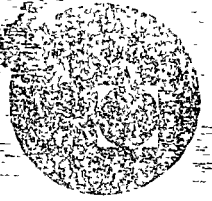




centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL CONCRETO Y SUS APLICACIONES
EN INGENIERIA.

TEMA: APLICACION EN INGENIERIA.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO.

Noviembre , 1977.



NON-DYNAMIC AND CREEP BUCKLING OF ELLIPTICAL
PARABOLOIDAL SHELL

By

Porfirio Ballesteros

SUMMARY

The collapse of Elliptical Paraboloidal concrete shells at Guayaquil, Ecuador is studied considering nonlinearity in geometry, material, and creep response. In the shell geometry is taken into account the effect of the imperfections on the critical pressure. From the Theoretical Considerations, and the data obtained from the collapse of this kind of shell, important design recommendations are proposed.

INTRODUCTION

Last september, 1975, the author was consulted from Guayaquil, Ecuador to study the motive of the collapse of Elliptical Paraboloidal concrete shells whose geometry is shown in Fig. 2 and 3. The following information from the prototype was obtained:

- a) The collapse happened in-between ninety and one hundred hours after the concrete formwork was removed, Fig. 9 and 10.
- b) The unconfined compressive strength of the concrete in the structure was $f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$ (2000 psi).
- c) Very significant geometric imperfections of the formwork were observed, Fig 11.

- d) An earthquake with considerable vertical component happened during the collapse.
- e) The day-laborers of the construction reported deflections at the apex of an order of magnitude of 15.00cm (6 inches), before the collapse.
- f) The deflection at the apex, measured in the existing shells, one day after removing the formwork, was of an order of magnitude of 9.00cm (3.5 inches). So the author's instructions were to shore immediately the shells which had not collapsed yet, for avoiding possible problems.

Based on this information, the collapse of course was originated for an elastic-plastic dynamic buckling with creep response.

PRACTICAL CONSIDERATIONS

The problem of giving a practical solution with the objective of saving the existing shells and to be able to continue the construction, was studied and, so, the following computation and solution was presented.

a) *Buckling capacity of the shells.*

The buckling pressure of this kind of shells is given by [19]

$$P_{cr} = CE \frac{t^2}{R_1 R_2} \tag{a}$$

were for concrete shells; $0.05 \leq C \leq 0.15$, and from Fig.2. In our case we have $R_1 = 32.90m$, $R_2 = 33.57m$, $t = 0.06m$, and $E \doteq 150\ 000\ kg/cm^2$. Substituting in(a) for the lower limit of $C = .05$, we have

$$P_{cr} = 244.5 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \quad (b)$$

The dead weight and live load of the shell were:

$$w \doteq \gamma t = 0.06 \times 2400 = 144.00 \text{ kg/m}^2 \quad (c)$$

and the live load; $p = 100 \text{ kg/m}^2$ (d)

comparing (c) and (d) with (b) we have

$$\frac{P_{cr}}{w+p} = \frac{244.5}{144 + 100} \doteq 1, \quad \frac{P_{cr}}{w} = \frac{244.5}{144} 1.7 \quad (e)$$

So the shells had a very low buckling capacity!

b) *Increasing of the buckling capacity of the existing shells by additional arches*

The buckling of a circular arch is given by [20]

$$q_{cr} = \frac{EI}{r^3} \left(\frac{l^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad (f)$$

using an arch of; $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$, $E = 260\,000 \text{ kg/cm}^2$, $I_z = 106\,000 \text{ cm}^4$,

$r = 33.00 \text{ m}$, and $\alpha = 0.55$ radians; from (f) we obtain; $q_{cr} = 2400 \text{ kg/m}$

The arches were connected to the shells in the way shown in Figures 12,13,14,15,16,17,18 and 19. The increase of tension in the perimetral ties was 7.4 Ton, and it was not necessary to put any additional reinforcement.

c) Field load test.

After the arches were connected to the shells, a static field load test was carried on two of the shells applying a load of $2.4 (w+p) = 585.6 \text{ kg/m}^2$ the shell was loaded in 24 hours and stayed during 360 hours, the deflection at the apex reached its maximum value of 3.8cm (1.5 inches) in 48 hours respect to time in which the loading manoeuvre started, after the 360 hours the shell was unloaded and the deflection at the apex recovered its 100%. The reinforcement details of the arches is shown in Fig. 13, and 14

THEORETICAL CONSIDERATIONS

a) *Linearly Elastic-plastic strain hardening-fracture material*

The analytical constitutive relation of concrete under general three-dimensional stress state has been proposed [1,2]. In the formulation, the concrete is assumed to be a continuous, isotropic, and linearly elastic-plastic strain hardening-fracture material. The elastic-plastic stress-strain incremental relationships, based on the initial discontinuous surface, loading surfaces, and failure surface of concrete are derived using the classical theory of plasticity. For the special case of a biaxial stress-strain relationship for a concrete shell under a plane stress condition, the constitutive relationships are

$$\begin{bmatrix} dN_x \\ dN_y \\ dN_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 - \omega\phi_{11} & \nu - \omega\phi_{12} & -\omega\phi_{13} \\ \nu - \omega\phi_{12} & 1 - \omega\phi_{22} & -\omega\phi_{23} \\ & & \frac{1-\nu}{2} - \omega\phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

where we have denoted

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} = & \left[2(1-\nu)J_2 - (1-2\nu)S_{33}^2 - 2(1-\nu)\rho S_{33} + 2(1+\nu)\rho^2 \right] \\ & + \frac{H(1-\nu^2)}{E} \sqrt{2J_2 + 2\rho^2} \left(1 - \frac{\alpha}{3} I_1 \right); \quad \phi_{11} = \left[(1-\nu)S_{11} - \nu S_{33} \right. \\ & \left. + (1+\nu)\rho \right]^2; \quad \phi_{11} = \left[(1-\nu)S_{11} - \nu S_{33} + (1+\nu)\rho \right] \left[(1-\nu)S_{22} \right. \\ & \left. - \nu S_{33} + (1+\nu)\rho \right]; \quad \phi_{13} = \left[(1-\nu)S_{11} - \nu S_{22} \right. \\ & \left. + (1+\nu)\rho \right] \left[(1-\nu)\tau_{12} \right]; \quad \phi_{22} = \left[(1-\nu)S_{22} - \nu S_{33} \right. \\ & \left. + (1+\nu)\rho \right]^2; \quad \phi_{22} = \left[(1-\nu)S_{22} - \nu S_{33} + (1+\nu)\rho \right] \left[(1-\nu)\tau_{12} \right]; \\ \phi_{33} = & \left[(1-\nu)\tau_{12} \right]^2 \end{aligned}$$

in which ν = Poisson's ratio; E = Young's modulus; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} I_1/3$; The stress deviator tensor; τ_{ij} = material constant; and $\rho = n I_1 + \frac{(\alpha + \beta \tau_{ij}^2)}{2}$ in which $n=0$ when stress state is lying in the compression zone and $-1/3$ in the tension zone; α and β are parameters, I_1 is the first invariant of the stress tensor, and H is the strainhardening

rate function, and J_2 is the second invariant of S_{ij} .

b) *Linearly viscoelastic material.*

The theory of linear viscoelasticity for infinitesimal deformations is well known and has been applied to several boundary value problems. The response σ_{ij} to a given history $\epsilon_{ij}(t)$ is given in [2] by the convolution integral

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(t) E_{kl}(0) + \int_0^t G_{ijkl}(t-t') \frac{d}{dt'} \epsilon_{kl}(t') dt' \quad (3)$$

where ϵ_{ij} and σ_{ij} are the infinitesimal strain and stress. The integrating function G_{ijkl} reduces it to two independent components for isotropic materials and exhibits its fading memory.

The most general nonlinear theory gives the free energy as a functional of the strain history and derives the stress response from it, which its numerical solution increases the computational time. Equation (3) was derived for the case for stress linearly dependent on the strain $\epsilon_{ij}(t)$ but the kinematics of the deformation is not. In [5] is given a generalization of Eq. (3) but computationally is not convenient, so in [6,7] an alternative formulation using convected coordinates has been used in this problems.

In order to avoid transformation to a physical tensor components, Larsen and Popov [4] give a pure Lagrangian generalization of (3) where the symmetric stress and strain tensors are used, and (3) is interpreted as a functional relationship between their physical components, and it becomes

$$'S_{IJ}(t_1) = G_{IJKL}(t_1) E_{KL}(0) + \int_0^{t_1} G_{IJKL}(t_1-t') \frac{d}{dt'} E_{KL}(t') dt' \quad (4)$$

From table I we may consider

$$m \doteq \frac{1}{3}, \quad n \doteq 1/8 \quad (6)$$

It has been shown previously in [3] that the creep analysis of large finite element systems is simplified by expanding $J(t, t')$ into Dirichlet series, or exponentials series of the following form:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{\hat{E}_{\mu}(t')} 1 - e^{-[(t-t')/\tau_{\mu}]} \quad (7)$$

where τ_{μ} are chosen retardation times and \hat{E}_{μ} are coefficients.

This series approximates very closely the double power law in the time interval $0, 3\tau_1 \leq t-t' \leq 0.5 \tau_N$ when one sets $\tau_{\mu} = 10^{\mu-1} \tau_1$ ($\mu=1, 2, \dots, N$) and uses the following expressions:

$$\frac{1}{E(t')} = \frac{1}{E_0} + a(n) \left(\frac{\tau_1}{0.002}\right)^n \frac{\phi_1}{E_0} t^{1-m}. \quad (8)$$

For $\mu < N$

$$\frac{1}{\hat{E}_{\mu}(t')} = b(n) \left(\frac{\tau_1}{0.002}\right)^n \frac{\phi_1}{E_0} 10^{n(\mu-1)} t^{1-m}. \quad (9)$$

For $\mu = N$

$$\frac{1}{\hat{E}_{\mu}(t')} = 1.2 b(n) \left(\frac{\tau_1}{0.002}\right)^n \frac{\phi_1}{E_0} 10^{n(N-1)} t^{1-m} \quad (10)$$

in which τ_1 and t' must be substituted in days, and $a(n)$ and $b(n)$ are coefficients given by Table II. The values of $a(n)$ and $b(n)$ have been obtained by a nonlinear optimization technique (Marquardt

where 'S₀' is the stress configuration in the current configuration at time t₁, and E_{KL}(t') is the total Lagrangian strain at time t', but here the material characterization is done by a double power law [3], in which the dependence of creep on load duration (t-t') as well as age at loading t' is described by the law

$$J(t,t') = \frac{1}{E_0} \left[1 + \phi_1 t^{1-m} (t-t')^n \right] \quad (5)$$

in which m, n, φ₁ and E₀ are material parameters determined from test data by optimization techniques. The law is limited to basic creep, but with different values of material parameters it can also describe drying creep up to a certain time.

J(t,t') represents strain in time t caused by a constant unit stress that has been acting since time t'. Time t' is measured from setting of concrete and represents its age. The values of material parameters from various tests are listed in table I, where only short-time creep data up to one month duration is available.

TABLE I (Ref. 3)

Data from	m	n	φ ₁	E ₀ x 10 ⁶ psi
1. L'Hermite et al. (in water)	0.221	0.094	3.74	0.0788
2. Dworshak Dam (sealed)	0.355	0.056	17.51	0.0844
3. Ross Dam (sealed)	0.457	0.130	2.80	0.1885
4. Shasta Dam (sealed)	0.536	0.134	5.38	0.1806
5. Canyon Ferry Dam (sealed)	0.295	0.119	4.02	0.1000
6. Gamble and Thomas (RH 94%)	0.450	0.081	4.87	0.1800
7. A.D. Ross (RH 93%)	0.238	0.126	1.97	0.1030
8. L'Hermite et al. (BH 50%)	0.203	0.131	11.26	0.0521

TABLE II
DIPICHLET SERIES EXPANSION COEFFICIENTS

N	a(n)	b(n)
0.05	0.6700	0.0819
0.10	0.4456	0.1161
0.15	0.2929	0.1229
0.20	0.1885	0.1152
0.25	0.1154	0.1007
0.30	0.0611	0.0842
0.35	0.0156	0.6810

algorithm) for sum-of-squares problems.

c) Solution Procedure

The basic equations for nonlinear finite element analysis are well known, for the nonlinear dynamic case, by the principle of virtual work in terms of the initial configuration, we obtain

$$\int_{V_0} [N]^T [c] [N] \{\ddot{u}\} dV_0 = - \int_{V_0} [B] \{\sigma\} dV_0 + \{P\} \quad (11)$$

where $[N]$ is an interpolation function that transforms displacements at the nodes to displacement at any point within the element.

$[B]$ is the transformation matrix that transforms displacement rates at the nodes to strain rates at any point in an element

{σ} is the generalized stress vector

[ρ] is the density matrix (the density takes on its usual form in problems of shells)

{P} is the applied load

We may now linearize the equation by writing it in its incremental form:

$$\int_{V_0} [N]^T [\rho] [N] dV_0 \Delta\{\ddot{u}\} = - \int_{V_0} \Delta[B] \{\sigma\} dV_0 - \int_{V_0} [B] \Delta\{\sigma\} dV + \Delta\{P\} + 0(I) + 0(t^m) \quad (12)$$

In the above Eq, Δ{P} should be understood to include the effects of following loads. The two error terms 0(t^m) and 0(I) are also included to show that the solution in incremental form contains a discretization error due to the current increment as well as an inherited error due to all previous increments. The error due to discretization in time is shown as a function of time raised to the power m.

We now make use of the linearized incremental stress strain relations which are written as

$$\Delta\{\sigma\} = [D] \Delta\{e\} \quad (13)$$

This equation is appropriate for elastic-plastic behavior and has been outlined for small strain in [10] and for large strains in [11].

Substituting (13) in (12) results in a linearized incremental equation

$$[M] \Delta \{\ddot{u}\} = - [K] \Delta \{u\} + \Delta \{P\} + O(\Delta t^m) + O(I) \quad (14)$$

This equation can be specialized to the static case by neglecting the term on the left. In the static case convergence to the true solution may be achieved by applying the load in increasingly smaller increments. A parallel procedure was investigated for the dynamic case where the rate of convergence with decrease in time step was examined.

We now consider the error term $O(I)$ called the residual load correction, that consists of writing the residual equation for (11)

$$O(I) = - [M] \{\ddot{u}\} - \int_{V_0} [B]^T \{\sigma\} dV_0 + \{P\} \quad (15)$$

It is noted that this error term consists of evaluating the terms at the state before the current increment and that if no numerical error term consists of evaluating the terms at the state before the current increment and that if no numerical errors had been introduced by previous increments the error would be equal to zero. It was shown in [4] that, by including the residual load correction in the dynamic equations, one may obtain convergent solutions using time increments relatively large in comparison with the solutions obtained without the correction.

The selection of an integration scheme for the solution of the incremental equations in the time domain is critical in respect to computational efficiency. A suitable solution scheme, which allows a large time step and yet gives an accurate solution is that developed by Houbolts [12]. The Houbolt scheme is base on the backwards difference expression

$$)_{n} = \frac{1}{\Delta t^2} \{2\Delta\mu_{n-5} + \Delta\mu_{n-1} + 4\Delta\mu_{n-2} - \Delta\mu_{n-3}\}$$

Applying this to the condition for incremental equilibrium (4), we have

$$(2[M] + \Delta t^2 [K_n]) \Delta\{\mu_{n+1}\} = \Delta\{P_{n+1}\} \Delta t^2 + [M] (5\Delta\{\mu_n\} - 4\Delta\{\mu_{n-1}\} + \Delta\{\mu_{n-2}\}) + O(I_n) \Delta t^2$$

where n, is a subscript denoting the time at which increment is taken. This equation is solved for the displacement increment $\Delta\{\mu_{n+1}\}$ at each step except the first, where a special starting procedure must be employed [12].

d) Solution Convergence

Haisler et al. [13] have reported on studies of numerical integration schemes and their convergence properties in the nonlinear static case. It was shown there that the incremental finite element formulation gave satisfactory results when the load increments used were small as compared to those adopted in the solutions using the residual load correction term. The nature of the correction procedure was illustrated in [8], where the order of the error for the corrected and uncorrected equations are examined. The result was given for a one-dimensional model and serves to give an order of magnitude estimate of the error.

In the static case for the solution without the residual load correction and a slowly varying stiffness K, the total discretization

is the discretization errors for each increment of the incremental approximation. This error may be expressed as

$$\mu_N - \mu_N^* = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^N K_{n-1}^{-1} \frac{dK_{n-1}}{d\mu} \Delta\mu_n^2 + O(\Delta\mu^3) \quad (16)$$

where μ_n is the correct total displacement after N load increments and μ_N^* is the displacement obtained by the incremental approach.

It is noted that the error is $O(\Delta\mu^2)$ in the displacement increment.

When the residual load correction is included, we find that,

$$\mu_N - \mu_N^c = -\frac{1}{2} K_{N-1}^{-1} \sum_{n=2}^{\frac{N}{2}+1} \frac{dK_\ell}{d\mu} \Delta\mu_K^2 + O(\Delta\mu^3) \quad (17)$$

where for N even $\ell = m - 1, k = m$

N odd $\ell = m, k = m + 1,$

$m = 2\left(\frac{2n-1}{2}\right)$, and fractions are discarded in the computation of the indices. Eq(17) may be described by stating that for even N only terms involving even displacement increments remain in the series and likewise for odd N and odd displacement increments. In comparing (16) and (17) we see that the inclusion of the residual load correction reduces the number of terms in the series by a half. One could state that, approximately speaking, the error is halved in the corrected equations except for the fact that the stiffness quantity is inside the summation sign in [16]. The assumption of a slowly varying stiffness K in [6] means the neglect of errors caused by the inherited error terms.

In the dynamic case the expressions for the discretization errors of

the uncorrected and corrected equations at time $N\Delta t$ are, respectively,

$$u_N - u_N^* = - \frac{\Delta t^2}{4} M^{-1} \left\{ \sum_{n=2}^N [R_{n-1} \frac{dk_{n-1}}{du} \Delta u_n^2] + E^* \right\} + O(\Delta u^3) + O(\Delta t^4) \quad (18)$$

and

$$u_N - u_N^c = - \frac{\Delta t^2}{4} M^{-1} \left\{ R_{N-1} \sum_{n=2}^{\frac{N}{2}+1} \left[\frac{dk_{n-1}}{du} \Delta u_n^2 \right] + E^c \right\} + O(\Delta u^3) + O(\Delta t^4) \quad (19)$$

where $R_n = (1 - \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1} K_n)$. In the above equations E^* and E^c are the truncation errors inherited from the inertia terms and, for the integration scheme in time, do not appear to be expressible in a general form. However, they are of the same order as the first terms in brackets in (18) and (19), and it is interesting to speculate that a similar reduction in the error occurs in E^c as compared with E^* .

It has been demonstrated in [13] that the static solutions given by the corrected and uncorrected equations, tend to converge as the number of load increments in the uncorrected case are increased. A particular example given in [13] is a spherical shell cap under a point load at the apex where the uncorrected solution converged using an increment one eighth that was required for convergence in the corrected solution. One would expect that, judging from (18) and (19), the convergence rate in the dynamic case would be more rapid both for the corrected and uncorrected solutions considering the presence of the factor Δt^2 , and the fact that the truncation errors for the static and dynamic solutions are approximately of

the same order. In the sample problems, mentioned later, it has been shown for the example of a beam under a half-sine wave impulse over the span, that the uncorrected solution converges rapidly with the variation in the time increment. On the other hand, the corrected solution changes very little over a range of time increments. It appears that with the reduced truncation error of the corrected equations the effect of Δt^2 on the convergence of the solution is diminished.

The advantage in using the corrected dynamic equations is that one may obtain practically convergent results with large time increments. In the numerical examples mentioned later it was shown that convergent solutions to dynamic problems using the corrected incremental equations may be obtained using time increments of an order of magnitude greater than those used by other investigators. The other solutions were obtained by using the Houbolt scheme and the total form of the finite element equations, so the comparisons are direct. This fact has important consequences in terms of doing nonlinear problems economically.

COMPUTER PROGRAM

The system of equations for the dynamic elastic-plastic analysis with large displacement have been incorporated to a general purpose computer program. A program previously developed at Marc Analysis Research Corporation, Palo Alto, California called MARC program was used as the basis. Figure 1 gives a flow diagram for this problem.

CASE STUDIES

Several examples were selected by Marcal from [8,9], in order

a) to make comparisons with results in the literature, b) to investigate the limits of numerical approximations in terms of the frequency of reassembly and residual load correction, and c) to observe the effect of geometric imperfections in a dynamically loaded sphere. The one-dimensional element used in this examples is of the iso-parametric type and has a rapid rate of convergence even for small numbers of elements. This is due to the fact that it can represent exactly all the rigid body modes of the interpolated surface which is arbitrarily close to the actual structural shape. It has proved to be a very accurate and economic element for use in analyzing dynamic problems.

The chosen examples are:

1. Shallow Spherical Cap Under A Step Pressure Load
2. Nonlinear Elastic Analysis of a Simply-Supported Beam Under A Half-Sine Initial Velocity Distribution
3. Nonlinear Elastic Analysis of a Spherical Shell Cap Under a Point Load at the Apex
4. Elastic-Plastic Beam Under a Uniform Initial Velocity Over a Portion of the Span
5. Elastic-Plastic Bucklin of an Imperfect Sphere under a uniform constant external pressure

NUMERICAL RESULTS

a) Post-buckling behavior of the shallow concrete elliptical paraboloidal shell with an elliptical imperfection.

The geometry of this shell is shown in Fig. 2 and 3 where the imperfection is given as a flat elliptical section of the shell

of radii r_1 and r_2 , which are the mean radius of the oblate portion of the elliptical paraboloidal surface.

For the more simple elements, where only displacement continuity is required at the nodes, as in [14] and [15], the function between the imperfection and the shell is not a problem. But for the eighth order isoparametric element, the displacements and their first derivatives, were achieved by applying a constraint relating displacements at two hypothetical nodes, in the manner of Hibbitt and Marcal [16].

The shell was analysed first elastic-plastic and the results for imperfection parameters $\lambda=2$ and $\lambda=3$ are presented in Fig. 4 and 5, where we consider three pressure parameters $\rho=0.3, 0.4$ and 0.5 related to a critical value $p_{cr} = 0.15 E(t^2/R_1 R_2)$, in there the deflection parameter at the apex u_3/t is plotted against time. The shell is seen to have buckled when the deflection profile increases drastically for a small increment of pressure. It is important to mention that buckling occurs after the first maximum and not after a number of oscillations.

The problem of the externally pressurized imperfect hemisphere for the aluminum alloy (7075-T6), was first solved by Bushnell [17] for the static case, and by Marcal [18] for the elastic plastic case, and also by Marcal [9] for the elastic and elastic-plastic dynamic case, whose results are compared in Fig. 7. Based on these previous results; for the Concrete Elliptical Paraboloidal Shell, it has been studied in this paper only the elastic-plastic dynamic case. Values of pressure parameters ρ which initiate buckling are plotted against the geometric parameter λ . for 1.5, the buckling pressure is governed very strongly by instability of the material itself; so, for this

values of any analysis neglecting nonlinear material and geometric behavior would be incorrect. The results are in Fig. 7a.

In computing the results just described, the equations were reassembled every ten increments, and corrected every second increments, this selection is based on the numerical experimentation presented by Marcal [9].

b) Creep buckling of the Elliptical Paraboloidal Shell

The objective of this study is to found the creep buckling load for a life expectancy of 96 days, when subjected to various pressure levels.

The geometry of the shell is shown in Fig. 2 and 3 with

$$f_1 = 2.75\text{m}, f_2 = 2.8\text{m}, a = 13.70\text{m}, b = 13.45\text{m}, t = 0.06\text{m}, R_1 = 32.90\text{m}, R_2 = 33.57\text{m} \text{ and } \lambda = 3.$$

The material is concrete with a compressive strength level $f'_c = 150\text{kg/cm}^2$ and a Poisson Ratio $\nu=0.15$, which is assumed to be time independent for this study. The relaxation data obtained from the creep test just mentioned.

The creep analysis has been done with pressure levels of 0.3, 0.4 and 0.5 respect to the upper critical load of $0.15E(t^2/R_1R_2)$.

The pressure was applied instantaneously using 10 load increments and then, sustained during the creep process (Fig. 8). In about 40 hr it was observed that the use of the out of balance force in the load vector makes to approach the critical configuration, this force also cause over corrections of equilibrium, and, at the end of the time step the stresses obtained are very small; and when combined with the fading memory of the concrete the oscillations are set up; and for a given data of 96 hours the critical pressure parameter was found to be equal to 0.35.

CONCLUSIONS

- a) The upper limit of the critical pressure for the Elliptical Paraboloidal concrete shell is $p_{cr} = 0.15 E(t^2/R_1R_2)$, and for the spherical aluminum alloy (7075-T6), or structural steel shell is $p_{cr} = 0.312E(t^2/R^2)$, [9], It should not be 1.16 [19].
- b) The minimum unconfined compressive strength of the concrete should be in the structure above or equal to 250 kg/cm^2 (3500 psi).
- c) In designing the Elliptical Paraboloidal concrete shell, we may see from Fig. 7a that for values of λ in between 1.5 and 3.5, the pressure parameter is, $\rho = 0.35$, and the lower limit of the critical load is $(p_{cr})_L = 0.35 \times 0.15 E(t^2/R_1R_2) = 0.053(t^2/R_1R_2)$, therefore the design load should be as smaller as possible respect to $(p_{cr})_L$.
- d) In designing the spherical Aluminum Alloy (7075-T6), or structural steel shell, the lower limit of the critical load $(p_{cr})_L$ should be taken for the elastic-plastic dynamic case from Fig. 7. For instance, for; $\lambda = 3$, we obtain $\rho = 0.49$, from which $(p_{cr})_L = 0.49 \times 0.312E(t/R)^2 = 0.15E(t/R)^2$.
- e) After 100 hours of having removed the formwork, the deflection at the apex of the Elliptical Paraboloidal concrete shell should be smaller than 2 times its thickness t .
- f) In the Elliptical Paraboloidal concrete shell, for values of the geometric parameter $\lambda < 1.5$, the buckling pressure is governed very strongly by the inestable behavior of the material; so, for this values of λ , any analysis neglecting nonlinear material and geometric behavior would be incorrect, this could have been the cause of the collapses of this kind of shell in different countries.

g) The creep buckling analysis was performed for $\lambda=3$, and its buckling pressure was of the same order of magnitude than the elastic-plastic dynamic case.

h) It is important to note that the practical consideration gave already the solution of the problem, but it is very important to know as deep as possible the theory, because one may say "A good practice should be based in a very good and clear knowledge of the theory".

REFERENCES

- [1] Chen, C.T.A. and Chen, W.F., "Constitutive Relations for Concrete", Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, August, 1975.
- [2] Ballesteros, P., and Alamo. R. "Ecuaciones Constitutivas del Concreto", División de Estudios Superiores, Fac. Ingeniería, National University of México, 1977.
- [3] Bazant, Z.P. and Osman, E., "Double Power law for Basic Creep of Concrete" Materials and Structures (Rilem, Paris) Vol. 9, 1976, N° 49.
- [4] Larsen, P.K. and Popov, E.P., "Large displacement analysis of viscoelastic shells of revolution", Computer methods in Applied Mechanics and Engineering 3(1974) 237-253, North Holland Publishing Co.
- [5] Truesdell, C. and Noll, W., "The nonlinear field theories of mechanics", in: S. Flügge (ed), Handbuch der Physik; III/3 (1965).

- [6] Fredrickson, A.G., "Principles and applications of Rheology".
Prentice Hall, 1964.
- [7] Oden, J.I., "A generalization to the finite element concept
and its application to a class of problems in nonlinear
viscoelasticity", in: Developments in theoretical and Applied
Mechanics IV, D. Frederick (ed.) (Pergamon, 1968) 581-592.
- [8] McNamara, J.F., "Incremental Stiffness method for Finite
Element Analysis of the Nonlinear Dynamic Problem", PhD.
Thesis, submitted August 1971.
- [9] Zienkiewicz, O.C., Gallagher, R.H. and Marcal, P.V., "Advanced
Topics in Finite Element Analysis". Newport, R.I., July 21-25,
1975, Marc Analysis Research Corporation
- [10] Marcal, P.V. and King, I.P., "Elastic-Plastic Analysis of
Two-Dimensional Stress System by the Finite Element Method",
International Journal of Mechanical Science, 9, No. 3, 1967,
pp. 143-155.
- [11] Hibbitt, H.D., Marcal, P.V. and Rice, J.R., "A Finite Element
Formulation for Problems of Large Strain and Large Displace-
ment", International Journal of Solid Structures, 6, pp.
1069-1970.
- [12] Houbolt, J.C. "A recurrence Matrix Solution for the Dynamic
Response of Elastic Aircraft" Journal of Aerospace Sciences,
17, 1950, pp. 540-550.
- [13] Haisler, W.E., Stricklin, J.A. and Stebins, F.J., "Development
and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Non-
linear Structural Analysis by the Direct Stiffness Method"

AIAA/ASME, 12th, Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Anaheim, California, April 19 - 21, 1971.

- [14] Klein, S. and Sylvester, R.J., "The linear Elastic Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method" Air Force Flight Dynamics Laboratory, TR-66-80, 1966, pp. 299-329.
- [15] Khojasteh-Bakht, M., "Analysis of Elastic-Plastic Shells of Revolution under Axisymmetric Loading by the Finite Element Method", Ph. D. Dissertation, University of California at Berkeley, SESM 67-68, April 1969.
- [16] Hibbitt, H.D. and Marcal, P.V., "Hybrid Finite Element Analysis with Particular Reference to Axisymmetric Structures", Proc. AIAA 8th Aerospace Science Meeting, New York, January 19-21, 1970.
- [17] Bushnell, D., "Nonlinear Axisymmetric Behavior of shells of Revolution" AIAA Journal, 5 No 3, 1967, pp 432-439
- [18] Marcal, P.V., "Finite Element Analysis of combined Problems of Nonlinear Material and Geometric Behavior", Proc. ASME Joint Computer Conference on Computational Approach to Applied Mechanics, Chicago, 1969.
- [19] Ballesteros, P., "Congress of Mexico. The application of Shell Structures. General Report. Theme IV". Bulletin No. 41, IASS. 1969.
- [20] Timoshenko, S.P. and Gere, J. "Theory of Elastic Stability" McGraw Hill. 1962.

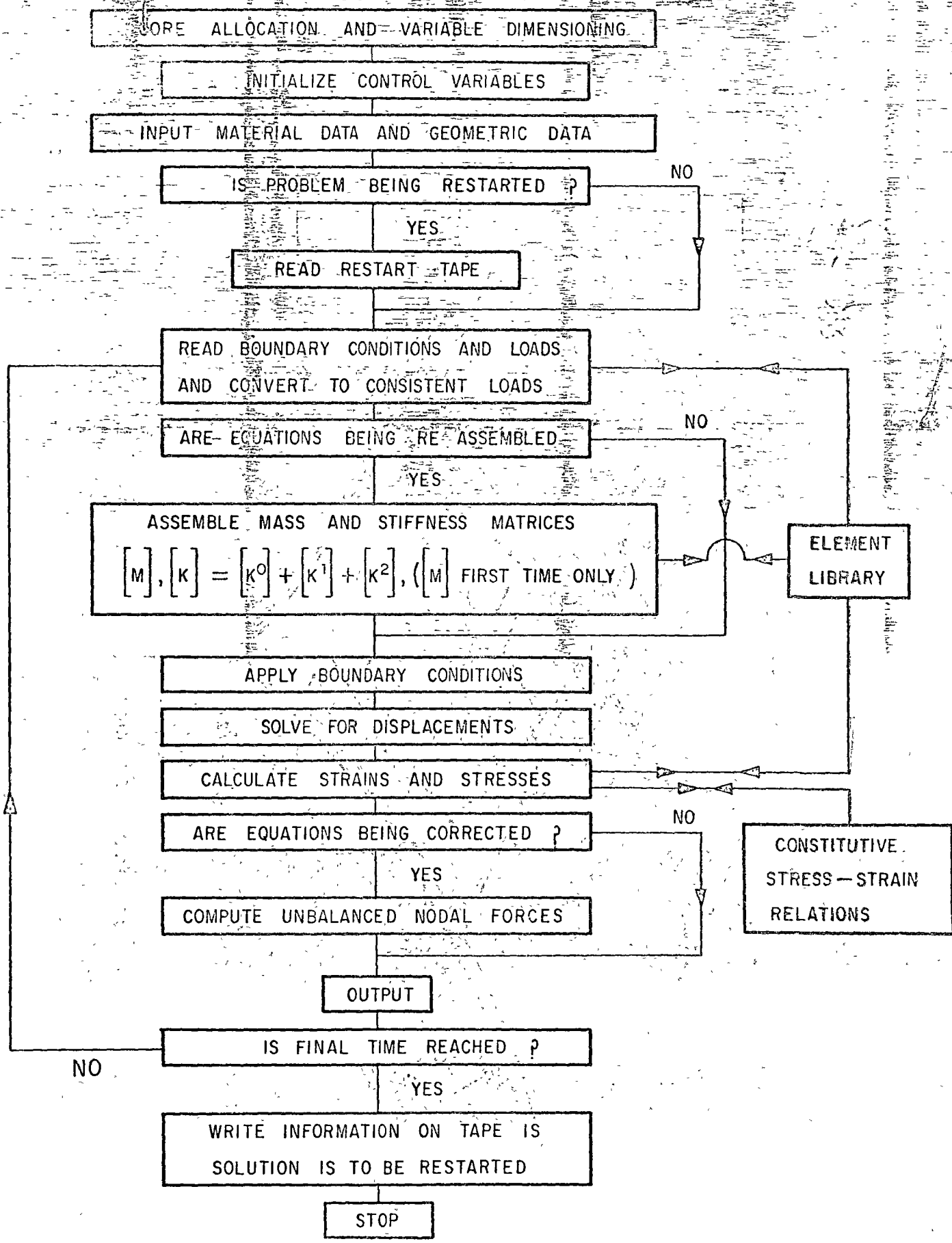
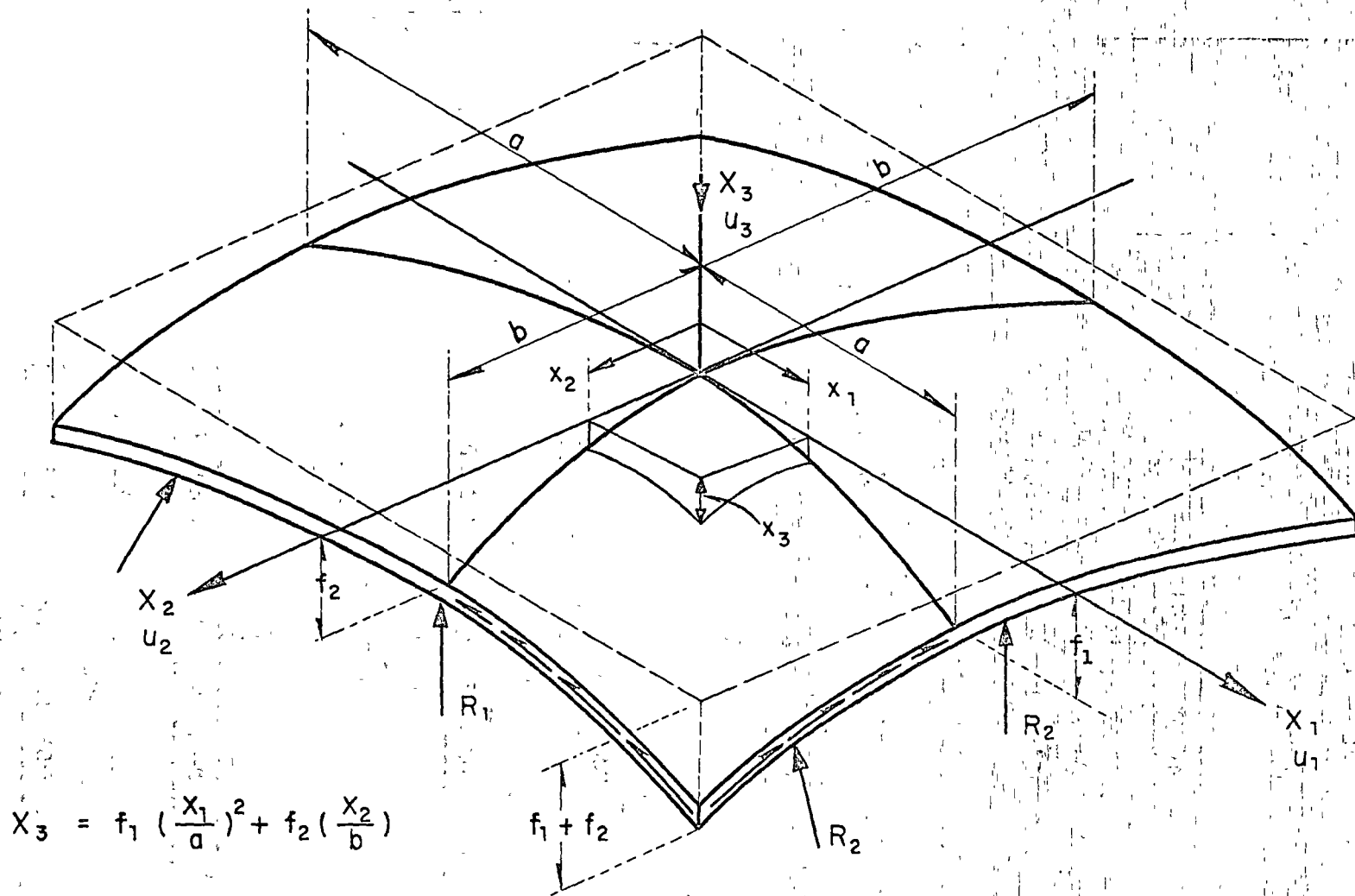


Fig 1 Flow chart for computer program



This surface is generated by moving a parabolic curve along another parabola, any plane parallel to plane $(X_1 X_2)$ intersects the surface in an ellipse, and any plane parallel to $(X_1 X_3)$ or $(X_2 X_3)$ intersects the surface in a parabola

Fig 2 Geometry of the Elliptical Paraboloidal shell supported by tangential shear along the boundary

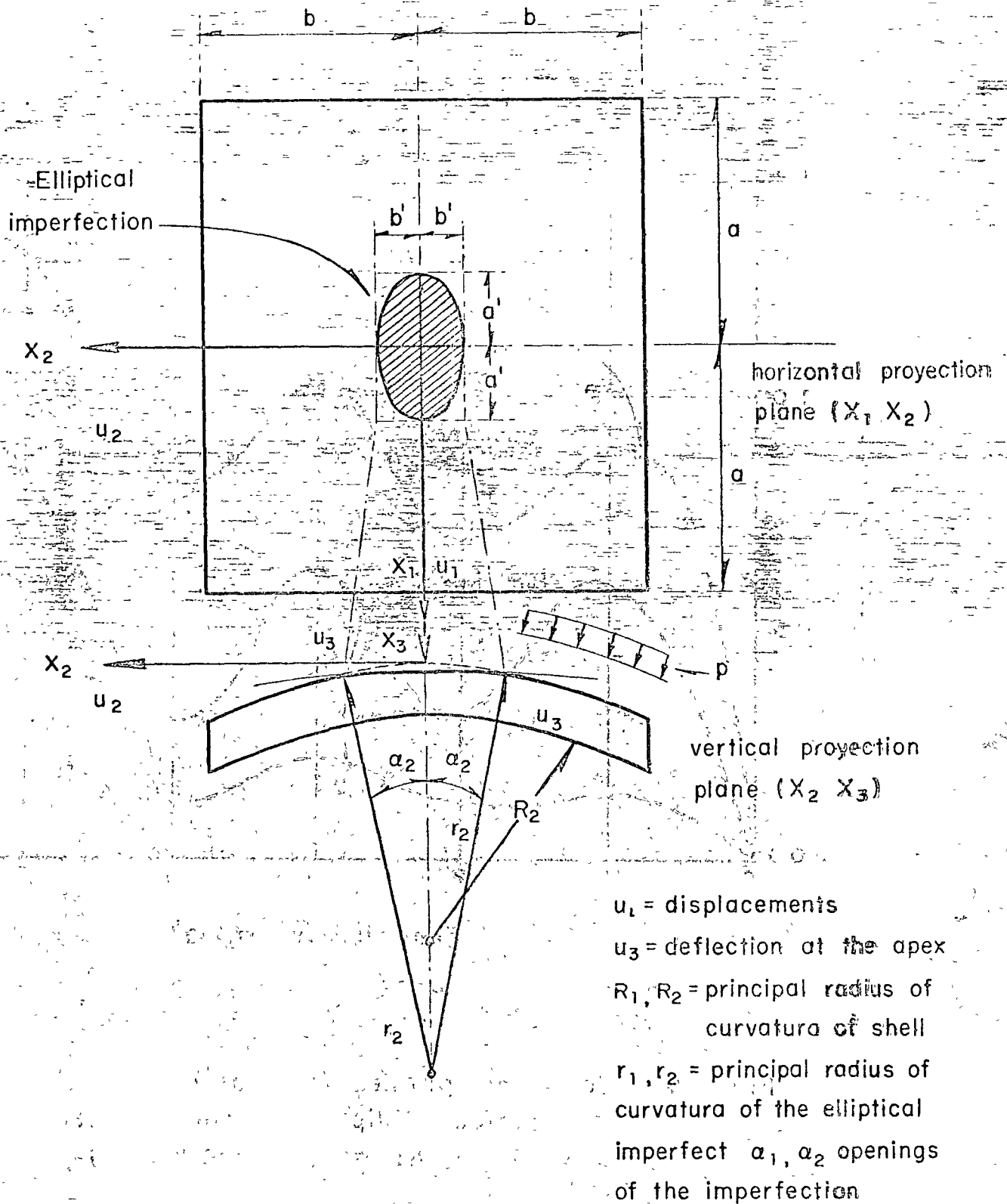


Fig 3 Elliptical imperfection at the origin of the Elliptical Paraboloid shell with a radius of curvature r_1 and r_2

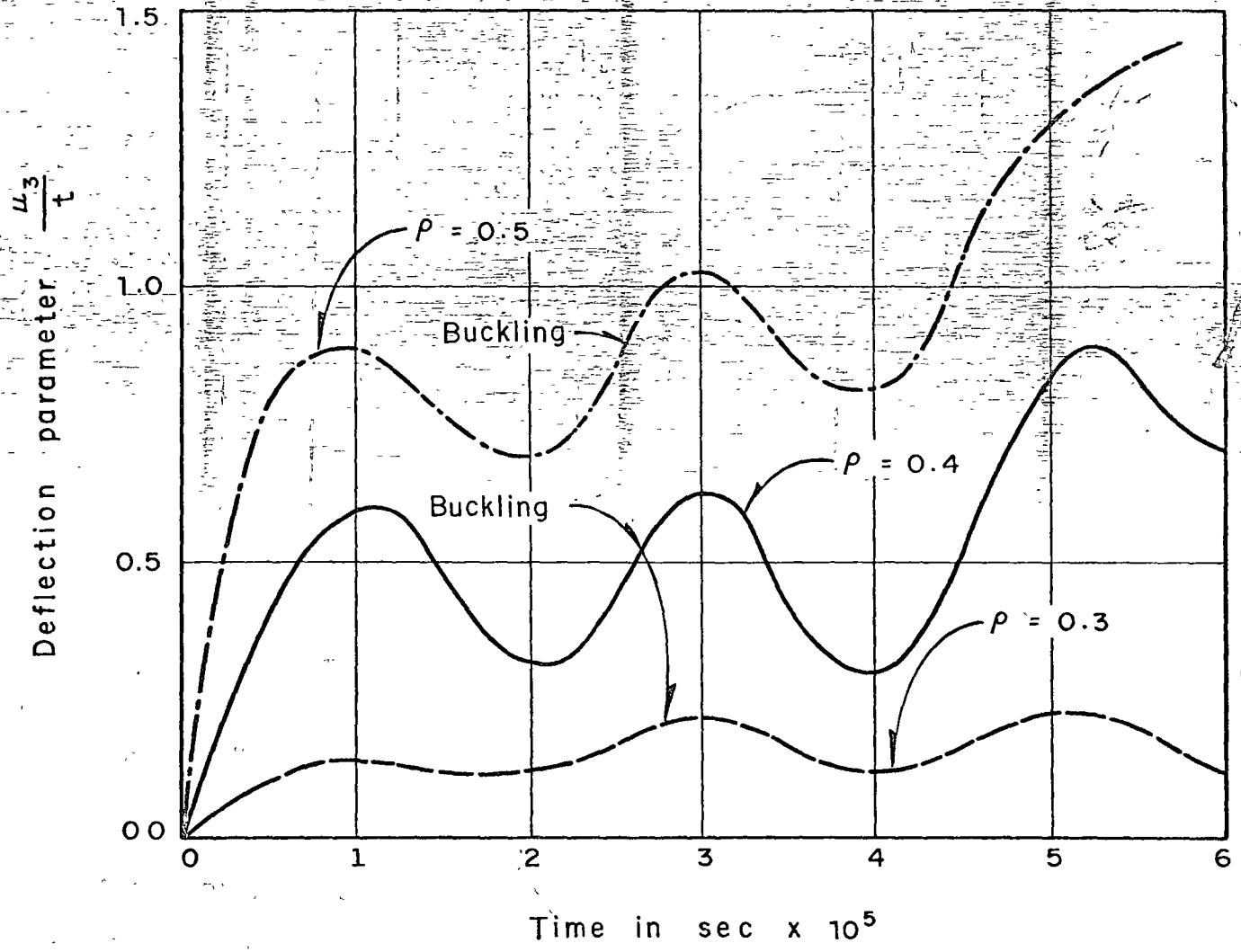


Fig 4 Deflection profiles for elastic - plastic buckling of imperfect Elliptical Paraboloidal shell with $\lambda = 2$ ($AT = 2.5 \times 10^{-6}$ sec)

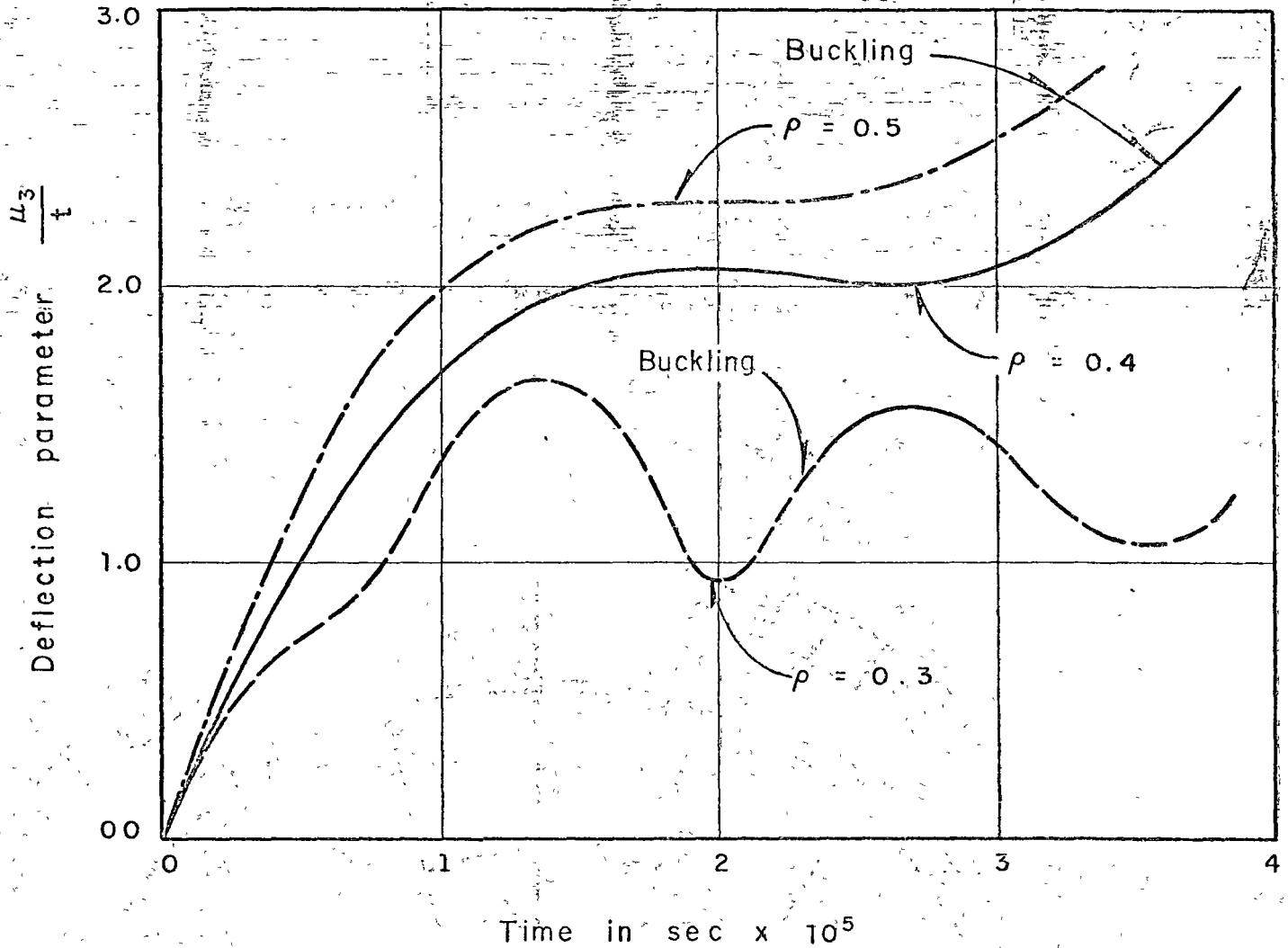
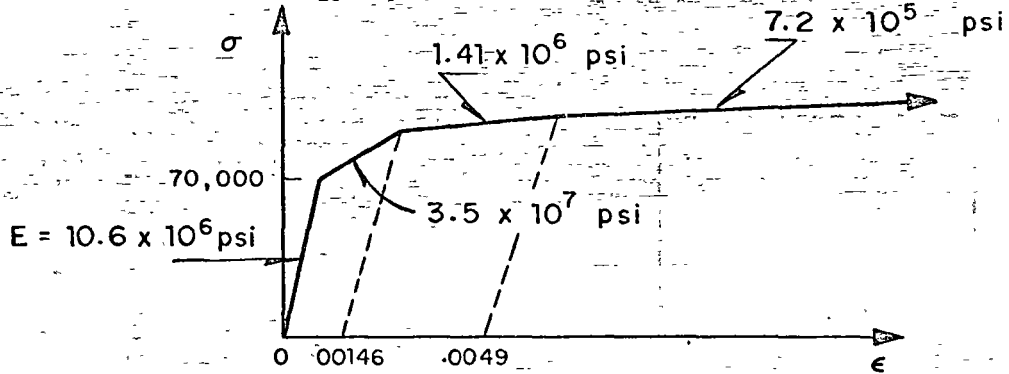


Fig 5 Deflection profiles for elastic-plastic buckling of imperfect Elliptical Paraboloidal shell with $\lambda = 3$

Model of stress - strain curve :



Inperfection parameter $\lambda = \left[12 (1 - \nu^2) \right]^{1/4} \left(\frac{R}{t} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{Y} \right)^{1/2} \alpha$

Upper limit of critical pressure $P_{CR} = 0.312 E \left(\frac{t}{R} \right)^2$

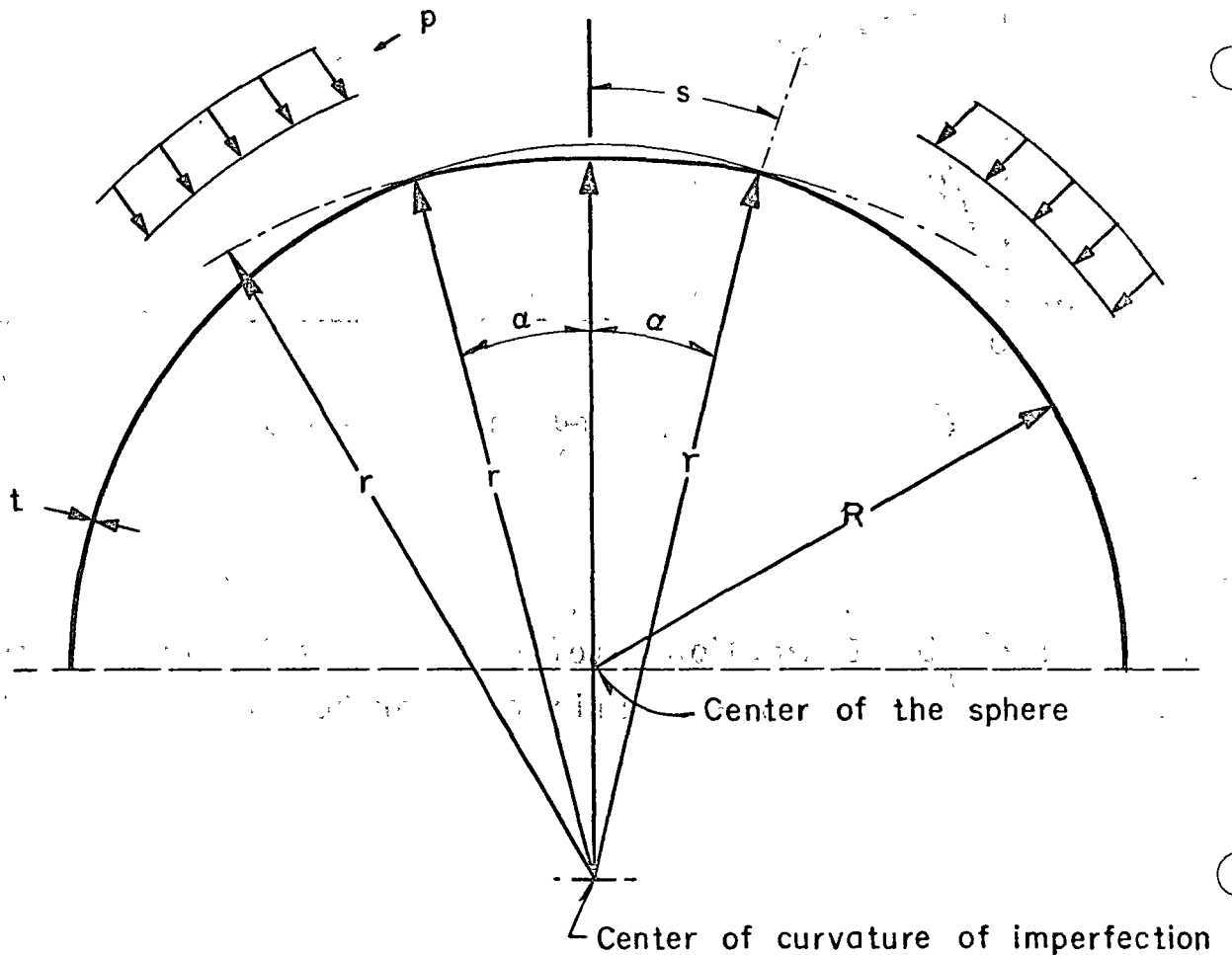


Fig 6 Externally pressurized imperfect hemisphere and material constants , for aluminum alloy (7075 T-6)

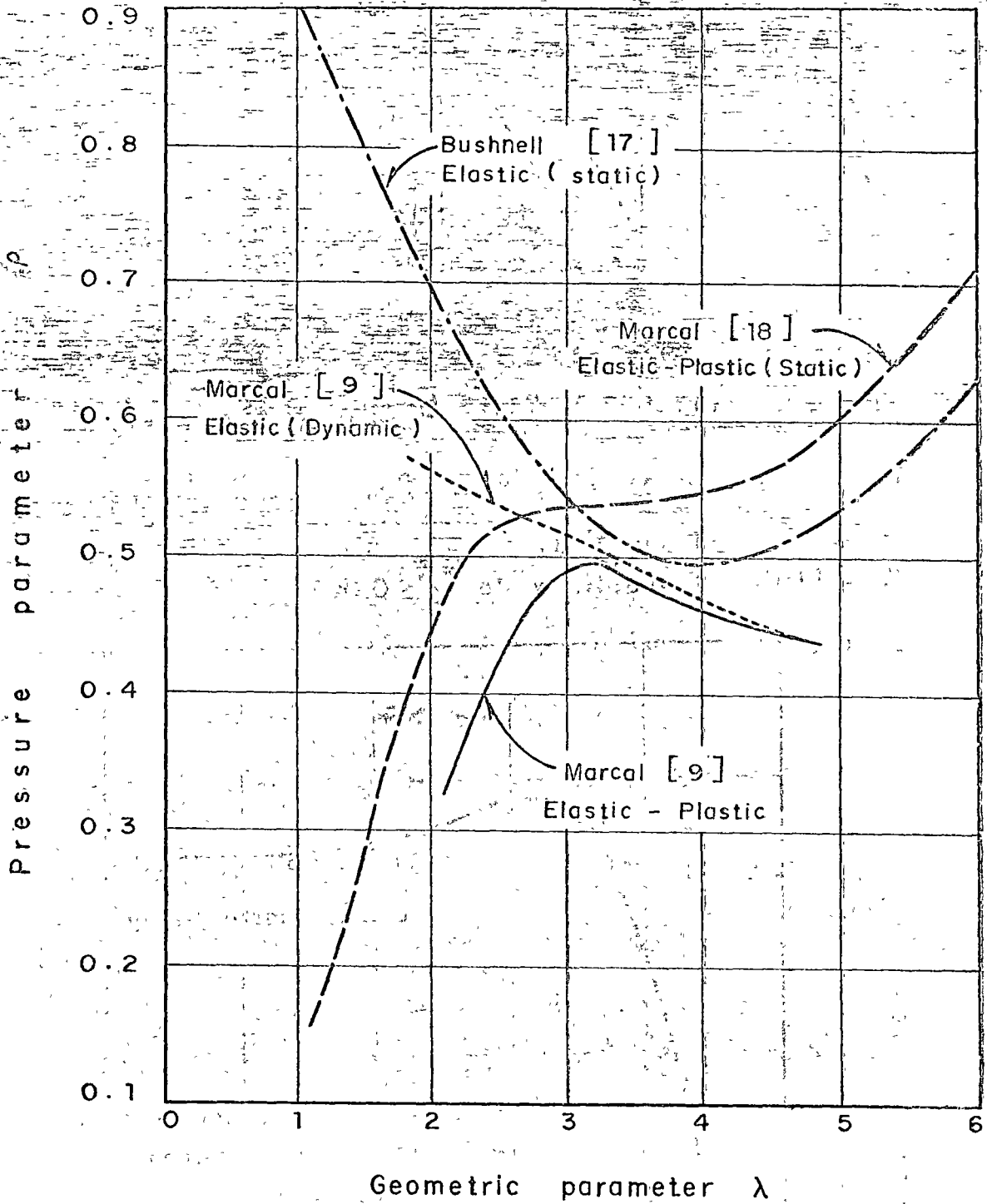
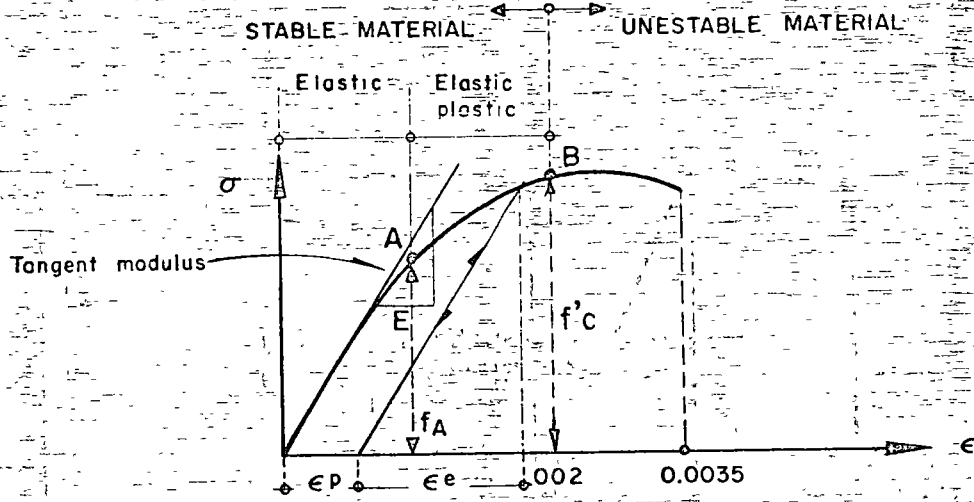


Fig 7 Buckling pressures for oblate shells , aluminum alloy (7075 - T - 6) (After Bushnell , Marcal)



Model of stress - strain for concrete

Geometric parameter $\lambda = 1.84 \left(\frac{R_1 + R_2}{2t} \right)^{1/2} \left(\frac{R_1 + R_2}{r_1 + r_2} \right) \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)$

