



Universidad Nacional Autónoma  
de México

**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA BIFURCACIÓN  
DEL RÍO MEZCALAPA**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

**JONATHAN ARTURO SÁNCHEZ MUÑOZ**

TUTOR:

**William Vicente y Rodríguez**

2011



Facultad de Ingeniería

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. José Luis Fernández Zayas  
Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz  
Vocal: Dr. Vicente y Rodríguez William  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Martín Salinas Vázquez  
2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Rogelio González Oropeza

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. William Vicente y Rodríguez

---

Firma

## ***AGRADECIMIENTOS***

## ***CAPÍTULO 1***

<b><i>1.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 1.....</i></b>	<b><i>11</i></b>
<b><i>1.1 OBJETIVO.....</i></b>	<b><i>11</i></b>
<b><i>1.2 INTRODUCCIÓN.....</i></b>	<b><i>11</i></b>
<b><i>1.3 ALTERNATIVAS UTILIZADAS EN LOS MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZANDO LA DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL.....</i></b>	<b><i>15</i></b>
<b><i>1.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS.....</i></b>	<b><i>16</i></b>

## ***CAPÍTULO 2***

<b><i>2.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 2.....</i></b>	<b><i>19</i></b>
<b><i>2.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS CANALES ABIERTOS.....</i></b>	<b><i>19</i></b>
<b><i>2.2 GENERALIDADES (MODELOS REALES Y MODELOS MATEMÁTICOS.....</i></b>	<b><i>21</i></b>
<b><i>2.2.1 LOS MODELOS MATEMÁTICOS.....</i></b>	<b><i>22</i></b>
<b><i>2.3 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO MATEMÁTICO DE LA BIFURCACIÓN DEL RÍO MEZCALAPA.....</i></b>	<b><i>23</i></b>

## **CAPÍTULO 3**

<b>3.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO .....</b>	<b>26</b>
<b>3.1 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA.....</b>	<b>26</b>
<b>3.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO (ECUACIONES DE NAVIER-STOKES).....</b>	<b>26</b>
<b>3.3 ECUACIÓN GENERAL DE TRANSPORTE.....</b>	<b>27</b>
<b>3.4 FLUJO TURBULENTO.....</b>	<b>28</b>
<b>3.5 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES.....</b>	<b>31</b>
<b>3.5.1 REGLAS DE LOS PROMEDIADOS.....</b>	<b>31</b>
<b>3.6 PROMEDIADO DE LA ECUACIÓN GENERAL.....</b>	<b>33</b>
<b>3.6.1 PROMEDIADO TÉRMINO TEMPORAL.....</b>	<b>33</b>
<b>3.6.2 PROMEDIADO TÉRMINO DIFUSIVO.....</b>	<b>33</b>
<b>3.6.3 PROMEDIADO TÉRMINO CONVECTIVO.....</b>	<b>34</b>
<b>3.6.4 ECUACIÓN GENERAL PROMEDIADA.....</b>	<b>35</b>
<b>3.7 ESFUERZOS DE REYNOLDS.....</b>	<b>35</b>
<b>3.8 MODELO DE TURBULENCIA <math>k-\epsilon</math>.....</b>	<b>36</b>

## **CAPÍTULO 4**

<b>4.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 4.....</b>	<b>40</b>
<b>4.1 MÉTODO DE LOS VOLUMENES FINITOS.....</b>	<b>40</b>
<b>4.2 ECUACION DE TRANSPORTE.....</b>	<b>41</b>
<b>4.2.1 ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN.....</b>	<b>41</b>
<b>4.2.2 DISCRETIZACIÓN TÉRMINO CONVECTIVO.....</b>	<b>42</b>
<b>4.2.3 DISCRETIZACIÓN TÉRMINO DIFUSIVO.....</b>	<b>42</b>
<b>4.2.4 DISCRETIZACION TÉRMINO FUENTE.....</b>	<b>43</b>
<b>4.2.5 DISCRETIZACIÓN TÉRMINO TEMPORAL.....</b>	<b>43</b>
<b>4.3 ECUACIÓN GENERAL DISCRETIZADA.....</b>	<b>43</b>
<b>4.4 MÉTODO SIMPLE.....</b>	<b>44</b>
<b>4.5 MÉTODO DE LA CELDA CORTADA (CUT CELL METHOD).....</b>	<b>46</b>
<b>4.6 MÉTODO DE LA ECUACION ESCALAR (SCALAR METHOD EQUATION).....</b>	<b>47</b>

## **CAPÍTULO 5**

<b>5.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 5.....</b>	<b>51</b>
<b>5.1 REPRESENTACIÓN DE LA BATIMETRÍA.....</b>	<b>51</b>
<b>5.2 CONFIGURACIÓN DE LA SIMULACIÓN (Condiciones de frontera)...</b>	<b>52</b>
<b>5.3 DETALLES NUMÉRICOS (Características de la malla).....</b>	<b>53</b>
<b>5.3.1 DETALLES NUMÉRICOS (Configuraciones).....</b>	<b>54</b>
<b>5.4 RESULTADOS.....</b>	<b>54</b>
<b>5.4.1 AVENIDA DE 2000 [m<sup>3</sup>/s] SOBRE EL RÍO MEZCALAPA.....</b>	<b>54</b>
<b>5.4.1.1 VELOCIDAD.....</b>	<b>55</b>
<b>5.4.1.2 DENSIDAD.....</b>	<b>57</b>
<b>5.4.2 AVENIDA DE 1500 [m<sup>3</sup>/s] SOBRE EL RÍO MEZCALAPA.....</b>	<b>58</b>
<b>5.4.2.1 VELOCIDAD.....</b>	<b>59</b>
<b>5.4.2.2 DENSIDAD.....</b>	<b>60</b>
<b>5.4.3 AVENIDA DE 1000 [m<sup>3</sup>/s] SOBRE EL RÍO MEZCALAPA.....</b>	<b>62</b>
<b>5.4.3.1 VELOCIDAD.....</b>	<b>62</b>
<b>5.4.3.2 DENSIDAD.....</b>	<b>64</b>
<b>5.5 COMPARACIONES ENTRE LAS DIFERENTES CONDICIONES DE FLUJO.....</b>	<b>65</b>

## **CAPÍTULO 6**

**6.0 CONCLUSIONES.....68**

**6.1 RECOMENDACIONES.....69**

**BIBLIOGRAFÍA.....70**

## **APENDICE A**

**A.0 MODELOS DE TURBULENCIA.....74**

**A.1 TIPOS DE MODELOS.....74**

**A.2 MODELOS DE VISCOSIDAD TURBULENTA.....75**

**A.2.1 MODELOS DE LONGITUD DE MEZCLA.....79**

**A.2.3 MODELO K-E.....80**

**A.3 MODELOS DE ECUACIÓN DE TRANSPORTE (REYNOLDS STRESS MODEL).....81**

**A.3.1 MODELOS ASM.....82**

## **APENDICE B**

**B.0 MÉTODO SIMPLE (SEMI-IMPLICIT FOR PRESSURE LINKED EQUATIONS).....83**

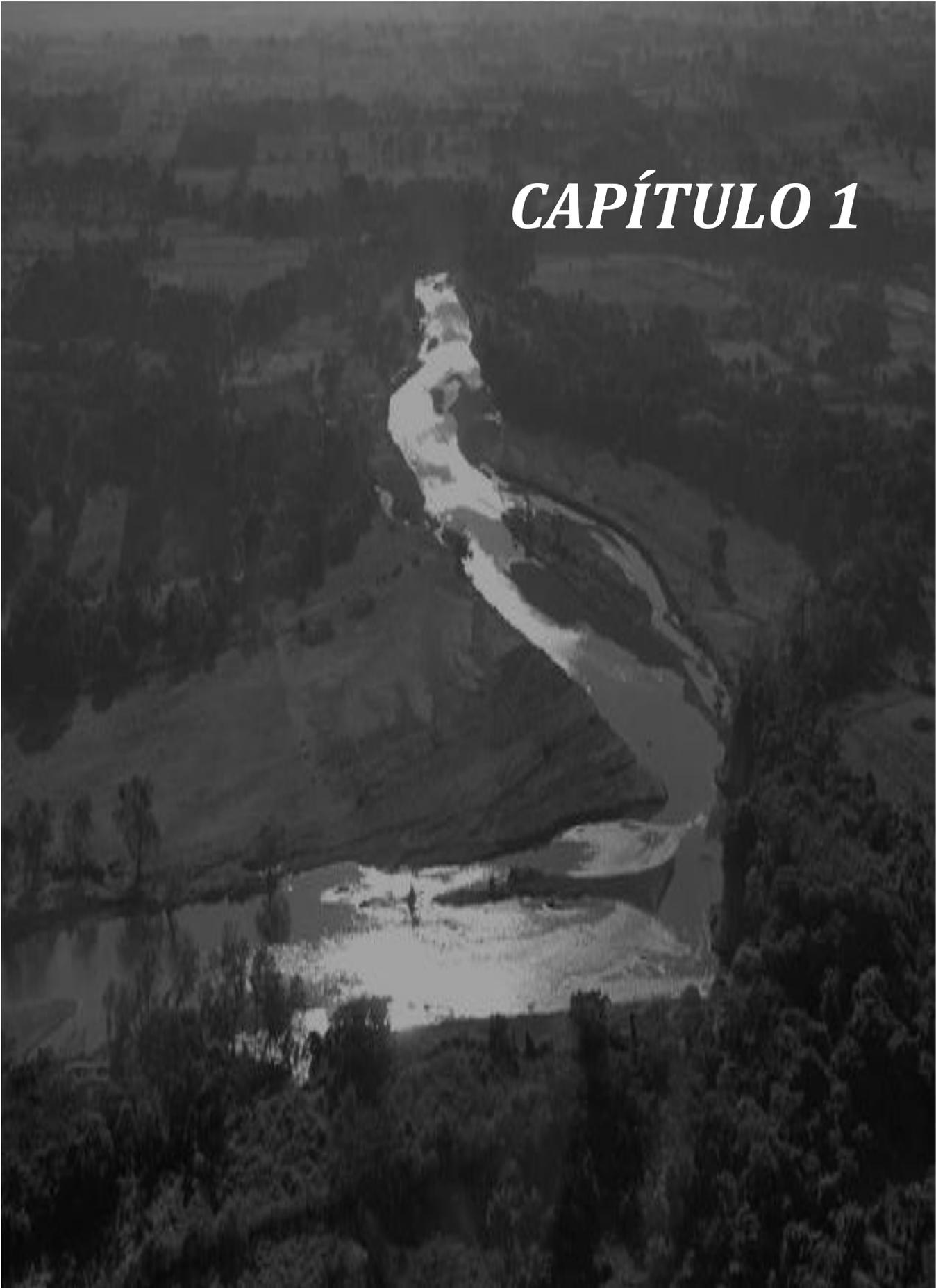
**B.1 SOLUCIÓN DEL CAMPO DE FLUJO.....83**

<b><i>B.1.1 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.....</i></b>	<b><i>84</i></b>
<b><i>B.2 MÉTODO SIMPLE.....</i></b>	<b><i>85</i></b>
<b><i>B.2.1 RELAJACIÓN PARA LA PRESIÓN.....</i></b>	<b><i>88</i></b>
<b><i>B.2.2 SECUENCIA DE PASOS DEL MÉTODO SIMPLE.....</i></b>	<b><i>88</i></b>

## ***APENDICE C***

<b><i>C.0 ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN.....</i></b>	<b><i>90</i></b>
<b><i>C.1 ESQUEMA LINEAL O CENTRADO.....</i></b>	<b><i>91</i></b>
<b><i>C.2 ESQUEMA UPWIND.....</i></b>	<b><i>92</i></b>
<b><i>C.2 ESQUEMA HIBRIDO.....</i></b>	<b><i>93</i></b>
<b><i>C.2 ESQUEMA EXPONENCIAL.....</i></b>	<b><i>94</i></b>
<b><i>C.4 PROPIEDADES DE LOS ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN.....</i></b>	<b><i>95</i></b>
<b><i>C.4.1 CONSERVATIVO.....</i></b>	<b><i>96</i></b>
<b><i>C.4.2 ACOTADO.....</i></b>	<b><i>96</i></b>
<b><i>C.4.3 TRANSPORTIVIDAD.....</i></b>	<b><i>97</i></b>



An aerial photograph of a river meandering through a dense, dark forest. The river is light-colored, likely due to sediment or sandbars, and forms a large, irregular loop in the center of the frame. The surrounding forest is thick and covers the entire landscape. The overall tone is dark and moody.

# *CAPÍTULO 1*

## ***1.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 1***

En este capítulo se presenta el objetivo de la Tesis, se introduce a la problemática y se muestran las alternativas numéricas disponibles para tratar el problema.

### ***1.1 OBJETIVO***

Este trabajo tiene como objetivo simular mediante un modelo numérico la distribución del flujo en la bifurcación de Mezcalapa, formada por los ríos Samaría y Carrizal, con la intención de conocer la distribución de flujo que es captada por cada brazo.

La hidrodinámica se modela a partir de resolver las ecuaciones de transporte de conservación de cantidad de movimiento y masa promediadas en el tiempo (promedio de Reynolds), por medio del método de volúmenes finitos. El sistema se cierra vía un modelo de turbulencia. El modelo utilizado fue el modelo k- $\epsilon$  estándar.

### ***1.2 INTRODUCCIÓN***

El constante crecimiento demográfico y la necesidad de ofrecer a la población un lugar donde sea capaz de llevar acabo sus actividades cotidianas han propiciado el crecimiento de centros habitacionales e industriales en zonas poco adecuadas para el desarrollo de trabajo y vida seguros. De esta manera la situación geográfica de un lugar puede beneficiar o perjudicar la calidad de vida de sus habitantes.

En el caso de Tabasco, estado perteneciente a la república Mexicana y situado en el sureste del país, las precipitaciones extraordinarias de los últimos años han ocasionado inundaciones y en consecuencia pérdidas económicas importantes.

Con una superficie de 24 578 km<sup>2</sup>, el estado se encuentra rodeado por ríos y se estima que la descarga anual de éstos hacia al Golfo de México es de aproximadamente 125 millones de metros cúbicos de agua, cifra que representa 35% de escurrimiento total del país. Parte importante de esta agua es proveniente de los ríos Grijalva y Usumacinta, los cuales recorren el 41.45%, el 29.24% de su superficie respectivamente [1].

El Grijalva y el Usumacinta son considerados ríos maduros, debido a que se encuentran en la zona más baja de su caudal y la planicie por la que corren les permite tener corrientes anchas y lentas, caracterizadas por meandros y divisiones en varios brazos.

El Río Grijalva es alimentado por el afluente del río Carrizal, el cual a su vez es un brazo muy delgado del Mezcalapa, el cual también alimenta al río Samaría. La formación de esta bifurcación puede observarse en la figura 1.1.



*Figura 1.1 Fotografía de la bifurcación del río Mezcalapa.*

En los últimos años, el funcionamiento hidráulico de esta bifurcación se ha modificado, con lo cual la distribución del flujo ha provocado que el afluente conducido por el río Carrizal sobrepase sus márgenes, inundando la parte norte de la ciudad de Villahermosa.

Con la intención de contrarrestar los efectos de las inundaciones se ha desarrollado el Plan hídrico integral de Tabasco (PHIT). Esta estrategia, propuesta por el Gobierno Federal, que contempla realizar trabajos de previsión, prevención y mitigación, que lleven a la recuperación y reconstrucción de la zona y que garanticen el funcionamiento y seguridad de los sectores productivos de la entidad [2].

Uno de los objetivos específicos del PHIT consiste en lograr un manejo integral de las cuencas de los ríos Grijalva, Samaria, Carrizal, La Sierra, Pichucalco y Usumacinta. Para lograrlo la Comisión nacional del agua (CONAGUA) en trabajo conjunto con el Instituto

de Ingeniería de la UNAM, han realizado pruebas a modelos a escala que sean capaces de reproducir el fenómeno y garanticen el funcionamiento de las obras hidráulicas que se pretenden construir.

El modelo físico debe poder reproducir los fenómenos, mediante un escenario físico simplificado, sin embargo el desarrollo y estudio experimental de un modelo de estas características requiere materiales que sean capaces de igualar las condiciones reales, situación que puede alargar el tiempo y los costos de construcción.

Debido a esta petición es, que junto al modelo físico construido por el Instituto de Ingeniería de la UNAM, se ha propuesto realizar un estudio mediante técnicas modernas de simulación numérica, que complementen los resultados obtenidos [3].

El estudio está sustentado por una técnica moderna de simulación numérica denominada por sus siglas en inglés CFD (Computational Fluids Dynamics) o dinámica de fluidos computacional (DFC), la cual fue desarrollada por ingenieros y matemáticos hace 40 años, con el propósito de resolver problemas de transferencia de masa y de calor en la aeronáutica, en vehículos aerodinámicos, en ingeniería química, ventilación, así como diseños industriales.

En recientes años la mecánica de fluidos computacional se ha convertido en una alternativa y herramienta suplementaria a los métodos tradicionales en las investigaciones sistemáticas de diversos controles en la morfología de ríos, estructura del flujo y transporte de sedimentos, jugando de esta forma un papel importante en la gestión de ríos y en la predicción de inundaciones [4].

La bibliografía en este tema es amplia y los trabajos realizados para simular el comportamiento del flujo en un río son variados, algunos ejemplos son los casos planteados por Martin and Gorelick [5], Dongdong Jia y Xuejun Shao [6], Alfrink y Rijin [7] y Gibson y Rodi [8].

El mayor problema que se presenta al realizar una simulación de flujo en un río es la adecuada representación de la topografía ya que de esto dependen las características del flujo superficial. Recientemente se han planteado algunos modelos conocidos como boundary-fitted mesh, en los cuales se transforman las ecuaciones del flujo en su forma

cartesiana a coordenadas curvilíneas, por ejemplo Zhang et al [9], presentan un modelo tridimensional para calcular el flujo en canales con meandros y ríos, adoptando en el plano horizontal un sistema BFC en coordenadas curvilíneas y en el plano vertical una otra transformación de coordenadas para simular la superficie libre y la batimetría. Por otro lado el caso planteado por el de Demuren[10] et al, ya que reporta en su estudio el flujo a través de ríos, resolviendo por completo las ecuaciones de Navier-Stokes, discretizando su dominio computacional en mallas BFC a través de volúmenes finitos y usando el modelo de turbulencia K-E o también el trabajo realizado por Ambrosi[11] el cual describe la simulación numérica del delta río Po utilizando elementos finitos para simular, pero restringiendo su estudio a un análisis bidimensional. Los estudios más recientes estudios como el de Sinha et al[12], presentan un modelo más complejo que permite simular el flujo a través de un río representando el lecho e islas utilizando de igual manera la técnica boundary-fitted mesh para un modelo de 4 km del río Columbia. A pesar de esfuerzos realizados cabe mencionar que el tratamiento de esta clase de técnicas no es trivial y se requiere de cierta experiencia matemática.

Como alternativa a los métodos BFC, se ha propuesto utilizar el método Cut-Cell desarrollado por Ingram et al [13] con la intención de utilizar mallas cartesianas en geometrías complejas y facilitar la convergencia del método. Esta técnica discretiza el dominio computacional y genera tres tipos de celdas, celdas sólidas, celdas parcialmente sólidas y celdas de flujo. Algunos trabajos ya han presentado simulaciones de flujo en ríos utilizando esta técnica, pero limitados a dos dimensiones. Las simulaciones del flujo en ríos reportadas más recientemente son han sido las de Causon et al [14].

Cabe señalar que el flujo en la corriente de un río es muy complejo debido a los efectos de las topografías irregulares en los flujos de los ríos naturales. Además considerando las grandes dimensiones que esto implica, el modelado de los ríos naturales ha sido muy exigente. No obstante con un modelo numérico y condiciones de frontera que proporcionen la representación adecuada del flujo del río estudiado, las simulaciones con CFD pueden aportar considerables ideas y dejar claras las explicaciones que se miden a partir de prácticas de campo y mediciones de laboratorio.

Conocida esta técnica y con la intención de lograr una adecuada predicción del de la distribución del flujo en la bifurcación del Mezcalapa, se ha decidido realizar para este trabajo la simulación numérica del comportamiento de la distribución del flujo en esta zona.

### ***1.3 ALTERNATIVAS UTILIZADAS EN LOS MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZANDO LA DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL***

El incremento en la capacidad de procesamiento de los actuales equipos de cómputo han permitido realizar estudios completos del movimiento de un fluido viscoso en tres dimensiones, mediante la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, éstas constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sin solución analítica. Cuando se desea resolver numéricamente estas ecuaciones se pueden aplicar distintos enfoques.

El primero y más ambicioso consiste en la simulación numérica directa (*Direct Numerical Simulation*) que resuelve todos los movimientos del fluido. Esto obliga al empleo de un tamaño de malla tan fino al menos como los menores remolinos presentes, lo que puede llevar, en un problema de tamaño medio, a un número de nodos de cálculo del orden de  $10^9$ . Por otra parte la frecuencia de los sucesos más rápidos puede ser de unos  $10\text{ kHz}$ : lo que impone un paso temporal no mayor de  $100\text{s}$  para tratarlo adecuadamente. Estas exigencias hacen de hecho inabordable la aplicación del DNS en los casos de interés práctico.

