centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

CURSO: TEORIA DE CONJUTOS Y TOMA DE DECISIONES

TEMA: METODOS PROBABILISTICOS

CORDINADOR LIC. RUBEN BALBUENA ALVAREZ

MEXICO D.F. FEBRERO DE 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

METODOS PROBABILISTICOS

Guión para la unidad I

INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD

En este capítulo introductorio nuestros objetivos son aclarar el significado de probabilidad e iniciar al estudiante en el cómputo de las medidas de probabilidad. Concluimos la unidad ilustrando el uso de probabilidades en problemas de administración.

Las secciones de este capítulo son las siguientes:

I-5-5 Regla de Eliminación.

I-5-6 La Regla de Bayes.

I-6 EL USO DE LAS PROBABILIDADES.

I-6-1 Ejemplos en el Muestreo

I-6-2 Ejemplos en el Análisis de la Lealtad a una Marca.

1-1 CONCEPTOS BASICOS:

1-1-1 Experimento Aleatorio. Evento.

En el lenguaje cotidiano empleamos la palabra " Aleatorio " cuando queremos referirnos a algo que está sujeto al azar.

Un " experimento " es cualquier acción bién definida mediante la cual observamos o medimos un fenómeno.

En la teoría de las probabilidades, un experimento aleatorio produce resultados totalmente sujetos al azar. Cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina " Suceso aleatorio ".

Sí contamos el número de veces que se presenta un suceso aleatorio en un número n de experimentos aleatorios, determinamos la " frecuencia absoluta " del suceso que simbilizamos con f. En tanto que el cociente f/n (de la frecuencia absoluta y el número de experimentos) se denomina " frecuencia relativa ".

Veamos el siguiente ejemplo:

Contamos el número de automóviles Ford que pasan frente a la puerta principal de FCA en un lapso de una hora. El número de automóviles Ford que pasaron en ese lapso es la frecuencia absoluta. Si repetimos muchas veces este experimento, ó sea si tomamos observaciones durante muchos lapsos de una hora cada uno, podremos calcular la frecuencia relativa dada por el cociente f/n.

Llamamos " <u>eventos elementales</u> " de un experimento aleatorio a los resultados que no se pueden expresar en términos de otros " <u>eventos</u> " <u>más sencillos</u>.

Al tirar un dado y observar el " número resultante ", los eventos elementales son 1,2,3,4,5,6, (se supone que al caer el dado queda una cara hacía arriba y lo que se observa es el número de dicha cara, ó sea " la cara que cae ").

1-1-2 ESPACIO DE MUESTRA:

<u>El espacio de muestra está formado por la totalidad de los eventos elementales de un experimento aleatorio, se denota por S (o por Ω).</u>

<u>Un evento compuesto ó derivado es un subconjunto del espacio de muestra. También, podemos decir que un evento elemental es un subconjunto del espacio de muestra que contiene un sólo " punto " muestral.</u>

<u>Ejemplo aclaratorio</u>:

Lanzamos al azar un dado balanceado. El espacio de muestra de ese experimento aleatorio es el siguiente:

$$S = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

NOTA IMPORTANTE: Siempre debemos dar la composición del espacio -

de muestra en sus eventos elementales. Cada evento elemental designa un resultado simple del experimento aleatorio, y cada resultado simple de un experimento aleatorio se representa por un sólo evento elemental, ó elemento, en el espacio de muestra. El número y la naturaleza de los elementos del espacio de muestra dependen del tipo de análisis que hagamos de una situación aleatoria dada.

Si dos eventos cualesquiera E_1 y E_2 de un espacio de muestra, no tienen elementos en común, se dice que son disjuntos ó que son mutuamente excluyentes, es decir $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (el conjunto vacío). Por lo tanto, $\emptyset$ siempre denota un evento imposible, y S siempre denota un evento seguro.

En este curso, vamos a considerar solamente espacios de muestra finitos, es decir, que están formados por un número finito de eventos elementales.

1-2 DIVERSOS ENFOQUES SOBRE EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD:

Probabilidad, chance y verosimilitud, son palabras con las que estamos familiarizados. Pero ¿ se entienden claramente cuando son usadas ?. En general podemos decir que cada uno de estos términos están relacionados con el grado de confianza que tenemos en la ocurrencia de algun evento. Aunque los términos no son sinónimos, son usados generalmente con el mismo significado.

Antes de que tratemos con los significados específicos del término llamado " probabilidad ", deberá notarse que " probabilidad " se refiere siempre a " masas " ó a " Conjuntos de Individuos ". El término nunca se aplica a un individuo específico ó a una proposición específica.

Un individuo específico, puede ó no tener la característica de interés; ó una proposición específica puede ser ó no verdadera en la realidad. Estas no son " probables ". Por otro lado, si se conoce que cierto número de individuos tienen alguna característica especial, podemos hablar por adelantado de la " probabilidad " de que un " individuo " seleccionado sea alguno de los que presentan esa característica particular.

1-2-1 EL CONCEPTO CLASICO:

<u>Suponga que un experimento aleatorio específico presenta n resultados distintos igualmente posibles. Si r de estos resultados poseen la cualidad particular de interés (llamémosle un éxito o suceso favorable), definimos la probabilidad del " éxito " por el cociente r/n y la SIMBOLIZAMOS POR P.</u>

Algunos autores objetan esta definición sobre la base de que debido a la circularidad del razonamiento, no es una definición en absoluto. La circularidad del razonamiento reside en que en la definición se supone que todos los resultados del experimento son igualmente posibles. De esta forma podriamos decir que la probabilidad se ha definido en términos de probabilidad.

Para determinar las probabilidades de acuerdo al concepto clásico, se necesita conocer el valor de n, (el número total de posibles resultados), el valor de r, (el número de resultados favorables ó éxitos) y además aceptar el supuesto de que todos los resultados posibles son " igualmente posibles ". Esto equivale a suponer " a priori " que la probabilidad de un suceso favorable es igual a $\frac{r}{n}$.

Estos requisitos son muy severos para aplicarlos a problemas concretos. Rara vez conocemos todos los resultados posibles antes de tomar una decisión administrativa. Tampoco es razonable suponer que todos los resultados son igualmente posibles. Consecuentemente la utilidad de esta definición para aplicaciones concretas en la administración de empresas, es muy limitada.

1-2-2 EL CONCEPTO DE FRECUENCIA RELATIVA:

Suponga que un experimento que consiste en un número muy grande (n) de pruebas repetidas, r de las cuales resultan en un evento S llamado suceso favorable ó éxito. Si para m muy grande el cociente r/n es aproximadamente igual a un número p y si a medida que n aumenta, el cociente tiende a acercarse progresivamente a p, entonces podemos definir a p como la probabilidad del evento S.

Aquí definimos " a posteriori " a la probabilidad del evento S, como la frecuencia relativa con la que el evento S ocurrió en una secuencia muy larga de pruebas repetidas.

Ejemplo:

De acuerdo con el concepto clásico, diremos que la probabilidad de que una moneda caiga en ""sol "" cuando se la arroja al aire es de 0.50. Aceptamos este valor " a priori " porque la moneda tiene dos-lados y suponemos que cada lado tiene la misma probabilidad de salir.

Por otra parte, supongamos que tenemos que echar volados con esa moneda, de la misma manera y en forma independiente y que sobre mil pruebas observamos que el " sol " cae 440 veces. Podemos concluir a " posteriori " de acuerdo al concepto de frecuencia relativa, que la probabilidad de " sol " no es de 0.50 sino de 0.44.

Ahora supongamos que podemos llevar a cabo el experimento aumentando el número de pruebas repetidas a 10,000 y que observamos que el " sol " sale 5502 veces. Podemos concluir que la probabilidad que tiene el " sol " no es de 0.50, ni de 0.44 sino de 0.55 aproximadamente. Nótese-que con el concepto de frecuencia relativa nunca podemos conocer exactamente cual es el valor de p, sino que sólo podemos obtener una aproximación.

Sin embargo, podemos estar bastante seguros que nuestra aproximación no estará muy alejada del valor real, si n alcanza un valor - suficientemente grande.

Entonces, ¿ Cómo aplicamos este concepto a situaciones administrativas ?.

Suponga una situación en la que un hombre de negocios-se enfrenta con el problema de determinar cuántos artículos altamente perecederos (de poca duración) debe almacenar. Esa cantidad depende de - la demanda del producto. Como en muchas situaciones comerciales, no existe una forma segura de conocer la posible demanda, ni tampoco suponer que todos los diversos valores de demanda son igualmente probables. Sin embargo, se pueden registrar las cantidades demandadas diariamente durante un - período de tiempo considerable y construir con base en alguna distribución de las frecuencias relativas (es decir las frecuencias relativas corres -

pondiente a : no se demanda ninguna unidad, se demanda una sóla unidad, dos unidades, etc.) Las frecuencias relativas pueden interpretarse como probabilidades de ocurrencia de cero unidades demandadas, una unidad, demandada, etc. Nótese que entonces estamos suponiendo que las probabilidades de demanda es cada día, durante un período dado de observación son constantes e independientes de la demanda de otros días.

1-2-3 CONCEPTO DE PROBABILIDAD SUBJETIVA:

Consideremos a un empresario que tiene la idea de fabricar un producto nuevo. Lo fundamental es decidir si seguir adelante o no con el desarrollo del producto así como decidir si las ganancias potenciales que se espera tener valdrán ó no la pena (en esfuerzo y costo). Ya que el producto es completamente nuevo, no hay datos para determinar las frecuencias relativas de su éxito ó fracaso. Sin embargo, la decisión debe tomarse de todas maneras.

Algunos autores arguyen que un Gerente que se enfrenta a un problema como este puede, con base en su experiencia con situaciones similares, determinar con cierta aproximación las probabilidades relativas a los diversos cursos de acción. Además opinan que dos ó más Gerentes con experiencia en el ramo, al calcular las probabilidades independiente (cada uno por su lado) no diferirán mucho en su cálculo.

En este sentido la probabilidad no sólo es un objeto medible cuantitativamnente. No es algo inherente a las cosas, como una magnitud física, sino que es algo eminentemente subjetivo, determinado por el valor de la experiencia. Puede tomársele como una medida de la " fuerza " de las convicciones personales sobre un problema. Puede definírsele como la creencia subjetiva de que ocurrirá ó no un evento sopesado con la fuerza de la convicción con la que esa creencia está relacionada.

1-2-4 C O N C L U S I O N :

Cada uno de estos conceptos de probabilidad serán útiles en situaciones particulares, pero ninguno de ellos puede ser usado en todas las situaciones. En este curso se darán muchos ejemplos que ilustrarán las diversas definiciones del concepto de probabilidad.

Sin embargo, en muchos casos concretos el cálculo de las probabilidades será exactamente el mismo. Sin importar que noción de probabilidad tengamos en mente.

En la siguiente sección introducimos la definición axiomática de probabilidad.

DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD:

Las probabilidades son números que asignamos a los eventos. Obviamente esos números no pueden ser arbitrarios si es que van a indicar (de algún modo) la probabilidad de que los eventos respectivos ocurren. Por ello es que impondremos algunas restricciones en lo referente a su determinación.

Las restricciones se denominan axiómas de probabilidad; y definen el concepto de probabilidad.

La probabilidad es una medida numérica que se asocia a los eventos de un espacio muestral, de acuerdo con las siguientes propiedades.

1) Para cualquier evento E, es cierto que $0 \leq P(E) \leq 1$

2) $P(S) = 1$, en donde S es el espacio de muestra.

3) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ cuando E_1 y E_2 son eventos mutuamente excluyentes.

Nótese que esta definición axiomática de probabilidad concuerda con el concepto de frecuencia relativa que representamos en la sec -

ción anterior. El primer axioma establece que no queremos que la probabilidad de un evento sea negativa. El segundo establece que la " certidumbre " se identifica con una probabilidad de 1. Demostraremos el significado del tercer axioma en un ejemplo que se dará adelante.

Dos consecuencias inmediatas de los tres axiomas son:

4) $P(E) \leq 1$, Para cualquier evento E

5) $P(\emptyset) = 0$, En donde $\emptyset$ es el conjunto vacío.

Finalmente una regla sencilla que se deriva de estos tres axiomas es:

6) $P(E') = 1 - P(E)$

En donde E' es el evento complementario de E.

1-4 PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA:

La definición del concepto de probabilidad condicional es: Sea E_1 un evento cualquiera del espacio de muestra S con $P(E_1) > 0$. La probabilidad de que ocurra un evento E_2 cuando el evento E_1 ha ocurrido, se llama la probabilidad condicional de E_2 dado E1, y se denota por : $P(E_2 | E_1)$.

La fórmula para el cálculo de la probabilidad condicional de E_2 dado E_1 es: $P(E_2 | E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$

Ejemplo:

Una orden de peces frescos se envía diariamente al Emperador Moctezuma desde veracrúz a México, Vía Puebla. Por experiencia se estima que la probabilidad de que la orden llegue a tiempo a Puebla es 0.80, y que la probabilidad de que la orden llegue tarde a Puebla y a tiempo a México, es 0.10. El emperador sabe que la orden ha llegado tarde a Puebla y desea conocer la probabilidad de que llegue a tiempo a México.

Solución:

Sean las probabilidades siguientes:

P (Pu) = Prob. de que la orden llegue tarde a Puebla.

P (Me) = Prob. de que la orden llegue a tiempo a México.

$P(Pu \cap Me)$ Prob. de que la orden llegue tarde a Puebla y a tiempo a México.

La incógnita es : $P(Me \mid Pu)$

Entonces, de acuerdo con la fórmula anterior.

$$P(Me \mid Pu) = \frac{P(Me \cap Pu)}{P(Pu)} = \frac{0.10}{0.20} = 0.50$$

Ahora queremos definir el concepto de independencia estadística:

Si $P(E_1 / E_2) = P(E_1)$ y si $P(E_2 / E1) = P(E_2)$.

Entonces E_1 y E2 son eventos independientes.

Además si E_1 y E_2 son eventos independientes se cumple que:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

1-5 REGLAS PARA EL MANEJO DE PROBABILIDADES:

En esta sección se presentan las reglas básicas para el manejo de las probabilidades de modo que el estudiante pueda cálcular las probabilidades asociadas con eventos conjuntos y eventos compuestos.

1-5-1 REGLAS GENERALES DE ADICION:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ en donde E1 y E_2 son eventos arbitrarios.

Ejemplo:

Un alumno está preocupado por sus calificaciones en M_3 y M_4 Estima que la probabilidad de aprobar

M_3 es de 0.4, que aprobará cuando menos uno de los dos cursos con probabilidad 0.6, pero que sólo tiene la probabilidad 0.1 de aprobar ambos cursos.

¿ Cuál es la probabilidad de que aprueben M_4 ?

SOLUCION:

El evento " aprobar al menos un curso " es ($M_3 \cup M_4$)

El evento " aprobar ambos cursos " es ($M_3 \cap M_4$)

Buscamos P (aprobar M_4) ó más brevemente (M_4)

conocemos la fórmula.

$$P (M_3 \cup M_4) = P (M_3) + P (M_4) - P (M_3 \cap M_4)$$

Y además disponemos de estos datos.

$$P (M_3 \cup M_4 = 0.6 \quad P (M_3 \quad M_4) = 0.1; \quad P (M_3) = 0.4$$

Sustituyendo valores

$$0.6 = 0.4 + P (M_4) - 0.1$$

Y despejando la incógnita: $P (M_4) = 0.3$

1-5-2 REGLA ESPECIAL DE ADICION:

$$P (E_1 \cup E_2) = P (E_1) + P (E_2)$$

Si ($E_1 \quad E_2$) = $\emptyset$, es decir E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes.

1-5-3 REGLA GENERAL DE MULTIPLICACIÓN:

$$P (E_1 \cap E_2) = P (E_1) - P (E_2 / E_1), \text{ con } P (E_1) \quad 0$$

6

$$P (E_1 \cap E_2) = P (E_2) - P (E_1 / E_2), \text{ con } P (E_2) \quad 0$$

1-5-4 REGLA ESPECIAL DE MULTIPLICACIÓN:

Si E_1 y E_2 son eventos independientes, entonces

$$P (E_1 \cap E_2) = P (E_1) \cdot P (E_2)$$

1-5-5 REGLA DE ELIMINACIÓN:

Si E_1 E_2 ..., E son eventos mutuamente excluyentes de los cuales ninguno tiene probabilidad nula y necesariamente uno debe ocurrir, entonces, para cualquier evento B.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(B/E_i)$$

1.5-6 REGLA DE BAYES:

Si E_1 y E_2, ..., E son eventos mutuamente excluyentes de los cuales ninguno tiene probabilidad nula y necesariamente uno debe - ocurrir, entonces para cualquier evento B.

$$P(E_1/B) = \frac{P(E\ ) \cdot P(B/E_i\ )}{P(E_j) \cdot P(B/E_j)}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, k$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PRACTICA 1 - CONJUNTOS

1.-

1.1 A un agregado, colección o reunión de objetos, se le llama ______________________________

1.2 Conjunto es un(a) ______________, con o sin relación entre ellos.

1.3 Los proveedores de una empresa forman un ______________ de proveedores.

1.4 Los objetos que forman un conjunto se llaman ______________ del ______________.

2.-

2.1 Un conjunto se representa por una ______________

2.2 Los elementos de un conjunto se representan por ______________________________

2.3 La relación de pertenencia se denota el símbolo: ______________

2.4 Para indicar que el número 9 pertenece al conjunto D de los dígitos, se escribe ______________

2.5 La relación de cada elemento con respecto al conjunto del que es miembro, recibe el nombre de relación ______________

2.6 Exprese con sus palabras $b \in B$: el ______________ al ______________

2.7 La relación de pertenencia no es una relación entre conjuntos, es una relación entre ______________

2.8 En lugar de escribir "es un elemento de", se utiliza el símbolo. ______________

2.9 Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto dado, se escribe ______________

3.-

3.1 Los símbolos que se utilizan para agrupar los elementos de un conjunto se llaman ______________

3.2 En la expresión $B = \{3, 4, 5\}$, el signo = se lee " ______________ ". Las llaves se leen " ______________ "

3.3 En notación de conjuntos, "S es el conjunto de los números naturales menores que 10" se escribe ______________

3.4 Los elementos de un conjunto se sepran mediante ______________.

4.-

4.1 En un conjunto bien definido los elementos no se repiten. Así el conjunto de las letras de la palabra otorrinolaringología tiene ______________ elementos.

4.2 El conjunto formado por los números 0, 1, 133, 0/1, 0/20, 1/1, tiene ______________ elementos, porque los elementos repetidos ______________ vez.

4.3 En un conjunto bien definido, el orden de sus elementos ______________

5.-

5.1 Si se tiene expresión $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se dice que el conjunto D está especificado o determinado por el método de ______________

5.2 Otro método para determinar un conjunto es por ______________

5.3 Un conjunto está especificado o determinado por ______________ cuando se le indica encerrando entre llaves a todos ______________

5.4 Un conjunto está determinado por ______________, cuando se le indica encerrando entre llaves una ______________ conjunto

5.5 El conjunto $C = \{x / x$ es un alumno de la F.C.A.$\}$ está especificado o determinado por ______________

5.6 La barra vertical escrita entre las letras X, se lee " ______________ "

6.-

6.1 El conjunto que agrupa a todos los elementos en estudio en una situación particular, se llama ______________

6.7– Se representa con una de las letras siguientes: ____________

7.–

7.1 El conjunto carente de elementos se representa con el símbolo ______ ó con ______

7.2 El conjunto que no contiene elementos recibe el nombre de ______ ó ______

7.3 El conjunto $T = \{\ \}$ es un ______

7.4 $F = \{X \mid X$ es un número natural mayor que 2 y menor que 3$\}$ es un ______ porque ______

8.1 $n(A) = 10$ nos indica que el conjunto A tiene ______

8.2 El número de elementos del conjunto nulo es ______ lo escribimos así: ______

8.3 Sea $P = \{y \mid y$ es un número natural, $1 \leq y \leq 9\}$. El número de elementos del conjunto P es igual a ______, lo escribimos así: ______

8.4 Según el número de sus elementos, un conjunto es ______ o ______

8.5 Se dice que un conjunto es ______ cuando se pueden contar sus elementos.

8.6 Si los elementos del conjunto no se pueden contar (porque no hay un último elemento) se dice que el conjunto es ______

8.7 Sea $G = \{a, b, c, d\}$. Como $n(G) = 4$, el conjunto es ______

8.8 Sea $H = \{11, 21, 31, \ldots\ldots\}$. H es un conjunto ______

8.9 El método de determinación por ______ es el método más correcto para indicar un conjunto infinito.

9.–

9.1 Dos conjuntos son iguales si y sólo si ______

9.2 Para que dos conjuntos sean distintos, basta con que ______

9.3 El orden de los elementos ______ en la definición de un conjunto. Los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 2, 1, 3\}$ son ______

10.–

10.1 El símbolo $\subset$ indica la relación de ______

10.2 El símbolo $\subseteq$ indica la relación de ______

10.3 ¿Cómo se lee la expresión $P \subset Q$? ______

10.4 Sean los conjuntos $A = \{5, 7, 9, 11, 13\}$, $B = \{X \mid X \in N,\ 5 \leq X$ es impar $\leq 14\}$ y $C = \{X \mid X \in N,\ 5 < X$ es impar $< 14\}$.

La relación entre los conjuntos A y B es de ______ (o de ______)

La relación entre los conjuntos C y A, ó C y B es de ______.

10.5 La relación de inclusión es una relación entre ______

10.6 Se tienen los conjuntos $D = \{1, 3, 5\}$ y $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

¿Es correcto que $D \subset F$? ______ porque ______

¿Es correcto que $F \not\subset D$? ______ porque ______

10.7 Todos los elementos del conjunto $F = \{f, i, n, a, n, z, a, s\}$ pertenecen al conjunto $G = \{f, a, z, i, s, n\}$.

Entonces F es un ______ de G.

La relación entre estos conjuntos es de ______

11.–

11.1 Si para todo elemento $a \in A$ se cumple que $a \in B$, y para todo elemento $b \in B$ se cumple que $b \in A$, se dice que esos conjuntos son ______

11.2 Si para todo elemento $a \in A$ se cumple que $a \in B$, pero existe al menos un elemento $b \in B$ tal que $b \notin A$, se dice que estos conjuntos son ______, y no cumplen la relación de ______

La relación entre los conjuntos A y B es de ______

El conjunto P ______ A.

11.3 Si se tienen dos conjuntos E y D, tales que $E \subset D$ y $D \subset E$,
¿Cómo es E con respecto de D? ________________
Esto nos indica que la relación de ________________ es
un caso especial de la relación de ________________.

11.4 El conjunto vacío, por convención, es ________________
de cualquier conjunto.

11.5 Si C = {herramienta, maquinaria, materiales, edificios}, la relación $C \subset \not C$ es en general ________, y la relación $\emptyset \subset C$ es siempre ________________.

11.6 El conjunto ________ no es único, ya que se puede elegir de acuerdo con nuestra conveniencia en cada situación particular.

Todos los ________ que puedan formarse en una situación particular, son ________ del conjunto ________________ ________ correspondiente.

11.7 Establezca algunas relaciones entre estos conjuntos:

E = {empresas establecidas en el área del Valle de México.}
P = {empresas establecidas en Naucalpan}
[illegible] = {empresas establecidas en Azcapotzalco}
{empresas establecidas en Tlalnepantla}
[illegible] = {empresas establecidas en Iztacalco}
[illegible] = {empresas establecidas en Iztapalapa}
N = {empresas establecidas al Norte del D. F.}
S = {empresas establecidas al Sur del D. F.}

11.8 Para que la inclusión sea propia los conjuntos deben ser ________________.

11.9 Si los conjuntos son distintos, la inclusión es ________________.

12.-

12.1 La relación de igualdad es:

	V	F
antisimétrica	____	____
comparativa	____	____
distributiva	____	____
reflexiva	____	____
simétrica	____	____
cerrada	____	____
no simétrica	____	____
transitiva	____	____
lineal	____	____

12.1 La relación de inclusión es

transitiva	____	____
comunicativa	____	____
modular	____	____
absorbente	____	____
simétrica	____	____
distributiva	____	____
inversa	____	____
reflexiva	____	____
conmutativa	____	____
parcial	____	____
no simétrica	____	____
ordenada	____	____

13.-

13.1 Dados dos conjuntos P y Q, hemos considerado tres situaciones:
$P \subset Q$ $P = Q$ y $Q \subset P$ ¿Hay alguna otra situación posible?
____

13.2 Si tiene dos conjuntos P y Q, tales que $P \not\subset Q$, $P \neq Q$ $Q \not\subset P$ y tienen algunos elementos en común; se dice que esos conjuntos son ________________.

13.3 Si se tienen dos conjuntos P y Q, tales que $P \not\subset Q$, $P \neq Q$, $Q \not\subset P$ y no tienen elementos en común; se dice que esos conjuntos son "________________".

13.4 Identifique las siguientes situaciones.

a.- $A \subset B$ pero $B \not\subset A$. Se trata de inclusión ________________
A es un ________ de B.

b.- $B \subset A$ pero $A \not\subset B$. Se trata de inclusión ________________
B es un ________ de A.

c.- $A \subset B$ y $B \subset A$. Se trata de ________________

d.- $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$ pero tienen elementos en común. Se trata de ________________

e.- $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$ y además no tiene elementos en común. Se trata de ________________.

13.5 Se dice que las situaciones anteriores son "mutuamente ______ ______", ya que si se da una de ellas no se puede dar las demás. También se dice que esas situaciones son "totalmente ______", ya que no hay otra situación posible.

14.-

14.1 $n(A)$ simboliza el número de elementos del conjunto ______
$n(B)$ simboliza el número de elementos del conjunto ______
$n(S)$ o $n(\Omega)$ simboliza el ______ o ______

14.2 Cuáles son los subconjuntos del conjunto.
$\{$planeación. organización, control$\}$? ______
______ ¿ Cuántos son? ______

14.3 Sea $n(A) = k$
Si $k=1$, se pueden formar ______ subconjuntos
Si $k=2$, se pueden formar ______ subconjuntos
Si $k=3$, se pueden formar ______ subconjuntos

14.4 En general, si $n(A)=k$, ¿a cuánto es igual el número de subconjuntos de A?

14.5 Si el conjunto dado consta de k elementos, el número de subconjuntos que se pueden formar a partir de esos k elementos es igual a ______.

14.6 Elabore el diagrama arborescente que permite construir todos los subconjuntos del conjunto $S = \{a, e, i\}$.

15.-

15.1 Para simbolizar al conjunto complemento de A, se escribe ______ y se lee "A complemento" o "A prima".

15.2 El conjunto A' contiene a todos los elementos que ______ al conjunto A.

15.3 Si $\Omega = \{X / X$ es un número natural, $0 < X \leq 10\}$ y $A = \{y / y$ es un número par, $0 < y \leq 10\}$. El conjunto A' está formado por los números.

15.4 El complemento del conjunto complemento es el ______.
En símbolos: $(A')' =$ ______

15.5 Dados los conjuntos $\Omega = \{a, b, b, c, d, e, f\}$ y $C = \{b, c, d, e\}$, determine por enumeración los conjuntos (C') y $\emptyset$

15.6 Sean $\Omega = \{s / s$ es un poseedor de acciones de empresas que cotizan en la Bolsa de Valores de la ciudad de México, D. F.$\}$,
$T' = \{t' / t'$ es un accionista de la empresa Teléfonos de México$\}$.
Determine el conjunto T. ______

15.7 Sean $\Omega = \{z / z$ es una letra del abecedario$\}$,
$A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, d, f, h, k, l, t\}$, y $C = \{c, g, j, m, n, p, q, r, s, u, v, w\}$.
Determine por enumeración los siguientes conjuntos:
B' = ______ A' = ______
Ω' = ______ $(A)'$ = ______
C' = ______ $(C')'$ = ______

16.-

16.1 Para simbolizar la intersección de los conjuntos A y B se escribe ______ y se lee "A ______ B".

16.2 La expresión $\{X / X \in A$ y $X \in B\}$ especifica por comprensión al conjunto "A ______ B"

16.3 Sean $\Omega = \{$vocales del abecedario$\}$, $J = \{i / i$ es una vocal de la palabra "planeación"$\}$, $K = \{k / k$ es una vocal de la palabra "organización" $L = \{l / l$ es una vocal de la palabra "decisión"$\}$, $P = \{p / p$ es una vocal de la palabra "control"$\}$.
a) Especifique por enumeración los conjuntos:
Ω, Ω', J, J', K, K', L, L', P, P', $\Omega \cap P$, $J \cap K$, $J \cap L$, $J \cap P$, $J \cap K'$, $J' \cap L'$, $J' \cap P'$, $K \cap L$, $K \cap P$, $L \cap P$, $K \cap L'$, $K \cap P'$, $L' \cap P'$, $\Omega \cap P$, $\Omega \cap J$,

b) Represente mediante diagramas de Venn cada uno de los casos anteriores.

16.4 ¿Que significa la expresión $A \cap B = \emptyset$?

Que los conjuntos A y B ______________________________

16.5 Para cualquier conjunto A, se sabe que $\emptyset \subset A$ y que $A \cap \emptyset = \emptyset$ ¿Es verdadera o falsa esta proposición? ¿porqué? (Especifique por descripción el conjunto $A \cap \emptyset$). ______________________________

16.6 Complete la siguiente expresión: $A \cap \Omega =$ ______________________________

Determine por descripción $A \cap \Omega$ y explique su respuesta. ______________________________

16.7 Para cualquier par de conjuntos M y N, si $M \subset N$ entonces $M \cap N = M$.
¿Es verdadera o falsa esta proposición ¿Porqué? ______________________________

16.8 Dado un conjunto R cualquiera, ¿a qué es igual el conjunto $R \cap R$?
$R \cap R =$ ______________________________
Determine por descripción $R \cap R$ y explique su respuesta ______________________________

16.9 Si tiene tres conjuntos R, S y T, y se sabe que $R \subset (S \cap T)$ ¿En qué relación está R con S? R ____________ S. ¿En que relación está R con T? R ____________ T.

16.10 Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $\Omega = \{x / x$ es un número natural $1 \leq x \leq 12\}$ responda si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

	V	F		V	F
$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	___	___	$A \cap B = B \cap A$	___	___
$A \cap B = \{x / x \notin A', x \in B'\}$	___	___	$A \in A \cap B$	___	___
$A \cap B \subset \Omega$	___	___	$A' \cap B = \{3, 5\}$	___	___
$B' \cap A = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$	___	___	$A \cap B = \{1\}$	___	___
$B' = \{2, 4, 6, 7, 11, 12\}$	___	___	$A' = \{3, 5\}$	___	___

16.11 ¿Cuáles de estas proposiciones son verdaderas?

