A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar el Segundo Día de Clases, en las oficinas del Centro, con la Señorita Barraza, de lo contrario no será posible.

El control de asistencia se efectuará a través de la persona encargada de entregar notas, en la mesa de entrega de material, mediante listas especiales. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tésis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, es importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción con los datos que se les solicitan al iniciarse el curso.

ATENTAMENTE

ING. SALVADOR MEDINA RIVERO
COORDINADOR DE CURSOS.

Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, U.N.A.M.

CURSOS DE MAESTRIA Y DOCTORADO

La División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, ofrece las siguientes Maestrías y Doctorados:

M a e s t r í a s		D o c t o r a d o s
Control	Mecánica	Estructuras
Electrónica	Mecánica de Suelos	Hidráulica
Estructuras	Petrolera	Mecánica de Suelos
Hidráulica	Potencia	Mecánica Teórica y Aplicada
Investigación de Operaciones	Planeación	Investigación de Operaciones
Mecánica Teórica y Aplicada	Sanitaria	

Programa de actividades para el segundo semestre de 1976

Exámenes de admisión: 10, 11 y 12 de mayo

Inscripciones: 31 de mayo al 4 de junio

Iniciación de clases: 7 de junio

Requisitos de admisión

a) Cumplir una de las siguientes condiciones:

1. Poseer título profesional en Ingeniería o en alguna disciplina afín a las maestrías que se ofrecen en la División, otorgado por la UNAM o por cualquier institución nacional o extranjera.

2. Ser pasante de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

b) Aprobar los exámenes de admisión que se efectuarán en las fechas señaladas arriba.

c) Presentar, dentro del período de inscripciones arriba mencionado, la documentación que se indica en el folleto de Actividades Académicas 1975 de la DESFI.

Mayores informes: División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Apartado Postal 70-256, Ciudad Universitaria, México 20, D.F. Tel: 548-58-77.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, febrero 3 de 1976

EL DIRECTOR DE LA FACULTAD
M en C ENRIQUE DEL VALLE CALDERON

EL JEFE DE LA DIVISION
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS

FECHA	HORAS	TEMAS	EXPOSITOR	LUGAR
Febrero 20	17:00-21:00	INTRODUCCION	Dr. Víctor Gerez Greyser	Palacio de Minería
Sábado 21	9:00-13:00	PROGRAMACION LINEAL	Ing. Marcial Portilla R.	Palacio de Minería
	14:00-18:00	METODOS DE BUSQUEDA	Ing. Marcial Portilla R.	Palacio de Minería
Viernes 27	17:00-21:00	PROGRAMACION CUADRATICA	Dr. Víctor Gerez Greyser	Palacio de Minería
Sábado 28	9:00-13:00	PROGRAMACION SEPARABLE	Dr. Sergio Fuentes Maya	Palacio de Minería
	14:00-18:00	PROGRAMACION ENTERA	Ing. Ariel Kleiman Blanck	Palacio de Minería
Viernes 5	17:00-21:00	EJEMPLOS	Ing. Armando Torres F.	DESFI, C. U.
Sábado 6	9:00-13:00	PROGRAMACION DINAMICA	Dr. Víctor Gerez Greyser	Palacio de Minería
	17:00-21:00	PROGRAMACION DINAMICA	Dr. Víctor Gerez Greyser	Palacio de Minería

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO
TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS

1. DR. SERGIO FUENTES MAYA
   Jefe de la Sección de Investigación de Operaciones
   División de Estudios Superiores
   Facultad de Ingeniería, UNAM
   Ciudad Universitaria,
   México 20, D. F.
   Tel.: 548-58-77

2. DR. VICTOR GEREZ GREYSER
   Investigador
   Comisión Federal de Electricidad
   Jefe del Departamento de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
   Facultad de Ingeniería, UNAM
   Ciudad Universitaria
   México 20, D. F.
   TEL.: 548-99-58 y 550-00-40

3. DR. ARIEL KLEIMAN BLANCK
   Jefe de la Sección de Investigación de Operaciones,
   División de Estudios Superiores
   Facultad de Ingeniería, UNAM
   Srio. Académico
   E. N. E. P. Acatlán
   Ciudad Universitaria
   México 20, D. F.
   Tel.: 573-19-65

4. ING. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON
   Srio. del Departamento de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
   Facultad de Ingeniería, UNAM
   Ciudad Universitaria
   México 20, D. F.
   Tel.: 548-99-58 y 550-00-40

5. JOSE ARMANDO TORRES FENTANES, ING.
   Asesor Matemáticas III
   Facultad de Ingeniería, UNAM
   Ciudad Universitaria
   México 20, D. F.

1 INTRODUCCION

1.1 El enfoque de sistemas

1.2 Morfología de sistemas

1.2.1 Dimensiones del análisis de sistemas

1.2.2 Fases del análisis

1.2.3 Definición del problema y medición

1.2.4 Análisis de datos y modelado

1.2.5 Generación de alternativas o síntesis

1.2.6 Toma de decisiones o selección

1.2.7 Morfología tridimensional

1.2.8 Ejemplo

1.3 Descripción de sistemas

1.3.1 Introducción

1.3.2 Estructura

1.3.3 Fronteras

1.3.4 Diagramas de bloque y señales

1.3.5 Agrupaciones abiertas y realimentación

1.3.6 Sistemas con lógica

1.3.7 Transformaciones con atraso

1.3.8 Sistemas discretos

1.3.9 Diagramas de decisión

1.3.10 Formatos, códices y diagramas lógicos

1.3.11 Diagramas de flujo de materia y energía

1.3.12 Ejemplo de diagramas de flujo de materia

1.3.13 Características distintivas

1.4 Problemas

1.5 Bibliografía

CAPITULO 1

1 INTRODUCCION 1

1.1 El enfoque de Sistemas 2

*En el siglo XVII, Leeuwenhoek inició una revolución científica al permitir el estudio de un mundo hasta entonces invisible ,con ayuda del microscopio (en este estudio) las ideas básicas de las teorías atomísticas de los griegos recibieron comprobación. *Estos descubrimientos y comprobaciones dieron como resultado establecer una visión microscópica de los fenómenos naturales, *en la cual el interés científico se concentra en las partes que integran un organismo, un átomo, etc.

*El invento del microscopio abrió nuevos horizontes a la ciencia. 3

*Permitió estudiar las partes constitutivas de los sistemas. 5

*La ciencia adopta el enfoque microscópico

Aun cuando son muchos los avances de la ciencia que han surgido de ese enfoque microscópico, *el conocimiento, cada vez más amplio que sobre dichas partes ha proporcionado este enfoque, no ha permitido, sin embargo, resolver diversos problemas sociales económicos y ecológicos.

*No todos los problemas se resuelven con el enfoque microscópico 4

*No ha sido sino hasta muy recientemente que se empieza a complementar la visión microscópica en el enfoque de sistemas, * el cual pone énfasis en los aspectos generales y en las interacciones entre las partes que lo integran. En tanto que en el enfoque microscópico se estudian los elementos para encontrar relaciones de causa y efecto, en el enfoque macroscópico o de sistemas se emplea el conocimiento que se tiene de las partes para estudiar el comportamiento de todo un conjunto de partes o subsistemas que interaccionan entre sí. *El comportamiento de un conjunto completo de componentes está determinado tanto por las características de las partes como por la interconexión de las mismas.

En el enfoque de sistemas se integran los conocimientos que las diversas ciencias suministran acerca de los componentes de un sistema para conocer el comportamiento del conjunto.

*El enfoque de sistemas, complementa al enfoque microscópico 5

*El enfoque de sistemas integra conocimientos

6

*El comportamiento de un sistema depende de las partes y de su interacción

*El análisis de sistemas es una técnica importante que se emplea en las fases de diseño o proyecto, ejecución, puesta en marcha y operación de proyectos de beneficio social, industriales y de servicios.

*Dada la complejidad de esos sistemas, que presentan interacciones entre muchas variables, efectos de atraso** y relaciones en general no lineales entre las variables, es necesario contar con una metodología especializada para la solución de los problemas relacionados con dichos sistemas.

*Además de lo anterior, se requiere integrar grupos de trabajo de carácter interdisciplinario, ya que resulta, prácticamente imposible que un profesional cuente con todos los conocimientos necesarios para atacar los diversos problemas que se presentan en el análisis de sistemas de esta magnitud y complejidad.

** Como efecto de atraso se conocen aquellos fenómenos, donde el efecto de una variable o acción no se manifiesta de inmediato. (Ver sección 1.3.7)

7

*El análisis de sistemas se emplea en:

diseño,
ejecución,
puesta en marcha y
operación de sistemas
complejos

SEGUIDO

8

*El análisis de sistemas es una metodología especializada

9

*La solución a problemas de sistemas requiere grupos interdiscipli-narios

*El profesional que forma parte de un grupo que analiza sistemas, debe tener los conocimientos de su especialidad que le permitan estudiar determinados aspectos particulares de un sistema; y contar, además, con aquellos conocimientos operacionales de diversas diciplinas distintos a los de su campo particular de actuación a fin de que pueda integrarse a un grupo de trabajo interdisciplinario y comunicarse con el resto del mismo.

*El analista de sistemas debe tener conocimientos especializados y generales

*Esta comunicación resulta indispensable para los integrantes del grupo, pues con ella es factible dar al problema una solución que contenga todos los factores relevantes.

*Trabajar en un grupo interdisciplinario requiere comunicación entre sus integrantes

No es difícil encontrar proyectos que satisfacen todos los requisitos de un buen diseño de ingeniería, pero que resultan demasiado costosos por no haberse tomado en cuenta los aspectos económicos. O bien, en otros casos, la ejecución de un proyecto, acarrea efectos laterales que por no estar analizados adecuadamente, disminuyen el beneficio del - mismo. Hay ocasiones en las que la realización de un - importante proyecto, que representa un cuantioso derrame de dinero en una zona, trae consigo una seria dislocación en la economía y estructura social de la zona no necesariamente benéfica.

Podría continuarse con una larga lista de razones que obligan a formar grupos de trabajo interdisciplinario para la solución de los diversos problemas que se - presentan en sistemas de gran tamaño y complejidad; *y- de longitud comparable sería la que corresponde a argumentos que hacen necesario que estos grupos de trabajo- se hallen integrados por personas con una preparación - particular en un campo y conocimientos fundamentales en disciplinas que cubren un amplio espectro del saber hu-- mano.

*El analista de sistemas debe ser especialista y generalista

12

*Por ser los proyectos de una envergadura similar a la citada fundamentalmente de ingeniería, una disciplina importante que debe estar representada en dichos grupos de trabajo es precisamente la ingeniería en sus diversas especialidades,-

* [illegible] además con la colaboración de economistas, sociólogos y especialistas en otras disciplinas de las ciencias naturales.

*En los proyectos de ingeniería, probablemente la disciplina auxiliar más importante es la economía.- Por esta razón se incluye en esta obra, un gran número de secciones dedicadas a este tema.

*Cabe aclarar que en esta obra, solamente se cubren aquellos aspectos del análisis de sistemas que no corresponden a una disciplina de la ingeniería en particular sino que tienen aplicación en la mayoría de los proyectos de sistemas; no se estudian, por ejemplo, las leyes de Newton ni la resistencia de materiales, pero sí se abarcan los aspectos más importantes de la

*Muchos sistemas grandes y complejos corresponden a la ingeniería

*Un grupo de análisis de sistemas debe contar con ingenieros, economistas, sociólogos etc.

*Economía

*La metodología de sistemas es aplicable a diversos tipos de proyectos metodología de optimización.

*El objetivo primordial de esta obra es familiarizar al lector con el enfoque de sistemas, o sea con una metodología científica que permite analizar, bajo determinada secuencia lógica, problemas complejos. *Si bien el estudio de sistemas no sustituye los conocimientos particulares en una rama de la ciencia o técnica, sí en cambio, ayuda a integrar estos conocimientos con los de otras ramas; *mediante lo cual se previene que en el estudio de sistemas complejos se olviden factores importantes que pueden repercutir en disminuir o, inclusive, anular los beneficios que se esperan de la implementación de un proyecto.

Conviene señalar nuevamente, que la metodología de la ingeniería de sistemas de ninguna manera es substituto de conocimientos específicos en ramas particulares, sino que únicamente ayuda a integrar conocimientos particulares en un marco de referencia más amplio.

*La aplicación más importante del enfoque de sistemas ha sido hasta el momento dentro de la ingeniería,

*El análisis de sistemas es una metodología científica

*No sustituye conocimientos específicos, sino que ayuda a integrar conocimientos

*Integración de conocimientos: mejores soluciones

*Aplicación del enfoque de sistemas en ingeniería y otras ramas sin embargo, cada día aumentan sus aplicaciones en -- otras profesiones, como se señalará en la siguiente - sección.

Foto 20

1.2 Morfología de Sistemas

21

1.2.1 Dimensiones en el análisis de sistemas

22

*Hall señala (ref.) que en problemas de análisis de sistemas pueden distinguirse, fundamentalmente, tres dimensiones:

*El análisis de sistemas tiene tres dimensiones

23

*1. Tiempo

*Un proyecto pasa secuencialmente desde su iniciación hasta su obsolescencia por diferentes fases, a cuyo término de cada una es necesario tomar una importante decisión.

*Primera dimensión: Tiempo

24

*El tiempo está asociado a las fases del proyecto

*2. Metodología de solución del problema.

*La integran los diversos pasos que deben ejecutarse en cualquiera de las fases del proyecto y está caracterizada por una secuencia lógica de actividades.

*Segunda dimensión: Metodología 25

*La metodología está asociada a los pasos de solución

*3. Conjunto de conocimientos, modelos y procedimientos, que definen una disciplina en particular.- *Puede tomarse como medida de esta dimensión el grado de estructura formal o matemática de la disciplina. - Hall (ref 1), considera que en ~~la~~ esta dimensión es factible citar, en orden decreciente de estructura formal: ingeniería, medicina, arquitectura, administración, ciencias sociales y artes.

*Tercera dimensión: Conocimientos que forman una disciplina 26

*Medida asociada a la tercera dimensión:

Estructura formal de la disciplina

*Las dos primeras dimensiones, es decir el tiempo y el conjunto de procedimientos de solución, definen un modelo de metodología para el análisis de sistemas independiente de una disciplina en particular.- Esta metodología opera con conceptos que son aplicables a diferentes campos.

*Dimensión 1: tiempo 27

+

Dimensión 2: metodología

definen un modelo de análisis de sistemas

*La fig. 1.2.1 muestra un modelo de metodología para el análisis de sistemas

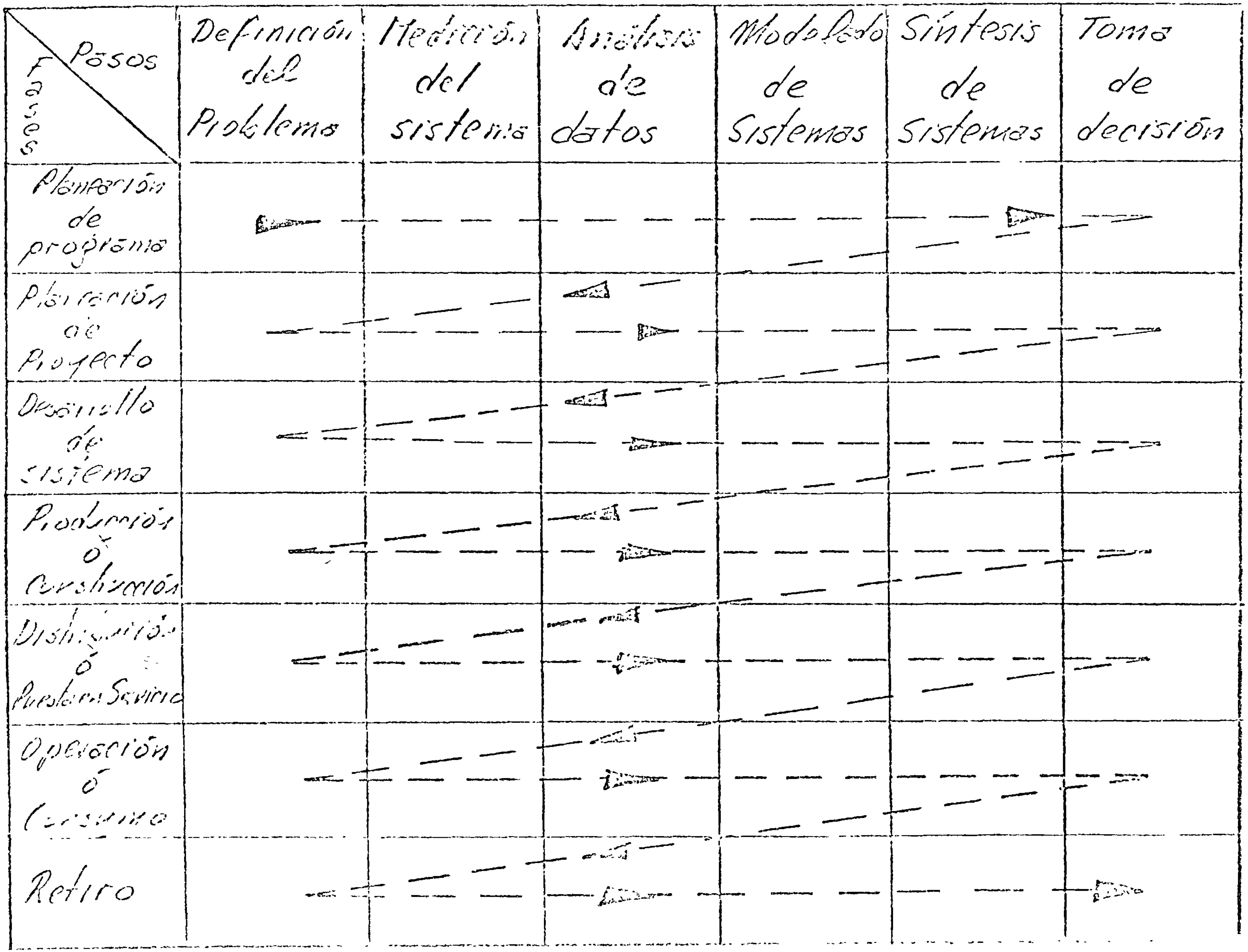


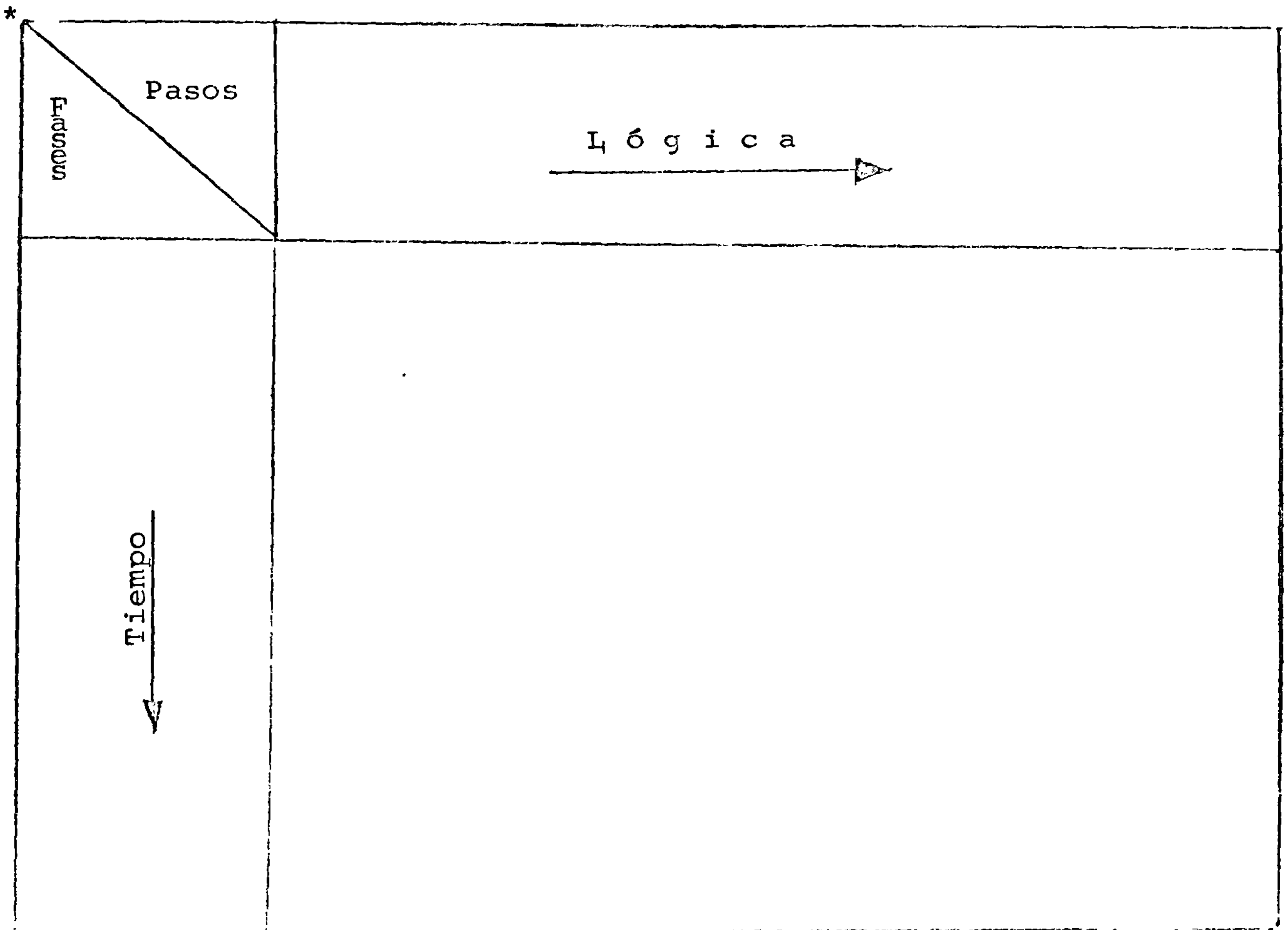
Fig. 1.2.1 Metodología para el análisis de sistemas.

*El anterior modelo de metodología es una matriz de actividades; *sus renglones están asociados a la primer dimensión: el tiempo, y las columnas a la segunda dimensión: *la metodología de solución formada por los diversos pasos de solución que sigue una secuencia lógica, *tal como muestra la figura 1.2.2

*Matriz de actividades

*Los renglones corresponden al tiempo

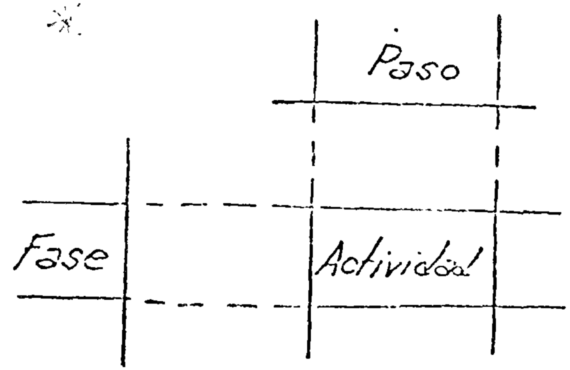
*Las columnas corresponden a la metodología de solución



32

Fig. 1.2.2 Matriz de actividades

*Cada elemento de la matriz representa una actividad y está definido en forma única por la intersección de una fase de un proyecto y un paso de solución.



27

33

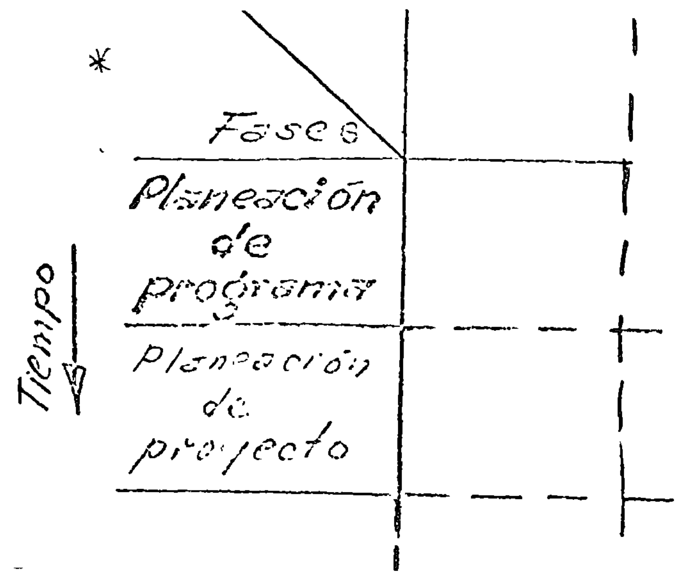
A continuación se describen las características más importantes de cada fase de un proyecto.

34

1.2.2 Fases del análisis

28 a

28 b



35

Durante la fase de planeación de programa se determinan las actividades o programas que se desean lograr

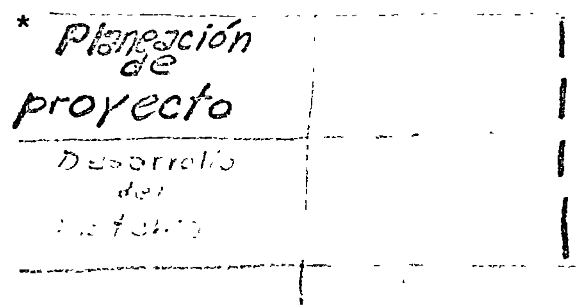
Determinación de actividades o programas por realizar

*Al respecto, pueden distinguirse dos objetivos principales: el primero es que se trata de determinar si los programas por realizar son congruentes con las actividades y metas de la organización; y el segundo es que se busca establecer una extensa base de información que puede servir para la planeación de proyectos específicos.

* Objetivos: 29

Determinar la congruencia de los programas y establecer una base de información 37

38



*En la fase de planeación de proyecto,*el interés se concentra en un proyecto en particular,*y puede considerarse como terminada cuando se toma la decisión de implementar la mejor de las alternativas generadas durante la fase de planeación (o de concluir con el proyecto de una manera específica).

*Se analiza un proyecto en particular

*Termina esta fase cuando se decide implementar una de las alternativas 39

*La fase de desarrollo de sistema se inicia después de formular la decisión de confirmar un proyecto específico.

* Desarrollo del Sistema 3-2 40

Producción o construcción

*Su Meta es desarrollar un plan de acción que permite realizar el proyecto que se ha seleccionado en la fase anterior. Los pasos correspondientes a esta fase tratan con componentes y no con alternativas generales. *Puede considerarse terminada cuando se han preparado las especificaciones, dibujos y listas de materiales necesarios para la manufactura o construcción.

* Meta: 3-3

desarrollar un plan para implementar un proyecto específico 41

*Termina con la preparación de: 3-4

especificaciones 42
dibujos
listas de materiales

43

*En la siguiente fase, la de producción o construcción, *se procede a implementar un proyecto. Esto puede implicar la producción de un artículo o la construcción de una obra.

3-5

* Producción ó construcción

Distribución o puesta en servicio

*Se implementa un proyecto 44

(3.5...)

*Si se trata de un producto industrial, durante esta fase, el ingeniero industrial determina el flujo de materiales, la secuencia de operaciones y la distribución de las facilidades de manufactura; además, debe diseñarse durante ésta, el herramental necesario para la producción. Como todo proceso de manufactura está sometido a normas de control de calidad, conviene establecer las mismas. *En un proyecto de ingeniería civil, el constructor ejecuta la obra de acuerdo con los planos de proyecto y con las especificaciones.

*Si el proyecto es de producción determine el flujo de materiales, la secuencia de operaciones, etc. 45

*Si es de construcción, se ejecuta la obra 46

*En la fase de distribución o puesta en servicio se hace llegar a los usuarios el producto manufacturado, o se pone en servicio la obra ejecutada durante la fase anterior.

47
56

* Distribución
ó
Puesta en Servicio

Operación
o
consumo

*Durante esta fase se establece la organización de ventas para el producto.

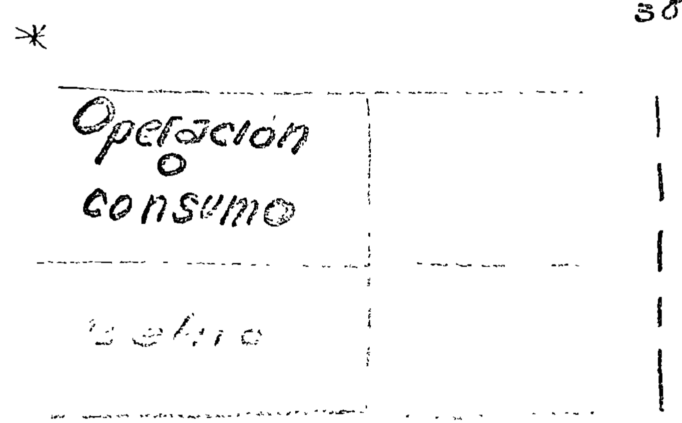
*Se establece la organización de ventas y se distribuye el producto

En el caso plantas de generación eléctrica, se realizan durante la fase de puesta en servicio todas las pruebas de recepción y puesta en servicio, y se concluye con la entrega de la planta al Departamento de Operación.

49

*La fase principal de un proyecto de sistemas es la operación del mismo o el consumo final de un producto.

30



*Finalmente, un sistema pasa a la fase de retiro. En general esta coincide, en el tiempo, con la fase de puesta en servicio de un nuevo sistema que sustituye al antiguo.

*

Retiro

Las siete fases mencionadas definen los renglones de la matriz de actividades, *y a cada una corresponde una serie de pasos de análisis que sigue una determinada secuencia lógica. En las siguientes secciones se describen estos pasos.

*A cada fase (renglón) corresponden diversos pasos (columnas)

Foto 52

1.2.3 Definición del problema y medición 40

*Las fases del análisis difieren en las diversas disciplinas 41

*Si bien las fases de análisis descritas tienen para diversos problemas facetas comunes, los aspectos particulares ~~de acuerdo con el~~ sistema son lo suficientemente importantes para hacer difícil el establecimiento de una disciplina general que estudie estos aspectos para los diferentes sistemas.

Las características de la fase de construcción o producción (~~etapa~~ fase 4) son muy diferentes en un proyecto civil que en un problema de manufactura. En problemas relacionados con bienes de consumo, la etapa de consumo u operación (~~etapa~~ fase 6) no presenta en general problemas de interés para el analista de sistemas; sin embar go, en un sistema de potencia esta fase sí es de gran-interés.

*La metodología de análisis de todas las etapas-caracterizadas por los pasos que se estudiarán en las-siguientes secciones, al ser común a todas las etapas, puede estudiarse en una disciplina que se conoce con -el nombre de análisis de sistemas. Los diferentes capítulos de la presente obra cubren los diversos pasos-que se siguen en cada ~~etapa~~ fase de análisis, y como en todas ellas existen (por ejemplo) problemas de optimización, ~~que corresponden a un paso~~, esta metodología tiene un carácter -general que permite estudiarla libre del contexto de -un sistema en particular.

*La metodología (etapas) es común en diversas disciplinas

*Cada fase del análisis de sistemas está formada por una serie de pasos que identifican ~~los renglones~~ las columnas -de la matriz de actividades.

*Cada fase tiene los mismos pasos

*El primer paso en cada ~~etapa~~ fase del análisis con--siste en definir el problema.

*

Definición del problema	Medición del sistema

*En el siguiente paso se realiza una serie de actos que se pueden agrupar bajo el nombre de medición del sistema. En este paso se establecen los objetivos ~~de la etapa~~ del paso de análisis, debiendo hacerse claramente.- Un grupo de análisis de sistemas siempre realiza el trabajo para clientes, o dentro la de organizaciones que en general tienen claramente definidos sus propósitos.

*El grupo de analistas debe establecer los objetivos de su trabajo, ~~(objetivos)~~ los cuales necesitan coincidir con los propósitos para los cuales se realiza el estudio. Los objetivos pueden ser de diversa índole, siendo entre los más importantes:

1. Puramente económicos, es decir, de maximización del rendimiento de una inversión, y minimización de costos de operación o producción.

2. Distributivos del ingreso, o sea la promoción del bienestar de un grupo a expensas de otro.

3. Maximización de beneficios que difícilmente se pueden cuantificar, como son la educación y -

* 45

Medición del Sistema	Análisis de datos

*Medición del sistema incluye el establecimiento de objetivos

* 46

Objetivos:

económicos
distribución del ingreso
maximización del beneficio social

otros servicios sociales.

6

*Desde luego, los objetivos del análisis varían de acuerdo con el sistema y la ~~etapa~~ fase del estudio.

*Los objetivos varían con el sistema y la ~~etapa~~ fase

*En un análisis de producción, los objetivos en general son de minimización de costos de producción, que se logran mediante un aprovechamiento adecuado de los recursos financieros y humanos. En la ~~etapa~~ fase de distribución, los objetivos son de minimización de costos de distribución, lo que se logra tomando en cuenta montos de transporte, mantenimiento de inventarios, etc. En un sistema eléctrico de potencia, en la ~~etapa~~ fase de operación, el objetivo puede ser de minimización de costos de operación y maximización de la confiabilidad en el servicio.

*~~En un sistema de producción el objetivo es minimización de costos de producción~~

6

*Desde luego, los objetivos de las diversas ~~etapas~~ (fases) están estrechamente ligados, por lo que (en la medida en que [illegible]) las precedentes ~~del análisis~~ deben tomar(se) en cuenta los objetivos de las consecuentes. Por ejemplo, el objetivo en -

*Los objetivos de las etapas están ligados la ~~etapa~~ fase de diseño de un sistema requiere considerar los objetivos de las ~~etapas~~ fases consecuentes, o sea desde la producción hasta el retiro. *Al diseñar un artículo, conviene examinar los aspectos de producción, distribución, operación y retiro del mismo. Un sistema puede satisfacer los objetivos de la ~~etapa~~ fase de desarrollo del sistema (~~etapa~~ fase 3), de minimización de costos de producción, (~~etapa~~ fase 4), pero por sus propiedades físicas o dimensiones, no satisfacen los objetivos de distribución (~~etapa~~ fase 5).

*Al diseñar un producto, considere: 49

producción
distribución
operación y
retiro

*Frecuentemente no corresponde a la misma unidad económica o administrativa la responsabilidad de todas las ~~etapas~~ fases de la "vida" de un sistema o producto, que abarcan desde su planeación hasta su retiro; existen sistemas o artículos que satisfacen los objetivos de todas las ~~etapas~~ fases que corresponden a una unidad o grupo de unidades, pero no satisfacen los de las ~~etapas~~ fases que caen, aparentemente, fuera de su responsabilidad. Por ejemplo, *los envases desechables, indudablemente satisfacen los objetivos inmediatos de los productores y

50

*Considere los objetivos de todas las ~~etapas~~ fases, aun de las que no caen bajo su responsabilidad

*Los envases desechables satisfacen

y consumidores, es decir, minimizar costos de producción y distribución. *Sin embargo, no se tomaron debidamente en cuenta los objetivos de la fase final: la de retiro del producto, como lo atestiguan la creciente contaminación que han causado, así como ~~la~~ los problemas de recolección y disposición. Probablemente se hubiese dado otra ~~respuesta~~ solución al problema al considerar el costo social de la contaminación y el monto económico de su recolección y disposición. *Aparentemente este último, no afecta los aspectos de beneficio económico de los productores y consumidores de envases. Sin embargo, se olvida que el costo de recolección y disposición del producto por el sector público se financia, en general, con los impuestos, recayendo en forma indirecta sobre los causantes el costo de retiro. El lector puede identificar fácilmente otras implementaciones de producto o sistemas donde no se han considerado, en conjunto, los objetivos de todas las ~~etapas~~ fases, obteniéndose resultados altamente indeseables.

*No minimizan costos de retiro

*Los costos de retiro afectan <u>indirectamente</u> a productores y consumidores

continúa

51

67

el paso

*Durante la etapa de medición deben identificarse las variables y establecer el inventario de las mismas; para lo cual se fijan los criterios de evaluación o medidas de efectividad de las actividades, que se utilizarán durante la etapa del análisis en proceso.

*El establecimiento de dichos criterios y medidas permite evaluar en qué grado, diferentes soluciones alternativas a un problema satisfacen los objetivos para los cuales han sido desarrolladas. La solución final al problema depende en forma importante de las medidas de efectividad que se hayan seleccionado; si el problema consiste en diseñar una planta manufacturera, la selección de un diseño depende de la medida de efectividad adoptada; y si la medida es solamente la minimización del costo de producción a corto plazo, el mejor diseño será diferente al que se adopte en caso que la medida de efectividad incluya además de factores económicos, la seguridad de los operarios, su estado anímico, etc.

*Etapa de medición:
identifique variables y establezca un inventario de ellas; establezca además criterios de evaluación.

*De los criterios de evaluación depende la solución del problema

En la tercer sección de este capítulo y en el siguiente se verá lo relativo a los temas de: descripción de sistemas, y jerarquización, que en combinación con los temas de medición y teoría del valor, (cap. 7), forman los conocimientos básicos para realizar los pasos descritos en esta sección.

*~~Con base~~ En el paso tres, el de análisis de datos, se realiza el procesamiento de la información reunida durante la medición de sistemas. Dicho procesamiento tiene que hacerse en general con ayuda de la computadora digital (los aspectos más importantes se presentan en el cap. 3). *Su objetivo es descubrir, con ayuda de técnicas de reconocimiento de patrones y evaluación estadística de parámetros, las relaciones importantes entre las variables ~~(cap. 3)~~.

~~*Descripción del sistema; jerarquización y teoría del valor~~

Foto 70

53

1.2.4 Análisis de datos y modelado

54 79

Análisis de Datos	Modelado del Sistema

*Objetivos del análisis de datos: descubrir relaciones entre las variables 54-a 73

*El grupo de análisis de sistemas procede a ejecutar el paso de modelado del sistema cuando en el paso anterior se han llegado a determinar relaciones importantes entre variables.

*El objetivo de este paso es establecer relaciones, o modelos, que expliquen las interacciones entre las diversas variables del sistema; al respecto, el cap. 4 está enfocado al estudio del problema central del modelado. Este paso es de gran importancia en cualquier fase etapa, ya que los resultados del análisis nunca podrán ser mejor es que el modelo que se emplee para el mismo.

*Debe hacerse notar que un problema de análisis puede requerir diferentes modelos, de acuerdo con la etapa o fase del proyecto. En un sistema hidroeléctrico, durante la fase de proyecto se necesita un modelo a escala sobre una mesa vibradora para determinar los efectos de sismos sobre la presa y evaluar de esta manera diferentes diseños alternativos; en cambio, en la etapa de operación se requiere un modelo totalmente distinto, ya que deberá simular la demanda de energía

55 74

*

Modelado del Sistema	Síntesis de sistemas

55a 75

*Objetivo del modelado: establecimiento de modelos que expliquen relaciones entre variables

76

*El modelo cambia de acuerdo con la etapa eléctrica y agua para riego, así como los niveles de agua en la presa para determinar una política óptima de aprovechamiento.

*El objetivo de cada fase del análisis de sistemas es especificar la "mejor solución" de acuerdo con los criterios de evaluación o medidas de efectividad obtenidas durante el paso de medición del sistema.

77

1.2.5 Generación de alternativas o síntesis

78

*

Síntesis de Sistemas	Toma de Decision

*En cada fase se especifica la mejor "solución"

79

*Como los problemas que permiten encontrar en forma analítica la solución óptima son tan simples que no tienen interés para el analista de sistemas, es necesario explorar, empleando el modelo del sistema y técnicas de simulación del cap. 5, las medidas de efectividad correspondientes a diferentes alternativas. *En obras grandes y en etapas fases donde se tiene que recurrir a modelos costosos puede resultar cara cada simulación, por lo que es necesario aplicar la experiencia del analista para descartar, sin necesidad de recurrir a la simulación, diversas alternativas factibles pero no recomendables. *El esfuerzo de generación de alternativas debe concentrarse en aquellas que muestren las mejores medidas de efectividad. *Además el costo de este paso no debe exceder de ninguna manera los beneficios esperados.

*Con objeto de minimizar los costos de este paso es recomendable dividir las soluciones del problema en diferentes clases y evaluar una solución re

*En sistemas complejos debe simularse el comportamiento de soluciones alternativas empleando modelos 59

*Utilice el criterio para descartar sin recurrir a la simulación de diversas alternativas 60 81

*Concentre el esfuerzo en alternativas promisorias 61 82

83

*No gaste más de lo que piensa obtener como beneficio 62

84

*Divida las alternativas en clases 63

85

presentativa de cada clase, *después deben emplearse los resultados anteriores para determinar la solución más promisoria, *posteriormente explorar alternativas dentro de esta.