Upper limit of critical load $p_{CR} = 0.15 E \frac{t^2}{R_1 R_2}$

f_A = Limit of elasticity = 0.5 f_c

f_c = Limit of plasticity for ε ≤ 0.002

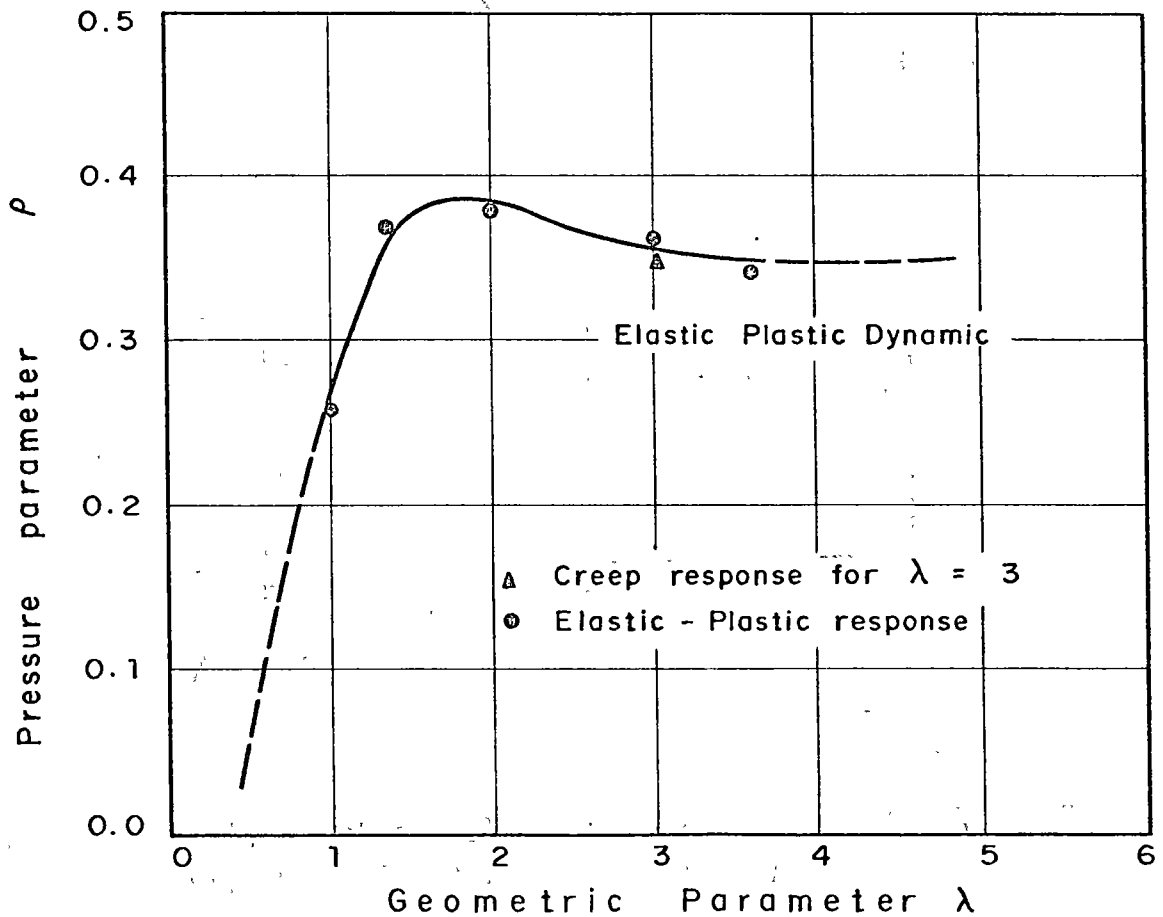


Fig 7 a Buckling pressures for oblate Elliptical Paraboloidal concrete shells

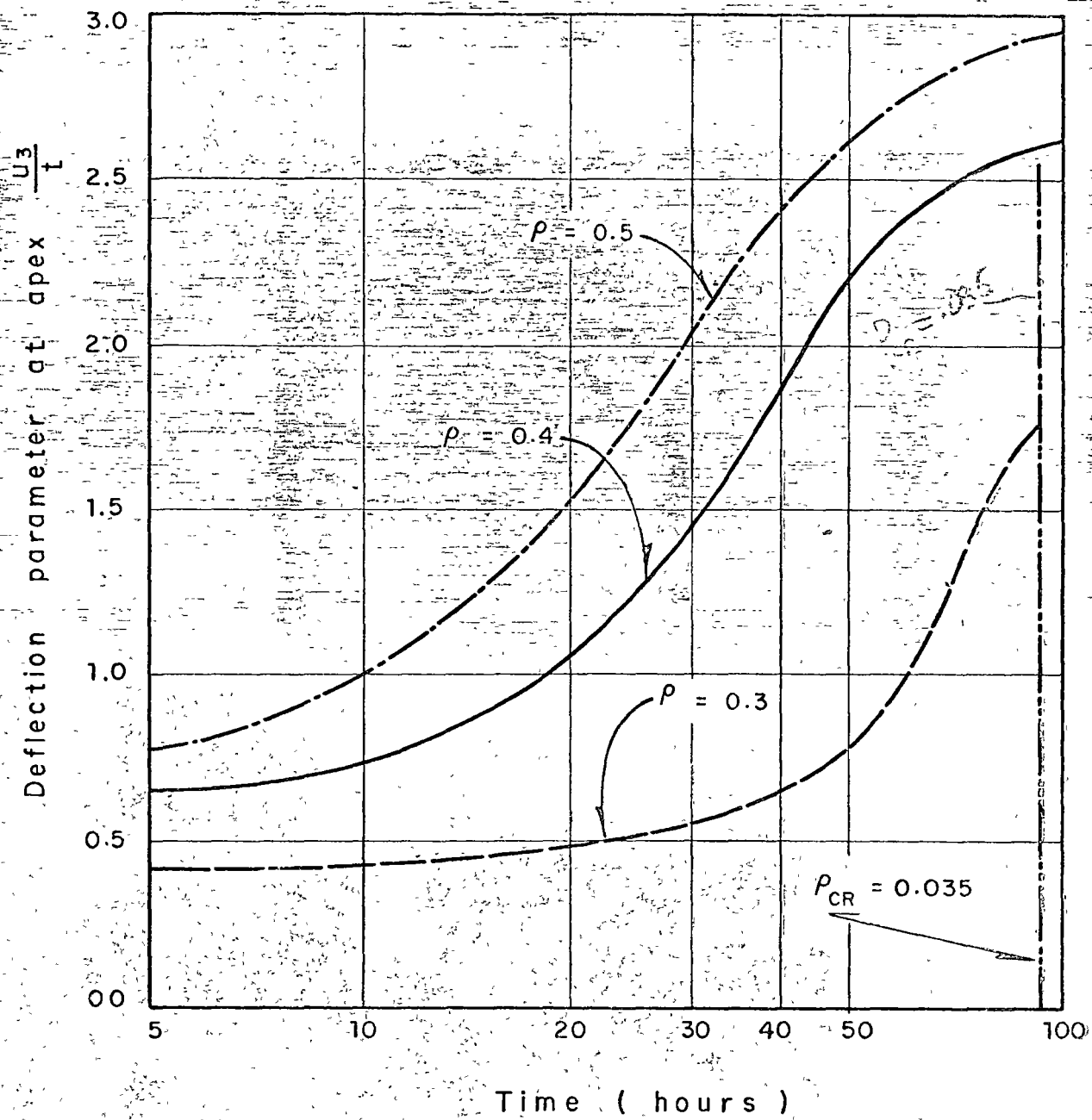


Fig 8 Creep response of the Elliptical paraboloidal shell under three load parameters levels with $\lambda = 3$

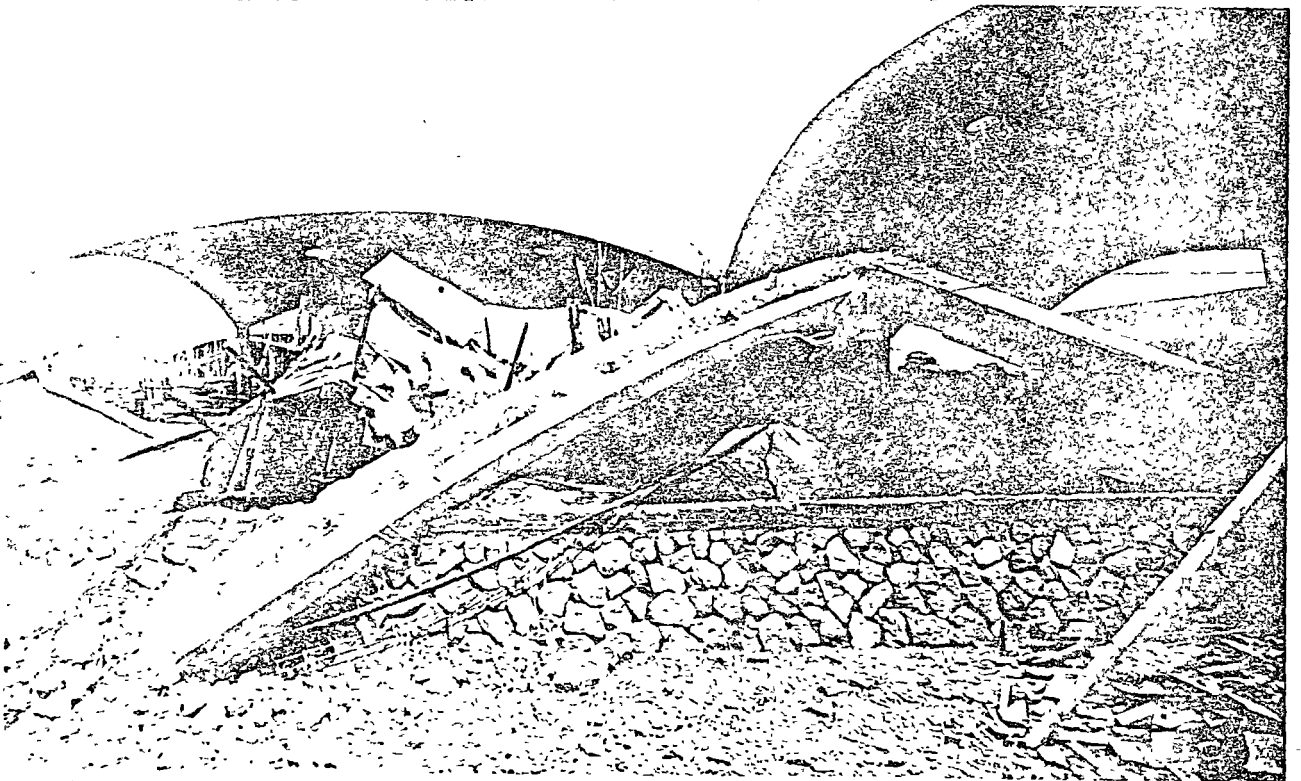
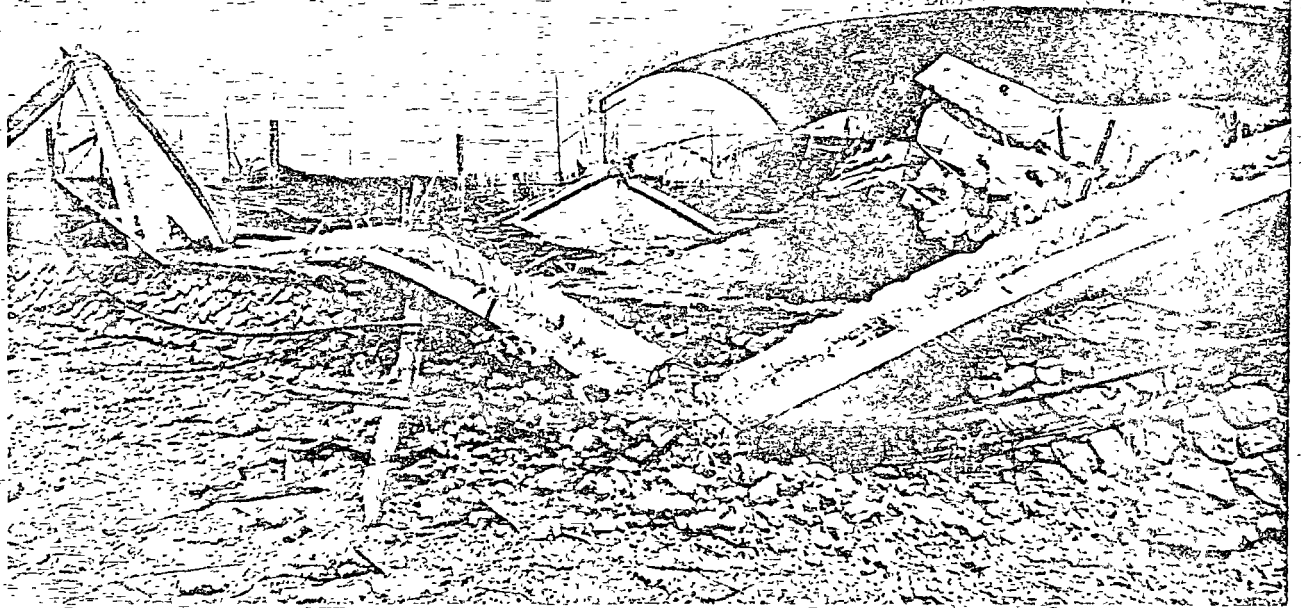


Figura 9

Collapse of the elliptical paraboloidal concrete shells at
Guayaquil, Ecuador

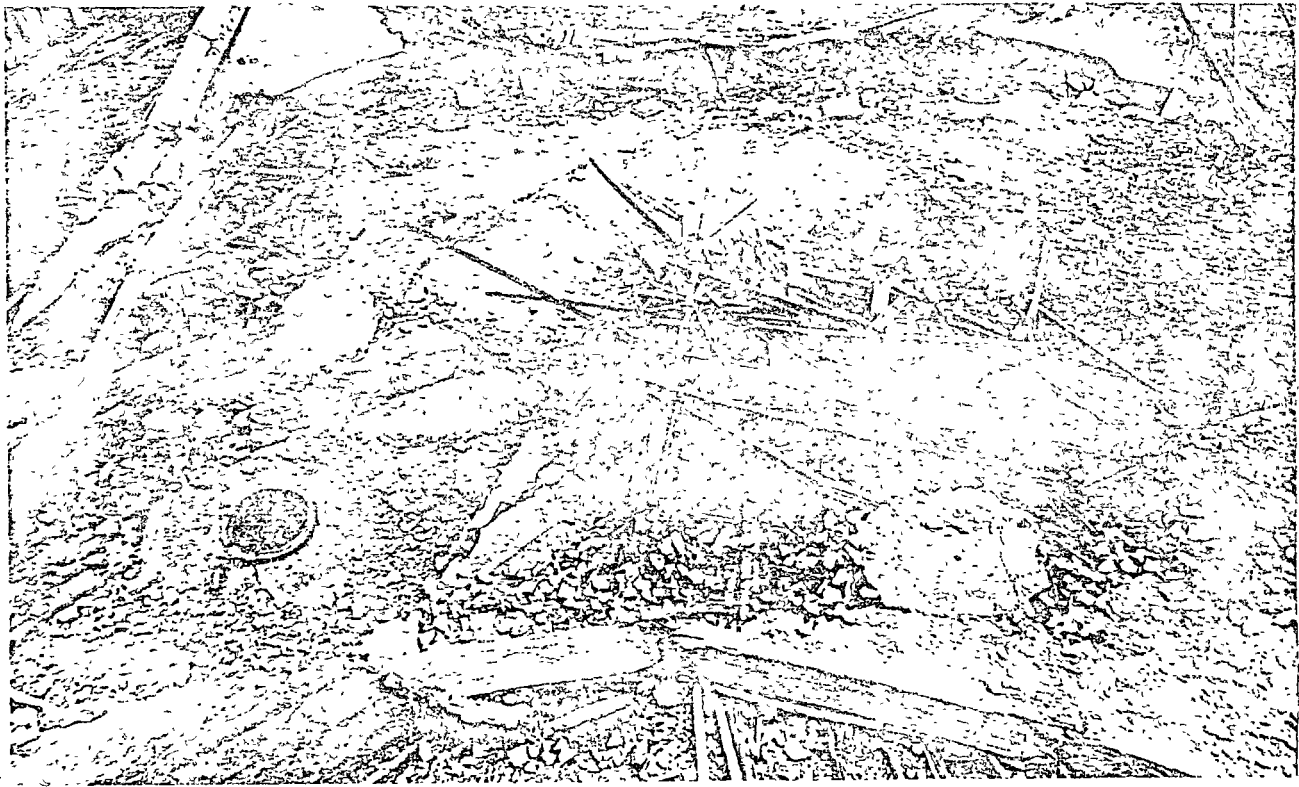
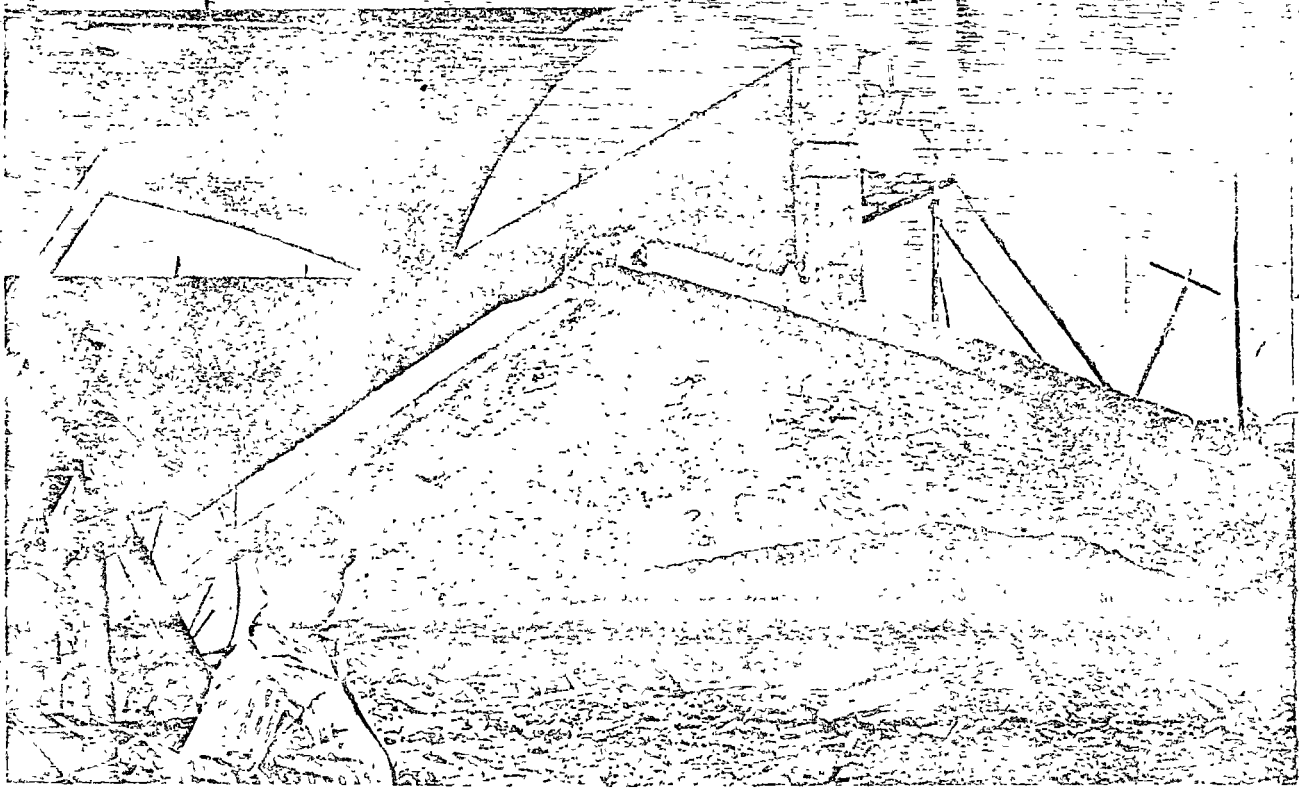


Figura 10

Collapse of the elliptical paraboloidal concrete shells at
Guayaquil, Ecuador

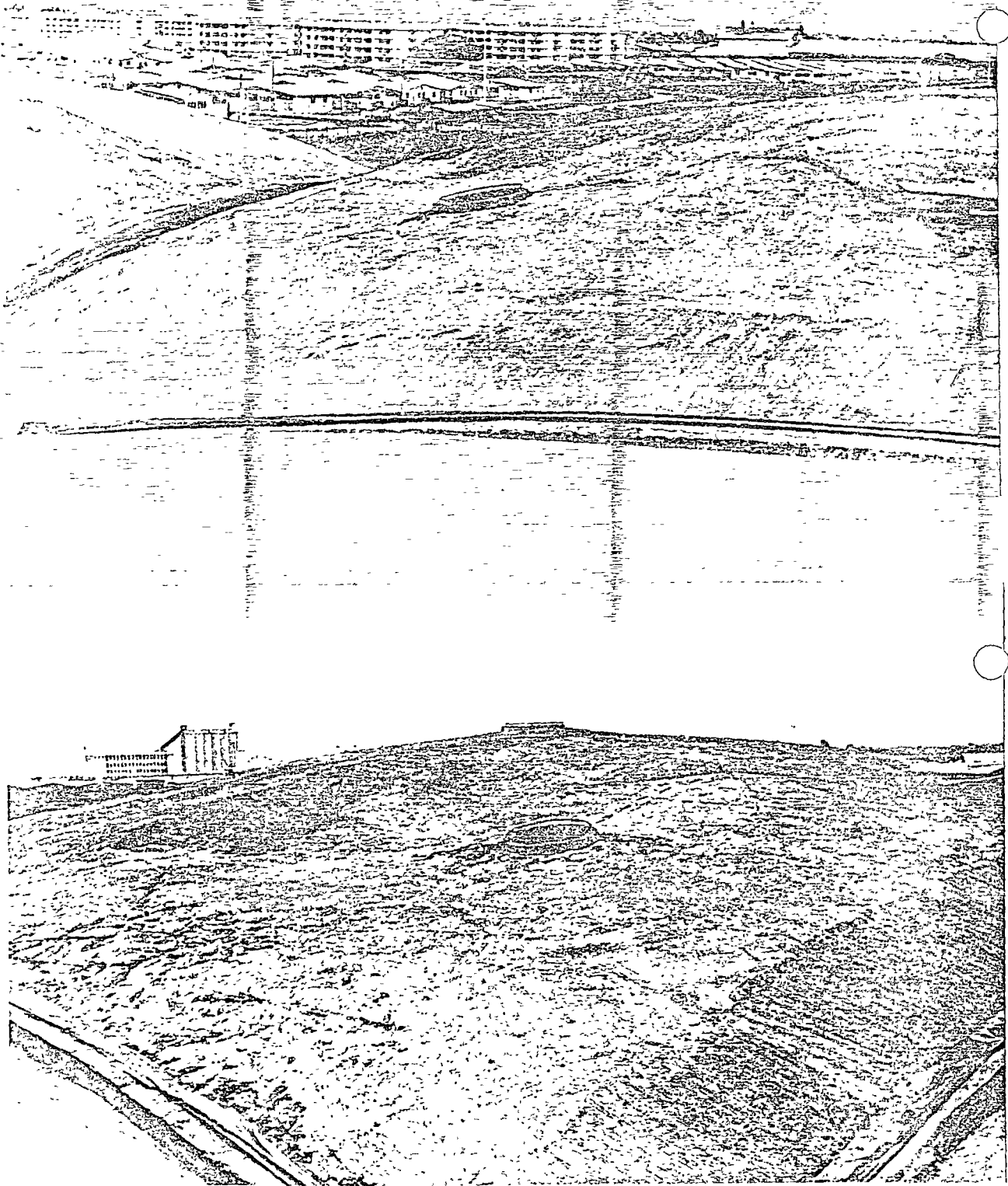
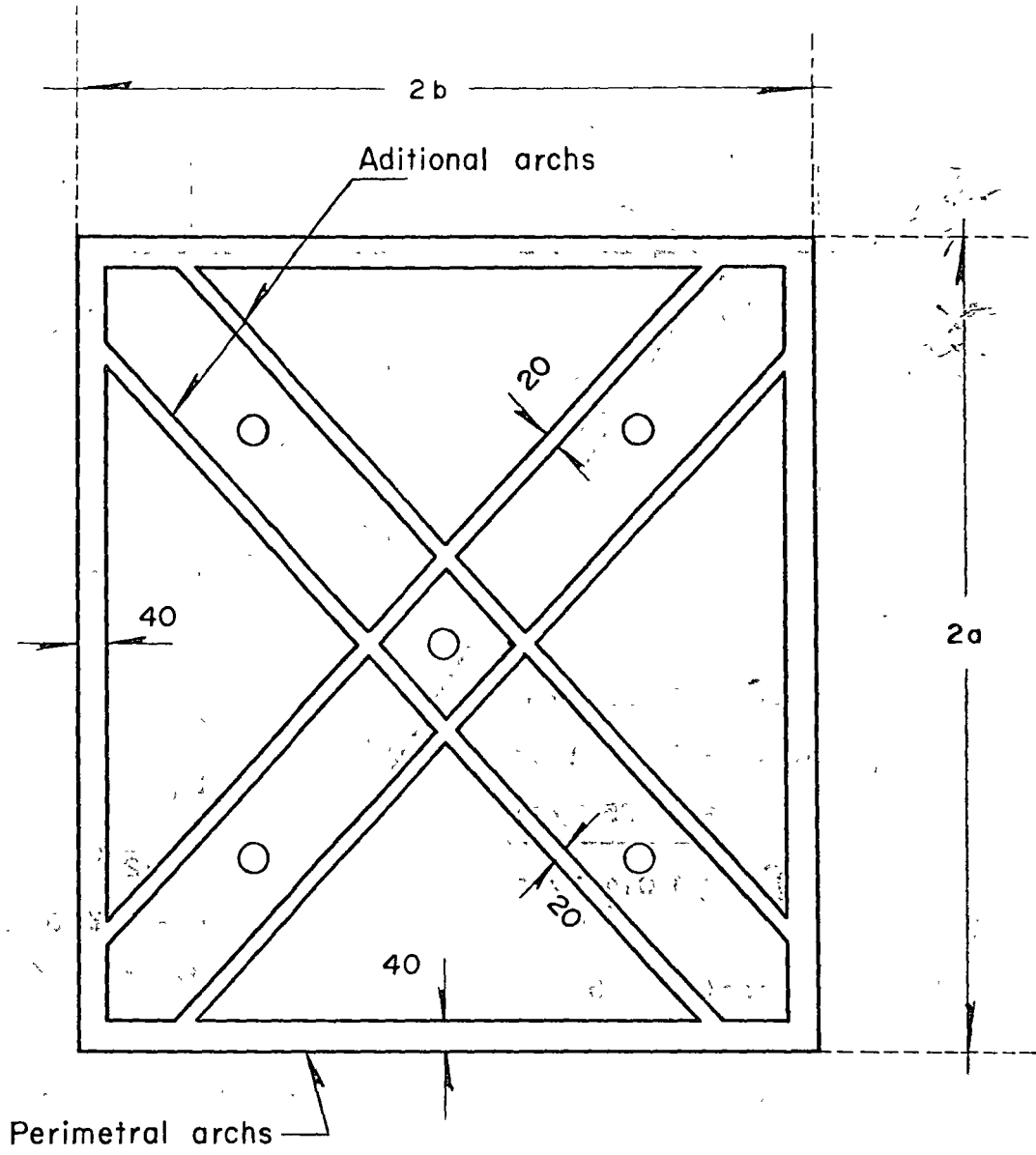


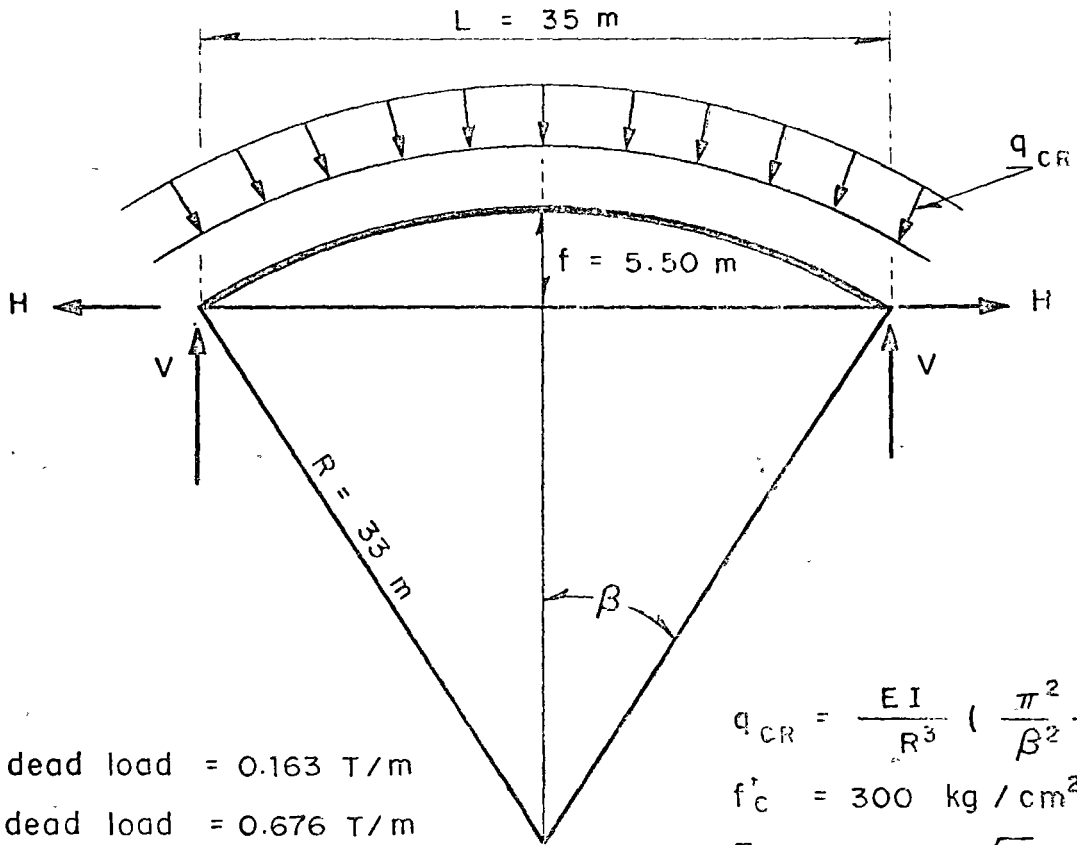
Figura 11

Geometric Imperfection of the elliptical paraboloidal concrete shells at Guayaquil, Ecuador



Horizontal projection , plane (X_1, X_2)

Fig 12 Additional concrete archs for increasing buckling capacity of the shell



Arch dead load = 0.163 T/m
 Shell dead load = 0.676 T/m
 Live load = 0.175 T/m
 Σ = 1.014 T/m

$$q_{CR} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\beta^2} - 1 \right), \text{ Ref. [20]}$$

$$f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 15000 \sqrt{300} = 259807 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} \times 20 \times 40^3 = 106667 \text{ cm}^4$$

$$R = 3300 \text{ cm} ; \beta = 0.55 \text{ radians}$$

$$q_{CR} = 2438 \text{ kg/m}$$

Buckling coef. $\doteq 2.5$

Fig 13 Buckling capacity of additional arches

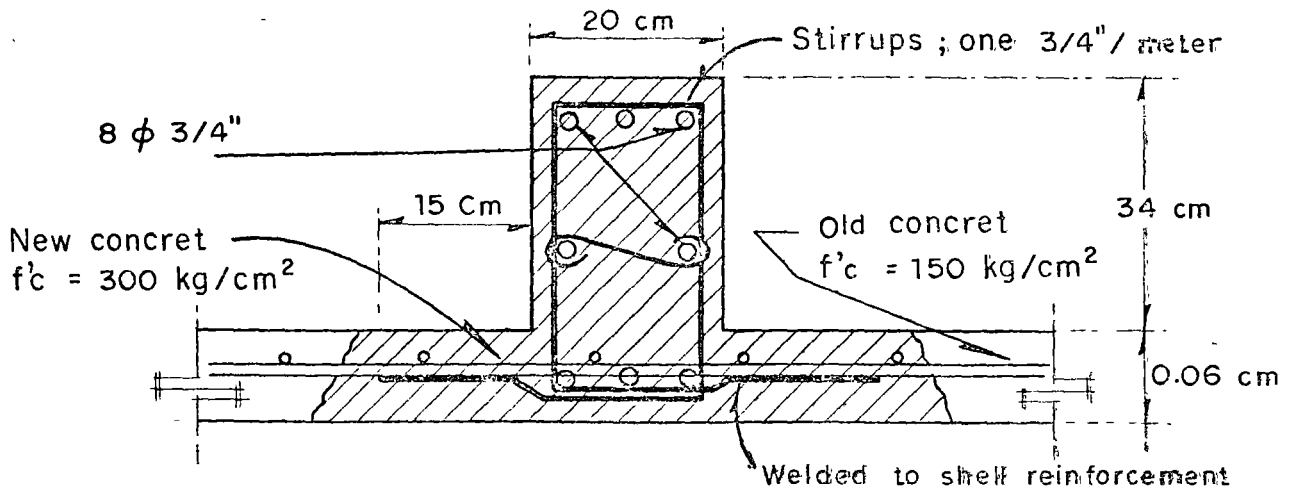


Fig 14 Connection between the arch and the existing shell



Figura 16

The additional arches, for increasing the buckling capacity of the shell.

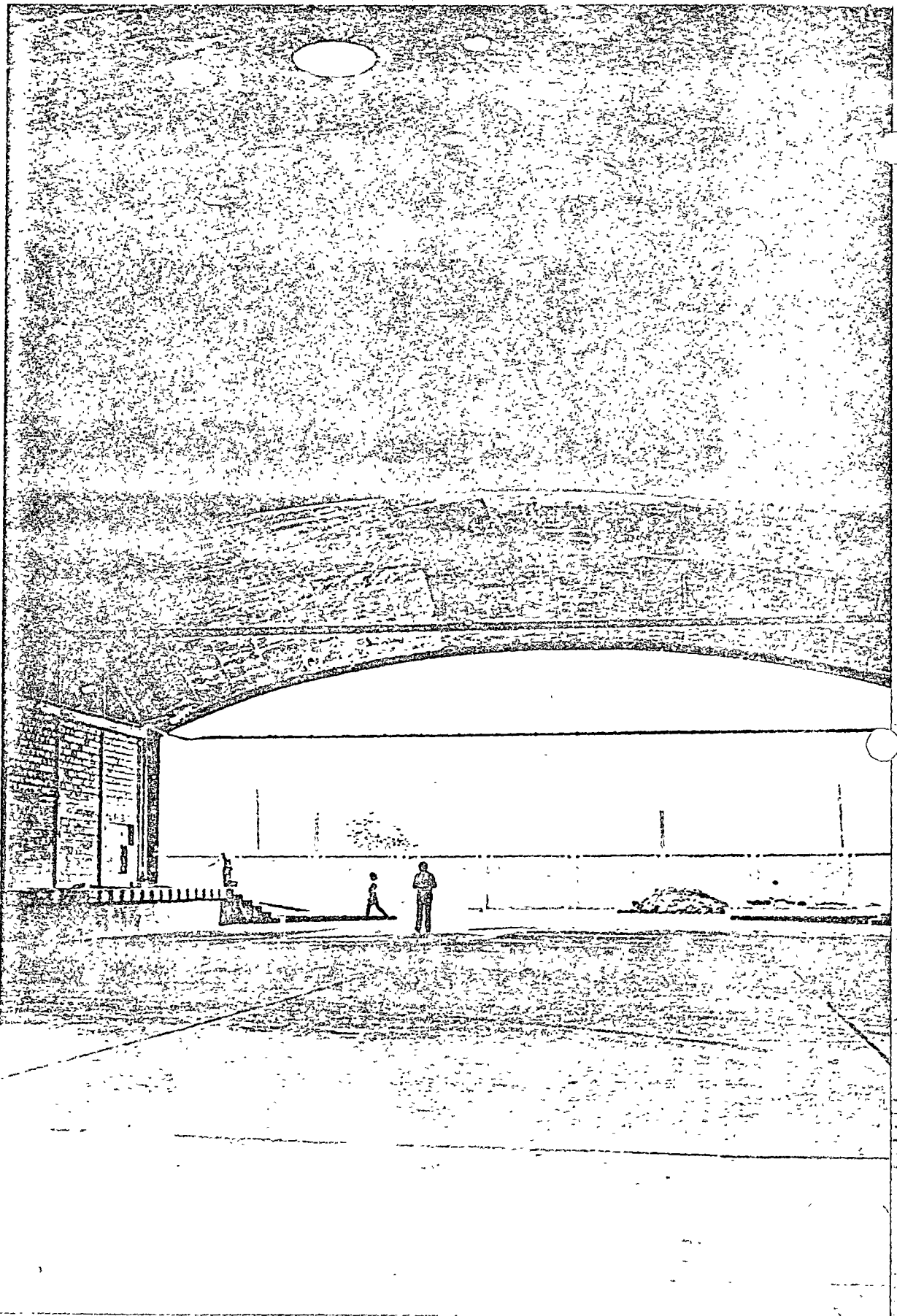


Figura 15

A view from the interior of the connection between additional arches and shell

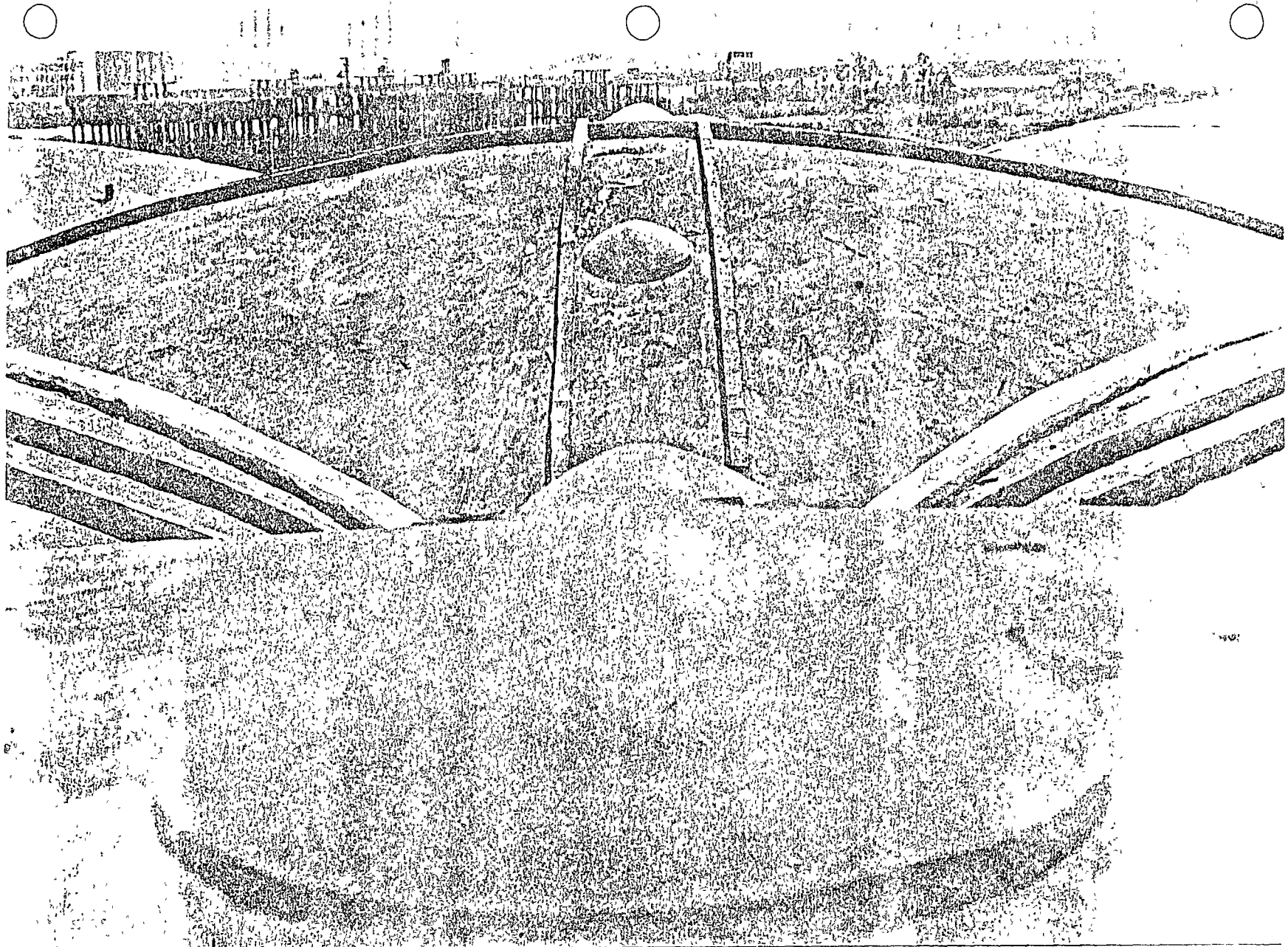


Figura 17

The additional arches, for increasing the buckling capacity of the shell.

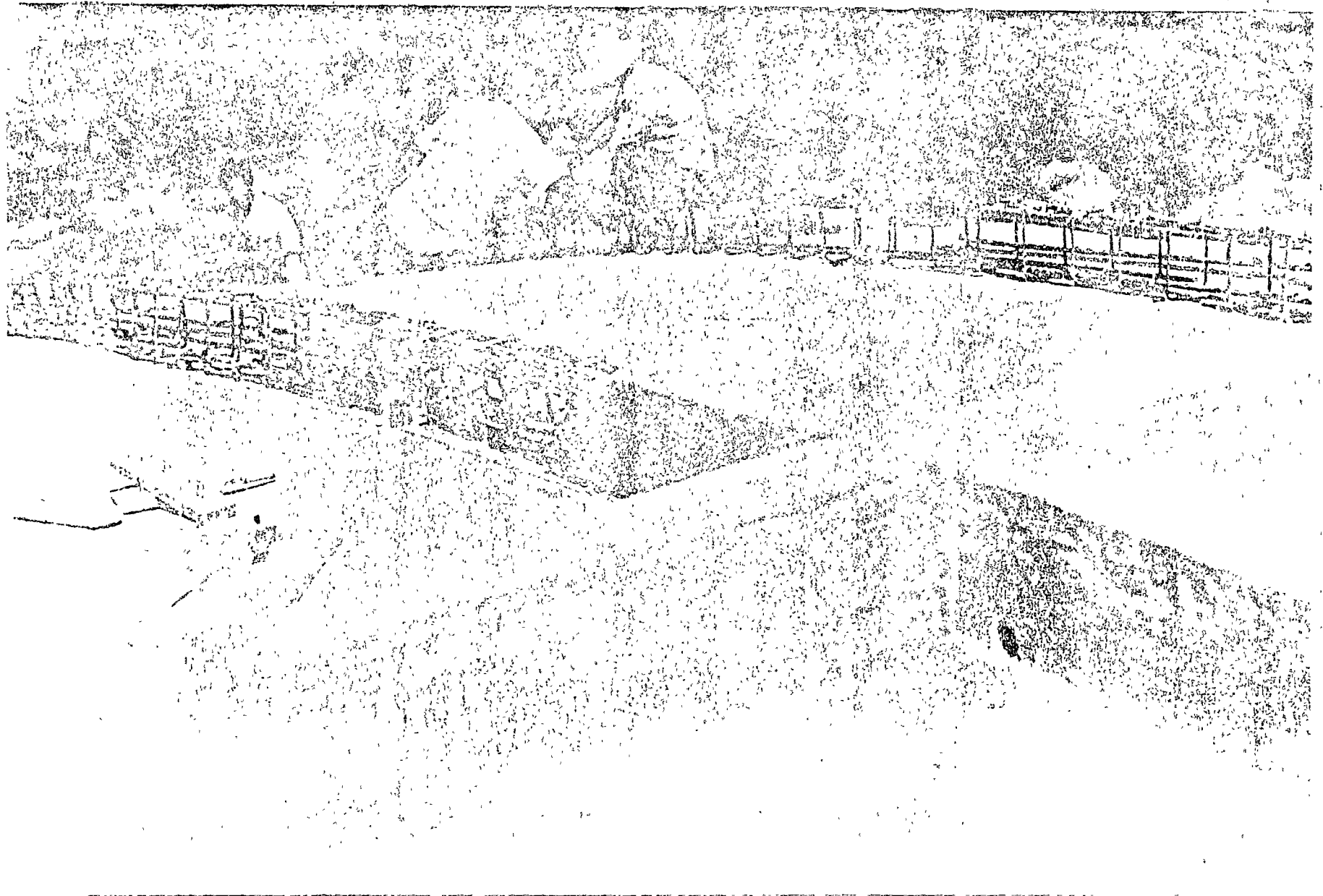


Figura 18

The additional arches, for increasing the buckling capacity of the shell.

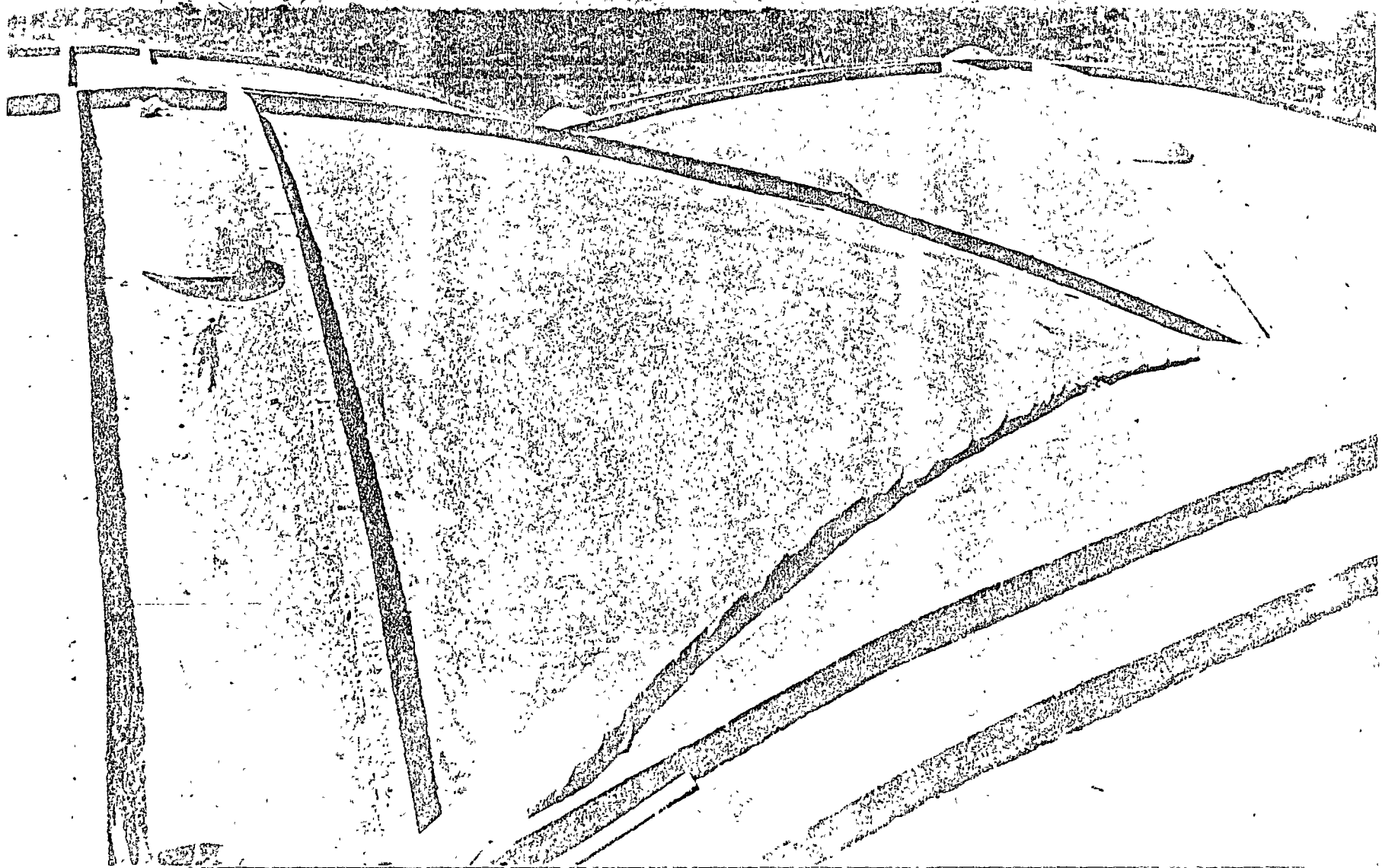


Figura 19

The additional arches, for increasing the buckling capacity of the shell.

...
 ...
 ...
 ...

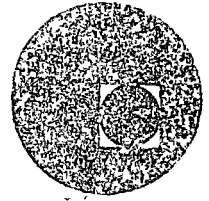
8.



8
 1973



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL CONCRETO Y SUS APLICACIONES
EN INGENIERIA.

TEMA: FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE ANALISIS TENSORIAL.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO.

Noviembre , 1977.



B



I ALGEBRA VECTORIAL

1. Vectores y Escalares

Escalares.

Cantidades que pueden ser especificadas numéricamente, Por ejemplo, temperatura, densidad, masa y trabajo son todas escalares.

Los escalares pueden ser comparados solamente si tienen las mismas dimensiones físicas. Dos medidas escalares en el mismo sistema de unidades, son iguales si tienen la misma magnitud (valor absoluto) y signo.

Vectores

Para especificarlos se requiere dirección y valor numérico. Por ejemplo, desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, el momento de una fuerza, resistencia de un campo eléctrico y polarización dieléctrica, son todos vectores.

Las operaciones. Las operaciones con vectores obedecen las reglas de álgebra vectorial.

Escalares y vectores no pueden definir todas las cantidades de interés en Matemáticas aplicadas y Física. Existen cantidades de estructura más complicada que

los escalares o vectores, llamados TENSORES (de orden 2 o más), cuya especificación requiere más que el conocimiento de magnitud y dirección. Por ejemplo, al examinar el conjunto de todos los vectores esfuerzo actuando en todos los elementos de área que puedan ser trazados a través de un punto dado de un cuerpo elástico nos conduce al concepto de tensor de esfuerzos (de orden 2), mientras que examinando la deformación de un elemento arbitrario de volumen de un cuerpo elástico nos conduce al concepto del tensor de deformación.

Un vector \vec{A} es representado por un segmento de línea dirigido, cuya dirección y longitud coincide con la dirección y magnitud (medida en el sistema de unidades escogido) de la cantidad en consideración. Los vectores serán representados por \vec{A}, \vec{B}, \dots y sus magnitudes por $|\vec{A}|, |\vec{B}|, \dots$ o por A, B, \dots .

El vector de magnitud cero es llamado el vector cero. No tiene dirección definida.

Los vectores pueden ser comparados solamente si tienen el mismo significado.

físico y geométrico, y por lo tanto las mismas dimensiones. Dos vectores \vec{A} y \vec{B} medidos en el mismo sistema de unidades se dice que son iguales, escribiendo $\vec{A} = \vec{B}$, si tienen la misma magnitud y dirección.

2.- Vectores: Libre, deslizante y límite

Vector libre: Un vector como la velocidad de un cuerpo en movimiento uniforme de traslación, el cual puede ser desplazado paralelo a el mismo y aplicado en cualquier punto, es llamado "vector libre" (Fig. 1a). En 3 dimensiones un vector libre es determinado por 3 números, por sus 3 proyecciones en un sistema coordenado rectangular. También puede especificarse dando su magnitud (la longitud del segmento de línea que representa al vector) y dos ángulos independientes α y β con respecto a dos cualquiera de los ejes coordenados.

Vector deslizante: Un vector como la fuerza aplicada a un cuerpo rígido sujeta en un punto fijo, el cual puede ser desplazado únicamente a lo largo de la línea que contiene al vector, es

llamado vector deslizando (Fig. 1b). En tres dimensiones un vector deslizando es determinado por cinco números, las coordenadas del punto de intersección de la línea del vector con uno de los planos coordenados, por la magnitud del vector, y por dos ángulos independientes α y β entre el vector y dos de los ejes coordenados.

Vector límite: Un vector como la velocidad del viento en un punto dado del espacio, el cual es referido a un punto fijo, es llamado vector límite. En tres dimensiones un vector límite es determinado por seis números, las coordenadas de su punto inicial y final (M y N en Fig. 1c).

Vectores libres es la clase de cantidades más general especificada dando su magnitud y dirección, y el estudio de vectores deslizando y límite puede siempre ser reducido al de vectores libres. Por lo tanto consideraremos solamente vectores libres.

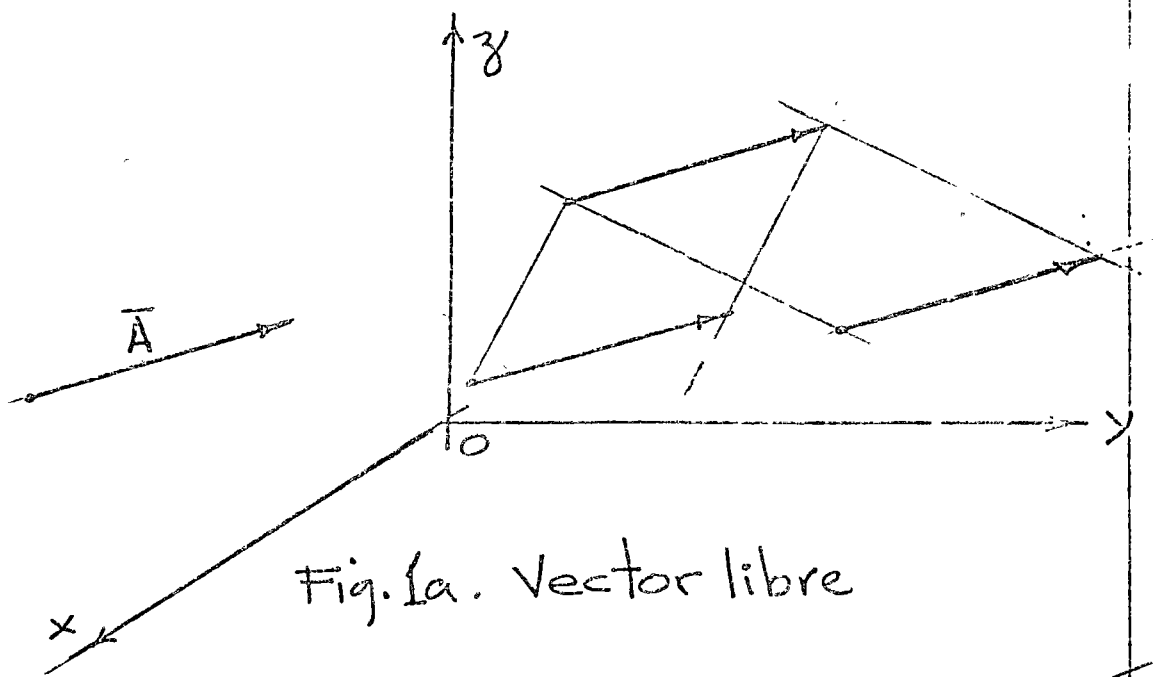


Fig. 1a. Vector libre

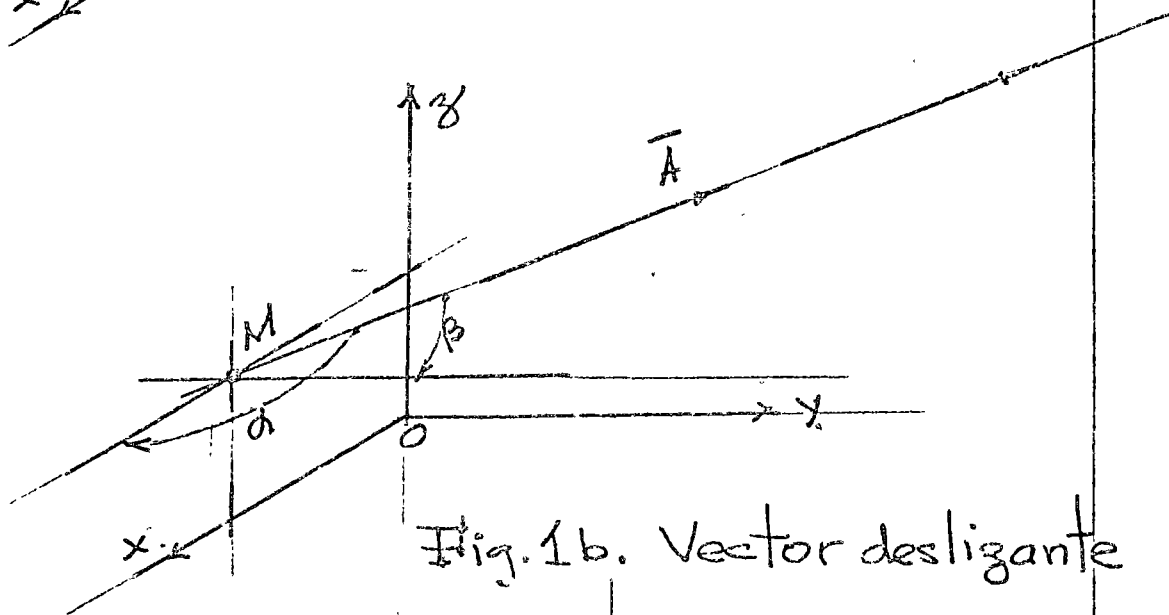


Fig. 1b. Vector deslizante

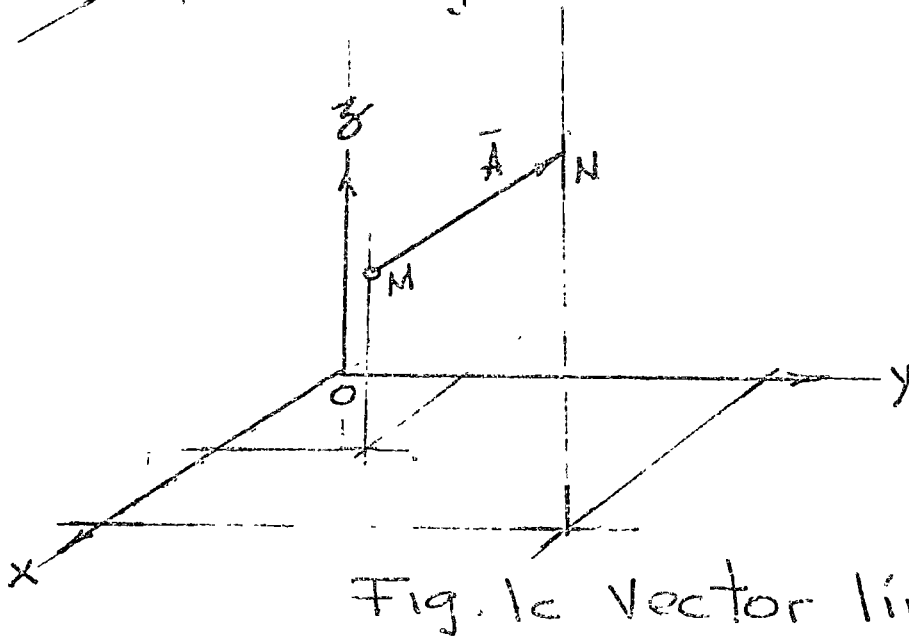


Fig. 1c Vector límite

3.- Suma de vectores. Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , supongase que ponemos el punto inicial de \vec{B} en el punto final de \vec{A} . Entonces la suma $\vec{A} + \vec{B}$ significa el vector que une el punto inicial de \vec{A} con el punto final de \vec{B} . Esto es también la diagonal de el paralelogramo construido con \vec{A} y \vec{B} , como se muestra en la Fig. 2a. Por lo tanto la suma de

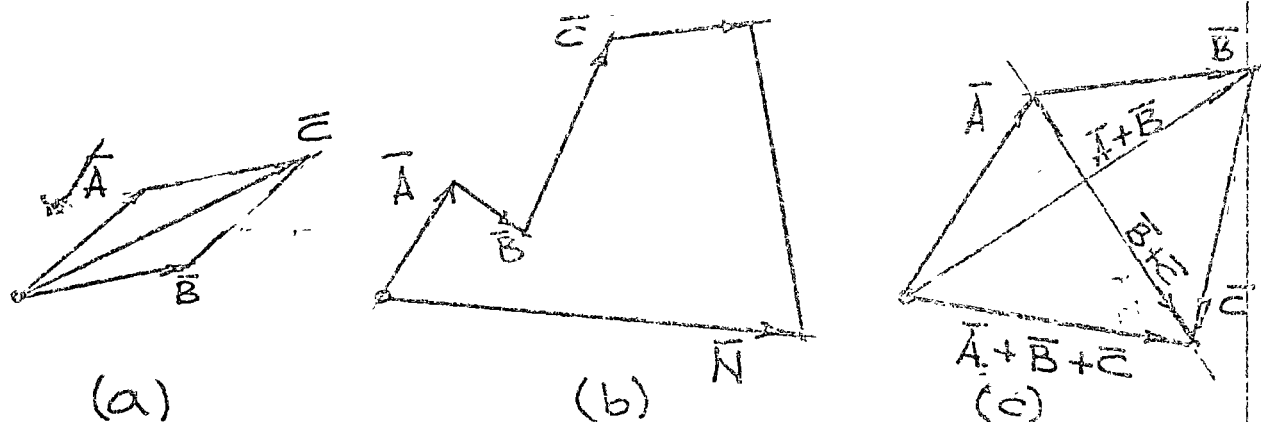


Fig. 2. (a) La suma de dos vectores $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

(b) La suma de varios vectores

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots = \vec{N}$$

(c) Asociatividad de suma vectorial

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

varios vectores $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots$ es el vector que cierra el polígono obtenido poniendo

el punto inicial de \vec{B} en el punto final de \vec{A} , el punto inicial de \vec{C} en el punto final de \vec{B} , y así sucesivamente, como se muestra en Fig. 1b. El significado físico de suma vectorial es claro si interpretamos \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} , ... como consecutivos desplazamientos de un punto en el espacio. Entonces la suma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots$ es justamente la resultante de los desplazamientos individuales, igual al desplazamiento total del punto.

La definición, justamente dada implica que la suma vectorial tiene las propiedades características de la suma ordinaria algebraica,

1) La suma vectorial es conmutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

2) La suma vectorial es asociativa

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

El hecho que una cantidad es caracterizada por una magnitud y una dirección es una condición necesaria pero no suficiente para ser vector. La cantidad debe obedecer las leyes del algebra vectorial. En particular la ley de suma de vectores.



