



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DISTRIBUCIONES MEZCLADAS EN EL ANÁLISIS DE  
FRECUENCIAS DE FLUJOS MÍNIMOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA CIVIL  
(HIDRÁULICA)

PRESENTA

LUIS FERNANDO ORSINI ZEGADA

DIRECTOR DE TESIS

DR. CARLOS A. ESCALANTE SANDOVAL

CD. UNIVERSITARIA

MARZO DE 2011



---

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente:	Dr. Rodolfo Silva Casarín
Secretario:	Dra. Lilia Reyes Chávez
Vocal:	Dr. Carlos Agustín Escalante Sandoval
Suplente:	Dr. Jesús Gracia Sánchez
Suplente:	M. I. Víctor Franco

Lugar donde se realizó la tesis:

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS**

Dr. Carlos Agustín Escalante Sandoval

## **Dedicatoria**

A mi padre, mi ejemplo de vida.

## **Agradecimientos**

A Dios, por brindarme la oportunidad de realizar este anhelo.

A mi madre y hermanos, por su amor y fortaleza.

A mis docentes, por su paciencia y voluntad para transmitir sus conocimientos.

A mis compañeros y amigos, por su apoyo incondicional.

A la Sra. María del Carmen Zurita, por acogerme en su hogar.

A la familia Palacios de Luis, por su amistad y cariño.

A México y a la UNAM, por recibirme.

## RESUMEN

Las características estadísticas de los llamados escurrimientos mínimos anuales son empleadas para resolver una serie de problemas de ingeniería hidráulica. En esta tesis se emplean las distribuciones mezcladas con poblaciones Gumbel, General de Valores Extremos y Weibull-3 en el análisis de frecuencias de gastos mínimos. Una región en el sureste de México con un total de 17 estaciones hidrométricas fue seleccionada para calcular el flujo de diseño ( ${}_7Q_{10}$ ) para estándares de calidad de agua, para lo cual se emplearon los flujos mínimos anuales promedio de 7 días consecutivos. Los eventos de diseño estimados por las distribuciones mezcladas fueron comparados con aquellos obtenidos por las distribuciones unimodales Log-Normal 3, Gamma 3, Gumbel, Weibull 3 y General de Valores Extremos. Los resultados sugieren que las distribuciones mezcladas son una opción adecuada a ser considerada en el análisis de flujos mínimos.

**Palabras clave:** análisis de frecuencias de flujos mínimos, máxima verosimilitud, muestras heterogéneas, calidad del agua.

## ABSTRACT

Low-flow characteristics are required to solve several water-engineering problems. In this thesis, the Mixed Gumbel, Mixed Generalized Extreme Value and Mixed Weibull-3 distributions are presented toward their applications in low-flow frequency analysis. A region in southern Mexico, with 17 gauging stations was selected to calculate the stream design flow ( ${}_7Q_{10}$ ) for water quality standards and the lowest 7 day average flows were used for this purpose. Results produced by fitting the mixed distribution were compared with those obtained by the Weibull-3, Gumbel, Lognormal-3 and General Extreme Value distributions. Results suggest that mixed distributions are a suitable option to be considered when analyzing minimum flows.

**Keywords:** minimum flow frequency analysis, maximum likelihood, heterogeneous samples, water quality.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos de Probabilidad y Estadística</b>	<b>3</b>
1.1. Independencia Estadística en Hidrología	3
1.1.1. Prueba de Independencia	3
1.2. Homogeneidad Estadística en Hidrología	4
1.2.1. Homogeneidad Temporal	4
1.2.1.1. Prueba de Hipótesis	4
1.2.1.2. Prueba de Hipótesis para Comparar dos Medias Poblacionales	4
1.2.1.3. Prueba de Homogeneidad	5
1.2.2. Homogeneidad Espacial	5
1.3. Ajuste de una función de distribución	5
1.3.1. Técnicas de Ajuste de una Distribución de Probabilidad	6
1.3.1.1. Método de los Momentos	6
1.3.1.2. Método de la Máxima Verosimilitud	7
1.3.2. Pruebas de Bondad de Ajuste de una Distribución	7
1.3.2.1. Error Estándar de Ajuste <i>SFE</i>	7
1.3.2.2. Coeficiente de Determinación $R^2$	7
1.3.2.3. Raíz del Error Cuadrático Medio <i>RMSE</i>	8
1.3.2.4. Criterio de Información de Akaike <i>AIC</i>	8
1.3.2.5. Criterio de Información de Bayes <i>BIC</i>	8
1.4. Análisis de Correlación y Regresión Múltiple	9
1.4.1. Estimación de Parámetros por el Método de los Mínimos Cuadrados	9
1.4.2. Contraste Acerca de los Parámetros del Modelo	9
<b>2. Análisis de Frecuencias de Eventos Extremos</b>	<b>11</b>
2.1. Teoría de los Eventos Extremos: Las Tres Asíntotas	11
2.1.1. Principio de Simetría	13
2.2. Otras Distribuciones de Probabilidad para Eventos Extremos	13
2.3. Análisis de Frecuencias de Flujos Mínimos	14
2.3.1. Distribuciones Estándar para Flujos Mínimos	14
2.3.2. Distribuciones Mezcladas para Flujos Mínimos	15
2.4. Análisis Regional de Frecuencias de Escurrimientos	17
2.4.1. Delimitación de Regiones Homogéneas	17
2.4.1.1. Método de los Momentos-L	17
2.4.1.2. Método de la Región de Influencia	18
2.4.1.3. Método de las K-Medias	19
2.4.1.4. Método del Parámetro de Forma	19
2.4.2. Análisis Regional de Regresión	20
2.4.2.1. Proceso de Normalización de Box-Cox de Doble Potencia	21
<b>3. Caso de Estudio</b>	<b>22</b>
3.1. Independencia de las Series	24
3.2. Homogeneidad de las Series	27
3.3. Análisis de Frecuencias de las Series	28
3.3.1. Bondad de Ajuste de las Distribuciones	28

3.4. Análisis Regional de Frecuencias de las Series	34
3.4.1. Regiones Homogéneas: Método de los Momentos-L	34
3.4.2. Regiones Homogéneas: Método de la Región de Influencia	35
3.4.3. Regiones Homogéneas: Método de las K-Medias	35
3.4.4. Regiones Homogéneas: Método del Parámetro de Forma	36
3.4.5. Análisis Regional de Regresión de las Series	37
<b>4. Conclusiones</b>	<b>40</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>41</b>
<b>Anexo A: Ajuste de las Diferentes Funciones de Distribución</b>	<b>43</b>
<b>Anexo B: Delimitación de Regiones Homogéneas en 7Q10 por Diferentes Métodos</b>	<b>78</b>

## Introducción

Según el Glosario Internacional de Hidrología, flujo mínimo se define como flujo de agua en una corriente durante un tiempo seco prolongado (Smakhtin, 2000). El flujo mínimo es un fenómeno estacional y una componente integral del régimen de flujo de cualquier río. Por otra parte, una sequía es un fenómeno más general y se caracteriza más allá que sólo por el flujo mínimo.

Una sequía es un evento natural resultado de la presencia de lluvias menores a la normal durante un tiempo extenso. Pueden definirse diferentes tipos de sequías: meteorológica, atmosférica, agrícola, hidrológica y en administración del agua (Smakhtin, 2000). El flujo mínimo puede provenir de la descarga de almacenamientos presentes en la cuenca, los cuales tienen la capacidad de mantener el agua de precipitación durante la época seca del año, o por el producto del flujo subterráneo. Esto ocurre cuando el cauce del río intercepta el nivel freático de un acuífero. Otras veces proviene de la descarga de almacenamientos superficiales como lagos, pantanos, valles aluviales, humedales y glaciares (Smakhtin, 2000).

El régimen de escurrimientos mínimos de un río puede analizarse de diferentes maneras, según el tipo de información disponible y el tipo de resultado que se requiere. Por esto existen diferentes medidas e índices que se obtienen del registro de gastos mínimos (Smakhtin, 2000). El análisis de frecuencias de los gastos mínimos anuales son utilizados para el diseño de plantas de tratamiento, o para describir la capacidad de un río para satisfacer los requerimientos del transporte fluvial; el abastecimiento de agua; la generación de energía eléctrica; la dispersión de contaminantes; los sistemas de riego, o para evaluar el impacto provocado por sequías prolongadas a los ecosistemas acuáticos (Escalante, 2008). El Gasto Ecológico o también llamado  $7Q_{10}$ , se define como el caudal mínimo promedio de 7 días consecutivos que ocurre al menos una vez cada 10 años (U.S. EPA, 2006), y que es capaz de dispersar ciertos niveles de concentración de contaminantes letales para el ecosistema acuático en una corriente.

Se cuenta con una extensa literatura para el análisis de frecuencias de gastos máximos anuales, mientras que el número de estudios reportados para el de gastos mínimos es limitado. El modesto interés en encontrar la distribución más apropiada para flujos mínimos se debe al relativamente bajo periodo de retorno requerido para el diseño de estructuras hidráulicas o de operación en un río, el cual es generalmente menor de 100 años.

Se han propuesto diferentes funciones de probabilidad para el análisis de eventos extremos mínimos. Weibull (1958) discutió el uso de la distribución de Valores Extremos Tipo III o Weibull 3 ( $W3$ ), su aplicación puede encontrarse en Chen *et al* (2006). La distribución de Valores Extremos tipo I, o Gumbel ( $G$ ), es comúnmente usada en el análisis de frecuencias de flujos mínimos (e.g. Al-Mashindani *et al*, 1980). Chow (1996) dio la justificación teórica para el uso de la distribución Log-Normal 3 ( $LN3$ ), mientras que Chen *et al* (2006) recomendaron su uso en el análisis regional de flujos mínimos, aplicandola en la cuenca del río Dongjiang al sur de China. Yue y Pilon (2005) determinaron que la distribución Gamma 3 ( $G3$ ) describe de manera aceptable la serie de gastos mínimos anuales en 11 regiones de Canadá. Onoz y Bayazit (1999) examinaron el ajuste de la distribución General de Valores Extremos ( $GEV$ ) al registro de gastos mínimos en 16 ríos en Europa y reportaron resultados favorables.



La gran variedad de mecanismos de generación de flujos mínimos, permite a las distribuciones mezcladas ajustarse satisfactoriamente al registro de gastos mínimos. Estudios realizados por Waylen y Woo (1987) en 20 ríos al norte de Ontario, Canadá, revelan la utilidad de la distribución Gumbel Mixta ( $MG$ ) en representar la ocurrencia de flujos mínimos generados por diferentes procesos hidrológicos. Escalante (2008) analizó los gastos mínimos anuales en 39 estaciones hidrométricas localizadas al sur de México y obtuvo resultados satisfactorios con la aplicación de las distribuciones Gumbel Mixta y la de Valores Extremos de dos Componentes ( $TCEV$ ).

En este trabajo, se presenta la aplicación de las distribuciones Gumbel Mixta ( $MG$ ), General de Valores Extremos Mixta ( $MGEV$ ) y Weibull 3 Mixta ( $MW3$ ) en la estimación del  ${}_7Q_{10}$  en 17 ríos localizados en la llamada Costa de Chiapas, al sur de México. Los eventos estimados por las distribuciones mezcladas son comparados con aquellos obtenidos por las distribuciones unimodales Log-Normal 3 ( $LN3$ ), Gamma 3 ( $G3$ ), Gumbel ( $G$ ), Weibull 3 ( $W3$ ) y General de Valores Extremos ( $GEV$ ). Los criterios empleados de bondad de ajuste son el Error Estándar de Ajuste ( $SFE$ ), el Coeficiente de Determinación ( $R^2$ ), la raíz del Error Cuadrático Medio ( $RMSE$ ), el Criterio de Información de Akaike ( $AIC$ ) y el Criterio de Información de Bayes ( $BIC$ ). Cada una de las distribuciones mencionadas anteriormente, así como las pruebas de bondad de ajuste, se describen en los capítulos 1 y 2.

Con el fin de estimar el Gasto Ecológico en cuencas no aforadas se usarán modelos de Regresión Lineal Múltiple ( $MLR$ ). En el capítulo 2 se dará una breve descripción de las técnicas de delimitación de regiones homogéneas empleadas, en tanto que en el capítulo 3 se aplicarán las distribuciones propuestas a un caso de estudio. Finalmente se establecen las conclusiones del trabajo.

## Capítulo 1

### Conceptos de Probabilidad y Estadística

Los procesos hidrológicos evolucionan en el espacio y tiempo, en una forma que es parcialmente determinista y parcialmente aleatoria. Este se conoce como *proceso estocástico*. En algunos casos, la variabilidad aleatoria excede tanto la variabilidad determinista que justifica tratar al proceso como *puramente aleatorio*. De esta manera, los eventos no están correlacionados y son idénticamente distribuidos.

Cuando no existe correlación entre eventos, la salida de un sistema hidrológico es tratada como independiente del tiempo y del espacio. Este tratamiento es apropiado para observaciones de eventos hidrológicos extremos y para información hidrológica promediada a lo largo de intervalos de tiempo grandes (Chow, 1994).

#### 1.1 Independencia Estadística en Hidrología

En hidrología, independencia significa que un evento que ocurre en un tiempo dado no depende de eventos anteriores. El grado de auto-dependencia lineal de una serie de tiempo se mide con la *función de auto-covarianza*:

$$C_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}) \quad (1.1)$$

donde  $k$  representa el *tiempo de retraso* entre los pares correlacionados ( $x_t - x_{t+k}$ );  $n$  el tamaño de la muestra, y  $\bar{x}$  la media muestral. Una medida adimensional de dependencia lineal se obtiene dividiendo  $C_k$  entre  $C_0$ :

$$r_k = \frac{C_k}{C_0} \quad (1.2)$$

donde  $r_k$  se conoce como *coeficiente de auto-correlación serial de retraso  $k$*  o *función de auto-correlación (ACF)* y es un estimador del *coeficiente poblacional de auto-correlación  $\rho_k$* . La gráfica de ACF versus  $k$ , o correlograma, es una de las formas de evaluar la dependencia de una serie en el dominio del tiempo.

##### 1.1.1 Prueba de Independencia

Para una serie independiente  $\rho_k = 0$  para todo  $k \neq 0$ , sin embargo, una muestra proveniente de una serie independiente, debido a su variabilidad, presenta valores de  $r_k$  fluctuando alrededor de cero. Anderson (Salas et al, 1980) propone los límites del correlograma para una serie independiente:

$$r_{k(95\%)} = \frac{-1 \mp 1.960\sqrt{n-k-1}}{n-k} \quad (1.3)$$

$$r_{k(99\%)} = \frac{-1 \mp 2.326\sqrt{n-k-1}}{n-k} \quad (1.4)$$

para un nivel de probabilidad del 95% y 99% respectivamente. Para calificar de independiente una serie de tiempo, Anderson sugiere que no más del 10% de los valores estimados de  $ACF$  para  $k = 1, 2 \dots n/3$ , sobrepasen los límites (Escalante y Reyes, 2005b).

## 1.2 Homogeneidad Estadística en Hidrología

La naturaleza homogénea de los procesos hidrológicos puede examinarse estadísticamente con respecto al tiempo y al espacio.

### 1.2.1 Homogeneidad Temporal

Un proceso es considerado *homogéneo en el tiempo* si las características básicas del mismo son independientes del tiempo y se lo denomina proceso *puramente aleatorio* o proceso *estacionario*. En hidrología, estrictamente no existen series *homogéneas en el tiempo*, pues diversos tipos de variaciones, de origen natural y artificial, están presentes en todos los fenómenos hidrológicos. Sin embargo, existen técnicas que permiten analizar si estas variaciones son apreciables.

*Tendencia*. Es la variación unidireccional del valor promedio de una variable hidrológica. Pueden usarse numerosas técnicas estadísticas para determinar la tendencia.

*Periodicidad*. Representa una forma de variación regular u oscilatoria. Existe con frecuencia en los fenómenos hidrológicos.

*Persistencia*. Significa que los eventos sucesivos de un proceso hidrológico están correlacionados entre sí de manera persistente.

#### 1.2.1.1 Prueba de Hipótesis

Una prueba de hipótesis permite hacer inferencias relacionadas con parámetros poblacionales mediante la información contenida en los datos de la muestra. Su objetivo es probar una hipótesis, llamada Hipótesis Alternativa ( $H_a$ ), con respecto a los valores de uno o más parámetros. Esto se consigue demostrando que no existe evidencia suficiente que sustente una teoría contraria, o Hipótesis Nula ( $H_0$ ). Al buscar esto, se puede incurrir en dos tipos de errores: error tipo I, si se rechaza  $H_0$  cuando  $H_0$  es verdadera, la probabilidad de cometer un error tipo I, o nivel de significancia, se denota mediante  $\alpha$ ; y error tipo II, si se acepta  $H_0$  cuando  $H_a$  es verdadera, la probabilidad de cometer un error tipo II se denota mediante  $\beta$ .

Para rechazar una  $H_0$ , se debe evaluar una función de las mediciones de la muestra denominada *estadístico de prueba* ( $T$ ), que sigue una distribución de probabilidad conocida  $f(t)$  y comprende una *región de rechazo* ( $RR$ ).

#### 1.2.1.2 Prueba de Hipótesis para Comparar dos Medias Poblacionales

Sean  $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \dots, Y_{n_1}^{(1)}$  y  $Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}, \dots, Y_{n_2}^{(2)}$  muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones normales con medias y varianzas  $\mu_i$  y  $\sigma^2$  para  $i = 1, 2$ . Además,  $\bar{Y}_i$  y  $S_i^2$  para  $i = 1, 2$  son las medias y varianzas muestrales correspondientes. Puede demostrarse que si:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (1.5)$$

es un estimador ponderado de  $\sigma^2$ , entonces:

$$T = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (1.6)$$

tiene una distribución t-Student ( $T_v$ ) con  $v = n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad. Si deseamos rechazar  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$ , para un valor fijo de  $D_0$ , frente a  $H_a: \mu_1 - \mu_2 > D_0$  o  $H_a: \mu_1 - \mu_2 < D_0$ , entonces,  $P(T_v > t) > \alpha$  o  $P(T_v < t) > \alpha$ , donde:

$$t = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - D_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (1.7)$$

Generalmente, se adopta un valor de  $\alpha = 0.05$ . Si deseamos rechazar  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$  frente a  $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$ , entonces  $P(T_v \neq t) > 2\alpha$ ; o  $|t| > t_{\alpha/2}$  dado que  $P(T_v > t_\alpha) = \alpha$ .

### 1.2.1.3 Prueba de Homogeneidad

Una forma de identificar cambios en una serie de tiempo, debido a la no homogeneidad o inconsistencia de la misma, consiste en dividir la muestra en dos sub-series y aplicar una prueba de hipótesis para comparar las medias con  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  frente a  $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ . Si  $|t| < t_{\alpha/2}$  para  $\alpha = 0.05$ , no hay evidencia suficiente para rechazar  $H_0$  y asegurar que existe un cambio significativo o tendencia en la serie.

### 1.2.2 Homogeneidad Espacial

En Hidrología, implica que un evento hidrológico en particular ocurre de igual manera, con cierta tolerancia estadística, en toda una región denominada *región estadísticamente homogénea*. La diversidad geográfica y climatológica da lugar a la existencia de *regiones estadísticamente homogéneas* bien definidas.

### 1.3 Ajuste de una función de distribución

Si las observaciones de una muestra son *idénticamente distribuidas*, estas pueden ordenarse en forma de un histograma de frecuencias. El número de observaciones  $n_i$  en el rango  $[x_i - \Delta x, x_i]$  entre el número total de observaciones  $n$ , se conoce como *frecuencia relativa*:

$$f_s(x_i) = \frac{n_i}{n} \quad (1.8)$$

que es una estimación de  $P(x_i - \Delta x \leq X \leq x_i)$ . La suma de las frecuencias relativas hasta cierto valor se conoce como *función de frecuencia acumulada*:

$$F_s(x_i) = \sum_{j=1}^i f_s(x_j) \quad (1.9)$$

que es una estimación de  $P(X \leq x_i)$ . El límite de la *función de frecuencia relativa* entre el intervalo de longitud  $\Delta x$ , se convierte en la *función de densidad de probabilidad (pdf)*:

$$f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{f_s(x)}{\Delta x} \quad (1.10)$$

y de manera análoga, el límite de la *función de frecuencia acumulada* se convierte en la *función de probabilidad acumulada (cpf)*:

$$F(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} F_s(x) \quad (1.11)$$

Para un valor dado de  $x$ ,  $F(x)$  es la probabilidad acumulada  $P(X \leq x)$  y puede expresarse como la integral de la *función de densidad de probabilidad (pdf)* en el intervalo  $[-\infty, x]$ .

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (1.12)$$

La razón entre la *frecuencia relativa* y la longitud  $\Delta x$  se conoce como *frecuencia normalizada*:

$$f_n(x_i) = \frac{f_s(x_i)}{\Delta x} \quad (1.13)$$

La comparación de la *frecuencia normalizada* y la *función de densidad de probabilidad* puede utilizarse como una medida del grado de ajuste a la distribución teórica (Chow, 1994).

### 1.3.1 Técnicas de Ajuste de una Distribución de Probabilidad

Mediante el ajuste a una distribución teórica de un conjunto de observaciones hidrológicas, se busca resumir en la función y en sus parámetros, toda la información probabilística contenida en la muestra. El ajuste de distribuciones puede lograrse a través de diferentes técnicas de estimación de parámetros.

#### 1.3.1.1 Método de los Momentos

Desarrollado por Karl Pearson (Chow, 1994), considera que los parámetros de una distribución son aquellos para los cuales los momentos de la *función de densidad de probabilidad* alrededor del origen son iguales a los momentos muestrales. El momento  $r$  de una distribución alrededor del origen se define como (Escalante y Reyes, 2005b):

$$M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \quad (1.14)$$

Los momentos muestrales no sesgados, o también llamados estadísticos muestrales, se pueden estimar con las expresiones siguientes:

$$\text{Media Aritmética} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_n \quad (1.15)$$

$$\text{Varianza} \quad S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.16)$$

$$\text{Coeficiente de Asimetría} \quad g = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad (1.17)$$

$$\text{Coeficiente de Curtosis} \quad k = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{1}{S^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \quad (1.18)$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra.

### 1.3.1.2 Método de la Máxima Verosimilitud

Desarrollado por R. A. Fisher (Chow, 1994), propone que los parámetros de una distribución son aquellos que maximicen la probabilidad conjunta de la muestra o la *función de verosimilitud* (Chow, 1994):

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) \quad (1.19)$$

Algunas veces es conveniente trabajar con la *función logaritmo de verosimilitud* (Chow, 1994):

$$LL = \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i)] \quad (1.20)$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra y  $\ln$  denota el logaritmo natural.

### 1.3.2 Pruebas de Bondad de Ajuste de una Distribución

Miden el grado de ajuste de una distribución o la discrepancia entre los valores observados y los valores estimados.

#### 1.3.2.1 Error Estándar de Ajuste *SFE*

Propuesto por Kite (1958), se define como:

$$SFE_j = \left[ \frac{1}{(n - m_j)} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i^{(j)})^2 \right]^{1/2} \quad (1.21)$$

donde  $x$  son los valores observados,  $y^{(j)}$  los valores estimados por la distribución  $j$ ,  $n$  el tamaño de la muestra y  $m_j$  el número de parámetros de la distribución  $j$ . Tiene las mismas unidades que la variable estimada. Es un criterio de selección entre distribuciones, aquella que presente el menor valor de *SFE* será la seleccionada.

#### 1.3.2.2 Coeficiente de Determinación $R^2$

Una de las diversas definiciones equivalentes, es el cuadrado del *coeficiente de correlación* entre los valores observados  $x$  y los valores estimados  $y^{(j)}$  por la distribución  $j$ :

$$R_j^2 = \left[ \frac{Cov^{(j)}(x, y)}{S_x \cdot S_y^{(j)}} \right]^2 \quad (1.22)$$

donde  $Cov^{(j)}(x, y)$  es la covarianza entre los valores observados y los valores estimados,  $S_x$  es la desviación estándar de los valores observados y  $S_y^{(j)}$  es la desviación estándar de los valores estimados por la distribución  $j$ . Se interpreta como el porcentaje de variación de las observaciones que es representada por el modelo. Su valor oscila entre  $0 \leq R^2 \leq 1$ . Un valor de  $R^2 = 1$  significa que el modelo es capaz de representar en su totalidad la variabilidad de las observaciones. Es una medida de que tan bien serán las predicciones de una distribución.

### 1.3.2.3 Raíz del Error Cuadrático Medio *RMSE*

Se define como la raíz de la media aritmética del cuadrado de los residuales:

$$RMSE_j = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i^{(j)})^2 \right]^{1/2} \quad (1.23)$$

donde  $x$  son los valores observados,  $y^{(j)}$  los valores estimados por la distribución  $j$  y  $n$  el tamaño de la muestra. El Error Cuadrático Medio *MSE* es el valor esperado del cuadrado de los residuales o el segundo momento de los residuales con respecto al origen. En analogía con la desviación estándar, la raíz del *MSE* conduce a *RMSE* que tiene las mismas unidades de la variable estimada. Es un criterio de selección entre distribuciones, aquella que presente el menor *RMSE* será la seleccionada.

### 1.3.2.4 Criterio de Información de Akaike (*AIC*)

Propuesto por H. Akaike se define como (Salas et al, 1980):

$$AIC_j = n \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2m_j \quad (1.24)$$

donde  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  es un estimador de la varianza de los residuales,  $m_j$  el número de parámetros de la distribución  $j$  y  $\ln$  denota el logaritmo natural. Akaike propone su uso como criterio de selección del orden de modelos *ARMA* en el análisis de series de tiempo. El modelo que presente un menor *AIC* será aquel que conserve mejor el criterio de Parsimonia (Salas et al, 1980). Mutua (1994), sugiere su aplicación en la identificación de la distribución de probabilidad óptima.

### 1.3.2.5 Criterio de Información de Bayes *BIC*

Propuesto por G.E. Schwarz, está bastante relacionado con el Criterio de Información de Akaike. Se define como (Cavanaugh, 2009):

$$BIC_j = -2 \ln(L) + m_j \ln(n) \quad (1.25)$$

donde  $L$  es la *función de verosimilitud*,  $m_j$  el número de parámetros de la distribución  $j$ ,  $n$  el tamaño de la muestra y  $\ln$  denota el logaritmo natural. Se deriva bajo el supuesto que la distribución pertenece a la familia exponencial. Es un criterio de selección entre distribuciones con diferentes números de parámetros, pues añade una penalización a la función de verosimilitud en base al número de parámetros del modelo. Aquella que presente el menor valor de *BIC* será la seleccionada.

## 1.4 Análisis de Correlación y Regresión Múltiple

La correlación se define como una medida de dependencia entre variables aleatorias. La expresión matemática que define esta relación lineal entre una variable dependiente  $Y$  y  $k$  variables independientes  $X$  se conoce como modelo de regresión lineal múltiple (*MLR*).

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (1.26)$$

donde,  $\beta_i$  para  $i = 0, 1, \dots, k + 1$ , son los parámetros y  $\varepsilon$  la incertidumbre del modelo.

El análisis de regresión asume que las variables tienen una distribución normal y son independientes.

### 1.4.1. Estimación de Parámetros por el Método de los Mínimos Cuadrados

Los parámetros del modelo se obtienen al minimizar la suma del cuadrado de los errores (*SSE*). Si expresamos un sistema de ecuaciones lineal de manera matricial:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \quad (1.27)$$

el error en la estimación es:

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} \quad (1.28)$$

Entonces, la suma del cuadrado de los errores se expresa como:

$$\begin{aligned} SSE &= \varepsilon^T \varepsilon = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) \\ SSE &= Y^T Y - 2\hat{\beta}^T X^T Y + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por lo tanto, los parámetros que minimizan *SSE* se deducen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}} &= -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta} = 0 \\ X^T X \hat{\beta} &= X^T Y \\ \hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned} \quad (1.30)$$

### 1.4.2. Contraste Acerca de los Parámetros del Modelo

Al igual que la variable dependiente  $Y$ , el estimador  $\hat{\beta}$  tiene una distribución normal con media  $\beta$  y varianza  $\sigma^2 [X^T X]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\sim N(\beta, \sigma^2 [X^T X]^{-1}) \\ \hat{\beta}_i &\sim N(\beta_i, \sigma^2 q_{ii}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde  $q_{ii}$  es el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de la matriz  $[X^T X]^{-1}$ . Un estimador de  $\sigma^2$  se obtiene con:



$$S^2 = \frac{SSE}{n - k - 1} \quad (1.32)$$

Dado que  $\frac{S^2}{\sigma^2}$  tiene una distribución  $\chi^2$  con  $n - k - 1$  grados de libertad:

$$T = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S\sqrt{q_{ii}}} \quad (1.33)$$

sigue una distribución  $t$ -Student con  $n - k - 1$  grados de libertad. Este estadístico de prueba permite contrastar  $H_0: \beta_i = 0$  frente a  $H_a: \beta_i \neq 0$ . Si se acepta  $H_0$ , entonces la variable dependiente  $X_i$  no es relevante en la formación de la variable dependiente  $Y$ .

## Capítulo 2

### Análisis de Frecuencias de Eventos Extremos

La magnitud de un evento extremo está relacionada con su frecuencia de ocurrencia. El objetivo del análisis de frecuencias en Hidrología es el de relacionar la magnitud de los eventos extremos con su probabilidad de ocurrencia. Se asume que la serie analizada es independiente e idénticamente distribuida y proviene de un sistema estacionario en el tiempo.

El período de retorno ( $T$ ) es el valor esperado del intervalo de recurrencia entre eventos que lo igualen o excedan. Puede demostrarse que se relaciona con la probabilidad de excedencia  $P(X \geq x)$  en la siguiente forma (Chow, 1994):

$$P(X \geq x) = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

*Ley Empírica de Weibull.* Propuesta por Weibull (Morán, 1989), en el año 1939, se refiere al valor de probabilidad de excedencia asignada a las observaciones de la muestra con el fin de evaluar el ajuste de una distribución de probabilidad:

$$P(X \geq x_m) = \frac{m}{n + 1} \quad (2.2)$$

donde  $x_m$  es el evento de orden  $m$  y  $n$  el tamaño de la muestra.

#### 2.1 Teoría de los Eventos Extremos: Las Tres Asíntotas

L. Von Bortkiewicz, en 1922, pone de manifiesto que los valores más grandes de muestras tomadas de poblaciones normales tienen una nueva distribución (Escalante y Reyes, 2005b). Para caracterizar una distribución de eventos extremos, las medidas de tendencia central: media, mediana y moda no son suficientes. Para este propósito R. Von Mises introduce una nueva característica denominada *valor asintótico* (Gumbel, 1958). R.A. Fisher y L.H.C. Tippett, el año 1928, publicaron el artículo *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smaller member of a sample*, considerado el cimiento de la teoría asintótica de las distribuciones de valores extremos (Escalante y Reyes, 2005b).

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de distribución  $F(x)$  y  $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , entonces:

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) = F^n(x) \quad (2.3)$$

por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P(M_n \leq x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [F^n(x)] = 0 \quad (2.4)$$

es una forma límite para los valores más grandes. El teorema de *Fisher-Tippett* establece que si existe una secuencia de pares  $[a_n, b_n]$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ P \left( \frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = F(x) \quad (2.5)$$

si  $F(x)$  es una función no degenerada, pertenece a una de las tres distribuciones de valores extremos: Tipo I (Gumbel), Tipo II (Fréchet) o Tipo III (Weibull). Estas distribuciones se obtienen al resolver la ecuación siguiente:

$$F^n(x) = F(a_n x + b_n) \quad (2.6)$$

que fue obtenida por Fréchet en el año 1927 ; llamado el *postulado de estabilidad* (Gumbel, 1958).

*Tipo I (Gumbel)*. O la 1ra *distribución asintótica* que es estable para los valores más grandes. Se deriva para  $a_n = 1$  (Gumbel, 1958):

$$F(x) = \exp\{-\exp[\alpha(x - \mu)]\} \quad (2.7)$$

$$x \geq 0; \alpha > 0; \mu > 0$$

donde  $\alpha$  y  $\mu$  son parámetros independientes de  $n$ .

*Tipo II (Fréchet)*. O la 2da *distribución asintótica* que es estable para los valores más grandes. Se deriva para  $a_n \neq 1$  y  $b_n = 0$  (Gumbel, 1958):

$$F(x) = \exp \left[ - \left( \frac{v}{x} \right)^k \right] \quad (2.8)$$

$$x \geq 0; v > 0; k > 0$$

donde  $v$  y  $k$  son parámetros independientes de  $n$ .

*Tipo III (Weibull)*. O la 3ra *distribución asintótica* que es estable para los valores más grandes. Se deriva para  $a_n \neq 1$  y  $b_n = 0$  (Gumbel, 1958):

$$F(x) = \exp \left[ - \left( \frac{x}{v} \right)^k \right] \quad (2.9)$$

$$x \leq 0; v < 0; k < 0$$

donde  $v$  y  $k$  son parámetros independientes de  $n$ . R. Von Mises reformula la 3ra *distribución asintótica* para un valor límite  $\omega = x$  tal que la función de probabilidad alcanza la unidad y el valor más grande es también limitado por  $\omega$  (Gumbel, 1958):

$$F(x) = \exp \left[ - \left( \frac{\omega - x}{\omega - v} \right)^k \right] \quad (2.10)$$

$$x \leq \omega; v < 0; k < 0$$

A.F. Jenkinson rescribe las tres *distribuciones asintóticas* en una forma común que satisface el *postulado de estabilidad* (Gumbel, 1958):

$$F(x) = \exp \left[ - \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^{1/k} \right] \quad (2.11)$$

$$ak > 0$$

Si  $k > 0$  entonces  $a > 0$ ; si  $k < 0$  entonces  $a < 0$ ; si  $k \rightarrow 0$  entonces la distribución tiende a la 1ra distribución asintótica.