*Es preferible que el número de alternativas exploradas sea demasiado grande que pequeño, ya que a pesar del costo de esta etapa, en general resulta menor que los perjuicios que causa un sistema implementado e inadecuado por falta de una exploración suficiente de alternativas.

*Determine la clase más promisoria

*Después explore soluciones dentro de dicha clase

*Trate de explorar el mayor número de alternativas económicamente justificable 87

*Supóngase que se desea resolver el problema de transporte de una población. *Como dos posibles clases de soluciones podrían considerarse: un sistema de camiones y el Metro. Como primer etapa, en la generación y evaluación de soluciones deben determinarse las medidas de efectividad de un sistema representativo de transporte por camión y por Metro. Si las correspondientes al primer sistema son sensiblemente superiores al del segundo, todo el esfuerzo posterior de análisis debe concentrarse en el trans-

*Problema: Sistema de transporte 88

*Posibles clases de solución: camiones o Metro porte por camión, pero si resultan muy similares, será necesario seguir explorando alternativas dentro de ambas clases.

*La exploración de alternativas necesita realizarse de manera ordenada y *observando la variación que sufren las medidas de efectividad al cambiar ciertas características del sistema a fin de seguir manejando aquellas que afecten en forma más positiva las medidas de efectividad. *En este paso es frecuente recurrir a técnicas de optimización, ~~siendo~~ estando entre las más importantes, la programación lineal y la dinámica (cap.6). *La técnica de programación lineal permite encontrar para cierto tipo de modelos de sistemas los parámetros que optimicen la medida de efectividad, precisamente determinando aquellos (parámetros) cuya variación tiene mayor efecto sobre la medida de efectividad. *En otro tipo de modelos de sistemas es necesario recurrir a la técnica de optimización, conocida con el nombre de programación dinámica (cap. 6) a fin de encontrar las alternativas con mejores medidas de efectividad.

66

*Explore ordenadamente, alternativas

*Observe la variación de las medidas de ~~objetividad~~ efectividad 87

*Recurra a técnicas de optimización cuando se requiera 67 90

*Técnica de optimización: programación lineal

*Técnica de optimización: programación dinámica

Foto 91 68

1.2.6 Toma de decisiones o selección

69

Toma de decisiones

*La mayoría de los sistemas cuyo tamaño y complejidad requieren el empleo de la metodología ya expuesta, deben cumplir con muy diversos objetivos. *Para determinar el grado con que los sistemas cumplen sus objetivos *~~para ello~~ se establecen las medidas de efectividad, si estas *~~las cuales si~~ se pueden reducir a la misma escala y sumarse, es factible establecer una sola función objetivo. ~~por lo que~~ Si existe esta función única, se puede emplear alguna de las técnicas de optimización del cap. 6 ~~conformandose~~ (para) llegar a la mejor solución. También es ~~fácil~~ (factible) recurrir en estos casos a las técnicas de costo-beneficio del cap. 7, donde a todos los

*Los grandes sistemas cumplen con objetivos diversos

*Las medidas de efectividad determinan el grado de cumplimiento de un objetivo 70

*Solo si las medidas de efectividad tienen la misma escala, existe una sola función objetivo beneficios y costos se les da un valor monetario. *En cualquiera de los casos en los que es posible establecer una sola medida de efectividad que agrupe todos los objetivos del sistema, la búsqueda de la "mejor" solución es una operación meramente matemática que se realiza en el paso de generación y evaluación de alternativas.

*Sin embargo, frecuentemente no es posible reducir a la misma escala y sumar todas las medidas de efectividad para obtener, empleando técnicas de optimización o análisis de costo-beneficio, la solución más adecuada. En estos casos hay que seleccionar las mejores alternativas, evaluando todas las medidas de efectividad de cada alternativa, *para lo cual se requiere aplicar a estas la teoría del valor a fin de decidir entre las posibles alternativas. Las bases de la teoría del valor se presentan en el cap. 7 y las de la teoría de decisiones en el 8.

*Con una sola función 96

Objetivo:

seleccionar = optimizar

*Si la función objetivo no es única 97

hay que seleccionar la mejor alternativa

*Para seleccionar, debe conocerse: 98

teoría del valor

teoría de decisiones

*La fig 1.2.3 resume los diversos pasos del análisis de sistemas, la metodología básica requerida para realizarlos y los capítulos donde se estudia esta metodología

Pasos	Definición del problema	Medición del sistema	Análisis de datos	Modelado de sistemas	Síntesis de sistemas	Toma de decisiones
Metodología		Descripción del sistema Jerarquización Teoría del Valor	Procesamiento de información	Construcción de modelos	Simulación y optimización	Teoría del valor y Teoría de Decisiones
Capítulo		1, 2, 7	3	4	5, 6	7, 8

Fig. 1.2.3 Estructura del libro

Resumiendo, puede decirse que el análisis de un sistema consta de diversas fases o etapas que abarcan desde la planeación de programa, hasta el retiro u absolescencia del sistema, las cuales definen los renglones de una matriz de actividades. Durante cada etapa o fase se realiza una serie lógica de pasos que definen las columnas de la matriz de actividades que aparece en la fig. 1.2.1. La secuencia de solución de problema de sistemas sigue precisamente (ver figura 1.2.1) la señalada: empieza con la actividad definición del problema en la fase de planeación de programa y termina con la selección en la fase de retiro.

~~74~~
100
a 108

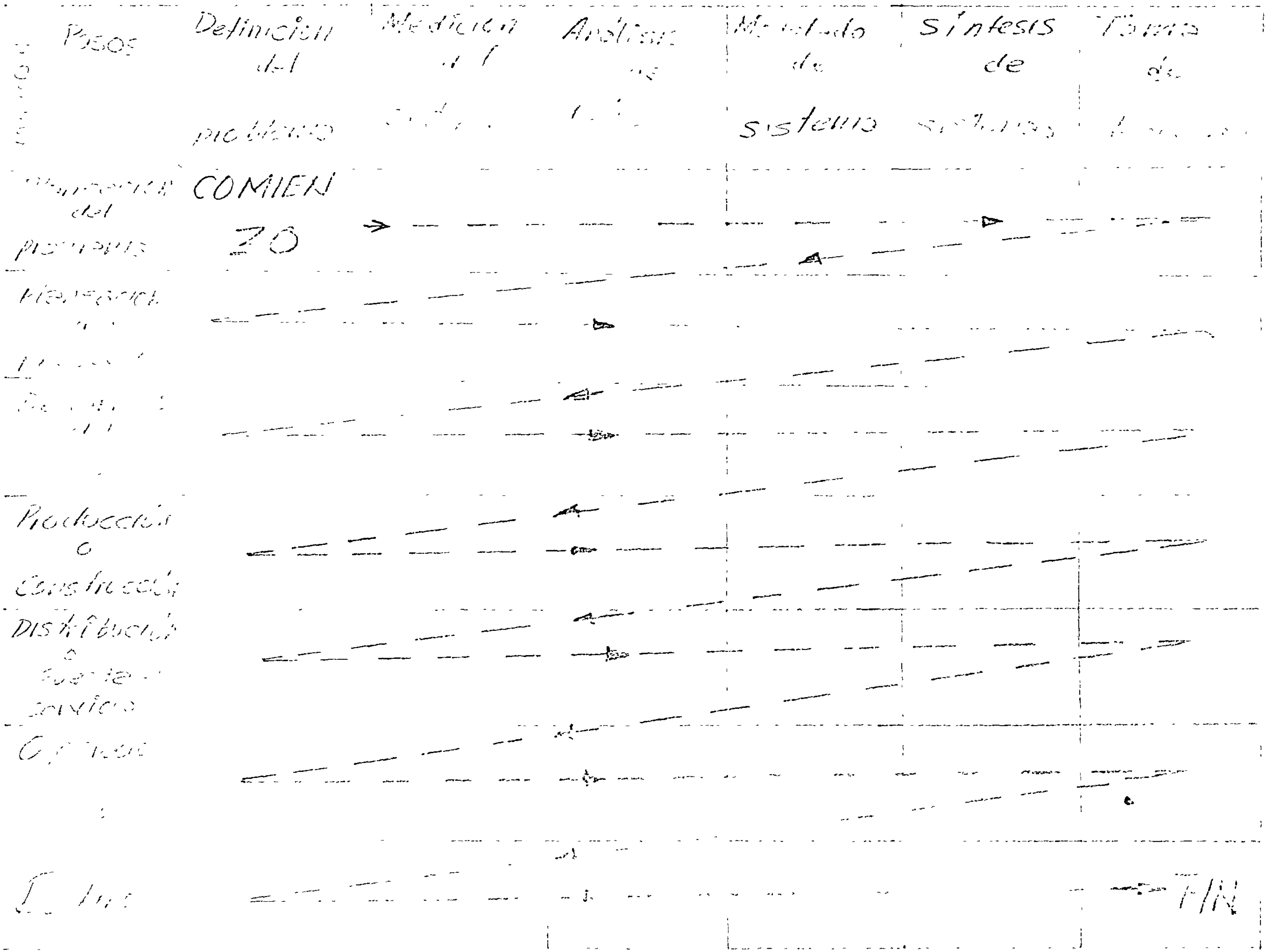


Fig. 1.2.1 Metodología para el análisis de sistemas

1.2.7 Morfología tridimensional

~~75~~ 109

76 → 110

fig 1.2.1

*Dado que la matriz de actividades de la ~~página anterior~~ incorpora únicamente dos dimensiones del enfoque de sistemas, la tercera dimensión (para la que Hall (1969) propone el grado de estructura formal de la profesión) se incluye en la fig 1.2.4

~~77~~ 111

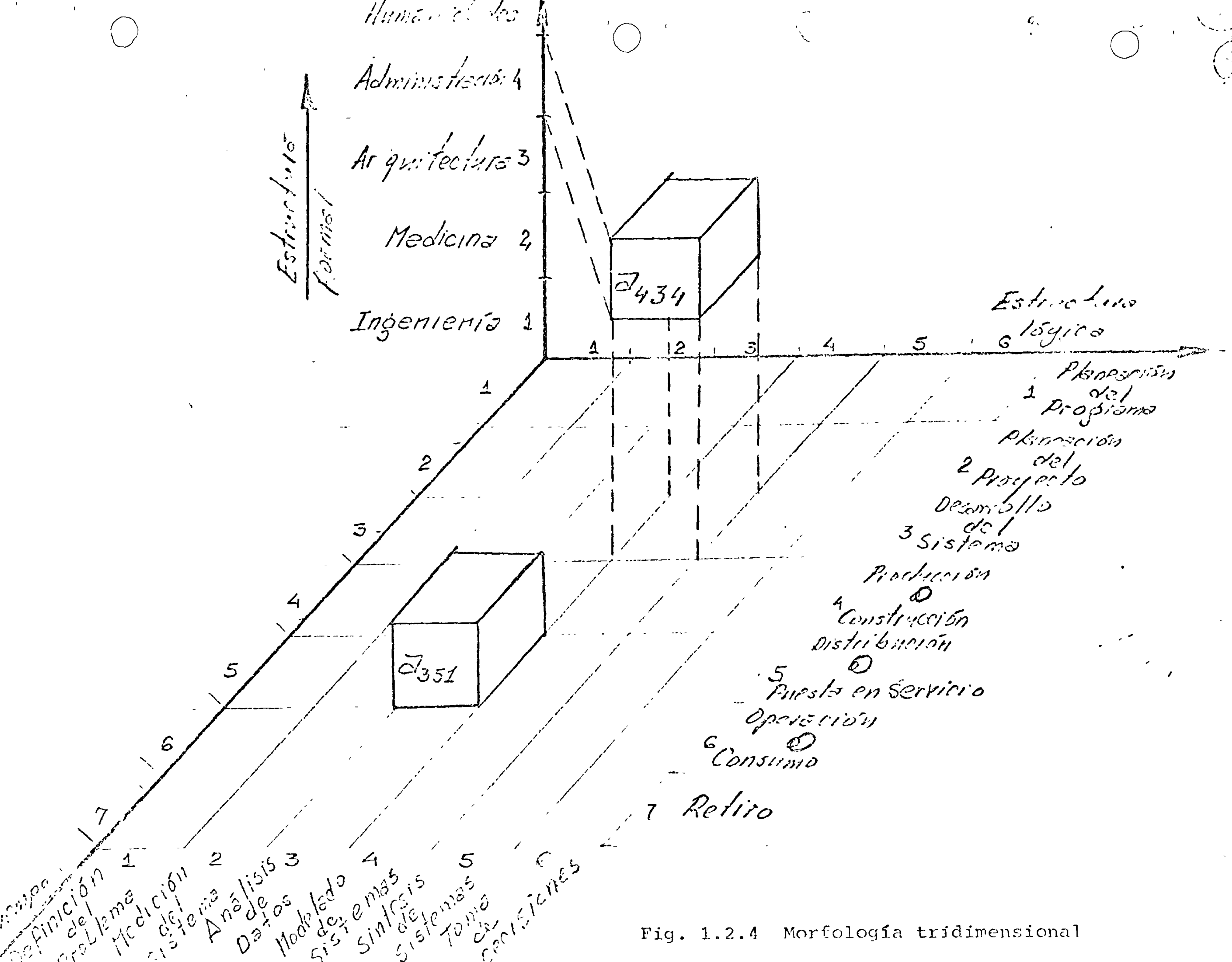


Fig. 1.2.4 Morfología tridimensional

112

*Empleando esta morfología pueden definirse actividades específicas del análisis de sistemas.

*Así por ejemplo, la actividad a_{351} mostrada en la fig. 1.2.5 representa ~~la etapa~~ el paso de análisis de datos (3er paso) en la fase de distribución (fase 5) en la ingeniería (columna 1.1) ~~(1)~~; es decir, analizar la información para determinar una adecuada política de distribución de un producto.

*La morfología tridimensional define actividades específicas

75

113

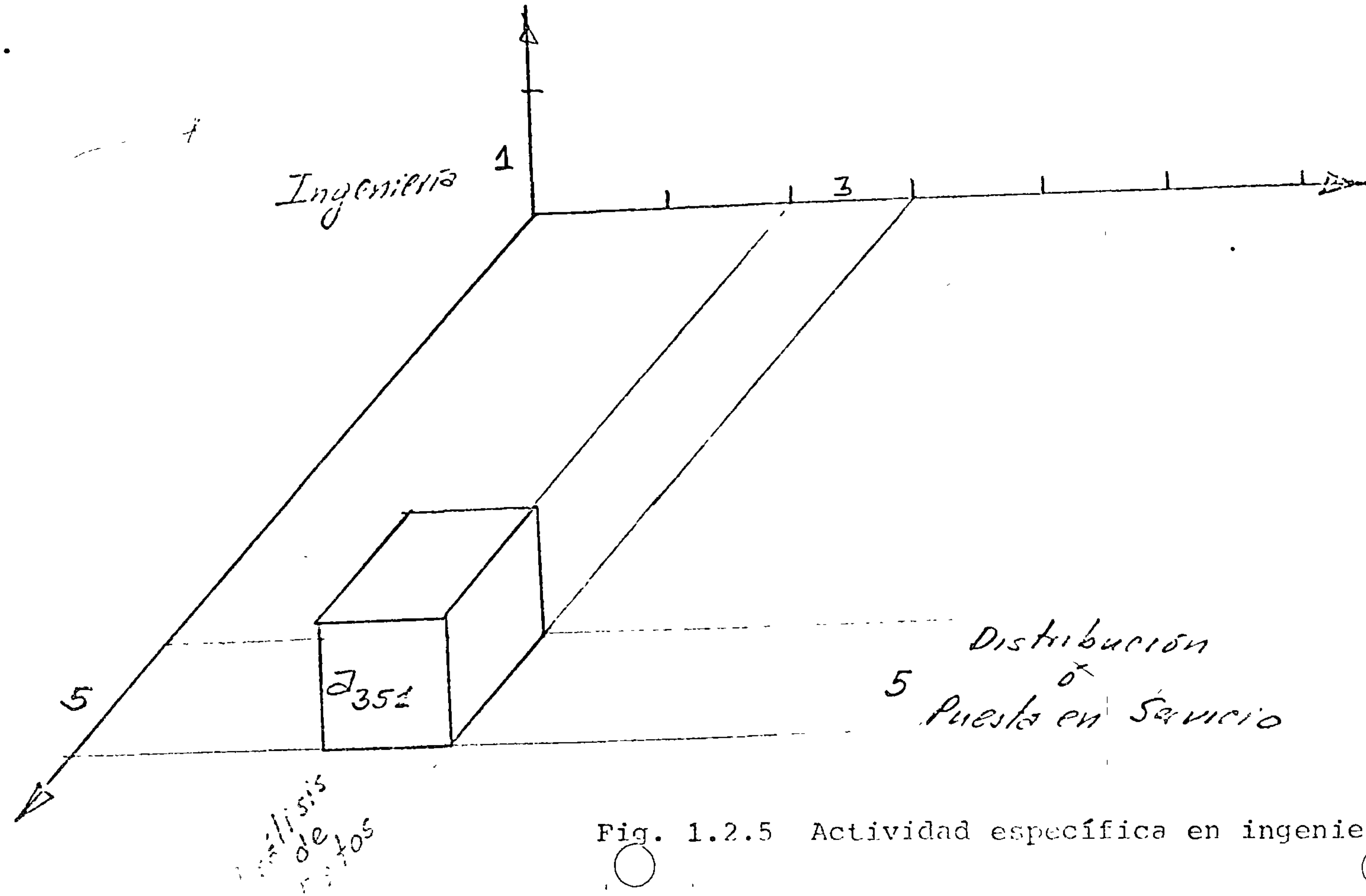


Fig. 1.2.5 Actividad específica en ingeniería

*La actividad a_{434} que aparece en la fig. 1.2.6 consiste en establecer el modelo (paso 4) de posibles sistemas (fase 3) para un problema de administración (4)a. ([illegible] 4)

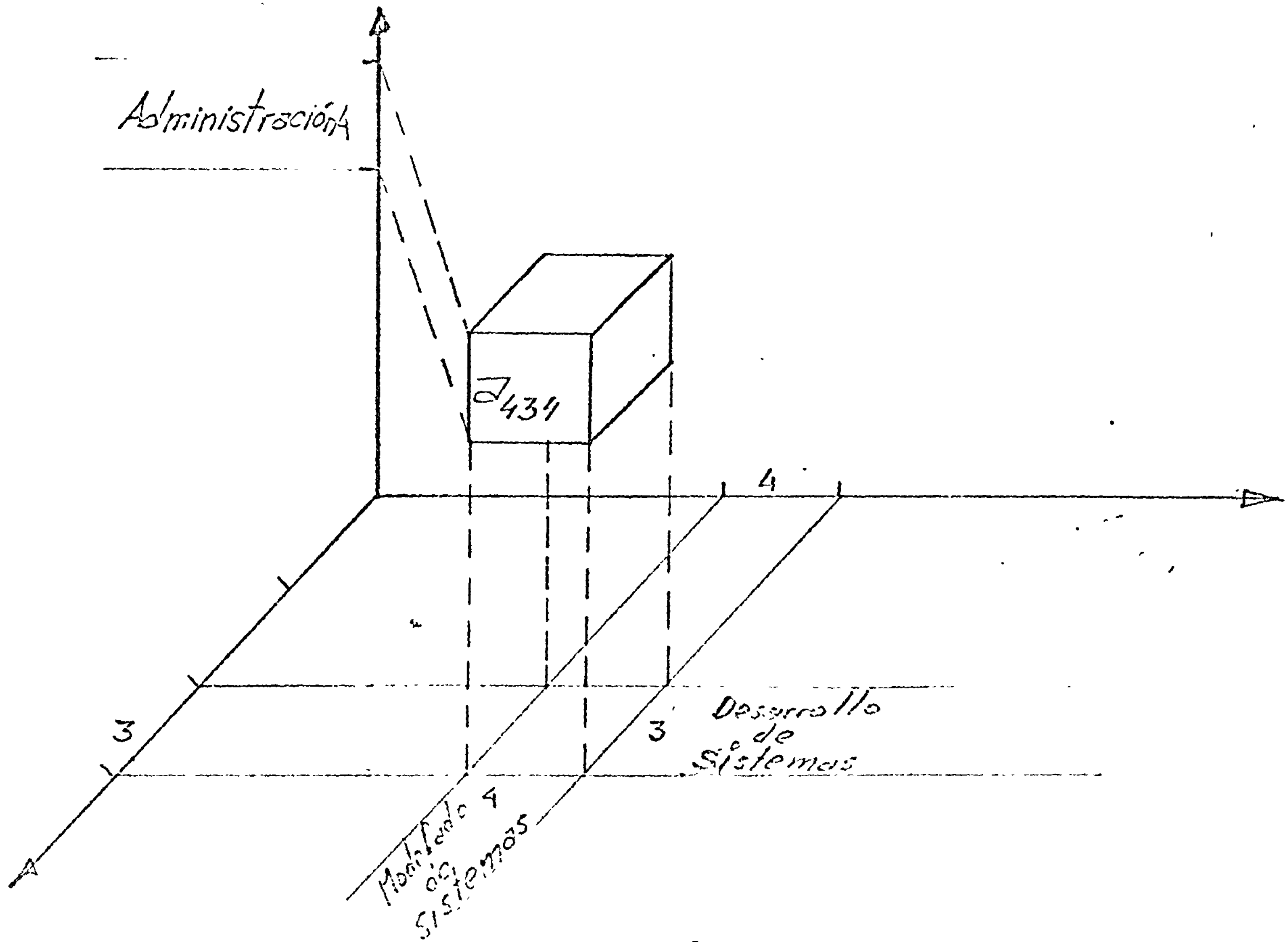


Fig. 1.2.6 Actividad específica en administración

*Antes de continuar, es necesario volver a señalar que el enfoque de sistemas, que tiene como meta establecer una secuencia lógica para la solución de los problemas en cada fase de análisis de un sistema complejo, solamente es un complemento para el profesionista en una rama en particular. El conocimiento de toda la metodología del análisis de sistemas, desde la definición del problema hasta la selección, no ~~son~~ es suficientes para resolver ningún problema del mundo real. Para resolver estos problemas se requieren conocimientos específicos de una rama de la ciencia o técnica y complementarlos con la metodología de sistemas.

*Es menester tener presente que la actividad profesional, según esta morfología de Hall (ref 4), cuenta con tres dimensiones. El enfoque de sistemas solo se halla relacionado con la dimensión correspondiente a la secuencia lógica (pasos), *por lo que para obtener resultados útiles a la sociedad, es necesario integrar las tres dimensiones del problema, es decir, *dentro de una profesión

*En enfoque de sistemas es un complemento 81

115

116

*La actividad profesional tiene tres dimensiones 82

117

*Para obtener soluciones, deberá integrarse dichas dimensiones 83

*Dimensión 1: vertical profesión

(dimensión vertical) *aplicar el enfoque de sistemas (dimensión lógica) *a las diversas fases (dimensión temporal) de un problema.

*Desafortunadamente es común pensar que si se domina la metodología del enfoque de sistemas, se puede resolver cualquier problema. Esta idea, por las razones señaladas, es absolutamente incorrecta

*Dimensión 2: enfoque de sistemas

*Dimensión 3: etapa de análisis

*El enfoque de sistemas por sí mismo, no resuelve los problemas

89

118

Folio 119

*El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la metodología de sistemas a la fase de desarrollo de sistema de un problema de aprovechamiento hidráulico:

*El primer paso es definir el problema, o sea planear el aprovechamiento de un río para fines de riego, generación de energía y facilidades de recreo.

*Durante el paso de medición del sistema se procede a establecer los objetivos del proyecto y a cuantificarlos, es decir, a fijar medidas de efectividad, además de dar pesos relativos a los tres objetivos: riego, generación y recreo, para lo cual conviene recabar toda la información relevante para el proyecto, como puede ser el escurrimiento de la cuenca, las características geológicas de la misma, superficies de cultivo que se pueden beneficiar o perjudicar por el proyecto, etc, y se determina la disponibilidad de materiales de construcción, vías de comunicación y mano

1.2.8 Ejemplo

*Fase de desarrollo en un aprovechamiento hidráulico

*Definición del problema:
Aprovechamiento para riego, generación y recreo

*Medición del sistema:
establecimiento de medidas de efectividad y sus pesos relativos
Establecimiento de un banco de datos

123

de obra. En resumen, se establece el banco de datos necesario para realizar el proyecto y poder evaluar alternativas.

*Durante el tercer paso, el de análisis de datos, se emplean los métodos de manejo de datos y se ordena la información obtenida anteriormente para deducir datos de interés para el proyecto como podrían ser: escurrimiento promedio de la cuenca, relaciones entre el costo de materiales y posibles lugares de construcción de la presa, áres de riego afectadas, etc.

*Análisis de datos: 89
Ordenamiento de la información y obtención de datos relevantes

124

*En el cuarto paso, el de modelado de sistemas, se procede al diseño de diferentes alternativas de aprovechamiento, y se establecen los modelos para evaluarlas tomando en cuenta factores técnicos, económicos, sociales y ecológicos.

*Modelado del sistema 90
Diseño de alternativas y modelado de las mismas para evaluación

*Posteriormente se efectúa la síntesis del sistema, es decir, que para las diversas alternativas posibles se determinan, empleando los modelos elaborados

*Síntesis de sistemas
Empleo de los modelos para obtener medidas de efectividad

anteriormente, las medidas de efectividad estableci- das en el paso de medición del sistema.

*Como las medidas de efectividad en un proyecto de esta importancia difícilmente pueden reducirse a un solo índice, es necesario proceder a la etapa de toma de decisiones, paso en el cual se tomará la decisión respecto a qué alternativa se debe implementar, considerando todas las medidas de efectividad calculadas previamente.

*Toma de decisiones -92

Decidir sobre el proyecto que debe implementarse

1.3 Descripción de Sistemas

1.3.1 Introducción:

*La mayoría de los grandes sistemas de interés para el analista de sistemas constan de muchas partes; están construídos por una gran variedad de materiales, y los operan, durante varias décadas, bajo muy diversas condiciones, miles de personas.

*El análisis de sistemas, que en cualquier fase se inicia con la descripción del mismo, tiene que basarse en la información que se puede obtener acerca del sistema. *La cantidad de información asociada a sistemas de la complejidad citada, es enorme, *tanto que para obtener de esta gran cantidad de datos los relevantes para los diversos pasos del análisis, es necesario contar con técnicas especiales de organización y codificación, mediante las cuales se reduzca el volumen de datos que se requiere tomar en cuenta para los diversos pasos del análisis sin perder precisión en el estudio.

* Grandes Sistemas:
- Tienen múltiples partes
- Están formados por diversos materiales
- Operan durante muchos años
- bajo distintas condiciones

*Primer paso: Descripción

*Describir requiere gran cantidad de información

*Técnicas de codificación y organización de la información

*Para iniciar el primer paso del análisis de sistemas, el de descripción de un sistema, es necesario definirlo adecuadamente. En las siguientes secciones se analizará la naturaleza de la información que se requiere para definir adecuadamente un sistema.

*Un sistema puede estar inadecuadamente descrito cuando se conocen sus partes o subsistemas, pero se desconoce la interacción entre ellas. También es factible que se haya entendido el funcionamiento del sistema para un período determinado, pero se ignoren los cambios que sus características sufren con el tiempo.

*Otro aspecto importante de la ingeniería de sistemas es el reconocimiento de similitudes entre las características de diversos sistemas o subsistemas, que permite analizar diversos tipos de sistemas empleando la misma metodología.

*Para describir el sistema hay que definirlo 98

134

*La descripción de un sistema es una inadecuada si: a) se desconoce la interacción entre partes (b) se ignoran los cambios en el tiempo 99

135

*Reconocimiento de similitudes implica menos métodos particulares 100

136

*Es posible, por ejemplo, utilizar la teoría de ecuaciones diferenciales (una metodología matemática) para analizar el comportamiento dinámico de sistemas eléctricos, térmicos, hidráulicos y mecánicos entre otros (ref. 3)

*Ecuaciones diferenciales sirven para analizar: Sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, térmicos, económicos 101 137

*En este capítulo se analizarán las principales características de los sistemas que permiten identificar las diferencias y similitudes entre los sistemas.

*Identificación de similitudes y diferencias 102 138

*Chesnut (ref. 2) establece que los requerimientos básicos de información para un sistema son: estructura, características distintivas, magnitud, probabilidad y tiempo. En este capítulo se seguirá de cerca el artículo citado de Chesnut y la obra de Van Court Hare (refs. 1 y 2).

*Requerimientos de información sobre: Estructura, Características distintivas, magnitud, probabilidad, tiempo 103

1.3.2 Estructura 104

*Puede definirse como estructura de un sistema a la relación de sus partes entre sí: *estas relaciones pueden ser de espacio, tiempo, jerarquía, propiedades lógicas o de toma de decisiones.

*Relación entre partes = Estructura 105

*Relaciones de: espacio, tiempo, jerarquía, propiedades lógicas, toma de decisiones 141

*Como se señaló en la sección 1.2, antes de iniciar el análisis de un sistema es necesario fijar con claridad cuál es el objetivo de dicho análisis, ya que la descripción de la estructura del mismo depende del objeto del análisis. Un ejemplo servirá para aclarar ideas: *La fig. 1.3.1 muestra dos ciudades de un municipio y las carreteras federales que las conectan con los municipios adyacentes; la descripción gráfica del sistema "el municipio" puede ser adecuada si el objetivo del estudio es un análisis del sistema de transporte del municipio.

*Sin embargo, si el objetivo del estudio es la determinación de una política de aprovechamiento forestal, el mapa de la fig. 1.3.2, o una combinación de ambos es más adecuada.

*Descripción de la estructura depende del objetivo del análisis

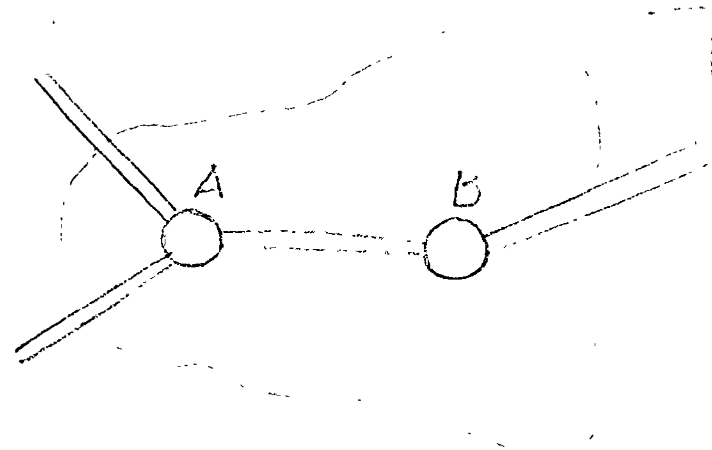


Fig. 1.3.1 Modelo para un estudio de transporte

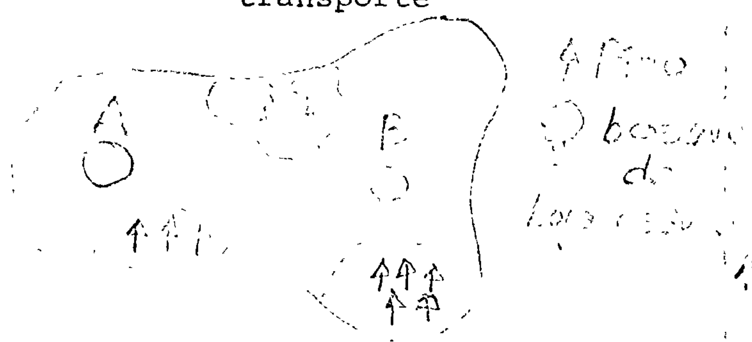


Fig. 1.3.2 Modelo para un estudio de aprovechamiento forestal

~~Representación,~~ *Además depende del grado de precisión o detalle con que se quiere llevar a cabo el análisis, la información que debe contener la representación del sistema. Así por ejemplo, para un estudio de aprovechamiento forestal, puede ser indispensable incluir en el mapa de la figura edad promedio de los árboles, su densidad y alguna otra información adicional.

199

109

*La representación del sistema depende del nivel de precisión deseado

*Para otro tipo de estudios relacionados con el "municipio" puede requerirse el empleo de representaciones que no tengan similitud con la geografía del municipio como ~~en~~ es el caso de una tabla con el número de habitantes de cada edad dentro del municipio para un estudio demográfico del mismo.

195

110

*Para un estudio demográfico requiere tabla de edades (no tiene similitud)

En resumen, puede decirse que las posibles descripciones de un sistema son múltiples, igual que el grado de detalle de las mismas. Estas descripciones dependen del objetivo del análisis y de la precisión con que desea llevarse a cabo. *Existe, sobre todo

*Evite exceso de detalles 111

en analistas de sistemas sin experiencia, la propensión a incluir en las descripciones de un sistema el mayor número posible de información sin tomar en cuenta cuál es el objetivo del análisis. Esto produce presentaciones tan plagadas de detalles, que resultan en general inútiles para los propósitos del estudio. Como suele decirse "por ver los árboles no se ve el bosque".

Foto 197

1.3.3 Fronteras

Otra fase inicial importante en el análisis de un sistema es la determinación de las fronteras del mismo. *Como ningún sistema esta totalmente aislado, mientras no se fijen sus fronteras se corre el peligro de definir uno demasiado grande para los propósitos del estudio, o un sistema que resulta en ocasiones imposible o demasiado costoso Los analiza en comparación con los beneficios que se espera obtener del análisis

Fig. 1.3.3 Frontera

La frontera del sistema separa los elementos cuya estructura se desea conocer de aquellos que no se tomarán en cuenta en el estudio. También define qué variables serán analizadas y cuáles consideradas como datos. *Por ejemplo, si se quiere analizar el sistema económico de México, es necesario fijar una frontera. El funcionamiento de la economía nacional depende no solamente de factores internos, sino externos; por lo que ~~sino~~ si no se delimita una frontera para el sistema, se terminaría teniendo que describir y posteriormente modelar no únicamente la economía del país, sino de todas las naciones con las que realiza transacciones mercantiles o financieras, es decir, del mundo entero; o sea, se llegaría a un sistema de dimensiones extremadamente grandes.

*Una vez fijada la frontera del sistema, puede procederse a analizar la estructura del mismo. Conviene empezar por entender cuáles son sus partes principales y sus interacciones más importantes. *Para mostrar la estructura, se recurre en general a representaciones gráficas. *En este paso del análisis del sistema, se evita entrar en detalles y se pone énfasis

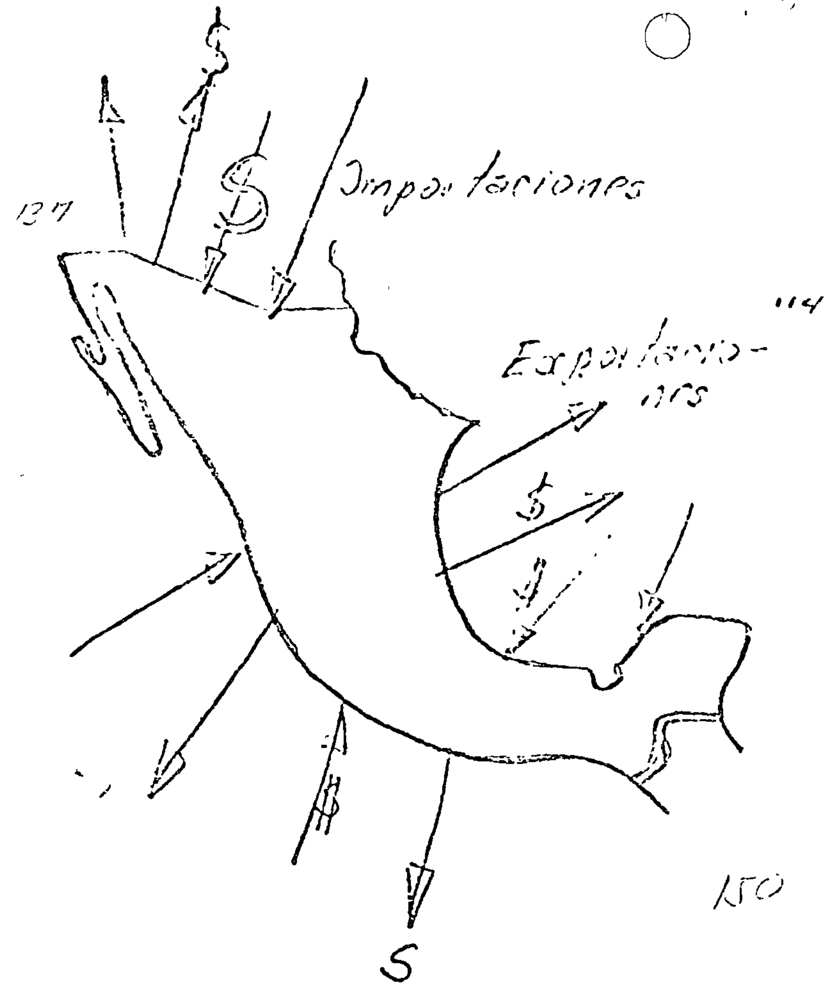


Fig. 1.3.4 Posible frontera para un modelo económico

*1º Fijar frontera

2º determinar estructuras

*Representación gráfica de la estructura

*En la representación evite exceso de detalles *en las interacciones de las diversas partes o subsistemas del mismo y no en variables específicas o en sus relaciones funcionales o en características de parámetros. Durante esta etapa, en general puede obtenerse una visión global del sistema muy útil para el análisis posterior.

*Inicie poniendo énfasis en las interconexiones

En la siguiente sección se estudiará una forma de descripción de un sistema: la de diagramas de bloque y diagramas de señales.

1.3.4 Diagramas ~~Señales~~ de bloque y señales

Los diagramas de bloque y de señales son auxiliares muy importantes no solo durante esta fase, sino también en etapas posteriores del estudio.

Para representar la transformación de una variable en otra, es decir, una relación entrada-salida, suelen emplearse dos tipos de símbolos: los bloques o cajas negras y los diagramas de flujo de señales. *La fig. 1.3.5 muestra un bloque o caja negra, el cual en un proceso productivo puede representar una fábrica. Las señales de entrada son los insumos del proceso, o sea capital, mano de obra y materiales, las de salida son los productos elaborados en la fábrica. En este caso particular, la transformación es una función de producción (este tipo de relación entrada-salida se estudiará en el capítulo 4). Si el sistema en estudio es un circuito eléctrico, las señales de entrada son las funciones de excitación; las de salida las diversas respuestas (tensiones y corrientes de las ramas), y la relación entrada-salida una matriz de funciones de transferencia (ref. 3)

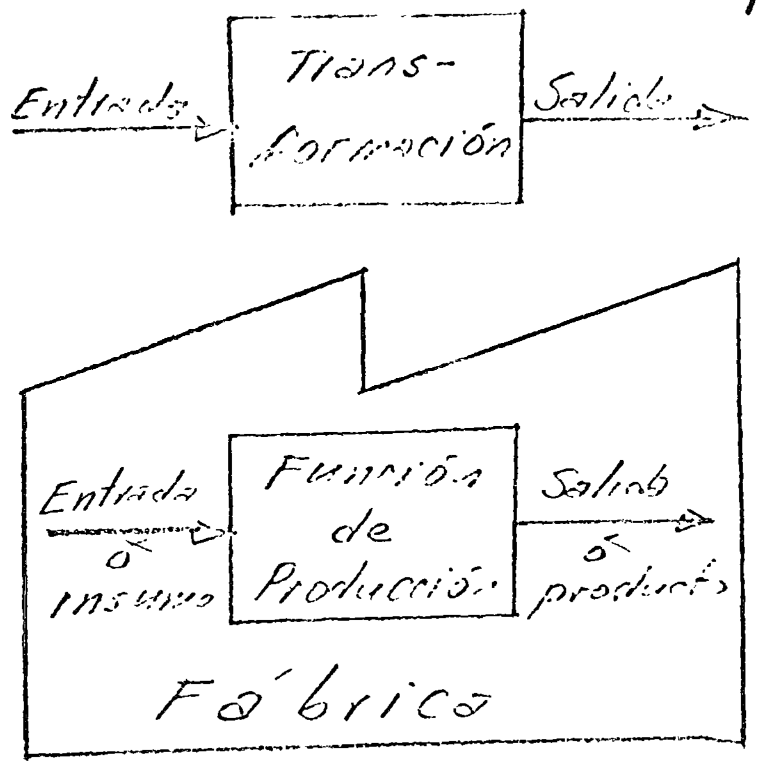


Fig. 1.3.5 Diagrama de Bloques

*La transformación de una variable en otra en un sistema, también puede representarse mediante diagramas de flujo de señales (fig. 1.3.6), en las que los extremos del segmento dirigido corresponden a actividades o señales específicas. *La transformación se realiza en la dirección de la fecha; es decir, la señal de salida, asociada a la punta del segmento, es igual a la señal de entrada, asociada al origen del segmento, y sometida

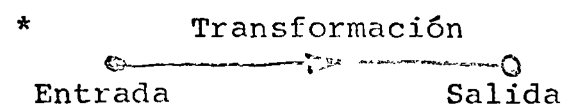
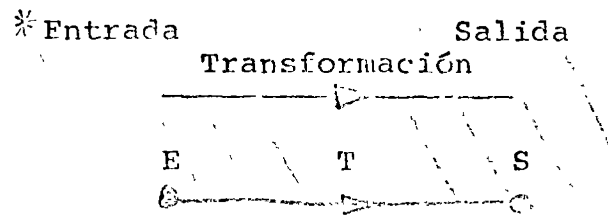


Fig. 1.3.6 Diagrama de flujo de señales



a la transformación asociada al segmento. Igual relación es válida en los diagramas de bloque. *Simbólicamente puede escribirse:

Los diagramas de flujo también se emplean en los sistemas *con transición de estado que se estudiarán posteriormente. *En un análisis de sistema económico, la señal de entrada puede ser el ingreso disponible por familia, Y, y la de salida el consumo generado por este ingreso, C. *La transformación será la ecuación que relacione a la variable de entrada (insumo o variable independiente), el ingreso, Y, *con la variable de salida (producto o variable dependiente), el consumo, C, lo cual puede ser una relación del tipo:

*

Dicha relación indica que el consumo C depende linealmente del ingreso Y y *del consumo en el período anterior, es decir C_{-1}.

