



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y
DOCTORADO EN INGENIERÍA

CONTROL PREDICTIVO GENERALIZADO
DE UNA CALDERA DE TUBOS DE FUEGO

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A:

LUIS OSWALDO VERDEZOTO CHERRES

TUTOR:

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

MÉXICO, D.F. 2011

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Tang Xu Yu

Secretario: Dra. Verde Rodarte María Cristina

Vocal: Dr. Alvarez-Icaza Longoría Luis Agustín

1er. Suplente: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

2o. Suplente: Dr. Benitez Perez Hector

La Tesis se realizó en:

Instituto de Ingeniería-UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

Resumen

Debido a la evidente necesidad de utilizar de forma inteligente y racional los combustibles fósiles, sobre todos en aquellos equipos que son considerados como consumidores de alto nivel, y a la actual problemática ambiental que vivimos, esta tesis se encuentra dirigida al desarrollo de un controlador predictivo generalizado para una caldera de tubos de fuego que posibilite elevar la efectividad y fiabilidad en su funcionamiento, así como disminuir su actual consumo de combustible y emisión de gases contaminantes al medio ambiente.

Teniendo en cuenta que la variación de la presión del vapor es el proceso que presenta un mayor significado en el funcionamiento de las calderas pirotubulares, ya que el control de la combustión se realiza mediante el control de la presión del vapor, esta tesis presenta el siguiente objetivo:

Desarrollar un sistema de control predictivo generalizado para una caldera pirotubular que disminuya el consumo de combustible y los gases contaminantes emitidos hacia el medio ambiente, y que garantice al menos el control de la presión de vapor en el cuerpo de agua. Para cumplir con este objetivo es necesario desarrollar las siguientes tareas:

Seleccionar un modelo matemático (orientado al control) que describa con un adecuado nivel de exactitud el comportamiento dinámico de la caldera.

Diseñar un sistema de control predictivo generalizado del proceso bajo estudio.

En el primer capítulo se presentan los antecedentes del problema y el análisis del estado del arte del control de calderas. Se definen los objetivos del trabajo de investigación y se establecen los alcances del mismo.

En el segundo capítulo se describe el modelado matemático de la caldera con énfasis en el proceso de variación de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular, considerando los conocimientos físicos previos. Se realiza un análisis de dos modelos matemáticos propuestos en la literatura analizando las ventajas y desventajas de los mismos.

En el tercer capítulo se realiza la descripción de los métodos de control en la actualidad y su tendencia, además se presentan las estrategias de los controladores y sus elementos principales. El capítulo introduce el control predictivo y una técnica para el diseño de controladores PID multivariables.

En el cuarto capítulo se utiliza el Control Predictivo Generalizado (GPC) para el control de la variación de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular. Se diseña un sistema de control del modelo matemático elegido con base en el GPC donde se consigue controlar todas las salidas. Se discute la necesidad de reajustar el controlador cuando se tiene que regular el proceso en un punto de operación inestable y se acude a las estrategias de control PID descritas en el capítulo anterior, para después hacer un rediseño del controlador por GPC. Se presentan además las simulaciones que se llevaron a cabo para mostrar la efectividad de la ley de control propuesta.

El presente estudio y en general toda mi maestría lo dedico a la SANTISIMA VIRGEN DE GUADALUPE, a mi DIVINO NIÑO JESUS, y a mi PAPITO DIOS por los dones que me han otorgado, por el amor, luz, ayuda y todas las bendiciones que día a día me conceden. Porque sin ellos no soy nada y sin ellos este sueño no hubiese sido posible realizar.

A mis papis bellos Luis y Blanca va dedicado también el presente estudio, por todo el esfuerzo que ellos han hecho por mí.

Papi y mami los amo y por ustedes soy lo que soy.

Índice general

Índice de figuras	IV
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes del Problema	1
1.2. Estado del Arte	5
1.3. Objetivo	7
1.4. Alcance	7
1.5. Organización de la tesis	7
2. Modelado matemático	9
2.1. Introducción	9
2.2. Análisis de las calderas pirotubulares como objetos de control automático	9
2.2.1. Conceptos básicos de calderas	9
2.2.2. La caldera básica	10
2.2.3. Calderas pirotubulares	12
2.3. Principio de funcionamiento de las calderas pirotubulares	16
2.3.1. Capacidad y eficiencia	16
2.3.2. Relación entrada - salida	16
2.3.3. Métodos para el cálculo de la eficiencia	17
2.3.4. Control de Calderas en la industria	18
2.4. Modelos matemáticos de una caldera pirotubular	19
3. Descripción de los métodos de control	23
3.1. Introducción	23
3.2. Control Predictivo	24
3.2.1. El control de procesos en la actualidad y su tendencia	24
3.2.2. Control predictivo: Conceptos básicos	25
3.2.3. Estrategia de los controladores	26
3.2.4. Controladores predictivos: Elementos básicos	27
3.2.5. Principales algoritmos	28
3.3. Control PID basado en LMI	38
3.3.1. Consideraciones iniciales	39
3.3.2. Condición de estabilidad asintótica	39

4. Control Predictivo Generalizado de la presión en una caldera piro-tubular	42
4.1. Linealización del modelo matemático de una caldera	42
4.2. Modelo lineal extendido	44
4.3. Ley de control PID multivariable	45
4.4. Resultados de simulación	46
5. Conclusiones	53
A. Ley de Control	57

Índice de figuras

2.1. Caldera Básica.	11
2.2. Caldera - precalentador de aire de combustión.	12
2.3. Caldera marino "Scotch".	13
2.4. Caldera tubular de retorno horizontal.	14
2.5. Variante tipo "wetback".	14
2.6. Variante tipo "dry back".	15
2.7. Caldera de pasos.	15
2.8. Caldera Pirotubular Vertical.	16
2.9. Diagrama de bloques para un sistema de control para calderas.	18
3.1. Estrategia de control predictivo.	26
3.2. Estructura básica del MPC.	28
4.1. Respuesta del sistema con $\alpha=0.001$ y $\lambda=10$	48
4.2. Respuesta del sistema con $\alpha=0.001$ y $\lambda=10$	49
4.3. Ley de Control con $\alpha=0.001$ y $\lambda=100$	49
4.4. Ley de Control con $\alpha=0.001$ y $\lambda=100$	50
4.5. Respuesta del sistema con $\alpha=0.01$ y $\lambda=1000$	50
4.6. Ley de Control con $\alpha=0.01$ y $\lambda=1000$	51
4.7. Respuesta del sistema con $\alpha=0.0001$ y $\lambda=1000$	51
4.8. Ley de Control con $\alpha=0.0001$ y $\lambda=1000$	52

Agradecimientos

Agradezco a la SANTISIMA TRINIDAD y, a la Santísima Virgen de Guadalupe que con su luz, ayuda y bendiciones me han dado fortaleza e inteligencia, así como constancia en mi diario vivir y en mi formación profesional, para el cumplimiento de mis sueños.

De manera muy especial a mis padres por su apoyo y fuerza que a la distancia siempre me dieron alentándome para seguir cada día con la misma ilusión con que me vieron partir, así como también por la comprensión y amor incondicional a lo largo de mi vida y formación.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, de manera muy especial al personal docente del Posgrado en Ingeniería.

El más profundo agradecimiento a mi Sinodal el Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria quien con su conocimiento, dedicación, apoyo y confianza me ayudó y guió, con el fin de culminar la presente investigación.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes del Problema

El uso eficiente y racional de los combustibles fósiles es muy importante para enfrentar la declinación y para contrarrestar sus efectos perniciosos en el calentamiento global.

Las calderas se encuentran entre los grandes consumidores de combustibles fósiles y son consideradas dispositivos de gran uso en la industria a escala mundial.

Las calderas se clasifican en dos grandes grupos con base en el contenido de sus tubos:

- De tubos de agua o acuotubulares y
- De tubos de fuego o pirotubulares.

La caracterización de las primeras está dada por la circulación del agua por el interior de los tubos y la aplicación de fuego en la superficie exterior de los mismos. Estas calderas tienen un gran espectro de producción de vapor, que varía desde una pequeña producción, en calderas compactas, hasta altos niveles de producción de vapor en índices de $1\ 000 \frac{t}{h}$ y presiones hasta $150 \frac{kg}{cm^2}$, como es el caso de las calderas de centrales termoeléctricas. La operación de las mismas es difícil, ya que son más complejas y requieren de un mayor nivel de seguridad que las calderas pirotubulares.

Las calderas pirotubulares se caracterizan por la circulación de los gases de la combustión por el interior de los tubos, mientras que el agua a evaporar rodea la superficie exterior de dichos tubos. La presión de trabajo normalmente no excede los $20 \frac{kg}{cm^2}$ y la producción de vapor máxima es de aproximadamente $25 \frac{t}{h}$. Estas presentan mayor aplicación en todo el sector industrial ya que se utilizan

en industrias que no necesitan elevadas cantidades de vapor. Las calderas más utilizadas son las pirotubulares con capacidades de 25 MW, vapor a 25 Bar.

Básicamente, el objetivo de las calderas consiste en quemar combustibles fósiles para transformar su energía química en energía térmica y suministrarla al agua para generar vapor, el cual posteriormente es utilizado como fuente de energía en diversos procesos. En el proceso de transformación de energía se realizan varias operaciones que son interdependientes, por lo tanto, el buen funcionamiento de una etapa está vinculado al funcionamiento de todas las etapas antecesoras.

La eficiencia de una caldera representa la diferencia entre la energía suministrada y la energía despachada. Para alcanzar un nivel óptimo de eficiencia los fabricantes recomiendan operarlas aproximadamente al 80 % de carga nominal.

Para asegurar una máxima eficiencia en la operación de las calderas pirotubulares, son esenciales dos requisitos:

- Garantizar la combustión completa, es decir, mantener una correcta proporción aire-combustible.
- Independientemente de las variaciones de carga para mantener la presión del vapor de salida dentro de los límites necesarios, se debe, garantizar que la cantidad de combustible que se quema sea la necesaria para lograr que la presión sea constante.

Para mantener una elevada eficiencia en el funcionamiento de las calderas se necesita disponer de sistemas efectivos de control automático.

El proceso de modernización de una caldera con sistemas efectivos de control automático elimina las deficiencias y desbalances que pueden alterar las operaciones de la planta, es decir, se puede mejorar la confiabilidad y evitar que se produzcan daños en el equipo del proceso de combustión debido a explosiones u otros eventos indeseables, además de reducir de manera significativa los costos de operación y mantenimiento.

Actualmente los sistemas de control en la industria de procesos están obligados a satisfacer criterios económicos, de seguridad, medioambientales, y de calidad en la producción, la cual depende de una demanda que en el ámbito industrial normalmente es variable.

Ahora bien, un sistema de control en el proceso de combustión de la caldera para controlar la proporción aire-combustible mejora la transferencia de energía calórica puesto que la caldera absorbe mayor cantidad de calor en el proceso. Además, permite la detección de ciertos problemas potenciales a través del análisis de los

gases de la combustión y por ende reduce de manera significativa el consumo de los combustibles. Cabe destacar que la instalación de un sistema efectivo de control permite conseguir un manejo preciso del aire en exceso a través de una referencia de oxígeno, y gracias a ello se puede lograr mantener esta referencia a pesar de la presencia de perturbaciones.

De lo anterior se puede ver que mantener una correcta proporción aire-combustible es uno de los principales objetivos de un sistema de control de calderas, para lo cual uno de los objetivos primordiales que se requiere alcanzar es la minimización del aire en exceso, pues esto permite la operación eficiente de cualquier equipo de combustión. Así la eficiencia del quemador está dada por la cantidad de combustible que no reacciona y el aire en exceso en los gases producto de la combustión.

En condiciones de operación reales, el monitoreo del contenido de oxígeno en los gases de la combustión indicará cuánto de aire en exceso está disponible después de producirse la combustión. Incorporando un lazo de control de relación aire-combustible en los controles de la caldera se pueden corregir los altos niveles de oxígeno en los gases de la combustión.

Existen algunas plantas que a su vez cuentan con un sistema de seguridad en la entrada del combustible, mismo que presenta grandes ventajas como minimizar el riesgo de una proporción aire-combustible peligrosa. Este se implementa aumentando siempre el flujo de aire antes de aumentar el flujo de combustible, o disminuyendo el flujo de combustible antes de disminuir el flujo de aire. Este sistema de control es muy efectivo y provee:

1. Menor consumo de combustible.
2. Condiciones de operación más seguras.
3. Mejor visibilidad.

Sin embargo, el proceso más significativo e importante en el funcionamiento de las calderas pirotubulares es la variación de la presión del vapor en su cuerpo, la misma que es un parámetro indicador para la variación en la cantidad de combustible de alimentación al quemador de la caldera. La llama dentro de la cámara se controla por medio de la alimentación de combustible, lo que se traduce en generación de vapor y por ende, en la variación de la presión dentro de los conductos que transportan el vapor.

Uno de los objetivos principales durante la operación de las calderas es asegurar que la presión del vapor de trabajo sea sostenible para cualquier demanda que la planta requiera. Esto se puede conseguir asegurando que las calderas quemen sólo el combustible necesario, lo que da como resultado un costo de operación

mucho menor.

Debido a que las calderas se caracterizan por ser sistemas dinámicos de múltiples entradas y salidas de comportamiento no lineal, variantes en el tiempo, cuyos estados generalmente cambian con el punto de operación, presentan un comportamiento difícil o complicado como objeto de control automático.

Antiguamente, la presión del vapor en las calderas se controlaba mediante el uso de sistemas de control de dos estados. Esto se conseguía mediante el uso de un presostato y de un sistema de conexión/desconexión del quemador, dicho sistema de control fue probado y considerado ineficiente puesto que se desperdiciaba gran cantidad de combustible durante el encendido y apagado del quemador. Tiempo después, se utilizaron controladores de 3 estados, los mismos que utilizaban una potencia base del quemador para evitar su conexión y desconexión constantes. Finalmente ambos fueron desechados por no ofrecer un suministro constante de vapor.

Generalmente las calderas que se fabrican disponen de 3 controles de presión:

- Un primer sistema de control es el denominado control de la presión del vapor en operación, que está dirigido a mantener las condiciones nominales.
- Un segundo sistema de control de la presión del vapor es el de modulación, que se ocupa de los cambios en la demanda base.
- Un tercer sistema de control que se utiliza con fines de seguridad y donde se utiliza un presostato configurado 10 % por encima de la máxima presión de operación (presión de corte) para que en caso que el presostato de operación falle, éste corte inmediatamente todo el sistema y no arranque hasta que se solucione el problema del primer presostato.

Actualmente, en la industria muchas calderas pirotubulares en el proceso de variación de la presión del vapor en su cuerpo son controladas mediante controladores PID como en la mayoría de los procesos industriales. El desempeño de dichos controladores es limitado, ya que no consideran las variaciones que se originan en los parámetros dinámicos del proceso, lo que se ve reflejado en un mayor consumo de combustible y una mayor emisión a la atmósfera de los gases producidos por la combustión (Feliu y Rivas 2005).

Para el diseño de controladores PID se parte de un modelo lineal del proceso con parámetros fijos, el mismo que se obtiene linealizando el sistema alrededor de un punto de operación. Ésto es una aproximación debido a que la respuesta del proceso es no lineal, así como los parámetros del sistema de potencia son función del punto de operación. Por lo tanto, mientras cambian las condiciones de operación, no será bueno el desempeño del sistema con esta estrategia de

control. Mediante el uso de técnicas adaptables, se puede cambiar el punto de operación del sistema, y los parámetros del sistema de control pueden ser actualizados cuando sea necesario. Por ende la señal de control puede ser calculada de mejor manera, utilizando los parámetros actualizados del modelo del proceso.

Ante la problemática del control efectivo de la presión del vapor, los controladores predictivos se muestran como una opción importante de solución. El control predictivo generalizado (GPC) constituye una estrategia de control común, que puede ser mejorada al añadirle un observador recursivo. Al realizar dicho cambio se utiliza un predictor multipaso que permite conseguir mejores predicciones, y que además permite trabajar con un modelo de las perturbaciones, lo cual conduce a obtener predicciones más precisas. Cabe destacar que este tipo de controladores permiten trabajar con procesos inestables o de fase no mínima e incorporan el concepto de horizonte de control. No obstante, su aplicación requiere de modelos matemáticos descriptivos de los procesos a controlar.