4. Resta de vectores. - Por el vector $-\bar{A}$ (menos \bar{A}) significa el vector con la misma magnitud de \bar{A} pero con dirección opuesta. Cada uno de los vectores \bar{A} y $-\bar{A}$ es llamado el opuesto o el negativo del otro. Obviamente, el único vector igual a su propio negativo es el vector cero, y la suma de un vector y su negativo es el vector cero.

Si
$$\bar{X} + \bar{B} = \bar{A}$$
 entonces sumando $-\bar{B}$ a ambos lados de la ecuación

$$\bar{X} + \bar{B} + (-\bar{B}) = \bar{A} + (-\bar{B}) \quad (1)$$

$$\text{Pero } \bar{X} + \bar{B} + (-\bar{B}) = \bar{X} + [\bar{B} + (-\bar{B})] \\ = \bar{X} + 0 = \bar{X}$$

y de allí que

$$\bar{X} = \bar{A} - \bar{B}$$

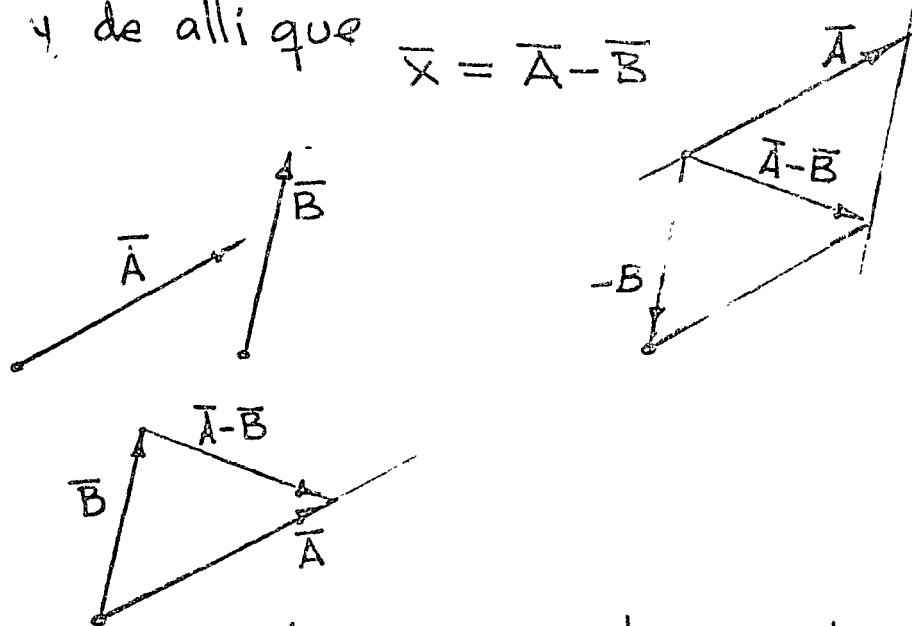


Fig. 3. Resta de dos vectores

5. Proyección de un vector sobre un eje.
 Dado un vector \vec{A} y un eje, u (Fig. 4), designando por A_u la proyección de \vec{A} sobre u , significa la longitud del segmento cortado sobre u por planos perpendiculares a u que pasan por los extremos de \vec{A} . Tomando como positiva si la dirección de la proyección es la dirección positiva de u o lo contrario. Por el vector unitario

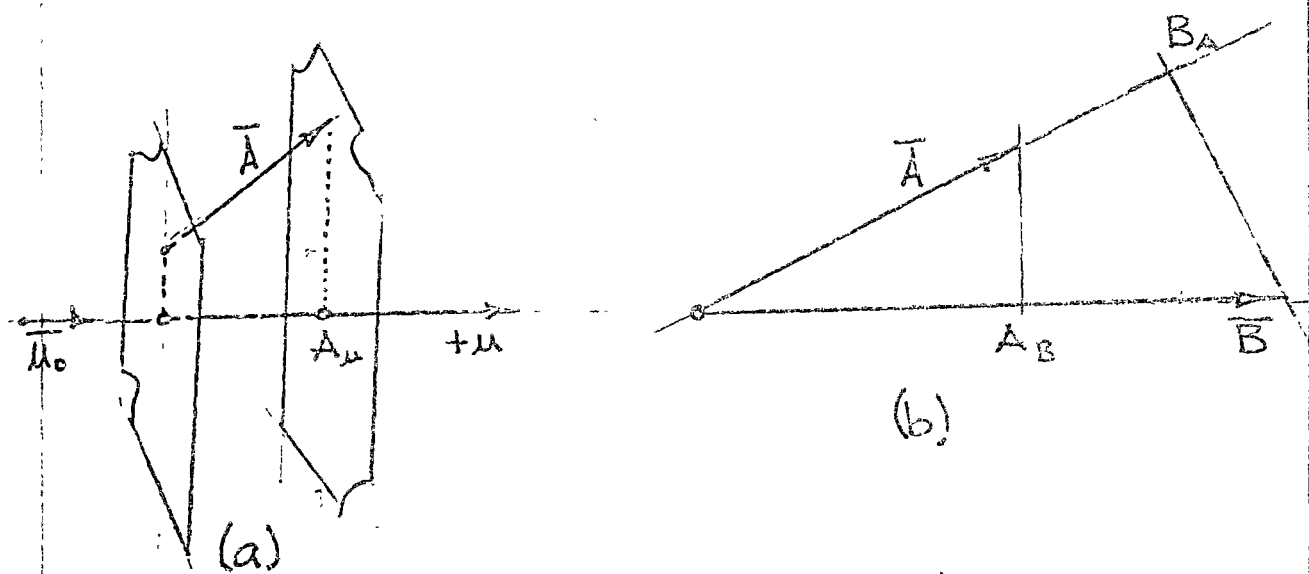


Fig. 4. (a) Proyección de un vector en un eje.

(b) Proyección de un vector en la dirección de otro.

correspondiente al eje u significa el vector \vec{u}_0 de longitud unitaria cuya dirección coincide con la de u ($u_0 = |\vec{u}_0| = 1$). Si $\varphi = (\vec{A}, \vec{u}_0)$ es el ángulo entre \vec{A} y \vec{u}_0 , Entonces, es

$$A_u = A \cos \varphi = A \cos(\vec{A}, \vec{u}_0) \quad (2)$$

claro que $|\vec{A} \cos \varphi|$ siempre da la longitud del segmento del eje u entre los planos que pasan a través de los extremos de \vec{A} y son perpendiculares a u , cuya dirección es positiva si $\varphi < \frac{\pi}{2}$ y negativa si $\varphi > \frac{\pi}{2}$ pero entonces (2) automáticamente le da a A_u el signo correcto ($\cos \varphi$ es pos. para $\varphi < \frac{\pi}{2}$ y negativo para $\varphi > \frac{\pi}{2}$).

6. Multiplicación de un vector por un escalar.

Por el producto de un vector \vec{A} y un escalar m significa el vector de magnitud $|m|$ veces la de \vec{A} , con la misma dirección de \vec{A} si $m > 0$ y dirección opuesta si $m < 0$. De allí que

$$\vec{B} = m \vec{A}$$

implica $|\vec{B}| = B = |m| |\vec{A}| = |m| A$

Si $m = -1$, entonces \vec{B} y \vec{A} son vectores opuestos. En cualquier evento, los vectores \vec{B} y \vec{A} son paralelos o colineales (no hay distinción entre vectores libres paralelos y colineales).

Es claro que la multiplicación de un vector por un escalar obedece las siguientes reglas:



$$m(n\bar{A}) = (mn)\bar{A}$$

$$m(\bar{A} + \bar{B}) = m\bar{A} + m\bar{B}$$

$$(m+n)\bar{A} = m\bar{A} + n\bar{A}$$

7. Bases y Transformaciones

Dependencia e Independencia lineal de vectores. Decimos que n vectores $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ son linealmente dependientes si existen n escalares c_1, c_2, \dots, c_n no todos igual a cero tales que

$$c_1\bar{A}_1 + c_2\bar{A}_2 + \dots + c_n\bar{A}_n = 0, \quad (3)$$

Vectores los cuales no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes. En otras palabras, n vectores $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ se dice que son linealmente independientes si (3) implica que

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Dos vectores linealmente dependientes son colineales. Esto se concluye de la sección 3 y el hecho que

$$c_1\bar{A} + c_2\bar{B} = 0$$

implica

$$\bar{A} = -\frac{c_2}{c_1}\bar{B} \quad \text{si } c_1 \neq 0$$

$$\bar{B} = -\frac{c_1}{c_2}\bar{A} \quad \text{si } c_2 \neq 0$$

Tres vectores linealmente dependientes son coplanares (están contenidos en el mismo plano o son paralelos al mismo plano).

Como hecho, si

$$c_1 \bar{A} + c_2 \bar{B} + c_3 \bar{C} = 0$$

donde al menos uno de los números c_1, c_2, c_3 no es cero, digamos c_3 , entonces

$$\bar{C} = m \bar{A} + n \bar{B}$$

donde $m = -\frac{c_1}{c_3}$; $n = -\frac{c_2}{c_3}$

\bar{C} está contenido en el plano de \bar{A} y \bar{B} siendo la suma del vector $m\bar{A}$ colineal con \bar{A} y el $n\bar{B}$ colineal con \bar{B} .

8. Expansión de un vector con respecto a otros vectores. Sean \bar{A} y \bar{B} dos vectores linealmente independientes (no colineales). Entonces cualquier vector \bar{C} coplanar con \bar{A} y \bar{B} tiene una expansión única.

$$\bar{C} = m \bar{A} + n \bar{B} \quad (4)$$

Para probar que la expansión (4) es única supongase que hay otra expansión

$$\bar{C} = m' \bar{A} + n' \bar{B} \quad (5)$$

restando (5) de (4), se obtiene

$$(m - m') \bar{A} + (n - n') \bar{B} = 0.$$

Pero entonces $m=m'$, $n=n'$ puesto que \bar{A} y \bar{B} son linealmente independientes. En otras palabras los coeficientes, los ~~coe-~~ coeficientes m y n de la expansión (4) son unicos.

Sean \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} tres vectores linealmente independientes. Entonces cualquier vector \bar{D} tiene una expansión unica

$$\bar{D} = m\bar{A} + n\bar{B} + p\bar{C} \quad (6)$$

con respecto a \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} (Fig. 5)

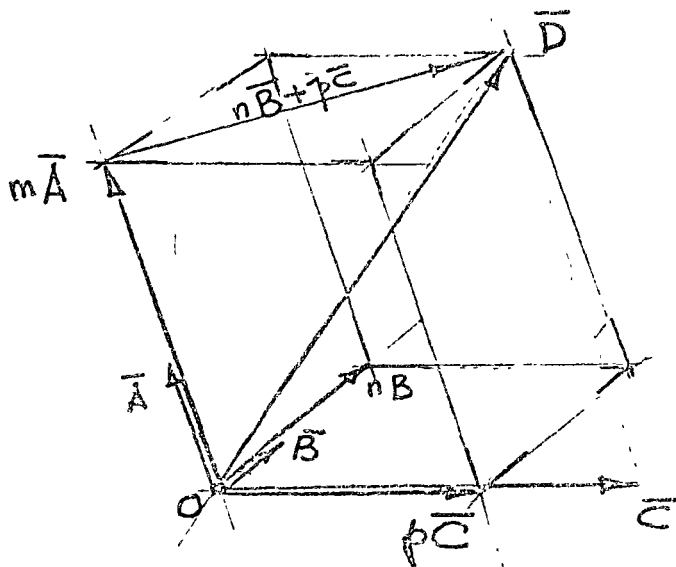


Fig. 5. Un vector arbitrario \bar{D} tiene una expansión unica con respecto a tres vectores no coplanares \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

Para verificar lo anterior, trazar los vectores \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} y \bar{D} de un origen comun o (Fig. 5). Entonces a traves del punto final \bar{D}

traçar tres planos paralelos a los planos de los vectores \bar{A} y \bar{B} , \bar{A} y \bar{C} , \bar{B} y \bar{C} . Estos planos junto con los planos de los vectores \bar{A} y \bar{B} , \bar{A} y \bar{C} , y \bar{B} y \bar{C} forman un paralelepípedo con el vector \bar{D} como una de sus diagonales y los vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} (traçados del origen o) a lo largo de sus tres lados. Si los números m , n y p son tal que $m\bar{A}$, $n\bar{B}$ y $p\bar{C}$ tienen magnitudes iguales a las longitudes de los correspondientes lados de el paralelepípedo, entonces claramente

$$\bar{D} = m\bar{A} + (n\bar{B} + p\bar{C}) = m\bar{A} + n\bar{B} + p\bar{C}$$

como se muestra en la figura.

Para probar que la expansión (6) es única, supongase que hay otra expansión

$$\bar{D} = m'\bar{A} + n'\bar{B} + p'\bar{C} \quad (7)$$

restando (7) de (6), se obtiene

$$(m-m')\bar{A} + (n-n')\bar{B} + (p-p')\bar{C} = 0.$$

Entonces $m=m'$, $n=n'$, $p=p'$ puesto que \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} son linealmente independientes por hipótesis.

De las consideraciones anteriores se observa que cuatro vectores cualquiera en el espacio tridimensional son linealmente dependientes

8. Bases y vectores base. Como base en el espacio tridimensional significa cualquier conjunto de tres vectores linealmente independientes $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Cada uno de los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ es llamado un vector base. Dada una base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, se concluye de las consideraciones anteriores que cada vector \bar{A} tiene una expansión única de la forma

$$\bar{A} = m\bar{e}_1 + n\bar{e}_2 + p\bar{e}_3 \quad (8)$$

Debe ser enfatizado que tres vectores cualquiera no coplanares pueden servir como una base en tres dimensiones.

Supongase los vectores de una base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ son todos trazados de un origen común O , y sea Ox^k la línea conteniendo los vectores \bar{e}_k , donde k varía de 1 a 3. Esto da un sistema coordenado oblicuo con ejes Ox^1, Ox^2, Ox^3 y origen O (Fig. 6)

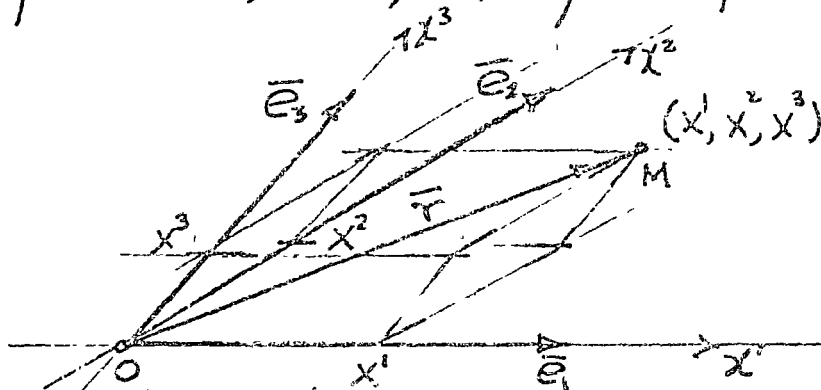


Fig. 6 Sistema oblicuo coordenado con bases $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

El caso de mayor importancia es cuando los vectores base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ son ortogonales uno a otro y son todos de longitud unitaria (tales vectores se dice que son ortonormales y así es su correspondiente base). El sistema coordenado es entonces llamado rectangular en vez de oblicuo, y se escribe x_1, x_2, x_3 en vez de x^1, x^2, x^3 y $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ en vez de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

La posición de un punto M relativo a un sistema coordenado dado (rectangular o no) es determinado unicamente por su radio vector $\bar{r} = \bar{r}(M)$, por el vector trazado del origen del sistema coordenado a el punto M (Figuras 6, 7). Supongase que M tiene

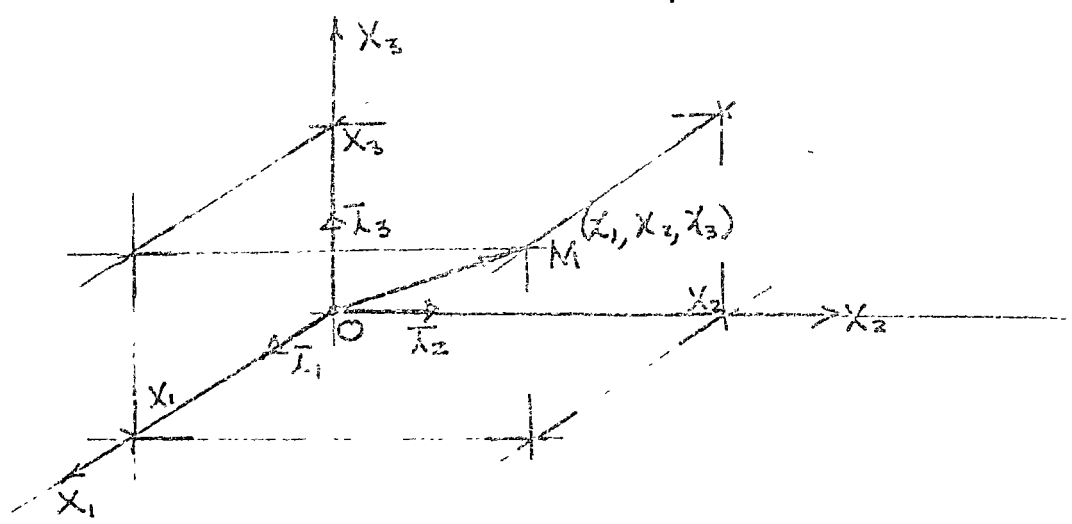


Fig. 7 Sistema coordenado rectangular con bases $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ coordenadas (x_1, x_2, x_3) en un sistema coordenado rectangular. Entonces x_1, x_2, x_3 son las distancias

entre M y los planos x_2Ox_3 , x_3Ox_1 , y x_1Ox_3 , y de allí que

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

El gran merito de usar vectores en problemas aplicados es que las ecuaciones que gobiernan los fenómenos físicos pueden ser formuladas sin referencia a un sistema particular coordinado cualquiera.

Coordenadas curvilíneas en el plano

La posición de un punto M en el plano es determinada únicamente por su radio vector \vec{r} relativo a un punto fijo o el cual puede ser escogido arbitrariamente y es independiente de cualquier sistema coordinado

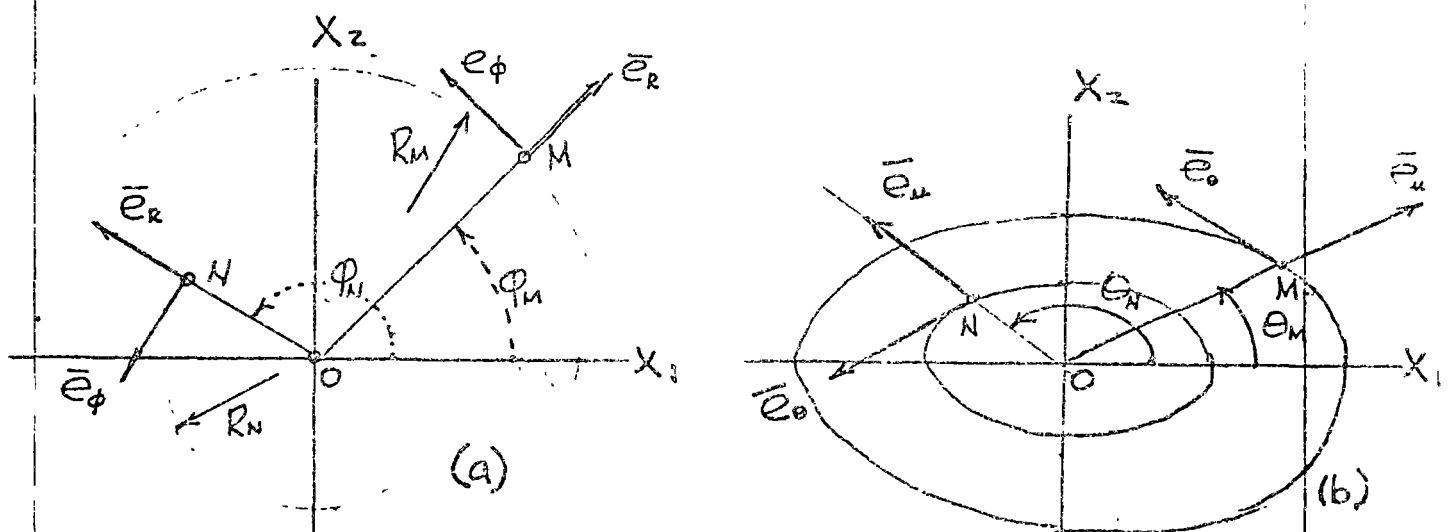


Fig. 8 Coordenadas curvilíneas en el plano

a) Coordenadas polares

b) " " " " " " " " " " " "

Sean las coordenadas de M dos números x_1 y x_2 en el sistema rectangular (x_1, x_2) con sus respectivos vectores unitarios \bar{u}_1, \bar{u}_2 paralelos a los ejes coordenados. \bar{u}_1 o \bar{u}_2 son independientes de M y siempre se intersectan en ángulos rectos.

Supongase, sin embargo, que la posición de M es especificada en coordenadas polares, por medio de la distancia R_M entre M y un punto fijo O (llamado polo) y el ángulo ϕ_M entre MO y el eje polar OX_1 . Las curvas coordenadas son círculos de radio R y los rayos polares tienen la inclinación ϕ , y los correspondientes vectores base son los vectores unitarios \bar{e}_R y \bar{e}_ϕ mostrados en la figura 8(a). \bar{e}_R y \bar{e}_ϕ varían de punto a punto pero siempre se intersectan en ángulos rectos. Sistemas coordenados cuyos vectores base se intersectan en ángulos rectos son llamados SISTEMAS ORTONORMALES, y son los sistemas de mayor uso en aplicaciones. Sistemas coordenados cuyas curvas coordenadas no son líneas rectas son llamados SISTEMAS DE COORDENADAS CURVILÍNEAS.

La relación entre las coordenadas rectangulares x_1, x_2 y las coordenadas polares R, ϕ

es dada por la fórmula

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad x_2 = R \operatorname{sen} \varphi \quad (9)$$

$$R = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \quad (0 \leq R < \infty)$$

$$\operatorname{tan} \varphi = \frac{x_2}{x_1} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

Un sistema más generalizado de coordenadas polares u y θ sería el conjunto de elipses

$$u = \sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2} \quad (0 \leq u < \infty)$$

($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$) y los rayos

$$\operatorname{tan} \theta = \frac{ax_2}{bx_1} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

donde la analogía con (9) es

$$x_1 = au \cos \theta, \quad x_2 = bu \operatorname{sen} \theta$$

los correspondientes base son los vectores unitarios \bar{e}_u y \bar{e}_θ que varían de punto a punto en dirección y ángulo, entre ellos por esta razón el sistema no es ORTOGONAL

9. TRANSFORMACIONES DIRECTA E INDIRECTA DE VECTORES BASE

Considerando dos bases $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ y $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ trazados del mismo punto O . Entonces cualquier vector de la primer base pueda ser representado con respecto a los vectores de la segunda base e inversamente. Sean $d_{ij}^1, d_{ij}^2, d_{ij}^3$ los coeficientes de la expansión de \bar{e}'_i con respecto a los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ respectivamente. Entonces

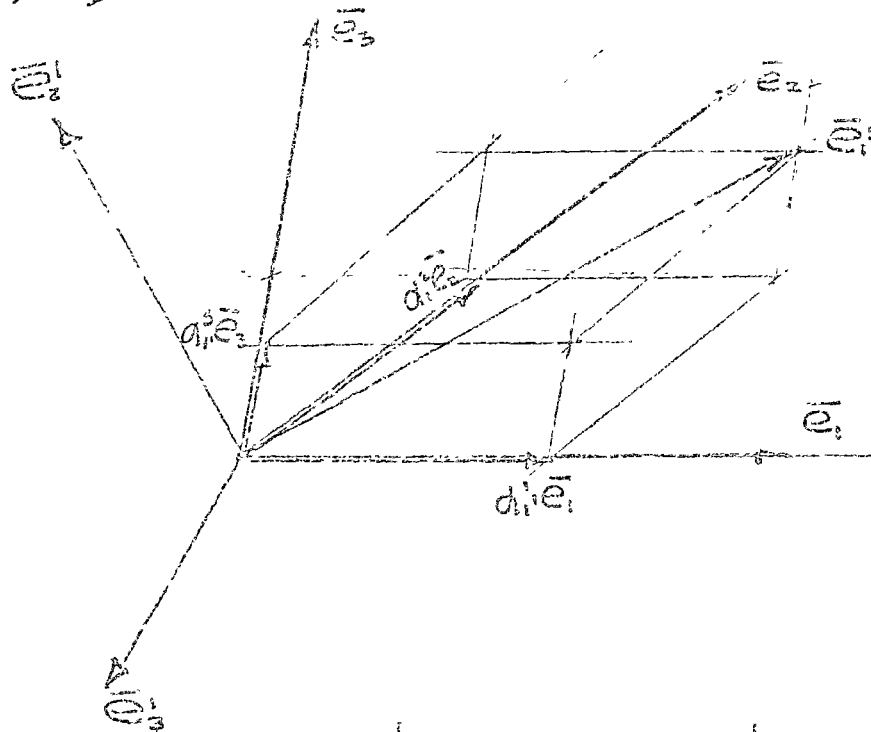


Fig. 9. Expansión del vector \bar{e}'_1 respecto a los vectores \bar{e}_1, \bar{e}_2 y \bar{e}_3

$$\bar{e}'_1 = d_{11}^1 \bar{e}_1 + d_{12}^1 \bar{e}_2 + d_{13}^1 \bar{e}_3 = \sum_{k=1}^3 d_{1k}^1 \bar{e}_k \quad d_{ij}^k \bar{e}_k$$

$$\bar{e}'_2 = d_{21}^1 \bar{e}_1 + d_{22}^1 \bar{e}_2 + d_{23}^1 \bar{e}_3 = \sum_{k=1}^3 d_{2k}^1 \bar{e}_k$$

$$\bar{e}'_3 = d_{31}^1 \bar{e}_1 + d_{32}^1 \bar{e}_2 + d_{33}^1 \bar{e}_3 = \sum_{k=1}^3 d_{3k}^1 \bar{e}_k$$

— más consistentemente.

$$\bar{e}'_i = \sum_{k=1}^3 d_{ik} \bar{e}_k \quad (i=1,2,3) \quad (10)$$

Los nueve números d_{ik} ($i, k=1,2,3$) son llamados los coeficientes de la transformación directa de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ a $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$.

Similarmente, d_i^1, d_i^2, d_i^3 son los coeficientes de la expansión de \bar{e}_i con respecto a los vectores $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$, respectivamente, así que

$$\bar{e}_i = \sum_{k=1}^3 d_i^k \bar{e}'_k \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

Entonces los nueve números d_i^k ($i, k=1,2,3$) son llamados los coeficientes de la transformación inversa de $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ a $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

10.- PRODUCTO ESCALAR ENTRE VECTORES

Por el producto escalar (producto punto) de dos vectores \bar{A} y \bar{B} , denotado por $\bar{A} \cdot \bar{B}$, significa la cantidad

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| |\bar{B}| \cos(\bar{A}, \bar{B}) \quad (12)$$

es el producto de las magnitudes de los vectores por el coseno del ángulo entre ellos, o sea la magnitud de \bar{A} por la proyección de la magnitud de \bar{B} sobre \bar{A} o viceversa.

La multiplicación escalar es obviamente CONMUTATIVA:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$$

Es también DISTRIBUTIVA (con respecto a suma)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

como puede verse en la figura 10

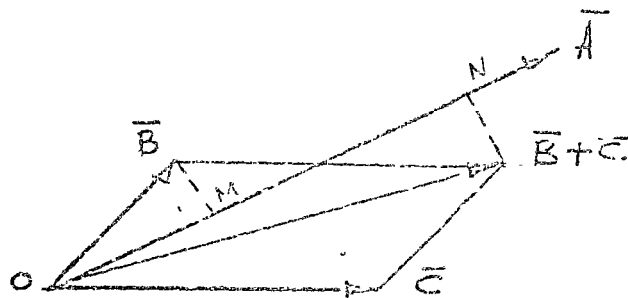


Fig. 10 Distributividad del producto escalar:

puesto que $ON = OM + MN$

$$|\vec{A}| ON = |\vec{A}| OM + |\vec{A}| MN,$$

o sea $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Una condición necesaria y suficiente para que dos vectores \vec{A} y \vec{B} sean perpendiculares es que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

La proyección de un vector \vec{A} sobre un eje u es igual al producto escalar de \vec{A} por un vector unitario \vec{u}_0 contenido en u :

$$A_u = \vec{A} \cdot \vec{u}_0 = A \cos(\vec{A}, \vec{u}_0)$$

Dado un sistema de coordenadas rectangulares x^1, x^2, x^3 , y sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ los correspondientes vectores base. Entonces cualquier vector \vec{A} puede representarse en la forma

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \quad (12)$$

Puesto que los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son

ortonormales, las condiciones de ortonormalidad son

$$\bar{\tau}_j \cdot \bar{\tau}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases} \quad (13)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{\tau}_1 &= (A_1 \bar{\tau}_1 + A_2 \bar{\tau}_2 + A_3 \bar{\tau}_3) \cdot \bar{\tau}_1 \\ &= A_1 \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_1 + A_2 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 + A_3 \bar{\tau}_3 \cdot \bar{\tau}_1 \\ &= A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 0 = A_1 \end{aligned} \quad (14)$$

y similarmente

$$\bar{A} \cdot \bar{\tau}_2 = A_2, \quad \bar{A} \cdot \bar{\tau}_3 = A_3 \quad (15)$$

en otras palabras, A_1, A_2, A_3 son las proyecciones del vector \bar{A} sobre los ejes coordenados. De (14)

y (15) se tiene

$$\bar{A} = (\bar{A} \cdot \bar{\tau}_i) \bar{\tau}_i$$

$$\bar{A} = (\bar{A} \cdot \bar{\tau}_1) \bar{\tau}_1 + (\bar{A} \cdot \bar{\tau}_2) \bar{\tau}_2 + (\bar{A} \cdot \bar{\tau}_3) \bar{\tau}_3 \quad (16)$$

El producto escalar entre dos vectores puede fácilmente expresarse en términos de sus componentes

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (A_1 \bar{\tau}_1 + A_2 \bar{\tau}_2 + A_3 \bar{\tau}_3) \cdot (B_1 \bar{\tau}_1 + B_2 \bar{\tau}_2 + B_3 \bar{\tau}_3)$$

de las condiciones de ortonormalidad implican la importante fórmula

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (17)$$

II.- PRODUCTO VECTORIAL

Dados dos vectores \bar{A} y \bar{B} , sea \bar{C} un vector tal que

- 1) \vec{c} es de magnitud $|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\vec{A}, \vec{B})$ igual al área del paralelogramo formado por las magnitudes A y B , ver figura 11
- 2) \vec{c} es perpendicular al plano de \vec{A} y \vec{B}
- 3) \vec{c} apunta en la dirección de la rotación de \vec{A} hacia \vec{B} en contra de la rotación de las manecillas del reloj (a través del más pequeño de los ángulos entre \vec{A} y \vec{B}).

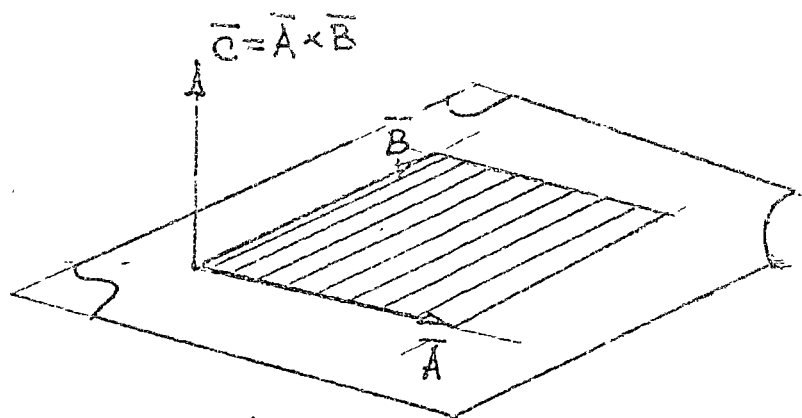


Fig. 11 Producto vectorial

Entonces \vec{c} es llamado producto vectorial (producto cruz) de \vec{A} y \vec{B} , denotado por $\vec{A} \times \vec{B}$. Observe que el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ apunta en la dirección que avanza un tornillo derecho de \vec{A} a \vec{B} .

El producto vectorial no es conmutativo

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

El producto vectorial si es distributivo

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean paralelos es que

$$\bar{A} \times \bar{B} = 0$$

Sean $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ los vectores base de un sistema coordenado derecho como se muestra en la figura 12. Entonces

$$\bar{l}_1 \times \bar{l}_2 = \bar{l}_3, \quad \bar{l}_2 \times \bar{l}_3 = \bar{l}_1, \quad \bar{l}_3 \times \bar{l}_1 = \bar{l}_2$$

$$\bar{l}_1 \times \bar{l}_1 = 0, \quad \bar{l}_2 \times \bar{l}_2 = 0, \quad \bar{l}_3 \times \bar{l}_3 = 0$$

o más concisamente

$$\bar{l}_j \times \bar{l}_k = \bar{l}_l, \quad \bar{l}_m \times \bar{l}_m = 0 \quad (18)$$

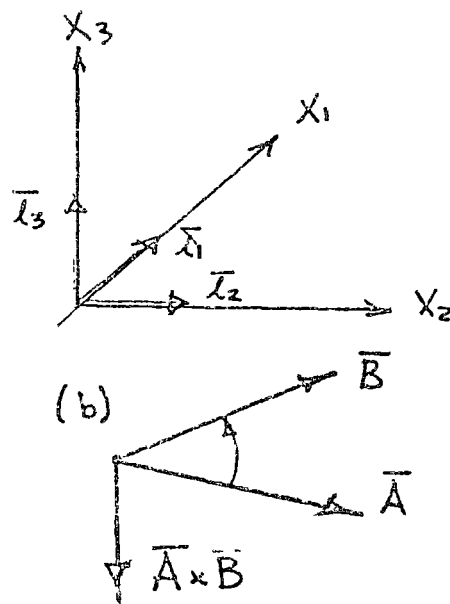
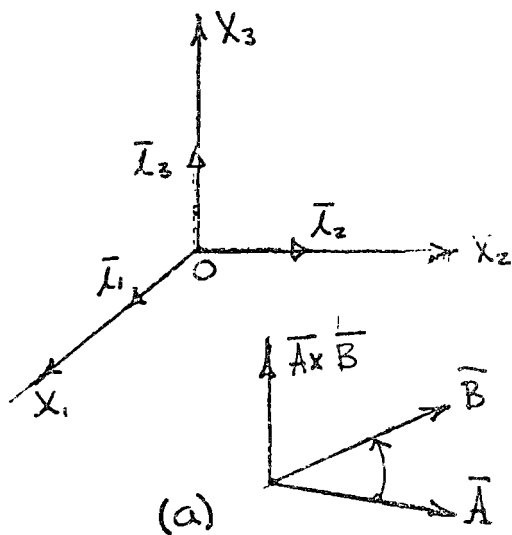


Fig. 12 El producto vectorial $\bar{A} \times \bar{B}$ en sistemas coordenados derechos e izquierdo.

donde los índices j, k, l son permutaciones cíclicas de los números 1, 2, 3 (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)

Vectores (como el momento de una fuerza, velocidad angular, etc.) cuya dirección es establecida por convención, y los cuales cambian de dirección si el sistema coordenado es derecho o izquierdo son llamados VECTORES AXIALES. Vectores (como fuerza, velocidad, etc.) cuya dirección depende solo de su significado físico son llamados VECTORES POLARES. Para determinar la naturaleza de un vector, imaginarlo reflejado a un espejo perpendicular a él mismo. Si la reflexión cambia la dirección de la cantidad describiendo el fenómeno físico, entonces el vector es axial (ver figura 13). En lo sucesivo usaremos sistemas coordenados derechos:

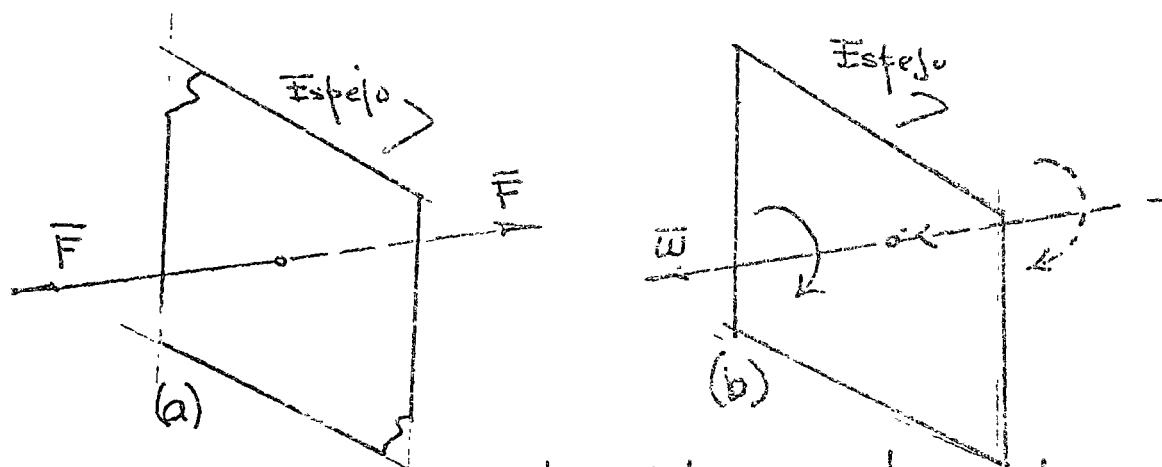


Fig. 13. (a) Fuerza, vector polar, puesto que la reflexión invierte su dirección
 (b) Velocidad angular es un vector axial, puesto que la reflexión no tiene efecto en la rotación

usando (18), podemos fácilmente expresar el producto vectorial en términos de sus componentes

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{A} \times \vec{B} = (A_1\vec{i}_1 + A_2\vec{i}_2 + A_3\vec{i}_3) \times (B_1\vec{i}_1 + B_2\vec{i}_2 + B_3\vec{i}_3) \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\vec{i}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{i}_3\end{aligned}$$

o sea.

$$\vec{c} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (19)$$

12. Ejemplos Físicos

Los productos vectoriales y escalares están asociados con una variedad de conceptos físicos.

Por ejemplo el trabajo hecho por una fuerza aplicada a un punto es definido como el producto como el producto de el desplazamiento y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. La componente de la fuerza perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo. Si \vec{F} es la fuerza y \vec{s} el desplazamiento, el trabajo W es por definición igual a

$$W = F_s s = F s \cos(\vec{F}, \vec{s}) = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (20)$$

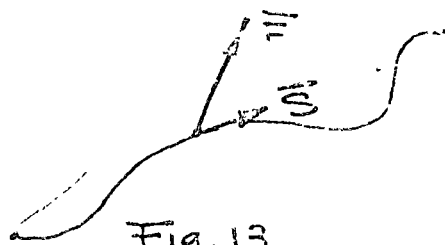


Fig. 13

El modelo más simple de producto vectorial es el momento \vec{M} de una fuerza \vec{F} respecto a un punto O , definido como

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

donde \vec{r} es el vector que une O con el punto inicial de \vec{F} . La dirección positiva de \vec{M} depende del sistema de ejes coordenados seleccionado

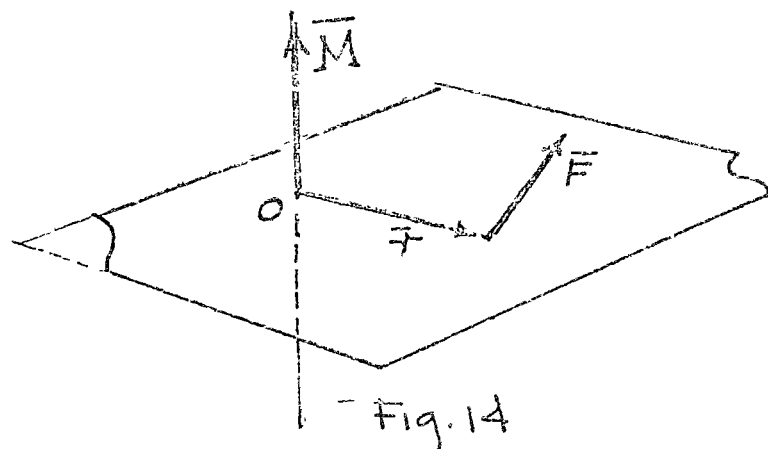


Fig. 14

14 13.- TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Por triple producto escalar entre tres vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} , significa el escalar

$$V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (21)$$

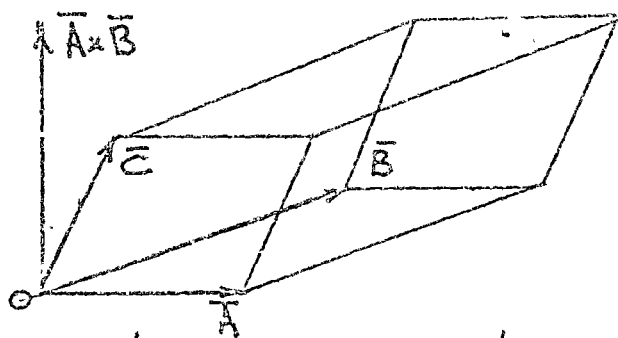


Fig. 15. Triple producto escalar de tres vectores representa el volumen del paralelepípedo con el signo más o menos según el ángulo en O es agudo o obtuso. De (19) (20) y (21) se obtiene la.

siguiente representación del triple producto escalar en función de las componentes de los vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} en un sistema coordenado rectangular.

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \cdot (C_1 \bar{a}_1 + C_2 \bar{a}_2 + C_3 \bar{a}_3)$$

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (20)$$

De (20) y de las propiedades de los determinantes se concluye que el triple producto escalar es invariante bajo permutaciones cíclicas de los vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} :

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = (\bar{B} \times \bar{C}) \cdot \bar{A} = (\bar{C} \times \bar{A}) \cdot \bar{B} \quad (21)$$

más aún el triple producto escalar es cero si dos de los vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} son idénticos (o paralelos).

Tres vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} son coplanares (linealmente dependientes) si y solamente si forman un paralelepípedo de volumen cero, o, si solo si su triple producto escalar es cero

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

Se concluye que tres vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} forman una base si y solo si $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} \neq 0$.

la base se dice que es derecha si $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} > 0$ e izquierda, si $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} < 0$, Fig. 12a y 12b.

14. TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL

Por el triple producto vectorial de tres vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} , significa el vector $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$. Obviamente $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ es perpendicular a \bar{A} y está contenido en el plano de \bar{B} y \bar{C} (ver Fig. 16)

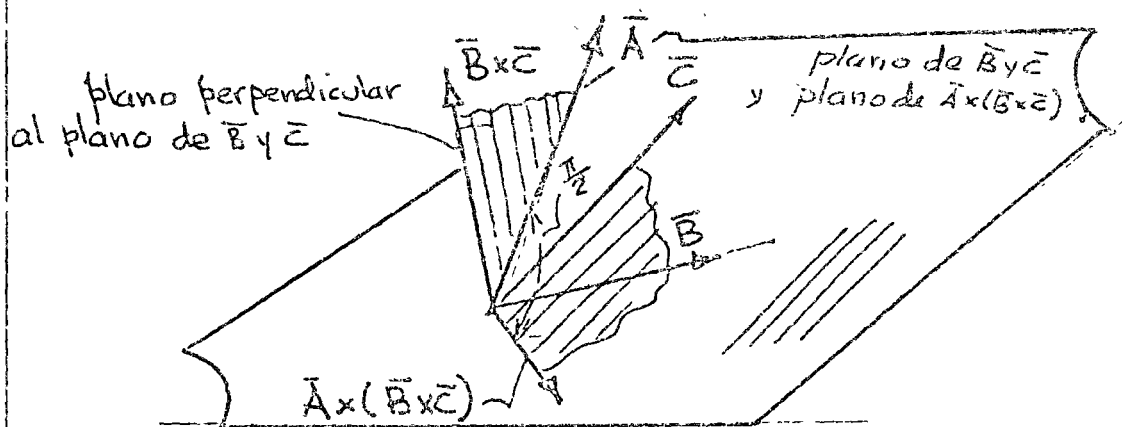


Fig. 16 El Triple producto escalar de tres vectores

Supongase que los vectores \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} no son colineales [de otra forma $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ sería obviamente cero]. Entonces $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ tiene una expansión única de la forma

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = m\bar{B} + n\bar{C} \quad (23)$$

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) + \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B}) \quad (24)$$

$$\text{también } (\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{A}(\bar{B} \cdot \bar{C})$$

Lo anterior puede verificarse substituyendo los vectores \bar{A} , \bar{B} , y \bar{C} por sus componentes

A_i, B_i y C_i y efectuar las operaciones vectoriales

15. DIVISION DE VECTORES

La solución de ecuaciones usualmente nos conduce a la operación de división, operación que en el caso de vectores no es única. Esta dificultad aparece aún en el caso de el producto escalar (El más simple de los productos definidos). Pensando de la división como la inversa de la multiplicación, sea

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = m \quad (\bar{a} \neq 0)$$

donde \bar{x} es un vector desconocido. Esta ecuación un número infinito de soluciones, puesto que define la proyección de \bar{x} sobre \bar{a} (Fig. 17) de allí que la operación de división NO ESTA DEFINIDA en Algebra Vectorial.

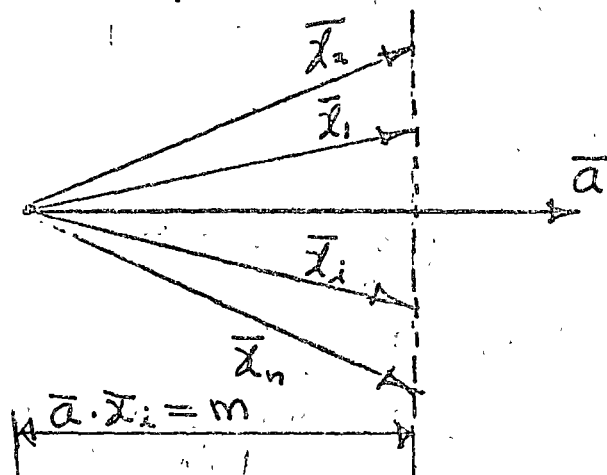


Fig. 17 Ilustración de la ecuación $\bar{a} \cdot \bar{x}_i = m$

16. BASES RECIPROCAS

Dado un vector \bar{A} , sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ tres vectores ortonormales unitarios. Entonces

$$\bar{A} = (\bar{A} \cdot \bar{l}_1) \bar{l}_1 + (\bar{A} \cdot \bar{l}_2) \bar{l}_2 + (\bar{A} \cdot \bar{l}_3) \bar{l}_3 \quad (25)$$

La generalización de (25) al caso de tres vectores ortonormales $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (no necesariamente de longitud unitaria) es inmediata, es necesario observar que los vectores

$$\bar{l}_1 = \frac{\bar{e}_1}{e_1}, \quad \bar{l}_2 = \frac{\bar{e}_2}{e_2}, \quad \bar{l}_3 = \frac{\bar{e}_3}{e_3} \quad (26)$$

($e_i = |\bar{e}_i|$, $i=1,2,3$) son ortonormales, y entonces substituyendo (26) en (25) se obtiene.

$$\bar{A} = \frac{\bar{A} \cdot \bar{e}_1}{(e_1)^2} \bar{e}_1 + \frac{\bar{A} \cdot \bar{e}_2}{(e_2)^2} \bar{e}_2 + \frac{\bar{A} \cdot \bar{e}_3}{(e_3)^2} \bar{e}_3 \quad (27)$$

Considerando aún el problema más general de la expansión de un vector arbitrario \bar{A} con respecto a tres vectores no coplanares $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, los cuales son en general no ortogonales y no unitarios. Sean A^1, A^2, A^3 los coeficientes de la expansión, tal que

$$\bar{A} = A^1 \bar{e}_1 + A^2 \bar{e}_2 + A^3 \bar{e}_3$$

Entonces el problema se reduce a proyectar \bar{A} sobre los ejes del sistema coordinado y resolver un sistema resultante de tres ecuaciones escalares con tres incógnitas A^1, A^2, A^3 . Este problema importante puede ser resuelto directamente por el método de bases recíprocas.

Dos bases $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ y $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ se dice que son recíprocas si satisfacen la condición:

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad (28)$$

En otras palabras, cada vector de una base es perpendicular a dos vectores de la otra base, los dos vectores cuyos índices tienen diferentes valores. Más aún (28) implica que

$$|\bar{e}_i| |\bar{e}'_i| \cos(\bar{e}_i, \bar{e}'_i) = 1 > 0$$

y por lo tanto $\cos(\bar{e}_i, \bar{e}'_i) > 0$. De allí que cada vector de una base tiene un ángulo agudo (posiblemente un ángulo recto) con el vector de la otra base cuyo índice tiene el mismo valor.

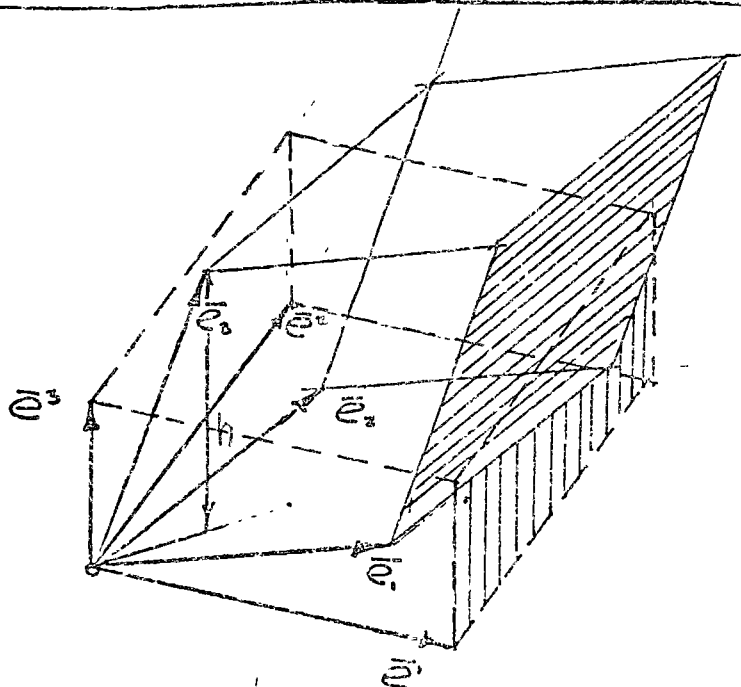


Fig. 18 Bases recíprocas y sus paralelepípedos. La magnitud de \bar{e}'_3 es igual a la recíproca de la altitud

La construcción de los paralelepípedos formados por las dos bases [de volúmenes $|V| = |\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)|$ y $|V'| = |\bar{e}'_1 \cdot (\bar{e}'_2 \times \bar{e}'_3)|$], entonces las caras de cada paralelepípedo son perpendiculares a los lados del otro puesto que (28) implica

$$|\bar{e}'_i| = \frac{1}{|\bar{e}_i| \cos(\bar{e}_i, \bar{e}'_i)}$$

la magnitud de cada vector de una base es igual a la recíproca de la correspondiente altitud paralela del paralelepípedo de la base recíproca (ver Fig. 18).

Para explicitar construir las bases recíprocas $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ correspondientes a una base dada $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, se procede en la siguiente forma: El vector \bar{e}'_1 debe ser perpendicular a los vectores \bar{e}_2 y \bar{e}_3 . Por lo tanto

$$\bar{e}'_1 = m(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)$$

donde el escalar m puede ser determinado de la condición

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}'_1 = 1$$

$$\text{o sea } m \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) = 1$$

puesto que $\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) \neq 0$ (los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ siendo vectores base no son coplanares). por lo tanto

$$\bar{e}'_1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{V} \quad (29)$$

donde $|V|$ es el volúmen del paralelepípedo formado por las bases $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Similarmente determinamos que

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{V}, \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{V}$$

Junto con (29), esto da

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{e}_j \times \bar{e}_k}{V} \quad (30)$$

donde i, j, k es una permutación cíclica de $1, 2, 3$

Las siguientes dos propiedades de bases recíprocas deben ser observadas:

1) La base recíproca de una base ortonormal $\bar{e}_1 = \bar{\lambda}_1, \bar{e}_2 = \bar{\lambda}_2, \bar{e}_3 = \bar{\lambda}_3$ es la misma base ortonormal, consistiendo de los mismos vectores.

En hecho,

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{\lambda}_2 \times \bar{\lambda}_3}{\bar{\lambda}_1 \cdot (\bar{\lambda}_2 \times \bar{\lambda}_3)} = \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_1} = \frac{\bar{\lambda}_1}{1} = \bar{\lambda}_1$$

y similarmente

$$\bar{e}_2 = \bar{\lambda}_2, \quad \bar{e}_3 = \bar{\lambda}_3$$

2) Dos bases son o derechas o izquierdas ello sigue de la fórmula $VV' = 1$ (cuya prueba se deja como un ejercicio).

Regresamos al problema de la expansión de un vector \bar{A} con respecto a tres vectores no coplanares $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, de determinar los coeficientes A^1, A^2, A^3 en la fórmula

$$\bar{A} = A^1 \bar{e}_1 + A^2 \bar{e}_2 + A^3 \bar{e}_3 \quad (31)$$

Sean $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ la base recíproca de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.
Entonces se sigue de (28) que

$$\bar{A} \cdot \bar{e}^i = \sum_{k=1}^3 A^k \bar{e}_k \cdot \bar{e}^i = \bar{A}^i \bar{e}_i \cdot \bar{e}^i = A^i \quad (i=1, 2, 3)$$

por ejemplo,

$$A^1 = \bar{A} \cdot \bar{e}^1 = \frac{\bar{A} \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)}{\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)}$$

De allí que (31) llega a

$$\bar{A} = (\bar{A} \cdot \bar{e}^1) \bar{e}_1 + (\bar{A} \cdot \bar{e}^2) \bar{e}_2 + (\bar{A} \cdot \bar{e}^3) \bar{e}_3,$$

que es la generalización deseada de (15) y (26)

Usando la base recíproca, podemos fácilmente encontrar el vector \bar{A} que satisface el sistema de ecuaciones

$$\bar{A} \cdot \bar{e}_1 = m_1, \quad \bar{A} \cdot \bar{e}_2 = m_2, \quad \bar{A} \cdot \bar{e}_3 = m_3 \quad (31)$$

y de (28) se sigue que

$$\bar{A} = m_1 \bar{e}^1 + m_2 \bar{e}^2 + m_3 \bar{e}^3$$

es la solución única de (31)

17.- LA CONVENCION DE SUMA

Trataremos de usar la siguiente convención universalmente encontrada en la física contemporánea y en literatura matemática.

1) Cada letra índice apareciendo una vez en una expresión puede tomar los valores 1, 2, 3. De allí que A_i denota el conjunto de tres cantidades

$A_1, A_2, A_3,$
 A_{ik} el conjunto de $3^2 = 9$ cantidades

 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$
 A^{ik} el conjunto de $3^2 = 9$ cantidades

 $A^{11}, A^{12}, A^{13}, A^{21}, A^{22}, A^{23}, A^{31}, A^{32}, A^{33}$

y así sucesivamente.

2) Cada letra índice que aparece doble en un término se entiende por una suma de 1 a 3.

 Así que

$$A_{ii} = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$A_i B^i = \sum_{i=1}^3 A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (32)$$

$$A_i B^k C^i = B^k \sum_{i=1}^3 A_i C^i = (A_1 C^1 + A_2 C^2 + A_3 C^3) B^k$$

Con esta convención podemos quitar los signos de suma en (10) y (11) escribiendo simplemente

$$\bar{e}'_i = d_{ik}^k \bar{e}_k = d_{i1}^1 \bar{e}_1 + d_{i2}^2 \bar{e}_2 + d_{i3}^3 \bar{e}_3$$

$$\bar{e}_j = d_{j\bar{k}}^{\bar{k}} \bar{e}'_{\bar{k}} = d_{j1}^1 \bar{e}'_1 + d_{j2}^2 \bar{e}'_2 + d_{j3}^3 \bar{e}'_3$$

Hay otra convención que consideraremos: sean K y K' dos sistemas coordenados, y sea P un punto arbitrario. Entonces las coordenadas de P en K serán representadas por x_i (o por x^i si el sistema no es rectangular), y las coordenadas de el mismo punto P en K' serán re-

presentadas por x'_i (o por $x^{i'}$ si K' no es un sistema coordinado rectangular). La misma regla también se aplica a componentes de vectores (y, más generalmente, de tensores). De allí que A_i y A'_i son las componentes del mismo vector \bar{A} con respecto al primer eje del sistema K y K' , respectivamente, y no las componentes de dos diferentes vectores en el mismo sistema.

18- COMPONENTES COVARIANTE Y CONTRAVARIANTE DE UN VECTOR.

Estudiando bases recíprocas, encontramos que el mismo vector \bar{A} puede ser representado

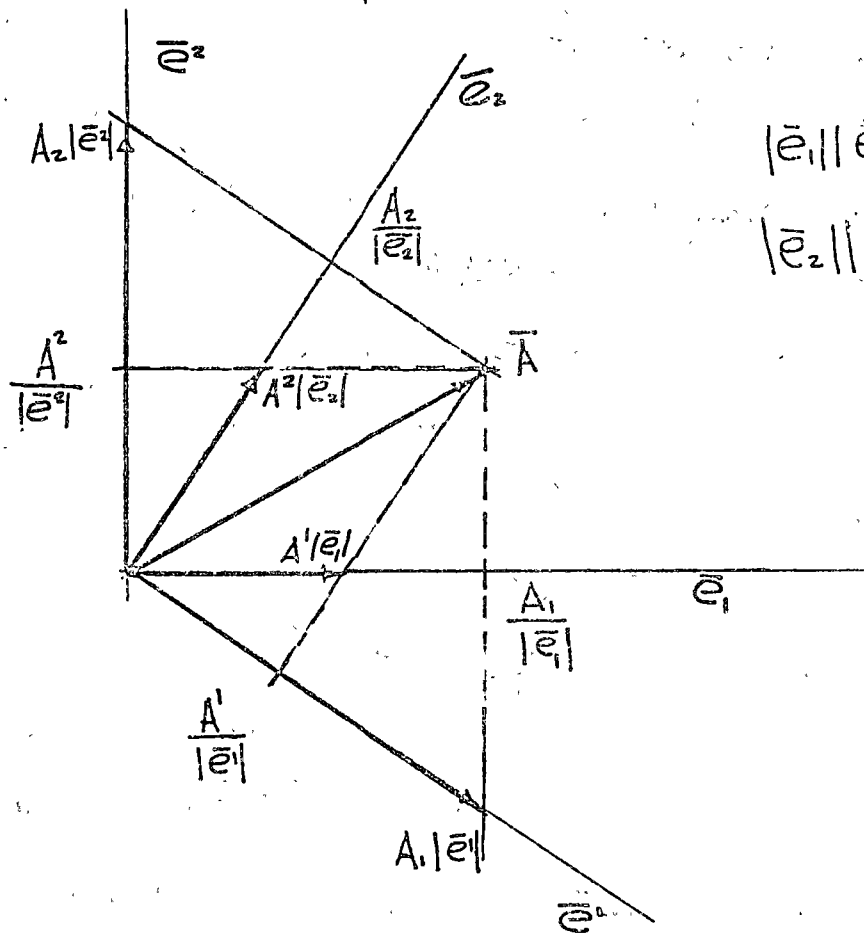
$$\text{como } \bar{A} = A^1 \bar{e}_1 + A^2 \bar{e}_2 + A^3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A^i \bar{e}_i \equiv A^i \bar{e}_i \quad (A^i = \bar{A} \cdot \bar{e}_i) \quad (33)$$

con respecto a los vectores de la base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, y

$$\text{como } \bar{A} = A_1 \bar{e}^1 + A_2 \bar{e}^2 + A_3 \bar{e}^3 = \sum_{i=1}^3 A_i \bar{e}^i \equiv A_i \bar{e}^i \quad (A_i = \bar{A} \cdot \bar{e}_i) \quad (33)$$

con respecto a los vectores de la base recíproca $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$. Los números A^i son llamados las componentes CONTRAVARIANTES de \bar{A} , mientras que los números A_i son llamados las componentes COVARIANTES DE \bar{A} . La situación es ilustrada por la Fig. 19, la cual muestra las componentes COVARIANTE Y CONTRAVARIANTE de un vector \bar{A}

contenido en el plano de los vectores \bar{e}_1 y \bar{e}_2



$$|\bar{e}_1| |\bar{e}_1'| \cos(\bar{e}_1, \bar{e}_1') = 1$$

$$|\bar{e}_2| |\bar{e}_2'| \cos(\bar{e}_2, \bar{e}_2') = 1$$

$$\cos(\bar{e}_1, \bar{e}_1') = \frac{1}{|\bar{e}_1| |\bar{e}_1'|}$$

$$\cos(\bar{e}_2, \bar{e}_2') = \frac{1}{|\bar{e}_2| |\bar{e}_2'|}$$

Fig. 19 Componentes COVARIANTE Y CONTRAVARIANTE de un vector en el plano:

Las componentes covariantes A_1, A_2 pueden ser determinadas o de las componentes $A_1/|\bar{e}_1|, A_2/|\bar{e}_2|$ de el vector \bar{A} con respecto a las direcciones de las bases reciprocas o de las proyecciones $A_1/|\bar{e}_1|, A_2/|\bar{e}_2|$ de \bar{A} sobre los ejes de la base original. Las componentes contravariantes A_1', A_2' pueden ser determinadas o de las componentes $A_1'/|\bar{e}_1'|, A_2'/|\bar{e}_2'|$ de \bar{A} con respecto a la base original o de las proyecciones $A_1'/|\bar{e}_1|, A_2'/|\bar{e}_2|$ de \bar{A} sobre los ejes de la base reciproca.

