



Universidad Nacional Autónoma  
de México

UNIVERSIDAD NACIONAL ATÓNOMA DE MEXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL FLUJO BIFÁSICO EN  
UN CANAL ABIERTO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

**CHRISTIAN LAGARZA CORTES**

TUTOR:

**William Vicente y Rodríguez**

2011



Facultad de Ingeniería

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. José Luis Fernández Zayas  
Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz  
Vocal: Dr. Vicente y Rodríguez William  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Martín Salinas Vázquez  
2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Rogelio González Oropeza

Lugar donde se realiza la tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. William Vicente y Rodríguez

---

Firma

# Agradecimientos

---

A mi familia, Estefanía L. Robles, Matteo y a mi hijo que viene en camino, por amarme y cuidarme.

A mis padres Patricia Cortes R., Gustavo Lagarza C. y José Armando Luna R. por todo su cariño y apoyo incondicional.

A mis sobrinos, que espero poder enseñarles muchas cosas.

A José M. Cubos y Jonathan Sánchez por brindarme su amistad y apoyo.

Agradecimiento especial para el Dr. William por ser un excelente profesor y un gran amigo.  
Por su apoyo y confianza.

Agradecimiento especial para el Dr. Martin por su apoyo y consejo para la culminación de este proyecto.

Y a las personas con las que haya compartido momentos importantes a lo largo de mi vida.

## Resumen

## Abstract

<b>Planteamiento</b>	i
<b>Alternativas de Investigación</b>	ii
<b>Nivel de aproximación en CFD</b>	vi
<b>Objetivos</b>	viii

## Capítulo 1. Flujos Multifásicos

1.1 Clasificación	1
1.2 Problemas típicos de flujos multifásicos	2
1.3 Flujos de fluidos inmiscibles	3
1.4 Flujo en canales abiertos	4
1.4.1 Clasificación	6
1.4.2 Número de Reynolds	7
1.4.3 Número de Froude	8

## Capítulo 2. Ecuaciones de gobierno

2.1 Ecuaciones básicas de la Mecánica de fluidos	8
2.1.1 Conservación de masa	10
2.1.2 Conservación de cantidad de movimiento	10
2.2 Ecuaciones de Navier–Stokes para flujo turbulento	12

2.3 Alternativa numérica RANS	13
2.3.1 Promedio de Reynolds	14
2.3.2 Cierre de las ecuaciones	17
2.4 Modelos de turbulencia	17
2.4.1 Modelo de turbulencia $\kappa - \varepsilon$	18
2.4.2 Consideraciones	19

### **Capítulo 3. Método de solución**

3.1 Método de Volúmenes Finitos	20
3.2 Generación de la malla	20
3.2.1 Independencia de la malla	22
3.3 Discretización de las ecuaciones	23
3.3.1 Ecuación general	23
3.3.2 Término temporal	25
3.3.3 Término fuente	25
3.3.4 Término difusivo	25
3.3.5 Término convectivo	26
3.3.6 Ecuación general discretizada	27
3.4 Resolución del sistema de ecuaciones	28

### **Capítulo 4. Método multifásico**

4.1 Marco de aproximación	30
4.1.1 Marco Lagrangiano	31
4.1.2 marco Euleriano	31

4.2 Métodos para superficie libre	32
4.2.1 Algoritmo VOF	32
4.2.1.1 Desventajas	33
4.3 Algoritmo IPSA (Inter-Phase Slip Algorithm)	34
4.3.1 Relación entre la fases (Interface)	35
4.3.2 Ecuaciones de gobierno	36
4.3.2.1 Coeficiente difusivo dentro de la fase	38
4.3.2.2 Coeficiente difusivo de la fase	39
4.3.2.3 Término fuente en la interface	39
4.3.2.4 Concepto de la propiedad $\phi^{int}$	39
4.3.2.5 Coeficiente de transferencia en la interface $f_{jk}$	40
4.3.2.6 Transferencia de masa en la interface	41
4.3.2.7 Consideraciones especiales para la interface	41
4.4 Resolución del sistema de ecuaciones	42
4.4.1 Acoplamiento Velocidad – Presión en IPSA	42
4.4.2 Procedimiento	43
4.5 Consideraciones en el modelo de turbulencia	43
<b>Capítulo 5. Configuración y detalles numéricos</b>	
5.1 Plan Integral Hídrico de Tabasco (PIHT)	44
5.1.1 Implementación de modelos	45
5.2 Prototipo Río Carrizal	45

5.2.1 Localización	46
5.3 Modelo físico	47
5.4 Modelo numérico	48
5.4.1 Configuración del canal	48
5.4.2 Casos analizados	50
5.4.3 Puntos de monitores	51
5.5 Características de la malla	52
5.6 Detalles numéricos	53

## **Capítulo 6. Análisis de resultados**

6.1 Flujo en el canal	54
6.2 Simulación C1	55
6.2.1 Contornos de presión - velocidad	55
6.2.2 Energía cinética turbulenta	58
6.2.3 Puntos de monitoreo	59
6.2.4 Superficie libre	60
6.3 Simulación C2	62
6.3.1 Contornos de presión - velocidad	62
6.3.2 Energía cinética turbulenta	64
6.3.3 Puntos de monitoreo	64
6.3.4 Superficie libre	65

## **Capítulo 7. Conclusiones y recomendaciones**

7.1 Conclusiones	66
------------------	----

7.2 Recomendaciones	69
<b>Referencias</b>	72
<b>Apéndice A. Modelos de turbulencia</b>	74
<b>Apéndice B. Método SIMPLE</b>	86
<b>Apéndice C. Esquemas de discretización</b>	90

---

## Planteamiento

En el contexto de la mecánica de fluidos, los flujos multifásicos se consideran básicamente como un sistema de dos o más fases que fluyen simultáneamente pudiéndose mezclar a una escala por encima del nivel molecular.

Los flujos multifásicos existen en diversas formas y bajo un amplio espectro de escalas de longitud, tanto en sistemas naturales, como artificiales. Un caso particular dentro de los flujos multifásico es el flujo con superficie libre, el cual se caracteriza por la presencia de una interface bien definida correspondiente a la consideración de fluidos inmiscibles. Por otro lado, si además se considera que el movimiento se debe principalmente a la gravedad, el flujo con superficie libre se conoce como flujo en un canal abierto.

En ingeniería e hidráulica, hay varias situaciones relevantes de interés práctico relacionadas con flujos a superficie libre, es decir, ríos, lagos, zonas inundadas, canales o vertederos, son ejemplos de este fenómeno. El estudio de estos flujos se complica principalmente por el cambio dinámico en la interface debido al movimiento del fluido. Además, las discontinuidades existentes en las propiedades del fluido, la condiciones del campo de flujo cerca de la interface y la interacción entre los fluidos por efectos turbulentos introducen complejidades adicionales a este fenómeno.

La dinámica de este tipo de flujos y la cantidad de fenómenos involucrados al interior de este hacen necesario el desarrollo de técnicas que permitan predecir de forma adecuada la posición de la interface y tener un mejor conocimiento de los procesos clave involucrados en el desarrollo del flujo con superficie libre.

---

## Alternativas de investigación

El flujo en canales abiertos resulta una materia de estudio muy atractiva y se ve reflejado en la variedad de técnicas desarrolladas para su tratamiento, ya sean experimentales o numéricas. Dentro del campo de la hidráulica, se contempla dos métodos

- Método experimental (Modelos físicos)
- Método numérico (Modelos numéricos)

Cualquiera de los dos métodos, en su aplicación, tendrá sus ventajas y sus limitaciones, esto dependerá de la complejidad del problema, las variables que intervengan y las fronteras a tratar.

Recientemente y cada vez con mayor frecuencia, se hace uso de ambos métodos ya que uno proporciona mejor información respecto al otro dependiendo de zonas específicas en una región a estudiar. Así, en conjunto, es posible validar y optimizar los resultados obtenidos.

### Método experimental

La investigación a través de métodos experimentales, se caracteriza por el uso de prototipos y modelos hidráulicos (Figura 1.6) que simulan sistemas u objetos reales. El primero, se refiere al sistema original del flujo bajo análisis y el segundo, es una representación a escala del prototipo. Es importante mencionar que tanto el modelo como el prototipo deben cumplir con ciertas condiciones matemáticas de semejanza geométrica, así como cinemática y dinámica, para su aplicación.

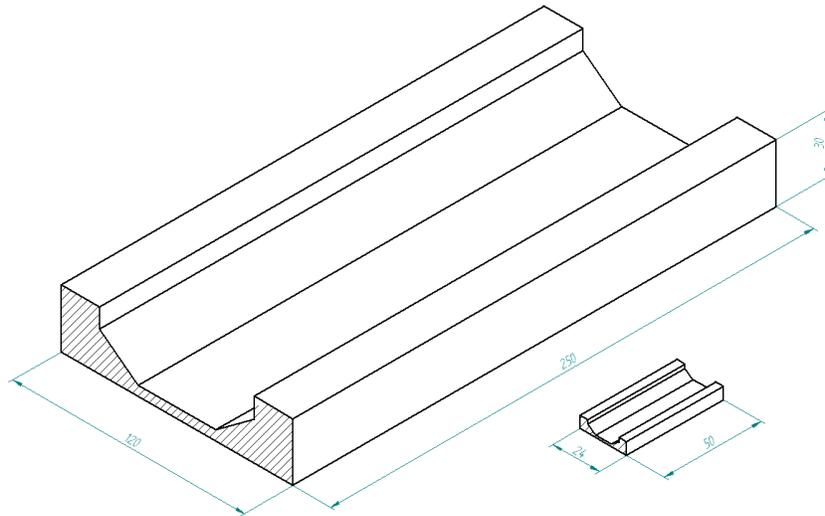


Figura 1.6 Esquema de un prototipo y su modelo a escala 1:5 en [cm].

El uso de técnicas avanzadas de modelación física, aunadas al desarrollo de instrumentos de medición de campo y equipos generadores de fenómenos a escala, permite predecir con alto grado de certidumbre lo que puede ocurrir en el prototipo. Esto justifica la amplia utilización de los modelos a escala en la ingeniería.

Sin embargo, la densidad espacial de la información recabada con mediciones de este tipo, no es suficiente. Para obtener una representación adecuada de los procesos espacio-temporales característicos del flujo es necesario tomar un número considerable de mediciones en el campo fluido, y esto lleva su tiempo, sobre el cual los mismos procesos pueden cambiar. La experimentación generalmente es costosa y no siempre se pueden realizar las mediciones de manera directa, además de no ser siempre factible el escalamiento. Lo anterior, obliga recurrir a métodos numéricos de los cuales se puede obtener suficiente información para el estudio de las estructuras e inestabilidades presentes en un flujo tridimensional turbulento, dado su fácil procesamiento y manipulación.

### Método Numérico

En mecánica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes representan un modelo matemático capaz de describir el movimiento tridimensional de flujos viscosos e

incompresibles. Este conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales carece de solución analítica, lo cual hace necesario el uso de métodos numéricos para obtener soluciones.

La Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, por sus siglas en inglés), se compone una serie de métodos numéricos mediante los que es posible obtener soluciones de diversos fenómenos de flujos, incluyendo los flujos con superficie libre. Las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven de manera iterativa por medio de una computadora y se conoce como simulación numérica.

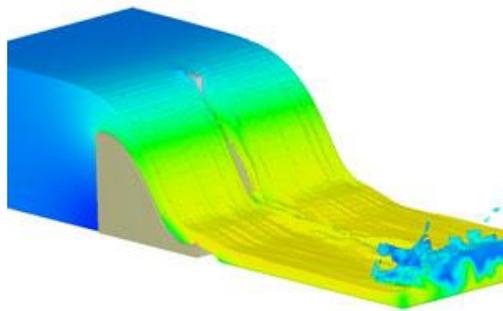


Figura 1.7 Modelo computacional de un vertedor.

Una simulación numérica implica convertir el sistema bajo análisis en un entorno virtual que será modelado. Sistemas completos como vertedores, presas, canales, etc. pueden ser estudiados en un equipo de cómputo, antes de ser construidos (Figura 1.7).

Los resultados obtenidos de los modelos matemáticos estarán íntimamente relacionados a los siguientes factores (algunos de los más relevantes):

- Exactitud en los datos iniciales
- Consideraciones y simplificaciones
- Nivel de aproximación
- Esquemas de discretización

Los niveles de aproximación se abordan en el siguiente punto y los esquemas de discretización se tratan en el Apéndice C.

Antes de continuar, es importante aclarar tres conceptos. Se trata de la consistencia, estabilidad y convergencia de un modelo. El primer concepto, se da cuando al tender a cero el tamaño de la malla y el intervalo de tiempo las ecuaciones discretizadas resueltas tienen las mismas soluciones que las ecuaciones diferenciales. La estabilidad se da si al variar los parámetros dependientes de dichas variables permanecen acotadas. Por último, cuando un modelo cumple con las dos condiciones anteriores es convergente [4].

Aunque esta alternativa es más atractiva que el uso de modelos a escala, los modelos numéricos siempre requieren validación, lo cual confirma que ambos métodos de análisis son complementarios.

---

## Nivel de aproximación en CFD

Como se menciona, el aumento en la potencia de las computadoras, tanto en la velocidad y la memoria, en años recientes ha incrementado el uso herramientas numéricas para la solución de las ecuaciones que describen la hidrodinámica de diversos fenómenos de flujo, incluyendo el flujo en un canal abierto. Sin embargo, existen diferentes niveles de proximidad a la solución de dichas ecuaciones. Se tienen tres niveles de aproximación para realizar una simulación numérica

- DNS (Direct Numerical Simulation)
- LES (Large Eddy Simulation)
- RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

La alternativa DNS resuelve de manera directa las ecuaciones instantáneas de movimiento. Se utilizan mallas densas con un número de nodos del orden de  $1 \times 10^9$  [5]. A estas escalas la frecuencia de las fluctuaciones es de 10 [kHz]. Los requerimientos computacionales y el tiempo de cómputo, hacen que en un futuro previsible, las simulaciones numéricas directas están fuera del alcance para aplicaciones industriales.

Las otras dos alternativas, LES y RANS, resultan dos aproximaciones menos costosas y permiten la descripción de flujos turbulentos en tiempos de computo aceptables. La alternativa LES puede describirse como un filtrado, en el cual consiste en simular numéricamente las grandes escalas turbulentas de movimiento, modelando el efecto de las de menor escala que no pueden ser resueltas con una determinada malla. En esta alterativa se introduce términos de tensión que representan la interacción entre ambas escalas de movimiento y tienen un efecto disipativo.

En las aplicaciones ingenieriles, generalmente, no se requiere a detalle las condiciones del flujo, sino solo algunas propiedades. Para aplicaciones industriales se pueden lograr resultados adecuados a partir de las ecuaciones de Reynolds, que se obtienen mediante el promedio temporal de las de Navier-Stokes. Esta alterativa se conoce como RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). El promedio temporal de las variables genera términos de esfuerzos, conocidos como esfuerzos de Reynolds. El cálculo de estas tensiones puede realizarse mediante la estimación de una viscosidad turbulenta, por lo que se necesita un modelo de turbulencia. Los modelos de turbulencia propuestos para este tipo de problemas se presentan más adelante.

Debido a las características de la DNS y LES, se ha decidido que la opción más viable para esta trabajo es la alternativa RANS, el cual usa el código numérico de Dinámica de Fluidos Computacionales, PHOENICS (Parabolic Hyperbolic or Eliptic Numerical Integration Code Series).

---

## Objetivos

En este trabajo se simuló numéricamente un flujo tridimensional con superficie libre en estado permanente mediante el uso del modelo bifásico IPSA (Inter-Phase Slip Algorithm, por sus siglas en inglés) con el objetivo de determinar si el algoritmo puede predecir de forma adecuada la posición de la superficie libre, así como la hidrodinámica del flujo. Lo novedoso de este modelo es considerar al flujo con superficie libre como un flujo bifásico, hecho que sale de la amplia consideración de tratarlo como flujo de una fase.

En el modelo bifásico IPSA, incorporado en el software PHOENICS de CFD, se resuelven las ecuaciones de gobierno para cada una de las fases. El método RANS se utilizó para dar solución a las ecuaciones en términos de valores medios.

Para la discretización del dominio computacional se utilizó el método de volúmenes finitos en una malla cartesiana y para el tratamiento de la malla se utilizó el método de celdas cortadas (Cut-Cell Method). Un modelo de turbulencia del tipo  $k-\epsilon$  es usado para simular el efecto de la turbulencia en el flujo.

## FLUJO MULTIFÁSICO

Water is the vehicle of the nature.

Leonardo Da Vinci

Los flujos multifásicos se pueden tomar simplemente como un flujo de fluidos compuesto de dos o más fases distintas que simultáneamente se mezclan con un cierto nivel de separación entre las fases, es decir, a una escala por encima del nivel molecular.

### 1.1 Clasificación

En general, los flujos multifásicos existen en diferentes formas. Al considerándolos como flujos de dos fases pueden ser clasificados, de acuerdo a su estado, como [1]:

- Gas – Sólido
- Líquido – Sólido
- Gas – Líquido

El flujo gas-sólido, identificado también como flujos de gas y partículas sólidas, se refiere al movimiento de sólidos en suspensión o partículas dentro de una fase gaseosa. Dependiendo de la densidad del número de partículas en el flujo, estas pueden tener efectos significativos en el desarrollo del mismo, es decir, pueden desde actuar como marcadores que no contribuyen en la alteración del flujo de gas, hasta presentar colisiones entre las partículas que alterarán el movimiento del flujo. Este tipo de flujos de gas y partículas se pueden denominar como flujos dispersos (Figura 1.1a) en los que las partículas sólidas constituyen la fase dispersa y el gas constituye la fase continua.



Figura 1.1 Flujo: a) Disperso, b) Mixto y c) Separado.

Los flujos de sólido-líquidos consisten en el transporte de partículas sólidas en el flujo de un líquido. También conocidos como flujos de lodo, pueden ser clasificados como flujos dispersos en los que el líquido constituye la fase continua. En comparación con el flujo anterior, el movimiento de estos flujos se debe principalmente a los gradientes de presión, ya que la relación entre la densidad de las fases es normalmente baja y el arrastre entre las fases es significativamente más alta en esos flujos.

Los flujos gas-líquido asumen diferentes configuraciones, las cuales se pueden clasificar clase de acuerdo al nivel de interacción entre las fases. La primera configuración de este tipo de flujos se conoce como flujos dispersos. Como ejemplo de dichos flujos se tiene el movimiento de las burbujas en un flujo de líquido o el movimiento de gotas de líquido en un gas.

Las otras dos configuraciones gas-liquido presentan estructuras complejas, éstos se conocen como flujos mixtos (Figura 1.1b) o de transición y los flujos separados (Figura 1.1c). Los flujos mixtos denotan una transición entre los flujos dispersos y los flujos separados y se caracteriza por la presencia ambos flujos. El proceso de transición se produce por factores como la interacción entre las burbujas debido a la coalescencia y ruptura de las mismas, o por cualquier proceso de cambio de fase. Por otro lado, los flujos separados se caracterizan por la presencia de una interface bien definida, dado que los fluidos son inmiscibles.

## 1.2 Problemas típicos de flujos multifásicos

Muchos de los problemas prácticos que involucran flujos multifásicos son ampliamente reconocidos en la industria moderna, así como en nuestro cuerpo y el entorno en que

vivimos. Ejemplos de estos flujos, basados en la clasificación de flujos de dos fases, tenemos:

- Flujo gas-sólido: tormentas de arena, volcanes, avalanchas, niebla, etc.
- Flujo líquido-sólido: arrastre de sedimentos, flujo sanguíneo, flotación, etc.
- Flujo de gas-líquido: ríos, olas, flujo sanguíneo, calderas, etc.

Lo anterior proporciona una visión general de la amplia gama de fenómenos de flujo y aplicaciones que se encuentran en la naturaleza y la industria. En todos estos sistemas, la complejidad de dichos flujos es única en contraste con los flujos monofásicos, cuando una o ambas fases se vuelven turbulentas, la interacción entre los vórtices y la interface, así como los intercambios de masa entre las fases introduce complejidades adicionales al fenómeno del flujo.

### 1.3 Flujos de fluidos inmiscibles

Un caso particular de los flujos multifásicos son los fluidos inmiscibles, los cuales se caracterizan por una interface bien definida entre dos fluidos, conocida como superficie libre. Esta frontera móvil impide la mezcla de las fases que constituyen el flujo. Para efectos prácticos, los flujos multifásicos inmiscibles pueden ser tratados como una mezcla de dos fases continuas. Las regiones gas y líquido se pueden tratar por separado, y luego juntas en la interface a través de adecuadas condiciones de cinemática y dinámica [1]. La consideración anterior es la base del modelo utilizado, las ecuaciones de movimiento se resuelven para cada una de las fases y su interacción se resuelve a través de relaciones constitutivas que también cierran el sistema de ecuaciones.

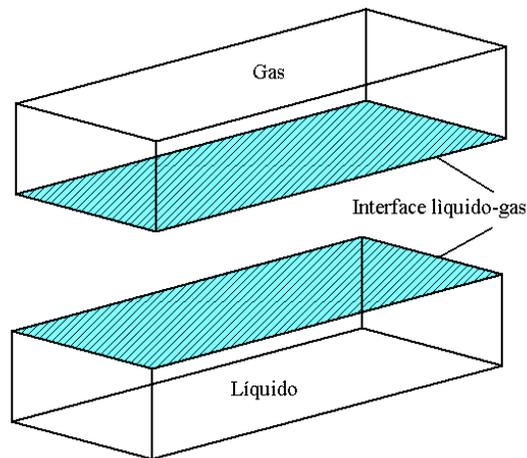


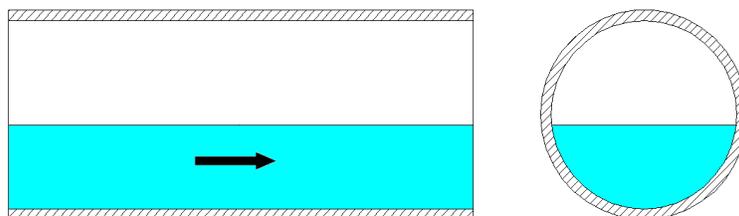
Figura 1.2 Esquema de un flujo con una interface.

Como se mencionó, el caso de estudio es el flujo en un canal y la inmiscibilidad es una de las principales características entre las fases que lo componen (interface aire-agua), Figura 1.2. La otra condición característica el flujo es el efecto de la gravedad sobre el movimiento del fluido.

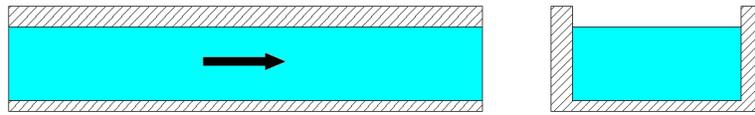
#### 1.4 Flujo en canales abiertos

Un flujo que se caracteriza por la presencia de una interface aire-agua y además, su movimiento es regido por el efecto de la gravedad, se conoce como flujo en canal abierto.

Por su origen, un canal abierto pueden clasificarse como natural o artificial. Ejemplos de flujo en canales son los ríos, canales artificiales, corrientes fluviales, propagación de mareas, drenajes, entre otros (Figura 1.3).



a)



b)

**Figura 1.3 Flujos en canales artificiales: a) conducto y b) canal con sección transversal rectangular.**

El movimiento de un fluido a superficie libre se ve afectado por las mismas fuerzas que intervienen el flujo dentro de un tubo, siendo estas [2]:

- La fuerza de gravedad, como la más importante en el movimiento.
- La fuerza de resistencia ocasionada en las fronteras rígidas por la fricción y la naturaleza casi siempre turbulenta del flujo.
- La fuerza producida por la presión que se ejerce sobre las fronteras del canal, sobre todo en las zonas donde la geometría cambia.
- La fuerza debida a la viscosidad del liquido, que se vuelve de poca importancia si el flujo es turbulento.

