



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**VALIDACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO
ACOPLADO DE FONDO MÓVIL PARA RÍOS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA
P R E S E N T A :

EDGAR MANZANO ZAVALA

TUTOR:

DR. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Ramón Domínguez Mora
Secretario:	M. en I. Víctor Franco
Vocal:	Dr. Moisés Berezowsky Verduzco
1 ^{er} . Suplente:	Dr. Abel Jiménez Castañeda
2 ^{do} . Suplente:	Dr. Jesús Gracia Sánchez

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

DR. MOISES BEREZOWSKY VERDUZCO

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme puesto en este camino.

Al Dr. Moisés Berezowsky Verduzco mi más sincero agradecimiento por los conocimientos, ayuda y tiempo brindados en la elaboración de este trabajo.

Al CONACYT por la beca otorgada.

Al Instituto de Ingeniería.

A mis padres Pedro y Susana, a mis hermanos Omar, Erika y Oscar por los ánimos y compañía que me han brindado durante toda mi vida.

Al M. en I. Víctor Franco por el apoyo recibido a lo largo de la maestría.

Al Ing. Raúl Núñez Martínez por creer en mí y darme la oportunidad de crecer profesionalmente.

A mis profesores del DEPFI.

GRACIAS

INDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	6
2	ECUACIONES FUNDAMENTALES	8
2.1	Ecuación de continuidad del líquido	8
2.2	Ecuación dinámica o del impulso y cantidad de movimiento del líquido	8
2.3	Ecuación de continuidad del sedimento	9
2.4	Escalas en el proceso del fondo móvil.....	10
2.4.1	Escala espacial	10
2.4.2	Modelos de escala larga.....	10
2.4.3	Modelos de escala corta.....	11
2.4.4	Modelos de escala media.....	11
2.4.5	Escala temporal	11
2.5	Modelos de 2 ecuaciones (no acoplados) y modelos de 3 ecuaciones (acoplados).....	12
2.6	Características físicas de los ríos	13
2.7	Condiciones de transporte	14
2.8	Procesos que intervienen en la erosión y depositación	15
2.9	Transporte de sedimentos	16
2.9.1	Método de Engelund.....	17
2.9.2	Método de Ackers y White	17
2.9.3	Método de Brownlie.....	19
2.10	Regímenes de flujo	20
3	ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINÍITAS.....	22
3.1	Tipos de esquemas para la modelación del fondo móvil	22
3.2	Convergencia y estabilidad.....	24
3.3	Esquema de Preissmann	24
3.3.1	Discretización de la ecuación de continuidad del líquido.....	26
3.3.2	Discretización de la ecuación de cantidad de movimiento del líquido	27
3.3.3	Discretización la ecuación de continuidad del sedimento.....	30
4	MÉTODO DE SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS	33
4.1	Condiciones de frontera	33
4.2	Procedimiento de solución	34
4.3	Configuración del modelo de fondo móvil mediante la solución de tres ecuaciones (MFM3E).....	37
5	VALIDACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.....	39
5.1	Prueba 1. Depositación	39
5.2	Prueba 2. Erosión.....	41
5.3	Prueba 3. Depositación	43

5.4	Prueba 4. Erosión.....	44
5.5	Prueba 5. Erosión y depositación	46
6	CONCLUSIONES.....	49
	BIBLIOGRAFÍA.....	50
	Apéndice A.- Derivadas parciales de S_f con respecto a h	52
	Fórmula de Manning.	52
	Fórmula de Chezy	52
	Formulación de Cruickshank-Maza	52
	Formulación de Engelund	53
	Apéndice B.- Resistencia al flujo método de Engelund.....	53
	Apéndice C.- Resistencia al flujo método de Cruickshank-Maza.	64
	Apéndice D.- Transporte de sedimentos método de Engelund	66
	Apéndice E.- Transporte de sedimentos método de Ackers y White	66
	Apéndice F.- Transporte de sedimentos método de Brownlie	67
	Apéndice G.- Estructuración del modelo de fondo móvil para tres ecuaciones	72

1 INTRODUCCIÓN

Las constantes modificaciones que se realizan en los ríos debido a las diversas actividades humanas y a la presencia de obras hidráulicas como puentes, presas, tomas, descargas, etc., así como, desvíos y cortes de los ríos, ocasionan problemas debido a los cambios morfológicos y topográficos de los cauces; en algunos casos, el transporte de sedimentos causa la disminución del volumen útil en el vaso de almacenamiento de una presa, así como la erosión aguas abajo de la cortina, y el azolve de canales de irrigación. Debido a estas modificaciones, se han estudiado y desarrollado varios modelos matemáticos del flujo no permanente con movimiento del fondo de los ríos.

Pueden ser utilizados dos tipos de modelos para el estudio y análisis de los ríos los cuales son: físicos y matemáticos. Los modelos físicos son construidos particularmente para el tratamiento de problemas en tres dimensiones como la erosión local alrededor de pilas de un puente. Sin embargo, cuando se requiere modelar problemas hidráulicos con escalas grandes de tiempo y espacio, el uso de un modelo matemático es preferible, ya que constituyen en muchas ocasiones la mejor alternativa, porque se pueden modificar de manera rápida y eficiente, y con esto se pueden realizar gran número de simulaciones para tomar en cuenta las diferentes alternativas de solución al problema que se esté analizando. Los modelos matemáticos pueden ser divididos de acuerdo al método de solución de las ecuaciones que intervienen en el fenómeno, en analíticos y modelos numéricos.

Los modelos matemáticos disponibles para dar solución al problema del movimiento de fondo en un río están los acoplados y no acoplados, dentro de los cuales el método más utilizado es el de las diferencias finitas implícitas mediante un esquema de Preissmann, el cual se usa para discretizar el sistema de ecuaciones que intervienen en el proceso.

En los modelos acoplados, se resuelven las tres ecuaciones de manera simultánea (ecuación de continuidad del líquido, ecuación del impulso y cantidad de movimiento del líquido, así como la ecuación de continuidad del sedimento), lo que permite observar los cambios que suceden durante los procesos de erosión y deposición en los ríos, con flujo en régimen no permanente.

El objetivo específico de este trabajo es la validación de un modelo matemático acoplado, para observar los procesos de erosión y deposición, con condiciones de flujo estable y no estable, mediante un algoritmo que simula la evolución del nivel de fondo de los ríos.

Se describen en el capítulo dos, las ecuaciones fundamentales que intervienen en el proceso del movimiento del fondo de los ríos, las generalidades de las condiciones de los procesos de erosión y depositación, así como, el desarrollo de fórmulas de transporte de sedimento de diversos autores.

En el tercer capítulo se presenta el esquema numérico de Preissmann para la resolución del sistema de tres ecuaciones.

El capítulo cuarto trata sobre la formación y solución del sistema acoplado de tres ecuaciones discretizada.

En el capítulo quinto, se describe el proceso de validación del modelo matemático, y se discuten los casos analizados.

2 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Para modelar numéricamente el movimiento unidimensional del fondo de un río, se requieren tres ecuaciones diferenciales parciales que son la de continuidad de líquido, la de cantidad de movimiento del líquido y la de continuidad del sedimento; además, se necesita una ecuación de transporte de sedimentos y otra para la resistencia al flujo. En tramos más o menos cortos de un río, o cuando las modificaciones bruscas en su régimen de flujo pueden causar un cambio rápido en los niveles del fondo y en la capacidad de transporte, se recomienda emplear un modelo acoplado (se resuelven la tres ecuaciones de manera simultánea). Sin embargo, de acuerdo con el problema que se desee resolver se pueden hacer algunas simplificaciones que permitan eliminar algunos términos en las ecuaciones, y por tanto que la forma de resolverlas sea menos complicada, como en los modelos de dos ecuaciones (modelo no acoplado).

Las tres ecuaciones que describen el movimiento del flujo y la evolución del fondo (Berezowsky y Lara,1986) son:

2.1 Ecuación de continuidad del líquido

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{T} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad 2.1$$

donde Q es el gasto, en m^3/s ; h es el tirante, en m ; T es el ancho de la superficie libre del agua, en m ; x la distancia, en m ; y t el tiempo en s .

2.2 Ecuación dinámica o del impulso y cantidad de movimiento del líquido

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_o) = 0 \quad 2.2$$

donde S_f es la pendiente de fricción; S_o la pendiente del fondo; y g la aceleración de la gravedad, en m/s^2 .

2.3 Ecuación de continuidad del sedimento

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{(1 - \varepsilon) B_s} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad 2.3$$

donde Z es la cota del fondo, en m ; B_s el ancho del fondo para el cual hay transporte de sedimento, en m ; ε la porosidad del sedimento del fondo; y G el gasto sólido total del fondo (incluido el material del fondo en suspensión).

El gasto sólido es función del tirante, del gasto, de la resistencia al flujo, de las características del sedimento, esto es

$$G = f(h, Q, S_f, D, \dots) \quad 2.4$$

La pendiente de fricción, S_f , es a su vez función de las características del flujo y del sedimento

$$S_f = f(h, Q, D, \dots) \quad 2.5$$

donde D es un tamaño característico de la granulometría del material del cauce.

Para la deducción de las ecuaciones anteriores se consideran válidas las hipótesis de Saint-Venant; se considera que el flujo es unidimensional, (esto es, que la velocidad es uniforme en toda la sección transversal); la curvatura de las líneas de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales son despreciables, por tanto, la distribución de presiones es hidrostática; los efectos de fricción en las paredes, así como la turbulencia pueden cuantificarse con leyes de resistencia al flujo usadas en flujo uniforme; también se considera que la pendiente media del fondo, en general, es pequeña, de tal manera que el coseno del ángulo que forma con la horizontal puede tomarse igual a 1. Dada la lentitud con la que evolucionan las formas de las secciones, los efectos debidos a los meandros, corrientes secundarias, etc, se consideran despreciables. El material que constituye el fondo del cauce se caracteriza con una distribución granulométrica supuesta constante a lo largo del cauce y en la sección transversal del río, y se considera que las secciones transversales se desplazan sobre una vertical sin que varíe su forma.

2.4 Escalas en el proceso del fondo móvil

En los problemas de fondo móvil, las escalas más representativas son la longitud y el tiempo, a cuales definen las escalas espaciales y temporales que acotan la solución del problema. Estos casos han sido estudiados por Tarela y Menéndez (1998).

Si se tuvieran variaciones rápidas e importante de gasto líquido y/o nivel, y fuera necesario observar su efecto en el fondo, se requiere un modelo como el aquí desarrollado, en el cual se resuelven las tres ecuaciones de manera simultánea. Cuando la escala de tiempos del movimiento de disturbios en el fondo es mucho menor que la de disturbios en la superficie libre, se emplea el concepto físico de escala morfológica, en el que se acepta que el cauce ajusta su sección (ancho y pendiente) en el largo plazo (del orden de años), mientras que el tirante y gasto varían de instante a instante.

2.4.1 Escala espacial

Sea L_e la escala espacial o escala de estudio, definida por la extensión del fenómeno de interés; la escala de adaptación hidrodinámica, L_b , equivale a la distancia sobre la cual las condiciones hidrodinámicas regresan al estado de equilibrio local luego de una perturbación, y la escala de adaptación sedimentológica, L_s , representa la distancia sobre la cual la carga de sedimentos se readapta al equilibrio después de un cambio abrupto. Los modelos de fondo móvil se pueden clasificar como de escala larga, corta y media.

2.4.2 Modelos de escala larga

En estos casos, se supone que la hidrodinámica y el transporte de sedimentos se adaptan continuamente a las condiciones locales, por lo que:

$$L_e \gg L_b, L_s$$

y

$$\Delta r \geq L_b$$

Δr es el mínimo tamaño de celda dentro de la malla de cálculo del modelo hidrodinámico.

Si h es la profundidad característica en el sistema y b el ancho medio del cauce, la longitud de adaptación hidrodinámica se puede estimar en el rango $20b \leq L_b \leq 40b$ (Tarela y Menéndez, 1998); por tanto, las condiciones se satisfacen para:

$$\Delta r \geq 20b \leq L_b \leq 40b$$

En el caso del transporte de sedimentos, la mínima escala de la celda debe cumplir

$$\Delta r \geq L_s, \text{ con } L_s \approx 10b \text{ (Van Rijn, 1984)}$$

2.4.3 Modelos de escala corta

En los modelos de escala corta o locales, se supone que el movimiento del agua y sedimentos tienen la misma escala de tiempo, es decir, que las partículas se mueven casi con la misma velocidad que el flujo; por tanto, las variaciones en el fondo son más rápidas.

En estos modelos, se cumple que:

$$L_e \approx L_b = L_s$$

2.4.4 Modelos de escala media

Estos modelos no tienen un rango bien definido; puede decirse solamente que se encuentran entre los modelos de escala larga y corta.

2.4.5 Escala temporal

La discretización temporal durante el cálculo numérico está restringida por el propio proceso. Un criterio para determinar el paso temporal surge de considerar que, durante este lapso, la variación de la altura del lecho es pequeña frente a la profundidad local (o sea las corrientes medias permanecen casi inalteradas).

2.5 Modelos de 2 ecuaciones (no acoplados) y modelos de 3 ecuaciones (acoplados)

La hipótesis fundamental de la mayoría de los modelos no acoplados es considerar el fondo fijo durante la solución de las ecuaciones hidrodinámicas, y el flujo con gasto constante durante el cálculo del fondo móvil. Es decir, se determinan las características hidráulicas para cada incremento de tiempo, se desprecia el cambio en la geometría debido a los efectos locales de erosión o depósito y, finalmente, se obtienen las variaciones globales del fondo para escalas de tiempo grandes. Muchos de los modelos desarrollados son de este tipo, como por ejemplo, el HEC-6 (Thomas, 1982), hoy HEC-RAS.

En gran parte de casos prácticos, el uso de sistemas de ecuaciones no acoplados se justifica, pues la respuesta dinámica del fondo es mucho más lenta que la del líquido; dicho de otra manera, en tramos largos, el fondo se ajusta a caudales medios mensuales y casi no le afectan las variaciones diarias u horarias en el flujo; además, el movimiento del fondo es lento y no altera instantáneamente los perfiles hidráulicos.

La solución del sistema de dos ecuaciones (no acoplados), arroja resultados solo del cambio de nivel en la superficie libre del agua, mientras que la solución del sistema de tres ecuaciones (modelo acoplado), simula el proceso de la variación de los niveles del fondo y de la superficie libre del agua.

Si todas las variables dependen del cambio en el tiempo puede ser necesario utilizar un modelo acoplado. Algunas veces el estudio se centra en las variaciones durante un tiempo considerable, pero los cambios en el río ocurren durante un tiempo muy corto y con un periodo de gran cantidad de lluvia cada año. En este caso el uso de sistemas de ecuaciones acoplados puede ser ventajoso

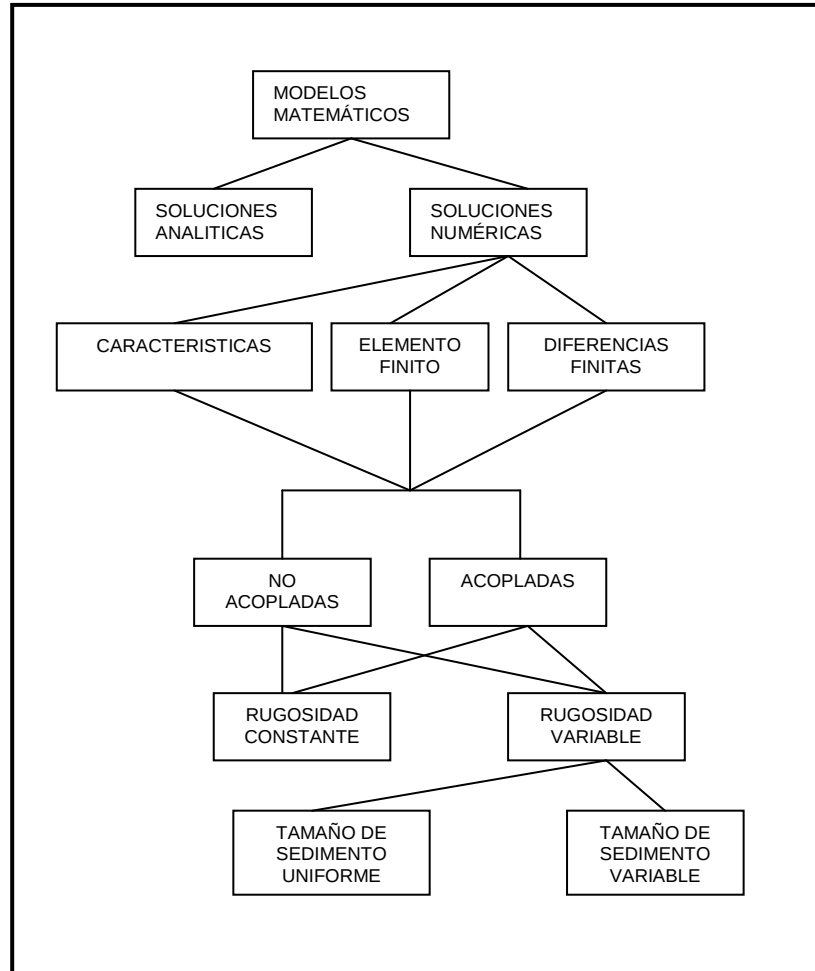


Figura 2.1 Diagrama de modelos matemáticos para la modelación de ríos

2.6 Características físicas de los ríos

La morfología de los cauces cambia con el tiempo y existen factores que afectan directa o indirectamente a la configuración de un río, los más importantes son el gasto, pendiente longitudinal, transporte de sedimentos, resistencia de las márgenes y del fondo, vegetación, temperatura, geología y actividades humanas.