1.2. Estado del Arte

Desde hace varios años se han publicado trabajos para analizar o estudiar la automatización de calderas utilizando sistemas de control GPC. La mayor parte de estos trabajos centran su atención en la automatización de calderas de tubos de agua ya que son las más utilizadas en grandes sistemas de producción de energía eléctrica. Por ejemplo, (Hogg y El-Rabaie 1990) estudia el Control Predictivo Generalizado multivariable de una caldera de tubos de agua. Sus resultados muestran que se pueden obtener grandes mejoras en la eficiencia de esta clase de calderas al usar el GPC con respecto al desempeño que se obtiene con un controlador PI convencional. Se logra observar que en dichos resultados las variaciones de la presión y de la temperatura se reducen grandemente y con un menor esfuerzo del controlador. Sin embargo, en este estudio se requiere un modelo matemático del proceso que no considera perturbaciones.

Un enfoque similar se presenta en (Fujiwara y Miyakawa 1990), en donde demuestra que la inclusión de un sistema adaptable estable contribuye en gran medida a mejorar el desempeño del controlador GPC. No se requieren datos de un proceso real.

Existen otras estrategias de control también han sido utilizadas en la automatización de calderas. Entre ellas se encuentran:

- Las técnicas de control de orden fraccional aplicadas en el control de la presión del vapor en el cuerpo de una caldera piro-tubular (Feliu y Rivas 2005).

- Los controladores PID con auto-ajuste utilizados en el control del nivel del agua en una caldera pirotubular (Gyun, 2001)
- El control robusto multivariable basado en técnicas de control H_∞ (Wen 2002).

Gyun (2001) también ha investigado la aplicación de sistemas de control adaptables para mejorar el desempeño de los sistemas de control de generadores de vapor de tubos de agua.

En la recopilación de los estudios de Qin y Badgwell, previo a 1993 se recogen varias aplicaciones y se describe el uso actual de controladores del tipo GPC en la industria, especialmente en el sector petroquímico. La mayoría de las aplicaciones están relacionadas con procesos multivariables, dándose casos como un controlador con 40 entradas y 80 salidas.

En la actualidad el éxito del GPC en la industria se debe a:

1. La incorporación de un modelo del proceso en los cálculos permite al controlador tratar con todas las características importantes de la dinámica del proceso.
2. Se considera el comportamiento del proceso a lo largo de un horizonte futuro, lo que permite tener en cuenta el efecto de las perturbaciones en la realimentación y pre-alimentación y permite al controlador conducir la salida del proceso a la trayectoria de referencia deseada.
3. La consideración de restricciones en la fase del diseño del controlador, que evita en lo posible su violación y resulta en un control más preciso en torno al punto óptimo de operación. La inclusión de restricciones es quizás la característica que más distingue al GPC respecto a otras metodologías.

Pese a la importancia y utilidad que las calderas pirotubulares, el tema de la automatización efectiva de las mismas no ha sido suficientemente investigado. En particular el problema de la obtención de modelos matemáticos que describan de forma adecuada el proceso de variación de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular se ha tratado poco. Ello se debe a que para poder modelar matemáticamente este sistema complejo a partir de principios físicos fundamentales, sería necesario evaluar la dinámica del actuador, la cantidad de energía química que posee el combustible, y las relaciones termodinámicas y fisicoquímicas que se producen en el interior de la caldera hasta obtener un modelo aceptable que relacione la entrada (combustible) con la salida de interés (presión de vapor).

1.3. Objetivo

Desarrollar un sistema de control predictivo generalizado para una caldera pirotubular que disminuya el consumo de combustible y los gases contaminantes emitidos hacia el medio ambiente, y que garantice al menos el control de la presión de vapor en el cuerpo de agua.

1.4. Alcance

1. Evaluar los modelos matemáticos que describen la presión de vapor en una caldera pirotubular, para realizar la mejor elección del modelo que describa la dinámica necesaria para el proceso bajo estudio.
2. Analizar los distintos algoritmos de predicción y obtención de la ley de control óptima verificando sus características, bondades y carencias con respecto al proceso dinámico a estudiar, teniendo en cuenta que en el sistema no se consideraran fenómenos como las perturbaciones ajenas al sistema.
3. Diseñar un sistema de control predictivo generalizado del proceso bajo estudio y demostrar las ventajas que éste presenta.

1.5. Organización de la tesis

En el primer capítulo se presentan los antecedentes del problema y el análisis del estado del arte del control de calderas. Se definen los objetivos del trabajo de investigación y se establecen los alcances del mismo.

En el segundo capítulo se describe el modelado matemático de la caldera con énfasis en el proceso de variación de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular, considerando los conocimientos físicos previos. Se realiza un análisis de dos modelos matemáticos propuestos en la literatura analizando las ventajas y desventajas de los mismos.

En el tercer capítulo se realiza la descripción de los métodos de control en la actualidad y su tendencia, además se presentan las estrategias de los controladores y sus elementos principales. El capítulo introduce el control predictivo y una técnica para el diseño de controladores PID multivariables.

En el cuarto capítulo se utiliza el Control Predictivo Generalizado (GPC) para el control de la variación de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular. Se diseña un sistema de control del modelo matemático elegido con base en el GPC donde se consigue controlar todas las salidas. Se discute la necesidad

de reajustar el controlador cuando se tiene que regular el proceso en un punto de operación inestable y se acude a las estrategias de control PID descritas en el capítulo anterior, para después hacer un rediseño del controlador por GPC. Se presentan además las simulaciones que se llevaron a cabo para mostrar la efectividad de la ley de control propuesta.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y la discusión del trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelado matemático

2.1. Introducción

El control de la presión del vapor dentro de la caldera es de vital importancia debido a que es una variable que junto con la temperatura indica la cantidad de energía que transporta el vapor (Rivas, Aref, Peran, y Sanchez 2000). Mediante la modificación del flujo de alimentación de combustible se lleva al cabo el control de esta variable, lo que se traduce en una mayor o menor generación de vapor en la caldera, es decir, aumenta o disminuye la presión de vapor.

Existen dos métodos fundamentales para la modelación matemática de los procesos que se originan en el interior de las calderas. El primer método se basa en el modelado a partir de las ecuaciones de balance de masa y energía. Este método es difícil por el gran número de variables y ecuaciones involucradas en el funcionamiento de las calderas (Rivas, Herranz, Llanes, y Cartaya 1994). El segundo método consiste en la aplicación de técnicas de identificación de sistemas dinámicos y utiliza los datos obtenidos de entrada y salida del sistema para aproximar un modelo matemático lineal.

2.2. Análisis de las calderas pirotubulares como objetos de control automático

2.2.1. Conceptos básicos de calderas

Existen dos tipos generales de calderas: las pirotubulares (tubos de fuego) y las acuotubulares (tubos de agua). Adicionalmente, las calderas se clasifican como calderas de alta y baja presión, calderas de vapor y calderas de agua caliente.

Las calderas de alta presión, por definición, son calderas de vapor que operan a presiones mayores que 15 psig. La temperatura de saturación del agua en estas calderas se incrementa cuando la presión aumenta. El vapor a alta presión tiene un atributo particular que es contener una cantidad mayor de energía disponible, que es aquella que puede ser convertida en trabajo.

Una caldera de baja presión es aquella que opera a presiones por debajo de los 15 psig. Casi todas las calderas de baja presión son utilizadas para acondicionamiento de espacios.

Las relaciones entre la temperatura de saturación y la presión de vapor son propiedades termodinámicas fijas de vapor de agua (Lindsley 1991). A la temperatura del punto de ebullición se le conoce como la temperatura de saturación de vapor. Se denomina calor latente de vaporización al calor que se añade durante la conversión a temperatura constante. El vapor que se obtiene de esta forma y que no ha sido calentado a una temperatura superior a la temperatura de ebullición, se denomina vapor saturado. Mientras el vapor contenga partículas de agua líquida, se le denomina vapor "húmedo". El porcentaje en peso de las gotas de agua en el vapor húmedo se denomina "porcentaje de humedad". El porcentaje de calidad de vapor húmedo se obtiene restando el porcentaje de humedad de 100%. El calor suministrado una vez que la calidad del vapor llega al 100% se denomina calor sensible y al vapor se le denomina vapor saturado.

Cabe destacar que la presión de vapor saturado posee una relación directamente proporcional con la cantidad de calor sensible necesario y una relación inversamente proporcional con la cantidad de calor latente, es decir, cuando la presión de vapor saturado aumenta, entonces la proporción de calor sensible aumenta, mientras que la proporción de calor latente decrece.

2.2.2. La caldera básica

En la Fig. 2.1, se muestra un diagrama básico de una caldera, la misma que está conformada por dos sistemas separados.

1. Sistema agua-vapor, el cual es también llamado la zona de agua de la caldera. En este sistema el agua se introduce y es calentada, por el cambio de temperatura, que es transferido a través de una barrera metálica, y que ayuda a convertirla en vapor, para finalmente salir del sistema.
2. Sistema de calentamiento de la caldera, es el de combustible-aire-gases de combustión. Este sistema provee el calor que es transferido al agua. Las entradas a este sistema son el combustible y el aire requerido para quemar el combustible (Dukelow 1991).

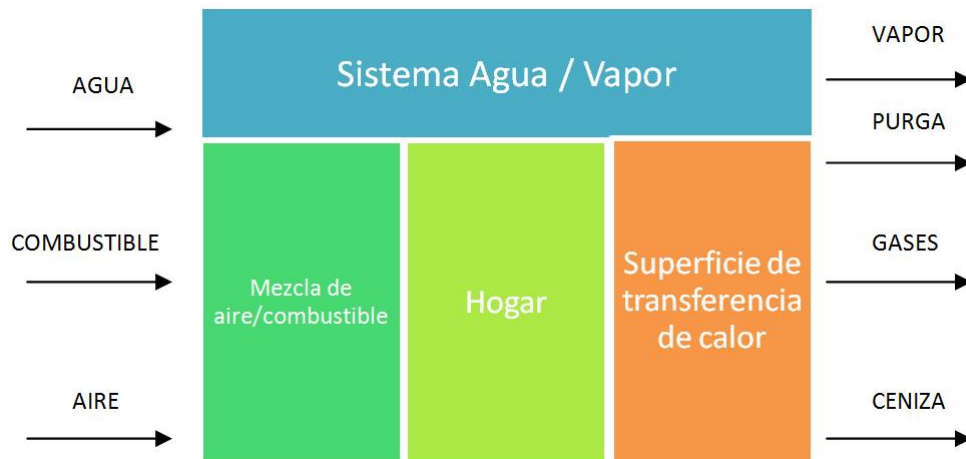


Figura 2.1: Caldera Básica.

El combustible y el aire son mezclados y quemados en un horno en este sistema. El resultado de la combustión es la conversión de la energía química del combustible en energía térmica o calorífica. La superficie de transferencia de calor en la forma de tubos por donde circulan está alineada con el horno. Estos tubos reciben el calor radiante de la llama y lo transfieren al lado de agua del sistema. Mediante la transferencia del calor a través de la superficie de transferencia de calor radiante, los gases resultantes de la combustión son enfriados. Los gases salen del horno y pasan a través de una superficie de calentamiento adicional formada por tubos por donde circula una mezcla de agua-vapor. En dicha área, las superficies no son afectadas directamente por la llama, y el calor se transfiere por convección. También en esta área cantidades adicionales de calor son transferidas hacia el lado de agua de la caldera. Esta transferencia de calor enfría más aún los gases de combustión, los cuales salen de la caldera.

Los gases de combustión de esta caldera básica sólo pueden enfriarse hasta una temperatura que se encuentra en algún nivel por encima de la temperatura del sistema vapor-agua. La pérdida de calor en los gases de combustión de la caldera queda determinada por la temperatura de saturación del sistema vapor-agua.

El proceso de adición de calor para convertir agua a vapor tiene una constante de tiempo que depende de las características específicas de la instalación. Los factores que afectan esta constante de tiempo incluyen la acumulación de calor del sistema, los coeficientes de transferencia de calor en las diferentes partes del sistema, las masas del metal y de refractario y su configuración, además de otros factores adicionales. Generalmente para los

propósitos de control, es suficiente entender que la constante de tiempo dominante se encuentra en el orden de los minutos.

Si se requiere reducir las pérdidas de calor de los gases de combustión se deben añadir intercambiadores de calor separados de la caldera para recuperar el calor y enfriar los gases de combustión (Basu 1999). Una forma de estos intercambiadores de calor adicionales es el precalentador de aire de combustión. La aplicación de un precalentador de aire se muestra en la Fig. 2.2. Aproximadamente se ahorra el 1% de combustible por cada 6.67 centígrados de incremento en la temperatura del aire de combustión usando el precalentador de aire.

El uso de un economizador es otra forma de recuperar el calor de los gases de combustión.

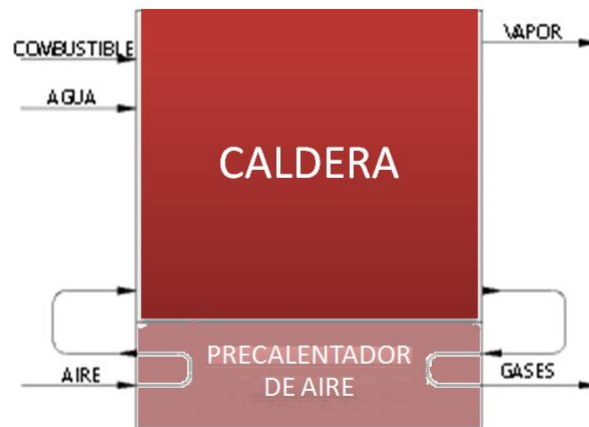


Figura 2.2: Caldera - precalentador de aire de combustión.

El incremento de calor en el agua de alimentación reduce los requerimientos de combustible de la caldera en aproximadamente 1% de la entrada de combustible, logrando así reducir el consumo del mismo.

2.2.3. Calderas pirotubulares

Las calderas pirotubulares constituyen la mayor parte de calderas industriales de pequeño o mediano tamaño. En estas, los gases de combustión fluyen por las paredes de los tubos y por convección hacia el agua que los circunda. La transferencia de calor a través de las paredes de los tubos hacia el agua genera el vapor. Los gases de combustión son enfriados mientras fluyen a través de los tubos, transfiriendo su calor al agua; por lo tanto, a mayor enfriamiento de los gases de combustión, mayor será la cantidad de calor transferido. El enfriamiento

de estos gases está en función de algunos parámetros como:

- La conductividad calorífica de los tubos y la emisividad de sus superficies.
- La diferencia de temperatura entre los gases de combustión y el agua de la caldera
- El área de transferencia de calor.
- El tiempo de contacto entre los gases de combustión.
- La superficie de los tubos de la caldera, etc.

Hoy en día las calderas pirotubulares más usadas son producto de la evolución de los primeros diseños de un recipiente de presión cilíndrico o esférico montado sobre el fuego con la llama y los gases calientes alrededor de la carcasa de la caldera. Este diseño ha sido mejorado mediante la instalación de tubos longitudinales en el recipiente de presión y haciendo pasar los gases de combustión a través de los tubos.

A través de la pared de metal la energía calorífica de la combustión es transferida directamente al agua. La caldera marina Scotch, como se muestra en la Fig. 2.3, con el horno como un tubo largo de metal, combina esta característica de la caldera English Cornisa de los 1800s y los tubos horizontales pequeños de la caldera HRT que se muestra en la Fig. 2.4.

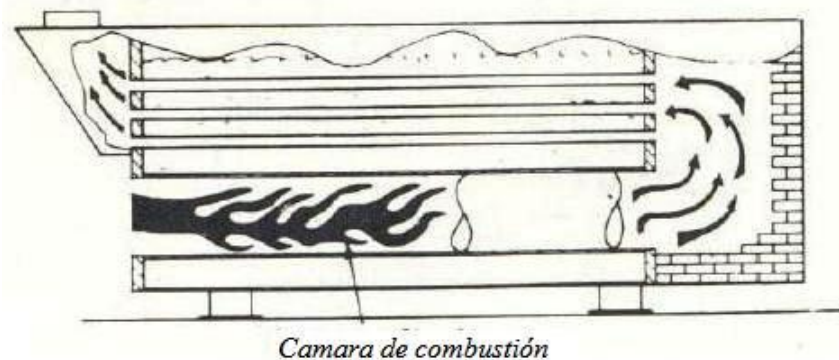


Figura 2.3: Caldera marino "Scotch".