*SALIDA = TRANSFORMACION (ENTRADA) 121

$$S = T(E)$$

* Y: ingreso disponible

C: consumo 122

123

*Variable de entrada

≡

insumo

≡

Variable independiente

*Variable de salida 124

≡

Producto

≡

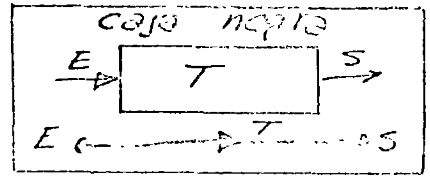
Variable dependiente

$$*C = a\,Y + b\left(C_{-1}\right)$$ 125

*Consumo en el período anterior 127

$$C_{-1}$$

*Tanto ~~en~~ el bloque como el segmento dirigido de la fig. 1.3.7 representan una transformación que puede considerarse como una caja negra, o sea una agrupación de detalle, la cual se seleccionó por no ser necesario incluir mayor detalle en el análisis, o por imposibilidad de llegar [illegible] a profundizar más.*La relación entre el consumo C y el ingreso Y representa una agrupación muy grande de detalles. Es fácil encontrar muchas variables adicionales que determinan el consumo C; en lugar de considerar al consumidor como un ser biológico con todos los detalles fisiológicos y psicológicos que sobre su comportamiento se conocen, el modelo expuesto $C = aY + bC_{-1}$ lo considera como una caja negra o un dispositivo al que entra la variable ingreso Y, que tiene memoria y recuerda lo que consumió el período anterior, es decir C_{-1} y del que sale la variable C. Para un modelo econométrico este grado de detalle es el adecuado. Para otros fines, es necesario recurrir a otras descripciones del modelo.



168

127

Fig 1.3.7 Caja Negra

*Caja negra:
implica agrupación de detalles

128

169

*

$$C = aY + bC_{-1}$$

Modelo de caja negra

*Tanto en representaciones gráficas que empleen bloques como en los (que empleen diagramas) de flujo, las transformaciones se consideran estables. La transformación operará en el futuro como há actuado hasta el presente, o sea invariable en el tiempo, tal como ilustra la fig. 1.3.8

La mayoría de los sistemas de interes para el analista estan formados por diferentes subsistemas interconectados entre sí. Resulta por lo tanto importante conocer bajo que condiciones es posible representar estos sistemas interconectando diferentes bloques.

*La representación de varios subsistemas interconectados entre sí con ayuda de diagramas de bloque o de flujo de señales, solamente puede realizarse si las transformaciones que los diversos subsistemas realizan sobre las señales son <u>independientes</u>; es decir, la transformación que un subsistema realiza en las variables asociadas a él, no cambia por la conexión entre subsistemas. La fig. 1.3.9 ilustra esta idea.

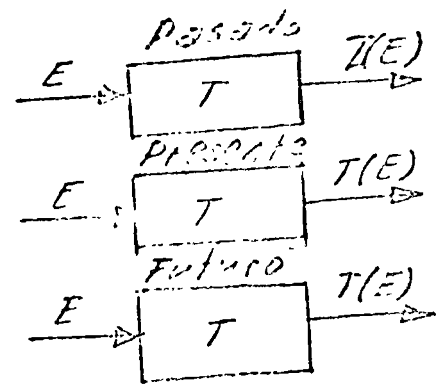


Fig. 1.3.8 Transformaciones estables

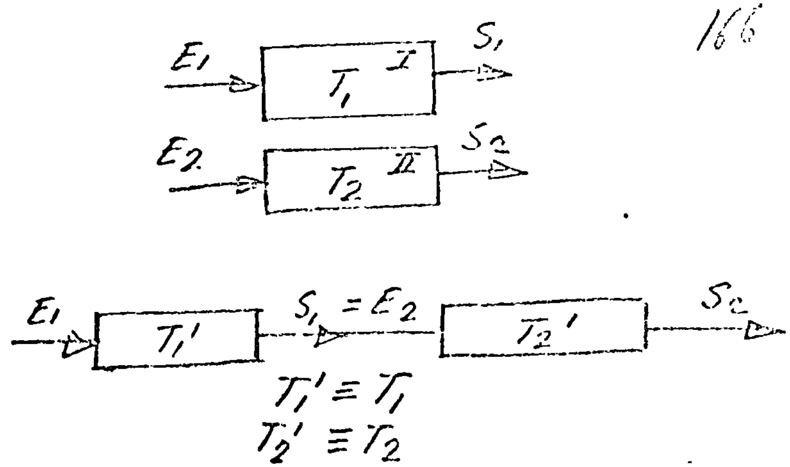


Fig. 1.3.9 Transformaciones que no interaccionan

*Al combinar transformaciones, las entradas y salidas deben ser compatibles.

*Supóngase que en un diagrama, el bloque 1 representa a la industria de fertilizantes, el bloque 2 al sector agrícola que cultiva trigo y el 3 a la industria molinera. Una conexión de estos bloques de entradas-salidas compatibles se muestra en la fig. 1.3.10. La salida del bloque 1 (fertilizantes) entra al 2, y la salida de este (trigo) entra el bloque 3. Una conexión así se conoce con el nombre de conexión serie. La misma figura muestra también ese tipo de conexión, usando un diagrama de flujo de señales.

*Conexión de subsistemas o bloques, únicamente con señales compatibles

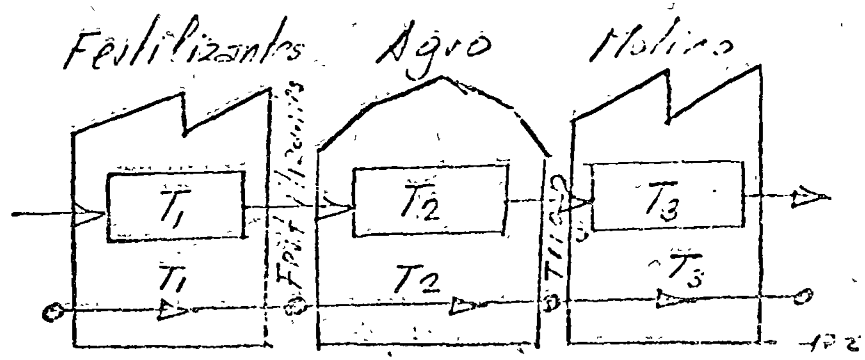
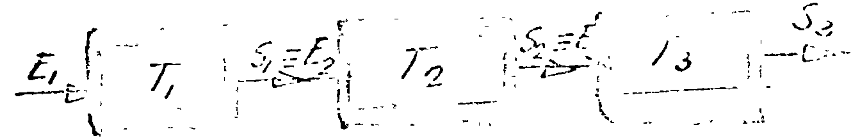


Fig. 1.3.10 Conexión en serie

*En este tipo de conexión, la relación entre insumo y productos puede representarse simbólicamente conforme la fig. 1.3.11 y combinando estas tres relaciones como: (es decir, los n bloques en serie que representan transformaciones $T_1, T_2, \dots T_n$ son equivalentes a un solo bloque que realiza la transformación

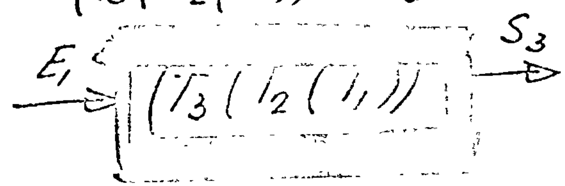


$T_1(E_1) = S_1 = E_2$

$T_2(E_2) = S_2 = E_3$

$T_3(E_3) = S_3$

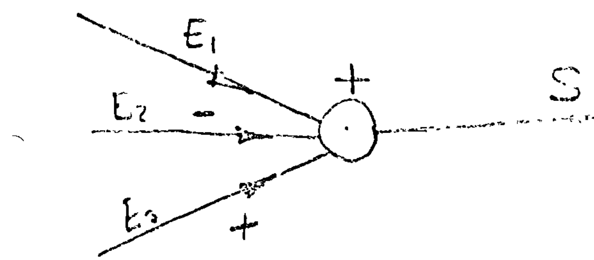
$(T_3(T_2(T_1)) = S_3$



$T = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1$

Fig. 1.3.11 Transformación equivalente de n bloques o subsistemas en serie

*Un símbolo auxiliar en diagramas de bloque es el punto de suma (o resta) que aparece en la fig. 1.3.12. En este símbolo, la variable que sale del punto es igual a la suma algebraica de las señales que entran, es decir:



$S = E_1 - E_2 + E_3$

No debe olvidarse el signo en las señales de entrada. Esta misma operación, empleando diagramas de flujo de señales, se representa usando el símbolo que aparece en la parte inferior de la fig. 1.3.12

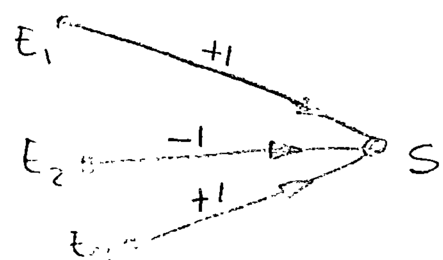
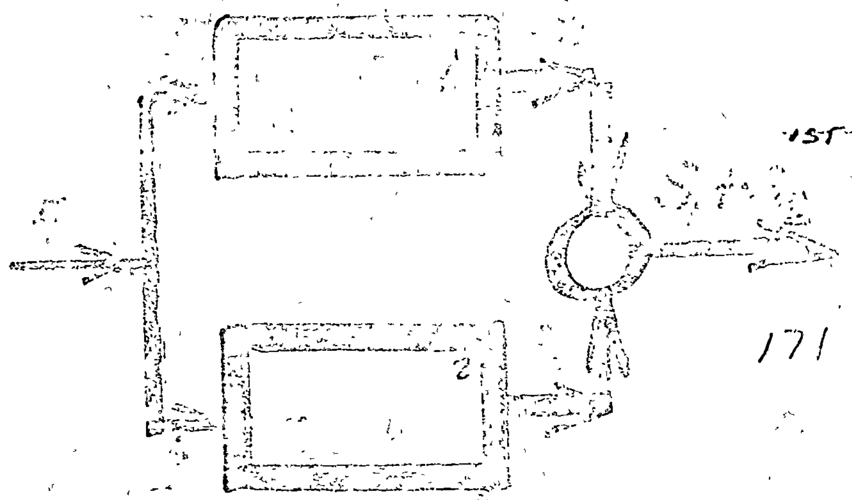


Fig. 1.3.12 Punto de suma

*La conexión de subsistemas, utilizando diagramas de bloque que aparecen en la fig. 1.3.12 se conoce con el nombre de conexión en paralelo.

Teniendo presente las propiedades del punto de suma, entre las variables que aparecen en las conexiones en paralelo en esa figura, existen las relaciones siguientes:



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = T_1 (E)$$

$$S_2 = T_2 (E)$$

$$S = T_1 (E) + T_2 (E)$$

$$S = (T_1 + T_2) (E)$$

Fig. 1.3.12 Conexiones en paralelo

171

*de lo que se deduce que varios subsistemas conectados en paralelo realizan sobre la variable de entrada una transformación, equivalente a la suma de las transformaciones de cada uno de los subsistemas, tal como ilustra la fig. 1.3.14

172

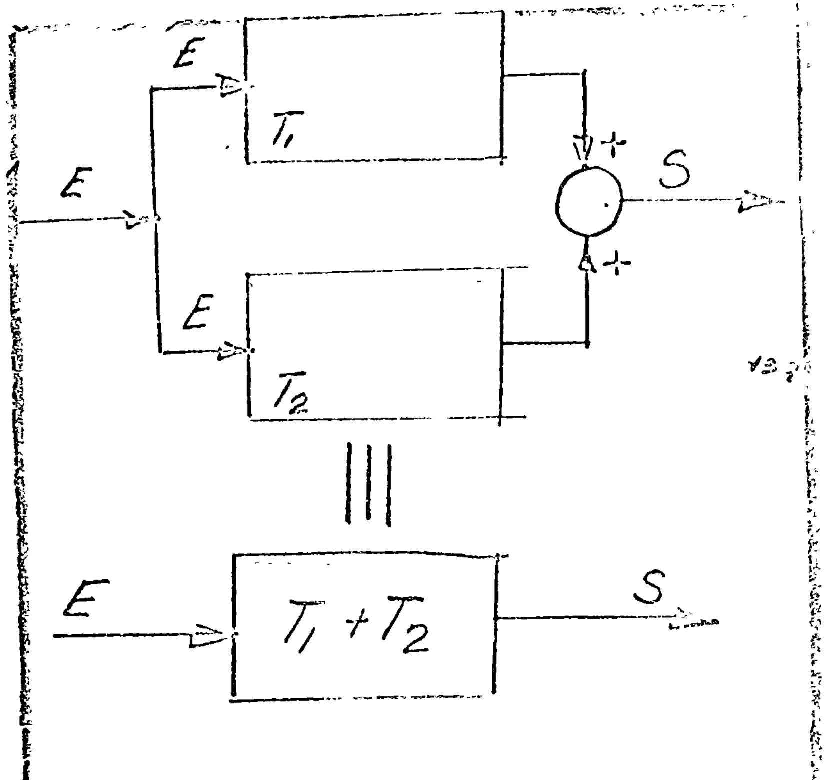
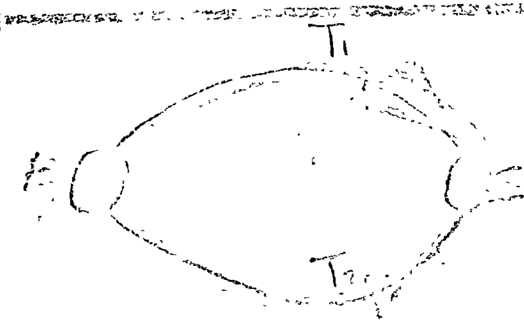


Fig. 1.3.14 Conexión en paralelo

*En la fig. 1.3.15 se presenta esa conexión empleando diagramas de flujo de señales.



173

$$S = T_1 \; (E) + T_2 \; (E)$$

$$= (T_1 + T_2) \; E$$

$$E \rightarrow \boxed{T_1 + T_2} \rightarrow S$$

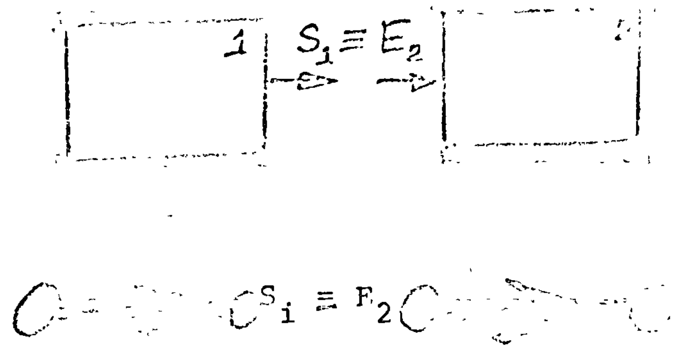
Fig. 1.3.15 Conexión en paralelo

*En resumen, debe recordarse que por conexión-serie, se entiende una conexión donde la salida de un sistema está conectado a la entrada del siguiente, como muestra la fig. 1.3.15

174

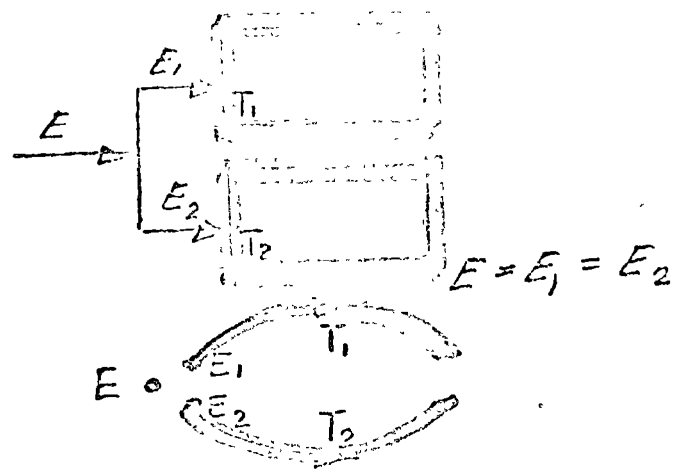
*En la conexión en paralelo, los subsistemas conectados de esta forma tienen todos la misma entrada, como se indica en la fig. 1.3.17

175



139

Fig. 1.3.15 Conexión en serie



140

Fig. 1.3.17 Conexión en paralelo

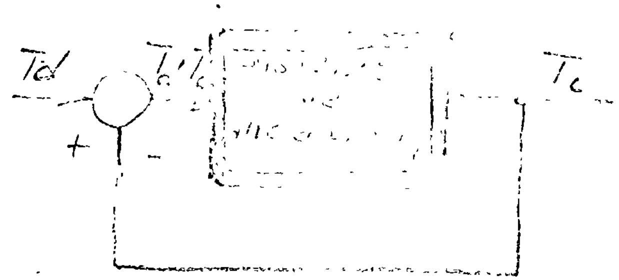
→ 175a

1.3.5 Agrupaciones abiertas y realimentadas

Otra estructura que con frecuencia se encuentra en sistemas es la retroalimentación. *Se dice que se presenta retroalimentación en un sistema, si la salida de un subsistema actúa sobre la entrada.

*La salida actúa sobre la entrada en un sistema retroalimentado

*Considérese un sistema de control de temperatura de un cuarto. La señal de salida es la temperatura, T_c, del cuarto.



*La señal que hace funcionar al aire acondicionado es la diferencia de temperatura entre la temperatura deseada, T_d, y la real del cuarto o señal de salida, T_c, es decir, $T_d - T_c$. Empleando los diagramas de la sección anterior, esta relación puede presentarse como lo muestra la fig. 1.3.18

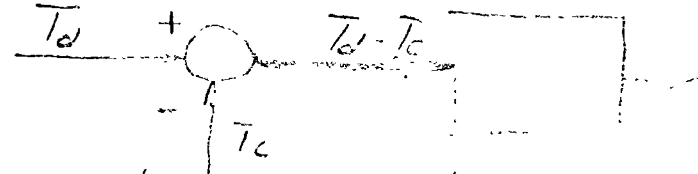
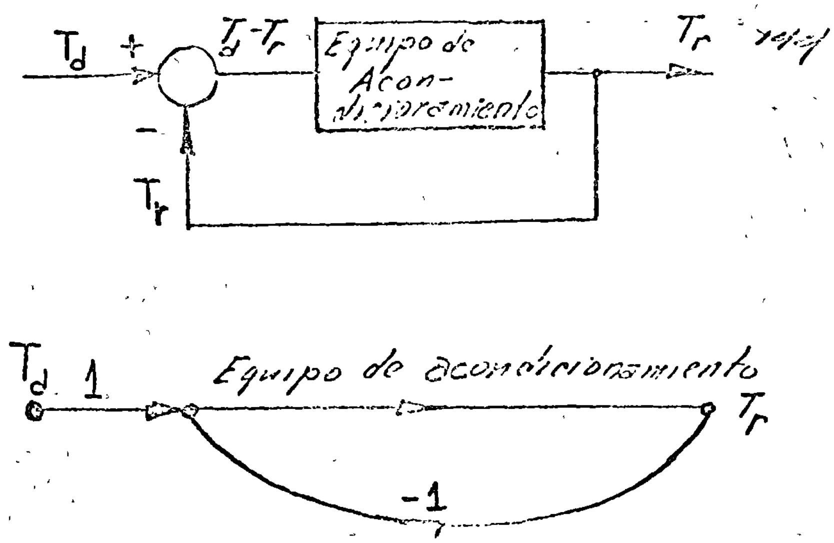


Fig. 1.3.18 Sistema retroalimentado

177

No solamente en sistemas de control, como el que acaba de mencionarse, se presenta este fenómeno. En procesos económicos también es frecuente; un ejemplo al respecto se incluye en la siguiente sección.

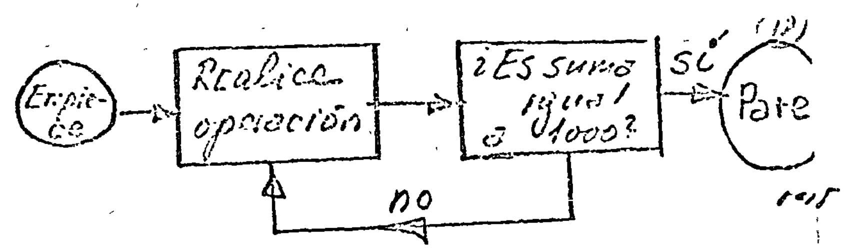
*En la fig. 1.3.19 aparece representado el sistema retroalimentado descrito, empleando diagramas de bloque y de flujo.



178

Fig. 1.3.19 Sistema retroalimentado

*En sistemas de cómputo, el contador de un proceso de cálculo ~~tiene~~ basa su operación en una realimentación. El diagrama de la fig. 1.3.20 ejemplifica un proceso de cálculo en el que una cantidad se acumula hasta llegar a 10 000; ~~sin embargo~~, en el capítulo 3 correspondiente al procesamiento de información se estudia este tipo de diagramas con mayor detalle.



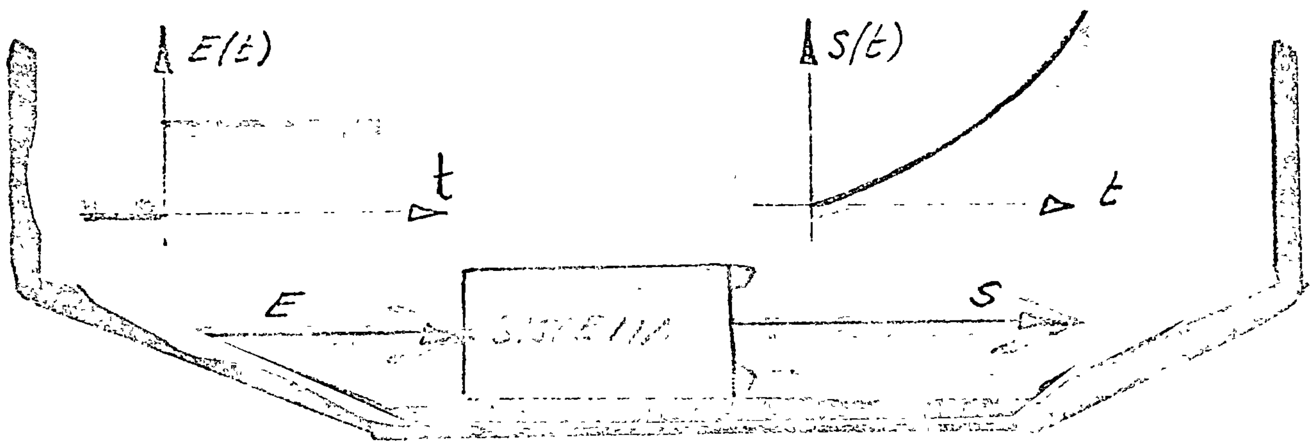
179

Fig 1,3,20 Realimentación en diagramas de Cómputo

*Cuando se presenta retroalimentación en un sistema, pueden existir fenómenos de inestabilidad. Esta es una razón por la que es importante detectar la presencia de retroalimentación en sistemas.

*Un sistema realimentado puede ser inestable 146 180

*De una manera informal es factible afirmar que un sistema es inestable si la señal de salida del mismo es, en algún momento de magnitud ilimitada cuando la señal de entrada tiene una magnitud limitada, como ilustra la fig. 1.3.2



181

Fig. 1.3.2 Ilustración del concepto de inestabilidad

Foto 132

1.3.6 Sistemas con lógica

En muchos sistemas existen elementos cuya función es tomar una decisión. A continuación se mencionan dos ejemplos de esta función en sistemas.

La parte superior de la fig. 1.3.21 muestra el contador de un sistema de cálculo; consiste en un elemento con lógica, ya que dependiendo del valor de la suma, el proceso se repite o termina.

El punto de suma en un sistema retroalimentado, mostrado en la parte inferior de la fig. 1.3.21 determina el funcionamiento del mismo. Si en el caso del acondicionamiento de aire, la temperatura deseada es mayor que la actual, el sistema debe calentar; si es menor, debe enfriar. Esto constituye una decisión lógica.

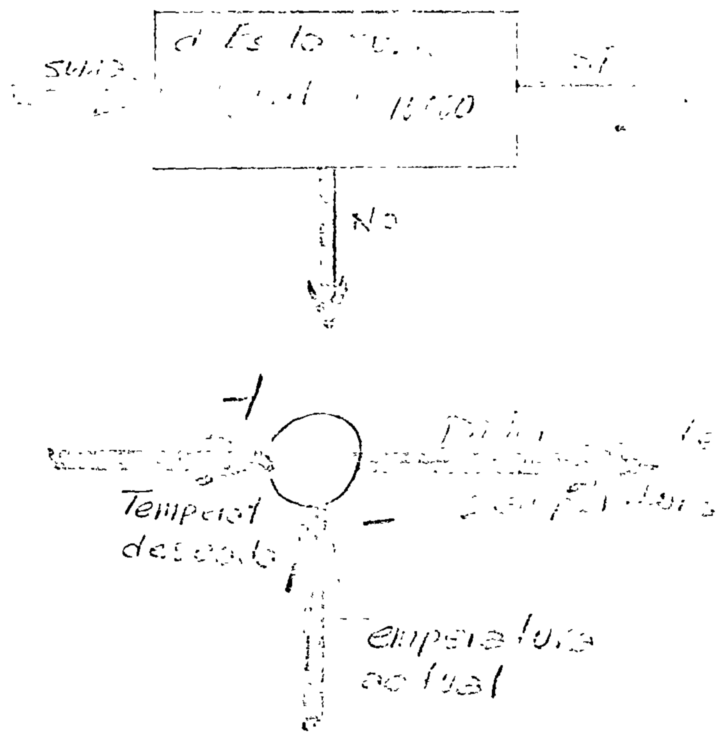


Fig. 1.3.21 Sistemas con lógica

En la mayoría de las transformaciones que se presentan en ingeniería de sistemas se presentan fenómenos de atraso. *Así, por ejemplo, en una fábrica que transforma ciertos productos semielaborados en otros más elaborados, esto se realiza con atraso; el producto elaborado sale del proceso de manufactura tiempo después de que entran al proceso las materias primas o sea que el cambio de materia prima a producto elaborado no es instantáneo, como ilustra la fig. 1.3.23

Se señaló que la actividad de consumo puede ser representada mediante la ecuación que aparece al pie de la fig. 1.3.24

*Empleando un diagrama de bloque esta relación se representa conforme la fig. 1.3.24

1.3.7 Transformaciones con atraso

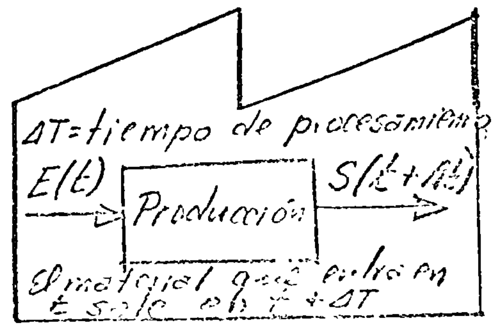


Fig. 1.3.23 Transformación con atraso

$$C = aY + bC_{-1}$$

184

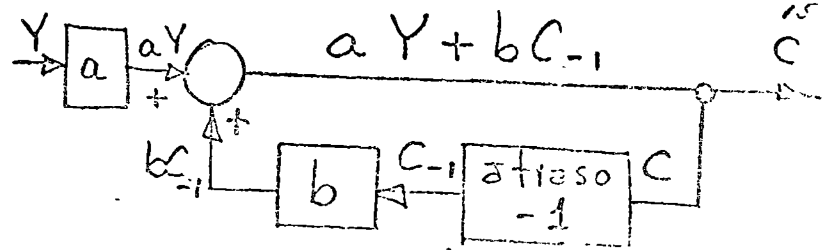


Fig. 1.3.24 Representación de la relación de consumo

$(C = a\ Y + bC_{-1})$

A continuación se ilustrará como se traza el diagrama de bloque de un sistema, a partir de la descripción verbal del mismo.

Ejemplo 1.3.a 153

188

Ilustre con un diagrama de bloques las siguientes transacciones económicas.

La industria de fertilizantes de un municipio obtiene sus insumos de otros municipios. El 20% de sus productos se venden en otros municipios, el 30% lo emplean los campos de maíz y el 50% en los campos de trigo. La industria de alimentos para ganado consume el 20% de la cosecha de maíz y el 30% de la cosecha de trigo. El 50% del maíz se consume en los molinos de nixtamal y 30% restante de la cosecha de maíz se vende fuera del municipio. El 40% del trigo se consume en los molinos de trigo del municipio y el 30% restante se vende fuera.

189

*La fig. 1.3.25 muestra el diagrama de bloques de estas transacciones de mercancías.

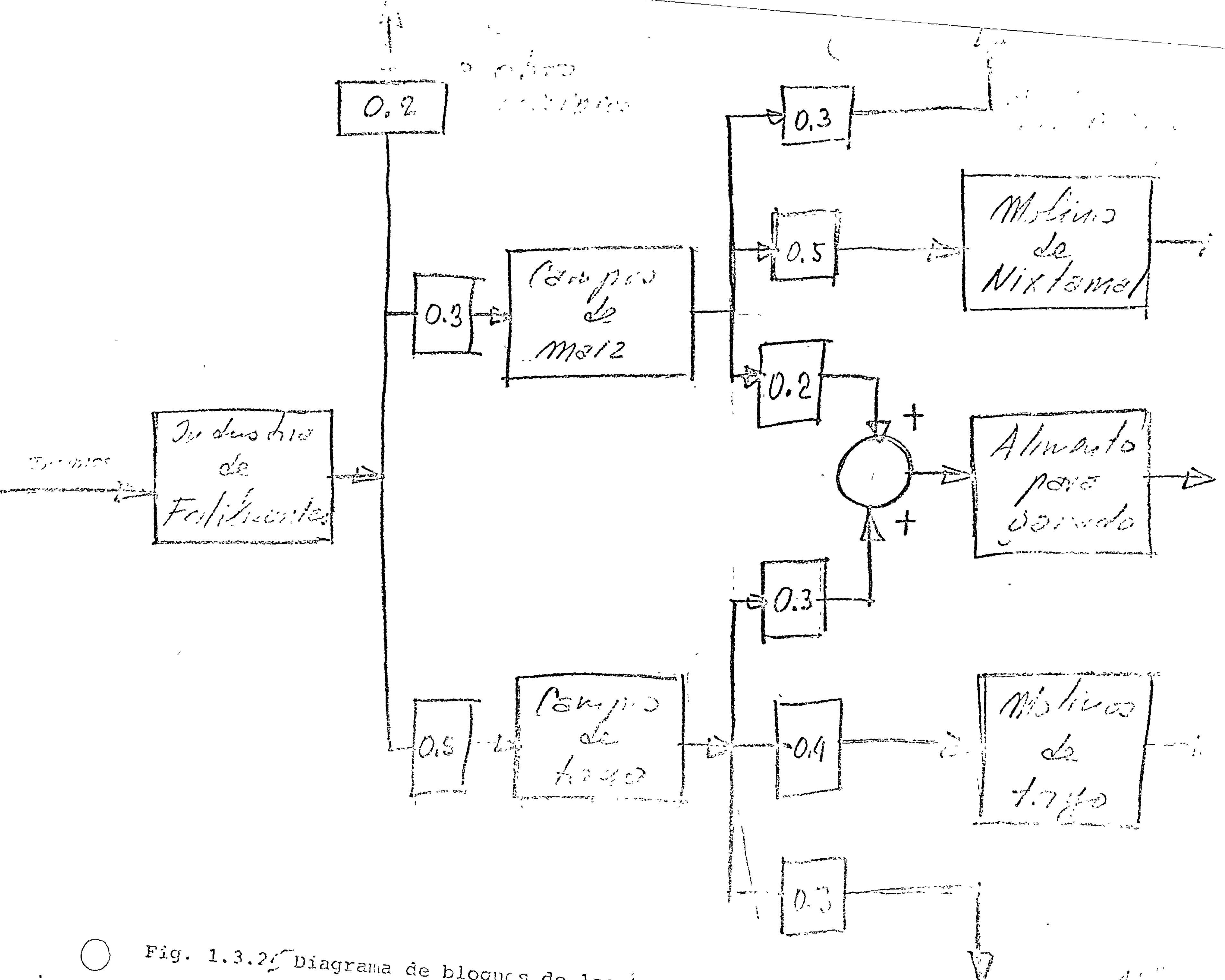


Fig. 1.3.2 Diagrama de bloques de las transacciones del ejemplo 1.3.a

*Muchos sistemas pueden describirse mediante variables discretas en lugar de continuas. *Estos casos se presentan cuando los resultados de la toma de una decisión o una transformación son números enteros, o cuando la ausencia o presencia de un atributo se emplea para describir el resultado de una acción. *Pueden encontrarse muchas situaciones que solamente pueden describirse mediante números enteros. *Por ejemplo, en el estudio del sistema de atención de clientes en un banco, la gente que espera (un atributo muy importante del sistema) es un número siempre entero representa un estado del sistema. (fig. 1.3.25)

1.3.8 Sistemas discretos 1-5-5

*Son muy frecuentes

*Sus variables son números enteros

*Ejemplos de sistemas discretos 1-5-6

*

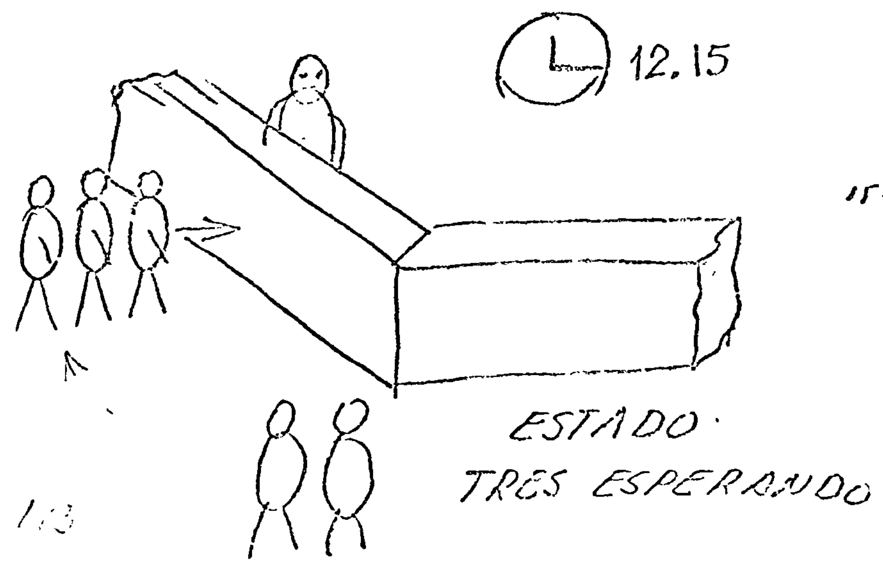


Fig. 1.3.25 Atención a clientes en un banco.

*Si (en) un determinado intervalo de tiempo se atiende de 1 gente, pero llegan otras 2, se tiene un cambio o transición de estado. (fig. 1.3.27)

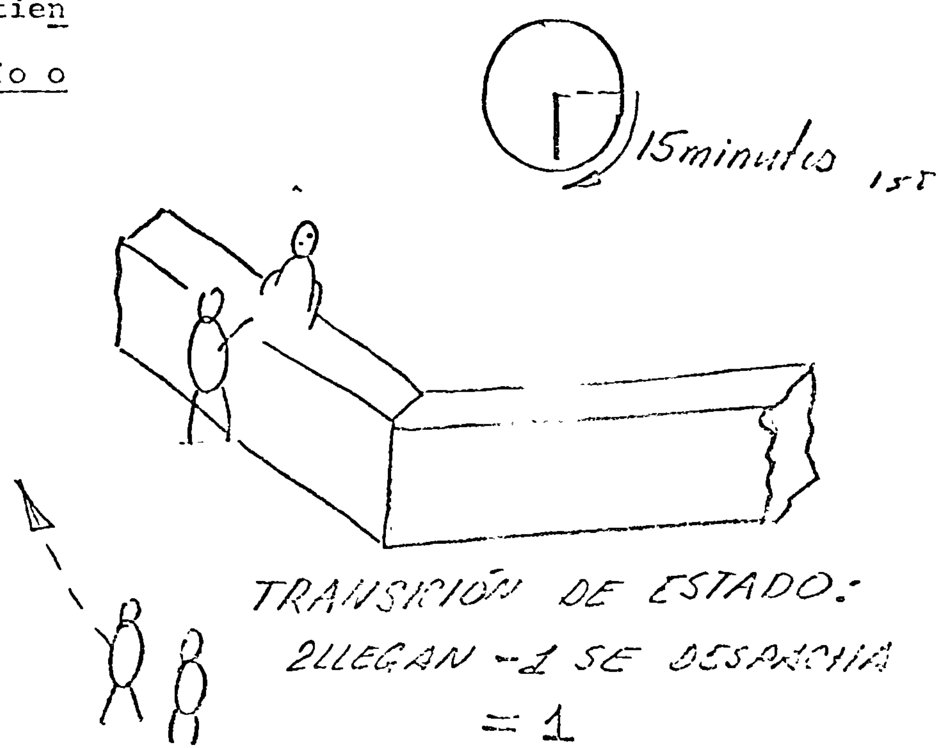
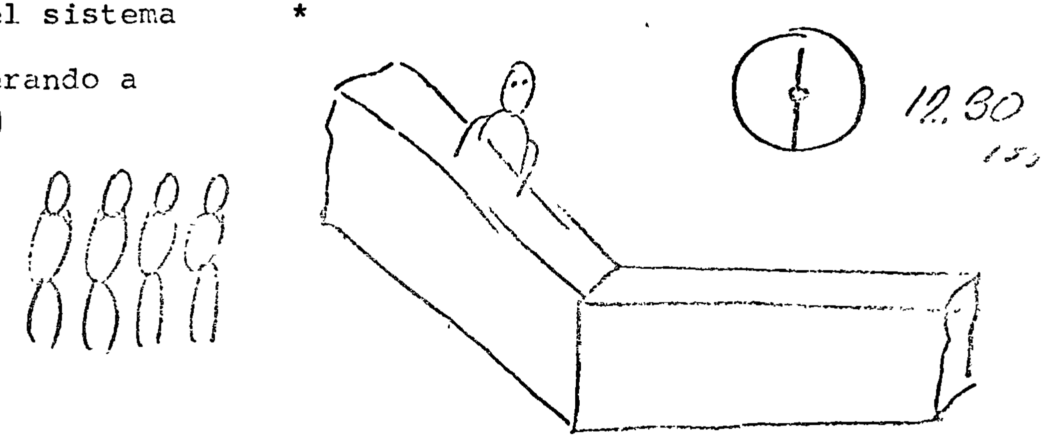


Fig. 1.3.27 Transición de estado

144

*Debido a esta transición de estado, el sistema a cambiado de un sistema con N clientes esperando a un sistema con N+2-1 esperando. (fig. 1.3.28)

*



Nuevo Estado =

Estado anterior + transición
3 + 1 = 4

Fig. 1.3.27 Nuevo estado

145

*Otro ejemplo de sistema con estados discretos es la iluminación de un cuarto que puede estar prendida o apagada, como ilustra la fig. 1.3.29

*

196

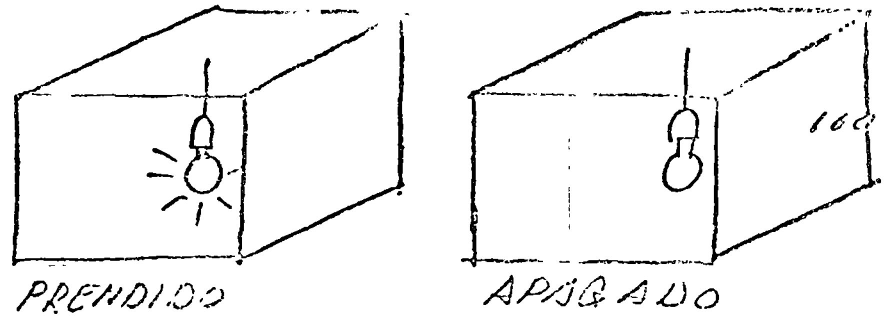


Fig. 1.3.29 Ejemplo de sistema con dos estados

Debe mencionarse que todo sistema con variables contínuas puede discretizarse. *Para la solución de problemas relacionados con sistemas, se emplea cada día más frecuencia la computadora digital. Si el sistema es de variables constínuas, es necesario primero discretizarlo a fin de analizarlo mediante la computadora digital. En el capítulo 3, relativo al procesamiento de la información, se tratará el problema de discretización de sistemas contínuos.

