



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

**INFLUENCIA DE LOS DOMOS SALINOS COMO
MECANISMO PARA LA PRODUCCIÓN DE
HIDROCARBUROS.**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO PETROLERO

PRESENTA

JOSÉ EDUARDO RAMÍREZ LÓPEZ MIRO

DIRECTOR DE TESIS

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO

MÉXICO D.F. 2014



*Dedicado a mis **padres** por siempre estar ahí para brindarme su amor, enseñarme que a esta vida venimos a ser felices y que todo es posible, a los **boyos** por enseñarme a amar el estudio y siempre cuidarme a pesar de mis travesuras, a **Violita** por ser la mejor hermana que pude pedir y aguantar vivir conmigo estos últimos años de vida universitaria y a **Viridiana** por ser lo más hermoso que me ha pasado y hacerme la persona más feliz.*

AGRADECIMIENTOS

Al **Dr. Fernando Samaniego Verduzco** por ser un gran mentor y una excelente persona; muchas gracias por quedarse conmigo y soportarme los fines de semana hasta tarde para atender mis dudas y brindarme consejos que fueron fundamentales para la investigación. Usted es el mejor ejemplo de lo que puede aspirar un alumno de Ing. Petrolera.

A mis sinodales, **Ing. Manuel Villamar Villegas, Dr. Ricardo Padilla y Sánchez, Dr. Edgar Rangel Germán** y **Dr. Víctor H. Arana Ortiz**, por sus consejos y observaciones.

Al **Dr. Rafael Rodríguez Nieto** por ser un gran profesor y estar siempre presente para apoyar y ayudar con cualquier problema.

A **Elsa, Elisa** y **Franco** por ser excelentes personas; cada vez que pudieron me ayudaron y fueron una gran compañía mientras realizaba mi investigación.

Al **Dr. Mario César Suárez Arriaga** por ser de gran ayuda para la realización de esta tesis.

A mi querida **UNAM** por permitirme ser parte de ella y darme tantas alegrías y oportunidades.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS.....	VII
LISTA DE TABLAS	VIII
RESUMEN	IX
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2 ELASTICIDAD	4
2.1 Esfuerzo	4
2.2 Tensor de Esfuerzos	5
2.3 Ecuación de momentum lineal.....	6
2.4 Esfuerzos Desviatorios.....	8
2.5 Deformación unitaria	9
2.6 Tensor de Deformación	12
2.7 Ley constitutiva para materiales isótropos	12
2.8 Energía potencial	15
CAPÍTULO 3 POROELASTICIDAD	17
3.1 Introducción.....	17
3.2 Energía de deformación para materiales porosos y saturados	18
3.3 Relaciones constitutivas poroelásticas.....	21
3.4 Constantes poroelásticas.....	22

3.5 Esfuerzo Efectivo	27
------------------------------------	-----------

CAPÍTULO 4 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LA SAL.....30

4.1 Introducción.....	30
------------------------------	-----------

4.2 Relaciones constitutivas convencionales para la Sal.....	31
---	-----------

4.2.1 Deformación por fluencia lenta	32
--	----

4.2.2 Deformación por fluencia lenta en estado transitorio.....	33
---	----

4.2.3 Deformación por fluencia lenta en estado estacionario	33
---	----

4.3 Relaciones constitutivas con mecanismos de deformación	34
---	-----------

4.4 Relación constitutiva de la sal	36
--	-----------

4.5 Determinación de los parámetros de la sal	38
--	-----------

CAPÍTULO 5 FLUJO DE FLUIDOS ACOPLADOS A LA DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA.....40

5.1 Introducción.....	40
------------------------------	-----------

5.2 Ecuación de difusión convencional en la industria Petrolera.....	40
---	-----------

5.3 Flujo de fluidos acoplados a la Geomecánica	42
--	-----------

5.3.1 Ecuación de continuidad para el fluido y el sólido	42
--	----

5.3.2 Ecuación de Darcy modificada.....	44
---	----

5.3.3 La derivada material.....	44
---------------------------------	----

5.3.4 Relación deformación-porosidad	45
--	----

5.3.5 Ecuación de difusión acoplada a la deformación Geomecánica	46
--	----

5.3.6 Ecuación de momentum lineal para un medio poroelástico	48
--	----

CAPÍTULO 6 SIMULACIÓN DE FLUJO RADIAL HACIA UN POZO CUYA ÁREA DE DRENE TIENE UN DOMO SALINO ASOCIADO.....51

6.1 Introducción.....	51
------------------------------	-----------

6.2 Ecuaciones del simulador	52
---	-----------

6.2.1 Condiciones iniciales y de frontera para presión y velocidad del sólido.....	52
--	----

6.2.2 Condición en la interfase.....	53
6.2.3 Ecuación de momentum lineal para el domo salino	54
6.3 Diferencias finitas	55
6.4 Método numérico	60
6.5 Validación del simulador	64
CAPÍTULO 7 DISCUSIÓN DE RESULTADOS	67
7.1 Introducción.....	67
7.2 Influencia del domo salino en la presión promedio del yacimiento	68
7.3 Análisis de sensibilidad.....	70
7.3.1 Efecto del gasto del pozo	70
7.3.2 Efecto de la velocidad de explotación.....	71
7.3.3 Efectos de propiedades del domo salino	72
7.3.4 Efectos de las propiedades del yacimiento	76
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	79
NOMENCLATURA.....	81
REFERENCIAS.....	84
APÉNDICE A ALGORITMO DE THOMAS.....	87

Lista de Figuras

Figura 1.1 Formaciones de Sal con potencial de exploración en aguas profundas. [20]..	1
Figura 1.2 Estructuras Salinas en el Golfo de México. [8].....	2
Figura 2.1 Ilustración de fuerzas y esfuerzos.	4
Figura 2.2 Componentes del tensor de esfuerzo en tres direcciones.....	6
Figura 2.3 Representación de la ecuación de momentum lineal.	8
Figura 2.4 Deformación en 2 Dimensiones	10
Figura 2.5 Deformación debido a esfuerzo uniaxial.	13
Figura 3.1 Pruebas para la obtención experimental de las constantes poroelásticas a) con camisa, b) sin camisa. [11]	23
Figura 4.1 Estructuras salinas a) estructuras provenientes de líneas, b) estructuras provenientes de puntos. [17]	31
Figura 4.2 Mapa de mecanismos de la sal. [19].....	35
Figura 5.1 Elemento de un medio poroso a) Volumen de control con flujo en dirección “ x ”, b) Área transversal al flujo en dirección “ x ”.....	43
Figura 6.1 Representación esquemática de un yacimiento con radio variable “ r_e ” y con un domo salino asociado, a) Vista tridimensional, b) Vista transversal al eje vertical. ...	51
Figura 6.2 Representación de tasa de cambio de esfuerzos con respecto al tiempo en la interfase.....	53
Figura 6.3 Distribución de nodos en la malla. [9].....	56
Figura 6.4 Diagrama de flujo del simulador creado.	63
Figura 6.5 Comparación artículo-simulador de perfil de permeabilidad para varios valores iniciales.	65
Figura 6.6 Comparación artículo-simulador del perfil de permeabilidad para permeabilidad constante y variable.	66
Figura 7.1 Influencia de la sal en la presión después de 10 años de producción	68

Figura 7.2 Influencia de la sal en el desplazamiento radial después de 10 años de producción.....	69
Figura 7.3 Efecto del gasto en producción en desplazamiento del sólido	70
Figura 7.4 Desplazamientos para diferentes velocidades de explotación	72
Figura 7.5 Efecto de “ α_s ” en el desplazamiento y presión	73
Figura 7.6 Efecto de “ β ” en el desplazamiento y presión	74
Figura 7.7 Efecto de “ δ ” en el desplazamiento y presión	74
Figura 7.8 Efecto de “ A ” en el desplazamiento y presión	75
Figura 7.9 Efecto del tamaño del Domo Salino en el desplazamiento y presión	76
Figura 7.10 Efecto de “ λfr ” en el desplazamiento y presión.....	77
Figura 7.11 Efecto del Módulo de corte en el desplazamiento y presión.	78

Lista de Tablas

Tabla 2.1 Relaciones entre constantes elásticas [11]	15
Tabla 7.1 Valores de entrada del simulador	67
Tabla 7.2 Presiones para diferentes velocidades de explotación.....	72

Resumen

Se analiza la influencia de un domo salino en el mantenimiento de la presión promedio de un yacimiento en producción. Para efectuar los cálculos se creó un simulador representando el comportamiento de un sistema compuesto por 2 medios (un yacimiento cilíndrico y un domo salino cilíndrico que rodea en su totalidad al yacimiento) que utiliza la teoría del flujo de fluidos acoplados a la deformación geomecánica. Los resultados muestran que aunque la deformación provocada por el domo salino en el yacimiento es muy pequeña, la influencia en la presión promedio del yacimiento es significativa para tiempos prolongados de producción, por lo que debe considerarse el medio que rodea al yacimiento de lo contrario se pueden llegar a errores significativos.

Capítulo 1 Introducción

La industria petrolera está afrontando retos cada vez más grandes; con la escasez de yacimientos convencionales, la necesidad de buscar y obtener los hidrocarburos provoca que la explotación de yacimientos no convencionales; como los yacimientos en aguas profundas o los yacimientos con permeabilidades muy bajas (lutitas), sea cada vez más común.

Una zona que ha tenido un gran interés en tiempos recientes es el llamado triángulo dorado de aguas profundas; se compone por las aguas de África, Brasil y el Golfo de México. Como se aprecia de la figura 1.1, muchas estructuras salinas se encuentran presentes en el triángulo dorado.



Figura 1.1 Formaciones de Sal con potencial de exploración en aguas profundas. [20]

Las estructuras salinas son uno de los grandes retos que presenta la industria petrolera actualmente; los estratos salinos tienen una densidad relativamente baja incluso después de que quedan sepultados por capas más jóvenes; en cambio los estratos de roca incrementan su densidad conforme la sobrecarga aumenta; esto provoca que

algunas veces los estratos salinos puedan migrar y formar estructuras salinas muy diversas, como las que existen en el Golfo de México (Figura 1.2).

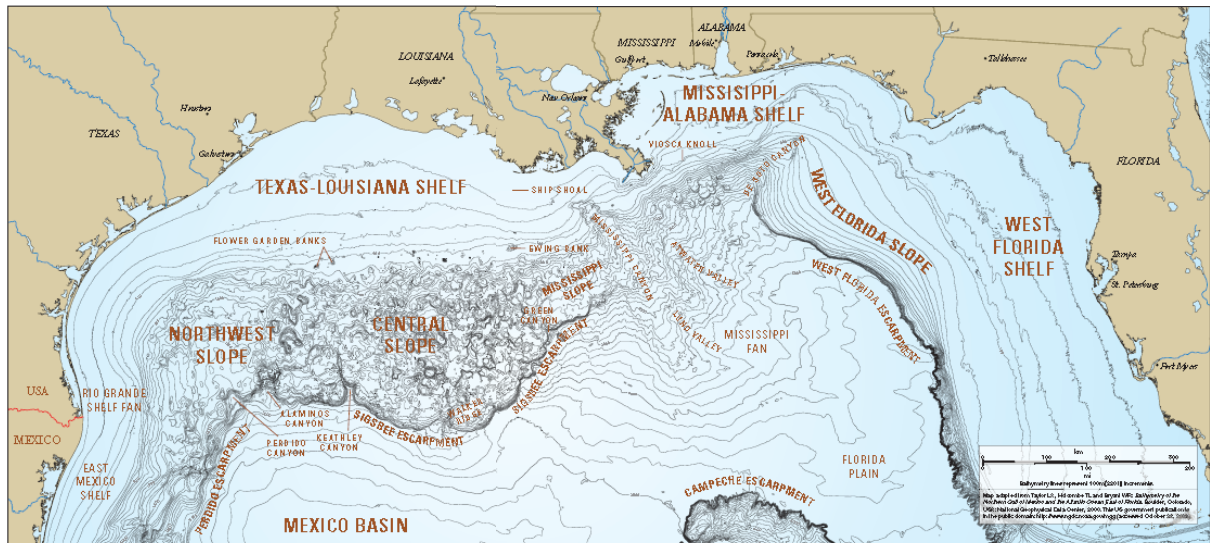


Figura 1.2 Estructuras Salinas en el Golfo de México. [8]

La presencia de sal generalmente está asociada con presiones anormales, zonas fracturadas, temperaturas anormales, áreas de inestabilidad tectónica, etc., y es problema grave durante la perforación de pozos que atraviesen estratos de sal.

La sal también dificulta la exploración sísmica, debido a que no se pueden caracterizar de forma adecuada los estratos que se encuentren debajo de sus capas, y la detección de zonas con potencial se vuelve incierta y muy complicada.

Pero la sal tiene una característica que es de vital importancia para la industria petrolera; la sal posee una permeabilidad muy baja, esto la convierte en una roca sello excelente, que propicia la acumulación de hidrocarburos en su vecindad. Por lo tanto la sal no solo se encuentra durante la exploración geofísica o durante la perforación de pozos, la sal también se encuentra delimitando a muchos yacimientos petroleros como roca sello. Por estas razones, el interés sobre la mecánica salina para la industria petrolera está aumentando.

El objetivo de esta tesis es evaluar y cuantificar la influencia que tiene un domo salino que delimita a un yacimiento petrolero, en el mantenimiento de la presión promedio del yacimiento; aunque en la literatura se tienen bien establecidos cuáles son los

mecanismos principales de producción de un yacimiento petrolero, hasta el momento nunca se ha tratado a un domo salino como posible mecanismo de producción.

Para caracterizar al domo salino se usó la teoría poroelástica que se explica detalladamente en el capítulo tres, se discute un modelo constitutivo del domo salino en el capítulo cuatro y la teoría de flujo de fluidos acoplados a la deformación geomecánica se expone en el capítulo cinco. El modelo resultante se programó en Visual Basic en la forma mostrada en el capítulo seis y se analizan los resultados obtenidos con el simulador en el capítulo siete para entender la influencia que tiene el domo salino en la presión y ver cuáles son los factores más importantes que deben considerarse cuando se tiene un yacimiento delimitado por un domo salino.

Por último se presentan las conclusiones y recomendaciones a las que se llegó con el trabajo realizado así como las diferentes áreas que se pueden mejorar para tener una mejor comprensión de lo que realmente está sucediendo entre el yacimiento y el domo salino.

Capítulo 2 Elasticidad

2.1 Esfuerzo

El esfuerzo, se define como la fuerza que actúa sobre un área. De forma más precisa el esfuerzo es un tensor que describe la densidad de fuerzas actuando sobre todas las superficies que pasan por un punto dado.

Si se observa la figura 2.1, un peso descansa sobre el pilar; debido a este peso una fuerza actúa en cada parte del pilar, desde la cima hasta su base.

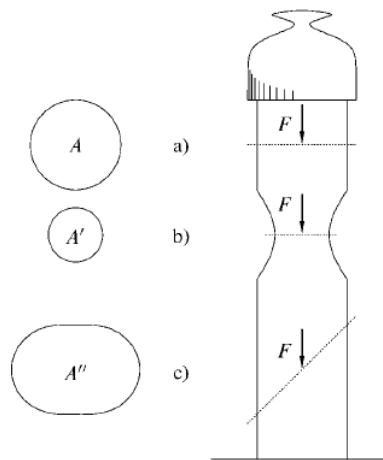


Figura 2.1 Ilustración de fuerzas y esfuerzos.

El área transversal en a) es A , si la fuerza que actúa a través del pilar es F , entonces el esfuerzo en a) es:

$$\sigma = \frac{F}{A} \dots\dots\dots (2.1)$$

Para el área transversal b), debido a que la fuerza que actúa es la misma, entonces el esfuerzo es mayor en b) que en a). Los esfuerzos dependen entonces de la posición del objeto que se analice, es así como si subdividimos el área transversal en a) en un

infinito número de ΔA sobre el cual actúe un infinitésima parte de la fuerza total, ΔF entonces el esfuerzo en un punto P, sobre la superficie a) es:

$$\sigma = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_i} \dots\dots\dots (2.2)$$

Para la zona c) la fuerza no es normal a la superficie A'' a diferencia de los dos casos anteriores, por lo que se puede descomponer la fuerza en un componente F_n que sea normal a la superficie A'' y otro componente F_p que sea paralelo a ella.

Utilizando estas componentes de fuerza, se define al esfuerzo normal (σ) y esfuerzo cortante (τ), como:

$$\sigma = \frac{F_n}{A''} , \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\tau = \frac{F_p}{A''} \dots\dots\dots (2.4)$$

En esta tesis, los esfuerzos compresivos se tomarán como positivos.

2.2 Tensor de Esfuerzos

Debido a que los esfuerzos dependen de la posición, para obtener una descripción completa del estado de los esfuerzos en un punto, se tienen que describir los esfuerzos en tres direcciones ortogonales.

Los esfuerzos normales a una de las direcciones (x, y, z) tendrán como subíndice éstas letras, mientras que los esfuerzos cortantes tendrán dos letras; la primera con respecto a la dirección que son normales y la segunda con respecto a la dirección que son cortantes.

Muchas veces para facilitar los cálculos se utiliza otra nomenclatura y en lugar de usar las letras se utilizan números para denotar las direcciones. Para denotar a los tensores, se ocupará la misma letra, pero en negritas (σ). Por lo tanto hay nueve componentes del tensor de esfuerzos, que se ejemplifican en la figura 2.2:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} . \dots\dots\dots (2.5)$$

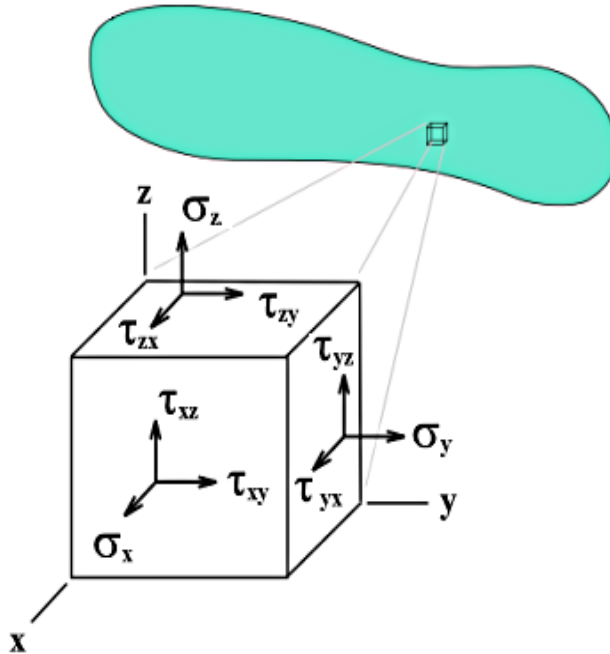


Figura 2.2 Componentes del tensor de esfuerzo en tres direcciones.

Si se analiza la figura 2.2 y se asume que en ese punto se tiene movimiento pero no rotación, éste estado requiere que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} . \dots\dots\dots (2.6)$$

Lo que da como resultado que el tensor de esfuerzos sea simétrico; por lo tanto se reduce a seis el número de componentes del tensor de esfuerzos.

2.3 Ecuación de momentum lineal

En un cuerpo siempre están actuando varias fuerzas; se pueden distinguir dos tipos principales, las fuerzas de contacto y las fuerzas de cuerpo. Las fuerzas de cuerpo son aquellas producidas por los efectos de algún campo de fuerza, y actúan en cada una de las partes del cuerpo. Un ejemplo de una fuerza de cuerpo es la gravedad causada por un campo gravitatorio.

Denotaremos como $b_{x_1}, b_{x_2}, b_{x_3}$, a las componentes de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa; entonces para el paralelepípedo de la figura 2.3, con densidad ρ y volumen dV , la fuerza debido a gravedad es $b_{x_2}\rho dV = g\rho dV$.

Las fuerzas de contacto son los esfuerzos normales y cortantes que componen al tensor de esfuerzos.

Según la segunda ley de Newton, el conjunto de fuerzas debe producir una fuerza resultante igual a la masa del objeto multiplicado por su aceleración. Debido a que en la geomecánica es común asumir aceleraciones muy pequeñas, las ecuaciones se igualan a cero.

Si se toma en cuenta el paralelepípedo con dimensiones dx_1, dx_2, dx_3 de la figura 2.3 donde están actuando fuerzas de cuerpo y fuerzas de contacto, la ecuación de momentum lineal para en la dirección x_1 es la siguiente:

Para las fuerzas de contacto normales:

$$-\sigma_{11}dx_2dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3 \dots\dots\dots (2.7)$$

Para las fuerzas de contacto cortantes:

$$-\sigma_{21}dx_1dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3 - \sigma_{31}dx_1dx_2 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2 \dots\dots (2.8)$$

Para la fuerza de cuerpo:

$$\rho b_{x_1}dx_1dx_2dx_3 \dots\dots\dots (2.9)$$

Si se suman las ecuaciones 2.7 a 2.9 e igualándolas a una fuerza resultante, igual a la masa del cuerpo veces su aceleración, y dividiendo por el volumen del paralelepípedo:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_{x_1} = \rho \frac{\partial v_{x_1}}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (2.10)$$

De forma similar, para las direcciones x_2 y x_3 las ecuaciones son respectivamente:

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_{x_2} = \rho \frac{\partial v_{x_2}}{\partial t} = 0, \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \rho b_{x_3} = \rho \frac{\partial v_{x_3}}{\partial t} = 0. \dots\dots\dots (2.12)$$

De forma compacta la ecuación de momentum lineal para las tres direcciones es:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_{x_i} = 0. \dots\dots\dots (2.13)$$

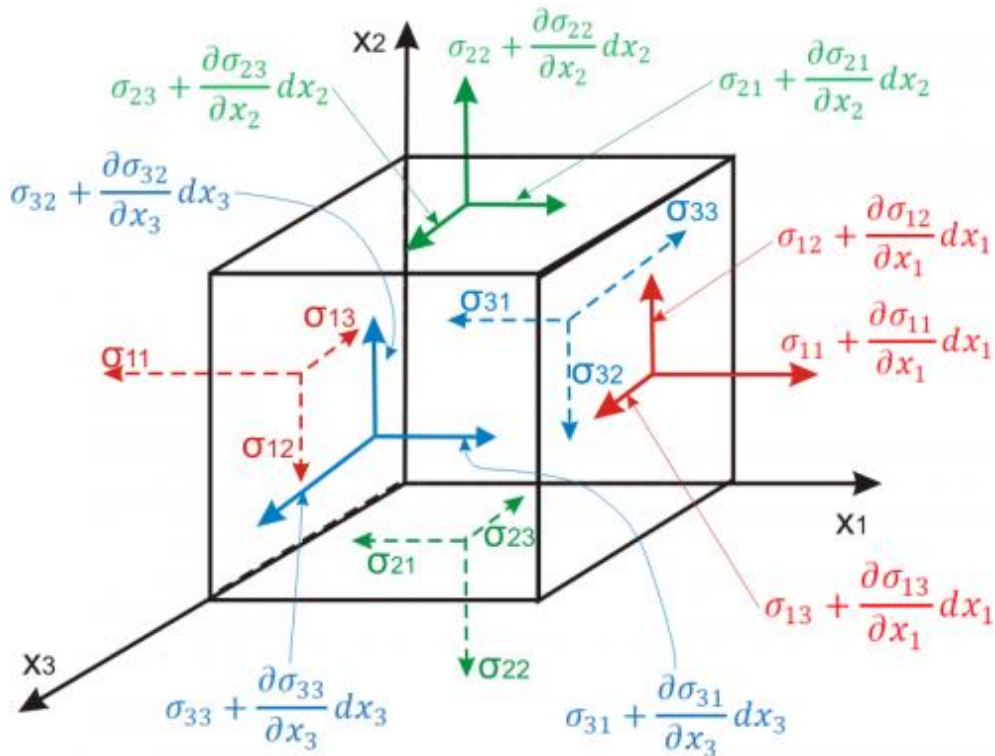


Figura 2.3 Representación de la ecuación de momentum lineal.

2.4 Esfuerzos Desviatorios

El tensor de esfuerzos se puede visualizar como la suma de esfuerzos que causan extensión o compresión uniforme más los esfuerzos que causan distorsión. Los primeros son los esfuerzos normales promedio y los segundos son los esfuerzos desviatorios.

Los esfuerzos normales promedio se definen como el promedio algebraico de la diagonal principal del tensor de esfuerzos, o como la tercera parte de la traza del tensor.

$$\bar{\sigma} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3}, \dots\dots\dots (2.14)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (2.15)$$

Una propiedad importante del esfuerzo normal promedio es que también es un invariante del tensor de esfuerzos; esto significa que sin importar la rotación que se tenga, el esfuerzo normal promedio siempre será el mismo.

Debido a que la suma de los esfuerzos uniformes y los desviatorios deben dar como resultado el tensor de esfuerzos, el tensor de esfuerzos desviatorios se define como:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (2.16)$$

2.5 Deformación unitaria

Para la geomecánica la deformación es el cambio de longitud y orientación relativa. Si la posición relativa de las partículas dentro de un cuerpo cambia, de tal forma que las nuevas posiciones no puedan obtenerse con un movimiento de traslación o rotación, entonces el cuerpo se dice que se ha deformado.

Hay dos tipos de deformación, la elongación/compresión y la que se describe por el cambio en el ángulo interno entre dos direcciones, que inicialmente eran ortogonales.

