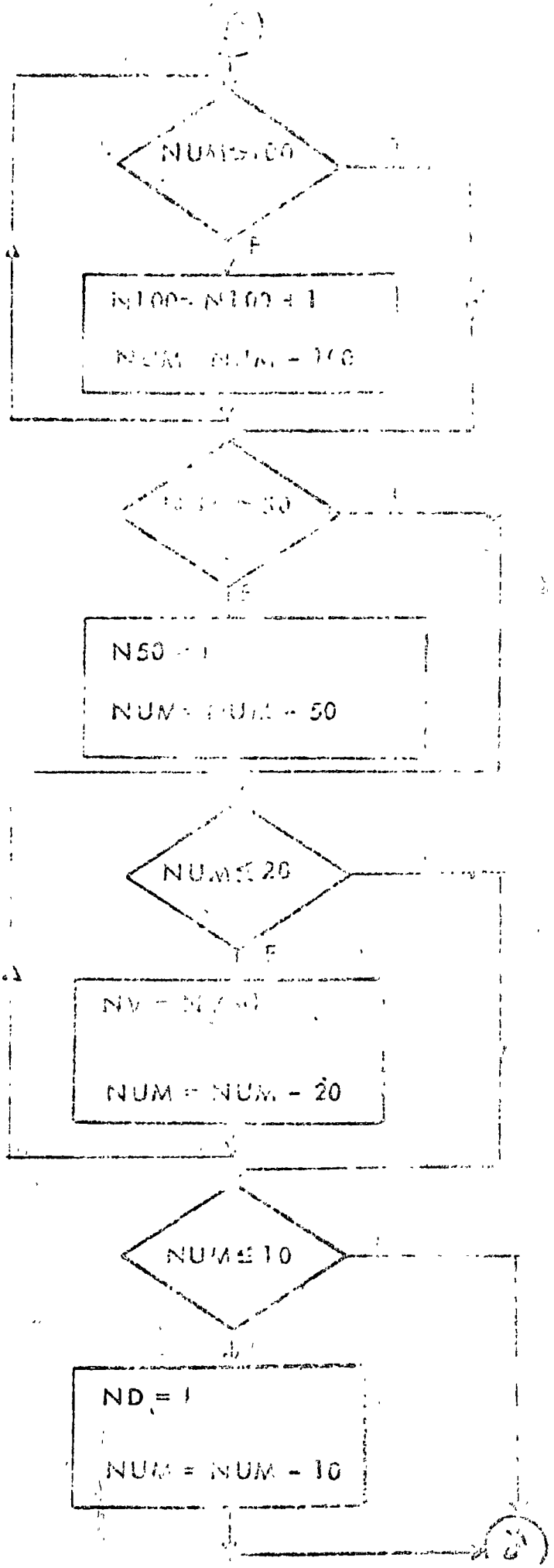
PROG - 12

```
// JOB
// FOR
 LIST        PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C*********** ******** ********
C       C  ..IO DE BASE  .  NARIA A DEC.
C       U ..ADO ARREGLOS
        D  MENSION I(10)
   1(0) FORMAT(I0)
   101 FORMAT(1X,10I1,' EN BASE BINARIA ES)
    102 FORMAT(1X,I5,  N  E BASE DECIMAL)
        LEE=2
        IMP=3
   200 READ(2,100,END=2011
        IDEC=
        J=1
        DO 210 K=1,
C        SE ANALIZA EL VECTOR I DE DERECHA A IZQUIERDA
         LE.1=N
         ) = MOD(IDEC,2)
         C CONTIENE LAS POTENCIAS DE 2
         J=J+1
    21  CONTINUE
        WRITE(IMP,101) I(J),J=1,10)
        WRITE(IMP,102)IDEC
        GO TO 200
   211 CALL EXIT
        END
// XEQ

         1
1000100010

          1
  1001001
        00
/*
```

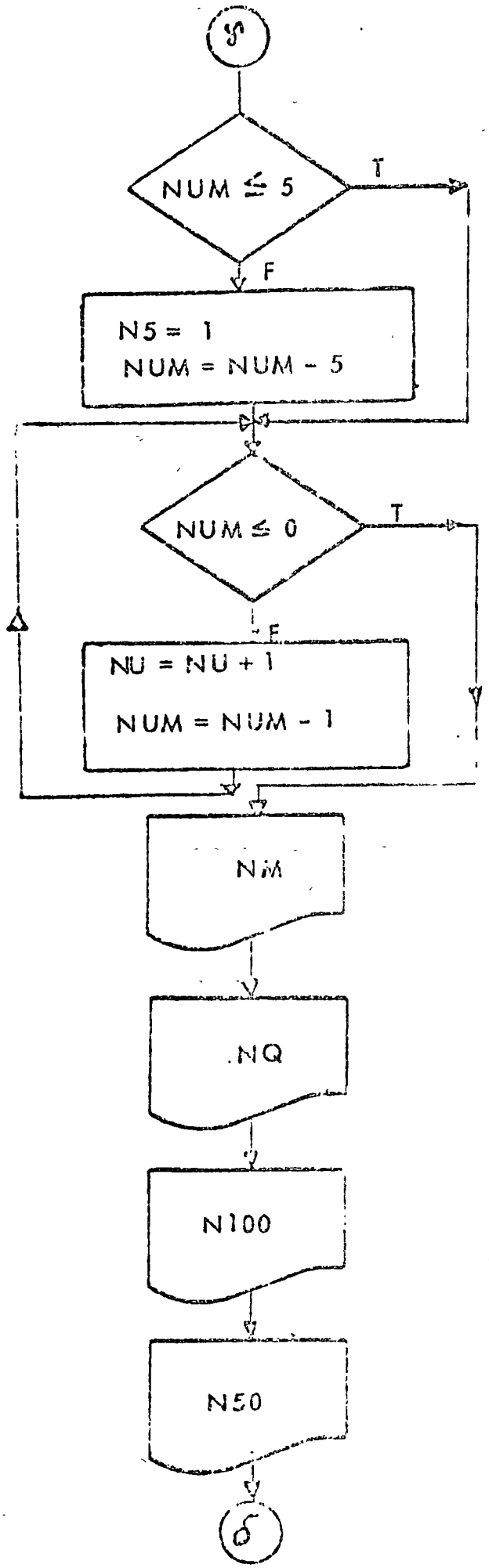
RESULTADOS

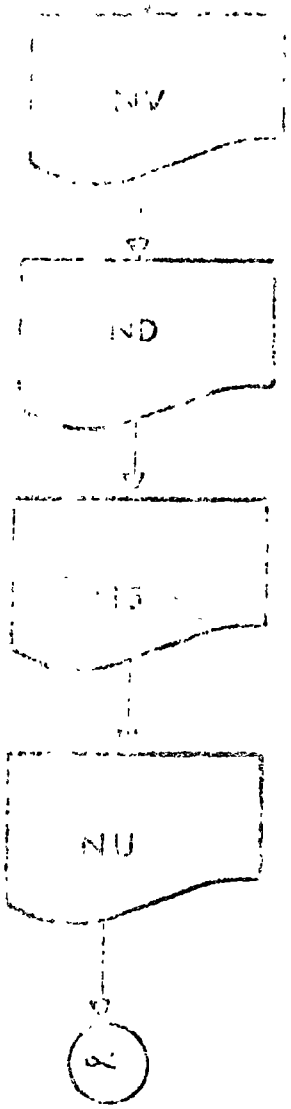
```
                    000000000 EN BASE BINARIA ES
                          1 EN BASE DECIMAL
                    0000000110 EN BASE BINARIA ES
                          6 EN BASE DECIMAL
                    1000100010 EN BASE BINARIA ES
                        546 EN BASE DECIMAL
                    1000000000 EN BASE BINARIA ES
                        512 EN BASE DECIMAL
                    1000000000 EN BASE BINARIA ES
                        512 EN BASE DECIMAL
                    0001001001 EN BASE BINARIA ES
                          73 EN BASE DECIMAL
                    0000000000 EN BASE BINARIA ES
                           0 EN BASE DECIMAL
```


INICIO
∝
NUM
FIN DE DATOS
T
FIN
F
NM = 0
NQ = 0
N100= 0
N50 = 0
N20 = 0
ND = 0
N5 = 0
NU = 0
'ENCABEZADO'
NUM
NUM≤1000
F
T
NM = NM + 1
NUM = NUM - 1000
NUM≤ 500
T
F
NQ = 1
NUM= NUM - 500
β
PROG - 13


NUM≥100
F
N100= N100 + 1
NUM = NUM - 100
NUM≥50
F
N50 = 1
NUM = NUM - 50
NUM≥20
F
NV = N( )
NUM = NUM - 20
NUM≥10
ND = 1
NUM = NUM - 10

PROG - 13


NUM ≤ 5
T
F
N5 = 1
NUM = NUM - 5
NUM ≤ 0
T
F
NU = NU + 1
NUM = NUM - 1
NM
NQ
N100
N50


NV
ND
NU

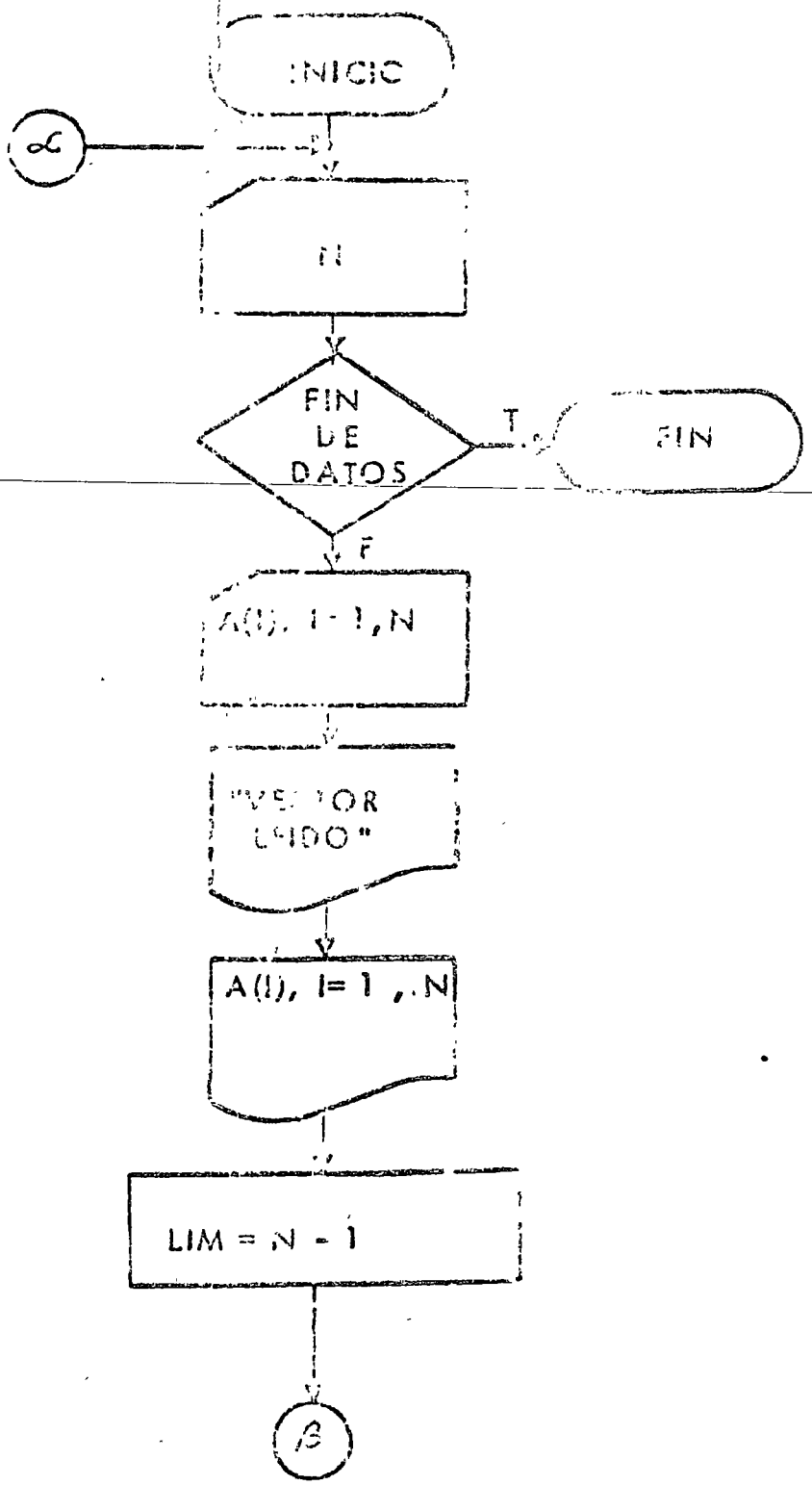
```
// JOB J
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-------------T R E C E-------
C      CALCULO DEL NUMERO DE BILLETES
  100 FORMAT(I4)
  101 FORMAT(/,11H EL NUMERO=,I4,24H,00=PUEDE DESGLOSARSE EN:
  102 FORMAT(I5, 7H DE MIL)
  103 FORMAT(I5,14H DE QUINIENTOS)
  104 FORMAT(I5, 8H DE CIEN)
  105 FORMAT(I5,13H DE CINCUENTA)
  106 FORMAT(I5,10H DE VEINTE)
  107 FORMAT(I5, 8H DE DIEZ)
  108 FORMAT(I5, 9H DE CINCO)
  109 FORMAT(I5, 7H DE UNO)
      LEE=2
      IMP=3
  200 READ(LEE,100,END=330)NUM
      NM=0
      NQ=0
      N100=0
      N50=0
      NV=0
      ND=0
      N5=0
      NU=0
      WRITE(IMP,101)NUM
  210 IF(NUM.LE.1000)GO TO 220
C       NUM ES MAYOR QUE  1000
        NM=NM+1
        NUM=NUM-1000
        GO TO 210
  220 CONTINUE
      IF(NUM.LE.500)GO TO 230
        NUM ES MAYOR QUE 500 (MAXIMO UN BILLETE DE 500)
        NQ=1
        NUM=NUM-500
  230 CONTINUE
  240 IF(NUM.LE.100)GO TO 250
C       NUM ES MAYOR QUE 100
        N100=N100+1
        NUM=NUM-100
        GO TO 240
  250 CONTINUE
      IF(NUM.LE.50)GO TO 260
C       NUM ES MAYOR QUE 50 (MAXIMO UN BILLETE DE 50)
        N50=1
        NUM=NUM-50
  260 CONTINUE
  270 IF(NUM.LE.20)GO TO 280
C       NUM ES MAYOR QUE 20
        NV=NV+1
        NUM=NUM-20
        GO TO 270
  280 CONTINUE
      IF(NUM.LE.10)GO TO 290
C       NUM ES MAYOR QUE 10 (MAXIMO UN BILLETE DE 10)
        ND=1
        NUM=NUM-10
  290 CONTINUE
      IF(NUM.LE.5)GO TO 300
```

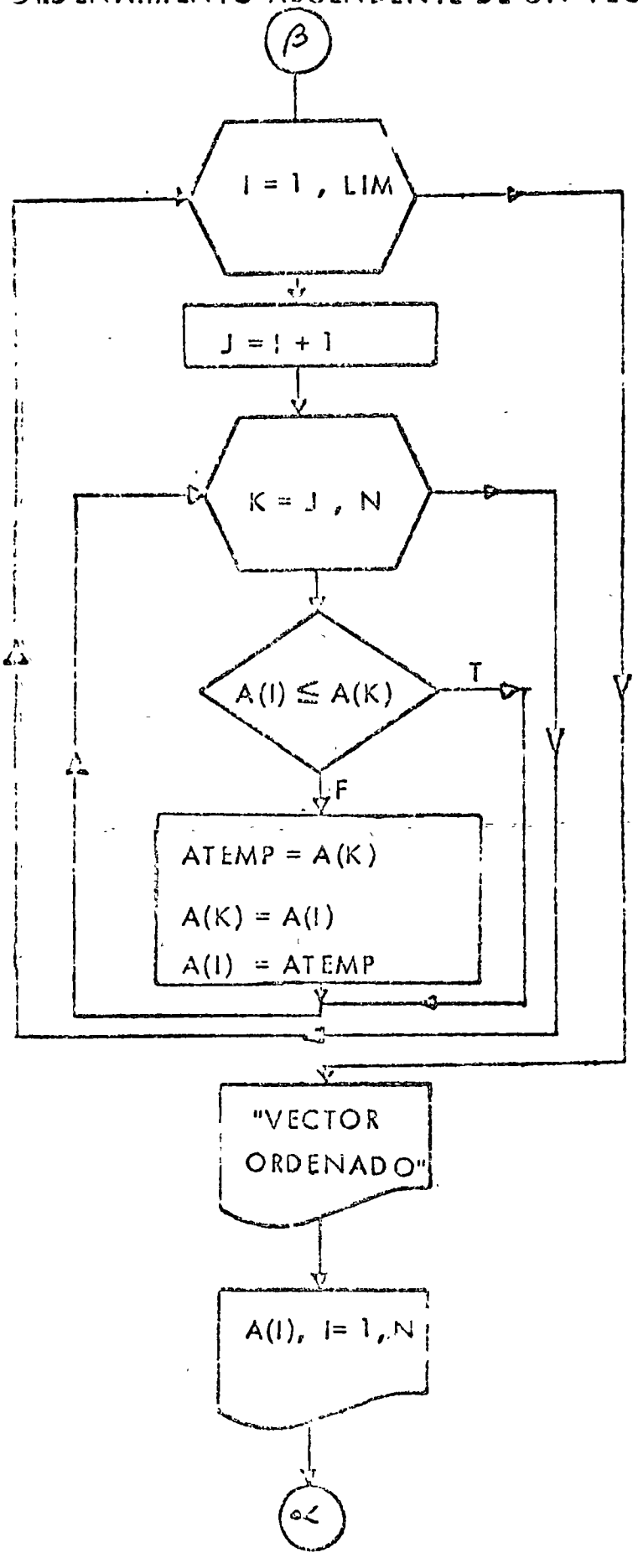
```
      NUM ES MAYOR QUE 5 (MAXIMO [illegible] DE 5)
      [illegible]
      NUM=MAXIM-5
  300 CONTINUE
      IF(IMP.LE.0)GO TO 320
      [illegible] ES MAYOR QUE
      [illegible]=NU+1
      [illegible]=NUM-1
      GO TO 310
  320 CONTINUE
      WRITE(IMP,102)NB
      WRITE(IMP,103)NQ
      WRITE(IMP,104)N100
      WRITE(IMP,105)N50
      WRITE(IMP,106)NV
      WRITE(IMP,107)ND
      WRITE(IMP,108)N5
      WRITE(IMP,109)NU
      GO TO 200
  330 CALL EXIT
      END
```

RESULTADOS

```
EL NUMERO=9000.00=PUEDE DESGLOSARSE EN
 9 DE MIL
 1 DE QUINIENTOS
 4 DE CIEN
 1 DE CINCUENTA
 2 DE VEINTE
 0 DE DIEZ
 0 DE CINCO
 5 DE UNO

EL NUMERO=1314.00=PUEDE DESGLOSARSE EN
 1 DE MIL
 3 DE QUINIENTOS
 3 DE CIEN
 0 DE CINCUENTA
 0 DE VEINTE
 1 DE DIEZ
 0 DE CINCO
 4 DE UNO

EL NUMERO=6893.00=PUEDE DESGLOSARSE EN
 6 DE MIL
 1 DE QUINIENTOS
 3 DE CIEN
 1 DE CINCUENTA
 2 DE VEINTE
 0 DE DIEZ
 0 DE CINCO
 3 DE UNO

EL NUMERO=1000.00=PUEDE DESGLOSARSE EN
 1 DE MIL
 1 DE QUINIENTOS
 0 DE CIEN
 1 DE CINCUENTA
 2 DE VEINTE
 0 DE DIEZ
 1 DE CINCO
 5 DE UNO

EL NUMERO= 500.00=PUEDE DESGLOSARSE EN
 0 DE MIL
 0 DE QUINIENTOS
 4 DE CIEN
 1 DE CINCUENTA
 2 DE VEINTE
 0 DE DIEZ
 1 DE CINCO
 5 DE UNO

EL NUMERO=  13.00=PUEDE DESGLOSARSE EN
 0 DE MIL
 0 DE QUINIENTOS
 0 DE CIEN
 0 DE CINCUENTA
 0 DE VEINTE
 1 DE DIEZ
 0 DE CINCO
 3 DE UNO
```

PROG - .3 P-13


INICIO
α
N
FIN DE DATOS
T
FIN
F
A(I), I = 1, N
"VECTOR LEIDO"
A(I), I= 1 , N
LIM = N - 1
β


β
I = 1 , LIM
J = I + 1
K = J , N
A(I) ≤ A(K)
T
F
ATEMP = A(K)
A(K) = A(I)
A(I) = ATEMP
"VECTOR ORDENADO"
A(I), I= 1, N
α

```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-------ORDENAMIENTO ASCENDENTE DE UN VECTOR
      ORDENAMIENTO ASCENDENTE DE UN VECTOR
      DIMENSION A(100)
   30 FORMAT(I2)
   31 FORMAT(6F10.0)
  102 FORMAT(13H VECTOR LEIDO,//)
  103 FORMAT(10(1X,F11.4))
  104 FORMAT(16H VECTOR ORDENADO,//)
      LEE=2
      IMP=3
  200 READ(LEE,100,END=240)N
C     N REPRESENTA EL NUMERO DE ELEMENTOS A ORDENAR
      READ(LEE,31)(A(I),I=1,N)
      WRITE(IMP,102)
      WRITE(IMP,103)(A(I),I=1,N)
      N1=N-1
      DO 220 I=1,N1
C     SE ASUME QUE A(I) ES EL MENOR
      DO 220 K=I,N
      IF(A(I).LE.A(K))GO TO 210
      A(I) ES MAYOR QUE A(K)
      ATEMP=A(I)
      A(K)=A(I)
      A(I)=ATEMP
  210 CONTINUE
  220 CONTINUE
C     AHORA SE TIENE EN A(I) EL MENOR
  230 CONTINUE
      WRITE(IMP,104)
      WRITE(IMP,103)(A(I),I=1,N)
      GO TO 200
  240 CALL EXIT
      END
// XEQ
 5
          1.          -3.          17.
-3
         -287.          22.
 4
         -32.           11.          0.
-2
```

RESULTADOS

VECTOR LEIDO

-4.0000 1.0000 -3.0000 17.0000

VECTOR ORDENADO

-4.0000 -3.0000 1.0000 17.0000

VECTOR LEIDO

0.0000 -287.0000 32.0000

VECTOR ORDENADO

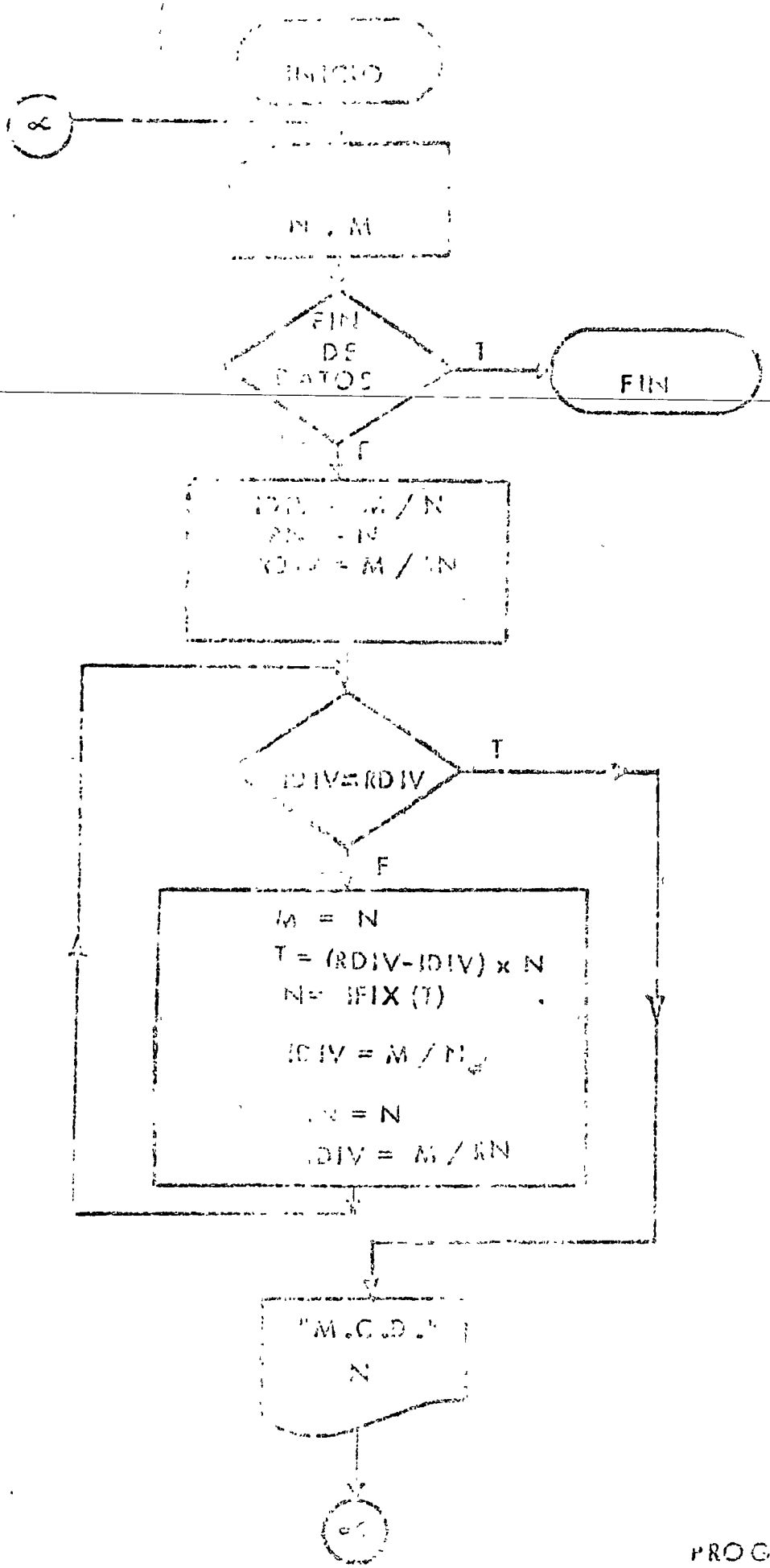
-287.0000 0.0000 32.0000

VECTOR LEIDO

-28.0000 -32.0000 11.0000 0.0000

VECTOR ORDENADO

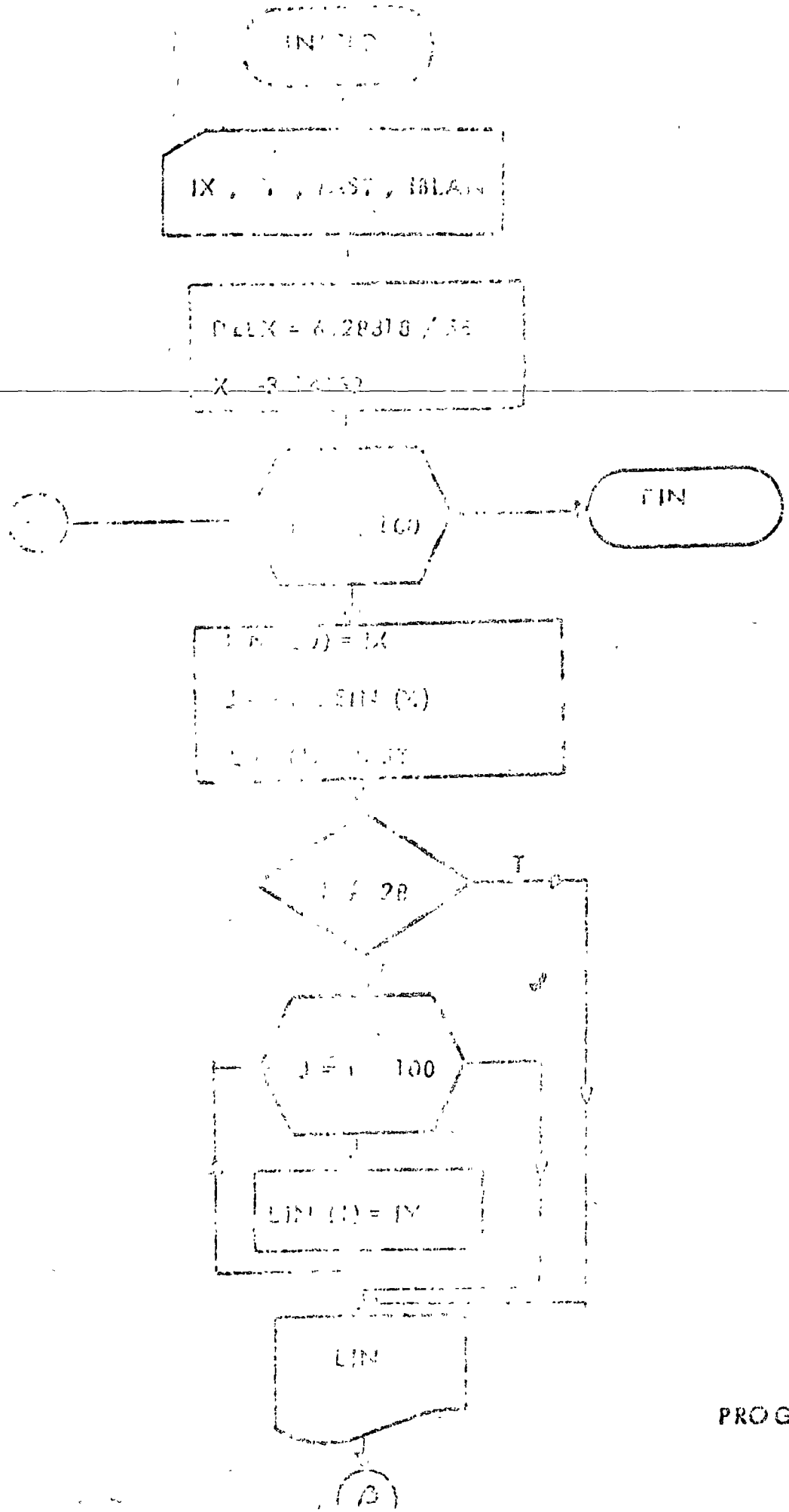
-32.0000 -28.0000 0.0000 11.0000

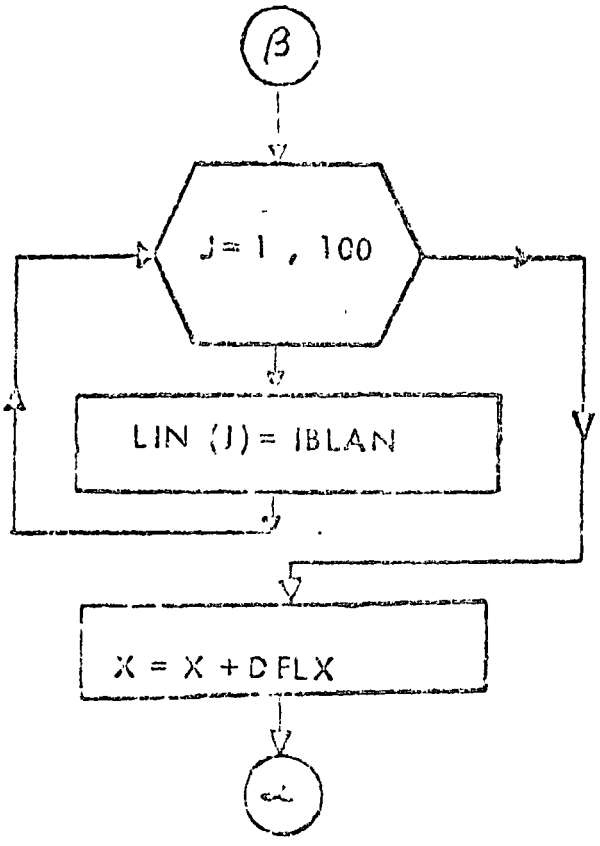

INICIO
∝
N , M
FIN DE DATOS
T
FIN
F
IDIV = M / N
RDIV = N
RDIV = M / N
IDIV=RDIV
T
F
M = N
T = (RDIV-IDIV) x N
N= IFIX (T)
IDIV = M / N
N = N
RDIV = M / N
"M.C.D."
N
∝

```
// JOB T
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C-------------Q U I N C E-----
C       MAXIMO COMUN MULTIPLO
C       ALGORITMO DE EUCLIDES
  100 FORMAT(2I3)
  101 FORMAT(3H N=,I3,3H M=,I3)
  102 FORMAT(8H M.C.D.=,I3,//)
      LEE=2
      IMP=3
  200 READ(LEE,100,END=230)N,M
C       SE CALCULA EL RESIDUO
      IDIV=M/N
      RN=N
      RDIV=M/RN
  210 IF(IDIV.EQ.RDIV)GO TO 220
        M=N
        T=(RDIV-IDIV)*N
        N=IFIX(T)
        IDIV=M/N
        RN=N
        RDIV=M/RN
        GO TO 210
  220 CONTINUE
C     N REPRESENTA EL MAXIMO COMUN DIVISOR
      WRITE(IMP,102)N
      GO TO 200
  230 CALL EXIT
      END
// XEQ
  5  7
  3  6
  8 16
 21 98
 15 24
  8 12
/*
```

RESULTADOS

M.C.D.= 1
M.C.D.= 3
M.C.D.= 8
M.C.D.= 1
M.C.D.= 8
M.C.D.= 4


IN
IX , , LAST , ISLAN
DELX = 6.28318 /
X = 3
LO)
FIN
) = X
SIN (X)
28
T
J = 1 100
LIN (J) = IY
LIN
B

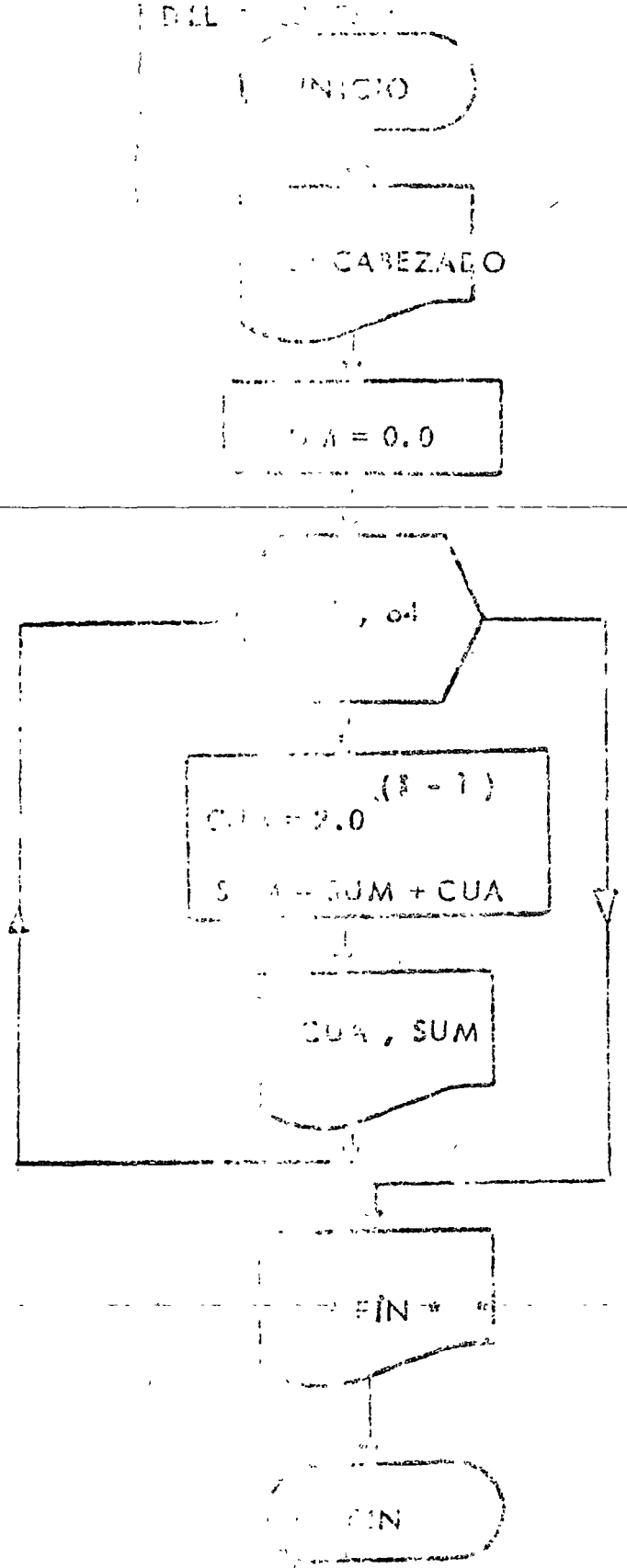

β
J = 1 , 100
LIN (J) = IBLAN
X = X + DELX

```
//
//T  JOB  P'OGRAM
//F'OG  INTEGER
//S'EP  PRINT
//*-------------U T I L E S
      GRAFICA DE SENO
      DIMENSION LIN(101)
    1 FORMAT(A1)
    2 FORMAT(10X,100A1)
      LEE=2
      IMP=3
      READ(LEE,100)IX,(AST(I),I=1,IBLAN)
      DELX=6.28*10/56
      X =-3.*10
      DO 200 I=1,100
        LIN(I)=BLAN
  200 CONTINUE
      DO 240 I=1,56
        LIN(50)=IX
        J=49*SIN(X)+51
        LIN(J)=AST
        IF(I.NE.28)GO TO 220
          DO 210 J=1,101
            IF FUE ICUANDO SE IMPRIME EL EJE Y
            LIN(J)=IY
  210     CONTINUE
  220   CONTINUE
        WRITE(IMP,101)LIN
        DO 230 J=1,100
          LIN(J)=IBLAN
  230   CONTINUE
        X=X+DELX
  240 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
// XEQ
```

RESULTADOS

PROG - 16

R/5


INICIO
CABEZADO
SUM = 0.0
CUA , SUM
FIN

```
// JOB T
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
C---------------D I E C I S I E T E-----
C      ESTE PROGRAMA CALCULA EL NUMERO DE GRANOS DE MAIZ QUE COMIO EL
C      INVENTOR DE AJEDREZ
C      FILES
           LEE=2
           IMP=3
C      FORMATOS
  100 FORMAT(10X,6HCUADRO,9X,4HSUMA,//)
  101 FORMAT(3X,I2,2E15.7)
  102 FORMAT(///)
  103 FORMAT(53X,11H**********)
  104 FORMAT(53X,11H*   FIN   *)
      WRITE(IMP,100)
      SUM=0.0
      DO 200 I=1,64
       CUA=2.0**(I-1)
       SUM=SUM+CUA
       WRITE(IMP,101)I,CUA,SUM
  200 CONTINUE
      WRITE(IMP,102)
      WRITE(IMP,103)
      WRITE(IMP,104)
      WRITE(IMP,103)
      CALL EXIT
      END
// XEQ
/*
```

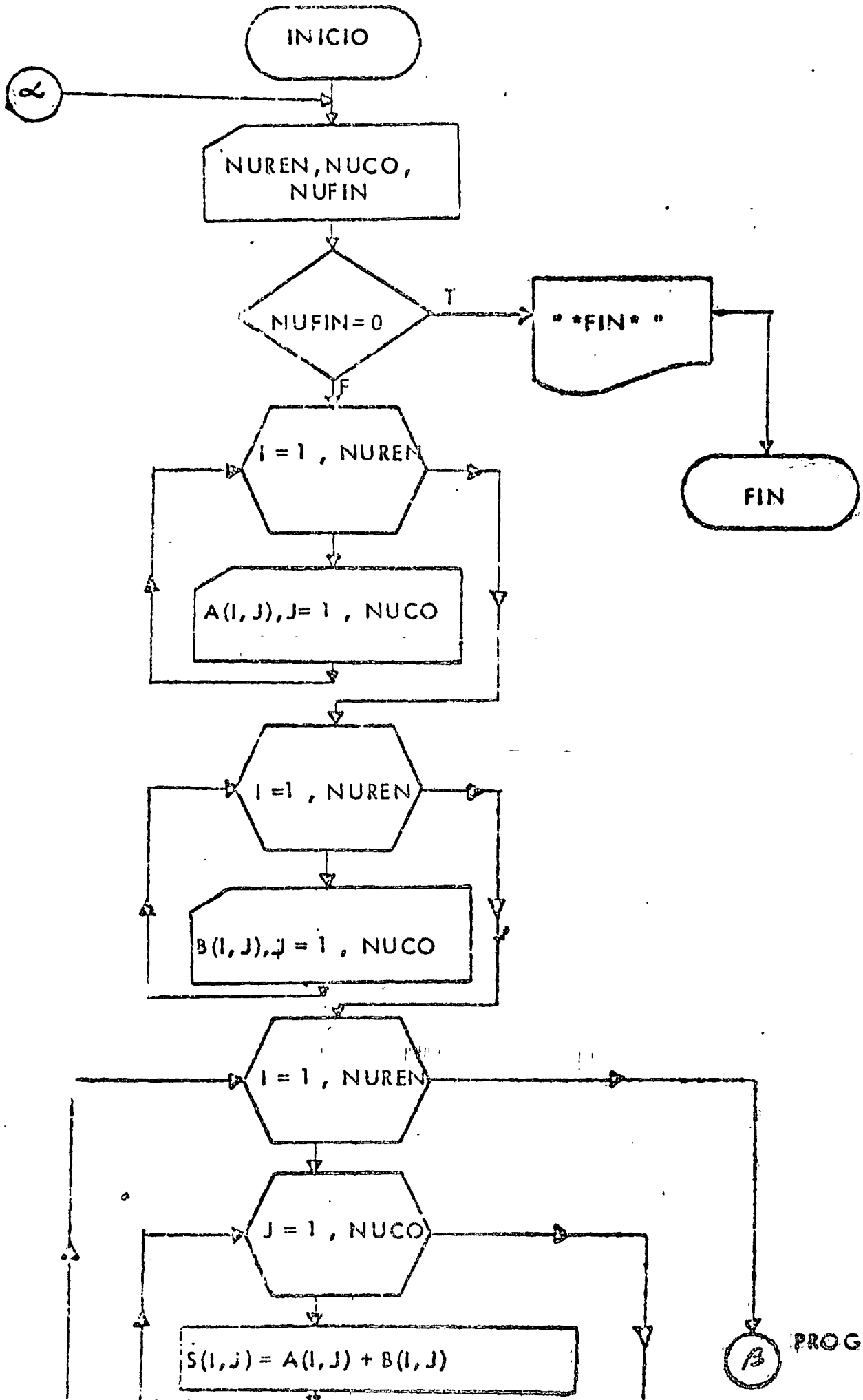
NOMBRE	SUMA
[illegible]	1.000000E+01
[illegible]	2.000000E+01
[illegible]	3.000000E+01
[illegible]	1.000000E+02
[illegible]	2.000000E+02
[illegible]	3.000000E+02
[illegible]	2.700000E+03
[illegible]	3.550000E+03
[illegible]	5.110000E+03
[illegible]	1.023000E+04
[illegible]	2.047000E+04
[illegible]	4.095000E+04
[illegible]	8.191000E+04
[illegible]	1.638300E+05
[illegible]	3.276700E+05
[illegible]	6.555500E+05
[illegible]	1.311070E+06
[illegible]	2.621430E+06
[illegible]	5.242370E+06
[illegible]	1.048575E+07
[illegible]	2.097151E+07
[illegible]	4.194303E+07
[illegible]	8.388607E+07
[illegible]	1.677722E+08
[illegible]	3.355443E+08
[illegible]	6.710886E+08
[illegible]	1.342177E+09
[illegible]	2.684355E+09
[illegible]	5.368709E+09
[illegible]	1.073[illegible]E+10
[illegible]	2.147[illegible]E+10
[illegible]	4.294[illegible]E+10
[illegible]	8.589935E+10
[illegible]	1.717987E+11
[illegible]	3.435[illegible]E+11
[illegible]	6.871948E+11
[illegible]	1.374390E+12
[illegible]	2.748[illegible]E+12
[illegible]	5.497558E+12
[illegible]	1.099511E+13
[illegible]	2.199023E+13
[illegible]	4.398047E+13
[illegible]	8.796093E+13
[illegible]	1.759219E+14
[illegible]	3.518437E+14
[illegible]	7.036874E+14
[illegible]	1.407375E+15
[illegible]	2.814750E+15
[illegible]	5.629500E+15
[illegible]	1.125900E+16
[illegible]	2.251800E+16
[illegible]	4.503600E+16
[illegible]	9.007199E+16
[illegible]	1.801440E+17
[illegible]	3.602880E+17
[illegible]	7.205759E+17
[illegible]	1.441152E+18
[illegible]	2.882304E+18
[illegible]	5.764608E+18
[illegible]	1.152922E+19
[illegible]	2.305843E+19
[illegible]	4.611686E+19
[illegible]	9.223372E+19
[illegible]	1.844674E+20

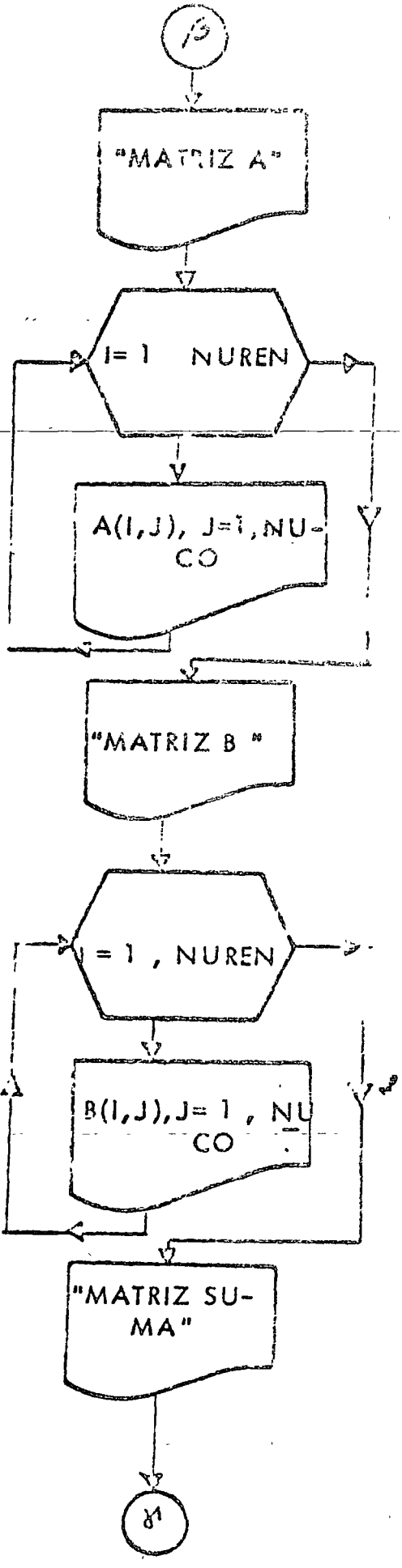
RESULTADOS

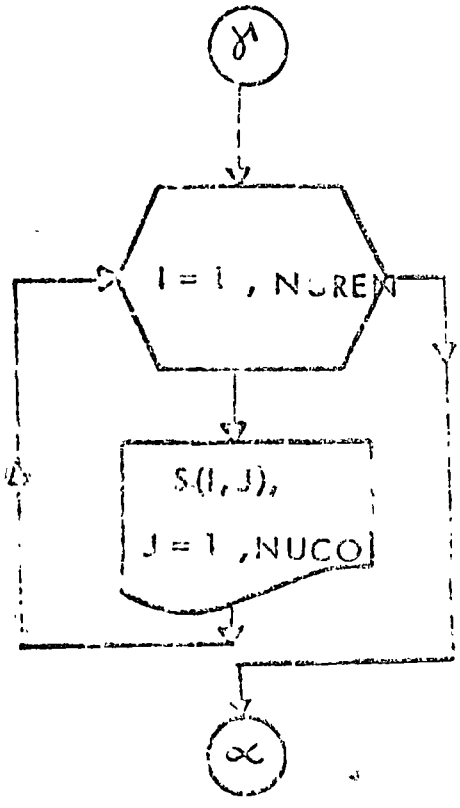
PROG - 11

****

****


INICIO
α
NUREN, NUCO, NUFIN
NUFIN = 0
T
" *FIN* "
F
FIN
I = 1 , NUREN
A(I, J), J= 1 , NUCO
I =1 , NUREN
B(I, J), J = 1 , NUCO
I = 1 , NUREN
J = 1 , NUCO
S(I, J) = A(I, J) + B(I, J)
β


18
"MATRIZ A"
I= 1 NUREN
A(I,J), J=1,NU-
CO
"MATRIZ B "
= 1 , NUREN
B(I,J),J= 1 , NU
CO
"MATRIZ SU-
MA"
18


γ
I = 1 , NUREN
S(I, J),
J = 1 ,NUCO
∝

```
// FOR
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
C--------------D I E C I O C H O----------
C       SUMA DE DOS MATRICES: A Y B
C       EL PROGRAMA ESTA HECHO PARA SUMAR DOS MATRICES DE 10X 10 MAXIMO.
C       SE RESERVAN LUGARES EN LA MEMORIA PARA LAS MATRICES A SUMAR Y PARA
C       LA MATRIZ SUMA.
        DIMENSION A(10,10),B(10,10),S(10,10.
C       FILES
            LEE=2
            IMP=3
C       FORMATOS
  100   FORMAT(3I2)
  101   FORMAT(10F8.3)
  102   FORMAT(///,5X,9HMATRIZ A:,//)
  103   FORMAT(5X,10(F8.3,2X),/)
  104   FORMAT(///,5X,9HMATRIZ B:,//)
  105   FORMAT(///,5X,18HLA MATRIZ SUMA ES:,//)
  106   FORMAT(5X,,1H*************)
  107   FORMAT(' ',11H*    FIN    *)
C       LECTURA DEL NUMERO DE RENGLONES DE LAS MATRICES (NUREN) Y DEL NUME
C       RO DE COLUMNAS (NUCO),Y DE UN DETECTOR (NUFIN)
  199 READ(LEE,100)NUREN,NUCO,NUFIN
C       ANALISIS DE NUFIN. SI VALE CERO YA NO SE EJECUTA EL PROGRAMA,DE LO
C       CONTRARIO SI.
        IF(NUFIN.EQ.0)GO TO 1000
C       LECTURA POR RENGLONES DE LA MATRIZ A.
        DO 200 I=1,NUREN
          READ(LEE,101)(A(I,J),J=1,NUCO)
  200   CONTINUE
C       LECTURA POR RENGLONES DE LA MATRIZ B.
        DO 201 I=1,NUREN
          READ(LEE,101)(B(I,J),J=1,NUCO)
  201   CONTINUE
C       SE HARA LA SUMA ELEMENTO A ELEMENTO
        DO 203 I=1,NUREN
          DO 202 J=1,NUCO
            S(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
  202     CONTINUE
  203   CONTINUE
C       IMPRESION DE LA MATRIZ A POR RENGLONES
        WRITE(IMP,102)
        DO 204 I=1,NUREN
          WRITE(IMP,103)(A(I,J),J=1,NUCO)
  204   CONTINUE
C       IMPRESION DE LA MATRIZ B POR RENGLONES
        WRITE(IMP,104)
        DO 205 I=1,NUREN
          WRITE(IMP,103)(B(I,J),J=1,NUCO)
  205   CONTINUE
C       IMPRESION DE LA MATRIZ S POR RENGLONES
        WRITE(IMP,105)
        DO 206 I=1,NUREN
        WRITE(IMP,103)(S(I,J),J=1,NUCO)
  206   CONTINUE
        GO TO 199
 1000 CONTINUE
      WRITE(IMP,106)
      WRITE(IMP,107)
      WRITE(IMP,106)
```

```
      CALL EXIT
      END
// XEQ
 2 2 1
   5.0        0.0
  12.2        3.4
  -4.7        2.1
   0.0       -1.2
 2 2 1
  90.15     -87.02
   5.478     12.22
 -90.15      87.02
  -5.478    -12.22
 2 2 0
/*
```

RESULTADOS

MATRIZ A

5.000	0.000
12.200	3.400

MATRIZ B

-4.700	2.100
0.000	-1.200

LA MATRIZ SUMA ES:

0.300	2.100
12.200	2.200

MATRIZ A

90.150	-87.020
5.478	12.220

MATRIZ B

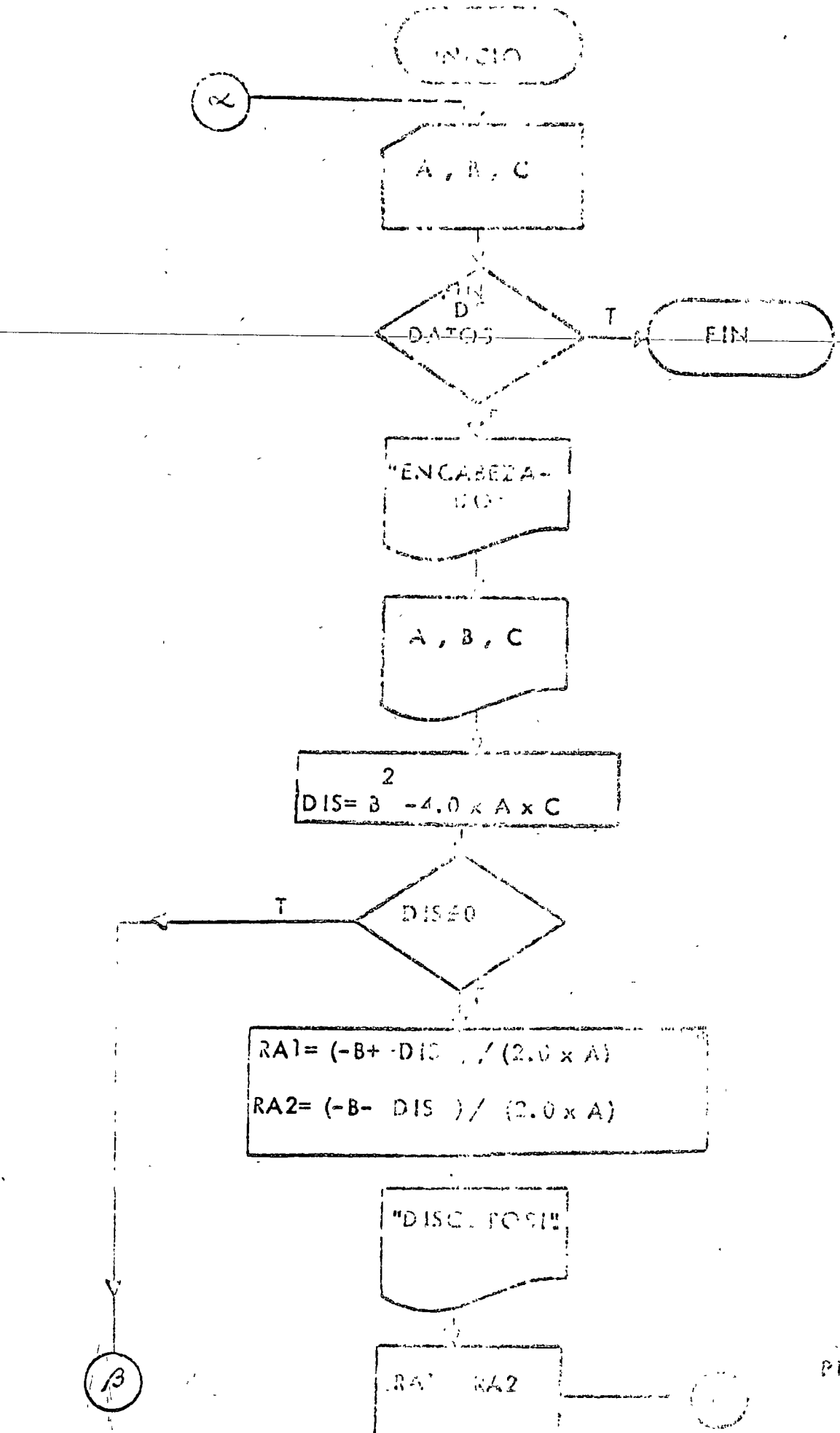
-90.150	87.020
-5.478	-12.220

LA MATRIZ SUMA ES:

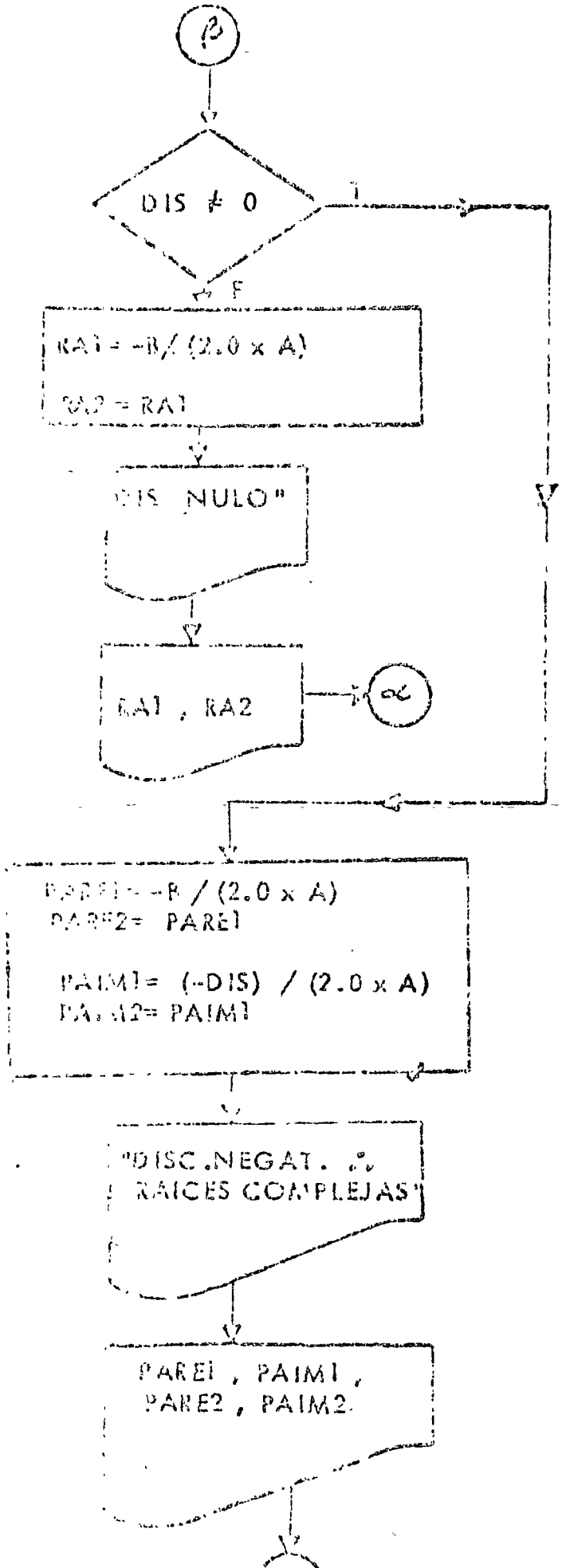
0.000	0.000
0.000	0.000

PROG -- 18

* FIN *


INICIO
α
A , B , C
FIN DE DATOS
T
FIN
"ENCABEZADO"
A , B , C
DIS= B 2 -4.0 x A x C
DIS≠0
T
RA1= (-B+ -DIS) / (2.0 x A)
RA2= (-B- DIS) / (2.0 x A)
"DISC. POS!"
RA1 RA2
β

PROG - 1)


(β)
DIS ≠ 0
F
RA1 = -B/ (2.0 x A)
RA2 = RA1
"DIS NULO"
RA1 , RA2
(α)
PARE1 = -B / (2.0 x A)
PARE2 = PARE1
PAIM1 = (-DIS) / (2.0 x A)
PAIM2 = PAIM1
"DISC.NEGAT. ∴
RAICES COMPLEJAS"
PARE1 , PAIM1 ,
PARE2 , PAIM2

```
C
C        LOS COEFICIENTES
  100 READ(IMP,102)A,B,C
C
C        CALCULO DEL DISCRIMINANTE
      DIS=B**2-4.0*A*C
      IF( DIS.LE. 0.0)GO TO 210
C        RAICES REALES DIFERENTES
         RA1=(-B+SQRT(DIS))/(2.0*A)
         RA2=(-B-SQRT(DIS))/(2.0*A)
         WRITE(IMP,103)
         WRITE(IMP,104)RA1,RA2
         GO TO 230
  210 CONTINUE
         IF(DIS.NE.0.0)GO TO 220
C           RAICES REALES IGUALES
            RA1=-B/(2.0*A)
            RA2=RA1
            WRITE(IMP,105)
            WRITE(IMP,106)RA1,RA2
            GO TO 230
  220    CONTINUE
C           RAICES COMPLEJAS
            PARE1=-B/(2.0*A)
            PARE2=PARE1
            PAIM1=SQRT(-DIS)/(2.0*A)
            PAIM2=PAIM1
            WRITE(IMP,107)
            WRITE(IMP,108)PARE1,PAIM1,PARE2,PAIM2
            GO TO 230
C        ENDIF
C     ENDIF
  230 CONTINUE
      GO TO 200
  240 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
// XEQ
   1.0          2.0          3.0     1.
   5.0         10.0          5.0     1.
   1.0         10.0         25.0     1.
```

PROG - 19

3.00 60.0 1.0

RESULTADOS

LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION SON:

A= 1.00000 B= 2.00000 C= 3.00000

EL DISCRIMINANTE ES NEGATIVO,POR TANTO RAICES COMPLEJAS

X1= -1.00000 + 1.41421 IMA X2= -1.00000 - 1.41421

LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION SON:

A= 5.00000 B= 10.00000 C= 5.00000

EL DISCRIMINANTE ES NULO,POR TANTO RAICES IGUALES

X1= -1.00000 X2= -1.00000

LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION SON:

A= 1.00000 B= 10.00000 C= 27.00000

EL DISCRIMINANTE ES NEGATIVO,POR TANTO RAICES COMPLEJAS

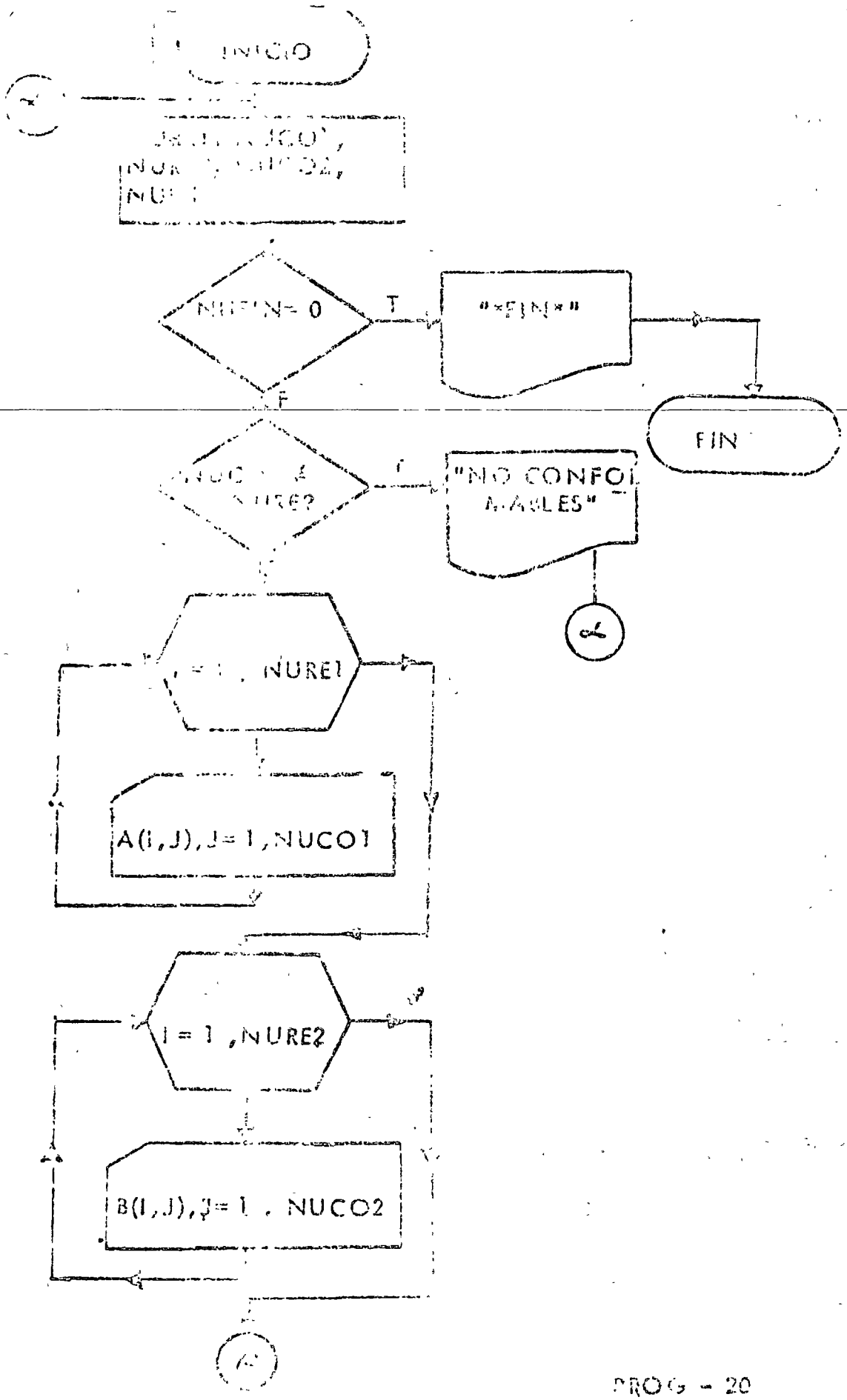
X1= -5.00000 + 1.41421 IMA X2= -5.00000 - 1.41421

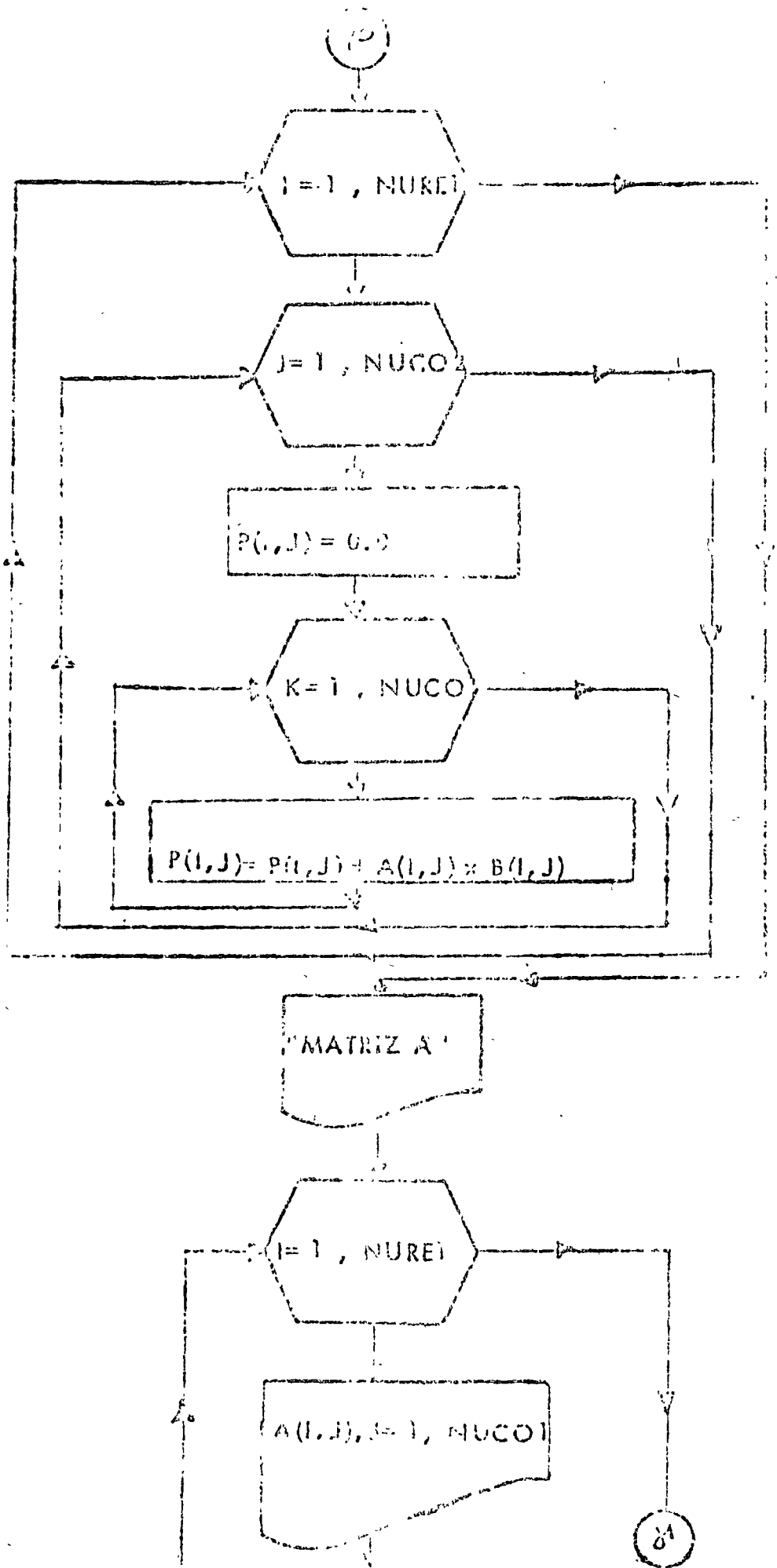
LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION SON:

A= 1.00000 B= 20.00000 C= 1.00000

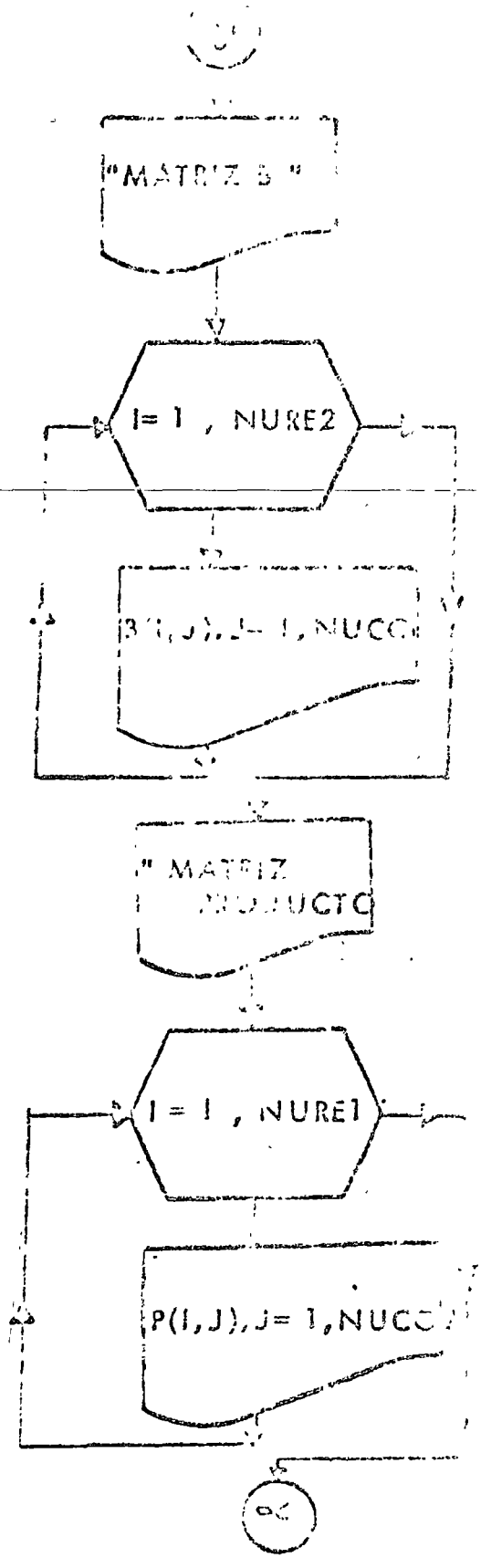
EL DISCRIMINANTE ES POSITIVO,POR TANTO RAICES REALES

X1= -0.05076 X2= -19.94924


INICIO
T
"*FIN**"
FIN
F
"NO CONFO
MABLES"
NURE1
A(I,J),J=1,NUCO1
I = 1 ,NURE2
B(I,J),J= 1 , NUCO2


I = 1 , NURE1
J= 1 , NUCO2
P(I,J) = 0.0
K= 1 , NUCO1
P(I,J)= P(I,J) + A(I,J) * B(I,J)
'MATRIZ A'
I= 1 , NURE1
A(I,J), J= 1, NUCO1

PROG - 20


"MATRIZ B "
I= 1 , NURE2
B(I,J), J= 1, NUCC
" MATRIZ
I = 1 , NURE1
P(I,J), J= 1, NUCC

```
// JOB 1
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C--------------V E I N T E ---------------
C      EL PROGRAMA REALIZA EL PRODUCTO DE DOS MATRICES DE 10 X 10 MAXIMO
C      UNA ES LA MATRIZ A(NURE1,NUCO1).
C      LA OTRA ES LA MATRIZ B(NURE2,NUCO2).
C      SE RESERVAN LUGARES EN LA MEMORIA PARA LAS MATRICES QUE SE VAN A
C      MULTIPLICAR Y PARA LA MATRIZ PRODUCTO.
       DIMENSION A(10,10),B(10,10),P(10,10)
C      FILES
            LEE=2
            IMP=3
C      FORMATOS
  100  FORMAT(I2)
  101  FORMAT(10F8.3)
  102  FORMAT(  ///,5X,'LA MATRIZ A:',//)
  103  FORMAT(  ,10(F8.3,2X),/)
  104  FORMAT(  //,5X,'LA MATRIZ B:',//)
  105  FORMAT(  //,5X,22HLA MATRIZ PRODUCTO ES:,//)
  106  FORMAT(5X,10E15.7,/)
  107  FORMAT(///,5X,'EL PRODUCTO NO SE PUEDE LLEVAR A CABO YA QUE LA
     1MATRICES NO SON CONFORMABLES',///)
  108  FORMAT(///)
  109  FORMAT(53A1,'1',*********4***)
  110  FORMAT(53A1,'0',  'IN    *)
C      LECTURA DE LOS NUMEROS DE RENGLONES Y DE COLUMNAS DE CADA MATRIZ
C      Y DEL DETECTOR NUFIN.
  199 READ(LEE,100)NURE1,NUCO1,NURE2,NUCO2,NUFIN
C      ANALISIS DEL VALOR DE NUFIN. SI VALE CERO EL PROGRAMA NO SE LLEVA
C      A CABO. DE LO CONTRARIO SI.
       IF(NUFIN.EQ.0)GO TO 1000
C        SE VE SI LAS MATRICES SON CONFORMABLES.
         IF(NUCO1.NE.NURE2)GO TO 900
C          LECTURA POR RENGLONES DE LA MATRIZ A.
           DO 200 I=1,NURE1
             READ(LEE,101)(A(I,J),J=1,NUCO1)
  200      CONTINUE
C          LECTURA POR RENGLONES DE LA MATRIZ B.
           DO 201 I=1,NURE2
             READ(LEE,101)(B(I,J),J=1,NUCO2)
  201      CONTINUE
C          SE REALIZA EL PRODUCTO
           DO 204 I=1,NURE1
             DO 203 J=1,NUCO2
               P(I,J)=0.0
               DO 202 K=1,NUCO1
                 P(I,J)=P(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
  202          CONTINUE
  203        CONTINUE
  204      CONTINUE
C          IMPRESION DE LA MATRIZ A POR RENGLONES.
           WRITE(IMP,102)
           DO 205 I=1,NURE1
             WRITE(IMP,103)(A(I,J),J=1,NUCO1)
  205      CONTINUE
C          IMPRESION DE LA MATRIZ B POR RENGLONES.
           WRITE(IMP,104)
           DO 206 I=1,NURE2
             WRITE(IMP,103)(B(I,J),J=1,NUCO1)
           CONTINUE
```

```
                    ,105)
               GO TO 207
               WRITE(IMP,1)  (F(I),I=1,7)
  207      CONTINUE
           GO TO 199
  900      CONTINUE
           WRITE(IMP,107)
           GO TO 199
 1010  CONTINUE
       WRITE(IMP,108)
       WRITE(IMP,109)
       WRITE(IMP,110)
       WRITE(IMP,109)
       CALL EXIT
       END
// A
 2 2 2 210
   [illegible]  -42.
   [illegible]    3.
195[illegible]  -.2.
   -.001    [illegible].0
 2 2 2 210
   [illegible]  [illegible].7
 -1[illegible]   32.52
1000.01    0.0
  -1.52   15.51
 2 2 2 210
 2 2 2 200
/*
```

RESULTADOS

MATRIZ A:

15.540 -42.070
0.000 -1.220

MATRIZ B:

1950.750 -12.000
0.001 5.000

LA MATRIZ PRODUCTO ES:

.3031461E+05 -.3968300E+03
-.1220400E-02 -.6100000E+01

MATRIZ A:

0.200 98.750
0.000 -12.500

MATRIZ B:

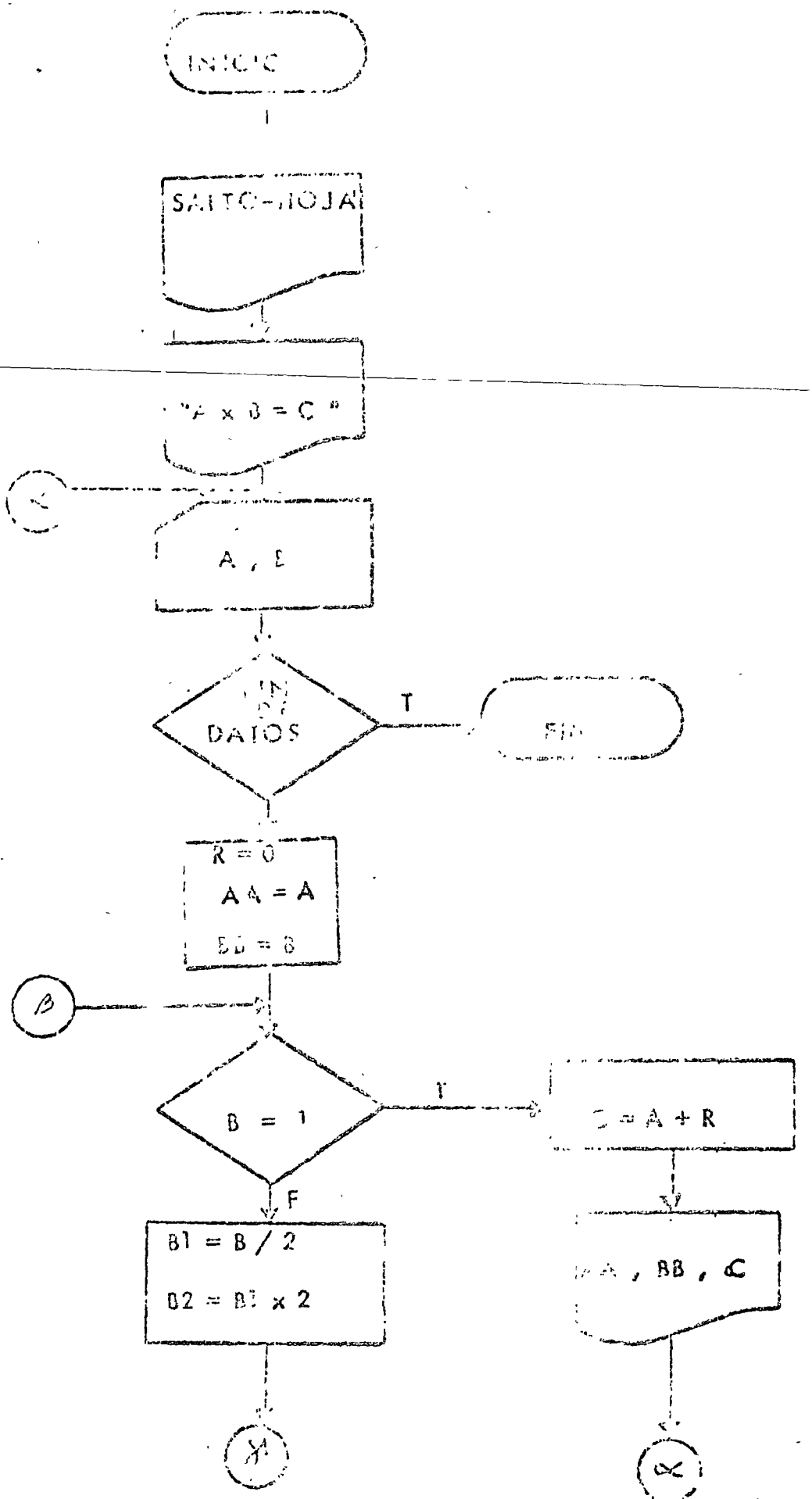
.000.010 0.000
-1.220 15.540

LA MATRIZ PRODUCTO ES:

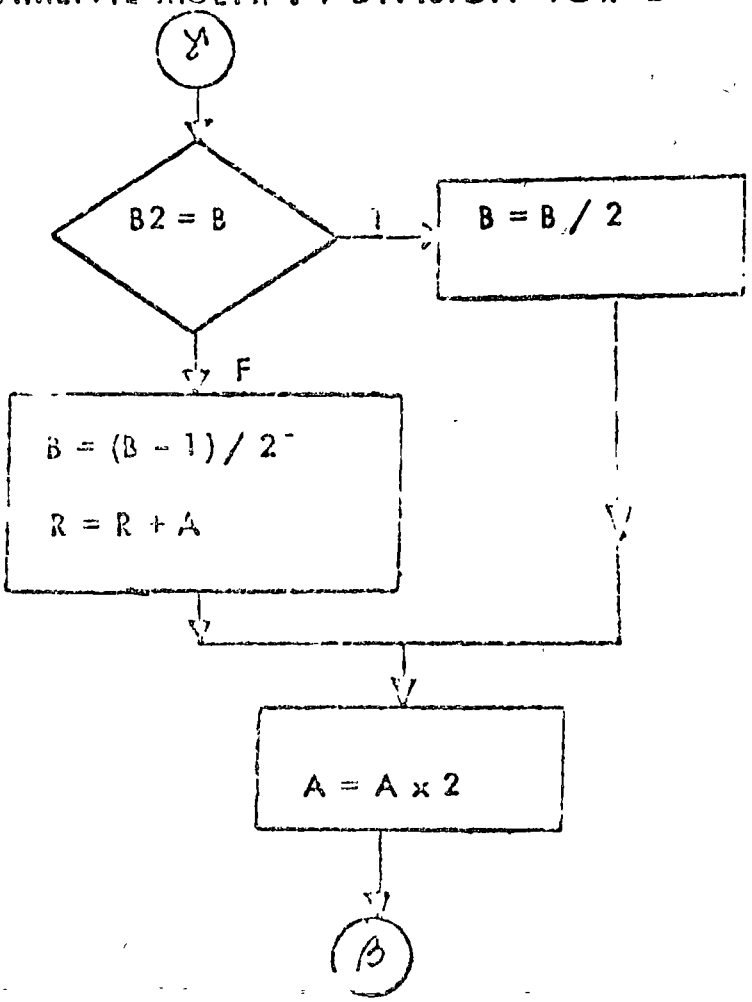
.9902000E+02 .1531613E+04
.1000000E+02 -.1938750E+03

EL PRODUCTO NO SE PUEDE LLEVAR A CABO YA QUE LASMATRICES NO SON CONFORMABLES

****
* FIN *
****


INICIO
SALTO-HOJA
"A x B = C"
A , B
FIN DE DATOS
T
R = 0
AA = A
BB = B
B
B = 1
T
C = A + R
F
B1 = B / 2
B2 = B1 x 2
AA , BB , C

" MULTIPLICACION DE DOS NUMEROS UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE MULTIP. Y DIVISION POR 2 "



```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
C--------------V E I N T I S E I S --------
C      MULTIPLICACION DE DOS NUMEROS
C           UTILIZANDO SOLO MULTIPLICACIONES Y
C           DIVISIONES POR 2
      INTEGER A,B,C,R,AA,BB
      WRITE (3,101)
  101 FORMAT (1H1)
      WRITE (3,102)
  102 FORMAT (9X,1HA,3X,1HX,4X,1HB,4X,1H=,4X,1HC)
  200 READ (2,100,END=260)A,B
  100 FORMAT (2I5)
      R=0
      AA=A
      BB=B
  210 IF (B.EQ.1) GO TO 240
            M=B/2
            M2=M*2
            IF (M2.EQ.B) GO TO 220
              ES IMPAR
              B=(B-1)/2
              R=R+A
              GO TO 230
  220       CONTINUE
C             ES PAR
              B=B/2
  230       CONTINUE
            A=A*2
            GO TO 210
  240 CONTINUE
      C=A+R
      WRITE (3,103) AA,BB,C
  103 FORMAT (3I10)
      GO TO 200
  260 CALL EXIT
      END
/* XEQ
 60 80
 19 17
 68 35
 40 11
 77 99
/*
```

RESULTADOS

A	X	B	=	C
60		80		4800
19		17		323
68		35		2380
40		11		440
77		99		7623

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 2 : ALGEBRA MATRICIAL

SEPTIEMBRE, 1977.

2.1 MATRICES

2.1.1 DEFINICIONES

DEFINICION 2.1 Una matriz m x n, es un arreglo rectangular de números reales, llamados los elementos de la matriz, los cuales están arreglados en m renglones y n columnas en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTAS:

i) Una representación simplificada del arreglo anterior es $[a_{ij}]_{mn}$.

El símbolo a_{ij} representa al elemento que está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del arreglo.

ii) Las matrices se representarán por letras mayúsculas gruesas, entonces si A es una matriz m x n, significa que $A = [a_{ij}]_{mn}$.

iii) Si m = n, entonces se dice que se tiene una matriz cuadrada de orden m.

iv) Si A es m x 1, entonces se dice que A es una matriz-columna.

v) Si A es 1 x n, entonces se dice que A es una matriz renglón.

EJEMPLOS. Las matrices A, B, C y D mostradas a continuación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tienen las siguientes características: A es 3 X 4, B es 1 X 4, (es una matriz renglón), C es 2 X 2 (es una matriz cuadrada), D es 3 X 1 (es una matriz columna)

NOTACION 1.

i) Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz m x n. El i-ésimo renglón de A, se indicará por $A_{i.}$, ie.

$A_{i.} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix}$.

ii) Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times n$. La j-ésima columna de A, se indicará por $A_{\cdot j}$, i.e.

$$A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

EJEMPLOS. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ encuentre

i) el primer renglón de A
ii) el tercer renglón de A
iii) la primera columna de A
iv) la cuarta columna de A

Solución

i) $A_{1\cdot} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$
ii) $A_{3\cdot} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

iii)
$$A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iv)
$$A_{\cdot 4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DEFINICION 2.2. Se dice que las matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall \; i = 1, 2, \ldots, m \; \text{y} \; \forall \; j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA: De la definición anterior se observa una condición para que dos matrices sean iguales es que ambas tengan el mismo número de renglones y el mismo número de columnas

EJEMPLO. En las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

se observa que :

$A = B$ porque $a_{ij} = b_{ij} \; \forall \; i = 1, 2; \quad j = 1, 2$.

$A \neq C$ porque para $i = 2$ y $j = 2$ se tiene que $a_{22} = 1 \neq c_{22} = 0$

DEFINICION 2.3. Las matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$A_{i.} = B_{i.} \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, m$$

DEFINICION 2.4. Las matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$A_{.j} = B_{.j} \quad \forall \; j = 1, 2, \ldots, n$$

TEOREMA 2.4. Las definiciones 2.2, 2.3 y 2.4 son equivalentes, ie.

DEFINICION 2.2 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.3
DEFINICION 2.2 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.4
DEFINICION 2.3 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.4

DEMOSTRACION. La demostración es simple, solo considere la definición de igualdad de matrices (cualquiera de ellas) y la noración 1. Los detalles se piden en la tarea número 1.

DEFINICION 2.5. La suma de dos matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$, indicada por $A + B$, es una matriz $C = [c_{ij}]$ definida por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA.

i) La definición anterior expresada en otros términos es

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \triangleq A + B$$

ii) De la definición 2.5, se observa que una condición necesaria para la adición de matrices es que ambas tengan igual número de renglones y de columnas.

EJEMPLO. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+5 \\ 0+7 & 0+8 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$A + C$ no se define porque tienen distinto número de columnas
$B + C$ no se define por la misma razón

TEOREMA 2.6. (PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES)

i) $A + B = B + A$ (la adición es conmutativa)
ii) $(A+B) + C = A + (B+C)$ (La adición es asociativa).

DEMOSTRACION.

i) $A + B \triangleq [a_{ij} + b_{ij}]$

Por otro lado, conocemos de la teoria de los números reales que la adición de los reales es conmutativa, ie. $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, por lo tanto,

$$A + B \overset{d}{=} [a_{ij} + b_{ij}] \Rightarrow A + B = [b_{ij} + a_{ij}] \overset{d}{=} B + A \quad \square$$
$$\Rightarrow A + B = B + A$$

ii) $$(A+B) + C = \left([a_{ij}] + [b_{ij}]\right) + [c_{ij}]$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$$

Pero también conocemos de teoria de los números que en los números reales la adición es asociativa, ie.,

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

Por lo tanto,

$$(A+B) + C = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$$
$$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$$
$$= A + (B+C) \quad \square$$

DEFINICION 2.7. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz m x n y sea k un número real. La multiplicación de una matriz A por un número real k, indicado por kA, es una matriz m x n definida por

$$kA = [ka_{ij}]$$

NOTA: A los números reales también se les llama escalares, por lo que a la multiplicación de un real por una matriz también se le llama multiplicación escalar.

EJEMPLO. Si $k = -4$ y $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$kA = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.8 (PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN REAL POR UNA MATRIZ)

i) $1A = A$
ii) $k(A+B) = kA + kB$
iii) $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$
iv) $(k_1 k_2)A = k_1 (k_2 A)$

DEMOSTRACION. Es triviql, solo aplique la definición 2.7, propiedades de números reales y definiciones o propiedades de matrices presentadas anteriormente. Intente hacerlo.

DEFINICION 2.9. Sea $A=[a_{ij}]$ $m \times n$ y sea $B=[b_{ij}]$ $n \times p$. La multiplicación de A por B, indicada por AB, es una matriz de elementos c_{ij} definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad b_{kj}$$

NOTA. Una matriz A y B se pueden multiplicar si y solo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

EJEMPLO Si

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1X7 + 2X3 & 1X4 + 2X1 \\ 3X7 + 4X3 & 3X4 + 4X1 \\ 5X7 + 6X3 & 5X4 + 6X1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 33 & 16 \\ 53 & 26 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 + 8 + 5 = 16$$

Este ejemplo muestra que la multiplicación de dos matrices no es conmutativa, ie. $AB \neq BA$.

PROPOSICION 2.10 (REPRESENTACIONES MATRICIALES DE ALGUNAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS O NUMERICAS).

1. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ y $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = xy$

2. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = xx^t$ donde $x^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

3. Sea $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ un vector de n componentes, los cuales son todos unos.

   i) Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = xu^t$ donde $u^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

   ii) $n = uu^t$

   El vector $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ es llamado el vector suma debido a la propiedad de poder representar matricialmente una suma de números x_i (ver propiedad 3 i)).

DEMOSTRACION. Es simple, sólo use definición de producto de matrices para probar que el lado izquierdo de cada igualdad dada es igual al lado derecho de la misma.

DEFINICION 2.11 Si A es mxn, B es nxp, entonces el producto de A por B, indicado por AB, es una matriz de elementos c_{ij} definidos por

$$c_{ij} = A_{i.} B_{.j}$$

PROPOSICION 2.12 Las definiciones 2.9 y 2.11 son equivalentes.

DEMOSTRACION. Debemos demostrar que: Definicion 2.9 $\Longleftrightarrow$ Definición 2.11.

Demostracion de la implicación ($\Longrightarrow$):

Si $AB = c_{ij} \Longrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ por la definición 2.9

$$\Longrightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$ por Proposición 2.10 parte 1.

$\Longleftarrow$ $c_{ij} = A_{i\cdot}B_{\cdot j}$ por la notacion 1

$\Longrightarrow$ Definición 2.11

Demostración de la ...licación ($\Longleftarrow$). Como las implicaciones de la demostración ant... por ($\Longrightarrow$) son reversibles en cada paso, entonces queda demost... que la implicacion 2.11 implica la definición 2.9 □

PROPOSICION 2.13.

i) $(AB)_{ij} = A_{i\cdot}B_{\cdot}$

ii) $(AB)_{i\cdot} = A_{i\cdot}B$

iii) $(AB)_{\cdot j} = AB_{\cdot j}$

iv) $(ABC)_{ij} = A_{i\cdot}BC$.

DEMOSTRACION.

DEMOSTRACION DE i). ...e resultado es solo un restablecimiento de la definición 2.11.

$AB = \left[c_{ij}\right] \Longrightarrow (... _{ij} = c_{ij}$

$\Longrightarrow (... _{ij} = A_{i\cdot}B_{\cdot j}$ □ porque $c_{ij} = A_{i\cdot}B_{\cdot j}$ de acuerdo con definición 2.11

DEMOSTRACION DE ii). ...mostraremos primero dos resultados

$(... B)_{1j} = (AB)_{ij}$ (*)

y

$(... B)_{i\cdot})_{1j} = (AB)_{ij}$ (**)

para luego concluir ... el lado izquierdo de (*) es igual al lado izquierdo de (**), y ... por último mostrar que los elementos del renglón $(AB)_{i\cdot}$ son de ... forma (*) y que los elementos del renglón $A_{i\cdot}B$ son de la forma ...), y así probar que $(AB)_{i\cdot} = A_{i\cdot}B$

Demostración de (*):

$(A_{i\cdot}B)_{1j} = (A_{i\cdot})_{1\cdot}B_{\cdot j}$ por la parte i) de esta proposición.

$\Longrightarrow (A_{i\cdot}B)_{1j} = A_{i\cdot}B_{\cdot j}$ porque $A_{i\cdot}$ es una matriz con un sólo renglón, por lo tanto el primer renglón de $A_{i\cdot}$ es el mismo $A_{i\cdot}$.

$\Longrightarrow (A_{i\cdot}B)_{1j} = (AB)_{ij}$ por la parte i) de esta proposición.

Demostración de (**):

$(AB)_{i.}$ es el i-ésimo renglón de AB, lo cual implica que $(AB)_{i.}$ es una matriz de un solo renglón. Entonces el primer renglón de $(AB)_{i.}$ es la misma matriz $(AB)_{i.}$, expresando esta conclusión simbolicamente se tiene que

$$((AB)_{i.})_{1.} = (AB)_{i.}$$

Por lo tanto, si tomamos la j-ésima columna de $((AB)_{i.})_{1.}$, equivale a tomar la j-ésima columna de $(AB)_{i.}$, simbolicamente

$$((AB)_{i.})_{1j} = (AB)_{ij} \quad \square$$

Una vez demostradas (*) y (**) se tiene que

$$(*) \text{ y } (**) \Rightarrow (A_{i.}B)_{1j} = ((AB)_{i.})_{ij} \quad \forall\, j \qquad (***)$$

Falta ahora demostrar que los elementos del renglón $(AB)_{i.}$ son de la forma $(A_{i.}B)_{1j}$, y que los elementos del renglón $A_{i.}B$ son de la forma $((AB)_{i.})_{1j}$ y por (***) concluir que $(AB)_{i.} = A_{i.}B$:

$$\begin{aligned}
(AB)_{i.} &= \left[(AB)_{i1} \quad (AB)_{i2} \quad \dots \quad (AB)_{in} \right] \\
&= \left[((AB)_{i.})_{11} \quad ((AB)_{i.})_{12} \dots ((AB)_{i.})_{1n} \right] && \text{por } (**) \\
&= \left[(A_{i.}B)_{11} \quad (A_{i.}B)_{12} \quad \dots \quad (A_{i.}B)_{1n} \right] && \text{por } (***) \\
&= A_{i.}B \quad \square && \text{por definición de } A_{i.}B
\end{aligned}$$

DEMOSTRACION DE iii). Es similar a la anterior. Intentela.

DEMOSTRACION DE iv).

$$\begin{aligned}
(ABC)_{ij} &= ((AB)C)_{ij} && \text{asociatividad en la multiplicación de matrices} \\
&= (AB)_{i.}C_{.j} && \text{parte i) de esta proposición.} \\
&= A_{i.}BC_{.j} \quad \square && \text{propiedad ii) de esta proposición.}
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.14 (PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE MATRICES)

i) $A(B + C) = AB + AC$

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(BC) = (AB)C$

DEMOSTRACION.

i) Debemos demostrar que el elemento (i,j) de A(B+C) es igual al elemento (i,j) de AB+AC, para todo par (i,j):

$$\{A(B+C)\}_{ij} = \sum_k a_{ik}(B+C)_{kj}$$ definición de producto de matrices

$$= \sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$ definición de edición de matrices

$$= \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_K a_{ik}c_{kj}$$ propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en los números reales

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \quad \forall\ (i,j)$$

$$= (AB + AC)_{ij} \quad \square$$

ii) Es similar a parte i).

iii) $\{A(BC)\}_{ij} = \sum_k a_{ik}(BC)_{kj}$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_k a_{ik}\left(\sum_r b_{kr}c_{rj}\right)$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_k \sum_r a_{ik}b_{kr}c_{rj}$$ asociatividad de la multiplicación en los números reales (1)

Por otro lado,

$$\{(AB)C\}_{ij} = \sum_r (AB)_{ir}c_{rj}$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_r \left(\sum_k a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj}$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_r \sum_k a_{ik}b_{kr}c_{rj}$$ asociatividad de la multiplicación en los números reales. (2)

Por lo tanto, comparando los lados derechos de (1) y (2), se demuestra que $(AB)C = A(BC)$. $\square$

DEFINICION 2.15. La matriz identidad n x n, indicada por In, es una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son todos 1 y los elementos fuera de la diagonal principal son todos cero; ie.

$$I_n = \left.\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \; n \text{ renglones}$$

n columnas

NOTA: La matriz identidad I_n, también se puede definir en términos de la delta de Kronecker, la cual se define a continuación. La delta de Kronecker, indicada por δ_{ij}, se define por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matriz identidad I_n se define en términos de δ_{ij}, por

$$I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.16. Sea $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Si I_n y I_m son matrices identidad n x n y m x m respectivamente, entonces

i) $I_n A = A$

ii) $A I_m = A$

DEMOSTRACION:

i) Si $I_n A = [C_{ij}] \Longrightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj}$ por definición de multiplicación de matrices.

$$\Longrightarrow C_{ij} = \delta_{i1} a_{1j} + \cdots + \delta_{i,i-1} a_{i-1,j} + \delta_{ii} a_{ij} + \delta_{i,i+1} a_{i+1,j} + \cdots + \delta_{in} a_{nj}$$

$$\Longrightarrow C_{ij} = a_{ij}$$

$$\Longrightarrow I_n A = [C_{ij}] = [a_{ij}] = A \quad \square$$

ii) Es similar.

EJEMPLO. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$I_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$A I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A$$

DEFINICION 2.17. Sea $A = [a_{ij}]_{mn}$. La transpuesta de A, indicada por A^t, es una matriz de elementos b_{ij} definida por

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

ie, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\ a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces la transpuesta de A, se define por

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \quad\ a_{m2} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} \quad\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTA: Dada una matriz A, la transpuesta de A, se obtiene intercambiando los renglones de A para que lleguen a ser las columnas de A^t, ie.

La primera columna de A^t es el primer renglón de A
La segunda columna de A^t es el segundo renglón de A, etc.

EJEMPLOS. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPOSICION 2.18

i) $(A_{i.})^t = (A^t)_{.i}$

ii) $(A_{.j})^t = (A^t)_{j.}$

DEMOSTRACION

i) Debemos demostrar que el lado izquierdo de la igualdad i), (L I), es igual al lado derecho de la igualdad i), LDI,

$$L\,I = (A_{i.})^t = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

$$LDI = (A^t)_{.i} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mj} & amn \end{bmatrix} \right)_{.i}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{i1} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{i2} \cdots a_{m2} \\ \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{ij} & a_{mj} \\ \\ a_{in} & a_{2n} & a_{in} & a_{mn} \end{bmatrix} \right)_{.i} = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $L\,I\,I = (A_{i.})^t = (A^t)_{.i} = L\,D\,I$, □

EJEMPLO. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ encuentre el

primer renglón de la transpuesta de A y la tercera columna de A^t.

SOLUCION

$(A^t)_{1.} = (A_{.1})^t$ por PROPOSICION 2.18 ii)

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right)^t = (-1 \quad 4 \quad 7)$$

$$(A^t)_{\cdot 3} = (A_{3\cdot})^t \qquad \text{por PROPOSICION 2.18 i)}$$

$$= (7 \quad 8 \quad 9)^t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.19 (PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA)

i) $(A^t)^t = A$

ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$

iii) $(kA)^t = KA^t$

iv) $(AB)^t = B^t A^t$

DEMOSTRACION:

i) Sea $B = [b_{ij}] = A^t$ y sea $C = [c_{ij}] = B^t = (A^t)$, debemos demostrar que $C = A$.

Demostración:

$$C = B^t \Longrightarrow c_{ij} \overset{d}{=} b_{ji} \qquad (1)$$ por definición de transpuesta

Por otro lado,

$$B = A^t \Longrightarrow b_{ij} \overset{d}{=} a_{ji} \qquad (2)$$ por definición de transpuesta

$$\Longrightarrow b_{ji} = a_{ij}$$

(2) en (1) $\Longrightarrow c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$

$$\Longrightarrow c_{ij} = a_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Longrightarrow C = A$$

$$\Longrightarrow (A^t)^t = A \quad \square.$$

2.2 PARTICION DE MATRICES Y OPERACIONES CON MATRICES PARTICIONADAS.

DEFINICION. 2.2.1 Sea A mxn. Se dice que la matriz A es una matriz particionada de acuerdo a un criterio dado, si la matriz ha sido dividida por rayas verticales y horizontales de acuerdo a dicho criterio. Si $\mathcal{B}$ es una notación para indicar el criterio con el cual la matriz A ha sido dividida, entonces la matriz particionada A (o la partición de A según $\mathcal{B}$) se indicará por $A_{\mathcal{B}}$

EJEMPLO Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si el criterio $\mathcal{B}$ para particionar A consiste en dividir A por una raya vertical entre la primera y segunda columna y por una raya horizontal entre el segundo y el tercer renglón, entonces:

$$A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Otras particiones de A generadas por otros criterios de partición podrían ser:

$$A_D = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]; \quad A_E = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

DEFINICION. 2.2.2 A las matrices que se generan por la -- partición de una matriz con un criterio B dado se les llama submatrices de A generadas por la partición de A según el criterio B

DEFINICION. 2.2.3 Sea A una matriz y B una partición sobre A. Las submatrices de A generadas por la partición B, se llaman los elementos de A_B.

NOTA. Una matriz particionada A_B se puede representar a -- través de sus elementos (ie. sus submatrices).

EJEMPLO: Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \quad y \quad A_B = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ \hline 4 & 8 & 12 \end{array}\right]$$

entonces las submatrices de A generadas por B, son:

$$A_B^{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad A_B^{12} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 10 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}; \quad A_B^{21} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}; \quad A_B^{22} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \end{bmatrix}$$

y A_B puede ser representada en términos de las submatrices en la siguiente forma:

$$A_B = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ \hline 4 & 8 & 12 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_B^{11} & A_B^{12} \\ A_B^{21} & A_B^{22} \end{bmatrix}$$

DEFINICION. 2.2.4 Si Γ es una matriz particionada, entonces el símbolo (Γ) indica la matriz obtenida de Γ eliminando sus particiones. Por lo tanto,

$$(A_B) = A$$

DEFINICION. 2.2.5 Sea A mxn y B mxn. Sea $\mathcal{B}$ el mismo criterio de partición para A y B, ie.

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} & A_{\mathcal{B}}^{12} \cdots A_{\mathcal{B}}^{1q} \\ A_{\mathcal{B}}^{21} & A_{\mathcal{B}}^{22} \cdots A_{\mathcal{B}}^{2q} \\ \vdots & \\ A_{\mathcal{B}}^{P1} & A_{\mathcal{B}}^{P2} \cdots A_{\mathcal{B}}^{Pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{\mathcal{B}}^{11} & B_{\mathcal{B}}^{12} \cdots B_{\mathcal{B}}^{1q} \\ B_{\mathcal{B}}^{21} & B_{\mathcal{B}}^{22} \cdots B_{\mathcal{B}}^{2q} \\ \vdots & \\ B_{\mathcal{B}}^{P1} & B_{\mathcal{B}}^{P2} \cdots B_{\mathcal{B}}^{Pq} \end{bmatrix}$$

La adición de las matrices particionadas $A_{\mathcal{B}}$ y $B_{\mathcal{B}}$ se define por

$$A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} + B_{\mathcal{B}}^{11} & A_{\mathcal{B}}^{12} + B_{\mathcal{B}}^{12} \cdots & A_{\mathcal{B}}^{1q} + B_{\mathcal{B}}^{1q} \\ A_{\mathcal{B}}^{21} + B_{\mathcal{B}}^{21} & A_{\mathcal{B}}^{22} + B_{\mathcal{B}}^{22} \cdots & A_{\mathcal{B}}^{2q} + B_{\mathcal{B}}^{2q} \\ \vdots & & \\ A_{\mathcal{B}}^{P1} + B_{\mathcal{B}}^{P2} & A_{\mathcal{B}}^{P2} + B_{\mathcal{B}}^{P2} \cdots & A_{\mathcal{B}}^{Pq} + B_{\mathcal{B}}^{Pq} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO Si

$$A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad B_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entonces

$$A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

TEOREMA 2.2.6 (PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES - PARTICIONADAS).

i) $A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = (A + B)_{\mathcal{B}}$

ii) $A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}} + A_{\mathcal{B}}$

iii) $A_{\mathcal{B}} + (B_{\mathcal{B}} + C_{\mathcal{B}}) = (A_{\mathcal{B}} + A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}}) + C_{\mathcal{B}}$

DEFINICION. 2.2.7 Sea A mxn y B nxt. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ particiones aplicadas a A y B respectivamente, ie.

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} & A_{\mathcal{B}}^{12} & \cdots & A_{\mathcal{B}}^{1q} \\ A_{\mathcal{B}}^{21} & A_{\mathcal{B}}^{22} & \cdots & A_{\mathcal{B}}^{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{\mathcal{B}}^{p1} & A_{\mathcal{B}}^{p2} & \cdots & A_{\mathcal{B}}^{pq} \end{bmatrix}; \quad B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} B_{\mathcal{D}}^{11} & B_{\mathcal{D}}^{12} & \cdots & B_{\mathcal{D}}^{1s} \\ B_{\mathcal{D}}^{21} & B_{\mathcal{D}}^{22} & \cdots & B_{\mathcal{D}}^{2s} \\ \vdots & & & \\ B_{\mathcal{D}}^{r1} & B_{\mathcal{D}}^{r2} & \cdots & B_{\mathcal{D}}^{rs} \end{bmatrix}$$

Si $q = r$ y si cada producto

$$A_{\mathcal{B}}^{ik} \quad B_{\mathcal{D}}^{kj} \quad (i = 1,\ldots,p;\ j = 1,\ldots,s;\ k = 1,\ldots,q)$$

está definido, entonces el producto $A_{\mathcal{B}}$ $B_{\mathcal{D}}$ se define como una matriz particionada de p renglones y s columnas

cuyo elemento (i, j) es

$$\sum_{k=1}^{q} A^{ik} B^{kj} \quad (i = 1,\ldots, p;\ j=1,\ldots,s)$$

ie

$$A_{\beta}\, B_{\delta} = \begin{bmatrix} {}^{11}A_{\beta} & {}^{12}A_{\beta} \cdots & {}^{1q}A_{\beta} \\ {}^{21}A_{\beta} & {}^{22}A_{\beta} \cdots & {}^{2q}A_{\beta} \\ \vdots & & \\ {}^{p1}A_{\beta} & {}^{p2}A_{\beta} \cdots & {}^{pq}A_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{11}B_{\delta} & {}^{12}B_{\delta} \cdots & {}^{1s}B_{\delta} \\ {}^{21}B_{\delta} & {}^{22}B_{\delta} \cdots & {}^{2s}B_{\delta} \\ \vdots & & \\ {}^{r1}B_{\delta} & {}^{r2}B_{\delta} \cdots & {}^{rs}B_{\delta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ({}^{11}A_{\beta}\ {}^{11}B_{\delta} + \ldots + {}^{1q}A_{\beta}\ {}^{r1}B_{\delta}) & ({}^{11}A_{\beta}\ {}^{12}B_{\delta} + \ldots + {}^{1q}A_{\beta}\ {}^{r2}B_{\delta}) & ({}^{11}A_{\beta}\ {}^{1s}B_{\delta} + \ldots + {}^{1q}A_{\beta}\ {}^{rs}B_{\delta}) \\ ({}^{21}A_{\beta}\ {}^{11}B_{\delta} + \ldots + {}^{1q}A_{\beta}\ {}^{r1}B_{\delta}) & ({}^{21}A_{\beta}\ {}^{12}B_{\delta} + \ldots + {}^{2q}A_{\beta}\ {}^{r2}B_{\delta}) & ({}^{21}A_{\beta}\ {}^{1s}B_{\delta} + \ldots + {}^{2q}A_{\beta}\ {}^{rs}B_{\delta}) \\ \vdots & & \\ ({}^{p1}A_{\beta}\ {}^{11}B_{\delta} + \ldots + {}^{pq}A_{\beta}\ {}^{r1}B_{\delta}) & ({}^{p1}A_{\beta}\ {}^{12}B_{\delta} + \ldots + {}^{pq}A_{\beta}\ {}^{r2}B_{\delta}) & ({}^{p1}A_{\beta}\ {}^{1s}B_{\delta} + \ldots + {}^{pq}A_{\beta}\ {}^{rs}B_{\delta}) \end{bmatrix}$$

EJEMPLO. Si

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} & A_{\mathcal{B}}^{12} \\ A_{\mathcal{B}}^{21} & A_{\mathcal{B}}^{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]; \quad B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} B_{\mathcal{D}}^{11} \\ B_{\mathcal{D}}^{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 \end{array}\right]$$

entonces

$$A_{\mathcal{B}}\, B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} B_{\mathcal{D}}^{11} + A_{\mathcal{B}}^{12} B_{\mathcal{D}}^{21} \\ A_{\mathcal{B}}^{21} B_{\mathcal{D}}^{11} + A_{\mathcal{B}}^{22} B_{\mathcal{D}}^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 32 & 24 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 14 & 10 \\ 32 & 24 \\ \hdashline 6 & 5 \\ 11 & 8 \end{array}\right]$$

EJEMPLO

$$A_B \quad B_D = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2.4 INVERSA DE UNA MATRIZ.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

DEFINICION 2.4.1 Sea A una matriz cuadrada n x n. Si existe una matriz B n x n tal que

$$A\,B = I_{nn}$$

y $$B\,A = I_{nn}$$

entonces B es llamada la inversa de A. A la matriz B se le indicará por A^{-1}, ie, la inversa de A, indicada por A^{-1}, es una matriz tal que

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_{nn}$$

NOTA. Si para una matriz A no es posible encontrar una matriz A^{-1} que satisfaga la definición anterior, entonces se dice que A no tiene inversa o que su inversa no existe.

TEOREMA 2.4.2 (PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA). Sean A y B matrices n x n y sean A^{-1} y B^{-1} sus respectivas inversas. Se afirma que :

i) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

DEMOSTRACION DE i). Para que $B^{-1}\,A^{-1}$ sea la inversa de AB, debe satisfacer que

$$(B^{-1}\,A^{-1})\,(A\,B) = I_{nn}$$

y $$(A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = I_{nn}$$

las demostraciones de estas dos condiciones se presenta en las siguientes demandas.

DEMANDA 1. $(B^{-1}\,A^{-1})\,(AB) = I_{nn}$

DEMOSTRACION

$(B^{-1}\,A^{-1})\,(AB) = (B^{-1}\,A^{-1}\,A)\,B$ por asociatividad en la multiplicacion de matrices.

$= B^{-1}\,(A^{-1}\,A)\,B$ por asociatividad de en la multiplicación de matrices.

$= B^{-1}\,I_{nn}\,B$

$= B^{-1}\,B = I_{nn}$ □

DEMANDA 2. $(AB)\,(B^{-1}\,A) = I_{nn}$

DEMOSTRACION. Es similar, a la anterior, ie.

$(AB)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = (A\,B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I_{nn}\,A^{-1}$

$= A\,A^{-1} = I_{nn}$ □

DEMOSTRACION DE ii) Debemos demostrar que

$$A^{-1}\,(A^{-1})^{-1} = I_{nn}$$

y $$(A^{-1})^{-1}\,A^{-1} = I_{nn}$$

La demostración es trevial, ya que conocemos que para cualquier matriz B con inversa, se debe satisfacer que

$$B\,B^{-1} = B^{-1}\,B = I_{nn}$$

Por lo tanto, si hacemos $B = A^{-1}$,

$$(A^{-1})\,(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}\,(A^{-1}) = I_{nn} \quad \square$$

DEMOSTRACION DE iii).

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{nn} \rightarrow (AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_{nn}^t$

$\rightarrow (A^{-1})^t\, A^t = A^t (A^{-1})^t = I_{nn}$ Teorema 2.19 iv) (pág. 13).

Si $B = (A^{-1})^t \rightarrow B\,A^t = A^t\,B = I_{nn}$

Por lo tanto la inversa de A^t es B por definición de inversa. Pero $B = (A^{-1})$ entonces la inversa de A^t es $(A^{-1})^t$, ie $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ $\square$.

TEOREMA 2.4.3 (INVERSA DE UNA MATRIZ 2 X2).

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

donde $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

DEMOSTRACION. Suponga que

$$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

es la inversa de A, entonces $AB = I$, ó sea

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}w + a_{12}y & a_{11}x + a_{12}z \\ a_{21}w + a_{22}y & a_{21}x + a_{22}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}w + a_{12}y &= 1 \\ a_{21}w + a_{22}y &= 0 \\ a_{11}x + a_{12}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}z &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo en las variables w, x, y z, se tiene que

$$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{22}\ a_{11} - a_{12}\ a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{22}\ a_{11} - a_{12}\ a_{21}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}\ a_{11} - a_{12}\ a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{22}\ a_{11} - a_{12}\ a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{a_{22}\ a_{11} - a_{12}\ a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \square$$

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.4.4 (INVERSION DE MATRICES POR PARTICIONES). Si A es una matriz n x n, particionada de acuerdo al siguiente criterio

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{p1} & & a_{pp} & a_{p,p+1} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,p} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix};$$

M es p x p,
L es q x p
R es p x q
N es q x q
p + q = n

y N^{-1} existe entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

donde

$\mu = (M - R\,N^{-1}L)^{-1}$ es p x p
$\lambda = -\,N^{-1}\,L\,\mu$ es q x p
$\rho = -\,\mu\,R\,N^{-1}$ es p x q
$\nu = N^{-1} - N^{-1}\,L\,\rho$ es q x q

DEMOSTRACION

Suponga que la inversa de A es una matriz particionada de la forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

donde μ ρ λ y ν son submatrices de A^{-1} que tienen las siguientes dimensiones:

μ es p x p
λ es q x p
ρ es p x q
ν es q x q

Por definición de inversa, se tiene que

$$A\,A^{-1} = I_{nn}$$

Esta igualdad expresada en forma particionada presenta la siguiente forma

$$\left[\begin{array}{cc} M & R \\ L & N \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & O_{pq} \\ \hline O_{qp} & I_{qq} \end{array}\right]$$

Realizando el producto de las matrices particionadas del lado izquierdo de la igualdad anterior se tiene que

$$\left[\begin{array}{ll} M\mu + R\lambda & M\rho + R\nu \\ L\mu + N\lambda & L\rho + N\nu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & O_{p\times q} \\ \hline O_{q\times p} & I_{qq} \end{array}\right]$$

$$M\mu + R\lambda = I_{pp} \qquad (2.4.1)$$

$$\rightarrow \quad L\mu + N\lambda = O_{qp} \qquad (2.4.2)$$

$$M\rho + R\nu = O_{pq} \qquad (2.4.3)$$

$$L\rho + N\nu = I_{qq} \qquad (2.4.4)$$

(2.4.2) $\rightarrow$ $\lambda = -N^{-1}L\mu$ □ (2.4.5)

(2.4.5) en (2.4.1) $\rightarrow M\mu + R(-N^{-1}L\mu) = I_{pp}$

$\rightarrow (M - RN^{-1}L)\mu = I_{pp}$

$\rightarrow \mu = (M - RN^{-1}L)^{-1} I_{pp}$

$\rightarrow \mu = (M - RN^{-1}L)^{-1}$ □ (2.4.6)

(2.4.4) $\rightarrow \nu = N^{-1} - N^{-1}L\rho$ □ (2.4.7)

(2.4.7) en (2.4.3) $\rightarrow M\rho + R[N^{-1} - N^{-1}L\rho] = O_{pq}$

$\rightarrow [M - RN^{-1}L]\rho = -RN^{-1}$

$\rightarrow \rho = -[M - RN^{-1}L]^{-1} RN^{-1}$

$\rightarrow \rho = -\mu RN^{-1}$ □

EJEMPLO. Si $A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$

encuentre su inversa por particiones.

SOLUCION. Una posible partición de A es

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} M & R \\ L & N \end{array}\right]$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Ya que N^{-1} existe entonces la partición elegida es apropiada y podemos aplicar el método por particiones de acuerdo al teorema anterior.

$$\mu = (M - R\,N^{-1}\,L)^{-1} = (1 - \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix})^{-1}$$

$$\mu = (1 - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix})^{-1} = (1 - 3/2)^{-1} = (-1/2)^{-1}$$

$$\mu = -2$$

$$\lambda = -N^{-1}\,L\,\mu = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (-2) = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = -\,\mu\,RN^{-1} = -\,(-2) \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nu = N^{-1} - N^{-1}\,L\,\rho = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\nu = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Otra posible solución es eligiendo la siguiente partición

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}$$

$$N = 6 \rightarrow N^{-1} = 1/6$$

Ya que N^{-1} existe, entonces de acuerdo al teorema anterior se tiene

$$\mu = (M - RN^{-1}\,L)^{-1} = (\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} (1/6) \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix})^{-1}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -N^{-1}\,L\,\mu = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. ALGEBRA MATRICIAL

2.1 Introducción

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en "m" renglones y "n" columnas, si a la matriz se le denota por la letra $\underline{A}$, entonces al elemento del "i-ésimo" renglón y de la "j-ésima" columna se le representará por el símbolo a_{ij}. Generalmente una matriz se representa mediante paréntesis cuadrados como se muestra a continuación:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Los elementos que componen una matriz pueden ser de diversos tipos: números reales, números complejos, funciones en el dominio del tiempo, etc..

Al ser una matriz un arreglo ordenado de elementos, permite que al aplicar cierta metodología a dicho arreglo se obtenga una serie de resultados que responden a las interrogantes por las que se originó el arreglo; entre algunos de los procesos en los que se utilizan arreglos matriciales se tiene: jerarquización de actividades, almacenamiento de datos, inventarios, representación de sistemas dinámicos, sistemas de ecuaciones, etc..

Existen ciertas distribuciones típicas de los elementos de una matriz y de acuerdo a ellas se clasifica a las matrices en diferentes tipos, entre los que se tienen:

Matriz Cuadrada

Es una matriz en la que el número de renglones es igual al número de columnas, es decir, m=n. Por ejemplo:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Matriz Nula

Es una matriz de orden cualquiera, en la que todos los elementos son nulos; por ejemplo:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Se acostumbra denotarla por el símbolo $\underline{0}$.

Matriz Identidad

Es una matriz cuadrada en la cual los elementos de la diagonal principal son unitarios y el resto son nulos, es decir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases}$$

Se suele denotarla como $\underline{I}_n$ *donde "n" indica el orden de la matriz y al símbolo* δ_{ij} *se le conoce como delta de Kronecker. Por ejemplo:*

$$\underline{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Matriz Diagonal

Es una matriz cuadrada en la que los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos, es decir:

$$a_{ij} = 0 \quad si \ i \neq j \qquad (2.5)$$

Un ejemplo de este tipo de matriz sería:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & sent \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Matriz Transpuesta

Es una matriz cuadrada que se obtiene a partir de una matriz dada $\underline{A}$ *intercambiando renglones con columnas. Se le denota con el símbolo* $\underline{A}^T$ *y se cumple que:*

$$a^T_{ij} = a_{ji} \qquad (2.7)$$

Matriz Simétrica

Es una matriz cuadrada $\underline{B}$ *para la que se cumple:*

$$\underline{B} = \underline{B}^T \qquad (2.8)$$

o equivalentemente:

$$b_{ij} = b_{ji} \qquad (2.9)$$

Entre las matrices se definen dos operaciones básicas:
-suma o resta de matrices,
-multiplicación matricial.

2.2 Suma Matricial

2.2.1 Objeto

Obtener la suma de dos matrices de igual orden, o sea:

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \qquad (2.10)$$

2.2.2 Método

Para poder efectuar la suma de dos matrices ($\underline{A}+\underline{B}$) se requiere que sean conformables para la suma, lo cual implica que el orden de las dos matrices es igual. En otras palabras:
si $\underline{A}$ es de orden (mxn)
y $\underline{B}$ es de orden (rxs)
la suma $\underline{C}=\underline{A}+\underline{B}$ es posible solo si $m=r$ y $n=s$.

Los elementos de la matriz suma están dados por la siguiente relación:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (2.11)$$

El restar dos matrices equivale a cambiar el signo de todos los elementos de una de ellas y efectuar la suma, esto es:

$$\underline{W} = \underline{X} - \underline{Y} = \underline{X} + (-\underline{Y}) \qquad (2.12)$$

2.2.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE SUMAT(A,B,C,N,M), esta subrutina efectua la suma matricial, el programa principal lee e imprime resultados.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina SUMAT:

N	cantidad de renglones de cada una de las matrices que se desea sumar.
M	cantidad de columnas de cada una de las matrices que se desea sumar.
A(I,J)	matriz sumando de orden NxM
B(I,J)	matriz sumando de orden NxM
C(I,J)	matriz suma

Para el programa principal:

N	cantidad de renglones de las matrices
M	cantidad de columnas de las matrices
A(I,J)	matriz sumando de orden NxM
B(I,J)	matriz sumando de orden NxM
C(I,J)	matriz suma

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION deberá ser modificada tanto to en el programa principal como en la subrutina cuando:

$N > 10$ y/o $M \geq 10$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(2I5)	N, M
2	(8F10.0)	A(I,J), se dan los elementos de la matriz renglón por renglón. Emplear tantas tarjetas como se requiera.
3	(8F10.0)	B(I,J), igual que para la matriz A.
.		
.		
.		
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques

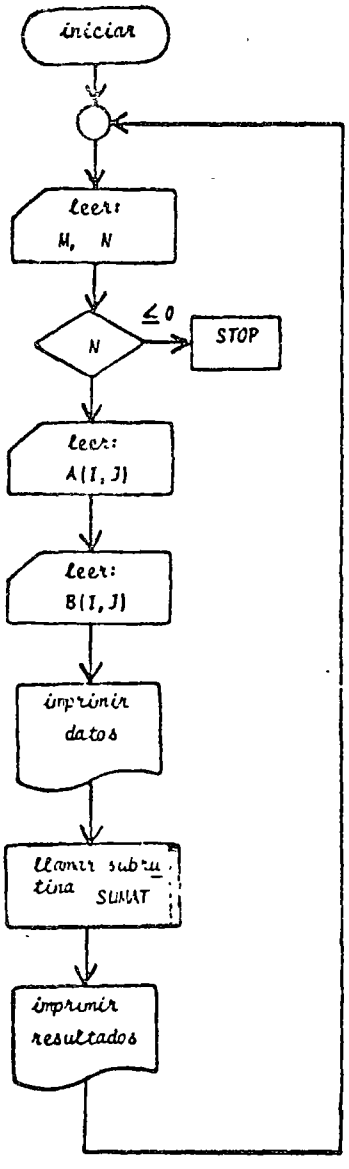


Fig. 2.1 Diagrama de bloques para el programa principal

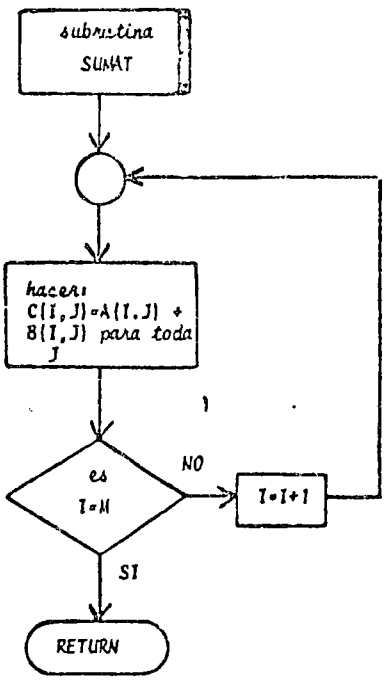


Fig. 2.2 Diagrama de bloques para la subrutina SUMAT.

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA EFECTUAR LA SUMA DE DOS MATRICES
C     EL SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS ES
C     M=CANTIDAD DE RENGLONES DE LAS MATRICES
C     N=CANTIDAD DE COLUMNAS DE LAS MATRICES
C     A Y B=MATRICES QUE SERAN SUMADAS
C     C=MATRIZ SUMA
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
C     LECTURA DE DATOS
C
    1 READ(5,100) M,N
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 DO 4 I=1,M
    4 READ(5,150) (A(I,J),J=1,N)
      DO 5 I=1,M
    5 READ(5,150) (B(I,J),J=1,N)
C
C     IMPRESION DE DATOS
C
      WRITE(6,200)
      DO 6 I=1,M
    6 WRITE(6,250) (A(I,J),J=1,N)
      WRITE(6,300)
      DO 7 I=1,M
    7 WRITE(6,250) (B(I,J),J=1,N)
C
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA EFECTUAR LA SUMA
C
      CALL SUMAT(A,B,C,M,N)
C
C     IMPRESION DE RESULTADOS
C
      WRITE(6,350)
      DO 8 I=1,M
    8 WRITE(6,250) (C(I,J),J=1,N)
      GO TO 1
C
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
C
  100 FORMAT(2I5)
  150 FORMAT(7F10.0)
  200 FORMAT(1H1,5(/),10X,'LAS MATRICES POR SUMAR SON',3(/),10X,'MATRIZ
     1A',/)
  250 FORMAT(/,3X,10(E10.3,2X))
  300 FORMAT(3(/),10X,'MATRIZ B',/)
  350 FORMAT(6(/),10X,'MATRIZ SUMA',/)
      END
```

Fig. 2.3 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE SUMAT(A,B,C,M,N)
C     SUBRUTINA PARA SUMAR MATRICES
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     A Y B=MATRICES QUE SE DESEA SUMAR
C     M=CANTIDAD DE RENGLONES DE LAS MATRICES
C     N=CANTIDAD DE COLUMNAS DE LAS MATRICES
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
      DO 1 I=1,M
      DO 1 J=1,N
    1 C(I,J)=A(I,J) + B(I,J)
      RETURN
      END
```

Fig. 2.4 Listado de la subrutina SUMAT

2.2.4 Ejemplo

En una tienda de artículos eléctricos se venden resistencias eléctricas de 1/4, 1/2 y 1 Watt de potencia en seis diferentes valores resistivos.

Si las existencias un viernes por la tarde son:

	1/4	1/2	1
100 Ω	200	380	275
150 Ω	400	250	275
1.0 K	500	175	325
1.5 K	800	225	150
10.0 K	600	380	180
15.0 K	550	250	220

y el sábado se recibe una remesa con las siguientes caractenísticas:

	1/4	1/2	1
100 Ω	80	90	50
150 Ω	90	100	55
1.0 K	75	90	60
1.5 K	65	95	55
10.0 K	80	100	60
15.0 K	75	110	60

Determine las resistencias que tendrá en inventario el establecimiento el lunes por la mañana dado que ni el sábado ni el domingo hubo ventas.

* SOLUCION

TABLA 2.1 Datos para el problema del ejemplo 2.2.4

N=6

M=3

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 200 & 380 & 275 \\ 400 & 250 & 275 \\ 500 & 175 & 325 \\ 800 & 225 & 150 \\ 600 & 380 & 180 \\ 550 & 250 & 220 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 80 & 90 & 50 \\ 90 & 100 & 55 \\ 75 & 90 & 60 \\ 65 & 95 & 55 \\ 80 & 100 & 60 \\ 75 & 110 & 60 \end{bmatrix}$$

TABLA 2.2 *Resultados del problema del ejemplo 2.2.4*

LAS MATRICES POR SUMAR SON

MATRIZ A

.200E+03	.340E+03	.275E+03
.400E+03	.250E+03	.275E+03
.500E+03	.175E+03	.325E+03
.800E+03	.225E+03	.150E+03
.600E+03	.390E+03	.180E+03
.550E+03	.250E+03	.220E+03

MATRIZ B

.800E+02	.900E+02	.500E+02
.900E+02	.100E+03	.550E+02
.750E+02	.900E+02	.600E+02
.650E+02	.950E+02	.550E+02
.800E+02	.100E+03	.600E+02
.750E+02	.110E+03	.600E+02

MATRIZ SUMA

.280E+03	.470E+03	.325E+03
.490E+03	.350E+03	.330E+03
.575E+03	.265E+03	.345E+03
.865E+03	.320E+03	.205E+03
.680E+03	.480E+03	.240E+03
.625E+03	.360E+03	.280E+03

2.3 Multiplicación Matricial

2.3.1 Objeto

Dadas dos matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$, obtener el producto matricial $\underline{C}$ de la forma:

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} \qquad (2.13)$$

2.3.2 Método

Para efectuar el producto entre dos matrices ($\underline{A}x\underline{B}$) se requiere que las matrices sean conformables para la multiplicación, lo que equivale a que el número de columnas de la matriz premultiplicadora ($\underline{A}$) sea igual al número de renglones de la postmultiplicadora ($\underline{B}$), es decir:
si $\underline{A}$ es de orden (mxn)
y $\underline{B}$ es de orden (rxs)
el producto matricial $\underline{AB}$ será posible solo si n=r y el orden de la matriz producto sera (mxs).