A estas podemos agregar de manera excepcional dos más, la tensión superficial, como consecuencia directa de la superficie libre y las debidas ocasionalmente al arrastre de sedimentos.

En el flujo en canales abiertos también es importante considerar parámetros geométricos, ya que cambios en la sección transversal, la profundidad o en la pendiente del canal se verán reflejados en cambios en la posición de la interface y por tanto en el desarrollo del flujo.

La aparente simplicidad de la interface aire-agua es inexistente debido a que los cambios espaciales y temporales presentes en esta complican cualquier tipo de análisis, experimental o numérico.

### 1.4.1 Clasificación

El flujo en canales abiertos se puede clasificar, básicamente, respecto a dos parámetros: el tiempo y el espacio [4]. Respecto al tiempo se clasifican como

- Permanente, cuando la profundidad no cambia con el tiempo
- Temporal, cuando la profundidad cambia con el tiempo

Con respecto al espacio, un canal se clasifica dependiendo de la variación de la profundidad a lo largo del canal (Figura 1.6)

- Flujo uniforme (profundidad y pendiente constante)
- Flujo variado

En un flujo uniforme la profundidad y la velocidad permanecen constantes. Las condiciones de este tipo de flujo se dan en canales rectos y largos, con pendientes y secciones transversales constantes. Si la pendiente del canal cambia o si hay una obstrucción de la corriente, entonces la profundidad cambia también, y se conoce como flujo variado [3]. El flujo variado se clasifica en

- Gradualmente variada (**FGV**)
- Rápidamente variado (**FRV**)

Para un flujo gradualmente variado el cambio de la profundidad cambia de manera progresiva, a diferencia del rápidamente variado donde el cambio en la profundidad es abrupto en tramos relativamente cortos.

Generalmente, un flujo uniforme está separado del rápidamente variado por una región de movimiento gradualmente variado.

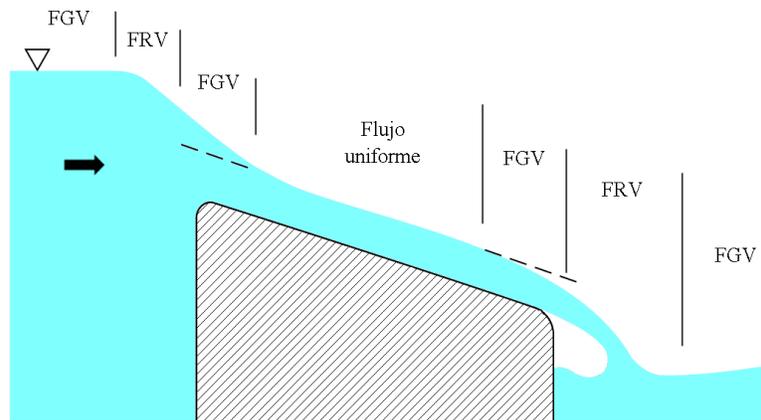


Figura 1.6 Clasificación del flujo en canales abiertos en diferentes regímenes.

#### 1.4.2 Numero de Reynolds ( $Re$ )

Para determinar el régimen del flujo se utiliza el numero adimensional  $Re$ , que expresa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. La ecuación del numero de Reynolds se escribe como

$$Re = \frac{\rho u R_h}{\mu}$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $u$  es la velocidad,  $R_h$  es el radio hidráulico (longitud característica del flujo) y  $\mu$  la viscosidad dinámica del fluido.

Dependiendo del valor del  $Re$  el flujo es laminar o turbulento. Esto se formula de mejor manera definiendo un número de Reynolds crítico ( $Re_c$ )

- $Re < Re_c$ , el flujo es laminar
- $Re > Re_c$ , el flujo es turbulento

En el flujo laminar las fuerzas viscosa son predominantes sobre las fuerzas inerciales y el fluido fluye de manera ordenada, las capas de fluido se deslizan de manera adyacente y no existe mezcla significativa. Para el flujo turbulento las fuerzas inerciales son las

predominantes y el movimiento del fluido es aleatorio en el tiempo, desordenado y tridimensional.

### 1.4.3 Numero de Froude ( $Fr$ )

Una segunda clasificación útil de los flujos en canales abiertos se determina del valor del número adimensional de Forude, que es la relación entre la velocidad del flujo y la fuerza de gravedad. El  $Fr$  se define como

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gl}}$$

donde  $l$  es la profundidad del agua en el canal (calado). El flujo se comporta de manera distinta en los siguientes tres regímenes

$$Fr < 1.0 \quad \text{Flujo subcrítico o lento}$$

$$Fr = 1.0 \quad \text{Flujo crítico}$$

$$Fr > 1.0 \quad \text{Flujo Super crítico o rápido}$$

Para flujos con  $Fr > 1.0$  se tiene una velocidad relativamente alta con un calado bajo y para  $Fr < 1.0$  la velocidad es relativamente baja con un calado alto.

## ECUACIONES DE GOBIERNO

All the mathematical sciences are founded on relations between physical laws and laws of numbers, so that the aim of exact science is to reduce the problems of nature to the determination of quantities by operations with numbers.

James Clerk Maxwell, 1856

En este capítulo se presentan las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido, así como el proceso de promediado de las ecuaciones (RANS) para lograr su solución y el modelo de cierre de las mismas.

### 2.1 Ecuaciones Básicas de la Mecánica de Fluidos

La ley de conservación es un concepto fundamental detrás de las leyes de la mecánica de fluidos. Aunque esta idea tiene una lógica simple el entendimiento de la misma se puede complicar por su contenido.

Una ley de conservación se expresa como sigue: el cambio de la cantidad total de una variable  $\phi$  dentro de un dominio dado, es igual al balance entre la cantidad de la variable  $\phi$  que entra y sale del dominio considerado, más la contribución de las fuentes de generación de dicha variable. De lo anterior se observa que la tasa de cambio de la variable  $\phi$  durante la evolución del flujo muestra al propio flujo como un sistema en movimiento y en continuo cambio [6].

Aunque se puede escribir la ley de conservación de una variable indefinida  $\phi$ , se debe mencionar que no todas las variables del flujo obedecen una ley de conservación. Propiedades importantes en un dominio dado, como la presión, temperatura, entropía por ejemplo; no obedecen las leyes de conservación. Esto no significa que se pueda escribir una ecuación para estas cantidades, sólo significa que esta ecuación no será en forma de una ley de conservación.

Las leyes de conservación que describen totalmente la evolución de los flujos de fluidos se define a través de tres cantidades básicas:

- Masa
- Cantidad de movimiento
- Energía

Lo anterior, representa un total de cinco ecuaciones, debido a que la cantidad de movimiento está definido como el producto de la densidad por la velocidad, que es un vector con tres componentes en el espacio. Estas condiciones determinan el comportamiento de un fluido sin ningún tipo de ley dinámica adicional. De hecho, la única información adicional necesaria sería especificar la naturaleza del fluido (por ejemplo, si es fluido incompresible, gas ideal, entre otros), así como condiciones iniciales y de frontera.

Si se considera un flujo incompresible y newtoniano, como es el caso del problema bajo análisis, se supone entonces un flujo aproximadamente isotérmico, eliminando así la necesidad de una ecuación de conservación de energía [7]. Por lo anterior, el movimiento del fluido se regirá únicamente por las ecuaciones:

- Conservación de masa
- Conservación de cantidad de movimiento

En un sistema de coordenadas Cartesiano, con un vector de velocidad  $\mathbf{u}$  de componentes  $u$ ,  $v$  y  $w$ , las ecuaciones gobernantes se expresan de la siguiente forma

### 2.1.1 Conservación de masa

La ley de conservación de masa es una declaración general independiente de la naturaleza del fluido o de las fuerzas que actúan sobre éste. Expresa el hecho de que en un sistema fluido, la masa no puede desaparecer del sistema, ni ser creada.

La ecuación de conservación de masa en forma integral se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dt}(m) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \vec{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dA = 0 \quad (2.1)$$

y en forma diferencial, la ecuación se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\vec{u}$  y  $\rho$ , son la velocidad y la densidad del fluido. Esta ecuación también es llamada ecuación de continuidad.

### 2.1.2 Conservación de cantidad de movimiento

La conservación de cantidad de movimiento se basa en otro principio básico de la física, la segunda Ley de Newton. En ella se establece que la variación de cantidad de movimiento es causada por la fuerza neta que actúa sobre un elemento de fluido.

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento en forma integral se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = \sum F = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \mathbf{u} dV + \int_{SC} \vec{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) dA \quad (2.3)$$

y en su forma diferencial, la ecuación se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (2.4)$$

donde  $\vec{\tau}$ , es el tensor de esfuerzos viscosos y  $\mathbf{f}$ , representa las fuerzas de cuerpo o superficie (la gravedad, es la única fuerza de cuerpo considerad en este trabajo). La ecuación (2.4) se conoce como ecuación de movimiento, es una ecuación vectorial y la ecuación para cada una de sus componentes tiene ocho términos. Escribiendo las tres componentes en forma explícita se logra apreciar las dificultades matemáticas.

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2.6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones son validas para cualquier fluido en movimiento, estando caracterizadas en términos de sus esfuerzos viscosos. Cabe mencionar que los tres términos convectivos del primer miembro no son lineales, lo que complica su análisis.

La ecuación (2.4) no estará lista para utilizarse hasta escribir los esfuerzos viscosos en función de las componentes de velocidad. Para tal efecto, se hace uso de la ecuación (2.8), conocida como ley de deformación para fluidos Newtonianos [8]:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \quad (2.8)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad,  $\lambda$  es el segundo coeficiente de viscosidad y  $\delta_{ij}$ , es la delta de Kronecker. Al sustituir la ecuación (2.8) en (2.4), se obtienen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right] + \rho\mathbf{f} \quad (2.9)$$

El resultado es la ecuación diferencial de cantidad de movimiento para un fluido viscoso.

Si se asume un fluido con densidad constante, la  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  se hace cero desde la ecuación de continuidad y el término  $\lambda$  desaparece de la ley de Newton. Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación (2.9) no se simplifica en gran medida. Sin embargo, al considerar una

viscosidad constante, algunos términos desaparecen y la ecuación se simplifica [8]. Así, se obtiene la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas para flujos incompresibles, con densidad y viscosidad constantes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \quad (2.10)$$

donde el primer término del lado izquierdo de la ecuación (2.10), representa la velocidad de cambio de cantidad de movimiento por unidad de volumen respecto del tiempo, el segundo término representa el cambio de cantidad de movimiento resultante del movimiento convectivo (es decir, del propio movimiento del fluido). Del lado derecho de la ecuación, el primer término es la fuerza resultante de la diferencial de presiones, el segundo término combina las fuerzas viscosas resultantes del movimiento del fluido y el producido por las fluctuaciones turbulentas de las partículas del fluido. El tercer término representará fuerzas de cuerpo o superficie involucradas en el flujo. En el trabajo realizado únicamente se contempla únicamente la fuerza de gravedad, responsable del movimiento del flujo en canales abiertos.

## 2.2 Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo turbulento

El parámetro adimensional primario que determina el régimen de un flujo es el número de Reynolds y representa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}}$$

A bajos números de Reynolds el flujo se considera laminar, las capas de fluido se deslizan de manera adyacente y en forma ordenada. Para altos números de Reynolds el flujo se desarrolla de forma caótica.

Las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes, describe completamente cualquier fenómeno de flujo, tanto laminar como turbulento. Un flujo laminar se logra resolver analíticamente para casos simples, con algunas consideraciones. En casos complejos, la

solución se obtiene a través de técnicas numéricas. Para flujos turbulentos, las ecuaciones siguen siendo válidas, pero a consecuencia de la fluctuación aleatoria e irregular de las propiedades no se puede realizar una descripción completa del flujo [5].

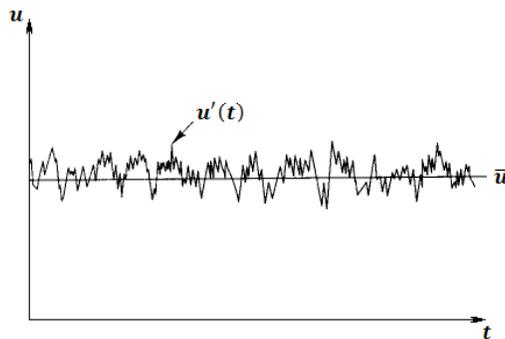


Figura 2.1. Comportamiento fluctuante de la velocidad en un punto de medición:  $\bar{u}$  es la velocidad temporal media y  $u'$  es la fluctuación de velocidad.

Así, los parámetros fundamentales como son la presión y la velocidad que fluctúan a consecuencia de los términos de advección no lineales, no se pueden escribir de manera determinista, es decir, no es posible escribir una solución que capture la rapidez de las variaciones espaciales y temporales asociadas a la turbulencia.

Una alternativa para la resolución del problema consiste en sustituir los valores instantáneos de las ecuaciones por valores temporales promedio (Figura 2.1).

### 2.3 Alternativa numérica RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

El promediado de las ecuaciones instantáneas de conservación (RANS) es una alternativa para la simulación numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes. Con este método se promedian todas las fluctuaciones de las escalas temporales y se resuelven en términos de los valores medios de las propiedades del fluido.

#### 2.3.1 Promedio de Reynolds

Primero, se define el promedio temporal  $\bar{\phi}$  de una propiedad del flujo, de la siguiente forma

$$\bar{\phi} = \int_0^{\Delta t} \phi(t) dt \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) resulta adecuada para un flujo permanente, mientras que para flujos en estado transitorio

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(t) \quad (2.12)$$

en este caso, el promedio estadístico de una propiedad en el tiempo  $t$  se toma del promedio de valores instantáneos de un número  $N$  de mediciones del fenómeno en experimentos con las mismas condiciones. Cabe mencionar, que el valor de  $N$  debe ser suficiente para eliminar los efectos de las fluctuaciones [9].

La propiedad de un flujo  $\phi$  dependiente del tiempo, puede ser escrita como la suma del valor del promedio y su fluctuación  $\phi(t) = \bar{\phi} + \phi'(t)$ . En lo sucesivo no se indicará explícitamente la dependencia del tiempo para estas cantidades, se escribirá como

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.13)$$

Antes de obtener las ecuaciones promediadas del flujo, se presentan algunas propiedades de los promedios temporales utilizadas:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\phi}} &= \bar{\phi} \\ \overline{\phi\bar{\phi}} &= \bar{\phi}\bar{\phi} \\ \bar{\phi'} &= \bar{\phi} \\ \overline{\phi + \phi'} &= \bar{\phi} + \bar{\phi'} \\ \bar{\phi'} &= 0 \\ \overline{\phi\phi'} &= \bar{\phi}\bar{\phi'} + \overline{\phi'\phi'} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Expresando las propiedades instantáneas de un flujo con densidad constante,  $\mathbf{u}$  (con sus componentes  $u$ ,  $v$  y  $w$ ) y  $p$ , en la forma de valores promedio y su fluctuación, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p'\end{aligned}\tag{2.15}$$

Aplicando lo anterior sobre las ecuaciones de Navier-Stokes obtenemos las ecuaciones RANS. En la ecuación de continuidad, si se sustituyen los valores instantáneos por los valores promedio (2.15) se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.16}$$

promediando en el tiempo la ecuación (2.16), la ecuación de continuidad promediada (2.17) queda como:

$$\begin{aligned}\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} &= 0 \\ \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} &= \overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z}} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 0 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 0 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + 0 \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0\end{aligned}\tag{2.17}$$

Un procedimiento similar es llevado a cabo en la ecuación de movimiento. Para la componente  $x$ , la ecuación promediada y dividida entre la densidad se escribe como sigue

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u}) - \nabla \cdot (\bar{u}'\bar{u}') \quad (2.18)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Repitiendo este proceso para las dos componentes restantes se obtiene

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{u}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2(\bar{v}) - \nabla \cdot (\bar{v}'\bar{u}') \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{u}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2(\bar{w}) - \nabla \cdot (\bar{w}'\bar{u}') \quad (2.20)$$

En un sistema cartesiano, al conjunto de ecuaciones (2.18) - (2.20), se les conocen como ecuaciones de Reynolds, donde se observa que dichas ecuaciones presentan los mismos términos que la ecuación de movimiento con la adición de tres nuevos términos en el segundo miembro de cada ecuación. Si se desarrollan tales términos se obtienen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u}) - \left( \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'\bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'\bar{w}'}{\partial z} \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{u}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2(\bar{v}) - \left( \frac{\partial \bar{u}'\bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'\bar{w}'}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{u}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2(\bar{w}) - \left( \frac{\partial \bar{u}'\bar{w}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'\bar{w}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right) \quad (2.23)$$

Los seis términos que resultan del promediado, involucran productos de fluctuaciones de velocidad que constituyen transferencia de cantidad de movimiento, debido a las mismas fluctuaciones.

Al multiplicar los productos de las fluctuaciones turbulentas de velocidad por la densidad, se tiene dimensiones de fuerza sobre área, que se conocen como esfuerzos de Reynolds, con tres esfuerzos normales y tres cortantes.

$$\tau_{xx} = \rho \bar{u}'^2 \quad \tau_{xy} = \rho \bar{u}'\bar{v}' \quad \tau_{xz} = \rho \bar{u}'\bar{w}'$$

$$\tau_{yy} = \rho \bar{v}'^2 \quad \tau_{xy} = \rho \bar{u}'\bar{v}' \quad \tau_{yz} = \rho \bar{v}'\bar{w}'$$

$$\tau_{xx} = \rho \overline{u'w'} \quad \tau_{xy} = \rho \overline{v'w'} \quad \tau_{yy} = \rho \overline{w'^2} \quad (2.24)$$

En flujos turbulentos, los esfuerzos normales  $-\rho \overline{u'^2}$ ,  $-\rho \overline{v'^2}$  y  $-\rho \overline{w'^2}$  siempre son diferentes de cero, ya que contienen las fluctuaciones de la velocidad al cuadrado. Los esfuerzos cortantes  $-\rho \overline{u'v'}$ ,  $-\rho \overline{u'w'}$  y  $-\rho \overline{v'w'}$  están asociados con correlaciones entre diferentes componentes de la velocidad. Si  $u'$  y  $v'$  fueran fluctuaciones estadísticamente independientes el promediado temporal de su producto  $\overline{u'v'}$  sería igual a cero. Sin embargo, estos esfuerzos cortantes son diferentes de cero y usualmente más grandes que los esfuerzos viscosos [7].

### 2.3.2 Cierre de las ecuaciones

Las ecuaciones instantáneas de continuidad y Navier-Stokes forman un conjunto cerrado de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$ . Al no poderse resolver de manera directa, o por lo menos, no a un bajo costo computacional, se utiliza el promediado temporal de las ecuaciones de gobierno. En el proceso de promediado, realizado a las ecuaciones instantáneas de movimiento, se pierden todos los detalles relativos al flujo contenidas en las fluctuaciones instantáneas y como resultado se obtienen seis incógnitas (esfuerzos de Reynolds) adicionales en las ecuaciones de movimiento promediadas [5].

La principal tarea de un modelo de turbulencia es tratar de representar los esfuerzos extra a través de formulas. La complejidad de la turbulencia, por lo general, no permite el uso de expresiones simples para predecir estos esfuerzos.

### 2.4 Modelos de turbulencia

Los modelos de turbulencia desarrollan procedimientos de cálculo para el término de los esfuerzos de Reynolds, tales expresiones permiten el cierre del sistema de ecuaciones promediadas. Las fluctuaciones turbulentas no se resuelven a detalle, sino una aproximación del efecto de estas sobre el flujo medio.

La aproximación de estos términos se divide en dos categorías:

- Viscosidad turbulenta
- Ecuación de transporte

### 2.4.1 Modelo de turbulencia $\kappa$ - $\epsilon$

El modelo más popular de viscosidad turbulenta de dos ecuaciones es el modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ , en el se resuelven ecuaciones de transporte para la energía cinética turbulenta y la velocidad de disipación debida a la acción de las fuerzas viscosas. La viscosidad turbulenta queda definida como:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (2.25)$$

donde  $C_\mu$  es una constante adimensional [5].

Un modelo estándar usa las siguientes ecuaciones de transporte para  $\kappa$  y  $\epsilon$

$$\frac{\partial(\rho\kappa)}{\partial t} + \text{div}(\rho\kappa\mathbf{u}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \text{grad}(\kappa) \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ji} - \rho\epsilon \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho\epsilon\mathbf{u}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \text{grad} \epsilon \right] + C_{1\epsilon} \frac{\kappa}{\epsilon} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ji} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{\kappa} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones contienen cinco constantes ajustables  $C_\mu$ ,  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $C_{1\epsilon}$  y  $C_{2\epsilon}$ . Este y otros modelos se abordan con mayor detalle en el Apéndice A. El modelo de turbulencia estándar  $\kappa$ - $\epsilon$  es utilizado en este trabajo para el cierre de las ecuaciones.

### 2.4.3 Consideraciones para el modelo

El uso de un modelo de turbulencia adecuado en una aplicación es muy importante, en particular para la simulación de flujo en ríos. La selección de un modelo específico puede

justificarse cuando el problema está bien definido a fin de reflejar la situación real en el campo. Por lo tanto, a menudo la representación exacta de las condiciones de frontera puede ser más importante que la elección del modelo de turbulencia [9].

## MÉTODO DE SOLUCIÓN

*The numerical precision is the very soul of science.*

*Sir D'Arcy Wentworth Thompson, 1917.*

En este capítulo se presenta el método de resolución numérica de las ecuaciones recién presentadas, el Método de Volúmenes Finitos. El carácter conservativo del método (al ser un método integral sobre volúmenes de control) y su mayor sencillez conceptual lo hace uno de los más extendidos para el cálculo de flujo de fluidos.

### **3.1 Método de Volúmenes Finitos (Finite Volume Method)**

El FVM es una técnica mediante la cual se discretiza la formulación integral de las leyes de conservación directamente en el espacio físico. Este método se compone de tres pasos.

- Generación de la malla
- Discretización de las ecuaciones
- Resolución de las ecuaciones

### 3.2 Generación de la malla

El primer paso consiste en dividir el dominio computacional en pequeños volúmenes de control  $P$ , esto genera una malla, en el espacio físico, compuesta de celdas contiguas. Cada celda  $P$  de esta malla, no se traslapa con las celdas vecinas. Así, el volumen total de fluido resulta ser igual a la suma de los volúmenes de control considerados (Figura 3.1).

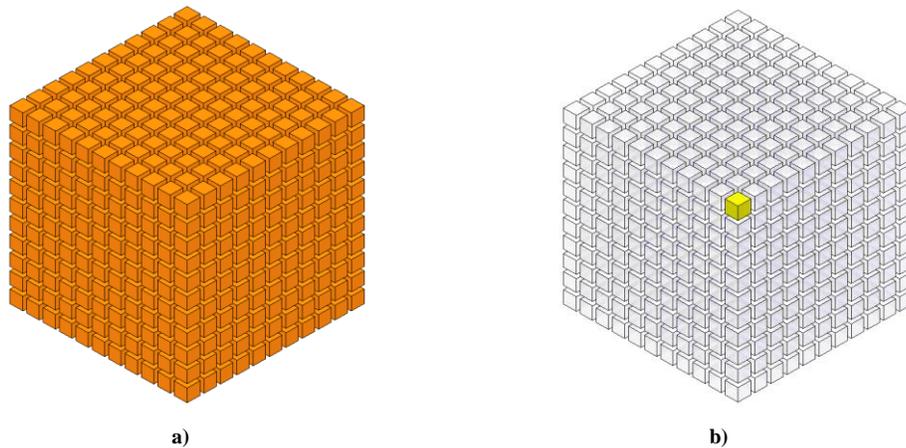


Figura 3.1 Representación del sistema: a) Discretización del espacio y b) Volumen de control (celda).

La malla generada en el espacio fluido, pueden ser estructuradas o no estructuradas, según las celdas puedan o no considerarse en filas y columnas; y las primeras pueden ser cartesianas o curvilíneas. En este trabajo, se considerada una malla cartesiana tridimensional, donde cada celda  $P$  tiene seis celdas vecinas.