*Todo sistema contínuo puede discretizarse

-167

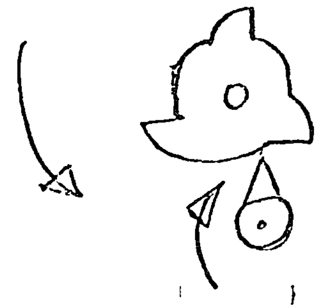
177

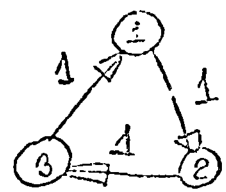
En sistemas del tipo discreto, en general interesa conocer cómo se realiza la transición de un estado al siguiente.

*Dicha transición puede ser determinística o probabilística.

*Unos ejemplos servirán para ilustrar estos conceptos: La fig. 1.3.30 muestra un contador de tres vueltas en el cual cada vuelta del eje se hace avanzar un número al contador, y al llegar a la cuarta vuelta regresa a uno. El movimiento puede representarse mediante un diagrama de flujo donde el número 1, asociado a los segmentos dirigidos, indica que las transiciones del estado 1 al 2 al 3 al 1 al 2 ... se realiza con probabilidad 1, es decir, siempre pasa el sistema de un estado al otro en el orden señalado. La misma información sobre la transición de estado puede también suministrarse empleando la matriz mostrada en la fig. 1.3.30

*Transiciones determinísticas o probabilísticas 162





DE \ A	1	2	3
1		1	
2			1
3	1		

Fig. 1.3.29 Sistema con transición de estado determinística

*Considérese ahora un problema de mercadotecnia: una persona puede o no ser un cliente. Así que asóciese 0 y 1 a estas dos posibilidades.

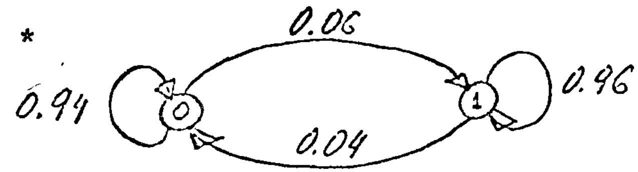
*En la fig. 1.3.31 los segmentos dirigidos y los números asociados a ellos indican la dirección de la transición de estado y la probabilidad con que esta se presenta. Así por ejemplo, un cliente (estado 0) con 0.06 de probabilidad pasa a no ser cliente (estado 1), y con 0.94 de probabilidad seguirá en el estado 0, es decir, siendo cliente (Fig 1.3.31 parte inferior)

*En los últimos dos ejemplos figs. 1.3.30, 1.3.31 se ilustra el empleo de diagramas de flujo de señales para mostrar los cambios de estado en sistemas discretos. Si el sistema es discreto como en el caso del contador, los nodos corresponden a los estados de sistema y el segmento dirigido indica la transición de estado. El número asociado al segmento en un sistema determinístico es la unidad, es decir, el sistema tiene

* Problema de mercadotecnia 164

Estado	Descripción
0	ser cliente
1	no ser cliente

* 165



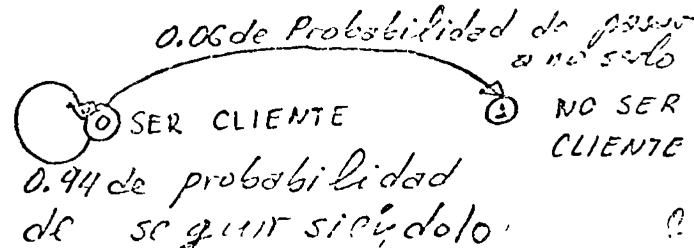
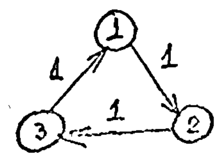
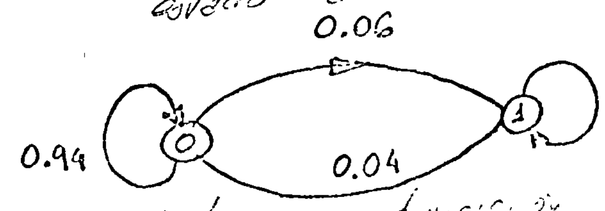


Fig. 1.3.31 Sistema con transición de estado probabilístico

* 166



Sistema con transición de estado determinística

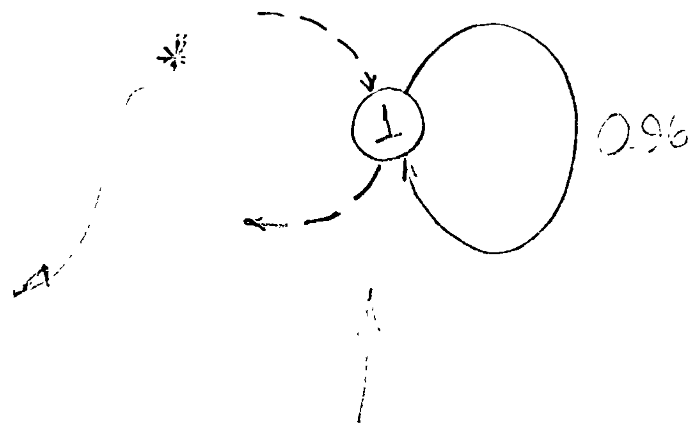


Sistema con transición de estado probabilística

Fig. 1.3.32 Empleo de diagramas de flujo de estado para mostrar transiciones de estado una probabilidad 1, que significa "siempre", de pasar de un estado a otro. En sistemas probabilísticos, el número asociado al segmento indica la probabilidad del cambio de estado. (Fig 1.3.32)

*Así por ejemplo, el diagrama muestra que el sistema tiene un 0.96 de probabilidad de permanecer en el estado 1.

167
203



Probabilidad de permanecer en el estado 1

*También pueden emplearse matrices para mostrar la transición de un estado a otro. ((Fig 1.3.32)) Si el sistema es determinístico como el contador, los elementos de la matriz son unitarios. Si es probabilístico, entonces los elementos de la matriz son probabilidades. En resumen, pueden emplearse diagramas de flujo o de señales o matrices para indicar los cambios de estado.

*

168
204

		A		
		1	2	3
DE	1		1	
	2			1
	3	1		

		A	
		0	1
DE	0	0.94	0.06
	1	0.04	0.96

Fig. 1.3.32 Empleo de matrices para mostrar transiciones de estado

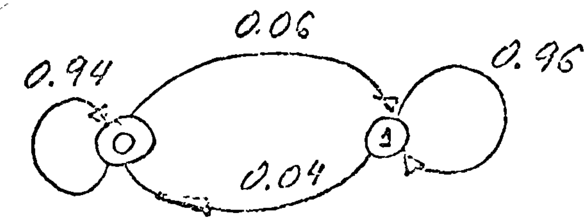
1.3.9 Diagramas de decisión

*Existen múltiples actividades de carácter secuencial y discreto en las cuales un evento tiene dos o más alternativas. (Fig 1.3.38)

*Así, por ejemplo, en el caso del problema de mercadotecnia, un cliente (estado 0) puede seguir siendo un cliente (seguir en el estado 0), *o dejar de serlo (pasar al estado 1).

107 →

*

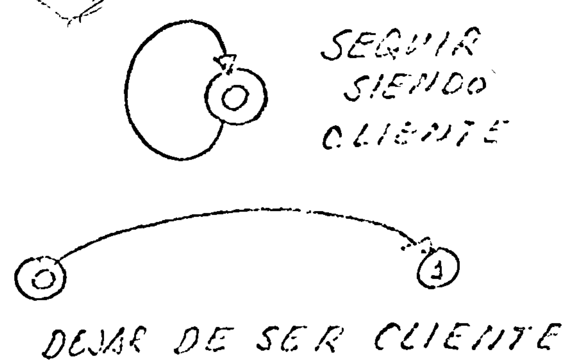


A

DE	0	1
0	0.94	0.06
1	0.04	0.96

Fig. 1.3.38 Sistema con eventos de alternativa múltiple

*



*El evento, la acción de entrar una persona a la tienda, tiene dos alternativas: una permanencia en el estado de "cliente" o un cambio al estado de no cliente.

*Dichos cambios de estado como respuesta a una acción, pueden también representarse en un árbol de transiciones. El número asociado a los segmentos de recta indica la probabilidad del cambio; obsérvese que la suma de probabilidades correspondientes a los posibles cambios desde un estado es igual a la unidad. (FIG 1.3.35)

170
202

* EVENTO:

Acción de la persona

ALTERNATIVAS:

1. Permanecer en estado presente
2. Cambio de estado

204
171

*

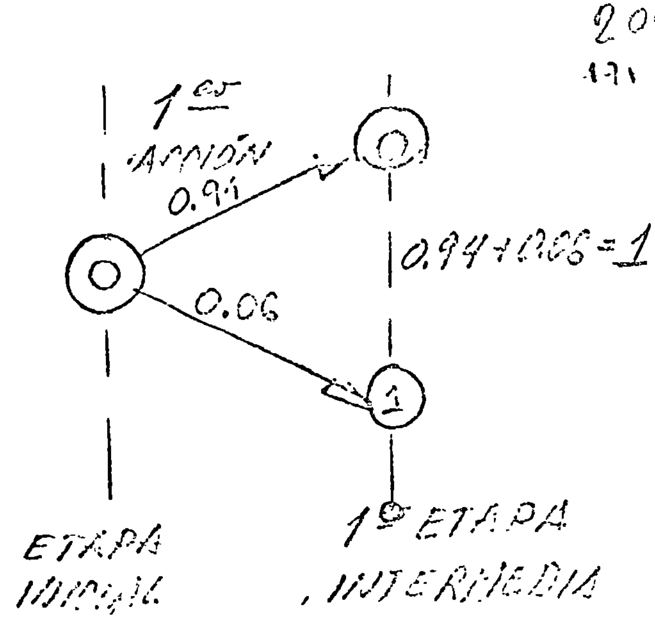


Fig. 1.3.35 Arbol de decisiones después de la 1er. acción

*Si se realiza una segunda acción "visita a la tienda", el árbol de transiciones adquiere "ramas" adicionales.

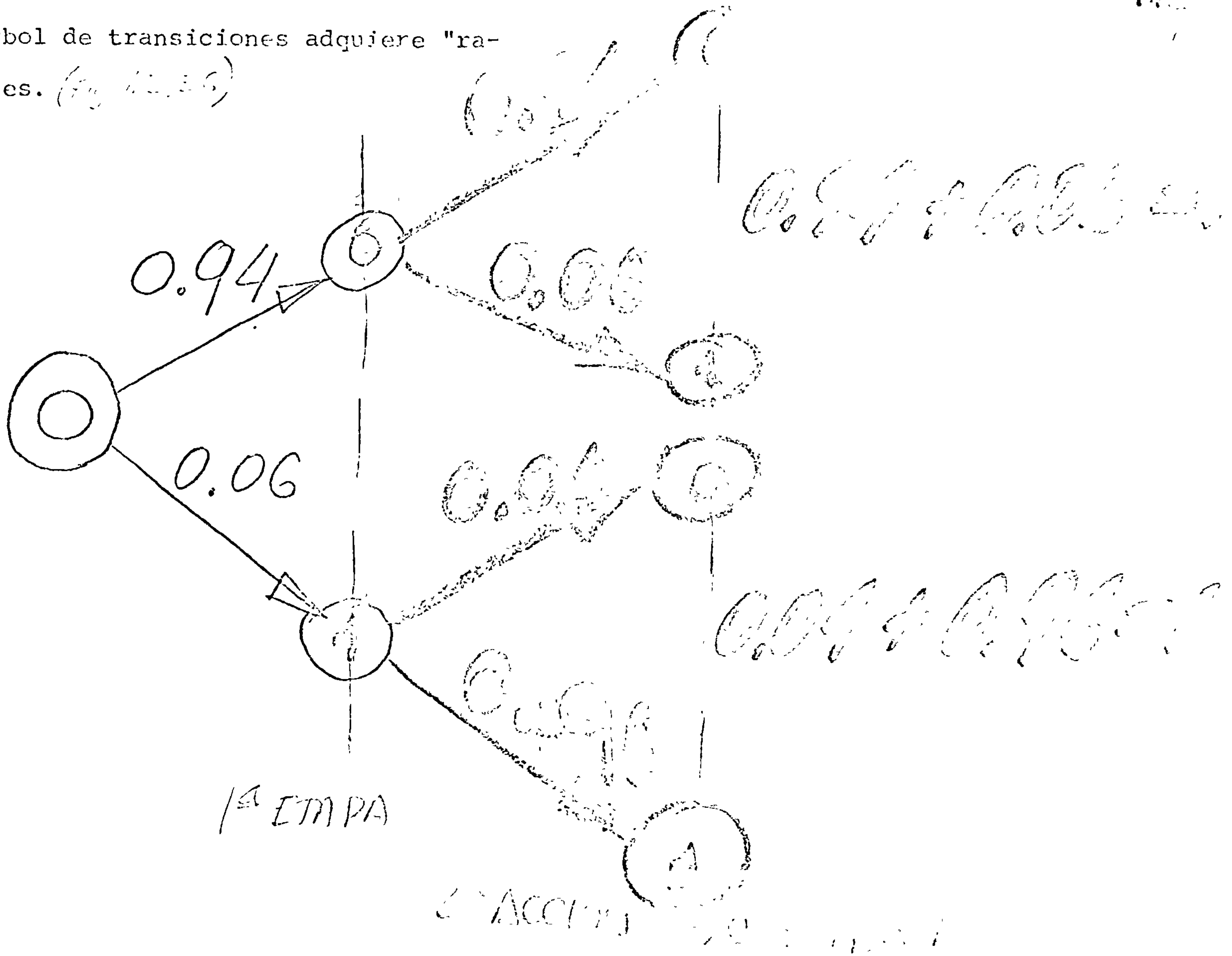
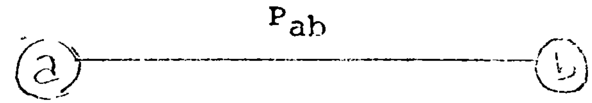


Fig. 1.3.3 Arbol de decisiones después de 1

*Si se designa con P_{ab} la probabilidad de pasar del estado "a" al estado "b", se puede establecer para este sistema:

* 

173

$$P_{aa} + P_{ab} = 1$$
$$P_{ba} + P_{bb} = 1$$

*y la siguiente matriz de probabilidades de transición de estado, empleando esta matriz, debe hacerse notar que las anteriores relaciones implican que la suma de probabilidades en cada renglón es ~~nula~~ uno.

*

A

DE	a	b	Σ
a	P_{aa}	P_{ab}	1.
b	P_{ba}	P_{bb}	1.

Empleando el árbol de transiciones, pueden resolverse algunos problemas de interés, como el que se señala a continuación.

*Sea P_0°, P_1° las probabilidades de que el sistema (la persona) esté inicialmente (antes de entrar en la tienda) en los estados 0 y 1 respectivamente.

*Probabilidad de estar en: 174

P_0° Estado 0 (ser cliente)

P_1° Estado 1 (no ser cliente)

*Considerando P_0° y P_1° como componentes de un vector que se conoce con el nombre de vector de estado, en este caso vector de estado inicial. Se designará (P_0', P_1') al vector de estado correspondiente a la primera etapa, es decir, después de la primera acción, que en este caso consiste en entrar a la tienda. *Como resultado de la primera acción el sistema pasa del estado inicial (P_0°, P_1°) al estado (P_0', P_1').

*Nótese que siempre se tiene:

*Es decir, la suma de componentes del vector de estado es igual a la unidad.

*En una etapa determinada, el sistema puede hallarse en el estado 0 ó 1. No existe ninguna otra posibilidad. Además, como el sistema no puede estar simultáneamente en los dos estados, se trata de eventos mutuamente exclusivos y también exhaustivos, ya que cubren todas las posibilidades, de

* (P_0°, P_1°) Vector de estado inicial

$(P_0^{\circ\prime}, P_1')$ Vector de estado en la 1a. etapa

219

$$*(P_0^\circ, P_1^\circ) \xrightarrow{\text{Acción}} (P_0', P_1')$$ 175

estado inicial — estado en la 1a. etapa

* $$P_0^0 + P_1^0 = 1$$ 17.6
$$P_0' + P_1' = 1$$

* Suma de componentes del vector de estado = 1

* 0 y 1 177

son estados mutuamente exhaustivos

ahí que $P_0 + P_1 = 1$.

*A continuación se determinará el estado en la primer etapa, (P'_0, P'_1), si se conoce el estado inicial y la matriz de transición.

*Para que el sistema en la primera etapa se encuentre en el estado P'_0, pueden haberse presentado dos situaciones:

1. El sistema se halle inicialmente en estado 0, evento que tiene una probabilidad de P_0^0 y que se hubiese presentado una transición de 0 a 0, acción que tiene una probabilidad de presentarse de P_{00}.

2. El sistema se encuentre inicialmente en estado 1 (probabilidad P_1^0) y se hubiese presentado una transición de 1 a 0 (probabilidad p_{10}).

* Problema: 178

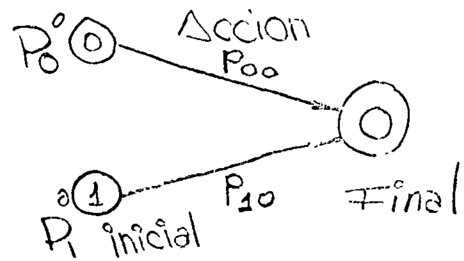
Encontrar el estado en la 1a. etapa 217

Datos:

Matriz de transición

estado inicial

*Acciones que llevan al estado ○ 179



*Aplicando la metodología básica del cálculo de probabilidades se tiene:

*Empleando notación matricial, las relaciones anteriores quedan:

*Es decir:

*En otro tipo de problemas también se emplean los diagramas de decisiones o árboles de transiciones como se verá, al respecto, al estudiar problemas de asignación de recursos en programación dinámica (en el capítulo 6). ~~Como un ejemplo de aplicación de la programación dinámica, se estudiarán los diagramas de secuencia en el tiempo o PERT en el capítulo 6,~~ ya que estos diagramas son muy útiles en el análisis de operaciones y en la planeación de la producción.

180

$$*P_0' = (P_0\ P_{00} + P_1\ P_{10})$$

$$P_1' = (P_0\ P_{01} + P_1\ P_{11})$$

$$*(P_0',\ P_1') = (P_0^0,\ P_1^0)\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

* Estado siguiente $\equiv$ estado anterior $\times$ matriz de transición

181

* Ejemplos de aplicación de árboles de decisiones:

Asignación de recursos

~~Diagramas de Pert~~

*Otra configuración importante que se emplea con frecuencia en procesos de toma de decisiones, organizaciones y equipo es la jerarquía o de niveles múltiples. En el capítulo siguiente se estudiará este tipo de estructuras.

*En diversos problemas de análisis de sistemas, el problema de organización y manejo de la información es de gran importancia. *Un formato como el mostrado en la fig. 1.3.37a, permite identificar elementos por su posición en una columna y un renglón, así por ejemplo, el elemento e_{B2}, correspondiente al renglón B y a la columna 2.

Otra forma estructural que se emplea para codificar información y manejarla posteriormente en computadora, son los formatos mostrados en la fig. 1.3.37b, en los cuales una serie de números o caracteres alphanuméricos tienen un significado determinado de acuerdo con su posición, por ejemplo,

*Estructuras jerárquicas 182

221

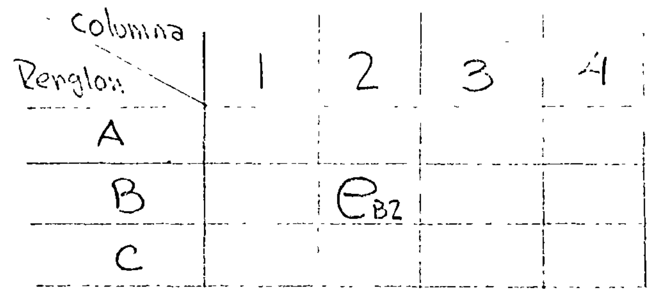
222

223

1.3.10 Formatos, códices y diagramas lógicos

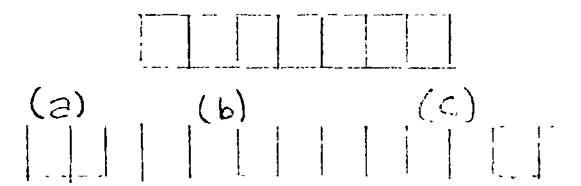
224

*Organización de la información 183



(a)

225



Formatos para codificar información

(b)

Fig 1.3.37 Formatos ...

en el control de cuentas bancarias, los primeros dos números pueden representar el año de apertura de la cuenta, los siguientes tres el número de la sucursal y los últimos, el número de la cuenta. (Fig 1.3.37 C)

*Otro elemento estructural importante, que igual que los formatos y códices mencionados encuentran gran uso en programas de computación, son los diagramas lógicos, mostrado en la fig. 1.3.38. Estos se verán con detalle en el capítulo 3 relativo a computación.

*Antes de continuar, debe notarse que en las diferentes etapas y fases, el análisis de un mismo sistema puede necesitar diferentes estructuras.

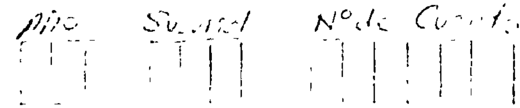
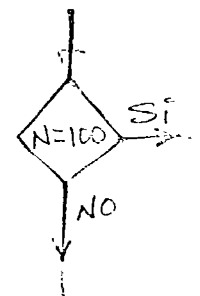

(c)

Fig. 1.3.37 Formatos para codificar información

*



184
226

Fig. 1.3. Diagrama lógico

185

*La estructura depende ~~de~~ del sistema y de su fase y etapa de análisis

*Los problemas de contaminación y en general de deterioro del medio ambiente pueden citarse entre las causas más importantes que han vuelto a despertar interés en el estudio de la ecología.

*La ecología es la ciencia que estudia las relaciones de los seres vivientes entre sí y con el medio en que viven.

*Los sistemas ecológicos se caracterizan por que en ellos fluye materia en forma circular usándose y reusándose.

1.3.11 Diagramas de flujo de materia y energía

* Ecología 186 229

230

* Ecología ≡ 187

Estudio de sistemas con seres animados

*En sistemas ecológicos fluye la materia y energía 188 231

La materia de usa y reusa

La energía se degrada

~~*Los grandes sistemas tienen impacto sobre la ecología.~~

Debe considerarse que, además existe en ellos, un flujo de energía que no tiene carácter circular y que termina de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica degradándose en forma de calor. Para representar los flujos de materia y energía en este tipo de sistemas se emplean diagramas con símbolos.

232

189

*Muchos sistemas que debe analizar un profesionista tienen un impacto importante sobre la ecología. Por eso es necesario tomarla en cuenta, para evitar posibles efectos colaterales indeseables. Debido a ello, es determinante que el analista de sistemas posea un conocimiento operativo acerca los diagramas de flujo de materia y energía en sistemas ecológicos. Estos diagramas ~~tienen la ventaja de poderse~~ (pueden además) utilizarse para modelar el funcionamiento de otros sistemas donde se presentan fenómenos de transporte de materia y energía.

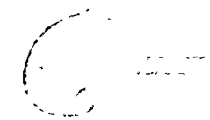
*Los grandes sistemas tienen impacto sobre la ecología

*El símbolo mostrado en la fig. 1.3.38(a) representa en diagramas de flujo de materia y energía una fuente de energía como pueden ser el sol, combustibles fósiles, etc.

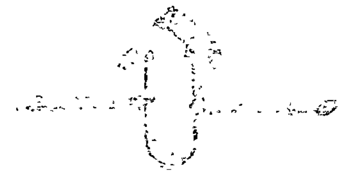
*En sistemas del tipo que se estudia en esta sección, también hay elementos donde se almacena energía en una forma pasiva, como puede ser el bombeo de combustible a un tanque, para representar este almacenaje se utiliza el símbolo de la fig. 1.3.38(b)

*Como en todo sistema donde hay flujo de energía, una parte de la misma se disipa en forma de calor, otro símbolo de utilidad es el mostrado en la fig. 1.3.38(c) que corresponde a un suministro de calor.

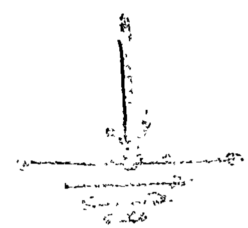
*Numerosos sistemas reciben su energía en forma de ondas de radiación. Para representar la recepción de energía en esta forma se emplea el símbolo de la fig. 1.3.38(d)



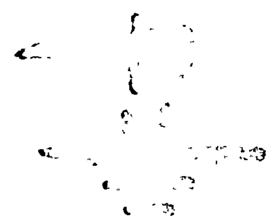
(a) Fuente



(b) Almacenamiento pasivo



(c) Sumidero de calor



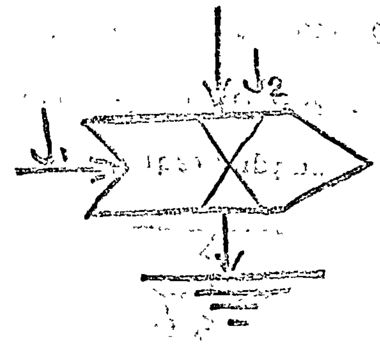
(d) Receptos de energía de radiación

*En muchos procesos, un flujo de energía hace posible que surja otro flujo de energía. Por ejemplo, el flujo de fertilizantes hace posible mayor producción agrícola. Dicha interacción puede presentarse mediante un símbolo como el de la fig. 1.3.38 (e)

*El símbolo hexagonal de la fig. 1.3.38 (f) representa un subsistema o parte de uno donde la energía potencial almacenada en el mismo es realimentada a la vez que activa el trabajo subsecuente realizado por la unidad. Estos procesos se conocen como autocatalíticos. Este proceso representa una combinación de almacenamiento pasivo, con compuerta y sumidero.

194 237

*

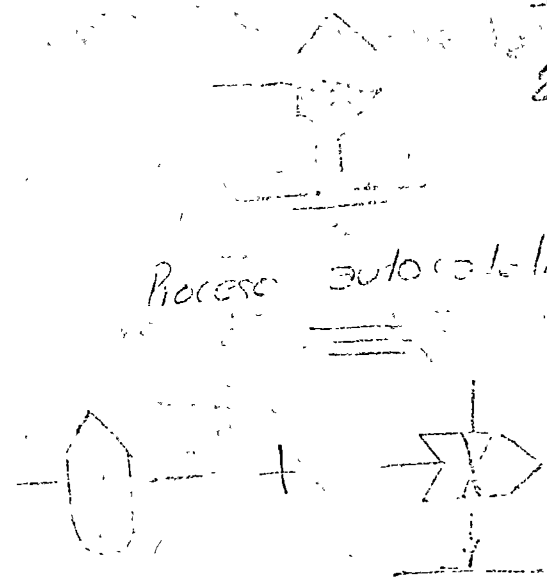


(e) Compuerta

Fig. 1.3.38 Símbolos para diagramas de flujo de materia y energía (continua).

195 238

*



(f) Almacenamiento pasivo compuerta

*Un proceso autocatalítico puede estar energizado mediante una recepción de energía en forma de radiaciones. En plantas verdes, la radiación solar, que es energía absorbida por estas, activa otro flujo de energéticos en ella (substancias universales de la tierra, bóxido de carbono) para realizar el proceso de fotosíntesis, siendo almacenada la energía producida por este proceso en la propia planta. Para representar este proceso se emplea el símbolo de la fig. 1.3.38 (g)

* 196

239

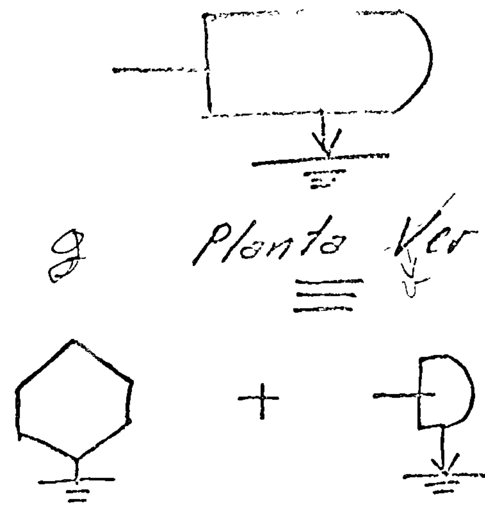
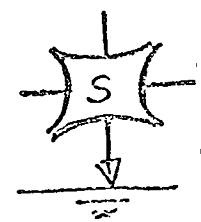


Fig. 1.3.38 Símbolos para diagramas de flujo de materia y energía (contínua)

*El símbolo de la fig. 1.3.38 (h) representa el control de un flujo mediante acción de interrupción, o sea un acto que solo tiene dos estados. El proceso de reproducción es de este tipo, o sea la acción de gestación es un acto que solo tiene dos estados, uno de ellos controla un proceso contínuo posterior.

* 197

240



h

Interruptor

Interruptor → Acto con 2 estados

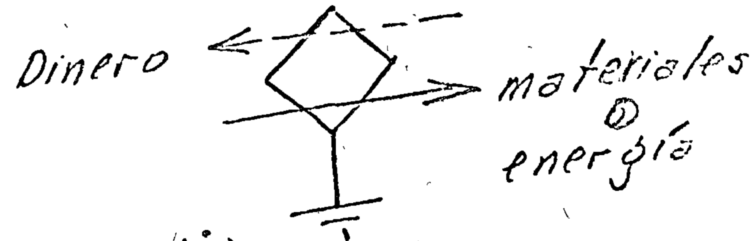
(h) Ejemplo: gestación

*Tanto en procesos del tipo que se estudia en esta sección como en fenómenos económicos, a un flujo de energía o materiales en un sentido corresponde un flujo monetario en sentido contrario. Esta clase de transacciones se representa con el símbolo de la fig. 1.3.3~~8~~9(i)

*La suma de dos flujos de energía compatibles se representa con el símbolo de la fig. 1.3.3~~8~~9(j)

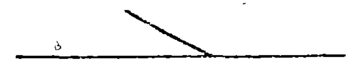
*Muchos componentes desarrollan una reacción proporcional contraria a la acción aplicada. Además, parte de la energía que reciben la almacenan a fin de devolverla al resto del sistema cuando cesa la acción sobre la componente. Dada la similitud de este comportamiento con el de una impedancia en un circuito eléctrico, se les conoce como impedancias activas y se representan con el símbolo de la fig. 1.3.3~~8~~9(k)

*



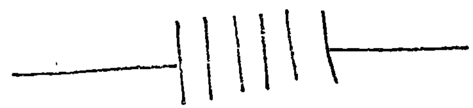
(i)

* 199



(j) Punto de suma 242

*

 243

(k) Impedancia activa

Fig. 1.3.3~~8~~9 Símbolos para diagramas de flujo de materia y energía (continuación)

*Con ayuda de estos símbolos, puede represen tar se el flujo de materia y energía en sistemas complejos con componentes animales o de otra naturaleza.

Supóngase una comunidad formada por plantas (fig. 1.3.~~39~~ 40) que recibe energía solar.

*Durante el día la fotosíntesis procesa la energía solar que en combinación con las materias inorgánicas extraídas del suelo; el agua y el bióxido de carbono se convierte en materia orgánica que se almacena en las plantas, además en como oxígeno, que se devuelve a la atmósfera y en calor que se disipa. Empleando símbolos químicos bien conocidos, este proceso puede representarse:

1.3.12 Ejemplos de diagramas de flujo de materia y energía

200

*

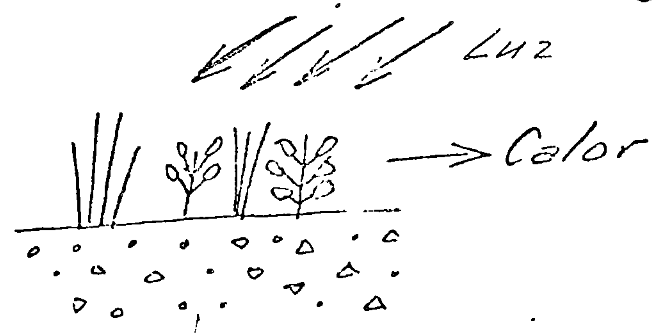


Fig. 1.3.~~39~~ 40 Comunidad vegetal

*Durante el día hay fotosíntesis: 201

Energía + materia inorgánica $+H_2O+CO_2$

$\longrightarrow$ materia orgánica $+ O_2 +$ Calor

*Durante la noche las plantas respiran; consumen oxígeno y materias orgánicas para producirse elementos minerales, bióxido de carbono, agua y calor. Simbólicamente este proceso se representa como:

*Durante la noche hay respiración: 202

Materia orgánica + O_2 $\longrightarrow$

Calor + CO_2 + H_2O+ materia inorgánica +

+ calor

*Combinando las representaciones de los dos procesos señalados, se nota un intercambio de materia entre los procesos de fotosíntesis y respiración. Los productos de salida del proceso de fotosíntesis son productos de entrada o insumos del proceso respiratorio.

A su vez los productos del proceso respiratorio son insumos del de fotosíntesis.

Día: Fotosíntesis

Energía + materia inorgánica + H_2O + CO_2 $\Longrightarrow$ materia orgánica + O_2 + calor

Calor + materia inorgánica H_2O + CO_2 $\Longleftarrow$ materia orgánica + O_2

Noche: respiración

*La naturaleza circular del flujo de materia que se acaba de describir puede representarse con ayuda de los símbolos estudiados en la sección anterior de la manera mostrada en la fig. 1.3.~~39~~ 41

* El flujo de energía de esta proceso no tiene la naturaleza circular del anterior.(fig. 1.3.42)

*Nótese que el proceso respiratorio es autocatalítico. Este proceso emplea energía almacenada en las plantas y controla otros flujos de materia y energía.

>En el proceso de fotosíntesis se recibe energía solar que controla un proceso autocatalítico.

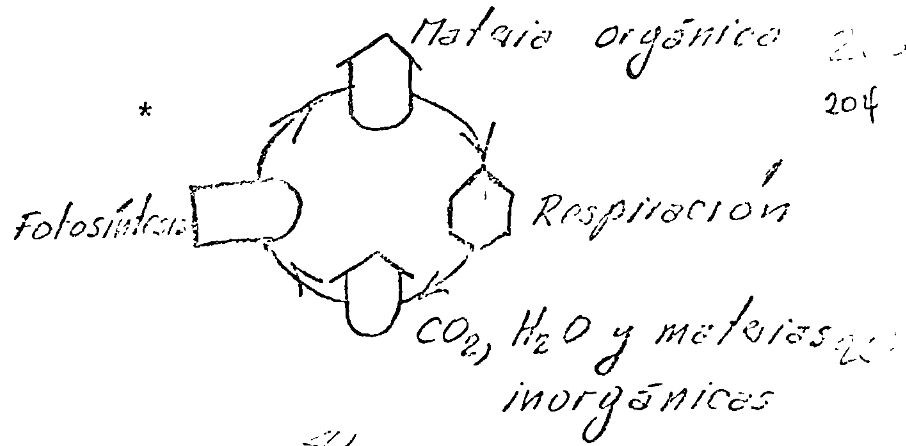


Fig. 1.3.~~39~~ 41 Flujo de materia

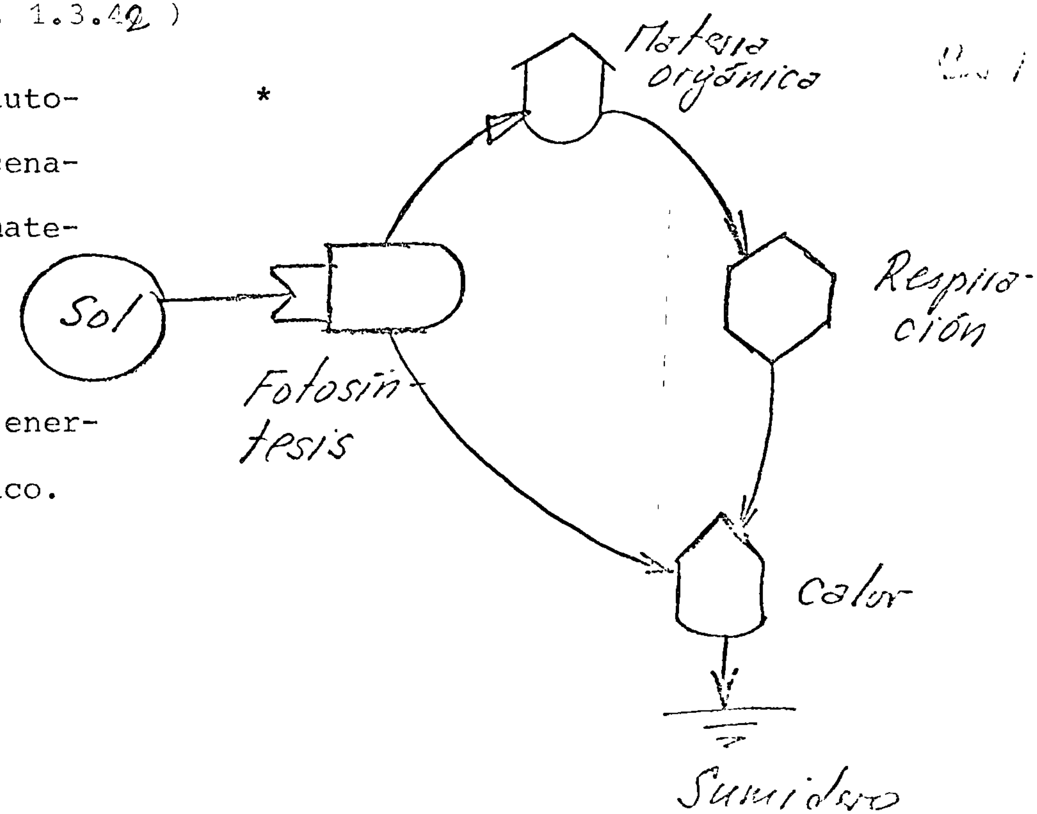


Fig. 1.3.40 Flujo de energía

*Obsérvese además, que la materia se usa una y otra vez (fig. 1.3.43)

*

206

252

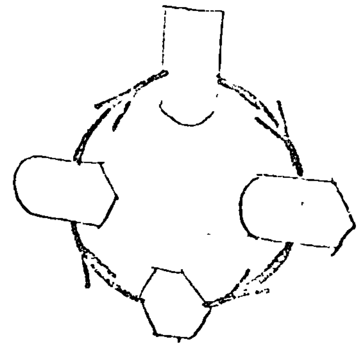


Fig. 1.3.43 Flujo circular de materia

*El flujo de energía tanto en este sistema sencillo como en cualquier otro, no tiene esa naturaleza circular: siempre una parte de la energía es disipa en forma de calor, tal como muestra el diagrama en la fig. 1.3.42/

*

207

253

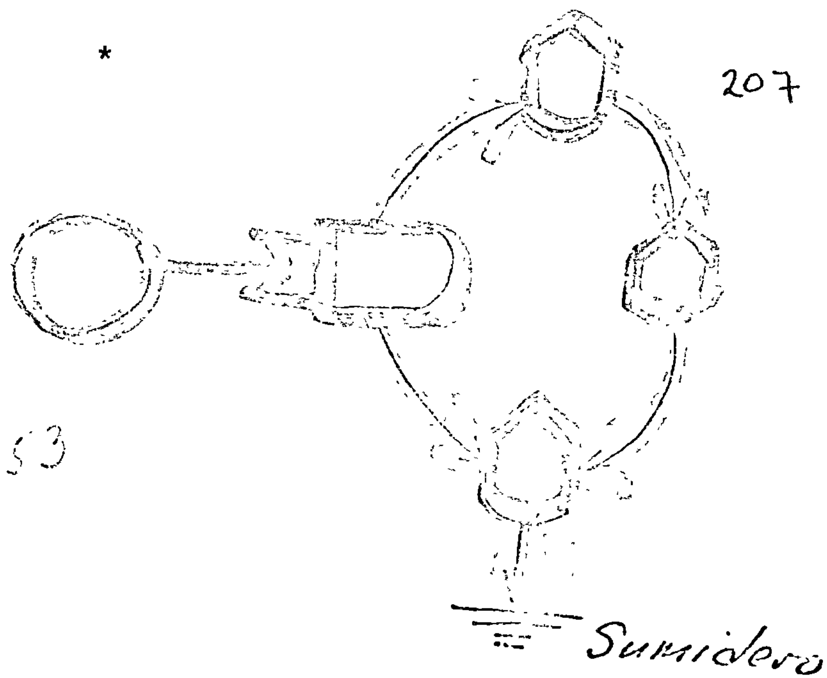


Fig. 1.3.42/ Flujo no circular de energía

Folio 254

1.3.13 Características distintivas

255

Una vez determinada la estructura de un sistema, es necesario describir cualitativamente aquellos parámetros y variables que caracterizan al sistema en estudio y lo distinguen de otros con igual o similar estructura. De estas características dependen los conocimientos que deben tener los integrantes de un grupo de análisis de sistemas, por ejemplo, si los aspectos distintivos del sistema son eléctricos, en el grupo de análisis deben predominar los ingenieros electricistas. ~~y si son económicos, entonces necesitan ser de su área respectiva y así sucesivamente.~~

256

*Hay que tener presente, como se señaló ya en este capítulo, que las características distintivas del análisis de un sistema cambian según la fase y la etapa del estudio, requiriendo de diferentes conocimientos en los analistas.