Cada tramo de un río tiene diferentes alineamientos, formas de sección transversal de cauce, materiales en el fondo, márgenes y pendiente a lo largo del cual escurre.

En los ríos se distinguen tres condiciones de estabilidad: estática, dinámica y morfológica.

Estática. Un cauce tiene estabilidad estática, cuando la corriente es capaz de arrastrar sedimentos, pero no puede mover y arrastrar las partículas o los elementos de las orillas. Como ejemplo se tienen los tramos de ríos en que las márgenes son rocosas o tienen muy alta cohesión.

Dinámica. Un cauce tiene estabilidad dinámica cuando las variaciones de la corriente, los materiales del fondo y de las orillas, y los sedimentos transportados han formado una pendiente y una sección que no cambian apreciablemente año con año. En esta condición, el río sufre desplazamientos laterales continuos en las curvas, con erosiones en las márgenes exteriores y depósito de sedimento en las interiores. Todos los gastos, antes de producirse un desbordamiento, escurren por un único cauce que no tiene islas o bifurcaciones. Como ejemplo se tienen los ríos de planicie formados por un único cauce.

Morfológica. Este grado de estabilidad es el concepto más amplio; es decir, en cualquier cauce natural, la pendiente de un tramo cualquiera, el ancho y el tirante de su sección transversal, así como el número de brazos en que se divida el cauce, dependen del gasto líquido que escurre anualmente y de su distribución, de las características físicas de los materiales que forman el fondo y orillas, y de la calidad y cantidad de sedimento que es transportado; éste llega al tramo, tanto procedente de aguas arriba como de aportaciones laterales.

2.7 Condiciones de transporte

En términos generales se considera que los tramos de los ríos pueden estar sujetos a un proceso de erosión, sedimentación o en equilibrio. Una clasificación importante de los ríos relacionada con estos aspectos, es la propuesta por Schumm (1963), la cual está basada en la carga de sedimento, pues considera que dicho factor afecta significativamente la estabilidad del cauce, su forma y sinuosidad. Establece tres tipos principales de cauces: estable, erosionable y depositante; propone subclases dependiendo del modo de transporte del sedimento, ya sea en la capa de fondo, mixto y en suspensión. En la Tabla 2.1 se presenta dicha clasificación.

Tabla 2.1 Clasificación de los ríos según Schumm(1963)

Forma del transporte de sedimento	M%	Estable	Con deposito	Con erosión
En suspensión del 85 al 100%	100	$F < 7$ $P > 2.1$ S baja	El principal depósito ocurre en las márgenes que origina el estrechamiento del cauce. El depósito en el fondo es menor.	Predomina la erosión del fondo. Poca ampliación de márgenes.
En suspensión del 65 al 85% y en el fondo del 15 al 35%	30	$7 < F < 25$	Es importante el depósito en las márgenes pero también el del fondo.	Es importante la erosión del fondo y la ampliación de las márgenes.
De fondo del 35 al 70%	<5	$F > 25$ $1 < P < 1.5$ S Alta	Depósito en el fondo y formación de islas.	La erosión del fondo es baja, pero la ampliación del cauce es importante.

$F = B/d$, B ancho de la superficie libre, d tirante de la corriente

P=Sinuosidad

S=Pendiente longitudinal del fondo

2.8 Procesos que intervienen en la erosión y depositación

Erosión (Figura 2.2):

- Se produce cuando el abastecimiento en la carga de sedimentos es reducido o interrumpido aguas arriba
- El gasto líquido se aumenta
- Cuando se establece un punto de control más bajo que el fondo original aguas abajo de esa sección.

Depositación (Figura 2.2):

- Cuando se incrementa el gasto sólido aguas arriba
- Cuando la descarga del gasto líquido se disminuye
- Al colocar una obra de control con un nivel más alto que el nivel actual del río.

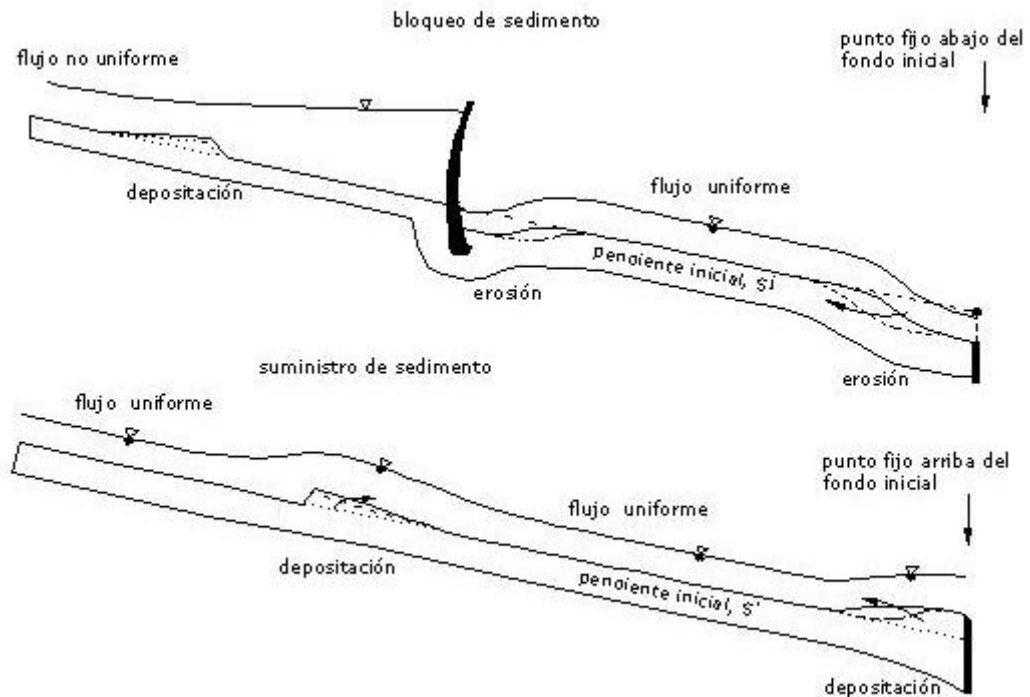


Figura 2.2 Esquema de erosión y deposición

2.9 Transporte de sedimentos

El transporte de sedimentos se ha dividido por conveniencia en seis clases; sin embargo, en este trabajo sólo se considera el transporte de fondo o transporte total de fondo, ya que es éste el que más influye en los cambios en el tiempo del perfil longitudinal de un río. Este tipo de transporte está constituido por:

El arrastre en la capa de fondo o arrastre de fondo, formado por el material que es arrastrado dentro de una capa adyacente al fondo, cuyo espesor es aproximadamente igual a dos veces el diámetro de la partícula.

El transporte del fondo en suspensión, que lo integran las partículas del fondo que son transportadas en suspensión, es decir, arriba de la capa de fondo.

2.9.1 Método de Engelund

La formula propuesta para cauces arenosos, válida en el sistema de unidades SI, es:

$$G = \frac{Q^2}{20 B \sqrt{g} D_{50} \Delta^2} S^{3/2} h^{-1/2} \quad 2.6$$

donde

D_{50} diámetro de la partícula por debajo del cual queda el 50% de la muestra de suelo en peso

Δ densidad relativa del material sólido sumergido

La ec 2.1 es válida cuando en el fondo existen dunas y el número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad al cortante, U_* , sea igual o mayor que 12, esto es

$$Re_* = \frac{U_* D_{50}}{\nu} \geq 12 \quad 2.7$$

siendo ν la viscosidad cinemática del líquido.

Los autores no recomiendan la fórmula si el diámetro del sedimento es menor que 0.00015 m.

2.9.2 Método de Ackers y White

Estos autores dedujeron una función de transporte total de sedimentos, basada en tres parámetros adimensionales obtenidos a partir de un análisis dimensional y de argumentos físicos. El método fue presentado en 1973 y se basa en el criterio desarrollado por Ackers en 1972.

$$G = \frac{Bs U D_{35} GGR}{\left(\frac{U_*}{U}\right)^n} \quad 2.8$$

Esta es la función general de transporte, donde U es la velocidad media del flujo

$$U_* = \sqrt{g R_h S} \quad 2.9$$

Es la velocidad de fricción, en m/s

GGR se obtiene como sigue

$$GGR = C TR^m \quad 2.10$$

$$TR = \frac{FGR}{ACK} - 1 \quad 2.11$$

Esta función es un parámetro de inicio de movimiento.

$$FGR = FGR \left(\frac{U}{\sqrt{32} \log_{10} (10 R_h / D_{35})} \right)^{(1-n)} \quad 2.12$$

Es el llamado parámetro de movilidad del sedimento. La movilidad del sedimento está dada por la relación de la fuerza de fricción asignada a un área unitaria del fondo y el peso sumergido de la capa de granos correspondiente.

$$FGR = \frac{U_*^n}{\sqrt{g \Delta D_{35}}} \quad 2.13$$

$$ACK = \frac{0.23}{\sqrt{DS}} + 0.14 \quad 2.14$$

Número de movilidad crítico, donde:

$$C = 10^{(2.86 DS_{log} - DS_{log}^{2-3.53})} \quad 2.15$$

$$DS = D_{35} C_1 \quad 2.16$$

Parámetro de la partícula o número de Yalin, donde: D_{35} es el diámetro de la partícula o el diámetro representativo de una muestra de sedimentos y

$$C_1 = \left(\frac{g \Delta_{LL}}{\nu^2} \right)^{1/3} \quad 2.17$$

donde: ν la viscosidad cinemática del líquido. Agrupando parámetros constantes

$$DS_{log} = \log_{10}(DS) \quad 2.18$$

$$m = \frac{9.66}{DS} + 1.34 \quad 2.19$$

$$n = 1.0 - 0.56 DS_{log} \quad 2.20$$

n exponente que depende del tamaño del sedimento.

2.9.3 Método de Brownlie

En 1982, este autor partió de un análisis dimensional para seleccionar los parámetros que utilizó en un análisis de regresión múltiple, donde obtuvo los siguientes parámetros:

$$G = \frac{\rho Q C_s}{\rho_s (10^6 - C_s)} \quad 2.21$$

Transporte total del fondo. Tomando $C_s=0$ en el denominador por ser muy pequeño comparado con la constante 10^6 , se tiene:

$$G = \frac{\rho Q C_s}{\rho_s (10^6)} \quad 2.22$$

$$C_s = 7115 C_f (F_g - F_{g0})^{1.978} S^{0.6601} \left(\frac{R_h}{D_{50}} \right)^{-0.3301} \quad 2.23$$

La concentración del material del fondo que es transportado por el flujo, expresado en ppm en masa, o en miligramos por litro.

$$C_f = 1 \text{ (laboratorio)} \quad 2.24$$

$$C_f = 1.268 \text{ (río)} \quad 2.25$$

coeficientes de ajuste

$$F_{g0} = 4.596 (\tau_c^*)^{0.5293} S^{-0.1405} \sigma_g^{-0.1606} \quad 2.26$$

Número de Froude crítico de las partículas. Se obtiene en función del parámetro adimensional de Shields para la condición crítica.

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{\Delta g D_{50}}} \quad 2.27$$

Número de Froude de las partículas.

$$\tau_c^* = 0.22Y + 0.06(10^{-7.7Y}) \quad 2.28$$

Parámetro adimensional de Shields para la condición crítica.

$$Y = R_*^{-0.6} \quad 2.29$$

Número de Reynolds de la partícula.

$$R_* = \frac{\sqrt{g \Delta D_{50}} D_{50}}{\nu} \quad 2.30$$

2.10 Regímenes de flujo

En canales con lechos arenosos o erosionables, cuando el esfuerzo de fricción ejercido por la corriente, τ_0 , rebasa un cierto valor límite, τ_c , que pueden resistir las partículas que constituyen el cauce, se inicia el movimiento de éstas. Al ocurrir esto, la superficie del fondo del canal, así como la superficie libre del agua pueden presentar diversas formas dependiendo de las características hidráulicas de la corriente y de las de material del cauce. Las diferentes configuraciones u ondulaciones que se llegan a formar en un fondo móvil, se pueden definir o clasificar según sus características y las del flujo que las origina. A tales clasificaciones o descripciones se les denominan regímenes del flujo. Se presenta la clasificación de Simons y Richardson, quienes dieron una descripción completa de los diferentes regímenes que observaron en cauces arenosos. Se tiene entonces:

Régimen inferior o lento ($Fr < 1$)	Régimen superior o rápido ($Fr > 1$)
1. Fondo plano sin arrastre	1. Fondo plano con arrastre
2. Rizos	2. Ondas estacionarias simétricas
3. Dunas con rizos sobreimpuestos	3. Antidunas
4. Dunas	
5. Fondo plano con transporte	

Estas configuraciones o formas del fondo están listadas en su orden de ocurrencia conforme se incrementa el número de Froude (Fr) o la potencia de la corriente ($\tau_0 V$). En la Figura 2.3 se presentan esquemas idealizados de estas configuraciones, las cuales también muestran la forma que adquiere la superficie libre del agua en cada tipo de régimen.

En régimen inferior, la rugosidad aumenta a medida que se avanza de fondo plano a dunas. En régimen superior, las rugosidades máximas que se pueden alcanzar son menores que las máximas que pueden ocurrir en régimen inferior. Los experimentos de Simons y Richardson en canales de laboratorio, utilizando arena de 0.28 mm, indicaron que el factor

de fricción de Manning para fondo plano sin arrastre fue de 0.016, para rizos y dunas osciló entre 0.020 y 0.027; en la transición de 0.014 a 0.017; para fondo plano con arrastre la variación fue de 0.013 a 0.014 y para antidunas 0.014 a 0.022.

Desafortunadamente no hay una ecuación única que describa el comportamiento de los regímenes de flujo arriba descritos; por ello, se emplean ecuaciones empíricas. Entre estas, se encuentran los métodos de: Manning, Engelund (1966) y Cruickshank-Maza (1973), estos se describen en los apéndices A a C.

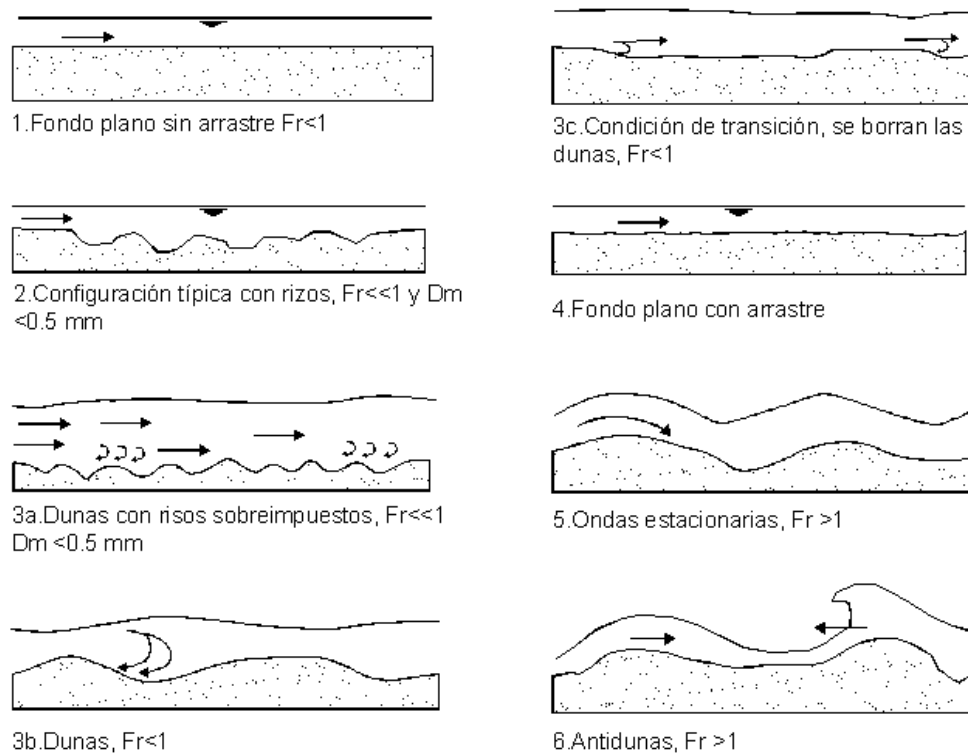


Figura 2.3 Configuraciones de Fondo

3 ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS

3.1 Tipos de esquemas para la modelación del fondo móvil

En forma general los esquemas de diferencias finitas pueden clasificarse como explícitos e implícitos. En los esquemas explícitos las variables dependientes pueden despejarse, pero presentan la desventaja que para su estabilidad se debe cumplir que el número de Courant, definido para los disturbios en el fondo, debe ser menor que 1. Sin embargo, esta restricción no es demasiado grande, pues en general la celeridad de los disturbios en el fondo es pequeña. En los esquemas implícitos, las incógnitas no pueden despejarse directamente; aunque prácticamente no tienen restricción en cuanto a la estabilidad (Tabla 3.1), lo que permite usar incrementos de tiempo muy grandes; tienen la desventaja de que deben resolverse sistemas de ecuaciones con tantas incógnitas como tramos.

