



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERIA

**PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN REDES COMPLEJAS:
FLUJO MÁXIMO Y CORRIENTE ELÉCTRICA**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTORA EN INGENIERÍA

INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
P R E S E N T A :

M. I. BIBIANA OBREGÓN QUINTANA



TUTOR:
**DR. LEV GUZMÁN VARGAS
DRA. MAYRA ELIZONDO CORTÉS**

MÉXICO D.F., 2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. LEV GUZMÁN VARGAS
Secretario: Dra. ANGÉLICA LOZANO CUEVAS
Vocal: Dra. MAYRA ELIZONDO CORTÉS
1^{er} Suplente: Dr. RICARDO ACEVES GARCÍA
2^{do} Suplente: Dr. SEVIO TÚLIO GUILLÉN BURGUETE

Lugar donde se realizó la tesis:

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS DE LA DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM, Y EN LA UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE INGENIERÍAS Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS DEL IPN.

TUTOR DE TESIS:

Dr. LEV GUZMÁN VARGAS

Dra. MAYRA ELIZONDO CORTÉS

Per aspera ad astra

A mis padres, María Guadalupe y Ricardo
A mi hermano, Alejandro
Gracias por el apoyo que me brindan día con día y por la paciencia que me tienen.

A Lev Guzmán,
Gracias por enseñarme los pasos de este camino, por todo el apoyo que me has dado y en especial, porque este trabajo fue posible realizarlo por ti.

A mis alumnos de la Facultad de Ciencias,
Por todas sus enseñanzas y en especial, a mi compañera de cursos, Ivonne Marmolejo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México,
Por darme nuevamente la oportunidad.

Al Instituto Politécnico Nacional,
Por la experiencia y sus enseñanzas.

A CONACYT,
Gracias por otorgarme la beca para la realización de mis estudios.

RESUMEN

Se presenta un estudio acerca de algunas propiedades de transporte en redes de mundo pequeño y de libre escala. En particular, se comparan dos tipos de transporte sin fricción (flujo máximo) y con fricción (caso eléctrico). En redes basadas en el modelo de Watts-Strogatz, se encuentra que para configuraciones de mundo pequeño, ambas formas de transporte presentan valores altos tanto a nivel local como global. Por otra parte, analizamos el transporte en redes de libre escala basadas en el modelo de Barabási-Albert, considerando tendencias en los apareamientos entre nodos, esto es, privilegiando que nodos de alto grado se conecten entre sí, o bien, que la conexión sea entre nodos de alto grado y nodos de bajo grado. Se calcula la conductancia G y el flujo máximo F entre todos los posibles pares de nodos de una red libre de escala con apareamiento mínimo, aleatorio y máximo. Se construyen las distribuciones acumulativas para representar las probabilidades de tener una conductancia G mayor que un valor dado. Para el caso eléctrico, se observan importantes diferencias entre las distribuciones que corresponden a los tres niveles de apareamiento. Además, se analiza el efecto del grado mínimo y la ruta más corta entre el par de nodos origen y destino sobre la conductancia y el flujo, se encuentran importantes diferencias entre estos dos tipos de transporte.

ABSTRACT

We present a study of some transport properties in small-world and scale-free networks. In particular, we compared two types of transport frictionless (max-flow) and friction (electric). We found that based on the model of Watts-Strogatz to configurations of small-world networks, both forms of transport present high values both to local and global level. Furthermore, we analyze scale-free networks based on the model of Barabási-Albert, with assortative or disassortative topology, i.e., the tendency of nodes with high degree to be connected between, or when the connection is between high degree nodes and low degree nodes. We calculate conductances G and max-flow F between all possible pairs of nodes, to assortative or disassortative levels scale-free network. The cumulative distributions are to represent the probability of having a conductance G greater than a given value. In electric case, we note important differences between cumulative distributions that correspond to assortative or disassortative levels. Besides, we analyze the effect of the minimum degree and the shortest path between the pair of nodes origin and destination on the conductance and flow; we found important differences between these two types of transport.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

1. INTRODUCCIÓN
2. MODELOS DE REDES COMPLEJAS
 - 2.1. Redes aleatorias
 - 2.2. Redes de mundo pequeño
 - 2.3. Redes libres de escala
3. ROBUSTEZ
4. ESTRUCTURA EN FUNCIÓN DE LA CONECTIVIDAD. CORRELACIONES NODO-NODO
5. EFICIENCIA
6. TRANSPORTE EN REDES COMPLEJAS
7. FLUJO MÁXIMO
8. CORRIENTE ELÉCTRICA
9. ESTADO DEL ARTE

CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA Y RESULTADOS

1. FLUJO MÁXIMO Y CORRIENTE ELÉCTRICA EN REDES COMPLEJAS
 - 1.1. Resultados para redes de mundo pequeño.
Modelo Watts-Strogatz
 - 1.2. Resultados para redes de libre escala.
Modelo Barabási-Albert

CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

REFERENCIAS

INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas físicos, biológicos y sociales pueden ser representados mediante redes complejas, formados por un conjunto de componentes (nodos) y una relación específica entre ellos (arcos) [Newman, 2003; Albert y Barabási, 2002; Dorogovtsev y Mendes, 2003]. El estudio de estos sistemas se ha incrementado en años recientes desde distintas áreas de la ciencia, por lo cual se han establecido medidas para entenderlos y clasificarlos bajo distintas condiciones, que permitan comprender su operación y organización.

Por otro lado, la Investigación de Operaciones es una ciencia que combina herramientas matemáticas con la toma de decisiones. La forma estándar de trabajo es aplicar la metodología a problemas, a fin de encontrar la mejor opción para resolverlos. En el área de redes, usualmente se trabaja con redes estáticas, o se plantea el problema definiendo la red en cuestión en un momento determinado. Después, se aplican algoritmos específicos para resolver el problema y con la solución se buscan las mejores decisiones. Resulta interesante la relación que puede generarse entre la Investigación de Operaciones con el estudio de las redes complejas, es decir, la representación de sistemas reales modelados mediante redes complejas y la aplicación de las técnicas de la Investigación de Operaciones. Esto se debe a que, existen características definidas correspondientes a las redes complejas, que permiten avanzar en el conocimiento del comportamiento, funcionamiento y estructura de la red. Lo anterior puede proporcionar información muy útil, que usualmente no se considera con las técnicas tradicionales de la Investigación de Operaciones, de tal manera que puedan generarse bases más completas para la toma de decisiones.

En general, la estructura de una red puede entenderse mediante la llamada distribución de grado. El grado de un nodo consiste en la cantidad de arcos incidentes en él, entonces, la distribución de grado permite identificar la red, es decir, si se grafican las frecuencias contra el grado se obtiene la distribución característica de la red. Así, en el caso de una red aleatoria se tiene una distribución de tipo Poisson para redes grandes, en cambio para una red libre de escala en un plano log-log, los datos se ajustan a una línea recta. Lo anterior se debe a que en las redes aleatorias se tiene una conectividad promedio, a diferencia de las redes libres de escala, que presentan algunos nodos altamente conectados (hubs) [Erdős y Rényi, 1960; Watts y Strogatz, 1998; Barabási y Albert, 1999]. En el caso de las redes libres de escala, la conectividad permite hacer otra clasificación llamada apareamiento de nodos. Esto es, cuando se conectan hubs con hubs se tiene un apareamiento positivo, en cambio si se conectan hubs con nodos de bajo grado se tiene un apareamiento negativo [Newman, 2002 y 2003b].

Existen otras medidas que también son utilizadas para entender el comportamiento de una red, como son la llamada ruta más corta, definida como la distancia mínima entre el nodo A y el nodo B; y el coeficiente de aglomerado (clustering), que consiste en el cociente promedio entre los vecinos del nodo A y el número máximo de enlaces entre los vecinos del mismo nodo [Albert y Barabási, 2002]. Estudios recientes de las propiedades de transporte

en redes complejas, han revelado que las redes libres de escala presentan mejores condiciones de transporte que las redes aleatorias, debido a la presencia de hubs [López *et al.*, 2005a; López *et al.*, 2006; Carmi *et al.*, 2008].

El transporte en una red consiste en el envío de una entidad desde un nodo llamado origen o fuente, a otro nodo llamado destino o sumidero. El caso que no considera fricción, puede ser planteado como un problema de flujo máximo, y el objetivo consiste en enviar la mayor cantidad de flujo posible del origen al destino, sin importar la longitud de las rutas. Se han estudiado propiedades de transporte en redes aleatorias y libres de escala suficientemente densas, y se estableció que el flujo máximo dentro de la red está determinado por el mínimo grado entre el nodo origen y el destino [López *et al.*, 2006; Carmi *et al.*, 2008]. Por otra parte, cuando se involucra la presencia de fricción como en muchas situaciones reales, el problema puede modelarse mediante analogías con sistemas eléctricos, esto es, al nodo origen es asignado un potencial unitario mientras al nodo destino se asigna un potencial cero. Mediante leyes de conservación de carga, es posible estimar el flujo de corriente que puede ser enviado de la fuente al destino. Estudios recientes han mostrado que para el caso eléctrico, también son mejores las propiedades de transporte en redes libres de escala en comparación con redes aleatorias [López *et al.*, 2005a; López *et al.*, 2006; Carmi *et al.*, 2008].

El transporte y sus propiedades han sido estudiados en redes complejas, encontrando que las redes libres de escala presentan mejores condiciones de transporte, debido a la presencia de nodos altamente conectados (hubs), los cuales dominan la red, a diferencia de las redes aleatorias, las cuales carecen de hubs. En general, el conocimiento más detallado de las características y funcionamiento de las redes, se traduce en herramientas útiles para el diseño o mejoramiento de una red. En particular, en sistemas que puedan ser modelados mediante redes complejas, como por ejemplo, redes tecnológicas, de energía eléctrica, de transporte, de distribución.

Con base en lo anterior, la *aportación* que se pretende con esta investigación es, conocer cómo la estructura de la red es determinante en la optimización del envío de flujo dentro de la red. Esto es, en este trabajo se comparan el comportamiento del flujo sin y con fricción, modelando así, distintas formas de transporte. Las estructuras consideradas son representativas de redes del mundo real como son, redes de mundo pequeño, y redes de libre escala con tendencias en el apareamiento de nodos. Por supuesto, el estudio de distintas formas de flujo en redes con estructuras diversas, permite conocer de una manera más amplia el transporte en muchas situaciones reales. De manera específica, los resultados obtenidos pueden verse aplicados en el mejoramiento de una red, por ejemplo, una red de telefonía es una red tecnológica, por lo que puede ser modelada por una red libre de escala con apareamiento de nodos negativo. En este caso, los nodos representan las centrales de distribución de llamadas, los arcos el cableado, y el flujo enviado a través de la red son las llamadas telefónicas. Para las empresas prestadoras de este servicio, resulta básico conocer la capacidad de flujo que pueda enviarse, a fin de otorgar un mejor servicio e incrementar la clientela. También, es indispensable conocer las opciones para mejorar la red, es decir, qué nodos deben conectarse con cableado nuevo. El *objetivo principal* es poder establecer cuáles configuraciones presentan mejores condiciones para el transporte, considerando la estructura como un factor determinante.

El presente trabajo está organizado en cuatro secciones. En el capítulo 1, se explica el problema planteado y por qué se realiza. El capítulo 2, explica el Marco Teórico necesario para la comprensión de este trabajo, como por ejemplo los modelos de redes complejas; así como el Estado del Arte. La metodología seguida y los resultados obtenidos se desarrollan en el capítulo 3. Finalmente, se presentan las conclusiones y algunas extensiones posibles.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Existe una gran cantidad de sistemas reales formados por componentes que están relacionados de alguna forma, los cuales pueden ser modelados mediante redes complejas, permitiendo el estudio del comportamiento de funciones específicas. La manera en que están relacionados puede tener un gran efecto en el comportamiento del sistema. Dentro de dichos sistemas, enviar entidades desde un origen a un destino es un problema común, conocido como transporte. Así, estudiar propiedades de transporte es importante en parte, debido a la cantidad de problemas reales involucrados, por ejemplo, el envío de información como sucede en la World Wide Web, o en general, el envío de productos desde un punto específico a otro dentro de una red.

En forma general, el transporte puede considerarse sin fricción y con fricción. En el primer caso, la modelación mediante flujo máximo representa una situación ideal, esto es, la red sirve como conductora en el envío de flujo y la cantidad enviada únicamente se limita por la capacidad en los arcos. En el caso con fricción, como sucede en muchas situaciones reales, por ejemplo redes de energía eléctrica o de telefonía, la modelación puede ser con analogías de sistemas eléctricos, donde por efectos disipativos, sí se afecta la cantidad enviada del origen al destino.

Por otra parte, se han realizado estudios sobre propiedades de transporte sin y con fricción, en redes aleatorias y libres de escala. En estos trabajos se determinó que las redes libres de escala presentan mejores condiciones para el transporte debido a la presencia de hubs [López *et al.*, 2005a; López *et al.*, 2006; Carmi *et al.*, 2007; Carmi *et al.*, 2008]. De manera específica, los resultados indican que el flujo máximo está determinado por el grado mínimo de los nodos origen y destino. Para el caso eléctrico, las conductancias son aproximadas por $ck_A k_B / (k_A + k_B)$, donde k_A y k_B son el grado del nodo origen y destino, respectivamente, y c es un parámetro que depende de la estructura de la red. Una característica importante considerada en dichos estudios es, la estructura de las redes, las cuales fueron suficientemente densas, de tal manera que la red sirve como buena conductora de flujo, y las limitaciones se encuentran en los nodos origen y destino. Cabe resaltar que las propiedades de transporte, como se ha observado en los estudios, depende de la estructura de la red.