### 2.1.1 Principio de Simetría

La probabilidad de que  $n$  observaciones independientes sean menores que un valor  $x$  es  $F^n(x)$ . Esto puede interpretarse como la probabilidad de que  $x$  sea el máximo de una serie de  $n$  observaciones:

$$\Phi_n(x) = F^n(x) \quad (2.12)$$

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de distribución  $F(x)$  y  $m_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , entonces:

$$P(m_n \geq x) = [1 - P(X_1 \leq x)] \cdots [1 - P(X_n \leq x)] = [1 - F(x)]^n \quad (2.13)$$

es la probabilidad de que  $n$  observaciones independientes sean mayores que un valor  $x$ . Esto puede interpretarse como la probabilidad de que  $x$  sea el menor de una serie de  $n$  observaciones:

$$\Phi'_n(x) = [1 - F(x)]^n \quad (2.14)$$

El proceso de tomar valores extremos de una población induce asimetría, sin embargo, el menor y el mayor valor  $x_1$  y  $x_n$  tomados de una distribución simétrica son mutuamente simétricos:

$$\Phi_n(x_n) = 1 - \Phi'_n(-x_1) \quad (2.15)$$

Esta expresión se conoce como el *principio de simetría* y significa que: dada una distribución de los valores más grandes  $F(x)_{max}$ , puede obtenerse la distribución de los valores más pequeños  $F(x)_{min}$  cambiando el signo de la variable  $x$  (Gumbel, 1958):

$$F(x)_{min} = 1 - F(-x)_{max} \quad (2.16)$$

donde  $F(x)_{min}$  representa la probabilidad de excedencia  $P(X \geq x)$  y  $F(x)_{max}$  la probabilidad de no excedencia  $P(X \leq x)$  (Escalante y Reyes, 2005a).

### 2.2 Otras Distribuciones de Probabilidad para Eventos Extremos

Si la variable aleatoria  $y = \ln(x - x_0)$  esta normalmente distribuida con media  $\mu_y$  y varianza  $\sigma_y^2$ , entonces  $y$  está distribuida en forma Log-Normal 3:

$$f(x) = \frac{1}{(x - x_0)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{[\ln(x - x_0) - \mu_y]^2}{2\sigma_y^2} \right\} \quad (2.17)$$

$$x > x_0$$

La distribución Gamma es la distribución de la suma de  $x$  variables independientes distribuidas exponencialmente. La distribución Pearson tipo III o Gamma 3, introduce un tercer parámetro, un límite inferior  $x_0$  que la vuelve una distribución bastante flexible (Chow, 1994):

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x-x_0}{\alpha}\right) \quad (2.18)$$

$$x \geq x_0; \alpha > 0; \beta > 0$$

Los primeros tres momentos poblacionales de la distribución Gamma 3 son:  $\hat{\mu} = x_0 + \alpha\beta$ ,  $\hat{\sigma}^2 = \alpha^2\beta$  y  $\hat{\gamma} = 2/\sqrt{\beta}$  (Escalante y Reyes, 2005b).

### 2.3 Análisis de Frecuencia de Flujos Mínimos

Tiene como finalidad conocer el evento que se espera ocurra en promedio cada  $T$  años. A diferencia del análisis de frecuencia de eventos máximos, para eventos de magnitud menores, corresponden períodos de retorno mayores, además, los eventos mínimos tienen un límite físico bien definido, cero. Finalmente  $F(x)$  representa la probabilidad de excedencia  $P(X \geq x)$ , es decir, la probabilidad de que no se presente un evento menor o igual a  $x$ .

La metodología a seguir es la siguiente: 1) Extraer la serie de gastos mínimos anuales para cierta duración, 2) Verificar la independencia de los eventos de la serie, 3) Verificar la homogeneidad de la Serie, 4) Ordenar la serie de menor a mayor y asignarle un período de retorno y una probabilidad de excedencia, 5) Ajustar las funciones de distribución para mínimos, 6) Seleccionar la mejor distribución a través de pruebas de bondad de ajuste y, 7) Estimar los eventos esperados para los períodos de retorno de diseño.

#### 2.3.1 Distribuciones Estándar para Flujos Mínimos

Gumbel (1958) discutió el uso de la distribución de Valores Extremos tipo III, o Weibull 3 ( $W3$ ), para ajustar flujos mínimos:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^\alpha\right] \quad (2.19)$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta-\gamma} \left(\frac{x-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^\alpha\right] \quad (2.20)$$

$$x \geq \gamma; \beta > \gamma; \alpha > 0$$

donde  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $\alpha$  son los parámetros de ubicación, escala y forma. La justificación teórica está basada en la *ley de valores extremos*.

La distribución de Valores Extremos tipo I, o Gumbel para mínimos ( $G$ ), se obtiene aplicando el *principio de simetría* (Gumbel, 1958):

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{\omega-x}{\alpha}\right)\right] \quad (2.21)$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\omega-x}{\alpha}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{\omega-x}{\alpha}\right)\right] \quad (2.22)$$

$$x \geq 0; \alpha > 0$$

donde  $\omega$  y  $\alpha$  son los parámetros de ubicación y escala. Los eventos estimados mediante la distribución ( $G$ ) para períodos de retorno largos tienen una alta probabilidad de ser negativos.

Chow (1964) proveyó una justificación teórica para el uso de la distribución Log-Normal 3 ( $LN3$ ) en el análisis de flujos mínimos:

$$F(x) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{(x - x_0)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x - x_0) - \mu_y]^2}{2\sigma_y^2}\right\} dx \quad (2.23)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x - x_0)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x - x_0) - \mu_y]^2}{2\sigma_y^2}\right\} \quad (2.24)$$

$x > x_0$

donde  $x_0$ ,  $\sigma_y$  y  $\mu_y$  son los parámetros de ubicación, escala y forma.

La distribución Pearson tipo III, o Gamma 3 ( $G3$ ), es también usada en el análisis de flujos mínimos:

$$F(x) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x - x_0}{\alpha}\right) dx \quad (2.25)$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x - x_0}{\alpha}\right) \quad (2.26)$$

$x \geq x_0; \alpha > 0; \beta > 0$

donde  $x_0$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros de ubicación, escala y forma.

A.F. Jenkinson obtuvo la distribución General de Valores Extremos para máximos ( $GEV$ ), la cual representa a las distribuciones tipo I (Gumbel), tipo II (Fréchet) y tipo III (Weibull). Las funciones de distribución acumulada y de densidad para mínimos son (Escalante y Reyes, 2005a):

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(1 - \beta \frac{\omega - x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right] \quad (2.27)$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \beta \frac{\omega - x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \exp\left[-\left(1 - \beta \frac{\omega - x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right] \quad (2.28)$$

$\alpha > 0; \beta \neq 0$

Si  $\beta < 0$  entonces  $-\infty < x < \omega - \frac{\alpha}{\beta}$  y si  $\beta > 0$  entonces  $\omega - \frac{\alpha}{\beta} < x < \infty$ ; donde  $\omega$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros de ubicación, escala y forma.

### 2.3.2 Distribuciones Mezcladas para Flujos Mínimos

El uso de funciones teóricas de distribución mezcladas, en la modelación de series provenientes de dos poblaciones, se ha propuesto desde hace mucho tiempo (Mood *et al* 1974):

$$P(X \leq x) = F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x) \quad (2.29)$$

donde  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  son las funciones de distribución marginales correspondientes a la primera y segunda población,  $F(x)$  es la función de distribución mezclada y  $p$  es la proporción de  $x$  en la mezcla.

Si se usan como funciones de distribución marginales la distribución  $G$ , las funciones de distribución acumulada (*cpf*) y de densidad (*pdf*) para la distribución Gumbel Mixta ( $MG$ ) son (Escalante, 2008):

$$F(x) = p \left\{ 1 - \exp \left[ -\exp \left( -\frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \right] \right\} + (1 - p) \left\{ 1 - \exp \left[ -\exp \left( -\frac{\omega_2 - x}{\alpha_2} \right) \right] \right\} \quad (2.30)$$

$$f(x) = \frac{p}{\alpha_1} \exp \left( -\frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \exp \left[ -\exp \left( -\frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \right] + \frac{1 - p}{\alpha_2} \exp \left( -\frac{\omega_2 - x}{\alpha_2} \right) \exp \left[ -\exp \left( -\frac{\omega_2 - x}{\alpha_2} \right) \right] \quad (2.31)$$

$$x \geq 0; \alpha_1 > 0; \alpha_2 > 0; 0 \leq p \leq 1$$

donde  $\omega_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\omega_2$ ,  $\alpha_2$  son los parámetros de ubicación y escala para la primera y segunda población, mientras que  $p$  es el parámetro de asociación.

Si se desea emplear como distribuciones marginales la distribución  $W3$ , las funciones de distribución acumulada (*cpf*) y de densidad (*pdf*) para la distribución Weibull 3 Mixta ( $MW3$ ) son:

$$F(x) = p \exp \left[ -\left( \frac{x - \gamma_1}{\beta_1 - \gamma_1} \right)^{\alpha_1} \right] + (1 - p) \exp \left[ -\left( \frac{x - \gamma_2}{\beta_2 - \gamma_2} \right)^{\alpha_2} \right] \quad (2.32)$$

$$f(x) = p \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \gamma_1} \right) \left( \frac{x - \gamma_1}{\beta_1 - \gamma_1} \right)^{\alpha_1 - 1} \exp \left[ -\left( \frac{x - \gamma_1}{\beta_1 - \gamma_1} \right)^{\alpha_1} \right] + (1 - p) \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \gamma_2} \right) \left( \frac{x - \gamma_2}{\beta_2 - \gamma_2} \right)^{\alpha_2 - 1} \exp \left[ -\left( \frac{x - \gamma_2}{\beta_2 - \gamma_2} \right)^{\alpha_2} \right] \quad (2.33)$$

$$x \geq \gamma_1; x \geq \gamma_2; \beta_1 > \gamma_1; \beta_2 > \gamma_2; \alpha_1 > 0; \alpha_2 > 0; 0 \leq p \leq 1$$

donde  $\gamma_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\gamma_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_2$  son los parámetros de ubicación, escala y forma para la primera y segunda población, mientras que  $p$  es el parámetro de asociación.

Si la distribución  $GEV$  es usada como función de distribución marginal, las funciones de distribución acumulada (*cpf*) y de densidad (*pdf*) para la distribución  $GEV$  Mixta ( $MGEV$ ) son:

$$F(x) = p \left\{ 1 - \exp \left[ -\left( 1 - \beta_1 \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1}} \right] \right\} + (1 - p) \left\{ 1 - \exp \left[ -\left( 1 - \beta_2 \frac{\omega_2 - x}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right] \right\} \quad (2.34)$$

$$f(x) = \frac{p}{\alpha_1} \left( 1 - \beta_1 \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1} - 1} \exp \left[ -\left( 1 - \beta_1 \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1}} \right] + \frac{(1 - p)}{\alpha_2} \left( 1 - \beta_2 \frac{\omega_2 - x}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{\beta_2} - 1} \exp \left[ -\left( 1 - \beta_2 \frac{\omega_2 - x}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right] \quad (2.35)$$

$$\alpha_1 > 0; \alpha_2 > 0; \beta_1 \neq 0; \beta_2 \neq 0; 0 \leq p \leq 1$$

Si  $\beta_j < 0$  entonces  $-\infty < x < \omega_j - \frac{\alpha_j}{\beta_j}$  y si  $\beta_j > 0$  entonces  $\omega_j - \frac{\alpha_j}{\beta_j} < x < \infty$  para  $j = 1, 2$ ; donde  $\omega_1, \alpha_1, \beta_1$  y  $\omega_2, \alpha_2, \beta_2$  son los parámetros de ubicación, escala y forma para la primera y segunda población, mientras que  $p$  es el parámetro de asociación.

## 2.4 Análisis Regional de Frecuencias de Escurrimientos

El Análisis Regional de Frecuencia de Escurrimientos (*RFFA*) permite estimar los cuantiles de escurrimiento ( $Q_T$ ), asociados a un periodo de retorno, en un sitio específico a través de la información recolectada en estaciones de aforo pertenecientes a la región. Algunos métodos asumen que el comportamiento de las frecuencias de los escurrimientos (FFB) es homogéneo. *RFFA* explota esta homogeneidad para estimar cuantiles que, en la mayoría de los casos, son más confiables que aquellos estimados con solo la información del sitio (Cunnane, 1988).

### 2.4.1 Delimitación de Regiones Homogéneas

En la sección 2.2.2 se describe el concepto de *región estadísticamente homogénea*, sin embargo, la definición de región homogénea depende de qué aspecto del comportamiento de los escurrimientos se considere (Cunnane, 1988).

#### 2.4.1.1 Método de los Momentos-L

Este método sugiere que si todos los sitios en una región pertenecen a una misma población, es decir a una misma función de distribución, deben tener los mismos momentos-L. Sin embargo, por la variabilidad de las muestras esto no es así. El  $r$ -ésimo momento-L se define como (Hosking y Wallis, 1993):

$$\lambda_r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \binom{r+1}{j} \beta_j \quad (2.36)$$

donde  $\beta_j$  es el momento de probabilidad pesada  $j$  (Escalante y Reyes, 2005b):

$$\beta_j = \frac{1}{n} \sum_i^{n-j} x_i \binom{n}{j} / \binom{n-1}{j} \quad (2.37)$$

donde  $x_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  es la serie ordenada de mayor a menor. Los radios de los momentos-L se definen como (Hosking y Wallis, 1993):

$$t^{(i)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad t_r^{(i)} = \frac{\lambda_r}{\lambda_2} \quad (2.38)$$

$r = 3, 4, \dots$

donde  $t^{(i)}$  se conoce como el coeficiente de variación-L,  $t_3^{(i)}$  como el coeficiente de asimetría-L y  $t_4^{(i)}$  como el coeficiente de curtosis-L en el sitio  $i$ . En una región homogénea, los puntos en el espacio  $u_i = (t^{(i)}, t_3^{(i)}, t_4^{(i)})$ , deben agruparse. Al graficar  $t$  y  $t_4$  en función de  $t_3$  pueden identificarse aquellos sitios que presenten cierta discordancia con la región. Hosking y Wallis (1993) proponen una medida de esta discordancia:



$$D = \frac{1}{3} N(u_i - \bar{u})^T A^{-1} (u_i - \bar{u}) \quad (2.39)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (2.40)$$

$$A = \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})(u_i - \bar{u})^T \quad (2.41)$$

donde  $u_i = [t^{(i)}, t_3^{(i)}, t_4^{(i)}]^T$  y  $T$  denota transpuesta. Un valor alto de  $D$  indica discordancia del sitio  $i$  con el resto de la región. Hosking y Wallis (1993) sugieren los valores críticos siguientes:

**Tabla 2.1** Valores críticos de la medida de Discordancia

Número de Sitios	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	>15
Valor Crítico	1.333	1.648	1.917	2.140	2.329	2.491	2.632	2.757	2.869	2.971	3.000

#### 2.4.1.2 Método de la Región de Influencia

Considera que cada sitio es el centro de su propia región de influencia. La identificación de esta región se logra con la medición de la distancia euclidiana entre atributos. La distancia euclidiana entre una estación cualquiera  $j$  y la estación base  $b$  (centro de la región) se define como:

$$D_{jb} = \left[ \sum_{i=1}^m (Z_i^{(j)} - Z_i^{(b)})^2 \right]^{1/2} \quad (2.42)$$

donde  $Z_i^{(j)}$  y  $Z_i^{(b)}$  son el atributo  $i$  estandarizado para el sitio  $j$  y el sitio base  $b$  y  $m$  es el número de atributos considerados. El número de atributos puede determinarse mediante un análisis de regresión lineal múltiple (MLR). La estandarización vuelve adimensional los atributos y se consigue con la expresión siguiente:

$$Z_j^{(i)} = \frac{X_j^{(i)}}{S_x^{(i)}}; Z_b^{(i)} = \frac{X_b^{(i)}}{S_x^{(i)}} \quad (2.43)$$

donde  $X_i^{(j)}$  y  $X_i^{(b)}$  son el atributo  $i$  en la estación  $j$  y la estación base  $b$  y  $S_i$  es la desviación estándar del atributo  $i$ . La identificación de la región de influencia implica la determinación de un valor de tolerancia para la distancia. Se pueden excluir aquellos sitios que presenten una distancia mayor al valor promedio:

$$\bar{D}_b = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^N D_{jb} \quad (2.44)$$

donde  $N$  es el número de sitios. Así, se crean regiones homogéneas entre los sitios bases cuyas regiones de influencia se traslapen.

### 2.4.1.3 Método de las K-Medias

Es un método de agrupación particional, es decir, determina todas las regiones al mismo tiempo. El algoritmo asigna cada sitio a un grupo cuyo centro sea el más cercano y comprende los siguientes pasos:

1. Determinar un número de regiones  $k$ .
2. Generar aleatoriamente  $k$  centroides para cada grupo.
3. Asignar cada sitio al grupo cuyo centro sea el más cercano.
4. Re-calcular el centro de cada grupo con los sitios incluidos en el paso anterior.
5. Repetir los dos pasos anteriores hasta que se cumpla cierto criterio de convergencia, por ejemplo, que las asignaciones no cambien.

### 2.4.1.4 Método del Parámetro de Forma

En una región homogénea, se espera que las distribuciones de frecuencia de cada sitio sean idénticas sin considerar el parámetro de escala (Hosking y Wallis, 1993).

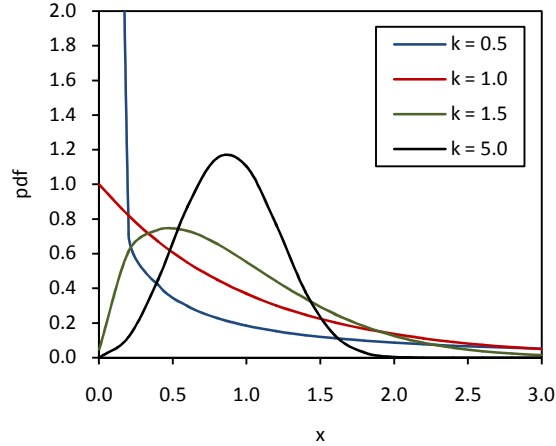
La distribución de frecuencias de los escurrimientos depende fuertemente de las características fisiográficas de la cuenca. Por lo tanto, es razonable asumir que el parámetro de forma de una distribución no debe variar significativamente en una región homogénea.

Bari y Sadek (1993) emplearon el parámetro de forma de las distribuciones Weibull 3 y Gamma 3 en el análisis regional de flujos mínimos en 13 estaciones de aforo al noroeste de Bangladesh. Pilon (1990) sugiere una extensión del método de la avenida índice a través del uso de la distribución Weibull 3 en el análisis regional de frecuencia de flujos mínimos.

La función de densidad de la distribución Weibull 3 adquiere una forma particular en función al parámetro de forma (Figura 2.1). Kite (1958), basado en la técnica de los momentos ordinarios, desarrolla una expresión para estimar el parámetro de forma de la distribución Weibull 3 en función del coeficiente de asimetría de la muestra:

$$g = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^{3/2}} \quad (2.45)$$

donde  $g$  es el coeficiente de asimetría muestral,  $\alpha$  el estimador por momentos del parámetro de forma de la distribución Weibull 3 y  $\Gamma(\ )$  es la función Gamma.



**Figura 2.1** Funciones de densidad de probabilidad de la distribución Weibull 3 para diferentes valores del parámetro de forma  $k$ .

#### 2.4.2 Análisis Regional de Regresión

Consiste en construir un modelo de regresión lineal múltiple (*MLR*) que describa los escurrimientos  $Q$  (variable dependiente) de una región a través de las características fisiográficas y climatológicas  $X$  (descriptores) que se consideren más influyentes en su formación.

$$q = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (2.46)$$

donde  $q$  es la variable normalizada de  $Q$ ,  $\beta_i$  para  $i = 0, 1, \dots, k + 1$ , son los parámetros y  $\varepsilon$  la perturbación del modelo. La selección de las características fisiográficas y climatológicas más influyentes en la formación de  $Q$ , se pueden obtener mediante el contraste de hipótesis  $H_0: \beta = 0$  frente a  $H_a: \beta \neq 0$  para un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$ .

VeZZa et al (2010), analizan los cuantiles  $q_{95}$  en 41 estaciones de aforo en la región de Piemonte y del Valle d'Aosta al noroeste de Italia. Sugieren cuatro transformaciones de la variable dependiente para evadir la no-normalidad de los residuales.

$$q_{95} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (2.47)$$

$$\sqrt{q_{95}} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (2.48)$$

$$\sqrt[3]{q_{95}} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (2.49)$$

$$\ln q_{95} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (2.50)$$

### 2.4.2.1 Proceso de Normalización de Box-Cox de Doble Potencia

El proceso de normalización de Box-Cox se lleva a cabo aplicando las transformaciones siguientes (Escalante y Reyes, 2005b):

$$\omega_i = \frac{X_i^\lambda - 1}{\lambda} \quad (2.51)$$

$$\lambda \neq 0, X > 0$$

$$\omega_i = \ln X_i \quad (2.52)$$

$$\lambda = 0, X > 0$$

donde  $X$  es la serie a normalizar,  $\omega$  es la serie transformada de primera potencia y  $\lambda$  se conoce como parámetro de transformación de primera potencia. Esta transformación consigue que el coeficiente de asimetría sea igual a cero. La condición de curtosis igual a tres se logra aplicando la segunda transformación:

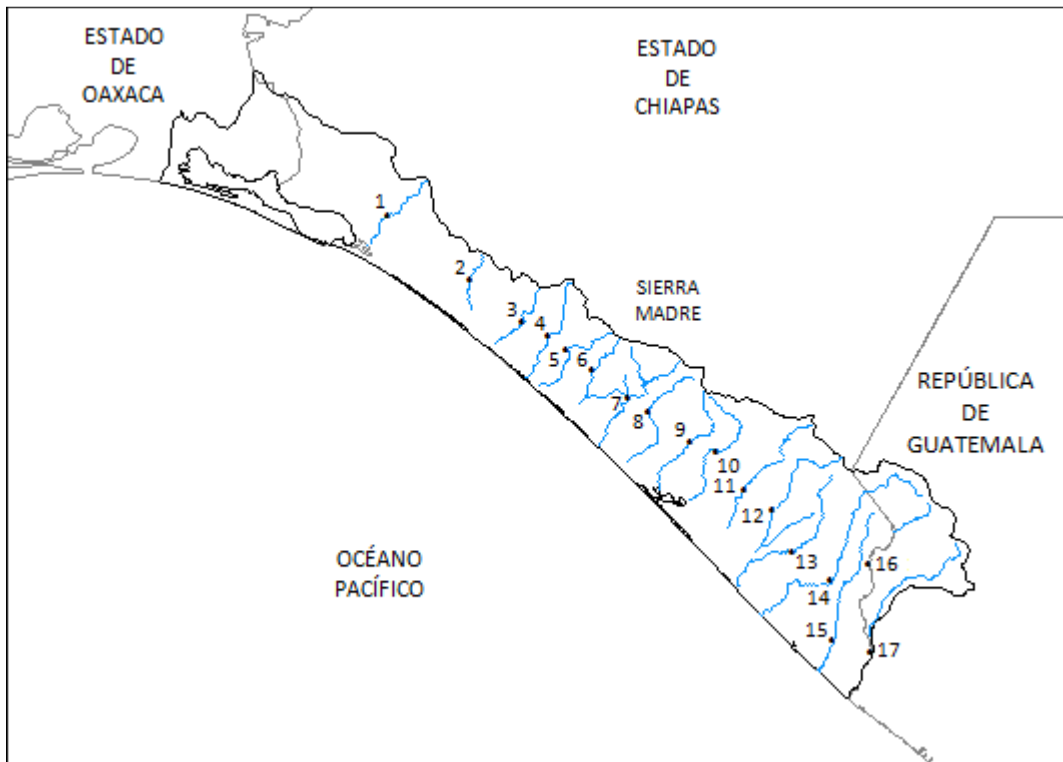
$$t_i = |\omega_i - \bar{\omega}|^\eta \quad (2.53)$$

donde  $t$  es la serie transformada de segunda potencia, el signo de  $t_i$  es igual al de  $(\omega_i - \bar{\omega})$ ,  $\bar{\omega}$  es la media de la serie  $\omega$ , y  $\eta$  se conoce como parámetro de transformación de segunda potencia.

### Capítulo 3

## Caso de Estudio

La Región Hidrológica 23 colinda al sureste con la República de Guatemala comprende la totalidad de la costa del estado de Chiapas y una pequeña parte del estado de Oaxaca. Está delimitada de sureste a noroeste por la Sierra Madre, en la cual tienen origen numerosos ríos que desembocan sus aguas al océano Pacífico. Es una de las regiones con mayor nivel de escurrimientos anuales del país (INEGI, 2010).



**Figura 3.1** Ubicación de las estaciones hidrométricas sobre la Costa de Chiapas

Se seleccionaron 17 estaciones hidrométricas ubicadas como se muestra en la Figura 3.1. De cada una de ellas se extrajo el registro de gastos medios diarios  $Q_{med}$  del Banco de Datos de Aguas Superficiales (BANDAS, 2005) que proporciona la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). Estos presentaron una ausencia de datos considerable, los cuales se estimaron a través de modelos de regresión lineal simple ( $SLR$ ) y múltiple ( $MLR$ ) a nivel mensual. Una vez que se logró completar la serie de  $Q_{med}$  a partir del año 1964 hasta el año 2005, se obtuvieron los gastos mínimos anuales promedio de 7 días consecutivos  $7Q_{min}$  para el mismo período común. En la Tabla 3.1 se muestran los estadísticos de las series analizadas.

Para evaluar la independencia y homogeneidad de las series se aplicaron las pruebas descritas en los apartados 1.1 y 1.2. La normalización de las series, para la correcta aplicación de las pruebas, se aproximó mediante la transformación de potencia Box-Cox (Escalante y Reyes, 2005b).

**Tabla 3.1** Estadísticos de las series analizadas  ${}_7Q_{\min}$ 

N	Estación	Longitud Registro [años]	Media [m <sup>3</sup> /s]	Desviación Estándar [m <sup>3</sup> /s]	Asimetría [adim]	Curtosis [adim]	Coefficiente Variación [adim]
1	Tonalá	42	0.057	0.089	2.785	12.053	1.552
2	Jesús	42	0.031	0.047	2.799	11.332	1.528
3	San Diego	42	0.397	0.147	-0.930	4.044	0.370
4	Pijijiapan	42	0.456	0.201	0.039	2.921	0.441
5	Coapá	42	0.637	0.436	1.265	4.633	0.683
6	Margaritas	42	0.621	0.249	-0.138	3.793	0.402
7	Novillero	42	2.177	0.768	0.892	5.087	0.353
8	San Nicolás	42	0.702	0.183	-0.283	2.642	0.261
9	Cacaluta	42	0.837	0.403	0.750	5.439	0.481
10	Cintalapa	42	1.434	0.889	1.401	5.808	0.620
11	Despoblado	42	0.975	0.562	1.675	9.578	0.576
12	Huixtla	42	2.233	0.530	0.269	2.412	0.238
13	Huehuetán	42	2.957	1.560	0.883	4.843	0.528
14	Malpaso	42	3.806	1.020	-0.776	3.731	0.268
15	Cahuacán	42	4.636	1.038	-0.213	4.305	0.224
16	Talismán II	42	7.047	0.936	-0.293	2.969	0.133
17	Suchiate II	42	14.811	7.157	0.594	3.801	0.483

Se ajustaron las funciones de probabilidad estándar y mezcladas descritas en los apartados 2.3.1 y 2.3.2 y a través de los diferentes criterios de bondad de ajuste presentados en la sección 1.3.2 se determinó el Gasto Ecológico para cada sitio. A través de un análisis de correlación y regresión lineal múltiple (*MLR*) se identificaron las características fisiográficas y climatológicas más relevantes en la generación de flujos mínimos en la región (Tablas 3.2 y 3.3). Esto permitió aplicar ciertas técnicas de delimitación de regiones homogéneas y crear modelos de regresión lineal múltiple (*MLR*) que permitan estimar el  ${}_7Q_{10}$  en cuencas no aforadas.

En el análisis de correlación y regresión múltiple (apartado 1.4.2) se concluyó que las primeras cuatro características (Tabla 3.2) son las más influyentes en la formación del  ${}_7Q_{10}$  en la región de la costa de Chiapas.

**Tabla 3.2** Características fisiográficas y climatológicas analizadas

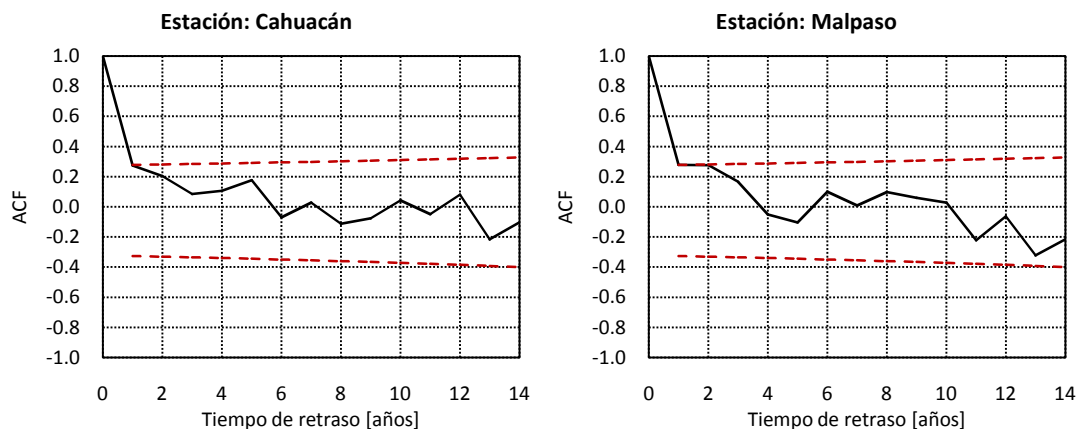
Característica	Abreviación	Unidades
Área drenada	A	[km <sup>2</sup> ]
Días con Lluvia Apreciable: Enero-Febrero-Marzo	DIA <sub>3M</sub>	[día]
Elevación Media de la Cuenca	EMC	[msnm.]
Lluvia Antecedente: Enero-Febrero-Marzo	HP <sub>3M</sub>	[mm]
Longitud del Cauce Principal	LCP	[km]
Parámetro de Forma	PF	[adim]
Pendiente Media de la Cuenca	PMC	[adim]
Tiempo de Concentración	TC	[h]

**Tabla 3.3** Características fisiográficas y climatológicas de los sitios

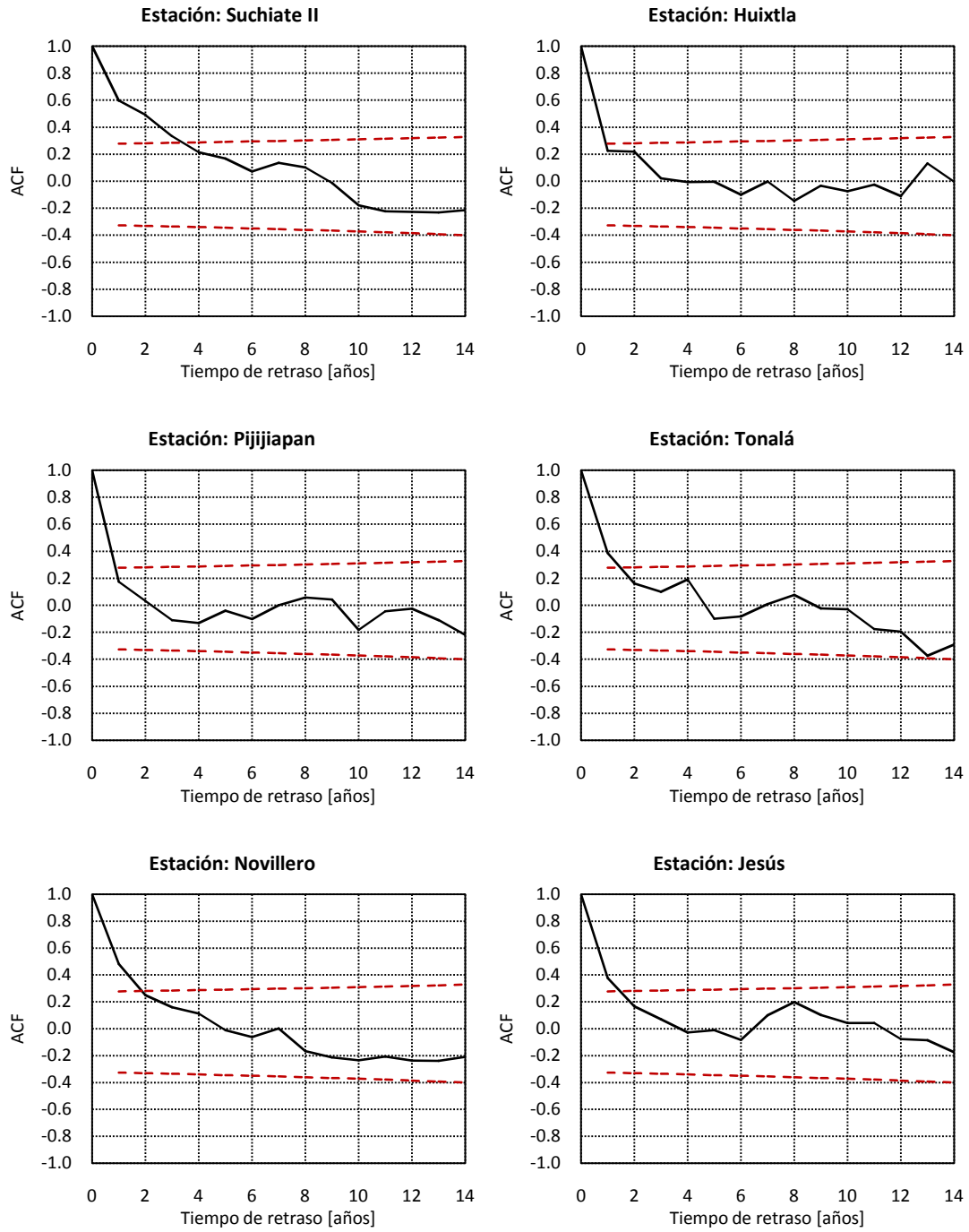
N	Estación	HP3M	DIA3M	TC	EMC	LCP	A	PF	PMC
		[mm]	[día]	[hrs]	[msnm]	[km]	[km2]	[adim]	[adim]
1	Tonalá	12.1	1.1	1.344	676.0	21.709	184.5	0.310	0.340
2	Jesús	19.5	1.1	0.816	742.9	12.854	55.5	0.590	0.402
3	San Diego	29.7	2.3	1.176	637.2	17.614	129.9	0.360	0.349
4	Pijijiapan	89.8	7.8	1.666	728.4	26.047	208.9	0.310	0.390
5	Coapá	100.7	8.6	1.376	723.9	21.367	116.3	0.430	0.388
6	Margaritas	96.5	8.4	1.175	752.5	18.955	117.4	0.400	0.350
7	Novillero	88.8	8.5	1.935	842.3	31.285	287.4	0.270	0.351
8	San Nicolás	55.8	6.3	1.499	1148.0	26.278	145.0	0.430	0.253
9	Cacaluta	26.1	4.0	1.592	983.2	27.591	177.4	0.340	0.400
10	Cintalapa	56.2	6.1	1.964	1272.0	35.745	237.2	0.380	0.225
11	Despoblado	72.5	7.8	2.342	1214.1	45.408	279.1	0.300	0.342
12	Huixtla	77.8	7.9	2.193	1269.7	43.739	360.3	0.260	0.359
13	Huehuetán	131.9	10.9	2.053	853.7	37.242	330.4	0.260	0.279
14	Malpaso	141.6	15.4	3.347	2164.9	69.249	460.3	0.310	0.395
15	Cahuacán	100.8	8.2	3.776	440.8	60.741	254.1	0.410	0.116
16	Talismán II	211.7	15.6	2.122	1889.5	42.827	317.7	0.270	0.411
17	Suchiate II	182.5	12.1	3.654	1341.5	66.632	1202.5	0.150	0.314

### 3.1 Independencia de las Series

Según lo descrito en la sección 1.1, se construyeron los correlogramas para cada una de las series con límites de confianza para un nivel de probabilidad del 95% (Figura 3.2). Se puede apreciar cierto grado de dependencia en las estaciones Suchiate II y Talismán II, sin embargo, todas se considerarán independientes.