20.- COMPONENTES FÍSICAS DE UN VECTOR

Las operaciones con vectores son definidas geoméricamente, pensando como segmentos de línea dirigidos proporcionales a las magnitudes de las cantidades que ellos representan sin considerar las ~~mayor~~ dimensiones físicas de esas cantidades. Claramente las dimensiones físicas de las componentes A^i y A_i de el mismo vector

$\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A_i \vec{e}^i$ son diferentes, en cierta forma son determinadas por las dimensiones de los vectores base y las relaciones $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^i = 1$.

Sin embargo, es posible introducir COMPONENTES FÍSICAS DE VECTORES, cuyas dimensiones coincidan con las mismas de los vectores base. Esto se hace definiendo unas nuevas bases unitarias.

$$\vec{e}_i^* = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$$

(los vectores \vec{e}_i^* son todos de longitud unitaria) y sus bases recíprocas

$$\vec{e}^{*i} = \vec{e}^i |\vec{e}_i|$$

entonces

$$\vec{A} = A_i^* \vec{e}^{*i} = A^{*i} \vec{e}_i,$$

La relación entre las componentes físicas

de un vector y sus componentes covariante y contravariante se determina facilmente que es

$$A_i^* = \frac{A_i}{|\bar{e}_i|}, \quad A^{*i} = A^i |\bar{e}_i|$$

(no suma sobre i)

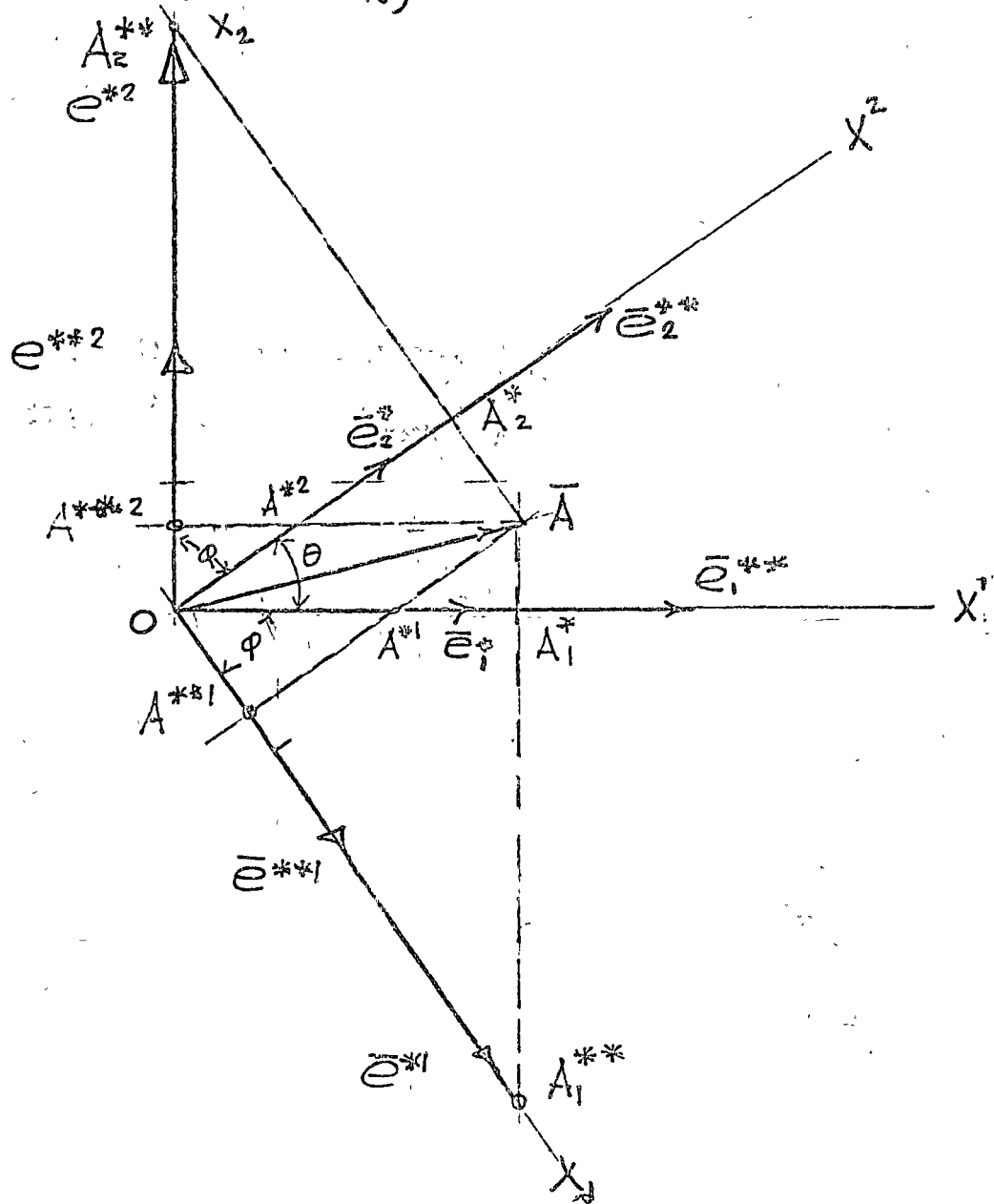


Fig. 20 Las componentes físicas de un vector

de un vector y sus componentes covariante y contravariante es fácilmente encontrado ser

$$A_i^* = \frac{\bar{A}_i}{|\bar{e}_i^*|}, \quad A^{*i} = A^i |\bar{e}_i|$$

(no suma sobre i)

A^{*i} son las componentes de \bar{A} sobre la dirección de los vectores \bar{e}_i^* , mientras que A_i^* son las componentes ortogonales sobre x^i las mismas direcciones

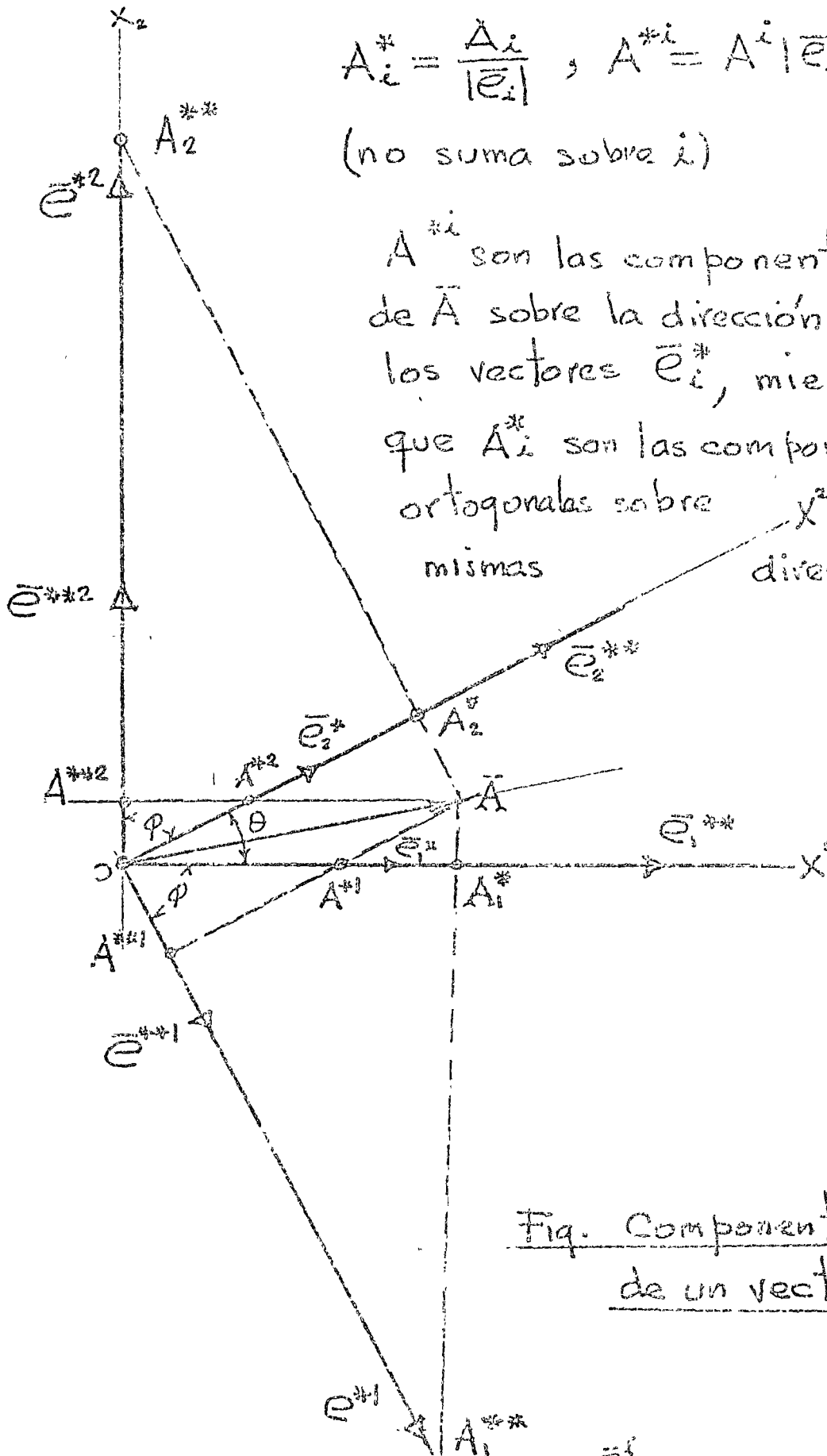


Fig. Componentes Físicas de un vector \bar{A}

Se pueden igualmente determinar también empezando de las bases recíprocas, definiendo las bases unitarias como

$$\bar{e}^{**i} = \frac{\bar{e}^i}{|\bar{e}^i|}$$

y sus recíprocas como

$$\bar{e}_i^{**} = \bar{e}_i |\bar{e}^i|$$

nosotros entonces tenemos

$$\bar{e}^{**i} = \bar{e}^{*i} \cos(\bar{e}^i, \bar{e}_i),$$

$$\bar{e}_i^{**} = \frac{\bar{e}^{*i}}{\cos(\bar{e}^i, \bar{e}_i)} \quad y$$

$$A_i^{**} = \frac{A_i^*}{\cos(\bar{e}^i, \bar{e}_i)}, \quad A^{**i} = A^{*i} \cos(\bar{e}^i, \bar{e}_i)$$

ambas de finiciones son equivalentes esencialmente, reduciéndose todo a la selección de la unidades usadas.

Debe ser enfatizado que los calculos casi siempre se hacen con componentes covariante y contra variante ordinarias, haciéndose la transcripción a componentes físicas solamente al final si es necesario.

$$(1) \bar{A} = A^1 \bar{e}_1 + A^2 \bar{e}_2 + A^3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A^i \bar{e}_i = A^i \bar{e}_i \quad (1.41)$$

$$A^i = \bar{A} \cdot \bar{e}^i$$

$$(2) \bar{A} = A_1 \bar{e}^1 + A_2 \bar{e}^2 + A_3 \bar{e}^3 = \sum_{i=1}^3 A_i \bar{e}^i = A_i \bar{e}^i \quad (1.42)$$

\bar{e}_i vectores base y \bar{e}^i vectores reciproco de \bar{e}_i

$$\text{sea; } \bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

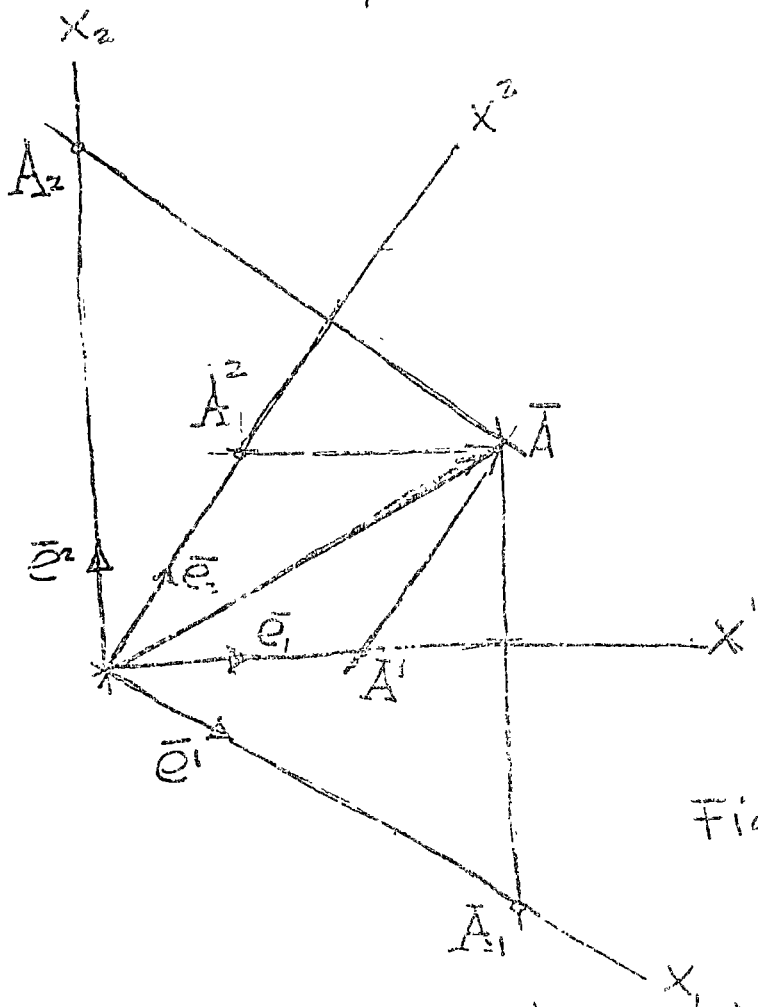


Fig. I

(3) $A^i, (A^1, A^2, A^3)$ componentes contravariantes de \bar{A} (1.41)

(4) $A_i, (A_1, A_2, A_3)$ " covariantes de \bar{A} (1.42)

Tomando el producto escalar de (1) con \bar{e}_i y el producto escalar de (2) con \bar{e}^i , se obtiene

$$\bar{A} \cdot \bar{e}_i = A^k (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k) \quad (5)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{e}^i = A_k (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^k) \quad (6)$$

introduciendo la notación

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k = g_{ik} = g_{ki} \quad (7)$$

$$\bar{e}^i \cdot \bar{e}^k = g^{ik} = g^{ki} \quad (8)$$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = g_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad (9)$$

(7), (8) y (9) en (5) y (6) se llega a

$$\text{cova. } A_i = g_{ik} A^k \quad (10)$$

$$\text{contra. } A^i = g^{ik} A_k \quad (11)$$

(10) y (11) expresan las componentes covariantes de el vector \bar{A} en términos de sus componentes contra variantes y viceversa. Como será

de mostrado posteriormente las nueve cantidades

g_{ik} forman un tensor de segundo orden,

y también lo forman g^{ik} y g_i^k .

Expresión de (5), (6), (7), (8), (9) y (10) sin usar notación indicial.

$$\bar{A} \cdot \bar{e}_i = A^1 (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_1) + A^2 (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_2) + A^3 (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 = \bar{A} \cdot \bar{e}_1 &= A^1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + A^2 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) + A^3 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3) \\ A_2 = \bar{A} \cdot \bar{e}_2 &= A^1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + A^2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) + A^3 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3) \\ A_3 = \bar{A} \cdot \bar{e}_3 &= A^1 (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1) + A^2 (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2) + A^3 (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3) \end{aligned} \right\} \text{(5) (3.5)}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{e}^i = A_{1i} (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^1) + A_{2i} (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^2) + A_{3i} (\bar{e}^i \cdot \bar{e}^3)$$

$$\left. \begin{aligned} A^1 = \bar{A} \cdot \bar{e}^1 &= A_{11} (\bar{e}^1 \cdot \bar{e}^1) + A_{21} (\bar{e}^1 \cdot \bar{e}^2) + A_{31} (\bar{e}^1 \cdot \bar{e}^3) \\ A^2 = \bar{A} \cdot \bar{e}^2 &= A_{12} (\bar{e}^2 \cdot \bar{e}^1) + A_{22} (\bar{e}^2 \cdot \bar{e}^2) + A_{32} (\bar{e}^2 \cdot \bar{e}^3) \\ A^3 = \bar{A} \cdot \bar{e}^3 &= A_{13} (\bar{e}^3 \cdot \bar{e}^1) + A_{23} (\bar{e}^3 \cdot \bar{e}^2) + A_{33} (\bar{e}^3 \cdot \bar{e}^3) \end{aligned} \right\} \text{(6) (3.7)}$$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k = \left\{ \begin{array}{ccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array} \right\} ; \quad g_{ik} = g_{ki} \quad \text{(7) (4.1)}$$

$$\bar{e}^i \cdot \bar{e}^k = \left\{ \begin{array}{ccc} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right\} ; \quad g^{ik} = g^{ki} \quad \text{(8) (4.2)}$$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = \left\{ \begin{array}{ccc} g_i^1 & g_i^2 & g_i^3 \\ g_2^1 & g_2^2 & g_2^3 \\ g_3^1 & g_3^2 & g_3^3 \end{array} \right\} ; \quad g_i^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad \text{(9) (4.3)}$$

$$A_i = g_{i1} A^1 + g_{i2} A^2 + g_{i3} A^3$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3 \\ A_2 &= g_{21} A^1 + g_{22} A^2 + g_{23} A^3 \\ A_3 &= g_{31} A^1 + g_{32} A^2 + g_{33} A^3 \end{aligned} \right\} \quad (10) \quad (43)$$

$$A^i = g^{i1} A_1 + g^{i2} A_2 + g^{i3} A_3$$

$$\left. \begin{aligned} A^1 &= g^{11} A_1 + g^{12} A_2 + g^{13} A_3 \\ A^2 &= g^{21} A_1 + g^{22} A_2 + g^{23} A_3 \\ A^3 &= g^{31} A_1 + g^{32} A_2 + g^{33} A_3 \end{aligned} \right\} \quad (11) \quad (44)$$

LAS CANTIDADES g_{ik} (σg^{ik}) DESCRIBEN
 LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS FUNDAMENTALES
 DE UN ESPACIO "ARITMETIZADO" INTRODUCIENDO
 UN SISTEMA COORDENADO CON BASES $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$
 Y SUS CORRESPONDIENTES COORDENADAS
 x^1, x^2, x^3 . Para ilustrar lo anterior, sea
 ds una longitud de arco entre dos
 puntos infinitamente cercanos x^i y $x^i + dx^i$
 y sea el vector $d\vec{r}$ entre los dos puntos
 el cual tenga componentes covariantes dx_i

y componentes contravariantes dx^i , como se indica en la Fig II. Entonces

$$(ds)^2 = |d\vec{r}|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\bar{e}_i dx^i}_{(12)} \cdot \underbrace{\bar{e}_k dx^k}_{(15)} = \underbrace{\bar{e}_i dx^i}_{(12)} \cdot \underbrace{\bar{e}^k dx_k}_{(15)} = \underbrace{\bar{e}^i dx_i}_{(14)} \cdot \underbrace{\bar{e}_k dx^k}_{(15)} \quad (12) \quad (15)$$

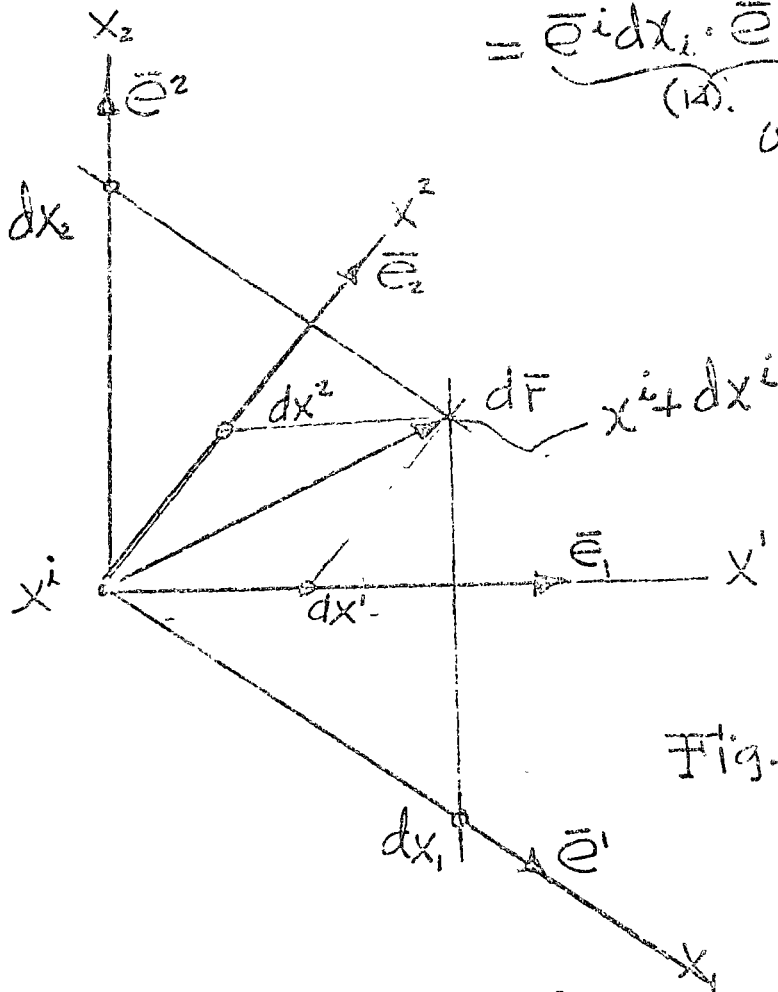


Fig. II.

$$(ds)^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (13) \quad (46)$$

$$(ds)^2 = g^{ik} dx_i dx_k \quad (14) \quad (47)$$

$$(ds)^2 = dx_i dx^i \quad (15) \quad (48)$$

con la notación (7), (8) y (9). Las fórmulas (13), (14) y (15) expresan el cuadrado de la longitud del elemento diferencial de arco en el sistema

coordenado dado en términos de g_{ik} (σg^{ik}), las cantidades g_{ik} (σg^{ik}) "determinan las métricas" de el espacio dado y de allí que son conocidas como el Tensor métrico.

Expresiones de (12), (13), (14) y (15) sin utilizar notación indicial.

$$(ds)^2 = |d\bar{r}|^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} =$$

$$\left. \begin{aligned} &(\bar{e}_1 dx^1 + \bar{e}_2 dx^2 + \bar{e}_3 dx^3) \cdot (\bar{e}_1 dx^1 + \bar{e}_2 dx^2 + \bar{e}_3 dx^3) = \\ &(\bar{e}_1 dx^1 + \bar{e}_2 dx^2 + \bar{e}_3 dx^3) \cdot (\bar{e}^1 dx_1 + \bar{e}^2 dx_2 + \bar{e}^3 dx_3) = \\ &(\bar{e}^1 dx_1 + \bar{e}^2 dx_2 + \bar{e}^3 dx_3) \cdot (\bar{e}^1 dx_1 + \bar{e}^2 dx_2 + \bar{e}^3 dx_3) \dots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (12) \\ (15) \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} (ds)^2 &= g_{i1} dx^i dx^1 + g_{i2} dx^i dx^2 + g_{i3} dx^i dx^3 = \\ &= (g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{13} dx^1 dx^3) + \\ &\quad g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{23} dx^2 dx^3) + \\ &\quad (g_{31} dx^3 dx^1 + g_{32} dx^3 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3) \end{aligned} \right\} (13) (16)$$

VII.

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= g^{i1} dx_i dx_1 + g^{i2} dx_i dx_2 + g^{i3} dx_i dx_3 = \\
 &= (g^{11} dx_1 dx_1 + g^{12} dx_1 dx_2 + g^{13} dx_1 dx_3) + \\
 &\quad (g^{21} dx_2 dx_1 + g^{22} dx_2 dx_2 + g^{23} dx_2 dx_3) + \\
 &\quad (g^{31} dx_3 dx_1 + g^{32} dx_3 dx_2 + g^{33} dx_3 dx_3)
 \end{aligned} \quad (14)$$

$$(ds)^2 = dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3 \quad (15) \quad (43)$$

Para determinar las relaciones entre las cantidades g_{ik} y g^{ik} de (10) se obtiene un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas A^1, A^2, A^3 , cuya solución expresada con notación indicial es

$$(16) \quad A^i = \frac{\sum_{k=1}^n g^{ik} A_k}{G} = \frac{g^{ik} A_k}{G} = \frac{g^{i1} A_1 + g^{i2} A_2 + g^{i3} A_3}{G}$$

$$A^1 = \frac{g^{11} A_1 + g^{12} A_2 + g^{13} A_3}{G}$$

$$A^2 = \frac{g^{21} A_1 + g^{22} A_2 + g^{23} A_3}{G}$$

$$A^3 = \frac{g^{31} A_1 + g^{32} A_2 + g^{33} A_3}{G}$$

(16) (44)

donde

$$G = \det g_{ik} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$G^{12} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$G^{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

$$G^{21} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$G^{22} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$G^{23} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

$$G^{31} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}$$

$$G^{32} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}$$

$$G^{33} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

es decir G^{ik} es el cofactor del término g_{ik} en el determinante G .

comparando (16) con (11) se obtiene

$$g^{ik} A_k = \frac{G^{ik} A_k}{G} \quad \text{o sea}$$

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} \quad (17) \quad (50)$$

en la misma forma se obtiene

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G} \quad (18) \quad (51)$$

donde

$$G' = \det g^{ik} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix}$$

y G_{ik} es el cofactor del término g^{ik} en el determinante G'

se puede demostrar que

$$G = V^2$$

$$G' = V'^2$$

$$GG' = 1$$

puesto que $VV' = 1$, el volumen del paralelepípedo formado por las magnitudes $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ es igual a \sqrt{G} , mientras que el volumen del paralelepípedo formado por las magnitudes de las bases reciprocas $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ es igual a $\sqrt{G'}$

22 BASES ORTOGONALES

Las bases ortogonales son particularmente muy importantes puesto que los sistemas coordenados más comúnmente usados en Física y Matemáticas Aplicadas son ortogonales. En este caso, las bases originales $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ y sus reciprocas $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ son ambas ortogonales y coinciden, y de la condición $\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$ se concluye

$$g_{ik} = g^{ki} = 0 \text{ si } i \neq k$$

y de (10) y (11)

$$A_1 = g_{11} A^1, \quad A_2 = g_{22} A^2, \quad A_3 = g_{33} A^3$$

$$A^1 = g^{11} A_1, \quad A^2 = g^{22} A_2, \quad A^3 = g^{33} A_3$$

y también

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

más aún $(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i dx^i)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2$

las cantidades $h_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad h_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad h_3 = \sqrt{g_{33}}$

son llamados coeficientes métricos

conclusión 1.- Las componentes físicas

A_i^* y A^{*i} ; las componentes covariantes

A_i y las componentes contra variantes A^i

Todas coinciden en sistemas rectangulares
coordenados con vectores bases ortonormales.

Más aún, las componentes físicas A_i^* y

A^{*i} coinciden en cual quier sistema ortogonal

Regla 1 - La suma puede solamente hacerse

sobre índices "mudos" índices en posiciones
diferentes ($A^i = g^{ik} A_k = g^{il} A_l = g^{im} A_m$)

donde se dice que están en diferentes
posiciones si uno es subscripto y el otro es
superscripto. Por ejemplo, las expresiones

$A_i B^i$, $g^{ik} A_k$ representan sumas, pero no

las expresiones $A^k B^k$, $g^{ik} A_k$. Esta regla

es necesaria al efectuar operaciones

algebraicas con tensores en coordenadas
curvilíneas

23.- VECTORES VARIABLESFunciones vectoriales de un argumento escalar

Un vector, igual que un escalar, puede variar con respecto a la posición escalar \bar{r} y al tiempo t , originando una función $\bar{A} = \bar{A}(\bar{r}, t)$.

Aquí nos confinaremos al caso de una función vectorial de un argumento escalar.

Si \bar{A} es una función de t , lo serán también sus componentes, así como su magnitud y dirección.

Supongase que el vector $\bar{A} = \bar{A}(t)$ es trazado de un punto fijo O . Cuando t varía, el final de \bar{A} traza una curva llamada hodoógrafo de \bar{A} , Γ

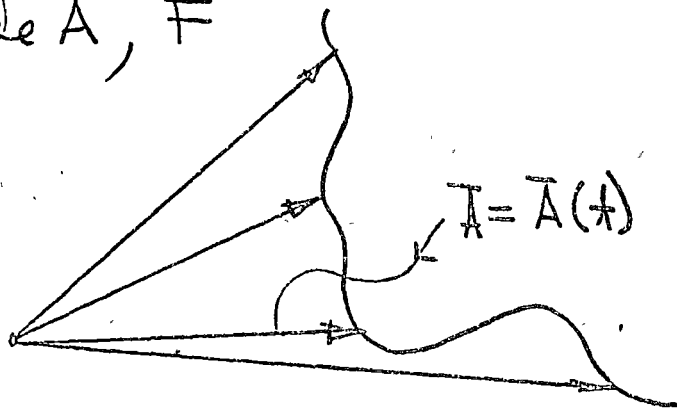


Fig. 23 El hodoógrafo de $\bar{A} = \bar{A}(t)$

Si \bar{A} varía en magnitud el hodógrafo se reduce a una línea recta (Fig. 23a),
 Si \bar{A} varía en dirección el hodógrafo se reduce a una curva contenida en una esfera. (Fig. 23b). Si el hodógrafo es una línea recta en general varía su magnitud y dirección.

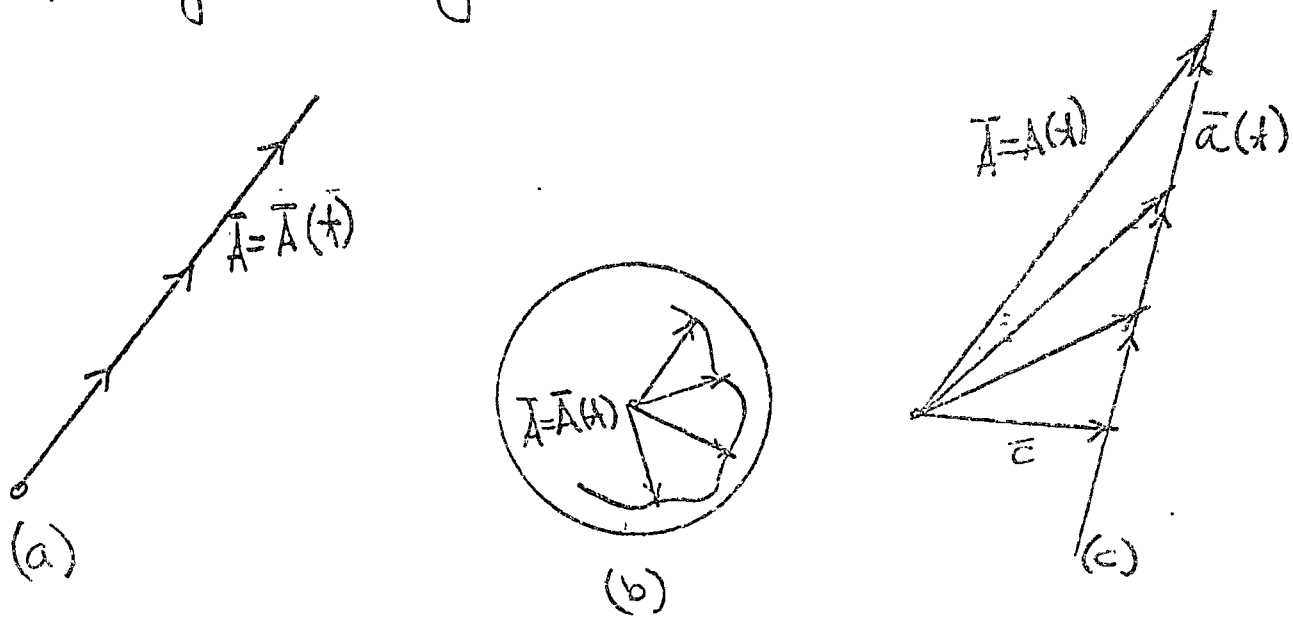


Fig. 23. a) El hodógrafo de \bar{A} variando solo en magnitud.

$$\frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \text{const.}$$

b) El hodógrafo de \bar{A} variando solo en dirección
 $|\bar{A}| = \text{constante}$

c) Representación de un vector cuyo hodógrafo es una línea recta.

○ En Fig. 123 (c) \bar{A} puede siempre ser representada como la suma de un vector constante y un vector variable en magnitud

$$\bar{A} = \bar{A}(t) = \bar{c} + \bar{a}(t)$$

donde $\bar{c} = \overline{\text{CONST}}$, $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \text{constante}$

24. La derivada de una función vectorial

Dada una función vectorial $\bar{A}(t)$, supongase que existe un vector constante \bar{A}_0 , tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{A}(t) - \bar{A}_0| = 0$$

Entonces el vector \bar{A}_0 es llamado el límite de $\bar{A}(t)$ cuando $t \rightarrow t_0$. Por la derivada $\frac{d\bar{A}}{dt}$ de una función vectorial $\bar{A}(t)$ significa el límite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{A}(t + \Delta t) - \bar{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \frac{d\bar{A}}{dt} \quad (5)$$

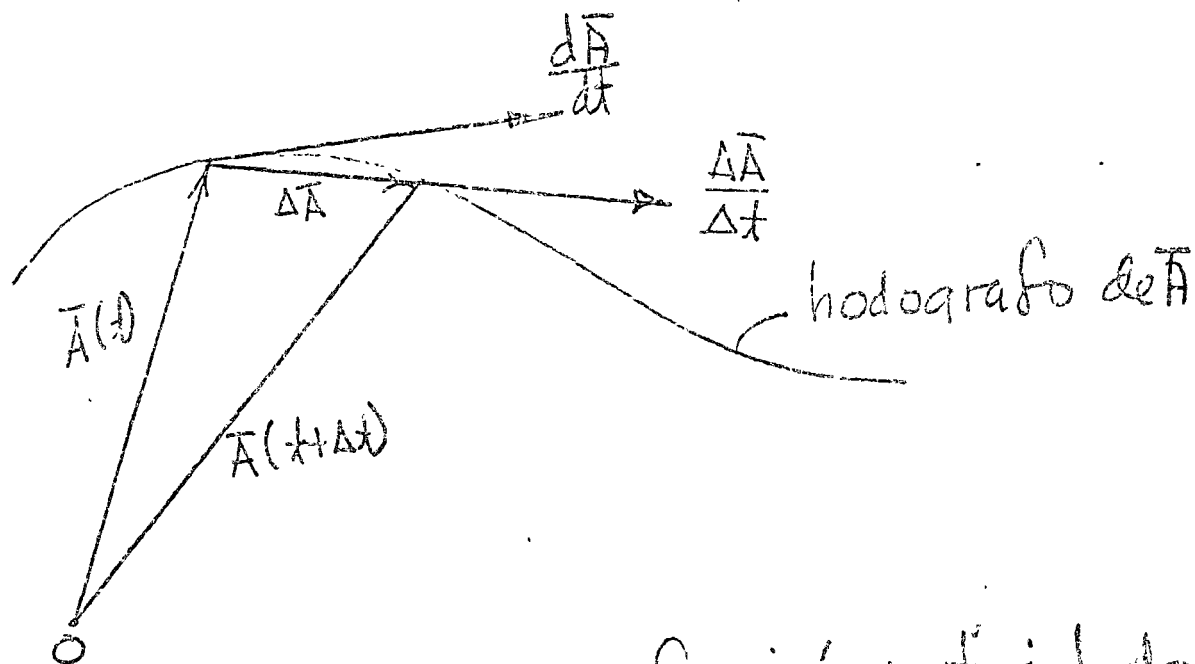


Fig. 24. Si $\bar{A}(t)$ es una función vectorial de un argumento escalar. Entonces $d\bar{A}/dt$ es un vector dirigido a lo largo de la tangente al hodógrafo de $\bar{A}(t)$.

Sean $A_k = A_k(t)$ las componentes de $\bar{A}(t)$ con respecto a un sistema coordenado rectangular el cual es independiente del argumento t y tiene bases ortogonales $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$

entonces
$$\bar{A} = A_k \bar{i}_k$$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{dA_k}{dt} \bar{i}_k$$

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_k = \frac{dA_k}{dt}$$

Las componentes de la derivada $d\bar{A}/dt$ son las componentes de las derivadas de las componentes de la función vectorial $\bar{A}(t)$, siempre y cuando el sistema coordenado sea independiente de t . Más aún la derivada $\frac{d\bar{A}}{dt}$ tiene la magnitud

$$\left|\frac{d\bar{A}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dA_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_3}{dt}\right)^2}$$

Sea \bar{r} el vector vector de una partícula en movimiento, y sea t el tiempo. Entonces el movimiento de la partícula es caracterizada por una función vectorial $\bar{r} = \bar{r}(t)$

La velocidad \vec{v} y la aceleración \vec{a} de la partícula en el tiempo t son dadas por la primera y segunda derivada de $r(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Las siguientes reglas de diferenciación vectorial son consecuencias inmediatas de la definición de $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

$$(1) \frac{d}{dt}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$(2) \frac{d}{dt}(c\vec{A}) = \frac{dc}{dt}\vec{A} + c\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$(3) \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$(4) \frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Por ejemplo, la regla (A) se prueba observando que

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} \times \bar{B}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\bar{A} + \Delta \bar{A}) \times (\bar{B} + \Delta \bar{B}) - \bar{A} \times \bar{B}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \bar{A} \times \bar{B}) + (\bar{A} \times \Delta \bar{B}) + (\Delta \bar{A} \times \Delta \bar{B})}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} \times \bar{B} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{A} \times \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} \times \Delta \bar{B}$$

$$= \frac{d\bar{A}}{dt} \times \bar{B} + \bar{A} \times \frac{d\bar{B}}{dt}$$

usando esta regla se observa que la multiplicación vectorial no es conmutativa.

25.- La Integral de una función vectorial

Por la integral indefinida de una función vectorial $\bar{A}(t)$, significa la función vectorial $\bar{B}(t) \equiv \int \bar{A}(t) dt$ cuya derivada es $\bar{A}(t)$.

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = \bar{A}(t)$$

Entonces

$$\bar{B}(t) = \int \bar{A}(t) dt + \bar{C}$$

donde \bar{C} es una constante vectorial.

En un sistema de coordenadas fijo independiente de t , las componentes de la integral $\bar{B}(t)$ son completamente determinadas por las integrales de las componentes de la función vectorial $\bar{A}(t)$, es decir

$$B_i = \int A_i(t) dt + C_i$$

Similamente se introduce el concepto de integral definida de un vector

PROBLEMA 1. Encontrar las fórmulas que describen la transformación de un sistema rectangular coordenado a otro.

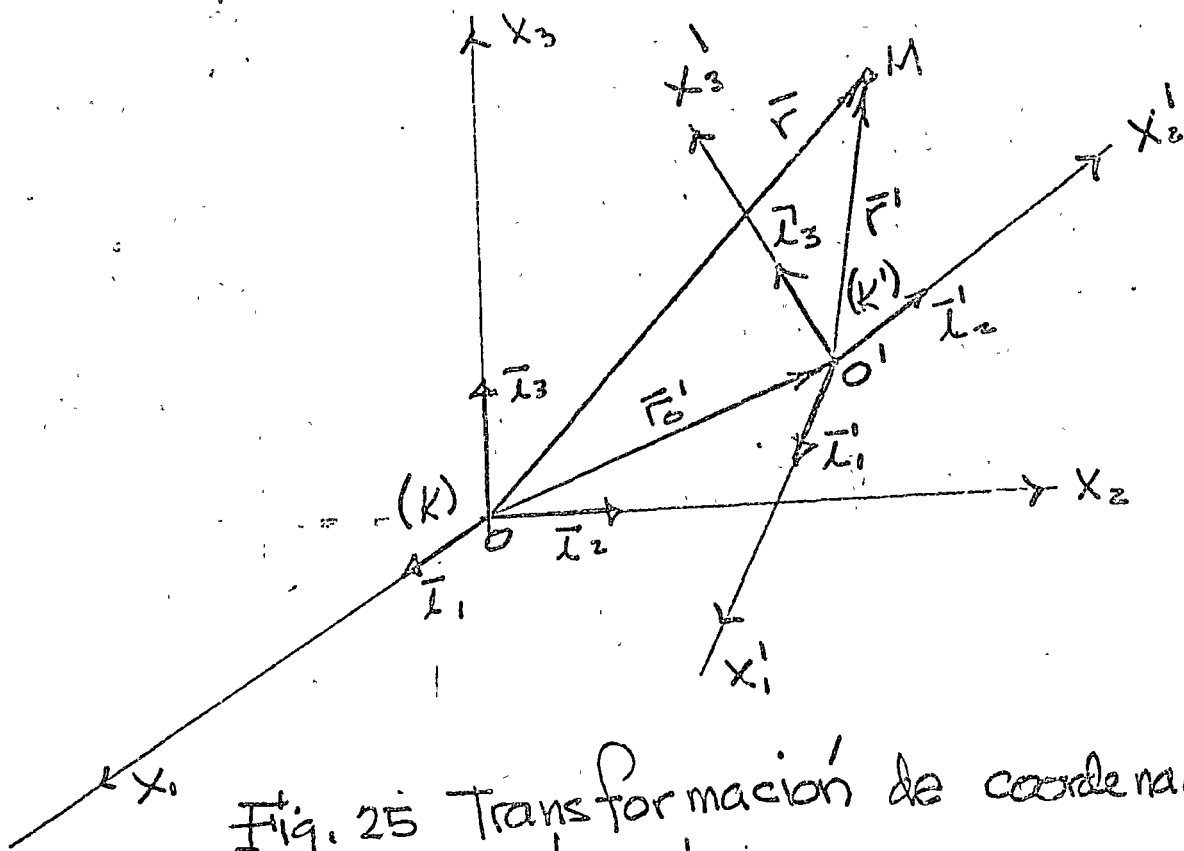


Fig. 25 Transformación de coordenadas rectangulares.

Solución. Supongáanse dos sistemas rectangulares K y K' , con vectores base ortonormales $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ y $\vec{l}'_1, \vec{l}'_2, \vec{l}'_3$ (Fig. 25). Entonces el problema

consiste en expresar las coordenadas x_1, x_2, x_3 de un punto arbitrario M en el sistema K en términos de sus coordenadas x'_1, x'_2, x'_3 en el sistema K' y

Sean \vec{F} y \vec{F}' los radios vectores de el punto M en los sistemas K y K' . Más aún, sea el origen O' , un punto con radio vector: \vec{r}_0' y coordenadas X'_{0k} con respecto al sistema K y viceversa el origen O de el sistema K tiene un radio vector $\vec{r}_0 = -\vec{r}_0'$ con coordenadas X_{0k} en el sistema K' . Finalmente, sea $\alpha_{j'k}$ el coseno del ángulo entre el eje j' del sistema K' y el eje k de el sistema K , así que

$$\alpha_{j'k} = \cos(\chi_{j'}, \chi_k) = \bar{r}_{j'} \cdot \bar{r}_k$$

entonces

$$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{r}_0'$$

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{r}_0$$

o sea $\chi_k \bar{r}_k = \chi'_k \bar{r}'_k + \chi_{k0} \bar{r}_k$ (1)

$\chi'_k \bar{r}'_k = \chi_k \bar{r}_k + \chi_{k0} \bar{r}_k$ (2) (suma sobre k)

Tomando el producto escalar de (1) con \bar{r}_l y (2) con \bar{r}'_l

$$x_l = (\bar{l}'_k \cdot \bar{l}_l) x'_k + x_{l0} = \alpha_{k'l} x'_k + x_{l0}$$

$$x'_l = (\bar{l}'_l \cdot \bar{l}_k) x_k + x_{l0} = \alpha_{l'k} x_k + x_{l0}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (\bar{A} \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + (\bar{A} \cdot \bar{u}_2) \bar{u}_2 + (\bar{A} \cdot \bar{u}_3) \bar{u}_3 \\ &= (\bar{A} \cdot \bar{u}_k) \bar{u}_k \quad \Delta_k = (\bar{A} \cdot \bar{u}_k) \end{aligned}$$

$$\bar{u}'_k = (\bar{u}'_k \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + (\bar{u}'_k \cdot \bar{u}_2) \bar{u}_2 + (\bar{u}'_k \cdot \bar{u}_3) \bar{u}_3$$

$$\bar{u}'_k = \alpha_{k'l} \bar{u}_l \quad (3)$$

$$\bar{u}_k = \alpha_{l'k} \bar{u}_{l'} \quad (4)$$

Tomando el producto escalar de (3) con \bar{u}_m
y el de (4) con \bar{u}'_m

$$\bar{u}_k \cdot \bar{u}_m = \alpha_{l'k} \alpha_{l'm} \quad (5)$$

$$\bar{u}'_k \cdot \bar{u}'_m = \alpha_{k'l} \alpha_{m'l}$$

$$\delta_{km} = \bar{u}_k \cdot \bar{u}_m = \begin{cases} = 0 & \text{si } k \neq m \\ = 1 & \text{si } k = m \end{cases}$$

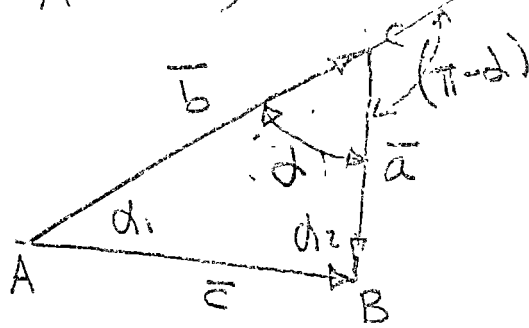
$$\delta'_{km} = \bar{u}'_k \cdot \bar{u}'_m = \begin{cases} = 0 & \text{si } k \neq m \\ = 1 & \text{si } k = m \end{cases}$$

δ_{km} (delta de Kronecker)

Problema 2 Use vectores para derivar la ley de los cosenos.

Solución: Si ABC es un triángulo con lados

$\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{CB} = \vec{a}$ entonces



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = d$$

$$(d_1 + d_2) + (\vec{a}, \vec{b}) = \pi$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - (d_1 + d_2)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c}$$

$$a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = c^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos(\pi - d)$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos d}$$

Problema 4 Expresar el producto escalar de dos vectores en términos de sus componentes covariantes y contravariantes

Solución. Por definición

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i \vec{e}_i \cdot B^k \vec{e}_k = A_i \vec{e}^i \cdot B_k \vec{e}^k$$

$$= A_i \vec{e}^i \cdot B^k \vec{e}_k = A^i \vec{e}_i \cdot B_k \vec{e}^k$$

y por lo tanto

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k = A_i B^i = A^i B_i$$

$$|\bar{A}| = A = \sqrt{\bar{A} \cdot \bar{A}} = \sqrt{g_{ik} A^i A^k} = \sqrt{g^{ik} A_i A_k} = \sqrt{A_i A^i}$$

$$e^i \cdot e_k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad \text{bases reciprocas}$$

si $\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos(\bar{A}, \bar{B})$

$$\cos(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{AB} = \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}}$$

$$= \frac{g^{ik} A_i B_k}{\sqrt{g^{ik} A_i A_k} \sqrt{g^{ik} B_i B_k}} = \frac{A_i B^i}{\sqrt{A^i B_i} \sqrt{B^i A_i}}$$

Problema 5. Encontrar el producto vectorial de dos vectores en un sistema coordenado oblicuo

Solución por definición

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A^i \vec{e}_i \times B^k \vec{e}_k =$$

$$= (A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3) \times (B^1 \vec{e}_1 + B^2 \vec{e}_2 + B^3 \vec{e}_3)$$

$$= \cancel{A^1 B^1 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)} + A^1 B^2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + A^1 B^3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)$$

$$+ \cancel{A^2 B^1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)} + \cancel{A^2 B^2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)} + A^2 B^3 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$$

$$+ \cancel{A^3 B^1 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)} + A^3 B^2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + \cancel{A^3 B^3 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}$$

(1)

$$\text{pero } \vec{e}_i = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{e_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)} = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{V} \quad (2)$$

$$G = V^2$$

$$V = \sqrt{G}$$

(3)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A^j B^k - A^k B^j) \underbrace{(\vec{e}_j \times \vec{e}_k)}_{e^i}$$

$$\text{de (2)} \quad \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \vec{e}^i V$$

$$\text{por lo tanto } \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C_i \vec{e}^i$$

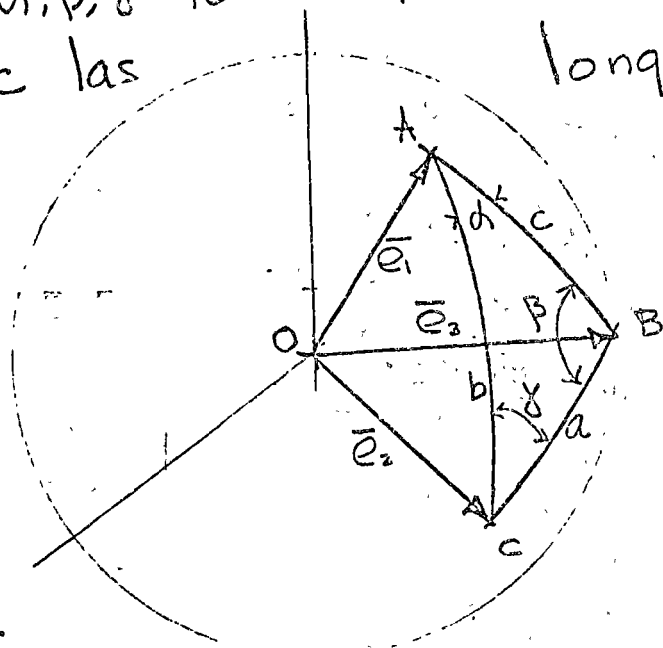
$$C_i = V (A^j B^k - A^k B^j) = \sqrt{G} (A^j B^k - A^k B^j)$$

en la misma forma se demuestra que

$$C^i = \frac{1}{\sqrt{G}} (A_j B_k - A_k B_j)$$

Problema 6. Use vectores para derivar las fórmulas básicas de Trigonometría esférica.

Solución. Sea ABC un triángulo en una esfera de radio unitario, y sea $OABC$ el ángulo tetraédrico sustentado por ABC . Sean α, β, γ los ángulos del triángulo esférico y a, b, c las longitudes de sus lados.



Puesto que la esfera tiene un radio unitario a, b y c son iguales a los ángulos planos $\angle BOC, \angle AOC$ y $\angle AOB$.

Para encontrar las relaciones entre los ángulos α, β, γ del triángulo esférico y sus lados a, b y c , introducimos los vectores unitarios trazados del centro O a A, B y C .

a los vertices del Triángulo esférico.

El ángulo α entre los planos OAC y OAB es igual al ángulo entre las normales a los planos

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| |\vec{e}_1 \times \vec{e}_3|} \quad (1)$$

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \sin b, \quad |\vec{e}_1 \times \vec{e}_3| = \sin c \quad (2)$$

$$\text{pero } (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (3)$$

$$\text{y } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (4)$$

$$\text{de (1) } \cos \alpha = \frac{\vec{e}_1 \cdot [\vec{e}_2 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)]}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\vec{e}_1 \cdot [\vec{e}_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) - \vec{e}_3 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1)]}{\sin b \sin c} \quad \text{de (4)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b \sin c}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \delta$$

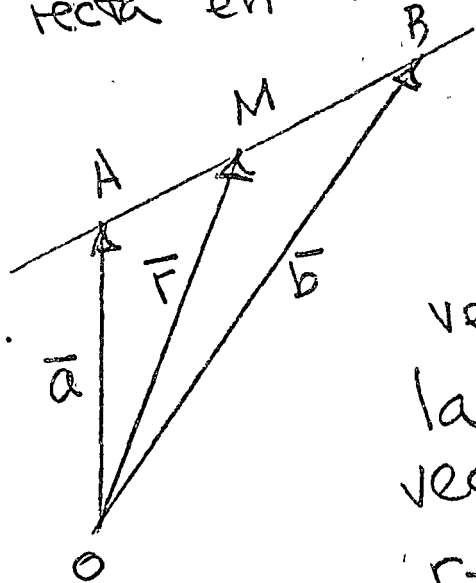
Otro grupo de fórmulas se obtiene calculando los senos de los ángulos α, β, γ por ejemplo

$$\text{sen } \alpha = \frac{|(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) \times (\bar{e}_1 \times \bar{e}_3)|}{|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2| |\bar{e}_1 \times \bar{e}_3|}$$

Tarea: pruebe que

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \beta} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \gamma}$$

Problema 7 Encontrar la ecuación de la línea recta en 3 dimensiones.



Ecuación de la línea recta a través de los puntos A y B

Solución: Sean \bar{a} y \bar{b} los radios vectores de A y B respecto a O. La condición de que M con radio vector \bar{r} este en AB es que $\bar{r}-\bar{a}$ y $\bar{b}-\bar{a}$ sean paralelos

de (1) con $(\bar{b}-\bar{a})$ se elimina λ

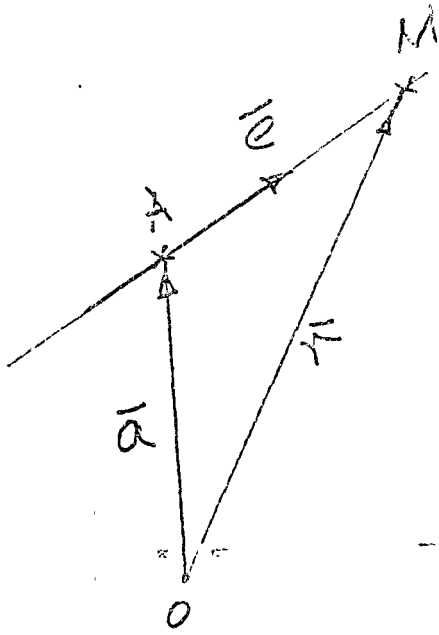
$$\bar{r}-\bar{a} = \lambda(\bar{b}-\bar{a})$$

$$\bar{r} = \bar{a} + \lambda(\bar{b}-\bar{a}) \quad (1)$$

$$(\bar{r}-\bar{a}) \times (\bar{b}-\bar{a}) = 0$$

+... el producto vectorial

Problema 8. Encontrar la ecuación de la línea recta a través de un punto dado A y paralela a un vector dado \vec{e} .



Solución. Sea \vec{a} el vector de posición de A :

Puesto que $\vec{r} - \vec{a}$ y \vec{e} deben ser paralelos, se tiene

$$\vec{r} - \vec{a} = \vec{AM} = \lambda \vec{e} \quad (1)$$

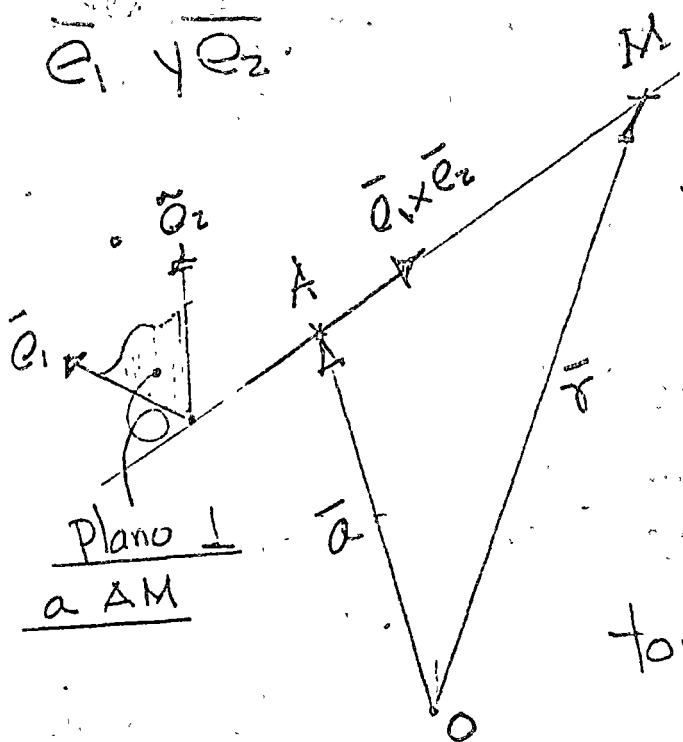
donde λ es un parámetro

para eliminar λ , se toma el producto vectorial de (1) con \vec{e} , obteniendo

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{e} = \lambda \vec{e} \times \vec{e} = 0$$

$$\vec{r} \times \vec{e}, -\vec{a} \times \vec{e} = 0$$

Problema 9. Encontrar la ecuación de una línea recta a través de un punto dado y perpendicular a dos vectores dados \vec{e}_1 y \vec{e}_2 .



Solución si \vec{a} es el vector de posición de A, Entonces

$$(\vec{r} - \vec{a}) = \lambda \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \quad (1)$$

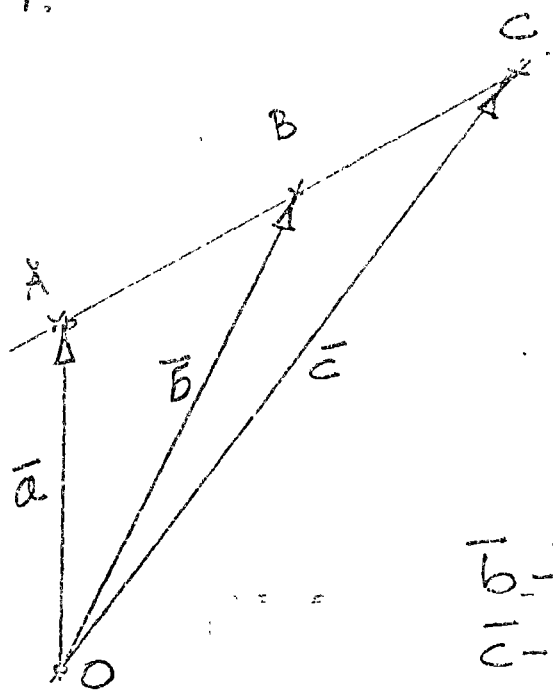
para eliminar λ en (1) tomando el producto vectorial

de (1) con $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ se obtiene.

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \lambda (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = 0$$

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = 0$$

Problema 10. Escribir la condición para que los puntos A, B y C sean colineales.