Métodos implícitos: En estos se plantean ecuaciones en cada tramo que contiene como incógnitas a las variables en los nudos adyacentes, de tal manera que se crea una relación de dependencia de una variable con los demás, aún cuando este tipo de solución es incondicionalmente estable, la convergencia requiere que los intervalos de tiempo sean limitados en un grado que depende de la tasa de cambio del flujo mismo. Y cuando la tasa de cambio de flujo es baja, este método permite el uso de tramos más largos, por lo cual requiere menos tiempo de cálculo que otros procedimientos.

Tabla 3.1 Regiones de estabilidad en el plano ψ - θ (Lyn y Goodwin).

ψ				
1.0	Cr > 0	Cr < 0	Cr > 0	Cr < 0
	$Cr \leq \frac{\psi - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \theta}$ condicionalmente estable	$\psi < Cr \left(\frac{1}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2}$ incondicionalmente estable	$\psi \geq Cr \left(\frac{1}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2}$ incondicionalmente estable	$Cr > \frac{\psi - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \theta}$ condicionalmente estable
0.5	$\psi < Cr \left(\frac{1}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2}$ incondicionalmente estable	$Cr > \frac{\psi - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \theta}$ condicionalmente estable	$Cr \leq \frac{\psi - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \theta}$ condicionalmente estable	$\psi \geq Cr \left(\frac{1}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2}$ incondicionalmente estable
0	0.5			1.0
				θ

θ factor de peso en el tiempo, generalizado en el esquema de Preissmann

ψ factor de peso en el espacio, generalizado en el esquema de Preissmann

En la Tabla 3.1 se emplean las siguientes definiciones, para $\psi = 1/2$ cumple con la condición de estabilidad incondicional, por lo tanto, estable para todos los números de Courant y también, es necesario que $\theta \geq 1/2$.

La forma no dimensional de las ondas características para el fondo y agua es conocido como el número de Courant (Cr) y es expresado como:

El número de Courant para el agua:

$$Cr = [U \pm \sqrt{gh}] \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

El número de Courant para el fondo:

$$Cr = \frac{U \frac{\partial q_s}{\partial u} - y \frac{\partial q_s}{\partial y} \Delta t}{y(1 - F_r^2) \Delta x}$$

Métodos explícitos: al aproximarse las derivadas por diferencias se obtiene una sola incógnita en cada ecuación diferencial; y por lo tanto para el flujo a superficie libre es posible calcular los tirantes, velocidades y cota del fondo en cada tramo, a partir de los valores conocidos en un instante dado. Para la obtención de resultados estables y físicamente realistas en los esquemas explícitos se tiene una restricción en el tamaño del paso de tiempo respecto al tamaño de los tramos, esta restricción se llama restricción de Courant. Las ecuaciones básicas se expresan directamente en su forma de diferencias finitas, y el plano x-t se cubre por una malla rectangular; el procedimiento parece ser el más simple tanto la convergencia como la estabilidad limitan mucho el tamaño de los intervalos de tiempo posibles. También la forma de la ecuación de diferencias finitas tiene importancia crítica en la obtención de los resultados.

Métodos de características: las ecuaciones básicas se transforman en seis ecuaciones diferenciales totales (ecuaciones características), que resultan de una serie de direcciones características (o curvas) en el plano x-t, a lo largo de las cuales existen relaciones entre la velocidad, profundidad y cota del fondo, de tal manera que las seis ecuaciones pueden integrarse numéricamente para obtener las cinco incógnitas profundidad, velocidad, distancia, cota del fondo y tiempo en cada punto de la malla; por lo general es mucho más simple programar una solución basada en una malla rectangular, esto es, obtener los valores de las incógnitas en puntos específicos de la malla con intervalos fijos de x; si el problema contiene cambios muy grandes de los parámetros, por ejemplo en el caso de ondas producidas por fallas de embalses, este método es el más práctico.

3.2 Convergencia y estabilidad

La estabilidad y convergencia utilizados en un esquema numérico para resolver una ecuación algebraica lineal o un sistema de ecuaciones son determinados al estudiar si un error crece o disminuye a medida que la solución progresa en un proceso dependiente del tiempo. Cuando la solución exacta es conocida este error es la diferencia entre dicha solución y la aproximación numérica. Si se determina que el esquema es inestable, cualquier trabajo adicional con éste será infructuoso y debe buscarse un método alternativo de solución para obtener los resultados deseados. En este trabajo no se desarrollaron las metodologías para obtener la estabilidad y convergencia, debido a que no es práctico desarrollar un análisis formal la estabilidad y convergencia.

3.3 Esquema de Preissmann

Dado que no existe solución analítica de las ecs 2.1, 2.2 y 2.3, es necesario resolverlas, por ejemplo, con un esquema de diferencias finitas, de tal forma que se tengan como incógnitas los cambios en el tiempo de la cota de la superficie libre del agua, ΔH , de la cota del fondo del cauce, ΔZ . De los esquemas existentes, se ha encontrado que uno de los mejores es el de Preissmann, que es implícito de cuatro puntos ver Figura 3.1.

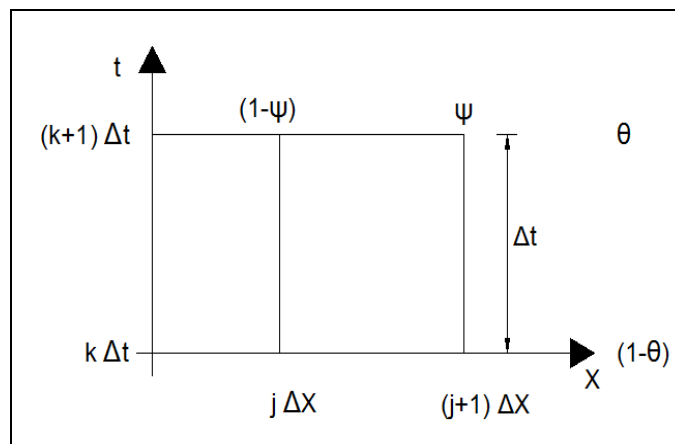


Figura 3.1 Esquema de diferencias finitas

En este esquema una función cualquiera $f(x, t)$, en el plano (x, t) , se reemplaza por promedios pesados de sus valores en los puntos $(j, j+1)$ y $(k, k+1)$, Figura 3.1. Se tiene así, para el intervalo de tiempo $k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t$ lo siguiente:

$$f(j\Delta x, t) = \theta f_j^{k+1} + (1-\theta) f_j^k \quad 3.1$$

$$f(j+1, \Delta x, t) = \theta f_{j+1}^{k+1} + (1-\theta) f_{j+1}^k \quad 3.2$$

donde θ es un factor de peso en el tiempo. El superíndice k se refiere al tiempo: $t = k\Delta t$, $t + \Delta t = (k+1)\Delta t$ y el subíndice j se refiere al espacio: $x = j\Delta x$, $x + \Delta x = (j+1)\Delta x$. De la misma manera, para el intervalo en el espacio $j\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x$.

$$f(x, k\Delta t) = \psi f_{j+1}^k + (1-\psi) f_j^k \quad 3.3$$

$$f(x, (k+1)\Delta t) = \psi f_{j+1}^{k+1} + (1-\psi) f_j^{k+1} \quad 3.4$$

donde ψ es un factor de peso en el espacio. Tanto θ como ψ varían entre 0 y 1. Entonces:

$$f(x, t) = \theta \left\{ \psi f_{j+1}^{k+1} + (1-\psi) f_j^{k+1} \right\} + (1-\theta) \left\{ \psi f_{j+1}^k + (1-\psi) f_j^k \right\} \quad 3.5$$

además, en este esquema se definen:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \theta \left\{ \frac{f_{j+1}^{k+1} - f_j^{k+1}}{\Delta x} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{f_{j+1}^k - f_j^k}{\Delta x} \right\} \quad 3.6$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \psi \left\{ \frac{f_{j+1}^{k+1} - f_{j+1}^k}{\Delta t} \right\} + (1-\psi) \left\{ \frac{f_j^{k+1} - f_j^k}{\Delta t} \right\} \quad 3.7$$

Sí se considera el incremento Δf en la función $f(x, t)$ entre los tiempos $k\Delta t$ y $(k+1)\Delta t$ tal que

$\Delta f \ll f$; se definen:

$$f_{j+1}^{k+1} - f_{j+1}^k = \Delta f_{j+1} \quad 3.8$$

$$f_j^{k+1} - f_j^k = \Delta f_j \quad 3.9$$

El esquema de Preissman adopta un valor de $\psi = 1/2$ y sustituyendo las ecs 3.8 y 3.9 en 3.5 a 3.7, tomando $f^k = f$, se obtiene

$$f(x, t) = \frac{\theta}{2} (\Delta f_{j+1} + \Delta f_j) + \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) \quad 3.10$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta f_{j+1} - \Delta f_j) + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1} - f_j) \quad 3.11$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\Delta f_{j+1} + \Delta f_j}{2 \Delta t} \quad 3.12$$

3.3.1 Discretización de la ecuación de continuidad del líquido

Tomando en cuenta que el desarrollo anterior del esquema de discretización ecs. 3.1 a 3.12, y para la ecuación de continuidad del líquido (ec. 2.1) se tiene que:

$h = H - Z$ por lo que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \quad 3.13$$

De 3.5 con $\psi = 1/2$

$$T = \frac{\theta}{2} (T_{j+1}^{k+1} + T_j^{k+1}) + \left(\frac{1-\theta}{2} \right) (T_{j+1}^k + T_j^k) \quad 3.14$$

y de la ec 3.10

$$T = \frac{\theta}{2} (\Delta T_{j+1} + \Delta T_j) + \left(\frac{1}{2} \right) (T_{j+1} + T_j) = TM_j \quad 3.15$$

para los demás términos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\Delta H_{j+1} + \Delta H_j}{2 \Delta t} \quad 3.16$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\Delta Z_{j+1} + \Delta Z_j}{2 \Delta t} \quad 3.17$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{k+1} - Q_j^{k+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^k - Q_j^k) \quad 3.18$$

de 3.11

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Q_{j+1} - \Delta Q_j) + \frac{1}{\Delta x} (Q_{j+1} - Q_j) \quad 3.19$$

sustituyendo en 2.1

$$\frac{\Delta H_{j+1} + \Delta H_j}{2\Delta t} - \frac{\Delta Z_{j+1} + \Delta Z_j}{2\Delta t} + \frac{1}{TM_j} \left[\frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Q_{j+1} - \Delta Q_j) + \frac{1}{\Delta x} (Q_{j+1} - Q_j) \right] = 0 \quad 3.20$$

multiplicando por $2\Delta t$ y agrupando términos se puede escribir

$$CL1_j \Delta Q_{j+1} + CL2_j \Delta Z_{j+1} + CL3_j \Delta H_{j+1} = CL4_j \Delta Q_j + CL5_j \Delta Z_j + CL6_j \Delta H_j + CL7_j \quad 3.21$$

donde

$$CL1_j = \frac{2\theta}{TM_j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad 3.22$$

$$CL2_j = -1 \quad 3.23$$

$$CL3_j = 1 \quad 3.24$$

$$CL4_j = \frac{2\theta}{TM_j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad 3.25$$

$$CL5_j = 1 \quad 3.26$$

$$CL6_j = -1 \quad 3.27$$

$$CL7_j = \frac{2}{TM_j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_j - Q_{j+1}) \quad 3.28$$

3.3.2 Discretización de la ecuación de cantidad de movimiento del líquido

tomando $\psi = 1/2$ se obtiene de la ec. 3.10

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\Delta Q_{j+1} + \Delta Q_j}{2\Delta t} \quad 3.29$$

de la ec 3.6

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1}^{k+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^{k+1} \right] + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1}^k - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^k \right] = \\ &= \frac{\theta}{\Delta x} \left[\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1} - \Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j \right] + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j \right] \end{aligned} \quad 3.30$$

$$A = \frac{\theta}{2} (\Delta A_{j+1} + \Delta A_j) + \frac{1}{2} (A_{j+1} + A_j) = AM_j \quad 3.31$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta H_{j+1} - \Delta H_j) + \frac{1}{\Delta x} (H_{j+1} - H_j) \quad 3.32$$

$$S = \frac{\theta}{2} (\Delta S_{j+1} + \Delta S_j) + \frac{1}{2} (S_{j+1} + S_j) \quad 3.33$$

$$\text{además } \Delta S = \frac{\partial S}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) + \frac{\partial S}{\partial Q} \Delta Q$$

entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_{j+1} \Delta Q_{j+1} + \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_j (\Delta H_j - \Delta Z_j) + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_j \Delta Q_j \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (S_{j+1} + S_j) \end{aligned} \quad 3.34$$

sustituyendo en 2.2

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta Q_{j+1} + \Delta Q_j}{2 \Delta t} + \frac{\theta}{\Delta x} \left[\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1} - \Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j \right] + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j \right] + \\ &+ gAM_j \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta H_{j+1} - \Delta H_j) + \frac{1}{\Delta x} (H_{j+1} - H_j) + \frac{\theta}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_{j+1} \Delta Q_{j+1} + \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_j (\Delta H_j - \Delta Z_j) + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_j \Delta Q_j + \frac{1}{2} (S_{j+1} + S_j) \right\} = 0 \end{aligned} \quad 3.35$$

el término $\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)$ en la ec. 3.35 se aproxima como

$$\Delta\left(\frac{Q^2}{A}\right) \approx \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{Q^2}{A}\right)\Delta Q + \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{Q^2}{A}\right)\Delta A \quad 3.36$$

es decir,

$$\Delta\left(\frac{Q^2}{A}\right) = 2\frac{Q}{A}\Delta Q - \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \Delta A \quad 3.37$$

sustituyendo 3.37 en 3.35, multiplicando por $2\Delta t$ y agrupando términos, es posible llegar a

$$\begin{aligned} CM1_j \Delta Q_{j+1} + CM2_j \Delta Z_{j+1} + CM3_j \Delta H_{j+1} = \\ CM4_j \Delta Q_j + CM5_j \Delta Z_j + CM6_j \Delta H_j + CM7_j \end{aligned} \quad 3.38$$

donde

$$CM1_j = 1 + g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_{j+1} + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2\left(\frac{Q}{A}\right)_{j+1}\right) \quad 3.39$$

$$CM2_j = -g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{j+1} \quad 3.40$$

$$CM3_j = 2g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} AM_j + g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{j+1} \quad 3.41$$

$$CM4_j = -1 - g\theta \Delta t AM_j \left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_j + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2\left(\frac{Q}{A}\right)_j\right) \quad 3.42$$

$$CM5_j = g\theta \Delta t AM_j \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_j \quad 3.43$$

$$CM6_j = 2g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} AM_j - g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_j \quad 3.44$$

$$\begin{aligned} CM7_j = 2\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q}{A}\right)_{j+1} - \left(\frac{Q}{A}\right)_j \right] - 2g\frac{\Delta t}{\Delta x} AM_j (H_{j+1} - H_j) \\ - g\Delta t AM_j (S_{j+1} + S_j) + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q}{A}\right)_{j+1}^2 \Delta A_{j+1} - \left(\frac{Q}{A}\right)_j^2 \Delta A_j \right] \end{aligned} \quad 3.45$$

3.3.3 Discretización la ecuación de continuidad del sedimento

Para la ecuación de continuidad del sedimento (ec. 2.3) se tiene:

de 3.7

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \psi \left(\frac{Z_{j+1}^{k+1} - Z_{j+1}^k}{\Delta t} \right) + (1 - \psi) \left(\frac{Z_j^{k+1} - Z_j^k}{\Delta t} \right) \quad 3.46$$

de 3.8 tomando $f^k = f$ se obtiene

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \psi \frac{\Delta Z_{j+1}}{\Delta t} + (1 - \psi) \frac{\Delta Z_j}{\Delta t} \quad 3.47$$

si se considera que el ancho del fondo B casi no varía en el tiempo, éste se puede aproximar como

$$B = \frac{1}{2} (B_{j+1} + B_j) = BM_j \quad 3.48$$

también

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta G_{j+1} - \Delta G_j) + \frac{1}{\Delta x} (G_{j+1} - G_j) \quad 3.49$$

el término ΔG en la ec 3.49 se aproxima como

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial G}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial G}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) \quad 3.50$$

además

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) + \frac{\partial S}{\partial Q} \Delta Q \quad 3.51$$

sustituyendo las expresiones correspondientes en la ec. 2.3 se tiene:

$$\begin{aligned}
& \psi \frac{\Delta Z_{j+1}}{\Delta t} + (1-\psi) \frac{\Delta Z_j}{\Delta t} + \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_{j+1} \Delta Q_{j+1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{j+1} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_{j+1} \Delta Q_{j+1} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) \right] - \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_j \Delta Q_j + \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_j \left[\left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_j \right. \right. \right. \\
& \left. \left. (\Delta H_j - \Delta Z_j) + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_j \Delta Q_j \right] + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j (\Delta H_j - \Delta Z_j) \right] + \frac{1}{\Delta x} (G_{j+1} - G_j) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

multiplicando por Δt y agrupando términos resulta

$$\begin{aligned}
& CS1_j \Delta Q_{j+1} + CS2_j \Delta Z_{j+1} + CS3_j \Delta H_{j+1} = CS4_j \Delta Q_j + CS5_j \Delta Z_j \\
& + CS6_j \Delta H_j + CS7_j
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Donde

$$CS1_j = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_{j+1} \right] \tag{3.54}$$

$$CS2_j = \psi + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_{j+1} - \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} \right] \tag{3.55}$$

$$CS3_j = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} \right] \tag{3.56}$$

$$CS4_j = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_j - \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_j \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_j \right] \tag{3.57}$$

$$CS5_j = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_j \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_j + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j \right] \quad 3.58$$

$$CS6_j = (1-\psi) + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_j \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_j - \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j \right] \quad 3.59$$

$$CS7_j = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} (G_{j+1} - G_j) \quad 3.60$$

4 MÉTODO DE SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Cuando se estudia un tramo de un río que se ha dividido en N tramos, se obtienen $3N$ ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 con $3N+3$ incógnitas asociadas a los extremos de cada tramo. El sistema se completa con 3 condiciones de frontera. En régimen subcrítico se tienen dos en el extremo aguas arriba ($j=1$) y una en el extremo aguas abajo ($j=jj$) y las más comunes son:

4.1 Condiciones de frontera

Las tres condiciones de frontera necesarias para cerrar el sistema son:

Frontera aguas arriba ($x=0, j=1$)

- Hidrograma $Q = Q(t)$
- Sedimentograma $G = G(t)$

Frontera aguas abajo ($x=L, j=jj$)

- Elevación de la superficie libre del agua $H = H(t)$

La condición de frontera aguas arriba del modelo para el cambio en el fondo del cauce en condiciones de flujo subcrítico (Cunge y Verdineau, 1973), ha sido establecida como Δz_{b1} . Y suponiendo que no hay cambio en el sedimento suspendido durante el primer intervalo de tiempo, se tiene que:

$$\Delta z_{b1} = \frac{[Q_{su} - Q_{se}] \Delta t}{ct B_u p_{or} \Delta x} \quad 4.1$$

donde Q_{su} es la entrada de sedimento aguas arriba, Q_{se} es el transporte de sedimento en equilibrio obtenido con alguna ecuación de transporte de sedimento, B_u es el perímetro mojado aguas arriba y ct es una constante que toma en consideración la distancia entre la cual ocurren los cambios del flujo y el fondo.

