



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

CONTROL DE VIBRACIONES EN EDIFICIOS  
CON BASE EN ESTIMADORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL

P R E S E N T A:

MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ILLESCAS

TUTOR:

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

MÉXICO, D.F. 2011



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Yu Tang Xu

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Vocal: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. José Alberto Escobar Sánchez

2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

TUTOR DE TESIS:

---

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Sistemas pasivos . . . . .	6
1.2. Sistemas activos . . . . .	7
1.3. Sistemas semi-activos . . . . .	8
1.4. Estado del arte . . . . .	8
1.5. Motivación y objetivo . . . . .	10
1.6. Metodología y organización . . . . .	12
<b>2. Modelado</b>	<b>15</b>
2.1. Modelo de amortiguadores magnetoreológicos . . . . .	15
2.2. Modelo de estructura . . . . .	18
<b>3. Observador adaptable</b>	<b>21</b>
3.1. Modelo en espacio de estados y parametrización . . . . .	21
3.2. Observador adaptable . . . . .	23
<b>4. Controlador y observador en lazo cerrado</b>	<b>33</b>
4.1. Controlador . . . . .	34
4.2. Control y observador . . . . .	37
<b>5. Simulación numérica</b>	<b>52</b>
5.1. Parámetros y valores iniciales . . . . .	52
5.2. Resultados . . . . .	56
<b>6. Conclusiones</b>	<b>72</b>

# Resumen

En esta tesis se trata el tema de la protección de edificios por medio de dispositivos semiactivos. Se propone un esquema observador-controlador en lazo cerrado para el modelo dinámico de una estructura civil equipada con un amortiguador magnetoreológico (AMR). El observador estima las señales de posición y velocidad de la estructura y el estado interno del amortiguador considerando que la estructura civil sólo dispone de sensores de aceleración. El controlador disminuye el daño que puede ocasionar un sismo sobre una estructura.

El modelo del AMR es no lineal debido a la fuerza de fricción interna cuyo análisis se basa en el modelo de fricción LuGre. La estructura civil se modela como un sistema lineal de masas-resortes-amortiguadores.

El observador propuesto, basado en el trabajo de (Jiménez 2006), es de tipo adaptable, estima los estados y parámetros del sistema que pueden ser utilizados para el control y análisis de fallas de la estructura. Una ventaja de este observador es que no requiere de transformaciones del sistema obteniendo los estados de forma directa. Por medio de una parametrización del sistema se pueden obtener las constantes de rigidez, amortiguamiento y los parámetros del AMR.

El controlador propuesto se basa en el análisis de Lyapunov siendo su estructura más sencilla y de fácil implementación en comparación con los sistemas de control que se obtienen de utilizar otras técnicas de diseño. Su eficiencia se evalúa simulando una estructura sometida al sismo de 7.8  $M_L$  de Santiago, Chile en 1985.

El sistema, el controlador y el observador en retroalimentación resultan en un sistema no lineal para el que no aplica el principio de separación (Khalil 1996).

Se realizó el análisis de estabilidad del sistema conjunto a través de técnicas de Lyapunov y pasividad para concluir con la convergencia en los estimados de los estados y la posición de equilibrio. La convergencia paramétrica está sujeta a la condición de excitación persistente.

Finalmente, se presentan resultados de simulación que confirman los hallazgos teóricos y que indican una reducción sustancial en la amplitud de los desplazamientos de los pisos de la estructura.

# Capítulo 1

## Introducción

La importancia de los sistemas de protección para estructuras civiles ante perturbaciones sísmicas, radica en que los desastres ocasionados por los sismos se deben en mayor parte al daño estructural o colapso de las construcciones civiles. Ejemplos de sismos relevantes y de grandes repercusiones son: el sismo de 8.1 [ $M_L$ ], grados Richter, ocurrido en la ciudad de México en 1985, el sismo de 6.7 [ $M_L$ ] en Los Ángeles, California en 1994, el sismo de 7 [ $M_L$ ] en Haití en el 2010 y el sismo de 9.0 [ $M_L$ ] en Japón en 2011. Dichos sistemas de protección civil disipan parte de la energía inducida por los sismos, con el propósito de mantener las aceleraciones, velocidades y desplazamientos de la estructura dentro de ciertos límites que proporcionan seguridad. Una forma de clasificar los sistemas de protección es con base en el tipo de actuadores que utilizan, siendo los sistemas pasivos aquellos que no proporcionar energía o fuerzas de control sobre la estructura, mientras los sistemas activos lo hacen con ayuda de una señal de control.

### 1.1. Sistemas pasivos

Un sistema pasivo, ampliamente utilizado en ingeniería civil, es el aislamiento sísmico que consiste en separar parcialmente la estructura del movimiento del suelo mediante mecanismos flexibles entre su base y el suelo. Con el aislamiento sísmico se modifica el periodo fundamental de la estructura de tal forma que sea mayor al que se obtendría de unirla de forma fija al suelo reduciendo la influencia del sismo y por consecuencia haciendo menor su daño (Zevallos *et al.* 2002).

Los dispositivos utilizados en el aislamiento sísmico se dividen en dos grupos básicos que son los apoyos elastoméricos y los apoyos deslizantes. Los apoyos elastoméricos cuentan con una gran flexibilidad lateral que permite su movimiento en dicha dirección mientras que poseen una amplia rigidez vertical. Los apoyos deslizantes permiten disipar energía por medio de fuerzas de rozamiento presentes dentro de su superficie deslizante.

Actualmente el aislamiento sísmico ha sido implementado y probado, obteniendo buenos resultados, en edificios importantes como el *Fire Command and Control Facility* en Los Ángeles, el hospital de docencia de la Universidad de Southern California (Weber *et al.* 2006) y la Torre Mayor de la ciudad de México.

La desventaja del aislamiento sísmico se da en que su capacidad de reducir la respuesta estructural es limitada dependiendo del contenido en frecuencias de la excitación.

## 1.2. Sistemas activos

Los sistemas activos tienen la característica de modificar en tiempo real las propiedades de una estructura por medio de señales de control de tal forma que la estructura adapte su comportamiento ante la presencia de un sismo. Las señales de control son aplicadas a actuadores que pueden ser principalmente masas o arriostres activos.

Las masas activas forman parte de la estructura y se controlan de tal forma que su movimiento contrarresta los efectos de los sismos. Estos dispositivos logran en general una mejor respuesta que los sistemas pasivos pero requieren a cambio grandes cantidades de energía.

Una primera aplicación del sistema activo se logra en el edificio *Kyobashi Seiwa* de Tokio, Japón construido en 1989 (Weber *et al.* 2006). El sistema se forma de dos osciladores de masa activa, uno controla el movimiento transversal y otro reduce los movimientos torsionales que pueden producir los sismos y los vientos fuertes.

### 1.3. Sistemas semi-activos

Una clase de sistemas que reúnen las ventajas de los sistemas activos pero sin la necesidad de grandes cantidades de energía, son los sistemas semi-activos. Estos sistemas no suministran fuerzas de control a la estructura sino que poseen propiedades que pueden ser controladas con el fin de modificar su capacidad de disipación de energía.

Dentro de los actuadores, que actualmente son más estudiados, están los amortiguadores magnetoreológicos (AMRs) y los electroreológicos (AERs). Ambos amortiguadores cuentan con un fluido interno que modifica sus propiedades por medio de un campo magnético en los AMRs y un campo eléctrico en los AERs. En caso de no disponer de energía, los amortiguadores trabajan como sistemas pasivos.

Los AMRs son más utilizados en la protección de grandes estructuras civiles al ofrecer una respuesta más rápida (menos de 10 ms), una mayor resistencia a la fluencia (hasta 100 kPa) y requerir una menor potencia de trabajo (12 V y 1 A) en comparación con los AERs de mismas dimensiones (Spencer *et al.* 1996). Ejemplos de estructuras que cuentan con AMRs son los puentes *Dongting* en China, *Eiland* en Holanda y *Dubrovnik* en Croacia (Weber *et al.* 2006).

### 1.4. Estado del arte

Un problema, en los sistemas de protección con AMRs, consiste en obtener la señal de control adecuada que disminuya lo mejor posible las perturbaciones sísmicas en las estructuras. Se han propuesto esquemas de diseño basados en control óptimo (Fu *et al.* 1999), donde se logra atenuar hasta un 50 % las vibraciones de una estructura de seis pisos a través de cuatro AMRs ubicados en el primer y segundo pisos. Un control basado en análisis de Lyapunov (Alvarez y Jiménez 2003) considera como perturbación singular la dinámica del amortiguador, al ser más rápida que la de una estructura. Dicho controlador reduce el efecto del sismo *El Centro* sobre una estructura de seis pisos, en un 80 %. En 2003 (Alvarez-Icaza y Méndez 2003) presentan un sistema de control basado en el análisis en frecuencia, de la excitación sísmica a la que es sujeta la estructura, logrando resultados de atenuación mejores que los obtenidos por técnicas de LQR.



Un sistema de control propuesto por (Cornejo y Alvarez 2006) consiste en obtener la ley de control a través de técnicas de pasividad como IDA (*interconnection and damping assignment*). Las propiedades de la estructura, representadas en ecuaciones hamiltonianas, se modifican formando un sistema virtual con el cual se obtiene una ley de control que, en una estructura de tres pisos sujeta al sismo de 1985 de la ciudad de México, logra atenuar hasta un 98 % la perturbación sísmica.

Algunas otras técnicas de control sísmicas son *backstepping* presentado por (Villamizar *et al.* 2005) donde muestran que los valores pico en la aceleración de los seis pisos de una estructura son menores que los obtenidos con técnicas de Lyapunov, o pasividad. En 2006 (Furuki *et al.* 2006) proponen un sistema de control adaptable donde además se estiman los parámetros del AMR y se obtienen mejores resultados en la atenuación de perturbaciones. También se han utilizado técnicas de control por lógica difusa (Kim y Langari 2007) y control  $H_\infty$  (Zapateiro *et al.* 2009).

En gran parte de los esquemas de control se proponen sistemas de identificación de parámetros y estados del amortiguador considerando conocidos los de la estructura. No obstante, la mayoría de los controladores requieren del conocimiento de las posiciones, velocidades y los parámetros estructurales algunos ejemplos claros son el esquema de control basado en el análisis de Lyapunov (Jansen y Dyke 2000), el control basado en análisis de perturbaciones singulares (Alvarez y Jiménez 2003) y el esquema adaptable (Cetin *et al.* 2009) entre otros.

(Alvarez y Jiménez 2002) proponen un esquema adaptable de identificación de parámetros del sistema estructura-amortiguador (SEA) verificando la eficiencia del algoritmo al obtener las frecuencias fundamentales de una estructura de tres grados de libertad (GDL). De igual manera se demuestra que en una estructura de seis GDL se pueden obtener las primeras frecuencias con un modelo reducido utilizando una menor cantidad de mediciones lo cual representa un ahorro en términos de instrumentación y procesamiento de datos. En 2006 los mismos autores proponen un sistema que estima tanto los estados como los parámetros del sistema SEA.

Las estrategias de control con AMRs pueden mostrar buenos resultados en comparación con los sistemas pasivos. Sin embargo, un mayor rendimiento implica leyes de control con una estructura compleja en comparación a los primeros diseños que consistían del encendido y apagado de los AMRs. Un esquema de control basado en la teoría de Lyapunov propuesto por (Alvarez y Jiménez 2003), demuestra un rendimiento aceptable al disminuir hasta un 80 % las perturbaciones sísmicas en una estructura equipada con un AMR entre la base y su primer piso. Dicho controlador es de fácil implementación al estar dado por una simple ecuación algebraica que depende de los estados y un conjunto mínimo de parámetros de la estructura y AMR.

En este trabajo de tesis se conjunta un controlador que disminuye el efecto de las aceleraciones sísmicas sobre una estructura civil y un observador que estima las señales de desplazamiento y velocidad en cada piso de la estructura en conjunto con los parámetros de dicha estructura y del amortiguador. Para abordar esto, se plantea lo siguiente.

## 1.5. Motivación y objetivo

### Motivación

Son muchos los artículos relacionados con controladores que disminuyen los efectos sísmicos en estructuras civiles, a través de esquemas de control semiactivos o activos. Los sistemas de control dependen del conocimiento de los estados y parámetros del sistema, lo cual en una estructura civil no siempre es posible ó representa aumento en los costos. Las mediciones requieren de sensores cuya cantidad aumenta conforme el número de pisos de la estructura. Además, se requieren sistemas de adquisición y procesamiento de datos, aunados a su mantenimiento.

El uso de sensores de aceleración y sistemas de observación de estados representa una alternativa para obtener las posiciones y velocidades de cada piso en una estructura, reduciendo el gasto en instrumentación y mantenimiento. Una razón para preferir el uso de sensores de aceleración en lugar de posición es que estos últimos deben estar aislados del ruido que al derivarse provoca errores en las mediciones de velocidad y aceleración.

En el caso de los parámetros sólo se cuenta con la información a priori obtenida durante el diseño de la estructura. Estos parámetros varían con el tiempo debido a factores externos como las cargas causadas por los sismos, el daño estructural y los cambios causados con su uso. Una forma de determinarlos es mediante sistemas de identificación o estimación ya sea fuera de línea o en tiempo real, cuando la estructura se ve afectada por una perturbación sísmica. El costo computacional de estimar los parámetros depende principalmente de las dimensiones estructurales y del modelo dinámico empleado en su representación.

En cuanto al AMR sólo se disponen de los parámetros proporcionados por el fabricante debiendo con ello realizar su caracterización a través de pruebas experimentales para verificar el valor de tales parámetros.

En el trabajo de (Furuki *et al.* 2006) se estiman los parámetros del amortiguador mientras los de la estructura se consideran conocidos, siendo un problema de la ingeniería civil conocer el comportamiento dinámico de una estructura civil.

## Objetivo

El objetivo general es establecer un método de atenuación en el daño de una estructura civil a causa de señales sísmicas, con amortiguadores magnetoreológicos, y proponer un observador que estime los estados y parámetros del sistema. Estos puntos se organizan de la siguiente forma

- Establecer un controlador que disminuya la perturbación sísmica sobre una estructura civil. Al atenuar el movimiento de la estructura, se previenen los daños que pueden causar el sismo
- Conjuntar con el controlador un sistema de estimación, el cual permita obtener las señales de posición y velocidad de la estructura mismas que son necesarias por el controlador
- Obtener a través del estimador los parámetros de la estructura al permitir obtener su dinámica. Las frecuencias de la estructura se obtienen con tales parámetros y pueden ser utilizadas en la detección de fallas o detección de daño en las estructuras civiles

- Tanto el controlador como el observador deben garantizar su funcionamiento en tiempo real y en retroalimentación con el sistema de la estructura y amortiguador. Para garantizar esto, es necesario demostrar la estabilidad del sistema.

## 1.6. Metodología y organización

Para abordar los puntos anteriores, se plantea la siguiente metodología de trabajo, misma que establece la organización de tesis.

- Capítulo 2. Modelado

Los modelos dinámicos de estructuras civiles se basan ya sea en análisis de parámetros distribuidos o concentrados. Los modelos de parámetros distribuidos proporcionan con mayor exactitud el comportamiento de un sistema a cambio de un análisis matemático con ecuaciones diferenciales parciales. Un modelo de parámetros concentrados es de un análisis matemático más simple al estar dado por ecuaciones diferenciales ordinarias

Considerando que el observador estima los parámetros de la estructura, un modelo matemático de parámetros concentrados puede representar adecuadamente el comportamiento de la estructura al aproximar en tiempo real sus parámetros a los reales de acuerdo al modelo

El AMR presenta un comportamiento no lineal, del cual se han propuesto modelos dinámicos basados en la existencia de una fuerza de fricción interna causada por el fluido magnetoreológico presente en su interior. El modelo de selección debe por tanto representar el comportamiento del AMR adecuadamente a la vez que debe facilitar el análisis matemático en comparación a los otros modelos de la literatura

En el segundo capítulo se presenta el modelo de la estructura y amortiguador que se seleccionan y sobre los cuales el controlador y observador son presentados.

- Capítulo 3. Observador adaptable

En el tercer capítulo se presenta un observador adaptable a través del cual se obtienen las señales de posición y velocidad de cada piso de la estructura. Además se estiman los parámetros del sistema estructura y amortiguador. Se presenta la prueba de estabilidad, basada en análisis de Lyapunov, que garantiza la convergencia de los estados es asintótica mientras se garantiza que los parámetros permanecen acotados.

- Capítulo 4. Controlador y observador en lazo cerrado

En el cuarto capítulo se presenta el sistema de control a través del cual se busca reducir el efecto de un sismo sobre las estructuras civiles. El controlador se selecciona con base en un planteamiento práctico donde se toma en cuenta poder implementarlo de manera fácil en comparación con otros controladores basados en otras técnicas de control. Se plantea el análisis de estabilidad entre el controlador y el sistema de estructura y amortiguador, a través de análisis de Lyapunov

Como siguiente paso, se analiza la estabilidad conjunta del controlador y observador garantizando una estabilidad asintótica de los estados y una convergencia de parámetros que garantiza estos permanecen acotados. En conjunto con la demostración de estabilidad, se muestra que las trayectorias del sistema se encuentran más cercanas al origen cuando se dispone del controlador que cuando no.

- Capítulo 5. Simulación numérica

En el quinto capítulo se presentan las simulaciones con las cuales se evalúa el desempeño del controlador y observador. Se utiliza como registro sísmico el de Santiago de Chile en 1985. Por medio de la selección de las matrices de ganancia del observador y la ganancia del controlador, se realizan simulaciones con una estructura sometida a tal sismo y con el AMR. Los resultados de atenuación de vibraciones en la estructura y los resultados de estimación tanto de estados como de parámetros son presentados. Se obtienen con los parámetros las frecuencias fundamentales de la estructura las cuales pueden ser utilizadas para detección de daño o fallas en tal sistema.

- Capítulo 6. Conclusiones

Se muestran los resultados obtenidos acorde al objetivo inicial de la tesis. Se analizan los resultados y se concluye sobre ellos.

## Capítulo 2

# Modelado

En esta sección se describe el comportamiento de los AMRs, se presenta un modelo que reproduce su comportamiento teniendo como ventajas una estructura simple con una cantidad menor de parámetros en comparación con varios de los modelos que se encuentran en la literatura.

Finalmente se describe el modelo del sistema estructura-amortiguador a partir del cual se desarrollan, en los capítulos siguientes, un observador de parámetros y un sistema de control.

### 2.1. Modelo de amortiguadores magnetoreológicos

Los fluidos magnetoreológicos constan de un fluido no magnetizable (como el aceite) que funciona como portador de una suspensión de partículas ferromagnéticas (como el hierro) cuya polarización puede ser influenciada por un campo magnético externo. Cuando la magnitud del campo magnético aumenta, incrementa el número de partículas polarizadas, las cuales se ajustan a las líneas del campo y forman cadenas que incrementan la resistencia a la fluencia del fluido presentando un comportamiento semi-sólido. El esfuerzo de fluencia del fluido es proporcional al campo magnético aplicado (Weber *et al.* 2006).

La dinámica de los fluidos magnetoreológicos depende de factores como la temperatura de trabajo, fenómenos de sedimentación, la concentración de partículas ferromagnéticas, la viscosidad del fluido portador, etc. (Kopcansky *et al.* 2010). Debido a la dificultad que conlleva representar

el comportamiento de los fluidos magnetoreológicos, se han propuesto modelos dinámicos basados en el análisis de la fuerza de fricción la cual permite reproducir fenómenos de histéresis con respecto al desplazamiento o velocidad tal como ocurre en dichos fluidos.

La fuerza de fricción en varios casos prácticos se representa con un modelo estático el cual puede tener como componentes una fuerza de fricción de Coulomb, una fuerza de fricción viscosa y una fuerza de fricción estática. Sin embargo, los modelos estáticos no reproducen los fenómenos de histéresis y no son tan precisos como lo pueden ser los modelos dinámicos.