Si la matriz $\underline{C}$ representa la matriz resultante del producto matricial $\underline{AB}$, entonces el elemento c_{ij} está dado por:

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} \quad , \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,s \end{matrix} \qquad (2.14)$$

Es importante hacer notar que el producto matricial no es conmutativo, esto es:

$$\underline{A} \times \underline{B} \neq \underline{B} \times \underline{A}$$

2.3.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE MULTMA(A,B,N,M,L,X), esta subrutina efectua el producto matricial $\underline{A}x\underline{B}$. El programa principal se emplea para la lectura de datos e impresión de resultados.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina MULTMA:

A(I,J) matriz premultiplicadora de orden NxM

B(I,J) matriz postmultiplicadora de orden MxL
X(I,J) matriz producto de orden NxL

Para el programa principal:

A(I,J) matriz premultiplicadora de orden NxM
B(I,J) matriz postmultiplicadora de orden MxL
X(I,J) matriz producto de orden NxL

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION deberá ser modificada tanto en el programa principal como en la subrutina cuando:

$N > 10$ y/o $M > 10$ y/o $L > 10$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(3I5)	N,M,L
2	(8F10.0)	A(I,J), los elementos de la matriz se dan renglón por renglón. Emplear la cantidad de tarjetas que sea necesaria.
3	(8F10.0)	B(I,J), igual que en el caso anterior.
.		
.		
.		
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información

e) Diagrama de bloques:

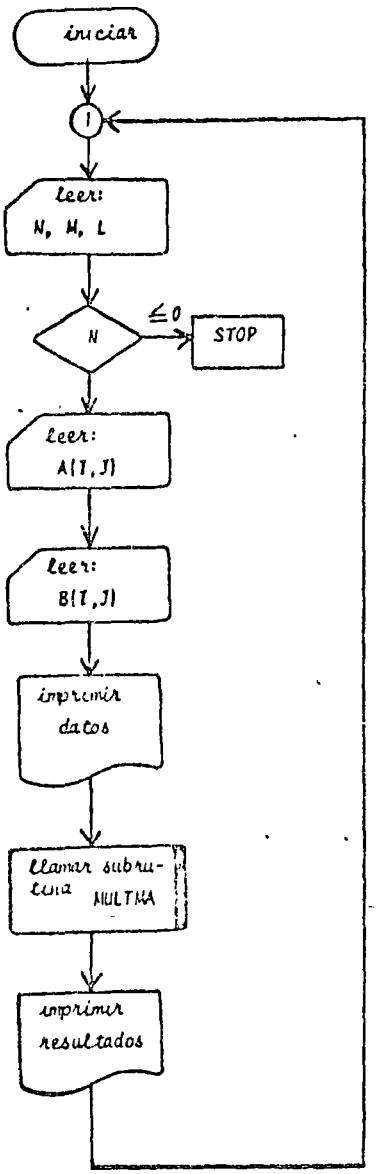


Fig. 2.5 Diagrama de bloques para el programa principal

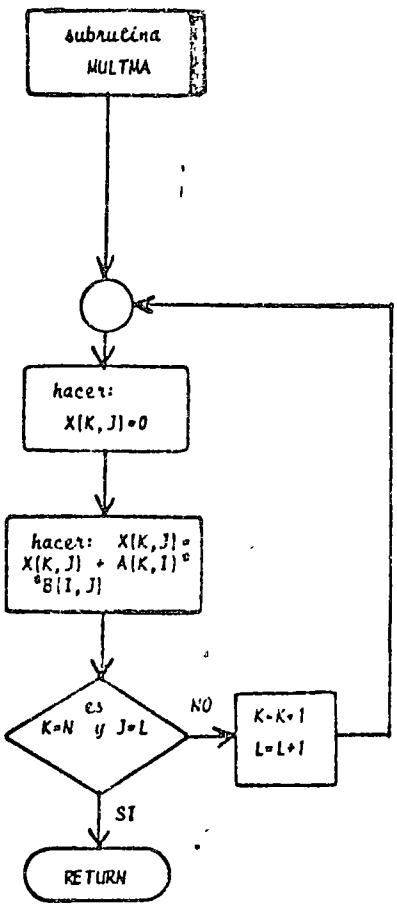


Fig. 2.6 Diagrama de bloques para la subrutina MULTMA

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA EFECTUAR PRODUCTOS MATRICIALES
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     A=MATRIZ PREMULTIPLICADORA DE ORDEN (NXM)
C     B=MATRIZ POSTMULTIPLICADORA DE ORDEN (MXL)
C     X=MATRIZ PRODUCTO DE ORDEN (NXL)

      DIMENSION A(10,10),B(10,10),X(10,10)
      IR=5
      IW=6
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(IR,10) N,M,L
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 DO 4 I=1,N
    4 READ(IR,11) (A(I,J),J=1,M)
      DO 5 I=1,M
    5 READ(IR,11) (B(I,J),J=1,L)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(IW,12)
      DO 6 I=1,N
    6 WRITE(IW,13) (A(I,J),J=1,M)
      WRITE(IW,14)
      DO 7 I=1,M
    7 WRITE(IW,13) (B(I,J),J=1,L)
      WRITE(IW,15)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA EFECTUAR PRODUCTO MATRICIAL
      CALL MULTMA(A,B,N,M,L,X)
C     IMPRESION DE RESULTADOS
      DO 8 I=1,N
    8 WRITE(IW,13) (X(I,J),J=1,L)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
   10 FORMAT (3I5)
   11 FORMAT(8F10.0)
   12  FORMAT(4(/),5X,'MATRIZ A',/)
   13 FORMAT(/,2X,10(E10.3,1X))
   14 FORMAT(4(/),5X,'MATRIZ B',/)
   15 FORMAT(4(/),5X,'MATRIZ PRODUCTO',/)
      END
```

Fig.2.7 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE MULTMA(A,B,N,M,L,X)
C
C     SUBRUTINA PARA MULTIPLICAR DOS MATRICES
C     EL SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS ES
C     A=MATRIZ PREMULTIPLICADORA DE ORDEN (N,M)
C     B=MATRIZ POSTMULTIPLICADORA DE ORDEN (M,L)
C     X=MATRIZ PRODUCTO
C
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),X(10,10)
      DO 1 J=1,L
      DO 1 K=1,N
      X(K,J)=0.0
      DO 1 I=1,M
    1 X(K,J)=X(K,J) + A(K,I)*B(I,J)
      RETURN
      END
```

Fig. 2.8 Listado de la subrutina MULTMA

2.3.4 Ejemplo

Cuatro componentes de un automóvil requieren como materia prima de hule, aluminio y acero. Las unidades que se requieren de cada material para formar una unidad de cada componente del automóvil se proporcionan a continuación:

	hule	aluminio	acero
comp. 1	8	5	3
comp. 2	3	4	5
comp. 3	20	2	4
comp. 4	1	8	10

si los costos unitarios de cada material son:

	$
hule	25.00
aluminio	30.00
acero	40.00

Determine el costo total de cada componente debido a la materia prima de que está compuesto.

*SOLUCION

TABLA 2.3 Datos para el problema del ejemplo 2.3.4

N = 4

M = 3

L = 1

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & 5. & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 20 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

TABLA 2.4 Resultados del problema del ejemplo 2.3.4

MATRIZ A

.800E+01	.500E+01	.300E+01
.300E+01	.400E+01	.50CE+01
.200E+02	.200E+01	.400E+01
.100E+01	.800E+01	.10CE+02

MATRIZ B

.250E+02
.300E+02
.400E+02

MATRIZ PRODUCTO

.470E+03
.395E+03
.720E+03
.665E+03

2.4 Inversión de Matrices

2.4.1 Objeto

Dada una matriz cuadrada $\underline{A}$ obtener su matriz inversa $\underline{A}^{-1}$.

2.4.2 Método

La matriz inversa de una matriz cuadrada $\underline{A}$ es otra matriz cuadrada que se representa por $\underline{A}^{-1}$ y que cumple la siguiente propiedad si la matriz $\underline{A}$ es de orden $(n \times n)$:

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{I}_n = \underline{A}^{-1}\,\underline{A} \qquad (2.15)$$

Se define a la matriz inversa como:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{A}^{\dagger}}{|\underline{A}|} \qquad (2.16)$$

donde $\underline{A}^{\dagger}$ se conoce como la matriz adjunta de la matriz $\underline{A}$ y $|\underline{A}|$ representa el determinante de la matriz $\underline{A}$.

De la ecuación (2.16) se infiere que para que exista la inversa de una matriz se requiere que $|\underline{A}| \neq 0$, es decir, que la matriz sea no singular.

Para la obtención numérica de la matriz inversa es necesario acudir al método de Gauss-Jordan modificado. Esto se hace debido a que para obtener $\underline{A}^{-1}$ en una computadora digital mediante la ecuación (2.16) se requiere una gran cantidad de operaciones y consecuentemente de tiempo. Para obtener la inversa de una matriz (10x10) se requieren más de 340 millones de operaciones con el método directo.

El método de Gauss-Jordan es un método de eliminación sistemática mediante el cual se transforma la matriz original $\underline{A}$ en una matriz identidad $\underline{I}_n$ y al mismo tiempo esta última se transforma en la matriz inversa $\underline{A}^{-1}$, es decir, partiendo del arreglo:

$$\left[\underline{A}_n \;\vdots\; \underline{I}_n\right] \qquad (2.17)$$

y aplicando algunas de las siguientes transformaciones al arreglo (2.17):

-intercambio de renglones,

-multiplicación de un renglón por un escalar $\lambda \neq 0$,

-suma de equimúltiplos de un renglón a otro renglón.

se llega al siguiente arreglo:

$$\left[\underline{I}_n \;\vdots\; \underline{A}_n^{-1}\right] \qquad (2.18)$$

El método parte de la suposición de que $\underline{A}$ es una matriz no singular, lo cual implica que sus columnas son vectores linealmente independientes, en caso de no serlo el método lo puede detectar; en dicha situación se presenta que todos los elementos de un renglón de la matriz $\underline{A}$ o de sus matrices transformadas, son nulos.

A fin de minimizar los errores de redondeo, la eliminación de elementos se efectua pivoteando sobre los mayores elementos que quedan en la matriz $\underline{A}$ o en las matrices obtenidas a partir de esta última por transformación; debe tenerse cuidado de no emplear como pivotes elementos de renglones que ya hayan sido utilizados como pivotes.

2.4.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE MATINV(A,N,EPS,DET), obtiene la matriz inversa de la matriz $\underline{A}$. El programa principal se emplea para la lectura de datos e impresión de resultados.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina MATINV:

A(I,J)	matriz de la que se buscará la inversa, durante el proceso se convierte en la matriz inversa.
N	orden de la matriz $\underline{A}$
EPS	criterio para determinar si el determinante de la matriz es nulo
DET	parámetro que indica si el determinante de la matriz es nulo
C(I,J)	matriz identidad que se emplea para obtener la matriz inversa
MVR(I) y MVC(I)	contadores que indican cuáles renglones y cuáles columnas de la matriz $\underline{A}$ ya fueron empleados como pivotes

RAMAX	mayor elemento de la matriz A o de sus transformaciones que se emplea como elemento pivote
TEMP	variable de localización temporal

Para el programa principal:

A(I,J)	matriz de la que se busca la inversa, durante el proceso se convierte en la matriz inversa
N	orden de la matriz A
EPS	criterio para determinar si el determinante de la matriz A es nulo.
DET	variable que indica si el determinante de A es o no nulo

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION del programa principal y de la subrutina deberá ser modificada cuando:

$N > 10$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5)	N
2	(8F10.0)	A(I,J), se proporcionan los elementos de la matriz renglón por renglón. Emplear tantas tarjetas como se requieran.
		otros paquetes de datos (opcional)
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

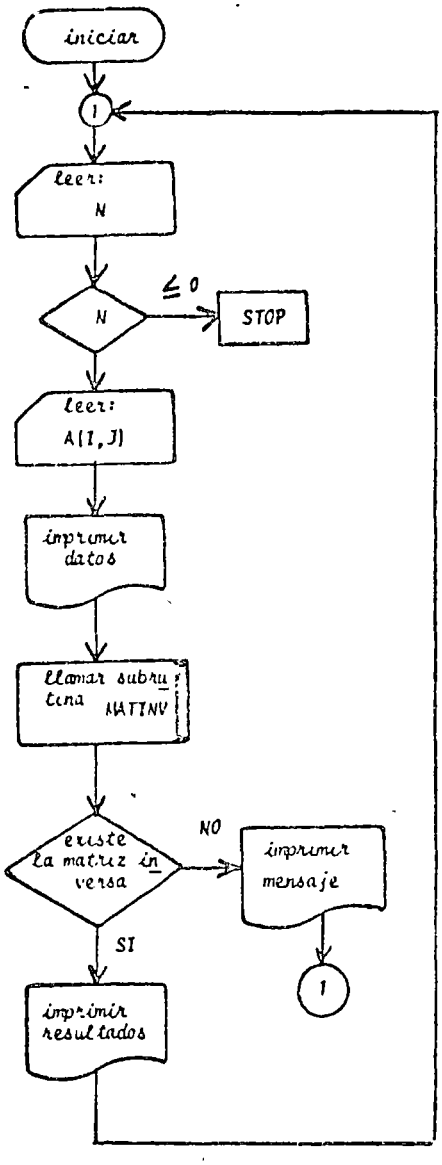


Fig. 2.9 Diagrama de bloques del programa principal

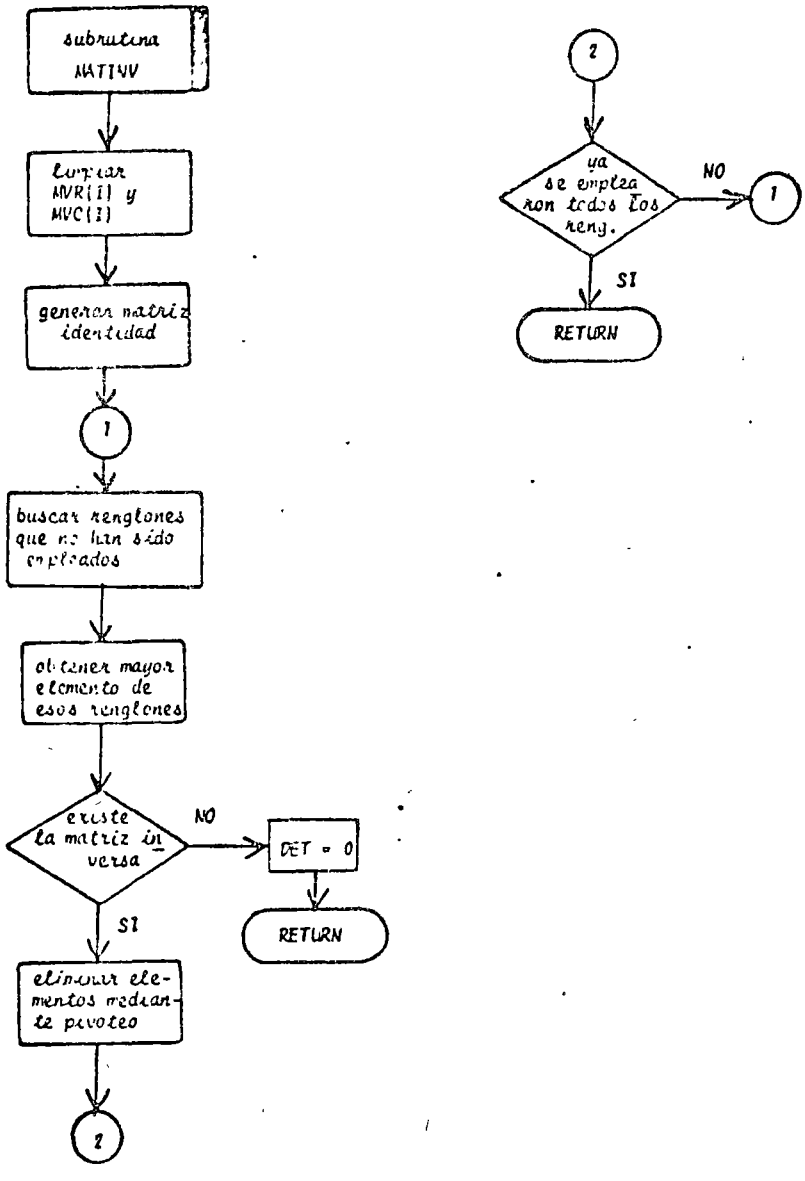


Fig. 2.10 Diagrama de bloques de la subrutina MATINV

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA INVERTIR MATRICES POR EL METODO DE GAUSS-JORDAN
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     N=ORDEN DE LA MATRIZ A
C     A=MATRIZ DE LA QUE SE BUSCA SU INVERSA
C     EPS=CRITERIO PARA DETERMINAR SI EXISTE O NO LA INVERSA DE LA MATRIZ A
C     DET=PARAMETRO QUE INDICA SI EXISTE O NO LA INVERSA DE LA MATRIZ
      DIMENSION A(10,10),C(10,10)
      IR=5
      IW=6
      EPS=0.000001
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(IR,19) N
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 DO 4 I=1,N
    4 READ(IR,20) (A(I,J),J=1,N)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(IW,21)
      DO 5 I=1,N
    5 WRITE(IW,22) (A(I,J),J=1,N)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA OBTENER LA MATRIZ INVERSA
      CALL MATINV(A,N,EPS,DET)
      IF(DET.GT.EPS) GO TO 7
      WRITE(IW,23)
      GO TO 1
    7 WRITE(IW,24)
      DO 8 I=1,N
    8 WRITE(IW,22) (A(I,J),J=1,N)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
   19 FORMAT(I5)
   20 FORMAT(8F10.0)
   21 FORMAT(4(/),5X,'MATRIZ A',//)
   22 FORMAT(/,2X,10(E10.3,1X))
   23 FORMAT(4(/),5X,'NO EXISTE LA MATRIZ INVERSA')
   24 FORMAT(4(/),5X,'INVERSA DE LA MATRIZ A')
      END
```

Fig. 2.11 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE MATINV(A,N,EPS,DET)
C
C     SUBRUTINA PARA OBTENER LA INVERSA DE UNA MATRIZ
C     EL SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS ES
C     A=MATRIZ A LA QUE SE BUSCARA SU INVERSA Y QUE DURANTE EL PROCESO
C       SE CONVIERTE EN LA MATRIZ INVERSA
C     N=ORDEN DE LA MATRIZ
C     EPS=CRITERIO PARA DETERMINAR SI EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ ES
C       NULO
C     DET=VALOR ABSOLUTO DEL DETERMINANTE DE LA MATRIZ
C     C=MATRIZ IDENTIDAD QUE SE UTILIZA PARA OBTENER LA MATRIZ INVERSA
C       POR EL METODO DE GAUSS-JORDAN MODIFICADO
C     MVR Y MVC=CONTADORES QUE INDICAN CUALES RENGLONES Y COLUMNAS YA
C       FUERON UTILIZADOS COMO PIVOTES
C
      DIMENSION A(10,10),C(10,10),MVR(10),MVC(10)
C
C     OBTENCION DE LA MATRIZ IDENTIDAD Y ACTUALIZACION DE VALORES PARA
C     INICIAR EL PROCESO
C
      DO 1 I=1,N
      MVR(I)=0
    1 MVC(I)=0
      DO 4 I=1,N
      DO 3 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 2
      C(I,J)=0.0
      GO TO 3
    2 C(I,J)=1.0
    3 CONTINUE
    4 CONTINUE
C
C     OBTENCION DE LA MATRIZ INVERSA
C
      DO 12 K=1,N
      RAMAX=0.0
      LC=0
      LR=0
      DO 6 I=1,N
      IF(MVR(I).EQ.1) GO TO 6
      DO 5 J=1,N
      IF(MVC(J).EQ.1) GO TO 5
      IF(ABS(RAMAX).GE.ABS(A(I,J))) GO TO 5
      RAMAX=A(I,J)
      LR=I
      LC=J
    5 CONTINUE
    6 CONTINUE
      DET=ABS(RAMAX)
      IF(DET.LE.EPS) GO TO 14
      IF(LR.EQ.LC) GO TO 8
      DO 7 I=1,N
      TEMP=A(LR,I)
      A(LR,I)=A(LC,I)
      A(LC,I)=TEMP
      TEMP=C(LR,I)
      C(LR,I)=C(LC,I)
    7 C(LC,I)=TEMP
    8 DO 9 I=1,N
      A(LC,I)=A(LC,I)/RAMAX
    9 C(LC,I)=C(LC,I)/RAMAX
      DO 11 I=1,N
      IF(I.EQ.LC) GO TO 11
      TEMP=A(I,LC)
      DO 10 J=1,N
      A(I,J)=A(I,J) - TEMP*A(LC,J)
   10 C(I,J)=C(I,J) - TEMP*C(LC,J)
   11 CONTINUE
      MVR(LC)=LC
      MVC(LC)=LC
   12 CONTINUE
      DO 13 I=1,N
      DO 13 J=1,N
   13 A(I,J)=C(I,J)
   14 RETURN
      END
```

Fig. 2.12 Listado de la subrutina MATINV

2.4.4 Ejemplo

Obtener la inversa de la matriz:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -20 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 30 \end{bmatrix}$$

*SOLUCION

TABLA 2.5 Datos para el problema del ejemplo 2.4.4

N=4

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -20 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 30 \end{bmatrix}$$

TABLA 2.6 Resultados del problema del ejemplo 2.4.4

MATRIZ A

.100E+02	.200E+01	.300E+01	-.100E+01
.100E+01	-.200E+02	-.100E+01	.300E+01
.100E+01	.100E+01	-.100E+02	.200E+01
.200E+01	-.100E+01	-.100E+01	.300E+02

INVERSA DE LA MATRIZ A

.961E-01	.115E-01	.277E-01	.253E-01
.347E-02	-.405E-01	.553E-02	.471E-02
.876E-02	-.437E-02	-.977E-01	.724E-02
-.690E-02	-.253E-02	-.492E-02	.337E-01

2.5 Bibliografía

1. CARNAHAN B., LUTHER H., WILKES J.,"Applied Numerical Methods". New York: John Wiley and Sons Inc.,1969. pp.210-218,282-296.
2. HADLEY G., "Algebra Lineal" . Bogotá: Fondo Educativo Interamericano, 1969. pp.60-131.
3. HAMMING Richard, "Numerical Methods for Scientists and Engineers". New York: Mc Graw Hill Book Co.,1962. pp.366-367.
4. JOHNSTON J., BALEY PRICE G., VAN VLECK F.,"Linear Equations and Matrices".Reading Mass.: Addison-Wesley Co., 1966. pp.95-157.
5. KAPLAN Lewis, "Calculus and Linear Algebra Vol.2". New York: John Wiley and Sons Inc., 1971. pp.718-803.
6. KUO S. Shan, "Computer Applications of Numerical Methods". Reading Mass.: Addison-Wesley Co., 1972. pp.176-179, 189-194.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 2. ALGEBRA MATRICIAL (Complemento)

ING. HORACIO SANDOVAL

SEPTIEMBRE DE 1977

ANTECEDENTES HISTORICOS.

Hay 3 personas que desarrollan (introducen) las matrices al mundo de las Matemáticas

William R. Hamilton (1805 - 1865)
James J. Sylvester (1814 - 1897)
Arthur Cayley (1821 - 1895)

El termino matriz fué utilizado por primera vez por Sylvester en 1850, para designar un arreglo rectangular de números, a partir del cual se pueden formar determinantes. Cayley sentó las bases de la Teoría de Matrices (1857). Peano axiomatizó el algebra de vectores e introdujo el concepto de "espacio vectorial definido sobre un campo de números". (1888).

Ref: Lectures on Matrices
J. H. M. Wedderburn
Ed Ann Arbor, Mich., 1949.

MATRICES Y DETERMINANTES.

Las matrices y los determinantes corresponden a dos categorías matemáticas distintas.

- El determinante es un Número.
- La matriz es un conjunto ordenado

Una matriz es simplemente una forma ordenada de elementos numéricos que organiza cierta información. Esto debe interpretarse en el sentido de que entre los elementos de una matriz dada NO se le efectúese ninguna operación algebraica.

Nota: La primera referencia a determinantes la hizo el Japonés Seki Kowa en 1683.

APLICACIONES EN LA FISICA Y EN LA INGENIERIA

La primera aplicación conocida a la física data de 1925, año en que Heisenberg, Born y Jordan aplicaron las matrices al estudio de la mecánica cuántica.

La primera aplicación conocida en ingeniería fué en 1934, cuando Duncan y Collar lo emplearon en problemas de vibraciones.

El advenimiento de las computadoras electrónicas ha impulsado fuertemente el uso de las matrices y en general del Algebra lineal, debido principalmente a la sencillez con que las máquinas almacenan y manipulan la información matricial.

CONCEPTO DE MATRIZ

Se llama matriz a un conjunto ordenado dispuesto en renglones y columnas.

(renglones = filas = hileras)

El número de renglones puede ser igual, menor o mayor al número de columnas.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$m = ?$ $n = ?$ $\quad m = ?$ $n = ?$ $\quad m = ?$ $n = ?$ $\quad m = ?$ $n = ?$

ORDEN DE UNA MATRIZ.

El orden de una matriz está dado por el número de filas y columnas que la forman

Siempre se indica el número de renglones y después el número de columnas.

En los ejemplos anteriores tenemos:

A (3×3) B (2×4) C (3×1) D (1×2)

El orden también es:

A (3, 3) B (2, 4) C (3, 1) D (1, 2)

$a_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; etc.

Usualmente el nombre de las matrices se da con letras mayúsculas (Latinas o Griegas).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

y el término de cada una de ellos con la notación convencional

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = 1$; $a_{12} = -2$; $a_{21} = 3$; $a_{22} = 4$.

El término genérico se escribe como

$a_{ij} =$; $b_{ij} =$

i indicador de columna
j indicador de fila

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

ó $A = [a_{ij}]_{2\times 5}$ ó $A_{(2\times 5)} = [a_{ij}]$

Si A es de orden (m, n) se tiene

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ ó } A_{m\times n} = [a_{ij}]$$

Ejemplo: El Registro Federal de Automóviles está organizado en dos deptos: A) atiende automóviles y B) atiende camiones. El personal en A está compuesto por 27 hombres y 18 mujeres y el depto B por 32 hombres y 6 mujeres. De esta información

Sección \ Personal	H	M.
A	27	18
E	32	6

$$P = \begin{bmatrix} 27 & 18 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}$$

MATRICES ESPECIALES

MATRIZ CUADRADA. - Tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, $m = n$

Ejemplos:

$R = [7]$ Matriz cuadrada de orden ?

$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ M. cuadrada de orden = ?

$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & -5 \\ 6 & 7 & -6 \end{bmatrix}$ M. C. de orden = ?

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$ orden = ?

DIAGONAL PRINCIPAL. - En una matriz cuadrada A, la diagonal principal es el conjunto de elementos a_{ij} tales que $i = j$

En los ejemplos anteriores se tiene

$R \rightarrow 7$

$S \rightarrow 3, 1$

$U \rightarrow u_{11}, u_{22}, u_{33}, \ldots, u_{nn}$.

MATRIZ DIAGONAL.

Es una matriz cuadrada en la que los elementos fuera de la diagonal principal son todos nulos.

Ejemplos:

$$E=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

Nota: No se da ninguna restricción a los elementos de la diagonal Principal.

Simbólicamente se puede expresar como:

A es diagonal si $a_{ij}=0$ para todo $i\neq j$

MATRIZ ESCALAR.

Es una matriz diagonal en la que todos los elementos diagonales son iguales.

¿Cuales de las matrices E, F, G y H son escalares?

Existe un caso particular de la matriz escalar que es muy importante, y es cuando todos los elementos son iguales a la Unidad.

$$I=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

Se simboliza como I_n o I solamente.

Asimismo existe la matriz nula donde todos sus elementos son cero. (Este concepto engloge a las matrices rectangulares también). O

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR.

Es aquella en que todos los elementos bajo la diagonal principal son nulos.

Ejemplos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es aquella en que todos los elementos encima de la diagonal principal son nulos.

Ejemplos:

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \gamma & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ SIMETRICA.

Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i, j: ✓

Ejemplos:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMETRICA

Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = -a_{ji}$ para toda i, j. ✓

Ejemplos.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

MATRIZ RECTANGULAR.

Es aquella matriz donde el número de columnas es diferente al número de renglones.

De este tipo de matrices las mas importantes son:

VECTOR o MATRIZ RENGLON.

Se forma con un solo renglón. Su orden es $(1, n)$

Ejemplos:

$S = [0, 1]$ $\quad T = [0, 2, 1]$ $\quad V = [0.2, -3.14159, 4, \ldots, ?]$

$m = ?$ $\quad n = ?$ $\quad m = ?$ $\quad n = ?$ $\quad m = ?$ $\quad n = ?$

VECTOR COLUMNA o MATRIZ COLUMNA.

Es una matriz formada por una solo columna. Su orden es $(m, 1)$

Ejemplos:

$$W = \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 3.14159\ldots \\ 2.71728\ldots \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

VECTOR NULO.

Es un vector fila o columna cuyos componentes son todos ceros.

Ejemplos: $[0]$ $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad [0\ 0\ 0\ 0\ 0]$

Nótese que es un caso particular de la Matriz Nula.

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ y $B=[b_{ij}]_{r\times s}$ son iguales si y sólo si satisfacen:

- Son del mismo orden
- Los elementos correspondientes son iguales.

Es decir,

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} m=r \ ; \ n=s \\ a_{ij}=b_{ij} \text{ para todo } i,j. \end{cases}$$

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} (x+1)(x-1) \\ 3x-2x \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} x^2-1 \\ x \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} 2^1 \\ 2^2 \\ 2^3 \end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K=[0,0]$$

En caso de no cumplirse alguna de las condiciones indicadas las matrices son desiguales o no comparables.

OPERACIONES ENTRE MATRICES.

TRANSPOSICION.

La transpuesta de una matriz $A=[a_{ij}]$ de orden (m,n) es una matriz de orden (n,m). El elemento a_{ij} de la matriz A ocupa el lugar a_{ji} en la matriz transpuesta de A, que se simboliza por A' o A^t

$$A \longrightarrow \text{Transposición} \longrightarrow A^t$$

Ejemplos:

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^t_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_{(1\times 3)} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \qquad B^t_{3\times 1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$C_{(3\times 2)} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \qquad C_{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{bmatrix} \qquad D^t_{(n)} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots \\ d_{12} & d_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

- Si E es una matriz simétrica ¿cuánto vale E^t?
- Sea G la transpuesta de F, ¿cuánto vale la transp. de G?

$$G = F^t \Rightarrow G^t = (F^t)^t = ?$$

- Si H es una matriz diagonal, ¿cuánto vale H^t?
- Si J es una matriz escalar ¿cuánto vale J^t?
- Si I es la Identidad ¿cuánto vale I^t?

SUMA DE MATRICES.

Dadas dos matrices del mismo orden $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ se define la suma como otra matriz $C=[c_{ij}]$ de igual orden, cuyas componentes se obtienen sumando las correspondientes componentes de las matrices dadas.

Sea $C = A + B$

entonces $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

si $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C=\begin{bmatrix} 1+2 & 3-2 \\ -4+3 & 5+1 \end{bmatrix}$

$\therefore C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$

$E = F + G$. $\quad G=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \therefore E = ?$

Sea a_{ij} el número de vuelos realizados por una compañía de aviones con la finalidad i a la ciudad j durante el mes de enero. Colocados en forma matricial se tiene

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

los datos de febrero estan dados por F

$$F=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el total de vuelos en el bimestre?

$$B=\begin{bmatrix} & & & \end{bmatrix}$$

CASOS ESPECIALES DE LA SUMA.

i) $A + O = A$

ii) $Z + (-1) = 0$

iii) A y B son simétricas ¿C = A + B que será?

iv) A y B son triangulares superiores

¿C = A + B? que será?

v) D_1 y D_2 son matrices diagonales

¿$D_3 = D_1 + D_2$ que será?

vi) Si D es diagonal y S es simétrica.

¿H = D + S que será?

¿Qué sucede con la resta de los casos i)... vi)?

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NUMERO.

Dada una matriz $A = [a_{ij}]$, y un número λ, el producto $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$ es otra matriz del mismo orden B ($B = \lambda A$) que se obtiene multiplicando por λ cada uno de los elementos de la matriz A.

$$[B] = \lambda \cdot [A] = [\lambda A] = [b_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \quad \text{para todo } i,j.$$

Ejemplos:

$$\lambda = 0.5 \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \lambda A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 \\ 2 & -3.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \qquad G = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \qquad H = \lambda G = \begin{bmatrix} ? & ? \end{bmatrix}$$

Casos Especiales

i) $\lambda \cdot 0 = 0$

ii) $0 \cdot A = 0$

iii) $1 \cdot A = A$

iv) Prop. Distributiva $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

v) $\lambda I = A$ ¿A es de tipo?

PRODUCTO DE MATRICES.

Para efectuar el producto de dos matrices se requiere:

a) Que sean conformables para el producto, Esto significa que si $C = A \cdot B$, A debe tener el mismo número de columnas que el número de filas de B.

Si A es (m, n) y B es (s, t)

$C = A \cdot B$ existe únicamente si $\underline{n = s}$

b) El producto se define como. (un elemento)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

o sea, el elemento que se encuentra en el renglón i y la columna j de la matriz producto (c), se obtiene multiplicando los elementos del i-ésimo renglón de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B. y sumando los productos parciales.

¿Dudas?

Ejemplo:

Sean A y B

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

¿Es posible $A\cdot B$?

¿Es posible $B\cdot A$?

Dado que A es (2×2) y B es (2×4). AB es posible y B·A no lo es.

$$C=A\cdot B=\underset{(3\times 2)}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}}\ \underset{(2\times 4)}{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}}$$

$$C=\begin{bmatrix}0\cdot(-1)+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot(-1)+1\cdot(-1)\\ 2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 2\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot(-1)+3\cdot(-1)\\ 4\cdot(-1)+5\cdot 1 & 4\cdot 0+5\cdot 1 & 4\cdot 1+5\cdot 0 & 4\cdot(-1)+5(-1)\end{bmatrix} \text{ que es } (3\times 4)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2 & -5\\ 1 & 5 & 4 & -9\end{bmatrix} \quad (3\times 4)$$

Ejemplo $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ (2×2) $\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ (2×3) $\longrightarrow C=A\cdot B=(2\cdot 3)$

$$C=\begin{bmatrix}2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 1\\ 3\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 3+4(-1) & 2\cdot 1+4\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5 & 3\\ 10 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$C=A\cdot B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -6\\ 12 & 8 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$(3\times 3)\quad (3\times 3)\Rightarrow C\ (3\times 3)$

Ejemplo:

Una empresa que fabrica televisiones desea calcular el número de bulbos y bocinas necesarias para programar el proceso de producción de sus tres modelos. Sus requerimientos se dan en la siguiente tabla

	Mod A	Mod B	Mod C
Bulbos	13	18	20
Bocinas	2	3	4

← Matriz de requerimientos de Partes por televisión

Para enero proximo se requieren 120 unidades del modelo A, 240 del B y 120 del C.

Para Febrero se estiman las necesidades en 60 de A, 120 de B y 90 de C. ¿Cuántos bulbos y bocinas se requieren para los dos meses?

Arreglando las necesidades de enero y febrero en forma matricial se tiene:

	Enero	Febr.
Mod A	120	60
Mod B	240	120
Mod C	120	90

$$\begin{bmatrix} 13 & 18 & 20 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 60 \\ 240 & 120 \\ 120 & 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8280 & 4740 \\ 1440 & 840 \end{bmatrix}$$ o sea:

	Enero	Febrero
Bulbos	8280	4740
Bocinas	1440	840

¿Que pasa si se requiere Marzo también?

CASOS ESPECIALES.

i) Vector columna $(m,1)$ por vector fila $(1,n)$

$$X \cdot Y = Z$$
$$(m\times 1)(1\times n) \rightarrow (m \times n)$$

Ejemplo: $X = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}$ $\quad Y = \underset{1\times 4}{\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$

$$Z = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & -1 \\ -10 & 8 & -4 & 2 \\ 15 & -12 & 6 & -3 \end{bmatrix}}$$

ii) Vector fila $(1\times n)$ por vector columna

$$\underset{(1\times n)}{X} \cdot \underset{(n\times 1)}{Y} = \underset{(1\times 1)}{Z}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 5\cdot 0 + 0\cdot 2 + (-1)(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

Sean las matrices A y B conformables para la multiplicación tales que.

$$\underset{(p\times q)}{C} = \underset{(p\times r)}{A} \cdot \underset{(r\times q)}{B}$$

¿Es posible efectuar el producto $B \cdot A$?

¿Será lo mismo $A \cdot B = B \cdot A$?

En general <u>NO</u>, lo que implica que el producto entre matrices NO es conmutable.

PRODUCTOS CONMUTABLES:
(Casos especiales)

i) Una matriz cuadrada por la Identidad

$$\underset{(n\times n)}{A}\cdot\underset{(n\times n)}{I} = I\cdot A = A$$

ii) ¿Será conmutable una matriz cuadrada por una matriz escalar?

iii) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 7\end{bmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB \neq B\cdot A.$$

iv) ¿Producto de 2 matrices diagonales.?

v) ¿Producto por la Matriz Nula?

vi) ¿Producto de una matriz cuadrada por sí misma?

vii) Producto de Matrices Inversas.

$\triangleq$ A es inversa de B si

$$AB = BA = I$$

Ejemplo $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.333\end{bmatrix}$

$$A\cdot B = B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ref: MATRICES. Aplicaciones matemáticas en economía y admon
A. KLEINBAU.
Ed. Limusa 1973.

```
C
C     PROGRAMA PARA SUMAR DOS MATRICES.
C
      DIMENSION A(20,20), B(20,20), C(20,20)
C
C     LECTURA DEL ORDEN DE LAS MATRICES
C
      READ (5,100) M,N
  100 FORMAT (2I5)
C
C     LECTURA DE LAS MATRICES (POR RENGLONES)
C
      READ (5,101) ((A(I,J), J=1,N), I=1,M)
  101 FORMAT (10F8.3)
      READ (5,101) ((B(I,J), J=1,N), I=1,M)
C
C     VARIACION DE RENGLONES
C
      DO 1 I=1,M
C
C     VARIACION DE COLUMNAS
C
      DO 2 J=1,N
C
C     SUMA DE LOS ELEMENTOS  C(I,J) = A(I,J) + B(I,J)
C
      C(I,J) = A(I,J) + B(I,J)
    2 CONTINUE
    1 CONTINUE
C
C     IMPRESION DE LA MATRIZ SUMA
C
      WRITE (6,102) ((C(I,J), J=1,N), I=1,M)
  102 FORMAT (20X,10F8.3/)
      CALL EXIT
      END.
```

```
C
C       PROGRAMA PARA MULTIPLICAR DOS MATRICES
C
      DIMENSION A(20,20), B(20,20), C(20,20)
C
C       LECTURA DEL ORDEN DE LAS MATRICES
C
      READ (5, 100) M1, N1, M2, N2
  100 FORMAT (4I5)
C
C       ANALISIS DE CONFORMABILIDAD PARA LA MULTIPLICACION
C
      IF (N1 .NE. M2) CALL EXIT
C
C       LECTURA DE LAS MATRICES (POR RENGLONES)
C
      READ (5, 101) ((A(I,J), J=1,N1), I=1,M1)
      READ (5, 101) ((B(I,J), J=1,N2), I=1,M2)
  101 FORMAT (10F8.3)
C
C       VARIACION DE RENGLONES DE LA MATRIZ PRODUCTO
C
      DO 2 I = 1, M1
C
C       VARIACION DE COLUMNAS DE LA MATRIZ PRODUCTO
C
      DO 2 J = 1, N2
C
C       VARIACION DEL INDICE DE MULTIPLICACION
C
      S = 0.0
      DO 3 K = 1, M2
    3 S = S + A(I,K) * B(K,J)
C
      C(I,J) = S
C
    2 CONTINUE
C
    1 CONTINUE
C
C       IMPRESION DE LA MATRIZ PRODUCTO.
C
      WRITE (6, 102) ((C(I,J), J=1,N2), I=1,M1)
  102 FORMAT (20X, 10F8.3//)
      CALL EXIT
      END.
```

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA II: ALGEBRA MATRICIAL (COMPLEMENTO)

M. EN C. VERONICA CZITROM

INVERSO DE UNA MATRIZ

NUM. REALES: $a \neq 0$, $a \cdot b = b \cdot a = 1$ $\quad b = a^{-1} = \frac{1}{a}$

$8 \cdot b = b \cdot 8 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{8} = .125$

MATRICES: $A \cdot B = I$, $B \cdot A = I$

$A \cdot B = B \cdot A = I \Rightarrow$ A cuadrada

$B = A^{-1}$ INVERSA MULTIPLIC.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 = B \cdot A$$

$$A = B^{-1}, \quad B = A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = ? = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+2c=1 \\ 3a+4c=0 \\ b+2d=0 \\ 3b+4d=1 \end{array} \right\} \longrightarrow a = 1-2c,$$

$3(1-2c)+4c = 0 \quad -2c = -3$

$c = \frac{3}{2}$

$a = 1 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 3 = -2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = ?$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c = 1, \; c = 0 \qquad d = 0, \; d = 1$

$\therefore$ *A^{-1} no existe*

MATRICES CUADRADAS SIN INVERSO: SINGULARES
" " CON " : NO SINGULARES
o REGULARES

PROPIEDADES:

1) CONMUTATIVIDAD: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$
2) UNICIDAD
3) $(A^{-1})^{-1} = A$
4) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (análogo a $(AB)' = B'A'$)

DEM. $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B = \underbrace{B^{-1}B}_{I} = I$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

UTILIDAD DEL INVERSO: $A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \underline{x} = \underline{b}$$

$\underline{x}$ ← ?

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \end{matrix}$$

$A\underline{x} = \underline{b}$ ← varias diferentes, invertir A

A VECES, LAS COMPONENTES DE A^{-1} TIENEN INTERPRETACION ESPECIAL.

AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS:

A^{-1} : COMPONENTES → CLASE Y MAGNITUD DE ERRORES EN LOS DATOS.

INVERSION DE MATRICES

METODOS: ALGEBRAICOS (EXACTOS)
NUMÉRICOS (APROXIMACIONES SUCESIVAS)

ALGEBRAICOS

ADJUNTA

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

SOLUCION SISTEMA DE ECUACIONES

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB = I$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 6a+2c=1 \\ 2a+c=0 \\ 6b+2d=0 \\ 2b+d=1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{ll} a=0.5 & c=-1 \\ b=-1 & d=3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A DE 3X3 $\qquad A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

HAY QUE RESOLVER

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

INVERSION POR PARTICION

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

$$A A^{-1} = AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) = I = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = B = \left(\begin{array}{c|c} A_1^{-1}(I - A_2 B_3) & -A_1^{-1} A_2 B_4 \\ \hline -B_4 A_2 A_1^{-1} & (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \end{array}\right)$$

INVERTIR A_1^{-1} Y $(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1}$

DE ORDENES MENORES QUE A

DIAGONALIZACIÓN (GAUSS-JORDAN)

$$[A \mid I]$$

$$\downarrow$$

$$[I \mid A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

POR OPERACIONES ELEMENTALES DE RENGLÓN:

1) INTERCAMBIO DE RENGLONES.

2) MULTIPLICAR UN RENGLON POR UN ESCALAR.

3) MULTIPLICAR UN RENGLON POR UN ESCALAR Y SUMARLO A OTRO RENGLÓN.

POTENCIAS DE UNA MATRIZ

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ FACTORES}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a^0 = 1)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE MATRICES

1) NUMEROS REALES: $ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ b = 0 \end{cases}$

MATRICES: $AB = 0 \not\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ ni \\ B = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq 0 \qquad \neq 0$

2) $ab = ac \Rightarrow b = c$

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

3) $ab = ba$

$AB \neq BA$ EN GENERAL

4) $ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} = a^{-1}$

$AB = I$ $B = A^{-1}$ NO SIEMPRE EXISTE

5) NO EXISTE TRANSPUESTO DE NUM. REAL

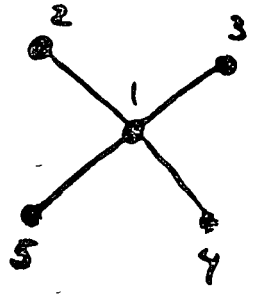
A A' $(A')' = A$

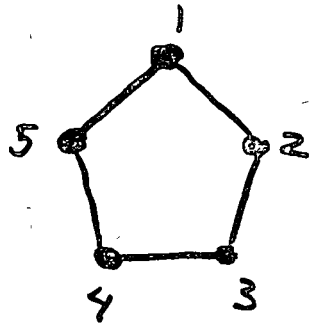
~~El~~ UN ALGEBRA

APLICACIONES DE MATRICES

1) TEORIA DE REDES

GRAFICAS QUIMICAS O ESTRUCTURALES

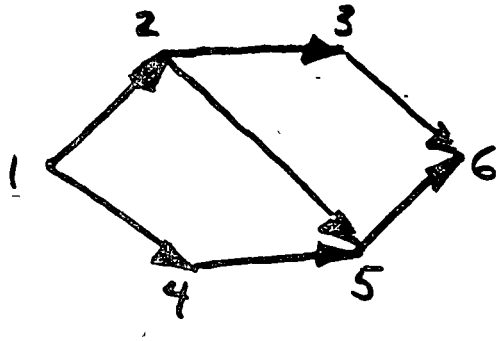




ENLACE : 1
NO ENLACE : 0
} MATRIZ DE INCIDENCIA

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

RUTA CRÍTICA

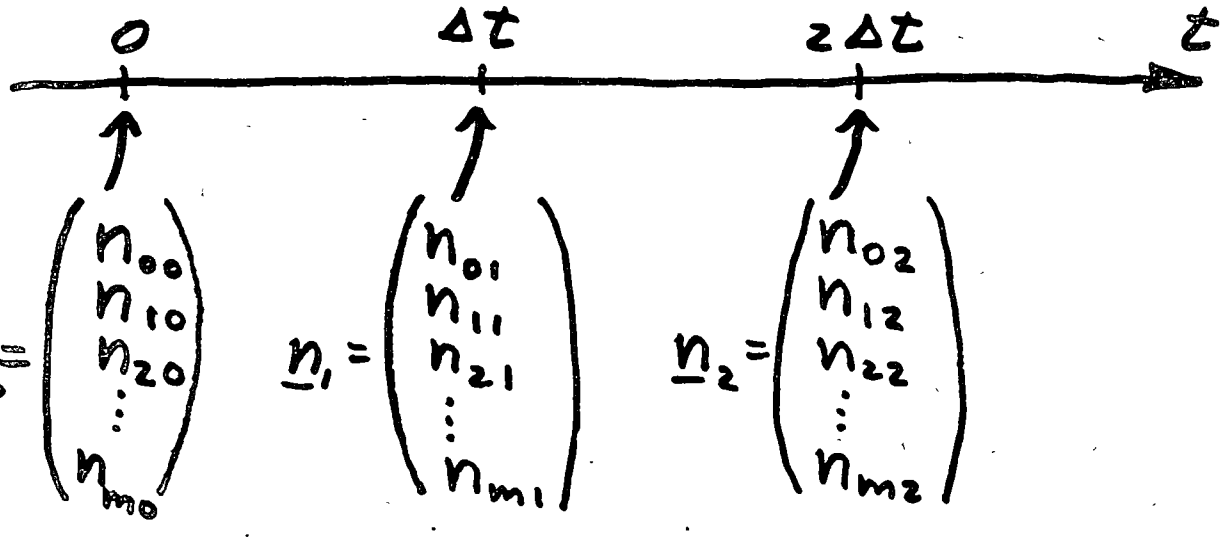


$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) DINÁMICA DE POBLACIÓN

Δt = INTERVALO DE TIEMPO

GRUPOS DE EDADES	EDAD	NUMERO PROMEDIO DE HIJAS	PROBABILIDAD DE QUE UNA HEMBRA VIVA PARA ENTRAR AL SIGUIENTE GRUPO DE EDADES $x+1$
$x = 0$	$0 \text{ — } \Delta t$	F_0	P_0
$x = 1$	$\Delta t \text{ — } 2\Delta t$	F_1	P_1
$x = 2$	$2\Delta t \text{ — } 3\Delta t$	F_2	P_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x = m$	$m\Delta t \text{ — } (m-1)\Delta t$	F_m	$P_m = 0$



$$\underline{n}_0 = \begin{pmatrix} n_{00} \\ n_{10} \\ n_{20} \\ \vdots \\ n_{m0} \end{pmatrix} \quad \underline{n}_1 = \begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{11} \\ n_{21} \\ \vdots \\ n_{m1} \end{pmatrix} \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} n_{02} \\ n_{12} \\ n_{22} \\ \vdots \\ n_{m2} \end{pmatrix}$$

n_{xk} = NUM. DE HEMBRAS EN EL GRUPO DE EDADES x AL TIEMPO $k\Delta t$

NUM. HIJAS NACIDAS EN $0 \text{ — } \Delta t$

$$F_0 n_{00} + F_1 n_{10} + \dots + F_m n_{m0} = n_{01}$$

$$P_x \, n_{xk} = n_{x+1,k+1} \qquad x = 0, 1, \ldots, m-1$$

TRANSICION DE LA POBLACIÓN DE $t=0$ A $t=\Delta t$

$$\begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{m-1} & F_m \\ P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{00} \\ n_{10} \\ n_{20} \\ \vdots \\ n_{m0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{11} \\ n_{21} \\ \vdots \\ n_{m1} \end{pmatrix}$$

O SEA: $\boxed{M \underline{n}_0 = \underline{n}_1}$

$M \underline{n}_1 = \underline{n}_2$, $\quad \underline{n}_2 = M \underline{n}_1 = M(M \underline{n}_0) = M^2 \underline{n}_0$

$M \underline{n}_2 = \underline{n}_3$, $\quad \underline{n}_3 = M \underline{n}_2 = M(M^2 \underline{n}_0) = M^3 \underline{n}_0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\boxed{M \underline{n}_{k-1} = \underline{n}_k} \qquad \boxed{\underline{n}_k = M^k \underline{n}_0}$

· M = MATRIZ DE PROYECCIÓN

$$\underline{n}_k = M\,\underline{n}_{k-1} \qquad \underline{n}_k = M^k \underline{n}_0$$

1) DADA POBLACION INICIAL Y SU DISTRIBUCIÓN ($\underline{n}_0$), Y DADA M:

SE PUEDE CALCULAR POBLACION FUTURA Y SU DISTRIBUCION.

2) DADA POBLACION INICIAL Y SU DISTRIBUCIÓN, ¿QUE PROPIEDAD DEBE TENER M PARA TENER POBLACION ESTABLE ($\underline{n}_0 = \underline{n}_1 = \underline{n}_2 = \ldots$)?

$$\underline{n}_k = M\,\underline{n}_k$$

$$\underline{0} = (M - I)\,\underline{n}_k$$

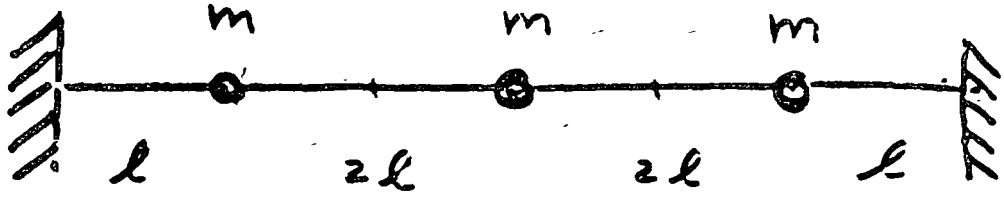
$$\Rightarrow |M - I| = 0$$

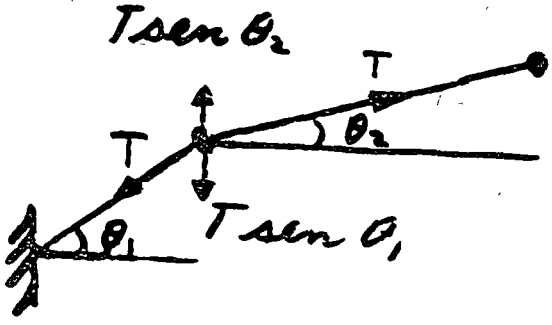
$$F_0 + F_1 P_0 + F_2 P_0 P_1 + \ldots + F_m P_0 P_1 \cdots P_{m-1} = 1$$

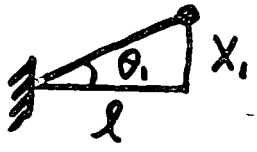
3) DADA POBLACION INICIAL Y SU DISTRIBUCIÓN, Y DISTRIBUCION DE EDADES ESTABLE, ¿CUÁL ES LA POBLACIÓN?

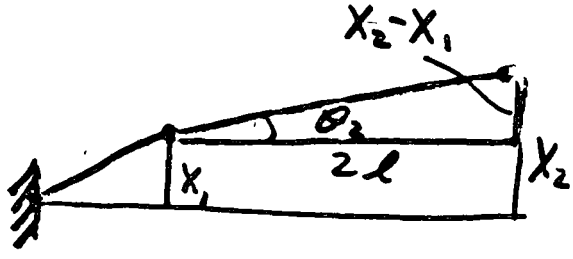
$$\underline{n}_{k+1} = \lambda\,\underline{n}_k \qquad M\,\underline{n}_k = \lambda\,\underline{n}_k$$

VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS









$$T \operatorname{sen}\theta_1 \simeq T \frac{X_1}{\ell}$$

$$T \operatorname{sen}\theta_2 \simeq T \frac{X_2 - X_1}{2\ell}$$

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2X_1}{dt^2} = T \frac{(X_2 - X_1)}{2\ell} - T \frac{X_1}{\ell}$$

$$m \frac{d^2X_2}{dt^2} = -T \frac{(X_2 - X_1)}{2\ell} + T \frac{(X_3 - X_2)}{2\ell}$$

$$m \frac{d^2X_3}{dt^2} = -T \frac{(X_3 - X_2)}{2\ell} - T \frac{X_3}{\ell}$$

$$\boxed{X_i = x_i \cdot e^{i\omega t}}$$

$$\lambda = : \omega^2 m l / T$$

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$(A - \lambda I)\underline{x} = 0$$

$\exists$ sol $\Rightarrow$ $\quad |A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

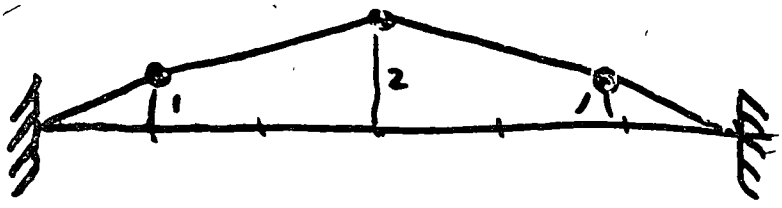
1) $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{x_2}{2} = x_3$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

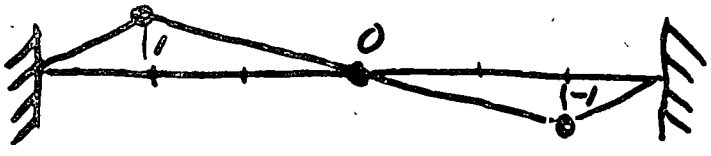
MODO DE VIBRACIÓN



$$\omega^2 = \frac{\lambda T}{2ml} = \frac{T}{2ml}$$

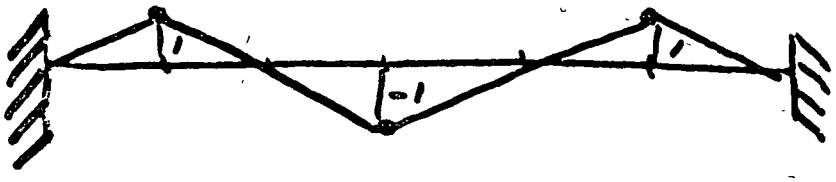
FRECUENCIA ANG. DE VIBRACIÓN

2) $\lambda_2 = 3$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

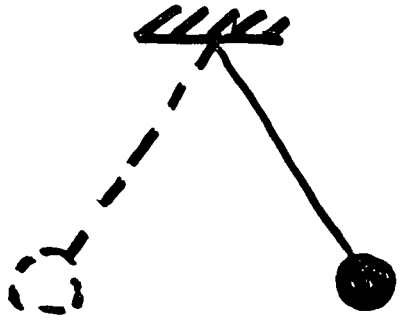


$$\omega^2 = \frac{3T}{2ml}$$

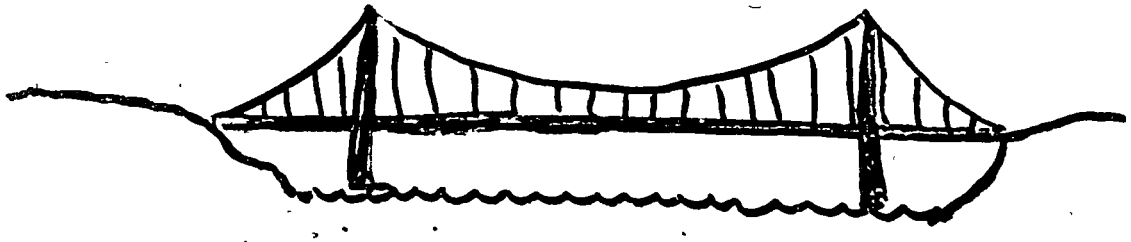
3) $\lambda = 4, \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



RESONANCIA



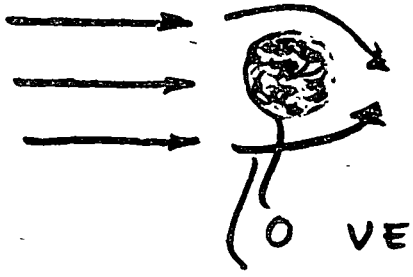
PUENTE DE TACOMA



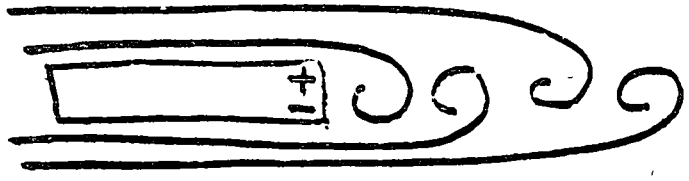
7 NOV 1940, 4 MESES DE INAUGURADO
VIENTO 67 km/h 12m x 853m

OSCILACIONES TORSIONALES
IMPULSÓ INVESTIGACIÓN AERODINÁMICA

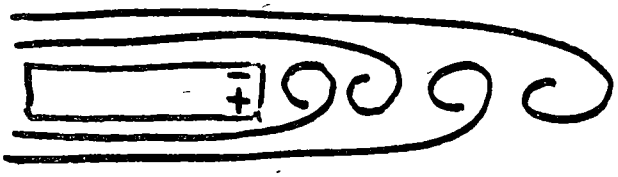
FLUIDO CON OBSTÁCULO: VÓRTICES DE VON KÁRMÁN



0 VEL
MAS VEL } => REMOLINO



2m
TACOMA



VORTICES DE VON KÁRMÁN:
ALTERNADOS EN TIEMPO Y ESPACIO

- RUGOSIDAD MEDIO
- FORMA
- VELOCIDAD FLUIDO

PROBLEMA: SI LA FRECUENCIA DE LOS VÓRTICES DE VON KÁRMÁN COINCIDE CON FREC. NATURAL DE OSCILACIÓN TORSIONAL DEL PUENTE.
SOLUCIÓN: ESTRUCTURA MAS TIESA RETICULAR

THEODORE VON KÁRMÁN (1881-1963)
PIONERO USO MATEMÁTICAS EN CIENCIAS BÁSICAS (AERONAUTICA, ASTRONAUTICA)
1911: ANÁLISIS DE LOS VÓRTICES

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

SOLUCIÓN $\begin{cases} \underline{x} = 0 & \text{TRIVIAL} \\ \underline{x} \neq 0 \iff |A - \lambda I| = 0 \end{cases}$

$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ $\quad$ A, $n \times n$

$A\underline{x} = \lambda I \underline{x}$

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0$ ECUACION CARACTERISTICA

$\wp(\lambda) = |A - \lambda I|$ = POLINOMIO CARACTERISTICO

POLINOMIO EN λ DE GRADO n

RAICES: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ EIGENVALORES
$|A - \lambda I| = 0$ VALORES PROPIOS
VALORES CARACTERISTICOS

$$\lambda_i \longrightarrow c\underline{x}_i$$

$\underline{x}_i$: EIGENVECTOR
VECTOR CARACTERÍSTICO
VECTOR PROPIO

CORRESPONDIENTE A λ_i

$\underline{x}_i$ SE OBTIENE SUSTITUYENDO EN

$$(A-\lambda I)\underline{x} = 0$$

CON $\lambda = \lambda_i$.

EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda)+4 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{+1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{+1 \pm 3}{2} \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0}$ $\quad\begin{cases}(3-\lambda)x_1-x_2=0\\ 4x_1-(2+\lambda)x_2=0\end{cases}$

1) $\lambda_1=-1$ $\quad\begin{cases}4x_1-x_2=0\\ 4x_1-x_2=0\end{cases}$

$\therefore\ x_2=4x_1$

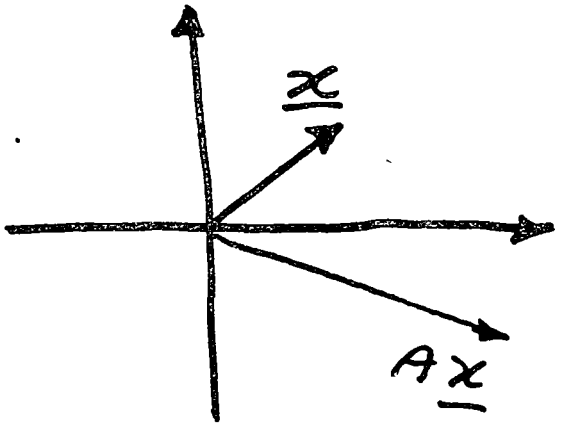
$\underline{x}_1=\begin{pmatrix}x_1\\4x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \underline{x}_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

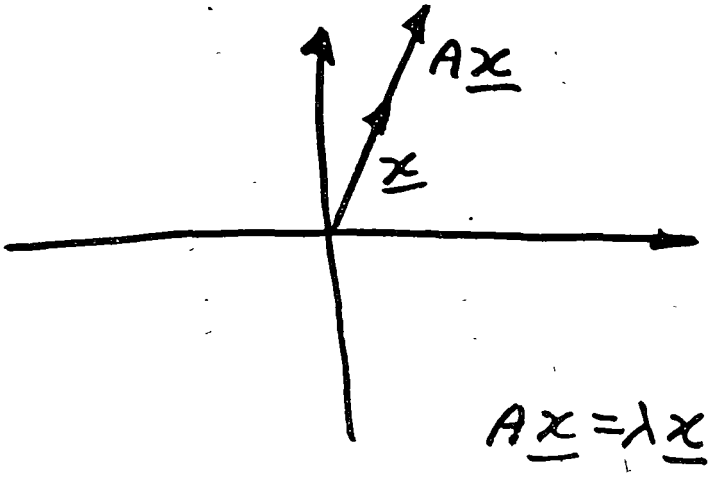
2) $\lambda_2=2$ $\quad\begin{cases}x_1-x_2=0\\ 4x_1-4x_2=0\end{cases}$

$\therefore\ x_2=x_1$

$\underline{x}_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \underline{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA





$A\underline{x}=\lambda\underline{x}$

OBTENCIÓN DE LOS VALORES CARACTERÍSTICOS

METODO DE KRYLOV

$$\left.\begin{array}{l} |A-\lambda I| = 0 \\ p(\lambda) = 0 \end{array}\right\} \text{ECUACION CARACTERISTICA}$$

1° OBTENER NUMÉRICAMENTE LOS COEFICIENTES C_i DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

$$p(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + C_1\lambda + C_0$$

2° OBTENER NUMERICAMENTE LOS VALORES CARACTERÍSTICOS λ_i, QUE SON LAS RAICES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$p(\lambda) = 0$$

$$\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + C_1\lambda + C_0 = 0$$

1° OBTENER COEFICIENTES C_i.

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON:

SI $p(\lambda) = 0 \Rightarrow p(A) = 0$

$P(A) = 0$

$$A^n + C_{n-1}A^{n-1} + \dots + C_1 A + C_0 = 0$$

POSTMULTIPLICANDO POR UN VECTOR ARBITRARIO $\underline{y}$ CONOCIDO, $\underline{y} \neq \underline{0}$:

$$A^n \underline{y} + C_{n-1}A^{n-1}\underline{y} + \dots + C_1 A\underline{y} + C_0 = \underline{0}$$

REPRESENTA UN SISTEMA DE ECUACIONES CON INCÓGNITAS $C_{n-1}, \dots, C_1, C_0$.

SE RESUELVE EL SIST. DE ECS. Y SE DETERMINAN LAS C_i.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

EC. CARACT: $\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 = 0$

CAYLEY HAMILTON: $A^2 + C_1 A + C_0 I = 0$

POR $\underline{y}$: $\quad A^2\underline{y} + C_1 A\underline{y} + C_0\underline{y} = \underline{0}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \text{ SEA } \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

SUST:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 + c_0 = -3$$
$$2c_0 = -4$$

$$c_0 = -2 \quad c_1 = -1$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA:

$$\boxed{\lambda^2 + (-1)\lambda + (-2) = 0}$$

SE DEBEN OBTENER NUMÉRICAMENTE LAS RAÍCES DE LA ECN. CARACT.

MÉTODO DE JACOBI

- MAYOR O MENOR EIGENVALOR Y EIGENVECTOR CORRESPONDIENTE

$$A\underline{x}_0 = \lambda_1 \underline{x}_1$$

$\underline{x}_1$: NUEVA APROXIMACIÓN A EIGENVECTOR

$\underline{x}_0$: APROXIMADO, $\underline{x}_0 \simeq \underline{x}$

λ_1: FACTOR COMÚN: MAYOR ELEMENTO DEL VECTOR. 1ª APROXIMACIÓN A λ

$$A\underline{x}_0 = \lambda_1 \underline{x}_1$$

$$A\underline{x}_1 = \lambda_2 \underline{x}_2$$

$$\vdots$$

$$A\underline{x}_n = \lambda_{n+1} \underline{x}_{n+1}$$

ALTO: SI $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \epsilon$

MENOR EIGENVALOR:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$A^{-1}x$ $\quad A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\lambda \underline{x}$

$$\underline{x} = \lambda A^{-1} \underline{x}$$

$$A^{-1}\underline{x} = \frac{1}{\lambda} \underline{x}$$

$$A^{-1}\underline{x} = \lambda^* \underline{x}$$

MAYOR $\lambda^* \longrightarrow$ MENOR λ

$$\lambda^* = \frac{1}{\lambda}$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

COMPLEMENTOS:
INTEGRACION Y DIFERENCIACION NUMERICA
RAICES DE FUNCIONES
INTERPOLACION

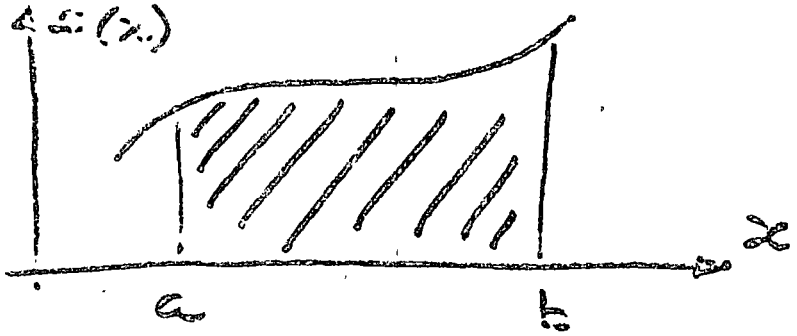
M. EN C. VERONICA CZITROM

OCTUBRE, 1977.

INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

INTEGRACIÓN MUCHO MÁS PRECISA QUE DER. NUM.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{AREA BAJO LA CURVA}$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA:
- FUNCIONES DADAS EN FORMA GRÁFICA Ó TABULADA.
- FUNCIONES MUY COMPLEJAS
- NO EXISTE INTEGRAL EXACTA.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA: AREA BAJO CURVA DE LA FUNCIÓN DADA EN VALORES DISCRETOS.

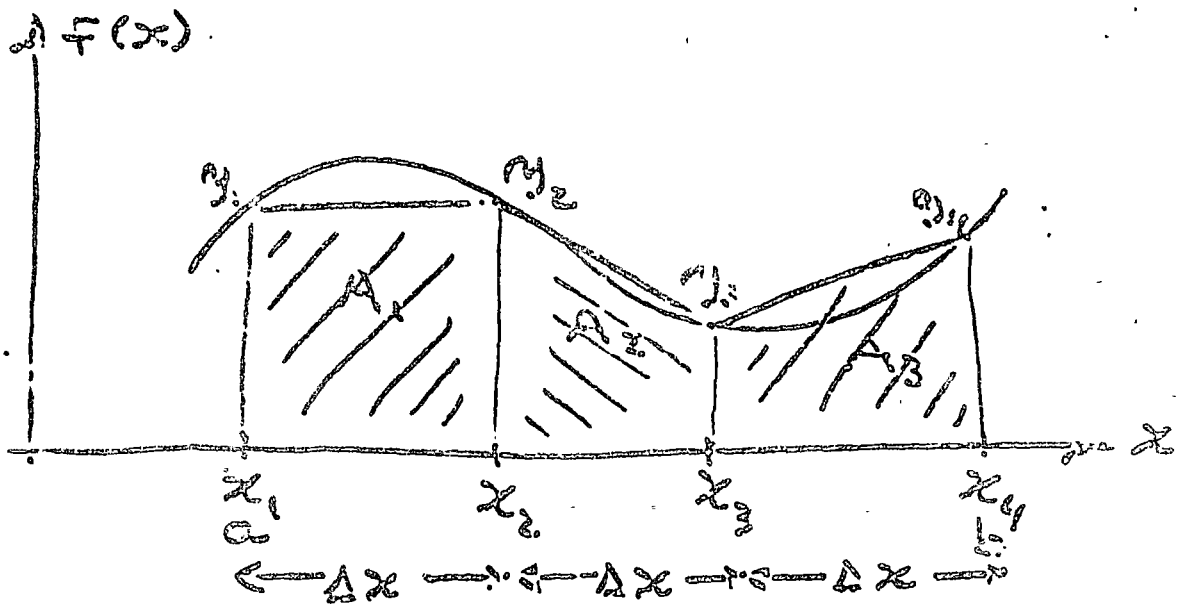
$$N = \int x(t)\,dt$$

$$c = \int v(t)\,dt$$

$$M = \int \rho(x)\,dx$$

$$W = \int F(x)\,dx$$

INTEGRACIÓN NUM. TRAPECIOIDAL



$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq A_1 + A_2 + A_3$$

AREA BAJO CURVA $\simeq$ SUMA AREAS TRAPECIO.

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\Delta x}{2}(y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{2}(y_2 + y_3) + \frac{\Delta x}{2}(y_3 + y_4)$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right)$$

Δx PEQUEÑA DA MEJOR APROXIMACIÓN (MENOR ERROR)

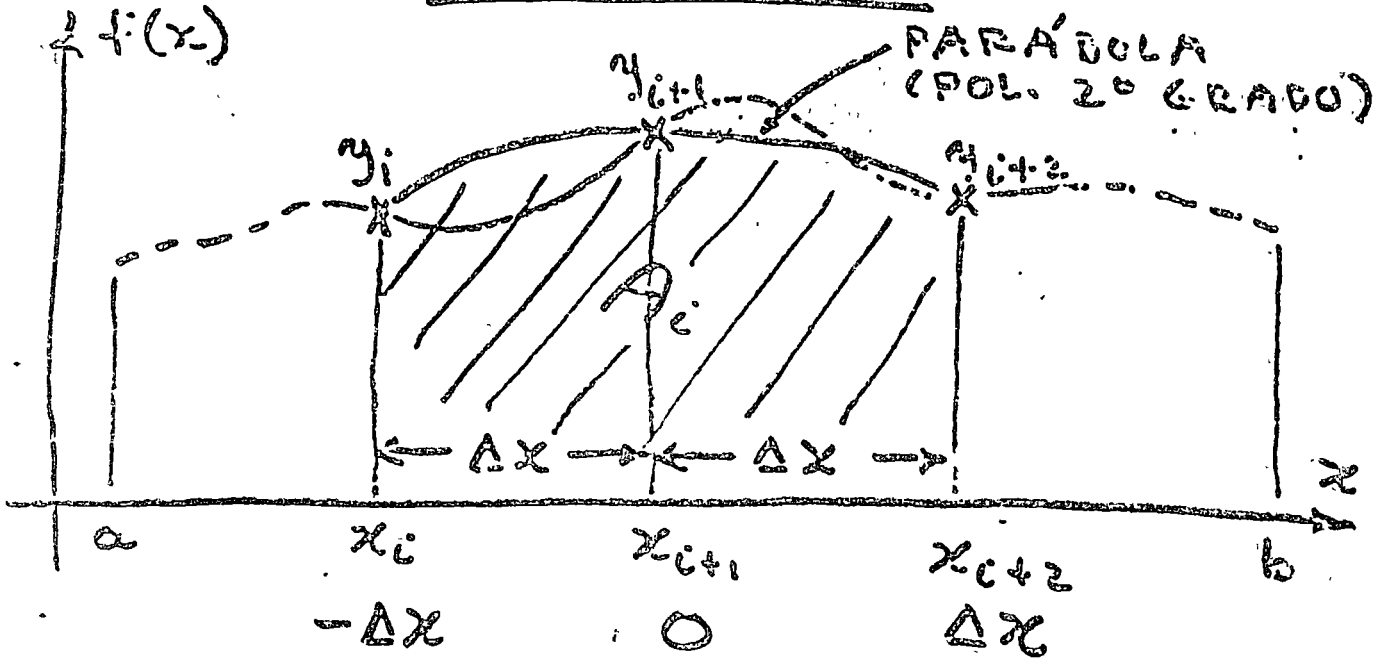
ERROR: ORDEN $(\Delta x)^2$

$\Rightarrow$ SI LOS INTERVALOS SE REDUCEN A LA MITAD, EL ERROR SE REDUCE A LA CUARTA PARTE $\left(\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{4}\right)$.

n-1 INTERVALOS:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{\Delta x}{2}\left[y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right]$$

INTEGRACION NUMÉRICA DE SIMPSON 1/3



$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq A_i$$

AREA BAJO CURVA $\simeq$ AREA BAJO PARÁBOLA

$$f(x) \simeq p(x), \qquad p(x) = a + bx + cx^2$$

$$A_i = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} p(x)\,dx = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} (a + bx + cx^2)\,dx = \left(ax + bx^2 + cx^3\right)\Big|_{-\Delta x}^{\Delta x}$$

$$A_i = 2a\Delta x + \frac{2}{3} c (\Delta x)^3$$

$p(x)$ DEBE PASAR POR y_i, y_{i+1}, y_{i+2}:

$$\begin{cases} y_i = p(-\Delta x) = a - b\Delta x + c\Delta x^2 \\ y_{i+1} = p(0) = a \\ y_{i+2} = p(\Delta x) = a + b\Delta x + c\Delta x^2 \end{cases}$$

RESOLVIENDO SIST. ECS:

$$\begin{cases} a = y_{i+1} \\ b = (y_{i+2} - y_i)/2\Delta x \\ c = (y_i + 2y_{i+1} + y_{i+2})/2\Delta x^2 \end{cases}$$

SUSTITUYENDO EN A_i:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

n-1 INTERVALOS:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[y_1 + y_n + 2(y_3 + y_5 + y_7 + \dots) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + \dots)\right]$$

- NÚMERO DE PUNTOS MUESTRALES non: $n = \text{NON}$
- ERROR $\sim (\Delta x)^4$

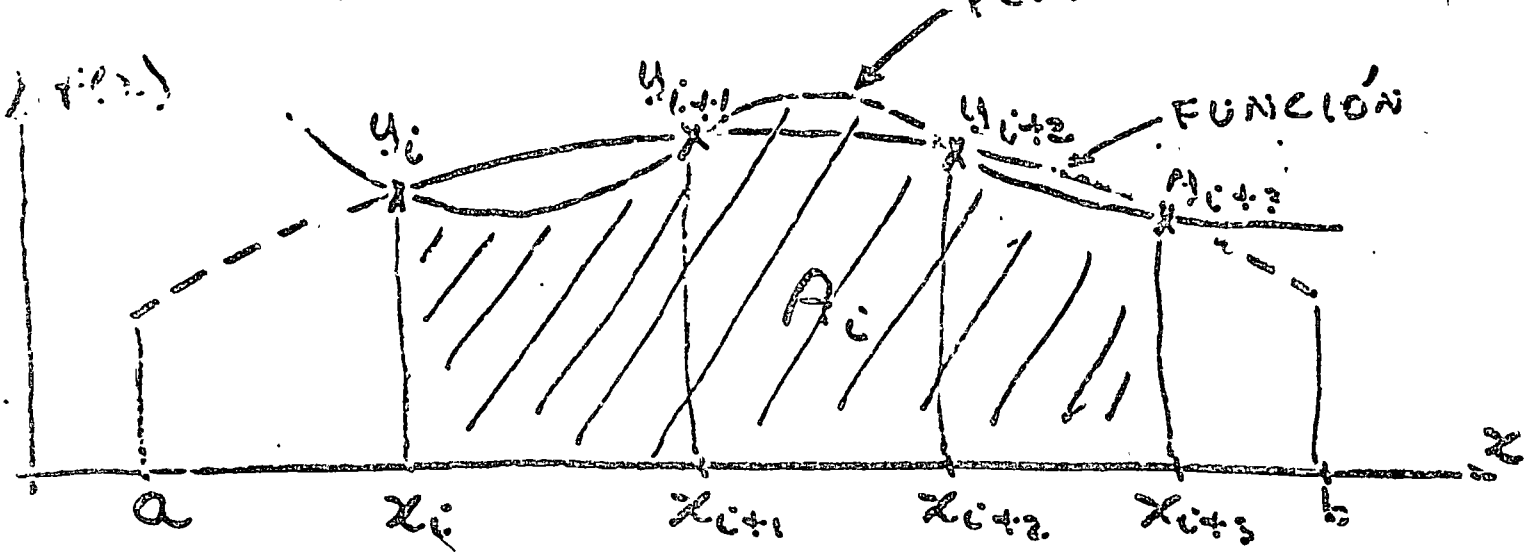
INTERVALO A LA MITAD: $\Delta x \to \Delta x/2$
ERROR ENTRE 16: $(\Delta x)^4 \to \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 = \frac{(\Delta x)^4}{16}$

- TAMBIEN EXISTE ERROR DE REDONDEO

$\Delta x \downarrow$ < DISMINUYE ERROR TRUNCACION Δx^4
AUMENTA ERROR DE REDONDEO (MAS OPERACIONES)

ES DECIR, Δx NO DEBE SER DEMASIADO

INTEGRACION NUMÉRICA DE SIMPSON 3/8



$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} F(x)\,dx \simeq A_i$$

AREA BAJO CURVA $\simeq$ AREA BAJO POLINOMIO $P(x)$ DE GRADO 3 QUE APROXIMA LA CURVA $F(x)$

$$F(x) \simeq P(x), \qquad P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} F(x)\,dx \simeq A_i = \int_{x_i}^{x_{i+3}} P(x)\,dx = \frac{3\Delta x}{8}\left[y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3}\right]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{3\Delta x}{8}\left[y_1 + y_n + 3(y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_8 + y_9 + \dots) + 2(y_4 + y_7 + y_{10} + \dots)\right]}$$

- NUMERO DE PUNTOS MUESTRALES n:
  $n = (\text{MULTIPLO DE } 3) + 1$
- ERROR $\sim (\Delta x)^4$

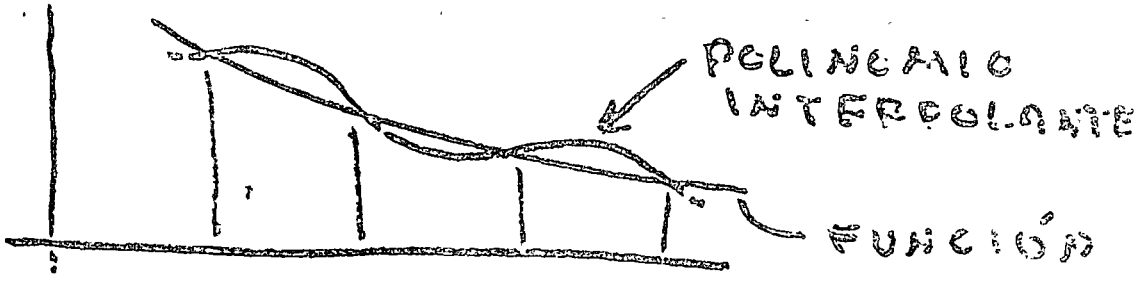
MEJOR ORDEN: SIMPSON 3/8
SIMPSON 1/3
TRAPEZOIDAL

DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA: BÁSICAMENTE MUCHO MENOS PRECISA QUE LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA. (∴ SE TRATA DE EVITARLA).

- FUNCIONES DEFINIDAS TABULARMENTE O GRÁFICAMENTE

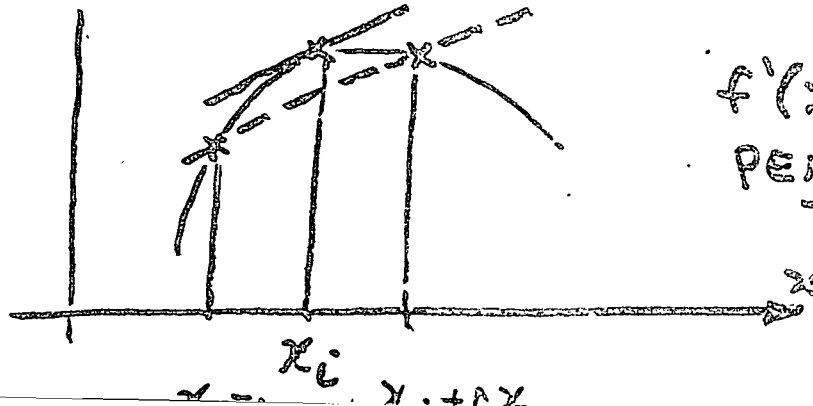
DIFERENCIACIÓN POR POLINOMIOS



DERIVADAS (DE P(x))	BASTANTE DIFERENTES DE ≃	DERIVADAS DE f(x)
INTEGRAL DE P(x)		INTEGRAL DE f(x)

SE HACE $f(x) \simeq P(x)$ ← SE DERIVA

DIFERENCIACION POR SERIE DE TAYLOR:



$f'(x_i) \simeq$ PENDIENTE DE TA - - - -

SERIES DE TAYLOR:

$$y(x_i + \Delta x) = y_i + y'_i(\Delta x) + y''_i(\Delta x)^2 + \dots$$

$$y(x_i - \Delta x) = y_i - y'_i(\Delta x) + y''_i(\Delta x)^2 + \dots$$

$$y'_i \simeq \frac{y(x_i + \Delta x) - y(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$\boxed{y'_i \simeq \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}}$$

APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS CENTRALES DE y' EN x_i.

RAICES DE FUNCIONES

$3x^2 = 7x + 2$ $\quad$ $3x^2 - 7x - 2 = 0$ $\quad$ POLINOMIO

$5 \operatorname{sen} 3x = x + 4$ $\quad$ $5 \operatorname{sen} 3x - x - 4 = 0$ $\quad$ TRASCENDENTE

$$f(x) = 0$$

x QUE SATISFACE $f(x) = 0$: RAIZ ó CERO DE $f(x)$

1) MÉTODO GRAFICO

$x^3 - x - 1 = 0$

$f(x) = x^3 - x - 1$

$f(x) = x^2(x - 1) - 1$

x	$f(x)$
$+\infty$	∞
$-\infty$	$-\infty$
0	-1
1	
2	
-1	

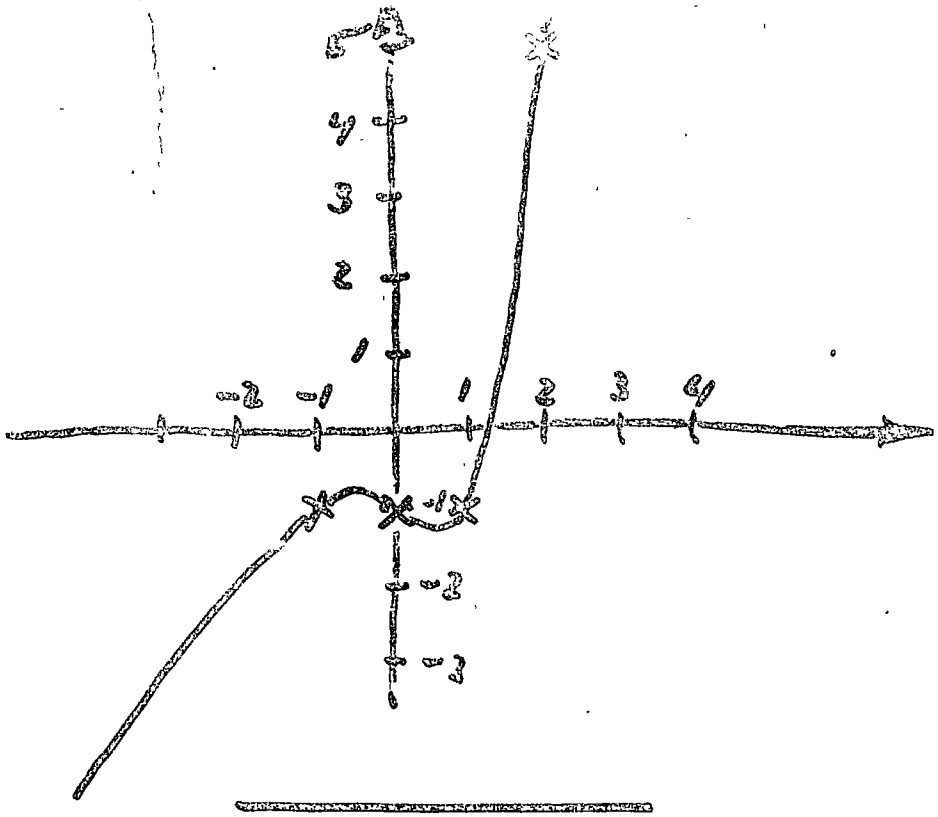
$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0$

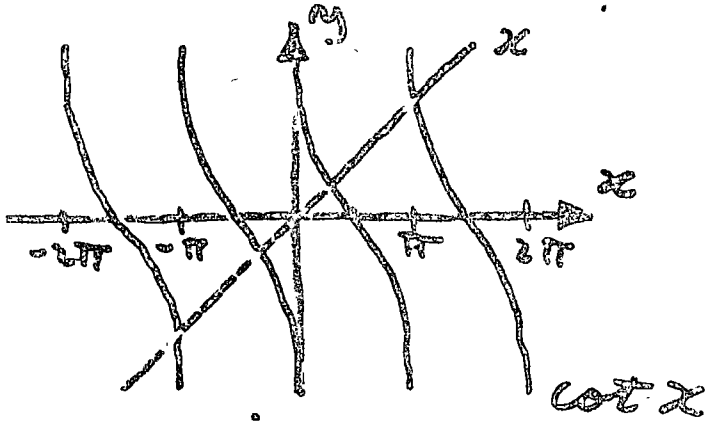
$3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$

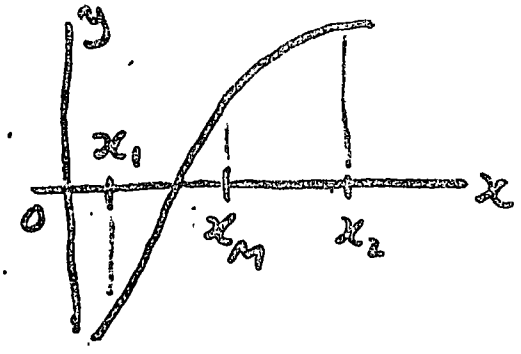
$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

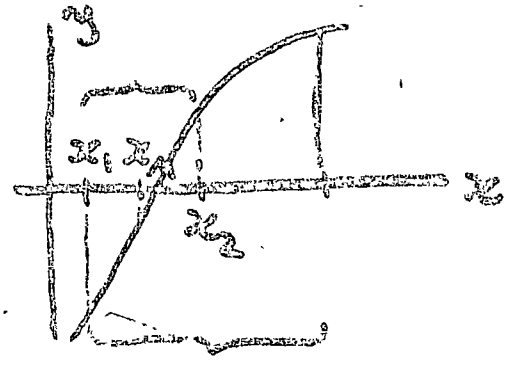


$x = \cot x$



2) BISECCIÓN





$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

BISECCIÓN: INTERVALO = INTERVALO/2

10 PASOS: INTERVALO SE REDUCE EN FACTOR $2^{10} \approx 1{,}000$

20 " " " " $2^{20} \approx 1{,}000{,}000$

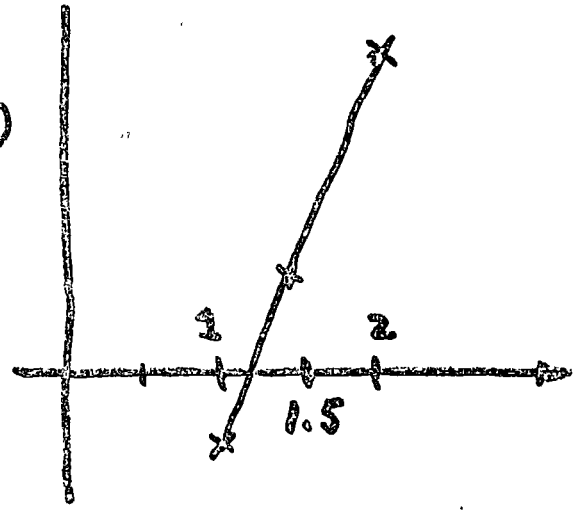
$f(x) = x^3 - x - 1$

$f(1) = -1 < 0 < 5 = f(2)$

$x_M = \frac{1+2}{2} = 1.5$

$f(1.5) = 0.875 > 0$

RAIZ $1.5 \pm .5$

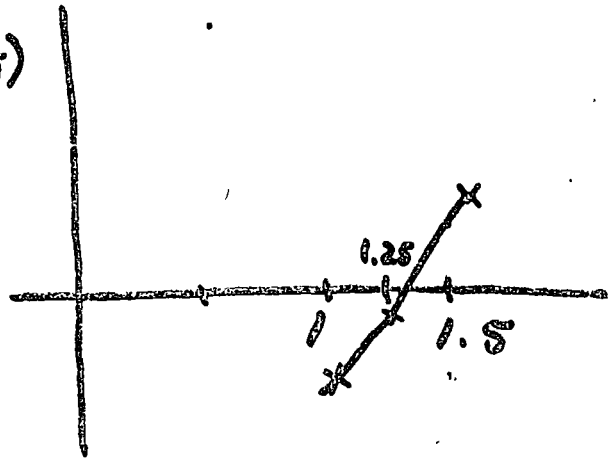


$f(1) = -1 < 0 < 0.875 = f(1.5)$

$x_M = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$

$f(1.25) = -0.296$

RAIZ $1.25 \pm .25$



---

20 ETAPAS:

$1.3247175\ldots < \text{RAIZ} < 1.3247184\ldots$

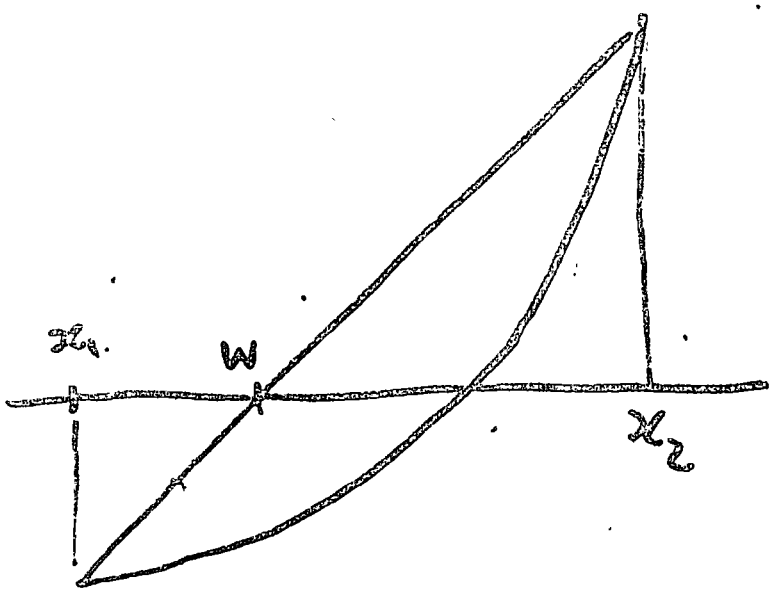
$f(\quad) = -1.3 \times 10^{-6} < 0 < 2.2 \times 10^{-6} = f(\quad)$

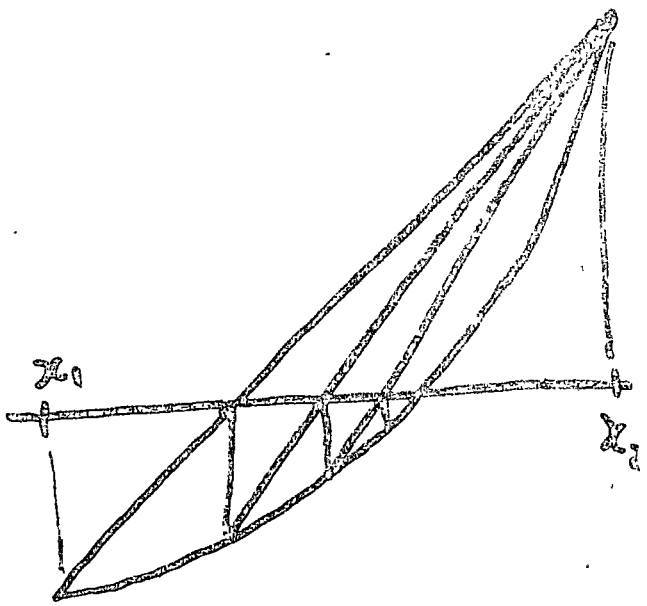
3) REGULA FALSI (FALSA POSICIÓN)

$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$

$f(1) = -1 < 0 < 5 = f(2)$

RAIZ DEBE ESTAR MAS CERCA DE 1. QUE DE 2





$$W = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

(PROMEDIO PONDERADO)

- ALGO MAS RÁPIDO QUE BISECCIÓN
- $|f(x)|$ SE REDUCE
- INTERVALO NO SE REDUCE RÁPIDAMENTE

16 ETAPAS:

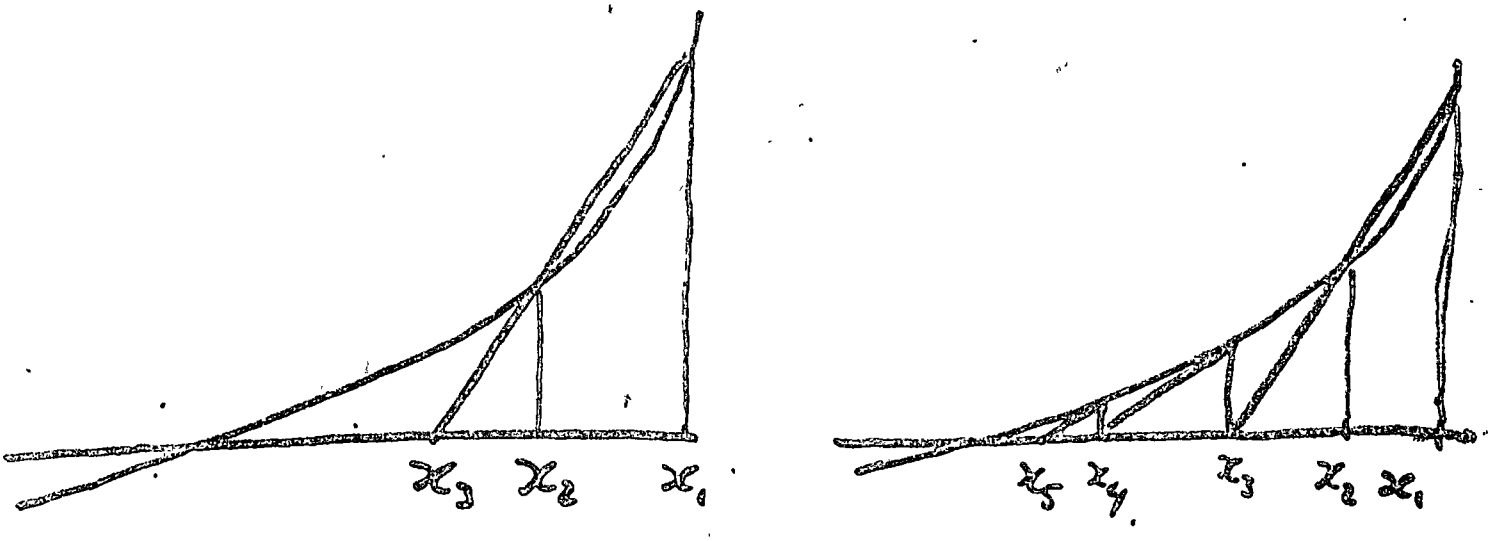
$1.3247174\ldots < \text{RAIZ} < 2$

$f(\ ^{b}) = -1.9 \times 10^{-6} < 0 < 5 = f(2)$

4) SECANTE

MODIFICACIÓN DE REGULA FALSI:

- NO SE EXAMINAN LOS SIGNOS DE $f(x)$.
- SE EMPLEAN LOS DOS ULTIMOS VALORES x PARA EVALUAR LA SECANTE.



$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$= x_n - f(x_n)\underbrace{\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}_{\text{TERMINO CORRECTIVO}}$$

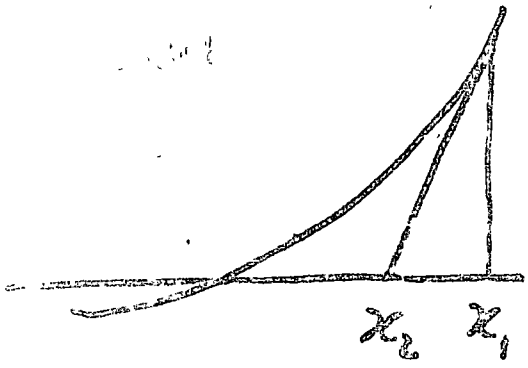
$$\approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{(NEWTON)}$$

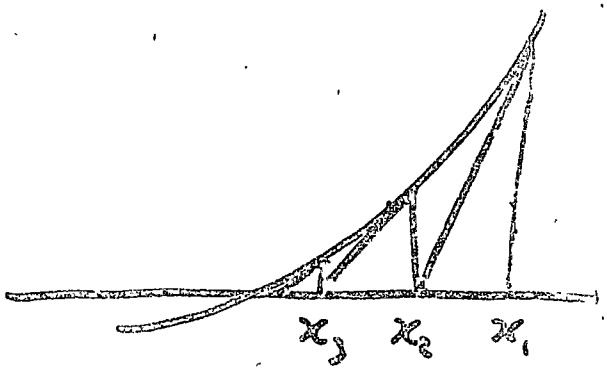
6 ITERACIONES:

$x_6 = 1.3247179\ldots$

$f(x_6) = 3.4 \times 10^{-8}$

5) NEWTON-RAPHSON





$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

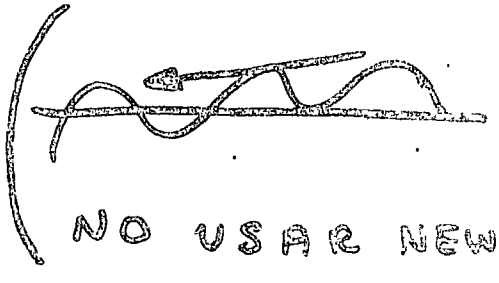
- NECESITA CONOCERSE DERIVADA
- EMPLEA UN SOLO PUNTO POR ITERACIÓN
- CONVERGE RÁPIDAMENTE

$x = 1$ ESTÁ MAS CERCA DEL CERO; $x_0 = 1$

4 ITERACIONES:

$x_4 = 1.3247181\ldots$

$f(x_4) = 9.24 \times 10^{-7}$



NO USAR NEWTON

SOLUCIÓN APROXIMADA x^*:

1) $f(x^*) \simeq 0$ ($|f(x^*)|$ PEQUEÑA)

2) $x^* \simeq$ RAIZ ($|x^* - x_n|$ PEQUEÑA)

EJEMPLO

ECUACIONES DE LA CINÉTICA PUNTUAL DE UN REACTOR NUCLEAR

$$\frac{d}{dt}\Psi = A\Psi$$

DONDE

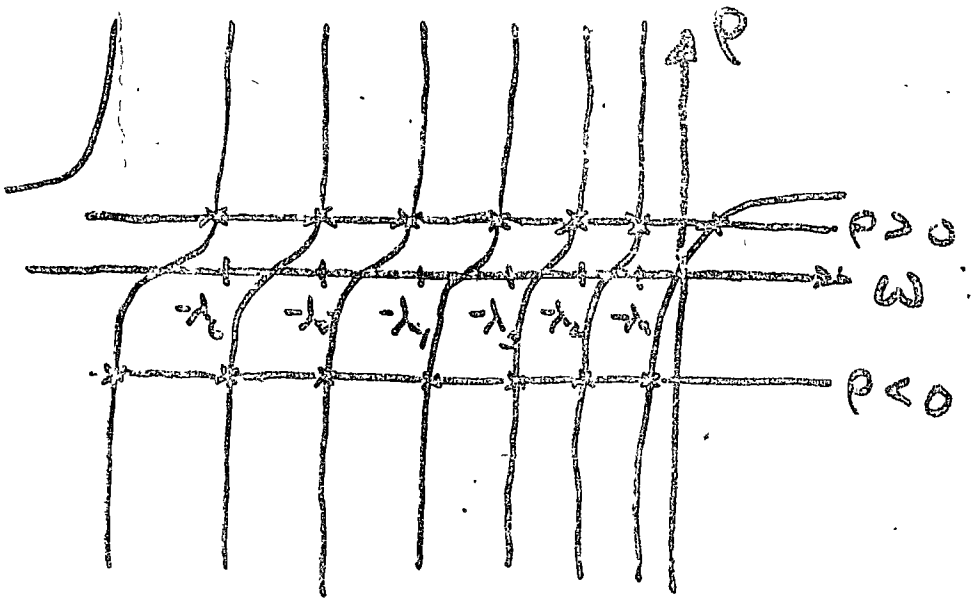
$$\Psi = \begin{bmatrix} n(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} (\rho-\beta)/\Lambda & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \beta_1/\Lambda & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2/\Lambda & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3/\Lambda & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_4/\Lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \beta_5/\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \beta_6/\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix}$$

$n(t)$: POTENCIA DEL REACTOR
$c_i(t)$: CONCENTRACIÓN DEL PRECURSOR i
ρ = REACTIVIDAD
β_i = FRACCION DE NEUTRONES RETARDADOS GPO. i
β = " TOTAL " " $= \sum \beta_i$
λ_i = CONSTANTE DECAIMIENTO PRECURSOR i
Λ = TIEMPO DE GENERACIÓN DE LOS NEUTRONES

LOS EIGENVALORES ω_i DE LA MATRIZ A SON RAICES DE LA ECUACIÓN:

$$|A - \omega I| = 0$$

$$\omega\Lambda + \omega\left[\frac{\beta_1}{\lambda_1+\omega} + \frac{\beta_2}{\lambda_2+\omega} + \ldots + \frac{\beta_6}{\lambda_6+\omega}\right] = \rho$$



NEWTON-RAPHSON:

$$F(\omega) = \omega\Lambda + \omega \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i + \omega} - \rho$$

$$F'(\omega) = \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(\lambda_i + \omega)^2}$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{F(\omega)}{F'(\omega)}$$

OBTENIDOS LOS EIGENVALORES ω_i, SE OBTIENEN LOS EIGENVECTORES $\underline{\psi}_i$, Y LA SOLUCIÓN ES:

$$\underline{\psi}(t) = a_1 e^{-\omega_1 t} \underline{\psi}_1 + \ldots + a_7 e^{-\omega_7 t} \underline{\psi}_7$$

RAÍCES DE POLINOMIOS

- SE PUEDEN APLICAR LOS METODOS ANTERIORES
- COMO SE DEBE EVALUAR EL POLINOMIO MUCHAS VECES, CONVIENE HACERLO EFICIENTEMENTE (FORMA ENCAJADA):

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3)))$$

	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3)))$
	n ADICIONES	n ADICIONES
	$\frac{N(N+1)}{2}$ MULTIPLIC.	n MULTIPLIC.
GRADO $= n = 10$	10	10
	$+\ 55$	$+\ 10$
	65	20

$$P(x) = q(x)(x - z) + b_0$$

q n q n-1

$$P'(x) = q(x) + q'(x)(x - z)$$

INTERPOLACIÓN

- ≠ DE AJUSTE DE CURVAS
- APROXIMAR UNA FUNCION POR OTRA FUNCIÓN MÁS SENCILLA (PARA PODER INTEGRAR Y DIFERENCIAR MÁS FÁCILMENTE, POR EJEMPLO)
- INTERPOLAR EN TABLAS (CALCULAR FUNCIÓN EN PUNTOS NUEVOS)
- FUNCIONES INTERPOLANTES: POLINOMIOS ←
  FUN. TRIGONOMÉTRICAS
  EXPONENCIALES
  RACIONALES

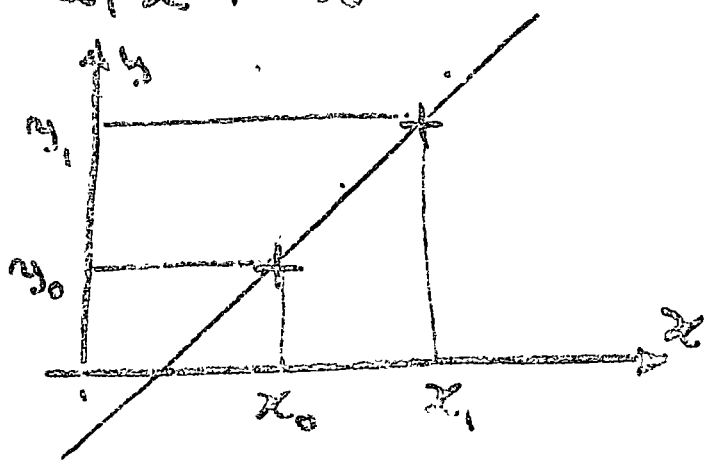
POLINOMIO INTERPOLANTE: LAGRANGE

INTERPOLACIÓN 2 PUNTOS (LINEAL):

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y = P(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \left(y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0\right)$$

$$= a_1 x + a_0$$



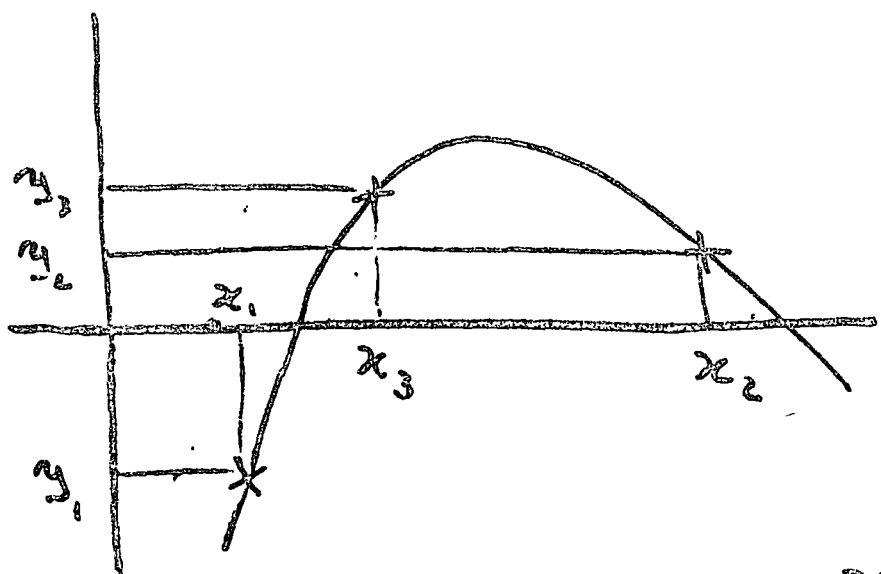
POLINOMIOS DE LAGRANGE

$$X_0: \quad \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} \begin{cases} = 1 & x = x_0 \\ = 0 & x = x_1 \end{cases}$$

$$L_1: \quad \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \begin{cases} =0 & x=x_0 \\ =1 & x=x_1 \end{cases}$$

$$p(x) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

INTERPOLACIÓN 3 PUNTOS (CUADRÁTICA)



POLINOMIOS DE LAGRANGE:

$$L_1: \quad \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \begin{cases} =1 & x=x_1 \\ =0 & x=x_2 \\ =0 & x=x_3 \end{cases}$$

$$L_2: \quad \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \begin{cases} =0 & x=x_1 \\ =1 & x=x_2 \\ =0 & x=x_3 \end{cases}$$

$$L_3: \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \begin{cases} =0 & x=x_1 \\ =0 & x=x_2 \\ =0 & x=x_3 \end{cases}$$

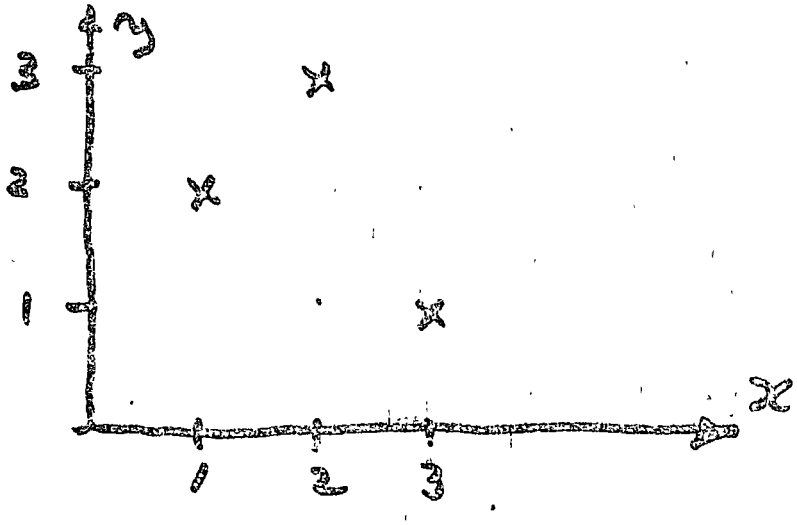
$$P(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\begin{cases} P(x_1) = y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot 0 = y_1 \\ P(x_2) = y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 1 + y_3 \cdot 0 = y_2 \\ P(x_3) = y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot 1 = y_3 \end{cases}$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

EJEMPLO:



$$P(x) = 2 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 3 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$= 2 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)} + 3 \frac{(x-1)(x-3)}{1 \cdot (-1)} + 1 \frac{(x-1)(x-2)}{2 \cdot 1}$$

$$\boxed{P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2}$$

CHECANDO:

$$P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2$$

$$P(1) = -\frac{3}{2}\cdot 1^2 + \frac{11}{2}\cdot 1 - 2 = 2$$

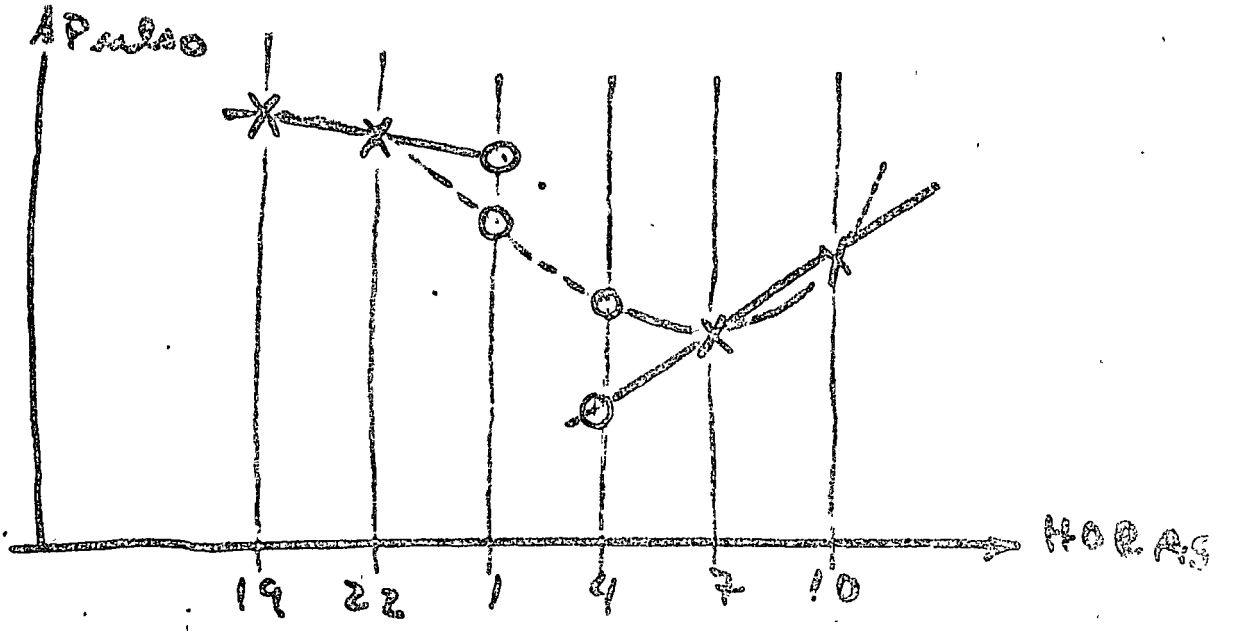
$$P(2) = -\frac{3}{2}\cdot 2^2 + \frac{11}{2}\cdot 2 - 2 = 3$$

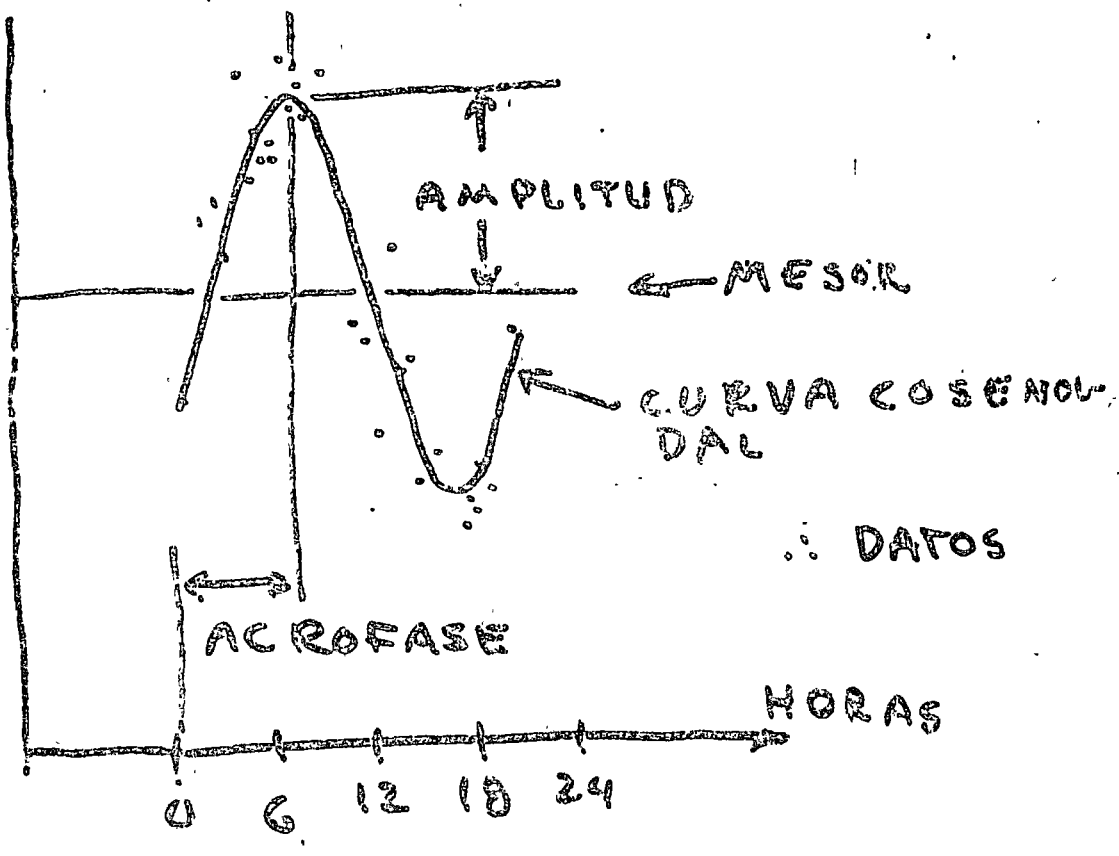
$$P(3) = -\frac{3}{2}\cdot 3^2 + \frac{11}{2}\cdot 3 - 2 = 1$$

APLICACIÓN: RITMOS BIOLÓGICOS

LATIDOS DEL CORAZÓN, RESPIRACIÓN, ACTIVIDAD DIARIA HÍGADO Y RIÑONES, MOVIMIENTO DIARIO HOJAS, ESTRUS ANUAL.

- RELOJ BIOLÓGICO
  (HOJAS MOVIMIENTO DIARIO EN OBSC. HAMSTERS RITMO DIARIO CON LUZ CONT.)





AJUSTE CURVA COSENOIDAL POR MINÍMOS CUADRADOS (FOURIER)

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos wt + a_2 \cos 2wt + \ldots + b_1 \operatorname{sen} wt + b_2 \operatorname{sen} wt + \ldots$$

$$= a_0 + c \cos(wt + \phi)$$

a_0: MESOR; c: AMPLITUD; ϕ: ACROFASE

CUANDO SE INTERPOLAN n PUNTOS

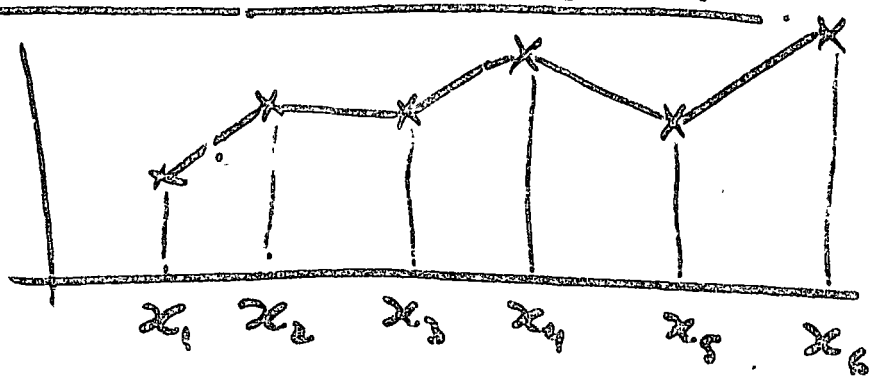
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

- n PARÁMETROS $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.
- POLINOMIO GRADO $n-1$

SI n ES MUY GRANDE, $p(x)$ OSCILA DEMASIADO.
SOLUCIÓN: INTERPOLACION POR PARTES

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE POR PARTES

INTERPOLACIÓN LINEAL P. P.



LAS RECTAS SE FORMAN TOMANDO DOS PUNTOS A LA VEZ:

x_1, x_2
x_2, x_3
x_3, x_4

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SEPTIEMBRE, 1977.

3. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1 Introducción

Por sistemas de ecuaciones lineales se entiende un grupo de ecuaciones que presentan la siguiente estructura:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

donde a_{ij} y b_i son constantes y las incógnitas del sistema son los valores x_i, donde $1 \leq i \leq n$.

Dichos sistemas se pueden representar en la forma:

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{B} \qquad (3.2)$$

donde $\underline{A}$ se conoce como la matriz de coeficientes del sistema, $\underline{B}$ como vector de términos independientes y $\underline{X}$ como vector de incógnitas.

Si el vector de términos independientes es diferente de cero se habla de sistemas de ecuaciones no homogéneas y en caso contrario de sistemas homogéneos.

Antes de proceder a resolver un sistema de ecuaciones es necesario determinar si dicho sistema tiene solución y en caso de tenerla, cuántas posibles soluciones tiene. En base a lo anterior se tiene la siguiente clasificación:

- Sistema de ecuaciones lineales
  - no homogéneo
    - compatible
      - determinado
      - indeterminado
    - incompatible
  - homogéneo
    - compatible
      - determinado (Sol. trivial)
      - indeterminado

Sistema compatible es aquél que sí tiene solución y para que esto se cumpla se requiere:

$$\text{rango}\left[A\right] = \text{rango}\left[A\,|\,B\right] \quad (3.3)$$

donde a la matriz $\left[A\,|\,B\right]$ *se le conoce como la matriz ampliada del sistema.*

Sistema incompatible es aquél que no tiene solución y se cumple que:

$$\text{rango}\left[A\right] < \text{rango}\left[A\,|\,B\right] \quad (3.4)$$

Sistema determinado es un sistema compatible que presenta solución única y se verifica que:

$$\text{rango}\left[A\right] = \text{número de incógnitas} \quad (3.5)$$

Cuando se presenta esta situación en sistemas homogéneos se habla de solución trivial, ya que $\underline{X} = \underline{0}$.

Un sistema compatible que presenta infinidad de soluciones se conoce como sistema indeterminado y se caracteriza por:

$$\text{rango}\left[A\right] < \text{número de incógnitas} \quad (3.6)$$

Para la solución de sistemas de ecuaciones lineales existen diversos métodos de los cuales solo se tratarán: Método de Gauss-Jordan modificado y el Método de Gauss-Seidel.

3.2 Método de Gauss-Jordan modificado.

3.2.1 Objeto

Obtener la solución de sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{B} \quad (3.7)$$

3.2.2 Método

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{B} \quad (3.8)$$

---

* *rango* $\left[\underline{A}\right]$ *es la cantidad de vectores linealmente independientes del conjunto de vectores columna que forman la matriz* $\underline{A}$.

el método consiste en trabajar con la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, es decir, con la matriz ampliada del sistema:

$$\left[\underline{A} \mid \underline{B}\right] \qquad (3.9)$$

A dicha matriz se le aplican una serie de transformaciones que conducen a obtener otra matriz ampliada equivalente:

$$\left[\underline{I}_n \mid \underline{C}\right] \qquad (3.10)$$

donde $\underline{C}$ representa la solución de cada una de las incógnitas del sistema.

El proceso equivale a premultiplicar la ecuación (3.9) - por $\underline{A}^{-1}$, es decir, el método de la matriz inversa, solo que este método consiste en una eliminación sistemática de valores.

La transformación de la matriz (3.9) en la matriz (3.10) se efectúa basándose en tres operaciones que no alteran el sistema de ecuaciones sino que proporcionan sistemas de ecuaciones equivalentes, ellas son:

- intercambio de dos renglones, lo cual equivale a intercambiar dos ecuaciones.
- multiplicación de un renglón por un escalar diferente de cero, lo cual equivale a multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma constante.
- suma de equimúltiplos de un renglón a otro renglón, es decir, multiplicar una ecuación por una constante "K" y sumarla a otra ecuación.

Para aplicar las operaciones anteriores se procede en la siguiente forma:

(1) Seleccionar un renglón pivote y un elemento pivote dentro de dicho renglón.

(2) Normalizar el elemento pivote, es decir, convertirlo en unitario.

(3) Cancelar elementos que se encuentren en la columna arriba y/o abajo del elemento pivote mediante la suma de - equimúltiplos.

(4) Regresar al paso (1) y así sucesivamente hasta que se - transforma la matriz de coeficientes $\underline{A}$ en una matriz --

identidad $\underline{I}_n$.

Debido a que durante el proceso se presentan errores por redondeo, la forma óptima de escoger los elementos pivote es - seleccionando el mayor elemento que quede en la matriz $\underline{A}$ o en sus transformaciones. Hay que tener presente que los elementos de un renglón que ya fue seleccionado como línea pivote no se pueden usar como pivotes, aún cuando el mayor elemento quede colocado en dicho renglón.

Al seleccionar los pivotes en la forma antes mencionada el error se reduce al mínimo y, debido a que puede quedar una - matriz no identidad al término de las iteraciones, es necesario efectuar un intercambio de líneas hasta obtener $\underline{I}_n$.

Cabe mencionar que el presente método es un método directo de solución que no requiere que se determine con anterioridad si el sistema es compatible y determinado, el método durante el proceso proporciona dicha información.

Si el sistema es compatible y determinado, el procedimiento descrito se puede llevar a cabo sin contratiempos hasta llegar a $\left[\begin{array}{c|c} I_n & C \end{array}\right]$.

Si el sistema es compatible pero indeterminado, la matriz ampliada adquirirá la configuración:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (3.11)$$

es decir, un renglón será nulo; en esta situación se obtienen - las ecuacionesindependientes que restan en el sistema y se aplica la metodología correspondiente a sistemas indeterminados.

Si el sistema es incompatible, se presentará lo siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \neq 0 \end{array}\right] \qquad (3.12)$$

o sea, $0 = \lambda \neq 0$, lo cual es una contradicción.

3.2.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE GAUTOR (A, B, N, EPS, DET), esta subrutina obtiene la solución del sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan modificado, el programa principal solo sirve para entrada y salida de datos.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina GAUTOR:

A(I,J)	matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.
B(I)	vector de términos independientes del sistema de ecuaciones, durante el proceso se transforma en la solución.
N	orden del sistema de ecuaciones.
RAMAX	mayor elemento de la matriz A que se emplea como pivote.
MVR(I) y MVC(I)	contadores que indican qué renglón y columnas ya fueron empleados.
EPS	criterio para determinar si el determinante de la matriz A es nulo.
DET	parámetro que indica si el determinante de A es nulo.
LR y LC	indicadores del renglón y columna que se utilizan.
TEMP	variable de localización temporal.

Para el programa principal:

A(I,J)	matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.
B(I)	vector de términos independientes.
N	orden del sistema de ecuaciones.
EPS	criteri para determinar si el determinante de A es nulo.
DET	parámetro que indica si el determinante de A es nulo.

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION del programa principal y de la subrutina se deberán modificar en el caso de que: $N > 10$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5)	N
2	(8F10.0)	A(I,J), se dan los elementos de A renglón por renglón, empleando tantas tarjetas como sean necesarias para cada renglón.
.		
.		
.		
3	(8F10.0)	B(I), el vector de términos independientes se da en una tarjeta o más según la cantidad de elementos.
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

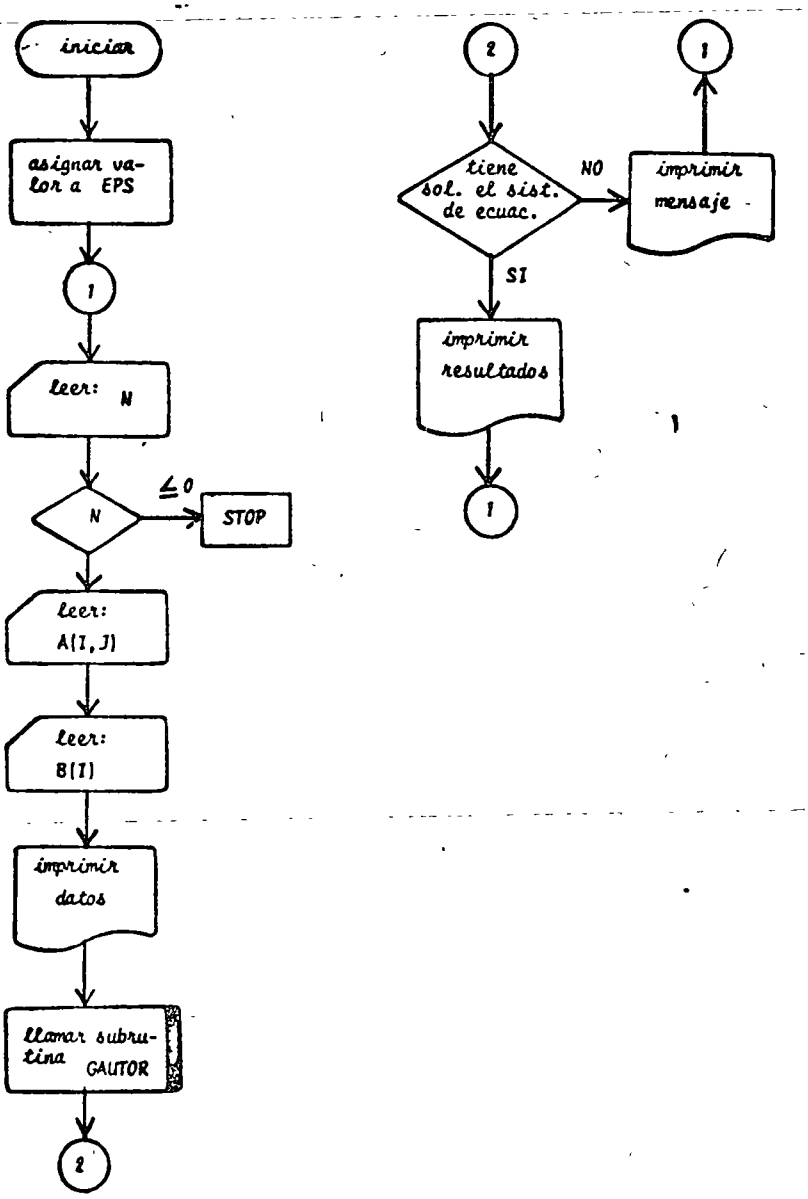


Fig. 3.1 Diagrama de bloques del programa principal.