*Las características distintivas cambian según la fase del análisis 208

No existe una secuencia fija en el análisis con relación a los problemas de determinación de estructura y de características distintivas. *Frecuentemente, la ~~precisión~~ determinación de aspectos distintivos antecede a la determinación de la estructura, ya que de estos depende, en la mayoría de los casos, la estructura que se emplea para describir el sistema; *si este, por sus características corresponde a control, se emplea un diagrama de flujo o de bloques, y si se trata de un problema ecológico, se recurre a un diagrama de flujo de energía y materia; ~~finalmente~~ y si se refiere a un problema de información, se usa una estructura formada por palabras.

*[illegible] Chesnut (ref. [illegible]), muestra (cuáles) características distintivas típicas de los sistemas. los siguientes:

209

*La estructura que se emplea para la descripción del sistema puede depender de sus características distintivas

*Para un sistema de control, se emplean diagramas de bloque o flujo

210

*Características distintivas típicas de los sistemas.

1) Físicos
2) Biológicos
3) Juicios de [illegible]

*Entre las características físicas de un sistema, pueden citarse las mecánicas, eléctricas, hidráulicas y las químicas. El conocimiento de estas permite no solo fijar las estructuras más apropiadas para describir al sistema, sino también incluir en esta estructura una descripción de las diversas variables y de las funciones de transferencia asociadas a los diagramas que describen a los sistemas.

* Características físicas: 211 259

mecácnico

eléctrico

hidráulico

químico

*Los sistemas biológicos pueden ser botánicos, zoologicos o bien ecológicos. Al identificar en un sistema esta característica distintiva, es fácil precisar el tipo de estructura que debe emplearse para describirlo.

* Características biológicas: 212 260

botánicas

zoológicas

ecológicas

*Un grupo importante de características distintivas lo constituye conceptos que pueden agruparse bajo el nombre de juicios de valor. Entre estos cabe citar el costo, comportamiento y confiabilidad. El primero de ellos puede corresponder al

* Juicios de valor : 213 261

costo

comportamiento

confiabilidad

costo de implementación de un sistema, de operación o retiro. Es factible definir el comportamiento de un sistema en diferentes formas, como puede ser la eficiencia del sistema y la velocidad de respuesta. La confiabilidad puede referirse a todo el sistema, o a una parte del mismo.

*En este capítulo se ha señalado que el análisis de sistemas es un importante auxiliar en otras disciplinas, y que establece una secuencia lógica en la solución de problemas complejos y abarca una metodología de uso general que puede aplicarse en diferentes ramas de la ciencia y técnica.

*La metodología de sistemas, al hacer hincapié en los diferentes factores que intervienen en un problema, disminuye el peligro de que se pasen por alto elementos que afecten en forma importante al sistema.

262
~~214~~

*Análisis de sistemas:
Es una metodología de uso general

263
~~215~~

*El análisis de sistemas estudia la interacción entre factores

Finalmente, todo análisis de sistemas debe iniciarse con la descripción del sistema para la cual se emplean diversos diagramas de acuerdo con sus características distintivas. En este capítulo y en el siguiente se incluyen las estructuras más importantes que se emplean para describir sistemas.

1.4 Problemas

1. Una fábrica se especializa en la producción de envases de plástico. Describa las diversas bases de la vida de un envase de 1 litro para aceite desde su concepción hasta su retiro.

2. Describa los pasos que sigue el siguiente proyecto: diseño de una carretera de 2 carriles con carpeta de asfalto entre las localidades A y B.

3. Muestre las transacciones económicas del ejemplo 1.3.a empleando un diagrama de flujo de señales.

4. La industria minera y metalúrgica en un país consume el 10% de sus productos, exportó el 30% y vende el 60% a la industria de transformación. El 5% de su producto es consumido por

la industria minero y metalúrgica, el 45% por la propia industria de transformación, el 20% se exporta, y el 30% restante se vende a consumidores finales. Empleando un diagrama de bloques, muestre ~~a~~ las transacciones económicas.

5. Repita el problema anterior empleando un diagrama de flujo de señales.

6. Empleando una matriz como la mostrada en la fig. 1.4.1, muestra las transacciones económicas del problema 4.

De \ A	Ind minera y met.	Ind. de transf.	Exportación	consumo finales
Ind. min. y met.				
Ind. de transf.				
Otro sector				

Fig. 1.4.1 Matriz para el problema 6.

7. El sistema de educación primaria en un municipio tiene en el año de 1974 los alumnos que muestra la matriz de la fig. 1.4.2. En esta matriz se muestra también el porcentaje que se espera aprueben y sigan los estudios, aprueban y se retiran, reprueban y repiten, reprueban y se retiren y el número total que se estima van a regresar los diversos años de otras partes (fig. 1.4.2)

Año	Número de alumnos en 1974	Porcentajes: Aprobados que continúan	Aprobados que no continúan	Reprobados que repiten	Reprobados que no continúan	Nuevo ingreso
1	2000 (x_1)	60 (a_2)	30 (b_2)	5 (r_1)	5 (s_1)	2200 N_1
2	1500 (x_2)	62 (a_3)	28 (b_3)	5 (r_2)	5 (s_2)	300 N_2
3	1250 (x_3)	64 (a_4)	24 (b_4)	6 (r_3)	6 (s_3)	200 N_3
4	1050 (x_4)	52 (a_5)	26 (b_5)	12 (r_4)	10 (s_4)	150 N_4
5	850 (x_5)	72 (a_6)	20 (b_6)	5 (r_5)	3 (s_5)	130 N_5
6	700 (x_6)		92 (b_7)	5 (r_6)	3 (s_6)	130 N_6

Fig. 1.4.2 Estado de la educación primaria en un municipio.

Si se considera como estado del sistema el núme ro de alumnos en cada año escolar, encuentre el estado probable del sistema para 1975.

8. Empleando las variables mostradas en la matriz de la figura 1.4.2 y un superíndice para indicar el año, encuentre las relaciones entre el estado en el año 1974 y 1975 es decir entre los vectores siguientes:

$(X_1, X_2, \ldots X_6)^T$ y $(X_1, X_2, \ldots X_6)^{T+1}$

9. Empleando un diagrama similar al de la figura 1.3.31 e introduciendo un estado Θ para agrupar a todos los estudiantes que no son del municipio, muestre los cambios de estado de la fig. 1.4.2

Bibliografía

1. H. Chesnut, "Information Requirements for System Understanding". IEEE Trans. on System Science and Cybernetics, Vol SSC-6, No 1, pp 3-12 (enero 1970)

2. A.D. Hall, III, "There Dimensional Morphology of Systems Engineering" IEEE Trans. on System Science and Cybernetics, Vol SSC-5, No 2, pp156-160 (abril 1969)

3. V. Gerez Greiser y M.A. Murray-Lasso Teoría de Sistemas y Circuitos, Servicios y Representaciones de Ingeniería, S.A., Méx., D.F. (1972)

4. H.T. Odum, Environment, Power and Society, Wiley Interscience, Nueva York (1971)

5. Van Caourt Hare, Jr, "System Analysis, a Diagnostic Appoach" Harcourt, Brace & Wold Inc, Nueva York (1967)

TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS

PROGRAMACION LINEAL

MARCIAL PORTILLA ROBERTSON

FEBRERO DE 1976

INTRODUCCION

Hasta ahora se han analizado los modelos de teoría de espera o "colas", modelos de inventarios, modelos estadísticos, etc. Vamos a analizar en este tema a la Programación lineal ya que es una de las técnicas mas importantes que se han desarrollado dentro de la programación matemática para la administración científica.

En el siguiente esquema se pueden apreciar los distintos problemas existentes en programación matemática (P.M.).

DIMENSION EN EL TIEMPO · ELEMENTOS DEL PROBLEMA · INTERRELACIONES FUNCIONALES · VARIABLES O ACTIVIDADES

- P.M.
  - DISCRETA (finito)
    - DETERMINISTICA (si se conocen exactamente)
      - LINEAL
        - CONTINUAS
        - ENTERAS
        - MIXTAS
      - NO LINEAL
        - GENERAL
        - CONVEXA
        - CUADRATICA
        - GEOMETRICA
        - CONTROL OPTIMO
    - ESTOCASTICA (si solo se conocen sus propiedades)
  - CONTINUA (infinito)
    - DETERMINISTICA
    - ESTOCASTICA

Nuestro estudio quedará enfocado al problema de programación matemática discreta, determinística y lineal. Algunos de los problemas que pueden ser resueltos con los métodos de cómputo de Programación Lineal son:

1.- Distribución y envío de productos desde determinados puntos de origen a varios destinos, de tal manera de satisfacer una demanda, determinando de donde y cuánto se debe de enviar a cada punto, de tal forma de minimizar el costo total de transportación.

2.- Estudios de distribución de múltiples plantas o centros de producción de algún producto en común, de tal forma de descentralizar la producción y minimizar el costo <u>total</u> de producción-distribución en el sistema

3.- Planeación de la producción de una planta con demanda estacional para minimizar los costos totales de fabricación, basándose en la capacidad de planta instalada, pronósticos de ventas, costos de inventarios, y costos de fabricación.

4.- Asignación de recursos. Cuando no hay suficientes recursos o equipo para llevar a cabo cada actividad en la forma más eficiente, o cuando el proceso de producción se compone de varias actividades diferentes y existen varias alternativas en la manera de llevarlas a cabo, es posible determinar la combinación óptima entre las actividades y recursos disponibles.

5.- Mezclas de productos. Escoger de un conjunto de ingredientes de distintas propiedades y costos, las cantidades que nos proporcione un producto con ciertas características y al mínimo costo posible.

6.- Análisis de tráfico, enfocado a la sincronización de semáforos para optimizar el tránsito de vehículos

7.- Evaluación de puestos para determinar los pesos relativos de cada factor involucrado, eliminando así la utilización de la correlación múltiple, y así poder asignar a cada puesto, la persona que le rinda óptimos resultados a la empresa.

II CONCEPTO GENERAL DE PROGRAMACION MATEMATICA

Para poder aplicar algún método de programación matemática es necesario elaborar un modelo matemático que represente cada uno de los elementos del sistema, que a saber son:

MODELO MATEMATICO	SISTEMA ECONOMICO
i) Parametros o constantes	i) Bienes o recursos (requerimiento de los mismos en forma cuantificada.
ii) Variables de decisión	ii) Actividades económicas
iii) Funciones matemáticas de restricciones	iii) Interrelaciones entre las distintas actividades y el consumo o producción de recursos

iv) Funcíon objetivo a optimizar (maximizar o minimizar.)

iv) Objetivo económico a satisfacer.

quedando el planteamiento del problema establecido como:

$$\text{OPTIMIZAR } Z = f_0 (x)$$

sujeto a las restricciones $f_i (x) \geq b_i$

$f_j (x) = b_j$

$f_k (x) \leq b_k$.

Las actividades las vamos a representar por variables x_1, x_2, x_3, ..., x_n que van a formar un vector en el espacio euclidiano $x \in E^n$.

Las relaciones funcionales entre las diversas variables pueden ser de tres tipos:

- la función debe ser mayor

$$f_i \quad (x) \geq b_i \qquad i = 1, \ldots, p$$

- la función debe ser igual

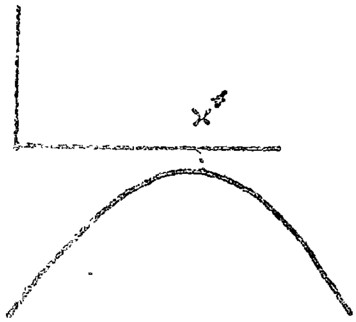
$$g_j \quad (x) = b_j \qquad i = p-1, \ldots, \alpha$$

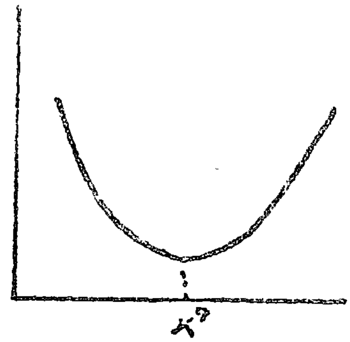
- la función debe ser menor

$$h_k \quad (x) \leq b_k \qquad i = \alpha, \ldots, m$$

La función objetivo es la medida única de la valuación de actividades. Esta función debe ser escalar.

Los problemas de maximización y minimización son equivalentes como se puede apreciar en las gráficas, pero generalmente se trata con el de minimización





$$-\text{MAX}\left\{-f(x)\right\} = -f(x^*) \qquad \text{Min}\left\{f(x)\right\} = f(x^*)$$

La Programación Lineal, como su nombre lo indica, trata de resolver problemas en que tanto las funciones que representan las interrelaciones entre las distintas actividades como las que describen las componentes de producción o consumo son lineales, es decir, mantienen estricta proporcionalidad.

En algunas ocasiones, cuando la condición real del problema no presenta esta linealidad, es posible obtener alguna aproximación al mismo para poder aplicar esta metodología. En caso contrario, se debe aplicar alguno de los algoritmos conocidos de programación discreta determinística no lineal.

III TEORIA DE LA PROGRAMACION LINEAL

Una función es lineal, si para todo par de valores x_1, x_2 y todo par de escalares α_1, α_2 se cumple lo siguiente:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

es decir, cumple con las características de:

a) Aditividad $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

b) Proporcionalidad $f(\alpha x) + \alpha f(x)$

El planteamiento general del problema de programación lineal es:

$$\text{MAX ó MIN } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \ldots + A_{1n} X_n \geqslant B_1$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \ldots + A_{2n} X_n \geqslant B_2$$

$$\vdots$$

$$A_{m1} X_1 + A_{m2} X_2 + \ldots + A_{mn} X_n \geqslant B_n$$

en donde Z es la función objetivo a optimizar y las restricciones pueden ser igualdades o desigualdades.

Una notación más común para este planteamiento es:

$$\text{MIN } Z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1} A_{ij} X_j \geqslant B_i \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1} A_{ij} X_j \geqslant B_i \qquad i = p+1, \ldots, m$$

donde: m es el número de restricciones

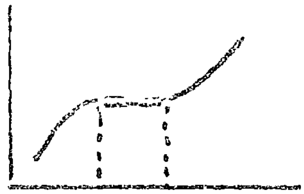
n es el conjunto de índices de las variables

En general: $m < n$ para que haya mas de una solución y

el rango de $[A] = m$ para que las restricciones no sean redundantes.

Las suposiciones que se hacen en un problema real para resorverlo por programación lineal son:

1.- Los costos marginales son constantes



2.- Se trata con mercados puramente competitivos (la utilidad o costo de cualquier producto es proporcional a la cantidad producida del mismo). Se excluyen los casos de monopolio y oligopolio.

3.- Existe un número finito de actividades.

4.- El problema siempre se considera a corto plazo porque las facilidades de producción y demás relaciones se consideran fijas. De lo contario habría que introducir ~~la~~ variable tiempo pues la estructura del problema varía con él.

III 1) INTERPRETACION GRAFICA

Para un problema sencillo, por ejemplo en dos dimensiones, se puede mostrar gráficamente como las restricciones limitan la posible solución y como la función objetivo determina la solución óptima del problema.

Consideremos por ejemplo el sistema formado por:

$$\text{MaX} \quad Z = X_1 + X_2$$

$$\text{s.a.} \quad -X_1 + X_2 = 11$$

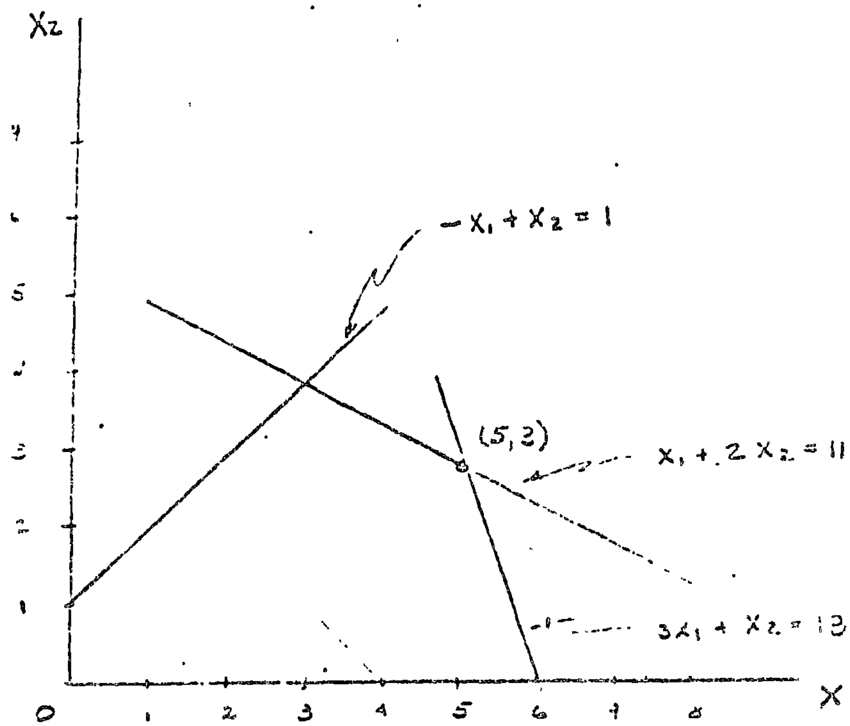
$$3X_1 + X_2 = 18$$

$$X_1 , X_2 \quad 0$$

La solución de este sistema es:

$$X_1 = 5 \qquad y \qquad X_2 = 3 \qquad Z = 8$$

y gráficamente se representa:



EJEMPLO

Una compañía produce dos artículos diferentes: X , Y , que pueden ser procesados en dos máquinas distintas: A o B . El tiempo de proceso para cada artículo en cada máquina es:

Producto	Máquina A	Máquina B
X	2 Hrs	3 Hrs
Y	4 Hrs	2 Hrs

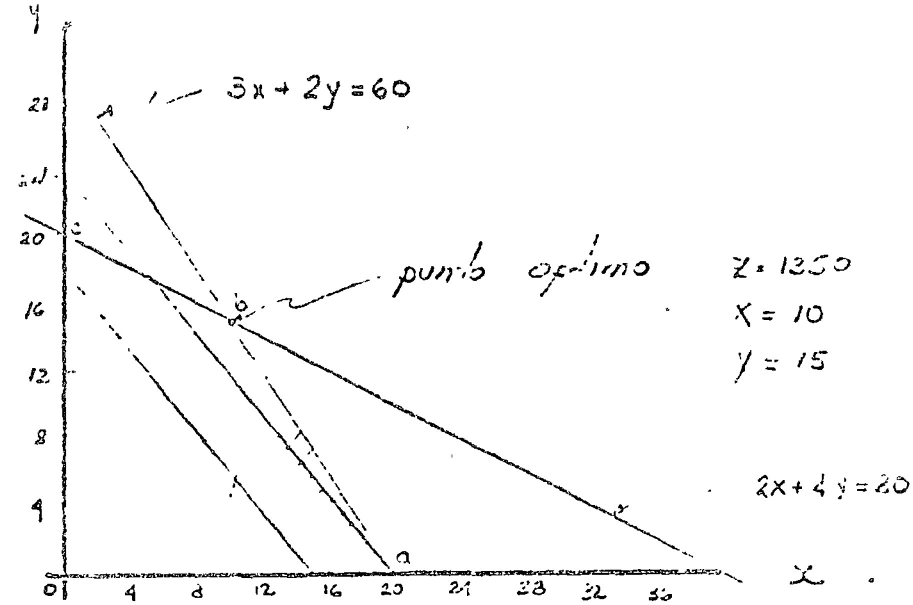
El período semanal de utilización es de 80 Hrs para la máquina ~~A~~ y de 60 Hrs para la B. Se desea saber cuál es la política de producción que maximiza las ganancias totales, si la ganancia unitaria del producto X es 60 y la del producto Y es de $ 50.

$$MAX \quad Z = 60X + 50Y$$

$$s.a. \quad 2X + 4Y \leq 80$$

$$3X + 2Y \leq 60$$

La solución gráfica es:



Analizando los ejemplo anteriores, observamos que hay una región obscura en la gráfica de la solución. A esta región se le denomina región factible, pues dentro de ella se encuentran los posibles puntos de solución.

VIII ii) INTERPRETACION ALGEBRAICA

Hasta ahora sólo se ha tratado el problema de programación lineal en su forma general. Vamos a describir brevemente las formulaciones equivalentes del mismo.

FROMA ESTANDAR.

Mediante ciertas transformaciones el problema se puede expresar en función de variables no negativas que satisfagan un conjunto de ecuaciones lineales y minimicen una forma lineal. Tal formulación es la utilizada por el Método Primal Simplex o de Dantzing

$$\text{MAX} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad X_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \quad X_j = D_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, m$$

a) Si en el problema original la restricción i-ésima es de la forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geqslant d_i$, se introduce una variable de holgura para transformarla en igualdad. O sea, toda inecuación de la forma

$$A\ \bar{X} \geqslant \bar{D} \qquad ó \qquad A\ \bar{X} \leqslant \bar{D}$$

se puede substitur por las relaciones

$$A_i\ \bar{X} - x_i = d_i \qquad ó$$

$$A_i\ \bar{X} + x_i = d_i$$

b) Si la variable i-ésima X_i está no restringuida puede sustituirse por dos variables no negativas

$$X_i = X_i^+ - X_i^-$$

FORMA CANONICA

Si el problema de programación se expresa en función de variables no negativas que satisfacen un conjunto de restricciones de la forma ($\geqslant$) se dice que está en forma canónica.

$$\text{MIN } Z = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad X_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \quad X_j \geqslant D_i \quad ; \; i = 1, \dots, m$$

$$X_j \geqslant 0$$

FORMA MIXTA

Es aquella en que las restricciones pueden ser tanto igualdedes o desigualdades y se representa como:

$$\text{MIN} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i \; X_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, X_j = D_i \quad ; \quad i = 1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, X_j \geqslant D_i \quad ; \quad i = p-1, \dots, m$$

$$X_j \geqslant 0$$

Tratemos ahora de resolver el ejemplo anterior algebráicamente. Para esto haremos la transformación del problema a la forma estándar agregando las respectivas variables de holgura.

$$\text{Max } Z = 60X + 50Y \qquad (1)$$

s.a.

$$2X + 4Y + Za = 80 \qquad (2)$$

$$3X + 2Y + Zb = 60 \qquad (3)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene:

$$X = \frac{60 - 2Y - Za}{3}\ ; \qquad (4)$$

Despejando (2) y sustituyendo el valor de X :

$$Za = 80 - 2\left(20 - \frac{2Y}{3} - \frac{Za}{3}\right) - 4Y \qquad (5)$$

Si fijamos a Y y a Za valores de cero obtenemos

$$X = 20$$

$$Za = 40$$

$$Z = 60\ (\ 20\ ) = 1200$$

Estos valores corresponden al punto 'a' de la gráfica. Esto desde luego, no corresponde al máximo valor de Z.

Ahora, despejemos a Y de la ecuación (5) y reacomodando da:

$$Y = 15 - \frac{1}{4} Zb - \frac{3}{8} Za$$

que al sustituir en (4) nos da:

$$X_o = 10 + \frac{1}{4} Za - \frac{1}{2} Zb$$

Dando valores de cero a las variables de holgura Za y Zb

$$X = 10 \qquad Y = 15$$

$$Z = 60\ (\ 10\ ) + 50\ (\ 15\ ) = 1350$$

VAMOS AHORA A DAR ALGUNAS DEFINICIONES ELEMENTALES QUE NOS AYUDEN A ENTENDER LOS PRINCIPALES TEOREMAS DE PROGRAMACION LINEAL.

- UN PROGRAMA O SOLUCION FACTIBLE ES CUALQUIER VECTOR $\bar{X}$ QUE SATISFACE TODAS LAS RESTRICCIONES DEL PROBLEMA, INCLUYENDO LAS DE NO NEGATIVIDAD.

- SOLUCIÓN BÁSICA ES LA SOLUCIÓN DEL SUBSISTEMA FORMADO CON 'M' ECUACIONES Y 'M' INCOGNITAS, OBTENIDO DE HACER LAS (N-M) INCOGNITAS RESTANTES IGUALES A CERO.

$$X_B = B^{-1} d \qquad X_R = 0$$

LAS M VARIABLES QUE PUEDEN SER DISTINTAS DE CERO, SE DENOMINAN BASICAS.

EL NUMERO POSIBLE DE SOLUCIONES BASICAS ESTA DADO POR:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

- SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE, ES CUALQUIER SOLUCION FACTIBLE EN NO MAS DE 'M' COMPONENTES POSITIVAS, ES DECIR, SATISFACE LAS RESTRICCIONES DE NO NEGATIVIDAD.

- SOLUCIÓN OPTIMA ES UN PROGRAMA FINITO QUE SATISFACE LA FUNCIÓN OBJETIVO (YA SEA, MAXIMIZAR O MINIMIZAR).

PRINCIPALES TEOREMAS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL (PARA MINIMIZACION)

1.- DADO EL SISTEMA $A\bar{x} = \bar{d}$ QUE CONSTITUYE UN CONJUNTO CONVEXO, CADA SOLUCIÓN BASICA FACTIBLE $(x \geq 0)$ DEL SISTEMA CORRESPONDE A UN PUNTO EXTREMO DEL CONJUNTO CONVEXO DE SOLUCIONES Y TAMBIEN CADA PUNTO EXTREMO ES UNA SOLUCIÓN FACTIBLE BASICA DEL SISTEMA.

2.. DADO UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL EN FORMA ESTANDAR SI EXISTE UNA SOLUCION FACTIBLE QUE SATISFAGA $A\bar{x} = \bar{d}$, $\bar{x} \geq 0$; EXISTE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE

ESTO SIGNIFICA QUE SI UNA SOLUCION TIENE N COMPONENTES, DE LOS CUALES K SON POSITIVOS Y EL RESTO (N-K) SON NULOS, ES POSIBLE ENCONTRAR UNA SOLUCION QUE SATISFAGA LAS RESTRICCIONES EN CUANTO MÁS M VALORES POSITIVAS.

$$\bar{X} = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_k}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_n}_{=0})$$

3.- DADA UNA SOLUCIÓN FACTIBLE BASICA, ASOCIADA CON LA BASE B, SI $z_k - c_k \leq 0$, $Y_k \leq 0$ PARA ALGUN K NO EN LA BASE, ENTONCES EXISTE UNA CLASE DE SOLUCIONES FACTIBLES EN LAS CUALES ~~m+1~~ VARIABLES SON ESTRICTAMENTE POSITIVAS; LA VARIABLE X_k PUEDE SER TAN GRANDE COMO SE QUIERA, Y CONSECUENTEMENTE, Z PUEDE SER TAN GRANDE COMO SE QUIERA; NO EXISTE SOLUCIÓN MAXIMA FINITA.

4. DADA UNA SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE, ASOCIADA CON LA MATRIZ B, SI $z_k - c_k > 0$ PARA ALGUN K NO EN LA BASE, Y $Y_{sk} > 0$ PARA AL MENOS UNA S EN LA BASE, ENTONCES LA SOLUCIÓN BASICA ASOCIADA CON LA BASE B' INDUCIDA DE B POR LA SUSTITUCIÓN DEL VECTOR $\bar{a}_L$ POR $\bar{a}_j$, DONDE

$$\bar{X}_k = \frac{x_L}{Y_{Lk}} = \min\left[\frac{x_s}{Y_{sk}}\right] \qquad x = \frac{s}{Y_{sk}} \geq 0$$

PROPORCIONA UNA NUEVA SOLUCIÓN BASICA CON $Z' \leq Z$

$$X_B = (x_s) \qquad s \in I$$

$$X_R = (x_j) \qquad j \in J$$

NOTA.- SOLUCIÓN DEL PROBLEMA $A\bar{X} = \bar{d}$ EN FORMA MATRICIAL

$$[B, R] \begin{bmatrix} X_B \end{bmatrix} = d$$

$$B X_B + R \lambda_R = d \qquad \bar{X}_R = 0$$

$$\bar{X}_B = B^{-1} d$$

— · —

5.- DADA UNA SOLUCIÓN FACTIBLE BASICA ASOCIADA CON B, UNA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE ESTA SOLUCION SEA MINIMA ES QUE $z_j - c_j \leq 0$ PARA CADA j NO EN LA BASE.

COROLARIO 1.- DADA UNA SOLUCIÓN MINIMA Y LAS CANTIDADES $z_j - c_j \leq 0$ ASOCIADAS CON ESTA SOLUCIÓN, ENTONCES UNA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EXISTA OTRA SOLUCIÓN QUE SEA MINIMA ES QUE

$$x_j > 0 \;\rightarrow\; z_j - c_j = 0 \quad ; \; j \text{ NO EN LA BASE}$$

COROLARIO 2.- UNA CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE UNA SOLUCIÓN FACTIBLE BASICA SEA UNICA Y MÍNIMA ES QUE $z_j - c_j < 0$ PARA TODA j NO EN LA BASE.

III.- iii METODO SIMPLEX

PARA FACILITAR EL ENTENDIMIENTO DE ESTA METODOLOGIA, RESOLVEREMOS EL EJEMPLO ANTERIOR

PARA INICIAR SE REQUIERE EL PROBLEMA EN FORMA ESTANDAR.

$$\text{MAX } Z = 60x + 50y$$

s.a

$$2x + 4y + Z_a = 80$$
$$3x + 2y + Z_b = 60$$

LA MATRIZ INICIAL DEL SIMPLEX QUEDARÁ FORMADA

VB	b	X	Y	Za	Zb
Za	80	2	4	1	0
Zb	60	3	2	0	1

LAS VARIABLES DE LA BASE SON $X_B = (Z_5, Z_6)$

LOS COSTOS ASOCIADOS A LA BASE $C_B = (0, 0)$

$X_R = (x, y)$, $C_R = (80, 60)$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

COMO PUEDE APRECIARSE, ES NECESARIO ESTABLECER UN CRITERIO DE ENTRADA Y SALIDA DE LAS VARIABES A LA BASE.

* PARA DETERMINAR LA VARIABLE DE ENTRADA K SE TIENE EL CRITERIO:

$$|Z_k - C_k| = MAX\ |Z_j - C_j| \qquad j \in J$$

PARA NUESTRO PROBLEMA EN ESTUDIO TENEMOS

$$(80 \times 0 + 60 \times 0) - 0 = 0$$
$$(2 \times 0 + 3 \times 0) - 60 = -60$$
$$(4 \times 0 + 2 \times 0) - 50 = -50$$
$$(1 \times 0 + 0 \times 0) - 0 = 0$$
$$(0 \times 0 + 1 \times 0) - 0 = 0$$

DE DONDE LA VARIABLE A ENTRAR A LA BASE k ES X

* PARA DETERMINAR LA VARIABLE DE SALIDA l.

$$\frac{X_l}{y_{lk}} = MIN \left[\frac{X_s}{y_{sk}} \right]$$

O SEA

$$\frac{80}{2} = 40 \quad , \quad \frac{60}{3} = 20 \Longleftarrow Min$$

$$l = Z_6$$

EL NUEVO $I = (Z_5, x)$ y $J = (Z_6, y)$

			80	60	0	0
θ	Z_B	b	x	y	Z_5	Z_6
0	Z_5	80	2	4	1	0
0	Z_6	60	3*	2	0	1
			-80	-60	0	0

* PIVOTE

— SE PROCEDE AHORA A SUSTITUIR EN B, AL POR AL. PARA ESTO, EL RENGLON DE LA VARIABLE QUE SALE, SE DIVIDE ENTRE EL VALOR DEL PIVOTE Y EL RESTO DE LA MATRIZ SE CALCULA.

$$\text{NUEVO NUMERO} = \text{NUMERO ANTERIOR} - \frac{(\text{NUMERO DEL RENGLON}) \times (\text{NUMERO COLUMNA})}{\text{PIVOTE}}$$

PARA NUESTRO PROBLEMA EL PRIMER RENGLÓN QUEDARÁ:

$$\text{NUEVO NUMERO} = 80 - \frac{60 \times 2}{3} = 40$$

$$= 2 - \frac{3 \times 2}{3} = 0$$

$$= 4 - \frac{2 \times 2}{3} = 2\tfrac{2}{3}$$

$$= 1 - \frac{0 \times 2}{3} = 1$$

$$= 0 - \frac{1 \times 2}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

Y EL TERCER RENGLON:

$$\text{NUEVO NUMERO} = -60 - \frac{3 \times (-60)}{3} = 0$$

$$= -50 - \frac{2 \times (-60)}{3} = -10$$

$$= 0 - \frac{0 \times (-60)}{3} = 0$$

$$= 0 - \frac{1 \times (-60)}{3} = 20$$

COMPLETANDO CON ESTO LA PRIMERA ITERACION

II MATRIZ.

C	CB	B	X	Y	Z_3	Z_4
0	Z_3	40	0	$2\tfrac{2}{3}$ *	1	$-\tfrac{2}{3}$
60	X	20	1	$\tfrac{2}{3}$	0	$\tfrac{1}{3}$
		1200	0	-10	0	20

ESTE RESULTADO COINCIDE CON EL OBTENIDO POR EL METODO ALGEBRAICO, ES DECIR, NOS ENCONTRAMOS EN EL PUNTO 'A'

$$x = 20 \qquad y = 0$$

$$z_a = 40 \qquad z_b = 0$$

ANALIZANDO LOS $z_j - c_j$ PARA VER SI YA SE HA LLEGADO A LA SOLUCIÓN OPTIMA, NOS ENCONTRAMOS QUE TODAVIA HAY ALGUNO ≤ 0, POR LO QUE PROCEDEMOS A ITERAR DE NUEVO.

LA VARIABLE A ENTRAR A LA BASE SERÁ 'y', EN TANTO QUE LA QUE SALE ES 'z_a'

SIGUIENDO EL PROCEDIMIENTO ANTERIOR OBTENEMOS.

MATRIZ III

c	vb	b	x	y	z_a	z_b
50	y	15	0	1	3/8	-1/4
60	x	10	1	0	-1/4	1/2
		1350	0	0	3 3/4	17 1/2

AHORA TENEMOS QUE TODAS LAS $z_j - c_j < 0$, POR LO QUE SE HA LLEGADO A LA SOLUCIÓN OPTIMA, MISMA QUE COINCIDE CON EL RESULTADO ANTERIOR.

$$Z = 1350 \qquad z_a = z_b = 0$$

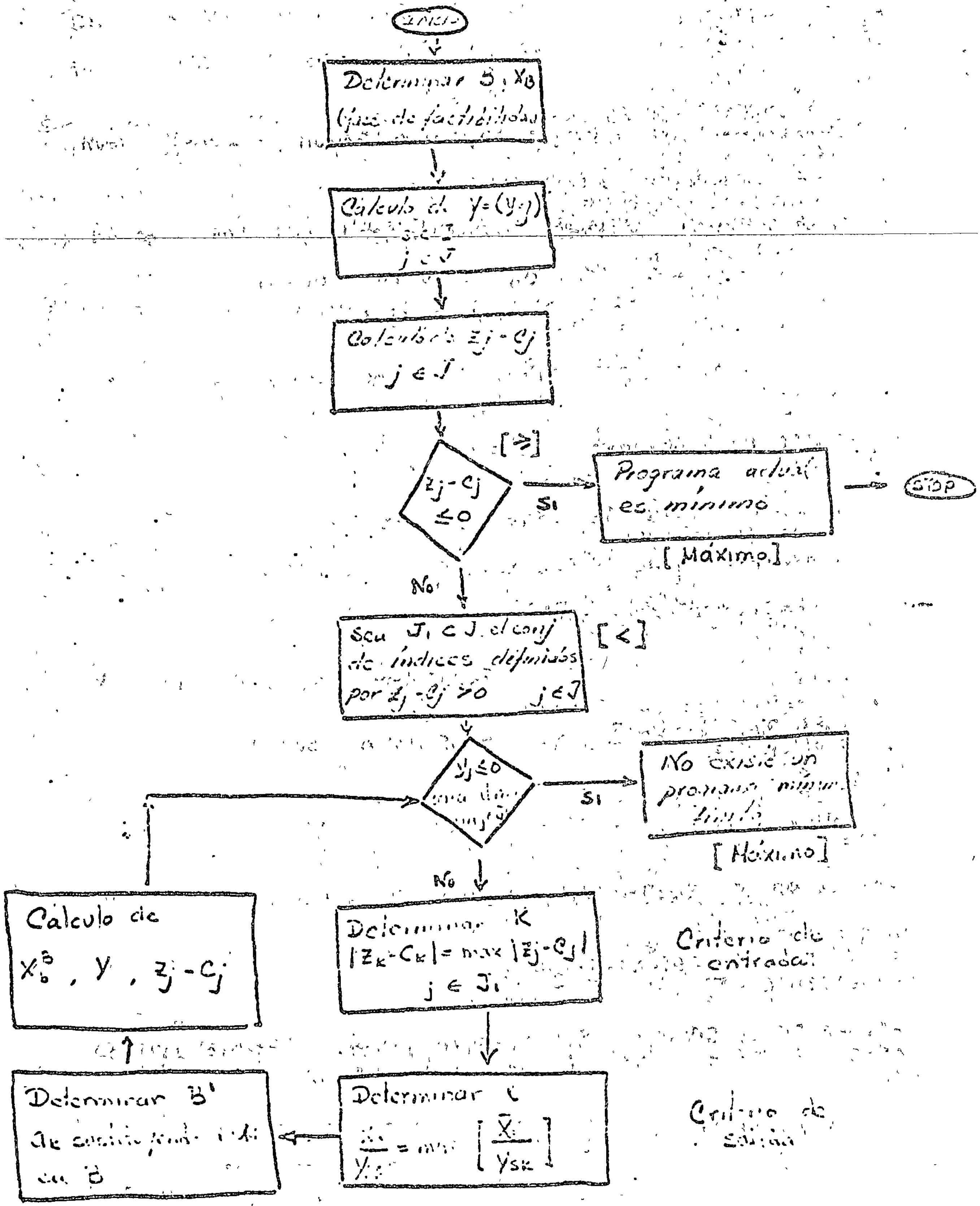
$$x = 10$$

$$y = 15$$

A CONTINUACIÓN SE PRESENTA EL DIAGRAMA DE ESTE ALGORITMO Y SE ANEXA UN LISTADO DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA.