Los AMRs por tanto presentan un comportamiento no lineal y de histéresis debido a la fuerza de fricción interna causada por el flujo magnetoreológico por lo cual su modelado es el primer problema en el diseño de sistemas de protección de estructuras civiles ante perturbaciones sísmicas. Una primera representación del modelo de AMRs fue propuesta por (Spencer Jr *et al.* 1997). El modelo propuesto se da con base al modelo de estructura Bouc-Wen cuyo esquema y ecuación de fuerza se muestran en la Figura 2.1 y conjunto de ecuaciones (2.1)

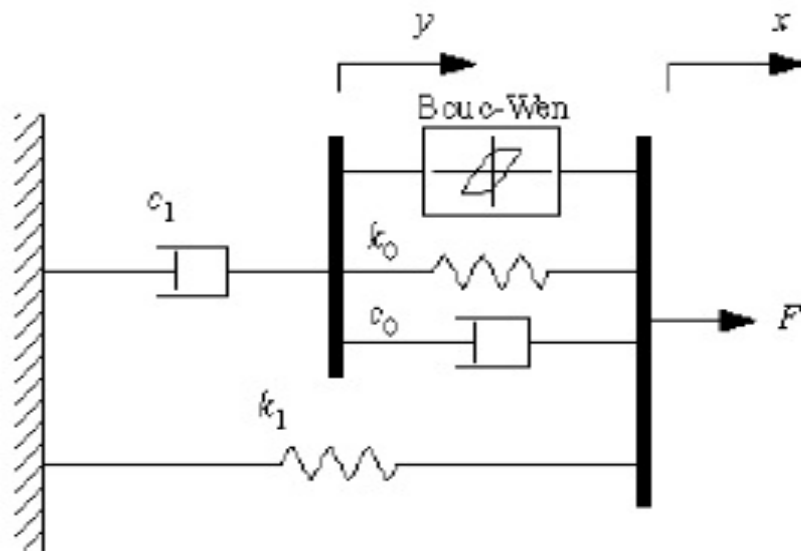


Figura 2.1: Esquema Bouc-Wen y modelo AMR



$$c_1 \dot{y} = \alpha z + k_0(x - y) + c_0(\dot{x} - \dot{y}) \quad (2.1a)$$

$$\dot{z} = -\sigma |\dot{x} - \dot{y}| z |z|^{n-1} - \beta(\dot{x} - \dot{y}) |z|^n + A(\dot{x} - \dot{y}) \quad (2.1b)$$

$$f = \alpha z + c_0(\dot{x} - \dot{y}) + k_0(x - y) + k_1(x - x_0) \quad (2.1c)$$

$$\alpha = \alpha(u) = \alpha_a + \alpha_b u \quad (2.1d)$$

$$c_0 = c_0(u) = c_{0a} + c_{0b} u \quad (2.1e)$$

$$c_1 = c_1(u) = c_{1a} + c_{1b} u \quad (2.1f)$$

donde  $u$  es la señal de voltaje de amortiguador. Este modelo tiene como ventaja el representar adecuadamente el comportamiento de histéresis, como sucede en la curva de fuerza contra velocidad en el amortiguador descrita en la misma referencia. Sin embargo, la no linealidad y la cantidad de parámetros que requiere dificulta su análisis.

A partir del modelo de fricción de LuGre (Canudas *et al.* 1995) se han propuesto modelos casi tan exactos como el de Bouc-Wen pero con una cantidad menor de parámetros y una ecuación diferencial más simple. El modelo de fricción de LuGre tiene la estructura

$$\dot{z} = v - \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2.2a)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \quad (2.2b)$$

donde  $z$  representa la deflexión promedio entre un conjunto de cerdas en contacto y  $v$  su velocidad relativa de tal manera que  $F$  es la fuerza de fricción. Los parámetros son constantes de rigidez y amortiguamiento. Un modelo basado en el de Canudas es el que presentaron (Alvarez y Jiménez 2002), este modelo añade el efecto de la señal de voltaje como la entrada del amortiguador teniendo la siguiente estructura

$$f = \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x} \quad (2.3a)$$

$$\dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z (1 + a_1 v) \quad (2.3b)$$

donde  $f$  es la fuerza en el amortiguador,  $\dot{x}$  la velocidad entre los extremos del amortiguador y  $z$  representa su estado interno promedio de la deflexión de las cerdas. La variable  $v$  representa el

voltaje a la entrada del AMR. Los parámetros  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $a_0$  y  $a_1$  son constantes.

En la mayor parte de los trabajos en protección civil, se considera la dinámica de los AMRs dada por uno de estos modelos o sus variantes. En este trabajo se tomará en cuenta un modelo equivalente al de las ecuaciones (2.3) el cual está dado por

$$f = v_0 z v + v_1 m_1 \dot{z} + v_2 \dot{x}_1 \quad (2.4a)$$

$$\dot{z} = \dot{x}_1 - \mu(v) |\dot{x}_1| z \quad (2.4b)$$

$$\mu(v) = \frac{1}{m_1} (\rho_0 + \rho_1 v) > 0 \quad (2.4c)$$

donde  $v_0$  [ $N/V.m$ ],  $v_1$  [ $1/s$ ],  $v_2$  [ $Ns/m$ ]  $\rho_0$  [ $kg/m$ ] y  $\rho_1$  [ $kg/(V.m)$ ] son parámetros constantes. La función  $\mu(v)$  tiene una cota superior  $\mu_{max}$  para todo valor de la señal de voltaje  $v \in [0, v_{max}]$  donde  $v_{max}$  es el voltaje máximo aplicable al AMR. Cabe señalar que este modelo ya fue validado previamente en el trabajo de (Alvarez y Jiménez 2002) donde se verificó su eficiencia al representar apropiadamente el comportamiento de los AMRs.

## 2.2. Modelo de estructura

Considerando que una estructura está formada por varios elementos cuyo comportamiento se da a través de parámetros distribuidos, obtener su modelo matemático resulta una tarea ardua y es por ello que se requiere utilizar representaciones de parámetros concentrados que aproximen su comportamiento dentro de un criterio de aceptación. Para este caso, se recurre a las ecuaciones de una estructura civil de  $n$  GDL descritas por (Chopra 1995). En estas ecuaciones las masas se consideran concentradas. Así mismo, se considera que los elementos de soporte horizontal son rígidos y sin deformación elástica. La estructura se representa como un conjunto de masas, resortes y amortiguadores en serie, Figura 2.3, donde la disipación de energía está dada por el factor de amortiguamiento entre los niveles de cada piso. Se considera también que la única excitación de la estructura es la presente en su base debido a la componente de aceleración sísmica, misma que afecta el suelo sobre el cual se encuentra la estructura, dicho de otra forma, la estructura se encuentra empotrada al suelo.

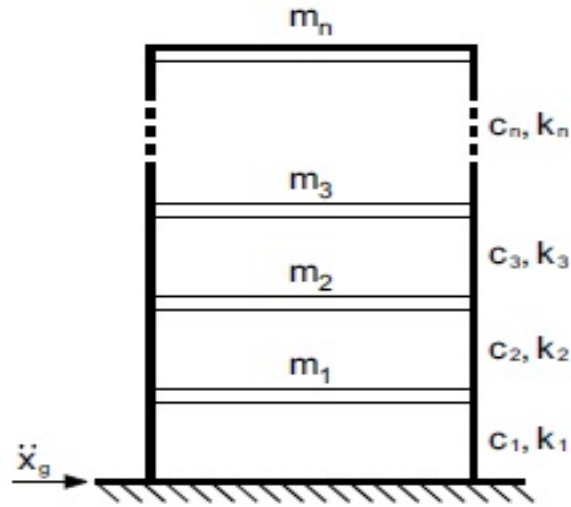


Figura 2.2: Estructura de  $n$  grados de libertad

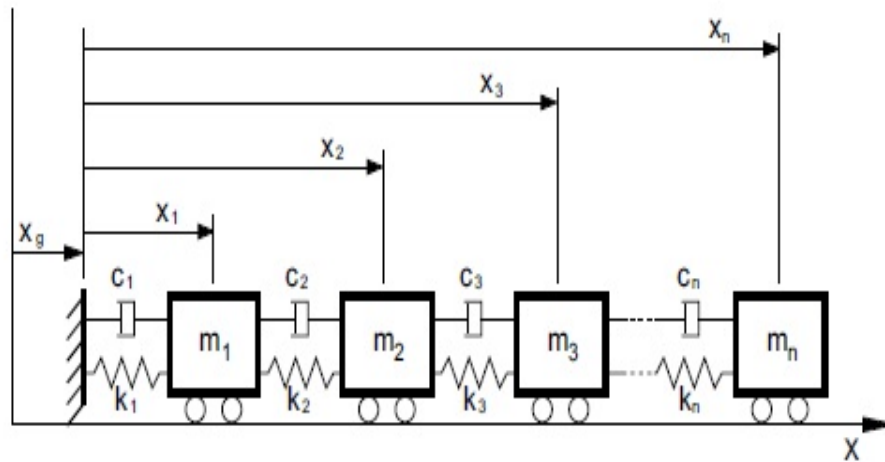


Figura 2.3: Modelo mecánico de una estructura de  $n$  GDL

Bajo estas consideraciones las ecuaciones que rigen la dinámica de la estructura son de la forma

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + B_f f = -M\ddot{x}_g \quad (2.5)$$

donde

$$M = M^T = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

$$C = C^T = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

$$K = K^T = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

La matriz  $M$  tiene cada una de las masas de los  $n$  pisos de la estructura, las matrices  $K$  y  $C$  representan los factores de rigidez y amortiguamiento de la estructura mientras el término  $M\ddot{x}_g$  representa la fuerza ejercida por el sismo sobre ella. La acción del AMR está en la matriz  $B_f = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}_{n \times 1}$ . Las matrices  $M$ ,  $K$  y  $C$  son simétricas y positivas definidas, es decir,  $M = M^T > 0$ ,  $K = K^T > 0$ ,  $C = C^T > 0$ . Los vectores  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}_{n \times 1}$  y  $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]^T \in \mathbb{R}_{n \times 1}$  corresponden, respectivamente, a las posiciones y velocidades de cada uno de los  $n$  pisos de la estructura.

## Capítulo 3

# Observador adaptable

En este capítulo se presenta un observador adaptable, basado en el trabajo previo de (Jiménez 2006), para una estructura civil de  $n$  grados de libertad equipada con un amortiguador magnetoreológico entre su base y su primer piso con la premisa de contar con las mediciones de aceleración de cada uno de sus pisos en todo instante de tiempo. Las señales que se estiman son la posición y velocidad de cada piso así como los parámetros de la estructura y del amortiguador. La ventaja de este observador es que no requiere una forma canónica, permitiendo obtener de forma directa señales físicas del sistema las cuales pueden utilizarse en otros análisis de tipo estructural. Para verificar el funcionamiento del observador se realizan simulaciones con los datos de una estructura civil y un amortiguador magnetoreológico específicos.

### 3.1. Modelo en espacio de estados y parametrización

Definiendo el vector de estados  $\xi = [x^T, \dot{x}^T, z]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , donde  $z$  es el estado interno del amortiguador, la ecuación (2.5) se puede expresar como un sistema de variables de estado y es de la forma

$$\dot{\xi} = A\xi + BT\theta_n|\dot{x}_1|z + \Pi\ddot{x}_g \quad (3.1a)$$

$$\psi = D\xi + bT\theta_n|\dot{x}_1|z \quad (3.1b)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n & 0 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_q & 0 \\ 0^T & L & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ -v & v_1 & v_1 v \\ 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0 & -1 & -v \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\dot{x}_1|} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta_n = \begin{bmatrix} \frac{v_0}{m_1} \\ \frac{\rho_0}{m_1} \\ \frac{\rho_1}{m_1} \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} \\ -l^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [ -M^{-1}K \quad -M^{-1}C_q \quad 0_{n \times 1} ] \quad b = \begin{bmatrix} -v & v_1 & v_1 v \\ 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$C_q = C + \begin{bmatrix} -\frac{v_1 m_1 + v_2}{m_1} & 0_{1 \times n-1} \\ 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} \end{bmatrix} \quad L = [ 1 \quad 0_{1 \times n-1} ]$$

$$l = [ 1_{1 \times n} ]$$

con  $0_{n \times n}$  una matriz de ceros de dimensión  $n \times n$  y  $I_n$  una matriz unitaria de dimensión  $n$ . La salida  $\psi$  del sistema representa las aceleraciones de cada uno de los pisos. Las dimensiones de las matrices son:  $A \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 2n+1}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 3}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\theta_n \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $\Pi \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 1}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times 2n+1}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ ,  $C_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  y  $l \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

La forma diagonal de las matrices  $M$ ,  $K$  y  $C$  permite parametrizar al sistema de la siguiente forma

$$\psi = U\theta \tag{3.2}$$

donde la matriz  $U$  está definida por

$$U = [U_k, U_c, U_z, U_f]$$

$$U_k = - \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$U_c = - \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_1 - \dot{x}_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_2 - \dot{x}_1 & \dot{x}_2 - \dot{x}_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{x}_3 - \dot{x}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$U_z = \begin{bmatrix} -zv \\ 0_{n-1} \end{bmatrix} \quad U_f = \begin{bmatrix} v_1|\dot{x}_1|z & v_1|\dot{x}_1|zv \\ 0_{n-1} & 0_{n-1} \end{bmatrix}$$

mientras el conjunto de parámetros  $\theta = [\theta_k^T, \theta_c^T, \theta_z^T, \theta_f^T]^T$  se define como

$$\theta_k = \left[ \frac{k_1}{m_1} \quad \frac{k_2}{m_1} \quad \frac{k_2}{m_2} \quad \frac{k_3}{m_2} \quad \frac{k_3}{m_3} \quad \cdots \quad \frac{k_n}{m_n} \right]^T$$

$$\theta_c = \left[ \frac{c_1 + v_1 m_1 + v_2}{m_1} \quad \frac{c_2}{m_1} \quad \frac{c_2}{m_2} \quad \frac{c_3}{m_2} \quad \frac{c_3}{m_3} \quad \cdots \quad \frac{c_n}{m_n} \right]^T$$

$$\theta_z = \left[ \frac{v_0}{m_1} \right] \quad \theta_f = \left[ \frac{\rho_0}{m_1} \right]$$

es de observar que  $-M^{-1}K = \theta_k U_k$  y  $-M^{-1}C = \theta_c U_c$ .

Las dimensiones de las matrices son:  $U \in \mathbb{R}^{n \times 4n+1}$ ,  $U_k \in \mathbb{R}^{n \times 2n-1}$ ,  $U_c \in \mathbb{R}^{n \times 2n-1}$ ,  $U_z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $U_f \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^{4n+1 \times 1}$ ,  $\theta_k \in \mathbb{R}^{2n-1 \times 1}$ ,  $\theta_c \in \mathbb{R}^{2n-1 \times 1}$ ,  $\theta_z \in \mathbb{R}$  y  $\theta_f \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ .

### 3.2. Observador adaptable

Toda estructura diseñada bajo las normas actuales de la ingeniería civil se considera estable al permanecer en un régimen elástico, sin la presencia de la perturbación sísmica. Si la estructura civil se considera como un sistema estable tal que sus trayectorias tienden al punto de equilibrio  $\xi = O_{2n+1}$ , se puede afirmar que la matriz  $A$  es de tipo Hurwitz, sus valores propios tienen parte real negativa. Si las matrices  $M$ ,  $K$  y  $C$  conservan la estructura propuesta se puede garantizar que el par  $(A, D)$  es observable (Jiménez 2006).

Conociendo las aceleraciones absolutas de cada uno de los pisos y la aceleración de la base de la estructura y con las consideraciones enunciadas, se propone el siguiente observador adaptable

$$\dot{\hat{\xi}} = \hat{A}\hat{\xi} + B\hat{\theta}_n|\dot{\hat{x}}_1|\hat{z} + \Pi\ddot{x}_g + J\tilde{\psi} \quad (3.3a)$$

$$\dot{\hat{\psi}} = \hat{D}\hat{\xi} + b\hat{\theta}_n|\dot{\hat{x}}_1|\hat{z} = \hat{U}\hat{\theta} \quad (3.3b)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{1}{\phi^2}\Upsilon\hat{U}^T\tilde{\psi}, \Upsilon = \Upsilon^T > 0 \quad (3.3c)$$

$$\dot{\Upsilon} = -\frac{1}{\phi^2}\Upsilon\hat{U}^T\hat{U}\Upsilon, \Upsilon(0) = \Upsilon_0 > 0 \quad (3.3d)$$

donde el símbolo  $\hat{*}$  representa el valor estimado de la señal  $*$ . Las matrices estimadas  $\hat{A}$  y  $\hat{D}$  se construyen con los parámetros estimados  $\hat{\theta}$ . La matriz  $J \in \mathbb{R}^{2n+1 \times n}$  es la matriz de ganancia del observador. La matriz  $\Upsilon$  es la matriz de covarianza de la ley de adaptación de los parámetros tal como en el algoritmo de mínimos cuadrados.

El término de normalización  $\phi^2$  garantiza que los parámetros permanecen acotados y se elije como

$$\phi^2 = \phi_0 + v_s^2$$

con  $\phi_0$  un número real mayor ó igual a uno y  $v_s \geq 0$  es una señal de normalización tal que  $\frac{\dot{U}}{\phi} \in L_\infty$ .

Este observador se toma del trabajo de (Jiménez 2006) donde la estructura es la misma, con la diferencia en las matrices del sistema. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $b$ ,  $\theta$  y  $\theta_n$ , y sus estimados, son diferentes al utilizar el modelo (2.4), del amortiguador.

Para analizar la estabilidad del observador, se considera lo siguiente

- La existencia de cotas superiores para la señal  $v$  de voltaje, la función  $\mu$  y la velocidad de desplazamiento del primer piso representadas, respectivamente, por  $v_{max}$ ,  $\mu_{max}$  y  $\dot{x}_{1_{max}}$

La variable  $v$  tiene como cota superior el voltaje máximo del amortiguador,  $v_{max}$ . La función  $\mu(v) = \frac{1}{m_1}(\rho_0 + \rho_1 v)$  tiene cota superior puesto que  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $m_1$  y  $v$  son acotados.



La derivada  $\dot{x}_1$  tiene un valor finito considerando que la aceleración del terreno durante un sismo es acotada, como lo demuestran todos los registros sísmicos existentes.

- La matriz  $J$  se diseña tal que cumpla la siguiente desigualdad

$$\gamma I - 2JJ^T + JY^T + YJ^T \leq 0 \quad (3.4)$$

$$J_{2n+1,\{..\}} = [0_{1 \times n}] \quad (3.5)$$

$$J_{\{:,1\}} = [\check{0}_{1 \times n} \quad l \quad \check{0}_{1 \times n-1} \quad 0]^T \quad (3.6)$$

donde  $\gamma$  es un número real positivo,  $Y = [0_{n \times n} \quad I_{n \times n} \quad 0_{n \times 1}]^T$ ,  $I$  es una matriz identidad de dimensión  $2n + 1$ ,  $J_{2n+1,\{..\}}$  representa el último renglón de la matriz  $J$ ,  $J_{\{:,1\}}$  la primera columna de  $J$  y  $\check{0}$  satisface  $\|\check{0}\| < \epsilon$  con  $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$ .

Entonces se puede demostrar que existe una matriz  $S = S^T > 0$  que garantiza el error  $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$  en los estados es estable y los parámetros  $\hat{\theta}$  permanecen acotados. Esto se demuestra mediante el siguiente teorema

**Teorema 1** *Considere el sistema dinámico (3.1) y el observador (3.3) con la parametrización definida en (3.2). Si se cumplen las siguientes condiciones*

1.- *La matriz  $A$  tiene valores propios menores o iguales a cero*

2.- *Existe una matriz positiva definida  $S = S^T > 0$  que satisface*

$$S(Y - J) = D^T$$

3.- *Las señales  $v(t)$ ,  $\mu(v)$  y  $\dot{x}_1(t)$  están acotadas,  $\forall t \in [0, \infty)$ , por*

$$v_{max} \geq v(t) \geq 0$$

$$\mu_{max} \geq \mu(v) > 0$$

$$\dot{x}_{1_{max}} \geq |\dot{x}_1(t)|$$

4.- La excitación del sistema es lo suficientemente persistente para estimar apropiadamente los parámetros  $\frac{\rho_0}{m_1}$  y  $\frac{\rho_1}{m_1}$  de tal forma que

$$\hat{\mu}_{max} \geq \hat{\mu}(v) = \frac{\hat{\rho}_0}{m_1} + \frac{\hat{\rho}_1}{m_1}v > 0$$

5.- La matriz  $J$  se diseña tal que satisfaga las relaciones (3.4)-(3.6)

6.- Las condiciones iniciales en los estados  $\hat{z}$  y  $\dot{\hat{x}}_1$  satisfacen

$$|\hat{z}(0)| \leq z_0$$

$$|\dot{\hat{x}}_1(0)| \leq \dot{x}_{10}$$

donde  $z_0$  y  $\dot{x}_{10} \in \mathbb{R}$

entonces el error de los estados  $\tilde{\xi}$  es estable y los parámetros  $\hat{\theta}$  permanecen acotados

**Prueba 1** Expresar la matriz  $A$  del sistema como

$$A = A_e + A_z$$

$$A_z = \text{diag}(0, 0, \dots, \alpha\zeta^2)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C + C_p & 0 \\ 0 & L & -\alpha\zeta^2 \end{bmatrix}$$

donde  $\zeta^2$  es el valor propio máximo de la matriz  $S$  y  $\alpha > 0$ . La matriz  $S$  es simétrica positiva definida. El término  $\alpha\zeta^2$  garantiza que, para todo instante de tiempo, los valores propios de la matriz  $A_e$  tengan parte real negativa.

