

CAPÍTULO 3

RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA $M-\phi$

3.1 Relación Momento-Curvatura $M-\phi$

El comportamiento de las secciones de concreto reforzado sometidos a acciones de diseño puede comprenderse de manera más clara mediante el uso de gráficas que relacionen el momento flexionante resistente en una sección con la curvatura, correspondiente. La curvatura es el ángulo que forman con la vertical, la línea que describe el perfil de deformaciones unitarias en la sección.

El diagrama momento-curvatura es de gran importancia en el diseño de estructuras ante cargas estáticas y dinámicas, ya que de forma rápida se visualiza que tan dúctil y resistente es un miembro. Además, el área bajo la curva representa la energía interna, la parte bajo la región elástica es la energía de deformación acumulada en el miembro, mientras que el área bajo la región de postfluencia corresponde a la energía disipada en las deformaciones plásticas del mismo, Hernández, (2009).

De la relación momento-curvatura se obtiene la máxima capacidad a flexión del elemento M_u , la curvatura última ϕ_u , así como también sus respectivos momento y curvatura de fluencia, de tal forma que estas cantidades pueden compararse con las demandas que se tienen en el diseño. Por lo que una de las principales aplicaciones de conocer estos valores es calcular la ductilidad de curvatura μ_ϕ de la sección del elemento estructural a diseñar, ya que como se verá en el capítulo cuatro, la ductilidad de curvatura permite conocer si el comportamiento de la sección es dúctil o no. Por ejemplo si un elemento tiene poca capacidad de ductilidad de curvatura la estructura presentará una falla frágil cuando ingrese al intervalo no lineal, lo cual no es deseable. Se requiere que la sección tenga un valor alto de μ_ϕ con el fin de que disipe la mayor cantidad de energía y se distribuyan mejor los momentos, Hernández, (2009).

La relación momento-curvatura de una sección de concreto reforzado se obtiene a partir de las curvas esfuerzo-deformación del concreto y del acero, dicha relación depende de la geometría, del refuerzo longitudinal y transversal de la sección, Aguiar, (2002).

Una consideración de suma importancia para calcular el diagrama momento-curvatura de una sección de concreto reforzado, es que se deben usar relaciones esfuerzo-deformación representativas de las condiciones de los materiales. Por ejemplo, si el concreto del núcleo se puede considerar como confinado, usar una relación para éste y otra para el concreto del recubrimiento. Si no se puede considerar como confinado, bastará con usar una relación esfuerzo-deformación para todo el concreto de la sección.

También es aconsejable utilizar un modelo esfuerzo-deformación para el acero en el cual se incluya la rama de endurecimiento por deformación, con la finalidad de obtener resultados más cercanos a los reales.

La deformación del concreto ϵ_c , varía desde cero hasta la deformación máxima útil ϵ_u , para cada una de estas deformaciones se obtiene un punto del diagrama $M-\phi$ en forma iterativa, imponiéndose una profundidad del eje neutro c , de tal manera que el eje neutro final debe satisfacer dos condiciones:

- 1.-Equilibrio de fuerzas
- 2.-Equilibrio de momentos en la sección analizada

3.1.1 Definición de los principales puntos que componen el diagrama $M-\phi$

En el diagrama momento-curvatura $M-\phi$ de una sección de concreto reforzado existen tres puntos notables A, Y, U, (Fig. 3.1):

- **A** (primer agrietamiento) se presenta cuando en la fibra extrema a tensión, el concreto alcanza su resistencia a la tensión, por falla local empiezan a aparecer las primeras grietas. En la fig. 3.1 se aprecia que la capacidad a flexión correspondiente al punto A es muy baja por este motivo muchas veces se le ignora, incluso en varios estudios se le considera a este punto como el comienzo del rango elástico.
- **Y** (punto de fluencia del acero a tensión) este punto define el final del comportamiento elástico de la sección. En varios estudios se considera la rama elástica a la recta que une el origen de coordenadas con el punto Y. Este punto se determina cuando el acero a tensión alcanza su fluencia.
- **U**, este punto se establece comúnmente cuando el concreto llega a su máxima deformación útil a compresión ϵ_u o cuando el acero llega a la rotura, el que se alcance primero, Aguiar, (2002).

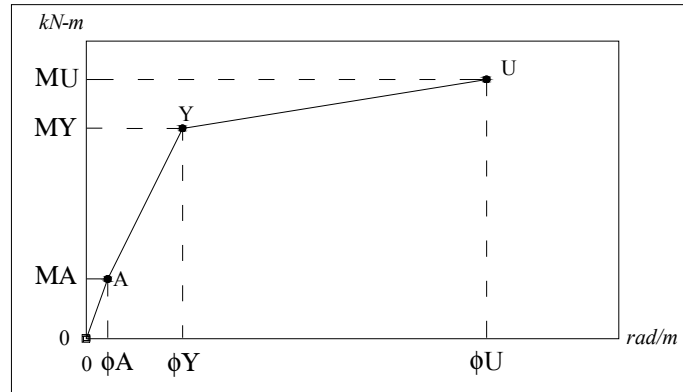


Fig. 3.1 Diagrama $M-\phi$ de una sección de concreto reforzado, y la representación de los puntos más notables.