$x$ : *west*  $\rightarrow$  *east*

$y$ : *south*  $\rightarrow$  *north*

$z$ : *low*  $\rightarrow$  *high*

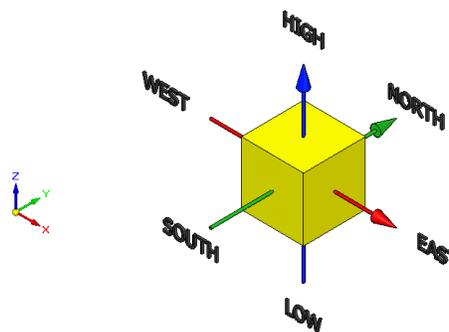


Figura 3.2 Diagrama esquemático del Punto  $P$  de una celda y la dirección de sus vecinas.

La notación de una celda y las celdas contiguas se muestra en la Figura 3.2. Dada una celda  $P$ , las celdas inmediatas se notarán según las iniciales de los puntos cardinales (en ingles)

para las direcciones  $x$  e  $y$ , y en la dirección  $z$ , high y low. Las caras de la celda se anotan con la misma nomenclatura, pero con letras minúsculas (Figura 3.3a). Las distancias entre los nodos  $W$  y  $P$ , y entre los nodos  $P$  y  $E$ , están definidas como  $\delta x_{WP}$  y  $\delta x_{PE}$ , respectivamente. De manera similar para las distancias entre la cara  $w$  y la celda  $P$ , y entre la celda  $P$  y la cara  $e$ , se definen como  $\delta x_{wP}$  y  $\delta x_{Pe}$ , respectivamente (Figura 3.3b). Para representar las distancias entre las celdas de cualquier otra dirección, solo cambiarán los subíndices. El tiempo también se discretiza en intervalos temporales, la celda  $P$  en el paso temporal anterior se denota como  $T$ .

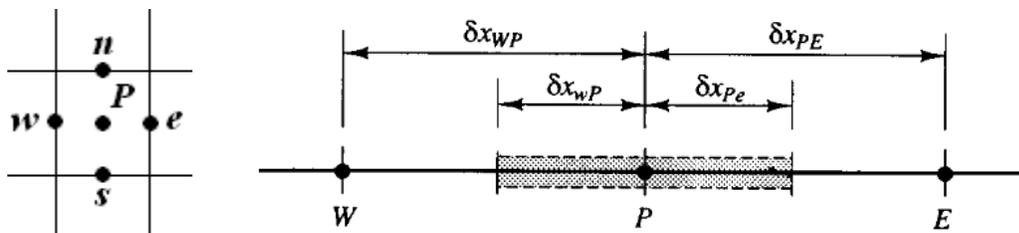


Figura 3.3 Diagrama de la celda  $P$ : a) Notación de las celdas y b) Distancia entre celdas [5].

Anterior a la discretización, es necesario agregar los valores discretos de las variables dependientes en un punto concreto de la celda. Para esto se tiene dos tipos de arreglos

- Malla decalada
- Malla no decalada

La primera supone que las variables escalares (como la presión, entalpía o fracción másica) se almacenan o definen en el centro de la celda, mientras que las componentes de velocidad correspondientes a la celda se encuentran desplazadas a las caras de la misma. En comparación con mallas no decaladas (en las que las componentes de velocidad se almacenan en el centro de la celda) este arreglo tiene dos ventajas. Primero, la velocidad está disponible directamente para calcular los flujos a través de la celda, lo que evita la interpolación y segundo, dado que la velocidad se encuentra gobernada (entre otros factores) por las presiones entre nodos consecutivos, este arreglo evita soluciones donde la velocidad y la presión en una misma celda estén desacopladas.

### 3.2.1 Independencia de la malla

El análisis de independencia de la malla, es uno de los pasos importante para la obtención de la solución numérica de las ecuaciones. La aplicación de una malla muy robusta, a fenómenos de flujo donde las escalas espaciales y temporales son muy pequeñas puede llevar a obtener resultados incorrectos. Por lo anterior, la malla utilizada en el dominio computacional debe ser suficiente para capturar las escalas donde los fenómenos de interés estén presentes; y con esto, lograr resultados consistentes sin importar el tamaño de la malla.

### 3.3 Discretización de las ecuaciones

El proceso clave del método de volúmenes finitos es la integración de las ecuaciones de gobierno en cada volumen de control  $P$ . Este procedimiento da como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas, cuya principal propiedad es que la solución obtenida satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación consideradas.

#### 3.3.1 Ecuación general

Para facilitar la presentación del método de resolución se hará uso de una ecuación general de transporte, la cual representa las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y del modelo de turbulencia [10]. La ecuación se escribe como:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma_{\phi}\text{grad}(\phi)) + S_{\phi} \quad (3.1)$$

donde  $\phi$ , es la variable del dependiente,  $\Gamma_{\phi}$  es el coeficiente de difusivo y  $S_{\phi}$  es el termino fuente, representando el resto de los términos que aparecen en las ecuaciones.

Para obtener la ecuación de continuidad  $\phi=1$ ,  $\Gamma_{\phi}=0$  y  $S_{\phi}=0$ . Sustituyendo en la ecuación (3.1) se tiene:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

Si se toma  $\phi=\mathbf{u}$ ,  $\Gamma_\phi=\mu$  y  $S_\phi=-\nabla p + \rho\mathbf{f}$  y se sustituye en la ecuación (3.1), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad}(\mathbf{u})) + \rho\mathbf{f} \quad (3.3)$$

Tomando en cuenta lo anterior, se comienza por establecer que la idea básica del los volúmenes finitos parte de la forma integral de la ecuación general. Si se aplica la integral de volumen a la ecuación general de transporte

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{VC} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{VC} \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad}(\phi)) dV + \int_{VC} S_\phi dV \quad (3.4)$$

Las integrales de volumen en los términos convectivo y difusivo se reescribe como integrales de superficie mediante el uso del teorema de la divergencia de Gauss. Este teorema relaciona integrales de volumen con integrales de superficie

$$\int_{VC} \text{div}(\mathbf{a}) dV = \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}) dS \quad (3.5)$$

Aplicando el teorema de Gauss a los términos convectivo y difusivo a la ecuación (3.4) la ecuación queda como

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA = \int_{VC} \mathbf{n} \cdot (\Gamma_\phi \text{grad}(\phi)) dV + \int_{VC} S_\phi dV \quad (3.6)$$

De esta manera resulta más claro el significado del flujo de la variable  $\phi$  por convección y por difusión hacia o desde el elemento o volumen de control. Cuando se estudian problemas en estado permanente, el primer término desaparece. En el caso de estudios dependientes del tiempo, se integra una vez más con respecto al tiempo en un pequeño intervalo  $\Delta t$ . La ecuación general de transporte se escribe como sigue

$$\int_{\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV dt + \int_{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA dt =$$

$$- \int_{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\Gamma_{\phi} grad(\phi)) dV dt + \int_{\Delta t} \int_{VC} S_{\phi} dV dt \quad (3.7)$$

En la integración, se considera a  $\phi$  constante en toda la celda y en todo el paso temporal. A continuación, se integran cada uno de los términos de la ecuación general considerando un volumen unidimensional.

### 3.3.2 Término temporal

La integración de término temporal en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV dt &= \frac{1}{\Delta t} \int_{VC} \int_{\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dV \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{VC} \left[ \frac{\rho_P \phi_P - \rho_T \phi_T}{\Delta t} \Delta t \right] dV &= \frac{V_P}{\Delta t} (\rho_P \phi_P - \rho_T \phi_T) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $V_P$  es el volumen de la celda.

### 3.3.3 Término fuente

El término fuente se supondrá lineal, lo que ayuda a la convergencia del método iterativo de solución. La aparente restricción de la formulación lineal del término, queda sin efecto debido a que  $C$  y  $V$  pueden ser variables.

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{VC} S_{\phi} dV dt = \frac{1}{\Delta t} V_P C (V - \phi_P) \Delta t = V_P C (V - \phi_P) \quad (3.9)$$

### 3.3.4 Término difusivo

Para el tratamiento del término difusivo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\Gamma_{\phi} \text{grad}(\phi)) dV dt &= \frac{1}{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\Gamma_{\phi} \text{grad}(\phi)) dV \Delta t \\ &= \sum (\Gamma_{\phi} \text{grad}(\phi) \mathbf{n} \cdot A) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sobre el eje  $x$

$$\int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\Gamma_{\phi} \text{grad}(\phi)) dV = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} A_e - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} A_w \quad (3.11)$$

Si el coeficiente de difusión  $\Gamma_{\phi}$  no es constante es necesaria la interpolación para encontrar el valor en la cara. Esta interpolación puede ser aritmética o armónica. La segunda es conveniente para asegura la continuidad del flujo difusivo a través de la cara cuando el coeficiente varía rápidamente

- Aritmética

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \frac{\Gamma_P \delta x_{eE} + \Gamma_E \delta x_{Pe}}{\delta x_{PE}} \\ \Gamma_w &= \frac{\Gamma_W \delta x_{Ww} + \Gamma_P \delta x_{wP}}{\delta x_{WP}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

- Armónica

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \frac{\delta x_{PE}}{\frac{\delta x_{eE}}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_{Pe}}{\Gamma_E}} \\ \Gamma_w &= \frac{\delta x_{WP}}{\frac{\delta x_{Ww}}{\Gamma_W} + \frac{\delta x_{wP}}{\Gamma_P}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3.5 Terminio convectivo

Como en el caso del término difusivo, la integral de volumen se transforma en una integral de superficie extendida a las seis caras de la celda.

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA dt = \int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \sum (\rho \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} A) \quad (3.14)$$

Para el eje  $x$ ,

$$\int_{SC} \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \rho_e \phi_e u_e A_e - \rho_w \phi_w u_w A_w \quad (3.15)$$

En el cálculo del término convectivo se requiere conocer  $\phi_e$  y  $\phi_w$ , así como las componentes de velocidad en las caras de la celda. Debido al uso de una malla decalada, es necesario interpolar para encontrar los valores de estas propiedades entre los nodos. El método de obtención  $\phi$  da lugar a los llamados esquemas de discretización. En el Apéndice B se presenta una breve reseña de algunos esquemas de discretización y sus propiedades.

Utilizando el esquema upwind, la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned} \rho_e \phi_e u_e A &= [\rho_P \phi_P(u_e) - \rho_E \phi_E(-u_e)] A_e \\ \rho_w \phi_w u_w A &= [\rho_W \phi_W(u_w) - \rho_P \phi_P(-u_w)] A_w \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3.6 Ecuación general discretizada

Si se reescribe la ecuación general para el caso unidimensional con los términos discretizados, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{V_P}{\Delta t} (\rho_P \phi_P - \rho_T \phi_T) + [\rho_P \phi_P(u_e) - \rho_E \phi_E(-u_e)] A_e + [\rho_W \phi_W(u_w) - \rho_P \phi_P(-u_w)] A_w \\ = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} A_e - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} A_w + V_P C (V - \phi_P) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agrupando los términos, queda:

$$\begin{aligned} \phi_P \left[ \frac{V_P \rho_P}{\Delta t} + \rho_P(u_e)A_e + \rho_P(u_w)A_w + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + V_P C \right] &= \phi_W \left[ \rho_W(u_w)A_w + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right] \\ &+ \phi_E \left[ \rho_E(u_e)A_e + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right] + \phi_T \left[ \frac{V_P \rho_T}{\Delta t} \right] + V_P C V \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si se introducen los coeficientes  $a$  para denotar los multiplicadores de las  $\phi$ , se obtiene una ecuación algebraica que relaciona los valores de  $\phi$  para un determinado grupo de puntos nodales próximos.

$$\phi_P(a_P + V_P C) = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_T \phi_T + V_P C V \quad (3.19)$$

Esta ecuación algebraica expresa el principio de conservación de  $\phi$  en el volumen finito, de la misma manera que la ecuación diferencial lo expresa para un volumen infinitesimal. Extendiendo la ecuación a un caso tridimensional, toma la forma

$$a_P \phi_P = \sum_{i,I} a_i \phi_I + a_T \phi_T + V_P C V \quad ; i = E, W, N, S, H, L \quad (3.20)$$

Donde el subíndice  $I$  representa las celdas vecinas,  $i$  la cara entre las celdas  $P$  e  $I$ ,  $T$  el valor correspondiente al paso temporal anterior y  $V_P C V$  el término fuente.

La última ecuación se aplica en cada celda del dominio, para cada  $\phi$  y para cada paso temporal  $\Delta t$ , por lo que se tiene un sistema de ecuaciones lineales (dado que los coeficientes  $a$  pueden depender, directa o indirectamente de  $\phi$ , el sistema es realmente pseudo-lineal).

### 3.4 Resolución del sistema de ecuaciones

La ecuación (3.20), representa la ecuación general discretizada para cualquier variable dependiente  $\phi$ . Sin embargo, en el cálculo de las velocidades a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se tiene el inconveniente de que la presión, cuyo gradiente aparece en el término fuente (Ecuación 3.3), no tiene una ecuación propia para calcularla. Una solución es transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión. Los

algoritmos de la familia SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), se basan en este procedimiento. El algoritmo utilizado en esta tesis para resolver el problema de acoplamiento velocidad-presión es el método SIMPLE.

El proceso de solución del sistema de ecuaciones es iterativo. En general, durante éste, las ecuaciones del sistema no se cumplen; el balance entre la parte izquierda y derecha de la ecuación se denomina residuo. La convergencia del proceso iterativo se da cuando los residuos disminuyen. Para procurar acelerar esta convergencia, se utiliza un método de relajación de algunas de las variables dependientes y propiedades. El criterio de convergencia utilizado para detener el proceso iterativo para un paso temporal dado y pasar al siguiente es tal que, para cada variable, la suma de los valores absolutos de los residuos en todo el dominio sea menor que un determinado porcentaje de un valor de referencia.

En el Apéndice C se muestra procedimiento del algoritmo SIMPLE de forma completa.

## MÉTODO MULTIFÁSICO

### **IPSA (Inter-Phase Slip Algorithm)**

Con la intención de hacer una mejor descripción del modelo numérico se presenta este capítulo. En la primera parte se muestran el marco de referencia del modelo, así como otros modelos para superficie libre y el modelo utilizado. Enseguida, se presentan las ecuaciones de conservación para cada una de las fases presentes en el flujo y los parámetros necesarios para la predicción de la interface.

#### **4.1 Marco de Aproximación**

En la predicción detallada de fenómenos de flujo multifásico, se ha intensificado el uso de ecuaciones y modelos matemáticos, teniendo especial atención en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes que rigen el movimiento de prácticamente cualquier fluido.

La complejidad matemática inherente en el estudio de este tipo de flujos radica en la existencia de dos fluidos en diferentes fases. Por lo anterior, para el tratamiento de flujos con fases múltiples es necesario adoptar estrategias adecuadas de modelado, donde básicamente, se tienen dos marcos de aproximación.

Desde la perspectiva de la Dinámica de Fluidos Computacional, los modelos aplicados habitualmente en el tratamiento flujos multifásicos son [1]:

- Modelos de trayectoria (Marco Lagrangiano)
- Modelos de dos fluidos (Marco Euleriano)

### 4.1.1 Marco Lagrangiano

Para los modelos de trayectoria, considerando un sistema de flujo donde hay distintas entidades pequeñas como partículas sólidas finitas, gotas de líquido o burbujas de gas (fase dispersa) distribuidas en el volumen de un medio portador (fase continua), el movimiento de la fase dispersa transportada se determina mediante el seguimiento del movimiento de cada partícula o un conjunto de partículas representativas (Figura 4.1a). El flujo alrededor de cada una de las partículas se ven afectado por el arrastre, la flotación y otras fuerzas que podrían actuar en forma significativa y alterar la trayectoria del flujo de estas partículas. Además, la transferencia de calor y, en algunos casos, el intercambio de masa debido al cambio de fase también puede influir en la trayectoria de la partícula.

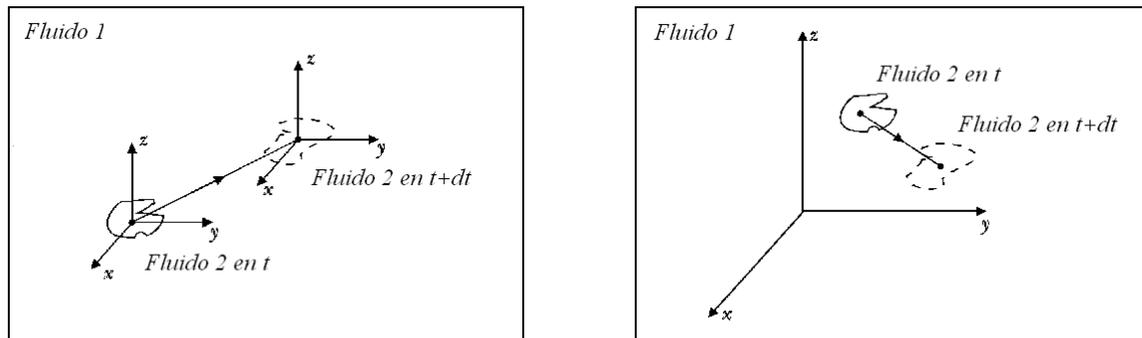


Figura 4.1 Marcos de estudio para flujos multifásicos: a) Lagrangiano y b) Euleriano.

### 4.1.2 Marco Euleriano

Los modelos de dos fluidos o modelos Eulerianos tratan la fase dispersa, que es transportada, como una fase continua que interactúa con el medio portador. Este enfoque deja de lado el carácter discreto de la fase dispersa, aproximando los efectos sobre el medio continuo (Figura 4.1b), como otro líquido que actúa en la fase continua en el sistema de flujo. Al considerar dos fases continuas se desarrollan y resuelven ecuaciones de conservación para cada una de las fases [1].

Dentro de este marco de estudio se encuentra el método de aproximación utilizado para la predicción de la interface en el canal, es decir, cada una de las fases presentes en el sistema, el agua y al aire, se tratan como una fase continua.

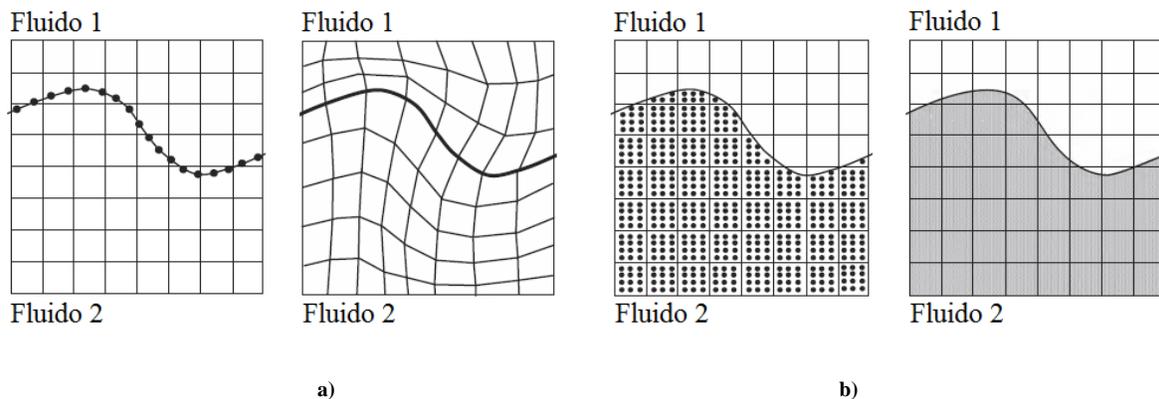
Antes de presentar las ecuaciones y algunas características del método considerado se mencionan dos categorías en las que se encuentran los modelos típicos de aproximación para la superficie libre, así como el algoritmo más utilizado y algunos de los problemas en su aplicación, con la intención de justificar el método utilizado.

## 4.2 Métodos para Superficie Libre

En un marco Euleriano arbitrario los modelos para superficie libre se clasifican en

- Métodos de superficie (Interface Tracking)
- Métodos de volumen (Interface Capturing)

Una representación de ambas aproximaciones se ilustra en la Figura 4.1.



**Figura 4.2 Representación del comportamiento de la interface: a) Métodos de superficie y b) Métodos de volumen**

Para los métodos de superficie, la interface se rastrea explícitamente mediante el uso de puntos marcadores o conectando la superficie a una malla que se deforma con la interfaz (Figura 4.2a). Para métodos de volumen (Figura 4.1b), los fluidos en cada lado de la interface son marcados mediante partículas de masa despreciable o una función indicador.

### 4.2.1 Algoritmo VOF

Dentro de los métodos de volumen se encuentra la aproximación numérica más utilizada en el estudio de flujo con superficie libre, el algoritmo de volumen de fluido o VOF (Volume of fluid). El método se basa en un indicador de función escalar  $C$  que determina la fracción de fluido en cada celda del dominio, con valores entre 0 y 1, es decir

$C = 0$	<i>celda vacia de fluido</i>	
$0 \leq C \leq 1$	<i>celda con fraccion de fluido</i>	
$C = 1$	<i>celda llena de fluido</i>	

Si conocemos la cantidad de fluido o líquido en cada celda, es posible localizar la interface, así como determinar la pendiente y curvatura de la superficie. Las interfaces son fáciles de localizar, se encuentran en las celdas parcialmente llenas de líquido o entre las celdas llenas y vacías de líquido. Las pendientes y curvaturas se calculan mediante el uso de las fracciones de volumen de líquido en las células vecinas y así se obtiene la posición de fluido una celda en particular.

Para calcular la evolución temporal de la superficie es necesario una técnica que permita la evolución natural de la de función escalar  $C$  a través de la malla. La ecuación básica cinemática es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

Por otra parte, se deben aplicar condiciones de frontera apropiadas en la interface para cumplir condiciones de incompresibilidad y esfuerzo cortante igual a cero. La referencia [11] puede ser consultada para conocer la obra original de esta técnica.

#### 4.2.1.1 Desventajas del algoritmo VOF

Aunque esta aproximación ha funcionado bien en un gran número de aplicaciones, su solución presenta algunas desventajas. Una desventaja se presenta en el cálculo de los

nuevos valores de  $C$  donde se puede dar que  $C < 0$  o  $C > 1$ . Lo anterior, se previene parcialmente mediante la aplicación de límites, pero aun con esto  $C$  pueden exceder los límites. En el método original esto se pretende solucionar al truncar  $C$ . Sin embargo, el efecto de esto se ve reflejado en la pérdida o ganancia masa [12]. Otra desventaja del algoritmo VOF es que pequeños cuerpos de agua pueden desprenderse de la superficie libre, causando un espray no físico del líquido sobre la superficie libre (también llamado flotsam y jetsam). Más detalles se encuentran en [11], [13] y [14].

Situaciones como las antes mencionadas motivan al uso de nuevas alternativas que mejoren los modelos y algoritmos de aproximación desarrollados en las últimas décadas.

En la siguiente sección se presentan el modelo de solución, IPSA (Inter-phase Slip Algorithm), como una alternativa para el estudio del fenómeno de superficie libre, en particular para flujo en ríos o canales.

### **4.3 Algoritmo IPSA (Inter-Phase Slip Algorithm)**

El algoritmo de deslizamiento en la interface esta implementado en el código de simulación numérica PHOENICS y se diseño para dar solución a flujos multifásicos, particularmente de dos fases. En el método se consideran dos conjuntos de ecuaciones, uno para una fase ligera y otro para una fase densa. Para el caso de estudio (canal) se considera a la fase ligera como aire y la fase densa como agua.