Un segundo enfoque, menos costoso, consiste en simular únicamente los remolinos grandes (*Large Eddy Simulation*) modelando el efecto de los de menor dimensión, que no pueden ser resueltos con una determinada malla.

El proceso puede describirse como un filtrado de las ecuaciones, tras el cual el campo de velocidades contiene solo las componentes de mayor tamaño. Este proceso introduce unos términos de tensión que representan la interacción entre ambas escalas de movimiento y tienen un efecto disipativo.

En las aplicaciones ingenieriles, generalmente, no se requiere conocer todos los detalles de un flujo, sino solo algunas propiedades: el caudal que circula por un canal, la distribución de velocidades en una sección en un determinado volumen. Para estos casos existe una tercera aproximación mucho menos costosa que las anteriores y que produce resultados suficientemente ajustados a los requerimientos de precisión: son las ecuaciones de Reynolds, que se obtienen mediante el promedio temporal de las de Navier-Stokes (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*). La aproximación RANS ha sido la elegida para el presente trabajo. El promedio temporal de las variables genera términos de tensión, conocidos como esfuerzos de Reynolds. El cálculo de estas tensiones puede realizarse mediante la estimación de una viscosidad turbulenta, para lo que se necesita un modelo de turbulencia. Los modelos de turbulencia propuestos para este tipo de problemas se presentan más adelante.

Debido a las características de la DNS y LES, se ha decidido que la opción más viable para el estudio del fenómeno a tratar es la alternativa RANS. Esta es usada en el código numérico de Dinámica de Fluidos Computacionales, PHOENICS (Parabolic Hyperbolic or Elliptic Numerical Integration Code Series), el cual es utilizado para la simulación del sistema a resolver en esta tesis.

#### **1.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS**

En el capítulo 1 se ha dado una introducción, con la intención de mostrar al lector en el problema planteado, además de los posibles enfoques existentes para abordar y tratar numéricamente el movimiento del fluido en el río.

El capítulo 2 explicará el fenómeno que se desea simular numéricamente y la diferencia existente entre los modelos físicos y matemáticos.

En el siguiente capítulo se introducirán y explicarán las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento, así como el promediado de las ecuaciones, que rigen el comportamiento de este fenómeno.

El capítulo 4 describirá la aplicación del método de los volúmenes finitos para la obtención del modelo hidrodinámico, además de explicarse el modelo de turbulencia elegido.

El capítulo 5 mostrará los resultados proporcionados por las simulaciones numéricas.

En el último capítulo se expondrán las conclusiones y futuros desarrollos.

# *CAPÍTULO 2*



## 2.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 2

En este capítulo se explicarán la característica física del fenómeno que se desea simular, la diferencia existente entre los modelos físicos y matemáticos y las características del modelo de la bifurcación del río Mezcalapa.

### 2.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS CANALES ABIERTOS

Antes de hacer referencia y enunciar las diferencias existentes entre los modelos físicos y los modelos numéricos, es importante hacer una pausa y describir primeramente el fenómeno que se desea modelar. Este análisis ayudará a entender e identificar los factores de mayor importancia que le dan su carácter único, con lo cual se podrán especificar las condiciones con las cuales el fenómeno puede ser reproducido por los modelos.

La característica principal que diferencia el flujo en un canal abierto del flujo en un ducto cerrado es que en el canal existe una superficie libre, ésta encuentra a una presión constante. Por ejemplo, la presión sobre la superficie del agua en un río se encuentra sometida a la presión atmosférica y esta presión es constante a lo largo del río. Esta característica implica que el movimiento del fluido se origina a causa del peso del mismo (fuerza gravitatoria) y no la existencia de una diferencia de presiones, como ocurre en el caso de un ducto cerrado. La distribución de presiones en un canal abierto es por lo general hidrostática, es decir, depende sólo de la profundidad del fluido. Las otras fuerzas de importancia en el estudio de canales abiertos, son la fuerza de inercia y la fuerza originada por la fricción.

Las características usadas para clasificar un flujo como laminar o turbulento se abordarán a detalle más adelante. Por el momento se dará una breve explicación sobre la clasificación de los flujos en canales abiertos de acuerdo a la forma en que varía su profundidad ( $y$ ) a lo largo del canal ( $x$ ).

Un flujo es uniforme si la profundidad del flujo no varía a lo largo del canal, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots 2.1$$

y se considera no-uniforme si la profundidad varía a lo largo del canal, es decir:

$$\frac{dy}{dx} \neq 0 \dots\dots\dots 2.2$$

De igual forma los flujos no uniformes se dividen además en flujos que varían rápidamente:

$$\frac{dy}{dx} \approx 1 \dots\dots\dots 2.3$$

Y para los flujos que varían lenta o gradualmente:

$$\frac{dy}{dx} \ll 1 \dots\dots\dots 2.4$$

Una característica más importante de la superficie libre es que esta se puede deformar. Esta deformación forma ondas superficiales que viajan sobre ésta a una velocidad que depende tanto de propiedades de la onda, como su amplitud y longitud, así como de características del canal como la profundidad, velocidad del flujo. El carácter del flujo depende de la velocidad del flujo relativo a la velocidad de desplazamiento de una onda de superficie. El número adimensional que describe este comportamiento, y por lo tanto caracteriza este tipo de flujo, es el número de Froude, que se define como:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gl}} \dots\dots\dots 2.5$$

donde  $l$  es la longitud característica del flujo.

El número de Froude es la razón entre la velocidad del flujo y la velocidad de propagación de una onda sobre la superficie del flujo.

Ahora bien, en un flujo donde  $Fr < 1$  se denomina subcrítico o lento. Si  $Fr = 1$  el flujo se llama crítico y si  $Fr > 1$  el flujo se dice supercrítico o rápido [16].

## ***2.2 GENERALIDADES (MODELOS REALES Y MODELOS MATEMÁTICOS)***

Como se ha mencionado muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza y dentro del campo de la hidráulica son tan complejos que no es fácil tratarlos mediante un solo método, por lo que ha sido necesario emplear tanto técnicas experimentales como modelos matemáticos en la obtención de soluciones prácticas aplicadas a problemas de ingeniería.

En hidráulica el término modelo corresponde a un sistema que simula un objeto real llamado prototipo al reunir las características y la información de la física del problema, éstos son empleados en el diseño y operación de obras de ingeniería, por ejemplo la propagación de oleaje, acción de mareas, funcionamiento de estuarios, erosión y sedimentación de causas, control de avenidas, obras de toma, carcamos de bombeo, vertedores, conducción de agua presión, difusión térmica y desechos.

Así, un modelo físico es una representación de un prototipo pero a escala reducida, el cual debe cumplir con las condiciones físicas necesarias para que sea capaz de simular el fenómeno en estudio.

Por otro lado los métodos matemáticos, plantean soluciones con modelos matemáticos que deben cumplir las reglas matemáticas y las condiciones de frontera adecuadas que simulen en comportamiento real.

Ahora bien, el empleo de un modelo hidráulico, ya sea experimental o numérico, implica establecer un programa definido de investigación sobre todas las variables que intervienen, en forma particular o en grupo. Lo anterior, se hace para determinar las leyes de relación entre las diferentes variables que extrapoladas al prototipo, permitan optimizar la eficiencia de cada uno de los elementos del sistema modelo-prototipo.

La aplicación de cualquiera de los dos tipos de modelos, físicos o matemáticos, evidentemente tienen sus limitaciones, mismas que van a depender de la complejidad del problema en la intervención de las variables y sus fronteras a tratar. Sin embargo es cada vez más interesante el uso combinado de los dos en la hidráulica, ya que uno puede proporcionar mejor información que el otro en zonas específicas de la región a estudiar.

### 2.2.1 LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Se ha mencionado con anterioridad que el objetivo de este trabajo es realizar un modelo matemático que simule el comportamiento de la distribución del flujo en la bifurcación del Mezcalapa, por tal motivo es conveniente dejar claros aspectos importantes que garantizan el correcto desempeño de un modelo numérico.

El conjunto de hipótesis y relaciones de las variables que describen un fenómeno, constituyen un modelo matemático, que conduce a un problema matemático que es necesario resolver mediante apropiadas técnicas matemáticas.

En la mayoría de los casos las ecuaciones que rigen los fenómenos físicos a considerar no pueden resolverse analíticamente, por lo que es necesario emplear métodos aproximados mediante un proceso de computación, siendo lo más utilizados elementos finitos, diferencias finitas o volúmenes finitos.

En este trabajo se utilizará el método de los volúmenes finitos, éste se explicará en el capítulo 4. Este método sustituye los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que rigen el fenómeno en estudio, por sistemas de ecuaciones de diferencias (algebraicas), proporcionando valores en los puntos de la malla mediante la solución de métodos explícitos o implícitos [17].

La precisión de los modelos matemáticos está íntimamente ligada a su costo de explotación, por lo que deben tomarse en cuenta los siguientes factores:

- a) Exactitud en los datos iniciales: Tomar en cuenta la discontinuidad de los datos y la magnitud de error en los mismos.
- b) Tipo de fenómeno a estudiar: Dependiendo del fenómeno y su importancia, dependerá su precisión.
- c) Exactitud de las ecuaciones que rigen el fenómeno: Las ecuaciones diferenciales, mediante las que se ha formulado el modelo, pueden determinar un límite en la exactitud con que se podrá describir el fenómeno. Esto puede ser ocasionado por las

hipótesis introducidas para simplificar o bien, por construir ellas mismas una simple aproximación al no considerar ciertas variables.

- d) Forma de aproximar las ecuaciones: Partiendo de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se aproximan mediante un sistema de ecuaciones en diferencias con los consiguientes errores de truncamiento, la exactitud puede ser afectada.
- e) Evolución del modelo: Durante el proceso de cálculo, al cambiar el modelo en el espacio y en el tiempo, puede ocurrir que los errores que producen se vayan transmitiendo o acumulando, con lo cual la precisión obtenida del modelo puede verse limitada

Por último, hay tres conceptos importantes referentes a los modelos matemáticos que hay que revisar, la consistencia, la estabilidad y la convergencia de un modelo. Un modelo es consistente cuando al tender a cero el tamaño de la malla y el intervalo de tiempo, la ecuaciones en diferencias finitas dan las mismas soluciones que las ecuaciones diferenciales; es estable si las soluciones obtenidas al hacer variar los parámetros de que depende el modelo permanecen acotadas; y , que es convergente cuando el modelo es a la vez consistente y estable.

### ***2.3 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO MATEMÁTICO DE LA BIFURCACIÓN DEL RÍO MEZCALAPA***

Una vez en claro la base teórica de este trabajo, es posible mencionar las consideraciones con las que se realizó el modelo matemático de la bifurcación del río Mezcalapa.

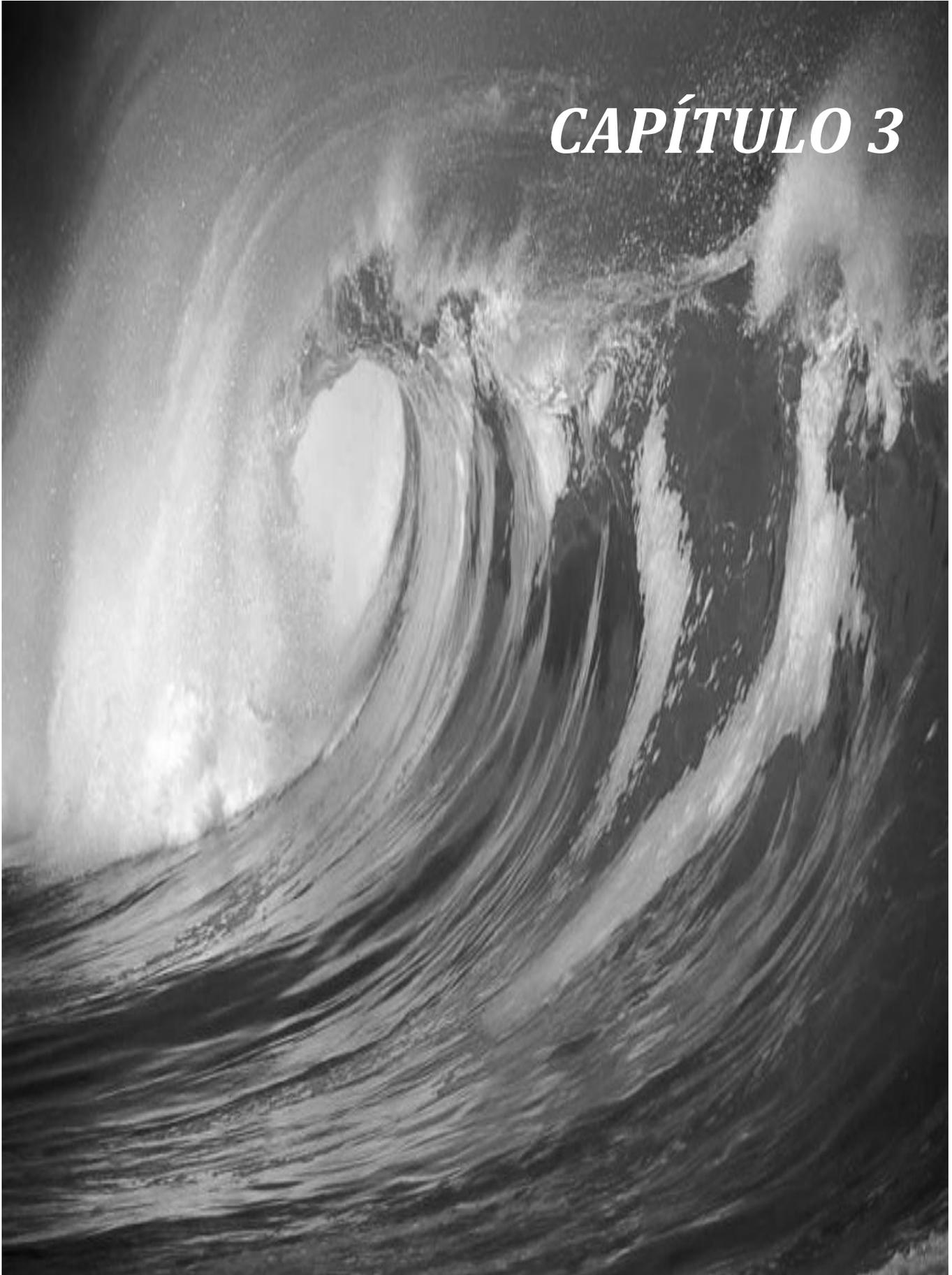
El flujo en la bifurcación del río Mezcalapa se comporta como un flujo en superficie libre, por lo tanto la fuerza que mueve el fluido es la gravedad, además existe una interacción existente entre el aire y el agua la cual se modifica en el espacio y el tiempo debido a la batimetría de la zona.

Se utilizó un dominio computacional tridimensional discretizado mediante el método de los volúmenes finitos con una malla estructurada. El dominio computacional tiene tres tipos de celdas las cuales se trataron mediante el método de la celda cortada.

Para considerar el tratamiento de la superficie libre se utilizó el método SEM, para el cual se mencionará más adelante su funcionamiento.

Para la resolver las ecuaciones se utilizó la alternativa RANS y como modelo de turbulencia el  $k$ - $\epsilon$ .

# CAPÍTULO 3



### 3.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 3

En este capítulo se presentarán las ecuaciones de transporte que caracterizan la hidrodinámica de flujo. Posteriormente se realizará el promediado de Reynolds para la ecuación general de transporte y se explicará el modelo de turbulencia utilizado.

#### 3.1 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA

El principio de conservación de masa es uno de los principios fundamentales de la naturaleza y expresa que la masa se mantiene constante durante un proceso.

La conservación de masa para un flujo incompresible se expresa matemáticamente, en un sistema cartesiano, mediante la ecuación de continuidad enunciada en su forma diferencial se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots 3.1$$

Dónde:  $u, v, w$  las velocidades, en las tres direcciones [18].

#### 3.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO (ECUACIONES DE NAVIER-STOKES)

El producto de la masa y la velocidad del cuerpo se conocen como momento lineal o cantidad de movimiento del cuerpo. La segunda ley de Newton afirma que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa, y que la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre ese cuerpo. Por tanto, la cantidad de movimiento de un sistema permanece constante cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero y donde se conserva la cantidad de movimiento del sistema [18].

Así conservación de cantidad de movimiento se expresa matemáticamente a través de las ecuaciones de Navier-Stokes:

Donde la dirección “x” de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots 3.2$$

la dirección “y” de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots 3.3$$

y la dirección “z” de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible:

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots 3.4$$

### 3.3 ECUACIÓN GENERAL DE TRANSPORTE

Las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento antes presentadas pueden ser representadas por la ecuación general de transporte, ec.3.5.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma\text{grad}(\phi)) + S_\phi \dots\dots\dots 3.5$$

dónde:

- $\phi$  es la variable del flujo.
- $\rho$  es la densidad.
- $\mathbf{u}$  es el campo vectorial de velocidades.
- $\Gamma$  es el coeficiente de difusión.
- $S_\phi$  representa el resto de términos que aparecen en la ecuación. A  $S_\phi$  se le llama término fuente.

Esta ecuación se puede leer como: incremento de  $\phi$  en un elemento de fluido en el tiempo + flujo de  $\phi$  en el elemento de fluido = incremento de  $\phi$  debido a difusión + incremento de  $\phi$  debido a fuentes.

Tanto la ecuación de conservación de masa, como las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones de transporte, por tal motivo se presenta a continuación la ecuación general,

para la cual, más adelante, realizaremos los promedios de Reynolds y de esta manera generalizar el promediado de la ecuaciones.

### 3.4 FLUJO TURBULENTO

Antes de continuar y realizar los promediados es necesario explicar su razón.

El problema más importante al que debe enfrentarse la simulación numérica del flujo en un río es el modelado de la turbulencia. Existen diferentes maneras de modelarla, sin embargo en este capítulo solo se dará una breve explicación de la turbulencia, como es que se puede modelar y el modelo elegido para la simulación del río Mezcalapa.

Ahora bien la importancia de las fuerzas de inercia con respecto a las viscosas en un determinado flujo está dada por el número adimensional de Reynolds y se calcula como cociente entre ambas fuerzas.

Como se observa en la ecuación 3.6, las tensiones viscosas dependen de la variación respecto al tiempo de la deformación angular de los elementos de fluido, lo cual se expresa en su forma elemental como:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots 3.6$$

Siendo “u” la velocidad del fluido, “y” la distancia en la dirección perpendicular al movimiento y  $\mu$  la viscosidad dinámica, constante para cada fluido a una determinada temperatura.

Ahora bien, dado que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots 3.7$$

Y por otro lado las fuerzas de inercia en una dimensión se pueden expresar como:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \dots\dots\dots 3.8$$

Entonces el número de Reynolds se expresa matemáticamente como:

$$Re = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \dots\dots\dots 3.9$$

En la formula anterior, las derivadas espaciales de  $u$  en el numerador y denominador tienen dimensiones de  $V/L$  y  $V/L^2$  respectivamente, de donde se obtiene la expresión para el Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L^2} = \frac{VL}{\nu} \dots\dots\dots 3.10$$

Donde  $V$  y  $L$  son la velocidad y longitud características del flujo en cuestión y  $\nu$ , es el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad, se conoce como viscosidad cinemática. Se observa experimentalmente que para valores inferiores al llamado número de Reynolds crítico las capas adyacentes de fluido deslizan unas sobre otras de modo ordenado, lo cual constituye el régimen laminar.

Para valores de  $Re$  superiores al crítico el comportamiento del flujo cambia, tornándose aleatorio y caótico. El movimiento se vuelve no permanente, incluso con condiciones de contorno constantes. Es lo que se denomina régimen turbulento [16].

El número de Reynolds crítico no está exactamente determinado. Reynolds obtuvo los números 2000 y 12000 como valores inferior y superior respectivamente en el caso de tuberías, tomando como  $L$  el diámetro y como  $V$

la velocidad media. Para tuberías suele considerarse que el flujo es laminar por debajo de 2000, con una zona de transición entre 2000 y 4000. Para flujos en superficie libre, se utiliza el radio hidráulico como longitud característica por lo que los valores críticos resultan menores: laminar por debajo de 500 y turbulento por encima de 2000.

La naturaleza aleatoria del flujo turbulento y la elevada frecuencia con la que varían las diversas magnitudes dificulta enormemente en la práctica los cálculos basados en una descripción completa del movimiento de todas las partículas del fluido [19].