		V	F
$A \cap (B \cap C)$	$= (A \cap B) \cap C$	___	___
$A \cap C \cap B$	$= C \cap A \cap B$	___	___
$A \cap B'$	$= A' \cap B$	___	___
$(A \cap C) \cap B$	$= A \cap B \cap C$	___	___
$A' \cap B'$	$= (A \cap B)'$	___	___
$A \cap A'$	$= \Omega$	___	___

Compruebe sus respuestas con los conjuntos A y B del punto inmediato anterior.

17.-

17.1 Indique mediante diagramas de Venn las siguientes relaciones entre conjuntos:

i. $A \subset B$; ii. $B \subset A$; iii. $B = A$; iv. $A \cap B = \emptyset$;
v. $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $A \cap B \neq \emptyset$ vi. $A \cap B \neq \emptyset$ $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$

17.2 Utilizando un diagrama de Venn para tres conjuntos, indique cuáles son las regiones que corresponden a los siguientes conjuntos.

$A' \cap B \cap C$
$A' \cap B' \cap C$
$A \cap B \cap C'$
$A \cap B'$
$A' \cap B'$
$A' \cap B \cap C'$
$A \cap B \cap C$, $A' \cap B' \cap C'$

17.3 Responder a las siguientes preguntas, ayudándose de los diagramas de Venn.

	V	F		V	F
$(A')' = A$	___	___	$x \in A'$ si $x \notin (A')'$	___	___
$\Omega' =$	___	___	$A = \Omega$ si $A' = \emptyset$	___	___
$\emptyset' = \Omega$	___	___	$A \subset \Omega$ si $A = \Omega$	___	___
$A' = \{x / x \notin A\}$	___	___	$A = \Omega$ si $A \neq \emptyset$	___	___

18.-

18.1 Para simbolizar la unión de los conjuntos A y B se escribe ______________ y se lee "A ______________ B"

18.2 Consulte las especificaciones de los conjuntos J, K, L y P del punto 16.3 Determine por enumeración los conjuntos:

$\Omega \cup J =$ ______	$\Omega \cup K =$ ______	$\Omega \cup L =$ ______
$J \cup K =$ ______	$J \cup L =$ ______	$J \cup P =$ ______
$J' \cup K' =$ ______	$J' \cup L' =$ ______	$J' \cup P' =$ ______
$K \cup L =$ ______	$K \cup P =$ ______	$L \cup P =$ ______
$K' \cup L' =$ ______	$K' \cup P' =$ ______	$L' \cup P' =$ ______

18.3 Sean los conjuntos $N = 1, 2, 3, 4, 5$, $S = 2, 6, 6$, $P = 7, 8, 9$, $Q = \{1, 5\}$. 1) Determine por enumeración los siguientes conjuntos:
a) $N \cup S$, b) $N \cup P$, c) $N \cup Q$.

2) Represente mediante un diagrama de Venn cada uno de los casos anteriores.

iii. Calcule el número de elementos de la unión en cada uno uno de los casos: a) ________ b) ________ c) ________.

18.4 Para cualquier conjunto A se sabe que $\phi \subset A$ y que $A \cup \phi = A$.
¿Es verdadera o falsa esta proposición? ¿Porqué? ________
____

18.5 Complete la siguiente expresión $A \cup \Omega =$ ________________
Explique su respuesta especificando por compresión el conjunto
$A \cup \Omega$ ________________________________

18.6 Para cualquier par de conjuntos, X y Y si $X \subset Y$ entonces
$X \cup Y = Y$.
¿Es verdadera o falsa esta proposición? ¿Porqué? ________
____

18.7 Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

	V	F		V	F
$A \cup B \subset \Omega$	____	____	$A \cap P \subset A \cup B$	____	____
$A \cup B = B \cup A$	____	____	$A \cap B \subset A$	____	____
$A \cup \Omega = \Omega$	____	____	$A \cap B \subset B$	____	____
$\Omega \cup B = \Omega$	____	____	$P \cup B = B$	____	____

18.8 En un diagrama de Venn para tres conjuntos, indique qué regiones corresponden a los siguientes conjuntos:

$(A' \cup B) \cap C$ ________________
$(A' \cup B') \cap C'$ ________________
$(A \cup B) \cap C'$ ________________
$(A \cap B) \cup (A \cap B' \cap C')$ ________________

18.9 Sean $\Omega = \{a, b, c, d, e,\}$, $P = \{a, c\}$, $Q \neq \phi$ y $R \neq \phi$
Determine por enumeración el conjunto Q, si se sabe que se verifican las siguientes condiciones:
$Q \cup R = \Omega$, $Q \cap R = \phi$, $R = \{a\}$ $Q =$ ________________

18.10 Trate de determinar el conjunto Q, si se sabe que verifican las siguientes condiciones.
$Q \cap R = \{c\}$, $Q \cup P = \{b, c, d,\}$, $R \cup P = \{a, b, c,\}$. $Q =$ ________________

19.-
19.1 Una propiedad importante de un conjunto es el número de elementos que lo forman. Otra propiedad es por ejemplo, el que sus elementos estén (o no) ordenados. El número de elementos de un conjunto se simboliza por $n(A)$.

19.2 Para representar el número de elementos de un conjunto A, se escribe ____ ________. Para indicar el número de elementos de un conjunto B, se escribe ________________________________

19.3 Si $P = \{$Administración, Finanzas, Mercadotecnia, Producción$\}$, $n(P)=$____
Si $Q = \{$Planeación, Organización, Control$\}$, $n(Q)=$____________.
$P \cap Q=$ ____________ ; por lo tanto, $n(P \cap Q)=$____________
$P \cup Q=$ ____________ ; por lo tanto $n(P \cup Q)=$____________

19.4 Si $R \cap S = \emptyset$, entonces $n(R \cap S)=$____________ y $n(R \cup S)= n(R)+ n(S)$. En el ejemplo anterior $n(P)=$____________ $n(Q)=$____________ ____________ y $n(P \cup Q)=$ ____________ $= n(P)+ n(Q)$.

19.5 Si $R \cap S \neq \emptyset$, entonces $n(R \cap S) \neq$ ____________ y $n(R \cup S) \neq n(R)+ n(S)$.

19.6 Supongamos que $R = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ y $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
Se observa que $n(R)=$____________ y $n(S)=$____________
Además $R \cap S = \{10\}$ y $n(R \cap S)=$____________
Al determinar el conjunto $R \cup S$, se tiene que $R \cup S=$ ____________
____________ o sea que $n(R \cup S)= 10$. Por otra parte $n(R) + n(S)=$____________
____________ $= 11$.

19.7 En el ejemplo anterior se observa que $n(R \cup S) \neq n(R)+ n(S)$, es mas $n(R) + n(S) > n($____________$)$.
Esto es así, porque el elemento ____________ pertenece tanto al conjunto R como al conjunto S, y se lo cuenta tanto al determinar $n($____________$)$, como al calcular $n($____________$)$.

19.8 Al definir un conjunto hemos dicho que los elementos no deben repetirse. Cada elemento debe contarse una sola vez. Por lo tanto, al calcular $n(R \cup S)$, cada elemento de la unión debe contarse una ____________.

19.9 Al contar $n(R)+ n(S)$ se ha contado____________ veces al elemento 10; una vez al contar $n(R)$ y otra vez al contar____________.
A fin de corregir esta doble cuenta, debe restarse de $n(R)+ n(S)$ el elemento repetido; o sea que $n(R \cup S)= n(R)+ n(S)-1=$____________ + ____________ $-1=10$.
Nota: Recuerde que $n(R \cap S)=1$.

19.10 La fórmula que nos permite calcular el número de elementos de la unión de dos conjuntos es $n(A \cup B)= n(A)+ n(B)- n(A$ ____ $B)$.
Si $A = \{$materias primas, productos en curso de elaboración, productos terminados$\}$ y $B = \{$edificios, terrenos, máquinas, instalaciones, productos terminados, vehículos$\}$:
a). Forme los conjuntos $A \cap B$ y $A \cup B$:
$A \cap B=$____________, $A \cup B=$____________
b). Calcule los número $n(A)$, $n(B)$, $n(A \; B)$ y $n(A \; B)$: $n(A)=$______,
$n(B)=$____________, $n(A \cap B)=$____________ y $n(A \cup B)=$____________
c). Verifique que $n(A \cup B)= n(A)+ n(B)- n(A \cap B)$:____________

19.11 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$.
a). Forme los conjuntos $A \cap B$ y $A \cup B$.
$A \cap B = \{$____________$\}$, $A \cup B = \{$____________$\}$.
b). Calcule $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ y $n(A \cup B)$:
$n(A)=$____________, $n(B)=$____________,
$n(A \cap B)=$____________, $n(A \cup B)=$____________
c). Verifique la fórmula
$n(A \cup B)= n(A)+ n(B)- n(A \cap B)=$____________

20.-

20.1 Sean los conjuntos R, S y T, tales que $R \cap S = \emptyset$, $R \cap T = \emptyset$ y $S \cap T = \emptyset$.
Calcule $n(R \cap S)$, $n(R \cap T)$ y $n(R \cup S \cup T)$, $n(R \cup S)$, $n(S \cup T)$.

$n(R \cup S)= n(R)+ n(S)$, $n(R \cap T)=$____________ $n(S \cup T)=$____________
$n(R \cup S \cup T)=$____________, $n(R \cap S)=$____________

20.2 Sean los conjuntos $A = \{2, 4, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 7, 1\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
a). Calcule $n(A)$, $n(B)$ y $n(C)$:
$n(A)=$____________, $n(B)=$____________, $n(C)=$____________
b). Forme los conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$ y calcule el número de elementos de cada uno:
$A \cap B=$____________ $n(A \cap B)=$____________
$A \cap C=$____________ $n(A \cap C)=$____________
$B \cap C=$____________ $n(B \cap C)=$____________
$A \cap B \cap C$ ____________ $n(A \cap B \cap C)=$____________

c). Forme los conjuntos $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$ y calcule el número de elementos de cada uno:

$A \cup B$= ____________________ $n(A \cup B)$= ____________________

$A \cup C$= ____________________ $n(A \cup C)$= ____________________

$B \cup C$= ____________________ $n(B \cup C)$= ____________________

$A \cup B \cup C$= ____________________ $n(A \cup B \cup C)$= ____________________

d). Verifique la fórmula $n(A \cup B \cup C)= n(A)+ n(B)+ n(C)- n(A\ B)- n(A \cap C)- n(B \cap C)+ n(A \cap B \cap C)$, utilizando los resultados anteriores:

____

e). Verifique que $n(A \cup B)= n(A)+ n(B)- n(A \cap B)$ ____________________

____

f). Verifique que $n(A \cup C)= n(A)+ n(C)- n(A \cap C)$ ____________________

____

20.3 Dibuje un diagrama de Venn para dos conjuntos, y utilícelo para explicar porqué hay elementos repetidos al calcular $n(A \cup B)$.

Justifique la fórmula $n(A \cup B)$= __________ + __________ - __________ en base al mismo diagrama.

20.4 Dibuje un diagrama de Venn para tres conjuntos, y utilícelo para explicar porqué hay elementos repetidos al calcular $n(A \cup B \cup C)$.

¿es cierto que $n(A \cup B \cup C) \angle\ n(A)+ n(B)+ n(C)$? ____________________

¿Porqué? Porque: a) los elementos del conjunto $A \cap B$ se cuentan __________

______________ y otra vez al ______________________________

b) Los elementos del conjunto $A \cap C$ se cuentan ____________________

c) Los elementos del conjunto $B \cap C$ se cuentan ____________________

____

20.5 Al sumar $n(A)+ n(B)+ n(C)$ se han contado dos veces los elementos de los conjuntos $A \cap B$, __ $\cap$ __, __ $\cap$ __. por lo tanto deben restarse de la suma $n(A)+ n(\_\_)+ n(\_\_)$, los elementos repetidos $n(A \cap B)+ n(\_\_ \cap \_\_)+ n(\_\_ \cap \_\_)$. Esto es: $n(A + n(\_\_)+ n(\_\_)- n(\_\_ \cap \_\_)- n(\_\_ \cap \_\_)- n(\_\_ \cap \_\_)$.

20.6 Al sumar $n(A)+ n(B)+ n(C)$ ¿Cuántas veces se cuentan los elementos del conjunto $A \cap B \cap C$? ______________. Una vez al calcular $n(A)$, otra vez en ______________ y otra vez en ______________. Al restar de esa suma los elementos de $n(A \cap B)+ n(\_\_ \cap \_\_)+ n(\_\_ \cap \_\_)$. ¿Cuántas veces se restan los elementos del conjunto $A \cap B \cap C$? ________

____________. Una vez al restar $n(A \cap B)$, una vez al restar $n(\_\_ \cap \_\_)$, y una vez al restar ______________________________.

20.7 Los elementos del conjunto $A \cap B \cap C$ han sido contados ______________ al calcular la suma $n(A)$+ _______ + __________, y han sido descontados ____________ al restar la cantidad $n(A \cap B)$+ __________ + __________. Por lo tanto, la cuenta debe corregirse, sumándole $n(A \cap B \cap C)$ para que esos elementos no queden sin contar.

20.8 La fórmula correcta para el cálculo del número de elementos de la unión de tres conjuntos, resulta así;

$n(A\ B\ C)= n(A)+ n(B)+ n(C) + n(A\ B)- n(A\ B)- n(B\ C)+ n(\_\_\_)$.

20.9 Dados los conjuntos $A= \{2, 4, 5, 7\}$, $B= \{3, 4, 2, 1\}$ y $C= \{3, 4, 5, 6\}$, verifique la fórmula para el cálculo del número de elementos del conjunto $A \cup B \cup C$.

$A \cap B$= ____________________ $n(A \cap B)$= ____________________

$A \cap C$= ____________________ $n(A \cap C)$= ____________________

$B \cap C$= ____________________ $n(B \cap C)$= ____________________

$A \cap B \cap C$= ____________________ $n(A \cap B \cap C)$= ____________________

$A \cup B$= ____________________ $n(A \cup B)$= ____________________

$A \cup C$= ____________________ $n(A \cup C)$= ____________________

$B \cup C$= ____________________ $n(B \cup C)$= ____________________

$n(A \cup B \cup C)= n(A)+ n(B)+ n(C)$= __ - __ - __ + __ = 4+ 4+ 4- __ - __ - __

2.-

21.1 Una agencia de viaje decide hacer una encuesta entre 300 de sus clientes, para apreciar los efectos de las promociones turísticas de excursiones que ha organizado a algunas playas importantes del país. Los resultados obtenidos son los siguientes:

144 Clientes habían viajado a Acapulco (A)

123 Clientes habían viajado a Puerto Vallarta (B)

38 Clientes habían viajado a Acapulco y Puerto Vallarta.

En base a la información disponible, la agencia desea conocer lo siguiente:

a) ¿Cuántas personas habían viajado únicamente a Acapulco?

Se trata de calcular el número de elementos del conjunto $A \cap B'$.

$n(A\cap B') = n(\_\_\_\_) - n(\_\_\_\_) = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

b) ¿Cuántos clientes no habían viajado a ninguno de los puertos mencionados?

Se trata de calcular el número de elementos del conjunto $A' \cap B'$.

$n(A'\cap B') = n(\Omega) - n(A\cup B)$ .... (1)

$n(A\cup B) = n(A) + n(\_\_\_\_) - n(\_\_\cap\_\_) = \_\_\_ + \_\_\_ - \_\_\_ = \_\_\_$

$n(\Omega) = 300$

Reemplazando estos valores en la fórmula (1), se tiene:

$n(A'\cap B') = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$.

21.2 Entre 827 ejecutivos destacados de diversas empresas del país se efectuó una encuesta, destinada a conocer a qué asociación cultural o deportiva pertenecen. 600 de esas personas respondieron afirmativamente, indicando que eran socios de al menos una de tales instituciones. Los resultados fueron los siguientes: 280 respondieron estar afiliados al club A, 200 dijeron ser socios de la asociación B y 190 indicaron pertenecer al instituto C. Además hubo 130 que son socios de las instituciones A y B, 80 del A y el C, 40 del B y el C y 200 a los tres, (A, B y C).

Se pregunta si la información recopilada es internamente consistente.

Solución:

De acuerdo con la información anterior

$n(A\cup B\cup C)=600$, $n(A)=280$, $n(B)=200$, $n(C)=190$, $n(A\cap B)=130$, $n(A\cap C)=80$, $n(B\cap C)=40$, $n(A\cap B\cap C)=200$.

Por otra parte, podemos utilizar la fórmula $n(A\cup B\cup C) = \_\_\_\_$

Reemplazando valores, se tiene que

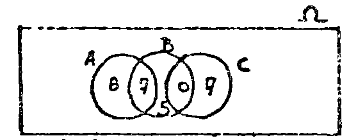
$n(A\cup B\cup C) = 280+200+\_\_\_\_$,

Comparando este resultado con la información original, se observa que ____

Por lo tanto, la información recopilada es internamente ____
(Consistente/inconsistente)

21.3 En base al siguiente diagrama, calcule $n(\Omega)$, $n(A')$, $n(A\cup C)$, $n(A\cup B')$, $n(A\cap B')$, $n(A\cup B)$, $n(A'\cap B\cap C)$, y $n(A\cap B'\cap C')$.

Solución:



$n(\Omega)=$ ____

$n(A')=$ ____

$n(A\cup C)=$ ____

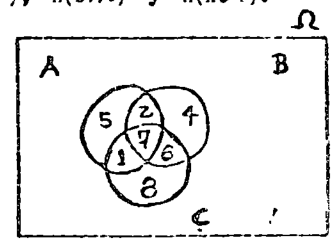
$n(A\cup B')=$ ____

$n(A\cup B)=$ ____

$n(A'\cap B\cap C)=$ ____

$n(A\cap B'\cap C')=$ ____

21.4 En base al siguiente diagrama de Venn, se pide calcular $n(A\cap B\cap C')$, $n(A\cup B\cup C')$, $n(A\cup B'\cup C')$, $n(A\cap B'\cap C')$, $n(B\cap C)$ y $n(A\cup B)$.



$n(A\cap B\cap C')=$ ____

$n(A\cup B\cup C')=$ ____

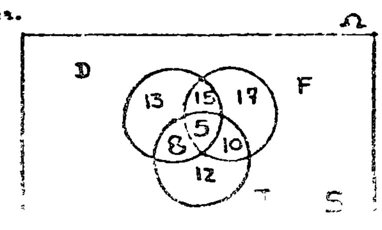
$n(A\cup B'\cup C')=$ ____

$n(A\cap B'\cap C')=$ ____

$n(B\cap C)=$ ____

$n(A\cup B)=$ ____

21.5 El propietario de un lote de automóviles usados posee 85 vehículos de diversos tipos, entre los cuales algunos son de tipo deportivo, (D), algunos están equipados con frenos de potencia, (F), y otros tienen transmisión automática, (T). Uno de los empleados vendedores ha sistematizado la información existente (usando sus tiempos libres), en el siguiente diagrama.



En base a esa información y a sus conocimientos de conjuntos, determine:

n (D)= ______	n(D ∩ F)= ______
(F)= ______	n(F ∩ T)= ______
n (T)= ______	n(T ∩ D)= ______
n (D ∪ F)= ______	n(F ∪ T)= ______
n (T')= ______	n(D')= ______
n (D ∩ F ∩ T)= ______	n(D' ∪ F' ∪ T)= ______
n [F ∩ (D ∪ T)]= ______	n T' ∩ (D ∪ F) = ______

INSTRUCCIONES: Si tiene dificultad en completar los espacios anteriores, lea nuevamente las aplicaciones 1., 2 del capítulo III.

21.6 En una encuesta sobre hábitos de lectura, aplicada a un grupo de 100 estudiantes de 1er. año de esta Facultad, se obtuvo la siguiente información:

50% leen la antología, 50% leen la bibliografía recomendada, 60% leen otros libros, 30% leen la antología y otros libros, el 10% leen la antología, la bibliografía recomendada y otros libros, 20% leen la antología y la bibliografía recomendada y 30% leen la bibliografía recomendada y otros libros.

i. Simbolice en notación de conjuntos toda la información disponible. Use "A" para el conjunto de estudiantes que leen la antología, "B" para el conjunto de los que leen la bibliografía recomendada, y "L" para el conjunto de los que leen otros libros:

n (______)=50	n(______)=20
n (______)=50	n(______)=30
n (______)=60	n(______)=30

n(______)=10

ii. Calcule cuantos estudiantes leen la antología o la bibliografía recomendada. Se pide calcular el número de elementos del conjunto A______B.

Esto es:

n (______)= n(A)+______ ______ + ______ = ______

iii. Calcule cuántos no leen.

Se pide determinar el número de elementos del conjunto A'______B'______C'

iv. ¿Qué otras informaciones derivadas puede usted obtener manejando la información disponible? (En el enunciado del problema se mencionaron ocho datos y luego se obtuvieron dos informaciones adicionales más. Forme todas las intersecciones posibles.)

______
______
______
______
______

22.-

22.1 Dado un conjunto A, se pueden obtener tres informaciones: n (Ω), n (A), n(A').

Note que n(A ∪ A')= n(Ω), n(A ∩ A')=0, n(A ∩ Ω)= n(A), n(A ∪ Ω)= n(Ω), n(A' ∩ Ω)= n(A'), n(A' ∪ Ω)= n(Ω).

Estos cálculos no proporcionan ninguna información adicional.

22.2 Dados dos conjuntos, A y B, se pueden obtener nueve informaciones: n(Ω), n(A), n(A'), n(B'), n(A ∩ B), n(A ∩ B'), n(A' ∩ B), y n(A' ∩ B'), n(B).

22.3 Dados tres conjuntos, A, B y C, se pueden obtener 27 informaciones: n (Ω), n(A), n(B), n(C), ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______

______

22.4 Dados cuatro conjuntos, A, B, C y D ¿Cuántas informaciones se pueden obtener? ______

22.5 Calculemos las potencias del número 3:

3^1 = ______, 3^2 = ______, 3^3 = ______, 3^4 = ______.

Cuál es la respuesta a la pregunta anterior?

22.6 Si se tienen cinco conjuntos A, B, C, D y E, ¿cuántas informaciones se pueden obtener? 3..............

22.7 Si se tienen 10 conjuntos ¿Cuántas informaciones se pueden obtener? 3....

[illegible]

[illegible]

[illegible] - Matrices y temas afines -

Aviso al alumno:

1) El alumno debe hacer los ejercicios de las practicas 4 y 5
2) El alumno entregará los resultados de sus practicas a su orientador.
3) Si un alumno no tiene un orientador "fijo", el alumno puede entregar sus practicas al señor Fernando Cienfuegos, en el cubículo 15 del tercer piso de la Dirección.
4) Se tomarán en cuenta los resultados de esas practicas en el computo de la calificación final del alumno.

Prof. Jean-Paul Rheault.

1.1. una matriz es una forma de presentación ordenada de datos cuantitativos en m ____________ y n ____________

1.2. una matriz es un conjunto ordenado de números, dispuestos en ____ ____________________ y en ____________________.

1.3. Una matriz es un medio para resumir y presentar, en forma sintética, información cuantitativa para que quede ____________________ en un cuadro de entrada ____________ .

1.4. Elabore un ejemplo de matriz donde se resuma el capital social, el volumen anual de ventas del año pasado, y el número de trabajadores de 4 empresas importantes del país que usted conozca; presente la información en este cuadro:

Nombre de la empresa	Capital social	Volumen anual de ventas.	Número de trabajadores

1.5. Las líneas horizontales de una matriz se llaman: ____________________

1.6. Las líneas verticales de una matriz se llaman: ____________________

1.7. Los números dentro de la matriz se llaman: __________ o __________

1.8. El orden de una matriz está dado por el número de ____________ y el número de ____________ ; el orden de una matriz que tiene cuatro renglones y tres filas está simbolizado por: ________

1.9. Indique el orden de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta: __________

2.1. Las matrices se simbolizan con literales: ______________

2.2. A los elementos de una matriz se les simboliza con literales ________ utilizando la misma literal que simboliza a la matriz considerada.

2.3. El símbolo que representa a cada elemento de una matriz incluye dos subíndices, uno para denotar la __________ y el otro para denotar la __________ donde se localiza dicho elemento.

2.4. El subíndice j denota la __________ en que se encuentra localizado el elemento considerado; el subíndice i indica el ______________ en que esta situado ese ______________ de interés.

2.5. Usted tiene la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 0 & 3 & 16 \\ -1 & -3 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 14 & -7 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Conteste estas preguntas:

a) ¿ Cuál es su orden ? : __________

b) ¿ Cuál es el subconjunto de elementos de la cuarta fila ?
respuesta: ____________________

c) ¿ Cuál es el valor del elemento a_{43} ? : ________

d) ¿ " " " " a_{14} ? : ________

e) ¿ " " " " a_{34} ? : ________

f) ¿ Cuáles son los elementos en que $a_{ij} = 0$? : ____________________

g) ¿ Para qué elementos $a_{ij} > 8$? : ____________________

2.6. ¿ Cuántos elementos hay en una matriz de orden 2 x 2 ? : ____________
2.7. " " " " de orden 4 x 3 ? : ____________
2.8. " " " " de orden m x n ? : ____________

3.1. Escriba una matriz que contenga igual número de filas que de columnas:

La matriz anterior es una matriz ______________.

3.2. En toda matriz ______________ el número de ____________ es igual al número de ______________; dicha matriz se llama ______________

3.3. En una matriz RECTANGULAR se tiene m __________ y n ______________, es decir que el número de renglones NO es _______ al número de _______

3.4. Indique con una C aquellas matrices especiales que corresponden a matrices CUADRADAS, con una R aquellas que correspondan a matrices RECTANGULARES, y con una A a las matrices que pueden corresponder a ambos tipos :

a) un vector renglón : ______________
b) una matriz antisimétrica: ______________
c) una matriz nula: ______________
d) el vector suma: ______________
e) una matriz escalar: ______________
f) una matriz identidad: ______________
g) el vector nulo: ______________
h) una matriz diagonal ______________
i) una matriz cualquiera: ______________

3.5. La diagonal principal interesa sólo en matrices ______________

3.6. Si en una matriz diagonal todos los elementos de la ______________ principal son iguales, se dice que es una matriz ______________

3.7. ¿ Qué diferencia hay entre una matriz identidad y una matriz escalar?
Respuesta: ____
____

4.1. Dar un ejemplo en cada uno de los casos siguientes:

a) una matriz identidad de orden 3.

b) una matriz escalar de orden 4.

c) una matriz diagonal de orden 2.

d) una matriz simétrica de orden 3.

e) una matriz rectangular de orden 4 x 5.

4.2. ¿ Es esta matriz una matriz simétrica de orden 3 ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

respuesta: ______
justifique su respuesta: ____
____

4.3. Indique si estas proposiciones son verdaderas o falsas:

a) Una matriz identidad es simétrica.: ____________
b) Una matriz escalar es matriz diagonal: ____________
c) Una matriz nula es matriz cuadrada: ____________
d) Una matriz simétrica es diagonal: ____________
e) Una matriz nula es simétrica : ____________
f) Las matrices triangulares son simétricas: ____________

5.1. Indique, en la columna de la derecha, la letra de la definición que le corresponde en la columna de la izquierda:

a) $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i,j	matriz escalar ______
b) $a_{ij} = k$, para $i = j$; $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$	matriz triangular superior: ___
c) $\{a_{ij} \mid i = j\}$	diagonal principal: ___
d) $I = [\delta_{ij}]$ con $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{sí } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	matriz diagonal: ______
e) $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$	matriz identidad: ______
f) $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo i,j	matriz simétrica ______
g) $a_{ij} = 0$, para $i > j$	matriz antisimétrica: ______
h) $a_{ij} = 0$, para todo i,j	matriz nula: __________

5.2. Represente en símbolos una matriz nula: ____________________

5.3. Represente en símbolos una matriz simétrica: ____________________

5.4. Usted tiene esta matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conteste estas preguntas:

a) ¿ Cuál es el orden de esa matriz ? : ________

b) ¿ Cuántos vectores son nulos ? : ________

c) ¿ Cuántos vectores son vectores unidad ? : ___

d) ¿ Cuántos vectores son vectores suma ? : _____

e) ¿ Es esa matriz una matriz identidad ? : _____

f) ¿ Es esa matriz una matriz simétrica? : _____

g) ¿ Es esa matriz una matriz triangular? : _____

h) ¿ Es esa matriz una matriz diagonal? : _____

i) Indique los elementos de la diagonal principal: ______________

j) Indique los elementos del vector renglón no. 4: ______________

6.1. Dos matrices son iguales sí y solamente sí :

i) son del mismo __________

ii) los elementos correspondientes son __________

6.2. Coloque el signo = cuando las matrices sean iguales, el signo ≠ cuando sean desiguales, y el signo "nc" cuando no sean comparables, en los casos siguientes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x^2 - 1 \\ x \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} (x + 1)(x - 1) \\ 3x - 2x \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

6.3. Para que se puedan plantear relaciones entre matrices, es necesario que sean del mismo ________.

6.4. Dada una matriz, su transpuesta se obtiene intercambiando __________ por ____________.

6.5. Si una matriz es de orden 3 x 4 , su tranpuesta es de orden ________; si una matriz es de orden m x n , su transpuesta es de orden________.

6.6. Dar la matriz transpuesta de ~~esta~~ matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

respuesta:

¿ Cuál es el orden de la matriz tranpuesta encontrada? : __________

6.7. Indique en símbolos la transpuesta de la matriz transpuesta de C· ____

7.1. La única condición que se exige para sumar o restar dos matrices es que sean del mismo __________; si las matrices cumplen esa condición, se dice que son ______________ para la suma (o la resta).

7.2. Indique el resultado en estas operaciones de suma de matrices:

a) $A+0=$ ______

b) $A+(-A)=$ _____

c) $A+B-B+$ ______

d) $A+(B+C)=(A+B)+$ ______

7.3. Usted tiene las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & -2\\0 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 0\\-2 & -4\end{bmatrix}$$

Calcule las siguientes operaciones:

a) $A+B=$

b) $(A+B)+C=$

c) $A+(B+C)=$

d) $A-B=$

e) $B-A=$

f) $(A-B)+C=$

7.4. Utilizando los resultados anteriores, ¿ es $A-B=B-A$? ________

8.1. Existe un requisito para que la operación de multiplicación entre matrices sea posible; este es que los factores sean ____________; ello se cumple cuando el número de __________ de la primera matriz es ________ al número de renglones de la ____________ matriz.

8.2. Algunos de los productos siguientes son posibles y otros no lo son. Indique en que casos se puede efectuar la operación de multiplicación y cuál es el orden de la matriz resultante:

Sean estas matrices: $A_{2\times 5}$, $B_{5\times 4}$, $C_{4\times 5}$.

a) B.A ______________; b) A.B ______________

c) C.A ______________; d) B.C ______________

e) A.C ______________; f) C.B ______________

8.3. Dados estas matrices, calcule los productos siguientes:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

a) el producto A.B es :

b) el producto B.A es:

c) el producto (A.B).A es:

d) el producto (B.A).B

8.4. Compruebe que para todas las matrices tales que:

$$A=\begin{bmatrix}ab & b^2\\-a^2 & -ab\end{bmatrix},\ \text{se cumpla que } A.A=0$$

Solución:

8.5. Indique el resultado de las operaciones siguientes, suponiendo que las matrices son conformables en todos los casos:

a) vector columna X vector fila: ______________

b) matriz X vector columna: ______________

c) vector renglón X vector columna: ______________

9.1. Para multiplicar una matriz por un vector, debemos tener en cuenta el requisito de conformabilidad; si una matriz A premultiplica a un vector, este debe ser un vector columna, con tantos elementos como el número de columnas de la matriz A.