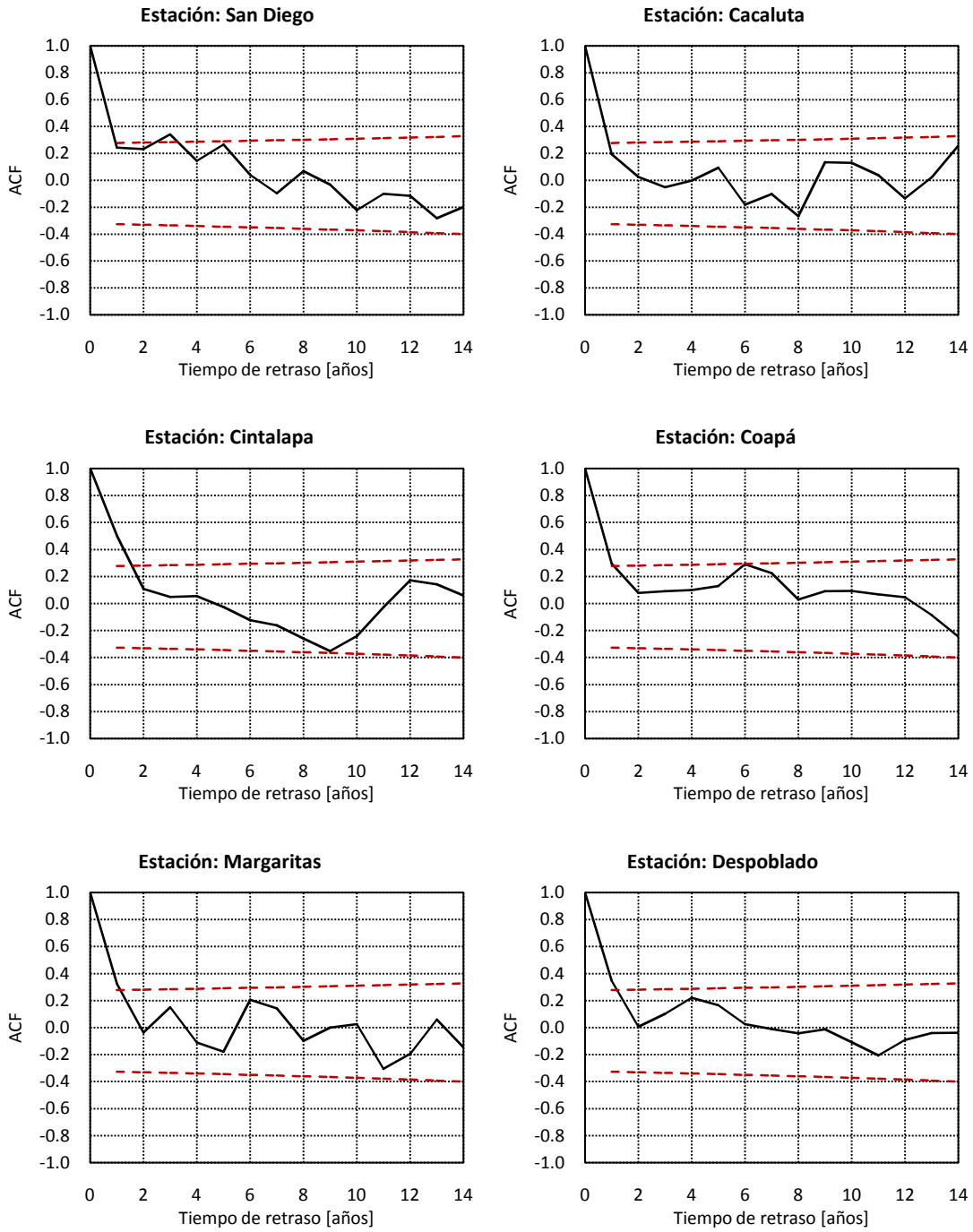


**Figura 3.2** Correlogramas con límites para un nivel de confianza del 95%.

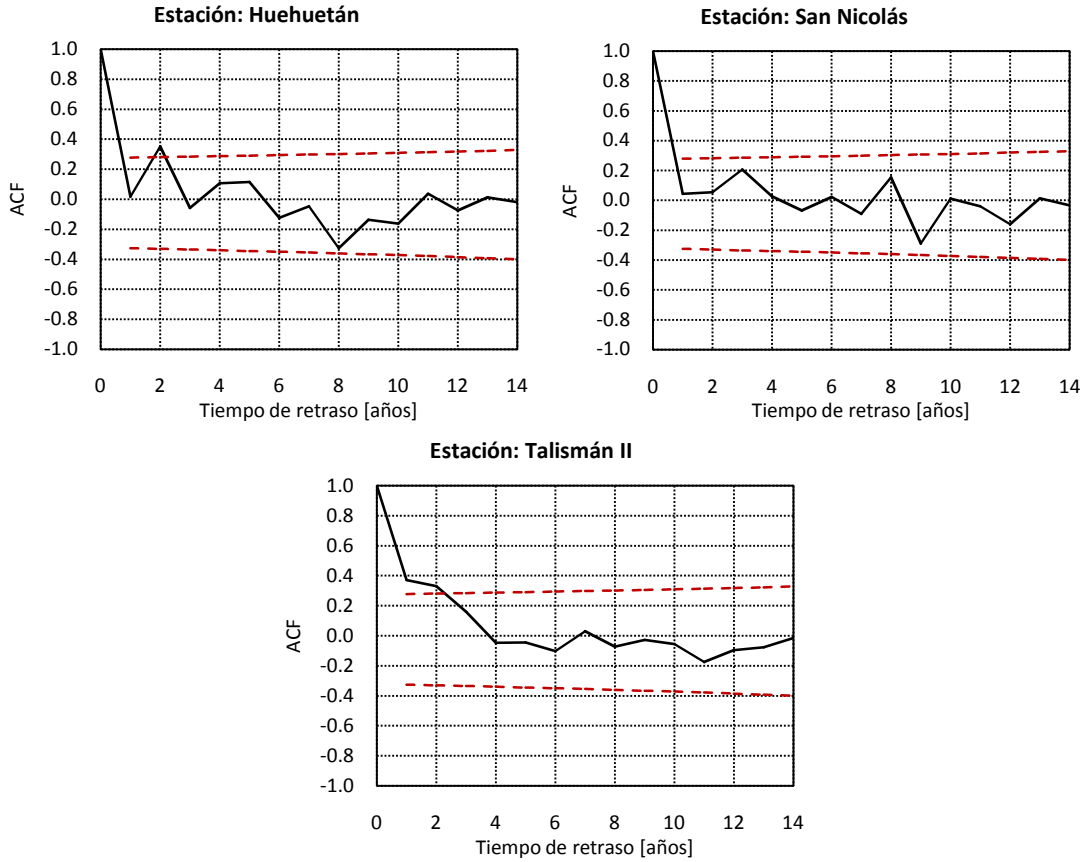


**Figura 3.2** Correlogramas con límites para un nivel de confianza del 95% (Continuación)





**Figura 3.2** Correlogramas con límites para un nivel de confianza del 95% (Continuación)



**Figura 3.2** Correlogramas con límites para un nivel de confianza del 95% (Continuación)

### 3.2 Homogeneidad de las Series

Según lo descrito en la sección 1.2.1, se dividieron las series en dos subconjuntos y se obtuvieron los estadísticos de prueba para  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  frente a  $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ . Se observa que los estadísticos de prueba estimados para las estaciones Jesús y Coapá sobrepasan el valor crítico esperado para un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$ . Esto significa que las series presentan una variación en la media significativa y podría concluirse que son no homogéneas. Sin embargo, al no presentarse esta anomalía en las estaciones vecinas, se aceptará que toda la región es estacionaria.

**Tabla 3.4** Resultados de la prueba de homogeneidad para un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$ 

N	Estación	Media Serie (1)	Media Serie (2)	Varianza Serie (1)	Varianza Serie (2)	Estadístico Prueba	Valor Crítico
1	Tonalá	-2.478	-2.704	0.792	0.764	0.813	2.020
2	Jesús	-2.651	-3.274	0.491	0.391	<b>2.965</b>	2.020
3	San Diego	-0.461	-0.439	0.004	0.004	1.061	2.020
4	Pijjiapan	-0.572	-0.528	0.059	0.027	0.675	2.020
5	Coapá	-0.304	-0.905	0.356	0.268	<b>3.404</b>	2.020
6	Margaritas	-0.414	-0.323	0.050	0.061	1.212	2.020
7	Novillero	0.700	0.929	0.188	0.173	1.705	2.020
8	San Nicolás	-0.265	-0.260	0.023	0.022	0.114	2.020
9	Cacaluta	-0.152	-0.243	0.230	0.152	0.657	2.020
10	Cintalapa	0.355	0.100	0.580	0.291	1.223	2.020
11	Despoblado	-0.112	-0.101	0.472	0.199	0.061	2.020
12	Huixtla	0.903	0.951	0.131	0.092	0.454	2.020
13	Huehuetán	1.337	1.577	1.841	0.548	0.696	2.020
14	Malpaso	6.703	8.439	16.940	10.564	1.480	2.020
15	Cahuacán	4.094	4.827	2.011	1.740	1.694	2.020
16	Talismán II	19.638	20.890	25.323	25.429	0.786	2.020
17	Suchiate II	6.404	8.224	10.878	5.754	1.996	2.020

### 3.3 Análisis de Frecuencias de las Series

Luego de verificar la independencia y homogeneidad de las series, se procedió al análisis de frecuencia puntual. Los parámetros de las funciones de distribución se estimaron mediante el método de la máxima verosimilitud, maximizando la función logaritmo de verosimilitud (sección 1.3.1.2). Para ello se recurrió al método de minimización de funciones no lineales de variables restringidas propuesto por H. H. Rosenbrock. En el anexo A se presenta el ajuste de las diferentes distribuciones.

#### 3.3.1 Bondad de Ajuste de las Distribuciones

Para seleccionar la distribución que se ajuste mejor al comportamiento de las series, se aplicaron las pruebas de bondad de ajuste descritas en la sección 2.3.2. Puesto que cada prueba mide de manera diferente el grado de ajuste de la función, no se dio preferencia a alguna en particular y se consideró el mayor número de criterios posibles para cada estación.

**Tabla 3.5** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Cahuacán

Distribución	<i>LL</i>	<i>SFE</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>RMSE</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	$\gamma Q_{10}$
	[adim]	[m <sup>3</sup> /s]	[adim]	[m <sup>3</sup> /s]	[adim]	[adim]	[m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-63.824	0.306	0.947	0.093	-97.884	135.124	2.837
Weibull 3	-60.941	0.220	0.958	0.069	-123.240	133.095	3.225
Gamma 3	-61.171	0.224	0.957	0.057	-121.903	133.554	3.323
Log-Normal 3	-61.103	0.224	0.958	0.056	-121.805	133.418	3.330
GEV	-60.941	0.220	0.958	0.069	-123.241	133.095	3.225
Gumbel Mixta	-58.866	0.141	0.984	0.062	-159.187	136.420	3.405
Weibull 3 Mixta	-60.097	0.198	0.975	0.055	-128.761	146.359	3.362
GEV Mixta	-15.070	0.233	0.966	0.066	-120.020	56.303	3.218

**Tabla 3.6** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Malpaso

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-57.486	0.188	0.971	0.117	-138.179	122.448	2.443
Weibull 3	-57.458	0.198	0.971	0.115	-132.839	126.130	2.472
Gamma 3	-60.625	0.283	0.927	0.118	-102.094	132.462	2.495
Log-Normal 3	-60.516	0.282	0.928	0.118	-102.570	132.245	2.509
GEV	-57.458	0.198	0.971	0.115	-132.833	126.130	2.473
Gumbel Mixta	-46.592	0.178	0.976	0.126	-140.154	111.872	2.441
Weibull 3 Mixta	-25.886	0.181	0.974	0.120	-136.800	77.936	2.364
GEV Mixta	-36.369	0.159	0.981	0.113	-147.517	98.902	2.520

**Tabla 3.7** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Suchiate II

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-147.464	2.678	0.889	0.009	80.585	302.403	2.942
Weibull 3	-140.579	1.172	0.978	0.003	16.702	292.370	5.856
Gamma 3	-140.412	1.087	0.984	0.004	10.336	292.038	6.302
Log-Normal 3	-140.411	1.105	0.984	0.004	11.715	292.035	6.345
GEV	-140.579	1.171	0.978	0.003	16.620	292.370	5.852
Gumbel Mixta	-142.148	1.178	0.976	0.011	18.970	302.984	5.685
Weibull 3 Mixta	-135.637	0.855	0.990	0.004	-6.348	297.438	6.182
GEV Mixta	-120.407	1.038	0.989	0.005	7.951	266.978	6.057

**Tabla 3.8** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Huixtla

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-35.897	0.186	0.910	0.220	-138.755	79.270	1.344
Weibull 3	-31.591	0.074	0.986	0.136	-215.131	74.395	1.570
Gamma 3	-32.034	0.082	0.983	0.151	-206.462	75.282	1.583
Log-Normal 3	-32.067	0.081	0.983	0.151	-207.148	75.347	1.580
GEV	-31.591	0.074	0.986	0.136	-215.136	74.395	1.570
Gumbel Mixta	-30.496	0.051	0.992	0.110	-243.835	79.680	1.579
Weibull 3 Mixta	-29.351	0.048	0.994	0.055	-247.494	84.865	1.583
GEV Mixta	-18.318	0.127	0.952	0.141	-165.945	62.799	1.562

**Tabla 3.9** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Pijijiapan

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	5.439	0.056	0.946	0.405	-240.391	-3.402	0.122
Weibull 3	8.485	0.029	0.983	0.263	-292.836	-5.757	0.197
Gamma 3	8.325	0.028	0.985	0.270	-297.161	-5.436	0.200
Log-Normal 3	8.331	0.029	0.985	0.276	-293.970	-5.448	0.203
GEV	8.485	0.029	0.983	0.263	-292.827	-5.757	0.197
Gumbel Mixta	9.827	0.026	0.990	0.207	-301.231	-0.966	0.223
Weibull 3 Mixta	9.910	0.028	0.989	0.188	-294.479	6.345	0.223
GEV Mixta	27.361	0.029	0.986	0.276	-291.358	-28.559	0.202

**Tabla 3.10** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Tonalá

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	22.325	0.071	0.538	1.643	-165.028	-37.782	0.000
Weibull 3	82.967	0.314	0.921	2.278	-70.708	-155.632	0.001
Gamma 3	92.474	0.027	0.975	2.097	-241.392	-174.646	0.000
Log-Normal 3	48.097	0.022	0.981	0.583	-237.493	-85.893	0.006
GEV	64.292	0.080	0.968	1.281	-168.869	-118.283	0.004
Gumbel Mixta	37.127	0.030	0.921	0.890	-214.151	-57.085	0.000
Weibull 3 Mixta	121.671	0.038	0.925	0.602	-196.038	-219.303	0.002
GEV Mixta	117.757	0.046	0.887	0.538	-184.257	-211.475	0.003

**Tabla 3.11** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Novillero

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-52.495	0.308	0.855	0.075	-99.133	112.465	1.023
Weibull 3	-45.776	0.161	0.961	0.074	-150.000	102.765	1.254
Gamma 3	-45.876	0.155	0.967	0.076	-153.136	102.964	1.288
Log-Normal 3	-45.899	0.154	0.968	0.077	-153.457	103.011	1.294
GEV	-45.776	0.161	0.961	0.074	-150.064	102.765	1.254
Gumbel Mixta	-48.217	0.163	0.960	0.065	-147.400	115.123	1.199
Weibull 3 Mixta	-44.517	0.138	0.979	0.027	-160.179	115.197	1.221
GEV Mixta	-22.040	0.183	0.973	0.061	-137.960	70.243	1.284

**Tabla 3.12** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Jesús

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	55.447	0.039	0.456	2.031	-255.854	-103.567	0.000
Weibull 3	111.497	0.010	0.978	3.799	-354.437	-212.003	0.001
Gamma 3	115.552	0.013	0.959	3.833	-341.233	-220.114	0.001
Log-Normal 3	98.526	0.010	0.977	2.158	-361.689	-186.061	0.003
GEV	103.200	0.050	0.956	3.564	-253.280	-195.410	0.003
Gumbel Mixta	84.382	0.026	0.791	4.451	-279.401	-150.445	0.000
Weibull 3 Mixta	128.901	0.020	0.934	2.148	-301.010	-232.157	0.002
GEV Mixta	110.704	0.021	0.935	2.263	-306.010	-195.763	0.002

**Tabla 3.13** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación San Diego

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	24.256	0.025	0.976	0.288	-308.739	-41.036	0.198
Weibull 3	24.375	0.028	0.973	0.286	-297.240	-37.537	0.205
Gamma 3	21.164	0.043	0.920	0.544	-260.401	-31.115	0.213
Log-Normal 3	21.026	0.043	0.918	0.558	-259.935	-30.840	0.210
GEV	24.385	0.029	0.971	0.289	-294.115	-37.557	0.207
Gumbel Mixta	29.641	0.030	0.975	0.293	-303.888	-40.593	0.218
Weibull 3 Mixta	101.335	0.022	0.982	0.293	-315.052	-176.507	0.186
GEV Mixta	44.777	0.028	0.980	0.235	-301.975	-63.390	0.223

**Tabla 3.14** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Cacaluta

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-26.636	0.158	0.869	0.188	-156.741	60.747	0.203
Weibull 3	-20.547	0.109	0.931	0.206	-182.680	52.307	0.317
Gamma 3	-19.850	0.103	0.941	0.189	-187.172	50.913	0.353
Log-Normal 3	-19.767	0.103	0.942	0.186	-187.230	50.747	0.356
GEV	-20.547	0.109	0.931	0.206	-182.697	52.307	0.317
Gumbel Mixta	-17.172	0.066	0.987	0.108	-222.108	53.032	0.396
Weibull 3 Mixta	-15.738	0.074	0.984	0.126	-211.957	57.640	0.315
GEV Mixta	10.775	0.128	0.935	0.143	-169.603	4.614	0.330

**Tabla 3.15** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Cintalapa

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-61.884	0.501	0.758	0.107	-58.561	131.243	0.000
Weibull 3	-47.328	0.180	0.968	0.074	-141.384	105.870	0.476
Gamma 3	-47.365	0.168	0.976	0.069	-147.184	105.943	0.502
Log-Normal 3	-47.515	0.158	0.982	0.055	-152.956	106.243	0.526
GEV	-47.328	0.180	0.968	0.073	-141.054	105.870	0.476
Gumbel Mixta	-52.414	0.267	0.936	0.059	-106.931	123.516	0.376
Weibull 3 Mixta	-14.876	0.203	0.964	0.059	-127.358	55.916	0.478
GEV Mixta	-20.311	0.221	0.957	0.040	-120.589	66.786	0.513

**Tabla 3.16** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Coapa

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-34.052	0.328	0.751	0.388	-91.869	75.579	0.000
Weibull 3	-15.732	0.071	0.984	0.108	-220.442	42.677	0.184
Gamma 3	-15.743	0.067	0.988	0.110	-226.244	42.698	0.192
Log-Normal 3	-16.176	0.056	0.990	0.122	-242.370	43.564	0.206
GEV	-15.732	0.070	0.984	0.108	-220.908	42.677	0.184
Gumbel Mixta	-21.166	0.103	0.950	0.283	-185.700	61.021	0.104
Weibull 3 Mixta	-15.129	0.055	0.991	0.112	-238.902	56.422	0.196
GEV Mixta	-14.707	0.075	0.982	0.431	-211.471	55.579	0.203

**Tabla 3.17** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Margaritas

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-4.063	0.069	0.957	0.263	-222.806	15.602	0.187
Weibull 3	-0.859	0.048	0.966	0.151	-251.028	12.931	0.290
Gamma 3	-0.982	0.050	0.965	0.151	-248.282	13.177	0.305
Log-Normal 3	-0.887	0.050	0.966	0.144	-248.635	12.986	0.306
GEV	-0.859	0.048	0.966	0.151	-251.036	12.931	0.290
Gumbel Mixta	3.120	0.031	0.994	0.193	-286.311	12.449	0.317
Weibull 3 Mixta	3.102	0.035	0.994	0.179	-276.560	19.960	0.321
GEV Mixta	15.619	0.043	0.979	0.207	-259.002	-5.074	0.296

**Tabla 3.18** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Desplorado

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-33.086	0.284	0.769	0.079	-104.773	73.647	0.256
Weibull 3	-31.490	0.203	0.877	0.104	-130.544	74.193	0.314
Gamma 3	-30.927	0.198	0.887	0.098	-132.472	73.067	0.353
Log-Normal 3	-30.689	0.196	0.890	0.102	-133.130	72.591	0.361
GEV	-31.260	0.268	0.844	0.111	-108.624	73.734	0.377
Gumbel Mixta	-31.840	0.284	0.806	0.062	-102.089	82.369	0.351
Weibull 3 Mixta	2.245	0.273	0.848	0.117	-104.373	21.674	0.345
GEV Mixta	17.477	0.270	0.850	0.107	-105.506	-8.790	0.346

**Tabla 3.19** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Huehuetán

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-84.580	0.680	0.845	0.056	-35.596	176.635	0.769
Weibull 3	-76.336	0.382	0.944	0.022	-77.331	163.886	1.022
Gamma 3	-75.920	0.362	0.954	0.014	-81.756	163.053	1.129
Log-Normal 3	-75.825	0.361	0.955	0.015	-81.861	162.864	1.147
GEV	-76.336	0.382	0.944	0.022	-77.306	163.886	1.023
Gumbel Mixta	-75.611	0.273	0.975	0.062	-103.600	169.910	1.119
Weibull 3 Mixta	-67.806	0.190	0.989	0.034	-132.371	161.775	1.190
GEV Mixta	-58.253	0.417	0.942	0.024	-66.453	142.670	1.036

**Tabla 3.20** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación San Nicolás

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	12.219	0.036	0.964	0.421	-277.666	-16.963	0.436
Weibull 3	12.915	0.031	0.979	0.342	-289.198	-14.617	0.465
Gamma 3	11.913	0.035	0.967	0.304	-277.827	-12.613	0.468
Log-Normal 3	11.980	0.035	0.968	0.315	-277.210	-12.746	0.472
GEV	12.915	0.031	0.979	0.342	-289.261	-14.617	0.465
Gumbel Mixta	16.436	0.022	0.990	0.101	-315.690	-14.183	0.474
Weibull 3 Mixta	43.741	0.046	0.948	0.447	-251.626	-61.318	0.425
GEV Mixta	16.590	0.023	0.990	0.092	-311.482	-7.015	0.474

**Tabla 3.21** Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la estación Talismán II

<b>Distribución</b>	<i>LL</i> [adim]	<i>SFE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>R</i> <sup>2</sup> [adim]	<i>RMSE</i> [m <sup>3</sup> /s]	<i>AIC</i> [adim]	<i>BIC</i> [adim]	$\tau Q_{10}$ [m <sup>3</sup> /s]
Gumbel	-57.313	0.161	0.975	0.050	-150.585	122.101	5.590
Weibull 3	-55.767	0.130	0.987	0.054	-167.576	122.746	5.834
Gamma 3	-56.545	0.153	0.979	0.073	-153.967	124.303	5.873
Log-Normal 3	-56.412	0.146	0.981	0.070	-157.649	124.037	5.863
GEV	-55.766	0.130	0.987	0.054	-167.319	122.746	5.834
Gumbel Mixta	-54.551	0.119	0.989	0.046	-174.263	127.790	5.825
Weibull 3 Mixta	-54.554	0.122	0.989	0.047	-170.325	135.271	5.825
GEV Mixta	-11.874	0.149	0.985	0.051	-159.396	49.912	5.763

**Tabla 3.22** Distribución seleccionada, gasto mínimo medio anual promedio de 7 días consecutivos ( $MAM7$ ) y Gasto Ecológico ( ${}_7Q_{10}$ ) para cada estación

<b>N</b>	<b>Estación</b>	<b>Distribución</b>	<b><math>MAM7</math> [m<sup>3</sup>/s]</b>	<b><math>{}_7Q_{10}</math> [m<sup>3</sup>/s]</b>
1	Tonalá	Log-Normal 3	0.057	0.006
2	Jesús	Log-Normal 3	0.031	0.003
3	San Diego	Weibull 3 Mixta	0.397	0.186
4	Pijijiapan	Gumbel Mixta	0.456	0.223
5	Coapá	Weibull 3 Mixta	0.637	0.196
6	Margaritas	Gumbel Mixta	0.621	0.317
7	Novillero	Weibull 3 Mixta	2.177	1.221
8	San Nicolás	Gumbel Mixta	0.702	0.474
9	Cacaluta	Gumbel Mixta	0.837	0.396
10	Cintalapa	Log-Normal 3	1.434	0.526
11	Despoblado	Log-Normal 3	0.975	0.361
12	Huixtla	Weibull 3 Mixta	2.233	1.583
13	Huehuetán	Weibull 3 Mixta	2.957	1.190
14	Malpaso	GEV Mixta	3.806	2.520
15	Cahuacán	Gumbel Mixta	4.636	3.405
16	Talismán II	Gumbel Mixta	7.047	5.825
17	Suchiate II	Weibull 3 Mixta	14.811	6.182



### 3.4 Análisis Regional de Frecuencias de las Series

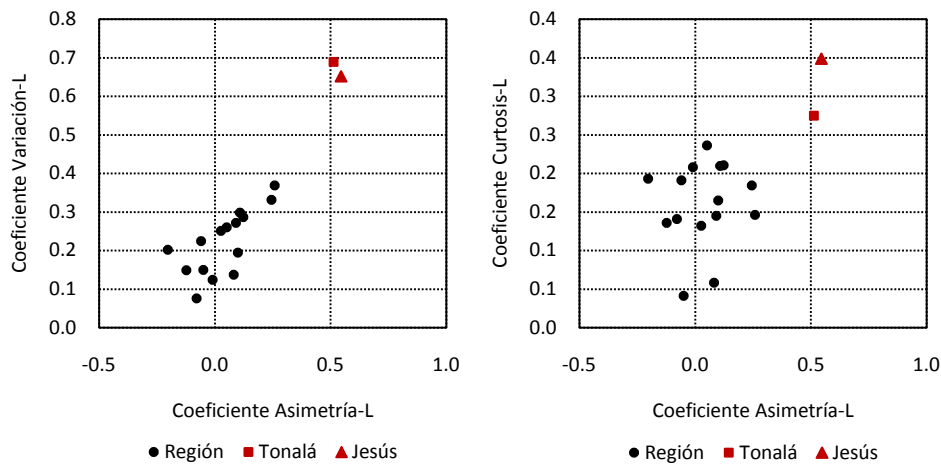
Para la delimitación de regiones homogéneas en  ${}_7Q_{10}$  se aplicaron los métodos descritos en la sección 2.4.1. Como cada técnica interpreta de manera diferente la homogeneidad de una región, se obtienen resultados diferentes. Entonces, se necesita de cierto criterio de validación.

#### 3.4.1 Regiones Homogéneas: Método de los Momentos-L

Según lo descrito en el apartado 2.4.1.1, se obtiene el valor de discordancia para cada sitio.

**Tabla 3.23** Radios de los momentos-L y medida de discordancia para cada estación

N	Estación	Coefficiente Variación-L [adim]	Coefficiente Asimetría-L [adim]	Coefficiente Curtosis-L [adim]	Discordancia [adim]
1	Tonalá	0.689	0.513	0.275	<b>2.439</b>
2	Jesús	0.652	0.545	0.349	<b>2.321</b>
3	San Diego	0.202	-0.203	0.193	<b>2.458</b>
4	Pijijiapan	0.251	0.026	0.132	0.394
5	Coapá	0.369	0.258	0.146	0.716
6	Margaritas	0.224	-0.059	0.191	0.559
7	Novillero	0.195	0.100	0.165	0.588
8	San Nicolás	0.150	-0.050	0.041	1.628
9	Cacaluta	0.260	0.051	0.236	0.566
10	Cintalapa	0.331	0.245	0.184	0.424
11	Despoblado	0.298	0.108	0.210	0.093
12	Huixtla	0.137	0.082	0.058	1.658
13	Huehuetán	0.287	0.122	0.211	0.152
14	Malpaso	0.149	-0.123	0.136	0.552
15	Cahuacán	0.124	-0.010	0.208	1.560
16	Talismán II	0.076	-0.079	0.141	0.740
17	Suchiate II	0.271	0.090	0.145	0.154



**Figura 3.3** Identificación de sitios discordes con la región a través de las relaciones de los momentos-L

El valor crítico de  $D$  para  $N = 17$  es de  $D_c = 3.00$ , sin embargo, en la Figura 3.3 se puede observar que las estaciones Tonalá y Jesús presentan radios de momentos-L que divergen de la región. Se excluyeron ambas estaciones de tal manera que existan dos regiones homogéneas en  ${}_7Q_{10}$  dentro de la costa de la región de Chiapas (ver Anexo B).

### 3.4.2 Regiones Homogéneas: Método de la Región de Influencia

Según lo descrito en el apartado 2.4.1.2, se obtienen los valores de la distancia euclidiana entre las características fisiográficas y climatológicas consideradas como las más influyentes en la formación de flujos mínimos en la región.