Las condiciones iniciales consisten en especificar los valores iniciales del gasto líquido, Q , niveles del fondo, Z , y los niveles de los tirantes en cada sección del río, Y . Así como parámetros físicos y numéricos que intervienen en el proceso del movimiento del fondo de los ríos.

En cuanto al sedimentograma, este debe ser independiente del flujo; una forma de determinarlo es a partir de mediciones de campo en la zona de la frontera de aguas arriba; sin embargo, casi nunca se tiene esta información, por ello, es común usar una ecuación de gasto sólido aplicable al tramo en estudio y hacer algunas hipótesis respecto al tirante y velocidad aguas arriba, como puede ser la de flujo uniforme.

En el caso de que en la frontera de aguas arriba se tenga la cortina de una presa, el gasto sólido que entra al tramo es nulo.

4.2 Procedimiento de solución

De las ecuaciones obtenidas mediante el método de diferencias finitas, se forma el sistema de tres ecuaciones en cada tramo entre los nodos j y $j + 1$, a continuación se muestra:

$$\begin{aligned} CM1_j \Delta Q_{j+1} + CM2_j \Delta Z_{j+1} + CM3_j \Delta H_{j+1} &= CM4_j \Delta Q_j + CM5_j \Delta Z_j + CM6_j \Delta H_j + CM7_j \\ CL1_j \Delta Q_{j+1} + CL2_j \Delta Z_{j+1} + CL3_j \Delta H_{j+1} &= CL4_j \Delta Q_j + CL5_j \Delta Z_j + CL6_j \Delta H_j + CL7_j \\ CS1_j \Delta Q_{j+1} + CS2_j \Delta Z_{j+1} + CS3_j \Delta H_{j+1} &= CS4_j \Delta Q_j + CS5_j \Delta Z_j + CS6_j \Delta H_j + CS7_j \end{aligned} \quad 4.2$$

Donde los coeficientes CM_j provienen de la ecuación de cantidad de movimiento del líquido, CL_j de la ecuación de continuidad del líquido y CS_j de la ecuación de cantidad del sedimento.

Dado que se conocen las condiciones iniciales, el gasto líquido, las cotas del fondo y del agua en el tiempo inicial y en todos los nudos (obtenidos del perfil de la superficie libre del agua), es posible calcular los coeficientes CM_j , CL_j y CS_j del sistema de ecuaciones 4.2 para todos los tramos.

Para dar solución al sistema de ecuaciones formado por todos los tramos del río, se forma la matriz de ecuaciones como:

$$\begin{bmatrix} CM1_{j+1} & CM2_{j+1} & CM3_{j+1} \\ CL1_{j+1} & CL2_{j+1} & CL3_{j+1} \\ CS1_{j+1} & CS2_{j+1} & CS3_{j+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \\ \Delta H_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} CM4_j & CM5_j & CM6_j \\ CL4_j & CL5_j & CL6_j \\ CS4_j & CS5_j & CS6_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \\ \Delta H_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} CM7_j \\ CL7_j \\ CS7_j \end{pmatrix} \quad 4.3$$

o también:

$$\begin{bmatrix} CM1_{j+1} & CM2_{j+1} & CM3_{j+1} \\ CL1_{j+1} & CL2_{j+1} & CL3_{j+1} \\ CS1_{j+1} & CS2_{j+1} & CS3_{j+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \\ \Delta H_{j+1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} CM4_j & CM5_j & CM6_j \\ CL4_j & CL5_j & CL6_j \\ CS4_j & CS5_j & CS6_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \\ \Delta H_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CM7_j \\ CL7_j \\ CS7_j \end{pmatrix} \quad 4.4$$

iniciando con el término j y siguiendo con el término $j+1$, se reduce a :

$$\begin{bmatrix} -CM4_j & -CM5_j & -CM6_j & CM1_j & CM2_j & CM3_j \\ -CL4_j & -CL5_j & -CL6_j & CL1_j & CL2_j & CL3_j \\ -CS4_j & -CS5_j & -CS6_j & CS1_j & CS2_j & CS3_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \\ \Delta H_j \\ \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \\ \Delta H_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CM7_j \\ CL7_j \\ CS7_j \end{pmatrix} \quad 4.5$$

desarrollando el sistema para todos los tramos del río, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -CM4_1 & -CM5_1 & -CM6_1 & CM1_2 & CM2_2 & CM3_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -CL4_1 & -CL5_1 & -CL6_1 & CL1_2 & CL2_2 & CL3_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -CS4_1 & -CS5_1 & -CS6_1 & CS1_2 & CS2_2 & CS3_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -CM4_j & -CM5_j & -CM6_j & CM1_{j+1} & CM2_{j+1} & CM3_{j+1} & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -CL4_j & -CL5_j & -CL6_j & CL1_{j+1} & CL2_{j+1} & CL3_{j+1} & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -CS4_j & -CS5_j & -CS6_j & CS1_{j+1} & CS2_{j+1} & CS3_{j+1} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -CM4_j & -CM5_j & -CM6_j & CM1_{j+1} & CM2_{j+1} & CM3_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -CL4_j & -CL5_j & -CL6_j & CL1_{j+1} & CL2_{j+1} & CL3_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -CS4_j & -CS5_j & -CS6_j & CS1_{j+1} & CS2_{j+1} & CS3_{j+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Z_1 \\ \Delta H_1 \\ \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \\ \Delta H_{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta Q_N \\ \Delta Z_N \\ \Delta H_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CM7_1 \\ CL7_1 \\ CS7_1 \\ CM7_{j+1} \\ CL7_{j+1} \\ CS7_{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CM7_N \\ CL7_N \\ CS7_N \end{pmatrix} \quad 4.6$$

Se observa que se tienen más incógnitas que ecuaciones, pero como se conocen dos valores de las condiciones de frontera aguas arriba que en este caso son el hidrograma $\Delta Q_1 = cte$, y el sedimentograma y la ecuación 4.1 $\Delta Z_1 = f(G)$, así como, en la frontera aguas abajo se tiene un limnograma $\Delta H_N = cte$, por lo tanto, se tiene el sistema completo. El sistema lineal de ecuaciones algebraicas 4.2 es resuelto para todos los puntos en cada intervalo de tiempo Δt durante el periodo de cálculo. Si las condiciones de frontera son linealizadas en términos de variables dependientes, puede ser aplicado para la solución de

sistemas de ecuaciones algún método estándar (Eliminación de Gauss, descomposición LU, etc).

Esta es la parte del programa que consume mayor cantidad de tiempo, el tamaño de las matrices y vectores llegan a ser muy grandes.

$$\begin{bmatrix}
 -CM6_1 & CM1_2 & CM2_2 & CM3_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -CL6_1 & CL1_2 & CL2_2 & CL3_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -CS6_1 & CS1_2 & CS2_2 & CS3_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -CM4_j & -CM5_j & -CM6_j & CM1_{j+1} & CM2_{j+1} & CM3_{j+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -CL4_j & -CL5_j & -CL6_j & CL1_{j+1} & CL2_{j+1} & CL3_{j+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -CS4_j & -CS5_j & -CS6_j & CS1_{j+1} & CS2_{j+1} & CS3_{j+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -CM4_j & -CM5_j & -CM6_j & CM1_{j+1} & CM2_{j+1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -CL4_j & -CL5_j & -CL6_j & CL1_{j+1} & CL2_{j+1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -CS4_j & -CS5_j & -CS6_j & CS1_{j+1} & CS2_{j+1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta H_1 \\
 \Delta Q_2 \\
 \Delta Z_2 \\
 \Delta H_2 \\
 \Delta Q_{j+1} \\
 \Delta Z_{j+1} \\
 \Delta H_{j+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta Q_N \\
 \Delta Z_N
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 CM7_1 + CM4_1 \Delta Q_1 + CM5_1 \Delta Z_1 \\
 CL7_1 + CL4_1 \Delta Q_1 + CL5_1 \Delta Z_1 \\
 CS7_1 + CS4_1 \Delta Q_1 + CS5_1 \Delta Z_1 \\
 CM7_{j+1} \\
 CL7_{j+1} \\
 CS7_{j+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 CM7_N - CM3_N \Delta H_N \\
 CL7_N - CL3_N \Delta H_N \\
 CS7_N - CS3_N \Delta H_N
 \end{bmatrix}
 \quad 4.7$$

La solución de este sistema se realiza por el método de descomposición LU; se resuelve el sistema de ecuaciones obteniéndose una primera aproximación de la solución; se actualizan los coeficientes del sistema de ecuaciones 4.7 y se resuelve el nuevo sistema obteniéndose como solución los nuevos valores de las variables Q , Z y H respectivamente. El número de iteraciones requeridas es en general dos.

En la primera iteración, TM y AM (ecs 3.15 y 3.31) se calculan con ΔA , ΔT igual a cero y se obtienen los coeficientes CM_i y CL_i ; se resuelve el sistema y se procede con la segunda iteración, con los valores de ΔH se calculan AM y TM completos y se recalculan los coeficientes CM_i y CL_i (CS_i no cambia); se resuelve el sistema de nuevo, Cunge et al discuten que son suficientes dos iteraciones.

4.3 Configuración del modelo de fondo móvil mediante la solución de tres ecuaciones (MFM3E)

El código del modelo MFM3E está programado de manera estructurada, mediante módulos en los cuales los procesos físicos y numéricos se han implementado en diferentes subrutinas. En este modelo se pueden agregar nuevas subrutinas de las diferentes formulas para el transporte de sedimentos y los métodos de resistencia al flujo. Esto, lo hace muy versátil para modelar los diferentes efectos que producen cada una de las variables que intervienen en el proceso del movimiento del fondo de los ríos. Ya que con esto, se puede escoger la fórmula o condición más apropiada para cada condición particular.

El programa está codificado en FORTRAN. Resuelve el sistema de ecuaciones formado mediante un algoritmo por descomposición LU (Matrices diagonales superior e inferior) o puede implementarse el método del doble barrido cuando las condiciones de frontera lo permitan. En el apéndice F se describe cada subrutina que integran este programa.

En la figura 4.1 se muestra el esquema del diagrama de flujo del modelo MFM3E, el cual indica la organización y los procedimientos implementados en las diferentes subrutinas.

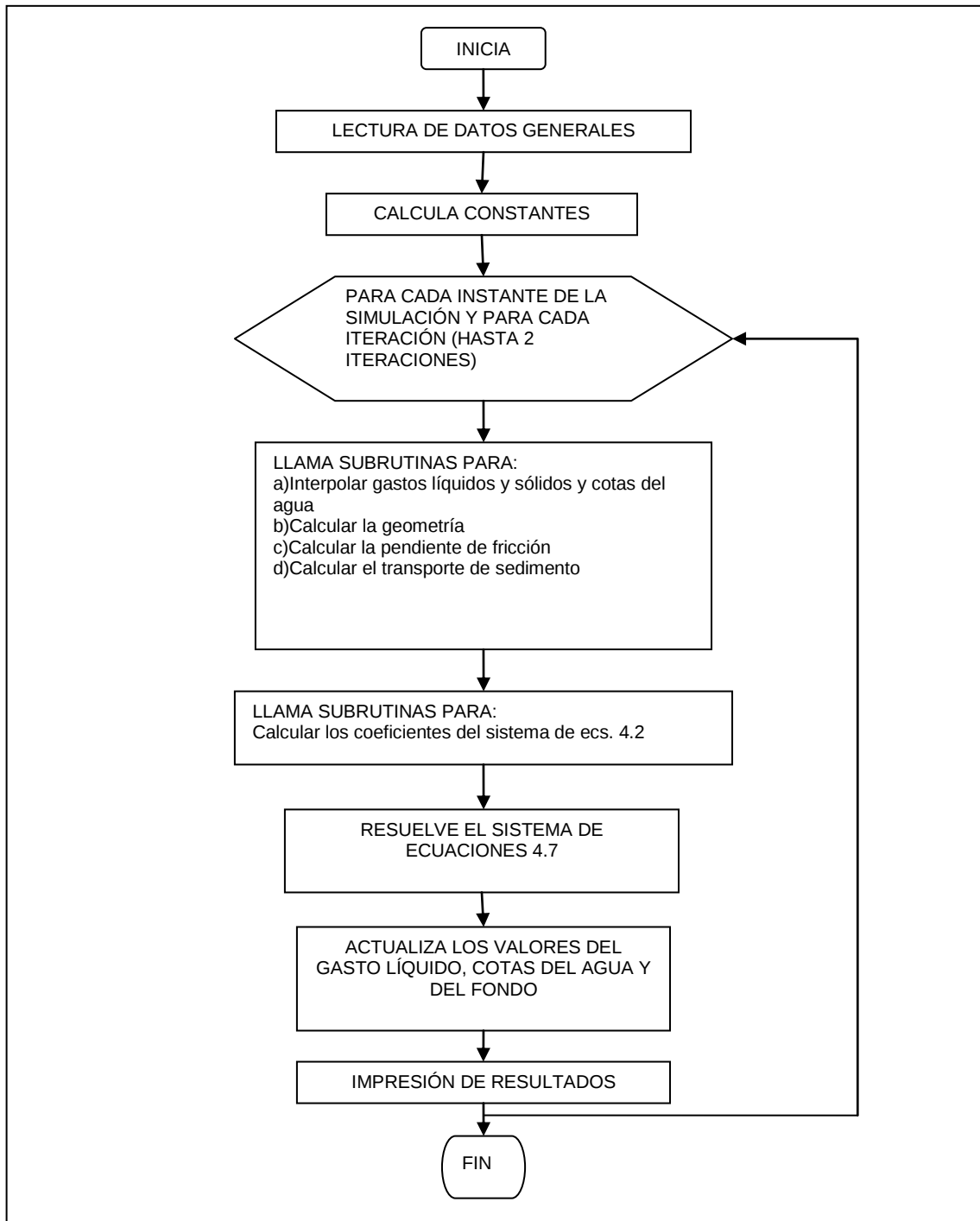


Figura 4.1 Diagrama de bloques del programa modelo de fondo móvil

5 VALIDACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

La validación consiste en la comparación de los resultados obtenidos en la simulación con el modelo matemático implícito MFM3E y mediciones realizadas en laboratorio.

Para la validación de este modelo, se comenzó por utilizar los problemas de flujo subcrítico desarrollados en el artículo por Kassem y Chaudry (1998), en los que intervienen los procesos de erosión y depositación, ya que estos autores validaron cada uno de sus modelos matemáticos acoplado y no acoplado, para compararlos con datos de mediciones en el laboratorio con un canal experimental.

Al comenzar este proceso se asegura que todos los datos disponibles (variables y parámetros) son cualitativa y cuantitativamente compatibles. Además de ello, se dan valores numéricos a los parámetros sobre los que se dispone de pocos o ningún dato, para tener datos sobre todos los parámetros del modelo, y poder determinar la comparación de los resultados.

5.1 Prueba 1. Depositación

Kassem y Chaudry (1998) compararon su modelo matemático utilizando las mediciones realizadas por Soni et al (1980) en laboratorio, mediante un canal rectangular de 30.00 m de largo y 0.20 m de ancho y una pendiente inicial de 5.56×10^{-3} . en el fondo del canal utilizaron arena con diámetro medio de 0.32 mm.

Emplearon agua (viscosidad cinemática $1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), el valor inicial de la descarga de agua fue de $0.020 \text{ m}^3/\text{s}$, el tirante con un valor de $5.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ en cada nudo, emplearon un coeficiente de Chezy $C=35 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, porosidad $\varepsilon=0.4$ y calcularon el gasto sólido con una ecuación del tipo $q_s = a U^b$ donde a y b los obtuvieron por calibración ($a=1.45 \times 10^{-3}$, $b=5.00 \times 10^{-2}$).