Con las consideraciones previas, la dinámica de error del sistema es de la forma

$$\dot{\tilde{\xi}} = (A_e - JD)\tilde{\xi} + (\tilde{A} - J\tilde{D})\hat{\xi} + (B - Jb)(T\theta_n|\dot{x}_1|z - \hat{T}\hat{\theta}_n|\dot{\hat{x}}_1|\hat{z}) + A_z\tilde{\xi}$$

y es la diferencia de  $\dot{\tilde{\xi}} = \dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}}$ .

La matriz  $B$  puede expresarse como  $B = I_b B$ , donde

$$I_b = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times n-1} & 0 \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 & 0_{1 \times n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz  $b$  puede expresarse en términos de  $B$  como  $b = NB$ , donde

$$N = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times n} \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n} \end{bmatrix}$$

entonces la dinámica de error se escribe de la forma

$$\dot{\tilde{\xi}} = (A_e - JD)\tilde{\xi} + (\tilde{A} - J\tilde{D})\hat{\xi} + J_n B(T\theta_n|\dot{x}_1|z - \hat{T}\hat{\theta}_n|\dot{x}_1|\hat{z}) + A_z \tilde{\xi}$$

donde  $J_n = I_b - JN$ .

A través la matriz  $Y$  que es

$$Y = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \end{bmatrix}^T$$

y al cumplirse las siguientes expresiones  $\tilde{A} = Y\tilde{D}$ ,  $J_y = Y - J$ , la dinámica del error está dada por

$$\dot{\tilde{\xi}} = (A_e - JD)\tilde{\xi} + J_y \tilde{D}\hat{\xi} + J_n B(T\theta_n|\dot{x}_1|z - \hat{T}\hat{\theta}_n|\dot{x}_1|\hat{z}) + A_z \tilde{\xi}$$

El término  $B(T\theta_n|\dot{x}_1|z - \hat{T}\hat{\theta}_n|\dot{x}_1|\hat{z})$  se expresa como función del error de observación  $\tilde{\xi}$  y el error en los parámetros estimados,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ , con

$$B(T\theta_n|\dot{x}_1|z - \hat{T}\hat{\theta}_n|\dot{x}_1|\hat{z}) = (F_1\tilde{\xi} + F_2\tilde{\theta})$$

tal que la dinámica de error se reduce a

$$\dot{\tilde{\xi}} = (A_e - JD)\tilde{\xi} + J_y \tilde{D}\hat{\xi} + J_n (F_1\tilde{\xi} + F_2\tilde{\theta}) + A_z \tilde{\xi} \quad (3.7)$$

donde las matrices  $F_1$  y  $F_2$  son

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & \mu v_1 \operatorname{sgn}(\dot{\hat{x}}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n-1} & \mu v_1 |\dot{\hat{x}}_1| - \mu_2 \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -\mu \operatorname{sgn}(\dot{\hat{x}}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n-1} & -\mu |\dot{\hat{x}}_1| \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times 4n-2} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times 4n-2} & -\hat{z}v & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z}v \\ 0_{n \times 4n-2} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times 4n-2} & 0 & -|\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} & -|\dot{\hat{x}}_1| \hat{z}v \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{\rho_0}{m_1} + \frac{\rho_1}{m_1} v \geq 0$$

$$\mu_2 = \frac{v_0 v}{m_1}$$

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T S \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Upsilon^{-1} \tilde{\theta} \quad (3.8)$$

y considerando las siguientes expresiones  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ ,  $\dot{\Upsilon}^{-1} = \Upsilon^{-1} \dot{\Upsilon} \Upsilon^{-1}$ ,  $\tilde{\psi} = \tilde{U} \tilde{\theta} + \hat{U} \tilde{\theta}$ , la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del error está dada por

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T S [J_y \tilde{D} \hat{\xi} + J_n (F_1 \tilde{\xi} + F_2 \tilde{\theta}) + A_z \tilde{\xi}]$$

$$- \frac{1}{\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \tilde{\theta} - \frac{3}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}$$

tal que al cumplirse las siguientes relaciones  $\theta^T \tilde{U}^T = \tilde{\xi}^T D^T + \tilde{\xi}^T F_3^T$  y  $\tilde{D} \hat{\xi} = \hat{U} \tilde{\theta} - F_4 \tilde{\theta}$  con

$$F_3^T = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & v_1 \mu \operatorname{sgn}(\dot{\hat{x}}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n-1} & v_1 \mu |\dot{\hat{x}}_1| - \mu_2 \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4n-2} & -\hat{z}v & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z}v \\ 0_{n-1 \times 4n-2} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}$$

entonces la derivada de la función de Lyapunov toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{3}{2\phi^2}\tilde{\theta}^T\hat{U}^T\hat{U}\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T[S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S]\tilde{\xi} \\ & + \tilde{\xi}^T S J_n F_1 \tilde{\xi} + \tilde{\xi} S [J_y \hat{U} - J_y F_4 + J_n F_2 - \frac{D^T \hat{U}}{\phi^2} - \frac{F_3^T \hat{U}}{\phi^2}] \tilde{\theta} + \tilde{\xi}^T S A_z \tilde{\xi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al desarrollar las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^T S J_y \hat{U} \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2}[\gamma_1^2 \phi^2 \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{1}{\gamma_1^2 \phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T J_y^T J_y \hat{U} \tilde{\theta}] \\ -\frac{1}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S D^T \hat{U} \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2}[\frac{\gamma_2^2}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{\lambda_D^2}{\gamma_2^2 \phi^2 \varsigma_{max}^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}] \\ -\frac{1}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S F_3^T \hat{U} \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2}[\frac{\gamma_3^2}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{\lambda_{F_{3max}}^2}{\gamma_3^2 \phi^2 \varsigma_{max}^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}] \end{aligned}$$

y al expresar la matriz  $F_4$  en términos de  $F_2$ ,  $F_4 = GF_2$ , donde

$$G = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times n} \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n} \end{bmatrix}$$

se puede comprobar que se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned} F_2^T (J_n - J_y G)^T (J_n - J_y G) F_2 & \leq \hat{U}^T \hat{U} \\ \tilde{\xi}^T S (J_n - J_y G) F_2 \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2}[\gamma_4^2 \phi^2 \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{1}{\gamma_4^2 \phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}] \end{aligned}$$

y que la derivada de la función de Lyapunov se reduce a la forma

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T[S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S]\tilde{\xi} + \gamma\tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} - \frac{\varpi}{2\phi^2}\tilde{\theta}^T\hat{U}^T\hat{U}\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T[SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S]\tilde{\xi} \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma & = \rho_z + \frac{1}{2}(\gamma_1^2 \phi^2 + \frac{\gamma_2^2}{\phi^2} + \frac{\gamma_3^2}{\phi^2} + \gamma_4^2 \phi^2) \\ \varpi & = 3 - \frac{\lambda_{J_y}^2}{\gamma_1^2} - \frac{\lambda_D^2}{\gamma_2^2 \varsigma_{max}^2} - \frac{\lambda_{F_{3max}}^2}{\gamma_3^2 \varsigma_{max}^2} - \frac{1}{\gamma_4^2} \end{aligned}$$

cabe señalar que las constantes  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  son números reales positivos que pueden elegirse para garantizar que

$$3 \geq \frac{\lambda_{J_y}^2}{\gamma_1^2} + \frac{\lambda_D^2}{\gamma_2^2 \varsigma_{max}^2} + \frac{\lambda_{F_3}^2}{\gamma_3^2 \varsigma_{max}^2} + \frac{1}{\gamma_4^2} \quad (3.11)$$

donde la letra  $\lambda$  representa el valor propio máximo de una matriz. Para el caso de  $\lambda_D^2$ ,  $\lambda_{F_3}^2$ ,  $\lambda_{J_y}^2$ , se considera el valor propio máximo de las matrices  $D^T D$ ,  $F_3^T F_3$  y  $J_y^T J_y$ , respectivamente.

De la ecuación (3.11), el valor propio de  $F_3$  se obtiene de analizar la estabilidad del estado estimado  $z$  cuya derivada es

$$\dot{\hat{z}} = \dot{\hat{x}}_1 - \hat{\mu}(v)|\dot{\hat{x}}_1|\hat{z} + J_{2n+1,\{\cdot\}}\tilde{\psi} \quad (3.12)$$

donde  $\hat{\mu}(v) = \frac{\hat{\rho}_0}{m_1} + \frac{\hat{\rho}_1}{m_1}v > 0$ .

Si se considera que los parámetros  $\frac{\rho_0}{m_1}$  y  $\frac{\rho_1}{m_1}$  son estimados correctamente y las condiciones iniciales en los estimados de  $z$  y  $|\dot{\hat{x}}_1|$  están, respectivamente, acotadas superiormente por  $z_0$  y  $\dot{x}_{10}$ , entonces, cuando el último renglon de la matriz  $J$  es cero, el punto de equilibrio solución de (3.12) es

$$\hat{z}_e = \frac{\text{sign}(\dot{\hat{x}}_1)}{\hat{\mu}(v)}$$

y es asintóticamente estable para toda  $\dot{\hat{x}}_1 \neq 0$ .

Cuando  $\dot{\hat{x}}_1 = 0$  el estimado de  $z$  no cambia con respecto al tiempo cumpliéndose además que  $|\hat{z}| \leq z_{max}$ .

El valor propio de  $F_3^T F_3$  se obtiene y es

$$\mu_1^2|\dot{\hat{x}}_1|^2 - 2\mu_1\mu_2|\dot{\hat{x}}_1| + \mu_2^2 + \mu_1^2\hat{z}^2\text{sign}^2(\dot{\hat{x}}_1) \geq 0 \quad (3.13a)$$

$$(\mu_1|\dot{\hat{x}}_1| - \mu_2)^2 + \mu_1^2\hat{z}^2\text{sign}^2(\dot{\hat{x}}_1) \geq 0 \quad (3.13b)$$

donde  $\mu_1 = \mu v_1$  y  $\mu_2 = \frac{v_0}{m_1}v$ .

Como se observa, para toda  $\dot{\hat{x}}_1 \leq \dot{x}_{max}$ , el término  $-\frac{1}{\phi^2}\tilde{\xi}^T F_3^T \hat{U} \tilde{\theta}$  satisface la forma cuadrática propuesta, es decir

$$-\frac{1}{\phi^2}\tilde{\xi}^T S F_3^T \hat{U} \tilde{\theta} \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma_3^2}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{\lambda_{F_3_{max}}^2}{\gamma_3^2 \phi^2 \zeta_{max}^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \right]$$

donde  $F_{3_{max}}$  se forma, tercera suposición del teorema, al sustituir las cotas superiores de  $\mu$ ,  $\mu_2$  y  $\dot{x}_1$ . Cota superior  $\mu_{2_{max}} = \frac{v_0}{m_1} v_{max}$ . Tal matriz  $F_{3_{max}}$  es

$$F_{3_{max}}^T = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & v_1 \mu_{max} z_{max} & 0_{1 \times n-1} & v_1 \mu_{max} x_{1_{max}} - \mu_{2_{max}} \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}$$

A partir de tal matriz, se obtiene el máximo valor característico de  $F_3$  por medio de las ecuaciones (3.13). Se sustituye  $Z_{max}$  ya que, a partir del análisis del punto de equilibrio,  $|\hat{z}| \leq z_{max}$ .

El término  $J_n F_1$  depende de la primera columna de  $J$  ya que

$$J_n = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -j_{1 \rightarrow n, 1} & 0_{n \times n} \\ 0_{1 \times n} & 1 - j_{n+1, 1} & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times n} & -j_{n+2 \rightarrow 2n+1, 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

donde el subíndice  $a \rightarrow b, 1$  corresponde a un vector de la primera columna de  $J$  del renglón  $a$  al renglón  $b$ . Si la primera columna de  $J$  se elige de forma que cumpla la relación (3.6), el término  $J_n F_1$  puede considerarse como una perturbación sobre la matriz  $A_e$ . Para lograr que la perturbación mantenga la estabilidad del sistema, es decir, que los valores propios de  $A_e + J_n F_1$  conserven parte real negativa, la matriz  $J$  se diseña de tal forma que cumpla la desigualdad (3.4) dando lugar a

$$(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T = (\tau + 1)(-\gamma I_n - 2JJ^T + JY^T + YJ^T) \leq 0$$

donde  $R = S^{-1}$  y  $\tau \geq 0$ .

La última ecuación se obtiene de la segunda consideración del teorema. La matriz  $S$  satisface

$$S(Y - J) = D^T$$

y de la ecuación (3.10), se puede desarrollar lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] + \frac{1}{2}[SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S] &\leq 0 \\ \frac{1}{2}[S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S] - \frac{1}{2}[S(JD) + (JD)^T S] &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S] - \frac{1}{2}[S(J(Y - J)^T S) + (J(Y - J)^T S)^T S] &\leq 0 \\ \frac{1}{2}[S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S] - \frac{1}{2}[S(-JJ^T + JY^T + YJ^T - JJ^T)S] &\leq 0 \end{aligned}$$

lo cual se cumple si

$$S(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T S \leq -2JJ^T + JY^T + YJ^T$$

y con  $\gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi}$ , rectifica la ecuación

$$(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T = (\tau + 1)(-\gamma I_n - 2JJ^T + JY^T + YJ^T) \leq 0$$

De esta forma puede observarse que

$$\begin{aligned} (A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T + \gamma I_n + 2JJ^T - JY^T - YJ^T &\leq 0 \\ S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S + \gamma SS + 2SJJ^T S - SJY^T S - SYJ^T S &\leq 0 \\ S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S + \gamma SS + SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S &\leq 0 \end{aligned}$$

por tanto la derivada de la función de Lyapunov

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} - \frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \tilde{\xi}$$

es negativa semidefinida puesto que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \tilde{\xi} &\leq 0 \\ -\frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} &\leq 0 \end{aligned}$$

por tanto los puntos de equilibrio  $\tilde{\xi} = 0_{2n+1}$  y  $\tilde{\psi} = 0$  son estables.



## Capítulo 4

# Controlador y observador en lazo cerrado

En este capítulo se presenta un controlador para atenuar las vibraciones en una estructura civil de  $n$  grados de libertad equipada con un amortiguador magnetoreológico entre su base y el primer piso. Se analiza la estabilidad del control en conjunto con el estimador propuesto en el capítulo anterior.

El sistema de control se toma del trabajo realizado por (Alvarez y Jiménez 2003) pues presenta resultados aceptables al atenuar hasta un 80 % las señales de excitación sísmica en una estructura civil tal como se muestra en la referencia citada. La principal ventaja de este controlador, el cual está basado en el análisis de Lyapunov, es que su estructura es más simple en comparación con los sistemas de control que se obtienen con técnicas como pasividad, *backstepping*, entre otras. Por lo tanto, el controlador es más sencillo en su implementación en pruebas experimentales.

## 4.1. Controlador

El controlador se obtiene de realizar un análisis de Lyapunov para el sistema

$$\dot{\xi} = A\xi + B_1\theta_x|\dot{x}_1|z + B_2\theta_y|\dot{x}_1|zv + \Pi\ddot{x}_g \quad (4.1a)$$

$$\psi = D\xi + b_1\theta_x|\dot{x}_1|z + b_2\theta_y|\dot{x}_1|zv \quad (4.1b)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n & 0 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C + C_p & 0 \\ 0^T & L & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ v_1 \\ 0_{n-1} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ -\frac{1}{|\dot{x}_1|} & v_1 \\ 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ -l^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_x = \left[ \frac{\rho_0}{m_1} \right] \quad \theta_y = \left[ \frac{v_0}{m_1} \right] \quad l = \left[ 1_{1 \times n} \right]$$

$$D = \left[ -M^{-1}K \quad -M^{-1}(C + C_p) \quad 0_{n \times 1} \right] \quad b_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{|\dot{x}_1|} & v_1 \\ 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix} \quad C_p = \begin{bmatrix} -\frac{v_1 m_1 + v_2}{m_1} & 0_{1 \times n-1} \\ 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} \end{bmatrix}$$

el cual es equivalente al sistema (3.1). La modificación es separar los elementos de  $B$  en aquellos que dependen explícitamente del controlador.

Las dimensiones de las matrices son:  $A \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 2n+1}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 1}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 2}$ ,  $\Pi \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 1}$ ,  $\theta_x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_y \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times 2n+1}$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ ,  $C_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $l \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \xi^T P \xi \quad (4.2)$$

donde  $P = P^T$  es una matriz simétrica positiva definida.

La derivada de (4.2) con respecto a las trayectorias del sistema (4.1) está dada por

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\xi^T Q_1 \xi + \xi^T P [B_1 \theta_x |\dot{x}_1| z + B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z v + \Pi \ddot{x}_g] \quad (4.3)$$

donde  $Q_1 = Q_1^T$  es una matriz simétrica positiva definida que satisface la ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q_1$$

La señal de control  $v$  se encuentra solamente en  $B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z v$  de tal forma que, para hacer  $\dot{V}$  negativa, sólo puede contribuir ampliando tal término cuando es negativo y haciéndolo cero cuando es positivo, es decir

$$v = \begin{cases} 0, & \text{si } \xi^T P B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z \geq 0 \\ v_{max}, & \text{si } \xi^T P B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $v_{max}$  es el valor máximo de la señal de voltaje del amortiguador.

La señal de control no afecta  $B_1 \theta_x |\dot{x}_1| z$  de tal forma que el sistema se considera como un sistema subactuado. Esto implica, la derivada  $\dot{V}$  es menor o igual a cero sólo en una región de estabilidad práctica. La estabilidad práctica conlleva que los estados del sistema  $\xi$  permanece sobre una región alrededor del origen.

Para analizar la estabilidad práctica del sistema, se considera el peor caso, cuando  $\dot{V}$  es menos negativo, que se presenta cuando  $P B_1 \theta_x |\dot{x}_1| z$  y  $\Pi \ddot{x}_g$  son positivos y alcanzan sus valores máximos. Esto conlleva a que  $z$  tiene su cota superior  $\check{z}$  mientras el término de perturbación sísmica también tiene su cota superior  $\check{\ddot{x}}_g$ .

A través de la norma euclidiana de vectores,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , la ecuación (4.3) satisface

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}q_1 \|\xi\|^2 + [ \|\xi\| \|P B_1 \theta_x\| |\dot{x}_1| z + \|\xi\| \|P B_2 \theta_y\| |\dot{x}_1| z v + \|\xi\| \|\Pi\| \|\ddot{x}_g\| ] \quad (4.5)$$

donde  $q_1$  es el mínimo valor propio de la matriz  $Q_1$  y  $\|*\|$  es la norma euclidiana. Escribiendo  $B_2|\dot{x}_1|$  como  $B_2|\dot{x}_1| = B_{21} + B_{22}|\dot{x}_1|$  con

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ -1 \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 1} \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ v_1 \\ 0_{n-1 \times 1} \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1 \times 1}$$

y utilizando la desigualdad  $|\dot{x}_1| = |\xi^T \lambda| \leq \|\xi\| \|\lambda\| \leq \|\xi\|$ , donde  $\lambda = [0_{1 \times n}, 1, 0_{1 \times n}]^T$ , la ecuación (4.5) tiene la forma

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}q_1\|\xi\|^2 + \|\xi\|^2[\|PB_1\theta_x\|\check{z} + \|PB_{22}\theta_{y_2}\|\check{z}v] + \|\xi\|[\|PB_{21}\theta_{y_1}\|\check{z}v + \|P\Pi\|\check{\ddot{x}}_g]$$

donde  $\check{z}$  y  $\check{\ddot{x}}_g$  son los valores máximos de  $z$  y  $\ddot{x}_g$  y por lo tanto

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall \|\xi\| \leq \frac{\|PB_{21}\theta_{y_1}\|\check{z}v + \|P\Pi\|\check{\ddot{x}}_g}{q_1/2 - (\|PB_1\theta_x\| + \|PB_{22}\theta_{y_2}\|v)\check{z}} \quad (4.6)$$

con esto, las trayectorias del sistema quedan acotadas en una región de estabilidad práctica.

El controlador puede aproximarse por una función de saturación la cual ayuda a disminuir la magnitud de la señal de control así como el efecto de cambio o efecto *chattering* que presenta al oscilar entre los valores de 0 y  $v_{max}$  volts.

$$v = sat(\alpha_1 \xi^T PB_2 \theta_y |\dot{x}_1| z), \quad \alpha_1 > 0 \quad (4.7)$$

donde la función saturación se define como

$$sat(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq 0 \\ x, & \text{si } -v_{max} < x < 0 \\ v_{max}, & \text{si } x \leq -v_{max} \end{cases} \quad (4.8)$$

En la ecuación (4.7), se añade una ganancia  $\alpha_1$  al controlador. Tal ganancia puede ser estática o dinámica, en este trabajo se considera como una ganancia constante.

El efecto *chattering* puede dañar al sistema que, generalmente, presenta calentamiento y desgaste en sus componentes. Disminuir tal efecto contribuye a mantener el funcionamiento y prologar el periodo de vida de los sistemas.

