



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam
A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION
CONTINUA



La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar el Segundo Día de Clases, en las oficinas del Centro, con la Señorita Barraza, de lo contrario no será posible. El control de asistencia se efectuará a través de la persona encargada de entregar notas, en la mesa de entrega de material, mediante listas especiales. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, es importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción con los datos que se les solicitan al iniciarse el curso.

ATENTAMENTE

ING. SALVADOR MEDINA RIVERO

COORDINADOR DE CURSOS.

Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.

CURSOS DE MAESTRIA Y DOCTORADO

La División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, ofrece las siguientes Maestrías y Doctorados:

M a e s t r í a s

Control	Mecánica
Electrónica	Mecánica de Suelos
Estructuras	Petrolera
Hidráulica	Potencia
Investigación de Operaciones	Planeación Sanitaria
Mecánica teórica y Aplicada	

D o c t o r a d o s

Estructuras
Hidráulica
Mecánica de Suelos
Mecánica Teórica y Aplicada
Investigación de Operaciones

Programa de actividades para el segundo semestre de 1976

Exámenes de admisión: 10, 11 y 12 de mayo

Inscripciones: 31 de mayo al 4 de junio

Iniciación de clases: 7 de junio

Requisitos de admisión

a) Cumplir con una de las siguientes condiciones:

1. Poseer título profesional en Ingeniería o en alguna disciplina afín a las maestrías que se ofrecen en la División, otorgado por la UNAM o por cualquier institución nacional o extranjera.
2. Ser pasante de la Facultad de Ingeniería, UNAM

b) Aprobar los exámenes de admisión que se efectuarán en las fechas señaladas arriba.

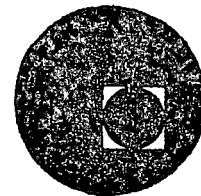
c) Presentar, dentro del período de inscripciones arriba mencionado, la documentación que se indica en el folleto de Actividades Académicas 1975 de la DESFI

Mayores informes: División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Apartado Postal 70-256, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. Tel.: 548-58-77

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, febrero 3. 1976



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



Y

MARC ANALYSIS RESEARCH CORPORATION

Curso intensivo:

"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE
EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS"

Marzo 15-19, 1976

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

P R O G R A M A

LUNES 15

- | | | |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 8:00 - 9:00 | Inscripciones. | |
| 9:00 - 9:30 | Apertura del curso. | Pedro Martínez Pereda |
| 9:30 - 10:30 | Introducción.
Antecedentes y estado actual
del conocimiento del Método
de Análisis por Elementos Fi-
nitos. | Porfirio Ballesteros B. |
| 10:30 - 11:00 | Receso (café y refrescos) | |
| 11:00 - 12:30 | Fundamentos de Algebra Ma-
tricial. | Porfirio Ballesteros B. |
| 12:30 - 14:30 | Receso (comida por cuenta participantes) | |
| 14:30 - 16:00 | Propiedades de rigidez del -
elemento. | Porfirio Ballesteros B. |
| 16:00 - 16:30 | Receso (café y refrescos) | |
| 16:30 - 18:00 | Método directo de las rigideces. | Porfirio Ballesteros B. |

MARTES 16

9:00 - 10:30 Método directo de las rigideces. Porfirio Ballesteros B.

10:30 - 11:00 Receso (café y refrescos)

11:00 - 12:30 Aplicación tri dimensional del elemento viga. Porfirio Ballesteros B.

12:30 - 14:30 Receso (comida por cuenta participantes)

14:30 - 16:00 Fundamentos de teoría de elasticidad. Porfirio Ballesteros B.

16:00 - 16:30 Receso (café y refrescos)

16:30 - 18:00 Fundamentos de teoría de elasticidad. Porfirio Ballesteros B.

MIERCOLES 17

- 9:00 - 10:30** Método directo en la formulación de la rigidez del elemento. Richard H. Gallagher.
- 10:30 - 11:00** Receso (café y refrescos)
- 11:00 - 12:30** Principio del trabajo virtual. Richard H. Gallagher.
- 12:30 - 14:30** Receso (comida por cuenta participantes)
- 14:30 - 16:00** Trabajo virtual y energía potencial en la formulación de la rigidez del elemento. Richard H. Gallagher.
- 16:00 - 16:30** Receso (café y refrescos)
- 16:30 - 17:00** Resumen de las clases del día y preguntas. Porfirio Ballesteros y Richard H. Gallagher.
- 17:00 - 18:00** Sesión de aplicación. Solución de problemas bidimensionales elástico-lineales. Porfirio Ballesteros B.

JUEVES 18

- 9:00 - 10:30 Selección de campo de desplazamiento del elemento. Richard H. Gallagher.
- 10:30 - 11:00 Receso (café y refrescos)
- 11:00 - 12:30 Elementos isoparamétricos. Richard H. Gallagher.
- 12:30 - 14:30 Receso (comida por cuenta participantes)
- 14:30 - 16:00 Esfuerzos planos y consideraciones gráficas de análisis. Richard H. Gallagher.
- 16:00 - 16:30 Receso (café y refrescos)
- 16:30 - 17:00 Resumen de las clases del día y preguntas. Porfirio Ballesteros y Richard H. Gallagher.
- 17:00 - 18:00 Sesión de aplicación. Análisis de conducción de calor. Tim J. Dwyer

VIERNES 19

9:00 - 10:30 Análisis tridimensional. Richard H. Gallagher

10:30 - 11:00 Receso (café y refrescos)

11:00 - 12:30 Flexión de placas y análisis de cascarones. Richard H. Gallagher

12:30 - 14:30 Receso (comida por cuenta participantes)

14:30 - 16:00 Análisis práctico. Ejemplos. Subestructuración y condiciones de apoyo. Richard H. Gallagher

16:00 - 16:30 Receso (café y refrescos)

16:30 Clausura y entrega de diplomas.

TENTATIVE OUTLINE - COURSE IN FINITE ELEMENT ANALYSIS: FUNDAMENTALS

Note: Proposed schedule is four lectures per day of 1 1/4 - 1 1/2 hour duration. Indicated sections refer to sections of text:
Finite Element Analysis: Fundamentals by R. Gallagher.

Monday, March 15. (In Spanish) P. Ballesteros.

1. Introductory remarks and background of finite element method.
2. Introductory matrix algebra.
3. Element stiffness properties. (Section 2.1-2.4.).
4. Direct stiffness method. (Section 3.1 - 3.2)

Tuesday, March 16 (In Spanish) P. Ballesteros.

1. Direct stiffness method (continued) (Section 3.3 - 3.4).
2. Application on tridimensional beam element.
3. Theory of Elasticity. (Section 4.1-4.3).
4. Theory of Elasticity. (Section 4.4-4.5).

Wednesday, March 17 (In English) R. Gallagher.

1. Direct method in element stiffness formulation. (Section 5.1-5.3).
2. Principle of Virtual work. (Section 6.1-6.2).
3. Virtual work and potential energy in formulation of element stiffness (Section 6.3-6.4).
4. Summary of day's lectures, in Spanish, and questions.

Thursday, March 18 (In English) R. Gallagher.

1. Selection of element displacement fields. (Section 8.1-8.4).
2. Isoparametric elements. (Section 8.8).
3. Plane stress and practical analysis considerations. (Section 9.1-9.3).
4. Summary of day's lectures, in Spanish, and questions.

Friday, March 19 (In English) R. Gallagher.

1. Three-Dimensional analysis. (Section 10.1-10.4).
2. Plate bending and shell analysis. (Section 12.1-12.3).
3. Practical analysis. Examples. Substructuring, constraints.

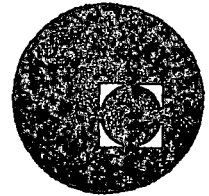
C

C

O



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



"FUNDAMENTAL CONCEPTS FOR ANALYSIS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD".

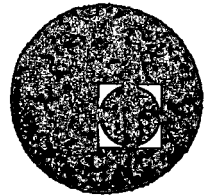
"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE EL
METODO DE ELEMENTOS FINITOS".

MARCH 15-19, 1976.
MARZO 15-19, 1976.

Director de la Facultad: M. en C. Ing. Enrique del Valle Calderón.
Jefe de la División: Dr. Octavio Rascón Chávez.
Jefe del C.E.C.: Dr. Pedro Martínez Pereda.



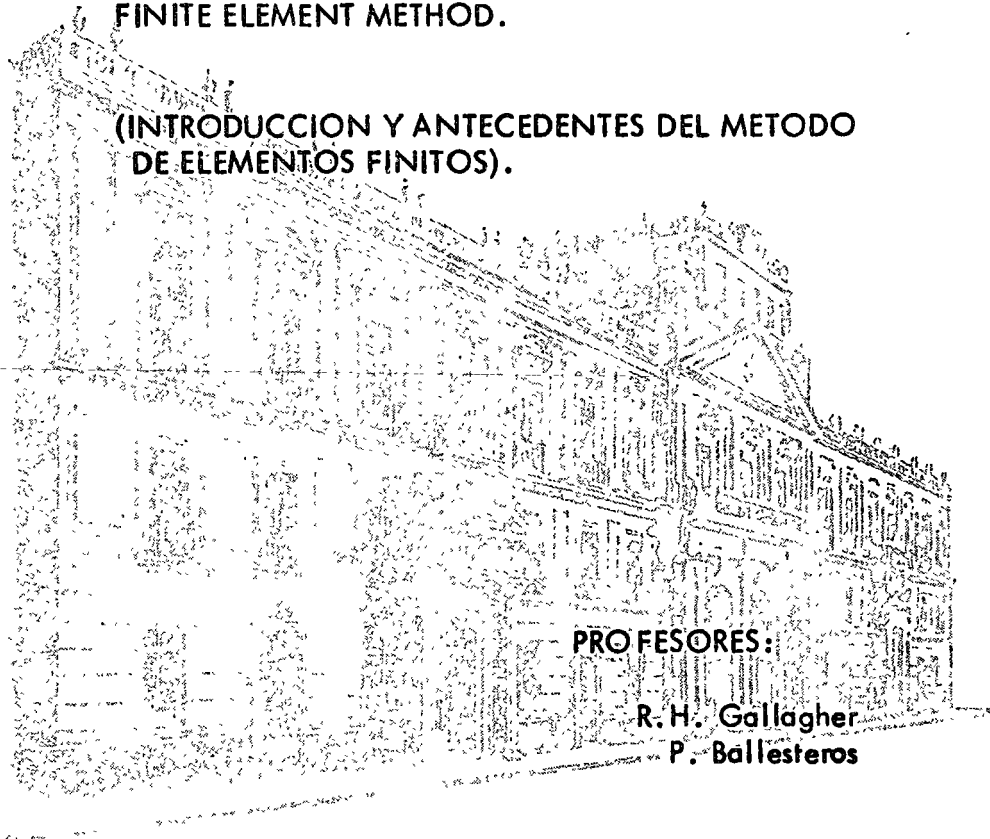
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



MONDAY, MARCH 15, 1976.

INTRODUCTORY REMARKS AND BACKGROUND OF
FINITE ELEMENT METHOD.

(INTRODUCCION Y ANTECEDENTES DEL METODO
DE ELEMENTOS FINITOS).



PROFESORES:

R. H. Gallagher
P. Ballesteros

COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

ANTECEDENTES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El Ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogéneo e isotrópico es

$$\nabla^2 \nabla^2 w \equiv \nabla^4 w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

donde w es la deflexión en el punto (x, y) , q es la intensidad de la carga en el punto (x, y) , y $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ es la rigidez flexionante de la

placa la cual depende del módulo de elasticidad E , el espesor de la placa h y la relación de Poisson ν . En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando

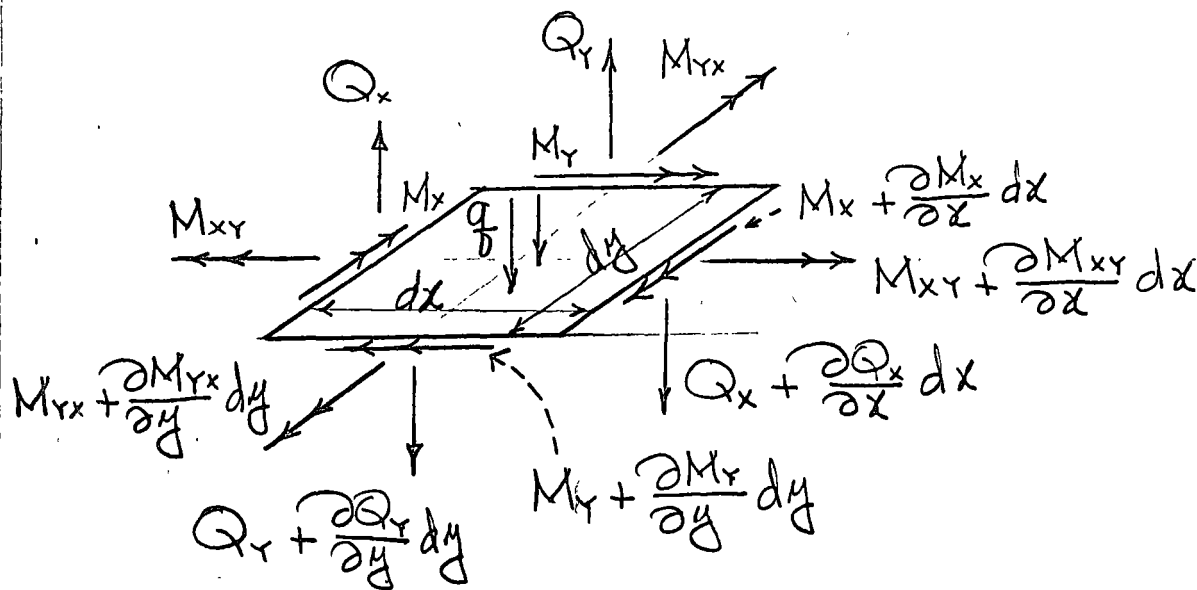
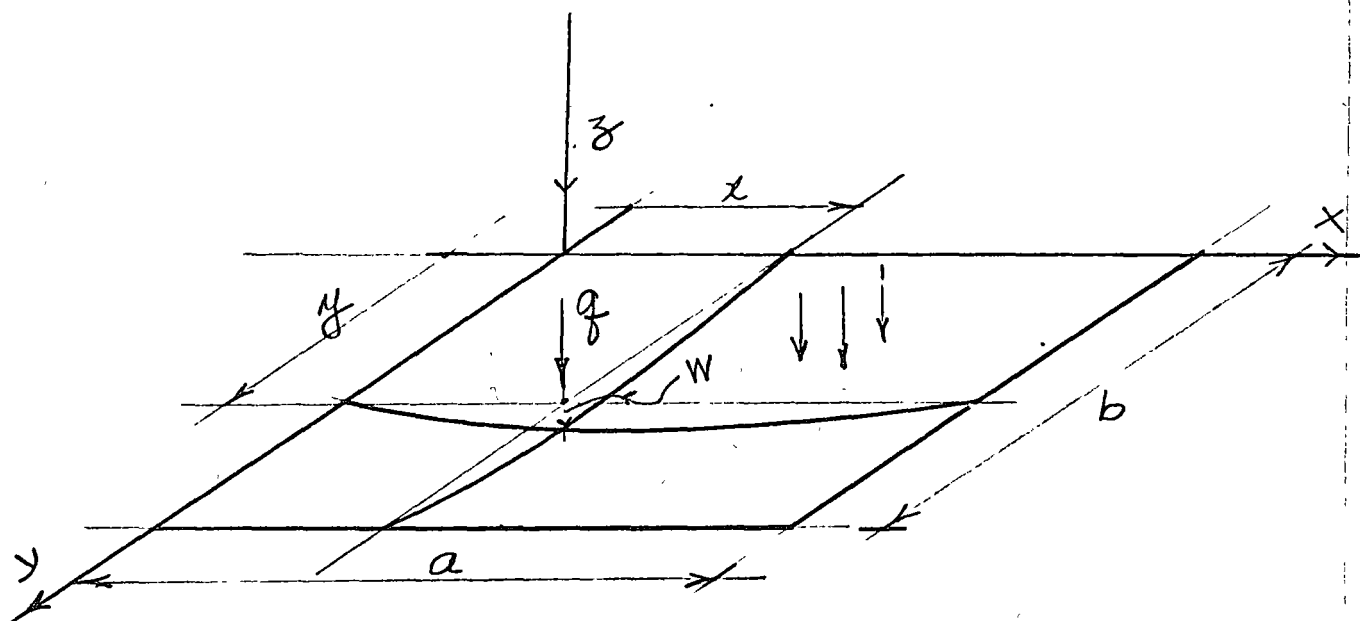


Fig 1 Placa rectangular a b. Acciones y reacciones de un elemento dx dy.

la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

(2)

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W$$

donde $\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, cuyas condiciones en la frontera (Fig. 2) son:

$$W(0, y) = 0$$

(3)

$$W_{xx}(0, y) + \nu W_{yy}(0, y) = 0$$

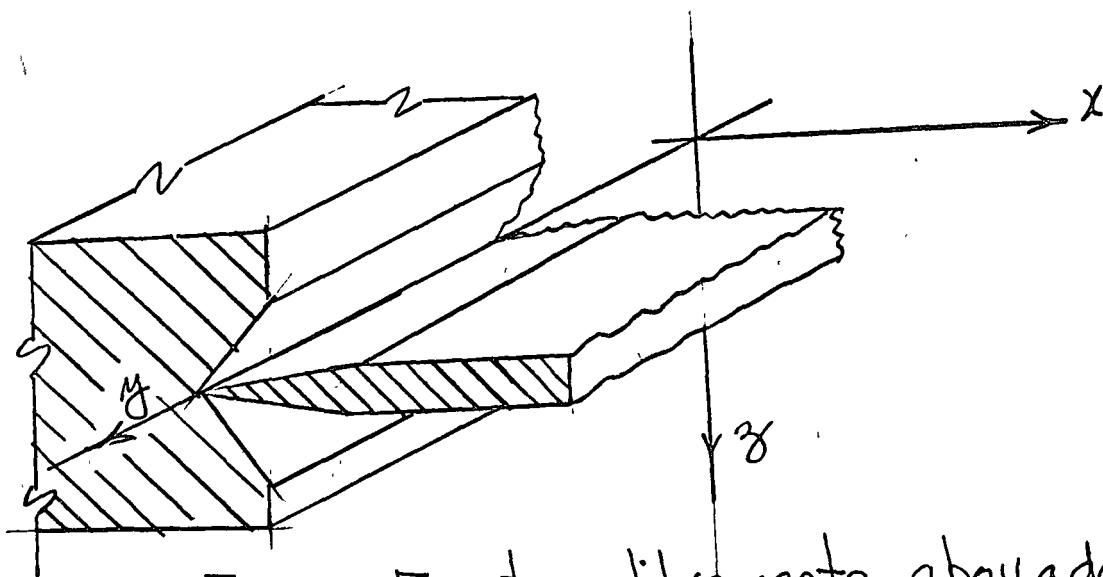


Fig. 2 Frontera libremente apoyada en $x=0$

Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga $q(x,y)$, por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

substituye (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica (1) como

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

en donde el coeficiente a_{mn} viene expresado por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \quad (6)$$

El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga $q(x,y)$ se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente a_{mn} el cual nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión $W(x,y)$, y por medio

las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes $\{M\}$ y $\{Q\}$. Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa rectangular libremente apoyada y con una función de carga $q(x,y)$ impar con respecto a x , y con respecto a y , es decir, $q(x,y) = -q(-x,y)$ y $q(x,y) = -q(x,-y)$. Si la función fuese par la representación de $q(x,y)$ sería mediante una serie de cosenos, y si $q(x,y)$ fuese una función cualquiera se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados (Fig. 3) e utiliza una serie trigonométrica simple

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (7)$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir

- (7) en (i) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en $f_m(y)$ con coeficientes constantes no homogénea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera $y = \pm b/2$, pero continua, limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras $x=0$ y $x=a$.

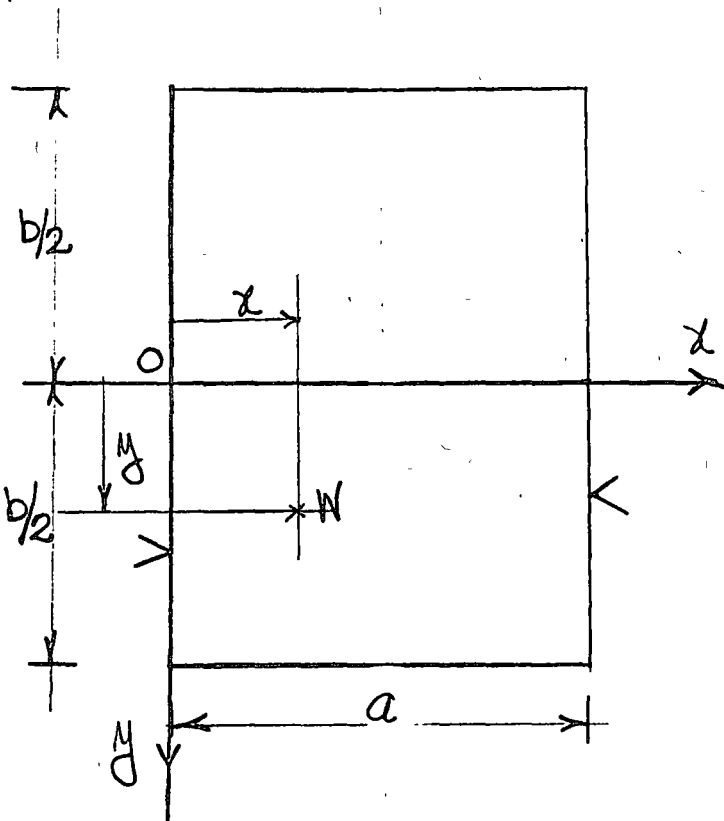


Fig 3 Posición de ejes en solución de M. Levy

- Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de Ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos

numéricos el cual presenta dos etapas de desarrollo.

Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo en el caso de análisis elástico lineal de placas podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verificar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff [Ref. 1] publicado en 1941, y el segundo a Mc Henry publicado en 1943 en

ambos trabajos (Fig 4) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidimensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

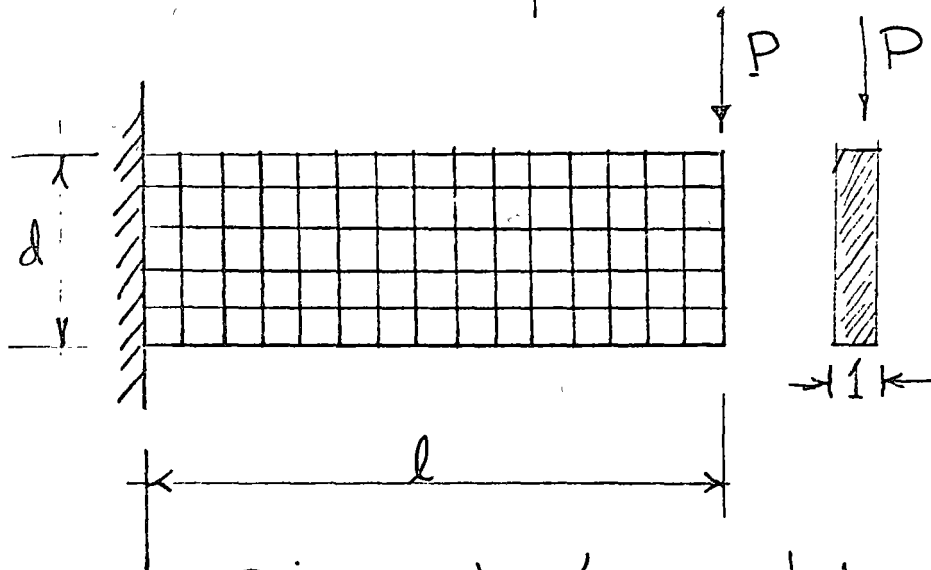


Fig 4 Primer solución presentada por Hrenikoff en 1941.

Posteriormente en 1949, Newmark en su libro de Métodos Numéricos [Ref. 3], presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo el crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp [Ref. 5], y no es, sino hasta 1960 con Clough, [Ref. 6] nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito", derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva

conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

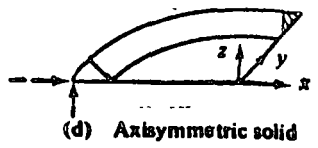
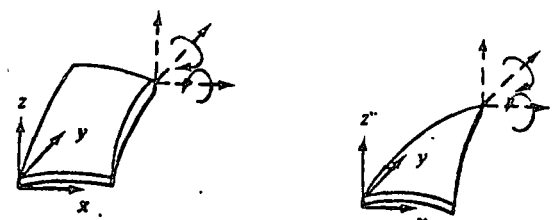
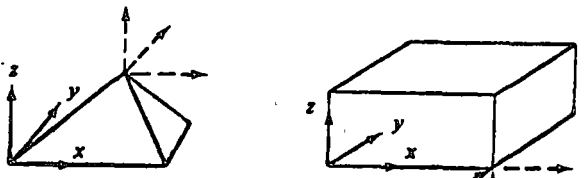
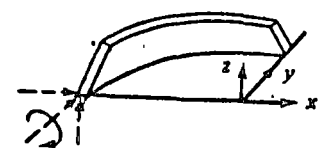
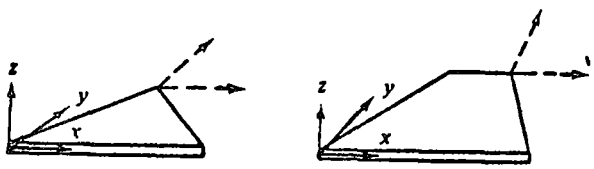
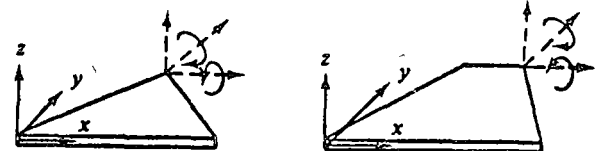
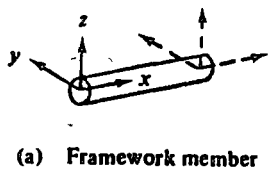
Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total o sea el proceso de Rayleigh-Ritz [Ref. 7] es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz [Ref. 13] y Wilson [Ref. 14] lo aplican en Mecánica de fluidos y en problemas de análisis de conducción de calor, se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito.

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un

○ medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones (los elementos finitos) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a travez de todo el medio, por lo tanto el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema

○ problema



(a) Framework member (b) Plane stress (c) Solid elements (d) Axisymmetric solid (e) Flat plate bending (f) Axisymmetric thin shell (g) Curved thin shells

Fig. 5 Tipos de elementos finitos

TIPOS DE ELEMENTOS

○ Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5

El elemento estructural simple, Fig. 5(a), es un miembro de la familia total de elementos finitos.

Cuando se usa con elementos del mismo tipo describe armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

○ Los elementos básicos en analisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano (condición de esfuerzos planos), triangulares y cuadrilateros se ilustran en la Fig. 5b. Se denominan básicos porque los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig 5(c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analiticamente problemas de mecánica de suelos, rocas, y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos

○ Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5(d). Una gran variedad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tanques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica. En la Fig. 5(d) se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

○ Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conexión con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada, Fig. 5(e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5(f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos sin embargo las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

○ Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada

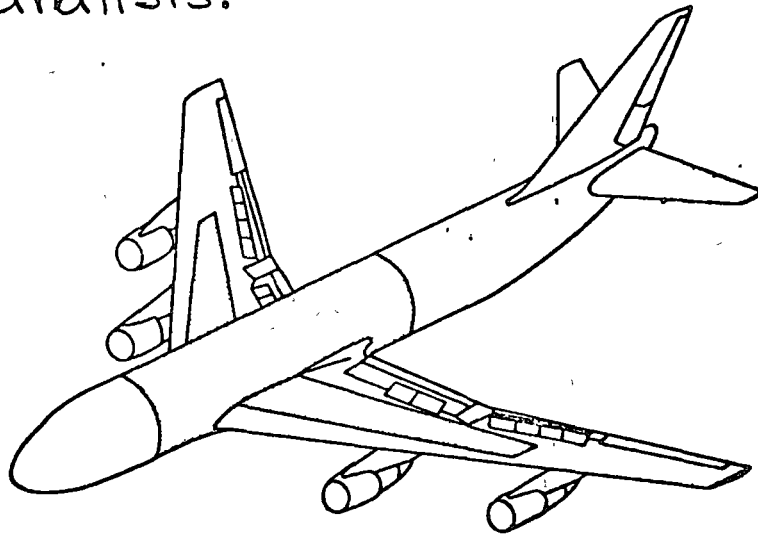
- representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS

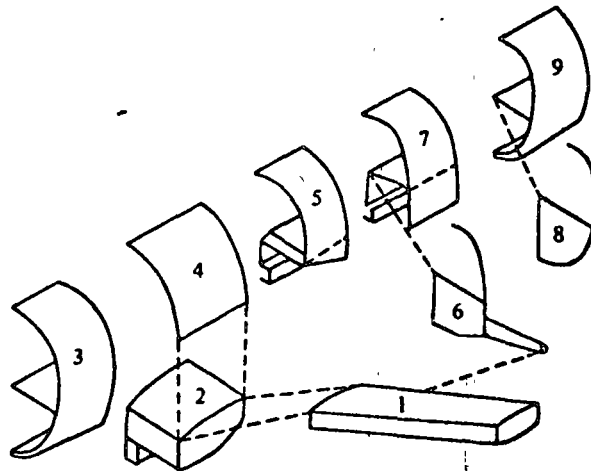
Examinaremos algunas aplicaciones del método de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

- El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y atiegadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos. Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que

que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los super-elementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.



a. Boeing 747 Aircraft. (Cross-hatched area indicates portion of the airframe analyzed by finite element method.)



b. Substructures for finite element analysis of cross-hatched region.

el esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Table 1.1 Summary of Finite Element Idealization of Center Section of 747 Aircraft (from Ref. 1.16).

Substructure	Description	Nodes	Unit* Loadcases	Beams	Plates	Interact† Freedom	Total Freedom
1	Wing	262	14	355	363	104	796
2	Wing Center	267	8	414	295	198	880
3	Body	291	7	502	223	91	1,026
4	Body	213	5	377	185	145	820
5	Body	292	7	415	241	200	936
6	Bulkhead	170	10	221	103	126	686
7	Body	285	6	392	249	233	909
8	Bulkhead	129	10	201	93	148	503
9	Body	286	7	497	227	92	1,038
Total		2,195	63	3,374	1,979	555	7,594

*Some unit loadcases involve more than one substructure.
†Several freedoms of substructure interface contribute to a single interaction freedom.

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

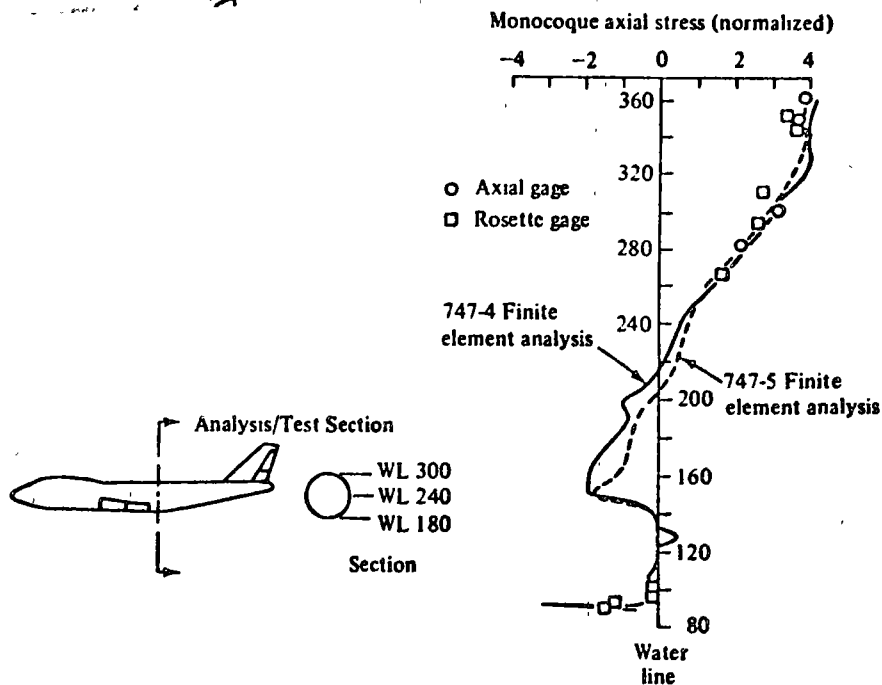


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

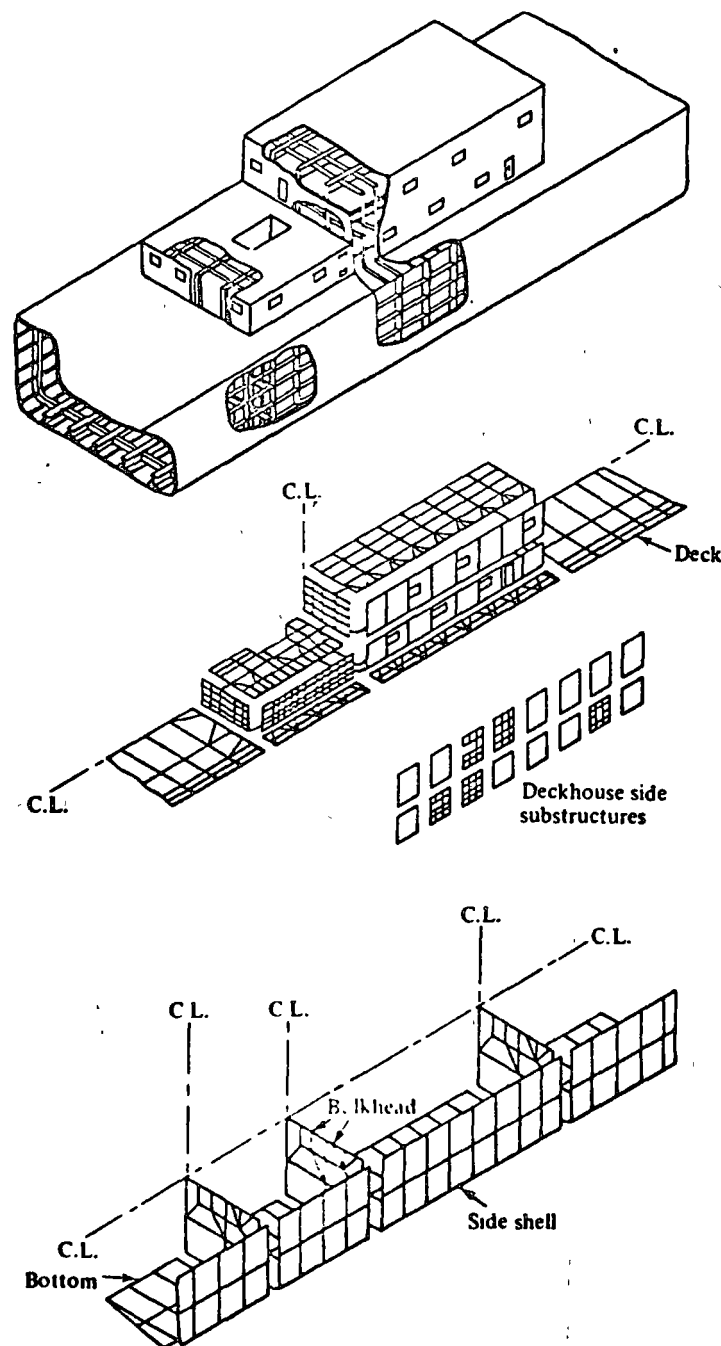
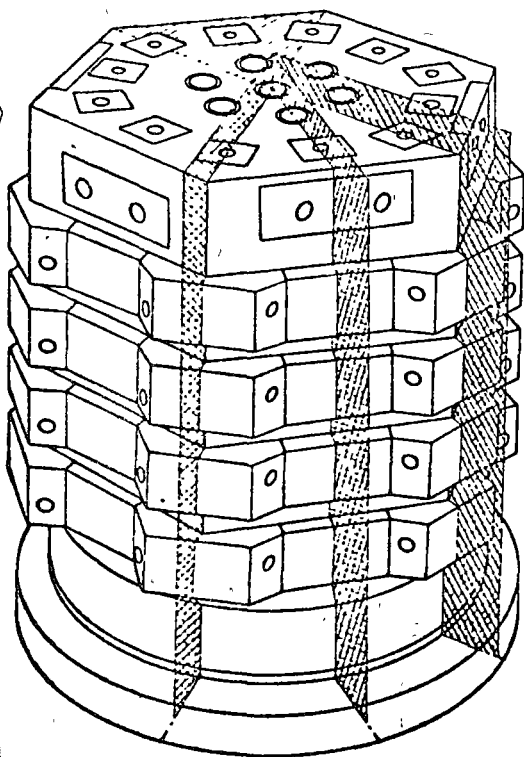
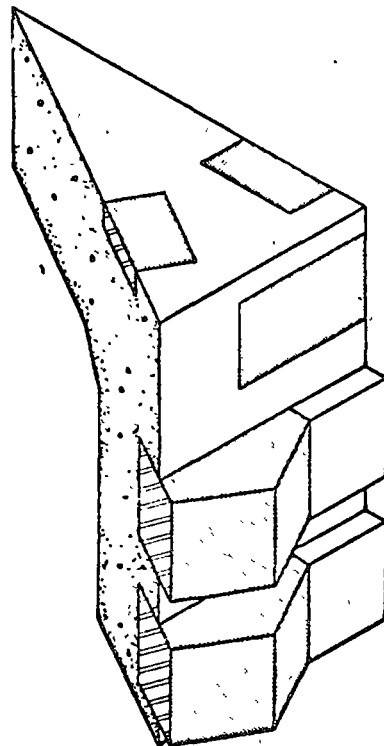


Fig. 8 Analisis por elemento finito de estructura de barco

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig 5(b), Elementos estructurales, Fig. 5(a), son empleados en la representación de la estructura interna. El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.



(a) Actual structure



(b) Octant of actual structure

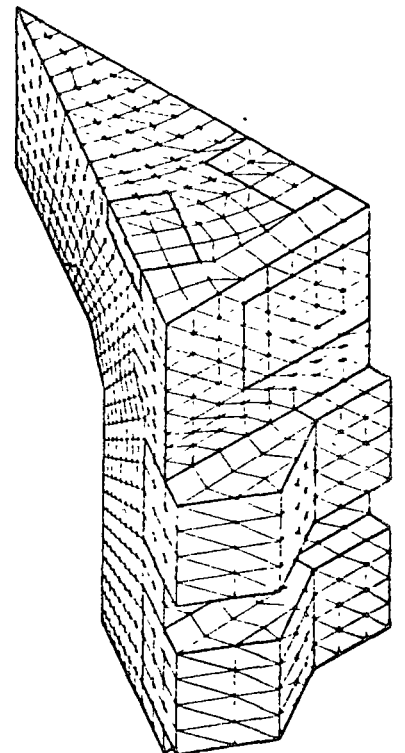
(c) Finite element idealization
(tetrahedral elements)

Fig. 9 Analisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado.

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9(a) un recipiente reactor de concreto prestresado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, Fig 9(b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetraedrales y hexaédricos, Fig 5(c). En problemas de este tipo el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las Figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería Civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones robadas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10(a) colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10(b). Y se obtiene una viga más aperaltada, reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño no es necesario el uso del método de elementos finitos.

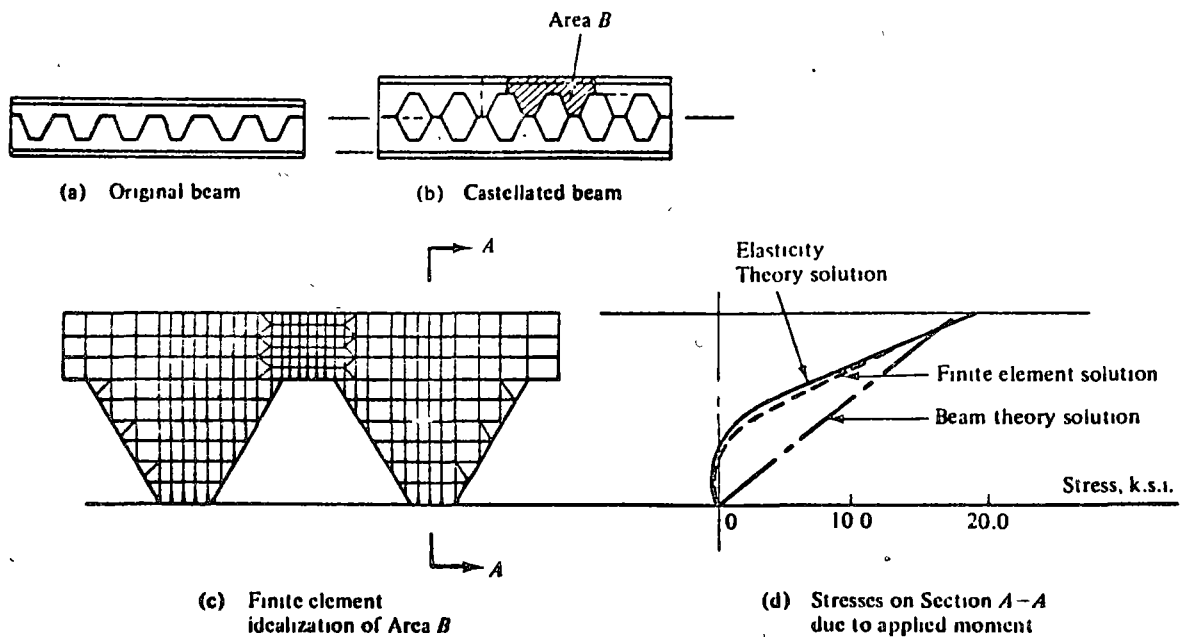
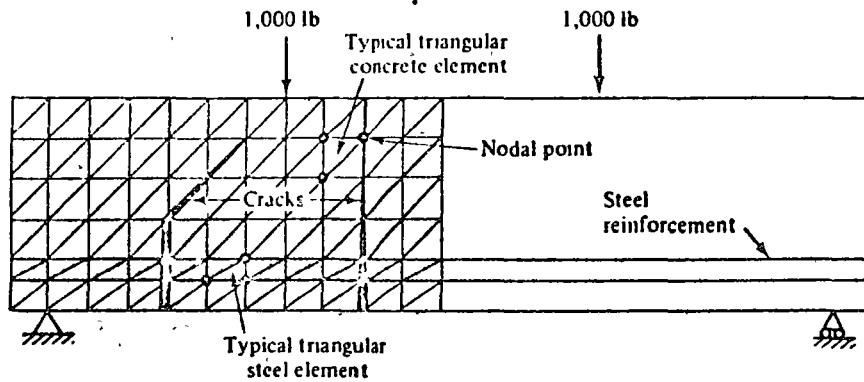


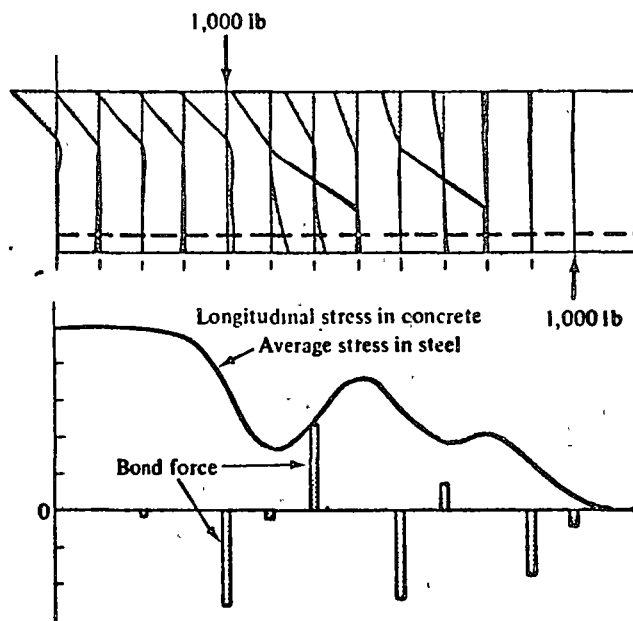
Fig. 10 Analisis de elementos finitos de una viga apertada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, Para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11(a) muestra el modelo analítico de elementos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11(b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se



(a) Finite element representation of concrete beam and reinforcement



(b) Calculated stress distributions

Fig. 11 Analisis por elementos finitos de una viga de Concreto reforzado.

requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidades elástica, mecánica de fluidos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas, Ejem., Ingeniería

Civil, Mecánica, Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volúmenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de Congresos y publicaciones periódicas correspondientes

PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medios Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es solo su capacidad, sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos

y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12 son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales. Fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o material, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar estereográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse

antes de efectuar los cálculos.

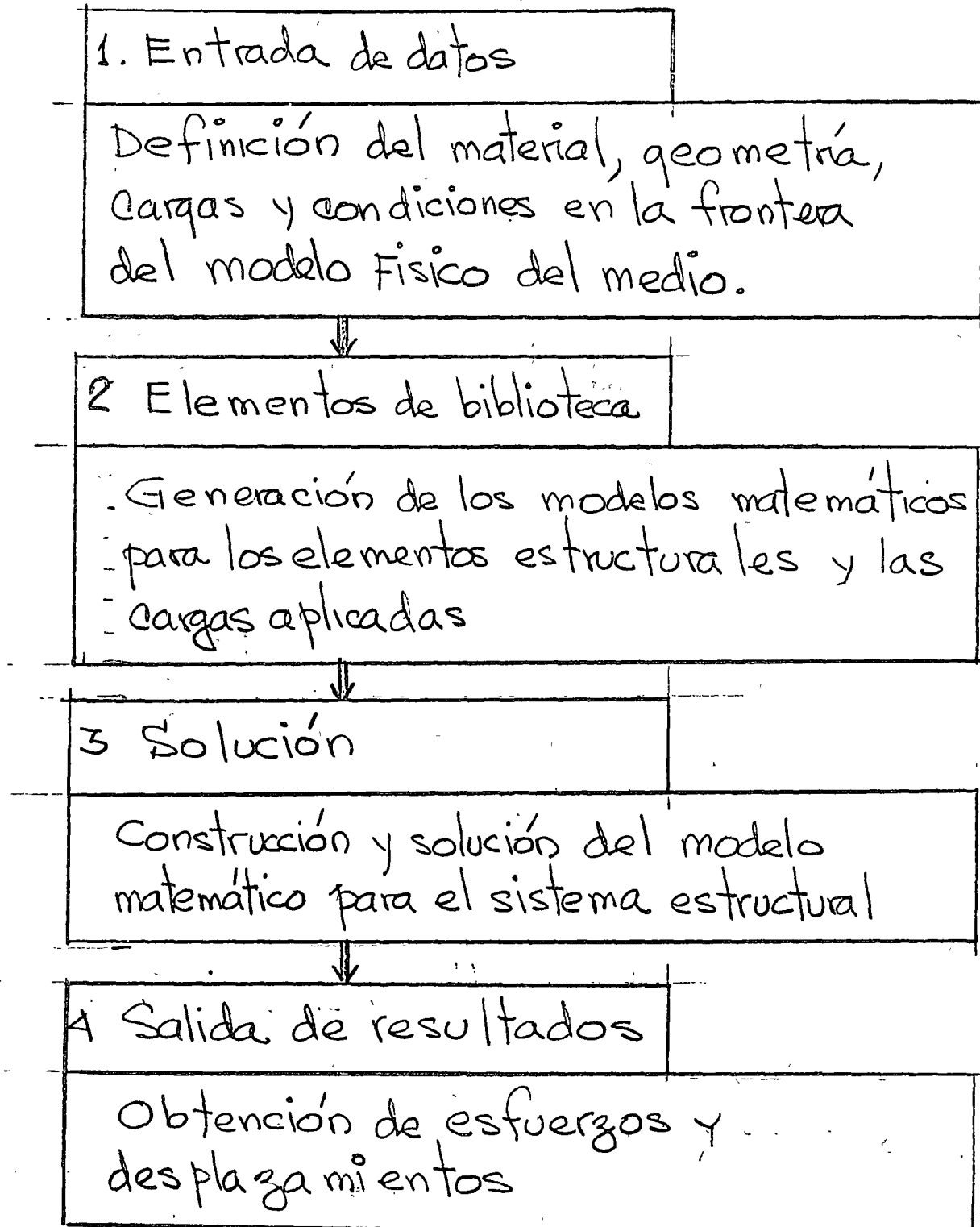


Fig. 12. Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interes primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el triángulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebraicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebraicas para interconectar los elementos vecinos y la conexión del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema

Formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural estático solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construidas originalmente. Incluidas en esta fase están las operaciones necesarias de sustitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase Salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comúnmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos, tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS

GENERALES

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tridimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro.

ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J.H. Argyris, H.A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgart. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes.

Puede ser costoso para un usuario especializado.

SAP, A general Structural Analysis Program, elaborado por E.L. Wilson de la Universidad de California. Incluye analisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewicz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de fluidos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U.S. National Aeronautical and Space Administration para analisis elástico de varias estructuras, incluye,

○ análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias y excitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, estabilidad dinámica. Ofrece capacidad limitada para análisis no lineal.

SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretative System. Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

○ ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures. Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales, triangulares, cuadrilateros, tetraedros hexaedros, cónicos, sólidos axisimétricos de secciones cuadriláteras y triangulares.

MARC, elaborado por P.V. Marcal, incluye Analisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.

LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE
ELEMENTOS FINITOS.

- (1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.
- (2) McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems," J. Inst. Civ. Eng 21, 59-82, 1943.
- (3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," Edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).
- (4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, "J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.
- (5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- (6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and Structural Analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.
- (7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister), Edited by J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," Bull. Am. Math. Soc. 49, 1-23, 1943.
- (9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," Quart. Appl. Math. 5, 241-69, 1947.
- (10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.
- (11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).
- (12) Ballesteros, P., "The application of Mac Laurin's Series for displacement functions." University M., Inc. Ann Arbor, London, Mic. 59-196, 1963.
- (13) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.
- (14) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," Nuclear Eng. and Design 3, 1-11, 1966.

- (15) Herrman, L., "Elastic and torsional analysis of irregular shapes," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 91, EM6, 11-19, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3444.
- (16) Zienkiewicz, O. C., Arlett, P. L., and Bahram, A. K., "Solution of three-dimensional field problems by the finite element method," Engineer, 224, 547-550, Oct. 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7898.
- (17) Winslow, A. M., "Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh," J. Comp. Physics 1, 149-172, 1967.
- (18) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices," J. AIAA 2, 576-577, 1964; AMR 17 (1964), Rev. 5128.
- (19) Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and equilibrium models in the finite element method," (Ch. 9 "Stress analysis"), O. C. Zienkiewicz and G. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); Chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (20) Fraeijs de Veubeke, B., "Bending and stretching of plates," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (21) Fraeijs de Veubeke, B., and Zienkiewicz, O. C., "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy," J. Strain Analysis 2, 265-271, 1967.
- (22) Herrmann, L. R., "A bending analysis of plates," Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (23) Pian, T. H. H. and Tong, P., "Basis of finite element methods for solid continua," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 3-28, 1969.
- (24) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution," J. AIAA-2, 1232-1336, 1964.
- (25) Severn, R. T., and Taylor, D. R., "The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed," Proc. Inst. Civ. Eng. 34, 153, 170, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 3213.
- (26) Zienkiewicz, O. C., "The finite element method," McGraw-Hill (1967).
- (27) Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions," Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (28) Mikhlin, S. G., "The problem of the minimum of a quadratic functional," Holden Day, San Francisco (1966).

- (29) Pian, T. H. H., and Tong, Ping. "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems," *Int. J. Solids Struct.* 3, 865-880, 1967.
- (30) Key, S. W., "A convergence investigation of the direct stiffness method," Ph. D. thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1966.
- (31) de Arrantes e Oliveira, E. R., "Theoretical foundation of the finite element method," *Int. J. Solids Struct.* 4, 929-952, 1968; *AMR* 22 (1969), Rev. 7609.
- (32) Adini, A., and Clough, R. W., "Analysis of plate bending by the finite element method," *Nat. Sci. Found Rep. G. 7337*, Univ. of Calif., Berkeley, 1961.
- (33) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs," *Proc. Inst. Civ. Eng.* 28, 471-488, 1964.
- (34) Walz, J. E., Fulton, R. E., and Cyrus, N. J., "Accuracy and convergence of finite element approximation," *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (35) Melosh, R. J., "A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending," *J. Aero Sci.* 28, 34-42, 1961; *AMR* 14 (1961), Rev. 3489.
- (36) Crandall, S. H., "Engineering analysis," McGraw-Hill, NY (1956); *AMR* 12 (1959), Rev. 1122.
- (37) Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of stiffness matrices for problems on plane elasticity by Galerkin method," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1, 301-310, 1969.
- (38) Zienkiewicz, O. C., and Parekh C. J., "Transient field problems--two- and three-dimensional analysis by iso-parametric finite elements," *Int. J. Num. Meth. in Engr.* 2-61-71, 1970.
- (39) Oden, J. T., "A general theory of finite elements: I-Topological considerations II-Application," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1, 205-221; 247-260, 1969.
- (40) Gallagher, R. H., "A correlation study of methods of matrix structural analysis," *AGARDograph* 69, pergamon Press (1962).
- (41) Argyris, J. H., "Matrix methods of structural analysis," *Proc. 14th meeting of AGARD*, *AGARDograph* 72, 1962.
- (42) Martin, H. C., "Introduction to matrix methods of structural analysis," McGraw-Hill, NY (1966).

- (43) Southwell, R. V., "Relaxation methods in theoretical physics," Clarendon Press, Oxford (1946).
- (44) Varga, R. S., "Matrix iterative analysis" Prentice-Hall, (1962).
- (45) Griffin, D. S., and Kellog, R. B., "A numerical solution of axially symmetrical and plane elasticity problems," In. J. Solids and structures 3, 781-794, 1967; AMR 21, (1968), Rev. 3185.
- (46) Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlard, P. P., "Stress analysis in heated, complex shapes." J. Aero-Space Science 29, 700-707, 1962.
- (47) Argyris, J. H., "Matrix analysis of three-dimensional elastic media. Small and large displacements, " J. AIAA 3, 45-51, 1965; AMR 18 (1965), Rev. 3951.
- (48) Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S. and Scott, F. C., "Iso-parametric and associated element families for two- and three-dimensional analysis, " (Ch. 13 of "Finite element method in stress analysis"), I. Holand and K. Bell, edited by, Tapir, Trondheim, Norway (1969).
- (49) Irons, B. M., "Engineering application of numerical integration in stiffness method," J. AIAA 4, 2035-2037, 1966.
- (50) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved, isoparametric quadrilateral elements in finite element analysis, " Int. J. Solids & Struct. 4, 31-42, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 6347.
- (51) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations," Proc. Sym. on Arch Dams, Inst. Civ. Eng. London, 1968.
- (52) Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C. M., and Smith, J. M., "Low Reynolds number developing flows," A. I. Chem. Eng. Journ. 15-548-553, 1969.
- (53) Clough, R. W., and Tocher, J. L., "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, " Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (54) Clough R. W., and Fellipa, C. A., "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (55) Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, A. L., "The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

- (56) Bell, K., "A refined triangular plate bending element," *Int. J. Num. Method. in Eng.* 1, 101-122, 1969.
- (57) Irons, B. M., "A conforming quartic triangular element for plate bending," *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 1, 29-46, 1969.
- (58) Argyris, J. H., Fried, I., and Schapf, D. W., "The TUBA family of plate elements for matrix displacement method," *Aeronautical Journal R. Ae. Soc.* 72, 701-709, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 5921.
- (59) Bosshard, W., "Ein neues volltraglicher endliches Element for Plattenbiegung," *Int. Ass. Bridge Struct. Eng. Bull.* 28, 27-40, 1968.
- (60) Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, C. M., and Olson, M. D., "Formulation of a new triangular plate bending element," *Trans. Canadian Aero Space Inst.* 1, 86-90, 1968; AMR 22 (1969) Rev. 4068.
- (61) Grafton, P. E., and Strome, D. R., "Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method," *J. AIAA* 1, 2342-2347, 1963.
- (62) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures," *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams Pergamon Press* (1965).
- (63) Connor, J. I., and Brebbia, C., "Stiffness matrix for shallow rectangular shell element," *J. of Engr. Mech. Div. Proc. ASCE* 93, 43-63, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7391.
- (64) Stricklin, J. A., Navaratna, D. R., and Pian, T. H. H., "Improvements in the analysis of shells of revolution by matrix displacement method (curved elements)." *J. AIAA* 4, 2069-2072, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 9219.
- (65) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems," *Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.*
- (66) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of thick and thin shell structures by general curved elements," to be published in *Int. J. Num. Meth. in Engr.*
- (67) Argyris, J. H., "Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua," *J. Roy Aero Soc.* 69, 633-635, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3470.
- (68) Marcal, P. V., and King, I. P., "Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method," *Int. J. Mech. Sci.* 9, 143-155, 1967; AMR 20 (1967), Rev. 7686.

- (69) Popov, E. P., Khojastch-Bakht, M., and Yaghmai, S., "Bending of circular plates of hardening material," *Int. J. Solids and Struct.* 3, 975-988, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 3240.
- (70) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Elasto-plastic solutions of engineering problems, Initial stress, finite element approach," *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 1, 75-100, 1969.
- (71) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Stress analysis of rock as a no-tension material," *Geotechnique* 18, 56-66, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 3296.
- (72) Yamada, Y., Yashimura, N., and Sakurai, T., "Stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method," *In. J. Mech. Sci.* 10, 343, 354, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 2330.
- (73) Reyes, S. F., and Deere, D. U., "Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method," *Proc. 1st Int. Congr. Rock Mech II*, 477-486, 1966.
- (74) Zienkiewicz, O. C., Watson, M., and King, I. P., "A numerical method of visco-elastic stress analysis," *Int. Journ. Mech. Sci.* 10, 807-827, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 8419.
- (75) Greenbaum, G. A., and Rubinstein, M. F., "Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements," *Nucl. Eng. and Design* 7, 379-397, 1968,
- (76) Goodman, R. E., Taylor, R. L., and Brekke, T., "A model for the mechanics of jointed rock," *J. of Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE* 94, 637-659, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 8177.
- (77) Zienkiewicz, O. C., and Valliappan, S., "Analysis of real structures for creep, plasticity and other complex constitutive laws," *Conf. on Materials in Civ. Eng. Univ. of Southampton*, 1969, J. Wiley (1970).
- (73) Martin, H. C., "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems," *Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (79) Gallagher, R. H., and Padlog, J., "Discrete element approach to structural instability analysis" *J. AIAA* 1, 1437-1439, 1963.
- (80) Kapur, K. K., and Hartz, B. J., "Stability of thin plates using the finite element method," *J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE* 92, 177-195, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 4676.
- (81) Anderson, R. G., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Vibration and stability of plates using finite elements," *Int. J. Solids and Struct.* 4, 1031-1055, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 6815.

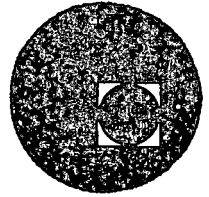
- (82) Gallagher, R. H., and Yang, H. T. Y., "Elastic instability predictions for doubly curved shells," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (83) Carson, W. G., and Newton, R. E., "Plate buckling analysis using a fully compatible finite element," J. AIAA 8, 527-529k 1969.
- (84) Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J., "Large deflection of structures subject to heating and external loads," J. Aero. Sci. 27, 97-106, 1960.
- (85) Marcal, P. V., "Finite element analysis of combined problems of material and geometric behavior," Techn. Rep. 1 ONY, Brown University, March 1969.
- (86) Brebbia, C., and Connor, J., "Geometrically non-linear finite element analysis," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 463-483, 1969.
- (87) Marcal, P. V., "Effect of initial displacement on problem of large deflection and stability," Techn. Report ARPA E54, Brown University, Nov. 1967.
- (88) Oden, J. T., "Finite element large deflection analysis of plates," J. Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 143, 1969.
- (89) Murray, D. W., and Wilson, E. L., "Finite element postbuckling analysis of thin elastic plates," J. AIAA 7, 1915, 1969.
- (90) Schmit, L. A., Boyner, F. K., and Fox, R. L., "Finite deflection structural analysis, using plane and cylindrical shell discrete elements," J. AIAA 5, 1525-7, 1968.
- (91) Oden, J. T., and Sato, T., "Finite strains and deformations of elastic membranes by the finite element method," Int. J. Solids and Struct. 3, 471-478, 1967; AMR 22 (1969), Rev. 7672.
- (92) Oden, J. T., "Finite plane strain of incompressible elastic solids by the finite element method," The Aeronautical Quarterly, 18, 254-264, 1967.
- (93) Zienkiewicz, O. C., Mayer, P., and Cheung, Y. K., "Solution of anisotropic seepage problems by finite elements," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 92, 111-120, 1966.
- (94) Taylor, R. L., and Brown, C. B., "Darcy flow solution with a free surface," J. of the Hydr. Div., Proc. ASCE 92, 25-33, 1967; AMR 32 (1969), Rev. 702.
- (95) Martin, H. G., "Finite element analysis of fluid flows," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

- (96) Ariett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides), "Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.
- (97) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid, " Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.
- (98) Taylor, C., Patil, B.S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undamped modes, " Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 1941-155, 1969.
- (99) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell-fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis, " Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1955.
- (100) Zienkiewicz, O. C., Irons, B. and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method, " Symp. on -- Vibration in Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.
- (101) Sandhu, R.S., and Wilson, E.L., "Finite element analysis of seepage in elastic media, " J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.
- (102) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids, " Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure, " 5, 1311-33, 1969; Part II: "The computational problem, " 6, 195-207, 1970.
- (103) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis, " Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.
- (104) Johnson, W. M., and Mclay, R.W., "Convergence of the finite element Method in the theory of elasticity, " J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.
- (105) Przemieniecki, J.S., "Theory of matrix structural analysis, " McGraw-Hill, 1968.
- (106) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural --- analysis, " McGraw-Hill, 1969.
- (107) Pope, G. G., "The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems, " Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (108) Miller, R.E., and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft, " On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N.Y., 1970.

- (109) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.
- (110) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn. May, 1970.
- (111) Cheng, W. K., M. U. Hosain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.
- (112) Gallagher, R. H., "Large - Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.
- (113) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.
- (114) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1973.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



"FUNDAMENTAL CONCEPTS FOR ANALYSIS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD".

"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE EL
METODO DE ELEMENTOS FINITOS".

MARCH 15-19, 1976.
MARZO 15-19, 1976.

Director de la Facultad.

M. en C. Ing. Enrique del Valle Calderón.

Jefe de la División.

Dr. Octavio Rascón Chávez.

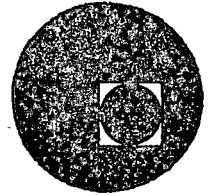
Jefe del C.E.C.

Dr. Pedro Martínez Pereda.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23



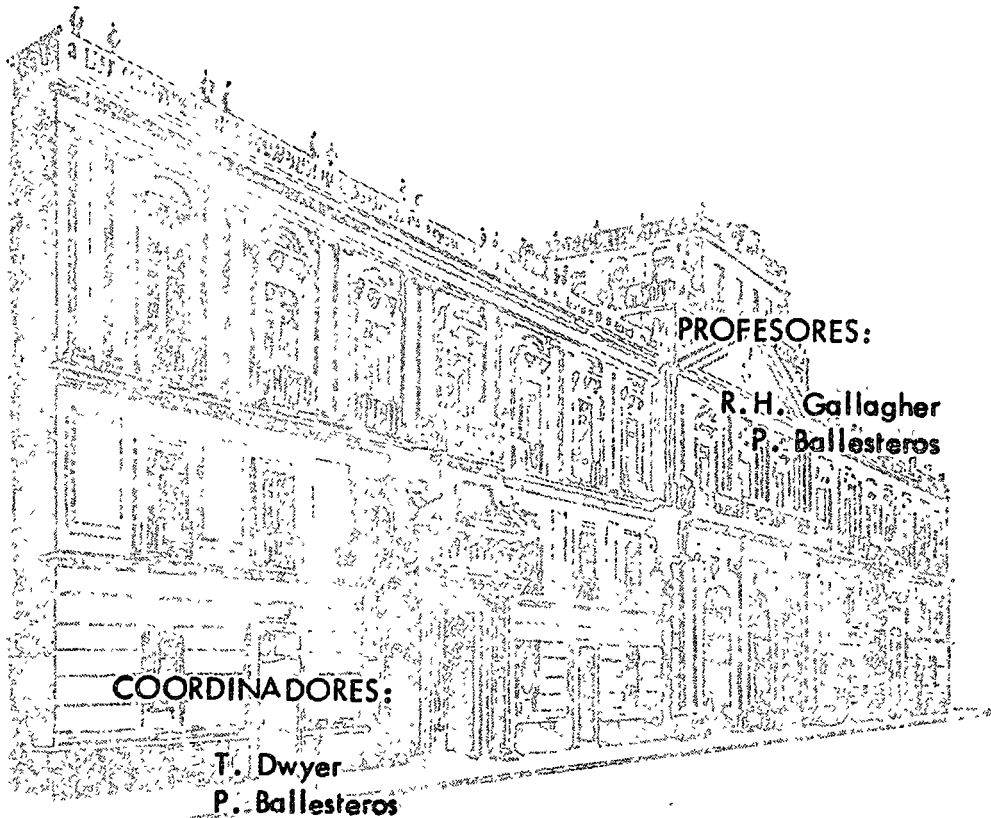
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



MONDAY, MARCH 15, 1976.

INTRODUCTORY MATRIX ALGEBRA.

INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA MATRICIAL.



PROFESORES:

R. H. Gallagher
P. Ballesteros

COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

2.2 Elementos de algebra matricial

2.2.1 En la solución de sistemas estáticamente indeterminados independientemente de que se aplique el método de las fuerzas o de deformaciones es necesario la solución de ecuaciones simultáneas lineales algebraicas. Independientemente de cualquier problema de análisis estructural, un sistema de tales ecuaciones sería

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ columnas}} \\
 \left. \begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = C_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = C_2 \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = C_m \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = C_n
 \end{array} \right\} \text{ (a)}
 \end{array}$$

Para simplificar la técnica de la solución de (a), es conveniente utilizar algebra matricial, en notación matricial (a) puede escribirse

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix} \quad \text{(b)}$$

$$[a_{ij}] \{x_j\} = \{C_j\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{(c)}$$

$$A x = C \quad \text{(d)}$$

cada arreglo de números dentro de los parentesis angulares es llamado "matriz", los números o símbolos se llaman elementos, y en (a) se tienen m renglones y n columnas, la matriz se dice que es de orden $m \times n$. Cuando hay solamente una columna o un renglón de elementos en la matriz es llamada vector columna o vector renglón. Se entiende que la matriz $[A_{ij}]$, en (b), opera sobre el vector columna $\{x_j\}$ en tal forma que produce el sistema de ecuaciones (a).

Es conveniente mencionar que el uso de métodos matriciales no representa ninguna evolución en el análisis de sistemas estructurales elásticos lineales, es realmente ventajoso para el uso de las computadoras electrónicas digitales.

2.2.2 Suma de matrices.

Para sumar dos matrices, simplemente se suman los elementos correspondientes para obtener la matriz suma. Es posible solamente si las dos matrices son del mismo orden $m \times n$. la regla de suma se establece simbólicamente como sigue

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (e)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix}$$

2.2.3 Resta de matrices

Similarmente a (2.2.2) la regla de resta de matrices es

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \quad (f)$$

de lo anterior se observa que dos matrices son iguales si son iguales sus elementos correspondientes, $a_{ij} = b_{ij}$.

De la regla de suma de matrices, para multiplicar una matriz dada por un número escalar λ , simplemente se multiplica cada elemento por λ , simbólicamente

$$\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \quad (g)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (g)$$

2.2.3 Multiplicación de matrices.

Para obtener el producto AB de dos matrices A y B , se tiene lo siguiente: el elemento C_{ij} del renglón i de A y la columna j de B , de la matriz producto es obtenido multiplicando el renglón i de A con la columna j de B , elemento por elemento, y sumando los productos obtenidos. Si A es de orden $m \times n$ y B del orden $n \times q$. En forma simbólica, el elemento C_{ij} de la matriz producto $C = AB$ será

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} = (a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}) \quad (k)$$

o sea:

	1 2 ... j ... n	1 2 ... j ... q	
Renglones 1 2 ... i ... m	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{iq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nq} \end{bmatrix}$	Renglones 1 2 ... i ... n
	$A = [a_{ij}]$ orden $m \times n$ (renglones) \times (columnas)	$B = [b_{ij}]$ orden $n \times q$	(c)

$$\begin{bmatrix}
 \overbrace{(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{1n}b_{n1})}^{c_{11}} \overbrace{(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2})}^{c_{12}} \dots \overbrace{(a_{11}b_{1q} + a_{12}b_{2q} + \dots + a_{1n}b_{nq})}^{c_{1q}} \\
 \overbrace{(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n1})}^{c_{21}} \overbrace{(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2})}^{c_{22}} \dots \overbrace{(a_{21}b_{1q} + a_{22}b_{2q} + \dots + a_{2n}b_{nq})}^{c_{2q}} \\
 \dots \dots \dots \\
 \overbrace{(a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1})}^{c_{m1}} \overbrace{(a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{n2})}^{c_{m2}} \dots \overbrace{(a_{m1}b_{1q} + a_{m2}b_{2q} + \dots + a_{mn}b_{nq})}^{c_{mq}}
 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_{ij}] = [(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj})] \quad (*)$$

orden $n \times q$ n renglones, q columnas

Debe observarse que la multiplicación $[a_{ij}][b_{ij}]$ es posible solamente si el número de columnas de $A \equiv [a_{ij}]$ es igual a / número de renglones de $B \equiv [b_{ij}]$

Es necesario observar que la multiplicación matricial no es conmutativa, es decir, $AB \neq BA$.

Ejemplo sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A es de orden 2×3 y B de orden 3×2 el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, la multiplicación es posible

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

orden 2×2

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) & (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) & (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}) \\ (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21}) & (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22}) & (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}) \end{bmatrix}$$

se verifica que $AB \neq BA$

orden 3×3

No siempre ambos productos existen AB y BA .

Volviendo a la expresión matricial (b) del sistema de ecuaciones lineales algebraicas (a), al efectuar la multiplicación $[a_{ij}] \{x_j\}$ se obtiene el sistema de ecuaciones. Ello explica la razón por la cual se ha establecido la regla anterior de multiplicación matricial.

2.2.4 Transposición de matrices

La matriz transpuesta de A , representada por A^T , se obtiene reescribiendo la matriz A en tal forma que sus renglones lleguen a ser columnas, tomadas en la misma secuencia y viceversa. Simbólicamente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}] \equiv A \quad (l)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ji}] = [a_{ij}]^T = A^T \quad (m)$$

Considerando la regla de multiplicación junto con la de transposición se demuestra

el producto matricial transpuesto $(AB)^T$ es igual al producto conmutado de las transpuestas individuales.

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (n)$$

2.2.5 Matriz de identidad

La matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (o)$$

es llamada matriz identidad de orden $n \times n$ tiene todos los elementos cero excepto los de la diagonal principal que son igual a la unidad. En algebra matricial la matriz de identidad I corresponde en todas las formas a la idea de unidad del algebra ordinaria.

Si una matriz identidad es multiplicada por un número escalar λ se obtiene

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \quad (\phi)$$

la cual se llama matriz escalar.

2.2.6 Matriz diagonal.

Una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

es llamada matriz diagonal de orden n . La matriz identidad I y la matriz escalar λI , son por supuesto casos especiales de matriz diagonal.

Hay varios otros tipos especiales de matrices, pero las introducidas serán suficientes para nuestros propósitos. En resumen tenemos:

- a) La matriz rectangular de orden $m \times n$
- b) " " cuadrada " " $n \times n$
- c) El vector renglón $[x_i]$, $\{x_i\}^T$, $\{x\}^T$
- d) " " columna $[x_i]$, $\{x_i\}$, $\{x\}$
- e) La matriz identidad de orden $n \times n$
- f) " " escalar " " " "
- g) " " diagonal " " " "

2.2.7 Inversión de matrices

Volviendo de nuevo al sistema de ecuaciones (a), (b), (c) o (d) y escribiéndolo en la forma matricial $[A]\{x\} = \{c\}$, establecemos por definición que la solución puede ser

expresada en la siguiente forma:

$$x = \frac{c}{A} = A^{-1}c = Rc$$

$$o' \quad x = \frac{\{c_j\}}{[a_{ij}]} = [a_{ij}]^{-1} \{c_j\} \quad (\tau)$$

esto nos da la idea de dividir una matriz por otra, o, más apropiadamente, de encontrar la reciproca R de una matriz dada A . Este proceso es llamado inversión. Para efectuarlo, se busca una matriz R tal que $RA = I$, donde I es la matriz de identidad. Es importante observar que un sistema de ecuaciones simultaneas tendrá una solución única solamente si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, por lo tanto $A = [a_{ij}]$ será siempre una matriz cuadrada de orden $n \times n$ o un determinante de orden n . De lo contrario, el concepto de inversión de matrices no tiene significado.

Existen varios procedimientos para la inversión de una matriz cuadrada. A continuación describiremos uno de los procedimientos. Primero

es necesario introducir el concepto de adjunta de una matriz dada A lo cual se escribe $\text{Adj } A$. Se define como la transpuesta de otra matriz C formada por los cofactores de los elementos a_{ij} de la matriz dada A .

la ilustración de lo anterior se puede observar mediante el siguiente ejemplo.

Sea la matriz dada

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (s)$$

Entonces la matriz C , formada por los cofactores de A , será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_2 c_2 \\ a_3 c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_3 c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (t)$$

donde el determinante

$$|b_2 c_3| \equiv \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3 \quad \text{es}$$

es llamado el cofactor del elemento a_1

○ $-|b_1 c_3| = -|b_1 c_1| = -(b_1 c_3 - c_1 b_3)$ es el cofactor del elemento a_2 . La regla de signos para los cofactores es

$$\begin{bmatrix} (+) & (-) & (+) & \dots \\ (-) & (+) & (-) & \dots \\ (+) & (-) & (+) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

○ En general para determinar el cofactor de un elemento cualquiera a_{ij} de una matriz de orden $n \times n$, se tacha el renglón i y la columna j y se escribe el determinante de los términos remanentes de acuerdo con la regla de signos mencionada, por ejemplo en el caso anterior el cofactor del elemento a_2 , con $i=2$, $j=1$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; \text{Cof. de } a_2 = A_2 = -|b_1 c_1|$$

○ Habiendo obtenido la matriz C de los cofactores de la matriz (s) , de acuerdo con la regla anterior la matriz adjunta de A , de finida como la transpuesta de C , será

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} |b_2 c_2| & -|b_1 c_1| & |b_1 c_1| \\ |b_3 c_3| & |b_3 c_3| & -|b_2 c_2| \\ |a_2 c_2| & |a_1 c_1| & -|a_1 c_1| \\ |a_3 c_3| & -|a_3 c_3| & |a_2 c_2| \\ |a_2 b_2| & -|a_1 b_1| & |a_1 b_1| \\ |a_3 b_3| & |a_3 b_3| & -|a_2 b_2| \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} |b_2 c_3| & -|b_1 c_3| & |b_1 c_2| \\ -|a_2 c_3| & |a_1 c_3| & -|a_1 c_2| \\ |a_2 b_3| & -|a_1 b_3| & |a_1 b_2| \end{bmatrix} \quad (u)$$

Cuando la adjunta de una matriz cuadrada A ha sido formada, se puede demostrar que

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I \quad (v)$$

donde $|A|$ es el determinante de A y I es la matriz identidad. Dividiendo (v) por $|A| \neq 0$,

$$\frac{A(\text{adj } A)}{|A|} = \frac{(\text{adj } A)A}{|A|} = I = RA$$

Entonces,

$$R = \frac{\text{adj } A}{|A|} = |A|^{-1} \text{adj } A \quad (w)$$

es la requerida inversa de A

Seguindo las reglas para invertir cualquier matriz cuadrada, puede fácilmente demostrarse que la inversa de cualquier matriz diagonal será obtenida simplemente invirtiendo cada uno de los elementos a lo largo de la diagonal principal. Entonces si:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conociendo ahora el método de inversión de una matriz cuadrada, se puede ilustrar la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas algebraicas lineales de orden 3×3 , considerando

$$3x + 2y - z = 4$$

$$x - y + 2z = 5$$

$$-2x + y - z = -3$$

En notación matricial estas ecuaciones se escriben en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

la matriz C de los cofactores de A será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

la adjunta de A será la transpuesta de C

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

Para determinar el valor del determinante de A , se desarrolla por cofactores de los elementos de la primer hilera y se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 2(3) - 1(-1) = -3 - 6 + 1 = -8$$

Finalmente despejando el vector columna de ecuaciones (x) y (w)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 \times 4 + 1 \times 5 + 3 \times (-3) \\ -3 \times 4 - 5 \times 5 - 7 \times (-3) \\ -1 \times 4 - 7 \times 5 - 5 \times (-3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{Bmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Esto es, $x=1$, $y=2$, $z=3$ representa la solución requerida. Este ejemplo simple involucra muchas de las operaciones de álgebra matricial previamente discutidas, y es conveniente que todas las etapas sean claras antes de seguir adelante.

Es conveniente mencionar algunos ejemplos de escribir expresiones algebraicas en notación matricial. Por ejemplo,

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (x)$$

multiplicando el vector renglón por el vector columna

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

De nuevo tomando

$$c = a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n \quad (y)$$

en conexión con (y) definimos las siguientes matrices:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

transponiendo el vector columna x en el vector renglón x^T y efectuando la multiplicación $x^T A y$ se obtiene

$$[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = [a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n]$$

de lo anterior se ve que la ecuación (y) puede ser expresada matricialmente como

$$c = x^T A y \equiv [x][a][y]$$

2.2.8 Problemas de tarea

1- Determinar la matriz suma $A+B$ si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2- De los valores de A y B en 1 determinar la matriz producto AB

3- De los valores AB de del Prob 1 determinar la matriz producto BA

4- Escribir las transpuestas de cada una de las matrices dadas en el problema 1.

5- Dadas las matrices cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

demuestre que B es la adjunta de A y determine la matriz producto AB .

2.2.9 Referencias para algebra matricial.

a) Fuller, E.L. "Basic matrix theory", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

b) Aitken A.C. "Determinants and Matrices," Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

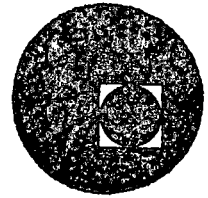
C

O

O



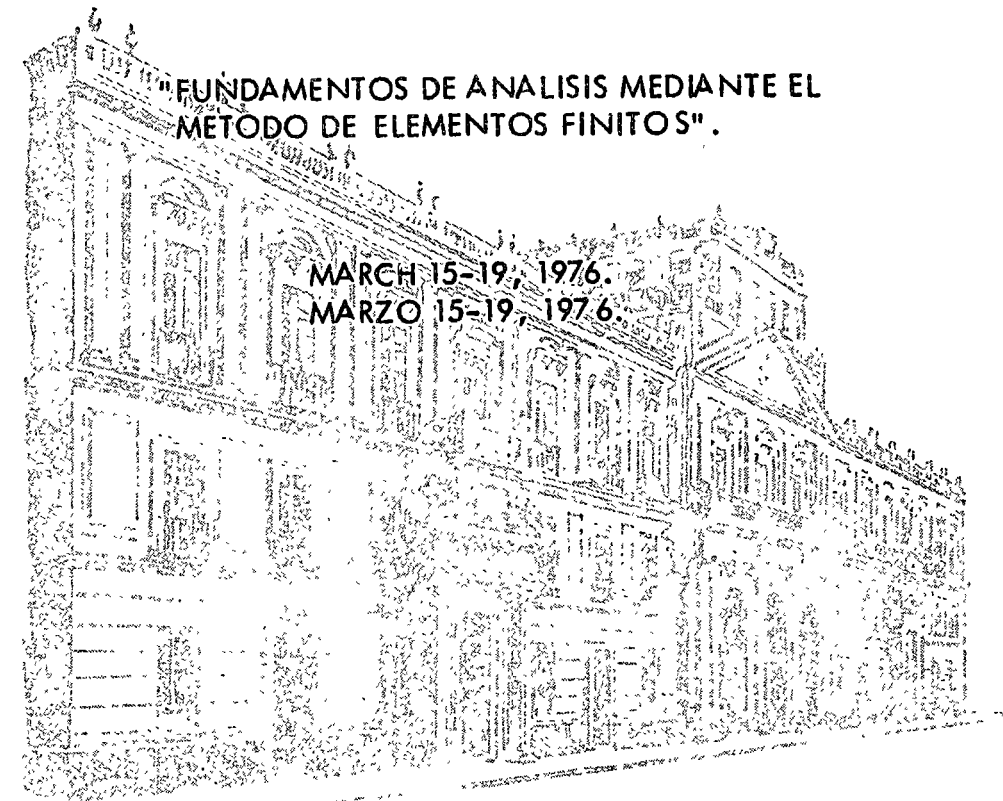
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



"FUNDAMENTAL CONCEPTS FOR ANALYSIS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD".

"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE EL
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS".

MARCH 15-19, 1976.
MARZO 15-19, 1976.



Director de la Facultad.

M. en C. Ing. Enrique del Valle Calderón.

Jefe de la División.

Dr. Octavio Rascón Chávez.

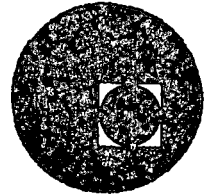
Jefe del C.E.C.

Dr. Pedro Martínez Pereda.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23



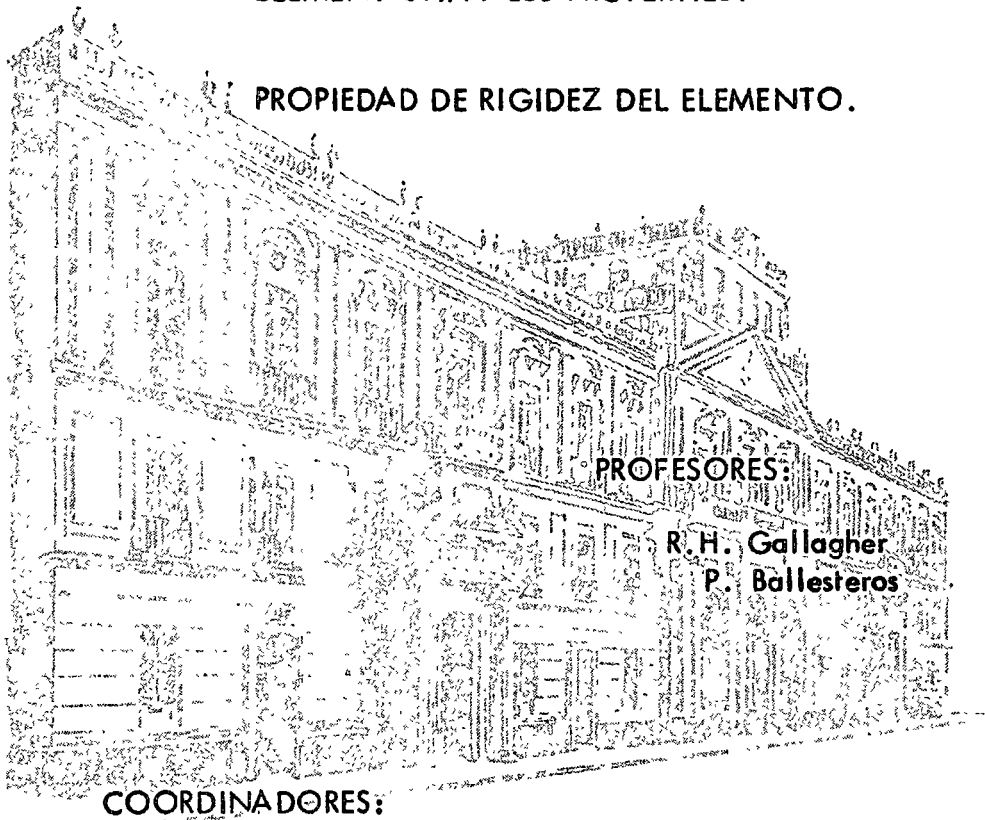
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



MONDAY, MARCH 15, 1976.

ELEMENT STIFFNESS PROPERTIES.

PROPIEDAD DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO.



PROFESORES:

R. H. Gallagher
P. Ballesteros

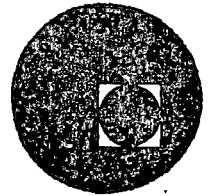
COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



TUESDAY, MARCH 16, 1976.

DIRECT STIFFNESS METHOD
(CONTINUED)

METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES
(CONTINUACION)

PROFESORES:

R.H. Gallagher
P. Ballesteros

COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

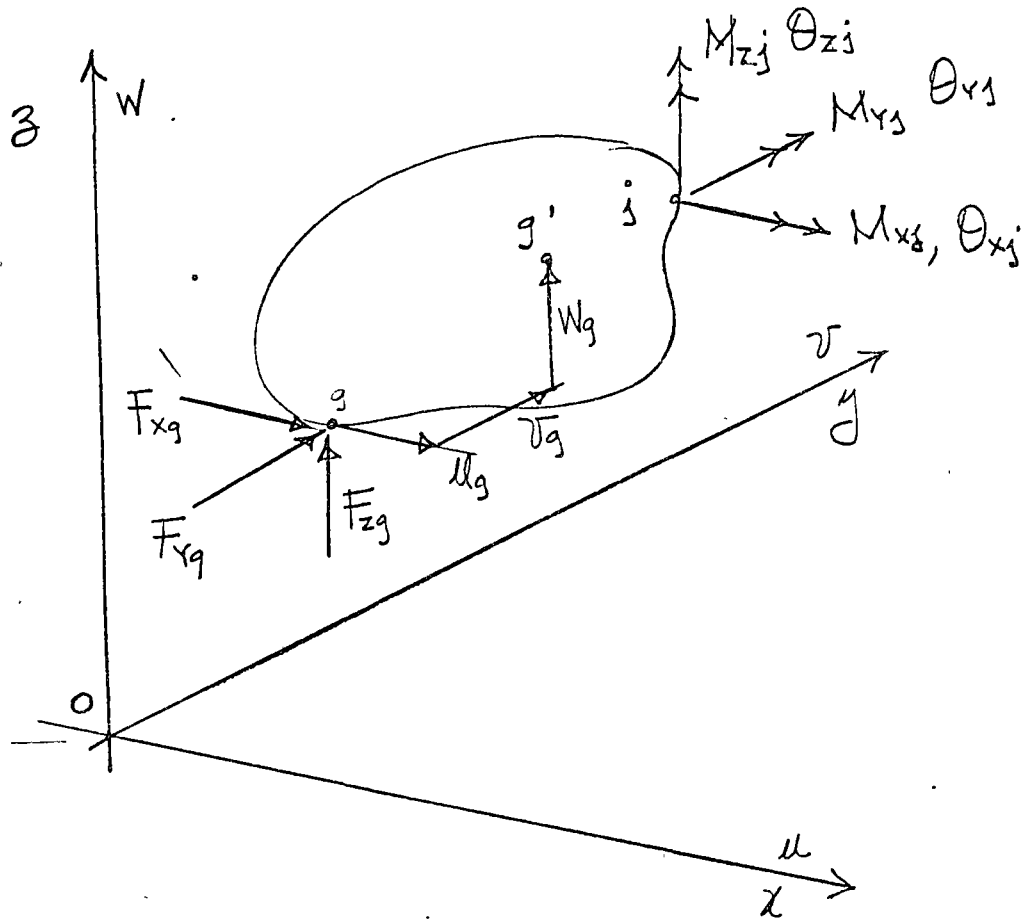


Fig. 2.1 Convención de fuerzas y desplazamientos

$$\left. \begin{aligned} \theta_{xi} &= \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i, & \theta_{yi} &= \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i, & \theta_{zi} &= \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i \\ \delta_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \delta_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \delta_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{Pag 23}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{xg} \\ F_{yg} \\ F_{zg} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ w_g \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta_{xi} &\equiv \delta_{yz} \\ \theta_{yi} &\equiv \delta_{xz} \\ \theta_{zi} &\equiv \delta_{xy} \end{aligned}$$

$$\{F\} = [F_{xg} \ F_{yg} \ F_{zg} \ M_{xj} \ M_{yj} \ M_{zj}]^T$$

$$\{\Delta\} = [U_g \ V_g \ W_g \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}]^T$$

$$\{\Delta\} = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \dots \ \Delta_i \ \dots \ \Delta_n]^T$$

n grados de libertad

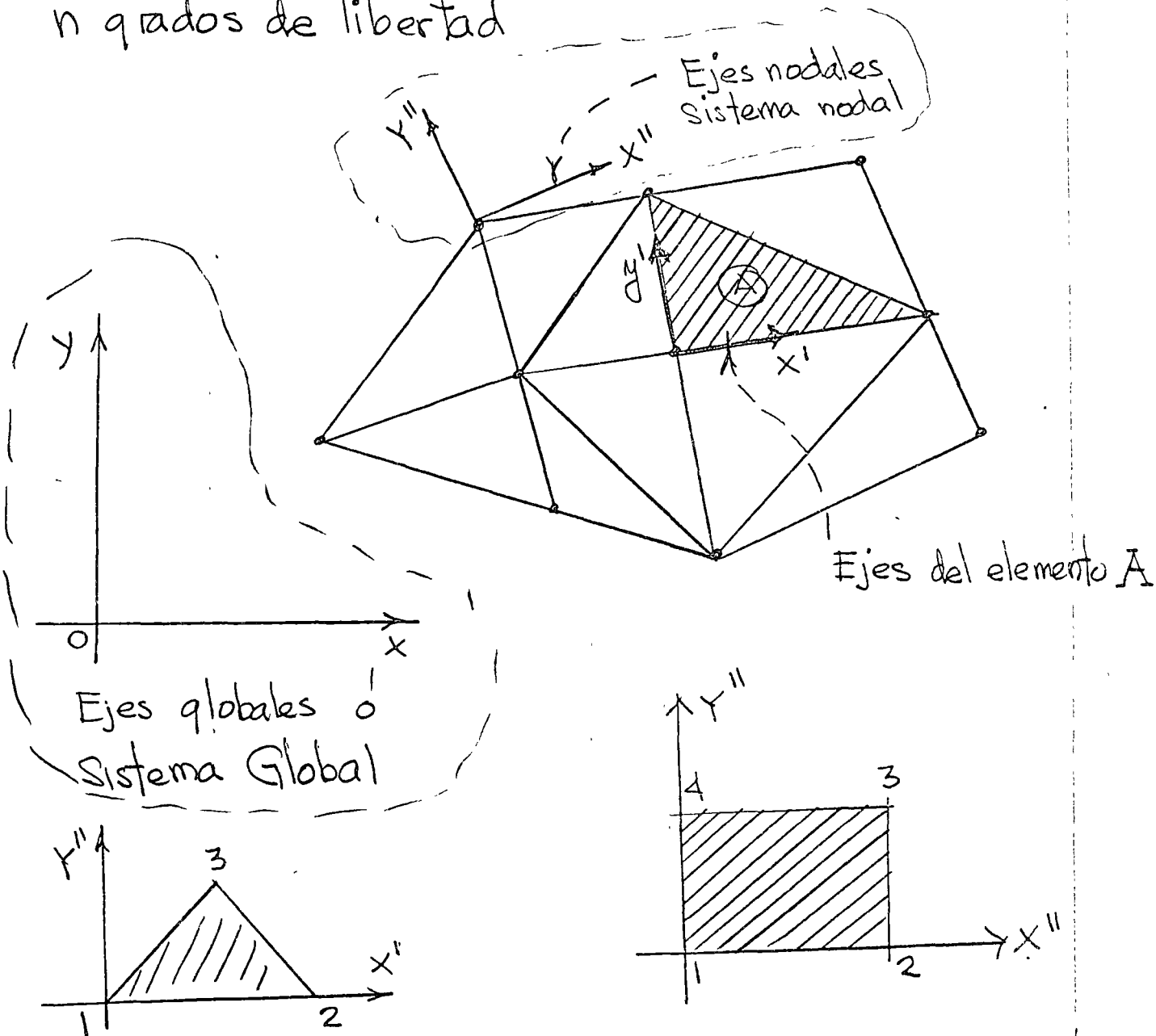
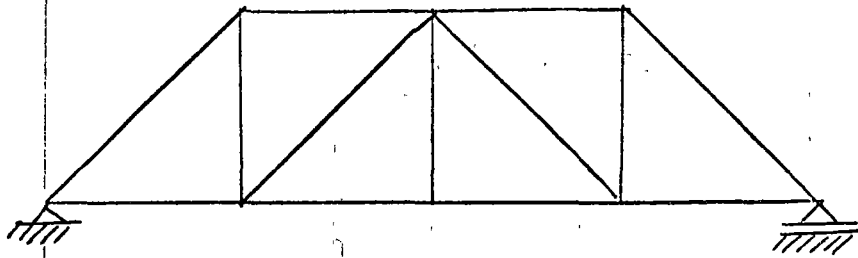
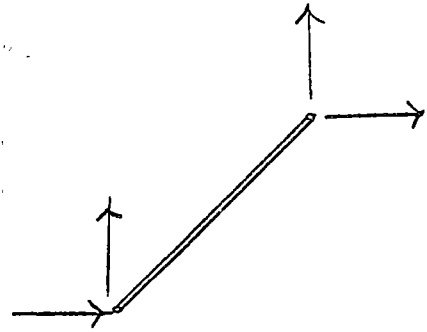


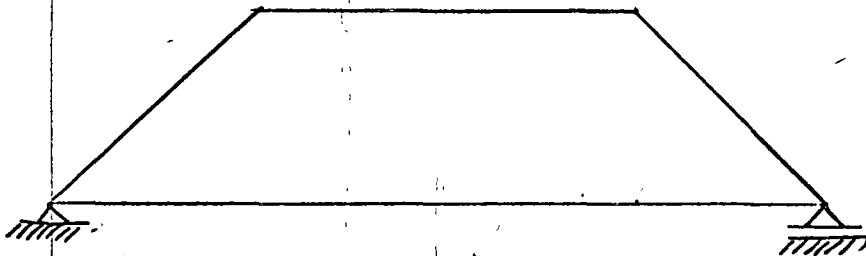
Fig. 2.2 Ejes coordenados y sistema de numeración nodal.