La predicción del método involucra el cálculo de las tres componentes de velocidad ( $u^k$ ,  $v^k$ ,  $w^k$ ) para cada una de las fases y posiblemente la temperatura, la concentración y el tamaño de la partícula [15]. Las características del método en el procedimiento de solución son:

- Marco Euleriano-Euleriano en una malla fija
- Fracción volumétrica,  $r^k$ , representa la proporción de volumen de espacio ocupado por la fase  $k$

$r^k = 1$	<i>celda llena de fluido 1</i>	
$0 \leq r^k \leq 1$	<i>celda con fraccion de fluido 1</i>	
$r^k = 0$	<i>celda llena de fluido 1</i>	

- Las fracciones volumétricas en todas las celdas suman la unidad, es decir, los fluidos llenan todo el espacio y la sumatoria de la fracción volumétrica de cada fluido presente es uno.

$$\sum_{k=2} r^k = 1 \quad (4.2)$$

En un flujo bifásico como es el caso de un canal abierto (agua y aire), en la interface o superficie libre se debe cumplir:

$$r^1 + r^2 = 1 \quad (4.3)$$

Cada una de las fases ocupa sólo una parte del espacio y es determinado a partir de la fracción volumétrica de la fase en la celda. Si la fracción volumétrica de cualquier fase valiera 1.0, la ecuación de esa fase se reduce a la forma monofásica

#### 4.3.1 Relación entre las fase (Interface)

Se considera que cada fase tiene sus propias componentes de velocidad y en la interface se relacionan por la transferencia de momento en la misma, ya sea, por arrastre, como en una gota o fricción sobre una superficie. Para cada fase se tienen temperaturas, entalpías, y fracciones másicas (especie química). Las temperaturas,  $T^k$ , y concentración de especies químicas,  $C^k$ , se encuentran relacionadas por la transferencia de calor y transferencia de masa en la interface, respectivamente. Cada fase puede tener su propia presión.

Las fases se pueden caracterizar por un tamaño de partícula, como el diámetro de gotas o de burbujas. También, se pueden caracterizar por el espesor de una película de fluido o el área

de una superficie, los cuales se verán afectados por la transferencia de masa, coalescencia o separación en y entre las partículas.

En el método IPSA se consideran las ecuaciones presentadas en la sección 4.3.1., las cuales, son básicamente las de Navier-Stokes y al ser resueltas permiten obtener los valores de las variables  $r^k$ ,  $u^k$ ,  $v^k$ ,  $w^k$ ,  $T^k$  y  $C^k$ , entre otras. Por otro lado, estas ecuaciones contienen expresiones matemáticas de las tasas de los procesos de transporte en la interface. Dichas expresiones, conocidas como ecuaciones constitutivas, son a menudo empíricas y provienen principalmente de la experimentación.

Las ecuaciones que describen el estado de cada fase cumplen con lo siguiente

- El tratamiento entre las fase en las ecuaciones es imparcial
- Los términos transitorios, convectivo y difusivo contienen una factor de fracción de volumen adecuada (upwind o centrado, según sea necesario)
- Las relaciones entre las fases (masa, cantidad de movimiento y transferencia de calor) se introducen a través del término fuente en la interface
- Las fases pueden intercambiar masa y otras propiedades

Dado que las variables se encuentran fuertemente ligadas en la interface se utiliza la técnica numérica de convergencia, PEA, con el propósito de prevenir la desaceleración en la convergencia.

### 4.3.2 Ecuaciones de Gobierno

Las ecuaciones del modelo Euleriano-Euleriano (liquido-gas) son esencialmente similares a la ecuación general introducida en el capítulo anterior, pero con dos modificaciones

- La fracción volumétrica de la fase  $r^k$
- Términos fuente extra

La variable genérica  $\phi^k$  que define la propiedad del fluido  $k$ , aparece acompañada de la fracción volumétrica  $r^k$  en los términos temporal, convectivo y difusivo para tener en cuenta que el fluido en cuestión ocupa solo una fracción del volumen físico disponible; y los términos fuente, que representan el intercambio de masa y propiedades entre ambas fases.

Si  $\phi^k$  es la propiedad en una fase, entonces  $\phi^j$  es la propiedad homologa en la otra fase, es decir,

$$r^k = \text{fraccion volemetrica del fluido } k$$

$$r^j = \text{fraccion volemetrica del fluido } j$$

$$\mathbf{u}^k = \text{vector de velocidad del fluido } k$$

$$\mathbf{u}^j = \text{vector de velocidad del fluido } j$$

La ecuación para la fracción volumétrica es similar a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho^k r^k)}{\partial t} + \text{div}(\rho^k r^k \mathbf{u}^k) - \text{div}(\Gamma_{r,k} \text{grad}(r^k)) = m_{jk} \quad (4.4)$$

donde  $\rho^k$  es la densidad del fluido  $k$ ,  $\mathbf{u}^k$  es el vector velocidad del fluido  $k$ ,  $\Gamma_{r,k}$  es el coeficiente de difusión y  $m_{kj}$  es la transferencia de masa del fluido  $j$  a la fluido  $k$  por unidad de volumen en  $[kg/m^3 \cdot s]$ .

Esta ecuación es similar a la ecuación de continuidad, con las siguientes diferencias, la aparición de  $r^k$ , que se reseña arriba y la aparición de un término difusivo para  $r_k$ . Estrictamente, la masa o el volumen que ocupa una fase no se difunde normalmente contra su gradiente de manera aleatoria, de la misma forma que lo hace la cantidad de movimiento. Sin embargo, si la ecuación se promedia en el tiempo, este término puede representar el cierre tipo gradiente de la correlación entre la fluctuación de la velocidad y la fluctuación de la fracción volumétrica que aparece al promediar temporalmente el término convectivo.

En el termino fuente, la suma de  $m_{jk}$  para todos los fluidos es cero, pues la masa que sale de una fase es recibida por otra. En caso de que solo existan dos fases,  $k$  y  $j$ , se cumple  $m_{jk} = -m_{kj}$  [16]. Por lo tanto, la sumatoria para los fluidos considerados es igual a cero.

$$\sum_{k=1}^{k=2} \left( \frac{\partial(\rho^k r^k)}{\partial t} + \text{div}(\rho^k r^k \mathbf{u}^k) - \text{div}(\Gamma_{r^k} \text{grad}(r^k)) \right) = 0 \quad (4.5)$$

La ecuación para cualquier otra propiedad conservada  $\phi^k$  del fluido  $k$ , se escribe como:

$$\frac{\partial(\rho^k r^k \phi^k)}{\partial t} + \nabla(\rho^k r^k \phi^k \mathbf{u}^k) - \nabla(\Gamma_{r^k} \phi^k \nabla(r^k)) - \nabla(\Gamma_{\phi^k} r^k \nabla(\phi^k)) = S_{\phi^k} + S_{IP} \quad (4.6)$$

donde  $\Gamma_{\phi^k}$  es el coeficiente de difusión de la propiedad conservada,  $S_{\phi^k}$  es el término fuente que representa el gradiente de presión y las fuerzas de cuerpo (la gravedad,  $\mathbf{g}$ ). Las diferencias con la correspondiente ecuación monofásica son, además de la fracción volumétrica como en la ecuación (4.4), las siguientes: el tercer término del miembro izquierdo, llamado término de difusión. Este término representa la difusión de la propiedad conservada  $\phi^k$  causada por la difusión de la fracción volumétrica introducida en la ecuación (4.4). También, el segundo término del miembro derecho, es el término fuente en la interface, el cual representa la transferencia de propiedad entre fluidos debido a dos mecanismos, difusivo y convectivo, su ecuación en forma general es:

$$S_{IP} = (f_{jk} + [m_{kj}])(\phi^{int} - \phi^k) \quad (4.7)$$

- Difusivo,  $f_{jk}$
- Convectivo,  $[0, m_{kj}]$

El mecanismo difusivo es, por ejemplo, la transferencia de calor entre los fluidos por conducción y/o transferencia de cantidad de movimiento por arrastre. La componente convectiva considera la propiedad que se incorpora al fluido debido a la masa transferida del otro fluido. En el caso de no ceder masa el valor es cero, ya que la propiedad no cambia en el fluido de origen, [17] y [18].

#### 4.3.2.1 Coeficiente difusivo dentro de la fase

El tratamiento de la difusión dentro de la fase para flujos bifásicos es muy similar al de un flujo monofásico. El coeficiente de difusión en la fase para cada fluido se escribe como:

$$\Gamma_{\phi^k} = \rho^k \cdot \left( \frac{\mu_L}{Pr(\phi^k)} + \frac{\mu_T}{Pr_T(\phi^k)} \right) \quad (4.8)$$

#### 4.3.2.2 Coeficiente difusivo de la fase

El término difusivo de la fase considera la dispersión turbulenta de partículas o gotas debido a la turbulencia en la fase continua, y está presente tanto en la ecuación de fase continua como en la ecuación general de fase para la variable  $\phi^k$ . El coeficiente de difusión se escribe como:

$$\Gamma_{r^k} = \rho^k \cdot \left( \frac{\mu_L}{Pr(r^k)} + \frac{\mu_T}{Pr_T(r^k)} \right) \quad (4.9)$$

#### 4.3.2.3 Término fuente en la interface

El término fuente en la interface contiene la relación difusiva (fricción, transferencia de calor) y convectiva (transferencia de masa) entre las fases. Está formulado en forma general como sigue:

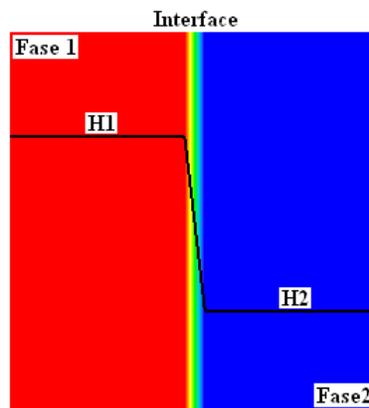
$$S_{IP} = (f_{jk} + [0, m_{kj}])(\phi^{int} - \phi^k) \quad (4.10)$$

donde  $f_{jk}$  es el coeficiente de transferencia (mecanismo difusivo) en la interface en  $[kg/s]$ ,  $m_{kj}$  es la tasa neta de transferencia de masa entre la fases en  $[kg/s]$ . La cantidad considerada entre corchetes es máximo entre 0 y  $m_{kj}$ . Si  $m_{kj} < 0$ , entonces  $[ ] = 0$ , debido al que al ceder masa no cambia la propiedad. La  $\phi^{int}$ , representa el valor de  $\phi$  en la

interface y  $\phi^k$  es el valor de la variable conservada  $\phi$  en el cuerpo de la fase  $k$  donde la fracción volumétrica es 1.0.

#### 4.3.2.4 Concepto de la propiedad $\phi^{int}$

La  $\phi^{int}$  como se menciono representa el valor de  $\phi$  en la interface y puede estar en función de espacio, del tiempo o el valor local en el cuerpo de la fase.  $\phi^{int}$ , es una propiedad y no una variable obtenida a partir de una ecuación de conservación.



**Figura 4.3** En este caso  $\phi^{int}(H^1)$  y  $\phi^{int}(H^2)$  son la entalpía de saturación del agua y del vapor [15].

Para entender mejor este concepto se puede hacer una analogía respecto al valor de la entalpía en la interface de un sistema vapor - agua. Considerando  $\phi^{int}(H^1)$  y  $\phi^{int}(H^2)$  como las entalpías de saturación del vapor y del agua a la temperatura y la presión locales, la situación cerca de la interfaz se muestra en la Figura 4.3.

Otro ejemplo sería el caso de  $CO_2$  que se difunde entre agua y aire. Si  $C_1$  representa la concentración de  $CO_2$  en el aire, y  $C_1$  representa la concentración de  $CO_2$  en el agua, entonces  $\phi^{int}(C^1)$  y  $\phi^{int}(C^1)$  representan las concentraciones en la interface aire-agua.

En otros casos como la transferencia de cantidad de movimiento en la interface, por ejemplo, el concepto de este valor en la interfaz no es útil, es más significativo para pensar en una transferencia directa entre las fases.

#### 4.3.2.5 Coeficiente de transferencia en la interface $f_{jk}$

El coeficiente de transferencia  $f_{jk}$  o  $FIP$  representa el flujo en la interface por celda. La ecuación queda definida como

$$f_{jk} = CFIPS \cdot Vol \cdot \rho_1 r^1 r^2 \quad (4.11)$$

donde  $CFIPS$  es un parámetro de transporte en la interface (cantidad de movimiento y otras propiedades) en  $[kg/s]$  y  $Vol$  es el volumen de la celda en  $[m^3]$ . El parámetro  $CFIPS$  queda definido por la ecuación

$$CFIPS = C_d \frac{v_d}{D_p} \quad (4.12)$$

donde  $C_d$  es el coeficiente de arrastre,  $v_d$  es la velocidad de deslizamiento entre las fases y  $D_p$  es el diámetro de la partícula.

#### 4.3.2.6 Transferencia de masa en la interface

La tasa de transferencia de masa en la interface  $m_{kj}$ , es controlada por la variable  $CMDOT$ , como sigue

$$m_{kj} = CMDOT \cdot f_{jk} \quad (4.13)$$

donde  $f_{jk}$  o  $FIP$  es el coeficiente de transferencia en la interface, en  $[kg/s]$  y  $CMDOT$  es un parámetro adimensional de transferencia de masa.

#### 4.3.2.7 Consideraciones especiales para la interface

Una característica importante de un flujo con superficie libre es la interface, y esta tendrá efectos considerables sobre las ecuaciones de flujo multifásico, es decir, la inmiscibilidad implica realizar algunas modificaciones en las ecuaciones para dar a la solución una mejor aproximación del fenómeno.

La única fuerza de cuerpo considerada en el término fuente  $S_{\phi^k}$  es la gravedad. El movimiento del fluido es debido únicamente al efecto de esta fuerza.

En el término fuente en la interface  $S_{IP}$ , el mecanismo convectivo es nulo. Los fluidos son inmiscibles y no existe la transferencia de masa entre las fases. Así, el parámetro de transferencia  $CMDOT$  es cero, por lo que  $m_{kj} = 0$ .

Para el mecanismo difusivo,  $f_{jk}$ , el coeficiente de transferencia de calor es nulo, dado que en este estudio no se contempla y la transferencia de cantidad de movimientos se da por fricción. Los valores de  $C_d$ ,  $v_d$  y  $D_p$  para determinar el parámetro  $CFIPS$  se presentan en los detalles numéricos del capítulo 5.

#### **4.4 Resolución de las ecuaciones**

Las ecuaciones pueden resolverse con el mismo método de volúmenes finitos descrito en el capítulo anterior. Como en el caso monofásico se tiene el problema de la existencia de una variable dependiente sin ecuación, la presión; y una ecuación sin variable, Ec. (4.2) que representa una ecuación de continuidad o conservación de masa global. Para la solución, también como en el caso monofásico, se transformará la ecuación sin variable en una ecuación para la presión [10].

##### **4.4.1 Acoplamiento Velocidad - Presión en IPSA**

Para resolver el problema de acoplamiento velocidad-presión en un flujo de dos fases, en esta tesis es utilizado un algoritmo que se deriva del método SIMPLE y se conoce como el método IPSA (Inter-phase Slip Algorithm).

#### 4.4.2 Procedimiento

Las ecuaciones para  $r^k$  son resueltas (inicialmente con velocidades supuestas). Después, se resuelven las ecuaciones para las demás variables  $\phi^k$ . Posteriormente, se resuelven las velocidades de las ecuaciones de cantidad de movimiento (inicialmente con presiones supuestas). A continuación, se suman las ecuaciones de  $r^k$  para formar una ecuación de continuidad global y calcular los errores de continuidad que producen los campos de  $r^k$  y  $u^k$  actuales. El siguiente paso es transformar la ecuación global de continuidad en una ecuación para la presión (de manera similar al caso monofásico). La ecuación anterior es resuelta y se corrige tanto la presión como la velocidad. Este procedimiento se repite, desde el primer paso, de forma iterativa con el objetivo de eliminar errores y asegurar la convergencia.

En el algoritmo IPSA, todos los términos de las ecuaciones de gobierno se tratan de manera implícita, y lo anterior se debe al fuerte acoplamiento entre las ecuaciones del modelo de multifásico.

#### 4.5 Consideraciones en el modelado de la turbulencia

Las variables de la turbulencia  $\kappa$  y  $\varepsilon$ , son siempre de la fase continua, y la tasa de generación se calcula a partir del gradiente de velocidad de la misma fase.

## CONFIGURACIÓN

Y

## DETALLES NUMÉRICOS

Inicialmente, en este capítulo se aborda brevemente el proyecto del cual se derivan los resultados experimentales considerados para la validación del modelo numérico. En seguida, se muestran la localización geográfica del prototipo y las características geométricas del modelo físico. Posteriormente, se muestran la configuración numérica del canal, los casos de estudio, los puntos de monitoreo y algunos detalles numéricos.

### 5.1 Plan Integral Hídrico de Tabasco (PIHT)

A fines de octubre de 2007, varias depresiones tropicales y frentes fríos en el sureste y golfo de México generaron lluvias intensas y continuas que derivaron en una falla en los bordos y diques que integraban el sistema de control de flujo de esa zona, inundándose alrededor 80% de la ciudad de Villa Hermosa (Figura 5.1) y parte de la sierra de Chiapas.



Figura 5.1 Imagen de la inundación en la ciudad de Villahermosa, Tabasco [19].

Con estos eventos se evidencio la necesidad de elaborar un plan para mitigar las inundaciones en el estado, principalmente, en la capital tabasqueña. Así, en 2008, el Instituto de Ingeniería de la UNAM y la Comisión Nacional de Agua (CONAGUA) acordaron el desarrollo del Plan Hídrico Integral para Tabasco (PHIT), en el cual, en una primera etapa de su implementación se consideró desarrollar, adaptar y aplicar modelos matemáticos de simulación, optimización y evaluación, así como modelos físicos, técnicas de percepción remota y otras herramientas de apoyo [20].

### **5.1.1 Implementación de modelos**

Desde hace tres años, la Coordinación de Ingeniería Hidráulica (CIH) y la Coordinación de Procesos Industriales y Ambientales (CIPIA) del Instituto de Ingeniería, de la UNAM, han trabajado de manera conjunta en el desarrollo del PHIT. La colaboración entre estas Coordinaciones se da a partir de la comparación de datos experimentales obtenidos de los modelos propuestos (construidos por la CIH), con datos estadísticos de simulaciones numéricas (de la CIPIA) aplicadas a dichos modelos.

A través de esta colaboración se posible establecer las características, geométricas y funcionales, de los canales y las estructuras de control a construir, con el objetivo mejorar las condiciones de control sobre el gasto de los ríos aledaños a Villahermosa, en particular del río Carrizal, sin la necesidad de una erogación económica importante.

### **5.2 Prototipo Río Carrizal**

El río Carrizal es un brazo delgado que nace de la bifurcación del río Mezcalapa, fluyendo de Oeste a Este por la parte norte de la ciudad de Villa Hermosa.

El funcionamiento hidráulico de este río depende de la distribución del flujo presente en la bifurcación, condicionando el gasto conducido por el mismo. A partir de estudios de transito de avenidas en cauces, se determino que el gasto máximo permitido para evitar exceder el límite del río Carrizal y eventualmente su desbordamiento, es de 850 [m<sup>3</sup>/s] [21].

Con la finalidad de regular el caudal del río se construyó una estructura de control en las márgenes del río, localizada al inicio de la bifurcación del río Mezcalapa, en el poblado del Macayo. Es importante mencionar que en el proceso de evaluación y optimización, del modelo a escala de la obra, se obtuvieron los datos experimentales para validar el modelo numérico utilizado y con esto lograr un mayor margen de seguridad en los resultados.

### 5.2.1 Localización

La zona considerada para el estudio se localiza cerca de los límites entre los estados de Tabasco y Chiapas, aguas abajo del inicio de la bifurcación del río Samaria y el río Carrizal (Figura 5.2).



Figura 5.2 Imagen satelital de la localización del prototipo, la sección consta de un tramo de 2.2 [km] de largo.

La estructura de control se compone de dos canales en las márgenes del río (Figura 5.3) donde para la margen izquierda se construyó un canal de descarga con compuertas radiales que actualmente está en funcionamiento y para la margen derecha del río, el modelo del canal aun permanece en evaluación.

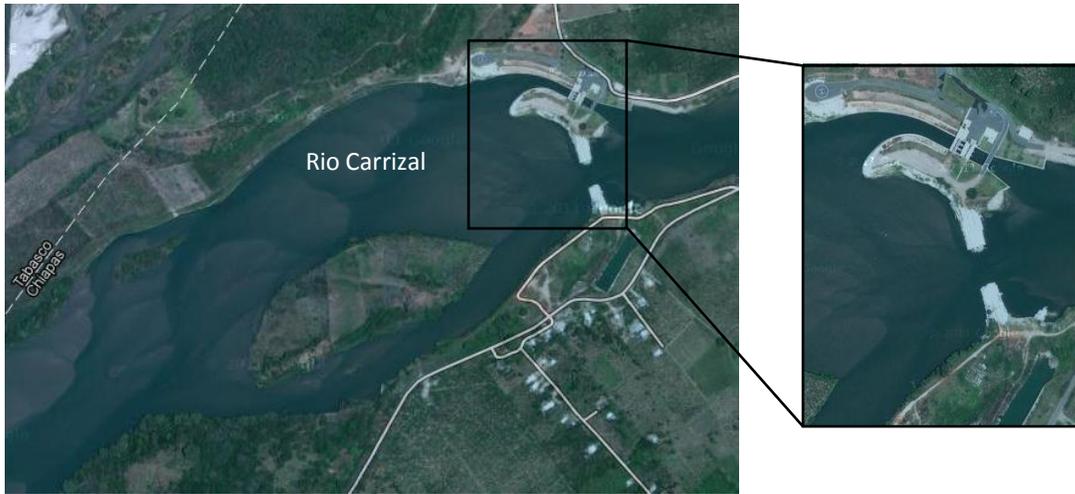


Figura 5.3 Localización geográfica de la estructura de control.

### 5.3 Modelo Físico

El modelo se construyó en el Laboratorio de Hidráulica Fluvial, del Instituto de Ingeniería de la UNAM, a escala 1:60 y cumple con los criterios de semejanza acordes a la naturaleza del problema bajo estudio, tiene una longitud de 37.76 [m] y un ancho de 8.33 [m]. Una fotografía del modelo a escala del río en el laboratorio se muestra en la Figura 5.4.



Figura 5.4 Fotografía del modelo del río Mezcalapa.

## 5.4 Modelo numérico

El objetivo de este estudio contempla únicamente la dinámica del flujo del canal en la margen derecha del río, por lo que solo se considerara una parte del modelo original. En la Figura 5.5 se muestra la vista de planta de la estructura de control “El Macayo”. En la parte inferior de la imagen se observa el canal de la margen derecha considerada en la simulación.

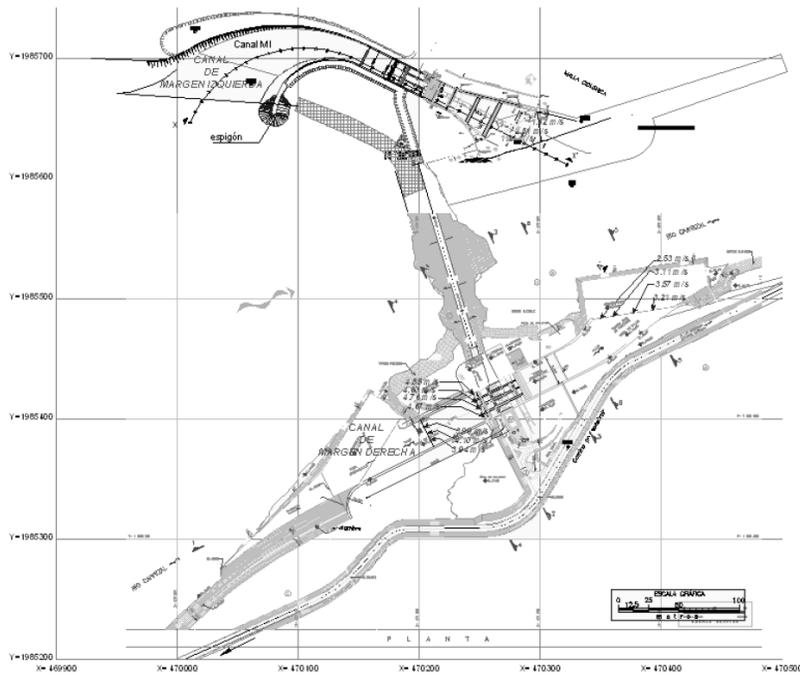


Figura 5.4 Vista de planta de la estructura de control “El Macayo”.