## 4.2. Control y observador

La señal de control requiere del conocimiento de los estados y parámetros del sistema por lo cual para su implementación es necesario escribirla en términos de las señales estimadas a través del observador. En un sistema no lineal el diseño de un controlador y observador requiere de un análisis de estabilidad ya que, en lazo cerrado, ésta puede verse afectada independientemente de la estabilidad propia del estimador y controlador con la planta. Para analizar la estabilidad del sistema planta-observador-controlador, se define la señal de control de la siguiente forma

$$v = \text{sat}(\alpha_1 \hat{\xi}^T P \hat{B}_2 \hat{\theta}_y |\dot{x}_1| \hat{z}) \quad (4.9)$$

donde la función saturación se define como

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq 0 \\ x, & \text{si } -v_{max} < x < 0 \\ v_{max}, & \text{si } x \leq -v_{max} \end{cases} \quad (4.10)$$

Sea el sistema del cual se obtiene el controlador

$$\dot{\xi} = A\xi + B_1\theta_x|\dot{x}_1|z + B_2\theta_y|\dot{x}_1|zv + \Pi\ddot{x}_g \quad (4.11a)$$

$$\psi = D\xi + b_1\theta_x|\dot{x}_1|z + b_2\theta_y|\dot{x}_1|zv \quad (4.11b)$$

y el sistema, añadiendo una función  $g$ , del observador

$$\dot{\hat{\xi}} = \hat{A}\hat{\xi} + B_1\hat{\theta}_x|\dot{x}_1|\hat{z} + \hat{B}_2\hat{\theta}_y|\dot{x}_1|\hat{z}v + \Pi\ddot{x}_g + J\tilde{\psi} + g \quad (4.12a)$$

$$\hat{\psi} = \hat{D}\hat{\xi} + b_1\hat{\theta}_x|\dot{x}_1|\hat{z} + \hat{b}_2\hat{\theta}_y|\dot{x}_1|\hat{z}v \quad (4.12b)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{1}{\phi^2} \Upsilon \hat{U}^T \tilde{\psi}, \Upsilon = \Upsilon^T > 0 \quad (4.12c)$$

$$\dot{\Upsilon} = -\frac{1}{\phi^2} \Upsilon \hat{U}^T \hat{U} \Upsilon, \Upsilon(0) = \Upsilon_0 > 0 \quad (4.12d)$$

con la parametrización

$$\psi = U\theta \quad (4.13)$$

cuyas matrices se definieron previamente.

Sean  $P = P^T$  y  $S = S^T$  dos matrices simétricas positivas definidas soluciones de

$$PA + A^T P = -Q_1$$

$$S(A - JD) + (A - JD)^T S = -Q_2$$

con  $Q_1$  y  $Q_2$  son matrices simétricas positivas definidas y  $q_1$  el máximo valor característico de  $Q_1$ .

Entonces puede demostrarse que la ley de control (4.9) garantiza estabilidad en lazo cerrado del sistema de la estructura y amortiguador en conjunto con el observador de estados y parámetros. Para demostrar dicha estabilidad, se enuncia el siguiente teorema.

**Teorema 2** *Sea el sistema dado por las ecuaciones (4.11) y el observador dado por (4.12). Sea (4.9) la señal de control del sistema. Se dice que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable en el punto de equilibrio  $\xi = 0$  y en  $\tilde{\xi} = 0$  mientras los parámetros permanecen acotados,  $\hat{\theta} \in L_\infty$ , si se cumplen las siguientes condiciones*

1. *Las restricciones del Teorema 1 se cumplen, añadiendo que la primera columna de la matriz  $J$  se diseña específicamente como*

$$J_{\{:,1\}} = [0_{1 \times n} \quad l \quad 0_{1 \times n}]^T$$

*donde  $l$  es un número mayor que cero e inferior a uno*

2. *Los valores de  $\dot{x}_1$  y  $z$  tienen cotas inferiores y superiores tales que*

$$|\dot{x}_1| \leq \dot{x}_{1max}$$

$$|z| \leq z_{max}$$

3. *Los estimados de los parámetros  $\hat{\theta}_y = [\hat{\theta}_{y1}, \hat{\theta}_{y2}] = [\frac{\hat{v}_0}{m_1}, \frac{\hat{\rho}_1}{m_1}]$  tienen cotas inferiores y superiores que, respectivamente, son*

$$\frac{\hat{v}_0}{m_1} \in [0, \hat{\theta}_{y1max}]$$

$$\frac{\hat{\rho}_1}{m_1} \in [\hat{\theta}_{y2min}, \hat{\theta}_{y2max}]$$

donde  $\hat{\theta}_{y_{1max}}$  es el valor máximo en la estimación de  $\theta_{y_1}$ ,  $\hat{\theta}_{y_{2min}}$  y  $\hat{\theta}_{y_{2max}}$  son, respectivamente, el valor mínimo y máximo estimado de  $\theta_{y_2}$

**Prueba 2** La dinámica de error de observación  $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} = & (A_e - JD)\tilde{\xi} + (\tilde{A} - J\tilde{D})\hat{\xi} + B_1(\theta_x|\dot{x}_1|z - \hat{\theta}_x|\dot{x}_1|\hat{z}) + B_2\theta_y|\dot{x}_1|zv - \hat{B}_2\hat{\theta}_y|\dot{x}_1|\hat{z}v \\ & - JNB_1(\theta_x|\dot{x}_1|z - \hat{\theta}_x|\dot{x}_1|\hat{z}) - JNB_2\theta_y|\dot{x}_1|zv + JN\hat{B}_2\hat{\theta}_y|\dot{x}_1|\hat{z}v + A_z\tilde{\xi} - g \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $b_1 = NB_1$  y  $b_2 = NB_2$  con

$$N = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times n} \\ 0_{n-1 \times n} & 0 & 0_{n-1 \times n} \end{bmatrix}$$

mientras que la dinámica de los estados está dada por

$$\dot{\xi} = A\xi + B_1\theta_x|\dot{x}_1|z + B_2\theta_y|\dot{x}_1|zv + \Pi\ddot{x}_g$$

donde el punto de equilibrio al cual se desea llevar las trayectorias del sistema es el origen, es decir,  $\xi_{eq} = \xi - 0_\xi = \xi$  donde  $\xi_{eq}$  es el error en los estados y  $0_\xi$  es un vector de ceros

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\xi^T P\xi + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T S\tilde{\xi} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Upsilon^{-1}\theta \quad (4.15)$$

donde  $P = P^T$  y  $S = S^T$  son dos matrices simétricas positivas definidas. La derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

con

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \frac{1}{2}\xi^T [PA + A^T P]\xi + \xi^T P B_1 \theta_x |\dot{x}_1|_z + \xi^T P B_2 \theta_y |\dot{x}_1|_z v \\
\dot{V}_2 &= \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S]\tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T S(\tilde{A} - J\tilde{D})\hat{\xi} \\
&\quad + \tilde{\xi}^T (B_1 - JNB_1)(\theta_x |\dot{x}_1|_z - \hat{\theta}_x |\hat{x}_1|_{\hat{z}}) + \tilde{\xi}^T A_z \tilde{\xi} \\
&\quad - \frac{1}{\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \tilde{\theta} - \frac{3}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \\
\dot{V}_3 &= \tilde{\xi}^T S(B_2 \theta_y |\dot{x}_1|_z - \hat{B}_2 \hat{\theta}_y |\hat{x}_1|_{\hat{z}}) v \\
&\quad - \tilde{\xi}^T S(JNB_2 \theta_y |\dot{x}_1|_z - JN\hat{B}_2 \hat{\theta}_y |\hat{x}_1|_{\hat{z}}) v - \tilde{\xi}^T Sg + \xi^T P \Pi \ddot{x}_g
\end{aligned}$$

La derivada  $\dot{V}$  se divide en  $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$  que, respectivamente, corresponden a los términos del sistema de la estructura y el amortiguador, el error del observador y los términos que dependen de la señal de control, la función  $g$  y la excitación sísmica

La función  $\dot{V}_1$ , representa al sistema de la estructura y amortiguador en retroalimentación y sin perturbación. Una forma de demostrar que es menor que cero es demostrar que, de forma equivalente, el sistema de la estructura y amortiguador es un sistema pasivo. Para demostrar que la interconexión es pasiva, se demuestra que cada uno de los sistemas es pasivo.

De igualar la función de Lyapunov que depende de los estados  $\xi$  a la siguiente función

$$\frac{1}{2}\xi^T P \xi = \frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x} + \frac{1}{2}x^T K x + \frac{v_0}{2} f_v z^2$$

con  $f_v > 0$  entonces, se puede desarrollar el siguiente análisis de pasividad.

La estructura, sin la perturbación sísmica  $-M\ddot{x}_g$ , está representada por

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -B_f f$$

La matriz  $B_f = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}_{n \times 1}$  representa la presencia del amortiguador, en este caso en el primer piso de la estructura. La función de energía de la estructura es de la forma

$$V_{Est} = \frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x} + \frac{1}{2}x^T K x$$



tal que la estructura es un sistema pasivo, con entrada  $-B_f f$  y salida  $\dot{x}$ , si  $-\dot{x}^T B_f f > \dot{V}_{Est}$ .

Esto se cumple dado que

$$\begin{aligned}\dot{V}_{Est} &= \dot{x}^T M \ddot{x} + x^T K x \\ \dot{V}_{Est} &= \dot{x}^T M M^{-1} [-B_f f - C \dot{x} - K x] + x^T K x \\ \dot{V}_{Est} &= -\dot{x}^T B_f f - \dot{x}^T C \dot{x}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\dot{V}_{Est} \leq -\dot{x}^T B_f f < 0 \quad (4.16)$$

En el caso del amortiguador, cuyo modelo es

$$\begin{aligned}f &= v_0 z v + v_1 m_1 \dot{z} + v_2 \dot{x}_1 \\ \dot{z} &= \dot{x}_1 - \mu(v) |\dot{x}_1| z \\ \mu(v) &= \frac{1}{m_1} (\rho_0 + \rho_1 v) > 0\end{aligned}$$

con entrada  $\dot{x}_1$  y salida  $f$ , es pasivo si  $\dot{x}_1 f > \dot{V}_{AMR}(z)$  siendo  $z$  el estado interno del amortiguador. Cabe decir que  $\dot{x}_1$  es la velocidad de movimiento del primer piso de la estructura donde se coloca el amortiguador y por lo tanto  $\dot{x}^T B_f f = \dot{x}_1 f$ .

Proponiendo la función

$$V_{AMR} = \frac{v_0 f_v}{2} z^2 > 0 \quad (4.17)$$

su derivada corresponde a

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AMR} &= v_0 f_v z \dot{z} \\ \dot{V}_{AMR} &= v_0 f_v z \dot{x}_1 - v_0 f_v z \mu(v) |\dot{x}_1| z\end{aligned}$$

mientras el producto de  $\dot{x}_1$  y  $f$  es

$$\begin{aligned}f \dot{x}_1 &= v_0 z v \dot{x}_1 + v_1 m_1 \dot{z} \dot{x}_1 + v_2 \dot{x}_1^2 \\ f \dot{x}_1 &= v_0 z v \dot{x}_1 + v_1 m_1 \dot{x}_1^2 - v_1 m_1 \mu(v) |\dot{x}_1| z \dot{x}_1 + v_2 \dot{x}_1^2\end{aligned}$$

para garantizar que el sistema es pasivo se requiere que

$$v_0 z v \dot{x}_1 + v_1 m_1 \dot{x}_1^2 - v_1 m_1 \mu(v) |\dot{x}_1| z \dot{x}_1 + v_2 \dot{x}_1^2 \geq v_0 f_v z \dot{x}_1 - v_0 f_v z \mu(v) |\dot{x}_1| z \quad (4.18)$$

Para demostrar que (4.18) se cumple, se analizan tres casos que dependen de la combinación del signo de  $z$  y  $\dot{x}_1$  y de que  $z = 0$ . Estos casos son todos los posibles ya que si  $\dot{x}_1 = 0$ , ambos lados de la ecuación son cero. Cabe mencionar que las siguientes variables son positivas:  $v_0 > 0$ ,  $v_1 > 0$ ,  $v_2 > 0$ ,  $m_1 > 0$ ,  $\mu(v) > 0$ . Los términos  $v_x$  son coeficientes de amortiguamiento, viscosidad, etc., propiedades del amortiguador.

1. Si  $z = 0$  puede observarse, sustituyendo en (4.18), la desigualdad se cumple ya que

$$\begin{aligned} v_1 m_1 \dot{x}_1^2 + v_2 \dot{x}_1^2 &> 0 \\ f \dot{x}_1 &> \dot{V}_{AMR} \end{aligned}$$

2. Cuando el signo de  $\dot{x}_1$  y de  $z$  son diferentes, puesto que se cumple

$$\begin{aligned} v_1 m_1 \dot{x}_1^2 - v_1 m_1 \mu(v) |\dot{x}_1| z \dot{x}_1 + v_2 \dot{x}_1^2 &> 0 \\ -v_0 f_v z \mu(v) |\dot{x}_1| z &< 0 \end{aligned}$$

es suficiente garantizar

$$v_0 v z \dot{x}_1 \geq v_0 f_v z \dot{x}_1$$

lo cual es cierto ya que ambos son negativos y  $f_v \geq v_{max}$ ,  $v_0 f_v z \dot{x}_1$  es más negativo que  $v_0 v z \dot{x}_1$  y por lo tanto se cumple lo anterior. Por lo tanto

$$f \dot{x}_1 \geq \dot{V}_{AMR}$$

3. Cuando el signo de  $\dot{x}_1$  y de  $z$  son iguales, para cumplir con la condición (4.18), es suficiente se cumpla

$$(v_1 m_1 + v_2) \dot{x}_1^2 + v_0 f_v z \mu(v) |\dot{x}_1| z > v_1 m_1 \mu(v) |\dot{x}_1| z \dot{x}_1$$

dado que  $v_0 z v \dot{x}_1 + v_0 f_v z \mu(v) |\dot{x}_1| z \geq v_0 f_v z \dot{x}_1$  si  $f_v = v$ .

Con el siguiente análisis

$$\begin{aligned} (v_1 m_1 + v_2) \dot{x}_1^2 &> v_1 m_1 \mu(v) |\dot{x}_1| z \dot{x}_1 \\ (v_1 m_1 + v_2) \dot{x}_1 &> v_1 m_1 \mu(v) |\dot{x}_1| z \\ (v_1 m_1 + v_2) &> v_1 m_1 \mu(v) \text{sign}(\dot{x}_1) z \end{aligned}$$

$$\frac{v_1 m_1 + v_2}{v_1 m_1 \mu(v)} > z_{max} \quad (4.19)$$

el valor de  $z_{max}$  se obtiene de la ecuación  $\dot{z} = \dot{x}_1 - \mu(v)|\dot{x}_1|z = 0$  y es

$$z_{max} = \frac{\dot{x}_1}{\mu(v)|\dot{x}_1|}$$

que es mayor cuando  $\dot{x}_1 > 0$  y por lo tanto

$$z_{max} = \frac{1}{\mu(v)}$$

con dicho valor de  $z_{max}$ , la ecuación (4.19) se simplifica a

$$\frac{v_1 m_1 + v_2}{v_1 m_1} > 1 \quad (4.20)$$

lo cual se garantiza dado que  $v_2 > 0$

De esta forma se garantiza que el amortiguador es pasivo si

$$f_v = v \quad (4.21)$$

$$v_2 > 0 \quad (4.22)$$

$f_v = v$  en (4.17) se puede cumplir.  $v_2 > 0$  se cumple dado que es un coeficiente de amortiguamiento.

Por lo tanto, el mapa de velocidad de entrada contra fuerza a la salida del amortiguador es pasivo. De esta manera se garantiza la estabilidad del sistema de la estructura y el amortiguador, en realimentación, lo que equivale a

$$\dot{V}_1 < 0 \quad (4.23)$$

En cuanto a  $\dot{V}_2$ , esta puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T S J_y D \hat{\xi} + \tilde{\xi}^T J_n B_1 (\theta_x |\dot{x}_1| z - \hat{\theta}_x |\hat{x}_1| \hat{z}) \\ & + \tilde{\xi}^T A_z \tilde{\xi} - \frac{1}{\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \tilde{\theta} - \frac{3}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \end{aligned}$$

donde  $J_y = Y - J$  y  $J_n = I_b - JN$

$$Y = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \end{bmatrix}^T$$

$$I_b = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times n-1} & 0 \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 & 0_{1 \times n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

la cual cumple la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T S [J_y D \hat{\xi} + J_n (F_1 \tilde{\xi} + F_2 \tilde{\theta})] \\ & + \tilde{\xi}^T A_z \tilde{\xi} - \frac{1}{\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} - \frac{3}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \end{aligned}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & v_1 \operatorname{sgn}(\dot{\hat{x}}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n-1} & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -\operatorname{sgn}(\dot{\hat{x}}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n-1} & -|\dot{\hat{x}}_1| \end{bmatrix} \frac{\rho_0}{m_1}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times 4n-1} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times 4n-1} & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} & 0 \\ 0_{n-1 \times 4n-1} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \\ 0_{1 \times 4n-1} & -|\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} & 0 \end{bmatrix}$$

dado que se cumplen las siguientes desigualdades  $\theta^T \tilde{U}^T = \tilde{\xi}^T D^T + \tilde{\xi}^T F_3^T$  y  $\tilde{D} \hat{\xi} = \hat{U} \tilde{\theta} - F_4 \tilde{\theta}$  con

$$F_3^T = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & v_1 \mu \operatorname{sgn}(\dot{\hat{x}}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n-1} & v_1 \mu |\dot{\hat{x}}_1| - \mu_2 \\ 0_{n-1 \times n} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4n-2} & -\hat{z} v & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} & v_1 |\dot{\hat{x}}_1| \hat{z} v \\ 0_{n-1 \times 4n-2} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{\rho_0}{m_1} + \frac{\rho_1}{m_1} v \geq 0$$

$$\mu_2 = \frac{v_0 v}{m_1}$$

la derivada  $\dot{V}_2$  se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T S J_n F_1 \tilde{\xi} \\ & + \tilde{\xi}^T S [J_y \hat{U} - J_y F_4 + J_n F_2 - \frac{D^T \hat{U}}{\phi^2} - \frac{F_3^T \hat{U}}{\phi^2}] \tilde{\theta} + \tilde{\xi}^T S A_z \tilde{\xi} - \frac{3}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \end{aligned}$$

Cumpliendo con la restricción de la primera columna de la matriz  $J$ , se puede comprobar que

$$(J_n F_2 - J_y F_4)^T (J_n F_2 - J_y F_4) \leq \hat{U}^T \hat{U}$$

de esta manera si se desarrollan formas cuadráticas

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^T S J_y \hat{U} \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2} [\gamma_1^2 \phi^2 \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{1}{\gamma_1^2 \phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T J_y^T J_y \hat{U} \tilde{\theta}] \\ -\frac{1}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S D^T \hat{U} \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2} [\frac{\gamma_2^2}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{\lambda_D^2}{\gamma_2^2 \phi^2 \varsigma_{max}^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}] \\ -\frac{1}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S F_3^T \hat{U} \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2} [\frac{\gamma_3^2}{\phi^2} \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{\lambda_{F_3_{max}}^2}{\gamma_3^2 \phi^2 \varsigma_{max}^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}] \\ \tilde{\xi}^T S (J_n F_2 - J_y F_4) \tilde{\theta} & \leq \frac{1}{2} [\gamma_4^2 \phi^2 \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \frac{1}{\gamma_4 \phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}] \end{aligned}$$

de estos términos, la matriz  $F_3$  depende del controlador. La primera demostración del observador incluye el hecho de que  $v = v_{max}$  esto al obtener el máximo valor característico de  $F_3^T F_3$  que es

$$(\mu_1 |\dot{x}_1| - \mu_2)^2 + \mu_1^2 z^2 \text{sign}^2(\tilde{x}_1) > 0$$

donde  $\mu_1 = \mu v_1$  y  $\mu_2 = \frac{v_0}{m_1} v$ . Con ello, sustituir el valor máximo de  $v$ , independientemente de los valores de  $\hat{\xi}^T P \hat{B}_2 \hat{\theta}_y |\dot{x}_1| \hat{z}$ , equivale a cumplir las restricciones de diseño del observador.