Para mayor facilidad y por cuestiones prácticas la relación momento-curvatura, se idealiza mediante una aproximación bilineal. Por lo que el diagrama $M-\phi$ se construye a partir de dos puntos “Y” e “U”, (fig. 3.2):

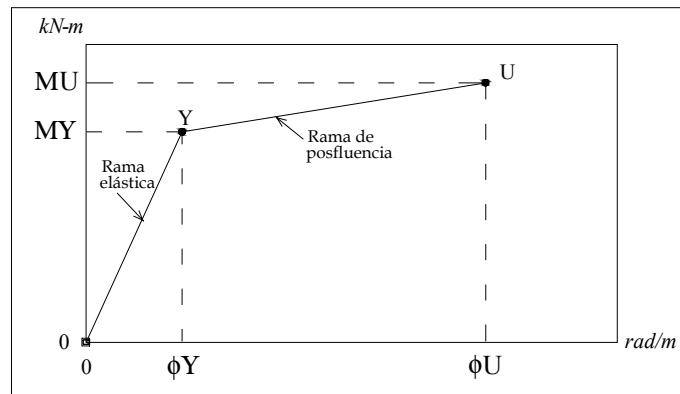


Fig. 3.2 Representación bilineal del diagrama $M-\phi$ de una sección de concreto reforzado.

3.1.2 Determinación teórica de la curva momento-Curvatura

Existen suposiciones básicas ya establecidas por la teoría de la flexión en elementos de concreto reforzado, utilizadas para obtener de forma teórica el diagrama momento-curvatura, a continuación se presentan las siguientes hipótesis para obtener cada punto del diagrama, Park y Paulay, (1971):

- Las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión.
- Se conoce la curva esfuerzo-deformación unitaria a compresión del concreto, por lo tanto es posible estimar la distribución y magnitud de esfuerzos en la sección transversal.
- Se conoce la curva esfuerzo-deformación unitaria a tensión y compresión del acero de refuerzo.
- Es posible despreciar la resistencia a tensión del concreto sin que los resultados se afecten en forma considerable.
- No hay corrimiento del acero respecto al concreto que lo rodea.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, las de compatibilidad de deformaciones y el equilibrio de fuerzas, el momento en una sección de un elemento sometido a carga axial y momento flector se determina encontrando el equilibrio entre las fuerzas de tensión y las fuerzas de compresión. Las fuerzas de tensión se ubican en el refuerzo que se encuentra a tensión y su magnitud es el producto del esfuerzo (f_s) en estas barras por su área total (A_s), tal como se indica en las siguientes ecuaciones:

$$f_s = \varepsilon_s E_s \dots\dots\dots 2.40$$

$$F_s = f_s A_s \dots\dots\dots 2.41$$

donde:

f_s : Esfuerzo del acero en cualquier punto

F_s : Fuerza en las barras de acero

ε_s : Deformación unitaria del acero

E_s : Modulo de elasticidad del acero

A_s : Área de acero a tensión

La fuerza de compresión (F_c) se obtiene de la suma de las fuerzas de las barras que se encuentran en compresión (F_{sc}), la fuerza del área de concreto que esta en compresión (C_c) y la carga axial (P) si existe. La distribución de esfuerzos se define mediante la siguiente expresión:

$$C_c = \alpha f_{cc} b k_d \dots\dots\dots 2.42$$

Donde:

f_{cc} : es la resistencia máxima de un concreto confinado

b : ancho de la sección

k_d : profundidad del eje neutro medida a partir de la fibra superior.

El factor alfa (α) determina la curvatura del bloque de concreto, se puede obtener de la curva esfuerzo-deformación del concreto, mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{Area bajo la curva} = \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c = \alpha \varepsilon_{cm} f_{cc} \dots\dots\dots 2.43$$

Despejando α :

$$\alpha = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} f_{cc}} \dots\dots\dots 2.44$$

$$\text{centro de gravedad} = \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \varepsilon_c d\varepsilon_c = (1 - \gamma) \varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c \dots\dots\dots 2.45$$

donde γ especifica la ubicación de la fuerza del bloque de concreto.

Despejando γ :

$$\gamma = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} f_c \epsilon_c d\epsilon_c}{\epsilon_{cm} \int_0^{\epsilon_{cm}} f_c d\epsilon_c} \dots\dots\dots 2.46$$

Las ecuaciones de compatibilidad indican que los esfuerzos en el concreto se pueden escribir en términos de las deformaciones y viceversa, por lo tanto las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n F_{itensión} - \sum_{i=1}^n F_{icompresión} - abf_{cc}k_d - P = 0 \dots\dots\dots 2.47$$

$$M = abf_{cc}k_d \left(\frac{h}{2} - \gamma k_d\right) + \sum_{i=1}^n f_{si} A_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i\right) \dots\dots\dots 2.48$$

En resumen los puntos de un diagrama momento-curvatura, se pueden calcular mediante un proceso iterativo, tal como se indica en los siguientes pasos:

1. Proponer una deformación unitaria máxima en la fibra extrema a compresión del concreto ϵ_{ci}
2. Proponer una profundidad de eje neutro, k_{di}
3. Calcular las deformaciones unitarias en el refuerzo a compresión y a tensión
4. A partir de las deformaciones determinadas en el paso anterior y de la curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo que se haya elegido se calculan las fuerzas de tensión y compresión.

$$F_i^j = f_{si} E_s A_{si} \dots\dots\dots 2.49$$

5. Calcular la fuerza del bloque de concreto

$$C_c^j = abf_{cc}k_d^j \dots\dots\dots 2.50$$

6. Verificar si existe equilibrio entre las fuerzas de compresión y de tensión

$$\sum_{i=1}^n F_i^j - abf_{cc}k_d^j - P = 0 \dots\dots\dots 2.51$$

Si no existe equilibrio, el proceso se repite desde el paso número 2, por lo que se propone otra profundidad de eje neutro k_d , hasta que se tenga el equilibrio de fuerzas. Para el cálculo de otro punto se aplica el mismo proceso.

En estas ecuaciones el subíndice "i" indica con que lecho de área de acero se está trabajando, mientras que el superíndice "j" se refiere al número de iteración que se está haciendo, Park, (1971).