### 5.4.1 Configuración del canal

El canal tiene una sección transversal rectangular a lo largo del mismo. Este inicia con un tramo recto de 111 [cm] de longitud, aguas abajo, en la parte media se encuentran tres pilas de concreto con cuatro compuertas radiales. Enseguida, se encuentra un tanque de amortiguamiento con una longitud de 55 [cm], el cual termina con un umbral de 80 [°] con respecto a la horizontal. A la salida la plantilla del canal continúa de forma horizontal hasta la descarga del río.

Para tener una visión más adecuada del modelo se presentan, la Tabla 5.1 con las dimensiones del canal en el dominio computacional y la Figura 5.5 con la geometría tridimensional del canal (sin compuertas) generada en un software CAD y se muestra la dirección del flujo.

Tabla 5.1

Eje	Dimensiones [m]
<i>x</i>	3.36
<i>y</i>	0.34
<i>z</i>	2.09

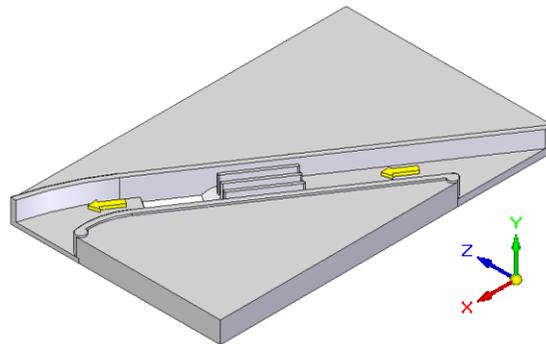


Figura 5.5 Modelo con la dirección del flujo y sus dimensiones.

Una característica importante del prototipo son las compuertas (Figura 5.6), ya que se tienen datos experimentales del funcionamiento del canal para dos diferentes aberturas de las mismas y cada condición se tomo como un caso de estudio.

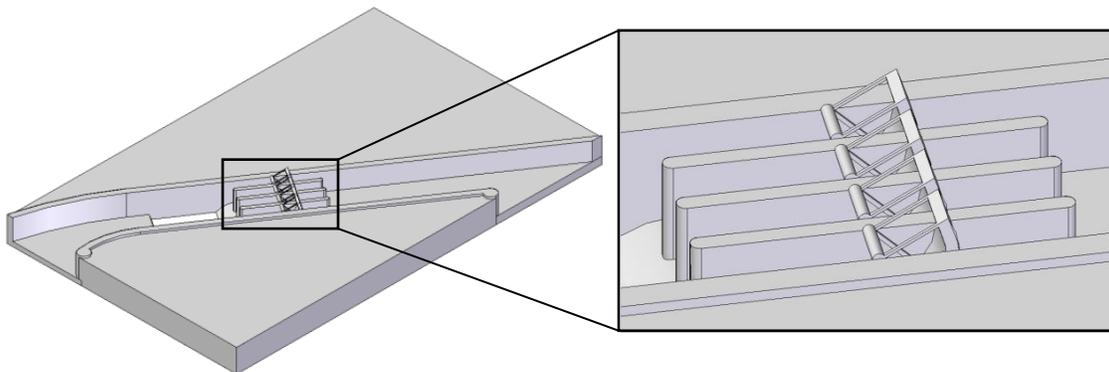


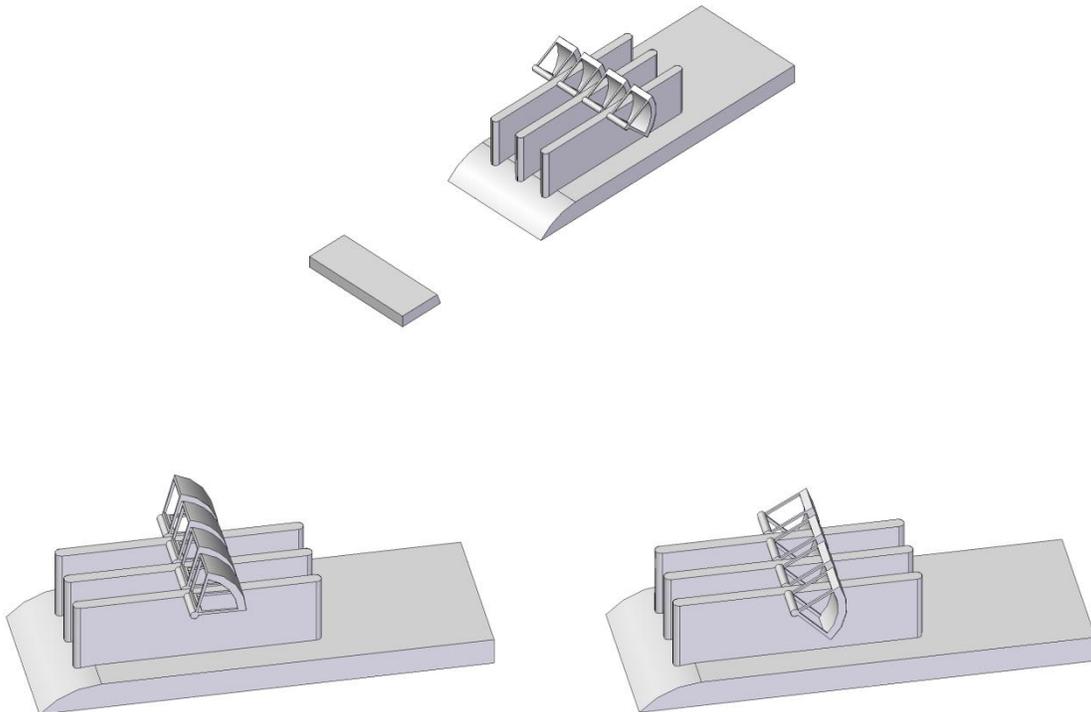
Figura 5.6 Esquema tridimensional de las compuertas.

### 5.4.2 Casos analizados

El estudio se realizó para dos condiciones (con datos experimentales) de funcionamiento en las compuertas

- Canal con las compuertas totalmente abiertas
- Canal con las compuertas parcialmente abiertas

En lo sucesivo al primer y segundo caso de estudio se llamarán C1 y C2, respectivamente. Para C2 las compuertas se encuentran con una apertura parcial de 4.44 [m]. En la Figura 5.7, se presentan las pilas de concreto con las compuertas y el tanque amortiguador, así como la configuración de C1 y C2. La Figura 5.8, muestra vistas frontales y laterales de las estructuras en el canal y sus dimensiones.



**Figura 5.7** Casos analizados: C1, las compuertas totalmente abiertas (izquierda) y C2, parcialmente abiertas (derecha).

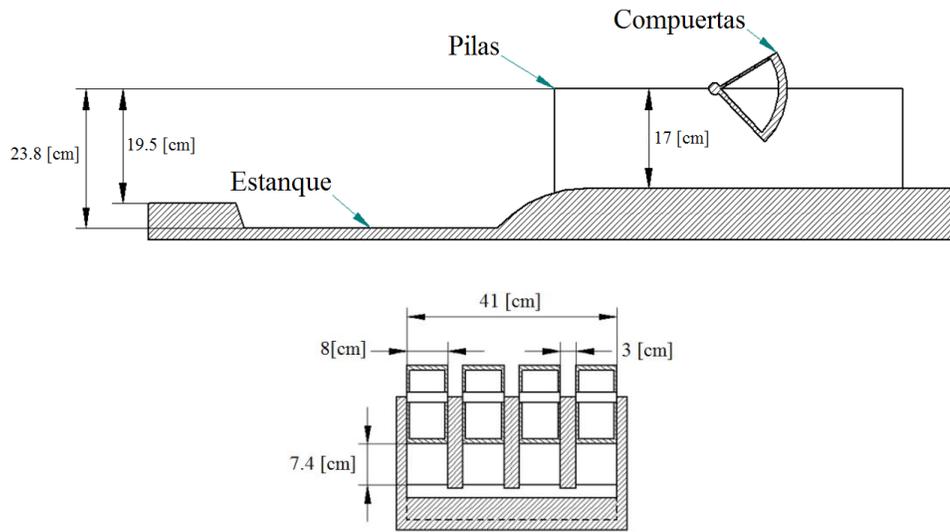


Figura 5.8 Vista lateral y frontal con las dimensiones de las estructuras en canal.

### 5.4.3 Puntos de Monitoreo

En una sección anterior se mencionó la validación de la simulación a través de la comparación de datos numéricos con datos experimentales. Los datos experimentales se obtuvieron de 7 puntos de monitoreo. Los primeros tres puntos se encuentran aguas arriba, en la parte inicial del canal y los últimos cuatro, aguas abajo, a la entrada de las pilas de concreto. En la Figura 5.9, se observan los puntos mencionados.

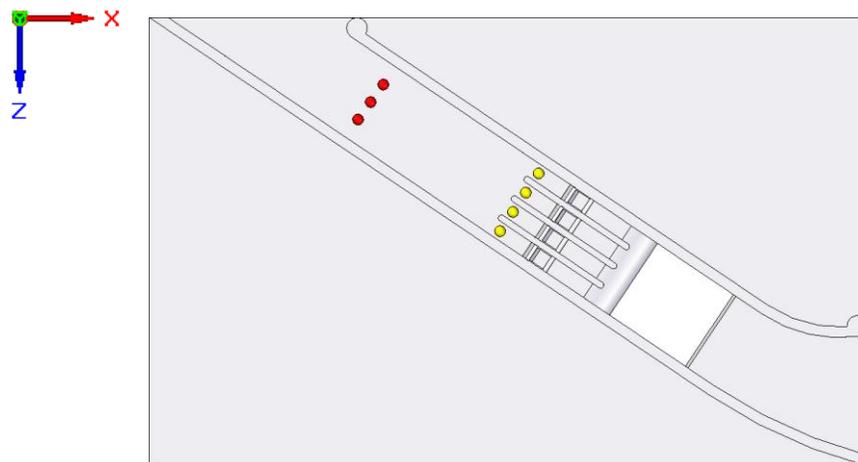


Figura 5.9 Localización de los puntos de monitoreo.

Los datos derivados de las mediciones de campo son velocidades y se registraron mediante el dispositivo ADV LAD (sensor sónico de tres receptáculos). El sensor registra las magnitudes promedio de las componentes de velocidad.

### 5.5 Características de la Malla

El dominio computacional fue discretizado en una malla cartesiana con distribución uniforme para cada uno de los ejes. En la Tabla 5.2 se muestra las características de la malla, teniendo un número total de 792000 nodos.

Tabla 5.2

Eje	Número de celdas	Tamaño de la celda [m]
<i>x</i>	120	0.03
<i>y</i>	55	0.01
<i>z</i>	120	0.02

La Figura 5.10 muestra el dominio computacional y la Figura 5.11 un esquema del mallado del dominio en los planos *xy*, *xz* y *yz*.

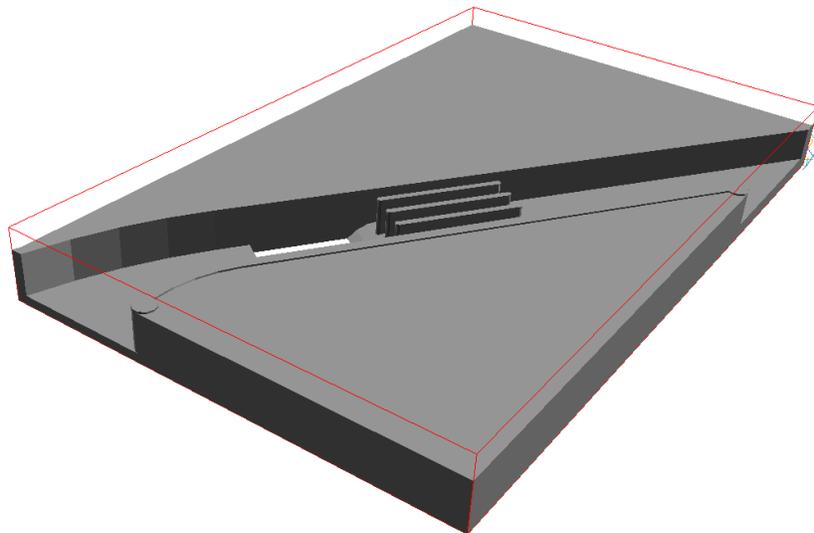


Figura 5.10 Dominio computacional.

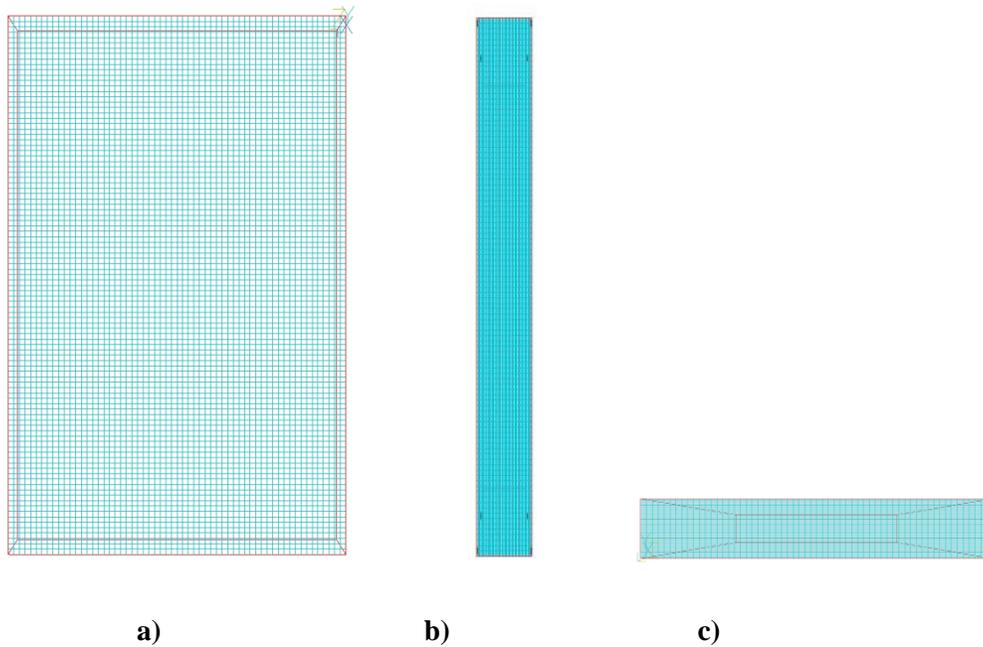


Figura 5.11 Malla rectangular uniforme en todos los planos: a)  $xz$ , b)  $xy$  y c)  $yz$ .

## 5.6 Detalles numéricos

Los datos experimentales y numéricos del río se obtuvieron en estado permanente e incompresible. Los fluidos de trabajo son aire y agua a 20 [°C] y 1 [atm]. La única fuerza de cuerpo considerada es la gravedad, en el eje  $y$ , con un valor de 9.81 [m/s<sup>2</sup>].

Para ambos casos, las velocidades en los puntos de monitoreo se registraron para una gasto de operación de 550 [m<sup>3</sup>/s] y para C2 la abertura de las compuertas considerada fue de 4.44 [m].

Los valores de  $C_d$ ,  $v_d$  y  $D_p$  utilizados para determinar el parámetro  $CFIPS$  son

- $C_d = 0.2$
- $v_d = 20.0$  [m/s]
- $D_p = 0.01$  [m]

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección se muestran los resultados derivados de la simulación numérica de un flujo bifásico inmiscible al cruzar un canal prismático con estructuras de control. Primero, se presentan las simulaciones del canal para los dos casos considerados, con imágenes de los contornos de presión, velocidad, fracción volumétrica y energía cinética turbulenta en valores promedio, así como los vectores de velocidad. Los resultados sobre la predicción de la posición de la interface se presentan al final de la sección.

### 6.1 Flujo en el canal

Un esquema del flujo se muestra en la Figura 6.1. El canal presenta una longitud de 80 [m], aguas arriba de las compuertas y 157 [m] debajo de las compuertas. Las compuertas son radiales, tienen un ancho de 5 [m] y se localizan 12 [m] aguas abajo del inicio las pilas de concreto con un ancho de 1.8 [m].

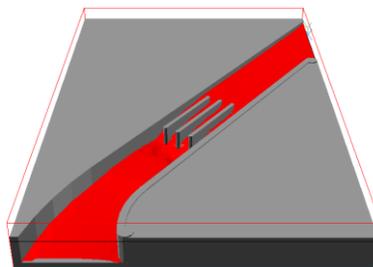


Figura 6.1 Representación esquemática del flujo en el canal.

## 6.2 Simulación de C1

Para este caso, las compuertas se encuentran completamente abiertas y el canal descarga libremente. En el canal de llamado el flujo entra con una velocidad aproximada de 2.5 [m/s].

### 6.2.1 Contornos de Presión - Velocidad

En las Figuras 6.2 y 6.3, se muestran los contornos de presión y velocidad de una vista de planta del canal, respectivamente.

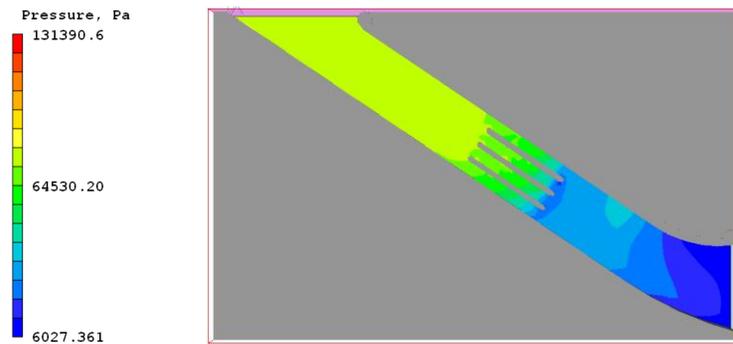


Figura 6.2 Contornos de presión.

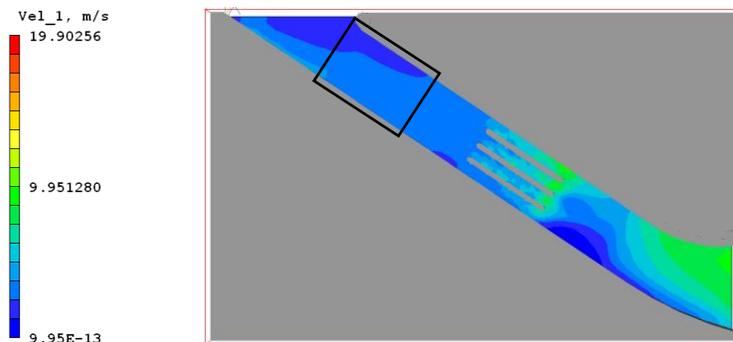


Figura 6.3 Contornos de velocidad.

Agua arriba de las pilas de concreto la velocidad promedio del flujo es de 3.8 [m/s] con un régimen subcrítico de  $Fr = 0.43$ . En el muro de la margen izquierda del canal de llamado se observa una diferencia de velocidades a consecuencia del redireccionamiento del flujo a su

llegada al mismo, es decir, las velocidades más bajas se encuentran en la parte interna de la curva y las más altas en la parte externa en dirección al margen derecha del canal.

Antes de ingresar a las pilas de concreto, el flujo es redireccionado nuevamente aguas abajo hacia la margen izquierda del canal, y esto se ve reflejado en un ligero incremento de la velocidad a lo largo del canal en dicha margen (Figura 6.4).

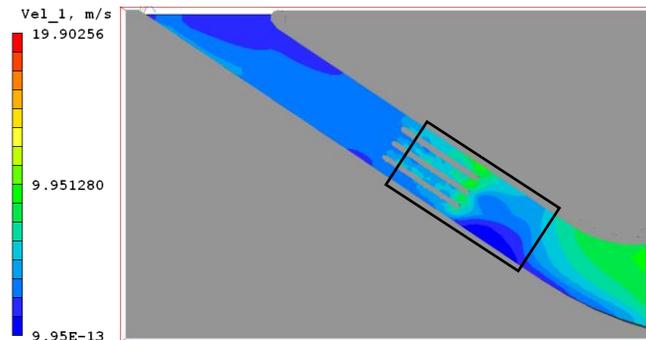


Figura 6.4 Diferencia de velocidades en las márgenes del canal.

Aguas abajo, la presencia de las pilas representa un cambio en la sección transversal del canal, y se produce una aceleración del fluido al pasar a través de estas. La velocidad promedio en esta sección es de 4.7 [m/s] y se tiene un régimen subcrítico,  $Fr = 0.64$ . A la entrada de la rápida se presenta una depresión abrupta en el nivel del agua, por lo que el flujo se acelera nuevamente e ingresa al tanque amortiguador con una velocidad promedio de 9.1 [m/s], con un régimen supercrítico de  $Fr = 1.71$ .

El cambio abrupto en la pendiente del canal, donde la superficie del tanque se une con la rápida, produce un salto hidráulico y el flujo pasa de supercrítico a subcrítico, con lo cual, la energía, debida a las altas velocidades y presiones del fluido, se disipa a consecuencia de la turbulencia resultante. La velocidad de flujo se reduce y el nivel de agua aumenta.

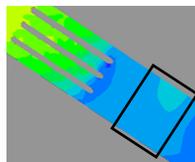


Figura 6.5 Aumento de la presión a la salida del tanque.

A la salida del tanque, la presión del flujo en la margen izquierda aumenta ligeramente, a causa de su impactar umbral de salida (Figura 6.5). Dados los altos valores de velocidad en esta región, es coherente encontrar un incremento de presión en dicha zona. El umbral tiene una cota de 2.5 [m] sobre el nivel del tanque, y a lo largo de la plantilla de salida la velocidad promedio del flujo aumenta. En esta sección se tiene un régimen subcrítico, con un  $Fr = 0.98$ .

Cabe mencionar que en la sección del tanque se presentan dos condiciones importantes. Una de estas se relaciona con el desarrollo del flujo y la otra consiste en una característica particular de un resalto hidráulico, es decir:

- Zona de recirculación
- Arrastre de aire

La primera condición se refiere a una zona de recirculación, la cual se origina por la diferencia de velocidades existente entre las márgenes del canal (Figura 6.4). En la siguiente imagen, Figura 6.6, se muestra la zona de recirculación localizada en el tanque de amortiguador, en la margen derecha del canal.

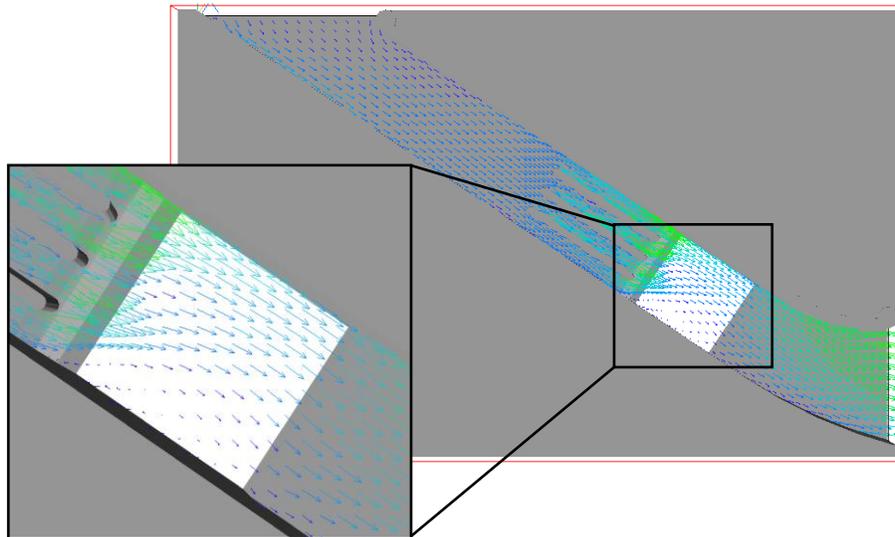


Figura 6.6 Zona de recirculación en el estanque de amortiguador.