En la figura 2.4 se muestra la deformación en dos dimensiones; se presenta un cambio en las posiciones de los puntos *Q* y *P*. Se puede establecer que hubo un movimiento en sus coordenadas; si se describen a estos movimientos por medio de un vector de desplazamiento $\vec{u}(u_x, u_y)$, entonces se pueden definir los nuevos puntos con la deformación *Q'* y *P'* en función de las posiciones iniciales y los desplazamientos.

$$Q = (x, y + \Delta y) , P = (x + \Delta x, y) , O = (x, y)$$

$$Q' = [x - u_x(x, y + \Delta y), y + \Delta y - u_y(x, y + \Delta y)] , O' = [x - u_x(x, y), y - u_y(x, y)]$$

$$P' = [x + \Delta x - u_x(x + \Delta x, y), y - u_y(x + \Delta x, y)]$$

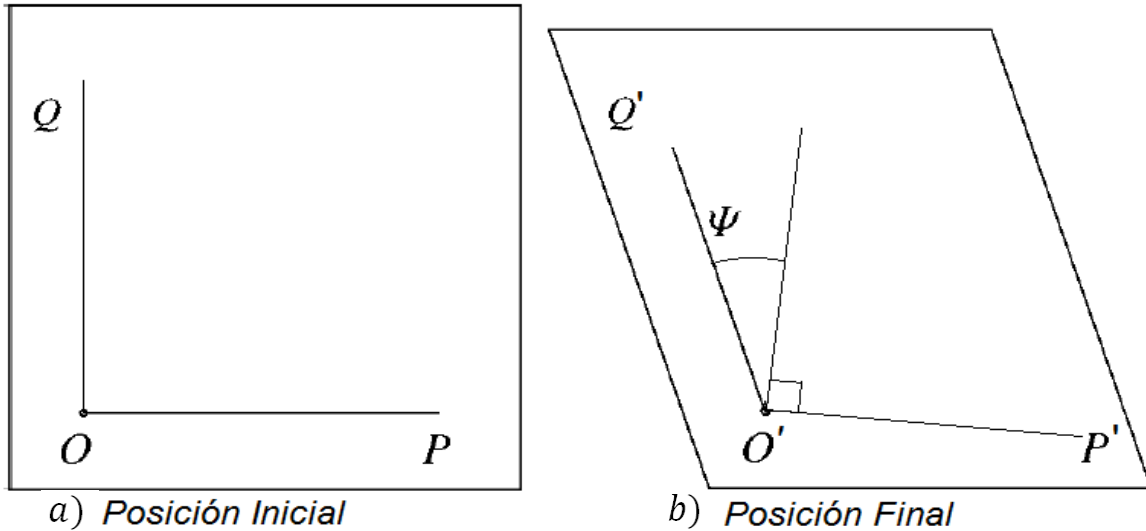


Figura 2.4 Deformación en 2 Dimensiones

La deformación por elongación o compresión se conoce como deformación normal unitaria, debido a que es adimensional y se define para las tres direcciones de un sistema ortogonal. Es el cambio de longitud entre dos puntos entre una longitud de referencia.

En la figura 2.4 la deformación unitaria normal en la dirección x es:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{|\overline{O'P'}|_x - |\overline{OP}|_x}{|\overline{OP}|_x} = \frac{\Delta x - [\Delta x + u_x(x, y) - u_x(x + \Delta x, y)]}{\Delta x} = \frac{u_x(x + \Delta x, y) - u_x(x, y)}{\Delta x} \\ \epsilon_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, y) - u_x(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para ser congruente con la forma de definir a los esfuerzos, se tomó como positiva a la compresión.

Como se mencionó anteriormente, también existe la deformación que se describe como el cambio en el ángulo interno entre dos direcciones inicialmente ortogonales; a esta deformación se le denomina deformación unitaria cortante.

Tomando como base a la figura 2.4 se define a la deformación unitaria cortante como la mitad del nuevo ángulo formado ψ ; si se supone que el ángulo es muy pequeño, se puede describir a la deformación unitaria cortante como:

$$\Gamma_{xy} = \frac{1}{2}\psi \approx \frac{1}{2}\tan(\psi) \approx \frac{1}{2}\sin(\psi) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\frac{1}{2}\frac{\overline{O'P'} \cdot \overline{O'Q'}}{|\overline{O'P'}| \cdot |\overline{O'Q'}|}, \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\overline{O'P'} = [\Delta x + u_x(x, y) - u_x(x + \Delta x, y), u_y(x, y) - u_y(x + \Delta x, y)], \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

$$\overline{O'Q'} = [u_x(x, y) - u_x(x, y + \Delta y), \Delta y + u_y(x, y) - u_y(x, y + \Delta y)], \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 2.19 y 2.20 en la ecuación 2.18, asumiendo de nuevo que como los desplazamientos son infinitesimales, sus productos y cuadrados se vuelven despreciables y además, cuando se obtiene el límite de la ecuación cuando $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ se llega a:

$$\Gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right). \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

Al observar la ecuación 2.21 se aprecia la simetría entre las deformaciones unitarias cortantes, si se intercambian de orden las letras xy , entonces se obtiene la misma ecuación 2.21 en diferente orden.

También se pueden desarrollar las deformaciones normales o cortantes unitarias para las demás direcciones quedando como se muestra:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

$$\Gamma_{xz} = \Gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

$$\Gamma_{yz} = \Gamma_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right). \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

2.6 Tensor de Deformación

Al igual que los esfuerzos, para describir el estado de deformación de un punto se tiene que describir mediante el uso de un tensor de deformación (ϵ), que se obtiene con los componentes de las ecuaciones 2.22-2.27 de la siguiente forma:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \epsilon_y & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.28)$$

A la traza del tensor de deformación se le define como la deformación volumétrica (ϵ_{vol}) y es la medida relativa del cambio volumétrico del cuerpo que se está analizando. Debido que la traza es un invariante de cualquier tensor, la deformación volumétrica también es un invariante, y no importa la rotación que se le dé al sistema, la deformación volumétrica (ϵ_{vol}) siempre será la misma.

$$\epsilon_{vol} = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \nabla \cdot u = -\frac{dV}{V} \dots\dots\dots (2.29)$$

Al igual que los esfuerzos, la deformación también tiene una notación simplificada:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \dots\dots\dots (2.30)$$

2.7 Ley constitutiva para materiales isótropos

La teoría de la elasticidad, describe situaciones donde existe una relación lineal entre los esfuerzos y la deformación unitaria resultante de estos esfuerzos. Aunque la mayoría de las rocas se comporta de forma no lineal, para un rango definido del cambio de los esfuerzos, la teoría de la elasticidad describe de forma exitosa el comportamiento de las rocas.

En la figura 2.5 existe una fuerza compresiva F que provoca una deformación en el paralelepípedo. Si el área transversal es D^2 entonces el esfuerzo uniaxial es $\sigma_x = \frac{F}{D^2}$ y provoca una deformación en la misma dirección $\epsilon_x = \frac{L-L'}{L}$. Debido a que existe una

relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, esta relación se puede establecer como:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

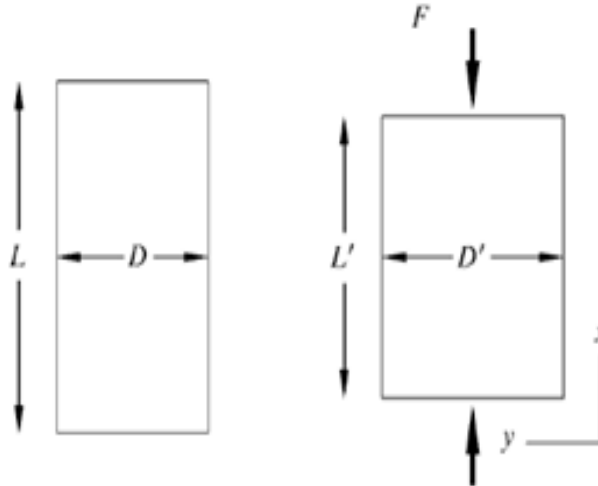


Figura 2.5 Deformación debido a esfuerzo uniaxial.

La ecuación 2.31 se conoce como la Ley de Hooke, donde E es el módulo de Young con dimensión igual a la de presión. El módulo de Young es una propiedad de la resistencia de la muestra a la deformación, si el módulo aumenta entonces para una misma carga se tendrá una deformación menor.

Además de la deformación en “ x ”, la muestra de la figura 2.5 también se deformó en la dirección perpendicular al movimiento “ y ”, existe una relación entre dos deformaciones ortogonales producidas por una misma carga uniaxial:

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}, \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson; es el cociente de la expansión en la dirección perpendicular a la carga aplicada entre la compresión longitudinal a la carga aplicada. Se usa el signo negativo para que el coeficiente de Poisson sea positivo.

Las ecuaciones 2.31 y 2.32 están definidas para estados de esfuerzos uniaxiales, por lo que se tendrá un módulo de Young y un coeficiente de Poisson para cada una de las direcciones x, y, z . Si el cuerpo que se analiza se comporta de la misma forma sin

importar la dirección, se establece que el cuerpo es isótropo y en lugar de tener tres módulos de Young y tres cocientes de Poisson (uno para cada dirección), se tiene solo uno módulo de Young y un coeficiente de Poisson, ya que los valores son iguales para las tres direcciones.

Para los cuerpos isótropos las relaciones elásticas se expresan en la forma siguiente así como lo explican en la sección 2.1 de la referencia [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), \dots\dots\dots (2.33)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z), \dots\dots\dots (2.34)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z), \dots\dots\dots (2.35)$$

$$\Gamma_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy}, \dots\dots\dots (2.36)$$

$$\Gamma_{xz} = \frac{1}{2G}\tau_{xz}, \dots\dots\dots (2.37)$$

$$\Gamma_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz}, \dots\dots\dots (2.38)$$

donde G es el módulo de corte; es una medida de la resistencia del cuerpo a la deformación causada por un esfuerzo cortante. Se observa en las ecuaciones 2.36 a 2.38 que si el módulo de corte o de rigidez crece, la deformación disminuye y viceversa.

Si se desea expresar a los esfuerzos en función de las deformaciones, las nuevas ecuaciones son las siguientes [2]:

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z), \dots\dots\dots (2.39)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z), \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2G)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \dots\dots\dots (2.41)$$

$$\tau_{xy} = 2G\Gamma_{xy}, \dots\dots\dots (2.42)$$

$$\tau_{xz} = 2G\Gamma_{xz}, \dots\dots\dots (2.43)$$

$$\tau_{yz} = 2G\Gamma_{yz}, \dots\dots\dots (2.44)$$

donde λ es la constante de Lamé, la cual obtiene al despejar los esfuerzos del sistema de ecuaciones formado con las ecuaciones 2.33-2.35.

Otra constante elástica es el módulo de compresibilidad (K); es el cociente entre el esfuerzo hidrostático (σ_p) y la deformación volumétrica (ε_{vol}). Cuando un objeto se encuentra bajo un esfuerzo hidrostático, cada uno de los esfuerzos normales son iguales y los esfuerzos cortantes son cero.

$$K = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_{vol}} = \lambda + \frac{2}{3}G \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

El módulo de compresibilidad es el inverso a la compresibilidad y tiene unidades de presión.

Para los cuerpos isótropos, es suficiente conocer 2 propiedades elásticas para definir el estado del cuerpo y las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones, como se aprecia en las ecuaciones 2.33-2.44.

La tabla 2.1 muestra las relaciones que existen entre las diferentes constantes elásticas.

Tabla 2.1 Relaciones entre constantes elásticas [11]

$E = 3K(1 - 2\nu)$	$K = \lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + G} = 2\nu$
$E = 2G(1 + \nu)$	$K = \frac{2}{3}G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{G}{\lambda + G} = 1 - 2\nu$
$E = \frac{9KG}{3K + G}$	$K = \lambda + \frac{2}{3}G$	$\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 - \nu)$
$E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$	$K = \frac{GE}{9G - 3E}$	$\frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 + \nu)$
$E = \frac{\lambda}{\nu}(1 + \nu)(1 - 2\nu)$	$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{3\lambda + 4G}{\lambda + G} = 2(2 - \nu)$

2.8 Energía potencial

Cuando un cuerpo elástico se deforma debido a la acción de varios esfuerzos, posee energía potencial que puede ser liberada al removerse los esfuerzos.

Considérese un cubo pequeño con lados a , al que se le aplica un esfuerzo uniaxial σ y tiene una deformación igual a $\varepsilon = \sigma/E$. El trabajo realizado para llevar al cuerpo de un esfuerzo aplicado 0 a σ_1 es:

*Trabajo = Fuerza * distancia*

$$Trabajo = \int_0^{\sigma_1} (a^2 \sigma)(ad\varepsilon) = \frac{a^3}{E} \int_0^{\sigma_1} \sigma d\sigma = \frac{1}{2} a^3 \frac{\sigma_1^2}{E} = \frac{1}{2} a^3 \sigma_1 \varepsilon_1 . \quad \dots\dots\dots (2.46)$$

En la ecuación 2.46 se tiene una compresión uniaxial; si ahora se toman en cuenta las otras dos direcciones y los esfuerzos cortantes, usando las propiedades simétricas del tensor de esfuerzos y el tensor de deformación. La energía potencial por unidad de volumen (W) o la energía de deformación es:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy} \Gamma_{xy} + 2\tau_{yz} \Gamma_{yz} + 2\tau_{xz} \Gamma_{xz}) . \quad \dots\dots\dots (2.47)$$

Cuando se tiene una relación lineal entre la deformación unitaria y los esfuerzos, como en la teoría elástica, la energía de deformación se puede representar de muchas formas diferentes.

$$2W = (\lambda + 2G)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2\lambda(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z) + 4G(\Gamma_{xy}^2 + \Gamma_{yz}^2 + \Gamma_{xz}^2). \quad (2.48)$$

$$2W = (\lambda + 2G)\varepsilon_{vol}^2 - 4G(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z) + 4G(\Gamma_{xy}^2 + \Gamma_{yz}^2 + \Gamma_{xz}^2). \quad \dots\dots\dots (2.49)$$

De la ecuación 2.48 también se obtienen importantes propiedades; al derivar la energía de deformación con respecto a la deformación unitaria en alguna dirección, se obtendrá el esfuerzo en esa dirección:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) = \sigma_x . \quad \dots\dots\dots (2.50)$$

La ecuación 2.50 es válida para cualquier dirección, sin importar si el cuerpo es isótropo o anisótropo. Este planteamiento es muy importante, ya que toda la teoría elástica se puede deducir de esta forma.

Capítulo 3 Poroelasticidad

3.1 Introducción

La teoría poroelástica tiene sus orígenes debido a las interrogantes sobre la consolidación del suelo; se descubrió que cuando el suelo saturado de fluido se somete a un esfuerzo, no mostraba deformación de forma instantánea; es decir se consolidaba de forma gradual, a una tasa variable.

El primero en abordar el problema de la consolidación del suelo fue el que después se convertiría en el padre de la mecánica de suelos y de la ingeniería geotécnica, el ingeniero Karl Terzaghi [23]. Él asumió que las partículas que conforman el suelo están unidas por fuerzas moleculares y por ello, el medio poroso saturado por agua, tiene propiedades elásticas. Terzaghi aplicó estos conceptos al análisis de la consolidación del suelo bajo una carga constante y previniendo una expansión lateral.

Después de la teoría de Terzaghi, Biot 1941 [3] creó la teoría poroelástica. Para su teoría en su primer artículo sobre el tema "General theory of three dimensional consolidation" consideró las condiciones siguientes:

1. Material isótropo.
2. Reversibilidad de las relaciones esfuerzo-deformación.
3. La relación entre esfuerzo y deformación es lineal.
4. Deformaciones pequeñas.
5. El agua de los poros es incompresible.
6. El agua puede contener burbujas de aire.
7. El agua fluye por los poros de acuerdo a la ley de Darcy.

Como justificación él menciona que debido a la deformación pequeña que se supone para el material, es razonable pensar en una relación lineal y reversible entre el esfuerzo y la deformación, especialmente para las partículas coloidales que constituyen

a la arcilla. En publicaciones posteriores Biot extendería la teoría para materiales anisótropos y materiales viscoelásticos basándose, en la teoría de la termodinámica y los procesos irreversibles [5] [4].

En el estudio realizado se limita la teoría de Biot para materiales isótropos y elásticos.

3.2 Energía de deformación para materiales porosos y saturados

Para poder definir a la energía de deformación en materiales porosos, se deben definir a los esfuerzos así como a los desplazamientos resultantes. Se denotará con $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ a los desplazamientos del sólido y a $\mathbf{U}(U_x, U_y, U_z)$ como los desplazamientos del fluido dentro del medio poroso.

Para definir a los esfuerzos, Biot se dio cuenta que el esfuerzo total (σ) se componía de dos partes; el esfuerzo provocado por la roca (σ_{roca}) y por el fluido (σ_{fluido}).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij_{roca}} + \sigma_{fluido} \delta_{ij} , \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\delta_{ij} = 1, i = j ; \delta_{ij} = 0, i \neq j ,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker; se usa este operador porque el fluido no provoca cambios en los esfuerzos cortantes, ya que la presión tiene como característica ser siempre normal a la superficie.

La porosidad (ϕ) se define como el cociente entre el volumen de poros y el volumen de roca; dentro de este trabajo se entiende como porosidad a la porosidad efectiva, la que incluye únicamente a los poros interconectados, mientras que a los poros aislados se les considerará como parte del sólido. La porosidad también puede establecerse como el cociente del área ocupada por los poros en cualquier área de una sección transversal del material poroso entre el área del material poroso. Por lo que el esfuerzo del fluido se define de la manera siguiente:

$$\sigma_{fluido} = \phi p , \dots\dots\dots (3.2)$$

donde p es la presión del fluido. En el artículo original de Biot [6], se asume a los esfuerzos compresivos como negativos, por lo al esfuerzo opuesto por el fluido es el negativo de la ecuación 3.2.

Para un volumen Ω delimitado por una superficie S la energía de deformación puede expresarse por medio de la ecuación 3.3:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iint_S \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij_{roca}} n_j \delta u_i) dS + \iint_S \sum_{j=1}^3 (\sigma_{j_{fluido}} n_j \delta U_j) dS, \dots (3.3)$$

donde n_j es la componente perpendicular a la dirección "j". Si se sustituyen las ecuaciones 3.1 y 3.2 en la ecuación 3.3, para describir a la energía de deformación en función de los esfuerzos totales y la presión del fluido, se obtiene:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iint_S \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} n_j \delta u_i) dS + p \iint_S \sum_{j=1}^3 (n_j \delta w_j) dS, \dots (3.4)$$

$$\delta w_j = \phi (\delta U_j - \delta u_j). \dots (3.5)$$

El vector w representa el flujo de fluidos relativo al sólido, medido en términos del volumen por unidad de área de la roca.

Aplicando el teorema de Gauss para transformar una integral de superficie en una integral de volumen.

$$\iint_S a n dS = \iiint_V \nabla a dV. \dots (3.6)$$

La ecuación 3.4 se convierte en:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iiint_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\sigma_{ij} \delta u_i)}{\partial x_j} d\Omega + p \iiint_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\delta w_j)}{\partial x_j} d\Omega. \dots (3.7)$$

Si desarrollamos la derivada de la primera integral triple de la parte derecha de la ecuación 3.7 se tiene que:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\sigma_{ij} \delta u_i)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\delta u_i \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \right) \dots (3.8)$$

Usando la ecuación de momentum lineal 2.13 y si se asume que no hay fuerzas de cuerpo, entonces la ecuación 3.7 se reduce a:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iiint_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} d\Omega + p \iiint_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\delta w_j)}{\partial x_j} d\Omega . \quad (3.9)$$

Si en la ecuación 3.9 se sustituyen las definiciones de deformación y se desarrolla la ecuación resultante:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iiint_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + 2\tau_{xy} \delta \Gamma_{xy} + 2\tau_{yz} \delta \Gamma_{yz} + 2\tau_{xz} \delta \Gamma_{xz} - p \delta \zeta) d\Omega , \quad (3.10)$$

$$\zeta = - \left[\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] = -\nabla \cdot \mathbf{w} = \phi \nabla \cdot (\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j) . \quad (3.11)$$

El término ζ se puede interpretar como la deformación volumétrica del fluido relativa a la del sólido. Como se vio en la sección 2.6 la divergencia del desplazamiento es igual a la deformación volumétrica, por lo tanto el término ζ se puede representar de la forma siguiente:

$$\zeta = -\phi \left(\frac{\Delta V_p}{V_p} + \frac{p}{K_f} \right) \quad (3.12)$$

Donde V_p es el volumen de poros o el volumen ocupado por el fluido y K_f es el módulo de compresibilidad del fluido. Si el volumen de poros disminuye entonces ζ es positiva.

De la ecuación 3.10 se determina que la energía de deformación por unidad de volumen es función de siete variables $W = W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \Gamma_{xy}, \Gamma_{yz}, \Gamma_{xz}, \zeta)$. La energía de deformación debe ser una diferencial exacta por lo que se tienen las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x , \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y , \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{xy}} = \tau_{xy} , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{yz}} = \tau_{yz} , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{xz}} = \tau_{xz} , \quad -\frac{\partial W}{\partial \zeta} = p \dots \quad (3.13)$$

Aunque las ecuaciones 3.13 son válidas para cualquier tipo de relación entre los esfuerzos y las deformaciones, se asume que existen relaciones lineales y reversibles entre éstos.

Así como lo menciona Biot en la referencia [6], la energía de deformación unitaria es una ecuación cuadrática de la siguiente forma:

$$2W = (\lambda + 2G)\varepsilon_{vol}^2 - 4G(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z) + 4G(\Gamma_{xy}^2 + \Gamma_{yz}^2 + \Gamma_{xz}^2) - 2C\varepsilon_{vol}\zeta + M\zeta^2 . \quad (3.14)$$

3.3 Relaciones constitutivas poroelásticas

De forma intuitiva se puede establecer que los esfuerzos normales son afectados por la deformación volumétrica relativa del fluido a la roca, así como la presión se ve afectada por las deformaciones unitarias de la roca. Por lo tanto las relaciones poroelásticas son:

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) - C\zeta , \quad (3.15)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z) - C\zeta , \quad (3.16)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2G)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - C\zeta , \quad (3.17)$$

$$\tau_{xy} = 2G\Gamma_{xy} , \quad (3.18)$$

$$\tau_{xz} = 2G\Gamma_{xz} , \quad (3.19)$$

$$\tau_{yz} = 2G\Gamma_{yz} , \quad (3.20)$$

$$p = C_2\varepsilon_{vol} - M\zeta , \quad (3.21)$$

Debido a que el medio es isótropo la constante C es la misma en las ecuaciones 3.15-3.17; además en la ecuación 3.21 se tiene solo una constante C_2 en lugar de tener tres constantes para cada una de las direcciones de la deformación.

Para demostrar que $C = C_2$ se considera una condición donde todos los esfuerzos normales son iguales $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \bar{\sigma}$ y los esfuerzos cortantes son cero $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ por lo que la energía de deformación se define:

$$W = \bar{\sigma}\varepsilon_{vol} - p\zeta . \quad (3.22)$$

Debido a que de nuevo W es una diferencial exacta:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{vol}} = \bar{\sigma} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = -p \quad \therefore \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial p}{\partial \varepsilon_{vol}} \quad \therefore \quad C_2 = C \dots\dots\dots (3.23)$$

Donde C y M son constantes poroelásticas, que definen la interacción entre el fluido y el medio poroso.

La deducción usada es una de las varias utilizadas por Biot, aunque también se aprecia que si se deriva la ecuación 3.14 se llega a la misma conclusión.

3.4 Constantes poroelásticas

Para tener un entendimiento del significado físico de M , se puede hacer que la deformación volumétrica del sólido sea nula $\varepsilon_{vol} = 0$ por lo que:

$$p = M\phi \nabla \cdot \mathbf{U} \dots\dots\dots (3.24)$$

Se observa que el producto $M\phi$ es una medida de como aumenta la presión del fluido si el volumen del fluido se incrementa; para el caso extremo de que el sólido sea completamente rígido $\varepsilon_{vol} = 0$, el producto $M\phi$ es igual al módulo de compresibilidad del fluido K_f .

Para entender el significado físico de C , se evalúa el caso donde en la roca no hay flujo de fluidos, entonces $\zeta = 0$ y ahora la ecuación 3.21 queda:

$$p = C\varepsilon_{vol} \dots\dots\dots (3.25)$$

Por lo tanto C es una medida de como aumenta la presión del fluido cuando la deformación volumétrica del sólido aumenta o el volumen del sólido disminuye y no hay flujo de fluidos dentro de la roca.

Además, de la situación $\zeta = 0$ se puede deducir que la constante de Lamé que aparece en las ecuaciones 3.15-3.17 no se refiere a la constante de Lamé del medio poroso seco, se refiere a la constante de Lamé cuando la roca está saturada y no hay flujo de fluidos dentro de ella.

Si se suman las ecuaciones 3.15-3.17 y se divide entre tres entonces:

$$\bar{\sigma} = \left(\lambda + \frac{2}{3}G\right) \varepsilon_{vol} - C\zeta = K\varepsilon_{vol} - C\zeta, \dots\dots\dots (3.26)$$

donde al igual que con la constante de Lamé el módulo de compresibilidad K es el de la roca saturada con fluido cuando no hay flujo dentro de ella.