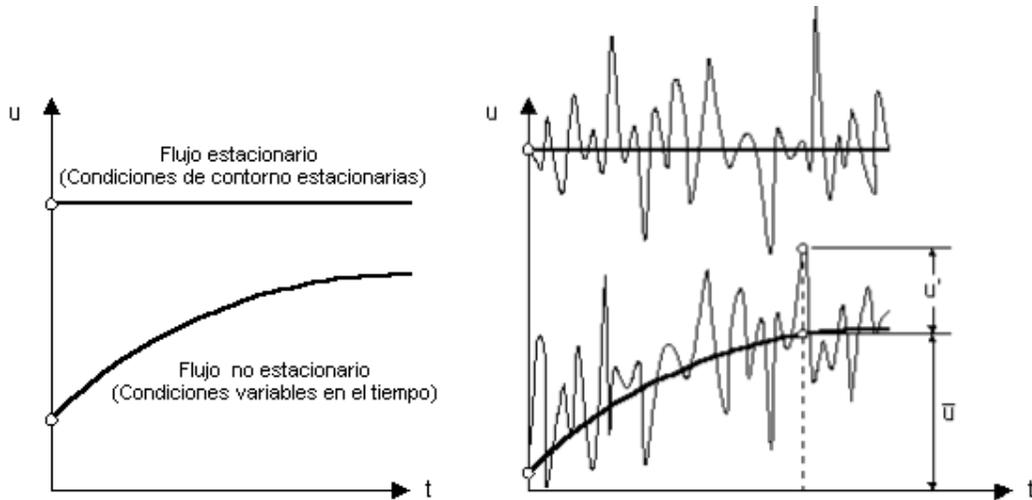


Figura 3.1. Las componentes de la velocidad  $u, v, w$  y la presión se descomponen en una magnitud que es la suma de su valor promedio turbulento y su fluctuación turbulenta .

Así entonces  $u, v, w$ , son las componentes de la velocidad y  $p$  la presión se pueden descomponer en una magnitud (por ejemplo la primera componente de la velocidad  $u$ ) que es la suma de su valor promedio turbulento y su fluctuación turbulenta  $u'$ , así un flujo turbulento se caracteriza por los valores promedio  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  y  $\bar{p}$  de las propiedades mas sus fluctuaciones  $u', v', w'$  y  $p'$ .

Entonces los valores instantáneos de las propiedades se pueden expresar como:

$$u = \bar{u} + u' \dots\dots\dots 3.11$$

$$v = \bar{v} + v' \dots\dots\dots 3.12$$

$$w = \bar{w} + w' \dots\dots\dots 3.13$$

3

$$p = \bar{p} + p' \dots\dots\dots 3.14$$

Si se logra visualizar un flujo turbulento se encuentran porciones de fluido en rotación, a los que se le denomina remolinos turbulentos. Estos presentan un amplio espectro de

tamaños siendo los remolinos mayores comparables a las dimensiones del dominio. Las fuerzas de inercia predominan en los remolinos de mayor tamaño, mientras que su efecto es despreciable frente al de las fuerzas viscosas en los más pequeños.

Ahora bien la energía necesaria para mantener el movimiento de los remolinos de mayor tamaño procede del flujo medio, por esta razón su descomposición en la suma del promedio y la fluctuación. Por otra parte, los remolinos menores obtienen energía principalmente de otros mayores y más débilmente del flujo medio. De esta manera la energía cinética se va transmitiendo a remolinos cada vez más pequeños, a través de un proceso en cascada, hasta que es disipada por las fuerzas viscosas. Esta disipación produce las pérdidas de energía adicionales relacionadas con los flujos turbulentos.

Los remolinos de mayor tamaño tienen un comportamiento altamente anisótropo y dependiente del flujo medio, debido a su fuerte interacción con éste. Sin embargo, durante el proceso en cascada, la acción difusiva de la viscosidad va disminuyendo esta direccionalidad por lo que, para números de Reynolds suficientemente altos, el comportamiento de los remolinos más pequeños puede considerarse isótropo.

### ***3.5 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES***

Hasta este momento se han presentado las ecuaciones de transporte de conservación de masa y cantidad de movimiento, así como la ecuación general de transporte, además se ha hecho referencia al carácter turbulento del flujo. A continuación se mostrará el promediado de las ecuaciones y se utilizará la ecuación general para ejemplificar [19].

Antes de continuar es necesario dejar en claro las reglas de los promediados de tal manera que sea más clara la explicación.

#### ***3.5.1 REGLAS DE LOS PROMEDIADOS***

Para mostrar las reglas de los promediados se supondrán dos propiedades escalares  $\Phi$ ,  $\Psi$  y la magnitud vectorial “a”, que de igual manera se va a descomponer en su valor promedio más su fluctuación:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \dots\dots\dots 3.15$$

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \dots\dots\dots 3.16$$

Ahora bien teniendo en cuenta que el promediado es una operación de integración resulta que:

$$\bar{\phi}' = \overline{(\phi - \bar{\phi})} = \bar{\phi} - \bar{\phi} = 0 \dots\dots\dots 3.17$$

También es posible hallar las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \dots\dots\dots 3.18$$

$$\int \overline{\phi ds} = \int \bar{\phi} ds \dots\dots\dots 3.19$$

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi} \dots\dots\dots 3.20$$

$$\overline{\phi \psi} = \bar{\phi} \bar{\psi} + \overline{\phi' \psi'} \dots\dots\dots 3.21$$

Y en caso de una magnitud vectorial y una escalar , por ejemplo  $\Phi$  y  $a$ , se tiene que:

$$\overline{\phi a} = \bar{\phi} \bar{a} + \overline{\phi' a'} \dots\dots\dots 3.22$$

Ahora bien considerando que las operaciones divergencia y gradiente se reducen a la derivación y que el operador Laplaciano equivale a la divergencia del gradiente

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \bullet \nabla \dots\dots\dots 3.23$$

Se tiene que:

$$\overline{\nabla \bullet a} = \nabla \bullet \bar{a} \dots\dots\dots 3.24$$

$$\overline{\nabla \phi} = \nabla \bar{\phi} \dots\dots\dots 3.25$$

$$\overline{\nabla \cdot \phi a} = \nabla \cdot \overline{\phi a} = \nabla \cdot \overline{\phi} \bar{a} + \nabla \cdot \overline{\phi' a'} \dots\dots\dots 3.26$$

$$\overline{\Delta \phi} = \overline{\nabla \cdot \nabla \phi} = \nabla \cdot \overline{\nabla \phi} = \nabla \cdot \nabla \bar{\phi} = \Delta \bar{\phi} \dots\dots\dots 3.27$$

### 3.6 PROMEDIADO DE LA ECUACIÓN GENERAL

A continuación se mostrará el promediado de la ecuación general de transporte en cada término para generalizar el método.

#### 3.6.1 PROMEDIADO TÉRMINO TEMPORAL

El término temporal es:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \dots\dots\dots 3.28$$

Sustituyendo la ecuación 3.15 en 3.28 y promediando tenemos que:

$$\frac{\partial(\rho(\bar{\phi} + \phi'))}{\partial t} \dots\dots\dots 3.29$$

Aplicando la 3.17 tenemos que:

$$\frac{\partial(\rho\bar{\phi})}{\partial t} \dots\dots\dots 3.30$$

Siendo éste el término temporal promediado.

#### 3.6.2 PROMEDIADO TÉRMINO DIFUSIVO

El término difusivo es:

$$div(\Gamma grad(\phi)) \dots\dots\dots 3.31$$

Sustituyendo la ecuación a 3.15 en 3.31 y promediando tenemos que:

$$div(\Gamma grad(\overline{\phi} + \phi')) \dots\dots\dots 3.32$$

Aplicando la 3.17 tenemos que:

$$div(\Gamma grad(\overline{\phi})) \dots\dots\dots 3.33$$

Siendo éste el término difusivo promediado.

**3.6.3 PROMEDIADO TÉRMINO CONVECTIVO**

El término convectivo es:

$$div(\rho \phi \mathbf{u}) \dots\dots\dots 3.34$$

Sustituyendo la ecuación a 3.15 en 3.34 y promediando tenemos que:

$$div(\rho(v + v')(\overline{\phi} + \phi')) \dots\dots\dots 3.35$$

Desarrollando y promediando tenemos que:

$$div(\rho[\overline{v\phi} + \overline{v\phi'} + \overline{\phi v'} + \overline{v'\phi'}]) \dots\dots\dots 3.36$$

Aplicando la 3.17 tenemos que:

$$div(\rho[\overline{v\phi} + \overline{v'\phi'}]) \dots\dots\dots 3.37$$

Siendo éste el término convectivo promediado .

### 3.6.4 ECUACIÓN GENERAL PROMEDIADA

Así la ecuación general queda:

$$\frac{\partial \rho \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\phi} U) = \text{div}(\Gamma_{\phi} \text{grad} \bar{\phi}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u' \phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v' \phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w' \phi'})}{\partial z} \right] + S_{\phi} \dots\dots\dots 3.38$$

Como se puede observar al promediar las ecuaciones se generan términos adicionales que contienen a las fluctuaciones instantáneas y como resultado se tienen las incógnitas adicionales [19]:

$$\overline{u' \phi'}, \overline{v' \phi'}, \overline{w' \phi'}$$

### 3.7 ESFUERZOS DE REYNOLDS

Al desarrollar el promediado en las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, estas quedarían como:

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0 \dots\dots\dots 3.39$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en la componente x:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} U) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad} \bar{u}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u' u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{u' v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{u' w'})}{\partial z} \right] + S_{Mx} \dots\dots\dots 3.40$$

En la componente y:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} U) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad} \bar{v}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u' v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v' v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{v' w'})}{\partial z} \right] + S_{My} \dots\dots\dots 3.41$$

En la componente z:

$$\frac{\partial \rho \bar{w}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w} U) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad} \bar{w}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u' w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v' w'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w' w'})}{\partial z} \right] + S_{Mz} \dots\dots\dots 3.42$$

Como se puede observar al promediar han aparecido productos cruzados de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad por la densidad, los cuales tienen unidades de fuerza / superficie, éstos originan el Tensor de esfuerzos de Reynolds, mostrado a continuación:

$$\tau_{ij} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 3.43$$

Donde i, j=1,2,3.

Estas nuevas incógnitas han generado en los investigadores el interés por desarrollar y mejorar los denominados modelos de turbulencia, estos cierran el sistema de ecuaciones. A continuación se presentará el modelo de turbulencia utilizado en la simulación numérica del río Mezcalapa y en el apéndice A Se presenta un resumen sobre éstos.

**3.8 MODELO DE TURBULENCIA *k-ε***

Un modelo de turbulencia es un procedimiento para cerrar el sistema de ecuaciones antes mencionado, por esta razón existe una amplia variedad.

En el modelo de turbulencia *k-ε* los esfuerzos de Reynolds se aproximan a la tasa promedio de deformación, como se muestra a continuación:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots 3.44$$

Donde i, j=1,2,3

Boussinesq propuso en 1877 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y los esfuerzos de Reynolds:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} = \mu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots 3.45$$

Esta aproximación introduce un nuevo término, conocido como viscosidad turbulenta y se calcula como:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots 3.4$$

6

Donde k se denomina como la Energía cinética turbulenta y ε como la disipación viscosa y se calculan como:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \dots\dots\dots 3.47$$

$$\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} \dots\dots\dots 3.48$$

El modelo de turbulencia utilizado en la simulación numérica de la bifurcación del río Mezcalapa es el K- ε estándar y las ecuaciones de transporte que se resuelven para K y ε son:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad} k \right) + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \dots\dots\dots 3.49$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad} \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \dots\dots\dots 3.50$$

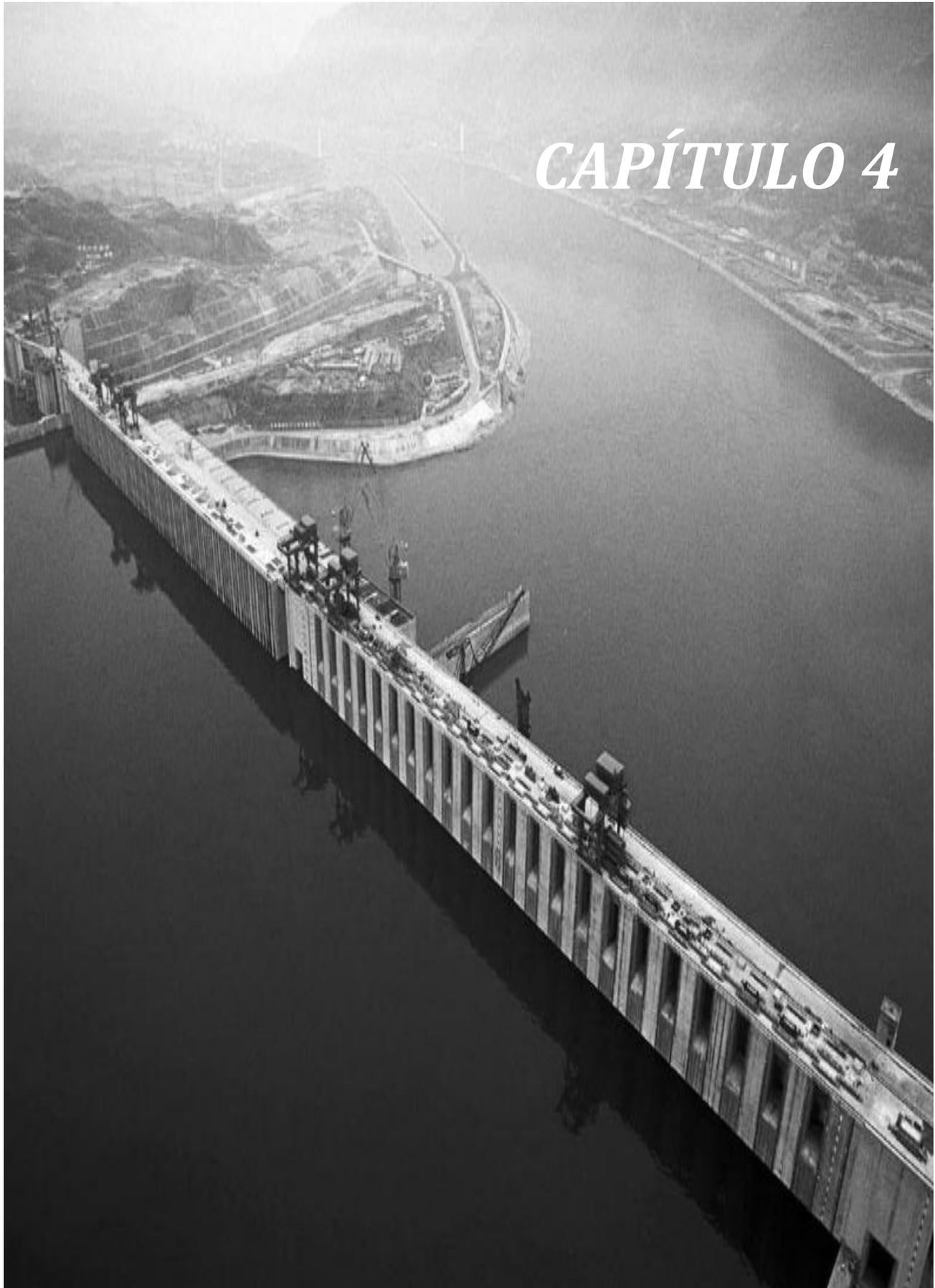
Donde el primer término de la izquierda representa, la tasa de cambio de k o ε, el segundo término equivale al transporte de k o ε por convección, el tercer término el transporte de k o

$\varepsilon$  por difusión, el cuarto representa la tasa de producción de  $k$  o  $\varepsilon$  menos la tasa de destrucción de  $k$  o  $\varepsilon$ .

Estas ecuaciones contienen 5 constantes ajustables y en el caso del modelo k-e standard tienen los siguientes valores:

$$C_{\mu} = 0.09; \sigma_k = 1.00; \sigma_{\varepsilon} = 1.30; C_{1\varepsilon} = 1.44; C_{2\varepsilon} = 1.92$$

Es conveniente mencionar que la producción o destrucción de energía cinética turbulenta están íntimamente ligadas. La tasa de disipación  $\varepsilon$  es grande donde  $k$  es grande. La ecuación modelo para  $\varepsilon$  asume que la producción o destrucción de energía es proporcional a la producción y destrucción de  $k$ . Esto implica que  $\varepsilon$  se incrementa rápidamente si  $k$  se incrementa rápidamente y decrece lo suficientemente rápido para evitar valores negativos de energía cinética turbulenta si  $k$  decrece.



## 4.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 4

En este capítulo se explicará el método de los volúmenes finitos con el cual se resolvieron las ecuaciones que caracterizan la hidrodinámica del flujo en la bifurcación del río Mezcalapa.

### 4.1 MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS

En la actualidad el método de los volúmenes finitos se ha convertido en uno de las técnicas más utilizadas en las simulaciones de tres dimensiones.

En resumen, el método de los volúmenes finitos discretiza o divide el dominio de computacional en pequeños volúmenes de control, a los cuales les es asignado un punto nodal, en éste son resueltas las ecuaciones de transporte y los valores de las propiedades en cada celda están relacionados los valores de las celdas vecinas [20] .

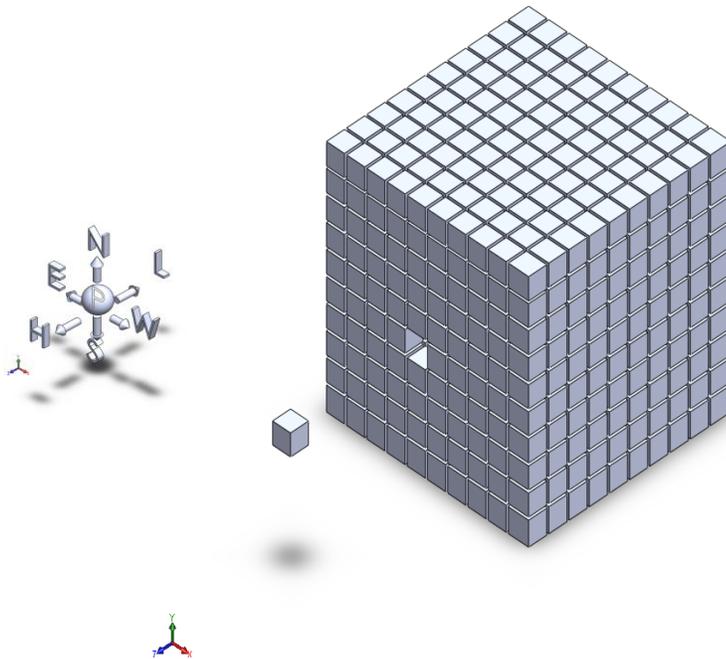


Figura 4.1. Representación del sistema discretizado y punto nodal  $P$  en el método de los volúmenes finitos.

A continuación se explicará a detalle el método de los volúmenes finitos y como fue utilizado en la simulación de la bifurcación del río Mezcalapa.

## 4.2 ECUACION DE TRANSPORTE

Las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento han sido presentadas en el capítulo anterior, al igual que la ecuación general de transporte, ec. 3.5.

El método de los volúmenes finitos se deriva de la ecuación general de transporte pero en su forma integral. Así, si integramos en un volumen de control la ecuación 3.5, tenemos que:

$$\int_{vc} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{vc} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u})dV = \int_{vc} \text{div}(\Gamma \text{grad}(\phi))dV + \int_{vc} S_{\phi} dV \dots\dots\dots 4.1$$

Ahora bien utilizando el teorema de la divergencia de Gauss para cada término, se transforman las integrales de volumen por integrales de superficie, de modo que es posible escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho\phi dV + \int_{sc} \mathbf{n} \bullet (\rho\phi\mathbf{u})dA = \int_{sc} \mathbf{n} \bullet (\Gamma \text{grad}(\phi))dA + \int_{vc} S_{\phi} dV \dots\dots\dots 4.2$$

Esta forma de la ecuación general de transporte se observa en el segundo y tercer término el flujo de  $\phi$  por convección y por difusión hacia el elemento o volumen de control.

A continuación se discretizará la ecuación general de transporte en el método de los volúmenes finitos en cada uno de sus términos y se mostrará la solución de esta.

### 4.2.1 ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN

La explicación supondrá el siguiente esquema en dos dimensiones para simplificar el desarrollo matemático, aunque éste procedimiento se puede escalar a tres dimensiones. Supongamos entonces el siguiente esquema en el nodo bajo estudio P, figura 4.1.

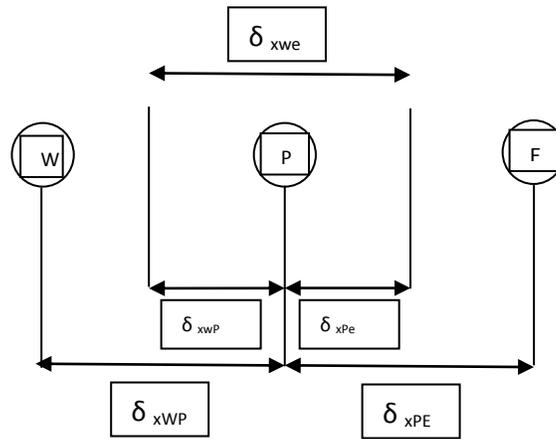


Figura 4.2. Diagrama de discretización general del dominio.

La notación W, E significa nodo al este y nodo al oeste del nodo P. Como ejemplo, plantea que, el espaciamiento entre nodos será el mismo aunque no necesariamente puede ser así. Las líneas punteadas y los subíndices en minúsculas indican las fronteras del volumen de control.