Aguas arriba, se presenta la segunda condición y se refiere a un fenómeno característico del resalto hidráulico, donde aire atmosférico es arrastrado en el pie del salto y transportado aguas

abajo (Figura 6.7). El efecto del arrastre del aire en un resalto hidráulico, así como una amplia revisión de datos experimentales es discutido por Wood (1991) y Chanson (1997), respectivamente. Aunque este fenómeno no se analiza en este trabajo, el fenómeno de arrastre resulta un parámetro importante en el diseño de las paredes laterales del canal en algunos casos, ya que el volumen del flujo se incrementa.

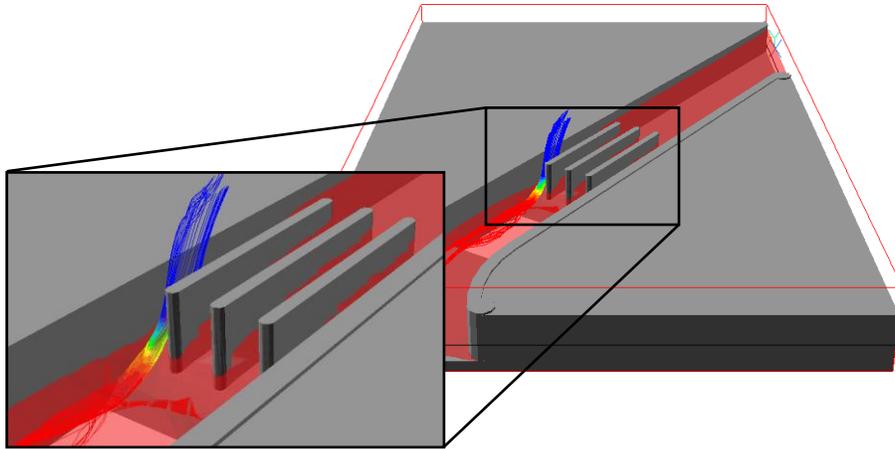


Figura 6.7 Líneas de corriente del aire al ingresar a la zona turbulenta generada por el resalto hidráulico.

### 6.2.2 Energía cinética turbulenta

La energía cinética turbulenta es un indicador de los cambios, tanto espaciales como temporales, en las propiedades del flujo e indica transporte de propiedades por movimientos turbulentos. Esta energía es generada por los cambios en la velocidad del flujo. Los contornos de energía cinética turbulenta se presentan en la Figura 6.8.

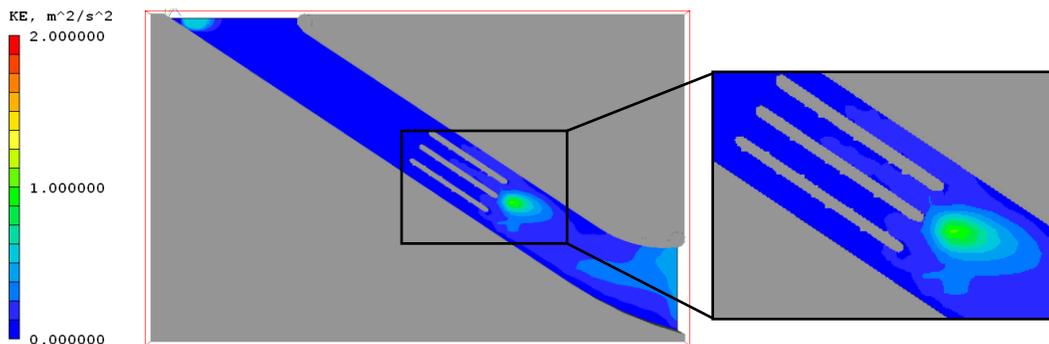


Figura 6.8 Contornos de energía cinética turbulenta.

En la imagen se observa una mayor generación de energía cinética turbulenta al pie del resalto hidráulico, cerca de la región central del canal donde los gradientes de velocidad son mayores. Aguas abajo, en el umbral de salida la energía cinética se incrementa nuevamente debido a un cambio en la velocidad del fluido.

### 6.2.3 Puntos de monitoreo

En las Tabla 6.1 y 6.2 se presentan los valores promedio de la velocidad obtenidos de la simulación y del modelo a escala en los puntos de monitoreo, así como el porcentaje de error respecto de los valores experimentales. Los puntos 1 y 4 se encuentran en la margen derecha, y los puntos 3 y 7 se encuentran en la margen izquierda del canal.

**Tabla 6.1**

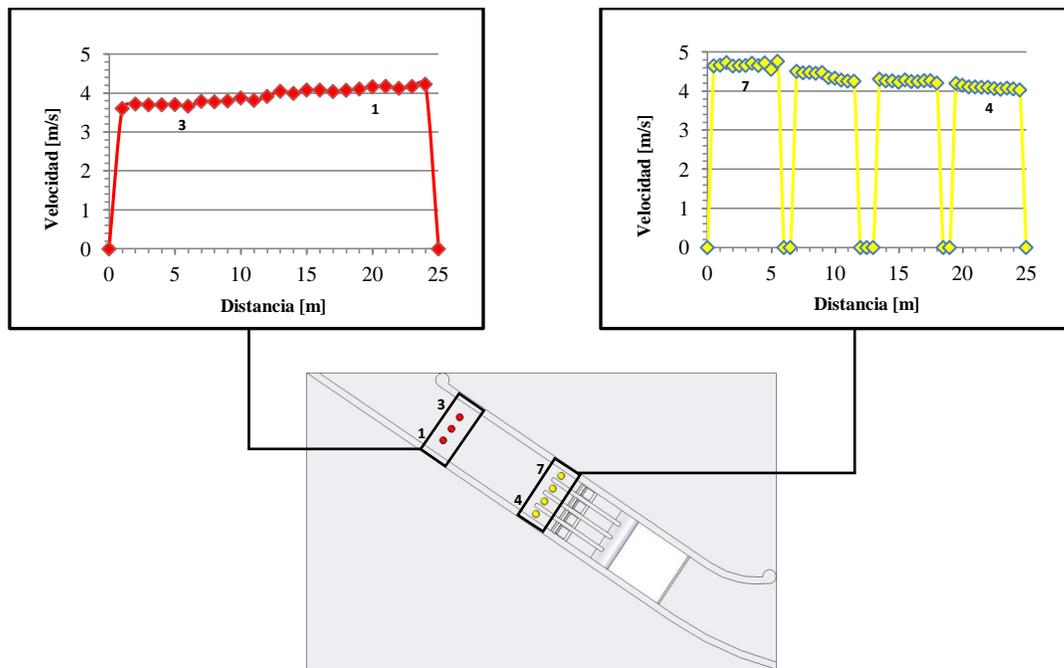
Puntos de monitoreo	Velocidad <sub>E</sub> [m/s]	Velocidad <sub>N</sub> [m/s]	% EE
1	3.94	4.08	3.55
2	4.10	3.92	4.39
3	3.99	3.67	8.02

Los subíndices **E** y **N** se refieren a los valores de velocidad obtenidos de forma experimental y numérica, respectivamente.

**Tabla 6.2**

Puntos de monitoreo	Velocidad <sub>E</sub> [m/s]	Velocidad <sub>N</sub> [m/s]	% EE
4	4.67	4.20	10.07
5	4.76	4.29	9.87
6	4.60	4.35	5.43
7	4.85	4.66	3.91

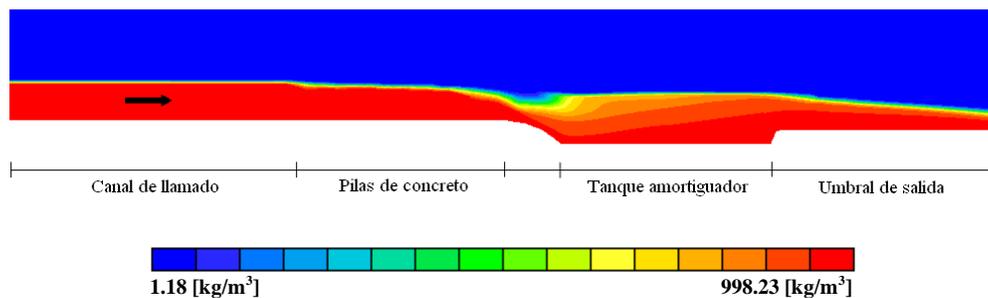
En la Figura 6.9 se muestra las velocidades promedio obtenidas de la simulación. Los valores nulos de velocidad en los extremos de ambas gráficas se deben a la condición de no deslizamiento en el muro del canal. Para los puntos de monitoreo aguas abajo también se observa valores con velocidad cero, y esto se debe al espacio ocupado por las pilas.



**Figura 6.9** Magnitudes de velocidad en los puntos de monitoreo, los puntos 1 y 4 se encuentran en la margen derecha

### 6.2.4 Superficie libre

En la Figura 6.10 se muestra el contorno de densidad a lo largo del canal. El flujo ingresa de manera uniforme con una altura, casi constante, de 20.15 m. s. n. m. y se mantiene aguas abajo hasta el inicio de las pilas de concreto donde, debido la reducción en cada una de las secciones de la estructura, el flujo se acelera y la altura disminuye gradualmente. Aguas abajo, al entrara en la rápida, el flujo se acelera nuevamente modificando su condición a rápidamente variado.



**Figura 6.10** Contorno de densidad.

Cuando el flujo ingresa al tanque amortiguador se presenta un resalto hidráulico, con lo cual, el flujo recupera altura y su velocidad disminuye. Al interior del resalto se tienen vórtices que favorecen la disipación de energía, y la superficie aguas abajo es uniforme. Las características mencionadas permiten clasificar el resalto hidráulico obtenido como un resalto hidráulico débil. Un resalto de este tipo se genera a partir de flujos supercríticos con valores entre  $1.7 < Fr < 2.5$  y es coincidente con el régimen de flujo aguas arriba del tanque,  $Fr = 1.71$ . La disipación de energía en un resalto débil es baja, con valores entre 5% y 15% [22]. Posteriormente, en el umbral de salida el flujo se vuelve uniforme y la cantidad de aire introducido por la turbulencia del resalto se reduce de forma considerable forma nuevamente una superficie libre definida.

En la Figura 6.10 se muestra la superficie libre en el canal y en la Tabla 6.3 se muestran la comparación entre las alturas experimental y numérica de la superficie libre, respecto a la superficie del canal, en el canal de llamado.

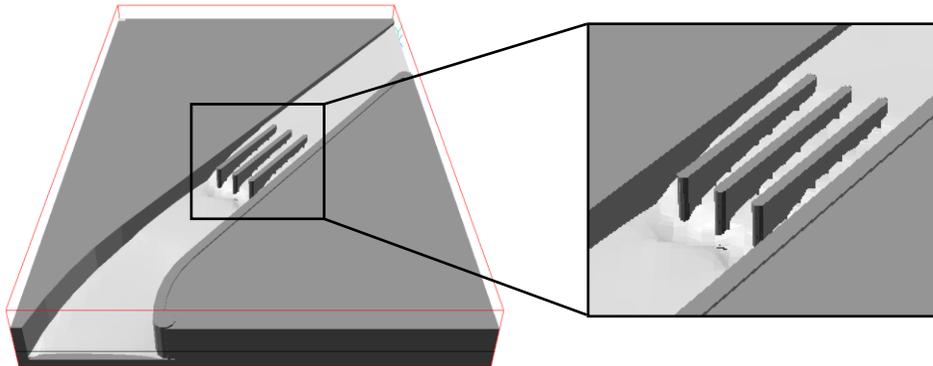


Figura 6.11 Superficie libre.

Tabla 6.3

Región	Altura en el modelo físico, m.s.n.m.	Altura en el modelo numérico, m.s.n.m.	%EE
Canal de llamado	20.5	19.95	2.68

## 6.3 Simulación C2

Para el caso C2 las compuertas se encuentran parcialmente abiertas, con un abertura de 4.44 [m], respecto a la superficie del canal de llamado, con un nivel de agua embalsada de 20.85 m. s. n. m. La compuertas se encuentran 12 [m] aguas abajo del inicio de las pilas.

### 6.3.1 Contornos de Presión - Velocidad

Las Figuras 6.11 y 6.12 muestran los contornos de presión y de velocidad.

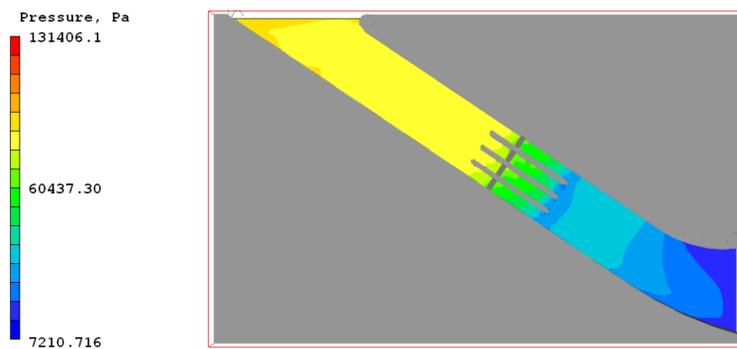


Figura 6.11 Contornos de presión para C2.

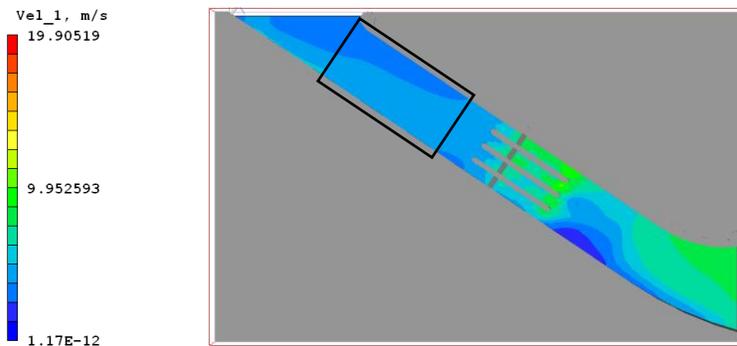


Figura 6.12 Contornos de velocidad para C2.

Aguas arriba, a la entrada del canal, la velocidad promedio es de 3.9 [m/s], con un régimen subcrítico de  $Fr = 0.41$ . El cierre parcial de las compuertas produce una región de embalse en el canal de llamado. En la Figura 6.11 se observa el aumento de presión en el flujo debida a esta situación.

Por otro lado, al igual que en C1, en la Figura 6.12, se mantiene la diferencia de velocidades entre las márgenes del canal. Las velocidades más bajas se presentan en la parte interna de la curva, así como a lo largo del la margen izquierda, y los valores más altos en la parte externa. Aguas abajo, en las compuertas, la velocidad del flujo aumenta rápidamente hasta una velocidad promedio de 6.58 [m/s]. Aunque la distribución de velocidades, en esta zona, es más uniforme que en el caso anterior, los valores de velocidad más altos se siguen presentando en la margen izquierda (Figura 6.13).

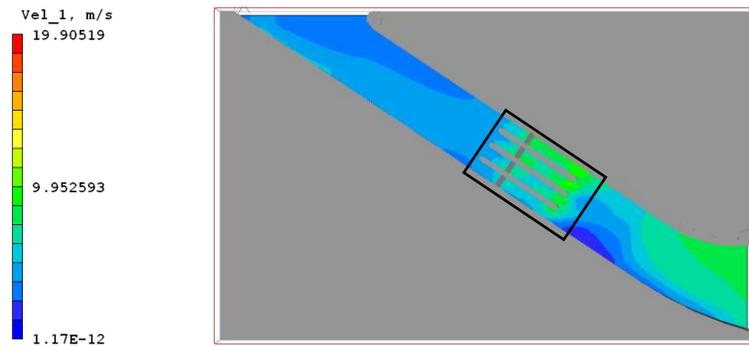


Figura 6.13 La distribución de velocidades es más uniforme.

Aguas abajo, al final de las pilas el fluido entra en la rápida y el régimen de flujo se incrementa hasta  $Fr = 1.74$ . Al ingresar en el tanque se presenta un salto hidráulico y el flujo cambia de supercrítico a subcrítico,  $Fr = 0.66$ . Así, la energía del flujo se disipa progresivamente tanto por la resistencia causada la [fricción](#) a lo largo de las paredes y al fondo del canal, como por la turbulencia generada al anterior del resalto. La velocidad del flujo disminuye y la profundidad aumenta. Al ingresar al umbral de salida, la velocidad promedio del flujo a lo largo de la plantilla aumenta y se vuelve supercrítico,  $Fr = 1.01$ .

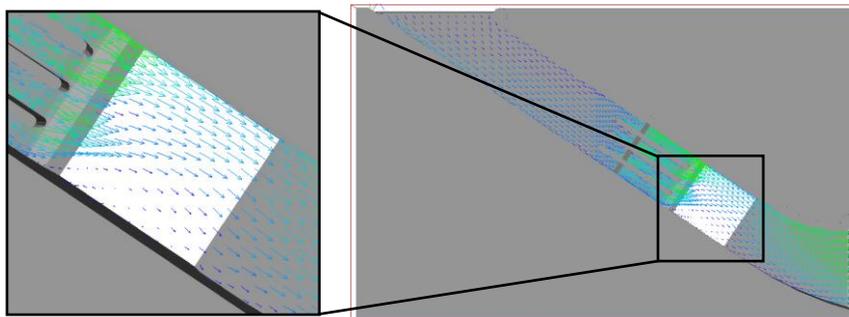


Figura 6.14 Zona de recirculación en el estanque de amortiguador.

Al igual que en C1, en el tanque de amortiguamiento se presenta una zona de recirculación cerca de la margen derecha del canal. La Figura 6.14, muestra la zona de recirculación.

### 6.3.2 Energía cinética turbulenta

Los contornos de energía cinética turbulenta se presentan en la Figura 6.15.

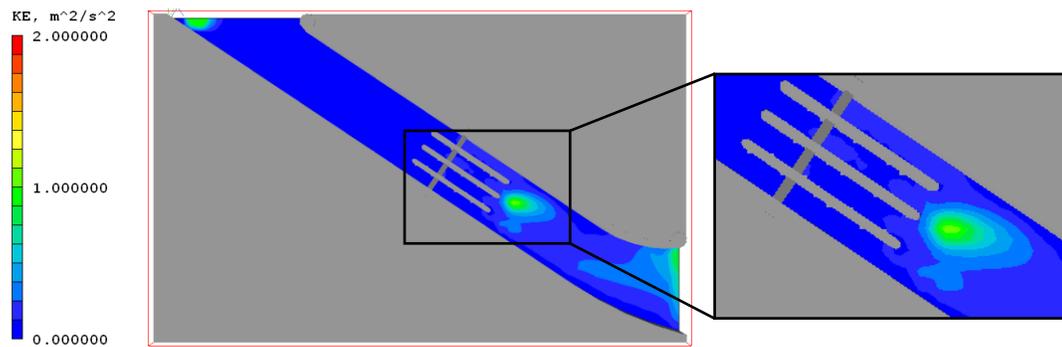


Figura 6.15 Contornos de energía cinética turbulenta.

La mayor generación de energía cinética turbulenta se sigue presentando al pie del resalto hidráulico, cerca de la región central del canal donde los gradientes de velocidad son mayores, y aguas abajo, en el umbral de salida, la energía cinética presenta un incremento, a causa de la aceleración del fluido a lo largo de la plantilla.

### 6.3.3 Puntos de monitoreo

En las Tabla 6.4 y 6.5 se presentan los valores promedio de la velocidad obtenidos de la simulación y del modelo a escala en los puntos de monitoreo, así como el porcentaje de error respecto de los valores experimentales.

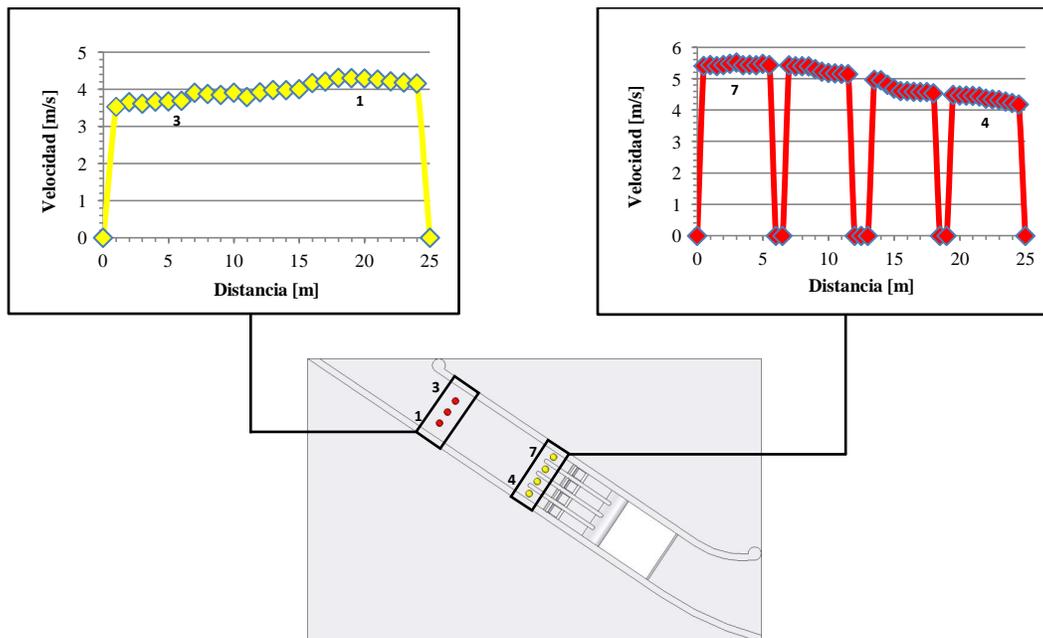
Tabla 6.4

Puntos de monitoreo	Velocidad <sub>E</sub> [m/s]	Velocidad <sub>N</sub> [m/s]	% EE
1	4.21	3.67	8.02
2	4.38	3.92	4.39
3	4.07	4.31	5.89

**Tabla 6.5**

Puntos de monitoreo	Velocidad <sub>E</sub> [m/s]	Velocidad <sub>N</sub> [m/s]	% EE
4	4.67	5.52	9.30
5	4.75	5.23	10.27
6	4.73	4.61	2.94
7	5.05	4.37	6.42

En la Figura 6.16 se muestra las velocidades promedio obtenidas de la simulación. Los valores nulos de velocidad en los extremos de ambas gráficas se deben a la condición de no deslizamiento en el muro del canal. Para los puntos de monitoreo aguas abajo también se observa valores con velocidad cero, y esto se debe al espacio ocupado por las pilas.



**Gráfica 6.16 Magnitud de velocidad de todos puntos de monitoreo en comparación con los datos de la simulación.**

### 6.3.4 Superficie libre

En la Figura 6.17 se muestra el contorno de densidad. El flujo ingresa de manera uniforme al canal de llamado con una altura constante de 20.85 m. s. n. m., manteniéndose aguas abajo hasta el inicio de las pilas de concreto.

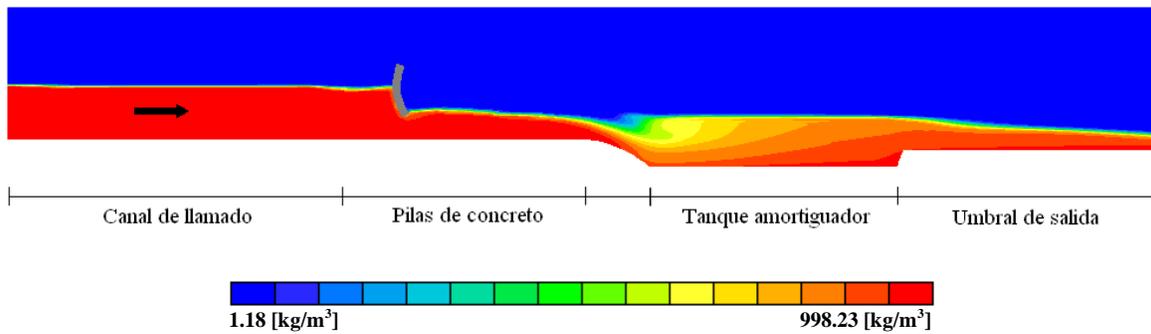


Figura 6.17 Contorno de densidad.