**Tabla 3.24** Matriz de distancias euclidianas entre atributos.

Sitio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	<b>0.0</b>	<b>0.6</b>	<b>0.5</b>	2.1	2.4	2.3	2.4	1.8	1.0	2.1	2.5	2.6	3.3	5.7	3.7	5.7	5.0
2	<b>0.6</b>	<b>0.0</b>	<b>0.6</b>	2.3	2.4	2.3	2.5	1.8	1.3	2.2	2.8	2.8	3.4	5.9	4.1	5.7	5.3
3	<b>0.5</b>	<b>0.6</b>	<b>0.0</b>	1.8	2.0	<b>1.9</b>	2.1	<b>1.6</b>	<b>1.0</b>	2.0	2.4	2.4	3.0	5.6	3.6	5.4	4.8
4	2.1	2.3	<b>1.8</b>	<b>0.0</b>	<b>0.4</b>	<b>0.6</b>	<b>0.4</b>	<b>1.2</b>	<b>1.6</b>	<b>1.4</b>	<b>1.4</b>	<b>1.4</b>	<b>1.2</b>	4.2	2.5	3.9	3.3
5	2.4	2.4	<b>2.0</b>	<b>0.4</b>	<b>0.0</b>	<b>0.3</b>	<b>0.7</b>	<b>1.4</b>	<b>1.8</b>	<b>1.7</b>	<b>1.6</b>	<b>1.6</b>	<b>1.1</b>	4.3	2.8	3.7	3.4
6	2.3	2.3	<b>1.9</b>	<b>0.6</b>	<b>0.3</b>	<b>0.0</b>	<b>0.9</b>	<b>1.3</b>	<b>1.8</b>	<b>1.7</b>	<b>1.8</b>	<b>1.7</b>	<b>1.4</b>	4.4	3.1	3.8	3.6
7	2.4	2.5	<b>2.1</b>	<b>0.4</b>	<b>0.7</b>	<b>0.9</b>	<b>0.0</b>	<b>1.2</b>	<b>1.6</b>	<b>1.3</b>	<b>1.0</b>	<b>1.0</b>	<b>1.0</b>	3.8	2.3	3.6	3.0
8	1.8	1.8	<b>1.6</b>	<b>1.2</b>	<b>1.4</b>	<b>1.3</b>	<b>1.2</b>	<b>0.0</b>	<b>0.9</b>	<b>0.6</b>	<b>1.1</b>	<b>1.0</b>	<b>2.0</b>	4.1	3.2	4.0	3.7
9	1.0	1.3	<b>1.0</b>	<b>1.6</b>	<b>1.8</b>	<b>1.8</b>	<b>1.6</b>	<b>0.9</b>	<b>0.0</b>	<b>1.1</b>	<b>1.6</b>	<b>1.6</b>	2.6	4.7	3.3	4.8	4.2
10	2.1	2.2	<b>2.0</b>	<b>1.4</b>	<b>1.7</b>	<b>1.7</b>	<b>1.3</b>	<b>0.6</b>	<b>1.1</b>	<b>0.0</b>	<b>0.7</b>	<b>0.6</b>	<b>2.0</b>	3.7	2.9	3.8	3.3
11	2.5	2.8	<b>2.4</b>	<b>1.4</b>	<b>1.6</b>	<b>1.8</b>	<b>1.0</b>	<b>1.1</b>	<b>1.6</b>	<b>0.7</b>	<b>0.0</b>	<b>0.2</b>	<b>1.6</b>	3.2	2.4	3.5	2.7
12	2.6	2.8	2.4	<b>1.4</b>	<b>1.6</b>	<b>1.7</b>	<b>1.0</b>	<b>1.0</b>	<b>1.6</b>	<b>0.6</b>	<b>0.2</b>	<b>0.0</b>	<b>1.5</b>	3.2	2.6	3.3	2.7
13	3.3	3.4	3.0	<b>1.2</b>	<b>1.1</b>	<b>1.4</b>	<b>1.0</b>	2.0	2.6	2.0	<b>1.6</b>	<b>1.5</b>	<b>0.0</b>	3.4	2.4	2.9	2.3
14	5.7	5.9	5.6	4.2	4.3	4.4	3.8	4.1	4.7	3.7	3.2	3.2	3.4	0.0	4.2	<b>2.0</b>	<b>2.1</b>
15	3.7	4.1	3.6	2.5	2.8	3.1	2.3	3.2	3.3	2.9	2.4	2.6	2.4	4.2	0.0	4.6	<b>2.6</b>
16	5.7	5.7	5.4	3.9	3.7	3.8	3.6	4.0	4.8	3.8	3.5	3.3	2.9	<b>2.0</b>	4.6	0.0	<b>2.4</b>
17	5.0	5.3	4.8	3.3	3.4	3.6	3.0	3.7	4.2	3.3	2.7	2.7	2.3	<b>2.1</b>	<b>2.6</b>	<b>2.4</b>	0.0
<b>Prom</b>	<b>2.6</b>	<b>2.7</b>	<b>2.4</b>	<b>1.7</b>	<b>1.9</b>	<b>1.9</b>	<b>1.7</b>	<b>1.8</b>	<b>2.0</b>	<b>1.8</b>	<b>1.8</b>	<b>1.8</b>	<b>2.1</b>	<b>3.8</b>	<b>3.0</b>	<b>3.7</b>	<b>3.2</b>

Se adoptó como valor de tolerancia el promedio de las distancias hacia cada sitio base. De esta manera, se identificaron tres regiones homogéneas (ver Anexo B). Para verificar si algún sitio no pertenece a la región a la cual fue asignado, se determinó su medida de discordancia con respecto a esta región.

### 3.4.3 Regiones Homogéneas: Método de las K-Medias

Según lo descrito en el apartado 2.4.1.3, se adoptó un número de cinco regiones homogéneas y se asignaron a cada una de ellas los sitios en función de la cercanía del valor de  ${}_7Q_{10}$  con respecto al centro de gravedad de cada grupo (ver Anexo B).

**Tabla 3.25** Convergencia de los valores de  ${}_7Q_{10}$  en cinco K-Medias

<b>N</b>	<b>Estación</b>	<b><math>{}_7Q_{10}</math></b>	<b>K-Media</b>	<b>Error</b>
		<b>[m<sup>3</sup>/s]</b>	<b>[m<sup>3</sup>/s]</b>	<b>[m<sup>3</sup>/s]</b>
2	Jesús	0.003	0.004	0.002
1	Tonalá	0.006		0.002
3	San Diego	0.186	0.335	0.149
5	Coapá	0.196		0.139
4	Pijijiapan	0.223		0.112
6	Margaritas	0.317		0.018
11	Despoblado	0.361		0.026
9	Cacaluta	0.396		0.061
8	San Nicolás	0.474		0.139
10	Cintalapa	0.526		0.191
13	Huehuetán	1.190		0.141
7	Novillero	1.221	1.331	0.110
12	Huixtla	1.583		0.252
14	Malpaso	2.520	2.963	0.443
15	Cahuacán	3.405		0.443
16	Talismán II	5.825	6.003	0.179
17	Suchiate II	6.182		0.179

Se consiguió que los grupos converjan en cinco K-Medias (Tabla 3.25), de tal manera que el error entre los valores de  ${}_7Q_{10}$  y los valores de las K-Medias sea el menor.

#### **3.4.4 Regiones Homogéneas: Método del Parámetro de Forma**

Según lo descrito en el apartado 2.4.1.4, se delimitaron regiones homogéneas a través del valor del parámetro de forma de la distribución Weibull 3. El procedimiento para delimitar las regiones fue el mismo empleado en el método de las K-Medias.

**Tabla 3.26** Convergencia de los parámetros de forma de la distribución Weibull 3 en 4 K-Medias

<b>N</b>	<b>Estación</b>	<b>Parámetro Forma [ad]</b>	<b>K-Media [m<sup>3</sup>/s]</b>	<b>Error [m<sup>3</sup>/s]</b>
2	Jesús	0.023	0.035	0.013
1	Tonalá	0.048		0.013
3	San Diego	0.461	0.846	0.385
4	Pijjiapan	0.525		0.321
5	Coapá	0.688		0.158
6	Margaritas	0.711		0.135
8	San Nicolás	0.775		0.071
9	Cacaluta	0.955		0.109
11	Despoblado	1.093	2.704	0.247
10	Cintalapa	1.561		0.715
7	Novillero	2.356	4.642	0.348
12	Huixtla	2.392		0.312
13	Huehuetán	3.364		0.660
14	Malpaso	4.259	7.400	0.383
15	Cahuacán	5.025		0.383
16	Talismán II	7.400	16.808	0.000
17	Suchiate II	16.808		0.000

Se adoptó un número de cuatro regiones (ver Anexo B), excluyendo a las estaciones Talismán II y Suchiate II pues presentaron un valor de parámetro de forma muy diferente al resto de las regiones.

### 3.4.5 Análisis Regional de Regresión de las Series

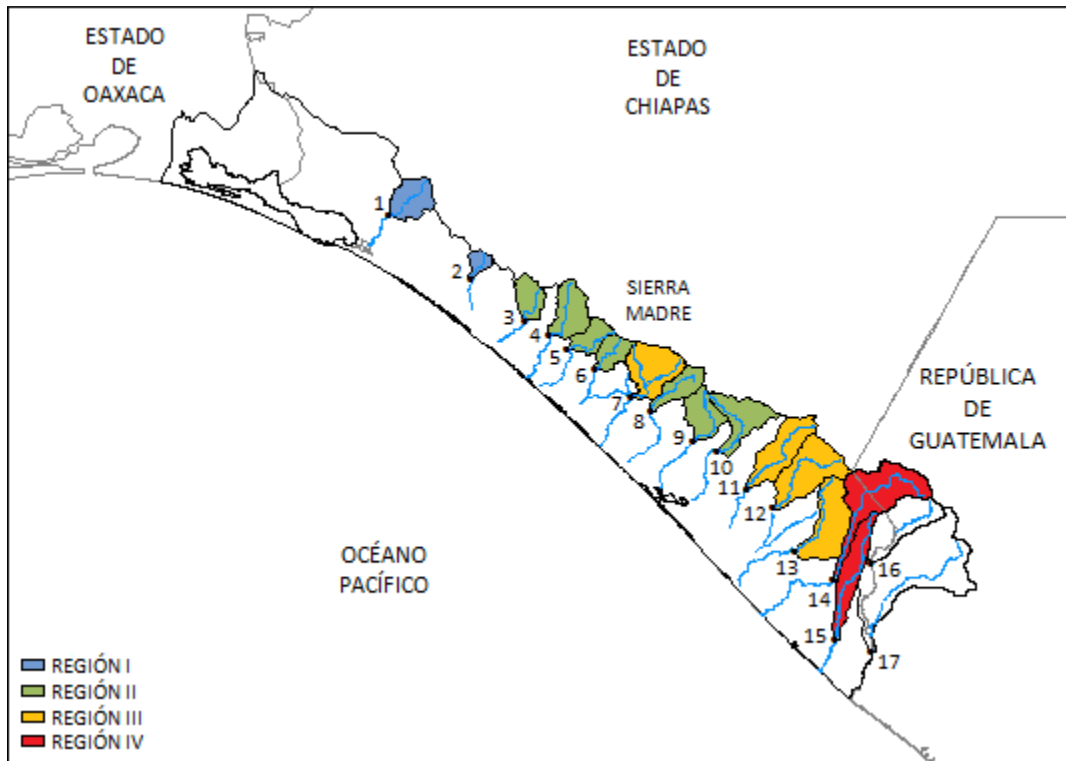
Se construyeron modelos de regresión lineal múltiple (*MLR*) para aquellas regiones homogéneas determinadas en los apartados 3.4.1 a 3.4.4 con al menos tres sitios. La selección de los atributos o variables independientes se consiguió para las combinaciones, de al menos  $n - 1$  características, que proporcionaron el menor error estándar de ajuste (*SFE*).

Para comprobar si una región es homogénea y que el modelo regional es capaz de estimar el Gasto Ecológico en cuencas no aforadas, se extrae, de una en una, cada una de las estaciones pertenecientes a esta región y se infieren los valores de  ${}_7Q_{10}$  correspondientes a través de un nuevo modelo regional estimado con las estaciones restantes.

Solo los modelos regionales estimados para las regiones II y III propuestas por los métodos de las K-Medias y del Parámetro de Forma, fueron capaces de hacerlo. Los modelos restantes fueron descartados. Finalmente, se adopta la siguiente delimitación de regiones homogéneas (Figura 3.4).

**Tabla 3.27** Modelos de regresión lineal múltiple estimados para las diferentes regiones homogéneas

<b>Método</b>	<b>Región</b>	<b>Modelo de Regresión Lineal Múltiple</b>	<b>SFE [m<sup>3</sup>/s]</b>
Momentos-L	II	${}_7Q_{10}^R = -3.258 - 0.002A - 2.313PF + 0.003EMC + 0.977PMC - 0.157LCP + 4.160TC + 0.067HP3M - 0.806DIA3M$	<b>0.564</b>
Región de Influencia	II	${}_7Q_{10}^R = -2.623 + 0.023A + 13.317PF - 0.004EMC - 0.495PMC + 0.077LCP - 3.190TC - 0.056HP3M + 0.651DIA3M$	<b>0.090</b>
Región de Influencia	III	${}_7Q_{10}^R = -2.998 - 0.420PF - 2.183HP3M + 0.047DIA3M$	<b>0.000</b>
K-Medias	II	${}_7Q_{10}^R = -0.731 + 0.007A + 2.924PF + 0.224PMC + 0.014LCP - 1.125TC - 0.011HP3M + 0.131DIA3M$	<b>0.027</b>
K-Medias	III	${}_7Q_{10}^R = 8.274 - 32.478PF + 4.884PMC$	<b>0.000</b>
Parámetro de Forma	II	${}_7Q_{10}^R = -0.731 + 0.007A + 2.924PF + 0.224PMC + 0.014LCP - 1.125TC - 0.011HP3M + 0.131DIA3M$	<b>0.027</b>
Parámetro de Forma	III	${}_7Q_{10}^R = 8.274 - 32.478PF + 4.884PMC$	<b>0.000</b>



**Figura 3.4** Regiones homogéneas en  $7Q_{10}$  para la Región de la costa de Chiapas

## Conclusiones

Las características estadísticas de los llamados escurrimientos mínimos son empleadas para resolver una serie de problemas de ingeniería hidráulica. En esta tesis se propuso la aplicación de las distribuciones mezcladas con poblaciones Gumbel, General de Valores Extremos y Weibull-3 para calcular el flujo de diseño ( ${}_{\gamma}Q_{10}$ ), llamado gasto ecológico, en la llamada Costa de Chiapas, y sus resultados se compararon con aquellos obtenidos por las distribuciones tradicionalmente utilizadas en el análisis de flujos mínimos.

Las distribuciones mezcladas fueron capaces de obtener cuantiles más confiables, de acuerdo con las pruebas de bondad de ajuste utilizadas. La distribución *MG* lo consiguió el 35% de las veces, la distribución *MW3*, también un 35%, mientras que la distribución unimodal *LN3*, el 24%. La distribución *LN3*, dio mejores resultados en aquellas series con valores de  ${}_{\gamma}Q_{\min}$  muy pequeños, e incluso cero, como aquellas registradas en las estaciones Tonalá y Jesús.

La función logaritmo de verosimilitud de la distribución *MW3* presenta cierta dificultad al momento de encontrar su máximo. Sin embargo, cuando se logra obtener, la distribución presenta un ajuste muy satisfactorio. Por el contrario, la distribución *MG* no presenta mayor dificultad matemática y se logra ajustar bastante bien a la serie de flujos mínimos.

Una pequeña variación en la estimación de los parámetros afecta en la estimación de los cuantiles de manera significativa. Incluso puede alterar la delimitación de regiones homogéneas.

La generación de flujos mínimos está gobernada por varios factores. Esto se comprueba al demostrar que las distribuciones mezcladas reflejan estadísticamente mejor el comportamiento de las series de gastos mínimos. Además, fueron muchas las características fisiográficas y climatológicas necesarias para modelar las series  ${}_{\gamma}Q_{10}$ .

En general, los resultados demostraron que las distribuciones mezcladas propuestas representan una herramienta adicional de muy buena calidad dentro del análisis de frecuencias de flujos mínimos.

## Referencias Bibliográficas

- Al-Mashidani G., Lal B.B., Quadri I., 1980. *Drought Flow Analysis of River Tigris in Baghdad*. Hydrological Science Journal, 25(4):453-459.
- Amores L.D., 2011. Análisis de las Variables Climatológicas de la Costa de Chiapas. Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM.
- Bari M.F. y Sadek S., 2002. *Regionalization of low flow frequency estimates for rivers in northwest Bangladesh*. Regionalization Hydrology, IAHS Publ. No 274.
- Cavanaugh J.E., 2009. *The Bayesian Information Criterion*. Department of Biostatistics, University of Iowa, U.S.A.
- Chen Y.D., Huang G., Shao Q., Yu-Xu C., 2006. *Regional analysis using L-moments for Dongjiang basin, South China*. Hydrological Science Journal, 51(6):1051-1064.
- Chow V.T., 1964. *Handbook of Applied Hydrology*. Mc. Graw-Hill.
- Chow V.T., 1994. *Hidrología Aplicada*. Mc. Graw-Hill.
- CONAGUA. Comisión Nacional del Agua, 2005. *Banco Nacional de Datos de Aguas Superficiales (BANDAS)*. IMTA. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Cunnane C., 1988. *Methods and merits of regional flood frequency analysis*. Journal of Hydrology, 100: 269-290.
- EPA. Environmental Protection Agency, 2006. [www.epa.gov](http://www.epa.gov).
- Escalante C.A., 2009. *Mixed Distributions in Low-Flow Frequency Analysis*. Ingeniería Investigación y Tecnología, Vol. X, No. 3:247-253.
- Escalante C.A., Reyes L., 2005a. *Análisis de sequías Vol. I*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Escalante C.A., Reyes L., 2005b. *Técnicas Estadísticas en Hidrología*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Gumbel E.J., 1958. *Statistic of Extreme Values*. Columbia University Press, New York, USA.
- Hosking J.R.M., Wallis J.R., 1993. *Some statistic useful in regional frequency analysis*. Water Resource Research, 29(2):271-281
- INEGI. Instituto Nacional de Estadística, Geografía, 2010. [www.inegi.gob.mx](http://www.inegi.gob.mx).
- Kite G.W., 1958. *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Water Resources Publications, USA.
- Mood A.M., Graybill F.A., Boes D., 1974. *Introduction to the theory of statistic*. Mc. Graw-Hill.
- Morán W.C., 1989. *Hidrología para estudiantes de ingeniería civil*. Pontificia Universidad Católica, Perú.
- Mutua M.F., 1994. *The use of the Akaike Information Criterion on the identification of the optimum frequency model*. Hydrological Science Journal, 39(3):235-244.
- Nathan R.J., McMahon T.A., 1990. *Identification of homogeneous regions for the purposes of regionalization*. Journal of Hydrology, 121:217-238.
- Onoz B., Bayazit M., 1995. *GEV-PWM Model for Distribution of Minimum Flows*. Journal of Hydrology Engineering, 4(3):289-292.
- Pilon P.J., 1990. *The Weibull distribution applied to the regional low flow frequency analysis*. Regionalization in Hydrology, IAHS Publ. No 191.
- Salas J.D., Delleur J.W., Yevjevich V., Lane W.L., 1980. *Applied Modelling of Hydrologic Time Series*. Water Resources Publications, USA.
- SIAM. Sistema de Información Ambiental Mesoamericano, 2010. [www.ccad.ws](http://www.ccad.ws).
- Smakhtin V.U., 2001. *Low flow hydrology: a review*. Journal of Hydrology, 240(3-4):147-186.
- Waylen P.R., Woo M., 1987. *Annual low flows generated by mixed processes*. Hydrological Science Journal, 32(3):371-383.
- Yue S., Pilon P., 2005. *Probability distribution type of Canadian annual minimum streamflow*. Hydrological Science Journal, 50(3):427-438.



Veza P., Comoglio C., Rosso M., Viglione A., 2010. *Low Flows Regionalization in North-Western Italy*. *Water Resources Management*, 24:4049-4074.

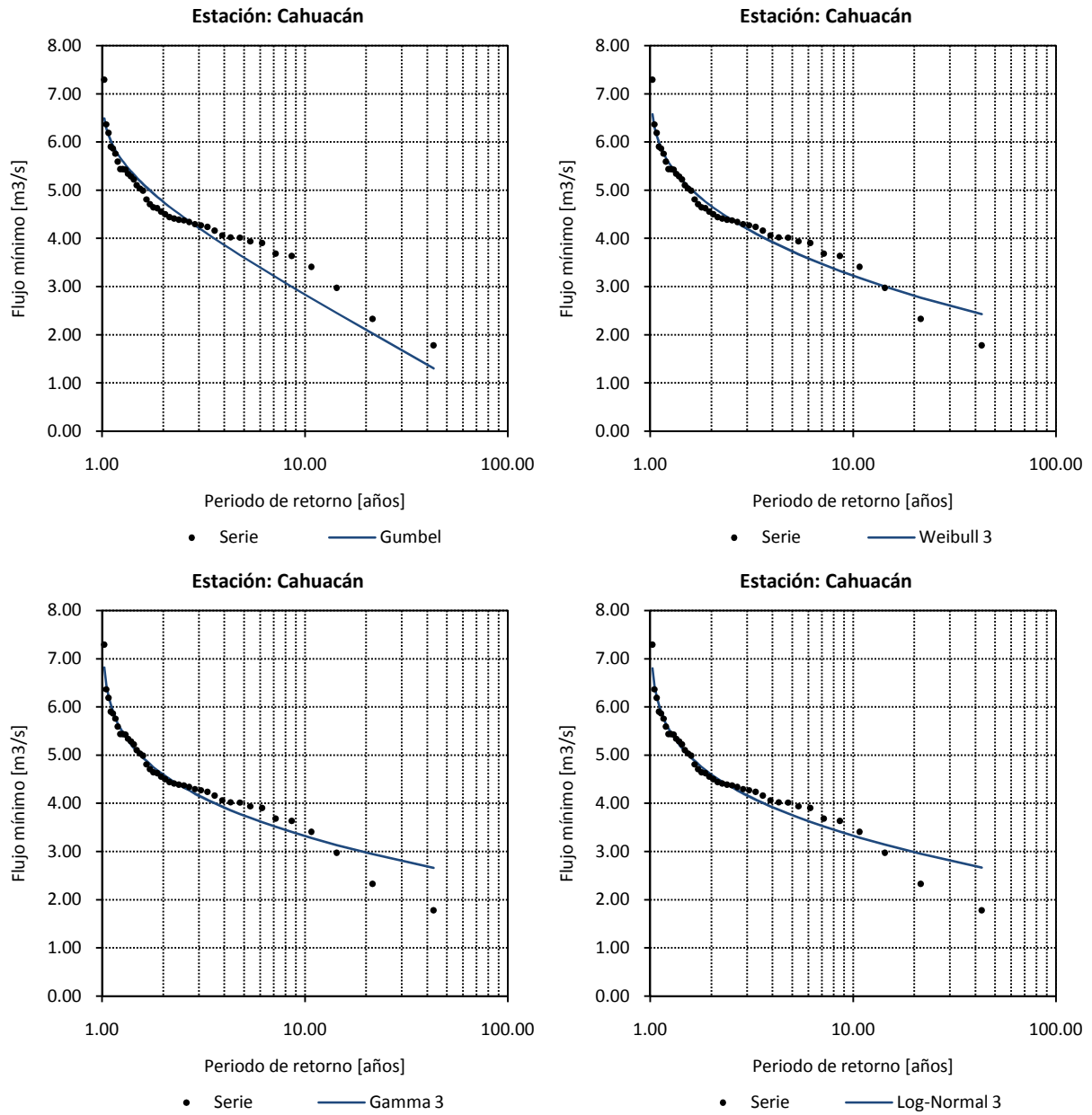
Wackerly D.D., Mendenhall III W., Scheaffer R.L., 2002. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Thomson.

**DISTRIBUCIONES MEZCLADAS EN EL ANÁLISIS DE  
FRECUENCIAS DE FLUJOS MÍNIMOS**

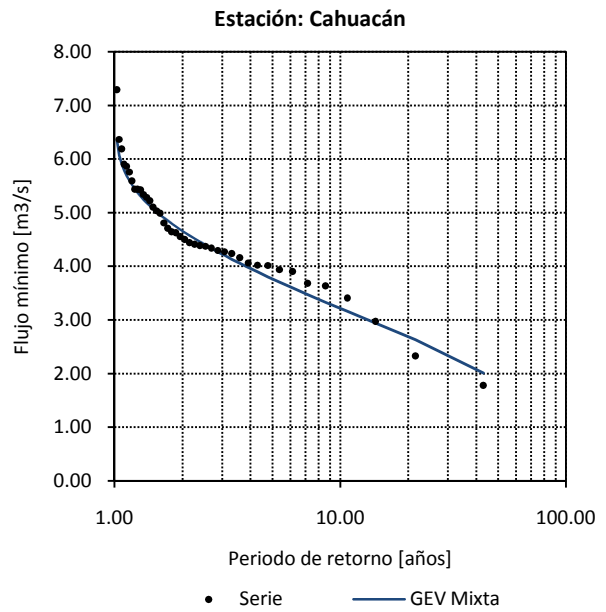
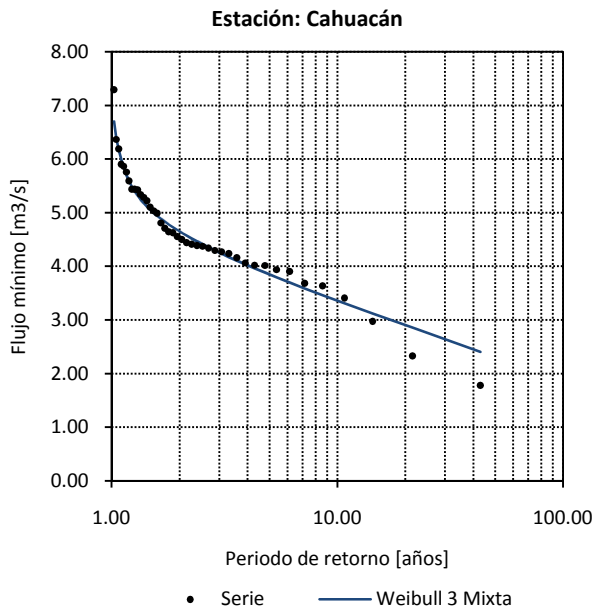
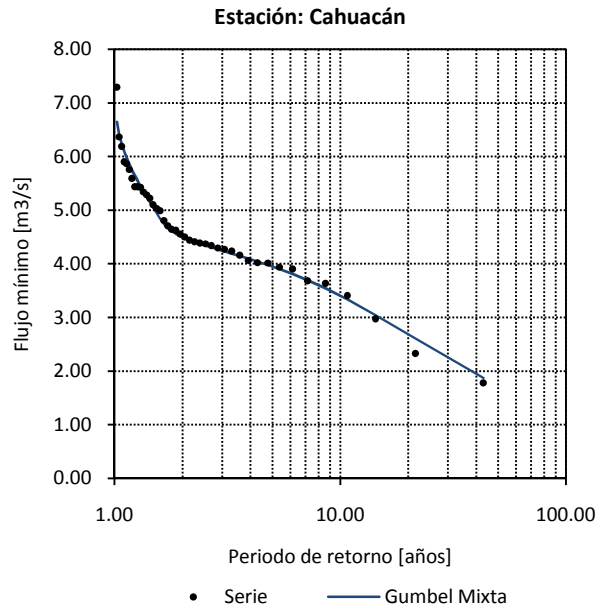
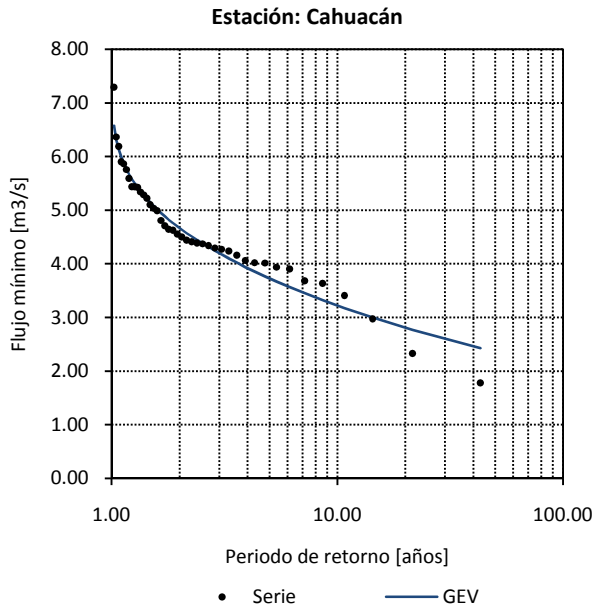
*Anexo A*

**Ajuste de las Diferentes Funciones de Distribución**

## A.1. Estación Cahuacán

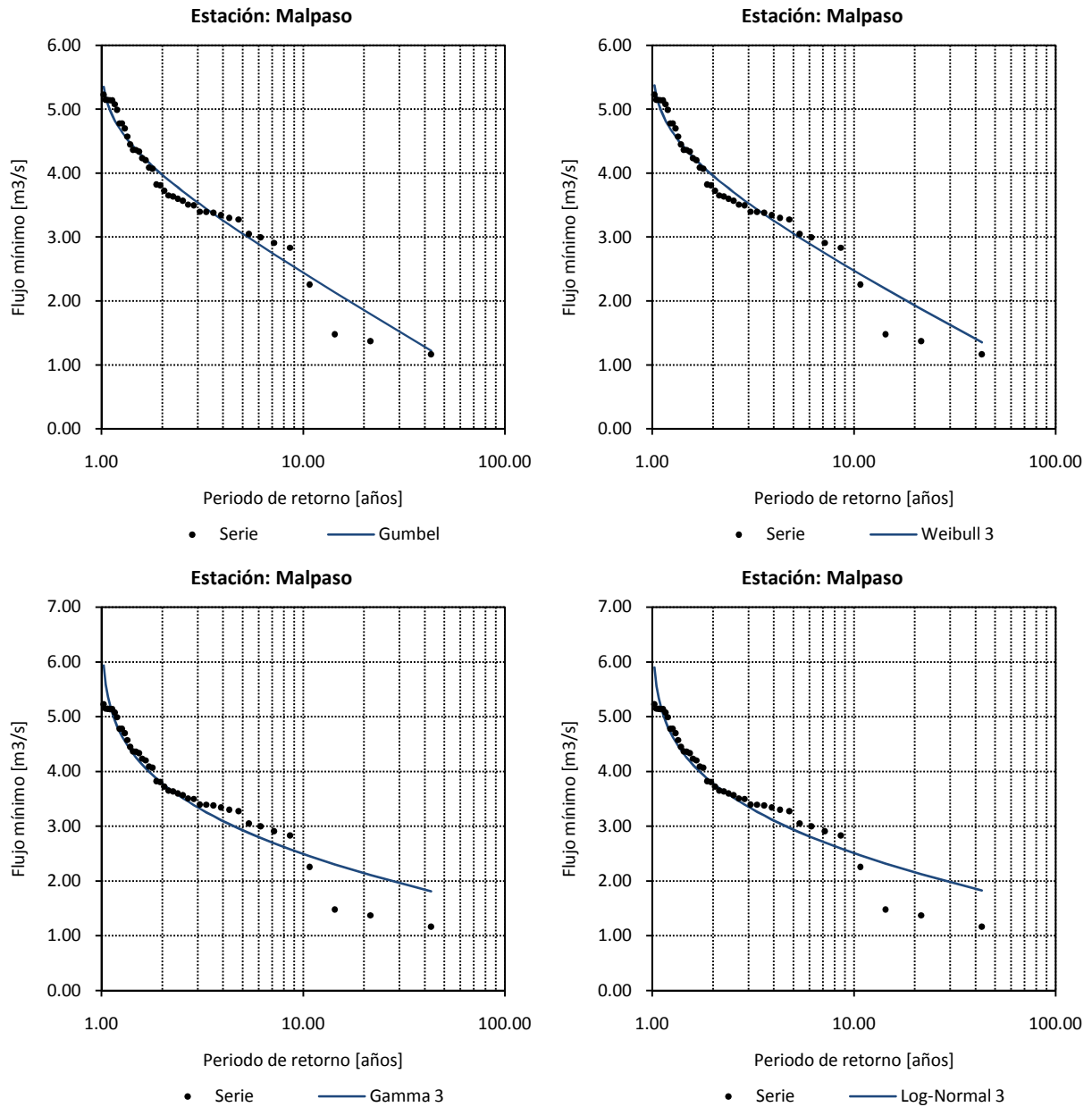


**Figura A1.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Cahuacán

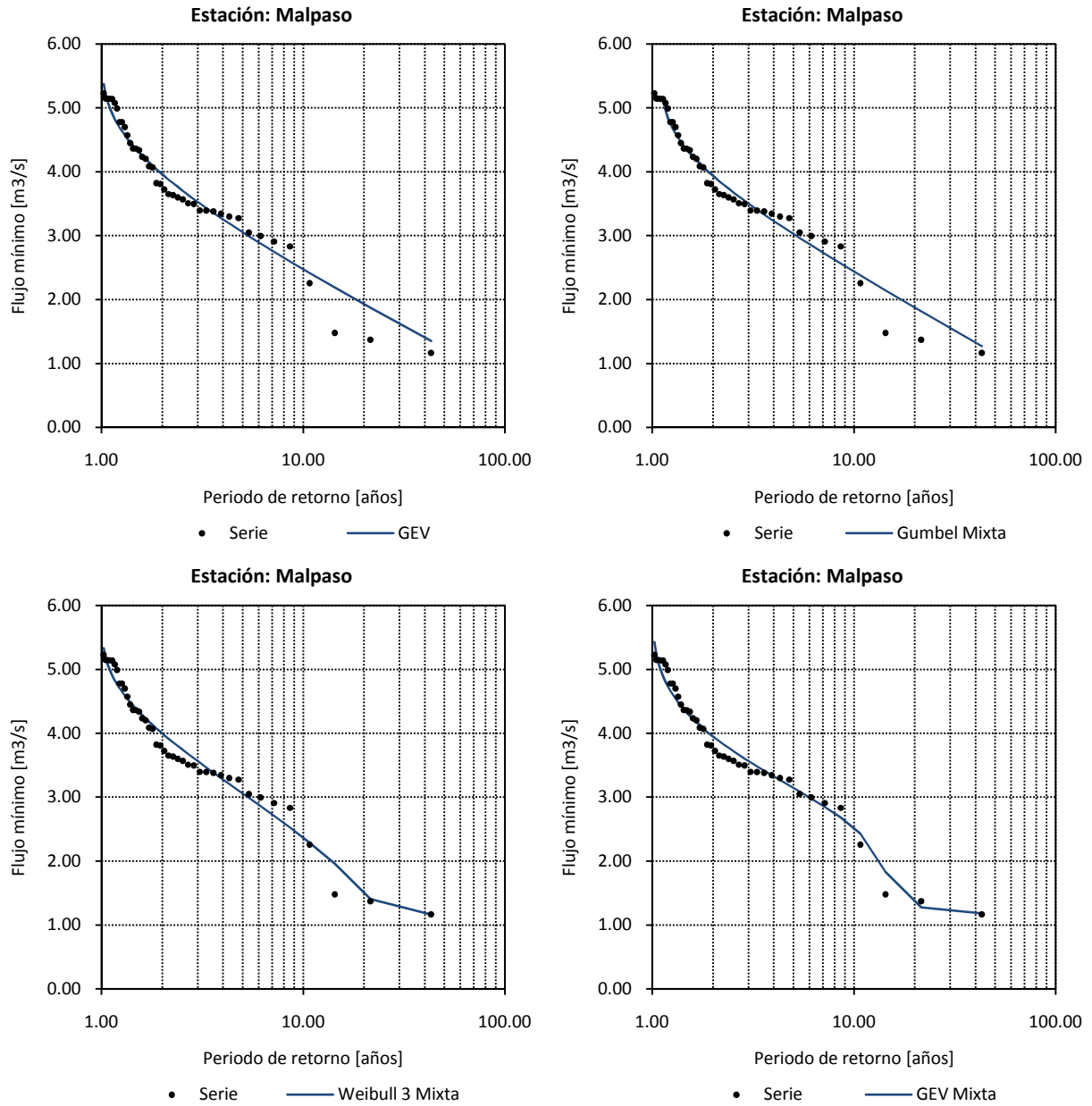


**Figura A1.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  ${}_7Q_{\min}$  registrada en la estación Cahuacán (continuación).