Solución: Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} los vectores de posición de posición con respecto a cierto origen O:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{AB} \quad (1)$$

$$\vec{c} - \vec{b} = \vec{BC} \quad (2)$$

$$\vec{c} - \vec{a} = \vec{AC} \quad (3)$$

(Sean a_i , b_i , c_i las coordenadas de A, B y C con respecto a un sistema coordenado rectangular de origen O.)

$$(\vec{c} - \vec{a}) = \lambda (\vec{b} - \vec{a})$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{c} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

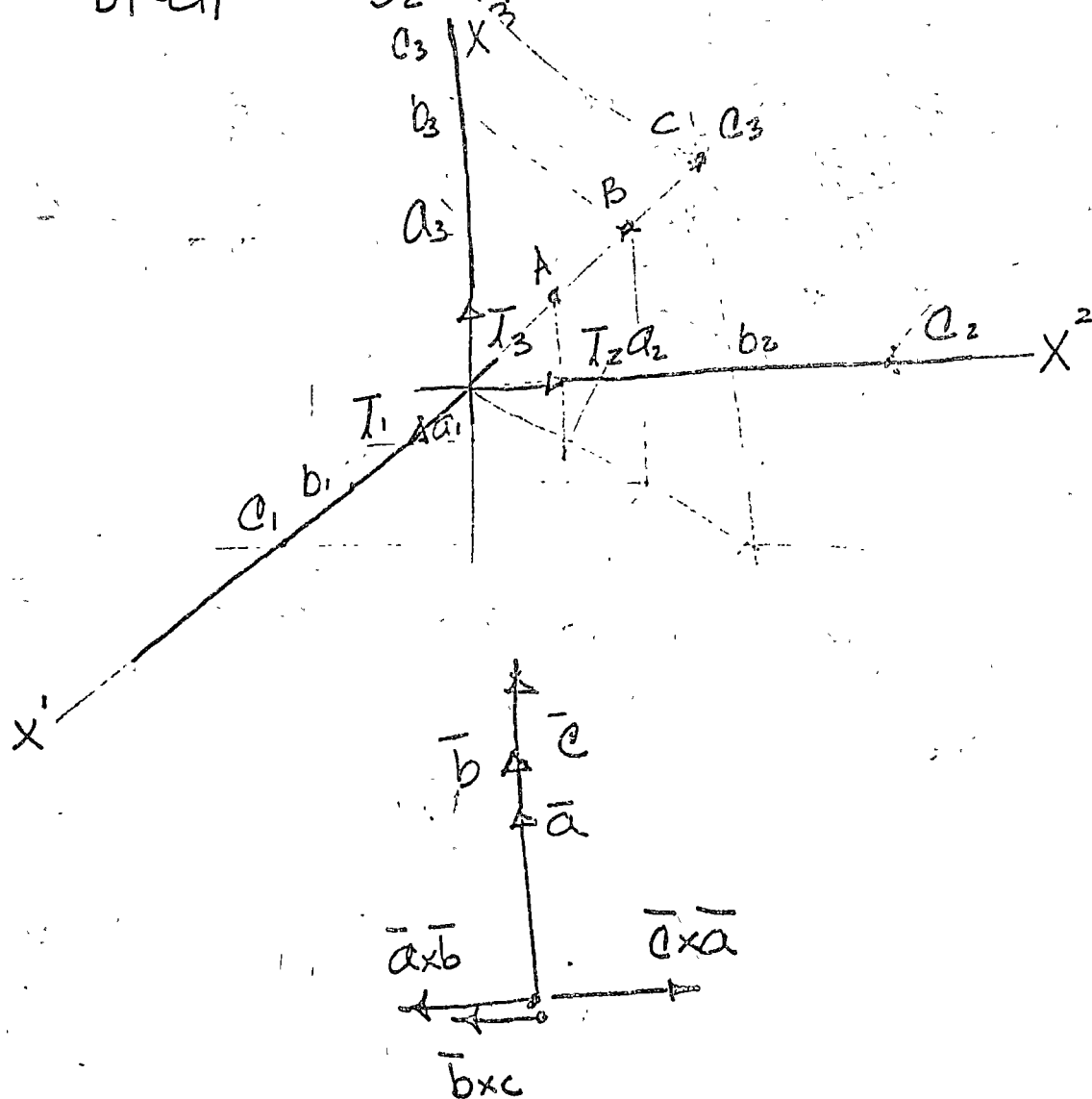
$$-\vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\dots \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b} \quad (\text{intercambio de términos})$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + a_3 \bar{x}_3 \\ \bar{b} &= b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 \\ \bar{c} &= c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + c_3 \bar{x}_3 \end{aligned} \right\} (5)$$

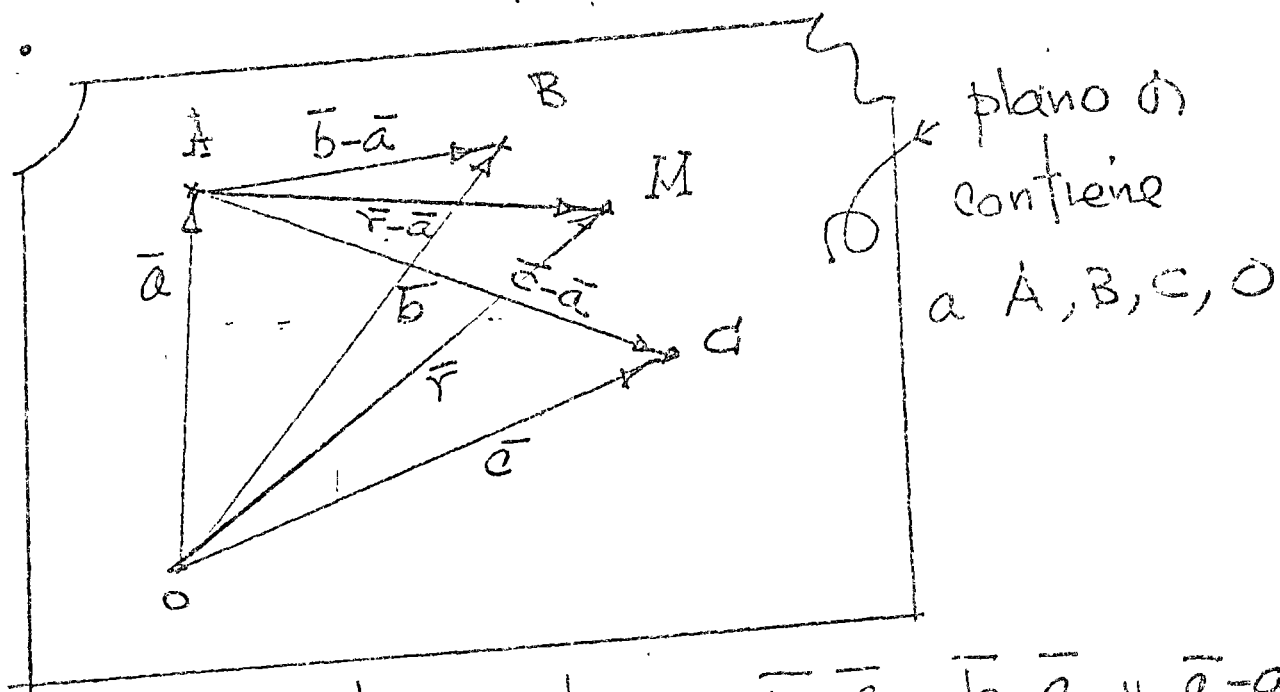
subsistiendo (5) en (4) se obtiene

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{c_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$



Problema II. Escribir la ecuación de un plano en forma vectorial

(caso a). Encontrar la ecuación del plano a través de tres puntos dados A, B y C con vectores de posición \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} .



Puesto que los vectores $\vec{r}-\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{a}$ y $\vec{c}-\vec{a}$ son coplanares, se tiene

$$\vec{r}-\vec{a} = \lambda(\vec{b}-\vec{a}) + \mu(\vec{c}-\vec{a}) \quad (1)$$

donde λ y μ son parámetros. Para eliminar λ y μ , Tomamos primero el producto vectorial de (1) con $\vec{c}-\vec{a}$ y después el producto escalar con $\vec{b}-\vec{a}$

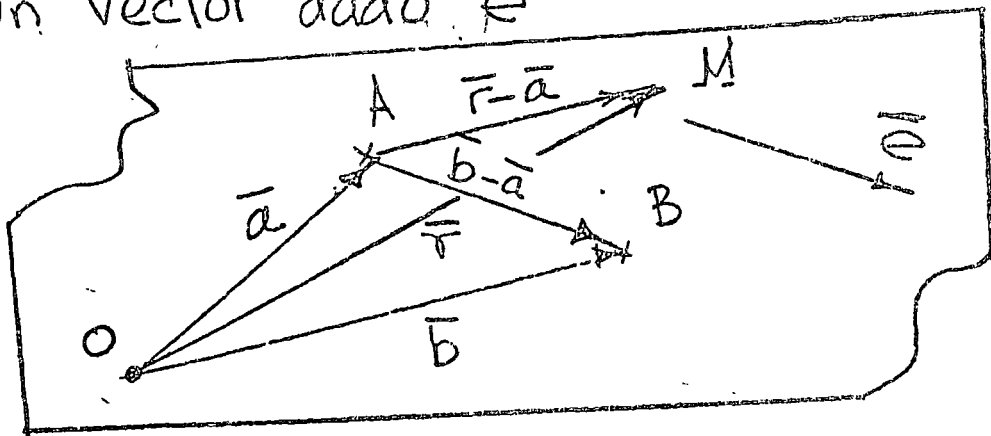
obteniendo:

$$\begin{aligned} (\bar{r}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a}) &= \lambda (\bar{b}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a}) + \mu (\bar{c}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a}) \\ &= \lambda (\bar{b}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a}) \end{aligned}$$

$$[(\bar{r}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a})] \cdot (\bar{b}-\bar{a}) = 0 \quad (2)$$

(2) se podía haber escrito directamente de la condición de coplanaridad, o sea "conceptos de Dependencia e independencia lineal".

Caso b. Encontrar la ecuación del plano que contiene a dos puntos A y B, con vectores de posición \bar{a} y \bar{b} , paralelos a un vector dado \bar{e}

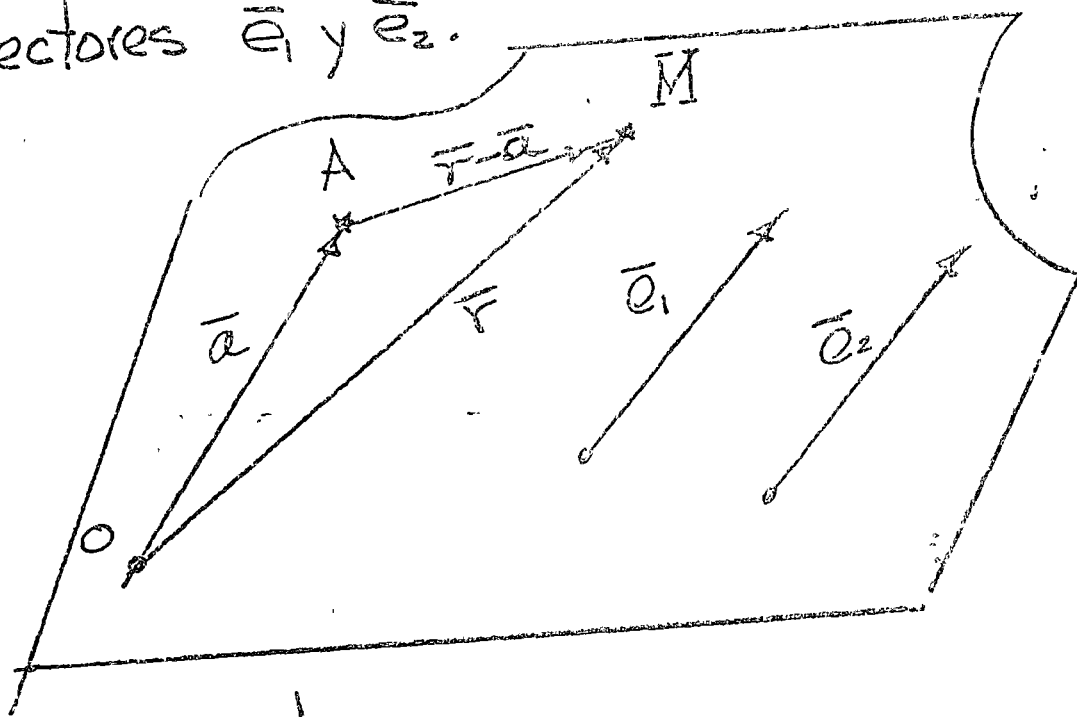


Respuesta

177

$$[(\vec{r}-\vec{a}) \times (\vec{b}-\vec{a})] \cdot \vec{e} = 0$$

Caso e. Encontrar la ecuación de el plano que contiene a un punto A, con un vector de posición \vec{a} , paralelo a dos vectores \vec{e}_1 y \vec{e}_2 .



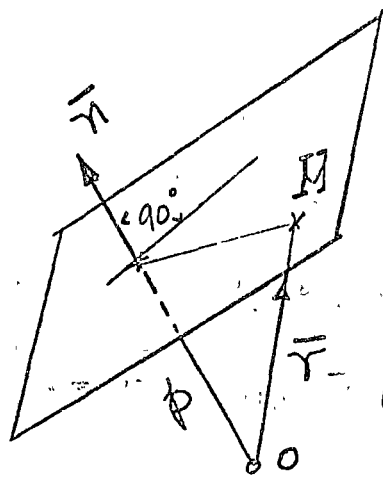
Respuesta:

$$[(\vec{r}-\vec{a}) \times \vec{e}_1] \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Caso d. Encontrar la ecuación de el plano con vector unitario normal \bar{n} cuya distancia de el origen O es igual a p

Solución. Si \bar{n} apunta en la dirección opuesta de O , entonces

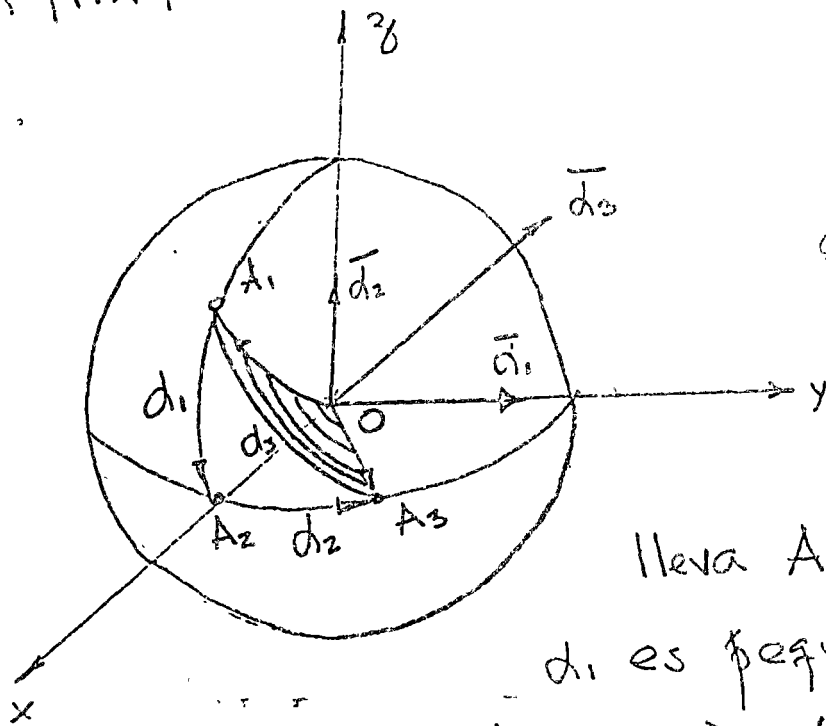
$$\begin{aligned}\bar{r} \cdot \bar{n} &= |\bar{r}| |\bar{n}| \cos(\bar{r}, \bar{n}) \\ &= r \cos(\bar{r}, \bar{n}) = p\end{aligned}$$



$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{n} = p} \quad (1)$$

(1) es llamada la forma normal de la ecuación de un plano

Problema 12. Probar que rotaciones infinitesimales son vectores



Solución. Supongase que la primera rotación \vec{d}_1 lleva A_1 a A_2 , y la segunda rotación \vec{d}_2

lleva A_2 a A_3 . Si el ángulo d_1 es pequeño, se puede escribir

$$\vec{OA}_2 = \vec{OA}_1 + \vec{A}_1 A_2 = \vec{OA}_1 + (\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1) \quad (1)$$

puesto que

$$|\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1| = d_1 |\vec{OA}_1| = \widehat{A_1 A_2} = |\vec{A}_1 A_2|$$

y más aún $\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{A}_1 A_2$.

Similarmente

$$\vec{OA}_3 = \vec{OA}_2 + \vec{A}_2 A_3 = \vec{OA}_2 + (\vec{d}_2 \times \vec{OA}_2) \quad (2)$$

Substituyendo (2) en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{OA}_3 &= \vec{OA}_1 + (\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1) + \vec{d}_2 \times [\vec{OA}_1 + (\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1)] \\ &= \vec{OA}_1 + (\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \times \vec{OA}_1 + \vec{d}_2 \times (\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1) \quad (3) \\ &= \vec{OA}_1 + (\vec{d}_2 + \vec{d}_1) \times \vec{OA}_1 + \vec{d}_2 \times (\vec{d}_1 \times \vec{OA}_1) \end{aligned}$$

Si (y solamente si) d_1 y d_2 son infinitesimales, podemos despreciar los términos de segundo orden en (3), obteniendo

$$\overline{OA}_3 = \overline{OA}_1 + (\overline{d}_1 + \overline{d}_2) \times \overline{OA}_1 = \overline{OA}_1 + (\overline{d}_2 + \overline{d}_1) \times \overline{OA}_1 \quad (4)$$

Por otra parte, si \overline{d}_3 es la rotación infinitesimal llevando a A_1 hacia A_3 directamente, entonces

$$\overline{OA}_3 = \overline{OA}_1 + \overline{d}_3 \times \overline{OA}_1 \quad (5)$$

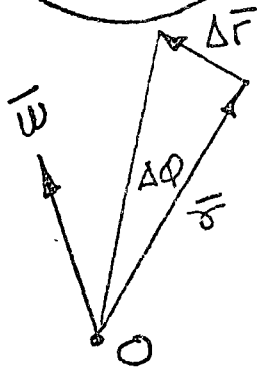
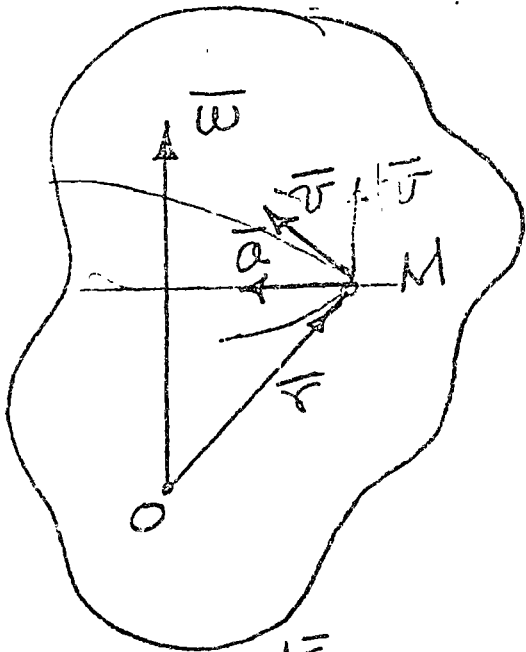
comparando (4) con (5), se obtiene

$$\overline{d}_3 = \overline{d}_1 + \overline{d}_2 = \overline{d}_2 + \overline{d}_1$$

Entonces, rotaciones infinitesimales son vectores, puesto que obedecen las leyes del álgebra vectorial (la resultante de dos rotaciones es la suma geométrica de las rotaciones separadas, y la suma es independiente del orden de los términos)

Problema 13. Determinar la velocidad 81
de un punto arbitrario de un cuerpo rígido
girando respecto a un punto fijo o

Solución. Supongase que durante un
intervalo de tiempo Δt , el cuerpo gira
una rotación infinitesimal $\Delta \phi$ originándose
a un punto arbitrario M de el cuerpo
un desplazamiento $\Delta \vec{r}$ (Entonces de
acuerdo con el problema 12).



$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{\phi} \times \vec{r} \quad (1)$$

donde \vec{r} es el radio vector
de M, dividiendo (1) por Δt

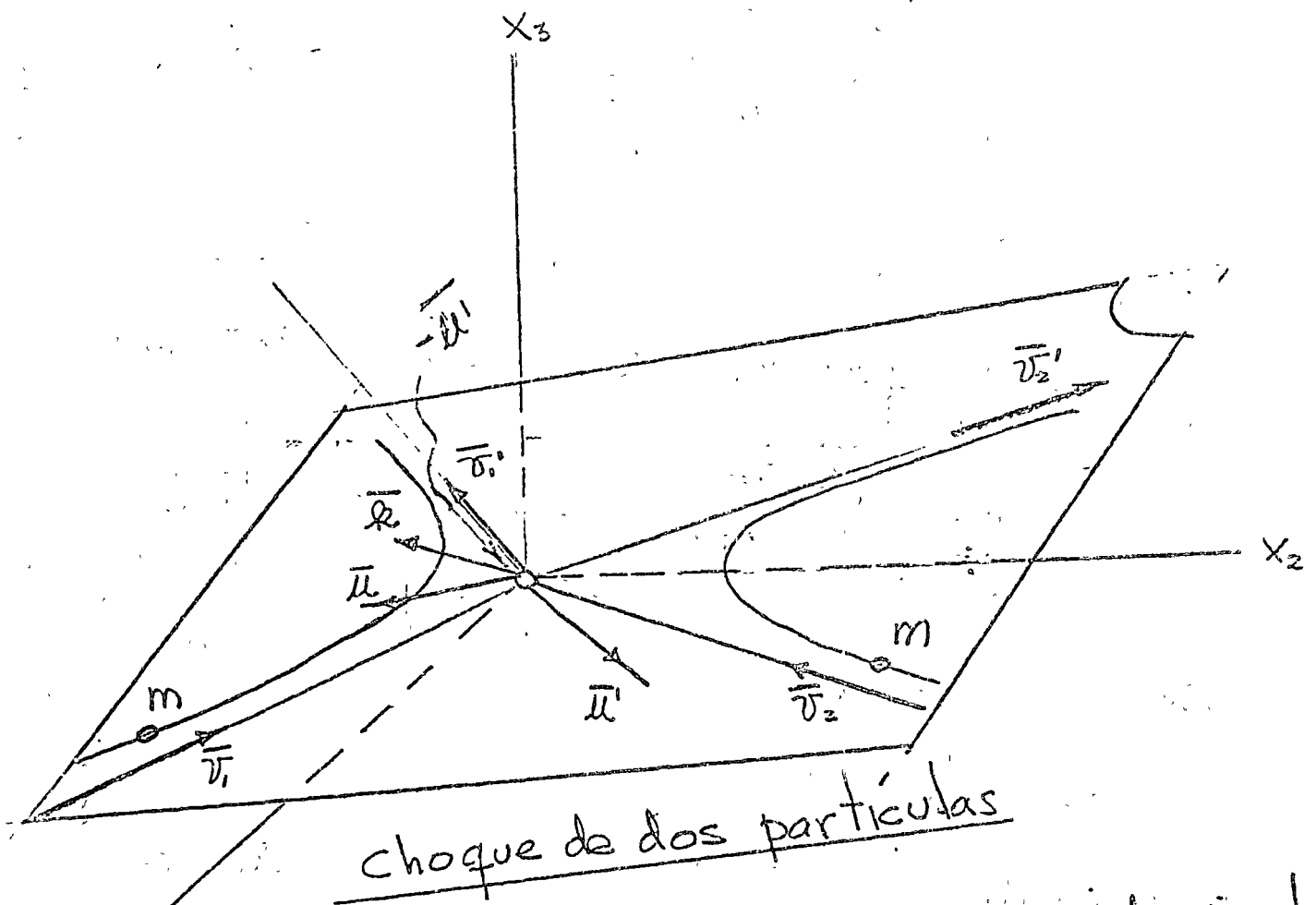
$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{\phi}}{\Delta t} \times \vec{r}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

ω es la velocidad angular instantánea
de el cuerpo respecto a o

Problema 14. Supongáse que dos partículas de masas iguales tienen velocidades \vec{v}_1, \vec{v}_2 antes de chocar y velocidades \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 después del choque.



Supóngase que el choque es gobernado por la acción de fuerzas centrales. Entonces la trayectoria de las dos partículas es coplanar con el centro de masas en reposo relativamente al movimiento de las partículas. Más aún

el choque conserva el momento y la energía cinética (la energía potencial antes y después del choque es cero). Por lo tanto si las masas son iguales.

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \quad \text{--- (1)}$$

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad \text{--- (2)}$$

Expresando \vec{v}_1' , \vec{v}_2' en términos de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y observando que las velocidades relativas

$$\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad \text{--- (3)}$$

$$\vec{u}' = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' \quad \text{--- (4)}$$

antes y después del choque tienen la misma velocidad

Solución. El sistema (1) consiste de cuatro ecuaciones escalares en las seis componentes de las velocidades \vec{v}_1' y \vec{v}_2' . Por lo tanto podemos expresar \vec{v}_1' y \vec{v}_2' explícitamente en términos de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , si introducimos dos parámetros adicionales

84

○ Caracterizando la geometría del choque, es decir, la posición de el plano de las trayectorias referido a un sistema rectangular x_1, x_2, x_3 . En otras palabras el choque de las dos partículas se caracteriza completamente especificando dos parámetros geométricos. Se introducen esos parámetros con el vector unitario \bar{k} ($|\bar{k}|=1$) apuntando en la dirección del cambio de velocidad de la primer partícula, es decir

$$\bar{v}_1' - \bar{v}_1 = A \bar{k} \quad \text{--- (5)}$$

Dos ángulos cualquiera independientes entre \bar{k} y los ejes x_1, x_2, x_3 pueden ser considerados como los parámetros geométricos del choque, de (1) se obtiene

$$\bar{v}_2' - \bar{v}_2 = -A \bar{k} \quad (6)$$

85

para obtener una expresión para A , substituímos \bar{v}_1' y \bar{v}_2' de (5) y (6) en (2)

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_2^2 &= (\bar{v}_1 + A\bar{k})^2 + (\bar{v}_2 - A\bar{k})^2 \\ &= (\bar{v}_1 + A\bar{k}) \cdot (\bar{v}_1 + A\bar{k}) + (\bar{v}_2 - A\bar{k}) \cdot (\bar{v}_2 - A\bar{k}) \\ &= v_1^2 + 2A(\bar{v}_1 \cdot \bar{k}) + A^2 + v_2^2 - 2A(\bar{v}_2 \cdot \bar{k}) + A^2 \\ 0 &= (\bar{v}_1 \cdot \bar{k}) - (\bar{v}_2 \cdot \bar{k}) + A \end{aligned}$$

$$A = \bar{k} \cdot (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = \bar{k} \cdot \bar{u} \quad \text{--- (7)}$$

Substituyendo (7) en (5) y (6) se obtiene

$$\bar{v}_1' = \bar{v}_1 + \bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u}) \quad \text{--- (8)}$$

$$\bar{v}_2' = \bar{v}_2 - \bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u}) \quad \text{--- (9)}$$

(8) y (9) expresan las velocidades \bar{v}_1' , \bar{v}_2' después del choque en términos de las velocidades antes del choque \bar{v}_1 , \bar{v}_2 y el vector \bar{k} .

Restando (4) de (3) y usando (8) y (9) se obtiene

$$\bar{u}' - \bar{u} = \bar{v}_2' - \bar{v}_1' - (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = -2\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u})$$

o sea

36

$$\bar{u}' = \bar{u} - 2\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u}) \quad (10)$$

elevando al cuadrado ambos miembros de (10)

$$\bar{u}' \cdot \bar{u}' = [\bar{u} - 2\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u})] \cdot [\bar{u} - 2\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u})]$$

$$u'^2 = u^2 - 4(\bar{k} \cdot \bar{u})^2 + 4k^2(\bar{k} \cdot \bar{u})^2$$

o sea $u'^2 = u^2$ (11)

Las velocidades relativas de las partículas

tienen la misma magnitud antes y después del choque. Tomando el producto escalar de (10) con \bar{k} , se obtiene

$$\bar{u}' \cdot \bar{k} = \bar{u} \cdot \bar{k} - 2\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{u}) \cdot \bar{k}$$

$$\bar{u}' \cdot \bar{k} = -\bar{u} \cdot \bar{k} \quad (12)$$

de (12) se concluye que el vector \bar{k}

bisecta el ángulo entre \bar{u} y \bar{u}' , como se indica en la figura.

Problema 15 En el problema anterior suponemos que las partículas tienen diferentes masas m_1 y m_2 . Demostrar que la velocidad relativa $\bar{u} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ se conserva después del choque

Solución los momentos de las partículas antes y después del choque vienen dados por

$$\bar{p}_1 = m_1 \bar{v}_1, \quad \bar{p}_2 = m_2 \bar{v}_2, \quad \bar{p}_1' = m_1 \bar{v}_1', \quad \bar{p}_2' = m_2 \bar{v}_2'$$

en términos de sus masas y velocidades antes y después del choque. La ley de conservación de momento es ahora

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2' \quad \text{--- (1)}$$

mientras que la ley de conservación de energía cinética es

$$\phi_1^2 + m \phi_2^2 = \phi_1'^2 + m \phi_2'^2 \quad \left(m = \frac{m_1}{m_2} \right) / (2)$$

$$(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = (m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2)$$

○ introduciendo el vector unitario \bar{k} definido por

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_1' = A \bar{k}, \quad \bar{p}_2' - \bar{p}_2 = -A \bar{k} \quad (3)$$

$$[(m_1 \bar{v}_1' - m_1 \bar{v}_1) = A \bar{k}, (m_2 \bar{v}_2' - m_2 \bar{v}_2) = -A \bar{k}]$$

De (1) (3) y (2) se obtiene

$$A = \frac{2}{1+m} \bar{k} \cdot (m \bar{p}_2 - \bar{p}_1) = \frac{2m_1}{1+m} (\bar{k} \cdot \bar{u}) \quad (4)$$

De (4) y (3) se obtiene

$$\bar{p}_1' = \bar{p}_1 + \frac{2}{1+m} \bar{k} [\bar{k} \cdot (m \bar{p}_2 - \bar{p}_1)] \quad (5)$$

$$= \bar{p}_1 + \frac{2m_1}{1+m} \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{u})$$

$$\bar{p}_2' = \bar{p}_2 - \frac{2}{1+m} \bar{k} [\bar{k} \cdot (m \bar{p}_2 - \bar{p}_1)] = \bar{p}_2 - \frac{2m_1}{1+m} \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{u}) \quad (6)$$

De (5) y (6)

$$m \bar{p}_2' - \bar{p}_1' = m \bar{p}_2 - \bar{p}_1 - 2 \bar{k} [\bar{k} \cdot (m \bar{p}_2 - \bar{p}_1)] \quad (7)$$

o sea $\bar{u}' = \bar{u} - 2 \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{u})$

donde $\bar{u}' = \bar{v}_2' - \bar{v}_1'$, elevando al cuadrado (7)

1.- Pruebe que la proyección de una suma de vectores sobre cualquier eje es igual a la suma de las proyecciones de los vectores sobre el mismo eje

2.- Dados los vectores

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{x}_1 + 2\underline{x}_2 + 3\underline{x}_3 \\ \underline{B} &= 4\underline{x}_1 + 5\underline{x}_2 + 6\underline{x}_3 \\ \underline{C} &= 3\underline{x}_1 + 2\underline{x}_2 + \underline{x}_3 \\ \underline{D} &= 6\underline{x}_1 + 5\underline{x}_2 + 4\underline{x}_3 \end{aligned}$$

donde $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ es una base orto normal,

determine a) las sumas y diferencias

$$\underline{A+B+C+D}, \underline{A+B-C-D}, \underline{A-B+C-D}, \underline{A+B-C+D}$$

b) los ángulos entre $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ y los

vectores base.

c) las magnitudes de los vectores $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$



Sep/20/1972

2

3. Encontrar la suma de 3 vectores de longitud a trazados
- Del vertice comun de un cubo a lo largo de tres de sus lados
 - Del vertice común de un tetraedro regular a lo largo de 3 de sus lados
4. Un paralelogramo tiene un ángulo agudo $\frac{\pi}{3}$ y lados de longitud $a=3$, $b=5$. Pensando de los lados correspondientes como vectores \vec{a} y \vec{b} , encontrar
- Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ (De su interpretación geométrica).
 - El area del paralelogramo
 - La proyección de cada lado en la dirección del otro.

5. Sean $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ y \vec{D} los mismos vectores del problema 2. Encontrar

a) $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{C} + \vec{D})$

b) Los ángulos entre \vec{A} y \vec{B} , \vec{C} y \vec{D} ;

c) La proyección de \vec{A} sobre las direcciones de \vec{B}, \vec{C} y \vec{D} ;

d) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{B} \times \vec{C}$, $\vec{C} \times \vec{D}$

y los ángulos entre ellos y \vec{D} ;

e) Las áreas de los paralelogramos

formados por los vectores \vec{A}, \vec{B} y por los vectores \vec{C}, \vec{D} , y también las

longitudes de las diagonales de esos paralelogramos

f) ¿Son los vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ y \vec{D} coplanarios o no?

Sean $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3$ una base ortonormal derecha. Verifique que los vectores

$$\bar{A} = \bar{t}_1 + 2\bar{t}_2 + 3\bar{t}_3, \quad \bar{B} = 4\bar{t}_1 + 5\bar{t}_2, \quad \bar{C} = 3\bar{t}_1 + 2\bar{t}_2 + \bar{t}_3$$

forman una base. Es, esta base derecha

o izquierda? Determine

a) El volumen del paralelepípedo formado

por \bar{A}, \bar{B} y \bar{C} ;

b) Los vectores formando dos

diagonales del paralelepípedo (trazado

del punto final de \bar{A}) y la longitud

de esos vectores

c) El área de la sección transversal

diagonal del paralelepípedo a través

de \bar{A}

17 - Pruebe que

5

$$a) \frac{d}{dt} \left[\bar{A} \cdot \left(\frac{d\bar{A}}{dt} \times \frac{d^2\bar{A}}{dt^2} \right) \right] = \bar{A} \cdot \left(\frac{d^2\bar{A}}{dt^2} \times \frac{d^3\bar{A}}{dt^3} \right)$$

$$b) \int \bar{A} \times \frac{d^2\bar{A}}{dt^2} dt = \bar{A} \times \frac{d\bar{A}}{dt} + \bar{C} \quad (\bar{C} = \text{const})$$

$$c) \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{C} \quad \text{si} \quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{r} f(r)$$

8.- El momento \bar{M}_0 de una fuerza \bar{F} con respecto a un punto O es dado por la expresión

$$\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F}$$

donde \bar{r} es el radio vector del punto inicial de \bar{F} con respecto a O . La proyección de \bar{M}_0 sobre un eje u a través de O , es la cantidad

$$M_u = \bar{M}_0 \cdot \bar{u}_0 = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}_0$$

donde \bar{u}_0 es un vector unitario dirigido a lo largo de u , y es llamado el momento de \bar{F} con respecto al eje u . Pruebe que M_u es independiente de la posición de O en

EL CONCEPTO DE TENSOR

2.1 Introducción

Se mencionó que un escalar es una cantidad cuya especificación en cualquier sistema coordenado requiere solo un número. Por otra parte, un vector (originalmente definido como segmento de línea dirigido) es una cantidad cuya especificación requiere tres números, sus componentes con respecto a cierta base. Ambos escalares y vectores son casos especiales de un objeto más general llamado Tensor de orden n , cuya especificación en cualquier sistema coordenado (Euclidiiano tridimensional) requiere 3^n números, de nuevo llamados las

componentes del tensor. En realidad, escalares son tensores de cero orden, con $3^0 = 1$ componentes, y vectores son tensores de orden 1, con $3^1 = 3$ componentes.

Por supuesto, un tensor de orden n es mucho más que solo un conjunto de 3^n números, es decir, es la ley de transformación de sus componentes, es decir, la forma en que las componentes en un sistema coordenado son relacionadas a las componentes en otro sistema coordenado. La forma precisa de esta ley de transformación es una consecuencia del significado físico o geométrico de el tensor

Se ponga que tenemos que tenemos una ley representando las componentes a, b, c, \dots de varias cantidades físicas con respecto a cierto sistema coordenado tridimensional K . Es un hecho empírico que la ley tiene la misma forma cuando se escribe en términos de las componentes a', b', c', \dots de las mismas cantidades con respecto a otro sistema coordenado K' ("El espacio es homogéneo e isotrópico"). En otras palabras, las leyes físicas propiamente formuladas son "Invariantes" de los giros y rotaciones del sistema coordenado de referencia. También deben ser independientes del sistema de unidades

2.2 Tensores de cero orden (Escalares).

De nuevo escalar es una cantidad especificada en cualquier sistema coor-

denado por un número real simple (la "componente" o "valor" del escalar) el cual es invariante bajo cambios del sistema coordenado, es decir su valor no cambia cuando el sistema coordenado cambia.

Esto es si ϕ es el valor de un escalar en un sistema coordenado y ϕ' es su valor en otro sistema coordenado entonces $\phi = \phi'$.

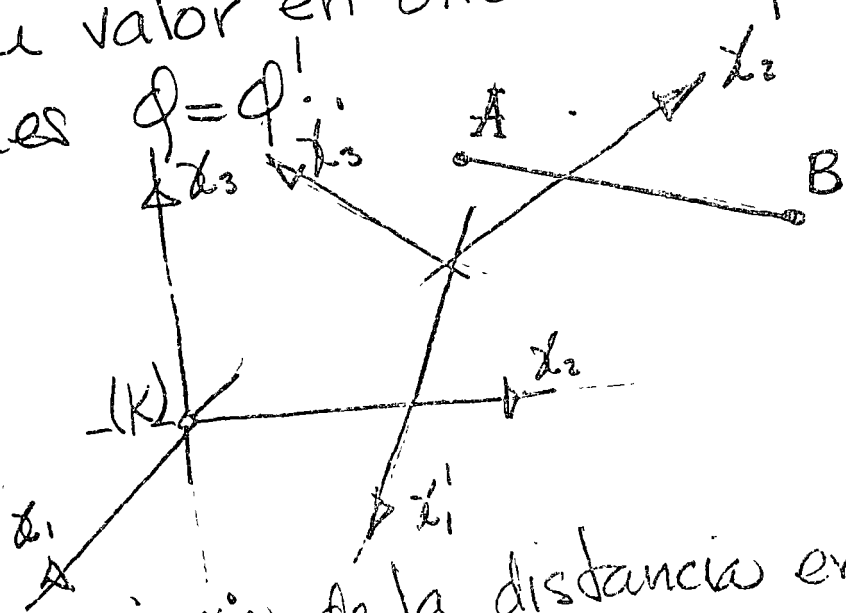


Fig. 2.1 invariancia de la distancia entre A y B.

- Ejemplo. Sean A y B dos puntos con coordenadas x_i^A, x_i^B en un sistema coordenado rectangular K y coordenadas $x_i'^A, x_i'^B$ en otro sistema coordenado rectangular K' , y sea ΔS la distancia entre A y B, la longitud del segmento de línea AB. Entonces ΔS es un escalar, es decir su valor $\Delta S'$ en el sistema K' es igual a su valor ΔS en el sistema K . Este hecho obviamente geométrico puede también verificarse por cálculo directo

$$\Delta x_i = x_i^B - x_i^A \quad \Delta x_i' = x_i'^B - x_i'^A \quad (i=1, 2, 3)$$

y sea la transformación de K a K' dada por

$$x_i' = a_{ik} x_k + x_{i0}'$$

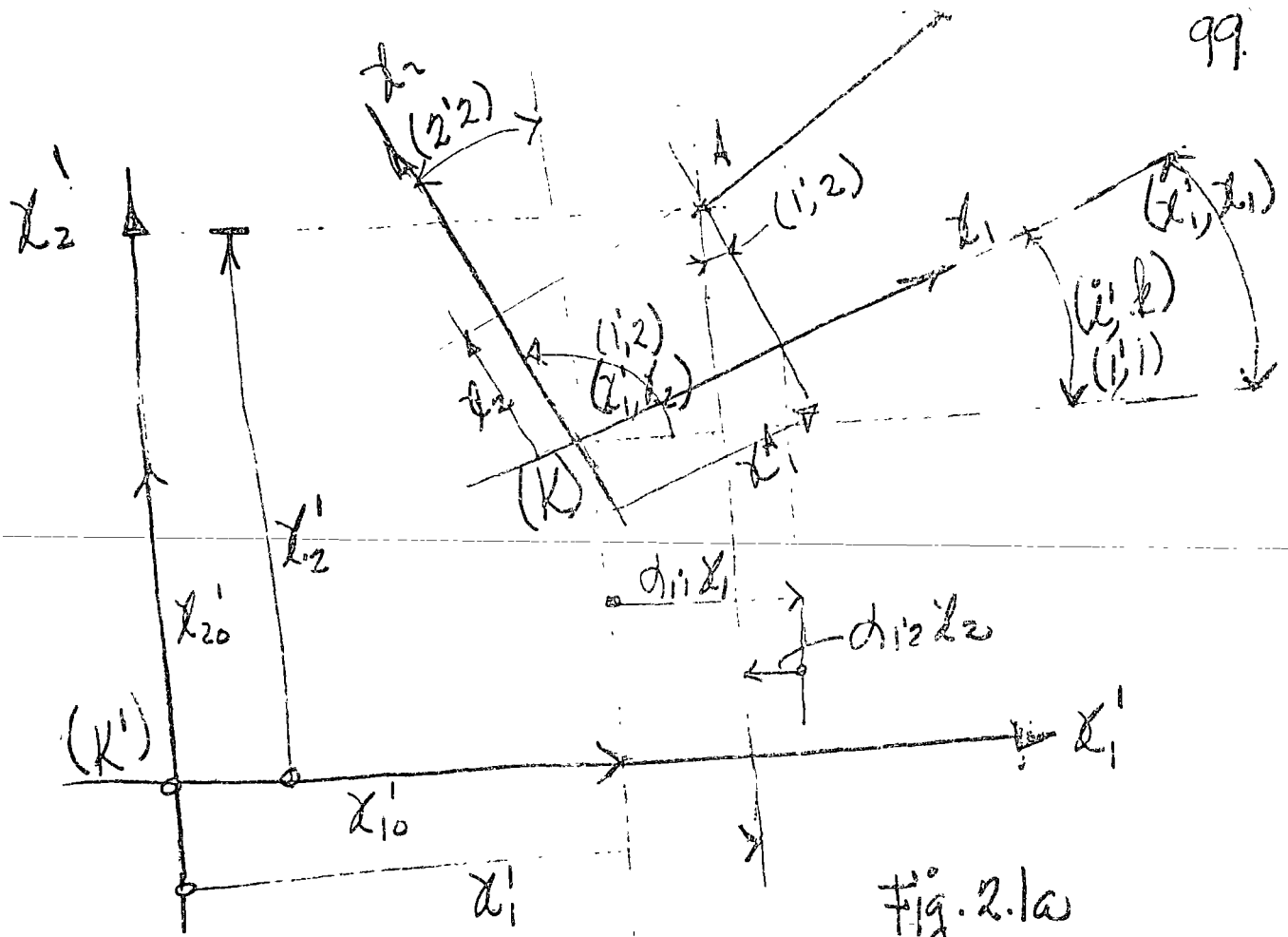


Fig. 2.1a

$$x_1' = x_{10}' + d_{11}'x_1 + d_{12}'x_2 + d_{13}'x_3$$

$$x_2' = x_{20}' + d_{21}'x_1 + d_{22}'x_2 + d_{23}'x_3$$

$$x_3' = x_{30}' + d_{31}'x_1 + d_{32}'x_2 + d_{33}'x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{10}' \\ x_{20}' \\ x_{30}' \end{pmatrix}}_{\text{TRASL.}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11}' & d_{12}' & d_{13}' \\ d_{21}' & d_{22}' & d_{23}' \\ d_{31}' & d_{32}' & d_{33}' \end{bmatrix}}_{\text{ROTACION}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

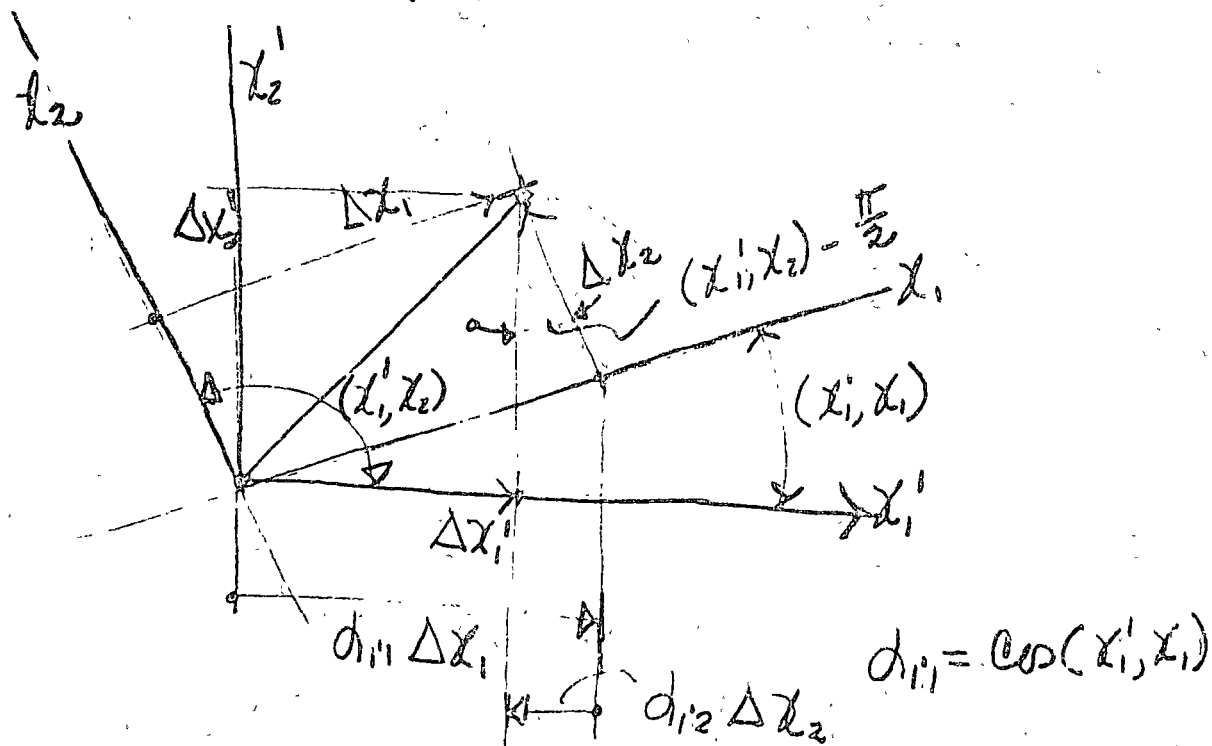
$$x_i' = x_{i0}' + d_{ik}'x_k$$

donde x_{i0}' son las coordenadas del origen v (K') Viejo con respecto al nuevo sistema (K')

$d_{ik} = \cos(\alpha_i, \alpha_k)$ es el coseno del ángulo entre el eje i del nuevo sistema y el eje k del viejo sistema.

Entonces

$$\begin{aligned}\Delta x_i' &= x_i^{IB} - x_i^{IA} = d_{ik} x_k^B + x_{i0}' - d_{ik} x_k^A - x_{i0}' \\ &= d_{ik} (x_k^B - x_k^A) = d_{ik} \Delta x_k\end{aligned}$$



De el teorema de Pitagoras

$$(\Delta s')^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x_i')^2 = (\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2$$

$$= \sum_{i=1}^3 d_{ik} \Delta x_k d_{il} \Delta x_l = \underbrace{d_{ik} d_{il}}_{\delta_{kl}} \Delta x_k \Delta x_l$$

$$a_{i'k} a_{i'l} = \delta_{kl}$$

$$a_{1'k} a_{1'l} + a_{2'k} a_{2'l} + a_{3'k} a_{3'l} = \delta_{kl}$$

$$k=l=1, \quad \overbrace{a_{1'1} a_{1'1} + a_{2'1} a_{2'1} + a_{3'1} a_{3'1}} = \delta_{11} = 1$$

$$k=l=2, \quad \overbrace{a_{1'2} a_{1'2} + a_{2'2} a_{2'2} + a_{3'2} a_{3'2}} = \delta_{22} = 1$$

$$k=l=3, \quad \overbrace{a_{1'3} a_{1'3} + a_{2'3} a_{2'3} + a_{3'3} a_{3'3}} = \delta_{33} = 1$$

$$\begin{array}{l} k \neq l \\ k=1, l=2 \end{array} \quad \overbrace{a_{1'1} a_{1'2} + a_{2'1} a_{2'2} + a_{3'1} a_{3'2}} = 0 \text{ (Dem.)}$$

2.3.- Tensores de primer orden (Vectores)

Se requieren 3 números para especificar un vector (Desplazamiento, aceleración, fuerza, etc.)

Las tres componentes de un vector en el espacio se transforman bajo una ley de transformación que las nuevas componentes siempre determinan el mismo vector

Sean Δx_i y $\Delta x'_i$ las diferencias entre las coordenadas rectangulares de dos puntos A y B en dos sistemas rectangulares K y K', entonces

$$\Delta x'_i = d_{ik} \Delta x_k \tag{2.1}$$

dónde $d_{ik} = \cos(\alpha_i, \alpha_k)$ coseno del angulo entre el eje i de K' y el k de K

Supongase un vector \bar{A} con componentes A_i en K y A'_i en K' las cuales se transforman en forma similar a (2.0)

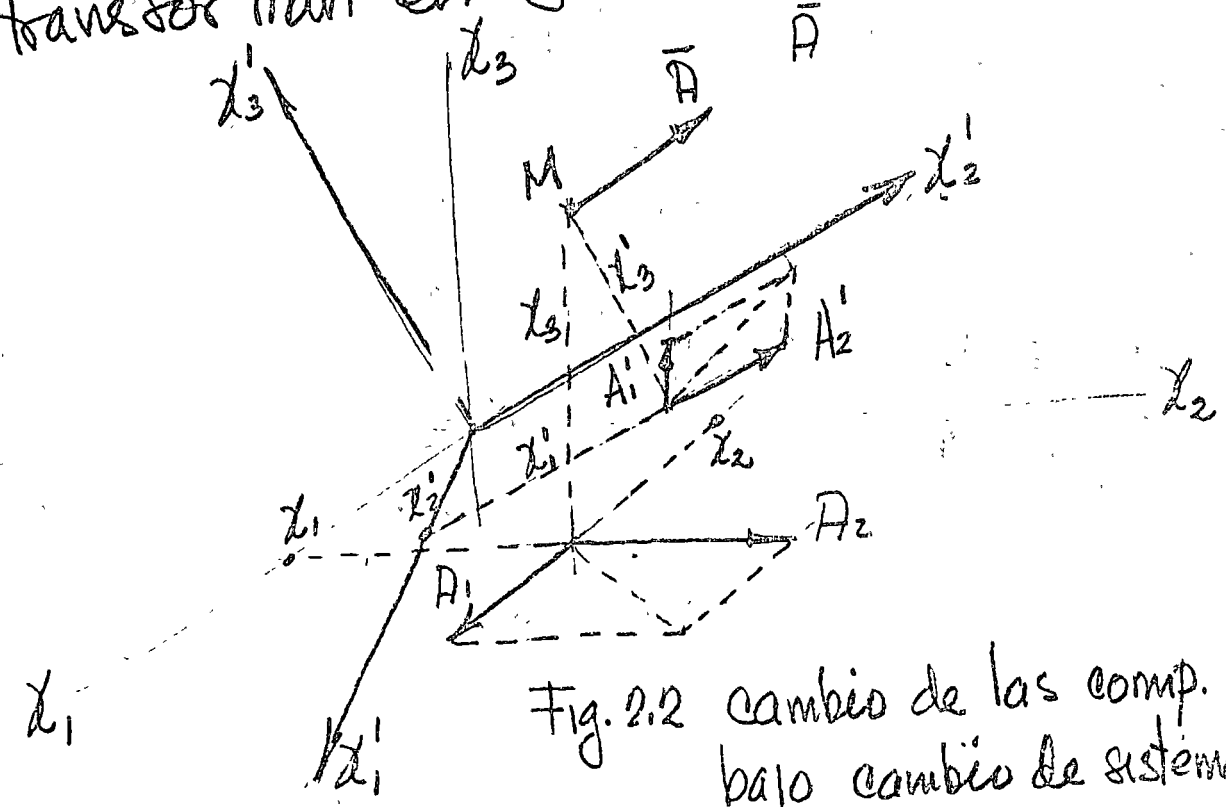


Fig. 2.2 cambio de las comp. de \bar{A} bajo cambio de sistemas

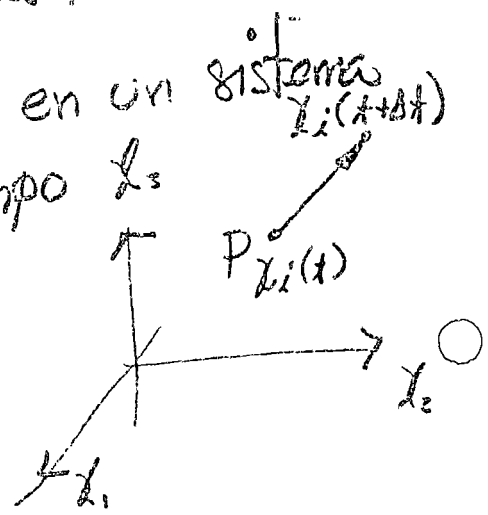
Definición: vector significa una cantidad especificada en cualquier sistema coordinado por tres números reales unicamente (sus componentes) los cuales se transforman bajo cambios de sistemas coordinados según la ley

$$A'_i = d_{ik} A_k \quad (5.2)$$

donde A_k, A'_i representan las componentes del vector en los sistemas coordinados K y K'
(original) (viejo) (nuevo) (ii)
 y d_{ik} es el coseno de el angulo entre el eje i de K' y el eje k de K .

2.3.1 Ejemplo Supongase que las coordenadas x_i de un punto P en un sistema K son funciones del tiempo t

$$x_i = x_i(t)$$



El desplazamiento de P en el tiempo Δt es dado por, en el sistema K

$$x_i(t + \Delta t) - x_i(t) \quad (2.3)$$

las cantidades (2.3) determinan el vector desplazamiento en el sistema original K, puesto que en el sistema K' son

$$x_i(t' + \Delta t') - x_i(t')$$

de (2.1) y del hecho que $t' = t$, $\Delta t' = \Delta t$ (el tiempo es escalar), se tiene

$$x_i(t' + \Delta t') - x_i(t') = dx_{ik} [x_k(t + \Delta t) - x_k(t)]$$

las cantidades (2.3) se transforman como vector. Similarmente las razones

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

determinan un vector (la velocidad media de P durante el intervalo de t a $t + \Delta t$)

Más aún los límites

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

si existen, también definen un vector
(la velocidad instantánea de P en el
tiempo P). También en K'

$$v_i' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{x_i'(t'+\Delta t') - x_i'(t')}{\Delta t'}$$

$$= \text{dir } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} = \text{dir } v_i$$

(las cantidades dir son independientes de t),
la cual es de nuevo la ley de transformación
vectorial

En la misma forma, se verifica que

los límites
$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(t+\Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}$$

determinan un vector (aceleración
instantánea de P en el tiempo t)

por lo tanto puesto que la segunda ley de Newton

$$F_i = ma_i$$

es válida en todos los sistemas coordenados, la fuerza F_i , debe también ser un vector

2.4 Tensores de segundo orden

Tensor de segundo orden significa una cantidad especificada únicamente por nueve números reales (las componentes del tensor) los cuales se transforman bajo cambio del sistema coordenado de acuerdo a la ley

$$A'_{ik} = a_{il} a_{km} A_{lm} \quad (6.4)$$

donde A_{lm} , A'_{ik} son las componentes

del tensor en los sistemas coordenados viejo y nuevo K y K' , respectivamente, y d_{ik} , es el coseno del ángulo entre el eje i de K' y el eje k de K (similarmemente $d_{k'm}$), Notar el sentido en que

(2.4) generaliza (2.2)

Desarrollando (2.4) se tiene

1º Sumando en k :

$$A'_{ik} = d_{i1} d_{k1m} A_{1m} + d_{i2} d_{k2m} A_{2m} + d_{i3} d_{k3m} A_{3m}$$

sumando en m se tiene

$$A'_{ik} = d_{i1} d_{k1} A_{11} + d_{i2} d_{k1} A_{21} + d_{i3} d_{k1} A_{31} \\ + d_{i1} d_{k2} A_{12} + d_{i2} d_{k2} A_{22} + d_{i3} d_{k2} A_{32} \\ + d_{i1} d_{k3} A_{13} + d_{i2} d_{k3} A_{23} + d_{i3} d_{k3} A_{33}$$

[Se encuentran en forma matricial

$$[A_{ik}], [A'_{ik}]$$

2.4.1 Ejemplos respecto al significado de la transformación (2.4)

Ejemplo 1. Dados dos vectores \bar{A} y \bar{B} , existen nueve productos entre las componentes de \bar{A} y \bar{B} :

$$A_i B_k \quad (i, k, = 1, 2, 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{array} \right\}$$

Supongase que transformamos a un sistema coordenado nuevo K' , en el cual \bar{A} y \bar{B} tienen componentes A'_i, B'_i . Entonces

de (2.2)

$$A'_i = d_{ik} A_k, \quad B'_k = d_{km} B_m$$

de donde

$$\underline{A'_i B'_k = d_{ik} d_{km} A_l B_m} \quad (2.5)$$

comparando (2.4) con (2.5), se observa que

$A'_i B'_k$ es un tensor de segundo orden

Ejemplo 2 La ecuación de una quadrica (Elipsoide) con centro en el origen es de la forma

$$A_{ik} x_i x_k = 1 \quad (2.6) \quad K_i$$



$$A_{1k} x_1 x_k + A_{2k} x_2 x_k + A_{3k} x_3 x_k = 1$$

$$A_{11} x_1 x_1 + A_{21} x_2 x_1 + A_{31} x_3 x_1$$

$$+ A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_2 x_2 + A_{32} x_3 x_2$$

$$+ A_{13} x_1 x_3 + A_{23} x_2 x_3 + A_{33} x_3 x_3 = 1$$

en el sistema original K , y en el nuevo sistema K' es de la forma

$$A'_{ik} x'_i x'_k = 1 \quad (2.7)$$

con el mismo origen. Para encontrar la relación entre A_{ik} y A'_{ik} , sabemos

$$\begin{aligned} \text{que } x'_i &= a_{il} x_l, & x'_k &= a_{k'm} x_m \\ x_l &= a_{li} x'_i, & x_m &= a_{k'm} x'_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

Subst. (2.8) en (2.6), con i, k reemplazados por l, m , se obtiene

$$A_{em} \chi_l \chi_m = A_{em} d_{il} d_{im} \chi_i d_{km} \chi_k = 1 \quad (2.9)$$

comparando (2.9) y (2.7) se obtiene

$$A'_{ik} = d_{il} d_{km} A_{em}$$

el cual es idéntico a (2.4). Por lo tanto.

A_{ik} es un tensor de segundo orden.

2.4.2 El Tensor de esfuerzos

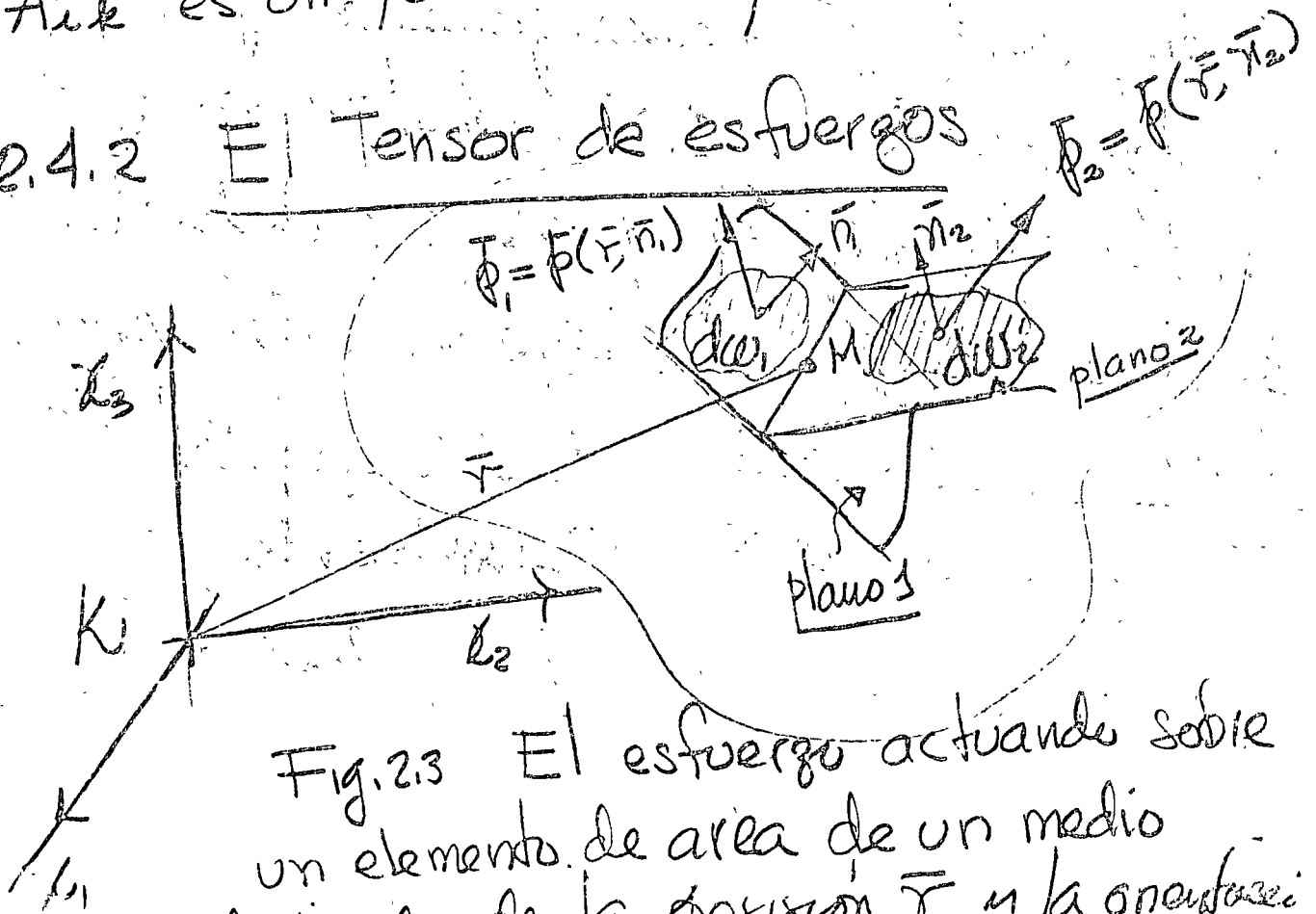


Fig. 2.3 El esfuerzo actuando sobre un elemento de área de un medio depende de la posición \vec{r} y la orientación

El esfuerzo en un medio continuo se especifica cuando se conoce la fuerza actuando sobre un elemento arbitrario de área dw ($d\sigma$) pasando a través de un punto arbitrario M del medio. Sea \vec{r} el radio vector de M y \vec{n} el vector unitario normal a dw . Entonces la fuerza actuando sobre dw es igual a $\vec{f} dw$, donde \vec{f} es una función $\vec{f}(\vec{r}, \vec{n})$ de dos vectores \vec{r} y \vec{n} . Mostraremos que la función $\vec{f}(\vec{r}, \vec{n})$ puede ser deducida de cierto tensor de segundo orden llamado tensor de esfuerzos, el cual depende de \vec{r} pero no de \vec{n} . Considerando un tetrahedro elemental a través de M con ejes paralelos al sistema K (Fig. 2.4)

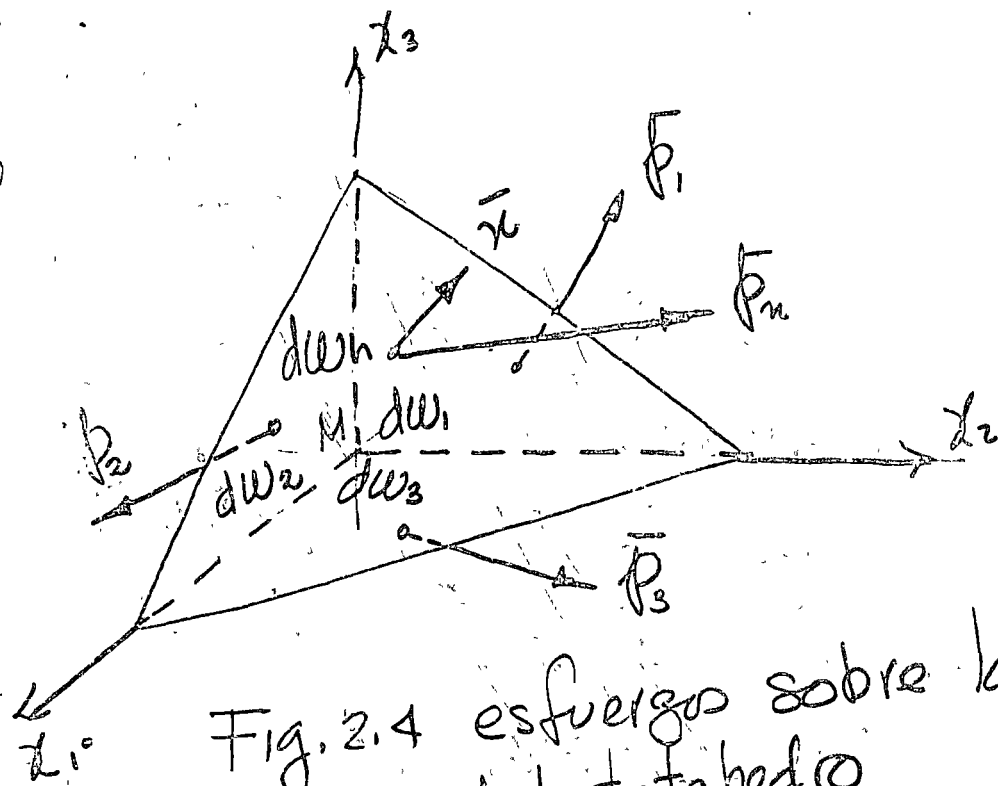


Fig. 2.4 esfuerzos sobre las caras del tetrahedro

Sean dw_1, dw_2, dw_3 las areas de las caras perpendiculares a x_1, x_2, x_3 , y sea dw_n el area de la cara inclinada con un vector unitario normal \bar{n} . Más aún sean $\bar{p}_1 dw_1, \bar{p}_2 dw_2, \bar{p}_3 dw_3$ y $\bar{p}_n dw_n$, las fuerzas ejercidas por el resto del medio sobre las areas dw_1, dw_2, dw_3 y dw_n respectivamente. El signo menos en el subindice indican que los vectores normales a las areas dw_i apuntan en dirección opuesta a los ejes x_i de K .