Al fluir a través de las compuertas, la altura del flujo disminuye y la velocidad aumenta, ambos de manera abrupta, con lo que el régimen subcrítico cambia a  $Fr = 0.98$ . El nivel de agua a lo largo de las pilas permanece casi constante hasta llegar a la rápida, donde el flujo incrementa nuevamente su velocidad y se alcanza un régimen de supercrítico de  $Fr = 1.70$ .

En el tanque amortiguador se presenta un resalto hidráulico, con lo cual se recupera altura y la velocidad disminuye. Al interior del resalto se tienen vórtices que favorecen la disipación de energía, y la superficie aguas abajo es casi uniforme. Al igual que el caso anterior, las características mencionadas permiten clasificar el resalto hidráulico como débil. Posteriormente, en el umbral de salida el flujo se vuelve uniforme y la cantidad de aire introducido por la turbulencia del resalto se reduce de forma considerable forma nuevamente una superficie libre definida.

La Figura 6.18 muestra una vista tridimensional de la superficie libre en el canal y la Tabla 6.6 muestran la comparación entre las alturas experimental y numérica de la superficie libre.

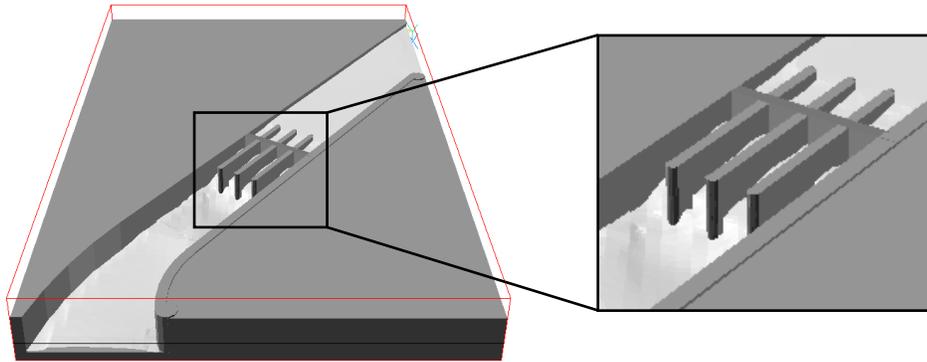


Figura 6.18 Flujo tridimensional en el canal.

Tabla 6.6

Región	Altura en el modelo físico, m.s.n.m.	Altura en el modelo numérico, m.s.n.m.	%EE
Canal de llamado	20.50	20.85	1.71

## CONCLUSIONES

Y

## RECOMENDACIONES

En el trabajo presentado se simuló numéricamente el flujo en un canal abierto con estructuras de control, con el objetivo de determinar si el modelo bifásico IPSA es capaz de predecir la posición de la superficie libre, así como el modelado de la hidrodinámica del flujo al cruzar las estructuras.

### 7.1 Conclusiones

A la entrada del canal de acceso las líneas de corriente cambian rápidamente de dirección lo cual no permite una entrada uniforme del flujo. Esta situación condiciona la dinámica del flujo a lo largo de la estructura. Aguas abajo, la situación mencionada promueve una diferencia de velocidad en los márgenes del canal de llamado. En ambos casos de estudio y a través del contorno de velocidades, es posible visualizar esta condición de flujo. El campo de velocidades en esta sección presenta una buena aproximación con datos experimentales, donde se tiene un error menor al 4%.

Aguas abajo, a la entrada de las compuertas, la diferencia de velocidades se sigue presentando y, en ambos casos de estudio, los valores de velocidad más altos se encuentran en el margen izquierdo. Al llegar al tanque amortiguador se presenta un resalto hidráulico y la velocidad del flujo disminuye, sin embargo en la plantilla de salida la velocidad se incrementa nuevamente.

En todas las secciones del canal la superficie libre se representó de manera adecuada a pesar de ser un método propiamente difusivo, lo cual se hace evidente en los cambios abruptos en algunas secciones del canal, como la rápida, en el tanque y al inicio del umbral de salida. La posición de la interface a lo largo de la estructura es coincidente con lo obtenido en el modelo a escala, con un error menor al 3%.

Los datos obtenidos del modelo numérico presentan un error de precisión menor al 10% respecto a datos experimentales, por lo que se considera que el método multifásicos representa apropiadamente, tanto la posición de la interface aire-agua en el canal, como la dinámica del flujo.

El estudio realizado da como resultado una alternativa para el tratamiento de flujos tridimensionales en canales abiertos con geometrías complejas, a un bajo costo computacional. Los tiempos de cálculo son bajos y se evita, tanto el uso de mallas refinadas en el dominio computacional, como el uso de esquemas de orden superior para evitar la difusión numérica entre las fases.

## **7.2 Recomendaciones**

La geometría del canal de llamado resulta una variable importante en el comportamiento del flujo a lo largo la estructura. Al ingresar al canal de acceso las líneas de corriente en la margen izquierda cambian bruscamente de dirección, por lo que la llega del flujo a dicha sección no es uniforme. Aguas abajo, antes de las compuertas pilas concreto el flujo comienza exhibir una diferencia de velocidades entre las márgenes del canal, donde las velocidades más altas se encuentran en la margen derecha, generando una amplia zona de recirculación cerca de la margen derecha.

El resalto hidráulico presente en el tanque es débil, y la energía disipada por el mismo es insuficiente para mitigar problemas de socavación o erosión en el lecho del río que aguas abajo de la estructura.

Considerando lo anterior, es posible realizar algunas recomendaciones para mejorar el desempeño de la margen derecha del río carrizal. Se recomienda modificar dos secciones

- Canal de llamado
- Tanque de amortiguamiento

El rediseño del canal de acceso promoverá una adecuada distribución del flujo y un mejor desempeño de las estructuras, al evitar la diferencias velocidades entre las márgenes del canal. De la misma forma, el rediseño del tanque amortiguador permitirá un resalto hidráulico estable, así como una mayor disipación de energía. El uso de bloques dentados en la solera del mismo podría ser una opción viable para mejorar la eficiencia del tanque y reducir las altas velocidades a la salida de la estructura.

Por último, en un flujo en canal abierto se presentan fenómenos de arrastre y acumulación de sedimentos que aprovechando el marco Euleriano del modelo utilizado, podrían llegar a ser resueltos en proyectos futuros.

1. Guan Heng Yeoh, Jiyuan Tu (2010). "Computational techniques for multiphase flows". Butterworth-Heinemann, UK.
2. Gilberto Sotelo Ávila (2002). "Hidráulica de canales". Facultad de Ingeniería, UNAM. México.
3. Frank M. White (2008). "Mecánica de fluidos". McGraw-Hill, España.
4. Miguel A. Vergara S (1995). "Técnicas de modelación en hidráulica". Alfaomega. México.
5. H. K. Versteeg y W. Malalasekera (1995). "An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method". Longman Scientific & Technical, England.
6. Charles Hirsch, (2007). Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1. Butterworth-Heinemann, UK.
7. Jaime Miguel Fe Marqués, (2005). "Aplicación del método de volúmenes finitos a la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras con incorporación de los esfuerzos debidos a la turbulencia". Tesis doctoral. Universidade da Coruña, España.
8. Frank M. White (1991). "Viscous fluid flow". McGraw-Hill, Singapore.
9. Paul D. Bates, Stuart N. Lane y Robert I. Ferguson (2005). "Computational Fluid Dynamics: Application in Environmental Hydraulics". John Wiley and Sons, England.
10. Norberto Fueyo Díaz (1996). "Mecánica de fluidos computacional para ingeniería". Centro politécnico Superior, Universidad de Zaragoza, España.
11. C. W. Hirt y B. D. Nichols (1981). "Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries". Journal of Computational Physics **39**, pag. 201-225.
12. Fieke Geurts (2006). "A comparison of two numerical methods for fluid flow". Tesis de maestria. Universidad de Groningen, Holanda.

13. G. Fekken (2004). "Numerical simulations of free-surface flow with moving rigid bodies". Tesis doctoral. Universidad de Groningen, Holanda.
14. K. Kleefsman (2005). "Water impact loading on offshore structures a numerical study". Tesis doctoral. Universidad de Groningen, Holanda.
15. Encyclopedia Index. "Two phase flows". CHAM.
16. Ching-Wen Chen (2005). "Numerical analysis for the multiphase flow of pulverized coal injection inside blast furnace tuvere". Elsevier, Applied Mathematical Modelling 29, pag. 871-884.
17. D. B. Spalding. "Mathematical modelling of fluid mechanics, heat-transfer and chemical reaction processes: a lecture course". Imperial College CFDU.
18. M. Ishii (1975). "Thermofluid dynamic theory of two-phase flow". Eyrolles, Book Publication.
19. BBC.com, Imágenes de las inundaciones en Tabasco.
20. Gaceta de Instituto de Ingeniería (2009). Número 51. UNAM.
21. Osnaya, J., Gracia, J., Berezowsky, M. y Martínez, J. (2007). Estudio de la bifurcación de un río con modelación numérica, Series del Instituto de Ingeniería, Instituto de Ingeniería, UNAM.
22. V.L. Streeter y E.B. Wylie (1979). "Fluid Mechanics". McGraw-Hill Book Company, New York

## MODELOS DE TURBULENCIA

Las ecuaciones instantáneas de continuidad y Navier-Stokes forman un conjunto cerrado de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$ . Al no poderse resolver de manera directa, o por lo menos, no a un bajo costo computacional, se utiliza el promediado temporal de las ecuaciones de gobierno. En el proceso de promediado realizado a las ecuaciones de movimiento se pierden todos los detalles relativos al flujo contenidas en las fluctuaciones instantáneas, además de esto, se obtienen nueva incógnitas adicionales en las ecuaciones de movimiento promediadas. Por lo anterior, un modelo de turbulencia es necesario para calcular los términos extra.

### A.1 Tipos de modelos

Los modelos de turbulencia desarrollan procedimientos de cálculo para el término de los esfuerzos de Reynolds, tales expresiones permiten el cierre del sistema de ecuaciones promediadas. Las fluctuaciones turbulentas no se resuelven a detalle, sino una aproximación del efecto de estas sobre el flujo medio.

La aproximación de este término se divide en dos categorías

- Viscosidad turbulenta
- Ecuación de transporte

## A.2 Modelos de viscosidad turbulenta

Los modelos de viscosidad turbulenta asumen la existencia de una analogía entre la acción de los esfuerzos viscosos y los esfuerzos de Reynolds sobre el flujo medio. En las ecuaciones de momentum (2.18)-(2.20) ambos esfuerzos aparecen a la derecha de la ecuación; y en la ley de viscosidad de Newton los esfuerzos viscosos son proporcionales a la tasa de deformación angular de los elementos de un fluido. En notación indicial se escribe como

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (A.1)$$

Boussinesq propuso en 1877 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y las tensiones de Reynolds

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k' \delta_{ij} \quad (A.2)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad  $\mu_t$  se denomina viscosidad dinámica turbulenta y  $k'$  es la energía cinética turbulenta por unidad de masa [86, pg. 67]

$$k' = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (A.3)$$

Por otra parte la energía cinética media sería

$$\bar{k} = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \quad (A.4)$$

Si se calcula el promedio temporal de la energía cinética instantánea se obtiene, teniendo en cuenta (3.10)

$$k = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} ((\bar{u} + u')^2 + (\bar{v} + v')^2 + (\bar{w} + w')^2) \quad (A.5)$$

Promediando queda

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \overline{((\bar{u} + u)^2 + (\bar{v} + v)^2 + (\bar{w} + w)^2)} \\
& \frac{1}{2} (\overline{(\bar{u} + u)^2} + \overline{(\bar{v} + v)^2} + \overline{(\bar{w} + w)^2}) \\
& \frac{1}{2} (\overline{(\bar{u}^2 + u'^2 + \bar{u}u')} + \overline{(\bar{v}^2 + v'^2 + \bar{v}v')} + \overline{(\bar{w}^2 + w'^2 + \bar{w}w')}) \\
& \frac{1}{2} ((\bar{u}^2 + \bar{u}'^2) + (\bar{v}^2 + \bar{v}'^2) + (\bar{w}^2 + \bar{w}'^2)) \\
& \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + \frac{1}{2} (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) \\
& k = \bar{k} + k' \tag{A.6}
\end{aligned}$$

es decir, la suma de las energías cinéticas media y turbulenta.

Es conveniente notar que el coeficiente empleado  $\mu_t$  en (A.2) puede en general depender de la dirección considerada, siendo realmente un tensor de viscosidad turbulenta. En este estudio se supone el mismo valor para todas las direcciones del espacio.

El término  $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$ , de la ecuación (A.2), es un esfuerzo normal que hace la fórmula válida para los tensores  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  y  $\tau_{zz}$ . En efecto, aplicando (A.2) para los tensores normales ( $i = j$ ) y llamando  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$  a la viscosidad cinemática turbulenta, se obtiene

$$\begin{aligned}
-\bar{u}'^2 &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k' \\
-\bar{v}'^2 &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} k' \\
-\bar{w}'^2 &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} k' \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Si se suman estas tres expresiones y se toma en cuenta la ecuación de continuidad, se comprueba la ecuación. De no incluir el término  $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$  la  $k'$  resultaría nula. Se asigna así, a cada una de los tres tensores normales de Reynolds, una tercera parte de la cantidad  $2\rho k'$ . Esto supone asumir una distribución isotrópica para estas tensiones normales, lo que no se corresponde con la realidad en bastantes tipos de flujos [86, pg. 64].

Ahora, si sustituyendo la expresión de las tensores de Reynolds en las ecuaciones (2.23)-(2.23)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{\mathbf{u}}) &= \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u}) - \left( \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{\mathbf{u}}) &= \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2(\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k' \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}\quad (A. 8)$$

Reordenando y agrupando los términos del segundo miembro

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} k' + \nu \nabla^2(\bar{u}) + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (A. 9)$$

Aplicando un procedimiento análogo para cada componente se obtiene

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} k' + \nu \nabla^2(\bar{v}) + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (A. 10)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} k' + \nu \nabla^2(\bar{w}) + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (A. 11)$$

al ser constante  $\nu$ , se puede escribir  $\nu \nabla^2(\bar{\mathbf{u}})$  como  $\nabla \cdot \nu \nabla \bar{\mathbf{u}}$  para agrupar la viscosidad molecular con la turbulenta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} k' + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (A. 11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} k' + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} k' + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

Con el fin de simplificar las expresiones se tiene en cuenta lo siguiente:

- Los términos que contienen las derivadas parciales de  $k'$  respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  provienen los tensores normales de Reynolds y actúan perpendicularmente a las caras del volumen de control, por lo que se incluyen en los términos que contienen las derivadas de presión [66, pg. 11].
- El valor de la viscosidad turbulenta  $\mu_t$  es varios órdenes de magnitud mayor que  $\nu$ , por lo  $\nu$  que se considera despreciable.
- La variación espacial de  $v_t$  es mínima, por lo que

$$\nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \approx v_t \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} = v_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) \quad (\text{A.14})$$

aplicando la propiedad de Schwarz de las derivadas segundas cruzadas y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, se convierte en

$$v_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) = v_t \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.15})$$

Tras realizar en (3.36)-(3.48) las simplificaciones mencionadas, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{v} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{w}\bar{\mathbf{u}}) = \rho f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{w} \quad (\text{A.18})$$

en una ecuación, esto se expresa como

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) = \rho \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{\mathbf{u}} \quad (A.19)$$

Al aplicarla relación de Boussinesq se obtienen las ecuaciones de Reynolds con el termino de viscosidad turbulenta, y tiene dimensiones de velocidad por longitud. El cálculo  $\nu_t$ , es el objeto de los modelos de turbulencia basados en esta propiedad y se clasifican según el número de ecuaciones diferenciales resueltas, siendo de cero ecuaciones (Modelo de longitud de mezcla), una ecuación (Modelo  $\kappa$ - $l$ ) y dos ecuaciones (Modelo  $\kappa$ - $\omega$ ,  $\kappa$ - $\varepsilon$ , entre otros).

### A.2.1 Modelos de longitud de mezcla

El primer modelo que describe la distribución de  $\nu_t$ , se debe a Prandtl y utiliza el concepto que le da nombre, longitud de mezcla. Esta magnitud representa la distancia media recorrida por las partículas del fluido, sin modificar su cantidad de movimiento [74, pg. 537].

La  $\nu_t$  puede ser expresada como el producto de la velocidad de escala turbulenta  $\vartheta$  [m/s] por longitud de escala  $l$  [m]. Si estas dos escalas son suficientes para describir los efectos de la turbulencia, se expresa como sigue

$$\nu_t = C \vartheta l \quad (A.20)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad adimensional. La mayor parte de la energía cinética turbulenta está contenida en los vórtices de mayor longitud y la longitud de escala turbulenta  $l$  es característica de esos vórtices. Los vórtices de mayor longitud interactúan con el flujo medio, por lo que se pueden relacionar la escala de velocidad característica de los vórtices con las propiedades del flujo medio. Esta consideración funciona para flujos bidimensionales donde son significantes únicamente los esfuerzos de Reynolds,  $\tau_{xy} =$

$\tau_{yx} = -\overline{\rho u'v'}$  y en el gradiente de flujo medio  $\partial U/\partial y$ . En tales casos, siendo  $l$  la longitud de escala, se establece

$$\vartheta = cl \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{A.21})$$

donde  $c$  es una constante adimensional.

Al sustituir (A.21) en (A.20) y colocando las constantes  $C$  y  $c$  en la nueva longitud de escala  $l_m$ , la viscosidad turbulenta se define como

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{A.22})$$

Los modelos de longitud de mezcla son validos en los casos en que se pueda describir la distribución de la  $l_m$  por medio de formulas empíricas y resultan poco adecuados para flujos con separación de la pared y zonas de recirculación.

### A.2.2 Modelos $\kappa$ - $l$

Los modelos  $\kappa$ - $l$  toman en cuenta el transporte de las magnitudes turbulentas y se basan en la formula de Kolmogorov-Prandtl

$$v_t = c_\mu k^{\frac{1}{2}} l \quad (\text{A.23})$$

donde  $l$  es la escala de longitud y  $k^{\frac{1}{2}}$  la escala de velocidad. La energía cinética turbulenta  $k'$ , definida se obtiene de una ecuación diferencial [X], donde también aparece el término  $L$ , que es prescrita mediante una ley algebraica.

Una de las limitaciones del método es la falta de capacidad para adaptar la escala  $l$  cuando el flujo cambia bruscamente, debido a una variación en la geometría. Recientemente han aparecido algunos modelos como el de Spalart-Almaras [89, pg. 111], en los que la viscosidad turbulenta es la variable de la única ecuación diferencial. En ella aparece como escala de longitud la distancia a la pared.

### A.2.3 Modelo $\kappa$ - $\varepsilon$

El modelo considera dos variables de las cuales se tiene un mejor conocimiento de los procesos relacionados con su variación, la energía cinética turbulenta  $\kappa$  y la tasa de disipación viscosa  $\varepsilon$ . Con estas variables, se define la escala de velocidad  $\vartheta$  y la longitud de escala  $l$  como sigue

$$\vartheta = \kappa^{1/2} \quad (A.24)$$

$$l = \frac{\kappa^{3/2}}{\varepsilon} \quad (A.25)$$

Aplicando la misma aproximación que para la longitud de mezcla tenemos

$$v_t = C\vartheta l = C \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (A.26)$$

En el modelo se resuelven dos ecuaciones de transporte separadas, permitiendo determinar la  $\kappa$  y  $\varepsilon$ , independientemente [6], bajo la suposición de que el flujo es totalmente turbulento. Un modelo estándar usa las siguientes ecuaciones de transporte para  $\kappa$  y  $\varepsilon$

$$\frac{\partial(\rho\kappa)}{\partial t} + \text{div}(\rho\kappa\mathbf{u}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \text{grad}(\kappa) \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ji} - \rho\varepsilon \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varepsilon\mathbf{u}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad} \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\kappa}{\varepsilon} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ji} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones contienen cinco constantes ajustables  $C_\mu$ ,  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$  y  $C_{2\varepsilon}$ . En el modelo de turbulencia  $\kappa$ - $\varepsilon$  estándar se emplean los siguientes valores para las constantes y comprenden un amplio rango de flujos turbulentos

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_\kappa = 1.00 \quad \sigma_\varepsilon = 1.30 \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$

El modelo estándar se debe a Jones y Launder (1972) y los coeficientes fueron ajustados poco después por Launder y Sharma (1974). El modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  es el más extendido y se utiliza en prácticamente todos los programas comerciales para estudio de fluidos [68].

### A.3 Modelos de ecuación de transporte (Reynolds Strees Model)

Los modelos RSM no se hacen uso del concepto de viscosidad turbulenta, sino que se resuelven unas ecuaciones de transporte para obtener las tensiones de Reynolds directamente. Estos modelos son más adecuados para campos de tensiones complejos, así como para la simulación del transporte de la turbulencia y la toma en consideración de los estados anteriores (efectos históricos) y de la anisotropía de la turbulencia. La resolución numérica de las ecuaciones es difícil y puede causar problemas de convergencia. Los modelos son más exigentes en lo que se refiere a las condiciones de contorno.

Uno de los primeros modelos de tensiones de Reynolds es el de Launder, Reece y Rodi (1975). Aunque existen propuestas de distintos autores, la complejidad de estos modelos, con un número de ecuaciones mucho más elevado, dando lugar a un número inferior de aplicaciones prácticas en comparación con los de modelos de viscosidad turbulenta.

#### A.3.1 Modelos ASM

Con ciertas hipótesis que se simplifican los términos de transporte convectivo y difusivo se ha intentado reducir las ecuaciones diferenciales de estos modelos a ecuaciones algebraicas, dando lugar a los modelos ASM (Algebraic Stress Models), que tienen puntos en común con los modelos de 1 y 2 ecuaciones [68].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\kappa) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\kappa u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + G_\kappa + G_b + \rho\varepsilon - YM + S_\kappa$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} (G_\kappa + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + S_\varepsilon$$

donde  $G_\kappa$  representa la generación de energía cinética de turbulencia producto del promedio de gradientes de velocidades,  $G_b$  representa la generación de energía cinética producto a la flotación,  $YM$  representa la contribución producto a la tasa de disipación,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $C_{3\varepsilon}$  son constantes,  $\sigma_\kappa$  y  $\sigma_\varepsilon$  son los números de Prandtl turbulento para  $\kappa$  y  $\varepsilon$ ,  $S_\kappa$  y  $S_\varepsilon$  son términos fuentes.

## Algoritmo

## SIMPLE

### (Semi-Implicit for Pressure Linked Equations)

La convección de una variable escalar  $\phi$  depende de la magnitud y la dirección del campo de velocidad local. Para desarrollar el método de Volúmenes Finitos, en el tercer capítulo, se considero un campo de velocidad aparente. En general, dicho campo no se conoce, y surge como parte del proceso de solución global, junto con todas las variables de flujo.

En este Anexo se trata la estrategia más popular para el cálculo del campo de flujo completo, el algoritmo SIMPLE. Este algoritmo fue propuesto por Patankar y Spalding (1972), corresponde al acronismo Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations. Esencialmente, consiste en un procedimiento de predicción-corrección para el cálculo de la presión en una malla escalonada.