Si se le aplica a la roca una prueba con camisa, de tal forma que la presión se mantenga constante debido a que el fluido puede salir de la roca, así como se ejemplifica en la figura 3.1 a), todo el esfuerzo es soportado por el marco de la roca; si se combina la ecuación 3.21 con 3.26 para eliminar a ζ se llega a:

$$\bar{\sigma} = \left(K - \frac{C^2}{M}\right) \varepsilon_{vol} + \frac{C}{M}p . \dots\dots\dots (3.27)$$

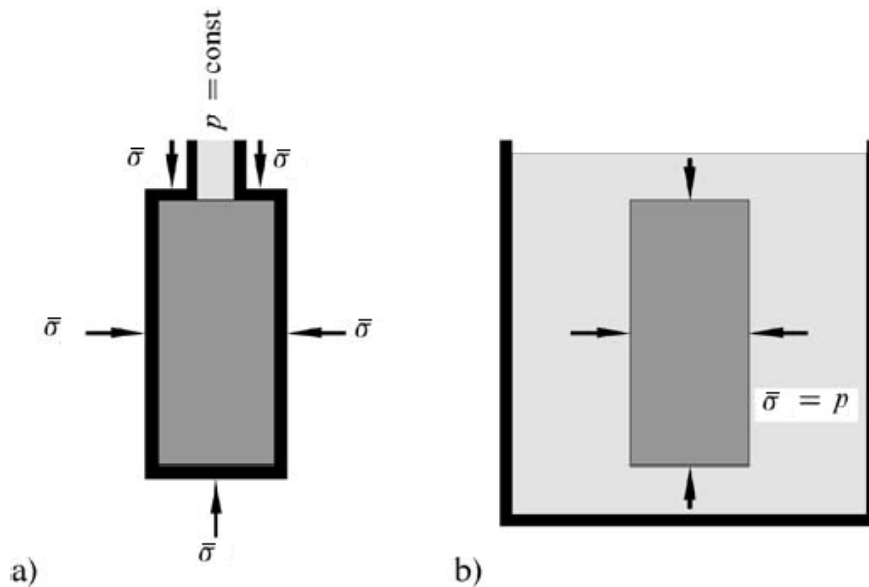


Figura 3.1 Pruebas para la obtención experimental de las constantes poroelásticas a) con camisa, b) sin camisa. [11]

Debido a que en el caso analizado la presión no tiene influencia en el esfuerzo, la ecuación 3.27 puede expresarse:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_{vol}} = \left(K - \frac{C^2}{M}\right) = K_{fr} . \dots\dots\dots (3.28)$$

Esta nueva constante poroelástica se refiere al módulo de compresibilidad del marco de la roca, ya que es lo único que está soportando al esfuerzo; como en la prueba se permite el flujo entonces a las propiedades del marco de la roca también se les llama constantes poroelásticas cuando la roca está siendo drenada.

Debido a que en las ecuaciones que incluyen a los esfuerzos cortantes no se incluyen propiedades del fluido, se deduce que el módulo de corte es el mismo para la roca cuando está siendo drenada que cuando no permite el drene, por lo que:

$$G = G_{fr} . \dots\dots\dots (3.29)$$

Si se hace una prueba donde tanto el esfuerzo aplicado como la presión del fluido son iguales, así como se ejemplifica en la figura 3.1 b); entonces se debe usar la ecuación 3.26. Si sustituye en la ecuación 3.26 la condición en que tanto el esfuerzo como la presión son iguales $\bar{\sigma} = p$ se llega a:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_{vol}} = \frac{p}{\varepsilon_{vol}} = \frac{K_{fr}}{1-\frac{c}{M}} . \dots\dots\dots (3.30)$$

Como los esfuerzos son iguales, se puede afirmar que se tiene un esfuerzo uniforme en la muestra, entonces las deformaciones volumétricas deberán de ser iguales tanto para la roca como para el fluido y el sólido, por lo tanto:

$$\frac{\Delta V_{roca}}{V_{roca}} = \frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{\Delta V_s}{V_s} . \dots\dots\dots (3.31)$$

Debido a que $\bar{\sigma} = p = -K_s \left(\frac{\Delta V_s}{V_s}\right)$ donde K_s es el módulo de compresibilidad del sólido, a veces mencionado como el módulo de compresibilidad de los granos, se tiene que:

$$\frac{\Delta V_{roca}}{V_{roca}} = \frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{\Delta V_s}{V_s} = -\varepsilon_{vol} = -\frac{p}{K_s} . \dots\dots\dots (3.32)$$

Si se compara a la ecuación 3.32 con la ecuación 3.30 se llega a la conclusión siguiente:

$$K_s = \frac{K_{fr}}{1 - \frac{C}{M}} \dots\dots\dots (3.33)$$

Además de la ecuación 3.32 y la 3.12 se deduce que:

$$\zeta = \phi \left(\frac{p}{K_s} - \frac{p}{K_f} \right) \dots\dots\dots (3.34)$$

Por otra parte si se combinan las ecuaciones 3.21 y 3.26 para eliminar ϵ_{vol} y despejando a ζ se obtiene la relación siguiente:

$$\zeta = \frac{C-K}{MK-C^2} p \dots\dots\dots (3.35)$$

Igualando las ecuaciones 3.34 y 3.35 y cancelando a la presión:

$$\phi \left(\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right) = \frac{C-K}{MK-C^2} \dots\dots\dots (3.36)$$

Con las ecuaciones 3.31, 3.33 y 3.36 se obtienen las constantes poroelásticas K, C, M en función de las propiedades elásticas de la roca drenada del sólido, la porosidad y del módulo de compresibilidad del fluido.

La derivación es la siguiente:

Se despeja la constante C de la ecuación 3.33:

$$C = M \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right) \dots\dots\dots (3.37)$$

Se despeja al módulo de compresibilidad de la roca sin drene K de la ecuación 3.28 y se sustituye la ecuación 3.37 para eliminar la constante C .

$$K = K_{fr} + \frac{C^2}{M} = K_{fr} + M \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)^2 \dots\dots\dots (3.38)$$

Se elimina de la ecuación 3.36 a la constante C sustituyendo las ecuaciones 3.37 y 3.38:

$$\phi \left(\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right) = \frac{M \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right) - K_{fr} - M \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)^2}{M \left(K_{fr} + M \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)^2 \right) - \left(M \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right) \right)^2}$$

Del lado derecho de la ecuación, se factoriza la M del numerador y se desarrolla el denominador:

$$\phi \left(\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right) = \frac{M \left[\left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right) - \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)^2 \right] - K_{fr}}{MK_{fr}}$$

Desarrollando el lado derecho:

$$\phi \left(\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right) = \frac{\left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right) K_{fr}}{K_{fr}} - \frac{1}{M}$$

Despejando el inverso de M y cancelando K_{fr} :

$$\frac{1}{M} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1}{K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)$$

Despejando M y aplicando un truco algebraico:

$$M = \frac{1}{\frac{\phi}{K_f} + \frac{1}{K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)} \left(\frac{K_f}{\phi} \right)$$

Por lo que las ecuaciones finales para M, C, K son:

$$M = \frac{K_f}{\phi} \frac{1}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)}, \dots \dots \dots (3.39)$$

$$C = \frac{K_f}{\phi} \frac{\left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)}, \dots \dots \dots (3.40)$$

$$K = K_{fr} + \frac{K_f}{\phi} \frac{\left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)^2}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s} \right)}. \dots \dots \dots (3.41)$$

Para entender el significado físico de las constantes a mayor profundidad, se muestran dos casos extremos que se pueden presentar en una roca.

El primer caso es para una roca muy dura, por lo que el marco de la roca es incompresible si se compara con el fluido $K_s, K_{fr} \gg K_f$ y las ecuaciones 3.39-3.41 se reducen a:

$$\text{Marco rígido} \left\{ \begin{array}{l} K \approx K_{fr} \\ C \approx \frac{K_f}{\phi} \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \right) \\ M \approx \frac{K_f}{\phi} \end{array} \right. \dots\dots\dots (3.42)$$

Así como se planteó antes para el caso en que el sólido fuera incompresible, se obtiene la misma definición de la constante M . Se nota como el módulo de compresibilidad para la roca sin drene es igual al módulo de compresibilidad de la roca con drene, esto se debe a que la rigidez que aporta el fluido es prácticamente despreciable.

El otro caso extremo es que el marco de la roca sea muy débil $K_s \gg K_f, K_{fr}$ por lo que ahora las ecuaciones 3.39-3.41 se reducen a:

$$\text{Marco débil} \left\{ \begin{array}{l} K \approx K_{fr} + \frac{K_f}{\phi} \\ C \approx M \approx \frac{K_f}{\phi} \end{array} \right. \dots\dots\dots (3.43)$$

En esta situación es donde el fluido tiene una influencia máxima en el medio poroso, por esta razón las constantes C y M se vuelven iguales y la constante K se ve altamente afectada por el módulo de compresibilidad del fluido y la porosidad.

3.5 Esfuerzo Efectivo

Si se vuelve a imaginar la situación donde no hay flujo de fluidos en el medio poroso $\zeta = 0$, entonces la presión se obtiene con la ecuación 3.25 y la relación entre esfuerzo y la deformación volumétrica es:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_{vol}} = K \dots\dots\dots (3.44)$$

Usando las ecuaciones 3.25 y 3.38 se llega a:

$$K = K_{fr} + \frac{c^2}{M} = K_{fr} + \frac{c}{M} \frac{p}{\epsilon_{vol}} \quad (3.45)$$

Introduciendo la ecuación 3.45 en la 3.44 para eliminar a K y reorganizando la ecuación:

$$\bar{\sigma} - \frac{c}{M} p = K_{fr} \epsilon_{vol} \quad (3.46)$$

La ecuación 3.46 muestra de forma muy clara que la deformación es directamente proporcional a la diferencia entre el esfuerzo total y la presión multiplicada por un factor $\left(\frac{c}{M}\right)$.

Karl Terzaghi se dio cuenta de este fenómeno, ya que percibió que un incremento en la carga producía la misma deformación que el reducir la presión del fluido en la misma cantidad; al lado izquierdo de la ecuación 3.45 lo definió como el esfuerzo efectivo σ' :

$$\bar{\sigma}' = \bar{\sigma} - \frac{c}{M} p \quad (3.47)$$

Aunque en realidad cuando lo definió Terzaghi, el coeficiente que multiplicaba a la presión era igual a la unidad $\frac{c}{M} = 1$ debido a que su teoría era para la consolidación de suelos, siendo que los suelos están mucho menos consolidados que las rocas. Fue en de Biot donde el coeficiente apareció de la forma en qué lo muestra la ecuación 3.47.

La explicación física del esfuerzo efectivo es que el marco de la roca soporta la parte del esfuerzo efectivo, mientras que la parte restante del esfuerzo la soporta el fluido.

Al coeficiente $\frac{c}{M}$ se le representa con la letra α y se le llama coeficiente de Biot.

$$\alpha = \frac{c}{M} = 1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \quad (3.48)$$

El rango del coeficiente de Biot es $\phi < \alpha \leq 1$; claramente para el caso de una roca con marco débil el coeficiente de Biot es igual a la unidad.

Si se utiliza la definición del coeficiente de Biot y se sustituye la ecuación 3.21 en las ecuaciones 3.15-3.18 eliminando a ζ entonces se llega a:

$$\sigma_x = \left(\lambda - \frac{c^2}{M} + 2G \right) \varepsilon_x + \left(\lambda - \frac{c^2}{M} \right) (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{c}{M} p, \quad \dots \quad (3.49)$$

$$\sigma_y = \left(\lambda - \frac{c^2}{M} + 2G \right) \varepsilon_y + \left(\lambda - \frac{c^2}{M} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + \frac{c}{M} p, \quad \dots \quad (3.50)$$

$$\sigma_z = \left(\lambda - \frac{c^2}{M} + 2G \right) \varepsilon_z + \left(\lambda - \frac{c^2}{M} \right) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{c}{M} p, \quad \dots \quad (3.51)$$

Así como se definió el módulo de compresibilidad para la roca cuando es drenada (ecuación 3.28), se define a la constante de Lamé para cuando la roca está siendo drenada de forma similar:

$$\lambda_{fr} = \lambda - \frac{c^2}{M}. \quad \dots \quad (3.52)$$

De forma simplificada las relaciones poroelásticas se escriben de la forma siguiente:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{fr} \varepsilon_{vol} + 2G \varepsilon_{ij} + \alpha p \delta_{ij}. \quad \dots \quad (3.53)$$

Si se usa la definición del esfuerzo efectivo, éste se puede representar en función de la deformación de la roca únicamente:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \alpha p \delta_{ij}, \quad \dots \quad (3.54)$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda_{fr} \varepsilon_{vol} + 2G \varepsilon_{ij}. \quad \dots \quad (3.55)$$

Capítulo 4 Comportamiento Mecánico de la Sal

4.1 Introducción

La roca salina a la que se le mencionará de ahora en adelante como “sal”, es un recurso invaluable que forma grandes depósitos en cuencas evaporíticas por todo el mundo. En la naturaleza, los estratos de sal enterrados bajo grandes columnas de roca responden a las fuerzas gravitacionales y “fluyen” (para escalas geológicas de tiempo) de forma natural para formar una gran variedad de estructuras, incluso llegando a perforar los estratos superiores a la capa de sal para formar diapiros salinos.

El comportamiento de la sal es tan caótico, que incluso los domos salinos que estén cercanos lateralmente uno de otro pueden llegar a coalescer para formar concentraciones gruesas de sal de las cuales pueden surgir nuevas estructuras salinas de segunda generación; actualmente la sal debajo del Golfo de México está en el proceso de formar un vasto sistema montañoso tres veces el tamaño de la cordillera de los Alpes e igual de complejo.

Para la industria petrolera la sal es muy importante básicamente por 2 razones:

- Es una excelente roca sello debido a su muy baja permeabilidad (en el rango de nanodarcies) ayudando a que se acumulen los hidrocarburos en la roca almacén. Debido a esto es común que los domos salinos o estructuras salinas delimiten o estén asociados a un yacimiento petrolero.
- Debido a su baja permeabilidad, muy bajo contenido de agua (<100 ppm.), gran solubilidad al agua, baja densidad y ser prácticamente incompresible es muy útil para almacenar hidrocarburos dentro de cavernas hechas en domos salinos.

Debido a esto el estudiar el comportamiento mecánico de la sal se ha vuelto muy importante para la industria petrolera, ya que presenta un reto tanto para la explotación como para el almacenamiento de los hidrocarburos.

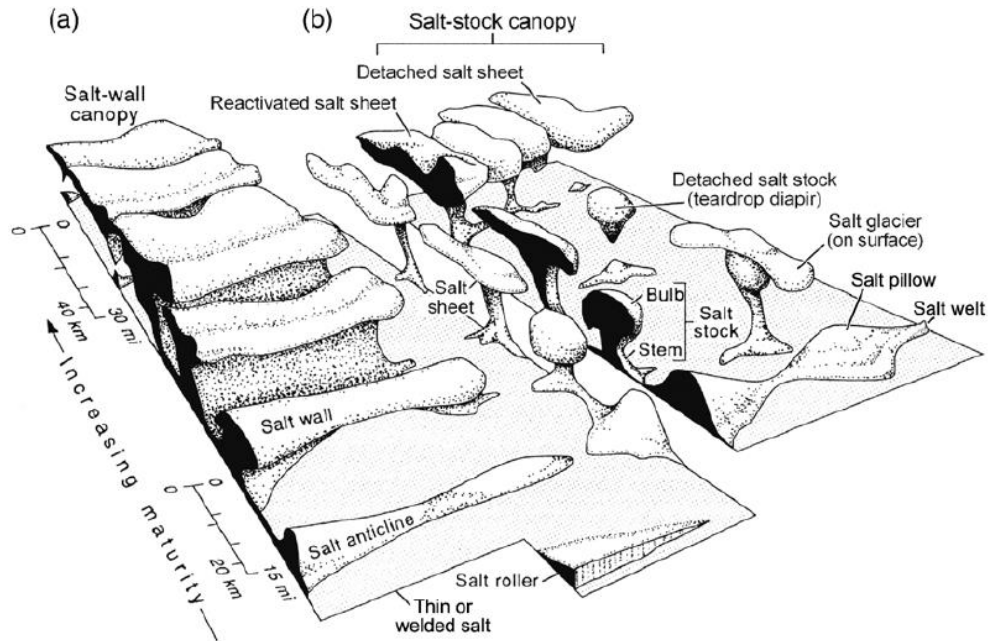


Figura 4.1 Estructuras salinas a) estructuras provenientes de líneas, b) estructuras provenientes de puntos. [17]

4.2 Relaciones constitutivas convencionales para la Sal

A diferencia de las relaciones constitutivas poroelásticas o elásticas que están en función de las deformaciones unitarias o esfuerzos, para la sal o cualquier otro material cuya deformación depende de la tasa de esfuerzos, la tasa de deformación unitaria se puede expresar como la suma algebraica de los diferentes tipos de deformación:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^i, \dots\dots\dots (4.1)$$

donde el superíndice *e* e *i* denotan la parte de la tasa de deformación unitaria elástica e inelástica respectivamente, el punto sobre cada letra ($\dot{}$) significa la derivada con respecto al tiempo de esa propiedad.

La tasa de deformación elástica se puede obtener simplemente derivando con respecto al tiempo las ecuaciones definidas en el capítulo 2:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{ij} + \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \dot{\bar{\sigma}} \delta_{ij} . \dots\dots\dots (4.2)$$

El mecanismo complejo de la sal siempre ha sido su parte inelástica; ésta es la que más atención e investigación tiene, además también presenta otros mecanismos como por cambios de temperatura pero debido a que el problema a resolver es isotérmico, este efecto no se tomará en cuenta.

4.2.1 Deformación por fluencia lenta

Si a un material elástico se le aplica un esfuerzo uniaxial, experimentará una deformación proporcional a este esfuerzo, la cual es independiente del tiempo que se aplique. En cambio a la sal, la deformación evoluciona con el tiempo aunque esté sometida a un esfuerzo constante; a este efecto se le conoce como “deformación por fluencia lenta”.

La deformación por fluencia lenta puede ocurrir tanto por el desplazamiento de los granos o por diferentes formas de difusión, donde los átomos cambian de lugar dentro del cristal. La sal comparte su comportamiento de deformación con otros materiales, como cerámicas, metales y minerales, debido a que es dúctil, especialmente para tazas bajas de deformación y confinamiento.

En las relaciones constitutivas convencionales para la sal, se puede dividir a la deformación por fluencia lenta que se presenta en estados, estacionario y transitorio. Se define como estado estacionario cuando una propiedad no cambia con el tiempo, mientras que para transitorio la derivada de la propiedad respecto al tiempo es una variable.

Cuando la deformación de la sal se considera como causada por el mecanismo de deformación por fluencia lenta, la deformación inelástica puede expresarse como la suma algebraica de dos submecanismos; deformación por fluencia lenta primaria o estado transitorio y secundaria o estado estacionario denotados en la ecuación 4.3 con subíndices t y e respectivamente.

$$\dot{\varepsilon}^i = \dot{\varepsilon}_t + \dot{\varepsilon}_e . \dots\dots\dots (4.3)$$

4.2.2 Deformación por fluencia lenta en estado transitorio

Se dice que se presenta el régimen transitorio cuando la tasa de deformación decrece con el tiempo; éste mecanismo se puede describir como endurecimiento por deformación expresado mediante una ley de potencia de la forma siguiente:

$$\dot{\epsilon}_{ij_t} = C_1 \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{C_2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{C_3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{C_4} \frac{S_{ij}}{\sigma_e}, \dots\dots\dots (4.4)$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)}, \dots\dots\dots (4.5)$$

donde T es la temperatura, t es el tiempo, σ_e es el esfuerzo Von Mises, las constantes del material se denotan con la letra C , S es el esfuerzo desviatorio definido en el capítulo 2 y el subíndice 0 es un estado de referencia de la propiedad. La ecuación 4.4 fue propuesta inicialmente por Lomenick y Bradshaw (1969) [18] y con formulaciones muy similares por Fernandez y Hendron (1984) [10].

Se han propuesto con el tiempo formas alternativas para describir el estado transitorio, se propuso una dependencia explícita del tiempo para el estado transitorio con la ecuación 4.6 mientras que en otras publicaciones proponen la ecuación 4.7.

$$\dot{\epsilon}_{ij_t} = C \left(-\frac{t}{t_0}\right) \frac{S_{ij}}{\sigma_e}, \dots\dots\dots (4.6)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij_t} = C_1 \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{C_2} \epsilon_{vol}^{-C_3} \frac{S_{ij}}{\sigma_e} \dots\dots\dots (4.7)$$

4.2.3 Deformación por fluencia lenta en estado estacionario

En la literatura para este régimen de deformación de la sal, se expresa a la tasa de deformación de la sal para estado estacionario de la forma siguiente:

$$\dot{\epsilon}_{ij_e} = f_1(\sigma_e) f_2(T) \frac{\dot{S}_{ij}}{\sigma_e} \dots\dots\dots (4.8)$$

La función dependiente de la temperatura $f_2(T)$ sigue la ecuación de Arrhenius:

$$f_2(T) = C e^{\left(-\frac{Q}{RT}\right)}, \dots\dots\dots (4.9)$$

donde R es la constante universal de los gases ($R = 8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$), Q es la energía de activación ($\frac{J}{mol}$) y C es una constante positiva del material. La dependencia de la tasa de deformación de la sal a la ecuación de Arrhenius ha sido confirmada por muchos análisis de laboratorio así como investigaciones teóricas.

Para la función $f_1(\sigma_e)$ existen varios enfoques diferentes. Generalmente se usa una expresión con una ley de potencia:

$$f_1(\sigma_e) = C \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^n, \quad n \geq 1. \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

La ecuación 4.10 fue propuesta por Heard (1972) [16] y aceptada por muchos otros autores. También algunas veces la función se puede expresar como:

$$f_1(\sigma_e) = C_1 \sinh \left(C_2 \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right). \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

La ecuación 4.11 es usado en varios modelos teóricos y fue inicialmente propuesta como una ecuación constitutiva para los metales. Ambas ecuaciones tanto la ley de potencias como la ley con el seno hiperbólico pueden derivarse de consideraciones micro estructurales así como lo muestra Heard (1972) [16].

4.3 Relaciones constitutivas con mecanismos de deformación

La micromecánica describe los procesos físicos básicos que rigen la deformación a una escala atómica. Estos procesos suelen llamarse mecanismos de deformación y la ayuda de cada mecanismo cambia como función del esfuerzo, la temperatura y otros factores.

La figura 4.2 muestra el mapa de mecanismos de deformación que construyó Munson para la sal [19]. Las regiones son:

I Dislocación por deslizamiento.

Ila Difusión de volumen.

IIb Difusión por ducto.

IIIa Deformación por fluencia lenta, Nabarro-Herring.

IIIb Deformación por fluencia lenta cobble.

IV Indefinido.

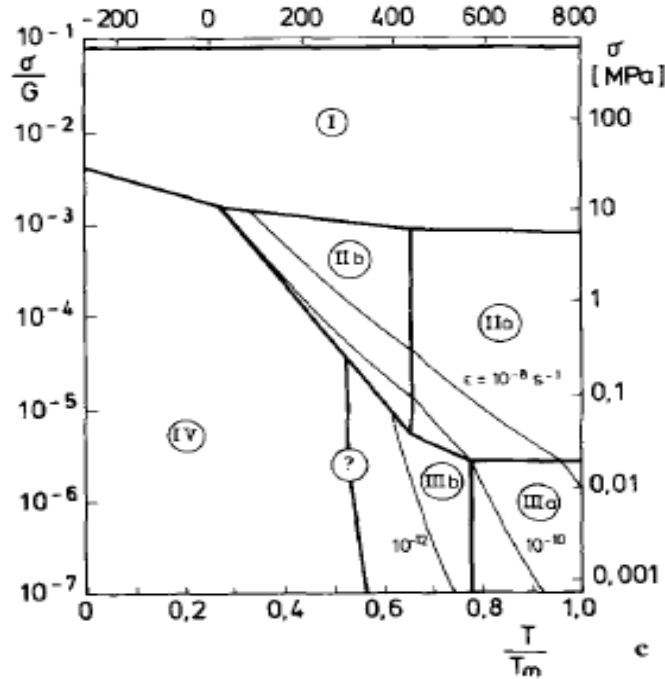


Figura 4.2 Mapa de mecanismos de la sal. [19]

El mapa se basa en poca información y las fronteras que separan las regiones que son dominadas por un mecanismo están construidas de pobres suposiciones. Además que en el mapa para una región importante los mecanismos son desconocidos, por lo que el mapa tiene un uso muy escaso.

Para la deformación de fluencia lenta con difusión, únicamente (región III de Fig. 4.2) se tiene:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma \Omega}{d^2 k T} \left(C_v D_v + C_b \frac{\delta}{d} D_b \right), \dots\dots\dots (4.12)$$

donde Ω es el volumen atómico, d el tamaño de grano, k la constante de Boltzmann y δ la constante de las fronteras. D_v y D_b son los coeficientes de difusión en volumen y frontera respectivamente.

Hay varias opiniones sobre la ecuación correspondiente a la región 1; si la obstrucción del movimiento por dislocación se asume que afecta a la tasa de deformación por fluencia lenta, se obtiene:

$$\dot{\epsilon} = C_1 \left(\frac{\sigma}{G}\right)^n e^{\left[-\frac{\Delta F}{kT}\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right]} \dots\dots\dots (4.13)$$

Con ΔF como la energía de activación y n es una constante; si en cambio la región 1 está controlada por la resistencia, es válida la ecuación siguiente:

$$\dot{\epsilon} = C_2 \left(\frac{\sigma}{G}\right)^n e^{\left[-\frac{\Delta F_p}{kT}\left(1-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^p\right)^q\right]} \dots\dots\dots (4.14)$$

En este caso ΔF_p es la energía de activación para superar a la resistencia, y p y q son constantes. Frost y Ashby (1982) [12] y Verral et al. (1977) [24] proponen: $p = \frac{3}{4}, q = \frac{4}{3}, n = 2$ y Poirier (1985) [21] propone $p = q = 1$ y $n = 2.5$.

La región 2 es una combinación entre procesos de deslizamiento y de difusión. Aunque la deformación es causa de dislocación por deslizamiento, la deformación por fluencia lenta es causada por difusión. La ecuación para esta región es:

$$\dot{\epsilon} = \frac{bG}{kT} \left(\frac{\sigma}{G}\right)^n \left(C_1 D_{sd} + C_2 \left(\frac{\sigma}{G}\right)^2 D_c\right), \dots\dots\dots (4.15)$$

donde D_{sd} y D_c son los coeficientes de difusión propia y difusión por ducto respectivamente. Así como proceda el transporte de la masa a través del proceso de difusión por volumen o difusión por ducto, el exponente del esfuerzo es n o $n + 2$ donde n está en el rango de 3-5.