El esquema de discretización utilizado en la simulación se explica en el apéndice C.

### 4.2.2 DISCRETIZACIÓN TÉRMINO CONVECTIVO

El segundo término de la ecuación general de transporte, conocido como término convectivo, al aplicar el teorema de la divergencia y resolviendo la integral tenemos que queda como:

$$\int_{VC} \text{div}(\rho \phi \mathbf{u}) dV = \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = (\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w \dots\dots\dots 4.4$$

### 4.2.3 DISCRETIZACIÓN TÉRMINO DIFUSIVO

El tercer término de la ecuación general de transporte es el término difusivo, aplicando el teorema de la divergencia y resolviendo la integral tenemos que:

$$\int_{VC} \text{div}(\Gamma \text{grad}(\phi)) dV = \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad}(\phi)) dA = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \dots\dots\dots 4.5$$

#### 4.2.4 DISCRETIZACION TÉRMINO FUENTE

El cuarto término de la ecuación general de transporte es el término fuente y su discretización es:

$$\int_{\Delta V} S dV = \bar{S} \Delta V \dots\dots\dots 4.6$$

#### 4.2.5 DISCRETIZACIÓN TÉRMINO TEMPORAL

Dadas las condiciones del problema a resolver es necesario efectuar una integración en el tiempo las ecuaciones de transporte que modelan el comportamiento del flujo en estudio, así la ecuación general de transporte, toma la siguiente forma:

$$\int_{\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV dt + \int_{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \bullet (\rho \phi \mathbf{u}) dA dt = \int_{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \bullet (\Gamma \text{grad}(\phi)) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{VC} S_{\phi} dV dt \dots\dots\dots 4.7$$

Ahora bien realizando la integración en el tiempo y sobre el volumen de control para el primer término se tiene que:

$$\int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} dt \right] dV = (\rho_p \phi_p - \rho_T \phi_T) \Delta V_p \dots\dots\dots 4.8$$

Sustituyendo de las ecuaciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.8 en 4.7 tenemos la ecuación en una sola dimensión que:

$$(\rho_p \phi_p - \rho_T \phi_T) \Delta V_p = \int_{\Delta t} \left[ -[(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w] + \left[ \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \right] + \bar{S} \Delta V \right] dt \dots\dots\dots 4.9$$

#### 4.3 ECUACIÓN GENERAL DISCRETIZADA

Dividiendo entre  $\Delta t$  tenemos que la ecuación general discretizada puede ser escrita como:

$$\frac{(\rho_p \phi_p - \rho_T \phi_T) \Delta V_p}{\Delta t} = -[(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w] + \left[ \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \right] + \bar{S} \Delta V \dots\dots\dots 4.10$$

Desarrollando esta ecuación para el esquema upwind se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{V_p}{\Delta t}(\rho_p \phi_p - \rho_T \phi_T) + A_w \rho_p \phi_p [-u_w] - A_w \rho_w \phi_w [u_w] + A_e \rho_p \phi_p [u_e] - A_e \rho_e \phi_e [-u_e] - \\ & A_w \Gamma_w \frac{\phi_w - \phi_p}{\delta w} - A_e \Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_p}{\delta e} = V_p C (V - \phi_p) \end{aligned} \dots\dots\dots 4.11$$

Agrupando tenemos que:

$$\begin{aligned} & \phi_p \left[ \frac{V_p \rho_p}{\Delta t} + A_w \rho_p [-u_w] + A_e \rho_p [-u_e] + \frac{A_w \Gamma_w}{\delta w} + \frac{A_e \Gamma_e}{\delta e} + V_p C \right] = \\ & \phi_w \left[ A_w [-u_e] \rho_e + \frac{A_w \Gamma_w}{\delta w} \right] + \phi_e \left[ A_e [-u_e] \rho_e + \frac{A_e \Gamma_e}{\delta e} \right] + \frac{V_p}{\Delta t} \rho_T \phi_T + V_p C V \end{aligned} \dots\dots\dots 4.12$$

Quedando la ecuación algebraica como:

$$(a_p + V_p C) \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_T \phi_T + V_p C V \dots\dots\dots 4.13$$

En esta ecuación algebraica relaciona, como ya se ha mencionado, el valor de determinada propiedad con la de sus vecinos.

### 4.4 MÉTODO SIMPLE

Hasta este momento se ha obtenido la ecuación general discretizada, sin embargo para el cálculo de las velocidades, a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se tiene el inconveniente de que la presión, cuyo gradiente aparece como término fuente en estas ecuaciones de cantidad de movimiento, no tiene una ecuación propia para calcularla, ejemplo en la dirección x, ec. 4.14.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \mathbf{u}) = div(\mu grad(u)) + \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f_x\right) \dots\dots\dots 4.14$$

en su forma discretizada:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e \dots\dots\dots 4.15$$

Y la ecuación discretizada para la presión:

$$a_p p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + b \dots\dots\dots 4.16$$

Una solución ampliamente utilizada es transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión, este método se conoce como método SIMPLE por sus siglas, Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations.

Los pasos que se siguen en el método SIMPLE son los siguientes, para la dirección x:

1. Se propone un campo de presiones tentativo inicial  $p^*$ .
2. Se resuelven las ecuaciones (4.15) para obtener las velocidades tentativas  $u^*$ .

Al campo de velocidades  $u^*$  se llamara velocidades tentativas. Tanto el campo de presión correcto, como el campo de velocidades correcto se pueden obtener a partir de los campos tentativos y de una corrección. Denotaremos las correcciones respectivas con primas ( $'$ ):

$$u = u^* + u' \dots\dots\dots 4.17$$

3. Se resuelve la ecuación (4.16) para obtener el campo de correcciones de presión  $p'$ .
4. Se calcula el campo de presiones corregido  $p$  a partir de  $p'$  con la ecuación 4.18.

$$p = p^* + \alpha_p p' \dots\dots\dots 4.18$$

Donde:

- $\alpha_p$  es el factor de relajación y tiene un valor entre 0 y 1.

5. Se calcula el campo de velocidades corregido a partir del campo de velocidades tentativo  $u^*$  y del campo de correcciones de presión  $p'$ . Esto se hace con las ecuaciones (4.16).
6. Se resuelven las ecuaciones para los escalares  $\phi$ , siempre y cuando su valor influya en el flujo. De lo contrario, los escalares se calculan hasta que la solución del campo de velocidades halla convergido.
7. Se regresa al paso 2, ahora con  $p^* = p$ , hasta que la solución converja.

En el apéndice B se muestra el desarrollo completo del método SIMPLE.

#### ***4.5 MÉTODO DE LA CELDA CORTADA (CUT CELL METHOD)***

Ya se ha presentado el método de los volúmenes finitos utilizando una malla cartesiana, sin embargo dada la complejidad de la geometría, una malla cartesiana no representa adecuadamente un dominio computacional tan complejo, por tan es necesario recurrir a una alternativa que permita el uso de una malla cartesiana, con lo cual se facilitará la convergencia del método numérico.

Este trabajo ha plateado utilizar el método de la celda cortada, con la intención de evitar una excesiva deformación de la malla, lo cual se mejora el tiempo de cálculo y el alcance de la convergencia.

El método de la celda cortada desarrollado por Ingram et al [24] se basa en el método de los volúmenes finitos, pues divide el dominio computacional en pequeños volúmenes de control, sin embargo su ventaja principal radica en poder utilizar geometrías muy complejas. El método divide el dominio computacional en tres tipos de celdas, celdas sólidas, celdas de flujo y celdas parcialmente sólidas.

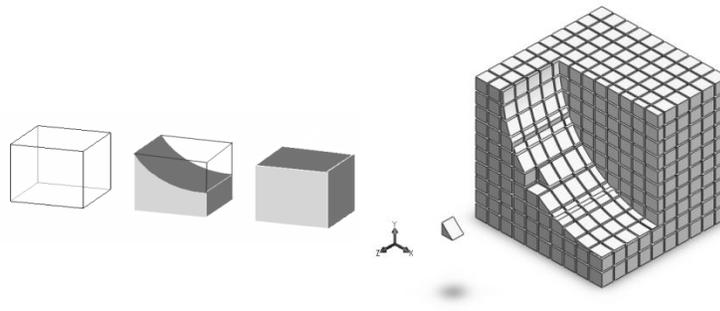


Figura 4.3. Representación esquemática de los tres tipos de celdas que se pueden encontrar en un dominio computacional que utiliza el método Cut-Cell.

El tratamiento matemático para las celdas vacías es el mismo que se ha presentado al inicio de este capítulo, para las celdas sólidas al no existir ningún flujo a través de ellas no son consideradas dentro del cálculo y en las celdas parcialmente sólidas es necesario llevar a cabo interpolaciones que cuantifique el flujo que atraviesa por estas y lo relacionen con las propiedades de sus vecinos.

#### 4.6 MÉTODO DE LA ECUACION ESCALAR (SCALAR METHOD EQUATION)

El método utilizado para la simulación de la superficie libre SEM se encuentra en el código numérico PHOENICS y forma parte de los métodos VOF, presentados por Hirt and Nichols [25]. Estos métodos son conocidos como métodos de malla fija o Eulerianos (Figura 4.4b), ya que la malla es tratada como un marco de referencia fijo, a través del cual el fluido se mueve, es decir, la malla generada inicialmente se utiliza en todo el cálculo, por lo que no existe ninguna dificultad geométrica, sin embargo, dado que el movimiento del fluido no coincide con la malla de cálculo, es necesario un tratamiento especial para seguir el movimiento de la superficie libre.

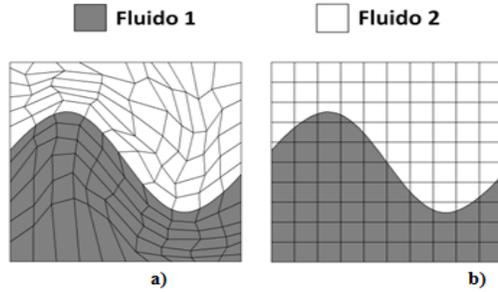


Figura 4.4. Tratamiento de la superficie libre a) Lagrangiano b) Euleriano.

Este método es utilizado en problemas de flujo con movimiento de superficie libre y es capaz de modelar dos o más fluidos mediante la solución de un conjunto de ecuaciones de fracción volumétrica, donde la misma variable es fijada para cada uno de los fluidos del dominio, basándose en la consideración de que los fluidos son inmiscibles. Para cada fase que se agrega se introduce una variable llamada “fracción volumétrica de la fase” en la celda de cálculo, teniendo en cuenta que la suma de todas las fracciones volumétricas de todas las fases es la unidad. Si la fracción volumétrica de cada una de las fases se conoce en cada posición, las variables y propiedades en cada celda son representativas de una de las fases o de la interface, dependiendo de los valores de la fracción volumétrica.

Así, la fracción volumétrica de un fluido es denotada como  $c$  y pueden cumplirse tres condiciones:

- $c = 1$  Celda llena de fluido 1
- $c = 0$  Celda llena del fluido 2
- $0 < c < 1$  Celda con interface

Por tanto, es necesario resolver una ecuación de transporte adicional para la fracción de volumen de la primera fase,  $c$ .

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\vec{v}) = 0 \tag{4.19}$$

Esta ecuación, tiene la misma forma que ecuación de continuidad, con la diferencia de que la densidad  $\rho$  es sustituida por  $c$ .

De esta manera, las propiedades del líquido efectivo varían en el espacio de acuerdo a la fracción de volumen de cada fase, de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_1 c + \rho_2 (1 - c) \dots\dots\dots 4.20$$

Donde los subíndices 1 y 2 denotan los dos fluidos (líquido y gas) respectivamente. Así, si un volumen de control está parcialmente lleno con un fluido y parcialmente con el otro fluido (es decir,  $0 < c < 1$ ), se supone que ambos fluidos tienen la misma velocidad y presión, teniendo en cuenta que la interface no representa un límite por lo que no hay necesidad de establecer condiciones de contorno en ella.

# *CAPÍTULO 5*



## 5.0 PRESENTACIÓN CAPÍTULO 5

En este capítulo presentan los detalles numéricos de la simulación numérica de la bifurcación del río Mezcalapa y así como los resultados de la misma.

Inicialmente se muestra la representación de la batimetría en el código de simulación numérico PHOENICS, así como la configuración a simular y los detalles numéricos que se usaron para simularlos. Después, se presenta un análisis cualitativo de los resultados del modelo numérico. Finalmente, son comparadas las simulaciones realizadas con mediciones experimentales.

### 5.1 REPRESENTACIÓN DE LA BATIMETRÍA

La zona de estudio incluye 1800 [m] aguas arriba de la bifurcación, región del río Mezcalapa y 4200 [m] aguas abajo, región que representa a los ríos Carrizal y Samaria.



Figura 4.1 Modelo computacional de la bifurcación del río Mezcalapa.

Para la realización de las simulaciones numérica se considera un modelo tridimensional de la batimetría de la zona con dimensiones iguales a las del modelos físico construido por el Instituto de Ingeniería de la UNAM, es decir 50 [m] en la dirección X ,40 [m] en la dirección Y y 0.30 [m] en la dirección Z.

La figura 5.2 muestra la representación tridimensional de la bifurcación del río Mezcalapa utilizada para las simulaciones numéricas.

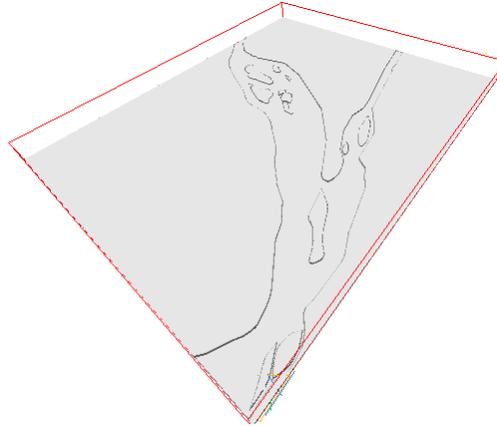


Figura 5.2 Modelo computacional de la bifurcación del río Mezcalapa.

## 5.2 CONFIGURACIÓN DE LA SIMULACIÓN (Condiciones de frontera)

La adecuada representación y simulación del comportamiento de un río está directamente ligada a las condiciones de frontera que se utilizan, por tanto es necesaria una adecuada elección del mismas.

Para la simulación numérica de la bifurcación del río Mezcalapa se ha considerado la inmisibilidad de ambos flujos, variando, para las diferentes configuraciones, sólo la velocidad de la entrada del flujo de agua al dominio computacional y considerando que en el dominio computacional el aire se encuentra estático y será arrastrado por el agua entrante.

De igual manera se han considerado la condición de similaridad en ambas salidas de flujo, es decir se ha colocado una salida de flujo al final de cada brazo de la bifurcación, considerando que lo que ocurre al final de la última celda de dominio ocurre también fuera del dominio computacional.

Por otro lado, dado que no se conoce apriori los efectos ocasionados por el lecho del río, se considera una rugosidad en el modelo computacional, la cual usaremos para calibrar el modelo.

### 5.3 DETALLES NUMÉRICOS (*Características de la malla*)

El dominio computacional fue discretizado en una malla cartesiana con una distribución uniforme para cada uno de los ejes. En la dirección del eje  $x$ ,  $y$  y  $z$  se tienen 200, 200 y 20 celdas respectivamente. En la Tabla 5.1 se muestra las características de la malla.

Tabla 5.1

Eje	Número de celdas	Tamaño de la celda [m]
$X$	200	0.25
$Y$	200	0.30
$Z$	20	0.015

La Figura 5.3 muestra un esquema del mallado en los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ .

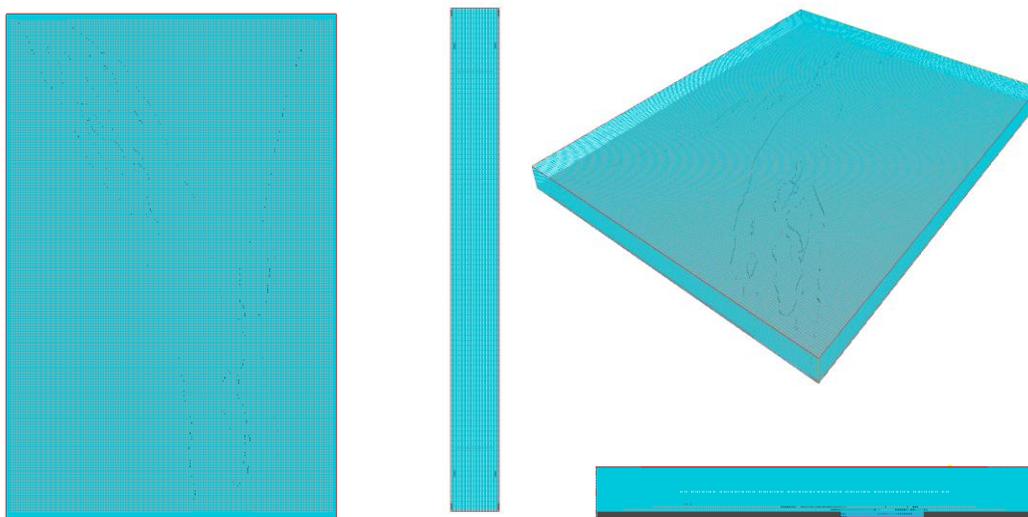


Figura 5.3 Mallado en los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ .

### 5.3.1 DETALLES NUMÉRICOS (Configuraciones)

Las velocidades en el modelo utilizadas para las simulaciones numéricas se presentan en la siguiente tabla, mostrando su equivalencia en flujo volumétrico para prototipo y modelo:

$Q_{prot}$ [m <sup>3</sup> /s]	$Q_{mod}$ [m <sup>3</sup> /s]	$V_{mod}$ [m/s]
1000	0,04238329	0,02608203
1500	0,06357494	0,03912304
2000	0,08476659	0,05216405

Tabla 5.2 Flujo en m<sup>3</sup>/s de para las diferentes avenidas en el río Mezcalapa en dimensiones de prototipo y modelo así como su equivalente en velocidad de para la velocidad de entrada en el modelo

Para las simulaciones numéricas consideramos tres diferentes avenidas las cuales se comparan con mediciones experimentales.

## 5.4 RESULTADOS

Las avenidas sobre el Río Mezcalapa utilizadas, en dimensiones prototipo son 2000, 1500 y 1000 [m<sup>3</sup>/s], esto equivales en flujo volumétrico a 0.084, 0.063 y 0.042 m<sup>3</sup>/s, en dimensiones modelo. Para cada avenida sobre el Mezcalapa se presenta el perfil de velocidades, la cantidad de flujo que es captada por cada brazo su comparación con datos experimentales, así como los contornos de densidad.

### 5.4.1 AVENIDA DE 2000 [m<sup>3</sup>/s] SOBRE EL RÍO MEZCALAPA

En dimensiones prototipo 2000 [m<sup>3</sup>/s] son equivalentes a 0.084 [m<sup>3</sup>/s] en dimensiones modelo, esto representa una velocidad a la entrada de la bifurcación del río Mezcalapa de 0.052 [m/s], considerándose como la condición de entrada.

### 5.4.1.1 VELOCIDAD

La figura 5.4 muestra los contornos de velocidad sobre la bifurcación del río Mezcalapa, esto para una avenida de  $0.084 \text{ m}^3/\text{s}$ , esto representa una velocidad a la entrada del río Mezcalapa de  $0.052 \text{ m/s}$ .

Se observan las zonas donde el flujo se acelera, principalmente en las reducciones en el área. Determinar estas zonas es importante ya que dadas las condiciones en la aceleración del flujo son las más propensas a sufrir socavación, esto que produce el arrastre y transporte de sedimentos, que aguas abajo ocasiona un cambio en la morfología del río y en consecuencia el cambio en la distribución del flujo en la zona.

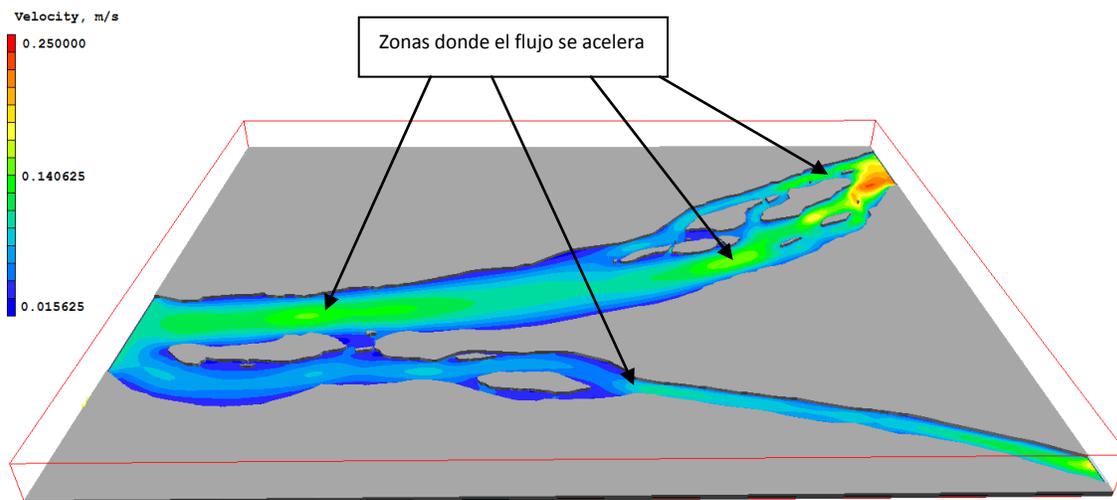


Figura 5.4 Perfiles de velocidad para velocidad de  $0.052 \text{ m/s}$ .