## A.2. Estación Malpaso

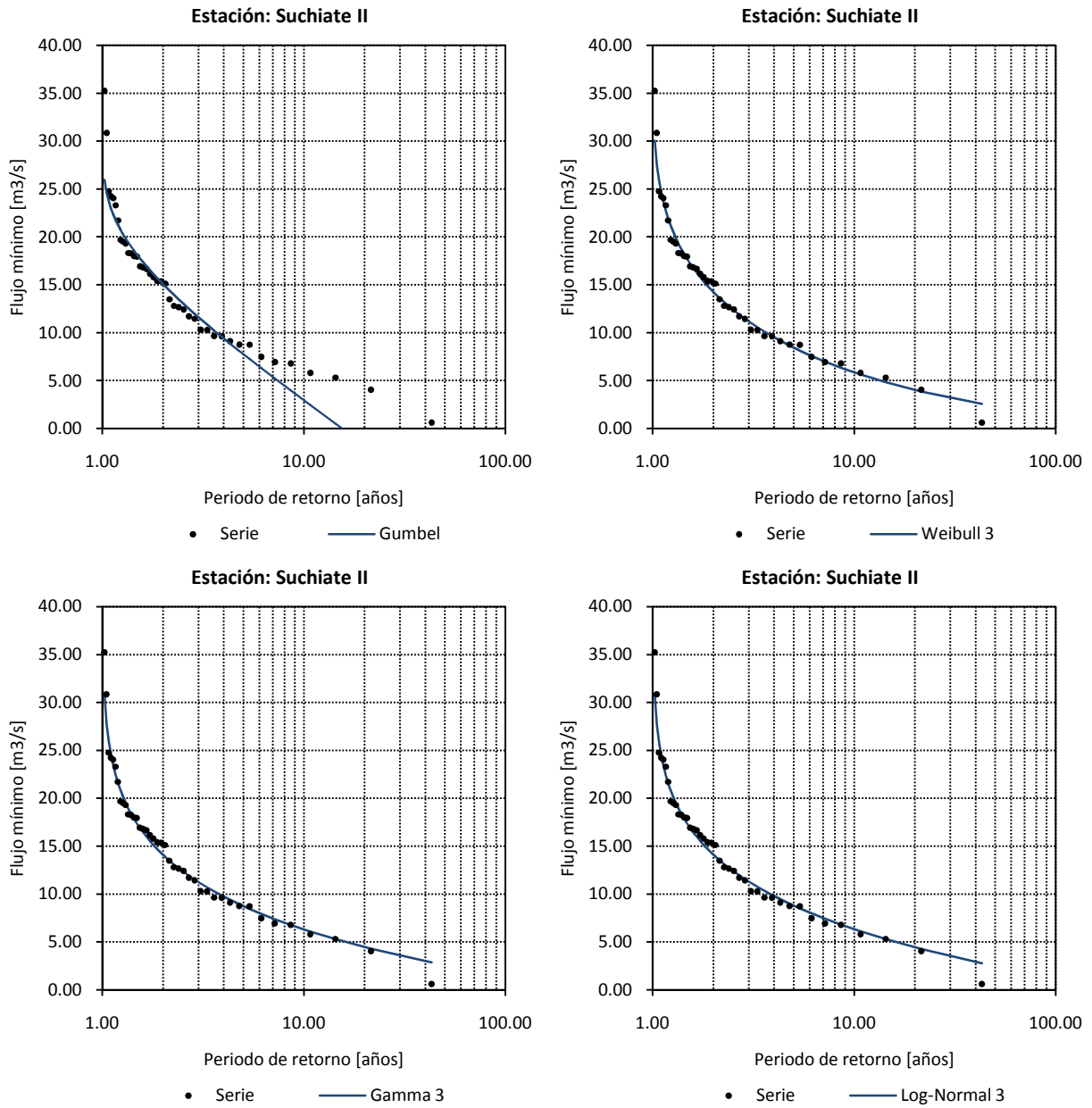


**Figura A2.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Malpaso

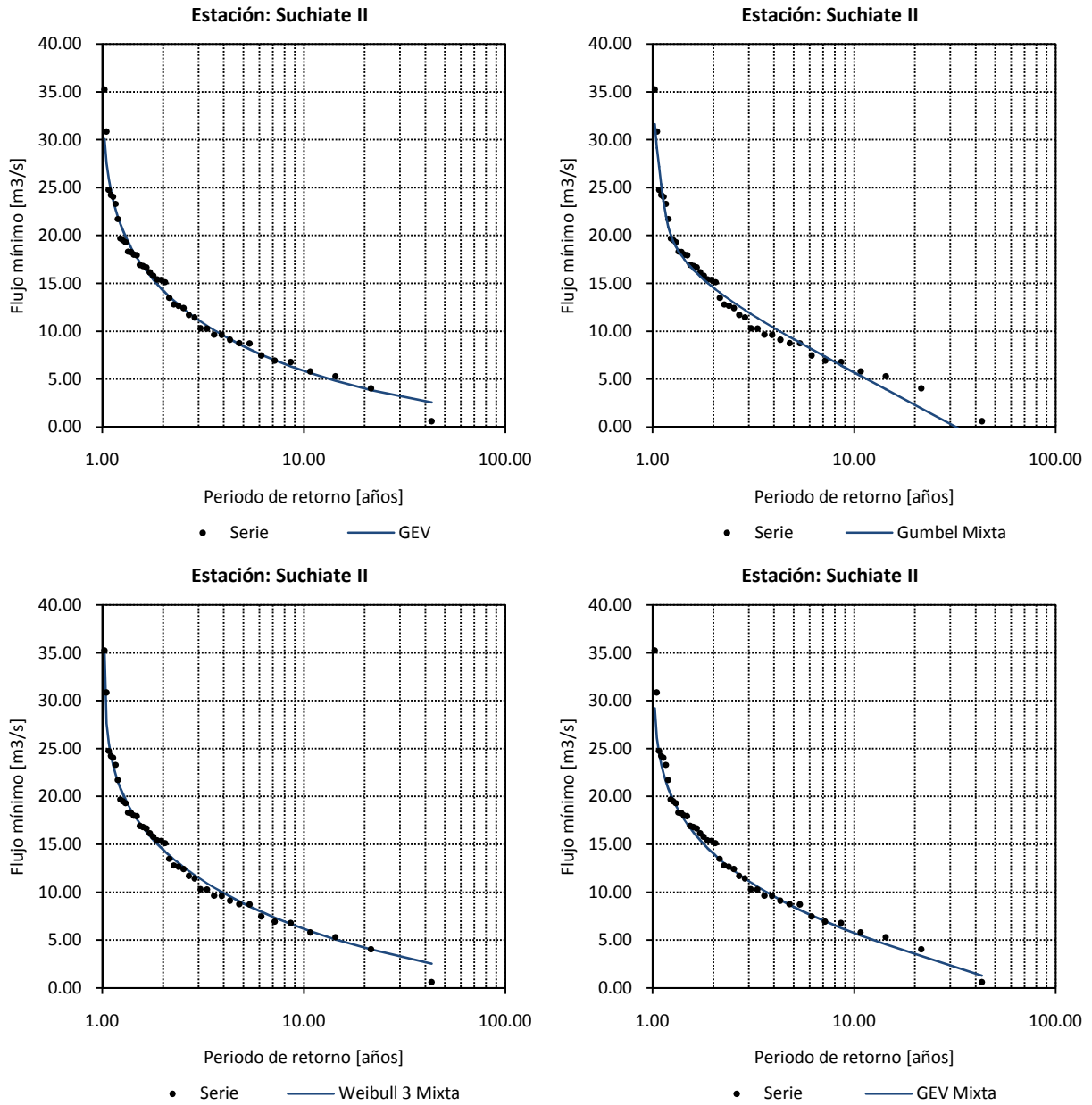


**Figura A2.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Malpaso (continuación)

### A.3. Estación Suchiate II



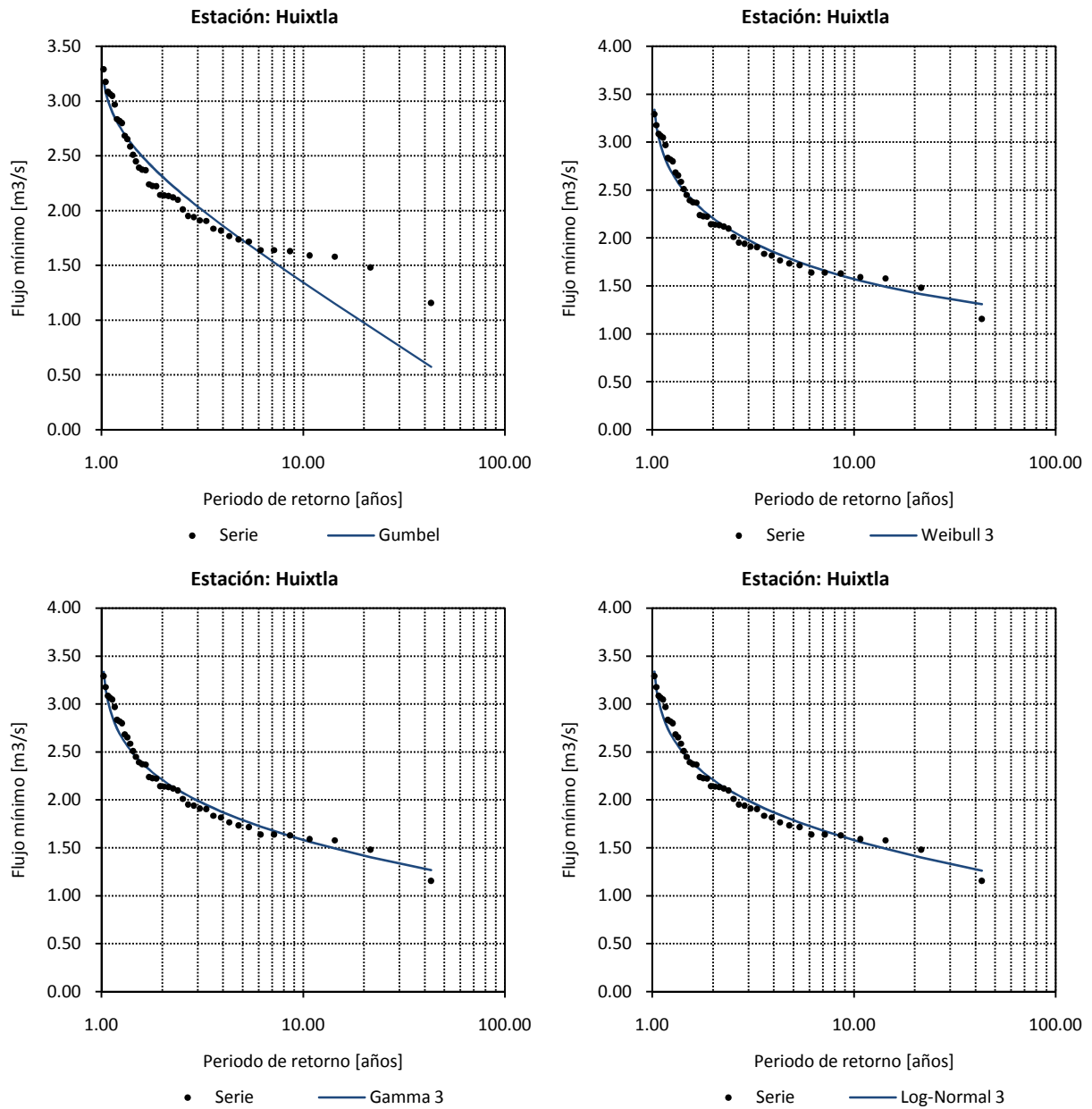
**Figura A3.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Suchiate II



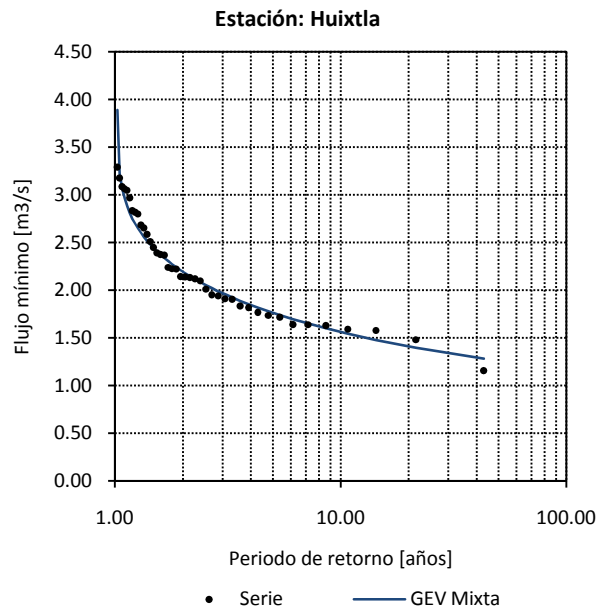
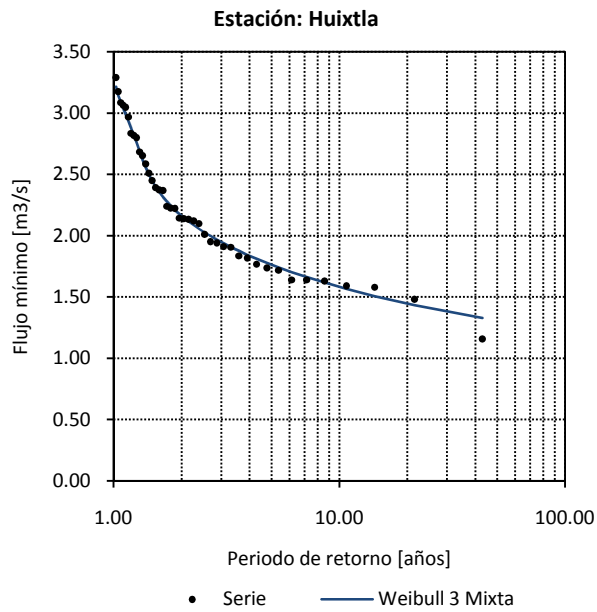
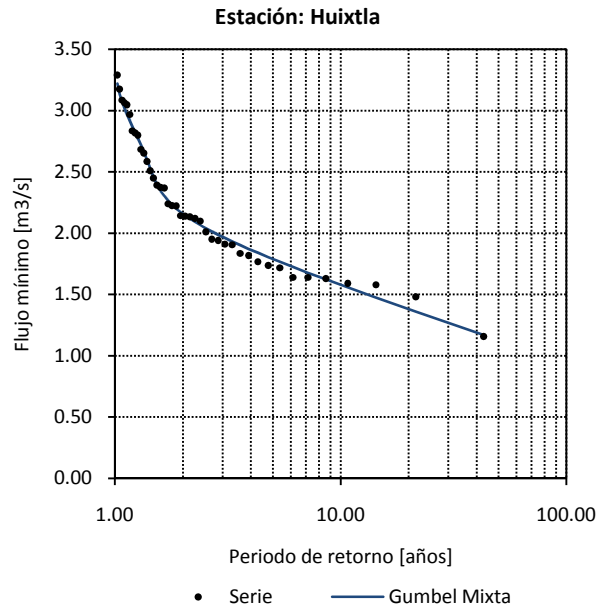
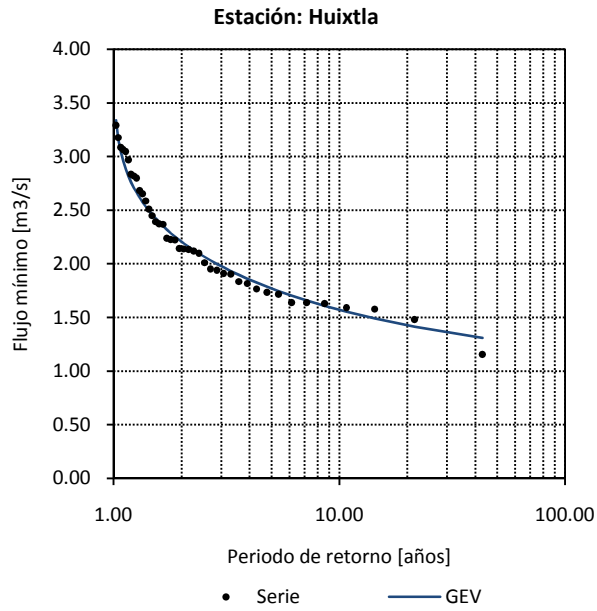
**Figura A3.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Suchiate II (continuación)



## A.4. Estación Huixtla

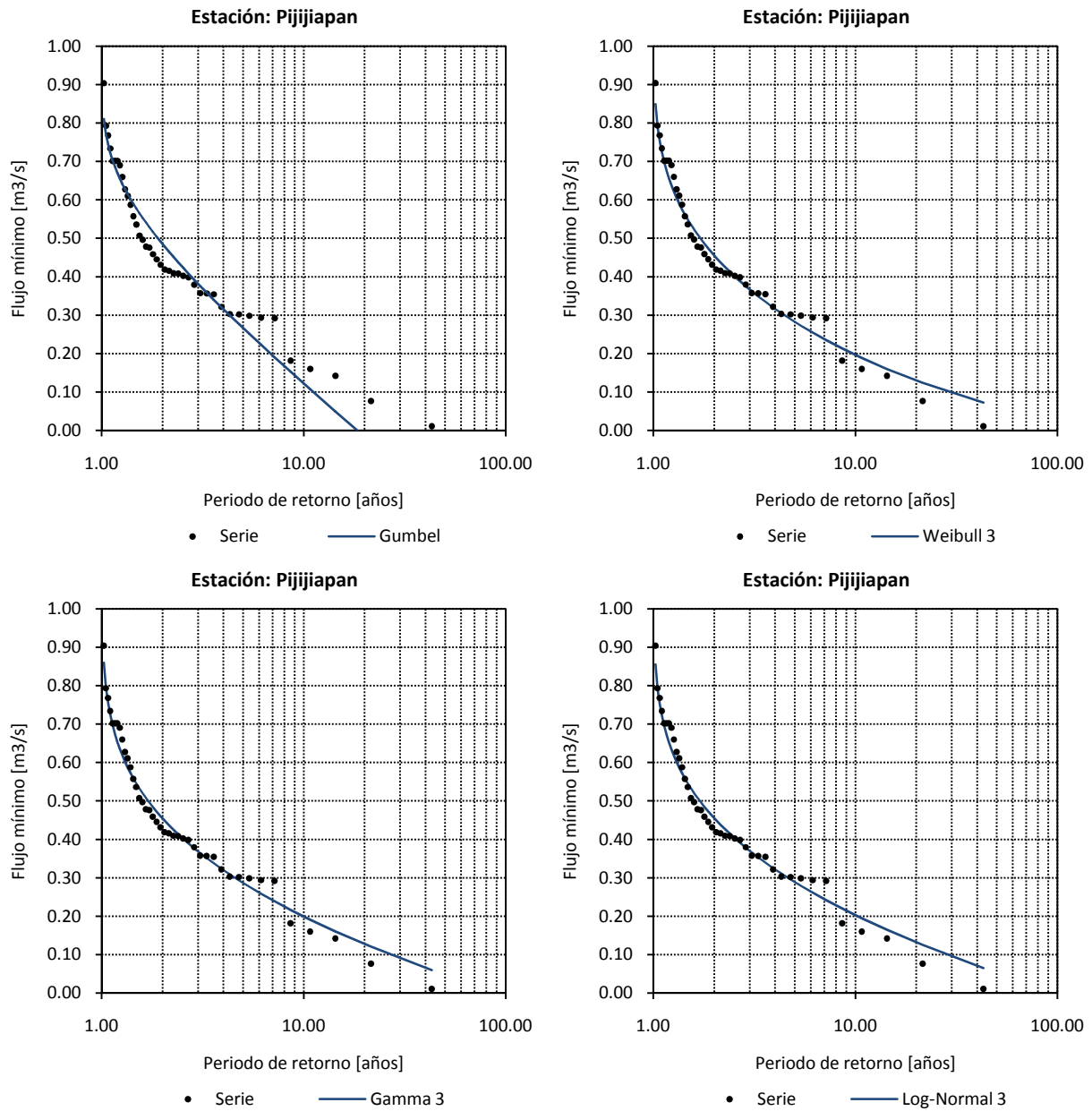


**Figura A4.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Huixtla

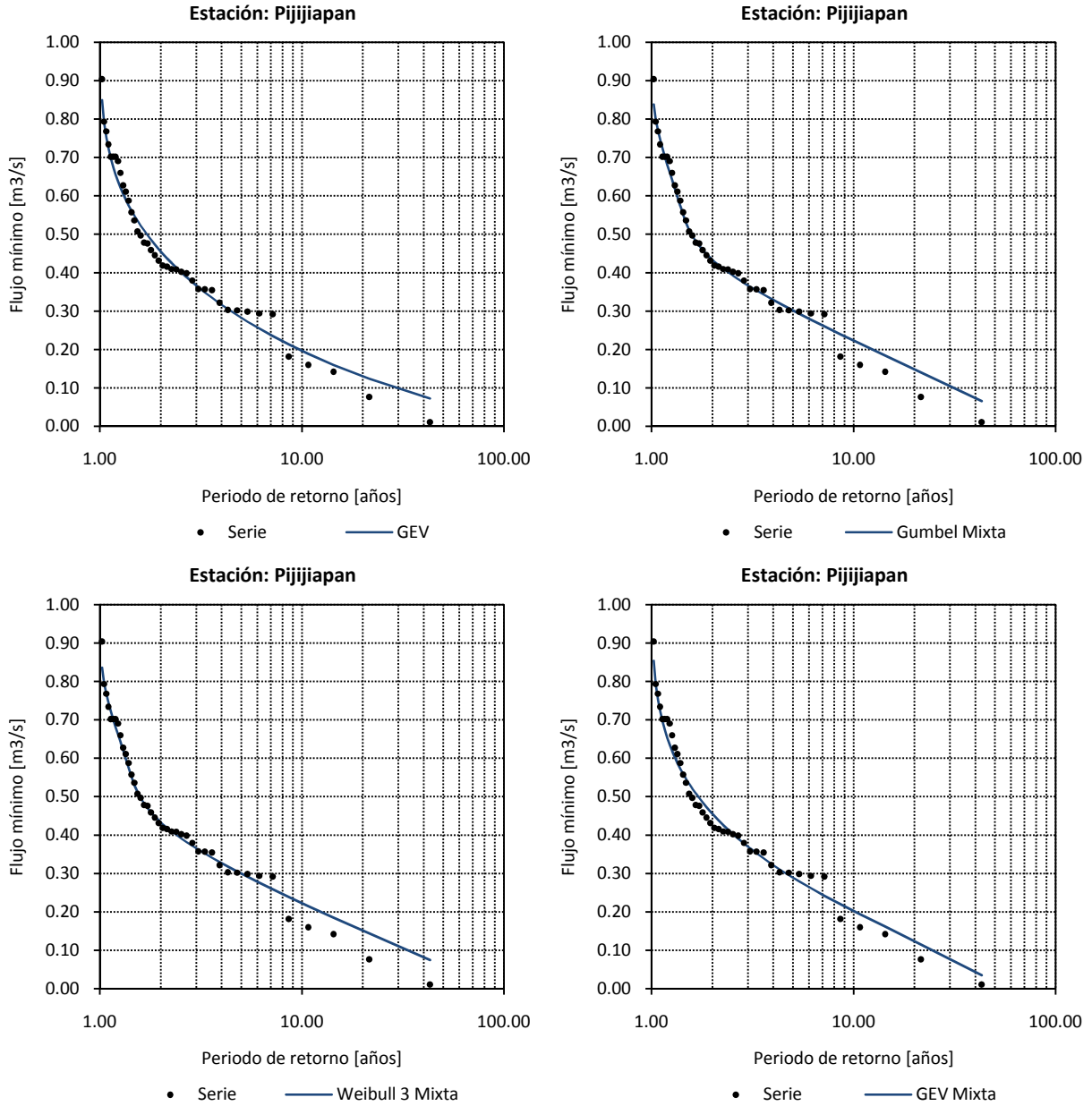


**Figura A4.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Huixtla (continuación)

## A.5. Estación Pijijiapan

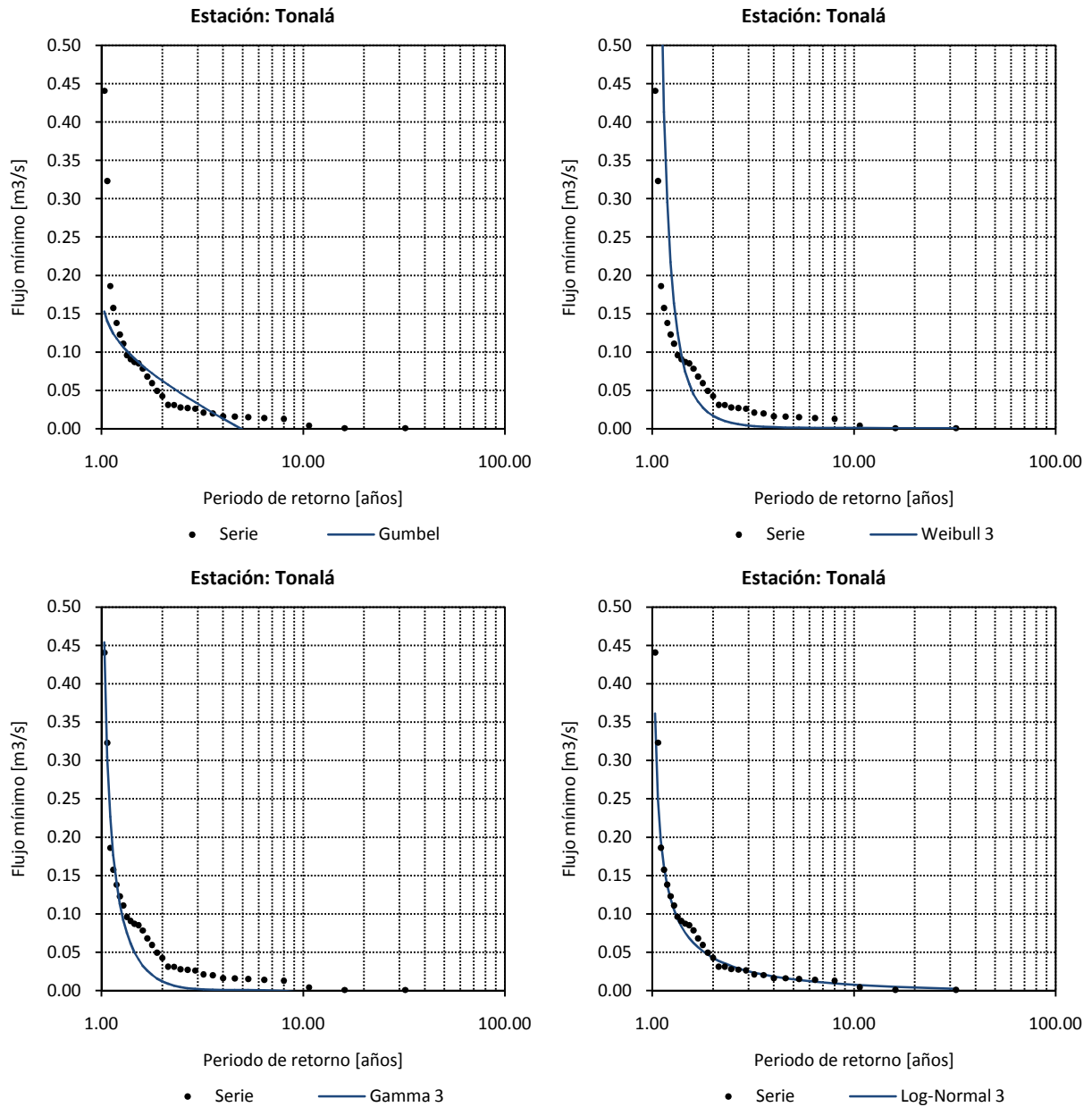


**Figura A5.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{min}$  registrada en la estación Pijijiapan

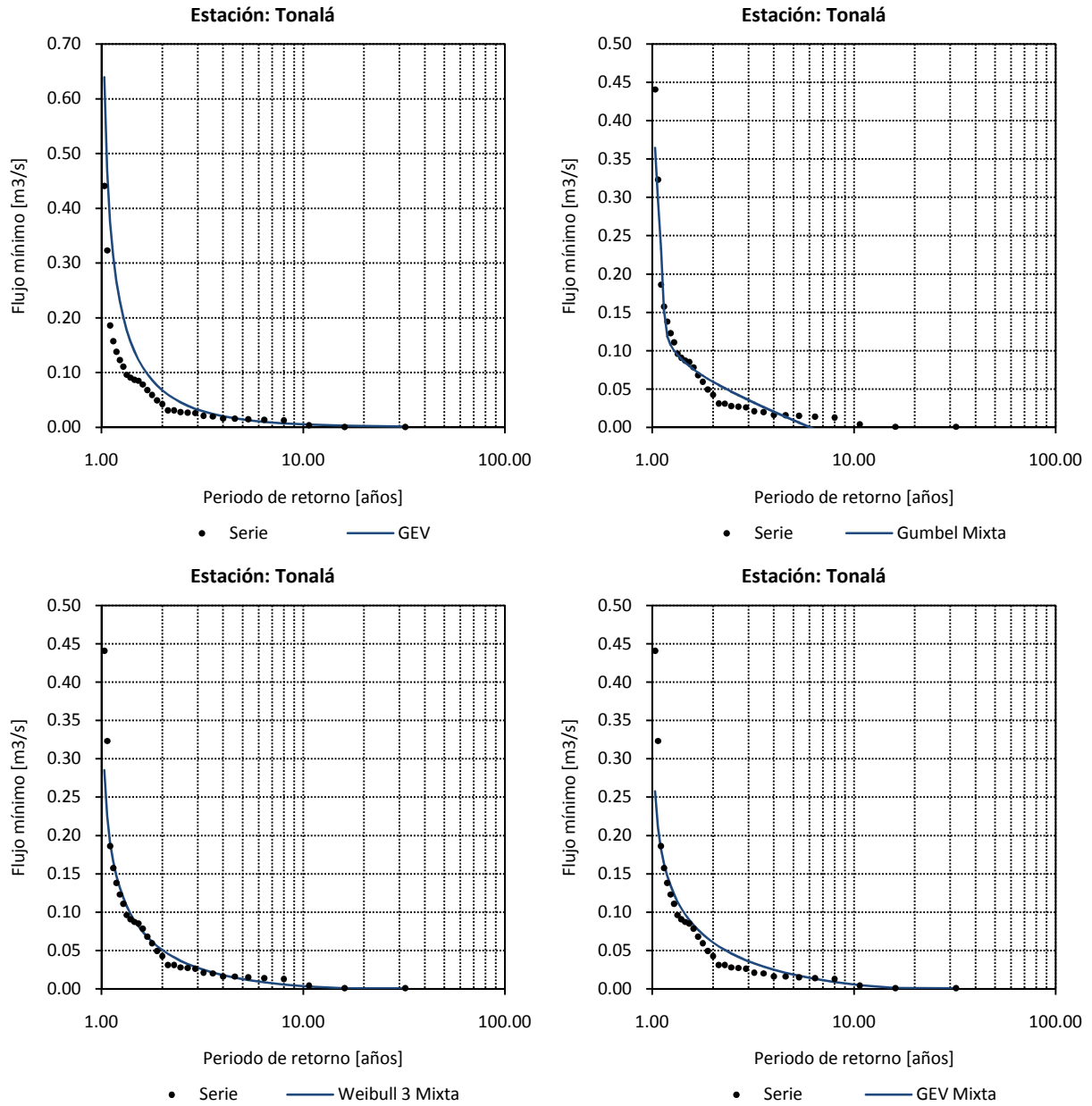


**Figura A5.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  ${}_7Q_{\min}$  registrada en la estación Pijijiapan (continuación)