Ahora bien, como sabemos las redes reales no siempre presentan estructuras suficientemente densas, o incluso, construirlas puede ser muy costoso, razones por las cuales se debe conocer el comportamiento del flujo dentro de la red, cuando ésta tiene diferentes estructuras. Entonces, podemos preguntarnos ¿qué sucede si la red no es suficientemente densa como muchas redes reales? ¿Qué tanto afecta la capacidad de transporte si se modifica la estructura? ¿Qué tanto puede afectarse la capacidad con y sin fricción?

¿Cuánto difiere la capacidad entre redes de mundo pequeño y de libre escala? Estas preguntas nos llevan a la importancia de estudiar el flujo en redes complejas con características específicas, a fin de conocer mejor algunas propiedades de transporte en condiciones reales.

Para contestar las preguntas anteriores, en este trabajo hemos considerado modelos de redes del mundo real. El primer modelo es el llamado de mundo pequeño, el cual ha sido observado en redes que presentan a nivel global baja distancia media y a nivel local alto clustering, por ejemplo en redes sociales [Watts y Strogatz, 1998]. El segundo modelo es el llamado de libre escala, caracterizado por la presencia de hubs [Barabási y Albert, 1999], donde además hemos considerado tendencias en el apareamiento de los nodos, es decir, el apareamiento positivo conecta hubs con hubs, en cambio en el negativo la conexión es entre hubs y nodos de bajo grado. En redes reales ha sido observado el apareamiento positivo en redes sociales [Newman, 2002 y 2003], y el apareamiento negativo en redes biológicas y tecnológicas [Pastor-Satorras *et al.*, 2001; Maslov y Sneppen, 2002].

Por lo tanto, en este trabajo hemos considerado estructuras representativas de sistemas reales, sin ser redes suficientemente densas. El modelo de mundo pequeño nos permite conocer propiedades de transporte a nivel local y global, siendo concordantes con las características más importantes del modelo, es decir, baja distancia media (global) y alto clustering (local). Para el caso de redes de libre escala, la estructura se manipula con tendencias en el apareamiento de nodos, como ha sido encontrado en redes reales, permitiendo conocer características del transporte en estructuras más detalladas. La modificación de las estructuras es esencial para el *objetivo principal* de este trabajo, el cual consiste en establecer cuáles configuraciones presentan mejores condiciones para el transporte sin y con fricción.

Con base en lo anterior, podemos definir el problema planteado en este trabajo. Esto es, conocer más detalladamente algunas propiedades de transporte sin y con fricción, en sistemas reales que puedan ser modelados mediante redes complejas, con las distintas estructuras consideradas. A fin de resolver este problema, se generan redes de mundo pequeño, se calcula el flujo máximo y las conductancias a nivel local y global. También, se generan redes de libre escala con tendencias en el apareamiento de nodos, y se calcula el flujo máximo y las conductancias. Los resultados nos permitirán conocer si la capacidad del transporte es afectada por las características específicas de las redes generadas con ambos modelos; así mismo, cuáles configuraciones son mejores conductoras del flujo sin y con fricción.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de gráficas tiene sus inicios con el problema de los puentes de Königsberg, Prusia (actualmente Kaliningrado, Rusia). El problema consistía en realizar un paseo recorriendo los siete puentes exactamente una vez. El matemático Leonard Euler, dio solución al problema en 1736 y lo más importante, logró la representación gráfica de una red mediante nodos y arcos. Sin embargo, sería hasta el siglo XX en la década de 1950, el inicio del estudio de las redes de gran escala, llamadas redes complejas. Parte de la motivación para el estudio de dichas redes fue, primero que las redes no eran estáticas sino que evolucionaban a través del tiempo. Y segundo, las redes podían también verse como objetos estocásticos así, sus propiedades podían pensarse en términos de distribuciones probabilísticas.

Las redes complejas se describieron originalmente como gráficas aleatorias. Fueron introducidas por primera vez en 1951 por Ray Solomonoff y Anatol Rapoport. La aportación más importante fue que conforme se incrementaban los arcos, la gráfica cambiaba de un conjunto de nodos desconectados a una gráfica que contenía a la mayoría de los nodos, es decir, en términos actuales forma un componente gigante [Solomonoff y Rapoport, 1951]. De manera independiente, las gráficas aleatorias fueron estudiadas por los matemáticos húngaros Paul Erdős y Alfréd Rényi, quienes en 1959 introdujeron el modelo de gráficas aleatorias. En total publicaron una serie de ocho artículos entre 1959 y 1968, dando el origen formal del estudio de las redes complejas. Específicamente en 1960, probaron que en el momento de la formación del componente gigante o fase de transición, emergen muchas propiedades de las gráficas [Erdős y Rényi, 1960].

El modelo de gráficas aleatorias de Erdős y Rényi inicia con un número de N nodos, los cuales se van conectando con una probabilidad p . A medida que la probabilidad se incrementa, la estructura de la red va cambiando, esto es, empieza la formación de árboles, después de ciclos y puede llegar a formar una red completa. Este modelo produce redes con una conectividad media, para redes grandes la distribución de grado es poissoniana. La distancia media l , entre todo par de nodos, tiende a $l \sim \log N$; y el coeficiente de clustering, tiende a $C \sim k/N$, donde k es el grado promedio de los nodos.

Por otra parte, el estudio de las redes sociales a finales de la década de 1960, motivó el concepto de mundo pequeño [Travers y Milgram, 1969]. El experimento de Milgram consistió en seleccionar un grupo de individuos, a los cuales se les envió una carta de instrucciones, pidiéndoles contactar a una persona específica. Los participantes debían conocer a la persona de forma directa para enviarle la carta, si esto no ocurría, entonces debían buscar un destinatario que sí conocieran y pensarán que podía conocer a la persona destino. Además, debían enviar una carta a Travers y Milgram, a fin de que

ellos pudieran reconstruir la ruta. Las personas reclutadas fueron 296, 196 de Omaha, Nebraska y 100 de Boston, Massachusetts, y la persona destino se encontraba en Sharon, Massachusetts. Los resultados fueron: 64 de las 296 personas lograron una ruta con éxito (29% de las que la iniciaron). El número promedio de intermediarios entre el origen y el destino fue de 5.2; este resultado motivó la popular frase de *seis grados de separación*.

El concepto de mundo pequeño trata de que la mayoría de los nodos de una red, estén conectados por una ruta corta. Otro concepto importante con origen en redes sociales es el clustering, es decir, si dos personas A y B se conocen y B conoce a C , entonces existe una alta probabilidad que A y C se conozcan. Ambos conceptos motivaron los estudios de Duncan Watts y Steven Strogatz, quienes en 1998 introdujeron el modelo de red de mundo pequeño [Watts y Strogatz, 1998]. El modelo de mundo pequeño consiste en la interpolación de una red regular y una red aleatoria. El procedimiento inicia con un anillo de N nodos conectados con sus primeros k -vecinos, y con una probabilidad de reconexión p se realiza un proceso de recableado, evitando la duplicación y los rizos. La conectividad de la red caracterizada por un valor medio, y la distribución de grado es poissoniana para redes grandes. Las características más representativas para este modelo son: altos valores de clustering como propiedad local; y baja distancia media como propiedad global $l \sim \log N$.

Sin embargo, en el modelo original de Watts-Strogatz, durante el proceso de reconexión de arcos existe la posibilidad de separar la gráfica original, esto se debe a que únicamente se reconecta el extremo de los arcos, de tal manera que se pueden obtener subgráficas en vez de obtener una gráfica del tipo de mundo pequeño [Newman 2003]. Una variante de este modelo fue propuesto por Newman y Watts, en la cual consideran arcos extra añadidos de forma aleatoria sin mover los arcos originales, con esta modificación se elimina la posibilidad de tener subgráficas [Newman y Watts, 1999].

Posteriormente, Albert-László Barabási y Réka Albert buscando representar redes reales, consideraron la dinámica en el crecimiento de una red. Con esta base establecieron la llamada preferencia de enlace, que consiste en añadir un nodo nuevo a la red con m -arcos y conectarlos a los nodos existentes dependiendo del grado de dichos nodos. De esta manera, la distribución de grado de la red que emerge, es tipo ley de potencia $P(k) \sim k^{-\alpha}$. Este modelo genera redes de libre escala y fue introducido en 1999 [Barabási y Albert, 1999].

Tanto la distribución tipo ley de potencia como la preferencia de enlace, tienen sus orígenes en 1965. Derek de Solla Price estudió redes con este tipo de distribución y llamó ventaja acumulativa a la hoy conocida preferencia de enlace [Price, 1965]. Las redes libres de escala presentan algunos nodos altamente conectados (hubs), y la mayoría de los nodos con pocos enlaces. Además, la distancia media es ultra pequeña $l \sim \log \log N$. Una desventaja del modelo de Barabási-Albert es la generación de exponente fijo para la distribución, esto es, las redes tienen exponente $\alpha = 3$. En 2000, Albert y Barabási introdujeron una modificación al algoritmo para generar redes con exponente $\alpha \in [2, \infty)$ [Albert y Barabási, 2000].

Con respecto a la conectividad, esta permite hacer clasificaciones más específicas en una red. En particular, las redes libres de escala pueden ser clasificadas mediante el apareamiento de nodos. Esto es, cuando hubs se enlazan con hubs, el apareamiento de nodos es positivo (assortative); cuando

hubs se conectan con nodos de bajo grado, es negativo (dissortative). Por último, cuando no es posible identificar una tendencia, el apareamiento es cero y la red se considera neutral [Newman, 2002 y 2003]. Estudios realizados han encontrado que las redes tecnológicas y biológicas, presentan apareamiento de nodos negativo [Pastor-Satorras *et al.*, 2001; Maslov y Sneppen, 2002]; en cambio en las redes sociales es positivo [Newman, 2002 y 2003].

A continuación se explican los modelos de redes complejas (aleatorias, de mundo pequeño y de libre escala), así como los conceptos teóricos importantes para el desarrollo de este trabajo.

2. MODELOS DE REDES COMPLEJAS

Una red está compuesta por un conjunto de *nodos* (o vértices) N_1, N_2, \dots, N_k y un conjunto de *arcos* (o aristas o enlaces) j_1, j_2, \dots, j_m , que representan la relación entre los nodos. En muchos casos la relación tiene una ponderación llamada *costo*. El *grado* de un nodo k_i , es el número de arcos incidentes en el nodo. Una red puede ser dirigida, es decir, los arcos tienen una dirección específica. En este caso puede diferenciarse entre grado interior, arcos que entran al nodo; y grado exterior, arcos que salen del nodo. Cuando la red es no dirigida, no puede hacerse una separación de los grados, y se refiere únicamente al grado del nodo.

La relación nodo-nodo puede representarse de forma matricial con la llamada *matriz de adyacencia* A_{ij} , donde la entrada a_{ij} vale 1 cuando existe un arco que une al nodo i con el nodo j , y 0 en otro caso. Entonces, el grado de un nodo se calcula:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (1)$$

donde N es el número de nodos.

Por otra parte, la *distribución de grado* $P(k)$, donde k es el grado, es una de las propiedades más importantes para definir la estructura de una red. Para una red no dirigida se define p_k como la probabilidad de que un nodo elegido aleatoriamente en la red tenga grado k , y la distribución de grado es el histograma de los grados de los nodos. Esto es, si se grafican las frecuencias contra el grado, la distribución obtenida muestra información acerca de cómo están distribuidos los enlaces. Sin embargo, la distribución de grado no proporciona información completa sobre la estructura de la red considerando únicamente el grado. Es decir, si el histograma es sesgado hacia la derecha, se sabe que pocos nodos tienen alta conectividad llamados hubs, pero no puede conocerse más información sobre la estructura de la red (ver sección 4. Estructura en función de la conectividad. Correlaciones nodo-nodo). En este caso, el histograma puede realizarse con escalas logarítmicas en ambos ejes, de tal manera que puede observarse la distribución de grado como una línea recta. Entonces, el logaritmo de la distribución de grado p_k es una función lineal del grado:

$$\ln p_k = -\alpha \ln k + C \quad (2)$$

donde α y C son constantes (el signo menos es conveniente debido a que la inclinación de la recta es negativa). Si se considera la exponencial en ambos lados, se tiene:

$$p_k = Ck^{-\alpha} \quad (3)$$

donde $C = e^C$ es constante. Las distribuciones con esta forma varían como una potencia de k y son llamadas *ley de potencia* [Newman, 2010]. La representación de los grados también puede hacerse mediante la función de distribución acumulativa, definida por:

$$P_k = \sum_{k'=k}^{\infty} p_{k'} \quad (4)$$

esto es, la probabilidad de que el grado es mayor o igual a k . Esta gráfica tiene la ventaja de contener todos los datos originales de la red [Newman, 2003b]. Cuando la distribución de grado sigue una ley de potencia, entonces:

$$P_k \sim \sum_{k'=k}^{\infty} k'^{-\alpha} \sim k^{-(\alpha-1)} \quad (5)$$

Es decir, $P_k \sim k^{-(\alpha-1)}$

Por otra parte, existen varias medidas importantes que caracterizan una red compleja como son la *ruta más corta* d_{ij} , que consiste en la distancia mínima entre el nodo i y el nodo j , la cual en redes dirigidas no necesariamente es igual $d_{ij} \neq d_{ji}$. También la *distancia media* l , que permite conocer la navegabilidad de la red, y se calcula:

$$l = \frac{1}{\frac{1}{2}N(N+1)} \sum_{i \geq j} d_{ij} \quad (6)$$

donde N es el número de nodos.