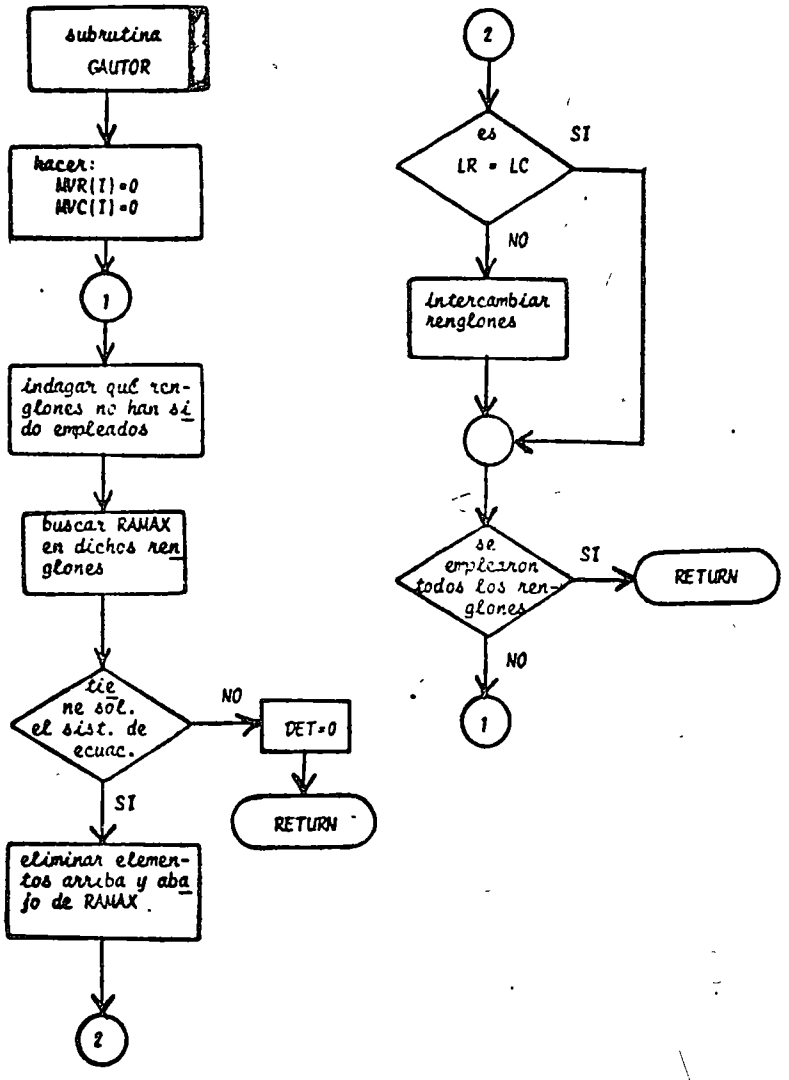


Fig. 3.2 Diagrama de bloques de la subrutina GAUTOR.

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR EL METO
C     DO DE GAUSS-JORDAN
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     N=ORDEN DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     A=MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     B=VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES, SE CONVIERTE EN LA SOLUCION
C     CRITERIO PARA DETERMINAR SI EL DETERMINANTE DE A ES DIFERENTE DE 0
C     DET=VARIABLE QUE INDICA SI EL SISTEMA TIENE O NO SOLUCION

      DIMENSION A(10,10),B(10)
      IR=5
      IW=6
      EPS=0.0L0001
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(IR,20) N
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 DO 4 I=1,N
    4 READ(IR,21) (A(I,J),J=1,N)
      READ(IR,21) (B(I),I=1,N)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(IW,22)
      DO 5 I=1,N
    5 WRITE(IW,23) (A(I,J),J=1,N),B(I)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES
      CALL GAUTOR(A,B,N,EPS,DET)
      IF(DET.LE.EPS) GO TO 7
C     IMPRESION DE RESULTADOS
      WRITE(IW,24)
      DO 6 I=1,N
    6 WRITE(IW,25) I,B(I)
      GO TO 1
    7 WRITE(IW,26)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
   20 FORMAT(I5)
   21 FORMAT(8F10.0)
   22 FORMAT(4(/),5X,'EL SISTEMA DE ECUACIONES ES',//)
   23 FORMAT(/,2X,10(E10.3,1X))
   24 FORMAT(4(/),5X,'LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES ES',///,5X,'I
     1',5X,'X(I)',/)
   25 FORMAT(/,5X,I2,4X,E12.5)
   26 FORMAT(4(/),5X,'EL SISTEMA DE ECUACIONES NO TIENE SOLUCION')
      END
```

Fig. 3.3 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE GAUTOR(A,B,N,EPS,DET)
C
C     SUBRUTINA PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL METODO DE
C     GAUSS-JORDAN MODIFICADO
C     EL SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS ES
C     A=MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     B=VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES QUE DURANTE EL PROCESO SE
C       TRANSFORMA EN LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     N=ORDEN DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     RAMAX=MAYOR ELEMENTO DE LA MATRIZ A QUE SE USA COMO PIVOTE
C     NVR Y NVC=CONTADORES QUE INDICAN QUE RENGLON Y QUE COLUMNA YA FUE-
C       RON UTILIZADOS
C     EPS=CRITERIO PARA DETERMINAR SI EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ A ES
C       NULO
C     DET=VALOR ABSOLUTO DEL DETERMINANTE DE LA MATRIZ A
C
      DIMENSION A(10,10),B(10),NVR(10),NVC(10)
C
C     ACTUALIZACION DE VALORES PARA INICIAR EL PROCESO
C
      DO 1 I=1,N
      NVR(I)=0
    1 NVC(I)=0
C
C     SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C
      DO 9 K=1,N
      RAMAX=0.0
      LC=0
      LR=0
      DO 3 I=1,N
      IF(NVR(I).EQ.1) GO TO 3
      DO 2 J=1,N
      IF(NVC(J).EQ.1) GO TO 2
      IF(ABS(RAMAX).GE.ABS(A(I,J))) GO TO 2
      RAMAX=A(I,J)
      LR=I
      LC=J
    2 CONTINUE
    3 CONTINUE
      DET=ABS(RAMAX)
      IF(DET.LE.EPS) GO TO 10
      IF(LR.EQ.LC) GO TO 5
      DO 4 I=1,N
      TEMP=A(LR,I)
      A(LR,I)=A(LC,I)
    4 A(LC,I)=TEMP
      TEMP=B(LR)
      B(LR)=B(LC)
      B(LC)=TEMP
    5 DO 6 I=1,N
    6 A(LC,I)=A(LC,I)/RAMAX
      B(LC)=B(LC)/RAMAX
      DO 8 I=1,N
      IF(I.EQ.LC) GO TO 8
      TEMP=A(I,LC)
      B(I)=B(I) - TEMP*B(LC)
      DO 7 J=1,N
    7 A(I,J)=A(I,J) - TEMP*A(LC,J)
    8 CONTINUE
      NVR(LC)=LC
      NVC(LC)=LC
    9 CONTINUE
   10 RETURN
      END
```

Fig. 3.4 Listado de la subrutina GAUTOR

3.2.4 Ejemplo

Empleando las leyes de Kirchhoff (ver referencia 2), se obtuvieron las siguientes ecuaciones lineales para el circuito mostrado en la figura 3.5:

$$
\begin{aligned}
i_8 - i_4 - I_A &= 0 \\
i_4 + i_5 + I_A - i_1 - i_3 &= 0 \\
i_1 - i_2 - I_B &= 0 \\
i_2 + I_B + i_3 + i_6 - i_7 &= 0 \\
I_C - i_8 - i_5 - i_6 - i_9 &= 0 \\
R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 &= 0 \\
R_4 i_4 - R_5 i_5 + R_8 i_8 &= 0 \\
R_5 i_5 + R_3 i_3 - R_6 i_6 &= 0 \\
R_6 i_6 + R_7 i_7 - R_9 i_9 &= 0
\end{aligned}
$$

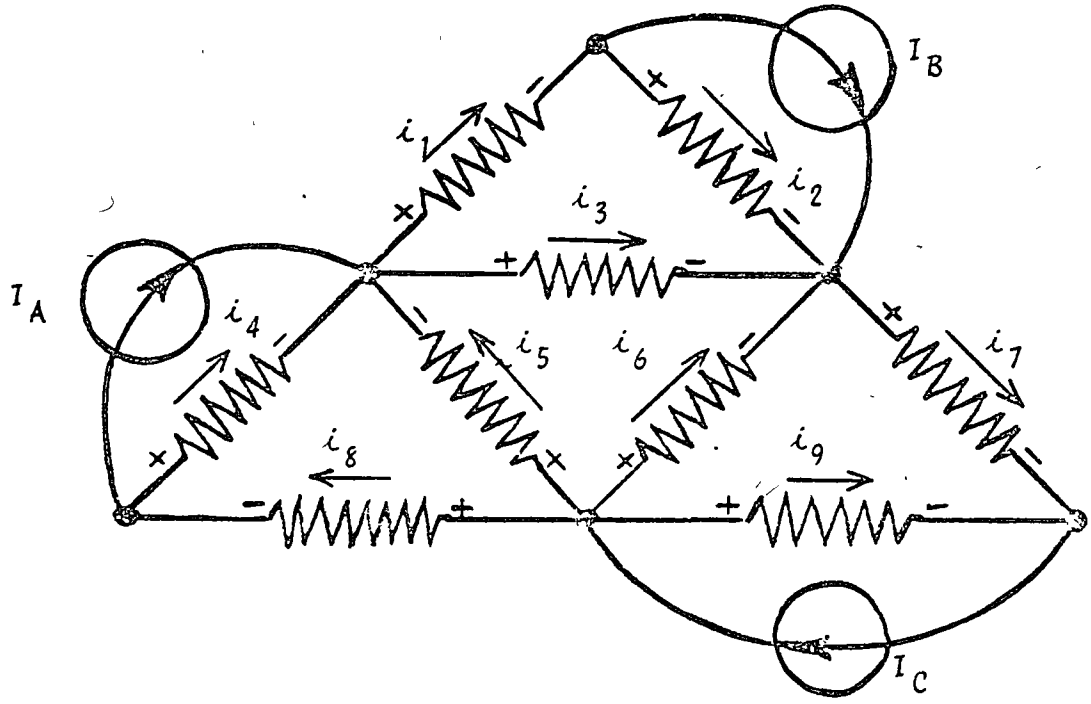


Fig. 3.5 Circuito del ejemplo 3.2.4

Si el valor de las fuentes es $I_A = 2A$, $I_B = 6A$, $I_C = 4A$ y el de las resistencias:

$R_1 = R_2 = 2\ \Omega$

$R_4 = R_8 = 3\ \Omega$

$R_5 = R_6 = 5\ \Omega$

$R_7 = R_9 = 4\ \Omega$

$R_3 = 6\ \Omega$

Obtenga las corrientes de rama i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9.

* SOLUCION

TABLA 3.1 Datos para el problema del ejemplo 3.2.4

$N = 9$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TABLA 3.2 Resultados del problema del ejemplo 3.2.4

EL SISTEMA DE ECUACIONES ES

0.	0.	0.	-.100E+01	0.	0.	0.	.100E+01	0.	.200E+01
-.100E+01	0.	-.100E+01	.100E+01	.100E+01	0.	0.	0.	0.	-.200E+01
.100E+01	-.100E+01	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	.600E+01
0.	.100E+01	.100E+01	0.	0.	.100E+01	-.100E+01	0.	0.	-.600E+01
0.	0.	0.	0.	.100E+01	.100E+01	0.	.100E+01	.100E+01	.400E+01
.200E+01	.200E+01	-.600E+01	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	.300E+01	-.500E+01	0.	0.	.300E+01	0.	0.
0.	0.	.600E+01	0.	.500E+01	-.500E+01	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	.500E+01	.400E+01	0.	-.400E+01	0.

LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES ES

I	X(I)
1	.23761E+01
2	-.36239E+01
3	-.81596E+00
4	-.56359E+00
5	.52370E+00
6	.24548E+01
7	.19847E+01
8	.14364E+01
9	.20153E+01

3.3 Método de Gauss-Seidel

3.3.1 Objeto

Obtener la solución de sistemas de ecuaciones lineales -- con la configuración:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (3.13)$$

empleando el método de Gauss-Seidel.

3.3.2 Método

El método de Gauss-Seidel es un método de tipo iterativo que sirve para la solución de sistemas de ecuaciones lineales del tipo:

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{B} \qquad (3.14)$$

cuando los valores numéricos de los elementos de la diagonal - principal son mayores que los demás de su correspondiente renglón.

Para asegurar la convergencia del método se requiere que:

a) los elementos no nulos de la matriz de coeficientes ($\underline{A}$) se acumulen en la diagonal principal.

b) los elementos de la diagonal principal de la matriz de coeficientes ($\underline{A}$) sean mayores en valor absoluto que la sumatoria de los valores absolutos de los elementos -- restantes del renglón correspondiente, es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.15)$$

Para aplicar el método se procede a despejar una incógni

ta de cada ecuación del arreglo (3.13), es decir, despejar la incógnita x_i de la "i-ésima" ecuación, o sea:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n\right] \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n\right] \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right] \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

y se establecen las siguientes ecuaciones iterativas:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n\right] \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right] \end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

donde $x_i^{(k+1)}$ indica el valor de la "i-ésima" incógnita en la iteración "k + 1"

Para arrancar el método se establece una solución inicial $\underline{X}_0$:

$$\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ \vdots \\ x_n^\circ \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

dichos valores se sustituyen en el lado derecho de la ecuación (3.17) para obtener la siguiente solución aproximada:

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (3.19)$$

y así sucesivamente hasta que

$$\left| \underline{X}_{n+1} - \underline{X}_n \right| < \underline{\varepsilon} \qquad (3.20)$$

Para poder emplear este método es necesario verificar con anterioridad que el sistema sea compatible y determinado; además de que cumpla con las condiciones de convergencia del método. - Afortunadamente la mayoría de los problemas de tipo ingenieril cumplen los requisitos mencionados.

Ciertos sistemas que a primera vista no cumplen los requisitos del método pueden llenar los requisitos mediante un simple intercambio en la posición de las ecuaciones.

3.3.3 Descripción del programa

a) Subrutinas requeridas:

Ninguna.

b) Descripción de las variables.

A(I,J)	matriz de coeficientes del sistema
B(I)	vector de términos independientes
N	orden del sistema de ecuaciones
X(I)	valor inicial de las incógnitas del sistema y variable de localización temporal
Y(I)	valor de las incógnitas en la iteración "n"
XN(I)	valor de las incógnitas en la iteración "n + 1"

M	máximo número de iteraciones a efectuar
E	criterio de convergencia
NCON	contador de iteraciones efectuadas
SUM	sumador

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION deberá modificarse cuando se presente el caso de que N > 20.

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC.	TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1		(2I5,F10.0)	N, M, E
2		(10F8.0)	A(I,J), los elementos de la matriz A se dan renglón por renglón empleando la cantidad de tarjetas necesaria para cada renglón.
3		(10F8.0)	B(I) el vector de términos independientes se da en una tarjeta o más según el orden del sistema.
4		(10F8.0)	X(I), la solución para arrancar el método se da en una tarjeta o más según sea el tamaño de N.
	otros paquetes de datos (opcional)		
n			TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

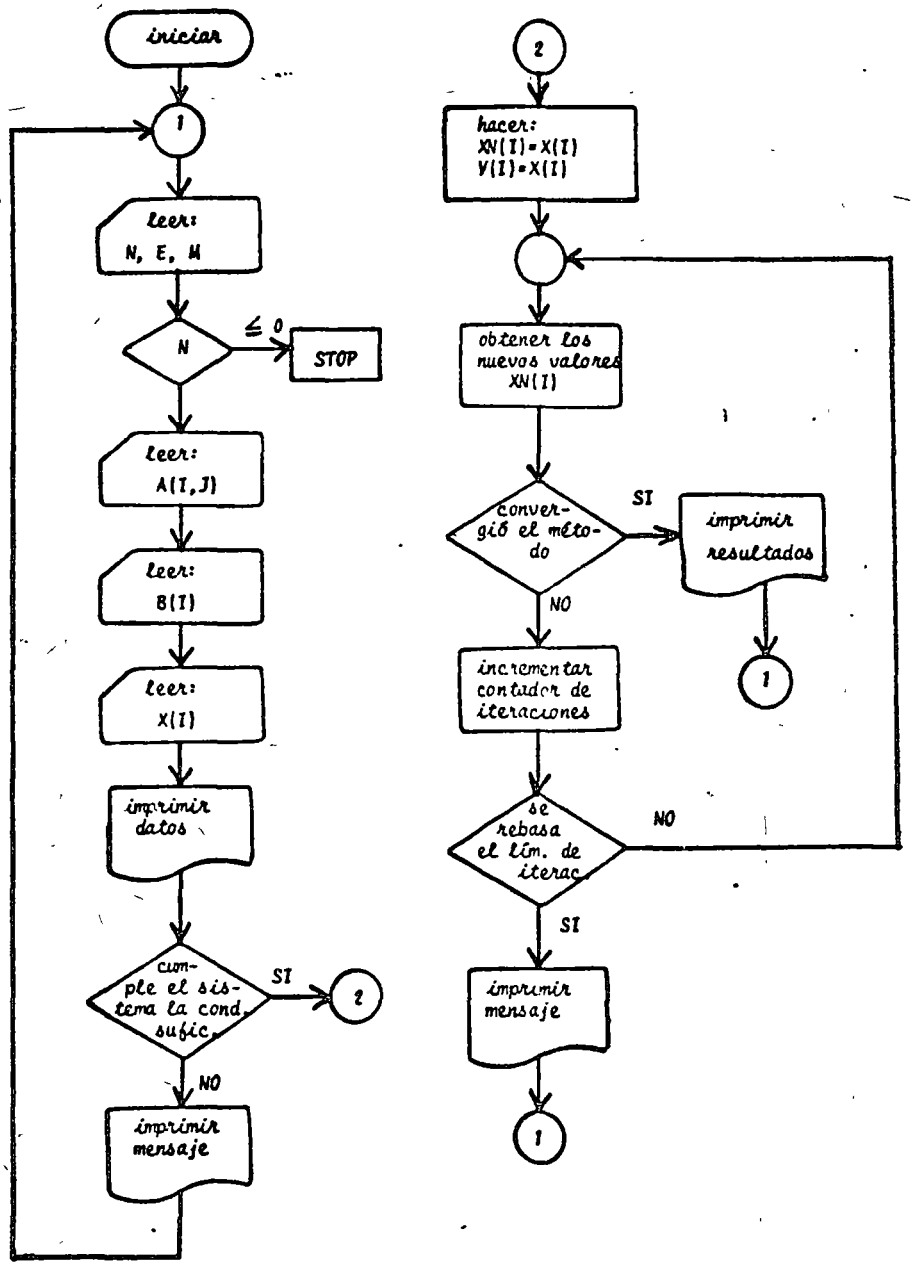


Fig. 3.6 Diagrama de bloques para el programa

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL METODO DE
C     GAUSS-SEIDEL
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     A=MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     B=VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES
C     X=VALOR INICIAL DE LA SOLUCION DEL SISTEMA
C     XN=SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN LA SIGUIENTE ITERACION
C     N=ORDEN DEL SISTEMA
C     Y=VALOR DE LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ITERACION
C         ANTERIOR
C     M=MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES
C     E=CRITERIO DE CONVERGENCIA

      DIMENSION A(20,20),B(20),X(20),Y(20),XN(20)
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,200) N,M,E
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 DO 4 I=1,N
    4 READ(5,300) (A(I,J),J=1,N)
      READ(5,300) (B(I),I=1,N)
      READ(5,300) (X(I),I=1,N)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(6,400)
      DO 5 I=1,N
    5 WRITE(6,500) (A(I,J),J=1,N),B(I)
      WRITE(6,600) (X(I),I=1,N)
C     SE INDAGA SI EL SISTEMA CUMPLE LA CONDICION SUFICIENTE DE CONVER-
C     GENCIA
      DO 7 I=1,N
      DO 6 J=1,N
      IF(ABS(A(I,I)) - ABS(A(I,J))) 8,6,6
    6 CONTINUE
    7 CONTINUE
      GO TO 9
    8 WRITE(6,700) I,J,I,I
      GO TO 1
C     OBTENCION DEL VALOR DE LAS INCOGNITAS
    9 NCON=1
      DO 10 I=1,N
      XN(I)=X(I)
   10 Y(I)=X(I)
   11 DO 14 K=1,N
      SUM=0.
      DO 13 I=1,N
      IF(K-I) 12,13,12
   12 SUM=SUM + A(K,I)*XN(I)
   13 CONTINUE
      XN(K)=(B(K)-SUM)/A(K,K)
   14 CONTINUE
      DO 15 I=1,N
C     SE VERIFICA SI YA CONVERGIO EL METODO
      IF(ABS(XN(I)-Y(I))-E) 15,16,16
   15 CONTINUE
C     IMPRESION DE RESULTADOS
      WRITE(6,800) (XN(I),I=1,N)
      WRITE(6,950) NCON
      GO TO 1
   16 NCON=NCON + 1
      IF(NCON-M) 18,17,17
   17 WRITE(6,900) (XN(I),I=1,N)
      WRITE(6,950) NCON
      GO TO 1
   18 DO 19 I=1,N
   19 Y(I)=XN(I)
      GO TO 11
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  200 FORMAT (2I5,F10.0)
  300 FORMAT (10F8.0)
  400 FORMAT(1H1,5(/),15X,'MATRIZ AMPLIADA')
  500 FORMAT (/,15X,10(F5.3,5X))
  600 FORMAT(3(/),15X,'PRIMERA APROXIMACION DE LA SOLUCION',///,10X,10(F
     16.2,5X))
  700 FORMAT(4(/),15X,'EL METODO PUEDE NO CONVERGER DADO QUE',///,15X,'A(
     2',I2,',',I2,') ES MAYOR QUE A(',I2,',',I2,')')
  800 FORMAT(3(/),15X,'LA SOLUCION DEL SISTEMA ES',///,5X,9(E12.5,2X))
  900 FORMAT(4(/),15X,'NO SE LLEGA A LA SOLUCION',////,15X,'LA ULTIMA APR
     1OXIMACION ENCONTRADA FUE',////,5X,9(E.2.5,2X))
  950 FORMAT(4(/),15X,'ITERACIONES REALIZADAS= ',I4)
      END
```

Fig. 3.7 Listado del programa

3.3.4 Ejemplo

Para el circuito eléctrico de la fig. 3.8 se sabe que --- $I_1 = 1A$ e $I_2 = 2A$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1\ \Omega$.

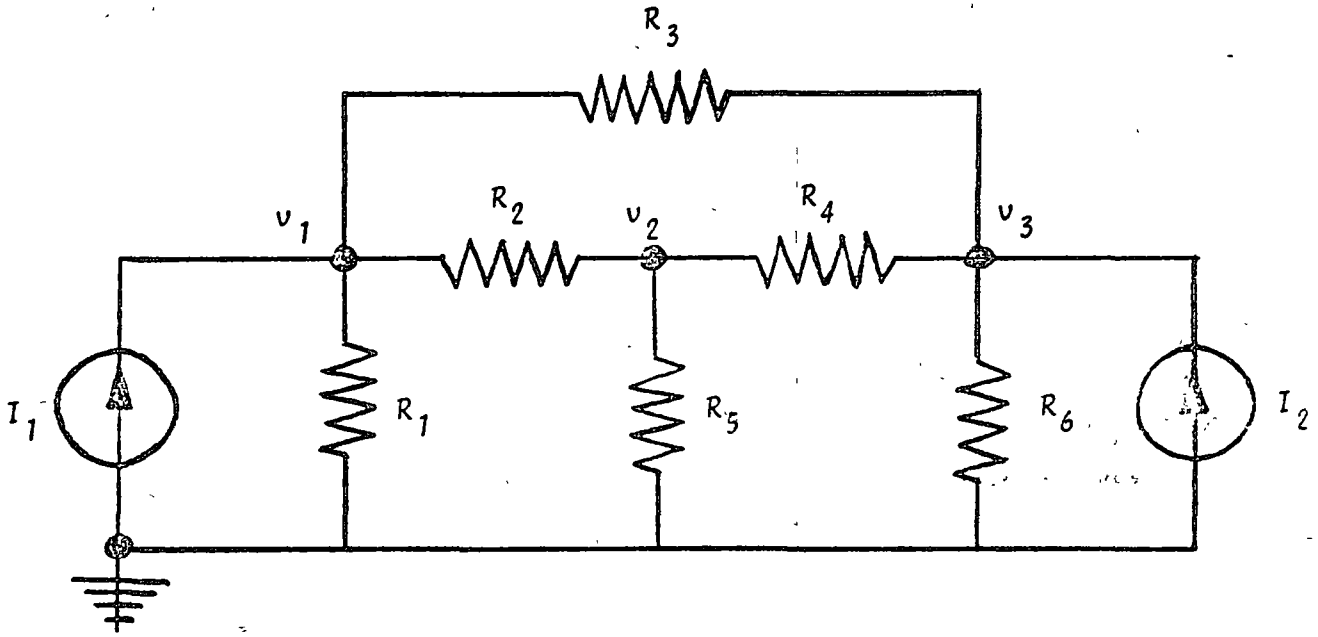


Fig. 3.8 Circuito eléctrico del problema del ejemplo 3.3.4

Se desea obtener el voltaje de los nodos V_1, V_2 y V_3. Aplicando análisis nodal al circuito se obtiene:

$$3V_1 - V_2 - V_3 = 1$$
$$-V_1 + 3V_2 - V_3 = 0$$
$$-V_1 - V_2 + 3V_3 = 2$$

arreglo que es un sistema de ecuaciones lineales con todas las características propias para aplicar el método de Gauss-Seidel.

Se seleccionará como solución inicial al siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} V_1^o \\ V_2^o \\ V_3^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

* SOLUCION

TABLA 3.3 Datos del problema del ejemplo 3.3.4

$N = 3$

$M = 50$

$EPS = 0.0001$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

TABLA 3.4 Resultados del problema del ejemplo 3.3.4

MATRIZ AMPLIADA

3.000	-1.000	-1.000	1.000
-1.000	3.000	-1.000	0.000
-1.000	-1.000	3.000	2.000

PRIMERA APROXIMACION DE LA SOLUCION

0.50 0.50 0.50

LA SOLUCION DEL SISTEMA ES

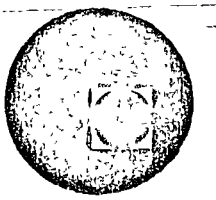
.10000E+01 .75000E+00 .12500E+01

ITERACIONES REALIZADAS= 16

3.4 Bibliografía

1. CARNAHAN B., LUTHER H., WILKES J., "Applied Numerical Methods". New York: John Wiley and Sons Inc., 1969. pp. 269-307.
2. GEREZ G. Víctor, MURRAY LASSO M.A., "Teoría de Sistemas y Circuitos". México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., 1972. pp. 99-123.
3. HADLEY G. "Algebra Lineal". Bogotá: Fondo Educativo Interamericano, 1969. pp. 162-187.
4. HAMMING Richard, "Numerical Methods for Scientists and Engineers". New York: Mc Graw Hill Book Co., 1962. pp. 360-365.
5. JAMES M., SMITH G., WOLFORD J., "Applied Numerical Methods for Digital Computation with FORTRAN". Scranton Penn: International Text Book Co., 1967. pp. 184-230.
6. JOHN STON J., BALEY PRICE G., VAN VLECK F., "Linear Ecuations and Matrices", Reading Mass.: Addison Wesley Co., 1966. pp. 1-94.
7. KUO S. Shan, "Computer Applications of Numerical Methods". Reading Mass.: Addison Wesley Co., 1972. pp. 179-212.
8. OLIVERA S. Antonio, "Apuntes de Métodos Numéricos". México.: Facultad de Ingeniería, UNAM. 1972. pp. 4.1-4.34.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

(continuación)

SEPTIEMBRE, 1977.

b. Find the highest common factor of these polynomials.
c. Find the roots.

14. By direct substitution show that $y = ce^{\alpha t}$ is a solution of the differential equation

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 0$$

if α is a root of the polynomial equation

$$\alpha^4 + 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$$

If α_1, α_2, α_3, and α_4 are the four roots of this equation, show that

$$y = c_1e^{\alpha_1 t} + c_2e^{\alpha_2 t} + c_3e^{\alpha_3 t} + c_4e^{\alpha_4 t}$$

also satisfies the differential equation for any values of c_1, c_2, c_3, and c_4.

15. Show that for t sufficiently large and α_1, α_2, α_3, and α_4 all real, the value of y will be determined by the largest positive α_i.

16. Show that if $y = ce^{\alpha t}$, then y is less than or equal to c in absolute value for all $t > 0$, if the real part of α is zero or negative.

17. In a mechanical system of springs and masses, the motion of any part after a sudden impulse acceleration is governed by a differential equation of the form

$$a_1\frac{d^ny}{dt^n} + a_2\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n\frac{dy}{dt} + a_{n+1}y = 0$$

The system will be stable, that is, will not tend to shake itself apart, if none of the solutions $y = ce^{\alpha t}$ grow very large as t increases. Show that the system will be stable if all the roots of the polynomial equation

$$a_1\alpha^n + a_2\alpha^{n-1} + \cdots + a_n\alpha + a_{n+1} = 0$$

have zero or negative real parts.

18. In an electrical circuit of resistors, capacitors, and inductances, the current at any point after a sudden initial impulse current is governed by a differential equation of the form

$$a_1\frac{d^ni}{dt^n} + a_2\frac{d^{n-1}i}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n\frac{di}{dt} + a_{n+1} = 0$$

The system will be stable, that is, will not tend to develop very large local currents and burn out components if none of the solutions of the form $i = ce^{\alpha t}$ grow very large as t increases. Show that the system will be stable if all the roots of the polynomial equation

$$a_1\alpha^n + a_2\alpha^{n-1} + \cdots + a_n\alpha + a_{n+1} = 0$$

have zero or negative real parts.

Simultaneous Linear Equations and Matrices

10.1 INTRODUCTION

In this chapter we turn to a problem of finding the values of unknowns, x_1, x_2, etc., which satisfy systems of equations of type

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \qquad (10\text{-}1)$$

When the number of equations is equal to the number of unknowns, there will ordinarily be a unique solution; that is, one set of values of x_1, x_2, ..., x_n which satisfy all of the equations. At least such is the concept in the world of exact numbers and exact arithmetic. When the coefficients are approximate numbers, the concept of a solution becomes less clear, as the following example demonstrates.

Example 1. Find the solution of

$$\begin{aligned}
1.0x - 2.0y &= 1.0 \\
.5x - 4.0y &= 1.0
\end{aligned}$$

Figure 10-1 represents the solution, taking into account the [illegible] nature of the coefficients. Each equation is represented not by a line but by a band. Within our knowledge of the accuracy of the above numbers, any value in the band is as acceptable as any other. For example, in the first equation, when $x = 0$, y can be as small as $-1.05/1.95 \approx -.54$ or as large as $-.95/2.05 \approx -.46$. Thus at $x = 0$, the band for the first equation covers the region from $y = -.54$ to $y = -.46$. The two bands intersect not in a unique point but in a region, and any point in this region might be accepted as a solution. The nominal solution, for the above system of equations, obtained by accepting the coefficients as exact, is $x = 2/3$, $y = -1/6$, or approximately $x = .67$, $y = -.17$. However, the points $x = .86$, $y = -.12$

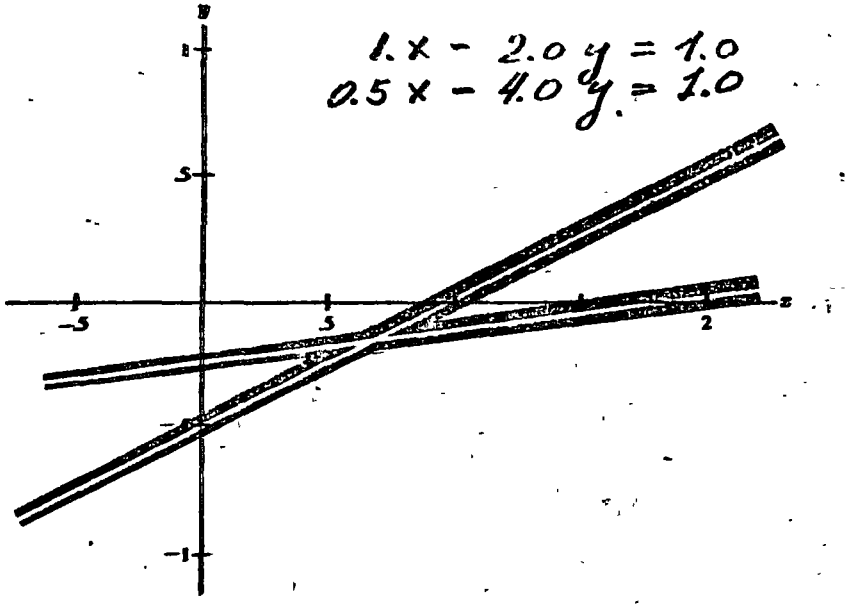


Figure 10-1

and $x = .5$, $y = -.21$ are also within the acceptable region. It is somewhat disconcerting to note that in this rather straightforward case, with the coefficients known to 10% or better, the solution is uncertain by 30% or more. It can be seen that if the equations represent lines that are nearly parallel, the region of overlap of the two bands representing the equations can be quite extended, as illustrated in Figure 10-2(a). In this case, even if the coefficients were exact, a small change in one of them can make a sizable difference in the solution, as illustrated in Figure 10-2(b) and (c). Equations having this property are termed ill-conditioned. An accurate solution can be found only by performing the computation with great care, since even small

round-off errors may influence the answer greatly. Further, in practical problems, the answer itself must be viewed with some circumspection, since any inherent inaccuracies in the values of the coefficients may cause large changes in the answers.

The above example concerned itself with two equations and two unknowns, but analogous situations exist for higher numbers of equations and unknowns.

In this chapter, three general methods of solving a set of simultaneous linear equations are discussed: direct methods, in which the solution is found by a finite number of algebraic manipulations of the coefficients; iterative methods, which produce a set of successive approximations to the solution which hopefully become very close to the solution but never actually reach it; and matrix

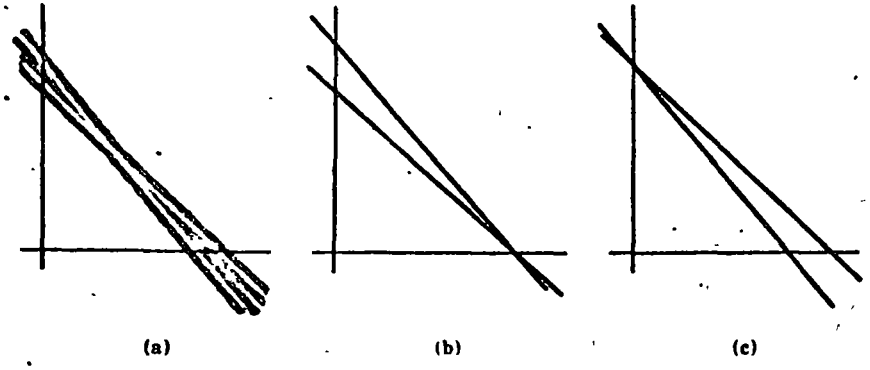


Figure 10-2

inversion methods, which are quite similar to the direct methods in numerical content but which provide conceptually more elegant bases for such methods. As was indicated in Chapter 5, no one of these methods is always best. The direct methods and matrix methods can have accuracy problems for some values of the coefficients and constant terms. The iterative methods can fail to converge to a solution. An attempt will be made to indicate the conditions under which the various methods can be expected to give satisfactory results.

10.2 THE ELIMINATION METHOD

The elimination method consists of multiplying various of the equations by appropriate constants and adding to other equations so as to obtain zero coefficients in some locations and eventually obtain equations that can be solved directly. The particular form of the elimination we shall use is that known as the Gauss-Jordan method. In this method, an appropriate multiple of the first equation is added to each of the other equations so that the resulting $n - 1$ equations have zero coefficients for the x_1 term. (If the first equation

does not involve a term involving x_1, we must first interchange two equations to obtain one with an x_1 term as the first equation.) Then an appropriate multiple of the next equation is added to all equations to eliminate the x_2 term from all but one equation. The process is continued until each equation contains only one unknown, and the equations are solved. At each step, the coefficient being used to eliminate other coefficients is called the pivotal coefficient.

To demonstrate how a machine program can be organized to perform this process, we shall construct some diagrams. Equation (10-1) will be represented internally in a computer only by the stored value of the coefficients a_{11} through a_{nn} and b_1 through b_n, perhaps as subscripted variables A(I,J) and B(J). Since the plus signs, x's, and equals signs will not be stored in the computer anyway, let us omit them and write down only the constants and coefficients, arranged as in the equations but omitting the x's and algebraic symbols, thus:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n4} & b_n \end{array} \qquad (10\text{-}2)$$

remembering that we will mentally supply the x's and symbols where needed.

To make the notation appear more uniform, let us rename $b_1, b_2, \ldots, b_n$ as $a_{1n+1}, a_{2n+1}, \ldots, a_{nn+1}$. Then the array can be written

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array} \qquad (10\text{-}3)$$

As a first step in the elimination process we can divide the first equation by a_{11} to make the coefficient of x_1 become 1, and obtain the equations represented by

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} & \dfrac{a_{1n+1}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array}$$

Now we can eliminate the x_1 term from each of the other equations by multiplying the first equation by a_{21} and subtracting from the second, a_{11} and subtracting from the third, etc., giving

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} & \dfrac{a_{1n+1}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}-a_{21}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) & a_{23}-a_{21}\left(\dfrac{a_{13}}{a_{11}}\right) & \cdots & a_{2n}-a_{21}\left(\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right) & a_{2n+1}-a_{21}\left(\dfrac{a_{1n+1}}{a_{11}}\right) \\ 0 & a_{32}-a_{31}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) & a_{33}-a_{31}\left(\dfrac{a_{13}}{a_{11}}\right) & \cdots & a_{3n}-a_{31}\left(\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right) & a_{3n+1}-a_{31}\left(\dfrac{a_{1n+1}}{a_{11}}\right) \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{n2}-a_{n1}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) & a_{n3}-a_{n1}\left(\dfrac{a_{13}}{a_{11}}\right) & \cdots & a_{nn}-a_{n1}\left(\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right) & a_{nn+1}-a_{n1}\left(\dfrac{a_{1n+1}}{a_{11}}\right) \end{array}$$

At this point, we have eliminated the x_1 term from all but the first equation, using a_{11} as the pivotal coefficient. Note that in the computer, the new coefficients may as well be stored in the locations which held the old ones; that is, a_{12}/a_{11} simply replaces a_{12}, etc. If this is done, the above array becomes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array}$$

and the process which gives this array from the original one can be described by

$$\begin{aligned} a_{1j}/a_{11} \to a_{1j} \qquad & \text{for } j = 2, \ldots, n+1 \\ a_{ij} - a_{i1}a_{1j} \to a_{ij} \qquad & \text{for } i = 2, \ldots, n \\ & \quad j = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}$$

Note that these steps will not actually put $a_{11} = 1$ and $a_{i1} = 0$ for $i > 1$, that is, will not set the first column to one and zeros. Since we know they should be there, we can simply remember the fact, and not force the computer to take the extra steps to actually put them there.

Now we need to eliminate x_2 from equations 3 through n and from equation 1 by an analogous process. The steps are described by

$$\begin{aligned} a_{2j}/a_{22} \to a_{2j} \qquad & \text{for } j = 3, \ldots, n+1 \\ a_{ij} - a_{i2}a_{2j} \to a_{ij} \qquad & \text{for } i = 3, \ldots, n, \text{ and } i = 1 \\ & \quad j = 3, \ldots, n+1 \end{aligned}$$

and produce an array of the form

$$\begin{matrix} 1 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{matrix}$$

If the process is continued, we eventually obtain the array

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{3n+1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn+1} \end{matrix} \qquad (10\text{-}4)$$

and so $x_1 = a_{1n+1}$, $x_2 = a_{2n+1}$, etc. The process can be summarized in flow chart form as in Figure 10-3. A remote-terminal routine which would perform the process for systems up to 10 by 10 can be written as follows:

```
 1    DIMENSION A(10,11)
 2  1 PRINT, "NUMBER OF EQUATIONS"
 3    INPUT, N
 4    NN=N+1
 5    PRINT, "A(1,1),A(1,2),,,A(1,N),B(1),A(2,1),ETC"
 6    INPUT, ((A(I,J),J=1,NN),I=1,N)
 7    DO 3 K=1,N
 8    KK=K+1
 9    DO 3 J=KK,NN
10    A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
11    DO 3 I=1,N
12    IF(K-I)2,3,2
13  2 A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
14  3 CONTINUE
15    PRINT, "SOLUTION",(A(I,NN),I=1,N)
16    GO TO 1
17    END
```

Example 1. Show all inputs and machine responses for running the above program to solve the set of equations

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

The inputs and responses would appear as follows:

```
RUN
 N
? 3
  A(1,1),A(1,2),,,A(1,N),B(1),A(2,1),ETC
? 2,3,5,5,3,4,7,6,1,3,2,5
  SOLUTION   -3.000000          2.000000          1.000000
```

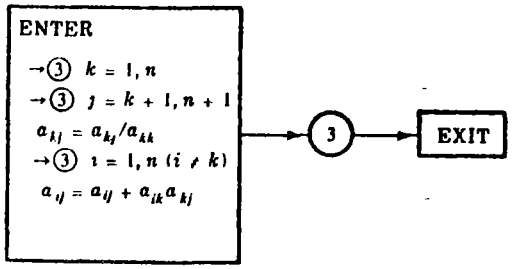


Figure 10-3: Flow chart for Gauss-Jordan method

The program given above will run into trouble if any of the coefficients A(K,K) are zero, since it will attempt to divide by zero. One way to avoid this problem is to rearrange the equations any time a zero element on the diagonal is encountered.

Another way, not much more difficult to execute, is to rearrange the equations at each step so that the pivotal coefficient at each step is not only nonzero but is actually the largest coefficient. This approach not only avoids division by zero but also tends to enhance accuracy by minimizing round-off error. It has the disadvantage that the rearrangement will cause the unknowns to be scrambled at the end of the process. Suppose, for example, that initially the largest coefficient is a_{32}. Then we would like to arrange the equations as

$$\begin{aligned} a_{32}x_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{12}x_2 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{42}x_2 + a_{41}x_1 + a_{43}x_3 + \cdots + a_{4n}x_n &= b_4 \\ \vdots & \\ a_{n2}x_2 + a_{n1}x_1 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

In terms of the original set of equations, (10-1), we have interchanged the first and third equations and have also interchanged the positions of x_1 and x_2 in all equations. In terms of the array of coefficients (10-3) we have inter-

changed the first and third rows and the first and second columns. If we contir the process to the end with no further rearrangement, the final value in $a_{1,n+1}$ when we reach the stage represented by (10-4) is not x_1 but x_2. Thus when we interchange rows or columns to obtain a large pivotal coefficient, we must also keep track of which unknown is represented by a particular column. This can be done by storing an identification number, ID, for each column which indicates the number of the unknown represented by that column. For example, in the rearrangement shown above, the information that the variable x_2 was now in the first column would be indicated by setting ID(1) = 2.

A separate subroutine can be written to handle the exchange of rows and columns to make the largest element appear at location A(K,K). The subroutine given below would suffice for this purpose.

```
      SUBROUTINE EXCH(A,N,NN,K,ID)
      DIMENSION A(20,21),ID(20)
      NROW=K
      NCOL=K
      B=ABS(A(K,K))
      DO 2 I=1,N
      DO 2 J=1,NN
      IF(ABS(A(I,J)-B))2,2,21
   21 NROW=I
      NCOL=J
      B=ABS(A(I,J))
    2 CONTINUE
      IF(NROW-K)3,3,31
   31 DO 32 J=K,NN
      C=A(NROW,J)
      A(NROW,J)=A(K,J)
   32 A(K,J)=C
    3 CONTINUE
      IF(NCOL-K)4,4,41
   41 DO 42 I=1,N
      C=A(I,NCOL)
      A(I,NCOL)=A(I,K)
   42 A(I,K)=C
      I=ID(NCOL)
      ID(NCOL)=ID(K)
      ID(K)=I
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
```


In this subroutine, the statements up to number 2 locate the el nt having the largest absolute value and identify its location as NROW OL. The statements from 2 to 3 interchange rows K and NROW if they are not the same row. The statements from 3 to 4 interchange columns K and NCOL if they are not the same column, and also interchange the ID numbers to record this fact. Using this subroutine, one to solve the set of linear equations can be written as follows:

```
      SUBROUTINE ELIM(AA,N,BB,X)
      DIMENSION AA(20,20),BB(20),A(20,21),X(20),ID(20)
      NN=N+1
      DO 100 I=1,N
      A(I,NN)=BB(I)
      ID(I)=I
      DO 100 J=1,N
  100 A(I,J)=AA(I,J)
      K=1
    1 CALL EXCH(A,N,NN,K,ID)
    2 IF(A(K,K))3,999,3
    3 KK=K+1
      DO 4 J=KK,NN
      A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
      DO 4 I=1,N
      IF(K-I)41,4,41
   41 A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
    4 CONTINUE
      K=KK
      IF(K-N)1,2,5
    5 DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,N
      IF(ID(J)-I)10,6,10
    6 X(I)=A(J,NN)
   10 CONTINUE
      RETURN
  999 PRINT 1000
      RETURN
 1000 FORMAT(19H NO UNIQUE SOLUTION)
      END
```

In this subroutine, the input coefficients are identified as AA(I,J) and the input constants as BB(I). The statements up to 100 reidentify these quantities as A(I,J), so the original values will not be destroyed by the subroutine. Statement 1 calls subroutine EXCH to make the largest coefficient the pivotal

coefficient. If the largest coefficient is zero, the message "NO UNIQUE SOLUTION" is printed and an exit is taken. Otherwise, statements 3 through 4 solve the equations as in the remote-terminal program given earlier. Statements 5 through 10 use the identification numbers to unscramble the unknowns and return them in proper order.

10.3 GAUSS-SEIDEL METHOD

Another and quite different method of solving a system of linear equations is the so-called Gauss-Seidel method, in which equations (10-1) are rewritten in the following form:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 &= b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n \\
a_{22}x_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n \\
a_{33}x_3 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \cdots - a_{3n}x_n \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n &= b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}
\end{aligned} \tag{10-5}$$

In words, in each of the equations all but one unknown is taken to the right-hand side of the equation. We then guess a set of values for $x_2, x_3, \ldots, x_n$ and substitute these in the right-hand side of the first equation and solve for x_1. Then we substitute this value and the original values of $x_3, \ldots, x_n$ in the right-hand side of the second equation and solve for x_2. We discard the old value of x_2 and keep this as a better one. We then substitute in the right-hand side of the third equation and obtain a new value for x_3. After we have proceeded through all the equations in this fashion, we have a new set of values $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (We must first arrange the equations so that none of the $a_{ii} = 0$.) We then start again with the first equation and find a new x_1, then a new x_2, etc. Each time through this process gives us a new, and, we hope, better set of values for $x_1, x_2, \ldots, x_n$. When the new values obtained agree with the previous set to within the accuracy we desire, we have the solution. This is an iteration process similar in nature to those discussed in Chapter 8. It is not absolutely certain that this process will converge, that is, that the differences between succeeding sets of values will get smaller and smaller. We shall discuss the convergence problem more fully a little later. It is not certain, either, how many multiplications will be required to obtain the solution to a desired accuracy. Each trip through the set of equations, or iteration, requires n^2 multiplications. If $(1/3)n$ iterations happen to be required, then the method will take about as long as the elimination method. It may take more or less time, depending entirely on the speed of convergence and accuracy required.

Example 1. Solve the system

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$$

by the Gauss-Seidel method.

We write the equations as

$$x_1 = 1 + 2x_2 \tag{10-6}$$

$$x_2 = 1 - x_1/4 \tag{10-7}$$

Let us take as starting values $x_1 = x_2 = 0$.

Putting $x_2 = 0$ in equation (10-6), we obtain

$$x_1 = 1$$

Putting $x_1 = 1$ in equation (10-7), we obtain

$$x_2 = 3/4$$

At the end of the first iteration, then, we have

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3/4$$

Putting $x_2 = 3/4$ in equation (10-6), we have

$$x_1 = 5/2$$

Putting $x_1 = 5/2$ in equation (10-7), we have

$$x_2 = 3/8$$

At the end of the second iteration, then, we have

$$x_1 = 5/2, \qquad x_2 = 3/8$$

We can continue this process. The results for the first several steps, starting from the beginning, are

x_1	x_2
0	0
1	.75
2.5	.375
1.75	.5625
2.125	.46875
1.9375	.515625
2.03125	.4921875
1.984375	.51390625

It is easily verified from the equation that the correct solution is $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$. This solution is slowly converging toward those values.

Example 2. Solve the system

$$x_1 + 4x_2 = 4$$
$$-x_1 - 2x_2 = 1$$

by the Gauss-Seidel method.

This is the same problem as Example 1, with the equations reversed. We write the equations as

$$x_1 = 4 - 4x_2$$
$$x_2 = -1/2 + x_1/2$$

Then the successive interations give the following values:

x_1	x_2
0	0
4	1.5
−2	−1
8	3.5
−10	−5.5
26	12.5
−46	−23.5

It is clear that the process is diverging, and the solution will not be obtained.

Example 3. Apply the Gauss-Seidel method to Example 1, Section 10.2.

The equations are

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$
$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 6$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5$$

We write them as

$$2x_1 = 5 - 3x_2 - 5x_3$$
$$4x_2 = 6 - 3x_1 - 7x_3$$
$$2x_3 = 5 - x_1 - 3x_2$$

Successive iterations give (to four decimal places)

x_1	x_2	x_3
0	0	0
2.5	−.375	1.8125
−1.4688	.5703	2.3789
−4.3027	.5640	3.8054
−7.8595	.7352	5.3270
−11.9203	1.1180	6.7831

In Section 10.2 we found that the solution to this system was

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$$

Our iteration scheme is not converging toward those values.

10.31 Convergence of the Gauss-Seidel Method

Some insight into the convergence problem can be obtained by following Examples 1 and 2, Section 10.3, in graphical form. Figure 10-4 illustrates the scheme followed in Example 1. Starting at the point P_0, we change x_1 (that is, move horizontally) to arrive on the line $x_1 - 2x_2 = 1$, and then change x_2 (that is, move vertically) to arrive on the line $x_1 + 4x_2 = 4$, bringing us to the point P_1. This is the point given by the first iteration. On the second iteration we move horizontally, then vertically to arrive at P_2. On the third we move horizontally, then vertically to arrive at P_3, etc. It is clear from the figure that this process is bringing us closer and closer to the true point of intersection.

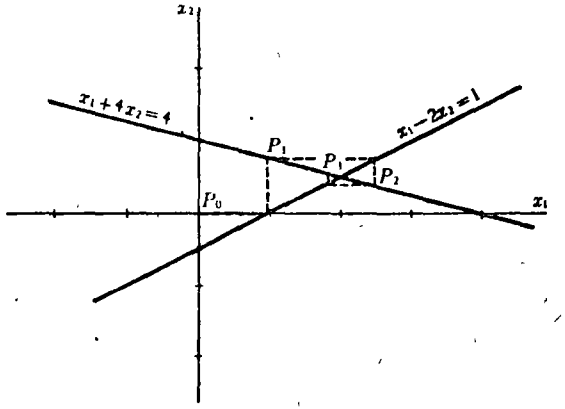


Figure 10-4

Figure 10-5 illustrates the scheme followed in Example 2. The same two lines are involved, but this time we always move horizontally to reach the line $x_1 + 4x_2 = 4$ and vertically to reach the line $x_1 - 2x_2 = 1$. The points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ are the results of the successive iterations in this case.

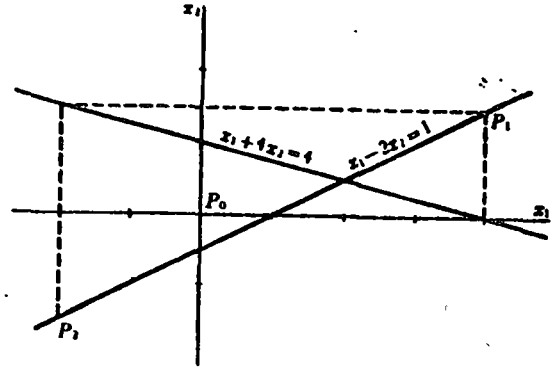


Figure 10-5

It appears that graphically the Gauss-Seidel method for two equations in two unknown consists of following the above boxlike pattern about the point of intersection of the two lines: If this pattern is followed in the correct direction the intersection will be approached, but if it is followed in the wrong direction the process will diverge from the intersection. This is the case if the slopes of the lines have opposite signs. If the signs of the slopes are the same, the situation is a little different, as depicted in Figure 10-6. The sequence of points P_0, P_1, P_2 is part of a convergent process, in which we proceed horizontally to line (b), then vertically to line (a). The points P_0,

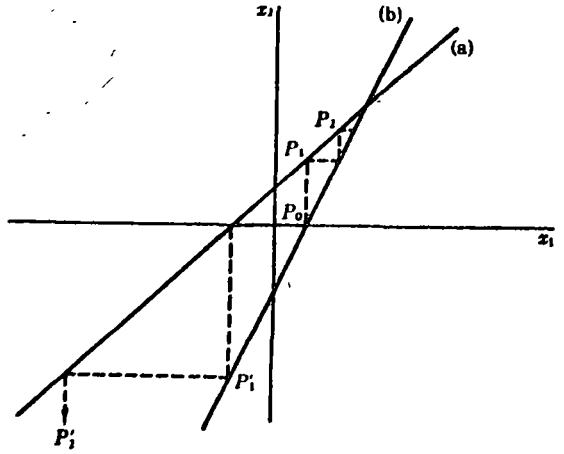


Figure 10-6

P_1', P_2' are part of a divergent process, in which we proceed horizontally to line (a) then vertically to line (b).

As indicated by the above figures, the situation regarding convergence for the Gauss-Seidel method for two equations in two unknowns is as follows: The process will converge for the equations arranged in one order and diverge for the equations arranged in the opposite order. The only exception occurs when the equations represent perpendicular lines, in which case the process will not converge for either arrangement. It is interesting to note that, contrary to our experience with iteration methods in the preceding chapters, the convergence or nonconvergence for these linear equations does *not* depend on choice of initial estimate.

For larger systems of equations the situation becomes much more complex. The necessary and sufficient conditions for convergence are known but are not easily expressed in a very usable form. Sometimes a rearrangement of the equations will produce convergence, but this is not at all guaranteed. The likelihood of convergence is usually increased if the equations are rearranged so that the coefficients $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ which appear on the left-hand side in the system as written in Section 10.3 are the largest coefficients in absolute value. In fact, convergence is assured in this case if in each equation the absolute value of the coefficient a_{ii} is larger than the sum of the absolute values of the remaining coefficients. This condition is not often met. In fact, as in Example 3, Section 10.3, it is often impossible even to write all the equations with largest terms on the left-hand side.

10.32 Flow Chart and Program for the Gauss-Seidel Method

The flow chart in Figure 10-7 describes the Gauss-Seidel method. This flow chart uses the equations arranged just as they are, with no attempt to rearrange the equations to increase the likelihood of convergence. If desired, it could be preceded by another section of flow chart which would rearrange the equations in attempt to enhance the likelihood of convergence. In order to cut down on the number of divisions required, each of the equations is first divided through by the coefficient a_{ii}, so that in the set of new coefficients c_{ij}, the c_{ii}'s are all one. This flow chart computes at each iteration a quantity

$$E = \sum_{i=1}^{n} |x_i^{\text{new}} - x_i^{\text{old}}|$$

and when this quantity becomes smaller than the given number d, the iteration stops. Note that, in the way the expression for P is written, P is precisely $x_i^{\text{new}} - x_i^{\text{old}}$.

The FORTRAN subroutine below uses the Gauss-Seidel method to solve an N by N system of linear equations, following the flow chart. Again, if a rearrangement of the equations were desired, it could be accomplished by using a subroutine for that purpose just prior to using the one given below:

```
      SUBROUTINE GAUSID(A,N,B,X,ERR)
      DIMENSION A(20,20), B(20),C(20,21),X(20)
      K=0
      NN=N+1
      DO 11 I=1,N
      IF(A(I,I))12,6,12
   12 X(I)=1.
      C(I,NN)=B(I)/A(I,I)
      DO 11 J=1,N
   11 C(I,J)=A(I,J)/A(I,I)
    1 CONTINUE
      E=0.
      DO 3 I=1,N
      P=C(I,NN)
      DO 2 J=1,N
      P=P-C(I,J)*X(J)
    2 CONTINUE
      X(I)=X(I)+P
      E=E+ABSF(P)
    3 CONTINUE
      IF(E-ERR)4,4,5
    4 RETURN
    5 K=K+1
      IF(100-K)6,1,1
    6 PRINT 1000
      RETURN
 1000 FORMAT(25H GAUSID DOES NOT CONVERGE)
      END
```

EXERCISE 26

1. Following the remote-terminal program of Section 10.2, solve the following systems of equations,

   a. $x - y = 2$
      $x - y = 4$

   b. $x + 2y = 7$
      $4x + y = 5$

   c. $2x + 3y + z = 2$
      $x + 2y - 4z = 3$
      $4x - 2y + z = -2$

   d. $x + y + z = 4$
      $3x - y - z = 1$
      $x + 2y - z = 5$

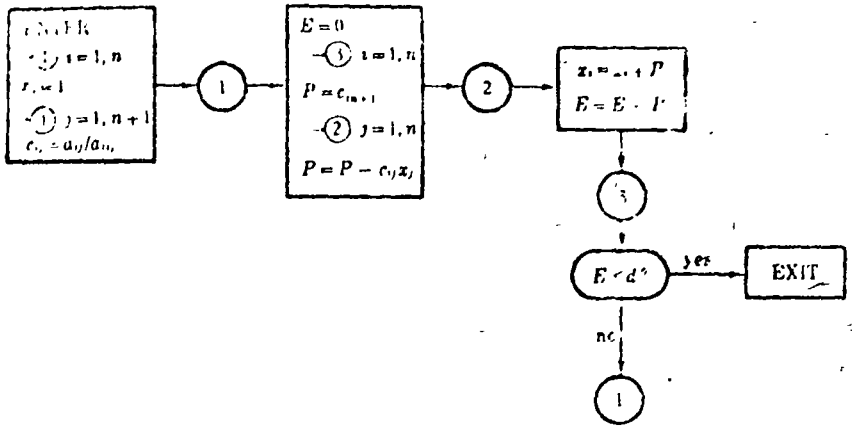


Figure 10-7: Solution of linear equations—Gauss-Seidel method

2. Following the flow chart, Figure 10-7, perform the first four iterations for the following systems of equations.

   a. $2x + y = 3$
      $x + 2y = 3$

   b. $4x - y = 6$
      $x + 3y = -5$

   c. $3x + 2y + z = 5$
      $2x + 5y + 4z = 8$
      $x + 4y + 6z = 4$

   d. $x + 2y + 4z = 6$
      $3x + y + 2z = 5$
      $2x + 4y + z = 4$

3. Write a FORTRAN program that will input a system of linear equations up to size 20 by 20, call subroutine ELIM of Section 10.2 to solve them, and print the result.

4. a. Write a FORTRAN subroutine which will rearrange a set of linear equations, for use of subroutine GAUSID of Section 10.3, so that after rearrangement

   $$a_{ii} \geq a_{ki} \qquad \text{for } k > i$$

   b. Show that your subroutine will correctly arrange the equations

   $$x_1 + 8x_2 + x_3 = 10$$
   $$x_1 + x_2 + 7x_3 = 9$$
   $$9x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

   so that the Gauss-Seidel method will converge.

   c. Explain what may go wrong with this method of arrangement if some of the coefficients are zero.

10.4 MATRICES

In all the methods of solving linear equations by computer, we have seen that only the coefficients and the constants appear within the machine. The

formalism of writing down the unknowns x_1, x_2, etc., when we write the equations longhand, merely serves to identify the proper locations of the coefficients and constants. In other words, the solution of the system of equations

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

is determined completely by the array of coefficients

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

and the array of constants

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

If we are given any two such arrays, we can write the set of equations they represent. If we were to change the numerical value of any number in one of these arrays, a different set of equations would be represented. Further, if we were to interchange the position of any two of the numbers, a still different set of equations would be represented. All this suggests that it may be useful to consider these arrays of numbers as separate entities, establish rules for manipulating them, and perhaps free ourselves somewhat of the repetitious writing of the basically nonessential symbols $x_1 +$, $x_2 +$, $x_3 +$, etc. Considerations such as these have led to the definition of a matrix as an array of numbers, and to the development of an "algebra" of matrices, a set of rules for combining matrices to form other matrices. Once developed, matrix algebra has come to have far-reaching applications, completely apart from systems of linear equations.

10.5 DEFINITIONS AND ELEMENTARY OPERATIONS

A matrix is a rectangular array of quantities or numbers, such as

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

In order to distinguish a matrix from a determinant, which also frequently *looks like* an array of numbers, it is customary to enclose a matrix in brackets, or large parentheses, or double bars, as

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

A determinant is usually written between single bars, as

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

This determinant only looks like an array. Really the symbol only stands for a single quantity, which is obtained by multiplying and adding the individual a_{ij}'s in the manner described in Section 10.54. The matrix, on the other hand, has no single numerical value but is instead the entire array. We shall be using a single letter or symbol to stand for a matrix, such as

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

When we do this, it is important to remember that A is not a number, and so does not act like a number; that is, it does not obey the ordinary laws of algebra.

Occasionally, we will be interested in the value of a determinant made up of exactly the same elements as some square matrix A. When we do we shall refer to it as the determinant of the matrix A.

A matrix of m rows and n columns is an m by n matrix. If $m = n$, the matrix is a square matrix of order m.

The sum of the diagonal elements of a square matrix is called the "trace" of the matrix, $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

If a matrix consists of a single column it is called a column matrix, or sometimes a column vector.

If the elements in the main diagonal of a square matrix are ones, and all the other elements are zeros, the matrix is called a unit matrix, or identity matrix. Thus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is a unit matrix of order 3. Unit matrices of any order are usually denoted by the symbol I.

If all the elements are zero, the matrix is called a zero matrix

Two matrices A and B are said to be equal if

(1) They have the same number of rows.

(2) They have the same number of columns

(3) Each pair of corresponding elements are equal.

10.51 Addition and Subtraction of Matrices

The operations of addition and subtraction are defined for two matrices A and B if:

(1) They have the same number of rows.

(2) They have the same number of columns.

The sum of two matrices is the matrix obtained by adding corresponding pairs of elements. Thus, if

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$$

then

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}$$

The difference $A-B$ is the matrix obtained by subtracting the elements of B from the corresponding elements of A.

$$A-B=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23}\\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33}\end{pmatrix}$$

Example 1. Find $A+B$ and $A-B$, where

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

SOLUTION:

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 6 & -1\end{pmatrix}, \qquad A-B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Example 2 Find $A+B$ and $A-B$, where

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

Since there are not the same number of rows or columns in A and B, they cannot be added or subtracted The symbols $A+B$ and $A-B$ are meaningless in this case.

Example 3. Given two matrices A and B, each with N columns and M rows, write FORTRAN statements which would form the sum, $C=A+B$.

The matrix A can be represented by a single subscripted variable A(I,J), where I runs from 1 to M and J runs from 1 to N. The same is true for B and C. Then the required FORTRAN statements are

```
      DO 20 I=1M,
      DO 20 J=1,N
   20 C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
```

A total of $N \times M$ additions are required to obtain C.

As a direct extension of addition, it would be natural to be able to say

$$A+A=2A$$

This leads to the definition of multiplication of a matrix by a constant as follows: A constant times a matrix is the matrix obtained by multiplying *all* elements of the original matrix by the constant

10.52 Multiplication of Matrices

At first acquaintance, the operation of multiplication of two matrices seems to be defined in a most peculiar way There are very good reasons for choosing to call this seemingly awkward process "multiplication," and these will appear shortly.

The product AB of two matrices, A and B, is defined only if the number of *columns* in A is equal to the number of *rows* in B. In all other cases the product is undefined. If the number of columns in A is equal to the number of rows in B, then A and B are said to be "conformable" in the order AB.

The product AB of two conformable matrices is itself a matrix, whose elements are found according to the following rule: The element in the ith row and the jth column of the product is the sum of the products by pairs of the elements of the ith row of A and jth column of B.

Example 1. If

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

find AB.

Since A has 2 columns and B has 2 rows, A and B are conformable in the order AB, so the product is indeed defined. To find the element in the first row, first column of the product matrix, we take the first row of A, which is

$$1 \quad 2$$

and the first column of B, which is

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

and form the sum of the products by pairs:

$$1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$$

Hence 7 is the element in the first row, first column of the product.

In like manner, the element in the first row and second column of the product is obtained from combining the first row of A with the second column of B, thus:

$$1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$$

and for the second row, first column,

$$3 \times 3 + (-1) \times 2 = 7$$

and the second row, second column,

$$3 \times (-2) + (-1) \times 1 = -7$$

Hence the product is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Example 2. If

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

find AB.

Since A has 3 columns and B has 3 rows, they are conformable in the order AB. We can expedite the process of finding the product by writing the two matrices side by side, and then going across a row of A and down a column of B forming products by pairs, thus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 3 \\ -2 \times 1 + 1 \times 2 - 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Example 3. For the matrices A and B of Example 2, find BA.

Since B has 1 column and A has 2 rows, they are not conformable in the order BA. The product BA is not defined!

Example 4. If

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

and

$$AB = C$$

write a formula for finding c_{ij}, the element in the ith row and jth column of C.

The ith row of A is

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}$$

and the jth column of B is

$$\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}$$

and the sum of the products by pairs gives

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

or, in more abbreviated form,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Example 5. Given matrix A with M rows and N columns and matrix B with N rows and L columns, write a set of FORTRAN statements which will form the product $C = AB$.

A suitable set of statements is

```
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,L
      C(I,J)=0.
      DO 10 K=1,N
   10 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
```

We note that statement 10 is in three DO loops, and will be performed $N \times M \times L$ times, or $N \times M \times L$ multiplications are required to find the product matrix C.

Example 6. If

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

write the product Ax.

SOLUTION:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Note that this product Ax is actually a column vector, having three elements.

Example 7. Write the system of linear equations

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

in matrix form.

From Example 6, if we define

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

then the left-hand sides of the equations above are just the three elements

of the column vector Ax. Now let us define the column vector

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

We recall that two matrices are equal if and only if every pair of corresponding elements are equal. Thus, the statement

$$Ax = b$$

is a matrix equation. The expressions on each side of the equals sign are matrices. The equation means that

(*1*) The first element of Ax, that is $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, is equal to b_1.

(*2*) The second element of Ax, that is, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, is equal to b_2.

(*3*) The third element of Ax, that is, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$, is equal to b_3.

Hence the matrix equation

$$Ax = b$$

says exactly the same thing as the system of linear equations above.

We see from Examples 6 and 7 that any system of linear equations, with any number of unknowns, can be represented by a matrix equation

$$Ax = b$$

where A is a matrix and x and b are column vectors of the correct order. This simple expression is one of the several happy results of the seemingly odd definition of multiplication.

10.53 Laws of Matrix Algebra

We have defined three operations with matrices and have given them the names "addition," "subtraction," and "multiplication"—names we use in the ordinary algebra of numbers. Actually this is a little dangerous, since it suggests that these new matrix operations will obey the same rules as the ordinary arithmetic operations, and we really have no right to expect that they will do so.

The fundamental laws of ordinary algebra are the following:

(*1*). Addition is *commutative*. $a + b = b + a$; that is, if we add b to a, or a to b, we will get the same result.

(2). Addition is *associative*. $(a + b) + c = a + (b + c)$; that is, if we add $a + b$, and then add c to this sum, we get the same result as if we add b and c first, and then add a to the sum.

(3). Multiplication is *distributive* with respect to addition. $a(b + c) = ab + ac$; that is, if we add b to c and then multiply by a, we get the same result as if we multiply a by b, multiply a by c, and then add the result.

(4). Multiplication is *commutative*. $ab = ba$; that is, if we multiply a by b or b by a, we get the same result.

(5). Multiplication is *associative*. $(ab)c = a(bc)$; that is, if we take the product ab and multiply by c we get the same answer as if we take the product bc and multiply by a.

When these laws for the algebra of numbers are investigated for matrices, it is found that they all hold *except* law 4, the commutative law for multiplication. As was seen in Examples 2 and 3, Section 10.52, it is possible to have two matrices whose product AB could be found but whose product BA was not even defined.

In summary, then, we can say that, in expressions involving sums, differences, and products of matrices, we can use the same laws for combining these operations as for ordinary numbers except that the order of any two matrices in a product cannot be reversed. In a matrix equation, we may add the same matrix to both sides or subtract the same matrix from both sides without changing the equality. We also may *multiply* both sides by the same matrix, provided that:

(1) The matrix is conformable with those by which it is to be multiplied.

(2) The order of multiplication is made the same on both sides of the equation.

Example 1. If A, B, and C are square matrices of order n, and if

$$A + B = C$$

solve for A.

Subtracting B from both sides, we have

$$A = C - B$$

Example 2. If A, B, C, and D are square matrices of order n, and if $A = B + C$, find AD and DA.

Multiplying the equation

$$A = B + C$$

on the right by D, we have

$$AD = (B + C)D = BD + CD$$

Multiplying the above equation on the left by D, we have

$$DA = D(B + C) = DB + DC$$

10.54 Determinants

The determinant of a square matrix A is defined to be the number obtained in the following manner: From the elements of A, we form all possible products containing exactly one element from each row and column in A. To each such term we assign a plus or minus sign in accordance with a rule to be stated shortly. The sum of these terms is the value of the determinant. The sign to be assigned to a term is determined by the following procedure. The factors in the term are arranged in order according to the row from which each factor was chosen:

$$a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n}$$

We then rearrange these factors so that they are in order according to the column from which each was chosen, that is, so that the subscripts $k_1, k_2, \ldots, k_n$ are in their natural order, and count the number of interchanges required to do this. We assign the term a plus sign if the number of interchanges was even and a minus sign if it was odd. For a 2 by 2 determinant, then,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

For a 3 by 3 system,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

It is clear that, by utilizing the programming methods of the earlier chapters, we can cause a computer to perform such calculations and provide the solution to a system of equations. It is not so obvious, but it can be shown that such a procedure is quite inefficient in machine time, particularly for systems involving a very large number of unknowns. According to the rule just stated for evaluating a determinant, an n by n determinant is the sum of $n!$ terms, each of which is the product of n numbers. If we were to calculate the value of a determinant by the most direct method, then, about $n \times n!$ multiplications would be required. For even a 10 by 10 determinant, several

million multiplications would be required, and for a 20 by 20 determinant, over 10^{18} multiplications would be needed. This would require over 100,000 years even on the fastest computers

There is another method of evaluation of a determinant that is very much faster than the brute-force approach If all elements on one row of a determinant are changed by adding or subtracting a constant multiple of the corresponding elements of another row, the value of the determinant is unchanged. By repeated application of this rule, we can reduce a determinant to a "triangular" form, in which all elements below the main diagonal are zero. For example,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & & b_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & \cdots & b_{4n} \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & b_{nn} \end{vmatrix}$$

The value of a determinant when written in this form turns out to be just the product of the diagonal elements, $b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$, since all other terms formed in accordance with the definition of a determinant's value contain at least one factor whose value is zero. Hence, after a determinant is written in triangular form, only $n-1$ multiplications are required to find its value.

The process is quite similar to that used in Section 10.2 to solve a system of linear equations by the elimination method. We start out with the array

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

and perform the operations

$$a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} \to a_{ij} \quad \text{for } i \text{ and } j = k+1, k+2, \ldots, n$$
$$k = 1, \ldots, n$$

Figure 10-8 is a flow chart of the process.

A calculation based on the flow chart, Figure 10-8, could run into trouble if a_{kk} ever becomes zero, since there is a division by this quantity. This problem can be avoided by taking the additional precaution of checking to see if a_{kk} is zero and if so interchanging two rows to obtain a nonzero value for a_{kk}. Since interchanging two rows in a determinant changes the sign of

the determinant's value, we must also change the signs of the elements in one of the rows to correct this.

There can also be accuracy problems associated with evaluating a determinant using the above flow chart, particularly for determinants of large order These problems tend to be alleviated if the rows and columns are rearranged at each step so that a_{kk} is not only nonzero but is actually the largest element in absolute value. SUBROUTINE EXCH of Section 10.2

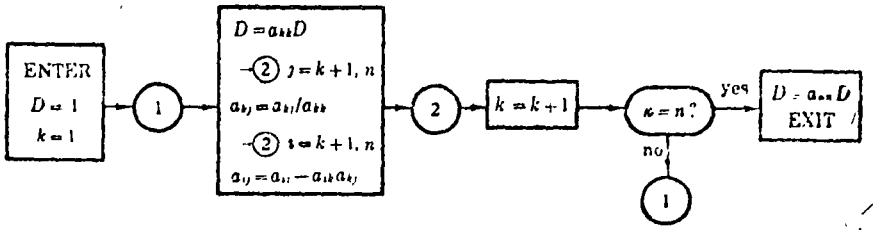


Figure 10-8: Evaluation of a determinant

provided this service for the elimination method, and with minor modifications it can be made to work in the present case. The main difference is that interchanging rows or columns in a determinant changes the sign of the determinant We can correct for this by changing statement 32 to read

```
32 A(K,J)=-C
```

and statement 42 to read

```
42 A(I,K)=-C
```

We also need the dimension statement to read A(20,20) instead of A(20,21). We do not need the quantity ID as output, so we can eliminate the three statements following statement 42 and change the first statement to read

```
SUBROUTINE EXCH2(A,N,NN,K)
```

We changed the name as well, to ensure that the old routine of Section 10.2 is not used by mistake.

Another step which is useful to avoid undetected accuracy loss is in connection with the computation

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$$

If the result of this subtraction is supposed to be zero, then this subtraction will be subject to the trouble mentioned many times earlier in the text, loss

of accuracy caused by introduction of leading zeros. The method of protection against this trouble is the same one used in division of polynomials in Section 9.43. We check the result of the subtraction, and if the difference is much smaller than the numbers being subtracted, we set the difference equal to zero. The operation can be described by a section of flow chart (as in Figure 10-9) in which a_{ij} is set equal to zero if more than four significant figures have been lost in the subtraction.

The FORTRAN subroutine below evaluates the Nth-order determinant

$$\begin{vmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,N) \\ A(2,1) & A(2,2) & \cdots & A(2,N) \\ \vdots & & & \\ A(N,1) & A(N,2) & \cdots & A(N,N) \end{vmatrix}$$

for values of N to 20. In the first statement, the determinant is given the name AA, and the statements up to 100 redefine the elements so that the original determinant will not be destroyed during the calculation. State-

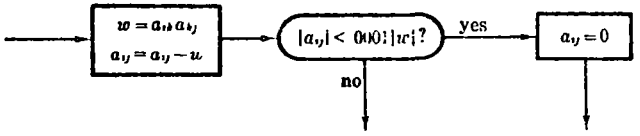


Figure 10-9

ment 1 calls EXCH2 to interchange rows and columns if necessary to move the largest element to location A(K,K). Statements 3 through 4 perform the actual calculation required in the main part of the flow chart, Figure 10-8.

```
      SUBROUTINE DETERM(AA,N,D)
      DIMENSION AA(20,20),A(20,20)
      DO 100 I=1,N
      DO 100 J=1,N
  100 A(I,J)=AA(I,J)
      D=1.
      K=1
    1 CALL EXCH2(A,N,N,K)
      D=A(K,K)*D
      IF(A(K,K))3,10,3
    3 KK=K+1
      DO 4 J=KK,N
      A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
```



```
      DO 4 I=KK,N
      W=A(I,K)*A(K,J)
      A(I,J)=A(I,J)-W
      IF(ABS(A(I,J))-.0001*ABS(W))42,4,4
   42 A(I,J)=0.
    4 CONTINUE
      K=KK
      IF(K-N)1,9,10
    9 D=A(N,N)*D
   10 RETURN
      END
```

10.55 Matrix Inversion

We have given definitions and rules for the addition, subtraction, and multiplication of matrices which parallel to some extent the rules of ordinary algebra. As yet we have not mentioned division, for the very good reason that division as such is not defined for matrices. There is another operation which serves a somewhat analogous purpose, however. That operation is the "inversion" of a matrix.

In ordinary algebra, b/a stands for the number which, when multiplied by a, gives b. Thus, if $ax = b$, we can say that $x = b/a$. Instead of treating division in this manner, we could define an "inverse" of a number as follows: For any number a, the inverse, a^{-1}, is that number which, when multiplied by a gives 1. Every nonzero number has a unique inverse; for example, the inverse of 2 is .5, and .5 is the *only* inverse of 2. Then if we have $ax = b$, we do not even have to have a process of division in order to find x, for we can multiply both sides of the equation by a^{-1}, giving

$$a^{-1}ax = a^{-1}b \qquad \text{or} \qquad x = a^{-1}b$$

For square matrices, we define the inverse in a manner analogous to that above. For a square matrix A of order n, the inverse matrix, A^{-1} is that matrix which when multiplied by A gives the identity matrix of order n; that is,

$$AA^{-1} = I$$

Example 1. Show that the inverse of

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & \end{pmatrix}$$

is

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

We form the product

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Since the product is the identity matrix, the second matrix is indeed the inverse of the first.

It can be shown that any square matrix A has a unique inverse if and only if its determinant is different from zero. It can also be shown that A commutes with its inverse; that is,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

The inverse is not defined for nonsquare matrices.

A formula for the inverse of a matrix A can be found as follows. Consider the set of linear equations

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (10\text{-}8)$$

connecting one set of variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ with another set $y_1, y_2, \ldots, y_n$. In matrix form we can write this set of equations as

$$y = Ax$$

where

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

If we multiply this set of equations by A^{-1}, we obtain

$$A^{-1}y = A^{-1}Ax$$

or

$$A^{-1}y = Ix = x$$

Hence the elements of A^{-1} are just the coefficients of the y's if we solve the set of equations (10-8) for the x's in terms of the y's.

A rather efficient way of solving for the x's in terms of the y's is to proceed as in the elimination method, Section 10.2. Instead of the n by $n+1$ array of constants shown at (10-3) we start with the n by $2n$ array of the form

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \qquad (10\text{-}9)$$

Then we proceed exactly as in Section 10.2, and end up with an array of the form

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n+1} & a_{1n+2} & a_{1n+3} & \cdots & a_{12n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n+1} & a_{2n+2} & a_{2n+3} & \cdots & a_{22n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{3n+1} & a_{3n+2} & a_{3n+3} & \cdots & a_{32n} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn+1} & a_{nn+2} & a_{nn+3} & \cdots & a_{n2n} \end{matrix}$$

The solution, instead of being the single column a_{1n+1} to a_{nn+1}, is the entire right-hand side of the above array. If we have interchanged any rows in the process, the unscrambling is just as indicated in subroutine ELIM, except in the present case whole rows must be unscrambled. The subroutine can be written immediately as an almost direct paraphrase of SUBROUTINE ELIM.

```
      SUBROUTINE MATINV(AA,N,AINV)
      DIMENSION AA(20,20),AINV(20,20),A(20,40),ID(20)
      NN=N+1
      N2=2*N
      DO 100 I=1,N
      ID(I)=I
      DO 100 J=1,N
  100 A(I,J)=AA(I,J)
      DO 200 I=1,N
      DO 200 J=NN,N2
```

```
200 A(I,J)=0.
    DO 300 I=1,N
300 A(I,N+1)=1.
    K=1
  1 CALL EXCH3(A,N,N2,K,ID)
  2 IF(A(K,K))3,999,3
  3 KK=K+1
    DO 4 J=KK,N2
    A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
    DO 4 I=1,N
    IF(K-I)41,4,41
 41 W=A(I,K)*A(K,J)
    A(I,J)=A(I,J)-W
    IF(ABS(A(I,J))-.0001*ABS(W))42,4,4
 42 A(I,J)=0.
  4 CONTINUE
    K=KK
    IF(K-N)1,2,5
  5 DO 10 J=1,N
    DO 10 J=1,N
    IF(ID(J)-I)10,8,10
  8 DO 10 K=1,N
    AINV(I,K)=A(J,N+K)
 10 CONTINUE
    RETURN
999 PRINT 1000
    RETURN
1000 FORMAT(19H MATRIX IS SINGULAR)
    END
```

In this subroutine the statements through 300 move the quantities to working storage to form the array depicted by (10-9). Statement 1 calls a version of SUBROUTINE EXCH given in Section 10.2. It is called EXCH3, to indicate that it must be a modified version of that subroutine with dimension statement changed to read

```
DIMENSION A(20,40)
```

Statements down to statement 4 parallel SUBROUTINE ELIM, except that the accuracy flag shown in Figure 10-9 has been inserted at statement 42. In the loops terminating on statement 10, instead of setting individual values of the X(I)'s, the subroutine sets entire rows of the inverse matrix AINV(I,K).

Once an inverse matrix has been obtained, an improved accuracy version ca obtained in a relatively straightforward manner. Let A be the matrix

to be inverted, and let D_1 be the approximate inverse produced by the above routine. Then, because of inaccuracies,

$$AD_1 \neq I.$$

but instead

$$I - AD_1 = F_1$$

where F_1 is a matrix which, if D_1 was a reasonably good estimate, has small elements. If all the elements of F_1 are less than one in absolute value, then the matrix D_2 defined by

$$D_2 = D_1(I + F_1)$$

is an improved estimate of A^{-1}. If the error matrix $F_2 = I - AD_2$ still has elements which are too large, then the matrix D_3 defined by $D_3 = D_2(I + F_2)$ is a still better estimate, and so on. Thus repetition of a process involving some matrix multiplications can be used to improve the accuracy of the inverse to the extent desired, within the limits imposed by the usual problems of approximate arithmetic on computers

EXERCISE 27

1. Given the following matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

evaluate the following expressions, or, if the expression is meaningless, so state.

a. AB b. DC c. BE
d. BA e. ABE f. $DA + A$
g. $FA + B$ h. $FC + BE$ i. $FDABE$
j. $AF + D$

2. Using the method of Section 10.55, invert the following matrices.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3. Find A^{-1}, then solve $Ax = b$ by multiplying both sides by A^{-1}, if

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. Write a FORTRAN subroutine INVIMP that will take the trial inverse obtained from MATINV and use the method described at the end of Section 10.55 to improve the inverse until all the elements of the error matrix F_n are less than .001 in absolute value.

10.6 OVERDETERMINED AND UNDERDETERMINED SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

In several of the preceding sections, methods were discussed for solving systems of linear equations. In all these discussions it was assumed that there was a unique solution and that there were just as many equations as unknowns. Further, it was tacitly assumed that the equations were nonhomogeneous, that is, not all the constant terms were zero, and also that the determinant of the coefficients was not zero. With these conditions satisfied there *is* a unique solution. In many important cases, however, these conditions are not all satisfied—yet there may still be a unique solution, or there may be no solution or an infinite number of solutions. In this section we will discuss a method for finding which situation prevails and for completely describing the solutions when there is an infinite number of them.

10.61 Rank of a Matrix

As a tool for further study of systems of equations we will need the concept of rank of a matrix.

Definition. The rank of a matrix is the order of the highest-order nonvanishing determinant within the matrix.

By a "determinant within the matrix" we mean any determinant that can be made by crossing out rows or columns in the matrix.

Example 1. Find the rank of the matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

The largest-order determinant we can construct is second order, so the rank is 2 or less. To see if it is 2, we must check all second-order determinants. If we cross out the third column, we can construct the determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$$

which has the value zero. Since this one vanishes, we must check other second-order determinants. Crossing out the second column in the matrix, we obtain the determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

which has the value 5. Since there is a nonvanishing second-order determinant, the rank is 2.

Example 2. Find the rank of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

The largest-order determinant we can construct is third order, so the rank is 3 or less. The only third-order determinant is

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

so the rank is not 3. If we cross out the third row and third column, we have the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Similarly, if we check all other second-order determinants, we find that they all vanish.

Hence the rank is less than 2. If we cross out the second and third rows, and the second and third columns, we can form the determinant $|1| = 1$. Since the highest-order nonvanishing determinant is first order, the rank of the matrix is 1.

It is seen from the above examples that finding the rank of a matrix is a straightforward process. For matrices of higher order, however, the process

as just demonstrated is extremely laborious, sometimes involving the evaluation of many determinants. Fortunately, however, a less laborious method is available, based on the following theorem:

Theorem 1. *The rank of a matrix is unchanged if any multiple of the elements of one row (or column) is added to the corresponding elements of another row (or column).*

This theorem means that we can proceed, just as in evaluating a determinant, to combine rows or columns to obtain zeros where we choose.

Example 3. Find the rank of

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Using Theorem 1, we may proceed as follows:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$ (twice first row subtracted from second)

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$ (four times first row subtracted from third)

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (7/3 times second row subtracted from third)

It is obvious in this last matrix all third-order determinants are zero, but at least one second-order determinant,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

is not zero. Hence the rank of the original matrix is 2.

Note that in the above example, we have *not* said the *matrices* obtained at each step are equal, but only that the *ranks* are equal. Each step has created a new matrix, one differing from the preceding in many respects, but having the rank in common.

It is seen that the method of determining rank as demonstrated in Example 3 is closely akin to the method of evaluation of a determinant given in Section

10.54. Minor modifications to the program given there will give a program for finding the rank of a matrix with no more effort than that involved in evaluating the largest determinant in the matrix.

The FORTRAN subroutine below finds the rank, K, of a matrix having N rows and M columns, where neither N nor M exceed 20.

```
      SUBROUTINE MARANK(AA,N,M,K)
      DIMENSION AA(20,20),A(20,20)
      DO 100 I=1,N
      DO 100 J=1,M
  100 A(I,J)=AA(I,J)
      K=1
    1 CALL EXCH2(A,N,M,K)
      IF(A(K,K))2,10,2
    2 IF(K-N)3,11,11
    3 IF(K-M)40,11,11
   40 KK=K+1
      DO 4 J=KK,M
      A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
      DO 4 I=KK,N
      W=A(I,K)*A(K,J)
      A(I,J)=A(I,J)-W
      IF(ABS(A(I,J))-.0001*ABS(W))42,4,4
   42 A(I,J)=0.
    4 CONTINUE
      K=KK
      GO TO 1
   10 K=K-1
   11 RETURN
      END
```

10.62 Consistent and Inconsistent Equations

A set of linear equations

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

is said to be consistent if there exists at least one solution and inconsistent

if there is no solution. We are now in a position to give a criterion for determining whether a set of equations is consistent or inconsistent. We will refer to the matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

as the *coefficient* matrix, and to the matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

as the *augmented* matrix. Then the following theorem applies:

Theorem 2. *A set of linear equations is consistent if and only if the coefficient matrix and augmented matrix have the same rank.*

Example 1. Determine if the following equations are consistent:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x + 6y &= 2 \end{aligned}$$

The coefficient matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

which has rank 1.

The augmented matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

which has rank 2.

Hence the system is inconsistent.

Example 2. Determine if the following equations are consistent:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 2 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

The coefficient matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

which has rank 2.

The augmented matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

which has rank 2.

Hence the equations are consistent, and there is a solution, despite the fact that there are more equations than unknowns! Upon closer scrutiny, it will be observed that the third equation is merely the sum of the first two.

The last example illustrates an important principle, that consistency or inconsistency cannot be ascertained merely from the numbers of equations and unknowns. A system with more equations than unknowns can be consistent, and a system with more unknowns than equations can be inconsistent. The subroutine for finding rank given in Section 10.62 is the tool needed to investigate consistency in the larger systems.

10.63 Linear Independence of Vectors

Consistent systems of linear equations may have infinitely many solutions. It is possible, however, to investigate these solutions systematically and to characterize them completely. To do so we need first the concept of linear dependence and independence. Consider the set of column vectors

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{u}_r = \begin{pmatrix} u_{1r} \\ u_{2r} \\ \vdots \\ u_{nr} \end{pmatrix}$$

If $c_1, c_2, \ldots, c_r$ are any constants, the expression

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r$$

is called a "linear combination" of the vectors $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$. If there is some set of constants $c_1, \ldots, c_r$, not all zero, such that

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ru_r = 0$$

then the vectors are said to be "linearly dependent." If, on the other hand, every linear combination of the vectors $u_1, \ldots, u_r$ is nonzero except for the case $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$, then the vectors are said to be "linearly independent."

Example 1. Are the vectors

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

linearly independent?

The sum

$$c_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_2\\c_1\end{pmatrix}$$

is zero only if both c_1 and c_2 are zero. Hence they are linearly independent.

Example 2. Are the vectors

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$$

linearly independent?

The sum

$$c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 + 2c_2 + 3c_3\\-c_1 + c_2\\2c_1 + c_2 + 3c_3\end{pmatrix}$$

is zero if $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$. Hence the vectors are not linearly independent.

10.64 Complete Solution of Systems of Linear Equations

The following theorem gives a complete picture of the situation regarding solutions for systems of linear equations.

Theorem 3. *Let $Ax = b$ be a consistent system having m unknowns, and let the rank of A be r. Then:*

(1) If $r = m$, there is a unique solution vector x.

(2) If $r < m$, then there is at least one solution vector x. In addition, $m - r$ linearly independent vectors $u_1, u_2, \ldots, u_{m-r}$ can be found which are solutions to the set of homogeneous equations $Ax = 0$. The vector x plus any linear combination of these is also a solution of the given equation, and there are no other solutions. If $b = 0$, the vector x can be taken as $x = 0$.

Hereafter we will refer to the vector x described in this theorem as the *particular* solution.

A method of obtaining all these solutions in a systematic fashion is illustrated by the example below.

Example 1. Solve the system

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 1\\1 & -1 & 2 & -1\\3 & 3 & -3 & 2\\2 & -2 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\\5\\2\end{pmatrix}$$

We will proceed as in the elimination method as illustrated in Section 10.2. Dividing the first equation by 4 and using it to eliminate x_1 from the remaining equations,

$$\begin{pmatrix}1 & .5 & -.25 & .25\\0 & -1.5 & 2.25 & -1.25\\0 & 1.5 & -2.25 & 1.25\\0 & -3 & 4.5 & -2.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5\\-.5\\.5\\-1\end{pmatrix}$$

Rearranging to make the largest element to be in the proper position,

$$\begin{pmatrix}1 & -.25 & .5 & .25\\0 & 4.5 & -3 & -2.5\\0 & -2.25 & 1.5 & 1.25\\0 & 2.25 & -1.5 & -1.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5\\-1\\.5\\-.5\end{pmatrix}$$

Dividing the second equation by 4.5 and using it to eliminate x_3 from the other equations,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/3 & 1/9\\0 & 1 & -2/3 & -5/9\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/9\\-2/9\\0\\0\end{pmatrix}$$

At this point we see that the rank of A is 2 and that the system now has

two equations. If the system had been inconsistent, there would be more than two nonzero elements remaining on the right-hand side of the equation at this point.

Since there are four unknowns and the rank of A is 2, Theorem 2 tells us that the complete solution is made up of a particular solution and any linear combination of two linearly independent solution vectors.

We can find the particular solution by setting $x_2 = x_4 = 0$. Then the system becomes

$$\begin{aligned} x_1 &= 13/9 \\ x_3 &= -2/9 \end{aligned}$$

Hence the particular solution is

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/9 \\ 0 \\ -2/9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To find two linearly independent solution vectors, we take the homogeneous equation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 1 & -2/3 & -5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

and choose arbitrary values for x_2 and x_4.

Taking $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, we have

$$\begin{aligned} x_1 + 1/3 &= 0 \\ x_3 - 2/3 &= 0 \end{aligned}$$

which has the solution

$$x_1 = -1/3, \qquad x_3 = 2/3$$

so one of the linearly independent vectors is

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Taking $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, we have

$$\begin{aligned} x_1 + 1/9 &= 0 \\ x_3 - 5/9 &= 0 \end{aligned}$$

which has the solution

$$x_1 = -1/9, \qquad x_3 = 5/9$$

and so the other solution is

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 0 \\ 5/9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

and the general solution is

$$x = \begin{pmatrix} 13/9 \\ 0 \\ -2/9 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/9 \\ 0 \\ 5/9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

where c_1 and c_2 are arbitrary constants.

For convenience in organizing a computer solution, we note that these vectors (apart from a constant multiple of -1 in some cases) can be obtained from the last set of equations by the following somewhat artificial steps:

(*1*) Add -1's down the last two columns of the diagonal of the coefficient matrix so that it becomes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 1 & -2/3 & -5/9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(*2*) Rearrange these last two columns and the column of constants as if they were ordered just as the x's are:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

and needed to be correctly ordered. They become

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 & 13/9 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2/3 & -5/9 & -2/9 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

The column of constants has become the particular solution and the other two columns two linearly independent vectors that can be used to form the complete solution.

The method just demonstrated is a general one, and can be used for computer solution of larger systems. It requires only a few modifications and extensions of the elimination method given in Section 10.2.

The FORTRAN subroutine given below solves a system of N equations in M unknowns, where N and M are both 20 or less. Inputs are AA, the coefficient matrix; BB, the constant vector; and NI and M, the dimensions of the system. Outputs are: X, a particular solution vector, K, the number of linearly independent solution vectors for the homogeneous system, and U, a set of linearly independent solution vectors.

```
      SUBROUTINE LINEQ(AA,NI,M,BB,X,K,U)
      DIMENSION AA(20,20),BB(20),A(20,21),X(20),ID(20),U(20,20)
      N=NI
      MM=M+1
      DO 100 I=1,N
      A(I,MM)=BB(I)
      DO 100 J=1,M
  100 A(I,J)=AA(I,J)
      K=1
      IF(N-M)200,1,1
  200 NP=N+1
      N=M
      DO 300 I=NP,M
      DO 300 J=1,MM
  300 A(I,J)=0.
      K=1
    1 CALL EXCH(A,M,MM,K,ID)
      IF(A(K,K))2,5,2
    2 KK=K+1
      DO 3 J=KK,MM
      A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
      DO 3 I=1,N
      IF(K-I)31,3,31
   31 W=A(I,K)*A(K,J)
      A(I,J)=A(I,J)-W
      IF(ABS(A(I,J))-.0001*ABS(W))32,3,3
   32 A(I,J)=0.
    3 CONTINUE
      K=KK
      IF(K-M)1,2,7
    5 DO 6 J=K,M
      A(J,J)=-1.
      DO 7 I=K,N
      IF(A(I,MM))999,7,999
    7 CONTINUE
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,M
      IF(ID(J)-I)10,8,10
    8 X(I)=A(J,MM)
      IF(K-MM)9,10,10
    9 KM=K-1
      DO 10 IP=K,M
      U(I,IP-KM)=A(J,IP)
   10 CONTINUE
      K=M-K
      RETURN
  999 PRINT 1000
      RETURN
 1000 FORMAT(27H EQUATIONS ARE INCONSISTENT)
      END
```


10.7 EIGENVALUES AND EIGENVECTORS

A surprisingly large number of problems in physics and engineering can be reduced to the following mathematical problem: Given a square nth-order matrix A, find a nonzero vector x and a constant λ such that

$$Ax = \lambda x$$

That is, find a vector x such that Ax is simply a multiple of the vector x itself. We can rewrite this equation as

$$Ax - \lambda x = 0$$

or

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{10-10}$$

In this form, the equation appears as a set of homogeneous, linear equations

for $x_1, x_2, \ldots, x_n$. The matrix of coefficients is $(A - \lambda I)$, and the augmented matrix is the same with a column of zeros added, so by Theorem 2 of Section 10.62 the equations are consistent. By Theorem 3 of Section 10.63 there is a unique solution if the rank of the coefficient matrix is n. We already know that solution; it is $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Hence there is a nonzero vector x only if the rank of $(A - \lambda I)$ is less than n. This will be true if

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{10-11}$$

If this determinant is zero, then by Theorem 3 of Section 10.64 there are one or more linearly independent solution vectors that can be used to describe the complete solution. Thus we are interested in the values of λ for which

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

In Section 10.54 it was stated that the value of a determinant could be obtained by forming all possible terms containing as factors exactly one element from each row and each column. If we were to attempt to do this with the determinant above, we would find that the various terms would contain different powers of λ. If we were to collect the terms having like powers, we would obtain an expression of the form

$$(-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_n] \tag{10-12}$$

where the constants $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are numbers resulting from some very complicated manipulations of the numbers a_{ij} in the determinant.

From Chapter 9, there are exactly n values of λ (not necessarily distinct) which will make (10-12) be equal to zero. These values are called the "eigenvalues" (or "characteristic roots," or "latent roots," or "proper values") of the matrix A. For any eigenvalue λ_i, the vector x which satisfies equation (10-10) is called the "eigenvector" (or "characteristic vector," or "latent vector," or "proper vector") corresponding to λ_i. The polynomial (10-12) is called the "characteristic polynomial" of the matrix A, and the equation

$$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_n = 0 \tag{10-13}$$

is called the "characteristic equation."

Example 1. Find the eigenvalues and eigenvectors for the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

To find the eigenvalues, we set

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Expanding, we obtain the characteristic equation

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

This factors into

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

so the eigenvalues are

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = -1$$

To find the eigenvector corresponding to λ_1, we set

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 3 \\ 2 & 2 - \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

or

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Since there are two unknowns and the coefficient matrix has rank 1, Theorem 3 of Section 10.63 tells us that these equations have one linearly independent vector solution U_1, and that all other solutions are multiples of this one. We see by inspection that the vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is a solution, and hence is an eigenvector corresponding to λ_1. All other solutions are of the form

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

where c_1 is an arbitrary constant. Hence the eigenvector is really determined only up to an arbitrary constant multiple.

To find the eigenvector corresponding to λ_2, we set

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

or

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Again there is one linearly independent solution vector. We see by inspection that

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

is a solution. All solutions are of the form

$$c_2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

where c_2 is an arbitrary constant.

Hence the eigenvalues are

$$4, \quad -1$$

and the corresponding eigenvectors are

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(We ordinarily ignore the arbitrary constant multiple when writing an eigenvector.)

Example 2. Find the eigenvalues and eigenvectors for the matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

To determine the eigenvalues, we set

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Expanding, we obtain the characteristic equation

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

which has the roots

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

To find the eigenvector corresponding to λ_1, we set

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 2 & 4 \\ 1 & 4-\lambda_1 & 4 \\ -1 & -2 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

or

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

The coefficient matrix has rank 2, so this system has one linearly independent vector solution. If we solve by the method of Section 10.64, we find that the eigenvector is

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

To find the eigenvector corresponding to λ_2, we set

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 2 & 4 \\ 1 & 4-\lambda_2 & 4 \\ -1 & -2 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

The coefficient matrix has rank 1, so this system has two linearly independent vector solutions. Solving by the method of Section 10.64, we find two linearly independent eigenvectors,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

The root λ_3, being the same as λ_2, has the same eigenvectors. Hence we have a single root, 1, with its eigenvector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

and a double root, 2, with two eigenvectors:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example 3. Find the eigenvalues and eigenvectors for the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

We set

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -8 & -12 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

and obtain the characteristic equation

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = 0$$

which has the roots

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -2$$

To find the eigenvectors, we set

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Since the coefficient matrix has rank 2, there is only one linearly independent eigenvector. It turns out to be

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Since all roots are the same, we can obtain no more eigenvectors. Hence in this case we have a triple eigenvalue, -2, and only one eigenvector (which might be considered an eigenvector of multiplicity 3):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

The above examples have illustrated all the possibilities concerning real eigenvalues and their corresponding eigenvectors. These possibilities can be summarized in the following theorem.

Theorem 4. *An nth-order square matrix has n eigenvalues. If these are discrete, there is one eigenvector corresponding to each eigenvalue. If an eigenvalue is of multiplicity r, it may have from one to r linearly independent eigenvectors associated with it.*

10.71 Program for Largest Eigenvalue and Eigenvector

Suppose that the matrix A has one eigenvalue λ_1 which is larger than all others in absolute value, and y is any nonzero column vector conformable with A. Let the vectors y_1, y_2, etc., be defined by

$$\begin{aligned} y_1 &= Ay_1 \\ y_2 &= Ay_1 \\ &\vdots \\ y_n &= Ay_{n-1} \end{aligned} \tag{10.14}$$

The vectors y_i defined in this manner can lead to the value of λ_1 and to x_1, the eigenvalue corresponding to λ_1. The method of obtaining the eigenvalue and eigenvector will be illustrated without proof.* In order to provide the illustration, let us first write a remote-terminal program to perform the computations indicated by expression (10-14). A suitable program is

* See, for example, J. G. Herriot, *Methods of Mathematical Analysis and Computation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963

```
 1    DIMENSION A(10,10),Y(10),YN(10)
 2    PRINT, "INPUT N, TEN OR LESS"
 3    INPUT, N
 4    PRINT, "INPUT A(1,1)A(1,2),,,A(N,N)"
 5    INPUT, ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
 6    PRINT, "INPUT Y(1),Y(2),,,Y(N)"
 7    INPUT, (Y(I),I=1,N)
 8  1 DO 2 I=1,N
 9    YN(I)=0.
10    DO 2 J=1,N
11  2 YN(I)=YN(I)+A(I,J)*Y(J)
12    PRINT, (YN(I),I=1,N)
13    INPUT, Q
14    DO 3 I=1,N
15  3 Y(I)=YN(I)
16    GO TO 1
17    END
```

In this program, the statements at lines 2 through 7 allow the user to input an initial matrix A and vector y of order up to 10. The statements at lines 8 through 12 compute and print the vector $y_1 = Ay$. At line 13, the user is allowed to specify whether another step of the process is required. If the typed entry is the letter S, the program will terminate. If the entry is any number whatsoever, the program will cause y_1 to replace y, and will repeat lines 8 through 12, thereby computing and printing $y_2 = Ay_1$, and so on.

Example 1. Write all user inputs and machine responses for running the above program with the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and the vector} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

continuing until vectors through y_8 have been generated.

The inputs and responses are

```
 RUN
 INPUT N, TEN OR LESS
? 2
 INPUT A(1,1),A(1,2),,,A(N,N)
? 1,3,2,2
 INPUT Y(1),Y(2),,,Y(N)
? 1,0
       1.000000      2.000000
? 0
       7.000000      6.000000
? 0
       25.00000      26.00000
? 0
       103.0000      102.0000
? 0
       409.0000      410.0000
? 0
       1639.000      1638.000
? 0
       6553.000      6554.000
? 0
       .2621500E5    .2621400E5
? S
STOP
```


The above program was Example 1, Section 10.6, which had a largest eigenvalue of 4 and corresponding eigenvector of $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Looking at the vectors printed out above, we see that the vectors generated were

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 103 \\ 102 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 409 \\ 410 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1639 \\ 1638 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6553 \\ 6554 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26215 \\ 26214 \end{pmatrix}$$

and that after the first few steps the components are always very nearly equal; that is, the vectors themselves are very nearly simple multiples of the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Since eigenvectors are determined only up to a constant multiple, we can say that the vector y_n of (10-14) is actually approaching the eigenvector x. Now since

$$Ax = \lambda x$$

then if y_n is x, then y_{n+1} will be λx. We note without surprise, then, that in each of the vectors computed in the above example, the components are very nearly four times those of the preceding vector.

It appears, then, that the above program can be used almost directly to find the largest eigenvalue and corresponding eigenvector. Some improvement can be made by replacing the statement at line 15 by

```
15  3 Y(I)=YN(I)/YN(1)
```

This will serve to keep the components from growing at each stage, and further will cause the first component to approach the actual value of the eigenvalue. If this had been done for Example 1, the printouts would have been

```
     1.000000   2.000000
? 0
     7.000000   6.000000
? 0
     3.571429   3.714286
? 0
     4.120000   4.080000
? 0
     3.970874   3.980583
? 0
     4.007335   4.004890
? 0
     3.998109   3.998596
? 0
     4.000458   4.000305
? S
STOP
```

From these results, the eigenvalue 4 and the eigenvector $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ are apparent.

10.72 Complex Eigenvalues

From Chapter 9 it is known that the characteristic equation may have complex roots, occuring in conjugate pairs. In this case, the eigenvectors are also complex, and the equation

$$(A - \lambda I)x = 0$$

instead of being n equations in n unknowns, is really $2n$ equations in $2n$ unknowns, for both the real and imaginary part of x must satisfy the equation. Let

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

be a complex eigenvalue, and let the eigenvector be

$$x = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \\ \vdots \\ x_n + y_n i \end{pmatrix}$$

If we substitute these in the above equation and separate real and imaginary parts, the result can be written in the form

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} & 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha & 0 & 0 & \cdots & \beta \\ -\beta & 0 & \cdots & 0 & a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & -\beta & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

These are $2n$ real equations in $2n$ real unknowns which can be solved for the x_i's and y_i's. The eigenvector corresponding to the complex conjugate of λ is the complex conjugate of the eigenvector for λ, so the process needs to be done only once for each pair of complex roots.

Example 1. Find the eigenvalues and eigenvectors of

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

We set

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

and obtain the characteristic equation:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

which has roots:

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = 1 - i$$

To find the eigenvector corresponding to λ_1, using the method described above, we write

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Applying the method of Section 13.34, this reduces to

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -.2 & .4 \\ 0 & 1 & .4 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

This has two linearly independent solution vectors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ .2 \\ 1 \\ -.4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -.4 \\ 0 \\ -.2 \end{pmatrix}$$

These vectors of themselves are not of interest to us, except to use the numbers in them to construct the complex of vectors

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ .2 - .4i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -.4 - .2i \end{pmatrix}$$

These two vectors are not linearly independent at all, for if we multiply the second by i, we obtain the first. Hence we have really obtained only one eigenvector corresponding to the eigenvalue $1 + i$, and that is

$$\begin{pmatrix} i \\ .2 - .4i \end{pmatrix}$$

The eigenvector corresponding to $1 - i$ is the conjugate of this:

$$\begin{pmatrix} -i \\ .2 + .4i \end{pmatrix}$$

10.73 Determination of All Eigenvalues and Eigenvectors

The method described in Section 10.71 will provide the largest eigenvalue and corresponding eigenvector. Frequently it is necessary to find all eigenvalues and eigenvectors. From the discussions of Section 10.7, it is clear that this can be done by accomplishing the following three steps:

(1) Find the characteristic polynomial.
(2) Solve the characteristic equation for its roots.
(3) Solve sets of linear equations for the eigenvectors.

Chapter 9 gave methods for solving polynomial equations, so we already have computer methods for step (2). Section 10.64 gave a computer method for solving systems of linear equations which is satisfactory for step (3). Hence the only thing really required is a computer method for generating the characteristic polynomial. In the examples above, we have used very small matrices and found the characteristic polynomial by brute-force expansion of the determinant, but this process is inefficient for large-order matrices. A more efficient method is the Leverrier-Faddeev method, which proceeds as follows:

$$\begin{aligned} &\text{Let } A_1 = A && \text{and } p_1 = \operatorname{tr} A \\ &\text{Let } A_2 = A(A_1 - p_1 I), && \text{and } p_2 = (1/2) \operatorname{tr} A_2 \\ &\text{Let } A_3 = A(A_2 - p_2 I), && \text{and } p_3 = (1/3) \operatorname{tr} A_3 \\ &\quad \vdots \\ &A_n = A(A_{n-1} - p_{n-1} I) && \text{and } p_n = (1/n) \operatorname{tr} A_n \end{aligned}$$

The numbers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are the required coefficients in the characteristic equation

$$\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \cdots - p_n = 0$$

In addition, as a bonus side product of this process, it can be shown that the inverse of A is given by

$$A^{-1} = (1/p_n)(A_{n-1} - p_{n-1} I) \tag{10-15}$$

and also, as a sometimes helpful check,

$$A_n - p_n I = 0 \tag{10-16}$$

Example 1. Find the characteristic equation of

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Following the above procedure, we have

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad p_1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & -5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = (1/2)(-4 - 8 + 2) = -5$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = (1/3)(4 + 4 + 4) = 4$$

As a check, we see that

$$A_3 - p_3 I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Hence the characteristic equation is

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$$

The flow chart, Figure 10-10, describes this process for an nth-order matrix. According to equation (10-16), the matrix A_n is simply the identity matrix multiplied by p_n, so only the first element of A_n need be calculated to give p_n. The value of p_n is, in fact, the determinant of A, so that if p_n is zero, the matrix is singular. If p_n is not zero, the inverse of A is easily calculated from equation (10-15), and the flow chart includes this calculation. The elements of A^{-1} are the last values obtained for f_{ij}.

The FORTRAN subroutine given below will generate coefficients in accordance with the flow chart, for matrices up to order 20. However, in order that the subscripts will match the notation in the subroutines of Chapter 9, the characteristic equation is written as

$$Q(1)\lambda^N + Q(2)\lambda^{N-1} + \cdots + Q(N+1) = 0$$

The relationship between the p_k of the flow chart and the Q(K) of the subroutine is given by

$$Q(1) = 1, \; Q(K+1) = -p_k \qquad \text{for } k = 1, \ldots, n$$

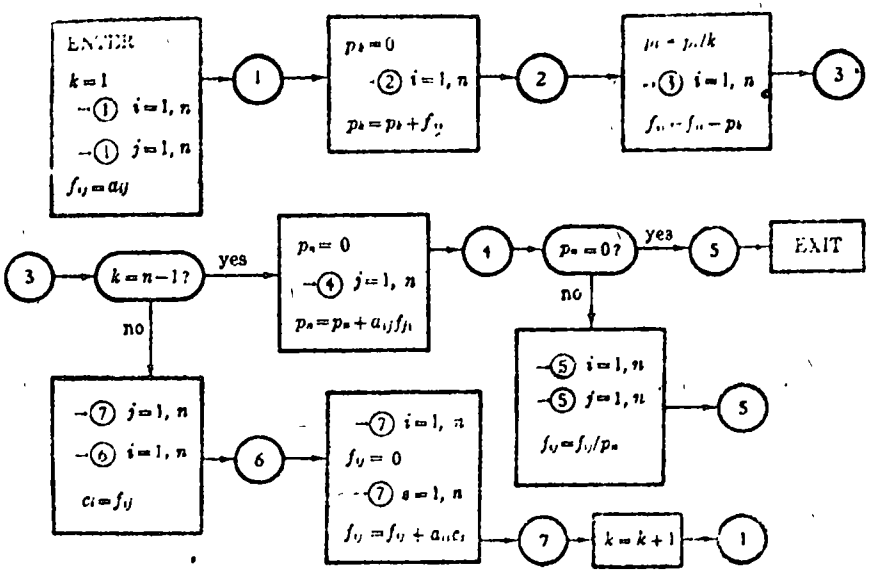


Figure 10-10: Generation of characteristic polynomial

As in the flow chart, the subscripted variable F(I,J) is the inverse matrix unless Q(N+1) happens to be zero.