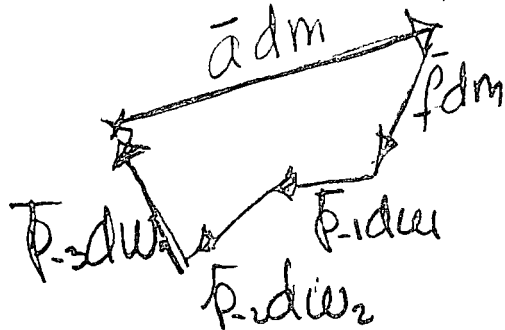
en las caras internas las fuerzas son

$$\bar{\phi}_1 = -\phi_{-1}, \quad \bar{\phi}_2 = -\phi_{-2}, \quad \bar{\phi}_3 = -\phi_{-3}$$

ley de acción y reacción.

Sea \bar{a} la aceleración del centro de masa del tetrahedro, \bar{f} la fuerza de cuerpo por unidad de masa, si la ~~aceleración es en la dirección de \bar{f}_n~~ se tiene de la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \bar{a} dm &= \bar{f} dm + \bar{\phi}_n d\omega_n + \bar{\phi}_1 d\omega_1 + \bar{\phi}_2 d\omega_2 \\ &\quad + \bar{\phi}_3 d\omega_3 \\ &= \bar{f} dm + \bar{\phi}_n d\omega_n - \bar{\phi}_1 d\omega_1 - \bar{\phi}_2 d\omega_2 - \bar{\phi}_3 d\omega_3 \\ &\quad \text{(no suma en n)} \end{aligned}$$



donde dm es la masa del tetrahedro

En el límite cuando el tetrahedro tiende a M

encontramos que

$$\begin{aligned} \bar{F}_n d\omega_n &= \bar{F}_1 d\omega_1 + \bar{F}_2 d\omega_2 + \bar{F}_3 d\omega_3 = \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i d\omega_i \\ &= \bar{F}_i d\omega_i \end{aligned}$$

los términos conteniendo $d\omega$ son proporcionales al volumen del tetrahedro y son de alto orden con los que contienen elementos de área. De allí que

$$d\omega_i = d\omega_n \underbrace{\cos(\bar{n}, \chi_i)}_{n_i} = n_i d\omega_n$$

n_i Cosenos directores de la normal \bar{n}

$$\bar{F}_n d\omega_n = \bar{F}_i n_i d\omega_i \quad \bar{F}_i n_i = \bar{F}_1 n_1 + \dots$$

proyectando \bar{F}_n sobre los ejes del sistema K , se obtiene

$$F_{nk} = F_{ik} n_i \equiv T_{ik} n_i \quad (2.14)$$

donde T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) es un conjunto de nueve esfuerzos normales ($i=k$) y tangenciales ($i \neq k$) actuando sobre

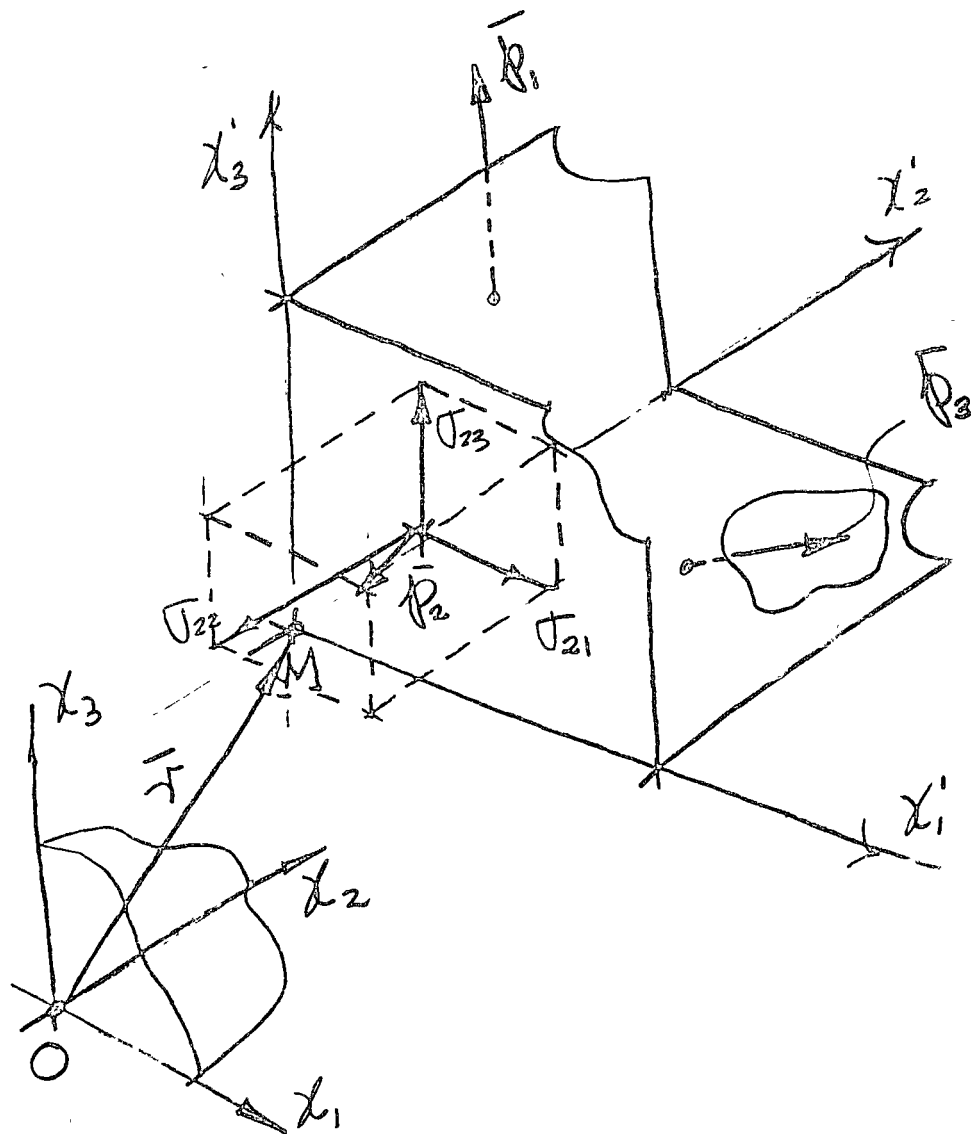


Fig. 2.5 El tensor de esfuerzos como un conjunto de tres vectores esfuerzos, \vec{p}_1 , \vec{p}_2 , \vec{p}_3 actuando sobre tres elementos ortogonales de area. Las proyecciones de estos vectores sobre los ejes coordenados dan las componentes del tensor de esfuerzos

- los cuales son independientes de la orientación \bar{n} de el area sobre la cual el esfuerzo actua dependen solo de la posición de M (\bar{r}) y no permiten calcular P_n para una dirección arbitraria \bar{n} . Por lo tanto la cantidad física con componentes T_{ij} , llamado tensor de esfuerzos unicamente especifica el estado de esfuerzos en cada punto del medio continuo.

Solo resta verificar el caracter tensorial de T_{ij} , suponiendo que el nuevo eje i del nuevo sistema coord. K' esta dirigido a lo largo de \bar{n} tal que

$$\bar{n} = \bar{l}'_i$$

- (K y K' tienen bases ortonormales $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ e $\bar{l}'_1, \bar{l}'_2, \bar{l}'_3$). Entonces

proyectando \bar{n} sobre el eje l de K se tiene

$$n_e = \bar{n} \cdot \bar{l}_e = \bar{l}'_i \cdot \bar{l}_e = \delta_{ie} = \cos(\chi'_i, l_e)$$

donde δ_{ie} es el coseno del ángulo entre el eje \bar{i} de K' y el l de K . De allí que

$$\bar{p}_n = \bar{p}'_i = \bar{p}_e n_e = \delta_{ie} \bar{p}_e \bar{l}_m \bar{p}_{em}$$

Finalmente, proyectando \bar{p}'_i sobre el eje k de K' , se obtiene

$$p'_{ik} = \delta_{ie} \delta_{k'm} \bar{p}_{em} \quad (2.15)$$

comparando (2.15), y (2.4), se observa que p'_{ik} se transforma como un tensor de segundo orden.

2.4.4. Tensor de Deformación

Dados dos puntos A y B en las vecindades o entornos de un medio continuo suponemos que la deformación

Lleva a AB a la nueva posición A'B'

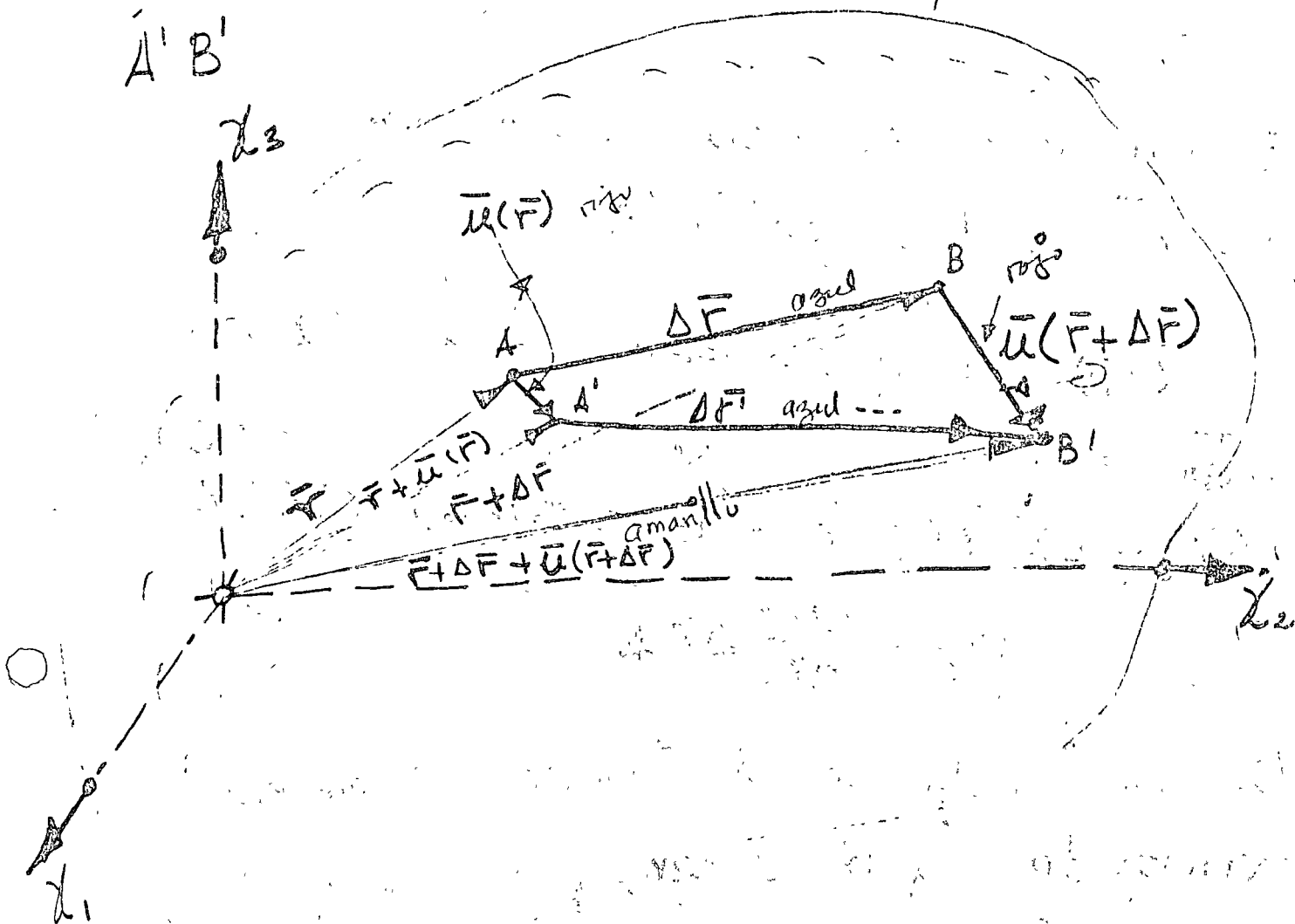


Fig 2.6 Deformación de un medio continuo

\bar{r} radio vector de A, $\bar{r} + \Delta \bar{r} + \bar{u}(\bar{r} + \Delta \bar{r})$ radio vector de B'
 $\bar{r} + \Delta \bar{r}$ " " de B
 $\bar{r} + \bar{u}(\bar{r})$ " " de A'

$\bar{u}(\bar{r}), \bar{u}(\bar{r} + \Delta \bar{r})$ desplazamientos de A y B como resultados de la deformación

$$\Delta \bar{r} = \Delta \bar{r}' = \Delta F + \bar{u}(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - \bar{u}(\bar{r})$$

El cambio en magnitud de ΔF puede encontrarse de:

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2$$

$\bar{u}(\bar{r})$ tiene las componentes $u_i(x_1, x_2, x_3)$

entonces

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \quad (2.19)$$

Usando el teorema de Taylor y despreciando términos de segundo orden, y notando que

$$(\Delta r')^2 = \Delta x_i' \Delta x_i', \quad (\Delta r)^2 = \Delta x_i \Delta x_i$$

elevando al cuadrado (2.19) se obtiene

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = \left[\Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \right]^2 - \Delta x_i \Delta x_i$$

$$= 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l$$

$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \Delta x_i \Delta x_k$$

$$2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k$$

de donde

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.20)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

$$E_{22} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right]$$

$$E_{21} = E_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]$$

$$E_{32} = E_{23} = \frac{1}{2} \left[\dots \right]$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2} \left[\dots \right]$$

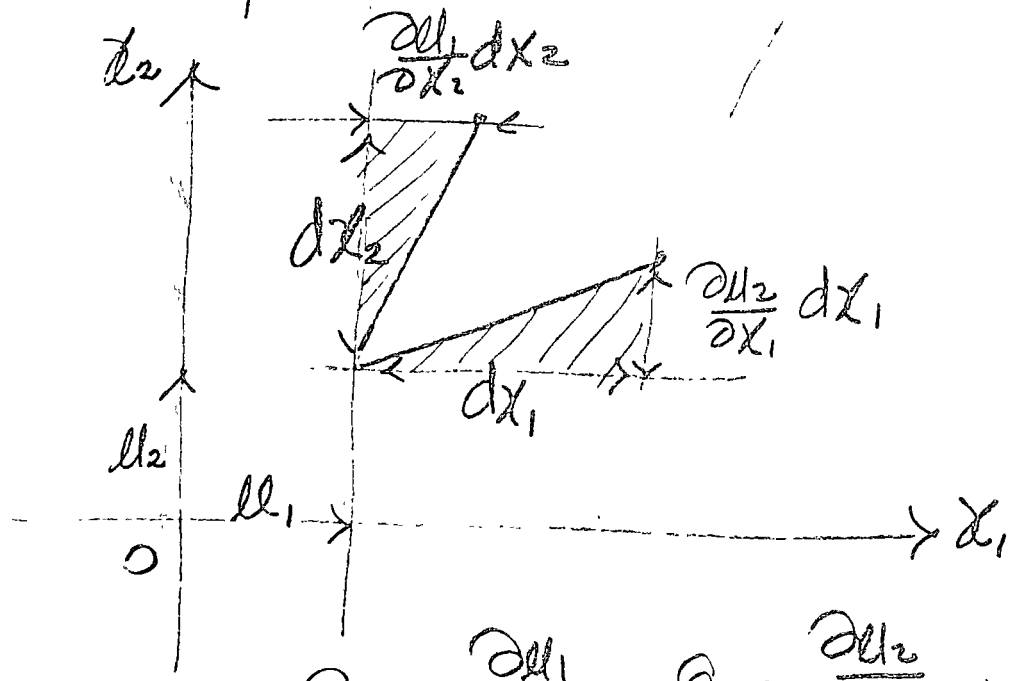
En deformaciones pequeñas los terminos al cuadrado son despreciables (.001) →

$$(.001)^2 \quad E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad \text{Lineal en Geom.}$$

[E_{ij}]

No Lin. Geometria

Interpretación en X_1, X_2



$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad , \quad E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad E_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12}$$

Verificación de la naturaleza tensorial de E_{ik}

Transformando (120) a un nuevo sistema de coordenadas K' se obtiene

$$E'_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right)$$

de la fórmula

$$x_i = a_{ki} x'_k + x_{i0}$$

que describe la transformación de $K' \rightarrow K$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ki} \quad (2.21)$$

usando repetidamente (2.20), (2.21) y la regla de cadena de diferenciación parcial se tiene

$$E'_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_m} (\delta_{im} \delta_{kn}) \frac{\partial x_n}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\delta_{kn} \delta_{lm}) \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\delta_{el} \delta_{lr}) \frac{\partial x_m}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_n} (\delta_{rs} \delta_{ls}) \frac{\partial x_n}{\partial x_k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta_{im} \frac{\partial \delta_{kn}}{\partial x_m} + \delta_{kn} \frac{\partial \delta_{lm}}{\partial x_m} + \delta_{el} \frac{\partial \delta_{lr}}{\partial x_m} \delta_{im} \delta_{rs} \frac{\partial \delta_{ls}}{\partial x_n} \delta_{kn} \right)$$

$$= \delta_{im} \delta_{kn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta_{lm}}{\partial x_n} + \frac{\partial \delta_{ln}}{\partial x_m} + \delta_{rs} \frac{\partial \delta_{lr}}{\partial x_m} \frac{\partial \delta_{ls}}{\partial x_n} \right)$$

$$= \delta_{im} \delta_{kn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta_{lm}}{\partial x_n} + \frac{\partial \delta_{ln}}{\partial x_m} + \frac{\partial \delta_{lr}}{\partial x_m} \frac{\partial \delta_{lr}}{\partial x_n} \right)$$

$$E'_{ik} = \delta_{im} \delta_{kn} E_{mn}$$

de acuerdo a la definición (2.4). E_{ik} es un tensor de segundo orden

2.5 Tensores de alto orden

Los tensores de orden, 0, 1, 2 tienen las leyes de transformación

$$\phi' = \phi, \quad A'_i = d_{i'k} A_k, \quad A'_{ik} = d_{i'k} d_{j'l} A_{lm} \quad (2.29)$$

respectivamente. En la primera fórmula no interviene los coef. $d_{i'k}$, el lado derecho de la seg. fórmula es una forma lineal homogénea en $d_{i'k}$, y la tercera es una forma cuadrática homogénea en $d_{i'k}$. La generalización natural de (2.29) es la siguiente:

Por tensor de orden n significa una cantidad especificada por 3^n números reales (componentes del tensor) los cuales se transforman bajo cambios de sistemas coordenados de acuerdo a la ley

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_n} = d_{i_1 k_1} d_{i_2 k_2} \dots d_{i_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n} \quad (2.30)$$

donde $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$, $A'_{i_1 i_2 \dots i_n}$ son las componentes del tensor en los sistemas viejos K y nuevos K' , y $d_{i'k}$ es el coseno entre el eje i' de K' y el k de K .
 el miembro derecho de (2.30) es una forma homogénea de grado n en las cantidades $d_{i'k}$, $d_{i'k_2}$, ..., $d_{i'n k_n}$

ALGEBRA DE TENSORES

Sean A_{ik} y B_{ik} las componentes de dos tensores de 2º orden y sea

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$$

C_{ik} son las comp. de un tensor de 2º orden, llamada la suma de los tensores con comp A_{ik} y B_{ik} que se transforma de acuerdo a la ley

$$A'_{ik} = d_{i'l} d_{k'm} A_{lm}$$

$$B'_{ik} = d_{i'l} d_{k'm} B_{lm}$$

(2.1)

de allí que C_{ik} se transforma en forma simétrica

$$C'_{ik} = A'_{ik} + B'_{ik} = \delta_{il} \delta_{km} (A_{lm} + B_{lm})$$

3

$$C'_{ikl} = \delta_{il} \delta_{km} C_{ilm}$$

suma de cualquier número de tensores de orden arbitrario es definida simétricamente
 suma de tensores de diferente orden no está.
 sustracción de tensores se define simétricamente

3.2 Multiplicación de tensores

Sean A_{ik} B_{ik} los comp. de dos tens. de segundo orden, todos los posibles prod de

$$C_{iklm} = A_{ik} B_{lm}$$

los números C_{iklm} son los componentes de un tensor de 4 orden (3^4) llamado producto y se transforman

$$C'_{iklm} = A'_{ik} B'_{lm} = \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{jp} \delta_{mq} \delta_{mr} \delta_{ms} \underbrace{A_{np} B_{rs}}_{C_{np rs}} = C_{iklm}$$

la multiplicación tensorial no es conmutativa

Reducción de un tensor T_{ik} a sus ejes principales

Dado un tensor T_{ik} y un vector \bar{A} con componentes A_i , formamos el producto

$$T_{ik} A_k = B_i$$

$$(T_{i1} A_1 + T_{i2} A_2 + T_{i3} A_3) = B_i$$

obteniéndose un nuevo vector \bar{B} con componentes B_i , en general \bar{B} difiere de \bar{A} en dirección y magnitud, la operación $T_{ik} A_k$ gira a \bar{B} y cambia su longitud. Supongamos que se desean encontrar todos los vectores \bar{A} los cuales no giran por la multiplicación (inner) con T_{ik} tal que

$$T_{ik} A_k = \lambda A_i \quad (1)$$

donde λ es un escalar (la longitud de \bar{A} cambia si $\lambda \neq \pm 1$)

Tales vectores se existen son llamados
vectores característicos o eigen vectors del
 tensor T_{ik} y sus direcciones son llamadas
 las direcciones principales o características
 de T_{ik} y sus ejes se llaman ejes
 principales o sea los valores de λ por
 los cuales (11) tiene soluciones

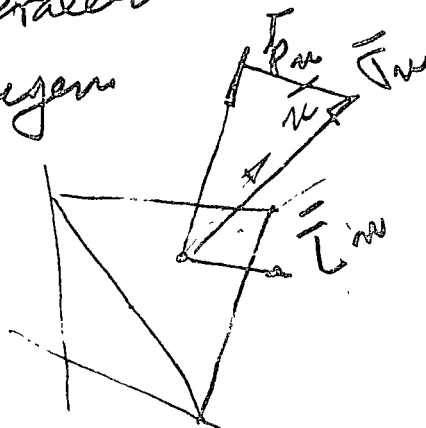
Ejemplos

$T_{ik} = T_{ik} N_i$

$\vec{n}_k = \vec{T}_{1k} n_1 + \vec{T}_{2k} n_2 + \vec{T}_{3k} n_3$

$$\begin{pmatrix} n_{1k} \\ n_{2k} \\ n_{3k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

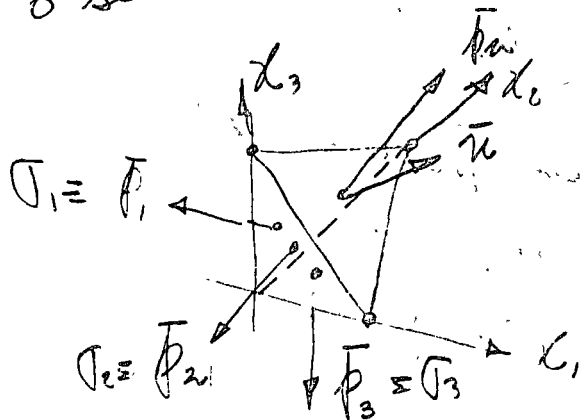
\vec{T}_n no es paralelo a \vec{n} , en general los
 comp. normales y tangentes



el problema es encontrar elementos de axes
 donde solo hay esf. normales. Para tales
 elementos de axes, \bar{P}_m es paralelo a \bar{n} y
 de allí que

$$\begin{aligned}\bar{P}_m &= \bar{P}_i n_i = \lambda \bar{n} \\ &= \bar{P}_1 n_1 + \bar{P}_2 n_2 + \bar{P}_3 n_3 = \lambda \bar{n}\end{aligned}$$

o sea $\sigma_{ik} n_i = \lambda n_k$



o sea $\sigma_{ik} n_i = \lambda n_k$

$$\sigma_{1k} n_1 + \sigma_{2k} n_2 + \sigma_{3k} n_3 = \lambda n_k$$

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \lambda n_1$$

$$\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 = \lambda n_2$$

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = \lambda n_3$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{ik} n_i - \lambda \delta_{ik} \\ & |\sigma_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0 \end{aligned}$$

en general para cualquier tensor T_{ik}
su reducción a ejes principales es:

$$T_{ik} A_k = \lambda A_i$$

$$T_{ik} A_k - \lambda A_i = (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0$$

$$(T_{11} - \lambda) A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3 = 0$$
$$T_{21} A_1 + T_{22} A_2 +$$

$$(T_{31} - \lambda) A_1 + T_{32} A_2 + T_{33} A_3 = 0 \quad (17)$$

$$T_{12} A_1 + (T_{22} - \lambda) A_2 + T_{23} A_3 = 0$$
$$T_{31} A_1 + T_{32} A_2 + (T_{33} - \lambda) A_3 = 0$$

(17) Para encontrar un formal solo se

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

(18) es la ecuación característica del tensor T_{ik}
, evaluada en λ

(Se omitirá el caso de coordenadas generalizadas)

(18) supone que T_{ik} es un tensor simétrico
Cartesiano $T_{ik} = T_{ki}$ En este caso las
raíces de la ecuación característica son todas
reales (Demostrarlo de tarea) y que las direcciones
se entre sí

EL TENSOR ELIPSOIDE

Se ponga que el tensor T_{ik} transforme un vector \bar{P} en un vector \bar{Q} , tal que

$$Q_i = T_{ik} P_k \quad (27)$$

en los ejes principales se tiene

$$Q_i = T_{ik} P_k$$

o sea $Q_1 = T_{11} P_1 = \lambda_1 P_1$ (28)

$$Q_2 = T_{22} P_2 = \lambda_2 P_2$$

$$Q_3 = T_{33} P_3 = \lambda_3 P_3$$

Si los eigen values $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son todos distintos, entonces T_{ik} tiene 3 direcciones principales (ejes) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de (28) se observa que el efecto de aplicar T_{ik} a \bar{P} es girar y cambiar en longitud, a menos que \bar{P} coincide con uno de los ejes principales.

Supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, la ecuación característica tiene una raíz simple y una doble (28) implicando que

$$\begin{aligned} Q_1' &= \lambda_1 P_1' \\ Q_2' &= \lambda_2 P_2' \\ Q_3' &= \lambda_3 P_3' \end{aligned}$$

y por lo tanto el efecto de aplicar \bar{P} a cualquier vector \bar{P} en el plano $x_1' - x_2'$ es solamente combacia a \bar{P} en longitud sin girarlo. En otras palabras todo el plano $x_1' - x_2'$ es un plano característico en el sentido que cada dirección es una dirección principal.

Finalmente, supongase que la ecuación característica tiene una raíz triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Entonces

$$(28) \quad \begin{aligned} Q_1' &= \lambda P_1' \\ Q_2' &= \lambda P_2' \\ Q_3' &= \lambda P_3' \end{aligned}$$

Es decir el efecto de aplicar T_{ik} a cualquier vector es solo cambiar su longitud ($\lambda \neq 1$) sin girarlo (isotropía)

Existe una correspondencia uno a uno entre los vectores \bar{A} y planos de la forma $\bar{A} \cdot \bar{r} = A_i x^i = 1$

En la misma forma existe una correspondencia uno a uno entre tensores simétricos T_{ik} y las superficies cuadradas de la forma

$$T_{ik} x^i x^k = 1 \quad (8.29)$$

$$T_{11} x^1 x^1 + T_{12} x^1 x^2 + T_{13} x^1 x^3$$

$$+ T_{21} x^2 x^1 + T_{22} x^2 x^2 + T_{23} x^2 x^3$$

$$+ T_{31} x^3 x^1 + \dots + T_{33} x^3 x^3 = 1$$

Los ejes principales de esta superficie

32

son claramente los mismos que los
ejes principales del Tensor (Ejemplo 2 Pág 64)

Si x_i son los ejes principales

$$T_{11}'(x_1')^2 + T_{22}'(x_2')^2 + T_{33}'(x_3')^2 = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2 = 1$$

(solo para tensores simétricos)

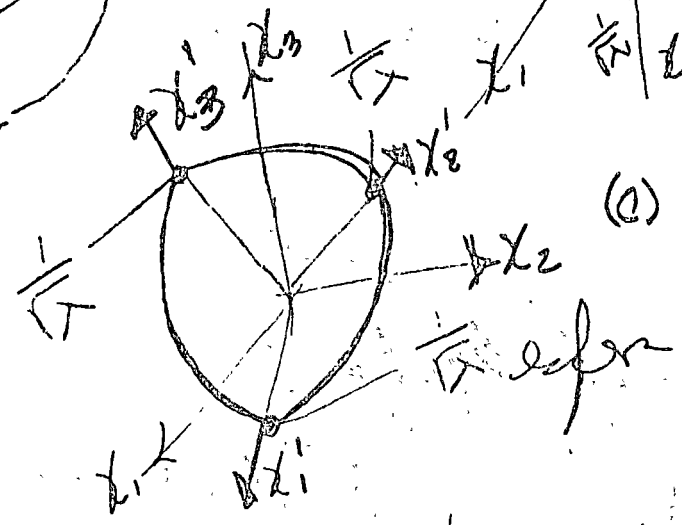
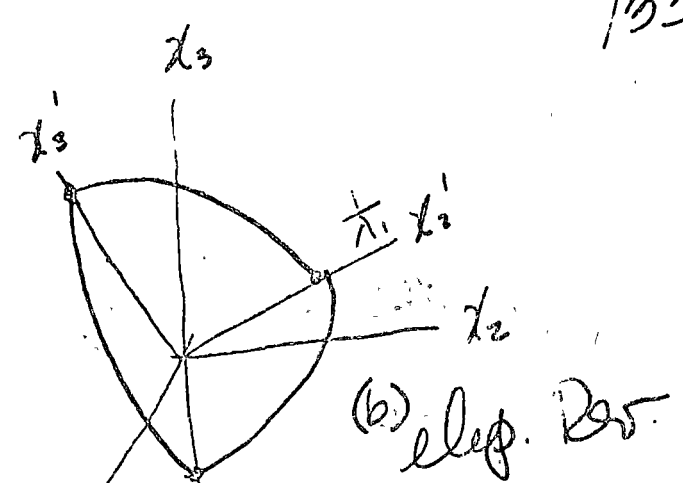
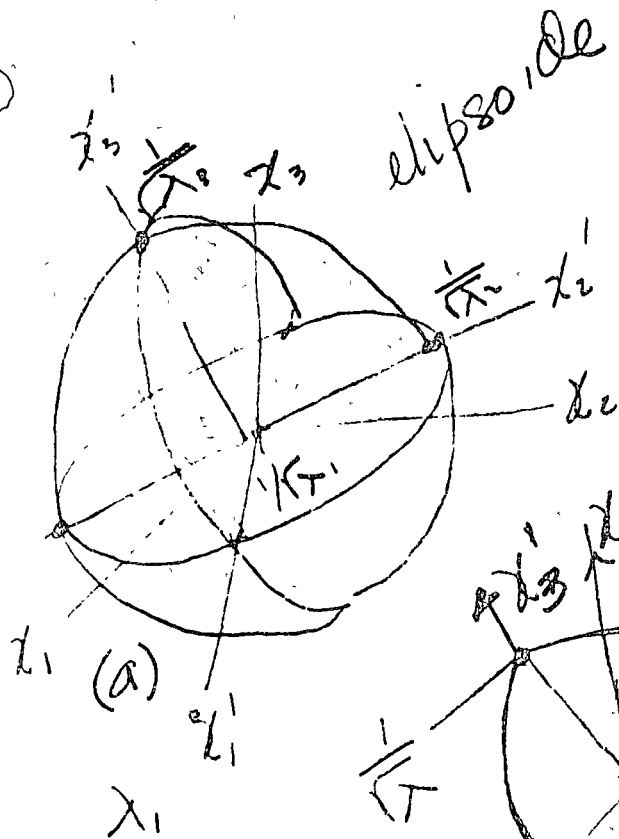
o sea

$$\frac{(x_1')^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(x_2')^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{(x_3')^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 1$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son todas ^{positivas} positivas

(Caso de gran importancia práctica) la
superficie (3.29) es un elipsoide.

M. de revolución si $\lambda_1 = \lambda_2$, y esfera



Espacio Real

Tensor elipsoide de un tensor simetrico T_{ik}

a) $|T'_{ik}| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos

b) $|T'_{ik}| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

c) $|T'_{ik}| = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

INVARIANTES

134

Dado un vector \bar{A} , sean A_i las componentes de \bar{A} en un sistema de coordenadas K y sea A'_i en otro K' . Las componentes de \bar{A} cambian de K a K' , fácilmente podemos formar una expresión que no cambia, ejemplo el cuadrado de la longitud de \bar{A}

$$A_i A_i = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2 = (A'_1)^2 + (A'_2)^2 + (A'_3)^2 = A'_i A'_i$$

Una expresión como $A_i A_i$ la cual, no cambia bajo la transformación de coordenadas de un sistema a otro es llamada UN INVARIANTE DEL VECTOR \bar{A} .

Es fácilmente ver que tensores de cualquier orden también tienen invariantes

Por ejemplo, dado un tensor de segundo orden T_{ik} , considerando la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por
menores se
obtiene

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33}) + \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$- \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

Los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son independientes del sistema coordenado seleccionado, y así son los coeficientes de (3.30). Por lo tanto los cantidades

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix}$$

(8.31)

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Son todas invariantes de T_{ik} , se puede formar un número infinito de invariantes
ejemp $I_1^2 = (T_{ii})^2$

$$I_1^2 - 2I_2 = T_{ik} T_{ik}, \text{ etc.}$$

Tensor en los cuales el invariante I_1 es cero son llamados distorsionantes. Cualquier tensor T_{ik} puede escribirse como la suma de un tensor distorsionante e un isotrópico

$$T_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} T_{ee} S_{ik} + \frac{1}{3} T_{ee} S_{ik}$$

$$= \underbrace{D_{ik}}_{\text{Distorsionante}} + \frac{1}{3} \underbrace{S_{ik} T_{ee}}_{\text{es } \delta_{ik} \text{ o isotrópico}}$$

Examen para el Lunes:

137

$$T_{ik} = D_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} (T_{11} + T_{22} + T_{33})$$

$$\begin{bmatrix} (D_{11} + \frac{1}{3} T_{kk}) & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & (D_{22} + \frac{1}{3} T_{kk}) & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & (D_{33} + \frac{1}{3} T_{kk}) \end{bmatrix}$$

$$D_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} T_{kk}$$

~~Que es un pseudo-tensor?~~

$$E_{ijk} = (\bar{t}_i \times \bar{t}_k) \cdot \bar{t}_j$$

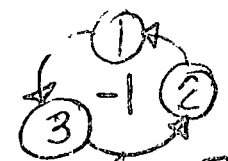
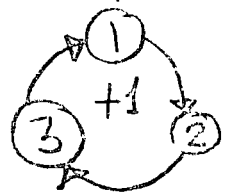
$$E_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } j, k, l \text{ es una perm. cíclica de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{" " " " " " " " le } 3, 1, 2 \\ 0 & \text{ " " " " " " " " le } 1, 2, 3 \end{cases}$$

así que los comp. no cero son

$$E_{123} = 1; \quad E_{231} = 1; \quad E_{312} = 1$$

$$E_{213} = -1; \quad E_{132} = -1; \quad E_{321} = -1$$

es un pseudo tensor simétrico de orden 3



E_{11k} E_{22k} E_{33k}
 E_{21k} E_{22k} E_{23k}
 E_{31k} E_{32k} E_{33k}

 3^3

27 candid. $\equiv 3^3$

ANALYSIS vectorial y tensorial (4 y 5)

- 1.) Concepto de campos escalares, vect. y tens.
- 2.) Integral de línea CIRCULATORIA
- 3.) Teoremas de Gauss
- 4.) " " Stokes
- 5.) " " Green

EL CONCEPTO DE CAMPO

Funciones tensoriales de un argumento escalar
Significan una regla que asigna un valor
único de un tensor $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ a cada
valor admisible del escalar t (ejemplo
1 puede ser el tiempo) o sea

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n} = A_{i_1 i_2 \dots i_n}(t) \quad (1)$$

Ejemplo supongase que el estado de
esfuerzos en un medio varía con el
tiempo el tensor de esfuerzos T_{ik}
es función del tiempo

$$T_{ik} = T_{ik}(t)$$

Por la derivada de (1) respecto a t
significa el tensor con componentes

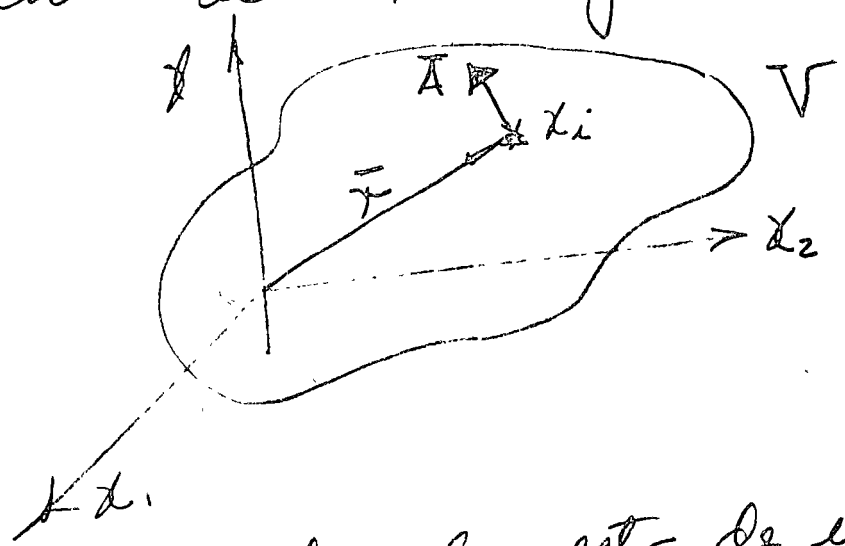
$$\frac{dA_{i_1 i_2 \dots i_n}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_{i_1 i_2 \dots i_n}(t + \Delta t) - A_{i_1 i_2 \dots i_n}(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

(2)

Calculado en un sistema coordenado que no varía con t , el tensor derivado (2) es del mismo orden de (1)

2 CAMPO TENSORIAL

Significa cierta regla asignando un valor único a un tensor en cada punto de cierto espacio V



Si \bar{r} es el vector posición de un punto de V se tiene que los campos se indican

- campo Tensorial
- " escalar
- " vectorial

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n} = A_{i_1 i_2 \dots i_n}(\bar{r}) \quad (3)$$

$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi(\bar{r}) \\ \bar{A} &= \bar{A}(\bar{r}) \end{aligned} \right\} \text{son casos particulares de (3)}$

Ejemplo 1. El estado atmosférico se describe por campos escalares como

$$\text{presión: } p = p(\bar{r})$$

$$\text{Temperatura: } T = T(\bar{r})$$

$$\text{Densidad: } \rho = \rho(\bar{r})$$

1) campos vectoriales

$$\text{velocidad del viento } \bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$$

$$\text{aceleración " " } \bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$$

Ejemplo 2 el estado de esfuerzos en un medio se describe por un campo tensorial

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(\bar{r})$$

campos no estacionarios son funciones

del espacio y del tiempo \bar{r} y t

$$p = p(\bar{r}, t), \quad \bar{a} = \bar{a}(\bar{r}, t), \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ik}(\bar{r}, t) \quad (4)$$

(4) funciones de un espacio vectorial de 4 dimensiones con componentes x_1, x_2, x_3, t variando sobre t_0 .

Un campo tensorial se dice homogéneo si no tiene dependencias espaciales en este caso (4) se reduce a

$$\rho = \rho(t), \quad \bar{A} = \bar{A}(t), \quad T_{ik} = T_{ik}(t)$$

Se supondrán los campos tensoriales continuos es decir

$$\lim_{|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0} [A_{i_1 i_2 \dots i_n}(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - A_{i_1 i_2 \dots i_n}(\bar{r})] = 0$$

El algebra de tensores se aplica a los campos tensoriales, siempre y cuando involucren operaciones relacionadas con el mismo punto espacial. Ejemp' la suma de los campos tensoriales del mismo orden y la misma dimensión física es un nuevo campo tensorial del mismo orden

Integral de línea, CIRCULACIÓN

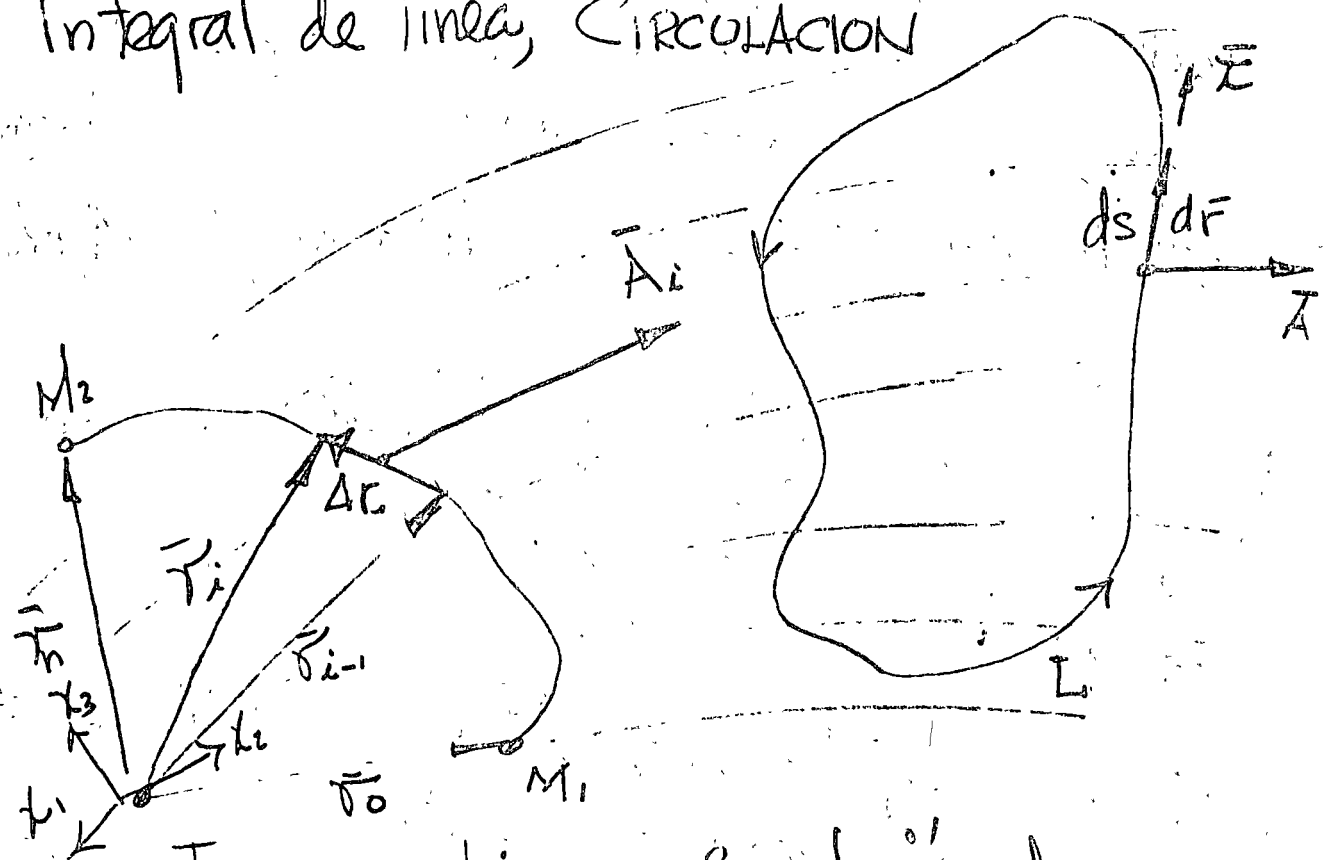


Fig.1 Integral de Línea y circulación de un campo vectorial

Sean \$M_1, M_2\$ cualquier curvas en un campo vectorial \$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})\$ (Fig.1), supongase que subdividimos \$M_1, M_2\$ en \$n-1\$ puntos de tal modo que los vectores \$\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\$ donde \$M_1\$ y \$M_2\$ tienen vectores de posición \$\vec{r}_0\$ y \$\vec{r}_n\$ resp., sea la suma

$$\sum_{i=1}^n \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$

donde \$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\$ y \$\vec{A}_i\$ es el valor

6
 del campo en $\Delta \vec{r}_i$, el límite de esta suma cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$ es llamado integral de línea de \vec{A} a lo largo de $M_1 M_2$

$$\lim_{\substack{(\Delta \vec{r})_{\max} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_{M_1 M_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1 M_2} (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3)$$

$d\vec{r}$ es dirigido tangente a la curva en cada punto y su magnitud es ds

$$|d\vec{r}| = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} = ds$$

cuando la integral de línea se considera en un contorno cerrado L (Fig. 1) (\vec{e} vect. unitario tangente a L y $d\vec{r} = \vec{e} ds$)

La integral

$$\Gamma = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

es llamada la circulación del vector \vec{A} sobre el contorno L

Si \vec{A} es un campo de fuerza, en el caso Γ es el trabajo realizado por la fuerza moviendo una partícula sobre L . 7)

4 TEOREMAS DE GAUSS, GREEN Y STOKES

Dos teoremas básicos en análisis matemática

TEOREMA DE GAUSS. dado un volumen V limitado por una superficie cerrada S , supónganse las funciones

$$P(x_1, x_2, x_3), Q(x_1, x_2, x_3), R(x_1, x_2, x_3)$$

y sus derivadas $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \frac{\partial R}{\partial x_3}$

son continuas en $V \cup S$ entonces

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dV = \iint_S [P \cos(\vec{n}, x_1) + Q \cos(\vec{n}, x_2) + R \cos(\vec{n}, x_3)] dS \quad (5)$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie S (Fig. 2)

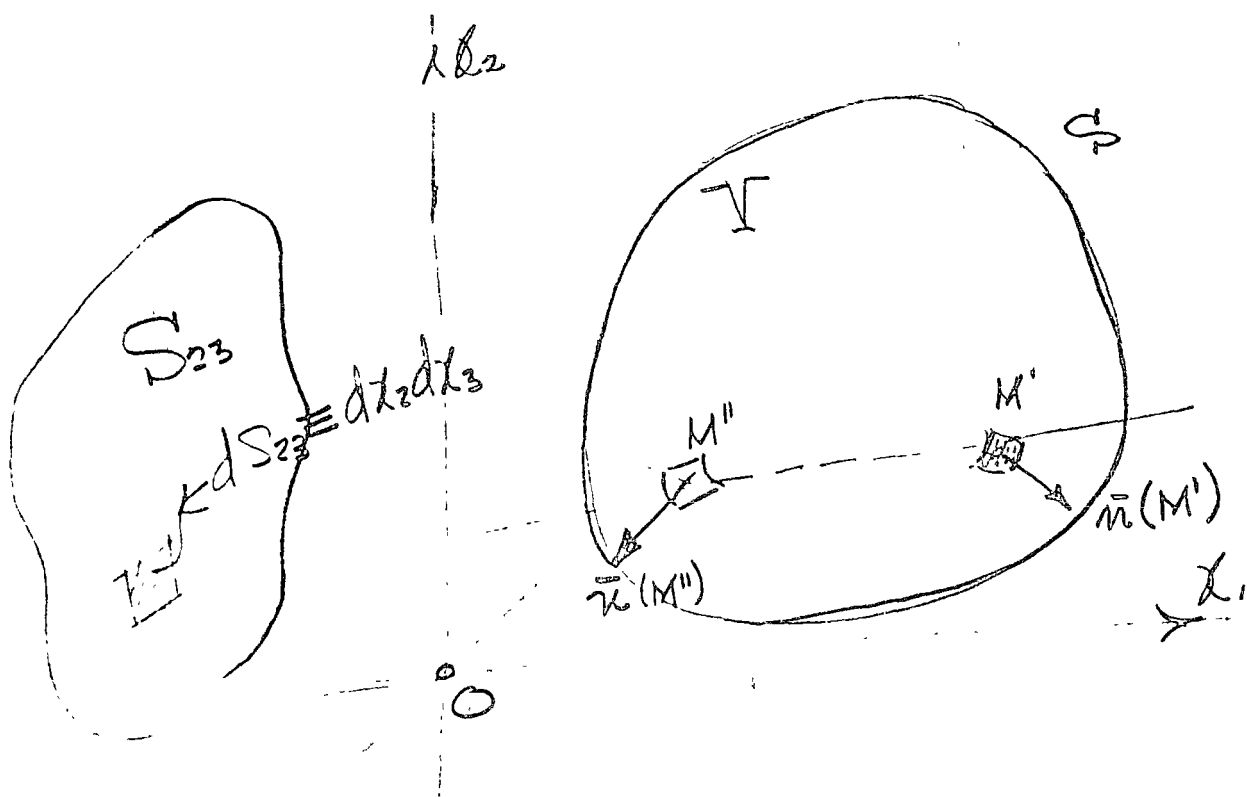


Fig. 2 Ilustración del teorema de Gauss.

Proveba: Supóngase que n líneas paralelas a x_1 intersecta a V en solo dos puntos M' y M'' , con vectores unitarios normales $\bar{n}(M'')$ y $\bar{n}(M')$ como se muestra en la figura. Entonces, si S_{23} es la proyección de $V = S$ sobre el plano x_2, x_3 , se tiene

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x_1} dV &= \iint_{S_{23}} \left(\int \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 \right) \frac{dx_2 dx_3}{dS_{23}} \\ &= \iint_{S_{23}} [P(M') - P(M'')] dS_{23} \end{aligned} \quad (5a)$$

pero el elemento dS_{23} de la proyeccion S_{23} puede ser expresado en términos de los elementos de la superficie S en los puntos M y M''

$$dS_{23} = dS(M) \cos[\bar{n}(M), x_1] = -dS(M'') \cos[\bar{x}(M''), x_1]$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x_1} dV &= \iint_S P(M) \cos[\bar{x}(M), x_1] dS(M) \\ &= \iint_S P \cos(\bar{n}, x_1) dS \end{aligned} \quad (6)$$

donde M es un punto variable de la superficie S

Las formulas

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_2} dV = \iint_S Q \cos(\bar{n}, x_2) dS \quad (7)$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial x_3} dV = \iint_S R \cos(\bar{n}, x_3) dS \quad (8)$$

se prueban en la misma forma si no hay paralelos a x_2 y x_3 intersección S en solo dos

Dado un campo vectorial

$$\bar{A} = \bar{A}(\bar{r})$$

Sean

$$A_1 = P(x_1, x_2, x_3) = P(x_i)$$

$$A_2 = Q(x_1, x_2, x_3) = Q(x_i)$$

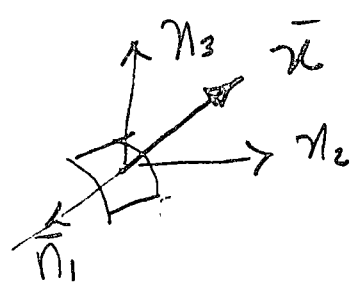
$$A_3 = R(x_1, x_2, x_3) = R(x_i)$$

Las componentes de \bar{A} en un sistema de coordenadas rectangulares de coord x_1, x_2, x_3

El teorema de Gauss toma la forma

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV \tag{9}$$

$$= \iint_S [A_1 \cos(\bar{n}, x_1) + A_2 \cos(\bar{n}, x_2) + A_3 \cos(\bar{n}, x_3)] dS$$



$$n_1 = \cos(\bar{n}, x_1), \quad n_2 = \cos(\bar{n}, x_2), \quad n_3 = \cos(\bar{n}, x_3)$$

y (9) nos queda

$$\iiint_V \underbrace{\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)}_{\text{Post. Integ. Vectorial}} dV = \iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} dS \tag{10}$$

Teorema de Green (Caso particular
del teorema de Stokes en sup. planas)

Dada una superficie plana S limitada
por un contorno cerrado L , supongase que
las funciones

$$P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)$$

y sus derivadas
 $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$

son continuas en $S \cup L$, Entonces

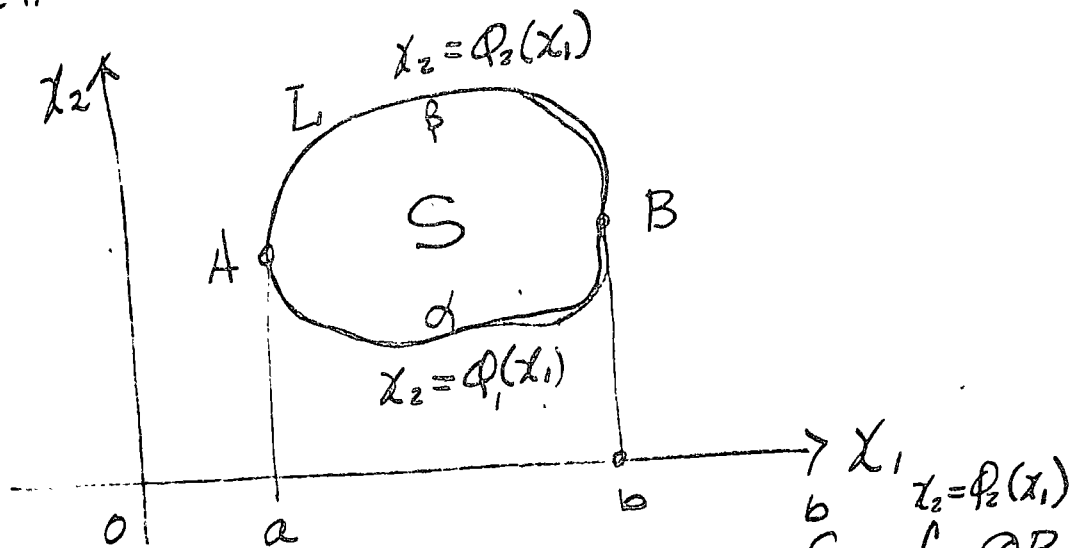
$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dS = \oint_L (P dx_1 + Q dx_2) \quad (11)$$

La dirección de la integral de línea en
sentido contrario a las manecillas del reloj

Prueba: Supongase que ~~ninguna~~

12

líneas paralelas a Ox_1 y Ox_2 intersecta a L en no más de dos puntos se tiene



$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial x_2} dS = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{x_2=\phi_1(x_1)}^{x_2=\phi_2(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2$$

$$= \int_a^b \left\{ P[x_1, \phi_2(x_1)] - P[x_1, \phi_1(x_1)] \right\} dx_1$$

$$= \int_a^b \underbrace{P[x_1, \phi_2(x_1)]}_{\oint A \text{ B B}} dx_1 - \int_a^b \underbrace{P[x_1, \phi_1(x_1)]}_{\oint A \text{ A B}} dx_1$$

$$= - \int_{B \text{ B A}} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A \text{ A B}} P(x_1, x_2) dx_1$$

$$\oint P(x_1, x_2) dx_1$$

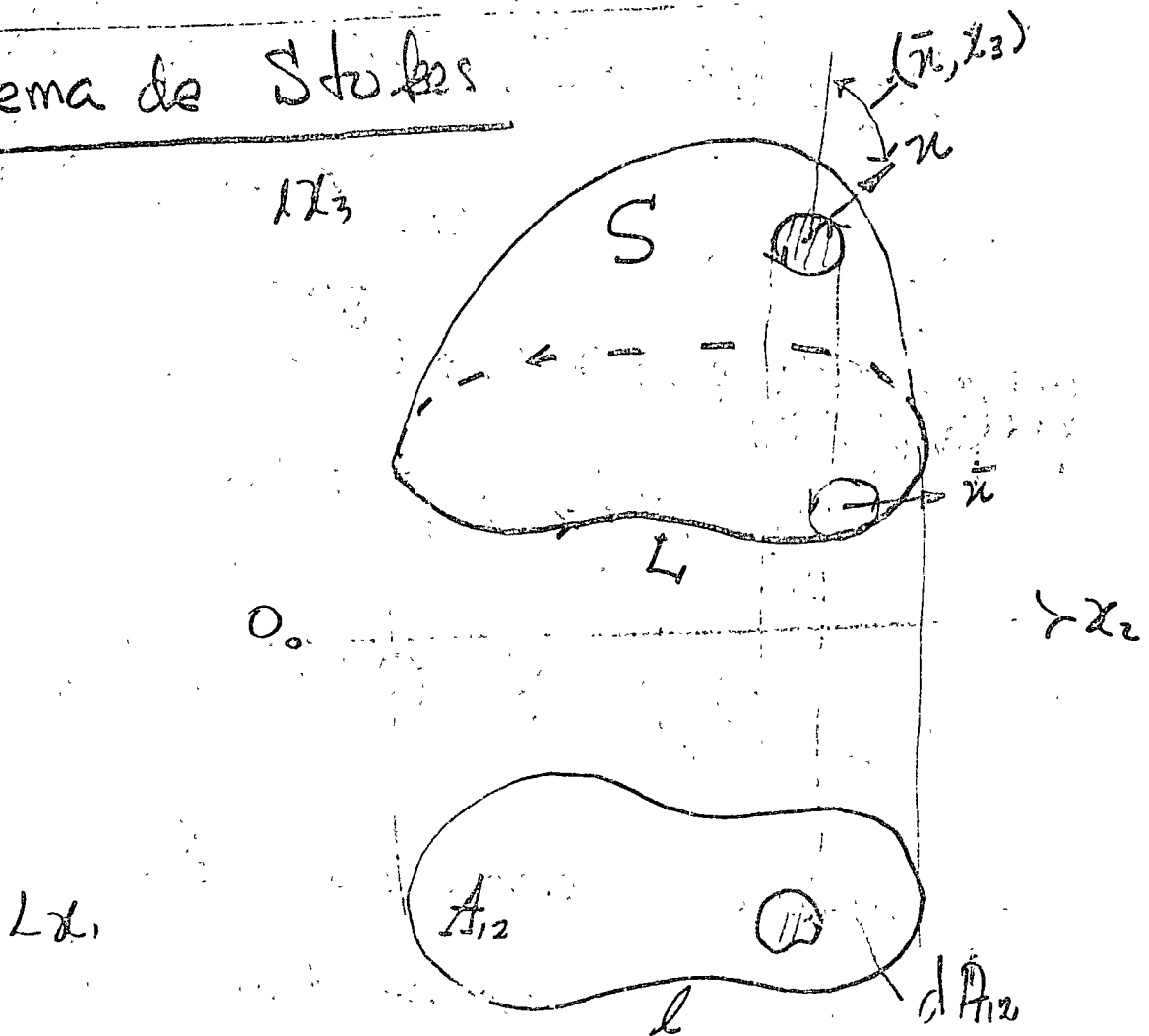
(13)

La fórmula

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x_1} dS = \oint_L Q dx_2 \quad (14)$$

se prueba en la misma forma.
Restando (13) de (14) se obtiene (11)

Teorema de Stokes



Dada una superficie espacial S limitada por un contorno espacial cerrado L , supongase que las funciones

$$P(x_1, x_2, x_3), Q(x_1, x_2, x_3), R(x_1, x_2, x_3)$$

y sus derivadas

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}, \frac{\partial P}{\partial x_3}, \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_3}, \frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}$$

son continuas en $S \cup L$ Entonces

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) \cos(\bar{n}, x_1) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) \cos(\bar{n}, x_2) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \cos(\bar{n}, x_3) \right\} dS = \oint (P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3)$$

S send. cont. manecillo relas

Prueba: supongase que un plano Π a $0x_3$ intersecta S en un más de un punto. Entonces

la proyección de S sobre x_1, x_2 es una región plana A_{12} y la de L un cont. cerrado l

$$dA_{12} = dS \cos(\bar{n}, x_3), \quad \cos(\bar{n}, x_3) > 0 \quad (16)$$

I se puede rep. por $x_3 = f(x_1, x_2)$ por reemplazar la integral a lo largo de L por

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1 = \oint_L P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dx_1 \quad (17)$$

aplicando el Teorema de Green al lado derecho de (17) se tiene

$$\begin{aligned} & \oint_L P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dx_1 \\ &= - \iint_{A_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] dA_{12} \end{aligned}$$

usando (16) y regresando a las integrales sobre

S y L

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1$$

$$= - \iint_S \left[\frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right] \cos(\bar{n}, x_3) dS$$

Del calculo Def. se sabe que

$$\cos(\bar{x}, x_1) = \frac{\phi}{\pm \sqrt{1 + \phi^2 + q^2}}$$

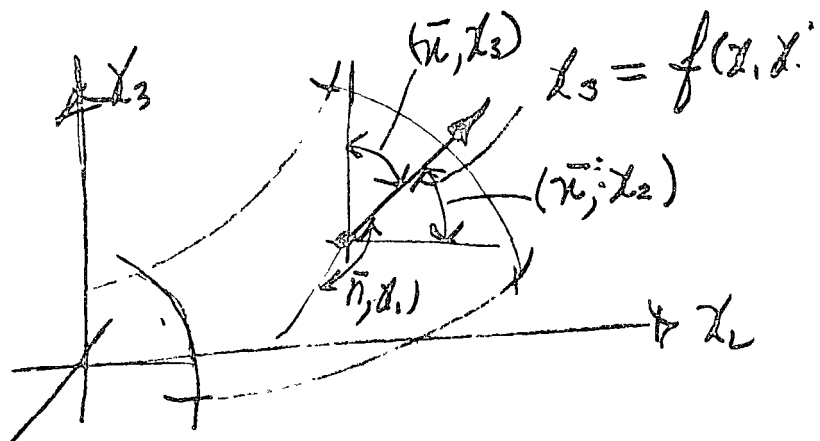
$$\cos(\bar{x}, x_2) = \frac{q}{\pm \sqrt{1 + \phi^2 + q^2}}$$

(19)

$$\cos(\bar{x}, x_3) = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \phi^2 + q^2}}$$

donde $\phi = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ $q = \frac{\partial f}{\partial x_2}$

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$



A x_1 fust que $\cos(\bar{x}, x_3) > 0$

y selee. el signo menos, de (19) se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \cos(\bar{x}, x_3) = -\cos(\bar{x}, x_2)$$

por lo tant. (18) toma la forma

$$\oint_L P dx_1 = \iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial x_3} \cos(\bar{n}, x_2) - \frac{\partial P}{\partial x_2} \cos(\bar{n}, x_3) \right] dS$$

y las formulas

$$\oint_L Q dx_2 = \iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x_1} \cos(\bar{n}, x_3) - \frac{\partial Q}{\partial x_2} \cos(\bar{n}, x_1) \right] dS \quad (20)$$

$$\oint_L R dx_3 = \iint_S \left[\frac{\partial R}{\partial x_2} \cos(\bar{n}, x_1) - \frac{\partial R}{\partial x_1} \cos(\bar{n}, x_2) \right] dS \quad (21)$$

se demuestran en la misma forma
 sumando (18) (20) y (21) se obtiene el
 teorema de Stokes

Dado un campo vectorial $\bar{A} = \bar{A}(\bar{r})$, sean

$$A_1 = P(x_1, x_2, x_3)$$

$$A_2 = Q(x_1, x_2, x_3)$$

$$A_3 = R(x_1, x_2, x_3)$$

las comp de \bar{A} en un sistema ^{coord} rectangular
 x_1, x_2, x_3 con bases ortogonales $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$. El

Teorema de Stokes toma la forma

Integr. vectorial. Post.