## A.6. Estación Tonalá

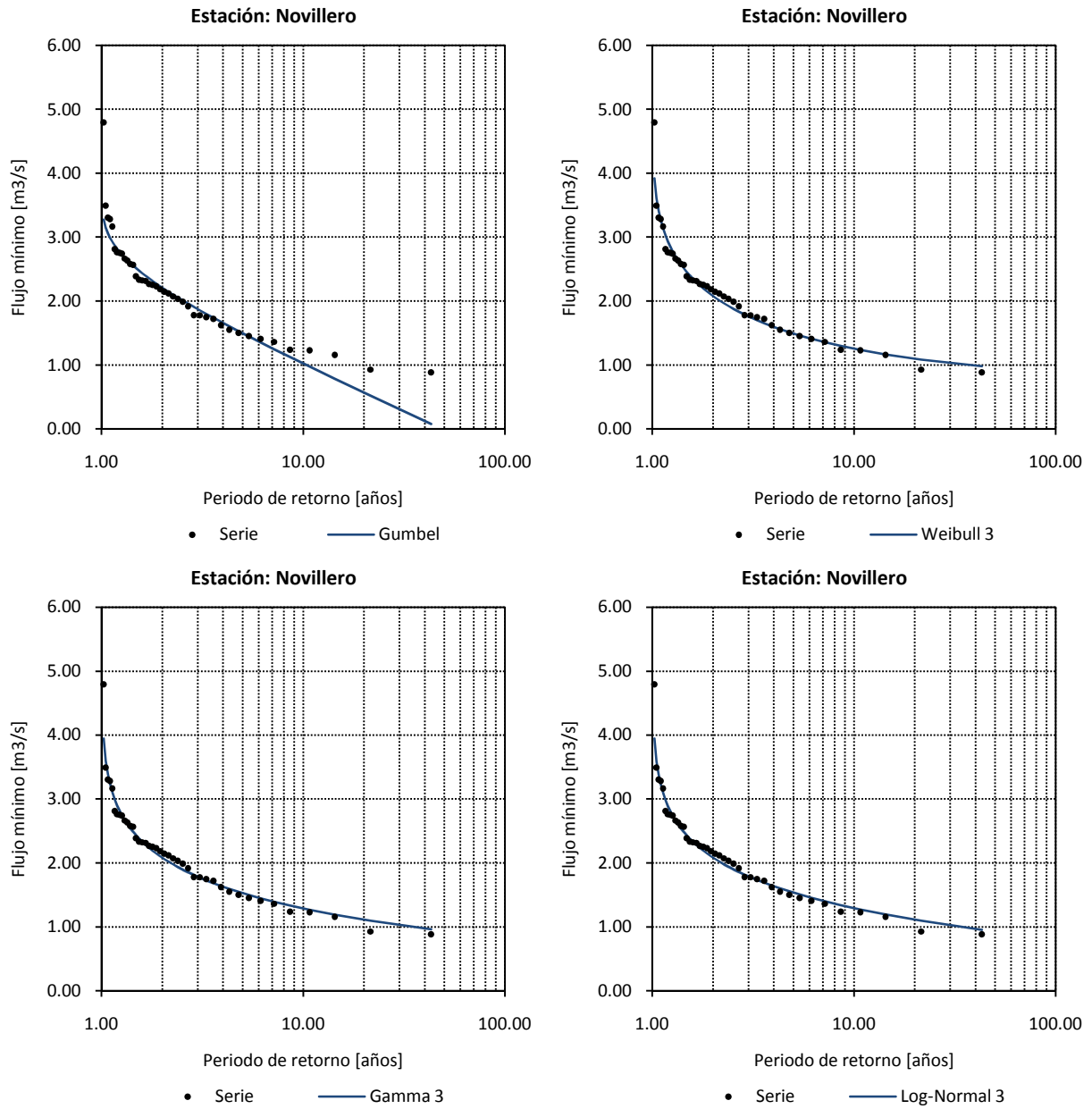


**Figura A6.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Tonalá

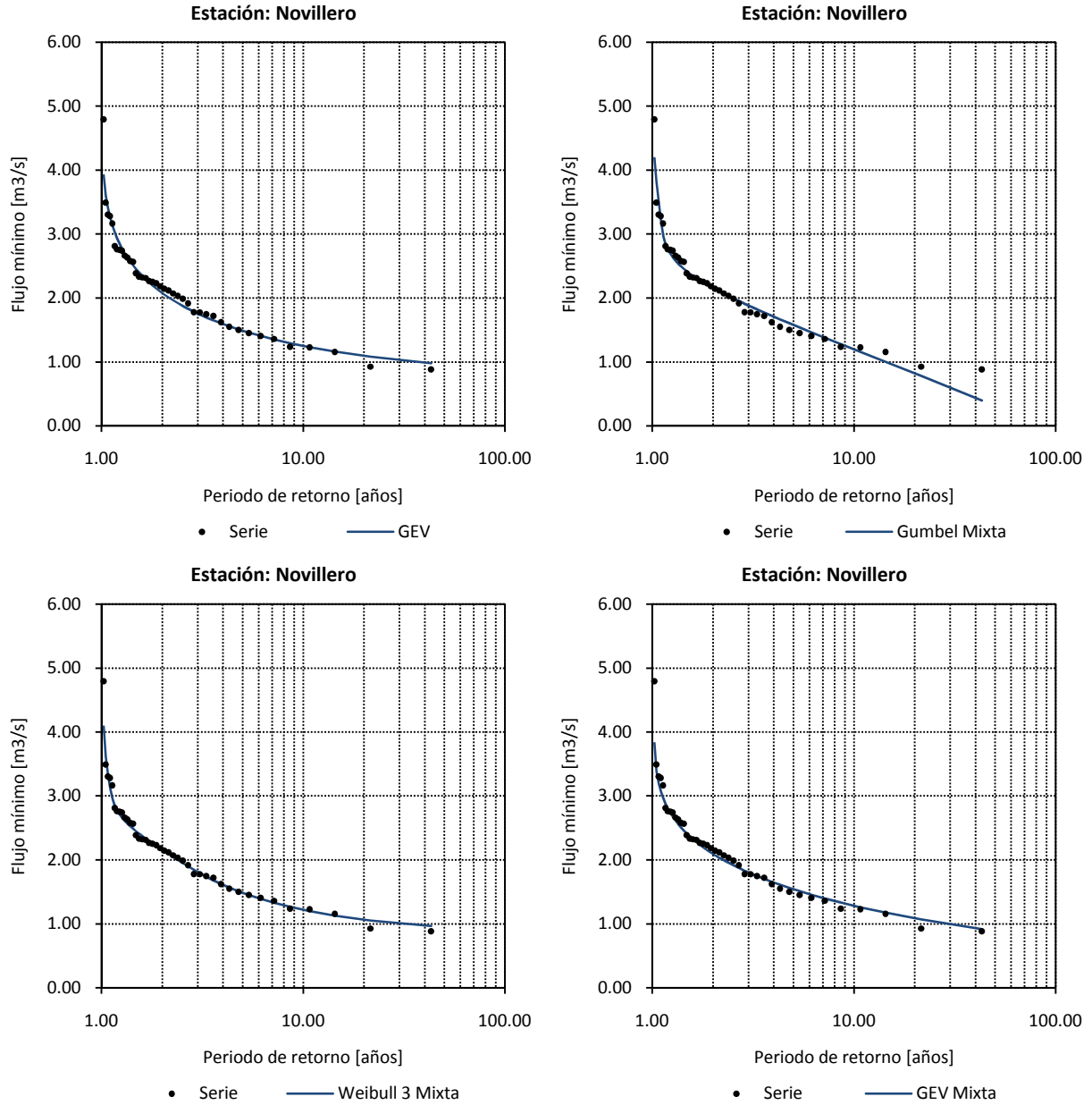


**Figura A6.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Tonalá (continuación)

## A.7. Estación Novillero



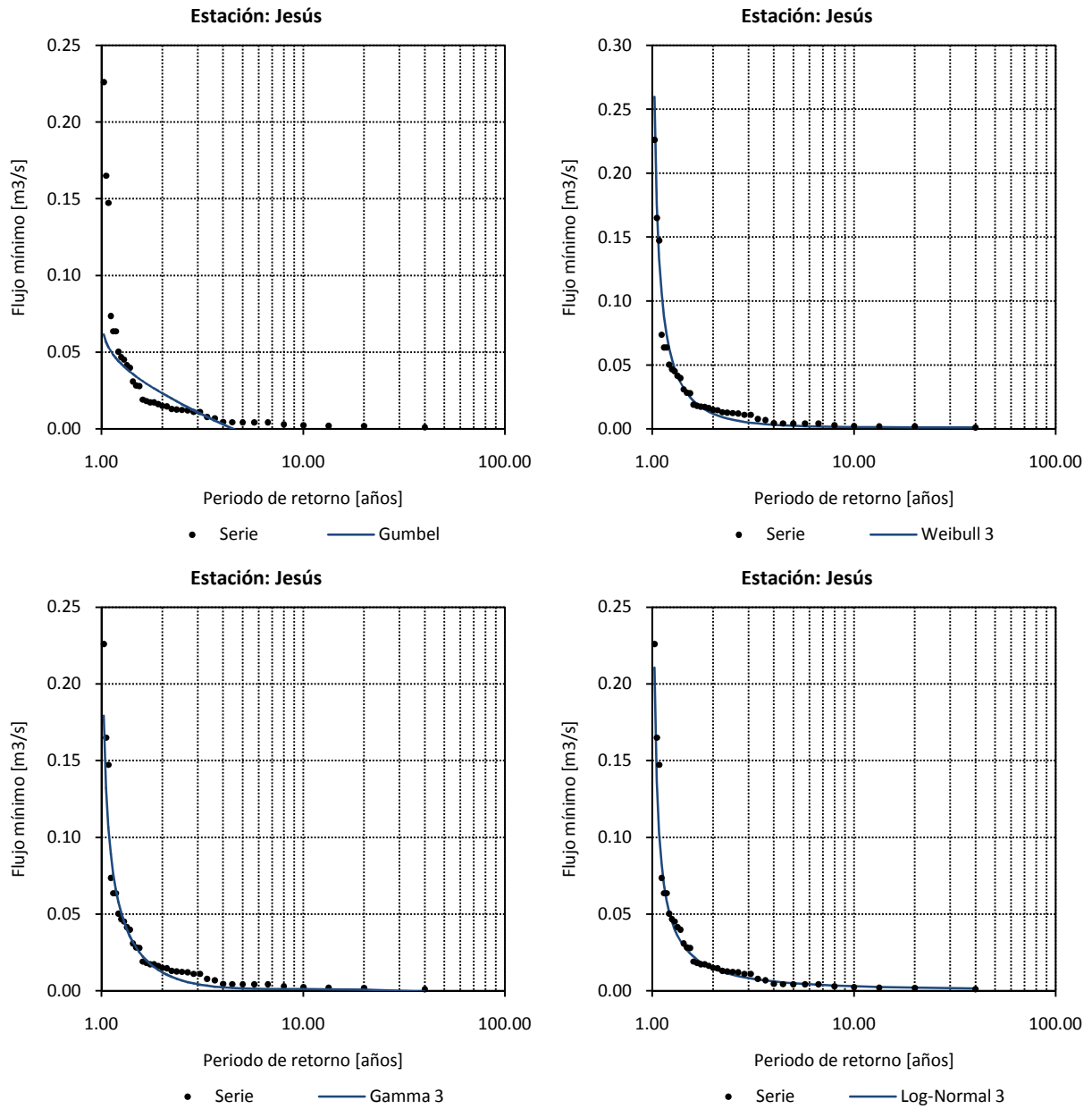
**Figura A7.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Novillero



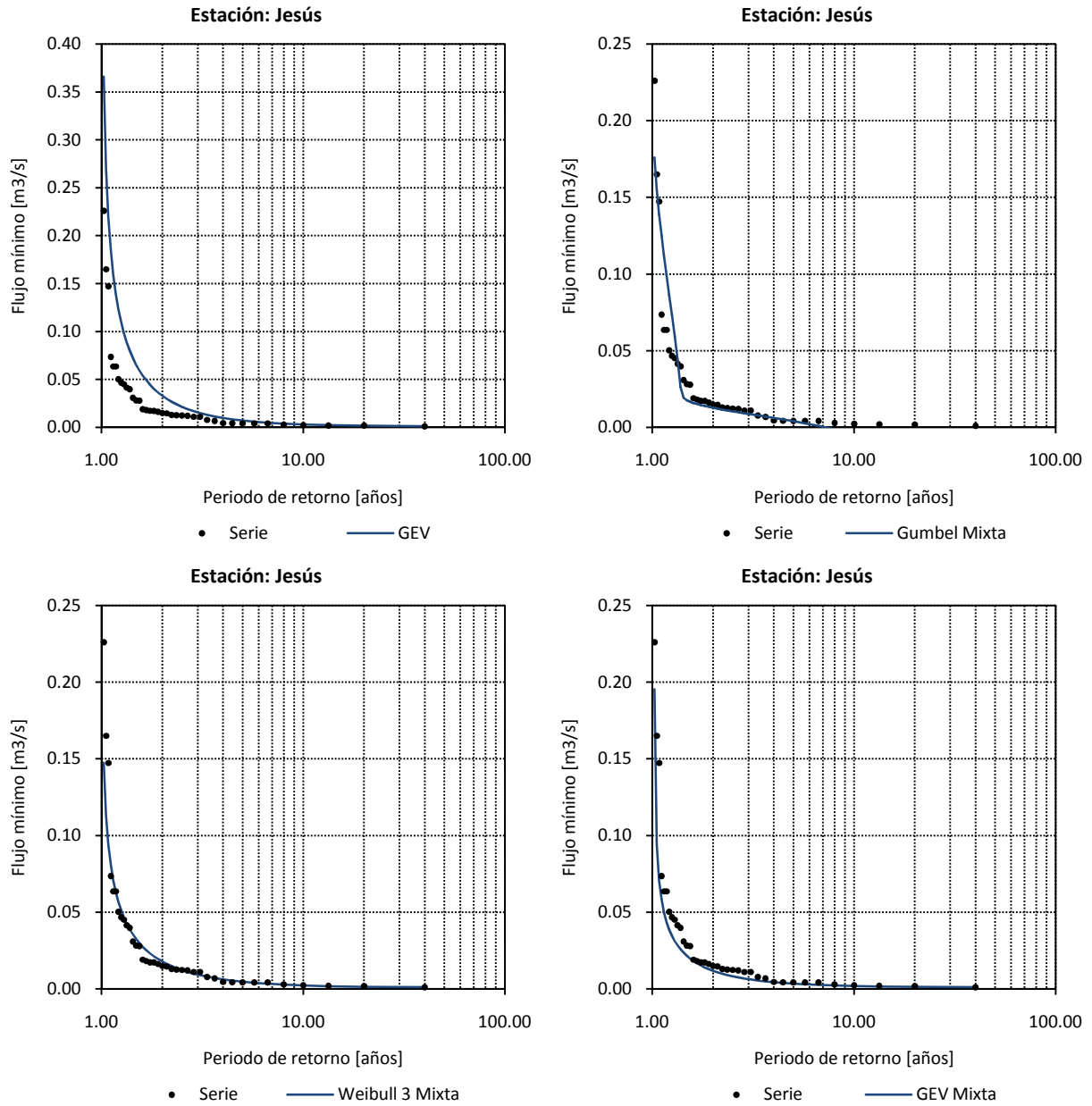
**Figura A7.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Novillero (continuación)



## A.8. Estación Jesús

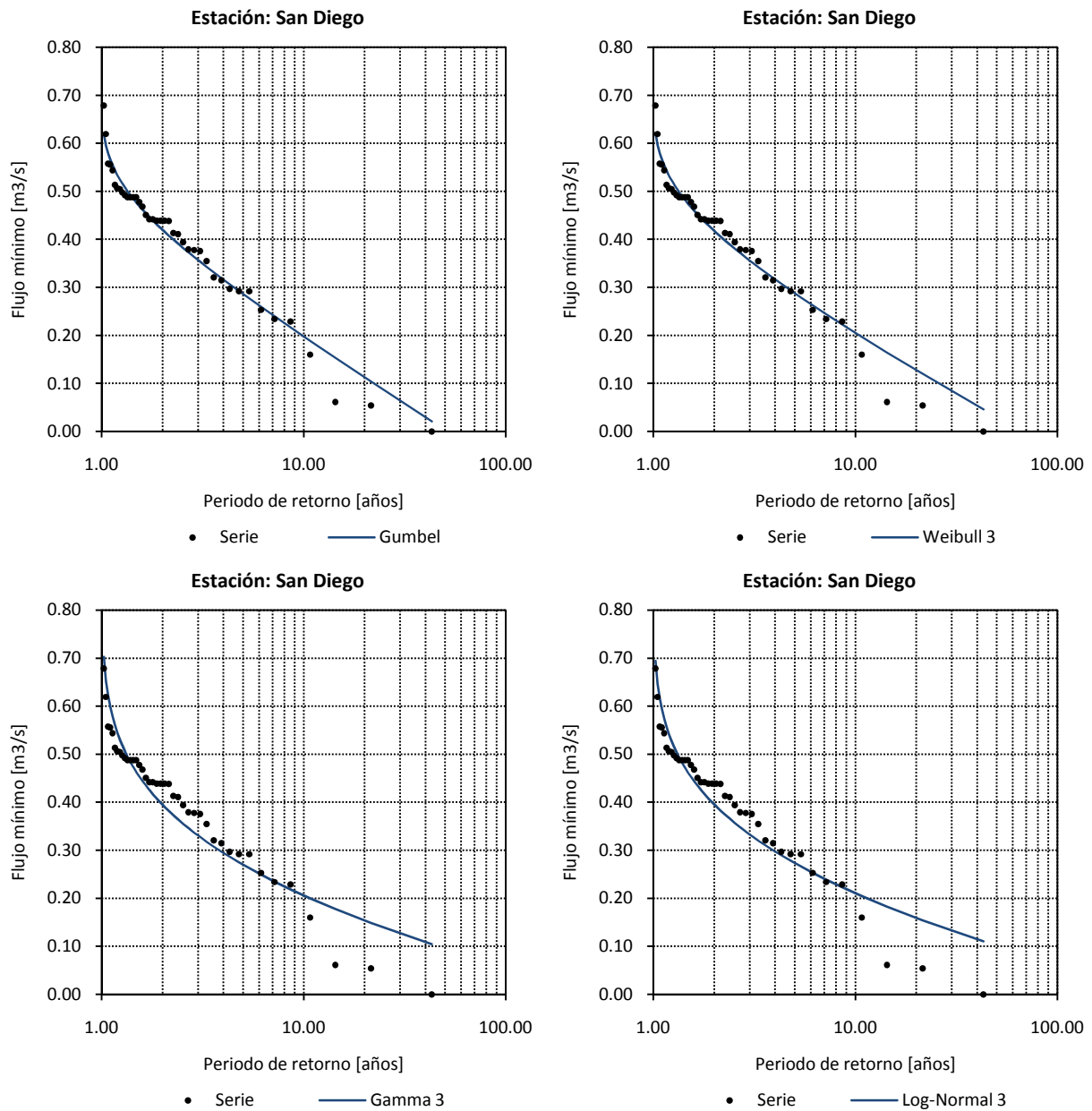


**Figura A8.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Jesús

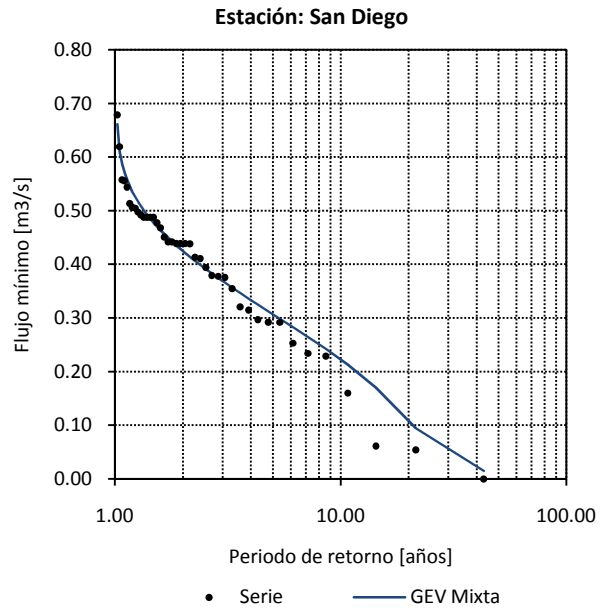
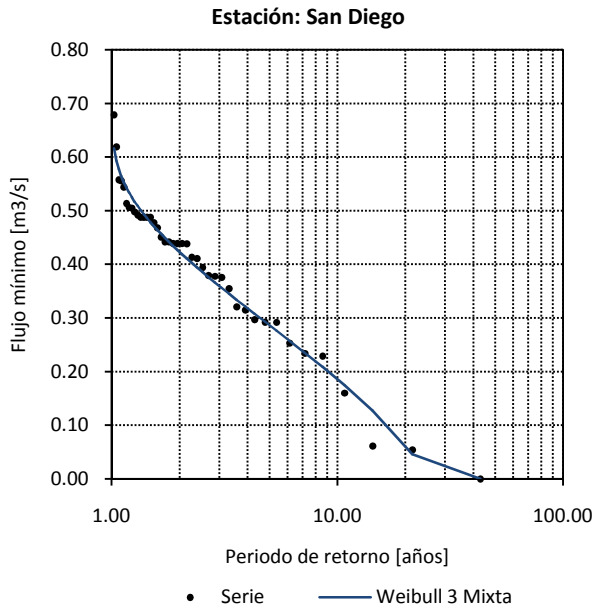
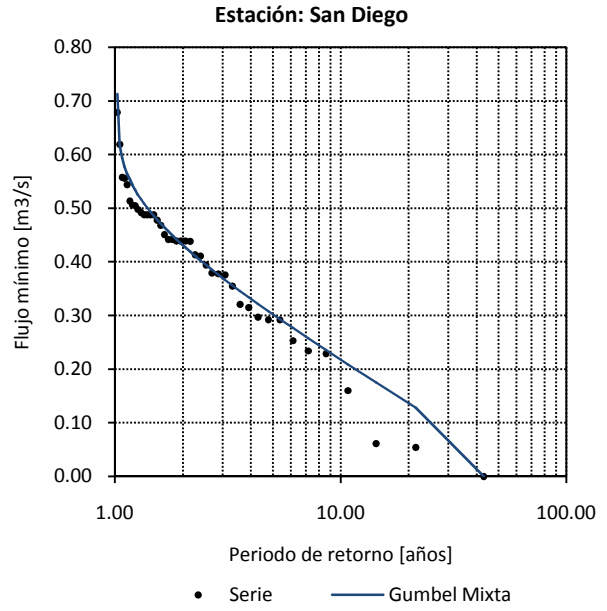
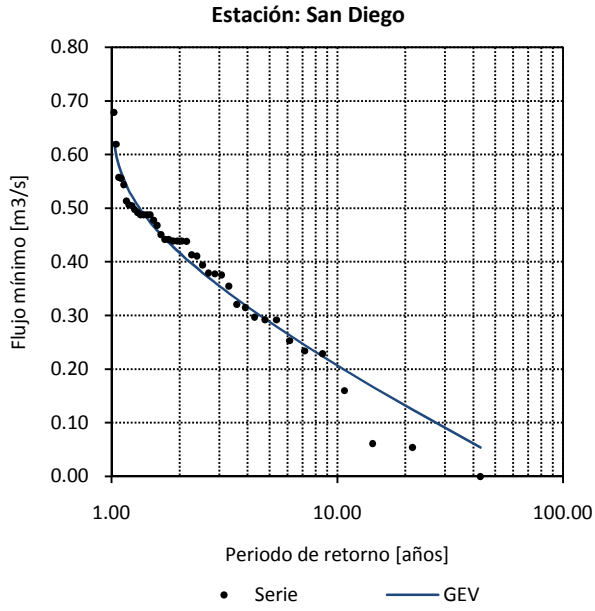


**Figura A8.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Jesús (continuación)

## A.9. Estación San Diego

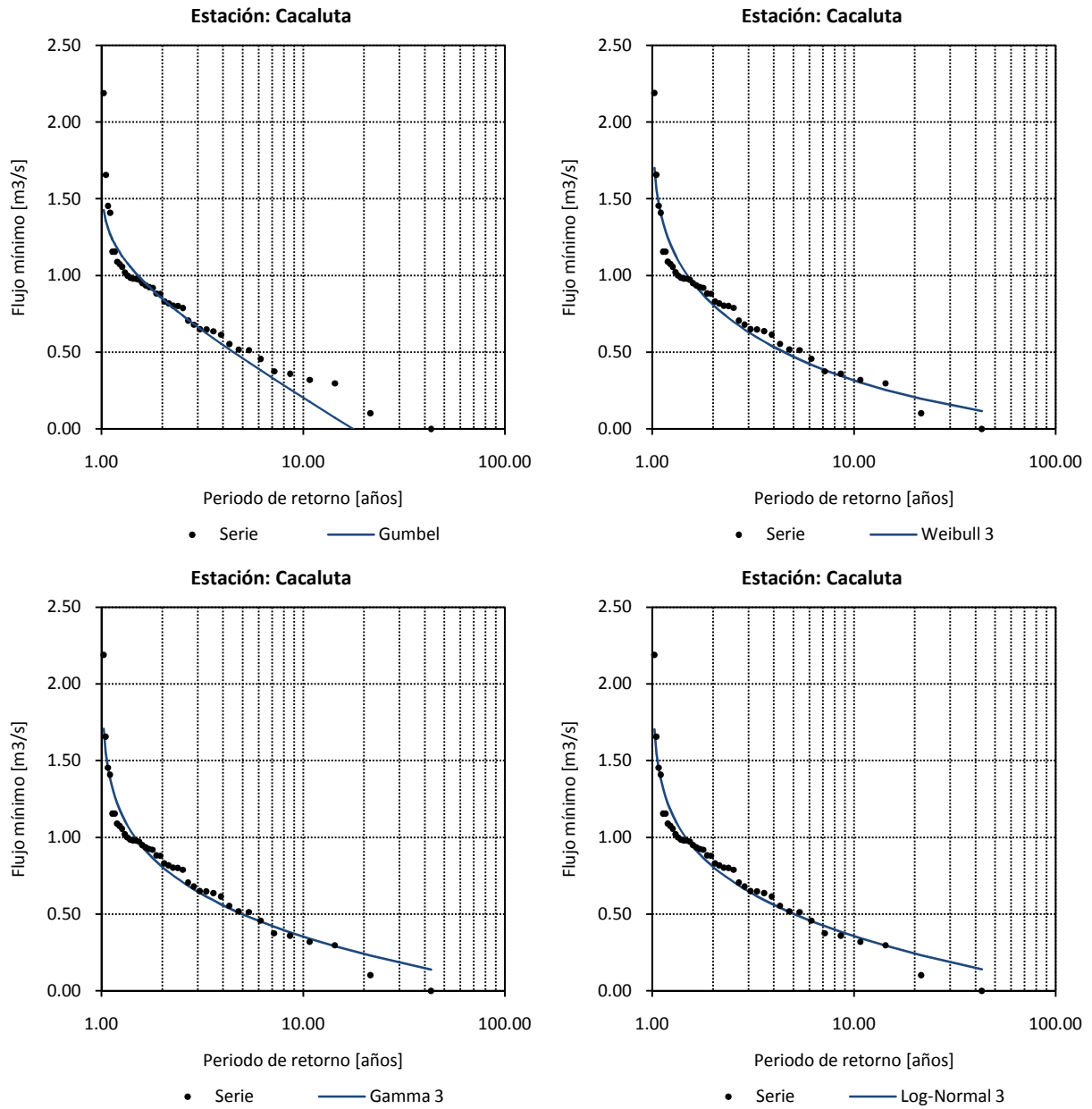


**Figura A9.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación San Diego

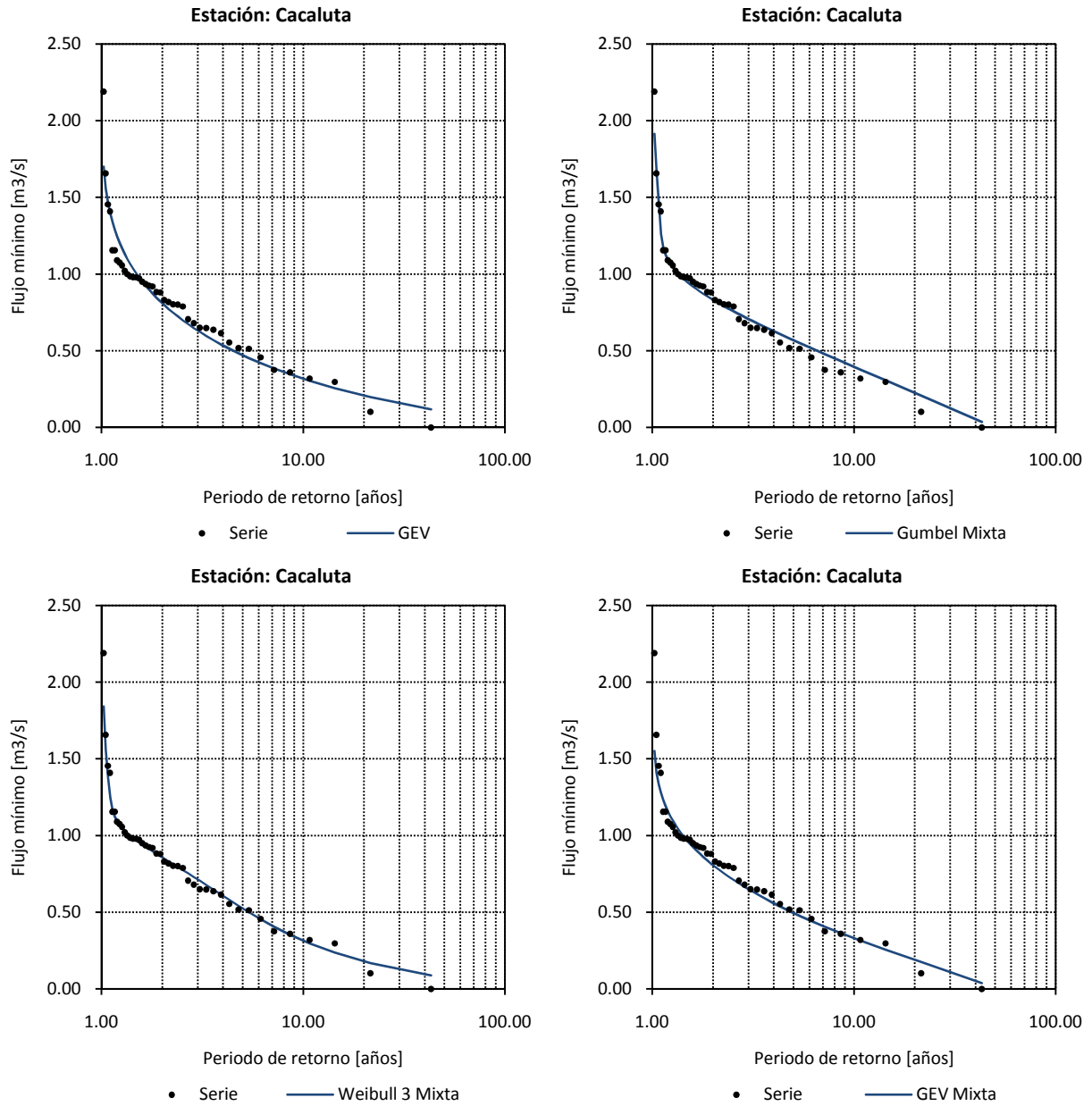


**Figura A9.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  ${}_7Q_{\min}$  registrada en la estación San Diego (continuación)