Para los cálculos, se emplearon 60 nudos con incremento de 0.20 m (longitud de cada tramo) e incremento del tiempo de 1 s, factor de peso θ en el tiempo de 0.6.

Se establecieron dos condiciones de frontera aguas arriba; una está dada por un gasto constante con un valor de $0.04 \text{ m}^3/\text{s}$; la otra es el sedimentograma de la Figura 5.1. La condición inicial aguas abajo es un tirante de 0.60 m a lo largo del canal.

Aquí emplea Ackers y White como la ecuación de transporte de sedimentos y Chezy como método de resistencia al flujo.

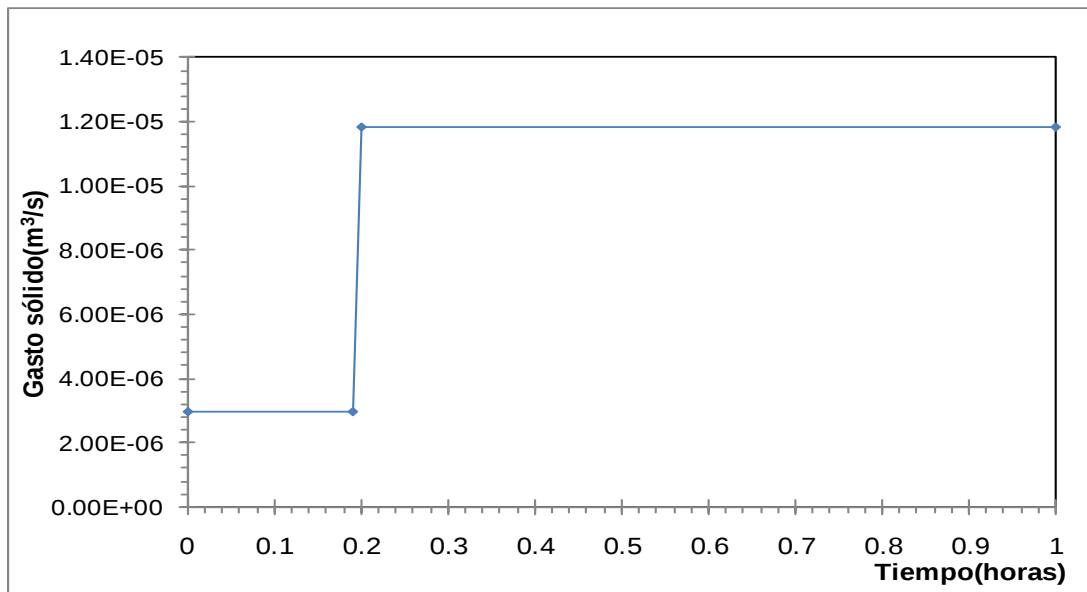


Figura 5.1 Sedimentograma

En la Figura 5.2, se comparan las variaciones en el fondo y los perfiles de la superficie libre del agua con los valores medidos a los 40 minutos. La figura muestra la depositación que simula el modelo matemático.

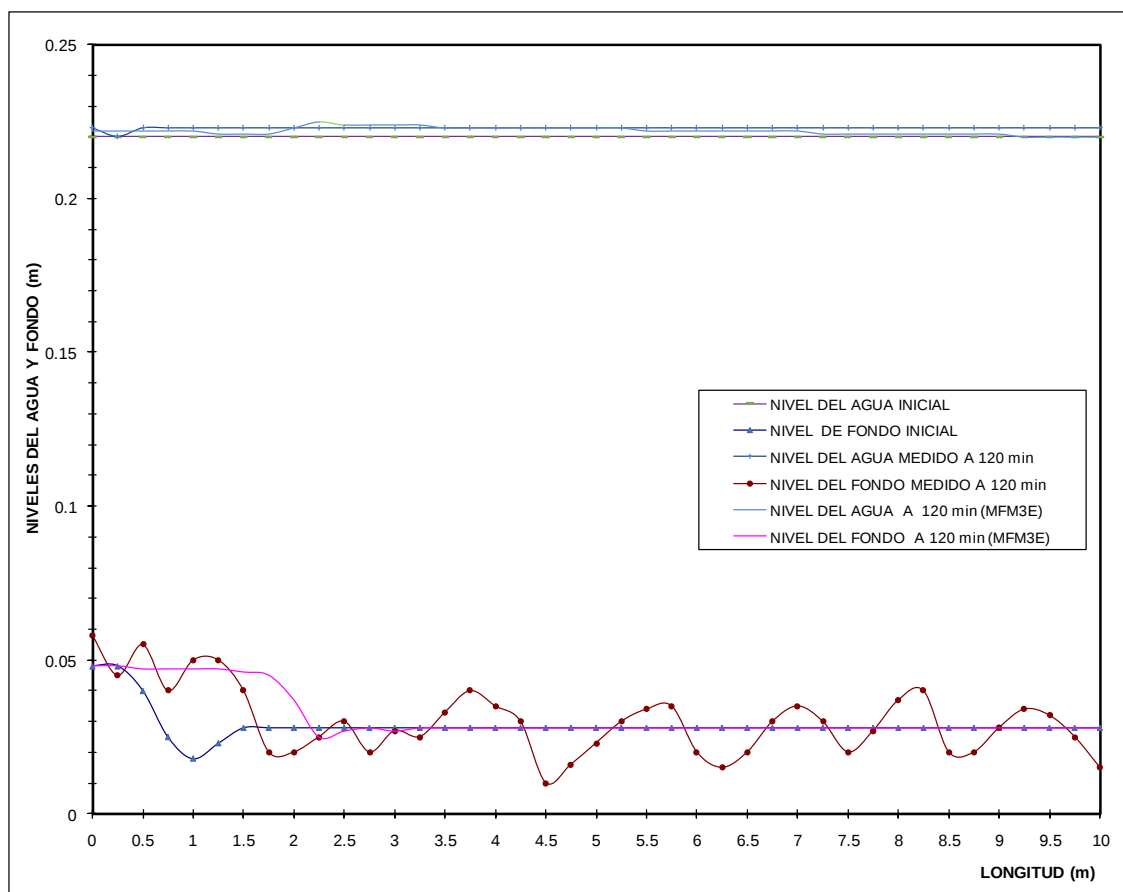


Figura 5.2 Condiciones iniciales y finales a los 40 minutos.

Como criterio de comparación, se observó que los valores resultantes del modelo se encuentran dentro del intervalo de los valores medidos. El proceso de depositación sucede de manera rápida y con un cambio de notable en el fondo del canal y de la superficie libre del agua; en los primeros metros del canal se desarrolla la zona de influencia de este proceso y aguas abajo del canal los cambios son mínimos y su condición se hace estable.

5.2 Prueba 2. Erosión

La construcción de una presa es una de las causas más comunes de erosión. Kassem y Chaudry (1998) compararon los resultados de su modelo matemático con los resultados de las mediciones realizadas por Soni et al. (1980) en laboratorio con el canal descrito en la Prueba 1. Depositación, en este caso utilizaron el canal con una longitud de 18.30 m.

Para los cálculos, se emplearon 61 nudos con un incremento de 0.30 m (longitud de cada tramo),

$\Delta t = 600$ s y 10 horas de prueba, el tirante con un valor de 0.0335 m como condición inicial.

Se establecieron dos condiciones de frontera aguas arriba, una está dada por un gasto constante con un valor de $0.012 \text{ m}^3/\text{s}$; la otra es el sedimentograma con un valor de cero. La condición aguas abajo está dada por un limnigrama con valor constante de 0.133 m .

Para el modelo matemático se emplea Brownlie como la ecuación de transporte de sedimentos y como método de resistencia al flujo se utiliza un valor constante de Chezy igual a $40.9 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$.

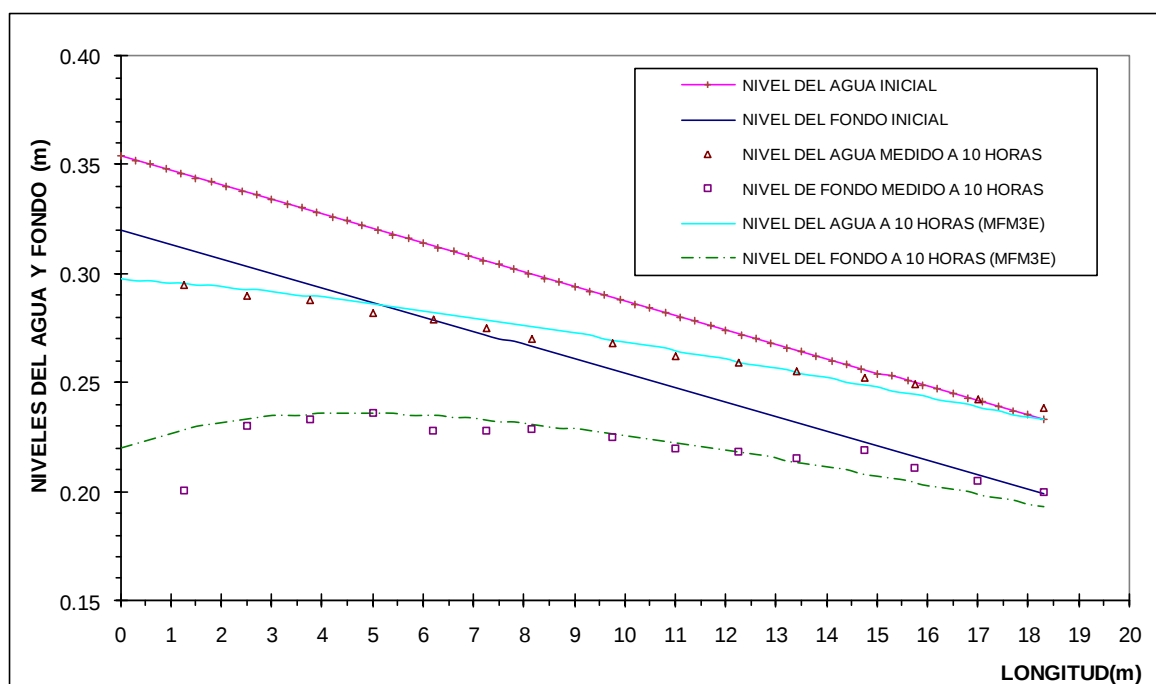


Figura 5.3 Resultados obtenidos después de 10 Horas.

Como puede observarse en la Figura 5.3, los cálculos son semejantes a los medidos. Se observa el cambio radical que se presenta en el fondo del cauce, lo que provoca la modificación de su sección longitudinal, un aspecto de relevancia, es el debido a la gran cantidad de material erosionado el cual finalmente será transportado y depositado, lo que podrá causar cambios sustanciales al cauce aguas abajo. Un factor importante a tomar en cuenta sobre este proceso de erosión, es la distancia y la profundidad que se producirá al colocar la cortina de una presa aguas arriba ya que el retiro de material puede causar problemas en la cimentación de la cortina.

5.3 Prueba 3. Depositación

Para la validación del modelo matemático, se tomaron como referencia los estudios en los que intervienen los procesos y condiciones de erosión y depositación, realizados en un modelo de laboratorio por Krishnappan (1983), estos resultados fueron utilizados por el Dr. Luis Pais Correia (1992) en su Tesis doctoral “Numerical modeling of unsteady channel flow over a mobile boundary”, para compararlos con los resultados obtenidos con su modelo matemático acoplado.

Para la validación del modelo matemático aquí descrito, se utilizó el canal rectangular que empleó Krishnappan (1983) con largo de 18.30 m y 0.60 m de ancho, se empleó agua (viscosidad cinemática $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). En el fondo del canal se colocaron arena con diámetro medio de 0.0012 m, la densidad relativa del material sólido de 2650 kg/m^3 , y una pendiente inicial de 0.0005, factor de peso θ en el tiempo con un valor de 0.6.

Para los cálculos, se emplearon 40 nudos con un incremento de 0.25 m (longitud de cada tramo), $\Delta t = 60 \text{ s}$ y 120 minutos de prueba.

Se establecieron dos condiciones de frontera aguas arriba, una está dada por un gasto constante con un valor de $0.193 \text{ m}^3/\text{s}$; y un sedimentograma con un valor de $3.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ que es mayor que el de equilibrio del flujo. La condición aguas abajo está dada por un limnigrama con valor constante de 0.0335 m.

Se emplea Ackers y White como la ecuación de transporte de sedimentos y como método de resistencia al flujo se utiliza el método de Chezy.

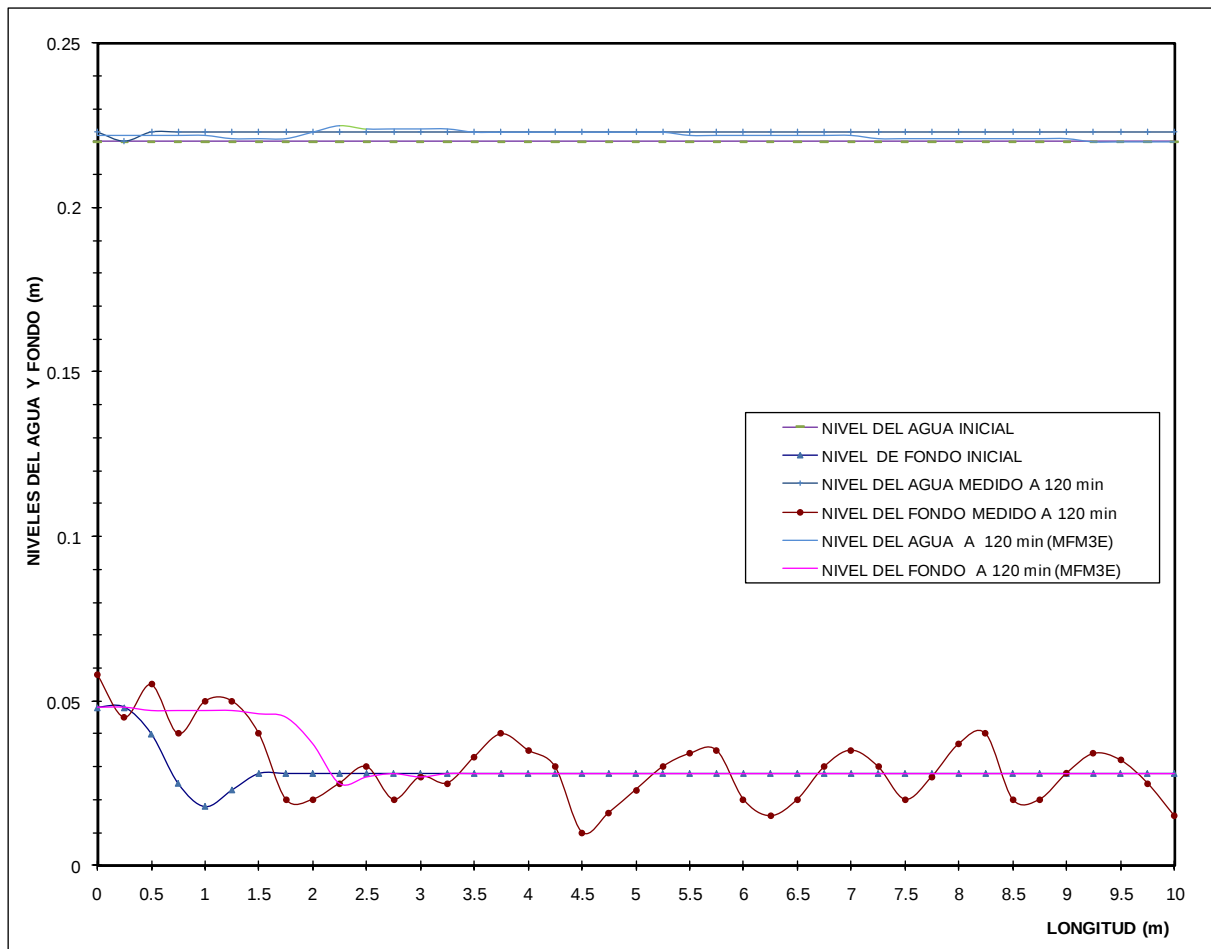


Figura 5.4 Condiciones iniciales y finales a los 120 min.

El exceso de sedimento provoca un frente de onda en el fondo que avanza hacia aguas abajo. El frente del modelo matemático avanza ligeramente más rápido que el medido; en las mediciones se observan oscilaciones que corresponden a formas en el fondo, que no reproduce el modelo matemático. En promedio, los resultados son satisfactorios.

5.4 Prueba 4. Erosión

Se utilizó el canal descrito en la Prueba 3 (Deposición), en este caso el ancho fue de 2.0 m y pendiente inicial de 0.0002.

Se establecieron dos condiciones de frontera aguas arriba, una está dada por un gasto constante con un valor de $0.149 \text{ m}^3/\text{s}$; y un sedimentograma con un valor nulo. La condición aguas abajo está dada por un limnigrama con valor constante de 0.236 m.

Se emplea Ackers y White como la ecuación de transporte de sedimentos y como método de resistencia al flujo se utiliza el método de Cruickshank-Maza.