4.4 Relación constitutiva de la sal

M. Haupt de acuerdo a varios experimentos e investigaciones teóricas propuso para la sal la relación siguiente [15]:

$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{c(\sigma_e, \epsilon_{vol})} = \frac{S_{ij}}{\sigma_0} + \frac{\dot{S}_{ij}}{r(\sigma_e, \epsilon_{vol})} \quad , \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

$$c(\sigma_e, \epsilon_{vol}) = \frac{3}{2} \alpha_s \epsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \quad , \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

$$r(\sigma_e, \epsilon_{vol}) = A \epsilon_{vol}^{-B} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{D-1} \quad , \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

donde $c(\sigma_e, \epsilon_{vol})$ es la función de deformación por fluencia lenta y $r(\sigma_e, \epsilon_{vol})$ es la función de relajación; la ecuación es lineal para las tasas de deformación y esfuerzos con respecto al tiempo, pero no lineal para los esfuerzos y la deformación.

La ventaja de la ecuación 4.16 sobre las ecuaciones convencionales para la sal reside en que hay funciones independientes para la relajación y para la deformación por fluencia lenta. Si se usan las constantes y las funciones apropiadas, se pueden deducir muchas relaciones constitutivas convencionales. Por ejemplo si $\beta = B, \delta = D, \frac{A}{\alpha_s} = E$, la ecuación se reduce a una ley de endurecimiento por deformación con una componente elástica; si además $\beta = B = 0$ entonces se obtiene una ley de potencia para la deformación por fluencia lenta en estado estacionario.

Por lo tanto la ecuación 4.16 es muy general y puede representar una gran clase de relaciones para describir tanto el estado estacionario como el transitorio; si se hiciera una prueba de deformación por fluencia lenta, donde por definición los esfuerzos se deben de mantener constantes $\dot{S}_{ij} = 0, \sigma_e = const$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = c(\sigma_e, \epsilon_{vol}) \frac{S_{ij}}{\sigma_0} = \frac{3}{2} \alpha_s \epsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad . \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

Para una prueba de relajación, la deformación volumétrica debe de ser una constante por lo que la tasa de deformación unitaria se vuelve nula $\dot{\epsilon}_{ij} = 0, \epsilon_{vol} = constante$:

$$\dot{S}_{ij} = -r(\sigma_e, \epsilon_{vol}) \frac{S_{ij}}{\sigma_0} = -A \epsilon_{vol}^{-B} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{D-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad . \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

Si a la sal que se está analizando, se le somete a una prueba de deformación por fluencia lenta, se usará la ecuación 4.19; si se usa una prueba de relajación se usa la

ecuación 4.20; además si las pruebas son uniaxiales entonces $\sigma_e = \sigma_1, \varepsilon_{vol} = \varepsilon_1, S_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_1$ por lo tanto la relación constitutiva (4.16) se vuelve:

$$\frac{\varepsilon_1^\beta}{\alpha_s} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{-\delta} \dot{\varepsilon}_1 = 1 + \frac{\varepsilon_1^B}{A} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{-D} \dot{\sigma}_1 \quad (4.21)$$

La ecuación para deformación por fluencia lenta:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \alpha_s \varepsilon_1^{-\beta} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^\delta \quad (4.22)$$

De manera similar para una prueba de relajación:

$$\dot{\sigma}_1 = -A \varepsilon_1^{-B} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^D \quad (4.23)$$

De las ecuaciones anteriores se observa que la relación constitutiva para la sal ocupa seis parámetros de la sal; las constantes A, B y D se determinan de una prueba de relajación mientras que α_s, β y δ se determinan en una prueba de deformación por fluencia lenta.

4.5 Determinación de los parámetros de la sal

Para determinar los parámetros de la prueba de relajación se utiliza la ecuación 4.23 que se puede escribir, aplicando la función logaritmo y usando sus propiedades, como:

$$\log(-\dot{\sigma}_1) = \log(A \varepsilon_1^{-B}) + D \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \quad (4.24)$$

Esta ecuación es la ecuación de la recta en un gráfico doble logarítmico con el eje vertical como $-\dot{\sigma}_1$ y eje horizontal $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$. De esta gráfica el parámetro D puede verse como el gradiente; de varios experimentos [15] se ha comprobado que el gradiente se comporta de forma aparentemente homogénea, mientras que su posición si varía bastante; por lo que el valor de D es bastante preciso. Para la determinación de los dos parámetros restantes se obtiene la ordenada al origen de varias pruebas de relajación

con diferentes deformaciones, de estos valores se grafica ahora en el eje vertical $A\varepsilon_1^{-B}$ y en el horizontal ε_1 ; del nuevo gráfico doble logarítmico también se puede aproximar una recta de la cual el gradiente es el valor de $-B$ y la ordenada al origen es el valor de A .

Si en cambio se realiza una prueba de deformación por fluencia lenta, se puede utilizar el mismo procedimiento para encontrar las propiedades de la sal, usando la ecuación siguiente.

$$\log(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \log(\alpha\varepsilon_1^{-\beta}) + \delta\log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \dots\dots\dots (4.25)$$

Si se tiene que $B = \beta$ y $D = \delta$ entonces:

$$\frac{c(\sigma_e, \varepsilon_{vol})}{r(\sigma_e, \varepsilon_{vol})} = \frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{A}, \dots\dots\dots (4.26)$$

y la ecuación 4.16 se vuelve:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \alpha_s \varepsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} + \frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{A} \dot{S}_{ij} \dots\dots\dots (4.27)$$

Si se desea despejar a la razón de cambio de los esfuerzos asumiendo que un esfuerzo es constante $\dot{\sigma}_3 = 0$:

$$A_1 = \alpha_s \varepsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{1}{2} \alpha_s \varepsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{\sigma_0}, \dots\dots\dots (4.28)$$

$$A_2 = \alpha_s \varepsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \frac{\sigma_2}{\sigma_0} - \frac{1}{2} \alpha_s \varepsilon_{vol}^{-\beta} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{\delta-1} \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_0}, \dots\dots\dots (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 - A_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 - A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{c}{r} & -\frac{1}{3} \frac{c}{r} \\ -\frac{1}{3} \frac{c}{r} & \frac{2}{3} \frac{c}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}(\frac{c}{r})^2}\right) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{c}{r} & \frac{1}{3} \frac{c}{r} \\ \frac{1}{3} \frac{c}{r} & \frac{2}{3} \frac{c}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 - A_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 - A_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\sigma}_1 = 2 \frac{r}{c} (\dot{\varepsilon}_1 - A_1) + \frac{r}{c} (\dot{\varepsilon}_2 - A_2), \dots\dots\dots (4.30)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{r}{c} (\dot{\varepsilon}_1 - A_1) + 2 \frac{r}{c} (\dot{\varepsilon}_2 - A_2), \dots\dots\dots (4.31)$$

Las ecuaciones 4.30 y 4.31 son las que se usarán más adelante para describir la deformación del domo salino.

Capítulo 5 Flujo de fluidos acoplados a la deformación Geomecánica

5.1 Introducción

La geomecánica juega un papel muy importante en varias áreas de la industria petrolera. En particular la geomecánica es crucial para problemas como la estabilidad del agujero, fracturamiento hidráulico y producción inducida por compactación y subsidencia [13], [22]. En estas áreas los esfuerzos in-situ y las deformaciones de la roca, además del comportamiento del flujo de fluidos son parámetros muy importantes.

Desde la década de los 90's el interés en la geomecánica y su aplicación en simuladores numéricos en la industria petrolera ha ido en aumento [7], [14], [25]. En particular para el caso de yacimientos de aceite pesado o de arenas bituminosas, inyección de agua en yacimientos naturalmente fracturados o para campos que tengan problemas de compactación y subsidencia.

5.2 Ecuación de difusión convencional en la industria Petrolera

La ecuación de difusión es la ecuación que describe el flujo de fluidos en medios porosos; se obtiene mediante la combinación de tres ecuaciones diferentes:

Una ecuación de conservación del momentum que es la ley de Darcy.

$$\vec{v}_f = -\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) . \dots\dots\dots (5.1)$$

La ecuación de continuidad o balance de materia.

$$\nabla \cdot (\rho_f \vec{v}_f) + \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} = 0 , \dots\dots\dots (5.2)$$

y una ecuación de estado; pero para aceites que son ligeramente compresibles y cuando se tienen condiciones isotérmicas se puede usar la compresibilidad isotérmica:

$$c_f = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \rightarrow \rho_f = \rho_{f_0} \left(1 - c_f (p_{f_0} - p_f) \right), \dots\dots\dots (5.3)$$

donde k es el tensor de permeabilidad, \vec{v}_f es la velocidad del fluido, μ es la viscosidad del fluido, c_f es la compresibilidad del fluido, t es el tiempo, \vec{b} es una fuerza de cuerpo (gravedad) y ∇ es el operador nabla. Al combinar estas tres ecuaciones se obtiene la ecuación de difusión:

$$\nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right] + c_f \nabla p \cdot \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) = \phi (c_p + c_f) \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots (5.4)$$

La ecuación 5.4 además se puede expresar en coordenadas cilíndricas y para la dirección radial se reescribe como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{c_f}{\mu} k_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \phi (c_p + c_f) \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots (5.5)$$

La ecuación 5.5 es una ecuación no lineal por lo que en la industria petrolera se hacen las suposiciones siguientes:

1. La compresibilidad del aceite es muy pequeña y constante.
2. La compresibilidad del poro es muy pequeña y constante.
3. Los gradientes de presión son muy pequeños.
4. Se asume flujo radial por lo que las fuerzas de cuerpo se desprecian.
5. El yacimiento es isótropo y homogéneo.
6. La viscosidad es constante e independiente a la presión.
7. El aceite la única fase móvil dentro del yacimiento.

Con estas siete suposiciones la ecuación 5.5 se vuelve:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu (c_p + c_f)}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots (5.6)$$

Si se analiza la ecuación 5.6 se puede observar que tiene la forma de la ecuación de calor, donde el conjunto de propiedades que está multiplicando a la derivada parcial de la presión con respecto al tiempo es el inverso de la difusividad hidráulica η que controla la velocidad de tránsito de la presión en el medio poroso.

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu(c_p+c_f)} \cdot \dots\dots\dots (5.7)$$

Al observar al coeficiente de difusividad hidráulica se nota que si la compresibilidad aumenta, la caída de presión disminuye; ya que la compresibilidad es una medida directa de qué tanto se puede expandir algo, la compresibilidad del poro ayuda al mantenimiento de presión del fluido. A mayor compresibilidad del poro menor caída de presión se tendrá en el yacimiento para un gasto determinado de aceite.

Ésta es la única interacción que existe en la ecuación de difusión convencional de la industria petrolera entre el flujo de fluidos en medios porosos y la roca. Así como se estableció en las suposiciones, la ecuación 5.6 es correcta para yacimientos donde la compresibilidad de la roca es muy pequeña y prácticamente constante. Pero para yacimientos donde la roca es muy sensible a cambios en los esfuerzos, provocados por la explotación de un campo, la ecuación 5.6 no representa de forma adecuadamente los fenómenos del subsuelo.

5.3 Flujo de fluidos acoplados a la Geomecánica

Para desarrollar las ecuaciones del flujo de fluidos acoplado a geomecánica se utiliza un acercamiento bastante parecido al del desarrollo de la ecuación de difusión convencional pero con unas ligeras y muy importantes modificaciones.

5.3.1 Ecuación de continuidad para el fluido y el sólido

Se asume que dentro del volumen de control existe tanto un flujo de fluidos como de sólidos. Debe hacerse notar que este flujo de sólidos se refiere únicamente al flujo de la parte sólida de la roca que se mueve como un medio continuo, no se refiere a pedazos de roca o granos que fluyen con el fluido debido a que se han desprendido de la roca como en yacimientos deleznable con aporte de arenas.

La ecuación de continuidad es simplemente un balance de masa:

$$Masa_{entra} - Masa_{sale} = Masa_{acumulada} \cdot \dots\dots\dots (5.8)$$

El gasto másico puede representarse como la densidad de la fase por su velocidad (figura 5.1 a)) por el área transversal al flujo (figura 5.1 b)). Debido a que el flujo es bifásico (líquido/sólido) se debe diferenciar el espacio ocupado por el flujo de fluido y el flujo de sólido; por lo tanto el área transversal al flujo en dirección x para el fluido es $\Delta y \Delta z \phi$ mientras que para el sólido es $\Delta y \Delta z (1 - \phi)$.

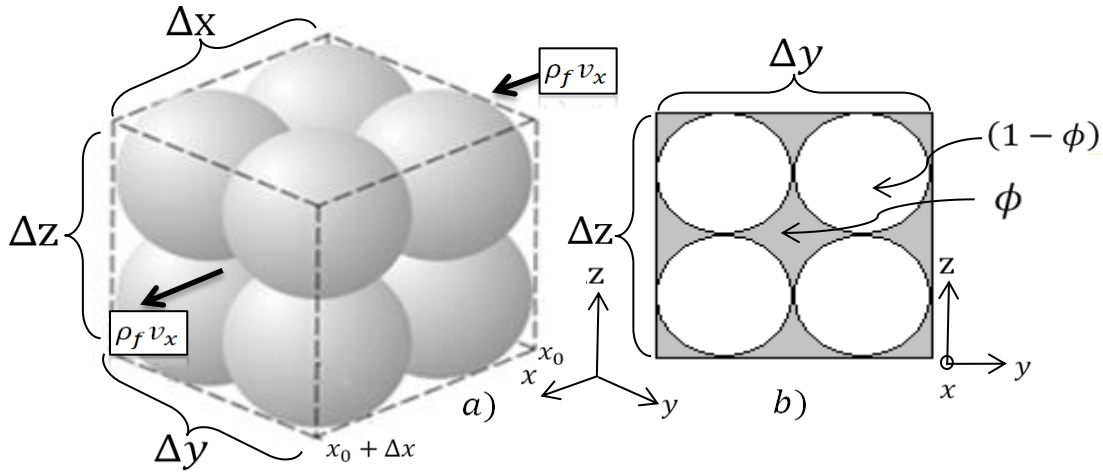


Figura 5.1 Elemento de un medio poroso a) Volumen de control con flujo en dirección “ x ”, b) Área transversal al flujo en dirección “ x ”.

El término de acumulación puede verse como la diferencia de masa que hay al final $\Delta x \Delta y \Delta z (\rho_f \phi|_{t_0 + \Delta t})$ menos la que había al inicio $\Delta x \Delta y \Delta z (\rho_f \phi|_{t_0})$. Entonces la ecuación de continuidad para cada fase es:

Fluido:

$$\phi \rho_f v_x (\Delta y \Delta z) \Delta t|_{x_0} - \phi \rho_f v_x (\Delta y \Delta z) \Delta t|_{x_0 + \Delta x} = (\phi \rho_f|_{t_0 + \Delta t} - \phi \rho_f|_{t_0}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi \rho_f v_x|_{x_0} - \phi \rho_f v_x|_{x_0 + \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\phi \rho_f|_{t_0 + \Delta t} - \phi \rho_f|_{t_0})}{\Delta t}$$

$$-\frac{\partial(\phi \rho_f v_x)}{\partial x} = \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t}, \dots \dots \dots (5.9)$$

$$\nabla \cdot (\phi \rho_f \vec{v}_f) + \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} = 0 . \dots \dots \dots (5.10)$$

Sólido:

$$-\frac{\partial((1-\phi) \rho_s v_s)}{\partial x} = \frac{\partial((1-\phi) \rho_s)}{\partial t}, \dots \dots \dots (5.11)$$

$$\nabla \cdot ((1 - \phi)\rho_s \vec{v}_s) + \frac{\partial((1-\phi)\rho_s)}{\partial t} = 0 . \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

Las ecuaciones 5.10 y 5.12 están en la forma vectorial de la ecuación de continuidad para cada fase, mientras que las ecuaciones 5.9 y 5.12 están únicamente en la dirección “x”. La principal diferencia entre la ecuación de continuidad para el fluido 5.2 y 5.10 es que en la ecuación 5.2 se usa una velocidad macroscópica, como si el espacio ocupado por el fluido fuera toda el área transversal al flujo incluyendo el espacio ocupado por el sólido; en cambio en la ecuación 5.10 se usa la velocidad microscópica del fluido, es por esto que se tiene que usar el área transversal al flujo real. Debido a esto en el término de la divergencia de la ecuación 5.10 la porosidad aparece a diferencia de la ecuación 5.2.

5.3.2 Ecuación de Darcy modificada

La ecuación de Darcy no usa una velocidad real, en realidad usa una velocidad macroscópica como si el fluido ocupara todo el espacio y no existieran granos. Para el caso del flujo acoplado a la deformación geomecánica y que la velocidad usada en la ecuación de continuidad sea congruente con la usada en la ley de Darcy, se agrega el término de la porosidad de forma similar a la ecuación de continuidad.

Además, debido a que también existe un movimiento de la fase sólida, se considera que la diferencia en potencial que provoca el movimiento de los fluidos en el medio poroso, en realidad provoca una velocidad relativa a la velocidad del sólido.

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) . \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

De esta forma si en realidad el sólido no se mueve, llegamos a la formulación clásica de Darcy donde en lugar de una velocidad promedio se usa la velocidad microscópica del fluido.

5.3.3 La derivada material

Para poder describir la rapidez o razón de cambio de cualquier propiedad para la partícula de un fluido que se mueve en un campo de flujo, se usa la derivada material. La derivada material se describe como la derivada de una propiedad con respecto al

tiempo para un observador que se mueve junto con la partícula del fluido en el campo de flujo.

Para llegar a la deducción de la derivada material se considera al cambio de la densidad de una partícula de fluido ρ_f en un intervalo de tiempo dt . El incremento total $d\rho_f$ de la densidad es igual a la suma de la parte debida al incremento de tiempo dt y la debida al incremento espacial dx, dy, dz ; si se usan coordenadas cartesianas entonces:

$$d\rho_f = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho_f}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho_f}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho_f}{\partial z} dz , \quad \dots\dots\dots (5.14)$$

$$d\rho_f = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dt + \nabla \rho_f \cdot (dx, dy, dz) , \quad \dots\dots\dots (5.15)$$

$$d\rho_f = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dt + \nabla \rho_f \cdot (v_x, v_y, v_z) dt , \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

$$\frac{d\rho_f}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \rho_f . \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

Para diferenciar la derivada material respecto al tiempo y recalcar que incluye a las derivadas parciales tanto temporales como espaciales, se denotará a la derivada material mediante $\frac{D}{Dt}$ quedando definida de la manera siguiente.

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) . \quad \dots\dots\dots (5.18)$$

5.3.4 Relación deformación-porosidad

Si se desarrolla la divergencia de la ecuación 5.12 usando la definición de la derivada material y se asume a la densidad del sólido como una constante se llega a lo siguiente:

$$(1 - \phi) \nabla \cdot \vec{v}_s + \frac{D(1-\phi)}{Dt} = 0 , \quad \dots\dots\dots (5.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = - \frac{1}{(1-\phi)} \frac{D(1-\phi)}{Dt} = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{D\phi}{Dt} . \quad \dots\dots\dots (5.20)$$

Ya que la divergencia de la velocidad es igual a la velocidad de deformación volumétrica con respecto al tiempo:

$$\dot{\epsilon}_{vol_s} = \frac{D\epsilon_{vol_s}}{Dt} = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{D\phi}{Dt} . \quad \dots\dots\dots (5.21)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 5.21 se llega a:

$$\int_{t_0}^t D\varepsilon_{vol_s} = \int_{t_0}^t \frac{D\phi}{(1-\phi)} \rightarrow \varepsilon_{vol_s} - \varepsilon_{vol_{s0}} = -\ln \frac{(1-\phi)}{(1-\phi_0)}$$

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0)e^{-(\varepsilon_{vol_s} - \varepsilon_{vol_{s0}})} \dots \dots \dots (5.22)$$

Con la ecuación 5.22 tenemos la relación directa entre la deformación volumétrica del sólido y el cambio de la porosidad del yacimiento. Es necesario recalcar que en la ecuación 5.22 la deformación volumétrica que se está ocupando es positiva para la expansión, si en cambio se desea ocupar la convención de la geomecánica donde la compresión es positiva la ecuación que debe usarse es:

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0)e^{(\varepsilon_{vol_s} - \varepsilon_{vol_{s0}})} \dots \dots \dots (5.23)$$

5.3.5 Ecuación de difusión acoplada a la deformación Geomecánica

De forma análoga a como se deriva la ecuación de difusión convencional, así también se puede derivar la ecuación de difusión acoplada si se utilizan las ecuaciones de continuidad y de Darcy modificadas anteriormente definidas.

Usando la ecuación de Darcy modificada (Ec.5.13) y la ecuación de continuidad modificada para el fluido (Ec.5.10):

$$\rho_f \phi \vec{v}_f = \rho_f \phi \vec{v}_s - \rho_f \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \rightarrow \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_f) = \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_s) - \nabla \cdot \left(\rho_f \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right)$$

$$-\frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_f) = -\frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_s) + \nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right) + \frac{1}{\rho_f} \nabla \rho_f \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b})$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right) + \frac{1}{\rho_f} \nabla \rho_f \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) - \frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_s) = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} \dots \dots \dots (5.24)$$

Usando las definiciones de la compresibilidad (Ec.5.3), la regla de la cadena y la derivada material (Ec.5.18):

$$\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right) + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \nabla p \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) = \phi \nabla \cdot \vec{v}_s + \nabla \phi \cdot \vec{v}_s + \phi \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \nabla p \cdot \vec{v}_s + \phi \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right) + c_f \nabla p \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) = \phi \nabla \cdot \vec{v}_s + \phi c_f \frac{Dp}{Dt} + \frac{D\phi}{Dt} \cdot \dots \dots \dots (5.25)$$

En la ecuación 5.25, la derivada material de la propiedad con respecto al tiempo, se refiere al cambio de la propiedad con respecto al tiempo más el cambio de la propiedad debido al movimiento del sólido; si se combinan las ecuaciones 5.20 y 5.25 se llega a la forma final de la ecuación de difusión acoplada.

$$\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right) + c_f \nabla p \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) = \frac{\phi}{(1-\phi)} \frac{D\phi}{Dt} + \phi c_f \frac{Dp}{Dt} + \frac{1-\phi}{(1-\phi)} \frac{D\phi}{Dt}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) \right) + c_f \nabla p \frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_f \vec{b}) = \phi c_f \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v}_s \cdot \dots \dots \dots (5.26)$$

Si se compara la ecuación 5.26 con la ecuación 5.4 se observan dos claras diferencias; la derivada parcial de la presión con respecto al tiempo es reemplazada con la derivada material y el término que involucraba a la compresibilidad del poro es reemplazado por la divergencia de la velocidad del sólido o la velocidad de deformación volumétrica del sólido con respecto al tiempo.

Si se expresa la ecuación 5.26 en la dirección radial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{c_f}{\mu} k_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \phi c_f \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_s \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_s) \cdot \dots \dots \dots (5.27)$$

En la ecuación 5.27 la velocidad del sólido se refiere únicamente a la velocidad en dirección radial.

Debido a los términos del gradiente al cuadrado y al producto del gradiente de la presión por la velocidad del sólido, la ecuación 5.27 es una ecuación diferencial parcial

no lineal con dos variables dependientes (v_s, p) por lo que para resolverla se debe de usar un método numérico.

5.3.6 Ecuación de momentum lineal para un medio poroelástico

Ya que la ecuación 5.27 tiene dos variables dependientes, se necesita una ecuación extra para lograr resolver el sistema de dos ecuaciones dos incógnitas. La ecuación necesaria es la ecuación de momentum lineal para cuando la roca es poroelástica.

Como en el problema que se plantea resolver se utilizará un sistema en coordenadas cilíndricas, se deberán expresar las deformaciones geomecánicas así como los esfuerzos efectivos en coordenadas cilíndricas.

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \dots\dots\dots (5.28)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \dots\dots\dots (5.29)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \dots\dots\dots (5.30)$$

$$\sigma'_r = (\lambda_{fr} + 2G)\epsilon_r + (\lambda_{fr})\epsilon_\theta + (\lambda_{fr})\epsilon_z, \dots\dots\dots (5.31)$$

$$\sigma'_\theta = (\lambda_{fr})\epsilon_r + (\lambda_{fr} + 2G)\epsilon_\theta + (\lambda_{fr})\epsilon_z, \dots\dots\dots (5.32)$$

$$\sigma'_z = (\lambda_{fr})\epsilon_r + (\lambda_{fr})\epsilon_\theta + (\lambda_{fr} + 2G)\epsilon_z. \dots\dots\dots (5.33)$$

Además la ecuación de momentum lineal para la dirección radial es:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Gamma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \dots\dots\dots (5.34)$$

La interacción entre la roca y el fluido únicamente aplica para los esfuerzos normales, por lo tanto los términos de los esfuerzos cortantes se eliminan de la ecuación 5.34. Además si se sustituye en la ecuación 5.34 la definición de esfuerzo efectivo (Ec.3.54) se tiene que:

$$\frac{\partial(\sigma'_r + \alpha p)}{\partial r} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} = 0. \dots\dots\dots (5.35)$$

Si en la ecuación 5.35 se sustituyen las definiciones de esfuerzo efectivo en función de las deformaciones del sólido (Ecs.5.31-5.32), asumiendo que no existe deformación

vertical $\varepsilon_z = 0$ y sustituyendo la definición de las deformaciones en función del desplazamiento (Ecs. 5.28,5.29) cuando hay simetría en el eje tangencial $\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$ se tiene que:

$$\frac{\partial((\lambda_{fr}+2G)\varepsilon_r+(\lambda_{fr})\varepsilon_\theta)}{\partial r} + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2G(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)}{r} = 0$$

$$(\lambda_{fr} + 2G) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \lambda_{fr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) + 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$(\lambda_{fr} + 2G) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \lambda_{fr} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda_{fr}+2G)} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda_{fr}+2G)} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 . \dots\dots\dots (5.36)$$

Si se deriva con respecto al tiempo a la ecuación 5.36:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_s)}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda_{fr}+2G)} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} = 0 . \dots\dots\dots (5.37)$$

En la ecuación 5.27 la velocidad del sólido se toma como negativa para la compresión pero en la ecuación 5.37 la velocidad del sólido es positiva para la compresión, debido a esto todos los términos de la ecuación 5.27 que contengan al término de la velocidad del sólido deben de multiplicarse por -1.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{c_f}{\mu} k_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \varphi c_f \left(\frac{\partial p}{\partial t} - v_s \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_s) . \dots\dots\dots (5.38)$$

La ecuación 5.37 junto con la ecuación 5.38 representan un sistema de dos ecuaciones dos incógnitas que se deben resolver numéricamente junto con las condiciones iniciales y de frontera apropiadas para cada variable (v_s, p).