Otra medida utilizada es el *coeficiente de aglomeración* C (clustering), y se refiere al cociente entre el número de arcos entre los vecinos del nodo i , y el número máximo de los posibles arcos entre los vecinos del nodo i . El clustering indica la tendencia dentro de la red de formar triángulos. Se calcula:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)} \quad (7)$$

donde, E_i es el número de arcos entre los vecinos del nodo i , y $k_i(k_i-1)/2$ es el número máximo de los posibles arcos entre los vecinos del nodo i . Cuando $C = 0$ los nodos son aislados, esto es, no están enlazados por ningún arco. De forma opuesta si $C = 1$, indica el valor máximo, donde todos los nodos pueden estar unidos por un arco directo.

2.1. Redes aleatorias

A finales de la década de 1950 y principios de la década de 1960, Paul Erdős y Alfréd Rényi introdujeron el modelo de redes aleatorias, llamándolas *gráficas aleatorias* [Erdős y Rényi, 1960]. El modelo se basa en un proceso de evolución. Inicia con un número N de nodos aislados y los conecta con una probabilidad p . Conforme se incrementa p se tiene la presencia de árboles, después de ciclos, hasta obtener una gráfica completa con un número de arcos $n = N(N-1)/2$ cuando $p \rightarrow 1$. Esto significa que la estructura de la gráfica varía dependiendo de la probabilidad de conexión. Para valores bajos de p se tienen componentes aislados (clusters), y para valores grandes se forma un *componente gigante*, es decir, la mayoría de los nodos están conectados. Lo anterior es una de las propiedades más importantes

demostradas por Paul Erdős y Alfréd Rényi, la llamada *fase de transición*, esto es, el momento en que la mayoría de los componentes o subgráficas están conectados, y se tiene una gráfica donde cada par de nodos están conectados por alguna ruta.

Por otra parte, este tipo de gráficas tienen la característica de una conectividad promedio, esto significa que la mayoría de los nodos tienen el mismo grado. Por esta razón la distribución de grado para n grande es tipo Poisson. Esto puede observarse en la figura 1.

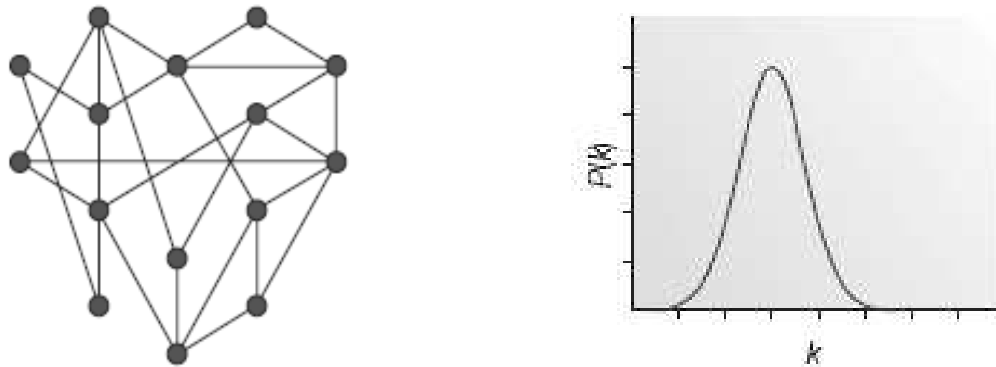


FIGURA 1. RED ALEATORIA Y DISTRIBUCIÓN DE GRADO.
FUENTE: BARABÁSI Y OLTVAI (2004).

Otra característica importante es la baja distancia media, teniendo un valor aproximado de $l \sim \log N / \log \langle k \rangle$, donde N es el número de nodos, y $\langle k \rangle$ el grado promedio de la red. En contraste, el clustering no presenta un valor aceptable teniendo valores bajos $C = \langle k \rangle / N$.

2.2. Redes de mundo pequeño

El concepto de mundo pequeño se refiere a que la mayoría de los nodos están conectados por una ruta corta, la cual se incrementa de forma logarítmica con el número de nodos de la red, $l \sim \log N$. Esta característica llamada de *mundo pequeño*, ha sido encontrada en algunas redes biológicas y sociales. Cabe mencionar que las redes aleatorias presentan esta característica, por lo que son también de mundo pequeño. Por otra parte, el concepto de clustering significa que si dos nodos están conectados directamente, existe una alta probabilidad de que, si tienen otro nodo en común también esté conectado a ambos nodos. El modelo de redes de mundo pequeño introducido por Watts y Strogatz en 1998, combina ambas características [Watts y Strogatz, 1998].

El procedimiento para este modelo consiste en iniciar con un anillo de N nodos donde cada nodo se conecta con sus primeros k -vecinos, de esta manera se obtiene una red regular conectada. Las redes regulares son un modelo simple para describir la relación entre nodos, debido a que todos los nodos tienen el mismo grado. Entonces, se inicia con una red k -regular, y aleatoriamente se reconecta una fracción de nodos con una probabilidad p , evitando la duplicación de arcos y la formación de rizos. De esta manera, son creados atajos entre nodos distantes. Además, los nodos presentan una conectividad promedio, de tal manera que la distribución de grado para N grande es poissoniana.

Por lo tanto, el modelo de mundo pequeño interpola entre una red regular y una red aleatoria, como puede observarse en la figura 2. Para los valores intermedios de la probabilidad p de reconexión, se observa que para una configuración intermedia el llamado coeficiente de aglomeración es alto, mientras la distancia media entre nodos es pequeña (Watts y Strogatz, 1998). Este tipo de configuración ha sido encontrado en redes del mundo real, por ejemplo en redes sociales.

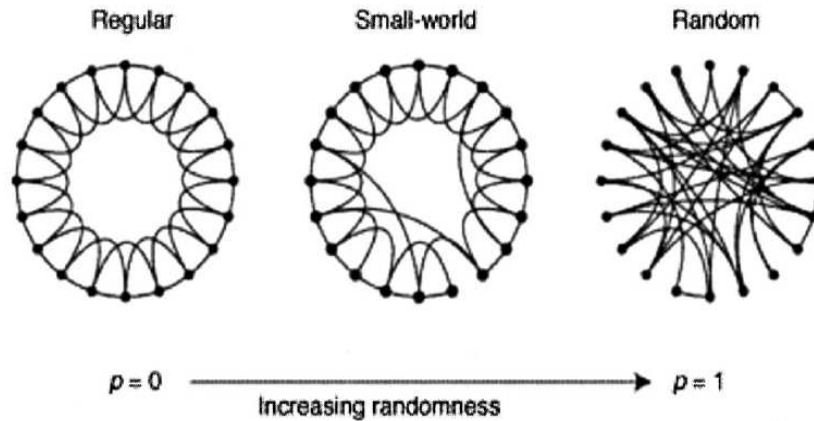


FIGURA 2. LA INTERPOLACIÓN ENTRE UNA RED REGULAR Y UNA RED ALEATORIA ORIGINA UNA RED DE MUNDO PEQUEÑO.
FUENTE: WATTS Y STROGATZ (1998).

De manera específica, el modelo de mundo pequeño presenta como propiedad global baja distancia media, que para este tipo de redes se ha encontrado que es aproximadamente $l \sim \log N$; y como propiedad local un nivel alto de clustering. Estas propiedades pueden observarse en la figura 3.

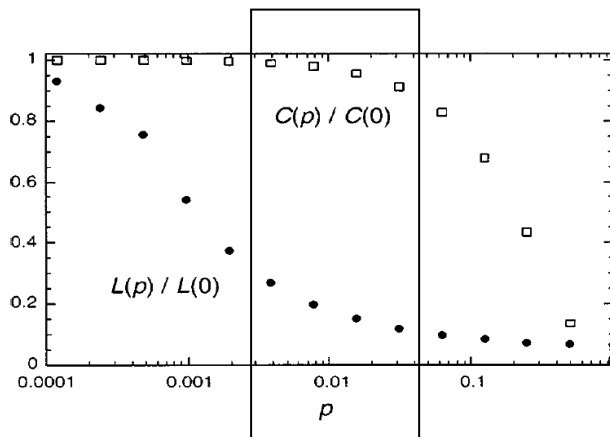


FIGURA 3. EN UNA RED DE MUNDO PEQUEÑO LA PROPIEDAD LOCAL ES ALTO CLUSTERING $C(p) / C(0)$, REPRESENTADO POR □; Y LA PROPIEDAD GLOBAL ES BAJA DISTANCIA MEDIA $L(p) / L(0)$, REPRESENTADO POR •.
FUENTE: WATTS Y STROGATZ (1998).

2.3. Redes libres de escala

El modelo de redes libres de escala introducido por Barabási y Albert en 1999, se basa en la propiedad de muchas redes reales con crecimiento dinámico [Barabási y Albert, 1999]. Es decir, la red no es estática sino que crece de forma continua en el transcurso del tiempo, así se añaden nodos y arcos gradualmente. Por otra parte, la llamada preferencia de enlace, relativa a la decisión para añadir nuevos nodos y arcos, se refiere a la manera en que los nodos existentes de la red ganan nuevos arcos dependiendo del grado que tienen dichos nodos. Este tipo de red ha sido encontrado en redes biológicas, metabólicas, de regulación genética y en redes tecnológicas como la World Wide Web (WWW).

Entonces, el modelo consiste en el crecimiento de la red añadiendo un sólo nodo cada vez, con m arcos conectados a dicho nodo. El otro extremo del arco se conecta a un nodo ya existente, escogido de forma aleatoria, con probabilidad proporcional a su grado:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (8)$$

donde k_i es el grado del nodo i . $\Pi(k_i)$ es la preferencia de enlace.

Este tipo de procedimiento genera redes con una distribución de grado tipo ley de potencia $P(k) \sim k^{-\alpha}$, donde α es el exponente del grado. Este tipo de distribución indica que las redes libres de escala tienen pocos nodos altamente conectados (*hubs*), y la mayoría de los nodos tienen pocos enlaces. Además, las redes generadas con el modelo de Barabási y Albert son no dirigidas. Con respecto al concepto de mundo pequeño, las redes libres de escala se consideran redes ultra pequeñas, por lo que la distancia media es aproximadamente $l \sim \log \log N$.

En la figura 3, se observa una red libre de escala con la característica de nodos altamente conectados, dominando la red. Por otra parte, al graficar las frecuencias para la distribución de grado $P(k)$, los datos se ajustan por una línea recta en el plano log-log.

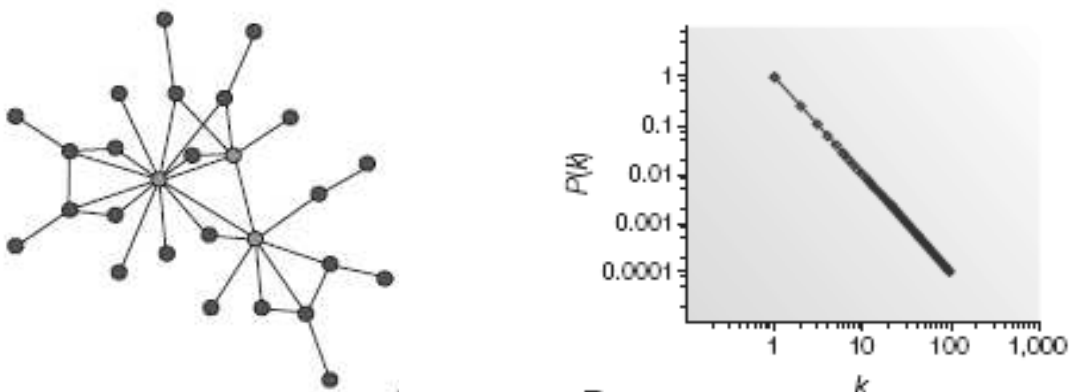


FIGURA 3. RED LIBRE DE ESCALA Y DISTRIBUCIÓN DE GRADO. PUEDE OBSERVARSE LA COEXISTENCIA DE ALGUNOS HUBS CON NODOS DE BAJO GRADO. FUENTE: BARABÁSI Y OLTVAI (2004).

3. ROBUSTEZ

Una red se forma por un conjunto de componentes, cuando la mayoría se encuentran conectados se tiene un componente gigante. Dicho componente puede afectarse ante circunstancias internas o externas. La *robustez* es un indicador para medir la habilidad de muchos sistemas complejos ante determinados eventos externos o internos, de conservar un comportamiento relativamente normal. Esto es, la capacidad de la red de mantener el componente gigante.

Existen dos tipos de perturbaciones, la primera es interna referente a fallas que pudieran presentarse dentro de la red, posiblemente debido a un problema interno. Esta forma se conoce como error, y puede representarse como la remoción de una fracción de nodos de forma aleatoria. La segunda conocida como ataque, consiste en la eliminación intencional de una fracción de nodos. En este caso el evento ocurre desde el exterior de la red.

El daño provocado en la red se mide por el tamaño del componente gigante, es decir, si el componente no disminuye de forma significativa se dice que el daño no es grave. En caso contrario, cuando la afectación elimina el componente, entonces el daño puede ser fatal para la red. Por lo tanto, la tolerancia al error o al ataque se conoce después de que una fracción de nodos ha sido eliminada, si aún existe el componente gigante, entonces se puede decir que la red es robusta. En particular, las redes libres de escala son más robustas ante fallas internas, en cambio son menos tolerantes ante ataques dirigidos. Esto se debe a que si los nodos altamente conectados son atacados, dejan sin conexión un gran número de nodos por lo que la red se destruye más rápido [Albert y Barabási, 2002; Barabási y Bonabeau, 2003; Dorogovtsev y Mendes, 2003]. El caso contrario ocurre con las redes aleatorias y de mundo pequeño, es decir, son más robustas cuando son atacadas y menos tolerantes al error.

En la figura 4 se muestra la afectación de una red libre de escala después de un ataque dirigido a los hubs. En la figura de la izquierda se observa la red antes del ataque, y en la figura derecha puede verse claramente como la red es destruida después del ataque.