El término  $J_n F_1$  está dado por

$$J_n F_1 = \frac{\rho_0}{m_1} \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -v_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \hat{z} J_{1 \rightarrow n, 1} & 0_{n \times n-1} & -v_1 |\dot{x}_1| J_{1 \rightarrow n, 1} \\ 0_{1 \times n} & v_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \hat{z} (1 - J_{n+1, 1}) & 0_{1 \times n-1} & v_1 |\dot{x}_1| (1 - J_{n+1, 1}) \\ 0_{n-1 \times n} & -v_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \hat{z} J_{n+2 \rightarrow 2n, 1} & 0_{n-1 \times n-1} & -v_1 |\dot{x}_1| J_{n+2 \rightarrow 2n, 1} \\ 0_{1 \times n} & -v_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \hat{z} J_{2n+1, 1} - \text{sgn}(\tilde{x}_1) \hat{z} & 0_{1 \times n} & v_1 |\dot{x}_1| J_{2n+1, 1} - |\dot{x}_1| \end{bmatrix}$$

donde  $J_{x \rightarrow y, 1}$  corresponde a los elementos del renglón  $x$  al renglón  $y$  de la primera columna de  $J$ . Mientras,  $J_{x, y}$  es el elemento de renglón  $x$  y columna  $y$  de  $J$ . Como se observa,  $J_n F_1$  es dependiente de  $|\dot{x}_1|$  y del error en  $z$  puesto que  $\hat{z} = z - \tilde{z}$ .

Si la matriz  $J$  se diseña cumpliendo la restricción de la ecuación (3.4), es decir

$$\gamma I_{2n+1} - 2JJ^T + JY^T + YJ^T \leq 0$$

se verifica que

$$(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T = (\tau + 1)(-\gamma I_n - 2JJ^T + JY^T + YJ^T) \leq 0$$

donde  $R = S^{-1}$  y  $\tau \geq 0$ .

La última ecuación se obtiene de considerar que la matriz  $S$  cumple

$$S(Y - J) = D^T$$

y de desarrollar lo siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] + \frac{1}{2}[SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \leq 0 \\ & \frac{1}{2}[S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S] - \frac{1}{2}[S(JD) + (JD)^T S] \leq 0 \\ & \frac{1}{2}[S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S] - \frac{1}{2}[S(J(Y - J)^T S) + (J(Y - J)^T S)^T S] \leq 0 \\ & \frac{1}{2}[S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S] - \frac{1}{2}[S(-JJ^T + JY^T + YJ^T - JJ^T)S] \leq 0 \end{aligned}$$

lo cual se cumple si

$$S(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T S \leq -2JJ^T + JY^T + YJ^T$$

y con  $\gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi}$ , se verifica que se cumple la desigualdad a la que está sujeta la matriz  $J$ .

$$(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T = (\tau + 1)(-\gamma I_n - 2JJ^T + JY^T + YJ^T) \leq 0$$

De tal forma que lo último y los resultados de las formas cuadráticas conducen a lo siguiente

$$\dot{V}_2 \leq \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} - \frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \tilde{\xi} \leq 0$$

con

$$\begin{aligned} \gamma &= \rho_z + \frac{1}{2}(\gamma_1^2 \phi^2 + \frac{\gamma_2^2}{\phi^2} + \frac{\gamma_3^2}{\phi^2} + \gamma_4^2 \phi^2) \\ \varpi &= 3 - \frac{\lambda_{J_y}^2}{\gamma_1^2} - \frac{\lambda_D^2}{\gamma_2^2 \varsigma_{max}^2} - \frac{\lambda_{F_{3max}}^2}{\gamma_3^2 \varsigma_{max}^2} - \frac{1}{\gamma_4^2} \end{aligned}$$

siendo  $\rho_z$  el valor característico de  $A_z$ ,  $\varsigma_{max}$  el máximo valor característico de  $S$  y  $\lambda_D^2$ ,  $\lambda_{F_3}^2$ ,  $\lambda_{J_y}^2$  representan, respectivamente, el máximo valor característico de las matrices  $D^T D$ ,  $F_3^T F_3$  y  $J_y^T J_y$ .

Por tanto con las siguientes desigualdades

$$(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T = (\tau + 1)(-\gamma I_n - 2JJ^T + JY^T + YJ^T) \leq 0 \quad (4.24)$$

$$3 \geq \frac{\lambda_{J_y}^2}{\gamma_1^2} + \frac{\lambda_D^2}{\gamma_2^2 \varsigma_{max}^2} + \frac{\lambda_{F_3}^2}{\gamma_3^2 \varsigma_{max}^2} + \frac{1}{\gamma_4^2} \quad (4.25)$$

se demuestra que se cumple con

$$(A_e + J_n F_1)R + R(A_e + J_n F_1)^T + \gamma I_n + 2JJ^T - JY^T - YJ^T \leq 0 \quad (4.26)$$

$$S(A_e + J_n F_1) + (A_e + J_n F_1)^T S + \gamma SS + 2SJJ^T S - SJY^T S - SYJ^T S \leq 0 \quad (4.27)$$

$$S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S + \gamma SS + SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S \leq 0 \quad (4.28)$$

$$-\frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \leq 0 \quad (4.29)$$

y por lo tanto

$$\dot{V}_2 \leq \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + \gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} - \frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T [SJ_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \tilde{\xi} \leq 0 \quad (4.30)$$

y es negativa semidefinida.

La derivada  $\dot{V}_3$  representa los valores restantes que dependen de la señal de control. La derivada  $\dot{V}_3$  es

$$\dot{V}_3 = \tilde{\xi}^T S J_n B_2 \theta_y | \dot{x}_1 | z v - \tilde{\xi}^T S J_n \hat{B}_2 \hat{\theta}_y | \dot{x}_1 | \hat{z} v - \tilde{\xi}^T S g + \xi^T P \Pi \dot{x}_g \quad (4.31)$$

si la función  $g$  se diseña como

$$g = J_n \hat{B}_2 \hat{\theta}_y | \dot{x}_1 | \hat{z} v$$

entonces  $\dot{V}_3$  se reduce a

$$\dot{V}_3 = \tilde{\xi}^T S J_n B_2 \theta_y | \dot{x}_1 | z v + \xi^T P \Pi \dot{x}_g$$

El primer término de  $\dot{V}_3$  no afecta la estabilidad ya que, si se ordenan los elementos de  $\dot{V}_1$  y  $\dot{V}_2$  con  $\tilde{\xi}^T S J_n B_2 \theta_y | \dot{x}_1 | z v$  de la forma

$$[\xi^T, \tilde{\xi}^T] W [\xi^T, \tilde{\xi}^T]^T$$

donde los elementos en  $W$  dependientes de  $\tilde{\xi}^T \tilde{\xi}$ , se obtienen de (4.30). Ordenando tales elementos de la forma

$$\tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \tilde{\xi} + 2\gamma \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T [S J_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \tilde{\xi}$$

exceptuando  $-\frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}$ , el cual es menor o igual a cero y afecta solo los parámetros. Mientras, el término dependiente de  $\xi^T \xi$  se obtiene de la derivada  $\dot{V}_1$ .

Dado que  $\tilde{\xi}^T S J_n B_2 \theta_y | \dot{x}_1 | z v$  es un elemento acotado que puede ser escrito como

$$\tilde{\xi}^T S J_n B_2 \theta_y | \dot{x}_1 | v \lambda_c \xi$$

con  $\lambda_c = [0_{1 \times n} 0_{1 \times n} 1]$  entonces, la matriz  $W$  es de forma triangular a segmentos.

Con la matriz  $W$  de forma triangular y con  $\tilde{\xi}^T S J_n B_2 \theta_y | \dot{x}_1 | z v$  acotado, se garantiza que tal término no afecta la estabilidad del sistema y que ésta depende explícitamente de los elementos de  $\dot{V}_1$  y  $\dot{V}_2$ .

Con en análisis de  $\dot{V}_1$ ,  $\dot{V}_2$  y  $\dot{V}_3$ , se obtienen los siguientes resultados

- Un punto de equilibrio asintóticamente estable ya que la interconexión de la estructura y amortiguador es pasiva y cada sistema es estrictamente pasivo ya que el producto de la entrada y salida es mayor o igual a la derivada de la función, ya sea de almacenamiento de energía o función de estados, propuesta para cada sistema.
- Los estados estimados son estables puesto que  $\dot{V}_2 \leq 0$
- Los parámetros permanecen acotados

Para demostrar estabilidad asintótica de los estados estimados  $\hat{\xi}$ , es necesario utilizar el lema de Barbalat, (Khalil 1996), que dice



Si  $V_2$  cumple

- $V_2$  sea acotada
- $\dot{V}_2$  positiva semidefinida
- $\dot{V}_2$  uniformemente continua en el tiempo

entonces  $\dot{V}_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Para cumplir el primer punto,  $V_2$  es acotada por abajo ya que  $V_2 > 0$  y acotada por arriba, con condición inicial  $V_{2_0}$ ,  $V_2 \leq V_{2_0}$  para todo  $t > 0$  puesto que  $\dot{V}_2 \leq 0$ .

El segundo punto se cumple puesto que  $\dot{V}_2 \leq 0$ .

Para cumplir el último punto, basta que  $\ddot{V}_2$  sea acotada, es decir

$$\ddot{V}_2 = \tilde{\xi}^T [S(A_e - JD) + (A_e - JD)^T S] \dot{\tilde{\xi}} + 2\gamma \tilde{\xi}^T S S \dot{\tilde{\xi}} - \frac{\varpi}{2\phi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} + \tilde{\xi}^T [S J_n F_1 + F_1^T J_n^T S] \dot{\tilde{\xi}}$$

con

$$\dot{\tilde{\xi}} = (A_e - JD)\tilde{\xi} + J_y \tilde{D} \hat{\xi} + J_n (F_1 \tilde{\xi} + F_2 \tilde{\theta}) + A_z \tilde{\xi}$$

debe ser acotada. Esto se cumple dado que los elementos siguientes son acotados:  $(A_e - JD)$ ,  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $J_n F_1$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $A_z$  y  $J_y \tilde{D}$ . El término  $J_y \tilde{D}$  es acotado puesto que tal error depende de los parámetros estimados que permanecen acotados. Con esto se garantiza  $\ddot{V}_2$  es acotada.

Con el uso del lema de Barbalat se garantiza que  $\dot{V}_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y por lo tanto se tiene estabilidad asintótica en los estados estimados.

En cuanto a la estabilidad práctica, con la solución  $Q_1$  de  $PA + A^T P = -Q_1$  y  $q_1$  su valor característico menor, tal estabilidad es limitada por

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall \|\tilde{\xi}\| > \frac{\|P\Pi\|\ddot{x}_g}{q_1/2} \quad (4.32)$$

puesto que  $\dot{V}_1 < 0$  y  $\dot{V}_2 < 0$ , con  $\ddot{x}_g$  como valor máximo de la perturbación sísmica.

Para demostrar que el controlador contribuye a que las trayectorias de los estados del sistema se encuentren en una región más próxima al origen, es necesario se cumpla la siguiente desigualdad

$$\int_0^T \dot{V}_{1cc} < \int_0^T \dot{V}_{1sc} \quad (4.33)$$

donde  $\dot{V}_{1sc}$  y  $\dot{V}_{1cc}$ , son, respectivamente, la derivada  $\dot{V}_1$  sin y con acción de control, es decir  $v = 0$  y  $v = -\hat{\xi}^T P \hat{B}_2 \hat{\theta}_y |\hat{x}_1| \hat{z}$ . Esto significa, si  $\dot{V}_{1cc} < \dot{V}_{1sc}$  entonces los estados del sistema permanecen más próximos al origen con la señal de control que sin ésta.

Para demostrarlo, sean las integrales

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{V}_{1sc} dt &= - \int_0^T \frac{1}{2} \xi^T Q_1 \xi dt + \int_0^T \xi^T P [B_1 \theta_x |\dot{x}_1| z + \Pi \ddot{x}_g] dt \\ \int_0^T \dot{V}_{1cs} dt &= - \int_0^T \frac{1}{2} \xi^T Q_1 \xi dt + \int_0^T \xi^T P [B_1 \theta_x |\dot{x}_1| z + B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z v + \Pi \ddot{x}_g] dt \end{aligned}$$

Siendo en la segunda integral la única diferencia con respecto a la primera el término

$$\int_0^T \xi^T P B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z v$$

el cual es menor a cero si  $\frac{v_0}{m_1} > 0$ . Con la convergencia de  $\dot{V}_2$  en los estados

$$\begin{aligned} \int_0^T \xi^T P B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z v &= - \int_0^T \xi^T P B_2 \theta_y |\dot{x}_1| z z |\dot{x}_1| \hat{\theta}_y^T B_2^T P \xi \\ &= - \int_0^T (\xi^T P B_2 \theta_y \hat{\theta}_y^T B_2^T P \xi) \dot{x}_1^2 z^2 \\ &= - \int_0^T (\Sigma^T \theta_y \hat{\theta}_y^T \Sigma) \dot{x}_1^2 z^2 \end{aligned}$$

con  $\Sigma^T = \xi^T P B_2$ , entonces dado que el producto

$$\theta_y \hat{\theta}_y^T = \begin{bmatrix} \frac{v_0}{m_1} \frac{\hat{v}_0}{m_1} & \frac{v_0}{m_1} \frac{\hat{\rho}_1}{m_1} \\ \frac{\rho_1}{m_1} \frac{\hat{v}_0}{m_1} & \frac{\rho_1}{m_1} \frac{\hat{\rho}_1}{m_1} \end{bmatrix}$$

tiene un único valor característico diferente de cero  $\lambda_{\theta_y \hat{\theta}_y^T} = \frac{v_0}{m_1} \frac{\hat{v}_0}{m_1}$ , si  $\frac{\hat{v}_0}{m_1} > 0$ , se cumple que

$$- \int_0^T (\Sigma^T \theta_y \hat{\theta}_y^T \Sigma) \dot{x}_1^2 z^2 < 0 \quad (4.34)$$

y por lo tanto, iniciando  $V_{1_{sc}}$  y  $V_{1_{cc}}$  en el mismo punto, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{V}_{1_{cc}} - \int_0^T \dot{V}_{1_{sc}} &= - \int_0^T (\Sigma^T \theta_y \hat{\theta}_y^T \Sigma) \dot{x}_1^2 z^2 \\ \int_0^T \dot{V}_{1_{cc}} - \int_0^T \dot{V}_{1_{sc}} &< 0 \end{aligned}$$

es decir

$$V_{1_{cc}} < V_{1_{sc}} \quad (4.35)$$

con lo cual se demuestra que la acción de control mantiene las trayectorias del sistema más cercanas al origen o punto de equilibrio

En este capítulo, se demostró lo siguiente

- El punto de equilibrio del sistema es asintóticamente estable dado que  $\dot{V}_1 < 0$ . A través de análisis de pasividad, la estructura y amortiguador en interconexión representan un sistema pasivo y, dado que cada uno es estrictamente pasivo, el punto de equilibrio es asintóticamente estable
- La derivada  $\dot{V}_2$ , relacionada con los estados estimados y parámetros, se muestra es negativa semidefinida. Con el lema de Barbalat se comprueba que los estados convergen asintóticamente.
- Los parámetros  $\hat{\theta}$  no convergen asintóticamente pero se mantienen acotados
- El sistema, con la perturbación, tiene una estabilidad práctica. Sin embargo, se demostró que el controlador aproxima los estados del sistema al origen más de lo que se aproximan sin el controlador

Esto implica que el controlador y observado en lazo cerrado garantizan estabilidad asintótica de estados reales y estados estimados mientras una estabilidad de los parámetros.

## Capítulo 5

# Simulación numérica

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a través de la simulación de una estructura civil de cinco pisos sujeta al sismo de Chile de 1985. Se muestra el efecto en la estructura sin la señal de control así como la disipación de energía que se logra con dicha señal. Se muestra la estimación de estados y parámetros. A través de los parámetros se obtienen las frecuencias fundamentales de la estructura con las cuales se puede describir su dinámica.

### 5.1. Parámetros y valores iniciales

La estructura de cinco pisos cuenta con los siguientes parámetros.

$$k = [5.16, 4.48, 5.16, 5.78, 5.89] \times 10^5 \text{ [N/m]}$$

$$c = [120, 120, 127, 118, 125] \text{ [Ns/m]}$$

$$m = [98.3, 98.3, 98.4, 97.4, 92.5] \text{ [Kg]}$$

con los cuales se construyen las matrices

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 9.64 & -4.48 & 0 & 0 & 0 \\ -4.48 & 9.64 & -5.16 & 0 & 0 \\ 0 & -5.16 & 10.94 & -5.78 & 0 \\ 0 & 0 & -5.78 & 11.67 & -5.89 \\ 0 & 0 & 0 & -5.89 & 5.89 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 240 & -120 & 0 & 0 & 0 \\ -120 & 247 & -127 & 0 & 0 \\ 0 & -127 & 245 & -118 & 0 \\ 0 & 0 & -118 & 243 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 125 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 98.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 98.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 98.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 97.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 92.5 \end{bmatrix}$$

donde las unidades de las matrices  $K$ ,  $C$  y  $M$  son, respectivamente  $[N/m]$ ,  $[Ns/m]$  y  $[Kg]$ .

Los modos de vibración de la estructura se determinan a través de

$$\frac{\sqrt{M^{-1}K}}{2\pi} \quad Hz$$

y para esta estructura sus valores son

Frecuencia Hz
3.27
9.97
15.42
19.44
22.74

Los parámetros del amortiguador corresponden a un modelo de la empresa *Lord Corporation* cuyas características principales son: 50[ml] de fluido magnetoreológico constituido por partículas de hierro en aceite de hidrocarburos con una densidad 3.28[g/cm<sup>2</sup>], longitud de 21.5[cm] y 3.8[cm] de diámetro en el cilindro principal, el campo magnético aplicable varía de 0 a 200[kA/m] a través de una bobina de resistencia de 4[Ω] con una corriente de 0 a 1[A], la potencia inicial requerida es de 10[W]. La energía requerida puede ser proporcionada por una fuente de 120[V] AC. Este amortiguador da una fuerza de hasta 3[kN]. Los parámetros de tal amortiguador son los siguientes:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\sigma_0$	1.059e6	$v_0$	1.059e6
$\sigma_1$	5700	$v_1$	57.985
$\sigma_2$	2300	$v_2$	2300
$a_0$	0.0030	$\rho_0$	3.123e5
$a_1$	-0.1444	$\rho_1$	-4.509e4

donde la primera tabla representa los parámetros del modelo (2.3) de la sección (2) mientras la segunda tabla contiene los valores equivalentes al modelo (2.4), el cual fue utilizado en el desarrollo del observador y el controlador.

La señal del sismo del 85 en Santiago Chile tiene como magnitud  $7.8M_L$  y consta de componentes de frecuencia menores a los  $10Hz$  teniendo un valor pico cercano a los  $2.2 Hz$ , la Figura 5.1 representa la componente norte-sur registrada por la Universidad de Chile mientras la Figura 5.2 muestra su espectro en frecuencia.

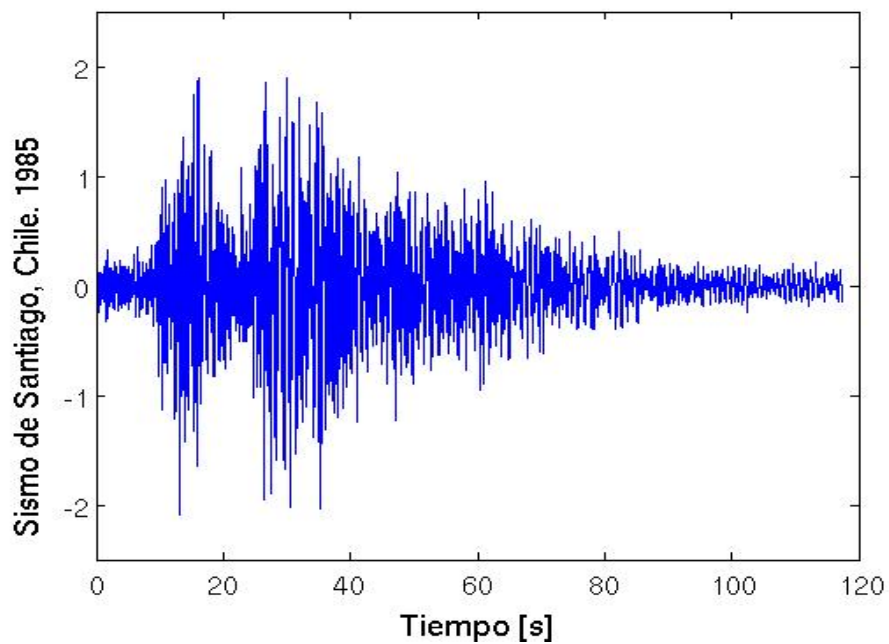


Figura 5.1: Componente N-S del sismo del 85 en Santiago Chile

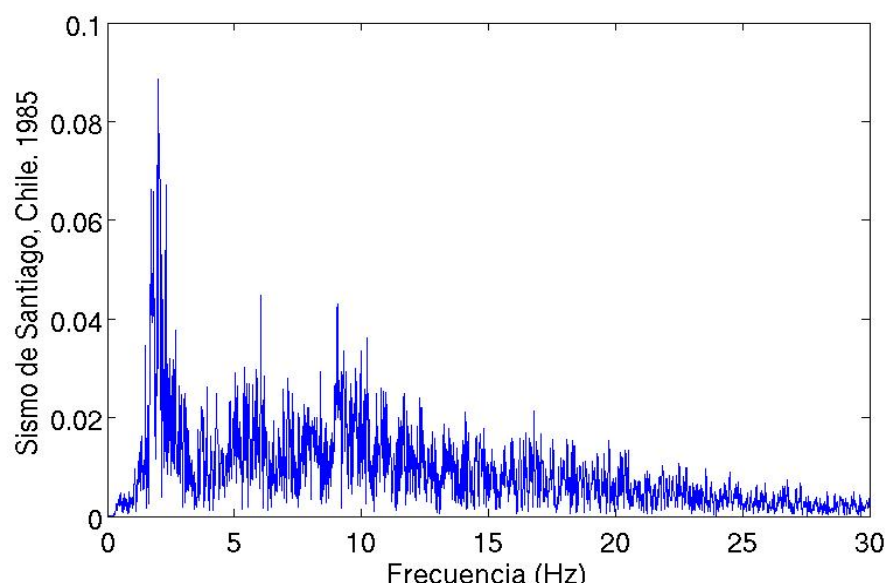


Figura 5.2: Espectro de frecuencia del sismo de Santiago, Chile.