POR ULTIMO, SE DAN DOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS DE ESTE METODO, UTILIZANDO UNO DE ELLOS LAS VARIABLES ARTIFICIALES (SE UTILIZAN CUANDO NO EXISTE UNA BASE CANONICA)

Algoritmo Primal Simplex



```
C* FILE   METHOD/SIMPLE   FORTRAN
DATA
FILE   S=*...,UNIT=READER
FILE   F=LINE,UNIT=PRINT
C        METODO SIMPLEX PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL
C
C        LIMITES EN DIMENSION DEL PROGRAMA
C             MAX.NUMERO DE VARIABLES, INCLUYENDO VARIABLES DE HOLGURA = 84
C             MAX.NUMERO DE ECUACIONES INCLUYENDO FUNCION OBJETIVO=34
C
C        SE DEBE FORMAR UNA MATRIZ DE ORDEN (M+1,N) DONDE EL PRIMER ...
C        CORRESPONDE A LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO Y EL ULTIMO
C        RENGLON SE COMPONE DE ELEMENTOS NULOS. DICHA MATRIZ SE REPRESENTA
C        CON LA VARIABLE A
C
C        EL PROGRAMA MINIMIZA LA FUNCION OBJETIVO, LO CUAL DEBE TOMARSE EN
C        CUENTA PARA PROBLEMAS DE MAXIMIZACION
C
C        SE DEBE PROPORCIONAR LA COLUMNA DE LAS PRIMERAS VARIABLES QUE DAN
C        UNA SOLUCIN BASICA
C
         DIMENSION A(35,85),W(35),L(35)
C
C        LECTURA DE
C             II=NUMERO TOTAL DE LAS ECUACIONES DADAS, INCLUYENDO LA FUNCION
C                OBJETIVO
C             JJ=NUMERO TOTAL DE COLUMNAS DE LA MATRIZ A.
C
         DATA IREAD,IWRITE/5,6/
         WRITE(IWRITE,2)
       1 FORMAT(12I4)
       2 FORMAT(1H1)
     100 READ(IREAD,1) II,JJ
         IF(II.EQ.0) CALL EXIT
         WRITE(IWRITE,2)
         III=II + 1
         DO 10 I=1,III
         W(I)=0.
      10 L(I)=0
C
C        LECTURA DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ RENGLON POR RENGLON
C
         DO 533 I=1,III
     533 READ(IREAD,4) (A(I,J),J=1,JJ)
       4 FORMAT(7F10.4)
C
C        LECTURA DE LA COLUMNA DE LAS VARIABLES QUE FORMARAN LA PRIMERA ...
C        BASICA, EN GENERAL SE TRATARA DE LAS VARIABLES DE HOLGURA Y ARTI...
C        CIALES
C
         READ(IREAD,1) (L(I),I=2,II)
C
C        INICIO
C
         KKK=0
C
C        BUSQUEDA DE RENGLONES EN LOS QUE NO HAY VARIABLES DE HOLGURA
C
      22 I=1
      25 I=I+1
         IF(I .GE. III) GO TO ...
```

```
      IF(L(I).NE.0) GO TO 23
C
C     EVALUAR
C         NVO.ULTIMO RENGLON= ULTIMO RENGLON - RENGLON SIN VARIABLE DE
C                                                          HOLGURA.
C
   25 DO 27 J=1,JJ
      IF(A(I,J).EQ.0.0) GO TO 27
   26 A(III,J)=A(III,J) -A(I,J)
   27 CONTINUE
      GO TO 23
C
C     BUSQUEDA DE LA COLUMNA EN LA CUAL EXISTE EL COEFICIENTE MAS NEGATI
C     VO EN LA F.OBJETIVO(PRIMER RENGLON) O EN EL ULTIMO RENGLON (FORMA
C     P)
C
   40 K=III
   44 J=0
      W(K)=0.
      L(K)=0
   42 J=J+1
      IF(J.GE.JJ) GO TO 45
      IF((A(K,J).GE.0.).OR.(W(K).LE.A(K,J))) GO TO 42
   47 W(K)=A(K,J)
      L(K)=J
      GO TO 42
C
C     SE PRUEBA SI L(K)=0, EN DICHO CASO TODOS LOS COEFICIENTES SON MAYO
C     RES O IGUALES A CERO. SE MANDA A DIRECCION 62 PARA UN EXAMEN MAS
C     EXHAUSTIVO
C
   45 IF(L(K).EQ.0) GO TO 62
C
C     BUSQUEDA DE COLUMNA PIVOTE
C
   46 KJ=L(K)
C
C     SE PRUEBA CADA ENTRADA DE LA COLUMNA PIVOTE PARA VER SI ES POSITI-
C     VA, EN CASO DE SERLO IR A DIRECCION 121 PARA EVALUAR EL COCIENTE
C     QUE SIRVE PARA DETERMINAR QUE VARIABLE SALE DE LA BASE
C
      DO 120 I=2,II
      IF(A(I,KJ).GT.0.) GO TO 121
  120 CONTINUE
C
C     SI LAS ENTRADAS SON NULAS O NEGATIVAS EL PROBLEMA NO ES ACOTADO
C
      WRITE(IWRITE,130)
  130 FORMAT(5X,'NO ACOTADO')
      GO TO 70
C
C     DETERMINACION DEL COCIENTE QUE INDICA EL NUEVO ELEMENTO PIVOTE
C
  121 I=1
      JK=0
   50 I=I+1
      IF(I.GT.II) GO TO 56
      IF(A(I,KJ).LE.0.) GO TO 50
   51 Y=A(I,JJ)/A(I,KJ)
      IF(JK.EQ.0) GO TO 53
```

```
 53 X=[NEX
    JK=I
    GO TO 50
C
C   LA SIG. PREPOSICION INDICA EL ELEMENTO PIVOTE
C
 56 X=A(JK,KJ)
    L(JK)=KJ
C
C   TRANSFORMACION DE LA MATRIZ A , PIVOTEANDO SOBRE EL ELEMENTO X
C
    DO 57 I=1,III
 57 W(I)=A(I,KJ)
    IJ=JK-1
    DO 59 I=1,IJ
    DO 59 J=1,JJ
    IF((A(JK,J).EQ.0.).OR.(W(I).EQ.0.)) GO TO 59
580 A(I,J)=A(I,J) - W(I)*(A(JK,J)/X)
 59 CONTINUE
    IJ=JK+1
    DO 61 I=IJ,III
    DO 61 J=1,JJ
    IF((A(JK,J).EQ.0.).OR.(W(I).EQ.0.)) GO TO 61
600 A(I,J)=A(I,J) - W(I)*(A(JK,J)/X)
 61 CONTINUE
    DO 205 J=1,JJ
205 A(JK,J)=A(JK,J)/X
    KKK=KKK +1
    WRITE(IWRITE,105) KKK,A(K,JJ),L(JK)
105 FORMAT(1X,I4,6X,F15.2,10X,I4)
    GO TO 44

    SE OBSERVA SI TODOS LOS TERMINOS DEL PRIMER RENGLON SON MAYORES O
    IGUALES A CERO, EN DICHO CASO LAS VARIABLES QUE ESTAN EN LA BASE
    SON LA SOLUCION OPTIMA .

 62 IF(K.  .1) GO TO 70
 63 I=JJ

    SE OBSERVA SI LOS ELEMENTOS DEL ULTIMO RENGLON ESTAN CERCANOS A
    CERO, SI UNO O MAS DE ELLOS SON MAYORES DE 0.0001, EL PROBLEMA
    NO TIENE SOLUCION

    DO 65 J=1,IJ
    IF(A(K,J).GT.0.0001) GO TO 66
 65 CONTINUE
    WRITE(IWRITE,103)
103 FORMAT(5X,'TIENE SOLUCION')
    WRITE(IWRITE,101)
101 FORMAT(1X,'ITERACION       FUNCION OBJ.  NUEVA VAR. BASICA,')

    SI LOS ELEMENTOS DEL ULTIMO RENGLON SON MENORES QUE 0.0001 , SE
    LES IGUALA A CERO

    DO 140 J=1,JJ
140 A(III,J)=0.

    EN CASO DE PROBLEMAS SIN VARIABLES ARTIFICIALES. SE DEFINE K=1

    K=1
```

```
      GO TO 64
C
C     IMPRESION DE RESULTADOS
C
   66 WRITE(IWRITE,6)
    6 FORMAT(5X,'NO TIENE SOLUCION')
   70 WRITE(IWRITE,8) A(1,JJ)
    8 FORMAT(///,5X,'FUNCION OBJETIVO',F20.8,/)
      WRITE(IWRITE,7)
    7 FORMAT(1X,'VARIABLE                VALUR')
      DO 71 I=2,II
   71 WRITE(IWRITE,5) L(I),A(I,JJ)
    5 FORMAT(1X,I4,F20.8)
C
C     IMPRESION DE LA MATRIZ FINAL
C
      WRITE(IWRITE,100)
  100 FORMAT(////,1X,'MATRIZ FINAL')
      DO 78 I=1,III
      WRITE(IWRITE,150) I
  150 FORMAT(//,35X,'RENGLON ',I2,/)
   78 WRITE(IWRITE,4)(A(I,J),J=1,JJ)
      GO TO 108
      END
   3    8
 2.0         -3.0

 2.0         -1.0        -1.0      -1.0       1.0
 3.0
 1.0         -1.0         1.0                                  -1.0       1.0
 2.0
 0.0
 0.0
   5    7
   4    6
-10.0       -11.0
  3.0         4.0        1.0                                    9.0
  5.0         2.0                   1.0                         8.0
  1.0        -2.0                               1.0             1.0
0.0
   3    4    5
   4    8
 2.0         -3.0         6.0

 3.0         -4.0        -6.0      1.0
 2.0
 2.0          1.0         2.0                       -1.0        1.0
 11.0
 1.0          3.0        -2.0                                               1.0
 4.0
 0.0
 0.0
   4    6    7
   4    7
-10.0       -11.0
  2.0         4.0        1.0                                                 9.0
  5.0         2.0                       -1.0              1.0                8.0
  1.0        -2.0                                  1.0                       1.0
  0.0
```

EJEMPLO:

El departamento de compras de la compañía [illegible] se encuentra realizando un estudio para determinar la [illegible] de comprar las maquinas A, B y C en diversas cantidades, [illegible] que la utilización de cada unidad habrá de [illegible] una utilidad de 2, 3 y 1 millones de pesos. El primer tipo requiere de un operario en forma permanente para su manejo y las maquinas B y C de dos y tres operarios [illegible]. La maquina A requiere de un area de 2 m^2 [illegible] unidades de energia. La B, 3 m^2 y la misma cantidad de energia, la C requiere igual area que A pero [illegible] energia. El area total de que dispone la empresa para colocacion de maquinaria es de 30 m^2 y debido a [illegible] del departamento de personal no se podrá [illegible] mas de 18 empleados, ademas, solo se ha [illegible] utilizacion de 36 000 unidades de energia.

Se sabe que de no hacerse la compra de esta maquinaria, se haria una inversión para una reforma administrativa que incrementaria las ganancias en 29 millones.

¿Cual de las politicas recomendaria?

Maquinas	A	B	C
Ganancia	2	3	1
Operarios	1	2	3
Area	2	3	2
Energia	2000	2000	1000

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 36$$

θ	v.b.	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
9	x_4	18	1	2 *	3	1	0	0
10	x_5	30	2	3	2	0	1	0
18	x_6	36	2	2	1	0	0	1
	$z_j - c_j$	0	-2	-3 ↑	1	0	0	0

18	x_2	9	.5	1	1.5	.5	0	0
6	x_5	3	.5 *	0	-2.5	-1.5	1	0
18	x_6	18	1	0	-2	-1	0	1
	$z_j - c_j$	27	-.5 ↑	0	3.5	1.5	0	0

	x_2	6	0	1	4	2	1	0
	x_1	6	1	0	-5	-3	2	0
	x_6	12	0	0	3	2	-2	1
	$z_j - c_j$	30	0	0	1	0	1	0

$Z_{max} = 30$ millones con:

$x_1 = 6$

$x_2 = 6$

$x_3 = 0$

Se recomienda comprar la maquinaria pues la ganancia supera a la causada por la reforma administrativa

EJEMPLO 2

Demostrar por el método SIMPLEX que el siguiente problema no tiene solución factible

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

s.a.

$$3x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 15$$
$$33x_1 - 10x_2 + 9x_3 \leq 33$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$

$x_i \geq 0$ para todo i

θ	v. b.	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.5	x_4	15	3	10*	5	1	0	0
3.7	x_5	33	33	-10	9	0	1	0
2	o	4	1	2	1	0	0	-1
	$z_j^{**} - c_j^{**}$	-4	-1	-2	-1	0	0	1
	$z_j - c_j$	0	-2	-3	-5	0	0	0

5	x_2	1.5	.3	1	.5	.1	0	0
1.3	x_5	48	36*	0	14	1	1	0
2.5	o	1	.4	0	0	-.2	0	-1
	$z_j^{**} - c_j^{**}$	-1	-.4	0	0	.2	0	1
	$z_j - c_j$	4.5	-1.1	0	1	.3	0	0

	x_2	1.1	0	1	.4	.01	-.010	0
	x_1	1.3	1	0	.4	.03	.03	0
	o	1.5	0	0	-.16	-.21	-.01	1
	$z_j^{**} - c_j^{**}$	-1.5	0	0	.16	.21	.01	-1
	$z_j - c_j$	0						

No existe solución factible pues en la columna de $z_j - c_j$ todos los valores no fueron ceros o negativos

ADEMAS DEL METODO PRIMAL DEL SIMPLEX, SE HAN DESARROLLADO OTROS METODOS, ALGUNOS DE ELLOS MODIFICACIONES DEL PRIMAL-SIMPLEX ENTRE OTROS, PODEMOS CITAR, EL METODO DUAL, LA FORMA LEXICOGRAFICA, METODO DE LAS DOS FASES, METODO DE LA GRAN 'M', SIMPLEX REVISADO, ETC.

DENTRO DE ESTE CURSO, SOLO SE ANALIZARA OTRO METODO.

IV SIMPLEX REVISADO.-

PARA UTILIZAR ESTE METODO ES NECESARIO QUE LA FUNCION LINEAL A OPTIMIZAR, SE AÑADA AL SISTEMA DE LAS M ECUACIONES DE RESTRICCION, FORMANDO ASI UN SISTEMA AUMENTADO.

CONTINUANDO CON EL PROBLEMA ANTERIOR TENEMOS:

$$\text{MAX } Z = 60x + 50y$$

$$\text{s.a.} \quad 2x + 4y + Z_5 = 80$$

$$3x + 2y + Z_6 = 60$$

HACIENDO $X_0 = Z$ SE TIENE

$$X_0 - 60x + 50y = 0$$

LAS MATRICES DE CALCULO DE LA FORMA REVISADA SON TOTALMENTE DISTINTAS A LAS DEL SIMPLEX ORDINARIO, PUES UTILIZAN EN SUS CASILLAS LAS MATRICES

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \qquad \hat{B}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

PARA DETERMINAR LA j-ESIMA COLUMNA DE LA MATRIZ SE TIENE

$$\hat{y}_j = \hat{B}^{-1} \hat{a}_j = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_j \\ A_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_j - C_j \\ Y_j \end{bmatrix}$$

... TABLAS SIMPLEX CONSERVAN ...

... FORMA DE CAMBIAR LAS VARIABLES QUE ESTAN EN LA BASE Y ARTIFICIO MAS ... EL FIN DE NUESTRO ... LO QUE SE PRESENTA CUANDO $(z_j - c_j)_i \geq 0$ ... TODO ES EN SI LA METODOLOGIA, QUE NOS PERMITIRA LLEGAR A SOLUCION OPTIMA DEL PROBLEMA PLANTEADO. LAS TABLAS SE FORMULAN COMO SIGUE:

	60	50	0	0
	x	y	z_a	z_b
	2	4	1	0
	3	2	0	1
	-60	-50		

LA PRIMERA TABLA COMO SE VE CONTIENE TODOS LOS DATOS DADOS POR EL PROBLEMA

LA MATRIZ DE NUESTRAS VARIABLES BASICAS SERA

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad su \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LA SEGUNDA TABLA CONTENDRA COMO VALORES INICIALES A ...

B^{-1}	β_1	β_2	X_B	Y_k	θ
z_a	1	0			
z_b	0	1			

LOS VALORES PARA LAS COLUMNAS DE X_B Y Y_K SERAN:

EN X_B LOS TERMINOS INDEPENDIENTES DE LAS RESTRICCIONES ... QUE SE COLOCARON EN LA PRIMERA COLUMNA, EN Y_K ... ENTRE TODOS SE ESCOGE EL MAS NEGATIVO QUE NOS INDICARA LA COLUMNA PIVOTE LA QUE SE TRASLADARA A LA COLUMNA ... EL VALOR POSITIVO OBTENIDO POR EL COCIENTE $\frac{X_B}{Y_K}$ ... SERA EL PIVOTE PARA LA COLUMNA Y_K.

	β_1	β_2	X_B	Y_k	θ
$C_B B^{-1}$					
Z_A	1	0	60	2	40
Z_B	0	1	60	3^*	20 ←
$C_B B^{-1}$	0	20	1200	−10	
Y	1	$-2/3$	40	$5/3^*$	15 ←
Z_b	0	$1/3$	20	$2/3$	30
$C_B B^{-1}$	$30/8$	$70/4$	1350		
Y	$3/5$	$-1/4$	15		
X	$-1/4$	$1/6$	10		

EL PIVOTE DIVIDIRA A TODOS LOS ELEMENTOS DE Z_B HASTA X_B
PARA COMPLETAR EL CUADRO SE TRABAJARA CON EL RENGLON ...
EL CUAL ES EL QUE RESULTO DE DIVIDIR Z_A/PIVOTE, CON ESTO
YA ENCONTRAMOS VALORES PARA $C_B B^{-1}$ LOS QUE NO EXISTIAN EN EL
PRIMER CUADRO DE LA 2a. TABLA, EVALUAMOS LOS $Z_j - C_j$ PARA LA
PRIMERA TABLA Y SI TODAVIA EXISTE ALGUN VALOR NEGATIVO
ESTE NOS INDICARA CUAL SERA LA VARIABLE A CAMBIAR Y EL
VALOR NEGATIVO SE ASIGNARA A LA INTERSECCION DE $C_B B^{-1}$ CON Y_k
LOS VALORES RESTANTES DE Y_k ESTARAN DADOS POR [VARIABLE] 2a TABLA ... Y
SE OPERA COMO YA SE HABIA ESPECIFICADO ANTERIORMENTE, EL PROBLEMA TERMINARA CUANDO $(Z_j - C_j)_i \geq 0$ Y LA SOLUCION SE LEERA EN LA COLUMNA X_B.

SOLUCION
$$Y = 15$$
$$X = 10$$
$$Z = 1350$$

SOLUCION QUE CONCUERDA CON EL PUNTO B DE LA GRAFICA

EJEMPLO 3

Obtener la solucion por el metodo SIMPLEX REVISADO

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 6X_2 + 2X_3$$

s.a.

$$750x_1 + 1500x_2 + 2250x_3 \leq 40500 \qquad x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

$$1500x_1 + 1500x_2 + 750x_3 \leq 27000 \qquad x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

$$20x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 300 \qquad x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33}$$

Reduciendo

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 54$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 36$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$

C	2	3	1	0	0	0
$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
54	1	2	3	1	0	0
30	2	3	2	0	1	0
36	2	2	1	0	0	1
$z_j - c_j$	−2	−3	−1			
$z_j - c_j$	0	0	1	0	1	0
	β_1	β_2	β_3	X_B	Y_k	θ
$C_B B^{-1}$	0	0	0		−3	
x_4	1	0	0	54	2	27
x_5	0	1	0	30	3^*	10
x_6	0	0	1	36	2	18
$C_B B^{-1}$	0	1	0	30		
x_4	1	$-2/3$	0	34		
x_2	0	$1/3$	0	10		
x_6	0	$-2/3$	1	16		

$Z_{max} = 60$ millones

con: $x_1 = x_3 = 0$

$x_2 = 10$

El valor de 10 indica el numero de locales independientemente de cuantos se coloquen en cada zona.

V PROBLEMA DE TRANSPORTE.

UN PROBLEMA LINEAL DE TRANSPORTE CONSISTE EN ENCONTRAR UN ESQUEMA DE TRANSPORTE ENTRE 'M' ORIGENES CON SUS RESPECTIVAS DISPONIBILIDADES Y 'N' DESTINOS CON SUS CORRESPONDIENTES DEMANDAS DE TAL FORMA QUE EL COSTO TOTAL SEA MINIMO.

SE SUPONE QUE LA DISPONIBILIDAD TOTAL ES IGUAL A LA DEMANDA TOTAL.

LLAMEMOS X_{ij} LA CANTIDAD TRANSPORTADA DEL ORIGEN i AL DESTINO j. LA TABLA FORMADA CON LOS COEFICIENTES X_{ij} ES LA LLAMADA MATRIZ DE COSTOS O ESQUEMA DE TRANSPORTE. ENTONCES EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ES:

$$\operatorname{Min} z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij} \qquad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

S.A

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad ; \; i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad , \; j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad a_i, b_j > 0 \qquad (2)$$

POR LO TANTO, TENDREMOS $m \times n$ VARIABLES Y $m+n$ ECUACIONES QUE NO SON INDEPENDIENTES DEBIDO A (2) Y TENEMOS, ENTONCES $(m+n-1)$ ECUACIONES INDEPENDIENTES QUE SON.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

SE PUEDE OBSERVAR QUE ESTE PROBLEMA ES UN PROGRAMA LINEAL QUE TIENE UNA ESTRUCTURA PARTICULAR

PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA, ES NECESARIO CONTAR CON UNA SOLUCIÓN BASICA FACTIBLE INICIAL. SE HAN DESARROLLADO VARIOS ALGORITMOS PARA TAL EFECTO, QUE VARIAN TANTO EN TIEMPO REQUERIDO COMO EN APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN. ALGUNOS DE ESTOS METODOS SON: ESQUINA NOROESTE, COLUMNA MINIMA, RENGLON MINIMO, MATRIZ MINIMA, METODO DE VOGEL, ETC. DADO QUE TODOS ELLOS CONDUCEN A UNA SOLUCIÓN BASICA FACTIBLE, EXPLICAREMOS SOLO UNO UTILIZANDO UN EJEMPLO NUMÉRICO

EJEMPLO -

UNA COMPAÑIA TIENE TRES PLANTAS PRODUCTORAS: A, B y C, CON UNA CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN DE 100, 120, y 120 UNIDADES RESPECTIVAMENTE. PARA FACILITAR LA DISTRIBUCIÓN DE SUS PRODUCTOS CUENTA CON CINCO ALMACENES DISTRIBUIDOS EN EL PAIS, LOS CUALES REPORTAN UNA DEMANDA DE 40, 50, 70, 90, 90 UNIDADES RESPECTIVAMENTE. EL COSTO POR UNIDAD TRANSPORTADA ESTA DADA EN LA SIGUIENTE TABLA.

ALMACENES / PLANTAS	1	2	3	4	5
A	4	1	2	6	9
B	6	4	3	5	7
C	5	2	6	4	8

SE DESEA SABER CUALES SON LAS CANTIDADES OPTIMAS A TRANSPORTAR DE TAL FORMA, QUE EL COSTO TOTAL SEA MÍNIMO.

EL PLANTEAMIENTO O MODELO DEL PROBLEMA SERA:

$$\text{Min } Z = 4X_{11} + X_{12} + 2X_{13} + 6X_{14} + 9X_{15} + 6X_{21} + 4X_{22} + 3X_{23} + 5X_{24} + 7X_{25} + 5X_{31} + 2X_{32} + 6X_{33} + 4X_{34} + 8X_{35}$$

S.a

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 100$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 120$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 120$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 40$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 50$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 90$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 90$$

UTILIZAREMOS EL METODO DE LA ESQUINA NOROESTE PARA ENCONTRAR LA SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL. LA METODOLOGIA A SEGUIR ES PUES:

1º PARTIR DE LA ESQUINA SUPERIOR IZQUIERDA

2º EN LA INTERSECCION DE LA PRIMERA FILA Y LA PRIMERA COLUMNA, PONER EL MAS PEQUEÑO DE LOS NUMEROS QUE REPRESENTAN LA DISPONIBILIDAD (100) Y LA DEMANDA (40

3º COMPLETAR FILAS Y COLUMNAS DE ACUERDO CON DISPONIBILIDADES Y DEMANDAS

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
DEMANDA	40	50	70	90	90	

Costo total de la solución básica inicial es de

$CT = 40(4) + 50(1) + 10(2) + 60(3) + 60(5) + 30(4) + 90(8)$

$= 1550.-$

Busquemos ahora una nueva solución que reduzca este costo. Existen varios métodos que conducen a la solución óptima, tales como el de Stepping-Stone, el de [illegible] A. Wagener, Balinski y Gomory, etc.

Para este problema utilizaremos el método de Stepping Stone.

Para tratar de obtener una solución mejor, supongamos una unidad en la casilla (2,5) y equilibremos las restricciones del problema. No se debe hacer más de una suposición por iteración.

	1	2	3	4	5
A	[4] 40	[1] 50	[2] 10	[6]	[9]
B	[6]	[4]	[3] 60	[5] −1 60	[7] +1
C	[5]	[2]	[6]	[4] +1 30	[8] −1 90

$\delta_{14} = 6 - 2 + 3 - 5 = 2$ y así [illegible]

$\delta_{15} = 9 - 2 + 3 - 5 + 4 - 8 = 1$ esta configuración

$\delta_{12} = 6 - 4 + 2 - 5 = 1$

$\delta_{22} = 4 - 3 + 2 - 1 = 2$

$$\delta_{25} = 7 - 5 + 4 - 8 = -2$$

$$\delta_{31} = 5 - 4 + 5 - 3 + 2 - 4 = 1$$

$$\delta_{32} = 2 - 4 + 5 - 3 + 2 - 1 = 1$$

$$\delta_{33} = 6 - 4 + 5 - 3 = 4$$

DE TODAS LAS δ_{ij} SE SELECCIONA LA QUE HAGA DISMINUIR MAS EL COSTO, O SEA, LA MAS NEGATIVA, EN ESTE CASO $\delta_{25} = -2$

ANALICEMOS CUAL ES EL MAYOR NÚMERO DE UNIDADES QUE PODEMOS DESPLAZAR. PARA HACERLO VEAMOS LA TABLA ANTERIOR Y TOMEMOS EL VALOR MAS PEQUEÑO QUE CORRESPONDA A UNA CASILLA CON SIGNO NEGATIVO. ESTO NOS DA LA NUEVA SOLUCIÓN:

	40	50	70	90	90	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120

SI CALCULAMOS EL COSTO TOTAL DE ESTA NUEVA SOLUCIÓN

$$CT = 40(4) + 50(1) + 10(2) + 60([illegible]) + 60(7) + 90(1) + 30([illegible])$$

$$= 1430$$

HAY UNA DISMINUCIÓN DE $60(-2) = 120$ CON RESPECTO AL COSTO ANTERIOR.

CONTINUANDO EL PROCEDIMIENTO, SE TIENEN LOS SIGUIENTES VALORES DE δ:

[illegible]/	50/	10/ −1	+1	
		60/ +1		60/ −1
			90/ −1	30/ +1

[illegible] = 6 − 2 + 3 − 7 + 8 − 4 = 4

40/	50/	10/ −1		[illegible]
		60/ +1		60/ −1
			90/	30/

[illegible] = 5 − 3 + 5 − 7 = 0

40/ −1	50/	10/ +1		
+1		60/ +1		60/
			90/	30/

[illegible] = 6 − 3 + 2 − 4 = 1

40/	50/ −1	10/ +1		
	+1	60/ −1		60/
			90/	30/

[illegible] = 4 − 3 + 2 − 1 = 2

40/	50/	10/		
		60/	+1	60/ −1
			90/ −1	30/ +1

[illegible] = 5 − 7 + 5 − 4 = 2

40/ −1	50/	10/ +1		
		60/ −1		60/
+1			90/	30/ −1

[illegible] = 5 − 8 + 7 − 3 + 3 − [illegible]

40/	50/ −1	10/ +1		
		60/ −1		60/ +1
	+1		90/	30/ −1

[illegible] = 2 − 8 + 7 − 3 + 2 − 1 = −1

40/	50/	10/		
		60/ −1		60/ +1
		+1	90/	30/ +1

[illegible] = −8 + 7 − 3 + 6 = [illegible] g.

10 / +1	50 /	[illegible] / −1		
		30 /		90 /
30 / −1		+1	90 /	

h.

[illegible] / +1	[illegible] /	[illegible] / −1		
		[illegible] / +1		[illegible] / −1
[illegible] / −1			[illegible] /	+1

Como se afectan los costos al aumentar una unidad.

$\delta_{14} = 6-4+5-4 = 3$

$\delta_{15} = 9-2+3-7 = 3$

$\delta_{21} = 6-3+2-4 = 1$

$\delta_{22} = 4-3+2-1 = 2$

$\delta_{24} = 5-3+2-4+5-4 = 1$

$\delta_{32} = 2-5+4-1 = 0$

$\delta_{33} = 6-5+4-2 = 3$

$\delta_{35} = 8-5+4-2+3-7 = 1$

Por no haber ningun valor negativo, la solución anterior [illegible] la optima.
Pero hay una solución equivalente, por haber una δ [illegible]

10 / +1	50 / −1	40 /		
		30 /		90 /
30 / −1	+1		90 /	

40	20	40		
		30		90
	30		90	

$Z = 40(4) + 20(1) + 40(2) + 30(3) + 90(7) + 30(2) + 90(\ldots)$

$Z = 1400$

10	50	40			100
		30		90	120
30			90		120
40	50	70	90	90	

Nueva solución

$10(4)+50(1)+40(2)+30(3)+90(7)+30(5)+90(4) = 1400$

y disminuye en $30(-1) = -30$ [illegible]

Haciendo otra iteración, tenemos:

b.

c.

d.

BIBLIOGRAFIA —

- ACKOFF AND SASIENI "FUNDAMENTALS OF OPERATIONS RESEARCH" NEW YORK, WILEY. 1968

- DANTZING, GB "LINEAR PROGRAMMING AND EXTENSIONS" PRINCETON PRESS, 1966

- GASS, SI "LINEAR PROGRAMMING - METHODS AND APLICATIONS" NEW YORK MCGRAW HILL 1958

- HADLEY "LINNEAR PROGRAMMING READING MASS ADDISON WESLEY, 1962

- HILLIER AND LIEBERMAN "INTRODUCTION TO OPERATION RESEARCH" HOLDEN DAY, 1968

- JAUFFRED, MORENO, ACOSTA "METODOS DE OPTIMIZACION" REPRESENTACIONES Y SERVICIOS DE INGENIERIA

- SIMONNARD, M "LINNEAR PROGRAMMING" PARIS DUNOD, 1962.

EL PROBLEMA DE LA DIETA Y SU DUAL

DEFINICION DEL PROBLEMA DE LA DIETA.

Supongase que un dietista esta tratando de seleccionar una combinación de cinco tipos de alimentos (naranja, manzana, lechuga, chícharo y zanahoria) de manera que el alimento resultante de esta combinación reuna ciertos requerimientos nutricionales y tenga un costo mínimo. Los requerimientos nutricionales que debe tener el alimento resultante es de al menos 21 unidades de vitamina A y al menos 12 unidades de vitamina B. Las propiedades de los cinco elementos disponibles son:

ALIMENTO	CONTENIDO DE VITAMINA A POR UNIDAD DE ALIMENTO.	CONTENIDO DE VITAMINA B POR UNIDAD DE ALIMENTO.	COSTO POR UNIDAD DE ALIMENTO
1 (Naranja)	1	0	20
2 (Manzana)	0	1	20
3 (Lechuga)	1	2	31
4 (Chícharo)	1	1	11
5 (Zanahoria)	2	1	12

El problema a que se enfrenta el dietista se puede modelar como un problema de programación lineal (o programa lineal), de la siguiente manera.

Sea x_i la cantidad de alimento i $(i=1,2,\ldots,5)$ que debe estar en el alimento resultante de la combinación de los cinco alimentos. Por lo tanto, el costo de introducir el alimento i en la mezcla será su costo unitario por la cantidad x_i que esta presente en la mezcla. El costo total de la combinación de los cinco alimentos será la suma de los costos al combinar x_1, x_2, ... y x_5 unidades de cada alimento, ie. si z es el costo total entonces

$$z = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5$$

Ya que el objetivo del dietista es minimizar este costo total, entonces este objetivo se puede representar a través de la siguiente función objetivo

$$\min\ z = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 \qquad (1)$$

Los requerimientos nutricionales de vitamina A se pueden representar en la siguiente forma. Si el alimento nutricional i está presente en una cantidad x_i entonces proporciona una cantidad de vitamina A igual al producto de vitamina A que contiene una unidad de alimento por la cantidad x_i. La cantidad total proporcionada por los cinco alimentos será la suma de vitamina A con que contribuye cada alimento y esta deberá ser mayor que contenido mínimo requerido que es de 21 unidades, ie.

$$x_1 \qquad + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 21 \qquad (2)$$

Similarmente, los requerimientos de vitamina B se pueden representar por

$$x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12 \qquad (3)$$

22

Por último, otra restricción que debe estar presente en el problema del dietista es que la cantidad x_i que interviene en la mezcla debe ser mayor o igual a cero, ie.

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,5 \qquad (4)$$

Esta restricción es impuesta ya que no tiene sentido hablar de que una cantidad negativa x_i está formando parte de la combinación de alimentos.

En resumen el problema del dietista es encontrar valores $x_1, x_2, \ldots, x_5$ para los cuales la función objetivo (1) alcance su mínimo y satisfagan las restricciones (2), (3) y (4). Reescribiendo las ecuaciones del (1) al (4), el problema del dietista está simbólicamente dado por

$$\min\ z = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 21 \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12 \\ \qquad x_i \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

La formulación anterior, (*) y (**), se acostumbra representar en un tablero (llamado también tableau) que aparecerá abajo. Esta representación es solo una abreviación de escritura (a manera de una taquigrafía de programación lineal) que es útil en el algoritmo de solución, en el proceso convencional al procesar el problema por computadora y por una gran claridad en la formulación del problema dual que se presentará después. La representación de un programa lineal en forma de tablero consiste representar cada ecuación o desigualdad únicamente por los coeficientes de las variables omitiendo la escritura de sus correspondientes variables. Para conocer a que variable pertenece un coeficiente que aparece en este esquema se da la posición del coeficiente, escribiéndolo en la columna encabezada por la variable que le corresponde.

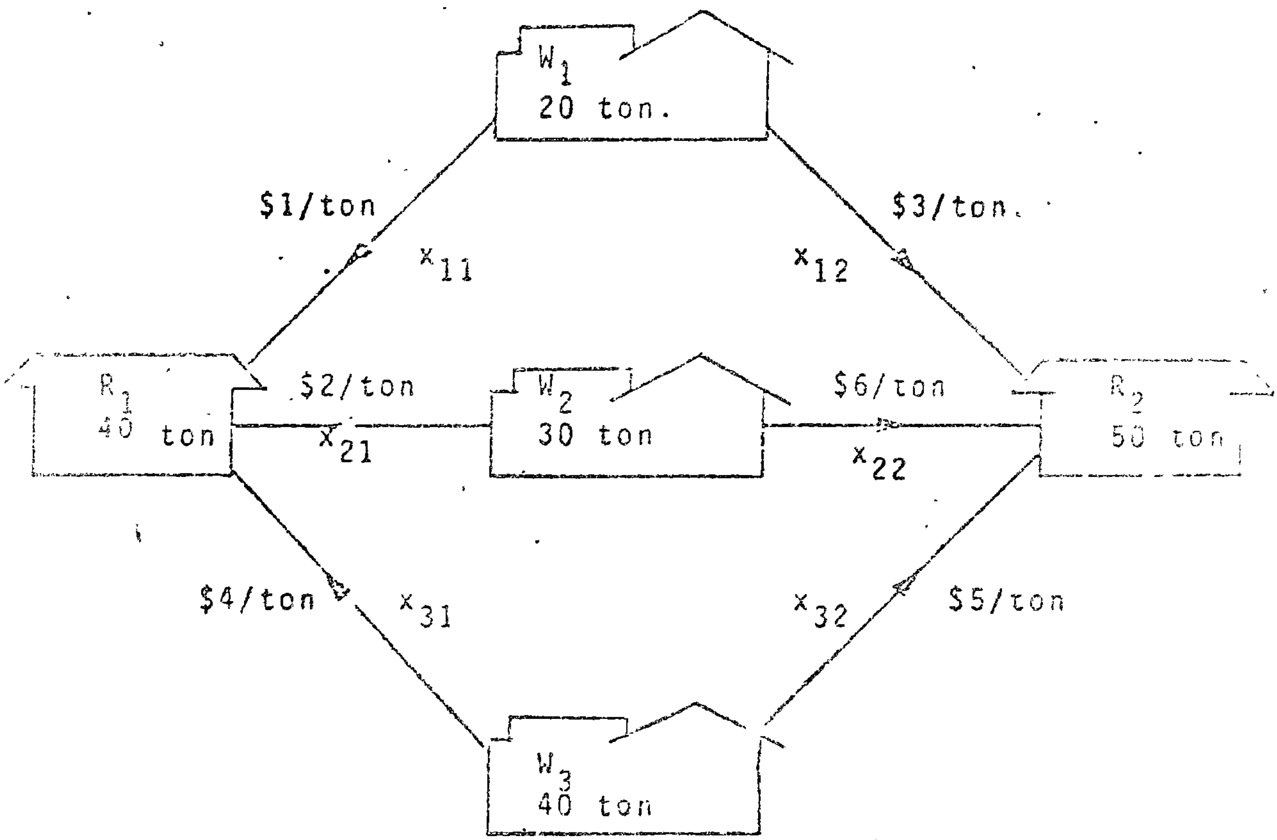
Para nuestro problema (*) y (**), la representación a través de un tablero está dada por

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
20	20	31	11	12	z (min)
1	0	1	1	2	$\geq$ 21
0	1	2	1	1	$\geq$ 12

$$x_i \geq 0$$

MODELO 4

Una compañia tiene tres almacenes W_1, W_2, y W_3, y dos tiendas de ventas al por menor. R_1, R_2. Las demandas en las tiendas al por menor y el inventario en los almacenes, se muestra en las respectivas cajas de la siguiente figura. Los costos de envio por tonelada también se muestran en la figura. La compañia desea determinar la manera de realizar los envios en forma tal que minimize los costos totales de envios, satisfaga las demandas de las tiendas de menudeo, y no excedan los inventarios en los almacenes.



(24)

Sea x_{ij} las toneladas del almacen W_i a la tienda de menudeo R_j. Entonces x_{32} representa el tonelaje enviado del almacen W_3 a la tienda de menudeo R_2.