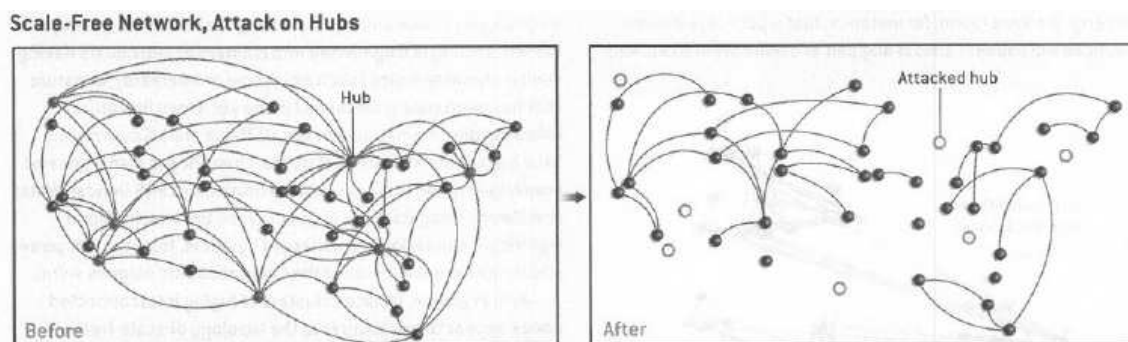


FIGURA 4. ATAQUE EN REDES LIBRES DE ESCALA.
FUENTE: BARABÁSI Y BONABEAU (2003).

4. ESTRUCTURA EN FUNCIÓN DE LA CONECTIVIDAD. CORRELACIONES

NODO-NODO

La conectividad permite clasificar una red indicando el tipo de estructura que presenta. Por ejemplo, es posible saber si se tiene una red aleatoria, de mundo pequeño o de libre escala. Para los dos primeros casos, redes aleatorias o de mundo pequeño, se presenta una conectividad media porque la mayoría de los nodos tienen el mismo grado. La distribución de grado en estas dos clases de redes es poissoniana. En cambio, para las redes libres de escala se tiene una distribución de grado tipo ley de potencia en un plano log-log, esto indica que un número pequeño de nodos tiene alto grado de conectividad.

En particular, para las redes libres de escala, identificar la estructura con base en la conectividad es puede ser más detallada. Es decir, cuando nodos de alto grado de conectividad se enlazan con nodos también de alto grado, se dice que la red tiene un *apareamiento de nodos positivo* (assortative). De manera inversa, cuando los nodos de alto grado se conectan con nodos de bajo grado, se dice que la red tiene un *apareamiento negativo* (dissortative). Otra característica importante en este tipo de configuración, es la tendencia a la formación de cuellos de botella. Por último, cuando no es posible identificar una tendencia, es decir, que el apareamiento es cero, la red se considera neutral [Newman, 2002 y 2003]. Estudios realizados han encontrado que las redes tecnológicas y biológicas, presentan una estructura con apareamiento de nodos negativo [Pastor-Satorras *et al.*, 2001; Maslov y Sneppen, 2002]; en cambio en las redes sociales es positivo [Newman, 2002 y 2003].

A fin de estimar las tendencias en los apareamientos, se han propuesto distintos parámetros y cantidades. Por ejemplo, Mark Newman propuso un parámetro r definido como el coeficiente de correlación de Pearson de los grados de ambos extremos de un arco, para el cual $-1 < r < 1$ [Newman, 2002]. Otra propuesta es la cantidad $K_{nn} = \sum_{k'} k'P(k'|k)$, donde $P(k'|k)$ es la probabilidad condicional de que un arco que sale de un nodo de grado k apunte a un nodo de grado k' . Cuando K_{nn} es una cantidad creciente de k , la red muestra un apareamiento positivo, mientras que cuando es decreciente el apareamiento es negativo [Boguñá *et al.*, 2002]. Por otro lado, una propuesta para captar de manera muy directa las tendencias en los apareamientos, es construida mediante $S = \sum_{i,j} k_i k_j / s_m$, donde la suma opera sobre todos los pares de nodos que poseen un enlace, y s_m corresponde al valor máximo de S dada la secuencia de grado. Así, un valor alto de S denota que nodos de grado alto se enlazan entre sí, y un valor bajo indica que nodos de grado alto están conectados con nodos de bajo grado [Doyle *et al.*, 2005].

El apareamiento de nodos es un indicador para conocer el grado promedio de los vecinos de un nodo, $\langle k_{nn} \rangle(k)$ [Pastor-Satorras *et al.*, 2001]. En redes con apareamiento positivo k_{nn} incrementa, en el caso negativo decrece, y en el caso neutral es independiente del grado k [Goh *et al.*, 2003]. Por otra parte, también ayuda para identificar el comportamiento de la fase de transición en la formación de un componente gigante. En redes con apareamiento positivo, es más lenta, sin embargo, la transición es más fácil [Newman, 2002]. Además, el tamaño del componente es menor en este tipo de redes, para valores grandes de k . También, con respecto a la robustez, las redes con apareamiento positivo son más resistentes ante ataques dirigidos, a diferencia de aquellas con apareamiento negativo que son más vulnerables.

La distancia media entre todo par de nodos también cambia con el apareamiento de nodos. El cambio es proporcional, a medida que se incrementa el apareamiento de nodos, la distancia media también aumenta [Brunet y Sokolov, 2004]. Sin embargo, aún cuando la distancia se incrementa, las redes continúan siendo de mundo pequeño. Para finalizar, el coeficiente de aglomeración se incrementa en redes con apareamiento positivo, en cambio en redes con apareamiento negativo son más limitadas [Serrano y Boguñá, 2005; Brunet y Sokolov, 2004].

5. EFICIENCIA

En el estudio de redes complejas se han propuesto varias cantidades para caracterizar el transporte de información. Por ejemplo, la *eficiencia* ε_{ij} mide el intercambio de información en una red, y es inversamente proporcional a la ruta más corta [Latora y Marchiori, 2001]. Cuando no existe una ruta entre los nodos i y j entonces $d_{ij} = +\infty$, esto significa $\varepsilon_{ij} = 0$. Si la medición se realiza a nivel global considera toda la red, y cuando es a nivel local sólo se considera la primera vecindad del nodo específico, pero sin tomar en cuenta el nodo en cuestión. La eficiencia global se utiliza en sistemas paralelos, cuando el envío de información es simultáneo entre los nodos; en cambio la eficiencia local se utiliza en sistemas secuenciales, cuando sólo hay envío de información desde un nodo específico. La eficiencia local muestra qué tan eficiente es la comunicación en la primera vecindad de un nodo, cuando éste es removido de la red. Las redes de mundo pequeño son extremadamente eficientes en el intercambio de información, tanto local como globalmente.

Por otra parte, la robustez está directamente relacionada con el componente gigante, esto es, si la red es robusta, el componente gigante permanece. Más aún, la ruta más corta entre pares de nodos, también se relaciona de forma directa, por lo que si la red no es tolerante, se afecta la distancia entre pares de nodos. Entonces, si la red no es robusta, tampoco es eficiente. Específicamente, en las redes libres de escala, que son muy sensibles a los ataques dirigidos a hubs, la eficiencia disminuye rápidamente [Crucitti *et al.*, 2003].

6. TRANSPORTE EN REDES COMPLEJAS

El transporte dentro de una red consiste en el envío de una entidad desde un nodo específico, llamado nodo *origen o fuente*, a otro nodo llamado *destino o sumidero*. Este problema puede ser planteado como un problema de flujo máximo, a fin de buscar las rutas del origen al destino por las cuales sea posible enviar la mayor cantidad de flujo, satisfaciendo restricciones de capacidad en los arcos, y de conservación de flujo para los nodos intermedios [Ahuja *et al.*, 1993; Rockafellar, 1998]. Por otro lado, el transporte en muchas situaciones reales involucra la presencia de fricción. Estos casos pueden ser modelados mediante analogías con sistemas eléctricos, esto es, al nodo origen se le asigna un potencial positivo mientras que al nodo destino se le asigna un potencial cero y se asumen resistencias en los arcos. Mediante leyes de conservación de carga, es posible estimar el flujo de corriente que puede ser enviado de la fuente al destino.

Se han realizado de forma reciente, estudios sobre propiedades de transporte en redes libres de escala y en redes aleatorias, con y sin fricción [López *et al.*, 2005a; López *et al.*, 2006; Carmi *et al.*, 2007; Carmi *et al.*, 2008]. De manera específica, los estudios revelan que el transporte es mejor en redes libres de escala en comparación con redes aleatorias, debido a la presencia de hubs. Además, los estudios muestran que para el caso de flujo máximo, la capacidad del flujo está determinado por $F \sim \min\{k_A, k_B\}$, donde k_A y k_B son el grado del nodo origen y destino, respectivamente. Y, en el caso eléctrico, las conductancias están aproximadas por $ck_A k_B / (k_A + k_B)$, donde c es un parámetro que depende del grado promedio de la red.

Por otra parte, parece que el transporte está relacionado de manera directa con la forma o estructura que presenta la red. En los estudios mencionados, las redes generadas fueron suficientemente densas, y los resultados están directamente relacionados con el grado de los nodos origen y destino. Además, en ambos tipos de transporte, las redes libres de escala mostraron mayor capacidad para el flujo. Estos resultados indican que los nodos altamente conectados favorecen el transporte sin y con fricción.

7. FLUJO MÁXIMO

El estudio de transporte en redes cuando no se considera fricción puede ser modelado como un problema de flujo máximo. Dicho problema consiste en determinar el flujo máximo estático o de estado estable, desde un nodo llamado origen o fuente s , a otro nodo llamado destino o sumidero t dentro de una red, respetando las limitaciones de los arcos. Una manera de resolver el problema de flujo máximo es encontrar las rutas o trayectorias del origen al destino, y de forma incremental aumentar el flujo a través de dichas rutas.

El flujo $f(i, j)$ es una función no negativa definida en los arcos. La capacidad de un arco $C(i, j)$, es un valor no negativo asociado al arco (i, j) . Los valores de la capacidad se establecen en un intervalo cerrado $C(i, j) = [c^-(i, j), c^+(i, j)]$, donde $c^-(i, j)$ es la mínima capacidad, y $c^+(i, j)$ la máxima. Entonces, el flujo enviado a través de las trayectorias debe ser factible con respecto a las capacidades, así $f(i, j) \in C(i, j)$, para todo arco de la red y no puede excederse.

En general, para determinar el flujo máximo debe tomarse en cuenta lo siguiente:

- i. La red debe ser dirigida. Cuando la red es no dirigida entonces el arco (i, j) se duplica formando los arcos (i, j) y (j, i) , en ambos casos la capacidad es la misma al arco original.
- ii. No debe existir ninguna ruta del origen al destino con capacidad infinita. Si existe alguna ruta con esta característica, el problema no tiene solución.
- iii. La red es simple. Es decir, no existen arcos paralelos entre dos nodos, ni tampoco rizados.
- iv. Múltiples fuentes y múltiples sumideros. Cuando en la red existen varios nodos fuente y varios nodos sumidero, se añaden dos nuevos nodos llamados super-fuente y super-sumidero. Estos nodos se unen a la red mediante arcos extra, con capacidades ilimitadas.

Entonces de manera formal, dada una red capacitada $G = (N, A)$, N es el conjunto de nodos y A el conjunto de arcos, con capacidades no negativas C_{ij} ,

asociadas a cada arco $(i, j) \in A$. Además, sea s el nodo fuente y t el nodo sumidero. Se desea encontrar el flujo máximo desde el nodo fuente al nodo sumidero, que satisfaga las capacidades de los arcos y las restricciones de conservación de flujo en todos los nodos intermedios de la red. Esto es,

$$\text{Maximizar } v = \sum_j f(s, j) \quad (9.1)$$

Sujeto a:

$$\sum_i f(i, j) - \sum_k f(j, k) = \begin{cases} -v, & \text{si } j = s \\ 0, & \text{si } j \neq s, t \\ v, & \text{si } j = t \end{cases} \quad (9.2)$$

$$0 \leq f(i, j) \leq C(i, j), \text{ para toda } i, j. \quad (9.3)$$

Las restricciones (9.2) son de conservación de flujo, es decir, el flujo que entra a un nodo intermedio debe salir, excepto para los nodos origen y destino. Las restricciones (9.3) son de capacidad, indicando que no puede excederse la capacidad de ningún arco.

Por otra parte, las rutas del origen al destino pueden clasificarse como *rutas arco-disjuntas*, es decir, cuando no tienen ningún arco en común. También son llamadas rutas independientes. En particular, en el problema de flujo máximo estas rutas se forman cuando la capacidad en todos los arcos es unitaria. Es decir, cuando se envía una unidad de flujo del origen al destino, la unidad satura cada uno de los arcos de la ruta, formando así las rutas arco-disjuntas. En la solución del problema, el número de rutas arco-disjuntas es igual al flujo máximo [Ahuja *et al.*, 1993; Bollobás, 1998].

En particular, en este trabajo las capacidades de todos los arcos son $[0, 1]$, es decir, las redes son de capacidad unitaria. Por lo cual, cada vez que se envía una unidad de flujo a través de una trayectoria, ésta queda saturada. Esto significa que el flujo máximo F está determinado por la cantidad de rutas arco-disjuntas del nodo origen al nodo sumidero (Ahuja, *et al.*, 1993). La implicación de lo anterior es que, la capacidad del transporte se determina por el número de rutas arco-disjuntas de la fuente al destino y la capacidad de cada ruta, y no por la longitud de cada ruta (López *et al.* 2005). En trabajos recientes se encontró que el flujo máximo, determinado por el número de rutas arco-disjuntas, es igual al mínimo grado entre el nodo fuente (s) y el nodo destino (t), $\min \{k_s, k_t\}$, donde k_s y k_t representan el grado del nodo fuente y destino, respectivamente (López, *et al.*, 2006).