Sean las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Efectúe el producto A.Y : (recuerde renglón por columna)

9.2. Existe un símbolo especial para indicar sumas en forma abreviada. Es la letra SIGMA mayúscula del alfabeto griego, y se escribe: $\sum$
Debajo del símbolo $\sum$ se escribe una letra latina que cumple las funciones de variable; esta letra representa los valores de la variable que se van a sumar. Sean los ejemplos siguientes:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

observese que la variable a tiene un índice de variación i , y que el rango de variación de ese índice es de 1 a 5.
Los valores de la variable a_i dependen del caso específico a la mano.
Anteriormente, hemos dicho que el elemento genérico de la matriz A es a_{ij} , en donde el primer subíndice i indica el renglón considerado y el subíndice j indica la columna en donde esta localizado ese elemento. Por ejemplo, el elemento a_{23} es el elemento situado en la segunda fila y tercera columna.

$$\sum_{i=1}^{6} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + a_{4j} + a_{5j} + a_{6j}$$

En el ejemplo anterior se especifica únicamente el rango de variación del subíndice i . Por lo tanto, encontramos la suma de los elementos de la columna j , para los 6 renglones de interés.

9.3. A veces buscamos la suma de un conjunto de productos, como en el caso siguiente:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$

En ese caso, tenemos dos variables que son: a_i y b_i

9.4. Veamos el significado de la expresión siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad .$$

La expresión anterior significa que se deben sumar todos los productos de la forma $(a_{ik} \cdot b_{kj})$, en donde k varia de 1 a n ; esto es:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + a_{i3}\,b_{3j} + \dots + a_{in}\,b_{nj}$$

Observense que esto representa el producto del vector renglón i de la matriz A por el vector columna j de la matriz B.

9.5. En los ejemplos siguientes, la variable n_i representa a los enteros positivos del sistema de los números reales;

a) Calcule: $\sum_{i=1}^{9} n_i$: ______________________

b) Calcule esta suma: $\sum_{i=1}^{8} n_i(n_{i+1})$: ______________________

c) Calcule esta suma: $\sum_{i=1}^{6} 2n_i$: ______________________

9.6. Desarrolle las expresiones siguientes:

a) $\sum_{k=1}^{6} a_{ik} \cdot b_{k7}$: ______________________

b) $\sum_{k=1}^{9} a_{3k} \cdot b_{k3}$

9.7. Efectúe el producto de las matrices siguientes:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución:

10.2. Sea este sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$1)\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$$
$$2)\ x_1 - x_2 + x_3 = -1$$
$$3)\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

a) Escriba la matriz de los coeficientes de las variables x_i

b) Escriba el vector de las variables x_i

c) Escriba el vector de los términos independientes b_i

d) Escriba el sistema anterior en forma matricial:

e) ¿ Cuál es el orden de la matriz de los coeficientes? : ______

f) ¿ Cuál es el orden de la matriz de las variables? : ______

g) ¿ Cuál es el orden de la matriz de los términos indep.?: ______

h) ¿ Es conformable el producto A.x en ese caso? : ______

i) ¿ Cuál es el orden de la matriz resultante del producto anterior ? : ______

10.3. La ecuación matricial $A.x = b$ se llama ecuación NO HOMOGENEA.

10.4. La ecuación matricial $A.x = 0$ se llama ecuación HOMOGENEA., en donde 0 es la matriz columna cero.

10.5. Ahora nos interesa obtener la solución de la ecuación no homogénea por medio de los <u>determinantes</u>.
Ver su libro de texto para la definición del concepto determinantes (Richard Dorf, Introducción al álgebra de matrices)

10.6 Encuentre el determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; SOLUCIÓN:

10.7. utilizaremos la <u>regla de Cramer</u> para obtener la solución de la ecuación matricial no homogénea .

10.8. La regla de Cramer se utiliza siempre que el determinante de la matriz de coeficientes de las variables no sea igual a cero.

10.9. Utilice la regla de Cramer para encontrar a x_2 en el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$1)\ 2x_1 + 6x_2 = 0$$
$$2)\ 4x_1 + 2x_3 = 2$$
$$3)\ x_2 + x_3 = 2$$

Solución:

10.10. Encuentre el valor del determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 18 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

10.11. Tambien podemos utilizar el proceso de inversión de matrices para resolver un sistema de "n" ecuaciones simultáneas.
(Ver el capítulo 6 de su libro de texto)

10.12. La operación matricial que es análoga a la división se conoce como INVERSION MATRICIAL; la inversa de una matriz cuadrada A se escribe como A^{-1} y se define como la matriz que, al multiplicarla por la matriz original A; da la matriz IDENTIDAD.
Por lo tanto: $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$
en donde la matriz original y su inversa son conmutativas.

10.13. Sólo las matrices cuadradas PUEDEN tener inversa única ; sin embargo el hecho de que una matriz sea cuadrada no garantiza la existencia de una matriz inversa. Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman matrices REGULARES; las demás se llaman SINGULARES.

10.14. A fin de cubrir nuestras necesidades, daremos un método muy sencillo que permite invertir cualquier matriz cuadrada regular de orden 2. Sea la matriz cuadrada A regular siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para obtener su inversa, A^{-1}, se siguen estos pasos:

a) se cambia el signo de los elementos a_{12} y a_{21}

b) se permuta la colocación de los elementos a_{11} y a_{22}

c) se dividen todos los elementos de la matriz por el número Δ el cuál está dado por: $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

d) la matriz inversa resulta así:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{+a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

e) queremos obtener la inversa de esta matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

aplicando el primer paso, obtenemos: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

aplicando el segundo paso, obtenemos: $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

encontramos el valor de $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (1)(9) - (2)(3) = 3$

la matriz inversa resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-3}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2/3 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

10.14 (continua)

f) Comprobamos: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2/3 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

10.15. Obtenga la inversa de esta matriz:

$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; Solución:

Compruebe su respuesta:

10.16. Compruebe que la siguiente matriz es una matriz SINGULAR:

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

respuesta:

10.17. Utilizando el método simple para invertir una matriz cuadrada de orden dos, descrito anteriormente, compruebe que la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

Solución:

10.18. Efectúe la multiplicación de las matrices siguientes:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -5/9 \end{bmatrix}$

a) Solución:

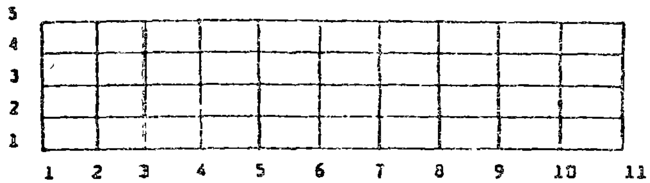
b) ¿ Cuál es el resultado de la multiplicación anterior? : ________

c) ¿ Es ese producto conmutable? : ________________

11.1 Anteriormente hemos estudiado la operación entre conjuntos, llamada "producto cartesiano".
Se tienen estos conjuntos: $H = \{1,4,5,6,\}$ y $K = \{2,3,4.\}$

a) Encuentre los elementos de $H \times K$:

b) Indique los elementos de $H \times K$ en el reticulado siguiente, marcando los puntos correspondientes



11.2. Sean A y B dos conjuntos no vacíos.
Una relación de A a B es una fórmula (o regla) que VINCULA los elementos de A con los elementos de B.

11.3. Sean $A = \{1,2,4\}$ y $B = \{2,3,4\}$.

a) Especifique por EXTENSION el conjunto $A \times B$:

b) Especifique por EXTENSION el subconjunto C de $A \times B$ tal que:
$C = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B,\ x = y\}$

c) Especifique por EXTENSION el subconjunto D de $A \times B$ tal que:
$D = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B,\ x < y\}$

d) Observense que C es una RELACION en $A \times B$.

e) ¿ Es D una relación en $A \times B$? : ____________

f) ¿ Puede usted encontrar otra relación en $A \times B$? : ____________

g) Dar un ejemplo de otra relación en A B, además de las relaciones C y D y especifíquela por EXTENSION:

11.4. Una relación del conjunto A al conjunto B se especifica por COMPRENSION escribiendo:
$$R = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B,\ P(x,y)\}$$
en que la proposición $P(x,y)$ es una fórmula que indica cuál es el subconjunto de $A \times B$ que nos interesa y que denotamos por R.

11.5. Sean A y B dos conjuntos no vacíos.
Sea $P(x,y)$ una proposición tal que $x = 2y$.
Sea la relación $F = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B,\ x = 2y\}$

a) Observense que la relación F en $A \times B$ está especificada por COMPRENSION.

b) Especifique por EXTENSION la relación F.

11.6. Una relación está bien definida si para un par ordenado cualquiera se puede decir, sin lugar a dudas, si ese par PERTENECE a la relación o si no pertenece a la relación.

a) Haciendo referencia al inciso 11.5 , diga si los pares siguientes pertenecen o no a la relación **F** :

i) el par (2,4) : ________

ii) el par (1,3) : ________

iii) el par (3,1) : ________

iv) el par (7,2): ________

11.7. El conjunto de las primeras posibles componentes de todos los pares ordenados que pertenecen a una relación dada se llama el ALCANCE; el conjunto formado por todas las posibles segundas componentes de cada par ordenado se llama el RANGO de la relación.

11.8. El conjunto formado por las primeras componentes de todos los pares ordenados que <u>satisfacen</u> una relación, se llama el DOMINIO de la relación; el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados que <u>satisfacen</u> la relación se llama la IMAGEN de la relación.

11.9. Se tienen las relaciones R_1, R_2 y R_3 . especificadas por comprensión y definidas como subconjuntos del producto cartesiano $A \times A$, en que el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

11.9 (CONTINUA)

Especifique por extensión esas tres relaciones:

a) $R_1 = \{(x,y) \mid x \in A \ , \ y \in A \ , \ y = 2x\}$: ______________________

b) $R_2 = \{(x,y) \mid x \in A \ , \ y \in A \ , \ y = 4, x \geq y\}$: ______________________

c) $R_3 = \{(x,y) \mid x \in A \ , \ y \in A \ , \ x.y = 6\}$: ______________________

d) ¿ Cuál es el dominio de R_1? : ______________________

e) ¿ Cuál es la imagen de R_1 ? : ______________________

f) ¿ Cuál es el dominio de R_2? : ______________________

g) ¿ Cuál es la imagen de R_2? : ______________________

11.10. Sea el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$.

Utilizando un diagrama cartesiano, represente gráficamente una relación R en $A \times A$, tal que su dominio sea $D(R) = \{2,3\}$

Solución:

11.11. IMPORTANTISIMO .....

Una <u>función</u> , definida en un producto cartesiano A x B, es una relación en la que NO hay dos pares ordenados que tengan la MISMA primera componente.

11.12. En una <u>función</u> a cada elemento del DOMINIO corresponde UNO y sólo UN elemento de la IMAGEN de la relación.

11.13. Una función es un tipo específico de __________ en A x B en la que no hay ______ pares ordenados que tengan la ________ primera ______________.

11.14. De las siguientes relaciones, indique cuales son funciones:

a) $R_1 = \{(2,2),(4,4)\}$. : ______________________

b) $R_2 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\}$: ______________________

c) $R_3 = \{(1,3),(2,3),(4,3)\}$: ______________________

d) $R_4 = \{(2,2),(2,3),(2,4)\}$ ______________________

e) $R_5 = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$: ______________________

11.15. Observense que todas las funciones son relaciones.

11.16. Observense que no todas las relaciones son funciones.

11.17. Acuerdense que una relación es:

- un conjunto de pares ordenados
- un subconjunto de un producto cartesiano
- una fórmula (regla) matemática
- un lugar geométrico de un diagrama cartesiano.

11.18. Si a un elemento del dominio corresponde más de un elemento del conjunto imagen, la relación NO define una función.

11.19. Siempre que definimos una función, conviene imaginar su dominio por un lado, su rango por otro, y la función como algo que lleva, aplica o transforma cada punto del dominio en un punto de la imagen.

11.20. La noción de función no debe interpretarse como el de una relación de "causa a efecto"; es simplemente una CORRESPONDENCIA entre elementos de dos conjuntos.

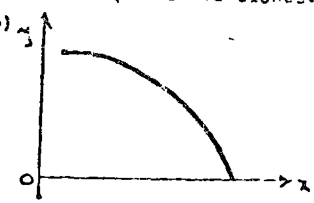
11.21. Si el alcance de una función tiene un número finito de elementos, se puede especificarla por extensión como un conjunto de pares ordenados.

En cambio, si el número de elementos del alcance de la función es infinito, sólo cabe representar la función mediante una fórmula (por comprensión) o mediante un diagrama cartesiano.

11.22. Presentamos gráficamente dos relaciones que son funciones:

a)

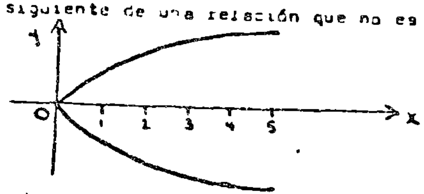
b)



11.23. En las representaciones gráficas de funciones, no puede trazarse ninguna línea recta vertical que intersecte a esa representación gráfica en 2 o más puntos.

Si al trazar una recta vertical intersecta a la representación gráfica en 2 puntos distintos, los pares ordenados correspondientes a esos puntos tienen la misma componente x, y por lo tanto la relación dibujada NO es una función.

11.24 Haciendo referencia al contenido del inciso anterior (11.23), vease el ejemplo siguiente de una relación que no es una función:



a) Justifique el hecho de que no es una función.

11.25. Considera la siguiente tabla de valores para la variable x, llamada variable independiente, y la variable y llamada variable dependiente:

x	± 1	± 2	± 3	0	± 4
y	1	4	9	0	15

a) Enumerar el conjunto de pares ordenados:

b) Representar gráficamente el conjunto de pares ordenados anteriores utilizando un diagrama cartesiano:

c) ¿ Es la relación anterior una función? : ____________

d) Justifique su respuesta al inciso c).

11.26. ¿ Es esta relación $h = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,8),(4,16)\}$ una función?

a)

b) ¿ Qué tipo de función es?. es una función lin........

12.1. Efectúe una representación gráfica de los valores de esta tabla:

Producción(miles de pesos)	11.5	15.5	13.5	14	16	11
Precio (pesos / kilo)	2.0	1.6	1.8	1.9	1.1	2.2

En el eje horizontal represente la producción

En el eje vertical represente el precio.

a)

b) ¿ Es la relación anterior una función? : ____________

12.2. En cierta empresa se pagan 8 pesos por hora trabajada, hasta un máximo de 35 horas semanales, y un 40% adicional para las horas trabajadas con exceso a 35 h.

Para cada trabajador, la empresa descuenta el 5% por concepto del I.S.R., el 2% para el fondo de pensión y el 1% para el INFONAVIT, calculado sobre el ingreso total percibido.

Se desea construir un modelo matemático para determinar los ingresos netos mensuales de cada trabajador de esa empresa (los descuentos se hacen mensualmente).

SOLUCION:

____________ nombre y firma del alumno

____________ fecha de entrega al orientador

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

TEORIA DE CONJUNTOS Y TOMA DE DECISIONES

PROBABILIDAD

LIC. RUBEN BALBUENA ALVAREZ
Febrero, 1976

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

Los analistas de mercado se interesan en conocer la lealtad de una marca determinada, por parte del público consumidor, y en el efecto de esta lealtad sobre la penetración del mercado.

Se tiene dos marcas (A y B) de un producto determinado.

Supongamos que un cliente que compra la marca A en un período de tiempo (t) tiene una probabilidad de 0,50 de compra nuevamente la A en el siguiente período ($t_+ 1$) y una probabilidad de 0.50 de comprar la marca B.

Sin embargo, supóngamos que un cliente que compra la marca B en el período t, tiene el 0.70 de probabilidad de repetir la compra de B, (es decir que son más " leales " que los clientes de la marca ("A") y una probabilidad de 0.30 de cambiar a la A en el período ($t_+ 1$).

Representamos este conjunto de siatuaciones posibles con la siguiente tabla

MARCA COMPRADA EN EL PERIODO t	MARCA COMPRADA (PERIODO $t_+ 1$) A	B
A	0,50	0.50
B	0.30	0.70

Ahora supóngase que el comportamiento de la compra de una marca depende únicamente de la compra inmediata precedente y que sea estadísticamente independientes de cualquier otra compra previa a la inmediata anterior.

Supóngase además que las probabilidades relacionadas con la repetición de compra y el cambio de marca se mantienen constantes de un período a otro.

Supóngamos que al momento de iniciar el análisis cada marca donima un 50% del mercado , es decir; que la misma cantidad de -- clientes compran a A como a B

Estamos interesados en pronósticar la penetración del mercado de cada marca después de que haya transcurrido un período, es - decir, al momento (t + 1).

Durante el período la marca A, ha conservado el 50% - de sus clientes y quitado el 30% de los clientes del artículo B. De ahí que al momento (t + 1), las proporciones de mercado son lassiguientes:

Marca A : (.50) (50% del mercado de A) +

: (.30) (50% del mercado de B)

: (.50) (.50) + (.30) (.50) = 40% del mercado.

Marca B : (.70) (50% del mercado de B) +

: (.50) (50% del mercado de A)

= (.70) (.50) + (.50) (.50) = 60% del mercado.

Por lo tanto en el momento t 1 , la marca B ha aumentado en penetracion de mercado al 60% y la marca A ha disminuido al 40%.

Repitamos el proceso durante el segundo período, de tal - manera que las propociones de mercado en un momento (t + 2) son:

Marca A : (.50) (.40 del mercado de A) +

: (.30) (.60 del mercado de B) =

= (.50) (.40 + (.30) (.60) = 38% del mercado.

Marca B : (.70) (.60 del mercado de B) +

: (.50) (.40 del mercado de A) =

= (.70) (.60) + (.50) (40) = 62% del mercado.

Nuevamente notamos que la penetración de mercado de la marca B aumentó (levemente) . Sí el proceso se repite durante varios -- períodos se alcanza una situación de equilibrio en que la marca A domina- -3/8 del mercado, y la marca B 5/8 del mercado. En este punto, el número- de clientes que dejan de comprar la marca "A" están balanceados exactamen te con aquellos que cambian de la "B" a la "A"

Diremos finalmente que muchas estrategias de mercado - se canalizan a influenciar la lealtad de una marca. Los análisis prelimi nares que hemos hecho, permiten seguir en el tiempo el efecto de tales - estrategias en la penetración de mercados.

En las siguientes unidades desarrollaremos conceptos - analíticos que utilizaremos para resolver problemas más complejos en el - campo de la Administración de Empresas.

UNIDAD NUMERO DOS

2. 1 : INTRODUCCION:

En la parte anterior aprendimos el significado de la probabilidad de ciertos eventos y algunas reglas para calcularlas.

En este capítulo definiremos el concepto de distribución de probabilidad, e ilustraremos el uso de distribuciones discretas de probabilidad en la resolución de problemas administrativos.

Muchos problemas prácticos requieren un análisis de las fluctuaciones que presentan las variables fundamentales del mismo, tales como las variaciones en las ventas, en la demanda de los artículos del inventario, en las características de productos manufacturados, en los costos de producción etc. Una étapa fundamental para el análisis de una variable, consiste en agrupar o clasificar las observaciones en una distribución de frecuencias relativas de los valores empíricos, sirve como base para determinar cuales la expectativa de valores futuros de esa variable. De tal manera, una distribución de probabilidades sirve como módelo para una distribución de valores de una variable.

Una frecuencia relativa no es una probabilidad en si misma, sino concretos, en que se carece de información significativa, es útil asignar probabilidades (numéricamente iguales a las frecuencias relativas) de los valores de una variable.

Un módelo teórico de las frecuencias relativas de un número finito de observaciones de una variable se denomina " distribución de probabilidades " Es un arreglo sistemático de las probabilidades asociadas con los eventos elementales mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos de un experi

mento aleatorio. Explicaremos estos conceptos con más detalle en la sección siguiente.

2.2 EL CONCEPTO DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD.

En ciertos casos, una distribución teórica de probabilidad proporciona una expresión razonable (o un módelo) de la distribución de frecuencias de valores observados de una variable.

Considere esté ejemplo:

Se efectuó un análisis de las llegadas de camiones al andén de carga de un almacen, en el que se anotó el número de camiones que llegaron en cada período de media hora, los resultados se resumieron en está tabla.

TABLA 2-1

LLEGADAS DE CAMIONES AL ANDEN DEL ALMACEN DE CARGA

NUMERO DE LLEGADAS	NUMERO DE PERIODOS
0	22
1	35
2	27
3	8
4	4
5	3
6	1
T O T A L	100

Tenemos aquí una variable aleatoria; las llegadas de los camiones, Denotemos a esta variable por x. En la distribución de frecuencias se observa que presenta los siguientes valores: 0,1,2,3,4,5,6, con las frecuencias absolutas que se han tabulado en la segunda colúm na de esa tabla.

Vamos a convertir estas frecuencias absolutas en frecuencias relativas; con los siguientes resultados.

TABLA 2-2

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE LAS LLEGADAS DE CAMIONES AL ANDEN DE CARGA.

X	0	1	2	3	4	5	6	T O T A L
p (x)	.22	.35	.27	.08	.04	.03	.01	

FUENTE: Datos de la tabla 2-1.

De esta forma obtenemos una distribución empírica de -- probabilidades que cumple con las condiciones básicas requeridas:

i) $p(x_i) \geq 0$, para todo X_i

ii) $\sum p(x) = 1$

A continuación formalizaremos estas nociones intuitivas.

2.3 VARIABLES ALEATORIA DISCRETA.

Si una variable aleatoria x puede tomar una serie de valores discretos x_1, x_2, ... x_k, con probabilidades respectivas p_1, p_2, ...p_k, donde $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, se dice que x define una distribución discreta de probabilidad.

La función p (x) se denomina " Función de Probabilidad ", o " Función de Frecuencia "

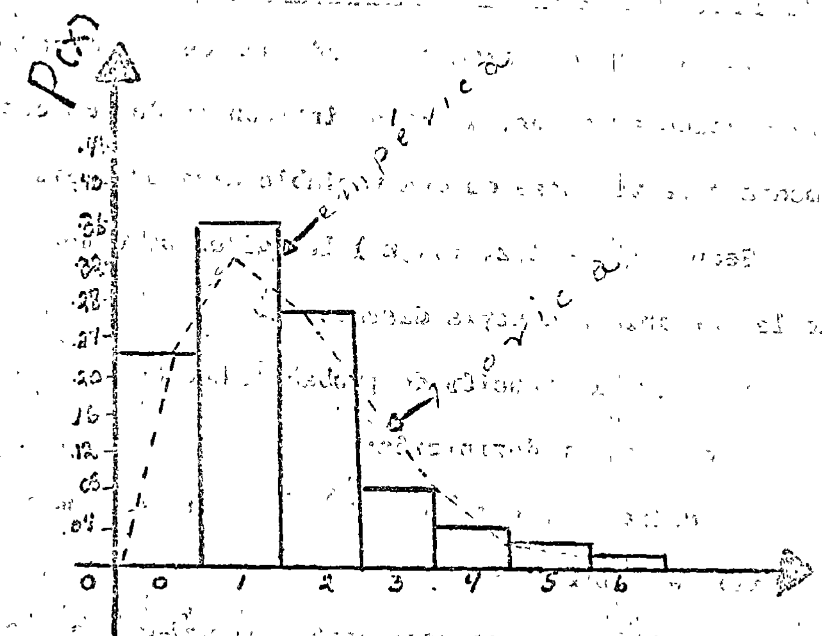
Como los valores de x son números enteros no negativos con probabilidades dadas, se dice que es una variable aleatoria discreta.

2.4 DISTRIBUCIONES EMPIRICAS Y TEORICAS DE PROBABILIDAD.

Volvamos a nuestro ejemplo de las llegadas de camiones al andén de carga. Deseamos comparar la distribución empírica de probabilidad obtenida, con una distribución teórica de probabilidad, Esta comparación se presenta en el siguiente diágrama.

DISTRIBUCIONES EMPIRICAS Y TEORICA DE PROBABILIDAD

DE LLEGADAS DE CAMIONES A UN ANDEN DE CARGA.



Notamos que la distribución de probabilidad teórica es una buena aproximación de la distribución de probabilidad de los valores observados de la variable x.

En esté capítulo, introduciremos varias distribuciones teóricas discretas de probabilidad, tales como la binomial, la ----- poisson y la hipergeométrica, las que podremos utilizar para modelar muchas situaciones concretas, así como con fines de predicción.

2.5 MEDIA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Antes de que presentemos cada una de las distribuciones mencionadas en la sección anterior, queremos introducir dos conceptos fundamentales; la media y la varianza de una variable aleatoria discreta.

Sean x (i = 1,2, ...,n) los diversos valores posibles que pueden tomar la variable aleatoria discreta x.

Sea p(x) la función de probabilidad de la variable x.

Entonces por definición:

i) Media de x = $\sum_{i}^{n} x_i \cdot p(x_i)$ que se simbóliza por $\bar{X}$.

ii) Varianza de x = $\sum^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p(x_i)$

La media x es una estimación del valor que puede esperarse que tome x al efectuar una prueba (ensayo) de un experimento aleatorio, la varianza; Var (x), es una media de la dispersión esperada de los valores que presenta esa variable, en relación al valor esperado (ó a la media) - $\bar{x}$.

Así, refiriéndonos a nuestro ejemplo de las llegadas aleatorias de los camiones al andén de carga, tenemos lo siguiente:

X_i	$P(X_i)$	$X_i \cdot P(X_i)$	$X_i - X$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X})^2 \cdot P(X_i)$
0	.22	0	- 1.50	2.25	0.4950
1	.35	.35	- 0.50	0.25	0.0875
2	.27	.54	0.50	0.25	0.4675
3	.08	.24	1.50	2.25	0.1800
4	.04	.16	2.50	6.25	0.2500
5	.03	.15	3.50	12.25	0.3675
6	.01	.06	4.50	20.25	0.2025
T O T A L					
	1.00	1.50	- --	- --	1.6500

Por lo tanto obtenemos a partir de estos datos :

i) $\bar{X} = (0)\ (.22) + \ldots\ldots + (6)\ (.01) = 1.50$

ii) $Var\ (x) = (.4950)\ (.22) + \ldots + (.2025)\ (.01) = 1.65$

Tótese que el valor obtenido para la media $\bar{X} = 1.50$, no - corresponde a ninguno de los valores discretos de la variable aleatoria x. Entonces, ¿ Cómo interpretamos ese valor ?.

Si nosotros repetimos el experimento aleatorio de observar las llegadas de los camiones en períodos de media hora cada uno, bajo - las mismas condiciones, y para una gran numeración de veces, podemos esperar que el número promedio de llegadas será de 1.50' Reconocemos que aunque nos- referimos a este valor promedio como el " valor esperado ", no " esperamos " que siempre ocurrirá cada vez que realicemos este experimento aleatorio.

En realidad, en este ejemplo específico es imposible que ese valor ocurra: no podemos observar la llegada de 1 1/2 camiones.

A pesar de este hecho, continuamos llamando a la media de una variable aleatoria discreta el " valor esperado " y lo simboliza - mos de la siguiente forma : $E(x) = \bar{X}$ y lo calculamos así:

Finalmente, ya que sabemos que no siempre se presentará el valor esperado, y que es más probable que no ocurra a que si ocurra, es útil disponer de una medida de la cantidad esperada que esa variable aleatoria diferirá de su media (de su valor esperado). Esa medida de dispersión se conoce como la varianza de x, denotada por Var (x).

2.6 VARIABLE ALEATORIA ESTANDARIZADA:

Daremos ahora la definición de una variable aleatoria -- estandarizada, que denotaremos convencionalmente por x^* .

Definición: Sea x una variable aleatoria con una media μ y una varianza $Var(x) > 0$.

La variable aleatoria estandarizada X* correspondiente - a x se define como:

$$X^* = \frac{X - \mu}{+\sqrt{Var(x)}}$$

En que $\sigma = +\sqrt{Var(x)}$ se denomina " desviación estándar " de la variable x. Para toda variable aleatoria estandarizada x*, sumplen - estas dos propiedades:

i) $E(x^*) = 0$

ii) $Var(x^*) = 1$

Más adelante en el capítulo tercero tendremos ocasión de familiarizarnos con el uso de las variables aleatorias estandarizadas, cuan do estudiemos la forma estandarizada de la distribución normal de probabilidad, y su utilización en situaciones administrativas concretas.