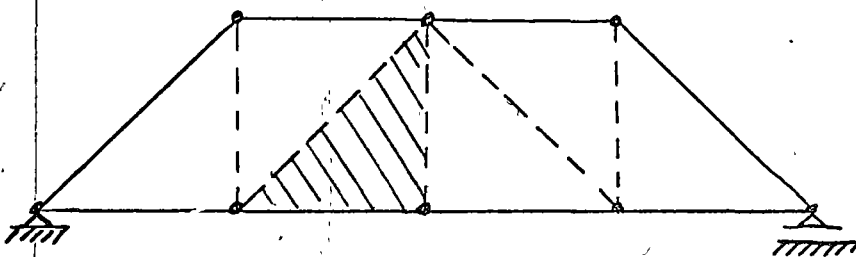
ARMADURA



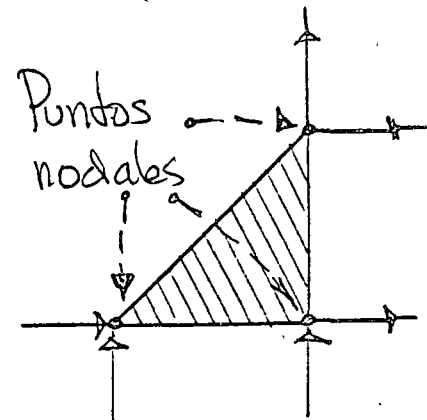
Miembro típico de la armadura



Placa delgada



Idealización por elementos finitos de la placa delgada



Elemento Finito Típico

Fig. 2.4 Comparación de análisis de armaduras y análisis por elementos finitos

Las ecuaciones Fuerza-desplazamiento del elemento pueden expresarse como

- a) Ecuaciones de Rigidez
- b) Ecuaciones de Flexibilidad
- c) Mixta

a) Ecuaciones de Rigidez del elemento, son algebraicas lineales de la forma

$$\{F\} = [k] \{\Delta\} \quad (2.1)$$

$[k]$ matriz de rigidez del elemento

$\{F\}$ vector columna de fuerzas en el elemento

$\{\Delta\}$ vector columna de desplazamientos del elemento

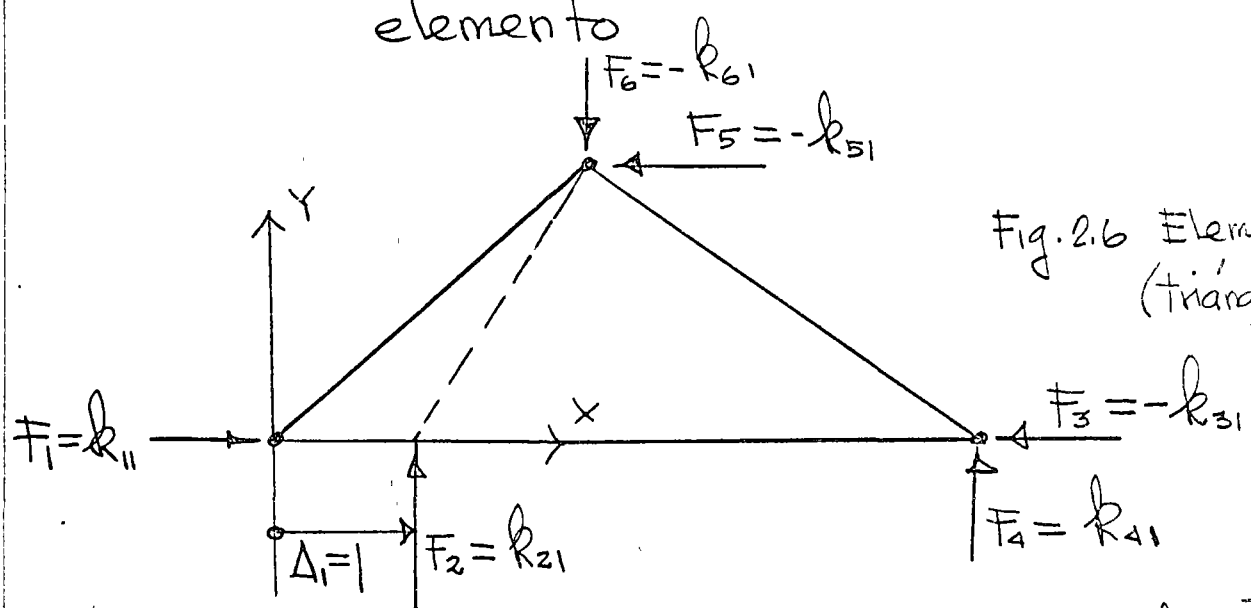


Fig. 2.6 Elemento placa (triangular)

en este caso (2.1) $\{F\} = [F_1 \dots F_6]^T \equiv [k_{11} \ k_{21} \dots \ k_{61}]^T$
 $\{\Delta\} = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T$

k_{11} = fuerza necesaria para $\Delta_1 = 1$ y $\Delta_i = 0$ $i \neq 1$
 k_{21} = reacción en dirección 2 debida a $\Delta_1 = 1$
 k_{i1} = " " " " " " " " " $\Delta_1 = 1$

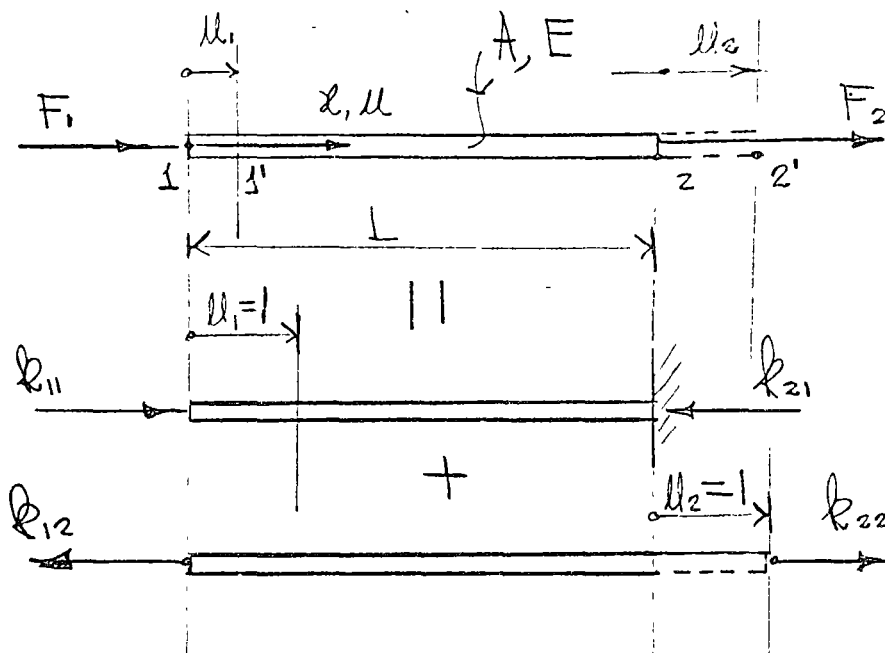


Fig. 2.7.
Elemento axial

Condición $u_1 = 1$

Condición $u_2 = 2$

Sumando causas y efectos en la dirección de F_1 :

$$F_1 = k_{11} u_1 + k_{12} u_2 \quad (1)$$

Sumando causas y efectos en la dirección de F_2

$$F_2 = k_{21} u_1 + k_{22} u_2 \quad (2)$$

Expresando (1) y (2) matricialmente

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

De la Ley de Hooke: $k_{11} = \frac{AE}{L}$, $k_{22} = \frac{AE}{L}$, $k_{12} = k_{21} = -\frac{AE}{L}$ (4)

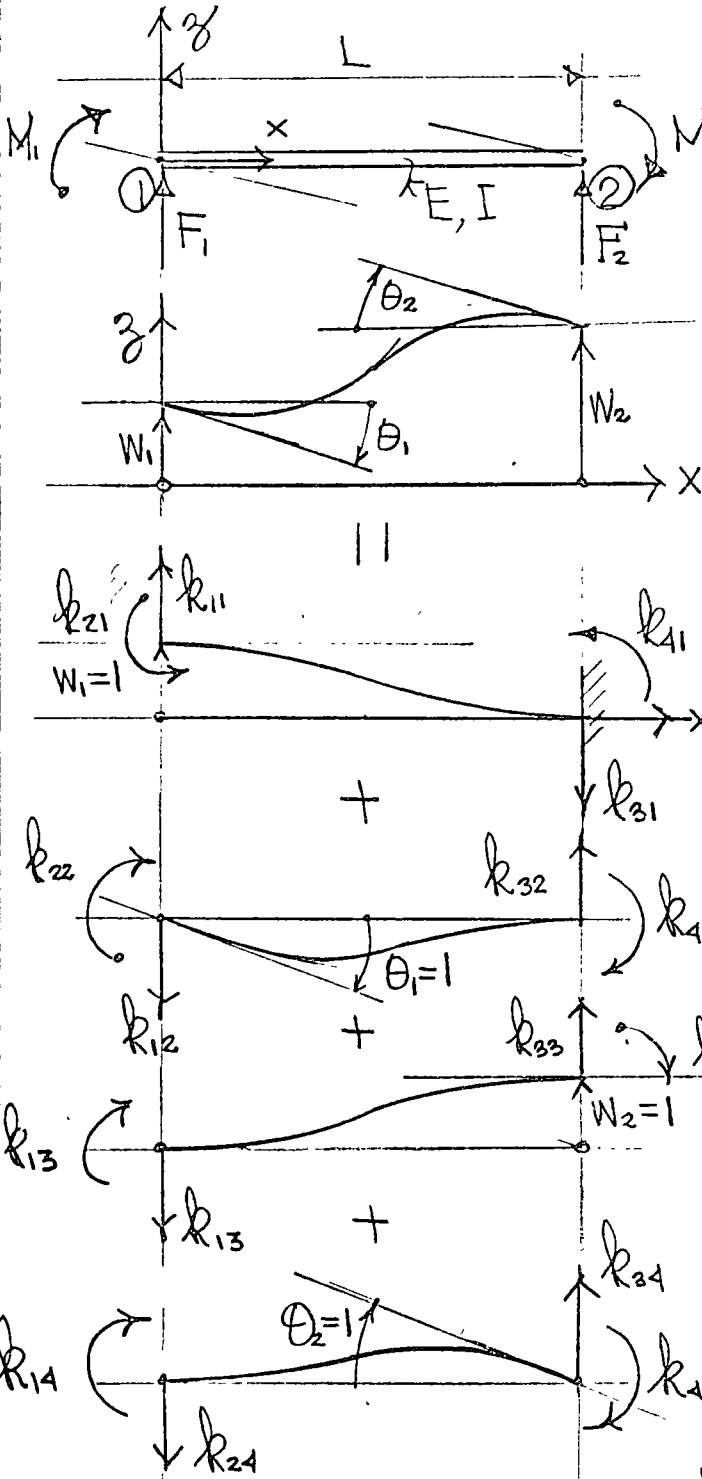
Substituyendo (4) en (3) queda

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{F\} = [k] \{\Delta\}$$

$$\{F\} = L [F_1 \ F_2]^T; [k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \{\Delta\} = L [u_1 \ u_2]^T$$

Fig. 2.8(a) Elemento viga (sin carga axial y despreciando los parámetros de deformación por cortante)



Fuerzas Nodales
 $\{F\} = [F_1 \ M_1 \ F_2 \ M_2]^T$ (1)

Desplazamientos Nodales
 $\{\Delta\} = [W_1 \ \theta_1 \ W_2 \ \theta_2]^T$ (2)

Superponiendo causas y efectos en Dir. de F_1 :
 $F_1 = k_{11} W_1 + k_{12} \theta_1 + k_{13} W_2 + k_{14} \theta_2$ (3)

Superponiendo causas y efectos en la dirección de M_1 :
 $M_1 = k_{21} W_1 + k_{22} \theta_1 + k_{23} W_2 + k_{24} \theta_2$ (4)

Superponiendo causas y efectos en la dirección de F_2 :
 $F_2 = k_{31} W_1 + k_{32} \theta_1 + k_{33} W_2 + k_{34} \theta_2$ (5)

Superponiendo causas y efectos en la dirección de M_2 :
 $M_2 = k_{41} W_1 + k_{42} \theta_1 + k_{43} W_2 + k_{44} \theta_2$ (6)

Expresando matricialmente las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) se obtiene :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = [k] \{\Delta\} \quad (7)$$

$W_1=1 \quad \theta_1=1 \quad W_2=1 \quad \theta_2=1$

(7) es la expresión matricial de las ecuaciones llamadas tradicionalmente pendiente-deflexión en sistemas estructurales elásticos lineales. De la teoría elemental de vigas se deduce fácilmente que para pequeñas def.

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{12EI}{L^3}, & k_{22} &= \frac{4EI}{L}, & k_{33} &= \frac{12EI}{L^3}, & k_{44} &= \frac{4EI}{L} \\ k_{12} &= k_{21} = -\frac{6EI}{L^2}, & k_{13} &= k_{31} = -\frac{12EI}{L^3}, & k_{14} &= k_{41} = -\frac{6EI}{L^2} \\ k_{23} &= k_{32} = \frac{6EI}{L^2}, & k_{24} &= k_{42} = \frac{2EI}{L}, & k_{34} &= k_{43} = \frac{6EI}{L^2} \end{aligned} \quad (8)$$

substituyendo (8) en (7) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}}_{\{F\}} = \underbrace{\frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}}_{\{\Delta\}} \quad (\text{Pag. 31})$$

observaciones: Coef. de 1ª y 3ª columna son cero por condiciones de equilibrio.

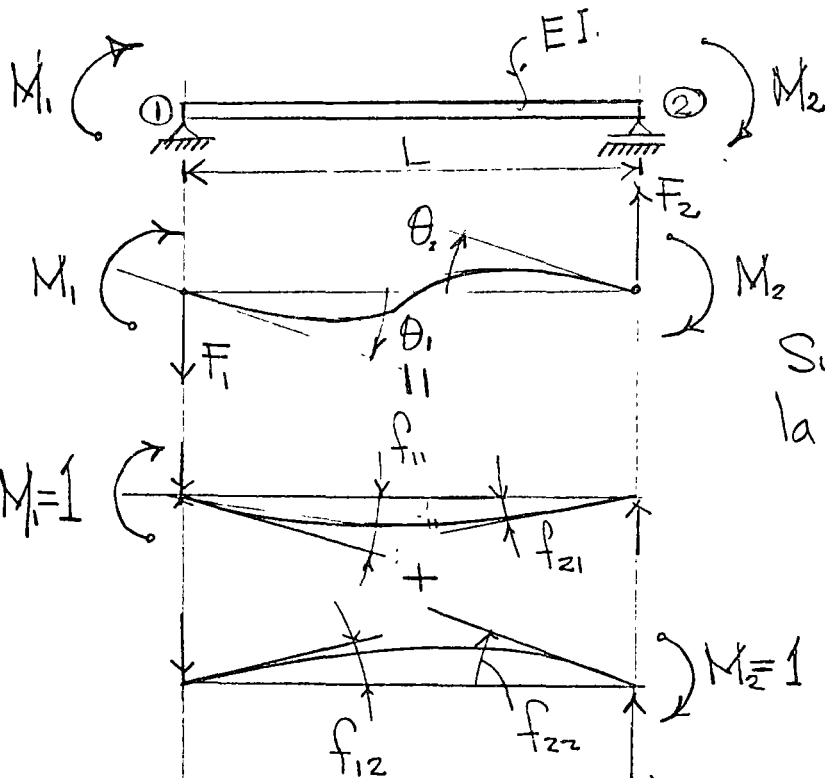
El orden de las ecuaciones puede ser en la forma $[F_1 \ F_2 \ M_1 \ M_2]$ según las operaciones computacionales. No están considerados los desplazamientos de cuerpo rígido.

○ Ecuaciones de flexibilidad, expresan los desplazamientos nodales en función de las fuerzas nodales;

$$\{\Delta_f\} = [f] \{F_f\} \quad (1)$$

[f] matriz de flexibilidad del elemento

f_{ij} = Deformación en i debida a una fuerza unitaria en j



○ Superponiendo causas y efectos en la dirección de θ_1 y de θ_2

$$\theta_1 = f_{11} M_1 + f_{12} M_2 \quad (2)$$

$$\theta_2 = f_{21} M_1 + f_{22} M_2 \quad (3)$$

Expresando (2) y (3) matricial.

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

De la teoría de pequeñas deformaciones de vigas se obtiene

$$f_{11} = \frac{L}{3EI}, \quad f_{22} = \frac{L}{3EI}, \quad f_{12} = f_{21} = -\frac{L}{6EI} \quad (5)$$

○ Subst. (5) en (4) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

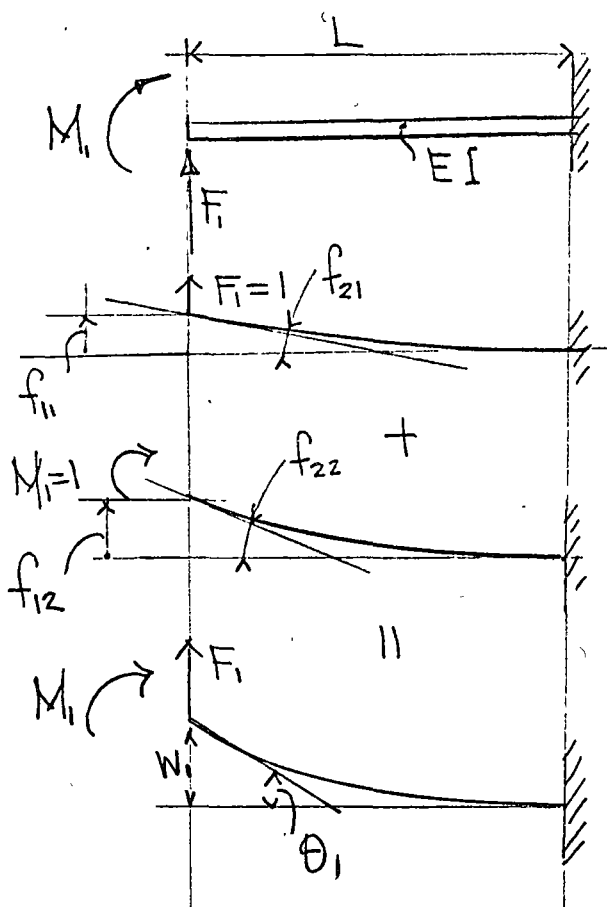
(Pag. 33)

$\{\Delta_f\}$

$[f]$

$\{F_f\}$

Fig. 2.8 (c) elemento viga en cantiliver



Superponiendo causas y efectos en la dirección W_1 y θ_1

$$W_1 = f_{11} F_1 + f_{12} M_1 \quad (1)$$

$$\theta_1 = f_{21} F_1 + f_{22} M_1$$

Exp. (1) matricialmente

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

De la teoría de pequeñas deformaciones de vigas se obtiene:

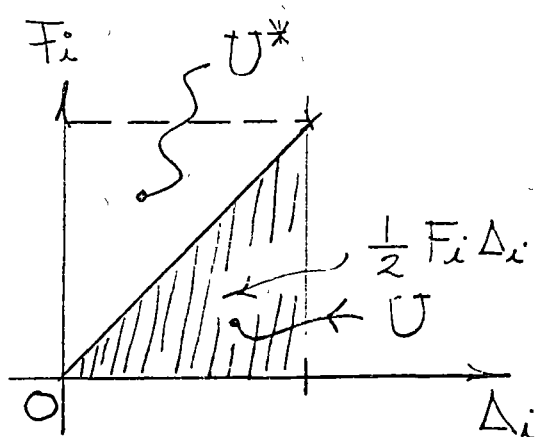
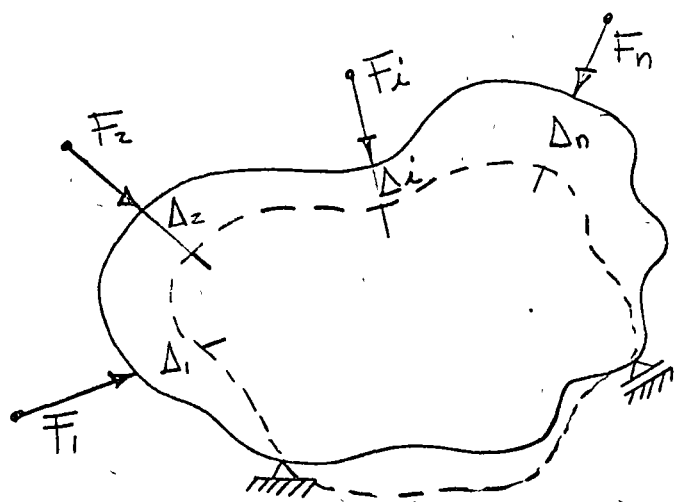
$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI}, \quad f_{22} = \frac{L}{EI}, \quad f_{12} = f_{21} = \frac{L^2}{3EI} \quad (3)$$

subst. (3) en (2) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{[f]} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\{F_s\}}$

2.4 TRABAJO Y ENERGIA



Si las fuerzas $\{F_i\}$ se aplican gradual y linealmente de 0 a F
 El trabajo W el producto de la fuerza promedio por el desplazamiento

$$W = \frac{1}{2} (F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2 + \dots + F_i \Delta_i + \dots + F_n \Delta_n) \quad (1)$$

expresando (1) matricialmente

$$W = \frac{1}{2} [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \dots \ \Delta_n] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n] \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$W = \frac{1}{2} [\Delta] \{ F \} = \frac{1}{2} [F] \{ \Delta \} \quad (3)$$

Substituyendo en (3) las rigideces y las fuerzas se obtiene

(a) $W = \frac{1}{2} [\Delta] [k] \{ \Delta \} \equiv U$ (Energía de deformación)

(b) $W = \frac{1}{2} [F] [f] \{ F \} \equiv U^*$ (Energía de Def. Complm.)

(4)

Substituyendo en (b) $[f]$, $[F]$ y $\{F\}$ de las vigas libremente apoyadas y en cantiliver se obtiene

La energía complementaria de la viga simplemente apoyada [Fig. 2.8b]

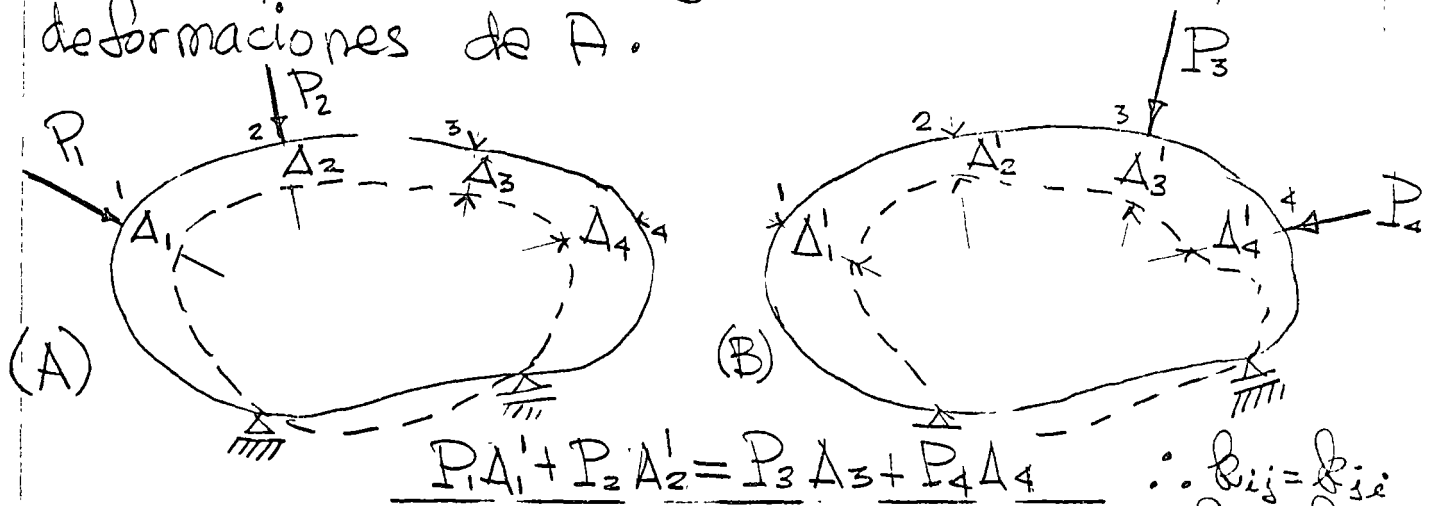
$$U^* = \frac{LM_1 M_2}{2} \left(\frac{L}{6EI} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

y la energía complementaria para el cantiliver es

$$U^* = \frac{LF_1 M_1}{2} \left(\frac{L}{6EI} \right) \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

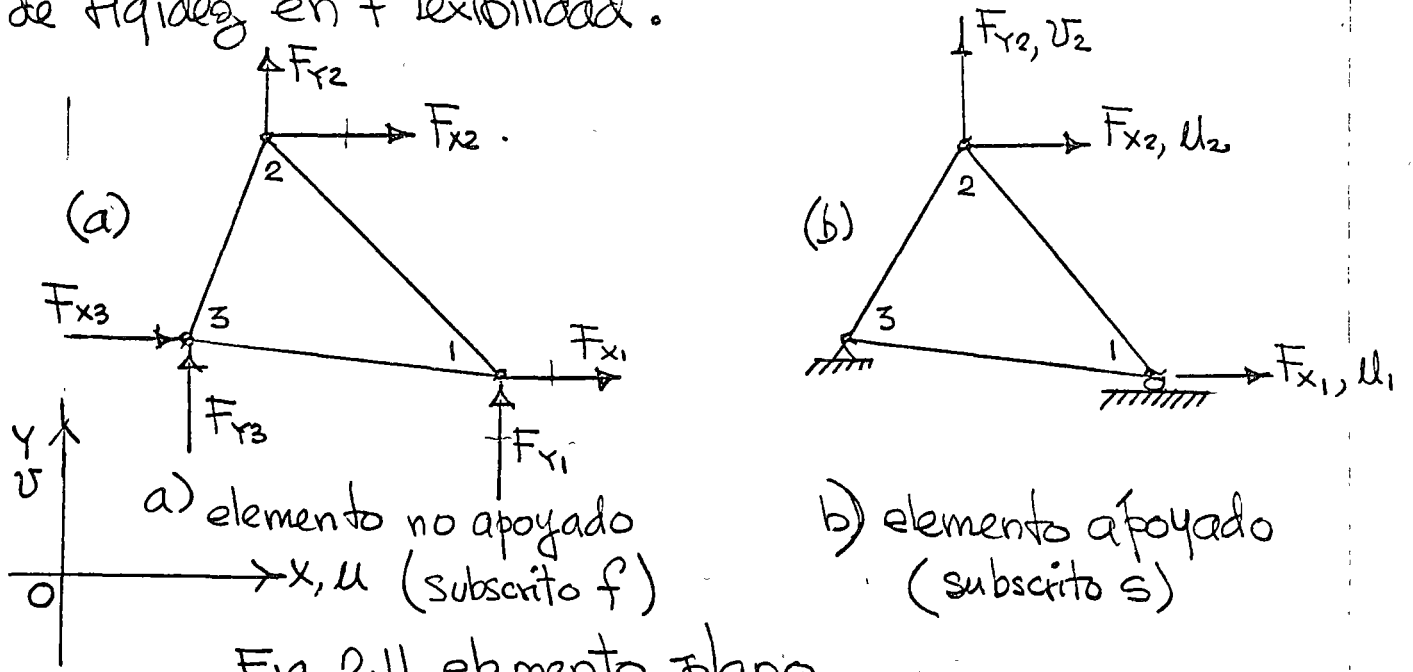
2.5 RECIPROCIDAD. Los coeficientes de rigidez y los de flexibilidad para comportamiento elástico lineal en virtud de la Ley de los Trabajos Recíprocos (Betti, Maxwell), es decir $f_{ij} = f_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$. Lo anterior es conveniente desde el punto de vista de eficiencia computacional y verificación de resultados

Enunciado: En un mismo cuerpo elástico bajo un estado A de cargas y otro estado B de cargas. Las fuerzas del estado A por las deformaciones de B es igual a las fuerzas del estado B por las deformaciones de A.



2.6 Transformaciones Rigidez-Flexibilidad

Conocidas las relaciones fuerza-desplazamiento del elemento, es posible obtener formas alternadas mediante operaciones simple. Consideremos primero la Transformación de rigidez en flexibilidad.



particionando la matriz:

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fs} \\ k_{sf} & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix} \quad \{F\} = [k] \{\Delta\} \quad (2.11)$$

para las condiciones de apoyo mostradas en Fig 2.11(b) cada una de las submatrices $[k_{ff}, \dots, k_{ss}]$ es de 3×3 porque se tienen 3 grados de libertad

$$\begin{aligned} \{F_f\} &= [F_{x1}, F_{x2}, F_{y2}]^T & \{F_s\} &= [F_{x3}, F_{y1}, F_{y3}]^T \\ \{\Delta_f\} &= [u_1, u_2, v_2]^T & \{\Delta_s\} &= [u_3, v_1, v_3]^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

Puesto $\{\Delta_s\} = 0$ debido a las condiciones de apoyo

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ff} \\ k_{sf} \end{bmatrix} \{\Delta_f\} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.13) arriba de la línea de partición forman un grupo independiente de ecuaciones relacionando $\{F_e\}$ fuerzas externas, con los correspondientes desplazamientos nodales. Determinando su solución invirtiendo $[K_{ff}]$ se obtiene

$$\{\Delta_f\} = [f] \{F_e\} \quad (2.14)$$

dónde $[f] = [K_{ff}]^{-1}$ (2.15)

Las flexibilidades fueron derivadas de las rigideces definiendo un sistema de apoyo estable estáticamente determinado.

Para invertir el proceso anterior, es decir, desarrollar la matriz de rigidez completa dada la matriz de flexibilidad, se empieza por la inversión de la matriz de flexibilidad

$$\{F_e\} = [f]^{-1} \{\Delta_f\} = [K_{ff}] \{\Delta_f\} \quad (2.16)$$

en vista del sistema estable, con condiciones de apoyo estáticamente determinados representado por la matriz de flexibilidad, la relación entre fuerzas externas y de apoyo se establece de equilibrio estático como

$$\{F_s\} = [R] \{F_e\} \quad (2.17)$$

Substituyendo (2.16) en (2.17) se obtiene

$$\{F_s\} = [R] [f]^{-1} \{\Delta_f\} = [K_{sf}] \{\Delta_f\} \quad (2.18)$$

así que $[K_{sf}] = [R] [f]^{-1}$ (2.19)

Para desarrollar los otros términos en las ecuación completa

de rigidez, examinamos los resultados de, Eq. (2.11). El trabajo realizado por las fuerzas externas $\{F_f\}$ actuando sobre sus desplazamientos correspondientes $\{\Delta_f\}$ debe ser igual al trabajo realizado por las fuerzas remanentes $\{F_s\}$ actuando sobre sus desplazamientos $\{\Delta_s\}$ bajo las condiciones de apoyos reversibles. ($\{F_f\}$ son reacciones). Esto expresado matricialmente

$$\frac{1}{2} [F_s] \{\Delta_s\} = \frac{1}{2} [\Delta_f] \{F_f\} \quad (2.20)$$

Por la transpuesta de (2.18) $[F_s] = [\Delta_f] [k_{sf}]^T$, (2.20) se puede escribir como

$$\frac{1}{2} [\Delta_f] [k_{sf}]^T \{\Delta_s\} = \frac{1}{2} [\Delta_f] \{F_f\} \quad (2.20a)$$

de donde $\{F_f\} = [k_{sf}]^T \{\Delta_s\} = [k_{fs}] \{\Delta_s\}$ (2.21)

$$\text{De (2.19)} \quad [k_{fs}] = [f]^{-1} [R]^T \quad (2.22)$$

De nuevo considerando el formato de la matriz de rigidez resultante [Eq. (2.11)], de equilibrio, se obtiene lo mismo para (2.17) usando el resultado (2.22)

$$\{F_s\} = [R] [f]^{-1} [R]^T \{\Delta_s\} = [k_{ss}] \{\Delta_s\} \quad (2.23)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez se expresa como

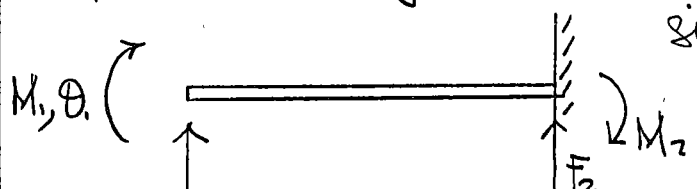
$$[k] = \begin{bmatrix} [f]^{-1} & [f]^{-1} [R]^T \\ [R] [f]^{-1} & [R] [f]^{-1} [R]^T \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En conclusión la matriz de rigidez se construye de la inversa de la matriz de flexibilidad $[f]$ y una matriz $[R]$

que se deriva de las relaciones de equilibrio del elemento. La matriz $[S]$ de (2.11) es simétrica, puesto que $[k_{fs}]$ es la transpuesta de $[k_{sf}]$. La ecuación (2.24) representa la fórmula general para transformación de flexibilidad a rigidez que incluye movimiento de cuerpo rígido. El número (s) de fuerzas de apoyo es indicado por el requerimiento de apoyos estáticamente determinados, pero no hay límite en el número (f) de fuerzas externas (es decir en el orden de la matriz de flexibilidad).

Por ejemplo en el caso de la viga libremente apoyada de Fig. 2.8(c), la matriz de flexibilidad ha

sido determinada y su valor es $[F] = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}$ (1)



De equilibrio se obtiene: $\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}$ (2)

en este caso la matriz $[R] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & 1 \end{bmatrix}$ (3)

Tarea substituir (2) y (3) en (2.24) y determinar $[k]$

Con los conceptos anteriores podemos construir un formato misto, es decir, expresar $[F_f \Delta_f]$ en términos de $[F_s \Delta_s]$. De la ecuación (2.17)

$$\{F_f\} = [R]^{-1} \{F_s\} \quad (2.17a)$$

Escribiendo la parte superior de (2.11) en forma de ecuación escribiendo los resultados de (2.24) (partición superior)

$$\{F_f\} = [f]^{-1}\{\Delta_f\} + [f]^{-1}[R]^T\{\Delta_s\} \quad (2.24a)$$

$$\text{Despejando a } \{\Delta_f\} = [f]\{F_f\} - [R]^T\{\Delta_s\} \quad (2.24b)$$

Substituyendo $\{F_f\}$ de (2.17a) en (2.24b) se obtiene

$$\{\Delta_f\} = [f][R]^{-1}\{F_s\} - [R]^T\{\Delta_s\} \quad (2.24c)$$

expresando matricialmente (2.17) y (2.24) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ \Delta_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]^{-1} & [0] \\ [f][R]^{-1} & -[R]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ \Delta_s \end{Bmatrix} \quad (2.3a)$$

2.7. TRANSFORMACION DE GRADOS DE LIBERTAD

Un sistema de ecuaciones formulado con respecto a cierto grado de libertad $\{\Delta'\}$ y se requiere expresar el sistema con respecto a otro grado de libertad $\{\Delta\}$. El ejemplo más común ocurre cuando el sistema original de grados de libertad está referido a unos ejes y se desea que las ecuaciones del problema sean referidas a un grado de libertad correspondiente a diferentes ejes; transformación de ejes coordenados. En el caso general el grado de libertad transformado puede no tener significado físico y no necesariamente igual el número de grados de libertad al del sistema original. La relación que

conecta los dos conjuntos de grados de libertad se escribe

$$\{\Delta'\} = [\Gamma]\{\Delta\} \quad (2.25)$$

Supongamos que las ecuaciones a transformarse son

$$[k']\{\Delta'\} = \{F'\} \quad (2.26)$$

Con el objeto que el trabajo permanezca constante durante la transformación impuesta, se tiene

$$L F' \{\Delta'\} = L F \{\Delta\}$$

y de la ec. (2.25)

$$L F' [\Gamma] \{\Delta\} = L F \{\Delta\}$$

por lo tanto $L F' [\Gamma] = L F$

$$\text{y por transposición } [\Gamma]^T \{F'\} = \{\hat{F}\} \quad (2.27)$$

donde ($\hat{\quad}$) designa el conjunto de fuerzas obtenido por la transformación de $\{F'\}$.

Substituyendo (2.25) en las expresiones para U y W

$$U = \frac{L \Delta'}{2} [k'] \{\Delta'\} = \frac{L \Delta'}{2} [\Gamma]^T [k'] [\Gamma] \{\Delta\} = \frac{L \Delta'}{2} [k] \Delta \quad (2.4c)$$

$$W = \frac{L \Delta'}{2} \{F'\} = \frac{L \Delta'}{2} [\Gamma]^T \{F'\} = \frac{L \Delta'}{2} \{F\} \quad (2.4d)$$

$$\text{donde } [k] = [\Gamma]^T [k'] [\Gamma] \quad (2.28)$$

el vector de fuerzas es transformado por (2.27) y la matriz de rigidez por (2.28)

En el caso de transformación de ejes coordenados ortogonales, la transformación es obtenida en una forma más directa examinando la relación entre los vectores de $\{\Delta'\}$ y los de $\{\Delta\}$ en vez de aceptar (2.27) como una transformación de vectores de fuerzas $\{F'\}$ y $\{F\}$. Se escribe entonces como

$$\{F'\} = [\Gamma]\{F\} \quad (2.29)$$

Substituyendo (2.25) y (2.29) en (2.26) se obtiene

$$[k'][\Gamma]\{\Delta\} = [\Gamma]\{F\}$$

$$[\Gamma]^{-1}[k'][\Gamma]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.30)$$

La transformación para ejes coordenados ortogonales tiene la propiedad

$$[\Gamma][\Gamma]^T = [I]$$

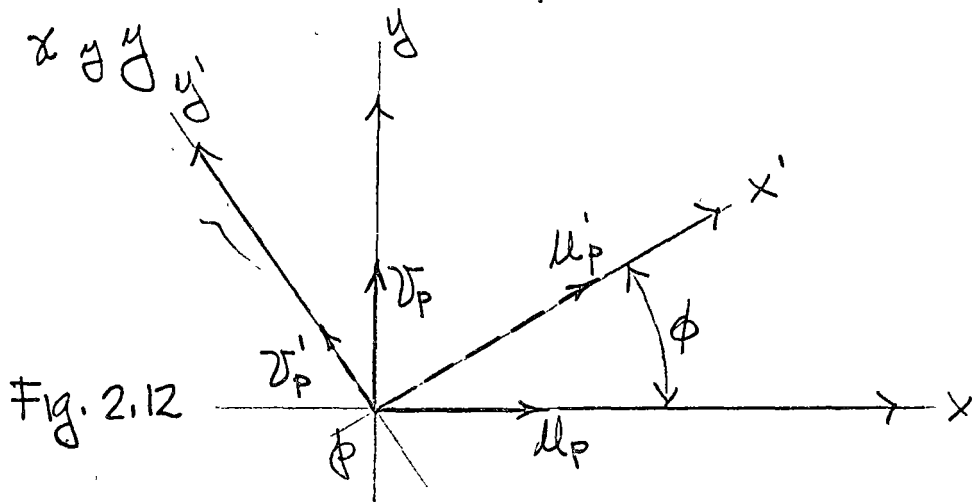
donde $[I]$ es la matriz de identidad. Puesto que por definición $[\Gamma][\Gamma]^{-1} = [I]$, entonces

$$[\Gamma]^T = [\Gamma]^{-1} \quad (2.31)$$

cuando una matriz tiene la propiedad (2.31), sea transpuesta igual a su inversa, es llamada matriz ortogonal, substituyendo (2.31) en (2.30) resulta la definición de

$$[\hat{k}] = [\Gamma]^T [k'] [\Gamma]$$

Supongamos por ejemplo que en un elemento plano, su matriz de rigidez, formulada con respecto a los ejes x' y y' como se muestra en la Fig. 2.12, va a ser transformado a expresiones relacionadas con los ejes



$$u'_p = u_p \cos \phi + v_p \sin \phi$$

$$v'_p = -u_p \sin \phi + v_p \cos \phi$$

matricialmente

$$\begin{Bmatrix} u'_p \\ v'_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} = [\Gamma_p] \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix}$$

y se observa que

$$[\Gamma_p]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = [\Gamma_p]^T$$

Si el elemento total consiste de $\frac{n}{2}$ nodos (n grados de libertad para el caso plano), la matriz de transformación resultante del elemento total es de la forma

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [\Gamma_1] & & & \\ & [\Gamma_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\Gamma_{v/2}] \end{bmatrix}$$

3.1- CONCEPTOS BASICOS DEL METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES

Las ecuaciones de rigidez del elemento son algebraicas lineales de la forma

$$\{F\} = [k]\{\Delta\} \quad (2.1)$$

el conjunto (2.1) completo para n grados de libertad es

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11} \Delta_1 + k_{12} \Delta_2 + \dots + k_{1j} \Delta_j + \dots + k_{1n} \Delta_n \\ F_2 &= k_{21} \Delta_1 + k_{22} \Delta_2 + \dots + k_{2j} \Delta_j + \dots + k_{2n} \Delta_n \\ &\vdots \\ F_i &= k_{i1} \Delta_1 + k_{i2} \Delta_2 + \dots + k_{ij} \Delta_j + \dots + k_{in} \Delta_n \\ &\vdots \\ F_n &= k_{n1} \Delta_1 + k_{n2} \Delta_2 + \dots + k_{nj} \Delta_j + \dots + k_{nn} \Delta_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se supone que las transformaciones de coordenadas al sistema global han sido efectuadas así que (3.1) se refiere al sistema global de ejes de la estructura

Los números $1 \dots i \dots n$ identifican el grado de libertad en los nudos o nodos del elemento. Todos los grados de libertad aparecen en cada renglón de (3.1).

Una vez que la relación fuerza-desplazamiento ha sido evaluada para cada elemento numéricamente de la estructura, la aplicación del método directo de las rigideces consiste en su forma de combinación algebraica dictada por los requerimientos de unión entre puntos nodales equilibrio y compatibilidad. Estas operaciones producen las ecuaciones (3.1).

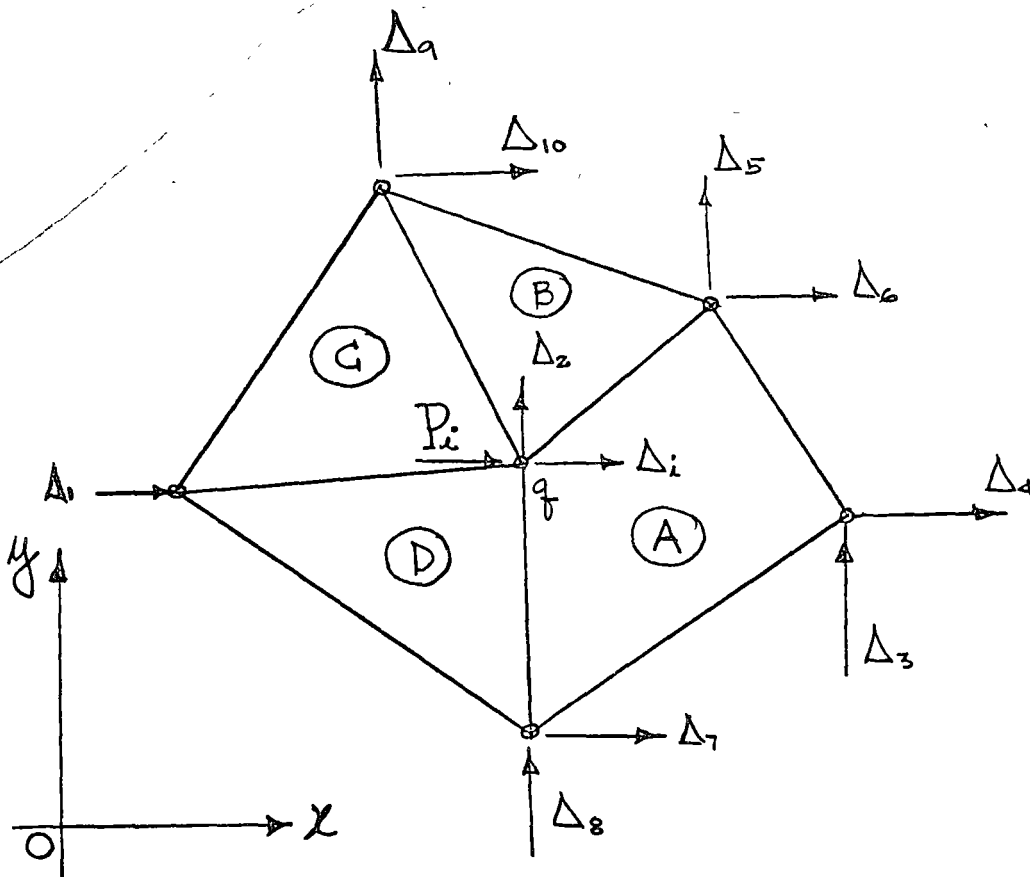
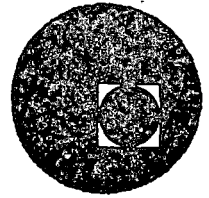


Fig. 3.1



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



"FUNDAMENTAL CONCEPTS FOR ANALYSIS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD".

"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE EL
METODO DE ELEMENTOS FINITOS".



Director de la Facultad.

M. en C. Ing. Enrique del Valle Calderón.

Jefe de la División.

Dr. Octavio Rascón Chávez.

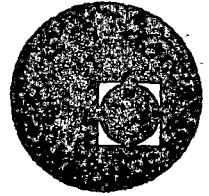
Jefe del C.E.C.

Dr. Pedro Martínez Pereda.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



MONDAY, MARCH 15, 1976.

DIRECT STIFFNESS METHOD.

METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES.



PROFESORES:

R. H. Gallagher.
P. Ballesteros

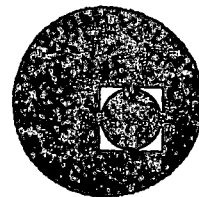
COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



TUESDAY, MARCH 16, 1976.

APPLICATION ON TRIDIMENSIONAL BEAM ELEMENT.

GENERALIZACION TRIDIMENSIONAL DEL ELEMENTO
VIGA.

PROFESORES:

R.H. Gallagher
P. Ballesteros

COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

1 METODO DE LAS RIGIDEZES PARA
ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES
PLANAS

1.1 Convención de signos.

La siguiente convención de signos será utilizada en el desarrollo del método de las rigideces y sus aplicaciones en marcos ortogonales planos.

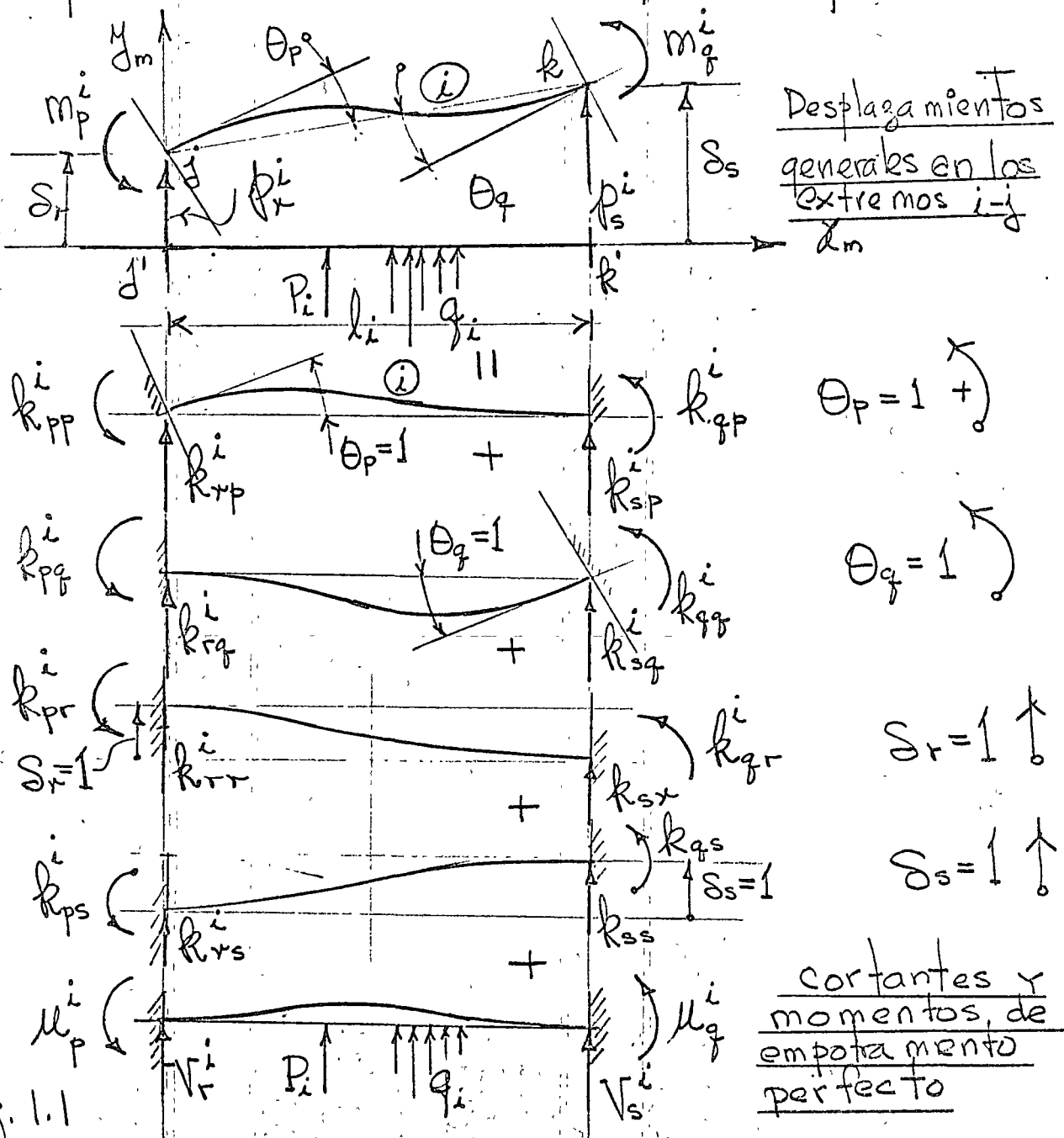


Fig. 1.1

De la Fig. 11, aceptando el principio de superposición se tiene:

$$\begin{aligned}
 m_p^i &= k_{pp}^i \theta_p + k_{pq}^i \theta_q + k_{pr}^i \delta_r + k_{ps}^i \delta_s + \mu_p^i \\
 m_q^i &= k_{qp}^i \theta_p + k_{qq}^i \theta_q + k_{qr}^i \delta_r + k_{qs}^i \delta_s + \mu_q^i \\
 p_r^i &= k_{rp}^i \theta_p + k_{rq}^i \theta_q + k_{rr}^i \delta_r + k_{rs}^i \delta_s + V_r^i \\
 p_s^i &= k_{sp}^i \theta_p + k_{sq}^i \theta_q + k_{sr}^i \delta_r + k_{ss}^i \delta_s + V_s^i
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

en (1.1) se desprecia el efecto de la carga normal expresando (1.1) matricialmente se tiene

$$\{m\}_i = [k]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \quad (1.2)$$

donde:

$$\{m\}_i = \begin{Bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{\mu\}_i = \begin{Bmatrix} \mu_p \\ \mu_q \\ V_r \\ V_s \end{Bmatrix}_i \quad (1.3)$$

$\{m\}_i$; componentes de acciones sobre barra para mantener equil.