8. CORRIENTE ELÉCTRICA

El problema de corriente en redes eléctricas, es un problema de flujo, donde la corriente entrante en el nodo origen es consumida en el nodo destino. Sin embargo, cuando se trabaja con corriente eléctrica, la fricción disminuye la cantidad de flujo enviada desde el nodo origen al nodo destino, debido a efectos disipativos. Entonces para el caso eléctrico, calculamos la *conductancia* G (cantidad inversa a la resistencia), entre los nodos fuente y destino usando el método de Kirchhoff, asumiendo que los arcos tienen resistencia unitaria, y los potenciales de entrada y salida son $V_s = 1$ y $V_t = 0$, respectivamente. La dirección de los arcos es arbitraria desde un extremo al otro de un arco, para esto es posible usar V_i , la diferencia potencial en el arco e_i , que significa la diferencia entre los potenciales del nodo inicial y el nodo final.

De manera formal, una red eléctrica simple $N = (V, E, r)$, consiste en una gráfica en la cual cada arco e_i tiene asignado un número real r_i llamado resistencia. De forma frecuente se presenta la red como $N = (G, c)$, donde c es la función conductancia, es decir,

$$c_e = \frac{1}{r_e} \quad (10)$$

es la conductancia del arco e . La conductancia es el recíproco de la resistencia. Si existe una diferencia potencial V_i entre los extremos de e_i , es decir a_i y b_i , entonces una corriente eléctrica w_i fluye en el arco e_i de a_i a b_i conforme a la ley de Ohm:

$$w_i = \frac{V_i}{r_i} \quad (11)$$

En cambio, la distribución de las corrientes se rige por las leyes de Kirchhoff:

Ley de potencial (o voltaje) de Kirchhoff. Establece que las diferencias potenciales alrededor de cualquier ciclo $x_1x_2\dots x_k$ suman cero:

$$V_{x_1x_2} + V_{x_2x_3} + \dots + V_{x_{k-1}x_k} + V_{x_kx_1} = 0 \quad (12)$$

Ley de corriente de Kirchhoff. Establece que la corriente total de salida de cualquier punto es cero:

$$w_{ab} + w_{ac} + \dots + w_{au} = 0 \quad (13)$$

En particular, la ley de corriente de Kirchhoff, es equivalente a las restricciones de conservación de flujo en el problema de flujo máximo [Cormen *et al.*, 2001].

Por otro lado, la conductancia promediada entre todos los pares de nodos de una red, tiene una significancia especial porque también describe propiedades de transporte general, donde la eficiencia del transporte decrece con el aumento de la distancia entre nodos. En este caso, la conductancia es una cantidad física proporcional al número de rutas arco-disjuntas entre una fuente y un destino, esta cantidad se aproxima por $k_s k_t / (k_s + k_t)$ (López, *et al.*, 2005), donde k_s es el grado del nodo origen y k_t el grado del nodo destino.

9. ESTADO DEL ARTE

Este trabajo consiste en el estudio de propiedades de transporte sin y con fricción, en redes de mundo pequeño y en redes de libre escala, con tendencias en el apareamiento de nodos. Esto nos lleva a revisar los estudios recientes realizados sobre la configuración de apareamiento de nodos, y sobre el transporte en redes complejas.

En la primera parte, encontramos que se han realizado diversos estudios con base en el apareamiento de nodos. Inicialmente, para estimar las tendencias en los apareamientos, se han propuesto distintos parámetros y cantidades, como el coeficiente de correlación de Pearson [Newman, 2002]; la cantidad \bar{k}_{nn} , para estimar la presencia de correlaciones en una red [Boguñá *et al.*, 2002]; o también, la cantidad S para captar las tendencias en los apareamientos [Doyle *et al.*, 2005]. Una vez identificadas las configuraciones, encontramos estudios para conocer características y comportamientos en las redes. Por ejemplo, el grado promedio de los vecinos de un nodo [Pastor-Satorras *et al.*, 2001], en este caso se ha encontrado que en redes con

apareamiento positivo incrementa, en el caso negativo decrece, y en el caso neutral es independiente del grado [Goh *et al.*, 2003]. También, el comportamiento de la fase de transición en la formación de un componente gigante, en redes con apareamiento positivo, es más lenta aún cuando la transición es más fácil [Newman, 2002]. Para la distancia media entre todo par de nodos, el cambio es proporcional en medida que se incrementa el apareamiento de nodos [Brunet y Sokolov, 2004]. Y, para el coeficiente de aglomeración, este se incrementa en redes con apareamiento positivo, en cambio en redes con apareamiento negativo son más limitadas [Serrano y Boguñá, 2005; Brunet y Sokolov, 2004].

Por otro lado, el transporte dentro de una red es el envío de una entidad desde un nodo origen, a un nodo destino. Debido a la importancia de las propiedades de transporte, se han realizado un gran número de estudios [Tadić y Thurner, 2004; Tadić *et al.*, 2004; Noh y Rieger, 2004; Rosvall *et al.*, 2005; Lee y Rieger, 2006; Tadić *et al.*, 2006; Wang *et al.*, 2006; Gallos *et al.*, 2007; Condamin *et al.*, 2007].

Una característica importante del problema de transporte es la posibilidad de plantearlo como un problema de flujo. En particular, nos interesa el transporte sin y con fricción. Cuando no se considera fricción, el problema puede ser modelado con flujo máximo, y el objetivo consiste en maximizar el flujo enviado en forma incremental a través de rutas del origen al destino, satisfaciendo restricciones específicas [Ahuja *et al.*, 1993; Rockafellar, 1998]. Ahora bien, el transporte en muchas situaciones reales involucra la presencia de fricción. Estos casos pueden ser modelados mediante analogías con sistemas eléctricos, y mediante leyes de conservación de carga, se estima el flujo de corriente enviado de la fuente al destino.

Se han realizado pocos estudios considerando el transporte como un problema de flujo. Aún así, encontramos estudios sobre propiedades de transporte en redes libres de escala y aleatorias, con y sin fricción [López *et al.*, 2005a; López *et al.*, 2006; Carmi *et al.*, 2007; Carmi *et al.*, 2008]. En el caso sin fricción, los resultados muestran que el envío de flujo dentro de la red, está determinado por el mínimo grado entre el nodo origen y el nodo destino. Para el caso con fricción, las conductancias son aproximadas por $k_A k_B / (k_A + k_B)$, donde k_A y k_B son el grado del nodo origen y destino, respectivamente. Además, estos estudios revelan en ambos casos, que la capacidad del transporte es mejor en redes libres de escala en comparación con redes aleatorias, debido a la presencia de hubs. Cabe mencionar que las redes generadas fueron suficientemente densas. La idea central en dichos estudios sobre flujo con y sin fricción, es que la estructura de la red sirve como conductora. Esto es, el grado de los nodos origen y destino es determinante en la capacidad de flujo enviada, en cambio los nodos intermedios de la red no interfieren en los resultados.

Por lo tanto, los estudios que se han realizado sobre propiedades de transporte con y sin fricción, han sido en redes aleatorias y en redes de libre escala suficientemente densas. Por esta razón, y utilizando como base los resultados de dichos estudios, en este trabajo consideramos que es importante conocer el comportamiento del transporte, tomando en cuenta como factor determinante, redes con estructuras diversas y representativas del mundo real, como son las redes de mundo pequeño y las redes de libre escala. Además, recordando que en redes reales la densidad es variante, y no es tan común encontrar redes con densidad alta.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

1. FLUJO MÁXIMO Y CORRIENTE ELÉCTRICA EN REDES COMPLEJAS

En este trabajo se estudian algunas propiedades de transporte sin y con fricción en redes de mundo pequeño y de libre de escala. En la primera parte nos enfocamos al estudio de las redes de mundo pequeño. De manera específica, estas redes son generadas con el modelo de Watts-Strogatz para distintos niveles de reconexión p , donde $p \in [0, 1]$ [Watts y Strogatz, 1998]. Este modelo es representativo de redes del mundo real cuando el valor de p garantiza un alto valor de coeficiente de aglomeración (propiedad local) y baja distancia media (propiedad global). En el contexto de nuestras investigaciones, resulta importante explorar la capacidad del transporte en diversas configuraciones derivadas del modelo de Watts-Strogatz. Lo anterior, bajo la idea de hacer concordante las propiedades de mundo pequeño con una buena capacidad de transporte a nivel local (coeficiente de aglomeración), y a nivel global (baja distancia media).

Por otro lado, estudiamos redes con distribución libre de escala en las conectividades, para estimar el transporte bajo diferentes configuraciones. Las redes de libre escala son generadas con el modelo de Barabási-Albert, con una distribución de grado tipo ley de potencia $P(k) \sim k^{-\alpha}$ [Barabási y Albert, 1999]. En particular, resulta importante evaluar los efectos de los niveles de apareamiento de los nodos sobre la capacidad del transporte en redes libres de escala. Este apareamiento puede ser caracterizado mediante parámetros que representan las tendencias en las conexiones, esto es, si nodos de alto grado están conectados con nodos de alto grado, y nodos de baja conectividad con otros de alto grado. Nuestro interés se centra en estimar las variaciones o cambios en el transporte cuando se introducen tendencias en los apareamientos. En particular, pretendemos evaluar los efectos de configuraciones tipo cuello de botella resultantes de las tendencias. Es importante mencionar que, en redes reales se han observado configuraciones en los apareamientos, esto es, en redes sociales las tendencias encontradas son de apareamiento positivo, es decir, entre nodos de alto grado [Newman, 2002 y 2003]; en cambio, en redes biológicas y tecnológicas las tendencias muestran el apareamiento negativo de nodos, referente a la conexión de nodos de bajo grado con nodos de alto grado de conectividad [Pastor-Satorras *et al.*, 2001; Maslov y Sneppen, 2002].

Para nuestros análisis, las redes de libre escala se generan con exponente $\lambda = 2.5$, como se verá más adelante, utilizando el método de Molloy-Reed [Molloy y Reed, 1995]. Este método genera redes libres de escala con un apareamiento aleatorio y exponente definido. Consiste en tomar N nodos, y generar k_i copias de cada nodo i , donde la probabilidad de tener grado i , satisface $P(k_i) \sim k_i^{-\lambda}$. Además, usamos el criterio propuesto por Doyle *et al.*, [Doyle *et al.*, 2005] para generar tres configuraciones específicas: (i) apareamiento máximo S_{max} , (ii)

apareamiento aleatorio S_{ale} , y (iii) apareamiento mínimo S_{min} . Inicialmente, los nodos son ordenados de mayor a menor con respecto al grado. Para generar S_{max} , se parte del nodo de mayor grado creando enlaces con nodos de acuerdo a la posición en orden descendente hasta agotar el grado del nodo, de esta manera se obtiene el valor máximo posible para S . En cambio, para S_{min} , se parte del nodo de mayor grado, y se crean enlaces con nodos de acuerdo al orden ascendente. Para S_{ale} , los nodos son apareados aleatoriamente respetando el grado de cada uno. En todos los casos se evita la repetición de enlaces, la formación de rizos y que la red sea disconexa.

Para el caso sin fricción, hemos calculado el flujo máximo entre el nodo fuente y el nodo sumidero, utilizando Programación Lineal para determinar los valores de flujo máximo, con restricciones de conservación de flujo en los nodos intermedios, y de capacidad en los arcos [Cormen *et al.*, 2001]. Además, se ha considerado el intervalo de capacidad de todos los arcos de $[0, 1]$, lo cual significa que el flujo máximo está determinado por el número máximo de rutas arco-disjuntas del nodo origen al nodo destino.

Por otra parte, para el caso con fricción hemos calculado la conductancia entre el nodo origen y el nodo destino. En este caso, utilizando el método de Kirchhoff imponiendo un potencial $V_A = 1$ para el nodo fuente, el nodo destino es fijado a un potencial cero $V_B = 0$, y se asumen resistencias unitarias para todos los arcos. Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales para determinar el valor de los potenciales V_i en todos los nodos de la red. Para estimar la corriente total entrando en A y saliendo en B , se suman las corrientes de A hacia los vecinos más cercanos y se encuentra que esta corriente es numéricamente igual a la conductancia G [López *et al.*, 2005a]. Los cálculos tanto para el flujo máximo como para la conductancia, se han realizado de forma global, como el promedio entre todos los pares de nodos. Además, se han calculado ambas cantidades a nivel local para la primera vecindad del nodo en cuestión, es decir, el promedio entre las subgráficas de los vecinos más cercanos al nodo.

La metodología de este trabajo consiste en lo siguiente:

- i. Se generan redes de mundo pequeño. Se calcula el flujo máximo y la corriente eléctrica, primero entre todo par de nodos a fin de conocer el comportamiento a nivel global en la red. Después, se calculan nuevamente el flujo máximo y la corriente eléctrica pero para la subgráfica de los vecinos del nodo i , obteniéndose los valores a nivel local. Ambos valores global y local se comparan.
- ii. Se generan redes de libre escala con tendencias en los apareamientos de nodos mínima, aleatoria y máxima. Se calculan los valores de flujo máximo y corriente eléctrica entre todo par de nodos, y se comparan los valores entre los apareamientos. Finalmente, se calculan los valores de flujo máximo y corriente eléctrica en función de la ruta más corta y del grado mínimo de los nodos origen y destino, para conocer algunas diferencias entre las formas de transporte, sin y con fricción, analizadas.

Para la realización de este trabajo el software utilizado fue networkx (<http://networkx.lanl.gov/>), programación en Python, por una parte calculando la conductancia, ruta más corta, grado nodo A y B, para todos los pares de nodos de una red libre de escala con apareamiento dado (<http://www.python.org/>). Por otra parte, para calcular el flujo máximo y ruta más corta entre todos los pares de nodos para una red libre de escala, se utilizó una librería en Programación Lineal, llamada `igraph`

(<http://igraph.sourceforge.net/doc/python/index.html>; el algoritmo es: `maxflow_value(source, target, capacity=None)`).