2.7 DISTRIBUCION ACUMULATIVA DE PROBABILIDADES:

En el proceso de solución de problemas concretos, a menudo estamos más interesados en la probabilidad de un conjunto de los valores de una variable que en la probabilidad de un valor específico dado. -- Ejemplificando este caso con las llegadas de camiones, supongamos que el jefe de una de las bodegas de carga está interesado en la probabilidad de que lleguen más de dos camiones en un período de media hora. Construimos la siguiente tabla

X_i	$P(X_i)$	PROBABILIDAD ACUMULADA
0	.22	.22
1	.35	.57
2	.27	.84
3	.08	.92
4	.04	.96
5	.03	.99
6	.01	1.00
T O T A L	1.00	

Así vemos que:

$$P (X > 2) = 1 - P (x \leq 2) = 1 - 0.84 = 0.16$$

Formalizamos este concepto diciendo que:

Si x es una variable aleatoria discreta con una distribución p(x), entonces F es la función acumulativa llamada " Función-escalonada ", que se cálcula por la expresión:

$$F(x) = \sum p(x_i)$$

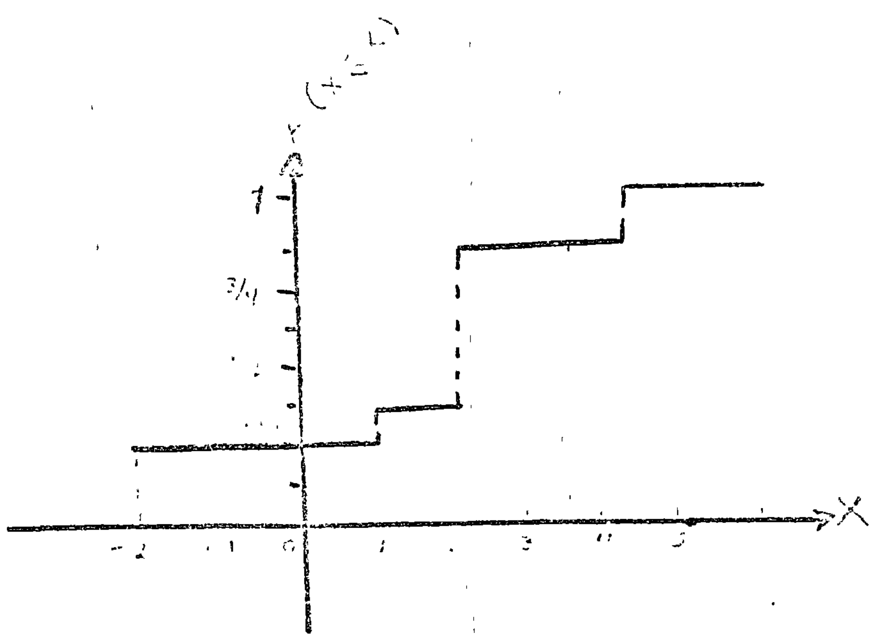
Esta función F es <u>monótona creciente</u> ya que:

$F(a) \leq F(b)$ cuando $a \leq b$

Para comprobar que la función es " escalonada ", supongamos los siguientes datos para una variable aleatoria discreta

X_i	-2	1	2	4
P (X_i)	1/4	1/8	1/2	1/8
F (X X)	1/4	3/8	7/8	8/8

Graficando la función acumulativa F (X X), obtenemos:



Observamos que F es una " función escalonada " que presenta un escalón en X_i cuya altura es f (X_i). Por ejemplo para X = 2, el - escalón será :

$$F(X \leq 2) - F(X \leq 1) = 7/8 - 3/8 = 4/8 = 1/2$$

Finalmente notamos que:

i) El límite de F(X) es igual a 0 cuando X ----->

ii) El límite de F(X) es igual a 1 cuando X ----->

2.8 <u>PROCESOS ALEATORIOS FINITOS</u>:

Al estudiar distribuciones de probabilidad, consideremos situaciones que involucrarán secuencias de experimentos, Estaremos interesados en las probabilidades de obtener frecuencias específicas de resultados- de estos experimentos, así como los resultados finales de esas secuencias.

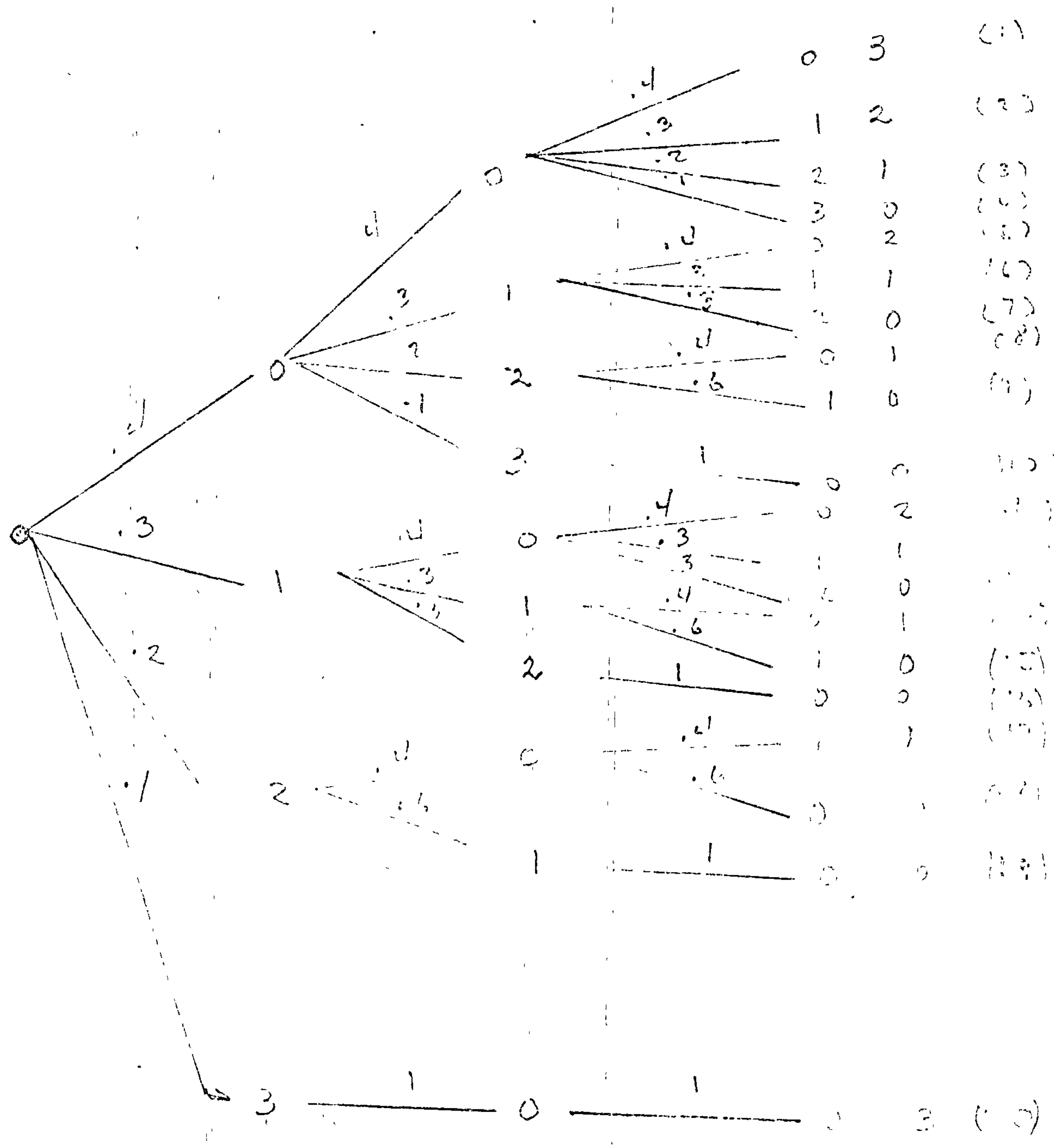
<u>Definición</u>: Una secuencia finita de experimentos, en - que cada experimento presenta un número finito de resultados con probabilidades conocidad se denomina " proceso y cálcular la probabilidad de cual -- quier evento, es por medio de un <u>diágrama arbóreo</u>. Ilustremos estos conceptos con un ejemplo:

Consideremos un comerciante de aparatos eléctricos para el hogar, que comienza sus operaciones el lunes en la mañana con tres refrigeradores en existencia *

Supongamos que las demandas de los días siguientes presentan las siguientes probabilidades de ocurrir: 0 unidades con 0.40 de probabilidad, 1 unidad con 0.30 de probabilidad, 2 unidades con 0.20, 3 unidades con 0.10, Nos preguntamos ¿ Cuáles serán sus posibles niveles de inventario al final del día miércoles ? ¿ Cuáles son sus respectivas probabilidades ?.

* y que no recibiría ningún otro refrigerador hasta el próximo jueves a la - mañana.

Para análizar esta situación, construímos el siguiente diágrama arbóreo:



En esté diágrama arbóreo los posibles resultados (en términos de demandas diarias), se indican con las ramas del árbol en cada uno de los tres días considerados.

El día lunes comenzamos indicando las probabilidades de los diversos niveles de demanda, que se supusieron en el problema.

Para el día martes, el número de unidades que puedan venderse dependerá del número vendido el día anterior, como así también las probabilidades correspondientes a cada una de esas diversas posibilidades.

Por ejemplo si el día lunes se venden dos refrigeradores los dos únicos resultados posibles en términos del número que pueda venderse el día martes son: 0 y 1. La probabilidad de que no se venda ninguno es .4 (como se supuso); la probabilidad de que se venda uno se cálcula por la suma de las probabilidades de que se demanden uno, dos o tres.

De aquí que la probabilidad de que se venda un refrigerador el día martes, es de 0.6,

Las otras probabilidades determinan en forma familiar.

Lo que queremos saber ahora son los diversos niveles de inventario al final del día miércoles, y sus respectivas probabilidades. Claramente los niveles posibles de inventario son 0,1,2 y 3 unidades. Las probabilidades pueden determinarse a partir del árbol, como la suma de las probabilidades de todas las ramas (las trayectorias a través del árbol) que puedan resultar.

De aquí tenemos que:

P (0) = p (rama 4) + p(rama 7) + p(rama 9) + p(rama 10) + p (rama 13) + p(rama 15) + p (rama 16) + p (rama 18) + p (rama 19) + p(rama 20) = $(.4)^2 (.1) + (.4)(.2)(.6) +$

(.4) (.1) (1) + $(.3)^2$ (.4) + $(.3)^2$ (.6)+ $(-3)^2$ (1) +

(.2) (.4) (.6) + (.2) (.6) (1) + (.1) (1) = .588

p (1) = P (rama 3) + p (rama 6) + p (rama 8) + p(rama 12) + p (rama 14) + p (rama 17) = .036 +.032 + .032 + .36 + .36 + .32 = .204.

P (2) p (rama 2) + p(Rama 5) + p(rama 11) =-.048 + --.048 + .048 = .144.

p (3) p (rama 1) = $(.4)^3$ = .064

Se notará que la suma de todas esas probabilidades es -- igual a 1, es decir, que el comerciante está seguro de que le queden 1,2 o 3 refrigeradores después de tres días de actividad.

2.9 PROCESO DE INTENTOS REPETIDOS (BERNOUILLI).

Muchos problemas comerciales pueden considerarse como -- procesos aleatorios en los que pueden ocurrir sólo dos resultados distin -- tos.

Esos resultados se presentan sin ningún patrón determinado de ocurrencia y la probabilidad de cualquiera de ellos se mantiene constante de intento a intento.

Los procesos que presentan estas características se denominan " Procesos de Bernouilli ". Por ejemplo las partes que una máquina -- produce se pueden clasificar en " aceptables " y/o " defectuosas " y la probabilidad de seleccionar uno de esos tipos de parte permanece constante de una selección al azar a otra.

Análogamente en un estudio de mercado se puede pregun - tar a los consumidores si prefieren una marca particular de cierto producto en relación a otras marcas similares. La probabilidad de obtener alguna de las respuestas posibles se mantiene invariable sin importar el número de clientes que sea entrevistado en la encuesta formalmente. Una secuencia de- intentos efectuada bajo las siguientes condiciones, se define como un expe rimento de Bernouilli:

i) Los resultados de cada selección debén ser independien tes de los resultados de cada selección tanto preceden te como subsecuente;

ii) En cada selección se puede obtener uno de dos resulta- dos posibles, los cuales serán mutuamente excluyentes;

iii) Cada selección debe ser efectuada bajo las mismas con- diciones durante el proceso de selección (ejemplo el valor de p debe ser -- constante).

Para simplificar las características de los " Procesos de Bernouilli ", se llamará " éxito ", al resultado específico faborable de un intento. L a proporción o la relación a largo plazo de los m éxitos obtenidos en un número muy grande n de intentos de un " proceso de Bernouilli " $\frac{m}{n}$ se- denomina " parámetro.

En algunos casos se conoce con certeza la proporción de - intentos que produce " éxitos ", Cualquiera que sean los resultados de un - número finito de intentos no se altera la aceptación de la válidez de esta-- franccíón a largo plazo.

Podemos exponer estas ideas de esta forma:

Si p es laprobabilidad de ocurrencia de un " éxito " - (suceso favorable) en un sólo intento, y q = 1 - p es la probabilidad de - que el éxito no ocurra, entonces la probabilidad de que el " êxito " se pre- sente en axactamente "m" veces de "n" de los intentos, está dada por:

$$P\ (m) = C_{n,m}\ P\ \ Q^{n-m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)\ !}\ p^{m}\ q^{n-m}$$

En donde $m = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n$

$n! = n(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,1$ "Factorial de n"

y $p + q = 1$

Ilustremos con el siguiente ejemplo:

Una remesa de refacciones se recibe en un almacen y se seleccionarán al azar diez unidades, para verificar su calidad las partes provienen de una máquina que produce constantemente un 5% de unidades defectuosas. Interesa cálcular la probabilidad de que la muestra de 10 refacciones incluya una unidad defectuosa.

Solución: Sea $n = 10$ (tamaño de la muestra)

$m = 1$

$p = .05$, y $q = 1 - .05 = .95$

$$\therefore\ p\ (m = 1) = C_{n,m}\ p^m\ q^{n-m} = \frac{10!}{1!\ 9!}\ (.05)^1\ (.95)^9 =$$

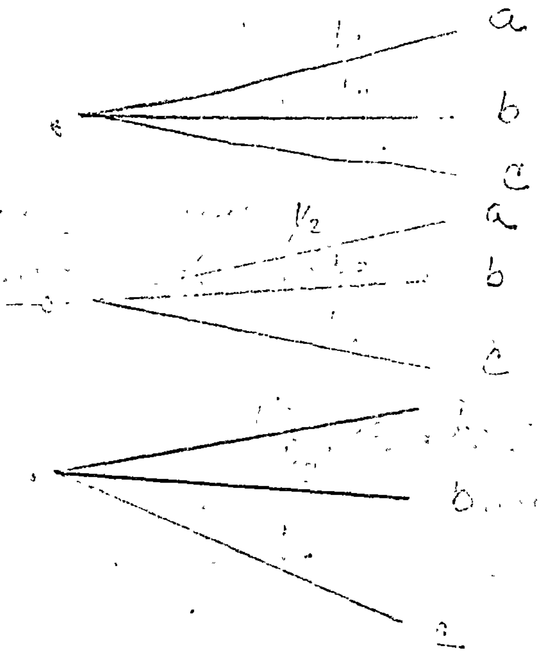
$$\frac{(10)\ 9!}{1.\ 9!}\ (.05)\ (.95)^9 = 10\ (.05)\ (.63) = 0.32$$

Desde otro punto de vista, un proceso de intentos repetidos es un proceso aleatorio cuyo diágrama arbóreo presenta las siguientes propiedades.

i) Cada terminal de rama presenta los mismos resultados (a,b,ó c).

ii) La probabilidad es la misma en cada rama que conduzca al mismo resultado.

Como un ejemplo, hemos eleborado el siguiente diágrama:



Nótese que :

a) Cada terminal de rama es uno de los resultados a,b, y c;

b) Cada rama que conduce a un resultado <u>a</u> presenta una probabilidad 1/2, cada rama que conduce a un resultado <u>b</u> presenta una probabilidad de 1/3; cada rama que conduce a un resultado c presenta 1/6 de probabilidad.

2.10 <u>LA DISTRIBUCION BINOMIAL</u>:

SU NATURALEZA.- La expresión matemática general de la -

función que describe la probabilidad de obtener exactamente r sucesos en n intentos, bajo las condiciones de un experimento de Bernouilli (dadas en la sección anterior) es la siguiente:

$$p\ (r/n,p) = b(r) = \binom{n}{r}\ p^{r}\ q^{n-r}$$

Si consideramos que n y p son constantes, la función anterior es una distribución discreta de probabilidad, que presenta los siguientes valores: .

r	0	1	2	....	n
b(r)	q^n	$\binom{n}{1} q^{n-1} p$	$\binom{n}{2} q^{n-2} p^2$	....	p^n

Este conjunto de valores de la variable r y la función p (r/n,p) se denomina " distribución binomial de probabilidades.

El apodo de " binomial " se comprende al observar cuales son los términos sucesivos del desarrollo de la potencia n de un binomio como sigue:

$$(q + p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1}\ p + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^n$$

También se conoce a ésta distribución, como " distribución de Bernouilli " ya que (como vimos) los intentos repetidos independientes como dis resultados excluyentes y probabilidad fija de ocurrencia, se denominan " experimentos de Bernouilli "

CONDICIONES DE APLICACION: Ya hemos comentado cuales son las condiciones básicas que deben presentarse en un problema concreto para que pueda aplicarse válidamente la función de densidad binomial.

Ellas son:

i) En un experimento dado el resultado debe ser independien te de los resultados de cualquier intento precedente o subsecuente.

ii) En cada experimento debe haber dos resultados posibles mutuamente excluyentes;

iii) Cada selección debe efectuarse bajo las mismas condiciones que rigen todo el proceso de experimentación (el valor de p debe ser constante).

PROPIEDADES.- Las propiedades de la distribución binomial de probabilidades se sintetizan en la siguiente tabla:

DISTRIBUCION BINOMIAL

Media : np

Varianza : npq

Desviación- npq
Estándar.

Un ejemplo: Se sabe que el 40% de los obreros de una planta de 100 trabajadores son a ones y se toma una muestra al azar de 5 obreros- Interesa cálcular la probabilidad de que la muestra contenga 0,1 ó 2 obreros- varones.

$$p(r \quad 2 / 5.,4) = (.40)^{0} (.60)^{5} + 5(.40)^{1} (.60)^{4} + 10 (.40)^{2}.(.60)^{3} .$$

Estos tres términos corresponden a las probabilidades de - o.1 y 2 éxitos en un experimento de 5 intentos repetidos y se obtienen de la fórmula general.

$$b (r) = \binom{n}{r} p^{r} q^{n-r}$$

en que $n = 5$; $r = 0,1,2$, $p = 0.4$; $q = 0.6$

USO DE LAS TABLAS BINOMIALES. En este tipo de tablas, se tiene una columna encabezada por el número "n" de intentos; otra que indica las "r" veces que ocurre el " éxito " en "n" intentos y un renglón "p" que indica la probabilidad de ocurrencia de un suceso en un sólo intento. Estas tablas estarán a la disposición de los alumnos, Para utilizarlas en ejemplos prácticos.

CONCLUSION: La expresión matemática general de la distribución binomial representa un conjunto de distribuciones de probabilidad. Cada una de estas distribuciones queda definida por una combinación única de los parámetros n y p.

En la práctica pocas veces se conoce el valor de la fracción r/n, (la frecuencia relativa de éxistos) excepto en alguna situación particular donde pudiere ser cálculada a priori (por ejemplo, de experiencias anteriores). Más a menudo n y p son propiedades de una muestra obtenida de una población, y p cumple el papel de una " estimación " del parámetro, (el verdadero valor de la fracción en la población). Si los parámetros de la distribución binomial son conocidos o estimados, las medidas descriptivas de la distribución correspondiente son de considerable valor en la formulación y solución de problemas administrativos.

2.11 LA DISTRIBUCION DE POISSON:

SU NATURALEZA.- La distribución de Poisson es la distribución de una variable aleatoria discreta x que puede presentar todos los valores enteros no negativos $0,1,2.....,\infty$ siendo x el número de ocurrencias de algún evento en el tiempo o en el espacio.

Algunos ejemplos típicos de variables tipo Poisson, son:

. el número de llamadas telefónicas que en cada minuto -

recibe un conmutador;

- el número de errores de imprenta por página de un libro,
- el número de burbujas por centímetro cuadrado en una -- plancha de vidrio, hoja de cristal;
- El número de clientes por minuto que llegan a las cajas registradoras de una tienda,
- el número diario de accidentes automovilísticos en una- sección congestionada de una autopista.

La distribución de Poisson se caracteriza por la siguiente función de densidad.

$$f\ (x) = \frac{\lambda^{x}\ e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{en que}$$

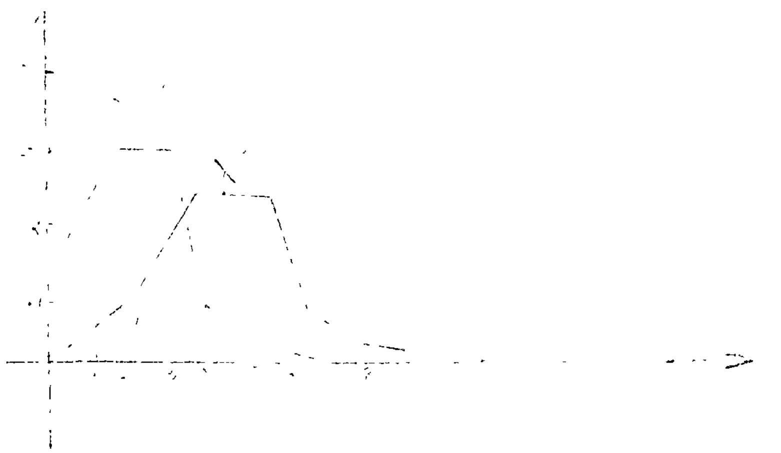
x es la variable aleatoria con valores 0,1,2,3....,

$\lambda >$ 0 es el parámetro de distribución.

e = 2.718 es la base de logaritmos naturales.

Ya hemos anticipado que es una variable aleatoria discre-- ta que puede presentar cualquier valor entero no-negativo, como 0,1,2,....... ... La función densidad de Poisson nos indica cual es la probabilidad de que ocurran exactamente x eventos en un cierto intervalo de tiempo (o espacio).

En general, p (x = x) = f (x) es asimétrica positi- va, es decir que la función alcanza su ordenada máxima rapidamente (para valores pequeños de x) y luego decrece asintóticamente hacia cero. La naturaleza exacta de la distribución depende del valor del parámetro λ: entre más grandes sea el valor de λ, mayor será el valor de x para el que la función de densidad alcanzará la ordenada máxima. La siguiente figura indica la naturaleza de f (x) para dos valores distintos del parámetro λ



DISTRIBUCIONES DE POISSON PARA =2 y = 5

sson se sintetizan en la siguiente tabla.

DISTRIBUCION DE POISSON

Media

Varianza

Desviación Estándar $\sqrt{\lambda}$

La distribución de Poisson proporciona una aproximación de la distribución binomial para valores pequeños de x, si se cumple que p sea pequeña y que $\lambda = np$.

Véamos este ejemplo particular que se obtiene con n = 100, p = .01 y 1 = np = 1.

X	0	1	2	3	4	5
BINOMIAL	.366	.370	.185	.0610	.0149	.0029
POISSON	.368	.368	.184	.0613	.153	.00307

ALGUNOS EJEMPLOS:

i) En un estudio de llegadas de los camiones a un almacén se estimó que la probabilidad de una llegada durante cualquier intervalo de tiempo de un minuto es p = 0.0333. Por lo tanto el número esperado de llegadas en cada intervalo de media hora es np = (30^1) (.0333) = 1

ii) Suponga que hay 300 errores de imprenta distribuídos al azar entre las 500 páginas de un libro, encuentre la probabilidad p, que una página dada contenga 2 ó más errores de imprenta.

Podemos considerar que el número de " éxitos " en una secuencia de intentos tipo Bernouilli. Aquí n = 300 ya que hay 300 errores de imprenta y p = 1/500 es la probabilidad de que aparezca un error de imprenta en una página dada.

Nótese que :

Por lo que, despejando $f(x) = {}_{x}f(x-1)$

Esta propiedad (llamada " propiedad de recurrencia ") es muy importante ya que dado f (0) será fácil determinar el valor de la función de densidad para todos los demás valores de x.

CONDICIONES DE APLICACION.- Las condiciones básicas que corresponden a una distribución de Poisson, son las siguientes:

i) Que la ocurrencia (o no ocurrencia) de un evento en un intervalo de tiempo dado sea independiente de su ocurrencia (o no ocurrencia) en otros intervalos .

ii) Que la amplitud pueda elegirse lo suficientemente pequeña para que la probabilidad de que ocurran dos o más eventos dentro de un intervalo dado sea practicamente nula .

iii) Que incrementando o disminuyendo la amplitud del intervalo, t, de tiempo (o espacio) en una magnitud finita y fija, , aumente o disminuya proporcionalmente la probabilidad de ocurrencia de un evento dado.

iv) Que al aumentar o disminuir en forma continua el intervalo t por valores infinitesimales, aumente o disminuya la probabilidad de un evento s dado en forma continua.

PROPIEDADES.- Las propiedades de la distribución de Poi

Usando la aproximación de Poisson a la distribución Bernouilli (ya que p es pequeña, con $\lambda = np = \frac{300}{500} = .6$ obtenemos:

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2)$$

$$p(x < 2) = p(x = 0) + p(x = 1)$$

$$p(x = 0) = \frac{(.6)^0 e^{-.6}}{0!} = e^{-.6} = .549$$

$$p(x = 1) = \frac{(.6)^1 e^{-.6}}{1!} = (.6)(.549) = .329$$

Consecuencia:

$$p(x \geq 2) = 1 (.549 + .329) = 1 - 0.878 = 0.122$$

USO DE TABLAS DE POISSON: Existen tablas de probabilidad correspondientes a los diversos valores posibles de x correspondientes a ciertos valores seleccionados del parámetro λ así como las probabilidades acumuladas de los diversos valores de esa variable aleatoria. El uso de esas tablas se práctica durante la clase.

CONCLUSIONES: Las distribuciones binomiales y Poisson, tienen algunos requerimientos básicos comúnes: estabilidad estadística e intentos independientes. Pero la noción de un " intento " en el caso de la distribución de Poisson requiere de una definición especial de continuidad en el tiempo (espacio o alguna otra dimensión para que pueda dividirse en unidades suficientemente pequeñas de modo que la probabilidad de más de un " éxito " por unidad sea extremadamente pequeña. De este manera cada pequeña unidad es un intento dado (véase " Condiciones de aplicación " de la distribución de probabilidad de Poisson). Cualquier fenómeno que pueda ser expresado como un experimento, cuyos intentos satisfacen las condiciones dadas, se denomina procesos de Poisson.

Un proceso de Poisson puede ser el resultado de la inter acción de algunos procesos que pueden ser o no de tipo Poisson.

Consideremos como ejemplo el caso de un astillero en el que en un tablero de intrumentos hay algunas máquinas de soldadura que se entregan a trabajadores a medida que son requeridas.

La demanda de las máquinas soldadura y el número de horas de uso varian de mes en mes, El supervisor de mantenimiento está interesado en conocer la distribución mensual del número de veces que una máquina está fuera de servicio débido a una falla en el regulador.

El número esperado de veces que se requiere este tipo de separación varía de acuerdo con las horas de uso de la máquina (por lo que no es constante de un mes a otro pero puede admitirse que es prácticamente constante si se considera como base de análisis su uso por -- hora.

La frecuencia de repraraciones por mes no es estadísticamente estable; la estabilidad se altera por la tendencia de la frecuencia de reparaciones a decrecer en razón del aumento de mayor edad e inversamente a decrecer en razón del aumento de tiempos ociosos y a ser nula cuando la máquina esté siendo reparada.

La idea es que si se toman todos esos factores en con-- junto latasa resultante es una contante.

Es muy probable que descomposturas de reguladores para un número dado de máquinas, siga una distribución de Poisson, aunque la - incidencia de las reparaciones del regulador para máquina, en particular no sea un proceso de Poisson.

La idea básica que sugiere este ejemplo es que muestra - el número esperado mensual de reparaciones, puede fluctuar para cada máquina en particular, la frecuencia de reparaciones de reguladores para todas -

las máquinas puede ser practicamente estable. Entre más grande sea el -- número de máquinas bajo análisis mayor, será la tendencia a compensarse - mutuamente de todas las tasas de incidencia de falla.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

TEORIA DE CONJUNTOS Y TOMA DE DECISIONES

TEMA: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

LIC. RUBEN BALBUENA ALVAREZ

FEBRERO DE 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

Después que hemos visto cómo se determinan valores probabilísticos, así como la media y la varianza, en distribuciones de probabilidad cuyas variables tienen un recorrido contínuo, vamos a ver algunas funciones de densidad de probabilidad de este tipo, para las que se cumplen -- las propiedades anteriores presentadas.

3.3 DISTRIBUCION RECTANGULAR O UNIFORME:

Esta distribución tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{c - b}$$

En la que :

$b \leq x \leq c$

Los parámetros b y c deben ser tales que $c-b > 0$. Para el- caso particular en que $b = 0$ y $c = a$, se tiene como densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a}$$

Y su representación gráfica se observa en la Figura 7.

La función de la distribución acumulativa es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} dt = \frac{t}{a}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{a}(x - o) = \frac{x}{a}$$

Para x que satisface la desigualdad $0 \leq x \leq a$ Para x=0, -- $F(x) = 0$; para $x=\frac{a}{2}$, $F(x) = \frac{1}{2}$; y para $x = a$; $F(x) = 1$. La función de distribución acumulativa:

a) Es nula para valores a la izquierda del cero.

b) Es una línea recta, con pendiente 1/a, desde (0,0), al- punto (a,1).

c) Conserva un valor constante de 1 para $x > a$.

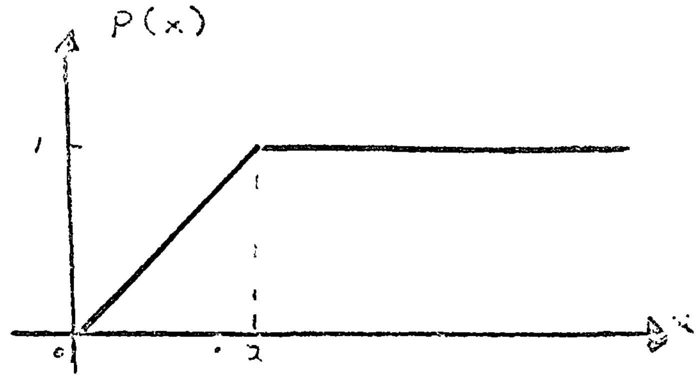


FIGURA NUMERO SIETE

3.3.1: LA MEDIA:

$$E\ (x) = \int_{0}^{a} \frac{1}{a}\ dx = \frac{x^2}{a}\Big]_{0}^{a} = \frac{a}{2}$$

3.3.2: LA VARIANZA:

$$\sigma^2 = E\ (x^2) - \left[E\ (x)\right]^2$$

En donde:

$$E\ (x^2) = x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{2} x^2\ \frac{1}{a}\ dx = \frac{1}{a}\ .\ x^3\Big]_{0}^{a} = \frac{a}{3}^2$$

Sustituyendo los valores, tenemos:

$$\sigma^2 = \frac{a}{3}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a}{3}^2 - \frac{a}{4}^2 = \frac{a}{12}^2$$

3.4. . 7 PRACTICA DEL MANEJO DE TABLAS:

Ahora vamos a ver cómo se pueden cálcular los percentiles de probabilidad, dependiendo de cómo se presente el problema por resolver Para tal efecto, vamos a ver un ejemplo:

Supóniendo que los salarios que se pagan en un taller de especialidades a 200 operarios, siguen una distribución normal, siendo el salario promedio de 100 pesos diarios, con una desviación estándar igual a 10 ' Determinar:

a) El número de operarios que tienen salarios comprendidos entre 110 y 120 pesos.

b) El número de operarios que tienen sueldo comprendido entre los 70 y 90 pesos

c) El número de operarios que tienen salario entre 90 y 130 pesos

d) Cuál es la probabilidad de que haya operarios con salario superior a 125 pesos?

e) Igual que el anterior, pero con salario inferior a 75 pesos

f) Cuál es la probabilidad de los obreros que ganan entre 90 y 110 pesos.