En la figura 5.5 se señalan las zonas donde el flujo se distribuye. Conocer el comportamiento de esta zona es importante ya que se pueden tomar acciones que permitan encausar sólo la cantidad de flujo podrán soportar las estructuras de control que se pretenden construir en la zona.

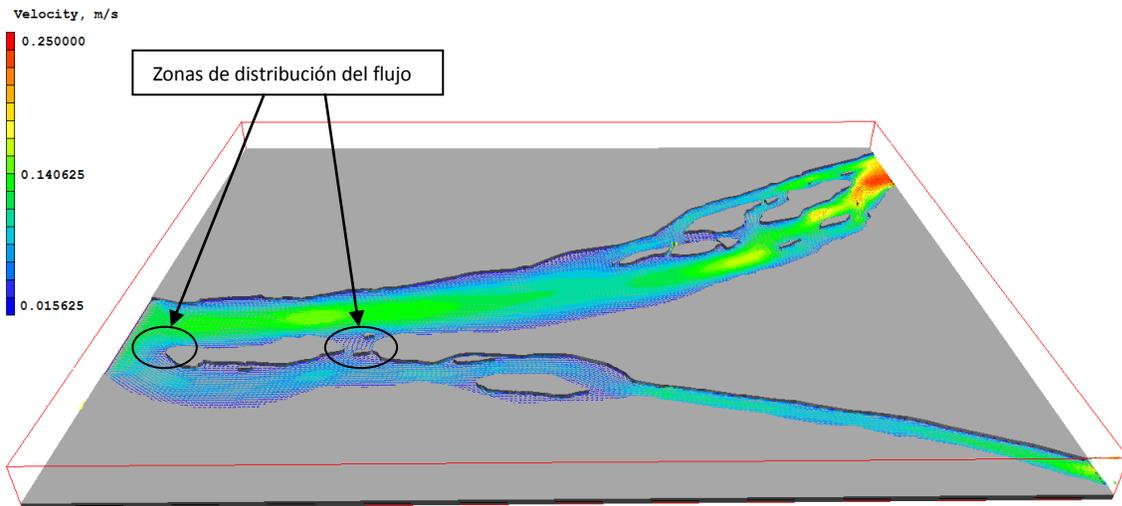


Figura 5.5 Zonas de distribución del flujo.

La figura 5.6 muestra los vectores de velocidad sobre la bifurcación del río Mezcalapa. Como se puede observar en la zona de la bifurcación una parte del flujo que se dirige hacia el Carrizal es redireccionada hacia el Samará. Este comportamiento se explicará en la figura 5.9.

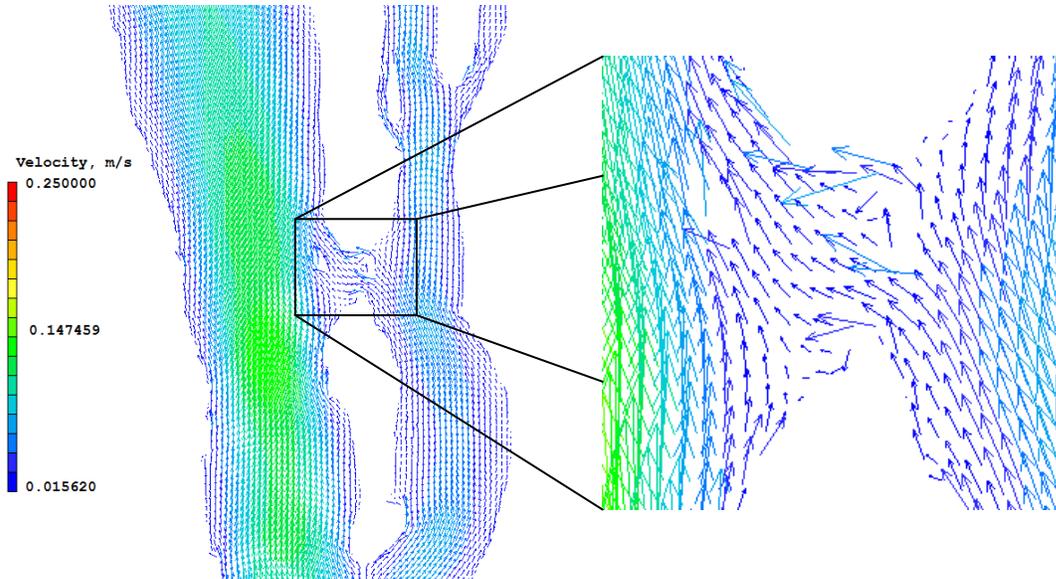


Figura 5.6 Los vectores de velocidad describen el comportamiento del flujo en la bifurcación para una velocidad de 0.052 m/s.

Para la avenida, en dimensiones modelo, de  $0.084 \text{ m}^3/\text{s}$  se tiene que el 63% del flujo del Mezcalapa es captado por el río Samaría esto equivale a  $0.052 \text{ m}^3/\text{s}$  mientras que el 37% equivalentes a  $0.031 \text{ m}^3/\text{s}$  es captado por el Carrizal.

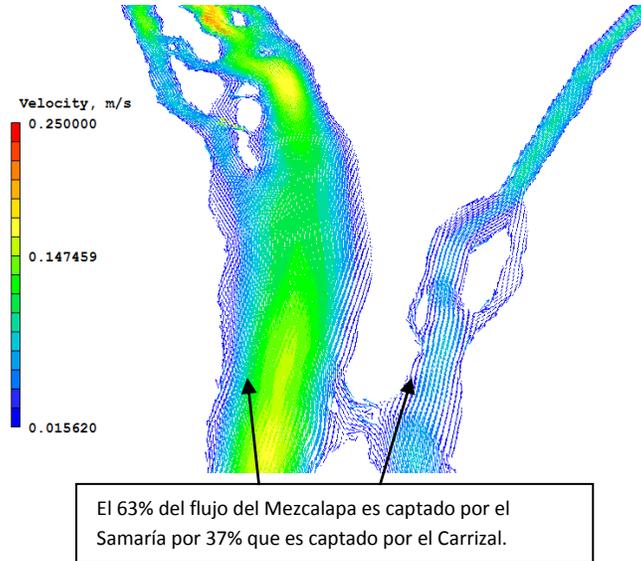


Figura 5.7 Vectores de velocidad de la bifurcación de Mezcalapa.

#### 5.4.1.2 DENSIDAD

Como antes se mencionó el modelo de la bifurcación del río Mezcalapa utiliza un modelo que le permite simular el comportamiento existente entre el flujo de aire y el flujo de agua. La figura 5.8 muestra la isosuperficie de densidad y un plano en el eje yz, donde se aprecia la división entre ambos flujos.

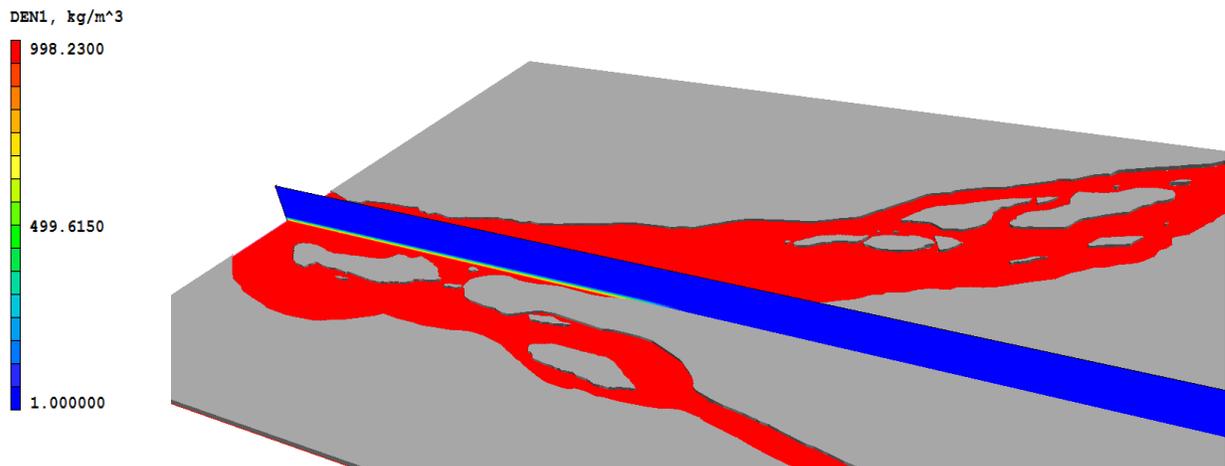


Figura 5.8 Isosuperficie de densidad y plano yz.

Esta característica permite al modelo conocer el tirante de agua a lo largo de la bifurcación. Como antes se mencionó existe un redireccionamiento el flujo del Carrizal hacia el Samaría. La figura 5.9 muestra que el tirante del Carrizal es mayor que el tirante del Samaría, esto ocasiona una diferencia de presiones, la cual redirecciona el flujo.

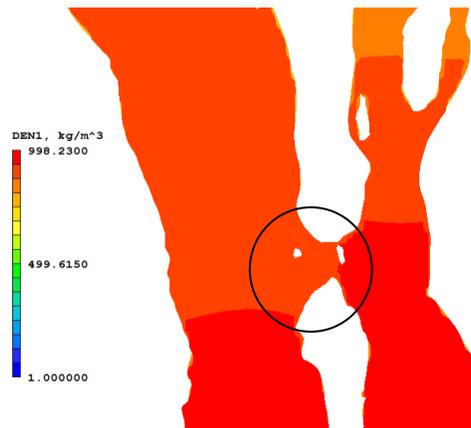


Figura 5.9 Tirante del Carrizal es mayor que el del Samaría para una velocidad de entrada de 0.052 m/s.

La figura 5.8 muestra que la diferencia de presión que ocasiona el re direccionamiento de flujo del Carrizal hacia el Samaría.

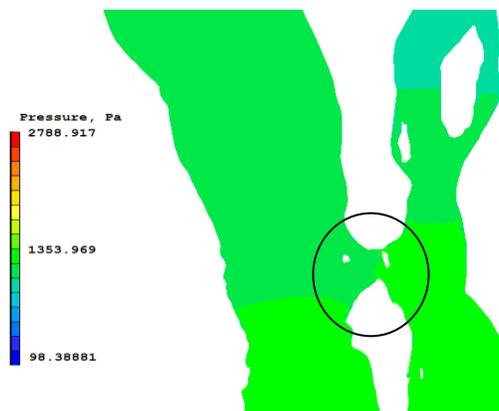


Figura 5.10 Contornos de presión para una velocidad de entrada de 0.052 m/s.

#### 5.4.2 AVENIDA DE 1500 [m<sup>3</sup>/s] SOBRE EL RÍO MEZCALAPA

En dimensiones prototipo 1500 [m<sup>3</sup>/s] son equivalentes a 0.063 [m<sup>3</sup>/s] en dimensiones modelo, esto representa una velocidad a la entrada de la bifurcación del río Mezcalapa de 0.039 [m/s], considerándose como la condición de entrada.

### 5.4.2.1 VELOCIDAD

La figura 5.11 muestra los contornos de velocidad sobre la bifurcación del río Mezcalapa, esto para una avenida de  $0.063 \text{ m}^3/\text{s}$ , esto representa una velocidad a la entrada del río Mezcalapa de  $0.039 \text{ m/s}$ . Como se puede observar en la figura existe una mayor aceleración en el centro del río, a diferencia de los márgenes, los cuales muestran velocidades más bajas.

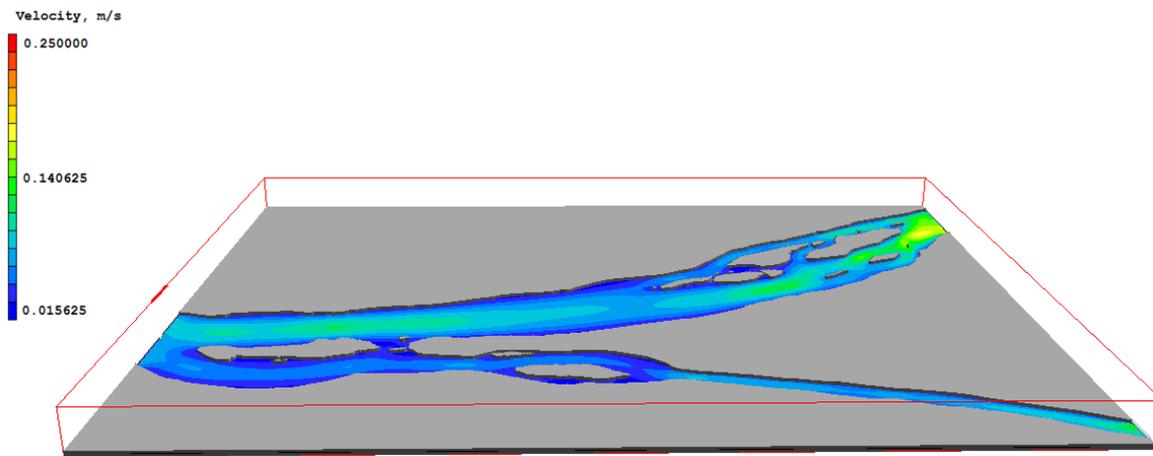


Figura 5.11 Perfiles de velocidad para velocidad de  $0.039 \text{ m/s}$ .

Al igual que el caso anterior la figura 5.12 se presenta un redireccionamiento del flujo del río Carrizal hacia el Samaría. Este comportamiento es recurrente a pesar de la disminución del flujo principal, sin embargo el comportamiento del flujo no parece ser tan desordenado.

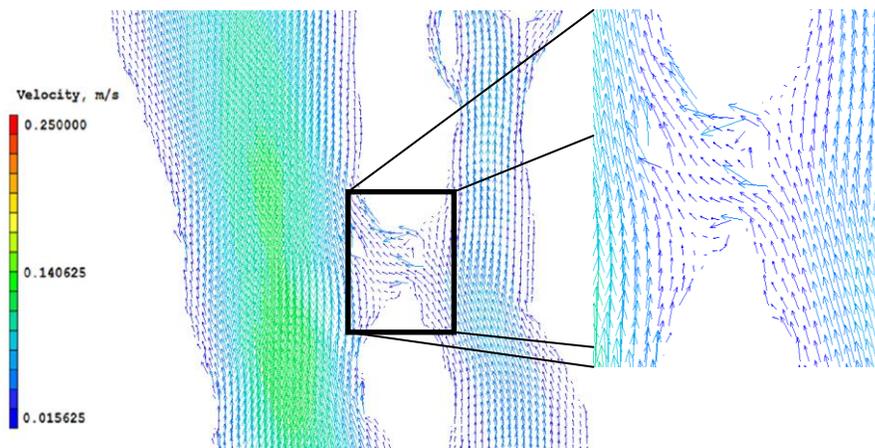


Figura 5.12 Los vectores de velocidad describen el comportamiento del flujo en la bifurcación para una velocidad de  $0.039 \text{ m/s}$ .

Realizando el análisis del flujo se tiene del total de flujo del Mezcalapa, equivalente a  $0.063 \text{ m}^3/\text{s}$ , el 61% es captado por el Samaría, mientras el 39% es captado por el Carrizal.

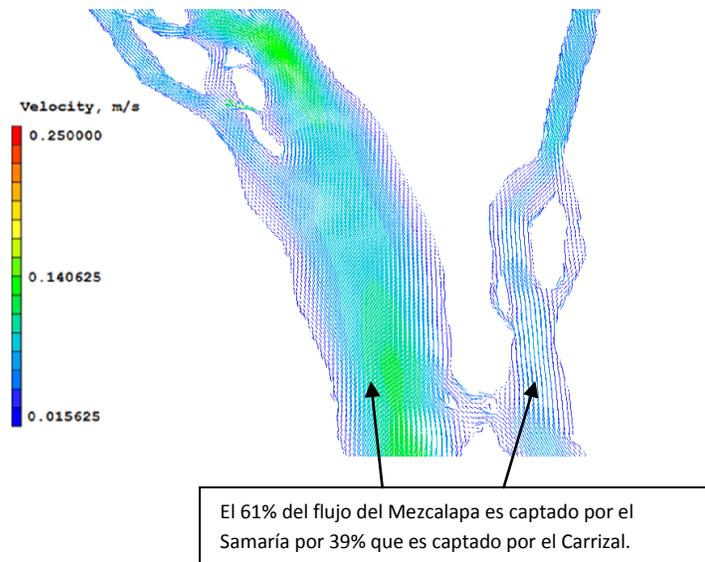


Figura 5.13 Vectores de velocidad de la bifurcación de Mezcalapa.

#### 5.4.2.2 DENSIDAD

La figura 5.14 muestra los contornos de densidad para un flujo volumétrico de  $0.039 \text{ m}^3/\text{s}$  sobre el río Mezcalapa, se observa una distribución más uniforme, lo cual se puede comprobar con la figura 5.21.

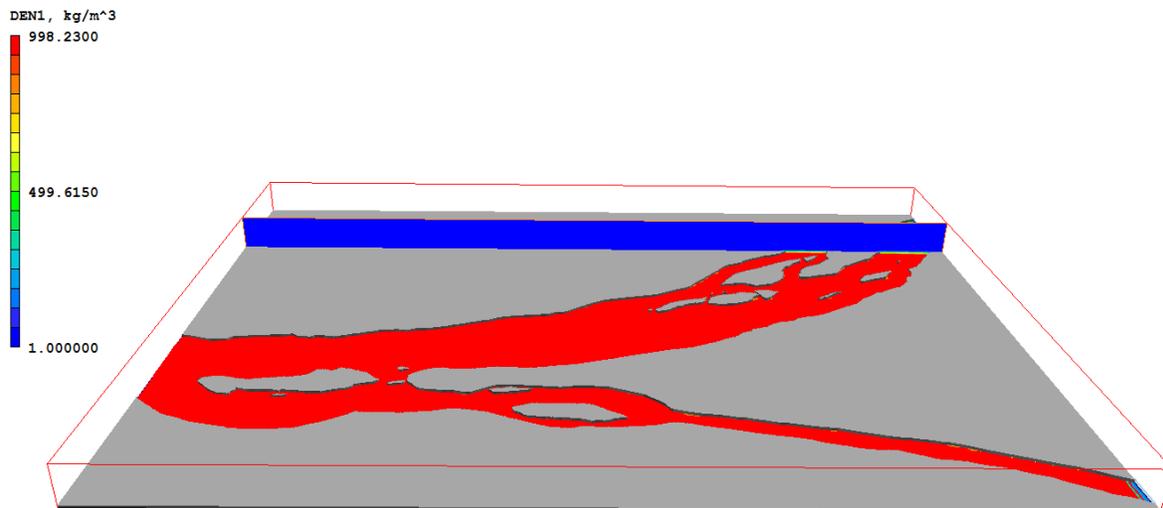


Figura 5.14 Isosuperficie de densidad y plano yz.

La figura 5.15 muestra un tirante más uniforme sobre ambos ríos, esta condición disminuye el flujo del Carrizal que es redireccionado hacia el Mezcalapa.

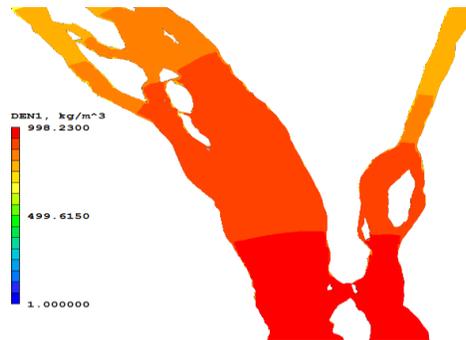


Figura 5.15 Tirante del Carrizal es mayor que el del Samaría para una velocidad de entrada de 0.039 m/s.

La figura 5.16 muestra los contornos de presión para la condición dada, es posible observar que no existe un cambio importante en las presiones, por tanto la redistribución del flujo disminuye.

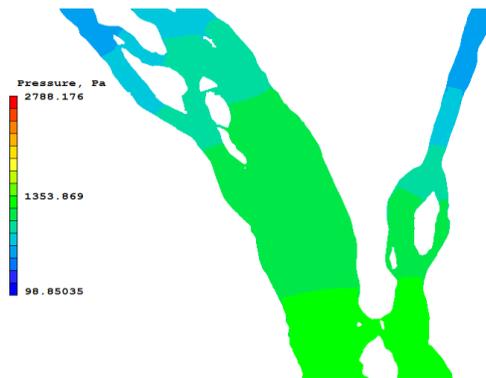


Figura 5.16 Contornos de presión para una velocidad de entrada de 0.039 m/s.