Si z representa el costo total de envios, entonces nuestro problema se puede formular por:

$$\min z = 1x_{11} + 3x_{12} + 2x_{21} + 6x_{22} + 4x_{31} + 5x_{32} \qquad (*)$$

sujeta a

Restricciones sobre disponibilidad de almacenes

$$x_{11} + x_{12} \leqq 20$$
$$x_{21} + x_{22} \leqq 30$$
$$x_{31} + x_{32} \leqq 40$$

$$(**)$$

Restricciones sobre la demanda en tiendas de de menudeo

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqq 40$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqq 50$$

La formulacion anterior, (*) y (**), se acostumbra representar (por convenencia del algoritmo de solución y del proceso convencional en el procesamiento en computadora) en la siguiente tabla:

x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	
1	3	2	6	4	5	= z
1	1	0	0	0	0	$\leqq$ 20
0	0	1	1	0	0	$\leqq$ 30
0	0	0	0	1	1	$\leqq$ 40
1	0	1	0	1	0	$\geqq$ 40
0	1	0	1	0	1	$\geqq$ 50

REPRESENTACION MATRICIAL. La formulación (*) y (**), se puede representar matricialmente como sigue:

$$\min z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix}$$

sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

COMENTARIOS. El problema de programación lineal anterior ocurre tan frecuentemente en la practica, qué se le ha dado un nombre especial: el problema de transporte. Los problemas de transporte en geneal, tienen tablas ralas (o matrices ralas), lo cual significa que la tabla tiene muchos ceros o sea pocos elementos distintos de cero. Dantzig y otros han desarrollado métodos especiales para la solución rápida de estos problemas.

Otro comentario importante, es la característica que presentan cada una de las columnas de la matriz de restricciones: observe que cada una tiene dos unos y los demas elementos son todos ceros.

MODELO 4

Un inversionista tiene disponibles las actividades financieras A y B, al comienzo de cada uno de los siguientes cinco años. Cada peso invertido en A, al comienzo de un año, le regresa \$ 1.40 (una ganancia de \$ 0.40) dos años más tarde (en el momento preciso para una reinversión inmediata). Cada peso invertido en B al comienzo de un año, le regresa \$ 1.70 tres años después.

Además existen dos actividades financieras C y D que estarán disponibles solamente una vez en el futuro. Cada peso invertido en C en el comienzo del segundo año le regresa \$ 2.00 cuatro años más tarde. Cada peso invertido en D, en el comienzo del quinto año le regresa \$ 1.30 un año más tarde.

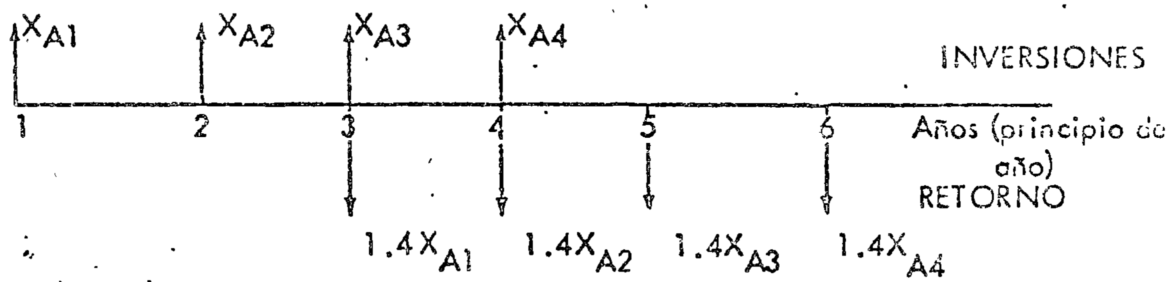
El inversionista comienza con \$ 10,000.00. El desea conocer qúe plan de inversión maximiza la cantidad de dinero que el puede acumular al comienzo del sexto año. Formule un modelo de programación lineal para este problema y también expréselo en forma tabular.

SOLUCION.

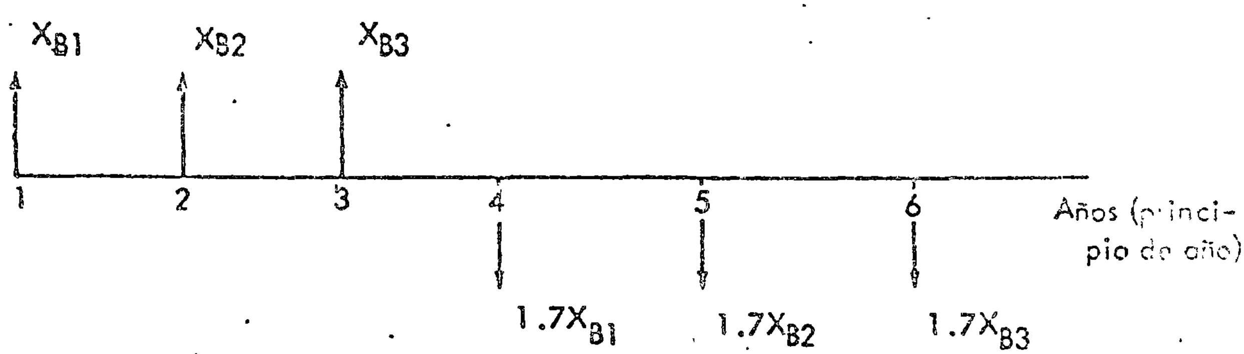
Sea X_{ij} la cantidad de dinero invertida en la actividad i (i = A, B. C, D) en el año j (j = 1, 2, 3, 4, 5).

Las características dadas sobre las formas de inversión de cada una de las actividades -- A, B, C y D pueden mostrarse esquemáticamente como sigue.

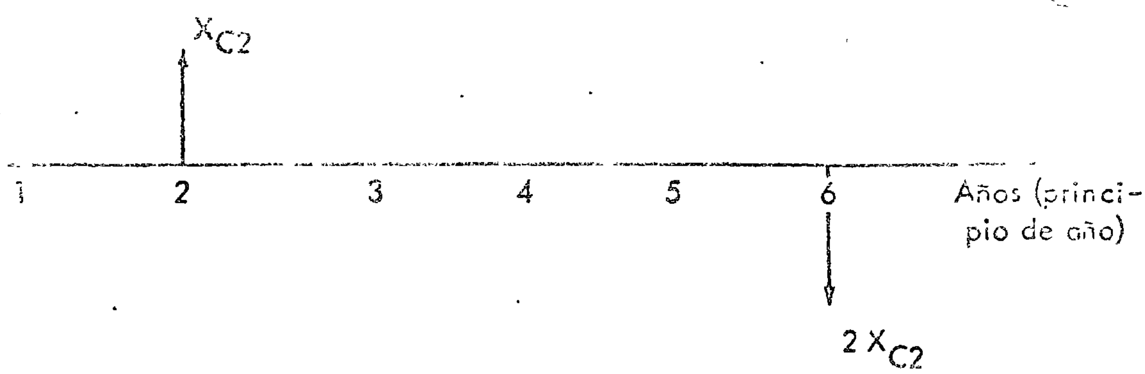
CONDICIONES DE INVERSION EN LA ACTIVIDAD A.



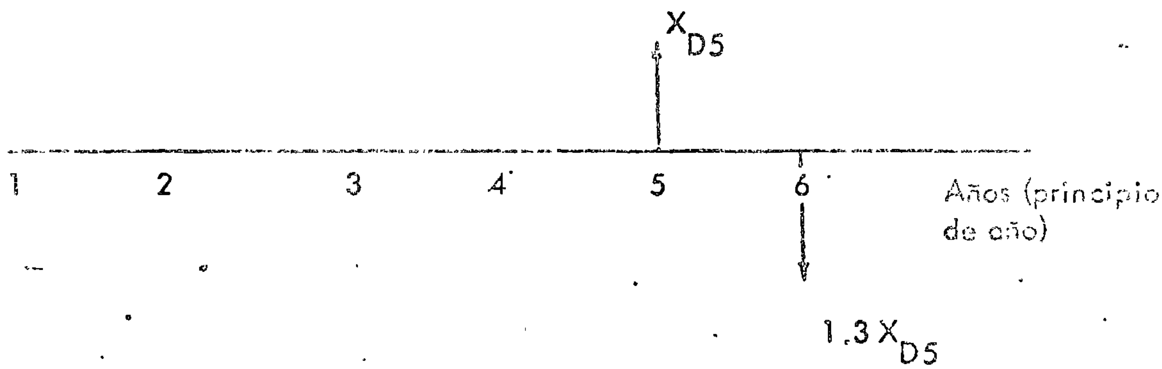
CONDICIONES DE INVERSION EN LA ACTIVIDAD B



CONDICIONES DE INVERSION EN LA ACTIVIDAD C:



CONDICIONES DE INVERSION EN LA ACTIVIDAD D:



La cantidad acumulada en el comienzo del sexto año es la cantidad original (10000) más la ganancia obtenida hasta esta fecha. Por lo tanto, el problema de maximizar la cantidad acumulada de dinero es equivalente a minimizar la ganancia, ya que la cantidad original disponible es una constante que no afecta el valor del dinero acumulado a través de cialquier plan de inversión que se siga.

Si Z es la ganancia total obtenida hasta el comienzo del sexto año, entonces la función objetivo será:

$$\max \ Z = 0.4X_{A1} + 0.4X_{A2} + 0.4X_{A3} + 0.4X_{A4} + 0.70X_{B1} + 0.70X_{B2} + X_{C2} + 0.3X_{D}$$

Del enunciado del problema, se observa que las restricciones al problema están dadas por la cantidad disponible para invertir en cada año, y por las características de las actividades A, B, C y D. Estas restricciones sobre las inversiones anuales se determinan como sigue:

PRIMER AÑO: La cantidad de dinero invertida en el primer año debe satisfacer:

$$X_{A1} + X_{B1} \leq 10000$$

Si U_1 es una variable positiva o cero, que se adiciona a la desigualdad anterior, para que esta desigualdad llegue a ser una igualdad, entonces

$$x_{A1} + x_{B1} + u_1 = 10000 \qquad (1)$$

$$u_1 \geq 0$$

NOTAS:

1. A la variable que se adiciona a una desigualdad para convertirla en igualdad se le llama una variable de holgura. Entonces u_1 es una variable de holgura.
2. Observe que u_1 representa la cantidad de dinero no invertido en el primer año, y por lo tanto también representa la cantidad disponible para invertir en el segundo año.

SEGUNDO AÑO: Las inversiones en este año deben satisfacer (observe en las figuras anteriores en que actividades financieras podemos invertir para el segundo año):

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq u_1$$

Si introducimos una variable positiva u_2 para pasar la desigualdad anterior a igualdad, entonces

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + u_2 = u_1 \qquad (2)$$

$$u_2 \geq 0$$

Observese que la variable u_2 es una varible de holgura que representa la cantidad no invertida en el segundo año.

TERCER AÑO: En este año la cantidad de dinero disponible para inversiones proviene de tres fuentes:

i) cantidad no invertida en el segundo año: u_2

ii) ganancia obtenida de inversiones anteriores: $0.4x_{A1}$

iii) cantidad recuperada de inversiones anteriores: x_{A1}

$u_2 + 1.4x_{A1}$

Observando cada uno de los cuatro diagramas mostrados anteriormente, se tiene que para el tercer año las inversiones deben satisfacer

$$x_{A3} + x_{B3} \leq u_2 + 1.4x_{A1}$$

Introduciendo una variable de holgura u_3 $(u_3 \geq 0)$. se tiene que

$$x_{A3} + x_{B3} + u_3 = u_2 + 1.4x_{A1} \qquad (3)$$

$$u_3 \geq 0$$

Otra vez notese que u_3 representa la cantidad no invertida en el tercer año.

CUARTO AÑO: En forma similar al análisis del tercer año, se tienen tres fuentes de dinero disponibles:

i) cantidad no invertida en el tercer año: u_3

ii) ganancia obtenida entre el tercer y cuarto período: $0.4x_{A2}+0.7x_{B2}$

iii) cantidad recuperada de inversiones anteriores: $x_{A2} + x_{B1}$

$$u_3+1.4x_{A2}+1.7x_{B1}$$

Por lo tanto, las inversiones en el cuarto período deben satisfacer

$$x_{A4} \leq u_3 + 1.4\ x_{A2} + 1.7\ x_{B1}$$

Introduciendo la variable de holgura positiva u_4, se tiene:

$$x_{A4} + u_4 = u_3 + 1.4\ x_{A2} + 1.7\ x_{B1} \qquad (4)$$

$$u_4 \geq 0$$

QUINTO AÑO: La cantidad disponible en este período proviene de:

i) cantidad no invertida en el cuarto año: u_4

ii) ganancia entre el tercero y el cuarto período: $0.4x_{A3}+0.7x_{B2}$

iii) cantidad recuperada entre el período 3 y 4to.: $x_{A3} + x_{B2}$

$$u_4+1.4x_{A3}+1.7x_{B2}$$

Por lo tanto,

$$x_{D5} \leq u_4 + 1.4\ x_{A3} + 1.7\ x_{B2}$$

Si u_5 es una variable de holgura, entonces

$$x_{D5} + u_5 = u_4 + 1.4\ x_{A3} + 1.7_{B2} \qquad (5)$$

$$u_4,\ u_5 \geq 0$$

Por lo tanto, nuestro modelo de programación lineal quedaría definido por la función objetivo, dada anteriormente y el conjunto de restricciones definidas por la ecuación del (1) a la (5).

Reescribiendo las ecuaciones anteriores, nuestro modelo de programación lineal queda expresado por:

$$\max z = 0.4x_{A1}+0.4x_{A2}+0.4x_{A3}+0.4_{A4}+0.7x_{B1}+0.7x_{B2}+0.7x_{B3}+x_{C2}+0.3x_{D5} \qquad (0)$$

sujeto a (s.a.)

$$x_{A1}+x_{B1}+u_1 = 10\ 000 \qquad (1)$$

$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+u_2 = u_1 \qquad (2)$$

$$x_{A3}+x_{B3} = u_2 + 1.4\,x_{A1} \qquad (3)$$

$$x_{A4}+u_4 = u_3+1.4x_{A2}+1.7x_{B1} \qquad (4)$$

$$x_{D5}+u_5 = u_4+1.4x_{A3}+1.7x_{B2} \qquad (5)$$

$$x_{Aj} \geq 0 \qquad (j=1,2,3,4)$$

$$x_{Bj} \geq 0 \qquad (j=1,2,3,)$$

$$x_{C2} \geq 0$$

$$x_{D5} \geq 0$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,5)$$

Este problema expresado en la forma particionada

$$\begin{array}{c} x \\ \begin{array}{|c|c|} \hline c & z \\ \hline A & b \\ \hline \end{array} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Se presenta a continuación:

x_{A1}	x_{B1}	u_1	x_{A2}	x_{B2}	x_{C2}	u_2	x_{A3}	x_{B3}	u_3	x_{A4}	u_4	x_{D5}	u_5	
.4	.7		.4	.7	1		.4	.7		.4		.3		= z (max)
1	1	1												= 10 000
		-1	1	1	1	1								= 0
-1.4						-1	1	1	1					= 0
	-1.7		-1.4						-1	1	1			= 0
				-1.7			-1.4				-1	1	1	= 0

$$x = \left[x_{A1} \; x_{B1} \; u_1 \; x_{A2} \; x_{B2} \; x_{C2} \; u_2 \; x_{A3} \; x_{B3} \; u_3 \; x_{A4} \; u_4 \; x_{D5} \; u_5 \right] \geq 0$$

NOTA: Las restricciones del (1) al (5) pueden expresarse sin variables de holgura, con objeto de expresar estasrestricciones como desigualdades en lugar de igualdades. El procedimiento para, obtener estas igualdades es el siguiente:

Obviamente de la ecuación (1) se tiene

$$x_{A1} + x_{B1} \leq 10\,000 \qquad (1^1)$$

Sumando (1) y (2):

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + u_2 = 10\,000$$

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 10\,000 \qquad (2^1)$$

Sumando (1), (2) y (3) :

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{A3} + x_{B3} + u_3 = 10\,000 + 1.4x_{A1}$$

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{A3} + x_{B3} \leq 10\,000 + 1.4x_{A1} \qquad (3^1)$$

Sumando (1), (2), (3) y (4) :

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{A3}+x_{B3}+x_{A4}+u_4 = 10\,000+1.4x_{A1}+1.4x_{A2}+1.7x_{B1}$$

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{A3}+x_{B3}+x_{A4} \leq 10\,000+1.4x_{A1}+1.4x_{A2}+1.7x_{B1} + 1.4x_{A3} + 1.7x_{B2} \qquad (4^1)$$

Sumando (1), (2), (3), (4) y (5):

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{A3}+x_{B3}+x_{A4}+x_{D5}+u_5 = 10\ 000+1.4x_{A1}+1.4x_{A2}$$
$$+1.7x_{B1}+ 1.4x_{A3}+1.7x_{B2}$$

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{A3}+x_{B3}+x_{A4}+x_{D5} \leq 10\ 000+1.4x_{A1}+1.4x_{A2}+1.7x_{B1}$$
$$+1.4x_{A3}+1.7x_{B2} \qquad (5^1)$$

Por lo tanto, las desigualdades del (1^1) al (5^1) son las restricciones a nuestro problema estas restricciones pueden obtenerse directamente del contexto del problema sin la introducción de variables de holgura, nuestro problema expresado a través de las restricciones de la (1^1) a la (5^1), queda representado en forma particionada como sigue:

x_{A1}	x_{B1}	x_{A2}	x_{B2}	x_{C2}	x_{A3}	x_{B3}	x_{A4}	x_{D5}	
.4	.7	.4	.7	1	.4	.7	.4	.3	= z (max)
1	1								≤ 10 000
1	1	1	1	1					≤ 10 000
-.4	1	1	1	1	1	1			≤ 10 000
-.4	-.7	-.4	1	1	1	1	1		≤ 10 000
-.4	-.7	-.4	-.7	1	-.4	1	1	1	≤ 10 000

$$x = \left[x_{A1}\ x_{B1}\ x_{A2}\ x_{B2}\ x_{C2}\ x_{A3}\ x_{B3}\ x_{A4}\ x_{D5} \right] \geq 0$$

PROBLEMA 5

La Compañía aérea Aeronaves del Pacífico, necesita decidir cuántas aeromozas contratan y adiestran en los próximos 6 meses. Los requerimientos expresados como horas-vuelo-aeromoza son:

8000 en Enero; 9000 en Febrero; 7000 en Marzo, 10 000 en Abril, 9000 en Mayo; y 11 000 en Junio.

El entrenamiento para que una aeromoza dé servicio en un vuelo dura un mes, por tanto cada muchacha debe contratarse por lo menos un mes antes de ser necesitada.

El entrenamiento requiere de 100 horas de supervisión de aeromozas ya entrenadas por lo tanto disponemos de 100 horas-vuelo-aeromoza menos, durante un mes por cada aeromoza en entrenamiento.

Cada aeromoza entrenada puede trabajar hasta 150 horas en un mes, y la compañía tiene 60 aeromozas entrenadas al principio de enero.

Si el máximo tiempo disponible de las aeromozas excede al requerido en el mes (horas vuelo + supervisión) trabajarán menos de 150 horas y no es despedida ninguna. Pero en cada mes, aproximadamente el 10% de las aeromozas con experiencia dejan el trabajo por matrimonio u otras razones.

Cada aeromoza entrenada cuesta a la compañía \$ 8000.00 al mes y cada aeromoza en entrenamiento \$ 4000.00, tomando en cuenta salarios y otros beneficios.

a) Formule el problema de contratar y entrenar como un modelo de programación lineal haciendo x_t el número de aeromozas que principian su entrenamiento en el mes t, donde $x_0 = 60$ representa las aeromozas disponibles al principio de enero. Defina cualquier símbolo adicional que necesite para expresar las variables de decisión.

b) El inciso anterior supone un horizonte de 6 meses. Suponga que se agregan requerimientos de julio al modelo, por ejemplo 10 000 horas. (Cambiaría necesariamente la solución para los meses anteriores encontrada anteriormente? Explíquelo.

Solución :

Sea x_t el número de personas contratadas que principian su entrenamiento al inicio del mes t $(t = 1, 2, \ldots, 6)$.

Sea y_t el número de aeromozas experimentadas al final del mes t $(t = 1, 2, \ldots, 6)$. Nótese que y_t también representa la cantidad de aeromozas experimentadas al inicio del mes $t + 1$.

DISPONIBILIDAD DE AEROMOZAS EXPERIMENTADAS.

Observe que el número de aeromozas experimentadas y_t al final del mes t, está formado por las personas contratadas al inicio de este mes(las cuales fueron entrenadas en el transcurso del mes) más el 90% de las aeromozas experimentadas que había al final del mes anterior $t-1$ (o sea al inicio del mes t), ie :

$$y_t = x_t + .9\, y_{t-1} \qquad (t = 1, 2, \ldots, 6)$$

con $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (*)

$$y_0 = x_0 = 60$$

ó sea

$$y_1 = x_1 + .9y_0 = x_1 + .9x_0 \qquad (1)$$

$$y_2 = x_2 + .9y_1 \qquad (2)$$

$$y_3 = x_3 + .9y_2 \qquad (3)$$

$$y_4 = x_4 + .9y_3 \qquad (4)$$

$$y_5 = x_5 + .9y_4 \qquad (5)$$

$$y_6 = x_6 + .9y_5 \qquad (6)$$

DEMANDAS DE HORAS DE TRABAJO (VUELOS COMERCIALES Y ENTRENAMIENTO):

La demanda total de horas de vuelo por mes corresponde a la demanda de vuelos comerciales más la demanda de horas para entrenar a las nuevas personas contratadas en el inicio del mes. Para satisfacer esta demanda total en el mes t (inicio del mes t), se dispone de y_{t-1} aeromozas con experiencia, las cuales pueden proporcionar 150 horas cada una de ellas. Por lo tanto, si D_t es la demanda de vuelos comerciales en el mes t, entonces:

Demanda en el mes t : $\qquad 150\, y_{t-1} \qquad D_t + 100\, x_t \qquad (t=1, 2, \ldots, 6)$

$\qquad$ con $y_0 = x_0$

Introduciendo una variable de holgura a cada ecuación, entonces

$$150 y_{t-1} = D_t + 100 x_t + u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, 6)$$

$$y_0 = x_0 \qquad\qquad (**)$$

$$u_t \geq 0$$

Claro que por u_t es una variable de holgura ... el número de horas disponibles no usadas al final del periodo t. Expresando esta restricción para cada t se tiene que: (**)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Demanda en el mes 1 :} & 150y_0 = 6000 + 100\,x_1 + u_1 \\
\text{Demanda en el mes 2 :} & 150y_1 = 9000 + 100\,x_2 + u_2 \\
\text{Demanda en el mes 3 :} & 150y_2 = 8000 + 100\,x_3 + u_3 \\
\text{Demanda en el mes 4 :} & 150y_3 = 10000 + 100x_4 + u_4 \\
\text{Demanda en el mes 5 :} & 150\,y_4 = 9000 + 100\,x_5 + u_5 \\
\text{Demanda en el mes 6 :} & 150y_5 = 12000 + 100x_6 + u_6
\end{array}
$$

FUNCION OBJETIVO:

Ya que el objetivo de la compañía es determinar cuantas aeromozas contratar en los próximos meses, entonces la función objetivo es minimizar los costos involucrados. Estos costos son los costos de las aeromozas experimentadas más los costos de las aeromozas que están siendo entrenadas. Por lo tanto, la función objetivo está dada por

$$\min\ Z = 8000\left[x_0 + y_1 + \dots + y_6\right] \quad + 4000\left[x_1 + x_2 + \dots + x_6\right]$$

ya que $x_0 = y_0$,

$$\min\ Z = 8000\left[y_0 + y_1 + \dots + y_6\right] \quad + 4000\left[x_1 + x_2 + \dots + x_6\right] \qquad (***)$$

Por lo tanto nuestro modelo de programación lineal para el problema dado, está definido por (*), (**) y (***). La representación de este problema de programación lineal en forma ... sionada (ó tableau ó tablero) es la siguiente.

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
800	800	800	800	800	800	800		400	400	400	400	400	400							Z
							1													
1							-1													
-.9	1							-1												
	-.9	1							-1											
		-.9	1							1										
			-.9	1							-1									
				-.9	1							-1								
					-.9	1							-1							
150								-100						-1						
	150								-100						-1					
		150								-100						-1				
			150								-100						-1			
				150								-100						-1		
					150								-100						-1	

$$x = \left[y_0\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ y_6\ \ x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ \ u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\right] \geq 0$$

TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS

PROGRAMACION LINEAL
MATRICES

MARCIAL PORTILLA ROBERTSON

FEBRERO DE 1976

2.1 MATRICES

2.1.1 DEFINICIONES

DEFINICION 2.1 Una matriz m x n, es un arreglo rectangular de números reales, llamados los elementos de la matriz, los cuales están arreglados en m renglones y n columnas en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTAS:

i) Una representación simplificada del arreglo anterior es $[a_{ij}]$ mn.

El símbolo a_{ij} representa al elemento que está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del arreglo.

ii) Las matrices se representarán por letras mayúsculas gruesas, entonces si A es una matriz m x n, significa que A = $[a_{ij}]_{mn}$.

iii) Si m = n, entonces se dice que se tiene una matriz cuadrada de orden m.

iv) Si A es m x 1, entonces se dice que A es una matriz columna.

v) Si A es 1 x n, entonces se dice que A es una matriz renglón.

EJEMPLOS. Las matrices A, B, C y D mostradas a continuación.

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 12 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tienen las siguientes características: A es 3 X 4, B es 1 X 4, (es una matriz renglón), C es 2 X 2 (es una matriz cuadrada), D es 3 X 1 (es una matriz columna)

NOTACION 1.

i) Sea A = $[a_{ij}]$ una matriz m x n. El i-esimo renglón de A, se indicará por $A_{i\cdot}$, ie.

$$A_{i\cdot} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix}.$$

ii) Sea $A = \left[a_{ij}\right]$ una matriz $m \times n$. La j-ésima columna de A, se indicará por $A_{\cdot j}$, i e.

$$A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

EJEMPLOS. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ encuentre

i) el primer renglón de A
ii) el tercer renglón de A
iii) la primera columna de A
iv) la cuarta columna de A

Solución

i) $A_{1\cdot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ii) $A_{3\cdot} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

iii)

$$A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iv)

$$A_{\cdot 4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DEFINICION 2.2. Se dice que las matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall \ i = 1, 2, \ldots, m \ \text{y} \ \forall \ j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA: De la definición anterior se observa una condición para que dos matrices -- sean iguales es que ambas tengan el mismo número de renglones y el mismo número de columnas

EJEMPLO. En las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

se observa que :

$A = B$ porque $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall$ $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

$A \neq C$ porque para $i = 2$ y $j = 2$ se tiene que $a_{21} = 1 \neq b_{21} = 0$

DEFINICION 2.3. Las matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$A_{i\cdot} = B_{i\cdot} \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

DEFINICION 2.4. Las matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$A_{\cdot j} = B_{\cdot j} \quad \forall \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

TEOREMA 2.4. Las definiciones 2.2, 2.3 y 2.4 son equivalentes, ie.

DEFINICION 2.2 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.3
DEFINICION 2.2 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.4
DEFINICION 2.3 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.4

DEMOSTRACION. La demostración es simple, solo considere la definición de igualdad de matrices (cualquiera de ellas) y la notación 1. Los detalles se piden en la tarea número 1.

DEFINICION 2.5. La suma de dos matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{mn}$, indicada por $A + B$, es una matriz $C = \left[c_{ij}\right]$ definida por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA.

i) La definición anterior expresada en otros términos es

$$C = \left[c_{ij}\right] = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \underline{\underline{d}} \quad A + B$$

ii) De la definición 2.5, se observa que una condición necesaria para la adición de matrices es que ambas tengan igual número de renglones y de columnas.

EJEMPLO. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+5 \\ 0+7 & 0+8 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$A + C$ no se define porque tienen distinto número de columnas
$B + C$ no se define por la misma razón

TEOREMA 2.6. (PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES)

i) $A + B = B + A$ (la adición es conmutativa)
ii) $(A+B) + C = A + (B+C)$ (La adición es asociativa).

DEMOSTRACION.

i) $A + B \ \underline{\underline{d}} \ \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$

Por otro lado, conocemos de la teoria de los números reales que la adición de los reales es conmutativa, ie. $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, por lo tanto,

$$A + B \overset{d}{=} \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \Rightarrow A + B = \left[b_{ij} + a_{ij}\right] \overset{d}{=} B + A \qquad \square$$
$$\Rightarrow A + B = B + A$$

ii) $$(A+B) + G = \left(\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]\right) + \left[c_{ij}\right]$$
$$= \left[a_{ij} + b_{ij}\right] + \left[c_{ij}\right]$$
$$= \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right]$$

Pero también conocemos de teoría de los números que en los números reales la adición es asociativa, ie.,

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

Por lo tanto,

$$(A+B) + C = \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]$$
$$= \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]$$
$$= A + (B+C) \qquad \square$$

DEFINICION 2.7. Sea $A = \left[a_{ij}\right]$ una matriz $m \times n$ y sea k un número real. La multiplicación de una matriz A por un número real k, indicado por kA, es una matriz $m \times n$ definida por

$$kA = \left[k a_{ij}\right]$$

NOTA: A los números reales también se les llama escalares, por lo que a la multiplicación de un real por una matriz también se le llama multiplicación - esccla r.

EJEMPLO. Si $k = -4$ y $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$kA = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.8 (PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN REAL POR UNA - MATRIZ)

i) $1\,A = A$

ii) $k\,(A+B) = kA + kB$

iii) $(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$

iv) $(k_1\,k_2)\,A = k_1\,(k_2\,A)$

DEMOSTRACION. Es trivial, solo aplique la definición 2.7, propiedades de numeros reales y definiciones o propiedades de matrices presentadas anteriormente. Intente hacerlo.

DEFINICION 2.9. Sea $A=\left[a_{ij}\right]$ m x n y sea $B=\left[b_{ij}\right]$ n x p. La multiplicación de A por B, indicada por AB, es una matriz de elementos c_{ij} definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad b_{kj}$$

NOTA. Una matriz A y B se pueden multiplicar si y solo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

EJEMPLO Si

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1X7 + 2X3 & 1X4 + 2X1 \\ 3X7 + 4X3 & 3X4 + 4X1 \\ 5X7 + 6X3 & 5X4 + 6X1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 33 & 16 \\ 53 & 26 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 + 8 + 5 = 16$$

Este ejemplo muestra que la multiplicación de dos matrices no es conmutativa, ie. $AB \neq BA$.

PROPOSICION 2.10 (REPRESENTACIONES MATRICIALES DE ALGUNAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS O NUMERICAS).

1. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ y $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = xy$

2. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = xx^t$ donde $x^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

3. Sea $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ un vector de n componentes, los cuales son todos unos.

   i) Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = xu^t$ donde $u^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

   ii) $n = uu^t$

   El vector $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ es llamado el vector suma debido a la propiedad de poder representar matricialmente una suma de números x_i (ver propiedad 3 i)).

DEMOSTRACION. Es simple, sólo use definición de producto de matrices para probar que el lado izquierdo de cada igualdad dada es igual al lado derecho de la misma.

DEFINICION 2.11 Si A es mxn, B es nxp, entonces el producto de A por B, indicado por AB, es una matriz de elementos c_{ij} definidos por

$$c_{ij} = A_{i.} B_{.j}$$

PROPOSICION 2.12 Las definiciones 2.9 y 2.11 son equivalentes.

DEMOSTRACION. Debemos demostrar que: Definicion 2.9 $\Longleftrightarrow$ Definición 2.11.

Demostracion de la implicación ($\Longrightarrow$):

Si $AB = c_{ij} \Longrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ por la definición 2.9

$\Longrightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ por Proposición 2.10 parte 1.

$\Longrightarrow\ c_{ij} = A_{i\circ}B_{\circ j}$ por la notacion 1

$\Longrightarrow$ Definición 2.11

Demostración de la implicación ($\Longleftarrow$). Como las implicaciones de la demostración anterior ($\Longrightarrow$) son reversibles en cada paso, entonces queda demostrado que la implicacion 2.11 implica la definición 2.9 $\square$

PROPOSICION 2.13.

i) $(AB)_{ij} = A_{i\circ}B_{\circ j}$

ii) $(AB)_{i\circ} = A_{i\circ}B$

iii) $(AB)_{\circ j} = AB_{\circ j}$

iv) $(ABC)_{ij} = A_{i\circ}BC_{\circ j}$

DEMOSTRACION.

DEMOSTRACION DE i). Este resultado es solo un restablecimiento de la definición 2.11.

$AB = \left[c_{ij}\right] \Longrightarrow (AB)_{ij} = c_{ij}$

$\Longrightarrow (AB)_{ij} = A_{i\circ}B_{\circ j}\ \square$ porque $c_{ij} = A_{i\circ}B_{\circ j}$ de acuerdo con definición 2.11

DEMOSTRACION DE ii). Demostraremos primero dos resultados

$$(A_{i\circ}B)_{1j} = (AB)_{ij} \qquad (*)$$

y

$$((AB)_{i\circ})_{1j} = (AB)_{ij} \qquad (**)$$

para luego concluir que el lado izquierdo de (*) es igual al lado izquierdo de (**), y por último mostrar que los elementos del renglón $(AB)_{i\circ}$ son de la forma (*) y que los elementos del renglón $A_{i\circ}B$ son de la forma (**), y así probar que $(AB)_{i\circ} = A_{i\circ}B$

Demostración de (*):

$(A_{i\circ}B)_{1j} = (A_{i\circ})_{1\circ}B_{\circ j}$ por la parte i) de esta proposición.

$\Longrightarrow (A_{i\circ}B)_{1j} = A_{i\circ}B_{\circ j}$ porque $A_{i\circ}$ es una matriz con un sólo renglón, por lo tanto el primer renglón de $A_{i\circ}$ es el mismo $A_{i\circ}$.

$\Longrightarrow (A_{i\circ}B)_{1j} = (AB)_{ij}\ \square$ por la parte i) de esta proposición.

Demostración de (**):

$(AB)_{i.}$ es el i-ésimo renglón de AB, lo cual implica que $(AB)_{i.}$ es una matriz de un solo renglón. Entonces el primer renglón de $(AB)_{i.}$ es la misma matriz $(AB)_{i.}$, expresando esta conclusión simbolicamente se tiene que

$$(\,(AB)_{i.}\,)_{1.} = (AB)_{i.}$$

Por lo tanto, si tomamos la j-ésima columna de $(\,(AB)_{i.}\,)_{1.}$, equivale a tomar la j-ésima columna de $(AB)_{i.}$, simbolicamente

$$(\,(AB)_{i.}\,)_{1j} = (AB)_{ij} \ \square$$

Una vez demostradas (*) y (**) se tiene que

$$(*) \text{ y } (**) \Rightarrow (A_{i.}B)_{1j} = (\,(AB)_{i.}\,)_{1j} \quad \forall\, j \qquad (***)$$

Falta ahora demostrar que los elementos del renglón $(AB)_{i.}$ son de la forma $(A_{i.}B)_{1j}$, y que los elementos del renglón $A_{i.}B$ son de la forma $(\,(AB)_{i.}\,)_{1j}$ y por (***) concluir que $(AB)_{i.} = A_{i.}B$:

$$\begin{aligned}
(AB)_{i.} &= \begin{bmatrix} (AB)_{i1} & (AB)_{i2} & \ldots & (AB)_{in} \end{bmatrix} & & \\
&= \begin{bmatrix} ((AB)_{i.})_{11} & ((AB)_{i.})_{12} & \ldots & ((AB)_{i.})_{1n} \end{bmatrix} & & \text{por } (**) \\
&= \begin{bmatrix} (A_{i.}B)_{11} & (A_{i.}B)_{12} & \ldots & (A_{i.}B)_{1n} \end{bmatrix} & & \text{por } (***) \\
&= A_{i.}B \ \square & & \text{por definición de } A_{i.}B
\end{aligned}$$

DEMOSTRACION DE iii). Es similar a la anterior. Intentela.

DEMOSTRACION DE iv).

$$\begin{aligned}
(ABC)_{ij} &= ((AB)C)_{ij} & & \text{asociatividad en la multiplicación de matrices} \\
&= (AB)_{i.}C_{.j} & & \text{parte i) de esta proposición.} \\
&= A_{i.}BC_{.j} \ \square & & \text{propiedad ii) de esta proposición.}
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.14 (PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE MATRICES)

i) $A(B + C) = AB + AC$

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(BC) = (AB)C$

DEMOSTRACION.

i) Debemos demostrar que el elemento (i,j) de $A(B+C)$ es igual al elemento (i,j) de $AB+AC$, para todo par (i,j):

$$\{A(B+C)\}_{ij} = \sum_k a_{ik}(B+C)_{kj}$$ definición de producto de matrices

$$= \sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$ definición de adición de matrices

$$= \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_K a_{ik}c_{kj}$$ propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en los números reales

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \quad \forall\, (i,j)$$

$$= (AB + AC)_{ij} \quad \square$$

ii) Es similar a parte i).

iii) $$\{A(BC)\}_{ij} = \sum_k a_{ik}(BC)_{kj}$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_k a_{ik}\Big(\sum_r b_{kr}c_{rj}\Big)$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_k \sum_r a_{ik}b_{kr}c_{rj}$$ asociatividad de la multiplicación en los números reales (1)

Por otro lado,

$$\{(AB)C\}_{ij} = \sum_r (AB)_{ir}c_{rj}$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_r \Big(\sum_k a_{ik}b_{kr}\Big)c_{rj}$$ definición de multiplicación de matrices

$$= \sum_r \sum_k a_{ik}b_{kr}c_{rj}$$ asociatividad de la multiplicación en los números reales. (2)

Por lo tanto, comparando los lados derechos de (1) y (2), se demuestra que $(AB)C=A(BC)$. $\square$

DEFINICION 2.15. La matriz identidad n x n, indicada por I_n, es una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son todos 1 y los elementos fuera de la diagonal principal son todos cero; ie.

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \dots 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ columnas}} \Bigg\} \; n \text{ renglones}$$

NOTA: La matriz identidad I_n, también se puede definir en términos de la delta de Kronecker, la cual se define a continuación. La delta de Kronecker, indicada por δ_{ij}, se define por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matriz identidad I_n se define en términos de δ_{ij}, por

$$I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.16. Sea $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Si I_n y I_m son matrices identidad n x n y m x m respectivamente, entonces

i) $I_n \; A = A$

ii) $A \; I_m = A$

DEMOSTRACION:

i) Si $I_n A = [C_{ij}] \Longrightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \; a_{kj}$ por definición de multiplicación de matrices.

$$\Longrightarrow C_{ij} = \delta_{i1} \; a_{1j} + \dots + \delta_{i,\, i-1} \; a_{i-1,\, j} + \delta_{ii} \, a_{ij} + \delta_{i,i+1} \, a_{i+1,j} + \dots + \delta_{in} a_{nj}$$

$$\Longrightarrow C_{ij} = a_{ij}$$

$$\Longrightarrow I_n \; A = [C_{ij}] = [a_{ij}] = A \qquad \square$$

ii) Es similar.

EJEMPLO. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$I_3\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$A\, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A$$

DEFINICION 2.17. Sea $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$. La transpuesta de A, indicada por A^t, es una matriz de elementos b_{ij} definida por

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m,\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

ie, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces la transpuesta de A, se define por

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTA: Dada una matriz A, la transpuesta de A, se obtiene intercambiando los renglones de A para que lleguen a ser las columnas de A^t, ie.

La primera columna de A^t es el primer renglón de A
La segunda columna de A^t es el segundo renglón de A, etc.

EJEMPLOS. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}; \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPOSICION 2.18

i) $(A_{i\cdot})^t = (A^t)_{\cdot i}$

ii) $(A_{\cdot i})^t = (A^t)_{i\cdot}$

DEMOSTRACION

i) Debemos demostrar que el lado requerido de la igualdad i), (L I I), es igual al lado derecho de la igualdad i), LDI,

$$L\,I\,I = (A_{i\cdot})^t = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

$$LDI = (A^t)_{\cdot i} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ij} \quad a_{in} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mj} \quad amn \end{bmatrix} \right)_{i\cdot}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{i1} \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{i2} \cdots & a_{m2} \\ \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{ij} & a_{mj} \\ \\ a_{in} & a_{2n} & a_{in} & a_{mn} \end{bmatrix} \right)_{i\cdot} = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $L\,I\,I = (A_{i\cdot})^t = (A^t)_{\cdot i} = L\,D\,I$, □

EJEMPLO. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ encuentre el

primer renglón de la transpuesta de A y la tercera columna de A^t.