## A.10. Estación Cacaluta

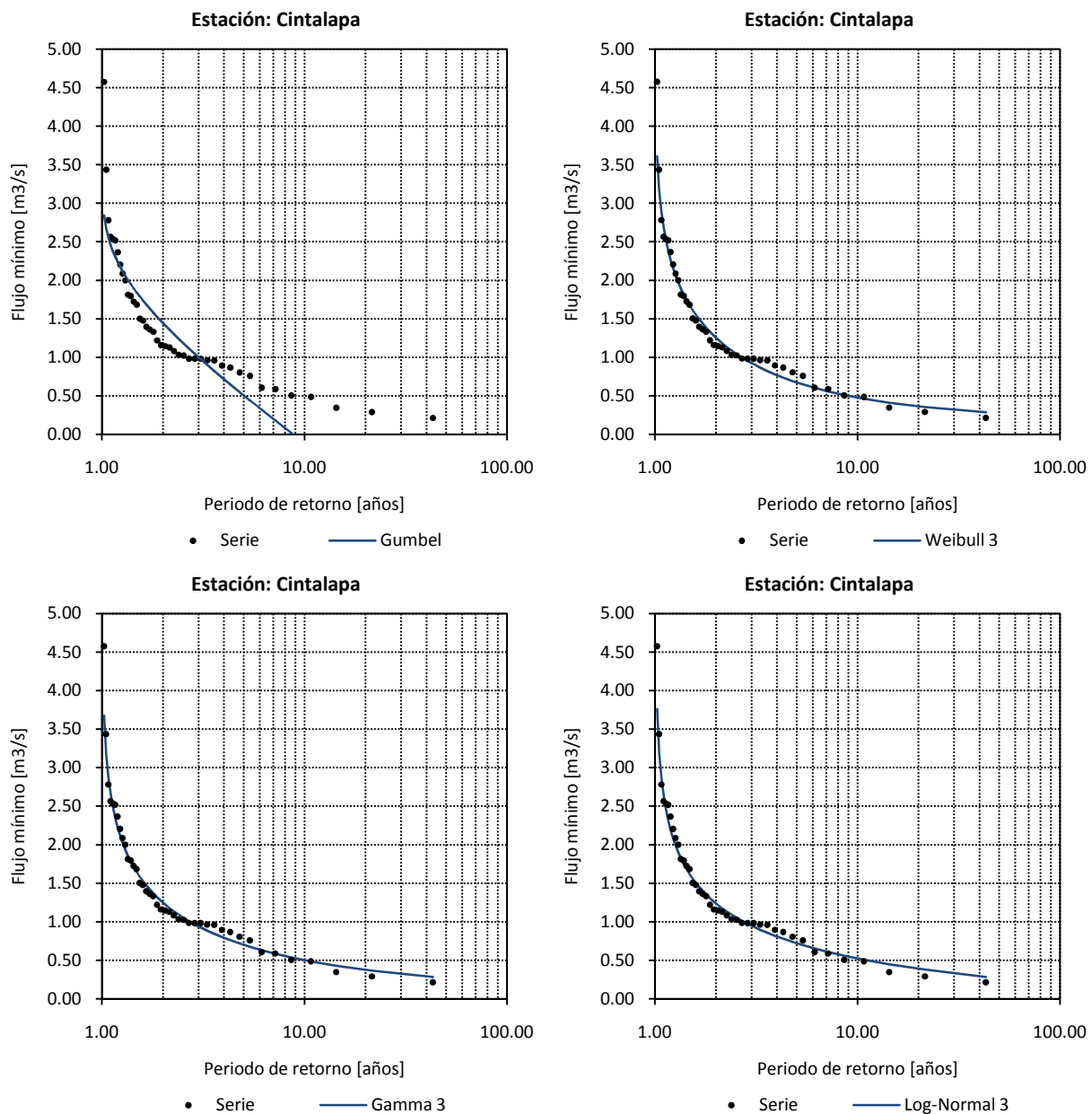


**Figura A10.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Cacaluta

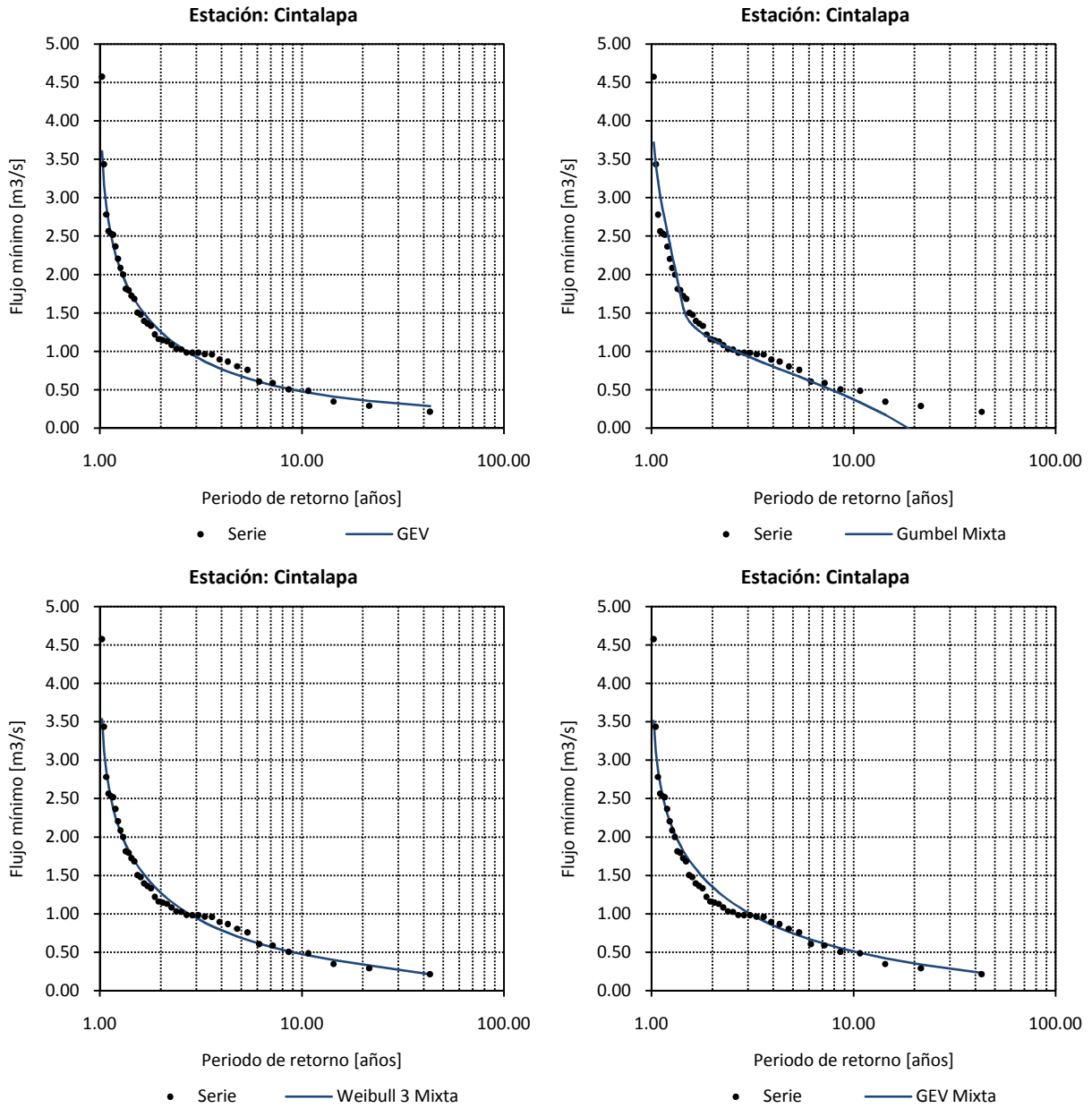


**Figura A10.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Cacaluta (continuación)

### A.11. Estación Cintalapa



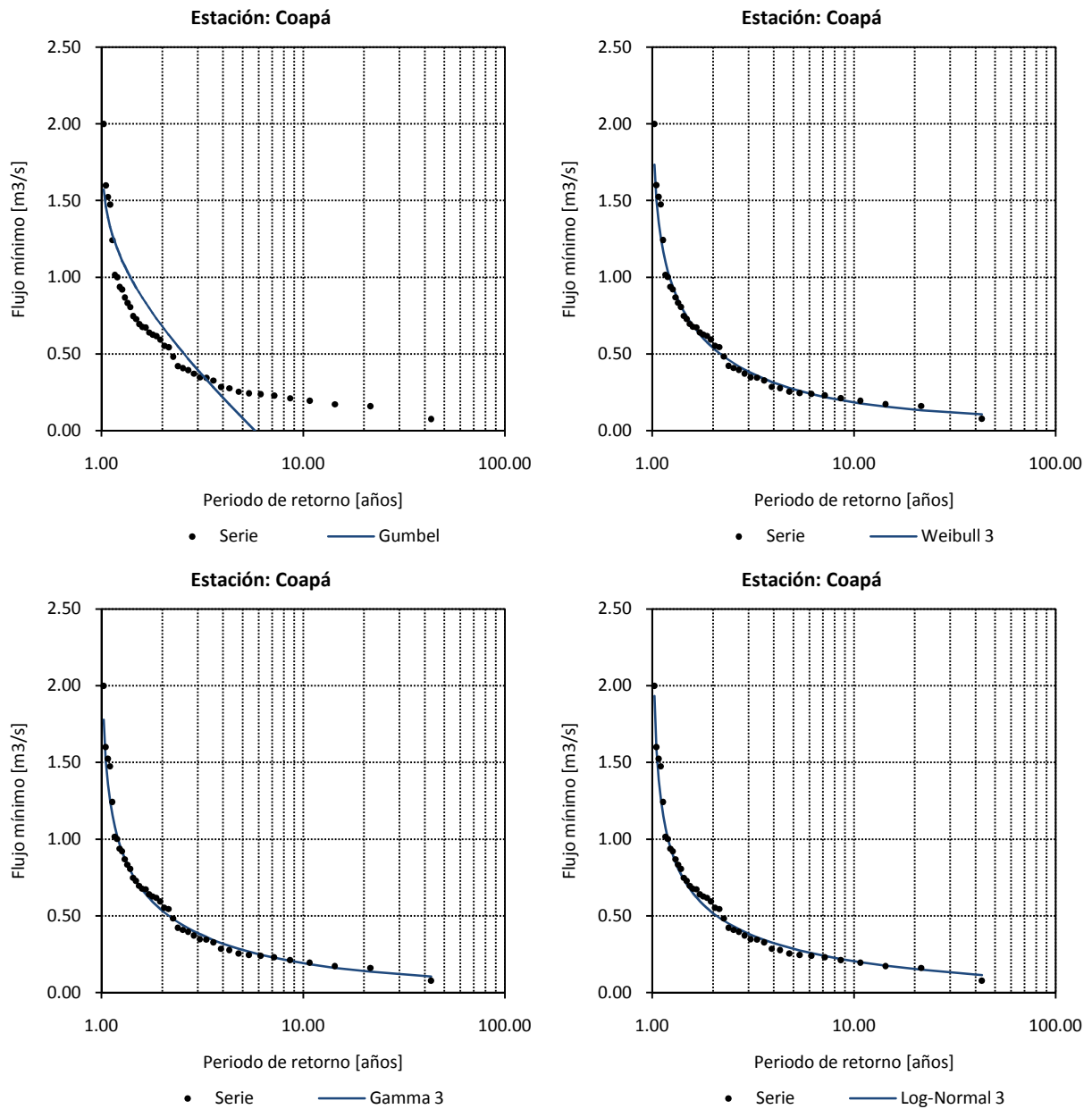
**Figura A11.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Cintalapa



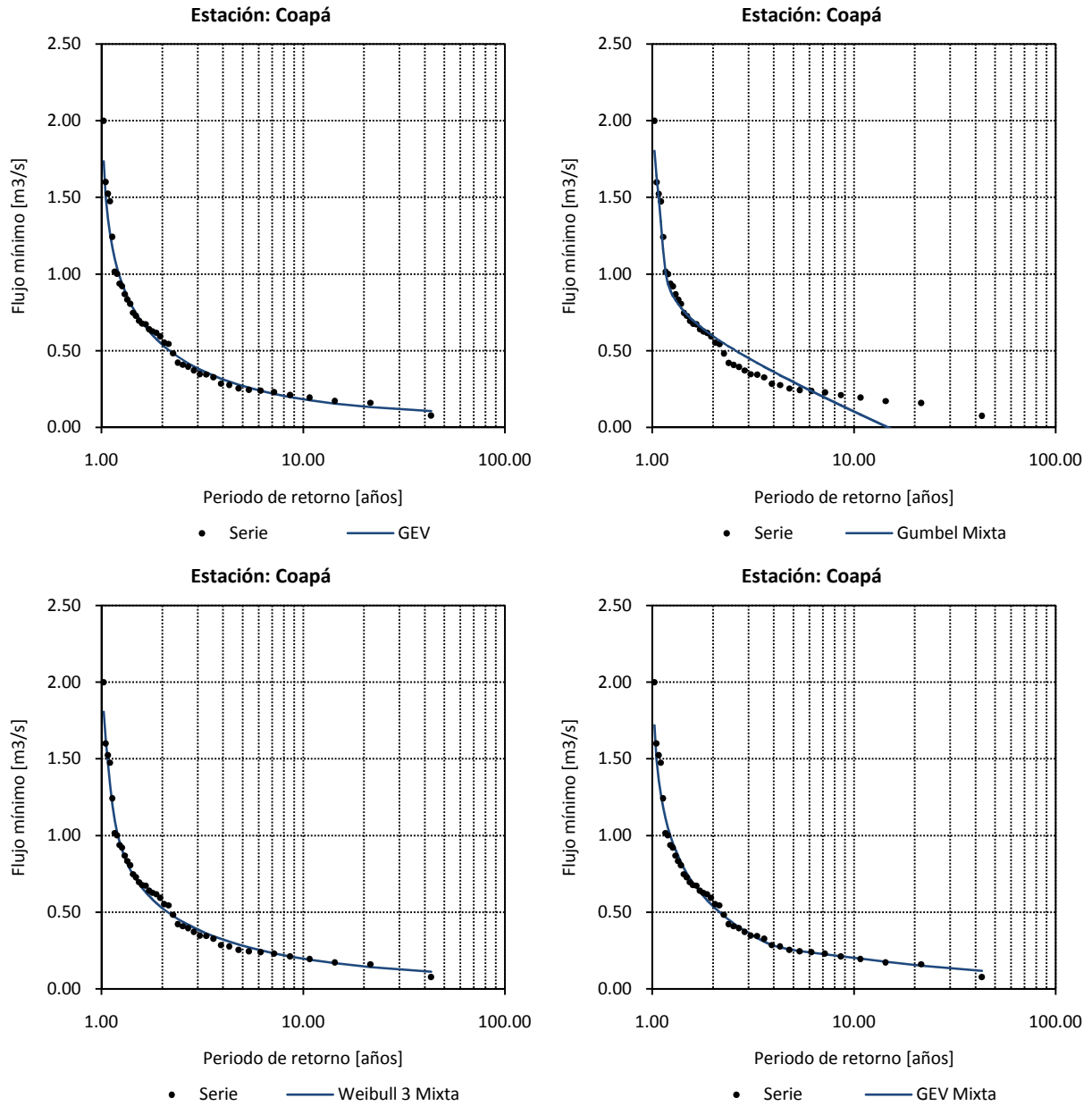
**Figura A11.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Cintalapa (continuación)