### 5.4.3 AVENIDA DE 1000 [m<sup>3</sup>/s] SOBRE EL RÍO MEZCALAPA

En dimensiones prototipo 1000 [m<sup>3</sup>/s] son equivalentes a 0.042 [m<sup>3</sup>/s] en dimensiones modelo, esto representa una velocidad a la entrada de la bifurcación del río Mezcalapa de 0.026 [m/s], considerándose como la condición de entrada.

#### 5.4.3.1 VELOCIDAD

La figura 5.17 muestra los contornos de velocidad para la bifurcación del río Mezcalapa. A lo largo de la bifurcación no se observan cambios importantes en la velocidad del flujo, sin embargo se puede observar algunas zonas donde el flujo tiene dirección preferencial y no recorre por completo los márgenes del río.

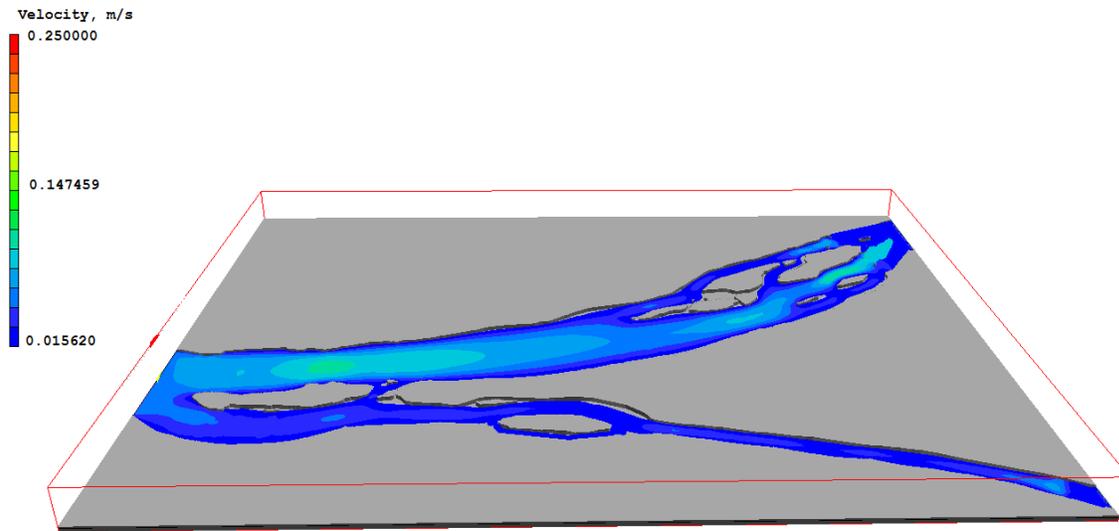


Figura 5.17 Perfiles de velocidad para velocidad de 0.026 m/s.

Al igual que en las condiciones de flujo antes descritas, se puede observar el redireccionamiento del flujo del río Carrizal hacia el río Samaría, la figura 5.18 muestra este comportamiento, sin embargo el flujo no existe un comportamiento tan caótico como el mostrado para un flujo volumétrico de 0.084 m<sup>3</sup>/s.

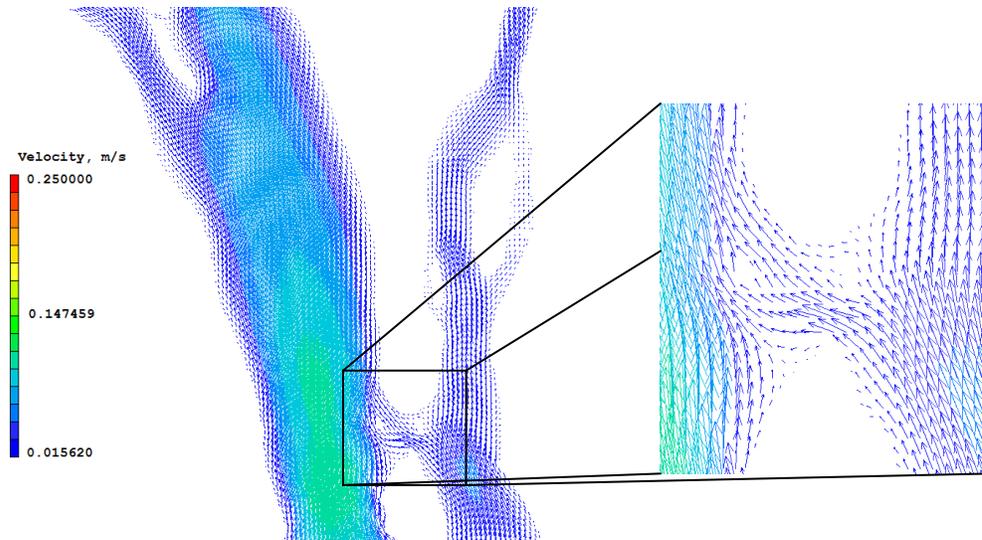


Figura 5.18 Los vectores de velocidad describen el comportamiento del flujo en la bifurcación para una velocidad de 0.026 m/s.

Para las condiciones de flujo dadas,  $0.026 \text{ m}^3/\text{s}$ , se tiene que el 52% del flujo del Mezcalapa es captado por el río Samaría esto equivale a  $0.01352 \text{ m}^3/\text{s}$  mientras que y el 48% equivalentes a  $0.01248 \text{ m}^3/\text{s}$  son captados por el Carrizal.

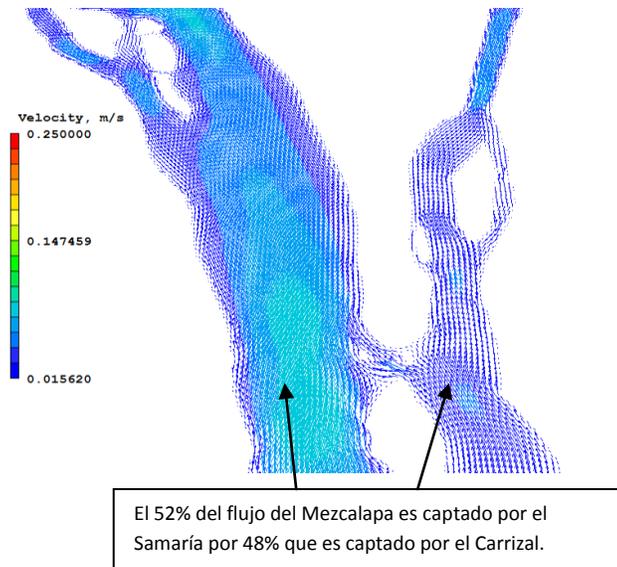


Figura 5.19 Vectores de velocidad de la bifurcación de Mezcalapa para una velocidad de entrada de 0.026 m/s.

### 5.4.3.2 DENSIDAD

La figura 5.20 muestra los contornos de densidad para un flujo volumétrico de  $0.026 \text{ m}^3/\text{s}$ , se puede observar que el flujo sobre el Carrizal tiene dirección preferencial sobre el margen derecho del río dejando sin flujo el margen izquierdo.

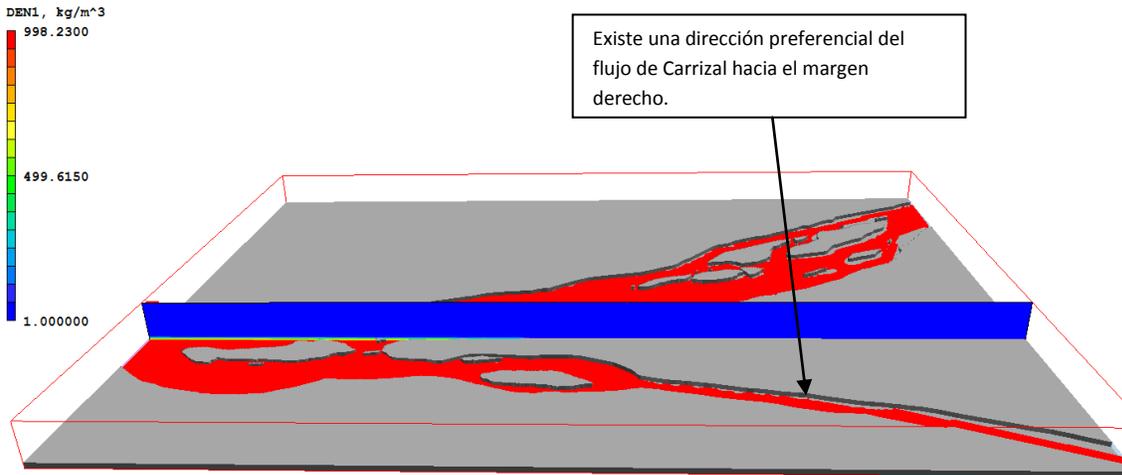


Figura 5.20 Isosuperficie de densidad y plano yz para una velocidad de entrada de  $0.026 \text{ m/s}$ .

La figura 5.21 muestra que para esta condición de flujo el tirante en la zona de redireccionamiento del flujo es el mismo por lo que no existe una aportación importante del flujo de Carrizal que sea enviado hacia el Samaría.



Figura 5.21 Tirante del Carrizal es mayor que el del Samaría para una velocidad de entrada de  $0.026 \text{ m/s}$ , sin embargo no existe un redireccionamiento del flujo importante.

La figura 5.22 que para la condición de flujo  $0.026 \text{ m}^3/\text{s}$  no existe una diferencia de presiones que redireccione una cantidad importante del flujo del Carrizal hacia el Samaría.



Figura 5.22 Contornos de presión para una velocidad de entrada de  $0.026 \text{ m/s}$

## 5.5 COMPARACIONES ENTRE LAS DIFERENTES CONDICIONES DE FLUJO.

Hasta este momento se han mostrado los resultados para las tres condiciones de flujo es decir  $0.084$ ,  $0.063$  y  $0.042 \text{ m}^3/\text{s}$ , estos flujos en dimensiones prototipo equivalen a  $2000$ ,  $1500$  y  $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Al realizar una comparación entre las tres simulaciones se puede observar que a una menor avenida sobre el río Mezcalapa, mayor es el porcentaje de flujo de éste que es captado por el Carrizal, este comportamiento se puede explicar ya al observar las simulaciones de los tres casos, el tirante del Carrizal es mayor que el del Mezcalapa en la zona del redireccionamiento, con lo cual a mayor flujo del Mezcalapa mayor es el flujo del Carrizal que es redireccionado hacia el Samaría.

La tabla 5.3 muestra las mediciones experimentales realizadas por el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

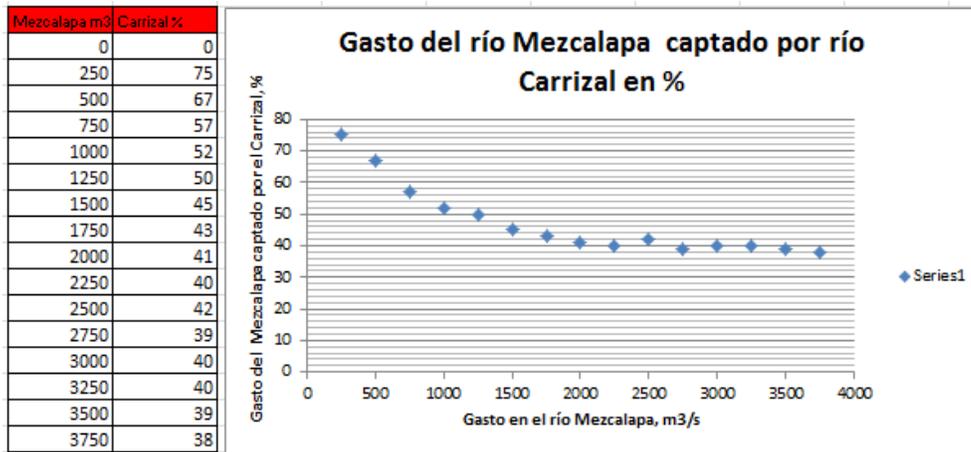


Tabla 5.3. Gasto en porcentajes de flujo del río Mezcalapa que es captado por el río Carrizal

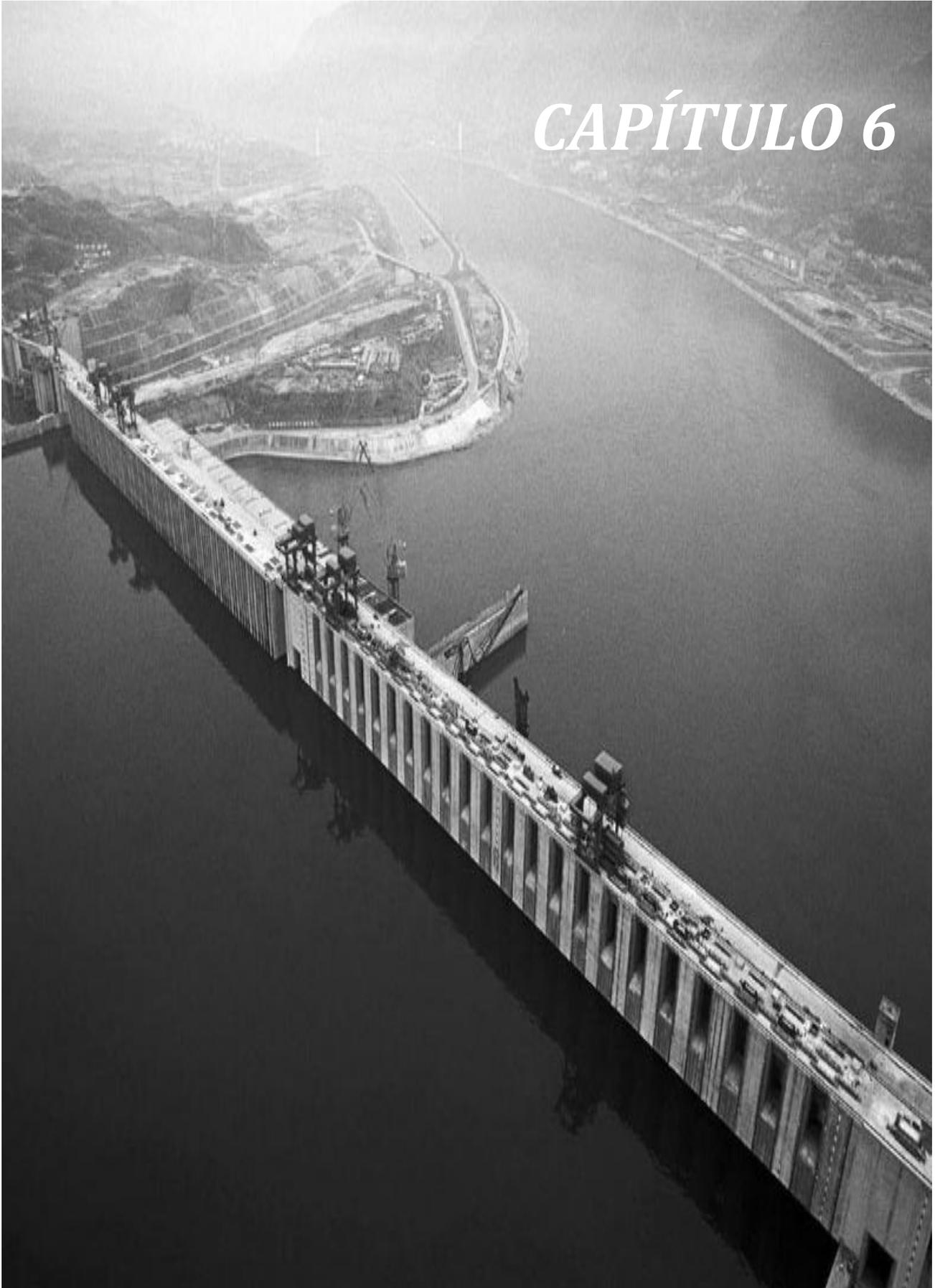
Ahora bien realizando una comparación con datos experimentales, podemos observar que para los flujos simulados es decir 2000, 1500 y 1000 m<sup>3</sup>/s los porcentajes de flujo que deben ser captados por el Carrizal el 42, el 45 y el 52% respectivamente.

Para la una condición de 2000 m<sup>3</sup>/ s, en dimensiones modelo, equivalentes a 0.084 m<sup>3</sup>/ s, se tiene que el 37% del flujo del Mezcalapa es captado por el Carrizal por el 63% que es captado por el Samaría. Para estas condiciones de flujo en mediciones experimentales se tiene que el 42% es captado por el río Carrizal y el 58% por el Samaría, esto teniéndose una diferencia en puntos porcentuales de 5%.

La condición de 1500 m<sup>3</sup>/ s equivalentes a 0.063 m<sup>3</sup>/ s presenta un 39% del flujo del Mezcalapa es captado por el Carrizal por el 61% que es captado por el Samaría. Para estas condiciones de flujo en mediciones experimentales se tiene que el 45% es captado por el río Carrizal y el 65% por el Samaría, esto teniéndose una diferencia en puntos porcentuales de aproximadamente el 6%.

Para 1000 m<sup>3</sup>/s, en dimensiones prototipo, equivalentes a 0.042 m<sup>3</sup>/s se tiene que el 48% del flujo del Mezcalapa es captado por el Carrizal, mientras que el 52% es captado por el Samaría. Teniendo una diferencia del 4% con respecto a datos experimentales.

# CAPÍTULO 6



## 6.0 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la simulación numérica de la bifurcación del río Mezcalapa para tres diferentes condiciones del flujo con el objetivo de determinar los porcentajes del flujo del río Mezcalapa que son captados por el río Carrizal y por el río Samaría, así como conocer mediante la dinámica de fluidos computacional el comportamiento de flujo a lo largo de la bifurcación.

Las simulaciones numéricas para las tres condiciones de flujo muestran diferencias porcentuales con respecto a datos experimentales de entre el 5 y el 10% lo que se considera una buena aproximación dadas las condiciones irregulares de la geometría. Además se considera que el comportamiento del flujo en la bifurcación ha sido bien representado y se tiene una descripción completa del comportamiento del flujo.

En las tres condiciones de flujo se puede observar que una vez distribuido el flujo del río Mezcalapa, el tirante del río Carrizal es mayor que el del río Samaría, esta ocasiona un redireccionamiento hacia el río Samaría conforme a aumenta el flujo sobre el Mezcalapa. La zona del redireccionamiento es clave para conocer el comportamiento del flujo en la bifurcación ya que esta zona podría ayudar a controlar el exceso en la avenida del Carrizal evitar la inundación de Villahermosa.

La simulación numérica además ha sido capaz de determinar las principales zonas donde el flujo se acelera, las cuales son importantes ya que son las más propensas a sufrir arrastre y transporte de sedimentos que aguas abajo pueden ocasionar cambio en la morfología del río y en consecuencia un cambio en la distribución del flujo.

El modelo ha sido capaz de simular la interacción entre el agua y el aire lo que permite conocer el tirante del flujo a lo largo de la bifurcación, esta característica le permite conocer las direcciones preferenciales en la distribución del flujo, así como las zonas propensas a sufrir inundaciones.

## **6.1 RECOMENDACIONES**

Observando las diferentes simulaciones del río Mezcalapa es posible conocer el comportamiento a lo largo de la bifurcación, en estas se han determinado las zonas de mayor de mayor influencia en el comportamiento global de la bifurcación.

Una de las zonas de mayor importancia y a tener en cuenta en el diseño de estructuras hidráulicas para el río Carrizal, es la zona del redireccionamiento, ya que el conocer el comportamiento del flujo en esta zona permitiría el desvío de una cantidad importante del flujo del Carrizal hacia el Samaría, con lo cual se tendría un margen más amplio en el manejo del flujo del Carrizal.

Por otro lado, dado que se conocen las zonas donde existen cambios importantes en la velocidad, es posible conocer las zonas propensas a sufrir socavación que aguas abajo ocasionarían el cambio en la morfología del río y en consecuencia un cambio en la distribución del flujo, por tanto es necesario poner interés en estas zonas a fin de evitar cambios en el desempeño del flujo que el comportamiento del Carrizal.

# Bibliografía

1. Zapata R., Urzua Miriam. 2008 “Tabasco: características e impacto socioeconómico de las lluvias Informe final, elaborado para Gobierno del estado de Tabasco, CEPAL.
2. Ramos H Judith, 2003, Informe plan hídrico integral de tabasco, CONAGUA
3. Jiménez, A.A., Osnaya, J., Gracia, J. y Franco, V. 2004 “Estudio en un modelo físico de las estructuras de control sobre el río Carrizal, en el Estado de Tabasco”, Informe final, elaborado para CNA, Instituto de Ingeniería, UNAM.
4. Bates P., Lanes S, 2005, “Computational fluid Dynamics, Applications in enviromental hydraulics”. John Wiley & Sons.
5. Martin N., Gorelick M., (2005). MOD\_FreeSurf2D: A MATLAB surface fluid flowmodel for rivers and streams. Computers Geosciences; 929-946.
6. Dongdong Jia, Xuejun Shao, Hong Wang, Gang Zhou, (2009). Three-dimensional modeling of bank erosion and morphological changes in the Shishou bend of the middle Yangtze River. Adv in water sources.
7. Alfrink BJ, Rijn LC. (1983). Two equation turbulence model for flow in trenches. J Hydr Eng ASCE ;941–958.