```
      SUBROUTINE CHAREQ(A,N,Q,F)
      DIMENSION A(20,20),F(20,20),Q(21),C(20)
      Q(1)=1.
      K=1
      DO 11 I=1,N
      DO 11 J=1,N
   11 F(I,J)=A(I,J)
    1 CONTINUE
      Q(K+1)=0.
      DO 2 I=1,N
      Q(K+1)=Q(K+1)+F(I,I)
    2 CONTINUE
      FK=K
      Q(K+1)=-Q(K+1)/FK
      DO 3 I=1,N
      F(I,I)=F(I,I)+Q(K+1)
    3 CONTINUE
      IF(K-N+1)71,41,71
   71 DO 7 J=1,N
      DO 6 I=1,N
      C(I)=F(I,J)
```

```
    6 CONTINUE
      DO 7 I=1,N
      F(I,J)=0.
      DO 7 IS=1,N
      F(I,J)=F(I,J)+A(I,IS)*C(IS)
    7 CONTINUE
      K=K+1
      GO TO 1
   41 Q(N+1)=0.
      DO 4 J=1,N
      Q(N+1)=Q(N+1)-A(1,J)*F(J,1)
    4 CONTINUE
      IF(Q(N+1))51,5,51
   51 DO 52 I=1,N
      DO 52 J=1,N
   52 F(I,J)=-F(I,J)/Q(N+1)
    5 RETURN
      END
```

With the above subroutine and subroutines of Chapter 9 and Section 10.6, eigenvalues and eigenvectors can be found in a systematic way. There are also methods which, under some conditions, can be used to find all eigenvalues directly from the matrix itself, without generating the characteristic equation first. These methods are available in the literature and will not be reported here.

EXERCISE 28

1. Determine the rank of the following matrices

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

2. Determine whether the following systems are consistent or inconsistent.

   a. $x+2y+z=4$, $-2x-4y-2z=3$ b. $x+2y=6$, $x+3y=8$

   c. $x+3y=7$, $2x-y=4$, $4x+5y=18$ d. $x+2y=8$, $3x-y=2$, $2x+y=6$

3. Solve completely the following systems of equations.

   a. $x+2y=0$, $-2x-4y=0$ b. $x+y-z=2$, $x-y+z=3$

   c. $x+3y-z=4$, $2x-y+2z=3$, $3x+2y+z=7$ d. $x+2y+z=1$, $2x-y+z=2$, $3x-y+4z=3$

*4. Find all eigenvalues and eigenvectors for the following matrices.

   a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Find the number of multiplications required to find the rank of a 10 by 15 matrix using SUBROUTINE MARANK of Section 10.61, if the rank turns out to be 8.

6. Write a program that will input a system of linear equations up to 20 by 20, call subroutine LINEQ of Section 10.64 to obtain all solutions, and print the result.

7. Write a program that will input a square matrix up to 19 by 19, call subroutine CHAREQ of Section 10.73 to obtain the characteristic equation, call the appropriate subroutine from Chapter 9 to find the largest real root, call subroutine LINEQ of Section 10.64 to find the corresponding eigenvector, and print the result.

INDICE

the problems of the third chapter are characterized by sets of simultaneous ordinary differential equations with prescribed *initial* conditions, the problems of the fourth and fifth chapters are characterized by ordinary or partial differential equations with closed *boundary* conditions, and the problems of the sixth chapter are characterized by partial differential equations with open boundary conditions. This survey of numerical procedures thus amounts to a catalogue of practical methods for the solution of algebraic, ordinary differential, and partial differential equations. In Chaps. 1, 3, 4, and 6 both linear and nonlinear problems are considered. The discussion of eigenvalue problems in Chaps. 2 and 5 is limited to linear systems.

All six chapters have the same structure. At the beginning of each chapter several representative problems are presented. These serve to identify the class of problems under consideration. The process of formulating a mathematical model is illustrated for each of these problems.

Before leaving these formulations they are each cast into *dimensionless* form. This is an extremely useful organizational tool[1] of the analyst. In connection with numerical calculations it removes all unnecessary symbols, leaving the basic problem in its simplest form.

Then, before surveying numerical procedures applicable to this class of problems, a brief résumé of the classical mathematical theory is given. A complete mathematical development has not been attempted but an effort has been made to describe clearly the properties of the well-behaved or regular system. The possibilities of irregular behavior are hinted at by means of simple counterexamples. Enough theory is presented to provide a background for the explanation of the success (and limitations) of the numerical procedures which follow.

After these preliminaries the actual survey of numerical procedures begins. Illustrative examples are drawn from the problems formulated at the beginning of the chapter. At the end of each section there is a set of exercises for the reader. A few of these are of the nature of drill problems but the majority represent interesting extensions or alternative developments of the text material. Answers or hints for the solution are given in most cases.

The numerical procedures described here are those which in the judgment of the author are of most potential interest to the engineering analyst. Methods for both hand and machine computation are given.

Throughout the text there are references to books and papers having direct bearing on the matter at hand. For the reader's convenience a number of selected general references are grouped together in the Bibliography at the end of the book.

[1] See, for example, H. L. Langhaar, "Dimensional Analysis and Theory of Models," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

CHAPTER 1

EQUILIBRIUM PROBLEMS IN SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

The state of a physical system can often be described with adequate precision by giving the magnitudes of a finite number of state variables. This chapter deals with numerical procedures for determining steady states of such systems. The chapter begins with a preliminary examination of several particular problems. The general problem of this type is then formulated mathematically as a set of simultaneous algebraic equations. There is a review of the classical results from the theory of such systems, including a discussion of the relationship of extremum principles to equilibrium problems. Numerical procedures, both exact and approximate, are then described and illustrated by applying them to the particular problems set up at the beginning of the chapter.

1-1. Particular Examples

We begin with an assortment of examples of how mathematical formulations are set up for particular physical problems. The examples are taken from a variety of fields and, in general, have been chosen for their simplicity despite the fact that the really significant contributions of numerical procedures occur in problems of extended complexity.

It is generally recognized that the most difficult step in the whole process of engineering analysis is that in which a mathematical model is substituted for a real physical system. It is here that judgment, experience, and ingenuity of the highest order are required of the analyst. It is here that the really gross approximations and simplifications are made. In this text the basic structure of the various physical problem types and the corresponding mathematical models is emphasized.

The general equilibrium problem in a lumped-parameter system has the following structure: The given system is made up by interconnecting a number of simple elements. The equilibrium or steady-state requirements for each individual element are known. As examples we have the stress-strain law for elastic elements, Ohm's law for electrical resistances, and the pressure-flow relation for hydraulic resistances. In addition to satisfying the equilibrium requirements of the individual elements it is

also necessary to satisfy certain interconnection requirements. Thus in elastic systems we must have geometric fit and balance of forces at all joints; in electric networks we must satisfy both of Kirchhoff's laws; and in hydraulic networks we must have conservation of flow and uniqueness of pressure at every interconnection. The over-all equilibrium problem then consists in finding the state of a system which simultaneously satisfies the equilibrium requirements of the individual elements together with the interconnection requirements.

To serve as concrete illustrations of this general statement and to provide illustrative examples for the numerical procedures which follow, we here consider the following five particular equilibrium problems:

1-1. Elastic spring system.
1-2. D-c network.
1-3. A-c network.
1-4. Continuous beam.
1-5. Hydraulic network.

In each case the problem is cast into nondimensional form, with particular data assumed, in preparation for numerical solution. In most cases complementary forms of the problem are considered. The first four problems are linear, while the fifth represents an example of a practically important nonlinear problem.

Problem 1-1. Elastic Spring System. In Fig. 1-1 a system of four

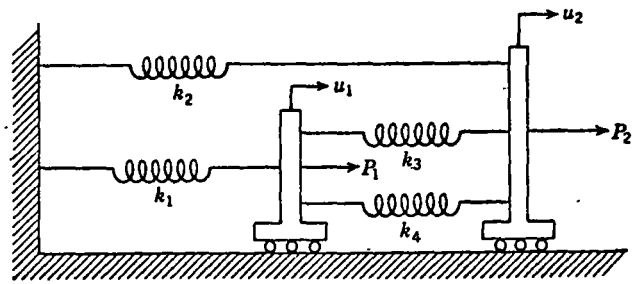


FIG. 1-1. Elastic system of interconnected springs subjected to loads P_1 and P_2.

linear springs is shown. Assume that when P_1 and P_2 are zero then u_1 and u_2 are both zero and that all springs are in their natural positions. The problem here is to find the displacements u_1 and u_2 and the forces f_1, f_2, f_3, and f_4 in the four springs when the loads P_1 and P_2 are applied. The fundamental requirements are:

1. Spring force = k(spring elongation) for each spring.
2. Forces should balance on each movable cart.
3. Spring elongations should be compatible with the displacements of the carts.

A standard method of solution is to choose unknown variables in such

a way that requirement 3 above is automatically satisfied. In our problem this is done by taking u_1 and u_2 as unknowns and expressing the spring elongations in terms of them (e.g., elongation of spring 4 is $u_2 - u_1$). Next the spring forces are expressed in terms of u_1 and u_2 by introducing the spring constants. Finally, writing the force-balance conditions for each cart gives us the following equations for u_1 and u_2:

$$\begin{aligned} k_1u_1 - k_2(u_2 - u_1) - k_4(u_2 - u_1) &= P_1 \\ k_2u_2 + k_3(u_2 - u_1) + k_4(u_2 - u_1) &= P_2 \end{aligned} \tag{1-1}$$

A complete solution of our problem would require the solution of these simultaneous equations. We stop at this point, however, since we are here concerned only with the formulation of the problem. Summarizing, we limited ourselves to geometrically compatible states as soon as we took u_1 and u_2 as unknowns; requiring that force balance should also hold gave us (1-1).

A *complementary* method of solution for the same problem is to choose unknown variables in such a way that requirement 2 above is automatically satisfied. This may be done by taking the spring forces f_2 and f_3 as unknown and expressing the other spring forces, f_1 and f_4, in terms of them by means of the force-balance conditions.

$$\begin{aligned} f_4 &= P_2 - f_2 - f_3 \\ f_1 &= P_1 + f_3 + f_4 = P_1 + P_2 - f_2 \end{aligned} \tag{1-2}$$

Next the spring elongations are expressed in terms of f_2 and f_3 by introducing the spring constants. Finally we obtain the following equations for f_2 and f_3 by requiring that the spring elongations be compatible with unique displacements of the carts:

$$\begin{aligned} \frac{f_2}{k_2} &= \frac{P_1 + P_2 - f_2}{k_1} + \frac{P_2 - f_2 - f_3}{k_4} \\ \frac{f_3}{k_3} &= \frac{P_2 - f_2 - f_3}{k_4} \end{aligned} \tag{1-3}$$

The second of these expresses the fact that the elongations of springs 3 and 4 should be the same. The first expresses the fact that the elongation of spring 2 must be the same as the sum of the elongations of springs 1 and 4. Again a complete solution would require the simultaneous solution of (1-3), but we stop at this point. Reiterating our logic, we limited ourselves to self-balancing states when we took f_2 and f_3 as unknowns and used (1-2) for the other forces. Among these self-balancing states the true state is selected by (1-3), which requires that the spring elongations should be compatible with the given interconnections of the system.

For future use we now specialize the above problem to the case where

$$\begin{aligned} k_1 &= 3k \\ k_2 &= 2k \\ k_3 &= k \\ k_4 &= k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_1 &= P \\ P_2 &= 2P \end{aligned} \tag{1-4}$$

Substituting these values in (1-1) and (1-3), we obtain

$$\begin{aligned} 5ku_1 - 2ku_2 &= P \\ -2ku_1 + 4ku_2 &= 2P \end{aligned} \tag{1-5}$$

as the equations for the displacements and

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{6}f_2 + f_3 &= 3P \\ f_2 + 2f_3 &= 2P \end{aligned} \tag{1-6}$$

as the complementary equations for the forces. These formulations can be simplified even further by introducing dimensionless variables. If we define the nondimensional displacements

$$x_1 = \frac{u_1}{P/k} \qquad x_2 = \frac{u_2}{P/k} \tag{1-7}$$

the displacement equations (1-5) can be written in the following form:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned} \tag{1-8}$$

Similarly, in terms of the nondimensional forces

$$y_1 = \frac{f_2}{P} \qquad y_2 = \frac{f_3}{P} \tag{1-9}$$

the force equations (1-6) become

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{6}y_1 + y_2 &= 3 \\ y_1 + 2y_2 &= 2 \end{aligned} \tag{1-10}$$

Problem 1-2. D-C Network. We consider the problem of determining the voltages and currents in the network shown in Fig. 1-2. The resistances and battery emfs are given in the figure in terms of R and E. The equilibrium or steady-state conditions are Ohm's law for each individual resistor plus the interconnection requirements which are the two laws of Kirchhoff.[1] We can obtain *complementary* formulations of the problem in the following manner: If we represent the state of the system by a set of independent currents such that Kirchhoff's first law is automatically satisfied, we then obtain equations for determining these currents by requiring that the second law be satisfied. Alternatively if the state of the system is represented by a set of independent voltages such that Kirchhoff's second law is automatically satisfied, equations can then be obtained for determining these voltages by requiring the satisfaction of the first law.

[1] See, for example, C. L. Dawes, "Electrical Engineering," 3d ed., vol. I, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1937, p. 72.

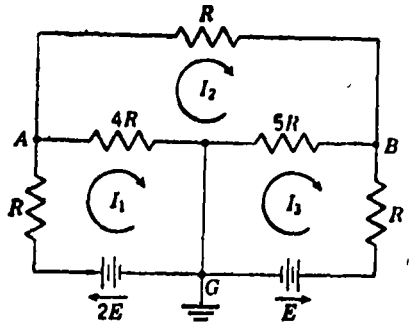


FIG. 1-2. Network of resistors and batteries.

In accordance with the first procedure the state of the system is represented by the three loop currents I_1, I_2, and I_3. The net current flow into any junction is always zero for any values of I_1, I_2, and I_3. Ohm's law together with the requirement that the net voltage drop in any closed loop should vanish yields the following equations:

$$\begin{aligned} 2E - RI_1 - 4R(I_1 - I_2) &= 0 \\ -RI_2 - 5R(I_2 - I_3) - 4R(I_2 - I_1) &= 0 \\ -RI_3 - 5R(I_3 - I_2) - E &= 0 \end{aligned} \tag{1-11}$$

When the currents which satisfy (1-11) are found, any desired network emf is easily obtained by an elementary application of Ohm's law.

Following the second procedure, the state of the system can be represented by the potentials e_1 and e_2 of the nodes A and B with respect to G. This ensures that the voltage drop around any closed loop vanishes. The requirement that there should be no net current flow into the nodes A and B results in the following equations:

$$\begin{aligned} \frac{2E - e_1}{R} - \frac{e_1}{4R} + \frac{e_2 - e_1}{R} &= 0 \\ \frac{E - e_2}{R} - \frac{e_2}{5R} + \frac{e_1 - e_2}{R} &= 0 \end{aligned} \tag{1-12}$$

When the voltages e_1 and e_2 which satisfy (1-12) have been found, any desired network current may be obtained by a simple application of Ohm's law.

The complete solution can thus be obtained by solving either (1-11) or (1-12). Note that here the number of degrees of freedom is not the same for the two analyses. Before leaving this problem, we cast the equations into nondimensional form. Dimensionless currents and volt-

ges are defined as follows:

$$x_1 = \frac{I_1}{E/R} \qquad x_2 = \frac{I_2}{E/R} \qquad x_3 = \frac{I_3}{E/R}$$
$$y_1 = \frac{e_1}{E} \qquad y_2 = \frac{e_2}{E} \tag{1-13}$$

The current equations (1-11) then become

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 6x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{1-14}$$

while the voltage equations (1-12) take the following form:

$$\begin{aligned} 2.25y_1 - y_2 &= 2 \\ -y_1 + 2.20y_2 &= 1 \end{aligned} \tag{1-15}$$

These last two sets of equations constitute complementary dimensionless formulations of Prob. 1-2.

Problem 1-3. A-C Network. The equilibrium problem here is to determine the steady-state currents in the network of Fig. 1-3. The impedances of the branches at the frequency of the voltage source are indicated in the usual[1] complex notation in terms of R. Complementary formulations of this problem can be obtained in the same manner as in Prob. 1-2. We consider here only the equations for the currents. If we take I_1 and I_2 as the state variables, Kirchhoff's first law is automatically satisfied and the second law yields the following equations:

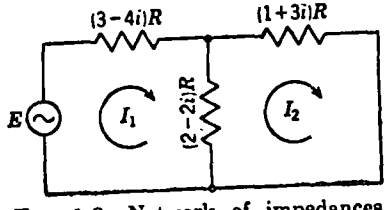


FIG. 1-3. Network of impedances connected to alternating-voltage source.

$$\begin{aligned} E - (3 - 4i)RI_1 - (2 - 2i)R(I_1 - I_2) &= 0 \\ -(2 - 2i)R(I_2 - I_1) - (1 + 3i)RI_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1-16}$$

A nondimensional formulation is obtained by introducing the dimensionless variables

$$I_1' = \frac{I_1}{E/R} \qquad I_2' = \frac{I_2}{E/R} \tag{1-17}$$

into (1-16) as follows:

$$\begin{aligned} (5 - 6i)I_1' - (2 - 2i)I_2' &= 1 \\ -(2 - 2i)I_1' + (3 + i)I_2' &= 0 \end{aligned} \tag{1-18}$$

The quantities I_1' and I_2' are expected to be complex. Although procedures exist for the direct solution of sets of equations such as (1-18), it is sometimes useful to trans-

[1] See, for example, C. L. Dawes, "A Course in Electrical Engineering," 4th ed., vol. II, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1947, p. 70. The symbol i stands for the imaginary unit $\sqrt{-1}$.

form the complex equations into their real equivalents. To illustrate the process for the present example, we define the real quantities $x_1, \ldots, x_4$ as follows:

$$\begin{aligned} I_1' &= x_1 + ix_2 \\ I_2' &= x_3 + ix_4 \end{aligned} \tag{1-19}$$

When these are substituted in (1-18), each equation can be separated into two: one obtained from the real terms and one from the imaginary terms. We thus obtain the following four real equations, which are equivalent to the two complex equations of (1-18):

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{1-20}$$

Problem 1-4. Continuous Beam. In Fig. 1-4 a uniform elastic beam is shown. It is simply supported at A, B, and C and clamped at D. Equilibrium problems for such systems consist in determining the bend-

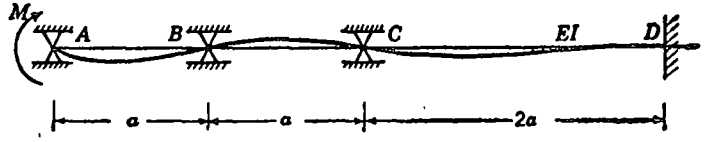


FIG. 1-4. Continuous beam freely supported at A, B, and C, clamped at D, and subjected to external moment M applied at A.

ing moments and deflections resulting from assigned loads. We consider the particular problem of Fig. 1-4, where the load is the single moment M applied at A. The flexural stiffness of the beam is EI, and the span lengths are given in terms of a.

This system may be treated as a lumped parameter system by considering each span as a single element. The total equilibrium problem then involves satisfying the elastic requirements within each span, together with the interconnection requirements at the joints. These interconnection requirements are that adjacent spans should have the same inclination and the same bending moment at their common junction. The internal elastic requirements for a single span are one stage more complicated than the corresponding single-element relations in the foregoing examples. Here each span is itself a two-degree-of-freedom system described by two geometric quantities (the inclinations at the ends) and by two force quantities (the bending moments at the ends). The relations between these which represent the elastic requirements[1] are shown in Fig. 1-5. Clockwise angles have been called positive. Bending moments which tend to stretch the bottom fibers and compress the top fibers have been called positive. A formulation of the equilibrium

[1] See, for example, L. C. Maugh, "Statically Indeterminate Structures," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1946, p. 49.

problem may be obtained by using either inclinations or bending moments to represent the state of the system. Thus a set of independent angles which satisfy the compatibility requirements might be chosen. With the aid of the elastic relations bending moments could then be expressed in terms of these angles, and finally, by writing the conditions for moment

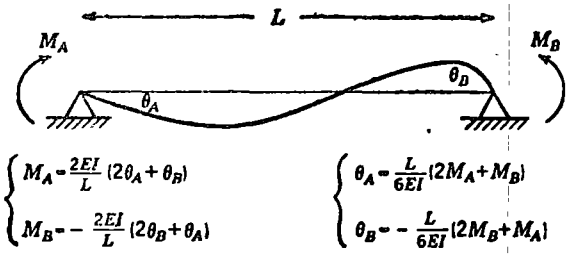


FIG. 1-5. Elastic relationships for a span whose ends are restrained from translation and which is subjected to end moments.

balance, a set of equations for determining the angles would be obtained. Alternatively a set of independent bending moments which satisfy the requirements of moment balance could be used to represent the state of the system. The compatibility requirements together with the elastic relations would then furnish equations for determining these moments.

Adopting the former procedure, the state of the system of Fig. 1-4 can

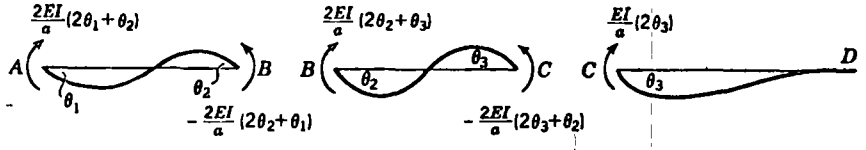


FIG. 1-6. Representation of the beam of Fig. 1-4 in terms of the displacements θ_1, θ_2, and θ_3.

be represented by the clockwise inclinations of the beam at A, B, and C. These angles are denoted by θ_1, θ_2, and θ_3, respectively. Making use of the elastic relations of Fig. 1-5, the terminal bending moments in each span are as indicated in Fig. 1-6.

Governing equations for the angles are now obtained by writing the conditions for moment balance at the supports A, B, and C.

$$\begin{aligned} M &= \frac{2EI}{a}(2\theta_1 + \theta_2) \\ -\frac{2EI}{a}(2\theta_2 + \theta_1) &= \frac{2EI}{a}(2\theta_2 + \theta_3) \\ -\frac{2EI}{a}(2\theta_3 + \theta_2) &= \frac{EI}{a}(2\theta_3) \end{aligned} \tag{1-21}$$

These may be cast into nondimensional form by introducing the following dimensionless inclinations:

$$x_1 = \frac{\theta_1}{Ma/2EI} \qquad x_2 = \frac{\theta_2}{Ma/2EI} \qquad x_3 = \frac{\theta_3}{Ma/2EI} \tag{1-22}$$

We thus obtain the following formulation of the equilibrium problem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= +1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1-23}$$

A complementary formulation may be obtained in terms of the bending moments M_1, M_2, and M_3 at B, C, and D, respectively, in the beam of Fig. 1-4. It is left as an exercise for the reader to show that in terms of the dimensionless moments

$$y_1 = \frac{M_1}{M} \qquad y_2 = \frac{M_2}{M} \qquad y_3 = \frac{M_3}{M} \tag{1-24}$$

the governing equations are as follows:

$$\begin{aligned} 4y_1 + y_2 &= -1 \\ y_1 + 6y_2 + 2y_3 &= 0 \\ 2y_2 + 4y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1-25}$$

Problem 1-5. Hydraulic Network. We consider the problem of determining the steady flow of an incompressible fluid in a network of branched pipes under the assumption that the pressure drop in a single

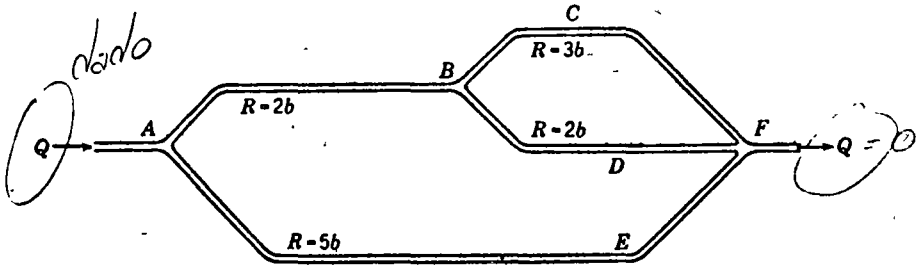


FIG. 1-7. Schematic diagram of hydraulic network passing a total flow Q.

branch is proportional to the square of the rate of flow through that branch. Figure 1-7 shows the plan of a particular pipe network. The total rate of flow, in at A and out at F, is Q. For a single branch the

pressure drop in the direction of flow is given[1] by the following resistance law,

$$\Delta p = Rq^2 \tag{1-26}$$

where q is rate of flow through the branch and R is a resistance coefficient. The resistance coefficient of each branch in Fig. 1-7 is given in terms of b.

The equilibrium problem consists in determining the pressure and flow distribution in the steady state. To make the problem definite, we assume that Q is given and that the pressure at F is zero. The governing requirements are that the pressure at each junction should be single-valued, that the rate of flow into any junction should equal the rate of flow out of that junction, and that in each separate branch the resistance law (1-26) should be satisfied. A formulation of the problem can be made in terms of either junction pressures or branch flow rates. Thus the state of the system can be represented by p_1 and p_2, the pressures at A and B, respectively. In terms of these the flow rates in the individual branches are given by (1-26).

$$\begin{aligned} q_{AB} &= \left(\frac{p_1 - p_2}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} \\ q_{BCF} &= \left(\frac{p_2}{3b}\right)^{\frac{1}{2}} \\ q_{BDF} &= \left(\frac{p_2}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} \\ q_{AEF} &= \left(\frac{p_1}{5b}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1-27}$$

The requirement of continuity of flow at the junctions A and B provides the following governing equations:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p_1 - p_2}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{p_1}{5b}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{p_1 - p_2}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{p_2}{3b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{p_2}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1-28}$$

A nondimensional formulation may be obtained by introducing dimensionless pressures

$$x_1 = \frac{p_1}{bQ^2} \qquad x_2 = \frac{p_2}{bQ^2} \tag{1-29}$$

[1] See, for example, H. W. King, C. O. Wisler, and J. G. Woodburn, "Hydraulics," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948, 5th ed., p. 220. Strictly speaking we should consider Δp and q as directed quantities and write $\Delta p = [\text{sign } (q)]Rq^2$. If we use (1-26), it is incumbent on us to check that all pressure drops are actually in the direction of flow in any proposed solution.

In terms of these (1-28) may be cast into the following form:

$$\begin{aligned} 0.4472x_1^{\frac{1}{2}} + 0.7071(x_1 - x_2)^{\frac{1}{2}} &= 1 \\ 0.7071(x_1 - x_2)^{\frac{1}{2}} - 1.2845x_2^{\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned} \tag{1-30}$$

A *complementary* formulation may be obtained in terms of branch flow rates. Continuity of flow will be preserved in Fig. 1-7 if the flow rates q_1 and q_2 in the branches AB and BCF, respectively, are independent provided the flow rates in the remaining branches are taken as follows:

$$\begin{aligned} q_{BDF} &= q_1 - q_2 \\ q_{AEF} &= Q - q_1 \end{aligned} \tag{1-31}$$

With the aid of (1-26) the requirement of single-valued pressures at A and B leads to the following governing equations:

$$\begin{aligned} 2bq_1^2 + 2b(q_1 - q_2)^2 &= 5b(Q - q_1)^2 \\ 3bq_2^2 &= 2b(q_1 - q_2)^2 \end{aligned} \tag{1-32}$$

Introducing the dimensionless flow rates

$$y_1 = \frac{q_1}{Q} \qquad y_2 = \frac{q_2}{Q} \tag{1-33}$$

we obtain a nondimensional formulation as follows:

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_2^2 &= 5 \\ +2y_1^2 - 4y_1y_2 - y_2^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1-34}$$

EXERCISES

1-1. The lengths and cross-sectional areas of the bars of a plane pinned truss are indicated in Fig. 1-8. The bars are joined by frictionless pins, and each one satisfies Hooke's law, $f/A = E\delta/L$, where f is the tensile force and δ is the elongation. The

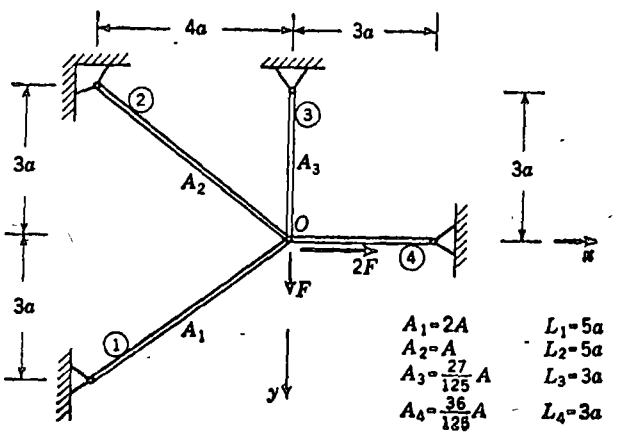


FIG. 1-8. Exercise 1-1.

CHAPTER 2

EIGENVALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

Equilibrium problems involve the determination of system configurations under prescribed loading conditions. An eigenvalue problem may also involve the determination of system configurations, but of greater importance is the determination of the critical loading conditions under which these configurations are possible. A parameter which describes such a critical condition is called an eigenvalue. As examples we have the *natural frequencies* in oscillating systems and the *buckling loads* in elastic-stability problems.

We consider only *linear* eigenvalue problems. Matrix notation is used because it facilitates the theoretical discussion and because it provides a useful system for laying out the actual computations. The necessary rules are briefly reviewed in Sec. 2-2.

2-1. Particular Examples

Two examples are used to illustrate the formulation of eigenvalue problems from physical systems:

2-1. Three-mass vibrating system.

2-2. Buckling of a structure.

In both cases the formulations are left in ordinary algebraic form. Matrix formulations will be given in Sec. 2-2.

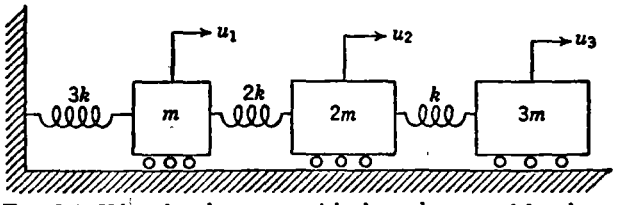


FIG. 2-1. Vibrational system with three degrees of freedom.

Problem 2-1. Three-mass Vibrating System. The system is shown in Fig. 2-1. The displacements of the three masses from the unstrained configuration are measured by u_1, u_2, and u_3. The equations of motion may be written by imagining the system disturbed from equilibrium and

applying Newton's second law to each mass. Neglecting friction, we obtain

$$\begin{aligned} -3ku_1 + 2k(u_2 - u_1) &= m\frac{d^2u_1}{dt^2} \\ -2k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_2) &= 2m\frac{d^2u_2}{dt^2} \\ -k(u_3 - u_2) &= 3m\frac{d^2u_3}{dt^2} \end{aligned} \tag{2-1}$$

For a *natural* vibration we would have

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ u_2 &= x_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ u_3 &= x_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{2-2}$$

where x_1, x_2, and x_3 represent the amplitudes of vibration, ω is the natural frequency, and φ is a phase angle. If we substitute (2-2) into (2-1) and set

$$\frac{m\omega^2}{k} = \lambda \tag{2-3}$$

we find the following equations as the conditions for determining the amplitudes and frequency:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= \lambda(x_1) \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= \lambda(2x_2) \\ -x_2 + x_3 &= \lambda(3x_3) \end{aligned} \tag{2-4}$$

The parameter λ is a dimensionless measure of the frequency. An *eigenvalue* is a value of λ for which there are nonzero amplitudes which satisfy (2-4). A configuration of amplitudes which meets these requirements is called a *natural mode*. The corresponding frequency is called a *natural frequency*. A complete solution would involve finding all the natural frequencies and their associated natural modes. In technical problems it may not be of interest to obtain the complete solution. Sometimes only the lowest natural frequency is desired; sometimes just the lowest frequency and the corresponding mode or just the two lowest frequencies are desired.

Problem 2-2. Buckling of a Structure. A system of rigid weightless links hinged together and supported by springs is shown in Fig. 2-2*a*. In this position all three links are exactly vertical, and there is no force in any of the springs. We consider the stability of this system when subjected to a vertical load P applied at B. For small loads the three links will remain vertical, moving down as a unit against the springs k_1. For large loads the links will buckle; that is, B and C will undergo transverse displacements as shown in Fig. 2-2*b*. Our problem is to determine

the stability limit for the vertical position. We want to know the value of P for which an equilibrium position with transverse displacements first becomes possible.

To obtain a quantitative analysis, we assume that the desired critical buckling load is holding the system in equilibrium and find the equi-

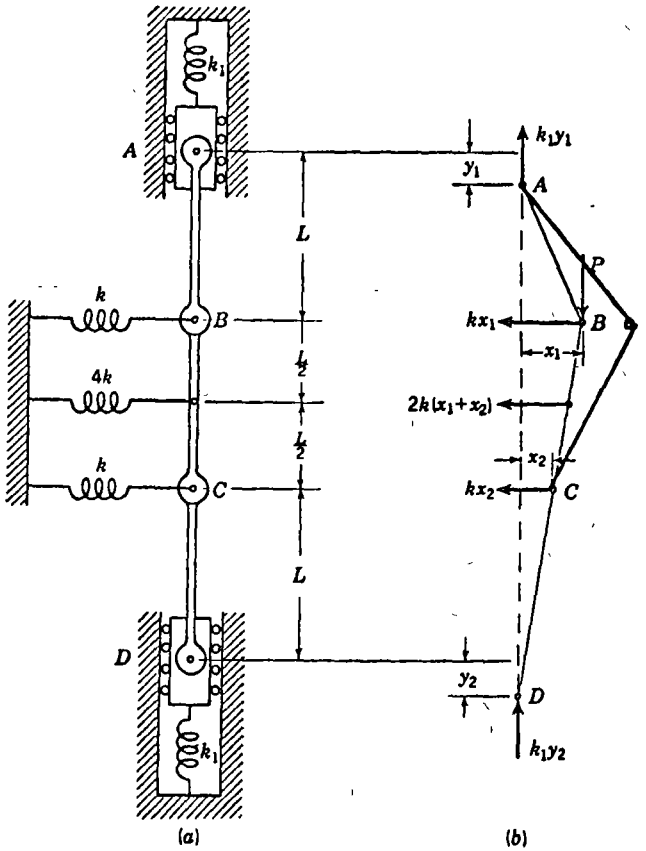


FIG. 2-2. Buckling of a system of spring-supported rigid links.

librium conditions by applying the principle of minimum potential energy. A geometrically compatible state can be represented by arbitrary (small) values of y_1, x_1, and x_2 if we take y_2 as

$$y_2 = y_1 - \frac{x_1^2}{2L} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2L} - \frac{x_2^2}{2L} \tag{2-5}$$

The usual small-angle approximations, $1 - \cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$ and $\sin\theta \approx \theta$, have been made here. By adding the strain energy of the springs to the

potential energy of the load P we have the total potential energy

$$\Phi = \tfrac{1}{2}k_1y_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 + \tfrac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2 + \tfrac{1}{2}k_1y_2^2 - P\left(y_1 - \frac{x_1^2}{2L}\right) \tag{2-6}$$

where y_2 is understood to take the value (2-5). The equilibrium equations are the conditions for stationary potential energy.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} &= k_1y_1 + k_1y_2 - P = 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} &= kx_1 + k(x_1 + x_2) + k_1y_2\left(-\frac{x_1}{L} - \frac{x_1 - x_2}{L}\right) + \frac{Px_1}{L} = 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} &= k(x_1 + x_2) + kx_2 + k_1y_2\left(\frac{x_1 - x_2}{L} - \frac{x_2}{L}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2-7}$$

One solution of this system is $x_1 = x_2 = 0$ and

$$y_2 = y_1 = \frac{P}{2k_1} \tag{2-8}$$

which is obtained from (2-5) and the first of (2-7). This is the unbuckled equilibrium position.

If x_1 and x_2 do not vanish, we obtain

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{P}{2k_1} + \frac{1}{4L}\left[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right] \\
y_2 &= \frac{P}{2k_1} - \frac{1}{4L}\left[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right]
\end{aligned} \tag{2-9}$$

by solving (2-5) and the first of (2-7). We next insert the second of (2-9) into the last two relations of (2-7) to get a pair of simultaneous equations in x_1 and x_2. These equations contain linear and cubic terms. Since we are interested in the first appearance of buckling, we need consider only such small values of x_1 and x_2 that the cubic terms may be neglected in comparison with the linear terms. The linearized equations for x_1 and x_2 then appear as follows:

$$\begin{aligned}
kx_1 + k(x_1 + x_2) + \frac{P}{2L}(-2x_1 + x_2) + \frac{Px_1}{L} &= 0 \\
k(x_1 + x_2) + kx_2 + \frac{P}{2L}(x_1 - 2x_2) &= 0
\end{aligned} \tag{2-10}$$

By introducing the dimensionless parameter

$$\lambda = \frac{2kL}{P} \tag{2-11}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
-x_2 &= \lambda(2x_1 + x_2) \\
-x_1 + 2x_2 &= \lambda(x_1 + 2x_2)
\end{aligned} \tag{2-12}$$

as our formulation of the eigenvalue problem.

An *eigenvalue* is a value of λ for which the equations permit nonvanishing displacements. Such a configuration of displacements is called a *buckling mode.*

A complete solution of an eigenvalue problem involves finding all possible eigenvalues with their associated modes. In technical buckling problems a complete solution is not of interest. Very often the magnitude of the smallest buckling load is all that is required. Sometimes the corresponding buckling mode is of interest in order to assist in the design of stiffening reinforcement.

The present system has the interesting feature that if the load P is reversed (i.e., applied vertically upward) there is still the possibility of buckling. In such cases both the smallest positive and smallest negative buckling loads are of practical interest.

EXERCISES

2-1. Show that the eigenvalue problem for determining the natural frequencies and modes of torsional vibration of the system of Fig. 2-3 may be formulated as follows:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\
-x_2 + 2x_3 - x_4 &= \lambda x_3 \\
-x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 &= \lambda x_4 \\
-\tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 &= 4\lambda x_5
\end{aligned}$$

where $\lambda = \omega^2 J/k$ and k is the torsional stiffness of a shaft and J is the moment of

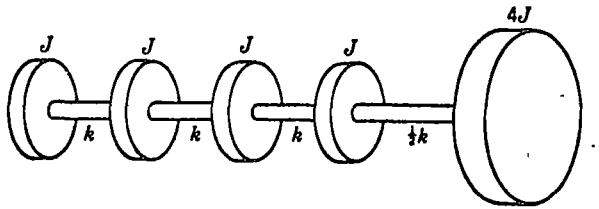


FIG. 2-3. Exercise 2-1.

inertia of a disk. The system is so supported on frictionless bearings that it is free to rotate without any bending of the shafts.

2-2. At resonance let the currents in Fig. 2-4 be

$$\begin{aligned}
I_1 &= x_1 \sin(\omega t + \varphi) \\
I_2 &= x_2 \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 4: RAICES DE FUNCIONES TRASCEDENTES Y POLINOMIOS

SEPTIEMBRE , 1977.

4. RAICES DE FUNCIONES TRASCENDENTES Y POLINOMIOS

4.1 Introducción

Todo modelo matemático de un sistema físico involucra el planteamiento de funciones, ya sean varias o una sola.

Existen dos tipos básicos de ecuaciones o funciones:

- trascendentes ($e^{-x} - sen3x = 0$)
- polinomiales ($X^4 - 3X^3 + 10X^2 + 1 = 0$)

Un problema frecuente es la obtención de las raíces de -- dichas funciones o dicho de otra manera los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación. Otro problema usual - es el determinar la intersección de dos funciones que representan conceptos distintos (Vgr.: costos e ingresos), esto último equivale a encontrar la solución de una sola función formada -- por la resta de las dos originales.

Existen diversos métodos para la solución de tales ecuaciones y tendrán características particulares dependiendo del - tipo de función, trascendente o polinomial, que se avoquen a -- resolver.

Para la solución de funciones trascendentes algunos de -- los métodos disponibles son: aproximaciones sucesivas, partición de intervalos, Newton-Raphson, Newton de segundo orden, Von --- Mises, etc.

Para la solución de funciones polinomiales:
Newton-Raphson, Newton de segundo orden, Lin-Bairstow, Graeffe.

De los métodos anteriores solo se tratará el de Newton--- Raphson para funciones trascendentes y el de Lin-Bairstow para funciones algebraicas.

4.2 Funciones Trascendentes

4.2.1 Objeto

Obtener la solución de funciones del tipo:

$$y = f(x) = 0 \qquad (4.1)$$

por el método de Newton Raphson.

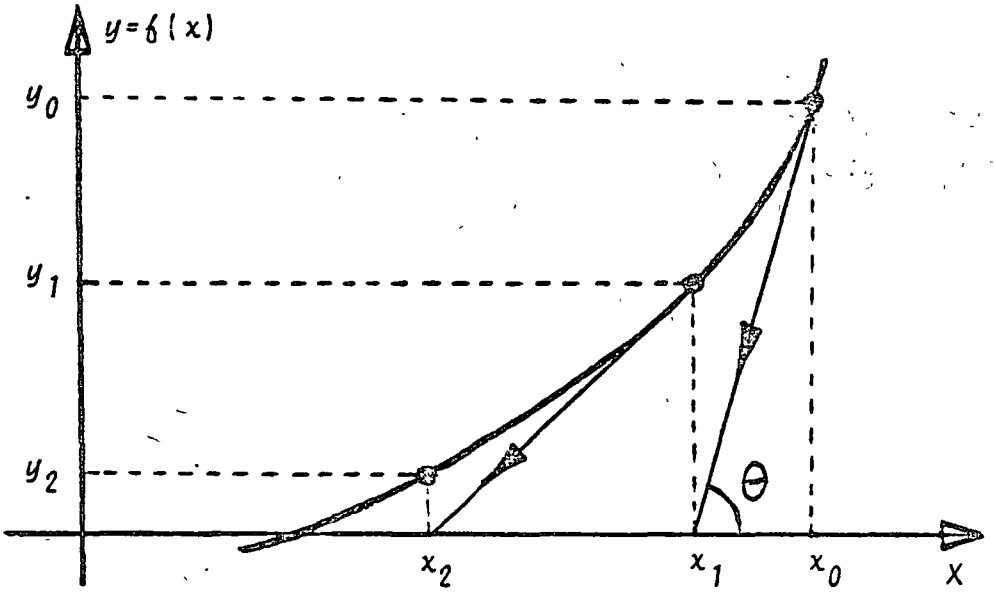
4.2.2 Método

Dada la curva correspondiente a $y=f(x)=0$ se requiere un punto inicial de arranque (x_0, y_0), a partir de dicho punto se traza una recta tangente a la curva y la intersección de la recta con el eje "x" dará la nueva solución aproximada (x_1, y_1); el método se repite sucesivamente hasta que:

$$\delta \begin{cases} |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ |y_n| < \delta \end{cases} \qquad (4.2)$$

donde ε y δ son arbitrariamente pequeñas.

Analíticamente se tendrá:



$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0} = tg\,\theta = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} \qquad (4.3)$$

por lo que:

$$(x_0 - x_1)\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x = x_0} = f(x_0) \qquad (4.4)$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad * \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \qquad (4.5)$$

* $f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$

para garantizar la convergencia del método se requiere:

- x_0 esté cercano a la raíz
- $f'(x_0)$ no debe ser muy próxima a cero
- $f''(x_0)$ no debe ser excesivamente grande

El método solo permite detectar las raíces reales de la función y ésta última debe ser continua y diferenciable en una vecindad de x.

4.2.3 Descripción del programa

a) Subrutinas requeridas:

Ninguna.

b) Descripción de las variables:

G(X)	función de la cual se desean obtener sus raíces
DERG(X)	derivada de la función G
EPS	criterio de convergencia
N	máximo número de iteraciones a efectuar
L	contador de iteraciones
XV	valor viejo de la aproximación de la raíz
XN	nueva aproximación de la raíz

c) Dimensiones:

No utiliza proposición DIMENSION

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC.TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5,2F10.0)	N,EPS,XV
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, cuando no se den nuevas condiciones de arranque.

e) Diagrama de bloques:

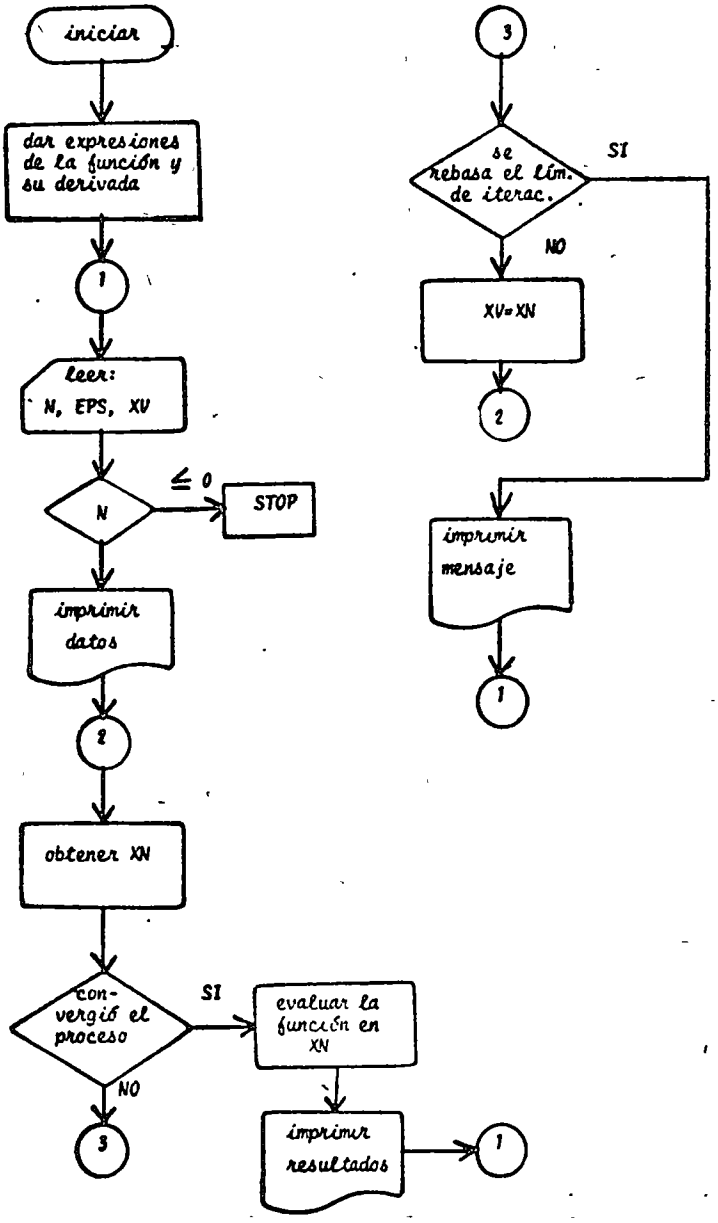


Fig. 4.1 Diagrama de bloques para el programa

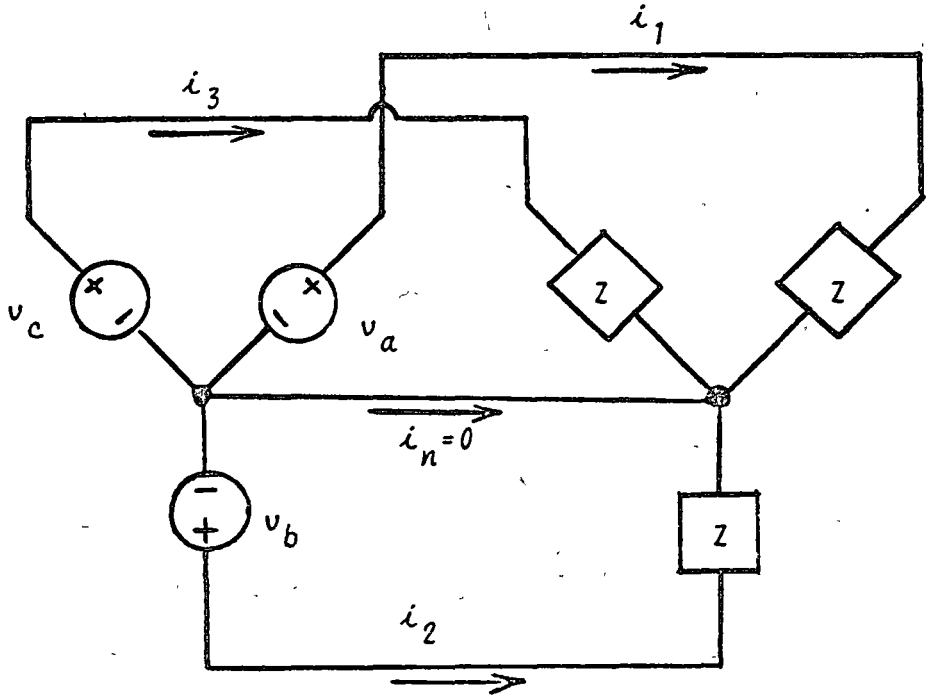
6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA CALCULAR LAS RAICES DE UNA ECUACION POR EL METODO DE
C     NEWTON-RAPHSON
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES :
C     G= FUNCION DE LA CUAL SE OBTENDRAN LAS RAICES.
C     DERG= DERIVADA DE G.
C     EPS= CRITERIO DE CONVERGENCIA.
C     N= ITERACIONES A EFECTUAR.
C     I= CONTADOR DE ITERACIONES.
C     XV= VALOR VIEJO DE LA RAIZ , ORIGINALMENTE ES EL VALOR DE ARRANQUE
C     XN= NUEVA APROXIMACION DE LA RAIZ.
C     FUNCION G Y SU DERIVADA
      G(X)=SIN(377.*X + 1.88146)
      DERG(x)=377.*COS(377.*x + 1.88146)
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,200) N,EPS,XV
      IF(N)2,2,3
    2 CALL EXIT
C     IMPRIMIR DATOS
    3 WRITE(6,220) N,EPS,XV
      DO 4 I=1,N
      XN=XV-G(XV)/DERG(XV)
      IF(ABS(XV-XN),LT.EPS) GO TO 5
      XV=XN
    4 CONTINUE
      XV=G(XV)
      WRITE(6,260) I,XN,XV
      GO TO 1
    5 XV=G(XV)
      WRITE(6,240) I,XN,XV
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  200 FORMAT(I5,2F10.0)
  220 FORMAT(1H1,5(/),10X,' MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES = ',I5,3(/),10X
     1,' CRITERIO DE CONVERGENCIA = ',1PE15.8,3(/),10X,' VALOR INICIAL
     2DE LA RAIZ = ',1PE15.8)
  240 FORMAT(10(/),10X,' ITERACIONES EFECTUADAS = ',I5,3(/),10X,' LA RAI
     1Z OBTENIDA = ',1PE15.8,3(/),10X,' VALOR DE LA FUNCION = ',1PE15.8)
  260 FORMAT(10(/),10X,' EL METODO NO CONVERGE ',3(/),10X,' NUMERO DE IT
     1ERACIONES EFECTUADAS = ',I5,3(/),10X,'ULTIMA APROXIMACION DE LA RA
     2IZ = ',1PE15.8,3(/),10X,' VALOR DE LA FUNCION = ',1PE15.8)
      END
```

Fig. 4.2 Listado del programa

4.2.4 Ejemplo

Para el sistema trifásico balanceado mostrado:



Determine un instante de tiempo para el cual $i_2(t) = 0$ si $Z = 5.6 + j1.8$ y $v_a(t) = 141.4\text{sen}(377t + 30°)$. Considerar secuencia de fase abc.

*SOLUCION

Por los datos se tiene: $v_b(t) = 141.4\text{sen}(377t - 90°)$ y del diagrama unifilar:

$$i_2(t) = 24\text{sen}(377t - 107.8°) \quad A$$

por lo que se requiere un valor de "t" tal que $\text{sen}(377t + 107.8°) = 0$

TABLA 4.1 Datos del problema del ejemplo 3.2.4

N = 500
EPS = 0.0000001
XV = 2.5
G(X) = sen (377X - 107.8°)
DERG(X) = 377cos (377X - 107.8°)

TABLA 4.2 Resultados del problema del ejemplo 3.2.4

MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES = 500

CRITERIO DE CONVERGENCIA = 1.00000000E-06

VALOR INICIAL DE LA RAIZ = 2.50000000E+00

ITERACIONES EFECTUADAS = 6

LA RAIZ OBTENIDA = 2.48826504E+00

VALOR DE LA FUNCION = 4.75867426E-09

4.3 Funciones polinomiales

4.3.1 Objeto

Resolver ecuaciones del tipo:

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = 0 \qquad (4.6)$$

mediante el método de Lin-Bairstow.

4.3.2 Método

El método de Lin-Bairstow permite obtener las raíces reales y complejas de un polinomio de grado "n" mediante su factorización en polinomios de segundo grado, dado que el teorema fundamental del álgebra afirma que todo polinomio se puede factorizar mediante binomios del tipo $(X - a)$ donde a es una raíz de $P(X)$, es decir:

$$P(X) = Q(X)\ (X - a) \qquad (4.7)$$

Para todo polinomio de grado "n" se cumple que:

a) tiene "n" raíces ya sea reales o complejas, únicas o repetidas
b) las raíces complejas siempre aparecen en pares conjugados
c) la regla de los signos de Descartes es aplicable al polinomio

A continuación se efectúa una breve descripción del método.

Dado el polinomio:

$$P(X) = X^n + A_1 X^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \qquad (4.8)$$

se descompone en la siguiente forma:

$$P(X) = (X^2 + pX + q)\ Q(X) + RX + S \qquad (4.9)$$

donde:

$$Q(X) = X^{n-2} + B_1 X^{n-3} + \ldots + B_{n-3} X + B_{n-2} \qquad (4.10)$$

Por un teorema del Algebra, el factor $(X^2 + px + q)$ será raíz de $P(X)$ solo si $R = 0 = S$, la última igualdad es el objetivo a cumplir.

Agrupando términos en (4.9) e igualando términos de igual potencia en (4.9) y (4.8) se tiene:

$$A_k = B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2} \quad , \quad k = 1, \ldots, n-2 \qquad (4.11)$$

$$A_{n-1} = R + pB_{n-2} + qB_{n-3} \qquad (4.12)$$

$$A_n = S + qB_{n-2} \qquad (4.13)$$

$$B_0 = 1$$

$$B_{-1} = 0$$

de las ecuaciones (4.12) y (4.13) se tiene:

$$R = A_{n-1} - pB_{n-2} - qB_{n-3} = B_{n-1} \qquad (4.14)$$

$$S = A_n - qB_{n-2} = B_n + pB_{n-1} \qquad (4.15)$$

de las ecuaciones (4.11) se obtiene B_i en función de p y q por lo que:

$$R = f_1 (p,q) = 0 \qquad (4.16)$$

$$S = f_2 (p,q) = 0 \qquad (4.17)$$

lo cual es un sistema de ecuaciones no lineales que se resuelve por el método de Newton Raphson para Δp y Δq dando valores iniciales de p y q:

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p \qquad (4.18)$$

$$q_{k+1} = q_k + \Delta q \qquad (4.19)$$

Dado un criterio de convergencia ε, la solución de (4.16) y (4.17) se tendrá cuando:

$$\left| p_{k+1} - p_k \right| < \varepsilon \qquad (4.20)$$

$$\left| q_{k+1} - q_k \right| < \varepsilon \qquad (4.21)$$

Al aplicar el método de Newton-Raphson a 4.16 y 4.17 se tendrá:

$$B_{n-1} + \frac{\partial B_{n-1}}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial B_{n-1}}{\partial q} \Delta q = 0 \qquad (4.22)$$

$$B_n + \left(\frac{\partial B_n}{\partial p} + B_{n-1}\right) \Delta p + \frac{\partial B_n}{\partial q} \Delta q = 0 \qquad (4.23)$$

de la ecuación (4.11)

$$\frac{\partial B_k}{\partial p} = - B_{k-1} - p \frac{\partial B_{k-1}}{\partial p} - q \frac{\partial B_{k-2}}{\partial p} \qquad (4.24)$$

$$\frac{\partial B_k}{\partial q} = - B_{k-2} - p \frac{\partial B_{k-1}}{\partial q} - q \frac{\partial B_{k-2}}{\partial q} \qquad (4.25)$$

$$\frac{\partial B_{-1}}{\partial p} = \frac{\partial B_{-1}}{\partial q} = \frac{\partial B_0}{\partial p} = \frac{\partial B_0}{\partial q} = 0 \qquad (4.26)$$

de 4.9 el polinomio $Q(X)$ puede factorizarse a su vez:

$$Q(X) = (X^2 + pX + q)(X^{n-4} + C_1 X^{n-5} + \ldots + C_{n-5} X + C_{n-4}) + R^* y + S^* \qquad (4.27)$$

desarrollando el mismo proceso se llega a:

$$\begin{aligned} C_k &= B_k - pC_{k-1} - qC_{k-2} \\ C_{-1} &= 0 \\ C_0 &= 1 \end{aligned} \qquad (4.28)$$

comparando 4.28 con 4.24:

$$\frac{\partial B_k}{\partial p} = - C_{k-1} \qquad (4.29)$$

$$\frac{\partial B_k}{\partial q} = - C_{k-2} \qquad (4.30)$$

sustituyendo 4.29 y 4.30 en 4.22 y 4.23:

$$C_{n-2} \Delta p + C_{n-3} \Delta q = B_{n-1} \qquad (4.31$$

$$- \left(\frac{\partial B_n}{\partial p} + B_{n-1}\right) \Delta p + C_{n-2} \Delta q = B_n \qquad (4.32)$$

haciendo $- \left(\frac{\partial B_n}{\partial p} + B_{n-1}\right) = \overline{C_{n-1}} = C_{n-1} - B_{n-1}$ (4.33)

se obtiene la expresión del sistema de ecuaciones no lineal:

$$C_{n-2} \Delta p + C_{n-3} \Delta q = B_{n-1} \qquad (4.34)$$

$$\overline{C_{n-1}} \Delta p + C_{n-2} \Delta q = B_n \qquad (4.35)$$

Los pasos a seguir en la computadora son:

(1) Dar valores iniciales de p y q.

(2) Evaluar B_k, $k = 1, \ldots, n$

(3) Evaluar C_k, $k = 1, \ldots, n-1$

(4) Evaluar $C_{n-1} = C_{n-1} - B_{n-1}$

(5) Resolver el sistema de ecuaciones (4.34) y (4.35)

(6) Obtener Δp y Δq por iteraciones hasta que $|\Delta p| < \varepsilon$ y $|\Delta q| < \varepsilon$

(7) Obtener los valores de p y q mediante:

$$p_k = p_{k-1} + \Delta p$$

$$q_k = q_{k-1} + \Delta q$$

(8) Con los valores obtenidos de p y q resolver el factor cuadrático

$$X^2 + pX + q$$

(9) Obtener el polinomio reducido y regresar a (1) hasta obtener todas las raíces.

Si los valores iniciales de p y q son cercanos a los valores verdaderos el método siempre converge.

Si los valores iniciales son aleatorios puede no haber convergencia por lo que se requiere dar un máximo número de iteraciones.

4.3.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE RIROO, esta subrutina obtiene las raíces del polinomio y en caso de no existir convergencia imprime las únicas raíces encontradas. El programa principal lee los coeficientes del polinomio e imprime resultados.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina RIROO:

A(I)	Coeficientes del polinomio
NC	grado del polinomio
EPS	criterio de convergencia para Δp y Δq
LMAX	máximo número de iteraciones
PZERO	valor inicial de p

QZERO	valor inicial de q
RTREA(I)	parte real de las raíces
RTIMA(I)	parte imaginaria de las raíces
NUM	parámetro que indica si se encontraron o no todas las raíces
L	contador de iteraciones
J	contador de raíces encontradas
M	decrementador del grado del polinomio
B(I)	coeficientes del polinomio de grado NC-2
C(I)	coeficientes del polinomio de grado NC-4
DELP	Δp
DELQ	Δq
P	p
Q	q
RADTR	discriminante de la ecuación cuadrática

Para el programa principal:

A(I)	coeficientes del polinomio
NC	grado del polinomio
EPS	criterio de convergencia
LMAX	máximo número de iteraciones
PZERO	valor inicial de p
QZERO	valor inicial de q
RTREA(I)	parte real de las raíces
RTIMA(I)	parte imaginaria de las raíces
NUM	parámetro que indica si se encontraron o no todas las raíces
CEREQ	criterio para determinar cuándo una raíz es nula

c) Dimensiones:

La proposición COMMON del programa principal y la subrutina, así como la proposición DIMENSION de la subrutina deberán modificarse si NC > 20

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I2)	NC
2	(8F10.0)	A; el coeficiente del término que da el grado
.		

	del polinomio debe ser - unitario y no se proporciona como dato, los --- otros coeficientes se dan a partir del coeficiente del término de grado NC-1
otros paquetes de datos (opcional)	
n	TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

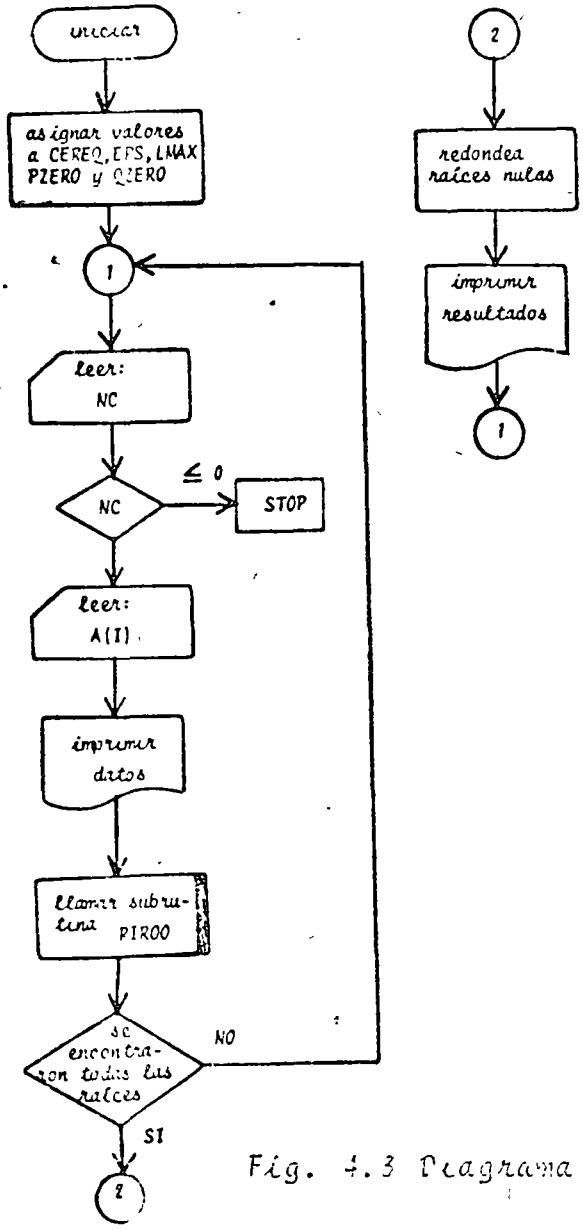


Fig. 4.3 Diagrama de bloques del programa princi

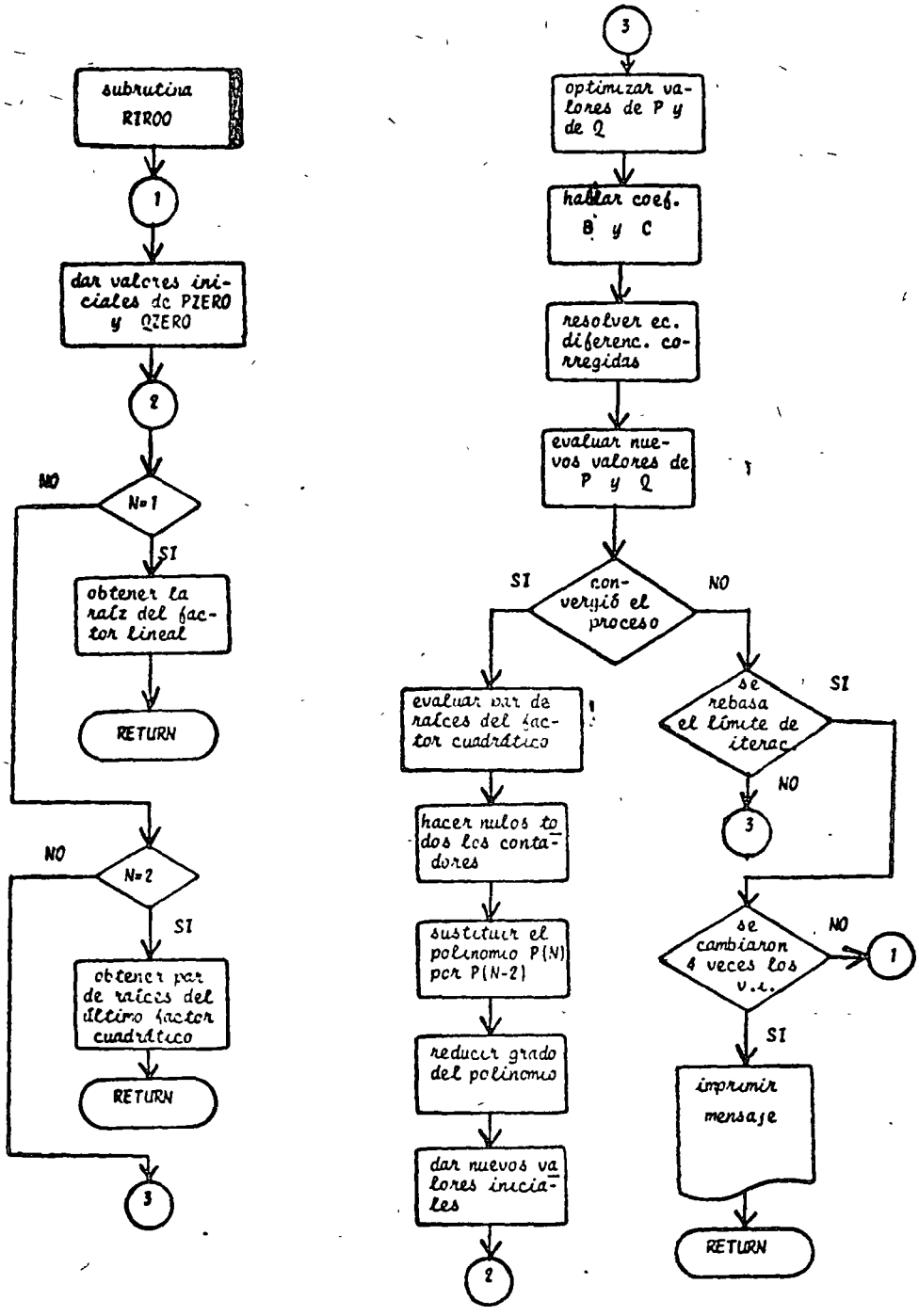


Fig. 4.4 Diagrama de bloques de la subrutina RIROO

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA OBTENER LAS RAICES DE UN POLINOMIO POR EL METODO
C     DE LIN-BAIRSTOW
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     A=COEFICIENTES DEL POLINOMIO
C     NC=GRADO DEL POLINOMIO
C     EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA
C     LMAX= MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES
C     PZERO=VALOR INICIAL DE P
C     QZERO=VALOR INICIAL DE Q
C     RTREA=PARTE REAL DE LAS RAICES
C     RTIMA=PARTE IMAGINARIA DE LAS RAICES
C     NUM=PARAMETRO QUE INDICA SI SE ENCONTRARON O NO TODAS LAS RAICES
C     CEREO=CRITERIO PARA DETERMINAR RAICES NULAS
      COMMON A(20),NC,EPS,LMAX,PZERO,QZERO,RTREA(20),RTIMA(20),NUM
      IR=5
      IW=6
      CEREO=0.0001
      EPS=0.0000001
      LMAX=250
      PZERO=0.
      QZERO=0.
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(IR,50) NC
      IF(NC) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 READ(IR,51) (A(I),I=1,NC)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(IW,52) NC
      WRITE(IW,53)
      WRITE(IW,54) (A(I),I=1,NC)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA OBTENER LAS RAICES
      CALL BIRSO
C     SE VERIFICA SI SE ENCONTRARON TODAS LAS RAICES
      IF(NUM-4) 4,4,1
C     RECORRIDO DE RAICES NULAS
    4 DO 9 I=1,NC
      IF(ABS(RTREA(I))-CEREO) 5,6,7
    5 RTREA(I)=0.0
    6 IF(ABS(RTIMA(I))-CEREO) 8,8,9
    8 RTIMA(I)=0.0
    9 CONTINUE
C     IMPRESION DE RESULTADOS
      WRITE(IW,55)
      DO 10 I=1,NC
   10 WRITE(IW,56) I,RTREA(I),RTIMA(I)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
   50 FORMAT(I2)
   51 FORMAT(8F10.0)
   52 FORMAT(4(/),5X,'EL GRADO DEL POLINOMIO ES ',I4)
   53 FORMAT(4(/),5X,'LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON',/)
   54 FORMAT(//,2X,'I.00',9(2X,E10.3))
   55 FORMAT(4(/),5X,'LAS RAICES DEL POLINOMIO SON',//,5X,'I',5X,'PARTE
     1REAL',10X,'PARTE IMAGINARIA',/)
   56 FORMAT(/,5X,I2,4X,E12.5,4X,E12.5)
      END
```

Fig. 4.5 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE BIRGO
C     SUBRUTINA PARA OBTENER RAICES DE POLINOMIOS POR EL METODO DE LIN-
C     BAIRSTOW
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     A=COEFICIENTES DEL POLINOMIO
C     NC=GRADO DEL POLINOMIO
C     EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA
C     LMAX=MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES
C     PZERO Y QZERO=VALORES INICIALES DE P Y DE Q
C     PTREA=PARTE REAL DE LAS RAICES
C     RTIMA=PARTE IMAGINARIA DE LAS RAICES
C     NUM=PARAMETRO QUE INDICA SI SE ENCONTRARON O NO TODAS LAS RAICES
C     J=CONTADOR DE RAICES ENCONTRADAS
C     P=P
C     Q=Q
C     DELP=INCREMENTO DE P
C     DELQ=INCREMENTO DE Q
C     B=COEFICIENTES DEL POLINOMIO DE GRADO NC-2
C     C=COEFICIENTES DEL POLINOMIO DE GRADO NC-4
      DIMENSION B(20),C(20)
      COMMON A(20),NC,EPS,LMAX,PZERO,QZERO,PTREA(20),RTIMA(20),NUM
      IM=6
      NUM=0
      M=0
      J=1
      GO TO 1
C     CAMBIO DE VALORES INICIALES PARA P Y Q
   25 PZERO=-2.0
      QZERO=2.0
      GO TO 1
   26 PZERO=2.0
      QZERO=-2.0
      GO TO 1
   27 PZERO=5.0
      QZERO=5.0
      GO TO 1
   28 PZERO=-5.0
      QZERO=-5.0
    1 P=PZERO
      Q=QZERO
      L=0
      N=NC+1
      IF(N-2) 2,3,7
C     CALCULAR LA RAIZ DEL FACTOR LINEAL SI LO HAY
    2 PTREA(J)=-A(1)
      RTIMA(J)=0.0
      GO TO 24
C     CALCULAR EL PAR DE RAICES CORRESPONDIENTES A LA ULTIMA ECUACION
C     CUADRATICA
    3 RADTR=A(1)*A(1) - 4.0*A(2)
      IF(RADTR) 4,5,6
    4 RAD=SQRT(-RADTR)
      PTREA(J)=-A(1)/2.0
      PTREA(J+1)=-A(1)/2.0
      RTIMA(J)=RAD/2.0
      RTIMA(J+1)=-RAD/2.0
      GO TO 24
    5 PTREA(J)=-A(1)/2.0
      PTREA(J+1)=-A(1)/2.0
      RTIMA(J)=0.0
      RTIMA(J+1)=0.0
      GO TO 24
    6 RAD=SQRT(RADTR)
      PTREA(J)=(-A(1) + RAD)/2.0
      PTREA(J+1)=(-A(1) - RAD)/2.0
      RTIMA(J)=0.0
      RTIMA(J+1)=0.0
      GO TO 24
```

```
C     PUNTO DE PARTIDA PARA LA OPTIMIZACION DE LOS VALORES DE P Y DE Q
C     OBTENCION DE LOS COEFICIENTES B Y C
      B(1)=A(1) + P
      B(2)=A(2) +P*B(1) + Q
      DO 8 K=3,N1
    8 B(K)=A(K) + P*B(K-1) + Q*B(K-2)
      N1=N+1
      C(1)=B(1) + P
      C(2)=B(2) + P*C(1) + Q
      C(3)=B(3) + P*C(2) + Q*C(1)
      IF(N.EQ.3) GO TO 91
      DO 9 K=3,N1
    9 C(K)=B(K) + P*C(K-1) + Q*C(K-2)
   91 CNB=C(N+1)-C(N+1)
C     SE RESUELVEN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CORREGIDAS
      IF(N.NE.3) GO TO 10
      DENOM=(C(N-2))**2 - C*B
      GO TO 11
   10 DENOM=(C(N-2))**2 - C*B*C(N-3)
   11 IF(DENOM.EQ.0.0) GO TO 14
      IF(N.NE.3) GO TO 12
      DELP=(B(N-1)*C(N-2) - B(N))/DENOM
      GO TO 13
   12 DELP=(B(N-1)*C(N-2) - B(N)*C(N-3))/DENOM
   13 DELQ=(B(N)*C(N-2) - B(N-1)*CNB)/DENOM
C     EVALUAR VALORES INCREMENTADOS DE P Y DE Q
      P=P + DELP
      Q=Q + DELQ
C     SE PRUEBA CONVERGENCIA
      IF(ABS(DELP).GT.EPS) GO TO 30
      IF(ABS(DELQ).LE.EPS) GO TO 18
C     REVISAR ITERACIONES EFECTUADAS
   30 IF(L.GT.LMAX) GO TO 14
      L=L+1
      GO TO 7
   14 NUM=NUM+1
      IF(NUM.GT.4) GO TO 15
      GO TO (25,26,27,28),NUM
   15 JM1=J-1
      IF(JM1.LE.0) GO TO 17
C     IMPRIMIR UNICAS RAICES ENCONTRADAS
      WRITE(IW,50)
      DO 16 K=1,JM1
   16 WRITE(IW,200) RTREA(K),RTIMA(K)
      GO TO 24
   17 WRITE(IW,150)
      GO TO 24
C     OBTENER PAR DE RAICES CORRESPONDIENTES AL FACTOR CUADRATICO
   18 RADTR=P*P + 4.0*Q
      IF(RADTR) 19,20,21
   19 RAD=SQRT(-RADTR)
      RTREA(J)=-P/2.0
      RTREA(J+1)=-P/2.0
      RTIMA(J)=RAD/2.0
      RTIMA(J+1)=-RAD/2.0
      GO TO 22
   20 RTREA(J)=-P/2.0
      RTREA(J+1)=-P/2.0
      RTIMA(J)=0.0
      RTIMA(J+1)=0.0
      GO TO 22
   21 RAD=SQRT(RADTR)
      RTREA(J)=(-P+RAD)/2.0
      RTREA(J+1)=(-P-RAD)/2.0
      RTIMA(J)=0.0
      RTIMA(J+1)=0.0
C     REDUCIR ORDEN DEL POLINOMIO Y CAMBIAR COEFICIENTES
   22 N=N-2
      J=J+2
      NUM=0
      PZERO=0.
      QZERO=0.
      DENOMC=2.*
      DO 23 K=1,NEW
   23 A(K)=B(K)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE IMPRESION
   50 FORMAT( 6(/),33X , 'NO SE ENCONTRO LA SOLUCION COMPLETA, LAS UNICA
     1S RAICES',/,33X,  'ENCONTRADAS DE LA ECUACION FUERON',///,41X,
     2'PARTE REAL',17X,  'PARTE IMAGINARIA')
  150 FORMAT(//,30X,  'NO SE ENCONTRARON LAS RAICES DE LA ECUACION')
  200 FORMAT(//,30X,E15.8,15X,E15.8)
   24 RETURN
      END
```

Fig. 4.6 Listado de la subrutina RIROO

4.3.4 Ejemplo

Para un sistema lineal e invariable con el tiempo la función de transferencia H(S) (relación entrada-salida en el dominio de la frecuencia) está dada por:

$$H(S) = \frac{S^3 + 6S^2 + 3S + 1}{S^5 + 8S^4 + 6S^3 + 3S^2 + 2S + 2} \quad *$$

Se sabe que las raíces del polinomio del denominador (polos del sistema) representan las frecuencias naturales del sistema. Determine dichas frecuencias naturales.

* SOLUCION

TABLA 4.3 Datos para el problema del ejemplo 4.3.4

$NC = 5$

$P(X) = X^5 + 8X^4 + 6X^3 + 3X^2 + 2X + 2$

TABLA 4.4 Resultados para el problema 4.3.4 empleando el programa de computadora.

EL GRADO DEL POLINOMIO ES 5

LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SON

1.00	.800E+01	.600E+01	.300E+01	.200E+01	.200E+01

LAS RAICES DEL POLINOMIO SON

I	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
1	.26355E+00	.60719E+00
2	.26355E+00	-.60719E+00
3	-.65247E+00	.45425E+00
4	-.65247E+00	-.45425E+00
5	-.72222E+01	0.

* $S = a + j\omega$

4.4 Bibliografía

1. CARNAHAN B., LUTHER H., WILKES J., "Applied Numerical Methods". New York: John Wiley and Sons Inc., 1969. pp. 141-209.
2. HAMMING Richard, "Numerical Methods for Scientists -- and Engineers". New York: Mc Graw Hill Book Co., -- 1962. pp. 351-359.
3. JAMES M., SMITH G., WOLFORD J., "Applied Numerical -- Methods for Digital Computation with FORTRAN". ---- Scranton Penn: International Textbook Co., 1967. pp. 127-183.
4. KUO S. Shan, "Computer Applications of Numerical ---- Methods". Reading Mass.: Addison Wesley Co., 1972. pp. 101-127, 400-404.
5. OLIVERA S. Antonio, "Apuntes de Métodos Numéricos". - México.: Facultad de Ingeniería, UNAM. 1972. pp. 3.1-3.44

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 5: INTERPOLACION

SEPTIEMBRE, 1977.

chapter 3

INTERPOLATION

3.1 INTRODUCTION

Interpolation lies at the heart of classical numerical analysis. There are two main reasons for this. The first is that in hand computation there is continual need to look up the value of a function in a table. In order to find the value of the function at nontabulated arguments, it is necessary to interpolate. Moreover, the highly accurate tables at small increments of the argument that we take for granted today are mostly of comparatively recent origin. Therefore, classical numerical analysts developed an extremely sophisticated group of interpolation methods. Today the need to interpolate arises comparatively seldom; for example, on digital computers we almost always generate directly the value of a function rather than interpolate in a table of values (see Chap. 7). And when the need to interpolate in a table does arise, the small increments in the arguments in most tables mean that quite simple techniques (e.g., linear or quadratic interpolation) will usually suffice. Thus, while every numerical analyst must know how to interpolate, he will seldom, if ever, have use for the more sophisticated interpolation techniques.

Why then commence the main body of this book with a chapter on interpolation? The answer to this question is provided by the second of the reasons mentioned at the beginning of this section. This is that interpolation formulas are the starting points in the derivations of many methods in other areas of numerical analysis. Almost all the classical methods of numerical differentiation, numerical quadrature, and numerical integration are directly derivable from interpolation formulas. While

modern numerical analysis does not rely so heavily on interpolation formulas in these areas, their importance and usefulness are still great, as we shall see in Chaps. 4 and 5. This then is ample motivation for treating interpolation at the outset of this book.

Because we are especially interested in digital computer applications, our approach to interpolation will differ substantially from that in most texts. In particular, we shall not emphasize interpolation formulas based on difference techniques since these are seldom used on computers. Nevertheless, we shall not ignore finite differences because of their great usefulness in hand computation and, even on digital computers, for certain applications (see Secs. 4.3 and 4.15-1).

Suppose we have a function $f(x)$ which is known (perhaps along with certain of its derivatives) at a set of points. These points will hereafter be called the *tabular* points because interpolation so often takes place in a table of functional values. The object of interpolation is to *estimate* values of the function at nontabular points and—at least—to *bound* the error between the estimated and true values. Our approach will be to approximate $f(x)$ by a function $y(x)$ which, at the tabular points, has the same values as $f(x)$ (and perhaps the given derivative values, if any). Thus in the language of the previous chapter, we shall be using exact approximations. In this chapter we shall consider only the case where $y(x)$ is a polynomial. In the last section of Chap. 6 we shall consider the case in which $y(x)$ is a linear combination of trigonometric functions.

In Sec. 2.2-1 the form of the general interpolation operator was given as

$$L[f(x)] = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} A_{ij}(x) f^{(i)}(a_j) \tag{3.1-1}$$

Except in Sec. 3.8 we shall be concerned only with the case $m = 0$, that is, we shall use only the functional values of $f(x)$. When $m = 0$ we replace $A_{0j}(x)$ by $-l_j(x)$ in order to conform to standard notation. Thus (3.1-1) becomes

$$L[f(x)] = f(x) - \sum_{j=1}^{n} l_j(x) f(a_j) \tag{3.1-2}$$

Our object is to determine the $l_j(x)$ so that

$$L[f(a_j)] = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.1-3}$$

independent of the function $f(x)$. In general, however, for nontabular points

$$L[f(x)] = E(x) \tag{3.1-4}$$

That is,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) f(a_j) + E(x) = y(x) + E(x) \tag{3.1-5}$$

where $y(x)$ is our approximation to $f(x)$, and $E(x)$ is the error in the approximation. In the notation of the previous chapter, the operator $\bar{L}[f(x)]$ is obtained by replacing $f(x)$ in (3.1-2) by its approximation

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) f(a_j) \tag{3.1-6}$$

In terms of $y(x)$ and $E(x)$ the requirement (3.1-3) becomes

$$E(a_j) = f(a_j) - y(a_j) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.1-7}$$

Our two aims then are to determine the $l_j(x)$ so that (3.1-7) is satisfied and to find a representation for $E(x)$ which will enable us to estimate or at least bound the error for values of $x \neq a_j$, $j = 1, \ldots, n$.

3.2 LAGRANGIAN INTERPOLATION

In this section we consider the case where there are no restrictions on the spacing of the tabular points. In Sec. 3.3 we shall then consider the case of equally spaced abscissas. Even in the general situation we consider here, however, the determination of the polynomials $l_j(x)$ is straightforward. Since we wish the error at the tabular points to be zero independent of $f(x)$, it follows using (3.1-5) that

$$l_j(a_k) = \delta_{jk} \qquad j, k = 1, \ldots, n \tag{3.2-1}$$

where δ_{jk} is the *Kronecker delta*.† Since $l_j(x)$ is to be a polynomial, this requires that it have a factor

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdots (x - a_n) \tag{3.2-2}$$

and since $l_j(a_j) = 1$ we may write

$$l_j(x) = \frac{(x - a_1) \cdots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdots (x - a_n)}{(a_j - a_1) \cdots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdots (a_j - a_n)} \tag{3.2-3}$$

Note that there are other possible polynomial representations of $l_j(x)$, but (3.2-3) is the only possible polynomial of degree $n - 1$ and no polynomial of lesser degree is possible (why?). It is notationally convenient to write

†$\delta_{jk} = 0$ unless $j = k$, in which case $\delta_{jk} = 1$.

$l_j(x)$ as

$$l_j(x) = \frac{p_n(x)}{(x - a_j)p_n'(a_j)} \qquad p_n'(a_j) = \left.\frac{dp_n}{dx}\right|_{x=a_j} \tag{3.2-4}$$

where

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \tag{3.2-5}$$

To find an expression for $E(x)$, we consider the function

$$F(z) = f(z) - y(z) - [f(x) - y(x)][p_n(z)/p_n(x)] \tag{3.2-6}$$

with $y(x)$ as in (3.1-6). The function $F(z)$ *as a function of* z has $n + 1$ zeros at the points $a_1, \ldots, a_n$ and x [assume for now that x in (3.2-6) is not one of the tabular points]. Therefore, by applying Rolle's theorem n times

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - y^{(n)}(z) - [f(x) - y(x)][n!/p_n(x)] \tag{3.2-7}$$

has at least one zero in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x. Calling this zero $z = \xi$ and noting that $y^{(n)}(z) = 0$ since $l_j(z)$ is a polynomial of degree $n - 1$, we have

$$0 = F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - [f(x) - y(x)][n!/p_n(x)] \tag{3.2-8}$$

from which, using (3.1-5), it follows that

$$E(x) = [p_n(x)/n!] f^{(n)}(\xi) \tag{3.2-9}$$

where ξ, which is an unknown function of x, lies in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x. Although x in (3.2-6) was restricted to be a nontabular point, $E(x)$, as given by (3.2-9), holds for both tabular and nontabular points (why?).

Equation (3.1-5) with the $l_j(x)$ given by (3.2-4) and $E(x)$ by (3.2-9) is called the *Lagrangian interpolation formula*. When $n = 2$, $y(x)$ is the familiar formula for linear interpolation [cf. (2.2-4)]

$$y(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} f(a_1) + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} f(a_2) \tag{3.2-10}$$

The polynomials $l_j(x)$ are called *Lagrangian interpolation polynomials*. Our derivation of the Lagrangian formula has been equivalent to finding that polynomial of degree $n - 1$ which passes through the points $[a_j, f(a_j)]$, $j = 1, \ldots, n$ {4}. Therefore, as we would expect, (3.2-9) indicates that this formula is *exact* [i.e., $E(x) = 0$ for all x] for polynomials of degree $n - 1$ or less. In general, an interpolation formula which is

exact for polynomials of degree r is said to have an *order of accuracy* r or to be of order r.

The use of the Lagrangian interpolation formula is straightforward. To estimate $f(x)$ at a nontabular point, we merely compute $y(x)$ as given by (3.1-6) using (3.2-4) and (3.2-5) to compute the polynomials $l_i(x)$. If we can estimate or bound the nth derivative of $f(x)$, then the error can be estimated or bounded using (3.2-9).

Example 3.1 Let $f(x) = \ln x$. Given the table of values

x:	40	50	70	80
$\ln x$:	−.916291	−.693147	−.356675	−.223144

estimate the value of ln 60.

With $a_1 = 40$, $a_2 = .50$, $a_3 = .70$, and $a_4 = .80$, we calculate from (3.2-4)

$$l_1(.60) = -\tfrac{1}{6} \qquad l_2(.60) = \tfrac{2}{3}$$
$$l_3(.60) = \tfrac{2}{3} \qquad l_4(.60) = -\tfrac{1}{6}$$

and from (3.1-5) we get the approximation

$$\ln .60 \approx -.509975$$

The true value is $\ln .60 = -.510826$. From (3.2-9) we get

$$E(.60) = \frac{p_4(.60)}{4!}\left(\frac{-6}{\xi^4}\right) = \frac{-.0004}{4}\frac{1}{\xi^4}$$

In the interval $(4, 8)$, $\frac{10^4}{4096} < \frac{1}{\xi^4} < \frac{10^4}{256}$ so that

$$\tfrac{1}{4096} < |E(.60)| < \tfrac{1}{256}$$

and indeed the difference between the approximate and true values lies within this error.

3.3 INTERPOLATION AT EQUAL INTERVALS

In most applications of interpolation, the tabular points are equally spaced. For this reason it is worthwhile to consider the simplifications of the Lagrangian formula that can be made in this case.

3.3-1 Lagrangian interpolation at equal intervals

Let the equal spacing be h so that

$$a_{j+1} - a_j = h \qquad j = 1, \ldots, n-1 \tag{3.3-1}$$

For reasons of symmetry and computational convenience, it is common to take n odd and let

$$x = a_r + hm \tag{3.3-2}$$

where $r = (n+1)/2$. Thus $m = 0$ corresponds to the center of the interval spanned by the tabular points. Using (3.3-2), $p_n(x)$ and $l_i(x)$ can be expressed as functions of m. In particular, from (3.2-3) it follows that $l_i(m)$ is independent of h and can thus be tabulated as a function of m. Using (3.3-2) the Lagrangian interpolation formula becomes, writing $f(a_r + hm)$ as $f(m)$,

$$f(m) = \sum_{j=1}^{n} l_j(m) f(a_j) + [h^n p_n(m)/n!]\, f^{(n)}(\xi) \tag{3.3-3}$$

where

$$p_n(m) = (m-r+1)(m-r+2) \cdots m(m+1) \cdots (m+r-1) \tag{3.3-4}$$

Table 3.1 is a short tabulation of the Lagrangian interpolation polynomials $l_i(m)$ for $n = 5$. Clearly, when m and n are such that the $l_i(m)$ are tabulated, the use of (3.3-3) is quite straightforward on a desk calculator. On a digital computer, it will seldom be convenient to store such a table but rather will be easier to generate the values of $l_i(m)$ using (3.2-4).

Table 3.1 Values of the Lagrangian interpolation polynomials for $n = 5$ $(x = a_r + hm)$

m	$l_1(m)$	$l_2(m)$	$l_3(m)$	$l_4(m)$	$l_5(m)$	
0	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	0
.2	.0144	−.1056	.9504	.1584	−.0176	−.2
.4	.0224	−.1536	.8064	.3584	−.0336	−.4
.6	.0224	−.1456	.5824	.5824	−.0416	−.6
.8	.0144	−.0896	.3024	.8064	−.0336	−.8
1.0	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	−1.0
1.2	−.0176	.1024	−.2816	1.1264	.0704	−1.2
1.4	−.0336	.1904	−.4896	1.1424	.1904	−1.4
1.6	−.0416	.2304	−.5616	.9984	.3744	−1.6
1.8	−.0336	.1824	−.4256	.6384	.6384	−1.8
2.0	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000	−2.0
	$l_6(m)$	$l_7(m)$	$l_8(m)$	$l_9(m)$	$l_{10}(m)$	m

Example 3.2 Using the same data as in Example 3.1 plus the true value of ln .60, estimate the value of ln .54.

We have $h = .1$, using Table 3.1 with $m = -.6$, we get from (3.3-3)

$$\ln .54 \approx -.0416 \ln .40 + .5824 \ln .50 + .5824 \ln .60 - .1456 \ln .70 + .0224 \ln .80 = -.616143$$

whereas the true value is $-.616186$.

When the values of $l_i(m)$ are not tabulated, then, for hand computa-

tion, instead of (3.3-3) it is preferable to use the finite-difference interpolation formulas which we shall discuss in Sec. 3.4. Before proceeding to discuss finite differences, however, we emphasize that *there is one and only one polynomial of degree* $n - 1$ *that takes on the values of* $f(x)$ *at the* n *tabular points* (why?). In what follows, we shall write interpolation formulas in a form very different from (3.1-5) or (3.3-3). But as long as these formulas involve polynomials passing through the same n tabular points, they will be identical to the Lagrangian interpolation formula.

3.3-2 Finite differences

In textbooks on classical numerical analysis, the calculus of finite differences and the interpolation, differentiation, and integration formulas based on it were always of central importance. This is because, for work on desk calculators, finite differences are a wonderfully convenient tool. Aside from their advantages for hand computation, there are certain special applications for which finite differences are invaluable (see Sec. 3.3-2-3). Also they are used extensively—although generally in a quite simple form—in the numerical solution of partial differential equations and boundary-value problems of ordinary differential equations on digital computers (see Sec. 4.3).

3.3-2-1 *Definitions*

As in Sec. 3.3-1 let the interval between successive tabular points be h. Then we define:

1. The kth *forward difference* of $f(x)$ as

$$\begin{aligned} \Delta^k f(x) &= \Delta^{k-1} f(x + h) - \Delta^{k-1} f(x) \quad k = 1, 2, \ldots \\ \Delta^0 f(x) &= f(x) \end{aligned} \tag{3.3-5}$$

Thus, for example,

$$\Delta^1 f(x) \equiv \Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \tag{3.3-6}$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) \tag{3.3-7}$$

In fact, it should be clear from this definition that any order difference can be written as a linear combination of functional values as in (3.3-6) and (3.3-7). The general form of this linear combination, whose derivation we leave to a problem [8], is

$$\Delta^j f(x) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} f(x + kh) \tag{3.3-8}$$

where the binomial coefficient $\binom{j}{k} = \dfrac{j!}{k!(j-k)!}$.

2. The kth *backward difference* as

$$\begin{aligned} \nabla^k f(x) &= \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x - h) \quad k = 1, 2, \ldots \\ \nabla^0 f(x) &= f(x) \end{aligned} \tag{3.3-9}$$

3. The kth *central difference* as

$$\begin{aligned} \delta^k f(x) &= \delta^{k-1} f(x + \tfrac{1}{2}h) - \delta^{k-1} f(x - \tfrac{1}{2}h) \quad k = 1, 2, \ldots \\ \delta^0 f(x) &= f(x) \end{aligned} \tag{3.3-10}$$

Note that if x is a tabular point then only even central differences involve tabular points (why?).

A property of differences that we shall have use for later is that the first difference of a polynomial of degree n is a polynomial of degree $n - 1$ [9]. Therefore, *the nth difference of a polynomial of degree* n *is a constant, and the* $(n + 1)$*st difference is identically zero.* The properties of finite differences and the formulas based upon them may be derived by operational calculus using the difference operators Δ, ∇, and δ; we leave a consideration of this approach to a problem [10].

3.3-2-2 *The lozenge diagram*

In the remainder of this section, we shall denote $\Delta^j f(a_i)$ by $\Delta^j f_i$ with a corresponding notation for backward and central differences. Furthermore, we shall change our previous notation slightly and let the tabular points have both positive and negative subscripts. When we calculate differences, it is convenient to set up a *difference table* as in Fig. 3.1 in

a_{-4}	f_{-4}		$\Delta^3 f_{-4}$		$\Delta^5 f_{-4}$	
		Δf_{-4}		$\Delta^4 f_{-3}$		$\Delta^6 f_{-4}$
a_{-3}	f_{-3}		$\Delta^3 f_{-3}$		$\Delta^5 f_{-3}$	
		Δf_{-3}		$\Delta^4 f_{-2}$		$\Delta^6 f_{-3}$
a_{-2}	f_{-2}		$\Delta^3 f_{-2}$		$\Delta^5 f_{-2}$	
		Δf_{-2}		$\Delta^4 f_{-1}$		$\Delta^6 f_{-2}$
a_{-1}	f_{-1}		$\Delta^3 f_{-1}$		$\Delta^5 f_{-1}$	
		Δf_{-1}		$\Delta^4 f_0$		$\Delta^6 f_{-1}$
a_0	f_0		$\Delta^3 f_0$		$\Delta^5 f_0$	
		Δf_0		$\Delta^4 f_1$		$\Delta^6 f_0$
a_1	f_1		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_1$	
		Δf_1		$\Delta^4 f_2$		$\Delta^6 f_1$
a_2	f_2		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_2$	
		Δf_2		$\Delta^4 f_3$		
a_3	f_3		$\Delta^3 f_3$			
		Δf_3				
a_4	f_4					

Fig. 3.1 Forward difference table.

which each entry after the second column is the difference of the two immediately to its left. The use of forward differences in the table is arbitrary; backward differences could just as easily have been used (but not central differences—why?).

Example 3.3 Using the data of Example 3.2 with one point added at either end, compute the difference table

The result is

x	$\ln x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
.30	−1.203973						
		287682					
40	− .916291		− 064538				
		.223144		023715			
.50	− .693147		− 040823		− .011062		
		.182321		.012653		005959	
60	− 510826		− 028170		− 005103		− .003534
		.154151		007550		002425	
70	− .356675		− 020620		− 002678		
		133531		.004872			
.80	− .223144		− 015748				
		117783					
.90	− .105361						

If to Fig. 3.1 we add connecting lines and binomial coefficients† as in Fig. 3.2, we can use this modified difference table called a *lozenge* or *Fraser diagram* to generate most of the interesting finite-difference interpolation formulas. To generate such an interpolation formula, we proceed as follows.

1. Start at an entry in the first (functional value) column and proceed along *any* path in the lozenge diagram (i.e., if a segment terminates on a difference, the path may be continued along any of the other three paths leading from the difference). End the path at any difference.
2. Then construct the formula by

   (i) writing down the functional value at which the path started and then

   (ii*a*) for every left to right segment in the path *add* a term consisting of the difference on which the segment *terminates* multiplied by the binomial coefficient directly *below* this difference, if the slope of the segment is positive, and directly *above*, if the slope of the segment is negative, and

† $(m+k)_n = \dfrac{(m+k)(m+k-1)\cdots(m+k-n+1)}{n!} = \binom{m+k}{n}$. In this section we let m be such that $x = a_0 + hm$ [cf. (3.3-2)].

   (ii*b*) for every right to left segment subtract a term consisting of the difference at which the segment *originates* multiplied by the binomial coefficient directly *below* this difference, if the slope of the segment is positive (i.e., if the segment goes downward and to the left), and directly *above*, if the slope is negative.

These rules imply that, if at a given difference we change direction from right to left to left to right, this difference does not appear in the interpolation formula. As an example of the opposite situation, the path

$$\begin{matrix} & & (m)_1 \\ \nwarrow & \nearrow & \\ & \Delta f_0 & \\ \swarrow & \searrow & \\ & & (m-1)_1 \end{matrix}$$

gives rise to the terms

$$(m-1)_1\,\Delta f_0 - (m)_1\,\Delta f_0$$

For example, starting at f_0, proceeding along lines sloping downward to the right and terminating with the nth difference, we get, writing

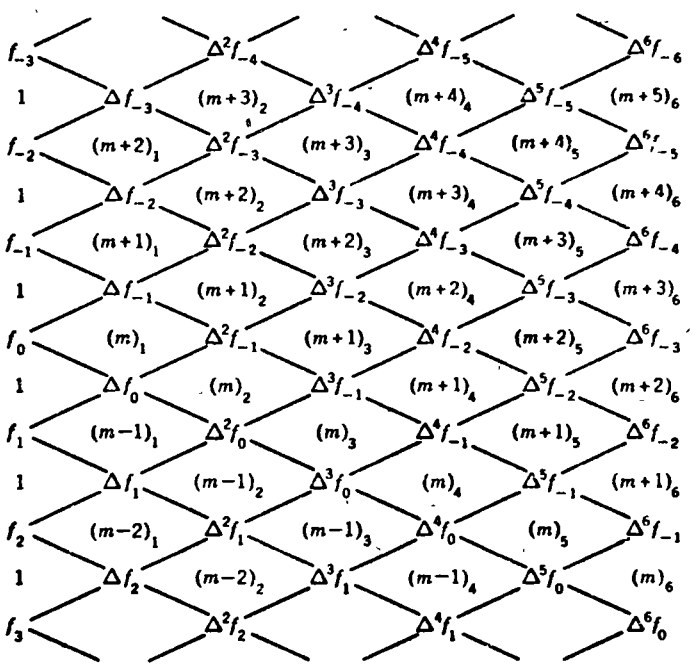


Fig. 3.2 The lozenge diagram.

$y(a_0 + hm)$ as $y(m)$,

$$y(m) = f_0 + (m)_1 \Delta f_0 + (m)_2 \Delta^2 f_0 + \cdots + (m)_n \Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (m)_j \Delta^j f_0 \qquad (3.3\text{-}11)$$

This formula is called *Newton's forward formula* and will be discussed in more detail in Sec. 3.4.

The value of the procedure outlined above is contained in the statement that any formula derived by this procedure which terminates with an nth difference is *algebraically equivalent* to an equal-interval Lagrangian formula which uses the tabular points involved in the terminating difference. [For example, the nth difference in (3.3-11) involves the points $a_0, \ldots, a_n$; see (3.3-8).] The proof of this assertion requires that we show that

1. At least one formula has this property. In Sec. 3.4 we shall prove that Newton's forward formula has the desired property.
2. All formulas which terminate with the same difference no matter by what path they reach that difference are algebraically equivalent. We leave the proof of this to a problem {11}.

3.3-2-3 *Error propagation in difference tables. Table checking*

Suppose one of the entries in the second column of Fig. 3.1 is in error by ϵ. We ask the question: How will this error propagate through the difference table? To answer this question, it is sufficient to consider the auxiliary table shown in Fig. 3.3 in which all functional values are zero except for a value of ϵ corresponding to that functional value in error (why is this sufficient?) Note the binomial-coefficient pattern in each column. This error-propagation pattern is the basis of the method to be described below for using differences to check the correctness of entries in a table.

f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0		0		0	
	0		0		ϵ
0		0		ϵ	
	0		ϵ		-5ϵ
0		ϵ		-4ϵ	
	ϵ		-3ϵ		10ϵ
ϵ		-2ϵ		6ϵ	
	$-\epsilon$		3ϵ		-10ϵ
0		ϵ		-4ϵ	
	0		$-\epsilon$		5ϵ
0		0		ϵ	
	0		0		$-\epsilon$
0		0		0	

Fig. 3.3 Error propagation in difference tables.

When a table of a mathematical function is compiled, it is clearly very important that every entry be correct (i.e., be correctly rounded). The rationale behind the method we are about to present is, first, that tabulated mathematical functions are locally smooth and, second, that generally some quite low order difference will be nearly zero. The latter is equivalent to saying that the coefficients of the Taylor-series expansion of the function are all small except for the first few (why?). We proceed as follows:

1. Difference the table. If, at any stage of the differencing, one group of values disrupts a smooth pattern (e.g., monotonicity), this probably indicates an error. Continue differencing until such a pattern appears or all differences are nearly zero (see remarks below on roundoff).
2. If a disrupting pattern is found and the deviation from smoothness follows the binomial-coefficient pattern of Fig. 3.3, then a single error has been detected and is easily corrected.
3. If the pattern is not binomial, then it may be that two or more errors are present and the patterns have overlapped. In this case some ingenuity is required to untangle the patterns; see {12}.

It is important to note that roundoff errors propagating through a table can also disrupt a difference pattern. The worst case of such propagation is shown in Fig. 3.4. Here ϵ is the magnitude of the maximum

f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
ϵ		-4ϵ		16ϵ	
	-2ϵ		8ϵ		-32ϵ
$-\epsilon$		4ϵ		-16ϵ	
	2ϵ		-8ϵ		32ϵ
ϵ		-4ϵ		16ϵ	
	-2ϵ		8ϵ		-32ϵ
$-\epsilon$		4ϵ		-16ϵ	
	2ϵ		-8ϵ		32ϵ
ϵ		-4ϵ		16ϵ	
	-2ϵ		8ϵ		-32ϵ
$-\epsilon$		4ϵ		-16ϵ	
	2ϵ		-8ϵ		32ϵ
ϵ		-4ϵ		16ϵ	

Fig. 3.4 Propagation of roundoff error.

roundoff error in the functional values. Then in the nth difference, the worst possible error is $2^n\epsilon$. In checking tables by differencing, it is important, therefore, to distinguish between irregularities in the difference pattern due to errors and those due to roundoff [13].

Example 3.4 Find the error in the difference table

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1	1			
		3		
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		−1
4	16		1	
		8		3
5	24		4	
		12		−3
6	36		1	
		13		1
7	49		2	
		15		0
8	64		2	
		17		
9	81			

A disrupting pattern is noticeable in the second difference and the binomial pattern stands out clearly in the third difference. Thus there is an error $\epsilon = -1$ in the entry for $x = 5$ which should, of course, be 25 since $f(x) = x^2$ for all the other entries

3.4 FINITE-DIFFERENCE INTERPOLATION FORMULAS

We prove first that Eq. (3.3-11), Newton's forward formula, is algebraically equivalent to the Lagrangian interpolation formula at equal intervals for the $n + 1$ points $a_0, \ldots, a_n$. Since $(m)_n$ is a polynomial of degree n in m, it is sufficient to prove that $y(i)$ in (3.3-11) equals f_i, $i = 0, \ldots, n$ for then $y(m)$ would be the unique polynomial of degree n passing through the $n + 1$ points f_i. Using (3.3-8) in (3.3-11), we get

$$y(i) = \sum_{j=0}^{n} (i)_j \Delta^j f_0 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} (i)_j \binom{j}{k} f_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} (i)_j \binom{j}{k} f_k \qquad i = 0, \ldots, n \qquad (3.4\text{-}1)$$

The coefficient of f_r in $y(i)$ is then given by

$$\sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r} (i)_j \binom{j}{r} \qquad (3.4\text{-}2)$$

For $r > i$ this coefficient is zero since $(i)_j = 0$ if $i < j$. When $r = i$, the only nonzero term in (3.4-2) is that for $j = r$ and equals 1. When $r < i$, (3.4-2) may be written

$$\sum_{j=r}^{i} (-1)^{j-r} \binom{i}{j} \binom{j}{r} \qquad (3.4\text{-}3)$$

which, by suitable manipulation [15], can be shown to vanish. Thus, the right-hand side of (3.4-1) is just f_i, which completes the proof.

Using the lozenge diagram, we may generate the following interpolation formulas:

1. *Newton's backward formula.* Starting at f_0 and proceeding along lines sloping upward and to the right, we get

$$y(m) = f_0 + m \Delta f_{-1} + (m + 1)_2 \Delta^2 f_{-2} + \cdots + (m + n - 1)_n \Delta^n f_{-n} \qquad (3.4\text{-}1)$$

which is equivalent to a Lagrangian formula using the points a_0, $a_{-1}, \ldots, a_{-n}$. This formula is, in fact, more conveniently expressed in terms of backward differences [16].

2. *Gauss's forward formula.* Here we proceed in a zigzag, downward and to the right, then upward and to the right, then downward and to the right, etc. The result is

$$y(m) = f_0 + m \Delta f_0 + (m)_2 \Delta^2 f_{-1} + (m + 1)_3 \Delta^3 f_{-1} + (m + 1)_4 \Delta^4 f_{-2} + \cdots \qquad (3.4\text{-}5)$$

If terminated with a difference of order $2r$, (3.4-5) is equivalent to a Lagrangian formula using the points $a_0, a_{\pm 1}, \ldots, a_{\pm r}$, but if terminated with the difference of order $2r + 1$, the point a_{r+1} must be added to the above.

3. *Gauss's backward formula.* Here we proceed as in Gauss's forward formula except that the first step is upward and to the right. The formula is

$$y(m) = f_0 + m \Delta f_{-1} + (m + 1)_2 \Delta^2 f_{-1} + (m + 1)_3 \Delta^3 f_{-2} + (m + 2)_4 \Delta^4 f_{-2} \cdots \qquad (3.4\text{-}6)$$

Both Gaussian formulas are conveniently expressed in terms of central differences [16].

Because of the result stated in Sec. 3.3-2-2, each of these formulas is

algebraically equivalent to the Lagrangian formula which uses the same tabular points. The errors in these formulas are given, therefore, by (3.2-9). In the next section we shall indicate why it is useful to be able to express the same interpolation formula in a number of different forms.

If we take the mean of Gauss's forward and backward formulas as given by (3.4-5) and (3.4-6), we get *Stirling's interpolation formula*

$$y(m) = f_0 + (m/2)(\Delta f_0 + \Delta f_{-1}) + \tfrac{1}{2}[(m)_2\,\Delta^2 f_{-1} + (m+1)_2\,\Delta^2 f_{-2}] + \cdots \quad (3.4\text{-}7)$$

Terminated with a difference of order $2r$, this formula is also equivalent to a Lagrangian formula since both Gaussian formulas use the points a_0, $a_{\pm 1}$, . . . , $a_{\pm r}$, but, if terminated with an odd difference (say, $2r+1$), this is no longer true because one Gaussian formula uses the above points plus a_{r+1} and the other uses a_{-r-1}. In the latter case Stirling's formula uses $2r+3$ points but has an accuracy of only order $2r+1$. Stirling's formula can be conveniently expressed in terms of central differences [16].

Bessel's interpolation formula is the mean of the Gaussian forward formula given by (3.4-5) and a Gaussian backward formula launched not from f_0 but from f_1. It has the form

$$y(m) = \tfrac{1}{2}(f_0 + f_1) + (m - \tfrac{1}{2})\,\Delta f_0 + \tfrac{1}{2}(m)_2(\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_1) + \cdots \quad (3.4\text{-}8)$$

Note that, when (3.4-6) is modified to consider launching from f_1, m must be replaced by $m-1$ so that the origin of m is still at a_0. Analogously to the case with Stirling's formula, Bessel's formula terminated with an *odd* difference is equivalent to a Lagrangian formula but terminated with an even difference it is not (why?). Bessel's formula is also conveniently written using central differences [16].

Some other interpolation formulas which can be obtained by manipulating the ones derived in this section are considered in a problem [17].

3.5 THE USE OF INTERPOLATION FORMULAS

With the exception of Stirling's formula terminated with an odd difference and Bessel's formula terminated with an even difference, all the interpolation formulas we have derived are algebraically equivalent over the same set of tabular points. For equally spaced data, the ease with which difference tables can be generated makes the finite-difference interpolation formulas more convenient than the Lagrangian formula for hand computation. To get some insight into which of the finite-difference formulas to use in a given application (why does it matter if they are all equivalent?), let us consider interpolation in a table of values.

One of the great advantages of the finite-difference interpolation formulas is the ease with which added terms of the formula may be used merely by calculating higher differences in the table of Fig. 3.1. For example, if we add the value of ln x at 1.0 to the table of Example 3.3, we may calculate a new row of differences and thereby get a difference of order 7 in the table. Commonly, we do not know a priori how many terms in a given interpolation formula will be sufficient to achieve the accuracy we desire. Therefore, we generally add terms to the formula by computing higher differences until the contribution of the added terms is so small that the number of decimal places of interest to us has stabilized. [If by use of (3.2-9) we can bound the error all well and good; often, however, it will be difficult to estimate, much less bound, the derivative term in (3.2-9).] It is desirable then to use that interpolation formula which gives the best results at every stage of the computation.

Consider the problem of estimating ln .65 using the data in the difference table of Example 3.3. Suppose that a priori we do not know how many differences will be required to obtain the accuracy we need †. If all the data in the table will be required to achieve the desired accuracy, then it makes no appreciable difference which finite-difference interpolation formula we use because all will be algebraically equivalent. But if it is possible that a sufficiently accurate result can be obtained using fewer than six differences, we should choose our interpolation formula with some care.

Let us compare the use of Newton's backward formula and Gauss's forward formula. If we may need to use all the data in the table, then the Newtonian formula must use $x_0 = .9$ (i.e., $m = -2.5$) and the Gaussian formula must use $x_0 = .6$ ($m = .5$). But while these two formulas will be algebraically equivalent if terms through the sixth difference are used, for smaller numbers of terms, they will not be equivalent [20]. Therefore, which should we choose?

This question is most easily answered by considering the error term (3.2-9). The only term in the error that we can control is the $p_n(x)$ term. To minimize the magnitude of $p_n(x)$, we should choose the tabular points so that the value of x at which we wish to interpolate is as near as possible to the center of the interval spanned by the tabular points (why?). Therefore, the answer to our question is that the Gaussian formula is to be preferred in the above example because, when the number of differences used is small, it more nearly satisfies the condition above than the Newtonian formula.

From the above it follows that Newton's backward formula has its chief value when we wish to interpolate near the end of a table, for in this

† For such a simple function as this, we could, of course, estimate the error using (3.2-9).

case there would not be a sufficient number of differences available for the Gaussian formula. For example, to estimate ln .85 using the data of Example 3.3, if we used Gauss's forward formula with $x_0 = .8$ then we could only use the terms through the second difference [21]. Similarly, Newton's forward formula is chiefly valuable near the beginning of a table. But, when there are a substantial number of tabular points available on either side of the interpolation point, a Gaussian formula is more desirable than either Newtonian formula. In particular, Stirling's formula (which is just the average of two Gaussian formulas) terminated with an even difference (so that it is equivalent to a Lagrangian formula) is useful when m can be chosen near zero; similarly, Bessel's formula terminated with an odd difference is useful when m is near $\frac{1}{2}$. The justification for these conclusions is considered in [21].

Example 3.5. Use Newton's backward formula with $x_0 = .9$ and Gauss's forward formula with $x_0 = .6$ to find an estimate of ln .65.

Using (3.4-4), (3.4-5), and the data of Example 3.3, we may construct the following table.

Number of differences used	Newton's backward formula ($m = -2.5$)	Gauss's forward formula ($m = .5$)
0	− .105361	− .510826
1	− .399819	− .433751
2	− .429346	− .430229
3	− .430869	− .430701
4	− .430762	− .430821
5	− .430791	− .430792
6	− .430774	− .430775

The true value is ln .65 = − .430783. As we expect, when the number of differences is small, the Gaussian formula is more accurate than the Newtonian formula, although both give the same value, except for roundoff, when all six differences are used. (Why is the Newtonian formula more accurate when four differences are used?) Using (3.2-9) we may verify that the error at every stage is within expected bounds [20].

The reader may well think that any desired degree of accuracy could be achieved merely by increasing the number of terms used in any interpolation formula (finite difference or Lagrangian).† In fact, interpolation series formed by letting the number of tabular points go to infinity are generally only asymptotically convergent; that is, as we add more points the error first decreases and then at some point starts to increase and grow without bound.† One reason for this eventual divergence of interpolation series is connected with the fact that the nth derivative of all but some entire functions (functions with no singularities in the complex plane) eventually grows without bound as n increases (see Sec. 4.11). Even for entire functions, however, the interpolation series may fail to converge [22]. We note that, in practice, the desired degree of accuracy in interpolation can almost always be achieved. That is, the asymptotic convergence is generally very good indeed.

† We ignore here the fact that the growth of roundoff error with higher differences limits the accuracy attainable with finite-difference interpolation formulas.

3.6 ITERATED INTERPOLATION

An important advantage of finite-difference interpolation formulas over the Lagrangian formula would seem to be the property of the former that enables a term to be added to them merely by adding one tabular point and computing an additional row of differences. As we demonstrated in Example 3.5, this enables us to generate a sequence of *interpolants* each one involving one more tabular point than the previous one. Therefore, the convergence of the interpolation procedure can be tested easily. But suppose, given the Lagrangian interpolation formula using n points, we wish to add one point to get higher accuracy. A look at (3.2-1) indicates that, even if we have saved the values of $p_n'(a_j), j = 1, \ldots, n$, each $l_j(x), j = 1, \ldots, n$ requires some recalculation, and we must also calculate $l_{n+1}(x)$. Our purpose in this section is to show how this seeming disadvantage of the Lagrangian formula can be overcome. We shall do this by using *iterated interpolation* in which a sequence of interpolants in the Lagrangian context is generated without the need for substantial recalculation of coefficients when going from n to $n + 1$ points.

Denote by $y_{n_1,\ldots,n_k}(x)$ the Lagrangian interpolation formula which uses the points $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ which we do not require to be equally spaced. Then in particular we may write

$$y_{1,2,\ldots,n}(x) = \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \begin{vmatrix} y_{1,2,\ldots,n-1}(x) & a_{n-1} - x \\ y_{1,2,\ldots,n-2,n}(x) & a_n - x \end{vmatrix} \tag{3.6-1}$$

This equation can be verified by noting that the right-hand side, which is a polynomial of degree $n - 1$, takes on the values $f(a_i)$ at the points a_i, $i = 1, \ldots, n$. Equation (3.6-1) then indicates how a Lagrangian formula of order n can be generated from lower-order formulas. By use of the following table, we may generalize the result of (3.6-1) to achieve our

† The classic example of this behavior is the very well-behaved function $f(x) = 1/(1 + x^2)$ which is considered by Steffensen (1950, pp. 35–38).

object [note that $y_i(x) = f(a_i)$]:

$$\begin{array}{llllll} a_1 & a_1 - x & y_1(x) & & & \\ a_2 & a_2 - x & y_2(x) & y_{1,2}(x) & & \\ a_3 & a_3 - x & y_3(x) & y_{1,3}(x) & y_{1,2,3}(x) & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_n & a_n - x & y_n(x) & y_{1,n}(x) & y_{1,2,n}(x) & \cdots \quad y_{1,2,3 \quad ,n}(x) \end{array} \tag{3.6-2}$$

The entries in each column of the table can be generated from the entries in the previous column by analogy with (3.6-1). For example

$$y_{1,2,n}(x) = \frac{1}{a_n - a_2} \begin{vmatrix} y_{1,2}(x) & a_2 - x \\ y_{1,n}(x) & a_n - x \end{vmatrix} \tag{3.6-3}$$

The entries on the diagonal in (3.6-2) are just what we were seeking. They form a sequence of Lagrangian interpolants each of which incorporates one more tabular point than the previous one. Further, since each entry in (3.6-2) is calculated using a formula analogous to (3.6-1), the process is easily mechanized. Iterated interpolation is, thus, well suited to digital-computer application and, for points not equally spaced, is also convenient for hand computation.

Example 3.6 Use iterated interpolation to calculate ln .54 using the data of Example 3.2.

Corresponding to the table (3.6-2), we get

a_i	$a_i - x$	$y_i(x)$				
.40	−.14	−.916291				
.50	−.04	−.693147	−.603889			
.60	.06	−.510826	−.632166	−.615320		
.70	.16	−.356675	−.655137	−.614139	−.616029	
.80	.26	−.223144	−.673690	−.613196	−.615957	−.616144

We are not bound to use the natural order of the points as above. Consider instead iterated interpolation using the ordering below

a_i	$a_i - x$	$y_i(x)$				
.50	−.04	−.693147				
.60	.06	−.510826	−.620219			
.40	−.14	−.916291	−.603889	−.615320		
.70	.16	−.356675	−.625853	−.616839	−.616029	
.80	.26	−.223144	−.630480	−.617141	−.615957	−.616144

The difference in the two final values from the result of Example 3.2 is the result of roundoff since the same five points were used in all computations. Note, however, that the first interpolant (−.620219) in the second calculation is substantially more accurate than that in the first calculation (−.603889). This occurs because in the second computation we arranged the data so that the magnitudes in the $(a_i - x)$ column would be increasing. In this way the value of $p_n(x)$ in the error term is minimized at every stage (cf. the discussion of Sec. 3.5). Therefore, if we order the tabular points so that the magnitudes in the $a_i - x$ column are increasing, then each interpolant tends to be the best possible ["tends" because the value of the derivative in the error *may* be greater when $p_n(x)$ is smaller]. In this way the convergence of the iteration can be judged by the difference in two successive interpolants or by the attainment of a certain number of decimal places) will tend to be most rapid. In this example only the first interpolant is improved because only the tabular point at .40 is out of the best possible order.

3.7 INVERSE INTERPOLATION

In Chap. 8 we shall be concerned with the solution of the general nonlinear equation $f(x) = 0$. One of our basic tools in the solution of this equation will be inverse interpolation, which we shall now consider briefly. The solution of $f(x) = 0$ is one example of the common numerical problem of finding the zero of a function. Another case where this occurs is in the numerical integration of an ordinary differential equation (see Chap. 5) when we would like to know that value of the independent variable for which the dependent variable (i.e., the solution of the differential equation) is zero. Inverse interpolation provides us with a straightforward and powerful way to find such zeros of functions.†

Let the function whose zero (or zeros) we wish to find be $y = f(x)$ and suppose it is tabulated at a series of points (which need not necessarily be equally spaced) so that we have

$$\begin{array}{lllll} x: & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y = f(x): & f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{array} \tag{3.7-1}$$

Now let us suppose that on the interval $[x_1, x_n]$, $f(x)$ satisfies the conditions of the inverse-function theorem [i.e., in particular that $f'(x) \neq 0$] so that we may write $x = g(y)$ where g is the function inverse to f. Therefore, finding the value of $g(0)$ is equivalent to finding a zero of $f(x)$. To estimate $g(0)$ we first write the table (3.7-1) as

$$\begin{array}{lllll} y: & f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ x = g(y): & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \tag{3.7-2}$$

Now in the context of interpolation let $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ be the tabular points of the independent variable y (not equally spaced in general) and let $x_1, \ldots, x_n$ be the functional values at these points. Then, if we use a Lagrangian interpolation formula to approximate $g(y)$ by a polynomial and then interpolate at the point $y = 0$, we get the desired approximation to $\alpha = g(0)$.

Example 3.7 Given the data

x:	1	2	3	4	5
$f(x)$:	.70010	.40160	.10810	−.17440	−.43750

find an approximate value of the zero of $f(x)$ between .3 and .4.

† We note in passing that even the Newton-Raphson method for the solution of $f(x) = 0$ can be considered to be an application of inverse interpolation; see Chap. 8.

Our approach will be to use iterated interpolation. We therefore first arrange the data in order of increasing magnitude of $f(x)$ (cf. Example 3.6) and then use the technique of the previous section to generate the table

$f(x_i)$	$f(x_i) - 0$	x_i				
.10810	10810	3				
−.17440	−.17440	4	.33827			
.40160	.40160	2	.33683	.33783		
−.43750	−.43750	5	.33963	.33737	.33761	
.70010	.70010	1	.33652	.33792	.33771	.33765

The data for $f(x)$ are in fact values of the function $x^4 - 3x + 1$, which has a zero .33767 correctly rounded to five places.

Expressed in terms of $g(y)$ the error in inverse Lagrangian interpolation is

$$E(y) = [p_n(\eta)/n!]g^{(n)}(\xi) \tag{3.7-3}$$

Now derivatives of g can be expressed in terms of f, and although this relation is not simple (see [1], Chap. 8), there is a power of $f'(x)$ in the denominator of each derivative of $g(y)$; e.g.,

$$g'(y) = 1/f'(x) \qquad g''(y) = -f''(x)/[f'(x)]^3$$

Therefore, although we can carry through the process of inverse interpolation even if $f'(x)$ vanishes in $[x_1, x_n]$, we would expect the accuracy to be very poor in this case. When $f'(x)$ vanishes near the zero we can, however, often find the zero by an iterative process involving linear inverse interpolation [30].

3.8 HERMITE INTERPOLATION

In this section we consider the case $m = 1$ in (3.1-1). In particular, we suppose that the first derivative as well as the function is known at r of the n tabular points. In place of (3.1-5) we have then

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x)f(a_j) + \sum_{j=1}^{r} \bar{h}_j(x)f'(a_j) + E(x) = y(x) + E(x) \tag{3.8-1}$$

where now the approximation $y(x)$ is given by

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x)f(a_j) + \sum_{j=1}^{r} \bar{h}_j(x)f'(a_j) \tag{3.8-2}$$

and $h_j(x)$ and $\bar{h}_j(x)$ are both polynomials. Again using the criterion of exact approximation, we require that the error term $E(x)$ be such that

$$\begin{aligned} E(a_j) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, n \\ E'(a_j) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.8-3}$$

In analogy with Eq. (3.2-1) in the Lagrangian case, this leads to the following conditions that must be satisfied by the $h_j(x)$ and $\bar{h}_j(x)$

$$\begin{aligned} h_j(a_k) &= \delta_{jk} \qquad j, k = 1, \ldots, n \\ \bar{h}_j(a_k) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, n \\ h'_j(a_k) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r \\ \bar{h}'_j(a_k) &= \delta_{jk} \qquad j, k = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.8-4}$$

Since there are $n + r$ conditions to satisfy in (3.8-3), we expect that $y(x)$ will have to be a polynomial of degree $n + r - 1$ [i.e., we shall approximate $f(x)$ by a polynomial of degree $n + r - 1$ passing through $f(a_j)$, $j = 1, \ldots, n$ and having derivatives $f'(a_j)$, $j = 1, \ldots, r$]. In deriving the $h_j(x)$ and $\bar{h}_j(x)$, we shall use the notation

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - a_1) \cdots (x - a_n) \\ p_r(x) &= (x - a_1) \cdots (x - a_r) \\ l_{jn}(x) &= \frac{p_n(x)}{(x - a_j)p'_n(a_j)} \qquad j = 1, \ldots, n \\ l_{jr}(x) &= \frac{p_r(x)}{(x - a_j)p'_r(a_j)} \qquad j = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.8-5}$$

To satisfy the conditions on $h_j(x)$, we set

$$h_j(x) = \begin{cases} t_j(x)l_{jn}(x)l_{jr}(x) & j = 1, \ldots, r \\ l_{jn}(x)[p_r(x)/p_r(a_j)] & j = r + 1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.8-6}$$

where $t_j(x)$ is a linear polynomial so that $h_j(x)$ is of degree $n + r - 1$. As given by (3.8-6), $h_j(x)$ satisfies all the conditions of (3.8-4) except $h_j(a_j) = 1$, $j = 1, \ldots, r$ and $h'_j(a_j) = 0$, $j = 1, \ldots, r$. To satisfy these we must have

$$\begin{aligned} t_j(a_j) &= 1 \qquad\qquad\qquad j = 1, \ldots, r \\ t'_j(a_j) + l'_{jn}(a_j) + l'_{jr}(a_j) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.8-7}$$

Similarly, if we set

$$\bar{h}_j(x) = s_j(x)l_{jr}(x)l_{jn}(x) \qquad j = 1, \ldots, r \tag{3.8-8}$$

with $s_j(x)$ a linear polynomial we must have

$$\begin{aligned} s_j(a_j) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, r \\ s'_j(a_j) &= 1 \qquad j = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{3.8-9}$$

in order to satisfy (3.8-4). Linear functions satisfying (3.8-7) and (3.8-9) are easily found to be [31]

$$t_j(x) = 1 - (x - a_j)[l'_{jn}(a_j) + l'_{jr}(a_j)] \qquad s_j(x) = x - a_j \tag{3.8-10}$$

This completes the determination of $h_j(x)$ and $\bar{h}_j(x)$.

To find $E(x)$ we proceed in a manner similar to the Lagrangian case. Let

$$F(z) = f(z) - y(z) - [f(x) - y(x)]\frac{p_n(z)p_r(z)}{p_n(x)p_r(x)} \qquad (3.8\text{-}11)$$

with x not one of the tabular points. This function has $n + r + 1$ zeros (double zeros at $a_1, \ldots, a_r$, single zeros at $a_{r+1}, \ldots, a_n$ and x) so that by a generalization of Rolle's theorem [36], there exists a ξ in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x such that

$$0 = F^{(n+r)}(\xi) = f^{(n+r)}(\xi) - [f(x) - y(x)]\frac{(n+r)!}{p_n(x)p_r(x)} \qquad (3.8\text{-}12)$$

Thus

$$E(x) = \frac{p_n(x)p_r(x)}{(n+r)!}f^{(n+r)}(\xi) \qquad (3.8\text{-}13)$$

This relation also is correct if x is one of the tabular points (why?).

The interpolation formula (3.8-1) then becomes

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x)f(a_j) + \sum_{j=1}^{r} \bar{h}_j(x)f'(a_j) + \frac{p_n(x)p_r(x)}{(n+r)!}f^{(n+r)}(\xi) \qquad (3.8\text{-}14)$$

with

$$h_j(x) = \begin{cases} \{1 - (x - a_j)[l'_{jn}(a_j) + l'_{jr}(a_j)]\}l_{jn}(x)l_{jr}(x) \\ \qquad\qquad j = 1, \ldots, r \\ l_{jn}(x)[p_r(x)/p_r(a_j)] \qquad j = r+1, \ldots, n \end{cases} \qquad (3.8\text{-}15)$$

$$\bar{h}_j(x) = (x - a_j)l_{jr}(x)l_{jn}(x) \qquad j = 1, \ldots, r \qquad (3.8\text{-}16)$$

and is called the *modified Hermite interpolation formula*. When $r = n$ the formula is

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x)f(a_j) + \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_j(x)f'(a_j) + \frac{p_n^2(x)}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi) \qquad (3.8\text{-}17)$$

with

$$\begin{aligned} h_j(x) &= [1 - 2(x - a_j)l'_j(a_j)]l_j^2(x) \\ \bar{h}_j(x) &= (x - a_j)l_j^2(x) \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (3.8\text{-}18)$$

where we have replaced $l_{jn}(x)$ by $l_j(x)$. Equation (3.8-17) is the *Hermite interpolation formula*, sometimes also called the formula for osculatory interpolation.

Both the Hermite and modified Hermite formulas can be useful interpolation formulas. They also serve as useful theoretical tools in other areas of numerical analysis, as we shall see in Chaps. 4, 5, and 8.

Example 3.8 Given the table below of the natural logarithm and its derivative

x	$\ln x$	$1/x$
.40	−.916291	2.50
.50	−.693147	2.00
.70	−.356675	1.43
.80	−.223144	1.25

estimate the value of ln .60 using the Hermite interpolation formula.

From (3.8-18) we get

$$\begin{aligned} h_1(.60) &= 11/4 & \bar{h}_1(.60) &= 1/180 \\ h_2(.60) &= 8/7 & \bar{h}_2(.60) &= 2/45 \\ h_3(.60) &= 8/7 & \bar{h}_3(.60) &= -2/45 \\ h_4(.60) &= -11/4 & \bar{h}_4(.60) &= -1/180 \end{aligned}$$

and from (3.8-17)

$$\ln .60 \approx -.510824$$

whereas the true value is −.510826. Using (3.8-13) the error is bounded by

$$-.000031 \approx \frac{-1}{32768} < E(.60) < -\frac{1}{2^{23}} \approx -.0000001$$

so that the excellent agreement between the interpolated and true values is to be expected.

3.9 GENERAL POLYNOMIAL INTERPOLATION. THE DETERMINANT APPROACH

In the Lagrangian interpolation formula, $y(x)$ was required to be a polynomial of degree less than n with the property that $y(a_i) = f(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$. This can be expressed by writing

$$y(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \qquad (3.9\text{-}1)$$

and

$$f(a_i) = c_0 + c_1a_i + \cdots + c_{n-1}a_i^{n-1} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (3.9\text{-}2)$$

In (3.9-2) we have a system of n equations for the n c_i's. If we solve this system for each c_i using Cramer's rule and substitute the result into (3.9-1), we may write (3.9-1) in the determinantal form [33]

$$\begin{vmatrix} y(x) & 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ f(a_1) & 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(a_n) & 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.9\text{-}3)$$

The correctness of (3.9-3) is easily verified by noting that $y(x)$ is certainly a polynomial of degree $n - 1$ which vanishes at the points a_i, $i = 1, \ldots,$

n. In a similar fashion [33], we may show that the equation for $y(\tau)$ in the modified Hermite interpolation formula may be written

$$\begin{vmatrix} y(\tau) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+r-1} \\ f(a_1) & 1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1^{n+r-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(a_n) & 1 & a_n & \cdots & \cdots & a_n^{n+r-1} \\ f'(a_1) & 0 & 1 & 2a_1 & \cdots & (n+r-1)a_1^{n+r-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'(a_r) & 0 & 1 & 2a_r & \cdots & (n+r-1)a_r^{n+r-2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.9\text{-}4)$$

Now let us consider the general problem of deriving an interpolation formula using the operator (3.1-1) with the property that at the tabular point a_i the approximation $y(x)$ and its first r_i derivatives agree with $f(x)$ and its first r_i derivatives. The determinantal equation for $y(x)$ is then [33]

$$\begin{vmatrix} y(x) & 1 & x & \cdots & x^{r_1} & \cdots & x^{r_n} & \cdots & x^\beta \\ f(a_1) & 1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1^\beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^{(r_1)}(a_1) & 0 & \cdots & \cdots & (r_1)! & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\beta!}{(\beta-r_1)!}a_1^{\beta-r_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(a_n) & 1 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n^\beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^{(r_n)}(a_n) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (r_n)! & \cdots & \frac{\beta!}{(\beta-r_n)!}a_n^{\beta-r_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.9\text{-}5)$$

where $\beta = n - 1 + \sum_{i=1}^{n} r_i$. It is easy to see that (3.9-3) and (3.9-4) are special cases of (3.9-5). However, before we can assert that (3.9-5) defines a valid interpolation polynomial $y(x)$, we must show not only that $y(x)$ and its derivatives have the desired values at the tabular points but also that the minor of y in (3.9-5) does not vanish identically, for in this case there would be no formula. In the case of (3.9-3) and (3.9-4) our derivations of the Lagrangian and Hermite formulas are assurance of this. Thus it should be no surprise that, in the general case (3.9-5), it can be proved that, independent of the tabular points, the minor of y does not vanish identically; we leave the proof to a problem [35].

The interpolation polynomials [i.e., the coefficients of $f^{(r_i)}(a_i)$] for this general case may be derived by techniques similar to those used in the Lagrangian and Hermite cases, but of particular interest to us here is the form of the error term since we shall have use for this in Sec. 8.5-1. As we would expect, (3.9-5) is exact for polynomials of degree β or less. Therefore, by analogy with (3.2-9) and (3.8-13) the error is given by [36]

$$E(x) = \frac{f^{(\beta+1)}(\xi)}{(\beta+1)!}\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)^{r_j+1} \qquad (3.9\text{-}6)$$

When all the r_j are equal, Eq. (3.9-5) is called the formula for hyperosculatory interpolation.

For the still more general case in which there may be gaps in the sequence of derivatives prescribed at a point (e.g., the function and its second derivative but not its first derivative may be specified at a point), a determinantal equation analogous to (3.9-5) may still be written down [37], but it may now be true that for some choices of tabular points the minor of y vanishes identically [37].

3.10 OTHER METHODS OF INTERPOLATION. EXTRAPOLATION

In interpolation, as in all branches of numerical analysis, there will be special cases in which methods superior to the general ones derived in this chapter can be derived and used without an unreasonable expenditure of effort. One example of this is the case of periodic functions in which methods based on Fourier-series approximations may be preferable to the polynomial approximations of this chapter; for more on this, see Sec. 6.8-1. In fact, whenever the function to be interpolated is known to have a special functional character, an approximation based on this known functional character may be desirable [38]. Of course, on a digital computer, if we use functions other than polynomials, these functions themselves must be evaluated using polynomial or rational approximations.

Although we are restricting ourselves in this book to functions of a single variable, interpolation of functions of two or more variables can often be effected by a sequence of interpolations using the formulas of this chapter [39].

This chapter is entitled Interpolation, but it has been equally about extrapolation. As their definition in Sec. 2.2-1 makes clear, interpolation and extrapolation are two aspects of the same type of procedure. Of the two, interpolation is much more common than extrapolation. The reason for this is straightforward and practical. We argued in Sec. 3.5 that $p_n(x)$ is minimized when x is as nearly as possible in the center of the interval spanned by the tabular points. Conversely, as x moves *outside* the interval spanned by the tabular points—as is the case in extrapolation—the factors $x - a_i$ in $p_n(x)$ grow, and therefore, the error tends to grow also. Thus extrapolation is inherently a more inaccurate process than interpolation and must therefore always be used with extreme caution.

When extrapolation must be used in some form (see, for example, Chap. 5) then the value of x should be restricted to be as near as possible to the interval spanned by the tabular points

BIBLIOGRAPHIC NOTES

3.1–3.5 The topics covered in these sections will be found in virtually any textbook on numerical analysis. In particular, excellent discussions of interpolation may be found in Hildebrand (1956), Kopal (1955), and Kuntzmann (1959). The orientation in these books as well as in most other numerical analysis texts is much more toward difference and divided-difference techniques [25] than in this book. An excellent though somewhat older reference to classical interpolation techniques is Steffensen (1950). Hartree (1958) and Whittaker and Robinson (1948) contain a number of practical hints for special situations.

The coefficients of both the Lagrangian and finite-difference interpolation formulas have been extensively tabulated. A bibliography of these tables may be found in Fletcher, Miller, and Rosenhead (1962).

The error term in the Lagrangian formula is discussed in a more general context in Milne (1949). The derivation of the error term used here may also be found in Scarborough (1962). For another approach, see Hildebrand (1956) or Kopal (1955).

Our discussion of the lozenge diagram follows closely that of Hamming (1962); see also Kopal (1955). A thorough discussion of the use of differences in detecting errors in tables is given by Miller (1950). The use of difference methods in the construction of mathematical tables is considered by Fox (1957b), see also Fox (1957a).

The operational techniques introduced in Prob. 16 are further considered in the problems after the next chapter. A thorough discussion of these techniques may be found in Hildebrand (1956).

3.6 The basic references on iterated interpolation are the papers by Aitken (1932) and Neville (1934).

3.7 Inverse interpolation will be considered in much greater detail in Chap. 8; for tables of coefficients for particular cases of inverse interpolation using differences see Salzer (1943, 1944, 1945).

3.8–3.10 Hermite interpolation is discussed in many texts [e.g., Hildebrand (1956), Kopal (1955)]. The convergence of interpolation series [22] is considered by Erdos and Turan (1937). A detailed discussion of interpolation in several variables is given by Steffensen (1950); see also Pearson (1920).

BIBLIOGRAPHY

Aitken, A. C. (1932): On Interpolation by Iteration of Proportional Parts, without the Use of Differences, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, vol. 3, series 2, pp. 56–76.

Erdos, P., and P. Turan (1937): On Interpolation, I, *Ann. of Math.*, vol. 38, pp. 142–155.

Fletcher, A., J. C. P. Miller, and L. Rosenhead (1962): *An Index of Mathematical Tables*, 2d ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass.

Fox, L. (1957a): Minimax Methods in Table Construction in *On Numerical Approximation* (R. E. Langer, ed.), The University of Wisconsin Press, Madison, Wis.

Fox, L. (1957b): *The Use and Construction of Mathematical Tables*, vol. 1, Text [illegible] Physical Laboratory Mathematical Tables Series, London.

Hamming, R. W. (1962): *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York.

Hartree, D. R. (1958): *Numerical Analysis*, Oxford University Press, Fair Lawn, N.J.

Hildebrand, F. B. (1956): *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York.

Kopal, Z. (1955): *Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Kuntzmann, J. (1959): *Méthodes numériques, Interpolation—dérivées*, Dunod, Paris.

Miller, J. C. P. (1950): Checking by Differences, *MTAC*, vol. 4, pp. 3–11.

Milne, W. E. (1949): The Remainder in Linear Methods of Approximation, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, vol. 43, pp. 501–511.

Neville, E. H. (1934): Iterative Interpolation, *J. Indian Math. Soc.*, vol. 20, pp. 87–120.

Pearson, K. (1920): *On the Construction of Tables and on Interpolation*, II, *Bivariate Interpolation*, University of London, Tracts for Computers III, Cambridge University Press, New York.

Salzer, H. E. (1943): Tables of Coefficients for Inverse Interpolation with Central Differences, *J. Math. and Phys.*, vol. 22, pp. 210–224.

Salzer, H. E. (1944): Tables of Coefficients for Inverse Interpolation with Advancing Differences, *J. Math. and Phys.*, vol. 23, pp. 75–102.

Salzer, H. E. (1945): Inverse Interpolation for Eight, Nine, Ten and Eleven Point Direct Interpolation, *J. Math. and Phys.*, vol. 24, pp. 106–108.

Scarborough, J. B. (1962): *Numerical Mathematical Analysis*, 5th ed., The Johns Hopkins Press, Baltimore.

Steffensen, J. F. (1950): *Interpolation*, Chelsea Publishing Company, New York.

Whittaker, E. T., and W. Robinson (1948): *The Calculus of Observations*, 4th ed., Blackie & Son, Ltd., Glasgow.

PROBLEMS

Section 3.2

1. (*a*) Assuming that the derivatives at x_1 can be calculated, discuss the relative accuracy of an interpolation formula based on the operator derived in Prob. 16, Chap. 2 with $N = n$ and an n-point Lagrangian interpolation formula.

(*b*) Use this interpolation formula with $n = 4$ and $x_1 = .50$ to approximate $\ln .60$. Compare this result with that of Example 3.1. Why is $\ln x$ one of the few functions for which interpolation using a truncated Taylor series is practical?

2. (*a*) If n is the order of a Lagrangian interpolation formula, show that

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^k l_j(x) = x^k \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

where the a_j are the tabular points.

(*b*) For $n = 3$ and equally spaced tabular points, compute

$$\max_{[a_1,a_3]} |l_j(x)|$$

for $j = 1, 2, 3$. Use Table 3.1 to estimate the bounds on $l_j(x)$ for $n = 5$. Use these

results to make an inference on the importance of roundoff error in interpolation using equally spaced data.

Section 3.3

3. (*a*) Using equally spaced data and a three-point Lagrangian formula, find a bound on $hf'''(x)$ which, on the interval spanned by the three points, assures a truncation error of less than 10^{-d} where d is an integer.

(*b*) Similarly, find a bound on $h^4 f^{iv}(x)$ when using a five-point Lagrangian formula.

(*c*) Use these results to estimate the maximum value of h, for both the three- and five-point cases, that can be used to interpolate (i) $\sin x$ on $[-\pi,\pi]$, (ii) e^x on $[-4,4]$, (iii) $\sin 100x$ on $[-\pi,\pi]$, with a truncation error of less than 10^{-10}.

4. (*a*) Show that $y(x)$ in the Lagrangian interpolation formula is the unique polynomial of degree $n-1$ passing through the points $[a_i, f(a_i)]$.

(*b*) Use the Lagrangian interpolation formula to find the cubic passing through the points $(-3,-1)$, $(0,2)$, $(3,-2)$, $(6,10)$.

5. (*a*) Do the computation of Examples 3.1 and 3.2 with the same tabular points when $f(x) = \sin x$.

(*b*) Repeat part *a* using $\tan^{-1} x$.

*6. Consider the following table for the Bessel functions $J_p(x)$, $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ correctly rounded to four decimal places.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
2.0	.2239	.5767	.3528	.1289	.0340	.0070
2.1	.1666	.5683	.3746	.1453	.0405	.0088
2.2	.1104	.5560	.3951	.1623	.0476	.0109
2.3	.0555	.5399	.4139	.1800	.0556	.0134
2.4	.0025	.5202	.4310	.1981	.0649	.0162
2.5	−.0484	.4971	.4461	.2166	.0738	.0195
2.6	−.0968	.4708	.4590	.2353	.0870	.0232
2.7	−.1424	.4416	.4696	.2540	.0950	.0274
2.8	−.1850	.4097	.4777	.2727	.1067	.0321
2.9	−.2243	.3754	.4832	.2911	.1190	.0373
3.0	−.2601	.3391	.4861	.3091	.1320	.0430

(*a*) Suppose you wished to interpolate to find values of $J_0(x)$ at $x = 2.05 + .1j$, $j = 0, \ldots, 9$. Use the relation

$$J_p'(x) = -J_{p+1}(x) + (p/x)J_p(x)$$

to find a bound on the truncation error in the worst case using (i) linear interpolation; (ii) a Lagrangian three-point formula. Which of these methods would you use if you wished to *guarantee* a *total* error in the result for every j of less than 5×10^{-4} in magnitude?

(*b*) Carry out the interpolation using this method.

(*c*) Repeat parts *a* and *b* to find values of $J_1(x)$ at $x = 2.05 + .1j$, $j = 1, \ldots, 9$.

(*d*) How many correctly rounded decimal places for $J_0(x)$ would have to be given in order that the use of a five-point Lagrangian formula would give significantly higher accuracy than the three-point formula?

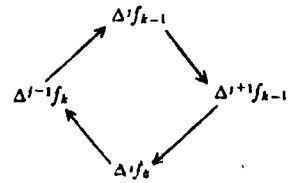
7. Use the data of Prob. 6 and a three-point Lagrangian formula to approximate (*a*) $J_3(2.07)$, (*b*) $J_p(2.405)$, (*c*) $J_p(2.64)$, (*d*) $J_p(2.91)$, with $p = 0, 1, 2$.

8. Derive (3.3.8).

9. Show that the first difference (forward, backward, or central) of a polynomial of degree n is a polynomial of degree $n-1$. Thus deduce that the nth difference of a polynomial of degree n is a constant and the $(n+1)$st is zero.

10. Difference operators. Define the *shifting* operator E to be such that $Ef(x) = f(x+h)$. Using this and the definitions of Δ, ∇, and δ establish the following relations: (*a*) $\Delta = E - 1$; (*b*) $\nabla = 1 - E^{-1}$, (*c*) $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$. Then use these relations to derive relations between Δ and ∇ and between Δ and δ.

*11. (*a*) Using the rules of Sec. 3.3-2-2, show that any closed path of the form



results in no contribution to any interpolation formula.

(*b*) Thus deduce that the path from $\Delta^{j-1}f_k$ to $\Delta^j f_{k-1}$ to $\Delta^{j+1}f_{k-1}$ results in the same contribution as the path from $\Delta^{j-1}f_k$ to $\Delta^j f_k$ to $\Delta^{j+1}f_{k-1}$. Similarly, show that the path from $\Delta^{j-1}f_k$ to $\Delta^j f_{k-1}$ to $\Delta^{j+1}f_{k-1}$ to $\Delta^j f_k$ and the path from $\Delta^{j-1}f_k$ to $\Delta^j f_k$ result in the same contribution. From these results, deduce that *any closed path* contributes nothing.

(*c*) Show also that the path from f_{k+1} to Δf_k to f_k contributes nothing.

(*d*) Use the results of parts *a*, *b*, and *c* to deduce that all formulas which terminate on a given difference and start anywhere in the functional-value column are algebraically equivalent.

12. (*a*) Suppose a table contains two errors in successive entries. Show how the difference patterns will overlap in the second difference and describe how you would determine the magnitude of each error. Do the same for the third difference. Generalize to show how you would unravel any two overlapping error patterns.

(*b*) The following tabulation may contain one or more misprints. By differencing the tabulation, correct these misprints. Describe the way you detect the misprints.

2001409	1634722	1267432
1949050	1582301	1215141
1896683	1529878	1162645
1844308	1477143	1110161
1791930	1424999	1057658
1739532	1372548	1005146
1687132	1320088	

[Ref.: Kopal (1955), p. 86.]

(*c*) Find and correct the misprints in the tabulation of $J_4(x)$ in Prob. 6.

*13. Suppose a single entry in a table is in error by an amount ϵ in the least significant digit and let all the other entries in the table be in error by the maximum roundoff error of $\frac{1}{2}$ in the least significant digit, alternately plus and minus. Therefore, in the position of the least significant digit, the error pattern would look like $\ldots -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \epsilon, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \ldots$.

(*a*) In terms of ϵ, find the error in the difference of order $2k$, $k = 1, \ldots, 6$ on the line with the ϵ entry.

(*b*) By considering the case where $\epsilon = -\frac{1}{2}$, find ϵ_{max}, the largest error in a functional value which cannot be distinguished from roundoff in the difference of order $2k$, $k = 1, \ldots, 6$

(*c*) Derive a formula for ϵ_{max} in terms of k.

[Ref. Miller (1950).]

*14. (*a*) Given a table of values at an interval h, discuss how you would generate a new table ("subtabulate") at an interval ρh $(0 < \rho < 1)$ by using an appropriate interpolation formula.

(*b*) Show that as $n \to \infty$, the left-hand side of (3.3-11) approaches $f(a_0 + hn)$ if the series on the right-hand side converges (see Prob. 22).

(*c*) Let the forward-difference operator with respect to the interval ρh be represented by Δ_1. Using (3.3-8) and the result of part *b*, show that

$$\Delta_1^j f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \binom{k\rho}{i} \Delta^i f_0 \quad j = 1, 2, \ldots$$

(*d*) Use the results of Prob. 10 to show that in operational form

$$\Delta_1^j f_0 = [(1 + \Delta)^\rho - 1]^j f_0$$

Use this to calculate Δ_1^j, $j = 1, 2, 3, 4$ in terms of Δ^i and ρ, retaining terms through Δ^4.

(*e*) Use the results of part *c* to subtabulate the data of Prob. 6 for $J_0(x)$ with (i) $\rho = \frac{1}{2}$; (ii) $\rho = \pm\frac{1}{3}$. Compare the results for $\rho = \frac{1}{2}$ with those of Prob. 6. How could you overcome the problems that arise near the end of the tabulation?