1.1. Resultados para redes de mundo pequeño. Modelo Watts-Strogatz

En nuestro trabajo, generamos redes de mundo pequeño basadas en el modelo de Watts-Strogatz. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 3.1. y 3.2. En nuestras simulaciones consideramos redes con $N = 512$ nodos, y el número de vecinos $k = 4$. Además, los resultados mostrados en ambas figuras son valores medios obtenidos de 10 realizaciones independientes. Con respecto al número de realizaciones en nuestras simulaciones, lo recomendable es realizar un número infinito de corridas (con base en el Teorema del Límite Central). Sin embargo, para realizar un número de simulaciones conforme al tiempo y costo de máquina que teníamos disponible, se eligió un número pequeño de estas, las cuales nos llevaron a valores medios estables.

Para el caso eléctrico figura 3.1., se encuentra que para configuraciones regulares, valores de p pequeñas, los valores de la conductancia a nivel local G_{local} , son mejores que los valores a nivel global G_{global} . Conforme la probabilidad de reconexión p se incrementa, la conductancia local decrece mientras que la conductancia global se incrementa, teniendo ambos valores aceptables. Los valores de p grandes, es decir, configuraciones aleatorias, muestran valores grandes de la conductancia global y valores pequeños para la conductancia local. Este comportamiento es debido a la aparición de atajos, formados por el incremento de p , que permiten la comunicación global, mientras que a nivel local se reduce la interconexión.

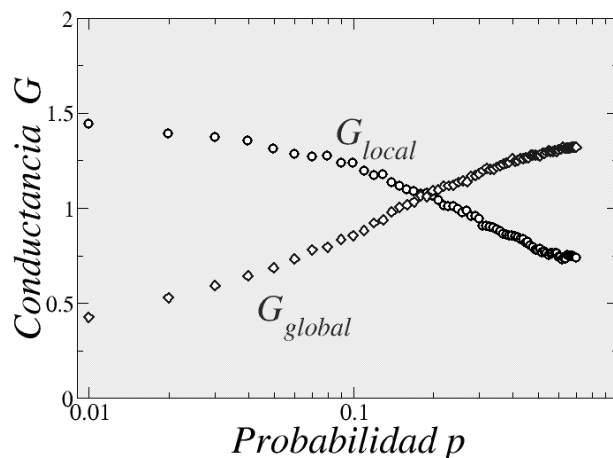


FIGURA 3.1. Conductancia global y local para distintos valores de la probabilidad de reconexión p . La conductancia global crece mientras la conductancia local decrece, conforme se incrementa la probabilidad de reconexión. Para valores intermedios de p ambas conductancias muestran un valor aceptable.

Es importante analizar el comportamiento para valores intermedios de p , referentes a configuraciones intermedias entre redes regulares y redes aleatorias, donde se observa que tanto la conductancia global como la local tienen valores aceptables. Este resultado indica que las redes pertenecientes a

las configuraciones con topología de mundo pequeño, el transporte con fricción presenta buenos valores en ambos niveles.

En la figura 3.2., se presentan los resultados para el caso de flujo máximo. Para las configuraciones regulares, valores pequeños de p , el flujo local y el global tienen valores altos. Se observa que tanto el flujo local F_{local} como el flujo global F_{global} , son decrecientes respecto a la probabilidad p , siendo el flujo global el que decrece más rápido. Entonces, para configuraciones aleatorias, altos valores de p , se encuentra que el transporte sin fricción es mejor a nivel local en comparación con el global, y la presencia de atajos no favorece el envío de flujo dentro de la red. Esto se debe a la saturación de las rutas arco-disjuntas que no permiten alcanzar el nodo destino, sin embargo, de forma local es posible mover unidades de flujo, debido al grado del nodo.

Nuevamente, en el comportamiento para configuraciones intermedias, el transporte sin fricción también presenta valores altos tanto a nivel local como a nivel global. Por lo tanto, podemos concluir que la capacidad del transporte en redes con topología de mundo pequeño es buena local y globalmente.

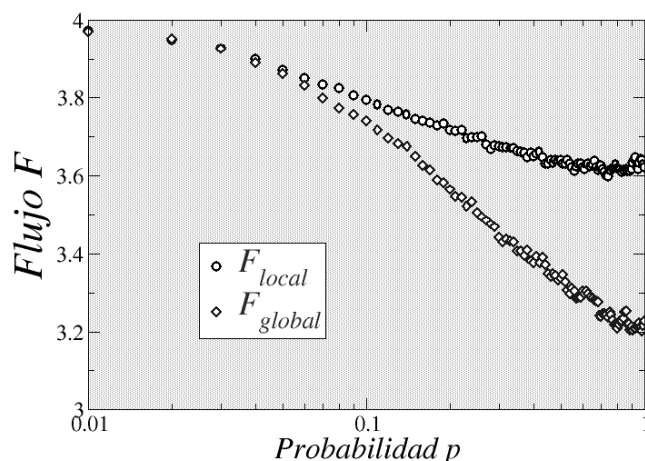


FIGURA 3.2. Flujo medio global y local para distintos valores de la probabilidad de reconexión p . Ambos valores de flujo decrecen conforme aumenta la probabilidad p . Para valores intermedios de p tanto el flujo global como el local muestran valores altos.

1.2. Resultados para redes de libre escala. Modelo Barabási-Albert

En este trabajo se compara el efecto del apareamiento de nodos en la capacidad del transporte por medio del cálculo de la conductancia y el flujo máximo. En nuestro análisis generamos redes libres de escala $P(k) \sim k^{-\lambda}$, y manipulamos las tendencias en los apareamientos, a fin de tener tres configuraciones específicas: (i) apareamiento máximo S_{max} , (ii) apareamiento mínimo S_{min} , y (iii) apareamiento aleatorio S_{ale} . En la figura 3.3, se observan los efectos del apareamiento. En la figura de la izquierda, apareamiento mínimo S_{min} , se observa la tendencia de conexión entre nodos de alto grado y bajo grado. En cambio, en la derecha, apareamiento máximo S_{max} , puede verse claramente la conexión entre nodos de alta conectividad. En la parte central, apareamiento aleatorio S_{ale} , no es posible identificar una tendencia.

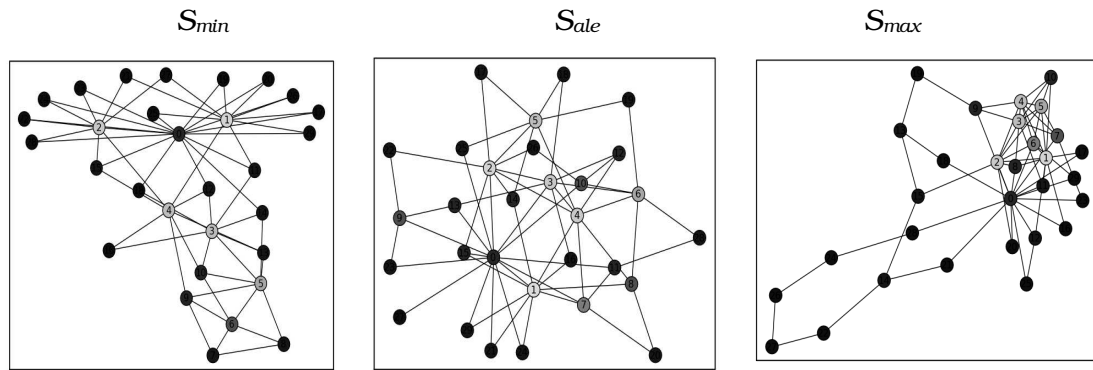


FIGURA 3.3. Efecto de apareamiento mínimo, aleatorio y máximo, de izquierda a derecha, respectivamente.

Las estadísticas presentadas provienen de simulaciones con redes de $N = 512$ nodos y 10 realizaciones independientes. Para estudiar el comportamiento del transporte, construimos la distribución acumulativa de probabilidad $H(G > g)$ y $H(F > f)$ que mide la probabilidad de tener conductancias o flujos mayores que un valor dado. Es importante recordar el resultado de López *et al.*, donde encuentran que la función de distribución acumulativa es aproximada por $H(G) \sim G^{-(2\lambda-2)}$, para redes libres de escala [López *et al.*, 2005a]. En la figura 3.4., se presentan los resultados para el caso eléctrico de una red libre de escala ($\alpha = 2.5$) con distintos niveles de apareamiento. Se observa que para el apareamiento aleatorio S_{ale} , la distribución de conductancias en la cola sigue una ley de potencia de la forma $H(G) \sim G^{-\alpha}$, donde α es un exponente que satisface $\alpha = 2\lambda - 2$, en total concordancia con los resultados de López *et al.*, [López *et al.*, 2005a; López *et al.*, 2006]. Para el caso de apareamiento máximo S_{max} , al comparar con el apareamiento aleatorio, se observa que la probabilidad de tener conductancias grandes es mayor, mientras que en el rango de conductancias pequeñas es menor, es decir, se tienen valores mayores en S_{ale} . Sin embargo, tener una mayor probabilidad para conductancias grandes representa una ventaja para redes con apareamiento máximo, debido a que la capacidad del flujo es mayor.

En el caso de apareamiento mínimo S_{min} , la probabilidad de tener conductancias bajas es igual al caso aleatorio, en cambio la probabilidad de conductancias grandes es menor tanto del caso de apareamiento aleatorio como del caso máximo. Lo anterior indica que el transporte con fricción se ve afectado con el apareamiento de nodos, y podemos concluir que la capacidad del transporte logra un mejor balance (altos valores para conductancias bajas y grandes) en el caso aleatorio, aunque las redes con apareamiento máximo tienen la ventaja de una mayor probabilidad para conductancias grandes.

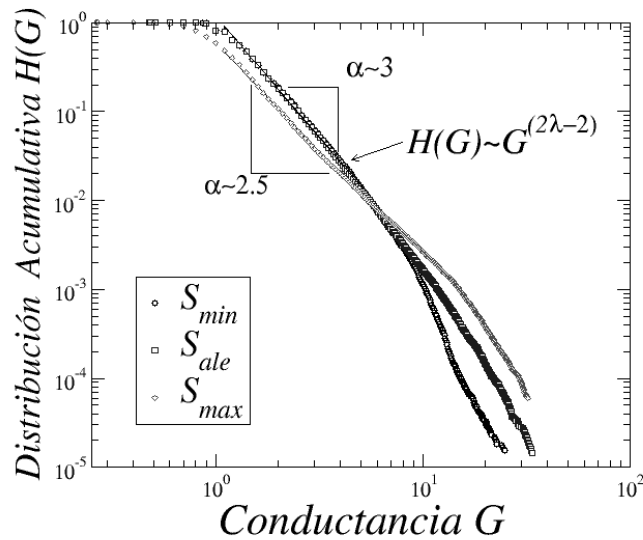


FIGURA 3.4. Estadística de las conductancias G para los tres casos de apareamiento S_{min} , S_{ale} y S_{max} . Las distribuciones acumulativas exhiben diferencias dependiendo de las tendencias en los apareamientos. Para S_{ale} , la distribución es consistente con una ley de potencia $H(G) \sim G^{-2\lambda-2}$, donde λ es el exponente de la distribución de grado de la red $P(k) \sim k^{-\lambda}$.

Como mencionamos anteriormente, a fin de estudiar el comportamiento del transporte, construimos la distribución acumulativa de probabilidad para medir la probabilidad de tener conductancias o flujo mayores que un valor dado. Por esta razón, nos interesa conocer el comportamiento cuando la red crece en número de nodos y que nuestros resultados sean válidos para un rango de valores. En la figura 3.5., se muestra cómo mejora la estadística respecto a recuperar la ley de potencia esperada $H(G) \sim G^{-2\lambda-2}$, que está relacionada con la distribución de grado $P(k) \sim k^{-\lambda}$. Esto significa que el rango donde se puede definir un exponente crece conforme aumenta el número de nodos, pero no tan dramáticamente, lo cual indica que aunque se trabaje con redes pequeñas la estadística es representativa para ciertos intervalos de la conductancia (G pequeñas).

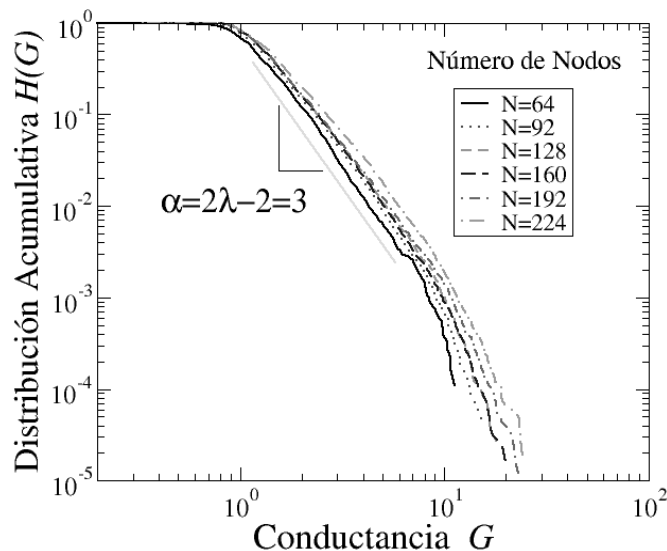


FIGURA 3.5. Estadística de las conductancias G para redes con incremento en el número de nodos N . Se observa cómo mejora la estadística respecto a recuperar la ley de potencia esperada $H(G) \sim G^{-2\lambda-2}$, que está relacionada con la distribución de grado $P(k) \sim k^{-\lambda}$.