8. Gibson MM, Rodi W. (1989). Simulation of free surface effects on turbulence with a Reynolds stress model. *J Hydr Res Delft* ;27:233–44.
9. ZHANG Ming-liang. (2007). Three-dimensional simulation of meandering river based on 3-d rmg k–e turbulence model. *Journal of Hidrodynamics*; 448-455.
10. Demuren AO. (1993). A Numerical model for flow in meandering channels with natural bed topography. *Water Resour*; 269–77.
11. Ambrosi D, Corti S, Pennati V, Saleri F. (1996). Numerical simulation of unsteady flow at Pr River Delta. *J Hydraul Eng*; 122:735–43.
12. Sinha SK, Sotiropoulos F, Odgaard AJ. (1998). Three dimensional numerical model for river flow through natural rivers. *J Hydr*; 124(1):13–24.
13. D.M. Ingram, D.M. Causon, C.G. Mingham. (2003). Developments in cartesian Cut-cell methods, *Mathematics and computers in simulation*, 2003; 561-572.
14. D.M. Causon \* , D.M. Ingram, C.G. Mingham, G. Yang, R.V. Pearson.(2000) Calculation of shallow water flows using a Cartesian cut cell approach. *Advances in water sources*; 546-562.

15. Zapata R., Urzua Miriam. 2008 “Tabasco: características e impacto socioeconómico de las lluvias Informe final, elaborado para Gobierno del estado de Tabasco, CEPAL.
16. Fe Marques J, 2005, “Aplicación del método de los volúmenes finitos a la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras con incorporación de los esfuerzos debidos a la turbulencia”, Tesis doctoral, E.T.S de ingenieros de caminos, canales y puertos, La Coruña, España.
17. H.K. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Addison-Wesely, Reading MA, 1995.
18. Cengel Yunus, 2004, Introducción a la mecánica de fluidos” Mcgraw Hill.
19. Fueyo Norberto, 1996, “Introducción a la mecánica de fluidos computacional”, Universidad de Zaragoza, Área de mecánica de fluidos, Centro politécnico superior.
20. Ludwig, J. C., Qin, H. Q., Spalding, D. B. The PHOENICS Reference Manual. Technical Reput CHAM TR/200, CHAM Ltd, London. 1989
21. H.K. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Addison-Wesely, Reading MA, 1995.
22. G. Yang, D. Causon, D. Ingram, Calculation of compressible flows about complex moving geometries using a 3D Cartesian cut cell method, Int. J. Numer. Methods Fluids 33 (2000) 1121–1151.
23. Ferziger, H. H., Peric, M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 1996.

24. D.M. Ingram, D.M. Causon, C.G. Mingham. (2003). Developments in cartesian Cut-cell methods, Mathematics and computers in simulation, 2003; 561-572.
25. C.W. Hirt and B.D. Nichols, (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. J Comput Phys **39**; pp. 201–225.

# Apéndice A

## A.0 MODELOS DE TURBULENCIA

Las ecuaciones instantáneas de continuidad y Navier-Stokes forman un conjunto cerrado de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$ . Al no poderse resolver de manera directa, o por lo menos, no a un bajo costo computacional, se utiliza el promediado temporal de las ecuaciones de gobierno. En el proceso de promediado realizado a las ecuaciones de movimiento se pierden todos los detalles relativos al flujo contenidas en las fluctuaciones instantáneas, además de esto, se obtienen nueva incógnitas adicionales en las ecuaciones de movimiento promediadas. Por lo anterior, un modelo de turbulencia es necesario para calcular los términos extra.

## A.1 TIPOS DE MODELOS

Los modelos de turbulencia desarrollan procedimientos de cálculo para el término de los esfuerzos de Reynolds, tales expresiones permiten el cierre del sistema de ecuaciones

promediadas. Las fluctuaciones turbulentas no se resuelven a detalle, sino una aproximación del efecto de estas sobre el flujo medio.

La aproximación de este término se divide en dos categorías

- Viscosidad turbulenta
- Ecuación de transporte

## A.2 MODELOS DE VISCOSIDAD TURBULENTA

Los modelos de viscosidad turbulenta asumen la existencia de una analogía entre la acción de los esfuerzos viscosos y los esfuerzos de Reynolds sobre el flujo medio. En las ecuaciones de momentum (2.18)-(2.20) ambos esfuerzos aparecen a la derecha de la ecuación; y en la ley de viscosidad de Newton los esfuerzos viscosos son proporcionales a la tasa de deformación angular de los elementos de un fluido. En notación indicial se escribe como

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (A.1)$$

Boussinesq propuso en 1877 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y las tensiones de Reynolds

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k' \delta_{ij} \quad (A.2)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad  $\mu_t$  se denomina viscosidad dinámica turbulenta y  $k'$  es la energía cinética turbulenta por unidad de masa [86, pg. 67]

$$k' = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (A.3)$$

Por otra parte la energía cinética media sería

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \quad (\text{A.4})$$

Si se calcula el promedio temporal de la energía cinética instantánea se obtiene, teniendo en cuenta (3.10)

$$k = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}((\bar{u} + u')^2 + (\bar{v} + v')^2 + (\bar{w} + w')^2) \quad (\text{A.5})$$

Promediando queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \overline{((\bar{u} + u')^2 + (\bar{v} + v')^2 + (\bar{w} + w')^2)} \\ & \frac{1}{2} (\overline{(\bar{u} + u')^2} + \overline{(\bar{v} + v')^2} + \overline{(\bar{w} + w')^2}) \\ & \frac{1}{2} (\overline{(\bar{u}^2 + u'^2 + \bar{u}u')} + \overline{(\bar{v}^2 + v'^2 + \bar{v}v')} + \overline{(\bar{w}^2 + w'^2 + \bar{w}w')}) \\ & \frac{1}{2} ((\bar{u}^2 + \bar{u}'^2) + (\bar{v}^2 + \bar{v}'^2) + (\bar{w}^2 + \bar{w}'^2)) \\ & \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + \frac{1}{2} (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) \\ k &= \bar{k} + k' \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

es decir, la suma de las energías cinéticas media y turbulenta.

Es conveniente notar que el coeficiente empleado  $\mu_t$  en (A.2) puede en general depender de la dirección considerada, siendo realmente un tensor de viscosidad turbulenta. En este estudio se supone el mismo valor para todas las direcciones del espacio.

El término  $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$ , de la ecuación (A.2), es un esfuerzo normal que hace la fórmula válida para los tensores  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  y  $\tau_{zz}$ . En efecto, aplicando (A.2) para los tensores normales ( $i = j$ ) y llamando  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$  a la viscosidad cinemática turbulenta, se obtiene

$$\begin{aligned}
-\bar{u}'^2 &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k' \\
-\bar{v}'^2 &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} k' \\
-\bar{w}'^2 &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} k'
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Si se suman estas tres expresiones y se toma en cuenta la ecuación de continuidad, se comprueba la ecuación. De no incluir el término  $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$  la  $k'$  resultaría nula. Se asigna así, a cada una de los tres tensores normales de Reynolds, una tercera parte de la cantidad  $2\rho k'$ . Esto supone asumir una distribución isotrópica para estas tensiones normales, lo que no se corresponde con la realidad en bastantes tipos de flujos [86, pg. 64].

Ahora, si sustituyendo la expresión de los tensores de Reynolds en las ecuaciones (2.23)- (2.23)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) &= \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u}) - \left( \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) &= \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k' \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Reordenando y agrupando los términos del segundo miembro

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} k' + \nu \nabla^2(\bar{u}) + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \tag{A.9}$$

Aplicando un procedimiento análogo para cada componente se obtiene

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{u}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} k' + \nu \nabla^2(\bar{v}) + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{u}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} k' + \nu \nabla^2(\bar{w}) + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (A.11)$$

al ser constante  $\nu$ , se puede escribir  $\nu \nabla^2(\bar{u})$  como  $\nabla \cdot \nu \nabla \bar{u}$  para agrupar la viscosidad molecular con la turbulenta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} k' + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (A.11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{u}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} k' + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (A.12)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{u}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} k' + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (A.13)$$

Con el fin de simplificar las expresiones se tiene en cuenta lo siguiente:

- Los términos que contienen las derivadas parciales de  $k'$  respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  provienen los tensores normales de Reynolds y actúan perpendicularmente a las caras del volumen de control, por lo que se incluyen en los términos que contienen las derivadas de presión.
- El valor de la viscosidad turbulenta  $\mu_t$  es varios órdenes de magnitud mayor que  $\nu$ , por lo  $\nu$  que se considera despreciable.
- La variación espacial de  $v_t$  es mínima, por lo que

$$\nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \approx v_t \nabla \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = v_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) \quad (A.14)$$

aplicando la propiedad de Schwarz de las derivadas segundas cruzadas y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, se convierte en

$$v_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) = v_t \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = 0 \quad (A.15)$$

Tras realizar en (3.36)-(3.48) las simplificaciones mencionadas, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} \quad (A.16)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{u}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot \mathbf{v}_t \nabla \bar{v} \quad (A.17)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{u}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot \mathbf{v}_t \nabla \bar{w} \quad (A.18)$$

en una ecuación, esto se expresa como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = \rho f - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \mathbf{v}_t \nabla \bar{u} \quad (A.19)$$

Al aplicarla relación de Boussinesq se obtienen las ecuaciones de Reynolds con el término de viscosidad turbulenta, y tiene dimensiones de velocidad por longitud. El cálculo  $\mathbf{v}_t$ , es el objeto de los modelos de turbulencia basados en esta propiedad y se clasifican según el número de ecuaciones diferenciales resueltas, siendo de cero ecuaciones (Modelo de longitud de mezcla), una ecuación (Modelo  $\kappa$ - $l$ ) y dos ecuaciones (Modelo  $\kappa$ - $\omega$ ,  $\kappa$ - $\epsilon$ , entre otros).

### A.2.1 MODELOS DE LONGITUD DE MEZCLA

El primer modelo que describe la distribución de  $\mathbf{v}_t$ , se debe a Prandtl y utiliza el concepto que le da nombre, longitud de mezcla. Esta magnitud representa la distancia media recorrida por las partículas del fluido, sin modificar su cantidad de movimiento [74, pg. 537].

La  $\mathbf{v}_t$  puede ser expresada como el producto de la velocidad de escala turbulenta  $\vartheta$  [m/s] por longitud de escala  $l$  [m]. Si estas dos escalas son suficientes para describir los efectos de la turbulencia, se expresa como sigue

$$\mathbf{v}_t = C\vartheta l \quad (A.20)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad adimensional. La mayor parte de la energía cinética turbulenta está contenida en los vórtices de mayor longitud y la longitud de escala turbulenta  $l$  es característica de esos vórtices. Los vórtices de mayor longitud interactúan con el flujo medio, por lo que se pueden relacionar la escala de velocidad característica de

los vórtices con las propiedades del flujo medio. Esta consideración funciona para flujos bidimensionales donde son significantes únicamente los esfuerzos de Reynolds,  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\overline{\rho u'v'}$  y en el gradiente de flujo medio  $\partial U/\partial y$ . En tales casos, siendo  $l$  la longitud de escala, se establece

$$\vartheta = cl \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{A.21})$$

donde  $c$  es una constante adimensional.

Al sustituir (A.21) en (A.20) y colocando las constantes  $C$  y  $c$  en la nueva longitud de escala  $l_m$ , la viscosidad turbulenta se define como

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{A.22})$$

Los modelos de longitud de mezcla son validos en los casos en que se pueda describir la distribución de la  $l_m$  por medio de formulas empíricas y resultan poco adecuados para flujos con separación de la pared y zonas de recirculación.

### A.2.2 MODELOS $\kappa$ - $l$

Los modelos  $\kappa$ - $l$  toman en cuenta el transporte de las magnitudes turbulentas y se basan en la formula de Kolmogorov-Prandtl

$$v_t = c_\mu k'^{\frac{1}{2}} l \quad (\text{A.23})$$

donde  $l$  es la escala de longitud y  $k'^{\frac{1}{2}}$  la escala de velocidad. La energía cinética turbulenta  $k'$ , definida se obtiene de una ecuación diferencial [X], donde también aparece el término  $L$ , que es prescrita mediante una ley algebraica.

Una de las limitaciones del método es la falta de capacidad para adaptar la escala  $l$  cuando el flujo cambia bruscamente, debido a una variación en la geometría. Recientemente han aparecido algunos modelos como el de Spalart-Almaras [89, pg. 111], en los que la viscosidad turbulenta es la variable de la única ecuación diferencial. En ella aparece como escala de longitud la distancia a la pared.

### A.2.3 MODELO K-E

El modelo considera dos variables de las cuales se tiene un mejor conocimiento de los procesos relacionados con su variación, la energía cinética turbulenta  $\kappa$  y la tasa de disipación viscosa  $\varepsilon$ . Con estas variables, se define la escala de velocidad  $\vartheta$  y la longitud de escala  $l$  como sigue

$$\vartheta = \kappa^{1/2} \quad (A.24)$$

$$l = \frac{\kappa^{3/2}}{\varepsilon} \quad (A.25)$$

Aplicando la misma aproximación que para la longitud de mezcla tenemos

$$v_t = C\vartheta l = C \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (A.26)$$

En el modelo se resuelven dos ecuaciones de transporte separadas, permitiendo determinar la  $\kappa$  y  $\varepsilon$ , independientemente [6], bajo la suposición de que el flujo es totalmente turbulento. Un modelo estándar usa las siguientes ecuaciones de transporte para  $\kappa$  y  $\varepsilon$

$$\frac{\partial(\rho\kappa)}{\partial t} + \text{div}(\rho\kappa\mathbf{u}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \text{grad}(\kappa) \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ji} - \rho\varepsilon \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varepsilon\mathbf{u}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad} \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\kappa}{\varepsilon} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ji} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones contienen cinco constantes ajustables  $C_\mu$ ,  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$  y  $C_{2\varepsilon}$ . En el modelo de turbulencia  $\kappa - \varepsilon$  estándar se emplean los siguientes valores para las constantes y comprenden un amplio rango de flujos turbulentos

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_\kappa = 1.00 \quad \sigma_\varepsilon = 1.30 \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$

El modelo estándar se debe a Jones y Launder (1972) y los coeficientes fueron ajustados poco después por Launder y Sharma (1974). El modelo  $\kappa - \varepsilon$  es el más extendido y se utiliza en prácticamente todos los programas comerciales para estudio de fluidos [68].

### ***A.3 MODELOS DE ECUACIÓN DE TRANSPORTE (REYNOLDS STRESS MODEL)***

Los modelos RSM no se hacen uso del concepto de viscosidad turbulenta, sino que se resuelven unas ecuaciones de transporte para obtener las tensiones de Reynolds directamente. Estos modelos son más adecuados para campos de tensiones complejos, así como para la simulación del transporte de la turbulencia y la toma en consideración de los estados anteriores (efectos históricos) y de la anisotropía de la turbulencia. La resolución numérica de las ecuaciones es difícil y puede causar problemas de convergencia. Los modelos son más exigentes en lo que se refiere a las condiciones de contorno.

Uno de los primeros modelos de tensiones de Reynolds es el de Launder, Reece y Rodi (1975). Aunque existen propuestas de distintos autores, la complejidad de estos modelos, con un número de ecuaciones mucho más elevado, dando lugar a un número inferior de aplicaciones prácticas en comparación con los de modelos de viscosidad turbulenta.

#### ***A.3.1 MODELOS ASM***

Con ciertas hipótesis que se simplifican los términos de transporte convectivo y difusivo se ha intentado reducir las ecuaciones diferenciales de estos modelos a ecuaciones algebraicas, dando lugar a los modelos ASM (Algebraic Stress Models), que tienen puntos en común con los modelos de 1 y 2 ecuaciones [68].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\kappa) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\kappa u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + G_\kappa + G_b + \rho\varepsilon - YM + S_\kappa$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} (G_\kappa + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + S_\varepsilon$$

donde  $G_\kappa$  representa la generación de energía cinética de turbulencia producto del promedio de gradientes de velocidades,  $G_b$  representa la generación de energía cinética producto a la flotación,  $YM$  representa la contribución producto a la tasa de disipación,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $C_{3\varepsilon}$  son constantes,  $\sigma_\kappa$  y  $\sigma_\varepsilon$  son los números de Prandtl turbulento para  $\kappa$  y  $\varepsilon$ ,  $S_\kappa$  y  $S_\varepsilon$  son términos fuentes.

## *Apéndice B*

### *B.0 MÉTODO SIMPLE (Semi-Implicit for Pressure Linked Equations)*

La convección de una variable escalar  $\phi$  depende de la magnitud y la dirección del campo de velocidad local. Para desarrollar el método de Volúmenes Finitos, en el tercer capítulo, se considero un campo de velocidad aparente. En general, dicho campo no se conoce, y surge como parte del proceso de solución global, junto con todas las variables de flujo.

En este Anexo se trata la estrategia más popular para el cálculo del campo de flujo completo, el algoritmo SIMPLE. Este algoritmo fue propuesto por Patankar y Spalding (1972), corresponde al acronismo Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations. Esencialmente, consiste en un procedimiento de predicción-corrección para el cálculo de la presión en una malla escalonada.

## ***B.1 SOLUCIÓN DEL CAMPO DE FLUJO***

En las ecuaciones de cantidad de movimiento, el gradiente de presión es desconocido al interior del campo de flujo y, por lo tanto, constituye una incógnita más que carece de una ecuación propia para calcularla. Como solución se puede transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión. Así, la presión y las tres componentes de velocidad se resuelven con las ecuaciones de Navier-Stokes más la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \text{div}(\Gamma_{\phi} \text{grad}(\mathbf{u})) \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (B.2)$$

El procedimiento es iterativo y consiste en suponer un campo de presiones, después, se resuelven las velocidades a partir de la ecuación discretizada de Cantidad de Movimiento y por último, se verifica que dichas velocidades satisfagan la continuidad.

### ***B.1.1 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO***

Las ecuaciones discretizadas de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, son diferentes a las que se obtendrán para la variable general  $\phi$ . La diferencia no radica en el método utilizado para su obtención, sino en que el volumen de control considerado no es el mismo, ya que para las velocidades consideraremos volúmenes de control desplazados. En la Figura B.1 se muestra el volumen de control para el cálculo de las componentes de velocidad.

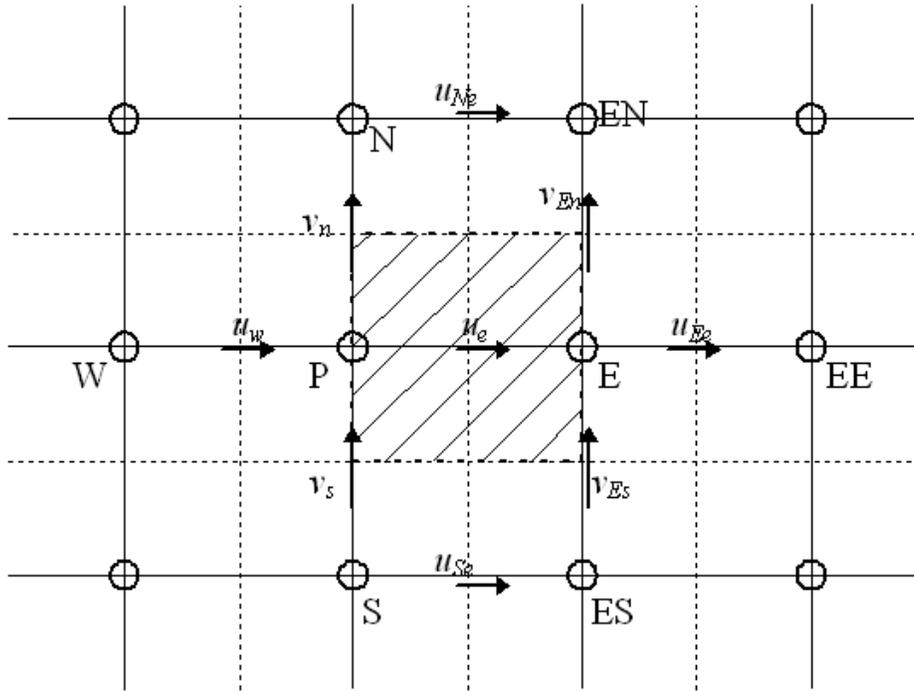


Figura B.1 Volumen de control para el cálculo de  $u$ .

En el caso tridimensional las ecuaciones discretizadas provenientes de las ecuaciones de conservación de momentum en estado permanente tendrán la siguiente forma

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e \tag{B.3a}$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_N) A_n \tag{B.3b}$$

$$a_h w_h = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_H) A_h \tag{B.3c}$$

donde el subíndice  $nb$  refiere a las celdas vecinas y  $b$  el término fuente. A partir de las ecuaciones (B.3) sólo se calculará el campo de velocidades correcto si se tiene el campo correcto de presiones. El campo de velocidades correcto debe satisfacer la ecuación de continuidad.