Para el diseño del observador, la matriz  $J$  fue diseñada de la forma

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 9000 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 994 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 995 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 993 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 991 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 1e-4$$

cumpliendo las restricciones del observador y dando lugar a polos

Polos del observador
$-10.0$
$-7.58 \pm 43.9i$
$-6.34 \pm 9.3i$
$-1.33 \pm 8.6i$
$-1.62 \pm 4.7i$
$-1.19 \pm 2.0i$

En un sistema no lineal no se puede realizar asignación de polos. En este sistema se realiza con la consideración de que el sistema puede verse como una dinámica lineal lenta y una no lineal relativamente rápida permitiendo realizar la asignación de polos.

Los valores iniciales de los parámetros  $\theta$  fueron tomados como el valor real con margen de error del 30%. Las condiciones iniciales del estimador se tomaron cerca del origen con el objeto de permitir al observador realizar su tarea. La matriz de covarianza inicial  $\Upsilon_0$  del observador se eligió como una matriz diagonal cuyos elementos son de magnitud mayor a los correspondientes a  $U_k$ ,  $U_c$ ,  $U_z$  y  $U_f$ .

$$\theta_0 = 1e4[0.6824, 0.5925, 0.5925, 0.6824, 0.6817, 0.7636, 0.7715, 0.7861, 0.8278$$

$$0.0107, 0.0002, 0.0002, 0.0002, 0.0002, 0.0002, 0.0002, 0.0002, 0.0002, 1.4005, 0.4130, -0.0596$$

$$\Upsilon_0 = .1 * \text{diag}([6e8, 5e6, 12e8, 50e5, 40e5, 12e7, 12e6, 12e7, 10e6,$$

$$10, .4, .6, .6, .8, .8, .9, .9, .6, 20e4, -20e4, 12e3])$$

donde  $\text{diag}([*])$  representa la matriz diagonal formada por el vector  $[*]$ .

## 5.2. Resultados

Para mostrar el desempeño del controlador y observador de estados, se obtuvieron gráficas tanto del primer piso de la estructura como del último así como de cada uno de los parámetros. Las figuras 5.3 y 5.4 muestran el desplazamiento en el primer piso, respectivamente, sin acción de



control y con acción de control. La Figura 5.5 muestra el error de estimación en la posición del primer piso.

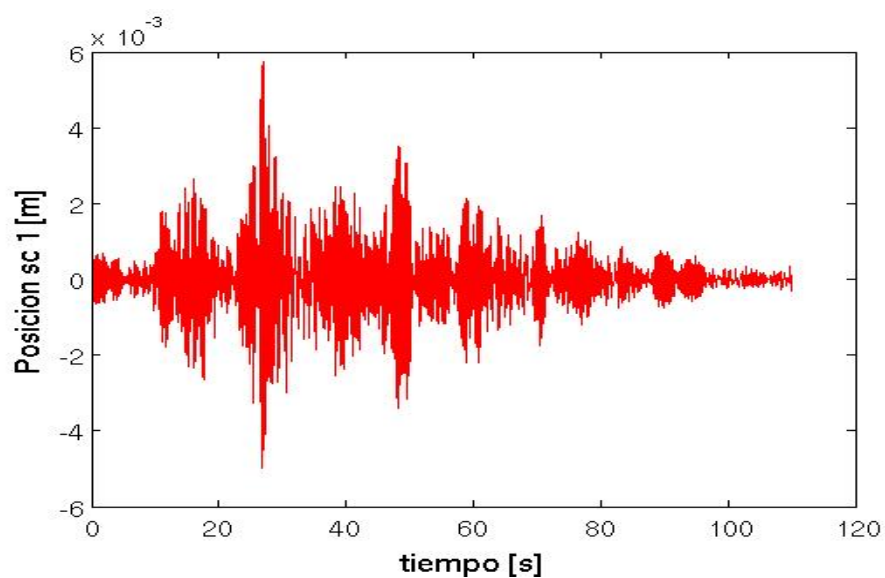


Figura 5.3: Desplazamiento del primer piso libre

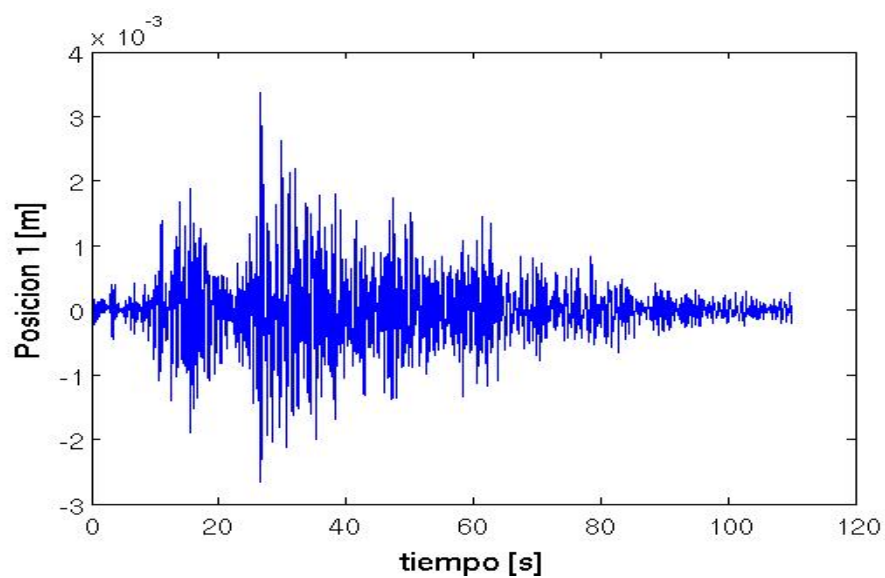


Figura 5.4: Desplazamiento del primer piso con acción de control

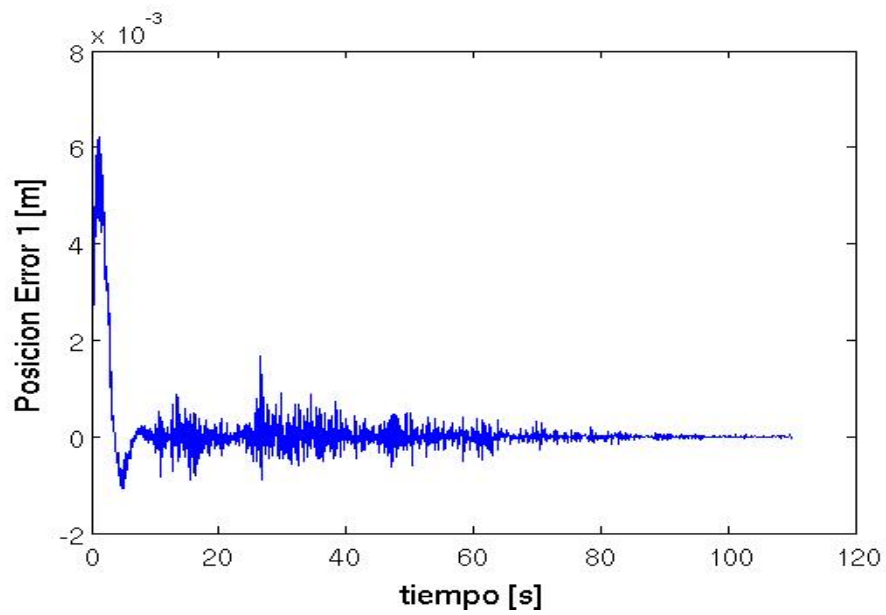


Figura 5.5: Error de estimación en desplazamiento del primer piso

Para el caso del último piso, las figuras 5.6 y 5.7 muestran el desplazamiento sin acción de control y con acción de control mientras la Figura 5.8 muestran el error de estimación.

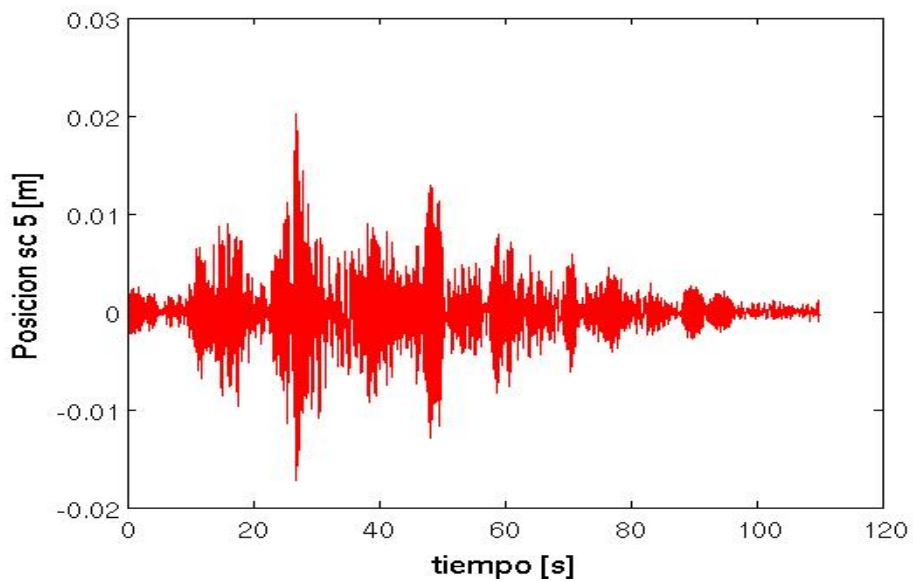


Figura 5.6: Desplazamiento del quinto piso libre

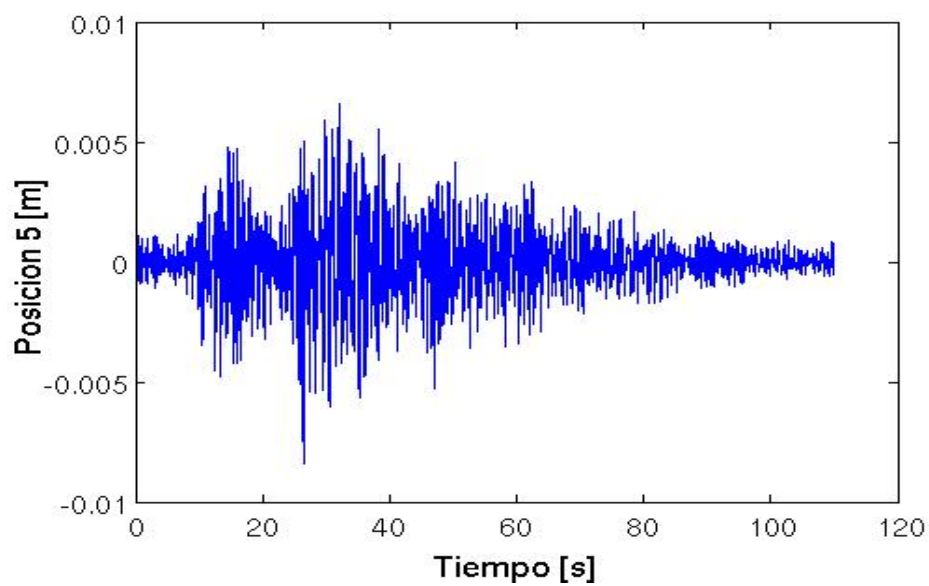


Figura 5.7: Desplazamiento del quinto con acción de control

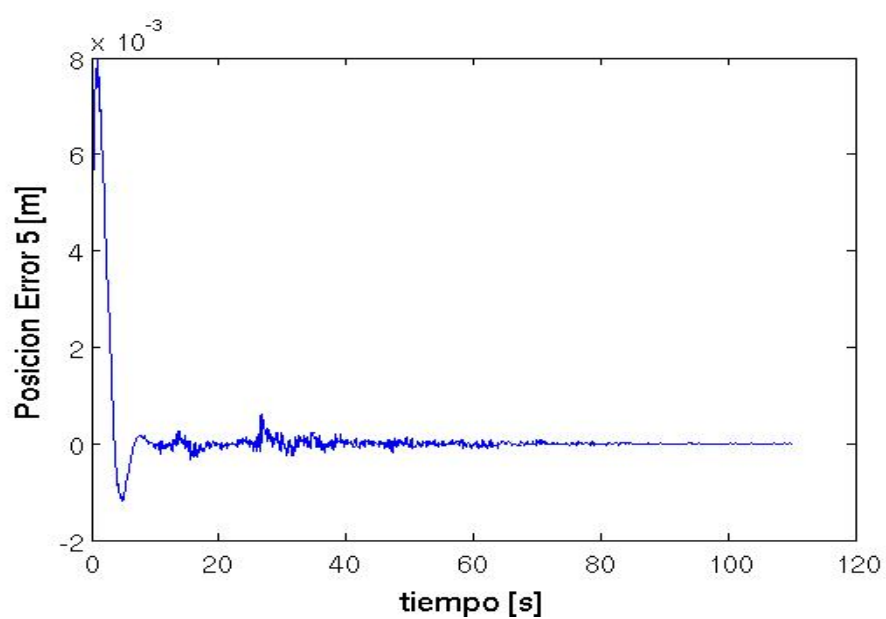


Figura 5.8: Error de estimación en desplazamiento del quinto piso

En el primer piso de la estructura sólo se logra atenuar cerca de un 45% su movimiento ante la señal sísmica. El error de observación es cercano al 50%, esto se observa pues el movimiento del piso tiene zonas con valores a 2 [mm] mismas donde el error de estimación es de 1[mm].

En el quinto piso de la estructura se tiene una mejor atenuación al disminuir el movimiento un 70% manteniendo los valores de desplazamiento alrededor de 5 [mm]. La señal tiene un valor máximo después de 20 [s], este valor sin la ley de control es de 20 [mm] mientras con la ley de control es menor de 10 [mm]. El error de observación converge a valores cercanos a cero.

Esto implica que en los pisos siguientes al primero se logra una mejor estimación de sus posiciones así como una mayor atenuación. Las oscilaciones al inicio se deben a la asignación de polos propuesta. En general, polos con parte real negativa y parte imaginaria más cercanos al origen implican errores más grandes del observador mientras polos alejados del origen proporcionan una mayor velocidad de convergencia. No obstante una rápida convergencia provoca errores iniciales muy altos.

Una manera de cuantificar el error de observación es mediante la norma de error en las salidas, definida como la diferencia entre las salidas reales y las salidas medidas. En este caso se muestra la norma de los valores reales y del error en las figuras 5.9 y 5.10.

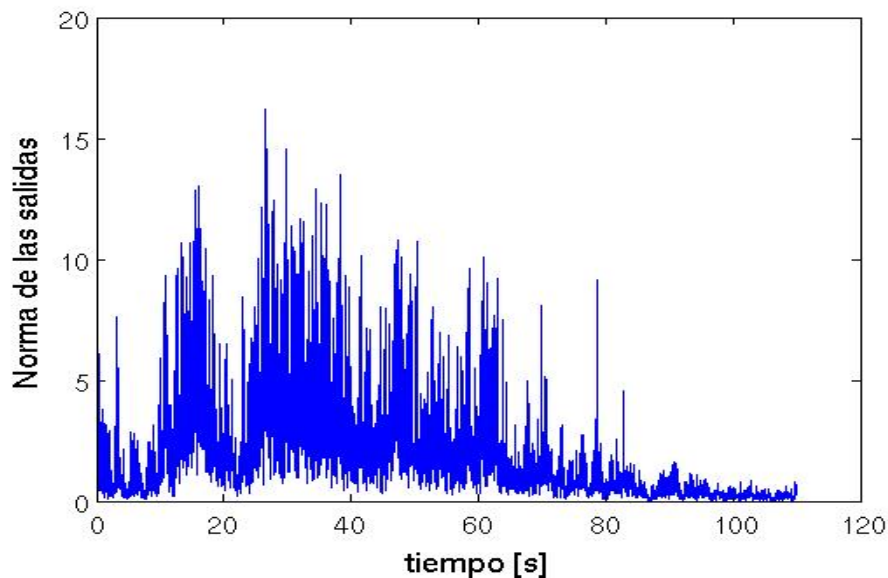


Figura 5.9: Norma de las aceleraciones de salida

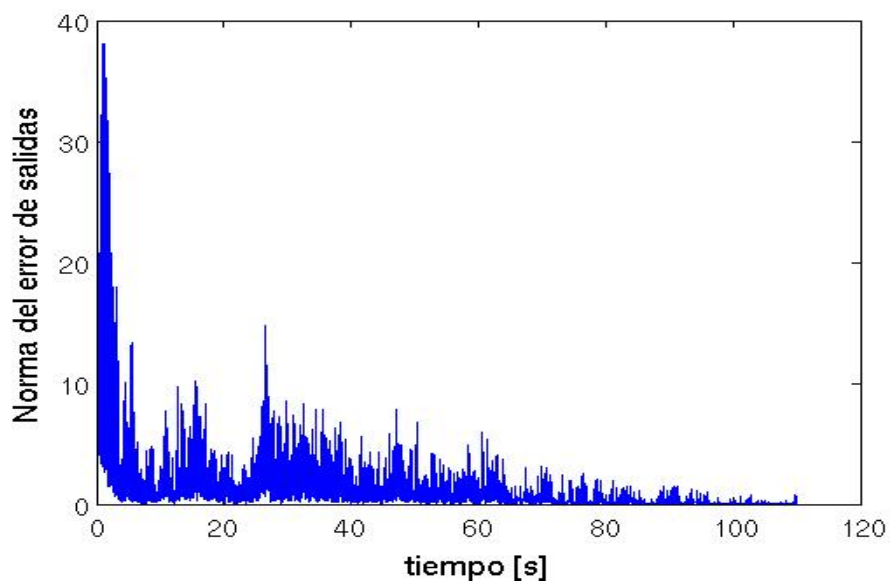


Figura 5.10: Norma de error de estimación en las aceleraciones de salida

Se observa un error igual que la magnitud de las salidas, esto es debido al error en la primera salida el cual es el mayor comparado a los errores en las salidas de aceleración de los demás pisos. La Figura 5.11 muestra el error en la señal de aceleración del primer piso mientras la Figura 5.12 el error en el quinto piso.