Section 3.4

15. (*a*) Derive the identities

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0 \qquad \text{(ii)} \binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r-k}{m-k}\binom{r}{k}.$$

(*b*) Use these results to show that $\sum_{j=r}^{i} (-1)^{j-r} \binom{i}{j}\binom{j}{r}$ vanishes and thus deduce that the right-hand side of (3.4-1) is f_i.

16. (*a*) Use the results of Prob. 10 to express Newton's backward formula in terms of backward differences at a_0.

(*b*) Similarly, express Gauss's forward and backward formulas in terms of central differences at a_0.

(*c*) Using the notation $\mu\delta^{2m+1} f_0 = \frac{1}{2}(\delta^{2m+1} f_{\frac{1}{2}} + \delta^{2m+1} f_{-\frac{1}{2}})$ express Stirling's and Bessel's formulas in terms of central differences.

17. (*a*) Show that in any finite-difference interpolation formula a difference of any order can be eliminated by using the relation $\delta^m f_{k+1} - \delta^m f_k = \delta^{m+1} f_k$ or a similar relation for forward and backward differences.

(*b*) Use this result and the result of Prob. 16*b* to eliminate the odd differences from Gauss's forward formula and thus derive *Everett's interpolation formula*

$$y(m) = (1 - m) f_0 + m f_1 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{(m+1)(m)(m-1)}{6}\delta^2 f_1 + \cdots$$

(This formula is useful in interpolating in tables which provide auxiliary tables of even central differences.)

(*c*) Similarly, eliminate the even differences in Gauss's forward formula to get *Steffensen's interpolation formula*

$$y(m) = f_0 + \frac{(m+1)m}{2!}\delta f_{\frac{1}{2}} - \frac{m(m-1)}{2}\delta f_{-\frac{1}{2}} + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{4!}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} - \cdots$$

[Ref.: Hildebrand (1956), pp. 103–105, or Kopal (1955), pp. 50–54.]

*18. Throwback. (*a*) Use the result of Prob. 16*c* to show that the ratio of the coefficient B_4 of the fourth central difference in Bessel's formula to the coefficient B_2 of the second difference is $(m+1)(m-2)/12$ and that for $0 \leq m \leq 1$ this ratio varies between $-\frac{1}{6}$ and $-\frac{3}{16}$.

(*b*) Because this ratio varies very little on the interval, consider replacing B_4 by cB_2. Show that $B_4 - cB_2$ as a function of m has a maximum and a minimum dependent on c on $[0,1]$. Find the two values of c which equalize the minimum and maximum values of $B_4 - cB_2$ on this interval. Show that one of these values c_1 is very nearly equal to the average value of B_4/B_2 over $[0,1]$.

(*c*) Thus rewrite Bessel's formula as $y(m) = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) + (m - \frac{1}{2})\delta f_{\frac{1}{2}} + B_2[\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1 + c_1(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)]$. This procedure is called throwback, that is, we have "thrown back" the effect of the fourth difference onto the second difference. [Ref. Kopal (1955), pp. 54–56.]

19. (*a*) Display the error terms for the Newtonian and Gaussian interpolation formulas terminated with the difference of order k in terms of h and m.

(*b*) Use these to derive the error terms for Stirling's and Bessel's formulas terminated with an odd or even difference.

Section 3.5

20. (*a*) What abscissas are involved in the calculation of each entry in the table in Example 3.5 for both the Gaussian and Newtonian formulas?

(*b*) Verify that the actual error using six differences is consistent with that calculated using the result of Prob. 19*a*.

21. (*a*) How many terms in Gauss's forward formula can be used if x_0 is (i) the next to last entry in a table, (ii) the fourth entry?

(*b*) Use (3.4-7) and (3.4-8) to show that, when m is near zero, Stirling's formula is a desirable one to use and that, when m is near one-half, Bessel's formula is desirable.

*22. (*a*) If h is fixed, show that in the limit as $n \to \infty$ Newton's forward formula, if it converges, becomes with $a_0 = 0$

$$f(x) = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta^j f_0}{j!h^j} x(x-h) \cdots [x - (j-1)h]$$

(*b*) For $f(x) = e^{ax}$ and $a_0 = 0$, show that $\Delta^r f_0 = (e^{ah} - 1)^r$.

(*c*) By using the result of part *b* in part *a*, show that the ratio of the $k+1$ and k terms of the series is given by

$$\frac{e^{ah} - 1}{h(k+1)}(x - kh)$$

(*d*) By considering this ratio as $k \to \infty$, deduce that the series in part *a* converges if $e^{ah} < 2$ and diverges if $e^{ah} > 2$ unless x is a positive integral multiple of h, in which

case of convergence. (A more difficult result is that for $e^{ah} = 2$ the series converges if and only if $x \geq -h$.)

(c) Thus deduce that Newton's forward formula is an asymptotic series for e^{ax} when $e^{ah} > 2$. Contrast this with the convergence of the Taylor series for e^{ax} for all ax. In practice, why would we expect Newton's formula to be asymptotic even when $e^{ah} < 2$? [Ref.: Hildebrand (1956), pp. 114–116.]

23. Suppose you have a table of $\sin x$ at an interval $h = 1$. How many tabular points would have to be used in interpolating in this table to assure a truncation error of less than (a) 10^{-8}, (b) 10^{-6}; (c) 10^{-5}; independent of a_0 and m?

24. Use the data of Prob. 6 and a finite-difference interpolation formula to approximate (a) $J_p(2.07)$, (b) $J_p(2.405)$, (c) $J_p(2.64)$, (d) $J_p(2.91)$, with $p = 0, 1, 2$. In each case motivate your choice of a particular interpolation formula and compare the results with those of Prob. 7.

*25. Divided differences. The divided difference of order $k > 1$ of $f(x)$ is defined by

$$f[a_1, \ldots, a_k] = \frac{f[a_2, \ldots, a_k] - f[a_1, \ldots, a_{k-1}]}{a_k - a_1}$$

with $f[a_1] = f(a_1)$.

(a) Prove that

$$f[a_1, \ldots, a_k] = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(a_i)}{(a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_k)}$$

and thus deduce that the order of the arguments in a divided difference is immaterial.

(b) Use the data of Example 3.1 to generate a divided-difference table analogous to the difference table of Fig. 3.1.

(c) Show that

$$f[a_1, \ldots, a_{k-1}, x] = f[a_1, \ldots, a_k] + (x - a_k) f[a_1, \ldots, a_k, x]$$

and use this result to derive the formula

$$f(x) = f[a_1] + (x - a_1) f[a_1, a_2] + (x - a_1)(x - a_2) f[a_1, a_2, a_3] + \cdots + (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1}) f[a_1, \ldots, a_n] + E(x)$$

where

$$E(x) = p_n(x) f[a_1, \ldots, a_n, x]$$

This formula is called *Newton's divided-difference interpolation formula*.

(d) Deduce from part c that $(x - a_k) f[a_1, \ldots, a_n, x] \to 0$ as $x \to a_k$, $k = 1, \ldots, n$.

(e) Use this result to show that this formula must be algebraically equivalent to the Lagrangian interpolation formula which uses the tabular points $a_1, \ldots, a_n$. Thus deduce that

$$f[a_1, \ldots, a_n, x] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

where ξ is in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x.

(f) Use the results of parts c and e to show that when $a_i \to a$, $i = 1, \ldots, n$ the Newton divided-difference formula and, therefore, the Lagrangian formula are both equivalent to a Taylor series with remainder.

(g) Use Newton's divided-difference formula and the table of part b to approximate $\ln 60$. Compare the result with Example 3.1.

(h) When the tabular points are equally spaced, show that

$$f[a_1, \ldots, a_k] = \frac{1}{(k-1)! h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_1$$

and thus use part c to derive Newton's forward formula.

Section 3.6

26. (a) Show that the table of (3.6-2) can be replaced by the symmetrical arrangement

$$\begin{array}{llll}
a_1 & a_1 - x & y_1(x) & \\
\cdot & \cdot & & y_{12}(x) \\
\cdot & \cdot & \cdot & y_{23}(x) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & y_{n-1,n}(x) \\
a_n & a_n - x & y_n(x) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \\
y_{123}(x) & \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & y_{n-2,n-1,n}(x)
\end{array}
\qquad
y_{1,2,\ldots,n}(x)$$

What would the additional entries to the table be if the point a_{n+1} were used?

(b) Use the technique of part a to do the computation of Example 3.6. [Ref.: Neville (1934).]

27. Use iterated interpolation to do the calculations of parts a and b of Prob. 7. Compare the results with those of Probs. 7 and 24.

28. Interpolation near a singularity. Suppose you are given a tabulation of sine, cosine, and tangent as follows.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1.566	.9999885	.0047963	208.49128
1.567	.9999928	.0037963	263.41125
1.568	.9999961	.0027963	357.61106
1.569	.9999984	.0017963	556.69098
1.570	.9999997	.0007963	1255.76559

Using these data and any interpolation formula, calculate $\tan(1.5695)$ by (a) using the $\tan x$ tabulation directly; (b) calculating $\sin(1.5695)$ and $\cos(1.5695)$. Discuss the reasons for the varying errors in the two results. [Ref.: Kopal (1955), p. 84.]

Section 3.7

29. Use the data of Prob. 6 and inverse interpolation to approximate the zero of $J_0(x)$ between 2 and 3 (cf. Prob. 7b).

30. Inverse interpolation near a singularity. Suppose we wished to calculate that value of x for which $\sin x = .9999950$ using the data of Prob. 28. Why will the procedure of Sec. 3.7 not work here? To solve this problem, do the following:

(a) Obtain an initial approximation $\bar{x}$ to τ by linear inverse interpolation between $x_1 = 1.567$ and $x_2 = 1.568$.

(b) By direct interpolation, compute $\sin \bar{x}$.

If $\sin \bar{x} < .999950$, replace x_1 by $\bar{x}$ and repeat this procedure. Otherwise, replace x_2 by $\bar{x}$. Continue until the process converges. What condition must $\sin x$ satisfy on $[x_1,x_2]$ in order for the process to converge?

Section 3.8

31. Derive Eqs. (3.8-10).

32. Use the data of Prob. 6 and Hermite interpolation to do the computation of parts *a* and *b* of Prob. 7 for $p = 0$. Compare with the previous results. Can the use of the Hermite interpolation formula be simplified for equally-spaced data in a fashion analogous to that for the Lagrangian formula in Sec. 3.3-1?

Section 3.9

33. (*a*) Verify that, when Eqs. (3.9-3) and (3.9-4) are solved for $y(x)$, the results are, respectively, the Lagrangian and Hermite interpolation formulas.

(*b*) Similarly, show that $y(x)$ given by (3.9-5) is such that $y(x)$ and its first r_i derivatives agree with $f(x)$ at a_i, $i = 1, \ldots, n$.

34. (*a*) Show that the value of the *Vandermonde* determinant

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & \cdot & & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

contains all factors of the form $(a_j - a_i)$, $i \neq j$.

(*b*) By showing that there are $n(n-1)/2$ such factors and that the determinant is a polynomial of this degree in the variables $a_1, \ldots, a_n$, deduce that

$$\Delta = \prod_{j>i=1}^{n} (a_j - a_i)$$

*35. (*a*) Use the result of the previous problem to derive the form of $l_i(x)$ directly from (3.9-3). Deduce that the minor of $y(x)$ in (3.9-3) does not vanish if the tabular points are distinct.

(*b*) Show directly that the minor of $y(x)$ in (3.9-4) does not vanish if the tabular points are distinct.

(*c*) Generalize this result to show that the minor of $y(x)$ in (3.9-5) does not vanish if the tabular points are distinct.

36. (*a*) Let $f(x)$ have zeros x_i, $i = 1, \ldots, n$ of multiplicity ν_i, $i = 1, \ldots, n$ in an interval (a,b). Let $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$. Prove that $f^{(k)}(x)$ has at least $\nu - k$ zeros in (a,b).

(*b*) Use this result and a technique similar to that used to derive the Lagrangian and Hermite interpolation formula errors to derive (3.9-6).

37. (*a*) Write the determinantal form for an interpolation polynomial $y(x)$ which at the n tabular points is to have the same value and same second derivative as the function $f(x)$ (but not necessarily the same first derivative).

(*b*) Show that, for $n = 3$ and $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, the minor of y in this determinant vanishes identically. Thus deduce that there is no quintic polynomial satisfying the desired conditions. [Ref.: Hamming (1962), p. 94.]

Section 3.10

38. Suppose it is desired to approximate $f(x)$ in the form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{a_i x} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^x \qquad (u_i = e^{a_i})$$

(*a*) If the approximation is to be exact at the n equally spaced points, 0, 1, . . . , $n-1$, write down the n equations for the c_i's (assuming the u_i's are known).

(*b*) Given the data

x	0	1	2
$f(x)$	2.4400	2.0851	2.1958

use the results of part *a* to find the coefficients of an exponential approximation with $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$. [Ref.: Hildebrand (1956), p. 380.]

39. Interpolation of functions of two variables. Suppose we are given a function of two variables $f(x,y)$ tabulated at points (a_i,b_j), $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

(*a*) If we wish to approximate $f(x,y)$ at a nontabular point, show that we can do this by first interpolating to find $f(x,b_j)$ for a sequence of values of j and then using these values to interpolate to find $f(x,y)$ or vice versa.

(*b*) Given the table of values of the elliptic integral

$$E(x,y) = \int_0^y (1 - \sin^2 x \sin^2 t)^{1/2}\, dt$$

y \ x	50°	54°	58°	62°
50°	0.8134	0.8060	0.7988	0.7920
52°	0.8414	0.8332	0.8251	0.8174
54°	0.8690	0.8598	0.8508	0.8422
56°	0.8962	0.8859	0.8759	0.8663

find an approximation to $E(55.4°,53.1°)$ by (i) interpolating horizontally to find $E(55.4°,y)$ for $y = 50°, 52°, 54°, 56°$ and then interpolating vertically; (ii) interpolating vertically and then horizontally. If the desired point lies on a diagonal [e.g., (52°,51°)], how could the interpolation procedure be simplified? [Ref.: Hildebrand (1956), p. 125.]

chapter 4

NUMERICAL DIFFERENTIATION, NUMERICAL QUADRATURE, AND SUMMATION

4.1 NUMERICAL DIFFERENTIATION FORMULAS

The form of the general numerical differentiation operator is

$$L[f(x)] = f^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) f^{(i)}(a_j) \tag{4.1-1}$$

where at least one $A_{0j}(x) \neq 0$. In this section we shall restrict ourselves to the case $m = 0$ since this is by far the most important case in practice. Implicit in this and the following sections on numerical differentiation is the existence and, where necessary, continuity of as many derivatives of $f(x)$ as we require.

Our basic approach in deriving numerical differentiation formulas will be to differentiate the interpolation formulas of the previous chapter. If we differentiate the Lagrangian interpolation formula (3.1-5) k times, we get

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j^{(k)}(x) f(a_j) + \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{p_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi)\right] = y^{(k)}(x) + \frac{d^k}{dx^k}[E(x)] \tag{4.1-2}$$

In particular, for $k = 1$ we have

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j'(x) f(a_j) + \frac{d}{dx}\left[\frac{p_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi)\right] \tag{4.1-3}$$

where the derivative of $l_j(x)$ is easily calculated using (3.2-4). Determination of the error term in (4.1-2) or (4.1-3) presents a problem because ξ is an unknown function of x (see Sec. 3.2). Nevertheless, we can prove the following

Theorem 4.1 Let $p_n(x)f^{(n)}(\xi)/n!$ be the error term in the Lagrangian interpolation formula with ξ in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x. Then, if $f^{(n+1)}(x)$ is continuous,

$$\frac{1}{n!}\frac{d}{dx} f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \tag{4.1-4}$$

where η is also in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x.

Proof If we take the Lagrangian interpolation formula (3.1-5) with $x \neq a_j$, $j = 1, \ldots, n$, divide both sides by $p_n(x)$, and differentiate, we get, using (3.2-4),

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{p_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(a_j)}{-(x - a_j)^2 p_n'(a_j)} + \frac{1}{n!}\frac{d}{dx}[f^{(n)}(\xi)] \tag{4.1-5}$$

Now consider (3.1-5) with n replaced by $n + 1$. We have

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= p_n(x)(x - a_{n+1}) \\ p_{n+1}'(a_j) &= \begin{cases} (a_j - a_{n+1}) p_n'(a_j) & j \neq n+1 \\ p_n(a_{n+1}) & j = n+1 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1-6}$$

Dividing (3.1-5) by $p_{n+1}(x)$, rearranging terms, and using (4.1-6), we may write

$$\frac{[f(x)/p_n(x)] - [f(a_{n+1})/p_n(a_{n+1})]}{x - a_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(a_j)}{(x - a_j)(a_j - a_{n+1}) p_n'(a_j)} + \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \tag{4.1-7}$$

where τ is in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_{n+1}$ and x. Now take the limit of both sides of (4.1-7) as $a_{n+1} \to x$. We get

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{p_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(a_j)}{-(x - a_j)^2 p_n'(a_j)} + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \tag{4.1-8}$$

where η is in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x. Comparing (4.1-5) and (4.1-8), the theorem is proved when $x \neq a_j$. But using the continuity of the derivatives, (4.1-4) must be true for any x.

By an extension of this argument, we may prove that [1]

$$\frac{1}{n!}\frac{d^j}{dx^j}f^{(n)}(\xi) = \frac{j!}{(n+j)!}f^{(n+j)}(\eta_j) \tag{4.1-9}$$

with η_j in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x. Using the result of this theorem and Leibniz's rule, we may write the error term in (4.1-2) as

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{p_n(x)}{n!}f^{(n)}(\xi)\right] = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}p_n^{(i)}(x)\frac{f^{(n+k-i)}(\eta_{k-i})}{(n+k-i)!} \tag{4.1-10}$$

and, in particular, for (4.1-3)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{p_n(x)}{n!}f^{(n)}(\xi)\right] = \frac{p_n(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta_1) + \frac{p_n'(x)}{n!}f^{(n)}(\eta_0) \tag{4.1-11}$$

From (4.1-11) we note that, if we are estimating the derivative at a tabular point, then the first term on the right-hand side is zero. This means in effect that *the derivative at a tabular point can be calculated by differentiating the Lagrangian formula while considering ξ to be a constant.* By using a technique similar to that used to derive the error in the Lagrangian formula in Sec. 3.2, we may also show that, if x is outside or at an end point of the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$, then the error may again be written by dropping the first term on the right-hand side of (4.1-11) [1] (and, in general, changing η_0 to some other value in the interval spanned by $a_1, \ldots, a_n$ and x).

When the tabular points are equally spaced, $y^{(k)}(x)$ in (4.1-2) becomes

$$y^{(k)}(x) = \frac{1}{h^k}\sum_{j=1}^{n} l_j^{(k)}(m)f(a_j) \qquad x = a_0 + hm \tag{4.1-12}$$

where the differentiation of $l_j(m)$ is with respect to m, and we have used the fact that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm}\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dm} \tag{4.1-13}$$

In a similar fashion, we may differentiate the interpolation formulas expressed in difference form. For example, if we differentiate Newton's forward formula (3.3-11), we get

$$\frac{d^k}{dx^k}y(a_0+hm) = \frac{1}{h^k}\frac{d^k}{dm^k}y(a_0+hm)$$
$$= \frac{1}{h^k}\sum_{j=0}^{n}\frac{d^k}{dm^k}\binom{m}{j}\Delta^j f_0 = \frac{1}{h^k}\sum_{j=k}^{n}\frac{d^k}{dm^k}\binom{m}{j}\Delta^j f_0 \tag{4.1-14}$$

Similar equations can clearly be written down for the other finite-difference interpolation formulas [2]. For the particular case $m = 0$, we may write (4.1-14) as

$$\frac{d^k}{dx^k}y(a_0) = \frac{k!}{h^k}\sum_{j=k}^{n}\frac{S_j^{(k)}}{j!}\Delta^j f_0 \tag{4.1-15}$$

The $S_j^{(k)}$ are called *Stirling numbers of the first kind.* Some of their properties are considered in [4].

More general numerical differentiation formulas can be found by differentiating the general interpolation formula (3.9-5), but as we have mentioned, it is seldom useful to have numerical differentiation formulas which depend on derivatives of the function.

4.2 COMPUTING DERIVATIVES NUMERICALLY

Superficially, there would seem to be no more difficulty to computing derivatives using the formulas of the previous section than there was in using the interpolation formulas of the previous chapter. But a closer look indicates that roundoff error, while often not significant in using interpolation formulas, is not only significant but can be disastrous in numerical differentiation. In this section we shall consider numerical differentiation using the Lagrangian interpolation formula for equally spaced data, but this discussion may easily be extended to finite-difference differentiation formulas.

The roundoff error $R(x)$ incurred in using the Lagrangian interpolation formula (3.3-3) can be bounded by

$$|R(x)| \leq (5 \times 10^{-r-1})\sum_{j=1}^{n}|l_j(m)| \tag{4.2-1}$$

if the functional values are all correctly rounded to r decimal places. Moreover, as Table 3.1 indicates, the values of $l_j(m)$ never get much larger than 1 for reasonably small n. Thus for such values of n the roundoff error will affect only the last significant digit (i.e., the rth decimal). Contrast this, however, with Eq. (4.1-12). Computing with this formula, the roundoff error $R_k(x)$ can only be bounded by

$$|R_k(x)| \leq \frac{5 \times 10^{-r-1}}{h^k}\sum_{j=1}^{n}|l_j^{(k)}(m)| \tag{4.2-2}$$

Clearly, if h is small, the roundoff can be very large. Now for equally spaced points, each term of the truncation error contains a power of h, as can be seen using Eqs. (4.1-10) and (4.1-13). Thus, whereas in interpola-

tion truncation error is proportional to a power of h and roundoff error *does not depend* on h, in numerical differentiation, truncation error is proportional and roundoff error is inversely proportional to a power of h. A small value of h then causes a large magnification of the roundoff error inherent in the functional values,† and a large value causes a large truncation error. This suggests the problem we now consider of finding the optimal value of h when numerically differentiating at equal intervals.

In particular, let us consider this question when the first derivative at a tabular point is desired. Then the first term on the right-hand side of (4.1-11) is zero, and we have for the truncation error

$$E_1(x) = [p_n'(x)/n!]f^{(n)}(\eta_0) \tag{4.2-3}$$

Now, using (3.3-4) and (4.1-13), we may write

$$p_n'(x) = h^{n-1}p_n'(m) \tag{4.2-4}$$

so that

$$E_1(x) = h^{n-1}[p_n'(m)/n!]f^{(n)}(\eta_0) = h^{n-1}e_1(x) \tag{4.2-5}$$

where $e_1(x)$ does not depend on h. Similarly, we may write for the roundoff error

$$R_1(x) = (1/h)r_1(x) \tag{4.2-6}$$

where $r_1(x)$ also does not depend on h. A convenient way to define the optimal value of h (see [6] for another) is to choose that value which makes the bounds on the magnitudes of $E_1(x)$ and $R_1(x)$ equal. This will lead to an accurate optimum only when the two bounds are equally good. Nevertheless, this approach is defensible since we are really only looking for a reasonable value of h.

We have

$$e_1(x) \leqq [p_n'(m)/n!]M_n \tag{4.2-7}$$

where M_n is such that

$$|f^{(n)}(\xi)| \leqq M_n \tag{4.2-8}$$

for ξ in the interval spanned by the tabular points and x. Similarly

$$|r_1(x)| \leqq \epsilon \sum_{j=1}^{n} |l_j'(m)| \tag{4.2-9}$$

where ϵ is the magnitude of the maximum roundoff error in each value of

† Because the factor $1/h^k$ causes a magnification of the roundoff error or, in engineering parlance, the "noise" in the functional values, numerical differentiation is often called a noise-magnification process

$f(a_j)$ [5×10^{-t} in (4.2-2)]. Using (4.2-7) and (4.2-9) to equate the bounds on the roundoff and truncation errors, we get

$$h^{n-1}\frac{p_n'(m)}{n!}M_n = \frac{\epsilon}{h}\sum_{j=1}^{n}|l_j'(m)| \tag{4.2-10}$$

so that the optimal value of h is given by

$$h_{\text{opt}} = \left[\frac{\epsilon n!\sum_{j=1}^{n}|l_j'(m)|}{M_n|p_n'(m)|}\right]^{1/n} \tag{4.2-11}$$

This, of course, determines a different h_{opt} for each m, which is clearly inconvenient. Since commonly we are most interested in the derivative at the central point of an odd number of tabular points, we set

$$m = (n+1)/2$$

in (4.2-11). But then it is convenient to renumber the tabular points as $a_{(-n+1)/2}, \ldots, a_0, \ldots, a_{(n-1)/2}$. Doing this, (4.2-11) becomes

$$h_{\text{opt}} = \left[\frac{\epsilon n!\sum_{j=-(n-1)/2}^{(n-1)/2}|l_j'(0)|}{M_n|p_n'(0)|}\right]^{1/n} \tag{4.2-12}$$

Using the definition of $l_j(m)$ and (3.3-4), we may show that [6]

$$\sum_{j=-(n-1)/2}^{(n-1)/2}|l_j'(0)| = 2|p_n'(0)|\sum_{j=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{|p_n'(j)|j} \tag{4.2-13}$$

so that

$$h_{\text{opt}} = \left[\frac{2\epsilon n!}{M_n}\sum_{j=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{|p_n'(j)|j}\right]^{1/n} \tag{4.2-14}$$

Example 4.1 With $n = 3$, find h_{opt} and expressions for the derivatives at the tabular points.

From (4.2-14)

$$h_{\text{opt}} = \left[\frac{12\epsilon}{M_3}\frac{1}{|p_3'(1)|}\right]^{1/3} = \left[\frac{6\epsilon}{M_3}\right]^{1/3} \tag{4.2-15}$$

Then, using (4.1-12) with the tabular points renumbered, $k = 1$, and the error term given by (4.1-11), we get

$$\begin{aligned} f_{-1}' &= (1/2h)(-3f_{-1} + 4f_0 - f_1) + (h^2/3)f'''(\eta_{-1}) \\ f_0' &= (1/2h)(-f_{-1} + f_1) - (h^2/6)f'''(\eta_0) \\ f_1' &= (1/2h)(f_{-1} - 4f_0 + 3f_1) + (h^2/3)f'''(\eta_1) \end{aligned} \tag{4.2-16}$$

If the h used is h_{opt}, then the truncation error in f_0' is bounded by

$$\left(\frac{6\epsilon}{M_3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{M_3}{6} = \epsilon^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_3}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.2-17}$$

and the roundoff error is bounded by

$$\epsilon \left(\frac{M_3}{6\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} = \epsilon^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_3}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4.2-18}$$

Thus the total error T_3 is such that

$$|T_3| \leq 2\epsilon^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_3}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Similar bounds could be derived for the errors in f_{-1}' and f_1'. The case $n = 5$ is considered in [8].

In practice, we shall generally have empirical data of an unknown function and shall want to estimate the derivative at one of the tabular points. It will then be necessary to estimate M_n to get h_{opt}. Note, however, that the value of h we can use is restricted by the tabular data we are given. The following example indicates how one might calculate the derivative of a tabulated function.

Example 4.2 Given a three-place table of values of $\ln x$ at an interval of .01, find the derivative of $\ln x$ at $x = .5$ using (4.2-16).

Until we have chosen h, we do not know the range over which to estimate M_3. But suppose we estimate M_3 to be 15 in the range of interest (is this reasonable?). Since $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ in a three-place table, we have from (4.2-15)

$$h_{opt} = \left(\frac{6\epsilon}{M_3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.85 \times 10^{-2}$$

A practical value of h to choose is therefore .05. Thus we use the data

x	$\ln x$
.45	−.799
55	− 598

and (4.2-16) to calculate

$$f_0' = \frac{1}{.1}(.799 - .598) = 2.01$$

whereas the true value is, of course, 2. The error bound (which is only approximate since we did not use h_{opt}) is

$$|T_3| \leq 2 \times (5 \times 10^{-4})^{\frac{2}{3}} (\tfrac{15}{6})^{\frac{1}{3}} \approx 1.7 \times 10^{-2}$$

When empirical data are being differentiated even three-place accuracy may not be available. Thus the $1/2h$ factor in (4.2-16) may cause serious roundoff. If the magnitude of the derivative in the truncation error is such that h cannot be increased without making the truncation error unduly large, then determining the derivative with a reasonable degree of accuracy may be impossible. When higher derivatives than the first are desired, the $1/h$ factor becomes a $1/h^k$ factor, where k is the order of the derivative, and the roundoff problem becomes just that much worse.

The calculation of derivatives numerically is then a hazardous operation, especially when dealing with low accuracy empirical data. And even for high accuracy data, derivatives higher than the first are likely to have sizable errors. A better approach to numerical differentiation than that considered here may be to first "smooth" the data and then to differentiate (cf. Chap. 6, especially Sec. 6.7).

4.3 APPROXIMATING DERIVATIVES WITH DIFFERENCES

The formulas of Sec. 4.1 enable us to express the derivatives of a function in terms of values of the function or differences of the function. One obvious application of this is in the numerical solution of differential equations. Consider the first-order ordinary differential equation

$$dz/dx = F(x,z) \qquad z(x_0) = z_0 \tag{4.3-1}$$

Using (4.1-14) with $k = 1$, $n = 1$, $a_0 = x_0$, and $m = 0$, we may approximate dz/dx at x_0 as

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0} \approx \frac{1}{h}\Delta z_0 = \frac{z_1 - z_0}{h} \tag{4.3-2}$$

Inserting (4.3-2) in (4.3-1), we get

$$z(x_1) = z(x_0) + hF(x_0,z_0) \tag{4.3-3}$$

which gives us an approximation to the solution of (4.3-1) at x_1. Having this approximation at x_1, we could then approximate dz/dx at x_1 using (4.3-2) and then use (4.3-3) to get an approximation to the solution at x_2, etc. By using more terms of (4.1-14), we could derive more sophisticated methods than (4.3-3). The use of (4.1-14) would enable us to derive the errors inherent in such methods. We shall not consider this matter further here because in Chap. 5 we shall approach the problem of the numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations by a more general technique which subsumes all the methods derivable using difference techniques.

When dealing with partial differential equations,† however, replacing derivatives by differences lies at the heart of most methods for solving such equations. Consider, for example, Poisson's equation

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = g(x,y) \tag{4.3-4}$$

† And with boundary value problems of ordinary differential equations.

with appropriate boundary conditions (which we shall not state) on the boundary B in Fig. 4.1. Now using (4.1-14) with $k = n = 2$ we get an approximation to the second derivative of $f(x)$ as

$$f''(a_0 + hm) \approx \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{dm^2}\binom{m}{2}\Delta^2 f_0 = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} \tag{4.3-5}$$

This equation may also be used to approximate second partial derivatives of functions of several variables by holding all but one of the variables constant. To do this for Eq. (4.3-4), let us superimpose a square mesh on the region of Fig. 4.1. Then using (4.3-5) along the line $y = y_1$ with $a_0 = x_1$, we have

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} \approx \frac{u(x_0,y_1) - 2u(x_1,y_1) + u(x_2,y_1)}{h^2} \tag{4.3-6}$$

Similarly, along $x = x_1$ with $a_0 = y_1$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} \approx \frac{u(x_1,y_0) - 2u(x_1,y_1) + u(x_1,y_2)}{h^2} \tag{4.3-7}$$

Therefore, at the point (x_1,y_1), we may approximate the partial differential

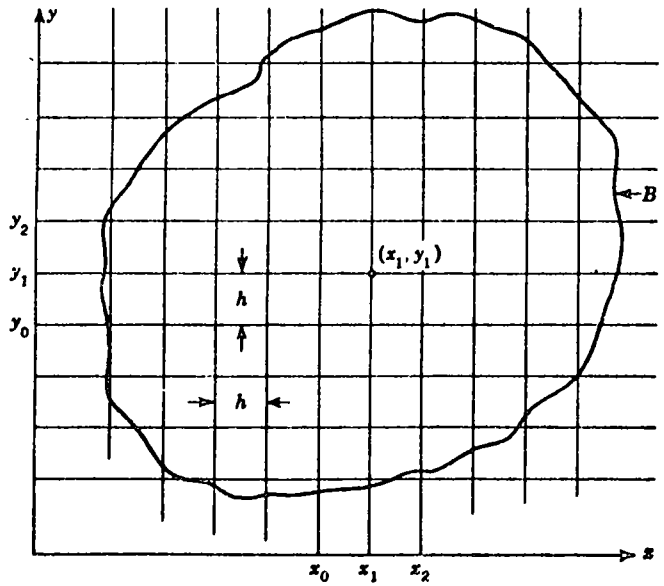


Fig. 4.1 Region in which solution of (4.3-4) is desired.

equation (4.3-4) by the equation

$$\frac{u(x_0,y_1) + u(x_2,y_1) + u(x_1,y_0) + u(x_1,y_2) - 4u(x_1,y_1)}{h^2} = g(x_1,y_1) \tag{4.3-8}$$

Using (4.1-10) the error in this approximation may be derived. An equation analogous to (4.3-8) may be written for every point interior to B by properly using the boundary conditions for points near B [for example, see Chap. 15 of Ralston and Wilf (1960)]. This leads to a system of *linear* equations for the unknowns $u(x_i,y_j)$ which can be solved by one of the methods of Chap. 9 to get an approximate solution to (4.3-4). Techniques very similar to this are the basis of many of the methods for the numerical solution of partial differential equations. A detailed discussion of the numerical solution of partial differential equations is beyond the scope of this book, but an understanding of the basic idea involved in approximating derivatives by differences plus a study of Chap. 9 will give the reader the necessary background for the study of this subject.

One further application of approximating derivatives by differences is in the estimation of error terms. Consider using (4.1-11) with $n = k$ to approximate the kth derivative of a function $f(x)$ at a point $a_0 + hm$. We have

$$f^{(k)}(a_0 + hm) \approx y^{(k)}(a_0 + hm) = \frac{1}{h^k}\frac{d^k}{dm^k}\binom{m}{k}\Delta^k f_0 = \frac{\Delta^k f_0}{h^k} \tag{4.3-9}$$

Now this is certainly a very rough estimate in general, particularly if k is not small, but if the derivatives of order greater than k (and, therefore, also the differences of order greater than k) are well behaved, then (4.3-9) may give an acceptable approximation. Since the difficulty in estimating many of the error terms we have derived already and shall derive later lies in the difficulty in estimating some derivative of $f(x)$, Eq. (4.3-9) can, if used judiciously, enable estimates of error terms to be made when the derivatives of $f(x)$ are not reasonably calculable [9].

4.4 NUMERICAL QUADRATURE—THE GENERAL PROBLEM

The form of the general numerical quadrature operator is

$$L[f(x)] = f(b) - f(a) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij} f^{(i)}(a_j) \tag{4.4-1}$$

If we substitute $\int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx$ for $f(x)$ in (4.4-1), we get

$$L[f(x)] = L\left[\int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx\right] = \int_a^b g(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij} g^{(i-1)}(a_j) \tag{4.4-2}$$

and the quadrature equation then becomes†

$$\int_a^b g(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij}g^{(i-1)}(a_j) = E \tag{4.4-3}$$

Setting $E = 0$ in (4.4-3) and solving for $\int_a^b g(x)\,dx$ then gives us an approximation to the definite integral of $g(x)$ as a linear combination of values of $g(x)$ and its derivatives. The numerical quadrature problem is to specify the A_{ij}'s and a_{ij}'s so that this approximation has desirable properties (i.e., achieves some desired accuracy).

Once again our approach will be that of exact polynomial approximation. That is, we shall attempt to choose the A_{ij}'s and a_{ij}'s so that E in (4.4-3) is zero when $g(x)$ is a polynomial of sufficiently low degree. We shall again restrict ourselves mainly to the case $m = 1$; that is, we shall try to express the integral as a linear combination of functional values alone as is done, for example, in the trapezoidal rule. This is by far the most important case both theoretically and practically. With the restriction $m = 1$, we may rewrite (4.4-3) after some obvious changes in notation as

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(a_j) + E \tag{4.4-4}$$

One equation of the form (4.4-4) can clearly be derived by integrating the Lagrangian interpolation formula (3.1-5). Without considering the details of this now, we can nevertheless see that, since the Lagrangian formula is exact for polynomials of degree $n - 1$ or less, then so will the formula resulting from its integration. This suggests the question: With no a priori restrictions on the "*abscissas*" a_j (such as that they be equally spaced) and the "*weights*" H_j, what is the highest-degree polynomial for which E in (4.4-4) can be made zero? We call the degree of this polynomial the *order of accuracy* of the formula. Since we have $2n$ constants at our disposal—n a_j's and n H_j's—we suspect that the answer is a polynomial of degree $2n - 1$. In the next section, we shall show that this is indeed the case.

We shall not explicitly consider the problem of evaluating the indefinite integral

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{4.4-5}$$

in this chapter. This problem is equivalent to solving the differential

† Here and in the remainder of this chapter, we shall generally denote the error by E instead of $E(x)$ because the variable x will not appear explicitly in the error term as it has previously.

equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad y(x_0) = 0 \tag{4.4-6}$$

and as such can be solved by the techniques of Chap. 5. For any specific value of x the methods of this chapter can, of course, be used to evaluate $y(x)$.

4.5 GAUSSIAN QUADRATURE

For now let us assume that a and b in (4.4-4) are finite. Then, if (4.4-1) is to be exact for polynomials of degree $2n - 1$ or less, we can get a set of $2n$ equations for the $2n$ unknown constants by substituting $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ into (4.4-4) and setting $E = 0$. We get

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{n} H_j a_j^k \qquad k = 0, \ldots, 2n - 1 \tag{4.5-1}$$

where

$$\alpha_k = \int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \tag{4.5-2}$$

These nonlinear equations, if we can solve them and if the solution is real, will give us the abscissas and weights we desire. This algebraic approach to our problem is considered further in [10], but we abandon it here in favor of an analytic approach which (1) will tell us without actually calculating the weights and abscissas whether or not they are real, (2) will enable us to determine E when $f(x)$ is not a polynomial of degree $2n - 1$ or less; (3) will enable us to show that the abscissas are in many cases the zeros of well-known polynomials. As we shall see, once the abscissas are known, the weights are easily calculable.

The starting point of our analytical approach is the Hermite interpolation formula (3.8-17)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x) f(a_j) + \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_j(x) f'(a_j) + \frac{p_n^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \tag{4.5-3}$$

which is exact for polynomials of degree $2n - 1$ or less. Integrating (4.5-3) between a and b, we get

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(a_j) + \sum_{j=1}^{n} \bar{H}_j f'(a_j) + E \tag{4.5-4}$$

where

$$H_j = \int_a^b h_j(x)\,dx \qquad \bar{H}_j = \int_a^b \bar{h}_j(x)\,dx \tag{4.5-5}$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

29

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 6: INTEGRACION NUMERICA

SEPTIEMBRE, 1977.

8. INTEGRACION NUMERICA

8.1 Introducción

El encontrar la integral de una curva y=F(X) equivale a encontrar el área bajo dicha curva. Analíticamente la integral de una función unidimensional (F(X)) está dada por la expresión:

$$g(X) = \int_b^a F(X)\,dX \qquad (8.1)$$

A menudo en problemas de tipo ingenieril las funciones están dadas en forma tabular o gráfica, por ejemplo: valores experimentales, en otras ocasiones es sumamente difícil el integrar una expresión analíticamente debido a su complejidad o puede no existir la integral exacta de dicha función. En todos los casos antes enunciados lo más apropiado o la única vía de solución es un método numérico.

La integración numérica consiste en encontrar la mejor aproximación posible del área que se encuentra debajo de la función a partir de sus valores discretos.

Para tal efecto se considerarán tres métodos:

-Trapezoidal,
-Simpson de 1/3,
-Simpson de 3/8.

La diferencia entre dichos métodos estriba en la cantidad de puntos que emplean para aproximar el área de la función y el error producido al evaluar el área. El programa que se discute a continuación emplea los tres métodos en forma tal que trata de minimizar el error en la evaluación del área mediante una adecuada elección de los métodos a emplear.

8.2 Métodos: Trapezoidal, Simpson de 1/3 y Simpson de 3/8

8.2.1 Objeto

Encontrar la integral de una curva y = F(X) dada en forma discreta mediante los métodos de Simpson 1/3, Simpson 3/8 o Trapezoidal. Los métodos o método a emplear estarán en función de la cantidad de puntos en que esté discretizada la función.

8.2.2 Método

a) Método Trapezoidal

-Dado que la integral de una función es el área debajo de la curva, este método lo que hace es dividir el intervalo de integración en "n+1" puntos equidistantes y aproxima la curva original por una serie de rectas en cada uno de los "n" subintervalos; finalmente, se encuentra el área de cada trapezoide y la suma de dichas áreas da la integral en la totalidad del intervalo.

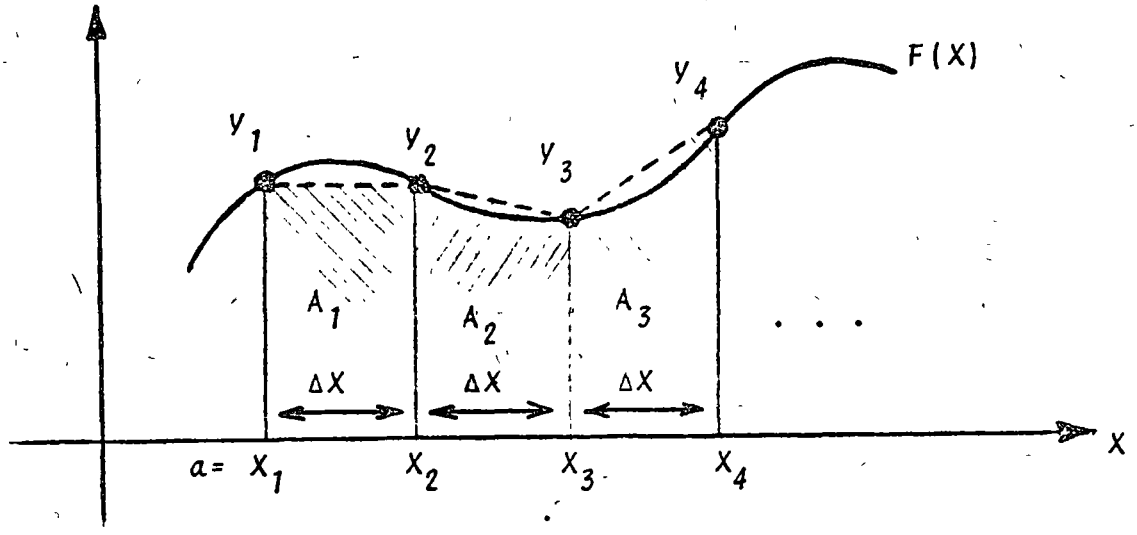


Fig. 8.1 Representación gráfica del método Trapezoidal

Numéricamente se tendrá:

$$\int_a^b F(X)\,dx \overset{\circ}{=} \sum_{i=1}^{n} A_i \quad * \qquad (8.2)$$

$$A_1 = \frac{\Delta X}{2}(Y_1 + Y_2)$$

$$A_2 = \frac{\Delta X}{2}(Y_2 + Y_3)$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{\Delta X}{2}(Y_n + Y_{n+1}) \qquad (8.3)$$

---

* $\overset{\circ}{=}$: aproximadamente

por lo tanto:

$$\int_a^b F(X)\,dX \triangleq \frac{\Delta X}{2}\,(Y_1 + 2Y_2 + \ldots + 2Y_n + Y_{n+1}) \qquad (8.4)$$

$$\int_a^b F(X)\,dX \triangleq \frac{\Delta X}{2}\,(Y_1 + Y_{n+1} + 2\sum_{\text{nadas}}^{\text{resto orde}}) \qquad (8.5)$$

Para aplicar este método se requiere que el incremento ΔX sea lo más pequeño posible para reducir el error al mínimo. Se puede demostrar que el error producido es del orden de $(\Delta X)^2$.

b) Método de Simpson de 1/3

Este método aproxima tres puntos sucesivos de la función mediante una parábola de segundo grado y evalua el área debajo de dicha curva. El procedimiento se repite para todos los puntos del intervalo (igualmente espaciados), de tres en tres, y al final se obtiene la suma de todas las áreas.

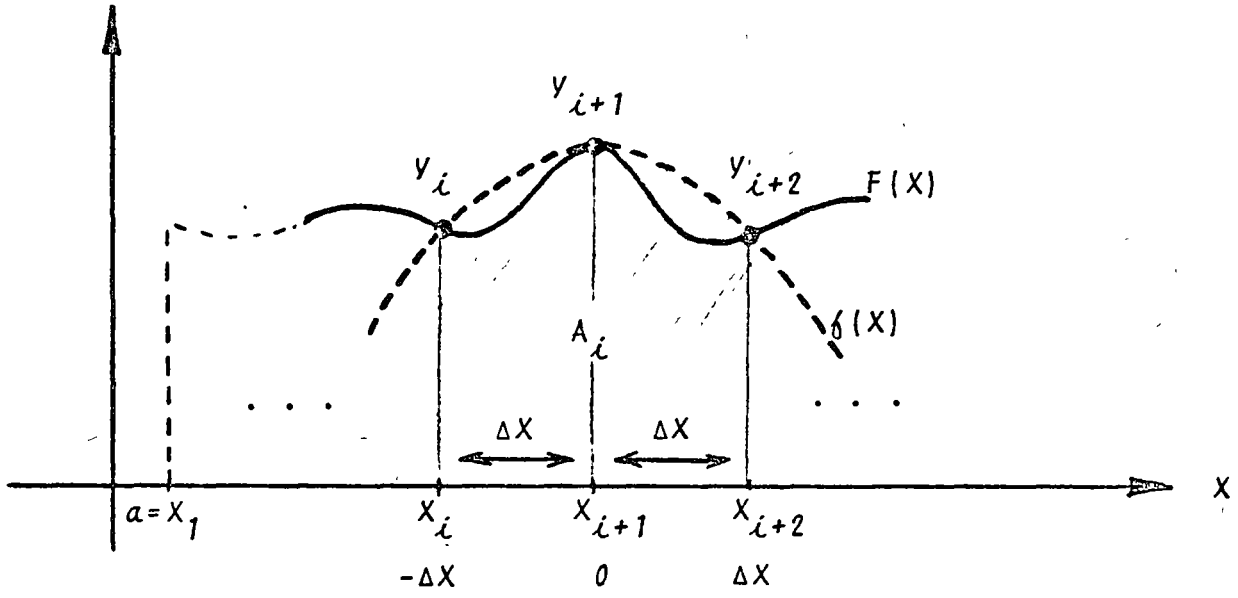


Fig. 8.2 Representación gráfica del método de Simpson de 1/3

Numéricamente se tendrá:

$$F(X) \triangleq g(X) \qquad (8.6)$$

$$g(X) = aX^2 + bX + c \qquad (8.7)$$

$$\int_{-\Delta X}^{\Delta X} F(X)\,dX \cong \int_{-\Delta X}^{\Delta X} f(X)\,dX \qquad (8.8)$$

$$A_i = \int_{-\Delta X}^{\Delta X} f(X)\,dX = \int_{-\Delta X}^{\Delta X} (aX^2 + bX + c)\,dX \qquad (8.9)$$

$$A_i = \frac{2a\,\Delta X^3}{3} + 2c\,\Delta X \qquad (8.10)$$

Para obtener a, b, y c, se obliga a que la curva (8.7) pase por los puntos muestrales, por lo tanto:

$$\begin{aligned} y_i &= a\,\Delta X^2 - b\,\Delta X + c \\ y_{i+1} &= c \\ y_{i+2} &= a\,\Delta X^2 + b\,\Delta X + c \end{aligned} \qquad (8.11)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$a = \frac{y_i + 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2\Delta X^2}$$

$$b = \frac{y_{i+2} - y_i}{2\,\Delta X} \qquad (8.12)$$

$$c = y_{i+1}$$

substituyendo (8.12) en (8.10):

$$A_i = \frac{\Delta X}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \qquad (8.13)$$

para todo el intervalo de integración se tendrá:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Delta X}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \\ &\vdots \\ A_{n/2} &= \frac{\Delta X}{3}(y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1}) \end{aligned} \qquad (8.14)$$

como:

$$\int_{X_1=a}^{X_{n+1}=b} F(X)\,dX \cong \sum_{i=1}^{n/2} A_i \qquad (8.15)$$

se tiene:

$$\int_a^b F(X)\,dX \cong \frac{\Delta X}{3}\left(y_1 + y_{n+1} + 2\sum_{i=3}^{n} \text{ord. impares} + 4\sum_{i=2}^{n} \text{ordenadas pares}\right) \qquad (8.16)$$

Para poder emplear el método se requiere que la cantidad de puntos muestrales (n+1) sea non; en caso contrario se emplea una cantidad non de puntos muestrales y el resto del intervalo se integra por el método Trapezoidal. Se puede demostrar que el error producido es del orden de $(\Delta X)^4$.

c) Método de Simpson de 3/8

En este caso se interconectan cuatro puntos consecutivos del intervalo de integración mediante un polinomio de tercer grado y se evalua el área bajo dicho polinomio en el subintervalo. La integral en todo el intervalo estará dada por la suma de todas las áreas encontradas.

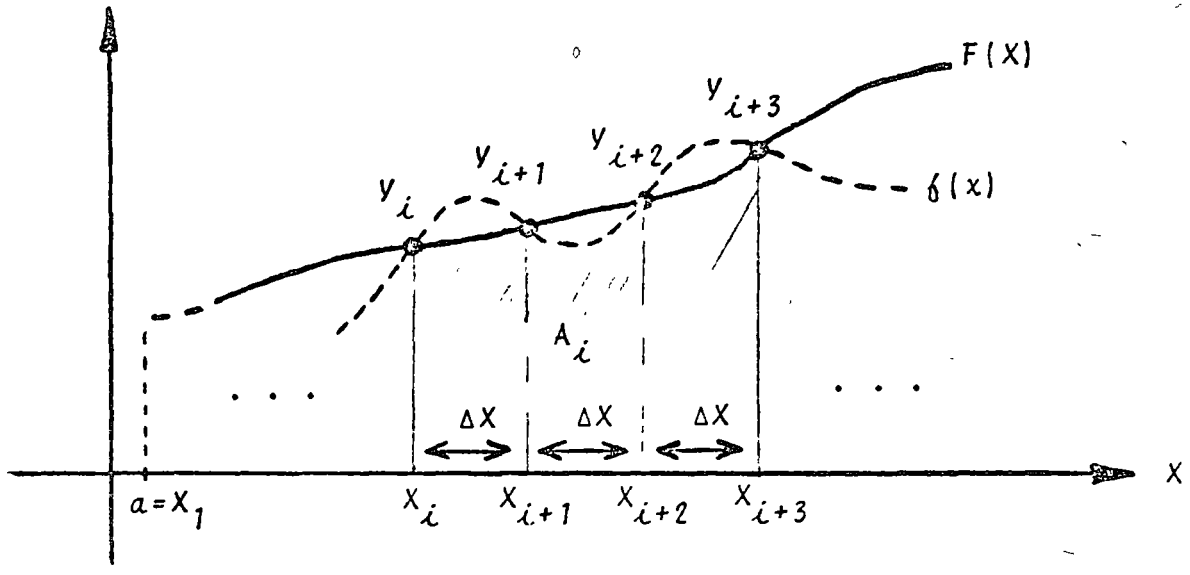


Fig. 8.3 Representación gráfica del método de Simpson de 3/8

De la figura 8.3 se tiene:

$$F(X) \triangleq f(X) \quad , \quad X_i \leq X \leq X_{i+3} \tag{8.17}$$

$$f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \tag{8.18}$$

$$\int_{X_i}^{X_{i+3}} F(X)dX \triangleq \int_{X_i}^{X_{i+3}} f(X)dX = A_i \tag{8.19}$$

substituyendo (8.18) en (8.19):

$$A_i = \int_{X_i}^{X_{i+3}} (aX^3 + bX^2 + cX + d)dX \tag{8.20}$$

pero:

$$X_{i+3} - X_i = 3\Delta X \tag{8.21}$$

empleando la expresión (8.21) al evaluar la expresión (8.20) se obtiene:

$$A_i = \frac{a}{4}(3\Delta X)^4 + \frac{b}{3}(3\Delta X)^3 + \frac{c}{2}(3\Delta X)^2 + d(3\Delta X) \tag{8.22}$$

De la ecuación (8.18) se obtienen a, b, c, y d al plantear un sistema de ecuaciones como en el método antes descrito y los valores obtenidos se substituyen en la ecuación (8.22) para obtener:

$$A_i = \int_{X_i}^{X_{i+3}} f(X)dX = \frac{3\Delta X}{8}(Y_i + 3Y_{i+1} + 3Y_{i+2} + Y_{i+3}) \tag{8.23}$$

El área en todo el intervalo estará dada por:

$$\int_{X_1=a}^{X_{n+1}=b} F(X)dX \triangleq \sum_i A_i \tag{8.24}$$

substituyendo (8.23) en (8.24):

$$\int_a^b F(X)\,dX \cong \frac{3\,\Delta X}{8}\left(Y_1 + Y_{n+1} + 2\sum_{i=4}^{n} \text{ord. de orden}\left(\left(\text{múltiplo de tres}\right) + 1\right) + 3\sum_{i=2}^{n} \text{resto de ord.}\right) \quad (8.25)$$

Para utilizar el método se requiere que "n" sea múltiplo de tres, existiendo "n+1" valores muestrales. En caso contrario se procede igual que en el método anterior. El error que produce este método es del orden de $(\Delta X)^4$.

En términos generales, cuando se desee integrar una función con la mayor exactitud posible se deberán utilizar los métodos antes descritos con la siguiente jerarquía:

1. Simpson de 3/8
2. Simpson de 1/3
3. Trapezoidal

8.2.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE RIEMAN(N,H,Y,SINTEG), obtiene el área bajo la curva empleando los métodos Trapezoidal, Simpson de 3/8 y Simpson de 1/3. El programa principal se emplea para la lectura de datos e impresión de resultados.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina RIEMAN:

N	cantidad de puntos en que se discretiza la función
H	espaciamiento entre las abscisas de los puntos muestrales
Y(I)	valores discretizados de la función que se desea integrar
SINTEG	valor de la integral
L(I)	variable que indica cuáles puntos muestrales ya han sido considerados para evaluar la integral

AREA1	integral obtenida por el método Trapezoidal
AREA2	integral obtenida por el método de Simpson de 1/3
AREA3	integral obtenida por el método de Simpson de 3/8
M	variable empleada para determinar el tipo de integración a usar
SUMPAR	sumatoria de las ordenadas de índice par
SUMRES	sumatoria del resto de las ordenadas
SUMTRE	sumatoria de las ordenadas con índice múltiplo de tres + uno

Para el programa principal:

N	cantidad de puntos en que se discretiza la función
H	espaciamiento entre las abscisas de los puntos muestrales
Y(I)	valores discretizados de la función que se desea integrar
SINTEG	valor de la integral

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION del programa principal y de la subrutina deberá ser modificada cuando:

$N > 100$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5,F10.0)	N, H
2	(8F10.0)	Y(I), emplear tantas tarjetas como se requieran
.		
.		
.		
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información

e) Diagrama de bloques:

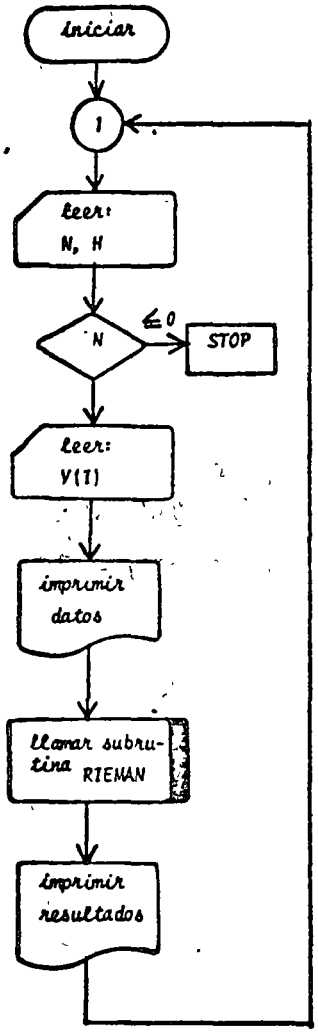


Fig. 8.4 Diagrama de bloques para el programa principal

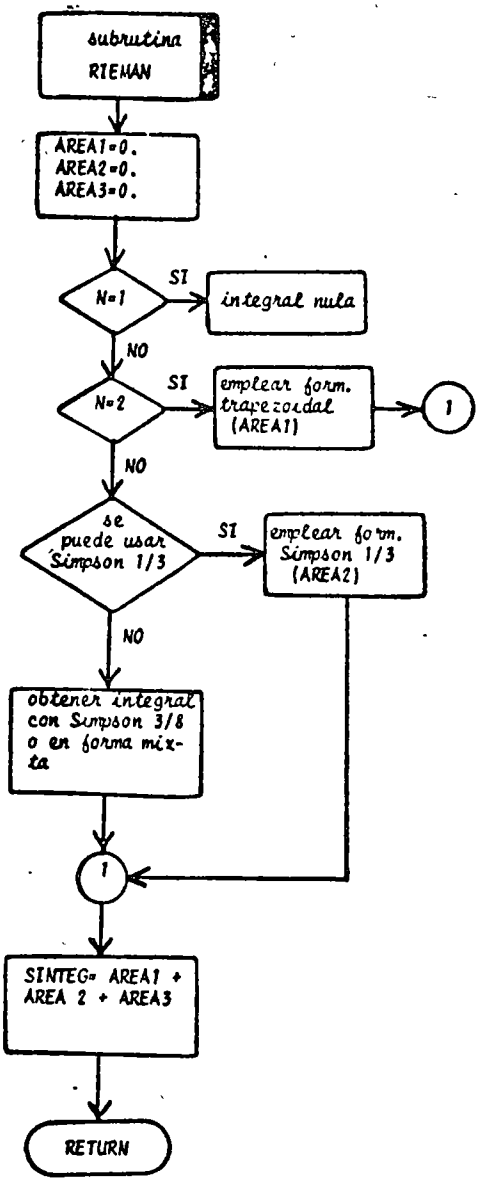


Fig. 8.5 Diagrama de bloques para la subrutina RIEMAN

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA OBTENER LA INTEGRAL DE UNA FUNCION DISCRETIZADA EM-
C    -PLEANDO LOS METODOS DE SIMPSON DE 1/3, SIMPSON 3/8 Y TRAPEZOIDAL
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     N=CANTIDAD DE PUNTOS EN QUE SE DISCRETIZA LA FUNCION
C     Y=VALORES DISCRETIZADOS DE LA FUNCION
C     H=ESPACIAMIENTO ENTRE ABSCISAS
C     SINTEG=INTEGRAL DE LA FUNCION EN EL INTERVALO DADO
      DIMENSION Y(101)
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,100) N,H
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 READ(5,150) (Y(I),I=1,N)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(6,200) N,H
      WRITE(6,250)
      DO 4 I=1,N
    4 WRITE(6,300) I,Y(I)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA INTEGRAR
      CALL PIEMAN(N,H,Y,SINTEG)
C     IMPRESION DE RESULTADOS
      WRITE(6,350) SINTEG
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT(I5,F10.0)
  150 FORMAT(8F10.0)
  200 FORMAT(1H1,6(/),10X,'CANTIDAD DE PUNTOS MUESTRALES= ',I5,3(/),10X,
     1'ESPACIAMIENTO ENTRE ABSCISAS= ',1PE15.8)
  250 FORMAT(6(/),10X,'LOS VALORES DISCRETIZADOS DE LA FUNCION SON',//,
     110X,'I',15X,'Y(I)',/)
  300 FORMAT(/,8X,I5,7X,1PE15.8)
  350 FORMAT(6(/),10X,'EL VALOR DE LA INTEGRAL EN EL INTERVALO ES= ',1PE
     115.8)
      END
```

Fig. 8.6 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE RIEMAN(N,H,Y,SINTEG)
C     SUBRUTINA PARA EFECTUAR INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO TRAPE-
C     ZOIDAL, SIMPSON DE 1/3, SIMPSON DE 3/8
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS.
C     N=CANTIDAD DE PUNTOS EN QUE SE DISCRETIZA LA FUNCION POR INTEGRAR
C     H=ESPACIAMIENTO ENTRE LAS ABSCISAS DE LOS PUNTOS MUESTRALES
C     Y=VALORES DISCRETIZADOS DE LA FUNCION
C     SINTEG=INTEGRAL DE LA FUNCION
C     AREA1=INTEGRAL POR EL METODO TRAPEZOIDAL
C     AREA2=INTEGRAL POR EL METODO DE SIMPSON DE 1/3
C     AREA3=INTEGRAL POR EL METODO DE SIMPSON DE 3/8
C     L=CONTADOR DE PUNTOS MUESTRALES YA UTILIZADOS PARA EVALUAR LA IN-
C        TEGRAL
C     SUMPAR=SUMATORIA DE ORDENAS DE INDICE PAR
C     SUMTRE=SUMATORIA DE ORDENADAS CON INDICE MULTIPLO DE 3 + UNO
C     SUMRES=SUMATORIA DEL RESTO DE ORDENADAS
      DIMENSION Y(101),L(101)
      AREA1=0.0
      AREA2=0.0
      AREA3=0.0
C     INDAGAR LA CANTIDAD DE PUNTOS MUESTRALES PARA SELECCIONAR EL METO-
C     DO DE INTEGRACION
      IF(N.EQ.1) GO TO 17
      IF(N.EQ.2) GO TO 1
      M=(N-1)/2
      IF(2*M.EQ.(N-1)) GO TO 2
      M=(N-1)/3
      IF(3*M - (N-1)) 13,6,13
C     INTEGRACION POR EL METODO TRAPEZOIDAL
    1 AREA2=(H*(Y(1)+Y(2)))/2.0
      GO TO 17
C     INTEGRACION POR EL METODO DE SIMPSON DE 1/3
    2 SUMPAR=0.0
      IF(N.EQ.3) GO TO 4
      DO 3 I=3,N-2,2
    3 SUMPAR=SUMPAR + Y(I)
    4 SUMRES=0.0
      DO 5 I=2,N-1,2
    5 SUMRES=SUMRES + Y(I)
      AREA2=(H*(Y(1) + Y(N) + 2.0*SUMPAR + 4.0*SUMRES))/3.0
      GO TO 17
C     INTEGRACION POR EL METODO DE SIMPSON DE 3/8
    6 SUMTRE=0.0
      DO 7 I=1,N
    7 L(I)=0
      IF(N.EQ.4) GO TO 10
      DO 8 I=4,N-3,3
      SUMTRE=SUMTRE + Y(I)
    8 L(I)=I
      SUMRES=0.0
      DO 9 I=2,N-1
      IF(I.EQ.L(I)) GO TO 9
      SUMRES=SUMRES + Y(I)
    9 CONTINUE
      GO TO 12
   10 SUMRES=0.0
      DO 11 I=2,N-1
   11 SUMRES=SUMRES + Y(I)
   12 AREA3=(3.0*H*(Y(1) + Y(N) + 2.0*SUMTRE + 3.0*SUMRES))/8.0
      GO TO 17
C     INTEGRACION COMBINANDO LOS METODOS DE SIMPSON DE 1/3 Y DE 3/8
   13 NN=N-3
      SUMPAR=0.0
      IF(NN.EQ.3) GO TO 15
      DO 14 I=3,NN-2,2
   14 SUMPAR=SUMPAR + Y(I)
   15 SUMRES=0.0
      DO 16 I=2,NN-1,2
   16 SUMRES=SUMRES + Y(I)
      AREA2=(H*(Y(1) + Y(NN) + 2.0*SUMPAR + 4.0*SUMRES))/3.0
      AREA3=(3.0*H*(Y(N-3) + Y(N) + 3.0*(Y(N-2) + Y(N-1))))/8.0
C     SUMAR TODAS LAS AREAS PARCIALES
   17 SINTEG=AREA1 + AREA2 + AREA3
      RETURN
```

Fig. 8.7 Listado de la subrutina RIEMAN

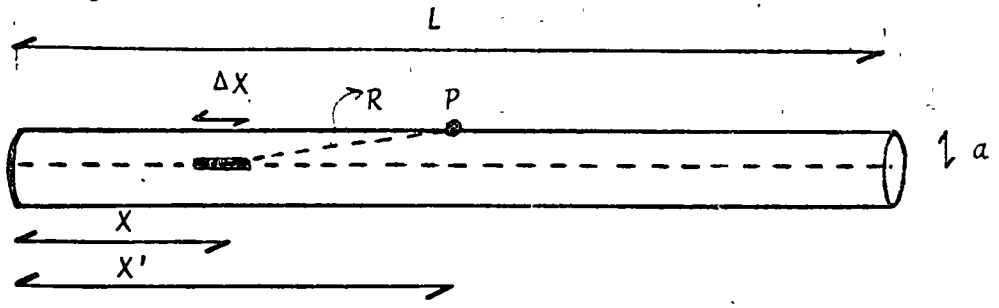
8.2.4 Ejemplo

El potencial debido a una densidad de carga homogénea en una región está dado por:

$$v = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i \, \Delta V_i}{R_i}$$

- ε : permitividad del medio
- ρ : densidad volumétrica de carga
- ΔV : diferencial de volumen
- R_i : distancia de la carga al punto considerado

Si se tiene una varilla larga con distribución superficial de carga ρ_L coulombs/m como se muestra:



la contribución de potencial en el punto X' debido a ΔX será:

$$v = \frac{\rho_L \, \Delta X}{4\pi\varepsilon \sqrt{(X'-X)^2 + a^2}}$$

el potencial total debido a toda la carga es:

$$v_{X'} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \int_0^L \frac{dX}{\sqrt{(X'-X)^2 + a^2}}$$

Determine numéricamente el valor del potencial para $X' = \frac{L}{2}$

si se sabe que:

$L = 10$ m

$a = 0.01$ m

$\rho_L = 10^{-9}$ coul/m

$\varepsilon = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

Fraccionar el intervalo de integración en 20 partes..

*SOLUCION

TABLA 8.1 Datos para el problema del ejemplo 8.2.4

N=21

H=0.5

I	X(I)	Y(I)
1	0.0	1.798
2	0.5	1.997
3	1.0	2.247
4	1.5	2.568
5	2.0	2.996
6	2.5	3.595
7	3.0	4.493
8	3.5	5.991
9	4.0	8.987
10	4.5	17.972
11	5.0	898.774
12	5.5	17.972
13	6.0	8.987
14	6.5	5.991
15	7.0	4.493
16	7.5	3.595
17	8.0	2.996
18	8.5	2.568
19	9.0	2.247
20	9.5	1.997
21	10.0	1.798

TABLA 8.2 Resultados del problema del ejemplo 8.2.4

CANTIDAD DE PUNTOS MUESTRALES= 21

ESPACIAMIENTO ENTRE ABSCISAS= 5.00000000E-01

LOS VALORES DISCRETIZADOS DE LA FUNCION SON

I	Y(I)
1	1.79754500E+00
2	1.99727100E+00
3	2.24692900E+00
4	2.56791500E+00
5	2.99589700E+00
6	3.59506800E+00
7	4.49381500E+00
8	5.99169500E+00
9	8.98729000E+00
10	1.79718900E+01
11	8.98774200E+02
12	1.79718900E+01
13	8.98729000E+00
14	5.99169500E+00
15	4.49381500E+00
16	3.59506800E+00
17	2.99589700E+00
18	2.56791500E+00
19	2.24692850E+00
20	1.99727100E+00
21	1.79754480E+00

EL VALOR DE LA INTEGRAL EN EL INTERVALO ES= 3.55504987E+02

8.3 Bibliografía

1. JAMES M., SMITH G., WOLFORD J., "Applied Numerical Methods for Digital Computation with FORTRAN". Scranton Penn.: International Textbook Co., 1967. pp.272-290.
2. KUO S. Shan , "Computer Applications of Numerical Methods". Reading Mass.: Addison-Wesley Co., 1972. pp.274-312.
3. OLIVERA S. Antonio, "Apuntes de Métodos Numéricos". México: Fac. de Ingeniería UNAM, 1972. pp.5.31-5.41.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 7: SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

SEPTIEMBRE, 1977.

9. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

9.1 Introducción

La formulación y el planteamiento matemático de una gran cantidad de problemas ingenieriles, especialmente de sistemas dinámicos, conduce a la obtención de ecuaciones diferenciales que pueden ser de tipo ordinario o parcial.

Ecuaciones diferenciales ordinarias son aquellas en las que la variable dependiente solo es función de una variable independiente, por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ z &= g(t) \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

En muchas ocasiones la solución exacta de las ecuaciones diferenciales no existe, o es muy complicado el obtenerla, de ahí la necesidad de contar con métodos de tipo numérico que ofrezcan un camino alternativo de solución.

Para una ecuación diferencial ordinaria se definen los siguientes conceptos: orden y grado.

El orden está dado por la mayor derivada de la variable dependiente que se presente en la ecuación diferencial; el grado es la mayor potencia a la cual está elevada la variable dependiente o alguna de sus derivadas en la ecuación diferencial.

La forma más general de una ecuación diferencial ordinaria de orden "n" es:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \; * \qquad (9.2)$$

Otra clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias es en base a la linealidad de las mismas. Una ecuación diferencial ordinaria es lineal si la ecuación diferencial se puede expresar como una combinación lineal de la variable dependiente y de todas sus derivadas.

---

* $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Para que la solución de una ecuación diferencial ordinaria sea única se requiere especificar tantas condiciones iniciales o valores en la frontera como el orden de la ecuación diferencial. De acuerdo con lo anterior se clasifican los problemas ingenieriles que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias en dos tipos: problemas con valores iniciales y problemas con valores en la frontera.

Un problema de valores iniciales se caracteriza porque toda la información concerniente al problema se especifica en un solo punto. Un problema con valores en la frontera es aquél para el cual toda la información se especifica en dos o más puntos diferentes.

Este capítulo se enfoca a obtener la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante diversos métodos numéricos. No se tratan ecuaciones de mayor orden dado que cualquier ecuación diferencial de orden "n" se puede descomponer en un sistema de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden como se verá en el capítulo 10. Para problemas con valores en la frontera solo se menciona el método de diferencias finitas.

9.2 Solución General de una Ecuación Diferencial Ordinaria, Lineal y Homogénea

9.2.1 Objeto

Obtener la solución general de una ecuación diferencial lineal ordinaria del siguiente tipo:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (9.3)$$

$$y = y(t)$$

9.2.2 Método

La solución de una ecuación diferencial ordinaria, lineal y homogénea está en función de las raíces del polinomio característico de dicha ecuación, el cual es:

$$S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (9.4)$$

Las raíces de dicho polinomio pueden englobarse en los siguientes tipos:

a) raíces reales diferentes,
b) raíces reales repetidas,
c) raíces complejas diferentes,
d) raíces complejas repetidas.

La solución correspondiente a cada uno de estos cuatro tipos de raíces se menciona a continuación.

Raíces Reales Diferentes

En este caso si existen "m" raíces reales diferentes S_1, S_2, . . . , S_m ; la solución general correspondiente es:

$$y = B_1 e^{S_1 t} + B_2 e^{S_2 t} + \ldots + B_m e^{S_m t} \qquad (9.5)$$

Raíces Reales Repetidas

Si existe una raíz S_i repetida "m" veces, la solución general para dicha raíz es:

$$y = (B_1 + B_2 t + \ldots + B_m t^{m-1})\, e^{S_i t} \qquad (9.6)$$

Raíces Complejas Diferentes

Las raíces complejas siempre aparecen por pares conjugados, es decir, si a + jw es raíz de la ecuación característica también debe serlo a - jw y la contribución de cada par conjugado a la solución general será:

$$y = e^{at}(B_1 \cos(wt) + B_2 \operatorname{sen}(wt)) \qquad (9.7)$$

Raíces Complejas Repetidas

Si el par conjugado de raíces complejas a $\pm$ jw aparece repetido "m" veces, su contribución a la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{at}((B_1 + B_2 t + \ldots + B_m t^{m-1}) \cos(wt) + (B_{m+1} + B_{m+2} t + \ldots + B_{2m} t^{m-1}) \operatorname{sen}(wt)) \qquad (9.8)$$

Para la obtención de la solución general mediante una computadora digital los pasos a seguir son:

(1) Leer coeficientes de la ecuación diferencial normalizados con respecto al coeficiente del término que da el orden de la ecuación diferencial

(2) Obtener las raíces del polinomio característico mediante el método de Lin-Bairstow

(3) Contar las raíces repetidas de cada tipo

(4) Dar la contribución de cada raíz a la solución general de acuerdo a su tipo y cantidad de veces que aparece repetida.

9.2.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE RIROO, obtiene las raíces del polinomio característico mediante el método de Lin-Bairstow. Consultar el capítulo 4.

b) Descripción de las variables:

Para el programa principal:

CTE(I)	constantes arbitrarias de la solución general
X(I)	caracter alfanumérico igual a X^i , donde X es la variable independiente
NC	orden de la ecuación diferencial
A(I)	coeficientes de la ecuación diferencial
LMAX	máximo número de iteraciones a efectuar para encontrar las raíces de la ecuación característica auxiliar
RZERO y SZERO	valores de arranque para la búsqueda de las raíces
EPS	criterio de convergencia para el método de Lin-Bairstow
CEREQ	criterio para redondeamiento de raíces
NUM	variable que indica si se encontraron todas las raíces
NIM(I)	identificador de raíces complejas
NCON	contador de raíces repetidas
L	contador de raíces repetidas de un solo tipo

LEPER(I) contador que identifica a las raíces iguales de un solo tipo
RARE(I) parte real de raíces reordenadas
RAIM(I) parte imaginaria de raíces reordenadas
RTREA(I) parte real de raíces sin reordenar
RTIMA(I) parte imaginaria de raíces sin reordenar

c) Dimensiones:

Las proposiciones DIMENSION, COMMON y DATA deberán modificarse en el caso de que el orden de la ecuación diferencial sea mayor que 20.

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC.TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I2)	NC
2	(8F10.0)	A(I), el coeficiente del término que da el orden de la ecuación debe ser unitario y no se proporciona.
.		
.		
.		
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

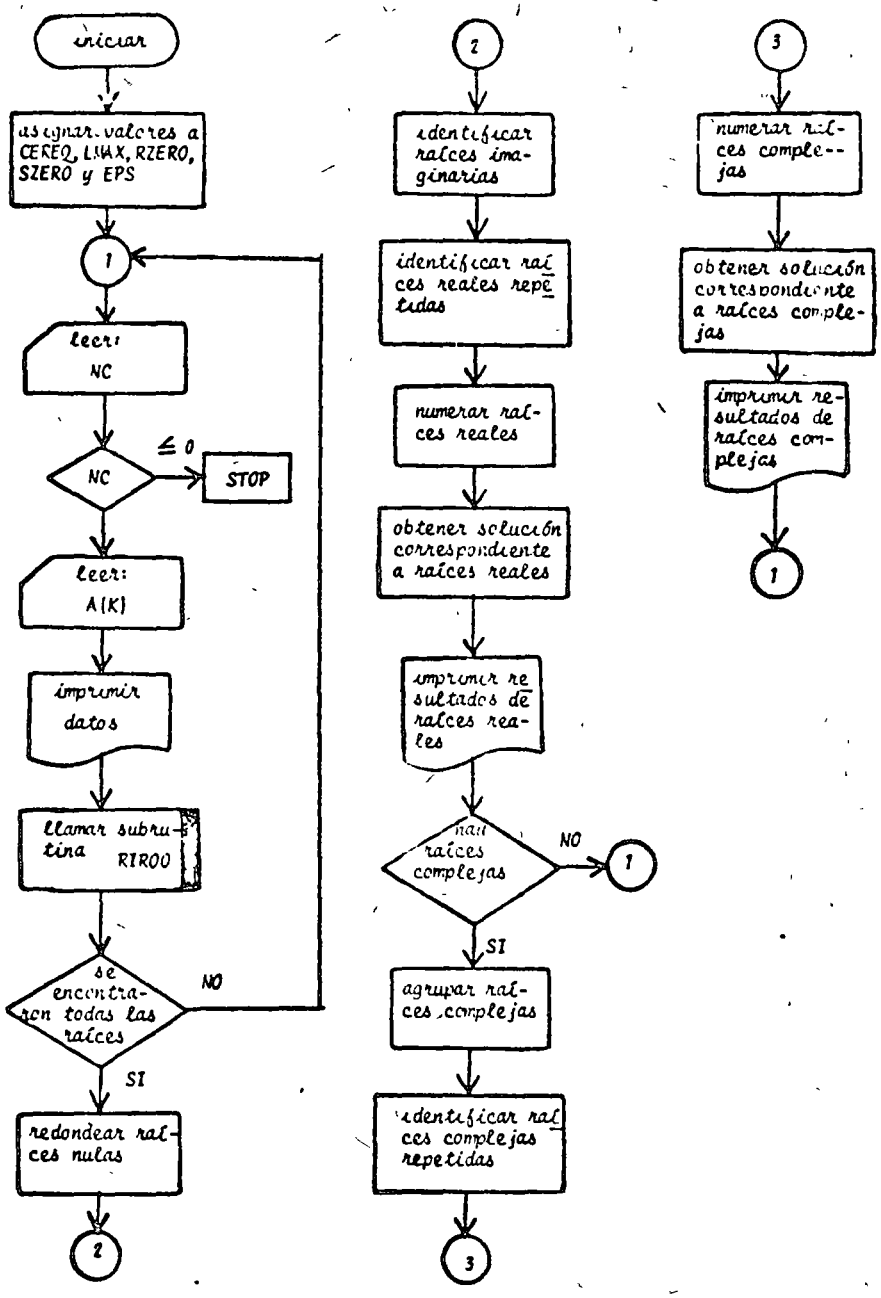


Fig. 9.1 Diagrama de bloques para el programa principal

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     CTE=CONSTANTE ARBITRARIAS
C     X=X
C     NC=ORDEN DE LA ECUACION DIFERENCIAL
C     LMAX=MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES
C     EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA
C     RZERO Y SZERO= VALORES DE ARRANQUE PARA LA BUSQUEDA DE RAICES
C     A=COEFICIENTES DE LA ECUACION DIFERENCIAL
C     RTREA Y RTIMA= PARTE REAL E IMAGINARIA DE LAS RAICES
C     CEREO=CRITERIO DE REDONDEAMIENTO DE RAICES NULAS
C     NUM=VARIABLE QUE INDICA SI SE ENCONTRARON O NO TODAS LAS RAICES
C     NIM=IDENTIFICADOR DE RAICES COMPLEJAS
C     NCON=CONTADOR DE RAICES REPETIDAS
C     L=CANTIDAD DE RAICES IGUALES REPETIDAS
C     LEPER=CONTADOR QUE IDENTIFICA LAS RAICES IGUALES DE UN TIPO
C     RARE=PARTE REAL DE RAICES REORDENADAS
C     RAIM=PARTE IMAGINARIA DE RAICES REORDENADAS
C     EL COEFICIENTE DEL TERMINO QUE DA EL ORDEN DE LA EC.DIF. DEBE SER
C     UNITARIO.

      DIMENSION CTE(30),X(20),NIM(20),LLPER(20),RARE(20),RAIM(20)
      COMMON A(20),NC,EPS,LMAX,RZERO,SZERO,RTREA(20),RTIMA(20),NUM
      DATA X/' ','X','X**2','X**3','X**4','X**5','X**6','X**7','X**8','X**9','X*
     110','X*11','X*12','X*13','X*14','X*15','X*16','X*17','X*18','X*19'
     2/,CTE/'A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M','N','O',
     3'P','Q','R','S','T','U','V','W','X','Y','Z','BA','BE','BI','BO'/
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,100) NC
      CEREO=1.0E-03
      IF(NC) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 READ(5,150) (A(K),K=1,NC)
      LMAX=500
      RZERO=0.0
      SZERO=0.0
      EPS=0.0000001
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(6,200) NC
      WRITE(6,250)
      WRITE(6,300) (A(K),K=1,NC)
      WRITE(6,350)
C     OBTENCION DE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA
      CALL RTRDS
      IF(NUM-4) 260,260,1
C     REDONDEAMIENTO DE LAS RAICES OBTENIDAS
  260 DO 25 K=1,NC
      IF(ABS(RTREA(K)) - CEREO) 266,266,26
  266 RTREA(K)=0.0
   26 IF(ABS(RTIMA(K))- CEREO) 255,255,25
  255 RTIMA(K)=0.0
   25 CONTINUE
C     IDENTIFICACION DE RAICES IMAGINARIAS
      DO 5 K=1,NC
      IF(RTIMA(K)) 44,4,44
   44 NIM(K)=K
      GO TO 5
    4 NIM(K)=0
    5 CONTINUE
C     GENERACION DEL CONTADOR DE RAICES REPETIDAS
      NCON=0
      DO 6 K=1,NC
    6 LEPER(K)=0
C     OBTENCION DE RAICES REALES
      DO 12 K=1,NC
      IF(NIM(K)-K) 122,12,122
  122 IF(LEPER(K)-K) 123,12,123
  123 L=1.0
      DO 7 J=1,NC
      IF(K-J) 77,7,77
   77 IF(NIM(J)-J) 78,7,78
   78 IF(ABS(RTREA(K)-RTREA(J))-CEREO) 79,79,7
   79 LEPER(J)=J
      L=L+1
    7 CONTINUE
```

```
C     IMPRESION DE RAICES REALES
      NP1=NCON + 1
      LP1=L + 1
      DO 8 I=NP1,LP1
    8 RARE(I)=RTREA(I)
      IF(L-NCON) 101,10,101
C     IMPRESION DE LOS RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LAS RAICES REALES
  101 DO 9 I=1,LP1
      LI=I+NCON
    9 WRITE(6,400) CTE(I),X(LI),RARE(I)
      GO TO 11
   10 WRITE(6,450) CTE(L+1),RARE(L+1)
C     INCREMENTA CONTADOR DE RAICES
   11 NCON=L+1
      IF(NCON-NC) 12,1,12
   12 CONTINUE
C     OBTENCION DE RAICES IMAGINARIAS REPETIDAS O NO
      DO 13 I=1,NC
   13 LEPER(I)=0
      DO 20 I=1,NC
      IF(RTIMA(I)-I) 20,201,20
  201 IF(LEPER(I)-I) 202,20,202
  202 L=NCON
      DO 14 J=1,NC
      IF(I-J) 141,14,141
  141 IF(RTIMA(J)-I) 14,142,14
  142 IF(ABS(RTREA(I)-RTREA(J))-CERED) 143,143,14
  143 PI=ABS(RTIMA(I))-ABS(RTIMA(J))
      IF(ABS(PI)-CERED) 144,144,14
  144 LEPER(J)=J
      L=L+1
   14 CONTINUE
C     ORDENAR RAICES IMAGINARIAS
      NP1=NCON + 1
      LP1=L+1
      DO 15 K=NP1,LP1
      RARE(K)=RTREA(I)
   15 RAIM(K)=ABS(RTIMA(I))
C     IMPRESION DE LOS RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LAS RAICES IMAGINA-
C     RIAS
      IF(L-NP1) 101,16,101
  101 DO 17 K=NP1,LP1,2
      IF(K-NP1) 161,16,161
  161 LI=K-1-NCON
      WRITE(6,500) CTE(K),X(LI),RARE(K),RAIM(K)
      WRITE(6,550) CTE(K+1),X(LI),RARE(K),RAIM(K)
      GO TO 17
   16 LI=K-NCON
      WRITE(6,500) CTE(K),X(LI),RARE(K),RAIM(K)
      WRITE(6,550) CTE(K+1),X(LI),RARE(K),RAIM(K)
   17 CONTINUE
      GO TO 19
   18 WRITE(6,600) CTE(L+1),RARE(L+1),RAIM(L+1)
      WRITE(6,650) CTE(L+2),RARE(L+1),RAIM(L+1)
C     INCREMENTACION DEL CONTADOR DE RAICES
   19 NCON=L+1
      IF(NCON-NC) 2 ,1,20
   20 CONTINUE
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT(I2)
  150 FORMAT (8F10.2)
  200 FORMAT (1H1,///,10X,'EL ORDEN DE LA ECUACION DIFERENCIAL ES',I5)
  250 FORMAT (///,1X,'LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION SON')
  300 FORMAT(//,3X,'I',9X,'CTE(I)',9(2X,E10.3))
  350 FORMAT (5(/),15X,'LA SOLUCION ESTA DADA DE LA SIG. FORMA',//,10X,'C
     1ADA RENGLON ES UN TERMINO DE LA SOLUCION Y LA SOLUCION',//,10X,'EST
     2A DADA POR LA SUMA DE CADA UNO DE LOS TERMINOS',///,15X,'LA SOLUCIO
     3N ES',//)
  400 FORMAT (/,15X,A2,A4,'EXP(',E12.5,')')
  450 FORMAT (/,15X,I2,'EXP(',E12.5,')')
  500 FORMAT (/,15X,A2,A4,'EXP(',E12.5,')COS(',E12.5,')')
  550 FORMAT (/,15X,A2,A4,'EXP(',E12.5,')SEN(',E12.5,')')
  600 FORMAT (/,15X,A2,'EXP(',E12.5,')COS(',E12.5,')')
  650 FORMAT (/,15X,A2,'EXP(',E12.5,')SEN(',E12.5,')')
      END
```

Fig. 9.2 Listado del programa principal

9.2.4 Ejemplo

La ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento de un sistema dinámico sin excitaciones externas es:

$$\frac{d^8y}{dt^8} + 11\frac{d^7y}{dt^7} + 68\frac{d^6y}{dt^6} + 320\frac{d^5y}{dt^5} + 979\frac{d^4y}{dt^4} + 2329\frac{d^3y}{dt^3} +$$

$$+ 4032\frac{d^2y}{dt^2} + 3060\frac{dy}{dt} = 0$$

Obtener la solución general para dicha ecuación diferencial.

*SOLUCION

TABLA 9.1 Datos para el problema del ejemplo 9.2.4

NC= 8

K	A(K)
1	11.
2	68.
3	320.
4	979.
5	2329.
6	4032.
7	3060.
8	0.

TABLA 9.2 Resultados del problema del ejemplo 9.2.4

EL ORDEN DE LA ECUACION DIFERENCIAL ES 8

LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION SON

1.000	.110E+02	.680E+02	.320E+03	.979E+03	.233E+04	.403E+04	.306E+04	0.

LA SOLUCION ESTA DADA DE LA SIG. FORMA
CADA RENGLON ES UN TERMINO DE LA SOLUCION Y LA SOLUCION
ESTA DADA POR LA SUMA DE CADA UNO DE LOS TERMINOS

LA SOLUCION ES

A EXP(0.)

B EXP(-.20000E+01)

C X EXP(-.20000E+01)

D EXP(-.50000E+01)

E EXP(0.)COS(.30000E+01)

F EXP(0.)SEN(.30000E+01)

G EXP(-.10000E+01)COS(.40000E+01)

H EXP(-.10000E+01)SEN(.40000E+01)

9.3 Método de Euler y Euler Mejorado

9.3.1 Objeto

Obtener la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del tipo:

$$y' = f(t,y) \qquad (9.9)$$
$$y(t_0) = y_0$$

por el método de Euler y Euler mejorado. Se puede proporcionar la solución exacta de la ecuación diferencial para visualizar la exactitud del método.

9.3.2 Método

Euler

El encontrar la solución de la expresión (9.9) equivale a determinar el área bajo la curva $f(t,y)$; para tal propósito se muestrea la función a espacios equidistantes a fin de evaluar el área, como se muestra en la siguiente figura:

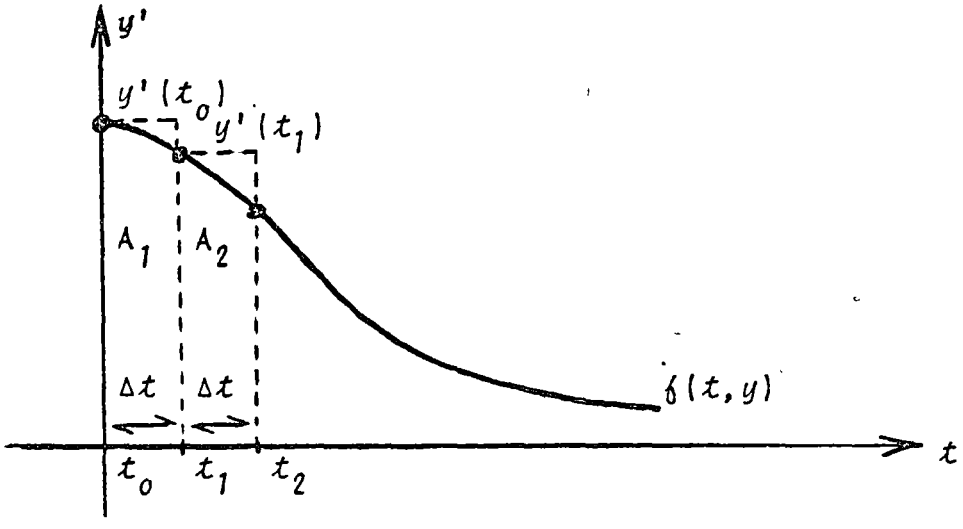


Fig. 9.3 Muestreo de la curva $f(t,y)$

Se sabe que:

$$y' = \frac{dy}{dt} \qquad (9.10)$$

por lo tanto:

$$dy = y'dt \tag{9.11}$$

pasando a valores incrementales:

$$\Delta y = y' \Delta t \tag{9.12}$$

donde $y' \Delta t$ representa el área A_i, por lo que:

$$A_{i+1} = \Delta y = y_{i+1} - y_i = y' \Big|_i \Delta t \tag{9.13}$$

Reacomodando:

$$y_{i+1} = y_i + y' \Big|_i \Delta t \tag{9.14}$$

la expresión (9.14) representa la fórmula de Euler y para arrancar el método se requieren las condiciones iniciales en $t = t_0$, es decir, $y(t_0)$.

Este método es el más sencillo de todos pero tiene el inconveniente de ser el más inexacto dado que el error que produce es del orden de $(\Delta t)^2$. Para tener resultados aceptables se requiere que Δt sea pequeño.

Euler Modificado

El proceso es básicamente igual que el anterior solo que en este caso para cada y_i se efectua una serie de iteraciones a fin de obtener su valor más exacto posible, con lo anterior se logra que el error acumulado disminuya.

El proceso se describe a continuación.

Dada la ecuación diferencial:

$$y' = f(t, y) \tag{9.15}$$

representada en la figura 9.4:

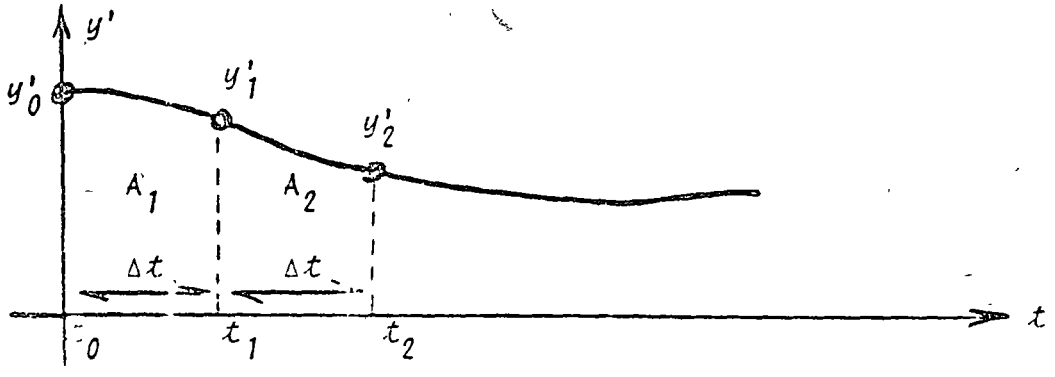


Fig. 9.4 Representación gráfica de $y' = f(t, y)$

Se sabe por el método de Euler que:

$$A_1 = y_1 - y_0 = y_0' \Delta t \qquad (9.16)$$

por lo tanto:

$$y_1 = y_0 + y_0' \Delta t \qquad (9.17)$$

y:

$$y_1' = f(t_1, y_1) \qquad (9.18)$$

dado que se conoce y_1' y y_0' es posible aplicar el método trapezoidal de integración con lo que:

$$y_{1\,corregida} = y_0 + \frac{(y_1' + y_0')}{2} \Delta t \qquad (9.19)$$

el valor de y' se corrige la cantidad de veces que sea necesaria empleando las ecuaciones (9.18) y (9.19) hasta que dos valores sucesivos corregidos difieran menos que un criterio de convergencia ε.

En términos generales será:

$$y_{i+1} = y_i + y'\Big|_i \Delta t \qquad (9.20)$$

$$y'_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \qquad (9.21)$$

$$y_{i+1}^{(corr.1)} = y_i + \frac{(y'_i + y'_{i+1})}{2} \Delta t \qquad (9.22)$$

$$y_{i+1}^{\prime(corr.1)} = f(t_{i+1}^{(corr.1)}, y_{i+1}) \qquad (9.23)$$

$$y_{i+1}^{(corr.2)} = y_{i+} \frac{(y'_i + y_{i+1}^{\prime(corr.2)})}{2} \Delta t \qquad (9.24)$$

y así sucesivamente hasta que:

$$\left| y_{i+1}^{(corr.j)} - y_{i+1}^{(corr.j-1)} \right| < \varepsilon \qquad (9.25)$$

para cada y_{i+1}.

9.3.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE FUNCT (C, D, F, G), en esta subrutina se proporciona la ecuación diferencial y su solución exacta en el caso de que se deseen comparar resultados.

SUBROUTINE GRAFI (A, N, M), gráfica los resultados de la ecuación diferencial dados por el método de Euler, Euler mejorado y la solución exacta en caso de haberse proporcionado. Consultar capítulo 1.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina FUNCT:

C	valor de t_i
D	valor de y_i cuando se evalua y_{i+1}
G	$f(t, y)$
F	expresión correspondiente a la solución exacta

Para el programa principal:

N	cantidad de puntos en que se subdivide el intervalo de integración
S	espaciamiento entre puntos muestrales - (Δt)
X(1)	tiempo inicial (t_0)
Y(1)	condición inicial ($y(t_0)$)
X(I)	abscisas
Y(I)	solución obtenida por Euler
Z(I)	solución obtenida por Euler Mejorado
W(I)	solución exacta
F	valor de la solución exacta en el punto t_i
G	valor de la derivada en el punto (t_i, y_i)
KEXAC	variable que indica si se proporciona o no la solución exacta
V	variable de reemplazo
D	variable de reemplazo

EPS	criterio de convergencia para el método de Euler Mejorado
A(I, J)	arreglo matricial para formar la gráfica

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION deberá modificarse si se cumple que:

$N > 100$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC.TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5,3F10.0)	N, S, X(1), Y(1)
2	(I1)	KEXAC, puede adquirir los siguientes valores: 1 si no se da solución -- exacta 0 cuando se da solución - exacta
		---
		otros paquetes de datos (opcional)
		---
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

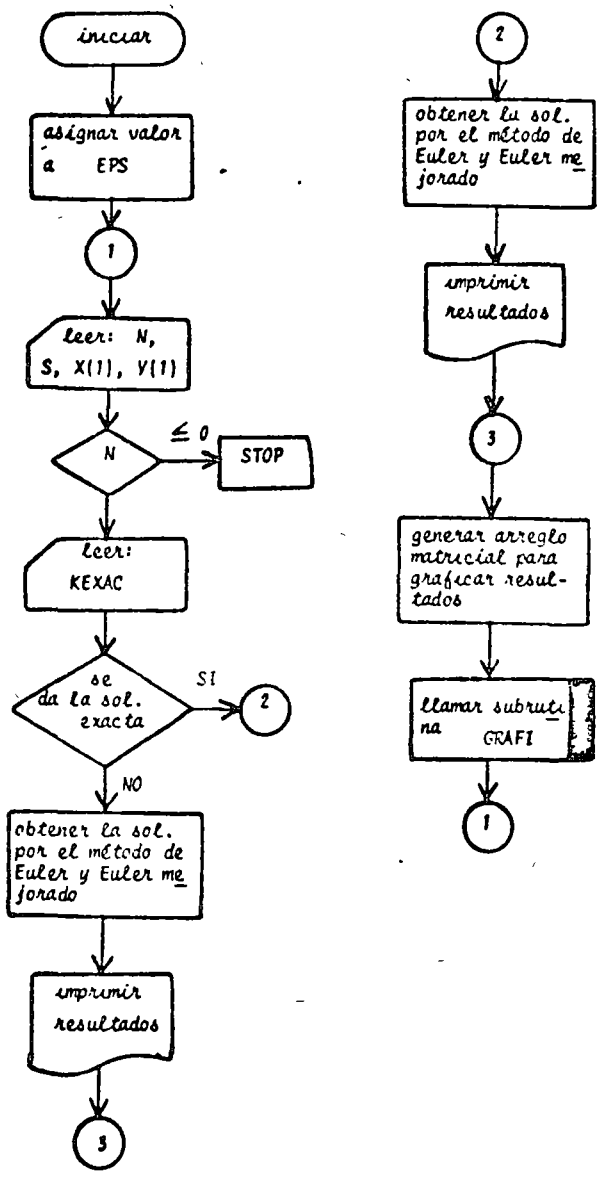


Fig. 9.5 Diagrama de bloques del programa principal

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO DE
C --- EULER, EULER MEJORADO Y EXACTO(OPCIONAL)
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C ... N=CANTIDAD DE PUNTOS EN QUE SE SUBDIVIDE EL INTERVALO DE INTEGRA=
C         CION
C     S=ESPACIAMIENTO ENTRE ABSCISAS
C     X(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     Y(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE
C ... X=VALOR DE LAS ABSCISAS
C ... Y=SOLUCION POR EL METODO DE EULER
C ... Z=SOLUCION POR EL METODO DE EULER MEJORADO
C     W=SOLUCION EXACTA
C     F=VALOR DE LA SOLUCION EXACTA EN EL PUNTO X(I)
C     G=VALOR DE LA DERIVADA EN EL PUNTO X(I)
C ... EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA EL METODO DE EULER MEJORADO
C ... KEXAC=VARIABLE QUE INDICA SI SE PROPORCIONA O NO LA SOLUCION EXAC=
C         TA

      DIMENSION X(101),Y(101),Z(101),W(101),A(101,6)
      WRITE(6,100)
C ... LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,200) N,S,X(1),Y(1)
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 READ(5,250) KEXAC
      EPS=0.001
C     INDAGAR SI SE DA O NO LA SOLUCION EXACTA
      IF(KEXAC) 51,5,51
C     OBTENCION DE LA SOLUCION CUANDO NO SE DA SOLUCION EXACTA
   51 Z(1)=Y(1)
      DO 4 I=2,N
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=Y(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      Y(I)=Y(I-1) + S*G
      U=X(I)
      D=Z(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      V=Z(I-1) + S*G
      G1=G
      CALL FUNCT(U,V,F,G)
      Z(I)=Z(I-1) +((G1 + G)*S)/2.0
      DO 20 L=1,50
      V=Z(I)
      CALL FUNCT(U,V,F,G)
      Z(I)=Z(I-1) + ((G1 + G)*S)/2.0
      IF(ABS(ABS(V)-ABS(Z(I)))-EPS) 4,4,20
   20 CONTINUE
    4 CONTINUE
      GO TO 7
C     OBTENCION DE LA SOLUCION CUANDO SI SE DA SOLUCION EXACTA
    5 Z(1)=Y(1)
      W(1)=Y(1)
      DO 6 I=2,N
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=Y(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      Y(I)=D + S*G
      U=X(I)
      CALL FUNCT(U,D,F,G)
      W(I)=F
      D=Z(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      V=D + S*G
      G1=G
      CALL FUNCT(U,V,F,G)
      Z(I)=D + ((G1 + G)*S)/2.0
```

```
      DO 21 I=1,50
      V=Z(I)
      CALL FUNCT(C,V,F,G)
      Z(I)=Z + ((G1 + G)*S)/2.0
      IF(ABS(ABS(V)-ABS(Z(I)))-EPS) 6,6,21
   21 CONTINUE
    6 CONTINUE
C     IMPRIMIR ESPACIAMIENTO USADO
    7 WRITE(6,300) S
      IF(NEXAC) 101,10,101
C     IMPRESION DE RESULTADOS SIN SOLUCION EXACTA
  101 WRITE(6,450)
      DO 8 I=1,N
    8 WRITE(6,550) X(I),Y(I),Z(I)
C     GENERAR MATRIZ NECESARIA PARA GRAFICAR RESULTADOS SIN SOLUCION
C     EXACTA.
      M=3
      DO 9 I=1,N
      A(I,1)=X(I)
      A(I,2)=Y(I)
    9 A(I,3)=Z(I)
      GO TO 13
C     IMPRESION DE RESULTADOS CON SOLUCION EXACTA
   10 WRITE(6,400)
      DO 11 I=1,N
   11 WRITE(6,500) X(I),Y(I),Z(I),W(I)
C     GENERAR MATRIZ PARA GRAFICAR RESULTADOS CON SOLUCION EXACTA
      M=4
      DO 12 I=1,N
      A(I,1)=X(I)
      A(I,2)=Y(I)
      A(I,3)=Z(I)
   12 A(I,4)=W(I)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA GRAFICAR
   13 CALL GRAFI(A,N,M)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT (1H1,30(/),32X,'SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL POR LO
     1S METODOS DE',/,23X,'EULER,EULER MEJORADO Y EXACTO(OPCIONAL), CON
     2LAS GRAFICAS CORRESPONDIENTES')
  200 FORMAT (I5,3F10.0)
  250 FORMAT (I1)
  300 FORMAT (1H1,//,15X,'EL ESPACIAMIENTO USADO FUE ',F8.5)
  400 FORMAT (///,17X,'X',20X,'EULER',12X,'EULER MEJORADO',12X,'EXACTO',
     1/)
  450 FORMAT (///,10X,'X',18X,'EULER',12X,'EULER MEJORADO',/)
  500 FORMAT (/,12X,F10.5,10X,3(E12.5,10X))
  550 FORMAT (/,13X,F10.5,10X,2(E12.5,10X))
      END
```

Fig. 9.6 Listado del programa principal

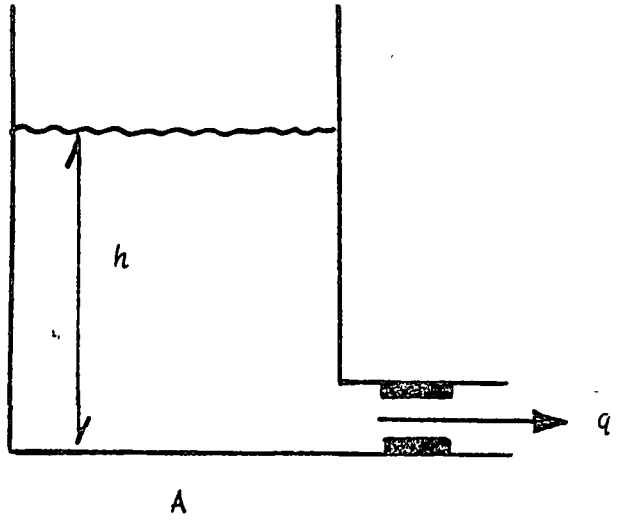
```
      SUBROUTINE FUNCT(C,D,F,G)
      F = SQRT(4./(0.8*C + 1.0))
      G = -0.1*D**3 + 0.2*C
      RETURN
      END
```

Fig. 9.7 Listado de la subrutina FUNCT

9.3.4 Ejemplo

La variación de la altura del sistema hidráulico de la - Fig. (9.8) se encuentra caracterizada por la siguiente ecua--- ción diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{K}{A} h^3$$



γ : peso específico

$K = 0.1\,\gamma$

$q = Kh^2$

Fig. 9.8 Sistema hidráulico del problema del ejemplo 9.3.4

La solución analítica de dicha ecuación diferencial es:

$$h(t) = \sqrt{\frac{A\,h_0^2}{2Kh_0^2 t + A}}\,, \quad h_0 = h(t)\Big|_{t = t_0}$$

Determine la altura $h(t)$ por el método de Euler y Euler Mejorado, compare sus resultados con la solución exacta. Consi dérese lo siguiente:

$h_0 = 2\ m$

$A = 1\ m^2$

$K = 0.1 \quad 1/S$

$t_0 = 0.\ Seg$

$\Delta t = 0.5\ Seg$

$t_{final} = 45\ seg$

* SOLUCION

TABLA 9.3 Datos del problema del ejemplo 9.3.4

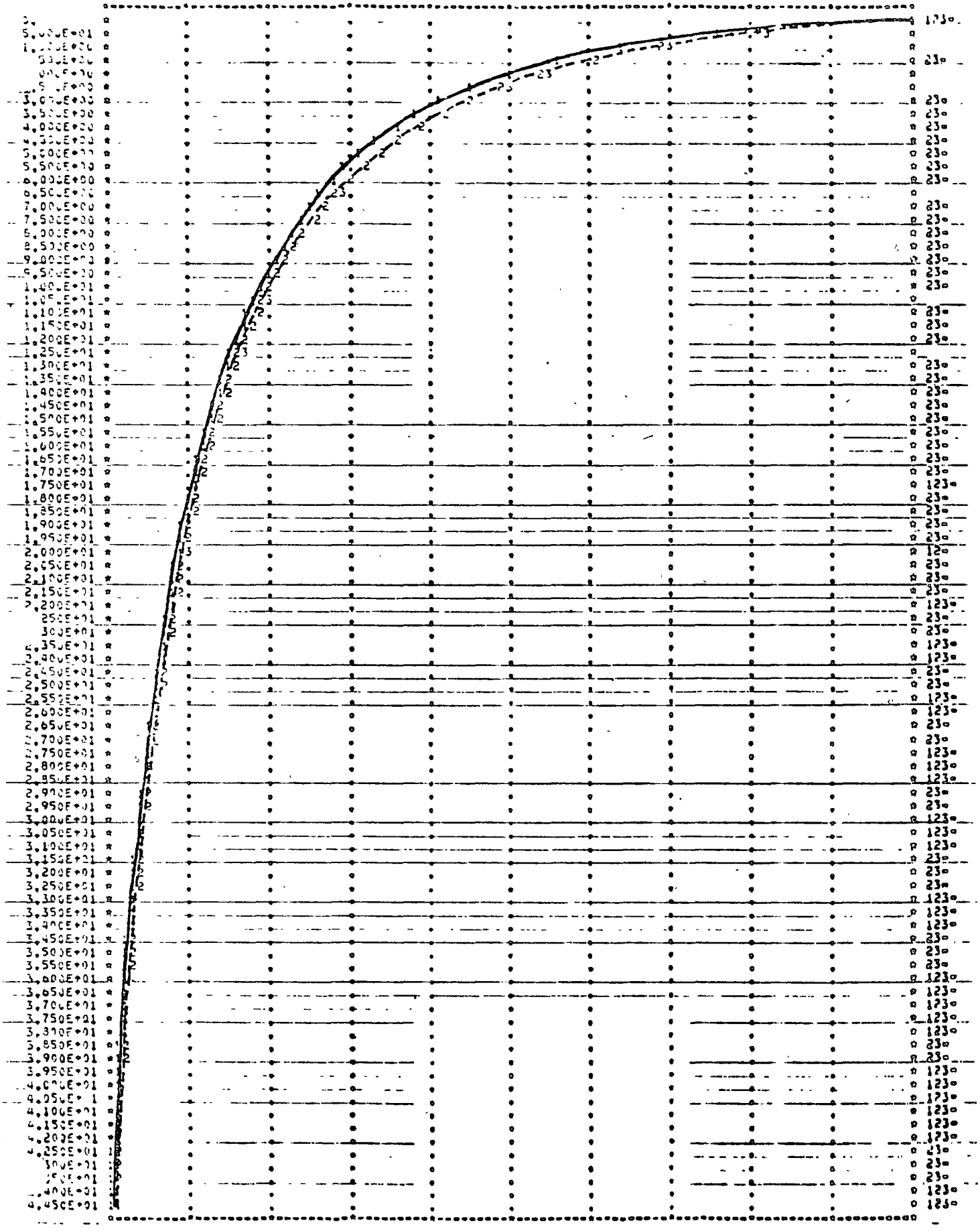
```
N = 90
S = 0.5
X(1) = 0.
Y(1) = 2.
KEXAC = 0
```

```
F(C) = SQRT (4./(0.8*C + 1.))
G(C, D) = - 0.1*D**3 + 0.*C
```

TABLA 9.4 Resultados del problema del ejemplo 9.3.4

EL ESPACIAMIENTO USADO FUE 0.50000

X	EULER	EULER MEJORADO	EXACTO
0.00000	.20000E+01	.20000E+01	.20000E+01
0.50000	.16030E+01	.16810E+01	.16903E+01
1.00000	.13952E+01	.14810E+01	.14907E+01
1.50000	.12594E+01	.13398E+01	.13484E+01
2.00000	.11595E+01	.12328E+01	.12403E+01
2.50000	.10816E+01	.11481E+01	.11547E+01
3.00000	.10183E+01	.10788E+01	.10847E+01
3.50000	.96552E+00	.10208E+01	.10260E+01
4.00000	.92051E+00	.97126E+00	.97590E+00
4.50000	.88151E+00	.92834E+00	.93250E+00
5.00000	.84726E+00	.89066E+00	.89443E+00
5.50000	.81685E+00	.85725E+00	.86066E+00
6.00000	.78960E+00	.82733E+00	.83045E+00
6.50000	.76499E+00	.80036E+00	.80322E+00
7.00000	.74260E+00	.77586E+00	.77850E+00
7.50000	.72213E+00	.75349E+00	.75593E+00
8.00000	.70330E+00	.73295E+00	.73521E+00
8.50000	.68591E+00	.71400E+00	.71611E+00
9.00000	.66977E+00	.69646E+00	.69843E+00
9.50000	.65475E+00	.68015E+00	.68199E+00
10.00000	.64071E+00	.66493E+00	.66667E+00
10.50000	.62756E+00	.65069E+00	.65233E+00
11.00000	.61520E+00	.63733E+00	.63888E+00
11.50000	.60356E+00	.62476E+00	.62622E+00
12.00000	.59257E+00	.61291E+00	.61430E+00
12.50000	.58217E+00	.60171E+00	.60302E+00
•			•
•			•
•			•
43.00000	.33084E+00	.33590E+00	.33615E+00
43.50000	.32903E+00	.33402E+00	.33426E+00
44.00000	.32725E+00	.33218E+00	.33241E+00
44.50000	.32550E+00	.33036E+00	.33059E+00



9.4 Método de Runge-Kutta

9.4.1 Objeto

Obtener la solución de una ecuación diferencial de primer orden del tipo:

$$y' = f(t, y) \tag{9.26}$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$, por el método de Runge-Kutta con la opción de comparar la solución numérica con la solución exacta.

9.4.2 Método

El método de Runge-Kutta emplea la fórmula de recurrencia:

$$y_{i+1} = y_i + A_1K_1 + A_2K_2 + \ldots + A_nK_n \tag{9.27}$$

para evaluar los valores sucesivos de la variable dependiente de la ecuación (9.26). Los parámetros K_j se determinan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
K_1 &= (\Delta t) f(t_i, y_i) \\
K_2 &= (\Delta t) f(t_i + p_1 \Delta t, y_i + q_{11}K_1) \\
K_3 &= (\Delta t) f(t_i + p_2 \Delta t, y_i + q_{21}K_1 + q_{22}K_2) \\
&\vdots \\
K_n &= (\Delta t) f(t_i + p_{n-1} \Delta t, y_i + q_{n-1,1}K_1 + q_{n-1,2}K_2 + \\
&\qquad + \ldots + q_{n-1,n-1}K_{n-1})
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Los valores de A, p y q se obtienen al igualar la ecuación (9.27) con cierto número de términos del desarrollo por serie de Taylor de la variable y.

Dependiendo del valor de "n" en la ecuación (9.27) se habla del método de Runge-Kutta de orden "n". El orden del error producido por el método es $(\Delta t)^{n+1}$ donde Δt es el espaciamiento entre los valores de la variable independiente.

El desarrollo mediante serie de Taylor para la variable

y_{i+1} dado que se conoce el valor y_i es:

$$y_{i+1} = y_i + (\Delta t) y_i' + \ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} y_i^{(n)} + \ldots \quad (9.29)$$

Para el programa se emplearon fórmulas de Runge-Kutta de cuarto orden, las cuales son:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = (\Delta t) f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = (\Delta t) f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = (\Delta t) f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = (\Delta t) f(t_i + \Delta t, y_i + K_3) \quad (9.30)$$

Geométricamente los valores K_1, K_2, K_3 y K_4 representan las pendientes (derivadas de la curva) en diferentes puntos del intervalo (t_i, t_{i+1}).

9.4.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE FUNCT(C,D,F,G), en esta subrutina se proporciona la ecuación diferencial y su solución exacta en caso de conocerse.

SUBROUTINE GRAFI(A,N,M), grafica la solución obtenida de la ecuación diferencial por el método de Runge-Kutta y el exacto en caso de haberse proporcionado.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina FUNCT:

C	valor de t_i
D	valor de y_i
G	$f(t,y)$
F	solución exacta de la ecuación diferencial

Para el programa principal:

N	cantidad de puntos en que se subdivide el intervalo
S	espaciamiento entre las abscisas
X(1)	valor inicial de la variable independiente
Y(1)	valor inicial de la variable dependiente
KEXAC	variable que informa si se da o no la solución exacta
RUNGE(I)	valores de la solución obtenidos por el método de Runge-Kutta
Y(I)	valores de la solución exacta
F	solución exacta de la ecuación diferencial
G	ecuación diferencial
C	variable de reemplazo
D	variable de reemplazo
RUK(I)	valor de los parámetros K_j que emplea el método
A(I,J)	arreglo matricial para trazar la gráfica

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION se deberá modificar cuando se presente el caso de que:

$N > 100$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC.TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5,3F10.0)	N,S,X(1),Y(1)
2	(I1)	KEXAC, puede adquirir dos valores: 1 cuando no se da sol.exacta 0 cuando se da solución exacta
	---	---
	otros paquetes de datos (opcional)	
	---	---
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información

e) Diagrama de bloques:

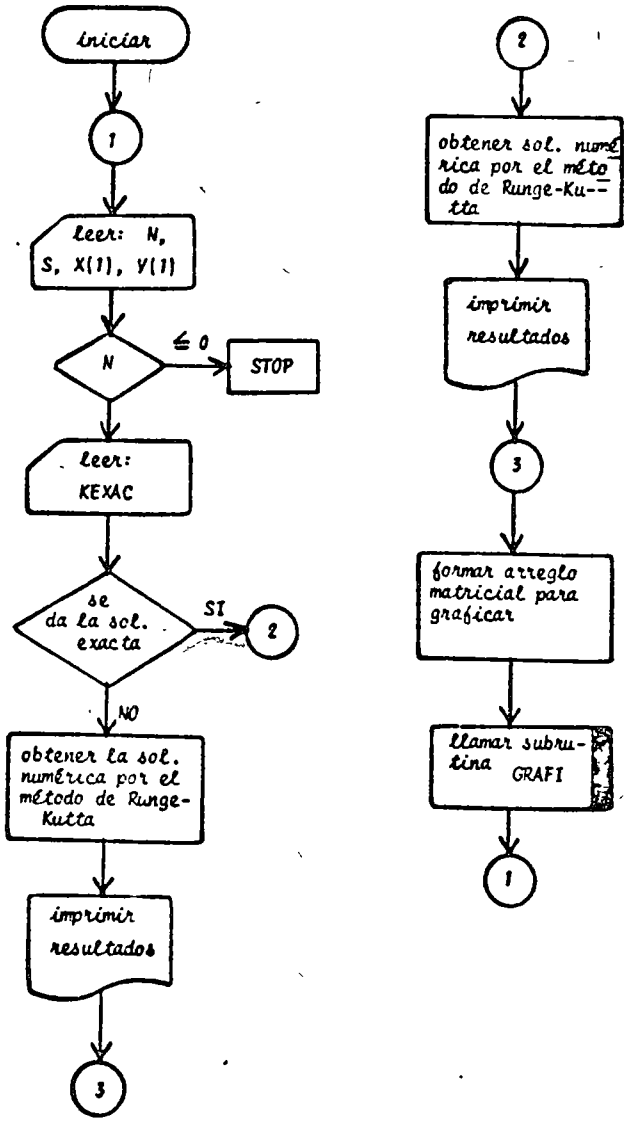


Fig. 9.9 Diagrama de bloques del programa principal

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO DE
C     RUNGE-KUTTA
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     N=CANTIDAD DE PUNTOS EN QUE SE SUBDIVIDE EL INTERVALO
C     S=ESPACIAMIENTO ENTRE ABSCISAS
C     X(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     Y(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE
C     KEXAC=PARAMETRO QUE INFORMA SI SE DA O NO LA SOLUCION EXACTA
C     RUNGE=VALORES DE LA SOLUCION POR EL METODO DE RUNGE-KUTTA
C     Y=VALORES DE LA SOLUCION EXACTA
C     F=SOLUCION EXACTA DE LA ECUACION DIFERENCIAL
C     G=ECUACION DIFERENCIAL
C     C Y D=VARIABLES DE REEMPLAZO
C     RUK=VALOR DE LAS CONSTANTES K DE LA FORMULA DE RUNGE-KUTTA

      DIMENSION X(101),Y(101),RUNGE(101),RUK(5),A(101,6)
      WRITE(6,100)
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,150) N,S,X(1),Y(1)
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
C     INFORMACION SOBRE SI SE DA SOLUCION EXACTA
    3 READ(5,200) KEXAC
      IF(KEXAC) 51,5,51
C     OBTENCION DE LA SOLUCION CUANDO NO SE DA SOLUCION EXACTA
   51 RUNGE(1)=Y(1)
      DO 4 I=2,N
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=RUNGE(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(1)=G
      C=X(I-1) + 0.5*S
      D=RUNGE(I-1) + 0.5*S*RUK(1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(2)=G
      D=RUNGE(I-1) + 0.5*S*RUK(2)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(3)=G
      C=X(I-1) + S
      D=RUNGE(I-1) + S*RUK(3)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(4)=G
      RUNGE(I)=RUNGE(I-1) + (S*(RUK(1) + 2.0*RUK(2) + 2.0*RUK(3) + RUK(4
     1)))/6.0
    4 CONTINUE
      GO TO 7
C     OBTENCION DE LA SOLUCION CUANDO SI SE DA SOLUCION EXACTA
    5 RUNGE(1)=Y(1)
      DO 6 I=2,N
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=RUNGE(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(1)=G
      C=X(I-1) + 0.5*S
      D=RUNGE(I-1) + 0.5*S*RUK(1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(2)=G
      D=RUNGE(I-1) + 0.5*S*RUK(2)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(3)=G
      C=X(I-1) + S
      D=RUNGE(I-1) + S*RUK(3)
```

```
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(4)=G
      RUNGE(I)=RUNGE(I-1) + (S*(RUK(1) + 2.0*RUK(2) + 2.0*RUK(3) + RUK(4
     1)))/6.0
      C=X(I)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
    6 Y(I)=F
C     IMPRESION DEL ESPACIAMIENTO USADO
    7 WRITE(6,250) S
      IF(KEX-C) 121,12,121
C     IMPRESION DE LOS RESULTADOS SIN SOLUCION EXACTA
  121 WRITE(6,300)
      DO 8 I=1,N
    8 WRITE(6,350) X(I),RUNGE(I)
C     GENERAR MATRIZ PARA GRAFICAR RESULTADOS SIN SOLUCION EXACTA
      M=2
      DO 11 I=1,N
      A(I,1)=X(I)
   11 A(I,2)=RUNGE(I)
      GO TO 17
C     IMPRESION DE LOS RESULTADOS CON SOLUCION EXACTA
   12 WRITE(6,400)
      DO 13 I=1,N
   13 WRITE(6,450) X(I),RUNGE(I),Y(I)
C     GENERACION DE LA MATRIZ PARA GRAFICAR LOS RESULTADOS
      M=3
      DO 16 I=1,N
      A(I,1)=X(I)
      A(I,2)=RUNGE(I)
   16 A(I,3)=Y(I)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA GRAFICAR
   17 CALL GRAFI(A,N,M)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT (1H1,30(/),33X,'SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL POR LO
     1S METODOS DE',///,27X,'RUNGE-KUTTA Y EXACTO(OPCIONAL), CON LAS GRAFI
     2CAS CORRESPONDIENTES')
  150 FORMAT (I5,F10.0)
  200 FORMAT (I1)
  250 FORMAT (1H1,///,15X,'EL ESPACIAMIENTO USADO FUE ',F8.5)
  300 FORMAT (///,15X,'X',29X,'RUNGE-KUTTA',/)
  350 FORMAT (/,10X,F10.5,20X,E15.8)
  400 FORMAT (///,15X,'X',16X,'RUNGE-KUTTA',16X,'EXACTA',/)
  450 FORMAT (/,10X,F10.5,10X,2(E15.8,10X))
      END
```

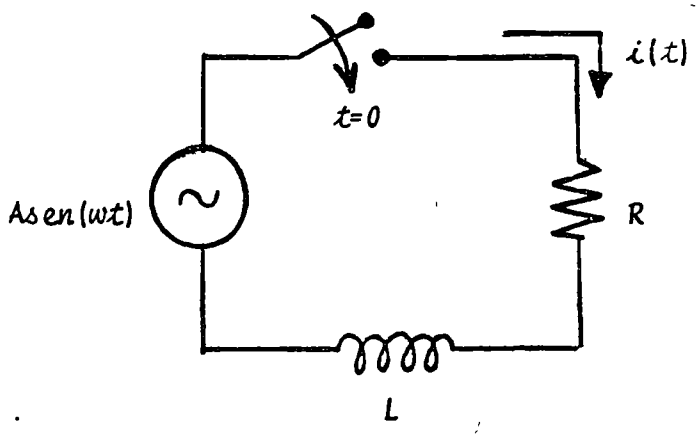
Fig. 9.10 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE FUNCT(C,D,F,G)
      F   =0.0007935*(10.*SIN(380.*C) - 380.*COS(380.*C) + 380.*EXP(-10.
     1*C))
      G   =  115.*SIN(380.*C) - 10.*D
      RETURN
      END
```

Fig. 9.11 Listado de la subrutina FUNCT

9.4.4 Ejemplo

Para el circuito eléctrico que se muestra a continuación:



la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento de la corriente para $t \geq 0$ es:

$$\frac{di}{dt} = \frac{A}{L} sen(wt) - \frac{R}{L} i$$

La solución analítica de la ecuación diferencial es:

$$i(t) = \frac{A}{R^2 + w^2 L^2} (Rsen(wt) - wLcos(wt) + wLe^{-(R/L)t})$$

Obtenga la solución numérica de la ecuación diferencial y compare los resultados con la solución analítica para los siguientes valores:

$A = 115 V$

$L = 1 H$

$R = 10 \Omega$

$w = 380 rad/s$

$i_0 = 0 A$

$t_0 = 0 s$

$t_f = 1 s$

$\Delta t = .01 s$

* SOLUCION

TABLA 9.5 Datos para el problema del ejemplo 9.4.4

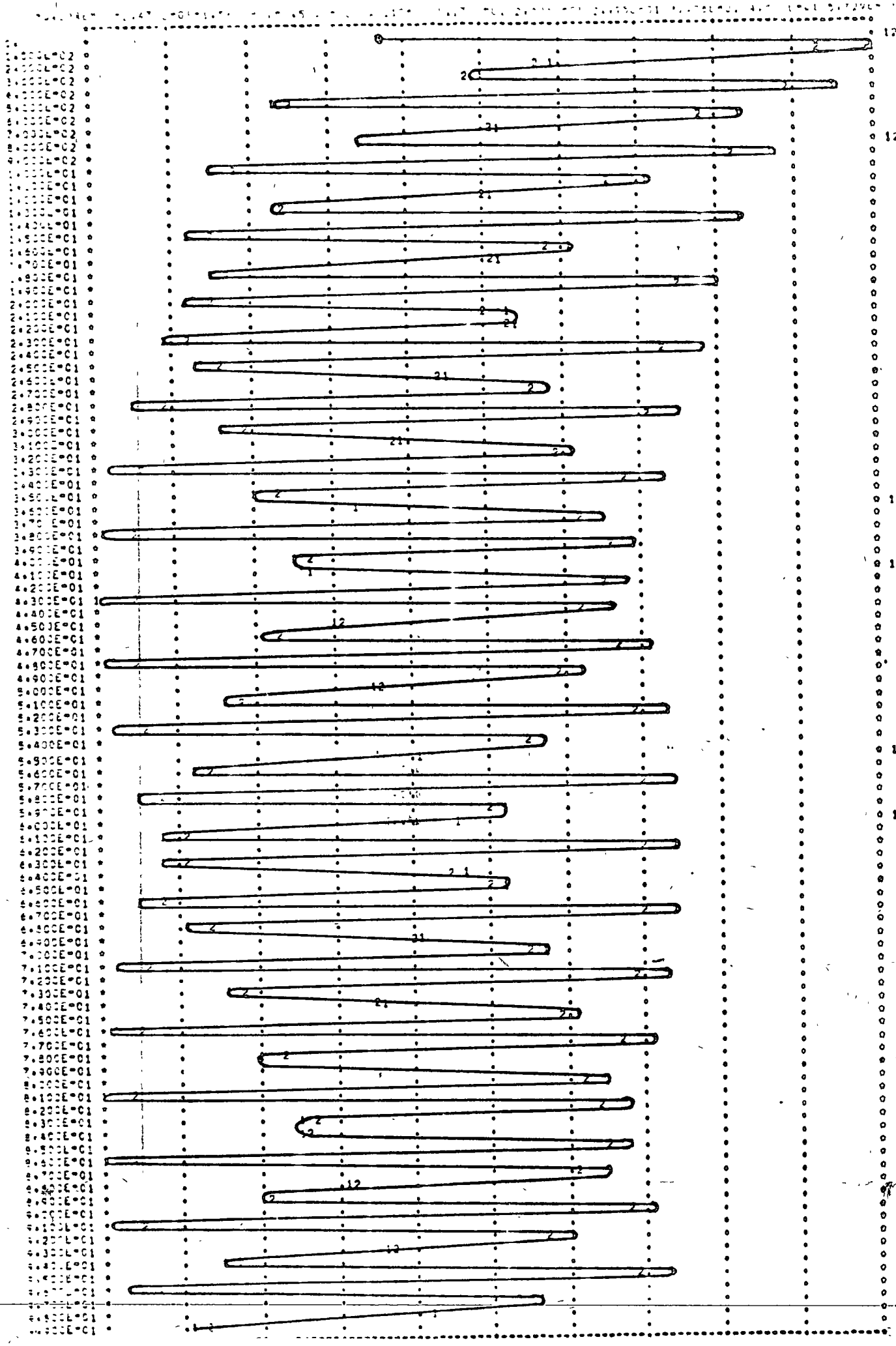
```
N=100
S=0.01
X(1)=0.
Y(1)=0.
KEXAC=0
```

```
F(C)=0.0007935*(10.*SIN(380.*C) - 380.*
     *COS(380.*C) + 380.*EXP(-10.*C))
G(C,D)=115.*SIN(380.*C) - 10.*D
```

TABLA 9.6 Resultados del problema del ejemplo 9.4.4

EL ESPACIAMIENTO USADO FUE 0.01000

X	RUNGE-KUTTA	EXACTA
0.00000	0.	0.
0.01000	.57285601E+00	.50648103E+00
0.02000	.19614662E+00	.17878995E+00
0.03000	.11431645E+00	.97434745E-01
0.04000	.52555474E+00	.46943909E+00
0.05000	-.12905971E+00	-.11404764E+00
0.06000	.41754259E+00	.36789741E+00
0.07000	.13715049E+00	.12646394E+00
0.08000	-.29513185E-01	-.30114185E-01
0.09000	.45699747E+00	.40783343E+00
0.10000	-.19803788E+00	-.17470498E+00
0.11000	.30451534E+00	.26698100E+00
0.12000	.12185311E+00	.11288390E+00
0.13000	-.13033234E+00	-.11933897E+00
0.14000	.41635141E+00	.37107606E+00
0.15000	-.22787807E+00	-.20059544E+00
0.16000	.21597789E+00	.18792052E+00
0.17000	.13218685E+00	.12198715E+00
0.18000	-.20252440E+00	-.18303566E+00
0.19000	.38957842E+00	.34659517E+00
0.20000	-.23154303E+00	-.20326091E+00
0.21000	.14158762E+00	.12152925E+00
0.22000	.15675009E+00	.14363945E+00
0.23000	-.25456386E+00	-.22874903E+00
0.24000	.36809957E+00	.32681498E+00
0.25000	-.21722354E+00	-.18999646E+00
.		
.		
.		
0.86000	-.33789521E+00	-.30005160E+00
0.87000	.24963596E+00	.21897656E+00
0.88000	-.56809302E-01	-.46016549E-01
0.89000	-.15958288E+00	-.14591809E+00
0.90000	.30942578E+00	.27699727E+00
0.91000	-.32975936E+00	-.29214004E+00
0.92000	.21236671E+00	.18527035E+00
0.93000	-.60689543E-02	-.83625394E-03
0.94000	-.20265463E+00	-.18384843E+00
0.95000	.32875628E+00	.29176219E+00
0.96000	-.31414151E+00	-.27761945E+00
0.97000	.17030945E+00	.14748720E+00
0.98000	.44817611E-01	.44370592E-01
0.99000	-.24114046E+00	-.21761855E+00


12°
12°
12°
12°
12°
12°
12°
12°

9.5 Método de Milne

9.5.1 Objeto

Obtener la solución de una ecuación diferencial de primer orden del tipo:

$$y' = f(t, y) \qquad (9.31)$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$, mediante el método de Milne; con la opción de comparar los resultados numéricos con los resultados analíticos.