De esta forma se relaciona completamente el flujo de fluidos en medios porosos con la deformación del medio, al obtener las deformaciones volumétricas del sólido se puede obtener las nuevas porosidades para el yacimiento.

Es lógico asumir que si se altera la porosidad también debe de verse alterada la permeabilidad del medio poroso; para modelar el cambio de la permeabilidad se ha visto que se obtiene un buen ajuste al usar una ley de potencia de la siguiente forma:

$$\frac{k}{k_0} = \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{5.6} \dots\dots\dots (5.39)$$

Aunque también hay diferentes fórmulas que relacionan a la nueva permeabilidad en función del cambio de esfuerzos, porosidad, etc. se utilizará la ecuación 5.39.

Capítulo 6 Simulación de flujo radial hacia un pozo cuya área de drenaje tiene un domo salino asociado

6.1 Introducción

Para realizar la simulación se asume que el yacimiento es cilíndrico, isótropo y homogéneo, con espesor constante, que en su centro contiene un pozo vertical produciendo a gasto constante y es concéntrico a un domo salino cilíndrico que rodea en su totalidad al yacimiento como lo indica la figura 6.1.

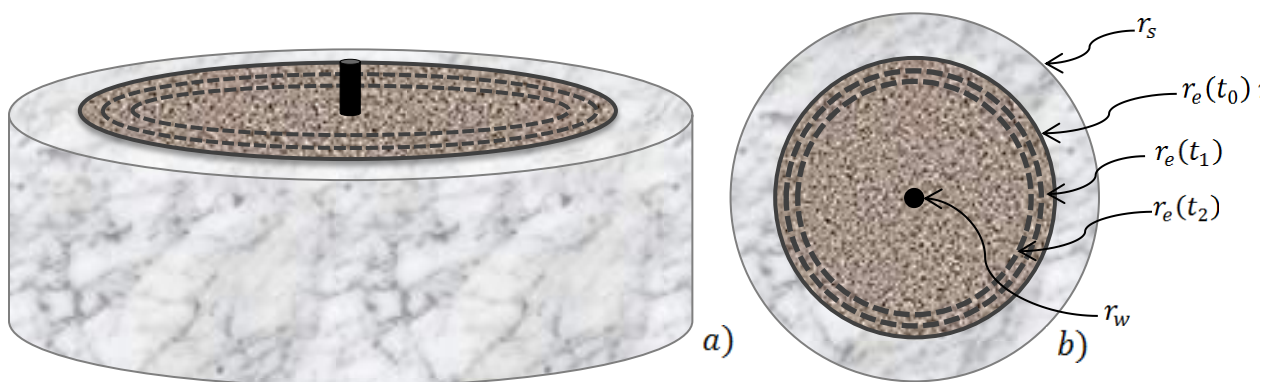


Figura 6.1 Representación esquemática de un yacimiento con radio variable " r_e " y con un domo salino asociado, a) Vista tridimensional, b) Vista transversal al eje vertical.

Para caracterizar el aporte del domo salino al mantenimiento de presión, se hace la analogía con el mantenimiento de presión debido a un acuífero. En el caso del acuífero el agua invade la zona del yacimiento, lo que provoca un mantenimiento de presión. En el caso donde en lugar de un acuífero existe un domo salino, la expansión del domo salino provocará un mantenimiento de presión, debido a esto la frontera externa del yacimiento r_e no será una constante, en cambio estará en función del tiempo como se muestra en la figura 6.1.

Para el análisis, el radio del pozo r_w debe ser una constante y la frontera externa del domo r_s también será una constante, por lo tanto la expansión del domo se convierte en un encogimiento del yacimiento:

$$dV_{domo} = -dV_{yacimiento} \dots\dots\dots (6.1)$$

6.2 Ecuaciones del simulador

6.2.1 Condiciones iniciales y de frontera para presión y velocidad del sólido

Como ya se estableció en el capítulo anterior, las ecuaciones usadas para el flujo de fluidos en medios porosos acopladas a una deformación geomecánica para la dirección radial despreciando la deformación vertical son:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{c_f}{\mu} k_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \varphi c_f \left(\frac{\partial p}{\partial t} - v_s \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_s) , \dots\dots\dots (5.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_s)}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda_{fr} + 2G)} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} = 0 . \dots\dots\dots (5.37)$$

Con estas dos ecuaciones se describe la deformación y el flujo de fluidos en el yacimiento, pero hace falta describir las condiciones de frontera e iniciales.

Para un tiempo inicial t_0 se considera que el sistema roca fluidos está en equilibrio, por lo tanto todo el yacimiento se encuentra a la misma presión p_i y la roca está estática $v_s = 0$. Debido a que el pozo está produciendo a un gasto constante “ q ”, el gradiente de presión en el pozo también es una constante. En la frontera externa del yacimiento, la interfase formada por el domo salino y el yacimiento es impermeable, no existe flujo; por lo tanto el gradiente de la presión es nulo. Debido a que la frontera externa del domo es una constante, la velocidad de la frontera externa del domo también es nula.

Las condiciones iniciales y de frontera para la presión son:

$$p(r\{r_w \leq r \leq r_e\}, t_0) = p_i , \dots\dots\dots (6.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_w} = \frac{-q\mu}{k_r 2\pi r_w h} , \dots\dots\dots (6.3)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r_e} = 0 \quad \dots\dots\dots (6.4)$$

Las condiciones para la velocidad del sólido son las siguientes:

$$v_s(r\{r_w \leq r \leq r_s\}, t_0) = 0, \quad \dots\dots\dots (6.5)$$

$$v_s(r = r_w, t) = 0, \quad \dots\dots\dots (6.6)$$

$$v_s(r = r_s, t) = 0. \quad \dots\dots\dots (6.7)$$

Las condiciones ya mencionadas son necesarias pero no son suficientes para resolver el problema. Cuando se tiene un sistema compuesto, también se debe de especificar la relación que existe entre sus dos componentes, la interfase formada por el domo y el yacimiento.

6.2.2 Condición en la interfase

En la interfase entre el domo y el yacimiento r_e se tiene continuidad de los esfuerzos totales, por lo tanto:

$$\sigma_{r_{e izquierda}} = \sigma_{r_{e derecha}} \quad \therefore \quad \dot{\sigma}_{r_{e izquierda}} = \dot{\sigma}_{r_{e derecha}} \quad \dots\dots\dots (6.8)$$

Como se ve en la figura 6.2, a diferencia del domo, los esfuerzos en el yacimiento están en función tanto de la deformación del yacimiento como de la presión.

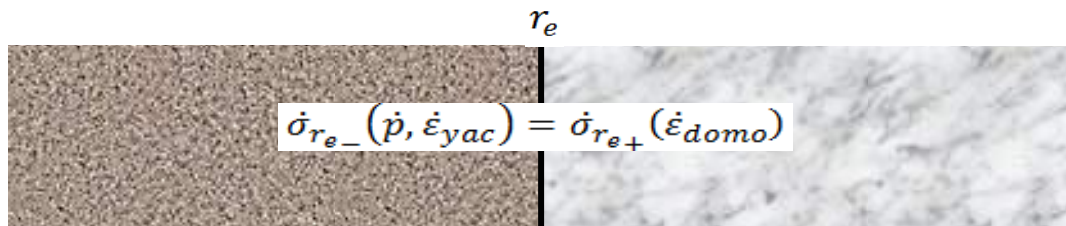


Figura 6.2 Representación de tasa de cambio de esfuerzos con respecto al tiempo en la interfase.

Si se deriva la ecuación 3.49 con respecto al tiempo y se usa la ecuación 4.30, la ecuación en la interfase para la continuidad de esfuerzos en términos de los desplazamientos es:

$$(\lambda_{fr} + 2G)\dot{\epsilon}_{r_{r_{e-}}} + \lambda_{fr}\dot{\epsilon}_{\theta_{r_{e-}}} + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = 2 \frac{r}{c} (\dot{\epsilon}_{r_{r_{e+}}} - A_{r_{r_{e+}}}) + \frac{r}{c} (\dot{\epsilon}_{\theta_{r_{e+}}} - A_{\theta_{r_{e+}}}), \quad \dots \quad (6.9)$$

$$(\lambda_{fr} + 2G) \frac{\partial v_{sr_{e-}}}{\partial r} + \lambda_{fr} \frac{v_{sr_{e-}}}{r} + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = 2 \frac{r}{c} \left(\frac{\partial v_{sr_{e+}}}{\partial r} - A_{r_{r_{e+}}} \right) + \frac{r}{c} \left(\frac{v_{sr_{e+}}}{r} - A_{\theta_{r_{e+}}} \right), \quad \dots \quad (6.10)$$

Donde r_{e-} y r_{e+} indica que la operación está evaluada a la izquierda o a la derecha de r_e respectivamente.

6.2.3 Ecuación de momentum lineal para el domo salino

También se debe de modelar la deformación del domo, ya que esta deformación afecta directamente a la ecuación 6.10.

Ya que el domo no presenta flujo de fluidos, solo se necesita una ecuación para modelar su deformación, la ecuación 5.34. Nuevamente se desprecia cualquier esfuerzo cortante y si se deriva la ecuación con respecto al tiempo para poder sustituir las ecuaciones 4.30 y 4.31 se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4}{3} \frac{A}{\alpha_s} (\dot{\epsilon}_r - A_r) + \frac{2}{3} \frac{A}{\alpha_s} (\dot{\epsilon}_\theta - A_\theta) \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} \frac{A}{\alpha_s} (\dot{\epsilon}_r - A_r) - \frac{2}{3} \frac{A}{\alpha_s} (\dot{\epsilon}_\theta - A_\theta) \right) = 0. \quad \dots \quad (6.11)$$

Debido a que tanto A como α_s son constantes, se puede factorizar y cancelar algunos términos. Desarrollando la ecuación 6.11 y colocando todo en función de la velocidad de la sal se obtiene la ecuación 6.12:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{\partial v_s}{\partial r} - A_r \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{v_s}{r} - A_\theta \right) \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_s}{\partial r} - A_r \right) - \left(\frac{v_s}{r} - A_\theta \right) \right) = 0 \\ & 2 \frac{\partial^2 v_s}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{v_s}{r^2} - \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{A_r}{r} - \frac{v_s}{r^2} + 2 \frac{A_\theta}{r} = 0 \\ & 2 \frac{\partial^2 v_s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_s}{\partial r} - 2 \frac{v_s}{r^2} - 2 \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_s)}{\partial r} \right) - \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r} = 0. \quad \dots \quad (6.12) \end{aligned}$$

Si se compara la ecuación 6.12 con la ecuación 5.37 evaluada en la frontera domo yacimiento ($\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} = 0$), se observa que las dos ecuaciones comparten el término $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_s)}{\partial r} \right)$, este término representa la parte elástica del material; por lo tanto la influencia plástica de la sal está representada con los términos restantes que incluyen a

A_r y A_θ . Recordando las definiciones de A_r, A_θ con las ecuaciones 4.28 y 4.29 se deduce que la ecuación 6.12 es una ecuación no lineal.

6.3 Diferencias finitas

Una vez que ya se tienen las ecuaciones que se usarán para representar el comportamiento del yacimiento y del domo, para resolver el sistema de ecuaciones se tiene que utilizar la ayuda de las diferencias finitas.

En lugar de tratar de encontrar una solución continua para la presión y la velocidad del sólido, se buscan solamente valores aproximados a la solución dentro de un conjunto finito de puntos (nodos) dentro del intervalo deseado.

A este conjunto finitos de puntos se le denomina malla; cuando se está resolviendo la ecuación de difusión en la dirección radial, el gradiente de presión es muy grande cerca del pozo pero conforme se aleja del pozo el gradiente va disminuyendo hasta que en la frontera externa del yacimiento el gradiente es nulo (condición de frontera externa para la presión).

Para que las caídas de presión para cada pareja de nodos sean aproximadamente iguales, los nodos deben espaciarse de la forma siguiente [9]:

$$r_{i+1} = cte * r_i , \dots\dots\dots (6.13)$$

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+1}-r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} , \dots\dots\dots (6.14)$$

$$cte = \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{\frac{1}{(n-1)}} , \dots\dots\dots (6.15)$$

$$r_w = r_1 , r_e = r_n . \dots\dots\dots (6.16)$$

Donde n es el número de nodos que se usarán para describir al yacimiento y el subíndice i denota la posición del nodo dentro de la malla.

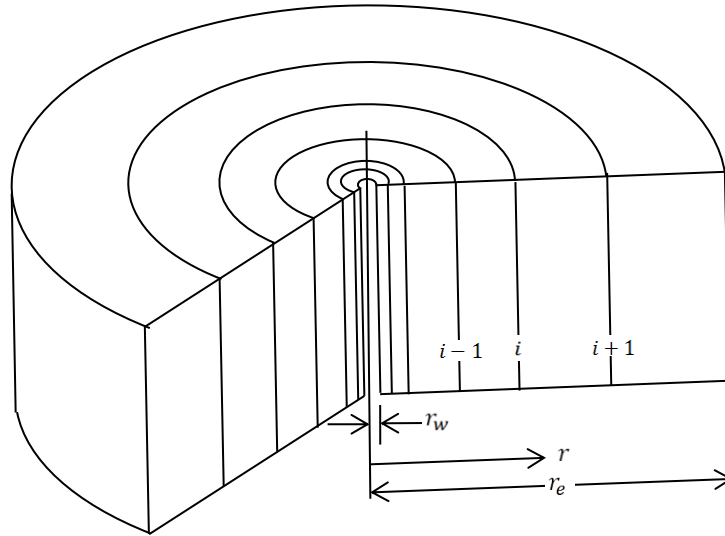


Figura 6.3 Distribución de nodos en la malla. [9]

En el esquema de diferencias finitas la ecuación diferencial se reemplaza por un conjunto de ecuaciones algebraicas que relacionan valores de presión para cada nodo. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones en diferencias finitas y el problema diferencial se reduce a un problema algebraico.

La forma en diferencias finitas de las derivadas espacial y temporal con la notación usada es:

$$\frac{\partial u(r_i, t_j)}{\partial r} = \frac{u\left(r_{i+\frac{1}{2}}, t_j\right) - u\left(r_{i-\frac{1}{2}}, t_j\right)}{r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^j - u_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta r_i}, \dots\dots\dots (6.17)$$

$$\frac{\partial u(r_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(r_i, t_{j+1}) - u(r_i, t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}, \dots\dots\dots (6.18)$$

$$\Delta r_i' = r_{i+1} - r_{i-1} \cdot \dots\dots\dots (6.19)$$

Con las ecuaciones 6.17 y 6.18 pueden transformarse todas las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Existen dos métodos principales para convertir una ecuación diferencial en una ecuación en diferencias finitas:

- Explícito.- Cuando las derivadas espaciales están evaluadas en un tiempo conocido “j”, por lo que el único término “j + 1” (desconocido) se obtiene de la derivada temporal.
- Implícito.- Cuando las derivadas espaciales están evaluadas en un tiempo desconocido “j + 1”, por lo que el único término conocido “j” se obtiene de la derivada temporal.

Cuando se resuelve el conjunto de ecuaciones de forma explícita, la solución es más fácil de obtener debido a que solo existe 1 incógnita por cada ecuación del sistema, pero la solución se vuelve mucho más inestable; si se resuelve de forma implícita, la solución es más estable y se obtienen mejores resultados, aunque el algoritmo numérico se vuelve bastante más complejo debido a que todas las ecuaciones del sistema de ecuaciones se deben de resolver simultáneamente.

En esta tesis se utilizará el método implícito para resolver el problema numérico.

La ecuación 5.38 en diferencias finitas:

$$\frac{1}{(r\Delta r)_i} \left[\left(\frac{k_r r}{\mu} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \right) - \left(\frac{k_r r}{\mu} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \right) \right] + \frac{c_f}{\mu} k_{ri} \left(\frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{\Delta r'_i} \right)^2 =$$

$$\varphi_i c_f \left(\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\Delta t} - v_{s_i}^{j+1} \left(\frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{\Delta r'_i} \right) \right) - \frac{(r_{i+1} v_{s_{i+1}}^{j+1} - r_{i-1} v_{s_{i-1}}^{j+1})}{(r\Delta r')_i} \cdot \dots \dots \dots (6.20)$$

Despejando todos los términos evaluados al tiempo “j + 1”:

$$p_{i-1}^{j+1} \left\{ \frac{1}{(r\Delta r)_i} \left(\frac{k_r r}{\mu \Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}} - \frac{c_f}{\mu} k_{ri} \left(\frac{p'_{i+1} - p'_{i-1}}{\Delta r_i'^2} \right) \right\} + v_{s_{i-1}}^{j+1} \left\{ - \frac{r_{i-1}}{(r\Delta r')_i} \right\} +$$

$$p_i^{j+1} \left\{ \frac{-1}{r_i \Delta r_i} \left[\left(\frac{k_r r}{\mu \Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{k_r r}{\mu \Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\varphi_i c_f}{\Delta t} \right\} + v_{s_i}^{j+1} \left\{ \varphi_i c_f \frac{(p'_{i+1} - p'_{i-1})}{\Delta r'_i} \right\} +$$

$$p_{i+1}^{j+1} \left\{ \frac{1}{(r\Delta r)_i} \left(\frac{k_r r}{\mu \Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{c_f}{\mu} k_{ri} \left(\frac{p'_{i+1} - p'_{i-1}}{\Delta r_i'^2} \right) \right\} + v_{s_{i-1}}^{j+1} \left\{ \frac{r_{i-1}}{(r\Delta r')_i} \right\} = p_i^j \left\{ - \frac{\varphi_i c_f}{\Delta t} \right\} \cdot \dots \dots \dots (6.21)$$

El término p'_i se refiere a una presión que se iterará; para la primera iteración $k = 1$ el valor que toma la presión de iteración será igual al del tiempo conocido “j” ($p'_i = p_i^j$), pero para las siguientes iteraciones $k > 1$ el nuevo valor de la presión de iteración será

igual al valor obtenido al solucionar el sistema de ecuaciones de la iteración anterior $p'_i = p_i^{j+1}$, de esta forma se iterará hasta que el valor absoluto de la diferencia entre las presiones de la iteración anterior y la última obtenida sea menor que una tolerancia establecida $|p_i'^k - p_i'^{k-1}| < \text{tolerancia}$.

La ecuación 5.37 en diferencias finitas:

$$\frac{1}{\Delta r_i} \left[\frac{(r_{i+1} v_{s_{i+1}}^{j+1} - r_i v_{s_i}^{j+1})}{(r \Delta r)_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(r_i v_{s_i}^{j+1} - r_{i-1} v_{s_{i-1}}^{j+1})}{(r \Delta r)_{i-\frac{1}{2}}} \right] + \frac{\alpha}{(\lambda_{fr} + 2G)} \frac{(p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j) - (p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j)}{\Delta r_i' \Delta t} = 0, \quad \dots \quad (6.22)$$

reacomodando:

$$p_{i-1}^{j+1} \left\{ -\frac{\alpha}{(\lambda_{fr} + 2G)} \frac{1}{\Delta r_i' \Delta t} \right\} + v_{s_{i-1}}^{j+1} \left\{ \frac{1}{\Delta r_i} \frac{r_{i-1}}{(r \Delta r)_{i-\frac{1}{2}}} \right\} + v_{s_i}^{j+1} \left\{ -\left(\frac{r}{\Delta r}\right)_i \left[\frac{1}{(r \Delta r)_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(r \Delta r)_{i-\frac{1}{2}}} \right] \right\}$$

$$p_{i+1}^{j+1} \left\{ \frac{\alpha}{(\lambda_{fr} + 2G)} \frac{1}{\Delta r_i' \Delta t} \right\} + v_{s_{i+1}}^{j+1} \left\{ \frac{1}{\Delta r_i} \frac{r_{i+1}}{(r \Delta r)_{i+\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{\alpha}{(\lambda_{fr} + 2G)} \frac{(p_{i+1}^j - p_{i-1}^j)}{\Delta r_i' \Delta t} \cdot \dots \quad (6.23)$$

La ecuación 6.12 en diferencias finitas:

$$v_{s_{i-1}}^{j+1} \left\{ \frac{1}{\Delta r_i} \frac{r_{i-1}}{(r \Delta r)_{i-\frac{1}{2}}} \right\} + v_{s_i}^{j+1} \left\{ -\left(\frac{r}{\Delta r}\right)_i \left[\frac{1}{(r \Delta r)_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(r \Delta r)_{i-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + v_{s_{i+1}}^{j+1} \left\{ \frac{1}{\Delta r_i} \frac{r_{i+1}}{(r \Delta r)_{i+\frac{1}{2}}} \right\} =$$

$$\frac{(A_{r_{i+1}}' - A_{r_{i-1}}')}{\Delta r_i'} + \frac{1}{2} \frac{A_{r_i}'}{r} + \frac{1}{2} \frac{(A_{\theta_{i+1}}' - A_{\theta_{i-1}}')}{\Delta r_i'} - \frac{A_{\theta_i}'}{r} \cdot \dots \quad (6.24)$$

La ecuación 6.10 en diferencias finitas:

$$(\lambda_{fr} + 2G) \frac{(v_{s_n}^{j+1} - v_{s_{n-1}}^{j+1})}{\Delta r_{n-\frac{1}{2}}} + \lambda_{fr} \frac{v_{s_n}^{j+1}}{r_n} + \alpha \frac{(p_n^{j+1} - p_n^j)}{\Delta t} =$$

$$2 \frac{r}{c} \left(\frac{(v_{s_{n+1}}^{j+1} - v_{s_n}^{j+1})}{\Delta r_{n+\frac{1}{2}}} - A_{r_n}' \right) + \frac{r}{c} \left(\frac{v_{s_n}^{j+1}}{r_n} - A_{\theta_n}' \right), \quad \dots \quad (6.25)$$

$$v_{s_{n-1}}^{j+1} \left\{ -\frac{(\lambda_{fr} + 2G)}{\Delta r_{n-\frac{1}{2}}} \right\} + p_n^{j+1} \left\{ \frac{\alpha}{\Delta t} \right\} + v_{s_n}^{j+1} \left\{ \frac{(\lambda_{fr} + 2G)}{\Delta r_{n-\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda_{fr}}{r_n} + \frac{2r}{c} \frac{1}{\Delta r_{n+\frac{1}{2}}} - \frac{r}{c} \frac{1}{r_n} \right\} +$$

$$v_{s_{n+1}}^{j+1} \left\{ -\frac{2r}{c} \frac{1}{\Delta r_{n+\frac{1}{2}}} \right\} = \alpha \frac{p_n^j}{\Delta t} - 2 \frac{r}{c} A_{r_n}' - \frac{r}{c} A_{\theta_n}' \cdot \dots \quad (6.26)$$

Tanto en la ecuación 6.24 como en la ecuación 6.26 aparecen los términos A_r', A_θ' . Ambas variables deberían de evaluarse al tiempo $j + 1$ para que las ecuaciones fueran totalmente implícitas, esto no se puede ya que dependen tanto de los esfuerzos como de los desplazamientos. Se ocupa un procedimiento parecido al mencionado antes con la presión de iteración p'_i .

Para la primera iteración del primer paso de tiempo, si se usaran los valores reales de los desplazamientos, varias operaciones se indeterminan, por lo que se usa un valor semilla bastante pequeño, se calculan las velocidades y presiones para el tiempo $j + 1$ y con las velocidades se calculan los esfuerzos y los valores de $A_r^{j+1}, A_\theta^{j+1}$ para el tiempo $j + 1$. Se vuelve a iterar pero ahora los valores de las variables de iteración son los valores obtenidos de la iteración anterior $A_r' = A_r^{j+1}, A_\theta' = A_\theta^{j+1}$ y se vuelven a obtener los valores para el tiempo $j + 1$. Se crea una nueva variable que agrupe los términos de A_r y A_θ ($A_d = A_r - A_\theta$), se evalúa la diferencia entre el valor obtenido de la iteración anterior y el obtenido de la iteración actual, si la diferencia absoluta es menor a una tolerancia se deja de iterar $|A_d'^k - A_d'^{k-1}| < tolerancia$, en caso contrario el ciclo continúa.

Las ecuaciones 6.21 y 6.23 se usan para los nodos del yacimiento desde el pozo hasta un nodo antes de la frontera externa del yacimiento ($1 \leq i < n$). Las ecuaciones 6.21 y 6.26 se usan para el nodo que está en la interfase yacimiento-domo salino ($i = n$) y la ecuación 6.24 se usa para todos los otros nodos del domo salino ($n > i$).

Así como lo muestran las ecuaciones 6.21 y 6.23, la presión y la velocidad del sólido para cada nodo dependen de las presiones y velocidades de sus nodos vecinos, se deduce que de la forma en que se estableció el sistema de ecuaciones, aún quedan dos incógnitas extra para la presión y dos para la velocidad del sólido, para quitar estas incógnitas se ocupan las condiciones de frontera interna y externa.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r_w} = \frac{-q\mu}{k_r 2\pi r_w h} \rightarrow p_0 = p_2 - \gamma, \quad \dots \dots \dots (6.27)$$

$$\gamma = -\frac{q\mu}{k_r 2\pi r_w h}, \quad \dots \dots \dots (6.28)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r_e} = 0 \rightarrow p_{n+1} = p_{n-1}, \dots \quad (6.29)$$

$$v_{s_0} = 0, \dots \quad (6.30)$$

$$v_{s_{n_t}} = 0. \dots \quad (6.31)$$

Con las ecuaciones 6.27 y 6.28 las presiones “imaginarias” de los nodos “0” y “n + 1” son funciones de las presiones de los nodos “2” y “n – 1” respectivamente. Son imaginarias ya que el lugar de esos nodos no es dentro del yacimiento; en realidad el nodo “0” está ocupando espacio dentro del pozo mientras que el nodo “n + 1” ocupa un lugar en el domo salino. Esto se puede ver como un “artificio” para completar el sistema de ecuaciones.