(18.)

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \cos(\bar{n}, x_1) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \cos(\bar{n}, x_2) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \cos(\bar{n}, x_3) \right\} dS$$

$$= \oint_L (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) = \oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$$

double $d\bar{r} = \bar{r}_1 dx_1 + \bar{r}_2 dx_2 + \bar{r}_3 dx_3$

Cuadrada de Esfuerzos de Cauchy, superficies de esfuerzos, Esfuerzos principales, Invariantes

Las componentes del tensor de esfuerzos en notación índice e Ingeniería son

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

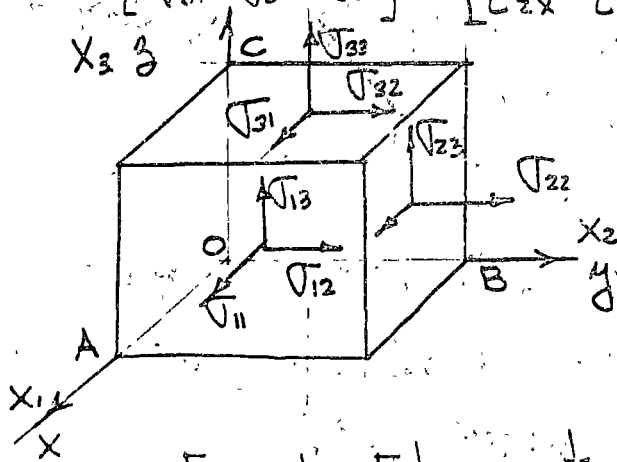


Fig. 1 Elemento diferencial actuando

los esfuerzos $[\sigma_{ij}]$

Llevando un plano a Travez de ABC y considerando su dia grama de cuerpo libre se tiene

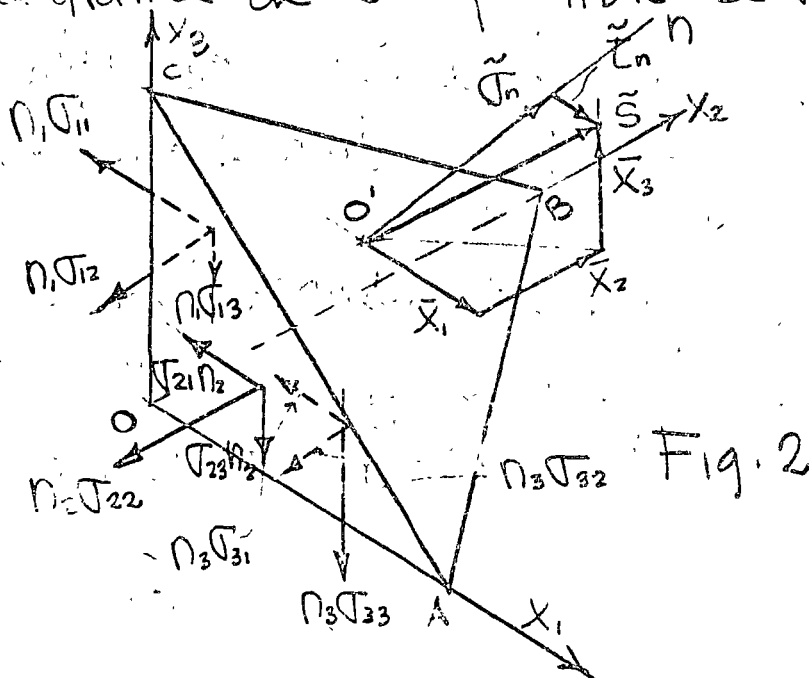


Fig. 2

En la Fig. 2 se tiene lo siguiente
 $o'n$ es normal al plano ABC, formando
 ángulos α , β y γ con respecto a los ejes
 coordenados x_1 , x_2 , y x_3 respectivamente, la
 distancia oo' es igual a r las coordenadas
 de o' son x_1, x_2, x_3 por lo tanto

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{x_1}{r}, \quad n_2 = \cos \beta = \frac{x_2}{r}, \quad n_3 = \cos \gamma = \frac{x_3}{r} \quad (2)$$

donde $\{n_i\} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ es el vector columna
 de cosenos directores de la normal al plano ABC
 ($o'n$ y oo'). Si el área ABC es considerada
 como la unidad, las proyecciones

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{área OBC} \\ n_2 &= \text{área OAC} \\ n_3 &= \text{área OAB} \end{aligned} \quad (2)$$

\bar{s} = Esfuerzo resultante actuando sobre el plano ABC
 $\{\tilde{x}_i\} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3]^T$ proyecciones de \bar{s} sobre x_i

\tilde{T}_n = Proyección de \bar{s} sobre la normal al plano ABC

\tilde{T}_n = Proyección de \bar{s} sobre el plano ABC.

Del equilibrio del elemento OABC se obtiene

$$X_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$

$$X_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \quad (3)$$

$$X_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

expresando (3) matricialmente se obtiene

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Si no existen momentos de cuerpo, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para $i \neq j$

y $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}]^T$ por lo que (4) puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{ó} \quad \{X_i\} = [\sigma_{ij}] \{n_i\} \quad (6)$$

El esfuerzo normal al plano ABC es

$$\sigma_n = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 \quad (7)$$

$$\text{ó} \quad \sigma_n = \{X_i\}^T \{n_i\} \quad (8)$$

Substituyendo (5) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2(\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1) \quad (9)$$

ó matricialmente de (6) y (8)

$$\sigma_n = \{n_i\}^T [\sigma_{ij}] \{n_i\} \quad (10)$$

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \quad (11)$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = S^2 \quad (12)$$

Es fuerzos principales. Es fuerzo principal es un valor particular del es fuerzo normal tal que $\tau_n = 0$ por lo tanto

$$X_1 = \sigma_n n_1$$

$$X_2 = \sigma_n n_2$$

$$X_3 = \sigma_n n_3$$

(13)

De (5) y (13) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n n_1 \\ \sigma_n n_2 \\ \sigma_n n_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

De donde

$$\begin{bmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

puesto que $\{n_i\} \neq 0$, entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

De (16) se obtiene.

$$\sigma_n^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\sigma_n^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2)\sigma_n - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2) = 0 \quad (17)$$

Las tres raíces de la ecuación (17) nos determinan

los valores de los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 cuyos coeficientes nos representan los invariantes de esfuerzos, dependen de σ_1, σ_2 y σ_3 independientes del sistema de ejes coordinados

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \equiv \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (18)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \equiv \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

donde I_1, I_2 e I_3 son los invariantes de esfuerzos, otras expresiones de invariantes pueden formarse de (18) por ejemplo

$$2I_1^2 - 6I_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \quad (19)$$

(19) se usa en la expresión de la energía de deformación, su uso se discutirá posteriormente

Después de diagonalizar el tensor de esfuerzos $[\sigma_{ij}]$ el elemento de la Fig. 2 se muestra en la Fig. 3, y las ecuaciones de equilibrio (5) quedan:

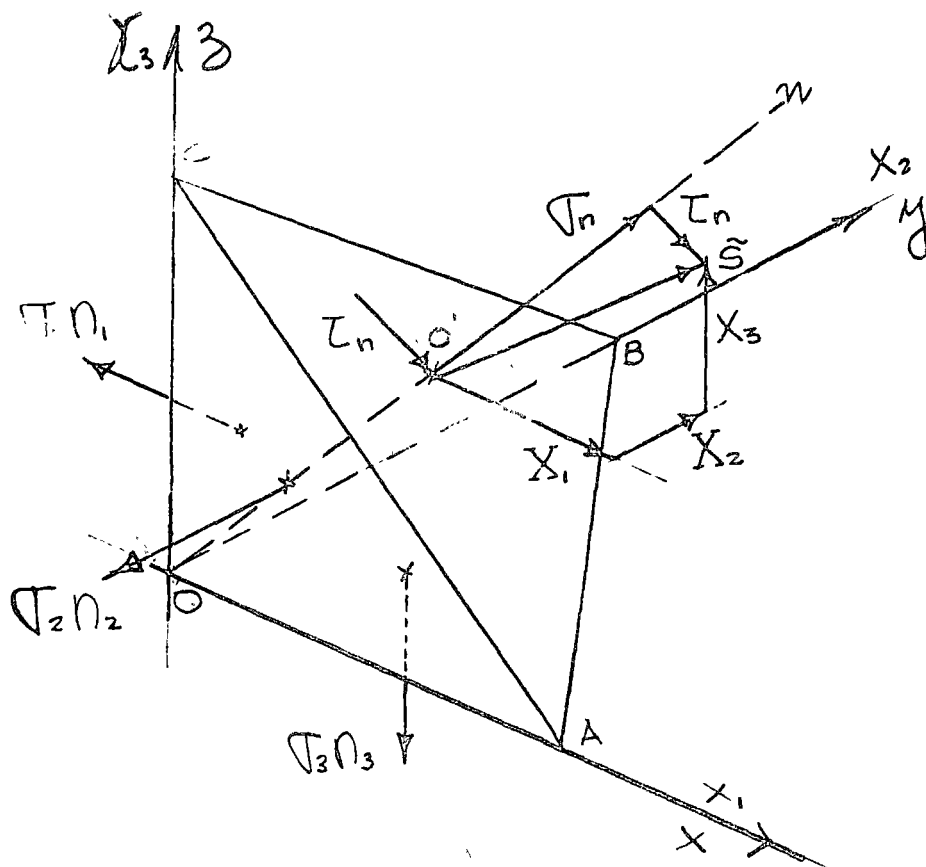


Fig. 3 Componentes del tensor de esfuerzos diagonalizado

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

En (20) las componentes $\{X_i\}$, $\{n_i\}$, $\bar{\sigma}_i, \bar{\tau}_n, \bar{l}_n$ son diferentes a las (5) que se muestran en Fig. 2.

De geometría se conoce que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (21)$$

Substituyendo (20) en (21) se obtiene la ecuación

$$\frac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{X_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (22)$$

la cual representa una superficie elipsoidal en el espacio de esfuerzos σ_i , algunos autores lo denominan elipsoide de Lamé, en la Fig. 4 se muestra su perspectiva isométrica. Para el conjunto

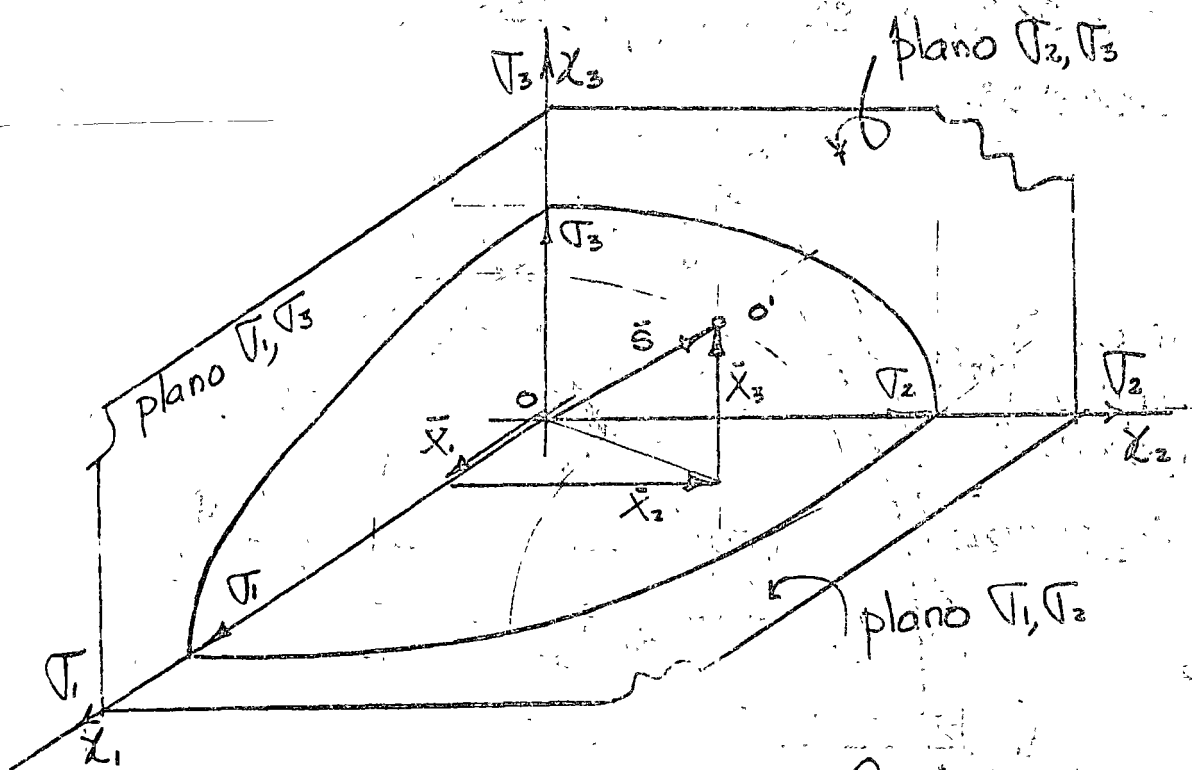


Fig. 4 Elipsoide de Lamé referido al espacio de esfuerzos σ_i , (un octaedro).

de planos con cosenos directores $\{n_i\}$ a través de O Fig. 2, le corresponde el conjunto de componentes $\{X_i\}$, los cuales junto con los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 forman la superficie elipsoidal de la Fig. 4.

De (20), si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, la superficie es esférica.
 Si $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$ y $\sigma_3 = 0$ la superficie es cilíndrica de sección elíptica con eje contenido en el eje σ_3 . Si $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_3 = 0$ la superficie es cilíndrica de sección circular con eje contenido en el eje σ_3 , Si $\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ la superficie son dos planos paralelos al plano σ_2, σ_3 .
 a continuación se indican los casos particulares mencionados

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma^{-2} \quad (24)$$

$$\sigma \equiv S$$

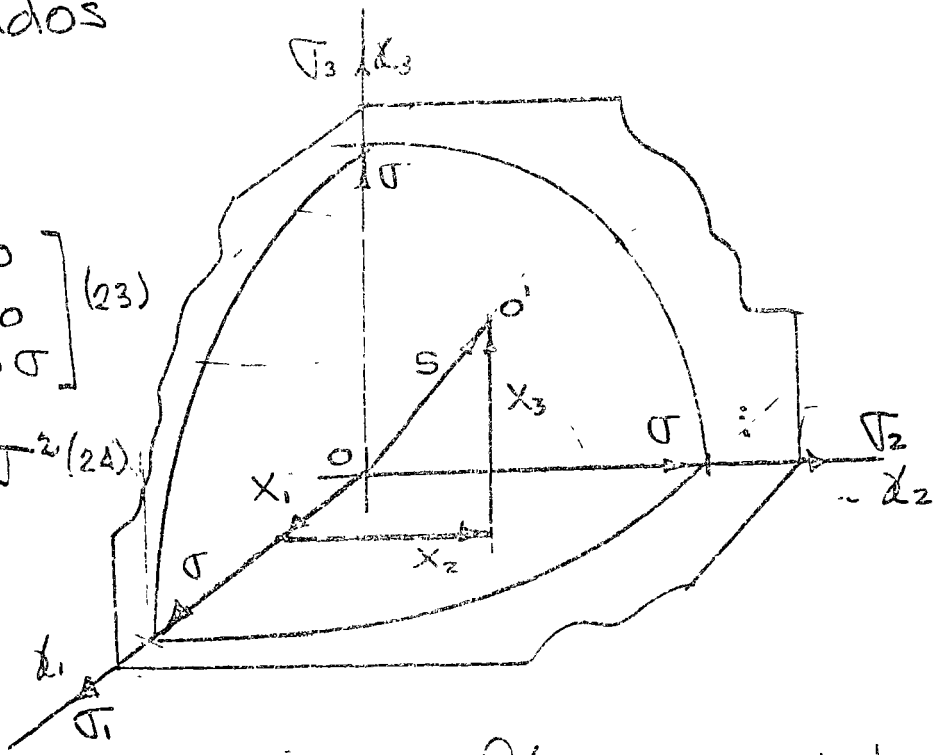


Fig. 5 Superficie esférica, equivalente a una Tensión o compresión uniforme o hidrostática

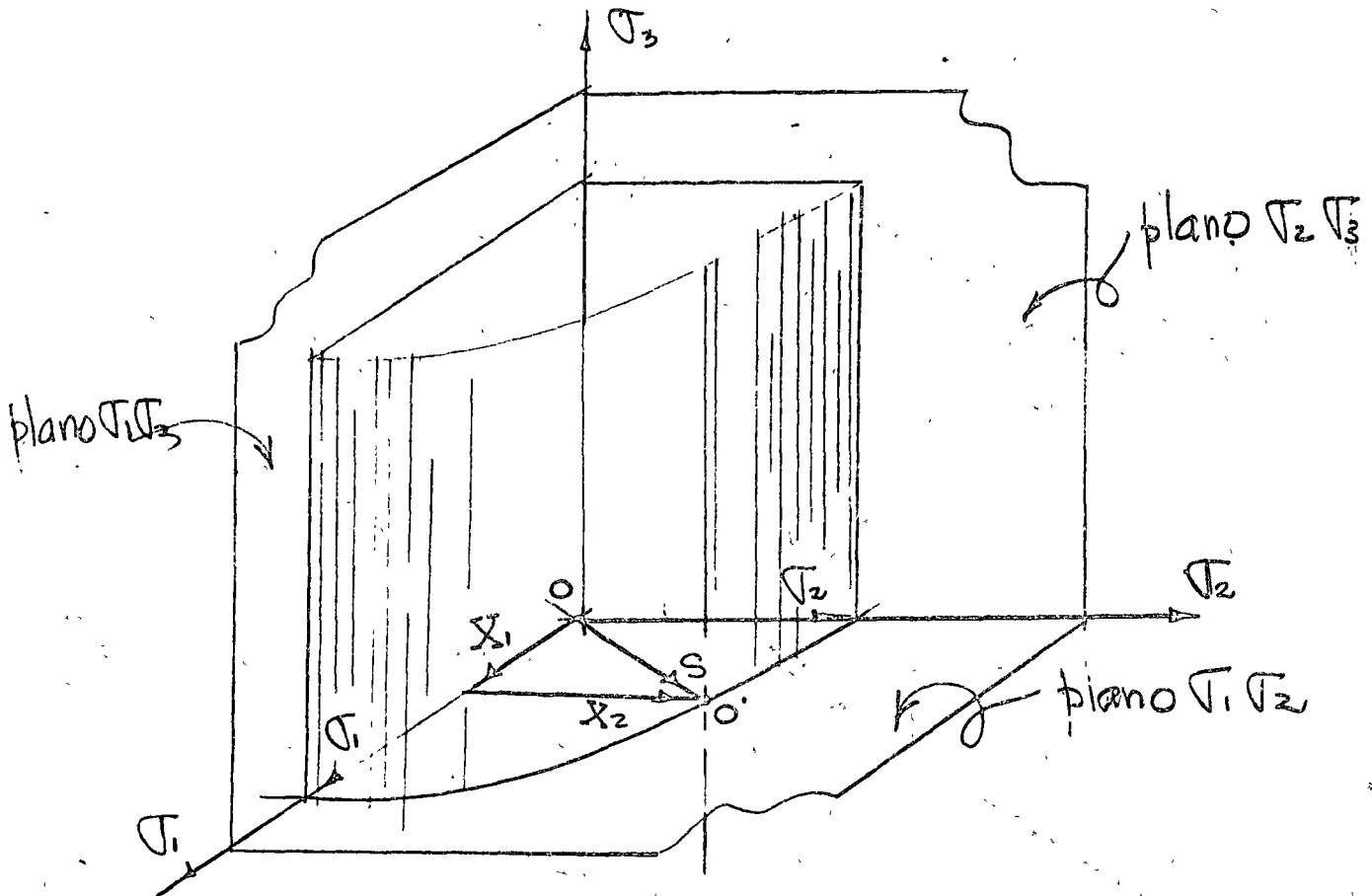


Fig. 6 Superficie cilíndrica de sección elíptica directrices paralelas al eje. $O\sigma_3$.

Componentes del tensor de esfuerzos: $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (25)

Ecuación de la superficie: $\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$ (26)

Como caso particular de (25) si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ se tiene un cilindro con componentes del tensor de esfuerzos

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

y ecuación de la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 = \sigma^2 \quad (28)$$

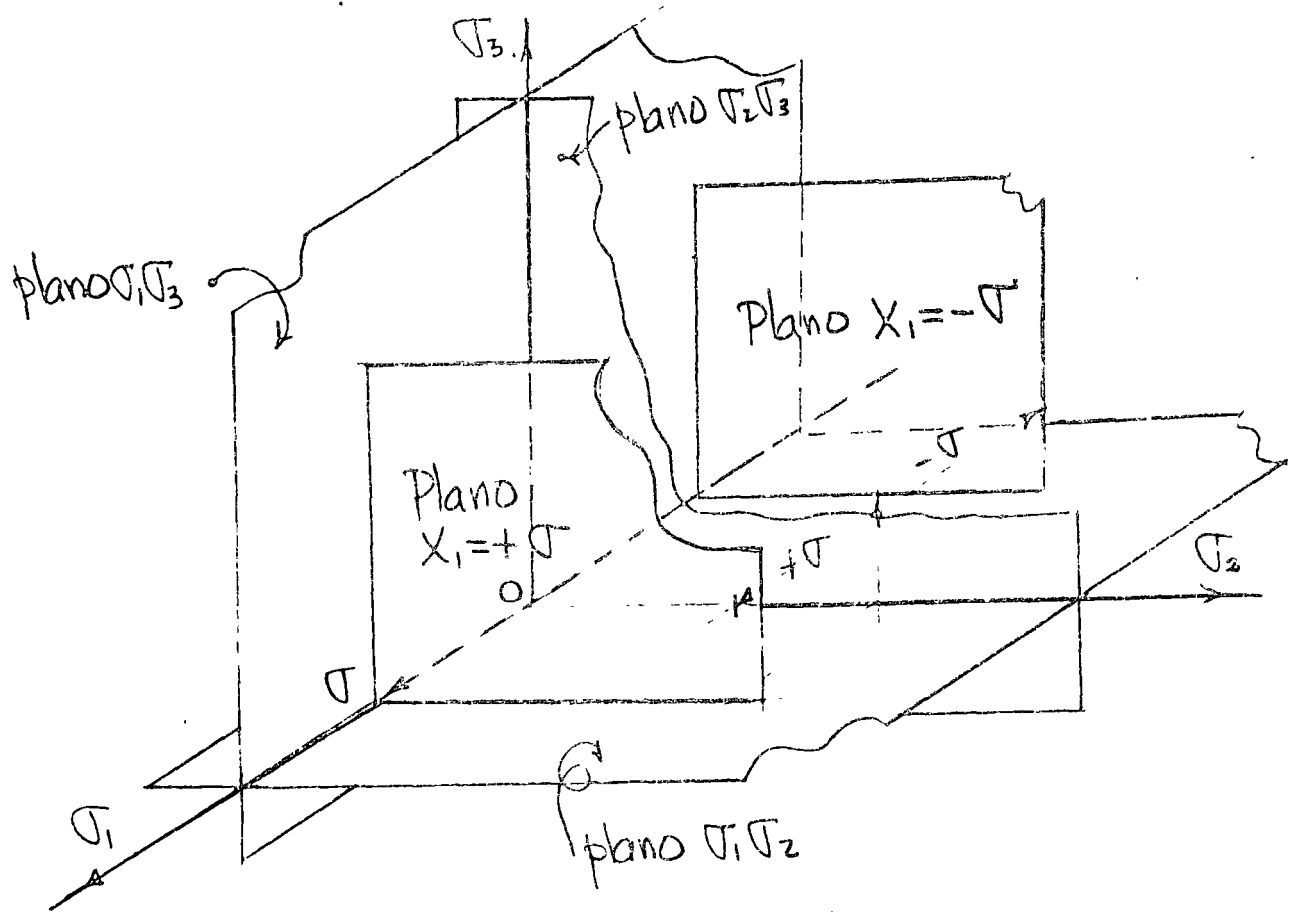


Fig. 6 Superficies planas paralelas al plano $\sigma_2\sigma_3$

Componentes del tensor de esfuerzos:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Ecuación de la Superficie:

$$X_1 = \pm \sigma \quad (30)$$

La ecuación (21) en el espacio de cosenos directores nos representa una esfera de radio unitario como se muestra en la Fig. 7

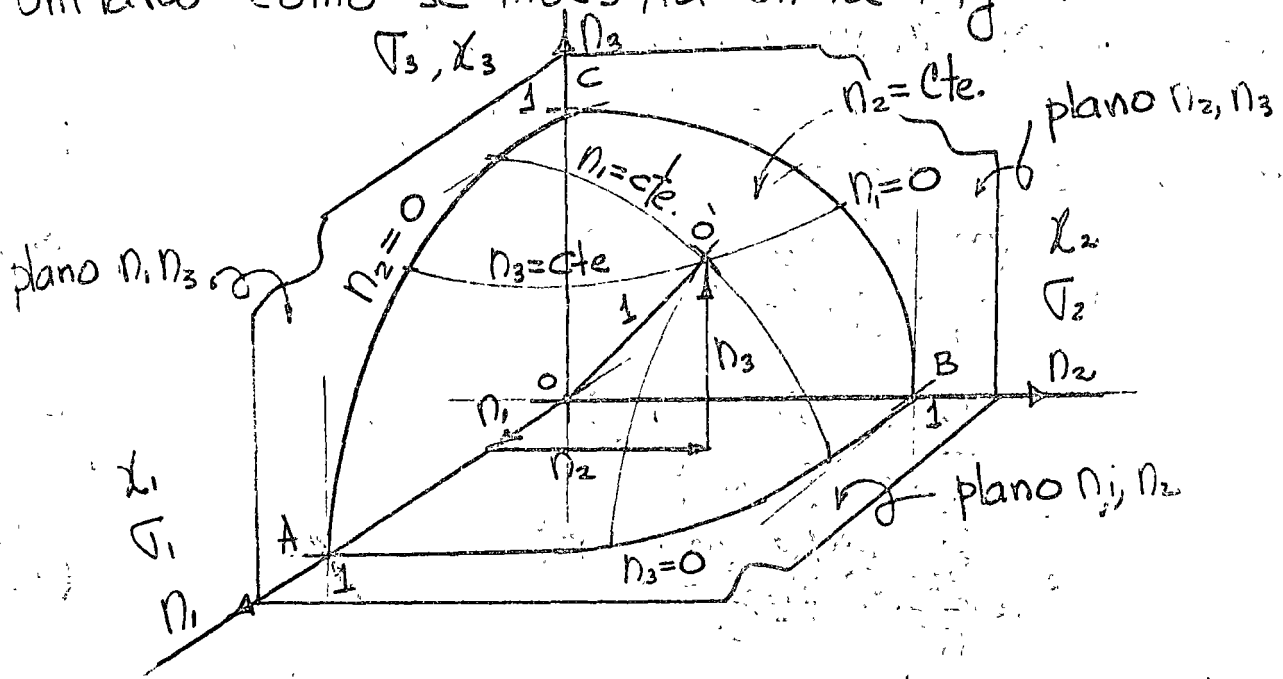


Fig. 7 Espacio de cosenos directores. un octagono de la esfera de Mohor.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OO'} = 1$$

De la Fig. 3 se observa que substituyendo (20) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (31)$$

Substituyendo (20) y (31) en (11) y (12) se obtiene.

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (32)$$

de las ecuaciones (31), (32) y (21) se obtiene el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas no lineal en n_1, n_2 y n_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ f(\sigma_1 n_1^2) & f(\sigma_2 n_2^2) & f(\sigma_3 n_3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \tau_n^2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

de (33) se obtiene

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \quad (34)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_1 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (35)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_n)(\sigma_2 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (36)$$

De la Fig. 7 considerando $n_1 = \text{constante}$ de la ecuación (34) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2 \quad (37)$$

efectuando operaciones algebraicas en (37) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \left[\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right]^2 + \tau_n^2 = \text{Constante}$$

de donde: $x_1^2 = \left[\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right]^2 + \tau_n^2 = (x - a)^2 + y^2$ que

es la ecuación de un círculo a una distancia $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

del origen por lo tanto el radio r_1 que haciendo centro en $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ localiza el punto de coordenadas

$\sigma_n \tau_n$ en el diagrama de Mohor es

$$\tau_1 = \sqrt{n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (38)$$

Similarmente suponiendo $n_2 = \text{constante}$ de (35) se obtiene

$$\tau_2 = \sqrt{n_2^2 (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (39)$$

Similarmente suponiendo $n_3 = \text{constante}$ de (36) se obtiene

$$\tau_3 = \sqrt{n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2} \quad (40)$$

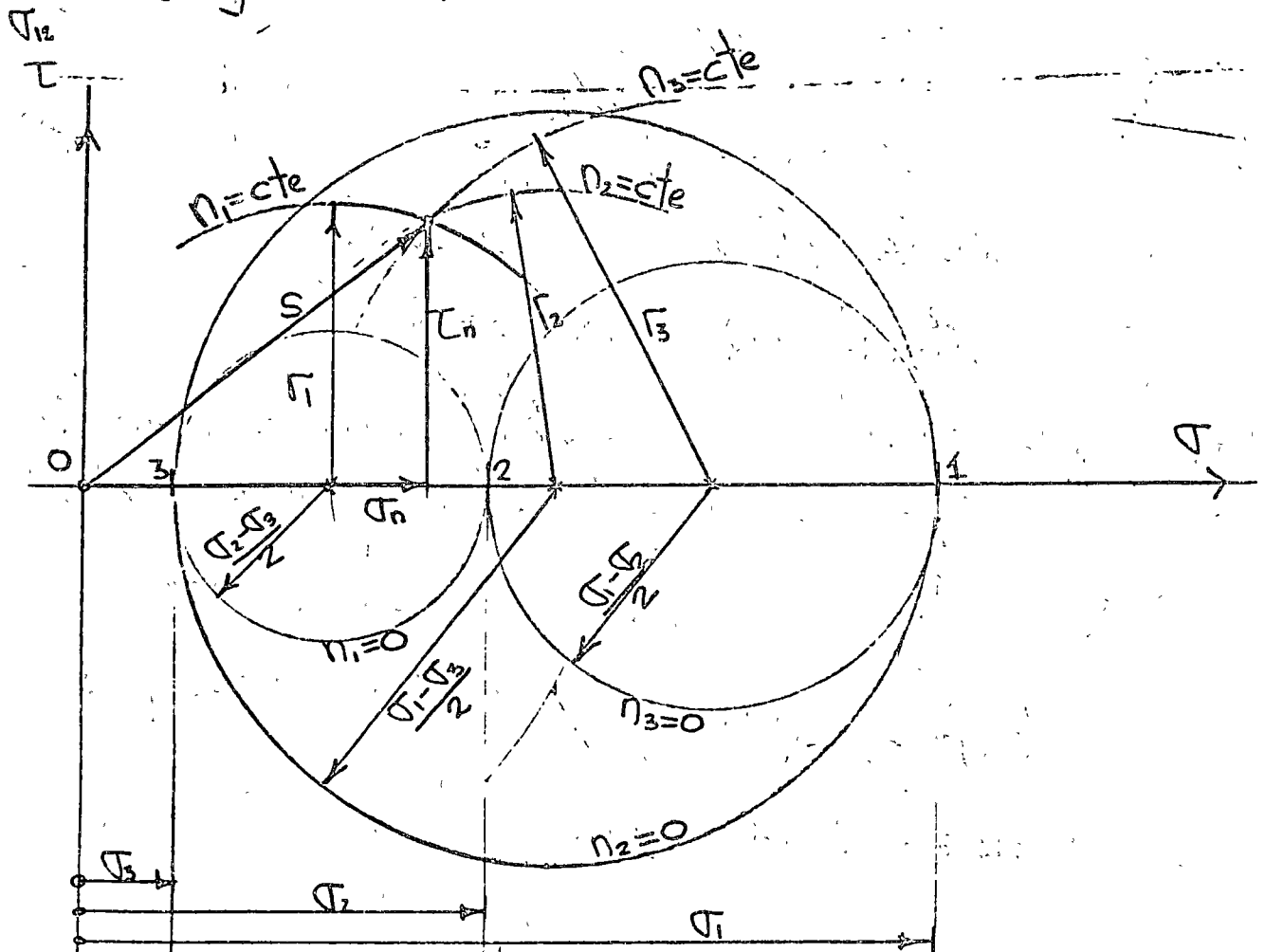


Fig. 8 Circulo de Mohor en Tres dimensiones de determinar τ_n, L_n , conociendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y n_1, n_2 y n_3

2- Esfuerzos cortantes máximos, esfuerzo esférico, esfuerzo octaédrico

Sean x_1, x_2, x_3 las direcciones principales (Fig. 3) y n_1, n_2, n_3 los cosenos directores de cierto plano $\triangle ABC$, se tiene que

$$\tau_n^2 = s^2 - \sigma_n^2 \quad (41)$$

$$s^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (42)$$

$$\sigma_n^2 = (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)^2 \quad (43)$$

substituyendo (43) y (42) en (41) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)^2 \quad (44)$$

Para determinar las direcciones máximas de corte de $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ se elimina n_3 de (44) y se determinan

$$\frac{\partial}{\partial n_1} (\tau_n^2) = 0; \quad n_1 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} (\tau_n^2) = 0; \quad n_2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0 \quad (46)$$

las soluciones de (45) y (46) que hacen τ_n máximo

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n_2 = 0 & n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{" } n_1 = 0 & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{" } n_3 = 0 & n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{array} \quad \text{y similarmente}$$

se repiten los cálculos en (44) se elimina n_1 y después n_2 . Conviene observar que en (45) y (46)

no hay soluciones de n_1 y n_2 que sean ambos diferentes de cero, porque las expresiones dentro del parentesis no pueden anularse.

	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n_2	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n_3	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Esf. Principales
 $\tau_n = 0$

Cortantes
máximos

Tabla 1 Cosenos directores

Repetiendo los cálculos en (44), eliminando n_1 y determinando n_2 y n_3 tal que τ_n sea máximo y después n_2 y determinando n_1 y n_3 tal que τ_n sea máximo se obtienen los valores:

$$(\tau_{\max})_1 = \tau_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \quad (47)$$

$$(\tau_{\max})_2 = \tau_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$(\tau_{\max})_3 = \tau_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

de (47) y (32) se puede expresar τ_n en la siguiente forma

$$\tau_n^2 = 4(n_1^2 n_2^2 \tau_3^2 + n_2^2 n_3^2 \tau_1^2 + n_1^2 n_3^2 \tau_2^2) \quad (48)$$

Las 3 primeras columnas de la Tabla 1 dan las direcciones de los planos coordenados de las direcciones principales para ellos $\tau_n = 0$ y (32) es un mínimo, las tres columnas restantes dan planos a través de un eje principal bisectando los otros dos direcciones de esfuerzos principales. sustituyendo los valores de Tabla 1 en (48)

se obtienen los valores de los esfuerzos cortantes máximos (47), los lados del octaedro mostrado en la Fig 9 son las direcciones principales de cortante, y las direcciones λ_1, λ_2 y λ_3 son las direcciones

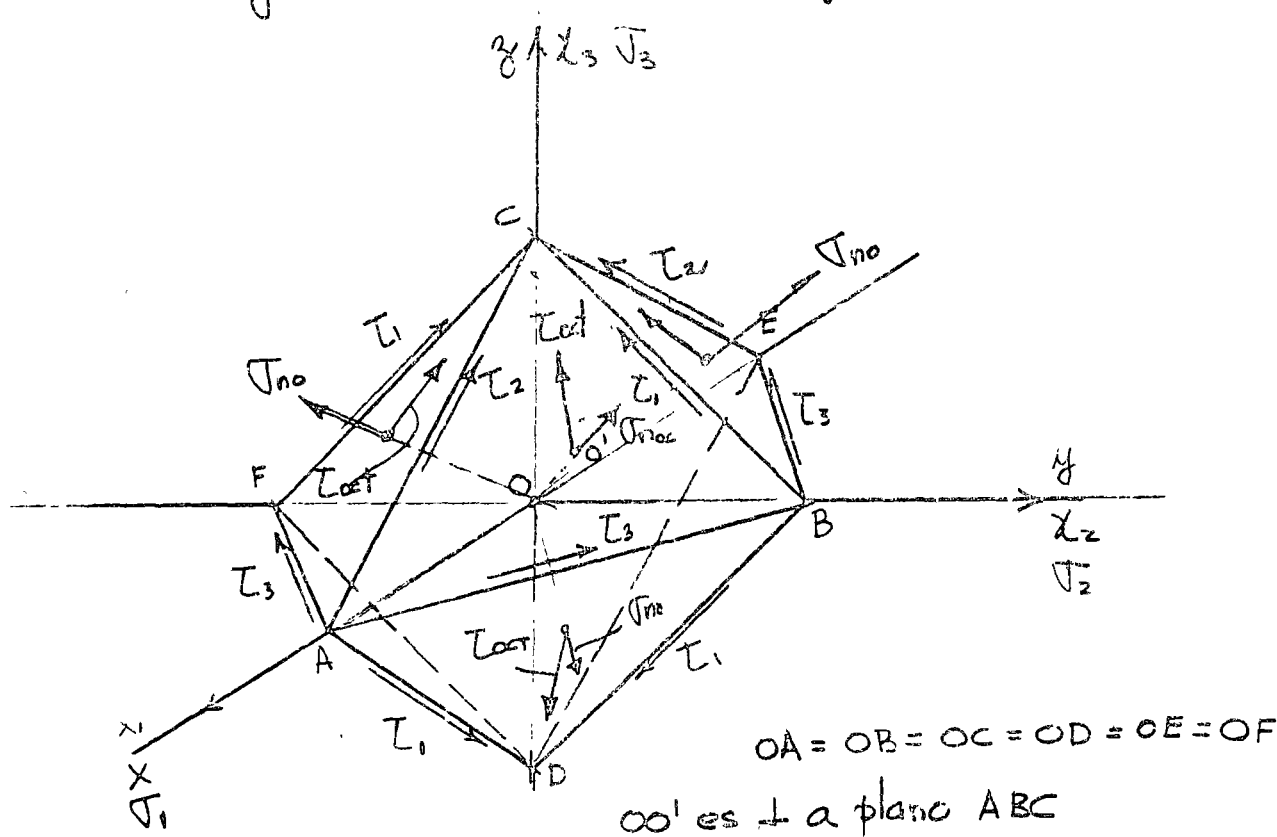


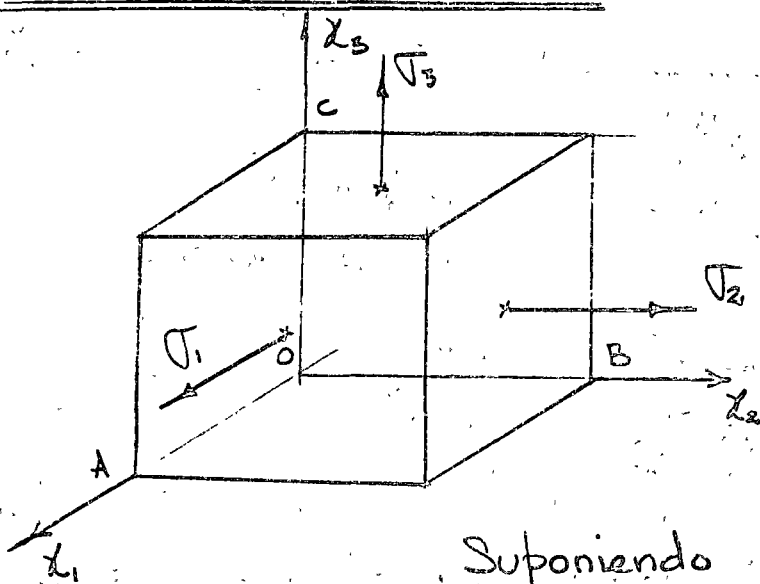
Fig. 9 octaedro regular cuyos lados son las direcciones de esfuerzo cortante máximo. principales σ_1, σ_2 y σ_3 , la normal al tetraedro OABC tiene cosenos directores $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\alpha = \beta = \gamma = 54.76^\circ$) de (31) el esfuerzo normal es igual a

$$\sigma_{n_0} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (48)$$

(48) se denomina esfuerzo medio, esférico o hidrostático, el esfuerzo de corte correspondiente de (44) es

$$\tau^2 = \frac{1}{6} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

TEORIAS DE FALLA



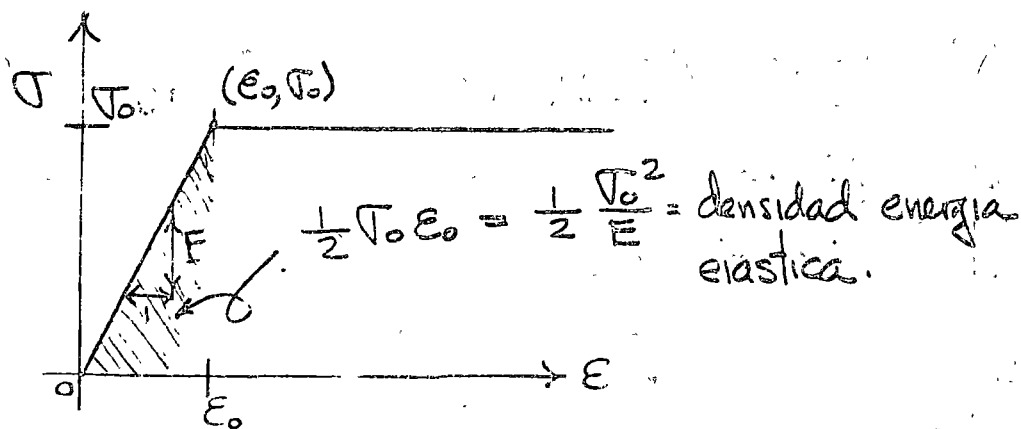
Suponiendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Fig. 10

En la Fig. 1, despues de diagonalizar las componentes del tensor de esfuerzos, se tiene

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

se trata de obtener la superficie $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ en la cual el medio entra a falla plástica, a continuación se presenta el diagrama idealizado esfuerzo deformación en condiciones uniaxiales



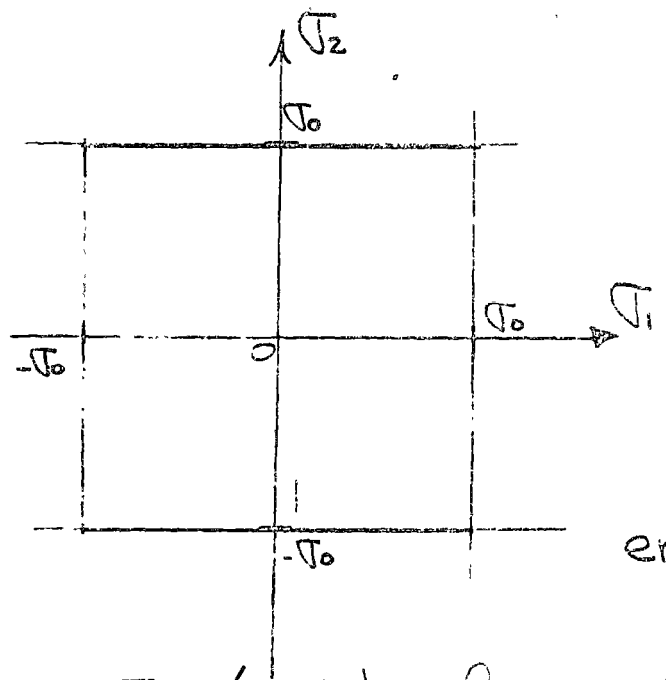
a) Teoría del Máximo esfuerzo (Rankine)

Se supone que $\sigma_1 = \sigma_0'$ o $\sigma_3 = \sigma_0''$

σ_0' esfuerzo de fluencia en tensión

σ_0'' " " " " " " compresión

o. σ_0' y σ_0'' pueden ser dos esfuerzos de fluencia en dos direcciones perpendiculares, suponiendo un estado plano de esfuerzos $\sigma_3 = 0$ y que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ se obtiene el diagrama de esfuerzos de la Fig. 12



Planos de falla

$$\sigma_1 = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_2 = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_3 = \pm \sigma_0$$

Superficie cúbica
en el espacio de esfuerzos

Fig. 12 Teoría del esfuerzo máximo en esfuerzos planos

b) Teoría de la deformación máxima (Saint-Venant)

Condición triaxial de esfuerzos que alcanza la deformación de fluencia, ϵ_0 .

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (52)$$

de (52) la superficie de esfuerzos referida a

○ espacio de esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ es

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_0) - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad (53)$$

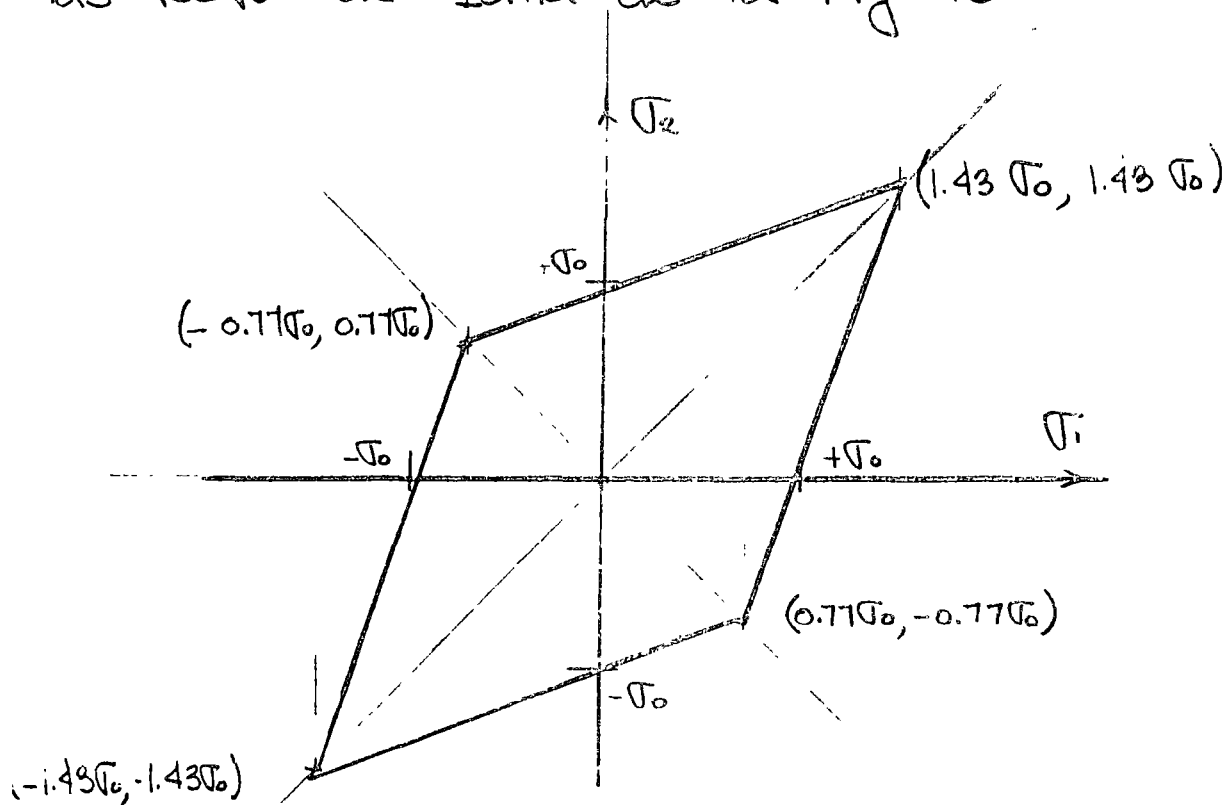
en (53) suponiendo $\sigma_3 = 0$ y para $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (esfuerzos planos) se obtiene para $\nu = 0.3$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 - \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 - \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 - 0.3} \sigma_0 = 1.43 \sigma_0 \end{aligned} \quad (54)$$

Si: $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 + \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 + 0.3} \sigma_0 = 0.77 \sigma_0 \end{aligned} \quad (55)$$

○ llevando los valores (54) y (55) al plano σ_1, σ_2 del espacio de esfuerzos se obtiene las rectas de falla de la Fig. 13



1) Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Coulomb)

Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ Coulomb establece que la falla se alcanza cuando

$$(\tau_s)_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (56)$$

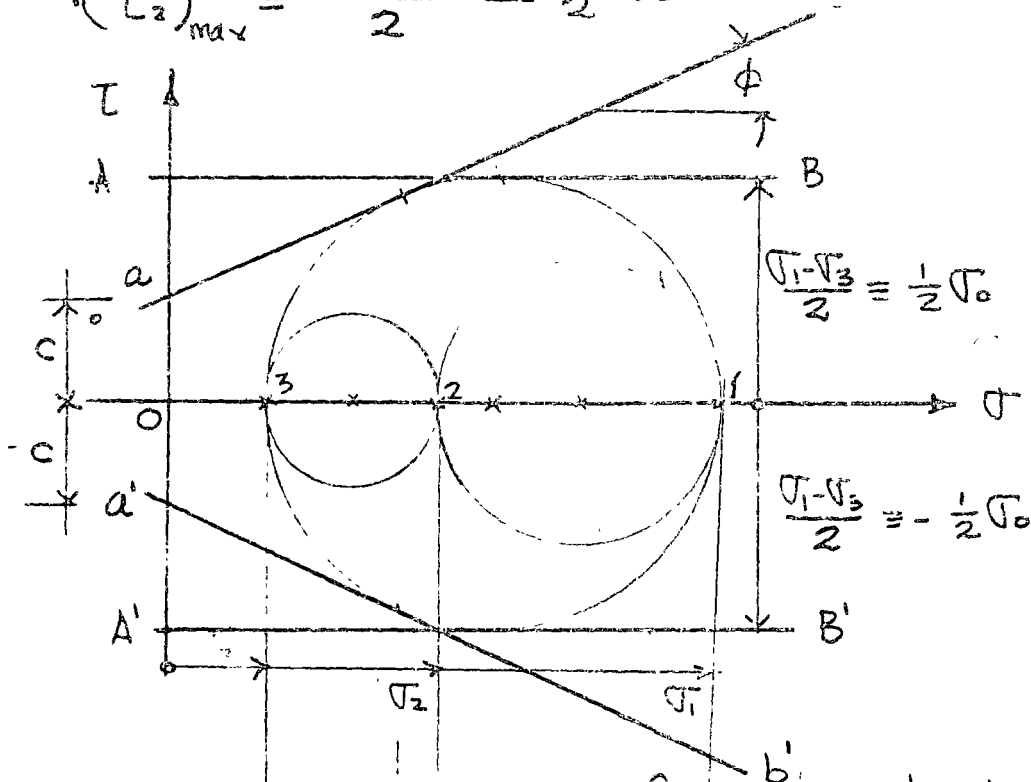


Fig. 13 Teoría del esfuerzo cortante máximo

(56) en el diagrama de Mohr establece como rectas de falla a AB y $A'B'$ en Fig. 13 cuando el ángulo de fricción interna $\phi = 0$, y cuando $\phi > 0$ las rectas de falla son, las ab y $a'b'$ cuya ecuación es igual a

$$\tau_{max} = c + \sigma \tan \phi \quad (57)$$

c = cohesión o resistencia al esfuerzo cortante puro

ϕ = ángulo de fricción interna

--- la falla

○ c y ϕ son constantes constitutivas experimentales que se pueden obtener mediante una prueba uniaxial de ruptura. La ecuación 56 en el plano de esfuerzos σ_1, σ_3 se muestra en la Fig. 14.

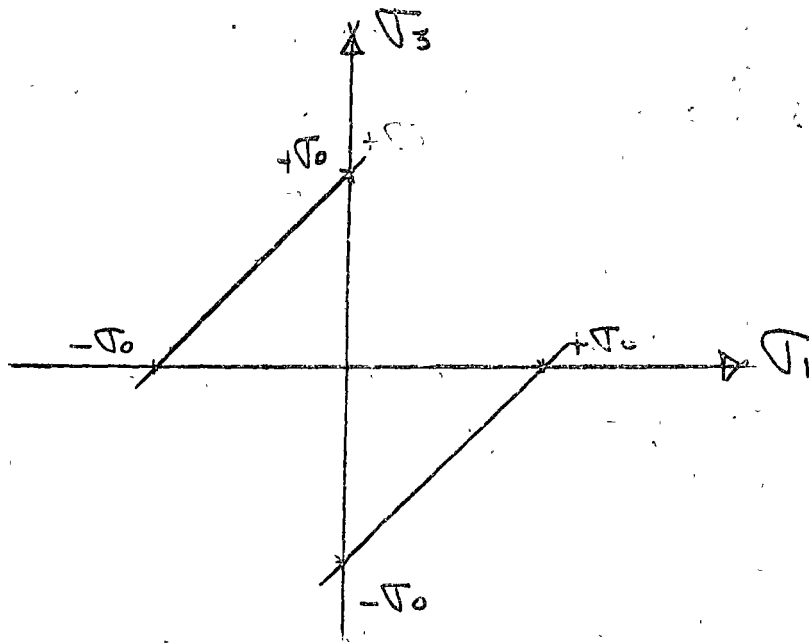


Fig. 14 Teoría del esfuerzo cortante máximo

d) Teoría de la máxima energía de deformación (Beltrami, Haig)

La densidad de energía en un medio elástico lineal viene dada por:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (58)$$

○ de la Fig. 11 la densidad de energía hasta el límite elástico σ_0 es:

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E} \quad (59)$$

de (58) y (59) se obtiene la superficie de falla

$$f(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_0^2 = 0 \quad (60)$$

En esfuerzos planos $\sigma_3 = 0$ se obtiene

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \nu\sigma_1\sigma_2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (61)$$

(61) es la ecuación de una elipse la cual en el plano de esfuerzos σ_1, σ_2 se muestra en la Fig. 15 para el acero con $\nu = 0.3$, y las

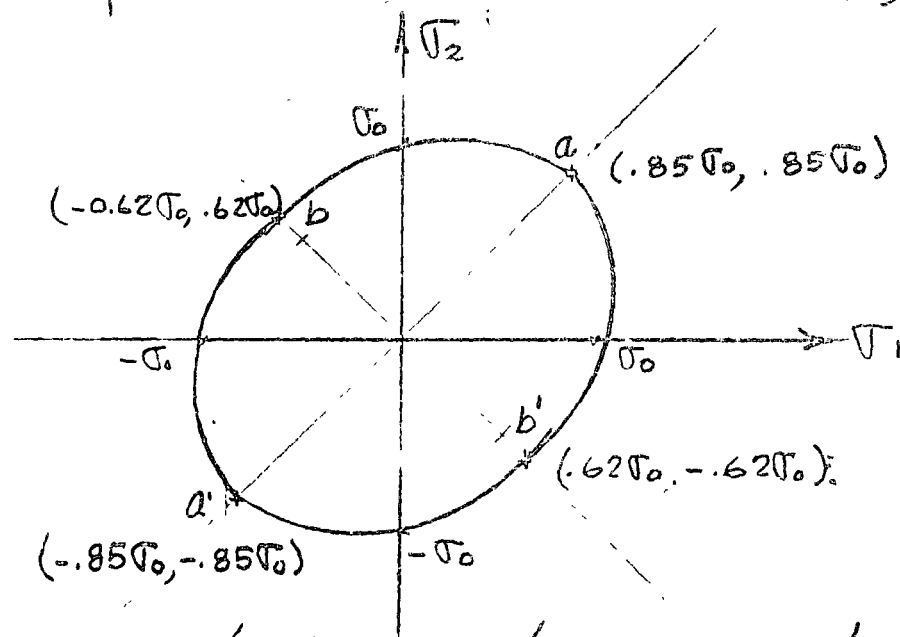


Fig. 15 Teoría de la máxima energía de deformación en el plano σ_1, σ_2 para $\nu = 0.3$
Coordenadas de los puntos a, a', b, y b'.