### B.1 Solución del campo de flujo

En las ecuaciones de cantidad de movimiento, el gradiente de presión es desconocido al interior del campo de flujo y, por lo tanto, constituye una incógnita más que carece de una ecuación propia para calcularla. Como solución se puede transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión. Así, la presión y las tres componentes de velocidad se resuelven con las ecuaciones de Navier-Stokes más la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \text{div}(\Gamma_{\phi} \text{grad}(\mathbf{u})) \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

El procedimiento es iterativo y consiste en suponer un campo de presiones, después, se resuelven las velocidades a partir de la ecuación discretizada de Cantidad de Movimiento y por último, se verifica que dichas velocidades satisfagan la continuidad.

### B.1.1 Ecuación de cantidad de movimiento

Las ecuaciones discretizadas de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, son diferentes a las que se obtendrán para la variable general  $\phi$ . La diferencia no radica en el método utilizado para su obtención, sino en que el volumen de control considerado no es el mismo, ya que para las velocidades consideraremos volúmenes de control desplazados. En la Figura B.1 se muestra el volumen de control para el cálculo de las componentes de velocidad.

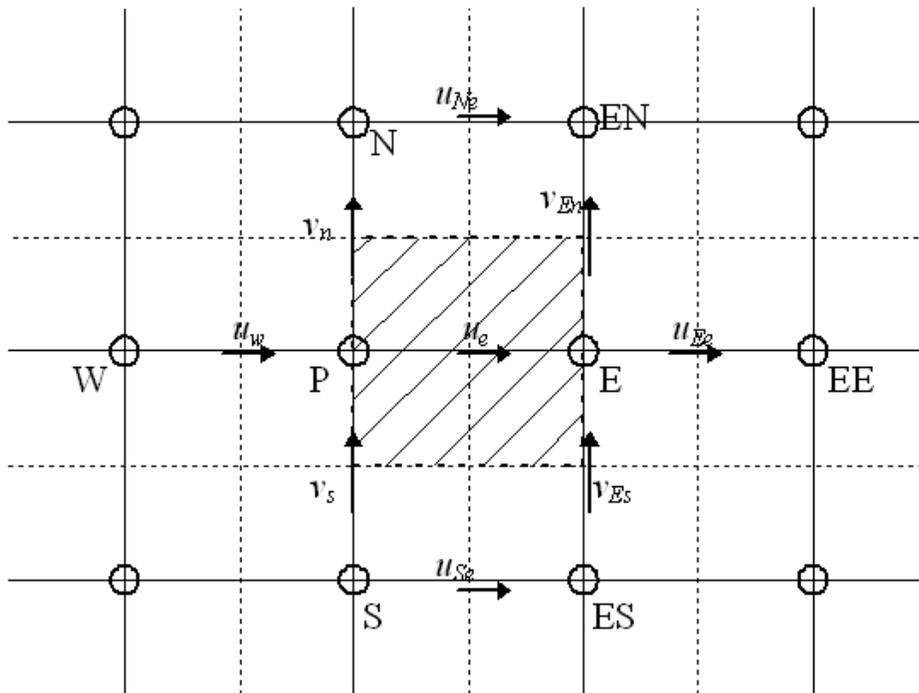


Figura B.1 Volumen de control para el cálculo de  $u$ .

En el caso tridimensional las ecuaciones discretizadas provenientes de las ecuaciones de conservación de momentum en estado permanente tendrán la siguiente forma

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e \quad (B.3a)$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_P - p_N) A_n \quad (B.3b)$$

$$a_h w_h = \sum a_{nb} w_{nb} + b + (p_P - p_H) A_h \quad (B.3c)$$

donde el subíndice  $nb$  refiere a las celdas vecinas y  $b$  el término fuente. A partir de las ecuaciones (B.3) sólo se calculará el campo de velocidades correcto si se tiene el campo correcto de presiones. El campo de velocidades correcto debe satisfacer la ecuación de continuidad.

## B.2 Algoritmo SIMPLE

Si se propone un campo de presiones tentativo  $p^*$  y se utiliza para calcular el campo de velocidades, a partir de las ecuaciones (B.3), se obtiene

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e \quad (B.4a)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n \quad (B.4b)$$

$$a_h w_h^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_P^* - p_H^*) A_h \quad (B.4c)$$

donde al campo de velocidades  $\mathbf{u}^*$  le llamaremos velocidades tentativas. Los campos de presión y de velocidades correctos se pueden obtener a partir de los campos tentativos más una corrección, es decir

$$p = p^* + p' \quad (B.5)$$

$$u = u^* + u' \quad (B.6a)$$

$$v = v^* + v' \quad (B.6b)$$

$$w = w^* + w' \quad (B. 6c)$$

donde  $p'$ ,  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$  denotan las propiedades corregidas. Si se restan las ecuaciones (B. 4) de (B. 3), se obtiene

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_E) A_e \quad (B. 7a)$$

$$a_n v'_n = \sum a_{nb} v'_{nb} + (p'_P - p'_N) A_n \quad (B. 7b)$$

$$a_h w'_h = \sum a_{nb} w'_{nb} + (p'_P - p'_H) A_h \quad (B. 7c)$$

Con estas ecuaciones se calculan las correcciones para las componentes de la velocidad en a partir de las correcciones para la presión. En el método SIMPLE se elimina el primer término del lado derecho de esta ecuación, y en realidad estamos haciendo una aproximación para obtener las correcciones de la velocidad. Esta aproximación no afecta el resultado final.

Las ecuaciones para las correcciones de velocidad quedan como sigue

$$u'_e = (p'_P - p'_E) \frac{A_e}{a_e} = d_e (p'_P - p'_E) \quad (B. 8a)$$

$$v'_n = (p'_P - p'_N) \frac{A_n}{a_n} = d_n (p'_P - p'_N) \quad (B. 8b)$$

$$w'_h = (p'_P - p'_H) \frac{A_h}{a_h} = d_h (p'_P - p'_H) \quad (B. 8c)$$

Así, las ecuaciones para obtener la velocidad correcta se escriben de la siguiente forma:

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (B. 9a)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \quad (B. 9b)$$

$$w_h = w_h^* + d_h (p'_P - p'_H) \quad (B. 9c)$$

Ahora, es necesario obtener la expresión para calcular las correcciones del campo de presión, la cual, se obtendrá a partir de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (B.10)$$

Al integramos la ecuación de continuidad en estado permanente para un volumen de control, se obtiene la siguiente expresión

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho u A)_n - (\rho u A)_s + (\rho u A)_h - (\rho u A)_l = 0 \quad (B.11)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (B.9) en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} & \rho_e A_e (u_e^* + d_e(p'_P - p'_E)) - \rho_w A_w (u_w^* + d_w(p'_W - p'_P)) \\ & + \rho_n A_n (v u_n^* + d_n(p'_P - p'_N)) - \rho_s A_s (v_s^* + d_s(p'_S - p'_P)) \\ & + \rho_h A_h (w_h^* + d_h(p'_P - p'_H)) - \rho_l A_l (w_l^* + d_l(p'_L - p'_P)) = 0 \end{aligned} \quad (B.12)$$

Ordenando la ecuación de las correcciones de presión se puede escribir de forma general como sigue

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_H p'_H + a_L p'_L + b \quad (B.13)$$

donde

$$a_E = \rho_e A_e d_e \quad (B.14)$$

$$a_W = \rho_w A_w d_w \quad (B.15)$$

$$a_N = \rho_n A_n d_n \quad (B.16)$$

$$a_S = \rho_s A_s d_s \quad (B.17)$$

$$a_H = \rho_h A_h d_h \quad (B.18)$$

$$a_L = \rho_l A_l d_l \quad (B.19)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_H + a_L \quad (B.20)$$

$$b = -(\rho_e A_e u_e^* - \rho_w A_w u_w^* + \rho_n A_n u_n^* - \rho_s A_s u_s^* + \rho_h A_h u_h^* - \rho_l A_l u_l^*) \quad (B.21)$$

El término independiente  $b$ , se puede considerar como una fuente de masa, que surge cuando las velocidades tentativas no cumplen con la ecuación de continuidad. Cuando la solución llegue a converger, las velocidades tentativas y las velocidades correctas serán prácticamente iguales y el término  $b$  valdrá cero, ya que el campo de velocidades cumplirá con la ecuación de continuidad.

### B.2.1 Relajación para la presión

Dada la consideración para obtener las aproximaciones en las ecuaciones (B.8), las correcciones en la presión se pueden ver incrementadas de iteración a iteración, provocando que el método diverja. Para evitar esto, se utiliza un método de relajación para la presión al aplicar el método SIMPLE, con esto, la ecuación para la presión correcta se escribe como

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (B.22)$$

$$0 \geq \alpha_p \geq 1$$

donde  $\alpha_p$  es el factor de relajación, con valor entre 0 y 1.

Cuando la solución tiene algunas inestabilidades, tanto a las velocidades como otras propiedades  $\phi$ , también se les puede aplicar un factor de relajación.

### B.2.2 Secuencia de pasos del método SIMPLE

El algoritmo esta dado por la siguiente secuencia de operaciones

1. Se propone un campo de presiones tentativo inicial  $p^*$
2. Se resuelven las ecuaciones (B.4) para obtener las velocidades tentativas  $u^*$ ,  $v^*$  y  $w^*$

3. Se resuelve la ecuación (B. 13) para obtener el campo de correcciones de presión  $p'$
4. Se obtiene el nuevo campo de presione  $p$  con la ecuación (B. 22)
5. Se calcula el campo de velocidades correcto a partir del campo de velocidades tentativo y del campo de presión corregida  $p'$  con las ecuaciones (B. 9)
6. Se resuelven las ecuaciones para los escalares  $\phi$ , si su valor influye en el flujo. De lo contrario, los escalares se calculan hasta que la solución del campo de velocidades halla convergido.
7. Se regresa al paso 2, ahora con  $p^* = p$ , hasta que la solución converja.

## Esquemas De Discretización

Para el desarrollo del tema se considerara la ecuación unidimensional de difusión-convección en estado permanente, la cual en forma conservativa se escribe como

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (C.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $\Gamma_{\phi}$  es el coeficiente de difusión.

La notación de una celda y las celdas contiguas se muestra en la Figura C.1.

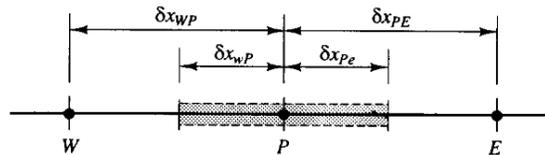


Figura C.1 Diagrama de la celda P.

Al integrar la ecuación (C.1) sobre el volumen de control mostrado en la Figura C.1 tenemos

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left( \Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (C.2)$$

Para el cálculo del flujo convectivo y difusivo requiere conocer  $\rho u \phi$  y  $\Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx}$  en las caras de la celda y debido al uso de una malla decalada, es necesario interpolar para encontrar los valores de estas propiedades entre los nodos. El método de obtención de estos términos da lugar a los llamados esquemas de discretización.

## C.1 Esquema lineal o Centrado

El esquema centrado adopta un perfil lineal para  $\phi$ , como se muestra en la Figura C.2.

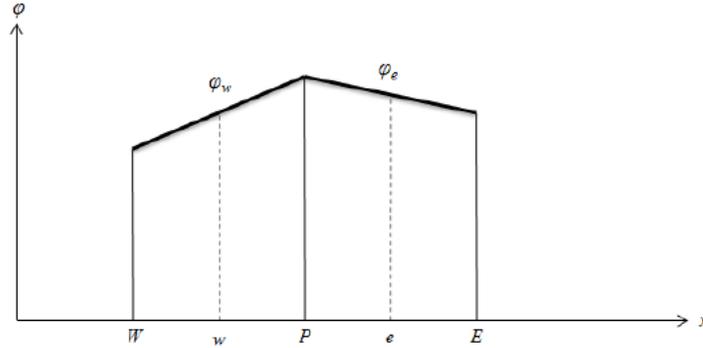


Figura C.2 Perfil del esquema centrado.

Los valores de  $\phi$  en las caras de las celdas se expresan como el promedio de los valores en los nodos vecinos

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad (C.3a)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (C.3b)$$

$$\left(\Gamma_\phi \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \quad (C.4a)$$

$$\left(\Gamma_\phi \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \quad (C.4b)$$

Este esquema presenta una precisión de segundo orden. Sustituyendo las ecuaciones (C.3) y (C.4) en la ecuación (C.2), obtenemos:

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \quad (C.5)$$

Reordenando la ecuación anterior (C.5) queda como

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (C.6)$$

Donde los coeficientes  $a_P$ ,  $a_E$  y  $a_W$  son

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (C.7)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (C.8)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (C.9)$$

Con  $F = \rho u$  y  $D = \Gamma_\phi / \delta x$ .

La integración de la ecuación unidimensional de continuidad sobre el volumen de control mostrado en la Figura C.1 conduce a que  $F_e = F_w$ . Por lo tanto,  $(F_e - F_w)$  puede ser eliminado de la ecuación (C.9)

Para valores negativos en los coeficientes de la ecuación (C.6) se ha observado que el método se vuelve inestable. La condición límite de estabilidad es  $|F| > 2D$  o  $|Pe| > 2$ , donde  $Pe$  el número de Peclet. Este número adimensional determina la importancia relativa entre los efectos de convección y difusión.

## C.2 Esquema Upwind

En el esquema upwind la formulación de término difusivo es la misma. Sin embargo, para el término convectivo el valor de  $\phi$  en la cara  $w$  es igual al del valor de  $\phi$  en el nodo aguas arriba, como se observa en la Figura C.3

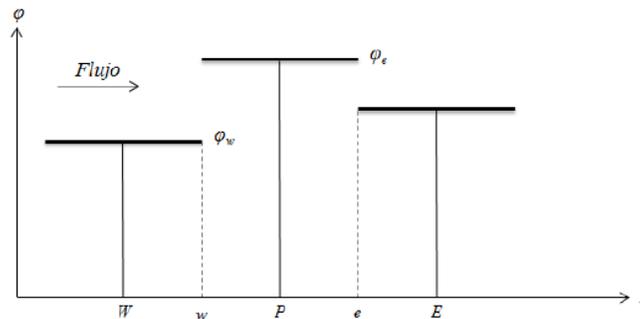


Figura C.3 Perfil del esquema upwind.

Así,

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P, & \text{si } F_w \geq 0 \\ \phi_E, & \text{si } F_w < 0 \end{cases} \quad (C.10)$$

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_w, & \text{si } F_w \geq 0 \\ \phi_p, & \text{si } F_w < 0 \end{cases} \quad (C.11)$$

Esto se reescribe como

$$F_e \phi_e = \phi_p \max(F_e, 0) - \phi_E \max(-F_e, 0) \quad (C.12)$$

$$F_w \phi_w = \phi_w \max(F_w, 0) - \phi_p \max(-F_w, 0) \quad (C.13)$$

Al sustituir las ecuaciones (C.12) y (C.13) en la ecuación discretizada (C.6), los coeficientes quedan como

$$a_w = D_w + \max(F_w, 0) \quad (C.14)$$

$$a_E = D_e + \max(-F_e, 0) \quad (C.15)$$

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \quad (C.16)$$

Por continuidad  $F_e = F_w$ , entonces  $(F_e - F_w)$  se elimina. A diferencia del caso anterior, en la expresiones (C.14), (C.15) y (C.16) todos los coeficientes  $a_i$  son ahora positivos es decir el sistema se vuelve estable. No obstante, el esquema upwind tiene una precisión del primer orden y puede llevar a mostrar problemas de difusión numérica considerables.

## C.2 Esquema Híbrido

Como se menciona anteriormente, el esquema centrado es de segundo orden, pero puede encontrar dificultades cuando  $|F| > 2D$ ; mientras que el esquema upwind puede resolver estas dificultades a pesar de ser solo de primer orden. La combinación de estos dos métodos de discretización lleva a un esquema híbrido con las ventajas de ambos. Este esquema se basa en lo siguiente, si  $|F| \leq 2D$  se utiliza el esquema centrado y si  $|F| > 2D$  se utiliza el esquema upwind. Aplicando lo anterior para obtener el coeficiente  $a_w$  se tiene

$$a_w = \begin{cases} F_w, & \text{si } 2 < Pe_w \\ D_w + F_w/2, & \text{si } -2 \leq Pe_w \leq 2 \\ 0, & \text{si } Pe_w < -2 \end{cases} \quad (C.17)$$

donde  $Pe_w$  es el número de Peclet en la cara  $w$ . La ecuación discretizada resultante se escribe como los coeficientes

$$a_E = \max(F_e, D_e + F_e/2, 0) \quad (C.18)$$

$$a_W = \max(-F_w, D_w + F_w/2, 0) \quad (C.19)$$

$$a_P = a_E + a_W(F_e - F_w) \quad (C.20)$$

## C.2 Esquema Exponencial

Si se supone que  $\rho u$  y  $\Gamma$  son constantes, la ecuación (C.1) tiene solución analítica. Considerando un intervalo de  $0 < x < L$ , y condiciones de borde  $\phi = \phi_0$  en  $x = 0$  y  $\phi = \phi_L$  en  $x = L$ , entonces la solución es

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{(\rho u x / \Gamma)} - 1}{e^{(\rho u L / \Gamma)} - 1} \quad (C.21)$$

Definiendo al flujo total como

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (C.22)$$

donde el primer término del lado derecho corresponde al flujo advectivo y el segundo al término difusivo. Considerando lo anterior, la ecuación C.1 se puede reescribir como

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (C.23)$$

Al integrar la ecuación (C.23) en el volumen de control de la Figura C.1 se obtiene

$$J_e - J_w = 0 \quad (C.24)$$

Usando la solución exacta (Ecuación (C.21)) como un perfil entre los puntos  $P$  y  $E$ , como se muestra en la Figura C.4, para  $J_e$  y  $J_w$  se obtiene

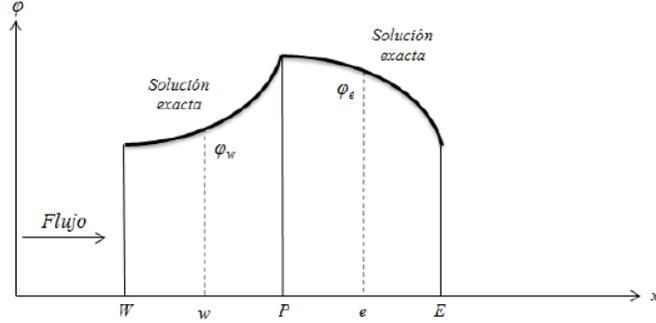


Figura C.4 Perfil del esquema exponencial.

$$J_e = F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{e^{(Pe_e)} - 1} \right) \quad (C.25)$$

$$J_w = F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{e^{(Pe_w)} - 1} \right) \quad (C.26)$$

Sustituyendo la ecuaciones (C.25) y (C.26) en la ecuación (C.24) tenemos

$$F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{e^{(Pe_e)} - 1} \right) - F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{e^{(Pe_w)} - 1} \right) = 0 \quad (C.27)$$

La ecuación discretizada resultante es de la forma

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (C.28)$$

donde

$$a_E = \frac{F_e}{e^{(Pe_e)} - 1} \quad (C.29)$$

$$a_W = \frac{F_w}{e^{(Pe_w)} - 1} \quad (C.30)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (C.31)$$

## C.4 Propiedades de los esquemas de discretización

En teoría, cuando el número de celdas de cálculo son suficientes para capturar todas las variaciones espaciales y temporales en el flujo, los resultados numéricos serán prácticamente iguales a los de la solución exacta de la ecuación de transporte, sin importar el método de diferenciación utilizado. Sin embargo, para cálculos prácticos no es posible utilizar esa cantidad de celdas, por lo tanto, para obtener resultados numéricos físicamente reales es necesario utilizar esquemas de discretización que cumplan con ciertas propiedades fundamentales. Básicamente son tres

- Conservativo
- Acotado
- Transportado

### C.4.1 Conservativo

Con la integración de la ecuación de convección-difusión sobre un número finito de volúmenes de control produce un conjunto de ecuaciones discretas de conservación, las cuales involucran flujos de la propiedad transportada  $\phi$  a través de las caras del volumen de control. Para asegurar la conservación de  $\phi$  en todo el dominio, el flujo de  $\phi$  proveniente de un volumen dado y que cruza una cara del mismo, debe ser igual al flujo de  $\phi$  que entrara al próximo volumen de control a través de la misma cara. Para lograr esto, el flujo en las caras debe ser representado de manera coherente entre los volúmenes de control adyacentes.

### C.4.2 Acotado

Un esquema de discretización se considera acotado cuando (en ausencia de fuentes) los valores de la propiedad en los nodos internos están delimitados por los valores en las fronteras. Otro requisito esencial para la acotación, es que todos los coeficientes de las ecuaciones discretizadas deben tener el mismo signo (por lo general, positivo). Físicamente

esto implica que un aumento en la variable  $\phi$  en un nodo dará lugar a un aumento de  $\phi$  en los nodos vecinos. Si el esquema de discretización no cumple los requisitos de acotación es posible que la solución no converja.

### C.4.3 Transportividad

Esta propiedad se ilustra considerando una fuente constante de  $\phi$  en el punto P, como se muestra en la Figura C.5.

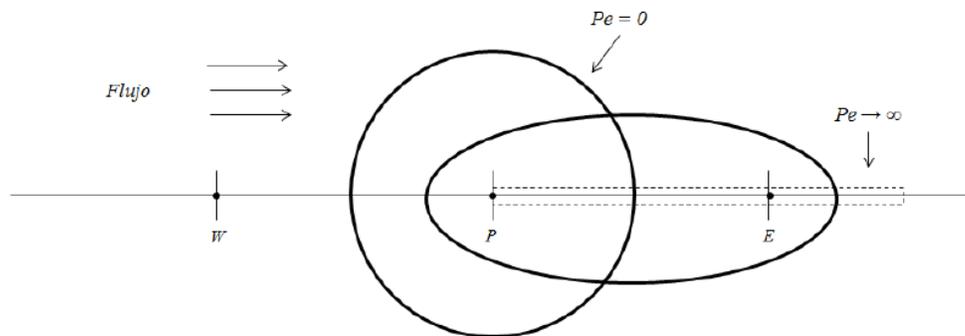


Figura C.5 Distribución de  $\phi$  en la vecindad de una fuente a diferentes números de Peclet.

Como se menciono anteriormente, el número adimensional de Peclet en la celda se define como una medida de la relación entre las fuerzas convectivos y las fuerzas difusivas.

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x}$$

donde  $\delta x$  es la longitud característica (ancho de la celda). Las líneas en la Figura C.5 indican los contornos de una constante  $\phi$  para diferentes valores de Peclet. Para identificar la influencia del nodo P sobre el nodo E aguas abajo, se considerando dos casos extremos

- Solamente difusión ( $Pe = 0$ )
- Solamente convección ( $Pe \rightarrow \infty$ )

En el caso de difusión pura ( $Pe = 0$ ), el fluido está estancado y los contornos de  $\phi$  constante son círculos concéntricos con centro en P, ya que el proceso de difusión de  $\phi$  es

igual en todas las direcciones. En este caso las condiciones en el nodo E son influenciadas por la corriente, en el punto P y también por las condiciones aguas abajo. Dependiendo del  $Pe$  se modifica la forma de los contornos, de circular a elíptica y se desplazan en la dirección del flujo, como se indica en la Figura C.5. Para altos valores de  $Pe$ , el nodo E está fuertemente influenciado por las condiciones en el nodo P y las condiciones en P experimentarían una influencia débil o nula de E. En el caso de convección pura ( $Pe \rightarrow \infty$ ), los contornos elípticos están totalmente extendidos en la dirección del flujo. La propiedad  $\phi$  emitida de la fuente del nodo P es inmediatamente transportada aguas abajo hacia E. Por lo tanto, el valor de  $\phi$  en E únicamente se verá afectado por las condiciones aguas arriba, además, dado que no hay difusión,  $\phi_E$  es igual a  $\phi_P$ . Es muy importante que la relación entre la magnitud del número de Peclet y la direccionalidad, conocida como transportividad, sea verificada en el esquema de discretización.