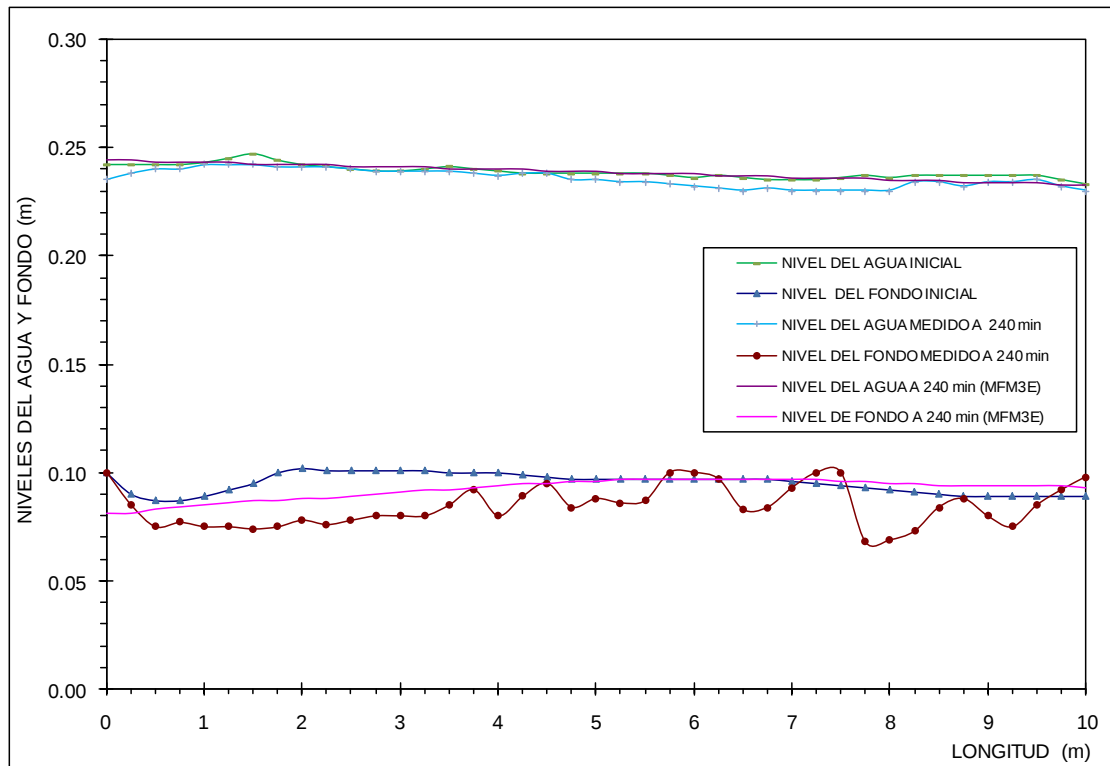


Figura 5.5 Condiciones iniciales y finales a los 240 min del proceso de Erosión

En este caso se representa el proceso de erosión que se lleva a cabo cuando se coloca una presa aguas arriba, ya que con esta obra hidráulica sólo se permite el paso del gasto líquido, lo que provoca la erosión en el fondo del cauce aguas abajo de la cortina de la presa, esto provoca que no se mantenga el equilibrio del sedimento en el río aguas abajo. En este caso se observa que el cambio del fondo en el cauce comienza a erosionarse de manera importante al pie de la cortina de la presa, también, la pendiente del canal es un factor importante en el desarrollo de la erosión aguas abajo lo cual se visualiza en la superficie libre del agua en donde se aprecia que no hay un cambio significativo con respecto a la condición inicial. La evolución de los niveles del agua y el fondo fueron razonablemente bien predichos por el modelo, ya que el modelo tiene la sensibilidad de reproducir las variaciones que se presentan en el fondo y en las superficie libre del agua.

5.5 Prueba 5. Erosión y depositación

Se utilizó el canal descrito en la Prueba 3 (Deposición) en este caso el ancho fue de 2.0 m y pendiente inicial de 0.0002.

Para los cálculos, se emplearon 29 nudos con un incremento de 0.50 m (longitud de cada tramo), el incremento del tiempo fue de 20 s y 12.50 minutos de prueba.

Se establecieron dos condiciones de frontera aguas arriba una condición está dada por el hidrograma de la figura 5.7 y un sedimentograma con un valor constante de $2.264 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. La condición aguas abajo está dada por el limnigrama de la figura 5.7.

Se emplea Ackers y White como la ecuación de transporte de sedimentos y como método de resistencia al flujo se utiliza el método de Manning con un valor de 0.017.

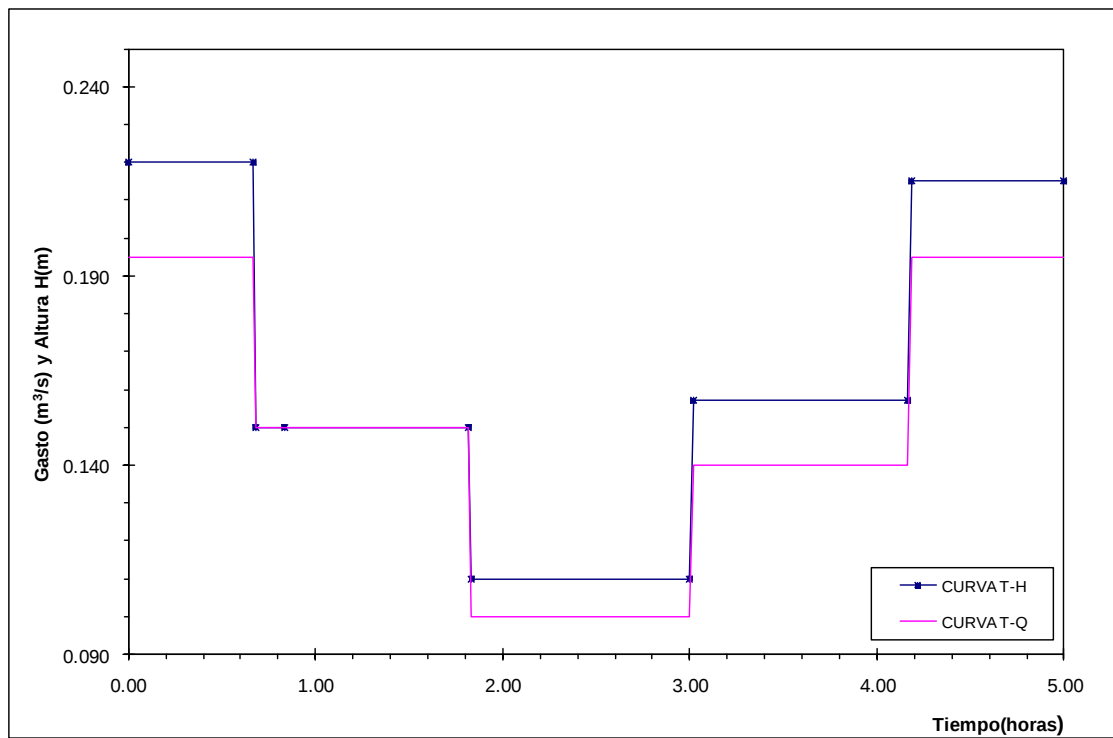


Figura 5.6 Condiciones de frontera aguas arriba hidrograma y aguas abajo limnigrama

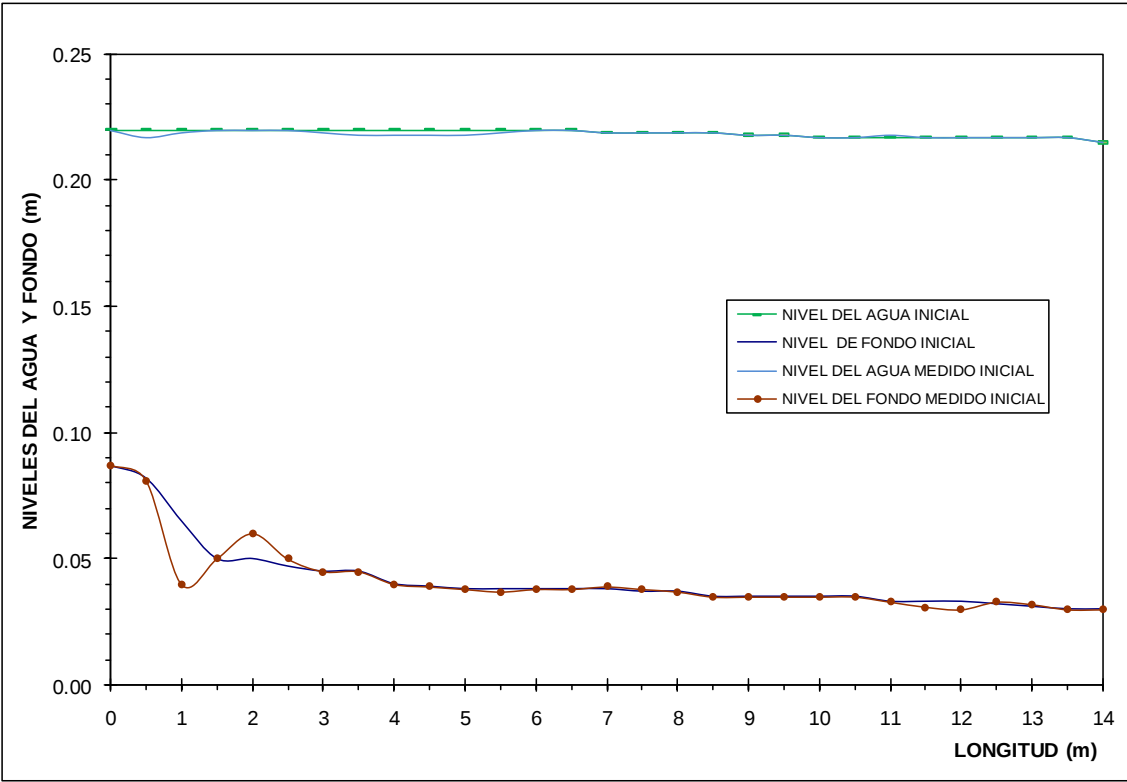


Figura 5.7 Perfiles iniciales

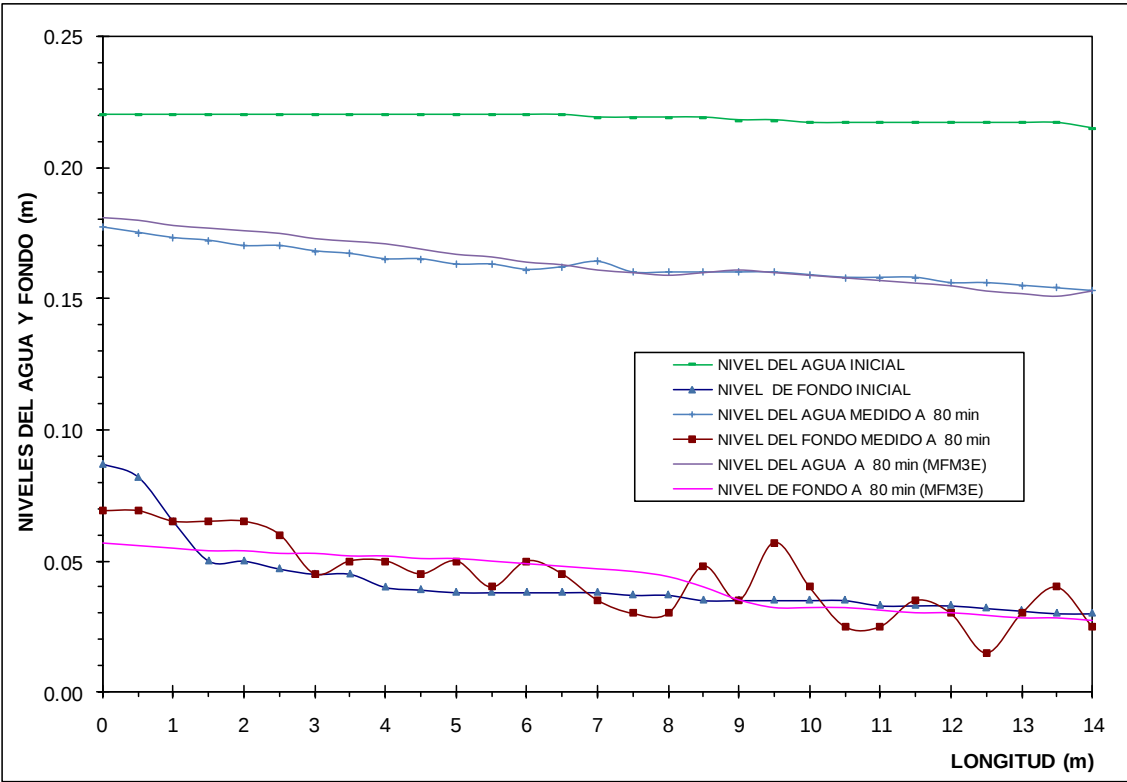


Figura 5.8 Perfiles a los 80 minutos

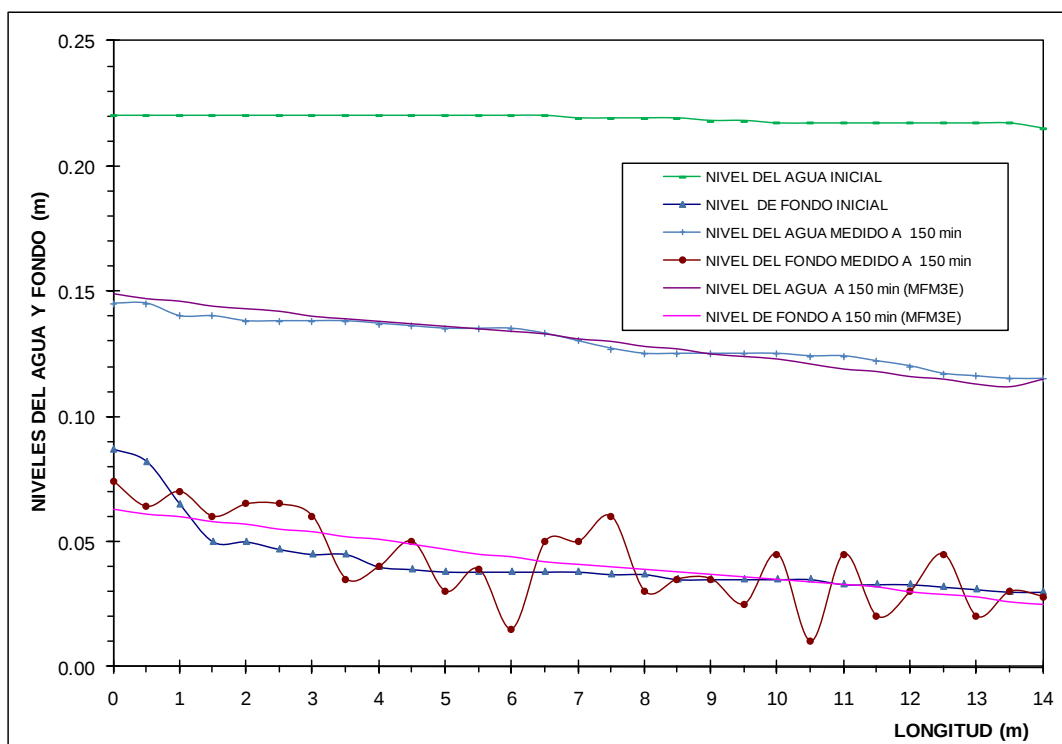


Figura 5.9 Perfiles a los 150 minutos

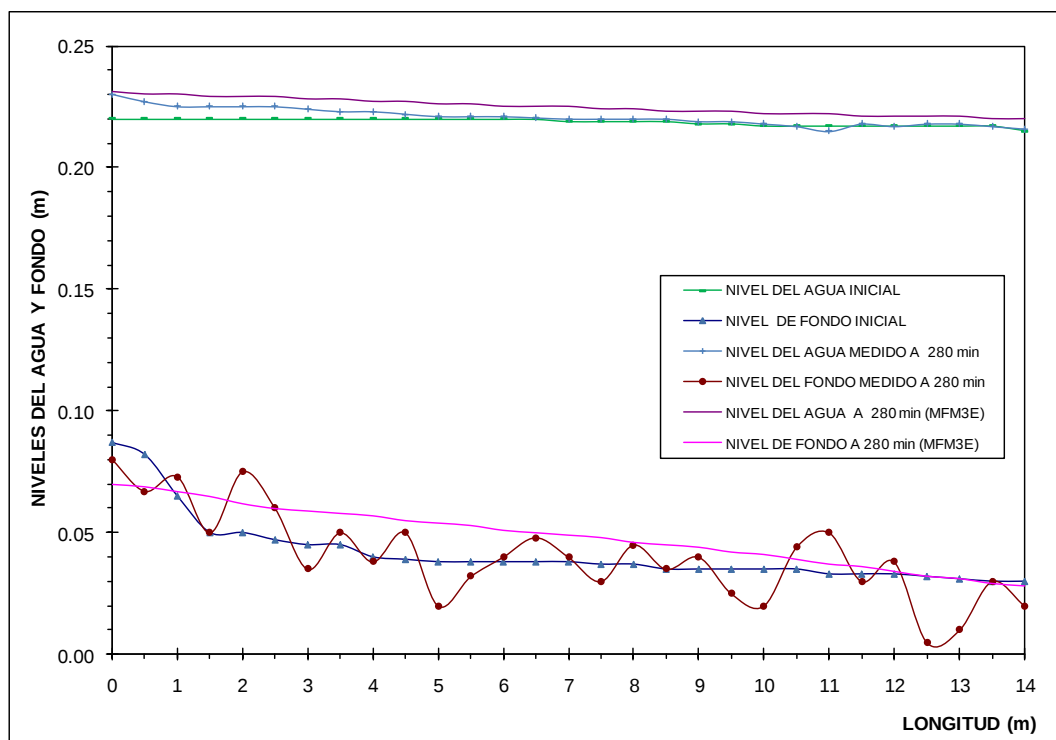


Figura 5.10 Perfiles a los 280 minutos

Este caso reportado por Correia es de los pocos en que se ha medido en flujo no permanente. La concordancia en el tiempo entre los valores medidos y calculados es aceptable, tanto para los tirantes como para la evolución del fondo.