$\{\delta\}_i$; Desplazamientos en los extremos del miembro (i)

$\{\mu\}_i$; Momentos y cortantes de empotramiento perfecto en (i)

$[k]_i$; Matriz de rigidez del miembro (i), la cual,

despreciando el efecto de cortante y carga normal, para un miembro de sección constante es:

$$[R]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \phi \\ \psi \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} \quad (1.4)$$

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido presentada, antes de aplicarlo a diversos sistemas estructurales su procedimiento conviene organizarlo en un programa sistemático y las ecuaciones básicas del análisis presentarlas en términos generales. Como ejemplo consideraremos el marco siguiente.

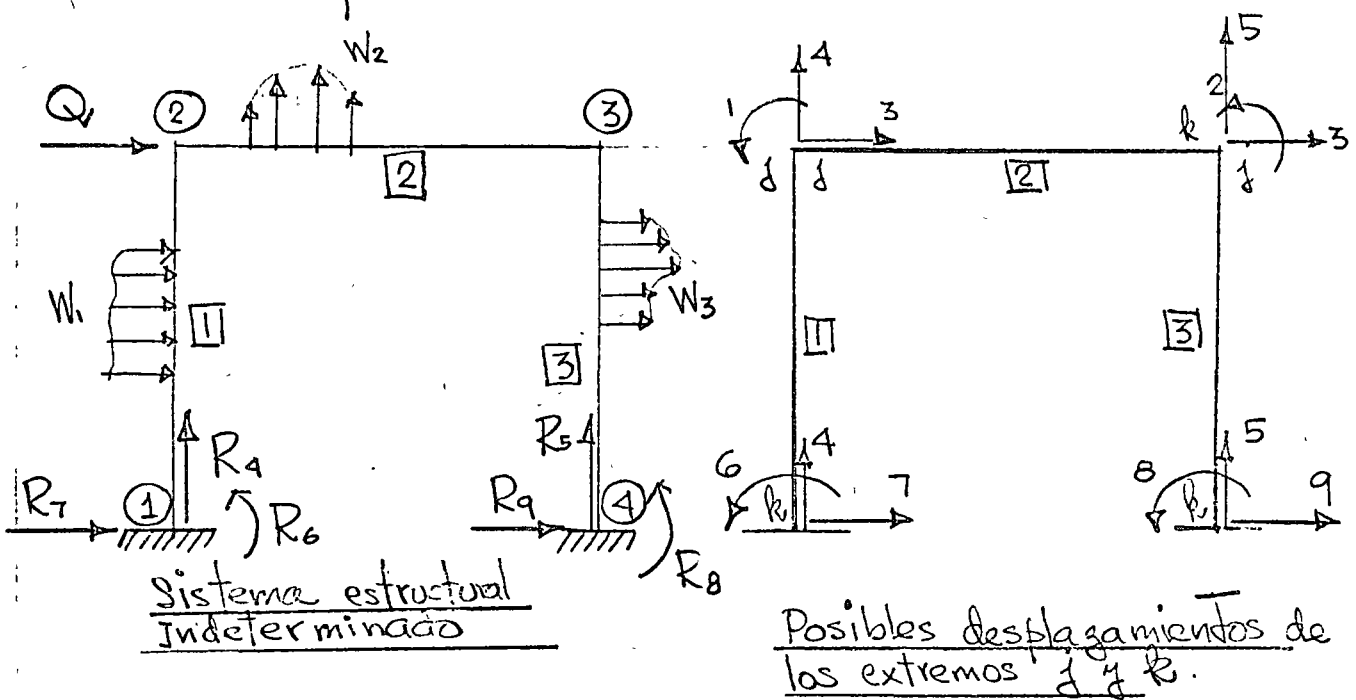


Fig. 1.2

El pórtico de la Fig. 1.2 es indeterminado de tercer grado con θ_1, θ_2 y δ_3 , porque las condiciones de apoyo anulan a $\delta_4, \delta_5, \theta_6, \delta_7, \theta_8, \delta_9$. Como primera etapa consideramos la estructura con los nudos fijos determinando la suma de momentos y cortantes correspondientes S_{mo} .

Aplicando las ecuaciones (1.1) al marco de la Fig. 1.2

$$\text{Miembro 1} \left\{ \begin{array}{l} m_1' = k_{11}' \theta_1 + k_{16}'(0) + k_{13}' \delta_3 + k_{17}'(0) + \mu_1' \\ m_6' = k_{61}' \theta_1 + k_{66}'(0) + k_{63}' \delta_3 + k_{67}'(0) + \mu_6' \\ \phi_3' = k_{31}' \theta_1 + k_{36}'(0) + k_{33}' \delta_3 + k_{37}'(0) + V_3' \\ \phi_7' = k_{71}' \theta_1 + k_{76}'(0) + k_{73}' \delta_3 + k_{77}'(0) + V_7' \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$\text{Miembro 2} \left\{ \begin{array}{l} m_1^2 = k_{11}^2 \theta_1 + k_{12}^2 \theta_2 + k_{14}^2(0) + k_{15}^2(0) + \mu_1^2 \\ m_2^2 = k_{21}^2 \theta_1 + k_{22}^2 \theta_2 + k_{24}^2(0) + k_{25}^2(0) + \mu_2^2 \\ \phi_4^2 = k_{41}^2 \theta_1 + k_{42}^2 \theta_2 + k_{44}^2(0) + k_{45}^2(0) + V_4^2 \\ \phi_5^2 = k_{51}^2 \theta_1 + k_{52}^2 \theta_2 + k_{54}^2(0) + k_{55}^2(0) + V_5^2 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$\text{Miembro 3} \left\{ \begin{array}{l} m_2^3 = k_{22}^3 \theta_2 + k_{28}^3(0) + k_{23}^3 \delta_3 + k_{29}^3(0) + \mu_2^3 \\ m_8^3 = k_{82}^3 \theta_2 + k_{88}^3(0) + k_{83}^3 \delta_3 + k_{89}^3(0) + \mu_8^3 \\ \phi_3^3 = k_{32}^3 \theta_2 + k_{38}^3(0) + k_{33}^3 \delta_3 + k_{39}^3(0) + V_3^3 \\ \phi_9^3 = k_{92}^3 \theta_2 + k_{98}^3(0) + k_{93}^3 \delta_3 + k_{99}^3(0) + V_9^3 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Como se demostró previamente el análisis de la estructura indeterminada de la Fig. 1.2 puede ser evaluado de

$$[S_{ij}] \{\delta_i\} = \{Q_i\} \quad (1.8)$$

en el caso de la Fig 1.2, (1.8) es igual a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{41} & S_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{21}^1 + M_{23}^2 \\ M_{32}^2 + M_{34}^3 \\ V_{21}^1 + V_{21}^3 - Q \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

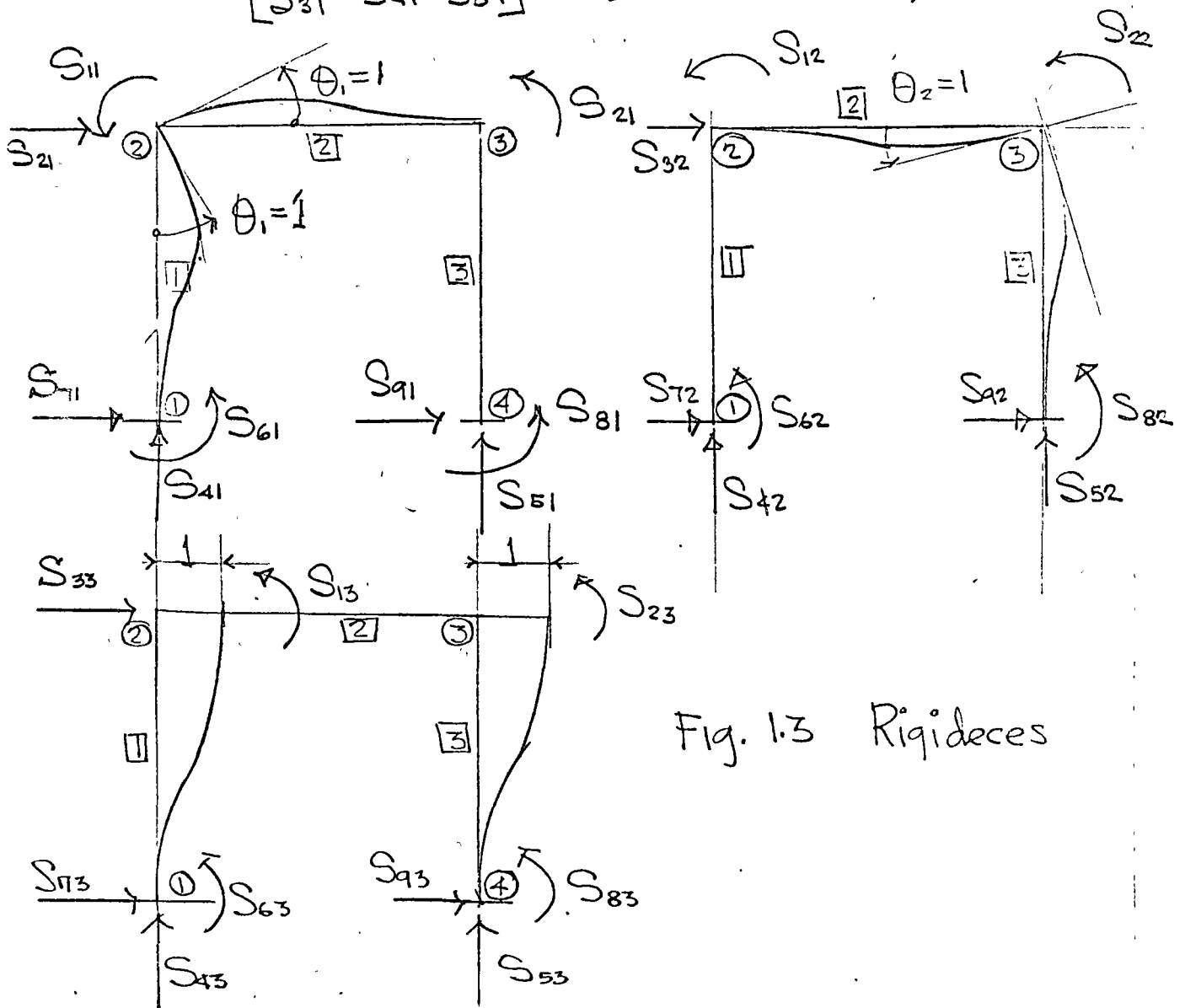


Fig. 1.3 Rigideces

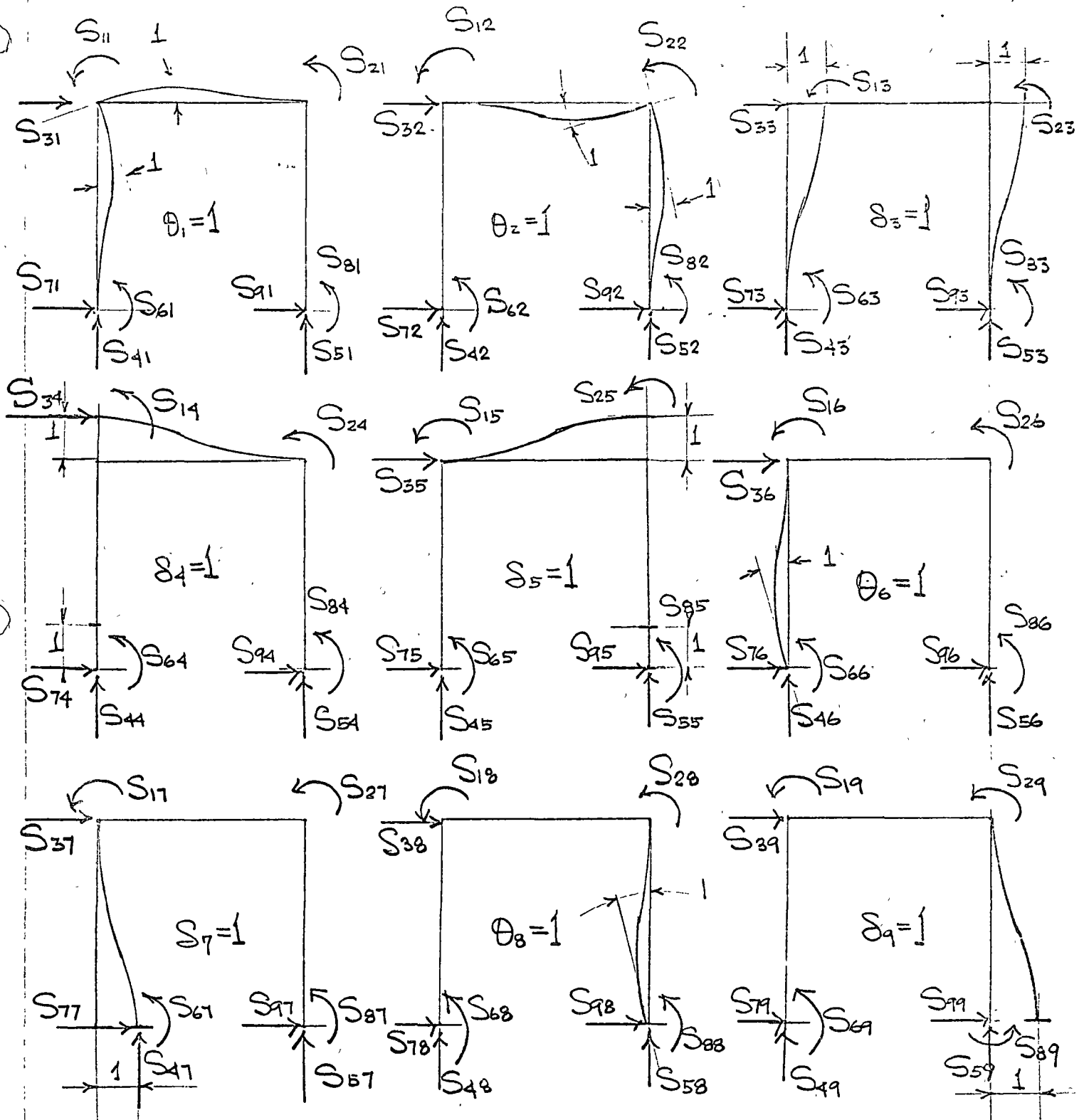


Fig. 1.4 Rigideces considerando todos los posibles grados de libertad despreciando deformaciones axiales (se suponen direcciones positivas)

De la Fig. 1A el desarrollo completo de las ecuaciones de superposición incluyendo reacciones es

$$S_{11}\theta_1 + S_{12}\theta_2 + S_{13}\delta_3 + S_{14}\delta_4 + S_{15}\delta_5 + S_{16}\theta_6 + S_{17}\delta_7 + S_{18}\theta_8 \\ + S_{19}\delta_9 + \mu'_{21} + \mu^2_{23} = 0$$

$$S_{21}\theta_1 + S_{22}\theta_2 + S_{23}\delta_3 + S_{24}\delta_4 + S_{25}\delta_5 + S_{26}\theta_6 + S_{27}\delta_7 + S_{28}\theta_8 \\ + S_{29}\delta_9 + \mu^2_{32} + \mu^3_{34} = 0$$

$$S_{31}\theta_1 + S_{32}\theta_2 + S_{33}\delta_3 + S_{34}\delta_4 + S_{35}\delta_5 + S_{36}\theta_6 + S_{37}\delta_7 + S_{38}\theta_8 \\ + S_{39}\delta_9 + V'_{21} + V^3_{21} = Q$$

$$S_{41}\theta_1 + S_{42}\theta_2 + S_{43}\delta_3 + S_{44}\delta_4 + S_{45}\delta_5 + S_{46}\theta_6 + S_{47}\delta_7 + S_{48}\theta_8 \\ + S_{49}\delta_9 + V^2_{23} = R_4 \quad (1.10)$$

$$S_{51}\theta_1 + S_{52}\theta_2 + S_{53}\delta_3 + S_{54}\delta_4 + S_{55}\delta_5 + S_{56}\theta_6 + S_{57}\delta_7 + S_{58}\theta_8 \\ + S_{59}\delta_9 + V^2_{32} = R_5$$

$$S_{61}\theta_1 + S_{62}\theta_2 + S_{63}\delta_3 + S_{64}\delta_4 + S_{65}\delta_5 + S_{66}\theta_6 + S_{67}\delta_7 + S_{68}\theta_8 \\ + S_{69}\delta_9 + \mu'_{12} = R_6$$

$$S_{71}\theta_1 + S_{72}\theta_2 + S_{73}\delta_3 + S_{74}\delta_4 + S_{75}\delta_5 + S_{76}\theta_6 + S_{77}\delta_7 + S_{78}\theta_8 \\ + S_{79}\delta_9 + V'_{12} = R_7$$

$$S_{81}\theta_1 + S_{82}\theta_2 + S_{83}\delta_3 + S_{84}\delta_4 + S_{85}\delta_5 + S_{86}\theta_6 + S_{87}\delta_7 + S_{88}\theta_8 \\ + S_{89}\delta_9 + \mu^3_{43} = R_8$$

$$S_{91}\theta_1 + S_{92}\theta_2 + S_{93}\delta_3 + S_{94}\delta_4 + S_{95}\delta_5 + S_{96}\theta_6 + S_{97}\delta_7 + S_{98}\theta_8 \\ + S_{99}\delta_9 + V^3_{43} = R_9$$

expresando (1.10) matricialmente se obtiene:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} & \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} & \\
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} & \\
 S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} & \\
 S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} & \\
 S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} & \\
 S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} & \\
 S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} &
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c}
 \theta_1 \\
 \theta_2 \\
 \theta_3 \\
 \theta_4 \\
 \theta_5 \\
 \theta_6 \\
 \theta_7 \\
 \theta_8 \\
 \theta_9
 \end{array} \right\}
 +
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c}
 \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 \\
 \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 \\
 \nu_{21}^1 + \nu_{21}^3 \\
 \nu_{23}^2 \\
 \nu_{32}^2 \\
 \mu_{12}^1 \\
 \nu_{12}^1 \\
 \mu_{43}^3 \\
 \nu_{43}^3
 \end{array} \right\}
 =
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 Q \\
 R_4 \\
 R_5 \\
 R_6 \\
 R_7 \\
 R_8 \\
 R_9
 \end{array} \right\}
 \quad (1.11)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$[S_{kl}] \quad \{S_i\} \quad \{\mu\} \quad \{R\}$

Expresando (1.11) matricialmente con la notación indicada

$$[S_{kl}]\{S_i\} + \{\mu\}_k = \{R\} \quad (1.12)$$

El análisis por el método de las rigideces se reduce a evaluar de (1.8) $\{S_i\}$ o sea

$$\{S_i\} = [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} \quad (1.13)$$

y substituyendo (1.13) en (1.2) se obtiene para cada barra

$$\{m_i\} = [k]_i [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_i \quad (1.14)$$

y las reacciones se obtienen substituyendo (1.13) en (1.12)

$$\{R\} = [S_{kl}] [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_k \quad (1.15)$$

2 METODO DE LAS RIGIDECES DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

2.1 ELEMENTO VIGA.

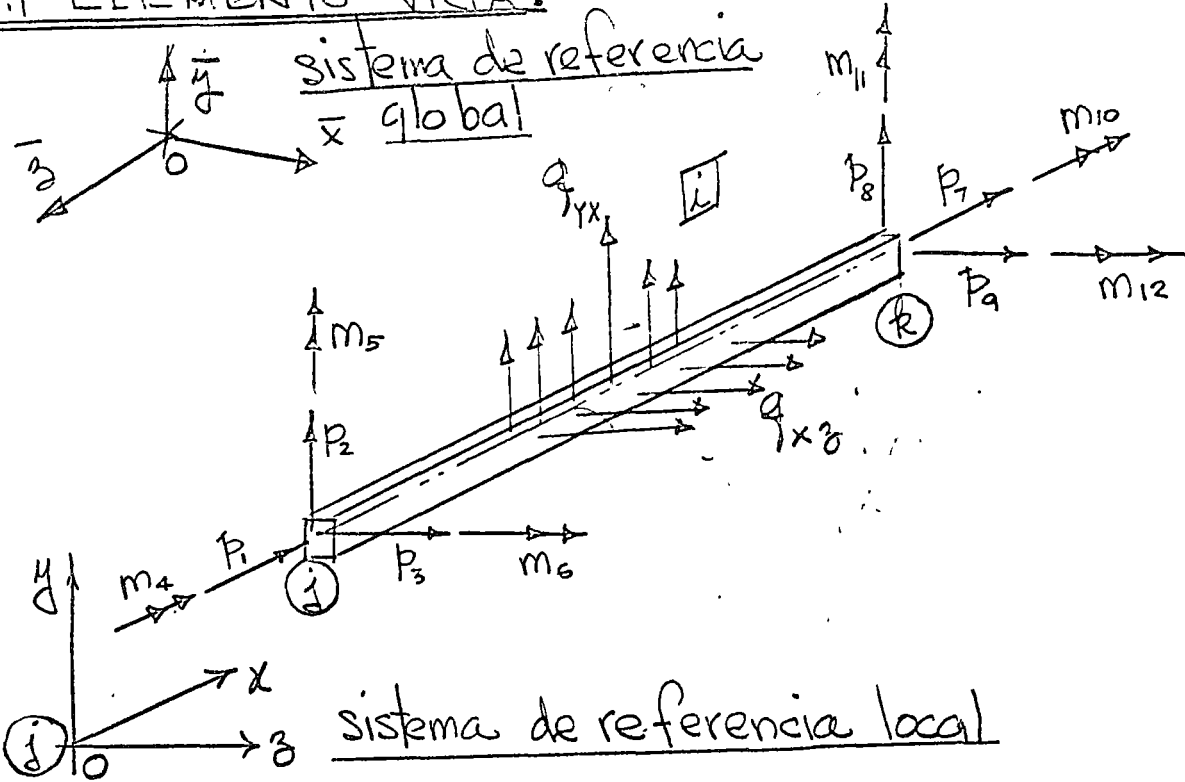


Fig. 2.1 Elemento viga; ejes y, z son centroidales y principales ($Q_y = Q_z = I_{yz} = 0$)

El elemento estructural $j-k$, se supone una barra capaz de resistir fuerzas axiales, momentos flectores respecto a dos ejes principales en el plano de la sección transversal, y momentos de torsión respecto a su eje centroidal. Las siguientes fuerzas actúan en la viga $j-k$: Fuerzas axiales P_1 y P_7 ; Fuerzas cortantes P_2, P_3, P_8 y P_9 ; Momentos flectores m_5, m_6, m_{11} y m_{12} ; y Momentos de torsión m_4 y m_{10} . la localización y dirección positiva se muestra en Fig. 2.1

- Los desplazamientos correspondientes serán $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{12}$ serán positivos en la dirección positiva de las fuerzas. La posición del elemento viga $j-k$ será especificado por las coordenadas del extremo j y los cosenos directores del eje x (dirección $j-k$) y del eje y con respecto al sistema global $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

La matriz de rigidez del elemento viga será de 12×12 pero siempre es posible integrarla con submatrices de 2×2 y 4×4 . De la teoría de flexión y torsión de vigas las fuerzas p_1 y p_2

- dependen solo de sus desplazamientos correspondientes; lo mismo es cierto para los momentos torsionantes m_4 y m_{10} . Sin embargo, para una selección arbitraria de los planos de flexión, los momentos flectores y fuerzas de corte en el plano xy dependerían no solo de sus desplazamientos correspondientes pero también en los desplazamientos correspondientes a las fuerzas en los planos xy . Solamente si los xy y xz coinciden con los ejes principales de la sección transversal puede considerarse la flexión y corte sobre dichos planos independiente una de la otra.

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{array} \right\}}_{\{p\}_i} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccc}
 k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\
 k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{2,10} & k_{2,11} & k_{2,12} \\
 k_{31} & \cdot & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{3,12} \\
 k_{41} & \cdot & \cdot & k_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{4,12} \\
 k_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{55} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{5,12} \\
 k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{6,12} \\
 k_{71} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{77} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{7,12} \\
 k_{81} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{88} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{8,12} \\
 k_{91} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{99} & \cdot & \cdot & k_{9,12} \\
 k_{10,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{10,10} & \cdot & k_{10,12} \\
 k_{11,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{11,11} & k_{11,12} \\
 k_{12,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{12,12}
 \end{array} \right]}_{[k_{ij}]} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{array} \right\}}_{\{\delta\}_i} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{array} \right\}}_{\{\mu\}_i} \quad (2.1)$$

Donde:

- $\{f\}$; vector de cargas actuando sobre j & k
- $[k_{ij}]$; matriz de rigidez de la barra j & k
- $\{S\}$; vector de desplazamientos nodales
- $\{U\}$; vector de reacciones de empotramiento perfecto

2.2 Elementos de la matriz de rigidez $[k_{ij}]$.

En el cálculo de las rigideces k_{ij} se utilizan los principios energéticos expuestos, considerándose la energía elástica de deformación por flexión, corte y carga normal.

2.2.1 Fuerzas axiales ϕ_1 y ϕ_7 .

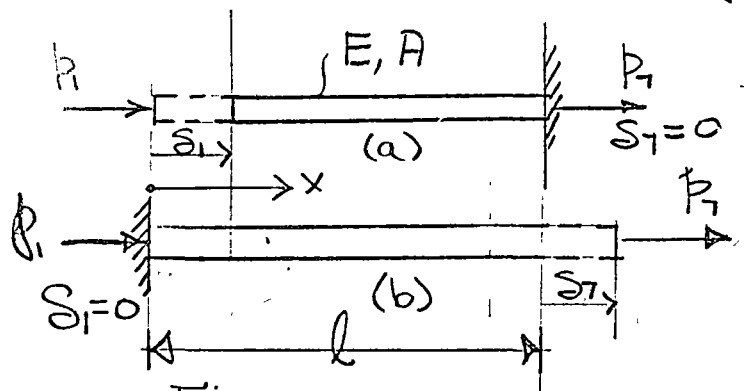


Fig. 2.2.1.1

De la ley de Hooke y la Fig. 2.2.1.2 se obtiene

$$k_{11} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{71} = -\frac{EA}{l} \quad (a)$$

$$k_{77} = \frac{P_7}{S_7} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{17} = -\frac{EA}{l} \quad (b)$$

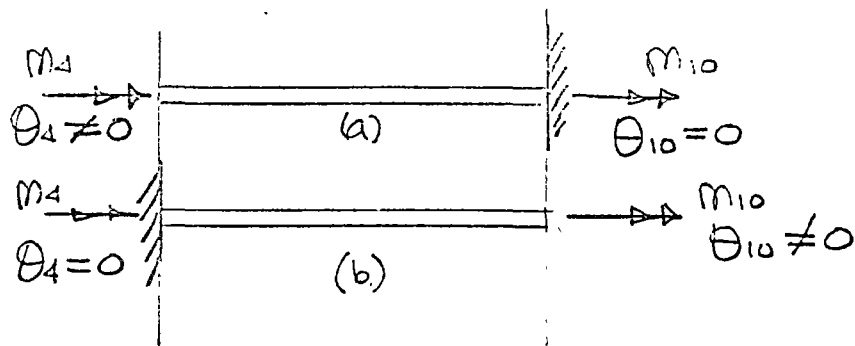
2.2.2 Momentos de torsión m_4 y m_{10} .

Fig. 2.2.2.1

De la teoría de torsión de barras y la fig. 2.2.2.1 se obtiene

$$k_{44} = \frac{m_4}{\theta_4} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{10,4} = -\frac{GJ}{l} \quad (a)$$

$$k_{10,10} = \frac{m_{10}}{\theta_{10}} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{4,10} = -\frac{GJ}{l} \quad (b)$$

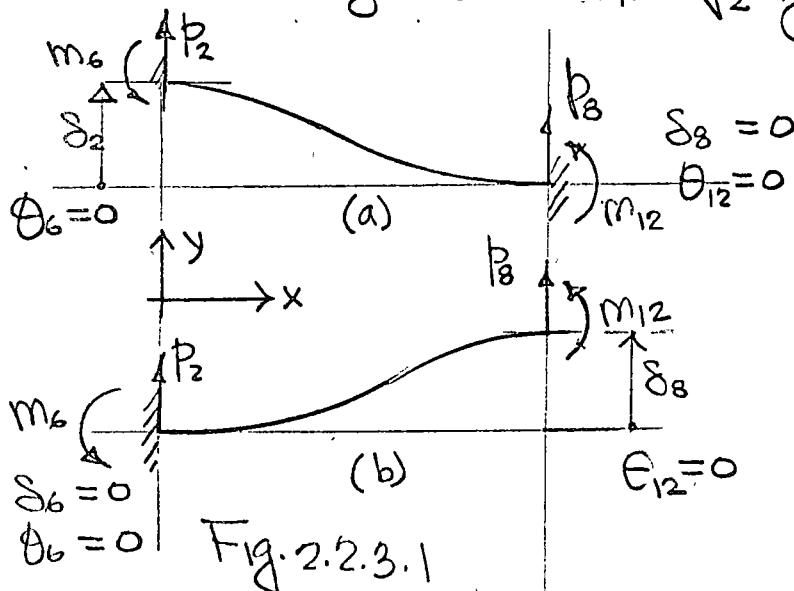
2.2.3 Fuerzas de corte P_2 y P_8 .

Fig. 2.2.3.1

De la Fig. 2.2.3.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y cortante se obtiene

$$k_{22} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \quad a$$

$$k_{62} = \frac{m_6}{\delta_2} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} ; k_{26} = \frac{\phi_2}{\theta_6} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \quad b$$

$$k_{82} = \frac{P_8}{\delta_2} = \frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} ; k_{28} = \frac{\phi_2}{\delta_8} = \frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \quad c$$

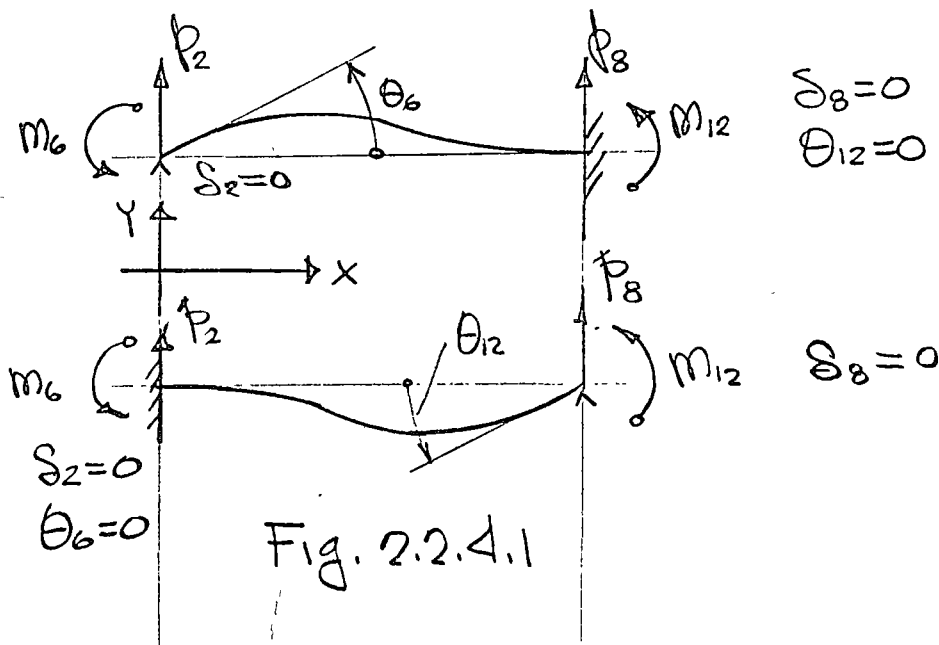
$$k_{12,2} = \frac{m_{12}}{\delta_2} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} ; k_{2,12} = \frac{\phi_2}{\theta_{12}} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \quad d$$

$$k_{88} = \frac{P_8}{\delta_8} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \quad (\text{si } EI \text{ es constante}) \quad e$$

$$k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = \frac{-6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} = -\frac{P_2}{\theta_6} = -k_{62} \quad (f)$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\theta_{12}} = \frac{-6EI}{(1+\phi_Y)l^2} \quad (g)$$

2.2.4 Momentos Factores



De la Fig. 2.2.4.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y corte se obtiene

$$k_{66} = \frac{M_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_r) EI_z}{(1 + \phi_r) l} \quad a$$

$$k_{86} = \frac{P_8}{\theta_6} = -\frac{6 EI_z}{(1 + \phi_r) l^2}; \quad k_{68} = \frac{M_6}{\delta_8} = -\frac{6 EI_z}{(1 + \phi_r) l^2} \quad b$$

$$k_{12,6} = \frac{M_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_r) EI_z}{(1 + \phi_r) l}; \quad k_{6,12} = \frac{M_6}{\theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_z}{(1 + \phi_r) l} \quad c$$

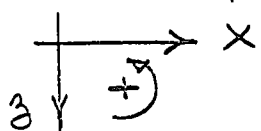
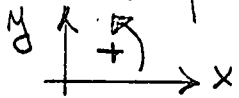
$$k_{12,12} = \frac{M_{12}}{\theta_{12}} = \frac{(4 + \phi_r) EI_z}{(1 + \phi_r) l} \quad d$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\theta_{12}} = -\frac{6 EI_z}{(1 + \phi_r) l^2}; \quad k_{12,8} = \frac{M_{12}}{\delta_8} = k_{8,12} \quad e$$

$$k_{6,12} = \frac{M_6}{\theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_z}{(1 + \phi_r) l}; \quad k_{12,6} = \frac{M_{12}}{\theta_6} = k_{6,12} \quad f$$

2.2.5 Fuerzas de corte P_8 y P_9 .

Los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos δ_8 y δ_9 se obtienen de los resultados previos. Debe observarse, que con la convención de signos adoptada en la Fig. 2.1, las direcciones de los momentos flectores positivos en el plano x, y son diferentes al plano x, z :



, la convención

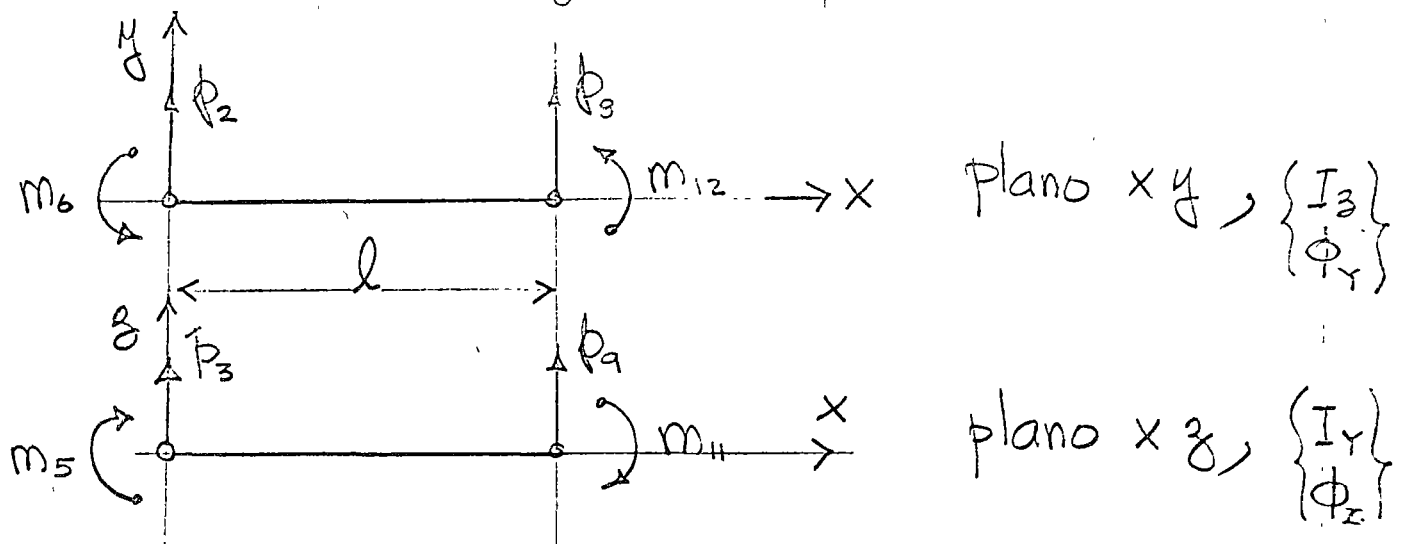


Fig. 2.2.5 Convención de signos para fuerzas de corte y momentos flectores;

de signos se muestra en la Fig. 2.2.5, basado en lo anterior es evidente que

$$k_{33} = \frac{P_3}{\delta_3} \equiv -k_{22} = -\frac{P_2}{\delta_2} \quad a$$

$$k_{53} = \frac{m_5}{\delta_3} \equiv -k_{62} = -\frac{m_6}{\delta_2} \quad b$$

$$k_{93} = \frac{P_9}{\delta_3} \equiv -k_{82} = -\frac{P_8}{\delta_2} \quad c$$

$$k_{11,3} = \frac{m_{11}}{\delta_3} \equiv -k_{12,2} = -\frac{m_{12}}{\delta_2} \quad d$$

$$k_{99} = \frac{P_9}{\delta_9} \equiv -k_{88} = -\frac{P_8}{\delta_8} \quad e$$

$$k_{11,9} = \frac{m_{11}}{\delta_9} \equiv -k_{12,8} = -\frac{m_{12}}{\delta_8} \quad f$$

Debe considerarse en el plano xz a I_y y ϕ_z como momento de inercia y parámetro de cortante.

2.2.6 Momentos Flectores m_5 y m_{11}

17

Aplicando las mismas observaciones de la sección anterior, se obtiene

$$k_{55} = \frac{m_5}{\theta_5} \equiv k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} \quad a$$

$$k_{95} = \frac{p_9}{\theta_5} \equiv -k_{86} = -\frac{p_8}{\theta_6} = +\frac{6 EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{59} \quad b$$

$$k_{11,5} = \frac{m_{11}}{\theta_5} \equiv k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{5,11} \quad c$$

substituyendo los valores k_{ij} obtenidos en las subsecciones anteriores se obtiene la

matriz de rigidez de la barra j de la Fig. 2.1 ecuación 2.5. en donde

$$\phi_Y = \frac{12 EI_3}{GA_{sY} l^2} = 24(1 + \nu) \frac{A}{A_{sY}} \left(\frac{r_3}{l} \right)^2 = \frac{12 f_Y EI_3}{GA l^2} \quad (2.3)$$

$$\phi_z = \frac{12 EI_Y}{GA_{sZ} l^2} = 24(1 + \nu) \frac{A}{A_{sZ}} \left(\frac{r_Y}{l} \right)^2 = \frac{12 f_3 EI_Y}{GA l^2}$$

ν = relación de Poisson, A = área total de la sección, A_{sY} y A_{sZ} = áreas efectivas en cortante en direcciones y y z resp.

r_Y y r_3 = radios de giro respecto a y y z resp. a x .

ϕ_Y y ϕ_3 = Parámetros de deformación de corte. Si

r_3/l y r_Y/l son pequeños comparados con la unidad,

como son en elementos flexibles, ambos ϕ_Y y ϕ_3 se pueden considerar cero. Los factores de forma son

$$f_Y = \frac{A}{I_3^2} \int_A \left(\frac{Q_3}{b} \right)^2 dA, \quad f_3 = \frac{A}{I_Y^2} \int_A \left(\frac{Q_Y}{b_Y} \right)^2 dA \quad (2.4)$$

$$[R_{ij}] =$$

	S_1	S_2	S_3	Θ_4	Θ_5	Θ_6	S_7	S_8	S_9	Θ_{10}	Θ_{11}	Θ_{12}
$\frac{EA}{l}$												
0		$\frac{12EI_2}{l^3(1+\phi_r)}$										
0	0		$\frac{12EI_1}{l^3(1+\phi_2)}$									
0	0	0		$\frac{GJ}{l}$								
0	0		$\frac{-6EI_1}{l^2(1+\phi_2)}$	0	$\frac{(4+\phi_2)EI_1}{l(1+\phi_2)}$							
0	$\frac{6EI_2}{l^2(1+\phi_r)}$	0	0	0	0	$\frac{(4+\phi_r)EI_3}{l(1+\phi_r)}$						
$\frac{-EA}{l}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{AE}{l}$					
0		$\frac{-12EI_2}{l^3(1+\phi_r)}$	0	0	0	$\frac{-6EI_3}{l^2(1+\phi_r)}$	0	$\frac{12EI_3}{l^3(1+\phi_r)}$				
0	0		$\frac{-12EI_1}{l^3(1+\phi_2)}$	0	$\frac{6EI_1}{l^2(1+\phi_2)}$	0	0	0	$\frac{-12EI_1}{l^3(1+\phi_2)}$			
0	0	0		$\frac{-GJ}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{l}$		
0	0		$\frac{-6EI_1}{l^2(1+\phi_2)}$	0	$\frac{(2-\phi_2)EI_1}{l(1+\phi_2)}$	0	0	0	$\frac{6EI_1}{l^2(1+\phi_2)}$	0	$\frac{(4+\phi_2)EI_1}{l(1+\phi_2)}$	
0	$\frac{6EI_2}{l^2(1+\phi_r)}$	0	0	0	0	$\frac{(2-\phi_r)EI_2}{l(1+\phi_r)}$	0	$\frac{-6EI_2}{l^2(1+\phi_r)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_r)EI_2}{l(1+\phi_r)}$

(simétrica)

- Para problemas Bi-dimensionales, el elemento viga i se reduce a seis fuerzas y momentos nodales y seis desplazamientos y rotaciones nodales. Utilizando

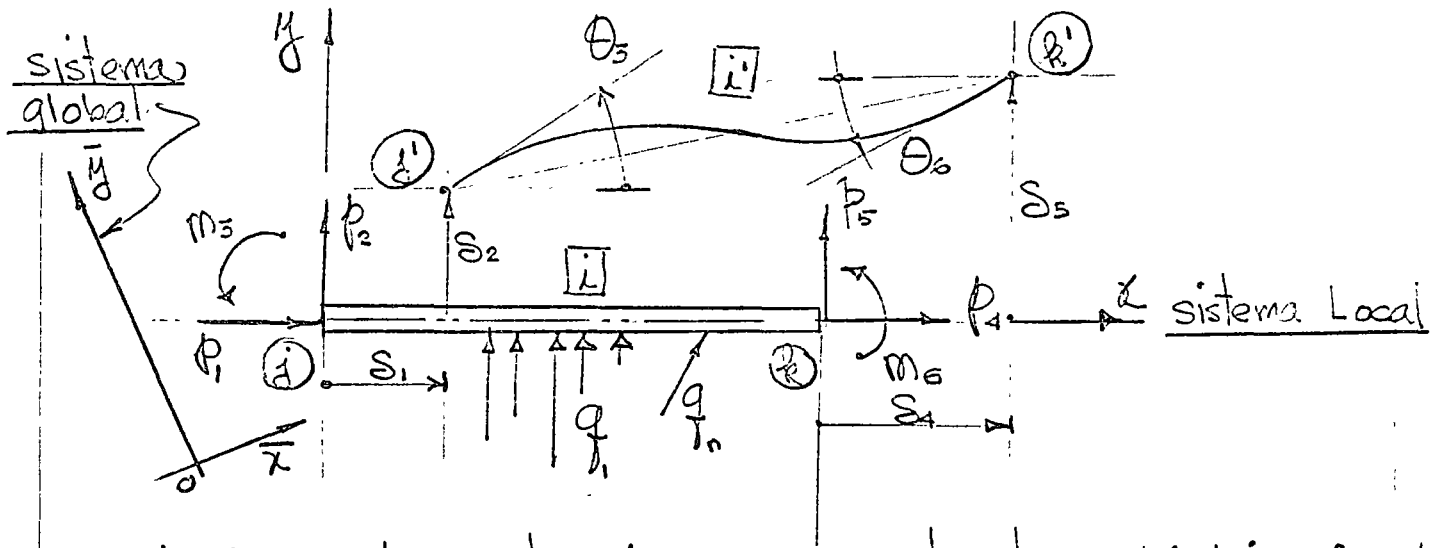


Fig. 2.2 Elemento viga para estructuras bidimensionales

la nomenclatura de la Fig. 2.2 (2.1) queda en

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{26} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_i \quad (2.6)$$

o sea:

$$\{P\}_i = [k_{ij}]_i \{S\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.7)$$

De los resultados discutidos previamente la matriz de rigidez de la barra i figura 2.2 queda

$$[k_{ij}]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & & \\ & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_r)} & & & & & \\ & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)} & & & & \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & & \\ & \frac{-12EI_z}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & & \frac{12EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & & \\ & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(2-\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)} & & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)} & \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{matrix} \quad (2.8)$$

Si las deformaciones por cortante son despreciables esto es, $\phi_r = 0$, la matriz de rigidez (2.8) se simplifica a

$$[k_{ij}] = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I_z} & & & & & & \\ & 12 & & & & & \\ & 6l & 4l^2 & & & & \\ -\frac{Al^2}{I_z} & & & \frac{Al^2}{I_z} & & & \\ & -12 & -6l & & 12 & & \\ & 6l & 2l^2 & & -6l & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La ecuación matricial relacionando los desplazamientos entre el sistema coordinado local y el global. Puede fácilmente demostrarse para el elemento viga mostrado en Fig. 2.1 es de la forma

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{0x} & & & & & & & & & & & & \\ \bar{\lambda}_{0y} & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \bar{\lambda}_{0z} & & & & & & & & & & & & \\ & \bar{\lambda}_{0x} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \bar{\lambda}_{0y} & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ & \bar{\lambda}_{0z} & & & & & & & & & & & \\ & & & \bar{\lambda}_{0x} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_{0y} & 0 & & & & & & & & & \\ & & \bar{\lambda}_{0z} & & & & & & & & & & \\ & & & & & \bar{\lambda}_{0x} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_{0y} & & & & & & & & & \\ & & & \bar{\lambda}_{0z} & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

o sea $\{\delta\} = [\lambda]\{\bar{\delta}\}$ (2.11)

donde $\bar{\lambda}_{0x} = [\lambda_{0x} \ m_{0x} \ n_{0x}]$ (2.12)
 $\bar{\lambda}_{0y} = [\lambda_{0y} \ m_{0y} \ n_{0y}]$
 $\bar{\lambda}_{0z} = [\lambda_{0z} \ m_{0z} \ n_{0z}]$

representa las matrices de los cose nos directores

○ para las direcciones ox , oy y oz , respectivamente, referidas al sistema global \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} , y $\{\bar{\delta}\}$ representa los desplazamientos de la barra $[i]$ respecto al sistema global.

Para problemas bidimensionales la matriz de transformación $[\lambda]$ se reduce a

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

○ El análisis de marcos tridimensionales, se puede describir por las mismas ecuaciones básicas usadas en la descripción del análisis de estructuras planas. Considerando el sistema total, el equilibrio estático nodal es definido por la ecuación matricial

$$[S_c] \{\delta_c\} + \{u_c\} = \{R_c\} \quad (2.14)$$

donde:

○ $[S_c]$ = Matriz de rigidez completa de la estructura.

$\{\delta_c\}$ = vector de desplazamientos nodales completo.

$\{u_c\}$ = vector de cargas nodales completo.