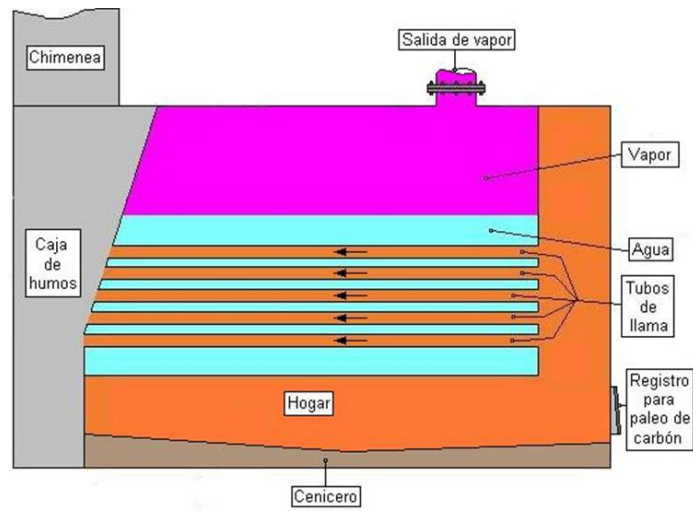


Figura 2.4: Caldera tubular de retorno horizontal.

Un diseño modificado de la caldera Scotch es el que se utiliza en la caldera pirotubular estándar, que es el más común y utilizado hoy en día. Existen dos variaciones del diseño Scotch, denominadas wetback y dryback, mostradas en las Fig. 2.5 y Fig. 2.6.

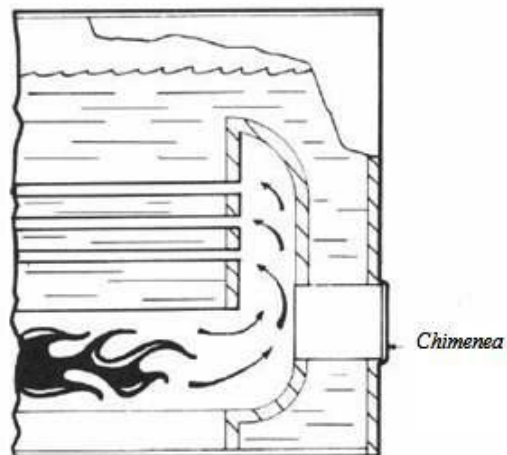


Figura 2.5: Variante tipo "wetback".

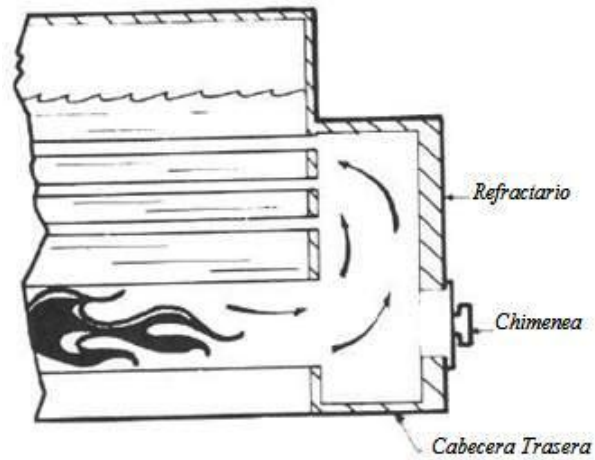


Figura 2.6: Variante tipo "dry back".

El número de pasos en una caldera pirotubular es un parámetro que se refiere al número de corridas horizontales que los gases realizan entre el horno y la salida de los mismos (Gilman 2005). La cámara de combustión o el horno se consideran como el primer paso, cada conjunto separado de tubos de fuego provee pasos adicionales como se muestra en Fig. 2.7.

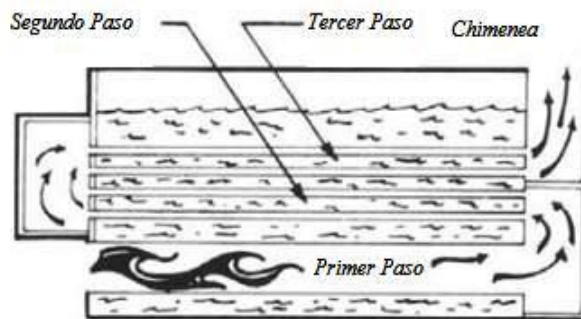


Figura 2.7: Caldera de pasos.

En algunos casos el incremento en la velocidad de los gases puede mejorar la transferencia de calor incrementando la turbulencia de los gases mientras viajan a través de los tubos. Sin embargo, el incremento en el número de pasos y la velocidad resultante de los gases incrementa la resistencia al flujo y fuerza al ventilador de aire a consumir más energía.

Una caldera pirotubular usada cuando el espacio es limitado y los requerimientos de vapor son pequeños, es la caldera pirotubular mostrada en la Fig. 2.8, (Dukelow 1991). Esta es una variación de la caldera de caja de fuego con el horno rodeado por agua y tubos verticales. Esta configuración es similar a un típico calentador de agua caliente doméstico.



Figura 2.8: Caldera Pirotubular Vertical.

2.3. Principio de funcionamiento de las calderas pirotubulares

2.3.1. Capacidad y eficiencia

Las calderas pirotubulares generalmente se describen en términos de BoHP (caballos de fuerza de caldera. $1 \text{ BoHP} = 34\,475 \text{ Btu}$). La capacidad en BoHP de una caldera pirotubular moderna es aproximadamente un quinto del área total de transferencia de calor (Basu 1999).

La eficiencia de la caldera se presenta como un porcentaje entre del calor suministrado a la caldera y el calor absorbido por el agua de la caldera.

2.3.2. Relación entrada - salida

Normalmente, la energía que entra en una caldera es asumida como el contenido de calor del combustible utilizado. El flujo de este combustible medido durante un intervalo de tiempo multiplicado por el contenido de energía calórica del mismo da como resultado la entrada de energía total durante dicho intervalo de

tiempo. Mientras que para medir la salida de energía de una caldera se debe medir el flujo de vapor en un intervalo de tiempo y posteriormente multiplicarlo por el contenido calórico de una libra de vapor para obtener la energía a la salida de igual manera durante dicho intervalo de tiempo.

Para seguir la eficiencia relativa pueden usarse de forma efectiva relaciones comunes entre la entrada y la salida tales como las libras de vapor/galón de combustible, pero cabe destacar que no son tan precisas.

Básicamente, las pérdidas energéticas de los diferentes tipos de calderas se deben a la masa de los gases de combustión y a su temperatura cuando salen de la caldera (Dukelow 1991). Se debe considerar la temperatura del aire de entrada al quemador y del combustible para obtener la pérdida neta de energía de los gases de combustión.

Por otro lado, el calor del agua entrante debe sustraerse del calor transportado a la salida de la caldera, para de esta manera determinar la contribución de la caldera.

Finalmente, la energía entra y sale de la caldera en una gran variedad de formas. La energía en el vapor es la única salida energética considerada útil. La energía del combustible es la mayor fuente de energía y, a menos que se requieran valores precisos de eficiencia, es la única entrada energética considerada.

2.3.3. Métodos para el cálculo de la eficiencia

Existen dos métodos fundamentales conocidos para el cálculo de la eficiencia. Estos son:

- **El método de entrada/salida o método directo** (Dukelow 1991).- Este método depende de las mediciones del contenido energético del combustible, de vapor y del flujo de agua de alimentación:

$$Eficiencia = \frac{\text{calor añadido al agua entrante}}{\text{calor del combustible} + \text{calor del aire de combustión}}$$

- **El método de pérdida de cabeza o método indirecto** (Dukelow 1991).- Este método devuelve un número decimal, que se expresa luego como un porcentaje de eficiencia. No es muy utilizado ya que requiere muchas mediciones.

2.3.4. Control de Calderas en la industria

Las principales entradas de masa y energía de la caldera deben ser re-guladas con el fin de alcanzar las condiciones de salida deseadas. Por lo tanto, el sistema de control de una caldera puede ser considerado como el vehículo a través del cual se manejan los balances de masa y de energía de la misma.

Un esquema general del proceso de control de una caldera se muestra en la Fig. 2.9, cuyo objetivo es mostrar la existencia de tres sistemas de control independientes, normalmente implementados en la industria.

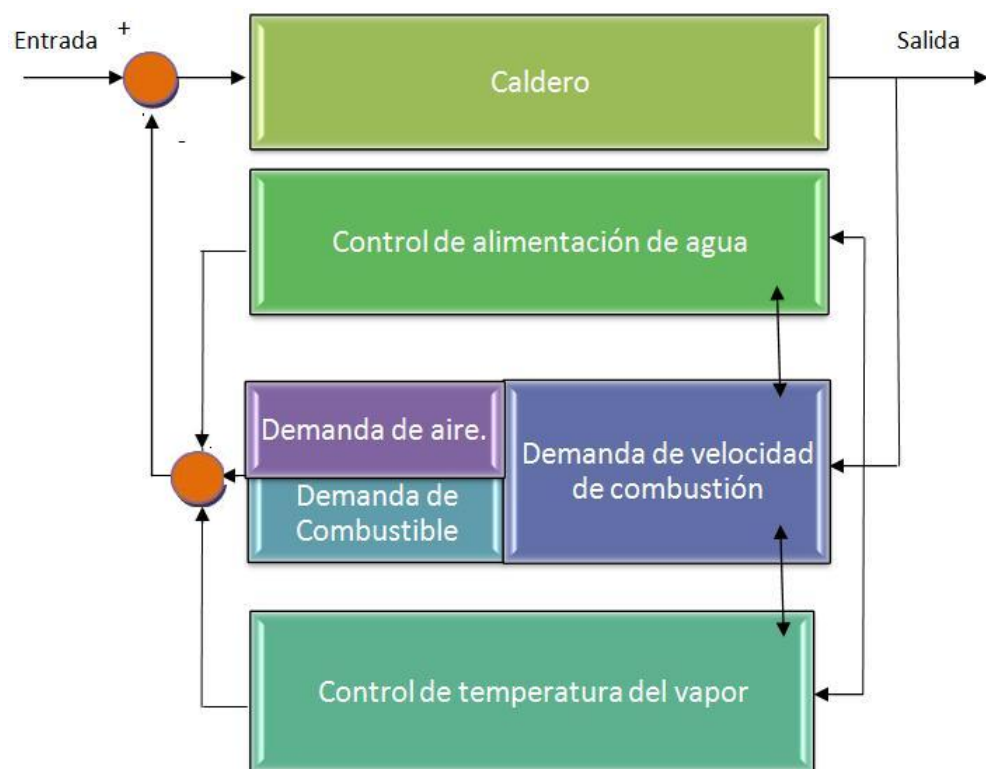


Figura 2.9: Diagrama de bloques para un sistema de control para calderas.

Las mediciones de las variables de proceso a la salida proveen la información a la unidad del sistema de control (Lindsley 2000).

Para el requerimiento de energía a la entrada se debe desarrollar una señal de velocidad de combustión. Esta señal crea una demanda de combustible y de aire por separado. La masa de agua en el interior de la caldera también debe ser regulada, y el control de agua de alimentación regula la masa de agua en la caldera.

La condición de temperatura final del vapor también debe ser regulada (para calderas que generan vapor sobrecalentado y tengan esta capacidad de control), y esto se logra a través del sistema de control de temperatura. Los efectos de las acciones de control de entrada interactúan, ya que la velocidad de combustión afecta la temperatura del vapor y la alimentación de agua afecta la presión del vapor, el cual es el parámetro que fija la demanda de velocidad de combustión. El sistema total debe por lo tanto ser aplicado y coordinado de tal forma que se minimicen los efectos de estas interacciones.

Sistemas como el de la combustión, control de alimentación de agua, y control de presión de vapor son quienes se encargan de determinar como la caldera opera en realidad y si logra su eficiencia potencial. El diseño de los controles debe ser enfocado para la regulación del combustible, del aire y del agua de la caldera y para mantener una presión de vapor deseada mientras se optimiza la eficiencia de la caldera simultáneamente.

Mejorar un sistema de control usualmente es una manera económicamente efectiva de mejorar la eficiencia operativa de cualquier caldera (Lindsley 1991).

2.4. Modelos matemáticos de una caldera pirotubular

El comportamiento dinámico de la presión de vapor en las calderas pirotubulares será el aspecto a estudiar y analizar. Esta variable se considera la más importante en una caldera ya que se encuentra relacionada con el control del proceso de combustión y determina la eficiencia de dicho equipo.

Para poder modelar matemáticamente este sistema complejo a partir de principios físicos fundamentales, sería necesario evaluar la dinámica del actuador, la cantidad de energía química que posee el combustible, y las relaciones termodinámicas y fisicoquímicas que se producen en el interior de la caldera hasta obtener un modelo aceptable que relacione la entrada (combustible) con la salida de interés (presión de vapor).

Este procedimiento puede incluir muchas ecuaciones diferenciales altamente acopladas. Uno de los principales problemas es el gran número de parámetros experimentales que se deben hallar para cada proceso particular, muchos de los cuales exigen mediciones muy precisas e incluso inaccesibles (Rivas, Herranz, Llanes, y Cartaya 1994).

Ante esta problemática y a las luces del objetivo principal, que es controlar la

presión del vapor de la caldera, se analizaron dos modelos matemáticos simplificados:

1. **K. J. Åström, (1998)**(Astrom y Bell 2000)

$$\begin{aligned} e_{11}\dot{V}_{wt} + e_{12}\dot{p} &= q_f - q_s \\ e_{21}\dot{V}_{wt} + e_{22}\dot{p} &= Q + q_f h_f - q_s h_s \\ e_{32}\dot{p} + e_{33}\dot{\alpha}_r &= Q - \alpha_r h_c q_{dc} \\ e_{42}\dot{p} + e_{43}\dot{\alpha}_r + e_{44}\dot{V}_{sd} &= \frac{\delta_s}{T_d}(\dot{V}_{sd} - V_{sd}) + \frac{h_f - h_w}{h_c} q_f \end{aligned}$$

donde:

\dot{p} ; \dot{V}_{sd} ; \dot{V}_{wt} ; $\dot{\alpha}_r$: variables de estado:

\dot{p} : presión.

\dot{V}_{wt} : volumen total de agua.

\dot{V}_{sd} : volumen total de vapor en la caldera.

$\dot{\alpha}_r$: calidad de vapor a la salida.

Q ; q_f ; q_s : entradas:

Q : calor suministrado.

q_f : alimentación de agua.

q_s : vapor saturado en el tambor.

h_s ; h_w ; h_f : salidas:

h_s : entalpía del vapor.

h_w : entalpía del agua.

h_f : entalpía de la alimentación de agua.

e_{11} ; e_{12} ; e_{21} ; e_{22} ; e_{32} ; e_{33} ; e_{42} ; e_{43} : coeficientes (su cálculo puede ser analizado en (Astrom y Bell 2000))

T_d : tiempo de permanencia de vapor en el tambor

Ventajas:

- Analiza la caldera subdividiéndola en procesos, para al final vincularlos en uno solo

Desventajas:

- Es un modelo muy complejo que posee muchas ecuaciones diferenciales altamente acopladas.
- No analiza la repercusión de las perturbaciones en el sistema.

2. *R.D. Bell, K.J. Astrom, (1987)* (Tan, Marquez, Chen, y Liu 2005)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 u_2 x_1^b + a_2 u_1 - a_3 u_3 \\ \dot{x}_2 &= (a_4 u_2 - a_5) x_1^b - a_6 x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a_7 u_3 - (a_8 u_2 - a_9) x_1}{g} \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= a_{10} (a_{11} x_3 + a_{12} a_{cs} + \frac{q_e}{a_{13}} - a_{14}) \end{aligned}$$

donde:

$x_1; x_2; x_3$: variables de estado:

x_1 : presión interna ($\frac{kg}{cm^2}$)
 x_2 : potencia eléctrica (MW)
 x_3 : densidad de flujo ($\frac{kg}{m^2}$)

$u_1; u_2; u_3$: entradas:

u_1 : posición de válvula de combustible.
 u_2 : posición de válvula de control de vapor.
 u_3 : posición de válvula de alimentación de agua.

$y_1; y_2; y_3$: salidas:

y_3 : nivel de agua en la caldera alrededor de una referencia fija (m).

a_{cs} : calidad de vapor:

$$a_{cs} = \frac{(a_{15} - a_{16} x_3)(a_{17} x_1 - a_{18})}{x_3(a_{19} - a_{20} x_1)}$$

q_e : tasa de evaporación:

$$q_e = (a_{21} u_2 - a_{22}) x_1 + a_{23} u_1 - a_{24} u_3 - a_{25}$$

$a_1 - a_{25}; b; g$: constantes.

Ventajas:

- Analiza y condiciona la calidad del vapor, puesto que lo involucra con el uso de las variables de estado.
- Ayuda a determinar la tasa de evaporación del proceso

Desventajas:

- No involucra en el sistema las perturbaciones.

Al evaluar los aspectos positivos y negativos de estos modelos matemáticos, sumados a las experiencias y estudios en los que ya han sido utilizados, se utilizará el segundo modelo.