9.5.2 Método

El método de Milne subdivide cada subintervalo de integración en cinco puntos igualmente espaciados y aproxima la curva (ecuación diferencial) mediante una parábola de segundo grado que pasa por tres de esos puntos muestrales y el área en cada subintervalo se aproxima por el área debajo de la parábola. El área total es igual a la suma de las áreas de cada subintervalo. Gráficamente se tendrá:

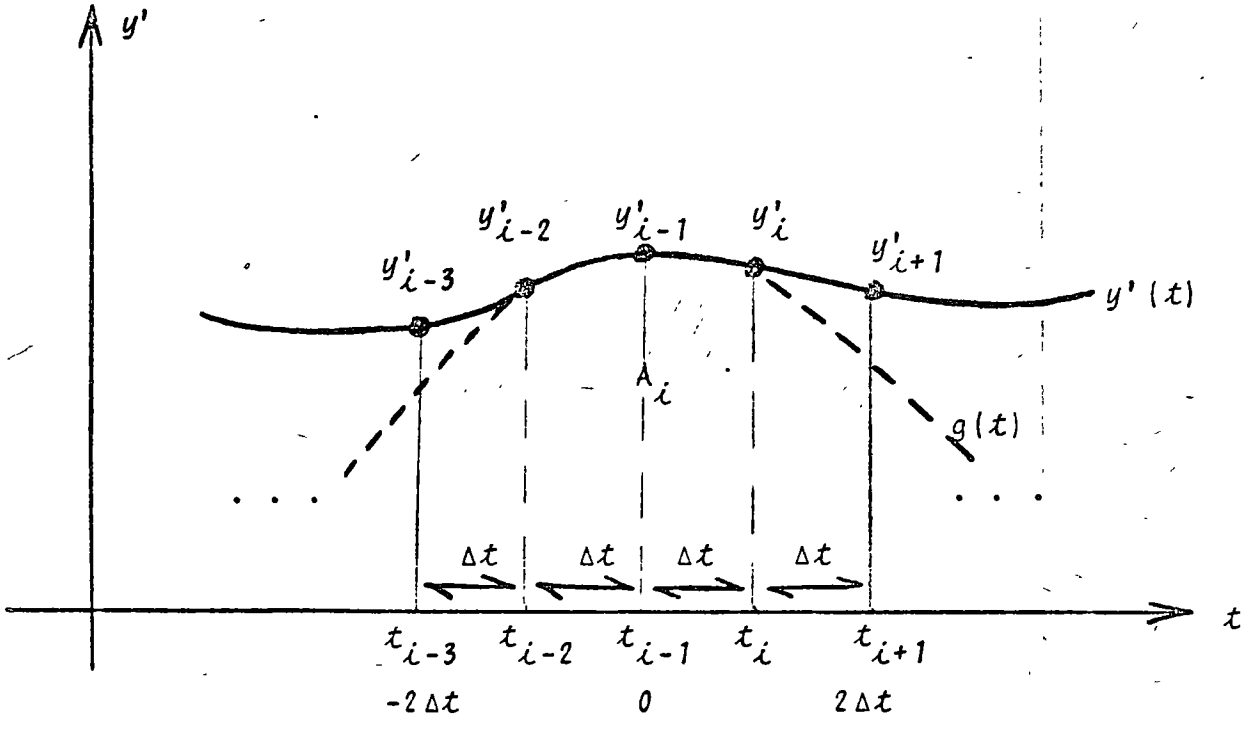


Fig. 9.12 Representación gráfica del muestreo para el método de Milne

Por lo tanto:

$$y'(t) \triangleq g(t) \tag{9.32}$$

$$A_i = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} g(t)\,dt \tag{9.33}$$

$$g(t) = at^2 + bt + c \tag{9.34}$$

substituyendo (9.34) en (9.33):

$$A_i = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} (at^2 + bt + c)\,dt \tag{9.35}$$

haciendo el siguiente cambio en los límites de integración:

$$t_{i+1} = 2\,\Delta t$$

$$t_{i-3} = -2\,\Delta t \tag{9.36}$$

se obtiene:

$$A_i = \frac{16}{3} a(\Delta t)^3 + 4c(\Delta t) \tag{9.37}$$

para evaluar a, b y c se obliga a que la curva (9.34) pase por los puntos y'_{i-2} , y'_{i-1} , y'_i ; al efectuar lo anterior se obtiene:

$$a = \frac{y'_i - 2y'_{i-1} + y'_{i-2}}{2(\Delta t)^2}$$

$$c = y'_{i-1} \tag{9.38}$$

substituyendo (9.38) en (9.37) :

$$A_i = \frac{4}{3}(\Delta t)(2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}) \tag{9.39}$$

De la gráfica se puede observar que:

$$y_{i+i} = y_{i-3} + A_i \tag{9.40}$$

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}(\Delta t)(2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}) \qquad (9.41)$$

La ecuación (9.41) da la primera aproximación de la solución por el método de Milne. El valor obtenido se mejora empleando un procedimiento similar al del método de Euler mejorado; en este caso se emplea la fórmula de Simpson de 1/3 para efectuar la corrección utilizando los puntos correspondientes a t_{i-1}, t_i, t_{i+1}. El proceso se repite para cada y_i hasta que dos correcciones sucesivas de la variable dependiente sean aproximadamente iguales; en términos numéricos se tendrá:

$$y_{i+1}^{(pron.)} = y_{i-3} + \frac{4}{3}(\Delta t)(2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}) \qquad (9.42)$$

$$y'^{(pron.)}_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(pron.)}) \qquad (9.43)$$

$$y_{i+1}^{(corr.1)} = y_{i-1} + \frac{\Delta t}{3}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'^{(pron.)}_{i+1}) \qquad (9.44)$$

$$y'^{(corr.1)}_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(corr.1)}) \qquad (9.45)$$

así sucesivamente hasta que:

$$\left| y_{i+1}^{(corr.j)} - y_{i+1}^{(corr.j-1)} \right| < \varepsilon \qquad (9.46)$$

El error producido por el método es del orden de $(\Delta t)^5$, igual que el producido por el método de Runge-Kutta pero con la ventaja de ser mucho más rápido. Su desventaja como se puede apreciar en la relación (9.42) es que para arrancar requiere que se conozcan los valores y_0 , y'_1 , y'_2 , y'_3 . Estos valores se pueden obtener mediante expansiones de la serie de Taylor o empleando el método de Runge-Kutta para el arranque, esto último es lo más usual y será el método empleado en el programa.

9.5.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE FUNCT(C,D,F,G) , en esta subrutina se propor-

cionan la ecuación diferencial y su solución exacta en caso de conocerse.

SUBROUTINE GRAFI(A,N,M), grafica la solución obtenida de la ecuación diferencial por el método de Milne y la solución exacta en caso de haberse proporcionado.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina FUNCT:

C	valor de t_i
D	valor de y_i
G	es la ecuación diferencial $f(t,y)$
F	solución exacta de la ecuación diferencial

Para el programa principal:

N	cantidad de puntos en que se subdivide el intervalo total de integración
S	espaciamiento entre los valores de la variable independiente
X(1)	valor inicial de la variable independiente
Y(1)	valor inicial de la variable dependiente
X(I)	valores de la variable independiente
Y(I)	valores de la solución exacta
RILNE(I)	solución obtenida por el método de Milne
RUK(I)	parámetros del método de Runge-Kutta
PRE(I)	pronóstico de y_i
DIF(I)	valor de y'_i
CORR(I)	corrección de y_i
KEXAC	variable que indica si se da o no la solución exacta
C	variable de reemplazo
D	variable de reemplazo
G1	variable de reemplazo
G2	variable de reemplazo
A(I,J)	arreglo matricial para imprimir la gráfica

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION deberá ser modificada cuando: $N > 100$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5, 3F10.0)	N, S, X(1), Y(1)
2	(I1)	KEXAC, puede adquirir alguno de los dos valores siguientes: 1 cuando no se da sol. exacta 0 cuando se da la sol. exacta
	otros paquetes de datos (opcional)	
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

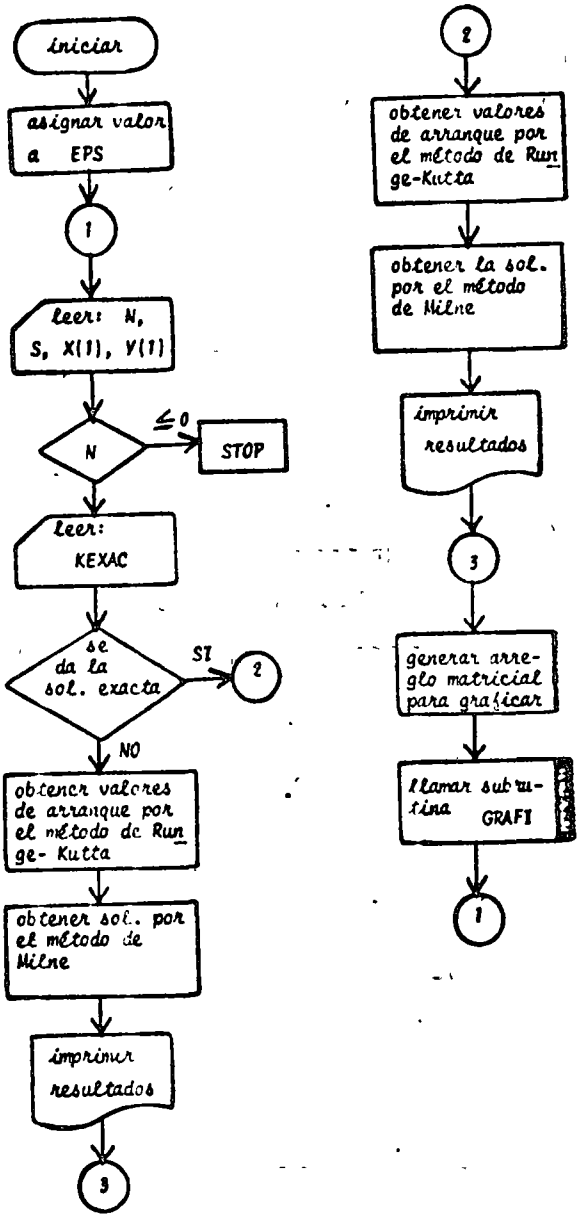


Fig. 9.13 Diagrama de bloques para el programa principal

6) *Listado:*

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO DE
C    MILNE
C    SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C    N=CANTIDAD DE PUNTOS EN QUE SE SUBDIVIDE EL INTERVALO DE INTEGRA=
C       CION
C    S=ESPACIAMIENTO ENTRE LOS VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C    X(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C    Y(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE
C    X=VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C    Y=VALORES DE LA SOLUCION POR EL METODO ANALITICO
C    MILNE=SOLUCION OBTENIDA POR EL METODO DE MILNE
C    RUK=PARAMETROS DEL METODO DE RUNGE=KUTTA
C    PRE, DIF Y CORR=CORRECTORES DEL METODO DE MILNE
C    KLXAC=VARIABLE QUE INDICA SI SE DA O NO LA SOL. EXACTA
C    C, D, G1 Y G2=VARIABLES DE REEMPLAZO
C    EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA

      DIMENSION X(100),Y(100),PRE(100),DIF(100),CORR(100),RUK(4),MILNE(1
     100),A(101,6)
      WRITE(6,100)
C     LECTURA DE DATOS
      EPS=0.001
    1 READ(5,150) N,S,X(1),Y(1)
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
C     INFORMACION SOBRE SI SE DA SOLUCION EXACTA
    3 MILNE(1)=Y(1)
      READ(5,200) KEXAC
      IF(KEXAC) 71,7,71
C     OUTPUT CION DE LA SOLUCION CUANDO NO SE DA SOL.EXACTA
   71 DO 4 I=2,4
C     APLICAR LA SOLUCION MEDIANTE EL METODO DE RUNGE=KUTTA
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=MILNE(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(1)=G
      C=X(I-1) + 0.5*S
      D=MILNE(I-1) + 0.5*S*RUK(1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(2)=G
      D=MILNE(I-1) + 0.5*S*RUK(2)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(3)=G
      C=X(I-1) + S
      D=MILNE(I-1) + S*RUK(3)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(4)=G
      MILNE(I)=MILNE(I-1) + (S*(RUK(1) + 2.0*RUK(2) + 2.0*RUK(3) + RUK(4
     1)))/6.0
    4 CONTINUE
C     CONTINUAR LA SOLUCION CON EL METODO DE MILNE
      DO 6 I=5,N
      X(I)=X(I-1)+S
      C=X(I-1)
      D=MILNE(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      G1=G
      C=X(I-2)
      D=MILNE(I-2)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      G2=G
      C=X(I-3)
      D=MILNE(I-3)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      PRE(I)=MILNE(I-4) + (4.0*S*(2.0*G1 - G2 + 2.0*G))/3.0
      C=X(I)
      D=PRE(I)
```

```
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      DIF(I)=G
      CORR(I)=RILNE(I-2) + (S*(G2 + 4.0*G1 + DIF(I)))/3.0
      DO 5 J=1,10
      PRUE=CORR(I)
      CALL FUNCT(C,PRUE,F,G)
      DIF(I)=G
      CORR(I)=RILNE(I-2) + (S*(G2 + 4.0*G1 + DIF(I)))/3.0
      IF(ABS(ABS(PRUE)-ABS(CORR(I)))-EPS) 6,6,5
    5 CONTINUE
    6 RILNE(I)=CORR(I)
      GO TO 30
C     OBTENCION DE LA SOLUCION CUANDO SI SE DA SOLUCION EXACTA
    7 DO 8 I=2,4
C     ARRANCAR LA SOLUCION POR EL METODO DE RUNGE-KUTTA
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=RILNE(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(1)=G
      C=X(I-1) + 0.5*S
      D=RILNE(I-1) + 0.5*S*RUK(1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(2)=G
      D=RILNE(I-1) + 0.5*S*RUK(2)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(3)=G
      C=X(I-1) + S
      D=RILNE(I-1) + S*RUK(3)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      RUK(4)=G
      RILNE(I)=RILNE(I-1) + (S*(RUK(1) + 2.0*RUK(2) + 2.0*RUK(3) + RUK(4
     1)))/6.0
      C=X(I)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
    8 Y(I)=F
C     CONTINUAR LA SOLUCION POR EL METODO DE MILNE
      DO 10 I=5,N
      X(I)=X(I-1) + S
      C=X(I-1)
      D=RILNE(I-1)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      G1=G
      C=X(I-2)
      D=RILNE(I-2)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      G2=G
      C=X(I-3)
      D=RILNE(I-3)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      PRE(I)=RILNE(I-4) + (4.0*S*(2.0*G1 -G2 + 2.0*G))/3.0
      C=X(I)
      D=PRE(I)
      CALL FUNCT(C,D,F,G)
      DIF(I)=G
      CORR(I)=RILNE(I-2) + (S*(G2 + 4.0*G1 + DIF(I)))/3.0
      Y(I)=F
      DO 9 J=1,10
      PRUE=CORR(I)
      CALL FUNCT(C,PRUE,F,G)
      DIF(I)=G
      CORR(I)=RILNE(I-2) + (S*(G2 + 4.0*G1 + DIF(I)))/3.0
      IF(ABS(ABS(PRUE)-ABS(CORR(I)))-EPS) 10,10,9
    9 CONTINUE
   10 RILNE(I)=CORR(I)
```

```
C     IMPRIME ESPACIAMIENTO USADO
   30 WRITE(6,250) H
      IF(IEXAC) 161,16,161
C     GENERACION DE LA MATRIZ PARA GRAFICAR RESULTADOS SIN SOLUCION EXAC
C     TA E IMPRESION DE LOS MISMOS
  161 M=2
      WRITE(6,300)
      DO 11 I=1,N
   11 WRITE(6,350) X(I),PILNE(I)
      DO 15 I=1,N
      A(I,1)=X(I)
   15 A(I,2)=PILNE(I)
      GO TO 22
C     GENERACION DE LA MATRIZ PARA GRAFICAR RESULTADOS CON SOLUCION EXAC
C     TA E IMPRESION DE LOS MISMOS
   16 M=3
      WRITE(6,400)
      DO 17 I=1,N
   17 WRITE(6,450) X(I),PILNE(I),Y(I)
      DO 21 I=1,N
      A(I,1)=X(I)
      A(I,2)=PILNE(I)
   21 A(I,3)=Y(I)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA GRAFICAR
   22 CALL GRAFI(A,N,M)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT (1H1,30(/),33X,'SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL POR LO
     1S METODOS DE',/,30X,'MILNE Y EXACTO(OPCIONAL), CON LAS GRAFICAS CO
     2RRESPONDIENTES')
  150 FORMAT (I5,3F10.0)
  200 FORMAT (I1)
  250 FORMAT (1H1,///,15X,'EL ESPACIAMIENTO USADO FUE ',F8.5)
  300 FORMAT (///,15X,'X',32X,'MILNE',/)
  350 FORMAT (/,12X,F10.5,20X,E15.8)
  400 FORMAT (///,15X,'X',19X,'MILNE',19X,'EXACTA',/)
  450 FORMAT (/,10X,F10.5,10X,2(E15.8,10X))
      END
```

Fig. 9.14 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE FUNCT(C,D,F,G)
      F   = -1.05*EXP(-10.*C) + 1.25*EXP(-2.*C)
      G   = -10.*EXP(-2.*C) - 10.*D
      RETURN
      END
```

Fig. 9.15 Listado de la subrutina FUNCT

9.5.4 Ejemplo

La ecuación que caracteriza el voltaje del capacitor del sistema eléctrico mostrado en la figura 9.16 es:

$$\frac{dVc}{dt} + 10Vc = 10V(t)$$

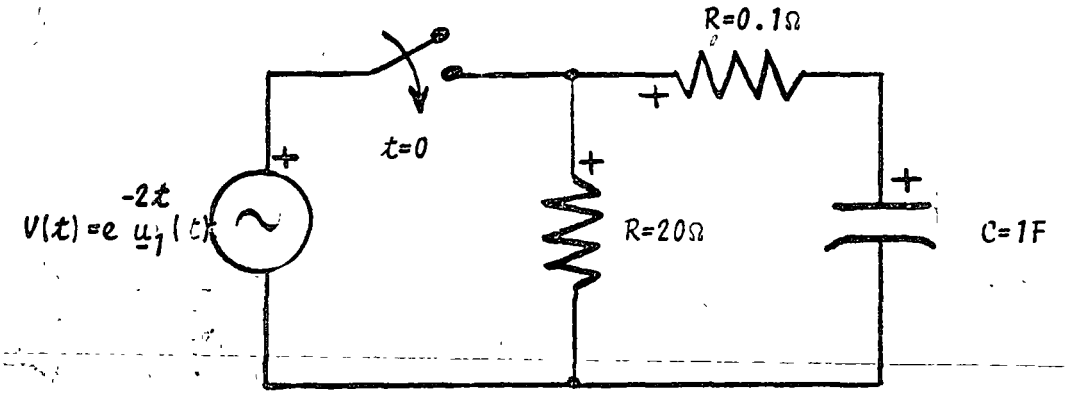


Fig. 9.16 Sistema eléctrico del problema del ejemplo 9.5.4

Obtenga la solución numérica de la ecuación diferencial que caracteriza a $Vc(t)$ para $t \geq 0$ y compare sus resultados con la solución exacta, emplear el método de Milne. Considere los siguientes valores:

$Vc(t_0) = 0.2V$

$t_0 = 0.$

$t_f = 2 \quad s$

$\Delta t = .02$

* SOLUCION

La solución exacta de la ecuación diferencial es:

$$Vc(t) = (Vc(t_0) - \frac{10}{8})e^{-10t} + \frac{10e^{-2t}}{8}$$

TABLA 9.7 Datos del problema del ejemplo 9.5.4

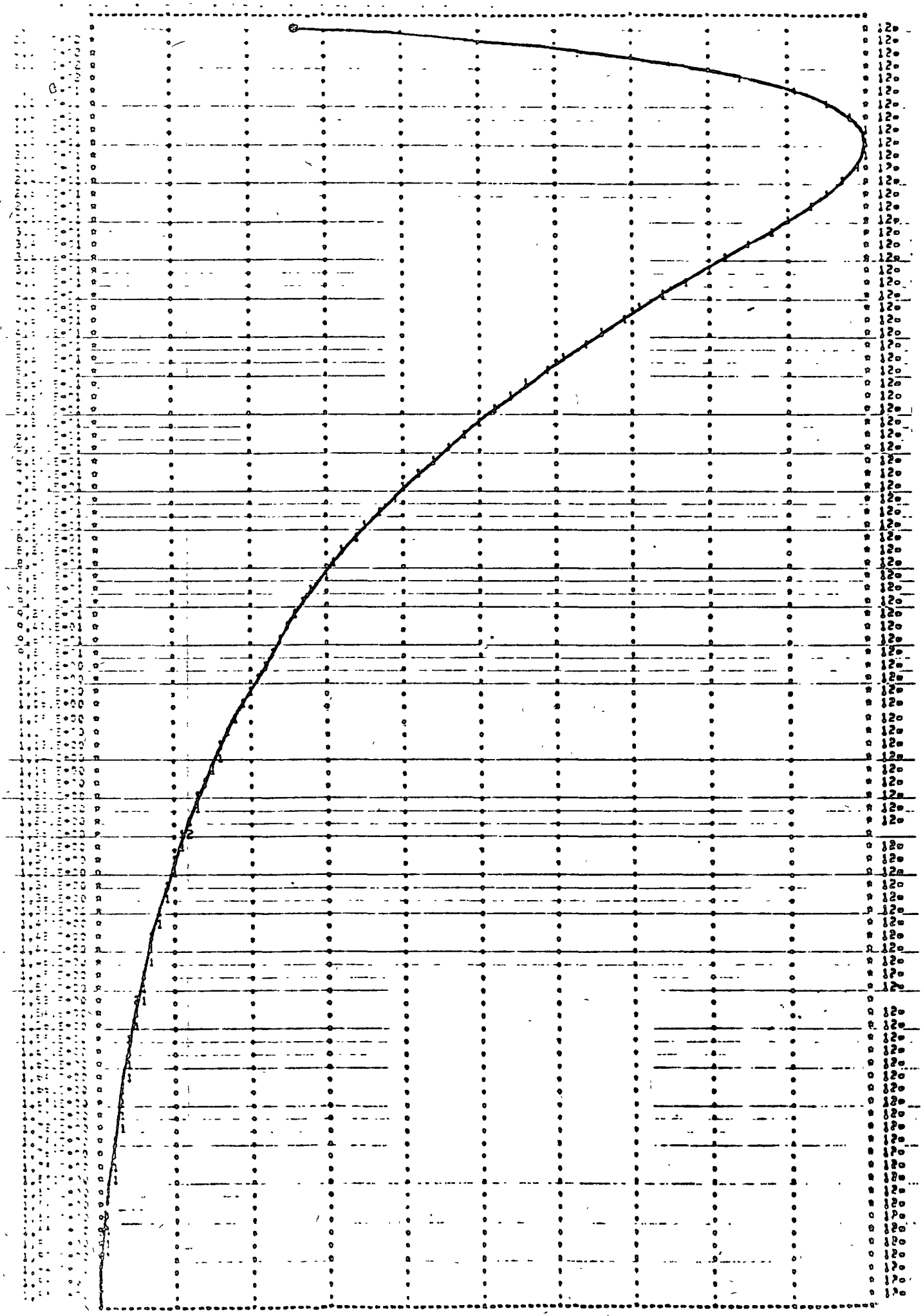
```
N=100
S=0.02
X(1)=0.0
Y(1)=0.2
KEXAC=0
```

```
F(C)=-1.05*EXP(-10.*C) + 1.25*EXP(-2.*C)
G(C,D)= 10.*EXP(-2.*C) - 10.*D
```

TABLA 9.8 Resultados del problema del ejemplo 9.5.4

EL ESPACIAMIENTO USADO FUE 0.02000

X	MILNE	EXACTA
0.00000	.20000000E+00	.20000000E+00
0.02000	.34131695E+00	.34131951E+00
0.04000	.45005523E+00	.45005938E+00
0.06000	.53239325E+00	.53239833E+00
0.08000	.59338358E+00	.59338432E+00
0.10000	.63713710E+00	.63714003E+00
0.12000	.66703200E+00	.66703090E+00
0.14000	.68580087E+00	.68580286E+00
0.16000	.69569713E+00	.69569895E+00
0.18000	.69852985E+00	.69853157E+00
0.20000	.69580088E+00	.69579901E+00
0.22000	.68870037E+00	.68870221E+00
0.24000	.67822869E+00	.67822539E+00
0.26000	.66516124E+00	.66516343E+00
0.28000	.65016443E+00	.65016076E+00
0.30000	.63373545E+00	.63373812E+00
0.32000	.61631925E+00	.61631522E+00
0.34000	.59822607E+00	.59822031E+00
0.36000	.57975480E+00	.57975041E+00
0.38000	.56109884E+00	.56109372E+00
0.40000	.54243473E+00	.54242978E+00
0.42000	.52388819E+00	.52389280E+00
0.44000	.50559296E+00	.50558743E+00
0.46000	.48758897E+00	.48759437E+00
0.48000	.46998113E+00	.46997487E+00
0.50000	.45276816E+00	.45277446E+00
•		•
•		•
1.72000	.40511894E-01	.40080921E-01
1.74000	.38047456E-01	.38509235E-01
1.76000	.37493943E-01	.36999270E-01
1.78000	.35018602E-01	.35540511E-01
1.80000	.34722273E-01	.34154637E-01
1.82000	.32207325E-01	.32815417E-01
1.84000	.32180116E-01	.31522708E-01
1.86000	.29598642E-01	.30292451E-01
1.88000	.29852184E-01	.29104668E-01
1.90000	.27162695E-01	.27962459E-01
1.92000	.27724801E-01	.26846997E-01
1.94000	.24994620E-01	.25813528E-01
1.96000	.25785729E-01	.24861369E-01
1.98000	.22774408E-01	.23989490E-01



9.6 Método de Diferencias Finitas

9.6.1 Objeto

Obtener la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con valores en la frontera por el método de diferencias finitas.

Dado que el planteamiento para la solución de la ecuación diferencial depende de los puntos donde se especifican los valores en la frontera, se considerará una ecuación diferencial con valores en la frontera en el punto inicial y en el punto final del intervalo en el cual se desea la solución.

9.6.2 Método

Los problemas con valores en la frontera involucran dos o más condiciones del sistema especificadas en puntos diferentes, por lo que las ecuaciones diferenciales que caracterizan a dichos sistemas serán de orden mayor o igual a dos. Para la solución de tales problemas existen dos métodos: el de ensayo y error y el de diferencias finitas.

La solución de una ecuación diferencial por el método de diferencias finitas reduce la integración de la ecuación diferencial a la solución de un sistema de ecuaciones lineales. La solución del sistema de ecuaciones lineales representa la solución de la ecuación diferencial.

En ingeniería los problemas más frecuentes que involucran valores en la frontera son: pandeo y carga, conducción de calor, radiación de calor, deflexión de membranas. En términos generales se tendrá que diseñar un programa para cada problema dado que las condiciones de frontera no estarán especificadas para los mismos puntos.

El proceso que se sigue para aplicar el método de diferencias finitas es:

1. Dividir el intervalo de integración en "n" subintervalos de igual longitud. A cada uno de los puntos que limita una partición se le denomina pivote.
2. Substituir en la ecuación diferencial y en las condiciones de frontera las derivadas de la variable dependiente por sus expresiones correspondientes de tipo numérico, procurando que todas las fórmulas de derivación numérica den el mismo tipo de error. Para fórmulas de derivación numérica consultar las referencias 3 y 7 de la bibliografía citada.
3. Aplicar la aproximación discretizada de la ecuación diferencial a cada uno de los pivotes, solo se aplica en las fronteras cuando no se conoce su solución. Al encontrarse cerca de las fronteras puede suceder que las fórmulas de derivación numérica requieran puntos localizados fuera del intervalo de integración, este problema se elimina empleando las condiciones de frontera.
4. Al aplicar la ecuación diferencial a todos los pivotes se origina un sistema de ecuaciones lineales cuya solución será la solución discretizada de la ecuación diferencial.

Para el caso a tratar se considerará el siguiente sistema:

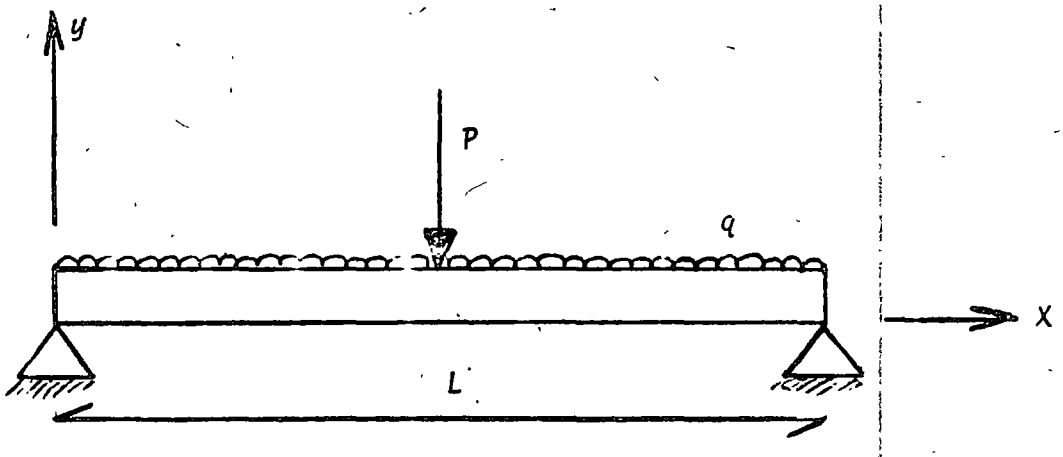


Fig. 9.17 Representación gráfica del problema a resolver por el método de diferencias finitas.

La ecuación que caracteriza el comportamiento de la elástica de una viga es:

$$\frac{d^2y}{dX^2} = -\frac{Mx}{IxE} \qquad (9.47)$$

para nuestro caso E e Ix permanecen constantes en toda la extensión de la viga.

La fórmula de derivación numérica correspondiente a la segunda derivada con error $(\Delta X)^2$ es:

$$\left.\frac{d^2y}{dX^2}\right|_i = \frac{1}{(\Delta X)^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) \qquad (9.48)$$

Al emplear la ecuación (9.48) para discretizar la ecuación (9.47) se obtiene:

$$\frac{1}{(\Delta X)^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = \frac{(Mx)_i}{E\ Ix} \qquad (9.49)$$

Subdividiendo el intervalo de integración (claro de la viga) en "n" partes iguales se tiene:

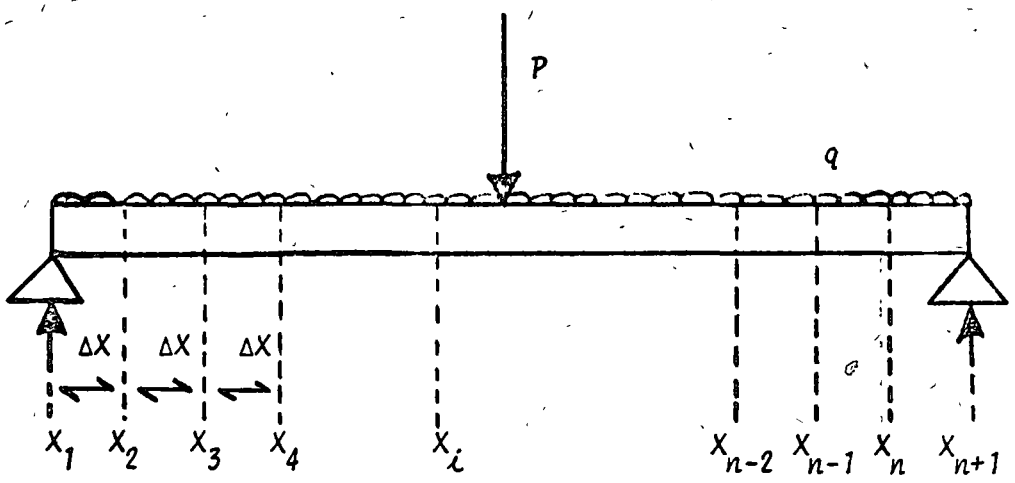


Fig. 9.18 Representación gráfica de la partición del claro.

Para toda viga libremente apoyada las condiciones de frontera son:

$$\left.\begin{aligned} y(X_1) &= y_1 = 0 \\ y(X_{n+1}) &= y_{n+1} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.50)$$

El momento flexionante aplicado a la viga en estudio para cada valor de X_i, considerando el origen de las abscisas en el extremo izquierdo, es:

$$Mx_i = \begin{cases} \dfrac{PX_i + qLX_i - qX_i^2}{2} \;, & X_i \leq \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{PL + qLX_i - PX_i - qX_i^2}{2} \;, & X_i > \dfrac{L}{2} \end{cases} \qquad (9.51)$$

Aplicando las ecuaciones (9.49), (9.50) y (9.51) a los puntos $X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -2y_2 + y_3 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 &= \frac{Mx_2}{EI} \\ y_2 - 2y_3 + y_4 + 0 + \cdots + 0 + 0 &= \frac{Mx_3}{EI} \\ \vdots \qquad\qquad & \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots + y_{n-2} - 2y_{n-1} &= \frac{Mx_{n-1}}{EI} \end{aligned}\right\} \qquad (9.52)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones (9.52) mediante alguno de los métodos numéricos conocidos y los valores y_1, y_2, ..., y_n son la solución de la ecuación diferencial (9.47) y por lo tanto las ordenadas de la curva de la elástica.

Al programa solo se le alimentan los valores de P, q, E e I_x, internamente se plantea el sistema de ecuaciones y se obtiene la solución del mismo.

9.6.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

REAL FUNCTION FMOM (P, Q, AL, X), obtiene el momento flexionante para cada uno de los puntos X_i del claro.

SUBROUTINE GAUTOR (A, B, N, EPS, DET), obtiene la solución del sistema de ecuaciones lineales. Consultar capítulo 3.

SUBROUTINE GRAFI (A, N, M), obtiene la gráfica de la curva de la elástica. Consultar capítulo 1.

b) Descripción de las variables.

Para la función FMOM:

P	valor de la carga concentrada
Q	valor de la carga uniformemente distribuida
AL	longitud del claro
X	punto del claro en el cual se desea evaluar el momento flexionante
AL12	magnitud de la mitad del claro (AL/2)
FMOM	valor del momento flexionante para el punto X_i

Para el programa principal:

N	cantidad de partes en que se subdivide el intervalo de integración
AL	longitud del claro
P	carga concentrada a la mitad del claro
Q	carga uniformemente distribuida en todo el claro

XI	momento de inercia con respecto al eje X
E	módulo de elasticidad
A(I, J)	matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones
B(I, 1)	vector de términos independientes del sistema de ecuaciones, se transforma en la solución
C(I, J)	arreglo matricial con las abscisas y ordenadas para graficar la curva de la elástica
X	valor de las abscisas (variable independiente)
DELT	espaciamiento entre abscisas
XCUA	espaciamiento elevado al cuadrado
DET	variable que indica si el sistema de ecuaciones tiene solución
EPS	criterio para determinar si existe solución del sistema de ecuaciones

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION y el valor de N se deberán modificar cuando se desee partir el claro de la viga en más de 15 partes.

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(5F15.0)	AL, P, Q, XI, E
otros paquetes de datos (opcional)		
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

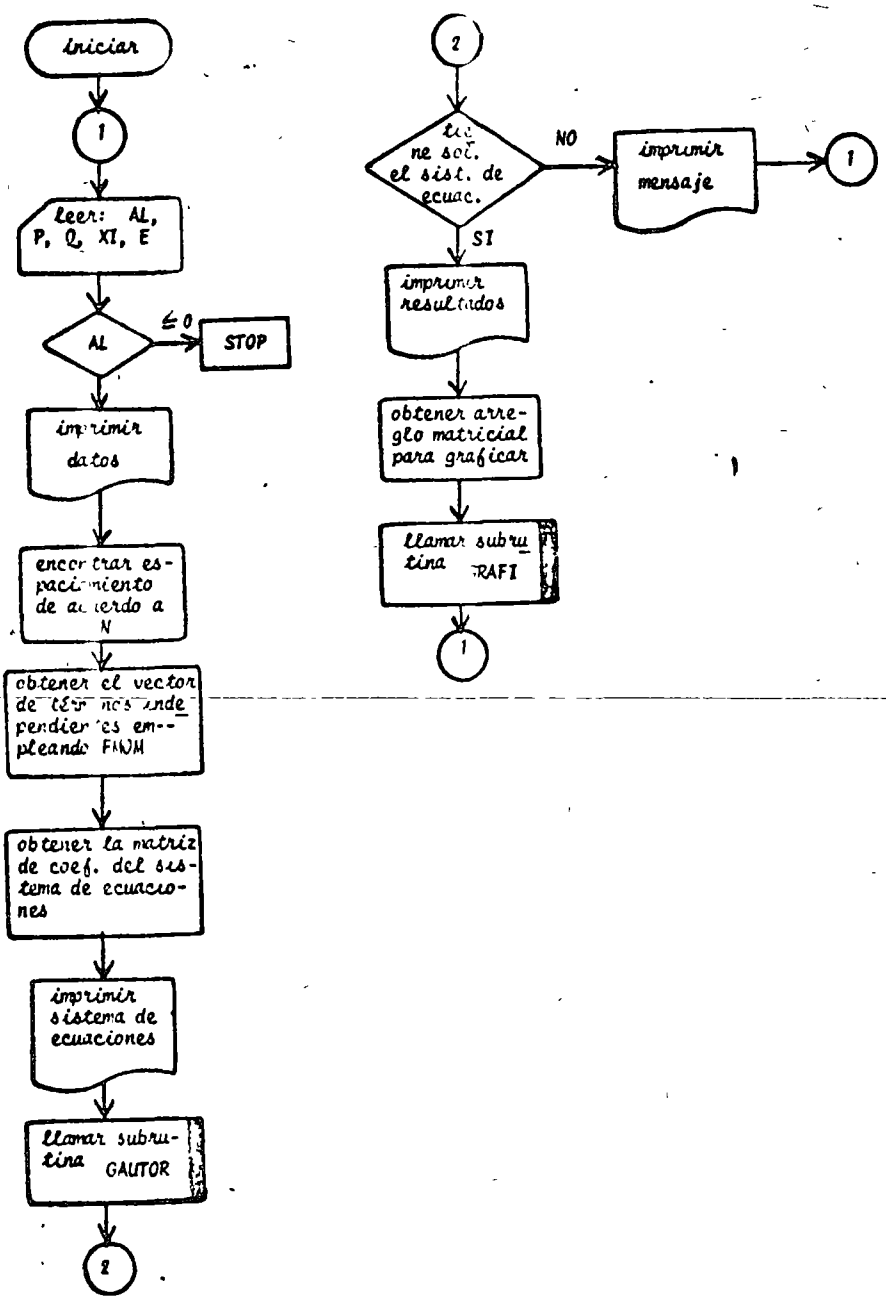


Fig. 9.19 Diagrama de bloques para el programa principal

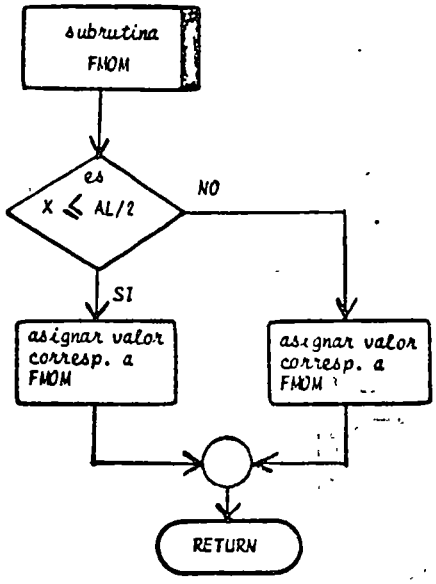


Fig. 9.20 Diagrama de bloques para la función FMOM

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA ENCONTRAR LA CURVA DE LA ELASTICA DE UNA VIGA LIGRE-
C     MENTE APOYADA, CON CARGA CONCENTRADA A LA MITAD DEL CLARO Y CON
C     CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA, EMPLEANDO EL METODO DE DIFERENCIAS
C     FINITAS.
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     N=CANTIDAD DE SUBINTERVALOS EN QUE SE DIVIDE EL CLARO
C     AL=LONGITUD DEL CLARO
C     P=VALOR DE LA CARGA CONCENTRADA
C     Q=VALOR DE LA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA
C     XI=MOMENTO DE INERCIA DE LA VIGA
C     E=MODULO DE ELASTICIDAD
C     DELT=MAGNITUD DE LOS SUBINTERVALOS
C     X=VALOR DE LAS ABSCISAS
C     A=MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     B=VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     C=ARREGLO MATRICIAL PARA GRAFICAR LA CURVA DE LA ELASTICA
C     EPS=CRITERIO PARA DETERMINAR SI EL SISTEMA DE ECUACIONES TIENE SO-
C        LUCION
C     DET=VARIABLE QUE INDICA SI EL SISTEMA DE ECUACIONES TIENE O NO SO-
C        LUCION

      DIMENSION B(16),A(16,16),AINV(16,16),C(101,16)
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,100) AL,P,Q,XI,E
      IF(AL) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 N=15
      NP1=N + 1
      NM1=N -1
      DELT=AL/FLOAT(N)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(6,150) P
      WRITE(6,200) Q
      WRITE(6,210) E
      WRITE(6,220) XI
C     FORMAR EL SISTEMA DE ECUACIONES POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINI-
C     TAS
      DO 15 I=1,NM1
      B(I)=0.0
      DO 15 J=1,NM1
   15 A(I,J)=0.0
      X=DELT
      XCUA=DELT**2
      DO 4 I=1,NM1
      B(I)=(FYCM(P,Q,AL,X)*XCUA)/(E*XI)
    4 X=X + DELT
      DO 7 I=1,NM1
      A(I,I)=-2.0
      IF(I-1) 41,6,41
   41 IF(I-NM1) 42,5,42
   42 A(I,I-1)=1.0
      A(I,I+1)=1.0
      GO TO 7
    5 A(I,I-1)=1.0
```

```
      GO TO 7
    5 A(I,I+1)=1.0
    7 CONTINUE
C     IMPRIMIR EL SISTEMA DE ECUACIONES
      WRITE(6,250)
      WRITE(6,550)
      DO 8 I=1,NM1
    8 WRITE(6,300) (A(I,J),J=1,NM1)
      WRITE(6,500)
      DO 88 I=1,NM1
   88 WRITE(6,400) B(I)
      EPS=0.000001
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES
      CALL GAUTOR(A,B,NM1,EPS,DET)
      IF(DET.LE.EPS) GO TO 12
C     FORMAR ARREGLO MATRICIAL PARA GRAFICAR LA CURVA DE LA ELASTICA
      C(1,1)=0.0
      C(1,2)=0.0
      X=DELT
      DO 9 I=2,N
      C(I,1)=X
      C(I,2)=B(I-1)
    9 X=X + DELT
      C(NP1,1)=X
      C(NP1,2)=0.0
C     IMPRIMIR ORDENADAS DE LA CURVA DE LA ELASTICA
      WRITE(6,350)
      DO 10 I=1,NP1
   10 WRITE(6,400) C(I,1),C(I,2)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA GRAFICAR RESULTADOS
      CALL GRAFI(C,NP1,2)
      GO TO 1
   12 WRITE(6,450)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT (5F10.0)
  150 FORMAT (1H1,2(/),10X,'EL VALOR DE LA CARGA CONCENTRADA APLICADA A
     1MITAD DEL CLARO ES',2X,E11.4)
  200 FORMAT (4(/),10X,'LA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA VI
     1GA ES',2X,E11.4)
  210 FORMAT (4(/),10X,'EL VALOR DEL MODULO DE ELASTICIDAD ES',2X,E11.4)
  220 FORMAT (4(/),10X,'EL VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA ES',2X,E11.4)
  250 FORMAT (4(/),10X,'EL SISTEMA DE ECUACIONES OBTENIDO AL APLICAR EL
     1METODO DE DIFERENCIAS FINITAS ES',//)
  300 FORMAT (/,23(F4.1,1X),F4.1)
  350 FORMAT (4(/),10X,'LA SOLUCION PARA LA CURVA DE LA ELASTICA ES',//,
     110X,'DISTANCIA AL ORIGEN (Z)',12X,'ORDENADA DE LA CURVA (Y)',//)
  400 FORMAT (/,15X,2(E15.9,20X))
  450 FORMAT (3(/),20X,'NO EXISTE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE COEFICIENTE
     1S DEL SISTEMA')
  500 FORMAT (///,10X,'VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES',//)
  550 FORMAT (///,10X,'MATRIZ DE COEFICIENTES',//)
      END
```

Fig. 9.21 Listado del programa principal

```
      REAL FUNCTION FMOM(P,Q,AL,X)
      AL12=AL/2.0
      IF(X-AL12) 1,1,2
    2 FMOM=(P*AL + Q*AL*X - P*X - Q*X*X)/2.0
      RETURN
    1 FMOM=(P*X + Q*AL*X - Q*X*X)/2.0
      RETURN
      END
```

Fig. 9.22 Listado de la función FMOM

9.6.4 Ejemplo

Determinar la curva de la elástica para una viga de perfil H180 con las siguientes características:

$P = 2\,000$ Kg

$L = 4.$ m

$q = 4\,000$ Kg/m

$E = 2.1 \times 10^6$ Kg/cm^2

$I = 3830$ cm^4

peso propio = 52 Kg/m

* SOLUCION

TABLA 9.9 Datos para el problema del ejemplo 9.6.4

AL = 4.0

P = 2000.

Q = 4056.

XI = 0.00003830

E = 21000000000.

TABLA 9.10 Resultados para el problema del ejemplo 9.6.4.

EL VALOR DE LA CARGA CONCENTRADA APLICADA A MITAD DEL CLARO ES .2000E+04

LA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN TODA LA VIGA ES .4036E+04

EL VALOR DEL MODULO DE ELASTICIDAD ES .2100E+11

EL VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA ES .3830E-04

EL SISTEMA DE ECUACIONES OBTENIDO AL APLICAR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

MATRIZ DE COEFICIENTES

2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-2.0

VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES

.20208299E-03

.37866512E-03

.52974639E-03

.65532680E-03

.75540636E-03

.82998505E-03

.87906289E-03

.87906289E-03

.82998505E-03

.75540636E-03

.65532680E-03

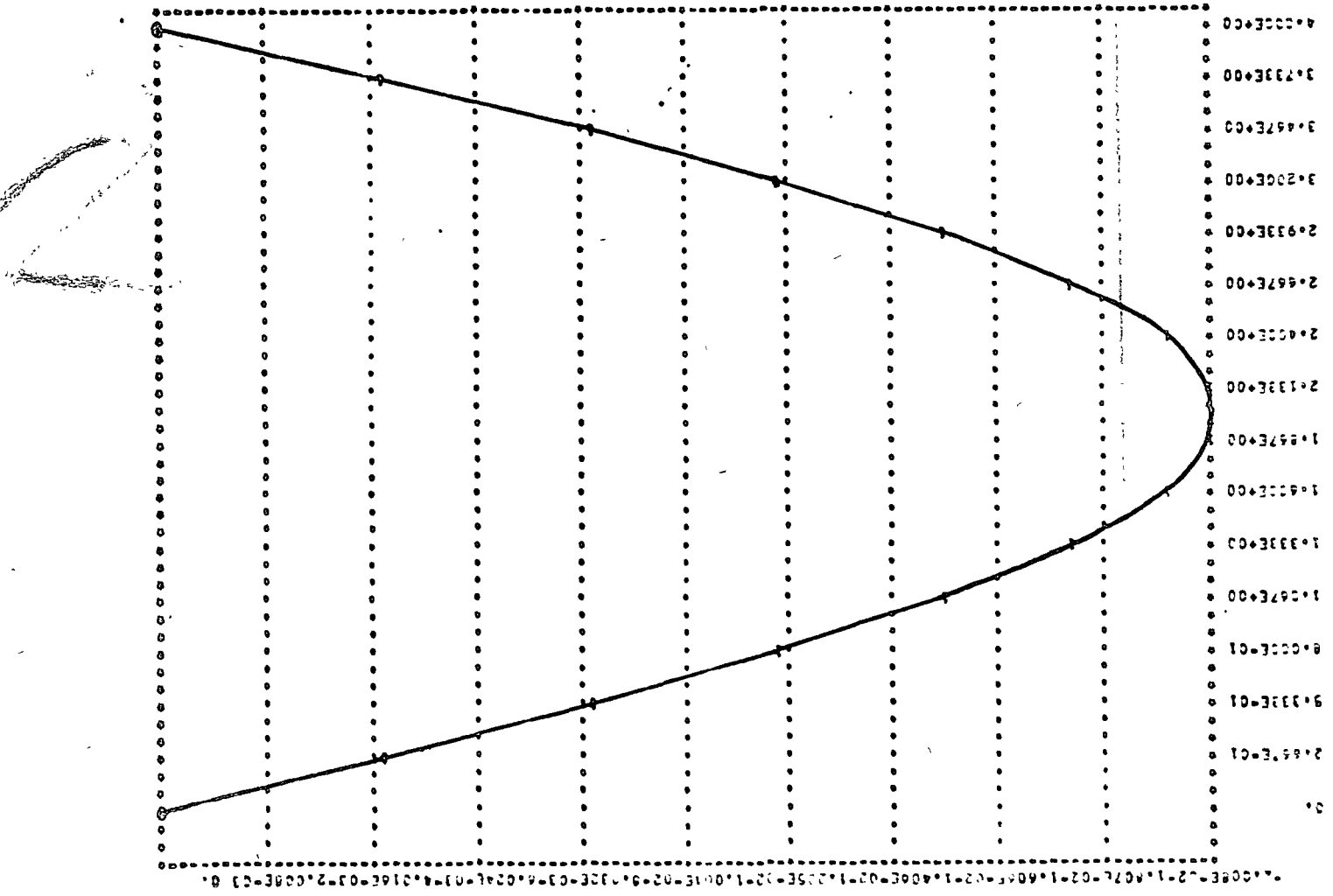
.52974639E-03

.37866512E-03

.20208299E-03

LA SOLUCION PARA LA CURVA DE LA ELASTICA ES

DISTANCIA AL ORIGEN (Z)	ORDENADA DE LA CURVA (Y)
0.	0.
.26666667E+00	-.42302756E-02
.53333333E+00	-.82584682E-02
.80000000E+00	-.11907996E-01
.10666667E+01	-.15027777E-01
.13333333E+01	-.17492231E-01
.16000000E+01	-.19201279E-01
.18666667E+01	-.20080342E-01
.21333333E+01	-.20080342E-01
.24000000E+01	-.19201279E-01
.26666667E+01	-.17492231E-01
.29333333E+01	-.15027777E-01
.32000000E+01	-.11907996E-01
.34666667E+01	-.82584682E-02
.37333333E+01	-.42302756E-02
.40000000E+01	0.



9.7 Bibliografía

1. CARNAHAN B., LUTHER H., WILKES J., "Applied Numerical Methods". New York: John Wiley & Sons Inc., 1969. pp. 341-428.
2. HAMMING Richard, "Numerical Methods for Scientists and Engineers". New York: Mc Graw Hill Book Co., 1962. pp. 211-222.
3. JAMES M., SMITH G., WOLFORD J., "Applied Numerical -- Methods for Digital Computation with FORTRAN". ---- Scranton Penn.: International Textbook Co., 1967. pp. 313-459.
4. KAPLAN Wilfred, "Elements of Ordinary Differential -- Equations". Reading Mass.:Addison-Wesley Co., 1964. pp. 80-104, 138-161, 250-263.
5. KUO S. Shan, "Computer Applications of Numerical ---- Methods". Reading Mass: Addison-Wesley Co., 1972. pp. 128-145.
6. NASH William, "Resistencia de Materiales". México: -- Mc Graw Hill Book Co., 1969. pp. 139-165.
7. OLIVERA S. Antonio, "Apuntes de Métodos Numéricos". - México: Facultad de Ingeniería, UNAM., 1972. pp. 6.1-6.19
8. SHANLEY F.R., "Mecánica de Materiales". México" Mc -- Graw Hill Book Co., 1971. pp. 214-235.

10. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

10.1 Introducción

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden tiene la siguiente configuración:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, t) \\ \frac{dX_2}{dt} &= f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dX_n}{dt} &= f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, t) \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Dependiendo de las características de las funciones f_j, el sistema puede ser lineal o no lineal.

Cualquier ecuación diferencial de orden "n" se puede expresar como un sistema de "n" ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante un cambio de variables como se indica a continuación.

Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden "n":

$$X^{(n)} = g(X, X', X'', \ldots, X^{(n-1)}, t) \; * \qquad (10.2)$$

efectuando el siguiente cambio de variables:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X \\ X_2 &= \frac{dX_1}{dt} = X' \\ &\vdots \\ X_n &= \frac{dX_{n-1}}{dt} = X^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

* $X^{(n)} = \dfrac{d^n X}{dt^n}$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= X_3 \\ &\vdots \\ \frac{dX_n}{dt} &= g(X_1, X_2, \ldots, X_n, t) \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

El arreglo (10.4) representa un sistema de "n" ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

En el presente capítulo se tratarán únicamente dos métodos de solución: el de Runge-Kutta para sistemas no lineales y el de Variación de Parámetros para sistemas lineales.

10.2 Método de Runge-Kutta

10.2.1 Objeto

Obtener la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, lineales o no, mediante el método de Runge-Kutta; es decir, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(t, X, Y) \\ \frac{dY}{dt} &= g(t, X, Y) \end{aligned}\right\} \qquad (10.5)$$

con condiciones iniciales t_0 , X_0 , y Y_0.

10.2.2 Método

El método de Runge-Kutta a emplear es el mismo que para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden; solo que en este caso se establecen relaciones recursivas para las dos ecua

ciones diferenciales, dichas relaciones se deben de ir resolvien do simultáneamente para obtener la solución. El método se puede extender para resolver un sistema de "n" ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en cuyo caso se plantearán 5n relaciones recursivas si se emplean fórmulas de Runge-Kutta de cuarto orden.

Las fórmulas iterativas para un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como el mostrado en la ecuación (10.5), empleando fórmulas de Runge-Kutta de cuarto orden, son:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_{i+1} &= X_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= (\Delta t) f(t_i, X_i, Y_i) \\
K_2 &= (\Delta t) f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, X_i + \frac{K_1}{2}, Y_i + \frac{Q_1}{2}\right) \\
K_3 &= (\Delta t) f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, X_i + \frac{K_2}{2}, Y_i + \frac{Q_2}{2}\right) \\
K_4 &= (\Delta t) f(t_i + \Delta t, X_i + K_3, Y_i + Q_3)
\end{aligned}
\right\} \qquad (10.6)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
Y_{i+1} &= Y_i + \frac{1}{6}(Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 + Q_4) \\
Q_1 &= (\Delta t) g(t_i, X_i, Y_i) \\
Q_2 &= (\Delta t) g\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, X_i + \frac{K_1}{2}, Y_i + \frac{Q_1}{2}\right) \\
Q_3 &= (\Delta t) g\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, X_i + \frac{K_2}{2}, Y_i + \frac{Q_2}{2}\right) \\
Q_4 &= (\Delta t) g(t_i + \Delta t, X_i + K_3, Y_i + Q_3)
\end{aligned}
\right\} \qquad (10.7)
$$

10.2.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE FUNCO(T,X,Y,F,G), en esta subrutina se proporcionan las dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

SUBROUTINE GRAFI(A,N,M), obtiene la gráfica de la solución para las dos ecuaciones diferenciales. Consultar el capítulo 1.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina FUNCO:

T	valor de la variable independiente t_i
X	valor de la primera variable dependiente X_i
Y	valor de la segunda variable dependiente Y_i
F	primera ecuación diferencial correspondiente a la derivada de la variable dependiente X_i
G	segunda ecuación diferencial correspondiente a la derivada de la variable dependiente Y_i

Para el programa principal:

N	cantidad de puntos en que se divide el intervalo de integración
S	espaciamiento entre los valores de la variable independiente (Δt)
X(1)	valor inicial de la variable dependiente X
Y(1)	valor inicial de la variable dependiente y
T(1)	valor inicial de la variable independiente t
T(I)	valores de la variable independiente t
X(I)	valores de la variable dependiente X
Y(I)	valores de la variable dependiente Y
RUK(I)	parámetros de las fórmulas iterativas de Runge-Kutta

QUK(I)	parámetros de las fórmulas iterativas de Runge-Kutta
C	variable de reemplazo
D	variable de reemplazo
E	variable de reemplazo
A(I,J)	arreglo matricial para graficar los resultados
M	columnas de la matriz A
F	valor de la derivada de X
G	valor de la derivada de Y

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION deberá modificarse en el caso de que:

N > 100

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMAT)	INFORMACION
1	(I5,4F10.0)	N, S, X(1), Y(1), T(1)
	----------	
otros paquetes de datos (opcional)		
	----------	
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

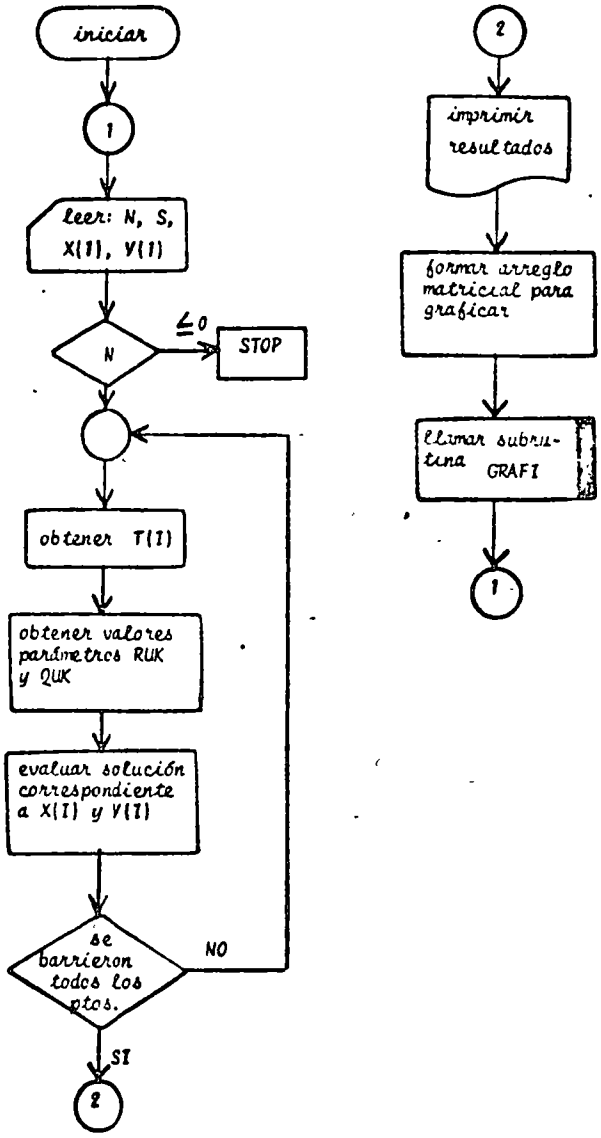


Fig. 10.1 Diagrama de bloques del programa principal

6) Listado:

```
C     SUBRUTINA PARA EVALUAR FUNCIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SE-
C     GUNDO ORDEN CON VALORES INICIALES.
C     DIMENSIONAMIENTO DE VARIABLES EMPLEADAS
C     RECAPITULACION DE OPCIONES PARA SE MODIFIQUE EL INTERVALO DE INTEGRA-
C        CION
C     S=INCREMENTO CON EL CUAL VARIAN LOS VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     T(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     X(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE X
C     Y(1)=VALOR INICIAL DE LA VARIABLE Y
C     T=VALOR QUE TOMA LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     X=SOLUCIONES PARA LA VARIABLE DEPENDIENTE X
C     Y=SOLUCIONES PARA LA VARIABLE DEPENDIENTE Y
C     FUN Y SUBPROGRAMAS DE LAS FUNCIONES DE RUNGE-KUTTA
C     APAREJO PARTICULAR PARA GRAFICOS RESULTADOS
C     D, E, F SE VARIABLES DE REEMPLAZO
C     F=VALOR DE LA FUNCION DE LA VARIABLE X
C     G=VALOR DE LA DERIVADA DE LA VARIABLE Y
C     N=CANTIDAD DE CELDAS DE LA MATRIZ A

      DIMENSION X(251),Y(101),T(101),RK(4),BLK(4),A(101,6)
      WRITE(6,100)
C     LECTURA DE CONDICIONES INICIALES
    1 READ(5,200) N,S,X(1),Y(1),T(1)
      IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 G=T(1)
      E=X(1)
      F=Y(1)
C     OBTENER LA SOLUCION DEL SISTEMA
      NO=1
      DO 4 I=2,N
      T(I)=T(I-1) + S
      G=T(I-1)
      E=X(I-1)
      F=Y(I-1)
      CALL FUNCT(G,E,F,G)
      RK(1)=S*F
      BLK(1)=S*G
      E=X(I-1) + S/ ..
      F=Y(I-1) + .1*(1)/2.0
      E=X(I-1) + .1*(1)/2.0
      CALL FUNCT(G,E,F,G)
      RK(2)=S*F
      BLK(2)=S*G
      E=X(I-1) + .1 (2)/2.0
      F=Y(I-1) + .1 (2)/2.0
      CALL FUNCT(G, E,F,G)
      RK(3)=S*F
      BLK(3)=S*G
      E=T(I-1) + S
      E=X(I-1) + .1 (3)
      F=Y(I-1) + .1*(3)
      CALL FUNCT(G, E,F,G)
      RK(4)=S*F
      BLK(4)=S*G
      X(I)=X(I-1) + (RK(1) + 2.0* RK(2) + 2.*RK(3) + RK(4))/6.0
    4 Y(I)=Y(I-1) + (BLK(1) + 2.0*BLK(2) + 2. *BLK(3) + BLK(4))/6.0
C     IMPRESION DE RESULTADOS
      WRITE(6,300) S
      WRITE(6,400)
      DO 5 I=1,N
    5 WRITE(6,500) T(I),X(I),Y(I)
C     DETERMINACION DE LA MATRIZ USADA PARA GRAFICAR RESULTADOS
      M=3
      DO 6 I=1,N
      A(I,1)=T(I)
      A(I,2)=X(I)
    6 A(I,3)=Y(I)
      CALL PLOTFI(A,I,M)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA Y DE RESULTADOS
  100 FORMAT (1H1,5X,'SOLUCION NUMERICA DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE SE
     1GUNDO ORDEN',//,3X,'NUMERO DE VALORES',3X,'INCREMENTO',3X,'VALOR INI
     2CIAL DE X',3X,'VALOR INICIAL DE Y',3X,'VALOR INICIAL DE T',//)
  200 FORMAT (I5,4F10.4)
  300 FORMAT(1H1,5X,'INCREMENTO =',F10.4,//,5X,'SOLUCION DE LA ECUACION
     1',//)
  400 FORMAT (//,10X,'T',12X,'X',12X,'Y',//)
  500 FORMAT (/,1X,3E13.5)
      END
```

Fig. 10.2 Listado del programa principal

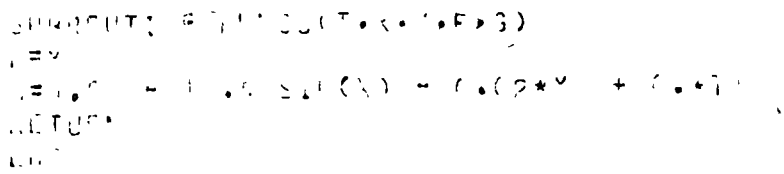


Fig. 10.3 Listado de la subrutina FUNCO

10.2.4 Ejemplo

El sistema mecánico de la figura 10.4 tiene como ecuación diferencial que caracteriza su movimiento a:

$$\frac{d^2\Theta}{dt} = \frac{T(t)}{ML^2} - \frac{g}{L}\,sen(\Theta) - \frac{Ba}{ML}\dot{\Theta} \qquad (10.8)$$

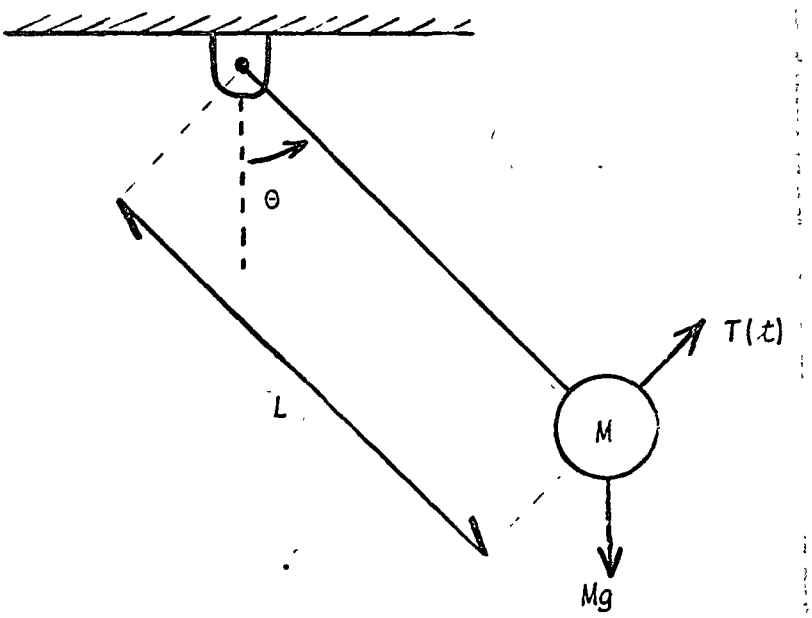


Fig. 10.4 Sistema mecánico del problema del ejemplo 10.2.4

La representación de la ecuación (10.8) mediante un sistema de ecuaciones es:

$$\dot{\Theta} = w$$

$$\dot{w} = \frac{T(t)}{ML^2} - \frac{g}{L}\,sen(\Theta) - \frac{Ba\,w}{ML}$$

Obtenga la solución del sistema de ecuaciones para las siguientes condiciones y valores de los parámetros:

M= 1 Kgm

L=0.5m

$g=9.8m/s^2$

Ba=0.01 Nt-m-s

$t_0 = 0.$

$\theta_0 = 0$ rad

$w_0 = 0.3$ rad/s

$t_f = 2$ s

$T(t) = 1$ Nt-m

* SOLUCION

TABLA 10.1 Datos para el problema del ejemplo 10.2.4

```
N= 101
S= .02
X(1)= 0.
Y(1)=0.3
T(1)= 0.
```

```
F = Y
G = 4.0 - 19.6*SIN(X) - 0.02*Y
```

TABLA 10.2 Resultados del problema del ejemplo 10.2.4

EL ESPACIAMIENTO DE TIEMPO [illegible] ES DE 0.02000

TIEMPO	X	Y
0.	0.	.30000000E+00
.20000000E-01	.67733324E-02	.37353460E+00
.40000000E-01	.15123393E-01	.45117230E+00
.60000000E-01	.24733233E-01	.52617254E+00
.80000000E-01	.36142616E-01	.59402369E+00
.10000000E+00	.49663040E-01	.65719766E+00
.12000000E+00	.65239034E-01	.71520458E+00
.14000000E+00	.77233769E-01	.76759698E+00
.16000000E+00	.93359203E-01	.81397375E+00
.18000000E+00	.10975225E+00	.85398371E+00
.20000000E+00	.12717459E+00	.88732347E+00
.22000000E+00	.14519731E+00	.91376594E+00
.24000000E+00	.16367601E+00	.93311052E+00
.26000000E+00	.18247337E+00	.94523590E+00
.28000000E+00	.20143204E+00	.95007523E+00
.30000000E+00	.22042773E+00	.94762102E+00
.32000000E+00	.23927537E+00	.93792444E+00
.34000000E+00	.25739731E+00	.92109401E+00
.36000000E+00	.27492635E+00	.89729357E+00
.38000000E+00	.29374401E+00	.86673973E+00
.40000000E+00	.31071095E+00	.82969734E+00
.42000000E+00	.32639403E+00	.78648515E+00
.44000000E+00	.34213335E+00	.73745316E+00
.46000000E+00	.35635275E+00	.68299331E+00
⋮		⋮
.17400000E+01	.22115445E+00	.93377[illegible]E+00
.17600000E+01	.23970350E+00	.92334397E+00
.17800000E+01	.25911254E+00	.93619165E+00
.18000000E+01	.27601345E+00	.88307302E+00
.18200000E+01	.29035113E+00	.85260812E+00
.18400000E+01	.31107521E+00	.81576146E+00
.18600000E+01	.32047106E+00	.77294417E+00
.18800000E+01	.33702033E+00	.72420317E+00
.19000000E+01	.354[illegible]E+00	.67024463E+00
.19200000E+01	.3677[illegible]E+00	.61137[illegible]E+00
.19400000E+01	.3733[illegible]E+00	.54706730E+00
.19600000E+01	[illegible]	[illegible]E+00
.19800000E+01	[illegible]	.41[illegible]E+00
[illegible]	[illegible]	[illegible]

10.3 Solución de Sistemas Homogéneos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden

10.3.1 Objeto

Obtener la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, homogéneos y lineales por el método de Variación de Parámetros. Los sistemas del tipo antes mencionado tienen la siguiente configuración:

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dX_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad (10.9)$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$t_0 \ , \ X_1(t_0) \ , \ X_2(t_0) \ , \ \ldots \ , \ X_n(t_0)$$

10.3.2 Método

El sistema de ecuaciones diferenciales de la expresión (10.9) se puede representar en la forma compacta:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{X}}(t) &= \underline{A}\ \underline{X}(t) \\ \underline{X}(t_0) &= \underline{X}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

El método de variación de parámetros establece que la solución del sistema de ecuaciones (10.10) es:

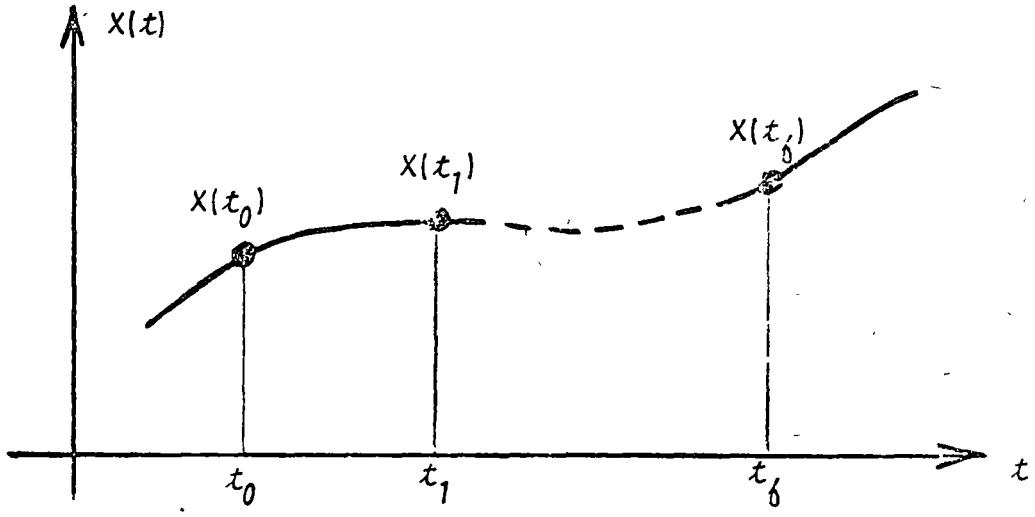
$$\underline{X}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\underline{X}_0 \qquad (10.11)$$

donde a la matriz $e^{\underline{A}(t-t_0)}$ se le conoce como matriz de transición y se define mediante la siguiente serie infinita:

$$e^{\underline{A}(t-t_0)} = \underline{I} + \frac{\underline{A}(t-t_0)}{1!} + \ldots + \frac{\underline{A}^n(t-t_0)^n}{n!} + \ldots \qquad (10.12)$$

Para un estudio detallado del origen de las expresiones (10.11) y (10.12) se recomienda consultar las referencias 1, 3 y 6 de la bibliografía anexa.

La ley de evolución de estados para un sistema lineal se puede representar gráficamente como:



es decir, se puede pasar del estado $X(t_0)$ al estado $X(t_f)$ directamente o a través de $X(t_1)$. La solución del sistema (10.10) mediante computadora digital se basa en esta característica; para evaluar la respuesta $\underline{X}(t)$ desde t_0 hasta t_f se discretiza el intervalo de integración en "n+1" puntos igualmente espaciados y se obtiene la solución haciendo evolucionar el estado desde t_0 hasta t_1, de t_1 a t_2 y así sucesivamente. Analíticamente se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} \underline{X}(t_1) &= e^{\underline{A}(t_1-t_0)}\underline{X}(t_0) \\ \underline{X}(t_2) &= e^{\underline{A}(t_2-t_1)}\underline{X}(t_1) \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{X}(t_n) = e^{\underline{A}(t_n - t_{n-1})}\ \underline{X}(t_{n-1}) \qquad (10.13)$$

pero:

$$e^{\underline{A}(t_1 - t_0)} = e^{\underline{A}(t_n - t_{n-1})} = e^{\underline{A}\,\Delta t} \qquad (10.14)$$

por lo que solo se evaluará una vez la matriz $e^{\underline{A}\,\Delta t}$ ya que es la misma matriz para todos los intervalos puesto que el espaciamiento es constante.

Para evaluar $e^{\underline{A}\,\Delta t}$ se emplea la relación (10.12), donde la cantidad de términos empleados dependerá del criterio de convergencia empleado, o sea, dado un criterio ε la sumatoria de términos se detendrá cuando:

$$\left| e^{\underline{A}\,\Delta t}_{ij(n)} - e^{\underline{A}\,\Delta t}_{ij(n-1)} \right| < \varepsilon \text{ , para toda } ij \qquad (10.15)$$

Una vez evaluada $e^{\underline{A}\,\Delta t}$ la solución se obtiene mediante las relaciones dadas en (10.13).

10.3.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE EXPMA(DELT,M,A,EXPO), obtiene la matriz de transición. Criterio de convergencia empleado: $\varepsilon = 0.0001$.

SUBROUTINE GRAFI(A,N,M), grafica las soluciones de todas las variables dependientes. Consultar el capítulo 1.

SUBROUTINE MULTMA(A,B,N,M,L,X), efectúa el producto entre dos matrices conformables. Consultar el capítulo 2.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina EXPMA:

DELT	espaciamiento entre los valores de la variable independiente (t)
M	cantidad de ecuaciones diferenciales
A(I,J)	matriz de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones

EXPO(I,J)	matriz de transición
CMA(I,J)	matriz identidad
B(I,J)	matriz A elevada a la potencia "n"
X(I,J)	producto matricial AB
EPS	criterio de convergencia para la serie
DIV	factorial de "n"
CN	contador que incrementa a DIV
TNEW	espaciamiento de la variable independiente elevado a la potencia "n"

Para el programa principal:

M	cantidad de ecuaciones diferenciales
PERIO	magnitud del intervalo de integración
DELT	espaciamiento entre los valores de la variable independiente
N	cantidad de puntos muestrales en que se dará discretizada la solución
A(I,J)	matriz de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales
X(1,1)	condición inicial de la variable independiente
X(1,J)	condiciones iniciales de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para $J > 1$
EXPO(I,J)	matriz de transición
X(I,J)	valores de la variable independiente y de las variables dependientes

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION del programa principal y de las subrutinas deberá ser modificada cuando:

$M > 5$ y/o $N > 101$

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(I5,2F10.0)	M, DELT, PERIO
2	(8F10.0)	A(I,J), los elementos de la matriz se dan renglón por renglón. Emplear las tarjetas que sean necesarias
.		
.		
.		

3	(8F10.0)	X(1,J), el primer valor corresponde a la condición inicial de la variable independiente
		---
		otros paquetes de datos (opcional)
		---
n		TARJETA EN BLANCO, al finalizar toda la información

e) Diagrama de bloques:

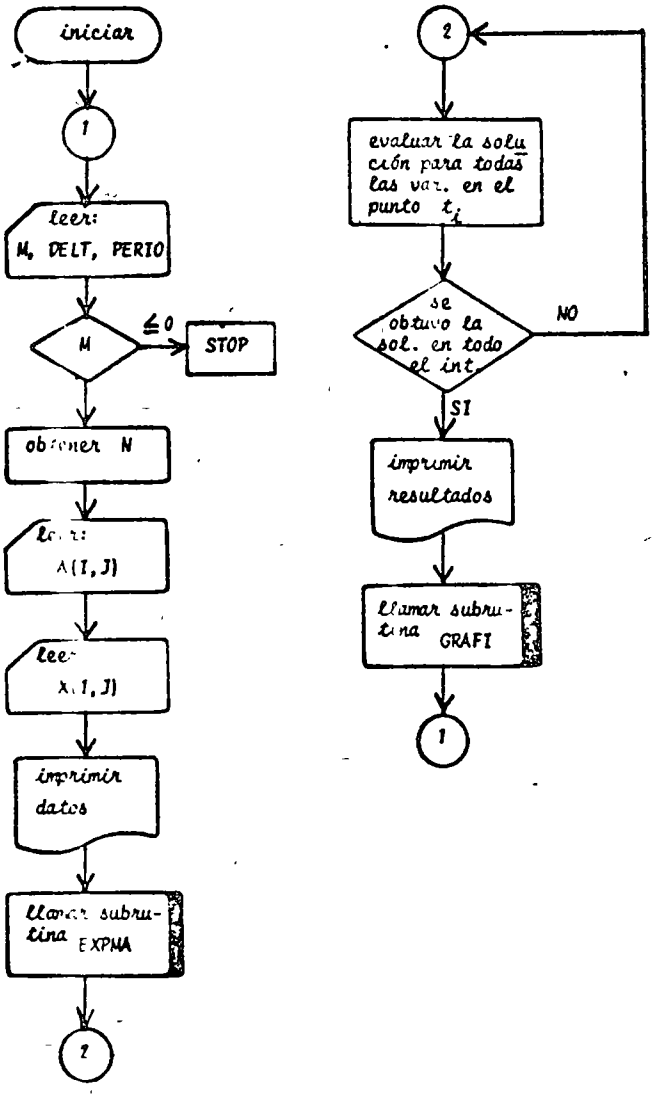


Fig. 10.5 Diagrama de bloques del programa principal

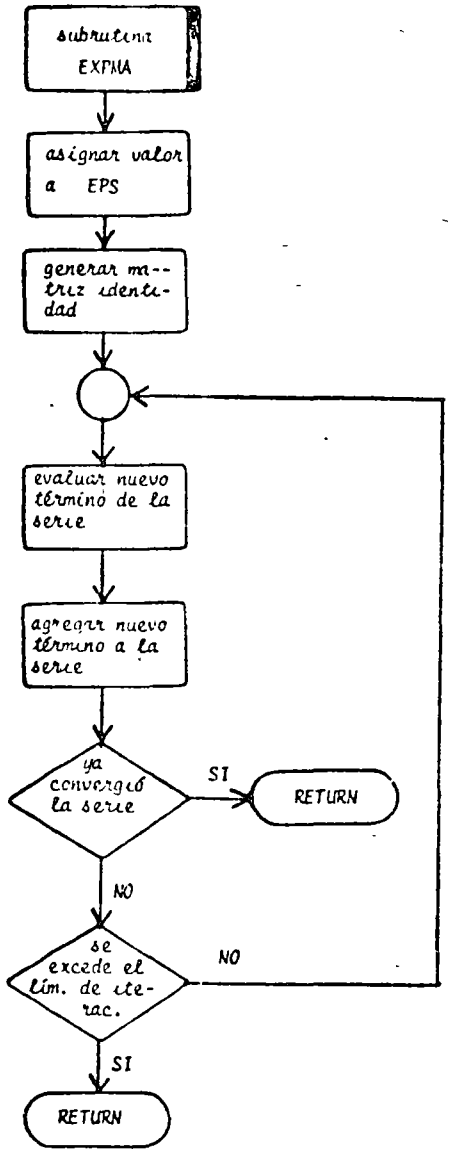


Fig. 10.6 Diagrama de bloques de la subrutina EXPMA

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGE
C     NEAS ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     M=CANTIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES
C     PERIO=MAGNITUD DEL INTERVALO DE INTEGRACION
C     DELT=ESPACIAMIENTO ENTRE VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     A=MATRIZ DE COEFICIENTES CONSTANTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     X(1,J)=CONDICIONES INICIALES
C     X=SOLUCIONES DEL SISTEMA

      DIMENSION A(6,6),EXPO(6,6),X(101,6)
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(5,100) M,DELT,PERIO
      IF(M) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 RN=PERIO/DELT
      N=RN + 1
      MP1=M+1
      DO 4 I=1,M
    4 READ(5,200) (A(I,J),J=1,M)
      READ(5,200) (X(1,J),J=1,MP1)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(6,300)
      DO 5 I=1,M
    5 WRITE(6,400) (A(I,J),J=1,M)
      WRITE(6,500)
      WRITE(6,400) (X(1,J),J=1,MP1)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA OBTENER LA MATRIZ DE TRANSICION
      CALL EXPMA(DELT,M,A,EXPO)
C     OBTENER LA SOLUCION
      DO 9 K=2,N
      DO 7 J=1,M
      X(K,J+1)=0.0
      DO 7 I=2,MP1
    7 X(K,J+1)=X(K,J+1) + EXPO(J,I-1)*X(K-1,I)
      X(K,1)=X(K-1,1) + DELT
    9 CONTINUE
C     IMPRIMIR RESULTADOS
      WRITE(6,600)
      DO 10 I=1,N
   10 WRITE(6,400) (X(I,J),J=1,MP1)
C     LLAMADO DE SUBRUTINA PARA GRAFICAR
      CALL GRAFI(X,N,MP1)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT (I5,2F10.0)
  200 FORMAT (8F10.0)
  300 FORMAT (1H1,5(/),15X,44HLA MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA
     1ES,//)
  400 FORMAT (/,15X,6(E12.5,3X))
  500 FORMAT (4(/),15X,29HLAS CONDICIONES INICIALES SON,//,18X,6HTIEMPO,1
     10X,4HX(1),11X,4HX(2),11X,4HX(3),11X,4HX(4),11X,4HX(5),//)
  600 FORMAT (4(/),15X,14HLA SOLUCION ES,//,18X,6HTIEMPO,10X,4HX(1),11X,4
     1HX(2),11X,4HX(3),11X,4HX(4),11X,4HX(5),//)
      END
```

Fig. 10.7 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE EXPMA(DELT,M,A,EXPO)
C     SUBRUTINA PARA OBTENER LA MATRIZ DE TRANSICION ASOCIADA A UNA MA-
C     TRIZ CUADRADA
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     DELT=MAGNITUD DE LOS INCREMENTOS DE TIEMPO
C     M=ORDEN DE LA MATRIZ
C     A=MATRIZ DE LA QUE SE DESEA LA MATRIZ DE TRANSICION
C     EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA
C     CMA=MATRIZ IDENTIDAD
C     EXPO=MATRIZ DE TRANSICION
C     CN=CONTADOR DE ITERACIONES
C     DIV=FACTORIAL DIVISOR
C     B=MATRIZ A ELEVADA A LA POTENCIA N
C     X=MATRIZ PRODUCTO AB
C     TNEW=ESPACIAMIENTO DE TIEMPO ELEVADO A LA POTENCIA N
      DIMENSION A(6,6),EXPO(6,6),CMA(6,6),B(6,6),X(6,6)
      EPS=0.00001
C     GENERAR MATRIZ IDENTIDAD
      DO 3 I=1,M
      DO 2 J=1,M
      IF(I.EQ.J) GO TO 1
      CMA(I,J)=0.0
      GO TO 2
    1 CMA(I,J)=1.0
    2 CONTINUE
    3 CONTINUE
C     OBTENER LOS PRIMEROS TERMINOS DE LA SERIE
      DO 4 I=1,M
      DO 4 J=1,M
      EXPO(I,J)=CMA(I,J) + A(I,J)*DELT
    4 B(I,J)=A(I,J)
      TNEW=DELT
      CN=2.0
      DIV=1.0
C     OBTENER LOS TERMINOS RESTANTES
    5 DIV=DIV*CN
      TNEW=TNEW*DELT
      CALL MULTMA(A,B,M,M,M,X)
      DO 6 I=1,M
      DO 6 J=1,M
      B(I,J)=X(I,J)
    6 CMA(I,J)=(X(I,J)*TNEW)/DIV
      IF(CN.LE.6.0) GO TO 9
      AMAX=CMA(1,1)
      DO 8 I=1,M
      DO 7 J=1,M
      IF(ABS(CMA(I,J)).LE.ABS(AMAX)) GO TO 7
      AMAX=CMA(I,J)
    7 CONTINUE
    8 CONTINUE
C     REVISAR CONVERGENCIA
      IF(ABS(AMAX).LE.EPS) GO TO 11
    9 DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,M
   10 EXPO(I,J)=EXPO(I,J) + CMA(I,J)
      IF(CN.GT.20.) GO TO 11
      CN=CN + 1.0
      GO TO 5
   11 RETURN
      END
```

Fig. 10.8 Listado de la subrutina EXPMA

10.3.4 Ejemplo

La representación mediante variables de estado para el sistema mecánico de la figura 10.9 es:

$$\dot{X}_1 = S_1$$

$$\dot{X}_2 = S_2$$

$$\dot{S}_1 = \frac{K}{M_1}(X_2 - X_1)$$

$$\dot{S}_2 = \frac{f(t)}{M_2} - \frac{BS_2}{M_2} - \frac{K}{M_2}(X_2 - X_1)$$

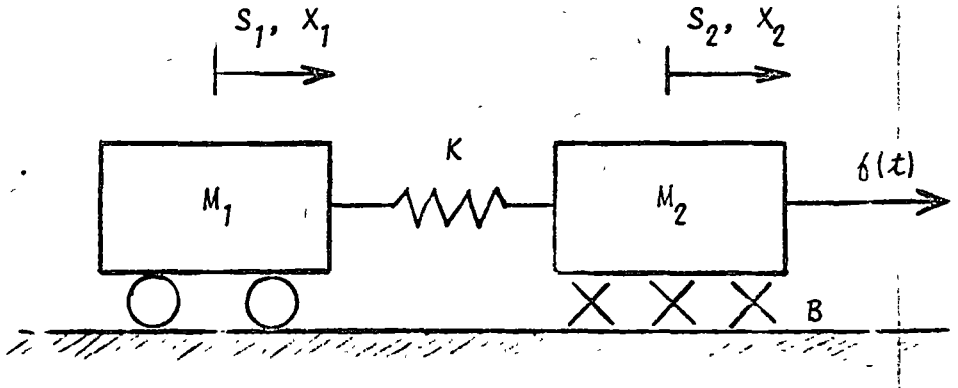


Fig. 10.9 Sistema mecánico del ejemplo 10.3.4

Determine la respuesta libre del sistema si:

$M_1 = 1$
$M_2 = 0.1$
$K = 0.9$
$B = 1.5$
$t_0 = 0.0$
$t_f = 10.0$
$X_1(t_0) = 0.$
$S_1(t_0) = 1.$
$X_2(t_0) = 2.$
$S_2(t_0) = 1.5$

Todas las unidades están dadas en unidades del sistema MKS. Considere como salidas del sistema las velocidades y los desplazamientos.

* SOLUCION

TABLA 10.3 Datos para el problema del ejemplo 10.3.4

M= 4

PERIO= 10.

DELT= 0.1

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & -9 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}(1,J) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

TABLA 10.4 Resultados del problema del ejemplo 10.3.4

LA MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA ES

0.	.10000E+01	0.	0.
-.10000E+01	0.	.10000E+01	0.
0.	0.	0.	.10000E+01
.90000E+01	0.	-.90000E+01	-.15000E+02

LAS CONDICIONES INICIALES SON

TIEMPO	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
0.	0.	.10000E+01	.20000E+01	.15000E+01

LA SOLUCION ES

TIEMPO	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
0.	0.	.10000E+01	.20000E+01	.15000E+01
.10000E+00	.10995E+00	.11974E+01	.20202E+01	-.57957E+00
.20000E+00	.23893E+00	.13782E+01	.19371E+01	-.96037E+00
.30000E+00	.38482E+00	.15360E+01	.18408E+01	-.93625E+00
.40000E+00	.54529E+00	.16692E+01	.17528E+01	-.81575E+00
.50000E+00	.71784E+00	.17776E+01	.16783E+01	-.67329E+00
.60000E+00	.89999E+00	.18615E+01	.16183E+01	-.52764E+00
.70000E+00	.10893E+01	.19215E+01	.15727E+01	-.38428E+00
.80000E+00	.12835E+01	.19585E+01	.15413E+01	-.24541E+00
.90000E+00	.14803E+01	.19734E+01	.15234E+01	-.11238E+00
.10000E+01	.16775E+01	.19675E+01	.15186E+01	.13766E-01
.11000E+01	.18732E+01	.19421E+01	.15259E+01	.13216E+00
.				.
.				.
.				.
.90000E+01	.28338E+01	.50181E-01	.26629E+01	.10430E+00
.91000E+01	.28380E+01	.33384E-01	.26732E+01	.10122E+00
.92000E+01	.28405E+01	.17264E-01	.26832E+01	.97306E-01
.93000E+01	.28415E+01	.19436E-02	.26927E+01	.92644E-01
.94000E+01	.28410E+01	-.12472E-01	.27017E+01	.87326E-01
.95000E+01	.28390E+01	-.25890E-01	.27101E+01	.81447E-01
.96000E+01	.28358E+01	-.38236E-01	.27179E+01	.75101E-01
.97000E+01	.28314E+01	-.49451E-01	.27251E+01	.68378E-01
.98000E+01	.28260E+01	-.59488E-01	.27316E+01	.61371E-01
.99000E+01	.28196E+01	-.68317E-01	.27378E+01	.54166E-01
.10000E+02	.28124E+01	-.75923E-01	.27426E+01	.46850E-01

20°
28°
20°
19°
19°
20°
23°

10.4 Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas de Primer Orden

10.4.1 Objeto

Obtener la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas, lineales, de primer orden mediante el método de Variación de Parámetros.

La representación en forma matricial para este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}}(t) &= \underline{A}\,\underline{X}(t) + \underline{B}\,\underline{U}(t) \\ \underline{X}(t_0) &= \underline{X}_0 \end{aligned} \qquad (10.16)$$

donde $\underline{U}(t)$ representa el vector de entradas externas si se habla de sistemas físicos.

Debido a que cuando se modelan sistemas dinámicos lineales las salidas no siempre corresponden a las variables empleadas en las ecuaciones diferenciales, en este programa se considera la representación completa mediante variables de estado de un sistema lineal, la cual es:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{X}}(t) &= \underline{A}\,\underline{X}(t) + \underline{B}\underline{U}(t) \\ \underline{Y}(t) &= \underline{C}\underline{X}(t) + \underline{D}\underline{U}(t) \\ \underline{X}(t_0) &= \underline{X}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.17)$$

donde $Y(t)$ representa el vector de salidas del sistema.

10.4.2 Método

El método de variación de parámetros establece que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales (10.17) tiene por solución:

$$\underline{X}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)}\underline{X}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\sigma)}\underline{B}\,\underline{U}(\sigma)\,d\sigma \qquad (10.18)$$

donde la matriz $e^{\underline{A}(t - t_0)}$ es la matriz de transición definida en la sección 10.3.2.

Por lo tanto la solución total será la suma de la respuesta debida a las condiciones iniciales más la respuesta debida a las excitaciones externas. Para la primera parte de la solución se discutió su obtención en la sección 10.3.2.

Dado que el primer término de la solución se evalúa mediante una evolución de estados a incrementos iguales de tiempo, la segunda parte de la solución:

$$\int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t - \sigma)} \underline{B}\, \underline{U}(\sigma)\, d\sigma \qquad (10.19)$$

también se evaluará a incrementos iguales de tiempo.

Para poder evaluar la expresión (10.19) mediante la computadora se requiere discretizar el vector de entradas $\underline{U}(t)$, aproximando cada entrada $u(t)$ mediante pulsos o rectas como se muestra a continuación:

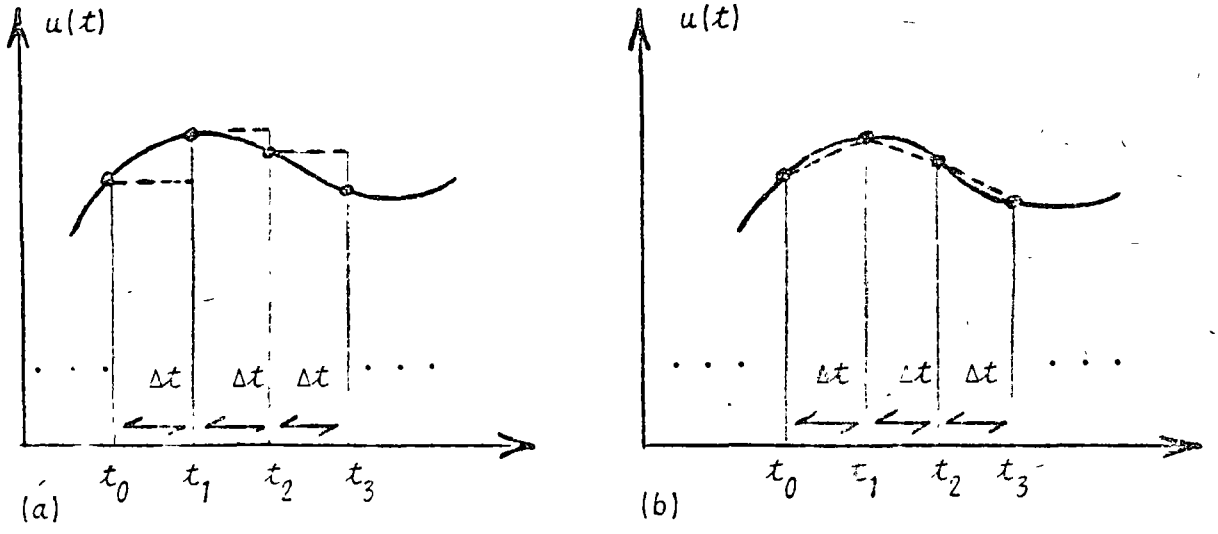


Fig. 10.10 Aproximación de una función mediante:
a) pulsos b) rectas

En el programa se aproxima la función $u(t)$ mediante rectas, las ecuaciones necesarias para la evaluación de (10.19) se desarrollan a continuación.

Sea la función $u(t)$ mostrada en la figura 10.11 :

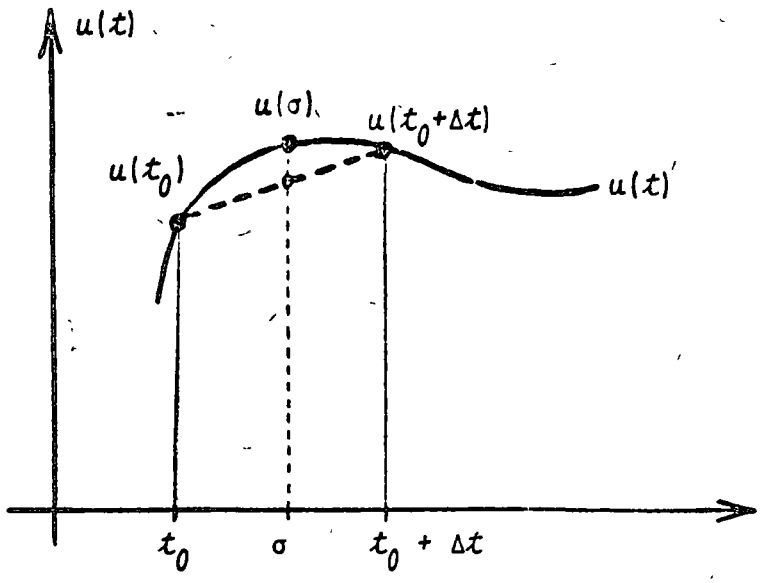


Fig. 10.11 Función u(t) y su aproximación mediante una recta en el intervalo t_0 a $t_0 + t$

Se desea evaluar la expresión (10.19) pero:

$$\int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\sigma)}\,\underline{B}\,\underline{U}(\sigma)\,d\sigma = e^{\underline{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\sigma}\,\underline{B}\,\underline{U}(\sigma)\,d\sigma \qquad (10.20)$$

evaluando de t_0 a $t_0 + \Delta t$:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{\underline{A}(t-\sigma)}\,\underline{B}\,\underline{U}(\sigma)\,d\sigma = e^{\underline{A}\,\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} e^{-\underline{A}\sigma}\,\underline{B}\,\underline{U}(\sigma)\,d\sigma \qquad (10.21)$$

de la figura 10.11 se observa que:

$$u(\sigma) \cong \frac{u(t_0+\Delta t) - u(t_0)}{\Delta t} + u(t_0) \qquad (10.22)$$

substituyendo (10.22) en (10.21):

$$e^{\underline{A}\,\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} e^{-\underline{A}\sigma}\,\underline{B}\,\underline{U}(\sigma)\,\sigma = \left\{e^{\underline{A}\,\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} e^{-\underline{A}\sigma}\sigma\,d\sigma\right\}\cdot\underline{B}\,\frac{\underline{U}(t_0+\Delta t) - \underline{U}(t_0)}{\Delta t} + \left\{e^{\underline{A}\,\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} e^{-\underline{A}\sigma}\,d\sigma\right\}\underline{B}\,\underline{U}(t_0) \qquad (10.23)$$

empleando la siguiente relación:

$$e^{-\underline{A}\sigma} = \underline{I} - \frac{\underline{A}\sigma}{1!} + \frac{\underline{A}^2\sigma^2}{2!} - \frac{\underline{A}^3\sigma^3}{3!} + \ldots \qquad (10.24)$$

en los términos entre corchetes se llega a:

$$e^{\underline{A}\,\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{-\underline{A}\sigma}\,\sigma d\sigma = \frac{\underline{I}(\Delta t)^2}{2!} + \ldots + \frac{\underline{A}^n(\Delta t)^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots \qquad (10.25)$$

$$e^{\underline{A}\,\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{-\underline{A}\sigma}\,d\sigma = \underline{I}(\Delta t) + \ldots + \frac{\underline{A}^n(\Delta t)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \ldots \qquad (10.26)$$

Para la evaluación de las series (10.25) y (10.26) la cantidad de términos a emplear dependerá de la exactitud deseada. Se fija un criterio de convergencia ε tal que si $\underline{Z}$ representa a la matriz de la serie (10.25) y $\underline{W}$ a la matriz de la serie (10.26), se cumpla que:

$$\left| z_{ij}^{(n+1)} - z_{ij}^{(n)} \right| < \varepsilon \quad , \text{ para toda } ij$$
$$\left| w_{ij}^{(n+1)} - w_{ij}^{(n)} \right| < \varepsilon \quad , \text{ para toda } ij \qquad * \qquad (10.27)$$

Como las series (10.25) y (10.26) solo dependen del espaciamiento, se tendrán que evaluar una sola vez.

En el programa para obtener la relación (10.24) hay que evaluar el vector de entradas $\underline{U}(t)$ en cada uno de los puntos en que se subdivide el intervalo de integración.

En términos generales el proceso a seguir es:

1. evaluar la matriz de transición $e^{\underline{A}(\Delta t)}$
2. evaluar las series de las ecuaciones (10.25) y (10.26)
3. obtener la respuesta debida a las condiciones iniciales para t_i

---

* $z_{ij}^{(n)}$ representa el elemento z_{ij} de la matriz $\underline{Z}$ compuesta por la sumatoria de "n" términos.

(4) evaluar $\underline{U}(t)$ en t_i y t_{i+1}

(5) obtener la respuesta debida a las excitaciones externas mediante la relación (10.23)

(6) hacer i=i+1 y regresar al paso (3) hasta barrer todo el intervalo de integración.

10.4.3 Descripción del Programa

a) Subrutinas requeridas:

SUBROUTINE EXPMA(DELT,M,A,EXPO), obtiene la matriz de transición. Consultar sección 10.3.3.

SUBROUTINE INTPE(DELT,M,A,SUMA), obtiene la matriz de la serie (10.26); esta expresión se emplea para evaluar la respuesta debida a las excitaciones externas

SUBROUTINE INTRE(DELT,M,A,RECTA), evalua la expresión dada por la serie de la ecuación (10.25); esta expresión se utiliza para calcular la respuesta debida a las excitaciones externas.

SUBROUTINE MULTMA(A,B,N,M,L,X), obtiene el producto matricial AB. Consultar el capítulo 2.

SUBROUTINE GRAFI(A,N,M), grafica las soluciones de las variables dependientes y de las respuestas del sistema. Consultar el capítulo 1.

SUBROUTINE EXCITA(T,F), evalua el vector de entradas $\underline{U}(t)$ en el instante t_i.

b) Descripción de las variables:

Para la subrutina INTPE:

DELT	espaciamiento entre los valores de la variable independiente
M	cantidad de ecuaciones diferenciales
A(I,J)	matriz de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales
EPS	criterio de convergencia
SUMA(I,J)	matriz resultante de evaluar la serie
CN	contador de iteraciones
DIV	factorial divisor
TNEW	incremento de la variable independiente elevado a la potencia "n"
CMA(I,J)	matriz identidad

B(I,J)	matriz A elevada a la potencia "n"
X(I,J)	matriz resultante del producto AB

Para la subrutina INTRE:

DELT	espaciamiento entre los valores de la variable independiente
M	cantidad de ecuaciones diferenciales
A(I,J)	matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales
RECTA(I,J)	matriz resultante de evaluar la serie
CMA(I,J)	matriz identidad
B(I,J)	matriz A elevada a la potencia "n"
X(I,J)	matriz resultante del producto AB
EPS	criterio de convergencia
TNEW	incremento de la variable independiente elevado a la potencia "n"
CN	contador
DIV	factorial divisor

Para la subrutina EXCITA:

T	valor del instante de tiempo en el cual se desea evaluar la expresión $\underline{U}(t)$
F(1,1)	valor del primer renglón de la expresión $\underline{U}(t)$ en el instante t_i
F(2,1)	valor del segundo renglón de la expresión $\underline{U}(t)$ en el instante t_i
F(3,1)	valor del tercer renglón de la expresión $\underline{U}(t)$ en el instante t_i
F(4,1)	valor del cuarto renglón de la expresión $\underline{U}(t)$ en el instante t_i
F(5,1)	valor del quinto renglón de la expresión $\underline{U}(t)$ en el instante t_i

Para el programa principal:

M	cantidad de ecuaciones diferenciales
N	cantidad de subintervalos en que se divide el intervalo de integración
NS	cantidad de salidas del sistema
NU	cantidad de entradas del sistema
PERIO	intervalo de integración

DELT	magnitud de los subintervalos de integración
A(I,J)	matriz A del sistema de ecuaciones
B(I,J)	matriz B del sistema de ecuaciones
C(I,J)	matriz C del sistema de ecuaciones
D(I,J)	matriz D del sistema de ecuaciones
X(1,1)	condición inicial de la variable independiente
X(1,J)	condiciones iniciales para cada una de las variables dependientes, J > 1
X(I,J)	solución del sistema de ecuaciones
YY(I,J)	valor de las salidas del sistema
SUMA(I,J)	integral del término constante de la ecuación de la recta empleada para aproximar la entrada
RECTA(I,J)	integral del término variable de la ecuación de la recta empleada para aproximar la entrada
SHOM(I,J)	solución del sistema debida a las excitaciones externas
Y(I,J)	valor de la entrada en el instante t_{i-1}
PEND(I,J)	pendiente de la recta empleada para aproximar la entrada
RE(I,J)	variable de reemplazo
F(I,J)	variable de reemplazo

c) Dimensiones:

La proposición DIMENSION del programa principal y de las subrutinas deberá modificarse cuando:
N > 100 y/o M > 5 y/o NS > 5 y/o NU > 5
Si se modifica la extensión de M, deberán modificarse los argumentos de la subrutina EXCITA.

d) Formatos para los datos de entrada:

SEC. TARJETAS	FORMATO	INFORMACION
1	(4I5,F10.0)	M, N, NS, NU, PERIO
2	(8F10.0)	A(I,J), los elementos de la matriz se dan renglón por renglón. Emplear tan-

.		tas tarjetas como sean ne
.		cesarias
.		
3	(8F10.0)	B(I,J), igual que para la
.		matriz A
.		
.		
4	(8F10.0)	C(I,J), igual que para la
.		matriz A
.		
.		
5	(8F10.0)	D(I,J), igual que para la
.		matriz A
.		
.		
6	(8F10.0)	X(1,J), el primer valor de
		be corresponder a la condi
		ción inicial de la varia--
		ble independiente.

---

otros paquetes de datos (opcional)

---

n	TARJETA EN BLANCO, al fina
	lizar toda la información.

e) Diagrama de bloques:

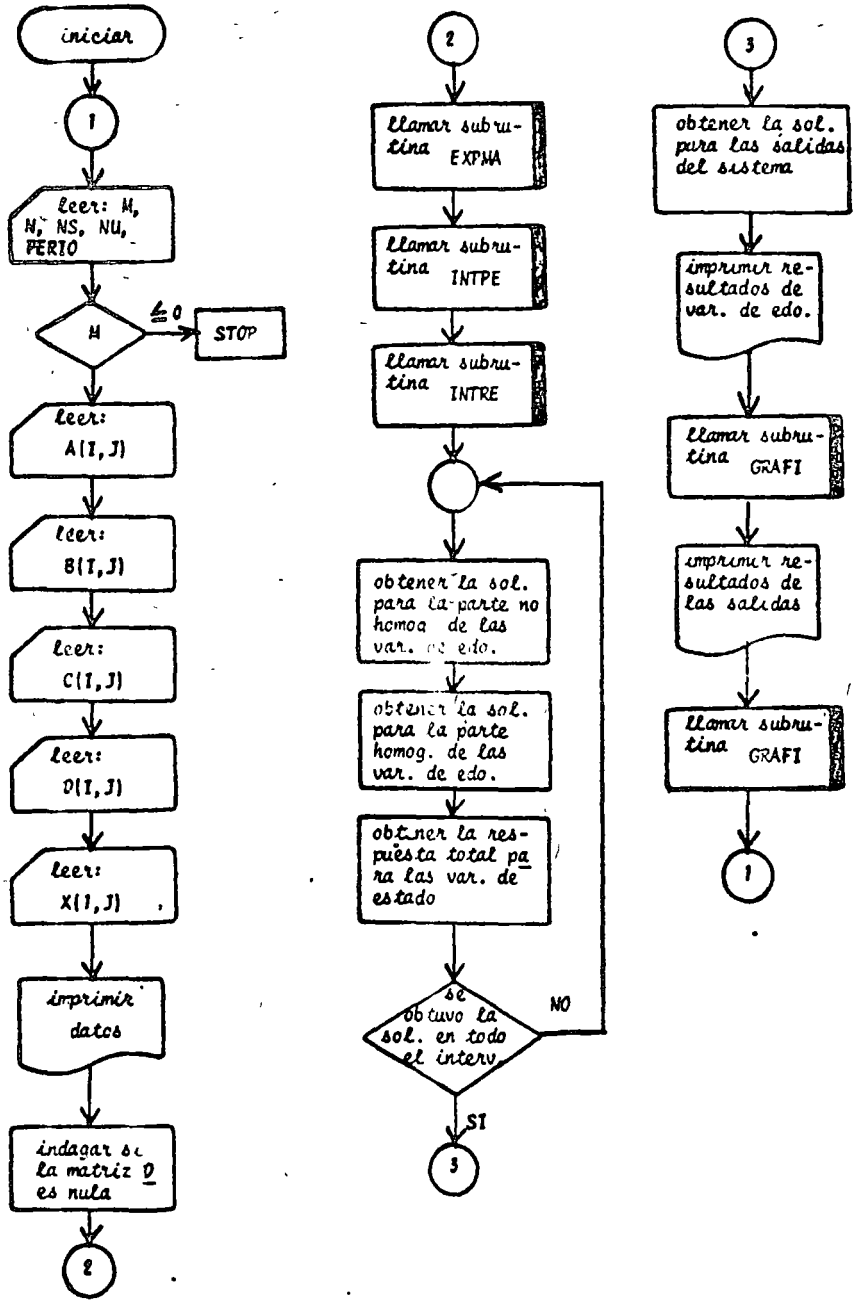


Fig. 10.12 Diagrama de bloques del programa principal

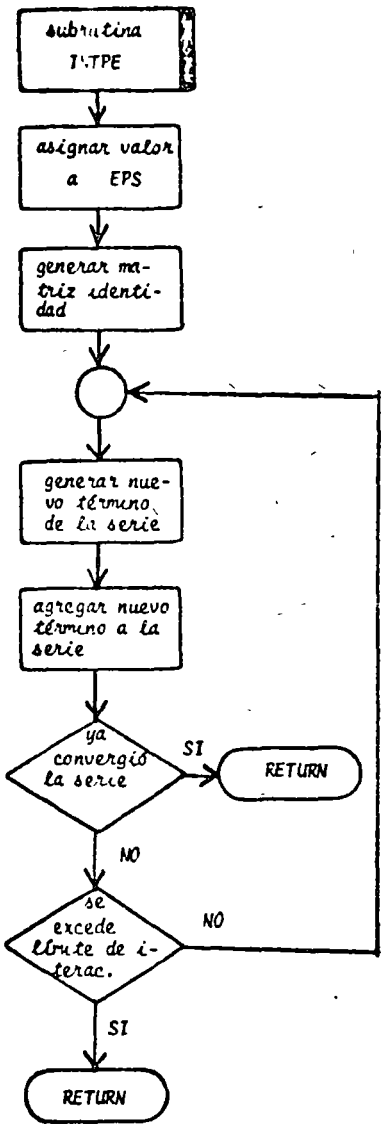


Fig. 10.13 Diagrama de bloques de la subrutina INTPE

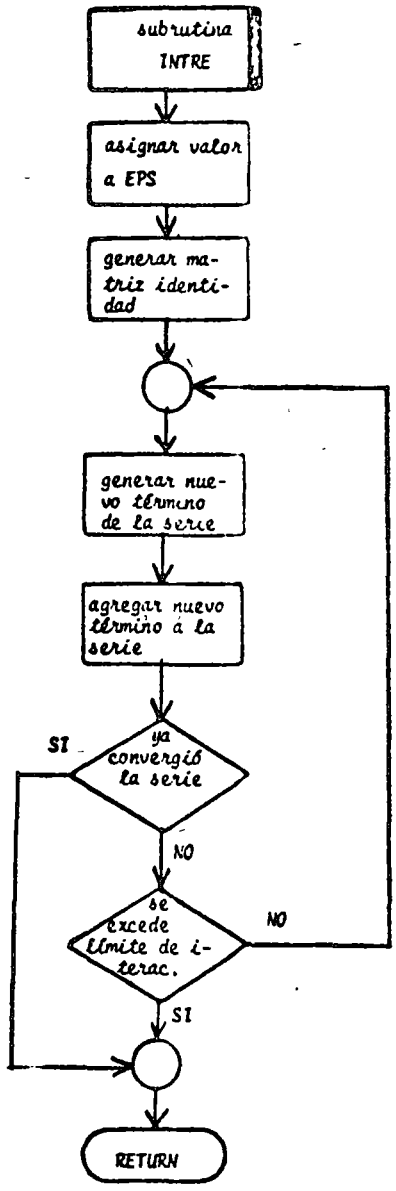


Fig. 10.14 Diagrama de bloques de la subrutina INTRE

6) Listado:

```
C     PROGRAMA PARA SIMULAR SISTEMAS DINAMICOS LINEALES EN UNA COMPUTA-
C     DORA DIGITAL MEDIANTE EL METODO DE VARIACION DE PARAMETROS
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     N=CANTIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES
C     M=CANTIDAD DE PARTES EN QUE SE SUBDIVIDE EL INTERVALO DE INTEGRA-
C        CION
C     NS=CANTIDAD DE SALIDAS
C     NU=CANTIDAD DE ENTRADAS
C     PERIO=MAGNITUD DEL INTERVALO DE INTEGRACION
C     DELT=MAGNITUD DE LOS SUBINTERVALOS
C     A=MATRIZ A DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     B=MATRIZ B DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     C=MATRIZ C DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     D=MATRIZ D DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     X(1,1)=CONDICION INICIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     X(1,J)=CONDICIONES INICIALES
C     X=SOLUCION PARA LAS VARIABLES DE ESTADO
C     YY=VALOR DE LAS SALIDAS
C     SUM=RESPUESTA DEBIDA A LAS EXCITACIONES EXTERNAS
C     EXPO=MATRIZ DE TRANSICION
C     SUMA=INTEGRAL DE LA PARTE CONSTANTE DE LA ECUACION DE LA RECTA
C     RECTA=INTEGRAL DEL TERMINO VARIABLE DE LA ECUACION DE LA RECTA
C     Y=VALOR DE LA ENTRADA EN EL INSTANTE T(I-1)
C     F=VALOR DE LA ENTRADA EN EL INSTANTE T(I)
C     PEND=PENDIENTE DE LA RECTA
C     MP1=CANTIDAD DE COLUMNAS DEL ARREGLO MATRICIAL X
C     RE=MATRIZ DE REEMPLAZO

      DIMENSION A(6,6),B(6,6),C(6,6),D(6,6),Y(101,6),EXPO(6,6),RECTA(6,6
     1),SUMA(6,6),SUM(6,6),Y(6,6),PEND(6,6),PE(6,6),F(6,6),YY(101,6)
      IR=5
      IW=6
C     LECTURA DE DATOS
    1 READ(IR,100) N,M,NS,NU,PERIO
      IF(M) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 MP1=N+1
      DO 4 I=1,N
    4 READ(IR,150) (A(I,J),J=1,N)
      DO 5 I=1,N
    5 READ(IR,150) (B(I,J),J=1,NU)
      IF(NS.EQ.0) GO TO 71
      DO 6 I=1,NS
    6 READ(IR,150) (C(I,J),J=1,N)
      DO 7 I=1,NS
    7 READ(IR,150) (D(I,J),J=1,NU)
   71 READ(IR,150) (X(1,J),J=1,MP1)
C     IMPRESION DE DATOS
      WRITE(IW,200)
      DO 8 I=1,N
    8 WRITE(IW,250) (A(I,J),J=1,N)
      WRITE(IW,300)
      DO 9 I=1,N
    9 WRITE(IW,250) (B(I,J),J=1,NU)
      IF(NS.EQ.0) GO TO 72
      WRITE(IW,350)
      DO 10 I=1,NS
   10 WRITE(IW,250) (C(I,J),J=1,N)
      WRITE(IW,400)
      DO 11 I=1,NS
   11 WRITE(IW,250) (D(I,J),J=1,NU)
   72 WRITE(IW,450)
      WRITE(IW,250) (X(1,J),J=1,MP1)
      IF(NS.EQ.0) GO TO 73
C     INDICAR SI LA MATRIZ D ES NULA
      DO 12 I=1,NS
      DO 12 J=1,NU
      IF(D(I,J).EQ.0.0) GO TO 12
      ID=1
      GO TO 13
   12 CONTINUE
   73 ID=0
C     OBTENER LA MATRIZ DE TRANSICION
   13 DELT=PERIO/FLOAT(M)
      CALL EXPMA(DELT,N,A,EXPO)
C     OBTENER SUMA Y RECTA
      CALL INTPE(DELT,N,A,SUMA)
      CALL INTPE(DELT,N,A,RECTA)
```

```
C     OBTENER LA SOLUCION TOTAL DE LAS VARIABLES DE ESTADO
      NP1=N+1
      DO 18 K=2,NP1
      X(K,1)=X(K-1,1) + DELT
C     OBTENER LA SOLUCION DEBIDA A LAS ENTRADAS
      T=X(K-1,1)
      CALL EXCITA(T,F)
      CALL MULTMA(B,F,N,NU,1,Y)
      T=X(K,1)
      CALL EXCITA(T,F)
      CALL MULTMA(B,F,N,NU,1,RE)
      DO 14 I=1,N
   14 RE(I,1)=(RE(I,1)-Y(I,1))/DELT
      CALL MULTMA(SUMA,Y,N,N,1,SHON)
      CALL MULTMA(RECTA,RE,N,N,1,R)
      DO 15 I=1,N
   15 SHON(I,1)=SHON(I,1) + RE(I,1)
C     OBTENER SOLUCION DEBIDA A LAS CONDICIONES INICIALES
      DO 17 I=1,N
      X(K,J+1)=0.0
      DO 16 I=2,NP1
   16 X(K,J+1)=X(K,J+1) + EXPO(J,I-1)*X(K-1,I)
C     OBTENER LA SOLUCION TOTAL
   17 X(K,J+1)=X(K,J+1) + SHON(J,1)
   18 CONTINUE
      IF(NS.EQ.0) GO TO 30
C     OBTENER EL VALOR DE LAS SALIDAS PARA TODOS LOS PUNTOS MUESTRALES
      IF(IP.EQ.0) GO TO 26
      DO 21 K=1,NP1
      DO 25 I=1,NS
   25 YY(K,I)=0.
      T=X(K,1)
      CALL EXCITA(T,F)
      CALL MULTMA(D,F,NS,NU,1,A)
      DO 31 I=1,NS
   31 YY(K,I)=YY(K,I) + A(I,1)
      DO 19 I=1,N
   19 RE(I,1)=X(K,I+1)
      CALL MULTMA(C,RE,NS,N,1,A)
      DO 20 I=1,NS
   20 YY(K,I)=YY(K,I) + A(I,1)
   21 CONTINUE
      GO TO 30
   26 DO 29 K=1,NP1
      DO 27 I=1,N
   27 RE(I,1)=X(K,I+1)
      CALL MULTMA(C,RE,NS,N,1,A)
      DO 28 I=1,NS
   28 YY(K,I)=YY(K,I) + A(I,1)
   29 CONTINUE
C     IMPRIMIR RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LAS VARIABLES DE ESTADO
   30 WRITE(IW,500)
      DO 22 I=1,NP1
   22 WRITE(IW,250) (X(I,J),J=1,NP1)
      CALL GRAFI(X,P1,NP1)
      IF(NS.EQ.0) GO TO 1
C     IMPRIMIR RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LAS SALIDAS DEL SISTEMA
      WRITE(IW,550)
      DO 23 I=1,NP1
   23 WRITE(IW,250) X(I,1),(YY(I,J),J=1,NS)
      DO 24 I=1,NP1
      DO 24 J=1,NS
   24 X(I,J+1)=YY(I,J)
      NS=NS + 1
      CALL GRAFI(X,NP1,NS)
      GO TO 1
C     FORMATOS DE LECTURA E IMPRESION
  100 FORMAT(4I5,F10.0)
  150 FORMAT(8F10.0)
  200 FORMAT(1H1,5(/),15X,'MATRIZ A',/)
  250 FORMAT(/,15X,8(E12.5,3X))
  300 FORMAT(5(/),15X,'MATRIZ B',/)
  350 FORMAT(5(/),15X,'MATRIZ C',/)
  400 FORMAT(5(/),15X,'MATRIZ D',/)
  450 FORMAT(5(/),15X,'LAS CONDICIONES INICIALES SON',/,18X,'TIEMPO',10X
     1,'X(1)',11X,'X(2)',11X,'X(3)',11X,'X(4)',11X,'X(5)',//)
  500 FORMAT(5(/),15X,'LA SOLUCION PARA LAS VARIABLES DE ESTADO ES',/,18
     1X,'TIEMPO',10X,'X(1)',11X,'X(2)',11X,'X(3)',11X,'X(4)',11X,'X(5)',
     2//)
  550 FORMAT(5(/),15X,'EL VALOR DE LAS SALIDAS ES',/,18X,'TIEMPO',10X,'Y
     1(1)',11X,'Y(2)',11X,'Y(3)',11X,'Y(4)',11X,'Y(5)',/)
      END
```

Fig. 10.15 Listado del programa principal

```
      SUBROUTINE INTPE(DELT,N,A,SUMA)
C     SUBRUTINA PARA EVALUAR LA INTEGRAL DEL TERMINO CONSTANTE DE LA
C     SERIE
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     DELT=ESPACIAMIENTO ENTRE LOS VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     N=CANTIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES
C     A=MATRIZ A DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     SUMA=MATRIZ RESULTANTE DE EVALUAR LA INTEGRAL
C     EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA
C     CMA=MATRIZ INTERMEDIA
C     CN=CONTADOR DE ITERACIONES
C     DIV=FACTORIAL DIVISOR
C     THEN=INCREMENTO DE TIEMPO ELEVADO A LA POTENCIA N
C     B=MATRIZ A ELEVADA A LA POTENCIA N
C     X=MATRIZ RESULTANTE DEL PRODUCTO AB
      DIMENSION A(6,6),CMA(6,6),B(6,6),X(6,6),SUMA(6,6)
      EPS=0.00001
C     GENERAR MATRIZ IDENTIDAD
      DO 3 I=1,N
      DO 2 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 1
      CMA(I,J)=0.0
      GO TO 2
    1 CMA(I,J)=1.0
    2 CONTINUE
    3 CONTINUE
C     OBTENER LOS DOS PRIMEROS TERMINOS DE LA SERIE
      DO 4 I=1,N
      DO 4 J=1,N
      SUMA(I,J)=CMA(I,J)*DELT + (A(I,J)*DELT*DELT)/2.0
    4 B(I,J)=A(I,J)
      THEN=DELT*DELT
      CN=3.0
      DIV=2.0
C     OBTENER LOS TERMINOS RESTANTES DE LA SERIE
    5 DIV=DIV*CN
      THEN=THEN*DELT
      CALL MULTMA(A,B,N,N,N,X)
      DO 6 I=1,N
      DO 6 J=1,N
      B(I,J)=X(I,J)
    6 CMA(I,J)=(X(I,J)*THEN)/DIV
      IF(CN-6.0) 9,9,13
   13 AMAX=CMA(1,1)
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,N
      IF(ABS(CMA(I,J))-ABS(AMAX)) 7,7,14
   14 AMAX=CMA(I,J)
    7 CONTINUE
    8 CONTINUE
C     VERIFICAR LA CONVERGENCIA DE LA SERIE
      IF(ABS(AMAX)-EPS) 11,11,9
    9 DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,N
   10 SUMA(I,J)=SUMA(I,J) + CMA(I,J)
      IF(CN-20.0) 15,15,11
   15 CN=CN + 1.0
      GO TO 5
   11 RETURN
      END
```

Fig. 10.16 Listado de la subrutina INTPE

```
      SUBROUTINE INTRE(DELT,N,A,RECTA)
C     SUBRUTINA PARA EVALUAR LA INTEGRAL DE LA PARTE VARIABLE DE LA E=
C     CUACION DE LA RECTA
C     SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES EMPLEADAS
C     DELT=ESPACIAMIENTO ENTRE LOS VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     N=CANTIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES
C     A=MATRIZ A DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C     RECTA=MATRIZ RESULTANTE DE EVALUAR LA SERIE
C     CMA=MATRIZ IDENTIDAD
C     B=MATRIZ A ELEVADA A LA POTENCIA N
C     X=MATRIZ RESULTANTE DEL PRODUCTO AB
C     EPS=CRITERIO DE CONVERGENCIA
C     TNEW=INCREMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE ELEVADO A LA POTENCIA
C          N
C     CN=CONTADOR DE ITERACIONES
C     DIV=FACTORIAL DIVISOR
      DIMENSION A(6,6),RECTA(6,6),CMA(6,6),B(6,6),X(6,6)
      EPS=0.00001
C     GENERAR MATRIZ IDENTIDAD
      DO 3 I=1,N
      DO 2 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 1
      CMA(I,J)=0.0
      GO TO 2
    1 CMA(I,J)=1.0
    2 CONTINUE
    3 CONTINUE
C     OBTENER LOS DOS PRIMEROS TERMINOS DE LA SERIE
      DO 4 I=1,N
      DO 4 J=1,N
      RECTA(I,J)=(CMA(I,J)*DELT*DELT)/2.0 + (A(I,J)*(DELT**3))/6.0
    4 B(I,J)=A(I,J)
      TNEW=DELT*DELT*DELT
      CN=4.0
      DIV=6.0
C     OBTENER EL RESTO DE LOS TERMINOS DE LA SERIE
    5 DIV=DIV*CN
      TNEW=TNEW*DELT
      CALL MULTM(A,B,N,N,N,X)
      DO 6 I=1,N
      DO 6 J=1,N
      B(I,J)=X(I,J)
    6 CMA(I,J)=(X(I,J)*TNEW)/DIV
      IF(CN.LE.6.0) GO TO 9
      AMAX=CMA(1,1)
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,N
      IF(ABS(CMA(I,J)).LE.ABS(AMAX)) GO TO 7
      AMAX=CMA(I,J)
    7 CONTINUE
    8 CONTINUE
C     VERIFICAR CONVERGENCIA DE LA SERIE
      IF(ABS(AMAX).LE.EPS) GO TO 11
    9 DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,N
   10 RECTA(I,J)=RECTA(I,J) + CMA(I,J)
      IF(CN.GT.20.) GO TO 11
      CN=CN + 1.0
      GO TO 5
   11 RETURN
      END
```

Fig. 10.17 Listado de la subrutina INTRE

```
      SUBROUTINE EXCITA(T,F)
      DIMENSION F(6,6)
      F(1,1)=5.*EXP(-4.*T)
      F(2,1)=0.5*SIN(3.*T)
      F(3,1)=0.0
      F(4,1)=0.0
      F(5,1)=0.0
      RETURN
      END
```

Fig. 10.18 Listado de la subrutina EXCITA

10.4.4 Ejemplo

Para el siguiente circuito eléctrico:

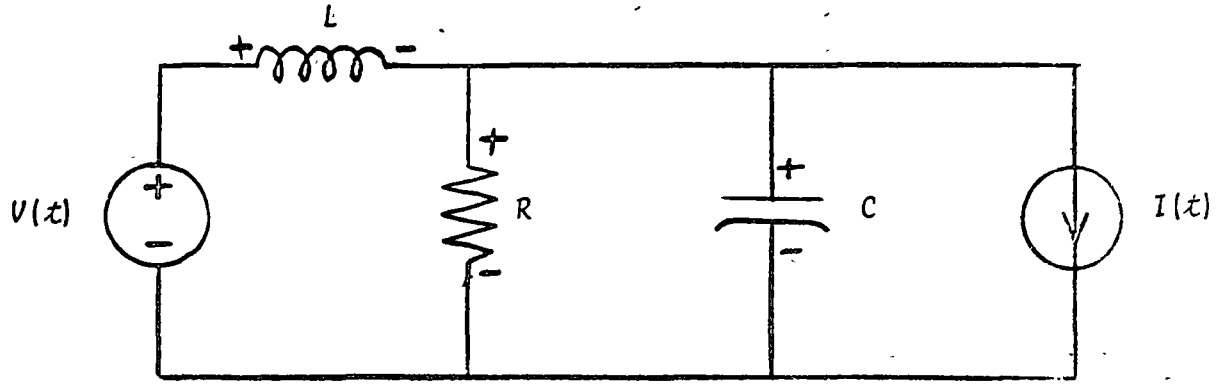


Fig. 10.19 Circuito eléctrico del problema del ejemplo 10.4.4

si se consideran como salidas I_c y V_R, su representación mediante variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_L}{dt} \\ \frac{dV_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(t) \\ I(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_c \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(t) \\ I(t) \end{bmatrix}$$

Determine los valores de I_L, V_c, I_c y V_R para $t \geq 0$, cuando:

$V(t) = 5e^{-4t}u_{-1}(t)$ (V)

$I(t) = 0.5sen(3t)u_{-1}(t)$ (A)

$R = 100$ ohms

$C = 0.1$ F

$L = 1.0$ H

$t_0 = 0.$

$V_c(t_0) = 2$ V

$I_L(t_0) = 0.3$ A

$t_f = 10$ s

* SOLUCION

TABLA 10.5 Datos para el problema del ejemplo 10.4.4

M= 2

N= 100

NS= 2

NU= 2

PERIO= 10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

X(1,J) =(0 , 0.3 , 2)

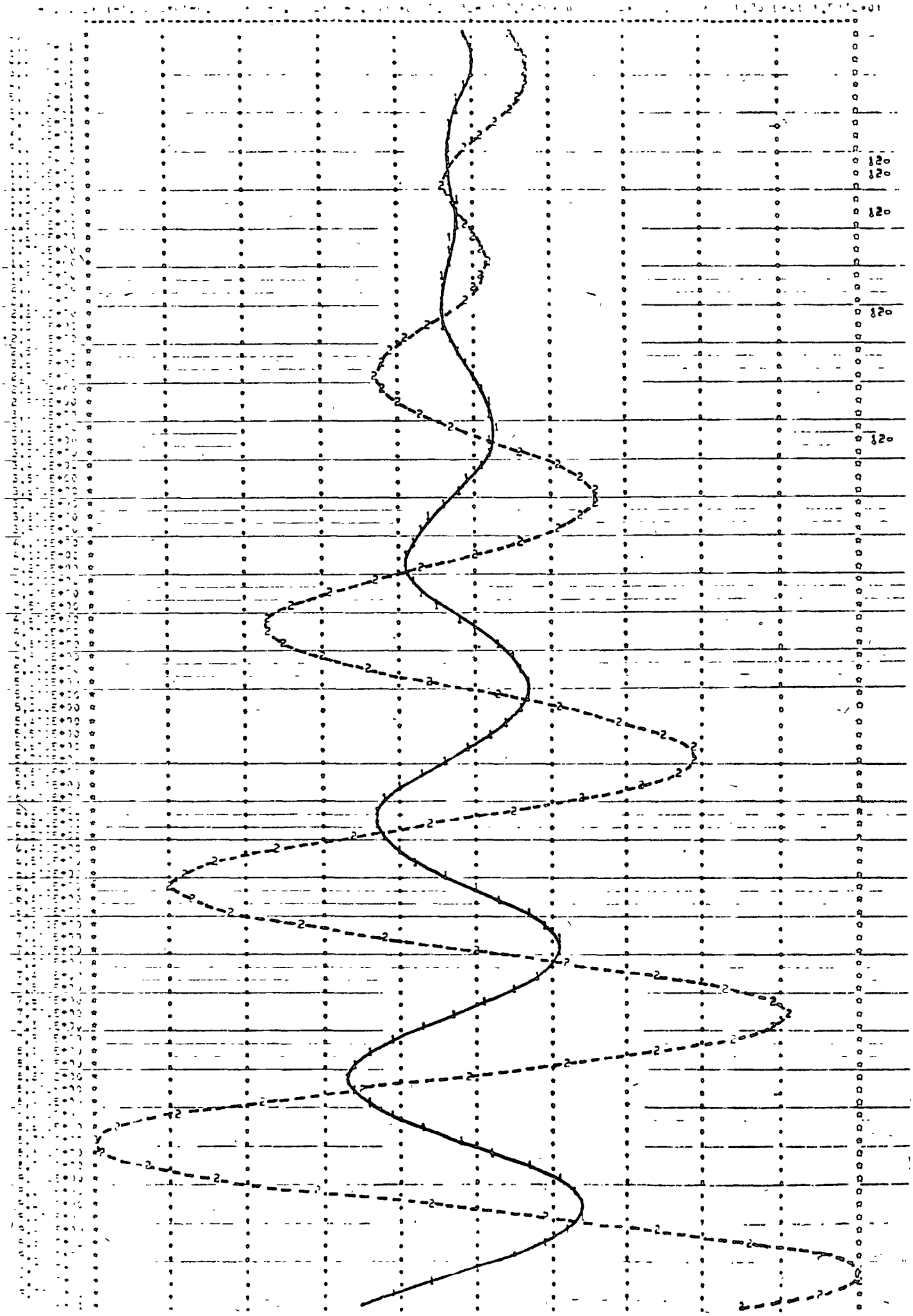
```
F(1,1) = 5.*EXP(-4.*T)
```