6.4 Método numérico

Para resolver el sistema de ecuaciones es conveniente organizarlo como una ecuación matricial:

$$Y^{n_{t-1} \times n_{t-1}} X^{n_{t-1} \times 1} = D^{n_{t-1} \times 1}, \dots \quad (6.32)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & & & \\ & C_3 & A_3 & B_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ C_{n_t-2} & A_{n_t-2} & B_{n_t-2} & & & \\ & C_{n_t-1} & A_{n_t-1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n_t-2} \\ X_{n_t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{n_t-2} \\ D_{n_t-1} \end{bmatrix}, \dots \quad (6.33)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_i^{1,1} & A_i^{1,2} \\ A_i^{2,1} & A_i^{2,2} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_i^{1,1} & B_i^{1,2} \\ B_i^{2,1} & B_i^{2,2} \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} C_i^{1,1} & C_i^{1,2} \\ C_i^{2,1} & C_i^{2,2} \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} X_i^1 \\ X_i^2 \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} D_i^1 \\ D_i^2 \end{bmatrix}$$

donde n_t es el número total de nodos del sistema (yacimiento y domo salino), Y es una matriz de coeficientes trilineal y cada uno de sus elementos es una matriz cuadrada de orden dos por dos, X es un vector columna de incógnitas y cada uno de sus elementos es a su vez un vector columna de orden dos, al igual que el vector columna D con elementos que son vectores columna de orden dos.

Solo son $n_t - 1$ ecuaciones debido a que en el nodo n_t la velocidad del sólido ya está definida con la ecuación de frontera externa para la velocidad del sólido.

Para resolver este sistema de ecuaciones, el método numérico más apropiado es el Algoritmo de Thomas modificado para matrices de bloques dos por dos. En el apéndice A se explica el Algoritmo de Thomas y se muestra una subrutina.

Con todo lo anterior se definen las ecuaciones para cada nodo de nuestro sistema. Si agrupamos los coeficientes en letras de las ecuaciones 6.21 y 6.23 respectivamente:

$$p_{i-1}^{j+1}[a] + v_{s_{i-1}}^{j+1}(b) + p_i^{j+1}[c] + v_{s_i}^{j+1}(d) + p_{i+1}^{j+1}[e] + v_{s_{i+1}}^{j+1}(f) = q , \quad \dots\dots\dots (6.34)$$

$$p_{i-1}^{j+1}(g) + v_{s_{i-1}}^{j+1}(h) + p_i^{j+1}(i) + v_{s_i}^{j+1}(j) + p_{i+1}^{j+1}(k) + v_{s_{i+1}}^{j+1}(l) = 0 . \quad \dots\dots\dots (6.35)$$

Para el nodo $i = 1$:

$$p_1^{j+1}[c] + v_{s_1}^{j+1}(d) + p_2^{j+1}[e + a] + v_{s_2}^{j+1}(f) = q + \gamma a , \quad \dots\dots\dots (6.36)$$

$$p_1^{j+1}(i) + v_{s_1}^{j+1}(j) + p_2^{j+1}(k + g) + v_{s_2}^{j+1}(l) = \gamma g . \quad \dots\dots\dots (6.37)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c & d \\ i & j \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} e + a & f \\ k + g & l \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} p_1^{j+1} \\ v_{s_1}^{j+1} \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} q + \gamma a \\ \gamma g \end{bmatrix}$$

Para los nodos tales que $1 < i < n$:

$$p_{i-1}^{j+1}[a] + v_{s_{i-1}}^{j+1}(b) + p_i^{j+1}[c] + v_{s_i}^{j+1}(d) + p_{i+1}^{j+1}[e] + v_{s_{i+1}}^{j+1}(f) = q , \quad \dots\dots\dots (6.38)$$

$$p_{i-1}^{j+1}(g) + v_{s_{i-1}}^{j+1}(h) + p_i^{j+1}(i) + v_{s_i}^{j+1}(j) + p_{i+1}^{j+1}(k) + v_{s_{i+1}}^{j+1}(l) = 0 . \quad \dots\dots\dots (6.39)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c & d \\ i & j \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} e & f \\ k & l \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} p_i^{j+1} \\ v_{s_i}^{j+1} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la interfase $i = n$ la ecuación 6.41 representará a la ecuación 6.26:

$$p_{n-1}^{j+1}[a + e] + v_{s_{n-1}}^{j+1}(b) + p_n^{j+1}[c] + v_{s_n}^{j+1}(d) + v_{s_{n+1}}^{j+1}(f) = q , \quad \dots\dots\dots (6.40)$$

$$v_{s_{n-1}}^{j+1}(h) + p_{n+1}^{j+1}(i) + v_{s_{n+1}}^{j+1}(j) + v_{s_{n+1}}^{j+1}(l) = s . \quad \dots\dots\dots (6.41)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} c & d \\ i & j \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & l \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} a + e & b \\ 0 & h \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} p_n^{j+1} \\ v_{s_n}^{j+1} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix}$$

El término s de la ecuación 6.41 representa al lado derecho (domo salino) de la ecuación 6.26.

Para todos los nodos que solo pertenecen al domo salino la única ecuación que debe de usarse es la ecuación 6.24, si únicamente se usara esta ecuación algunas operaciones realizadas dentro del algoritmo de Thomas se indeterminan, por lo que no se podría obtener la solución. En este caso se vuelve a recurrir a un “artificio”, se utiliza la ecuación 6.34 pero para un valor de $q = 0$ y se asume que no existe flujo (ecuación 6.29) para todos estos nodos.

Para cuando $n < i < n_t - 1$ la ecuación 6.43 representará la ecuación 6.24:

$$v_{s_{i-1}}^{j+1}(b) + p_i^{j+1}[c] + v_{s_i}^{j+1}(d) + p_{i+1}^{j+1}[a + e] + v_{s_{i+1}}^{j+1}(f) = 0 , \dots\dots\dots (6.42)$$

$$v_{s_{i-1}}^{j+1}(h) + v_{s_i}^{j+1}(j) + v_{s_{i+1}}^{j+1}(l) = w . \dots\dots\dots (6.43)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & j \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} a + e & f \\ 0 & l \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & h \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} p_i^{j+1} \\ v_{s_i}^{j+1} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$$

Para cuando $i = n_t - 1$ la ecuación 6.45 representará la ecuación 6.24.

$$p_{n_t-2}^{j+1}[a + e] + v_{s_{n_t-2}}^{j+1}(b) + p_{n_t-1}^{j+1}[c] + v_{s_{n_t-1}}^{j+1}(d) = 0 , \dots\dots\dots (6.44)$$

$$v_{s_{n_t-2}}^{j+1}(h) + v_{s_{n_t-1}}^{j+1}(j) = w . \dots\dots\dots (6.45)$$

$$A_{n_t-1} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & j \end{bmatrix}, C_{n_t-1} = \begin{bmatrix} a + e & b \\ 0 & h \end{bmatrix}, X_{n_t-1} = \begin{bmatrix} p_{n_t-1}^{j+1} \\ v_{s_{n_t-1}}^{j+1} \end{bmatrix}, D_{n_t-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$$

Si en cambio se prefiere modelar al yacimiento cuando no hay un domo salino asociado, entonces se siguen utilizando las mismas ecuaciones para $1 \leq i < n$ ya que éstas describen únicamente al yacimiento. Para $i = n$ la ecuación de difusión modificada sigue siendo válida pero la ecuación 6.41 es reemplazada por la ecuación 6.23 combinada con la ecuación 6.29 y $v_{s_{n+1}}^{j+1} = 0$.

Entonces $i = n$ cuando no hay domo salino las ecuaciones son:

$$p_{i-1}^{j+1}[a + e] + v_{s_{i-1}}^{j+1}(b) + p_i^{j+1}[c] + v_{s_i}^{j+1}(d) = q , \dots\dots\dots (6.46)$$

$$p_{i-1}^{j+1}(g+k) + v_{s_{i-1}}^{j+1}(h) + p_{i+1}^{j+1}(i) + v_{s_i}^{j+1}(j) = 0 \quad (6.47)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c & d \\ i & j \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} a+e & b \\ g+k & h \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} p_i^{j+1} \\ v_{s_i}^{j+1} \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para asegurar el buen funcionamiento del algoritmo de Thomas, la velocidad del sólido es nula en el nodo $n + 1$ y no en el nodo n ; si se usara la velocidad del sólido nula en n se llegaría a operaciones indefinidas.

Con todo lo antes mencionado se crea un simulador que funciona como lo ejemplifica el diagrama de flujo de la figura 6.4.

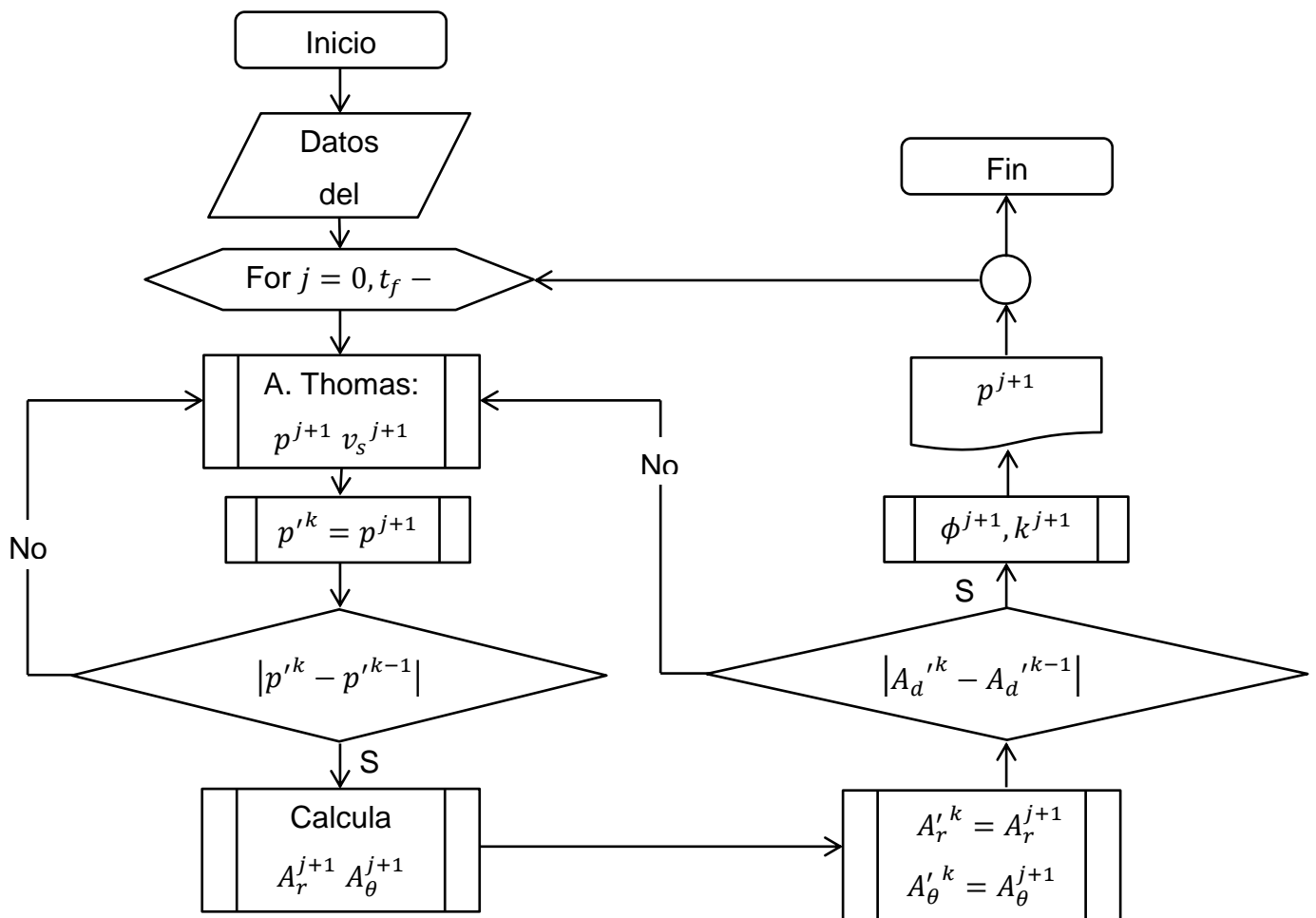


Figura 6.4 Diagrama de flujo del simulador creado.

6.5 Validación del simulador

Para validar y comprobar el buen funcionamiento del simulador se hicieron varias corridas para replicar los resultados obtenidos en el artículo de Chin, Raghavan y Thomas “Fully coupled geomechanics and fluid flow analysis of wells with stress dependent permeability” [7]. Para todas las corridas que se realizaron se ocupó el modelo donde el yacimiento no tiene un domo salino asociado. En el artículo hay pocos ejemplos donde se usa el modelo poroelástico, en la mayoría usan un modelo poroelastoplástico.

Se reprodujo la figura 7 del artículo, que muestra el cambio en el perfil de permeabilidad dependiendo de los valores de la permeabilidad inicial después de producir 3000 barriles por día durante 173 días, como lo muestra la figura 6.5 de esta tesis. Aunque el principal objetivo en el artículo era realizar una prueba de incremento de presión y ver como se recuperaba el perfil de permeabilidad, esto no se intenta reproducir debido a que el simulador utiliza una formación poroelástica.

La figura 6.6 muestra la comparación del perfil de porosidad mostrados en el artículo y la simulación realizada para una producción de 173 días con un gasto de 3000 BPD. Los resultados son bastante similares solo varían aproximadamente en 0.003 unidades con respecto a los del artículo.

Estos dos ejemplos verifican que el simulador creado representa bastante bien los efectos de cambio de permeabilidad, porosidad, desplazamiento y mantenimiento de presión.

Las diferencias entre los resultados del artículo y las obtenidas con el simulador se deben principalmente a que el simulador solo considera la dirección radial, el yacimiento no se deforma debido a la presión de sobrecarga por lo que mantiene un espesor constante y el modelo es poroelástico mientras que en el artículo generalmente usan un modelo poroelastoplástico a excepción de los resultados mostrados en la figura 6.6 de esta tesis.

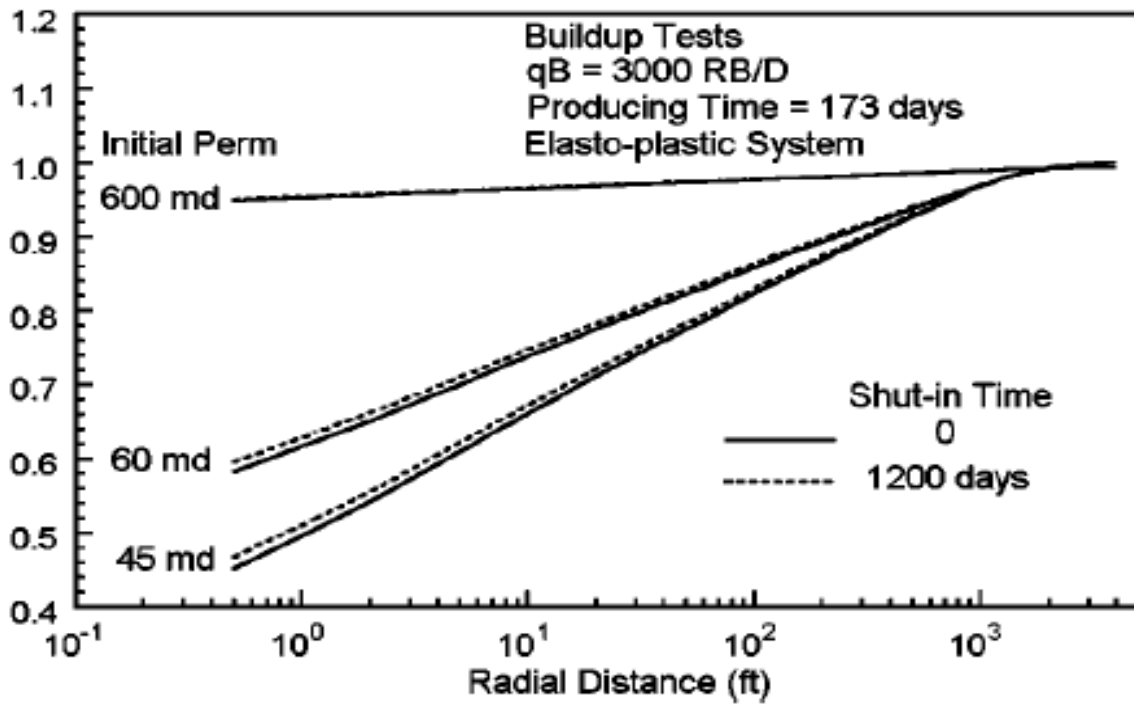
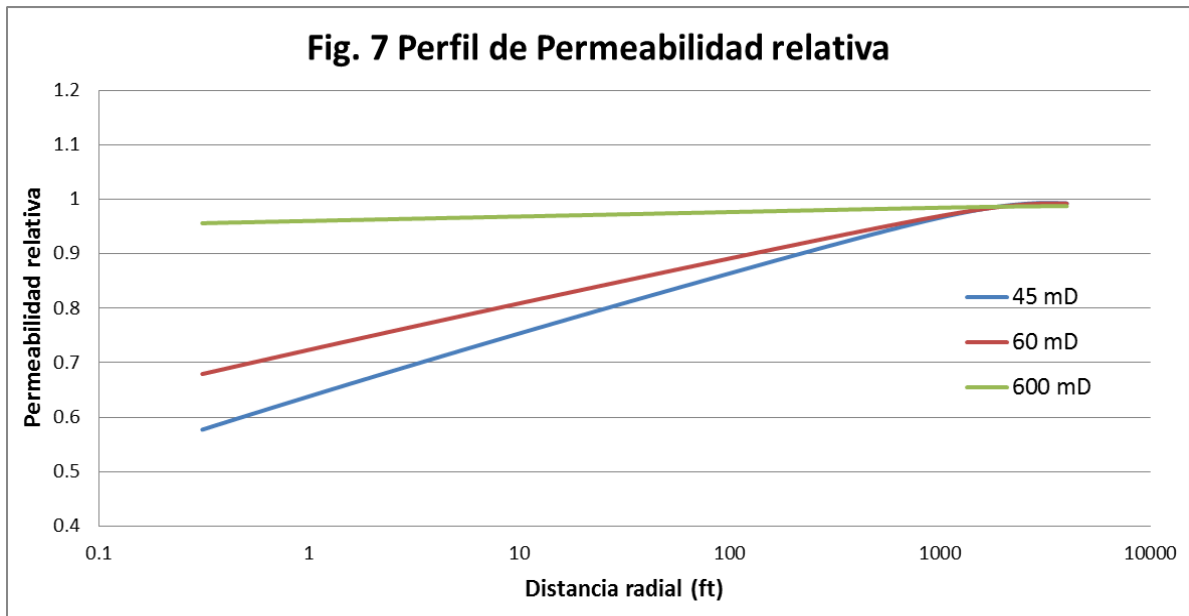


Figura 6.5 Comparación artículo-simulador de perfil de permeabilidad para varios valores iniciales.

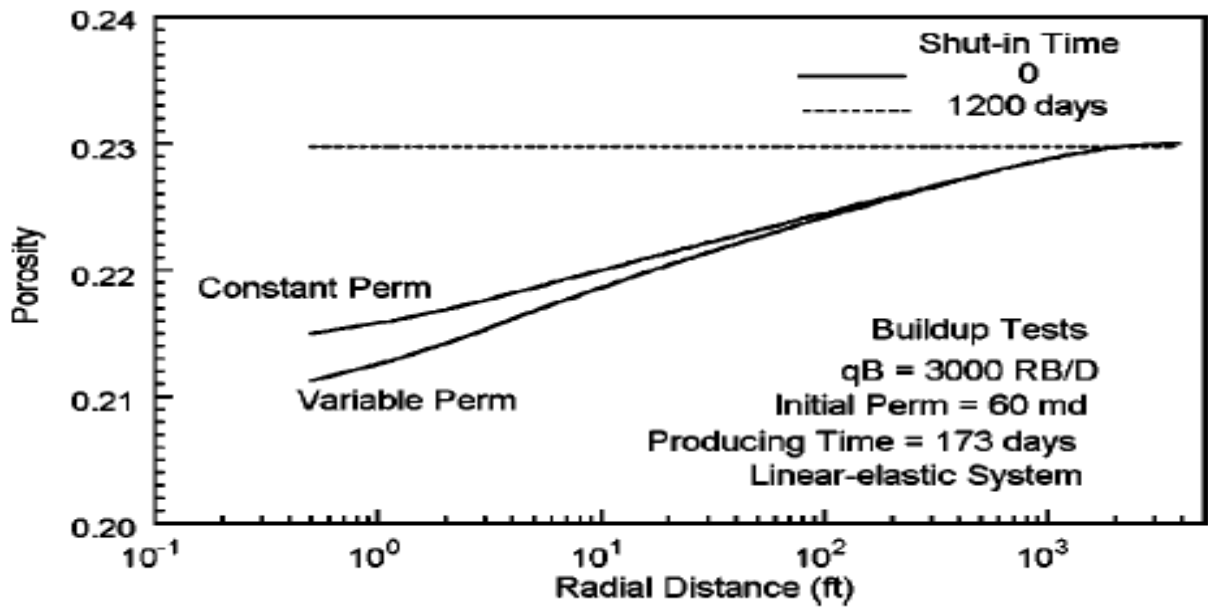
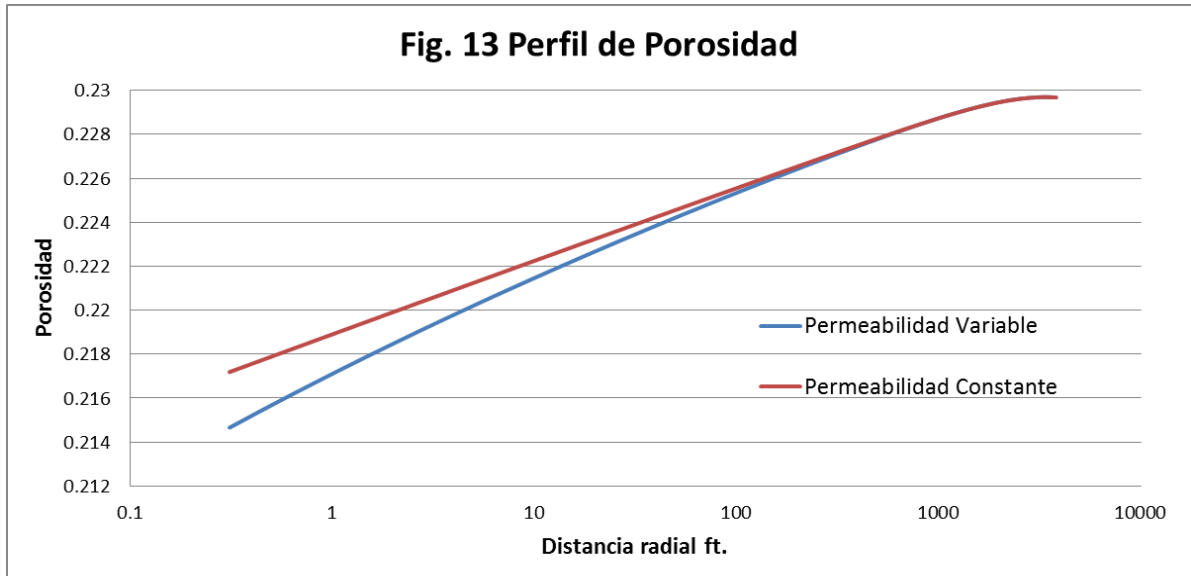


Figura 6.6 Comparación artículo-simulador del perfil de permeabilidad para permeabilidad constante y variable.

Capítulo 7 Discusión de Resultados

7.1 Introducción

Se hicieron varias simulaciones para determinar la influencia de las propiedades de la sal y del yacimiento en el mantenimiento de presión cuando está presente un domo salino y cuando el yacimiento se encuentra aislado.

Los valores que se muestran en la tabla 7.1 son la referencia para las simulaciones.

Tabla 7.1 Valores de entrada del simulador

Roca Fluido			
<i>Radio de pozo ft.</i>	.295	<i>Compresibilidad aceite psi^{-1}</i>	1×10^{-5}
<i>Radio yacimiento ft.</i>	4000	<i>Permeabilidad mD.</i>	45
<i>Espesor yacimiento ft.</i>	108	<i>Porosidad %</i>	23
<i>Presión inicial psi</i>	7500	<i>Factor de Biot</i>	1
<i>Tolerancia psi</i>	.001	<i>Constante de Lamé psi</i>	40293
<i>Viscosidad aceite cp.</i>	3.7	<i>Módulo de Corte psi</i>	60420
<i>Bo</i>	1.25		
Domo salino			
<i>Radio domo ft.</i>	5445	β	15
<i>Espesor domo ft.</i>	108	δ	6
$\alpha_s \text{ día}^{-1}$	1.73×10^{-31}	<i>A psi/día</i>	1.79×10^{-25}

Con los datos usados se tiene un sistema roca-fluidos-domo salino que tienen la forma de la figura 6.1, con espesor constante de 108 ft y donde el domo salino representa el 85% del volumen del yacimiento.