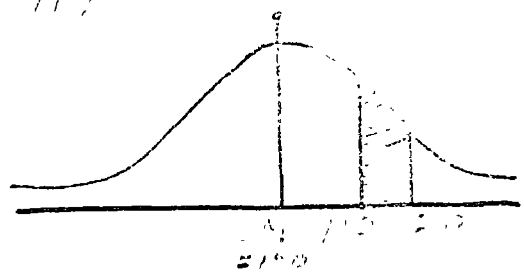
g) Obtener el percentil del 95 y 80 %.

RESOLUCIÓN:

a) Procedemos a encontrar los desvíos estandarizados, es decir los valores de la variable z:

Como el área por determinar se encuentra, no a partir de la media, sino más a la derecha, obtenemos el área que nos va a dar el percentil deseado, de la siguiente manera:

A)



Obtenemos primero el área que hay entre y 120; después se obtiene el área que hay entre y 110, lo que nos va a dar el área que hay entre 110 y 120, por diferencia de áreas

$$Z_2 = \frac{X2 -}{} = \frac{120 - 100}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$Z_1 = \frac{X1 -}{} = \frac{110 - 100}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Ya que obtuvimos los valores de las desviaciones estandarizadas, entramos con estas desviaciones a la tabla de áreas (tabla 2), a donde se ve que para Z = 2, el valor es 0 4772; y para Z = 1, el área en 0.3413. Haciendo la resta de A_2 - A_1 = obtenemos que el área que nos da el percentil deseado:

A = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359

Ahora, como lo que nos interesa saber es qué número de operarios caen en el percentil del 13,59, lo que hacemos es multiplicar el número total de operarios, por ese percentil, y tenemos que:

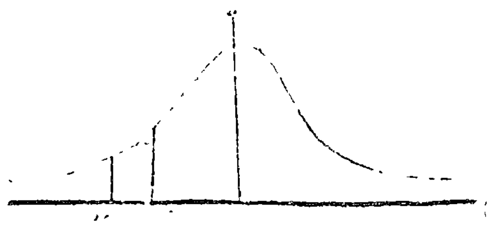
0 1359 x 200 = 27

b) Al igual que en el inciso anterior, el área por determinar se encuentra al lado izquierdo y no a partir de la media, por lo que procedemos de la misma manera, y tenemos que:

$$Z_2 = \frac{X2 -}{} = \frac{70 - 100}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$Z_1 \quad \frac{X_1 -}{} = \frac{90 - 100}{10} = \frac{10}{10} \quad 1$$

Aunque estos valores son negativos, se toman como positivos, por la propiedad de simetría de la curva



Y así se tiene que:

$A_2 = 0.4987$ y $A_1 = 0.3413$

Por lo que:

$A = A_2 - A_1 = 0.4987 - 0.3413 = 0.1574$

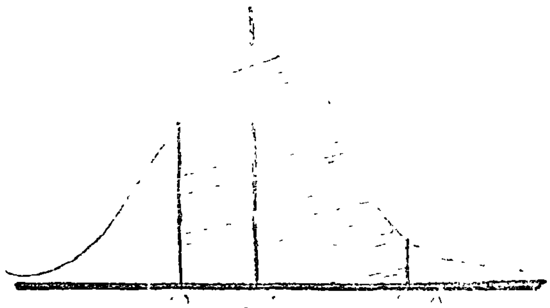
El número de operaciones que está entre los dos salarios, -- será:

$200 \times 0\ 1574 = 31$

c) Para obtener el número de operarios que tienen entre 90 y 130 pesos de salario, lo hacemos en la misma forma que los anteriores, pero- en este caso, como el área que cubre esos dos límites es mayor, lo que se hace es sumar las áreas correspondientes a: de 90 a la media, y de la media a 130.

Así se tiene que para A_1:

$$Z_1 = \frac{90-100}{10} = \frac{10}{} = 1$$



De la tabla, para $Z = 1$; $A_1 = 0.3413$

Para A_2 tenemos que:

$$Z_2 = \frac{130 - 100}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

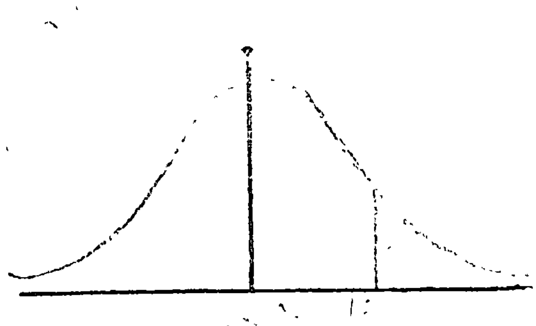
De la tabla, para $Z = 3$; $A_2 = 0.4987$

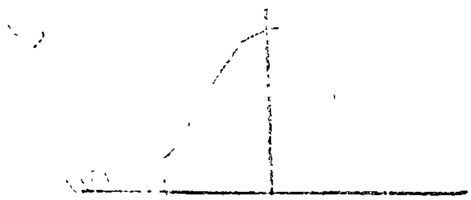
$$A = A_1 + A_2 = 0.3413 + 0\ 4987 = .8400$$

En consecuencia, el número de obreros que estén distribuidos entre los 90 y 130 pesos de salario, será:

$$200 \times .84 = 168$$

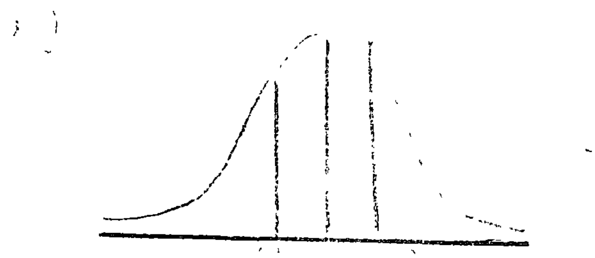
d) Para hacer este cálculo, lo que se hace es obtener el área de la media a la desviación ocasionada por 125, y esta área se resta de 0.5.



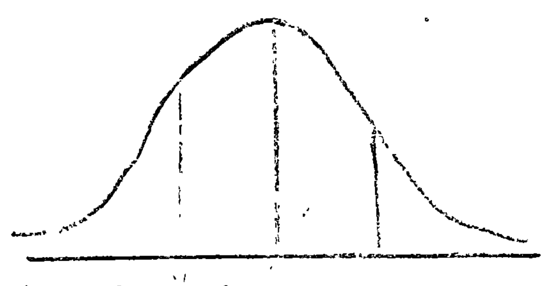


$A = A_1 + A_2 = 0.3413 + 0.3413 = 0.6826$

O sea, se tiene el 68.26 %



g) Desde luego, este porcentaje se considera con tendencia central, o sea, con área equivalente a 0.4500 para cada lado del valor medio.



Para ésto, lo que hacemos es recurrir al cuerpo de la tabla adonde, buscamos 0.4500, encontrándolo, se ve que Z corresponde y después se -- despeja de la fórmula para ver a qué x corresponde.

Así, encontramos que en tabla, los valores más cercanos son: 0.4495 y 0.4505, que corresponden a 1.64 y 1.65 para valores de Z. Para encontrar el valor de 0.4500 se interpola.

	A			Z	
	0.4495			1.64	
.0010	0.4500	.0005	X	Z'	0.01
	0.4505			1.65	

$Z' = 1.64 + X = 1.64 + 0.005 = 1.645$

Obteniendo el valor de Z, se precede a despojar de la fórmula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \;;$$

$$1.645 = \frac{X_2 - 100}{10} \;;$$

$$X_2 = 16.45 + 100 = 116.45$$

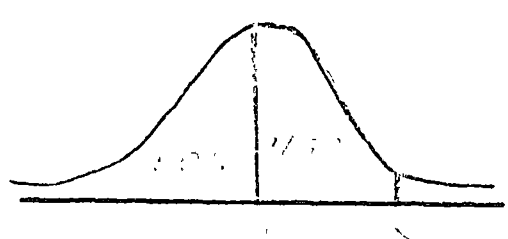
Como se ve, es el valor que se tiene a la derecha de la-media, pero como el porcentaje era con tendencia central y tenemos nada más-localizada la mitad de área, procedemos a restar 16.45 a   para obtener el--otro valor de X , y con esto obtenemos:

$$X_1 = 100 - 16.45 = 83.55$$

Con ésto, los salarios entre los que se encuentra el 90% de los operarios, son entre los 83.44 y 116.45 pesos.

h) Para obtener los percentiles, se procede de la siguiente manera:

1´para el percentil del 95% el enunciado sería: existe -la probabilidad del 95% de que el salario de un operario sea menor a X pesos, y ese salario lo vemos a determinar viendo que el área bajo consideración, es la de la figura:



Se tiene que sacar la parte correspondiente al 45% para lo cual entramos al cuerpo de la tabla para buscar el 0.4500 y encontrar la

Así tenemos que:

$$Z = \frac{125-100}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$$

De la tabla, para Z = 2.5 el área obtenida es igual a - 0.4938, por lo que la probabilidad de que haya operarios con salario superior a 125 pesos es:

$$= .5000 - 0.4938 = .0062 = 0.62\ \%$$

e) Este cálculo es semejante al anterior, ya que la probabilidad de que haya operarios, con salario menor a 75 pesos, cae dentro de la cola de la curva, pero en el lado opuesto al del inciso anterior. Entonces, - el cálculo va a ser obteniendo el área para la desviación estandarizada, y restársela a 0.5, así.

$$Z = \frac{75 - 100}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$$

El área correspondiente de la tabla, es: 0.4938 y así tenemos 0.5000 - 0.4938 = .0062 = 0.62%.

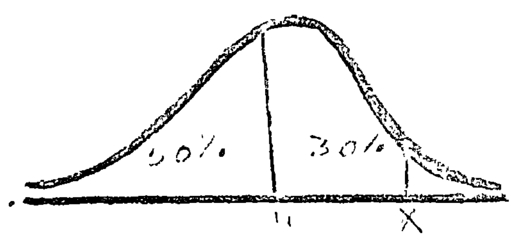
f) En este caso, se trata de obtener el porcentaje con tendencia central, ya que se tiene que la Z es igual de la media a 110, así como - de la media a 90, por lo que, con que se obtenga un área y se sume dos veces, - tendremos su valor.

$$Z_1 = \frac{110 - 100}{10} = \frac{10}{10} = 1 \qquad A_1 = 0.3413$$

$$Z_2 = \frac{90 - 100}{10} = \frac{10}{10} = 1 \qquad A_2 = 0.3413$$

Z correspondiente y como este cálculo es semejante al del inciso anterior, tenemos que la X corresponde a 116.45 pesos.

Para el percentil del 80, es igual que el anterior, tenemos que encontrar el valor de Z, asociado al 30% a la derecha de la medida.



En la tabla tenemos para 0.3000, que los valores más cercanos son: 0.3023 y 0.2995, para 0.85 y 0.84 de valores para Z, lo que hacemos es proceder a interpolar, con lo que obtenemos:

	0.3023		0.85	
.0028	0.3000	0.023	Z'	X 0.01
	0.2995		0.84	

$$\frac{0.0023}{0.0028} = \frac{X}{0.01} = \frac{23 \times 10^{-6}}{2.8 \times 10^{-3}} = 0.0082$$

$$Z' = 0.85 = 0.0082 = 0.8418$$

Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$= \frac{X}{} \; ; \quad 0.8418 = \frac{X - 100}{10}$$

$$X = 8.418 + 100 = 108.42 \text{ pesos.}$$

3.1 INTRODUCCION INTUITIVA A VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS:

Supóngamos que estamos efectuando un muestreo al azar de una producción de balines en una fábrica de baleros, que la maquinaria que los produce trabaja indefinidamente bajo las mismas condiciones en -- cuanto a sus variables operacionales, tales como * velocidad del motor, - temperatura, etc., y que los operarios fueran los mismos. En estas cir - cunstancias se varía que los diámetros de esos balines, que en teoría de- berían mantener un valor específico (que designaremos por μ), fluctúan inexplicablemente en cantidades infinitesimales (indinitamente pequeñas) alrededor de ese valor teórico μ . O sea que esos diámetros toman una serie de valores en un rango de variación continuo, que para efectos de control - de calidad se puede fijar a un intervalo dado (a,b). Digamos que los va- lores que pueden tomar los diámetros de los balines corresponden a una va - riable X. Estos valores forman un conjunto continuo, y difieren en canti - dades infinitesimales del valor de especificación.

Este tipo de variables (como la X considerada) que - toma valores que difieren del valor de μ , motivados por causas ajenas a- nuestra voluntad, es decir que escapan a nuestro control, reciben el nombre de variables aleatorias. En este caso especial la variable aleatoria es -- continua, porque a diferencia de las variables discretas que toman valores- finitos enteros, pueden presentar valores infinitesimales en su recorrido - de variación o sea un conjunto infinito de valores distintos dentro del -- inteevalo (a,b) ya mencionado.

* Estas variables se consideran como tales, mientras puedan ser movidas a - voluntad para establecer el óptimo de operación, o las condiciones en cuan- to a su diseño; pero tan pronto como esas condiciones se fijan o estable -- cen, se consideran como parámetros.

Como hemos comentado en la unidad anterior, para cada valor que toma la variable X, se le asigna un valor de probabilidad P (X), que depende de la frecuencia con que ese valor se presenta. En base a ellas podemos --- elaborar una representación gráfica en la cual se observa la frecuencia con --- que se presenta cada valor de la variable, en carácter de su probabilidad aso-- ciada. Como ya se ha visto en el curso de Métodos Estadísticos, estos diágra-- mas se denominan histogramas de frecuencia.

La figura 1 es un histograma de frecuencia para el caso de una distribución de densidad de probabilidad discreta, en el que la densidad de distribución está dada por el área de cada rectángulo. Ahora bién, a medida que el tamaño de la muestra aumenta, esos rectángulos se hacen más y más pequeños - (como en la figura 2) y si a ello aunamos que la variable ya no tama valores finitos enteros, sino infinitesimales, eso nos conduce a un diágrama semejante, que en el límite se convierte en una curva (que puede ser como la de la figura 3), la que se denomina " Distribución de Densidad de Probabilidad Continua ", y la función f (x) que define a la curva se conoce como " Función de Densidad de- Probabilidad ".

La probabilidad de que una observación X, de la variable X- tomada al azar de una población con función de densidad f (X), presenta un valor comprendido entre X_a y X_b, está dada por el área bajo la curva entre X_a y X_b, (véase figura 4).

3.1.1 PROPIEDADES DE LA VARIABLE CONTINUA:

La operación por medio de la cual se cálcula el área bajo - la curva, se conoce matemáticamente como " Integración ", la cual representa - mos por el símbolo especial " $\int$ " que se lee como " Integral de ".

Así se tiene que: $P\left[X_a \leq X \leq X_b\right] = \int_{X_a}^{X_b} f(x)\,dx$

Entonces sí: $P\left[X_a \leq X \leq X_b\right]$ es la probabilidad de que un valor X_i de la variable X se tenga en el intervalo (a,b) debe cumplirse -- que:

$$1.- \quad \int_{X_a}^{X_b} f(x)\,dx > 0$$

$$2.- \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 1$$

Que son los requisitos fijados anteriormente a una varia ble aleatoria.

En palabras, la primera expresión nos indica que la probabilidad nunca es negativa; la segunda nos indica que f (X) toma valor de-- uno, si nos estamos refiriendo al conjunto de todos los posibles valores de la variable X.

En la figura 5), presentamos dos áreas bajo la curva -- f (X) que corresponde a dos casos importantes, a saber; a) para obtener la - probabilidad de que la variable X tome valores a la exquierda de X_a se debe- cálcular el área por :

$$P(x < X_a = \int_{-\alpha}^{X_a} f(x)\,dx$$

b) Para cálcular la probabilidad del lado derecho de X_b , se tiene:

$$P(X > X_b) = \int_{X_b}^{\alpha} f(x)\,dx$$

De una función f (X) de densidad de probabilidad dada, podemos cálcular su correspondiente función de acumulación de probabilidades - F (X) para cualquier valor X_i, y elaborar su representación gráfica.

a) Si iniciamos el trazo desde la izquiersa la función F (X) debe partir desde cero, ya que la acumulación comienza precisamente desde cero.

$$F\left[X\right]_{-\alpha}^{-\alpha} = \int_{-\alpha}^{-\alpha} f(x)\, dx = 0$$

b) La función acumulativa es " monótona creciente ", es decir que o crece o se mantiene en el valor acumulado ya anteriormente alcanzado. Esto ocurre así por la primera propiedad anterior, es decir que acumulamos un valor positivo o nulo, y como nunca agregamos valores negativos, la acumulación nunca decrece.

c) El valor máximo que alcanza la axumulación, es igual al:

$$F\left[x\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 1$$

La parte superior de la figura 6 nos presenta la distribución acumulativa F (x), correspondiente a la función de densidad f (x), de la parte inferior de la figura.

3.1.2 RELACION ENTRE LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD Y LA FUNCION ACUMULATIVA:

Por las reglas elementales de cálculo diferencial, la derivada de una función f (x) símbolizada por df(x) / (dx), es igual a la pendiente de la función en el punto x. También sabemos que la derivada de la integral indefinida de una función, es la misma función; así tenemos que la derivada de F (X) con respecto a x es :

$$\frac{d\, F(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\alpha}^{x} f(t)\, dt = f(x)$$

Es decir que la pendiente de la función de distribución --

acumulativa F (t) es igual a la función de densidad de probabilidad en ese punto.

Regresando a la representación gráfica de la figura 6, en su parte superior tenemos:

$$F\left[X_0 < X < X_0 + \Delta x\right] = F\left[x_0 - \Delta x\right] - F\left[x_0\right]$$

Y en la parte inferior de la figura tendremos que:

Si igualamos las dos ecuaciones anteriores (ya que el-- miembro del lado izquierdo de ambas es igual), tenemos que :

$$F\left[x_0 < X < X_0 + \Delta x\right] = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \simeq f(x)\Delta x$$

Y si tomamos el límite de A x cuando este tienda a cero, el signo de " aproximadamente igual " ( ) tiende a un signo de igualdad y- el límite del primer término es por definición la derivada de F (x):

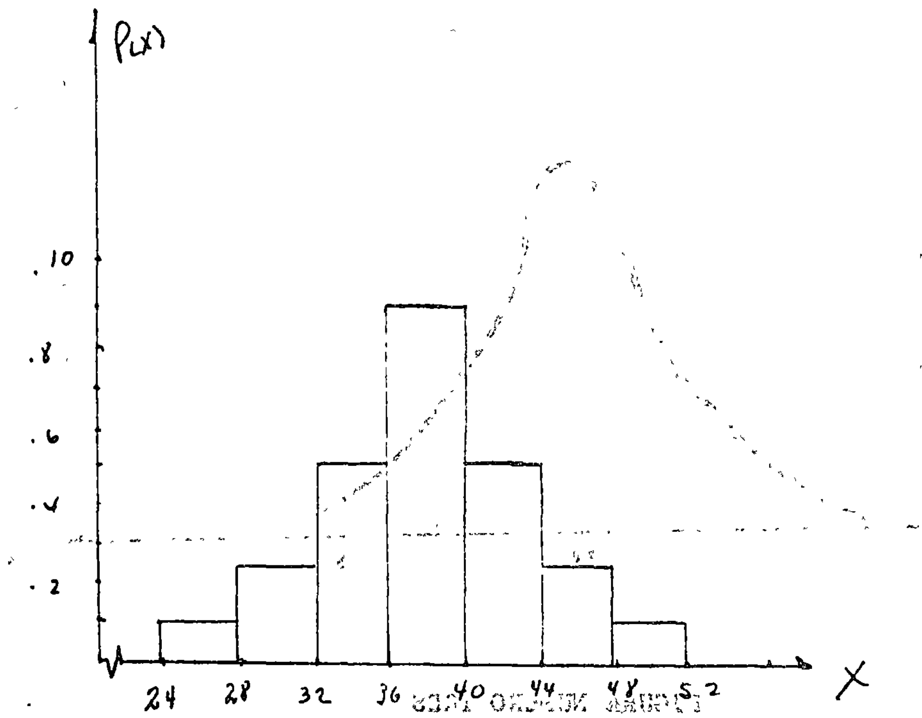


FIGURA NUMERO UNO

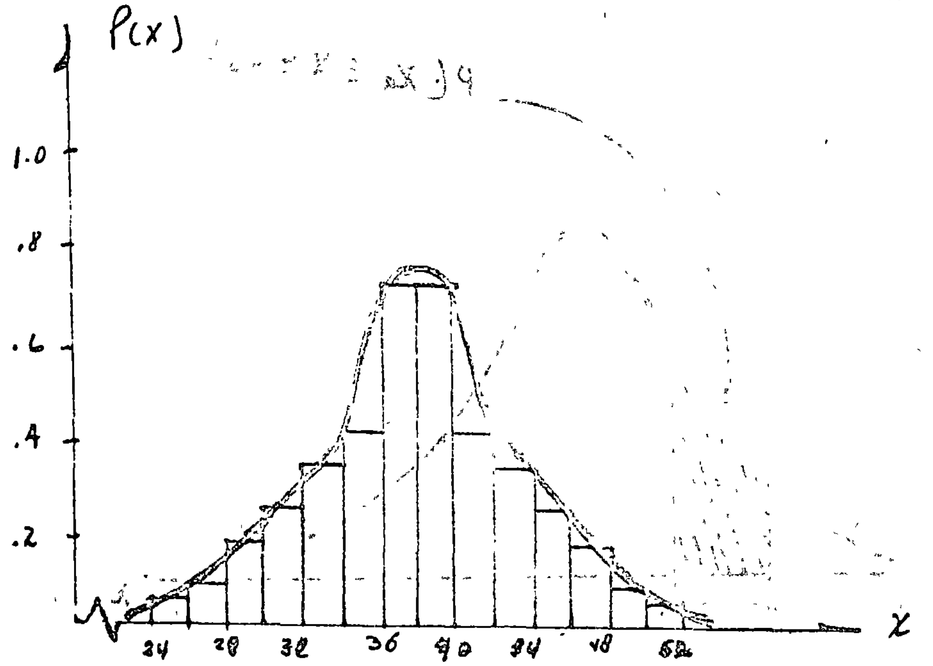


FIGURA NUMERO DOS

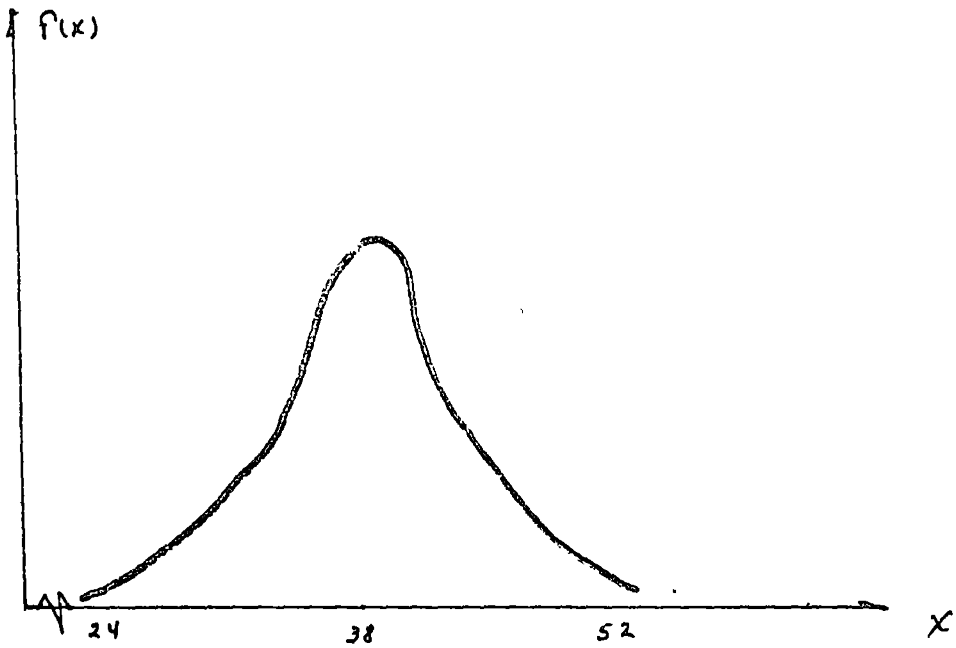


FIGURA NUMERO TRES

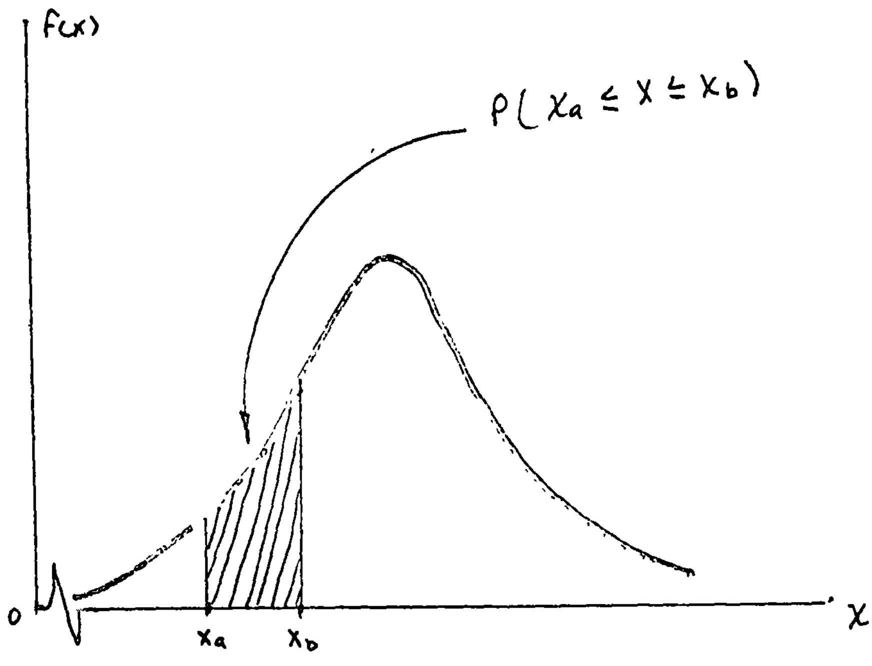


FIGURA NUMERO CUATRO

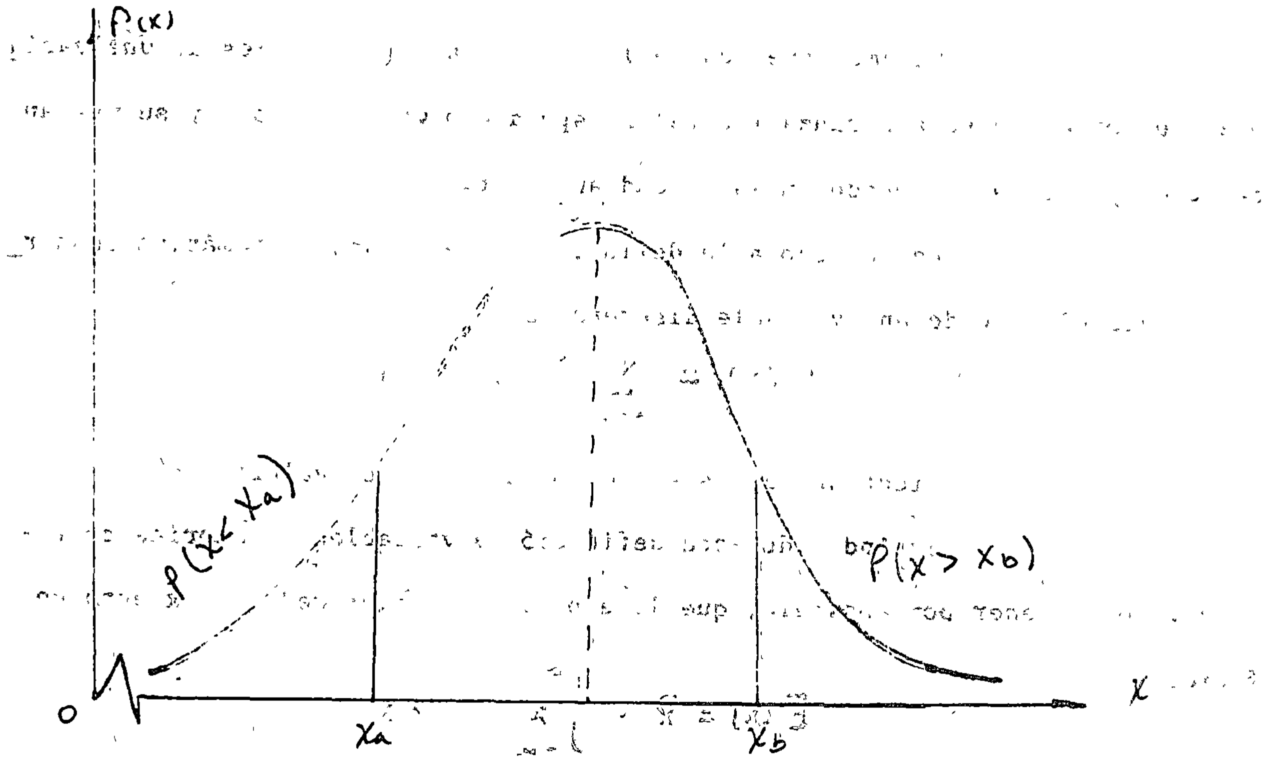


FIGURA NUMERO CINCO

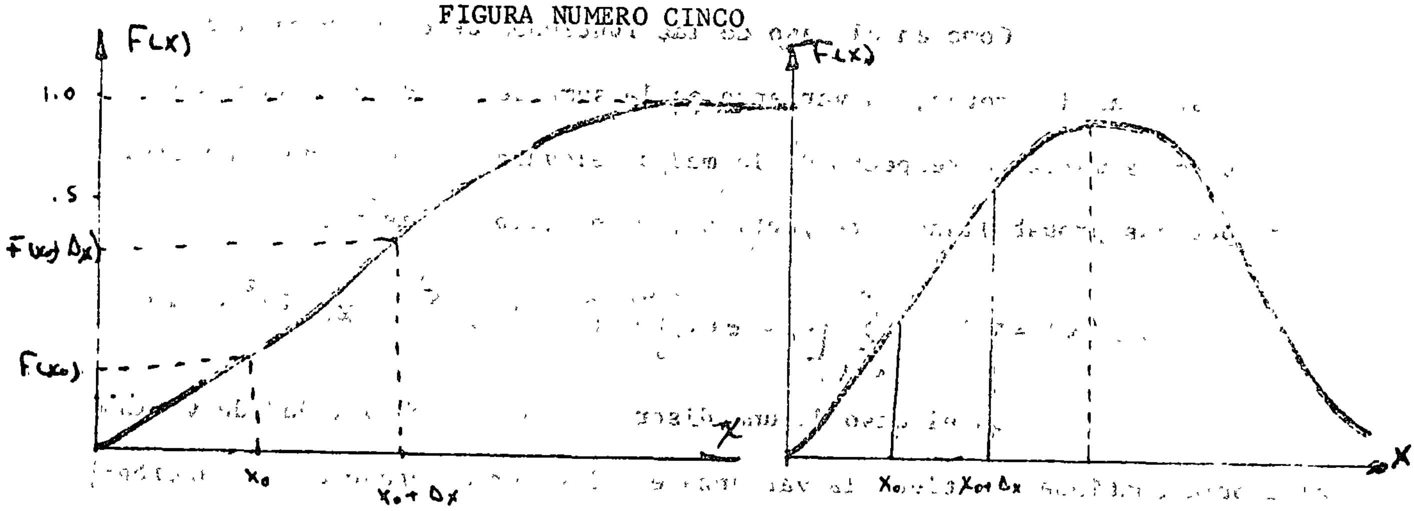


FIGURA NUMERO SEIS

3.2 MEDIA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE CONTINUA:

Sabemos que dos de las propiedades más útiles de una variable aleatoria son su esperanza (o valor esperado o valor medio) y su varianza, como ya se ha comentado en la unidad anterior.