```
F(2,1)= 0.5*SIN(3.0*T)
F(3,1)= 0.
F(4,1)= 0.
F(5,1)= 0.
```

TABLA 10.6 Resultados del problema del ejemplo 10.4.4

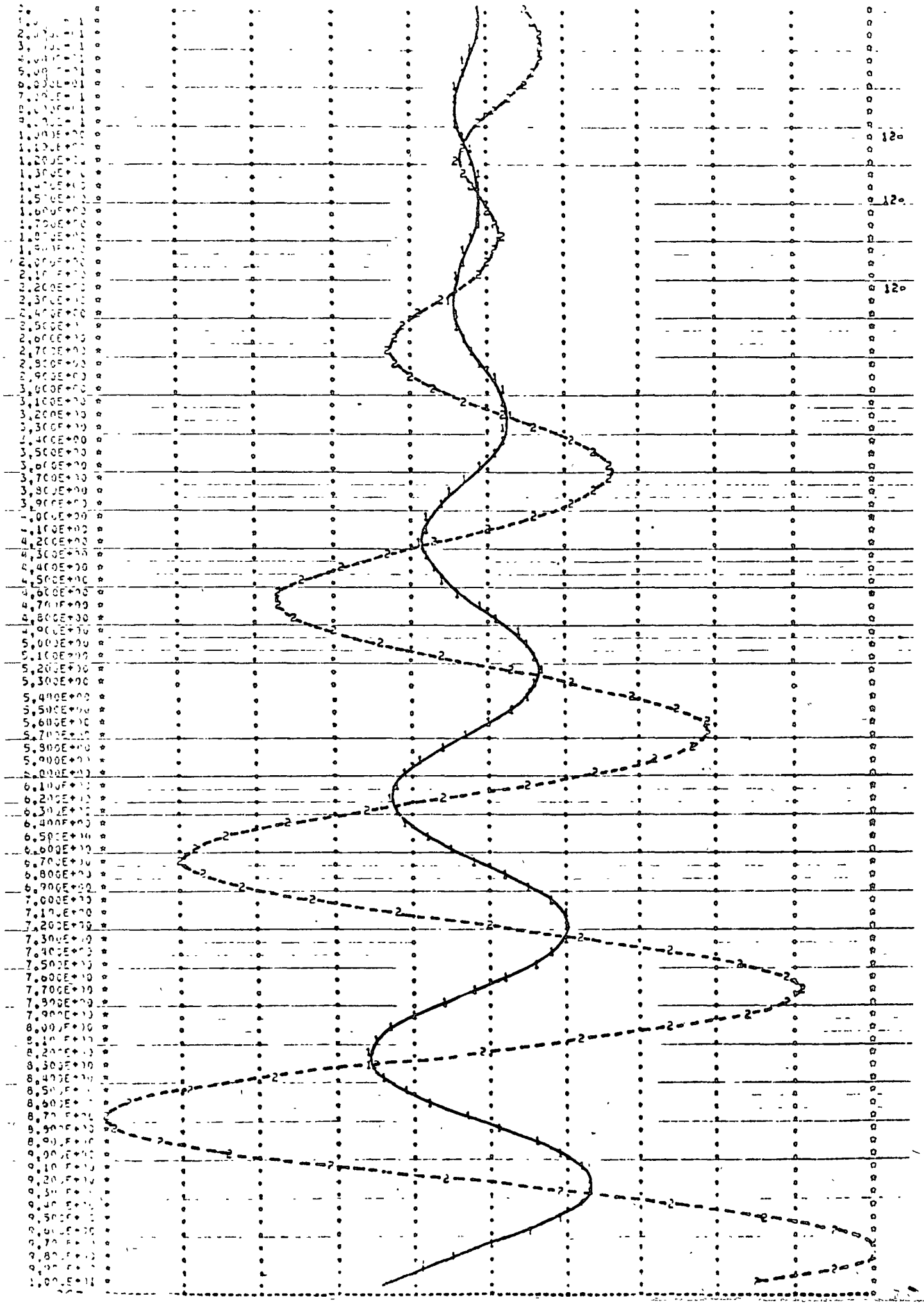
LA SOLUCION PARA LAS VARIABLES DE ESTADO ES

TIEMPO	X(1)	X(2)
0.	.30000E+00	.20000E+01
.10000E+00	.50191E+00	.23230E+01
.20000E+00	.53425E+00	.26119E+01
.30000E+00	.45225E+00	.27485E+01
.40000E+00	.30503E+00	.26745E+01
.50000E+00	.13480E+00	.23869E+01
.60000E+00	-.25673E-01	.19248E+01
.70000E+00	-.15241E+00	.13566E+01
.80000E+00	-.23291E+00	.76453E+00
.90000E+00	-.28486E+00	.23115E+00
.10000E+01	-.29499E+00	-.17406E+00
.11000E+01	-.27683E+00	-.49443E+00
.12000E+01	-.16776E+00	-.44242E+00
.13000E+01	-.12577E+00	-.30147E+00
.14000E+01	-.10631E+00	-.23558E-01
.15000E+01	-.11965E+00	.32723E+00
.16000E+01	-.16905E+00	.67420E+00
.17000E+01	-.25032E+00	.93923E+00
.18000E+01	-.35072E+00	.10544E+01
.19000E+01	-.45351E+00	.97213E+00
.20000E+01	-.53738E+00	.67331E+00
.21000E+01	-.58102E+00	.17120E+00
.22000E+01	-.56612E+00	-.49849E+00
.23000E+01	-.48037E+00	-.12319E+01
.24000E+01	-.31998E+00	-.19651E+01
.25000E+01	-.91039E-01	-.25659E+01
.26000E+01	.19019E+00	-.29957E+01
.27000E+01	.49838E+00	-.31137E+01
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.88000E+01	.13221E+01	-.13823E+02
.89000E+01	.20339E+01	-.12194E+02
.90000E+01	.37213E+01	-.93734E+01
.91000E+01	.44771E+01	-.54152E+01
.92000E+01	.48239E+01	-.12545E+01
.93000E+01	.47215E+01	.32984E+01
.94000E+01	.41721E+01	.76154E+01
.95000E+01	.32200E+01	.11295E+02
.96000E+01	.19038E+01	.13940E+02
.97000E+01	.47348E+00	.14333E+02
.98000E+01	-.14636E+01	.12587E+02
.99000E+01	-.25350E+01	.13798E+02
.10000E+02	-.37349E+01	.10994E+02


120
120
120
120
120

EL VALOR DE LAS SALIDAS ES

TIEMPO	Y(1)	Y(2)
0.	.29000E+00	.20000E+01
.10000E+00	.33993E+00	.23270E+01
.20000E+00	.22531E+00	.26119E+01
.30000E+00	.31105E-01	.27485E+01
.40000E+00	-.18773E+00	.26745E+01
.50000E+00	-.38902E+00	.23809E+01
.60000E+00	-.53134E+00	.19233E+01
.70000E+00	-.59759E+00	.13566E+01
.80000E+00	-.57828E+00	.76453E+00
.90000E+00	-.48080E+00	.23115E+01
.10000E+01	-.32381E+00	-.17406E+00
.11000E+01	-.13392E+00	-.40443E+00
.12000E+01	.57922E-01	-.44242E+00
.13000E+01	.22113E+00	-.30147E+00
.14000E+01	.32972E+00	-.23558E+01
.15000E+01	.36539E+00	.32723E+00
.16000E+01	.32229E+00	.67420E+00
.17000E+01	.20350E+00	.93923E+00
.18000E+01	.25120E-01	.13544E+01
.19000E+01	-.18739E+00	.97213E+00
.20000E+01	-.40441E+00	.67331E+00
.21000E+01	-.59114E+00	.17120E+00
.22000E+01	-.71700E+00	-.49809E+00
.23000E+01	-.75727E+00	-.12[illegible]E+01
.24000E+01	-.69716E+00	-.19[illegible]E+01
.25000E+01	-.53419E+00	-.25359E+01
.26000E+01	-.27913E+00	-.29957E+01
.27000E+01	.44567E-01	-.31137E+01
.28000E+01	.40303E+00	-.28877E+01
.29000E+01	.75550E+00	-.23033E+01
.30000E+01	.10589E+01	-.13892E+01
.31000E+01	.12728E+01	-.21239E+00
.	.	.
.		.
.		.
.92000E+01	.45247E+01	-.12545E+01
.93000E+01	.45057E+01	.32984E+01
.9400 E+01	.40508E+01	.76164E+01
.95000E+01	.32100E+01	.11285E+02
.96000E+01	.21622E+01	.13994E+02
.97000E+01	.68787E+00	.15330E+02
.9800 E+01	-.77116E+00	.15287E+02
.99000E+01	-.21788E+01	.13738E+02
.10000E+02	-.34007E+01	.10984E+02


120
120
120

10.5 Bibliografía

1. CANALES Roberto y BARRERA Renato, "Apuntes de Ingeniería de Control I". México: Fac. de Ingeniería, UNAM, 1973.
   pp.1-36(cap. 3),1-37(cap. 5).
2. CARNAHAN B., LUTHER H., WILKES J.,"Applied Numerical Methods". New York: John Wiley & Sons Inc., 1969.
   pp.361-380.
3. DORF C. Richard, "Modern Control Systems". Reading Mass.: Addison-Wesley Co., 1970.
   pp.250-301, 374-379.
4. GEREZ G. Víctor y MURRAY-LASSO M.A.,"Teoría de Sistemas y Circuitos". México: Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., 1972.
   pp.330-385, 459-463.
5. KUO S. Shan, "Computer Applications of Numerical -- Methods". Reading Mass.: Addison-Wesley Co., 1972.
   pp.128-166.
6. OGATA Katsuhiko , "Modern Control Theory". Englewood Cliffs N.J.: Prentice-Hall Inc., 1970.
   pp.663-704.
7. SMITH G., JAMES M., WOLFORD J., "Applied Numerical Methods for Digital Computation with FORTRAN". Scranton Penn.: International Textbook Co., 1967.
   pp.350-356.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

COMPLEMENTO

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

RUTA CRITICA

PROGRAMACION LINEAL

M. EN C. VERONICA CZITROM

OCTUBRE, 1977.

PALACIO DE MINERIA
Tacuba 5, primer piso. México 1, D F.

SOLUCIÓN NUMÉRICA ECUACIONES DIFERENCIALES

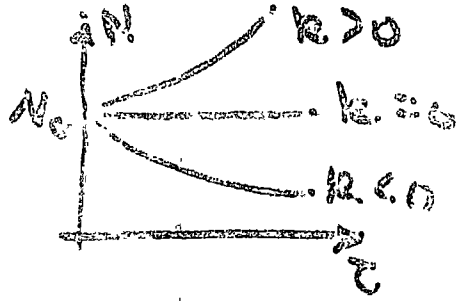
$y = ? = y(x)$ ISOLA VARIABLE INDEPENDIENTE

EJEMPLO: POBLACIÓN

$N = N(t)$: NUM. HABITANTES; TIEMPO t

$\frac{dN}{dt} \propto N \Rightarrow \frac{dN}{dt} = k \cdot N$

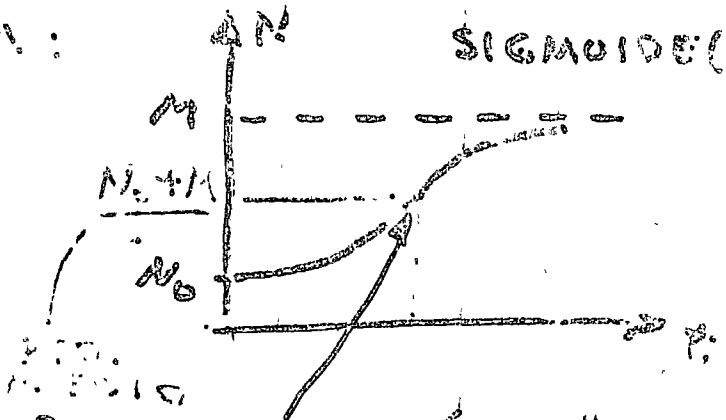
$N(t) = N_0 e^{k \cdot t}$



MOD POBLACIÓN M.: SIGMOIDE(S)

$\frac{dN}{dt} = k \cdot N (M - N)$

$N(t) = \frac{M}{1 + C e^{-k \cdot t}}$



PUNTO INFLEXIÓN: $N'' = 0$

MÁXIMO CRECIMIENTO

SOLUCIÓN NUMÉRICA ECS. DIFS.:

- CUANDO NO EXISTE SOLUCIÓN EXACTA
- SI MUY COMPLICADO OBTENERLA

ECUACIÓN DIFERENCIAL:

ORDEN: MAYOR DERIVADA

GRADO: MAYOR POTENCIA DE $y, y', y'' \ldots$

$y''' - x^5 (y')^2 + \cdot (\text{sen } x) y = \cos x$

ORDEN: 3! (y''')

GRADO 2. $(y')^2$

EC. DIF. LINEAL:

- NO HAY PRODUCTOS $y^{(n)} y^{(k)}$
- SOLO PRIMERA POTENCIA: $(y^{(n)})^1$

EC. DIF. DE ORDEN N: SOLUCIÓN CON TIENE N CONSTANTES ARBITRARIAS.

SOLUCIÓN ÚNICA: EC. DIF. ORDEN N
N CONDICIONES INICIALES

CONDICIONES INICIALES: (mismo punto)
$y(x_0) = a$
$y'(x_0) = b$
$y''(x_0) = c$
$\vdots$

CONDICIONES A LA FRONTERA: (diferentes puntos)
$y(x_0) = a$
$y(x_1) = b$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

CADENA — COEFICIENTES CONSTANTES — HOMOGÉNEA

SE PROPONE: $y = e^{\alpha x}$

ES SOLUCIÓN SI:

(SUSTITUYENDO)

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO:

RAÍCES:

a.) REALES Y DIFERENTES: $r_1 \neq r_2 \neq \ldots$

$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \ldots$

CONSTANTES ARBITRARIAS.

b) REALES Y REPETIDAS: $r_1 = r_{1+1} = \ldots = r_{1+i}$

$(c_1 + c_{1+1} x + \ldots + c_{1+i} x^{i-1}) e^{r_1 t}$

c.) COMPLEJAS CONJUGADAS: $A \pm iB$

$e^{At}(c_1 \cos Bt + c_2 \sin Bt)$

d.) COMPLEJAS CONJUGADAS REPETIDAS:
$A \pm iB$, $A \pm iB$, $A \pm iB$

$e^{At}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos Bt$

$+ e^{At}(c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin Bt$

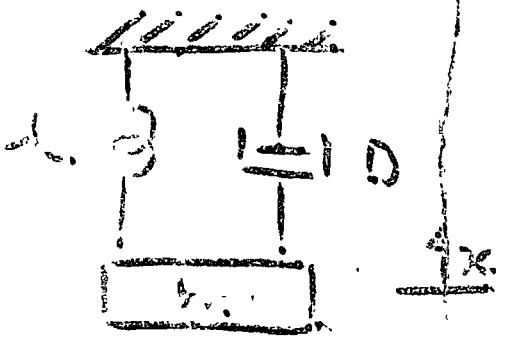
MÉTODO NUMÉRICO DE SOL. DE

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$

EVALÚA RAÍCES DE EC. CARACTERÍSTICA:

$\alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$

EJEMPLO: SISTEMA MECÁNICO



$$m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = 0$$

EC. CARACTERÍSTICA:

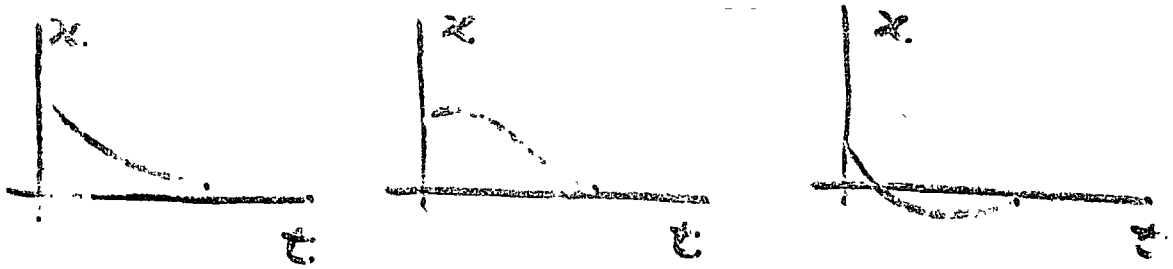
$$m\alpha^2 + D\alpha + k = 0$$

$$\alpha = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4mk}}{2m}$$

1) CASO SOBREAMORTIGUADO ($D^2 - 4mk > 0$)

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

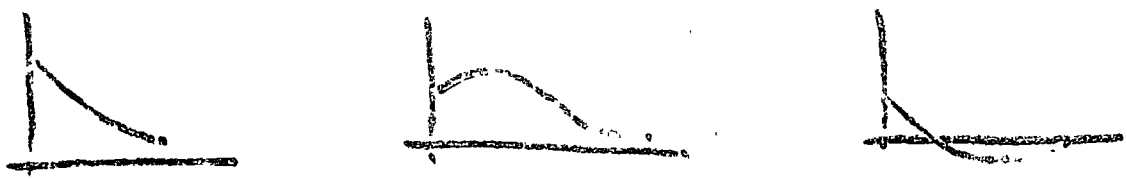
SOL: $x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$



2) CASO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO

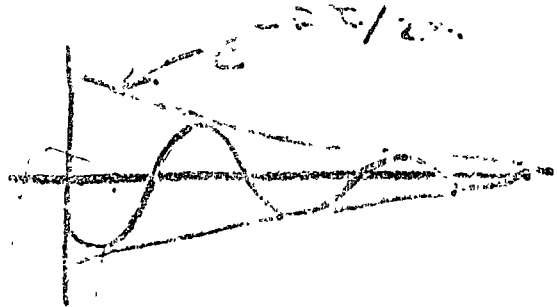
($D^2 - 4mk = 0$) $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{D}{2m}$

SOL: $x(t) = c_1 e^{-\frac{D}{2m}t} + c_2 x e^{-\frac{D}{2m}t}$



3) CASO SUBAMORTIGUADO ($D^2 - 4mk < 0$)

$$\alpha = \underbrace{-\frac{D}{2m}}_{A} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4mk - D^2}}{2m}}_{B}$$



SOL: $x(t) = e^{-\frac{D}{2m}t}(c_1 \cos Bt + c_2 \operatorname{sen} Bt)$

EC. DIF. ORDEN N — SISTEMA EQS. DIFS. 1er ORDEN

MÉTODO NUMÉRICO DE EULER

LEONHARD EULER (1707 – 1783)

MAT. MAS GRANDE SIGLO XVIII

GEOMETRÍA, CÁLCULO, MECÁNICA, TEOR. NÚMEROS,

LOGARITMO NUM. NEGATIVOS Y COMPLEJOS,

NOTACIÓN: π, e, $f(x)$, Σ, i

MÉTODOS APROXIMADOS

(EV. LUNA (Q. CUETLAXT.) BOL. LUNA, TROPICAL)

TRADIS VISTA 1 050; LUEGO EJECO

RESOLVER $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

SUJETO A $y(t_0) = y_0$

t_0 t_1 t_2 t_3 t_4

$\frac{dy}{dt} = y'$

$\int dy = \int y' dt$

$\Delta y = y' \Delta t$

$y_{i+1} - y_i = y_i' \Delta t$

$y' = f(t, y)$

$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y)\, dt$

$y_1 - y_0$

$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y)\, dt$

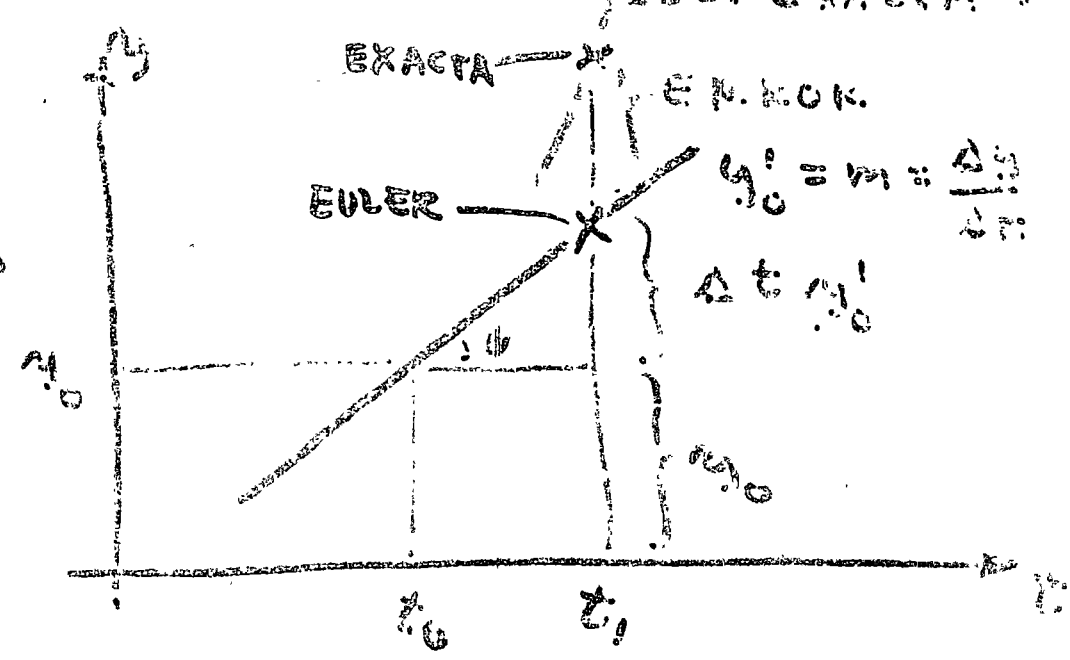
$\approx \Delta t\, f(t_0, y_0)$

$= y_0 + \Delta t\, f(t_0, y_0)$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t\, f(t_i, y_i)$$

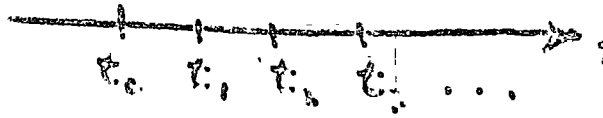
SE APLICA EN: $y(t_0) = y_0$

ERROR $\sim (\Delta t)^2$



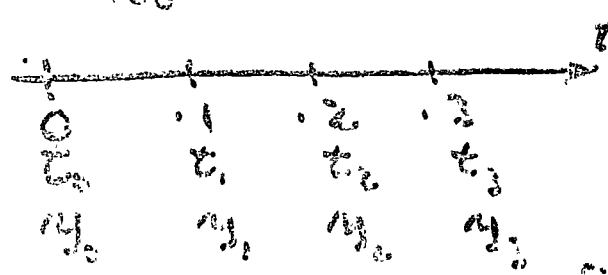
ERRORES CRECEN CON Δt CUANDO Δt CRECE

COMPUTADORA



EJEMPLO. $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \overbrace{2t + y}^{f(t,y)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad t_0 \quad y_0$

SEA $\Delta t = 0.1$



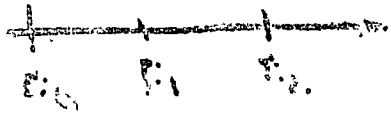
	ERROR
$y_1 = y_0 + \Delta t\, f(t_0, y_0) = 1 + .1(2 \cdot 0 + 1) = 1.1$	.014
$y_2 = y_1 + \Delta t\, f(t_1, y_1) = 1.1 + .1(2 \cdot .1 + 1.1) = 1.23$	.021
$y_3 = y_2 + \Delta t\, f(t_2, y_2) = 1.23 + .1(2 \cdot .2 + 1.23) = 1.393$	.027
$y_4 = y_3 + \Delta t\, f(t_3, y_3) = 1.393 + .1(2 \cdot .3 + 1.393) = 1.5923$	.033
⋮	⋮

ERROR CRECE AL

MÉTODO NUMÉRICO DE:
EULER MODIFICADO

RESOLVER: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

SUJETO A: $y(t_0) = y_0$



PARA CADA t_i SE EFECTUAN ITERACIONES PARA OBTENER y_i MÁS EXACTA.

EN t_1: $y_1' = f(t_1, y_1)$

$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y)\,dt$

$\approx f(t_0, y_0)$ EULER

$\approx \frac{f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1')}{2}$ EULER MODIFICADO

3. PROBLEMA.

EULER: $y_1^{(1)} = y_0 + \Delta t\, f(t_0, y_0)$

$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^{(1)})\right]$

$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^{(1)})\right]$

$y_1^{(3)} = \dots$

$y_1^{(4)} = \dots$

$\vdots$

CUANDO $|y_1^{(i)} - y_1^{(i+1)}| \leq \varepsilon$ SE TIENE y_1 EN t_1.

EN t_2: $y_2^{(1)} = y_1 + \Delta t\, f(t_1, y_1)$

$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_1, y_1) + f(t_2, y_2^{(1)})\right]$

$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_1, y_1) + f(t_2, y_2^{(1)})\right]$

$y_2^{(3)}$

EJEMPLO: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2t + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$0 \quad .2 \quad .4 \quad .6 \quad \dots$
$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3$

SEA $\Delta t = 0.2$

EN $t_1 = 0.2$

$y_1^{(1)} = y_0 + \Delta t \cdot f(t_0, y_0) = 1 + .2\,(2 \times 0 + 1) = 1.2$

$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_0, y_1^{(1)})\right] =$

$= 1 + \frac{.2}{2}\left[(2 \times 0 + 1) + (2 \times .2 + 1.2)\right] = 1.24$

$y_1^{(3)} = \dots = 1.264$

$y_1^{(4)} = \dots = 1.264$

$y_1^{(5)} = \dots = 1.264$ $\quad \therefore \quad y_1 = 1.264$

EN $t_2 = 0.4$

$y_2^{(1)} = y_1 + \Delta t \cdot f(t_1, y_1) = 1.264 + .2\,(2 \times .2 + 1.264) = 1.6$

$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_1, y_1) + f(t_2, y_2^{(1)})\right] = \dots = 1.6$

$y_2^{(3)} = 1.681$

$y_2^{(4)} = 1.682$

$y_2^{(5)} = 1.682$ $\quad y_2 = 1.682$

t	SOL. EXACTA	EULER $\Delta t = .1$ APROX.	EULER $\Delta t = .1$ ERROR	EULER MOD. $\Delta t = .2$ APROX.	EULER MOD. $\Delta t = .2$ ERROR
0.2	1.2641	1.230	0.0341	1.264	0.0
0.4	1.6745	1.[illegible]92	0.0653	1.694	0.0

EULER MODIFICADO: MUY CERCANO AL EXACTO

SOL. VERD. APROXIMADA

METODO NUMÉRICO DE RUNGE-KUTTA ORDEN 4

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

SE OBTIENE TRUNCANDO SERIE DE TAYLOR

PARA $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$k_1 = \Delta t\, f(t_0, y_0)$$

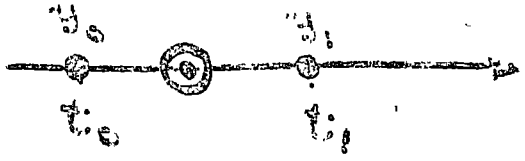
$$k_2 = \Delta t\, f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t\, f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta t\, f(t_0 + \Delta t, y_0 + k_3)$$

ENTONCES $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2) + 2k_3 + k_4)$

f: PENDIENTES (DERIVADAS) EVALUADAS EN DIFERENTES PUNTOS DE LA CURVA



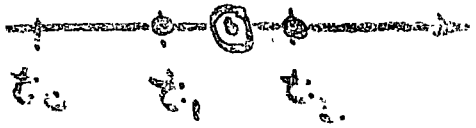
PARA $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$k_1 = \Delta t\, f(t_1, y_1)$$

$$k_2 = \Delta t\, f\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t\, f\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right)$$

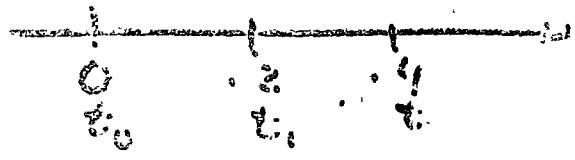
$$k_4 = \Delta t\, f(t_1 + \Delta t, y_1 + k_3)$$



ENTONCES: $y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

EJEMPLO: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2t + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

SEA $\Delta t = .2$



EN $t_1 = .2$

$K_1 = \Delta t\, f(t_0, y_0) = .2\,(2\times 0 + 1) = .2$

$K_2 = \Delta t\, f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right) = .2\left[2\left(0 + \frac{.2}{2}\right) + \left(1 + \frac{.2}{2}\right)\right]$

$0 + \frac{.2}{2} = .1$

$= .26$

$K_3 = \Delta t\, f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}\right) = .2\left[2\times .1 + \left(1 + \frac{.26}{2}\right)\right] = .26$

$K_4 = \Delta t\, f(t_0 + \Delta t, y_0 + K_3) = .2\left[2(0 + .2) + (1 + .26)\right] = .332$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1.2613$

EN $t_2 = .4$, $y_2 = ?$ (SIGUE)

ERROR EN $t_1 = .2$: 0.00000 } MUY
$t_2 = .4$: 0.00001 } EVIDENTE

METODO DE MILNE

$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

y_{i+1} : EN TÉRMINOS DE $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$

RUTA CRÍTICA

- PLANEACIÓN DE PROYECTOS
- ALOCACIÓN DE RECURSOS
- ACTIVIDADES CRÍTICAS
- TIEMPOS DE EJECUCIÓN
- UTIL EN PROYECTOS COMPLEJOS
- FLUJO DE DINERO
- SECUENCIA DE ACTIVIDADES
- RUTA CRÍTICA (CPM) Y EVALUACION DE PROGRAMAS Y TECNICAS DE REVISIÓN (PERT)

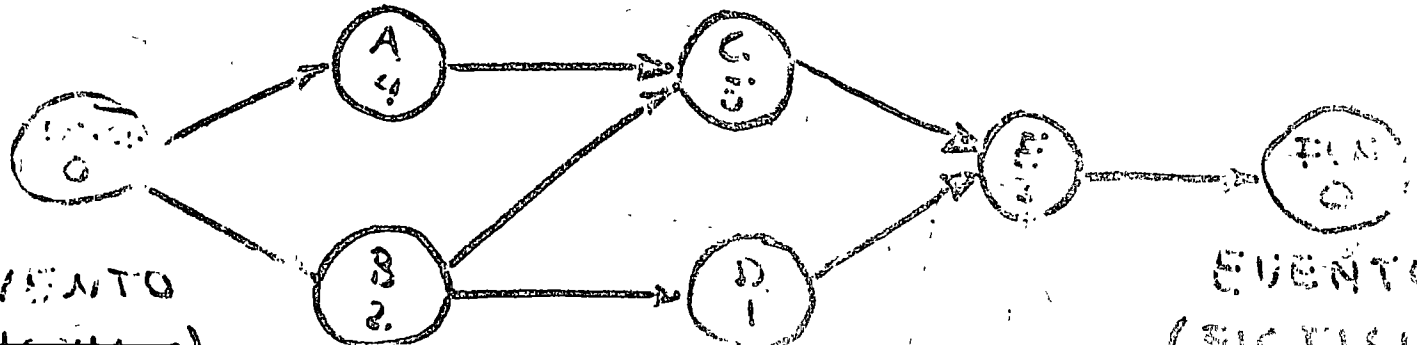
  MÉTODOS SEMEJANTES
- USADO EN CONSTRUCCIÓN
- DESARROLLADO EN 1956
- PLANEADOR SE CONCENTRA EN ASPECTOS IMPORTANTES

EJEMPLO.

ACTIVIDADES A Y B PRECEDEN A C
D SIGUE DE B
E EMPIEZA DESPUÉS DE C Y D

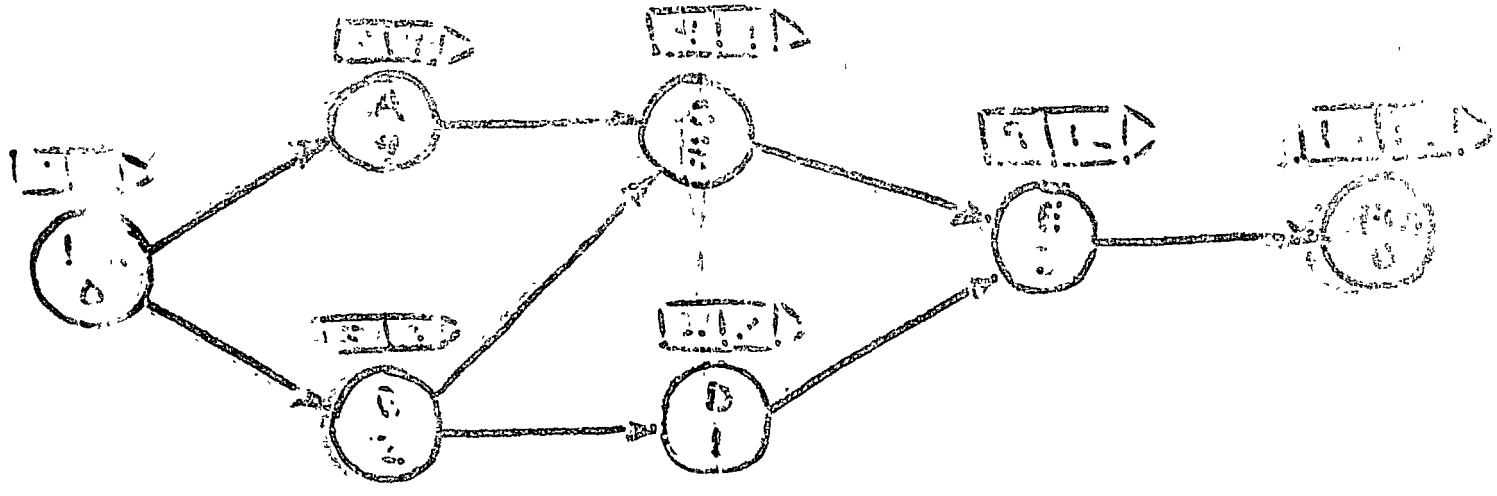
DURACIONES: D(A) = 4, D(B) = 2, D(C) = 3, D(D) = 1, D(E) = 2

GRÁFICA LINEAL



- TIEMPO DE EJECUCIÓN = ?

TIEMPO MAS PRÓXIMO DE INICIO (TPI)	TIEMPO MAS PRÓXIMO DE TERMINACIÓN (TPT)



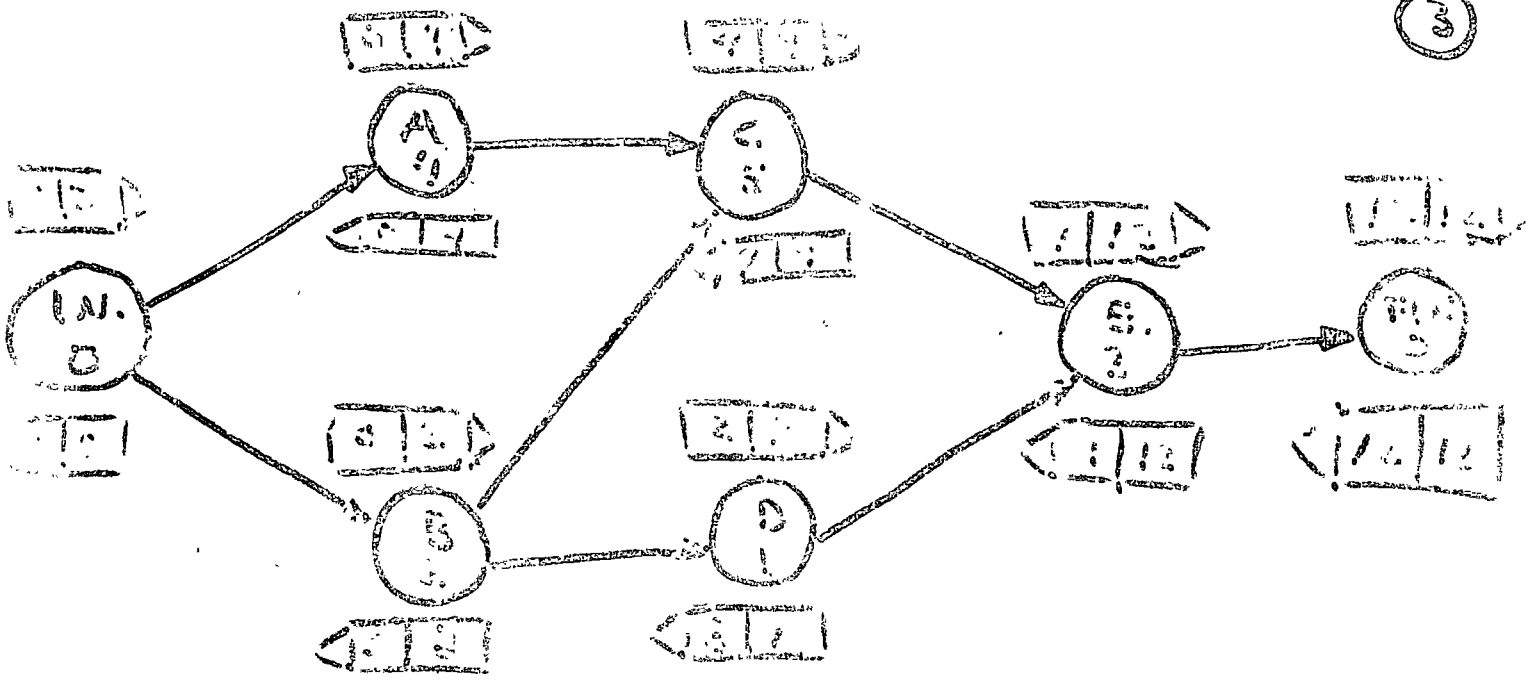
TPI = MÁXIMO DE LOS TPT ACTIVIDADES INMEDIATAMENTE PRECEDENTES

TPT = TPI + D

TIEMPO MAS LEJANO DE INICIO (TLI)	TIEMPO MAS LEJANO DE TERMINA. (TLT)

TLT = MÍNIMO DE LOS TLI ACTIVIDADES INMEDIATAMENTE PRECEDENTES

TLI = TLT - D



——: RUTA CRÍTICA

HOLGURA TOTAL (HT) = TLI − TPI
= TLT − TPT

= TIEMPO QUE SE PUEDE ATRASAR UNA ACTIVIDAD SIN ATRASAR PROYECTO

HT = 0 : ACTIVIDADES CRÍTICAS

HOLGURA LIBRE (HL) = (MIN TPI ACTIVIDADES SUBSECUENTES) − TPT

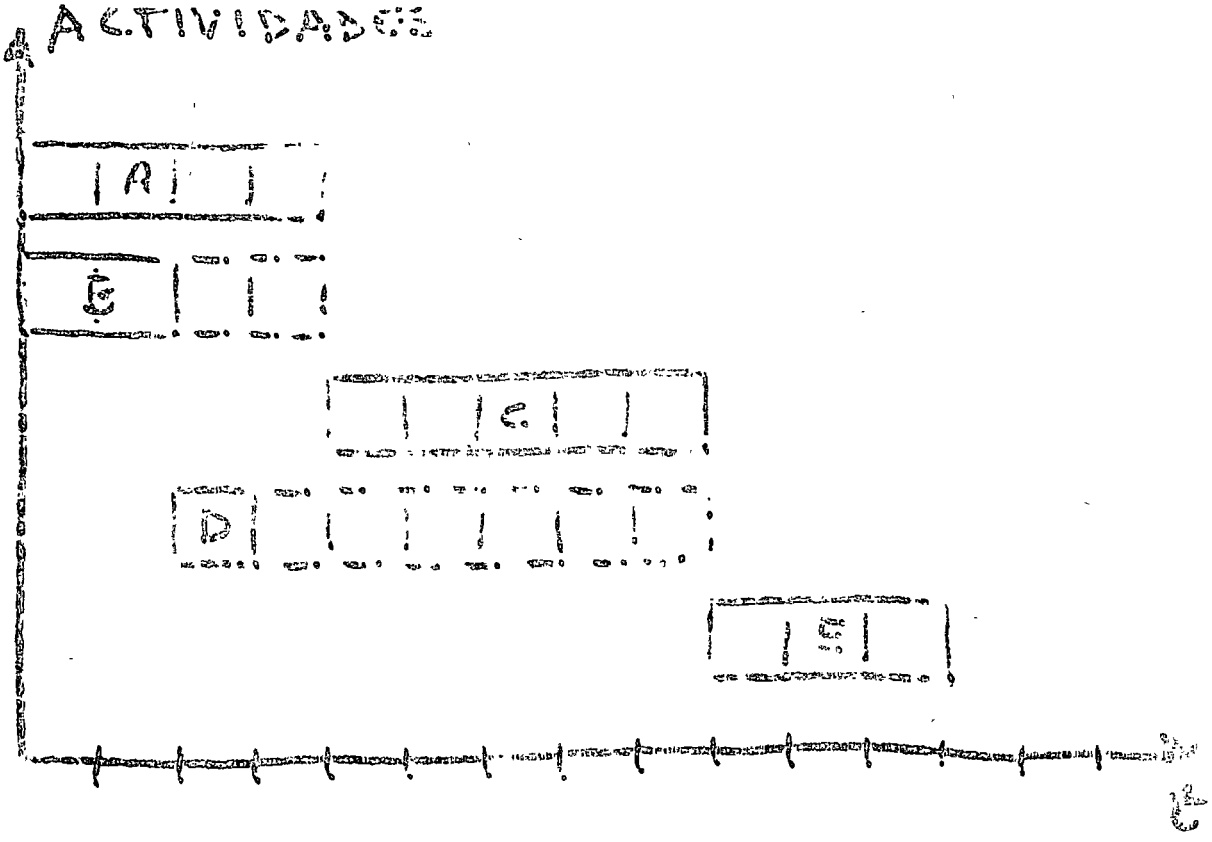
= TIEMPO QUE SE PUEDE ATRASAR UNA ACTIVIDAD SIN ATRASAR OTRA ACTIVIDAD

	HT	HL
INICIO	0	0 ←
A	0	0 ←
B	2	0
C	0	0 ←
D	6	6
E	0	0 ←
FINAL	0	0 ←

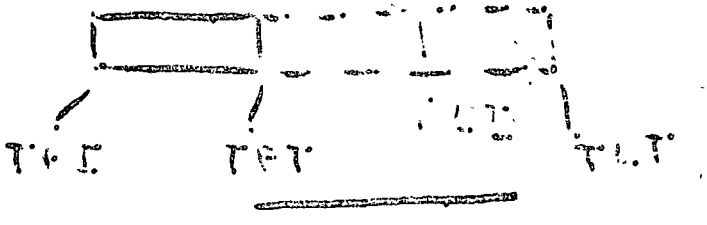
CRÍTICAS

COMPUTADORA

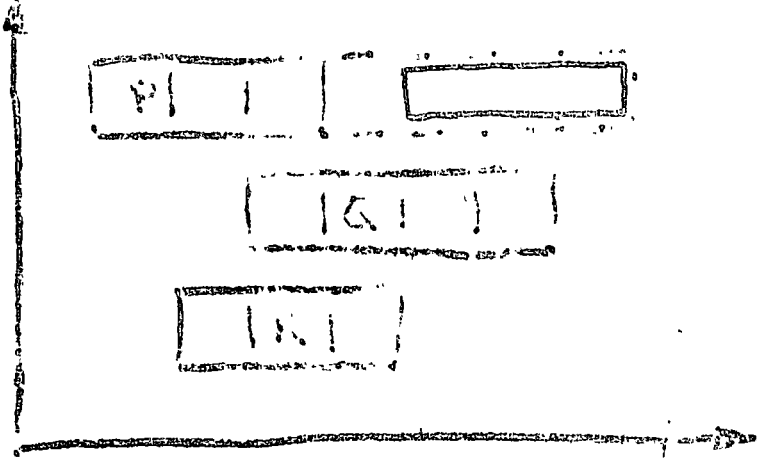
DIAGRAMA DE BARRAS o DE GRANT



= HT



ASIGNACION DE RECURSOS:
2 GRUAS, 5 ACTIVIDADES



PROGRAMACIÓN LINEAL

- METODO DE OPTIMIZACIÓN (MAXIM. Ó MINIM.)
- OPTIMIZA FUNCIÓN SUJETA A RESTRICCIONES
- FUNCIÓN, RESTRICCIONES } LINEALES
- UN BUEN PROGRAMA BASTA

EJEMPLO: TRANSPORTE

x_1 = NUM. CAMIONETAS 2 TONELADAS = ?
x_2 = NUM. CAMIONETAS 4 TONELADAS = ?

MAX. TRANSPORTE = $2x_1 + 4x_2$

RESTRICCIONES:

1) 24 DÍAS DE MECÁNICO/MES
1 DIA SERVICIO CAM. 2 TONELADAS
4 DIAS " " 4 "

$x_1 + 4x_2 \leq 24$

2) 9 ANDENES DE CARGA

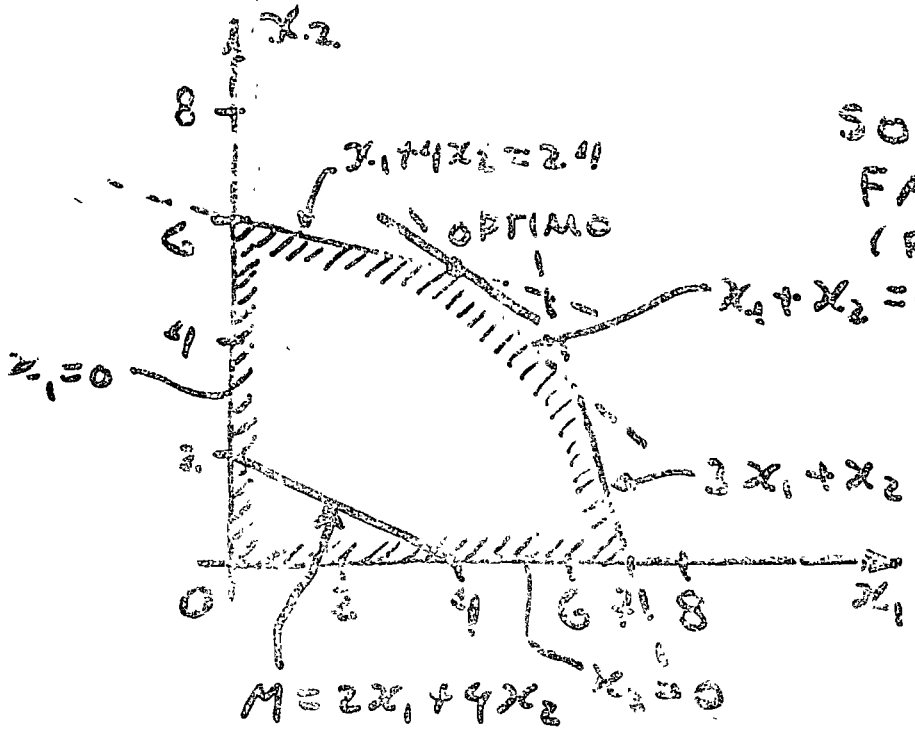
$x_1 + x_2 \leq 9$

3) 21 PERSONAS PARA CARGAR DISPONIBLES
3 " " " CAM. 2 TON.
1 " " " " 4 "

$3x_1 + x_2 \leq 21$

NO NEGATIVIDAD: $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



SOLUCIONES FACTIBLES (REG. CONVEXA)

ACTIVIDADES

MAX: $M = 2x_1 + 4x_2$ FUNCIÓN OBJETIVO

RESTRICCIONES:
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$
} CONDS. NO NEGATIVIDAD

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$A \quad x \quad \leq \quad b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

MAX: $M = (2 \quad 4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$M = c^T \quad x$$

1 SOL : VÉRTICE

∞ SOL : LADO

FUNCION LINEAL: $F(x_1, \ldots, x_n)$

1) HOMOGENEIDAD

$$F(kx_1, \ldots, kx_n) = k\,F(x_1, \ldots, x_n)$$

2) ADITIVIDAD

$$F(x_1 + x_1', \ldots, x_n + x_n') = F(x_1, \ldots, x_n) + F(x_1', \ldots, x_n')$$

EQUIVALENTEMENTE:

$$F(k x_1 + k' x_1', \ldots, k x_n + k' x_n') = k\,F(x_1, \ldots, x_n) + k'\,F(x_1', \ldots, x_n')$$

EJEMPLOS:

$F(x_1, x_2) = x_1 + 4 x_2$ — LINEAL

$= 3$

$= x_1^2$

$= x_1 x_2$

} NO LINEALES

METODO **SIMPLEX**:

MÉTODO NUMERICO SOLUCION ÓPTIMA DE:

$$M = \underline{c}^T \underline{x}$$

SUJETA A RESTRICCIONES: $A\underline{x} \leq \underline{b}$

$\underline{x} \geq \underline{0}$

SIMPLEX: DESIGUALDADES → IGUALDADES

x_i = HOLGURA

x_i = HOLGURA, ARTIFICIALES

x_i = ARTIFICIALES

FUNCIÓN OBJETIVO: ARTIFICIALES

ZONA CONVEXA: SOL. EN PERIFERIE

BÚSQUEDA DE VÉRTICE EN VERTICE

EJEMPLO MÉTODO SIMPLEX: PRODUCCIÓN

TIPO MÁQUINA	HORAS PARA PRODUCIR: PRODUCTO 1	PRODUCTO 2	TOTAL HORAS DISPONIBLES
A	2	1	70
B	1	1	40
C	1	3	90
GANANCIA POR UNIDAD	40	60	

MAXIMIZAR GANANCIA.

x_1 = NUM. ARTÍCULOS 1 = ?
x_2 = NUM. ARTÍCULOS 2 = ?

MAQ. A: $2x_1 + x_2 \leq 70$
MAQ. B: $x_1 + x_2 \leq 40$
MAQ. C: $x_1 + 3x_2 \leq 90$

MAX: GANANCIA = $M = 40x_1 + 60x_2$

SIMPLEX: DESIGUALDADES → IGUALDADES:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 70 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 90 \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

SISTEMA DE 3 ECUACIONES 5 INCÓGNITAS

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ENTONCES: $x_3 = 70$, $x_4 = 40$, $x_5 = 90$ y $M = 40 \times 0 + 60 \times 0 = 0$

PRIMERA SOLUCIÓN FACTIBLE

VARIABLES DE LA BASE: 90 x_3, x_4, x_5

$M = 40x_1 + 60x_2$ SI $x_1 \nearrow 1$, $M \nearrow 40$
$x_2 \nearrow 1$, $M \nearrow 60$ ←

$x_1 = 0$, $x_3 = 70 - x_2 = 0$ $x_2 = 70$
$x_4 = 40 - x_2 = 0$ $x_2 = 40$

SEGUNDA SOLUCIÓN FACTIBLE:

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = 30$ $\quad M = 40 \times 0 + 60 \times 30$

$x_5 = 0$ $\quad x_3 = 40$ $\quad = 1800$

$x_4 = 10$

OBTENIÉNDOLA CON SIST. ECS.

x_2, x_3, x_4: UNA EN CADA ECUACIÓN

$$\begin{cases} x_3 = 40 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 = 10 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = 30 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$M = 40x_1 + 60\left(30 - \tfrac{1}{3}x_5 - \tfrac{1}{3}x_1\right) = 1800 + 20x_1 - 20x_5$$

SI $x_1 \nearrow 1$, $M \nearrow 20$ ←

$x_5 \nearrow 1$, $M \searrow 20$ ✗

$x_5 = 0$:

$x_3 = 40 - \frac{2}{3}x_1 = 0 \quad x_1 = 24$

$x_4 = 10 - \frac{1}{3}x_1 = 0 \quad x_1 = 15$ ←

$x_2 = 30 - \frac{1}{3}x_1 = 0 \quad x_1 = 90$

TERCERA SOLUCIÓN FACTIBLE:

$x_4 = 0$ $\quad x_1 = 15$ $\quad M = 1800 + 20 \times 15 - 0$

$x_5 = 0$ $\quad x_2 = \frac{25}{2}$ $\quad = 2100$

$x_3 = 15$

SIST ECS:

$$\begin{cases} x_3 - 2.5x_4 + 0.5x_5 = 15 \\ x_1 + 1.5x_4 - 0.5x_5 = 15 \\ x_2 - 0.5x_4 + 0.5x_5 = 2.5 \end{cases}$$

$$M = 1800 + 20(15 - 1.5x_4 + 0.5x_5) - 20x_5 = 2100 - 30x_4 - 10x_5$$

$M = 2100 - 30x_4 - 10x_5$

SI $x_4 \to 1$, $M \to 30$

$x_5 \to 1$, $M \to 10$

YA SE TIENE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA (MÁXIMA)

$x_1 = 15$: SE DEBEN FABRICAR 15 ARTÍCULOS 1

$x_2 = 25$: " " " 25 " 2

GANANCIA : 2100

EN TÉRMINOS DE MATRICES (TABLEAU):

1ª ITERACIÓN:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
2	1	1	0	0	40	$40/1 = 40$
1	1	0	1	0	40	$40/1 = 40$
1	(1)	0	0	1	90	$90/1 = 90$ ← MÁS CHICO
-M	-40	-60	0	0	0	

↑ MÁS −

PIVOTE: ○ ←

↑

2ª ITERACIÓN:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
5/3	0	1	0	-1/3	40	$40/5/3 = 24$
(2/3)	0	0	1	-1/3	10	$10/2/3 = 15$ ←
1/3	1	0	0	1/3	30	$30/1/3 = 90$
-20	0	0	0	20	1800	

↑

3ª ITERACIÓN:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	1	-1.5	0.5	15
	1	0	0	1.5	-0.5	15
LA	0	1	0	-0.5	0.5	25
	0	0	0	30	10	2.100

(-: TODOS + =) SOLUCIÓN OPTIMA

$$\begin{cases} x_3 = 15 \\ x_1 = 15 \\ x_2 = 25 \\ M = 2.100 \end{cases}$$

SE LEEN DE LA MATRIZ

INTERPRETACIÓN:

$x_1 = 15$ = NUM. ARTICULOS 1

$x_2 = 25$ = " " 2

GANANCIA = M = 2.100

MÁQUINA A: $2x_1 + x_2 + x_3 = 70$

$x_3 = 30$ => MAQ. A NO SE EMPLEA DURANTE 30 HORAS (HOLGURA)

MÁQUINA B: $x_1 + x_2 + x_4 = 40$

$x_4 = 0$ => MAQ. B PLENAMENTE APROVECHADA

MÁQUINA C: $x_1 + 3x_2 + x_5 = 90$

$x_5 = 0$ => MAQ. C PLENAMENTE APROVECHADA

SIMPLEX: DESIGUALDADES → IGUALDADES

VARIABLES

≤	+HOLGURA
≥	−HOLGURA +ARTIFICIAL
=	+ARTIFICIAL

FUNCION OBJETIVO:

MAXIMIZACIÓN: $-M$ (ARTIF.)

MINIMIZACIÓN: $+M$ (ARTIF.)

M GRANDE

EJEMPLO: MAX: $Z = 2X_1 + 7X_2$

$2X_1 + 5X_2 \leq 150$

$X_1 + 2X_2 \geq 20$

$2X_1 - X_2 = 30$

$2X_1 + 5X_2 + h_1 = 150$

$X_1 + 2X_2 - h_2 + a_1 = 20$

$2X_1 - X_2 + a_2 = 30$

MAX: $Z = 2X_1 + 7X_2 - 1000\,(a_1 + a_2)$

EJEMPLO: DIETA

AL MENOS 21 UNIDADES VITAMINA A
" " 12 " " B

ALIMENTO	POR UNIDAD DE ALIMENTO		
	UNIDADES DE VITAMINA		
	A	B	COSTO
1 (NARANJA)	1	0	20
2 (MANZANA)	0	1	20
3 (LECHUGA)	1	2	31
4 (CHICHARO)	1	1	11
5 (SUAVIGUIN)	2	1	12

MINIMIZAR COSTOS.

x_i = CANTIDAD (UNIDADES) DE ALIMENTO i

MIN: COSTO = $20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5$ ← COEFS. COSTOS

REST: $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 \geq 21$
$x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12$ ← RESTRICCIONES
↑ COEFS. ESTRUCTURALES

$x_i \geq 0$

DUAL: CIA. FARMACEUTICA "LA CAMPANA"

λ_1 = PRECIO P.U. DE VITAMINA A = ?
λ_2 = " " " B = ?

MAXIMIZAR GANANCIA (PRECIOS COMPETITIVOS)

MAX: GANANCIA = $21\lambda_1 + 12\lambda_2$

PROBLEMA — PRECIO NARANJA

$\lambda_1 \geq 20$

$\lambda_2 \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 31$

$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 11$

$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 12$

PROBLEMA PRIMO:

MIN: $w = (20 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

RESTRIC:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 31 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA DUAL:

MAX: $z = (31 \quad 11) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

RESTRIC:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA PRIMO

$\text{MAX}: \underline{c}^T \underline{x}$

$A\underline{x} \leq \underline{b}$

$\underline{x} \geq \underline{0}$

PROBLEMA DUAL

$\text{MIN}: w = \underline{b}^T \underline{w}$

$A^T \underline{w} \geq \underline{c}$

$\underline{w} \geq \underline{0}$

DUAL: INTERPRETACION ALTERNATIVA
PUEDE REDUCIR MENOS MEMORIA

(DUAL CAMPANA: SE PUEDE GRAFICAR.
PRIMO " : NO SE " "

ISÓLO PROGRAMA COMPUTADORA BUENO
SIRVE PARA CUALQUIER PROBLEMA DE
PROGRAMACION LINEAL
(OPERACIONES SOBRE MATRICES)

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

O P T I M I Z A C I O N

DR. VICTOR GEREZ GREISER

OCTUBRE DE 1977.

PALACIO DE MINERIA
Tacuba 5, primer piso. México 1, D F.

6.5. PROGRAMACION LINEAL

6.5.1 Ejemplos

Existen muchos problemas de optimización cuyo modelo matemático es de tal naturaleza que se pueden resolver con la técnica de optimización conocida con el nombre de programación lineal. Se han desarrollado algoritmos y basados en ellos, programas de computadora digital para la solución de estos problemas.

*La estructura de los problemas que pueden resolverse con esta técnica es siempre la misma, de manera que contando con un buen programa para la solución de éstos, pueden resolverse sin necesidad de tener que escribir programas especiales para la solución de problemas particulares. Los problemas de optimización que se pueden resolver con *la técnica de programación dinámica por otra parte no tiene esta característica y con frecuencia es necesario desarrollar programas particulares para obtener la solución de un problema específico.

*Todos los problemas de programación lineal tienen el mismo modelo matemático.

*No existen modelos generales para problemas de programación dinámica.

En esta sección se empezará a ilustrar con ejemplos la formulación de modelos matemáticos que permiten aplicar la programación lineal. A continuación, la ilustración geométrica de la solución del problema de programación lineal, sirve para introducir el método simplex de solución de problemas.

El primer ejemplo ilustra un problema de transporte. Supóngase que una embotelladora tiene dos plantas, una en Tlaxcala y otra en Tehuacán, con capacidad de 7 000 y 13 000 cajas de refrescos al día, además tiene dos centros de consumo que son Puebla y Orizaba, que pueden consumir hasta 12 000 y 8 000 cajas diarias respectivamente. El costo de envío de una caja de refrescos de los diferentes lugares de producción a los diferentes destinos está dado en la tabla 6.5.1.

Ejemplo 6.5.1

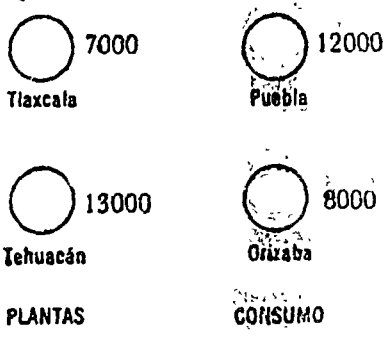


Tabla 6.5.1 Costos de transporte en el ejemplo 6.4.1.

de / a	Tlaxcala 1	Tehuacán 2
Puebla 1	0 8	1.00
Orizaba 2	1.30	0.90

El administrador de la empresa debe determinar cuántas cajas deben enviarse de cada embotelladora a cada centro de consumo, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

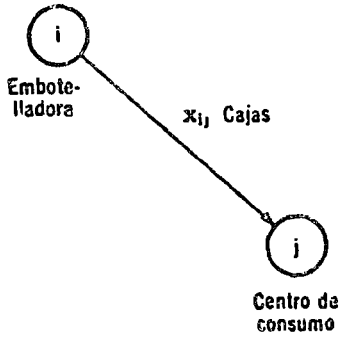
1) Cada embotelladora no puede enviar más cajas que el máximo que puede producir.
2) Cada centro de consumo puede obtener tantas cajas como puede consumir.
3) Deben minimizarse los gastos de transporte.

Para plantear este problema en el marco de las ecuaciones (6.1.1) y (6.1.2).

$$M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (6.1.1)$$

$$C_i = C_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq O \text{ para } i = 1,2,\ldots p$$
$$C_i = C_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq O \text{ para } i = p+1, \ldots r$$
$$C_i = C_i(x_1, x_2 \ldots, x_n) = O \text{ para } i = r+1, \ldots n \qquad (6.1.2)$$

es necesario definir la siguiente variable: x_{ij} es el número de cajas enviadas de la embotelladora situada en la localidad i'sima (i = 1 corresponde a Tlaxcala e i = 2 a Tehuacán) al centro consumidor j'simo (1 es el índice de Puebla y 2 el de Orizaba). Con la introducción de esta variable el problema puede plantearse de la siguiente forma:



Las cajas enviadas de la localidad 1 (Tlaxcala) al centro de consumo 1 (Puebla), que se ha acordado representar con x_{11} más las cajas enviadas de la localidad 1 al centro de consumo 2 (Orizaba), x_{12}, no deben exceder la capacidad de la embotelladora de la localidad 1 que es de 7 000 cajas, es decir,

$$x_{11} + x_{12} \leq 7\,000 \qquad (6.5.1)$$

La figura 6.5.1 ilustra el planteamiento de esta ecuación:

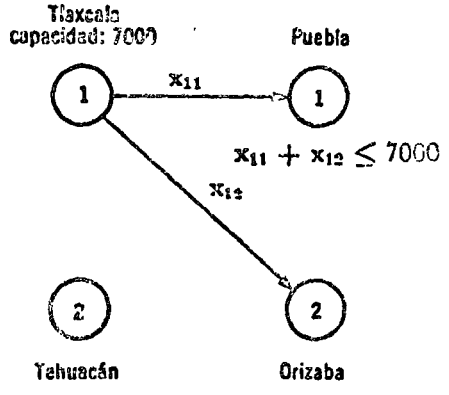


Fig. 6.5.1 Cajas enviadas desde la embotelladora en Tlaxcala.

En forma similar puede establecerse la siguiente ecuación que limite la producción total de la embotelladora de la 2da. localidad a 13 000 cajas, a saber:

$$x_{21} + x_{22} \leq 13\,000 \qquad (6.5.2)$$

La figura 6.5.2 ilustra el planteamiento de otras ecuaciones.

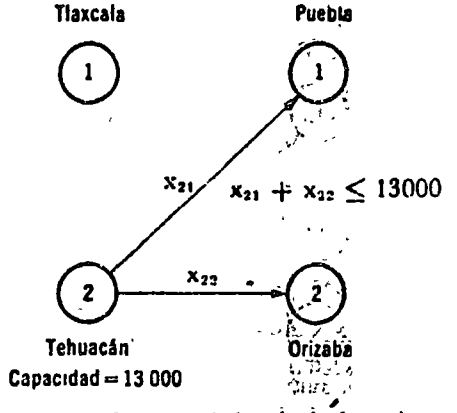


Fig. 6.52 Cajas enviadas desde la embotelladora en Tehuacán.

Por otra parte, se ha señalado que cada centro de consumo puede obtener tantas cajas como desea.

Al centro consumidor 1, Puebla, le llegan x_{11} cajas de Tlaxcala y x_{21} cajas de Tehuacán tal como ilustra la fig. 6.5.3. Por lo tanto, como el consumo de Puebla es de 12 000 cajas:

$$x_{11} + x_{21} \geq 12000 \qquad (6.5.3)$$

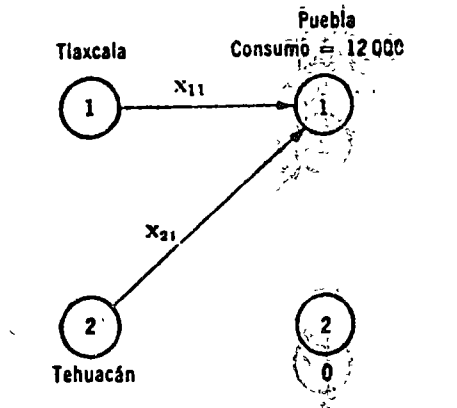


Fig. 6.5.3 Cajas recibidas en Puebla.

Finalmente como última restricción se tiene que las cajas que recibe Orizaba, centro consumidor 2, deben ser iguales o mayor a 8 000 cajas. Se tiene por lo tanto;

$$x_{12} + x_{22} \geq 8\,000 \qquad (6.5.4)$$

La figura 6.5.4 ilustra el significado de esta ecuación.

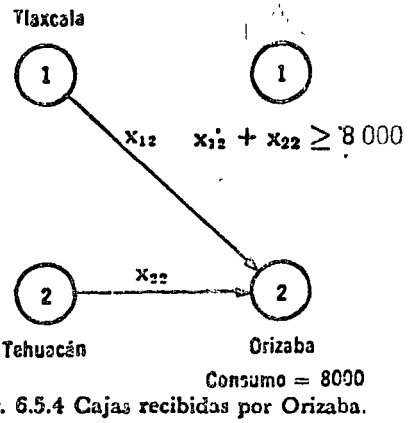


Fig. 6.5.4 Cajas recibidas por Orizaba.

Para terminar con el establecimiento del modelo matemático de este problema es necesario establecer la función objetivo.

El objetivo de análisis es minimizar los costos de transporte que están dados por:

$$M = 0.8\, x_{11} + 1\, x_{21} + 1.3\, x_{21} + 0.9\, x_{22} \tag{6.5.5}$$

Debe además imponerse la siguiente condición:

$$x_{ij} \geq 0 \ \forall_j, \forall_i \tag{6.5.6}$$

ya que no tendrán significado valores negativos de envíos de cajas.

En resumen puede decirse que el problema consiste en minimizar la función objetivo.

$$M = 0.8\, x_{11} + 1.\, x_{21} + 1.3\, x_{12} + 0.9\, x_{22} \tag{6.5.5}$$

Sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &\leq 7{,}000 && (6.5.1)\\ x_{21} + x_{22} &\leq 13{,}000 && (6.5.2)\\ x_{11} + x_{21} &\geq 12{,}000 && (6.5.3)\\ x_{12} + x_{22} &\geq 8{,}000 && (6.5.4) \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \forall_i \text{ y } \forall_j. \tag{6.5.6}$$

Todos los modelos matemáticos de problemas de programación lineal tienen precisamente esta forma.

Antes de continuar conviene recordar algunas definiciones introducidas en la sección 6.1.2.

*Un conjunto de valores de las variables que satisface todas las restricciones del problema se llama una *solución factible* del problema de programación lineal. Empleando la definición anterior, puede decirse que la solución del problema consiste en encontrar una solución factible que sea óptima. En este caso del problema del transporte una solución factible que minimice la función objetivo (6.5.5).

*La solución factible satisface todas las restricciones.

*Este problema tiene cuatro variables que hay que determinar, x_{11}, x_{12}, x_{21} y x_{22}. Con objeto de visualizar geométricamente la solución de los problemas de programación lineal e introducir otro tipo de problemas de optimización de este tipo, se incluye un segundo ejemplo:

*Variables del problema x_{11}, x_{12}, x_{21} y x_{22}

Ejemplo 6.5.2

*Supóngase que una compañía de transporte tiene x_1 camionetas de 2 toneladas y x_2 camionetas de 4 toneladas y desea maximizar su capacidad de transporte. La función objetivo es

*x_1 camionetas de 2 ton. x_2 camionetas de 4 ton.

$$m = 2x_1 + 4x_2 \qquad (6.5.7)$$

y el problema consiste en maximizar dicha expresión.

*Además la compañía tiene las siguientes restricciones:

*Restricciones.

*La primera es la siguiente: Las camionetas chicas requieren 1 día de mantenimiento al mes, y las grandes 4 días y la compañía sólo tiene disponibles 24 días de mecánico al mes. Matemáticamente esta restricción se expresa de la siguiente forma:

*Mantenimiento:
24 días mecánico/mes.

$$x_1 + 4x_2 \leq 24 \qquad (6.5.8)$$

*La segunda restricción en este problema se refiere a la disponibilidad de andenes de carga. Ambos tipos de vehículo, requieren de igual número de andenes de carga, y que la compañía sólo cuenta con 9 andenes. Empleando las variables x_1 y x_2 esta restricción establece:

*2da. Andenes de carga:
9 andenes.

$$x_1 + x_2 \leq 9 \qquad (6.5.9)$$

*La última restricción se refiere al personal que se requiere para cargarlas. Este personal está restringido a 21 personas. Las camionetas chicas requieren tres personas para cargarlas y las grandes solamente una persona. Se tiene por lo tanto

*3ra. Cargado:
21 personas.

$$3x_1 + x_2 \leq 21 \qquad (6.5.10)$$

*Desde luego que las variables x_1 y x_2, número de camionetas de 2 toneladas y de 4 toneladas con que cuenta la compañía respectivamente, no pueden ser negativas, por lo tanto las últimas restricciones en este problema son:

*Ultima:
no negatividad.

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \qquad (6.5.11)$$

Desde luego existen otros muchos problemas donde puede aplicarse la programación lineal. Entre ellos pueden citarse problemas de mezclado y planeación de la producción como el ejemplo 6.5.4 de la sección 6.5.5.

Después de estos ejemplos se procederá a planear en forma formal el problema de programación lineal y se estudiarán las condiciones que debe satisfacer tanto la función objetivo como las restricciones.

6.5.2. Planteamiento formal

*Si se analiza la formulación de los problemas de los dos ejemplos introducidos en la sección anterior, pueden detectarse ciertas variables que se llaman en forma genérica *actividades.*

*Actividades.

*En el ejemplo 6.5.1 las actividades consisten en enviar cajas de refrescos de la embotelladora al centro consumidor y se han representado con los símbolos:

*Envío de cajas de refresco.

$$x_{ij},\ i, j = 1,2$$

*En el ejemplo 6.5.2 estas actividades consisten en operar camiones de carga y se han empleado los símbolos x_1 y x_2 para representarlas.

*Operación de camiones de carga

$$x_1, x_2$$

*Cada actividad queda caracterizada por una variable que se designa como *nivel de actividad.*

*Nivel de actividad.

*Además se observa que los problemas de los ejemplos anteriores satisfacen las siguientes condiciones:

1. No negatividad de los niveles, es decir

$$x_i \geq 0,\ \forall_i$$

*Tanto las restricciones como la función objetivo son funciones lineales de los niveles de actividad. Al ser lineales estas funciones son *homogéneas* y *aditivas.*

*Funciones objetivo y restricciones son lineales →homogéneas y aditivas.

Una función

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

es lineal si dados dos conjuntos:

*Conjuntos de variables

$$x_i,\ i = 1, 2, \ldots n \text{ y } x'_i,\ i = 1, 2, \ldots$$

*y dos constantes cualquiera K y K' se tiene:

*Constantes K y K'

$$f(Kx_1 + K'x'_1, \ldots, Kx_n + K'x'_n) = Kf(x_1, x_2, \ldots, x_n) + K'f(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) \qquad (6.5.12)$$

*La condición de linealidad (6.5.12) es equivalente a dos condiciones. En primer lugar una función lineal tiene un factor constante de escala, es decir.

*Condición de linealidad → factor constante de escala

$$f(Kx_1, Kx_2, \ldots, Kx_n) = Kf(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (6.5.13)$$

*y en segundo lugar es aditiva:

*Condición de linealidad → aditividad.

$$f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (6.5.14)$$

Un ejemplo servirá para ilustrar este importante concepto y señalar que funciones del tipo

$$f(x) = a + bx \qquad (6.5.15)$$

*no son lineales. Es decir, si en las funciones hay cargos fijos (el término a) no es posible aplicar directamente el concepto de programación lineal.

*Función no lineal.

Ejemplo 6.5.3.

Determine si las siguientes funciones son lineales ; justifique la respuesta.

a) $y = 3x_1 + 2x_2$

b) $y = 3x + 5$

Solución:

a) Como $a3x_1 + b3x'_1 + a2x_2 + bx'_2 = a(3x_1 + 2x_2) + b(3x'_1 + 2x'_2)$

se cumple la condición (6.5.12) y la función es lineal.

b) Como $a3x + 5 + b3x' + 5 \neq a(3x + 5) + b(3x' + 5)$

la función no es lineal.

El problema de programación lineal por lo tanto puede plantearse de la siguiente forma.

*Hay que determinar el valor de los niveles de actividad $x_1, x_2, \ldots x_n$, que maximicen a la función objetivo:

*Encontrar $\underline{x}$ que maximice:

$$m = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (6.5.6a)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

y satisfaga:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} = b_i \; i = 1, 2, \ldots p$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \leq b_i \; i = p + 1, \ldots r$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geq b_i \; i = r + 1, \ldots m$$

$$x_j \geq 0 \; j = 1, 2 \ldots n \qquad (6.5.16b)$$

*Los coeficientes C_i de la función objetivo se conocen con el nombre de *coeficientes de costo,* y los coeficientes a_{ij} de las ecuaciones de restricción se llaman *coeficientes estructurales.*

*c_i = coeficientes de costo

a_{ij} = coeficientes estructurales.

Como se ilustra en el ejemplo 6.5.3 un problema de maximización puede siempre convertirse en uno de minimización. Como muestra el sistema de ecuaciones (6.5.16) las restricciones pueden ser del tipo de desigualdad o igualdad. *Para la solución del problema de programación lineal conviene convertir todas las desigualdades en igualdades introduciendo *variables de holgura,* que de preferencia deben de ser positivas. La siguiente desigualdad:

*Variables de holgura ≥ 0 para convertir desigualdades en igualdades.

Desigualdad

$$a_{q1} x_1 + a_{q2} x_2 + \ldots + a_{qn} x_n \leq b_q$$

+

Variable de holgura

$x_{n+q} \geq 0$

↓

Igualdad

puede convertirse en una igualdad introduciendo una variable positiva x_{n+q} llamada de holgura. En efecto:

$$a_{q1} x_1 + a_{q2} x_2 + \ldots + a_{qn} x_n + x_{n+q} = b_q$$

*Si por otra parte se tiene en la ecuación de restricción la desigualdad en sentido contrario.

*Desigualdad

$$a_{q1} x_1 + a_{q2} x_2 + \ldots + a_{qn} x_n \geq b_q$$

+

Variable de holgura

$x_{n+q} \geq 0$

↓

Igualdad

la introducción de la variable de holgura positiva x_{n+q}, convierte la desigualdad en una igualdad, ya que:

$$a_{q1} x_1 + a_{q2} x_2 + \ldots + a_{qn} x_n - x_{n+q} = b_q$$

Además, los métodos de solución del problema de programación lineal exigen que los niveles de actividad sean positivos, es decir, $x_i \geq 0$, $\forall_i$. *Si un nivel de actividad no está sujeto a esta restricción se le puede sustituir por la diferencia de dos niveles de actividad positivos. Supongamos que el nivel x_i no está restringido. Si se introducen las variables

*Si nivel de actividad

$$x_i \leq 6 \geq 0$$

x_i^+ y x_i^- relacionadas con la variable x_i mediante la siguiente diferencia.

$$x_i = x_i^+ - x_i^- \qquad (6.5.17)$$

la variable o nivel de actividad original puede ser mayor, igual o menor que cero, sin que las variables x_i^+ y x_i^- tomen valores negativos. El siguiente ejemplo ilustra tanto la introducción de variable de holgura como el empleo de la relación (6.5.17) y la transformación de un problema de minimización en uno de maximización.

$$x_i^+ \geq 0, \; x_i^- \geq 0$$

Ejemplo 6.5.3

Convierta el siguiente problema de minimización en un problema de maximización, transforme todas las ecuaciones de restricción en igualdades mediante la introducción de variables de holgura y transforme todas las variables en no negativas:

$$\min : m = 3x_1 + 5x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 - 6x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0; \; x_2 \text{ sin restricción}$$

Solución:

se sabe que:

Min. $m = 3x_1 + 5x_2$ es equivalente a:
Max. $-m = -3x_1 - 5x_2$.

Definiendo una nueva función objetivo.

* Nueva función objetivo n:

$$n \equiv -m$$
$$\max: n = -3x_1 - 5x_2$$

la función objetivo se convierte en:

Para convertir las dos desigualdades de restricción en igualdad es necesario introducir dos nuevas variables x_3 y x_4 para realizar los siguientes cambios en las restricciones.

$$x_1 - 6x_2 \leq 4 \rightarrow x_1 - 6x_2 + x_4 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \rightarrow 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

*Finalmente la variable x_2, no restringida debe sustituirse por la diferencia de dos variables no negativas

*x_2 variable sin restricción

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-$$

Realizando esta sustitución, las ecuaciones o condiciones de restricción tienen la siguiente forma:

$$3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - x_3 = 6$$
$$x_1 - 6x_2^+ + 6x_2^- + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0$$

y la función objetivo es:

$$\max: n = -3x_1 - 5x_2$$

También es posible resolver un problema de minimización recurriendo a su formulación dual que se estudia en la sección 6.5.5.

* La estructura del problema de programación lineal se presta para el empleo de la notación matricial. Si se definen *la matriz de coeficientes estructurales

*Formulación matricial
*Coeficientes estructurales

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.5.17)$$

y * los vectores de actividades:

*Actividades

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6.5.18)$$

de *costos

*Costos

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (6.5.19)$$

y *de restricciones

*Restricciones

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (6.5.20)$$

El problema de programación lineal queda planteado de la siguiente forma:

$$\text{máx: } m = \underline{c}^T \underline{x} \quad (6.5.21)$$

Sujeto a las restricciones

$$\underline{A}\,\underline{x} \leq \underline{b} \quad (6.5.22)$$

$$\underline{x} \geq 0 \quad (6.5.23)$$

En la siguiente sección se ilustra gráficamente la forma de obtener la solución del problema de programación lineal.

6.5.3 Solución gráfica

En esta sección ilustraremos gráficamente la solución del problema de programación lineal. Como es difícil representar gráficamente funciones de más de dos variables, se empleará el ejemplo 6.5.2 para realizar esta representación.

El modelo matemático de este problema es el siguiente:

$$\max: m = 2x_1 + 4x_2 \quad (6.5.7)$$

Sujeto a las restricciones

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (6.5.8)\\
x_1 + x_2 &\leq 9 && (6.5.9)\\
3x_1 + x_2 &\leq 21 && (6.5.10)\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Las restricciones de este problema establecen una zona del plano (x_1, x_2) donde deben encontrarse las soluciones factibles, tal como se señaló en la sección 6.1.2. Observe que la ecuación $x_1 + 4x_2 = 24$, corresponde a una recta, que divide al plano en dos regiones. En la inferior se cumple $x_1 + 4x_2 \leq 24$, por lo tanto, la solución factible debe estar "abajo" de dicha recta. La figura 6.5.5 ilustra la zona definida por esta restricción.

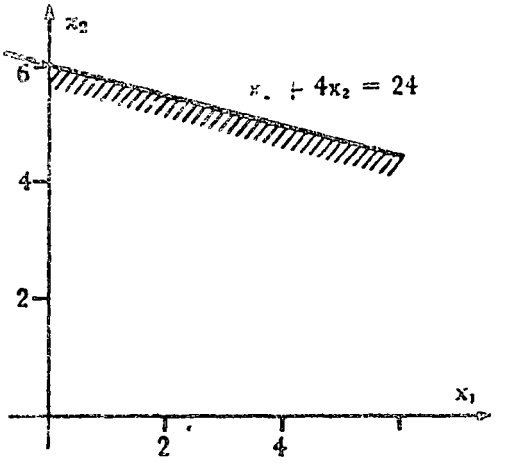


Fig. 6.5.5 Zona con restricción $x_1 + 4x_2 \leq 24$.

Un razonamiento similar lleva a concluir que la solución factible también debe estar a la "izquierda" de las rectas $x_1 + x_2 = 9$ y $3x_1 + x_2 = 21$ (fig. 6.5.6).

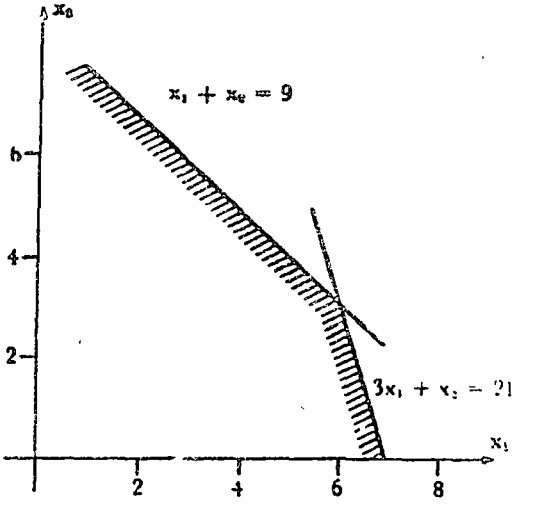


Fig. 6.5.6 Zona con restricciones $x_1 + x_2 \leq 9$ y $3x_1 + x_2 \leq 21$.

Además, la condición $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ impone que debe estar en el primer cuadrante. La región del plano donde se cumplen todas las restricciones es por lo tanto polígono convexo OABCDO que aparece en la figura 6.5.7.

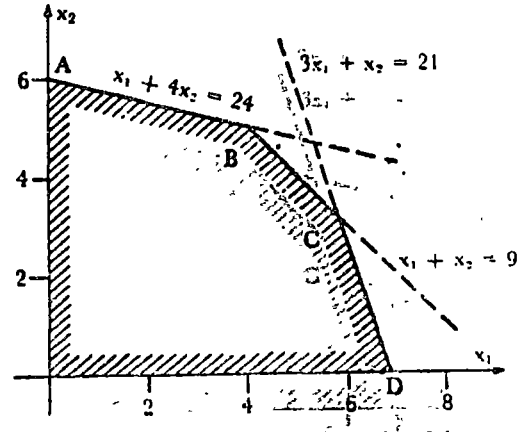


Fig. 6.5.7 Zona de soluciones factibles del ejemplo 6.5.2.

El siguiente paso en la solución consiste en encontrar dentro de los puntos de dicho polígono, que son soluciones factibles todos ellos, aquel punto para el cual la función objetivo 6.5.7 $2x_1 + 4x_2$ es máxima. Nótese primero que cualquier recta dependiente $-2/4$ cumple con la condición $2x_1 + 4x_2$. Además, entre mayor sea la distancia al origen de una recta dependiente $-1/2$, tanto mayor es $2x_1 + 4x_2$ tal como se ilustra en la figura 6.5.8.

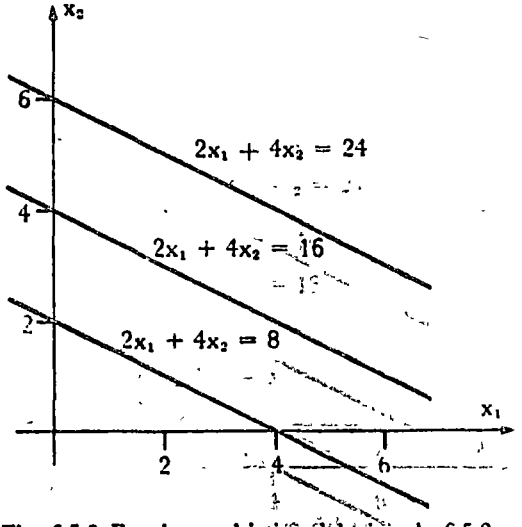


Fig. 6.5.8 Funciones objetivo del ejemplo 6.5.2.

Para obtener el valor máximo de la función objetivo $2x_1 + 4x_2$ es necesario desplazar una recta dependiente $-2/4$ de manera que su distancia al origen sea máxima, pero tenga por lo menos un punto dentro de la región OABCDO. En la figura 6.5.9 se ilustra este procedimiento de búsqueda del máximo. En el punto B de coordenadas (4, 5) el valor de la función objetivo $2x_1 + 4x_2$ es de 28 y se cumplen todas las restricciones. Por lo tanto $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ es la solución del problema de programación lineal. Haciendo referencia a la fig. 6.5.9 obsérvese además que para dicho punto, tiene las características resumidas en el cuadro de la tabla 6.5.1.

Problema

Función objetivo.

$$M = 2x_1 + 4x_2 \text{ (max.)}$$

Restricciones.

$$x_1 + 4x_2 \leq 24 \text{ (a)}$$
$$x_1 + x_2 \leq 9 \text{ (b)}$$
$$3x_1 + x_2 \leq 21 \text{ (c)}$$
$$x_1 \geq 0 \text{ (d)}$$
$$x_2 \geq 0 \text{ (e)}$$

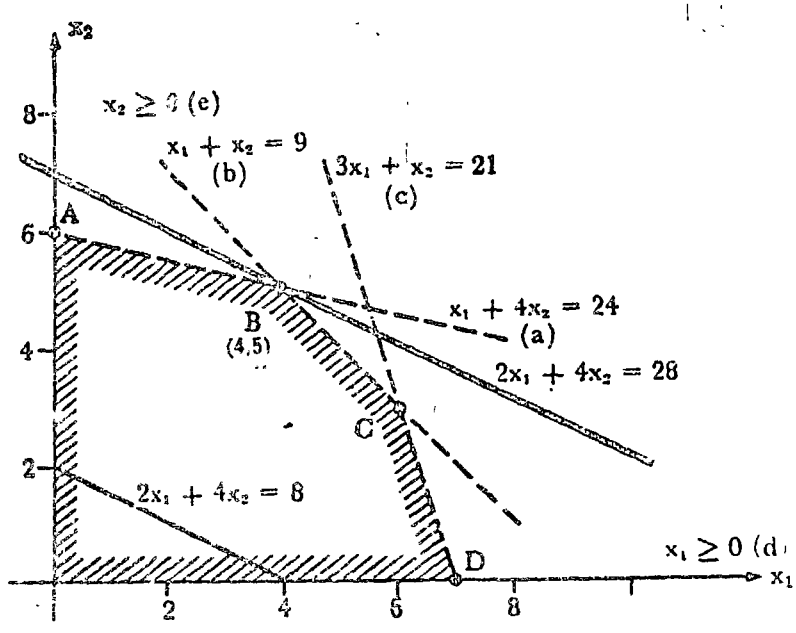


Fig. 6.5.9 Ilustración de la solución gráfica del problema de programación lineal.

Tabla 6.5.1 Propiedades de punto óptimo B del ejemplo 6.5.2.

Restricción	Holgura
$x_1 + 4x_2 = 24$	0
$x_1 + x_2 = 9$	0
$3x_1 + x_2 = 17 \leq 21$	4

Es decir, el recurso mecánico "del que se cuenta con 24 días más, el de "andenes de carga" con el que se cuenta con 9, se emplea plenamente si se usan 4 camionetas de dos toneladas y 5 de 4 toneladas. Mientras que de tercer recurso, del que se cuenta con 21 unidades, sólo se usan 17. Sin embargo, ninguna otra combinación de x_1 y x_2 permite obtener mayor volumen de carga sin violar las restricciones (6.5.8), (6.5.10). Antes de continuar, nótese que la región definida por las restricciones (6.5.8 - 6.5.10) es convexa, como muestra la figura 6.5.10, ya que cualquier recta que une dos puntos cualquiera de la periferia de la zona se encuentra en la frontera o dentro de la región.

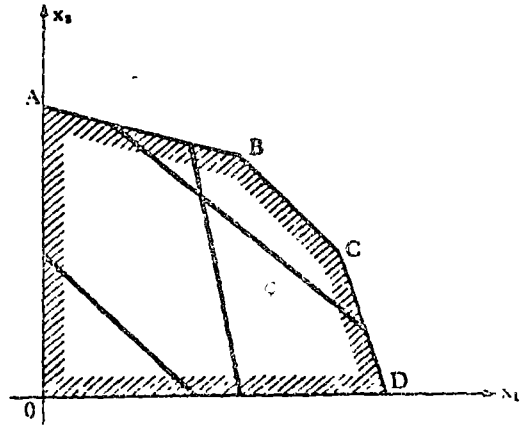


Fig. 6 5 10 Zona convexa de soluciones factibles.

En la sección 6.5.4 se empleará la representación gráfica de la solución de programación lineal para visualizar fácilmente diversos casos especiales de problemas de este tipo.

*El método gráfico de solución del problema de programación lineal está restringido a modelos con dos variables. Prácticamente todos los problemas de interés para el analista tienen más de dos

*Método gráfico para problemas con dos variables.

variables, por lo cual el método gráfico no se puede emplear en estos casos. *Es necesario contar con métodos algebráicos que se puedan programar en una computadora digital, con objeto de resolver problemas con un gran número de variables, como son la mayoría de los que se encuentran en la práctica. El método simplex que se introduce en la siguiente sección tiene esta propiedad. Sin embargo, es importante familiarizarse con la solución gráfica estudiada en esta sección, ya que ayuda a entender la naturaleza de la solución del problema.

*Métodos algebraicos para resolver sistemas con muchas variables.

Al ir desarrollando el método simplex de solución analítica, continuamente se hará referencia a la solución gráfica. Los autores consideran que de esta forma el lector lo comprenderá con mayor facilidad.

6.5.4 Solución analítica

El método analítico más importante para la solución de este tipo de problemas es el *método simplex, que introduciremos resolviendo el ejemplo 6.5.2.

*Método simplex.

*La función objetivo de este ejemplo es:

max : $m = 2x_1 + 4x_2$

*Función objetivo.

$$\max : m = 2x_1 + 4x_2 \qquad (6.5.7)$$

*Sujeto a las restricciones

*Restricciones.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (6.5.8)\\ x_1 + x_2 &\leq 9 && (6.5.9)\\ 3x_1 + x_2 &\leq 21 && (6.5.10)\\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

*El primer paso en este método consiste en introducir variables de holgura x_3 x_4, x_5 para convertir las desigualdades de las ecuaciones de restricción en igualdades, tal como se señaló en la sección 6.5.2.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9 \qquad (6.5.24)\\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 21 \end{aligned}$$

*Debido al signo de las desigualdades, las variables de holgura deben ser positivas, es decir:

*Variables de holgura positivas.

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0 \qquad (4.5.3)$$

*El problema consiste en encontrar los valores de las variables x_j que maximicen a la función objetivo (6.5.7).

*Encontrar x_j para maximizar $2x_1 + 4x_2$.

*Como el sistema (6.5.24) tiene 3 ecuaciones con 5 incógnitas pueden expresarse 3 de ellas cualesquiera en función de las dos restantes.

*Sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas.

*Como la variable x_3 sólo aparece en la 1er. ecuación, la x_4 en la 2da. y x_5 en la 3er. ecuación, lo más conveniente es tomar $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, obteniéndose de inmediato del sistema (6.5.24) que $x_3 = 24$, $x_4 = 9$ y $x_5 = 21$. Esta solución se conoce con el

$$\begin{aligned} *x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9\\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 21 \end{aligned}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$

nombre de una *solución básica,* y *las variables cuyo valor se ha fijado reciben el nombre de *variables base.* Teniendo presente la definición de solución factible, se nota que el conjunto *$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 24$, $x_4 = 9$ y $x_5 = 21$ es una *solución factible* aunque no óptima, ya que en este caso la función objetivo vale $m = 0$.

Haciendo referencia a la figura 6.5.11 que muestra gráficamente la región donde se cumplen las restricciones (6.5.8) a (6.5.10), se observa que la solución básica $x_1 = x_2 = 0$ y $x_3 = 24$, $x_4 = 9$ y $x_5 = 21$ corresponde al origen del sistema. Nótese además que el valor de las variables de holgura indica que no se está empleando ningún recurso en este punto.

$x_3 = 24$, $x_4 = 9$, $x_5 = 21$

*Variables cuyo valor se fija (x_1, $x_2 = 0$) se llaman variables base.

*$x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 24$

$x_4 = 9$, $x_5 = 21$ son una solución factible no óptima.

Restricción	Valor en 0	Holgura
$x_1 + 4x_2 \leq 24$	$x_1 + 4x_2 = 0$	24
$x_1 + x_2 \leq 9$	$x_1 + x_2 = 0$	9
$3x_1 + x_2 \leq 21$	$x_1 + x_2 = 0$	21

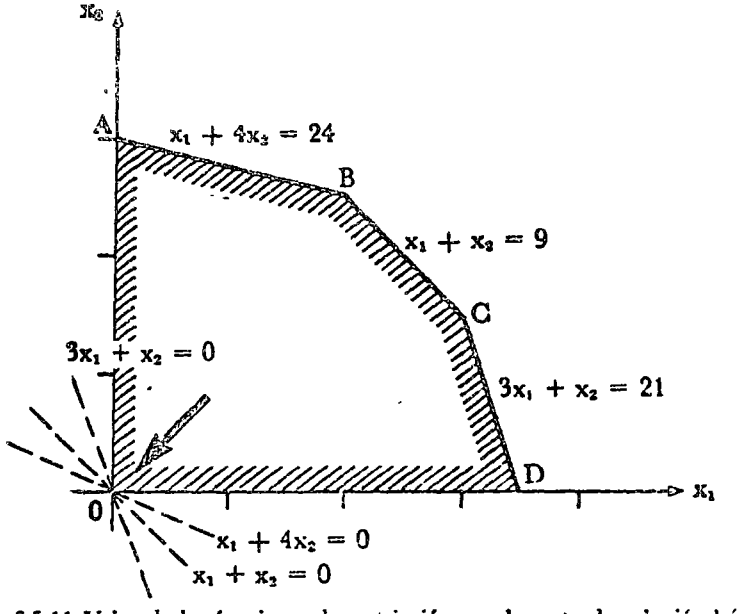
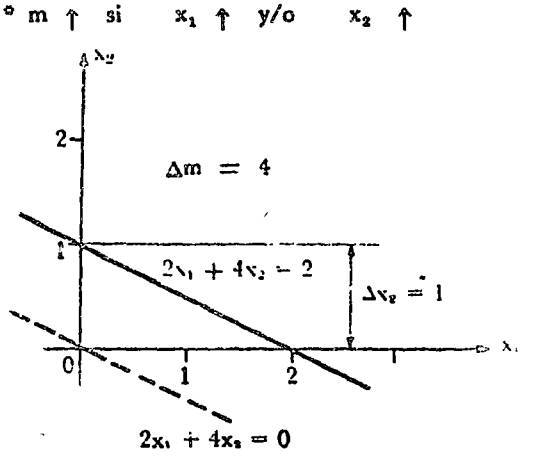


Fig. 6.5.11 Valor de las funciones de restricción en el punto de solución básica.

*Para incrementar el valor de la función objetivo se puede incrementar el valor de x_1 o el de x_2 o ambas. Se empieza por determinar en cuál variable un incremento unitario aumenta más la función objetivo. La fig. 6.5.12 ilustra que una unidad de incremento en x_2 aumenta en 4 el valor de m y un incremento unitario en x_1 sólo aumenta a m en 2 unidades, por lo tanto conviene, para encontrar el máximo lo más rápido posible aumentar el valor de x_2, manteniendo $x_1 = 0$.



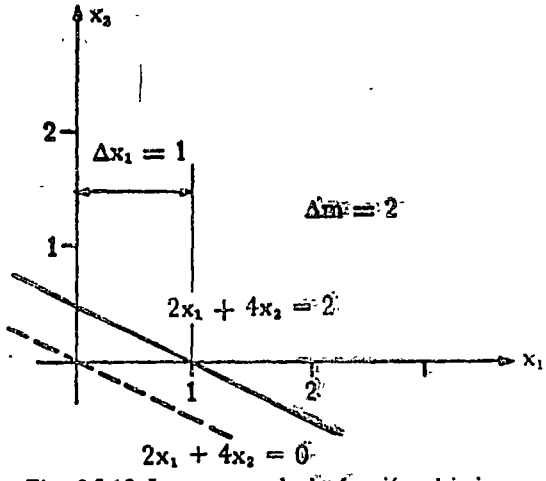


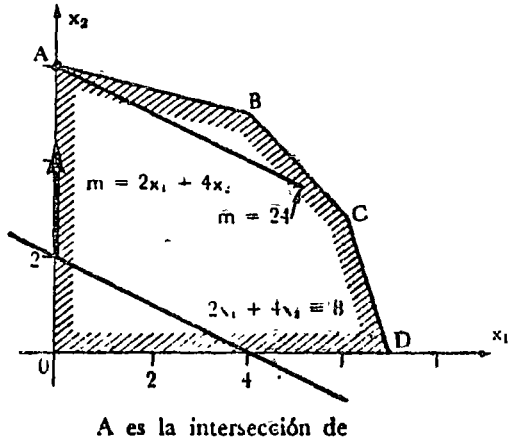
Fig. 6.5.12 Incremento de la función objetivo.

Para $x_1 = 0$, de (6.5.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_3 &= 24 - 4x_2 \\ x_4 &= 9 - x_2 \\ x_5 &= 21 - x_2 \end{aligned} \qquad (6.5.25)$$

El máximo valor de x_2 puede ser 6, ya que si es mayor de 6, $x_3 \leq 0$ y se violaría la condición $x_i \geqq 0$, i = 1, 2, ... 5. Gráficamente, al ir moviendo la recta $2x_1 + 4x_2$ que representa la función objetivo paralelamente a sí misma, a lo largo de la recta $x_1 = 0$, se llega al punto A, otra esquina del polígono ABCD que define a la región de soluciones factibles.

La figura 6.5.13 muestra este traslado de la función objetivo $m = 2x_1 + 4x_2$.



A es la intersección de

$$x_1 + 4x_2 = 24 \text{ y } x_1 = 0$$

En A $x_3 = 0$
$x_4 = 3$
$x_5 = 15$

Fig. 6.5.13 Búsqueda del máximo de la función objetivo a lo largo de la recta $x_1 = 0$

Del sistema de ecuaciones (6.5.25) para:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0$$

se tiene:

$x_4 = 9$
$x_3 = 0$
$x_5 = 15$

Como x_3 era la holgura de la ecuación de restricción (6.5.8) se deduce que en el punto *A el recurso limitado correspondiente a esa ecuación de restricción se ha empleado en su totalidad. En efecto el punto A se encuentra sobre la recta de ecuación

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \qquad (6.5.8)$$

y la ecuación

*A en la intersección de:

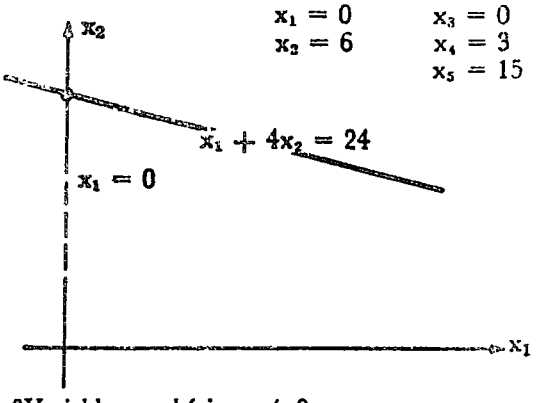
$$x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_1 = 0.$$

*En resumen, en el punto A el valor de todas las variables del problema son:

*Valor de las variables en el punto A

$x_1 = 0$ $\quad x_3 = 0$
$x_2 = 6$ $\quad x_4 = 3$
$\quad\quad\quad x_5 = 15$



*Las nuevas variables no básicas, es decir, las que son diferentes de cero son:

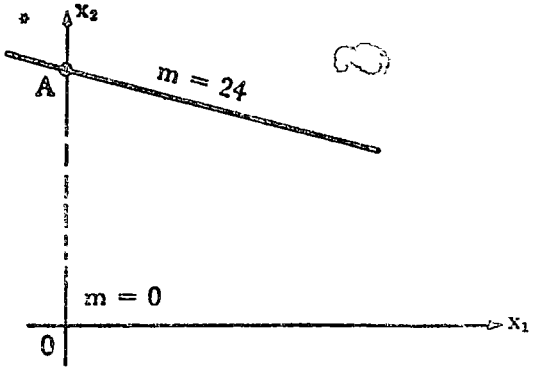
*Variables no básicas $\neq 0$.

x_2, x_4 y x_5

El valor de la función objetivo es:

$$m = 2x_1 + 4x_2 = 24 \qquad (6.5.26)$$

*que resulta mayor que el valor de esta función en el 1er. punto explorado, el origen, donde valía cero.



*Cuando las variables básicas eran x_1 y x_2, o sea en el 1er. paso de la solución del problema, también llamada *1ra. iteración,* el sistema de ecuaciones algebraicas que hubo que resolver eran:

*Con $x_1 = x_2 = 0$ (variables básicas) el sistema de ecuaciones era:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 29 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 21 \end{aligned} \qquad (6.5.24)$$

*En este sistema las variables no básicas x_3, x_4 y x_5 aparecían en una ecuación cada una, y esto facilitó su evaluación.

*Las variables x_3, x_4, $x_5 \neq 0$ (no básicas) aparecen una en cada ecuación.

*Para proseguir con igual facilidad, se debe manipular algebráicamente a las ecuaciones (6.5.24) para que en cada una de

*Manipule las ecuaciones para que las variables no básicas (x_2, x_4, x_5) aparezcan en una sola ecuación.

ellas aparezca solamente una de las nuevas variables no básicas x_2, x_4 y x_5 de preferencia con coeficiente unitario. *De la 1er. ecuación del sistema (6.5.24).

*1er. ecuación.

se tiene al dividir entre 4

$$x_1 + x_3 + 4x_2 = 24$$

$$\div 4$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_2 = 6 \quad (6.5.26)$$

*Esta ecuación ya tiene una sola variable no básica x_2 con coeficiente unitario. *En la 2da. ecuación del sistema (6.5.24)

*Unica v.n.b. x_2
*2da. ecuación

$$x_1 + x_2 + x_4 = 9$$

*aparecen dos variables no básicas, x_2 y x_4.

*v.n.b. x_2 y x_4

Como x_2 ya quedó en la ecuación anterior se debe dejar en esta x_4.

elimine x_2

Restando de la ecuación

$$(1)\ x_1 + x_2 + x_4 = 9$$

la ecuación anterior

$$(2)\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_2 = 24$$

*se elimina la variable x_2. En efecto se tiene:

*Se elimina x_2

$$(1) - (2)\ \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 3$$

*Finalmente la última ecuación del sistema (6.5.24)

*Ultima ecuación

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 21$$

*Contiene las variables no básicas x_2 y x_5. Hay que eliminar x_2 para que sólo quede una. Restando a esta ecuación la ecuación *(6.5.26) se elimina en efecto x_2.

*V.n.b. x_2 y x_5
elimine x_2

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 21$$

$$-\left(\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6\right)$$

$$\frac{11}{4}x_1 + x_3 - \frac{1}{4}x_3 = 15$$

Realizando esta operación se obtiene:

*El sistema de ecuaciones de restricción ha quedado de la forma deseada:

*Nuevas ecuaciones de restricción

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_2 = 6 \quad (6.5.26)$$

$$\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 3 \quad (6.5.27)$$

$$\frac{11}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5 = 15 \quad (6.5.28)$$

*En este sistema de ecuaciones en cada una de ellas aparece solamente una de las variables no básicas.

*En cada ecuación aparece una sola v.n.b. (x_2, x_4, x_5)

*La función objetivo hay que expresarla en función de las variables básicas, x_1 y x_3, es decir, hay que eliminar x_2. En la etapa anterior, esta función estaba expresada en función de x_1 y x_3: despejando de la ecuación (6.5.26).

*Expresar m en función de las v.b. (x_1, x_3)

$$m = 2x_1 + 4x_2$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_2 = 6 \qquad (6.5.26)$$

*despejando a x_2 se tiene:

*despejando a x_2

$$x_2 = 6 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3$$

*sustituyendo a x_2 en la función objetivo por este valor, se tiene:

*Sustituyendo en m

$$m = 2x_1 + 4\left(6 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3\right)$$

$$m = x_1 - x_3 + 24 \qquad (6.5.29)$$

La función objetivo ha quedado expresada en función de las variables básicas x_1 y x_3 y su valor para $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$ es $m = 24$.

*$m = f(\text{v.b.}, x_2 \text{ y } x_3)$
para $x_1 = x_3 = 0 \rightarrow m = 24$

A continuación hay que determinar qué pasa con la función objetivo si se aumenta x_1 ó x_3. Para incrementar m, y seguir satisfaciendo la condición de no negatividad de las variables debe mantenerse $x_3 = 0$, ya que dado el coeficiente negativo de x_3, si x_3 aumenta, m disminuye. Debe incrementarse a x_1. *Del sistema de ecuaciones de restricción para $x_3 = 0$, las variables no básicas en función de la variable base x_2, quedan expresadas en la siguiente forma:

*$m = x_1 - x_3 + 24$
Si $x_3 \uparrow$ m $\downarrow$

*Para $x_3 = 0$ las ecuaciones de restricción son:

$$x_2 = 6 - \frac{x_1}{4}$$

$$x_4 = 3 - \frac{3}{4}x_1 \qquad (6.5.30)$$

$$x_5 = 15 - \frac{11}{4}x_1$$

*Deben analizarse las ecuaciones (6.5.30) para determinar cuál es el máximo valor de x_1, para el cual todas las variables no básicas x_2, x_4 y x_5 sean mayores o iguales a cero. Se tiene

*Máximo valor de x_1 sin violar condiciones de no negatividad.

$$x_2 = 6 - \frac{x_1}{4} \qquad x_{1\,máx} = 24 \qquad x_2 = 0$$

$$x_4 = 3 - \frac{3}{4}x_1 \qquad x_{1\,máx} = 4 \qquad x_4 = 0$$

$$x_5 = 15 - \frac{11}{4}x_1 \qquad x_{1\,máx} = \frac{60}{11} \qquad x_5 = 0$$

*Se ve que el máximo valor posible de la variable x_1, sin que

*Máximo valor de posible de $x_1 = 4 \rightarrow x_4 = 0$

ninguna de las variables x_2, x_4 y x_5 se vuelvan negativas es 4, para lo cual $x_4 = 0$.

*Se finaliza este paso y se tiene que $x_3 = x_4 = 0$. Estas variables se toman como base para el siguiente paso.

*Nuevas v.b. $x_3 = x_4 = 0$

*Para $x_3 = x_4 = 0$, y $x_1 = 4$ el valor del resto de las variables es $x_2 = 5$ y $x_5 = 4$. Estos valores se obtienen del sistema de restricciones.

*Del sistema de restricciones: Si $x_3 = x_4 = 0$ y $x_1 = 4 \rightarrow x_2 = 5, x_5 = 4$

*El siguiente conjunto de valores de las variables constituye una nueva solución factible.

*Nueva solución factible.

$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 0, x_4 = 0$ y $x_5 = 4$

*Antes de continuar resulta ilustrativo interpretar gráficamente este segundo paso de solución. En este paso de solución se incrementa el valor de la variable básica x_1 de 0 a 4 *manteniendo a la otra variable básica $x_3 = 0$. Como x_3 es la variable de holgura de la 1er. ecuación de restricción $x_1 + 4x_2 \leq 24$ esta búsqueda de un mayor valor en la función objetivo se realiza a lo largo de la frontera AB de la zona de soluciones factibles tal como se ilustra en la figura 6.5.14.

*Interpretación gráfica de la 2da. iteración.
$x_1 \uparrow$ de 0 a 4

*v b. $x_3 = 0$ cst.

x_3 holgura de
$x_1 + 4x_2 \leq 24$

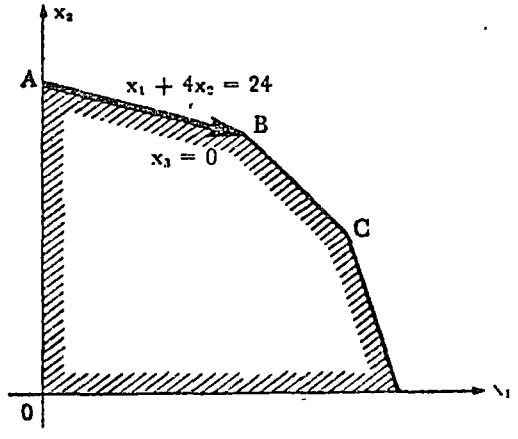


Fig. 6.5.14 Búsqueda del máximo de la función objetivo a lo largo de la recta AB. (2da. iteración).

*Para continuar debe volverse a manipular el sistema de ecuaciones (6.5.25) - (6.5.28), para dejar en cada ecuación una sola de las variables no básicas x_1, x_2 y x_3. Realizando operaciones algebraicas elementales sobre ese sistema similares a las descritas previamente se obtiene:

*En cada ecuación de restricción una sola v.n.b. (x_1, x_2, x_5).

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 &= 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 &= 4 \\ + \frac{2}{3}x_3 - \frac{11}{3}x_4 + x_5 &= 4 \end{aligned} \qquad (6.5.31)$$

y volviendo a expresar la función objetivo en relacion a las nuevas variables base x_3 y x_4 se tiene:

$$m = 28 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 \qquad (6.5.32)$$

*Como en el último paso x_3 y x_4 eran nulas, la única forma de elevarlas, satisfaciendo simultáneamente la condición de no negatividad de las variables es incrementándolas, pero esto disminuiría el valor de m. Por lo tanto, la solución factible que a su vez es óptima es precisamente la solución obtenida en el paso anterior a saber:

*No puede ↑ x_3 y x_4 porque m ↓

solución factible del paso anterior es óptima.

$$x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \text{ y } x_5 = 4$$

*Recuérdese el planteamiento del problema:

Maximizar la función objetivo.

*Problema

$$m = 2x_1 + 4x_2 \qquad (6.5.7)$$

*sujeto a las restricciones

restricciones

$$\text{(mecánicas)}\quad x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \qquad (6.5.8)$$

$$\text{(andenes)}\quad x_1 + x_2 + x_4 = 20 \qquad (6.5.9)$$

$$\text{(cargadores)}\quad 3x_1 + x_2 + x_5 = 21 \qquad (6.5.10)$$

donde se recordará que la primera restricción la imponía la disponibilidad de mecánicos, la segunda estaba relacionada con la existencia de andenes y la tercera con la disponibilidad de cargadores.

*Al operar 4 camionetas chicas y 5 grandes, como indica la solución de problema ($x_1 = 4$, $x_2 = 5$), la primer variable de holgura es nula ($x_3 = 0$), la segunda también es nula ($x_4 = 0$), y la tercera vale 4 ($x_5 = 4$). Este conjunto de valores de la variable de holgura significa que el primer recurso (mecánicos) se aproveche en su totalidad al igual que el segundo (andenes). Mientras que del tercer recurso se emplea la cantidad disponible menos la holgura, es decir

*$x_1 = 4 \equiv$ operar 4 camionetas chicas $x_2 = 5 \equiv$ operar 5 camionetas grandes $x_3 = 0 \equiv$ se emplean todos los mecánicos $x_4 = 0 \equiv$ se emplean todos los andenes $x_5 = 4 \equiv$ se emplean $21 - 4$ mecánicos.

$$21 - x_5 = 21 - 4 = 17$$

*Para resolver un problema de programación lineal empleando el método simplex es necesario realizar repetitivamente diversas operaciones, como se acaba de ilustrar. Es posible sistematizar el método solución expuesto empleando la notación matricial.

*Sistematización del método empleando matrices.

Se empieza por formar una tabla o matriz cuyas columnas menos la última tienen por valor los coeficientes de las variables en las ecuaciones de restricción y en la función objetivo. En esta última ecuación debe cambiarse el signo de los coeficientes. La última columna tiene por valor los recursos disponibles y un cero en la última posición. Los elementos del último renglón de esta tabla, exceptuando el último, se llaman *los indicadores* del problema. Como se señala a continuación, si después de realizar las operaciones que se indican posteriormente, todos los indicadores son positivos, la búsqueda del óptimo ha terminado. Con objeto de familiarizar al lector con el método se presentan las ecuaciones en forma explícita y en notación matricial, tal como aparecen a continuación:

Formulación explícita
1er. Etapa

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 21 \\ 2x_1 + 4x_2 &= m \end{aligned}$$

Formulación matricial

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b & \\ 1 & \textcircled{4} & 1 & 0 & 0 & 24 & 6 \leftarrow \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 21 & 21 \\ \hline -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] \qquad (6.5.32)$$

* *

indicadores
*variables base

*El problema se inicia buscando una solución factible.

En este caso puede ser

*1er. solución factible: $x_1 = x_2 = 0$ (v. b.)
$x_3 = 24$, $x_4 = x_5 = 21$ (v. n. b.)
$x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 24$, $x_4 = 9$ y $x_5 = 21$.

Posteriormente se señala cómo puede sistematizarse la búsqueda de la 1er. solución factible.

*En seguida debe seleccionarse la columna con el término más negativo en el último renglón o sea el correspondiente a la función objetivo, con objeto de determinar el incremento de cuál variable hace crecer más rápidamente a la función objetivo. En este primer paso la segunda columna, correspondiente a x_2 tiene

*Busque columnas con último elemento más negativo.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ \hline -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

esta propiedad, o sea más negativo el último renglón. *A continuación se dividen los elementos correspondientes a la disponibilidad de recursos, es decir, los elementos de la última columna, exceptuando el último, entre los correspondientes elementos de la columna seleccionada anteriormente, en este caso la segunda. El valor de estos cocientes se anota en una última columna y se selecciona el renglón con el valor menor de esta columna, en este caso el primero. En este ejemplo estos valores fueron 6, 9 y 21. Este problema se inicializó con $x_1 = x_2 = 0$.

*Divida última columna entre columnas seleccionada anteriormente

$$\left[\begin{array}{c|c} \textcircled{2} & \textcircled{6}\ \textcircled{6}\ \textcircled{2} \\ 4 & 24 \quad 6 \leftarrow \\ 1 & 9 \quad 9 \\ 1 & 21 \quad 21 \\ \hline -4 & \end{array}\right]$$

*Los incrementos en x_2 resultan aumentar más la función objetivo que los de x_1. La columna adicional indica que el máximo valor que puede darse a x_2 es de 6, sin hacer negauva alguna de las variables x_3, x_4 ó x_5.

*x_2 incrementa más rápidamente a m que x_1.

6 ←
6 máximo valor de x_2
que no viola $x_i \geq 0$, $\forall_i$

*Se ha encontrado hasta el momento que el primer renglón tiene el elemento más pequeño en la última columna y la segunda columna el más negativo en el último renglón. La intersección de este renglón (el primero) y esta columna, (la segunda) definen el elemento llamado pivote, en este caso 4.

elemento más pequeño

$$\left[\begin{array}{c|c} \textcircled{4}\ \text{Pivote} & 6 \leftarrow \\ 1 & 9 \\ 1 & 21 \\ \hline -4 & \end{array}\right]$$

elemento
más negativo

*Posteriormente se divide el renglón del pivote, en este caso el primero entre el pivote como se ilustra a continuación:

*División del renglón del pivote entre el pivote.

Formulación explícita

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6$$

Formulación matricial

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	4	1	0	0	24
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	6

Después se emplea esta última ecuación para eliminar la variable x_2 de las ecuaciones restantes del sistema. Como en la 2da. y 3er. ecuación x_2 tiene uno por coeficiente hasta restar el renglón o sea la ecuación del pivote de cada una de esas ecuaciones, se tiene:

Formulación explícita

2da. Esc.	$x_1 + x_2 + x_4 = 9$	
Ecs. del Pivote norm.	$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6$	
Resta	$\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 3$	
3er. Ecs.	$3x_1 + x_2 + x_5 = 21$	
Ecs. del Pivote norm.	$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6$	
Resta	$\frac{11}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5 = 15$	

Formulación matricial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2da. Esc.	1	1	0	1	0	9
Ecs. del Pivote norm.	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	6
Resta	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	3
3er. Ecs.	3	1	0	0	1	21
Ecs. del Pivote norm.	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	6
Resta	$\frac{11}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	15

Para eliminar a x_2 de la función objetivo, es necesario multiplicar la ecuación del pivote por —4 y restada de la función objetivo, ya que —4 es el coeficiente de x_2 en la función objetivo, tal como se ilustra:

Formulación explícita

Función objetivo	$-x_1 - 4x_2 = 0$	
Renglón del piv. norm. x (- 4)	$-x_1 - 4x_2 - x_3 = -24$	
Resta	$-x_1 + x_3 = 24$	

Formulación matricial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Función objetivo	—2	—4	0	0	0	0
Renglón del piv. norm. x (- 4)	—1	—4	—1	0	0	—24
Resta	—1	0	1	0	0	24

Después de realizadas las funciones anteriores x_2, x_4 y x_5, las variables no básicas, quedan multiplicadas por 1, tal como muestra el siguiente cuadro:

Formulación explícita

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6$$
$$\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 3$$
$$\frac{11}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5 = 15$$
$$-x_1 + x_3 = 24$$

Formulación matricial

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	6	24
$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	3	4 ←
$\frac{11}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	15	$\frac{60}{11}$
−1	0	1	0	0	24	
* ↑		*				

En este cuadro la columna con el elemento más negativo es la 1ra. y el cociente de la primera columna entre la de las restricciones es 24, 4, $\frac{60}{11}$, o sea los elementos de la columna auxiliar situada fuera de las llaves de la matriz. Como el elemento más pequeño es 4, el del segundo renglón, el pivote es el aumento de la 1ra. columna y del segundo renglón y se va a emplear para eliminar x_1 de las ecuaciones restantes. Se empieza dividiendo el renglón del pivote entre el pivote, tal como se ilustra, para obtener la *ecuación del pivote normalizada. (e.p.n)

*Ecuación del pivote normalizada: e.p.n.

Formulación explícita

			x_1
Ecs. del pivote	$\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 3$		$\frac{3}{4}$
Ecs. del piv. norm.	$x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 4$		1

Formulación matricial

x_2	x_3	x_4	x_5	
0	$-\frac{1}{4}$	1	0	3
0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4

Para eliminar x_1 de la primer ecuación es necesario restarle la ecuación del pivote multplicada por ¼ que es el coeficiente de x_1 en la 1er. ecs.

Formulación explícita

			x_1
1er. Ecs.	$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 6$		$\frac{1}{4}$
E.p.n $\times \left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{12}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 1$		$\frac{1}{4}$
Resta	$0 \quad x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 5$		0

Formulación matricial

x_2	x_3	x_4	x_5	
1	$\frac{1}{4}$	0	0	6
0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	1
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	5

Para eliminar x_1 de la 3er. ecuación hay que restarle la del pivote normalizada multiplicada por $^{11}/_{4}$.

	Formulación explícita	Formulación matricial					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3er. Ecs.	$\frac{11}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5 = 15$	$\frac{11}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	15
E.p.n x $\frac{11}{4}$	$x_1 - \frac{11}{12}x_3 + \frac{11}{3}x_4 = 11$	$\frac{11}{4}$	0	$-\frac{11}{12}$	$\frac{11}{3}$	0	11
Resta	$\frac{2}{3}x_3 - \frac{11}{3}x_4 + x_5 = 4$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{3}$	1	4

Y finalmente para eliminar x_1 de la función objetivo debe restársele la normalizada del pivote multiplicada por —1, coeficiente de x_1 en la función objetivo, tal como se muestra:

	Formulación explícita	Formulación matricial					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Func. obj.	$-x_1 + x_3 = 24$	—1	0	1	0	0	+ 24
E.p.n x (- 1)	$-x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 = -4$	—1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	— 4
Resta	$\frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 28$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	28

Una vez realizadas estas operaciones el cuadro queda como se muestra:

3er. Etapa.

Formulación explícita	Formulación matricial					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_1 = 5$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	5
$x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 4$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
$\frac{2}{3}x_3 - \frac{11}{3}x_4 + x_5 = 4$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{3}$	1	4
$\frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 28$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	(28) óptimo
	indicadores					

*Antes de continuar es necesario revisar el signo de los elementos del último renglón, exceptuando el último o sea el de los *indicadores*. Cuando todos son positivos se ha encontrado el óptimo.

*El valor del óptimo está dado por el último elemento del último renglón:

*Reviste indicadores, si todos ≥ 0 se ha encontrado el óptimo $\equiv$ último elemento de la tabla.

*Óptimo.

Como en esta etapa ya todos los indicadores son positivos, la búsqueda del óptimo ha terminado. El valor óptimo es 28. *Las variables con coeficiente diferente de cero en el último renglón valen cero, en este caso $x_3 = x_4 = 0$.

Del último sistema de ecuaciones:

*Ultimo renglón

$$0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad 0 \quad 28$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 5$$

$$x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 4$$

$$-\frac{2}{3}x_3 - \frac{11}{3}x_4 + x_5 = 4$$

para

$$x_3 = x_4 = 0$$

se obtiene:

$$x_2 = 5,\ x_1 = 4,\ x_5 = 4$$

*Es posible obtener el valor de los niveles de actividad en el punto óptimo a partir de la última tabla del método simplex.

*Obtención de los niveles óptimos de actividad a partir de la última tabla simplex.

*La llamada última tabla del método simplex tiene indicadores únicamente positivos.

*Indicadores de la última tabla:

$$0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad - \quad 0$$

$$\text{indicadores} \geq 0$$

Para obtener los niveles óptimos de actividad de la última tabla basta numerar los renglones de acuerdo con la posición donde se encuentra una columna unitaria, es decir, una columna con un solo uno y el resto ceros.

Para aclarar este paso nos referimos a la fig. 6.5.15 donde aparece la tabla terminal del ejemplo. El 1er. renglón tiene su 1er. columna unitaria en la segunda posición, por eso se le designa con 2, y el 2do. renglón tiene la 1er. columna unitaria en la primer posición. Se le designa con 1. Se continúa hasta terminar con todos los renglones menos el último. En el punto óptimo las variables *diferentes de cero* tienen por índice el número con el que se han designado los renglones y su valor está dado en la última columna. En este caso $x_2 = 5$, $x_1 = 4$ y $x_5 = 4$.

Columnas unitarias

designación de los renglones	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	5
1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
5	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{3}$	1	4
	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	28

Fig. 6.5.15 Tabla terminal del problema.

En la tabla 6.5.2 se resumen los diferentes pasos que se siguen en la solución de un problema de programación lineal mediante el método simplex. En las matrices de esta tabla la columna y el renglón marcados con una flecha definen la posición del pivote y las columnas marcadas con un asterisco (*) corresponden a las variables base, es decir, que se han tomado como nulas.

Tabla 6.5.2 Solución del ejemplo 6.5.2 por el método símplex

Solución analítica del problema de programación lineal

Problema

Función objetivo:

$$m = 2x_1 + 4x_2 \text{ (máx.)}$$

Restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad (a)\\ x_1 + x_2 &\leq 9 \quad (b)\\ 3x_1 + x_2 &\leq 21 \quad (c)\\ x_1 &\geq 0 \quad (d)\\ x_2 &\geq 0 \quad (e) \end{aligned}$$

Formulación explícita

1er. Etapa

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9\\ x_1 + x_2 + x_5 &= 21\\ +2x_1 + 4x_2 + 0 &= m \end{aligned}$$

Formulación matricial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	1	(4)	1	0	0	24	6 ←
	1	1	0	1	0	9	9
	3	1	0	0	1	21	21
	−2	−4				0	
	*	*					

↑

Variables base

$$x_1 = x_2 = 0 \ *$$

Solución factible

$$x_3 = 24 \quad x_4 = 9 \quad x_5 = 21$$

Incremento unitario en $x_1 \rightarrow$ Incremento en $m = 2$

Incremento unitario en $x_2 \rightarrow$ Incremento en $m = 4$

	x_3 max
$x_1 = 0$	
$x_3 = 24 - 4x_2 = 0$	6 ←
$x_4 = 9 - x_2 = 0$	9
$x_5 = 21 - x_2 = 0$	21
Con $x_2 = 6 \rightarrow x_3 = 0$	

Nuevas variables base
$x_1 = 0 \quad x_3 = 0$ *

2da. Etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= 6\\
\tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_3 + x_4 &= 3\\
\tfrac{11}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_3 + x_5 &= 15\\
x_2 - x_3 + 24 &= m
\end{aligned}$$

$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	6	24
$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	3	4 ←
$\frac{11}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	15	$\frac{60}{11}$
−1 *	0	1 *	0	0	+24	

Solución factible
$x_2 = 6, \; x_4 = 3, \; x_5 = 15$

Incremento unitario en $x_1 \rightarrow$ Incremento en $m = 1$
Incremento unitario en $x_3 \rightarrow$ Decremento en m

	x_1 max
$x_3 = 0$	
$x_2 = 6 - \frac{1}{4}x_1$	24
$x_4 = 3 - \frac{3}{4}x_1$	4 ←
$x_5 = 15 - \frac{11}{4}x_1$	$\frac{60}{11}$

Nuevas variables base
$x_3 = x_4 = 0$

3er. Etapa

$$\begin{aligned}
x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{3}x_4 &= 5\\
x_1 - \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{4}{3}x_4 &= 4\\
\tfrac{2}{3}x_3 - \tfrac{11}{3}x_4 + x_5 &= 4\\
-\tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{4}{3}x_4 + 28 &= m
\end{aligned}$$

0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	5
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{3}$	1	4
0	0	+ $\frac{2}{3}$	+ $\frac{4}{3}$	0	+28

Solución factible
$x_1 = 4, \; x_2 = 5$ y $x_5 = 4$

*Antes de continuar es necesario indicar cómo se obtiene la 1ra. solución factible en el problema de programación lineal.

Recuérdese que el problema de programación lineal tiene n incógnitas, los niveles de actividad y existen m ecuaciones de restricción. Si todas las ecuaciones de restricción son desigualdades de tipo "menor o igual a cero" se introducen m variables de holgura, y en el primer paso de solución, igualando a cero las variables del problema (niveles de actividad) las variables de holgura toman determinados valores, que forman una 1er. solución factible. En este caso se encuentra el problema del ejemplo anterior. cuyas restricciones eran:

*Obtención de la 1er. solución factible.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 24 \rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 &&= 24 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \rightarrow x_1 + x_2 + x_4 &&= 9 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 21 \rightarrow 3x_1 + x_2 + x_5 &&= 21 \end{aligned}$$

Niveles de actividad x_1, x_2
Variables de holgura x_3, x_4, x_5
1er. Solución factible
Niveles de actividad $x_1 = x_2 = 0$
Variables de holgura $x_3 = 24$; $x_4 = 9$ y $x_5 = 21$

En algunos casos algunas restricciones son mayores que cero o igualdades. *En este caso habrá menos de m variables de holgura y no se puede formar la 1er. solución factible igualando los niveles de actividad a cero, como se ilustra a continuación.

*Con restricciones de igualdad.

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\text{Max}: m = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_5 &\geq 6 \end{aligned}$$

*La introducción de dos variables de holgura, ya que sólo hay dos desigualdades convierte a las ecuaciones de restricción en:

* Con dos variables de holgura.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Si se da a los niveles de actividad x_1, x_2, x_3 el valor cero, como en el caso anterior, para inicializar el problema, se viola la segunda restricción, ya que

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \mid \neq 8 \quad | x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