Capítulo 3

Descripción de los métodos de control

3.1. Introducción

En la industria de procesos los sistemas de control deben satisfacer criterios asociados directamente con el mantenimiento de las variables de proceso, las cuales a su vez deben satisfacer ciertas especificaciones sujetas a una demanda variable. (Feliu y Rivas 2005). La representación matemática de gran parte de estos criterios se lleva a cabo en forma de funciones objetivo dinámicas y de restricciones, mientras que el proceso se representa como un modelo dinámico. Las técnicas de Control Predictivo Basado en Modelo (Model Based Predictive Control, MPC) constituyen poderosas herramientas para afrontar estos retos (Clarke 1994).

El Control Predictivo fue desarrollado con base en dos líneas. Por un lado, a finales de los años setentas surgieron algunos algoritmos que usaban un modelo dinámico del proceso para predecir en la salida el efecto de las acciones de control futuras, las cuales eran determinadas minimizando el error de predicción sujeto a restricciones de operación. El MPC adquirió una enorme aceptación en las industrias de procesos químicos debido a la simplicidad del algoritmo y al uso del modelo de respuesta (impulso o en escalón). La mayoría de estas aplicaciones fueron llevadas a cabo sobre sistemas multivariables. Los algoritmos utilizados fueron principalmente el IDCOM (Identification-Command) y el DMC (Control con Matrix Dinámica, (Dynamic Matriz Control)).

Por otro lado, fue apareciendo otra línea de trabajo, desarrollando estrategias específicamente para procesos monovariantes formuladas con modelos entrada-salida. En este contexto se desarrollaron las ideas del Controlador de Mínima Varianza y el Control Predictivo Generalizado (Generalized Predictive Control GPC) (Camacho y Bordons 2004).

3.2. Control Predictivo

3.2.1. El control de procesos en la actualidad y su tendencia

Actualmente la industria se enfrenta a un mercado variante y difícil de predecir, lo que obliga a que la operación de los procesos de producción se lleve a cabo en concordancia con la evolución del mercado para de esta manera poder mantener la competitividad y la rentabilidad.

La competencia en el sector industrial así como los problemas del medio ambiente relacionados con los procesos de producción son factores que han provocado la necesidad de disponer de técnicas fiables que permitan la operación del proceso con gran eficiencia y flexibilidad.

Se puede considerar que en la actualidad el objetivo de los sistema de control consiste en determinar las variables controladas de tal forma que satisfagan múltiples y cambiantes criterios de funcionamiento (económicos, de seguridad, ambientales o de calidad) ante cambios en las características del proceso.

Existe una amplia gama de metodologías para el control de procesos. La diferencia entre éstas, radica en la formulación matemática de los criterios de funcionamiento y en la elección de la manera de representar el proceso.

La representación matemática de muchos de los criterios se lleva a cabo en forma de funciones objetivo dinámicas y de restricciones mientras que el proceso se representa como un modelo dinámico con incertidumbres asociadas.

El Control Predictivo Basado en Modelo (MPC), en su forma general, acepta diversos tipos de modelos, funciones objetivo o restricciones, siendo una metodología que en la actualidad puede reflejar de forma directa los múltiples criterios de funcionamiento vitales en la industria de procesos.

El éxito actual del MPC en la industria se debe a tres razones principales:

- La incorporación de un modelo explícito del proceso en los cálculos permite al controlador tratar con todas las características importantes de la dinámica del proceso.
- La consideración del comportamiento del proceso a lo largo de un horizonte futuro permitiendo al controlador conducir la salida del proceso a la trayectoria de referencia deseada.

- La consideración de restricciones en la fase del diseño del controlador evita en lo posible su violación, resultando un control preciso en torno al punto óptimo de operación.

3.2.2. Control predictivo: Conceptos básicos

El Control Predictivo Basado en Modelo (Model Based Predictive Control (MBPC ó MPC)) no es una estrategia de control específica sino, que más bien constituye un amplio campo de métodos de control desarrollados en torno a ideas comunes e integra disciplinas como control óptimo, control estocástico, control de procesos con tiempos muertos, control multivariable o control con restricciones (Camacho y Bordons 2004).

Básicamente, las ideas que aparecen en mayor o menor medida en toda la familia de controladores predictivos son:

- Uso explícito de un modelo para predecir la salida del proceso en futuros instantes de tiempo (horizonte de predicción).
- Cálculo de las señales de control minimizando una cierta función objetivo.
- Estrategia deslizante, de forma que en cada instante el horizonte se va desplazando hacia el futuro, lo que implica aplicar la primera señal de control en cada instante y desechar el resto, repitiendo el cálculo en cada instante de muestreo.

Los distintos algoritmos de MPC difieren entre si en dos aspectos esenciales como son:

- El modelo usado para representar el proceso y los ruidos.
- La función de costo a minimizar.

Aunque las diferencias puedan parecer pequeñas a priori, pueden provocar distintos comportamientos en lazo cerrado.

Tanto en aplicaciones industriales como en el mundo académico el Control Predictivo ha tenido gran aceptación por ser un control de naturaleza abierta dentro del cual se han desarrollado muchas experiencias y realizaciones.

Hay que destacar que el MPC presenta una serie de ventajas sobre otros métodos, entre las que destacan:

- Resulta atractivo para los operadores puesto que los conceptos resultan muy intuitivos, a la vez que la sintonización es relativamente fácil.
- Puede ser utilizado para controlar una gran variedad de procesos, incluyendo sistemas con grandes retardos, de fase no mínima o inestables.
- En el caso de procesos multivariables, permite tratarlos con facilidad.
- Posee intrínsecamente compensación del retardo.
- Resulta conceptualmente simple la extensión al tratamiento de restricciones.
- Es muy útil cuando se conocen las futuras referencias (robótica o procesos batch).
- Es una metodología completamente abierta fundamentada en algunos principios básicos que permite futuras extensiones.

Pero además de todas estas bondades, también presenta inconvenientes. Uno de ellos es la carga de cálculo necesaria para la resolución de algunos algoritmos. El mayor inconveniente es la necesidad de disponer de un modelo apropiado del proceso, que permita una operación eficiente del controlador.

3.2.3. Estrategia de los controladores

La metodología de los controladores pertenecientes a la familia del MPC se caracteriza por la siguiente estrategia, representada en la Fig. 3.1:

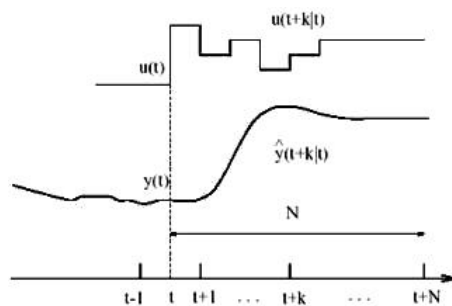


Figura 3.1: Estrategia de control predictivo.

En cada instante t y haciendo uso del modelo del proceso se predicen las futuras salidas para un determinado horizonte N , denominado horizonte de predicción. Estas salidas predichas $\hat{y}(t+k|t)$ para $k=1 \dots N$ dependen de los valores conocidos de las entradas y salidas pasadas hasta el instante t , así como de las señales de control futuras $\hat{u}(t+k|t), k=0 \dots N-1$ que se tiene que enviar al sistema y que son las que se necesitan calcular.

El conjunto de señales de control futuras se puede calcular optimizando un criterio en el que se pretende mantener el proceso lo más próximo posible a la trayectoria de referencia $w(t+k)$. Este criterio suele tomar la forma de una función cuadrática de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia también predicha. Si el criterio es cuadrático, el modelo lineal y no existen restricciones se puede obtener una solución explícita, en otro caso se debe usar un método iterativo de optimización (Camacho y Bordons 2004). Adicionalmente se puede hacer alguna suposición sobre la estructura de la ley de control futura, como por ejemplo que es constante después de cierto instante de tiempo.

La señal de control $u(t|t)$ es enviada al proceso mientras que las siguientes señales de control calculadas son desechadas, puesto que en el siguiente instante de muestreo ya se conoce $y(t+1)$. Entonces se repite el proceso con este nuevo valor y todas las secuencias son actualizadas. Se calcula por tanto $u(t+1|t+1)$ (que en principio será diferente al $u(t+1|t)$ al disponer de nueva información), haciendo uso del concepto de horizonte deslizante.

Para implantar esta estrategia se utiliza una estructura como la representada en la Fig. 3.2, en donde se hace uso de un modelo para predecir las salidas futuras del proceso, basándose en las futuras señales de control propuestas. Dichas señales son calculadas por el optimizador teniendo en cuenta la función de costo (donde aparece el error de seguimiento futuro) así como las restricciones. Por ende, el modelo juega un papel decisivo en el controlador. El modelo elegido debe ser capaz de capturar la dinámica del proceso para poder predecir las salidas futuras, al mismo tiempo que debe ser sencillo de usar y de comprender.

El optimizador es parte fundamental en la estrategia ya que proporciona las acciones de control. Si la función de costo es cuadrática, el mínimo se puede obtener como una función explícita de las entradas y salidas pasadas y de la trayectoria de referencia.

3.2.4. Controladores predictivos: Elementos básicos

Todos los controladores predictivos poseen elementos comunes y para cada uno de estos elementos se pueden elegir diversas opciones, dando lugar a distintos

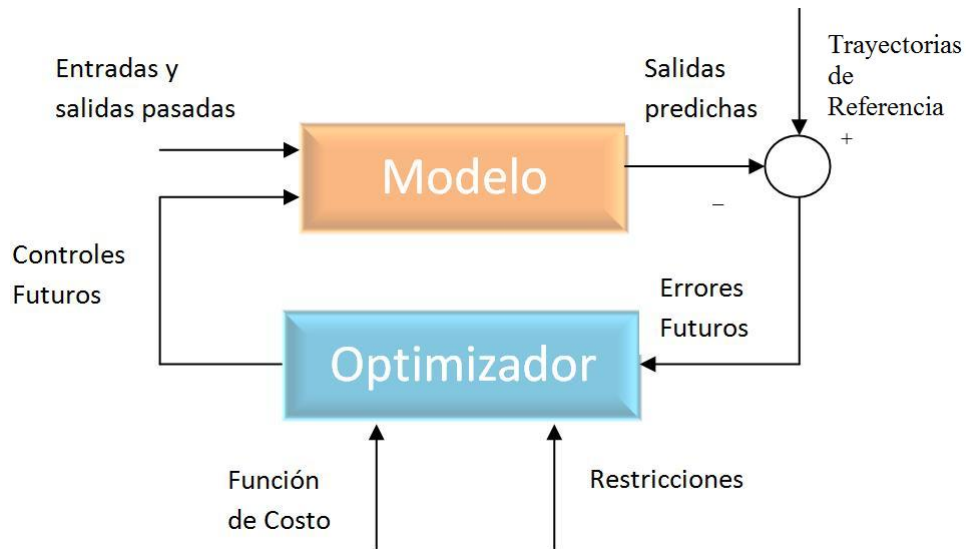


Figura 3.2: Estructura básica del MPC.

algoritmos. Estos elementos son:

- Modelo de predicción
- Función objetivo
- Obtención de la ley de control

3.2.5. Principales algoritmos

En esta sección se presenta detalladamente el algoritmo de Control Predictivo Generalizado y se describe la obtención de la ley de control óptima.

3.2.5.1. CONTROL PREDICTIVO GENERALIZADO (GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL - GPC)

Puede resolver muchos problemas de control diferentes para un amplio campo de procesos con un número razonable de variables de diseño, que son especificadas por el operador dependiendo del conocimiento previo del proceso y de los objetivos de control.

La idea básica del GPC es calcular una secuencia de futuras acciones de control de tal forma que minimice una función de costo multipaso. El índice a minimizar es una función cuadrática que mide por un lado la distancia entre la salida

predicha del sistema y una cierta trayectoria de referencia hasta el horizonte de predicción, y por otro el esfuerzo de control necesario para obtener dicha salida.

Es capaz de proporcionar una solución, puede trabajar con procesos inestables o de fase no mínima e incorpora el concepto de horizonte de control, así como la consideración en la función de costo de ponderación de los incrementos en las acciones de control.

Formulación del control predictivo generalizado. La mayoría de los procesos de una n -entradas y m -salidas, al ser considerados en torno a un determinado punto de trabajo y tras ser linealizados, pueden ser descritos de la siguiente forma:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})e(t) \quad (3.1)$$

donde:

$u(t)$ y $y(t)$: vector de entrada ($m \times 1$) y vector de salida del proceso ($n \times 1$).

$e(t)$: vector ruido en el tiempo de medida nula ($n \times 1$).

$B(q^{-1})$: matriz polinomial ($n \times m$)

$A(q^{-1})$ y $C(q^{-1})$: son $n \times m$ matrices polinomiales mónicos en el operador de corrimiento hacia atrás q^{-1} que define el comportamiento dinámico del proceso. Estos polinomios se definen así:

$$A(q^{-1}) = I_{n \times n} + A_1q^{-1} + A_2q^{-2} + \dots + A_naq^{-na} \quad (3.2)$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1q^{-1} + B_2q^{-2} + \dots + B_n bq^{-nb} \quad (3.3)$$

$$C(q^{-1}) = I_{n \times n} + C_1q^{-1} + C_2q^{-2} + \dots + C_n cq^{-nc} \quad (3.4)$$

Este modelo es conocido como Autorregresivo de Media Móvil Controlado (Controlled Auto-Regressive Moving-Average CARMA), también denominado Autorregresivo de Media Móvil con Entrada Externa (ARMAX). En muchas aplicaciones industriales en las que las perturbaciones son no-estacionarias resulta conveniente el uso de un modelo ARMAX integrado, dando lugar al ARIMAX, que viene descrito por:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (3.5)$$

donde:

$$\Delta = 1 - q^{-1} \quad (3.6)$$

Por simplicidad, la matriz polinomial $C(q^{-1})$ se va a tomar igual a $I_{n \times n}$. Nótese que en el caso de que $C(q^{-1})$ pueda ser truncado se puede absorber en $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$.

El algoritmo del Control Predictivo Generalizado consiste en aplicar una secuencia de señales de control que minimice una función de costo de la forma:

$$J(N_1, N_2, N_u) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \quad (3.7)$$

donde:

$J(N_1, N_2, N_u)$: función de costos a minimizar.

$\hat{y}(t+j|t)$: predicción óptima de la salida del proceso j pasos hacia delante con datos conocidos hasta t .

N_1 y N_2 : horizonte min y max de predicción.

N_u : horizonte de control.

$\delta(j)$ y $\lambda(j)$: secuencias que ponderan el comportamiento futuro.

$w(t+j)$: trayectoria de referencia futura en el tiempo $t+j$.

n : número de valores que posee la trayectoria de referencia.

E : la esperanza matemática.

El objetivo consiste en calcular la futura secuencia de control $u(t), u(t+1), \dots$, de tal manera que la salida futura del proceso $y(t+j)$ permanezca próxima a $w(t+j)$. Esto se logra minimizando $J(N_1, N_2, N_u)$.

Predicción óptima. Con la intención de minimizar la función de costo, se obtendrá previamente la predicción óptima de $y(t+j)$ para $j \geq N_1$ y $j \geq N_2$. Considérese la siguiente ecuación diofantina:

$$I_{n \times n} = E_j(q^{-1})\Delta A(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (3.8)$$

$$I_{n \times n} = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (3.9)$$

donde:

$E_j(q^{-1})$ y $F_j(q^{-1})$: son matrices polinomiales únicas a encontrar.

$$\Delta A(q^{-1}) = \tilde{A}(q^{-1}) = (1 - q^{-1})A(q^{-1}) \quad (3.10)$$

Las matrices polinomiales únicas $E_j(q^{-1})$ y $F_j(q^{-1})$ tienen grados definidos por $j - 1$ y na respectivamente

Si se multiplica la ecuación (3.5) por $E_j(q^{-1})q^j \Delta$ se obtiene:

$$\tilde{A}(q^{-1})E_j(q^{-1})y(t+j) = E_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(q^{-1})e(t+j) \quad (3.11)$$

Reemplazando la ecuación (3.9), la ecuación (3.11) queda:

$$(1 - q^{-1}F_j(q^{-1}))y(t+j) = E_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(q^{-1})e(t+j) \quad (3.12)$$

Que se puede reescribir como:

$$y(t+j) = F_j(q^{-1})y(t) + E_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(q^{-1})e(t+j) \quad (3.13)$$

Al ser el grado del polinomio $E_j(q^{-1})$ igual a $j - 1$, los términos del ruido en la ecuación (3.13) están todos expresados en términos de valores en el futuro. La mejor predicción de $y(t+j)$ será por consiguiente:

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + F_j(q^{-1})y(t) \quad (3.14)$$

donde:

$$G_j(q^{-1}) = E_j(q^{-1})B(q^{-1}) \quad (3.15)$$

Resulta simple demostrar que los polinomios $E_j(q^{-1})$ y $F_j(q^{-1})$ se pueden obtener recursivamente, de forma que los nuevos valores de los coeficientes de ambos polinomios en el paso $j + 1$ ($E_{j+1}(q^{-1})$ y $F_{j+1}(q^{-1})$) sean función de los valores en el paso j .