De acuerdo a la definición de esperanza matemática desarrollada para el caso de una variable discreta, se dabe que:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot P(x_i)$$

Efectuandose esta suma para todos los valores de x.

Exténdiendo esta definición a variables aleatorias continuas vamos a tener por analogía, que la esperanza o valor medio de x está definido por :

$$E(x) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Como en el caso de las funciones de distribución de variables aleatorias discretas, la varianza es la suma de las desviaciones de los valores de la variable respecto de la media, elevadas al cuadrado y multiplicadas por sus probabilidades respectivas; o sea simbólicamente:

$$Var(x) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(x)\right]^2 \cdot P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 P(x_i)$$

En el caso de una distribución de probabilidad de variable aleatoria contínua, se tiene la varianza es el valor esperado de la función: $\left[x - E(x)\right]^2$

o sea :

$$\sigma^2 = \left\{\left[x - E(x)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(x)\right]^2 F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \left[E(x)\right]^2 dx$$

$$= \left[E(x^2) - \left[E(x)\right]^2\right]$$

Y la desviación estándar será la raíz cuadrada de la varianza, o sea :

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

3 2 1 EJEMPLO:

Como ejemplo del uso del cálculo integral en la evaluación de probabilidades y de los parámetros en una distribución de probabilidades contínuas, supóngamos que se tiene la función P (x) = $0.25X - 0.05X^2$, y- se pide cálcular la probabilidad de que x tome valores comprendidos entre -- 3 y 5 , así como su media, varianza y desviación estándar.

$$P\ (3 < x < 5 = \int_3^5 (0.25X - 0.05\ x^2)\ dx =$$

$$= \left[\frac{0.25X^2}{2} \quad \frac{0\ 05\ X^3}{3}\right] = 1.042 - 0.675 =$$

$$= 0.367$$

La media o esperanza será:

$$E\ (x) = \int_3^5 x\ (0.25X - 0.05^2)\ dx = \left[\frac{0.25X^3}{3} - \frac{0.05\ X^4}{4}\right]$$

$$= 2.60 - 1.24 = 1.36$$

La varianza será:

$$\sigma^2 = E\left\{\left[X - E\ (x)\right]^2\right\} = \int_3^5 (x - 1.36)^2 \ (0.25X - 0.05X^2)\ dx =$$

$$= \int_3^5 (x^2 - 2.72X + 1.85)\ (0.25X - 0.05X^2)\ dx =$$

$$= \int_3^5 X^2\ (0.25X - 0.05\ X^2)\ dx - 2.72 \int_3^5 X(0.25X - 0.05X^2)\ dx +$$

$$+ \quad 1.85 \int_{3}^{5} (0.25\,X - 0.05X^2)\,dx \quad =$$

$$= \left[\frac{0.25X^4}{4} \qquad \frac{0.05X^5}{5} \right]_3^5 - \quad 2.72 \left[\frac{0.25X^3}{3} - \frac{0.05X^4}{4} \right]_3^5$$

$$+ \quad 1.85 \left[\frac{0.25X^2}{2} \qquad \frac{0.05\;X^3}{3} \right]_3^5 =$$

$= \;(7.812 - 3.432) - 2.72 (2.60 - 1.24)+1.85(1.042-$

$0.675) =$

$= \;4.380 - 3699 + 0.6789 \;;=$

$= \;1.3599$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad = \;1.3599 \qquad = \quad 1.17$

En resúmen se tiene que:

$P\;(3 < x < 5 \;) = 0.367$

$E\;(X) = \bar{\bar{x}} = 1.36$

$\sigma^2 = \;1.3599$

$\sigma \;= \;1.17$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROCESO Y TÉCNICAS DECISIONALES

C U A D E R N O   D E   T R A B A J O

preparado por L.A.E. JOSE FERNANDO C
CIENFUEGOS DIAZ = ORDAZ.
marzo 1976.

1. EL PROCESO RACIONAL DE LA TOMA DE DECISIONES

1.1 Durante las últimas décadas del siglo actual, se desarrolló una teoría de las decisiones que permite evaluar la eficacia de una decisión al medir el grado en el que sus resultados satisfacen el objetivo u objetivos especificados de antemano por la persona o grupo de personas que tomaron la decisión.

El contenido de la teoría de las decisiones se originó de tres corrientes principales que son : la TEORIA DE LA PREFERENCIA Y DE LA UTILIDAD, la TEORIA DE LAS PROBABILIDADES y la TEORIA DE LA INDERENCIA ESTADISTICA.

I.2 INSTRUCCIONES : llene con las palabras adecuadas los espacios en blanco.

El contenido de la teoría estadística de las decisiones se divide en dos campos principales : ____________________
____________________ y ____________________.

Tanto la toma de decisiones individuales o en grupo se pueden subclasificar atendiendo al grado de información disponible al alcance del decisor con respecto a la probabilidad de ocurrencia de los diversos estados de la naturaleza involucrados en la decisión o decisiones, en :

i) ____.
ii) ____.
iii) ____.

I.3 INSTRUCCIONES : llene con las palabras adecuadas los espacios en blenco.

i. La toma de una decisión ocurre en condiciones de certidumbre cuando ____________________
____.

ii. La toma de decisiones ocurre bajo condiciones de riesgo cuando ____________________
____.

iii. La toma de decisiones ocurre bajo condiciones de incertidumbre cuando ____________________
____.

I.4 INSTRUCCIONES : llene con las palabras adecuadas loa espacios en blanco.

Una decisión es ____

____.

Antes de que una persona tome una decisión, efectúa un análisis racional de la situación de interés, que puede ser intensivo o no, según las características particulares de la situación considerada.

1.5 INSTRUCCIONES : liste los elementos de un problema de decisiones.

a) ____

b) ____

c) ____

d) ____

e) ____

1.6 INSTRUCCIONES : llene con las palabras adecuadas los espacios en blanco.

Toda decisión está encaminada para la consecusión de un fín específico y la persona que toma la decisión quiere obtener ese fin específico, es decir, alcanzar una situación diferente a la de su estado original. Es importante para el logro de esas metas que el decisor tenga claramente sus objetivod especificados y jerarquizados de antemano.

Sin embargo, existen algunos factores que afectan el logro de los objetivos especificados y que se encuentran fuera del ámbito de control del individuo que toma la decisión. A estos factores se les dá el nombre de : ____________________

____.

1.7 INSTRUCCIONES : construya la matríz de consecuencias para esta situación.

Designaremos con A_i los cursos de acción posibles o estrategias, y con E_j los estados de la naturaleza . Si asocia mos cada uno de los estados de la naturaleza con un curso de acción obtendremos un resultado único, el cuál simbolizaremos por R_{ij} .

Si tenemos que $i=1,2,3,4$, y $j=1,2,3,4,5,6$.

MATRIZ DE CONSECUENCIAS

O

MATRIZ DE DECISION

CURSOS DE AACCION	ESTADOS DE LA NATURALEZA					
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
A_1						
A_2						
A_3						
A_4						

Observe que los estados naturales se representan en las columnas y los cursos de acción se representan en los renglones de la tabla.

1.8 Consideremos la situación siguiente :

La cooperativa agrícola "Morelos" debe tomar la decisión acerca de los cultivos que van a sembrar para el próximo ciclo agrícola. De la experiencia pasada con las siembras de tres tipos de cultivos en este ejido, se obtuvieron los siguientes datos :

a) sembrar frijol

b) sembrar maíz

c) sembrar sorgo

d) buen tiempo

e) tiempo variable

f) mal tiempo

Además se obtuvieror los siguientes resultados asociados a cada estado de la naturaleza y a cada curso de acción.

1. incisos a) y d) = $ 900,000.00

2. incisos a) y e) = $ 990,000.00

3. incisos a) y f) = $ 150,000.00

4. incisos b) y d) = $ 800,000.00

5. incisos b) y e) = $ 700,000.00

6. incisos b) y f) = $ 100,000.00

7. incisos c) y d) = $ 750,000.00

8. incisos c) y f) = $ 200,000.00

9. incisos c) y e) = $ 140,000.00

Las probabilidades de los diversos estados de la naturaleza se dan en la siguiente tabla

ESTADOS DE LA NATURALEZA	E_1	E_2	E_3
PROBABILIDAD	.35	.45	.20

INSTRUCCIONES : con la información proporcionada, se pide señalar :

i. ¿Cuáles son los estados de la naturaleza?

i.1 ____________________

i.2 ____________________

i.3 ____________________

ii. ¿Cuáles son los cursos alternativos de acción?

ii.1 ____________________

ii.2 ____________________

ii.3 ____________________

III. El problema de decisión de la cooperativa "Morelos", se presenta bajo condiciones de riesgo. Justifique adecuada mente esta afirmación.

____

____

____

iv. Construya la matríz de decisión para el problema propuesto.

MATRIZ DE DECISION

(Ciclo agrícola 75-76)

CURSOS DE ACCION:	ESTADOS DE LA NATURALEZA
PROBABILIDAD	

1.9 Liste las dificultades que presenta la descripción del problema de decisiones :

i. ____

ii. ____

iii. ____

1.10 Enumere tres características de una situación programable de toma de decisiones :

i. ____

ii. ____

iii. ____

1.11 Comtemplomos la situación siguiente:

Debido a la necesidad de salir de la mercancía de fuera de temporada, el gerente de una cadena de supermercados se encuentra con el problema de decidir si reduce o no el precio de ciertos artículos, y en caso de reducir el precio, determinar el porcentaje de la rebaja.

El departamento de mercadotécnia a petición del gerente, le presenta la información siguiente: si la mercancía es de la tempoŕada de primavera 1975, es factible que con una reducción del precio en un 40-60% se le dé salida a toda la existencia. Si la mercancía es de la temporada de verano y tuvo una baja aceptación, sería conveniente al final de la estación conceder un descuento entre un 20-40% para así acelerar su venta. Si la mercancía es de la temporada de verano y tuvo una regular aceptación, con un descuengo entre el 10-20% es sufiviente para deshacerse de la misma, y por último, si la mercancía pertenece a la temporada de otoño, entonces, se recomienda no efectuar ninguna rebaja.

Con base a los datos anteriores, el gerente decide lo siguiente:

a) Si la mercancía es de primavera, conceder un descuento del 50% sobre el precio original de venta.
b) Si la mercancía es de verano con baja aceptación, conceder un descuento del 30% sobre el precio de venta,
c) Si la mercancía es de verano con regular aceptación, conceder un descuento del 10% sobre el precio de venta.
d) Si la mercancía es de la temporada otoñal, no conceder descuento alguno.

INSTRUCCIONES : de acuerdo con el problema propuesto,

i) Dibujar la tabla de decisiones que represente adecuadamente esta situación de decisión.

1.12 Enumere las fases del proceso racional de toma de decisiones

i. ______________________________

ii. ______________________________

iii. ______________________________

iv. ______________________________

1.13 Indique cómo se obtienen los diferentes resultados asociados con las diversas alternativas posibles en un problema de decisiones.

i. ______________________________

ii. ______________________________

iii. ______________________________

iv. ______________________________

1.14 Indique los elementos del diagnóstico.

____

____

____

____

1.15 ¿Cómo se establece el período de evaluación para los resultados de las alternativas factibles?

____

____

____

1.16 Un buen criterio de valoración de los resultados de las alternativas factibles es el de los activos líquidos netos. Defina "activos líquidos netos".

____

____

____

____

1.17 Defina "valor terminal".

____

____

____

1.18 Contemplemos la siguiente situación:

Un ama de casa al efectuar sus compras de frutas para el consumo semanal, se enfrenta al siguiente problema. Desea comprar solamente dos tipos de frutas (uvas, manzanas) y le es indiferente cualquiera de las combinaciones siguientes de los dos productos :

SITUACION	UNIDADES DE UVAS (Kg)	UNIDADES DE MANZANAS (Kg)
A	6	1
B	5	2
C	4	3
D	2	4
E	1	5

i. GRAFIQUE la curva de indiferencia que represente esta situación, considerando en el eje horizontal las unidades de uvas.

1.19 Indique que representa cada uno de los puntos localizados sobre la curva de indiferencia.

1.20 Utilizando el ejemplo del punto 1.18, dibuje dos curvas de indiferencia que le proporcionen a este consumidor una satisfacción menor.

1.21 Utilizando el ejemplo del punto 1.18, dibuje dos curvas de in diferencia que le proporcionen a este consumidor una satisfacción mayor.

1.22 Responda a la siguiente afirmación, indicando su verdad o su falsedad y establezca el porqué de la misma.

"El nivel de satisfacción de un consumidor es ilimitado y con esto queremos decir que podemos incrementar indefinidamente las cantidades de dos productos que queremos consumir y obtener con eso un número infinito de curvas de indiferencia".

1.23 Identifique dos objetivos cualesquiera y demuestre los términos de intercambio existentes entre ellos mediante curvas de indiferencia.

1.24 ¿Cuál es la razón por la que las curvas de indiferencia son convexas al origen de los ejes de un diagrama cartesiano?.

1.25 Señale que es un modelo de decisión cerrado.

1.26 Escriba el principio de la racionalidad limitada de H.A. Simon.

1.27 Señale por lo menos tres diferencias que se puedan encontrar entre los modelos cerrados y los modelos abiertos de toma de decisiones.

1.28 Indique cuatro funciones de la red de comunicaciones existentes en cierta organización formal.

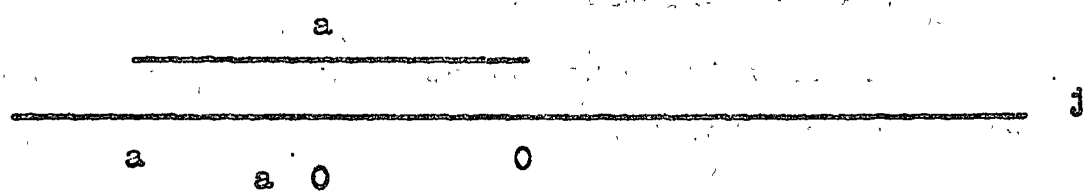
1.29 Defina en sus propios términos que entiende por pérdida de oportunidad.

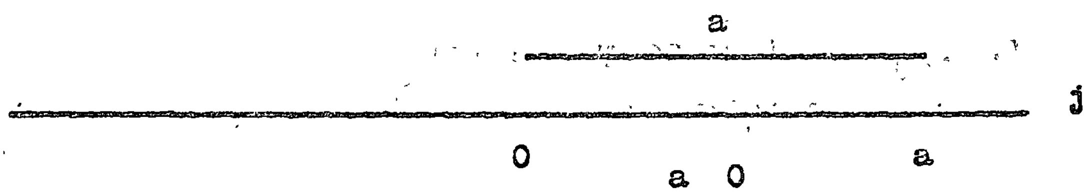
1.30 Represente simbólicamente la definición de pérdidas de oportunidad dada en el inciso anterior.

1.31 VALOR ABSOLUTO

Si a es un númerp entero, el valor absoluto de a, es simbolizado por $|a|$.

Definición : "si a es un entero, entonces el valor absoluto de a es el entero no negativo que nos dá la distancia de la gráfica de a al origen ".





Otra definición de valor absoluto que podemos considerar es la siguiente :

Sea a R .

1. Si a 0, a = a
2. Si a = 0, 0 = 0
3. Si a 0, −a = a

Ejemplo :

−7 = 7 ; 7 = 7 ; 0 = 0

1.32 Desarrolle la matríz de la pérdidas de oportunidad a partir de la siguiente matríz de decisiones:

CURSOS DE ACCION	ESTADOS NATURALES			
	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	113	93	63	111

A_2	86	42	88	121
A_3	67	97	49	59

1.33 Dados los símbolos siguientes :

E_4 : cierto estado natural

A_5 : cierta alternativa

A_k : una alternativa óptima

Defina con símbolos matemáticos adecuados para este caso, la pérdida de oportunidad.

1.34 ¿Cuál es el elemento que orienta al decisor para formular sus cadenas de objetivod?.

1.35 Indique la diferencia existente entre los objetivos fundamentales y los objetivos instrumentales.

1.36 Señale cinco maneras de cómo influyen los sistemas de valores personales sobre la toma de decisiones.

2. LA INFORMACION PARA LA TOMA DE DECISIONES

2.1 Explique el significado de la palabra "Estadística".

2.2 Exprese en sus propios términos que entiende por "Estadística Descriptiva" y que entiende por "Inferencia Estadística".

2.3 Encuentre mediante un ejemplo un grupo de números que sea un dato estadístico.

2.4 Indique las características que debe poseer un conjunto de números para poderlo considerar "datos estadísticos".

2.5 Exprese en sus propios términos que entiende por :

i. población

ii. muestra

iii. muestra aleatoria

2.6 ¿Qué características tienen :

i. las poblaciones finitas?

ii. las poblaciones infinitas?

2.7 En lenguaje estadístico que representan los listados de nóminas, los balances, los estados de resultados, las hojas de datos personales, los registros de producción, los registros de asistencia del personal.

2.8 Explique el significado de :

i. datos internos

ii. datos externos

2.9 Establezca la diferencia entre fuente de datos publicados primarias y secundarias.

2.10 Si podemos obtener datos publicados de fuentes primarias o de fuentes secundarias, ¿cuáles datos son más significativos y confiables?, y ¿porqué unas fuentes son más confiables que otras?

2.11 Los métodos estadísticos se pueden clasificar en diversos pasos en atención del autor consultado. Describa brevemente cada uno de los pasos de los métodos estadísticos.

2.12 Indique los criterios que se utilizan para clasificar los datos estadísticos y los principios de clasificación a que obedecen.

2.13 Señale las formas más comunes de presentar datos estadísticos organizados y describa cada una de ellas.

2.14 En la siguiente tabla se representa la fuerza de trabajo de la República Mexicana desde 1966 hasta 1970. Complete la tabla efectuando la investigación necesaria.

FUERZA DE TRABAJO DE LA REPUBLICA MEXICANA
1966 a 1970
(millones de personas)

STATUS DEL EMPLEO	1966	1967	1968	1969	1970
Fuerza de trabajo total :	12,432	12,622	12,810	12,997	13,181
Empleados en industrias no agrícolas					7,976
Empleados en agricultura :					5,205
Desempleados	31,162	32,472	33,835	35,253	36,737

FUENTE :

2.15 Con base en la tabla del punto 2.14, construya :

i. Una gráfica de líneas de partes componentes mostrando los datos completos en números de personas.

ii. Una gráfica de líneasde partes componentes mostrando los datos completos en porcentajes

2.16 Con base en la tabla del punto 2.14, construya dos gráficas de barras mostrando los hechos de los años 1966 a 1970, en :

i. número de personas

ii. porcentajes

2.17 Con base en la tabla del punto 2.14, construya una gráfica de pastel que represente los hechos en el año 1970.

2.18 En atención a los lineamientos para los que fué creada, la Procuraduría Federal del Consumidor ha decidido efectuar una investigación tendiente a verificar los pesos exactos de los paquetes de cierto producto expendido en empaques de dos kilogramos. Para tal efecto, se realiza un muestreo con 90 de dichos paquetes elegidos al azar. Los resultados del chequeo de pesos (en gramos) se listan a continuación:

1,959	1,951	2,000	1,938	2,009	1,834	2,057
1,989	1,969	1,884	2,004	2,619	1,947	1,902
2,095	1,878	1,969	1,882	1,909	2,077	2,002
1,974	2,032	2,017	1,979	1,867	2,061	2,047
2,093	2,075	2,025	1,954	1,966	1,910	2,000
1,865	1,930	2,120	1,977	1,972	1,907	1,876
1,945	2,055	2,007	2,000	1,948	2,124	1,970
1,958	2,003	2,015	2,030	1,880	1,967	1,900
1,987	1,832	1,936	2,001	1,934	1,914	2,025
2,042	1,943	2,053	2,005	1,988	1,946	2,122
1,968	1,965	2,063	1,869	2,004	2,079	2,009
1,898	1,985	1,830	1,934	1,999	1,932	1,912
2.027	1,981	1,879	1,951	1,959	2,001.	

2.19 Con los datos proporcionados en el punto 2.18, usar una hoja de marcar mostrando las frecuencias de acuerdo a las observaciones de los pesos de los diversos paquetes, y encontrar después del arreglo de frecuencias :

i. la media aritmética

ii. la mediana

iii. la moda

2.20 Con los datos proporcionados en el punto 2.18, proceda a efectuar el agrupamiento de los mismos en clases de una amplitud igual a 35 gramos, considerando el límite real inferior de la primera clase con un valor de 1820 gramos.

2.21 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a la construcción de una tabla de distribuciones de frecuencias absolutas.

2.22 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a la construcción de una tabla de distribuciones de frecuencias relativas.

2.23 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a la construcción de una tabla de distribuciones de frecuencias acumuladas.

2.24 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a la construcción de una tabla de distribuciones de frecuencias complementarias.

2.25 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a la representación gráfica del histograma correspondiente.

2.26 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a la representación gráfica del polígono de frecuencias correspondiente.

2.27 Defina lo que se entiende por "ojiva".

2.28 Con los datos proporcionados en el punto 2.20 y posteriores que sean necesarios, proceda a la representación gráfica de u na ojiva "menor que".

2.29 Con los datos proporcionados en el punto 2.20 y posteriores que sean necesarios, proceda a la representación gráfica de u na ojiva "mayor que".

2.30 En una sóla gráfica represente las ojivas "menor que" y "mayor que" e interprete el significado del punto de intersección de las mismas y su proyección sobre los ejes cartesianos para la situación que estamos analizando.

2.31 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a efectuar el cálculo de la media aritmética usando:

i. el método básico

ii. el método abreviado : desviaciones en unidades originales

iii. el método abreviado : desviaciones en unidades de intervalo de clase.

2.32 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a efectuar el cálculo de la mediana usando :

i. fórmulas

ii. en la gráfica de una ojiva sobre base "menor que".

2.33 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a efectuar el cálculo de la moda usando :

i. el método de la moda cruda

ii. la interpolación mediante el método gráfico

iii. la interpolación mediante el método algebraico

iv. el método de la moda empírica.

2.34 Discuta el significado de cada uno de los promedios calculador en los puntos 2.31, 2.32 y 2.33.

2.35 Con los datos proporcionados en el punto 2.19, proceda a efectuar el cálculo de las siguientes medidas de dispersión :

i. el recorrido o rango

ii. la desviación media

iii. la desviación cuartílica

iv. la varianza

v. la desviación estándar

2.36 Con los datos proporcionados en el punto 2.20, proceda a efectuar el cálculo de las siguientes medidas de dispersión, para datos agrupados en clase:

i. rango

ii. la desviación media

iii. la desviación cuartílica

iv. la varianza

v. la desviación estándar

vi. el coeficiente de variación

vi. el coeficiente de asimetría de Pearson

2.37 Discuta el significado de cada una de las medidas de dispersión calculadas en el punto 2.36 para la situación que estamos analizando.

2.38 Establezca en sus propios términos el significado que tiene el enunciado "distribución simétrica".

2.39 Establezca en sus propios términos el significado que tiene el enunciado "distribución asimétrica".

2.40 Describa los diversos tipos de asimetría.

2.41 Señale la relación que se guarda entre la media, la mediana y la moda, y que significado tiene esa relación en las siguientes situaciones :

i. en las distribuciones simétricas

ii. en las distribuciones asimétricas

2.42 Señale la relación que guardan la media, la mediana y la moda en el problema que estamos analizando y establezca de acuerdo a esa observación el tipo de distribución de que se trata.

3. <u>TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE</u>

3.1 Enumere las características de un problema de decisiones bajo condiciones de certidumbre.

3.2 Señale los puntos comunes de una situación de decisiones bajo condiciones de certeza y una situación programable de toma de decisiones.

3.3 <u>PUNTO DE EQUILIBRIO</u>

La Compañía "Juguetes de Naucalpan, S.A.", es una pequeña empresa fabricante de juguetes, y en la actualidad se ha puesto a revisar otros productos para su posible adición a su línea de productos. Una de sus posibilidades es un nuevo tipo de bicicleta para adulto. Hace poco han aparecido en el mercado diversos tipos de bicicletas cuyo precio de venta al detalle oscila entre $1,000 y $2,500. El departamento de investigación de mercados de la compañía después de efectuar la correspondiente investigación encontró que el interés por este tipo de artículo es grande y creciente, debido en gran parte a la crisis de energéticos, las campañas de concientización cobre los problemas ocasionados por la contaminación am biental y las ventajas del vehículo como medio de transporte.

Para que se examinara la capacidad potencial de este producto para generar utilidades, se nombró un comité de especialistas. El departamento de producción estima que se habrán de invertir $3,000,000 en instalaciones y equipo nuevo, y esta inversión tendrá una vida útil de cinco años. El departamento de contabilidad estima que el producto tendrá qué absorver al año $1,300,000 de gastos generales para cubrir con ello el valor de las instalaciones de respaldo, alquileres, impuestos, sueldos y salarios, costo de capital, etc. El departamento de mercadotecnia aconseja que al comienzo, el producto tiene que estar apoyado por un presupuesto de distribución de $1,500,000, y que además, su precio deberá fijarse en $900 por unidad al detallista en fábrica, sin descuento alguno por cantidad. Por último, los diversos departamentos de operación calculan que el nuevo producto implicará un costo por materiales y mano de obra directos de $500 por unidad.

Con los datos proporcionados procedamos al cálculo del punto de equilibrio para este ejemplo utilizando un método algebraico.

<u>F O R M U L A</u>

$$q_e = \frac{F}{p - v}$$

en donde :

p : precio unitario de venta

v : costo variable unitario de producción

F : costo fijo de producción

q_e: unidades en el punto de equilibrio

En el ejemplo encontramos los costos fijos siguientes : la bicicleta exige una inversión fija de más de $3,000,000 con una vida útil que se ha estimado en cinco años. Sobre una base li neal, esto equivale a un costo anual de depreciación del orden de los \$600,000. Al nuevo producto se le cargan también por su parte de gastos generales \$1,300,000. Presumiblemente, esta cifra representa un cálculo estimativo a largo plazo del valor de oportunidad de los recursos de la empresa que se necesitan para respaldar este producto nuevo. Además, la compañía está pensando en un gasto anual de \$1,000,000 en publicidad y de \$1,500,000 en distribución. Por lo tanto, los costos fijos suman \$4,400,000 (= \$(600,000 + 1,300,000 + 1,000,000 + + 1,500,000).

Sustituyendo en la fórmula del punto de equilibrio los datos proporcionados, tendremos :

$$q_e = \frac{\$4,400,000}{\$/u(900-500)} = 11,000 \text{ unidades}$$

De acuerdo con el resultado encontrado, se deriva que para alcanzar el punto de equilibrio de producción, es decir, encontrar el número de unidades necesarias para absorver los costos totales en que no se generen pérdidas o utilidades, es deseable producir 11,000 unidades.

3.4 Con base en los datos anteriores, ¿deberá la compañía crear este nuevo producto?

3.5 Con base en los datos anteriores, ¿se puede considerar buena la mixtura de mercadotecnia?.

3.6 Con base en los datos proporcionados en el punto 3.3, proceda a graficar adecuadamente el punto de equilibrio, identificando correctamente los ejes coordonados.

3.7 Desde el punto de vista de la mercadotecnia es muy útil expresar el volúmen en el punto de equilibrio (q_e), no como una constante, sino más bien como una función de los elementos de la

... de mercadotecnia.

El volúmen en el punto de equilibrio variará con el precio del producto y la cantidad de esfuerzo de mercadotecnia que se dedique al nuevo producto :

$$q_e = \frac{\$600,000 + \$1,300,000 + A + D}{(p - \$500)/\text{unidad}}$$

En donde :

p : precio unitario de venta

A : presupuesto de publicidad

D : presupuesto de distribución

Tomando como base el problemas del punto 3.3 y los elementos presentados en este punto, el departamento de mercadotecnia nos proporciona 12 programas alternativos para es producto, los cuales se presentan a continuación en la siguiente tabla:

MIXTURA DE MERCADOTECNIA				VOLUMEN ESPERADO
MIXTURA No.	PRECIO (p)	PUBLICIDAD (A)	DISTRIBUCION (D)	(q)
1	$800	$1,000,000	$750,000	14,600
2	$800	$1,000,000	$500,000	14,500
3	$800	$750,000	$750,000	14,000
4	$800	$750,000	$500,000	12,000
5	$1,000	$1,000,000	$750,000	7,000
6	$1,000	$1,000,000	$500,000	9,500
7	$1,000	$750,000	$750,000	8,200
8	$1,000	$750,000	$500,000	10,000
9	$1,200	$1,000,000	$750,000	6,200
10	$1,200	$1,000,000	$500,000	4,600
11	$1,200	$750,000	$750,000	5,500
12	$1,2000	$750,000	$500,000	6,000

Con base a la información proporcionada por el departamento de mercadotecnia y presentada en el cuadro anterior, se pide :

i. Compare el volúmen esperado (q) y el volúmen en el punto de equilibrio (q_e) para las diversas mixturas de mercadotecnia, obtenga a su vez las utilidades o pérdidad correspondientes.

ii. Proceda a tomar una decisión sobre cuál programa de los presentados por el departamento de mercadotecnia es más conveniente, justificando adecuadamante su respuesta.

3.8 Como empresario usted tiene que elegir entre dos procesos de fabricación, a los que llamaremos proceso 1 y proceso 2; las características de estos procesos son tales que las funciones de costos totales son las siguientes :

$$\text{proceso 1 : } C_1(q) = \$8q + \$30,000$$
$$\text{proceso 2 : } C_2(q) = \$6q + \$38,000$$

Además, la función de los ingresos brutos totales, independientemente del proceso utilizado es :

$$I(q) = \$13q$$

Y la capacidad máxima de producción es de 6,000 unidades en el período considerado.

Con la información proporcionada se pide :

i. Encontrar el nivel de producción en el cuál el empresario pueda emplear indistintamente cualquiera de los dos procesos.

ii. Para un nivel de producción menor o igual al encontrado en el punto 3.8.i., cuál proceso es más conveniente emplear Justifique matemáticamente su respuesta.

iii Para un nivel de producción mayor o igual al encontrado en el punto 3.8.ii., establezca el proceso que es más conveniente utilizar. Justifique matemáticamente su respuesta.

iv. Graficar adecuadamente los puntos 3.8.i;3.8.ii;y 3.8.iii.