$\{R\}$ vector de reacciones de la estructura y de (2.14) se obtiene la ecuación

$$[S_{uu}]\{\delta_u\} + \{\mu_u\} = 0 \quad (2.15)$$

de donde se obtiene $\{\delta_u\}$ y $\{\delta_c\}$, el que substituyéndolo en (2.14) y (2.1) se obtiene $\{R_c\}$ y $\{\phi\}_i$ como

$$\{R_c\} = -[S_c][S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} \quad (2.16)$$

$$\{\phi\}_i = [k_{ij}]_i [S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} + \{\mu\}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

Ejemplo: En el sistema estructural de la Fig. 2.3, determine las reacciones nodales $\{\phi\}_i$ en los extremos de cada miembro y las reacciones originadas por las cargas indicadas.

La estructura tiene miembros prismáticos con las siguientes propiedades:

$$EI_y = EI_z = EI$$

$$GI_x = \frac{EI}{4} \quad (2.18)$$

$$EA_x = \frac{EI}{4}$$

la estructura es flexible y se puede considerar la ($\phi_y = \phi_z$) deformación por cortante despreciable

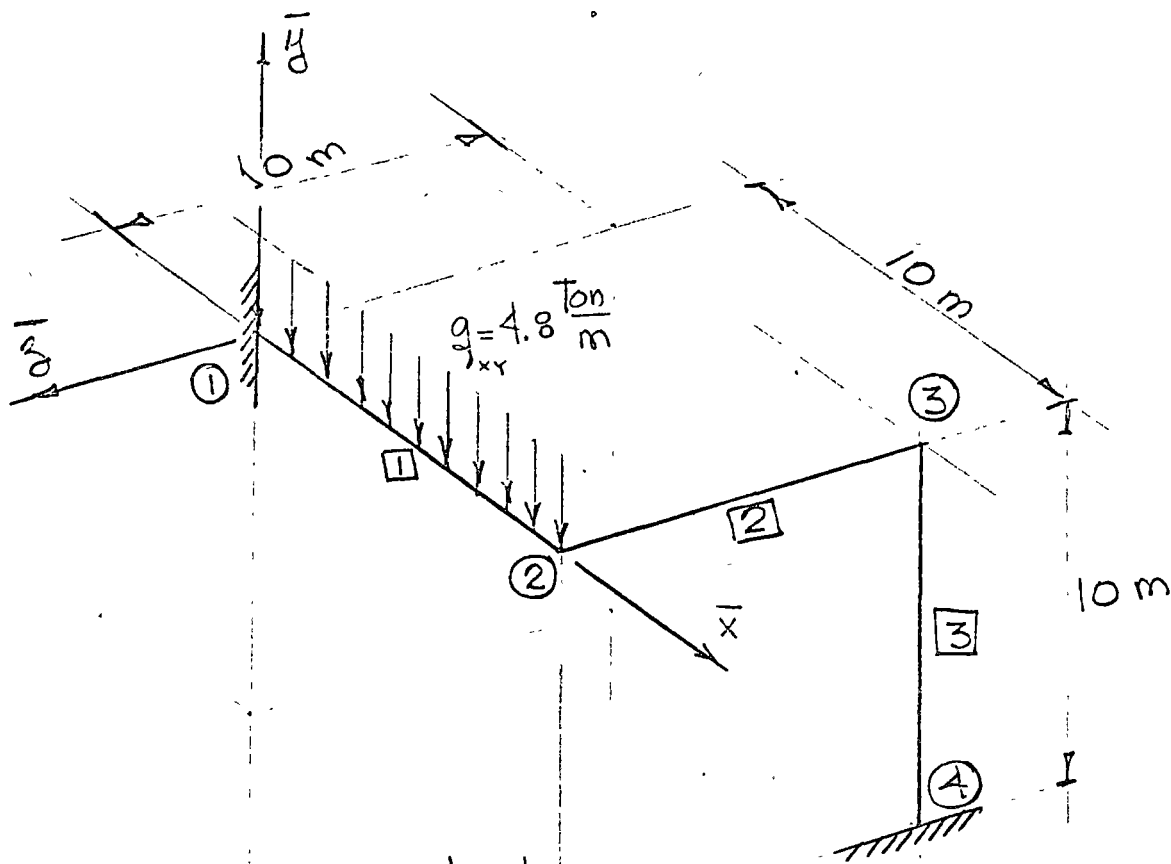


Fig. 2.3 Estructura espacial rígida

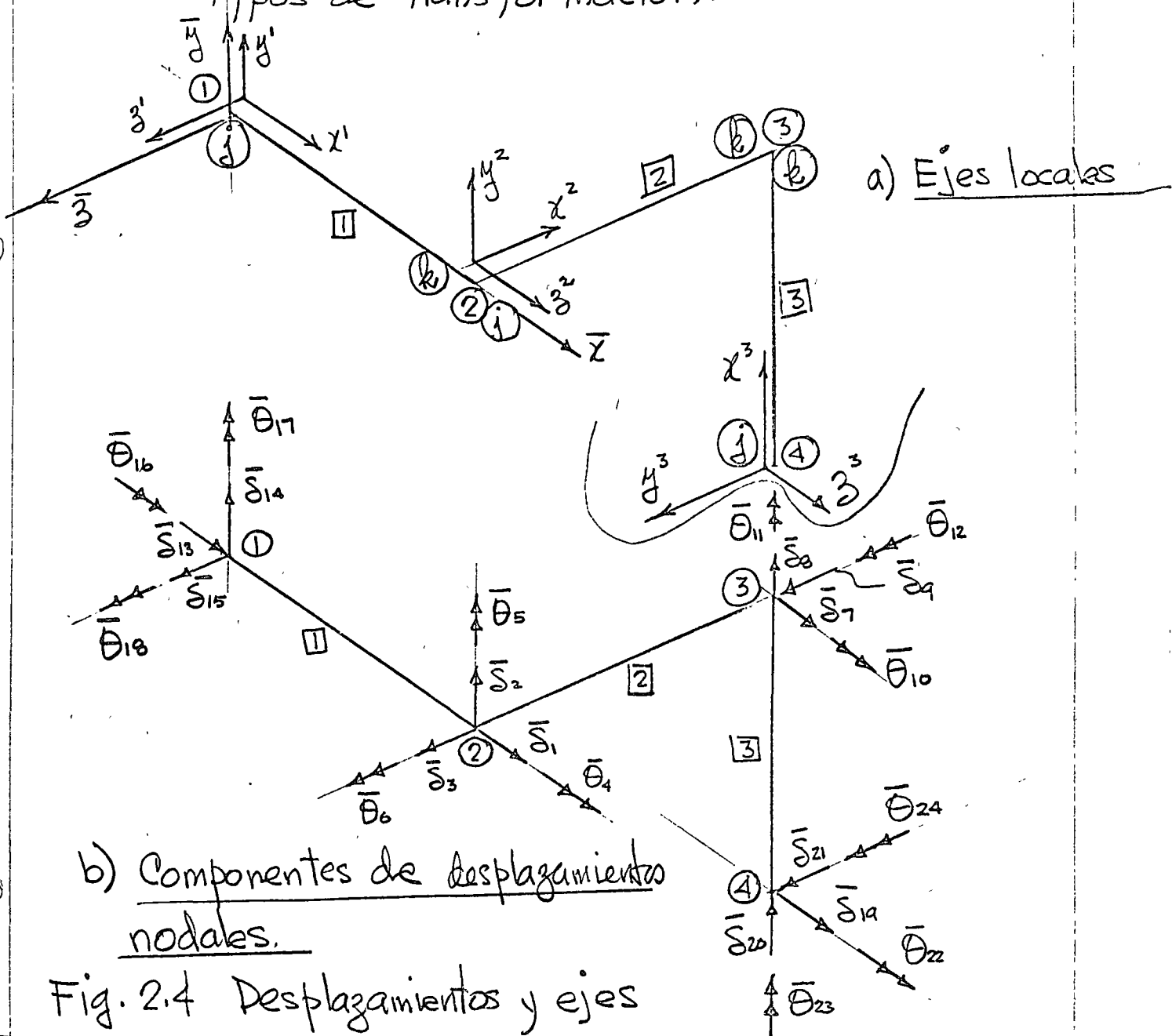
Las tablas 2.1 y 2.2 dan la información requerida para cada nodo y miembro

Nodo	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0	-10.00
4	10.0	-10.00	-10.00

Tabla 2.1 coordenadas nodales en metros.

Barra	Longitud (m)	Nodo		Cosenos directores			TIPO DE TRANSFORMACION	Angulo ψ
		j	k	$\cos \alpha_{jk}$	$\cos \beta_{jk}$	$\cos \gamma_{jk}$		
1	10.0	1	2	+1	0	0	y-z-x	0
2	10.0	2	3	0	0	-1	y-z-x	0
3	10.0	4	3	0	+1	0	z-y-x	90°

Tabla 2.2 longitudes, Cosenos directores y Tipos de Transformación.



vector columna de desplazamientos nodales $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \delta_{13} \\ \delta_{14} \\ \delta_{15} \\ \theta_{16} \\ \theta_{17} \\ \theta_{18} \\ \delta_{19} \\ \delta_{20} \\ \delta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_u\} \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix}$$

(2.19)

Matriz de rigidez de cada miembro

Para cada elemento viga la matriz de rigidez se establece por medio de (2.1) con respecto a los ejes locales; la matriz de transformación se puede establecer por medio de la expresión (2.10); y la matriz de rigidez de miembro transformada, $[k_{ij}]_i$ respecto a l sistema global se obtiene de

$$[k_{ij}]_i = [\lambda]_i^T [k_{ij}]_l [\lambda]_i \tag{2.20}$$

Miembro II

$$[\lambda]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] ; [k_{ij}]_i = [I]^T [k_{ij}]_l [I] = [k_{ij}]_i \tag{2.21}$$



$$EI [k_{ij}]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .060 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.060 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.22}$$

Miembro 2

De (2.5) se obtiene:

$$[k_{ij}]_2 = EI \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

De (2.12); $\bar{\lambda}_{0x_2} = [0 \ 0 \ -1]_2$, $\bar{\lambda}_{0y_2} = [0 \ 1 \ 0]_2$, $\bar{\lambda}_{0z_2} = [1 \ 0 \ 0]_2$ (2.12)_a

Subst. (2.12)_a en (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_2 = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \begin{array}{c|c} 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \begin{array}{c|c} 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \begin{array}{c|c} 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Subst (2.24) y (2.23) en (2.20) se obtiene

$$[\bar{k}_{ij}]_2 = EI \begin{bmatrix} .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 1 \\ 0 & .012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & .06 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 4 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 6 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 7 \\ 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .4 & 0 & 0 & 10 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 12 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Miembro $\boxed{3}$, De (2.5) se obtiene la matriz de rigidez la cual resulta igual a la de los miembros

$\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$[k_{ij}]_3 = [k_{ij}]_2 = [k_{ij}]_1 \quad (2.26)$$

De (2.12) se obtiene

$$\bar{\lambda}_{0x_3} = [0 \ 1 \ 0]_3, \quad \bar{\lambda}_{0y_3} = [0 \ 0 \ 1]_3, \quad \bar{\lambda}_{0z_3} = [1 \ 0 \ 0]_3 \quad (2.27)$$

De (2.27) y (2.10) se obtiene

$$[W]_3 = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array} \end{array} \end{array} \quad (2.28)$$

De (2.20) (2.26) y (2.28) se obtiene

$$[k_{ij}]_3 = EI \begin{array}{c|cccccccccccc|c} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \\ \hline .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 19 \\ 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & .012 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & .06 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 23 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 24 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 7 \\ 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -.012 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .012 & -.06 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & .06 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .4 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 11 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & 12 \end{array} \quad (2.29)$$

Matriz de rigidez de la estructura.

La matriz completa de la estructura $[S_c]$ se obtiene sumando los coeficientes de rigidez de miembro dados en las expresiones (2.22), (2.25) y (2.29) con respecto a la identificación de subíndices de los elementos se obtiene

$$[S_c] = EI \begin{bmatrix} .037 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 1 \\ 0 & .024 & 0 & .06 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & .037 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & .06 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 4 \\ -.06 & 0 & .06 & 0 & 0.8 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 5 \\ 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 6 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .024 & 0 & 0 & 0 & .06 & .06 & 7 \\ 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .037 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .037 & -.06 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.06 & .8 & 0 & 0 & 10 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .425 & 12 \\ \hline -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 24 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} [S_{uu}] \\ [S_{ru}] \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De (2.30) se obtiene $[S_{uu}]^{-1}$

DESFI-UNAM

Marzo 1976

P. Ballesteros

E1

31

(2.31)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38.396	1.266	-6.236	0.001	1.750	0.085	11.279	-0.403	-5.028	-0.503	3.005	-1.578
1.266	210.745	-43.160	-21.908	5.487	30.182	-39.151	11.279	-50.707	-13.286	3.124	7.303
-6.236	-43.160	102.028	2.421	-11.235	-6.537	50.707	5.028	84.038	9.312	-2.752	-7.543
0.001	-21.908	2.421	5.546	-0.346	-3.130	3.124	3.005	2.752	0.688	-0.278	-0.625
1.750	5.487	-11.235	-6.346	3.048	0.888	-13.286	-0.503	-9.312	-1.061	0.688	1.928
0.085	30.182	-6.537	-3.130	0.888	6.698	-7.303	1.587	-7.543	-1.928	0.625	1.425
11.279	-39.151	50.707	3.124	-13.286	-7.303	210.745	1.266	43.160	5.487	-21.908	-30.182
-0.403	11.279	5.028	3.005	-0.503	1.587	1.266	38.396	6.236	1.757	0.001	-0.085
-5.028	-50.707	84.038	2.752	-9.312	-7.543	43.160	6.236	102.028	11.235	-2.421	-6.537
-0.503	-13.286	9.312	0.688	-1.061	-1.928	5.487	1.750	11.235	3.048	-0.346	-0.888
3.005	3.124	-2.752	-0.278	0.688	0.625	-21.908	0.001	-2.421	-0.346	5.546	3.130
-1.587	7.303	-7.543	-0.625	1.928	1.425	-30.182	-0.085	-6.537	-0.888	3.130	6.698

Vector de momentos y reacciones fijas miembro $\boxed{1}$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \end{Bmatrix}_1 = \{\bar{\mu}\}_1 \quad (2.32)$$

$$\{\bar{\mu}\}_1 = [\lambda]_1^T \{\mu\}_1 \quad (2.33)$$

$$\{\mu\}_2 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_2 = 0$$

$$\{\mu\}_3 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_3 = 0$$

Habiendo definido las cargas nodales en terminos de las acciones fijas en los extremos con respecto a los ejes de referencia, se deduce el vector de cargas nodales completo $\{\mu\}_1$, como.

0	1
-24	2
0	3
0	4
0	5
40.0	6
0	7
0	8
0	9
0	10
0	11
0	12
0	13
-24	14
0	15
0	16
0	17
-40.0	18
0	19
0	20
0	21
0	22
0	23
0	24

$$\{\mu_c\} = \begin{Bmatrix} \{\mu_{uj}\} \\ \{\mu_{rj}\} \end{Bmatrix}$$

(2.34)

Etiqueta de grados de libertad



Substituyendo (2.21) y (2.34) en (2.15) se obtiene

$$\{\delta_u\} = [S_{uu}]^{-1} \{f_u\} \quad (2.35)$$

$$\{\bar{\delta}_u\} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Los valores de los desplazamientos dados por (2.36) con respecto al sistema global son valores relativos, para obtener los valores se substituye E en ton/m^2 e I en m^4 en (2.36) y se obtiene δ_i en metros y θ en radianes.

Acciones Finales en los extremos.

Habiendo evaluado las componentes de los desplazamientos nodales con respecto al sistema global de referencia por medio de (2.10) se evalúan con respecto a las coordenadas locales de cada barra y las acciones

○ finales para cada miembro de la estructura se calculan de (2.1)

$$\{p\}_i = [k_{ij}] [\lambda]_i \{\bar{S}\}_i + \{u\}_i \quad (2.37)$$

De la Fig. 2.4 se tiene para el miembro III

$$\{\bar{S}\}_1 = \begin{pmatrix} \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\theta}_7 \\ \bar{\theta}_8 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{Et} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

De (2.21), (2.38), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ Ton-m} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ Ton} \\ 10.0 \text{ Ton-m} \\ 8.0 \text{ Ton-m} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \end{Bmatrix} \quad \text{(Índices según convención Fig. 2.4)} \quad (2.39)$$

Miembro [2]. $\{\bar{S}\}_2 = \{S_u\} = [\lambda]_2 \{\bar{S}_u\}$ y $\{u\}_2 = \{0\}$
 De (2.24), (2.25), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \text{ Ton} \\ -5.2 \text{ " } \\ 0.7 \text{ " } \\ 8.5 \text{ Ton-m} \\ -8.0 \text{ " } \\ -10.0 \text{ " } \\ -3.5 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ " } \\ -0.7 \text{ " } \\ -8.5 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ " } \\ -41.8 \text{ " } \end{Bmatrix} \quad \text{(Índices según convención Fig. 2.4)} \quad (2.40)$$

Miembro [3]

$$\{S\}_3 = \begin{Bmatrix} S_{19} \\ S_{20} \\ S_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{24} \\ S_{27} \\ S_{28} \\ S_{29} \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix}_3 \quad (2.41)$$

en [3] también $\{U\}_3 = 0$, De (2.28), (2.29), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ " } \\ -0.7 \text{ -} \\ 1.2 \text{ Ton-m} \\ 15.2 \text{ " } \\ -6.6 \text{ " } \\ -5.2 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ " } \\ 0.7 \text{ " } \\ -1.2 \text{ Ton-m} \\ -8.5 \text{ " } \\ 41.8 \text{ " } \end{Bmatrix}_3 \quad (2.42)$$

Reacciones.

Substituyendo las matrices apropiadas en

$$\{R\} = [S_{ru}] \{S_u\} - \{U_r\}$$

se obtiene

$$\{R\} = \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{14} \\ R_{15} \\ R_{16} \\ R_{17} \\ R_{18} \\ R_{19} \\ R_{20} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ ''} \\ -3.5 \text{ ''} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ ''} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ ''} \\ 15.2 \text{ ''} \end{pmatrix}$$

2.43

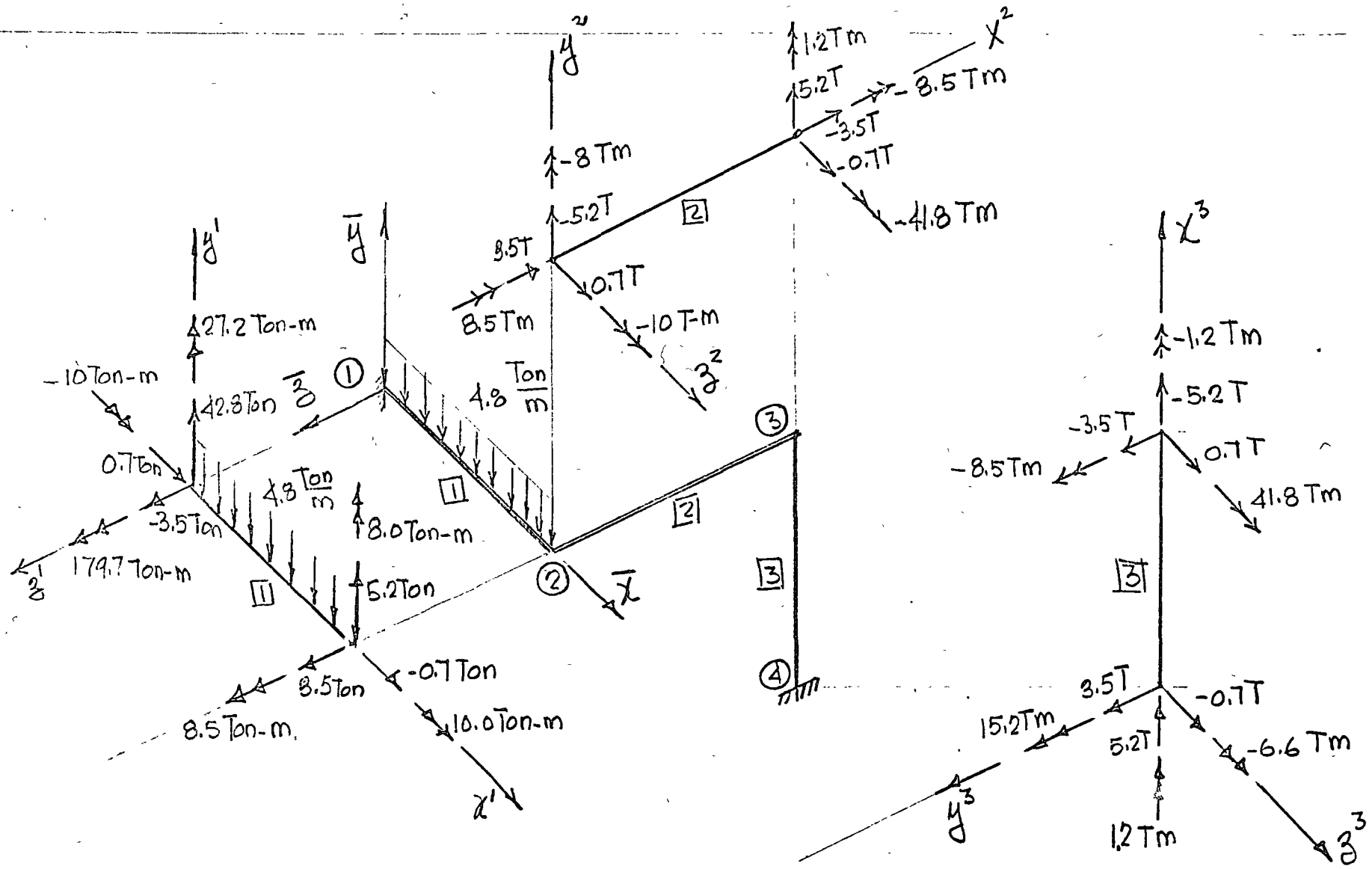


Fig. 2.5 Componentes de acciones finales $\{P_c\}$ en los extremos j e k

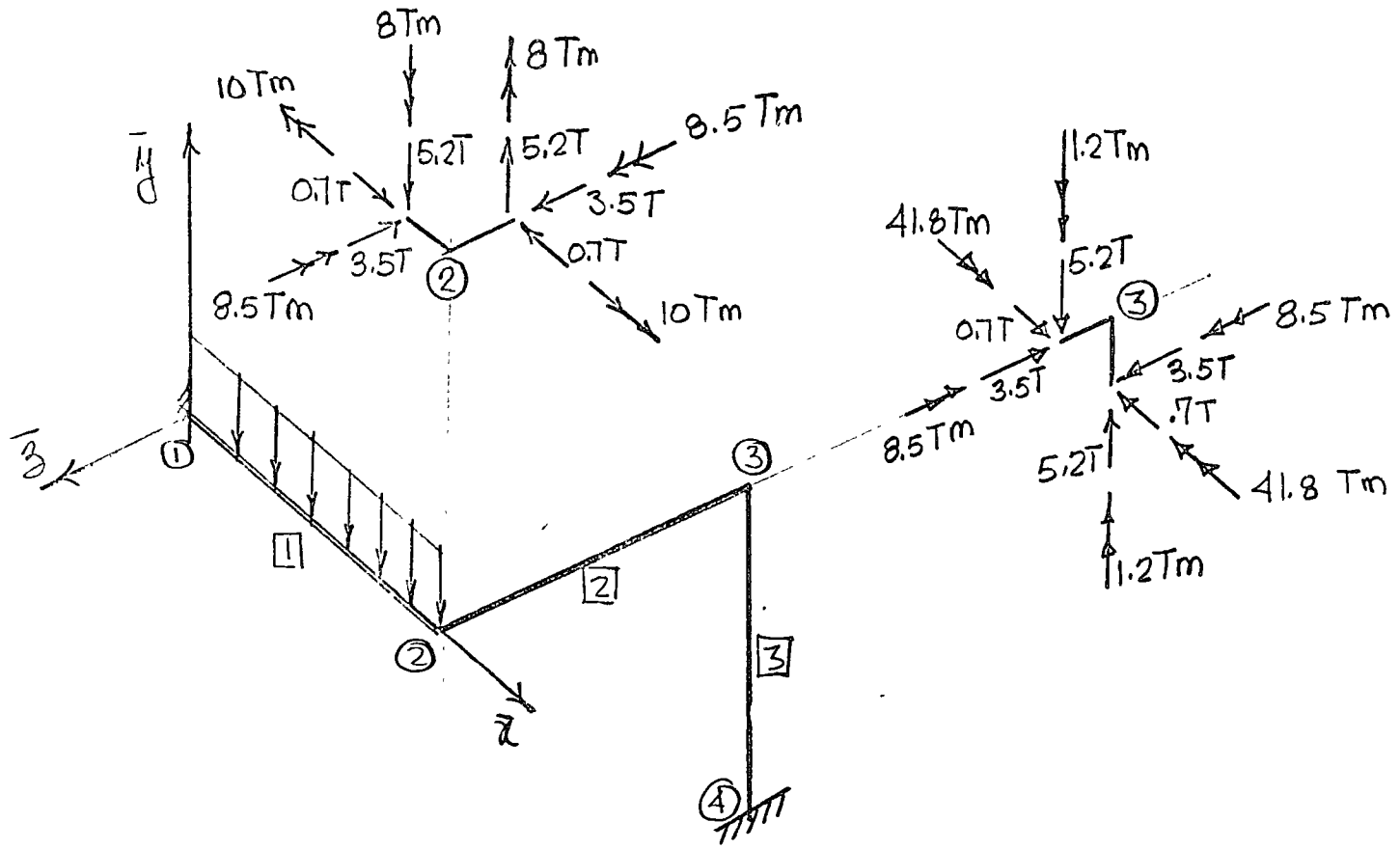


Fig. 2.6 Diagrama de cuerpo libre de los nodos ② y ③

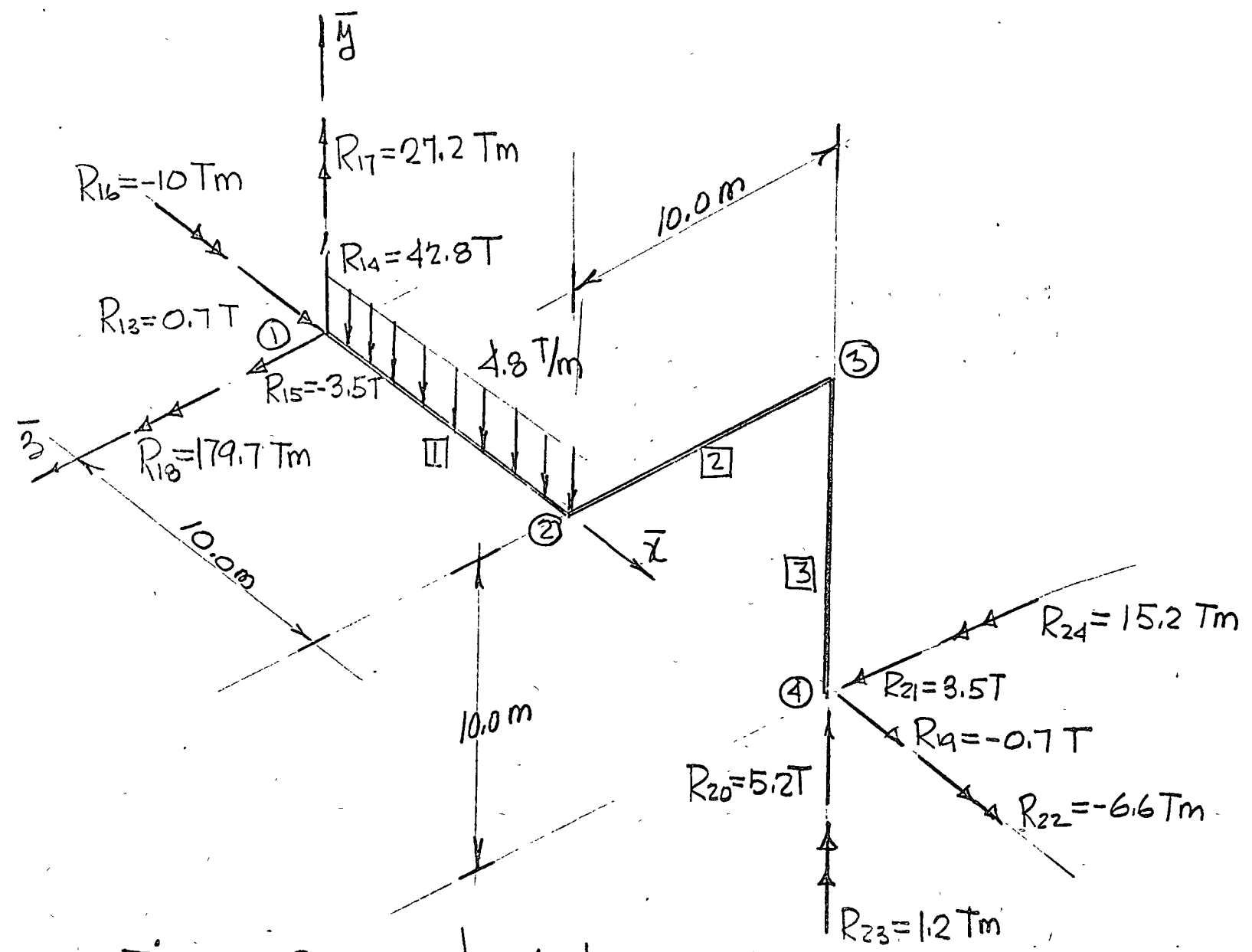
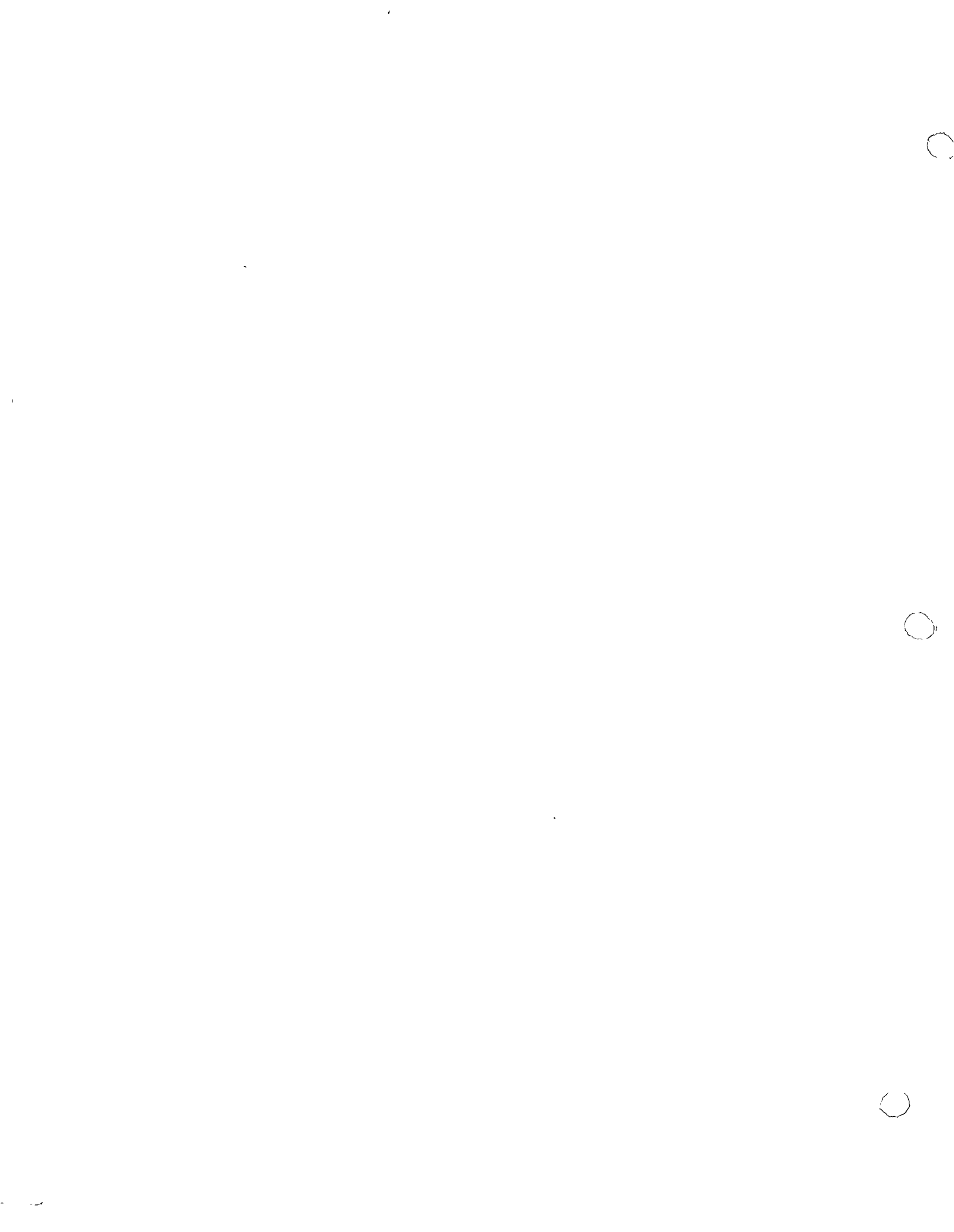
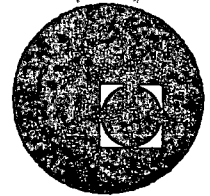


Fig. 2.7 Componentes de las reacciones en los apoyos ① y ④





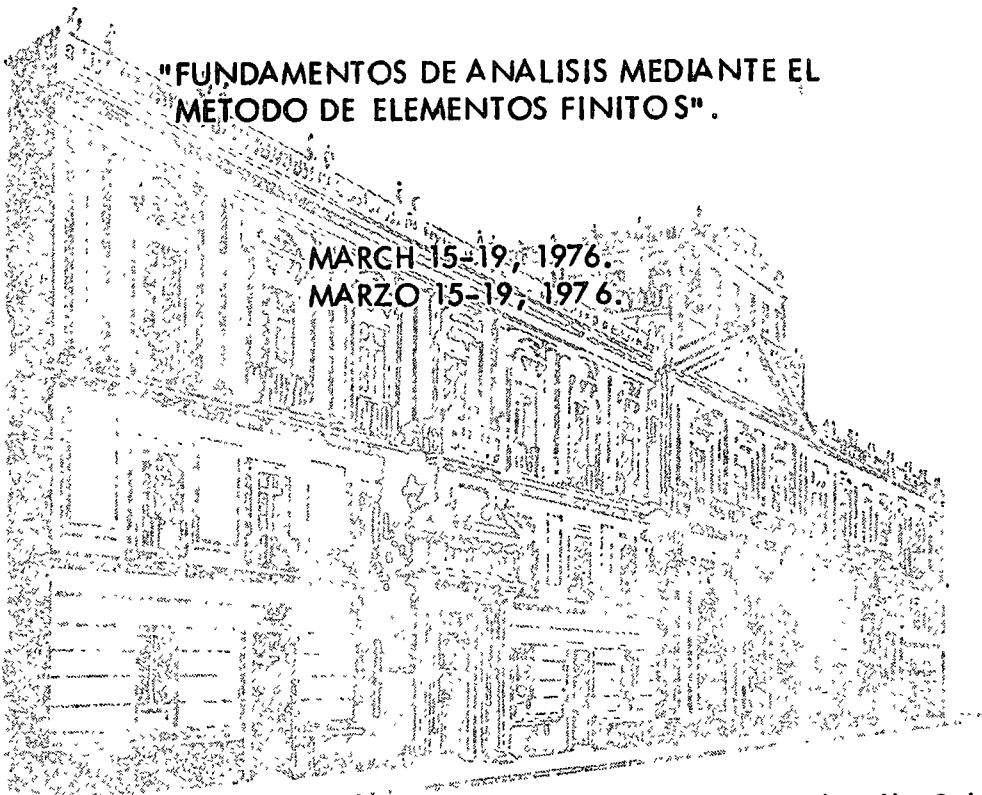
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



"FUNDAMENTAL CONCEPTS FOR ANALYSIS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD".

"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE EL
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS".

MARCH 15-19, 1976.
MARZO 15-19, 1976.



Director de la Facultad.

M. en C. Ing. Enrique del Valle Calderón.

Jefe de la División.

Dr. Octavio Rascón Chávez.

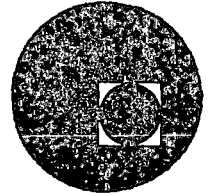
Jefe del C.E.C.

Dr. Pedro Martínez Pareda.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23



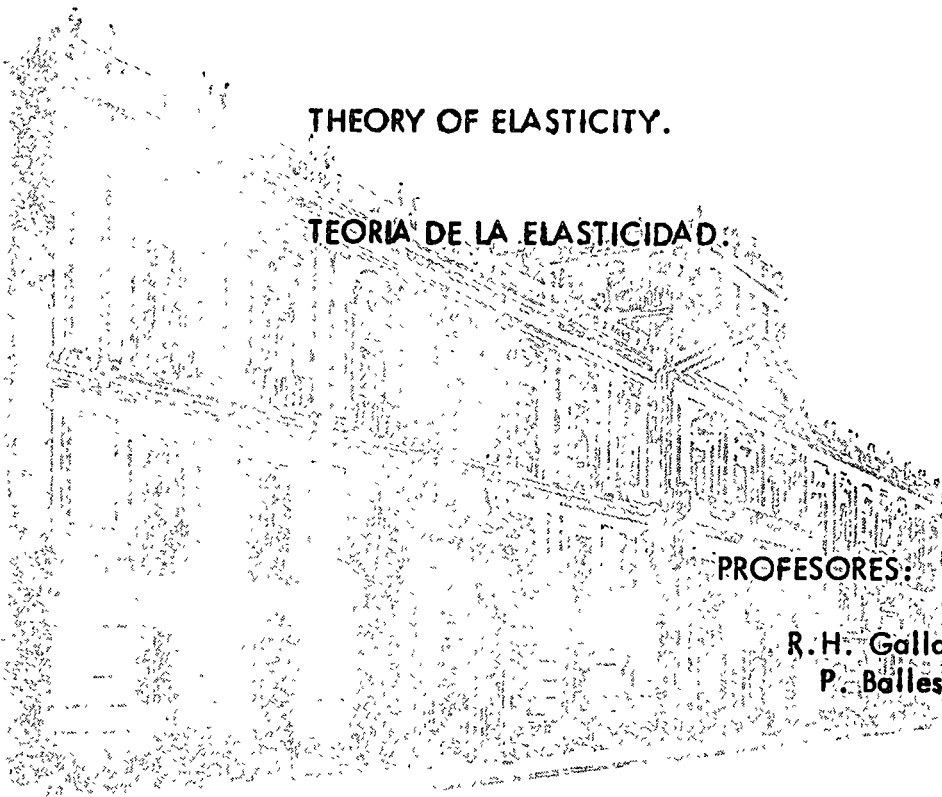
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



TUESDAY, MARCH 16, 1976.

THEORY OF ELASTICITY.

TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.



PROFESORES:

R. H. Gallagher
P. Ballesteros

COORDINADORES:

T. Dwyer
P. Ballesteros

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

CONCEPTOS DE ELASTICIDAD

1.- Introducción. - La naturaleza de las fuerzas que actúan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas de cuerpo y externas o de superficie, es una de las partes principales del estudio de la mecánica de sólidos. Se aplicará el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

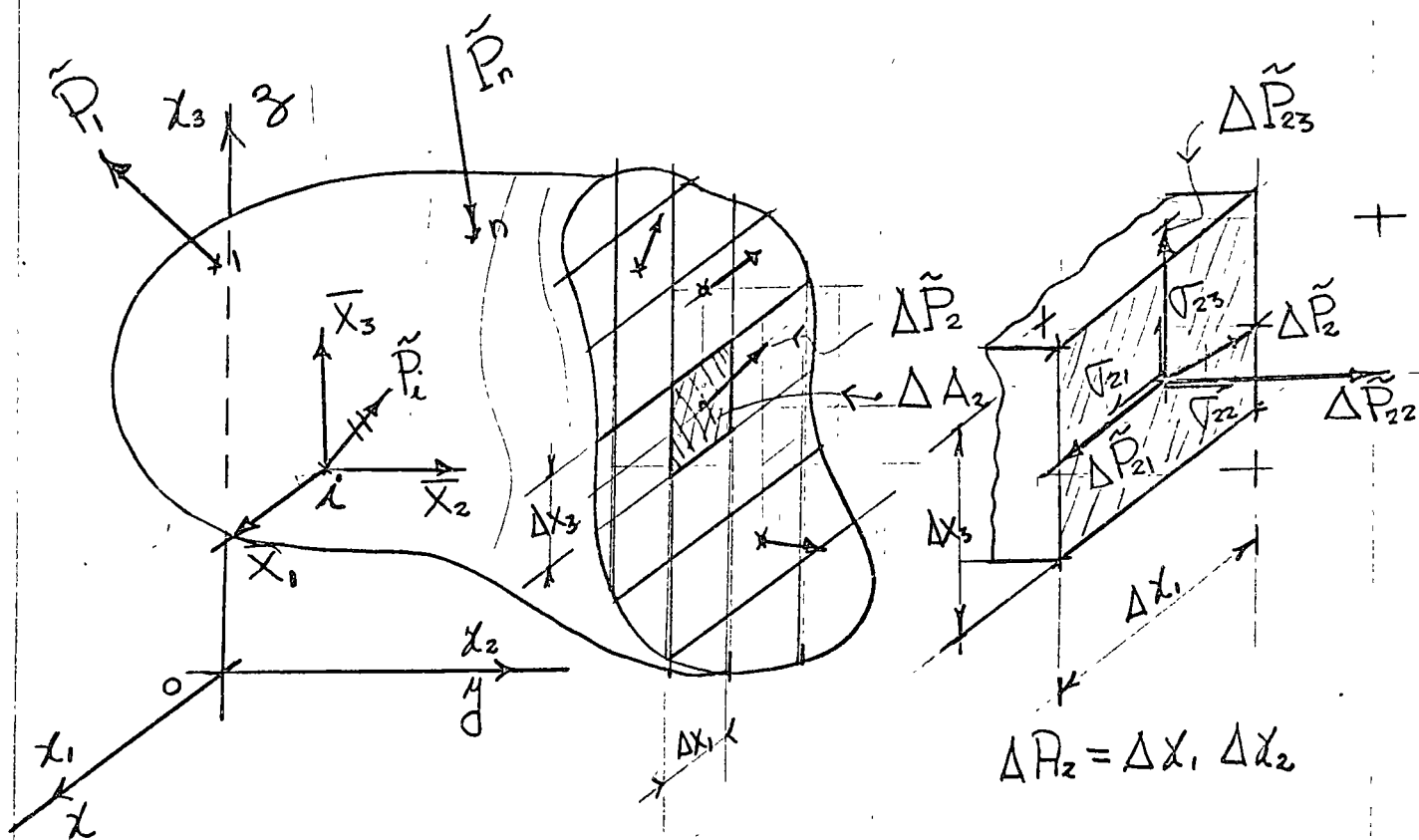


Fig. 1 Cuerpo seccionado paralelo al plano x_1, x_3

2.- Definición de esfuerzo.

En general, las fuerzas internas actuando sobre las áreas infinitesimales $\Delta x_i \Delta x_j$ del corte, son de

magnitudes y direcciones variables. Fuerzas de naturaleza vectorial y mantienen el equilibrio. En mecánica de sólidos es particularmente significativo determinar la intensidad y dirección en distintos puntos a través del corte. En general varían de punto a punto en intensidad y dirección. Es usual resolver sus intensidades perpendicular y paralelas a la sección en consideración. En particular el corte de la Fig. 1 es perpendicular al eje x_1 , $\Delta \vec{P}_2$ es la fuerza resultante que actúa sobre $\Delta A_2 = \Delta x_1 \Delta x_2$, cuyas componentes son: $[\Delta \vec{P}_{21}, \Delta \vec{P}_{22}, \Delta \vec{P}_{23}]$, el primer subíndice significa que el plano en que actúan es perpendicular al eje x_2 y el segundo respecto al eje que son paralelos, Puesto que las componentes de fuerza por unidad de área, son correctas solo en el punto, la definición matemática de esfuerzo es*

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{23}}{\Delta A_2}$$

similarmente los esfuerzos actuando en un plano perpendicular a x_1 son

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{11}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{12}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{13}}{\Delta A_1}$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular a x_3 son

$$\sigma_{31} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{31}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{32} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{32}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{33} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{33}}{\Delta A_3}$$

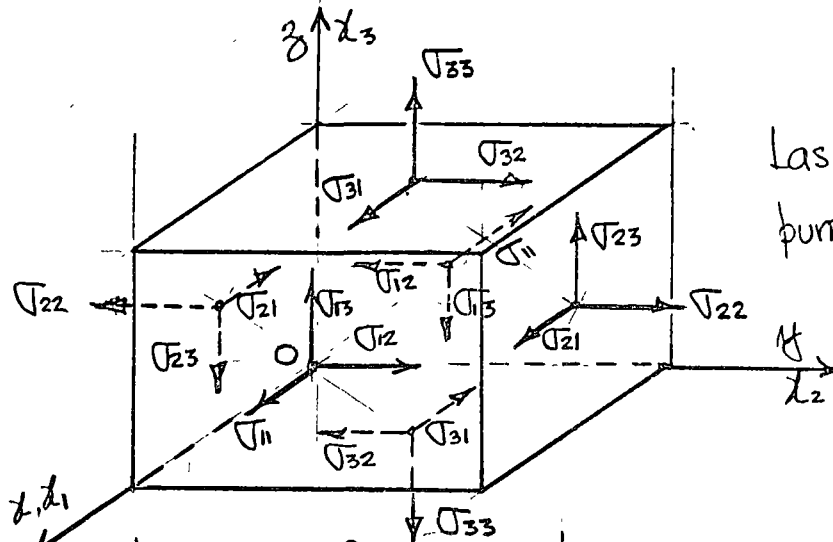
* Cuando $\Delta A_i \rightarrow 0$, existen preguntas desde el punto de vista atómico en definir esfuerzo en esta forma. Sin embargo, un modelo homogéneo para materia molecular no homogénea trabaja bien en problemas de Ingeniería.

Se observa que las definiciones de esfuerzo normal y cortante representan la intensidad de una fuerza sobre una area, y sus unidades son de $[\frac{F}{L^2}]$; en el sistema métrico kg/cm^2 o ton/cm^2 y en el Ingles lbs/pul^2 o KIPS/pul^2 .

Debe notarse que los esfuerzos multiplicados por las areas sobre las cuales actúan nos dan fuerzas, y es la suma de estas fuerzas, y es la suma de estas fuerzas sobre cualquier corte imaginario lo que conserva el equilibrio de un cuerpo

3. Tensor de esfuerzos.

Si, además del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1.1 se hacen pasar tres pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, un cubo de dimensiones infinitesimales sera aislado del cuerpo con el origen del sistema local coordinado en el punto de coordenadas $x_i (x_1, x_2, x_3)$. Tal cubo se muestra en la Fig. 3.1



Las coordenadas del punto O son (x_1, x_2, x_3)

Fig. 3.1 Estado de esfuerzos actuando en el elemento dx_i . El sentido indicado es convencionalmente el positivo.