Recursión de la ecuación diofantina.

Vamos a considerar que una solución $(E_j(q^{-1}), F_j(q^{-1}))$ para la ecuación diofantina puede ser obtenida de la siguiente manera:

$$(3.16)$$

con:

$$\tilde{A}(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1}) = I_{n \times n} + \tilde{A}_1 q^{-1} + \tilde{A}_2 q^{-2} + \dots + \tilde{A}_{n_a} q^{-n_a} + \tilde{A}_{n_a+1} q^{-(n_a+1)} \quad (3.17)$$

Que se puede reescribir como:

$$\tilde{A}(q^{-1}) = I_{n \times n} + (A_1 - I_{n \times n})q^{-1} + (A_2 - A_1)q^{-2} + \dots + (A_{n_a} - A_{n_a-1})q^{-n_a} - A_{n_a} q^{-(n_a+1)} \quad (3.18)$$

y:

$$E_j(q^{-1}) = E_{j,0} + E_{j,1}q^{-1} + E_{j,2}q^{-2} + \dots + E_{j,j-1}q^{j-1} \quad (3.19)$$

$$F_j(q^{-1}) = F_{j,0} + E_{j,1}q^{-1} + F_{j,2}q^{-2} + \dots + F_{j,n_a}q^{-n_a} \quad (3.20)$$

Consideremos ahora la ecuación diofantina correspondiente a la predicción de $\hat{y}(t+j+1|t)$:

$$I_{n \times n} = E_{j+1}(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j+1}F_{j+1}(q^{-1}) \quad (3.21)$$

Sustrayendo (3.16) de (3.21):

$$0_{n \times n} = (E_{j+1}(q^{-1}) - E_j(q^{-1}))\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-1}(q^{-1}F_{j+1}(q^{-1}) - F_j(q^{-1})) \quad (3.22)$$

La matriz $(E_{j+1}(q^{-1}) - E_j(q^{-1}))$ es de grado j . Hagamos:

$$(E_{j+1}(q^{-1}) - E_j(q^{-1})) = \tilde{R}(q^{-1}) + R_j(q^{-1}) \quad (3.23)$$

donde $\tilde{R}(q^{-1})$ es una matriz polinomial de $n \times n$ de grado menor o igual a $j-1$ y R_j es una matriz real $n \times n$. Ahora sustituyendo en la ecuación (3.22):

$$0_{n \times n} = \tilde{R}(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-1}(R_j\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-1}F_{j+1}(q^{-1}) - F_j(q^{-1})) \quad (3.24)$$

Como $\tilde{A}(q^{-1})$ es mónico, es fácil de observar que $\tilde{R}(q^{-1}) = 0_{n \times n}$. Entonces la matriz $E_{j+1}(q^{-1})$ puede ser calculado recursivamente por:

$$E_{j+1}(q^{-1}) = E_j(q^{-1}) + R_j z^{-1} \quad (3.25)$$

La siguiente expresión puede ser facilmente obtenida desde (3.24):

$$R_j = F_{j,0} \quad (3.26)$$

$$F_{j+1,i} = F_{j,i+1} - R_j \tilde{A}_{i+1} \quad i = 0 \dots \delta(F_{j+1}) \quad (3.27)$$

Se puede ver facilmente que la condición inicial para la ecuación recursiva está dada por:

$$E_1 = I \quad (3.28)$$

$$F_1 = z(I) - \tilde{A} \quad (3.29)$$

Al hacer la matriz polinomial $E_j(q^{-1})B(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-1}G_{jp}(q^{-1})$, con $\delta(G_j(q^{-1})) < j$, la ecuación de predicción puede ser escrita como:

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + G_{jp}(q^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(q^{-1})y(t) \quad (3.30)$$

Notese que los dos ultimos términos de la derecha dependen de los valores pasados de la salida y entrada del proceso, además corresponden a la respuesta libre del proceso considerado si las señales de control se mantienen constantes, mientras que el primer término depende solo de los valores futuros de la señal de control y puede ser interpretado como la respuesta forzada. Esta respuesta es obtenida cuando las condiciones iniciales son cero $y(t-j) = 0, \Delta u(t-j) = 0$ para $j = 0, 1, \dots$. La ecuación puede ser reescrita como:

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + f_j \quad (3.31)$$

con $f_j = G_{jp}(q^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(q^{-1})y(t)$. Vamos ahora el conjunto de las N_j predicciones óptimas, se expresa como:

$$\hat{y}(t+1|t) = G_1(q^{-1})\Delta u(t) + F_1 \quad (3.32)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = G_2(q^{-1})\Delta u(t+1) + F_2 \quad (3.33)$$

$$\hat{y}(t+N|t) = G_N(q^{-1})\Delta u(t+N-1) + F_N \quad (3.34)$$

El cual puede ser escrito de forma matricial como:

$$\hat{y}(t_{yf}|t) = G(q^{-1})u(t_{uf}) + F \quad (3.35)$$

donde:

$$\hat{y}(t_{yf}|t) = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+j|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N|t) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$t_{yf} = (t+1), (t+2), \dots, (t+N) \quad (3.37)$$

$$u(t_{uf}) = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+j-1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$t_{uf} = t, t+1, \dots, t+N-1 \quad (3.39)$$

$$G(q^{-1}) = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ g_{j-1} & g_{j-2} & \dots & g_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & \dots & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Predicción óptima cuando $C \neq I$. El modelo ARMAX a considerar es el que se presentó en las ecuaciones (3.1). En este caso, la primera solución de la ecuación diofantina viene dada por:

$$C(q^{-1}) = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (3.42)$$

donde:

$E_j(q^{-1})$: matriz polinomial única de grado $j - 1$.

$F_j(q^{-1})$: matriz polinomial única de grado na .

Nótese que la ecuación diofantina (3.42) puede ser solucionada de forma recursiva. Consideremos la ecuación diofantina para j y $j + 1$.

$$C(q^{-1}) = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (3.43)$$

$$C(q^{-1}) = E_{j+1}(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-(j+1)}F_{j+1}(q^{-1}) \quad (3.44)$$

Al diferenciarlos, nosotros tenemos la ecuación (3.22), por lo tanto $E_{j+1}(q^{-1})$ y $F_{j+1}(q^{-1})$ pueden ser calculadas de forma recursiva usando expresiones similares a las obtenidas en el caso de $C(q^{-1}) = I$ con condiciones iniciales: $E_1(q^{-1}) = I$ y $F_1(q^{-1}) = q(C(q^{-1}) - \tilde{A}(q^{-1}))$.

Definir las matrices polinomiales $\bar{E}_j(q^{-1})$ y $\bar{C}_j(q^{-1})$ de tal manera que

$$\bar{E}_j(q^{-1})C(q^{-1}) = \bar{C}_j(q^{-1})E_j(q^{-1}) \quad (3.45)$$

con $\bar{E}_0 = I$ y $\det(\bar{C}_j(q^{-1})) = \det(C_j(q^{-1}))$. Nótese que

$$\bar{E}_j(q^{-1})^{-1}\bar{C}_j(q^{-1}) = C(q^{-1})E_j(q^{-1})^{-1} \quad (3.46)$$

Definir

$$\bar{F}_j(q^{-1}) = q^j(\bar{C}_j(q^{-1}) - \bar{E}_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})) \quad (3.47)$$

Premultiplicando la ecuación (3.5) por $\bar{E}_j(q^{-1})\Delta$

$$\bar{E}_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})y(t+j) = \bar{E}_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + \bar{E}_j(q^{-1})e(t+j) \quad (3.48)$$

Usando la ecuación (3.45) y (3.47) tenemos:

$$\bar{C}_j(q^{-1})(y(t+j) - \bar{E}_j(q^{-1})e(t+j)) = \bar{E}_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + \bar{F}_j(q^{-1})y(t) \quad (3.49)$$

AL tomar el valor esperado $E[\bar{C}_j(q^{-1})(y(t+j) - \bar{E}_j(q^{-1})e(t+j))] = \hat{y}(t+j | t)$. La predicción óptima $\hat{y}(t+j | t)$ puede ser generada por la ecuación:

$$\bar{C}_j(q^{-1})\hat{y}(t+j | t) = \bar{E}_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + \bar{F}_j(q^{-1})y(t) \quad (3.50)$$

Ahora resolviendo la ecuación diofantina:

$$I = J_j(q^{-1})\bar{C}_j(q^{-1}) + q^{-1}K_j(q^{-1}) \quad (3.51)$$

con $\delta(J(q^{-1})) < j$. Multiplicando por $J_j(q^{-1})^{-1}$ y usando la ecuación (3.50)

$$y(t+j | t) = J_j(q^{-1})\bar{E}_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + (K_j(q^{-1}) + J_j(q^{-1})\bar{F}_j(q^{-1}))y(t) \quad (3.52)$$

Si $J_j(q^{-1})\bar{E}_j(q^{-1})B(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-j}G_{p_j}(q^{-1})$, con $\delta(G_j(q^{-1})) < j$, los j pasos de la predicción óptima pueden ser expresados como:

$$y(t+j | t) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + G_{p_j}(q^{-1})\Delta u(t-1) + (K_j(q^{-1}) + J_j(q^{-1})\bar{F}_j(q^{-1}))y(t) \quad (3.53)$$

El primer término de la predicción corresponde a la respuesta forzada debido a los incrementos futuros de control, mientras que los dos últimos términos corresponden a la respuesta libre y son generados por los incrementos de las entradas pasadas y salidas pasadas.

Obtención de la ley de control. Para facilitar la notación en la siguiente sección se prescindirá de los argumentos de las matrices polinomiales.

La ecuación (3.7) puede escribirse en la forma:

$$J = (Gu + f - w)^T \bar{R} (Gu + f - w) + \bar{Q}u^T u \quad (3.54)$$

donde: w : señales de referencia.

$$w = [w(t+1) \quad w(t+2) \quad \dots \quad w(t+N)]^T$$

$$\bar{R} = \text{diag}(R, \dots, R)$$

$$\bar{Q} = \text{diag}(Q, \dots, Q)$$

La ecuación (3.54) se puede representar como:

$$J = \frac{1}{2}u^T H u + b u + f_0 \quad (3.55)$$

donde:

$$H = 2(G^T \bar{R} G + Q) \quad (3.56)$$

$$b = 2(w - f)^T \bar{R} G \quad (3.57)$$

$$f_0 = (w - f)^T (w - f) \quad (3.58)$$

El mínimo de J , siempre que no existan restricciones en la señal de control, puede ser calculado igualando a cero el gradiente de J (Camacho y Bordons 2004), lo cual conduce a:

$$u = -H^{-1}b^T = -2H^{-1}G^T \bar{R}(w - f) \quad (3.59)$$

Debido al uso de la estrategia de retroceso, sólo se necesita $\Delta u(t)$ en el instante t . Así solo las primeras m filas de $H^{-1}G^T \bar{R}$, denotadas como K , tienen que ser calculadas. Esto se puede hacer de antemano para el caso no adaptable. La ley de control puede entonces ser expresada como:

$$\Delta u(t) = K(w - f) \quad (3.60)$$

Ésta es una matriz de ganancia lineal, que multiplica los errores predichos entre las referencias y la predicción de la respuesta libre de la planta.

Finalmente, el valor de la entrada al proceso en el tiempo t , se calcula según:

$$u(t) = u(t - 1) + \Delta u(t) \quad (3.61)$$

La solución propuesta involucra la inversión de una matriz de dimensión $N \times N$, lo cual conlleva una gran carga de cálculo. El concepto de horizonte de control se emplea con la finalidad de reducir la cantidad de cálculo, asumiendo que las señales de control permanecerán en un valor constante a partir del intervalo $N_u < N$. Por tanto la dimensión de la matriz que hay que invertir queda reducida a $N_u \times N_u$, quedando la carga de cálculo reducida (en el caso límite de $N_u = 1$, se reduce al caso escalar) aunque restringiendo la optimalidad. El concepto de horizonte de control aplicado en el cálculo de $\Delta u(t)$ puede expresarse como:

$$\Delta u(t) = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (N_u - 1)} \end{bmatrix} H^{-1} G^T (w - f) \quad (3.62)$$

3.3. Control PID basado en LMI

Un PID (Proporcional Integral Derivativo) es un mecanismo de control por realimentación que calcula la desviación o error entre un valor medido y el valor que se quiere obtener, para aplicar una acción correctora que ajuste el proceso. El algoritmo de cálculo del control PID está compuesto por tres parámetros distintos (Perez, Colmenares, y Granado 2004):

1. El valor Proporcional determina la reacción del error actual.
2. El Integral genera una corrección proporcional a la integral del error, esto nos asegura que aplicando un esfuerzo de control suficiente, el error de seguimiento se reduce a cero.
3. El Derivativo determina la reacción del tiempo en el que el error se produce. La suma de estas tres acciones es usada para ajustar al proceso vía un elemento de control como la posición de una válvula de control o la energía suministrada al calentador.

Ajustando estas tres variables en el algoritmo de control del PID, el controlador puede proveer un control diseñado para lo que requiera el proceso a realizar. La respuesta del controlador puede ser descrita en términos de respuesta del control ante un error, el grado el cual el controlador llega al "set point", y el grado de oscilación del sistema. Nótese que el uso del PID para control no garantiza control óptimo del sistema o la estabilidad del mismo. Algunas aplicaciones pueden solo requerir de uno o dos modos de los que provee este sistema de control. Un controlador PID puede ser llamado también PI, PD, P o I en la ausencia de las acciones de control respectivas. Los controladores PI son particularmente comunes,

ya que la acción derivativa es muy sensible al ruido, y la ausencia del proceso integral puede evitar que se alcance al valor deseado debido a la acción de control.

La estructura de un controlador PID es simple, aunque su simpleza es también su debilidad, dado que limita el rango de plantas donde pueden controlar en forma satisfactoria (existe un grupo de plantas inestables que no pueden estabilizadas con ningún miembro de la familia PID).

3.3.1. Consideraciones iniciales

El controlador del tipo Proporcional-Integral-Derivativo PID, es ampliamente utilizado en el mundo de los sistemas de control. Existen múltiples técnicas para realizar su sincronización y en general los sistemas controlados con los PID funcionan adecuadamente.

Dentro de las posibilidades de sintonización de controladores PID, se han desarrollado condiciones basadas en desigualdades lineales matriciales LMI, que han demostrado ser poderosas a la hora de imponer criterios de desempeño sobre el sistema a controlarse. Además, por la naturaleza del problema planeado con las LMI, es posible imponer condiciones múltiples (problemas multiobjetivo) sobre las respuestas del sistema en lazo cerrado (estabilidad, ubicación de polos, rechazo de perturbaciones) e igualmente incorporar incertidumbres de forma que se pueda obtener resultados robustos.

A continuación se presentan las condiciones para obtener la sintonización de un controlador PID basado en la estabilidad del sistema lineal en lazo cerrado.

3.3.2. Condición de estabilidad asintótica

Dado un sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.63}$$

en el que x (en \mathbb{R}^n) es el estado, u (en \mathbb{R}^m) el control, y y (en \mathbb{R}^p) la salida. Las matrices A , B y C son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Sea un controlador PID definido por la expresión:

$$u = F_1 y + F_2 \int_0^t y dt + F_3 \frac{dy}{dt} \tag{3.64}$$

Es posible construir un nuevo sistema aumentado equivalente a (3.63), que incorpora al controlador PID, de la forma (3.67) (Perez, Colmenares, y Granado 2004):

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u \\ \bar{y} &= \bar{C}z \\ u &= \bar{F}\bar{y}\end{aligned}\tag{3.65}$$

donde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \int_0^t y dt \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3]$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= (I - F_3CB)^{-1}F_1 \\ \bar{F}_2 &= (I - F_3CB)^{-1}F_2 \\ \bar{F}_3 &= (I - F_3CB)^{-1}F_3\end{aligned}\tag{3.66}$$

Hay que destacar que el sistema (3.65) incorpora la integral de la salida a los estados del sistema y que en el sistema aumentado se busca un controlador PID estabilizante, que utilice la realimentación estática de la salida. El sistema en lazo cerrado (sistema con controlador PID) queda dado por la siguiente ecuación dinámica (YY, J., y YX 1998):

$$\dot{z} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}\bar{C})z\tag{3.67}$$

El sistema (3.66) será estable si y solo si, existe una matriz P positiva definida y una realimentación estática de la salida \bar{F} , tal que:

$$\begin{aligned}(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}\bar{C})^T P + P(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}\bar{C}) &< 0 \\ P &> 0\end{aligned}\tag{3.68}$$

Para poder determinar los valores óptimos de las matrices F_1 , F_2 , F_3 en (3.66) fue de vital importancia utilizar otra estrategia de control con el cual se cambie el polo ubicado en el origen (control por asignación de polos).