## A.12. Estación Coapá

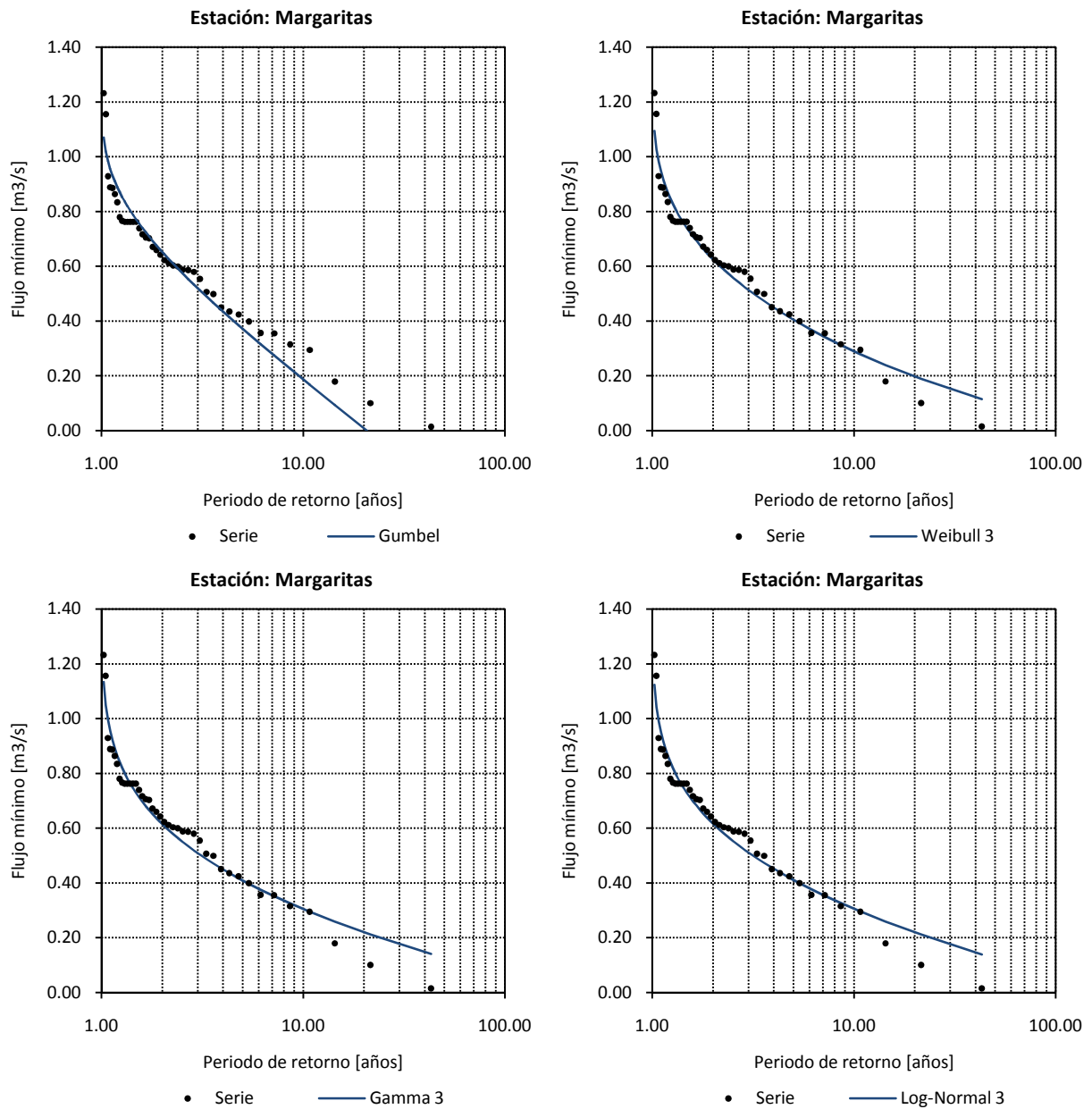


**Figura A12.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Coapa

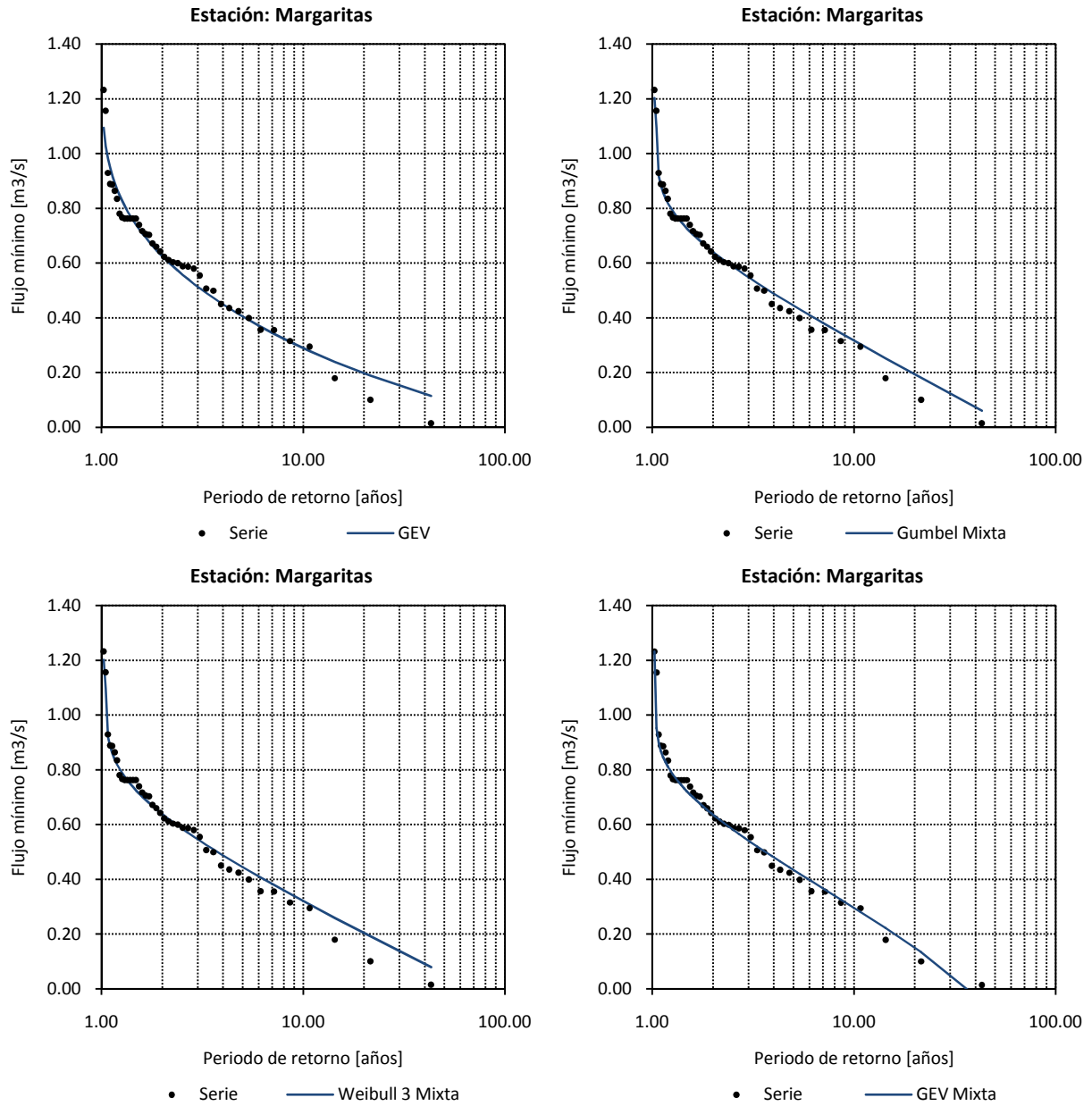


**Figura A12.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Coapa (continuación)

### A.13. Estación Margaritas

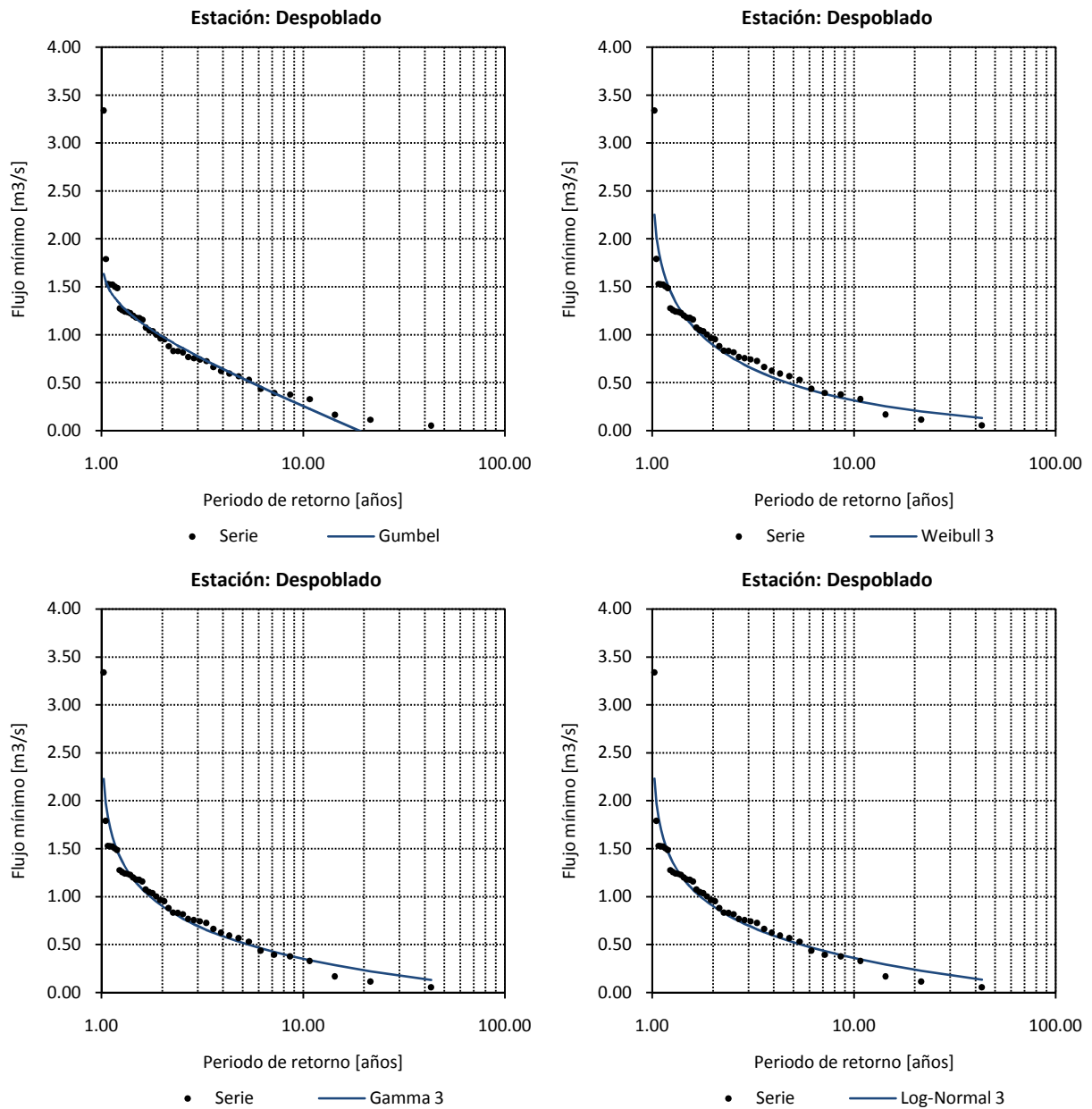


**Figura A13.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  ${}_7Q_{\min}$  registrada en la estación Margaritas

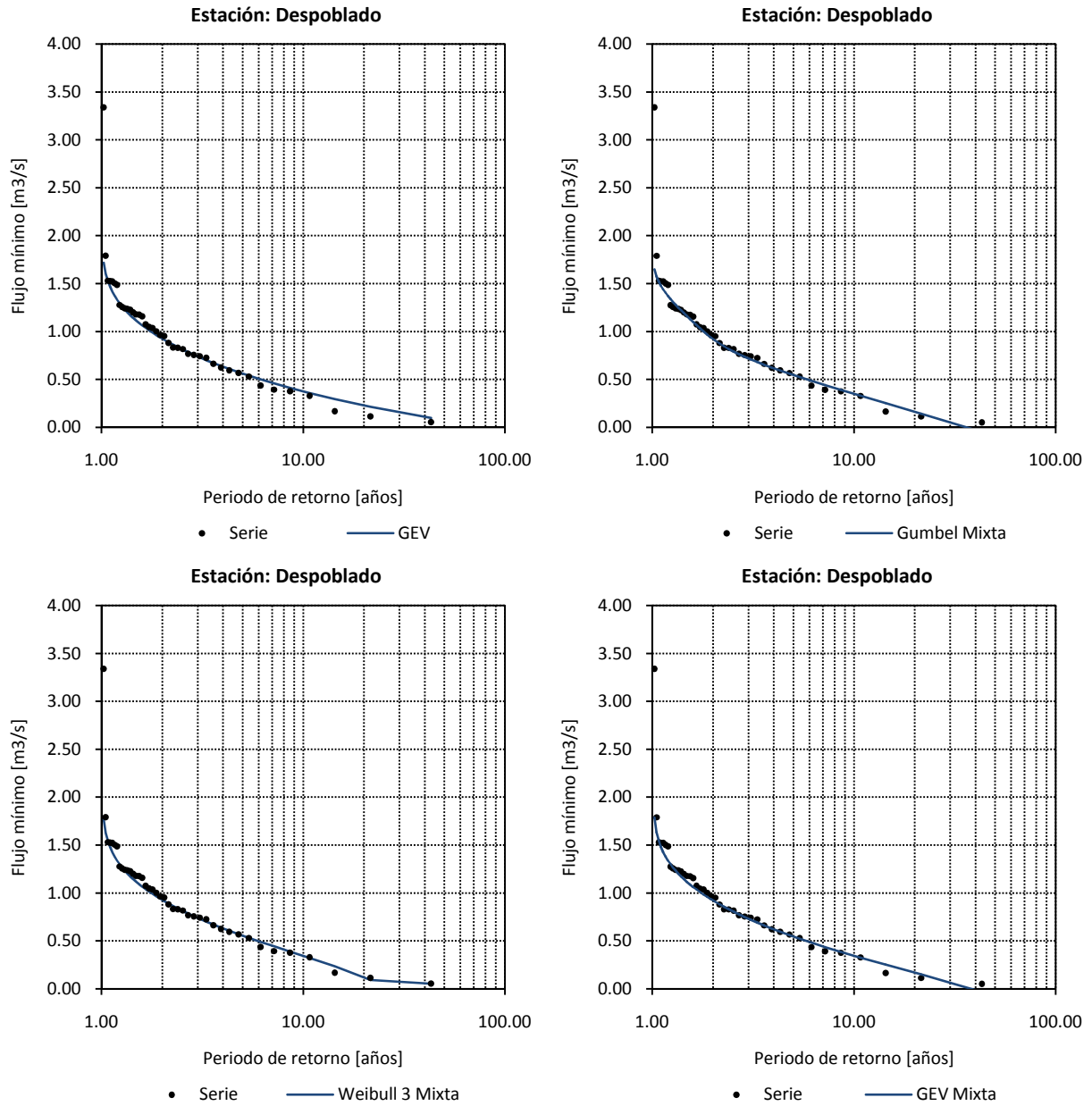


**Figura A13.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Margaritas (continuación)

## A.14. Estación Despoblado

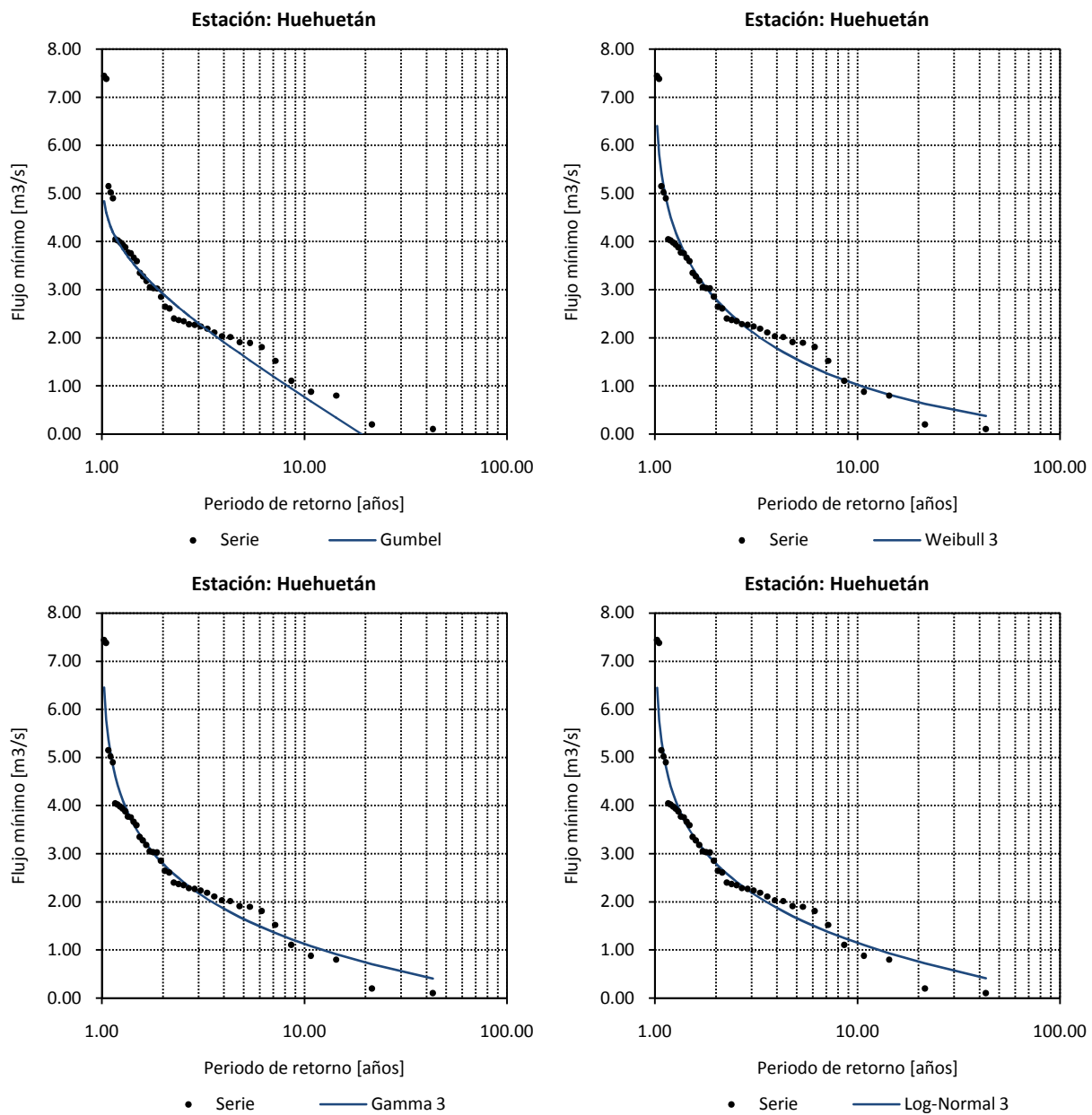


**Figura A14.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Despoblado

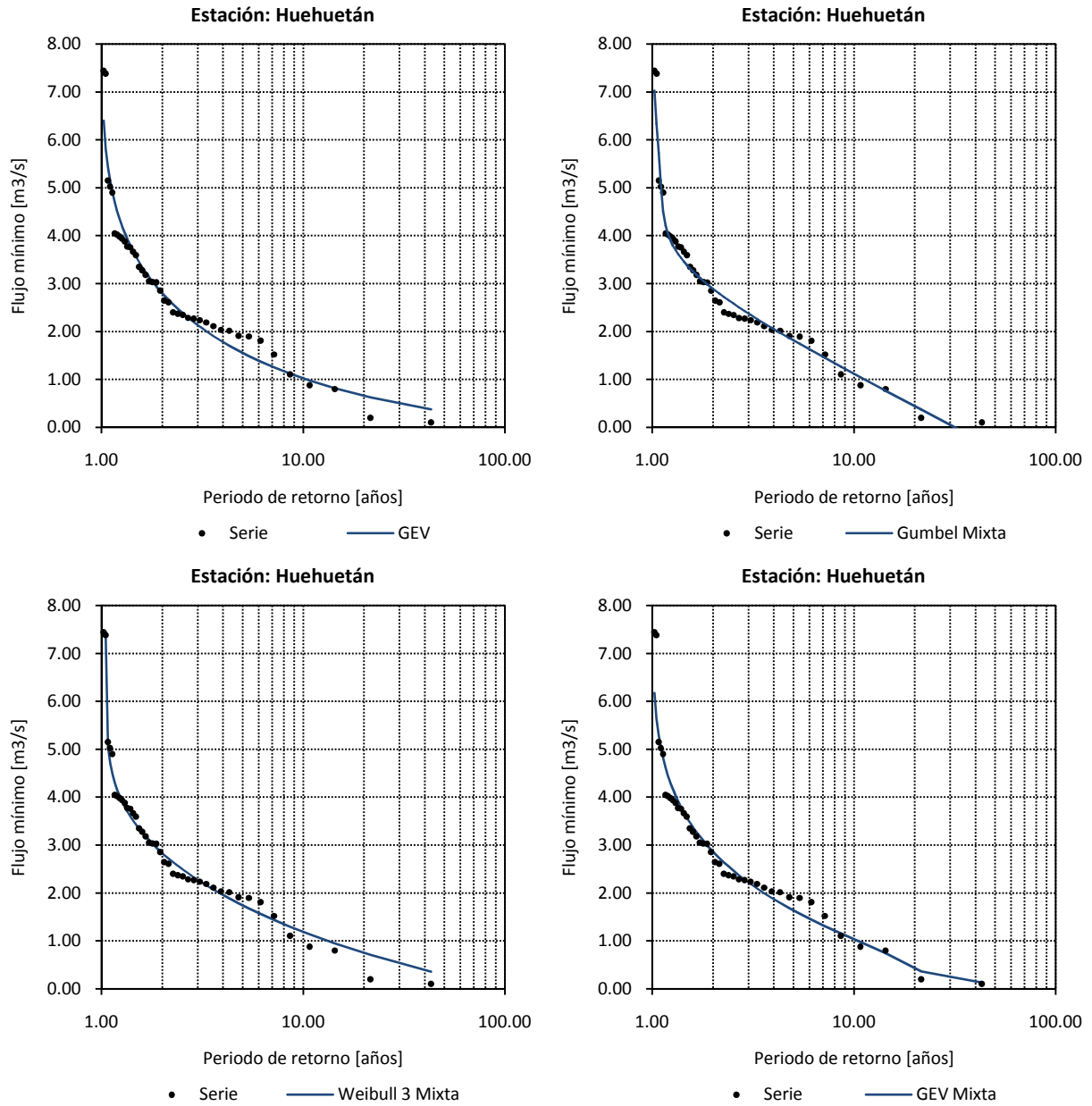


**Figura A14.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Desplado (continuación)

### A.15. Estación Huehuetán



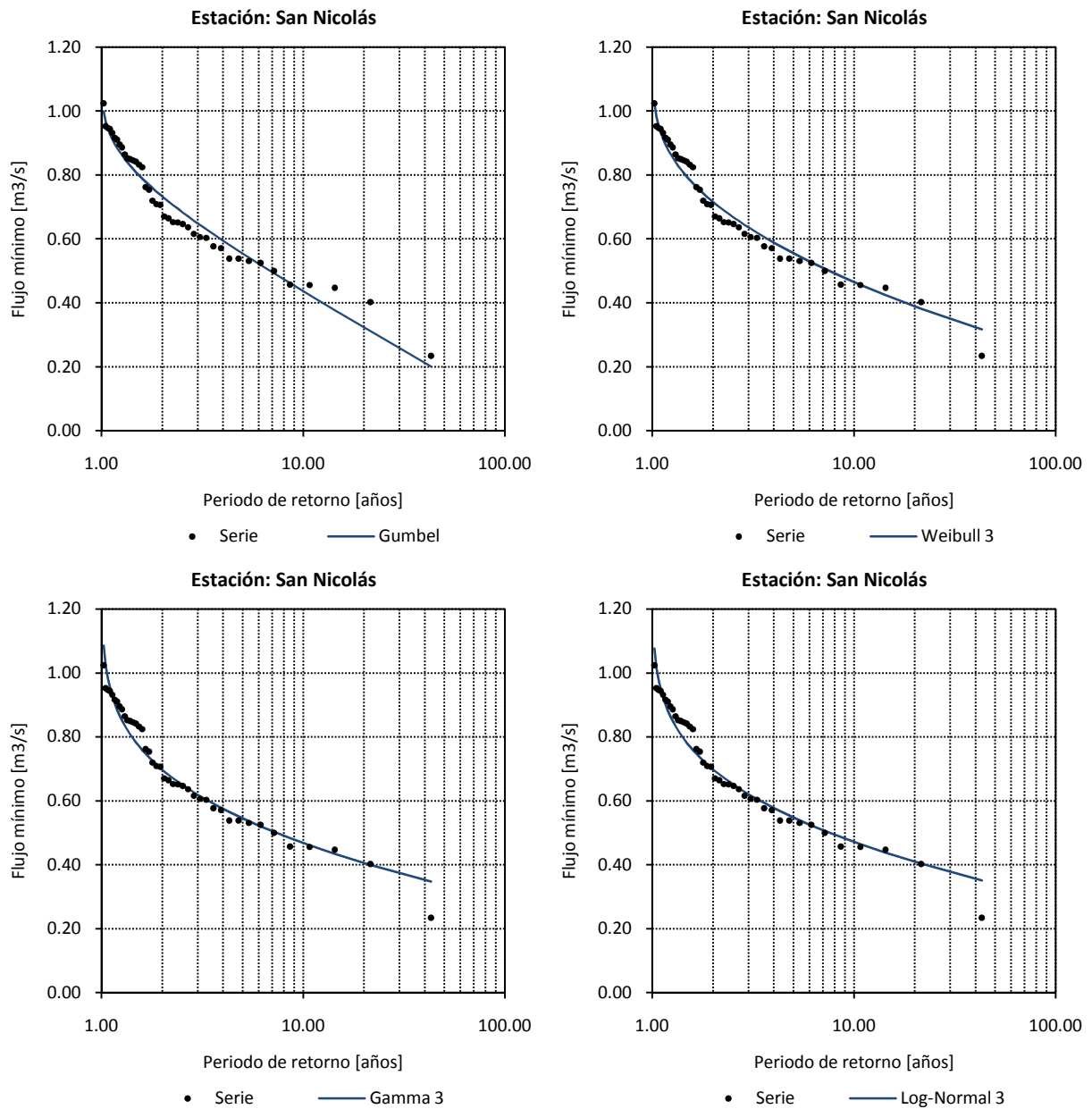
**Figura A15.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Huehuetán



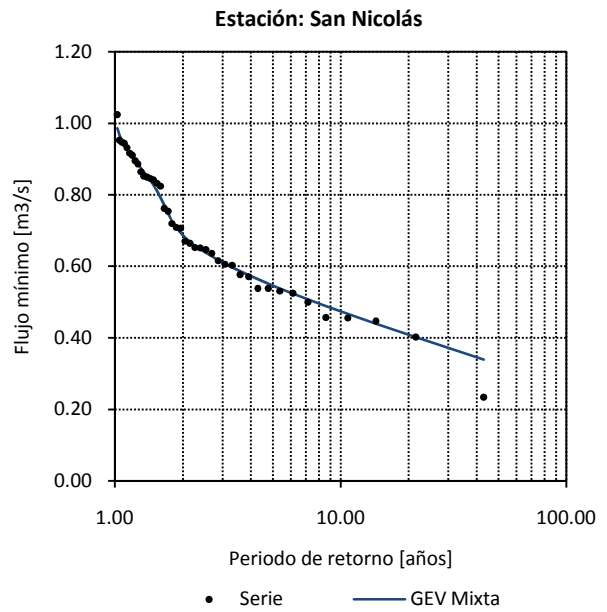
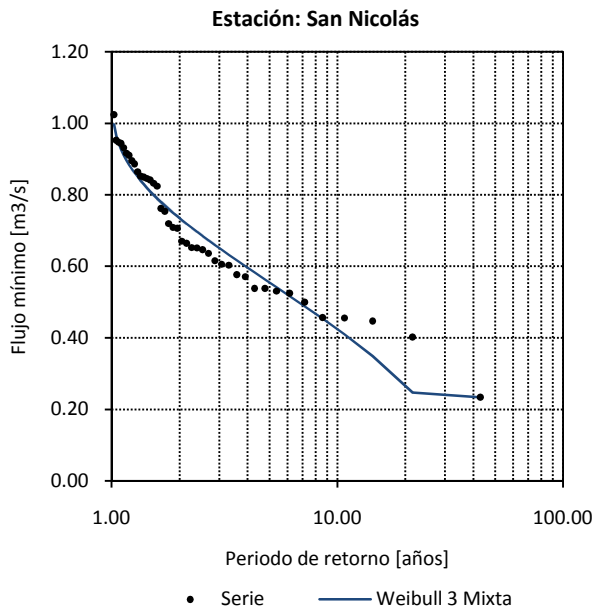
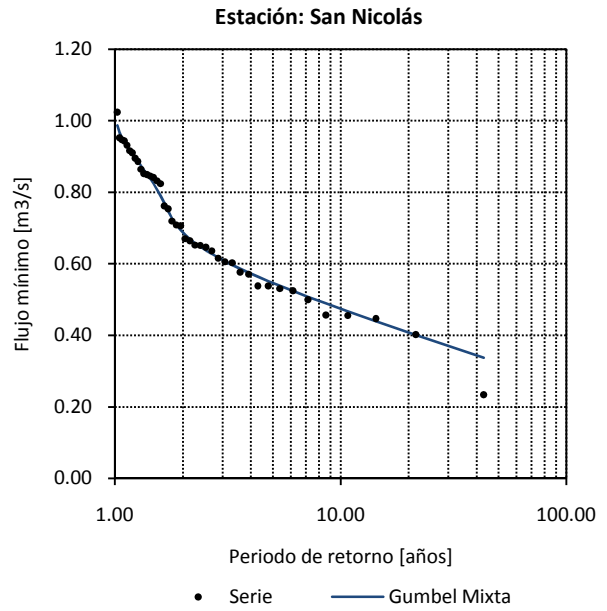
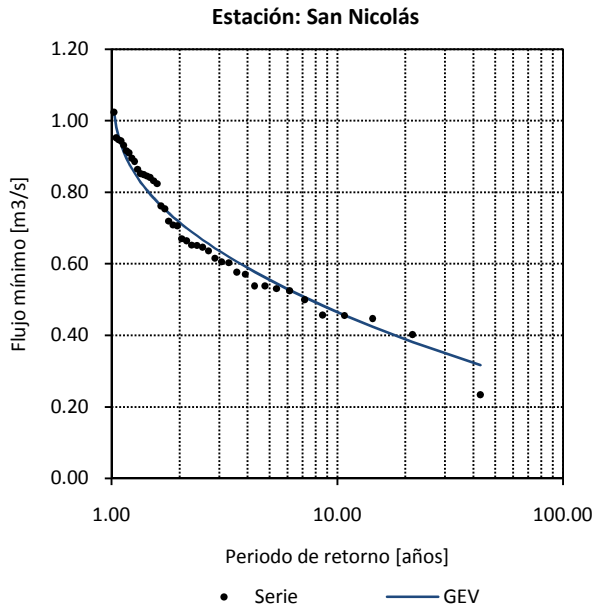
**Figura A15.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Huehuetán (continuación)



## A.16. Estación San Nicolás

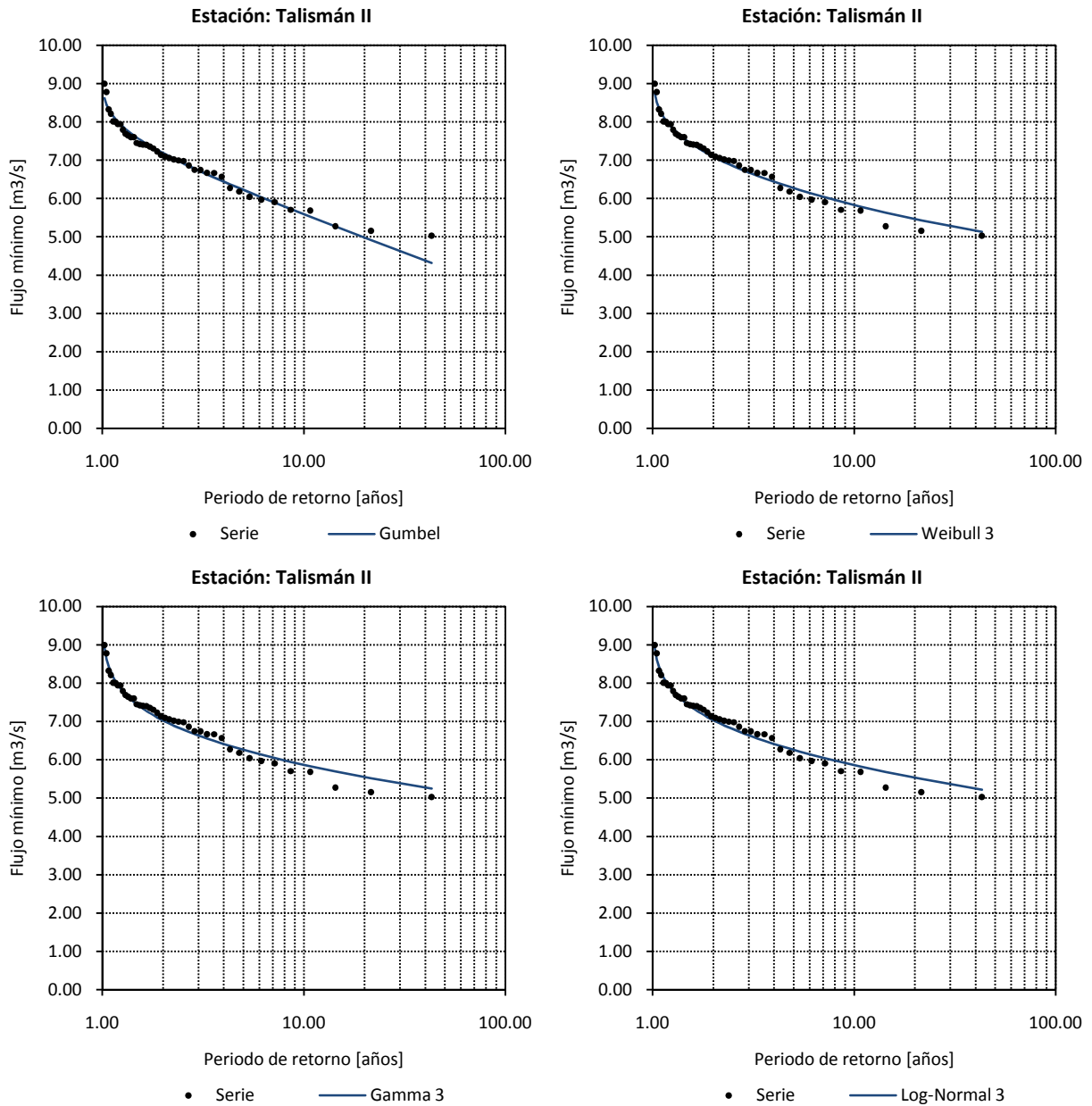


**Figura A16.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación San Nicolás

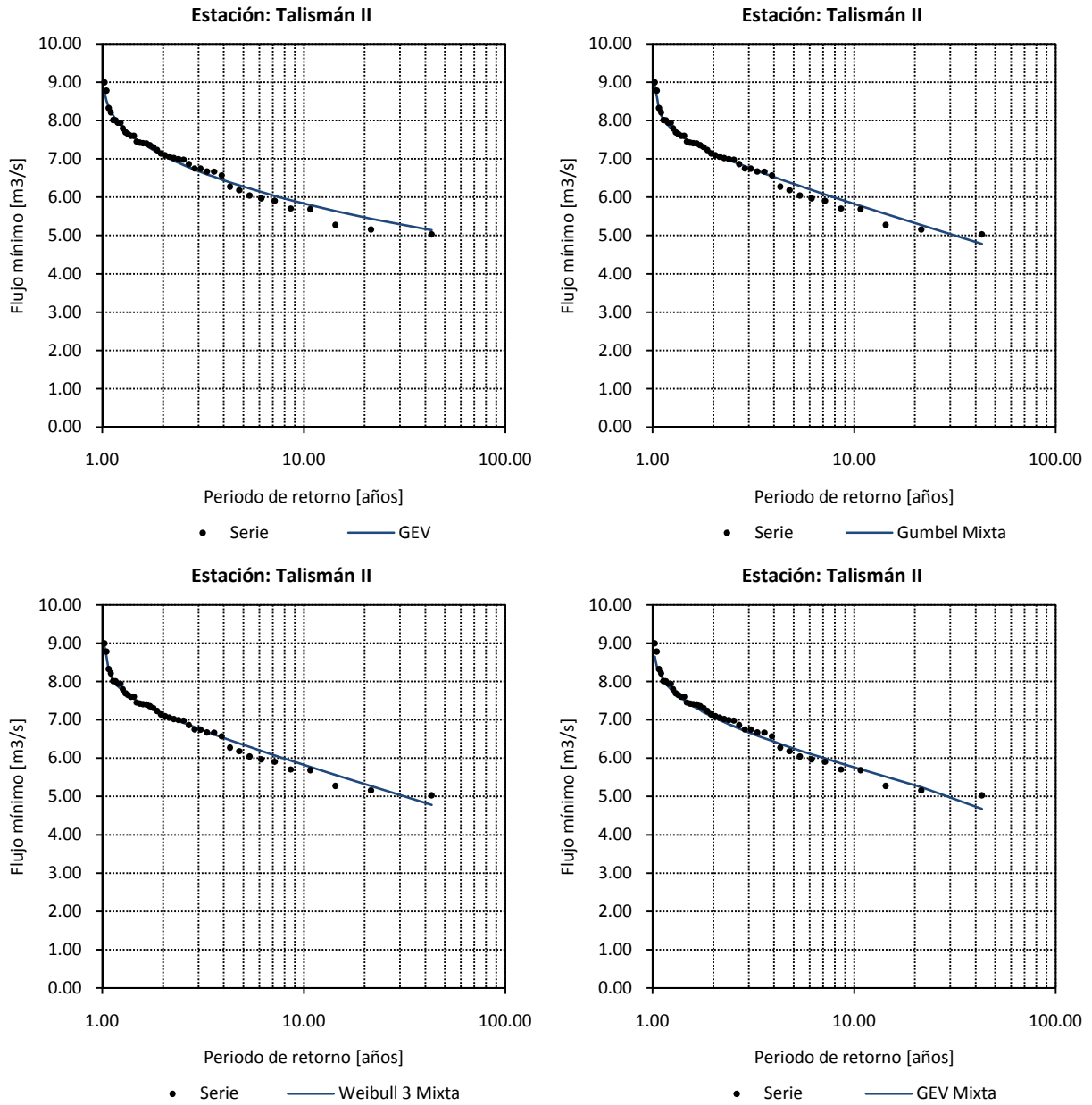


**Figura A16.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  ${}_7Q_{\min}$  registrada en la estación San Nicolás (continuación)

## A.17. Estación Talismán II



**Figura A17.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Talismán II

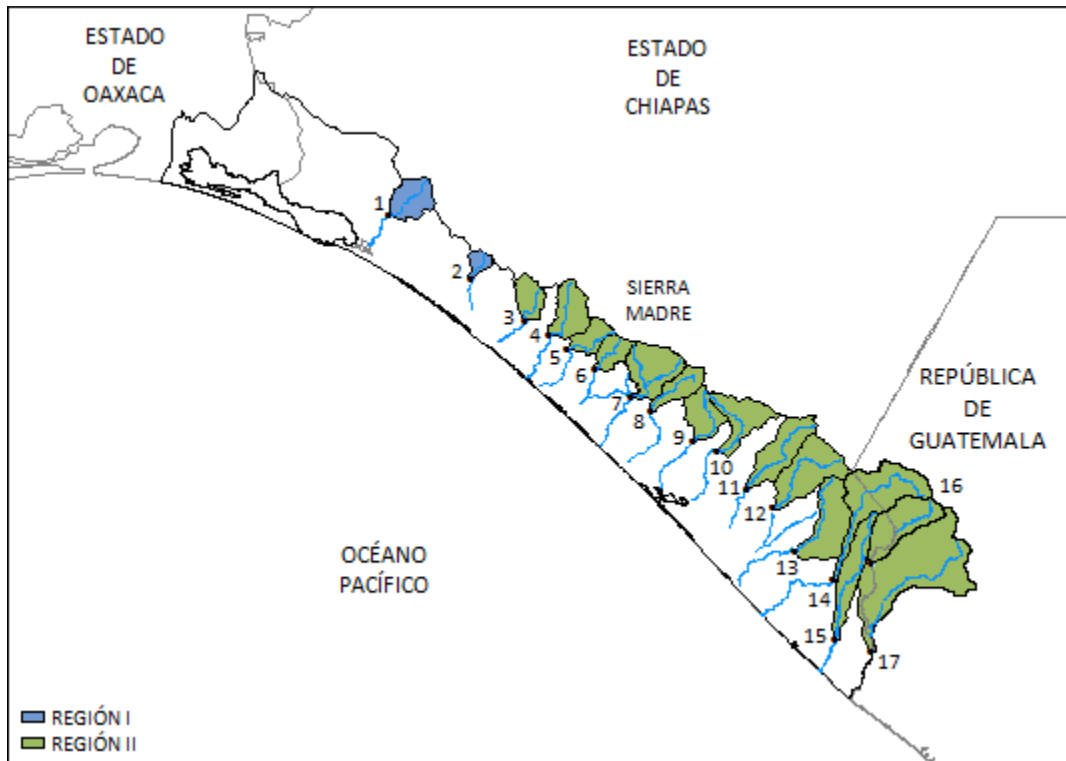


**Figura A17.** Ajuste de las diferentes funciones de distribución a la Serie  $7Q_{\min}$  registrada en la estación Talismán II (continuación)

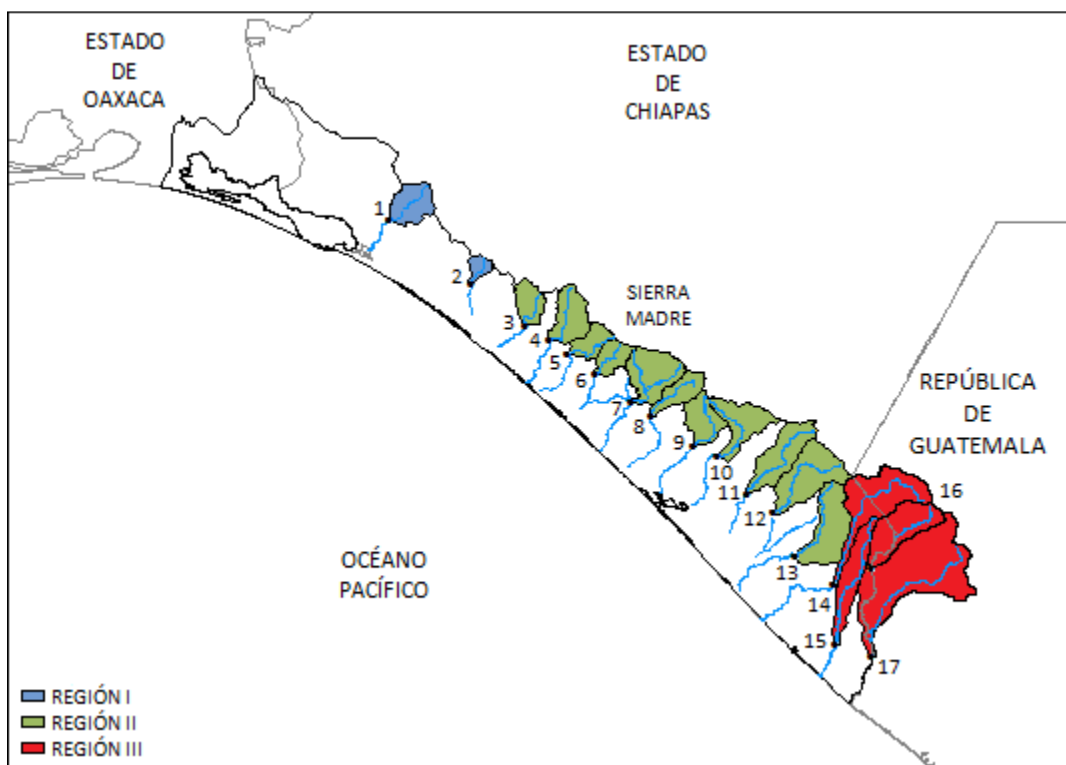
**DISTRIBUCIONES MEZCLADAS EN EL ANÁLISIS DE  
FRECUENCIAS DE FLUJOS MÍNIMOS**

*Anexo B*

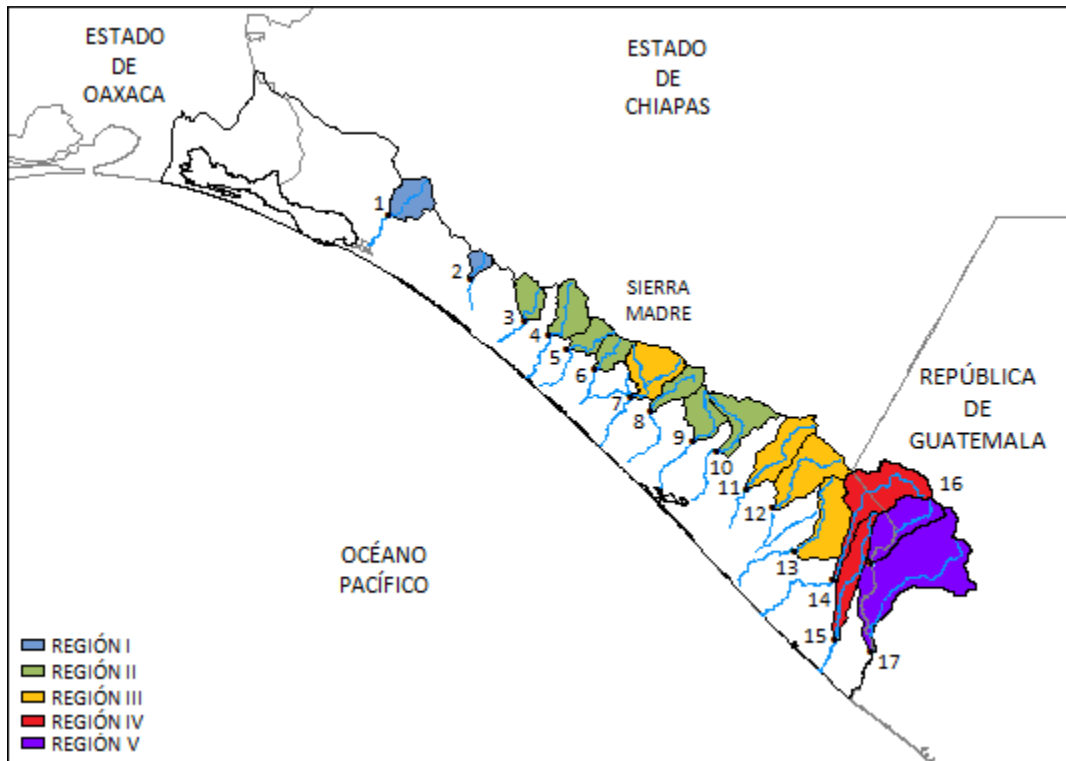
**Delimitación de Regiones Homogéneas en  ${}_7Q_{10}$  por Diferentes  
Métodos**



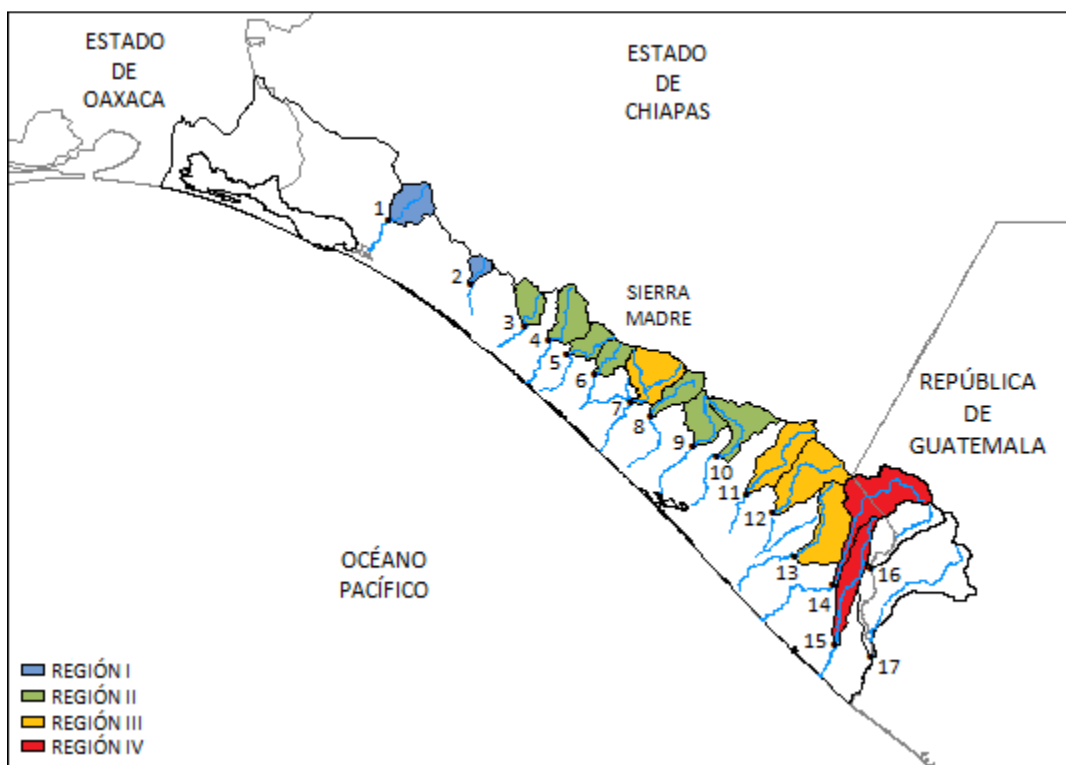
**Figura B.1** Regiones homogéneas en  $\tau_{Q_{10}}$ : método de los momentos-L



**Figura B.2** Regiones homogéneas en  $\tau_{Q_{10}}$ : método de la región de influencia



**Figura B.3** Regiones homogéneas en  $\tau_{Q_{10}}$ : método de las K-Medias



**Figura B.4** Regiones homogéneas en  $\tau_{Q_{10}}$ : método del parámetro de forma