Examinando la Fig. 3.1, se observa que hay tres esfuerzos normales $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, y seis esfuerzos cortantes $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$. El arreglo matricial

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{ij}] = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden

4.- Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

En el mismo elemento diferencial consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen $\{X_i\}^T = [X_1, X_2, X_3]$, y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen $\{m_i\}^T = [m_1, m_2, m_3]$ actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la Fig. 4.1

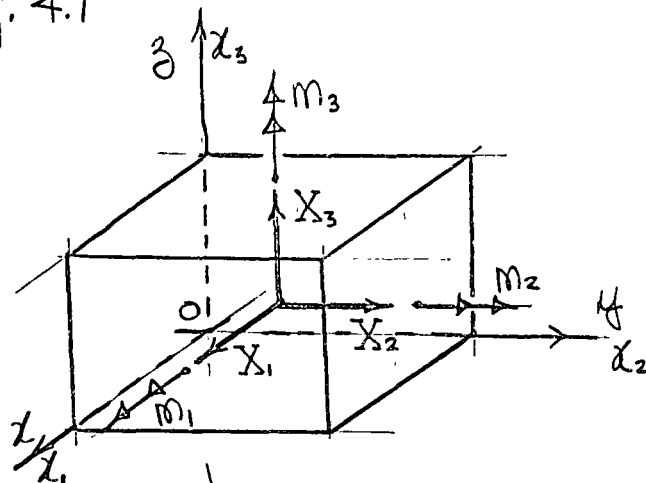


Fig. 4.1 Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen $\{X_i\}$ y $\{m_i\}$ actuando en el centro de gravedad de dx_i .

en donde $X_i = \rho (f_i - a_i)$ (4.1)

donde ρ es la densidad o masa específica, f_i es la fuerza por unidad de masa en la dirección x_i y a_i es la aceleración del elemento dx_i en la dirección de x_i

- Las fuerzas de superficie actúan en la frontera del cuerpo y las tres componentes de \vec{P}_i Fig. 1.1 las designaremos por $\{\bar{X}_i\}^T = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3]_i$; sus unidades son fuerza por unidad de área $[\frac{F}{L^2}]$, Kg/cm^2 en el sistema métrico, lbs/pul^2 en el inglés, y en el internacional Newtons/cm^2 . Las unidades de las fuerzas de cuerpo serán $[\frac{F}{L^3}]$. Las fuerzas de superficie deben satisfacer las condiciones en la frontera [Fig. 5.1] que para el punto i [Fig. 1.1] son

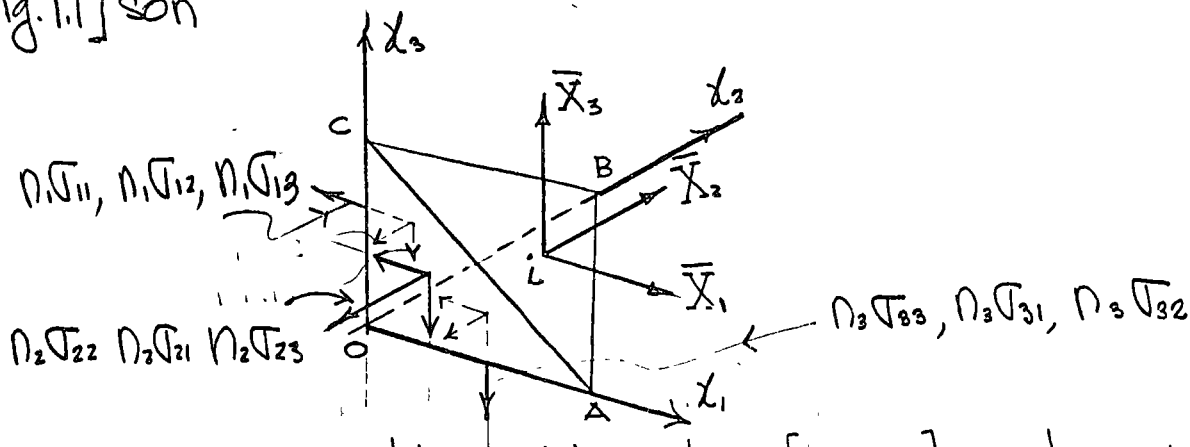


Fig. 5.1 Equilibrio del punto i [Fig. 1.1] en la superficie.

Si $ABC = \text{unidad}$, $OBC = \cos \alpha = n_1$, $OAC = \cos \beta = n_2$, y $OAB = \cos \gamma = n_3$, donde $\{n_i\}^T = [n_1 \ n_2 \ n_3]$ son los cosenos directores de la normal al plano ABC , y del equilibrio de $OABC$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad [\sigma_{ij}]^T \{n_i\} = \{\bar{X}_i\} \quad (4.1)$$

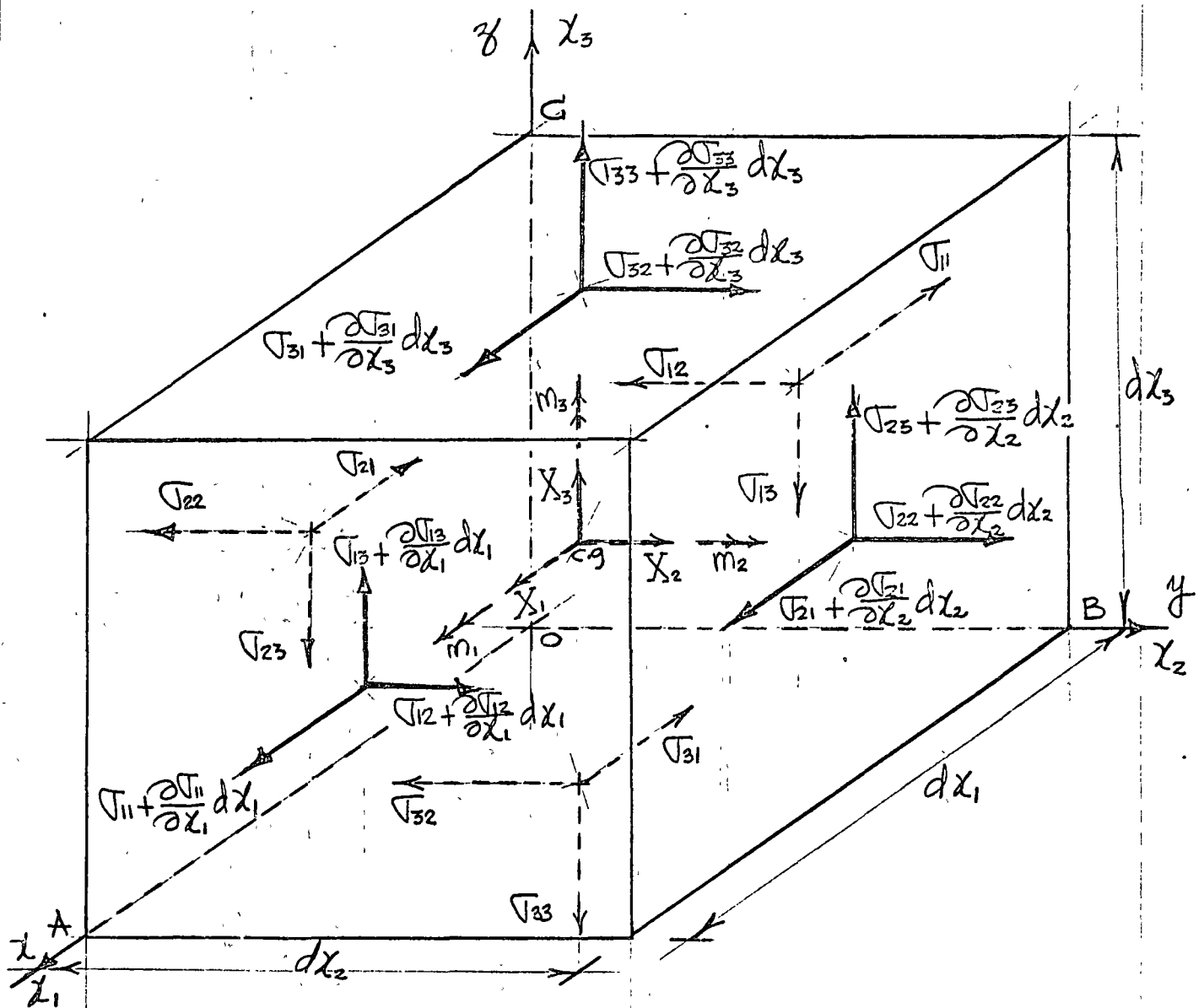


Fig. 5.1. Equilibrio de esfuerzos $[\sigma]$, fuerzas de cuerpo $\{X\}$ y momentos de cuerpo $\{m\}$, en el elemento dx_i .

(4.1) es la representación matricial de las condiciones de equilibrio del punto i en la frontera x_i .

5.- Equilibrio del elemento dx_i .

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento de la Fig. 5.1 son

$$\sum F_{x_1} = \sum F_{x_2} = \sum F_{x_3} = \sum M_{x_1} = \sum M_{x_2} = \sum M_{x_3} = 0 \quad (5.1)$$

de $\sum F_{x_i} = 0$, en el límite cuando $dx_i \rightarrow 0$ se obtiene

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3$$

$$- \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0$$

Similarmente

$$\text{de } \sum F_{x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0$$

(5.2)

$$\text{de } \sum F_{x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0$$

De $\sum M_{x_i} = 0$, en el límite cuando $dx_i \rightarrow 0$, y considerando el eje de momentos paralelo a ox_1 y a través del centroide del elemento dx_i , y despreciando los diferenciales de segundo orden dx_i^2 , se obtiene bajo la convención de signos de la Fig. 5.1 lo siguiente

$$\left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \sigma_{23} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2}$$

$$- \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} - \sigma_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} + m_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} + m_1 = 0$$

$$\text{Similarmente de } \sum M_{x_2} = 0, \quad \sigma_{31} - \sigma_{13} + m_2 = 0$$

(5.3)

$$\text{y de } \sum M_{x_3} = 0, \quad \sigma_{12} - \sigma_{21} + m_3 = 0$$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) son las seis ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares y en su forma polar, generalmente los momentos de cuerpo $m_i = 0$

Expresando (5.2) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\sigma_{ij}] + \{X_i\} = 0 \quad (5.5)$$

Con notación índice (5.2) se representa

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (5.6)$$

en donde $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Y las ecuaciones (5.3)

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \quad (5.7)$$

6. Diferentes notaciones del tensor de esfuerzos.

A continuación gráficamente mostraremos las diferentes notaciones que han sido utilizadas para representar las componentes del tensor de esfuerzos.

6.1. Cauchy inicialmente.

$$\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}$$

($m_k=0$)

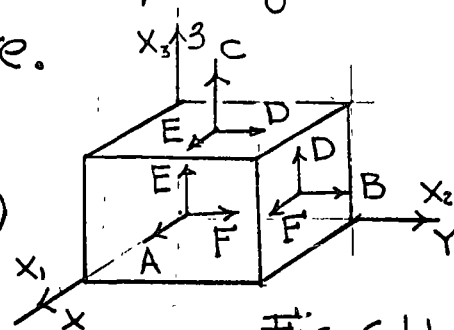


Fig. 6.1.1

6.2 Kelvin.

$$\begin{bmatrix} P & V & T \\ V & Q & S \\ T & S & R \end{bmatrix}$$

($m_k=0$)

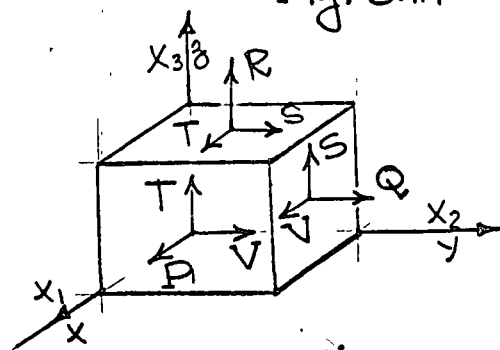


Fig. 6.1.2

6.2 Cauchy posteriormente, Saint-Venant ó Maxwell, introducen por primera vez la notación cartesiana, y

$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

($m_k \neq 0$)

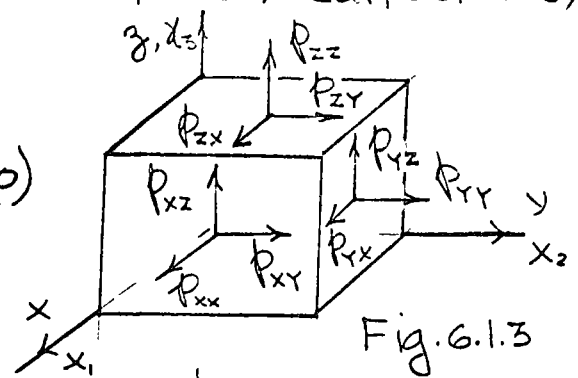


Fig. 6.1.3

condiciones polares.

6.3 Newman, Kirchhof y Love.

$$\begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix}$$

($m_k \neq 0$)

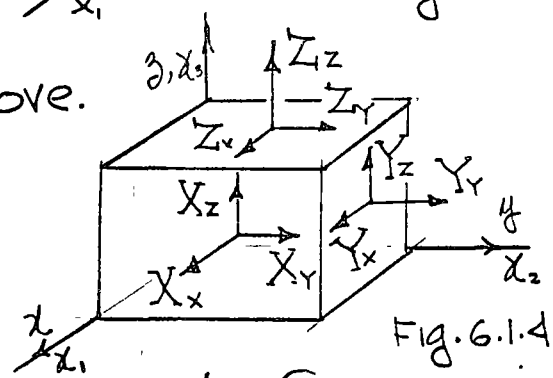


Fig. 6.1.4

6.4 K. Pearson.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y & \bar{x}_z \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y & \bar{y}_z \\ \bar{z}_x & \bar{z}_y & \bar{z}_z \end{bmatrix}$$

($m_k \neq 0$)

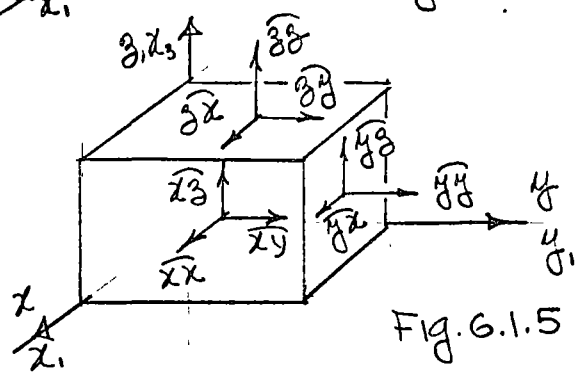


Fig. 6.1.5

6.5 S. Timoshenko y T. Von Karman introducen la notación de Ingeniería, simplificando la notación cartesiana utilizando solo un subíndice en los esfuerzos normales denominándolos por σ , y los tangenciales por τ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

($m_k \neq 0$)

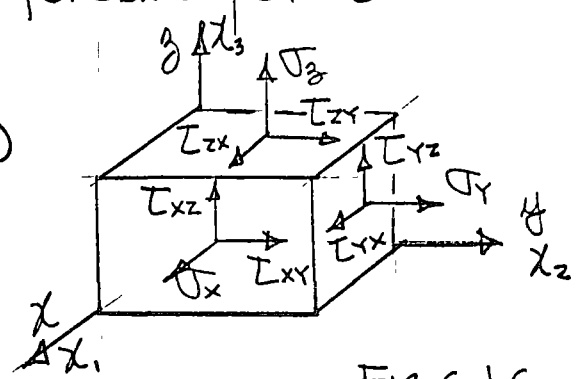


Fig. 6.1.6

6.6 Green, Ierna y autores Rusos introducen la notación índice similar a la utilizada previamente

$$[T_{ij}] = [\tau_{ij}]$$

6.7 Clebsch, G. Truesdell y A.C. Eringen, también utilizan la notación índice representando el tensor de esfuerzos

$$[t_{ij}]$$

6.8 D.C. Leigh, y L. Malvern, también utilizan notación índice representando el tensor de esfuerzos como

$$[T_{ij}]$$

Es importante observar que en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (5.6) y (5.7) las propiedades mecánicas del material no han sido usadas. Lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos, o viscoelásticos. También es muy importante observar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas esfuerzo, el problema es estáticamente indeterminado.

7. Desplazamiento, deformación.

El análisis de la deformación de un sólido es de importancia paralela al análisis de esfuerzos. Requiere la definición precisa de deformación, la cual significa la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo sólido sujeto a un cambio de temperatura o a cargas externas.

Por ejemplo, si una muestra es sujeta a una fuerza P como se muestra en la Fig. 7.1. Un cambio de longitud ocurre entre los dos puntos de calibración A y B. Si l_0 es la longitud inicial y l la longitud observada bajo la carga P , y el alargamiento $\Delta l = l - l_0$. El

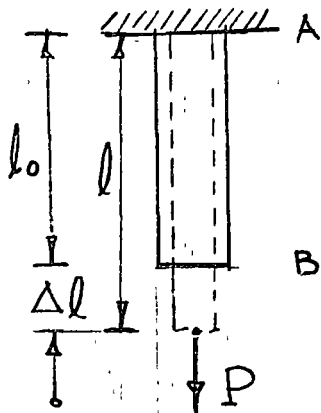


Fig. 7.1 Muestra a tensión.

alargamiento por unidad de longitud ϵ (epsilon) es

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.1)$$

el cual es llamado deformación lineal. Es una cantidad adimensional, pero generalmente se mide o se refiere en $\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$ o $\frac{\text{pulg}}{\text{pulg}}$. Algunas veces se expresa en por ciento. La cantidad ϵ es generalmente muy pequeño. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería tiene un orden máximo de magnitud de 0.001. Cuando las deformaciones son grandes, por ejemplo, en formado de metales, se introduce el la deformación natural que implica una l_0 variable, dada por

$$\bar{\epsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon) \quad (7.2)$$

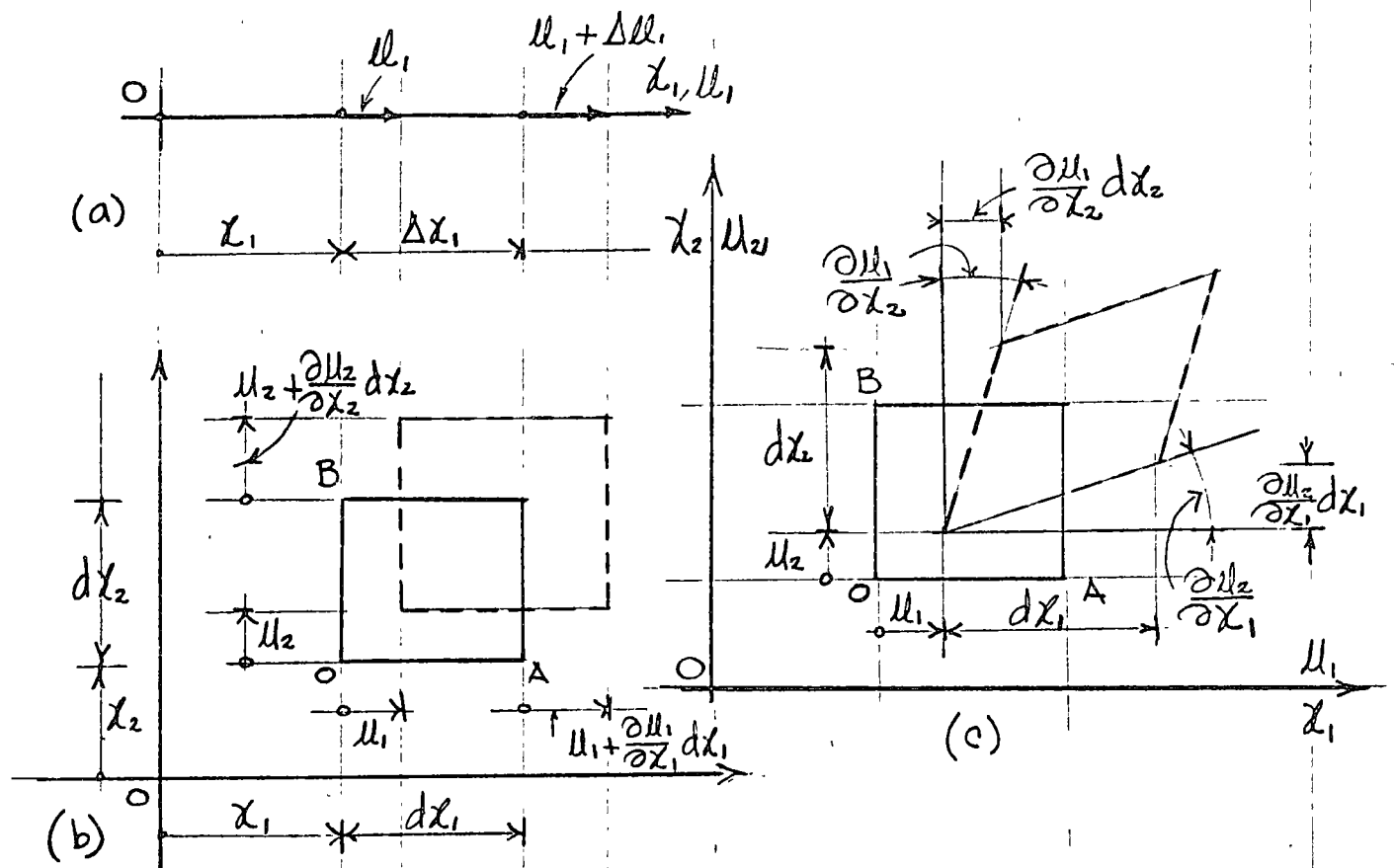


Fig. 7.2 Elementos deformados en posiciones inicial y final
 Sea el vector de desplazamientos $\{u_i\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ en las direcciones x_1 , x_2 y x_3 respectivamente, en base a los desplazamientos mostrados en la Fig. 7.2a, la definición de deformación lineal es

$$\epsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u_1 + \Delta u_1 - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \quad (7.2)$$

Similarmente

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \quad (7.3)$$

el signo positivo significa alargamientos. El elemento también experimenta deformaciones de cortante como

se muestra en la Fig. 7.2c el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Por lo tanto, para pequeños cambios del ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano x_1, x_2 es

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv \mu_{1,2} + \mu_{2,1}, \text{ análogamente con} \\ \text{los otros planos, } \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \equiv \mu_{2,3} + \mu_{3,2} \\ \gamma_{31} = \gamma_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \equiv \mu_{3,1} + \mu_{1,3} \end{aligned} \quad (7.4)$$

en el caso que las deformaciones no sean pequeñas, se demuestra fácilmente que

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

En las ecuaciones (7.5) aplicables a deformaciones grandes ya se observa la no linealidad en geometría. (7.4) es un caso particular de (7.5) cuando los términos de segundo grado son despreciables respecto a los de primer grado o sea pequeñas deformaciones. (7.5) en

notación compacta queda

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2)$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2}(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2)$$

(7.6)

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = u_{1,2} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{3,2} + u_{3,1}u_{3,2}$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}$$

Examinando las ecuaciones de deformación-desplazamiento para pequeñas deformaciones (7.2), (7.3) y (7.4), se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos u_1, u_2 y u_3 . Por lo tanto las ecuaciones no pueden ser independientes. Por lo tanto seis ecuaciones independientes pueden desarrollarse relacionando a $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}$ y γ_{31} , ecuaciones conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (7.7) se verifican las ecuaciones de compatibilidad de pequeñas deformaciones.

Similarmente a las componentes del Tensor de esfuerzos en las notaciones índice, cartesiana y de ingeniería, se representan las componentes del tensor de deformaciones como

$$[e_{ij}] \equiv \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

(índice) (cartesiana) (ingeniería)

en (7.8) fué necesario fué necesario modificar las relaciones de de formación por cortante con el objeto de someter al tensor \underline{e} enteramente obedecer ciertas leyes de transformación, por lo que $e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ para toda $i \neq j$. Análogamente al tensor de esfuerzos $[e_{ij}]$ puede diagonalizarse quedando

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

8. Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos,

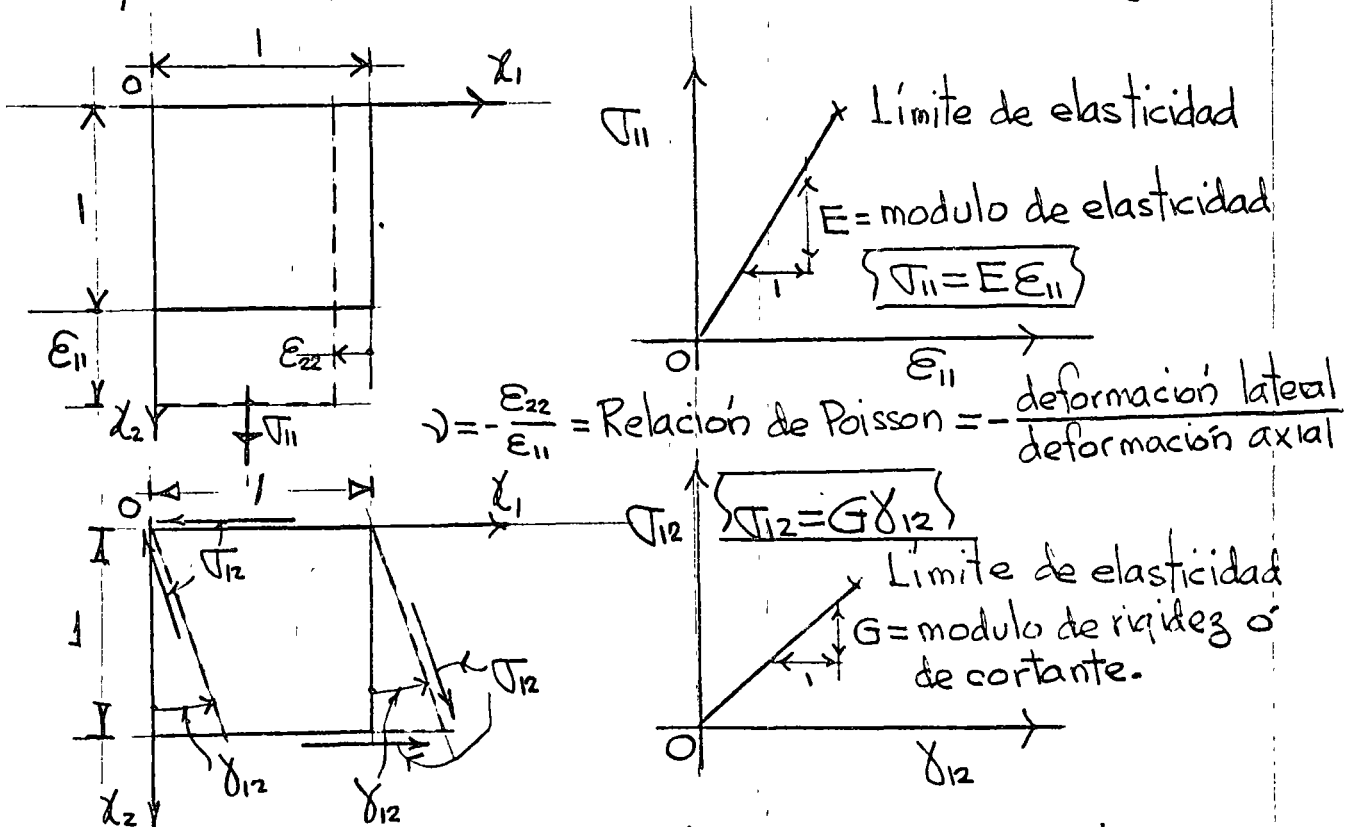


Fig. 8.1 Ley de Hooke en tensión uniaxial σ_{11} y corte puro τ_{12} .

puesto que el sistema es elástico lineal rige el principio de superposición de causas y efectos, por lo tanto en la Fig. 8.2 se considera un estado triaxial llegando a él en tres etapas de carga, etapa 1: actuando σ_{11} , etapa 2: actuando σ_{11} y σ_{22} y etapa 3: actuando σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} . Se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas

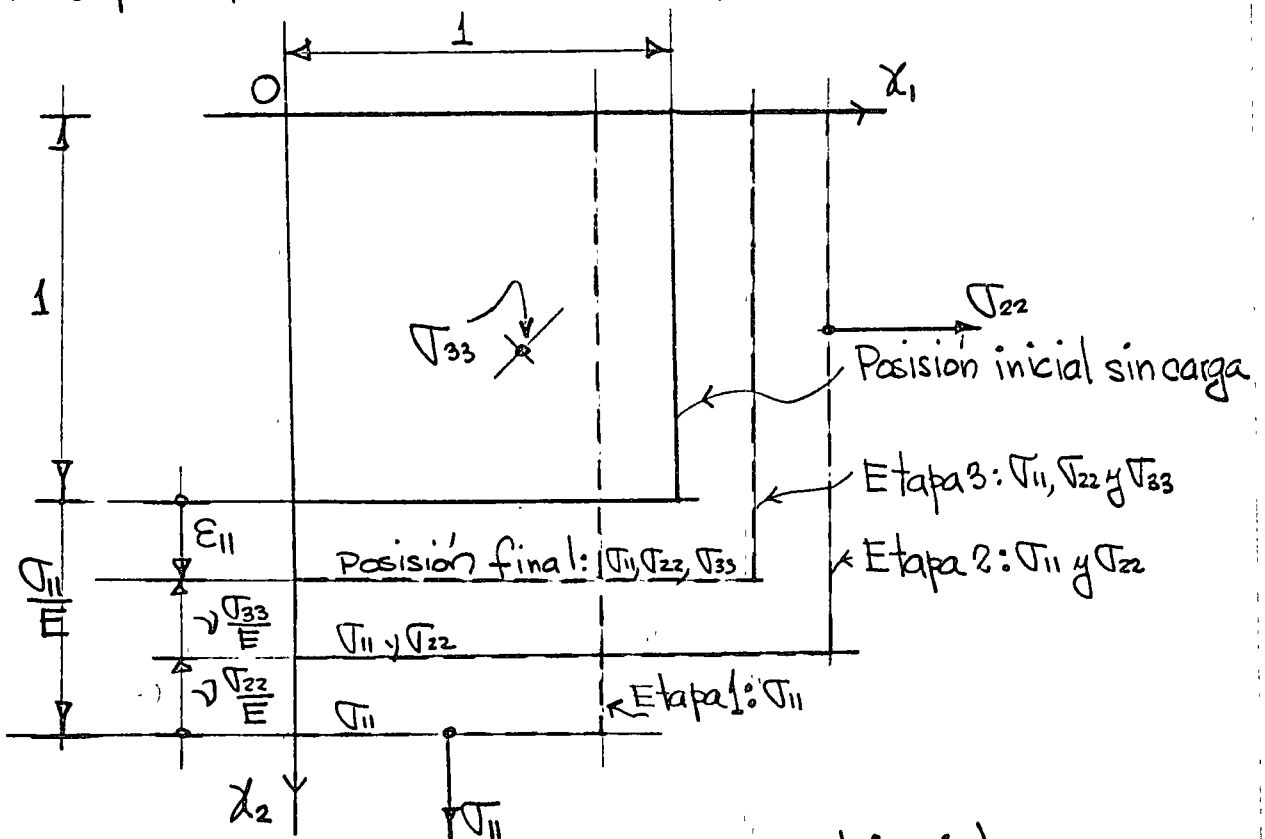


Fig. 8.2 Ley de Hooke en condiciones triaxiales

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33}$$

$$\gamma_{12} =$$

$$\gamma_{23} =$$

$$\gamma_{31} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{12}$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{23}$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{31}$$

(8.1)

(8.1) representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido elástico homogéneo e isotrópico. Las constantes E , G y ν son experimentales y están relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.2)$$

substituyendo (8.2) en (8.1) y expresando el resultado matricialmente se obtiene (considerando $\epsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ para $i \neq j$)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (8.4)$$

despejando $\{\sigma\}$ de (8.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$$\text{o sea } \{\sigma\} = [C]^{-1}\{\epsilon\} \quad (8.6)$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que solo interviene E y ν .

En un medio elástico lineal anisotrópico en las ecuaciones (8.3), aceptando el principio de superposición se expresan

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Las ecuaciones constitutivas (8.7) tienen 36 constantes. Sin embargo a través de consideraciones energéticas* se demuestra que el número de constantes es 21 y que $C_{ij} = C_{ji}$ para $i \neq j$, son simétricas respecto a la diagonal principal de (8.7). Todas las constantes C_{ij} deben determinarse experimentalmente. Se supone el material homogéneo, Ejemplos de estos materiales son: concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, hierro fundido, etc.. Cuando se tienen tres direcciones ortogonales anisotrópicas el material se dice que es ortotrópico, y para estos materiales el número de constantes se reduce solo a nueve constantes independientes.

Haciendo $\lambda = \frac{\partial E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ y considerando (8.2) las

* Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1956, p. 61.

ecuaciones constitutivas (8.3) con notación índice se escriben*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.8)$$

donde, $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, y $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \equiv e$. Desarrollando (8.8) se tiene

$$\begin{aligned} \text{para } i=1, j=1, \quad \sigma_{11} &= \lambda e + 2G \epsilon_{11} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_x = \sigma_x \\ i=2, j=2, \quad \sigma_{22} &= \lambda e + 2G \epsilon_{22} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_y = \sigma_y \\ i=3, j=3, \quad \sigma_{33} &= \lambda e + 2G \epsilon_{33} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_z = \sigma_z \\ i=1, j=2, \quad \sigma_{12} &= 2G \epsilon_{12} \equiv 2G \epsilon_{xy} = G \gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ i=2, j=3, \quad \sigma_{23} &= 2G \epsilon_{23} \equiv 2G \epsilon_{yz} = G \gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ i=3, j=1, \quad \sigma_{31} &= 2G \epsilon_{31} \equiv 2G \epsilon_{zx} = G \gamma_{zx} = \tau_{zx} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura ΔT , siendo α el coeficiente de expansión térmica las ecuaciones (8.3) quedan

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} + \alpha \Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

* Green, A.E., and W. Zerna: "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, Fair Lawn, N.J. 1970.

9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Kármán ó la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento $dx dy$ se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

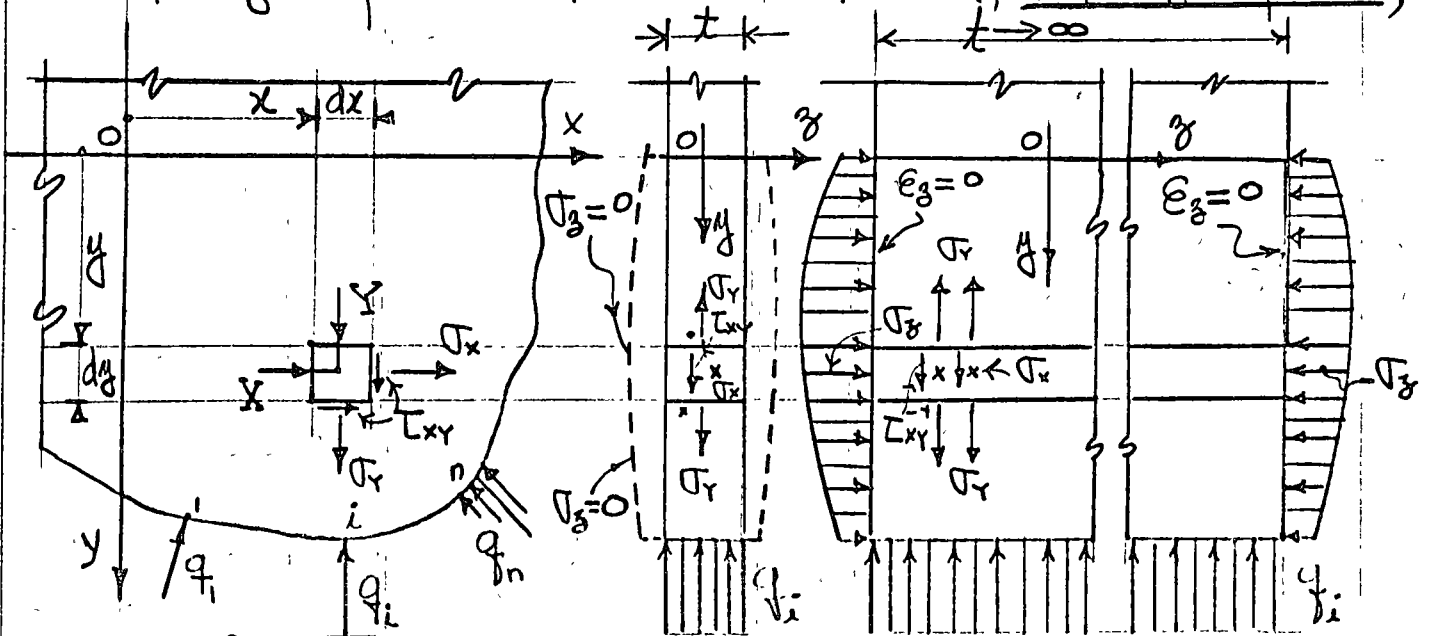
(9.1) matricialmente queda

$$L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.2}$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{9.3}$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;



a) Esfuerzos (σ), fuerzas de cuerpo (X) y de superficie (q_i)

b) Esfuerzos Planos

c) Deformación Plana

$$\sigma_z = 0, \epsilon_z \neq 0$$

$$\sigma_z \neq 0, \epsilon_z = 0$$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

caso de una placa de espesor finito t , sin problemas de pandeo que se deforma bajo la acción de $\{X\}$ y $\{Y\}$ según la línea punteada indicada en la Fig. 6.1 b, las ecuaciones (8.3), bajo la condición de $\sigma_{33} \equiv \sigma_3 = 0$ se reducen a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

σ_x , σ_y y τ_{xy} son el promedio sobre el espesor pequeño t y son independientes de z . Las componentes γ_{rz} y γ_{zx} se anulan en las superficies, mientras que la componente ϵ_3 es dada por

$$\epsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (9.5)$$

Problemas de cuerpos largos en la dirección longitudinal z cuya geometría y cargas no varían en z se consideran problemas de deformación plana en la Fig. 6.2 se muestran como ejemplos un muro de presa, y una zapata corrida larga,

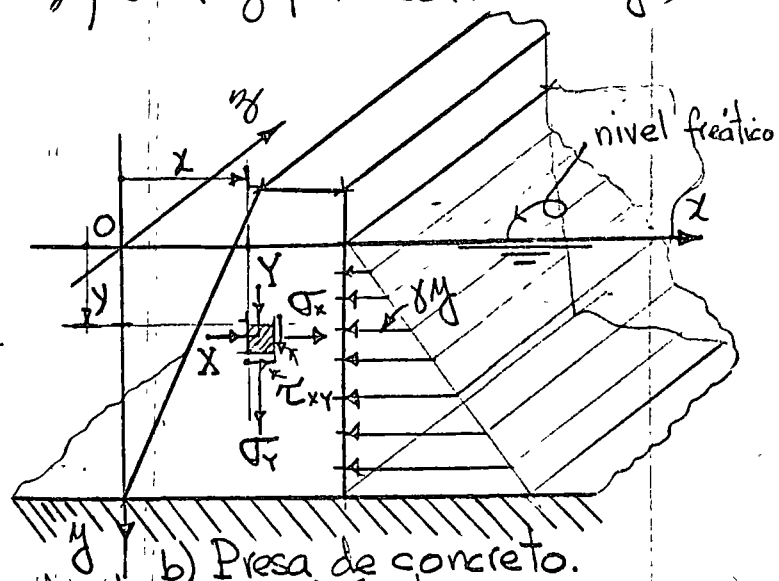
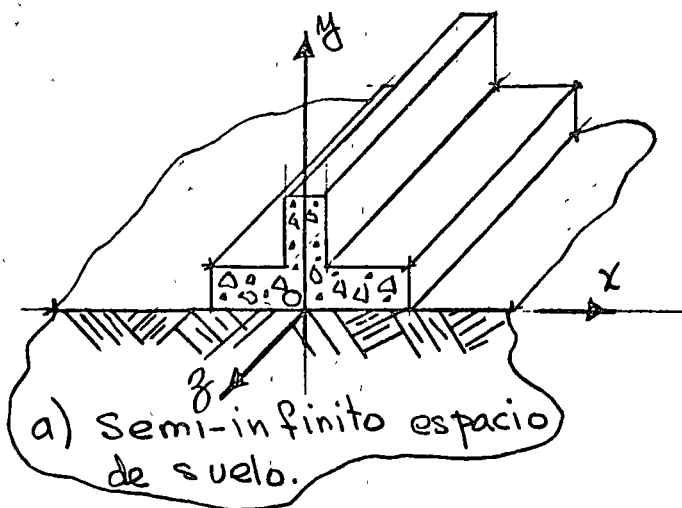


Fig. 6.2. Ejemplos de problemas de deformación plana.

en estos casos el desplazamiento $u_3 \equiv W = 0$ por lo tanto $\epsilon_{33} \equiv \epsilon_3 = 0$, $\gamma_{r3} = 2\epsilon_{23} = 0$, y $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{31} = 0$, Las ecuaciones (8.3) se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

y el esfuerzo σ_z se expresa en términos de σ_x y σ_y como

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (9.7)$$

Muchos problemas de ingeniería involucran sólidos de revolución (sólidos axisimétricos) sujetos a carga de revolución ó axialmente simétrica, por ejemplo un cilindro circular bajo presión externa uniforme, zapata circular en una masa de suelo semi-infinita como se muestran en la Fig. 6.3

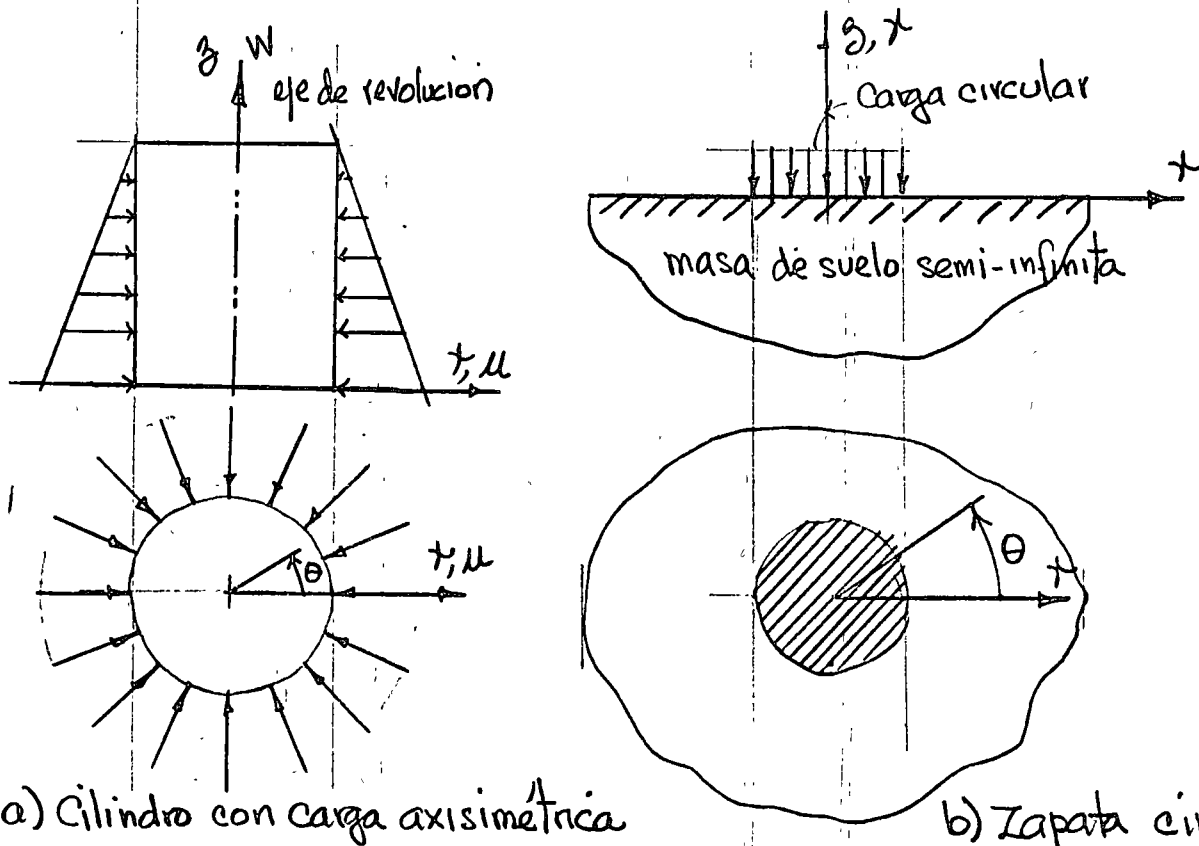


Fig. 6.3 Problemas axisimétricos.

Debido al eje axisimétrico respecto a geometría y cargas, las componentes del esfuerzo son independiente del ángulo θ ; por lo tanto todas las derivadas respecto a θ se anulan y las componentes ν , $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$, y $\tau_{\theta z}$ son cero. Las componentes de esfuerzo diferente de cero son σ_r , σ_θ , σ_z y τ_{rz} . Las relaciones de formación desplazamiento son, para las deformaciones diferente de cero

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (9.8)$$

y la relación constitutiva es

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ \text{(simétrica)} & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

despejando de (9.4) $\{\epsilon\}$, substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de (9.1) a

$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (9.10)$$

La ecuación (9.10) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de esfuerzos planos $\sigma_z = 0$, de ellas se obtiene $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]$.

Similarmente despejando $\{\epsilon\}$ de (9.6) y substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de las ecuaciones de equilibrio (9.1) a $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ se

obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (9.11)$$

La ecuación (9.11) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de deformación plana ($e_y=0$), con fuerzas de cuerpo diferente de cero, de ellas se obtiene $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]$.

Cuando las fuerzas de cuerpo X es solo función de y , constante o cero, y cuando la fuerza de cuerpo Y es solo función de x , constante o cero, las ecuaciones (9.10) y (9.11) para esfuerzos y deformación plana respectivamente, se reducen a una sola que es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (9.12)$$

Es importante observar que en este caso, en las ecuaciones de equilibrio (9.1), y la de compatibilidad (9.12), modificada por las ecuaciones constitutivas, no intervienen las constantes elásticas del sólido E y ν . Conclusión de fundamental importancia para el uso de modelos transparentes en Fotoelasticidad. También se concluye en este caso que en ambos estados; de esfuerzos y deformación plano los esfuerzos $\{\sigma\}$ son iguales, solamente las deformaciones $\{e\}$ y los desplazamientos $\{u\}$ son diferentes. I

Para la solución del problema anterior cuando $\{X\}=0$ Airy, G. B. (Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1862) introduce

una función $\phi(x,y)$, llamada función de esfuerzos, en forma tal que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

(9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1) cuando las fuerzas de cuerpo $\{X\}$ son cero, y substituyéndolas en (9.12) se obtiene

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (9.14)$$

desarrollando el operador bi-laplaciano se obtiene

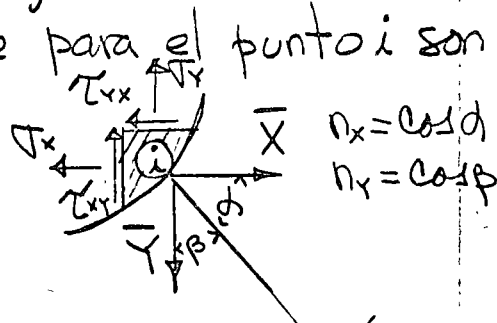
$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (9.15)$$

La ecuación (9.14) se llama bi-armónica o bi-laplaciana y la forma (9.15) gradiente cuarto de ϕ .

Por lo demostrado anteriormente el problema de solución de esfuerzos en medios elásticos lineales homogéneos e isotrópicos bidimensionales se reduce a una solución de (9.15) que satisfaga las condiciones en la frontera bidimensional que para el punto i son

$$\bar{X}_i = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$$

$$\bar{Y}_i = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$$



matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} \quad (9.10)$$

Del Teorema de la unicidad* la solución mencionada es única.

* Timoshenko, S. and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw Hill, 1966.

Si las fuerzas de cuerpo existen, generalmente es posible relacionarlas mediante una función potencial $V(x, y)$ en forma tal que

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (9.11)$$

substituyendo (9.11) en las ecuaciones de equilibrio (9.1) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

en este caso la función de esfuerzos es

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

por supuesto (9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1), y substituyéndola en la ecuación (9.10) la reduce a

$$\nabla^4 \phi = -(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -(1+\nu) \nabla^2 V \quad (9.14)$$

(9.14) nos resuelve el problema de esfuerzos planos con fuerzas de cuerpo relacionadas por (9.11).

Substituyéndolo (9.13) en (9.11) se obtiene

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 V \quad (9.15)$$

10. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos $\{u\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3] \equiv [u \ v \ w]$.

Uno de los métodos de solución en problemas de elasticidad lineal, homogénea e isotrópica consiste

Finite-Element Method for Water-Distribution Networks

Anthony G. Collins and Robert L. Johnson

A contribution submitted to the JOURNAL on Oct 13, 1973, and revised Sep 24, 1974, by Anthony G. Collins, pollution control engr., ACI Environics, Melbourne, Australia, and Robert L. Johnson (Active Member, AWWA), assoc prof Dept. of Civ Engrg., Lehigh Univ., Bethlehem, Pa.

Over the past two decades, the finite-element method has been increasingly used in a variety of engineering fields including structural analysis, solid mechanics, and soil mechanics. The method uses the relationship between the basic properties of each discrete element to define the behavior of that element. A solution for the response of the overall system, subject to a set of boundary conditions, is provided by solving a set of compatible simultaneous equations by matrix solution techniques.