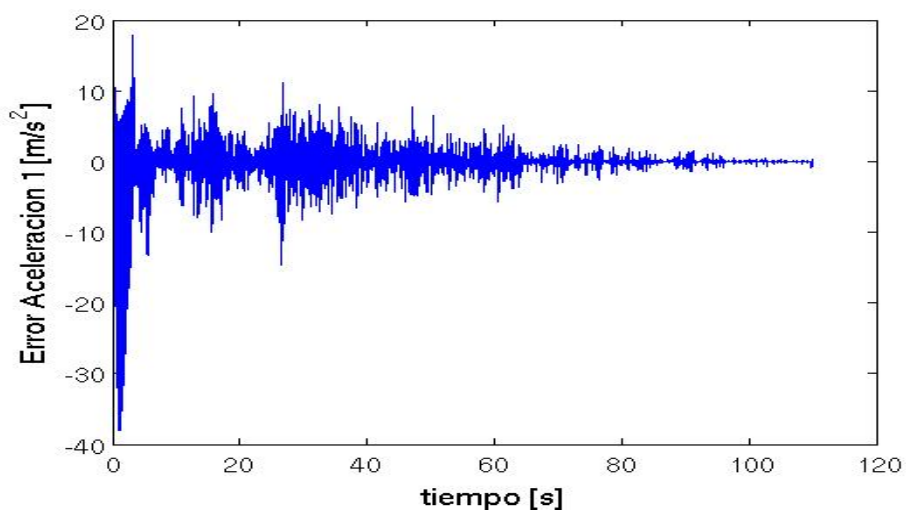


Figura 5.11: Aceleración piso 1

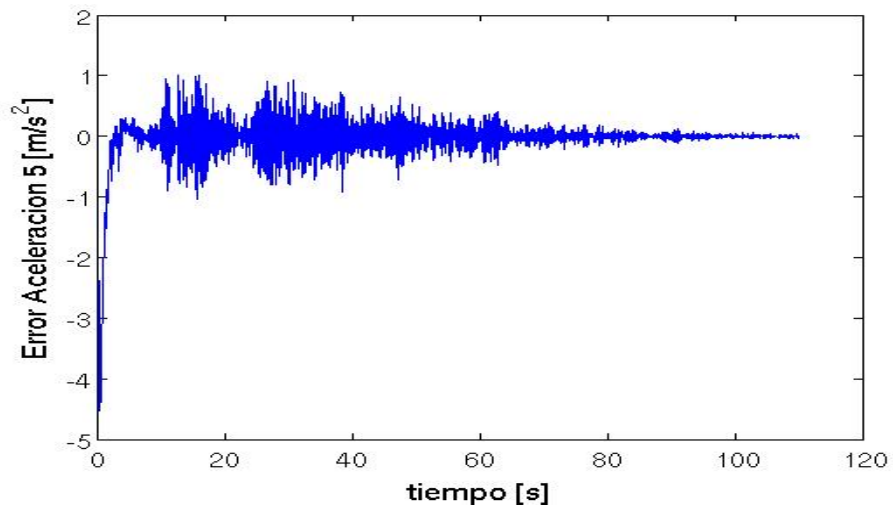
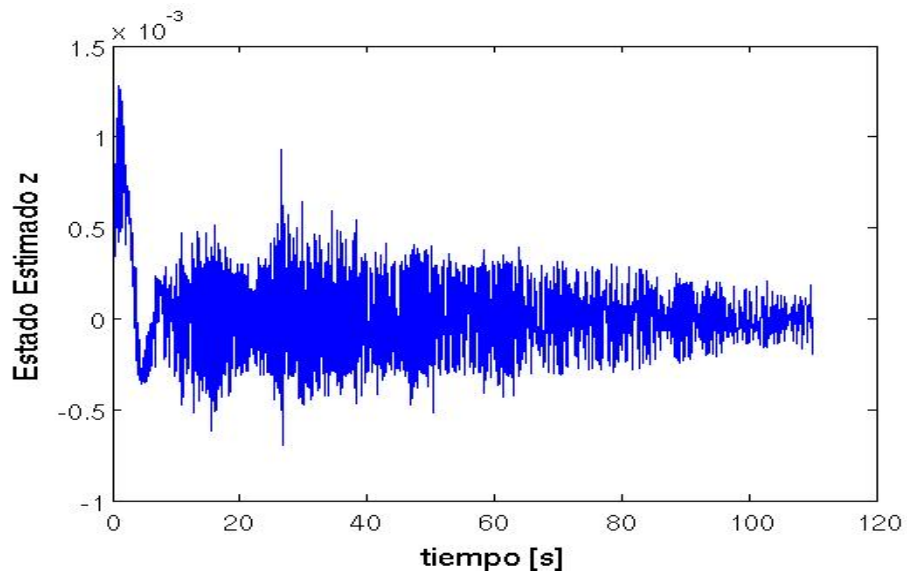


Figura 5.12: Aceleración piso 5

En cuanto al estado  $z$ , la Figura 5.13 muestra el valor interno  $z$  del amortiguador mientras la Figura 5.14 muestra su estimación.

Figura 5.13: Estado  $z$  estimado

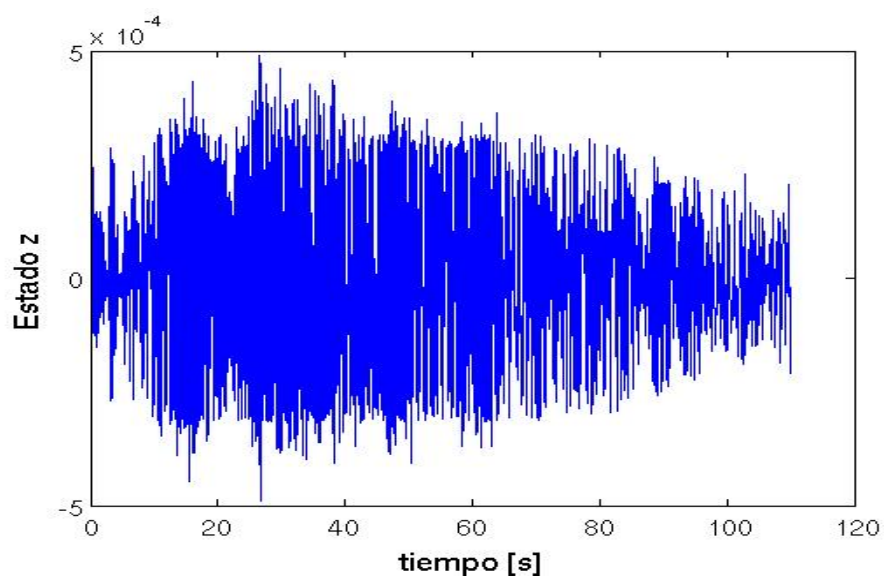


Figura 5.14: Estado  $z$

El valor estimado de  $z$  es cercano al valor real teniendo una buena estimación. Los parámetros se dividen en  $\theta_k$ ,  $\theta_c$ ,  $\theta_z$  y  $\theta_f$ . Los parámetros  $\theta_k$  ofrecen, algunos, una convergencia próxima a su valor real tal como puede observarse en las figuras 5.15-5.23.

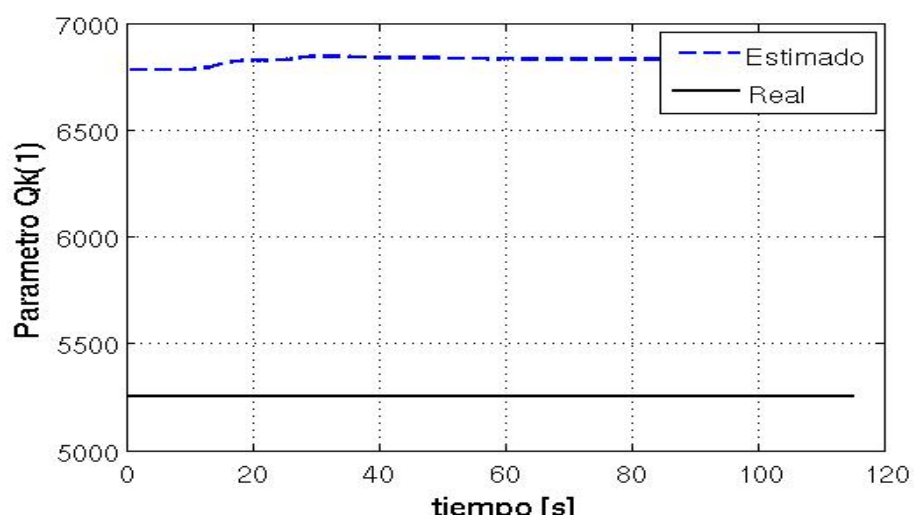


Figura 5.15: Parámetro  $\theta_k(1)$

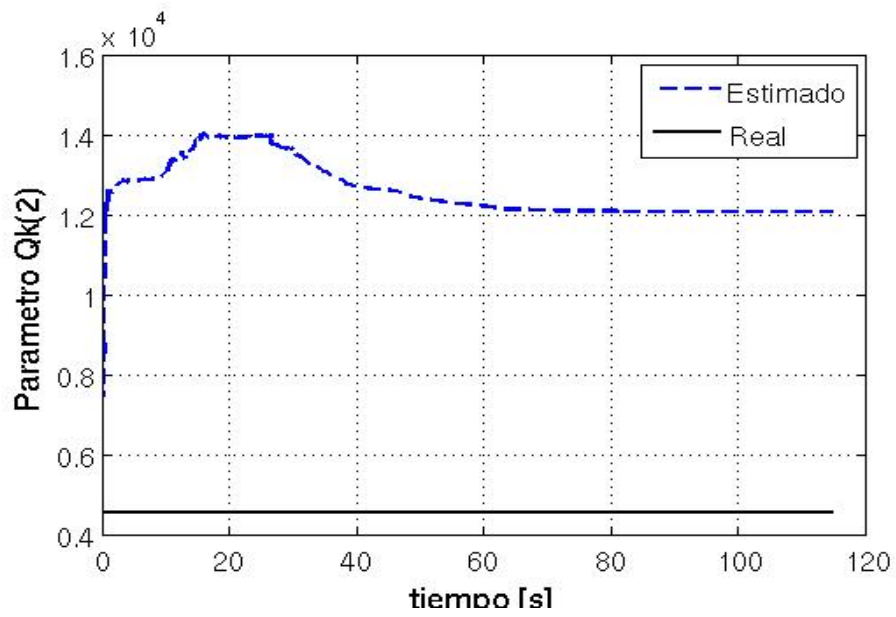


Figura 5.16: Parámetro  $\theta_k(2)$

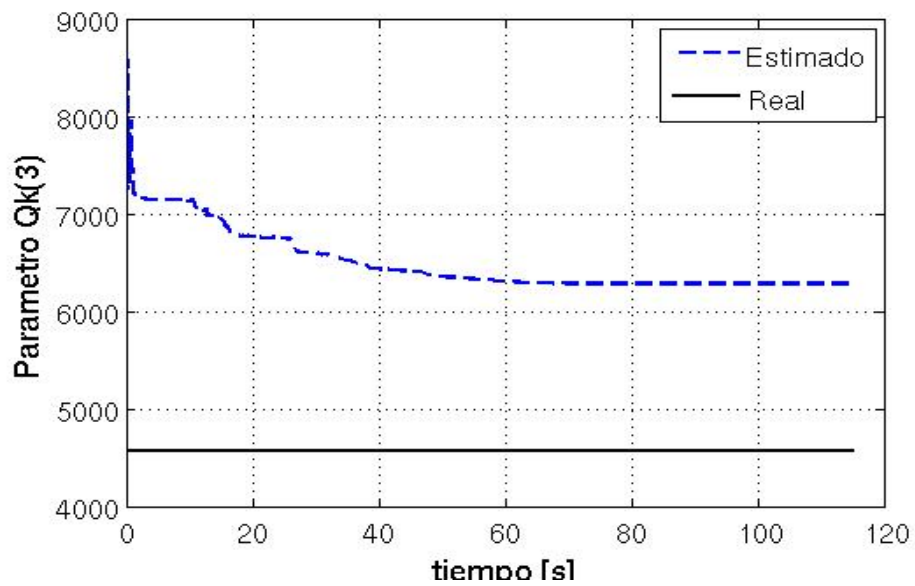


Figura 5.17: Parámetro  $\theta_k(3)$



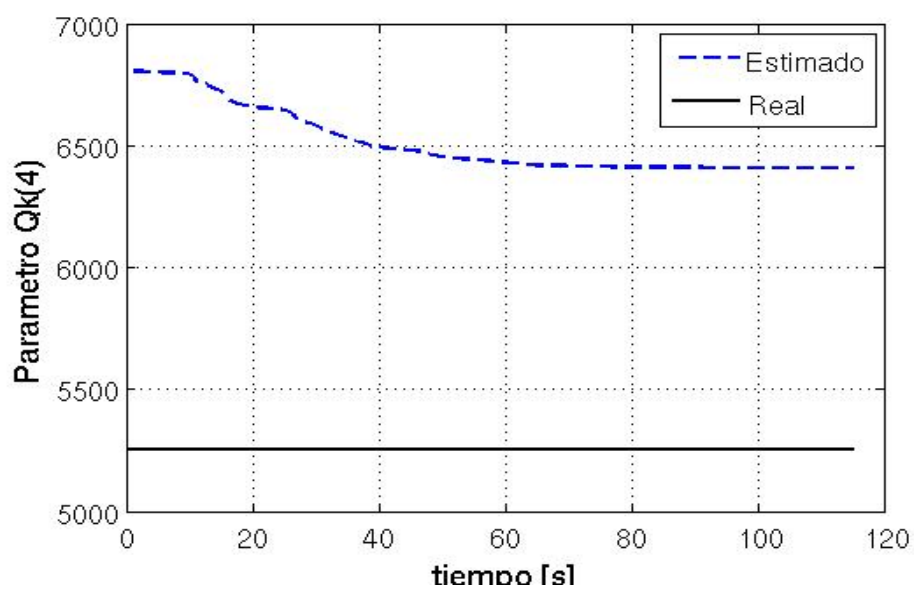


Figura 5.18: Parámetro  $\theta_k(4)$

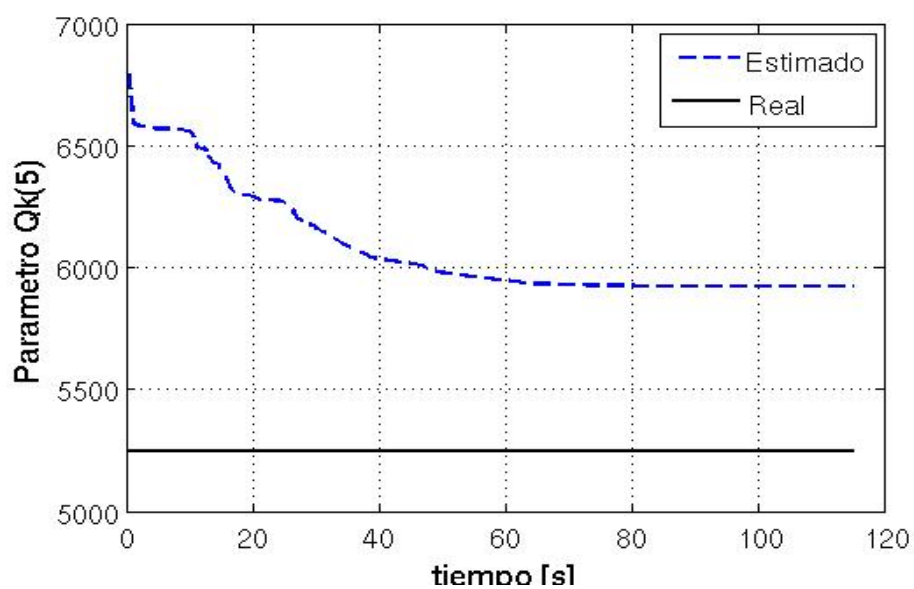
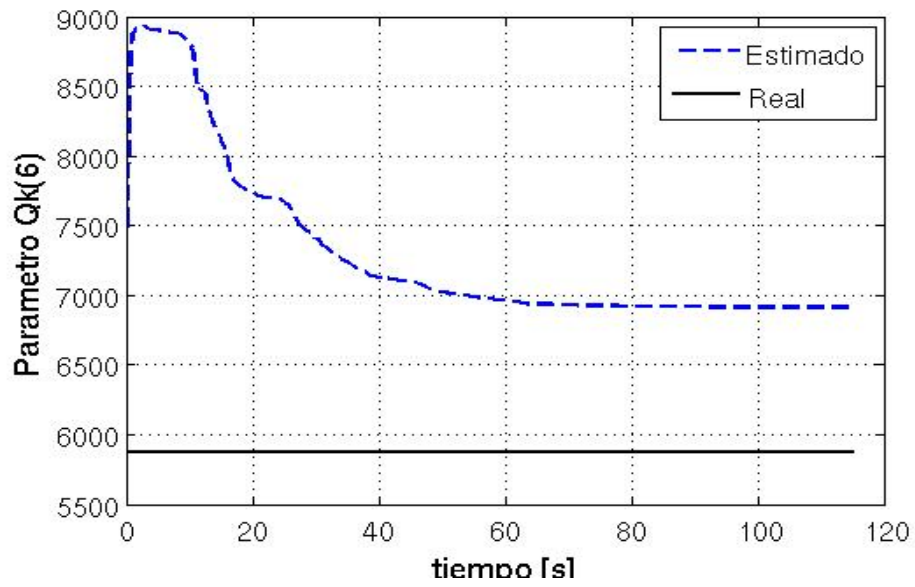
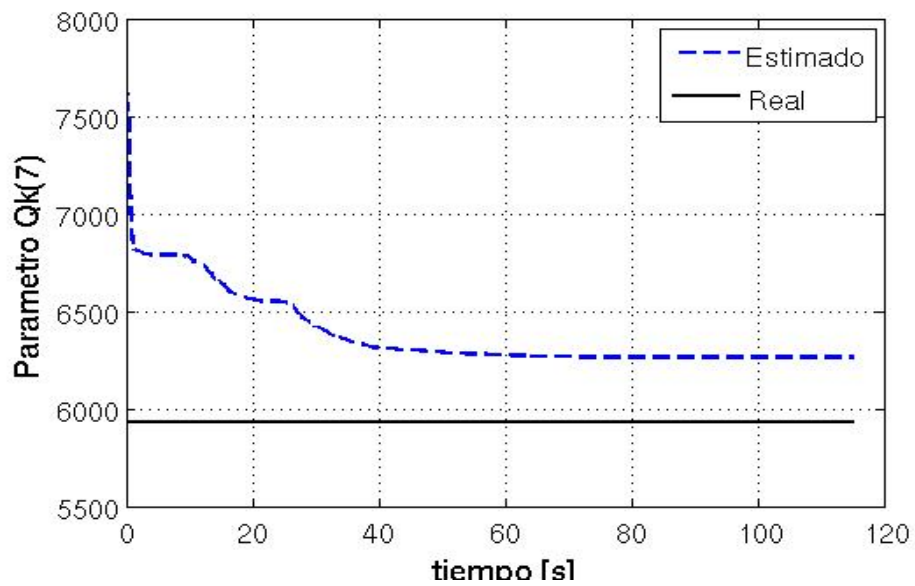


Figura 5.19: Parámetro  $\theta_k(5)$

Figura 5.20: Parâmetro  $\theta_k(6)$ Figura 5.21: Parâmetro  $\theta_k(7)$

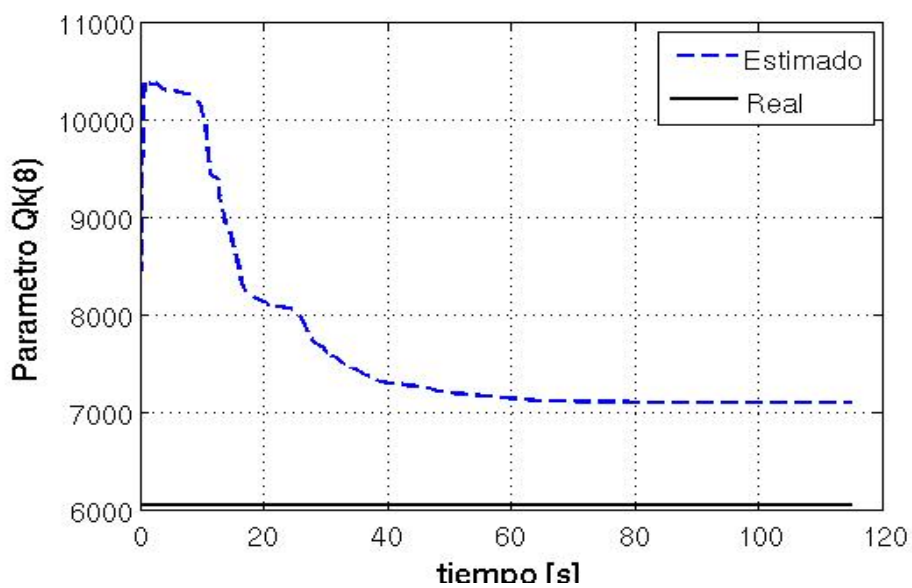


Figura 5.22: Parámetro  $\theta_k(8)$

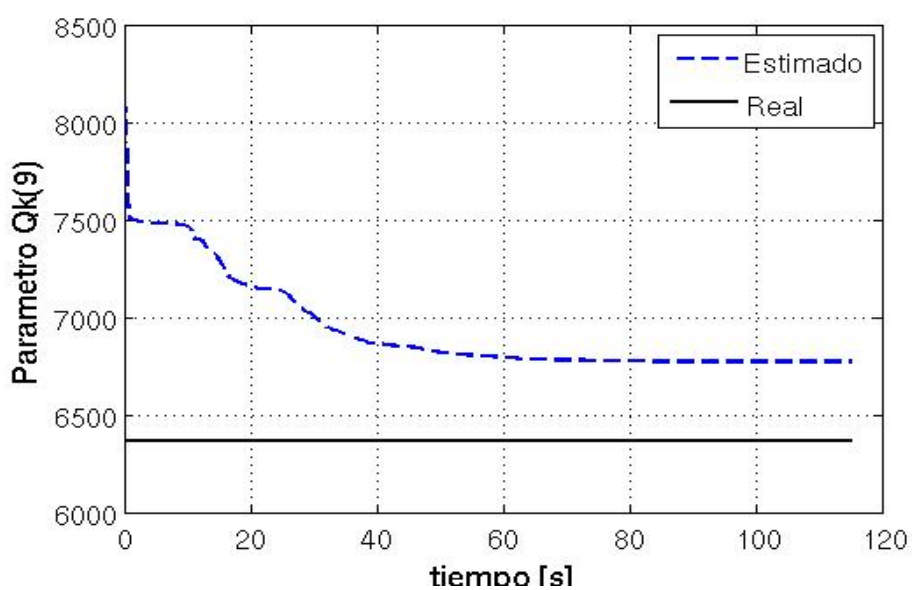


Figura 5.23: Parámetro  $\theta_k(9)$

Los parámetros  $\theta_c$  no tienen una convergencia, permanecen en su valor inicial o cerca de este para todo instante de tiempo. Los valores de  $\theta_c$  y sus estimados después de 100 segundos son los

siguientes

$$\theta_c = [82.6, 1.22, 1.22, 1.29, 1.29, 1.19, 1.21, 1.28, 1.35]$$

$$\hat{\theta}_c = [106.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.7, 1.6, 1.6, 1.7, 1.8]$$

No todos estos parámetros muestran convergencia. Esto puede deberse a varias razones, siendo las principales el diseño de las ganancias en la matriz de covarianza y la necesidad de una excitación persistente que contenga las frecuencias suficientes para estimar todos los estados y parámetros. No obstante, una buena estimación de  $\hat{\theta}_k$  implica obtener las componentes frecuenciales de la estructura con un margen de error aceptable y menor cuando los valores de  $\hat{\theta}_k$  son más próximos a los reales.