3.9 PROGRAMACION LINEAL

La cooperativa agrícola "Morelos" maneja dos ranchos con productividades parecidas. Las cosechas están limitadas principalmente por la superficie disponible y por la cantidad de agua existente para irrigación. Para planear la cosecha del siguiente ciclo agrícola se cuenta con la siguiente información:

RANCHO	SUPERFICIE DISPONIBLE (HECTAREAS)	AGUA DISPONIBLE (m^3/HECTAREA)
A	470	500
B	800	790

El Consejo Directivo de la cooperativa debe decidir la superficie de terreno que conviene dedicar a la siembra de cada uno de tres productos que es factible cultivar, basándose en las estimaciones de utilidad por hectárea y consumo de agua.

PRODUCTO	SUPERFICIE MAXIMA (HECTAREA)	CONSUMO DE AGUA (M^3/HECTAREA)	UTILIDAD ESTIMADA ($/HECTAREA)
F	750	4	$6,000
G	900	5	$5,000
H	550	3.5	$3,000

S E P I D E :

i. Plantear la ecuación de la función objetivo.

ii. Formular las desigualdades que representan a las diversas restricciones.

iii. Transforme las desigualdades del problema en ecuaciones lineales.

iv. Proceda a la solución del problema mediante el método gráfico de programación lineal.

3.10 MODELO DE ASIGNACION

Una compañía química para poder distribuir un producto desde su almacén central a los consumidores industriales, mantiene una flotilla de tractores y remolques cisterna. Como al descargar un remolque cisterna en el lugar de consumo lleva normalmente unas dos horas por lo menos, el conductor del tractor debe dejar el remolque en el lugar de descarga del mismo y regresar al almacén central, llevando de paso el remolque vacío más próximo para su llenado y asignación a otro consumidor.

Supongamos que una determinada mañana se han enviado cinco tractores (numerados del 1 al 5) para llevar cinco remolques cisterna cargados, a consumidores situados en diferentes lugares de la Ciudad de México.

Después de situar los remolques en los lugares de consumo, deben de utilizarse los tractores para regresar cinco remolques vacios (numerados del 11 al 15) al centro de suministro.

El costo de asignación de los tractores a los remolques vacios está dado en la siguiente matríz :

MATRIZ DE COSTOS

(PESOS)

REMOLQUE TRACTOR	11	12	13	14	15
1	51	59	99	104	32
2	59	76	56	11	60
3	121	45	67	23	95
4	27	81	29	71	92
5	26	18	62	65	22

SE PIDE :

i. Determine el esquema de asignaciones óptimas de los 5 tractores a las cinco cisternas, de forma tal que el costo de asignación sea el mínimo.

ii. Determine el costo mínimo de asignación

iii. Indique si es necesario maximizar este problema o minimizarlo. Justifique adecuadamente su respuesta.

3.11 La empresa "Juguetes de Naucalpan, S.A.", tiene vacantes en la actualidad 5 puestos, cuyo desempeño requieren diversas capacidades específicas. En el departamento de Recursos Humanos de la empresa se han presentado 7 candidatos, mismos que han sido sometidos a pruebas psicométricas de selección para cada puesto, obteniéndose las calificaciones que se presentan en la siguiente tabla :

EMPLEOS / CANDIDATOS	A	B	C	D	E
1	51	59	85	47	93
2	73	77	64	442	83
3	40	34	27	59	51
4	85	43	98	53	82
5	66	87	82	79	36
6	39	62	45	78	70
7	47	97	73	95	77

En base a los datos de la tabla anterior, se trata de seleccionar a cinco candidatos (de entre los 7 examinados) para ocupar los cinco puestos. El grupo elegido deberá ser aquel que en conjunto, reúna la puntuación máxima, considerando la calificación de cada candidato obtenida en el puesto al que se decida asignarlo.

S E   P I D E :

i. Calcular la asignación óptima de los candidatos.

ii. Determinar la puntuación máxima que en conjunto pueden obtener los candidatos seleccionados en el punto anterior

3.12 MODELO DE TRANSPORTE

Cierta empresa maneja tres fábricas. Actualmente se embarcan los productos manufacturados a tres diferentes bodegas. La localización y capacidad de las bodegas son las siguientes :

BODEGAS	CAPACIDAD
Guadalajara	960 unidades
Monterrey	640 unidades
Puebla	800 unidades

La capacidad de cada fábrica junto con la tarifa unitaria de flete de cada fábrica a cada bodega son las siguientes:

FABRICA	CAPACIDAD	FLETES A	TARIFAS DE POR UNIDAD
1	520 unidades	Guadalajara	$50.00
		Monterrey	$60.00
		Puebla	$80.00
2	780 unidades	Guadalajara	$40.00
		Monterrey	$70.00
		Puebla	$70.00
3	1,100 unidades	Guadalajara	$60.00
		Monterrey	$80.00
		Puebla	$50.00

S E   P I D E :

i. Representar los datos anteriores del problema por medio de una matríz de transporte.

ii. [illegible] fábricas deben [illegible] y cuáles cantidades a las tres bodegas a fin de reducir al mínimo los costos de fletes.

iii. Calcular el costo óptimo de transporte.

3.13 Pueden usarse tres clasificaciones de trabajadores (1,2,3) en tres trabajos distintos (A,B,C), de acuerdo con un convenio con el sindicato. Cada trabajador tiene un costo diferente para cada trabajo. El costo se representa en la siguiente matríz :

TRABAJADOR :	1	2	3	TRABAJADORES REQUERIDOS
trabajos:				
A	\$59.00	\$45.00	\$50.00	5
B	\$51.00	\$50.00	\$47.00	25
C	\$55.00	\$52.00	\$55.00	45
TRABAJADORES DISPONIBLES	20	13	12	45

S E P I D E :

i. Determinar la asignación óptima de los trabajadores a los diversos trabajos a fin de reducir el mínimo los costos.

ii. Calcular el costo óptimo para esta situación.

4. TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO

4.1 Se observó la evolución de la demanda aleatoria de cierto artículo en el mercado y se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias, en donde D_i representa la demanda diaria en unidades :

D_i	1	2	3	4	5	6	7
f	6	17	25	37	27	18	11

Con la información proporcionada en la tabla anterior, se pide:

i. Obtener la distribución de probabilidades de esta variable aleatoria.

ii. Calcular la media aritmética de esa distribución de probabilidades.

iii. Interpretar el resultado obtenido en el punto 4.1.i.

iv. Dibuje el diagrama de barras correspondiente a esa distribución de probabilidades e indique en el mismo el valor esperado de la variable aleatoria.

v. Calcular la varianza de la variable aleatoria e interpretar su resultado.

vi. Calcular la desviación estándar para esta variable aleatoria e interpretar su resultado.

4.2 En la Convención Nacional de un partido polítivo celebrada para elegir el candidato que deberán presentar para la presidencia de la República en la próxima contienda electoral, se observó el siguiente comportamiento: en cuanto al número de asistentes, se registraron 2,000 delegados, de los cuáles 625 son mujeres, y todos los delegados tienen derecho a voto.

Se presentaron a consideración de la asamblea después de una ardua labor de auscultación a dos contendientes para elegir al candidato a postular por el partido. El mínimo estatutario para ser elegido candidato por el partido se contempla en un 66%. Los resultados de la votación de los delegados en la convención en una votación abierta se registraron en la siguente tabla :

CANDIDATO DELEGADOS	A	B
MUJERES	580	45
HOMBRES	770	505

Definiremos además los siguientes eventos :

E_1 : conjunto de mujeres

E_2 : conjunto de hombres

E_3 : candidato A

E_4 : candidato B

S E P I D E :

i. $P(E_1)$

ii. $P(E_3)$

iii. $P(E_1/E_3)$

iv. $P(E_2/E_3)$

v. $P(E_1 \cap E_2)$

vi. $P(E_1 \cap E_3)$

vii. $P(E_4 \cap E_2)$

viii. $P(E_1 \cup E_4)$

ix. $P(E_3/E_1)$

x. $P(S)$

xi. $P(E_2)$

xii. $P(E_4)$

xiii. $P(E_1/E_4)$

xiv. $P(E_2/E_4)$

xv. $P(E_3 \cup E_4)$

xvi. $P(E_1 \cup E_3)$

xvii. $P(E_4 \cup E_2)$

xviii. $P(E_4 \cap E_1)$

xix. $P(E_4/E_1)$

xx. $P(E_3 \cap E_4)$

4.3 Un manufacturero de unidades de aire acondicionado recibe 50% de sus termostatos de la Compañía A; 25% de la Compañía B, y los restantes de la Compañía C. De la experiencia pasada se sabe que la Compañía A produce .75% de termostatos defectuosos, la Compañía B, el 1.0% y, la Compañía C el 1.2%. Se seleccionó aleatoriamente una unidad de aire acondicionado y se encontró que el termostato estaba defectuoso.

S E P I D E :

i. Encontrar la probabilidad de que el termostato fuera producido por la Compañía A.

ii. Encontrar la Probabilidad de que el termostato fuera producido por la Compañía B.

iii. Encontrar la probabilidad de que el termostato fuera producido por la Compañía C.

iv. Calcular la probabilidad de que el termostato sea defectuoso.

v. Representar en un árbol de probabilidades la información obtenida y contenida en este ejemplo.

4.4 Cierto empresario dueño de su negocio se encuentra con la siguiente situación de decisiones :

CONTRATO A		CONTRATO B	
RESULTADOS	PROBABILIDAD	RESULTADOS	PROBABILIDAD
$51,000	.50	$59,000	.30
$85,000	.40	$75,000	.50
-$20,000	.10	-$10,000	.20

Los recursos del empresario son limitados de forma tal que no es posible que pueda obtener los dos contratos a la vez.

S E P I D E :

i. Calcular el valor monetario de cada contrato.

ii. Calcular la utilidad esperada de cada contrato (considere que la función de utilidad de ese empresario es la misma que la de usted).

iii. Utilizando el criterio del valor monetario esperado, indicar el contrato que más le conviene.

iv. Utilizando el criterio de la utilidad esperada, indicar el contrato que más le conviene a este empresario.

... función de utilidad encontrada en el punto 4.4.ii.

vi. De acuerdo con la curva que expresa la función de utilidad de este empresario podremos concluir si tiene preferencia, aversión o indiferencia por el riesgo. Indique la actitud hacia el riesgo de este empresario. Justifique adecuadamente su respuesta.

4.5 Dibuje usted una curva de utilidad caracterizada por una actitud de aversión por el riesgo, identificando perfectamente sus ejes coordenados

4.6 Señale la función de utilidad encontrada en la curva de aversión hacia el riesgo dibujada en el punto 4.5.

4.7 Dibuje usted una curva de utilidad caracterizada por una actitud de preferencia hacia el riesgo.

4.8 Señale la función de utilidad encontrada en la curva de preferencia hacia el riesgo del punto 4.7.

4.9 Explique con los diagramas apropiados el significado de una actitud de aversión decreciente hacia el riesgo.

4.10 Explique que significa el hacho de tener una utilidad lineal para las consecuencias monetarias involucradas en cierto problemas de decisiones bajo condiciones de riesgo.

5. TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE COMPLETA

5.1 ¿Cuantos estados de la naturaleza pueden encontrarse en un problema de decisión en condiciones de incertidumbre completa?

5.2 ¿Como se establece la diferencia de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre completa y la toma de decisiones en condiciones de riesgo?.

5.3 ¿Como se determinan las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza pertinentes en una situación de decisiones en condiciones de incertidumbre completa?.

5.4 ¿Está usted de acuerdo con la fundamentación del criterio de Laplace. Señale porqué.

5.5 Determine su propio índice de pesimismo relativo para esta situación de decisiones:

Sea la siguiente matríz de decisiones:

CURSOS DE ACCION	ESTADOS NATURALES	
	E_1	E_2
A_1	0	1
A_2	x_{21}	x_{22}

5.6 Sea esta matríz de decisiones :

CURSOS DE ACCION	ESTADOS DE LA NATURALEZA			
	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	82,000	42,000	66,000	71,000
A_2	98,000	77,000	48,000	59,000
A_3	51,000	88,000	56,000	36,000

Los resultados asociados a los estados naturales y los co-

...ondientes cursos de acción, están dados en pesos.

SE PIDE:

i. Señale la decisión que tomaría siguiendo el criterio de decisión de WALD. Justifique su respuesta adecuadamente.

ii. Señale la decisión que tomaría siguiendo el criterio de decisión de HURWICZ. Justifique su respuesta adecuadamente.

iii. Señale la decisión que tomaría siguiendo el criterio de decisión de LAPLACE. Justifique adecuadamente su respuesta.

iv. Señale la decisión que tomaría siguiendo el criterio de decisión de SAVAGE. Justifique adecuadamente su respuesta.

v. Señale cuál de los criterios anteriores prefiere usted.

5.7 Explique usted el "valor esperado de la información perfecta".

5.8 Explique usted las diferencias entre las pérdidas de oportunidad esperadas y el valor esperado de la información perfecta.

5.9 Construya una matríz de pérdidas de oportunidad a partir de la siguiente matríz de decisiones :

CURSOS DE ACCION	ESTADOS DE LA NATURALEZA E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1	70	48	25	-60	-40
A_2	-18	59	67	33	38
A_3	65	27	52	93	98
A_4	76	-35	-23	56	51

Las cifras de la matríz están dadas en miles de pesos.

iii. Calcular el costo de la incertidumbre.

iv. ¿Cuánto pagaría usted por la información que le podría proporcionar un pronosticador perfecto?.

5.12 Explique usted el significado del valor esperado de la información muestral.

5.13 Explique usted el significado de "ganancias netas esperadas de la información muestral".

5.14 En cierta ciudad del interior de la República se verificará en octubre del presente año un evento internacional, el cuál ocasionará la necesidad de dar alojamiento a un gran número de asistentes al mismo. Para poder atender a la demanda de alojamiento durante ese tiempo, un empresario dueño de un hotel de prestigio en esa ciudad, prevee la posibilidad de efectuar una ampliación de su establecimiento, construyendo algunas habitaciones adicionales. Dichas habitaciones carecerán de valor comercial una vez terminado el evento, debido a que la capacidad actual de alojamiento cubre las necesidades de habitación en tiempos normales.

Ante esto, dicho empresario considera los siguientes cursos de acción:

A_1 : ampliar su hotel

A_2 : no ampliar su hotel

Los estados de la naturaleza ante los que se enfrenta son:

E_1 : la demanda cubre los costos de construcción

E_2 : la demanda no cubre los costos de construcción

Considera también las siguientes probabilidades "a priori" :

$$P(E_1) = 50\% \quad ; \quad P(E_2) = 50\%$$

Se efectúa una encuesta que le reporta las observaciones muestrales Z_1 y Z_2, con las características siguientes:

5.10 Considerando la matríz del punto 5.9 y la siguiente distribución de probabilidades :

E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	TOTAL
$P(E_j)$	.24	.26	.15	.18	.17	1.00

S E P I D E :

i. Calcular el valor esperado de la información perfecta.

5.11 Dada la siguiente matríz de decisiones, en donde los R_{ij} están dados en miles de pesos :

CURSOS DE ACCION	ESTADOS DE LA NATURALEZA				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1	380	220	340	420	230
A_2	290	400	360	395	330
A_3	210	450	120	200	255
A_4	295	390	190	180	270

Además se tiene esta distribución de probabilidades:

E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	TOTAL
$P(E_j)$	.16	.18	.26	.21	.19	1.00

S E P I D E :

i. Calcular las ganancias esperadas en condiciones de certidumbre.

ii Calcular las ganancias esperadas en condiciones de riesgo

$P(Z_1/E_1) = .60$; $P(Z_2/E_1) = .40$; $P(Z_1/E_2) = .50$; $P(Z_2/E_2) = .50$

Finalmente considera la siguiente matríz de pérdidas de oportunidad:

CURSOS DE ACCION	ESTSDOS DE LA NATURALEZA	
	E_1	E_2
A_1	\$0	\$759,000
A_2	\$900,000	\$0

S E P I D E :

i. Con la información proporcionada establecer la estrategia óptima antes de muestrear.

ii. Con la información proporcionada establecer la estrategia óptima si se observa Z_1.

iii. Con la información proporcionada establecer la estrategia óptima si se observa Z_2.

iv. Calcular las probabilidades marginales de los resultados de la encuesta, o sea, $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$.

v. Calcular las probabilidades "a posteriori" de los estados de la naturaleza.

vi. Representar la información anterior en un árbol de decisiones.

vii. Calcular el valor esperado de la INFORMACION MUESTRAL.

viii Acorde con los cálculos anteriores, indique la decisión que debe adoptar ese empresario.

6. EJEMPLO DE DIAGNOSTICO ADMINISTRATIVO

La fase del diagnóstico administrativo la vamos a tratar considerando un ejemplo hipotético.

Por medio de un proceso de canalización de la información disponible se tratará de encontrar una solución adecuada a un problema más grande localizado en cierto contexto administrativo.

Observamos que el contexto completo para el diagnóstico está definido por:

- el sistema en donde se encuentra el problema
- los objetivos del sistema
- el medio ambiente del sistema
- las metas ambientales

A. PRESENTACION DEL PROBLEMA.

El cuerpo docente y el alumnado de una determinada escuela de administración se encuentra a disgusto de la calidad de los servicios proporcionados por cierta unidad administrativa denominada "Servicios Académicos".

En la dirección de la escuela se han planteado un sinnúmero de quejas ,obligando al director de la misma a integrar una comisión que se avoque al estudio de las mismas. Dicha comisión debe de analizar el problema y recomendar las medidas pertinentes de acción.

Los elementos integrantes de dilucidar el problema deciden establecer un diagnóstivo de la situación en estudio. Para poder establecer un diagnóstico de la situación administrativa en cuestión,la citada comisión determina en primer lugar ubicar el problema,para loscuál procede a analizar la situación.

B. ANALISIS DE LA SITUACION

Con el objeto de ubicar adecuadamente el problema, se procedió a la elaboración del siguiente organigrama:

SECRETARIA
ACADEMICA

DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE
CIENCIAS SOCIALES

DEPARTAMENTO DE
ADMINISTRACION

UNIDAD DE SERVICIOS
ACADEMICOS

CENTRO DE
INFORMACION

CENTRO DE

CENTRODEEE
PROCESAMIENTO DE DATOS

Del organigrama se desprenden las siguientes observaciones:

a) La Unidad de Servicios Académicos es una dependencia de la Secretaría Académica y está integrada por :
   - un centro de información
   - un centro de didáctica
   - un centro de procesamiento de datos

b) Se considera a la Secretaría Académica como armazón pertinente del medio ambiente del sistema de la Unidad de Servicios Académicos, en donde se encuentra el problema a analizar.

c) Los objetivos de la Secretaría Académica son:
   1. Desarrollar, implementar y supervisar la aplicación de los planes de estudio.
   2. Medir la efectividad de los sistemas educativos mediante el centro de didáctica :evaluando a profesores y alumnos.
   3. Actualización del material didáctico y de los planes de estudio y programas.
   4. Realizar investigaciones educativas con el fin de mejorar los sistemas de enseñanza-aprendizaje existentes.
   5. Programación de las prácticas de campo con profesores y

6) Contribuir a la buena administración de la escuela mediante los recursos de su centro de procesamiento de datos.

Los integrantes de la comisión de estudio juzgan necesario establecer los objetivos generales del sistema llamado Unidad de Servicios Académicos con el propósito de apreciar su congruencia con los objetivos de la Secretaría Académica.

Después de obtener esos objetivos generales, los investigadores deciden establecer la lista de los objetivos instrumentales relativos a cada componente del sistema para poder evaluar el grado de cumplimiento de dichos objetivos en términos de la cantidad y calidad de los recursos disponibles asignados a esa dependencia.

Posteriormente los investigadores asignados a la comisión de estudio del problema, podrán cuantificar la contribución efectiva de cada componente del sistema, observando dicho sistema e identificando las causas más probables del mal funcionamiento de sus componentes administrativos.

C. RESULTADOS DEL ANALISIS

a) Los objetivos generales de la unidad de servicios académicos son los siguientes :

- concientizar a los alumnos y a los profesores sobre sus necesidades de información y prestar los servicios adecuados para satiafacerlos.
- establecer las condiciones propicias para que el educando realice un verdadero aprendizaje, conciente de ser agente de su propia formación.
- prestar servicios de procesamiento de datos a los miembros de la Escuela que los requieran y colaborar en lalas [illegible]

tividades de manera más eficiente.

b) Observación : en cuanto a su formulación general, los objetivos de la unidad de servicios académicos son congruentes con los objetivos generales de la Secretaría Académica. No obstante, es deseable una mejor articulación de dichos objetivos en la opinión de la comisión de estudio.

c) Objetivos instrumentales del sistema investigado:

1. Del Centro de Información

i. Este centro está integrado por las secciones siguientes:

- sección de biblioteca
- sección de información
- sección de difusión

ii. Los objetivos de este centro son :

- proporcionar servicios de préstamo bibliográfico
- actualizar los acervos de la biblioteca
- adquirir el material documental necesario
- coordinar las adquisiciones de periódicos y revistas técnicas
- supervisar el reglamento para uso de las bibliotecas
- actualizar los diferentes catálogos
- mantener organizado y actualizado el banco de datos
- elaborar y colocar carteles informativos
- elaborar y colocar carteles exhibiendo temas académicos de interés general para los miembros de la escuela
- editar y distribuir un boletín informativo
- distribuir gacetas y folletos de interés académico
- establecer programas de actividades culturales

- mantener relaciones de intercambio con otras instituciones educativas, culturales y laborales, públicas o privadas, relacionadas con el campo de la administración.

2. Del Centro de Didáctica

i. Este centro se encuentra formado por las siguientes secciones :

- sección de investigaciones
- sección de actualización pedagógica
- sección de asesoramiento
- sección audiovisual
- sección de difusión

ii. Los objetivos de este centro son :

- realizar investigaciones pedagógicas
- planear, organizar y realizar actividades tendientes a mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje.
- atender y estudiar asuntos pedagógicos presentados al centro
- elaborar y distribuir materiales audiovisuales
- supervisar el uso del circuito cerrado de televisión
- preparar cursos de actualización de profesores
- establecer evaluaciones de los cursos utilizando ayudas audiovisuales
- realizar consultas personales con profesores y alumnos
- asesorar sobre métodos de estudio a los alumnos que así lo soliciten
- establecer un conjunto de pláticas motivantes a grupos de profesores y alumnos sobre las materias que así lo requieran

3. <u>Del Centro de Procesamiento de Datos</u>

i. Este centro no tiene ninguna sección.

ii. Los objetivos del centro son los siguientes:

- mejorar los sistemas administrativos de la escuela mediante el procesamiento de los datos por calculadoras electrónicas
- prestar los servicios siguientes :perforación de tarjetas, clasificación y procesamiento de datos, programación, estudio de análisis de sistemas, asesoramiento
- organizar e impartir cursos de programación y de análisis de sistemas dentro de los programas de estudio establecidos
- elaborar o adaptar el material didáctico necesario

d) Identificación de las causas del mal funcionamiento del sistema :

Con el fin de cuantificar la contribución efectiva relativa de cada componente del sistema investigado, la Comisión de Estudio observó el sistema funcionando durante un semestre y acordó definir estas "causas" de su mal funcionamiento :

- falta de planeación (Pl)
- falta de organización (Or)
- falta de control (Con)
- falta de coordinación (Coor)
- falta de recursos financieros (Fin)
- falta de recursos humanos capacitados (Hum)
- falta de equipo y recursos técnicos (Téc)
- falta de liderazgo de la persona responsable (Lid)

e) Ponderación de los componentes del sistema (1) :

COMPONENTE	PESO
Centro de Información	20
Centro de Didáctica	50
Centro de Procesamiento de Datos	30
SISTEMA	100

f) Instrumento de Medición (2) :

Los integrantes de la Comisión acordaron medir el grado de cumplimiento de los objetivos de cada componente mediante el establecimiento de la siguiente escala :

EVALUACION	RANGO	PUNTO MEDIO
muy malo (MM)	0 - 24	12
malo (M)	25 - 49	37
bueno (B)	50 - 74	62
muy bueno (MB)	75 - 99	87

g) Ponderación de las actividades de cada componente (3) :

A. Centro de Información

ACTIVIDAD	RELATIVAMENTE AL CENTRO	RELATIVAMENTE AL SISTEMA
1) actualización	20	4
2) adquisición	10	2
3) préstamo	40	8
4) banco de datos	5	1
5) difusión	5	1
6) boletín informativo	5	1
7) actividades culturales	10	2
8) aplicación del reglamento	10	2
TOTALES	100	20

B. Centro de Didáctica

ACTIVIDAD	RELATIVAMENTE AL CENTRO	RELATIVAMENTE AL SISTEMA
1) de investigación	10	5
2) de mejoramiento	6	3
3) estudio de asuntos pedagógicos	10	5
4) elaboración de material audiovisual	20	10
5) distribución de material audiovisual	6	3
6) circuito de televisión	4	2
7) Impartir cursos	20	10
8) evaluación	10	5
9) consultas personales	10	5
10) asesoramiento	4	2
TOTALES	100	50

C. Centro de Procesamientos de Datos

ACTIVIDAD	RELATIVAMENTE AL CENTRO	RELATIVAMENTE AL SISTEMA
1) mejorar sistemas administrativos de la Escuela	10	3
2) servicio de perforación	10	3
3) procesamiento de datos	40	12
4) impartir cursos	20	6
5) elaborar material didáctico	10	3
6) asesoramiento	10	3
TOTALES	100	30

h) Evaluación de la efectividad de cada componente (4) :

A. Centro de Información

NUMERO DE ACTIVIDAD	EVALUACION	EVALUACION PONDERADA	CAUSA MAS PROBABLE
1	bueno	.62 x 4 = 2.48	Hum
2	muy bueno	.87 x 2 = 1.74	——
3	bueno	.62 x 8 = 4.96	Con
4	muy bueno	.87 x 1 = 0.87	——
5	muy malo	.12 x 1 = 0.12	Or, Fin, Hum
6	malo	.37 x 1 = 0.37	Hum, Fin
7	muy bueno	.87 x 1 = 0.87	——
8	bueno	.62 x 2 = 1.24	Lid

Efectividad total observada: 12.65/20

B. Centro de Didáctica

NUMERO DE ACTIVIDAD	EVALUACION	EVALUACION PONDERADA	CAUSA MAS PROBABLE
1	muy bueno	.87 x 5 = 4.35	——
2	bueno	.62 x 3 = 1.86	Or, Hum
3	muy bueno	.87 x 5 = 4.35	——
4	malo	.37 x 10 = 3.70	Pl, Hum, Lid
5	bueno	.62 x 3 = 1.86	Hum, Lid
6	malo	.37 x 2 = 0.74	Or, Con, Lid
7	muy bueno	.87 x 10 = 8.70	——
8	bueno	.62 x 5 = 3.10	Fin, Hum
9	muy bueno	.87 x 5 = 4.35	——
10	muy bueno	.87 x 2 = 1.74	——

Efectividad total observada: 34.75/50

C. Centro de Procesamiento de Datos

NUMERO DE	EVALUACION	EVALUACION	CAUSA MAS

ACTIVIDAD		PONDERADA	PROBABLE
1	muy malo	.12 x 3 = 0.36	Lid, Or, Coor
2	bueno	.62 x 3 = 1.86	Or
3	bueno	.62 x 12 = 7.44	Or
4	muy bueno	.87 x 6 = 5.22	——
5	malo	.37 x 3 = 1.11	Pl, Or, Hum
6	bueno	.62 x 3 = 1.86	Or:

Efectividad total observada: 17.85/30

i) Evaluación de la efectividad del sistema (5):

COMPONENTE	PUNTOS	PORCENTAJE
Centro de Información	12.65	63.25
Centro de Didáctica	34.75	69.50
Centro de Procesamiento de Datos	17.85	59.50
TOTALES	65.25	

Despréndese de la información del cuadro anterior que la efectividad observada de la Unidad de Servicios Académicos es de 65.25%

Nótese que el bajo rendimiento global debe ser atribuido principalmente a las deficiencias observadas en el Centro de Procesamiento de Datos.

j) Lista de recomendaciones

A. Para el Centro de Información

1) Organizar y establecer un programa de formación para el personal del Centro

2) Incrementar los recursos financieros destinados a las actividades de esta subunidad académica.
3) Reforzar los controles administrativos relativos a los servicios de préstamo.
4) Mejorar la capacidad de mando y liderazgo del responsable del Centro.

B. Para el Centro de Didáctica

1) Organizar y establecer un programa de formación para el personal del Centro.
2) Redefinir las actividades y reagruparlas en forma más coherente, tomando en consideración los recursos disponibles.
3) Mejorar la capacidad de mando y liderazgo del responsable del Centro.

C. Para el Centro de Procesamiento de Datos

1) Definir nuevamente los objetivos del centro, identificando claramente los objetivos fundamentales y los instrumentales.
2) Establecer las actividades en forma más coherente, acorde con la nueva jerarquización de los objetivos.
3) Capacitar al personal de este Centro en función del establecimiento de las nuevas actividades.
4) Mejorar los lazos de coordinación de las actividades de ese Centro con los demás Centros, según las necesidades académicas de la Escuela.
5) Reforzar la capacidad de mando y de liderazgo del responsable del Centro.

E) Aspectos comunes de las recomendaciones anteriores

Del listado de recomendaciones, desprendidas de las deficiencias detectadas del sistema, podemos observar lo siguiente :

1) Existen deficiencias en la Unidad de Servicios Académicos por la ambigüedad y jerarquización de los objetivos. Lógicamente eso conduce a una deficiente organización de las actividades a realizar.

2) El rendimiento global de esa dependencia administrativa es apenas "bueno" y se debe atribuir en gran parte a la falta de recursos humanos adecuadamente capacitados. Los miembros de la Comisión de Estudio pudieron constatar la ausencia de incentivos motivacionales para el personal administrativo investigado.

3) Es necesario reforzar la capacidad de mando de las personas que se encuentran al frente de cada Centro. Esta observación viene a apoyar lo dicho anteriormente en el punto 2). Además se considera necesario motivar a los coordinadores de cada centro con un paquete concreto de incentivos, con el fin de obtener unos efectos de demostración para con el resto del personal administrativo.

l) Observaciones finales

Note los diferentes pasos utilizados por la Comisión de Estudio en su tarea de diagnóstico de las diferentes deficiencias presentes en la Unidad de Servicios Académicos de esa Escuela de Administración.

La etapa siguiente consiste en la elaboración de diversos cursos de acción, llamados también alternativas, susceptibles de resolver el problema identificado dentro de las posibilidades ofrecidas por los recursos disponibles y las limitaciones inherentes a similar situación administrativa. En otras palabras, esas alternativas de solución deben ser factibles .

m) NOTAS EXPLICATIVAS DEL EJEMPLO

(1) En el inciso e),los pesos asignados a los componentes del sistema se establecieron considerando el volúmen de servicios proporcionados a las personas y en términos de tiempo dedicado a dar esos servicios,mediante observaciones directas.