7.2 Influencia del domo salino en la presión promedio del yacimiento

Se realizaron dos corridas para un tiempo de 10 años, una con el domo y otra donde el yacimiento se encuentra aislado. En ambas se tiene un pozo produciendo a gasto constante de 2000 bpd.

La figura 7.1 representa el perfil de presión en la dirección radial después de 1 año y después de 10 años de producción para ambos casos. El perfil de presión después de 1 año de producción es prácticamente idéntico para el caso con domo y sin domo, mientras que después de 10 años se nota una clara diferencia entre ambos perfiles de presión.

Existe un mejor mantenimiento de presión cuando el domo salino está presente; la presión promedio del yacimiento cuando está presente el domo salino es 9% mayor con respecto a la presión cuando el yacimiento está aislado, lo que representa 300 psi extra de presión aproximadamente.

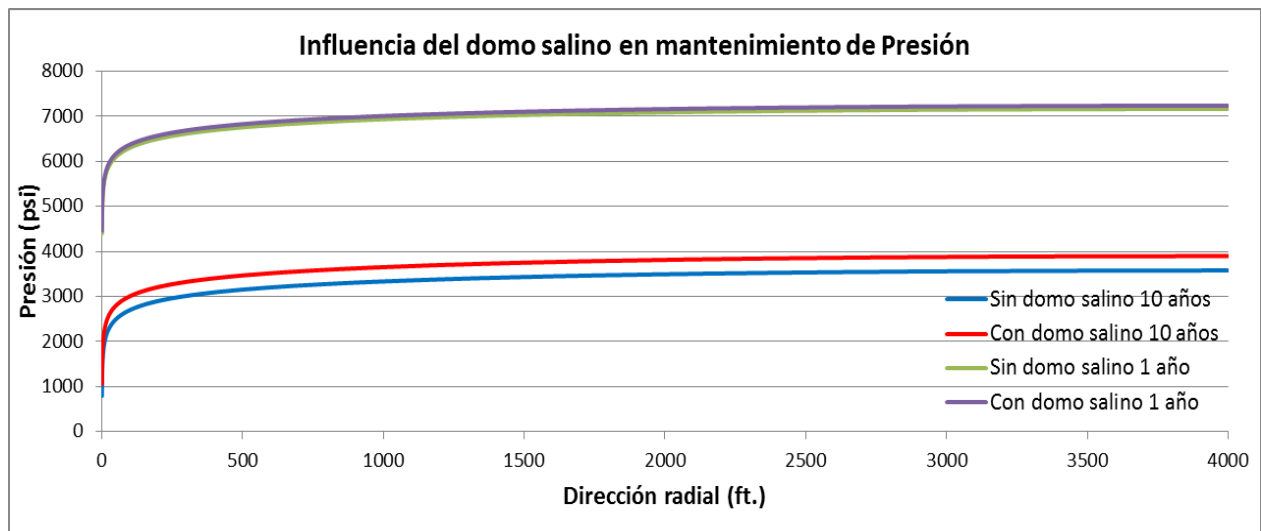


Figura 7.1 Influencia de la sal en la presión después de 10 años de producción

La figura 7.2 muestra el desplazamiento que tuvo la roca después de los 10 años de producción; la simulación muestra que para ambos casos la deformación está desacelerando con el tiempo. Cuando no existe el domo salino la frontera externa del yacimiento es fija, por este motivo la deformación que presenta el yacimiento en este caso se ve muy limitada, de hecho el máximo desplazamiento que existe en el

yacimiento para este caso después de un año de producción sucede una distancia de 1154 ft del centro del pozo con un desplazamiento de 28.5 cm, después de diez años es de 29.5 cm, por lo tanto más del 96% del desplazamiento que ocurre en el yacimiento durante los diez años de producción se sucede durante su primer año.

Cuando existe el domo salino, la deformación se incrementa debido a que la frontera externa del yacimiento es móvil; al final del primer año la frontera externa (4000 ft) se ha desplazado 10 cm hacia el pozo y al final del décimo año se desplazó 50 cm.

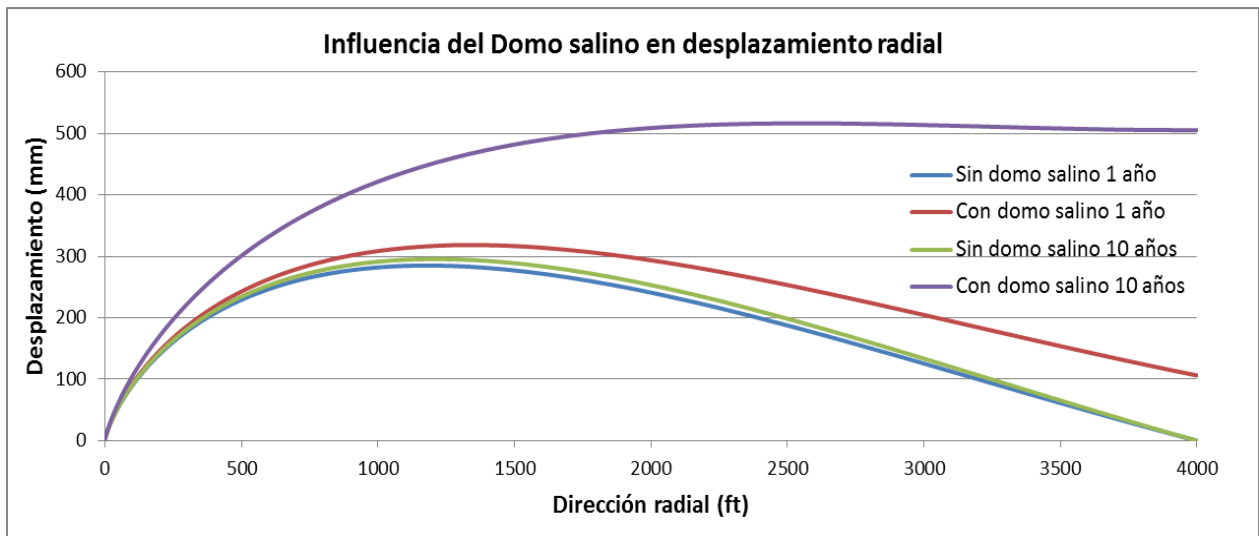


Figura 7.2 Influencia de la sal en el desplazamiento radial después de 10 años de producción

La expansión del domo salino provoca que el desplazamiento interno del yacimiento crezca, lo que aumenta el término $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_s)$ de la ecuación 5.38; por lo tanto se tiene un mejor mantenimiento de presión dentro del yacimiento.

Cuando la frontera externa es fija, la desaceleración del desplazamiento provoca que el término $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_s)$ decrezca muy rápido y no se tenga un buen mantenimiento de presión.

Al final de los 10 años de producción, en la interfase domo-yacimiento se tuvo una caída de presión de 3600 psi lo que provocó un desplazamiento de la interfase de 50 cm hacia el centro del pozo. Este desplazamiento corresponde a una expansión del domo salino de aproximadamente 0.1% de su volumen original; con los resultados

obtenidos y usando la definición de compresibilidad isotérmica se encuentra que la compresibilidad del domo salino para los datos usados es de aproximadamente $2.75 \times 10^{-7} \text{psi}^{-1}$ lo que es congruente con los resultados esperados.

Aunque el modelo planteado es teórico debido a la geometría del sistema, los resultados demuestran que la influencia del domo salino no debe asumirse como despreciable para casos donde la roca del yacimiento sea sensible a los esfuerzos.

7.3 Análisis de sensibilidad

Se hizo un análisis de sensibilidad para determinar cuáles factores eran los que más afectaban el comportamiento del sistema domo-yacimiento.

7.3.1 Efecto del gasto del pozo

Para ver los efectos que tiene el gasto del pozo se usaron las propiedades de la tabla 7.1, se realizaron tres corridas para 1 año de producción, con 1000 bpd 2000 bpd y 3000 bpd para el caso en donde se tiene un domo salino asociado.

En la figura 7.3 se aprecia que el punto de máxima deformación en las tres curvas es a una distancia radial de 1332 ft del centro del pozo. Cuando la producción es de 1000 bpd, 2000 bpd y 3000 bpd la deformación máxima es 16 cm, 32 cm y 47 cm respectivamente, por lo que podemos decir que el gasto es directamente proporcional a la máxima deformación que puede presentar el yacimiento.

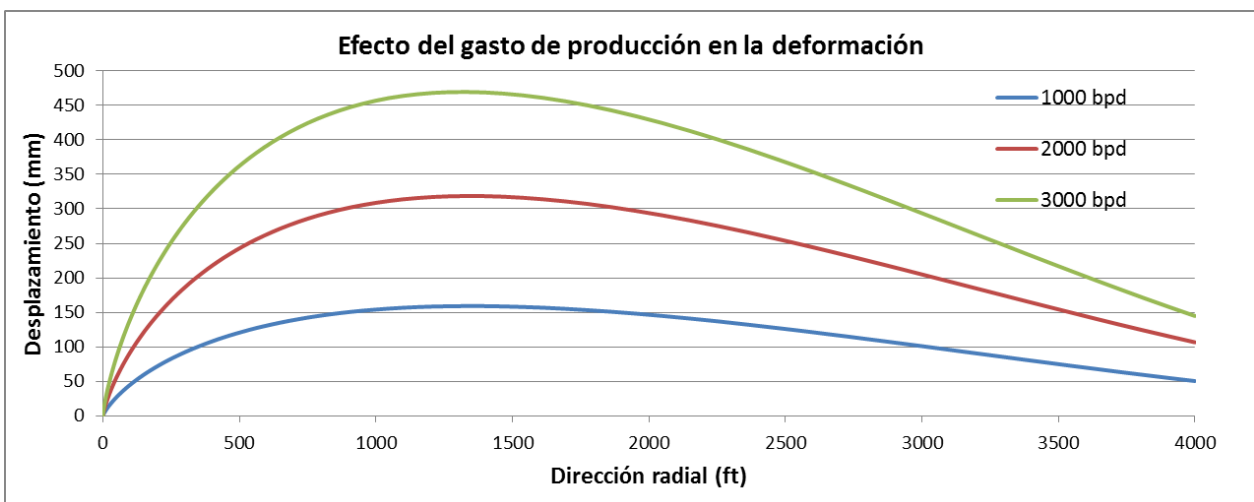


Figura 7.3 Efecto del gasto en producción en desplazamiento del sólido

El desplazamiento de la frontera externa del yacimiento (interfase) cuando la producción es de 1000 bpd, 2000 bpd y 3000 bpd es de 5cm, 10 cm y 14 cm, por lo que el gasto también es proporcional al desplazamiento de la frontera externa.

Analizando un poco más los resultados se observa que aunque la deformación sea proporcional al gasto, a medida que el gasto se vaya incrementando, el incremento en el desplazamiento será cada vez menor, por lo que para gastos muy grandes la deformación será aproximadamente insensible.

7.3.2 Efecto de la velocidad de explotación

Se investigó como afecta la velocidad de explotación en la expansión del domo salino, para esto se crearon tres escenarios diferentes con la condición de que en todos el volumen producido durante la simulación sea el mismo.

Para las tres simulaciones se utilizaron las propiedades usadas en la tabla 7.1; para el caso base se utiliza un gasto de 2000 bpd durante 150 días de producción, el segundo caso usa un gasto de 1000 bpd durante 300 días de producción y el tercer caso un gasto de 3000 bpd durante 100 días de producción.

La figura 7.4 muestra los diferentes desplazamientos para los tres casos, aunque los desplazamientos dentro del yacimiento son bastante diferentes, el desplazamiento de la interfase domo-yacimiento es prácticamente el mismo en los tres casos. Al ser el desplazamiento de la interfase tan parecido en los tres casos, la presión promedio también es muy parecida, así como se muestra en la tabla 7.2, aunque la presión promedio es ligeramente mayor si se aumenta el gasto, la diferencia es cerca de 2 psi para un volumen producido de 300,000 barriles; se hicieron más análisis y cuando el volumen producido aumenta a tres millones de barriles producidos, la diferencia que existe entre las presiones promedio es de solo 50 psi.

La tabla 7.2 también muestra los datos de las presiones en el pozo al finalizar la simulación para los tres casos. Como se observa a diferencia de la presión promedio, la presión en el pozo es bastante sensible al gasto de producción, lo que provoca que las presiones del pozo sean muy diferentes; si se ocupan gastos de producción muy grandes se limitará bastante la vida de producción del pozo.

Si se quisiera maximizar el factor de recuperación final, se debe de tratar de mantener la velocidad de explotación lo más pequeña posible para que la presión en el pozo no disminuya tan rápidamente.

Tabla 7.2 Presiones para diferentes velocidades de explotación

	Presión en el pozo (psi)	Presión promedio (psi)
1000 BPD	6113	7364.4
2000 BPD	4733.5	7366.8
3000 BPD	3160	7368.5

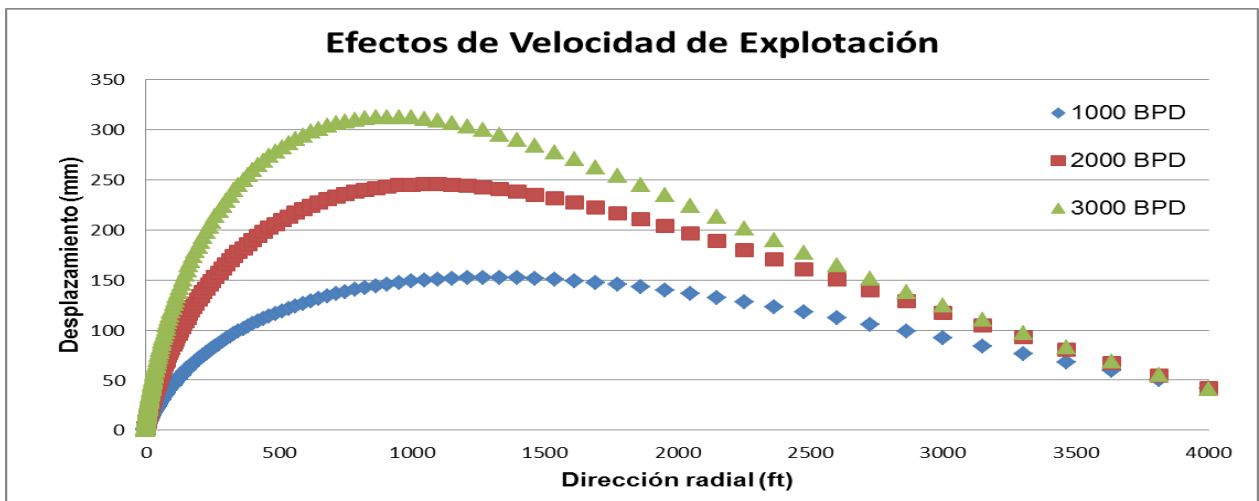


Figura 7.4 Desplazamientos para diferentes velocidades de explotación

7.3.3 Efectos de propiedades del domo salino

El modelo usado para representar la deformación de la sal utiliza 5 variables; el tamaño del domo salino y 4 propiedades de la sal, α_s , β , δ y A . Para cada una de las 5 variables se hicieron 2 corridas para un tiempo de 1 año, donde en la simulación base se usa el valor que se muestra en la tabla 7.1 y en la otra simulación se disminuye el valor de la propiedad en un 50 por ciento para ver cual tiene una mayor influencia en la deformación y mantenimiento de presión.

Efecto de “ α_s ”

Como se vio en el capítulo cuatro, “ α_s ” es una constante del modelo usado para el domo salino que es el coeficiente de la función de deformación por fluencia lenta (ecuación 4.17). La figura 7.5 muestra los efectos del cambio de esta propiedad en la deformación y en la presión. Cuando se disminuye el valor de “ α_s ” se tiene una menor deformación y un peor mantenimiento de presión; la presión promedio disminuye en aproximadamente 38.5 psi. Entonces la constante de la sal “ α_s ” es directamente proporcional al mantenimiento de presión y al desplazamiento de la interfase.

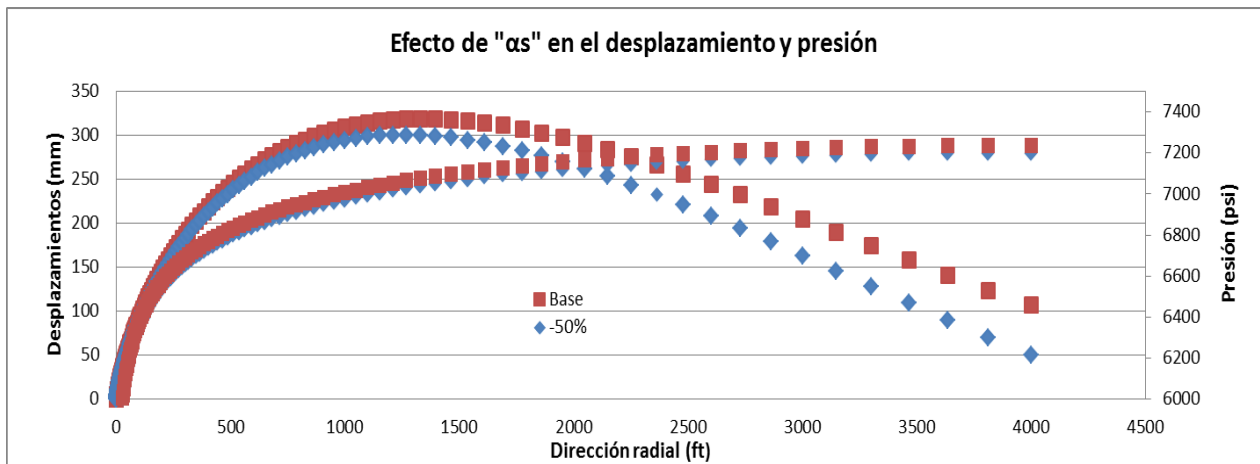


Figura 7.5 Efecto de “ α_s ” en el desplazamiento y presión

Efecto de “ β ”

Debido a que estamos asumiendo que $\beta = B$ en las relaciones constitutivas de la sal expuestas en el capítulo cuatro, la constante “ β ” se vuelve el exponente de la deformación volumétrica que aparece tanto en la función de deformación por fluencia lenta como en la función de relajación (ecuaciones 4.17 y 4.18). La figura 7.6 muestra las gráficas de presión y desplazamiento para los diferentes valores de “ β ”.

Aunque no se logra apreciar debido a que el efecto es mínimo, cuando se disminuye el valor de “ β ” en un 50% la presión promedio disminuye 4 psi con respecto al valor base. Entonces la constante de la sal “ β ” es directamente proporcional al mantenimiento de presión y a la deformación.

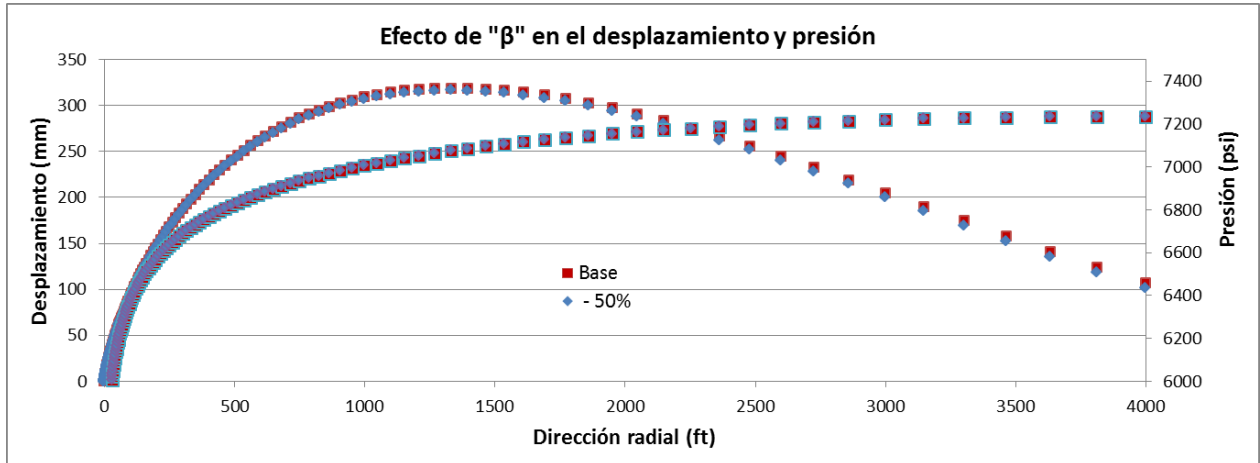


Figura 7.6 Efecto de “β” en el desplazamiento y presión

Efecto de “δ”

Al igual que la propiedad anterior, “δ” es una constante de la sal que aparece tanto en la función de deformación por fluencia lenta como en la función de relajación, como el exponente del esfuerzo Von Mises.

Los resultados aparecen en la figura 7.7; al igual que con “β” las curvas son prácticamente idénticas, únicamente después de la revisión de los datos se observa que al disminuir el valor de “δ” en un 50% la presión promedio aumenta 0.5 psi, y el desplazamiento en la frontera disminuyó 5 cm. La constante de la sal “δ” por lo tanto es inversamente proporcional al mantenimiento de presión y directamente proporcional a la deformación.

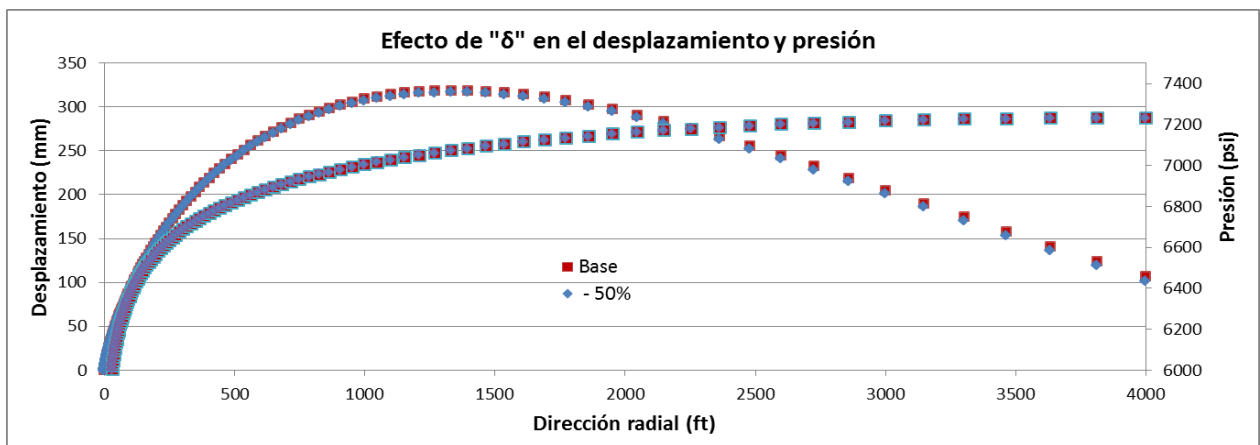


Figura 7.7 Efecto de “δ” en el desplazamiento y presión

Efecto de “A”

La constante del domo salino “A” es el coeficiente de la función de relajación (ecuación 4.18). Como lo indica la figura 7.8, cuando se disminuye su valor, se obtiene un mejor mantenimiento de presión, la presión promedio aumenta en 40 psi y el desplazamiento aumenta 56 cm. La constante de la sal “A” es inversamente proporcional al mantenimiento de presión y a la deformación del domo salino.

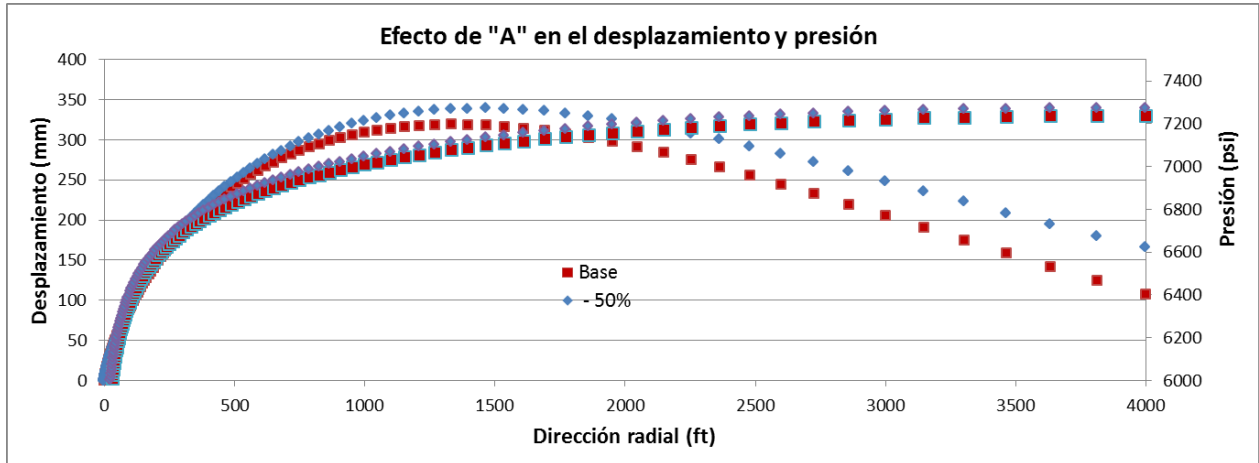


Figura 7.8 Efecto de “A” en el desplazamiento y presión

Efecto del tamaño del domo salino

La figura 7.9 muestra las gráficas cuando el volumen del domo salino se reduce a un 50% del tamaño usado en la simulación base lo que provoca que la presión promedio se reduzca en 18 psi. Como era de esperarse, el mantenimiento de presión y la deformación disminuyeron, muy parecido a como sucede en la analogía realizada al inicio del capítulo 6. Por lo tanto el tamaño del domo salino es directamente proporcional al mantenimiento de presión y al desplazamiento de la frontera domo-yacimiento.

Las tres propiedades del domo salino que más impactan en el modelo del domo salino utilizado fueron los coeficientes de las funciones de deformación por fluencia lenta y relajación “ α_s ” y “A” respectivamente y el volumen del domo salino que se encuentra delimitando al yacimiento.