## B.2 MÉTODO SIMPLE

Si se propone un campo de presiones tentativo  $p^*$  y se utiliza para calcular el campo de velocidades, a partir de las ecuaciones (B.3), se obtiene

$$a_s u_s^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_p^* - p_E^*) A_s \quad (B.4a)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_p^* - p_N^*) A_n \quad (B.4b)$$

$$a_h w_h^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_p^* - p_H^*) A_h \quad (B.4c)$$

donde al campo de velocidades  $u^*$  le llamaremos velocidades tentativas. Los campos de presión y de velocidades correctos se pueden obtener a partir de los campos tentativos más una corrección, es decir

$$p = p^* + p' \quad (B.5)$$

$$u = u^* + u' \quad (B.6a)$$

$$v = v^* + v' \quad (B.6b)$$

$$w = w^* + w' \quad (B.6c)$$

donde  $p'$ ,  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$  denotan las propiedades corregidas. Si se restan las ecuaciones (B.4) de (B.3), se obtiene

$$a_s u_s' = \sum a_{nb} u_{nb}' + (p_p' - p_E') A_s \quad (B.7a)$$

$$a_n v_n' = \sum a_{nb} v_{nb}' + (p_p' - p_N') A_n \quad (B.7b)$$

$$a_h w'_h = \sum a_{nb} w'_{nb} + (p'_P - p'_H) A_h \quad (B.7c)$$

Con estas ecuaciones se calculan las correcciones para las componentes de la velocidad en a partir de las correcciones para la presión. En el método SIMPLE se elimina el primer término del lado derecho de esta ecuación, y en realidad estamos haciendo una aproximación para obtener las correcciones de la velocidad. Esta aproximación no afecta el resultado final.

Las ecuaciones para las correcciones de velocidad quedan como sigue

$$u'_e = (p'_P - p'_E) \frac{A_e}{a_e} = d_e (p'_P - p'_E) \quad (B.8a)$$

$$v'_n = (p'_P - p'_N) \frac{A_n}{a_n} = d_n (p'_P - p'_N) \quad (B.8b)$$

$$w'_h = (p'_P - p'_H) \frac{A_h}{a_h} = d_h (p'_P - p'_H) \quad (B.8c)$$

Así, las ecuaciones para obtener la velocidad correcta se escriben de la siguiente forma:

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (B.9a)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \quad (B.9b)$$

$$w_h = w_h^* + d_h (p'_P - p'_H) \quad (B.9c)$$

Ahora, es necesario obtener la expresión para calcular las correcciones del campo de presión, la cual, se obtendrá a partir de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (B.10)$$

Al integrar la ecuación de continuidad en estado permanente para un volumen de control, se obtiene la siguiente expresión

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho u A)_n - (\rho u A)_s + (\rho u A)_h - (\rho u A)_l = 0 \quad (B.11)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (B.9) en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} & \rho_e A_e (u_e^* + d_e (p'_p - p'_e)) - \rho_w A_w (u_w^* + d_w (p'_w - p'_p)) \\ & + \rho_n A_n (v u_n^* + d_n (p'_p - p'_n)) - \rho_s A_s (v_s^* + d_s (p'_s - p'_p)) \\ & + \rho_h A_h (w_h^* + d_h (p'_p - p'_h)) - \rho_l A_l (w_l^* + d_l (p'_l - p'_p)) = 0 \end{aligned} \quad (B.12)$$

Ordenando la ecuación de las correcciones de presión se puede escribir de forma general como sigue

$$a_p p'_p = a_e p'_e + a_w p'_w + a_n p'_n + a_s p'_s + a_h p'_h + a_l p'_l + b \quad (B.13)$$

donde

$$a_e = \rho_e A_e d_e \quad (B.14)$$

$$a_w = \rho_w A_w d_w \quad (B.15)$$

$$a_n = \rho_n A_n d_n \quad (B.16)$$

$$a_s = \rho_s A_s d_s \quad (B.17)$$

$$a_h = \rho_h A_h d_h \quad (B.18)$$

$$a_l = \rho_l A_l d_l \quad (B.19)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_h + a_l \quad (B.20)$$

$$b = -(\rho_e A_e u_e^* - \rho_w A_w u_w^* + \rho_n A_n u_n^* - \rho_s A_s u_s^* + \rho_h A_h u_h^* - \rho_l A_l u_l^*) \quad (B.21)$$

El término independiente  $b$ , se puede considerar como una fuente de masa, que surge cuando las velocidades tentativas no cumplen con la ecuación de continuidad. Cuando la solución llegue a converger, las velocidades tentativas y las velocidades correctas serán

prácticamente iguales y el término  $b$  valdrá cero, ya que el campo de velocidades cumplirá con la ecuación de continuidad.

### ***B.2.1 RELAJACIÓN PARA LA PRESIÓN***

Dada la consideración para obtener las aproximaciones en las ecuaciones (B.8), las correcciones en la presión se pueden ver incrementadas de iteración a iteración, provocando que el método diverja. Para evitar esto, se utiliza un método de relajación para la presión al aplicar el método SIMPLE, con esto, la ecuación para la presión correcta se escribe como

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (B.22)$$

$$0 \leq \alpha_p \leq 1$$

donde  $\alpha_p$  es el factor de relajación, con valor entre 0 y 1.

Cuando la solución tiene algunas inestabilidades, tanto a las velocidades como otras propiedades  $\phi$ , también se les puede aplicar un factor de relajación.

### ***B.2.2 SECUENCIA DE PASOS DEL MÉTODO SIMPLE***

El algoritmo esta dado por la siguiente secuencia de operaciones

1. Se propone un campo de presiones tentativo inicial  $p^*$
2. Se resuelven las ecuaciones (B.4) para obtener las velocidades tentativas  $u^*$ ,  $v^*$  y  $w^*$
3. Se resuelve la ecuación (B.13) para obtener el campo de correcciones de presión  $p'$
4. Se obtiene el nuevo campo de presione  $p$  con la ecuación (B.22)
5. Se calcula el campo de velocidades correcto a partir del campo de velocidades tentativo y del campo de presión corregida  $p'$  con las ecuaciones (B.9)

6. Se resuelven las ecuaciones para los escalares  $\phi$ , si su valor influye en el flujo. De lo contrario, los escalares se calculan hasta que la solución del campo de velocidades halla convergido.
7. Se regresa al paso 2, ahora con  $p^* = p$ , hasta que la solución converja.

# Apéndice C

## C. 0 ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN

Para el desarrollo del tema se considerara la ecuación unidimensional de difusión-convección en estado permanente, la cual en forma conservativa se escribe como

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx}\right) \quad (C.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $\Gamma_{\phi}$  es el coeficiente de difusión.

La notación de una celda y las celdas contiguas se muestra en la Figura C.1.

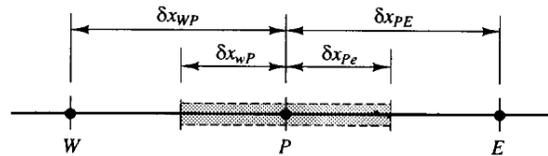


Figura C.1 Diagrama de la celda **P**.

Al integrar la ecuación (C.1) sobre el volumen de control mostrado en la Figura C.1 tenemos

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left(\Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx}\right)_w \quad (C.2)$$

Para el cálculo del flujo convectivo y difusivo requiere conocer  $\rho u \phi$  y  $\Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx}$  en las caras de la celda y debido al uso de una malla decalada, es necesario interpolar para encontrar los valores de estas propiedades entre los nodos. El método de obtención de estos términos da lugar a los llamados esquemas de discretización.

### C.1 ESQUEMA LINEAL O CENTRADO

El esquema centrado adopta un perfil lineal para  $\phi$ , como se muestra en la Figura C.2.

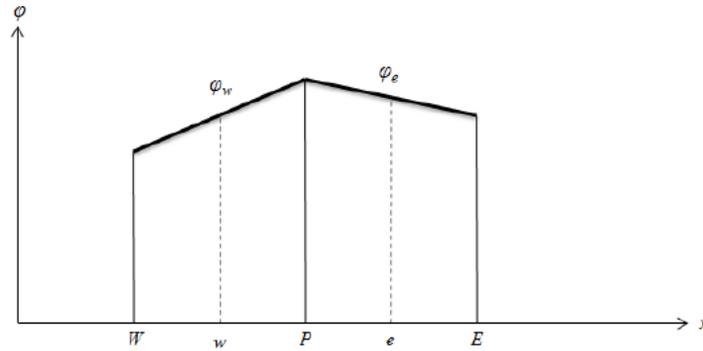


Figura C.2 Perfil del esquema centrado.

Los valores de  $\phi$  en las caras de las celdas se expresan como el promedio de los valores en los nodos vecinos

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad (C.3a)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (C.3b)$$

$$\left(\Gamma_\phi \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \quad (C.4a)$$

$$\left(\Gamma_\phi \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \quad (C.4b)$$

Este esquema presenta una precisión de segundo orden. Sustituyendo las ecuaciones (C.3) y (C.4) en la ecuación (C.2), obtenemos:

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \quad (C.5)$$

Reordenando la ecuación anterior (C.5) queda como

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \tag{C.6}$$

Donde los coeficientes  $a_P$ ,  $a_E$  y  $a_W$  son

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \tag{C.7}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \tag{C.8}$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \tag{C.9}$$

Con  $F = \rho u$  y  $D = \Gamma_\phi / \delta x$ .

La integración de la ecuación unidimensional de continuidad sobre el volumen de control mostrado en la Figura C.1 conduce a que  $F_e = F_w$ . Por lo tanto,  $(F_e - F_w)$  puede ser eliminado de la ecuación (C.9)

Para valores negativos en los coeficientes de la ecuación (C.6) se ha observado que el método se vuelve inestable. La condición límite de estabilidad es  $|F| > 2D$  o  $|Pe| > 2$ , donde  $Pe$  el número de Peclet. Este número adimensional determina la importancia relativa entre los efectos de convección y difusión.

### C.2 ESQUEMA UPWIND

En el esquema upwind la formulación de término difusivo es la misma. Sin embargo, para el término convectivo el valor de  $\phi$  en la cara  $w$  es igual al del valor de  $\phi$  en el nodo aguas arriba, como se observa en la Figura C.3

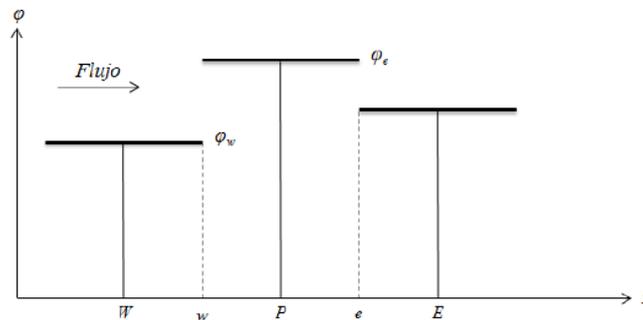


Figura C.3 Perfil del esquema upwind.

Así,

$$\phi_\varepsilon = \begin{cases} \phi_P, & \text{si } F_w \geq 0 \\ \phi_E, & \text{si } F_w < 0 \end{cases} \quad (C.10)$$

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_W, & \text{si } F_w \geq 0 \\ \phi_P, & \text{si } F_w < 0 \end{cases} \quad (C.11)$$

Esto se reescribe como

$$F_\varepsilon \phi_\varepsilon = \phi_P \max(F_\varepsilon, 0) - \phi_E \max(-F_\varepsilon, 0) \quad (C.12)$$

$$F_w \phi_w = \phi_W \max(F_w, 0) - \phi_P \max(-F_w, 0) \quad (C.13)$$

Al sustituir las ecuaciones (C.12) y (C.13) en la ecuación discretizada (C.6), los coeficientes quedan como

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0) \quad (C.14)$$

$$a_E = D_\varepsilon + \max(-F_\varepsilon, 0) \quad (C.15)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_\varepsilon - F_w) \quad (C.16)$$

Por continuidad  $F_\varepsilon = F_w$ , entonces  $(F_\varepsilon - F_w)$  se elimina. A diferencia del caso anterior, en la expresiones (C.14), (C.15) y (C.16) todos los coeficientes  $a_i$  son ahora positivos es decir el sistema se vuelve estable. No obstante, el esquema upwind tiene una precisión del primer orden y puede llevar a mostrar problemas de difusión numérica considerables.

## C.2 ESQUEMA HIBRIDO

Como se menciona anteriormente, el esquema centrado es de segundo orden, pero puede encontrar dificultades cuando  $|F| > 2D$ ; mientras que el esquema upwind puede resolver estas dificultades a pesar de ser solo de primer orden. La combinación de estos dos métodos de discretización lleva a un esquema híbrido con las ventajas de ambos. Este esquema se basa en lo siguiente, si  $|F| \leq 2D$  se utiliza el esquema centrado y si  $|F| > 2D$  se utiliza el esquema upwind. Aplicando lo anterior para obtener el coeficiente  $a_W$  se tiene

$$a_w = \begin{cases} F_w, & \text{si } 2 < Pe_w \\ D_w + F_w/2, & \text{si } -2 \leq Pe_w \leq 2 \\ 0, & \text{si } Pe_w < -2 \end{cases} \quad (C.17)$$

donde  $Pe_w$  es el número de Peclet en la cara  $w$ . La ecuación discretizada resultante se escribe como los coeficientes

$$a_E = \max(F_e, D_e + F_e/2, 0) \quad (C.18)$$

$$a_W = \max(-F_w, D_w + F_w/2, 0) \quad (C.19)$$

$$a_P = a_E + a_W(F_e - F_w) \quad (C.20)$$

### C.2 ESQUEMA EXPONENCIAL

Si se supone que  $\rho u$  y  $\Gamma$  son constantes, la ecuación (C.1) tiene solución analítica. Considerando un intervalo de  $0 < x < L$ , y condiciones de borde  $\phi = \phi_0$  en  $x = 0$  y  $\phi = \phi_L$  en  $x = L$ , entonces la solución es

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{(\rho u x / \Gamma)} - 1}{e^{(\rho u L / \Gamma)} - 1} \quad (C.21)$$

Definiendo al flujo total como

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (C.22)$$

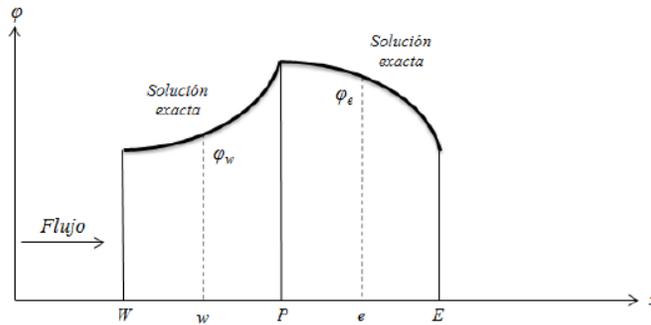
donde el primer término del lado derecho corresponde al flujo advectivo y el segundo al término difusivo. Considerando lo anterior, la ecuación C.1 se puede reescribir como

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (C.23)$$

Al integrar la ecuación (C.23) en el volumen de control de la Figura C.1 se obtiene

$$J_e - J_w = 0 \quad (C.24)$$

Usando la solución exacta (Ecuación (C.21)) como un perfil entre los puntos  $P$  y  $E$ , como se muestra en la Figura C.4, para  $J_s$  y  $J_w$  se obtiene



*Figura C.4 Perfil del esquema exponencial.*

$$J_s = F_s \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{e^{(P\epsilon_s)} - 1} \right) \quad (C.25)$$

$$J_w = F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{e^{(P\epsilon_w)} - 1} \right) \quad (C.26)$$

Sustituyendo la ecuaciones (C.25) y (C.26) en la ecuación (C.24) tenemos

$$F_s \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{e^{(P\epsilon_s)} - 1} \right) - F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{e^{(P\epsilon_w)} - 1} \right) = 0 \quad (C.27)$$

La ecuación discretizada resultante es de la forma

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (C.28)$$

donde

$$a_E = \frac{F_s}{e^{(P\epsilon_s)} - 1} \quad (C.29)$$

$$a_W = \frac{F_w}{e^{(P\epsilon_w)} - 1} \quad (C.30)$$

$$\alpha_p = \alpha_E + \alpha_W + (F_e - F_w) \quad (C.31)$$

#### ***C.4 PROPIEDADES DE LOS ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN***

En teoría, cuando el número de celdas de cálculo son suficientes para capturar todas las variaciones espaciales y temporales en el flujo, los resultados numéricos serán prácticamente iguales a los de la solución exacta de la ecuación de transporte, sin importar el método de diferenciación utilizado. Sin embargo, para cálculos prácticos no es posible utilizar esa cantidad de celdas, por lo tanto, para obtener resultados numéricos físicamente reales es necesario utilizar esquemas de discretización que cumplan con ciertas propiedades fundamentales. Básicamente son tres

- Conservativo
- Acotado
- Transportado

##### ***C.4.1 CONSERVATIVO***

Con la integración de la ecuación de convección-difusión sobre un número finito de volúmenes de control produce un conjunto de ecuaciones discretas de conservación, las cuales involucran flujos de la propiedad transportada  $\phi$  a través de las caras del volumen de control. Para asegurar la conservación de  $\phi$  en todo el dominio, el flujo de  $\phi$  proveniente de un volumen dado y que cruza una cara del mismo, debe ser igual al flujo de  $\phi$  que entrara al próximo volumen de control a través de la misma cara. Para lograr esto, el flujo en las caras debe ser representado de manera coherente entre los volúmenes de control adyacentes.

##### ***C.4.2 ACOTADO***

Un esquema de discretización se considera acotado cuando (en ausencia de fuentes) los valores de la propiedad en los nodos internos están delimitados por los valores en las fronteras. Otro requisito esencial para la acotación, es que todos los coeficientes de las ecuaciones discretizadas deben tener el mismo signo (por lo general, positivo). Físicamente esto implica que un aumento en la variable  $\phi$  en un nodo dará lugar a un aumento de  $\phi$  en los nodos vecinos. Si el esquema de discretización no cumple los requisitos de acotación es posible que la solución no converja.

### C.4.3 TRANSPORTIVIDAD

Esta propiedad se ilustra considerando una fuente constante de  $\phi$  en el punto P, como se muestra en la Figura C.5.

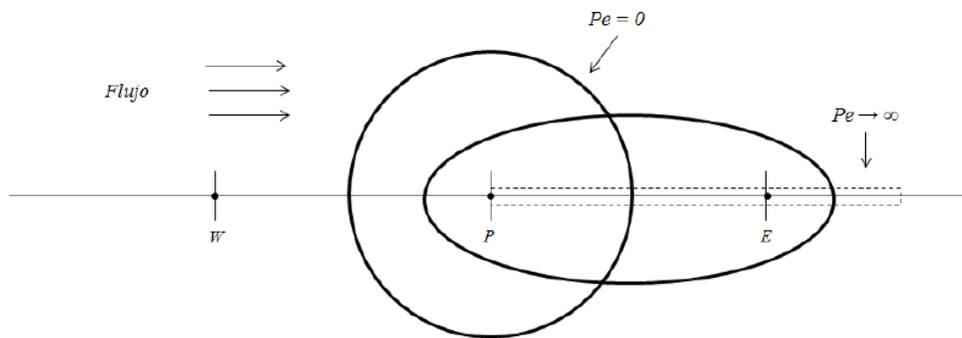


Figura C.5 Distribución de  $\phi$  en la vecindad de una fuente a diferentes números de Peclet.

Como se mencionó anteriormente, el número adimensional de Peclet en la celda se define como una medida de la relación entre las fuerzas convectivas y las fuerzas difusivas.

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x}$$

donde  $\delta x$  es la longitud característica (ancho de la celda). Las líneas en la Figura C.5 indican los contornos de una constante  $\phi$  para diferentes valores de Peclet. Para identificar la influencia del nodo P sobre el nodo E aguas abajo, se considerando dos casos extremos

- Solamente difusión ( $Pe = 0$ )
- Solamente convección ( $Pe \rightarrow \infty$ )

En el caso de difusión pura ( $Pe = 0$ ), el fluido está estancado y los contornos de  $\phi$  constante son círculos concéntricos con centro en P, ya que el proceso de difusión de  $\phi$  es igual en todas las direcciones. En este caso las condiciones en el nodo E son influenciadas por la corriente, en el punto P y también por las condiciones aguas abajo. Dependiendo del  $Pe$  se modifica la forma de los contornos, de circular a elíptica y se desplazan en la dirección del flujo, como se indica en la Figura C.5. Para altos valores de  $Pe$ , el nodo E está fuertemente influenciado por las condiciones en el nodo P y las condiciones en P experimentarían una influencia débil o nula de E. En el caso de convección pura ( $Pe \rightarrow \infty$ ), los contornos elípticos están totalmente extendidos en la dirección del flujo. La propiedad  $\phi$  emitida de la fuente del nodo P es inmediatamente transportada aguas abajo hacia E. Por lo tanto, el valor de  $\phi$  en E únicamente se verá afectado por las condiciones aguas arriba, además, dado que no hay difusión,  $\phi_E$  es igual a  $\phi_P$ . Es muy importante que la relación entre la magnitud del número de Peclet y la direccionalidad, conocida como transportividad, sea verificada en el esquema de discretización.