Capítulo 4

Control Predictivo Generalizado de la presión en una caldera pirotubular

4.1. Linealización del modelo matemático de una caldera

Para poder llevar a cabo la simulación y obtención de resultados del control de una caldera pirotubular utilizando el Control Predictivo Generalizado se partió de la selección de un sistema no lineal que representara de forma clara y concisa los procesos y variables que existen en una caldera pirotubular, y la selección fue el sistema propuesto por R.D. Bell, K.J. Astrom (Tan, Marquez, Chen, y Liu 2005), descrito en el capítulo 2:

$$\dot{x}_1 = a_1 u_2 x_1^b + a_2 u_1 - a_3 u_3$$

$$\dot{x}_2 = (a_4 u_2 - a_5) x_1^b - a_6 x_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{a_7 u_3 - (a_8 u_2 - a_9) x_1}{g}$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_3 = a_{10} \left(a_{11} x_3 + a_{12} a_{cs} + \frac{q_e}{a_{13}} - a_{14} \right)$$

El mismo que a continuación se representa de forma lineal en el punto de operación que fue tomado de (Tan, Marquez, Chen, y Liu 2005):

$$x_1^0 = 108; x_2^0 = 66,7; x_3^0 = 428; u_1^0 = 0,34; u_2^0 = 0,69; u_3^0 = 0,43; y_3^0 = 0$$

El modelo linealizado es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0025 & 0 & 0 \\ 0,0694 & -0,1 & 0 \\ -0,0067 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,349 & -0,15 \\ 0 & 14,15 & 0 \\ 0 & -1,398 & 1,659 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,0063 & 0 & 0,0047 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,253 & 0,512 & -0,014 \end{bmatrix}$$

Así:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,0025 & 0 & 0 \\ 0,0694 & -0,1 & 0 \\ -0,0067 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,9 & -0,349 & -0,15 \\ 0 & 14,15 & 0 \\ 0 & -1,398 & 1,659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,0063 & 0 & 0,0047 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,253 & 0,512 & -0,014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = 0, -1, -0,0025$$

Del análisis de los autovalores de la matriz A hay que destacar que la planta posee un polo ubicado en el origen.

4.2. Modelo lineal extendido

Se hicieron pruebas de funcionamiento del sistema lineal anteriormente indicado bajo el algoritmo GPC. Los resultados indicaron que no es posible regular todos los estados en el punto de operación deseado. Por ello, se optó por incluir integradores en las tres salidas y añadir un lazo interno de controladores PID para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio deseado. Mediante esta estrategia de control se llegó a establecer un nuevo sistema lineal aumentado de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u \\ \bar{y} &= \bar{C}z \\ u &= \bar{F}\bar{y}\end{aligned}$$

donde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0694 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0063 & 0 & -0,0047 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,3490 & -0,15 \\ 0 & 14,15 & 0 \\ 0 & -1,398 & 1,659 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0063 & 0 & 0,0047 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,253 & 0,512 & -0,014 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \int_0^t y dt \end{bmatrix}$$

Donde F se definirá más adelante.

4.3. Ley de control PID multivariable

Para el diseño del control PID se adoptó la estrategia multivariable introducida en (Perez, Colmenares, y Granado 2004). La ley de control PID multivariable es de la forma:

$$u = F_1 y + F_2 \int_0^t y dt + F_3 \frac{dy}{dt}$$

Las matrices son:

$$\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3]$$

con:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= (I - F_3 CB)^{-1} F_1 \\ \bar{F}_2 &= (I - F_3 CB)^{-1} F_2 \\ a(a - \tilde{a}) + b(b - \tilde{b} - J_{n,n+1}^2 a^2 \bar{F}_3) &= (I - F_3 CB)^{-1} F_3 \end{aligned}$$

$\bar{F} =$

$$\begin{bmatrix} 8,888 & 0,126 & 0,503 & 16,657 & 0,055 & 0,014 & 8,888 & 0,126 & 0,503 \\ 0,005 & 0,24 & -5,8 \times 10^{-13} & 4,7 \times 10^{-13} & 0,106 & -0,012 & 0,005 & 0,24 & -5,8 \times 10^{-13} \\ 0,0001 & 0,202 & 3,021 & -0,05 & 0,089 & 0,001 & 0,0001 & 0,202 & 3,021 \end{bmatrix}$$

El sistema de lazo cerrado resultante de aplicar el PID es:

$$A_{PID} = \begin{bmatrix} -7,9 & -1,8 \times 10^{-5} & -2,1 \times 10^{-7} & -14,9 & 7,9 \times 10^{-5} & -1,7 \times 10^{-2} \\ -2,3 \times 10^{-1} & -3,1 & 3,9 \times 10^{-14} & -6,759 \times 10^{-10} & -1,5 & 1,7 \times 10^{-1} \\ -3,1 \times 10^{-2} & 1,6 \times 10^{-5} & -2,3 \times 10^{-2} & 8,3 \times 10^{-2} & 3,9 \times 10^{-5} & -2 \times 10^{-2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6,3 \times 10^{-3} & 0 & 4,7 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{PID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{PID} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{PID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,2530 & 0,5120 & -0,0140 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4. Resultados de simulación

Para aplicar el GPC, este sistema se discretizó utilizando el método *Tustin* con un paso de integración de 0.007 segundos, que se seleccionó para cubrir adecuadamente la dinámica del sistema extendido. Para el desarrollo del algoritmo GPC se utilizaron horizontes de predicción y de control iguales a 25 y 7 respectivamente, estos valores se obtuvieron empíricamente después de realizar varias

simulaciones.

Mediante el desarrollo del algoritmo de GCP en la herramienta matemática MATLAB se obtuvo la solución a la ecuación diofantina encontrando así las matrices polinomiales únicas $E_j(q^{-1})$ y $F_j(q^{-1})$, así como también se obtuvieron las matrices $K(q^{-1})$ y $G(q^{-1})$ necesarias para el cálculo de la ley de control.

Para cada salida del sistema se obtuvo una ley de control de la forma:

$$u(t) = u(t - 1) + \Delta u(t)$$

donde:

$$\Delta u(t) = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (N_u - 1)} \end{bmatrix} H^{-1} G^T (w - f)$$

Las leyes de control correspondientes se presentan en el ANEXO I.

El resultado de aplicar el algoritmo GPC al modelo lineal extendido fue una ley de control lineal que se probó por simulación utilizando el modelo no lineal.

A continuación se presentan resultados de simulación que muestran el efecto de la ley de control GPC.

Para observar el efecto de los parámetros α y λ en el algoritmo de control no se consideran incertidumbres paramétricas ni perturbaciones. El rango de variación para α será de valores muy cercanos a cero, mientras que para λ el rango de variación será hasta 1000.

Se realizaron varias pruebas tomando en cuenta diferentes valores para los parámetros mencionados dentro de los rangos marcados. Se tomaron las cuatro más representativas y a continuación se presentan los resultados:

1. $\alpha = \mathbf{0.001}$ y $\lambda = \mathbf{10}$: El comportamiento de las salidas se ve reflejado por el comportamiento de la ley de control, con la diferencia que en este caso las salidas no alcanzan los valores de referencia y estabilidad, mientras que las señales de ley de control correspondientes presentan inestabilidad y

cambios o comportamiento brusco. (Fig. 4.1 y Fig. 4.2).

2. $\alpha = 0.001$ y $\lambda = 100$: El comportamiento de las salidas alcanzan los valores de referencia y estabilidad, mientras que las señales de ley de control correspondientes son suaves. (Fig. 4.3 y Fig. 4.4).
3. $\alpha = 0.01$ y $\lambda = 1000$: El comportamiento de las salidas se ve reflejado por el comportamiento suave de la ley de control, con la diferencia que en este caso dos de las tres salidas alcanzan los valores de referencia y estabilidad, mientras que la restante no logra estabilizarse, mientras que las señales de ley de control correspondientes presentan estabilidad y ningún cambio o comportamiento brusco. (Fig. 4.5 y Fig. 4.6).
4. $\alpha = 0.0001$ y $\lambda = 1000$: El comportamiento de las salidas alcanzan los valores de referencia y estabilidad, mientras que las señales de ley de control correspondientes son suaves. (Fig. 4.7 y Fig. 4.8).

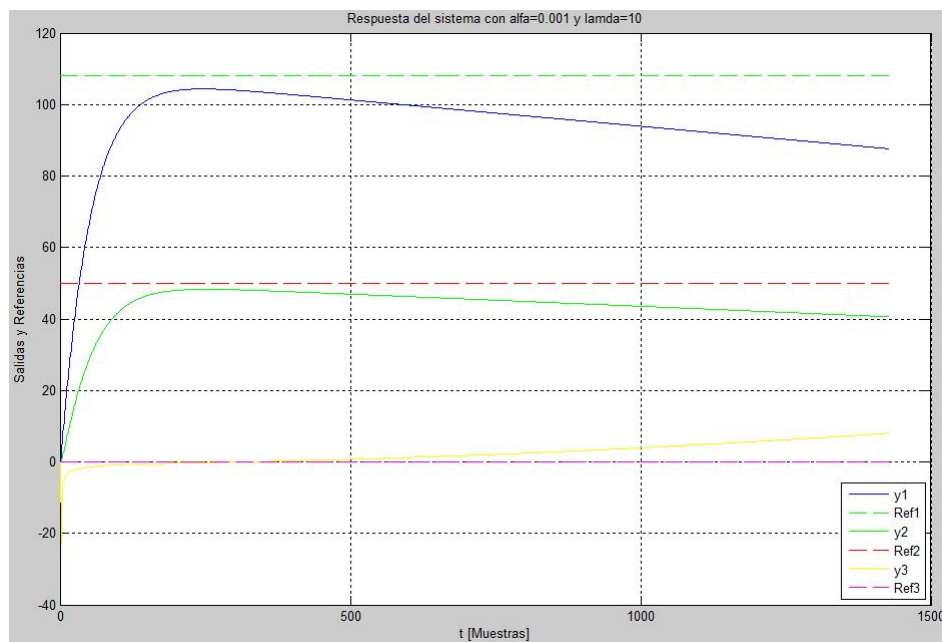


Figura 4.1: Respuesta del sistema con $\alpha=0.001$ y $\lambda=10$.

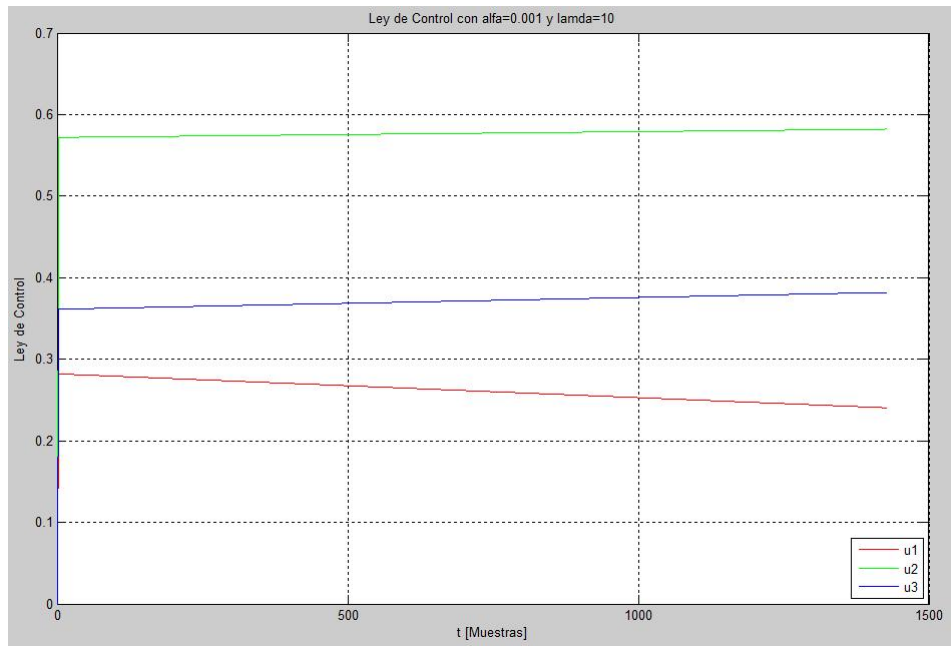


Figura 4.2: Respuesta del sistema con $\alpha=0.001$ y $\lambda=10$.

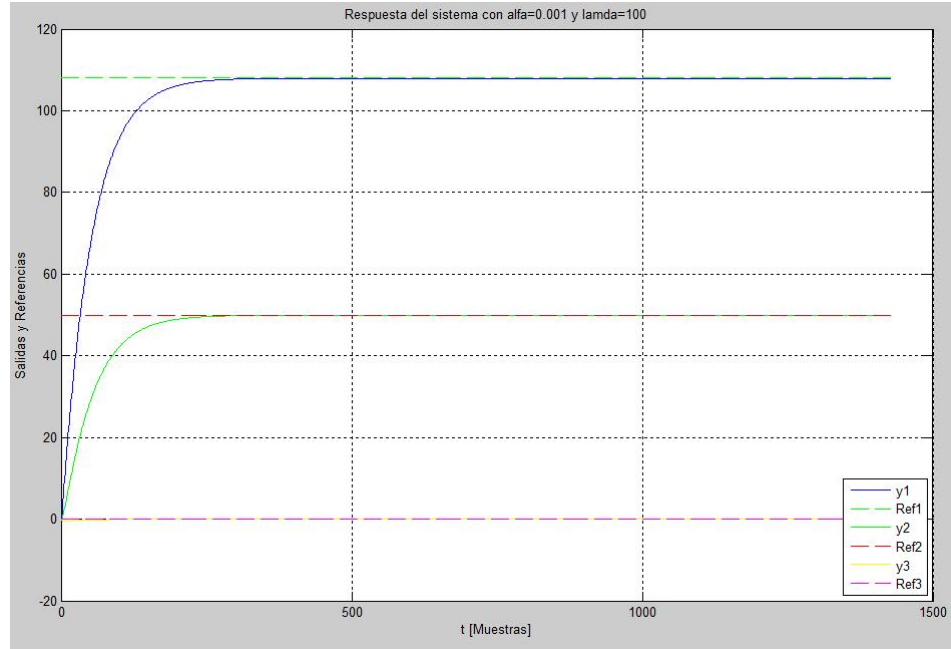


Figura 4.3: Ley de Control con $\alpha=0.001$ y $\lambda=100$.

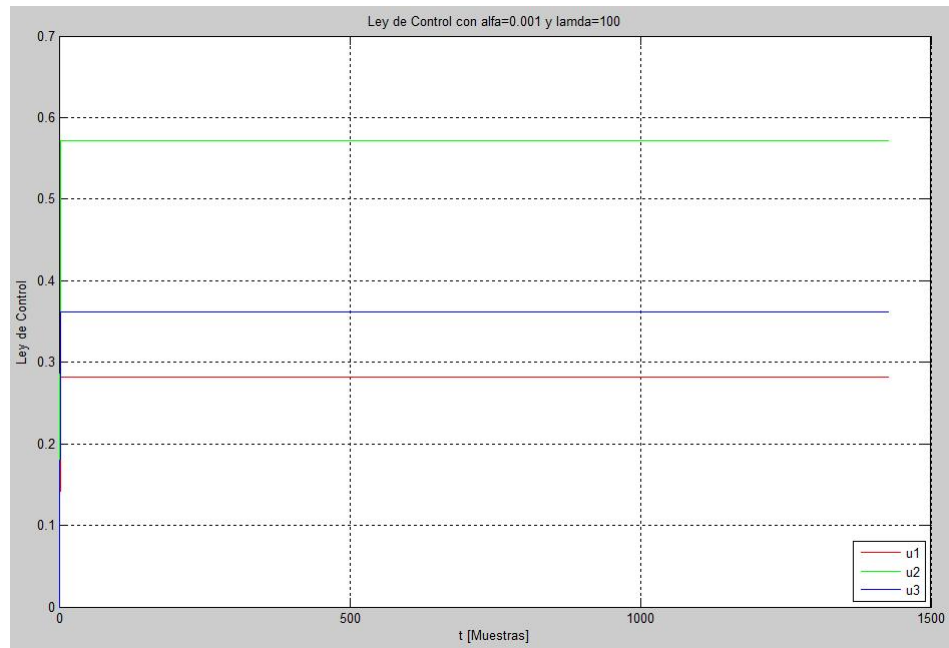


Figura 4.4: Ley de Control con $\alpha=0.001$ y $\lambda=100$.