Por otra parte, el efecto de los apareamientos de nodos en el caso de flujo máximo, se muestran en la figura 3.6. Al analizar las tendencias, encontramos que no es posible identificar claramente el comportamiento en los distintos niveles de apareamiento. Aún así, podemos ver cómo las probabilidades para valores pequeños de flujo son idénticas en los tres niveles, y para valores grandes se observa una ligera separación. Dicha discrepancia en los valores grandes de flujo, está relacionada con la disponibilidad de rutas arco-disjuntas necesarias para determinar el valor del flujo máximo. En particular, las rutas correspondientes a la configuración mínima S_{min} , se reducen debido a que este tipo de configuración genera una mayor presencia de los llamados cuellos de botella, saturando las rutas arco-disjuntas más rápido e interfiriendo en el envío de flujo.

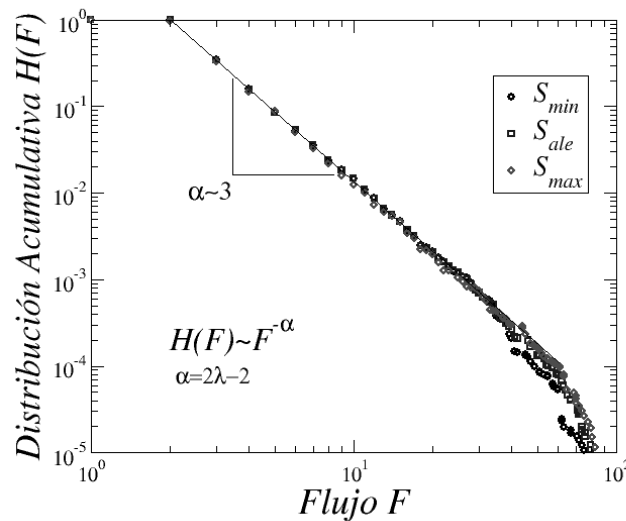


FIGURA 3.6. Distribución acumulativa $H(F)$ vs. F para distintas configuraciones surgidas de introducir tendencias en los apareamientos. Se muestran los casos S_{min} , S_{ale} y S_{max} . Se observa que en los tres casos las distribuciones son consistentes con un decaimiento tipo ley de potencia $H(F) \sim F^{-2\lambda-2}$, donde λ es el exponente ligado a la distribución de grado de la red.

Ahora bien, a fin de comparar algunas diferencias entre los dos tipos de transporte que hemos analizado, realizamos la siguiente comparación. Sabemos que, la distancia media entre la fuente y el destino, ejerce una fuerte influencia en el transporte con fricción, a diferencia del transporte sin fricción en el cual la capacidad del transporte está determinada por las rutas arco-disjuntas y no por la longitud de las rutas. En la figura 3.7., se presentan los resultados del comportamiento de la conductancia y el flujo como función de la ruta más corta l_{AB} , entre los nodos A y B , para distintos valores del grado mínimo del par de nodos fuente y destino ($\min(k_A, k_B) = 2, 3, 4$ y 5). En la figura 3.7a, se observa que la conductancia decrece conforme aumenta la

distancia entre nodos, mientras que su valor medio crece al aumentar el grado mínimo. También, notamos que al comparar las conductancias para los distintos valores de apareamiento, las configuraciones S_{min} y S_{ale} muestran un rápido crecimiento para el valor $l_{AB} = 1$. Estos resultados confirman el hecho de que, el transporte con fricción disminuye conforme se incrementa la distancia media entre los nodos origen y destino.

En contraste, en la figura 3.7b, se observa el comportamiento para el flujo, el cual se mantiene aproximadamente constante para cierto rango de distancias y para diversos valores del grado mínimo de los nodos origen y destino. Este resultado confirma que el transporte sin fricción es independiente de la distancia media entre los nodos origen y destino.

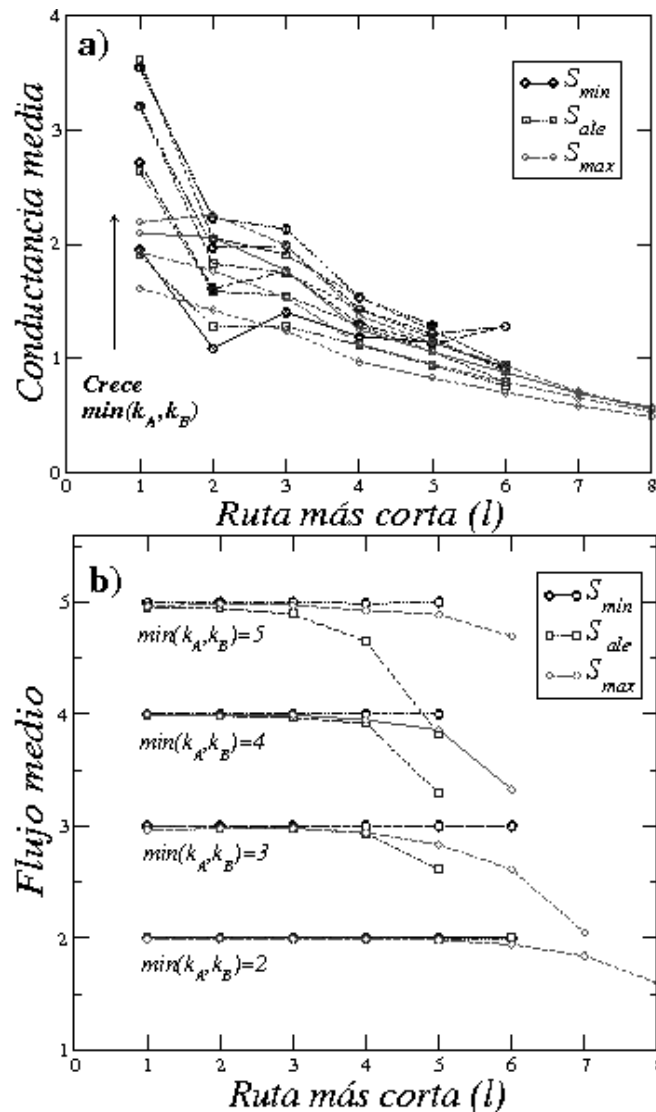


FIGURA 3.7. Conductancia y flujo promedio vs. ruta más corta l_{AB} para varios valores del grado mínimo del par de nodos y para los niveles de apareamiento S_{min} , S_{ale} y S_{max} . a) Para el caso eléctrico, se observa que la conductancia media decrece conforme la distancia media crece. Se presentan los casos del grado mínimo $\min(k_A, k_B) = 2, 3, 4$ y 5 , de abajo hacia arriba. b) Para el caso de flujo máximo, la capacidad del transporte se mantiene constante para varios valores de la ruta más corta.

También hemos calculado la conductancia y el flujo medio como función del grado mínimo del par de nodos origen y destino. En la figura 3.9, se presentan los resultados. Para el caso eléctrico, figura 3.9a, la conductancia media muestra distintas pendientes que corresponden a las tendencias de los tres casos de apareamientos. En particular, se observa que para valores grandes del grado mínimo de los nodos origen y destino, la configuración del apareamiento máximo S_{max} , permite tener valores altos de la conductancia media, mientras que para S_{min} la conductancia es menor y para el caso aleatorio S_{ale} , se mantiene en una posición intermedia.

Por otra parte, en la figura 3.9b, se analiza el caso de flujo medio contra el grado mínimo de los nodos origen y destino. Se encuentra que las tres configuraciones se superponen excepto por desviaciones para valores grandes del grado mínimo de los nodos origen y destino $\min(k_A, k_B)$. Con estos resultados se confirma que la capacidad del transporte sin fricción no se ve afectada por las tendencias de los apareamientos de nodos.

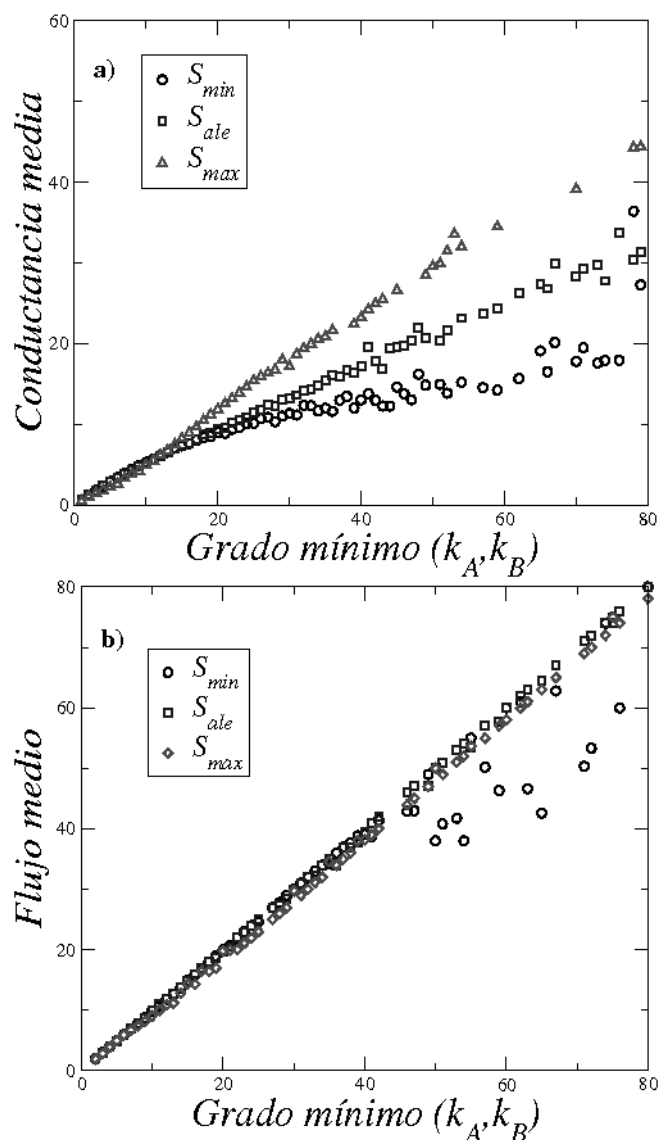


FIGURA 3.9. Conductancia promedio vs. grado mínimo (k_A, k_B) para niveles de apareamiento S_{min} , S_{ale} y S_{max} . a) Para el caso eléctrico se observa que la conductancia media es mayor para S_{max} en comparación con S_{min} y S_{ale} para grados mínimos grandes, mientras que para valores pequeños las

conductancias son similares. Lo anterior confirma que el transporte es mejor en el caso de apareamiento máximo. b) Para el caso de flujo máximo los tres casos se sobreponen, indicando que el transporte mejora conforme aumenta el grado mínimo del nodo origen o destino. Se observa que en el caso de S_{min} el flujo es menor que para S_{max} y S_{ale} , debido a que en este caso el apareamiento privilegia la formación de cuellos de botella.

CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

En este trabajo hemos investigado propiedades de transporte para corriente eléctrica y flujo máximo en redes complejas. En particular, hemos analizado el comportamiento del transporte sin y con fricción en redes de mundo pequeño basadas en el modelo de Watts-Strogatz, y en redes libres de escala basadas en el modelo de Barabási-Albert, con tendencias en el apareamiento de nodos.

Para el modelo de Watts-Strogatz hemos comparado el transporte a nivel local y global, encontrando que para valores intermedios de la probabilidad p , se observa un buen compromiso entre el transporte local y global. En el caso eléctrico encontramos que para redes regulares es mayor el transporte local, en contraste con las redes aleatorias donde es mayor el transporte global, el cual se ve favorecido debido a la formación de atajos por el incremento en el valor de p . En el caso de flujo máximo, el flujo promedio local decrece menos rápido que el global conforme la probabilidad p de reconexión aumenta, esto se debe a que de forma local pueden existir pequeñas rutas que permiten mover unidades de flujo, sin embargo, no puede alcanzarse el nodo destino por la saturación de las rutas arco-disjuntas haciendo que el flujo global sea menor.

Lo anterior indica que, al comparar la conductancia y el flujo a nivel global observamos que presentan un comportamiento opuesto conforme p aumenta, indicando que la aparición de atajos privilegia el transporte con fricción mientras el flujo sin fricción se limita. Sin embargo, el comportamiento de ambas formas de transporte para configuraciones intermedias presenta altos valores a nivel local y global. Además, es importante recordar que las características principales de las redes de mundo pequeño, son alto clustering (propiedad local) y baja distancia media (propiedad global). Este tipo de redes, también presentan como característica altos valores de eficiencia a nivel local y global [Latora y Marchiori, 2001]. Por lo tanto, podemos concluir que los resultados que hemos obtenido en este trabajo, son concordantes con las características principales de las redes con topología de mundo pequeño, esto es, presentan una buena capacidad de transporte, sin y con fricción, local y globalmente.

Por otra parte, para el análisis de propiedades de transporte sin y con fricción, en redes libres de escala basadas en el modelo de Barabási-Albert, hemos manipulado las redes con distintos niveles de apareamiento de nodos. De manera específica, para el caso eléctrico, hemos encontrado que las correlaciones de grado afectan el transporte en presencia de fricción. Es decir, el apareamiento de nodos máximo permite una alta probabilidad para conductancias grandes, sin embargo, esta ganancia es penalizada reduciendo las probabilidades de tener conductancias pequeñas cuando se comparan con el caso de apareamiento aleatorio. En el caso de apareamiento mínimo no se tiene ninguna mejoría en comparación con el caso aleatorio, además, muestra una baja probabilidad para conductancias grandes comparado con las otras dos formas de apareamiento. En el caso de flujo máximo, no es posible

identificar una tendencia para valores pequeños de flujo, y para valores grandes el caso de apareamiento máximo es ligeramente mayor, en cambio el apareamiento mínimo tiene una afectación más grande debido a que, esta configuración propicia la generación de cuellos de botella.