(2) En el inciso f),haremos las siguientes observaciones :

- la escala de 0 - 99 puntos se seleccionó arbitrariamente
- los puntos medios de cada rango se emplearán posteriormente cómo cifras representativas de dichos rangos.

(3) En el inciso g),la ponderación de las actividades de cada componente del sistema,o sea,los diversos Centros,se estableció considerando las razones aducidas en el inciso e).

(4) En el inciso h),haremos las siguientes observaciones :

- La evaluación de la efectividad con la cuál se lleva a cabo cada actividad se hizo mediante un formulario de evaluación conteniendo varios factores pertinentes;cada factor posee su propia escala,lo que hace que sea cuantificada dicha evaluación.
- La evaluación ponderada de cada actividad se calcula de la siguiente manera :

  seleccionamos para ejemplificación la actividad número 6 del Cantro de Información y observamos que el resultado de la evaluación de dicha actividad empleando la escala del inciso f),es de "malo" y su valor es de .37,el cuál representa el punto medio de ese rango;además podemos notar en el inciso g) la importancia relativa al sistema de esta actividad con un valor de 1.

  Si relacionamos los dos valores encontrados mediante una multiplicación,(.37 x 1 = .37),el resultado representa una evaluación ponderada con un valor de .37 para esa actividad del Centro de Información.
- La columna titulada "causa más probable",contiene en forma abreviada los símbolos de las mismas,una vez que :

+ Hum ; significa "falta de recursos humanos capacitados"

+ Con : significa "falta de control",

+ y los demás enunciados definidos en el punto C.d).

(5) En el inciso i), la columna titulada "puntos", hace referencia a la EFECTIVIDAD TOTAL OBSERVADA calculada en el inciso h).

El porcentaje de la columna tercera, se obtiene de la siguiente manera :

$$\frac{\text{efectividad total observada}}{\text{ponderación del componente}} = \frac{12.65}{20.00} = 63.25$$

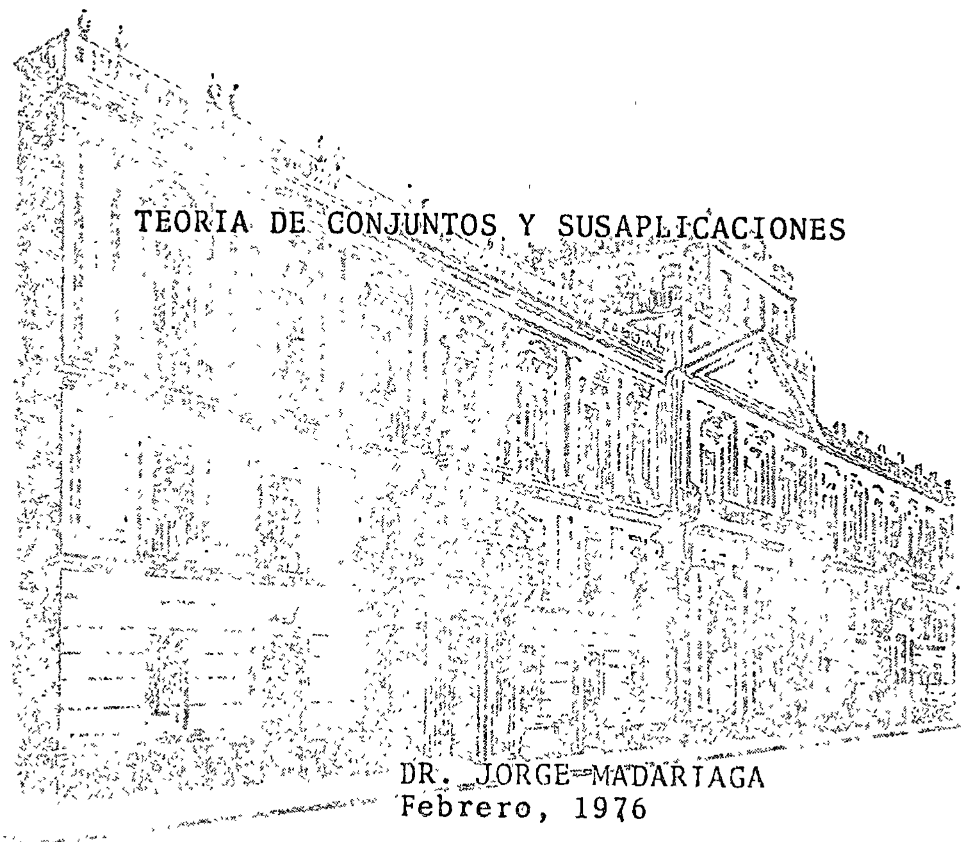
Bibliografía

1. Chernoff, H., y L. E. Moses, *Elementary Decision Theory*, Editorial John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1959
2. Dyckman, T. R , S. Smidt y A. K McAdams, *Management Decision Making Under Uncertainty: An Introduction to Probability and Statistical Decision Theory*, Ed The MacMillan Company, Londres, 1969.
3. Edwards, W., y A. Tversky, *Decision Making: Penguin Modern Psychology Readings*. Núm. 8, Ed. Penguin Books, Middlesex, England, 1967.
4. Ferguson, T S , *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach* Ed. Academic Press, Nueva York, 1967
5. Forester, J , *Statistical Selection of Business Strategies* Ed Richard D Irwin, Inc , Homewood, Ill , 1968
6. Hadley, G , *Introduction to Probability and Statistical Decision Theory*, Ed. Holden-Day, Inc., San Francisco, Cal., 1967.
7 Hamburg, M , *Statistical Analysis for Decision Making*, Ed. Harcourt, Brace & World, Inc., Nueva York, N. Y , 1970.
8. Kleiman A , y E K de Kleiman, *Conjuntos: Aplicaciones matematicas a la administración*, Editorial Limusa, S. A , México, D. F., 1972.
9. Lindgren, B W., *Elements of Decision Theory*, Ed. The MacMillan Company, Nueva York, 1971.
10. Lindley, D. V., *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint*, Ed Cambridge University Press, Nueva York, 1965.
11 Kepner, C H., y Trego, B B , *El directivo racional*, Ed. Libros McGraw-Hill de México, S. A de C. V., México, 1970.
12. Miller, D W., y Starr, M K , *Executive Decisions and Operations Research*, 2ª ed., Ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.
13. Pratt, J , H. Raiffa y R Schlaifer, *Introduction to Statistical Decision Theory*, Ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1965
14. Raiffa, H., *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty*, Ed. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1968.
15. Raiffa, H., y R. Schlaifer, *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard University, Graduate School of Business Administration, Division of *Research, Cambridge*, Mass., 1961.
16. Savage, L. J., *The Foundations of Statistics*, Ed. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, N. Y., 1954.
17. Schlaifer, R , *Probability and Statistics for Business Decisions*, Ed McGraw-Hill Book Co , Inc., Nueva York, N. Y., 1959.

18. Schlaifer, R , *Analysis of Decisions Under Uncertainty*, Ed. McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, N. Y., 1969.
19 Schmitt, S. A., *Measuring Uncertainty*, Ed. Eddison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
20 Thierauf, R J , y Grosse, R. A , *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*, Ed. Limusa, S. A , México, D F., 1972.
21. Wald, A., *Statistical Decision Functions*, Ed. John Wiley & Sons, Nueva York, N. Y., 1950.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

TEORIA DE CONJUNTOS Y TOMA DE DECISIONES



TEORIA DE CONJUNTOS Y SUSAPLICACIONES

DR. JORGE MADARIAGA
Febrero, 1976

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

TEORIA DE CONJUNTOS Y SUS APLICACIONES.

APLICACIONES Y TEORIA

Por lo general se pretende hacer una separación un tanto sofisticada entre Matemáticas clásicas y Matemáticas modernas. Incluso se puede llegar a pensar en una especie de discontinuidad entre las matemáticas de Pascal ó Newton con la teoría de Conjuntos

En realidad la noción de conjunto introducida a las matemáticas por Cantor (1845-1918), fué solo una noción intuitiva, pero muchos matemáticos como Galileo (1564-1642), Couchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848), DedeKind (1831-1916) etc, habían sentido la necesidad de introducir formalmente a las matemáticas la noción de Conjunto.

Por otro lado se puede asegurar que no se descubrieron nuevas matemáticas al introducir el concepto de conjunto, sino que, se realizó una reestructuración de las matemáticas clásicas, y por supuesto que se apoyó en ciertos símbolos y/o definiciones y por lo tanto lo que era verdadero, por supuesto que siguió siendolo.

Indiscutiblemente que como toda la historia nos señala y nos enseña aparecieron ciertas dificultades en el desarrollo de esta teoría, no es necesario recordar las polémicas teóricas que se desarrollaron al mismo tiempo que tal teoria conseguia nuevos avances.

La construcción del álgebra de conjuntos ó álgebra boleana debe su nombre en honor al matemático GEORGE BOOLE (1815-1864).

La teoría de conjuntos permite visualizar las inter-relaciones que pueden existir entre un conjunto y sus partes, así como entre ellas mismas.

Es un instrumental para la comprensión de algunas bases teóricas en matemáticas, para la precisión y la simplificación de algunas definiciones, como las de función: Analisis Combinatorio, Probabilidad, entre muchas otras.

Entonces, fundamentalmente la teoría de conjuntos constituirá para nosotros como un instrumento.

CONCEPTOS BASICOS

Cuando se habla de conjuntos de objetos ó personas, se piensa intuitivamente en alguna colección, agrupamiento o reunion de elementos.

En matemáticas como en todas las ciencias un concepto debe ser definido de manera precisa, o sea, se deben determinar las condiciones de aplicación, como su alcance y contenido.

En nuestro caso, trataremos de dar una definición que, sin ser rigurosa en toda la extensión de la palabra, resulte suficiente para iniciar el estudio de la teoría de conjuntos

DEFINCION: "CONJUNTO ES UNA COLECCION BIEN DETERMINADA DE ELEMENTOS".

Hay que tener presente que una definicion como la anterior elimina totalmente las colecciones imprecisas de elementos, como por ejemplo:

a) CONJUNTO DE LETRAS:

Es un conjunto impreciso, sus elementos no están bien determinados, porque no especifica cuales letras, ó de que alfabeto, se trata, Griego, Arabe, Español etc.

b) CONJUNTO DE NUMEROS:

Es un conjunto impreciso, ya que no especifica si son números reales, naturales, pares, etc.

En general vemos que la definición se muestra más en la determinación de los elementos del conjunto, que en la definición del mismo.

"SIMBOLOS USUALES"

A, B, C	Indican conjuntos
a, b, c	Indican elementos de un conjunto.
$\in$	Pertenece a, es elemento de.
$\notin$	No pertenece a, no es elemento de.
$/$	Tal que, dado que.
$=$	Es igual, está formado por.
$\neq$	Es distinto a, no es igual a.
$<$	Es menor que.
$\leq$	Es menor ó igual que.
$\not<$	No es menor que
$>$	Es mayor que
$\geq$	Es mayor ó igual que
$\not>$	No es mayor que

$\Longrightarrow$	Implica que.
$\Longleftrightarrow$	Equivale a, si y sólo si, (doble implicación)
$\subset$	Está incluido en, es subconjunto de, (inclusión propia).
$\not\subset$	No está incluido en, no es subconjunto de.
$\subseteq$	Es subconjunto impropio de, (inclusión impropia).
$\sim$	Es equivalente a (equivalencia).
Ω, S, U	Conjunto universal.
$\emptyset$	Conjunto vacío, conjunto nulo.
$\forall$	Todo.
$\wedge$	y
$\vee$	ó
$\cup$	Operación de unión.
$\cap$	Operación de intersección
A', $\bar{A}$	Operación de complementación.
$n(A)$	Número de elementos del conjunto A.
$n_s(A)$	Número de subconjuntos del conjunto A.
(a,b)	Par ordenado
(a,b,c)	Terna ordenada.
$A \times B$	Operación de producto Cartesiano.
$A_{n,r}$	Arreglos de "n" elementos tomados de "r" en "r".
$C_{n,r}$	Combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r".
P_n	Permutaciones de "n" elementos.
$n!$	Factorial de "n".
Σ	Operador de suma

COMO SE ESPECIFICAN O ESCRIBEN LOS CONJUNTOS?

- Por comprensión ó método descriptivo.

$$A = \{ \text{Conjunto de las vocales} \}$$

- Por extensión ó enumeración

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Igualdad: Dos conjuntos A y B son iguales si solo si poseen los mismos elementos.

luego: $A = B$ si solo si
para todo $a \in A \Rightarrow a \in B$ y
para todo $b \in B \Rightarrow b \in A$

en términos analíticos:

$$A = B \Rightarrow \forall a \in A \subset B \wedge \forall b \in B \subset A.$$

La igualdad de conjuntos tiene 3 propiedades:

a) Para todo conjunto A, $A = A$; propiedad REFLEXIVA.
b) Si $A = B \Rightarrow B = A$; propiedad SIMETRICA
c) Si $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$; propiedad TRANSITIVA.

Ejemplos:

a) Sea: $A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{a, i, o, e, u\}$

$C = \{$de las vocales$\}$

entonces se cumplen las tres propiedades.

b) Sea: $S = \{x / x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$T = \{x / 0 < x < 3, x \in N\}$

entónces se cumplen las tres propiedades.

DESIGUALDAD DE CONJUNTOS.

Dos conjuntos son desiguales si solo si se difieren en al menos un elemento; ó sea:

$A \neq$ si solo si.

existe un elemento x tal que $x \in B$ y $x \notin A$

existe un elemento z tal que $z \in A$ y $z \notin B$

CONJUNTO UNIVERSAL

Conjunto Universal es aquel que contiene todos los elementos en los cuales estamos interesados, es un conjunto de referencia para el conjunto que estudiamos.

RECORDEMOS QUE SE DENOTA POR:

"Ω, S, o U"

Ejemplo:

Si estamos interesados en los habitantes de un pueblo mexicano, podemos tomar como conjunto universal los siguientes:

a) La población de America Latina.

b) La población de America.

c) La población de la tierra

d) La población de México.

Conjunto vacio.

Es aquel conjunto carente de elementos, ó sea, aquel que no tiene elementos.

Se denota por $\phi = \{ \}$

Ejemplos:

$$A = \{x / x^2 = 0 \ , \ x \neq 0\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} \text{el conjunto de triángulos equilateros} \\ \text{que tiene un ángulo recto.} \end{array} \right\}$$

Propiedad:

El conjunto vacio es único.

Conjuntos Disjuntos

Dos o más conjuntos son disjuntos si solo si no tienen ningun elemento en común.

Ejemplos:

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{7, 8, 9, 10\}$

b) $A = \{x / x$ es un obrero de la Cia El Sol.$\}$
$B = \{x / x$ es el gerente de la Cia El Sol.$\}$

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS.

Conjunto Finito:

Es aquel que sus elementos se pueden enumerar exhaustivamente hasta el último, o sea es un conjunto numerable

Ejemplos:

A = { meses del año. }
B = { residentes del D.F. }
C = { casas construidas de una colonia }
D = { árboles de un predio. }

Conjuntos Infinitos:

Es aquel cuyos elementos no se pueden listar exhaustivamente, o sea, no son numerables, porque nunca se llega al último elemento.

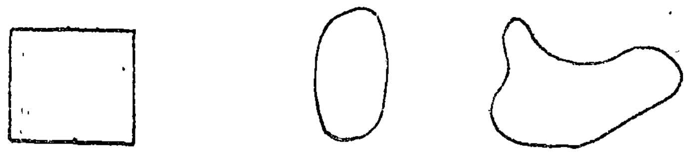
Ejemplos:

A = { los puntos sobre una recta. }
B = { de los números naturales }

DIAGRAMAS DE VENN-EULER

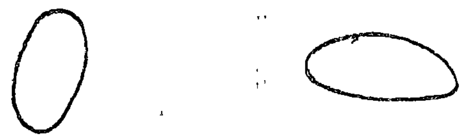
Mediante los diagramas de Venn-Euler se pueden visualizar las nociones de conjunto, el cual se puede representar por un área de línea cerrada.

Ejemplos:

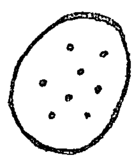


, etc.

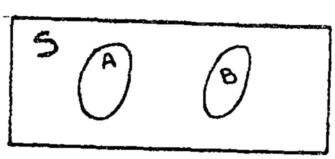
generalmente se usa:



Convendremos que los elementos de cada conjunto se representan por puntos dentro del área.



El conjunto universal S, se acostumbra a representar mediante un rectángulo y dentro de él a los conjuntos.



SUBCONJUNTOS DE UN CONJUNTO

Definición: Cualquier parte de un conjunto puede considerarse como un subconjunto.

Ejemplos:

a) $A = \{x \mid x$ es empleado de PEMEX$\}$

$B = \{y \mid y$ es profesionista de PEMEX$\}$

luego: $B \subset A$

b) $D = \{x / x$ es ciudadano mexicano.$\}$
$E = \{y / y$ es ser Tabasqueño$\}$
luego: $E \subset D$

<u>REGLAS</u>:

a) $A \subset B$ significa que todo elemento de A está en B.

b) $A \not\subset B$ significa que por lo menos un elemento de A no está en B.

Ejemplos:

a) $C = \{x, y, z, \alpha\}$
$B = \{x / x$ es una letra del alfabeto latino.$\}$
luego: $C \not\subset B$

b) $D = \{2, 4, 6, 13\}$
$E = \{x / x$ es número par$\}$
luego: $D \not\subset E$

"PROPIEDADES DE LA INCLUSION DE UN CONJUNTO EN OTRO"

a) Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo

$A \subseteq A$ (se dice inclusión reflexiva)

b) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
(se dice inclusión transitiva.)

e) Si $A \subset B$ y $B \subsetneq A$
(Se dice que la relación es antisimétrica)

DENOMINACION

$A \subset B$, Subconjunto propio
$A \subseteq B$, Subconjunto impropio

LA INCLUSION Y EL CONJUNTO VACIO.

Por convención se acepta que el conjunto vacío ϕ, es un subconjunto de cualquier conjunto.

luego $\phi \subseteq B$

NUMERO DE SUBCONJUNTOS DE UN CONJUNTO.

El número de subconjuntos que tiene un conjunto depende del número de elementos que tenga dicho conjunto, en general un conjunto tendrá 2^n subconjuntos

Ejemplo: $A = \{a, b, c\}$, tiene 2^3 subconjuntos
luego

$B = \{a, b, c\}$ $\quad E = \{b, c\}$
$C = \{a, b\}$ $\quad F = \{a\}$.
$D = \{a, c\}$ $\quad G = \{b\}$
$H = \{c\}$
$I = \{\ \} = \phi$

EJERCICIOS:

a) El cuadro siguiente, indica el reparto de los obreros de la Cía Rosas, S.A. en función del sexo, la edad y del nivel de estudios

Nivel de estudios / Edad en años	HOMBRES		MUJERES	
	Primaria	Secundaria	Prim.	Secundaria
21-30	4	5	13	5
31-40	31	12	18	3
41-50	75	20	12	2
51-60	51	11	14	1

¿Cuál es el número de elementos de los siguientes conjuntos?

A = {x / x es un obrero de la Cía. que estudió primaria}

B = {x / x es un obrero de la Cía. que estudió secundaria y tiene entre 41 y 50 años de edad.}

C = {x / x es un obrero de la Cía. de 41 a 50 años de edad}

D = {x / x es un obrero que trabaja en la Cía.}

E = {x / x es una obrera que estudió primaria y tiene entre [illegible]}

F = {x / x es un obrero (hombre o mujer) que tiene entre 31 y 40 años de edad.}

G = {x / x es un obrero (hombre o mujer) que trabaja en la Cía. que sólo estudió primaria.}

¿Cuáles de los conjuntos A, B, C, D, E, F son subconjuntos de los otros mencionados?

b) Sean los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad E = \{3, 9\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\quad F = \{6\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ $\quad G = \{\ \}$

$D = \{3, 6, 9\}$

¿Cuales de los conjuntos anteriores son?

a) Subconjuntos de A y B

b) " " D

c) " " D y E

d) " " C y D

e) " " A, B, C, D.

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

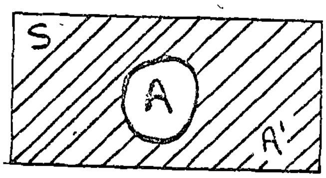
Definición:

El complemento de todo conjunto A, con respecto a un determinado conjunto de referencia, es el conjunto de los elementos de dicho conjunto universal que no pertenece a A.

Ejemplo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1, 2, 3\}$ luego $A' = \{4, 5, 6\}$

La introducción de los diagramas de venn, permite comprender muy fácilmente el concepto de conjunto complemento.



Propiedades:

a) Un elemento del conjunto universal pertenece a un conjunto A o a su complemento, pero no puede pertenecer a ambos.

b) A y A' son conjuntos disjuntos ó mutuamente excluyentes.

c) El complemento de S es ϕ

d) Si A' es el complemento de A $\Longrightarrow (A')' = A$.

Ejercicio:

Si $S = \{a, b, c\}$, se pide enumerar todos los subconjuntos de "S" y sus complementos

INTERSECCION Y UNION DE CONJUNTOS

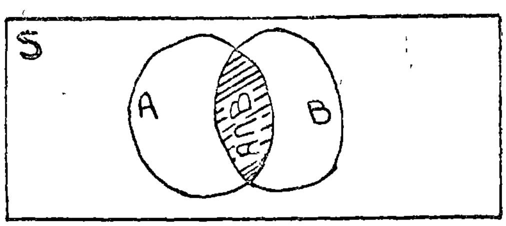
INTERSECCION:

La intersección de dos conjuntos A y B es otro conjunto de los elementos que pertenecen a A y B simultáneamente, ó sea es el conjunto que tiene los elementos comunes a A y B.

Notación: $\cap$

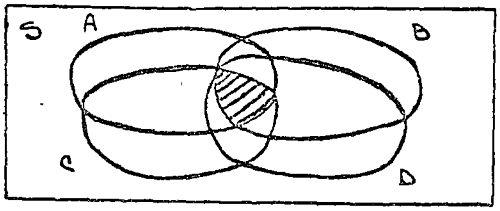
luego: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B$, simultáneamente$\}$

Según diagramas de Venn:



Se puede generalizar a varios conjuntos:

$A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap \ldots \cap N =$



UNION DE CONJUNTOS

Definición:

La unión de dos conjuntos A y B es otro conjunto que contiene los elementos de A y B, ó sea, son los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los dos conjuntos.

Notación: $\cup$

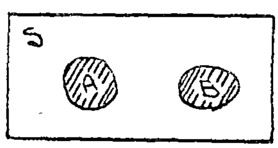
luego: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Ejemplos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

segun diagram. de venn:



Observemos que los dos conjuntos son disjuntos.

luego:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

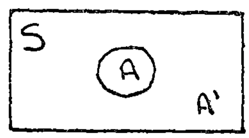
recordemos que $n(A)$ indica el número de elementos del conjunto A.

Ejemplo:

a) Si 10 personas leen (exclusivamente) el periodico universal y 5 el sol de México
¿Cuantas leen el universal y el sol de Mexico?

$$n(A) = 10 \qquad n(B) = 5 \implies n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 15$$

b) Si dos conjuntos son complementarios

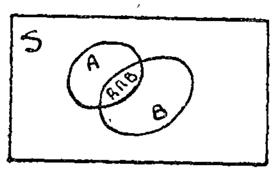


entonces

$$A \cup A' = S$$

luego: $n(A \cup A') = n(S)$

c) Si dos conjuntos se traslapan parcialmente



entonces:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

d) Si 10 personas leen por lo menos el universal, 5 leen por lo menos la gaceta y 3 leen el universal y la gaceta.

tenemos : $n(A) = 10$; $n(B) = 5$, $n(A \cap B) = 3$

entonces :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 5 - 3 = 12$$

PROPIEDADES DE LA UNION DE CONJUNTOS

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $A \cup A = A$

d) $A \cup S = S$

e) $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$

f) $A \cup \phi = A$

g) La unión de dos conjuntos no vacíos nunca es un conjunto vacío.

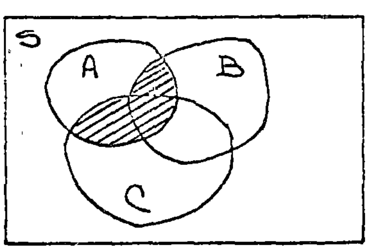
h) La unión es distributiva con respecto a la unión:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

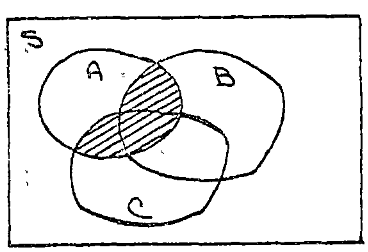
i) La intersección es distributiva con respecto a la unión:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

para (i) en términos gráficos



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cup C)$

Ejercicios:

a) Si $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{4, 5, 6, 7\}$
$C = \{3, 4\}$
$D = \{7\}$

encontrar: ¿A que es igual?

$A \cap B =$	$A \cup A' =$
$A \cup C =$	$A \cap A' =$
$B \cup C =$	$A \cup S =$
$A \cup D =$	$A \cap S =$
$B \cap D =$	$A \cup \phi =$
$A \cap D =$	$A \cap \phi =$

b) Indique que condiciones deben cumplir los conjuntos A y B para que se verifiquen las siguientes igualdades:

$A \cup B = S$	$A \cap B = A$
$A \cap B = \phi$	$A \cup B = \phi$
$A \cup B = A$	$A \cap B = \phi$
$A \cap B = S$	$A \cup \phi = A$

APLICACIONES TEORICAS

a) Usar diagramas de Venn para representar los siguientes conjuntos:

1) $A \cap (B \cup C)$
2) $A \cap (B \cap C)$
3) $A \cup (B \cup C)$
4) $A \cup (B \cap C)$

b) Si A y B son dos conjuntos que se traslapan parcialmente y si A' y B' son sus complementos con respecto a un conjunto S, determinar por los diagramas de Venn.

a) $A \cap B$
b) $A \cap B'$
c) $A' \cap B$
d) $A' \cap B'$
e) $(A \cup B)'$

EJEMPLO DE APLICACION:

Se hizo un estudio exhaustivo de las fábricas de muebles de la República Mexicana, cuyo capital social es mayor de $ 20,000.°° y se analizaron sus principales mercados (D.F., interior de la república y extranjero).

los resultados fueron:

17	Empresas	fabrican	unicamente	para	exportación.
158	"	"	"	"	consumo D.F.
50	"	"	"	"	interior República.
46	"	"	para export. y para consumo "		"
122	"	"	" " "	"	D.F.
247	"	"	" consumo interior República y D.F		
6	"	"	" " exportación interior República y D.F.		

Se pide:

a) El número de empresas cuya producción se dedica total ó parcialmente al D.F.
b) El número de empresas cuya producción se dedica total ó parcialmente al D.F. ó interior de la República.
c) El número total de empresas cuyo capital social es mayor de $ 20,000.=

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE TEORIA DE CONJUNTOS Y TOMA DE DECISIONES (DEL 9 DE FEBRERO AL 5 DE MARZO DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1. SR. SERGIO ANTONIO AVILA CURIEL México, D. F.	CIA. MEDICINAL LA CAMPANA, S.A. DE C. V. Av. División del Norte No. 3443 México 21, D. F. Tel: 5-49-33-40
2. LIC. ALFONSO AYALA SANCHEZ 5 Poniente 1303-3 Puebla, Pue. Tel: 46-76-88	SECRETARIA DE HACIENDA Y CREDITO PUBLICO 13 Sur 505 Puebla, Pue. Tel: 46-61-44
3. SR. GUSTAVO BORJA GARCIA Playa Mocambo 558 Col. Reforma Ixtaccihuatl México 21, D. F. Tel: 5-32-95-26	TABACOS MEXICANOS, S. A. DE C. V. Ejército Nacional No. 862 Col. Polanco México 5, D. F. Tel: 5-40-75-20 - 136
4. LIC. ALBERTO DOMENGE Santa Anita No. 210 Col. Lomas Hipódromo México 10, D. F. Tel: 5-89-15-34	BANCO DE MEXICO, S. A. 5 de Mayo y San Juan de Letrán México 1, D. F. Tel: 5-12-34-02
5. SR. RAFAEL LOPEZ JIMENEZ Guerrero No. 380 Apto.1122 Ent."F" Edificio Miguel Hidalgo Unidad Tlatelolco México, D. F. Tel: 5-97-55-18	TABACOS MEXICANOS, S. A. DE C.V. Ejército Nacional No. 862 Col. Polanco México 5, D. F. Tel: 5-40-75-20-122
6. SR. RAFAEL PACHECO PACHECO Nonoalco 73-C-410 Tlatelolco México 3, D. F. Tel: 5-83-57-12	CHRYSLER DE MEXICO, S. A. Lago Alberto No. 320 Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-45-60-40-334
7. ING. MARIO PADILLA OROZCO Corregidora 161 San Jerónimo México 20, D. F. Tel: 5-95-34-72	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 69-10o.Piso México 1, D. F. Tel: 5-35-12-49

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE TEORIA DE CONJUNTOS Y TOMA DE DECISIONES (DEL 9 DE FEBRERO AL 5 DE MARZO DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
8. ING. FRANCISCO JAVIER SERNA Félix Berenguer 126 Lomas Virreyes México, D. F.	INGENIEROS Y ARQUITECTOS CONSULTORES S.A. Félix Berenguer 126-1er. Piso Lomas Virreyes México, D. F. Tel: 5-40-72-20
9. SR. LAZARO SIMON CONTRERAS Domicilio Conocido Ixmiquilpan, Hgo.	
10. ING. LUIS MANUEL SOBRINO B. Cerro de la Libertad 401 Col. Campestre Churubusco México 21, D. F. Tel: 5-49-10-59	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 69-10o.Piso México 1, D. F. Tel: 5-35-58-24
11. ING. FERNANDO TREVIÑO SOJO Arcos del Alba Calle Pirules Oriente No. 37 Cuautitlán Izcalli Edo. de México	DIRECCION GENERAL DE PLANEACION EDUCATIVA-S.E.P. Argentina No. 28-1er. Piso México, D. F. Tel: 5-12-15-27
12. LIC. ANTONIO VILATA PAREDES J. Joaquín Arriaga 93-2-A Col. Obrera México 8, D. F. Tel: 5-78-38-71	COMISION NACIONAL DE LA INDUSTRIA AZUCARERA Morelos No. 104 México 6, D. F. Tel: 5-92-33-00 Ext.232
13. SR. FELIPE VILLANUEVA SOTELO Insurgentes Nte. 1470-16 Col. Lindavista México 14, D. F. Tel: 7-81-46-86	BANCO DEL ATLANTICO, S. A. Regina No. 15 México 1, D. F. Tel: 5-21-29-90