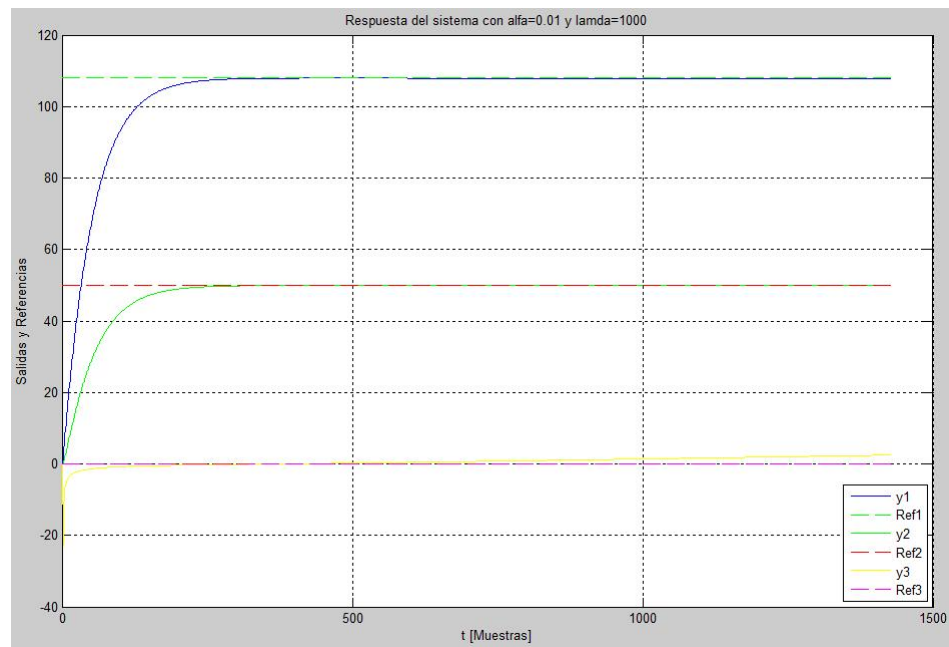


Figura 4.5: Respuesta del sistema con $\alpha=0.01$ y $\lambda=1000$.

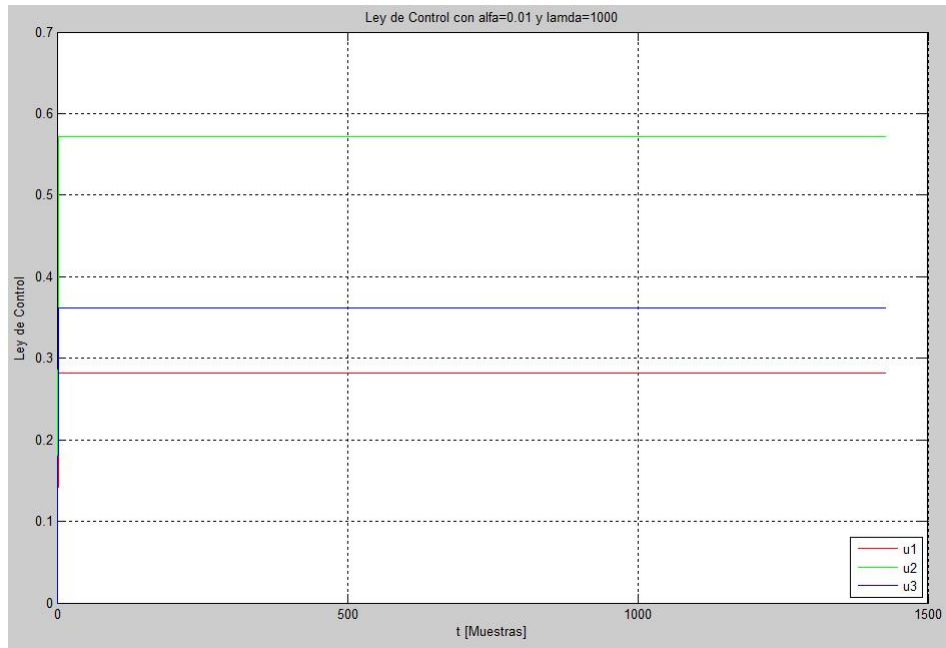


Figura 4.6: Ley de Control con alfa=0.01 y lamda=1000.

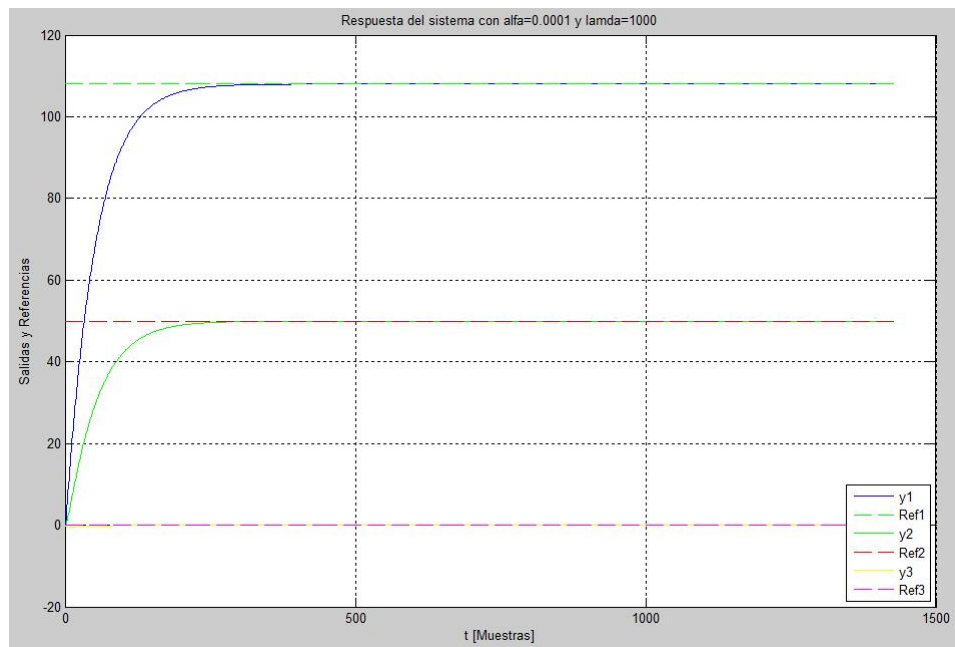


Figura 4.7: Respuesta del sistema con alfa=0.0001 y lamda=1000.

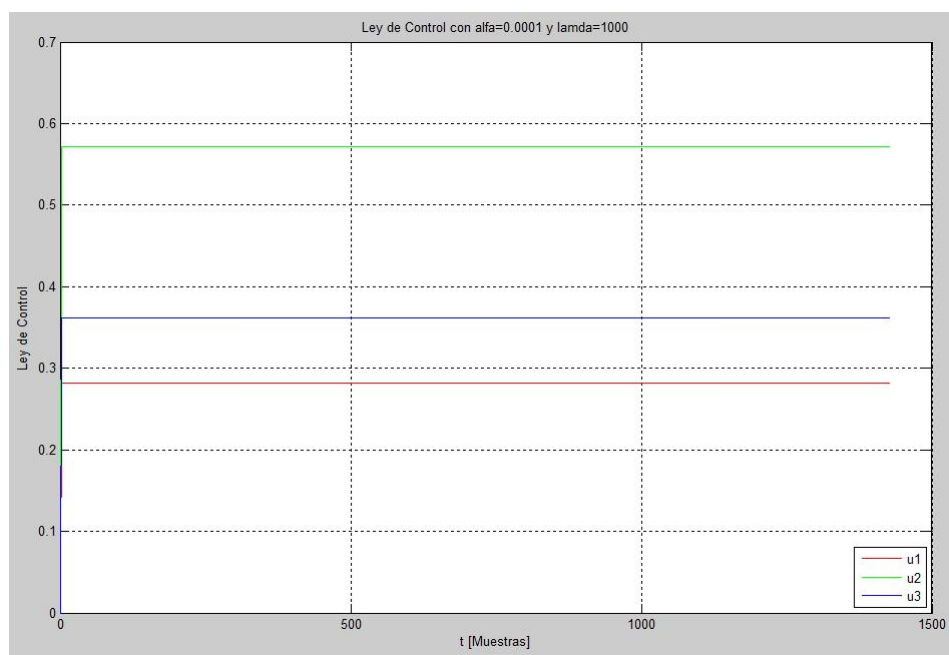


Figura 4.8: Ley de Control con alfa=0.0001 y lamda=1000.

Capítulo 5

Conclusiones

Se realizó un estudio sobre los principios de funcionamiento de las calderas pirotubulares como objeto de control automático. Además, se mostró que esta clase de calderas presentan un comportamiento dinámico difícil, con múltiples entradas y salidas, así como múltiples interrelaciones entre variables. Se concluyó que la presión del vapor en el cuerpo de la caldera constituye una de las variables más importantes de esta clase de equipos, debido a que el control de la combustión se realiza mediante el control de la presión de vapor.

Se llevó a cabo el análisis y estudio de dos representaciones matemáticas para la caldera pirotubular y se seleccionó el modelo matemático de R.D. Bell, K.J. Astrom, (1987) que describe de forma clara y concisa el comportamiento dinámico de las variables de proceso y los procesos que se presentan en la estructura funcional de la caldera pirotubular, pero sobre todo el proceso de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular.

Se presentaron los conceptos básicos de control predictivo, así como los algoritmos de control predictivo más utilizados en la práctica industrial. Se fundamentó la elección del algoritmo de control predictivo generalizado (GPC) como la estrategia a utilizar en el control de la presión de vapor en el cuerpo de una caldera pirotubular.

Se diseñó una ley de control GPC para la caldera pirotubular. Para hacerlo se partió del modelo linealizado en un punto de operación, que fue posteriormente extendido mediante la adecuación de integradores a la salida. Se recurrió a una estrategia de control multivariable PID disponible en la literatura cuyo objetivo fue conseguir que el punto de operación fuese un equilibrio estable. A partir de este modelo extendido se diseñó la ley de control GPC para las salidas y entradas del modelo original.

Se exploraron diversos factores de ponderación en el criterio de optimización del algoritmo GPC y se encontró una combinación que funcionaba apropiadamente. El desempeño obtenido en las simulaciones de esta ley de control GPC fue muy bueno, pues consiguió regular apropiadamente todas las salidas a sus valores deseados.

Se resolvió un problema más ambicioso que el planteado originalmente, pues se reguló además de la presión de vapor en la caldera, la potencia eléctrica y el nivel de agua en la caldera mediante técnicas de control multivariable. También se encontraron limitaciones de la técnica GPC para tratar con plantas inestables, que se resolvieron en este caso con un lazo interno de control.

Como trabajo por continuar, queda pendiente la implantación práctica de este controlador.

Referencias

- Albertos, P. y A. Sala (2004). *Multivariable Control Systems Design* Springer.
- Alonso, F. (1996). *La seguridad en calderas*. INSHT, Madrid.
- Antsaklis, P. y A. Michel (1997). *Linear systems*. McGraw-Hill, N.Y.
- Astrom, K. J. (1994). *PID controllers*. ISA, Research Triangle Park, Third Edition, USA.
- Astrom, K. J. y B. Wittenmark (1997). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall, Third Edition.
- Astrom, K. y R. Bell (2000). Drum-boiler dynamics. *Automatica* 36, 363–378.
- Basu, P. (1999). *Boilers and burners: Design and theory*. Springer - Verlag Inc.
- Camacho, E. F. (1995). *Model predictive control in the process industry*. Springer - Verlag.
- Camacho, E. F. y C. Bordons (1995). *Model predictive control in the process industry*. Springer - Verlag, N.Y.
- Camacho, E. F. y C. Bordons (2004). *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, Second Edition, London.
- Clarke, D. W. (1994). Advances in model-based predictive control. *Automatica* 9, 383–384.
- Clarke, D. W., C. Mohtadi, y P. S. Tuffs (1987). *Generalized predictive control part I. The basic algorithm*. *Automatica* 23, 137–148.
- Dukelow, S. G. (1991). *The Control of Boilers*. ISA, Research Triangle Park, USA.
- Feliu, V. y R. Rivas (2005). *Fractional control*. Shell industrial boilers. *Automatica*. 365, 90–95.
- Fujiwara, T. y H. Miyakawa (1990). *Application of predictive adaptive control system for steam temperature control in boiler plant*. en *Proceedings of the 29nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2181–2182.
- Gilman, G. F. (2005). *Boiler control systems engineering*. *Systems and Automation Society*.

- Han, P., Y. Li, H. Liu, y D. Wang (2004). *A new dynamic matrix control algorithm with Lyapunov stability*. en Proceedings of the 8th ICARCV Control, Automation, Robotics and Vision Conference, vol. 3, pp. 1963 – 1968.
- Han, P., G. Wang, y D. Wang (2003). *On the application of predictive functional control in steam temperature systems of thermal power plant*. en Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, vol. 6, pp. 6559 – 6564.
- Hencey, B. y A. Alleyne (2010). *Robust gain-scheduled control*. en Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC), pp. 3075 –3081.
- Hogg, B. y N. El-Rabaie (1990). *Generalized predictive control of steam pressure in a drum boiler*. IEEE Trans. Energy Conversion vol.5, 485–492.
- Hogg, B. y N. El-Rabaie (1991). *Multivariable generalized predictive control of a boiler system*. IEEE Trans. Energy Conversion vol.6, 282–288.
- Lindsley, D. M. (1991). *Boiler control system*. McGraw-Hill, London.
- Lindsley, D. M. (2000). *Power-plant control and instrumentation. The control of boilers an HRSG systems*. IEEE Control Engineering Series, London.
- Pérez, O., W. Colmenares, y E. Granado (2004). *Integrated systems design with robust PID controllers by linear matrix inequalities*. Science and Engineer 25, 43 -49.
- Rivas, R., R. Aref, J. Peran, y E. C. Sanchez (2000). *Industrial boilers. Integral Automatic control system*. Automatica and Instrumentation 308, 79–80.
- Rivas, R., J. Herranz, O. Llanes, y L. Cartaya (1994). *Modelo matemático dinámico de generadores de vapor*. Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones XV, 45-54.
- Tan, W., H. J. Marquez, T. Chen, y J. Liu (2005). *Analysis and control of a nonlinear boiler-turbine unit*. Journal of Process Control 15, 883–891.
- Xia, Q., M. Rao, y J. Qian (1993). *Model algorithmic control for paper machines*. en proceedings of the Second IEEE Conference on Control Applications, pp. 203-208.
- YY, C., L. J., y S. YX (1998). *Static output feedback stabilization: an lmi approach*. Automatica 34, 1641–1645.