Al comparar ambas formas de transporte, encontramos que la capacidad del transporte en presencia de fricción es fuertemente influenciada por las tendencias en los apareamientos, de modo que los apareamientos positivos mejoran el transporte, mientras que los apareamientos negativos resultan en conductancias menores. Asimismo, el transporte con fricción decrece conforme aumenta la distancia media entre los nodos origen y destino, mientras que el flujo es independiente de la distancia, lo cual está relacionado al hecho de que el flujo máximo corresponde al caso de transporte sin fricción y por lo tanto no depende de la distancia media.

En conclusión, podemos decir que la estructura de la red, sí influye en el funcionamiento del transporte. Es decir, hemos considerado modelos de redes complejas que presentan diferentes características de redes del mundo real, y al modificar la estructura encontramos comportamientos diversos según el transporte analizado, sin y con fricción. De manera específica, los resultados obtenidos muestran que la capacidad del transporte no depende únicamente del grado de los nodos origen y destino, sino también, influyen las características topológicas de la red. Así como, el tipo de flujo sin y con fricción, enviado a través de la red. Además, la robustez de las redes libres de escala en general, indica que este tipo de redes son robustas ante fallas aleatorias y vulnerables ante ataques dirigidos [Albert y Barabási, 2002; Barabási y Bonabeau, 2003]. En este sentido, nuestro trabajo sugiere que estas características, desde la perspectiva del transporte, también podrían ser influenciadas por las tendencias en el apareamiento de los nodos. Sin embargo, se requieren estudios más detallados para la evaluación.

Por otro lado, este trabajo puede ser extendido en distintas direcciones. Por una parte, si se analizan otras formas de transporte, como son los modelados mediante flujo máximo a costo mínimo, donde la longitud de la ruta sí influye en el costo del flujo enviado. Este caso podría presentar una fuerte relación con el comportamiento de las conductancias, debido a la relación de la capacidad del transporte con la longitud de las rutas. También puede modelarse utilizando flujo multiproducto, donde las entidades enviadas desde un nodo origen específico, deben llegar a un nodo destino también específico. Por otra parte, con respecto a características topológicas de las redes complejas, la estructura podría modificarse manipulándola con declustering [Vragović *et al.*, 2005], que mejora la ruta más corta entre todo par de nodos pero sin alterar el grado de los nodos, lo cual posiblemente mejore el transporte con fricción.

REFERENCIAS

- [1] Ahuja, R., Magnanti, T., y Orlin, J., (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. [Prentice Hall].
- [2] Albert, R., y Barabási, A.-L., (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics* **74**, 47-97.
- [3] Amaral, L.A.N., Scala, A., Barthélémy, M., y Stanley, H.E., (2000). Classes of small-world networks. *PNAS* **97**, 11149-11152.
- [4] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., y Guimerà, R., (2001). Communication in networks with hierarchical branching. *Physical Review Letters* **86**, 3196.
- [5] Banavar, J.R., Maritan, A., y Rinaldo, A., (1999). Size and form in efficient transportation networks. *Nature* **399**, 130.
- [6] Barabási, A.-L., (2009). Scale-free networks: a decade and beyond. *Science* **325**, 412-413.
- [7] Barabási, A.-L., y Albert, R., (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science* **286**, 509-512.
- [8] Barabási, A.-L., y Bonabeau, E., (2003). Scale-free Networks. *Scientific American*, 50-59.
- [9] Barabási, A.-L., y Oltvai, Z.N., (2004). Network biology: understanding the cell's functional organization. *Nature Reviews* **5**, 101-113.
- [10] Boguñá, M., Pastor-Satorras, R., y Vespignani, A., (2003). Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations. *Physical Review Letters* **90**, 028701.
- [11] Bollobás, B., (1998). *Modern Graph Theory*. (Springer, New York, USA).
- [12] Carmi, S., Havlin, S., Kirkpatrick, S., Shavitt, Y., y Shir, E., (2007). A model of Internet topology using k-shell decomposition. *PNAS* **104**, 11150.
- [13] Carmi, S., Wu, Z., Havlin, S., y Stanley, E., (2008). Transport in networks with multiple sources and sinks. *EPL* **84**, 28005.
- [14] Carmi, S., Wu, Z., López, E., Havlin, S., y Stanley, H.E., (2007). Transport between multiple users in complex networks. *The European Physical Journal B* **57**, 165-174.
- [15] Christofides, N., (1975). *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. (Academic Press Inc, London).
- [16] Cohen, R., Erez, K., ben-Avraham, D., y Havlin, S., (2001). Breakdown of the Internet under intentional attack. *Physical Review Letters* **86**, 3682-3685.
- [17] Condamin, S., Bénichou, O., Tejedor, V., Voituriez, R., y Klafter, J., (2007). First-passage times in complex scale-invariant media. *Nature Letters* **450**, 77.
- [18] Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., y Stein, C., (2001). *Introduction to Algorithms*. (The MIT Press, Second edition).
- [19] Crucitti, P., Latora, V., Marchiori, M., y Rapisarda, A., (2002). Efficiency of scale-free networks: error and attack tolerance. *Physica A* **320**, 622-642.
- [20] Dorogovtsev, S.N., y Mendes, J.F.F., (2003). *Evolution of Networks – from Biological Nets to the Internet and WWW*. (Oxford University Press).
- [21] Doyle, J.C., Alderson, D.L., Li, L., Low, S., Roughan, M., Shalunov, S., Tanaka, R., y Willinger, W., (2005). The “robust yet fragile” nature of the internet. *PNAS* **102**, 14497-14502.
- [22] Erdős, P., y Rényi, A., (1960). “On the evolution of random graphs” en *The Structure and Dynamics of Networks*, editado por: M. Newman, A.-L. Barabási y D. Watts. (Princeton University Press. New Jersey, 2006) pp. 38-82.

- [23] Estrada, E., y Hatano, N., (2008). Communicability in complex networks. *Physical Review E* **77**, 036111.
- [24] Ford, L.R., y Fulkerson, D.R., (1962). *Flows in Networks*. [Princeton, New Jersey].
- [25] Gallos, L., Song, C., Havlin, S., y Makse, H.A., (2007). Scaling theory of transport in complex biological networks. *PNAS* **104**, 7746-7751.
- [26] Goh, K.-I., Oh, E., Kahng, B., y Kim, D., (2003). Betweenness centrality correlation in social networks. *Physical Review E* **67**, (017101).
- [27] Guimerà, R., Arenas, A., Díaz-Guilera, A., y Giralt, F., (2002). Dynamical properties of model communication networks. *Physical Review E* **66**, 026704.
- [28] Guimerà, R., Díaz-Guilera, A., Vega-Redondo, F., Cabrales, A., y Arenas, A., (2002). Optimal network topologies for local search with congestion. *Physical Review Letters* **89**, 248701.
- [29] Guimerà, R., Mossa, S., Turtschi, A., y Amaral, L.A.N., (2005). The worldwide air transportation network: anomalous centrality, community structure, and cities' global roles. *PNAS* **102**, 7794-7799.
- [30] Guimerà, R., Sales-Pardo, M., y Amaral, L.A.N., (2007a). A network-based method for target selection in metabolic networks. *Bioinformatics* **23**, 1616-1622.
- [31] Guimerà, R., Sales-Pardo, M., y Amaral, L.A.N., (2007b). Module identification in bipartite and directed networks. *Physical Review E* **76**, 036102.
- [32] Hu, T.C., (1969). *Integer Programming and Network Flows*. [Addison-Wesley].
- [33] Hu, T.C., (1963). Multi-commodity network flows. *Operations Research*, **11**-3, 344-360.
- [34] Latora, V., y Marchiori, M., (2001). Efficient behavior of small-world networks. *Physical Review Letters* **87**, 198701.
- [35] Latora, V., y Marchiori, M., (2002). Is the Boston subway a small-world network?. *Physica A* **314**, 109-113.
- [36] Lee, D-S., y Rieger, H., (2006). Maximum flow and topological structure of complex networks. *Europhysics Letters* **73**, 471.
- [37] López, E., Buldyrev, S., Havlin, S., y Stanley, H.E., (2005a). Anomalous transport in scale-free networks. *Physical Review Letters* **94**, 248701.
- [38] López, E., Buldyrev, S., Braunstein, L., Havlin, S., y Stanley, H.E., (2005b). Possible connection between the optimal path and flow in percolation clusters. *Physical Review E* **72**, 056131.
- [39] López, E., Carmi, S., Havlin, S., Buldyrev, S., y Stanley, H.E., (2006). Anomalous electrical and frictionless flow conductance in complex networks. *Physica D* **224**, 69-76.
- [40] Maslov, S., y Sneppen, K., (2002). Specificity and stability in topology of protein networks. *Science* **296**, 910-913.
- [41] Newman, M.E.J., (2002). Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters* **89**, 208701.
- [42] Newman, M.E.J., (2003a). Mixing patterns in networks. *Physical Review E* **67**, 026126.
- [43] Newman, M.E.J., (2003b). The structure and function of complex networks. *SIAM Review* **45**, 167-256.
- [44] Newman, M.E.J., (2006). Modularity and community structure in networks. *PNAS* **103**, 8577-8582.
- [45] Newman, M.E.J., y Park, J., (2003). Why social networks are different from other types of networks. *Physical Review E* **68**, 036122.
- [46] Newman, M.E.J., (2010). *Networks*. (Oxford University Press).

- [47] Noh, J.D., y Rieger, H., (2004). Random walks on complex networks. *Physical Review Letters* **92**, 118701.
- [48] Ohira, T., y Sawatari, R., (1998). Phase transition in a computer network traffic model. *Physical Review E* **58**, 193.
- [49] Pastor-Satorras, R., Vázquez, A., y Vespignani, A., (2001). Dynamical and correlation properties of the Internet. *Physical Review Letters* **87**, 258701.
- [50] Price, D.J., (1965). "Networks of scientific papers" en *The Structure and Dynamics of Networks*, editado por: M. Newman, A.-L. Barabási y D. Watts. (Princeton University Press. New Jersey, 2006) pp. 149-154.
- [51] Rockafellar, R.T., (1998). *Network Flows and Monotropic Optimization*. [Athena Scientific, Belmont, Massachusetts].
- [52] Rosvall, M., Minnhagen, P., y Sneppen, K., (2005). Navigating networks with limited information. *Physical Review E* **71**, 066111.
- [53] Rosvall, M., y Sneppen, K., (2003). Modeling dynamics of information networks. *Physical Review Letters* **91**, 178701.
- [54] Rozenfeld, H.D., y ben-Avraham, D., (2007). Percolation in hierarchical scale-free nets. *Physical Review E* **75**, 061102.
- [55] Sales-Pardo, M., Guimerà, R., Moreira, A.A., y Amaral, L.A.N., (2007). Extracting the hierarchical organization of complex systems. *PNAS* **104**, 15224-15229.
- [56] Serrano, M.A., y Boguñá, M., (2005). Tuning clustering in random networks with arbitrary degree distributions. *Physical Review E* **72**, 036133.
- [57] Solé, R.V., y Valverde, S., (2001). Information transfer and phase transition in a model of Internet traffic. *Physica A* **289**, 595-605.
- [58] Solomonoff, R., y Rapoport, A., (1951). "Connectivity of random nets" en *The Structure and Dynamics of Networks*, editado por: M. Newman, A.-L. Barabási y D. Watts. (Princeton University Press. New Jersey, 2006) pp. 27-37.
- [59] Strogatz, S.H., (2001). Exploring complex networks. *Nature* **410**, 268-276.
- [60] Tadić, B., y Rodgers, G.J., (2002). Packet transport on scale-free networks. *Advances in Complex Systems* **5**, 445-456.
- [61] Tadić, B., Rodgers, G.J., y Thurner, S., (2007). Transport on complex networks: flow, jamming and optimization. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17**, 2363-2385.
- [62] Tadić, B., y Thurner, S., (2004). Information super-diffusion on structured networks. *Physica A* **332**, 566-584.
- [63] Tadić, B., Thurner, S., y Rodgers, G.J., (2004). Traffic on complex networks: Towards understanding global statistical properties from microscopic density fluctuations. *Physical Review E* **69**, 036102.
- [64] Travers, J., y Milgram, S., (1969). "An experimental study of the small world problem" en *The Structure and Dynamics of Networks*, editado por: M. Newman, A.-L. Barabási y D. Watts. (Princeton University Press. New Jersey, 2006) pp. 130-148.
- [65] Valverde, S., y Solé, R.V., (2002). Self-organized critical traffic in parallel computer networks. *Physica A* **312**, 636-648.
- [66] Vragović, I., Louis, E., y Díaz-Guilera, A., (2005). Efficiency of informational transfer in regular and complex networks. *Physical Review E* **71**, 036122.
- [67] Wang, W.-X., Wang, B.-H., Yin, C.-Y., Xie, Y.-B., y Zhou, T., (2006). Traffic dynamics based on local routing protocol on a scale-free network. *Physical Review E* **73**, 026111.

- [68] Watts, D.J., y Strogatz, S.H., (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* **393**.
- [69] Wu, Z., Braunstein, L., Havlin, S., y Stanley, H.E., (2006). Transport in weighted networks: partition into superhighways and roads. *Physical Review Letters* **96**, 148702.
- [70] Xulvi-Brunet, R., Pietsch, W., y Sokolov, I.M., (2003). Correlations in scale-free networks: tomography and percolation. *Physical Review E* **68**, 036119.
- [71] Xulvi-Brunet, R., y Sokolov, I.M., (2004). Reshuffling scale-free networks: from random to assortative. *Physical Review E* **70**, 066102.
- [72] Xulvi-Brunet, R., y Sokolov, I.M., (2005). Changing correlations in networks: assortativity and dissortativity. *Acta Physica Polonica B* **36**, 1431-1455.
- [73] Zhou, S., y Mondragón, R.J., (2007). Structural constraints in complex networks. *New Journal of Physics* **9**, 173.