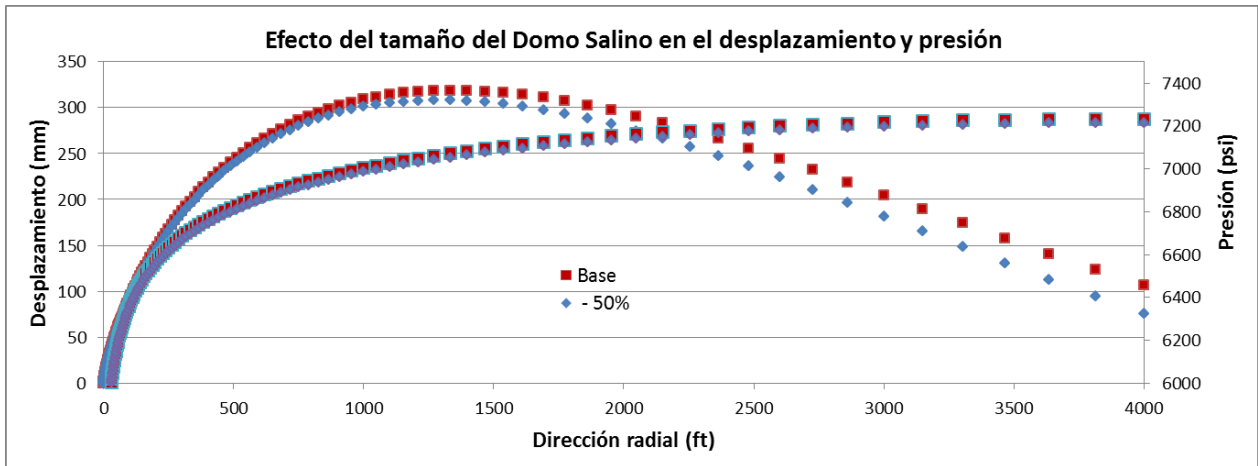


Figura 7.9 Efecto del tamaño del Domo Salino en el desplazamiento y presión

7.3.4 Efectos de las propiedades del yacimiento

Para determinar la influencia que tiene la roca del yacimiento en el resultado de la interacción entre el domo salino y el yacimiento, se plantearon 2 casos principales donde se altera la constante de Lamé cuando la roca está siendo drenada (λ_{fr}) y el módulo de corte (G).

Para cada caso se realizaron 3 corridas para un pozo produciendo 2000 bpd durante 1 año; una corrida con los valores de la tabla 7.1 y las otras dos corridas alterando el valor de la constante poroelástica que se está investigando en un +50% y -50%.

Efecto de “ λ_{fr} ”

La constante “ λ_{fr} ” de la roca del yacimiento es una medida de la dureza de la roca; al disminuir esta propiedad se aumenta el desplazamiento interno del yacimiento y al aumentar el valor de la constante se disminuye el desplazamiento. Por lo tanto se esperaba que si aumenta el desplazamiento del yacimiento entonces el mantenimiento de presión se incrementa. Aunque esto es cierto, al disminuir la constante en un 50% la presión promedio aumentó únicamente 1.4 psi y al aumentar la constante en un 50% la presión promedio disminuyó 1.3 psi; esto se debe a que aunque el desplazamiento

interno es muy diferente para los 3 casos, el desplazamiento de la interfase domo-yacimiento es prácticamente igual.

Después de analizar los datos obtenidos en la presión del pozo, se aprecia que entre mayor sea el valor de la constante " λ_{fr} " mayor es la presión del pozo; la presión del pozo en el caso donde se disminuye el valor de " λ_{fr} " es aproximadamente 115 psi menor que el caso donde se incrementa el valor de " λ_{fr} ".

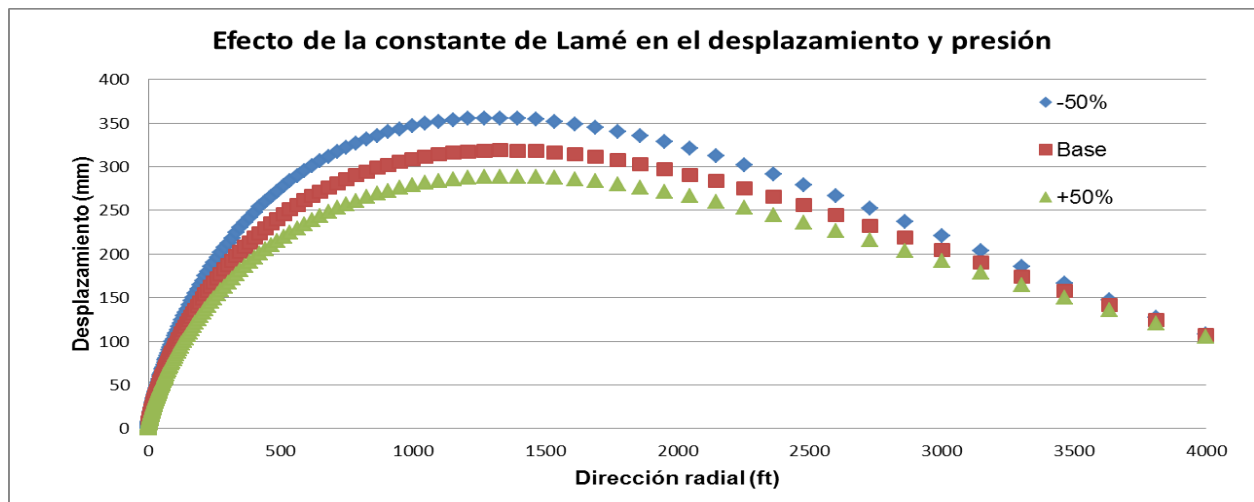


Figura 7.10 Efecto de " λ_{fr} " en el desplazamiento y presión

Efecto de " G "

Al igual que con la constante de Lamé para una roca siendo drenada, la relación obtenida entre el módulo de corte y los desplazamientos y la presión son bastante similares así como se muestra en la figura 7.11.

El módulo de corte es inversamente proporcional al desplazamiento interno del yacimiento y al valor de la presión promedio; aunque al igual que con la constante anterior, el desplazamiento de la interfase y el valor de la presión promedio es aproximadamente igual para los tres casos; la diferencia entre el caso superior y el inferior es de solamente 2.7 cm y 5.37 psi.

Se encontró que el módulo de corte es directamente proporcional al valor que se tiene de la presión del pozo; para este caso la diferencia entre los casos superior e inferior es bastante significativa (438 psi).

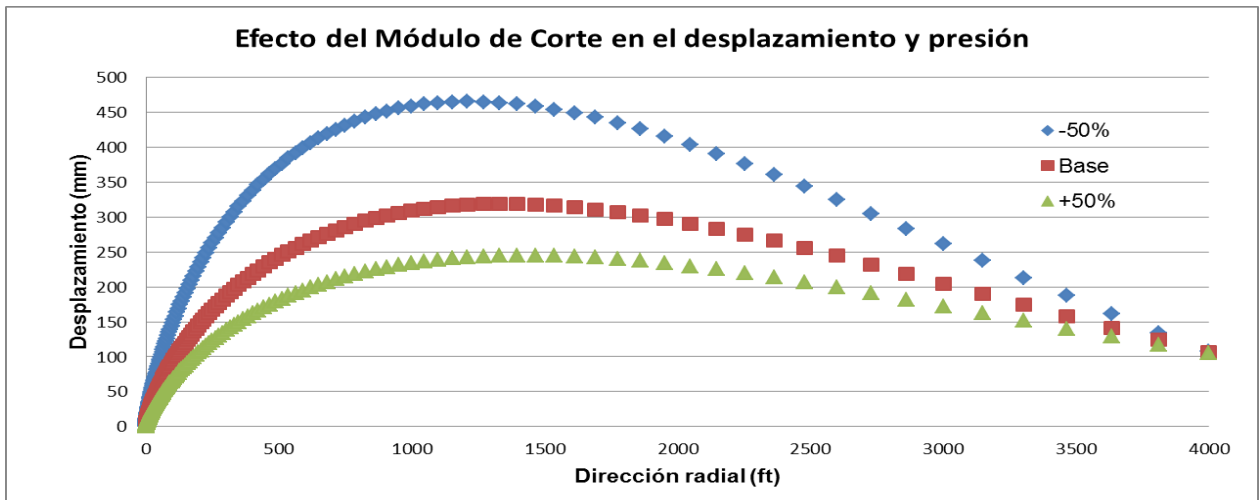


Figura 7.11 Efecto del Módulo de corte en el desplazamiento y presión.

Aunque al parecer, la relación entre dureza de la roca del yacimiento y la presión del pozo es directamente proporcional, si se encuentra un yacimiento con dureza demasiado grande, la influencia del domo salino se vuelve despreciable debido a que la roca no presenta deformación y el análisis se puede realizar usando la ecuación de difusión convencional para la industria petrolera.

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo de esta tesis es evaluar la importancia que puede tener un domo salino asociado a un yacimiento de aceite en el mantenimiento de la presión.

Después de analizar los resultados se concluyen los siguientes puntos:

- Aunque el domo salino sufre una deformación bastante pequeña en relación a su volumen original (0.1%), el mantenimiento de presión que provoca no debe de asumirse como despreciable ya que se pueden obtener errores significativos en el valor de la presión.
- Los factores que más impactan a la deformación en orden de relevancia son los coeficientes de la función relajación (A), de la función de deformación por fluencia lenta (α_s) y el tamaño del domo salino; la función de deformación por fluencia lenta así como el tamaño del domo salino ayudan a incrementar el desplazamiento de la interfase y a mejorar el mantenimiento de presión, mientras que la función relajación disminuye la influencia del domo salino provocando un menor movimiento de la interfase y mantenimiento de presión.
- A pesar de que las constantes poroelásticas usadas para describir la roca del yacimiento son muy importantes para determinar el desplazamiento de la roca interna del yacimiento, éstas no afectan de forma significativa al movimiento de la interfase. El mejor caso se da cuando las constantes de la roca son lo suficientemente grandes para no permitir que la presión del pozo caiga muy rápido, pero no tan grandes como para que la formación sea demasiado dura y los efectos del domo salino se vuelvan despreciables.
- Al igual que en la práctica convencional, la mejor forma de explotar un campo con un domo salino asociado y si las condiciones asumidas por el simulador y el modelo planteado son válidas, la velocidad de explotación debe de mantenerse en el nivel más bajo posible para que la presión del pozo no disminuya muy

rápido, ya que la influencia del domo salino es prácticamente independiente de la velocidad de explotación.

Algunas áreas que se pueden mejorar para describir con mejor precisión al sistema roca-fluidos-sal son las siguientes:

- Crear un simulador tridimensional para evaluar los efectos de la deformación vertical y la sobrecarga en el movimiento del yacimiento y el mantenimiento de presión.
- Evaluar la influencia del domo salino para diferentes ubicaciones con respecto al yacimiento y diferentes geometrías.
- El simulador se puede ampliar para evaluar y predecir la estabilidad del pozo bajo diferentes situaciones de explotación y evitar grandes pérdidas de dinero debido a colapsos u otros problemas.
- Buscar diferentes modelos constitutivos que describan el domo salino y ver cuál representa mejor los fenómenos del subsuelo.
- La suposición de que la roca se comporta como poroelástica es válida únicamente para un rango limitado de esfuerzos, seguramente para varios tipos de roca, ya se habrá sobrepasado el límite elástico cuando se presenta una caída de presión que represente el 50% de la presión original. Por lo tanto se debe incluir un modelo poroelastoplástico que represente la deformación de la roca del yacimiento con mayor fidelidad para el rango de presión deseado y tiempos de producción largos.
- Es de interés evaluar un sistema compuesto por un yacimiento, un domo salino y una roca sello infinita que rodee al domo salino para ver qué tan diferentes son los resultados de los obtenidos en el trabajo.
- Aunque parece ser muy pequeña la interacción que pudiera darse, es importante investigar los efectos que se pueden presentar cuando varios yacimientos están delimitando a un mismo domo salino.

Nomenclatura

A	Coeficiente de la función relajación, $\frac{M}{LT^3}, \frac{lbf}{in^2 d}$
b	Fuerza de cuerpo, $\frac{L}{T^2}, \frac{ft}{d^2}$
B	Factor de volumen, <i>adimensional</i>
c	Compresibilidad del fluido, $\frac{LT^2}{M}, \frac{in^2}{lbf}$
E	Módulo de Young, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$
G	Esfuerzo cortante, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$
h	Espesor del yacimiento, L, ft
k	Permeabilidad en dirección, L^2, mD
K	Módulo de compresibilidad, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$
n	Número de nodos del yacimiento
n_s	Número de nodos del domo salino
p	Presión, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$
p_i	Presión inicial del yacimiento, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$
q	Gasto del pozo, $\frac{L^3}{T}, bpd$
r	Dirección radial, <i>Real</i>
S	Esfuerzo desviatorio, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$
t	Tiempo, T, d
T	Temperatura, $t, ^\circ K$
u	Desplazamiento del sólido, L, mm
U	Desplazamiento del fluido., L, ft
v_s	Velocidad del sólido en dirección "r", $\frac{L}{T}, \frac{mm}{d}$
V	Volumen, L^3, bl

Nomenclatura

W Energía potencial por unidad de volumen, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{d^2}$

Letras griegas

α Coeficiente de Biot, *adimensional*

α_s Constante de la función de deformación por fluencia lenta, T^{-1}, d^{-1}

β Exponente de deformación volumétrica, *adimensional*

Γ Deformación cortante unitaria, *adimensional*

δ Exponente de esfuerzos, *adimensional*

δ_{ij} Delta de Kronecker

ε Deformación unitaria, *adimensional*

ζ Deformación del fluido con respecto al sólido, *adimensional*

λ Constante de Lamé, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$

μ Viscosidad, $\frac{M}{LT}, cp$

ν Coeficiente de Poisson, *adimensional, fracción*

ρ Densidad, $\frac{M}{L^3}$

σ Esfuerzo normal, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$

σ' Esfuerzo efectivo, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$

$\bar{\sigma}$ Esfuerzo normal promedio, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$

σ_e Esfuerzo Von Mises, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$

τ Esfuerzo cortante, $\frac{M}{LT^2}, \frac{lbf}{in^2}$

ϕ Porosidad, *adimensional, fracción*

Subíndices

0 Valor de referencia

f Propiedad del fluido

fr Propiedad de la roca drenada

i Posición del nodo en la malla

o Propiedad del aceite

p Propiedad del poro

Nomenclatura

r	Dirección radial
θ	Dirección tangencial
s	Propiedad del sólido (granos)
x	Dirección "x"
y	Dirección "y"
z	Dirección "z"

Superíndices

j	Tiempo conocido
$j + 1$	Tiempo futuro

Operadores

Δ	Delta
∇	Nabla
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material
$(\) \cdot (\)$	Producto punto

Referencias

- [1] Khalid Aziz and Antonín Settari, (1979)*Petroleum Reservoir Simulation*.
- [2] O. A. Bauchau and J. I. Craig, *Structural Analysis with applications to aerospace structures*.
- [3] M. A. Biot, "General theory of three-dimensional consolidation," *Journal of Applied Physics*, vol. 12, no. 2, pp. 155-164, 1941.
- [4] M. A. Biot, "Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation Phenomena," *Journal of Applied Physics*, vol. 25, no. 11, pp. 1385-1391, 1954.
- [5] M. A. Biot, "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *Journal of Applied Physics*, vol. 26, no. 2, pp. 182-185, 1955.
- [6] M. A. Biot, "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media," *Journal of Applied Physics*, vol. 33, no. 4, pp. 1482-1498, 1962.
- [7] L. Y. Chin, R. Raghavan, and L. K. Thomas, "Fully coupled geomechanics and fluid-flow analysis of wells with stress dependent permeability," *SPE Journal*, vol. 5, no. 1, pp. 32-45, 2000.
- [8] J. R. Dribus, Martin, P. A. Jackson, Jerry Kapoor, and Smith M. F., "The Prize Beneath the Salt," *Shlumberger Oil field review*, vol. Autumn, pp. 4-17, 2008.
- [9] Turgay Ertekin, J. H. Abou-Kassem, and R. King Gregory, (2001)*Basic Applied Reservoir Simulation*.: SPE.
- [10] G. Fernandez and A. J. Hendron, "Interpretation of a long-term in situ borehole test in a deep salt formation," *Bulletin-Association of Engineering Geologists*, vol. 21, pp. 23-38, 1984.

Referencias

- [11] E. Fjaer, R. M. Holt, P. Horsrud, A. M. Raaen, and R. Risnes, *Petroleum Related Rock Mechanis*, 2nd ed.: Elsevier.
- [12] H. J. Frost and M. F. Ashby, (1982)*Deformation-mechanism maps*.: Pergamon Press.
- [13] Marte Gutierrez and Hansteen Harald, "Fully Coupled Analysis of Reservoir Compaction and Subsidence," in *European Petroleum Conference*, London, 1994.
- [14] Marte Gutierrez and R. W. Lewis, "The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation," in *SPE/ISRM Eurock*, Trondheim, Norway, 1998.
- [15] M. Haupt, "A Constitutive Law for Rock Salt Based on Creep and Relaxation Tests," *Rock Mechanics and Rock Engineering*, vol. 24, pp. 179-206, 1991.
- [16] H. C. Heard, "Steady-state flow in polycrystalline halite at pressure of 2 kilobars," *Flow and Fracture of Rocks*, vol. 16, pp. 191-209, 1972.
- [17] R. Michael Hudec and P. A. Martin Jackson, "Terra infirma: Understanding salt tectonics," *Earth Science Reviews*, vol. 82, pp. 1-28, 2007.
- [18] T. F. Lomenick and R. L. Bradshaw, "Deformation of rock salt in openings mined for the disposal of radioactive wates," *Rock Mechanics*, vol. 1, no. 1, pp. 5-30, 1969.
- [19] D. E. Munson and P. R. Dawson, "Salt constitutive modeling using mechanism maps," in *Conference on the Mechanical Behavior of Salt*, University Park, Pennsylvania State U., 1981.
- [20] M. Perez et al., "Meeting the subsalt challenge," *Shlumberger Oil field review*, vol. Autumn, pp. 32-45, 2008.
- [21] Jean-Paul Poirier, (1985)*Creep of Crystals*.: Cambridge University Press.
- [22] Antonín Settari and Dale, A. Walters, "Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling with Applications to Reservoir Compaction," in *Reservoir*

Referencias

Simulation Symposium, Houston, 1999.

- [23] Karl Terzaghi, (1943) *Theoretical Soil Mechanics*.: John Wiley and Sons.
- [24] R. A. Verrall, R. J. Fields, and M. F. Ashby, "Deformation mechanism maps for LiF and NaCl," *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 60, pp. 211-216, 1966.
- [25] D. P. Yale, "Coupled Geomechanis-Fluid FLOW Modeling: Effects of Plasticity and Permeability Alteration," in *SPE/ISRM Rock Mechanics Conference*, Irving, Texas, 2002.

Apéndice A Algoritmo de Thomas

El algoritmo de Thomas es el método más popular para solucionar el sistema de ecuaciones cuando la matriz de coeficientes “A” es una matriz trilineal [1]:

$$Ax = d, \dots\dots\dots (A.1)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & & & & & & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & & & & & & & \\ & C_3 & A_3 & B_3 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & C_{n-1} & A_{n-1} & B_{n-1} & & & & \\ & & & & C_n & A_n & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (A.2)$$

Donde A es una matriz de coeficientes, x es un vector columna que contiene a las incógnitas y d también es un vector columna.

Cuando se desea resolver sistemas de ecuaciones donde se tiene más de una incógnita, como en problemas de dos o tres dimensiones o cuando se tiene flujo de fluidos acoplados a la deformación geomecánica. El algoritmo de Thomas se puede extender a estos casos si se asume que cada elemento de la matriz “A” es a su vez una matriz cuadrada, si se tienen dos incógnitas será de orden 2x2, si son tres incógnitas será de orden 3x3 y así sucesivamente.

Aquí se explicará el caso donde cada elemento de la matriz “A” es una matriz cuadrada de orden 2x2 y cada elemento de los vectores columna “x” y “d” son vectores columna de orden 2 se ve como las ecuaciones A.3.

$$A_i = \begin{bmatrix} A_i^{1,1} & A_i^{1,2} \\ A_i^{2,1} & A_i^{2,2} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_i^{1,1} & B_i^{1,2} \\ B_i^{2,1} & B_i^{2,2} \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} C_i^{1,1} & C_i^{1,2} \\ C_i^{2,1} & C_i^{2,2} \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} X_i^1 \\ X_i^2 \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} D_i^1 \\ D_i^2 \end{bmatrix} \dots\dots (A.3)$$

Se descompone a la matriz de coeficientes “A” en 2 matrices:

$$A = WQ, \dots\dots\dots (A.4)$$

donde W es una matriz triangular inferior y Q una matriz triangular superior. Debido a que A es una matriz triangular, las matrices W y Q se pueden escribir como:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & & & & \\ C_2 & W_2 & & & & \\ & C_3 & W_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & C_{n-1} & W_{n-1} & \\ & & & & C_n & W_n \end{bmatrix}, \dots \quad (A.5)$$

$$Q = \begin{bmatrix} I_1 & Q_1 & & & & \\ & I_2 & Q_2 & & & \\ & & I_3 & Q_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & I_{n-1} & Q_{n-1} \\ & & & & & I_n \end{bmatrix}. \dots \quad (A.6)$$

Para encontrar W_i y Q_i se igualan los elementos de WQ con los elementos correspondientes de A . Las ecuaciones resultantes son:

$$W_1 = A_1 \quad , \quad Q_1 = W_1^{-1}B_1 , \dots \quad (A.7)$$

$$Q_{i-1} = W_{i-1}^{-1}B_{i-1} \quad , \quad i = 2, \dots, N , \dots \quad (A.8)$$

$$W_i = A_i - C_i Q_{i-1} \quad , \quad i = 2, \dots, N . \dots \quad (A.9)$$

Se debe de recalcar que W_i no debe ser singular ya que se necesita su inversa. Sustituyendo A.4 en A.1:

$$WQx = d , \dots \quad (A.10)$$

si

$$Qx = g , \dots \quad (A.11)$$

entonces

$$Wg = d . \dots \quad (A.12)$$

Una vez que ya se tienen los valores de W_i y Q_i , utilizando las ecuaciones A.11 y A.12 se obtienen los valores de G_i y de las incógnitas X_i :

$$G_1 = W_1^{-1}D_1, \dots \dots \dots (A.13)$$

$$G_i = W_{i-1}^{-1}(D_{i-1} - C_i G_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N, \dots \dots \dots (A.14)$$

$$X_n = G_n, \dots \dots \dots (A.15)$$

$$X_i = G_i - Q_i X_{i+1}, \quad i = N - 1, \dots, 1, \dots \dots \dots (A.16)$$

A continuación se presenta una subrutina del algoritmo de Thomas con matrices de bloques 2x2.

For i = 1 To n

BETA1 = A(i, 1)

BETA2 = A(i, 2)

BETA3 = A(i, 3)

BETA4 = A(i, 4)

If i = 1 Then

GoTo 30

End If

BETA1 = BETA1 - C(i, 1) * XAMDA(i - 1, 1) - C(i, 2) * XAMDA(i - 1, 3)

BETA2 = BETA2 - C(i, 1) * XAMDA(i - 1, 2) - C(i, 2) * XAMDA(i - 1, 4)

BETA3 = BETA3 - C(i, 3) * XAMDA(i - 1, 1) - C(i, 4) * XAMDA(i - 1, 3)

BETA4 = BETA4 - C(i, 3) * XAMDA(i - 1, 2) - C(i, 4) * XAMDA(i - 1, 4)

30

XMI = BETA1 * BETA4 - BETA2 * BETA3

XMIR = 1 / XMI

DELTA1 = D(i, 1)

DELTA2 = D(i, 2)

If i = 1 Then

GoTo 40

End If

DELTA1 = DELTA1 - C(i, 1) * GAMMA(i - 1, 1) - C(i, 2) * GAMMA(i - 1, 2)

DELTA2 = DELTA2 - C(i, 3) * GAMMA(i - 1, 1) - C(i, 4) * GAMMA(i - 1, 2)

40

GAMMA(i, 1) = (BETA4 * DELTA1 - BETA2 * DELTA2) * XMIR

$$\text{GAMMA}(i, 2) = (\text{BETA1} * \text{DELTA2} - \text{BETA3} * \text{DELTA1}) * \text{XMIR}$$

If $i = n$ Then

GoTo 50

End If

$$\text{XAMDA}(i, 1) = (\text{BETA4} * \text{B}(i, 1) - \text{BETA2} * \text{B}(i, 3)) * \text{XMIR}$$

$$\text{XAMDA}(i, 2) = (\text{BETA4} * \text{B}(i, 2) - \text{BETA2} * \text{B}(i, 4)) * \text{XMIR}$$

$$\text{XAMDA}(i, 3) = (\text{BETA1} * \text{B}(i, 3) - \text{BETA3} * \text{B}(i, 1)) * \text{XMIR}$$

$$\text{XAMDA}(i, 4) = (\text{BETA1} * \text{B}(i, 4) - \text{BETA3} * \text{B}(i, 2)) * \text{XMIR}$$

Next

50

'Obteniendo la matriz solución X

$$\text{X}(n, 1) = \text{GAMMA}(n, 1)$$

$$\text{X}(n, 2) = \text{GAMMA}(n, 2)$$

For $k = 2$ To n

$i = n + 1 - k$

$$\text{X}(i, 1) = \text{GAMMA}(i, 1) - \text{XAMDA}(i, 1) * \text{X}(i + 1, 1) - \text{XAMDA}(i, 2) * \text{X}(i + 1, 2)$$

$$\text{X}(i, 2) = \text{GAMMA}(i, 2) - \text{XAMDA}(i, 3) * \text{X}(i + 1, 1) - \text{XAMDA}(i, 4) * \text{X}(i + 1, 2)$$

Next