En los parámetros del amortiguador no se logró su convergencia 5.24-5.26, si bien se puede modificar la matriz de covarianza de tal forma que estos se acerquen a su valor real, esta modificación afecta la estimación de los parámetros restantes resultando en dificultad para su diseño.

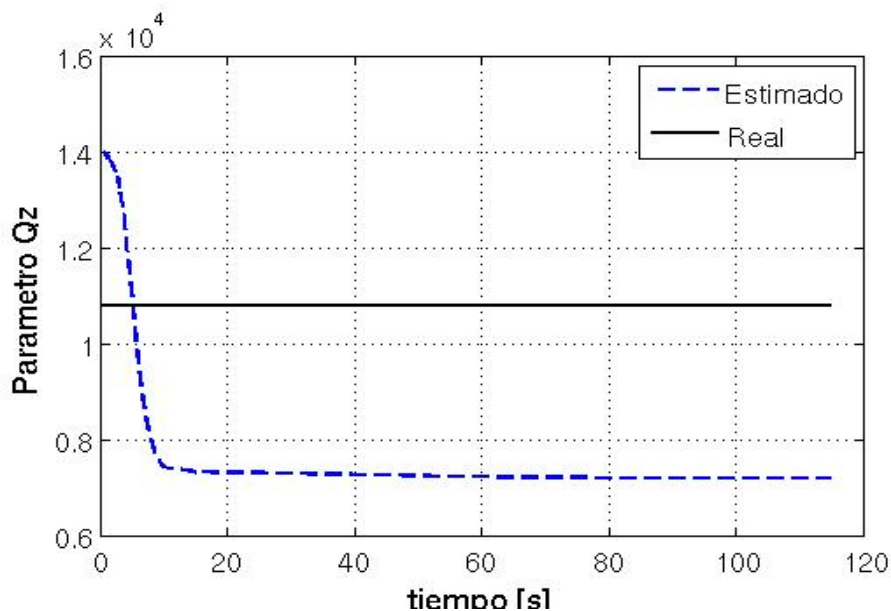


Figura 5.24: Parámetro  $\theta_z$

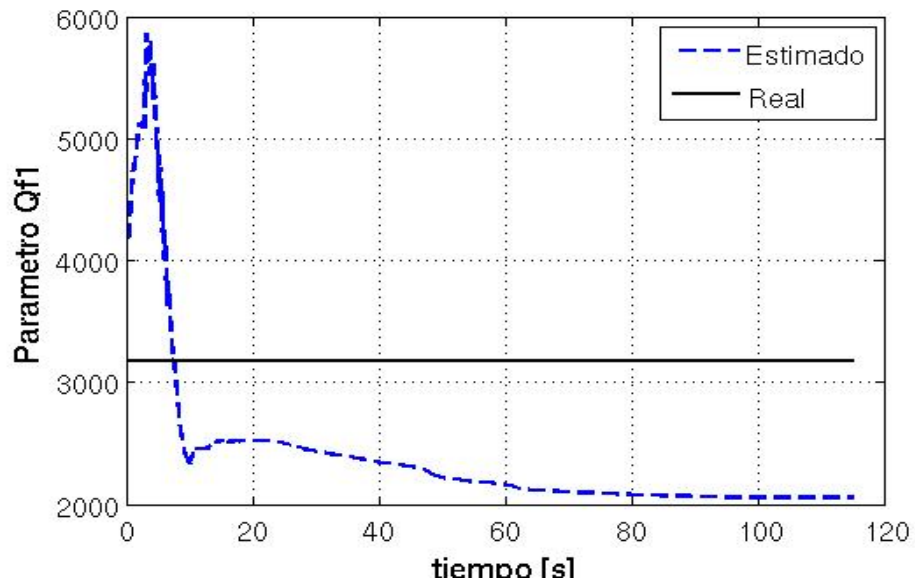


Figura 5.25: Parámetro  $\theta_f(1)$

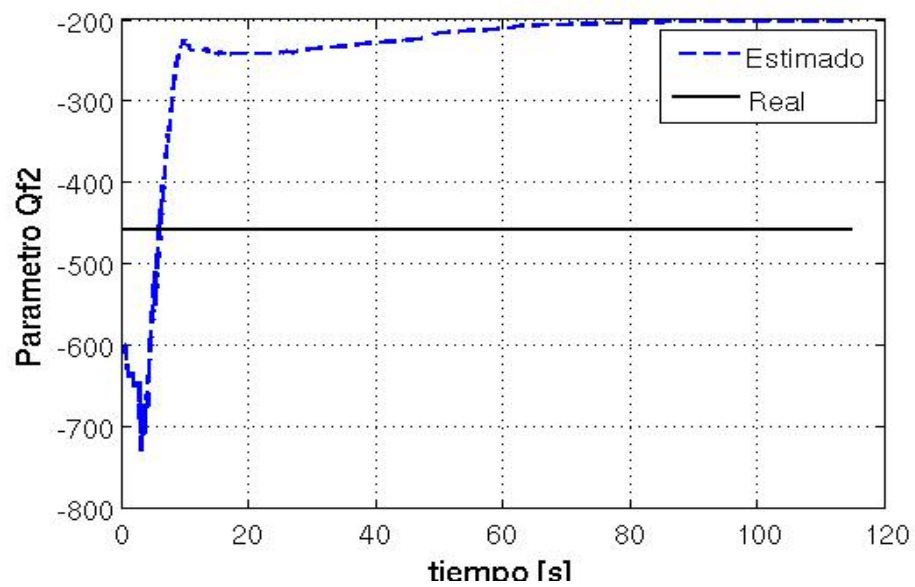


Figura 5.26: Parámetro  $\theta_f(2)$

En cuanto al AMR, la señal de control, el voltaje del amortiguador se obtiene con la función de saturación. Ampliada de 0 a 15 [s], la señal de voltaje se muestra en la siguiente figura.

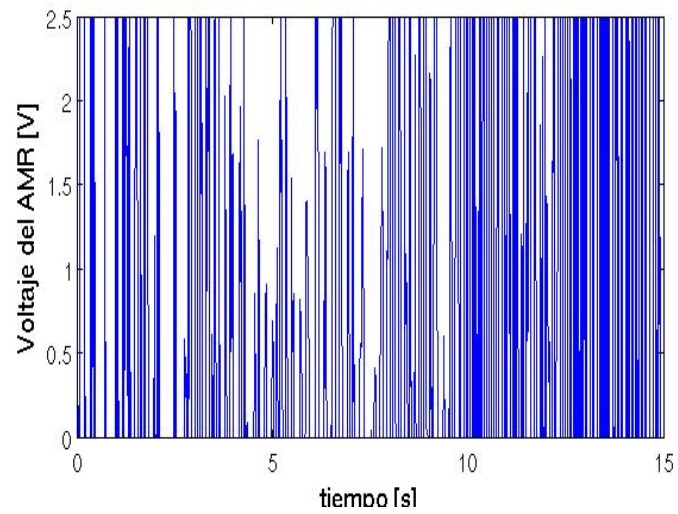


Figura 5.27: Voltaje del amortiguador

Después de 15 [s], durante la mayor presencia del sismo, el voltaje varia entre su valor mínimo y su valor máximo pero con un tiempo mayor a 5 [ms], tiempo de respuesta.

La fuerza que proporciona el amortiguador se muestra en la Figura 5.28

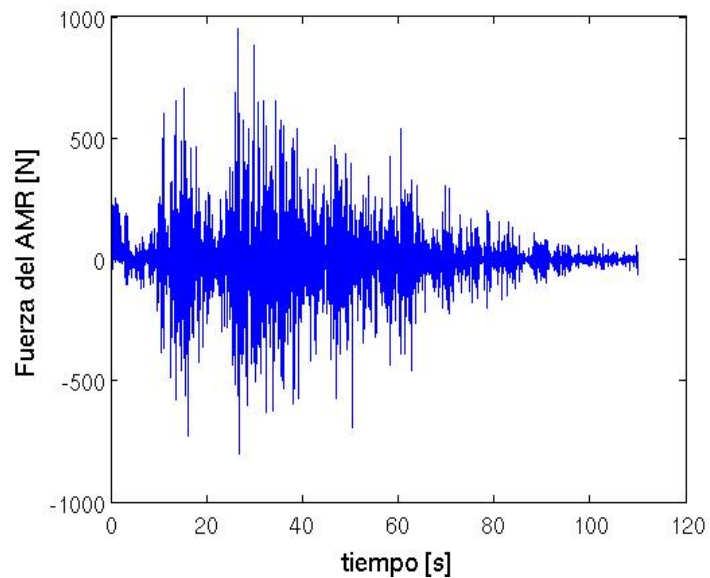


Figura 5.28: Fuerza del amortiguador

La mayor fuerza del amortiguador fue de 1 [kN] lo cual representa la tercera parte de la fuerza total que puede proporcionar el AMR. Cabe decir aun teniendo los parámetros correctos del AMR y de la estructura así como los estados de posición y velocidad, la fuerza no cambia significativamente por lo cual esta selección de matrices de covarianza y matriz J proporcionan una atenuación del sismo sobre la estructura cercana a la que se lograría disponiendo de toda la información del sistema.

Las frecuencias de la estructura, siendo las primeras dos las más representativas, se obtienen con un margen de erro del 7% tal como se observa en la tabla siguiente

Frecuencias estimadas en Hz	Frecuencias reales en Hz
3.33	3.26
10.65	9.97
16.35	15.42
20.52	19.44
24.55	22.74

A través de las primeras frecuencias, se puede describir la dinámica de la estructura lo que representa un punto a favor del observador adaptable. Si bien los parámetros no convergen a su valor real, las frecuencias son suficientes para describir el comportamiento de la estructura. El resultado del observador y el sistema de control permite realizar las siguientes observaciones

- Se logra disminuir la perturbación sísmica sobre la estructura, cerca de 70 % sobre el último piso de la estructura y un 45 % sobre el primero. Esto da una respuesta aceptable al lograr atenuar el sismo sobre la estructura con un solo AMR entre su base y primer piso
- El AMR proporciona sólo un 30 % de su capacidad en fuerza. Sus parámetros no logran convergencia. No obstante, aun conociendo sus parámetros y aplicando la entrada de voltaje máxima, no se logra un resultado significativo en la atenuación comparado al caso que se simuló
- La observación de estados tiene un error que si bien es grande en la primera posición y velocidad del edificio, este error es menor en la observación de los estados de los demás pisos de la estructura. Esto no impide atenuar la perturbación sísmica sobre la estructura
- La estimación de parámetros no garantiza de estos su convergencia. Sin embargo, se logra obtener las primeras frecuencias de la estructura con lo cual se puede generar su dinámica.

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo de tesis se abordaron dos problemas en los sistemas de protección de estructuras civiles ante perturbaciones sísmicas. El primer problema radicó en diseñar una ley de control que atenué las vibraciones que provoca un sismo sobre la estructura civil. El segundo problema consistió en obtener la información necesaria para la ley de control así como la información que permita obtener la dinámica de la estructura considerando que ésta cambia en el tiempo.

Para disminuir las vibraciones sobre la estructura, se optó por equipar ésta con un amortiguador magnetoreológico (AMR) el cual se coloca entre su base y el primer piso. Los AMRs son dispositivos que usan un fluido no magnetizable sobre el cual se encuentran partículas ferromagnéticas como el hierro, las cuales a través de un campo magnético se ordenan de tal forma que provocan una mayor rigidez en el amortiguador. El campo magnético se induce a través una señal de voltaje sobre una bobina en el AMR. La rigidez aumenta conforme el campo magnético es mayor. El comportamiento del AMR se asemeja a una fuerza de fricción por lo cual se recurre a modelos dinámicos de fricción, eligiendo el propuesto por (Alvarez y Jiménez 2002). Este modelo, basado en el modelo de LuGre, se eligió dada su linealidad en los parámetros, cuyo número es menor comparado con otros modelos propuestos en la literatura. La desventaja se da en ser no lineal en la velocidad del primer piso de la estructura. Este modelo fue validado experimentalmente.



La estructura se modeló como un conjunto de masas, resortes y amortiguadores en serie, de parámetros concentrados. Este modelo de la estructura es lineal simplificando así el análisis del sistema estructura y AMR. El modelo se representó en espacio de estados de posición, velocidad de los pisos y el estado interno del amortiguador.

Con el modelo de la estructura y del AMR se propone una señal de control basada en el análisis de Lyapunov con una función candidata cuadrática. La ley de control actúa de forma discontinua al depender del signo de la velocidad relativa en el AMR y garantiza estabilidad práctica. No obstante, para disminuir el efecto *chattering*, se aproxima la ley de control por una función de saturación.

Este controlador depende de los parámetros del amortiguador, así como de la velocidad del primer piso de la estructura y del estado interno del amortiguador. Para obtener tal información, se propuso un observador adaptable de estados y parámetros considerando que sólo se dispone de la información de las aceleraciones en cada uno de los pisos de la estructura. El observador obtiene las aceleraciones estimadas a través de una parametrización lineal del sistema. Los estados se estiman en función de la realimentación del error de las aceleraciones. Para estimar los parámetros se plantea una matriz dinámica de covarianza. Este observador se basa en el algoritmo de mínimos cuadrados. En el diseño del controlador se usan los estados y parámetros estimados.

Se simuló el comportamiento de una estructura de cinco pisos equipada de un amortiguador magnetoreológico entre su base y el primer piso. Esta estructura es sometida a la señal sísmica de  $7.8M_L$  de Santiago Chile en 1985. Los resultados muestran lo siguiente :

- Se logró disminuir las vibraciones en cada uno de los pisos de la estructura. En el quinto piso, el cual sufre un mayor efecto del sismo, se logró disminuir su desplazamiento alrededor de un 70% comparado al que obtiene sin el controlador
- Los parámetros del sistema convergen y puede deberse a la falta de riqueza en frecuencias del sismo. No obstante, se obtienen las frecuencias fundamentales de la estructura las cuales en su estimación tienen un error promedio del 7% sobre sus valores reales

- Los estados se estiman con un error acotado, un orden de magnitud menor al de los estados reales. Este error se debe al diseño de la matriz que realimenta el error de las salidas, que se diseñó por asignación de polos pues se consideró que la no linealidad del sistema es rápida con respecto a la parte lineal. Los polos del observador son más cercanos al origen que los del sistema provocando una convergencia a los estados más lenta. Una asignación de polos más alejada del origen crea oscilaciones de gran magnitud en la estimación de estados
- Aunque la estimación de estados y parámetros no fue correcta, con un error acotado, el resultado en la atenuación del sismo es similar al que se obtendría de conocer toda la información del sistema, estados y parámetros, mostrando así un desempeño aceptable.

Se cumplió con los objetivos planteados y se mostró la efectividad del esquema de protección de estructuras civiles ante sismos. Se diseñó un controlador y observador en lazo cerrado que garantizan la estabilidad del sistema no lineal y a la vez obtiene un desempeño aceptable al estimarse las frecuencias del sistema con un error debajo del 10 % y atenuar el sismo cerca de un 70 %. Falta aún realizar pruebas experimentales del esquema propuesto.

# Referencias

- Alvarez-Icaza, L. y R.C. Méndez (2003). Frequency shaped semi-active control of civil structures. En: *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Vol. 2. pp. 1422–1427.
- Alvarez, L. y R. Jiménez (2002). Real-time identification of magneto-rheological dampers. En: *Proceedings of the 2002 IFAC World Congress*. pp. 1513–1522.
- Alvarez, L. y R.C Jiménez (2003). Semi-active control of civil structures using magnetorheological dampers. En: *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Vol. 2. pp. 1428–1433.
- Canudas, C., H. Olsson, K J. Åstrom y P. Lischinsky (1995). A new model for control of systems with friction. En: *Proceedings of the 1995 IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 40. pp. 419–425.
- Cetin, S., E. Zergeroglu, S. Sivrioglu y I. Yuksek (2009). Adaptive control of structures with mr damper. En: *Proceedings of the 2009 IEEE Control Applications and Intelligent Control*. pp. 60–65.
- Chopra, A.K. (1995). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice-Hall. Upper Saddle River, NJ, USA.
- Cornejo, C. y L. Alvarez (2006). Vibration control of a building with magneto-rheological-dampers based on interconnection and damping assignment. En: *Proceedings of the 2006 IEEE Decision and Control 45th Conference*. pp. 6549–6554.
- Fu, Yi., S.J. Dyke, J.M. Caicedo y J.D. Carlson (1999). Seismic response control using smart dampers. En: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. Vol. 2. pp. 1022–1026.

- Furuki, S., T. Terasawa y A. Sano (2006). Adaptive isolation control for uncertain structure with MR damper: Experimental studies. En: *Proceedings of the 2006 SICE-ICASE International Joint Conference*. pp. 3228–3233.
- Ioannou, P. y J. Sun. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc 1996.
- Jansen, L.M. y S. J. Dyke (2000). Semi-active control strategies for MR dampers: A comparative study. *Journal of Engineering Mechanics* pp. 795–803.
- Jiménez, R. y L. Alvarez (2004a). Civil structures semi-active control with limited measurements. En: *Proceeding of the 2004 American Control Conference*. Vol. 6. pp. 5467–5471.
- Jiménez, R. y L. Alvarez (2004b). Semiactive control of a shear building using an adaptive observer. En: *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. pp. 2236–2241.
- Jiménez, R. y L. Alvarez (2004c). A state observer for a building with a magneto-rheological damper and parameter uncertainty. En: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. pp. 6, 14–16.
- Jiménez, René (2006). Observadores adaptables para edificios con amortiguadores magnetorreológicos. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Khalil, H. K (1996). *Nonlinear Systems. 2a ed.* Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.
- Kim, Yeesock y R Langari (2007). Nonlinear identification and control of a building structure with a magnetorheological damper. En: *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. pp. 3353–3358.
- Kopcansky, P., N. Tomasovicova, M. Koneracka, M. Timko, V. Zavisova y L. Tomco (2010). *Magnetic Nanoparticles In Magnetic Fluids*. Vol. 10. Faculty of Electrical Engineering and Informatics, Technical University of Kosice.
- Spencer, B.F., Jr., S.J. Dyke y M.K. Sain (1996). Magnetorheological dampers: a new approach to seismic protection of structures. En: *Proceedings of the 1996 35th IEEE Decision and Control*. Vol. 1. pp. 676–681.
- Spencer Jr, B.F., S.J. Dyke, M.K. Sain y J.D Carlson (1997). Phenomenological model of a magnetorheological damper. *J. Engineering Mech., ASCE* **123**, 230–238.

- Villamizar, R., Luo, Ningsu, S.J. Dyke y J. Vehi (2005). Experimental verification of a backstepping controller for magnetorheological MR dampers in structural control. En: *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control and Mediterranean Conference on Control and Automation*. pp. 316–321.
- Weber, F., G. Feltrin y O. Huth (2006). Guidelines for structural control. En: *SAMCO Structural Assessment Monitoring and Control*.
- Wen, Y.K. (1976). Method for random vibration of hysteric systems. En: *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. pp. 249–263.
- Zapateiro, M., H.R. Karimi, N. Luo, B.M. Phillips y B.F. Spencer (2009). A mixed  $H_2/H_\infty$  based semiactive control for vibration mitigation in flexible structures. En: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference*. pp. 2186–2191.
- Zevallos, J., M. Blondet y A. Munoz (2002). Estado del arte en proteccion sismica. *Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú*.