The equivalence of structural systems and pipe networks has long been recognized, and there are many examples of concurrent application of solution techniques or the exchange of solution methods. The system of equations for structural problems is normally linear and hence suitable to matrix solution.

Although a specific pipe-network problem can be defined using a finite-element approach,¹ the actual solution of the network problem becomes very difficult because of the nonlinear constitutive equations relating the flow and head loss in each pipe or element. Indeed, matrix solution of the pipe-network problem² has been achieved using extensive numerical analysis and graph theory but without recognition of the advantages of the finite-element method.

The successful application of the finite-element method to pipe-network problems shows that the method is not only superior to conventional Hardy Cross solution techniques but that the further advantages of complete network representation, simplified input data, and unlimited network size can be obtained. Although not specific to a finite-element solution, the program developed allows

for solution by either the Hazen-Williams or the Darcy-Weisbach flow-head-loss relationships. The program also can consider the effect of temperature variations on head loss throughout the network.

The computational algorithm used to arrive at the unique solution for an easily solved linear system equivalent to the true nonlinear system for the pipe networks was maintained in an extremely simple form in this article so that the advantages of the finite-element method could be readily observed. Undoubtedly, further application of numerical-analysis techniques would improve the efficiency of the method.

There are two specific reasons for the development of this method. First, a computer program, PAWDS,^{3,4} which uses the Hardy Cross solution⁵ method of balancing flow for pipe-network problems, is used in undergraduate courses at Lehigh Univ. in Bethlehem, Pa. This Hardy Cross method or various refinements of the loop method (balancing heads in loops) were, in 1973, still used extensively in undergraduate education, engineering practice, and research.^{6,7}

The Hardy Cross approach to pipe-network analysis uses as a boundary condition either the fact that the algebraic sum of flows at any joint is zero (balancing flows) or that the algebraic sum of the head loss around any loop is zero (balancing heads). These are simply adaptations of the classical conservation of mass and conservation of energy, respectively. Depending upon the criteria used, a correction is applied to the assumed pipe flows or assumed piezometric heads until convergence to a solution is obtained. This classical iteration procedure is quite satisfactory for most well-conditioned pipe systems. However, it has been pointed out that convergence to a solution is not necessarily guaranteed.

There appears to be nothing inherent in either the electric analyzer with ordinary resistors or the Hardy Cross method which will consistently produce convergence of the errors toward zero with subsequent adjustments.⁸

The PAWDS program used at Lehigh Univ. was plagued by convergence problems typical of the Hardy Cross method. Dillingham and Cleasby⁹ point out that when using the balancing-heads method, a pipe or pipes with high resistance to flow compared with others in the network can result in calculated flow corrections larger and in the opposite direction to the currently assumed flow. This will often cause a divergence in the computations, and no solution can be obtained. When the method of balancing flows is used, Dillingham⁹ points out that if a large pipe of short length and relatively low flow exists, many iterations are necessary before an appreciable change in piezometric head is obtained if the value of the assumed piezometric head is incorrect. These situations are very practical in their nature.

Typical pipe-distribution networks¹⁰ have these exact conditions.

An extensive discussion of the convergence problems of the Hardy Cross method and the PAWDS program in particular is not intended in this article, but the existence of these problems should be noted.

The second reason for developing the solution technique was because of the existence of a very efficient finite-element program, GENFEM, developed by Desai.¹¹ The advantage of this program is its completely general nature and hence easy adaptation for the pipe-network problem. The mathematical basis and the method of application of the finite-element method is described in detail to allow easy adaptation of other existing finite-element programs for use in solving water-distribution-network problems.

Application of the Finite-Element Method

Mathematical basis. When the finite-element method is applied to a structural problem, the structure is subdivided into discrete elements. Each of these elements must satisfy three conditions:

1. Equilibrium of forces must be maintained.
2. Compatibility must be maintained.
3. The force-displacement relationship specified by the geometric and elastic properties of the discrete element must be satisfied.

The force F in the member or element is related to the displacement u and the element properties or stiffness K by Eq (1).

$$F = K u \quad (1)$$

The sum of the forces in the members at each node of the structure is zero except where an external force is applied. By combining Eq (1) for all the elements in the structure into an equation of identical form to Eq (1) and solving for displacements, the equilibrium of the system is satisfied.

An equivalent set of conditions for a pipe network exists; hence, the ability to draw the analogy:

1. The algebraic sum of the flows at any joint or node must be zero.
2. The value of the piezometric head at a joint or node is the same for all pipes connected to that joint.
3. The flow-head-loss relationship (such as Darcy-Weisbach or Hazen-Williams) must be satisfied for each element or pipe.

The conditions for a pipe network deal with scalar quantities, whereas the structural conditions deal with vector quantities. The analogy is drawn between the magnitudes of the equivalent quantities as the vector aspects of the flow have no meaning for the network problem.

For a direct application of the finite-element method involving a matrix solution,

a linear relationship is required to define the element or pipe. Hence at this point a relationship of the form of Eq (2) between flow q , head loss h and the hydraulic properties of the pipe c will be assumed

$$q = ch \quad (2)$$

The method of solution to make Eq (2) equivalent to established nonlinear flow-head-loss relationships will be described subsequently

The head loss h in Eq (2) is the difference between the piezometric head H of the nodes or joints at each end of the element or pipe contributing to the sum of the flows Q at that joint. The pipe-system matrix is assembled by writing the equations for the sum of the flows Q at each joint since this value is known to be either zero or equal to the imposed external flow or demand. Alternatively, if the piezometric head is specified at a joint, the sum of the pipe flows is implicitly defined. The resulting set of simultaneous equations can be combined into matrix form defining the entire pipe system in terms of the sum of flows Q at a joint and of the piezometric heads H at the joints. This matrix has the form

$$Q = CH \quad (3)$$

When the matrix is solved, the piezometric heads at all joints are obtained. The difference in piezometric heads between two joints, which is the head loss, can be substituted into Eq (2) to calculate the flow in the pipe between those two joints. The direction of flow is automatically preserved by taking the sign of the difference of the piezometric heads into account

The finite element representing the pipe is of the simplest form possible. Each element is one dimensional and has one degree of freedom at each node or joint. To apply the summation of the flows at a joint successfully, a convention must be adopted. Flow into a joint is taken as positive, and flow out of a joint is negative.

The analysis of a simple pipe network, Fig. 1, is used to show the application of the finite-element method. Using the condition that the sum of the pipe flows (q_a, q_b, \dots) in or out of a joint must satisfy the equilibrium flow criteria (Q_1, Q_2, \dots) (i.e., the boundary conditions) at that joint, one can write the following equations:

$$Q_1 = q_a + q_d \quad (4)$$

$$Q_2 = q_a + q_b \quad (5)$$

$$Q_3 = q_b + q_c + q_f \quad (6)$$

$$Q_4 = q_c + q_d + q_e \quad (7)$$

$$Q_5 = q_e + q_f \quad (8)$$

The individual pipe flows can be expressed by Eq (2) noting that the head loss h is equal to the difference in the piezometric heads of the joints at each end of the particular pipe.

$$q_a = \pm C_a(H_1 - H_2) \quad (9)$$

$$q_b = \pm C_b(H_2 - H_3) \quad (10)$$

$$q_c = \pm C_c(H_3 - H_4) \quad (11)$$

$$q_d = \pm C_d(H_1 - H_4) \quad (12)$$

$$q_e = \pm C_e(H_4 - H_5) \quad (13)$$

$$q_f = \pm C_f(H_3 - H_5) \quad (14)$$

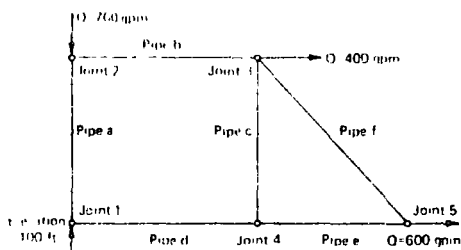


Fig. 1. Example Problem - Analysis of a Simple Pipe Network

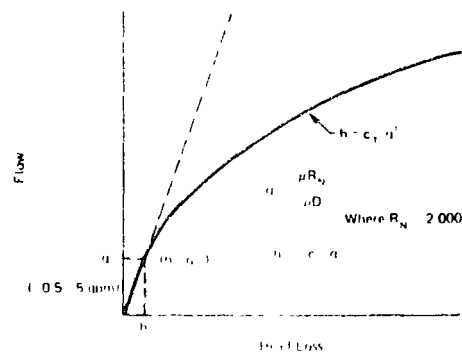


Fig. 2. Typical Flow-Head Loss Relationship

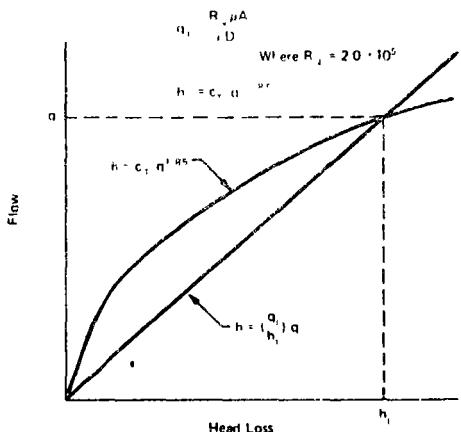


Fig. 3. Initial Value of Pipe Coefficient c

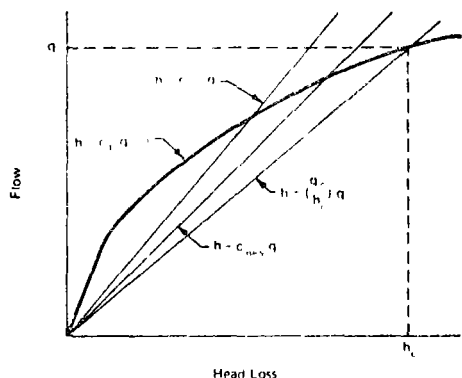


Fig. 4. Correction of Pipe Coefficient c

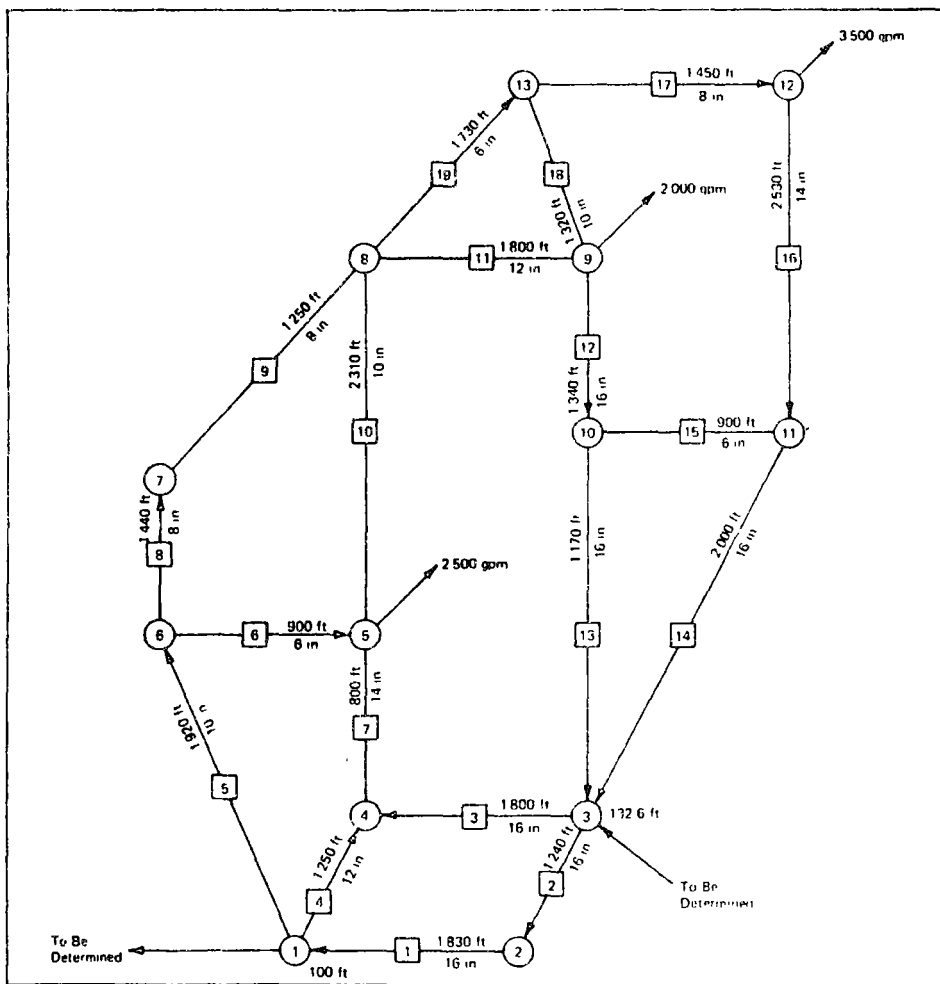


Fig. 5. Comparative Example Using PAWDS and GENFEM

○ — joint numbers; □ — pipe numbers; length in feet, diameter in inches

Equations (4-8) can now be written in terms of the pipe coefficients (C_a, C_b, \dots) and the piezometric heads (H_1, H_2, \dots). Consistency of flow directions is taken into account by assuming the flow is away from the joint being considered, that is, the piezometric head at the other joints is subtracted from the piezometric head at the joint being considered.

$$Q_1 = C_a(H_1 - H_2) + C_d(H_1 - H_4) \quad (15)$$

$$Q_2 = C_a(H_2 - H_1) + C_b(H_2 - H_3) \quad (16)$$

$$Q_3 = C_b(H_3 - H_2) + C_c(H_3 - H_4) + C_f(H_3 - H_5) \quad (17)$$

$$Q_4 = C_c(H_4 - H_3) + C_d(H_4 - H_1) + C_e(H_4 - H_5) \quad (18)$$

$$Q_5 = C_e(H_5 - H_4) + C_f(H_5 - H_3) \quad (19)$$

Equations (15-19) can be combined into the matrix form of Eq (3) to yield Eq (20). (See below)

For this particular example, the following boundary conditions are given.

$$\begin{aligned} H_1 &= 100 \text{ ft} \\ Q_2 &= 700 \text{ gpm} \\ Q_3 &= 400 \text{ gpm} \\ Q_4 &= 0 \text{ gpm} \\ Q_5 &= 600 \text{ gpm} \end{aligned}$$

Substituting these values into Eq (20) gives Eq (21) as the final form for solution (See below)

The values of the coefficients (C_a, C_b, \dots) for each pipe are determined by the procedure to be outlined. The unknowns, H_2, H_3, H_4, H_5 and Q_1 , can be obtained by solving the matrix Eq (21). The flows in the individual pipes can be found, as previously stated, by substituting into the defining equations (Eq. [9-14] for this example) after the piezometric heads have been found for each joint

Method of application. For the successful application of the finite-element method, the constitutive equation used to relate flow and head loss must be linear or the matrix solution cannot be applied. In reality, the relationship is nonlinear and varies with the equation chosen. The application of the finite element method is accomplished by using a linear equation (Eq [2]) as the defining flow-head loss relationship and the successive correction of the pipe coefficient c until a unique solution is found satisfying both the equivalent linear relationship and a real nonlinear relationship such as the Hazen-Williams equation or the Darcy-Weisbach equation. When this unique solution has been found for all pipes the

network distribution has been solved.

The program, GENFEM, allows a choice of the Darcy-Weisbach equation or the Hazen-Williams equation. The Hazen-Williams equation will be used for purposes of explanation, although the method is identical for both equations. The relationship used to define flow versus head loss is shown in Fig 2. The transition from laminar to turbulent conditions for pipe flow occurs at a Reynolds Number R_N of approximately 2000. R_N is defined by the pipe diameter D , and the dynamic viscosity μ , the density ρ and the flow velocity V of the fluid flowing.

$$R_N = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (22)$$

The flow q_T at which transition occurs, corresponding to a R_N of 2000, is given by

$$q_T = VA = \frac{2000 \mu A}{\rho D} \quad (23)$$

For flows less than q_T , the flow vs head-loss relationship is linear. To avoid a discontinuity in the defining relationship because of the transition region between laminar and turbulent flow, the linear relationship is obtained by simply joining the origin to the point (h_T, q_T) with a straight line. The coordinate h_T is found from a substitution of the flow q_T into the turbulent flow equation. The linear portion of the graph, the laminar region, does not enter into the calculations of a practical problem. The value of q_T ranges from 0.5 to 5 gpm for 6-16-in. diameter pipes whereas typical flows range from 200 to 5000 gpm for these size pipes, well into the turbulent range.

The Hazen-Williams equation relates the head loss h to the pipe diameter D , the pipe length L , the Hazen-Williams coefficient C_{HW} , the flow q and a coefficient c' for unit conversion.

$$h = c' \frac{L}{D^{4.87}} \left(\frac{q}{C_{HW}} \right)^{1.85} \quad (24)$$

This equation can be rewritten for a particular pipe by grouping terms into one constant c_T .

$$h = c_T q^{1.85} \quad (25)$$

The solution technique can be divided into three steps. The first step is to select an initial value of the pipe coefficient c for each pipe and combine these to yield the

matrix pipe coefficients C . The system matrix is then solved for the value of the piezometric head at each joint. Secondly, the individual pipe flows q are calculated by use of Eq (2) using the differences between the determined piezometric heads. These flows are then substituted into Eq (25) and since (c_T) for each pipe is known, the pipe head losses are calculated. If the pipe head losses obtained from Eq (25) correspond to those obtained from the matrix solution, then the unique solution satisfying both the Hazen-Williams equation and the linear Eq (2) has been found. The third and final step required is to change the value of c to converge the problem to a solution if there is a difference between the head losses calculated by the two methods.

A more detailed explanation of each of these steps follows. The initial value of the pipe coefficient c_1 is chosen to correspond to R_N of 200000 in each pipe, a typical value for a practical problem. The flow (q_1) is then calculated from the Reynolds Number relationship, Eq (26):

$$q_1 = VA \frac{200000 \mu A}{\rho D} \quad (26)$$

The value of the head loss h_1 corresponding to this flow q_1 is calculated from Eq (25):

$$h_1 = c_T q_1^{1.85} \quad (27)$$

The pipe coefficient is then found from Eq (2) as shown in Fig 3

$$c_1 = \frac{q_1}{h_1} \quad (28)$$

This initial value of the pipe coefficient c_1 for each pipe is then combined, according to the geometry of the network into the pipe coefficients C_1 used in the matrix description of the network system. The matrix is then solved to yield the first estimate of the piezometric heads at each joint.

The allowable deviation between a pipe head loss determined from the matrix solution of the joint piezometric heads and the corresponding value from the Hazen-Williams equation is a variable and can be specified for a particular case taking into account the type of problem and the degree of precision desired for the solution.

The third step, adjusting the value of c , was developed with two criteria in mind. The solution should converge reasonably rapidly, yet the technique should remain simple. During the checking procedure, the flow q_i for each pipe calculated via Eq (2), and the matrix solution is used to determine the head loss h_i from the Hazen-Williams equation. The first procedure used in the development of the program was to obtain the correction of the c value for each pipe by assuming that the point h_c, q_c was the unique solution and thus the correct linear relationship was defined by a straight line joining this

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a + C_d & -C_a & 0 & -C_d & 0 \\ -C_a & C_a + C_b & -C_b & 0 & 0 \\ 0 & -C_b & C_b + C_c + C_f & -C_c & -C_f \\ -C_d & 0 & -C_c & C_c + C_d + C_e & -C_e \\ 0 & 0 & -C_f & -C_e & C_e + C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ 700 \\ 400 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a + C_d & -C_a & 0 & -C_d & 0 \\ -C_a & C_a + C_b & -C_b & 0 & 0 \\ 0 & -C_b & C_b + C_c + C_f & -C_c & -C_f \\ -C_d & 0 & -C_c & C_c + C_d + C_e & -C_e \\ 0 & 0 & -C_f & -C_e & C_e + C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

point to the origin and defined by Eq (29).

$$h = \left(\frac{q_c}{h_c}\right) q \quad (29)$$

The new value of c was then set equal to $\frac{q_c}{h_c}$. When all the pipe coefficients were corrected in a similar way, the flow distribution obviously was altered, and this method proved to be an overcorrection when the matrix was resolved. To dampen this overcorrection effect, an averaging technique was introduced. The corrected value of c is taken to be the mean of the c value defined by Eq (29) and the value of c used to obtain the matrix solution. This method of correcting c is shown in Fig. 4. The averaging method reduced the number of cycles required for convergence by approximately one third.

Example Problems

It is not the intent of this article to present extensive comparison of different network problems since any comparison of computer programs must take into account ease of input data and flexibility of use as well as efficiency of computer time. Two example problems are discussed to point out some apparent potential advantages of the finite element approach.

An example problem³ shown in Fig. 5, consisting of nineteen pipes and thirteen joints, was solved using the PAWDS program and the GENFEM program. The PAWDS program solved the system in eighteen iteration cycles and 1.07 s. The GENFEM program solved the network in fifteen iteration cycles and 4.73 s. Obviously, this example does not indicate a preferential method, but is included so that it can be considered with the next example to show the effect of increased system size.

The second example problem with 75 pipes and 57 joints was also solved with both programs. The particular problem had been submitted by an undergraduate student and would not converge in the allowed time using the PAWDS program. Both the time limit and the iteration cycle limit were increased, and the problem eventually converged by the use of the PAWDS program after 16 048 iteration cycles and 768 s. The same problem was solved with the GENFEM program after twenty iteration cycles and 22.2 s. This problem highlights the apparent lack of convergence problems for the finite-element method and also shows, when compared with the first example problem, that for the finite-element method, the number of iteration cycles to convergence appears virtually independent of the number of pipes and joints.

Discussion

The finite-element method is not restricted to a pipe as the only element. Any type of hydraulic element can be included that can be defined by a flow-head loss re-

lationship. When the pipe network is relatively small, such as in an industrial plant piping system, the fittings may become major head loss contributors. The head loss h across any of these elements is usually considered to be directly proportional to the velocity head by a coefficient k corresponding to the type of element.

$$h = k \frac{V^2}{2g} \quad (30)$$

This can be easily converted to the required form, that is, in terms of flow q knowing the area A of the element.

$$h = \frac{k}{2gA^2} q^2 \quad (31)$$

A pump can be included in the system since a pump merely provides a "head gain" or negative head loss. The use of a pump element requires a flow-head loss relationship (the head-capacity curve for the pump). If the information is not available as an equation relating discharge and head, the pump information could be provided in tabular form. In this form the program would use linear interpolation between any two data points.

The basic finite-element method is not restricted to pipes flowing full. In practice, water systems often contain open channels in the headwater sections. These open channels or even pipes flowing partially full can be included for analysis. The only requirement for an element is that the flow can be related to the head loss.

The range of hydraulic elements that can be included is limitless, provided a flow-head loss relationship for each element is known. An exact system representation can be obtained by introducing a combination of all the hydraulic elements causing head loss or gain in the system. While discussing this point one should remember that methods such as the Hardy Cross method of balancing heads technique^{5,7} require that all pipes are part of a loop. Typically, reservoirs or elevated tanks have one pipe connecting to the distribution system and an artificial pipe must be introduced to make a loop so that the Hardy Cross balancing heads solution method can be applied.

The use of high-resistance artificial pipes in the network has, in fact, often contributed to convergence difficulties. To simulate the actual conditions, the artificial pipes introduced to form loops are often of small diameter and high resistance so that they carry an insignificant flow and hence can be neglected. As was pointed out earlier, this is the exact condition that creates convergence problems. The finite-element method does not require the use of artificial pipes to complete a loop since the connectivity of the elements is defined explicitly by the system matrix. Consequently, tree-type systems are readily solved with this procedure. In fact, the GENFEM program was used

very successfully during the 1974 spring semester at Lehigh Univ to analyze a transmission system problem that was almost entirely tree type with approximately ten loops included.

The input data required for the program is equivalent to other solution techniques with the major exception that loop data does not need to be included. The distribution network is defined by input of the number of the pipe and the joints to which it is connected. Another advantage over some solution methods is that any number of points of known pressure can be preselected.

With loop-solution methods, all pipe and joint information must be available to the program at the same time. This puts a definite limit on the size of the system that can be solved. The finite-element program, GENFEM, however, can operate on blocks of data. Thus, there is virtually no limit to the size of the network that can be solved. The element and nodal information can be stored on magnetic tapes or other devices and then read from the storage device in blocks, operated upon, and returned to storage on the tapes. This feature must gain greater significance as water-distribution networks become larger and more interdependent.

As stated previously, although not being specific to a finite-element program, the program developed has two additional features worth noting. First, the program GENFEM provides a choice of two established flow-head loss relationships. The Hazen-Williams equation has already been stated as Eq (24). The Darcy-Weisbach equation relates the same variables and includes the friction factor f .

$$h = \left(\frac{fL}{D2gA^2}\right) q^2 \quad (32)$$

An explicit expression¹² for the friction factor f is used rather than the classical implicit Colebrook and White equation¹² that requires an iterative solution. The friction factor f is expressed in terms of the Reynolds Number R_N and the relative roughness κ where κ is the ratio of the absolute roughness e to the pipe diameter D .

$$f = 0.094\kappa^{0.255} + 0.53\kappa + 88\kappa^{0.44} R_N^{-1.62\kappa^{0.134}} \quad (33)$$

Second, allowance for changes in temperature has been included since temperature appreciably affects the viscosity and to a negligible degree, the density of water. The viscosity of water over a temperature range of 5C-30C varies from 0.0152 poise to 0.8004 centipoise. An algorithm¹³ in terms of temperature T in degrees Celsius is used to define the viscosity μ in poise.

$$\frac{1}{\mu} = 2.1482 ([T - 8.435] + \sqrt{8078.4 + [T - 8.435]^2}) - 120 \quad (34)$$

The program is written so that the temperature can be specified for each pipe. Any set of temperature conditions can be investigated for a particular circumstance.

Practical adaptation of the finite-element method should require a minimum of computer programming since most engineering firms and universities have finite-element programs readily available. The ease of modifying these programs depends upon the generality of their nature.

Summary

The many advantages of the finite-element method have been documented. Most of these advantages hold true in a comparison of any loop method to the finite-element method. The major advantage is the speed of convergence and the apparent lack of convergence problems of the proposed method over the Hardy Cross balancing flows method. Other important advantages are the ability to include in the analysis all types of hydraulic elements, the choice of flow-head loss relationships, the lack of artificial loops, the ease of adaption of existing finite-element programs, the unlimited network size, and finally, the ability to account for temperature effects.

References

1. SPILLERS, WILLIAM R. *Automated Structural Analysis: An Introduction*. Pergamon Press, Inc., Elmsford, N. Y. (1972).
2. EPP, ROBERT & FOWLER, ALVIN G. Efficient Code for Steady-State Flows in Networks. *Jour Div Hydrs*, Proc ASCE, (Jan. 1970).
3. DILLINGHAM, J. H. & CLEASBY, J. L. New Computer Program for Hardy Cross Analysis. CIRAS, Iowa State Univ., Ames, Iowa. (Jun 1965)
4. DILLINGHAM, J. H. Computer Analysis of Water Distribution Systems, Pts 1-5 *Wtr. Sew Wks* 114 (volumes) 1-5 (1967)
5. CROSS HARDY Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors. Bull. 386, Engrg Exp Sta., Univ of Illinois, Urbana, Ill (Nov 1936)
6. KALLY, E. Computerized Planning of the Least Cost Water Distribution Network *Wtr. Sew. Wks* 119-121 (Aug 1972)
7. FIETZ, T. R. Steady Flow in Pipe Networks by the Simple Loop Method Rprt 128, Wtr Res Lab., Univ of New South Wales, Manly Vale, N. W. W., Australia (Oct. 1972)
8. DAVIS, V. D. & SORENSEN, K. E. *Handbook of Applied Hydraulics*. McGraw-Hill, New York, N. Y. (3rd ed., 1969)
9. DILLINGHAM, J. H. & CLEASBY, J. L. Two Computer Programs for Hardy Cross Analysis. CIRAS, Iowa State Univ Ames, Iowa (Nov. 1964)
10. FAIR, G. M.; GEYER, J. C.; & OKUN, D. A. *Elements of Water Supply and Wastewater Disposal*. John Wiley & Sons, New York, N. Y. (2nd ed., 1971)
11. DESAI, SURESH. Documentation Program GENFEM. Fritz Engrg Lab. Rprt., Lehigh Univ., Bethlehem, Pa (1975)
12. WOOD, DON J. An Explicit Friction Factor Relationship. *Civ. Engrg., ASCE*. 36:12.60 (Dec. 1966).
13. BINGHAM, E. C. *Fluidity and Plasticity*. McGraw-Hill, New York, N. Y. (1922).
14. KING, H. W. & BRATER, E. F. *Handbook of Hydraulics*. McGraw-Hill, New York, N. Y. (5th ed., 1963).

01 Cuadrada de Esfuerzos de Cauchy, superficies de esfuerzos, Esfuerzos principales, Invariantes

Las componentes del tensor de esfuerzos en notación índice e Ingeniería son

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

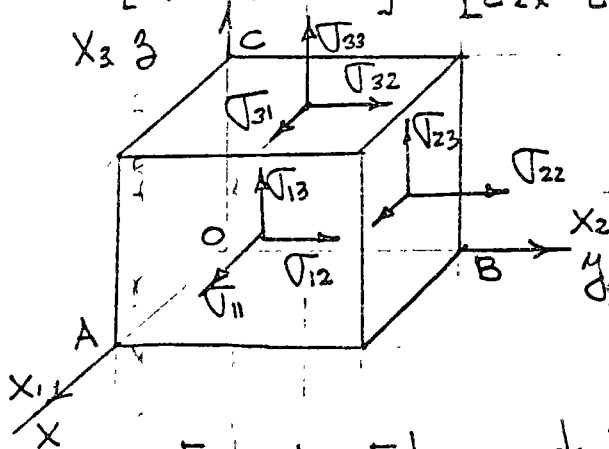


Fig. 1 Elemento diferencial, actuando los esfuerzos: $[\sigma_{ij}]$.

Llevando un plano a través de ABC y considerando su diagrama de cuerpo libre se tiene

su diagrama de cuerpo libre se tiene

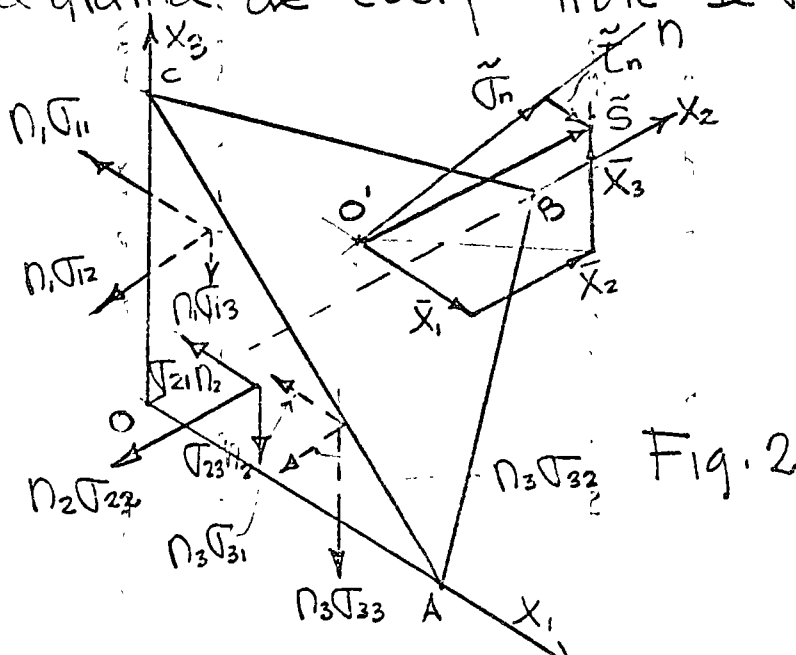


Fig. 2

- En la Fig. 2 se tiene lo siguiente
 $o'n$ es normal al plano ABC, formando
 ángulos α , β y γ con respecto a los ejes
 coordenados x_1 , x_2 , y x_3 respectivamente, la
 distancia oo' es igual a r las coordenadas
 de o' son x_1, x_2, x_3 por lo tanto

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{x_1}{r}, \quad n_2 = \cos \beta = \frac{x_2}{r}, \quad n_3 = \cos \gamma = \frac{x_3}{r} \quad (2)$$

- donde $\{n_i\} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ es el vector columna
 de cosenos directores de la normal al plano ABC
 ($o'n$ y oo'): Si el área ABC es considerada
 como la unidad, las proyecciones

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{área OBC} \\ n_2 &= \text{área OAC} \\ n_3 &= \text{área OAB} \end{aligned} \quad (2)$$

\bar{s} = Es fuerza resultante actuando sobre el plano ABC
 $\{\tilde{x}_i\} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3]^T$; proyecciones de \bar{s} sobre x_i .

\tilde{T}_n = Proyección de \bar{s} sobre la normal al plano ABC

\tilde{T}_n = Proyección de \bar{s} sobre el plano ABC.

- Del equilibrio del elemento OABC se obtiene

$$X_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$

$$X_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \quad (3)$$

$$X_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

expresando (3) matricialmente se obtiene

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Si no existen momentos de cuerpo, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para $i \neq j$

y $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}]^T$ por lo que (4) puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{X_i\} = [\sigma_{ij}] \{n_i\} \quad (6)$$

El esfuerzo normal al plano ABC es

$$\sigma_n = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 \quad (7)$$

$$\sigma_n = \{X_i\}^T \{n_i\} \quad (8)$$

Substituyendo (5) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2(\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1) \quad (9)$$

o matricialmente de (6) y (8)

$$\sigma_n = \{n_i\}^T [\sigma_{ij}] \{n_i\} \quad (10)$$

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \quad (11)$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = S^2 \quad (12)$$

Es fuerzos principales. Es fuerzo principal es un valor particular del es fuerzo normal tal que $\tau_n = 0$ por lo tanto

$$X_1 = \sigma_n n_1 \quad (13)$$

$$X_2 = \sigma_n n_2$$

$$X_3 = \sigma_n n_3$$

De (5) y (13) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n n_1 \\ \sigma_n n_2 \\ \sigma_n n_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

De donde

$$\begin{bmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

puesto que $\{n_i\} \neq 0$, entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

○ De (16) se obtiene

$$\sigma_n^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\sigma_n^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2)\sigma_n - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2) = 0 \quad (17)$$

las tres raíces de la ecuación (17) nos determinan los valores de los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 cuyos coeficientes nos representan los invariantes de esfuerzos, dependen de σ_1, σ_2 y σ_3 independientes del sistema de ejes coordenados

○
$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \equiv \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (18)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \equiv \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

donde I_1, I_2 e I_3 son los invariantes de esfuerzos, otras expresiones de invariantes pueden formarse de (18) por ejemplo

$$2I_1 - 6I_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \quad (19)$$

(19) se usa en la expresión de la energía de deformación, su uso se discutirá posteriormente

- Después de diagonalizar el tensor de esfuerzos $[\sigma_{ij}]$, el elemento de la Fig. 2 se muestra en la Fig. 3, y las ecuaciones de equilibrio (5) quedan:

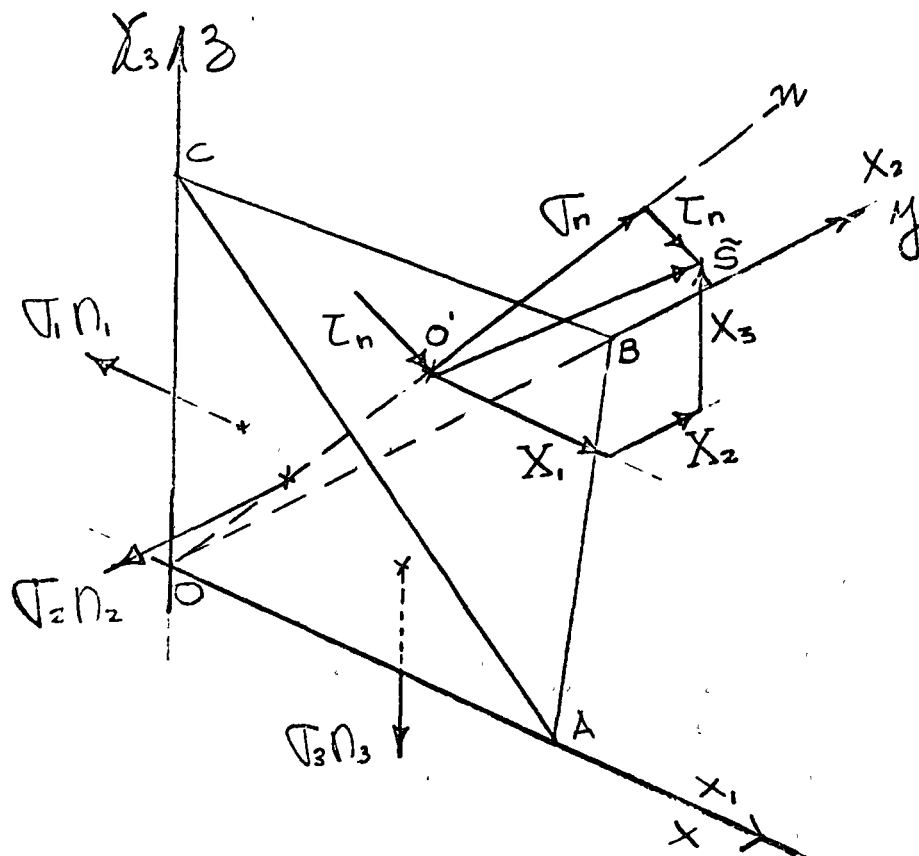


Fig. 3 Componentes del tensor de esfuerzos diagonalizado

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

- En (20) las componentes $\{X_i\}$, $\{N_i\}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_n$, $\bar{\tau}_n$ son diferentes a las (5) que se muestran en Fig. 2. De geometría se conoce que

$$N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = 1 \quad (21)$$

○ Substituyendo (20) en (21) se obtiene la ecuación

$$\frac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{X_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (22)$$

la cual representa una superficie elipsoidal en el espacio de esfuerzos σ_i , algunos autores lo denominan elipsoide de Lamé, en la Fig. 4 se muestra su perspectiva isométrica. Para el conjunto

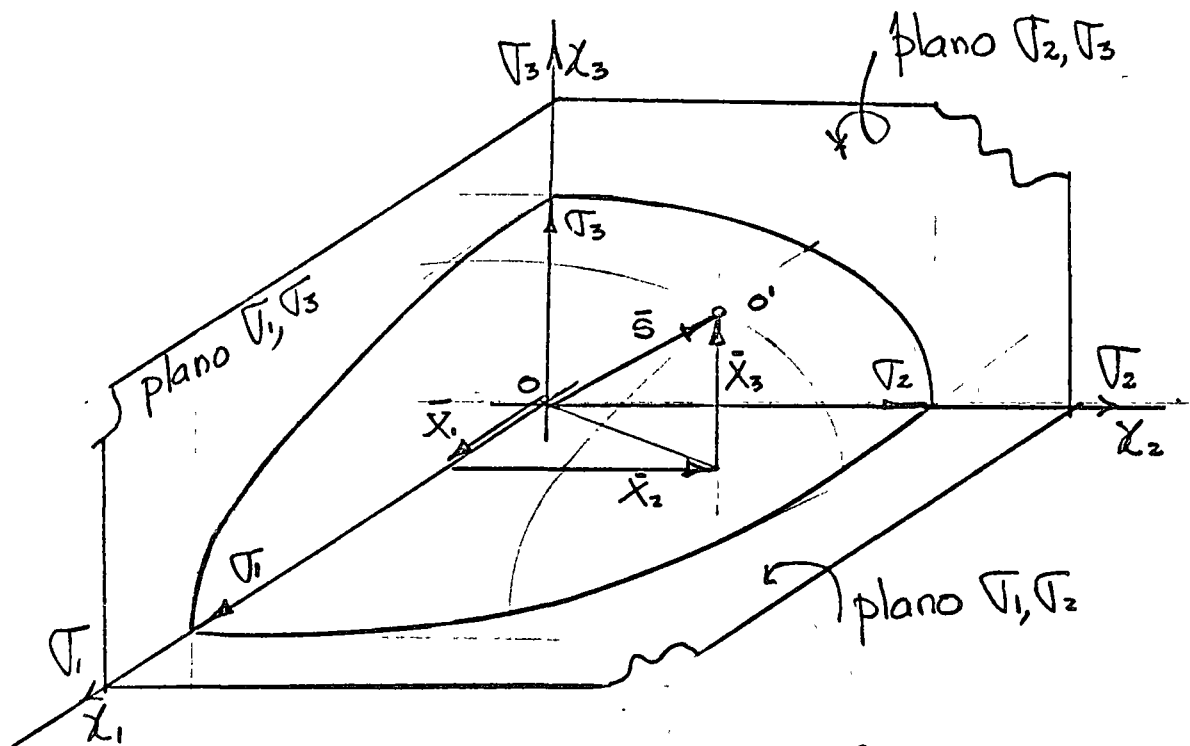


Fig. 4 Elipsoide de Lamé referido al espacio de esfuerzos σ_i , (un octagono).

de planos con cosenos directores $\{n_i\}$ a travez de o

○ Fig. 2, le corresponde el conjunto de componentes $\{X_i\}$, los cuales junto con los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 forman la superficie elipsoidal de la Fig. 4.

- De (20), si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, la superficie es esférica. Si $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$ y $\sigma_3 = 0$ la superficie es cilíndrica de sección elíptica con eje contenido en el eje σ_3 . Si $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_3 = 0$ la superficie es cilíndrica de sección circular con eje contenido en el eje σ_3 . Si $\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ la superficie son dos planos paralelos al plano σ_2, σ_3 a continuación se indican los casos particulares mencionados

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma^2 \quad (24)$$

$$\sigma \equiv S$$

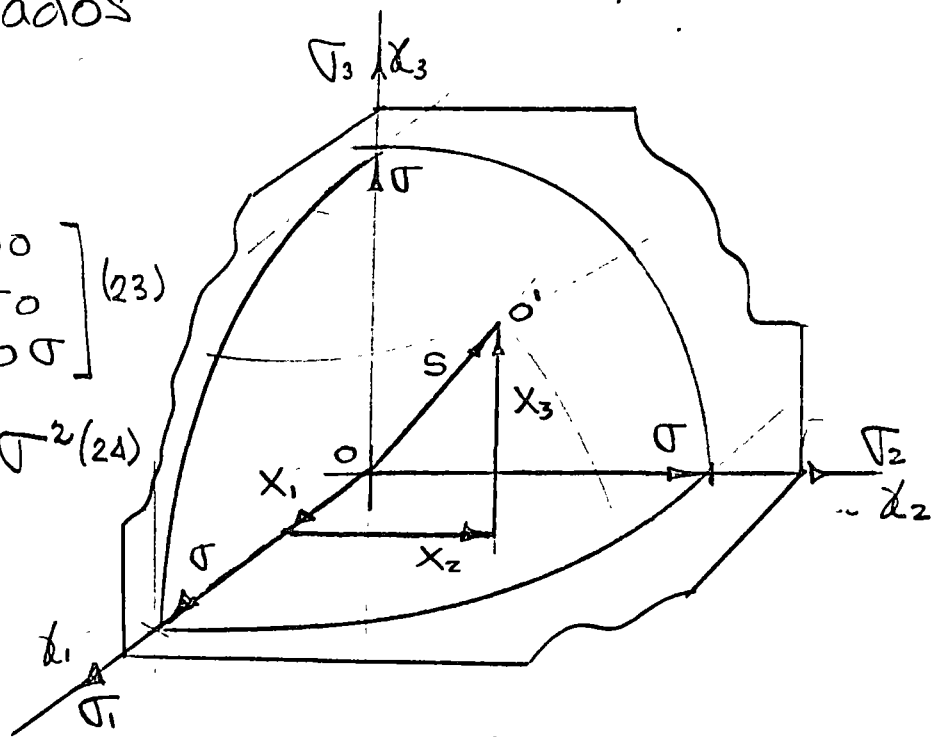


Fig. 5 Superficie esférica, equivalente a una Tensión o compresión uniforme o hidrostática

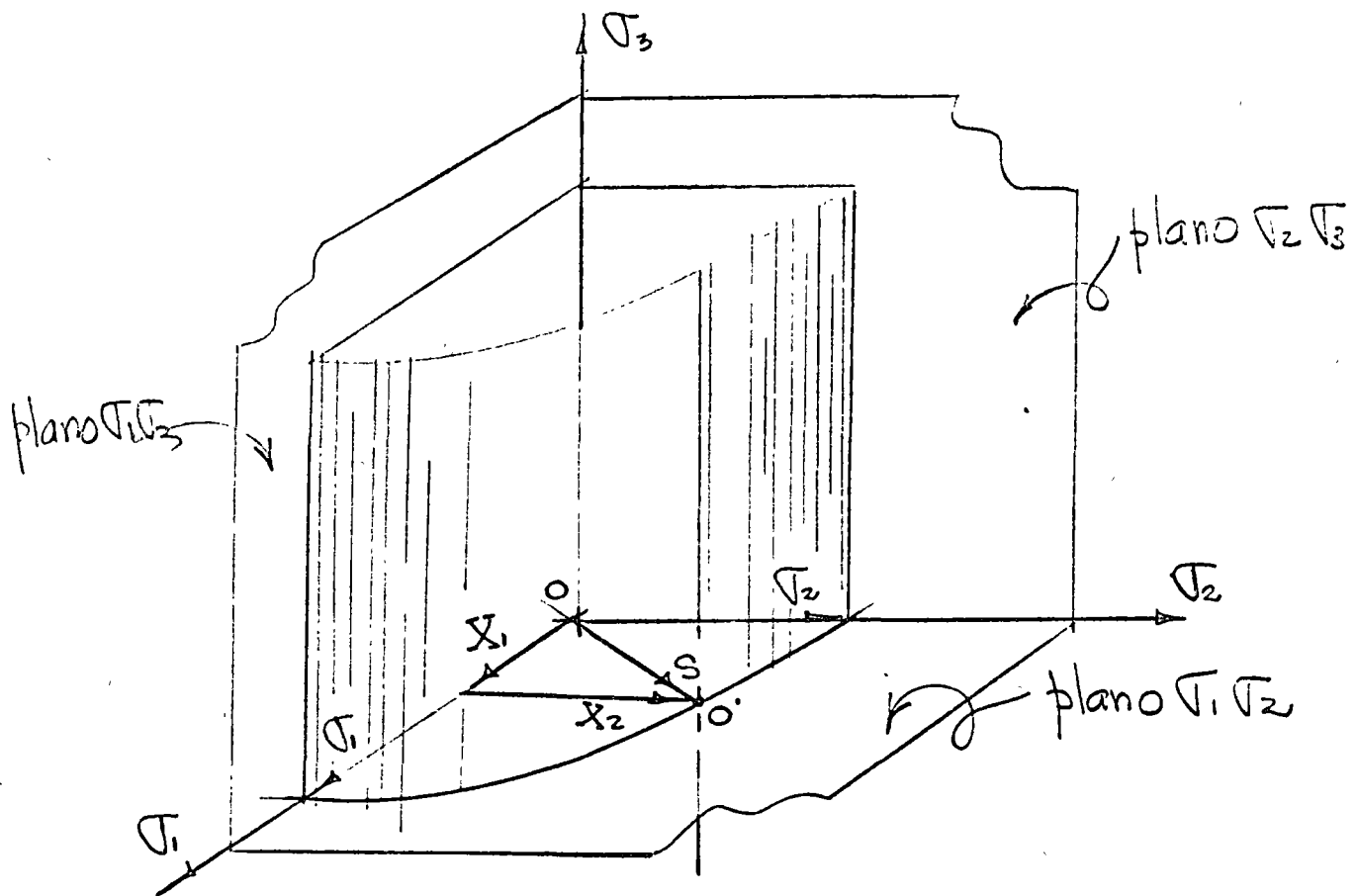


Fig. 6 Superficie cilíndrica de sección elíptica directrices paralelas al eje $O\sigma_3$.