6 CONCLUSIONES

Se validó el modelo numérico, ya que al compara los resultados de este modelo con las mediciones realizadas en laboratorio (Soni) y con los modelos acoplados de otros autores (Chaudhry y Correia) en sus investigaciones sobre este tema, fueron muy semejantes, además que el modelo aquí utilizado mostró una gran precisión y sensibilidad, para el análisis y la predicción del movimiento de fondo móvil en procesos de erosión y depositación en los ríos.

El método LU para la solución del sistema de ecuaciones formado por este modelo matemático fue más estable, aunque es menos eficiente en comparación con el método de solución de ecuaciones denominado de doble barrido.

El modelo que aquí se presenta es útil para predecir en el corto y largo plazo la evolución de zonas de erosión y sedimentación en tramos de ríos que resultan perjudiciales o dañinos, tales como erosiones pronunciadas, formación de islas o bancos, inundaciones, azolvamientos de los cauces y de las obras construidas en ellos; además, los datos requeridos por este modelo son pocos y relativamente fáciles de obtener. El gasto sólido y líquido son de los factores más importantes que intervienen en estos estudios, ya que de estos datos se observan las variaciones del curso y de sección transversal de los ríos.

Los problemas que se le presentan al ingeniero cuando trabaja con ríos y canales son generalmente muy complejos, ya que en ellos intervienen demasiados parámetros y efectos, los cuales muchas veces no son tomados en cuenta en un método de solución, al ser un parámetro constante se reduce el número de variables, lo cual hace más fácil el planteamiento del método matemático para poder estudiar el comportamiento y sus efectos de cambio del fondo del cauce a lo largo del tiempo.

En los ríos de México se han realizado estimaciones recientes de la erosión y sedimentación acelerada lo que causa la pérdida de capacidad del cauce; además, se tienen consecuencias no solo económicas, sino que involucran, en muchos casos los aspectos sociales, por lo que se requieren de análisis y estudios en donde pueden intervenir este modelo matemático para obtener soluciones con bajo costo y controlar estos efectos, con adecuados métodos de control.

BIBLIOGRAFÍA

Abbot, M.B.; "Computational Hydraulics", Pitman, London, 1979.

Berezowsky, V. M y Jiménez C. A., "Flujo no permanente en ríos", Capítulo 6 del Manual de Ingeniería de Ríos", Series del Instituto de Ingeniería 574, 1995.

Bhallamudi M. S. and Chaudhry H. M. "Numerical modeling of aggradation and degradation in alluvial channels", Journal of hydraulic engineering, February, 1992, ASCE.

Correia L R.P., Krishnappan B G., and Graf H Walter., "Fully coupled unsteady movable boundary flow model", Journal of hydraulic engineering, March, 1992, ASCE.

Cruickshank, C., Maza, J.A., "Flow resistance in sand bed channels", International Symposium on River Mechanics, IAHR, Bangkok, Thailand, January, 1973.

Cunge, J.A., Holly,Jr, "Practical aspects of computacional rivers hydraulics", Société Grenobloise d'Etuder et d'Applications, Hydrauliques, SOGREAH, Grenoble. Chapter 7.

Cunge, J.A., Perdreau, N.; "Mobile brd fluvial mathematics models", La Houllile Blanche, No. 7, 1973.

Engelund, F., Hansen, E.; "A monograph on sediment transport in alluvial streams", teknisk Forlag, Copenaghen, 1967.

Gracia, J., "Modelo matemático para simular el funcionamiento hidráulico de cauces con arrastre de sedimento", Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, 1981.

Kassem A. A. and Chaudhry H, "Comparison of coupled and semicoupled numerical models for alluvial channels", Journal of Hydraulics Engineering, August 1998. ASCE.

Krishnappan, B. G., "Modelling of unsteady flows in alluvial streams", Journal of Hydraulics Engineering, February, 1985, ASCE.

Lara F. M. A., "Modelo matemático para la simulación de algunos aspectos morfológicos de ríos", Tesis de Maestría, 1985, UNAM, Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Liggett, W., and Cunge, J.A., "Numerical methods of solution of the unsteady flow equations in unsteady flow in open channels", Edited by K. Mahmood and V. Yevjevich, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA, 1975.

Mahmood, K., Yevjevich, V.; "Unsteady flow in open channels", Vol. 1, WRP, Fort Collins, Colorado, 1975.

Maza A. J. A y Gracia S. J., "Morfología de ríos", Capítulo 11 del Manual de Ingeniería de Ríos, Series del Instituto de Ingeniería 590, Junio 1997.

Maza, J. A., Camargo, J., Franco, V., "Hidráulica Fluvial", Cap. A.2.11 del Manual de diseño de obras civiles de la C.F.E., México, 1981.

Maza A, J. A, García F. M. "Transporte de sedimentos", Capítulo 10 del Manual de Ingeniería de Ríos, Series del Instituto de Ingeniería, No. 584, Diciembre 1996.

Soni J P., Garde R J. and Ranga R K.G., "Aggradation in streams due to overloading", Journal of Hydraulics Engineering, January, 1980, ASCE.

Tarela A P., Menéndez N. A, Bombardelli A F. y Jaime P, "Metodología para la predicción de la evolución bidimensional de lechos fluviales", Instituto Nacional del agua y del Ambiente (INA – ex INCyTH - Argentina), XVIII Congreso latinoamericano de hidráulica, Oaxaca, México, 1998.

Weiming W. "River Dynamics", National Center for Computational Hydroscience and Engineering, University of Mississippi, MS, USA. Ed. Taylor and Francis.

Apéndice A.-Derivadas parciales de S_f con respecto a h .

Fórmula de Manning

Fórmula de Chezy

Formulación de Cruickshank-Maza

Formulación de Engelund

Criterios de cálculo de la resistencia al flujo

Apéndice B.- Método de Engelund

Apéndice C.- Método de Cruickshank-Maza

Transporte de sedimentos

Apéndice D.- Método de Engelund

Apéndice E.- Método de Ackers – White

Apéndice F.- Método de Brownlie

Apéndice A.- Derivadas parciales de S_f con respecto a h .

Fórmula de Manning.

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = -S_f \left[\frac{4}{3} \frac{1}{R} + 2 \frac{B}{A} \right] \quad \text{A. 1}$$

Fórmula de Chezy

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = -S_f \left[\frac{1}{R} + 2 \frac{B}{A} \right] \quad \text{A. 2}$$

Formulación de Cruickshank-Maza

Régimen inferior

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = -S_f \left[\frac{1.39}{h} + 2.193 \frac{B}{A} \right] \quad \text{A. 3}$$

Régimen superior

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = -S_f \left[\frac{1.83}{h} + 2.841 \frac{B}{A} \right] \quad \text{A. 4}$$

Transición

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = -0.35 \frac{S_f}{h} \quad \text{A. 5}$$

Formulación de Engelund

Fondo plano

$$\theta \leq 0.055 \quad \text{ó} \quad \theta \geq 1.080$$

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = -S_f \left[\frac{5}{4h} + 2 \frac{B}{A} \right] \quad \text{A. 6}$$

Dunas,

$$0.055 < \theta < 1.08$$

$$\frac{\partial S_f}{\partial h} = \frac{-S_f}{1 + \frac{5}{4}(b-1)} \left[\frac{\frac{5}{4}b}{h} + 2 \frac{B}{A} \right] \quad \text{A. 7}$$

Transporte de sedimentos. Se utiliza la ec. de Engelund

$$\frac{\partial G}{\partial S_f} = \frac{3}{2} \frac{G}{S_f} \quad \text{A. 8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial h} = -\frac{1}{2} \frac{G}{h} \quad \text{A. 9}$$

Apéndice B.- Resistencia al flujo método de Engelund

Formulación de Engelund. Cálculo de la pendiente de fricción así como de sus derivadas parciales con respecto al gasto y al tirante.

El método desarrollado por Engelund y Hansen está dado por las expresiones siguientes:

$$\frac{V}{V_*'} = 9.45 \left[\frac{R'}{2 D_{65}} \right]^{1/8} \quad \text{B. 1}$$

$$V_*' = \sqrt{g R' S} \quad \text{B. 2}$$

$$\theta' = \frac{R' S}{\Delta D_{35}} \quad \text{B.3}$$

$$\theta = \frac{h S}{\Delta D_{35}} \quad \text{B.4}$$

$$Q = T h V \quad \text{B.5}$$

$$\theta' = 0.06 + 0.4 \theta^2 \quad \text{Para fondo cubierto con dun} \quad \text{B.6}$$

$$\theta' = \theta \quad \text{Para fondo plano} \quad \text{B.7}$$

Para el cálculo de la pendiente de fricción se tiene de B.1 y B.2

$$\frac{V}{\sqrt{g R' S}} = \frac{9.45}{2^{1/8}} \left(\frac{R'}{D_{65}} \right)^{1/8} = 8.666 \left(\frac{R'}{D_{65}} \right)^{1/8}$$

$$\frac{V}{\sqrt{g}} = \frac{8.666 (R')^{5/8} S^{1/2}}{D_{65}^{1/8}}$$

multiplicando y dividiendo por $D_{65}^{1/2}$ se tiene

$$\frac{V}{\sqrt{g D}} = 8.666 \left(\frac{R'}{D_{65}} \right)^{5/8} S^{1/2} \quad \text{B.8}$$

Por continuidad $Q = V A$

$$\frac{Q}{A \sqrt{g D_{65}}} = 8.666 \left(\frac{R'}{D_{65}} \right)^{5/8} S^{1/2}$$

La expresión para calcular la pendiente S es

$$S = \left(\frac{Q}{A \sqrt{g D_{65}} 8.666 \left(R' / D_{65} \right)^{5/8}} \right)^2$$

o bien

$$S = \frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(R' / D_{65} \right)^{5/4}} \quad \text{B.9}$$

En esta ecuación la relación R' / D_{65} depende de la configuración del fondo.

a) Fondo plano

En este caso

$$\theta' = \theta$$

De A.3 y A.4

$$\frac{R' S}{\Delta D_{35}} = \frac{h S}{\Delta D_{35}} \text{ por lo que } \frac{R'}{D_{35}} = \frac{h}{D_{35}} \quad \text{B.10}$$

Para establecer una relación entre las ecs B.9 y B.10 es necesario expresar al diámetro D_{35} como una función del diámetro D_{65} , esto se puede hacer directamente de la curva granulométrica del material o bien a partir de los diámetros característicos, suponiendo una cierta distribución granulométrica. A continuación se presenta el análisis para el caso particular de la distribución log-normal del material, siendo similar el desarrollo para otras distribuciones.

Cuando los logaritmos de los diámetros siguen una ley de distribución normal se dice que la distribución es log-normal y puede describirse mediante.

$$D_n = D_{50} \sigma_g^{Z_n} \quad \text{B.11}$$

D_n diámetro de la partícula por debajo del cual queda el n por ciento de la muestra de suelo en peso

σ_g desviación estándar geométrica que se define como:

$$\sigma_g = \frac{D_{84}}{D_{50}} = \frac{D_{50}}{D_{16}} = \sqrt{\frac{D_{84}}{D_{16}}} \quad \text{B.12}$$

Z_n variable aleatoria estándar. Es una variable aleatoria que tiene distribución normal, con media igual a cero y desviación estándar igual a uno.

Se tendría entonces de B.11

$$D_{35} = D_{50} \sigma_g^{Z_{35}} \rightarrow D_{50} = \frac{D_{35}}{\sigma_g^{Z_{35}}} \quad \text{B.13}$$

$$D_{65} = D_{50} \sigma_g^{Z_{65}} \rightarrow D_{50} = \frac{D_{65}}{\sigma_g^{Z_{65}}} \quad \text{B.14}$$

De la tabla mencionada se obtiene

$$Z_{65} = 0.38532$$

Igualando A.13 y A.14

$$\frac{D_{35}}{\sigma_g^{-0.38532}} = \frac{D_{65}}{\sigma_g^{0.38532}} \quad \text{B.15}$$

De donde

$$D_{35} = \sigma_g^{2Z_{35}} D_{65} \quad \text{B.16}$$

o bien

$$D_{35} = K D_{65} \quad \text{B.17}$$

Donde

$$K = \sigma_g^{2Z_{35}} \quad \text{B.18}$$

para otras distribuciones podría llegarse a expresiones similares a la ec B.17, donde K varía de acuerdo con los parámetros de cada una de ellas. Si se sustituye B.17 en B.10 se tiene

$$\frac{R'}{D_{35}} = \frac{R'}{K D_{65}} = \frac{h}{K D_{65}} \quad \text{por lo que}$$

$$\frac{R'}{D_{65}} = \frac{K h}{K D_{65}}$$

finalmente

$$\frac{R'}{D_{65}} = \frac{h}{D_{65}}$$

sustituyendo A.18 en A.9 se obtiene

$$S = \frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(\frac{h}{D_{65}} \right)^{5/4}} \quad \text{B.19}$$

que es la expresión para calcular la pendiente de fricción cuando se tiene fondo plano.

Para el cálculo de las derivadas parciales se tiene

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{1}{75.1 g A^2 D_{65} \left(\frac{h}{D_{65}} \right)^{5/4}} 2Q = \left(\frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(\frac{h}{D_{65}} \right)^{5/4}} \right) \frac{2}{Q}$$

entonces

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{2S}{Q} \quad \text{B.20}$$

de manera semejante

$$\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{Q^2}{75.1 g D_{65}} \left(A^{-2} \left(-\frac{5}{4} \left(\frac{h}{D_{65}} \right)^{-9/4} \frac{1}{D_{65}} \right) + \left(\frac{h}{D_{65}} \right)^{-5/4} (-2A^{-3} T) \right)$$

$$\text{donde } T = \frac{dA}{dh}$$

de donde puede llegarse a

$$\frac{\partial S}{\partial h} = S \left(-\frac{5}{4h} - \frac{2T}{A} \right) \quad \text{B.21}$$

Las expresiones anteriores son válidas cuando $\theta \leq 0.055$ o bien cuando $\theta > 0.6$. El primer caso corresponde a la presencia de fondo plano sin transporte y el segundo a fondo plano con transporte. Existen dos zonas en las que la función $\theta = \theta(\theta')$ no es univaluada; la primera de ellas se observa en la transición entre dunas y fondo plano en régimen inferior, ya que para un valor dado de R/D hay varios valores del gradiente de la línea de energía S correspondientes aun solo valor de la velocidad V (Fr_q).