Teoría de energía máxima distorsional.
(1856, J.C. Maxwell, M.T. Huber, R.V. Mises, H. Hencky);

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre el plano octaédrico cuyos cosenos directores son

○ $n_i = [\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}]$, y el esfuerzo normal correspondiente llamado, medio, esférico o hidrostático es

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (62)$$

la expansión volumétrica por unidad de volumen correspondiente se expresa por

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{2(1-2\nu)}{E} p \quad (63)$$

la energía por cambio unitario de volumen sea

$$U_1 = \frac{1}{2} p e \quad (64)$$

Substituyendo (62) y (63) en (64) se obtiene

$$U_1 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (65)$$

en un medio elástico lineal homogéneo e isotrópico la energía de deformación por unidad de volumen es

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (66)$$

La densidad de energía desviatoria máxima es

$$\Delta U = U_0 - U_1 \quad (67)$$

substituyendo (65) y (66) en (67) se obtiene

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (49)$$

de (48) y (49) se obtiene

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_n)^2 + (\sigma_2 - \sigma_n)^2 + (\sigma_3 - \sigma_n)^2]} \quad (50)$$

al esfuerzo de corte dado por (49) y (50) es llamado esfuerzo octaédrico de corte, porque la cara donde actúa es la cara ABC del octaedro regular de la Fig. 9 que tiene vértices en los ejes coordenados, se usa frecuentemente en Teoría de Plasticidad

$$\Delta U = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \quad (68)$$

el valor máximo en (68) sería si $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y (68) se transforma para $\sigma_1 = \sigma_0$ en:

$$\Delta U_{\max} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2 \quad (69)$$

por lo tanto de (68) y (69) se obtiene cuando $\Delta U = \Delta U_{\max}$

$$f(\sigma_i) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (70)$$

(70) es la ecuación de un cilindro circular cuyo eje y directrices en el espacio de esfuerzos forma iguales ángulos con los ejes σ_i , la intersección de (70) con el plano $\sigma_1 \sigma_2$ se obtiene de (70) para $\sigma_3 = 0$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (71)$$

(71) y (61) deben ser iguales para $\nu = 0.5$ material incompresible (71) representa también una elipse como en la Fig. 15 solo que las

coordenadas de a, a', b y b' son para $\nu = 0.3$

$$\begin{array}{ll} a(\sigma_0, \sigma_0) & b(-0.577\sigma_0, 0.577\sigma_0) \\ a'(-\sigma_0, -\sigma_0) & b'(0.577\sigma_0, -0.577\sigma_0) \end{array}$$

- ABCD: Teoría del esfuerzo máximo. (Rankine)
- EFGH: " deformación máxima. (Saint-Venant)
- " de máxima energía de deformación. (Beltrami)
- " " " " distorsionante. (von-Mises)

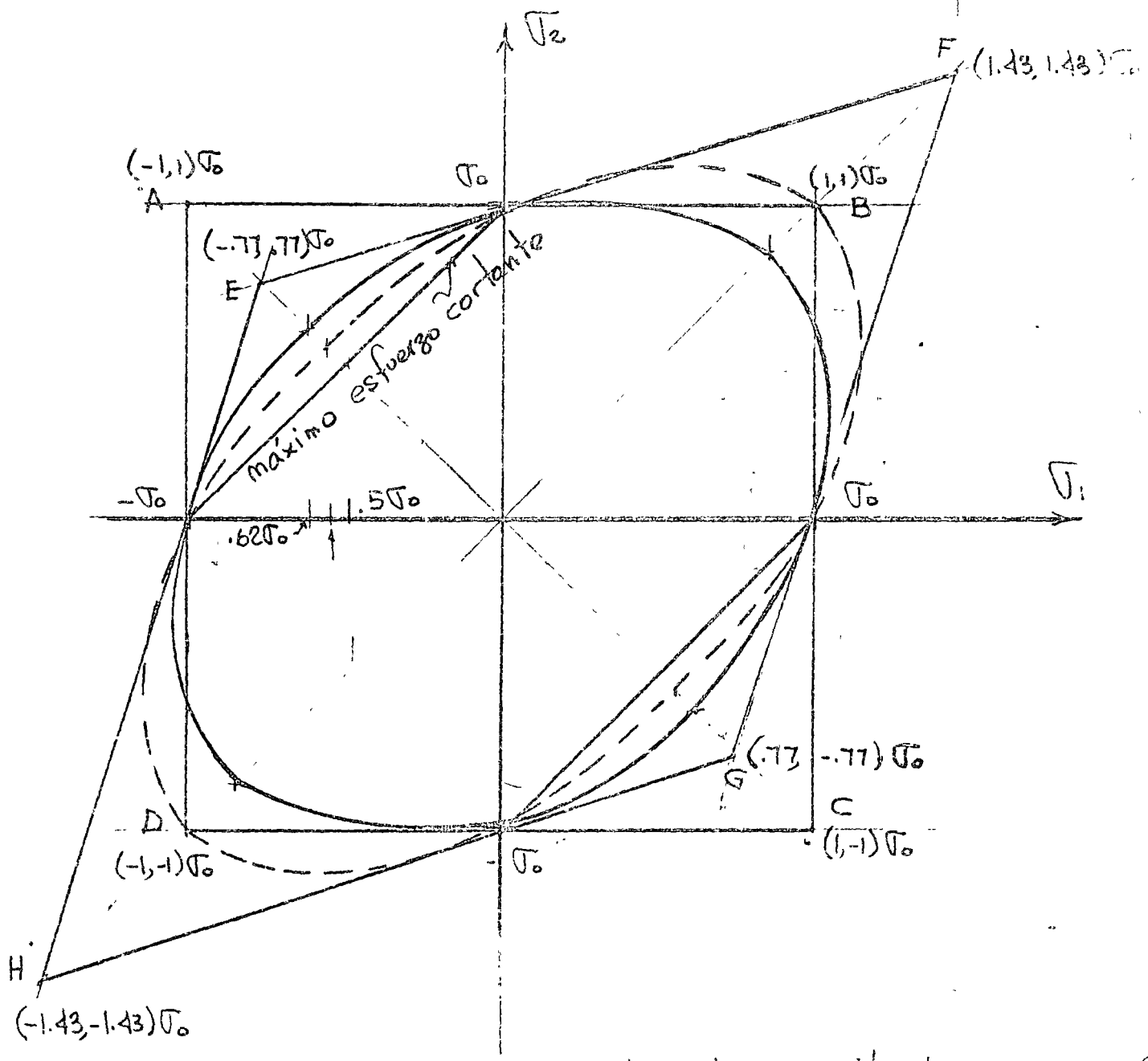


Fig. 16 Comparación entre las distintas Teorías de falla para $\nu = 0.3, \phi = 0$



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL CONCRETO Y SUS APLICACIONES
EN INGENIERIA.

ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL CONCRETO

Porfirio Ballesteros
Raúl Alamo

NOVIEMBRE, 1977,



ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL CONCRETO

Porfirio Ballesteros¹

Raúl Alamo²

RESUMEN.

Se propone una relación constitutiva analítica para el concreto bajo condiciones generales de esfuerzo multiaxial. En el desarrollo de esta relación se supone al concreto como material elástico no lineal y elastoplástico. El objetivo final del estudio es la obtención de las funciones de falla, de carga e inicial discontinua del concreto, así como de las relaciones incrementales esfuerzo-deformación.

INTRODUCCION.

Dada la complejidad de las ecuaciones que representan el comportamiento de un elemento de concreto, fue necesario antiguamente realizar una serie de simplificaciones, ya que con ellas se lograba una visualización simple del problema; pero generalmente poco precisa. Con la evolución de soluciones por métodos numéricos mediante el auxilio de computadoras, es ahora posible resolver el problema general sin necesidad de esas simplificaciones. Sin embargo, el planteamiento de las ecuaciones constitutivas no se ha desarrollado para materiales anisotrópicos, como es el caso del concreto.

En este trabajo se muestran los fundamentos para las ecuaciones constitutivas del concreto en situaciones de carga multiaxial.

1 Jefe de Sección de Estructuras Div. Est. Sup. Fac. de Ing. UNAM

2 Jefe del Depto. de Investigación Industrial del IMCYC

COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO BAJO CARGA UNIAXIAL

Se han idealizado las relaciones esfuerzo-deformación del concreto bajo carga axial en diferentes modelos (Fig 1); elástico-lineal; elástico no-lineal; elástico-lineal-frágil; elástico-lineal-plástico-perfecto. Todos ellos han sido aplicables para diferentes problemas. En este trabajo se consideran al modelo elástico no-lineal y al plástico-perfecto como una buena representación del comportamiento axial.

Al analizar una curva típica esfuerzo-deformación del concreto bajo carga axial, se pueden localizar varios puntos importantes (Fig 2) El esfuerzo último f'_c , máximo en la curva, se define como el esfuerzo de ruptura de cilindros estándar de concreto a los 28 días de elaborados, probados según la especificación correspondiente del ASTM.

Este punto nos define otros dos importantes; uno, el límite elástico del material, punto A, abajo del cual, al existir una descarga del concreto, éste recupera sus dimensiones originales. El punto A, de la Fig 2, es variable, y los autores de la literatura alusiva lo han ubicado entre $0.3 f'_c$ y $0.6 f'_c$. Y segundo, al rebasar el esfuerzo de compresión del punto A, se entra a la zona plástica del material, misma que está limitada en la parte superior en el punto B. Al descargar el elemento en esta zona, el concreto no recupera sus dimensiones originales sino que bajo esfuerzo nulo tendrá una deformación permanente. En la Fig 2 se puede observar que la deformación del punto B está compuesta por una deformación elástica y por una permanente. Este punto se ha ubicado entre $0.75 f'_c$ y $0.9 f'_c$. Más allá del punto B, el material se deforma casi sin incremento de carga alcanzando el punto de esfuerzo último, C. Posteriormente se presenta la falla y con ello la descarga. Esta parte de la curva depende de características propias de la máquina de prueba. El punto, E, de falla, se encuentra a una deformación unitaria que varía entre 0.003 y 0.004.

En la Fig 3 se escriben una serie de ecuaciones que representan la relación esfuerzo-deformación. Hay una infinidad de ecuaciones de diversos investigadores, y la elección de la más favorable depende del uso que se le piense dar.

COMPORTAMIENTO BAJO CARGA MULTIAXIAL.

Para entrar ahora a sollicitaciones multiaxiales, es indispensable recordar varias propiedades importantes del concreto:

- 1. La resistencia a tensión del concreto se valúa proporcionalmente a una potencia de la resistencia a compresión. Esto es:

$$f'_t = k(f'_c)^n \text{ generalmente } n = 1/2$$

- 2. El concreto es un material frágil
- 3. La presión hidrostática por sí sola no ocasiona la falla del material.

Así como en el caso axial es importante definir varias fronteras de cambio del comportamiento, sin embargo en el caso biaxial, no serán puntos sino curvas; y en el triaxial, superficies.

Superficies de falla son aquellas definidas en el espacio de esfuerzos, tal que, una vez que el estado de esfuerzos alcanza esta superficie, el material falla y no puede resistir ninguna carga posterior.

Superficie de discontinuidad inicial es aquella que sólo se puede alcanzar por acción multiaxial elástica. Es decir, si se carga y descarga sin rebasar esta superficie, no deberán quedar deformaciones residuales después de la descarga.

Superficie de carga es aquella que se alcanza una vez que se ha rebasado la superficie de discontinuidad inicial y aún no se alcanza la superficie de falla. En otras palabras, son las superficies localizadas dentro de la zona plástica del material. Si se tiene una carga que desarrolle esfuerzos tales que alcancen alguna de estas superficies, al descargar se presentarán deformaciones residuales.

les permanentes. La Fig 4 nos muestra graficado en el plano de esfuerzos σ_1, σ_2 (caso biaxial) las curvas que los relacionan, las curvas de falla y las de discontinuidad inicial.

La Fig 4a muestra los resultados experimentales obtenidos por Kupfer en 1969, y la Fig 4b, los obtenidos por Ville en 1968. Se ha pensado que la diferencia en resultados depende de la forma del espécimen, hecho que está en proceso de investigación.

En el mismo estado de esfuerzo biaxial σ_1, σ_2 para concreto reforzado, se observa un caso particular en la Fig 5 en el que $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 2220 \text{ kg/cm}^2$. Si el acero de refuerzo sigue las direcciones principales es aceptable utilizar como relación la elipse de Von Mises. En la zona de compresiones el concreto también cumple con esta relación como se demostrará más adelante. Pero el problema es en la zona de tensión-compresión, en la que el comportamiento se ha supuesto lineal, sin embargo se realizan otras investigaciones al respecto.

En el caso de carga triaxial para concreto, Fig 6, es importante, dada la isotropía del material, la determinación de la intersección de la superficie de falla con los planos coordenados. Esto se logra determinando el punto en el que la bisectriz de cada uno de los planos coordenados es tangente a la superficie de falla, por ejemplo el punto TB_{12} es la intersección entre la bisectriz al plano σ_1, σ_2 y la superficie de falla $f(\sigma_{ij}) = 0$

Para comprender mejor el problema, y además ampliándolo al caso de concreto reforzado, se considera en la Fig 7 el plano formado por la línea de esfuerzos iguales $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ y uno de los puntos de intersección de la bisectriz de un plano y la superficie de falla, en este caso TB_{23} .

En esta figura se puede observar la intersección de la superficie de falla y la de discontinuidad inicial con el plano π y con los planos coordenados (TB_{2-3}). Es posible observar que existen zonas en que uno o dos esfuerzos son de compresión y el otro de tensión.

Son estas zonas las que necesitan un estudio más a fondo para determinar su trayectoria. En la zona de tensión, suponiendo que el acero sigue las direcciones de los esfuerzos principales, las superficies de falla y de discontinuidad inicial son las rectas generatrices del cilindro de Von Mises. Es importante también en la zona de compresión obtener los esfuerzos σ_a en el punto de tangencia con la bisectriz, así como la superficie asintótica a la superficie de falla limitando de esta manera el crecimiento del esfuerzo triaxial. Estos valores se encuentran en estado de experimentación.

Cada una de las curvas o superficies anteriores deben estar representadas por una ecuación.

A continuación se exponen las deducciones que sobre ellas se han desarrollado.

COMPORTAMIENTO TRIAXIAL ELASTICO

Las funciones que representan estas superficies deben estar basadas en los principios generales de las ecuaciones constitutivas que se pueden enunciar en la siguiente forma.

1. Principio de objetividad o indiferencia del material. La respuesta del material es independiente del sistema coordenado o del observador.
2. Principio de acción local. El esfuerzo en un punto se debe únicamente al movimiento de las partículas en una vecindad o en torno del punto de consideración.
3. Principio de determinismo. El esfuerzo en un medio lo determina su historia de deformación.

Con base en estos principios, y considerando la reducción de las ecuaciones constitutivas para materiales simples, caso de materia

les elástico-lineales y no-lineales, el esfuerzo se reduce a una función del gradiente del esfuerzo de deformación. Para deformaciones pequeñas, el esfuerzo es también función del gradiente de desplazamientos o tensor de deformaciones pequeñas. Por analogía con los fluidos Reiner-Rivlin, se demuestra que la ecuación constitutiva se reduce a la forma.

$$\underline{\sigma}(\underline{\epsilon}) = \phi_0 \underline{I} + \phi_1 \underline{\epsilon} + \phi_2 \underline{\epsilon}^2 \dots \quad (1)$$

o en notación tensorial:

$$\sigma_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 \epsilon_{ij} + \phi_2 [\epsilon_{ij}] [\epsilon_{ji}]$$

Puede decirse que la ec (1) es consecuencia del teorema de Carley-Hamilton. En la ec (1), \underline{I} es la matriz identidad, ϕ_0 , ϕ_1 y ϕ_2 son funciones de los invariantes del tensor de deformaciones $\underline{\epsilon}$.

Dado que en el caso lineal las direcciones principales de los esfuerzos $\underline{\sigma}$ coinciden con las de las deformaciones $\underline{\epsilon}$, se puede escribir la ec (1), diagonalizándola:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_1 + \phi_2 \epsilon_1^2 \\ \sigma_2 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_2 + \phi_2 \epsilon_2^2 \dots\dots\dots \\ \sigma_3 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_3 + \phi_2 \epsilon_3^2 \end{aligned} \quad (2)$$

y expresándola matricialmente

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_1 & \epsilon_1^2 \\ 1 & \epsilon_2 & \epsilon_2^2 \\ 1 & \epsilon_3 & \epsilon_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \quad (3)$$

donde ϕ_0 , ϕ_1 y ϕ_2 se pueden determinar de pruebas triaxiales.

COMPORTAMIENTO ELASTO-PLASTICO

Función de falla y función de discontinuidad inicial

Si se supone que el criterio para la falla del concreto depende sólo de los esfuerzos distorsionantes y no de la presión hidrostática, es posible utilizar dos funciones diferentes pero similares para simular la falla del concreto en la región de compresión y en la región de compresión-tensión.

La falla será una función del primer invariante de esfuerzos I_1 y J_2 , segundo invariante del tensor de esfuerzos distorsionantes S_{ij} . Las ecuaciones propuestas son las siguientes: [16]

Región de compresión

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 + \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (4)$$

y para la región de compresión-tensión

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 - \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (5)$$

Al escoger a la función dependiendo únicamente de I_1 y J_2 , se logra una función simple aunque si fuera incluido el tercer invariante de los esfuerzos distorsionantes, J_3 , mejoraría considerablemente la correlación entre las fórmulas teóricas y los datos experimentales. Como las ecs (4) y (5) son similares se ha creído conveniente utilizar una sola ecuación que es:

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (6)$$

Además, podemos suponer que la ecuación que define el estado inicial discontinuo tiene la misma forma que la superficie de falla, por lo que se puede escribir:

$$f_0(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_0 I_1 = \tau_0^2 \quad (7)$$

Los valores de las constantes constitutivas A_u , A_0 , τ_u y τ_0 pueden ser determinados para las regiones de tensión-compresión y la de compresión mediante pruebas de laboratorio.

Dado que el esfuerzo normal octaedral, σ_{oct} es igual a $I_1/3$ y el cortante octaedral es igual a $\sqrt{\frac{2}{3} J_2}$, la ecuación (6) podrá representar una elipse, parábola o hipérbola en el espacio de esfuerzos octaedrales, dependiendo de los valores de K^2 .

$$\text{Esto es, si } \sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} \quad \tau_{oct}^2 = \frac{2}{3} J_2$$

Substituyendo en la ec (3) se tiene:

$$\frac{K^2}{2} \tau_{oct}^2 - \frac{K^2}{4} \sigma_{oct}^2 \pm \frac{3}{4} \sigma_{oct}^2 + A_0 \sigma_{oct} = \tau^2 \quad (8)$$

$$\frac{K^2}{2} \tau_{oct}^2 - \left(\frac{K^2}{4} \pm \frac{3}{4} \right) \sigma_{oct}^2 + A_0 \sigma_{oct} = \tau_0^2 \quad (9)$$

ecuación de segundo grado que representará diferentes curvas dependiendo de los valores de los coeficientes de (8) y (9), lo que se puede expresar como:

$$\text{Si, } -4 \left(\frac{K^2}{4} \pm \frac{3}{4} \right) \frac{K^2}{2} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{elipse} \\ \text{es una parábola} \\ \text{hipérbola} \end{matrix} \quad (10)$$

Esto implica para la zona de compresión, que si

$$K^2 \begin{cases} < 3 \\ = 3 \\ > 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{elipse} \\ \text{parábola} \\ \text{hipérbola} \end{matrix}$$

Y dado que la presión hidrostática por sí sola no puede causar la discontinuidad o la falla del concreto, la ecuación anterior no

puede ser una elipse y por ello, K^2 será mayor o igual a 3. Estudios experimentales (17) nos muestran que la función que mejor describe la falla es la parabólica, por lo que se considera $K^2 = 3$.

En la región tensión-compresión para asegurar que la función de falla interseque únicamente en un punto a la función de la región de compresiones, es indispensable que K^2 de la ec (5), no se encuentre entre los valores 0 y -3, esto quiere decir que la ec (5) será necesariamente una función parabólica o hiperbólica. Además, debido a que es indispensable asegurar la convexidad de la curva, se deberán cumplir las condiciones

$$K^2 \leq 3 + \frac{A_u^2}{\tau_u^2}$$

Para satisfacer ambas condiciones, K^2 debe ser igual a 3 siendo idéntica a la ecuación en la región de compresión. Estos resultados han mostrado buena correlación con los datos experimentales. Para la ecuación de las curvas de discontinuidad inicial se aplican los mismos argumentos.

Como se mencionó, las constantes constitutivas del material A_0 , τ_0^2 , A_u y τ_u^2 , se pueden obtener en función de f'_c , f_c , f'_t , f_t , f'_{bc} y f_{bc} ; o sea f'_c es la resistencia a compresión axial; f'_t , resistencia a tensión axial; f'_{bc} , resistencia a compresiones iguales en dos direcciones; y f_c , f_t y f_{bc} son los valores de esas pruebas bajo condiciones de discontinuidad inicial. Todos estos valores son obtenidos fácilmente en pruebas simples de laboratorio.

En la zona de compresión, al substituir en las ecuaciones que representan la falla y el estado de discontinuidad inicial (se consideró $K^2 = 3$), por simple álgebra se pueden obtener los siguientes valores de A_0 , τ_0^2 , A_u y τ_u^2 , y llegar a los siguientes

tes resultados,

$$\frac{A_u}{\bar{f}'_c} = \frac{\bar{f}'_{bc} - 1}{2\bar{f}'_{bc} - 1} \quad \frac{\tau_u^2}{(f'_c)^2} = \frac{3\bar{f}'_{bc} - 2\bar{f}'_{bc}{}^2}{3\bar{f}'_{bc} - 1} \quad (11)$$

$$\frac{A_0}{\bar{f}'_c} = \frac{\bar{f}'_{bc}{}^2 - \bar{f}'_c{}^2}{2\bar{f}'_{bc} - \bar{f}'_c} \quad \frac{\tau_0^2}{(f'_c)^2} = \frac{2\bar{f}'_c{}^3 - 3\bar{f}'_{bc}{}^2 \bar{f}'_c + 2\bar{f}'_c{}^2}{2\bar{f}'_{bc} - \bar{f}'_c}$$

y para la zona de tensión-compresión,

$$\frac{A_u}{\bar{f}'_c} = \frac{1 - \bar{f}'_c}{2} ; \quad \frac{\tau_u^2}{(f'_c)^2} = \frac{\bar{f}'_c}{6}$$

$$\frac{A_0}{\bar{f}'_c} = \frac{\bar{f}'_c - \bar{f}'_t}{2} ; \quad \frac{\tau_0^2}{(f'_c)^2} = \frac{\bar{f}'_c - \bar{f}'_t}{6} \quad (12)$$

en donde \bar{f}'_c , \bar{f}'_t , \bar{f}'_{bc} , \bar{f}'_c , \bar{f}'_t , \bar{f}'_{bc} son cantidades adimensionales resultantes de dividir f'_c , f'_t , f'_{bc} y f_c , f_t , f_{bc} entre f'_c y f_c respectivamente. La gráfica de estas curvas, así como su correlación con los datos experimentales, se pueden observar en las figuras 3 y 4.

Funciones de carga

Dado que las superficies de carga están limitadas por las funciones de falla y de discontinuidad inicial, es razonable considerar que deben tener unas ecuaciones similares a las de aquellas. Si aceptamos, como varios autores, que las superficies de carga se desplazan a lo largo del eje $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ y se expanden isotrópicamente, teoría muy usada en plasticidad, es fácil considerar como forma de la función de estas superficies la siguiente:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{\frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{\beta}{3} I_1}{1 - \frac{\alpha}{3} I_1} = \tau^2 \quad (13)$$

El doble signo en uno de los términos de la ecuación, al igual que en las funciones de falla y de discontinuidad inicial, indican la región en que se encuentra el estado de esfuerzos, compresión o tensión-compresión.

Los valores de α y β pueden determinarse observando que cuando τ^2 tiende a τ_0^2 o τ_u^2 los valores de $\alpha\tau^2 + \beta$ se aproximan a A_0 y A_u respectivamente. Esto es, en el límite, las superficies de carga se transforman en las superficies inicial-discontinua o en la de falla. Los resultados obtenidos siguiendo este procedimiento son,

$$\alpha = \frac{A_u - A_0}{\tau_u^2 - \tau_0^2} \quad (14)$$

$$\beta = \frac{A_0 \tau_u^2 - A_u \tau_0^2}{\tau_u^2 - \tau_0^2} \quad (15)$$

En las Fig 5 y 6 se muestran las superficies de carga en el caso biaxial.

Relaciones incrementales esfuerzo-deformación.

Con base en la forma general de la relación esfuerzo-deformación en la zona plástica [18], deducida mediante la suposición de pequeños incrementos radiales, se puede escribir que,

$$d\epsilon_{ij}^P = \lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}} \quad (16)$$

en donde λ es un escalar que depende del estado de esfuerzos, el incremento de esfuerzo, y de la historia de esfuerzos. Esta ecuación se transforma para un material estable en la siguiente,

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{df}{d\sigma_{ij}} df \quad (17)$$

donde G es un escalar que depende del esfuerzo, deformación e historia de carga del elemento.

El valor de G se puede obtener del producto interno de la ec 15, y despejando G , se tiene,

$$G = \frac{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ji}^P}{df \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}}} \quad (18)$$

la $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}}$ es una función del estado actual de esfuerzos y puede ser obtenida al substituir la función de carga actuante en ese instante; y la cantidad $\sqrt{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ji}^P}$ indica la historia de deformación del material y se obtiene mediante resultados experimentales.

Si llamamos

$$H = \frac{df}{d\epsilon_{vs}^P d\epsilon_{sv}^P} \quad (19)$$

Siendo H la relación incremental del trabajo por endurecimiento del material y utilizando la relación incremental

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \quad (20)$$

Al substituir en la ec general (17) de esfuerzos-deformaciones se obtiene,

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}{H \frac{\partial f}{\partial \sigma_{vs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{sv}}} d\sigma_{mn} \quad (21)$$

Si consideramos que el incremento de deformación total $d\epsilon_{ij}$ es igual a la parte elástica más la parte plástica, o sea,

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^P \quad (22)$$

y dado que

$$d\epsilon_{ij}^e = H_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (23)$$

donde H_{ijkl} , es la matriz incremental hiperelástica.

Al substituir (21) y (23) en (22) se obtiene:

$$d\epsilon_{ij} = \left[H_{ijkl} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{vs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{sv}}} \right] d\sigma_{kl} \quad (24)$$

CONCLUSIONES

Se dan las ecuaciones incrementales que resuelven el problema elastoplástico y se ha demostrado mediante comparación con resultados de laboratorio, que tienen suficiente aproximación aunque quedan varias incógnitas que resolver. Lo aquí expresado es cierto para concreto idealizado en la zona de compresión como isotró

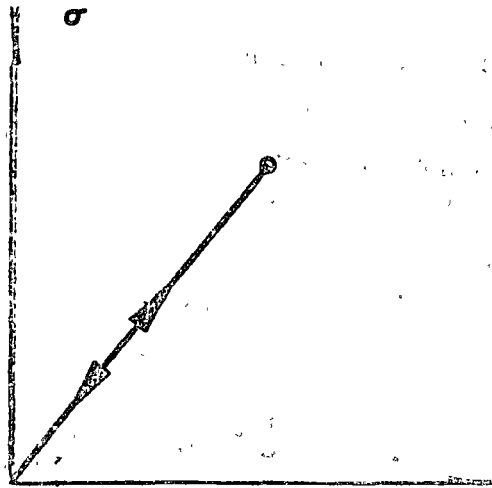
pico, homogéneo y linearizado incrementalmente en una zona de plasticidad hasta la ruptura. Las funciones propuestas esfuerzo-deformación, se proponen con el objeto de utilizarlas directamente en problemas de análisis por medio de elementos finitos.

BIBLIOGRAFIA

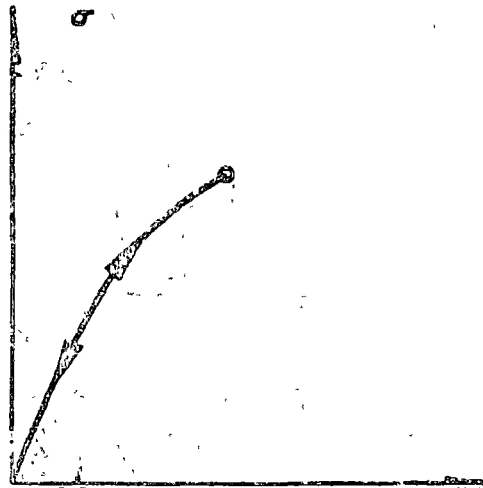
1. Cedolin, L y Dei Poli, S "Finite element nonlinear analysis of reinforced concrete bidimensional structures" Politécnico di Milano. Department of Structural Engineering. Technical Report N. 40 I. S. T. C. Septiembre 1974.
2. Bremer, F "On a triaxial strength criterion for concrete". American Concrete Institute SP 34, Reporte SP 34-14, 1972 pp 283-294.
3. Hannant, D J, Frederick, C O "Failure criteria for concrete in compression". Magazine of Concrete Research, Vol. 20 No. 64 Sept. 1968 pp 137-144
4. Propovics, S. "Review of stress-strain relationships for concrete", American Concrete Institute. Journal, Proceedings, Vol. 67 No. 3 Marzo 1970, pp 243-248.
5. Philleo, R E "Elastic properties and creep". *Significance of test and properties of concrete and concrete making materials*. A S T M, S T P 169 A, pp 160-175.
6. Gilkey, H. J. y Murphy G. "Stress-strain characteristics of mortars and concretes", Proceedings, A S T M V. 38, Part. I, 1938. pp 318-326.

7. Shah, S P y Winter, G "Inelastic behavior and fracture of concrete", ACI Journal, Proceeding V. 63 No. 9, Sept: 1966, pp 925-930.
8. Sáenz, L O, Discusión de "Equation for the stress-strain curve of concrete" por P Desayi y S Krishnan, ACI Journal, Proceeding V. 61.
9. Smith, G M y Young, L E, "Ultimate flexural analysis based on stress-strain curves of cylinders", ACI. Journal, Proceedings V. 53, No. 6 Dic. 1956, pp 597-610.
10. Bresler, B Discusión del reporte de L. H. N., Lee: *Inelastic behavior of reinforced concrete members*. Traducción del ASCE, Vol. 120, pp 203-205, 1955.
11. Hognestad, E; Hanson N W; y McHenry, D, "Concrete stress distribution in ultimate strength design", ACI. Journal, Proceedings, V. 61 No. 2, Feb. 1964, pp 253-256.
12. Walker S, "Modulus of elasticity of concrete" Proceedings, ASTM. V. 19, Part 2, 1919 pp 510-585
13. Neville, A M, en el libro editado por Bresler B, "Reinforced Concrete Engineering", Volumen 1. Materiales, elementos estructurales, seguridad, J. Wiley 1974. pp 65-151.
14. Kupfer, H B, Hilsdorf, H K, y Rusch, H, "Behavior of concrete under biaxial stresses". ACI Journal, Proceedings, Vol. 66, No. 8, Agosto 1969, pp 656-666.
15. Leigh, D C, "Nonlinear continuum mechanics" McGraw-Hill, 1968. pp 155-159, pp 145, pp 67,68.
16. Chen, W F "Constitutive relations for concrete and punch indentatation problem", Ph. D. Thesis., Lehigh University, 1973.

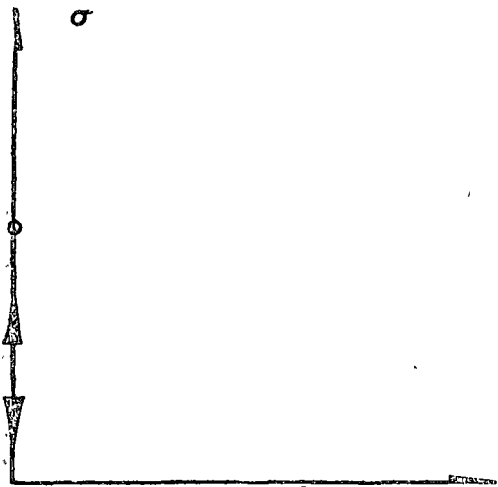
17. Palmer, A C, Maier, G y Drucker, D C, "Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements". Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, 1967.
18. Mendelson, A, "Plasticity, theory and applications", MacMillan Series in applied mechanics, Chapter 7.
19. Bazánt, Z P. and Bhat, P. "Endochonic theory of inelasticity and failure of concrete", J. E. M. D., A S C E. Vol. 102, 1976.



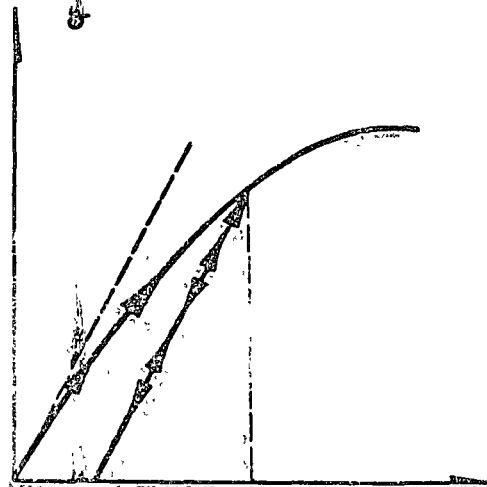
a) Elástico lineal



b) Elástico no_lineal



c) Elástico lineal frágil



d) Plástico perfecto

Fig. 1 Modelos uniaxiales idealizados.

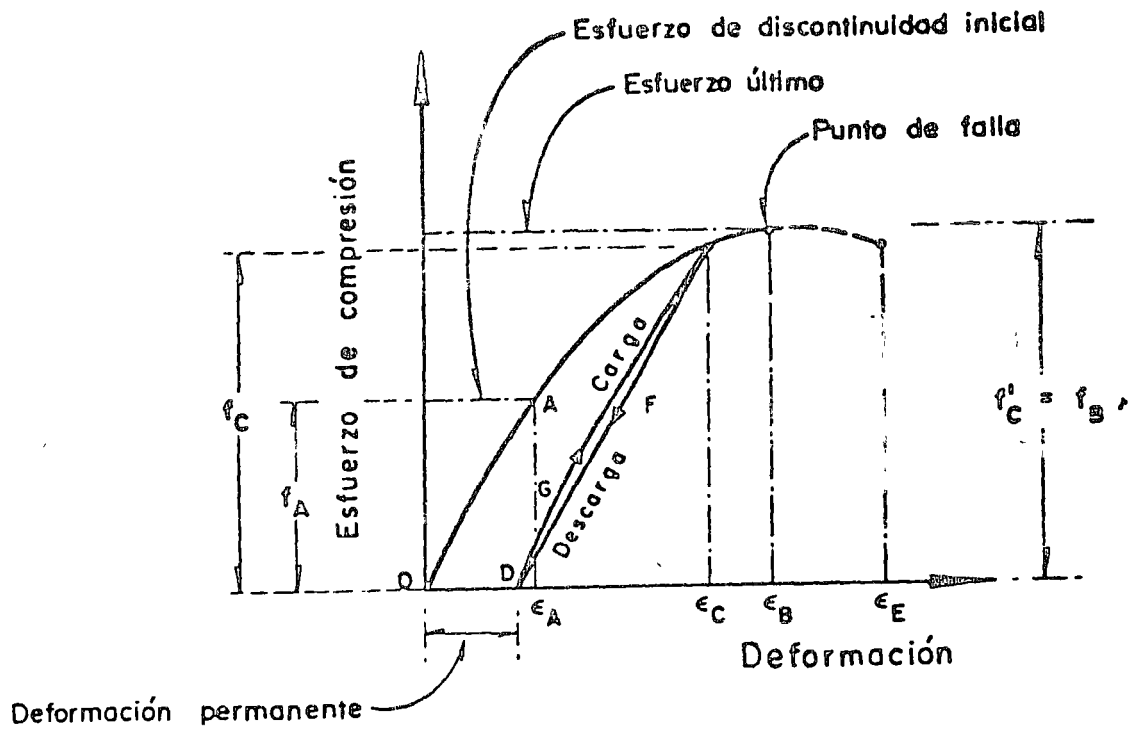
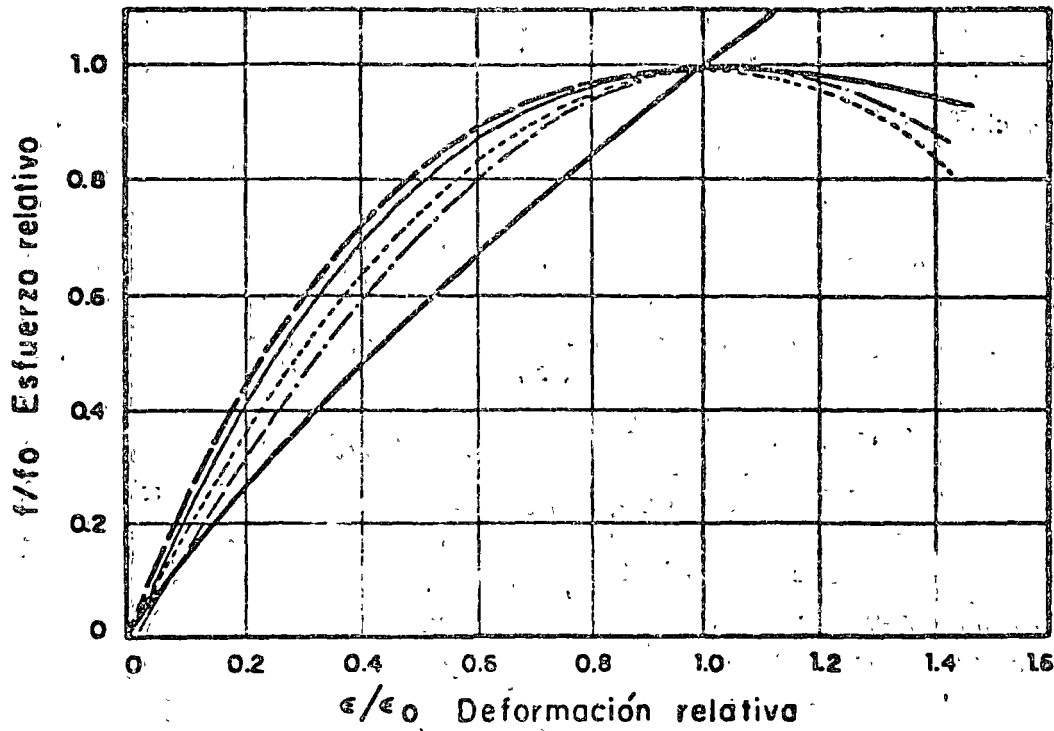


Fig 2 Curva esfuerzo - deformación uniaxial del concreto



— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0)^{0.8}$

— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) \frac{3}{2+(\epsilon/\epsilon_0)^3}$

- - - $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) (2-\epsilon/\epsilon_0)$

— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) e^{1-\epsilon/\epsilon_0}$

— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) \frac{2}{1+(\epsilon/\epsilon_0)^2}$

Fig 3 Comparación de varias fórmulas para diagramas uniaxiales esfuerzo deformación del concreto

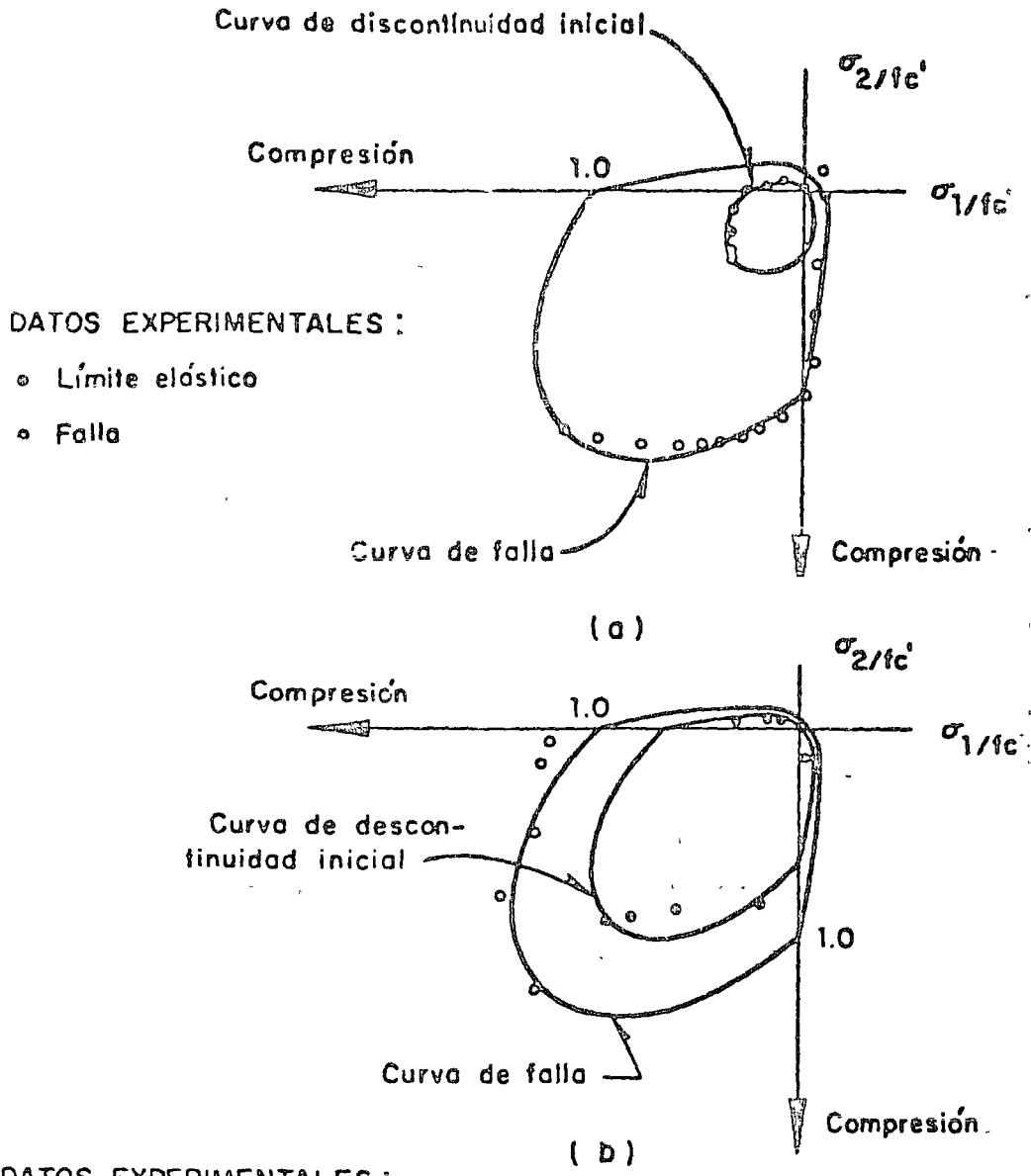


Fig 4 Curvas de falla y de discontinuidad inicial en el espacio de esfuerzos principales biaxiales: a) Datos experimentales de Kupfer (1969); b) Datos experimentales de Ville (1968)

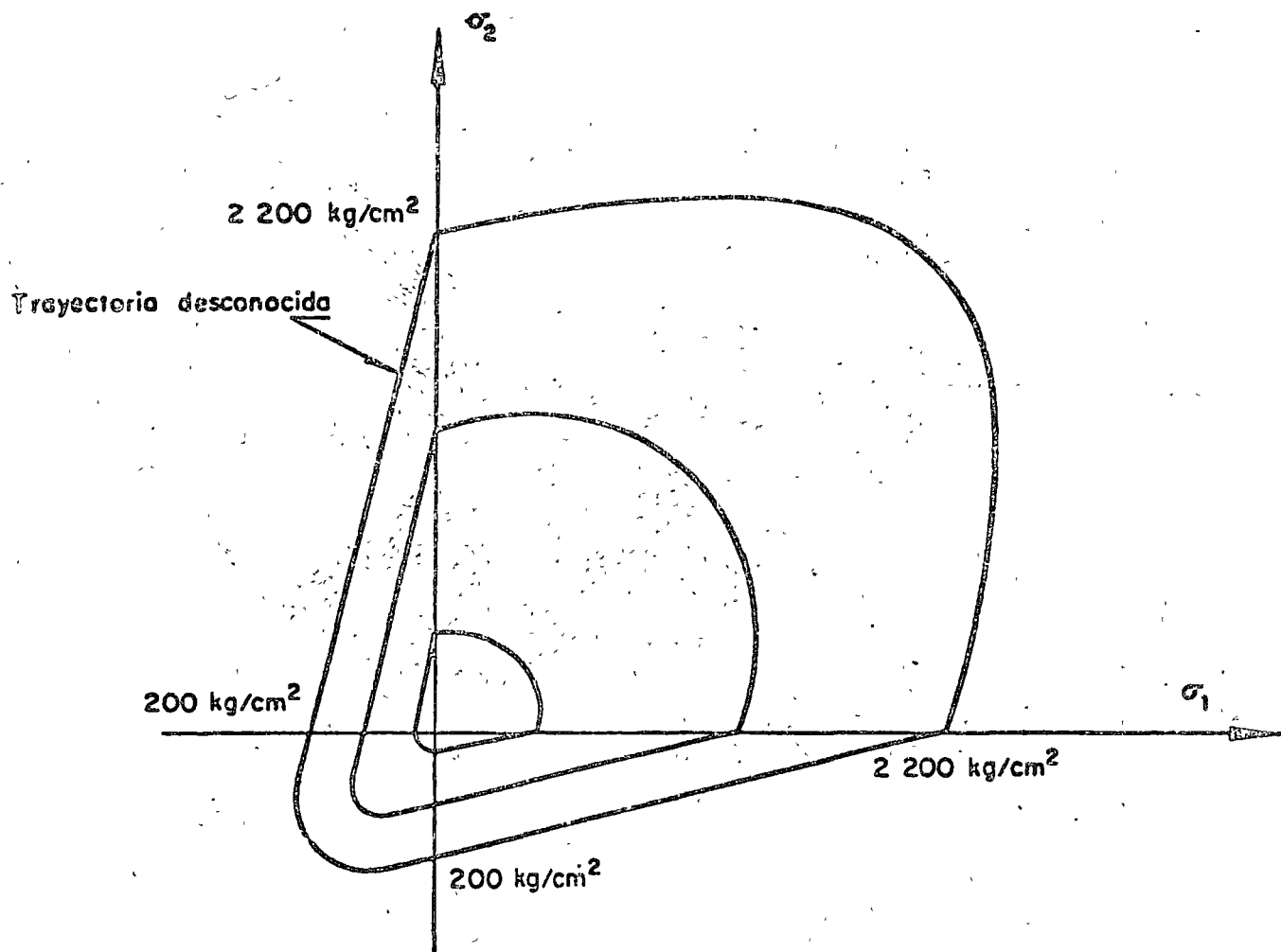


Fig 5 Superficie de falla del concreto en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$, con $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 2\,200 \text{ kg/cm}^2$, siguiendo el acero las direcciones principales de esfuerzo.

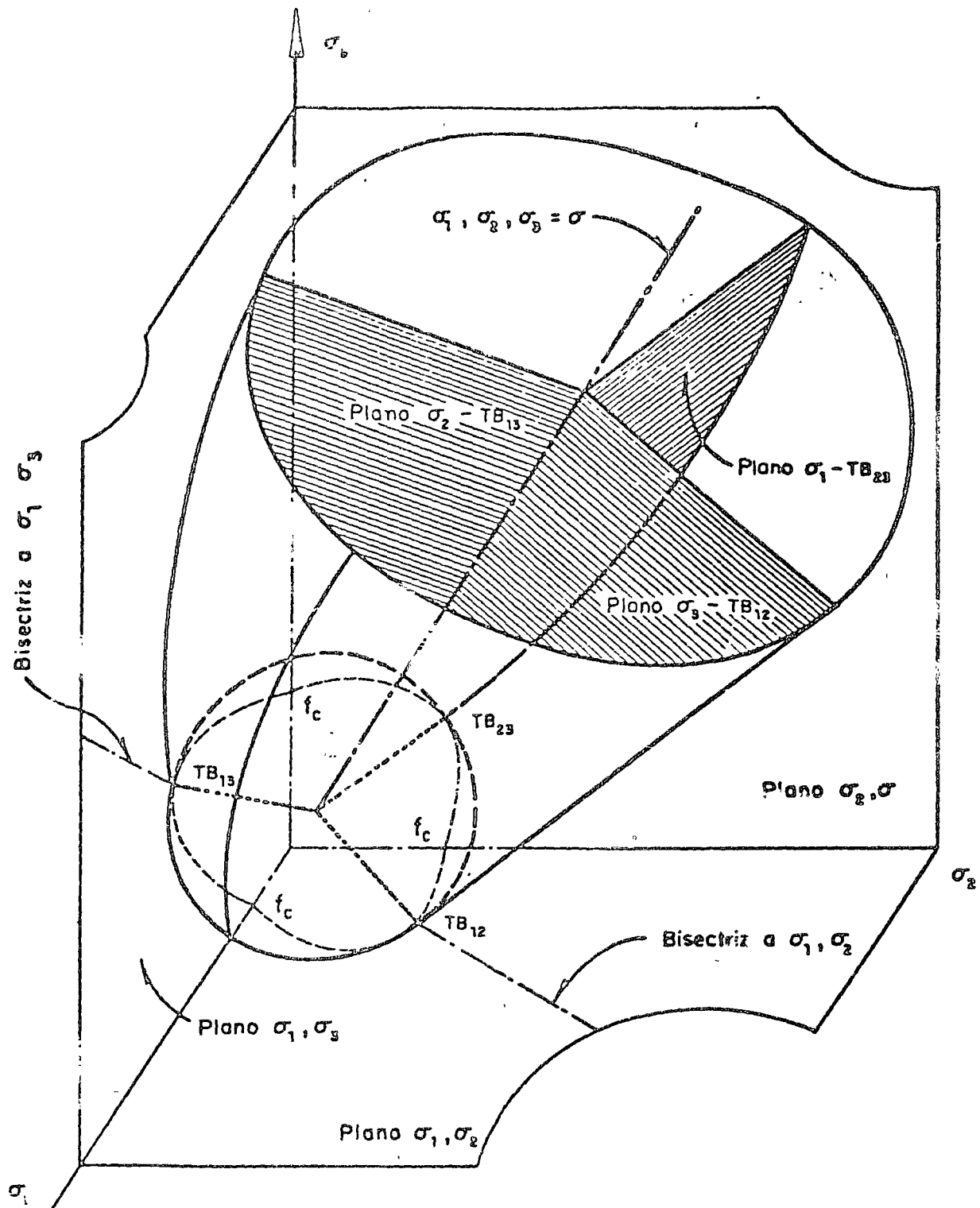


Fig 6 Superficie de falla en el espacio de esfuerzos σ_i

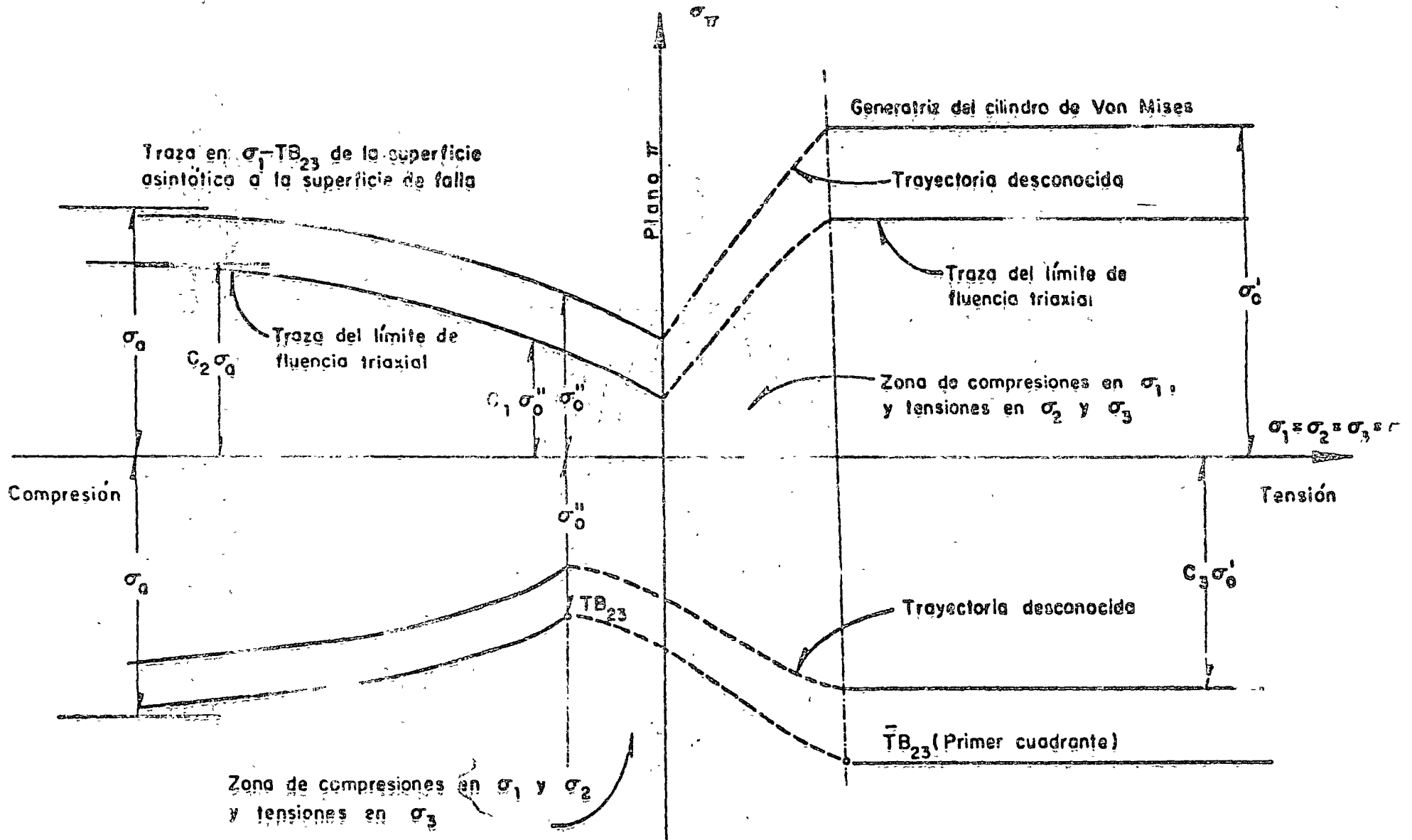


Fig 7 Traza de superficies de falla y fluencia inicial en plano $\sigma_1 - TB_{23}$

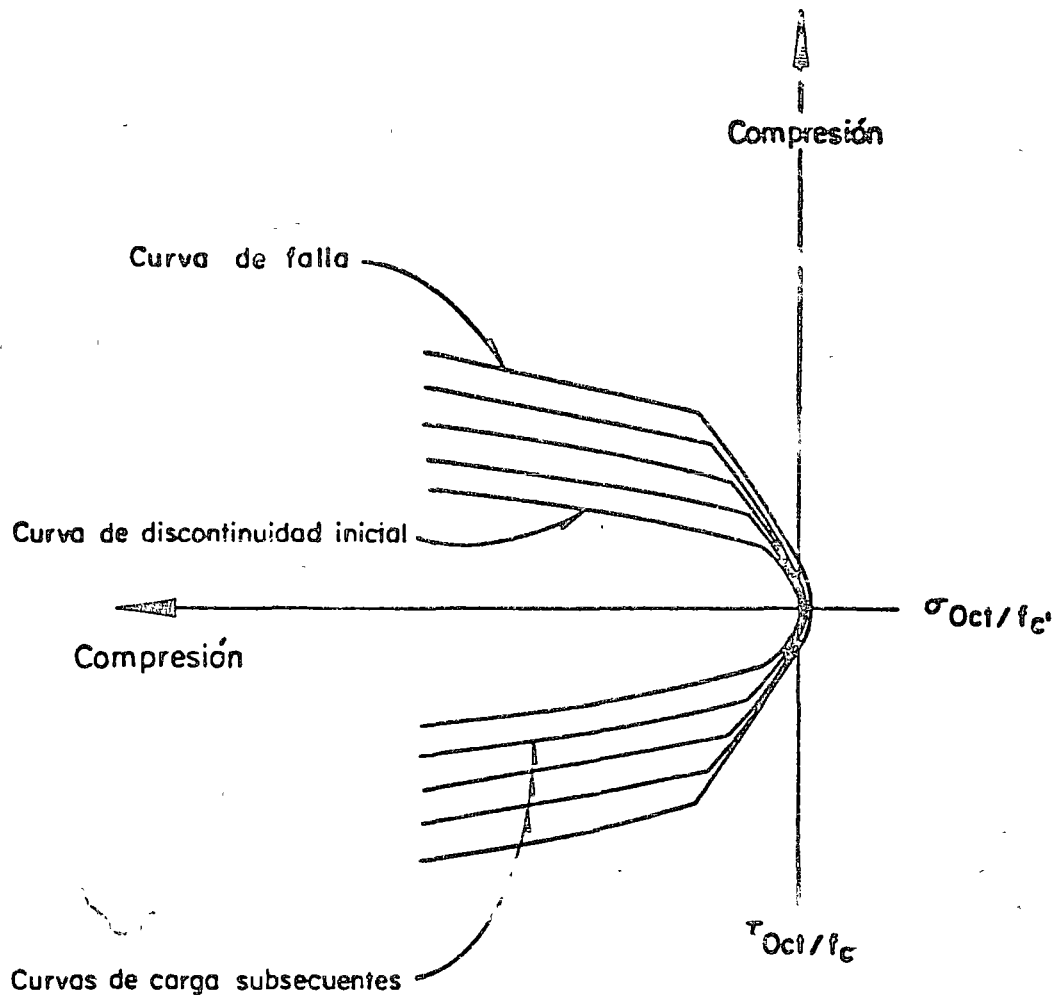


Fig 8 Curvas de discontinuidad inicial ,de carga subsecuente y de falla en el espacio de esfuerzos normales y esfuerzos cortantes octaédricos .

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL CONCRETO
Y SUS APLICACIONES EN INGENIERIA (DEL 7 AL 11 DE NOV. DE 1977)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- 1.- ING. GUSTAVO RAFAEL ARANDA HERNANDEZ
Uxmal No. 457
Col. Narvarte
México 12, D.F.
Tel. 536-82-98
 - 2.- ING. GUSTAVO AYALA MILAN
Cefeo No. 91
Col. Prado Churubusco
México 13, D.F.
Tel. 581-19-94
 - 3.- ING. OCTAVIO BARON LUNA
Calle 7 No. 89
Col. Ignacio Zaragoza
México 9, D.F.
Tel. 762-21-46
 - 4.- ING. TARSICIO ENRIQUE BAZAN ZURITA
Insurgentes Sur # 4411 Edif. 41-4
Col. Tlalpan
México 22, D.F.
 - 5.- ING. LUIS CABRERA NIETO
Av. Pléyades Pte. No. 21
Col. Prados de Coyoacán
México 21, D.F.
Tel. 544-75-61
 - 6.- ING. RAMON CERVANTES BELTRAN
Edif. A-5 Dpto. 401
Col. Torres de Mixcoac
México 19, D.F.
Tel. 593-25-30
 - 7.- ARQ. DELIA CHAN LOPEZ
Calle 9 y Av. Queretaro 1698
Col. Pueblo Nuevo
Méxicali, B.C.
Tel. 522-40
- INSTITUTO DE INGENIERIA
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
Tel. 548-97-94
- INSTITUTO DE INGENIERIA
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
Tel. 548-97-94
- ESC. SUPERIOR DE INGENIERIA
Y ARQUITECTURA
Zacatenco (Unidad Profesio
nal)
Col. Lindavista
- INSTITUTO DE INGENIERIA
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
Tel 548-97-94
- S.A.H.O.P.
Xola y Universidad
Col. Alamos
México 12, D.F.
Tel. 519-92-91
- DIV. EST. SUP. FACULTAD DE
INGENIERIA
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
Tel. 550-18-20
- UNIVERSIDAD AUTONOMA DE
BAJA CALIFORNIA, ESC. DE
ARQUITECTURA
Boulevard Bentito Juárez
Unidad Universitaria
Tel. 8-17-50



DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL CONCRETO
Y SUS APLICACIONES EN INGENIERIA (DEL 7 AL 11 DE NOV. DE 1977)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
8.- ING. CARLOS MAGDALENO DOMINGUEZ Arroyo de Los Ahuehuetes No. 11 Col. La Escalera México 14, D.F. Tel. 586-96-44	ESC. SUPERIOR DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA I.P.N. Unidad Profesional de Zacatenco Col. Lindavista
9.- ING. ENRIQUE GRANELL GUARRUBIAS Hda. Tecajete No. 10 Esq. Hda. Carretas Col. Hda. del Rosario México 16, D.F. Tel. 561-88-95	ESC. SUPERIOR DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA Unidad Profesional de Zacatenco Col. Lindavista
10.- ING. OSCAR HERNANDEZ B. Liornam Residencial Miramontes México 22, D.F. Tel. 594-63-28	INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM Ciudad Universitaria México 20, D.F. Tel. 548-65-00
11.- ING. EULALIO JUAREZ BADILLO Tepanco No. 32 Col. Coyoacán México 21, D.F. Tel. 544-13-15	DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES FACULTAD DE INGENIERIA Ciudad Universitaria México 20, D.F. Tel. 550-52-15
12.- ING. JORGE LOPEZ RIOS Alicia No. 41 Col. Guadalupe Tepeyac México 14, D.F. Tel. 517-55-54	INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO Av. 100 Mts. No. 152 México 14, D.F. Tel. 567-66-00 Ext. 2314
13.- ING. VICTOR PORRAS SILVA Periférico Sur No. 3301 Edif. Mizar No. 403 Col. Pedregal de Sn. Angel México 10, D.F. Tel. 568-41-67	DIVISION DE ESTUDIOS SUPE- RIORES FACULTAD DE INGENIERIA Ciudad Universitaria México 20, D.F. Tel. 550-15-24
14.- ING. ALEJANDRO REYES GONZALEZ Olivo No. 102 Col. Florida México 20, D.F. Tel. 534-42-00	INSTITUTO DE INGENIERIA Ciudad Universitaria México 20, D.F. Tel. 548-97-94

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911



DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL CONCRETO
Y SUS APLICACIONES EN INGENIERIA (DEL 7 AL 11 DE NOV. DE 1977)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

15.- ING. RAFAEL ROJAS ROJAS
Norte 1-B No. 5012
Col. Capultitlán
México 15, D.F.
Tel 567-33-95

ESCUELA SUPERIOR DE
INGENIERIA Y ARQUITECTURA
Unidad Profesional Zacatenco
Col. Lindavista
Tel.

16.- ING. JORGE SILVA BALLESTEROS
Marmoleria No. 324
Col. 20 de Noviembre
México 2, D.F.
Tel. 529-50-63

ESCUELA SUPERIOR DE
INGENIERIA Y ARQUITECTURA
Unidad Profesional Zacatenco
Col. Lindavista
Tel.