Componentes del tensor de esfuerzos: $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (25)

Ecuación de la superficie: $\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$ (26)

Como caso particular de (25) si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ se tiene un cilindro con componentes del tensor de esfuerzos

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

y ecuación de la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 = \sigma^2 \quad (28)$$

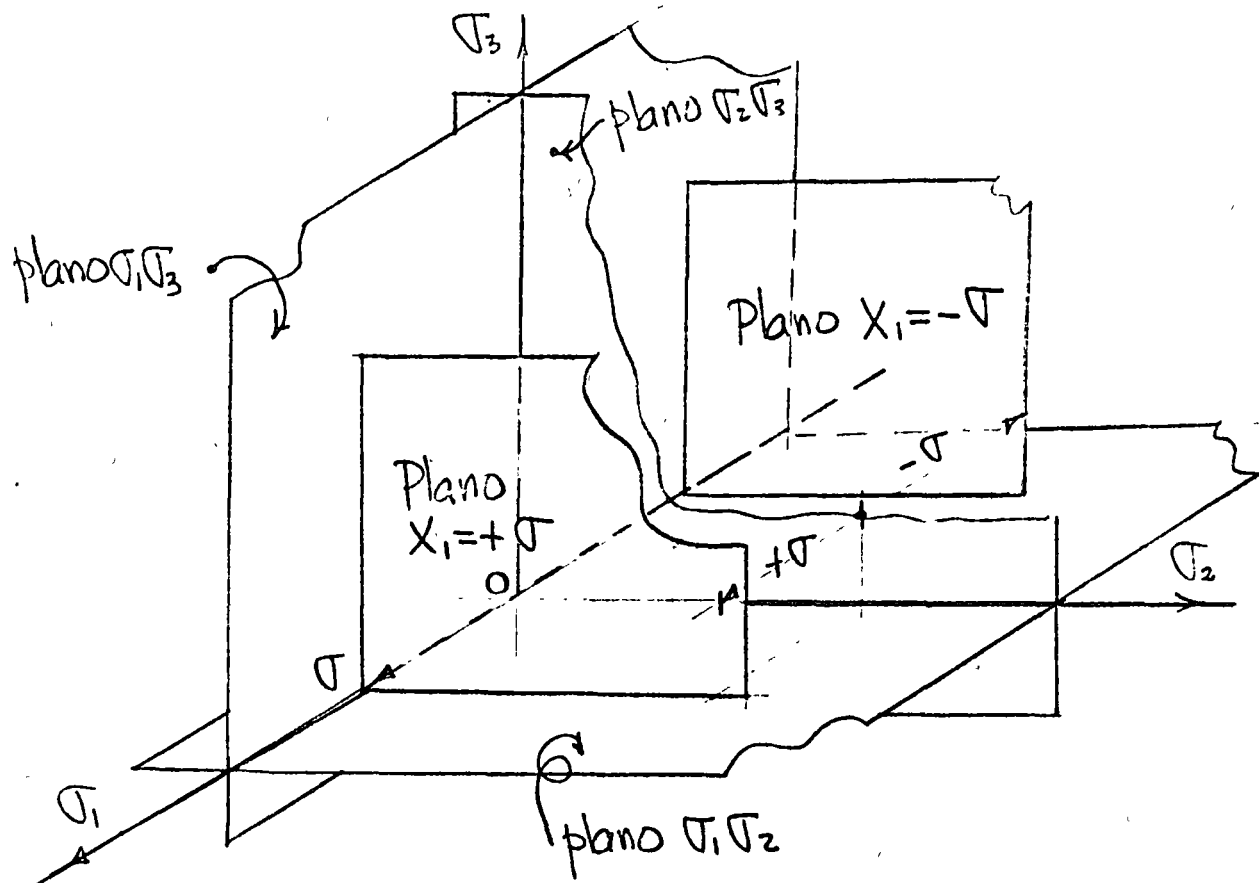


Fig. 6 Superficies planas paralelas al plano $\sigma_2\sigma_3$
 componentes del tensor de esfuerzos:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Ecuación de la Superficie:

$$X_1 = \pm \sigma \quad (30)$$

○ La ecuación (21) en el espacio de cosenos directores nos representa una esfera de radio unitario como se muestra en la Fig. 7

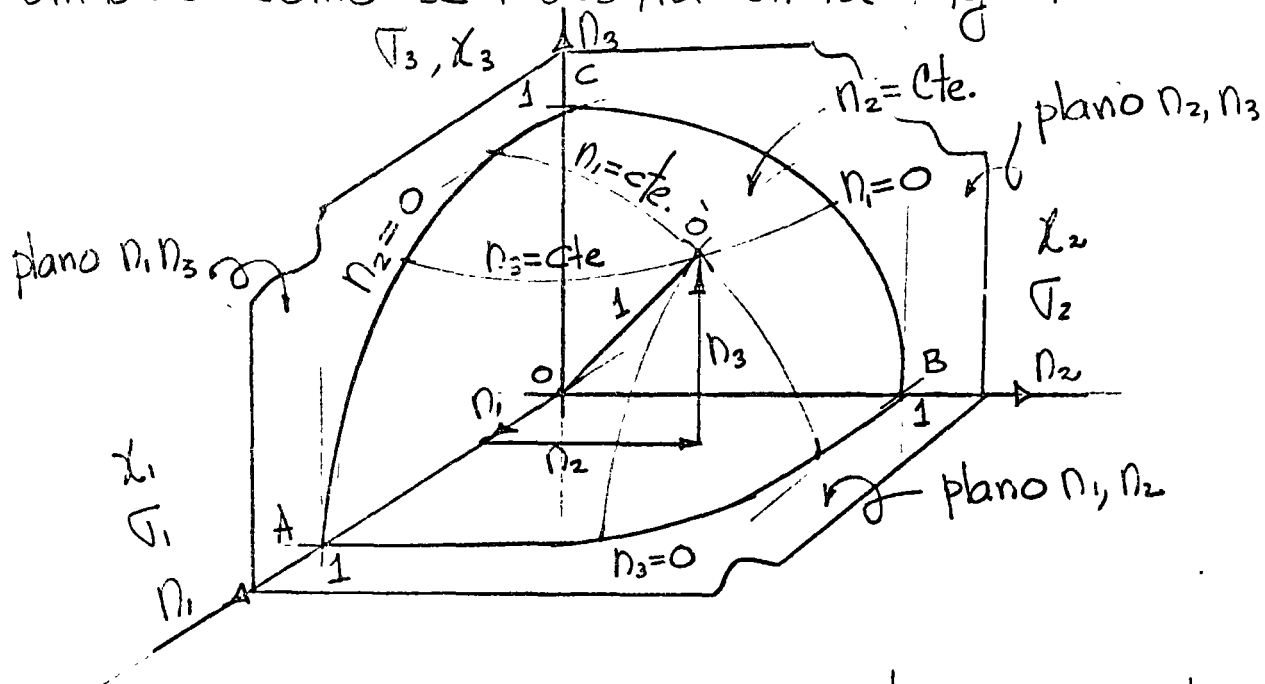


Fig. 7 Espacio de cosenos directores. un octagono de la esfera de Mohor.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OO'} = 1$$

De la Fig. 3 se observa que substituyendo (20) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (31)$$

Substituyendo (20) y (31) en (11) y (12) se obtiene

$$T_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (32)$$

○ de las ecuaciones (31), (32) y (21) se obtiene el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas no lineal en n_1, n_2 y n_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ f(\sigma_1 n_1^2) & f(\sigma_2 n_2^2) & f(\sigma_3 n_3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \tau_n \\ \tau_n^2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

de (33) se obtiene

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \quad (34)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_1 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (35)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_n)(\sigma_2 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (36)$$

De la Fig. 7 considerando $n_1 = \text{constante}$ de la ecuación (34) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2 \quad (37)$$

efectuando operaciones algebraicas en (37) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \left[\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right]^2 + \tau_n^2 = \text{Constante}$$

de donde: $x_1^2 = \left[\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right]^2 + \tau_n^2 = (x - a)^2 + y^2$ que

es la ecuación de un círculo a una distancia $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

del origen por lo tanto el radio r_1 que haciendo

centro en $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ localiza el punto de coordenadas

$\sigma_n \tau_n$ en el diagrama de Mohor es.

$$\tau_1 = \sqrt{n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (38)$$

Similarmente suponiendo $n_2 = \text{constante}$ de (35) se obtiene

$$\tau_2 = \sqrt{n_2^2 (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (39)$$

Similarmente suponiendo $n_3 = \text{constante}$ de (36) se obtiene

$$\tau_3 = \sqrt{n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2} \quad (40)$$

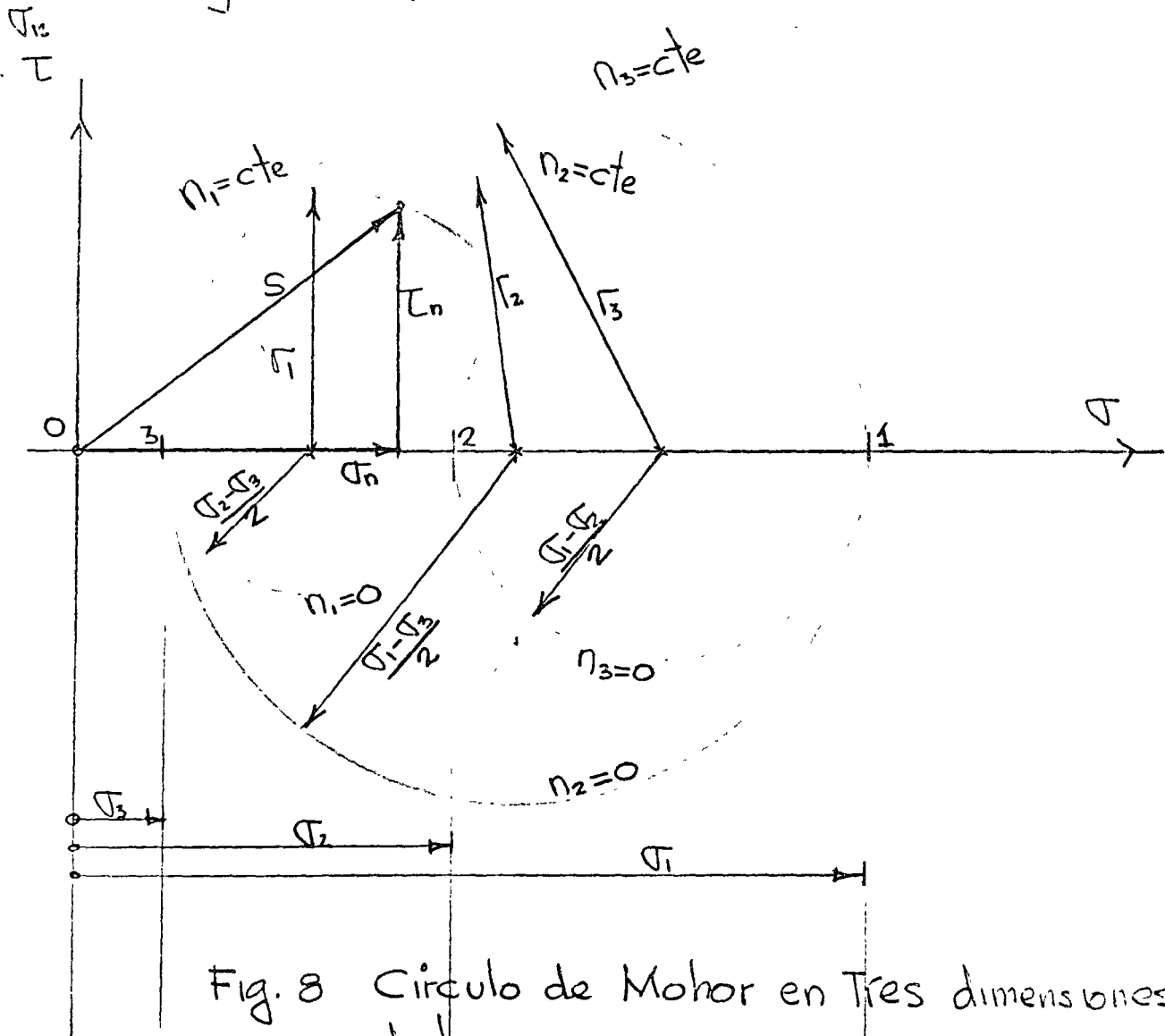


Fig. 8 Circulo de Mohor en Tres dimensiones de determinar σ_n, τ_n , conociendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y n_1, n_2 y n_3

- 2- Esfuerzos cortantes máximos, esfuerzo esférico, esfuerzo octaedral

Sean x_1, x_2, x_3 las direcciones principales (Fig. 3) y n_1, n_2, n_3 los cosenos directores de cierto plano ABC, se tiene que

$$\tau_n^2 = s^2 - \sigma_n^2 \quad (41)$$

$$s^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (42)$$

$$\sigma_n^2 = (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (43)$$

substituyendo (43) y (42) en (41) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (44)$$

Para determinar las direcciones máximas de corte de $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ se elimina n_3 de (44) y se determinan

$$\frac{\partial}{\partial n_1} (\tau_n^2) = 0; n_1 [\sigma_1 - \sigma_3] n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} (\tau_n^2) = 0; n_2 [\sigma_1 - \sigma_3] n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) = 0 \quad (46)$$

las soluciones de (45) y (46) que hacen τ_n máximo.

$$\text{Si } n_2 = 0 \quad n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{" } n_1 = 0 \quad n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{y similarmente}$$

$$\text{" } n_3 = 0 \quad n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

se repiten los cálculos en (44) se elimina n_1 y después n_2 . Conviene observar que en (45) y (46)

- no hay soluciones de n_1 y n_2 que sean ambos diferentes de cero, porque las expresiones dentro del parentesis no pueden anularse.

	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n_2	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n_3	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Esf. Principales
 $\tau_n = 0$

Cortantes
maximos

Tabla 1 Cosenos directores

- Repetiendo los calculos en (44), eliminado n_1 y determinando n_2 y n_3 tal que τ_n sea máximo y después n_2 y determinando n_1 y n_3 tal que τ_n sea máximo se obtienen los valores

$$(\tau_{max})_1 = \tau_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \quad (47)$$

$$(\tau_{max})_2 = \tau_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$(\tau_{max})_3 = \tau_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

de (47) y (32) se puede expresar τ_n en la siguiente forma

$$\tau_n^2 = 4(n_1^2 n_2^2 \tau_3^2 + n_2^2 n_3^2 \tau_1^2 + n_1^2 n_3^2 \tau_2^2) \quad (48)$$

- Las 3 primeras columnas de la Tabla 1 dan las direcciones de los planos coordenados de las direcciones principales para ellos $\tau_n = 0$ y (32) es un minimo, las tres columnas restantes dan planos a través de un eje principal bisectando los otros dos direcciones de esfuerzos principales, substituyendo los valores de Tabla 1 en (32)

- se obtienen los valores de los esfuerzos cortantes máximos (47), los lados del octaedro mostrado en la Fig. 9 son las direcciones principales de cortante, y las direcciones χ_1, χ_2 y χ_3 son la direcciones

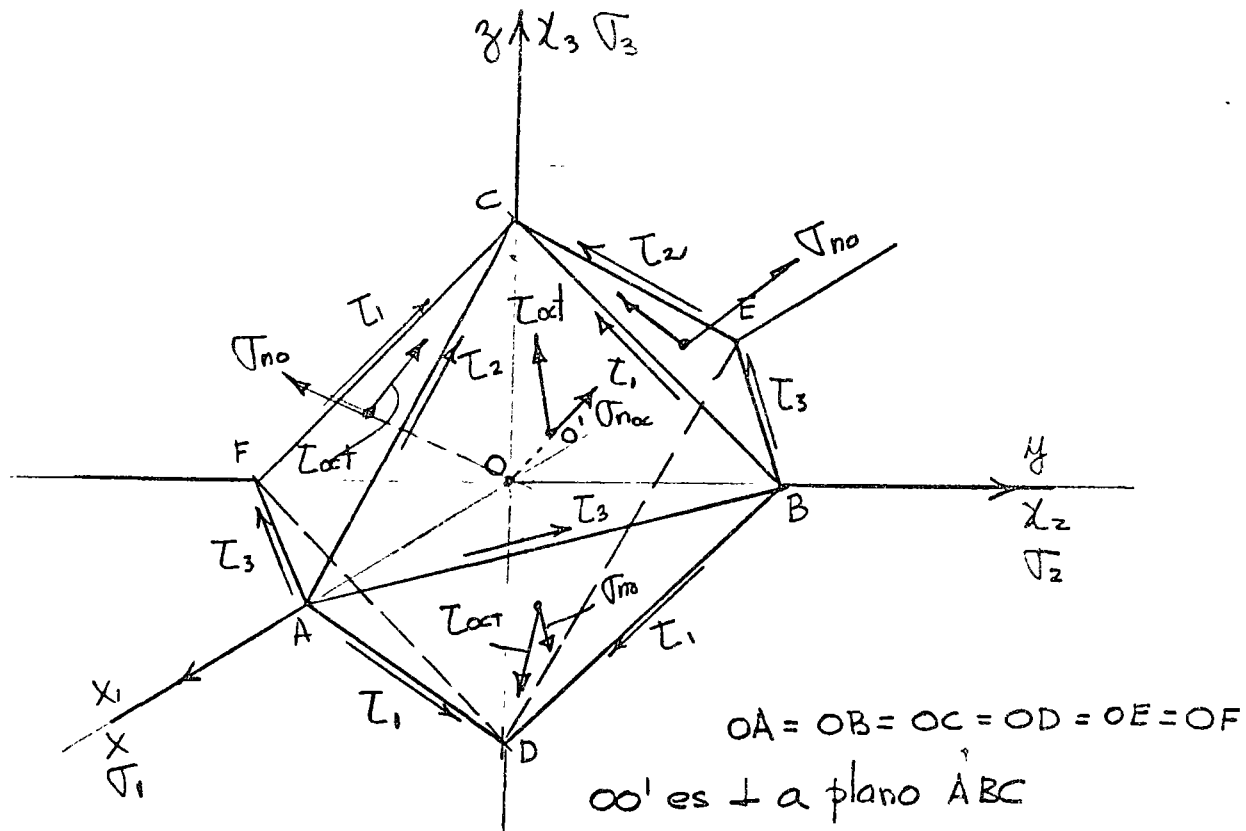


Fig. 9 octaedro regular cuyos lados son las direcciones de esfuerzo cortante máximo.

principales σ_1, σ_2 y σ_3 , la normal al tetraedro OABC tiene cosenos directores $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\alpha = \beta = \gamma = 54.76^\circ$) de (31) el esfuerzo normal es igual a

$$\sigma_{no} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (48)$$

(48) se denomina esfuerzo medio, esférico o hidrostática, el esfuerzo de corte correspondiente de (44) es

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (49)$$

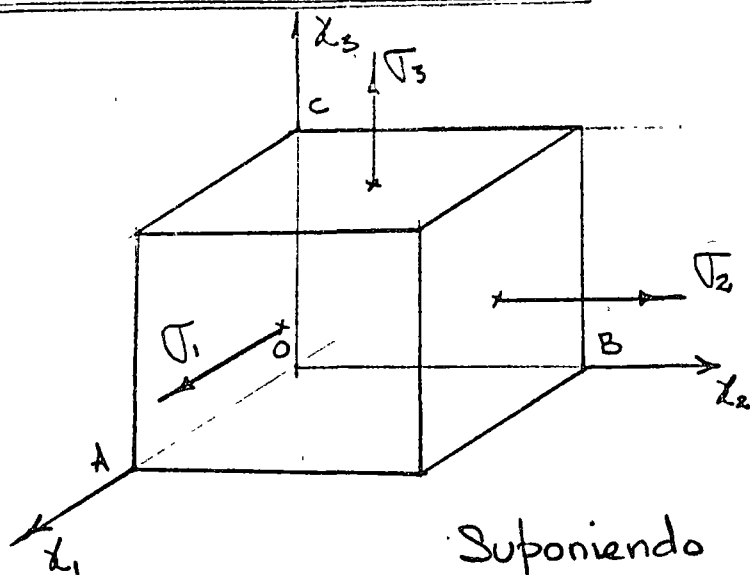
$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (49)$$

de (48) y (49) se obtiene

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_n)^2 + (\sigma_2 - \sigma_n)^2 + (\sigma_3 - \sigma_n)^2]} \quad (50)$$

al esfuerzo de corte dado por (49) y (50) es llamado esfuerzo octaedral de corte, porque la cara donde actua es la cara ABC del octaedro regular de la Fig. 9 que tiene vertices en los ejes coordenados, se usa frecuentemente en Teoría de Plasticidad.

TEORIAS DE FALLA



Suponiendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Fig. 10

En la Fig. 1, después de diagonalizar las componentes del tensor de esfuerzos, se tiene

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

se trata de obtener la superficie $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ en la cual el medio entra a falla plástica, a continuación se presenta el diagrama idealizado esfuerzo deformación en condiciones uniaxiales

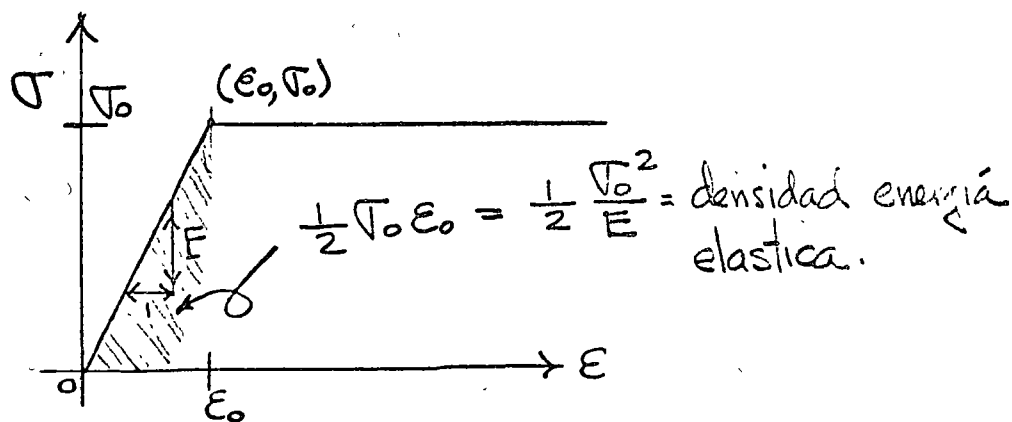


Fig. 11

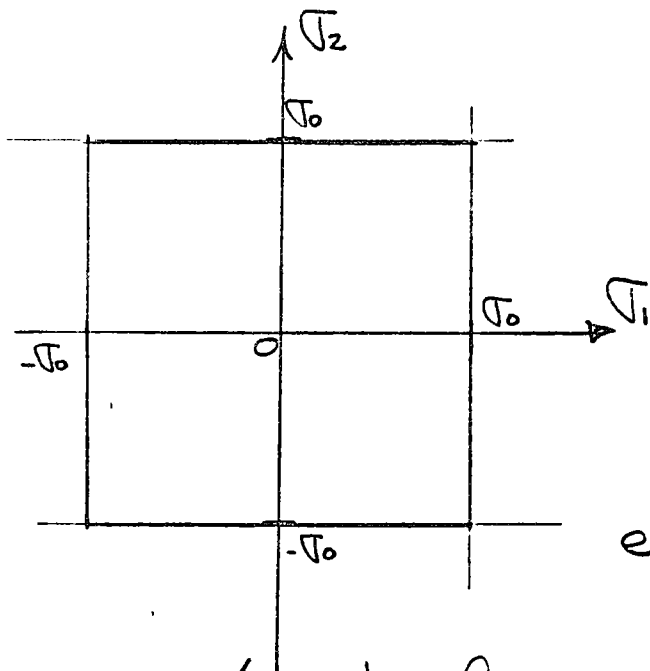
○ a) Teoría del Máximo esfuerzo (Rankine).

Se supone que $\sigma_1 = \sigma_0'$ o $\sigma_3 = \sigma_0''$

σ_0' esfuerzo de fluencia en tensión

σ_0'' " " " " " compresión

o σ_0' y σ_0'' pueden ser dos esfuerzos de fluencia en dos direcciones perpendiculares, suponiendo un estado plano de esfuerzos $\sigma_3 = 0$ y que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ se obtiene el diagrama de esfuerzos de la Fig. 12



Planos de falla

$$\sigma_1 = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_2 = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_3 = \pm \sigma_0$$

Superficie cubica
en el espacio de esfuerzos

Fig. 12 Teoría del esfuerzo máximo en esfuerzos planos

b) Teoría de la deformación máxima (Saint-Venant)

Condición triaxial de esfuerzos que alcanza la deformación de fluencia ϵ_0 .

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (52)$$

de (52) la superficie de esfuerzos referida a

○ espacio de esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ es

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_0) - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad (53)$$

en (53) suponiendo $\sigma_3 = 0$ y para $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (esfuerzos planos) se obtiene para $\nu = 0.3$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 - \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 - \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 - 0.3} \sigma_0 = 1.43 \sigma_0 \end{aligned} \quad (54)$$

Si $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 + \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 + 0.3} \sigma_0 = 0.77 \sigma_0 \end{aligned} \quad (55)$$

○ llevando los valores (54) y (55) al plano σ_1, σ_2 del espacio de esfuerzos se obtiene las rectas de falla de la Fig. 13

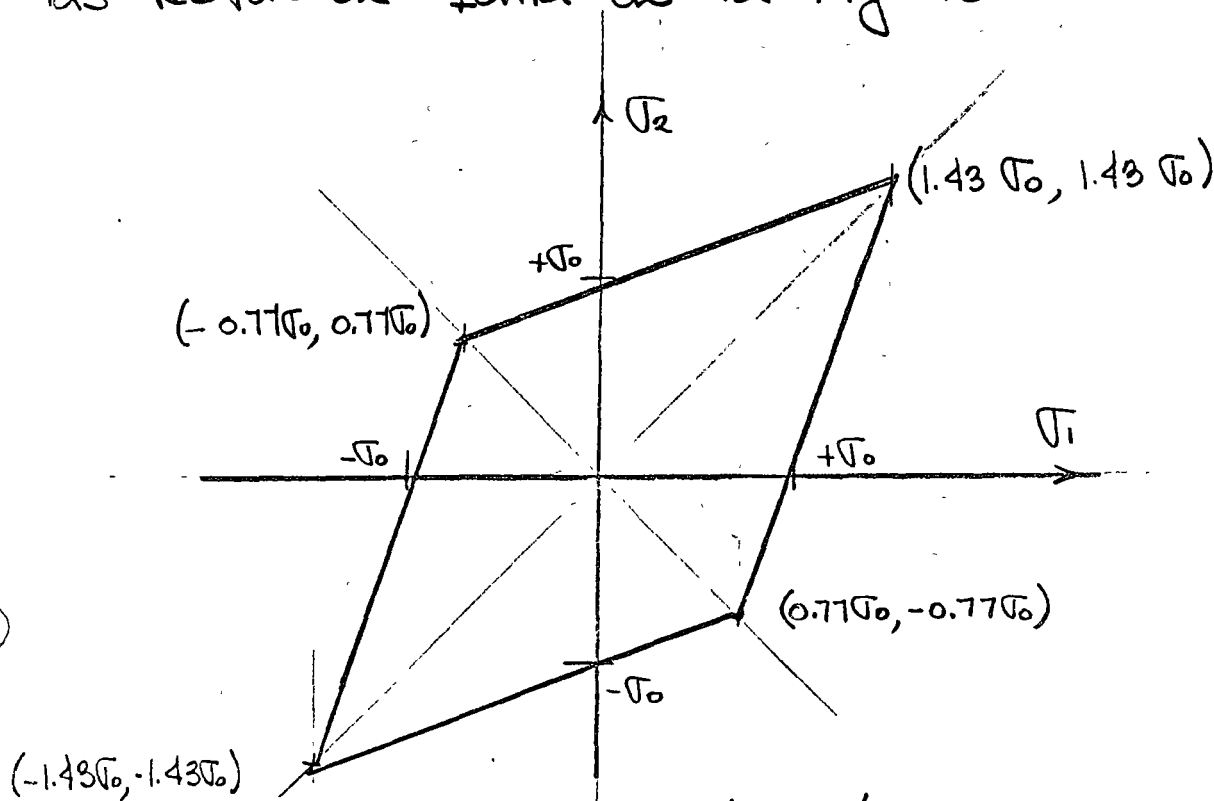


Fig. 13 Teoría de deformación máxima (Saint-Venant)

c) Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Coulomb)

Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ Coulomb establece que la falla se alcanza cuando

$$(\tau_2)_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (56)$$

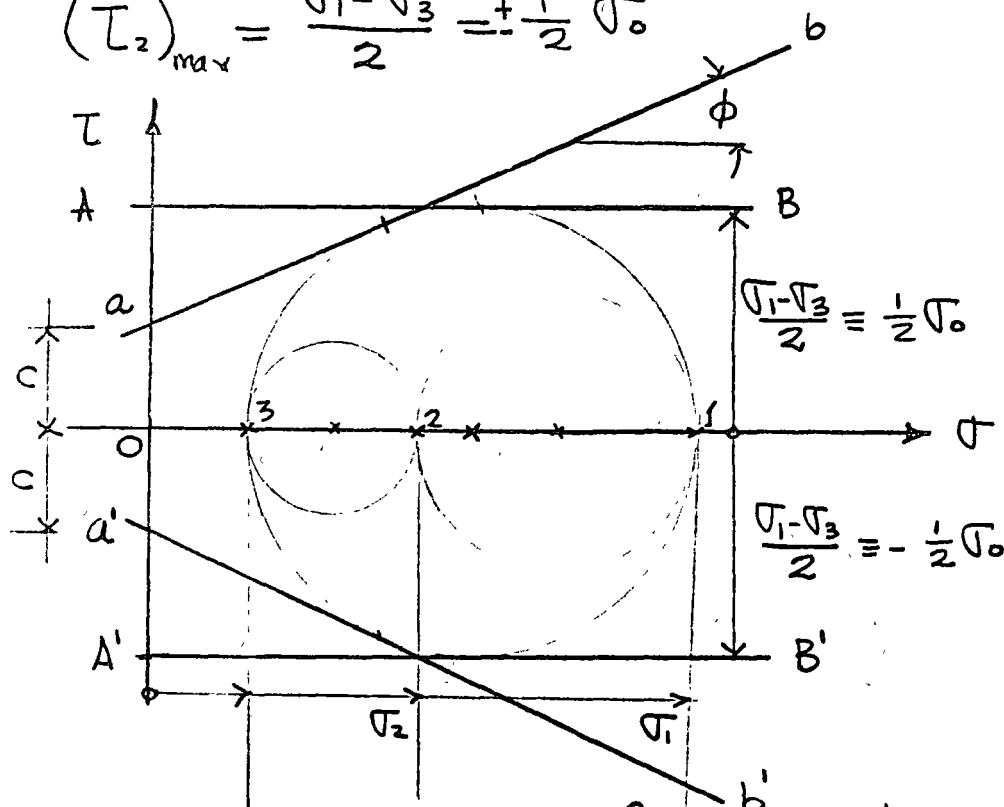


Fig. 13 Teoría del esfuerzo cortante máximo

(56) en el diagrama de Mohr establece como rectas de falla a AB y $A'B'$ en Fig. 13 cuando el ángulo de fricción interna $\phi = 0$, y cuando $\phi > 0$ las rectas de falla son las ab y $a'b'$ cuya ecuación es igual a

$$\tau_{\max} = c + \sigma \tan \phi \quad (57)$$

c = cohesión o resistencia al esfuerzo cortante puro
 ϕ = ángulo de fricción interna
 σ = esfuerzo de falla.

- c y ϕ son constantes constitutivas experimentales que se pueden obtener mediante una prueba triaxial de ruptura. La ecuación 56 en el plano de esfuerzos σ_1, σ_3 se muestra en la Fig. 14

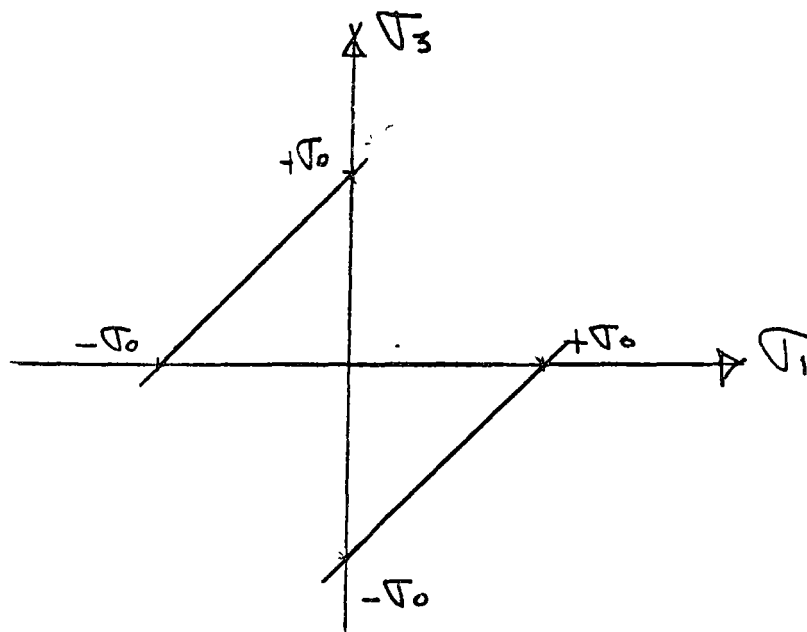


Fig. 14 Teoría del esfuerzo cortante máximo

- d) Teoría de la máxima energía de deformación (Beltrami, Haig)

La densidad de energía en un medio elástico lineal viene dada por

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \quad (58)$$

de la Fig. 11 la densidad de energía hasta el

- límite elástico σ_0 es

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E} \quad (59)$$

de (58) y (59) se obtiene la superficie de falla

$$\circ \quad f(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_0^2 = 0 \quad (60)$$

En esfuerzos planos $\sigma_3 = 0$ se obtiene

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \nu\sigma_1\sigma_2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (61)$$

(61) es la ecuación de una elipse la cual en el plano de esfuerzos σ_1, σ_2 se muestra en la Fig. 15 para el acero con $\nu = 0.3$, y las

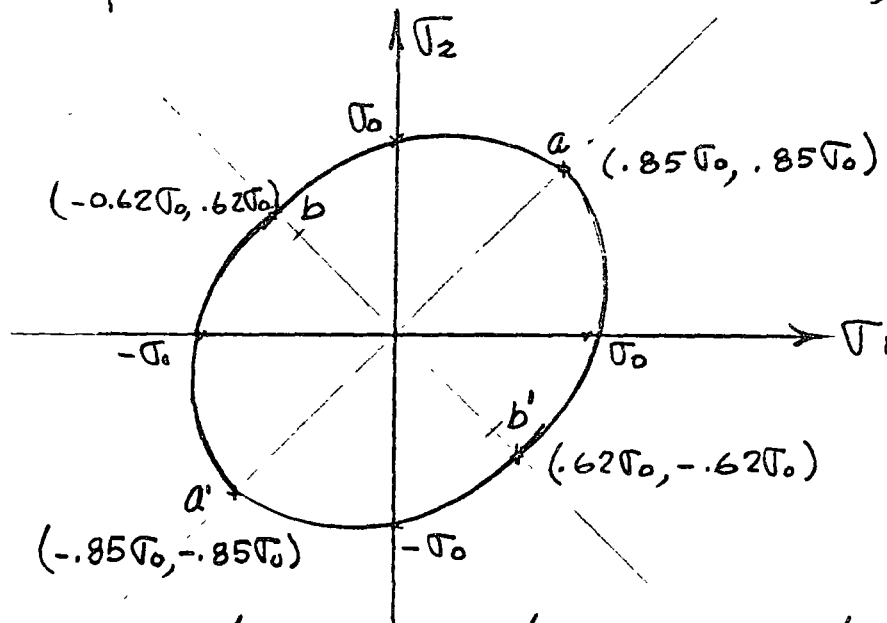


Fig. 15 Teoría de la máxima energía de deformación en el plano σ_1, σ_2 para $\nu = 0.3$ coordenadas de los puntos a, a', b, y b'.

e) Teoría de energía máxima distorsional.

(1856, J.C. Maxwell, M.T. Huber, R.V. Mises,

○ H. Hencky).

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre el plano octaédrico cuyos cosenos directores son

○ $\{n_i\} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$, y el esfuerzo normal correspondiente llamado, medio, esférico o hidrostático es

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (62)$$

la expansión volumétrica por unidad de volumen correspondiente se expresa por

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{2(1-2\nu)}{E} p \quad (63)$$

la energía por cambio unitario de volumen será

$$○ \quad U_1 = \frac{1}{2} p e \quad (64)$$

Substituyendo (62) y (63) en (64) se obtiene

$$U_1 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (65)$$

en un medio elástico lineal homogéneo e isotrópico la energía de deformación por unidad de volumen es

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (66)$$

La densidad de energía desviatoria máxima es

$$○ \quad \Delta U = U_0 - U_1 \quad (67)$$

substituyendo (65) y (66) en (67) se obtiene

$$\Delta U = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \quad (68)$$

el valor máximo en (68) sería si $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y (68) se transforma para $\sigma_1 = \sigma_0$ en

$$\Delta U_{\max} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2 \quad (69)$$

por lo tanto de (68) y (69) se obtiene cuando $\Delta U = \Delta U_{\max}$

$$f(\sigma_i) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (70)$$

(70) es la ecuación de un cilindro circular cuyo eje y directrices en el espacio de esfuerzos forma iguales ángulos con los ejes σ_i , la intersección de (70) con el plano $\sigma_1 \sigma_2$ se obtiene de (70) para $\sigma_3 = 0$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (71)$$

(71) y (61) deben ser iguales para $\nu = 0.5$ material incompresible (71) representa también una elipse como en la Fig. 15 solo que las coordenadas de a, a', b y b' son para $\nu = 0.3$

$$\begin{array}{ll} a(\sigma_0, \sigma_0) & b(-0.577\sigma_0, 0.577\sigma_0) \\ a'(-\sigma_0, -\sigma_0) & b'(0.577\sigma_0, -0.577\sigma_0) \end{array}$$

- ABCD: Teoría del esfuerzo máximo. (Rankine)
- EFGH: " deformación máxima. (Saint-Venant)
- " de máxima energía de deformación. (Beltrami)
- - - " " " " " distorsionante. (von-Mises)

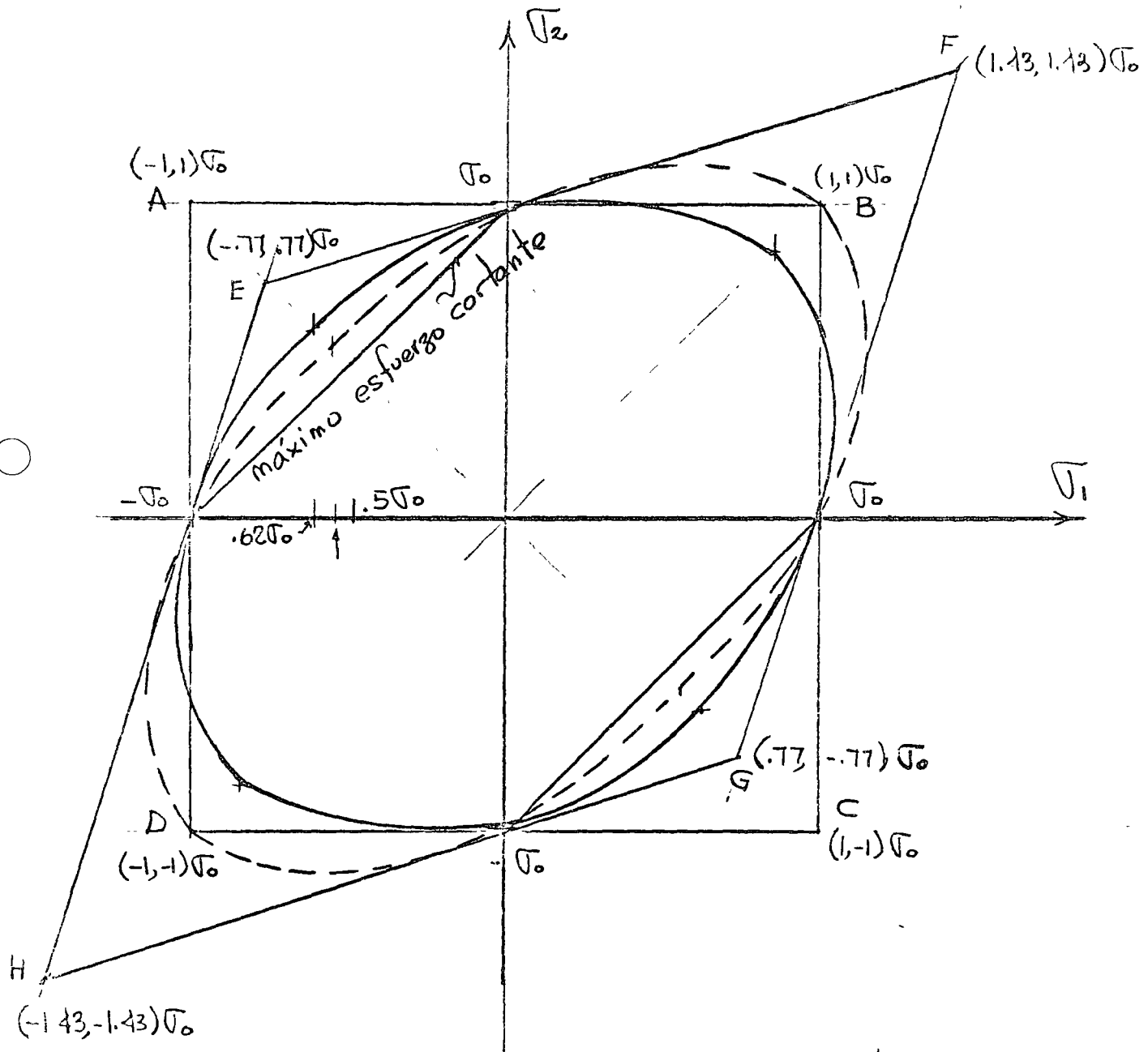


Fig. 16 Comparación entre las distintas Teorías de falla para $\nu = 0.3, \phi = 0$

en eliminar las componentes de esfuerzos $\{\sigma\}$ de las ecuaciones de equilibrio (5.2) expresando las ecuaciones constitutivas (8.5) en términos de los desplazamientos (7.2), (7.3) y (7.4). Por lo tanto substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (8.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_x \equiv \sigma_{11} &= \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y \equiv \sigma_{22} &= \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z \equiv \sigma_{33} &= \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} \equiv \tau_{12} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} \equiv \tau_{23} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} \equiv \tau_{31} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (10.1)$$

$$\text{donde } e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_x + e_y + e_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.2)$$

Substituyendo (10.1) en las ecuaciones de equilibrio (5.2) se obtiene

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.3)$$

donde en este caso el operador diferencial $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.
En (10.3) cuando las fuerzas de cuerpo $\{X\}$ son cero (10.3) queda

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.4)$$

En las ecuaciones (10.4), diferenciando la primera respecto a x , la segunda respecto a y , y la tercera respecto a z , y después sumándolas se obtiene

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0 \quad (10.5)$$

(10.5) significa que la expansión volumétrica unitaria $e = e_x + e_y + e_z$ satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (10.6)$$

En la ecuación (10.3) las fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned} X &= \rho(f_x - a_x) \\ Y &= \rho(f_y - a_y) \\ Z &= \rho(f_z - a_z) \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde f_x, f_y y f_z son las fuerzas por unidad de masa, a_x, a_y y a_z las componentes de la aceleración, y ρ es la densidad ó masa específica. Si en las ecuaciones (10.3) la primera la multiplicamos por el vector unitario \bar{i} , la segunda por el vector unitario \bar{j} , y la tercera por el vector unitario \bar{k} , y las sumamos entre sí se obtiene la expresión vectorial de las ecuaciones (10.3) como

$$(\lambda + G)\text{grad div } \bar{s} + G\nabla^2 \bar{s} + \rho(\bar{f} - \bar{a}) = 0 \quad (10.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \\ \bar{f} &= \bar{i}f_x + \bar{j}f_y + \bar{k}f_z \\ \bar{s} &= \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w \\ \text{div } \bar{s} &= e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \text{grad div } \bar{s} &= \bar{i}\frac{\partial e}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial e}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \quad (10.9)$$

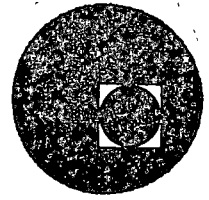
C

C

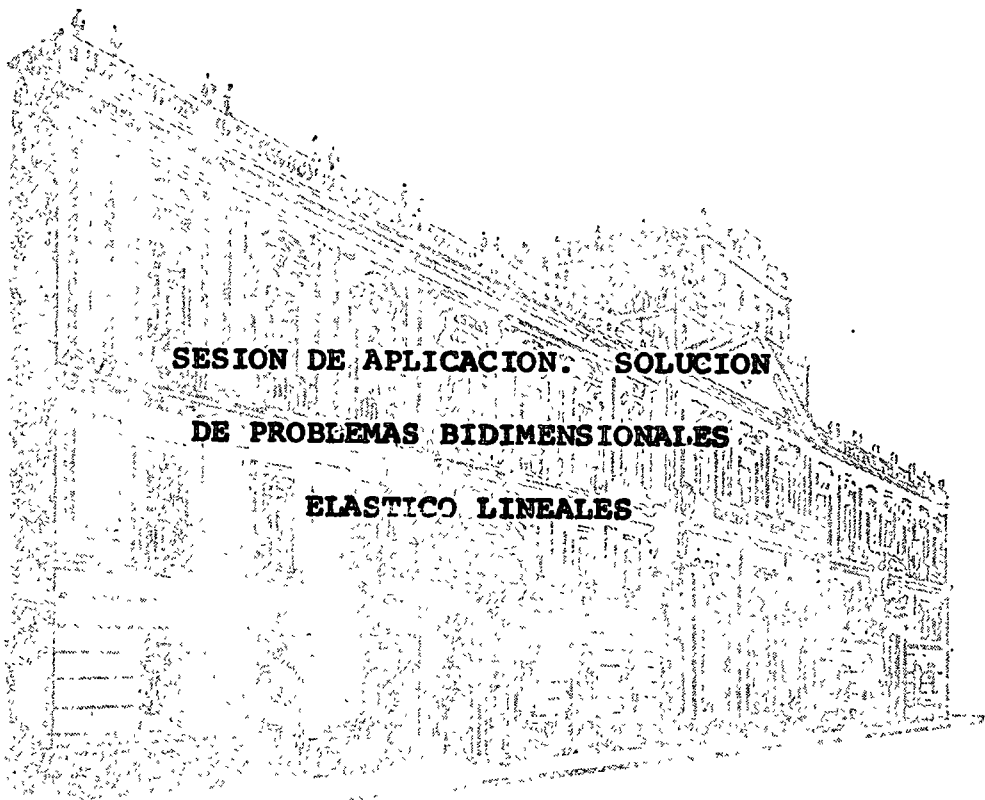
C



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



"FUNDAMENTOS DE ANALISIS MEDIANTE EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS"



PROFR. PORFIRIO BALLESTEROS

MARZO DE 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

MARCO A P. Billesteros

	150	200	200	100	100	210	15										
	22	38	64	80	96	112	128	144	160	150	166	182	198	214	230		
14	8	98	23		113	38	128	53				145	68	158	83		
15	31	47	63	79	95	111	127	143			165	181	197	213	229		
260	90	15	105		30	120	45	135		20		60	150	75	165		
14	20	46	62	78	94	110	126	142			164	180	196	212	228		
13	7	97	22		112	37	127	52		9		142	67	157	82		
12	29	45	61	77	93	109	125	141		149	14	163	179	195	211	227	
11	89	14	104		29	119	44	134				59	149	74	164		
10	28	44	60	76	92	108	124	140			162	178	194	210	226		
260	6	96	21		111	36	126	51		5		141	66	156	81		
11	27	43	59	75	91	107	123	139			161	177	193	209	225		
10	88	13	103		28	118	43	133				58	148	73	163		
9	26	42	58	74	90	106	122	138		8	148	13	169	176	192	208	224
8	5	95	20		110	35	125	50				140	65	155	80		
7	25	41	57	73	89	105	121	137			159	175	191	207	223		
260	87	12	102		27	117	42	132				57	147	72	162		
8	24	40	56	72	88	104	120	136			158	174	190	206	222		
7	4	94	19		109	34	124	49				139	64	154	79		
6	23	39	55	71	87	103	119	135		7	147	12	157	173	189	205	221