De manera que no es posible obtener en esta forma la 1er. solución factible para iniciar la solución del problema de programación lineal; si se presenta un problema de este tipo es necesario incluir *variables artificiales* en el problema. Una por cada ecuación de restricción que sea una igualdad y una desigualdad del tipo "mayor o igual que cero". En el ejemplo es necesario introducir las variables artificiales x_6 y x_7 ya que hay una igualdad y una desigualdad del tipo "mayor o igual que cero" entre las restricciones. El sistema de ecuaciones de restricción, después de introducir estas variables queda:

*Variables artificiales.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + x_7 &= 6 \end{aligned}$$

En este caso asignando a las variables estructurales y a una de las de holgura el valor cero, se puede obtener la primer solución factible.

*En efecto con $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$, el resto de las variables asume el valor de $x_4 = 4$, $x_6 = 8$ y $x_7 = 12$.

*Con $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = 4$, $x_6 = 8$ y $x_7 = 12$.

*Las variables artificiales no deben aparecer en la solución final en la función objetivo. Para asegurarse de que esto no suceda, se deben incluir en la función objetivo con grandes coeficientes negativos en problemas de maximización. Estos grandes coeficientes negativos aseguran que las variables artificiales deben ser nulas para maximizar la función objetivo.

*Introducir en problemas de maximización las variables artificiales con grandes coeficientes negativos.

Antes de terminar con esta sección para estudiar el problema dual en la siguiente, es necesario enunciar un importante *teorema **de programación lineal y explicar por qué este método es un método de gradiente.

*Teorema.

Puede demostrarse **que en un problema de programación lineal con las restricciones definiendo una zona convexa, el punto óptimo (ya sea máximo o mínimo de la función objetivo) se encuentra siempre en la frontera de la zona convexa definida por las restricciones.

*Debido a este teorema la búsqueda del óptimo se realiza a lo largo de la frontera de la zona definida por las restricciones, como se ilustró en la solución gráfica y analítica del problema del ejemplo 6.5.2. En la figura 6.5.9 referente a este problema, se recuerda que el método simplex empezó por calcular el valor de la función objetivo en 0, después en A y finalmente en B. No fue, sin embargo, necesario evaluarla en todos los vértices del polígono OABCD. Faltaron los puntos C y D. El método permite ir buscando valores siempre crecientes (en un problema de maximización) de la función objetivo en los vértices del polígono. *Esta búsqueda se realiza siempre a lo largo de aquella arista donde el valor de la función objetivo crece (o decrece) con mayor rapidez. Por esta razón se trata de un método de gradiente. El método permite descubrir cuándo se ha encontrado el valor óptimo, sin necesidad de tener que evaluar en general la función objetivo en todos los vértices del polígono y tener finalmente que buscar el valor óptimo de la función objetivo entre estos valores.

*Búsqueda a lo largo de la frontera.

*Búsqueda en dirección de máxima variación de la función objetivo.

Un método de fuerza bruta para encontrar el óptimo consistiría en evaluar la función objetivo en todos los vértices y después buscar el máximo ó mínimo de ésta entre todos estos valores

** Ref 10 cap. 6.

El método simplex no solamente reduce el número de vértices donde hay que calcular la función objetivo, sino al ir de paso en paso incrementando (o descrementando) el valor de la función objetivo hace innecesaria la búsqueda final del óptimo. *En problemas con gran número de variables, el no tener que explorar todos los vértices y no tener que almacenar para una búsqueda final del óptimo el valor de las coordenadas de los vértices y de la función objetivo, ahorra mucho tiempo y requerimiento de memoria al procesarse digitalmente estos problemas. Desde luego que esta ventaja computacional tiene como precio las restricciones que impone al modelo matemático el problema, las de linealidad en sus ecuaciones y de convexidad y de la zona de soluciones factibles. Afortunadamente existen múltiples problemas, de gran interés para el analista de sistemas, en los que puede plantearse un modelo matemático con las restricciones anteriores.

*Se ahorra tiempo se computa y memoria.

6.5.5 Problema dual

*Se indicó en la sección 6.5.2 que el problema de programación lineal puede plantearse en forma matricial de la siguiente manera:

*Formulación matricial.

*Sujeto a las restricciones

$$\text{máx:} \quad m = \underline{c}^T \underline{x} \tag{6.5.21}$$

*restricciones

$$\underline{A}\,\underline{x} \leq \underline{b} \tag{6.5.22}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \tag{6.5.23}$$

donde $\underline{x}$ el vector de niveles de actividad, $\underline{b}$ el de restricciones y $\underline{c}$ el de costos. La matriz $\underline{A}$ tiene por elementos los coeficientes estructurales del problema.

La ilustración del problema dual puede realizarse con el ejemplo 6.5.2, sin embargo no se le empleará, con objeto de introducir otro tipo de problema.

Ejemplo 6.5.4.

*En un taller se cuenta con tres máquinas A, B, y C. Se emplean para fabricar dos productos 1 y 2. La tabla 6.5.3 muestra las horas de maquinado que requiere cada producto, las horas disponibles en cada tipo de máquina y la ganancia que se obtiene en la venta de cada producto.

*Las máquinas A, B y fabrican los productos 1 y 2.

Tabla 6.5.3 Datos para el ejemplo 6.5.4

Tipo de máquina	*Producto* 1	2	*Horas disponibles*
A	1	2	200
B	1	1	125
C	1	0	100
Beneficio	2	3	

*Se trata de planear la producción de manera que se obtenga la máxima ganancia posible. Plantee el modelo matemático para este problema.

*Planeación de la producción para maximización de la ganancia.

Solución

Sean x_1 y x_2 las cantidades del producto 1 y 2 fabricados.

*Cantidad fabricada x_1 y x_2.

*El objetivo será por lo tanto maximizar la ganancia, es decir

*Maximizar la ganancia

$$\text{máx: } m = 2x_1 + 3x_2$$

*Para producir x_1 unidades del producto 1 y x_2 del 2 se requieren las siguientes horas de la máquina A que están restringidas a 200:

*Carga de la máquina A

$$x_1 + 2x_2 \leq 200$$

*En forma similar las restricciones que provienen de la máquina B y C son:

*Carga de las máquinas B y C

$$x_1 + x_2 \leq 125$$

$$x_1 + \leq 100$$

Desde luego que no tiene significado físico producir unidades negativas, por lo tanto:

$$x_1\ x_2 \geq 0$$

*El planteamiento matricial del problema es:

*Maximizar

$$\text{máx: } m = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

*Sujeto a las restricciones:

*Restricciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 200 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

*A continuación se introduce el llamado problema dual o dual simplemente, del problema de programación lineal.

*Problema dual.

Si m es el número de restricciones y n el número de variables del problema, para definir el dual es necesario introducir un vector w de m componentes cuya interpretación se dará posteriormente. El dual del problema de programación lineal es otro problema cuya formulación matricial, comparada con la del último aparece en el siguiente cuadro:

*m restricciones
n variables
Introduzca vector $\underline{w}$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_m \end{bmatrix}$$

Problema original o primo

$$\text{máx: } m = \underline{c}^T \underline{x}$$

sujeto a las restricciones:

$$\underline{A}\,\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Problema dual

$$\text{mín: } n = \underline{b}^T \underline{w}$$

$$\underline{A}^T \underline{w} \geq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq 0$$

A continuación se ilustra el planteamiento del problema dual.

Ejemplo 6.5.5

Plantee el problema dual del ejemplo 6.5.4.

Solución:

La solución aparece en el siguiente cuadro:

Problema original o primo

$$\text{máx: } m = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 125 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq 0$$

Problema dual

$$\text{mín: } n = \begin{bmatrix} 200 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

El teorema más importante de la programación lineal establece la siguiente relación entre el problema original o primo y el problema dual:

Teorema: La función objetivo m de un problema de maximización de programación lineal asume su valor máximo si y solamente si la función objetivo n del problema dual correspondiente alcanza un mínimo y en este caso.

$$\text{máx: } m = \text{mín } n.$$

Además, si P y Q son soluciones factibles tales que en m(P) = n (Q), entonces las soluciones P y Q son los óptimos del problema primo y del problema dual respectivamente.

La demostración de este teorema aparece en la mayoría de los textos de programación lineal (ref. 4).

*Una primer aplicación de este teorema se encuentra en la solución de problemas de minimización.

*Aplicación del teorema dual a problemas de minimización.

Antes de una interpretación económica al problema dual se resolverá el problema de producción del ejemplo 6.5.4. Este ejemplo no sólo sirve como repaso del método simplex sino muestra cómo la tabla terminal de este problema permite resolver tanto el problema original como el dual.

Ejemplo 6.5.6

Empleando el método simplex resuelva el problema de producción del ejemplo 6.5.4.

Solución:

A continuación aparecen las diferentes tablas que se establecen hasta encontrar la solución con el pivote en cada ocasión encerrado en un círculo y las columnas de las variables base marcadas con un asterisco (*).

Tabla 6.5.3 Solución del ejemplo 6.5.6

	niveles de actividad		variables de holgura					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
	1	(2)	1	0	0	200	100 ⇐	
	1	1	0	1	0	125	125	
	1	0	0	0	1	100	∞	Punto O
	−2	−3	0	0	0	0		
	*	*						
	½	1	½	0	0	100	200	
	(½)	0	−½	1	0	25	50 ⇐	Punto A
	1	0	0	0	1	100	100	
	−½	0	3/2	0	0	300		
	*		*					
Variables con valor dado por la última columna	x_2	0	1	1	−1	0	75	
	x_1	1	0	−1	2	0	50	Punto B
	x_5	0	0	1	−2	1	50	
		0	0	1	1	0	325	
				indicadores				

Siguiendo las reglas expuestas, previamente se puede obtener de inmediato la solución del problema de la última tabla. A saber:

*El valor máximo de la función objetivo es precisamente 325; el valor de las variables es:

*Máximo 325.
$x_1 = 50$, $x_2 = 75$, $x_3 = x_4 = 0$ y $x_5 = 50$

Con objeto de aclarar el método también se incluye la solución gráfica en la figura 6.5.16.

A continuación se señala *cómo se obtiene la solución del problema dual de la tabla final del método simplex del problema original.

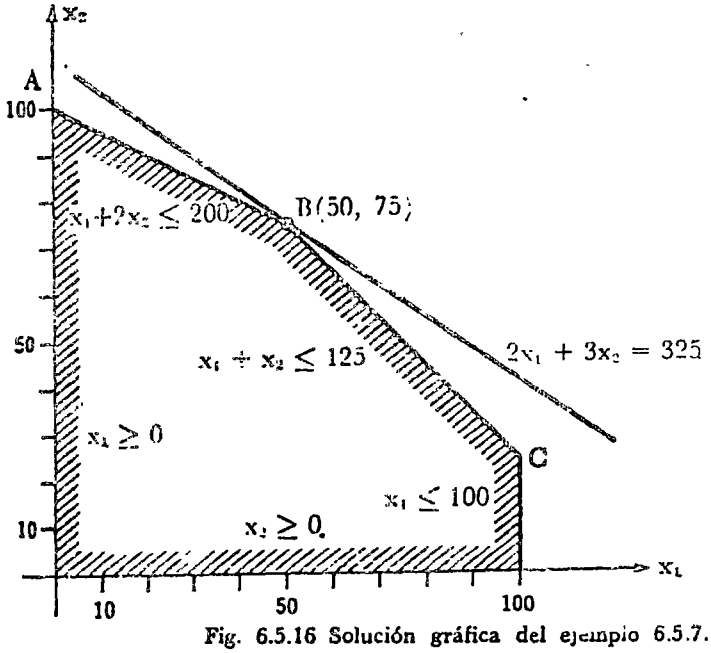
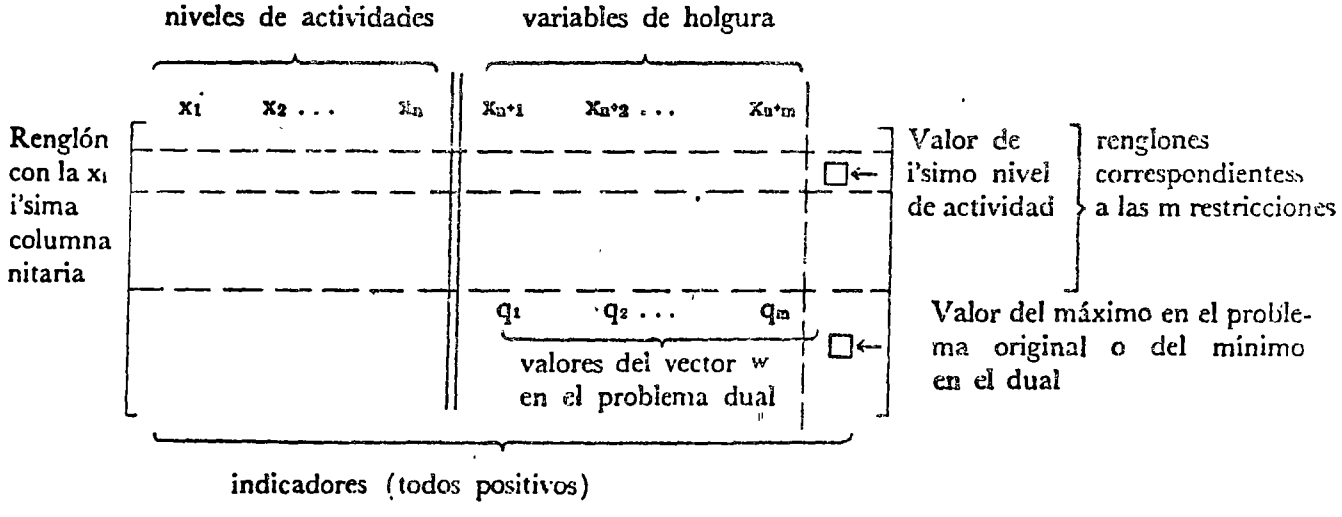


Fig. 6.5.16 Solución gráfica del ejemplo 6.5.7.

La tabla 6.5.4 muestra la tabla final del método simplex del problema original y cómo se obtienen de ella resultados del problema original y del dual.

Tabla 6.5.4 Tabla final del método simplex del problemas.



El siguiente ejemplo ilustra el empleo de la tabla 6.5.4 para resolver el problema original y su dual.

Ejemplo 6.5.7

Obtenga de la tabla final del método simplex la solución del problema original y del dual del ejemplo 6.5.4.

Solución:

A continuación aparece el planteamiento original del problema y el del dual.

Problema original

$$\text{máx: } m = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Problema dual

$$\text{mín: } n = \begin{bmatrix} 200 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Sujeto a las restricciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 200 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

De la tabla 6.5.3 se tiene:

$$\begin{array}{c|cccc|c} x_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 75 \\ x_1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 50 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 50 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 325 \end{array}$$

$$m\Big|_{\text{máx}} = 325 \qquad n\Big|_{\text{mín}} = 325$$

$$\underset{\text{máx}}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 75 \end{bmatrix} \qquad \underset{\text{mín}}{\underline{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*En efecto el valor mínimo de la función objetivo en el problema dual es:

*Valor mínimo de la función objetivo en el dual:

$$n = \begin{bmatrix} 200 \\ 125 \\ 100 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 325$$

*A continuación se dará una interpretación económica a la solución del problema dual. Recuérdese el planteamiento del problema original y del problema dual:

*Interpretación económica del problema dual.

Problema original

$$\text{máx: } m = \underline{c}^T \underline{x}$$

sujeto a las restriciones

$$A\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Problema dual

$$\text{mín: } n = \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \geq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

Para el problema de asignación de trabajo a las máquinas de una fábrica (ejemplo 6.5.4), el vector $\underline{x}$ representa la cantidad de artículos producidos y el vector $\underline{b}$ representa la disponibilidad de horas-máquina, y $\underline{c}$ el costo de los artículos producidos.

*$\underline{x}$ ≡ cantidad de artículos producidos.

*$\underline{b}$ ≡ disponibilidad de máquinas.

*$\underline{c}$ ≡ costo de los artículos.

*Del teorema de la dualidad se tiene:

*Teorema de la dualidad.

$$\underline{c}^T\underline{x} = \underline{b}^T\underline{w}$$

donde $\underline{c}^T\underline{x}$ es la cantidad a maximizar en el problema original y representa el beneficio total que se obtiene al producir $\underline{x}$ artículos.

*$\underline{c}^T\underline{x}$ ≡ beneficio total.

*La cantidad $\underline{b}^T\underline{w}$ es el producto de la disponibilidad de horas-máquina por un vector $\underline{w}$. La forma de esta ecuación hace pensar que $\underline{w}$ representa el costo de operar las máquinas por unidad de tiempo. Para el ejemplo que se discute:

*$\underline{w}$ ≡ costo de operación de las máquinas por unidad de tiempo

$$\underline{b}^T\underline{w} = \begin{bmatrix} 200, & 125, & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$= 200w_1 + 125w_2 + 100w_3$$

Si w_1, w_2 w_3 son los costos de operación por hora de las máquinas A, B, y C respectivamente, la suma anterior en efecto representa el costo total de operación. *Estos costos de operación, o sea las componentes del vector $\underline{w}$ reciben el nombre de *precios sombra.*

*$\underline{w}$ ≡ precios sombra.

Es necesario ahora interpretar la otra ecuación del problema dual:

$$\underline{A}^T\underline{w} \geq \underline{c}$$

*Recuérdese que la componente a_{ij} de la matriz A representa el número de horas de la máquina i que se requiere para producir una unidad del producto j. *En el producto $\underline{A}^T\underline{w}$ el primer renglón es:

*$A = [a_{ij}]$ a_{ij} ≡ horas de máquina i para producir una unidad del producto j.

*1er. renglón del $\underline{A}^T\underline{w}$

$$\underline{A}^T\underline{w}_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots$$

El término a_{11} w_1 representa el costo en la máquina 1 para producir una unidad del producto 1, a_{21} w_2 el costo de la máquina 2, para producir una unidad del producto 1. *Por lo tanto el producto representa el costo total de producción de una unidad de cada uno de los productos. Como *$\underline{c}$ es el costo de venta de una unidad de cada uno de los productos, la desigualdad *$\underline{A}^T\underline{w} \geq \underline{c}$ puede interpretarse de la siguiente manera: El costo de producción unitario $\underline{A}^T\underline{w}$ es por lo menos tan grande como el beneficio $\underline{c}$. Es posible extender esta interpretación del problema dual, para lo cual es necesario introducir teoremas que están fuera del alcance de esta obra**

*$\underline{A}^T\underline{w}$ ≡ costo total de producción por unidad de cada artículo.

*$\underline{c}$ ≡ costo de los artículos.

*$\underline{A}^T\underline{w} \geq \underline{c}$ → Costo de producción unitario no debe exceder beneficio.

Como con frecuencia es más fácil resolver el problema dual que el primo o viceversa, resulta conveniente conocer ambos métodos.

Con el siguiente comentario finalizará esta sección sobre programación lineal.

Si en el ejemplo 6.5.2 los datos fuesen diferentes, de manera que el sistema de ecuaciones del problema de programación lineal hubiese sido:

$$
\begin{aligned}
m = {} & x_1 + 2\,x_2 \\
x_1 + {} & 4\,x_2 \leq 12 \\
x_1 + {} & x_2 \leq 4.5 \\
3x_1 + {} & x_2 \leq 10.5
\end{aligned}
$$

*La solución óptima hubiese sido $x_1 = 2$, y $x_2 = 2.5$ como el lector podrá checar fácilmente (ver problema 6.8.11). La solución de este problema para ser relevante debe ser entera. Cuando como en este caso, la solución debe ser entera, puede recurrirse si las variables son suficientemente grandes y el resultado no es sensible a errores de aproximación a redondear el resultado a la cifra más próxima, ó puede recurrirse a la programación entera. (ref. 3)

*Solución óptima:
$x_1 = 2, x_2 = 2.5$

En la sección 6.8 el lector puede encontrar diversos problemas de programación lineal (problemas 6.8. 10-6.8.15) y en el apéndice A-17, encuentra un programa de computadora para resolver este tipo de modelos.

El problema del ejemplo 6.5.2 ha sido resuelto empleando el programa A.17.

Los datos de este problema aparecen en la tabla 6.5.5 y los resultados en la 6.5.6. En esta tabla las variables que no aparecen tienen un valor nulo.

Tabla 6.5.5 Datos para el programa A.17

EL ORDEN DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 3 X 5 LA MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA ES

1.00000E+00	4.00000E+00	1.00000E+00	0.	0.
1.00000E+00	1.00000E+00	0.	1.00000E+00	0.
3.00000E+00	1.00000E+00	0.	0.	1.00000E+00

EL VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES ES

2.40000E+01
9.00000E+00
2.10000E+01

**Ver capítulo 6 (ref. 10) y capítulos 3 y 4 (ref. 9)

LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION A OPTIMIZAR SON

2.00000E+00	4.00000E+00	0.	0.	0.

Tabla 6.5.6 Resultado del programa A.17.

***LOS VALORES QUE OPTIMIZAN LA FUNCION SON

INCOGNITA	VALOR
X2	5.00000000E+00
X1	4.00000000E+00
X5	4.00000000E+00

EL VALOR OPTIMO DE LA FUNCION ES 2.80000000E+01

6.6. PROGRAMACION DINAMICA

6.6.1 Características

En la sección 6.1.1 se señaló que los métodos de optimización pueden clasificarse en *métodos de gradiente y métodos de búsqueda.* *En la sección 6.5 se estudió el método de programación lineal que constituye un método de gradiente. En la siguiente sección se establecen las bases de la *programación dinámica,* un método de optimización de búsqueda. Este último método, todavía más que el de programación lineal requiere del uso de la computadora digital. *Como se trata de una técnica enumerativa, los tiempos de cómputo para este método son en general grandes, así como los requerimientos de memoria. Debido a ello el empleo de esta técnica es un cuanto limitado, a pesar de su extensivo número de aplicaciones potenciales.

*Métodos de optimización de gradiente y búsqueda.

* La programación dinámica es un método de búsqueda.

*Requiere mucho tiempo de cómputo y memoria.

*La programación dinámica es una técnica de optimización enumerativa aplicable a problemas con restricciones y funciones objetivo que pueden ser *no lineales* y regiones factibles *no convexas.*

*Puede aplicarse a problemas no lineales y regiones no convexas.

*Se aplica en forma natural a problemas que pueden descomponerse en etapas a lo largo del tiempo, pero también puede emplearse en problemas *no* secuenciales o con estructura en serie.

*El problema debe poder expresarse en forma secuencial.

En el análisis de sistemas, la programación dinámica se usa en general en problemas de toma de decisiones, frecuentemente relacionados con la asignación de recursos.

*Para resolver este tipo de problemas, se establece un modelo matemático cuyas principales componentes son:

*Modelo matemático.

1). Un estado inicial x que da toda la información relevante sobre el sistema antes de la toma de una decisión.

Como el problema de *decisiones* se presenta en aquellas situaciones, donde un problema tiene varias soluciones factibles o alternativas, con objeto de poder seleccionar entre éstas, es necesario asociar a todas las posibles soluciones una función de beneficio o ganancia, que mida la utilidad que se asocia a cada una de las posibles soluciones.

Está función o relación de transformación puede ser una relación matemática o puede estar dada en forma tabular.

Para representar estas componentes del modelo de toma de decisiones resulta útil introducir un diagrama de bloque (figura 6.6.1).

Como la función de transformación T es univaluada puede sustituirse (6.6.2) en (6.6.1) para obtener:

*Es decir, la función de beneficio r sólo depende de los estados iniciales y las variables de decisión.

Recordando que la función de transformacion es univaluada puede obtenerse la transformación inversa T', a saber

Sustituyendo este valor en (6.6.1) se llega a:

o bien

Un problema de toma de decisiones consiste en maximizar o minimizar la función de beneficio r, si las variables independien-

2). Un estado final, $\tilde{\underline{x}}$ que da toda la información relevante sobre el sistema después de haberse tomado la decisión.

3). La variable de decisión $\underline{D} = (d_1, d_2 \ldots, d_n)$ que puede manipularse para obtener determinado cambio del sistema de su estado inicial $\underline{x}$, a su estado final $\tilde{\underline{x}}$.

4). El beneficio r que es una función escalar que depende del valor de los estados iniciales, de las decisiones tomadas, y de los estados finales, es decir

$$r = r\ (\underline{x}, \underline{D}, \tilde{\underline{x}})$$

5). Una transformación T, univaluada que relaciona los estados finales, con los estados iniciales, y las variables de decisión.

$$\underline{x} = T\ (\underline{x}, \underline{D}) \qquad (6.6.2)$$

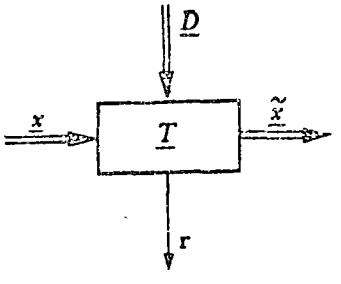


Fig. 6.6.1 Modelo de un problema de toma de decisión.

$$r = r\ (\underline{x}, \underline{D}, T\ (\underline{x}, D))$$

*Función de beneficio

$$r = r'\ (\underline{x}, \underline{D}) \qquad (6.6.3)$$

$$\underline{x} = T'\ (\underline{x}, \underline{D})$$

$$r = r\ (T''(\underline{x}, \underline{D}), D\ \underline{x})$$

$$r = r''\ (\underline{x}, \underline{D}) \qquad 6.6.4)$$

*Maximizar o minimizar el beneficio.

tes o de decisión toman todos los posibles valores, dentro de las restricciones que fija el problema.

Estos problemas de toma de decisiones son, por lo tanto, problemas de optimización entre los que podemos distinguir dos tipos:

El problema de optimización de estado inicial x consiste en encontrar el máximo (o mínimo) del beneficio como función del *estado inicial,* es decir:

En el problema de *estado final* x, debe determinarse el máximo (o mínimo) del beneficio como función del estado final, es decir:

Con objeto de facilitar la presentación del material subsecuente e ilustrar la naturaleza de estos problemas, conviene introducir algunos símbolos:

Usando estos símbolos el problema de valor inicial puede simbolizarse:

*Optimización de estado inicial $\underline{x}$

$$f(\underline{x}) = \max_{\underline{D}} r' (\underline{x}, \underline{D}) \qquad (6.6.5)$$

(6.6.5)

*Optimización de estado final $\underline{x}$

$$f(\underline{\bar{x}}) = \max_{\underline{D}} r'' (\underline{\bar{x}}, \underline{D}) \qquad (6.6.6)$$

*Símbolos empleados en programación dinámica.

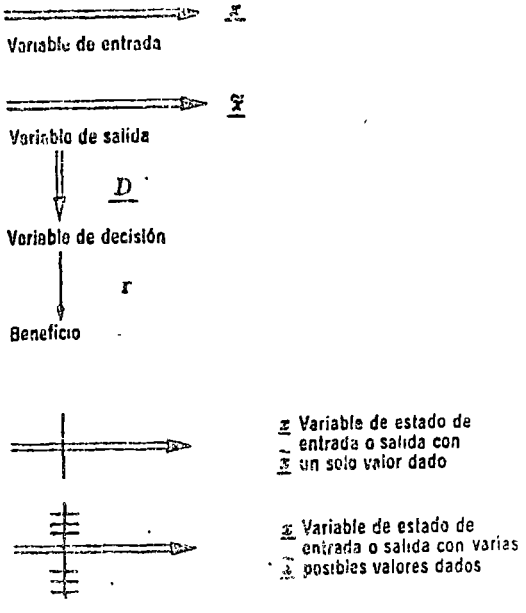
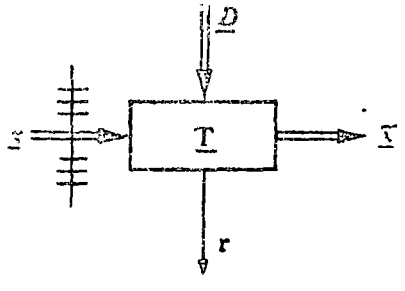


Fig. 6.6.2 Símbolos en problemas de programación dinámica.



$$f(\underline{x}) = \max_{\underline{D}} r\ (\underline{x}, \underline{D})$$

Fig. 6 6 3 Problema de valor inicial.

y el de valor final

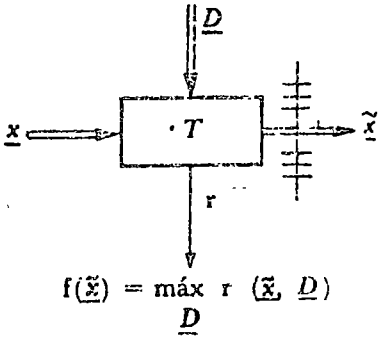


Fig. 6.6.4 Problema de valor final.

*Problemas de optimización como los planteados en las figuras (6.6.3) y (6.6.4) contienen muchas variables. La programación dinámica transforma un problema de esta naturaleza en una serie de problemas más sencillos, que contienen pocas variables.

*Programación dinámica:
Un problema con muchas variables. ⟹
Muchos problemas de pocas variables.

Esta transformación es invariante en el número de soluciones factibles del problema y se conserva el valor de la función beneficio asociada a cada una de las posibles soluciones.

*La programación dinámica se basa en el principio de optimalidad expuesto por R.D. Bellman: (ref. 2).

*Principio de optimalidad de Bellman.

"Una serie de decisiones óptimas (políticas óptimas) tiene la propiedad, de que cualquiera que sea el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben ser óptimas con respecto al estado que resulte de la primera decisión".

Un ejemplo adaptado de la ref. 8 servirá para aclarar este concepto, en que se basa la programación dinámica.

*Supóngase que se desea asignar recursos a tres proyectos industriales, A, B y C con el objeto de maximizar las ganancias, *sean R_A, B_B y R_C las cantidades que se asignan a los proyectos A, B y C respectivamente y sean *R_T los recursos totales disponibles que son limitados. Debido a ello, la cantidad que se asigna a cada proyecto, depende de la cantidad asignada a los dos restantes. La asignación a C no debe exceder $R_T - R_A - R_B$ *Sin embargo, cualquiera que haya sido la asignación a los proyectos A y B, la asignación R_C al proyecto C, debe ser óptima con respecto a todas las posibles cantidades residuales que pueden quedar para el proyecto C, después de asignar fondos a los proyectos A y B. *La asignación de fondos a los proyectos B y C debe ser óptima con respecto a la cantidad residual que queda después de asignar recursos a A, cualesquiera que haya sido esta asignación.

* Proyectos industriales A, B, C

*$R_{A,\ B,\ C}$ recursos para cada proyecto
R_T recursos totales disponibles.
*$R_A + R_B + R_C \leq R_T$

*La asignación a C debe ser óptima con respecto a $R_T - R_A - R_B$.

*La asignación a B y C debe ser óptima con respecto a $R_T - R_A$.

La asignación óptima al proyecto B, se encuentra maximizando el beneficio, que ocurre de la asignación al proyecto B, junto con el

beneficio óptimo del proyecto C, como función de los fondos que quedan de asignar recursos a B y A. La asignación óptima a A finalmente se encuentra para maximizar el beneficio de A más el beneficio óptimo de B y C, como función de los fondos que quedan después de asignar recursos a A.

Obsérvese que se ha descompuesto el problema, en una secuencia de toma de decisiones, asignando recursos a un solo proyecto a la vez.

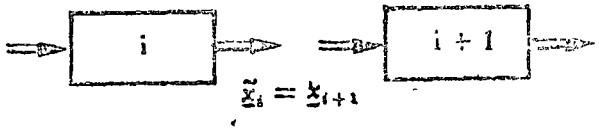
*Se asignan recursos a un proyecto a la vez.

En realidad la asignación de recursos es simultánea, pero la descomposición del problema, en una asignación secuencial o en serie de los recursos, permite tomar decisiones una a la vez.

El concepto de sistema secuencial o en serie es muy importante en este tipo de problemas y se discute con mayor detalle en la siguiente sección.

6.6.2 Estructuras serie

*En una estructura en serie, como se señaló en la sección 1.3.4, la salida de un elemento está conectada a la entrada del siguiente, sin haber realimentación, ésta, como se indicó en la sección 1.3.5, implica que la salida de un sistema influye sobre su entrada. La presencia de realimentación en un problema de programación dinámica puede resolverse sustituyendo la porción del sistema con realimentación por un subsistema equivalente no realimentado. Los ingenieros llaman a esta operación: sustituir el sistema realimentado por su función de transferencia.**



Conexión serie

*En un problema con estructura serie en el tiempo, que son los más frecuentes en el análisis de sistemas, las decisiones que se toman en un determinado instante de tiempo, no alteran los eventos anteriores, sólo tienen influencia sobre los eventos posteriores.

*En una estructura serie las decisiones no afectan eventos anteriores.

En la construcción de una casa, el levantamiento de muros, es posterior a la construcción de los cimientos pero anterior a la colocación de ventanas y puertas. Si durante la construcción de los muros, se cambia la posición y tamaño de los huecos para las puertas y las ventanas, este cambio, resultado de una decisión, no afecta a la etapa anterior, o sea la construcción de los cimientos, pero sí influye sobre la etapa posterior, la de colocación de puertas y ventanas.

**Gerez Greiser V. y Murray-Lasso, M. A. Teoría de Sistemas y Circuitos I, Cap. 8.
Servicios y Representaciones de Ingeniería, S. A.
México, D. F., 1972.

Esquemáticamente un problema con estructura en serie, puede representarse usando los diagramas de bloque de la sección 1.3.4, de la forma mostrada en la figura 6.6.5.

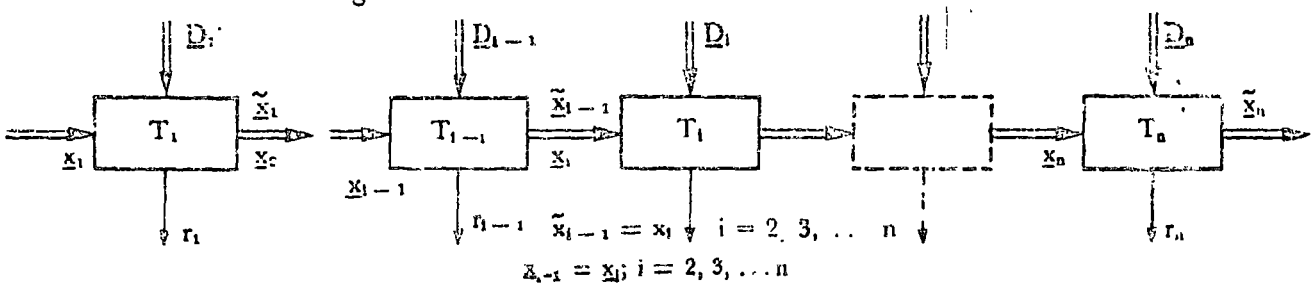


Fig. 6.6.5 Estructura en serie.

A continuación se hace una presentación formal del principio de optimalidad y se deduce la fórmula recursiva para resolver este tipo de problemas.

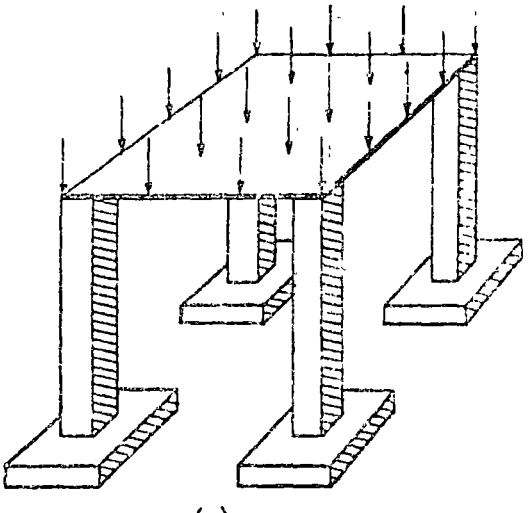
6.6.3 Principio de optimalidad

*Se señaló en la sección anterior que el objetivo de la descomposición del problema de optimización en una serie de problemas secuenciales, es reducir el número de variables que se manipulan en cada etapa, trabajando, de preferencia, con una variable de estado y una variable de decisión. Por esta razón en los desarrollos subsecuentes se emplean los símbolos que corresponden a cantidades escalares, como por ejemplo x, y no los correspondientes a vectores como $\underline{x}$, tampoco se seguirá empleando el trazo doble para representar las variables en los diagramas de bloque.

*Trabajar de preferencia con una variable de estado y una de decisión.

A continuación aplicaremos el principio de optimalidad a un problema de valor inicial adaptado de la ref. (1)

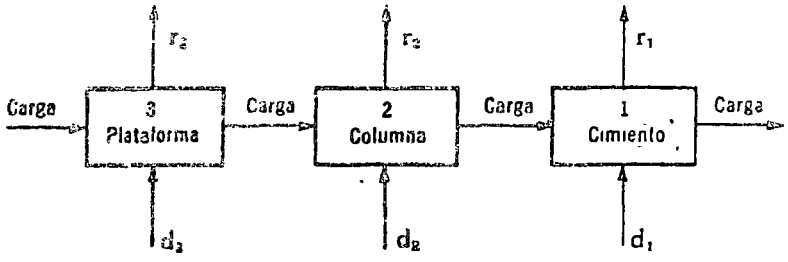
La figura 6.6.6a muestra una plataforma que debe soportar una carga dada de ωkg/m². El objetivo del problema es diseñar una plataforma, las columnas de soporte y los cimientos necesarios para soportar el peso minimizando el costo de la obra. Para aplicar la técnica de la programación dinámica a este problema, conviene descomponerlo en una serie de problemas más fáciles de optimizar.



(a)

Plataforma para soportar ω Kg/m²

La solución de este problema puede esquematizarse como muestra la fig. 6.6.6 b



(b)

Estructura secuencial para la solución del problema de diseño de una plataforma de carga

Fig. 6.6.6 Ejemplo de aplicación del método de programación dinámica

Supóngase que se empieza analizando las columnas; si se encuentra que la solución más económica son las columnas de concreto, esta solución implica mayor peso sobre los cimientos que el producido por las columnas de hierro. Esta solución afecta el beneficio (costo) de todas las etapas subsecuentes (En este caso los cimientos). Por lo tanto no puede empezarse analizando las columnas.

*Resulta evidente que la estrategia adecuada de solución consiste en empezar analizando aquella parte del proyecto, que no influye sobre los restantes, en este caso los cimientos. Al igual que en la asignación de recursos a tres proyectos industriales en la sección 6.6.1, posteriormente pueden agruparse las dos últimas etapas, columnas y cimientos, para suboptimizarse posteriormente, sin afectar a ninguna otra etapa.

*Empiece por aquellas partes que no afectan otras etapas.

Como se ve, el proceso de optimización se realiza en orden inverso, primero se estudian los cimientos, después los cimientos en combinación con las columnas y finalmente todo el proyecto. Conviene por lo tanto numerar los pasos de solución en este orden, tal como aparece en la fig. 6.6.6 o en general como se muestra en la figura 6.6.7.

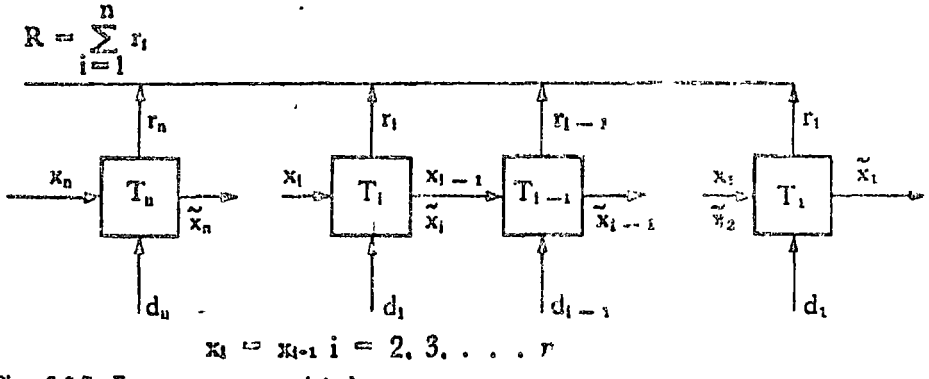


Fig. 6.6.7 Estructura secuencial de n pasos.

*Recuérdese que el beneficio en un problema de valor inicial puede expresarse como función del estado inicial x_1 y de la variable de decisión d_i (ecs. 6.6.4)

*Beneficio de la etapa i'sima:

$$r_i = r_i\,(x_i,\, d_i) \qquad (6.6.7)$$

*Si la función beneficio R para todo el problema, es la suma de los beneficios de cada una de las etapas, se tiene:

*Para beneficios aditivos:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i\,(x_i,\, d_i) \qquad (6.6.8)$$

*recordando la estructura serie del problema que implica

*Como la estructura es serie

$$x_i = x_{i-1} \quad i = 2,3,\ldots,n \qquad (6.6.9)$$

*y la relación entre la variable de entrada x_i, la de salida x_1 y la de decisión d_i

*relación entrada -- salida

$$x_i = T_i\,(x_i,\, d_i) \qquad (6.6.2)$$

*se obtiene para la primera etapa de la serie

*1ra. etapa

$$r_1 = r_1\,(x_1,\, d_1)$$

Por ser la entrada al primero x_1, igual a la salida del segundo $\tilde{x}_2$, se tiene:

$$x_1 = \tilde{x}_2$$

$$r_1 = r_1\,(\tilde{x}_2,\, d_1)$$

pero

$$\tilde{x}_2 = T_2\,(x_2,\, d_2)$$

sustituyendo esta relación en la anterior

$$r_1 = r_1\,(T_2\,(x_2,\, d_2,\, d_1) \qquad (6.6.10)$$

y como

$$x_2 = \tilde{x}_3$$

y

$$\tilde{x}_3 = T_3\,(x_3,\, d_3)$$

se tiene al sustituir en (6.6.10)

$$r_1 = r_1\,(T_2\,(T_3\,(x_3,\, d_3),\, d_2),\, d_1)$$

Siguiendo con esta sustitución se obtiene:

$$r_1 = r_1\,[T_2\,(T_3\,[T_4 \ldots \{T_n\,(x_n,\, d_n),\, d_{n-1}\}, \ldots]\, d_2)\, d_1] \qquad 6.6.11)$$

*Obsérvese que esta relación indica que el beneficio r_1 asociado a la etapa 1 es función solamente de la variable de estado inicial y de todas las variables de decisión. Una conclusión idéntica se puede obtener para todas las etapas subsecuentes, por lo tanto el beneficio total del proyecto es función exclusiva del estado inicial y de todas las variables de decisión, es decir,

*El beneficio total depende del estado inicial y de las variables de decisión.

$$R = R(x_n,\, d_1,\, d_2, \ldots,\, d_n) \qquad (6.6.12)$$

*El problema de optimización consiste en encontrar los valores de las variables de decisión d_1, d_2, ... d_n que para un valor dado x_n del estado inicial maximicen o minimicen la función de beneficio R de todo el proyecto.

*Encuentre $d_1, d_2, \ldots, d_n$ que optimice el beneficio total R, dado el estado inicial x_n.

Analícese ahora el problema empezando con la 1ra. etapa.

Para esta etapa, sea f_1 el máximo (o mínimo) de la función beneficio.

*Para cada valor posible de x_1, la función beneficio tiene un valor óptimo, que se encuentra optimizando esta función con relación a la variable de decisión d_1, es decir

*Beneficio óptimo $f_1(x_1)$ para cada valor de x_1

$$f_1(x_1) = \max_{d_1} r_1(x_1, d_1) \qquad (6.6.13)$$

*Si se considera a continuación la segunda etapa su beneficio será:

*Para la 2da. etapa.

$$r_1(x_1, d_1) + r_2(x_2, d_2)$$

*y el óptimo será:

*Valor óptimo

$$\max_{d_1, d_2} \{(r_1, d_1) + r_2(x_2, d_2)\}$$

*El beneficio óptimo de la primera etapa ya ha sido calculado en (6.6.13) y por lo tanto se tiene como beneficio óptimo de la primera y segunda etapas combinadas, por el principio de optimalidad.

*Beneficio para la 1ra. y 2da. etapas.

$$\max_{d_2} \{r_2(d_2, x_2) + f_1(x_1)\} \qquad (6.6.14)$$

*Nótese que en esta segunda etapa ya solamente es necesario buscar el óptimo con respecto a d_2.

*Sólo se busca el óptimo respecto a d_2.

*Por la conexión serie entre etapas se tiene

*Conexión serie

$$x_1 = \tilde{x}_2$$

y por la transformacion que ejerce la segunda etapa

$$\tilde{x}_2 = T_2(x_2, d_2)$$

Sustituyendo en (6.6.14)

$$\max_{d_2} \{r_2(d_2, x_2) + f_1(T_2(x_2, d_2))\}$$

*El beneficio óptimo de la primera y segunda etapas combinadas es por tanto:

*Beneficio óptimo de la 1ra. y 2da. etapas.

$$f_2(x_2) = \max_{d_2} \{r_2(x_2, d_2) + f_1(T_2(x_2, d_2))\}$$

*Procediendo con este razonamiento se llega a la n'sima y última etapa y se obtiene una relación similar para el beneficio óptimo.

*Para la última etapa.

$$f_n(x_n) = \max_{d_n} \{r_n(x_n, d_n) + f_{n-1}(T_n(x_n) d_n))\} \qquad (6.6.15)$$

*Toda esta deducción puede por lo tanto resumirse en las siguientes ecuaciones de recursión para el problema de programación dinámica:

*Fórmula de recursión.

$$f_i(x_i) = \max_{d_i} Q_i(x_i, d_i) \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$Q_i(x_i, d_i) = r_i(x_i, d_i) \qquad i = 1 \qquad (6.6.16)$$

$$Q_i(x_i, d_i) = r_i(x_i, d_i) + f_{i-1}(T_i(x_i, d_i)$$

$$i = 2, 3, \ldots n$$

El problema siguiente ilustra el empleo de la programación dinámica.

Ejemplo 6.6.1.

*Supóngase que se desea maximizar el beneficio que se obtiene de un programa de desarrollo industrial.

*Maximización del beneficio.

*El proyecto prevé la instalación de un máximo de tres industrias diferentes. El beneficio que se obtiene de cada industria depende del nivel de inversión en las mismas. *Sea x_i el nivel de inversión en la i'sima industria, y $g_i(x_i)$ el beneficio que se obtiene de la misma, si el nivel de inversión en ella es de x_i. Además se cuenta con un capital máximo de 3 billones de pesos para el Programa. Debido a la naturaleza de cada proyecto de inversión, los niveles de inversión sólo pueden ser múltiplos enteros de 1 billón de pesos. La figura 6.6.8 y la tabla 6.6.1 muestran el beneficio que se obtiene de cada proyecto de acuerdo con el nivel de inversión.

*Tres unidades industriales.

*x_i nivel de inversión en industria i'sima y $g_i(x_i)$ su beneficio.

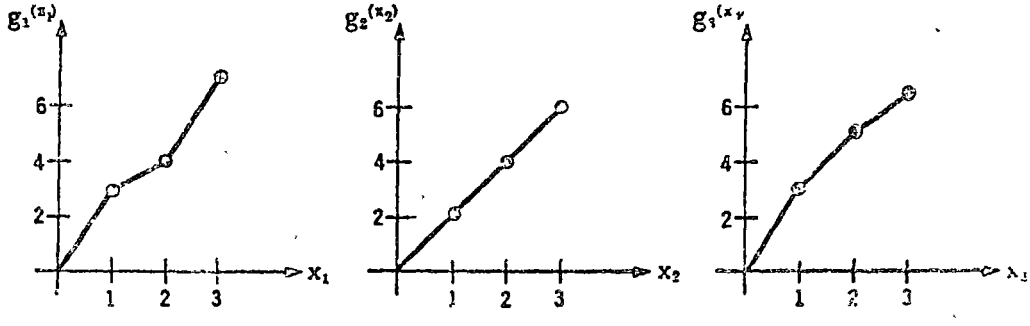


Fig. 6.6.8 Funciones de beneficio del ejemplo 6.6.1.

Tabla 6.6.1 Beneficio de los proyectos del ejemplo 6.6.1.

Función de beneficio	Industria i		
	1	2	3
$g_i(0)$	0	0	0
$g_i(1)$	3	2	3
$g_i(2)$	4	4	5
$g_i(3)$	7	6	6

Solución.

*Debido a la naturaleza del proyecto, la función objetivo o beneficio total que se obtiene de este proyecto es de carácter aditivo, es decir:

*Función de beneficio total aditiva.

$$R = \sum_{i=1}^{3} g_i(di)$$

*Además, se tiene la restricción en los fondos de:

*Restricción de fondos

$$3 \geq x_1 + x_2 + x_3$$

*Como el orden de asignación de recursos en este caso es irrelevante puede establecerse cualquier secuencia en la serie. Si empleamos la del enunciado se tiene el diagrama de bloque de la figura 6.6.9

*La secuencia de asignación es irrelevante.

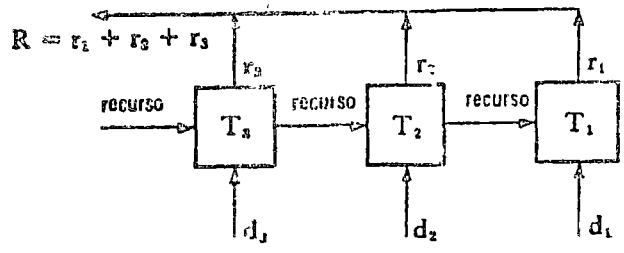


Fig. 6.6.9 Diagrama de bloque del ejemplo 6.6.1.

Como variable de entrada a cada proyecto puede considerarse el recurso que queda por asignársele, después de asignados recursos a los anteriores, y como salida lo que queda por asignar, una vez asignados fondos al mismo. La entrada, al tercero es fijo e igual a 3. Si se toma la decisión de asignar dos billones de pesos a este proyecto, es decir, $d_3 = 2$, la salida del tercer bloque x_3 será 1, y el beneficio r_3 de acuerdo con la tabla 6.6.1 serie de 4 tal como lo ilustra la figura 6.6.10

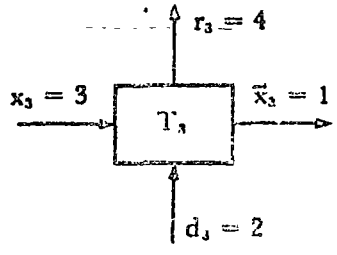
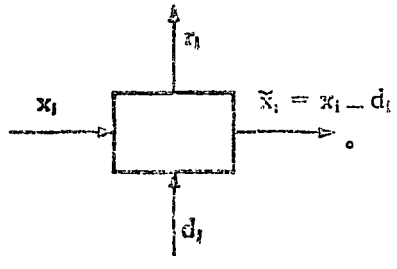


Fig. 6.6.10 Ejemplo de asignación de recursos al proyecto 3

En este ejemplo, la transformación tiene esta forma simple $\bar{x}_i = x_i - d_i$ y las asignaciones de recursos están sometidas a la limitación



$$+ d_1 + d_2 + d_3 \leq 3$$

Como la variable que entra a cada bloque es el recurso disponible, se debe tener además que

$$x_i - d_i \geq 0 \quad \text{ó} \quad x_i \geq d_i$$

es decir, no se puede gastar en un proyecto más de los recursos disponibles.

*La función de beneficio $r_i(x_i, d_i)$ en este caso solamente depende de la decisión que se tome, es decir:

*Función de beneficio

$$r_i(x_i, d_i) = g_i(d_i).$$

*La fórmula de recursión para la solución del problema es

*Fórmula de recursión

$$Q_i(x_i, d_i) = r_i(x_i, d_i) + f_{i-1}(T_i(x_i, d_i)) \quad (6.6.17)$$

En este caso la transformación es:

$$T_i(x_i, d_i) = x_i - d_i$$

Sustituyendo en la relación (6.6.17) se obtiene

$$Q_i(x_i, d_i) = g_i(d_i) + f_{i-1}(x_i - d_i) \quad (6.6.18)$$

*Recordando que para i = 1 la función óptima de beneficio es:

*Para el 1er. proyecto.

$$f_1(x_1) = \max_{d_1} g_1(d_1)$$

Con la importante restricción señalada de que

$$x_1 \geq d_1$$

Puede establecerse por lo tanto la tabla 6.6.2 para el cálculo de la función de beneficio óptima del 1er. proyecto.

Tabla 6.6.2 Asignación de recursos a la etapa 1.

Valor de x_1	Posibles valores de d_1 $d_1 \leq x_1$	Beneficio $g_1(d_1)$	Beneficio óptimo $f_1(x_1)$	Valor de d_1* que produce el óp.
0	0	0	0	0
1	0 1	0 3	3	1
2	0 1 2	0 3 4	4	2
3	0 1 2 3	0 3 4 7	7	3

*Para la segunda etapa la fórmula de recursión establece:

*para la 2da. etapa

$$f_2(x_2) = \max_{d_2} \{g_2(d_2) + f_1(x_2 - d_2)\}$$

Este máximo también tiene que encontrarse para todos los valores posibles de x_2. La tabla 6.6.3 ilustra cómo se obtiene esta serie de máximos para los diversos valores de x_2. *Nótese además que tanto en la tabla anterior como en ésta, se anotan los valores de las variables de decisión que llevan al beneficio óptimo.

*Anote el valor de las variables de decisión "óptimas".

Finalmente para la etapa 3 se tiene $$f_3(x_3) = \max_{d_3} \{g_3(d_3) + f_2(x_3 - d_3)\}$$

En la tabla 6.6.4 se resumen los valores de esta etapa.

Tabla 6.6.3 Asignación de recursos a la etapa 2.

Valor de x_2	Posibles Vals. de d_2 $d_2 \leq x_2$	Beneficio de la etapa $g_2(d_2)$	Diferencia $x_2 - d_2$	Beneficio ópt. de la etps. ants. $f_1(x_2 - d_2)$ (Tabla 6.6.2)	Valor d_1^* que prod. $f_1(x_2 - d_2)$	Beneficio acumulado $Q_2(x_2, d_2)$	Beneficio óptimo $f_2(x_2)$	Val. de var. de decs. que prod. el ópt. d_1^*	Val. de var. de decs. que prod. el ópt. d_2^*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	3	1	3	3	1	0
	1	2	0	0	0	2			
2	0	0	2	4	2	4	5	1	1
	1	2	1	3	1	5			
	2	4	0	0	0	4			
3	0	0	3	7	3	7	7		
	1	2	2	4	2	6		3	0
	2	4	1	3	1	7		1	2
	3	6	0	0	0	6			

Tabla 6.6.4 Asignación de recursos a la etapa 3.

Valor de x_3	Posibles valores de d_3 $d_3 \leq x_3$	Beneficio de la etapa $g_3(d_3)$	Diferencia $x_3 - d_3$	Beneficio opt. de las ets. ants. $f_2(x_3 - d_3)$ (Tabla 6.6.3)	Valores d_1^* y d_2^* que prod. $f_2(x_3 - d_3)$		Beneficio acumulado $Q_3(x_3, d_3)$	Beneficio óptimo $f_3(x_3)$	Valores variables d_1^*, d_2^* y d_3^* que prod. el beneficio óptimo		
					d_1^*	d_2^*			d_1^*	d_2^*	d_3^*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	3	1	0	3	3	0	0	0
	1	3	0	0	0	0	3		0	0	1
2	0	0	2	5	1	1	5	6	1	0	1
	1	3	1	3	1	0	6				
	2	5	0	0	0	0	5				
3	0	0	3	7	1 3	0 2	7	8	1	1	1
	1	3	2	5	1	1	8				
	2	5	1	3	1	0	8		1	0	2
	3	6	0	0	0	0	6				

*Esta última tabla 6.6.4 permite concluir que el beneficio óptimo que se obtiene dentro de los límites de los recursos disponibles $x_3 \leq 3$ es de 8. El beneficio de 8 se obtiene asignando recursos de las dos maneras que muestra la figura 6.6.11.

*Beneficio óptimo.

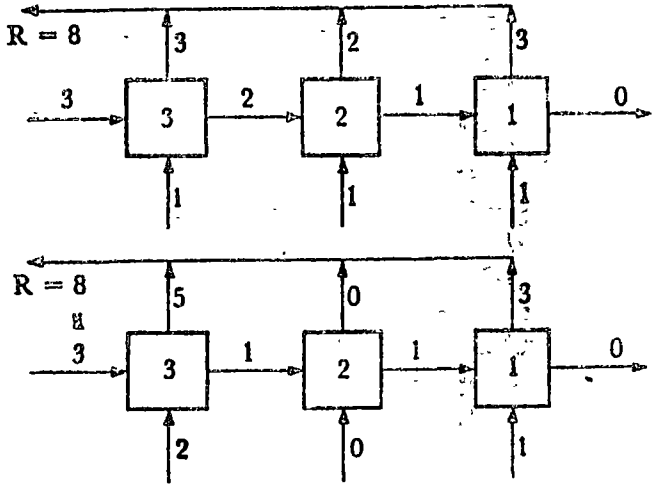


Fig. 6.6.11 Asignación óptima de recursos al proyecto del ejemplo 6.6.1

Obsérvese que en este caso existen dos estrategias de asignación de recursos que llevan al mismo beneficio de 8, dentro de la limitación $x_3 \leq 3$ ó $d_1 + d_2 + d_3 \leq 3$. La tabla 6.6.5 resume los resultados de este problema.

Tabla 6.6.5 Estrategias óptimas de inversión en el proyecto del ejemplo 6.6.1.

Proyecto	Asignación de recursos	Beneficio
1	3	3
	1	3
2	1	2
	0	0
3	1	3
	2	5
	Beneficio total	

*El principio de optimalidad reduce el número de alternativas a explorar.

*Para aclarar la razón por la cual la programación dinámica es una técnica enumerativa y por la cual el principio de optimalidad reduce el número de alternativas entre las que hay que buscar el máximo, se procede a continuación a ilustrar la solución de este problema empleando árboles de decisiones, como los empleados en la sección 1.3.9.

Empezando asignando recursos al proyecto 1, se tienen las alter-

nativ. .nostradas en la figura 6.6.12. La cantidad dentro de los nodos indica el beneficio que se ha obtenido siguiendo las asignaciones de recursos asociadas a los segmentos de recta del nodo en cuestión hasta el origen del diagrama. El símbolo $g_i(d_i)$ representa el beneficio que se obtiene al asignar d_i recursos al proyecto i

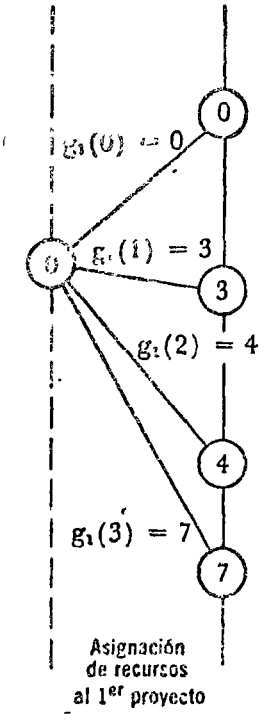


Fig. 6.6.12 Arbol de combinaciones para la asignación de 3 unidades al 1er. proyecto del ejemplo 6.6.1.

La asignación de recursos al segundo proyecto, depende de la que ya se asignó al primero. Si por ejemplo al 1er. proyecto se le asigna 1 unidad y se obtiene un beneficio de 3, al segundo proyecto solamente pueden asignársele 0, 1 ó 2 unidades sin excederse de los recursos totales de 3. Los beneficios totales que se obtienen después de estas posibles asignaciones al segundo proyecto aparecen en la figura 6.6.13

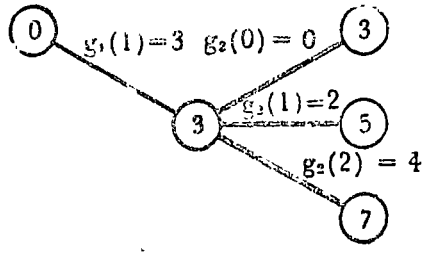


Fig. 6.6.13 Arbol con algunas posibles asignaciones de recursos al 2do. proyecto.

Siguiendo con el método expuesto, se puede construir el árbol de asignación de recursos para todo el proyecto. Este árbol se muestra en la figura 6.6.14.

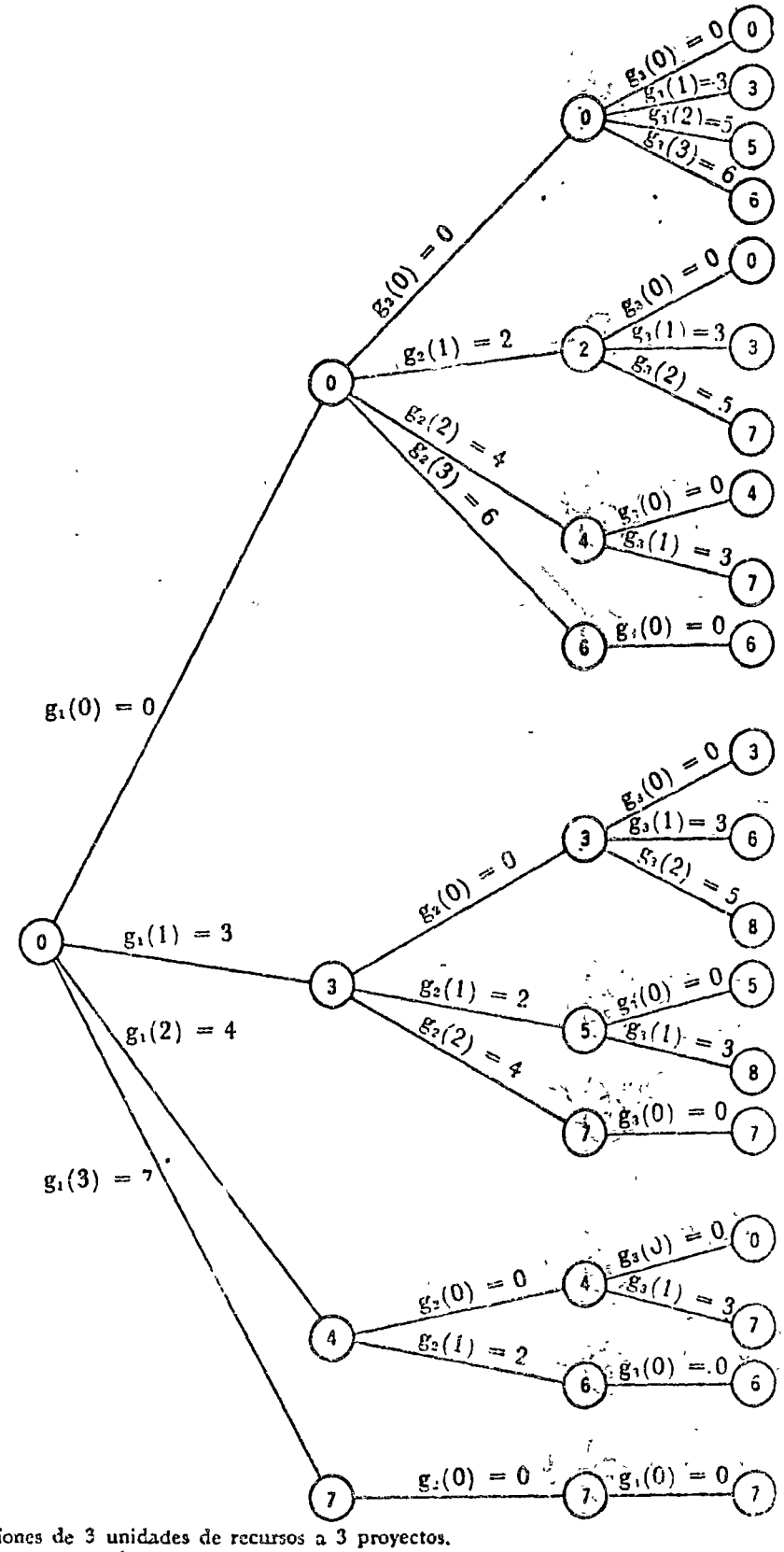


Fig. 6.6 14 Arbol de todas las posibles combinaciones de 3 unidades de recursos a 3 proyectos.

Este árbol muestra de inmediato las dos estrategias óptimas que aparecen en la figura 6.6.15

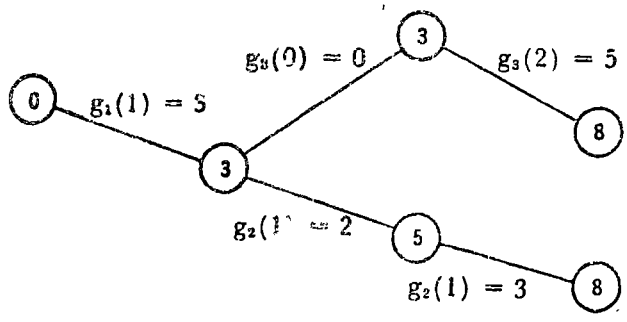


Fig. 6.6.15 Asignación óptima de recursos al proyecto del ejemplo 6.6.1.

El árbol de decisiones de la figura 6.6.14 enumera todas las posibles alternativas del proyecto, y constituye un método de fuerza bruta. *A continuación se señala cómo la programación dinámica refina este método reduciendo el número de alternativas entre las que se tiene que buscar el máximo.

*La programación dinámica reduce las alternativas entre las que se busca el óptimo.

*Recuérdese que el prrceso empieza en la primera etapa señalando que la función de beneficio es:

*Función de beneficio para la 1ra. etapa:

$$f_1(x_1) = \max_{d_1} g_1(d_1)$$

*y para la segunda etapa se tiene:

*Para la 2da. etapa

$$f_2(x_2) = \max_{d_2} \{(g_2(d_2) + f_1(x_2 - d_2)\}$$

Esta fórmula indica que no es necesario buscar el óptimo beneficio que se obtiene al asignar recursos a los proyectos 1 y 2 buscando entre todos los posibles valores de los beneficios de las etapas 1 y 2, sino solamente entre las posibles combinaciones de beneficios de dos con beneficios óptimos de la primera etapa.

Finalmente para la última etapa se tiene:

$$f_3(x_3) = \max_{d_3} \{(g_3(d_3) + f_2(x_3 - d_3)\}$$

*Igualmente el beneficio óptimo no se busca entre las posibles combinaciones de beneficios de la primera, segunda y tercera etapas, sino simplemente entre las combinaciones de beneficios de la última etapa y del óptimo de las dos anteriores. Esta estrategia de búsqueda, resultado del principio de optimalidad, reduce el número de alternativas entre las que hay que buscar el óptimo. Las figuras 6.6.16 *a, b, c,* ilustran cómo se eliminan alternativas de acuerdo con la descripción anterior.

*Se busca entre los beneficios de una etapa y el óptimo de la combinación de las anteriores.

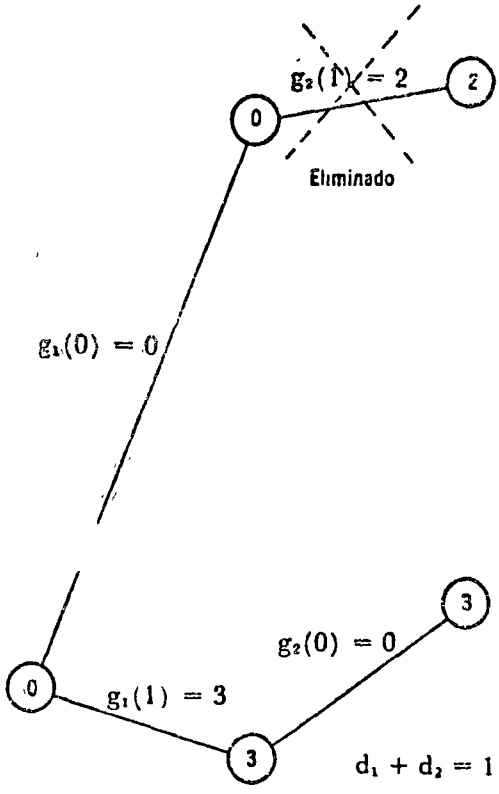


Fig. 6.6.16 *a* Asignación de una unidad de recurso en 2 etapas.

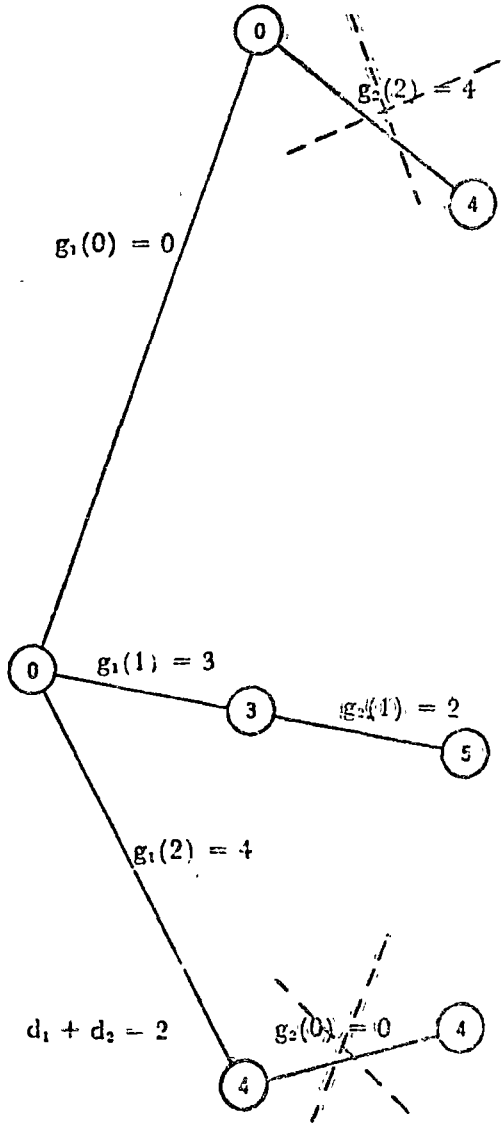


Fig. 6.6.16 *b* Asignación de 2 unidades de recurso en dos etapas.

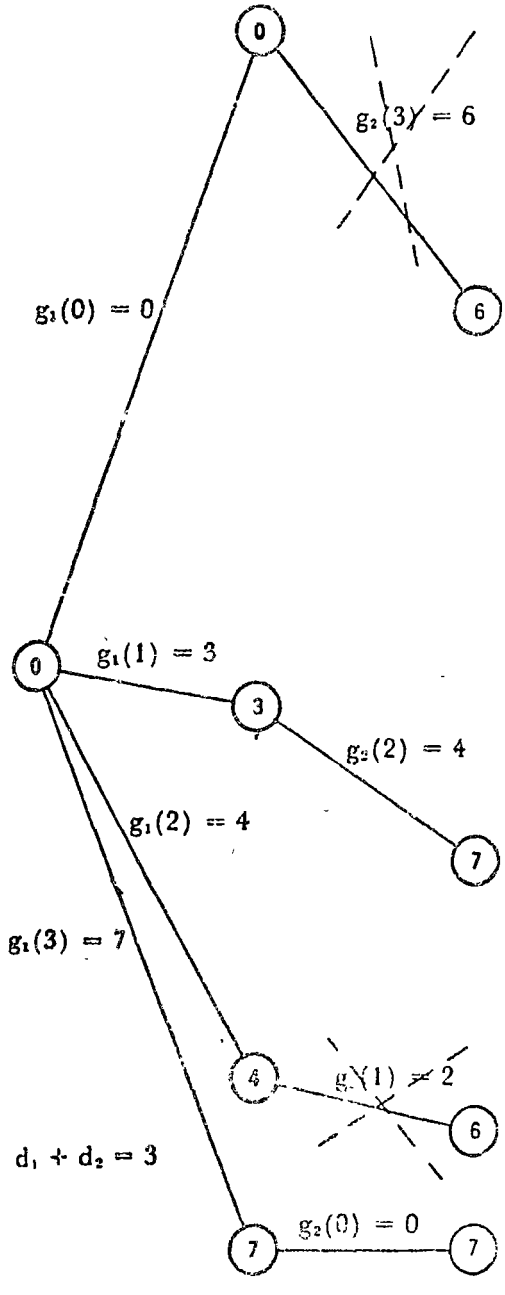


Fig. 6.6.16 Asignación de 3 unidades de recurso en 3 etapas.

La eliminación de estas alternativas reduce la búsqueda a los casos que muestra el árbol de la figura 6.6.17 con trazo grueso.

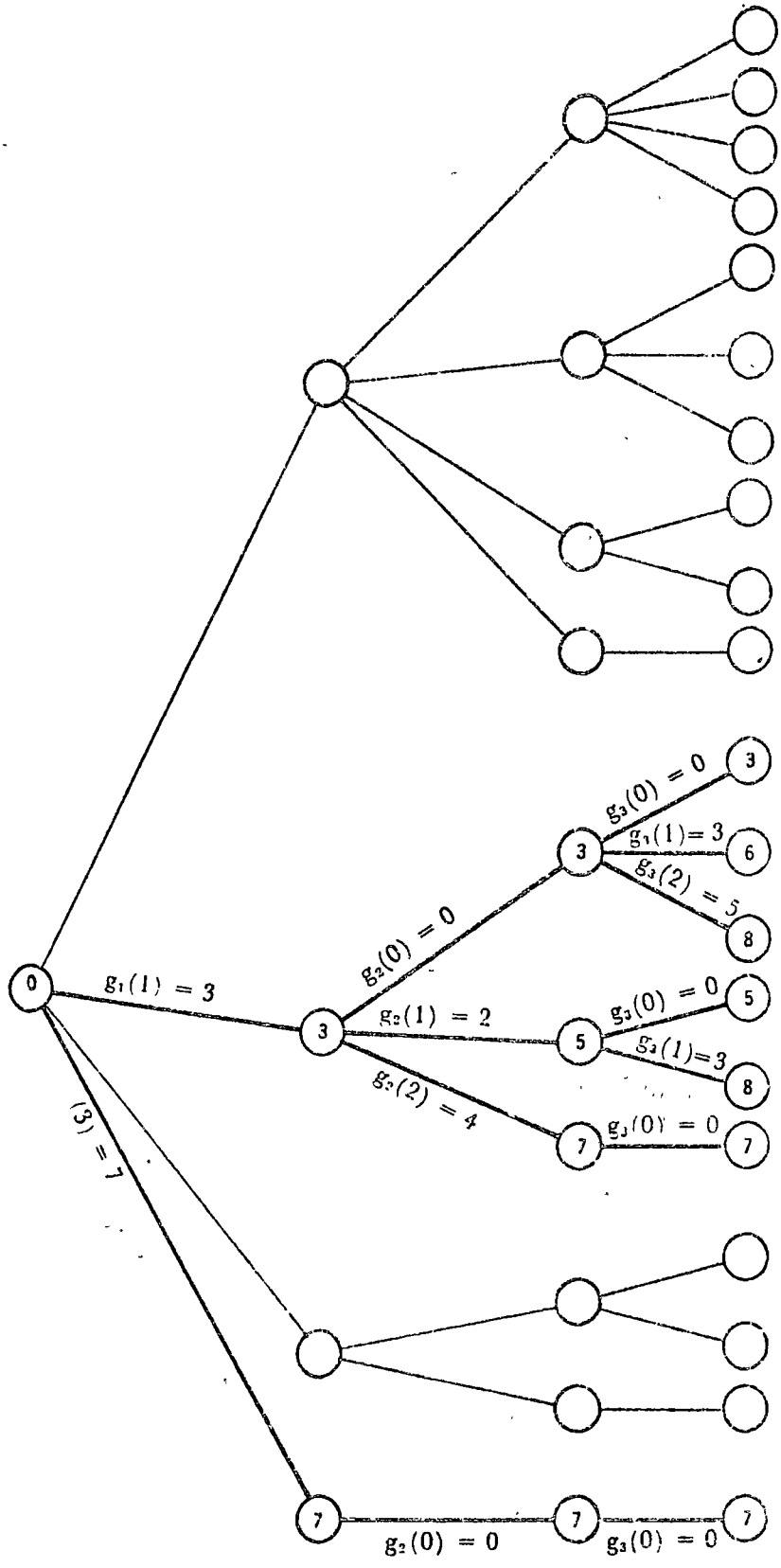


Fig. 6.6.17 Reducción de alternativas a explorar.

*La figura 6.6.14 muestra que este problema tiene 20 posibles alternativas. Si se emplea una búsqueda directa es necesario buscar entre estas posibles alternativas, para las cuales debe conocerse la combinación de decisiones que llevan a cada una de ellas, como ilustra la figura 6.6.18 para una de ellas.

*Búsqueda directa:

20 alternativas

Programación dinámica:
8 alternativas

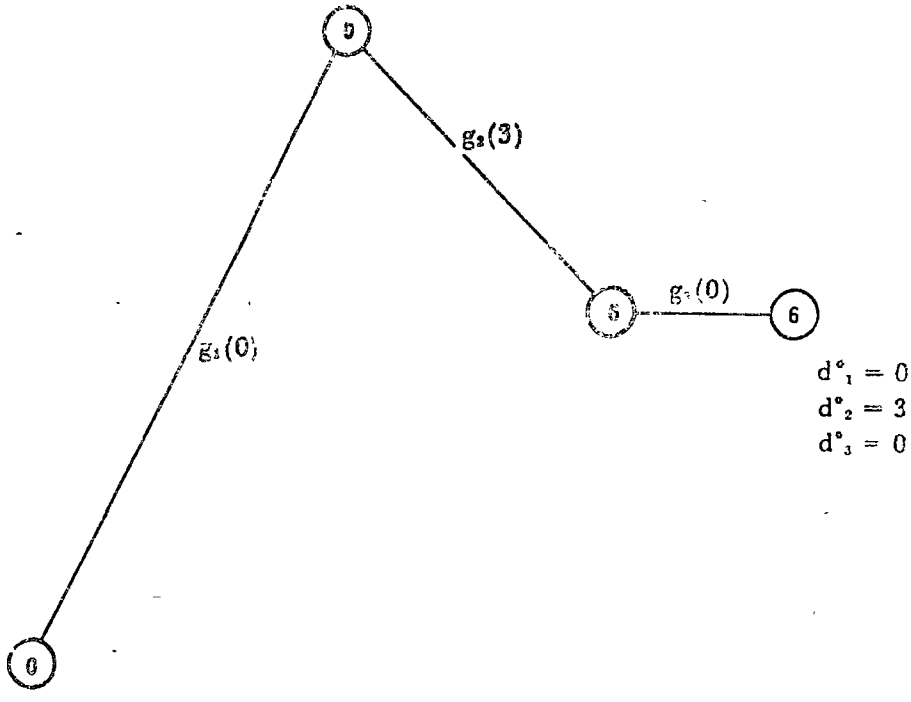


Fig. 6.6.18 Secuencia de decisiones que llevan a un beneficio determinado.

Como estos problemas tienen en general muchas más alternativas que las que se presentan en este ejemplo y más etapas de decisión, el método enumerativo directo requería de una gran cantidad de operaciones y de conservar en la memoria una gran cantidad de información: todas las posibles secuencias de la variable de decisión entre otros datos. La programación dinámica, al reducir el número de alternativas entre las que hay que buscar el óptimo, disminuye los tiempos de computación y los requerimientos de memoria. A pesar de ello, uno de los factores que ha limitado la aplicación de este método es precisamente el requerimiento de memoria que se necesita. En el capítulo 11 de la ref. 1 el lector puede encontrar una presentación formal sobre el problema de reducción del esfuerzo computacional entre la búsqueda directa y la programación dinámica.

La solución de un problema de asignación de recursos con un número mayor de etapas que el del ejemplo 6.6.1 puede encontrarse empleando el programa A18 del apéndice A. Este programa requiere de los siguientes datos:

a) Número de industrias
b) Monto de la inversión
c) Funciones de beneficio de cada industria.

El resultado de este programa aparece en la tabla 6.6.6.

Tabla 6.6.6 Resultados del programa A18 para el ejemplo 6.6.1.

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON, (LOS VALORES DE LA MATRIZ CORRESPONDEN A LAS INVERSIONES NECESARIAS A EFECTUAR EN CADA INDUSTRIA)

BENEFICIO	INDUSTRIA		
	1	2	3
0	0	0	0
3	1	0	0
5	0	0	1
6	1	0	1
8	1	1	1
8	1	0	2

Antes de continuar debe hacerse notar que en cada etapa de la solución es necesario encontrar un máximo (o mínimo). Para encontrarlo, de acuerdo con el tipo de problema se aplica alguna de las técnicas expuestas en las secciones anteriores de este capítulo o bien una búsqueda del tipo introducido en las secciones 3.5.2 ó 3.5.3.

6.6.4 Redes de transporte

Una aplicación importante de la programación dinámica es la determinación de rutas más largas o más cortas en redes de transporte entre dos localidades. En esta sección se ilustra este problema.

Ejemplo 6.6.2

*Posibles rutas del litoral al interior.

La figura 6.6.19 ilustra las posibles rutas entre una localidad V y dos puertos de un litoral. Supóngase que las poblaciones intermedias son de tres tipos, cercanas a la localidad, cercanas al litoral e intermedias, agrupadas como muestra la figura 6.6.19.

Los números asociados a las carreteras indican su longitud. Se trata de obtener la ruta más corta entre la población V y el litoral.

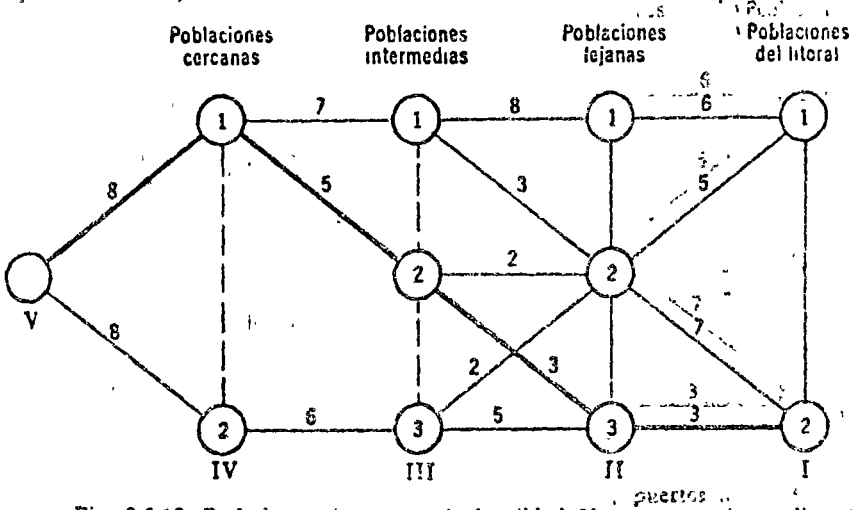
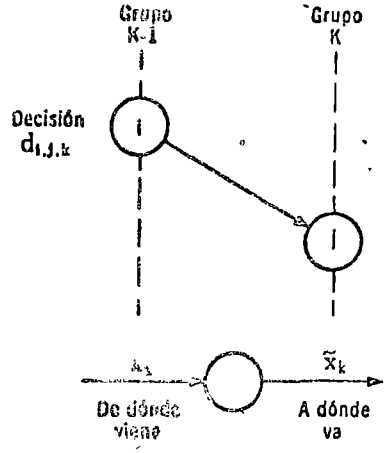


Fig. 6.6.19 Red de caminos entre la localidad V y puertos de un litoral

*Para resolver todo problema conviene introducir una notación adecuada. Designemos con $d_{i,j,k}$ con la decisión de ir de la población i del grupo k-1, a la población j del grupo k. *Cada variable de estado de entrada x_k indica de qué población de la zona anterior viene la carretera, y la variable de salida x_k indica hacia qué población de la zona siguiente va la carretera.



Con esta nomenclatura se puede empezar a resolver el problema.

*Para la 1ra. etapa, o sea la ruta entre el litoral y las poblaciones lejanas se tiene como óptimo de la función objetivo:

*Del litoral a las poblaciones lejanas

$$f_1(x_1) = \min_{d_1} \{r_1(x_1, d_1)\}$$

La tabla 6.6.7 resume los resultados para encontrar el óptimo.

Tabla 6.6.7 Obtención del beneficio óptimo en la 1ra. etapa.

Población anterior x_1	Indices de la 1ra. decisión	Longitud del camino r_1	Población siguiente $\tilde{x}_1$	Optimo $f_1(x_1)$	Decisión óptima d_1
II_1	1 1 1	6	1	6	1 1 1
II_2	2 1 1 2 2 1	5 7	1 2	5	2 1 1
II_3	3 2 1	3	2	3	3 2 1

Para la comunicación entre las poblaciones lejanas y las intermedias, etapa 2, se tiene:

*Entre poblaciones lejanas e intermedias.

$$f_2(x_2) = \min_{d_2} \{r_2(x_2, d_2) + f_1(x_2, d_2)\}$$

Estos valores se resumen en la tabla 6.6.8

Tabla 6.6.8 Obtención del beneficio óptimo en 2 etapas.

Población anterior x_2	Indices de la 2da. decisión	Longitud r_2	$x_1 = \tilde{x}_2$	$f_1(x_1)$	$r_2 + f_1$	Optimo $f_2(x_2)$	Decisiones óptimas d_I^*	d_{II}^*
III_1	1 1 2	8	1	1	9	8	2 1 1	1 2 2
	1 2 2	3	2	5	8			
III_2	2 2 2	2	2	5	7	6	3 2 1	2 3 2
	2 3 2	3	3	3	6			
III_3	3 2 2	2	2	5	7	7	2 1 1	3 2 2
	3 3 2	5	3	3	8			

*Para la etapa 3 la fórmula para determinar el beneficio es:

*Entre poblaciones intermedias y cercanas

$$f_3(x_3) = \min_{d_3} \{r_3(x_3, d_3) + f_2(x_3, d_3)\}$$

La búsqueda en este óptimo se resume en la tabla 6.6.9

Tabla 6.6.9 Obtención del beneficio óptimo en 3 etapas.

Población anterior x_4	Indices de la 3ra. decisión	Longitud r_3	$x_2 = \tilde{x}_3$	$f_2(x_2)$	r_3+f_2	Optimo valor $f_3(x_3)$	Decisiones óptimas		
							d_I^*	d_{II}^*	d_{III}^*
IV_1	1 1 3	7	1	8	15	11	321	232	123
	1 2 3	5	2	6	11				
IV_2	2 3 3	6	3	7	13	13	211	322	233

*Finalmente para elegir las rutas entre la 1ra. localidad y las poblaciones cercanas se tiene:

* Tramo final

$$f_4(x_4) = \min_{d_4} \{r_4(x_4, d_4) + f_3(x_3, d_3)\}$$

Para encontrar este mínimo se realizan los cálculos que aparecen en la tabla 6.6.10

Tabla 6.6.10 Obtención del beneficio óptimo en 4 etapas.

Población anterior x_4	Indices de la 4a. decisión	Longitud r_4	$x_3=\tilde{x}_4$	$f_3(x_3)$	r_3+f_3	Valor óptimo $f_4(x_4)$	Decisiones óptimas			
							d_I^*	d_{II}^*	d_{III}^*	d_{IV}^*
x_5	1 1 3	8	1	11	19	17	321	232	123	114
	1 2 3	8	2	13	21	21	211	322	233	123

De esta última tabla se concluye que el camino de mínima longitud entre los puestos del litoral y la población V tiene una longitud de 17 a lo largo de la ruta 114, 123, 232 y 321, marcada con trazo grueso en la figura 6.6.18.

El lector interesado en profundizar sobre este tema puede consultar las refs. 1, 2, 5, 8 y 9. Los problemas 16 a 19 de la sección 6.8 ilustran diferentes aplicaciones de este método.

6.7. RUTA CRITICA

*7.1 Introducción

En las diferentes fases de un proyecto, desde la planeación del programa hasta el retiro es necesario ejecutar con una secuencia lógica y a través del tiempo una serie de *actividades que pueden algunas ejecutarse en paralelo, o sea simultáneamente, mientras que otras tienen que realizarse en serie, es decir, no se puede iniciar una actividad antes de haber terminado la anterior. En la fase de construcción de un edificio, no puede iniciarse el montaje de la estructura si ésta es de acero, o su colado, si éste es de

*Actividades simultáneas ó en paralelo y actividades secuenciales ó serie.

concreto, si no se han terminado los cimientos. En la fabricación de un coche, no se puede proceder a armarlo, si no se cuenta con la carrocería, el motor, etc. Estas actividades se tienen que realizar secuencialmente. Por otra parte la fabricación del motor y el troquelado de las carrocerías puede realizarse simultáneamente. Esta orden de ejecución de actividades en un proyecto puede representarse mediante redes. Estas redes permiten determinar fundamentalmente:

a) La secuencia temporal de las actividades.
b) El tiempo de terminación de cada actividad y de todo el proyecto.
c) Las actividades críticas, que si no se ejecutan dentro del tiempo previsto, pueden retrasar todo el proyecto.
d) La asignación óptima de recursos.

Existen dos métodos para controlar la ejecución de proyectos:

a) Método de la ruta crítica (CPM).
b) Evaluación de programa y técnica de revisión (PERT).

*Como los dos métodos son muy similares, por eso solamente se estudia el de la ruta crítica (CPM). Si se conoce uno de ellos, puede comprenderse fácilmente el otro.

*Ruta crítica (CPM).

A continuación se describe cómo se establece la red de actividades de un proyecto, que sirve como base a estos métodos.

6.7.2 Red de actividades

*Esta red es una gráfica con nodos, representados mediante círculos, y unidos mediante segmentos dirigidos. Los nodos representan actividades y eventos, y los segmentos dirigidos la relación entre los eventos y las actividades.

* Red:

nodos (actividades) unidos con segmentos dirigidos. (Secuencia temporal)

La relación entre eventos y actividades es la siguiente:

1. Una actividad o evento puede realizarse tanto en forma paralela con otra actividad como en forma secuencial.
2. Toda actividad o evento, exceptuando el primero, está precedido por una o varias actividades.
3. Toda actividad o evento, exceptuando el último, precede a una o varias actividades.

*Con objeto de tener redes con un solo nodo inicial y terminal se incluyen estas gráficas, dos nodos ficticios, que representan actividades con cero tiempo de duración, que son el nodo inicial y el nodo terminal. Estos dos nodos son los únicos de la gráfica que solamente, o preceden a toda otra actividad del proyecto

*Nodos ficticios: Nodo inicial y nodo final.

o están precedidos por todas las actividades restantes de la gráfica, tal como muestra la figura 6.7.1

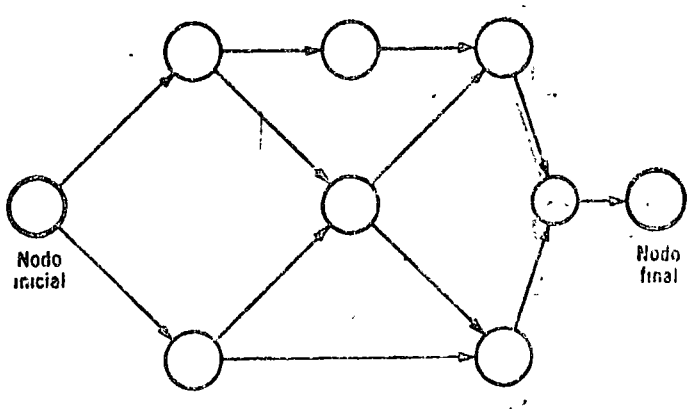


Fig. 6.7.1 Red de actividades.

Para construir la gráfica de actividades es necesario listar éstas, indicando su relación con otras actividades y el tiempo que toma ejecutarlas tal como aparece en el ejemplo 6.7.1.

Con este ejemplo se ilustra la construcción de la gráfica de actividades de un proyecto.

Con objeto de familiarizar a los lectores en el método de la ruta crítica se ha escogido un ejemplo, que no requiere para su comprensión de conocimientos en una especialidad. Tanto las actividades importantes del proyecto como su secuenciación se han seleccionado fundamentalmente para ilustrar aspectos importantes del método, tratando, sin embargo, de ser lo más realista posible.

Ejemplo 6.7.1.

El constructor señala que para la construcción de una pequeña casa es necesario realizar después de obtenidos los permisos y licencias de construcción necesarias, las siguientes actividades que se enumeran en la tabla 6.7.1. Estas actividades han sido designadas con letras. Se incluyen además en la tabla la duración en semanas de cada actividad, tomando en cuenta las limitaciones naturales y del personal, su relación con otras actividades y cómo el dueño desea conocer los pagos que debe hacer cada semana al constructor, el costo de cada una de ellas. Si una actividad dura varias semanas, su monto se supone que se cubre semanalmente por partes no necesariamente iguales.

Se desea establecer un diagrama de actividades de esta obra.

Solución:

A continuación se señalan con detalle los pasos que se siguen para trazar el diagrama de actividades.

Tabla 6.7.1 Lista de actividades del ejemplo 6.7.1

ACTIVIDAD	NOMBRE	DURACION	COSTO	OBSERVACIONES
A	Nivelar y rellenar el terreno	3	$ 40,000.00	1ra. actividad.
B	Bardear el terreno	2	$ 20,000.00	Se ejecuta después de A.
C	Construir cimientos	4	$ 20,000.00	Puede ejecutarse simultáneamente con A.
D	Levantamiento de muros y colocado del techo	6	$ 60,000.00	Se ejecuta después de C.
E	Colocación de tuberías y alambrado de la instalación eléct.	2	$ 15,000.00	Se ejecuta después de D y B.
F	Colocación de ventanería.	1	$ 15,000.00	Se ejecuta después de D y B y puede ejecutarse simultáneamente con E.
G	Aplanado, enyesado y colocación de mosaicos y muebles sanitarios.	2	$ 20,000.00	Se ejecuta después de F y E
H	Pintura y detalles en los acabados	4	$ 25,000.00	Se ejecuta después de G y de I.
I	Colocación de tierra en el jardín	2	$ 20,000.00	Se ejecuta después de D.
J	Colocación de plantas	2	$ 10,000.00	Se ejecuta después de H e I.

*Se empieza trazando tantos nodos como actividades tiene el proyecto, además de dos nodos adicionales, el inicial y el final.

*El primero conviene trazarlo a la izquierda de la hoja y el segundo a la derecha. El resto conviene distribuirlo de acuerdo aproximadamente con su orden de ejecución. Por ejemplo la actividad A por ser la primera debe aparecer después del nodo inicial, y la B después de la A, o sea a su derecha y como la actividad C puede realizarse simultáneamente con la A, conviene que los nodos que representan a la actividad A y C estén sobre una misma vertical imaginaria, tal como lo muestra la figura 6.7.2.

° I
Dibuje nodos

° Nodo inicial a la izquierda y nodo terminal a la derecha.

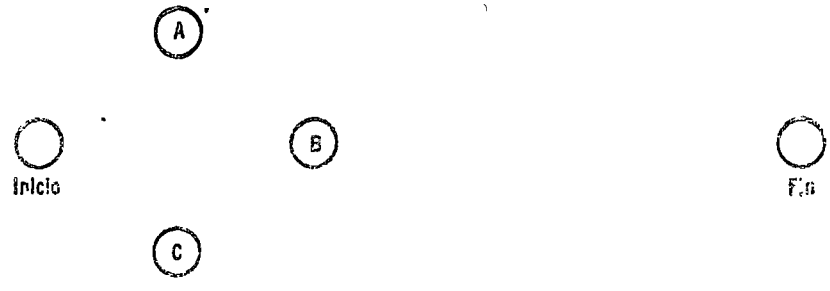


Fig. 6.7.2 Primeros nodos en el trazo de una red de actividades.

Siguiendo el criterio anterior se termina trazando todos los nodos, tal como aparece en la figura 6.7.3, desde luego que las in-

dicaciones que se han dado sobre la colocación de los nodos en la gráfica, sólo son recomendaciones que permiten trazar una gráfica más clara. La relación temporal entre las actividades, se indica con segmentos de flecha dirigidos, que a continuación se anexarán a la gráfica.

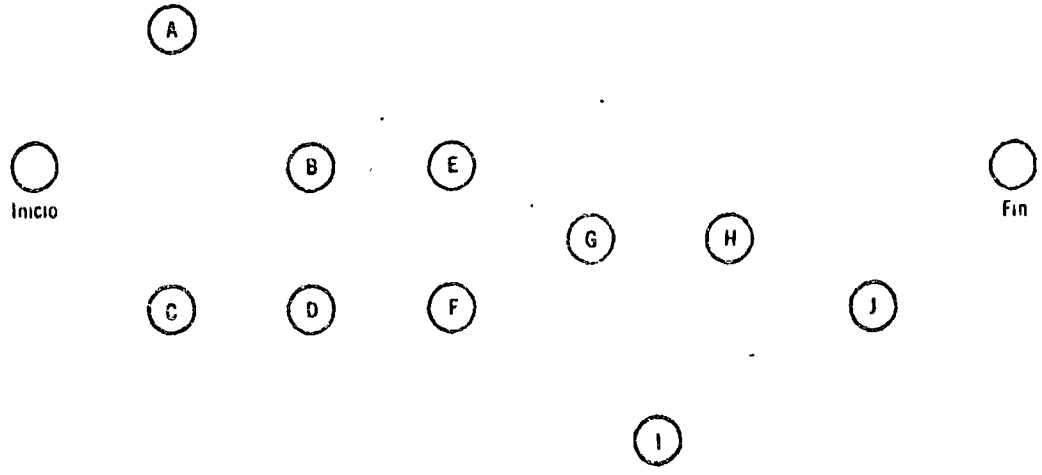


Fig. 6.7.3 Diagrama de actividades con todos los nodos.

II

*Las actividades A y C pueden realizarse simultáneamente y son las primeras del proyecto. Esta característica se indica mediante las flechas de la figura 6.7.4 que unen a estas dos actividades con el nodo inicial.

*Indique las relaciones temporales con segmentos dirigidos.

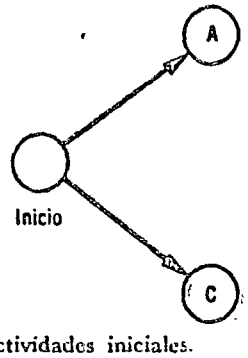


Fig. 6.7.4 Actividades iniciales.

De acuerdo con la tabla, la actividad B requiere para iniciarse que se haya terminado la actividad A. Esta secuencia se indica en el diagrama, como muestra la figura 6.7.5.

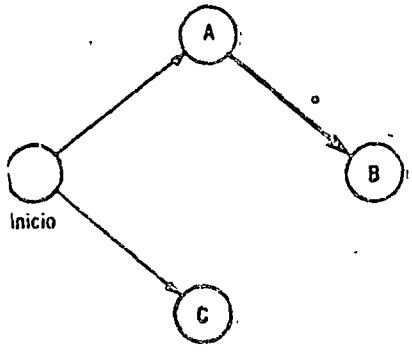


Fig. 6.7.5 La actividad B empieza después de terminada la actividad A.

En forma similar se traza el resto de los siguientes dirigidos que aparecen en la figura 6.7.6. Nótese en esta figura cómo se indica en un diagrama de actividades que varias de éstas (E y F) requieren para iniciarse que se hayan terminado otras actividades (B y D). Además, siendo J la última actividad del proyecto queda unida mediante un segmento dirigido al nodo terminal.

*En la gráfica 6.7.6 se muestra exclusivamente la relación temporal entre las actividades. El siguiente paso es el método de la ruta crítica, consiste en asignar valores a la red. La siguiente sección trata de este tema.

III

Asignación de valores a la red.

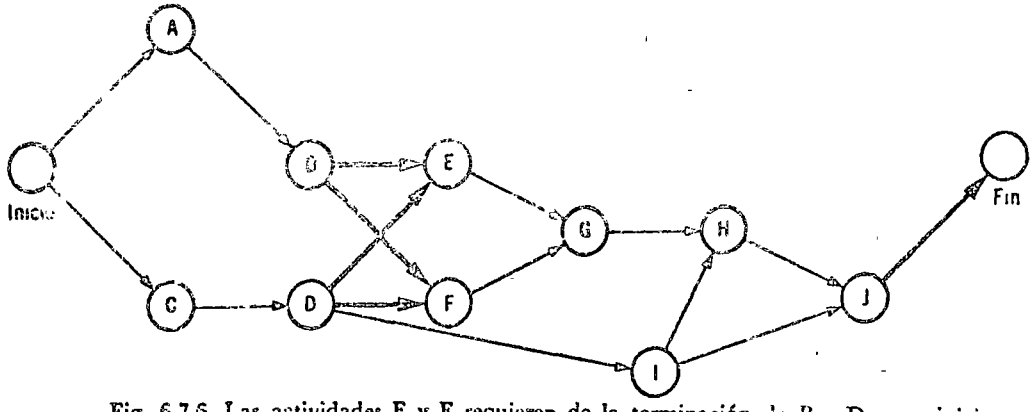


Fig. 6.7.6 Las actividades E y F requieren de la terminación de B y D para iniciarse

En la tabla 6.7.1 aparece el tiempo de duración de cada actividad. *En esta sección se estudia cómo se relaciona el tiempo de duración de cada actividad con la duración mínima de todo el proyecto, desde su inicio hasta su terminación. Además, se encuentran aquellas actividades que determinan la duración mínima de todo el proyecto y cuya iniciación no puede posponerse o cuyo tiempo de ejecución no puede atrasarse sin alargar la duración de toda la obra. *Este tipo de actividades determinan la llamada *ruta crítica* del proyecto. Otras actividades no críticas pueden posponerse o alargarse sin afectar la duración del proyecto. El método que se expone a continuación permite determinar la holgura que se tiene en la iniciación o duración de estas actividades que se tiene en la iniciación o duración de estas actividades no críticas.

La duración de cada actividad aparece en el interior de cada nodo, tal como lo muestra la figura 6.7.7 para algunos nodos de la red del ejemplo 6.7.1. En este caso la duración se da en semanas.

Determinación de la ruta crítica.

*Determinación del tiempo mínimo de duración del proyecto.

*La ruta crítica está formada por actividades cuya iniciación no puede posponerse ni su duración alargarse sin atrasar el proyecto.

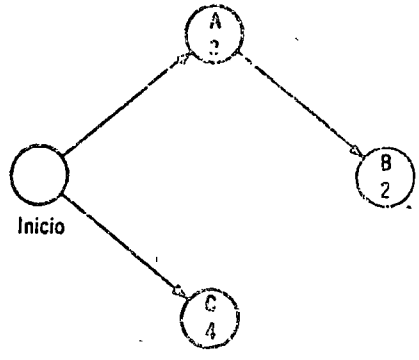


Fig. 6.7.7 Duración de las actividades.

IV

Recorrido de la red hacia adelante.

Una vez indicada la duración de todas las actividades en la red, se procede a recorrer hacia adelante del nodo inicial al final. Durante esta fase se determinan los siguientes tiempos asociados al proyecto:

a) *El tiempo más próximo de iniciación* (EST) de una actividad es lo más pronto que puede iniciarse una actividad.

b) *El tiempo más próximo de terminación* (EFT) de una actividad es lo más temprano que puede terminarse. Es igual al tiempo más próximo de iniciación (EST) más la duración (D) de la actividad. Es decir:

$$EFT = EST + D \qquad (6.7.1)$$

Estos tiempos se colocan en unos casilleros con una flecha dirigida hacia adelante, como los mostrados en la figura 6.7.8 que indican que fueron calculados al recorrer el proyecto del nodo de iniciación al de finalización.

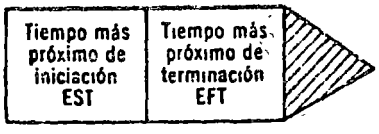


Fig. 6.7.8 Casilleros para indicar tiempos más próximos de iniciación y terminación.

Como el nodo inicial representa una actividad ficticia de cero duración y representa el inicio del proyecto, en los dos casilleros debe aparecer un cero, tal como lo muestra la figura 6.7.9.

Como las actividades A y C son las primeras del proyecto y pueden ejecutarse simultáneamente, su tiempo más próximo de iniciación es 0 y su tiempo más próximo de terminación es 0 más la duración de la actividad respectiva, tal como aparece en la figura 6.7.9 en los casilleros de las flechas dirigidas hacia adelante.

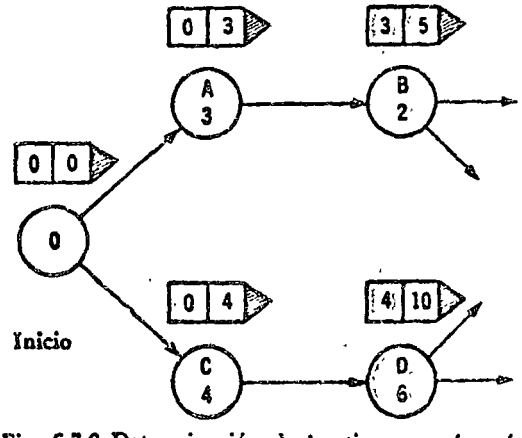


Fig. 6.7.9 Determinación de los tiempos más próximos de iniciación y terminación.

Como las actividades B y D no requieren más que de la terminación de A y C respectivamente, su tiempo más próximo de iniciación es igual al más próximo de terminación de la actividad que le precede, tal como muestra la figura 6.7.9.

El cálculo de tiempos más próximos para las actividades E y F requiere del siguiente razonamiento. Nótese que las actividades requieren para iniciarse, que se hayan terminado antes más de una actividad. Es decir, tienen más de una actividad que las precede inmediatamente. A la actividad E la preceden la B y la D. En estos casos el tiempo más próximo de iniciación es igual al tiempo más próximo de terminación máximo de las actividades que lo preceden. Es decir:

Tiempo más próximo de iniciación = Máximo tiempo más próximo de terminación de actividades precedentes.

Aplicando este criterio a la actividad E se tienen los resultados mostrados en la figura 6.7.10

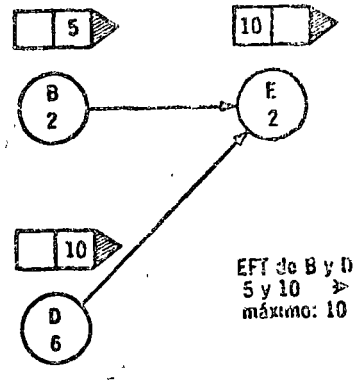


Fig. 6.7.10 Cálculo del tiempo más próximo de iniciación en actividades precedidas por varias otras.

Procediendo en forma similar para el resto de los nodos o actividades se obtienen todos los tiempos más próximos de iniciación y terminación que aparecen en la figura 6.7.11.

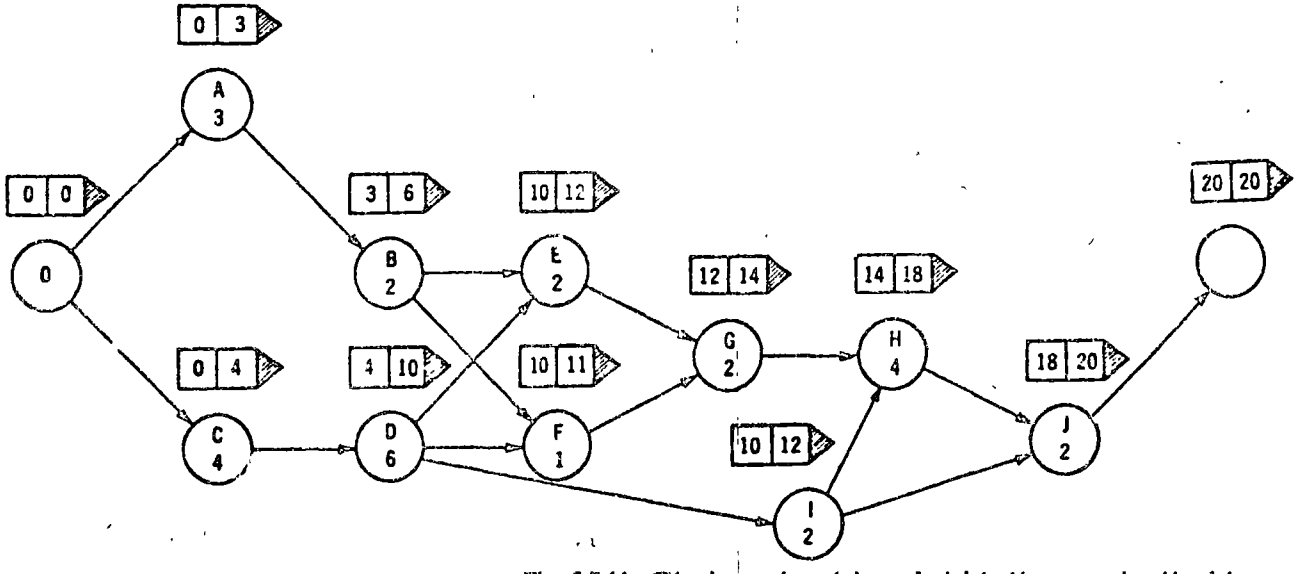


Fig. 6.7.11. Términos más próximos de iniciación y terminación del proyecto.

*Una vez recorrida la red en sentido directo del nodo inicial al nodo terminal y determinados los tiempos más próximos de iniciación y terminación, es necesario recorrer la red en sentido inverso, del nodo de terminación al nodo de iniciación. Durante este recorrido se determinan los siguientes tiempos.

*Recorrido de la red hacia atrás.

a). *El tiempo más lejano de terminación* (LFT) es el tiempo lejano en el que puede terminarse una actividad sin retrasar ninguna otra actividad.

b). *El tiempo más lejano de iniciación* (LST) es el tiempo más lejano en el que puede iniciarse una actividad sin atrasar ninguna otra. Es igual al tiempo más lejano de terminación de una actividad (LFT) menos su duración, es decir:

$$LST = LFT - D \qquad (6.7.2)$$

Estos tiempos se colocan en unos casilleros adyacentes con una flecha dirigida hacia atrás, que indica que fueron calculados al recorrer el proyecto desde el nodo terminal al nodo inicial, como muestra la figura 6.7.12

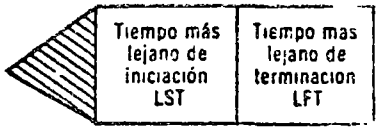


Fig. 6.7.12 Casilleros para indicar tiempo más lejano de iniciación y terminación.

Empezando con recorrer la red desde el nodo terminal, si el proyecto no debe sufrir retardo, entonces los tiempos más próximos de terminación y más lejano de terminación del nodo terminal deben ser iguales, tal como muestra la figura 6.7.13 Con la duración de la actividad asociada a este nodo terminal ficticio es nula, los tiempos más lejanos de iniciación y terminación son iguales.

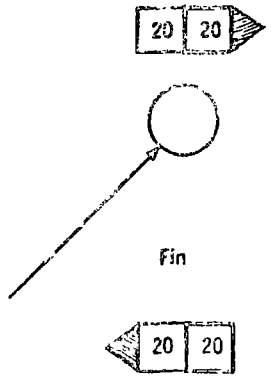


Fig. 6.7.13 Iniciación de los cálculos de tiempo más lejano de terminación e iniciación

Procediendo en el sentido inverso de recorrido se llega al nodo J. El tiempo más lejano de terminación de este nodo debe ser 20 también, ya que de otra manera se atrasa el proyecto, y como la duración de la actividad es 2, el tiempo más lejano de iniciación es de $20 - 2 = 18$, tal como muestra la figura 6.7.14.

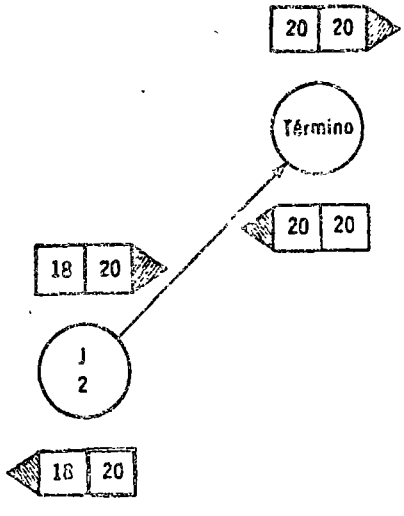


Fig. 6.7.14 Cálculo de tiempo más lejano de iniciación y terminación.

Continuando con el recorrido se nota como muestra la figura 6.7.15, que la actividad H precede sólo a la actividad J.

Para que las actividades posteriores a H, en este caso sólo J no sufra atraso, ninguna de las actividades precedentes debe termi-

narse después del tiempo más lejano de iniciación de J, por lo tanto el diagrama se continúa como muestra la figura 6.7.15.

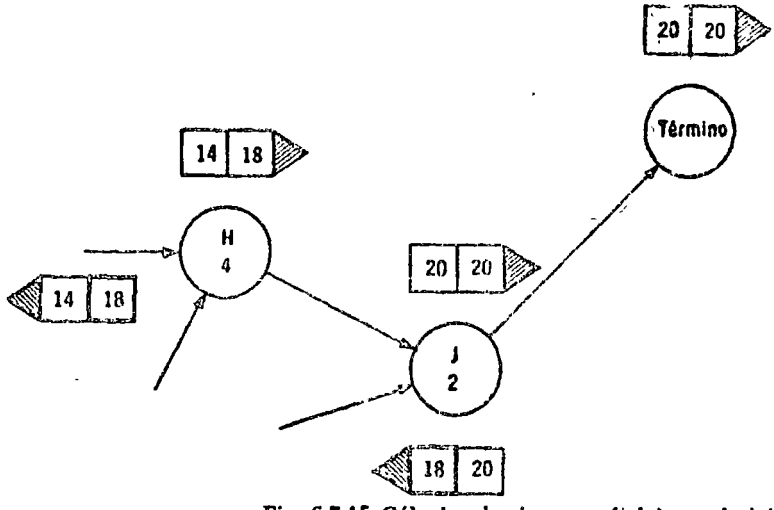


Fig. 6.7.15 Cálculos de tiempo más lejanos de iniciación y terminación.

Para la actividad I se observa que precede a la H y la J. Para que ninguna de estas últimas sufra atraso, el tiempo máximo de terminación de J, debe ser igual al mínimo tiempo más lejano de iniciación de las actividades inmediatas, para el caso de la actividad I, estos cálculos se muestran en la figura 6.7.16.

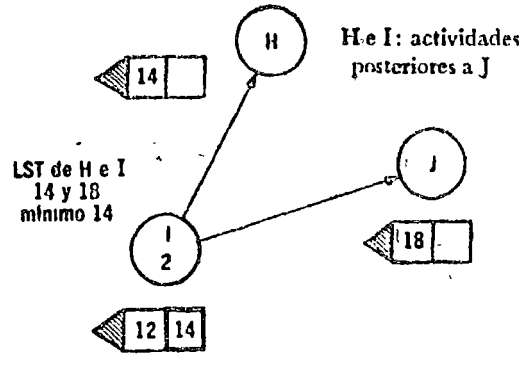


Fig. 6.7.16 Cálculo del tiempo más lejano de terminación.

En forma similar se continúa hasta obtener la gráfica completa de la red que aparece en la figura 6.7.17.

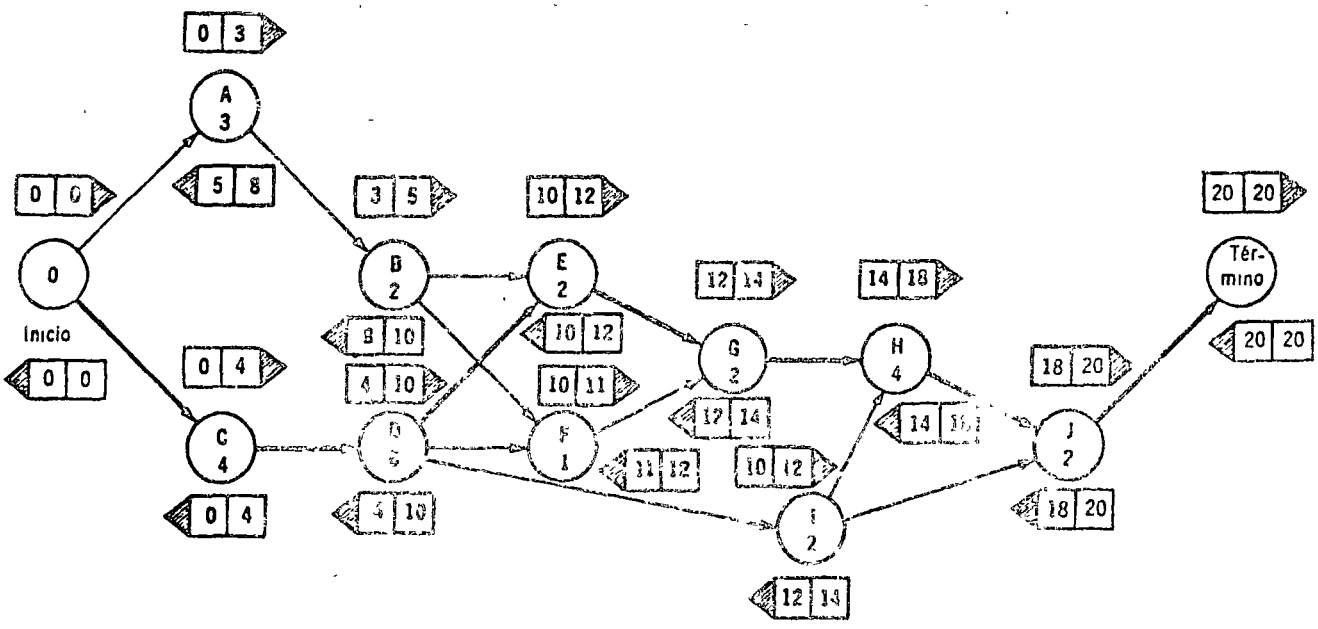


Fig. 6.7.17 Gráfica con todos los tiempos de iniciación y terminación del ejemplo 6.7.1.

VI

*Una vez terminada esta gráfica, puede determinarse la llamada *ruta crítica,* formada por aquellas actividades cuyo tiempo de iniciación o duración no puede prolongarse sin afectar al proyecto. Estas actividades deben tener su tiempo más próximo de iniciación igual al más lejano de iniciación. Es decir:

*Determinación de la ruta crítica.

EST = LST.

En la figura 6.7.17 se nota que las actividades con esta propiedad son la C, D, E, G, H, J que aparecen en la fig. 6.7.18

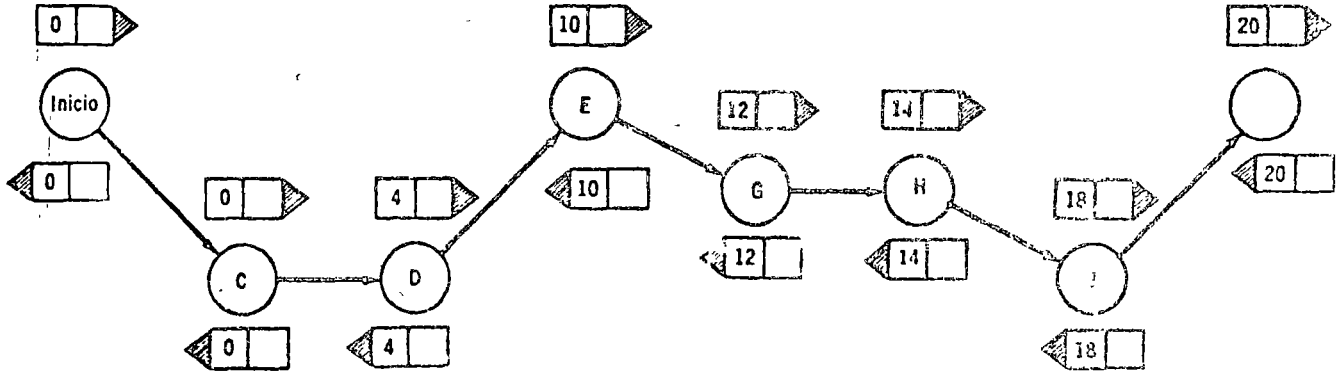


Fig. 6.7.18 Ruta crítica del ejemplo 6.7.1.

*Resulta de interés para el constructor determinar cuánto pueden atrasarse la iniciación de algunas actividades, desde luego las no situadas en la ruta crítica sin atrasar el proyecto. Este atraso recibe el nombre de *holgura total.* (TF)

*Holgura total:

máximo atraso posible en actividades sin retardar todo el proyecto.

Este intervalo de tiempo es igual a la diferencia entre los tiempos más lejanos y próximos de iniciación de un proyecto, o entre los de terminación, es decir:

$$TF = LST - EST$$
$$TF = LFT - EFT \qquad (6.7.3)$$

En la tabla 6.7.2 aparecen las holguras totales de todas las actividades, desde luego que las actividades de la ruta crítica tienen una holgura nula.

6.7.4 Asignación de recursos

Al plantear el problema del ejemplo 6.7.1 se mencionó que el dueño tiene interés en determinar cuáles son los pagos que debe realizar cada semana.

*Para determinar este calendario de pagos se procede a trazar un diagrama de barras como el mostrado en la figura 6.7.19. En el eje de las abscisas aparecen las semanas, desde la iniciación del proyecto. Las barras horizontales, representan las actividades del proyecto, y tienen una longitud igual a la duración de la actividad. Como el dueño no desea hacer erogaciones antes de lo necesario, no conviene empezar ninguna actividad antes de su tiempo más lejano de iniciación. Debido a esto se colocan las barras horizontalmente a partir del tiempo más lejano de iniciación, como muestra la figura 6.7.19 para la actividad A, cuyo tiempo más lejano de iniciación es 5 y su duración es de 3 semanas. Además debe incluirse en el diagrama información sobre los recursos que se necesitan para realizar la actividad. Suponiendo que el interés esté enfocado en los recursos económicos necesarios, en cada semana debe aparecer la erogación que tiene que realizarse. Para la actividad 9, cuyo costo es de $ 40,000 y tiene una duración de 3 semanas, se estima que semanalmente se requieren $ 13,333. Esta información aparece en el diagrama de la fig. 6.7.19.

Para la actividad B, el tiempo más lejano de iniciación es de 8, su costo es de $ 20,000 y su duración de 2 semanas. Se estima que la erogación semanal es de $ 10,000.00, tal como aparece en la figura 6.7.20.

VII

*Trazo de un diagrama de barras.

Tabla 6.7.2 Holguras totales del proyecto del ejemplo 6.7.1.

Actividad	Holgura total	
A	5	
B	5	
C	0	←
D	0	←
E	0	←
F	1	
G	0	←
H	0	←
I	2	
J	0	←

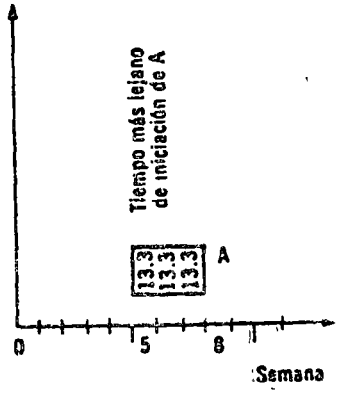


Fig. 6.7.19 Diagrama de barras con la actividad A.

La actividad C, tiene un tiempo más lejano de iniciación de 0, una duración 4, y un costo total de $ 20,000.00. La erogación semanal para esta actividad se estima que será de: $ 6,000, $ 6,000, $ 4,000 y $ 4,000. Esta información también está contenida en la fig. 6.7.20.

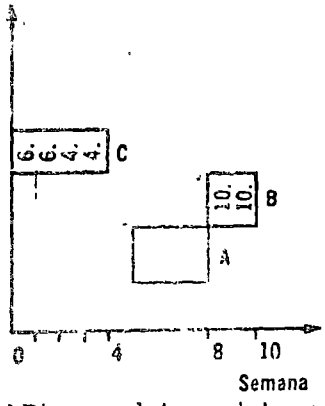


Fig. 6.7.20 Diagrama de barras de la actividad B.

*Debe hacerse notar que este tipo de diagrama puede contener información no sólo sobre recursos económicos, sino también de otra índole, como recursos humanos, maquinaria, etc. La cantidad de recursos que se emplea en cada unidad de tiempo depende del tipo de actividad. En este ejemplo se estima que las actividades A y B requieren de igual cantidad de dinero, durante cada semana de su duración, mientras que la actividad C, requiere de recursos no uniformemente distribuidos.

* Pueden indicarse diferentes necesidades de recursos en el diagrama de barras.

Siguiendo con la metodología expuesta, se termina de construir el diagrama. El diagrama completo de barras aparece en la fig. 6.7.21.

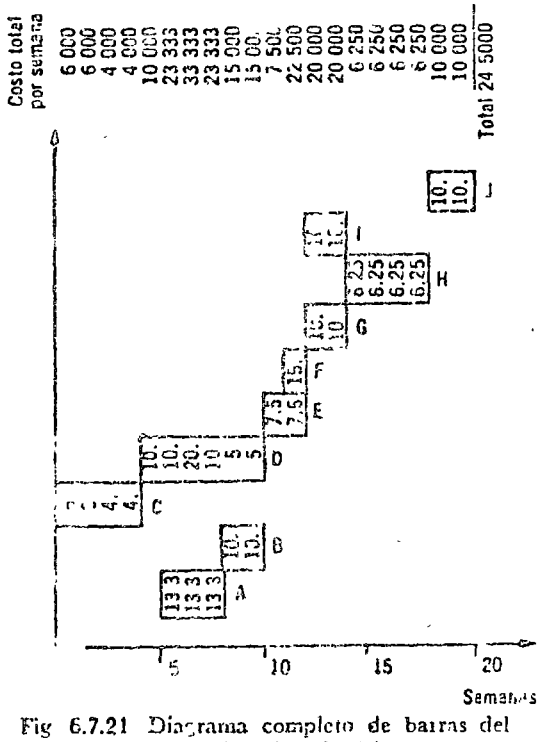


Fig 6.7.21 Diagrama completo de barras del proyecto del ejemplo 6.7.1.

Finalmente puede obtenerse de este diagrama el calendario de pagos semanales, simplemente sumando las cantidades que aparecen en cada columna. Este diagrama muestra además qué actividades deben ejecutarse cada semana. En la semana 10, se ejecutan las actividades B y D, que requieren de $ 10,000 y 5,000 respectivamente. Por lo tanto esta semana se necesitan $ 15,000.00 del recurso dinero, tal como muestra la fig. 6.7.22.

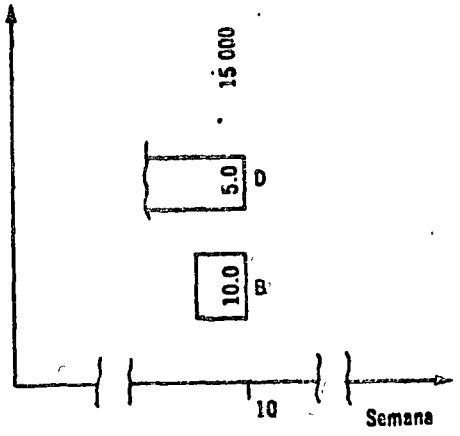


Fig. 6.7.22 Actividades y recursos de la semana 10.

Desde luego que en proyectos de mayor envergadura que la construcción de una casa, es necesario recurrir a la computadora digital para encontrar tiempos más próximos y lejanos, holguras, ruta crítica y distribución de recursos. En el apéndice A, el programa No. 19, permite calcular la ruta crítica de un proyecto. Los resultados de este programa para el ejemplo 6.7.1 aparecen en las páginas siguientes.

Como datos de este programa es necesario indicar el número de actividades, incluyendo las actividades ficticias de iniciación y terminación, la duración de cada actividad y la subordinación entre actividades, en forma de matriz tal como aparece en la tabla 6.7.3. El elemento a_{ij} de esta matriz tiene valor unitario si la actividad i requiere que se haya ejecutado la actividad j.

Los resultados del programa A.19 para el ejemplo 6.7.1 aparecen en la tabla 6.7.4.

Tabla 6.7.3 Matriz de subordinación del ejemplo 6.7.1 para el programa A.19.

MATRIZ DE SUBORDINACION DE ACTIVIDADES

1												
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2												
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3												
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4												
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5												
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6												
	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7												
	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8												
	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
9												
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
10												
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
11												
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
12												
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Tabla 6.7.4 Resultados del programa A.19 para el ejemplo 6.7.1

LOS RESULTADOS OBTENIDOS SON

ACTIVIDAD	DURACION	EST	EFT	LST	LFT	TFL	TFT	
1	0	0	0	0	0	0	0	R.C.
2	3	0	3	5	8	0	5	
3	2	3	5	8	10	5	5	
4	4	0	4	0	4	0	0	R.C.
5	6	4	10	4	10	0	0	R.C.
6	2	10	12	10	12	0	0	R.C.
7	1	10	11	11	12	1	1	
8	2	12	14	12	14	0	0	R.C.
9	4	14	18	14	18	0	0	R.C.
10	2	10	12	12	14	2	2	
11	2	18	20	18	20	0	0	R.C.
12	0	20	20	20	20	0	0	R.C.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

O P T I M I Z A C I O N

PROF. DR. VICTOR GEREZ GREISER.

ABRIL,1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

C O M P L E M E N T O

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

RUTA CRITICA

PROGRAMACION LINEAL.

PROF. M. en C. VERONICA CZITROM.

ABRIL,1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 7: SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

ABRIL,1978,

METODOS NUMERICOS CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 6: INTREGRACION NUMERICA

Abril,1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 4 : RAICES DE FUNCIONES TRASCEDENTES Y POLINOMIOS.

ABRIL,1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 3 : SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
(Continuación).

ABRIL, 1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 3 : SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

ABRIL,1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

COMPLEMENTOS:

INTREGRACION Y DIFERENCIACION NUMERICA
RAICES DE FUNCIONES
INTERPOLACION.

PROF. M. en C. VERONICA CZITROM.

ABRIL, 1978.

NO HACER

CARATULAS DE

LOS TEMAS 2.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA I : LENGUAJE FORTRAN

(Complemento)

PROF. ING. HERIBERTO OLGUIN ROMO.
PROF. ING. RICARDO CIRIA MERCE.

ABRIL,1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL.

TEMA I : REPASO DE FORTRAN.

ABRIL, 1978.

METODOS NUMERICOS Y APLICACIONES CON LA COMPUTADORA DIGITAL

TEMA 5 : I N T E R P O L A C I O N.

ABRIL,1978.