La segunda zona se presenta en la transición de dunas a fondo plano en régimen superior, ya que para un valor dado de R/D se tienen dos valores del gradiente de la línea de energía, no correspondiente a fondo plano con transporte y otro a dunas.

b) Dunas

Para valores de $0.055 < \theta \leq 0.3$ se supone una relación simplemente valuada entre θ y θ' en la zona de dunas. Dicha relación es de la forma

$$\theta' = \alpha \theta^\beta \quad \text{B.22}$$

De B.3 y B.4

$$\frac{R' S}{\Delta D_{35}} = \alpha \left(\frac{h S}{\Delta D_{35}} \right)^\beta \quad \text{B.23}$$

$$\frac{R'}{D_{35}} = \frac{\Delta}{S} \alpha \left(\frac{h S}{\Delta D_{35}} \right)^\beta$$

Sustituyendo B.17 en B.23

$$\frac{R'}{D_{65}} = K \Delta \alpha \left(\frac{h}{\Delta D_{35}} \right)^\beta S^{\beta-1} \quad \text{B.24}$$

Para el cálculo de la pendiente de fricción S se sustituye la ec B.24 en B.9

$$S = \frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(K \Delta \alpha \left(\frac{h}{\Delta K D_{65}} \right)^\beta \right)^{5/4} S^{5/4(\beta-1)}}$$

$$S^{1+5/4(\beta-1)} = \frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(K \Delta \alpha \left(\frac{h}{\Delta K D_{65}} \right)^\beta \right)^{5/4}}$$

entonces

$$S = \left(\frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(K \Delta \alpha \left(\frac{h}{\Delta K D_{65}} \right)^\beta \right)^{5/4}} \right)^{\frac{1}{1+5/4(\beta-1)}} \quad \text{B.25}$$

La derivada de la pendiente respecto al gasto es

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{2}{1+5/4(\beta-1)} \frac{S}{Q} \quad \text{B.26}$$

Y la derivada de la pendiente respecto al tirante

$$\frac{\partial S}{\partial h} = S \left(\left(\frac{-5/4 \beta}{1+5/4(\beta-1)} \right) \frac{1}{h} + \left(\frac{-2}{1+5/4(\beta-1)} \right) \frac{T}{A} \right) \quad \text{B.27}$$

Los valores que se determinaron para α y β son

$$\alpha = 0.143 \quad \text{y} \quad \beta = 0.328$$

Para valores de $0.3 < \theta < 1$ se emplea la expresión propuesta por Engelund

$$\theta' = 0.06 + 0.4 \theta^2 \quad \text{B.28}$$

Nuevamente de B.3 y B.4

$$\frac{R'}{D_{35}} = \frac{\Delta}{S} \left(0.06 + 0.4 \left(\frac{h}{D_{35}} \right)^2 \left(\frac{S}{\Delta} \right)^2 \right) \quad \text{B.29}$$

sustituyendo B.17 en B.29 se obtiene

$$\frac{R'}{D_{65}} = \frac{K \Delta}{S} \left(0.06 + 0.4 \left(\frac{h}{K D_{65}} \right)^2 \left(\frac{S}{\Delta} \right)^2 \right) \quad \text{B.30}$$

La expresión para el cálculo de la pendiente de fricción se obtiene de B.9 y B.30

$$S = \frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(\frac{K \Delta}{S} \right)^{5/4} \left(0.06 + 0.4 \left(\frac{h}{K D_{65}} \right)^2 \left(\frac{S}{\Delta} \right)^2 \right)^{5/4}} \quad \text{B.31}$$

cuya solución puede obtenerse como sigue

haciendo

$$C_1 = \left(\frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65}} \right)^{4/5} \quad \text{B.32}$$

de B.31

$$\frac{K \Delta}{S} \left(0.06 + 0.4 \left(\frac{h}{K D_{65}} \right)^2 \left(\frac{S}{\Delta} \right)^2 \right) = C_1 S^{-4/5}$$

o bien

$$0.06 + 0.4 \left(\frac{h}{\Delta K D_{65}} \right)^2 S^2 = C_2 S^{0.2} \quad \text{B.33}$$

donde

$$C_2 = \frac{C_1}{K \Delta} \quad \text{B.34}$$

Entonces

$$0.4 \left(\frac{h}{\Delta K D_{65}} \right)^2 S^2 = C_2 S^{0.2} - 0.06$$

$$\sqrt{0.4} \left(\frac{h}{\Delta K D_{65}} \right) S = \sqrt{C_2 S^{0.2} - 0.06}$$

finalmente

$$S = \frac{\Delta K D_{65}}{\sqrt{0.4} h} \sqrt{C_2 S^{0.2} - 0.06} \quad \text{B.35}$$

esta última ecuación se resuelve por aproximaciones sucesivas, obteniéndose así la pendiente de fricción S.

Para el cálculo de las derivadas se tiene, tomando la ec B.32 y B.34

$$C_1 = \left(\frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65}} \right)^{4/5}$$

$$C_2 = \frac{C_1}{K \Delta} = \frac{1}{K \Delta} \left(\frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65}} \right)^{4/5}$$

$$C_3 = \frac{K D_{65} \Delta}{\sqrt{0.4} h} \quad \text{B.36}$$

$$F = S - C_3 (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{1/2} \quad \text{B.37}$$

sea

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -C_3 \frac{1}{2} (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{-1/2} \left(S^{0.2} \frac{\partial C_2}{\partial Q} \right)$$

además

$$C_2 = \frac{1}{K \Delta} \left(\frac{1}{75.1 g A^2 D_{65}} \right)^{4/5} Q^{8/5}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial Q} = \frac{1}{K \Delta} \left(\frac{1}{75.1 g A^2 D_{65}} \right)^{4/5} \frac{8}{5} \frac{Q^{8/5}}{Q}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial Q} = \frac{8}{5} \frac{C_2}{Q}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{1}{2} C_3 (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{-1/2} \left(S^{0.2} \frac{8}{5} \frac{C_2}{Q} \right)$$

finalmente

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{4}{5} \frac{C_2 C_3^2 S^{0.2}}{Q S} = -\frac{4}{5} \frac{C_2 C_3^2}{Q S^{0.8}}$$

B.38

por otra parte

$$\frac{\partial F}{\partial h} = -\frac{C_3}{2} (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{-1/2} \left(S^{0.2} \frac{\partial C_2}{\partial h} \right) - (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{1/2} \frac{\partial C_3}{\partial h}$$

$$C_2 = \frac{1}{K \Delta} \left(\frac{Q^2}{75.1 g D_{65}} \right)^{4/5} A^{-8/5}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial h} = \frac{1}{K \Delta} \left(\frac{Q^2}{75.1 g D_{65}} \right)^{4/5} \left(-\frac{8}{5} A^{-8/5} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial h} \right)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial h} = -\frac{8}{5} \frac{C_2}{A} T$$

$$C_3 = \frac{K D_{65} \Delta}{\sqrt{0.4}} h^{-1}$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial h} = -\frac{K D_{65} \Delta}{\sqrt{0.4}} h^{-1} h^{-1} = -\frac{C_3}{h}$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{C_3}{2} (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{-1/2} \left(\frac{8 C_2}{5 A} T S^{0.2} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{C_3}{h} (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{1/2} + \frac{4 C_2 C_3^2 T S^{0.2}}{5 A S}$$

finalmente

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{S}{h} + \frac{4 C_2 C_3^2 T}{5 A S^{0.8}}$$

B.39

además

$$\frac{\partial F}{\partial S} = 1 - \frac{1}{2} C_3 (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{-1/2} (0.2 C_2 S^{-0.8})$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = 1 - \frac{0.1 C_2 C_3 (C_2 S^{0.2} - 0.06)^{-1/2}}{S^{0.8}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = 1 - \frac{0.1 C_2 C_3^2}{S^{1.8}}$$

B.40

entonces

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = - \frac{\partial F / \partial Q}{\partial F / \partial S} \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial h} = - \frac{\partial F / \partial h}{\partial F / \partial S}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{\frac{4 C_2 C_3^2}{5 Q S^{0.8}}}{1 - \frac{0.1 C_2 C_3^2}{S^{1.8}}}$$

B.41

$$\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{\frac{S}{h} + \frac{4 C_2 C_3^2 T}{5 A S^{0.8}}}{1 - \frac{0.1 C_2 C_3^2}{S^{1.8}}}$$

Apéndice C.- Resistencia al flujo método de Cruickshank-Maza.

Formulación de Cruickshank-Maza. Cálculo de la pendiente de fricción así como de sus derivadas parciales con respecto al gasto y al tirante.

Para régimen inferior

$$U = 7.58 \omega_{50} \left(\frac{h}{D_{50}} \right)^{0.634} \left(\frac{S}{\Delta} \right)^{0.456} \quad \text{C. 1}$$

que se cumple si

$$\frac{1}{S} \geq 83.5 \left(\frac{h}{\Delta D_{84}} \right)^{0.35} \quad \text{C. 2}$$

Para régimen superior

$$U = 6.25 \omega_{50} \left(\frac{h}{D_{84}} \right)^{0.644} \left(\frac{S}{\Delta} \right)^{0.352} \quad \text{C. 3}$$

que se cumple si

$$\frac{1}{S} \leq 66.5 \left(\frac{h}{\Delta D_{84}} \right)^{0.382} \quad \text{C. 4}$$

Lo anterior se aplica a materiales granulares siempre y cuando $D_{50} < 2 \text{ mm}$

Por continuidad $U = \frac{Q}{A}$ y despejando la pendiente S, para régimen inferior se obtiene

$$S = \left(\frac{Q}{7.58 A \omega_{50} \left(\frac{h}{D_{84}} \right)^{0.634}} \right)^{2.193} \Delta \quad \text{C. 5}$$

que también se puede expresar

$$S = \left(\frac{1}{7.58 A \omega_{50} \left(\frac{h}{D_{84}} \right)^{0.634}} \right)^{2.193} \Delta Q^{2.193} \quad \text{C. 6}$$

que es la expresión para el cálculo de la pendiente de fricción S cuando se presenta el régimen inferior.

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = 2.193 \frac{S}{Q} \quad \text{C. 7}$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = S \left(-\frac{1.39}{h} - 2.193 \frac{T}{A} \right) \quad \text{C. 8}$$

en forma similar, para régimen superior se tiene

$$S = \left(\frac{Q}{6.25 A \omega_{50} \left(\frac{h}{D_{84}} \right)^{0.644}} \right)^{2.841} \Delta \quad \text{C. 9}$$

o bien

$$S = \left(\frac{1}{6.25 A \omega_{50} \left(\frac{h}{D_{84}} \right)^{0.644}} \right)^{2.841} \Delta Q^{2.841}$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = 2.841 \frac{S}{Q} \quad \text{C. 10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = S \left(-\frac{1.83}{h} - 2.841 \frac{T}{A} \right) \quad \text{C. 11}$$

Apéndice D.- Transporte de sedimentos método de Engelund

Para valuar G se emplea la fórmula de Engelund, que puede expresarse como

$$G = C_1 Q^2 S^{3/2} h^{-1/2} \quad \text{D. 1}$$

Donde

$$C_1 = \frac{1}{20 B \sqrt{g} D_{50} A^2} \quad \text{D. 2}$$

donde, de (D.1)

$$\frac{\partial G}{\partial Q} = C_1 S^{3/2} h^{-1/2} (2Q) = \frac{2G}{Q} \quad \text{D. 3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = C_1 Q^2 h^{-1/2} \left(\frac{3}{2} S^{1/2} \right) = \frac{3}{2} \frac{G}{S} \quad \text{D. 4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial h} = C_1 Q^2 S^{3/2} \left(-\frac{1}{2} h^{-3/2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{G}{h} \quad \text{D. 5}$$

Apéndice E.- Transporte de sedimentos método de Ackers y White

Fórmula de Ackers-White, donde el gasto sólido está dado por:

$$G = \frac{B_s * U * D_{35} * GGR}{\left(\frac{U_{STAR}}{U} \right)^{ENE}} \quad \text{E. 1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial Q} = \frac{2G}{Q} \quad \text{E. 2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = -\frac{1}{2} \frac{G}{\left(S * ENE * \left(\frac{EME}{TR + 1} \right) \right)} \quad \text{E. 3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial h} = \frac{G}{\left(RH * \left(1.5 * ENE + 1 + \left(\frac{EME}{TR} \right) * \left(1.5 * ENE - 1 + (ENE - 1) * \left(\frac{0.4343}{\log(YAD)} \right) \right) \right) \right)} \quad \text{E. 4}$$

Apéndice F.- Transporte de sedimentos método de Brownlie

Fórmula de Brownlie, donde el gasto sólido está dado por:

$$\frac{\partial G}{\partial Q} = G \left(\frac{1.978 \left(\frac{FGAC}{U} \right)}{(FGAC - FGCR) + 1.0} \right) \quad \text{F. 1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial h} = -0.3301 \frac{G}{h} \quad \text{F. 2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0.6601 \frac{G}{S} \quad \text{F. 3}$$

NOTACIÓN

U velocidad media, en m/s

ω_{50} velocidad de caída de las partículas con diámetro D_{50} , en m/s

D_i diámetro de la partícula por debajo del cual queda el $i\%$ de la muestra de suelo en peso

h tirante medio, en m

S pendiente de fricción o gradiente de la línea de energía

Δ gravedad específica del sedimento sumergido, definida como

$$\Delta = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}$$

donde

γ_s peso específico del sedimento

γ peso específico del agua

A área de la sección transversal al flujo, en m^2

T ancho de la superficie libre, en m

Q gasto líquido, en m^3/s

V velocidad media del flujo

V_*' velocidad de fricción relativa a los granos del fondo

R' radio hidráulico relativo a los granos del fondo

g aceleración de la gravedad

h tirante de flujo

θ valor adimensional del esfuerzo cortante total actuando en el fondo

θ' valor adimensional del esfuerzo cortante efectivo (debido a la fricción inducida por los granos), que actúa en el fondo

Apéndice G.- Estructuración del modelo de fondo móvil para tres ecuaciones

a) Programa principal

Controla la llamada de subrutinas para lectura e impresión de datos, y formación de la matriz durante el cálculo; se imprimen resultados.

b) Subrutina DATA

Se utiliza para leer e imprimir los datos del problema a resolver.

c) Subrutina CONST

Calcula algunas constantes contenidas en los coeficientes de las ecs 2.1, 2.2 y 2.3.

d) Subrutina GEOM

Calcula las características geométricas de la sección transversal del cauce tales como el área, perímetro mojado, radio hidráulico y ancho de superficie libre.

e) Subrutina MANN

Calcula la pendiente de fricción S mediante la fórmula de Manning.

Se calculan las derivadas parciales de la pendiente S con respecto al gasto Q y al tirante h

f) Subrutina CHEZY

Calcula la pendiente de fricción S con la fórmula de Chézy, así como sus derivadas con respecto al gasto Q y al tirante h

g) Subrutina ENGEL

Calcula la pendiente de fricción S con el criterio de Engelund- Hansen, así como sus derivadas con respecto al gasto Q y al tirante h .

h) Subrutina CRUMAZ

Calcula la pendiente de fricción S con el criterio de Cruickshank-Maza, así como sus derivadas parciales con respecto al gasto Q y al tirante h .

i) Subrutina SEDIM

Calcula el gasto sólido G mediante la expresión de Engelund, así como sus derivadas parciales con respecto al gasto líquido Q , a la pendiente de fricción S y al tirante h .

j) Subrutina CONLIQ

Se obtienen los coeficientes de la ecuación de continuidad del líquido.

k) Subrutina CANMOV

Se obtienen los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento del líquido

l) Subrutina CONSED

Se obtienen los coeficientes de la ecuación de continuidad del sedimento.

m) Subrutina LU

Se obtiene la solución del sistema de ecs 4.7 mediante el algoritmo de descomposición LU.

n) Subrutina IMPRE

Se utiliza para imprimir los resultados obtenidos.

o) Subrutina INTERP

Se emplea para hacer interpolación lineal entre los puntos del hidrograma y del sedimentograma en el extremo aguas arriba y calcular el gasto que corresponde al instante señalado. También se interpola entre los puntos que definen la variación de la superficie

libre del agua en el extremo aguas abajo para calcular el tirante correspondiente al instante señalado.

Entrada de datos

Titulo

DT, TMAX, G

NTOTR. número total de tramos de río

NUMP frecuencia de impresión

INIMP índice para impresión de iteraciones

INIMP=0 imprime resultados de la 2da. iteración

INIMP=1 imprime resultados de las iteraciones 1 y 2

EPS porosidad del sedimento

DL densidad relativa del material sólido

DT incremento de tiempo, en s

TMAX tiempo máximo de cálculo, en h

G aceleración de la gravedad, en m/s^2

DX(I) incremento en el espacio, en m (longitud de cada tramo)

BE(J) ancho del fondo del río en el nudo j

TAL(J) talud de las paredes en el nudo j

BS(J) ancho promedio para el transporte de sedimento en el nudo j

Q(J) gasto líquido inicial en el nudo j

Z(J) cota del fondo inicial en el nudo j

H(3) elevación de la superficie libre del agua inicial en el nudo j

D35 del material sólido

D50 del material sólido.

D65 del material sólido

D84 del material sólido

NUMP número de puntos que definen el hidrograma de entrada

NHCTE índice que determina la variación de la elevación de la superficie libre del agua en el extremo aguas abajo para un valor de H constante para H variable

NUMH número de puntos que definen la variación de H en la frontera aguas abajo

TPH(I) tiempo en el que se da el valor de H, en h

HF (I) elevación de la superficie libre del agua en la frontera, en m

NUMS número de puntos del sedimentograma de entrada

TPS(I) tiempo al que se da el gasto sólido, en h

GSAV(I) gasto de sólidos, en m^3/s

TETA factor de peso en el tiempo usado solución en el esquema

NU viscosidad cinemática del agua, en m^2/s

IFRIC índice para determinar el criterio de cálculo de la pendiente de fricción

IFRIC=1 fórmula de Manning

IFRIC=2 fórmula de Chézy

IFRIC=3 método de Engelund-Hansen

IFRIC=4 método de Cruickshank-Maza

criterio de cálculo de la pendiente de fricción.

Si IFRIC=1

NMAN(J) coeficiente de rugosidad de Manning en el nudo j

Si IFRIC=2

CECH(J) coeficiente de rugosidad de Chézy en el nudo j

Si IFRIC=3

TENGs valor superior del parámetro e de Engelund que limita la zona de dunas

TENGm valor inferior del parámetro e de Engelund que limita la zona de dunas

TENGl valor del parámetro de Engelund a partir del cual se tiene fondo plano sin transporte

Salida de datos y resultados, se imprimen.

1. El título del problema
2. Datos generales de cálculo: DT, NTOTR, NINTS, NIMP, G (donde NINTS es el número de intervalos por simular y las demás variables ya se definieron)
3. Datos del sedimento y diámetros característicos
4. Condiciones de frontera (hidrograma y sedimentograma de entrada y elevación de la superficie libre del agua en la salida). Los siguientes datos se imprimen en los nudos partiendo del extremo aguas arriba ($j=1$) hasta el extremo aguas abajo ($j=jj$)
5. Datos del cauce: longitud de los tramos, ancho del fondo, talud de las paredes y ancho promedio para el transporte de sedimento
6. Condiciones iniciales: gasto líquido, elevación de la superficie libre del agua, cota del fondo, (si es el caso se imprime el coeficiente de rugosidad del fondo), configuración del fondo y gasto sólido)
7. Cada NIMP incrementos de tiempo se escriben para todos los nudos, los valores calculados de: elevación de la superficie libre del agua, tirante, cota del fondo, gasto líquido, gasto sólido y régimen de flujo