Apéndice A

Ley de Control

Control de la presión de vapor en la caldera.

$$\begin{aligned}
 u_1(t) = & \\
 & -0,000000000017873w_1(t+1) + 0,00000000000013w_2(t+1) \\
 & + 0,000000025300088w_3(t+1) - 0,00000000000003w_1(t+2) \\
 & - 0,000000000009050w_2(t+2) + 0,000000051199993w_3(t+2) \\
 & - 0,000000000226474w_1(t+3) + 0,000000000000353w_2(t+3) \\
 & + 0,000000025301336w_3(t+3) - 0,00000000000005w_1(t+4) \\
 & - 0,000000000044686w_2(t+4) + 0,000000051199999w_3(t+4) \\
 & - 0,000000000690519w_1(t+5) + 0,000000000001771w_2(t+5) \\
 & + 0,000000025304361w_3(t+5) - 0,00000000000005w_1(t+6) \\
 & - 0,000000000107525w_2(t+6) + 0,000000051200002w_3(t+6) - \\
 & 0,000000001381713w_1(t+7) + 0,00000000004999w_2(t+7) \\
 & + 0,000000025309261w_3(t+7) - 0,00000000000000w_1(t+8) \\
 & - 0,000000000196368w_2(t+8) + 0,000000051200025w_3(t+8) \\
 & - 0,000000002274116w_1(t+9) + 0,000000000010649w_2(t+9) \\
 & + 0,000000025316142w_3(t+9) + 0,00000000000006w_1(t+10) \\
 & - 0,000000000310070w_2(t+10) + 0,000000051200057w_3(t+10) \\
 & - 0,000000003343977w_1(t+11) + 0,000000000019223w_2(t+11) \\
 & + 0,000000025325045w_3(t+11) + 0,00000000000013w_1(t+12) \\
 & - 0,000000000447520w_2(t+12) + 0,000000051200086w_3(t+12) \\
 & - 0,000000004569557w_1(t+13) + 0,000000000031130w_2(t+13) \\
 & + 0,000000025336026w_3(t+13) + 0,00000000000020w_1(t+14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,00000000607653w_2(t+14) + 0,000000051200110w_3(t+14) \\
& -0,000000005930986w_1(t+15) + 0,00000000046691w_2(t+15) \\
& +0,000000025349128w_3(t+15) + 0,00000000000029w_1(t+16) \\
& -0,000000000789441w_2(t+16) + 0,000000051200131w_3(t+16) \\
& -0,000000007410114w_1(t+17) + 0,000000000066152w_2(t+17) \\
& +0,000000025364384w_3(t+17) + 0,000000000000038w_1(t+18) \\
& -0,000000000991895w_2(t+18) + 0,000000051200150w_3(t+18) \\
& -0,000000008990385w_1(t+19) + 0,000000000089691w_2(t+19) \\
& +0,000000025381816w_3(t+19) + 0,000000000000048w_1(t+20) \\
& -0,000000001214062w_2(t+20) + 0,000000051200165w_3(t+20) \\
& -0,000000010656709w_1(t+21) + 0,000000000117426w_2(t+21) \\
& +0,000000025401441w_3(t+21) + 0,000000000000059w_1(t+22) \\
& -0,000000001455027w_2(t+22) + 0,000000051200179w_3(t+22) \\
& -0,000000012395356w_1(t+23) + 0,000000000149423w_2(t+23) \\
& +0,000000025423265w_3(t+23) + 0,000000000000070w_1(t+24) \\
& -0,000000001713905w_2(t+24) + 0,000000051200190w_3(t+24) \\
& -0,000000014193843w_1(t+25) + 0,000000000185700w_2(t+25) \\
& +0,000000025447288w_3(t+25) - 0,000000356256613u_1(t-1) \\
& +0,000001106168829u_1(t-2) + 0,000003127257753u_1(t-3) \\
& +0,000003631154994u_1(t-4) + 0,000003383189899u_1(t-5) \\
& +0,000003132257478u_1(t-6) + 0,000002903897445u_1(t-7) \\
& +0,000002697439527u_1(t-8) + 0,000002511964929u_1(t-9) \\
& +0,000002346898771u_1(t-10) + 0,000002201304759u_1(t-11) \\
& +0,000002074318032u_1(t-12) + 0,000001964883771u_1(t-13) \\
& -0,023249695328200u_2(t-1) + 0,099182982831684u_2(t-2) \\
& -0,171438563199133u_2(t-3) + 0,149695220608653u_2(t-4) \\
& -0,065915228012011u_2(t-5) + 0,008969090156758u_2(t-6) \\
& -0,000000012453323u_2(t-7) + 0,000000364492232u_2(t-8) \\
& +0,000000578711973u_2(t-9) + 0,000000398963329u_2(t-10) \\
& +0,000000094865118u_2(t-11) - 0,000000251665634u_2(t-12) \\
& -0,000000602944785u_3(t-1) - 0,000000933205412u_3(t-2) \\
& -0,000001225690669u_3(t-3) - 0,000001470893878u_3(t-4) \\
& -0,000001664447976u_3(t-5) - 0,000001805772154u_3(t-6) \\
& -0,000001896919419u_3(t-7) - 0,001532239019894u_3(t-8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0,007114161709963u_3(t-9) - 0,013009735698508u_3(t-10) \\
&+0,011838320556686u_3(t-11) - 0,005381478597280u_3(t-12) \\
&-0,000245252960581u_3(t-13) + 0,000141623103508y_1(t) \\
&-0,000745281997727y_1(t-1) + 0,001656242868802y_1(t-2) \\
&-0,001983906077991y_1(t-3) + 0,001348258380517y_1(t-4) \\
&-0,000492178779221y_1(t-5) + 0,000075314583465y_1(t-6) \\
&+0,000010942697882y_2(t) - 0,000057076019993y_2(t-1) \\
&+0,000125940932864y_2(t-2) - 0,000149977619777y_2(t-3) \\
&+0,000101427282428y_2(t-4) - 0,000036872261577y_2(t-5) \\
&+0,000005622152153y_2(t-6) - 0,000822008352482y_3(t) \\
&+0,004267681937668y_3(t-1) - 0,009392892289353y_3(t-2) \\
&+0,011168129153653y_3(t-3) - 0,007545149495397y_3(t-4) \\
&+0,002741042249668y_3(t-5) - 0,000417747164427y_3(t-6)
\end{aligned}$$

Control de la potencia eléctrica.

$$\begin{aligned}
u_2(t) = &0,000000025300101w_1(t+1) + 0,000000025300101w_2(t+1) \\
&+0,000000025300091w_3(t+1) - 0,000000000000000w_1(t+2) \\
&+0,000000000001068w_2(t+2) - 0,000000001400143w_3(t+2) \\
&+0,000000025301377w_1(t+3) + 0,000000025301377w_2(t+3) \\
&+0,000000025301350w_3(t+3) - 0,000000000000004w_1(t+4) \\
&+0,000000000005274w_2(t+4) - 0,000000001400657w_3(t+4) \\
&+0,000000025304428w_1(t+5) + 0,000000025304428w_2(t+5) \\
&+0,000000025304385w_3(t+5) - 0,000000000000015w_1(t+6) \\
&+0,000000000012693w_2(t+6) - 0,000000001401561w_3(t+6) \\
&+0,000000025309350w_1(t+7) + 0,000000025309350w_2(t+7) \\
&+0,000000025309293w_3(t+7) - 0,000000000000037w_1(t+8) \\
&+0,000000000023183w_2(t+8) - 0,000000001402853w_3(t+8) \\
&+0,000000025316232w_1(t+9) + 0,000000025316232w_2(t+9) \\
&+0,000000025316175w_3(t+9) - 0,000000000000073w_1(t+10) \\
&+0,000000000036610w_2(t+10) - 0,000000001404533w_3(t+10) \\
&+0,000000025325135w_1(t+11) + 0,000000025325135w_2(t+11) \\
&+0,000000025325078w_3(t+11) - 0,000000000000126w_1(t+12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0,000000000052843w_2(t+12) - 0,000000001406604w_3(t+12) \\
&+0,000000025336116w_1(t+13) + 0,000000025336116w_2(t+13) \\
&+0,000000025336059w_3(t+13) - 0,000000000000199w_1(t+14) \\
&+0,000000000071758w_2(t+14) - 0,000000001409064w_3(t+14) \\
&+0,000000025349218w_1(t+15) + 0,000000025349218w_2(t+15) \\
&+0,000000025349161w_3(t+15) - 0,000000000000293w_1(t+16) \\
&+0,000000000093232w_2(t+16) - 0,000000001411915w_3(t+16) \\
&+0,000000025364474w_1(t+17) + 0,000000025364474w_2(t+17) \\
&+0,000000025364416w_3(t+17) - 0,000000000000411w_1(t+18) \\
&+0,000000000117150w_2(t+18) - 0,000000001415156w_3(t+18) \\
&+0,000000025381907w_1(t+19) + 0,000000025381907w_2(t+19) \\
&+0,000000025381849w_3(t+19) - 0,000000000000554w_1(t+20) \\
&+0,000000000143399w_2(t+20) - 0,000000001418787w_3(t+20) \\
&+0,000000025401533w_1(t+21) + 0,000000025401532w_2(t+21) \\
&+0,000000025401474w_3(t+21) - 0,000000000000723w_1(t+22) \\
&+0,000000000171872w_2(t+22) - 0,000000001422809w_3(t+22) \\
&+0,000000025423357w_1(t+23) + 0,000000025423356w_2(t+23) \\
&+0,000000025423298w_3(t+23) - 0,000000000000921w_1(t+24) \\
&+0,000000000202463w_2(t+24) - 0,000000001427220w_3(t+24) \\
&+0,000000025447380w_1(t+25) + 0,000000025447379w_2(t+25) \\
&+0,000000025447321w_3(t+25) - 0,000000023471018u_1(t-1) \\
&+0,000000370111074u_1(t-2) + 0,000000634092007u_1(t-3) \\
&+0,000000612809782u_1(t-4) + 0,000000562386148u_1(t-5) \\
&+0,000000515295751u_1(t-6) + 0,000000470863636u_1(t-7) \\
&+0,000000428883419u_1(t-8) + 0,000000389248896u_1(t-9) \\
&+0,000000351796033u_1(t-10) + 0,000000316347092u_1(t-11) \\
&+0,000000282735652u_1(t-12) + 0,000000250792255u_1(t-13) \\
&-0,004823041244202u_2(t-1) + 0,020696534200311u_2(t-2) \\
&-0,035936857200309u_2(t-3) + 0,031491006812944u_2(t-4) \\
&-0,013905087653184u_2(t-5) - 0,000250016959551u_2(t-6) \\
&-0,000000117594631u_2(t-7) + 0,000001166549364u_2(t-8) \\
&+0,000002103961922u_2(t-9) + 0,000002092008308u_2(t-10) \\
&+0,000001940750372u_2(t-11) + 0,000001804766496u_2(t-12) \\
&+0,000001683137056u_3(t-1) + 0,000001574499997u_3(t-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0,000001477814175u_3(t-3) + 0,000001391884017u_3(t-4) \\
&+0,000001315628098u_3(t-5) + 0,000001248018432u_3(t-6) \\
&+0,000001188092440u_3(t-7) - 0,015997366167979u_3(t-8) \\
&+0,068550818904022u_3(t-9) - 0,118930871498628u_3(t-10) \\
&+0,104174632415582u_3(t-11) - 0,045995943024179u_3(t-12) \\
&+0,000006836613084u_3(t-13) - 0,000320265678798y_1(t) \\
&+0,001670899166567y_1(t-1) - 0,003691516663337y_1(t-2) \\
&+0,004402609902914y_1(t-3) - 0,002981877615820y_1(t-4) \\
&+0,001085565197384y_1(t-5) - 0,000165743866163y_1(t-6) \\
&-0,000321762580637y_2(t) + 0,001678718942780y_2(t-1) \\
&-0,003708792543812y_2(t-2) + 0,004423203608993y_2(t-3) \\
&-0,002995816413398y_2(t-4) + 0,001090636009716y_2(t-5) \\
&-0,000166517515791y_2(t-6) - 0,000306354419413y_3(t) \\
&+0,001598891551818y_3(t-1) - 0,003533405990740y_3(t-2) \\
&+0,004214976072856y_3(t-3) - 0,002855314153790y_3(t-4) \\
&+0,001039648279605y_3(t-5) - 0,000158753978982y_3(t-6)
\end{aligned}$$

Control del nivel de agua en la caldera.

$$\begin{aligned}
u_3(t) = & \\
&-0,0000000000000004w_1(t+1) - 0,000000000001821w_2(t+1) \\
&+0,000000051199988w_3(t+1) - 0,000000000000000w_1(t+2) \\
&+0,000000000001068w_2(t+2) - 0,000000001400152w_3(t+2) \\
&-0,0000000000000007w_1(t+3) - 0,000000000023394w_2(t+3) \\
&+0,000000051200002w_3(t+3) - 0,000000000000004w_1(t+4) \\
&+0,000000000005275w_2(t+4) - 0,000000001400674w_3(t+4) \\
&-0,0000000000000008w_1(t+5) - 0,000000000072784w_2(t+5) \\
&+0,000000051200011w_3(t+5) - 0,000000000000014w_1(t+6) \\
&+0,000000000012693w_2(t+6) - 0,000000001401586w_3(t+6) \\
&-0,0000000000000007w_1(t+7) - 0,000000000148773w_2(t+7) \\
&+0,000000051200019w_3(t+7) - 0,000000000000036w_1(t+8) \\
&+0,000000000023183w_2(t+8) - 0,000000001402881w_3(t+8) \\
&-0,0000000000000002w_1(t+9) - 0,000000000250187w_2(t+9) \\
&+0,000000051200054w_3(t+9) - 0,000000000000072w_1(t+10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0,000000000036610w_2(t+10) - 0,000000001404561w_3(t+10) \\
&+0,000000000000004w_1(t+11) - 0,000000000375898w_2(t+11) \\
&+0,000000051200085w_3(t+11) - 0,00000000000125w_1(t+12) \\
&+0,000000000052844w_2(t+12) - 0,000000001406632w_3(t+12) \\
&+0,000000000000011w_1(t+13) - 0,000000000524821w_2(t+13) \\
&+0,000000051200111w_3(t+13) - 0,00000000000197w_1(t+14) \\
&+0,000000000071758w_2(t+14) - 0,000000001409092w_3(t+14) \\
&+0,000000000000019w_1(t+15) - 0,000000000695907w_2(t+15) \\
&+0,000000051200134w_3(t+15) - 0,00000000000291w_1(t+16) \\
&+0,000000000093233w_2(t+16) - 0,000000001411943w_3(t+16) \\
&+0,000000000000028w_1(t+17) - 0,000000000888150w_2(t+17) \\
&+0,000000051200153w_3(t+17) - 0,00000000000408w_1(t+18) \\
&+0,000000000117151w_2(t+18) - 0,000000001415184w_3(t+18) \\
&+0,000000000000037w_1(t+19) - 0,000000001100577w_2(t+19) \\
&+0,000000051200170w_3(t+19) - 0,00000000000550w_1(t+20) \\
&+0,000000000143400w_2(t+20) - 0,000000001418815w_3(t+20) \\
&+0,000000000000047w_1(t+21) - 0,000000001332255w_2(t+21) \\
&+0,000000051200184w_3(t+21) - 0,00000000000719w_1(t+22) \\
&+0,000000000171872w_2(t+22) - 0,000000001422837w_3(t+22) \\
&+0,000000000000057w_1(t+23) - 0,000000001582285w_2(t+23) \\
&+0,000000051200197w_3(t+23) - 0,00000000000915w_1(t+24) \\
&+0,000000000202464w_2(t+24) - 0,000000001427248w_3(t+24) \\
&+0,000000000000068w_1(t+25) - 0,000000001849800w_2(t+25) \\
&+0,000000051200207w_3(t+25) - 0,000000070158643u_1(t-1) \\
&+0,000000766871815u_1(t-2) + 0,000001350891614u_1(t-3) \\
&+0,000001325887200u_1(t-4) + 0,000001223820213u_1(t-5) \\
&+0,000001129547211u_1(t-6) + 0,000001042031572u_1(t-7) \\
&+0,000000960702848u_1(t-8) + 0,000000885146397u_1(t-9) \\
&+0,000000814997376u_1(t-10) + 0,000000749850928u_1(t-11) \\
&+0,000000689371121u_1(t-12) + 0,000000633224442u_1(t-13) \\
&-0,010207637451477u_2(t-1) + 0,043772559701112u_2(t-2) \\
&-0,075982266263874u_2(t-3) + 0,066582416822432u_2(t-4) \\
&-0,029407940251763u_2(t-5) - 0,000250021853055u_2(t-6) \\
&-0,000000076828211u_2(t-7) + 0,000000786569096u_2(t-8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0,000001413203853u_2(t-9) + 0,000001384521941u_2(t-10) \\
&+0,000001245661137u_2(t-11) + 0,000001104362276u_2(t-12) \\
&+0,000000963450390u_3(t-1) + 0,000000824700656u_3(t-2) \\
&+0,000000689900129u_3(t-3) + 0,000000560217954u_3(t-4) \\
&+0,000000436604758u_3(t-5) + 0,000000319736554u_3(t-6) \\
&+0,000000210065446u_3(t-7) - 0,010276719503851u_3(t-8) \\
&+0,044140059531179u_3(t-9) - 0,076700821225753u_3(t-10) \\
&+0,067262827770297u_3(t-11) - 0,029725403960581u_3(t-12) \\
&+0,000006836746893u_3(t-13) + 0,000000005469359y_1(t) \\
&-0,000000028607689y_1(t-1) + 0,000000063254269y_1(t-2) \\
&-0,000000075446382y_1(t-3) + 0,000000051087670y_1(t-4) \\
&-0,000000018591321y_1(t-5) + 0,000000002837185y_1(t-6) \\
&+0,000016521789353y_2(t) - 0,000087059824134y_2(t-1) \\
&+0,000193669805346y_2(t-2) - 0,000232172095730y_2(t-3) \\
&+0,000157887970140y_2(t-4) - 0,000057668443145y_2(t-5) \\
&+0,000008828713273y_2(t-6) - 0,000631393208440y_3(t) \\
&+0,003294546624735y_3(t-1) - 0,007279391336806y_3(t-2) \\
&+0,008682345746414y_3(t-3) - 0,005880946447025y_3(t-4) \\
&+0,002141111040785y_3(t-5) - 0,000326921099374y_3(t-6)
\end{aligned}$$