SOLUCION

$(A^t)_{1\cdot} \quad = (A_{\cdot 1})^t \qquad$ por PROPOSICION 2.18 ii)

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right)^t = (-1 \quad 4 \quad 7)$$

$$(A^t)_{\cdot 3} = (A_{3\cdot})^t \qquad \text{por PROPOSICION 2.18 i)}$$

$$= (\ 7 \quad 8 \quad 9\ )^t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.19 (PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA)

i) $(A^t)^t = A$

ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$

iii) $(kA)^t = KA^t$

iv) $(AB)^t = A^t B^t$

DEMOSTRACION:

i) Sea $B = [b_{ij}] = A^t$ y sea $C = [c_{ij}] = B^t = (A^t)$, debemos demostrar que $C = A$.

Demostración:

$$C = B^t \Longrightarrow c_{ij} \stackrel{d}{=} b_{ji} \qquad (1) \qquad \text{por definición de transpuesta}$$

Por otro lado,

$$B = A^t \Longrightarrow b_{ij} \stackrel{d}{=} a_{ji} \qquad (2) \qquad \text{por definición de transpuesta}$$

$$\Longrightarrow b_{ji} = a_{ij}$$

$$(2) \text{ en } (1) \longrightarrow c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$$

$$\Longrightarrow c_{ij} = a_{ij} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Longrightarrow C = A$$

$$\Longrightarrow (A^t)^t = A \quad \square$$

2.2 PARTICION DE MATRICES Y OPERACIONES CON MATRICES PARTICIONADAS.

DEFINICION. 2.2.1 Sea A mxn. Se dice que la matriz A es una matriz particionada de acuerdo a un criterio dado, si la matriz ha sido dividida por rayas verticales y ho-rizontales de acuerdo a dicho criterio. Si $\mathcal{B}$ es una notación para indicar el criterio con el cual la matriz A ha sido dividida, entonces la matriz particionada A (o la partición de A según $\mathcal{B}$) se indicará por $A_{\mathcal{B}}$

EJEMPLO Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si el criterio $\mathcal{B}$ para particionar A consiste en dividir A por una raya vertical entre la primera y segunda co-lumna y por una raya horizontal entre el segundo y el tercer renglón, entonces:

$$A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Otras particiones de A generadas por otros criterios de partición podrían ser:

$$A_{\mathcal{D}} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]; \quad A_{\mathcal{E}} = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

DEFINICION. 2.2.2 A las matrices que se generan por la partición de una matriz con un criterio $\mathcal{B}$ dado se les llama submatrices de A generadas por la partición de A según el criterio $\mathcal{B}$

DEFINICION. 2.2.3 Sea A una matriz y $\mathcal{B}$ una partición sobre A. Las submatrices de A generadas por la partición $\mathcal{B}$, se llaman los elementos de $A_{\mathcal{B}}$.

NOTA. Una matriz particionada $A_{\mathcal{B}}$ se puede representar a través de sus elementos (ie. sus submatrices).

EJEMPLO: Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ \hline 4 & 8 & 12 \end{array}\right]$$

entonces las submatrices de A generadas por $\mathcal{B}$, son:

$$A_{\mathcal{B}}^{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \; A_{\mathcal{B}}^{12} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 10 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \; ; \; A_{\mathcal{B}}^{21} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \; ; \; A_{\mathcal{B}}^{22} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \end{bmatrix}$$

y $A_{\mathcal{B}}$ puede ser representada en términos de las submatrices en la siguiente forma:

$$A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ \hline 4 & 8 & 12 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} & A_{\mathcal{B}}^{12} \\ & \\ A_{\mathcal{B}}^{21} & A_{\mathcal{B}}^{22} \end{bmatrix}$$

DEFINICION. 2.2.4 Si Γ es una matriz particionada, entonces el símbolo $\{\Gamma\}$ indica la matriz obtenida de Γ eliminando sus particiones. Por lo tanto,

$$\{A_{\mathcal{B}}\} = A$$

DEFINICION. 2.2.5 Sea A mxn y B mxn. Sea $\mathcal{B}$ el mismo criterio de partición para A y B, ie.

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A^{11}_{\mathcal{B}} & A^{12}_{\mathcal{B}} & \cdots & A^{1q}_{\mathcal{B}} \\ A^{21}_{\mathcal{B}} & A^{22}_{\mathcal{B}} & \cdots & A^{2q}_{\mathcal{B}} \\ \vdots & & & \\ A^{P1}_{\mathcal{B}} & A^{P2}_{\mathcal{B}} & \cdots & A^{Pq}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B^{11}_{\mathcal{B}} & B^{12}_{\mathcal{B}} & \cdots & B^{1q}_{\mathcal{B}} \\ B^{21}_{\mathcal{B}} & B^{22}_{\mathcal{B}} & \cdots & B^{2q}_{\mathcal{B}} \\ \vdots & & & \\ B^{P1}_{\mathcal{B}} & B^{P2}_{\mathcal{B}} & \cdots & B^{Pq}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

La adición de las matrices particionadas $A_{\mathcal{B}}$ y $B_{\mathcal{B}}$ se define por

$$A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A^{11}_{\mathcal{B}} + B^{11}_{\mathcal{B}} & A^{12}_{\mathcal{B}} + B^{12}_{\mathcal{B}} & \cdots & A^{1q}_{\mathcal{B}} + B^{1q}_{\mathcal{B}} \\ A^{21}_{\mathcal{B}} + B^{21}_{\mathcal{B}} & A^{22}_{\mathcal{B}} + B^{22}_{\mathcal{B}} & \cdots & A^{2q}_{\mathcal{B}} + B^{2q}_{\mathcal{B}} \\ \vdots & & & \vdots \\ A^{P1}_{\mathcal{B}} + B^{P2}_{\mathcal{B}} & A^{P2}_{\mathcal{B}} + B^{P2}_{\mathcal{B}} & \cdots & A^{Pq}_{\mathcal{B}} + B^{Pq}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO Si

$$A_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad B_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entonces

$$A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5 & 0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

TEOREMA 2.2.6 (PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES PARTICIONADAS).

i) $A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = (A + B)_{\mathcal{B}}$

ii) $A_{\mathcal{B}} + B_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}} + A_{\mathcal{B}}$

iii) $A_{\mathcal{B}} + (B_{\mathcal{B}} + C_{\mathcal{B}}) = (A_{\mathcal{B}} + \cancel{A_{\mathcal{B}}} + B_{\mathcal{B}}) + C_{\mathcal{B}}$

DEFINICION. 2.2.7 Sea A mxn y B nxt. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ particiones aplicadas a A y B respectivamente, ie.

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{B}}^{11} & A_{\mathcal{B}}^{12} & \cdots & A_{\mathcal{B}}^{1q} \\ A_{\mathcal{B}}^{21} & A_{\mathcal{B}}^{22} & \cdots & A_{\mathcal{B}}^{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{\mathcal{B}}^{p1} & A_{\mathcal{B}}^{p2} & \cdots & A_{\mathcal{B}}^{pq} \end{bmatrix}; \quad B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} B_{\mathcal{D}}^{11} & B_{\mathcal{D}}^{12} & \cdots & B_{\mathcal{D}}^{1s} \\ B_{\mathcal{D}}^{21} & B_{\mathcal{D}}^{22} & \cdots & B_{\mathcal{D}}^{2s} \\ \vdots & & & \\ B_{\mathcal{D}}^{r1} & B_{\mathcal{D}}^{r2} & \cdots & B_{\mathcal{D}}^{rs} \end{bmatrix}$$

Si $q = r$ y si cada producto

$$A_{\mathcal{B}}^{ik} \quad B_{\mathcal{D}}^{kj} \quad (i = 1,\ldots,p;\ j = 1,\ldots,s\ ;\ k = 1,\ldots,q)$$

está definido, entonces el producto $A_{\mathcal{B}} \; B_{\mathcal{D}}$ se define como una matriz particionada de p renglones y s columnas cuyo elemento (i, j) es

$$\sum_{k=1}^{q} A^{ik} \; B^{kj} \qquad (i = 1,\dots, p;\ j=1,\dots,s)$$

ie

$$A_{\mathcal{B}}\,B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} A^{11}_{\mathcal{B}} & A^{12}_{\mathcal{B}} \cdots & A^{1q}_{\mathcal{B}} \\ A^{21}_{\mathcal{B}} & A^{22}_{\mathcal{B}} \cdots & A^{2q}_{\mathcal{B}} \\ \vdots & & \\ A^{p1}_{\mathcal{B}} & A^{p2}_{\mathcal{B}} \cdots & A^{pq}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B^{11}_{\mathcal{D}} & B^{12}_{\mathcal{D}} \cdots & B^{1s}_{\mathcal{D}} \\ B^{21}_{\mathcal{D}} & B^{22}_{\mathcal{D}} \cdots & B^{2s}_{\mathcal{D}} \\ \vdots & & \\ B^{r1}_{\mathcal{D}} & B^{r2}_{\mathcal{D}} \cdots & B^{rs}_{\mathcal{D}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A^{11}_{\mathcal{B}}\,B^{11}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{1q}_{\mathcal{B}}\,B^{r1}_{\mathcal{D}}) & (A^{11}_{\mathcal{B}}\,B^{12}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{1q}\,B^{r2}) & (A^{11}_{\mathcal{B}}\,B^{1s}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{1q}_{\mathcal{B}}\,B^{rs}_{\mathcal{D}}) \\ (A^{21}_{\mathcal{B}}\,B^{11}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{1q}_{\mathcal{B}}\,B^{r1}_{\mathcal{D}}) & (A^{21}_{\mathcal{B}}\,B^{12}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{2q}_{\mathcal{B}}\,A^{r2}_{\mathcal{D}}) & (A^{21}_{\mathcal{B}}\,B^{1s}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{2q}_{\mathcal{B}}\,B^{rs}_{\mathcal{D}}) \\ \vdots & & \\ (A^{p1}_{\mathcal{B}}\,B^{11}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{pq}_{\mathcal{B}}\,B^{r1}_{\mathcal{D}}) & (A^{p1}_{\mathcal{B}}\,B^{12}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{pq}_{\mathcal{B}}\,B^{r2}_{\mathcal{D}}) & (A^{p1}_{\mathcal{B}}\,B^{1s}_{\mathcal{D}}+\dots+A^{pq}_{\mathcal{B}}\,B^{rs}_{\mathcal{D}}) \end{bmatrix}$$

EJEMPLO. Si

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A^{11}_{\mathcal{B}} & A^{12}_{\mathcal{B}} \\ \\ A^{21}_{\mathcal{B}} & A^{22}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] ; \; B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} B^{11}_{\mathcal{D}} \\ B^{12}_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 \end{array}\right]$$

entonces

$$A_{\mathcal{B}} B_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} A^{11}_{\mathcal{B}} B^{11}_{\mathcal{D}} + A^{12}_{\mathcal{B}} B^{21}_{\mathcal{D}} \\ \\ A^{21}_{\mathcal{B}} B^{11}_{\mathcal{D}} + A^{22}_{\mathcal{B}} B^{21}_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 32 & 24 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 14 & 10 \\ 32 & 24 \\ \hdashline 6 & 5 \\ 11 & 8 \end{array}\right]$$

EJEMPLO

$$
A_{\mathcal{B}} \quad B_{\mathcal{D}} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

2.4 INVERSA DE UNA MATRIZ.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

DEFINICION 2.4.1 Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si existe una matriz B $n \times n$ tal que

$$A B = I_{nn}$$
$$y \quad B A = I_{nn}$$

entonces B es llamada la inversa de A. A la matriz B se le indicaró por A^{-1}, ie, la inversa de A, indicada por A^{-1}, es una matriz tal que

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_{nn}$$

NOTA. Si para una matriz A no es posible encontrar una matriz A^{-1} que satisfaga la deficinión anterior, entonces se dice que A no tiene inversa o que su inversa no existe.

TEOREMA 2.4.2 (PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA). Sean A y B matrices $n \times n$ y sean A^{-1} y B^{-1} sus respectivas inversas. Se afirma que :

i) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

DEMOSTRACION DE i). Para que $B^{-1} A^{-1}$ sea la inversa de AB, debe satisfacer que

$$(B^{-1} A^{-1}) (AB) = I_{nn}$$
$$y \quad (AB) (B^{-1} A^{-1}) = I_{nn}$$

las demostraciones de estas dos condiciones se presenta en los siguientes demandas.

DEMANDA 1. $(B^{-1} A^{-1}) (AB) = I_{nn}$

DEMOSTRACION

$(B^{-1} A^{-1}) (AB) = (B^{-1} A^{-1} A) B$ por asociatividad en la multiplicacion de matrices.
$= B^{-1} (A^{-1} A) B$ por asociatividad de en la multiplicación de matrices.
$= B^{-1} I_{nn} B$
$= B^{-1} B = I_{nn}$ □

DEMANDA 2. $(AB) (B^{-1} A) = I_{nn}$

DEMOSTRACION. Es similar, a la anterior, ie.

$$(AB) (B^{-1} A^{-1}) = (A B B^{-1}) A^{-1} = A (B B^{-1}) A^{-1} = A I_{nn} A^{-1}$$
$$= A A^{-1} = I_{nn} \quad \square$$

DEMOSTRACION DE ii) Debemos demostrar que

$$A^{-1} (A^{-1})^{-1} = I_{nn}$$
$$y \quad (A^{-1})^{-1} A^{-1} = I_{nn}$$

La demostración es trevial, ya que conocemos que para cualquier matriz B con inversa, se debe satisfacer que

$$B B^{-1} = B^{-1} B = I_{nn}$$

Por lo tanto, si hacemos $B = A^{-1}$,

$$(A^{-1})\,(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}\,(A^{-1}) = I_{nn} \quad \square$$

DEMOSTRACION DE iii).

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{nn} \;\rightarrow\; (AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_{nn}^t$

$\rightarrow\; (A^{-1})^t\, A^t = A^t (A^{-1})^t = I_{nn}$ Teorema 2.19 iv) (pág. 13).

Si $B = (A^{-1})^t \;\rightarrow\; B\,A^t = A^t\,B = I_{nn}$

Por lo tanto la inversa de A^t es B por definición de inversa. Pero $B = (A^{-1})$ entonces la inversa de A^t es $(A^{-1})^t$, ie $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ $\square$.

TEOREMA 2.4.3 (INVERSA DE UNA MATRIZ 2 X2).

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

donde $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

DEMOSTRACION. Suponga que

$$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

es la inversa de A, entonces AB = I, ó sea

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}w + a_{12}y & a_{11}x + a_{12}z \\ a_{21}w + a_{22}y & a_{21}x + a_{22}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}w + a_{12}y &= 1 \\ a_{21}w + a_{22}y &= 0 \\ a_{11}x + a_{12}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}z &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo en las variables w, x, y z, se tiene que

$$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad \square$$

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.4.4 (INVERSION DE MATRICES POR PARTICIONES). Si A es una matriz $n \times n$, particionada de acuerdo al siguiente criterio

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{p1} & & a_{pp} & a_{p,p+1} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,p} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} M \text{ es } p \times p \\ L \text{ es } q \times p \\ R \text{ es } p \times q \\ N \text{ es } q \times q \\ p + q = n \end{array}$$

y N^{-1} existe entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} \mu = (M - R\, N^{-1} L)^{-1} & \text{es } p \times p \\ \lambda = -\, N^{-1}\, L\, \mu & \text{es } q \times p \\ \rho = -\, \mu\, R\, N^{-1} & \text{es } p \times q \\ \nu = N^{-1} - N^{-1}\, L\, \rho & \text{es } q \times q \end{array}$$

DEMOSTRACION

Suponga que la inversa de A es una matriz particionada de la forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

donde μ ρ λ y ν son submatrices de A^{-1} que tienen las siguientes dimensiones:

μ es $p \times p$
λ es $q \times p$
ρ es $p \times q$
ν es $q \times q$

Por definición de inversa, se tiene que

$$A\,A^{-1} = I_{nn}$$

Esta igualdad expresada en forma particionada presenta la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & O_{pq} \\ \hline O_{qp} & I_{qq} \end{array}\right]$$

Realizando el producto de las matrices particionadas del lado izquierdo de la igualdad anterior se tiene que

$$\begin{bmatrix} M\mu + R\lambda & M\rho + R\nu \\ L\mu + N\lambda & L\rho + N\nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & O_{p\times q} \\ \hline O_{q\times p} & I_{qq} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} M\mu + R\lambda &= I_{pp} & (2.4.1) \\ L\mu + N\lambda &= O_{qp} & (2.4.2) \\ M\rho + R\nu &= O_{pq} & (2.4.3) \\ L\rho + N\nu &= I_{qq} & (2.4.4) \end{aligned}$$

(2.4.2) $\rightarrow \quad \lambda = -N^{-1} L\mu \quad \square$ (2.4.5)

(2.4.5) en (2.4.1) $\rightarrow M\mu + R(-N^{-1}L\mu) = I_{pp}$

$\rightarrow (M-RN^{-1}L)\mu = I_{pp}$

$\rightarrow \mu = (M-RN^{-1}L)^{-1} I_{pp}$

$\rightarrow \mu = (M-RN^{-1}L)^{-1} \quad \square$ (2.4.6)

(2.4.4) $\rightarrow \nu = N^{-1} - N^{-1} L\rho \quad \square$ (2.4.7)

(2.4.7) en (2.4.3) $\rightarrow M\rho + R\,[N^{-1} - N^{-1}L\rho] = O_{pq}$

$\rightarrow [M - RN^{-1}L]\rho = -RN^{-1}$

$\rightarrow \rho = -[M-RN^{-1}L]^{-1} RN^{-1}$

$\rightarrow \rho = -\mu RN^{-1} \quad \square$

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

encuentre su inversa por particiones.

SOLUCION. Una posible partición de A es

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Ya que N^{-1} existe entonces la partición elegida es apropiada y podemos aplicar el método por particiones de acuerdo al teorema anterior.

$$\mu = (M-R\,N^{-1}\,L)^{-1} = (1 - \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix})^{-1}$$

$$\mu = (1 - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix})^{-1} = (1 - 3/2)^{-1} = (-1/2)^{-1}$$

$$\mu = -2$$

$$\lambda = -N^{-1}\,L\,\mu = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (-2) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = -\mu\,RN^{-1} = -(-2)\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nu = N^{-1} - N^{-1}\,L\,\rho = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\nu = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Otra posible solución es eligiendo la siguiente partición

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}$$

$$N = 6 \rightarrow N^{-1} = 1/6$$

Ya que N^{-1} existe, entonces de acuerdo al teorema anterior se tiene

$$\mu = (M-RN^{-1}\,L)^{-1} = (\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} (1/6) \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix})^{-1}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -N^{-1}\,L\,\mu = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rho = -\mu RN^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} (1/6) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\nu = N^{-1} - N^{-1} L \rho = 1/6 - (1/6) \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (1/6) - (1/6)(-5) = 1$$

$$\therefore \; A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERSION DE MATRICES POR EL METODO DE LA INVERSA EN FORMA DE PRODUCTO.

El método de la inversa en forma de producto es útil cuando conociendo una matriz A y su inversa A^{-1} se tiene otra matriz B la cual es idéntica a A excepto por una columna. Para encontrar B^{-1}, el método aprovecha el conocimiento de A^{-1} y así ahorrar un gran número de operaciones en el computo de B^{-1}. Con el objeto de tener una idea que nos recuerde la situación en que se usa este método diremos que A es la matriz vieja (ó previa) y B es la matriz nueva, entendiendo que B difiere de A por una sola columna (ó que B se obtiene de A por la susritución de una sola columna). La presentación de este método se daró en el teorema 2.4.6, pero antes se dará un resultado preliminar en el lema 2.4.5.

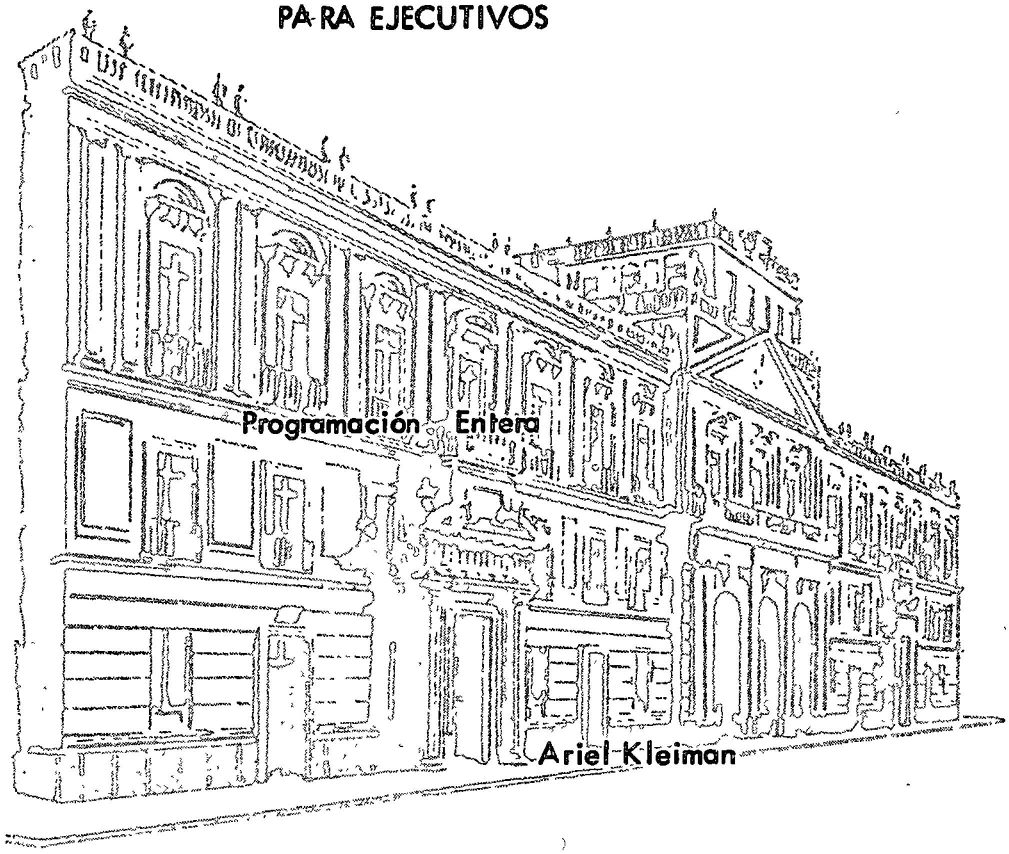
La idea del método anterior también se utilizaró para encontrar la inversa de una matriz A aun cuando no se conozca la inversa de una matriz previa a A que difiera de A por una sola columna. Sin embargo podemos tomar como punto de partida a la matriz identidad I e ir definiendo una secuencia de matrices de manera que la primera se parezca mucho a I y poco a A y, las siguientes se parezcan poco a I y se vayan pareciendo más a A. Esta idea define un proceso iterativo en el cual se aplica el teorema 2.4.6 en cada etapa. El detalle del procedimiento se presentará en el teorema 2.4.7.

centro de educación continua

división de estudios superiores

facultad de ingeniería, unam

TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS



Programación Entera

Ariel Kleiman

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels: 521-40-23 521-73-35 5123-123

PROGRAMACION ENTERA

Introducción

Un supuesto básico de la P.L. es la divisibilidad, además del de linealidad.

En muchas ocasiones, ese supuesto no es real: no se pueden asignar fracciones de aparato o persona, ni construir fracciones de equipo.

Hay casos especiales de P.L. en que la solución es entera.
Por ejemplo: transporte y asignación. Pero esto no ocurre por la naturaleza del algoritmo, sino las propiedades de los coeficientes.

En los demás casos hay que imponer restricciones adicionales, para que algunas (o todas) las v^s resulten "enteras" en la solución.

El modelo se llama "de programación (lineal) entera", la que puede ser:

. completamente entera (o entera pura)
. entera mixta

Cada modelo consta de:

- función objetivo lineal
- restricciones lineales
- condiciones de no-negatividad
- condiciones de "integridad" (a las que llamaremos de no-divisibilidad)

En un modelo de P.E. hay más restricciones que en uno de P.L. Por lo tanto, la solución será menos favorable (o a lo sumo tan favorable) como la solución óptima del modelo de P.L. no entera.

Se han diseñado métodos de solución específicos para la P.E. Son útiles en la solución de:

- problemas de indivisibilidad
- problemas no lineales, no convexos, combinatorios y discretos.

METODOS DE SOLUCION

1. Redondeo de soluciones no enteras
2. Representación gráfica
3. Gomory (dual factible)
4. González-Young (primal factible)
5. Enumeración completa
6. Land y Doig de P. E. mixta.
7. Ramificación y acotación
8. Heurística

Glosario:

P. L.: Programación lineal
P. E.: Programación entera
vs: Variables

1. Redondeo

Consiste en resolver el problema de P.L., obtener la solución óptima y redondear esos valores.

Ventajas: economía, en tiempo y en costo en relación al modelo especial que habría que construir.
(Recuérdese que más restricciones implican más iteraciones)

Desventajas: la solución a la que se llega puede no ser óptima, o pueda ser un óptimo local (lo es entre sus puntos adyacentes, pero no es global) o puede ser no factible (entera, pero fuera de la región factible). Por eso, si se procede así, hay que enumerar las soluciones enteras vecinas a la solución no entera y explorarlas (valuarlas y verificar la posible violación de restricciones)

Ejemplo 1: $\max z = 3x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 100$$

$$20x_1 + 30x_2 \leqslant 300$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ enteras}$$

Solución de P. L.	Solución redondeada	Solución de P. E.
$x_1 = 7.5$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$
$x_2 = 5.0$	$x_2 = 5$	$x_2 = 4$
$Z = 32.5$	$Z = 31$	$Z = 32$

El redondeo no fue muy desventajoso: no proporcionó la solución óptima, pero esta resultó levemente alejada de la óptima.

$$Z_1 - Z_2 = 31-32 = -1$$

Ejemplo 2:

$$\max \quad 10\,000\, x_3 + 20\,000\, X_4$$

sujeto a

$$X_3 \leqslant 4.5$$

$$X_4 \leqslant 3.5$$

$$X_3, X_4 \geqslant 0, \text{ enteras}$$

Solución de P.L.	Solución redondeada	Solución de P. E.
$x_3 = 3.5$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$
$x_4 = 3.5$	$x_4 = 3$	$x_4 = 3$
$Z = 105\ 000$	$Z = 90\ 000$	$Z = 100\ 000$

El redondeo fue desventajoso: proporcionó una solución no óptima, muy alejada de la verdadera.

Ejemplo 3

$$\max\ Z = 38x_1 + 81x_2$$

$$\text{sujeta a}\quad 18x_1 + 40x_2 \leq 237$$

$$8x_1 - 8x_2 \leq 23$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Solución de P. L.

$x_1 = 6.069$

$x_2 = 3.194$

$Z = 489.336$

Exploración de soluciones redondeadas

$x_1 = 6$, $x_2 = 3$
no es factible (2a.)

$x_1 = 7$, $x_2 = 3$
no es factible (2a)

$x_1 = 7$, $x_2 = 4$
no es factible (2a)

$x_1 = 6$, $x_2 = 4$
no es factible (1a)

$x_1 = 5$, $x_2 = 3$
$Z = 433$

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$
$Z = 443$

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$
$Z = 481$

$x_1 = 3$, $x_2 = 4$
$Z = 438$

$x_1 = 4$, $x_2 = 4$
$Z = 476$

El redondeo no sólo no proporciona el óptimo, sino que además puede llevar a situaciones de no factibilidad.

2. Representación gráfica

Es similar al método gráfico de la P. L., sólo varía la naturaleza de la región factible. En la P. L. es un conjunto convexo limitado por fronteras lineales. En la P. E. es una "red" de puntos aislados, de coordenadas enteras.

Ventajas: es simple, directo y aplicable, tanto al caso entero puro como al entero mixto.

Resuelve los problemas de orden 2 variables y n restricciones, y - con dificultad- los de 3 variables y n restricciones.

Ejemplo:

Se dispone de $ 12.5 millones, para construir más plantas y/o más bodegas, y así mejorar producción y/o distribución . Cada bodega cuesta $ 1 millón, y no se requieren más de 8; cada planta cuesta $ 2 millones y no se requieren más de 5. Cada bodega incrementará la utilidad en $ 31 mil mensuales, y cada planta en $ 60 mil mensuales.
¿Cuál es el número óptimo de plantas y de bodegas?

Modelo:

$$\max\ Z = 31x_1 + 60x_2$$

$$\text{sujeto a}\quad \begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} &\leq 8 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12.5 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0\ \text{, enteras} \end{aligned}$$

Procedimiento:

Se marcan todos los puntos de coordenadas enteras;
se forma el conjunto convexo de área mínima que encierra a todos esos puntos;
se desplaza la línea de la función objetivo hasta obtener la más alejada del origen que pase por un punto de coordenadas enteras.
En este caso es $(x_1, x_2) = (8,2)$.

Solución de P. L.	Solución gráfica
$x_1 = 8$	$x_1 = 8$
$x_2 = 2.25$	$x_2 = 2$
$Z = 383{,}000$	$Z = 368{,}000$

Comentarios:

1. Este procedimiento nos da la idea de que para que la P. L. proporcione soluciones enteras se requiere agregar una (o varias) restriccion(es) adicional(es) que corte(n) parte de la región factible, de modo que se eliminen los vértices que ...

pondan a valores no enteros de las variables.

2. Costo de la no-divisibilidad; comparando la solución gráfica con la solución de P. L., se observa que $Z_1 - Z_2 = 368-383=15$ mil pesos mensuales, es la reducción en el valor de la función objetivo.

La holgura que interesa es la de la restricción presupuestaria, donde quedan 0.5 millones disponibles. Si se colocan al 9% anual en el mercado financiero, dejan 45 mil anuales o sea $ 3,750 mensuales. Esto se debe deducir de la disminución en el valor de Z, por lo que resultan 15000 - 3750 = 11250, que representa el costo neto de la no divisibilidad en la asignación de los recursos.

La no-divisibilidad nos ha obligado a reorientar los recursos y encaminarlos a proyectos menos redituables. En otras palabras, el costo real de la no-divisibilidad surge de la diferencia entre la utilización más rentable de los recursos y la utilización inmediata alternativa.

3. Método de Gomory

3.1 Concepto de congruencia

Dos números son congruentes, si sólo sí, su diferencia es un número entero (positivo o negativo). Se denota con el símbolo $\equiv$

Ejemplos:

$4.5 \equiv 1.5$ porque $4.5-1.5 = 3$; $3 \equiv 5$ porque $3 - 5 = -2$;

$-2.75 \equiv 3.25$ porque $-2.75 - 3.25 = -6$; $-0.7 \equiv 0.3$ porque $-0.7-0.3=-1$.

3.2 Parte fraccionaria

La "parte fraccionaria" f_x de un número real x, es el menor número no-negativo congruente con x. Es decir, f_x es la parte fraccionaria más pequeña que podemos restar de un número no-entero, para volverlo entero.

Ejemplos:

si $x = 5.3$, $f_x = 0.3$ ya que $5.3 - 0.3 = 5$,
si $x = -2.25$, $f_x = 0.75$ ya que $-2.25 - 0.75 = -3$,
si $x = -6$, $f_x = 0$ ya que $-6 - 0 = -6$,
si $x = 0.33$, $f_x = 0.33$ ya que $0.33 - 0.33 = 0$

3.3. Idea básica de los planos de corte

Se debe construir una región convexa que abarque sólo los puntos de coordenadas enteras. Esto se consigue por medio de "planos de corte" definidos por restricciones adicionales (a las originales), que se incorporan al problema de a una por vez, reduciendo la región factible original hasta darle la configuración deseada. Se llaman así por que cada inecuación define un semiespacio, por medio de un hiperplano.

Los planos de corte tienen estos atributos:

- cada uno separa (desecha) una región convexa,
- cada uno pasa por -al menos- un punto de coordenadas enteras,
- cada uno acerca el área factible hacia el área mínima requerida para cubrir todos los puntos de coordenadas enteras,
- cada uno vuelve no factible la solución óptima a la etapa inmediata anterior (es aún óptima, porque los $Z_j - C_j$ siguen ≥ 0)

3.4 Procedimiento

Resolver el problema de P.L. sin los requisitos de no divisibilidad.
Si las v^S son enteras, dejarlo ahí.
Si no son enteras, agregar un plano de corte, (la solución es ahora óptima pero no factible)
Se usa el método dual-simplex para lograr factibilidad.
Se verifica la solución: si es entera, es la solución del problema original.
Si no, el ciclo se repite.

3.5 Formulación

Se toma cada restricción del cuadro final del problema de P. L. y se le escribe así:

$x_i = b_i - \sum a_{ij} \quad x_j$ en que

x_i = variables básicas

x_j = variables no básicas

b_i = valor de la x_i en la solución de P. L.

Si algún b_i no es entero, se agrega un "plano de corte" así:

- se descompone, aditivamente cada b_i, $b_i = k_i + f_i$, en que k_i es la parte entera y f_i es la fraccionaria,

  $k_i \geq 0, \quad 0 < f_i < 1$

- se descompone cada a_{ij} así $a_{ij} = k_{ij} + f_{ij}$ en que $0 \leq f_{ij} < 1$,
- se sustituyen estos valores en (1), así:

$$x_i = k_i + f_i - \sum_j (k_{ij} + f_{ij})\, x_j$$

$$= \underbrace{(k_i - \sum k_{ij}\, x_j)}_{\text{parte entera}} + \underbrace{(f_i - \sum f_{ij} x_j)}_{\text{parte fraccionaria}}$$

Para que x_i sea entera, $f_i - \sum f_{ij} x_j$ debe ser nula o entera negativa. ¿porque?

Como cada $f_{ij} \geqslant 0$ y cada $x_j \geqslant 0$, es claro que

$$\sum f_{ij}\, x_j \geqslant 0$$

Entonces $f_i - \sum f_{ij} x_j$ está compuesta por una cantidad positiva $f_{ij} x_j$ restada de otra cantidad positiva f_i, que es menor que 1.

Por lo tanto la cantidad $f_i - \sum f_{ij} x_j$ no puede ser un entero positivo: o es nula o es negativa.

Para que sea un entero negativo $\sum f_{ij} x_j$ debe ser suficientemente grande para superar f_i al menos en una unidad.

O sea que debe ser $f_i - \sum f_{ij} x_j \leq 0 \Rightarrow f_i \leq \sum f_{ij} x_j$

Nótese que esta restricción es violada por la solución óptima actual, ya que $f_i > 0$ y $\forall_j,\ x_j = 0$, porque son v^s no básicas.

Se agrega una variable de holgura s_i a la inecuación, $f_i - \sum f_{ij} x_j + S_i = 0$ y se introduce al cuadro final de la P.L., despejando con signo negativo al término independiente, para crear la no factibilidad de la solución óptima anterior:

$s_i = - f_i - (- \sum f_{ij} x_j)$. Cada s_i lleva coeficiente nulo en la función objetivo.

3.6 <u>Ejemplo</u>:

$$\begin{aligned} \max\ Z &= 31\, x_1 + 60\, x_2 \\ \text{sujeto a}\quad & x_1 + 2x_2 \leqslant 12.5 \\ & x_1 \leqslant 8 \\ & x_2 \leqslant 5 \\ & x_1,\ x_2 \geqslant 0, \text{ enteras} \end{aligned}$$

Tabla final de la P. L.:

B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	8	1	0	0	1	0
s_3	2.75	0	0	-0.5	0.5	1
x_2	2.25	0	1	0.5	- 0.5	0
$Z_j - C_j$	3.33	0	0	30	1	0

Paso I: resolver el problema de P. L.

Paso II: revisar los b_i, y expresarlos así $b_i = k_i + f_i$. Considerar sólo las vs originales. Elegir la fila correspondiente a la variable original que tenga la mayor parte fraccionaria. En este caso sólo interesa b_3, porque es la única variable original con parte fraccionaria.

$$b_1 = 8 = 8 + 0.00$$
$$b_3 = 2.25 = 2 + 0.25$$

Paso III: escribir esa restricción en forma de ecuación agregándole una variable de holgura, y construir la restricción (plano de corte)

$$2.25 = x_2 + 0.5\ s_1 - 0.5\ s_2$$

$$x_2 = 2.25 - 0.5\ s_1 - 0.5\ s_2$$

$$f_2 = 0.25 = \frac{1}{4} \quad \text{ya que} \quad 2.25 - 0.25 = 2$$

$$f_{23} = 0.5 = \frac{1}{2} \quad \text{ya que} \quad 0.5 - 0.5 = 0$$

$$f_{24} = 0.5 = \frac{1}{2} \quad \text{ya que} \quad -0.5 - 0.5 = -1$$

$\frac{1}{4} + S_4 = \frac{1}{2}\ S_1 + \frac{1}{2}\ S_2$ y le damos la forma implícita $S_4 = -\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}\ S_1 - \frac{1}{2}\ S_2)$ para poder insertarla en el cuadro de P. L.

Paso V: Reoptimizar mediante el dual simplex.

Introducimos al tableau $S_4 = -\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}\ S_1 - \frac{1}{2}\ S_2)$

Por lo tanto hay un $b_i < 0$ $\Rightarrow$ la solución óptima no es factible.

Esto ocurre así porque el vértice óptimo quedó fuera de la región factible.

B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	8	1	0	0	1	0	0	
s_3	2.75	0	0	- 0.5	.5	1	0	
x_2	2.25	0	1	0.5	-0.5	0	0	
s_4	-0.25	0	0	- 0.5	-0.5	0	1	← Nueva restricción
$z_j - c_j$		0	0	30	1	0	0	

3.7. Otros ejemplos:

a) El tableau óptimo es

B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
x_2	10.25	0	1	0	1	0	0
x_3	6.67	- 0.25	0	1	- 0.67	0.33	0
s_3	4.00	0.5	0	0	0.75	- 0.5	1

Elegimos x_3 porque 0.67 es la mayor parte fraccionaria.

Las f_x de los coeficientes son.

$f_3 = 0.67 = \frac{2}{3}$, $f_{31} = 0.75 = \frac{3}{4}$, $f_{34} = 0.33 = \frac{1}{3}$, $f_{35} = 0.33 = \frac{1}{3}$,

de donde el plano de corte es:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{3} s_1 + \frac{1}{3} s_2$$

$$s_4 + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{3} s_1 + \frac{1}{3} s_2$$

$$s_4 = - \frac{2}{3} - \left(- \frac{3}{4} x_1 - \frac{1}{3} s_1 - \frac{1}{3} s_2 \right)$$

s_4
0
0
0

y se agrega al cuadro la fila adicional

s_4	- 2/3	- 3/4	0	0	- 1/3	- 1/3	0	1

para reoptimizar.

b. Del tableau óptimo se ha tomado sólo la fila que hay que volver entera

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
x_5	$6\,^5/8$	0	$-^3/5$	$^1/4$	0	1	$-^1/2$	$^7/4$	$-^7/3$	0	1	0
s_6	$-^5/8$	0	$-^2/5$	$-^1/4$	0	0	$-^1/2$	$-^3/4$	$-^2/3$	0	0	1

$f_5 = \frac{5}{8}$, $f_{52} = \frac{2}{5}$, $f_{53} = \frac{1}{4}$, $f_{56} = \frac{1}{2}$, $f_{57} = \frac{3}{4}$, $f_{58} = \frac{2}{3}$, luego

$$\frac{5}{8} \leq \frac{2}{5} x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{2} s_1 + \frac{3}{4} s_2 + \frac{2}{3} s_3$$

$$s_6 = -\frac{5}{8} - \left(-\frac{2}{5} x_2 - \frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{2} s_1 - \frac{3}{4} s_2 - \frac{2}{3} s_3\right)$$

se agrega al cuadro como fila adicional y se reoptimiza.

3.8 Comentarios sobre el método de Gomory

a. a veces no converge después de varios cientos de iteraciones.

b. no provee una solución factible entera hasta que se llega al óptimo (es dual factible)

c. si se usa la forma explícita para construir la restricción adicional, se llega a una situación poco común: la solución óptima es no-entera, pero no se puede transformar en entera, porque los aij son enteros y por lo tanto no se pueden agregar mas planos de corte.

d. a veces, sigue siendo el método más eficiente para problemas en gran escala.

e. no es necesario elegir la ecuación con la mayor f_i, hay otras formas pero no hay un criterio fijo a priori para identificar el mejor corte.

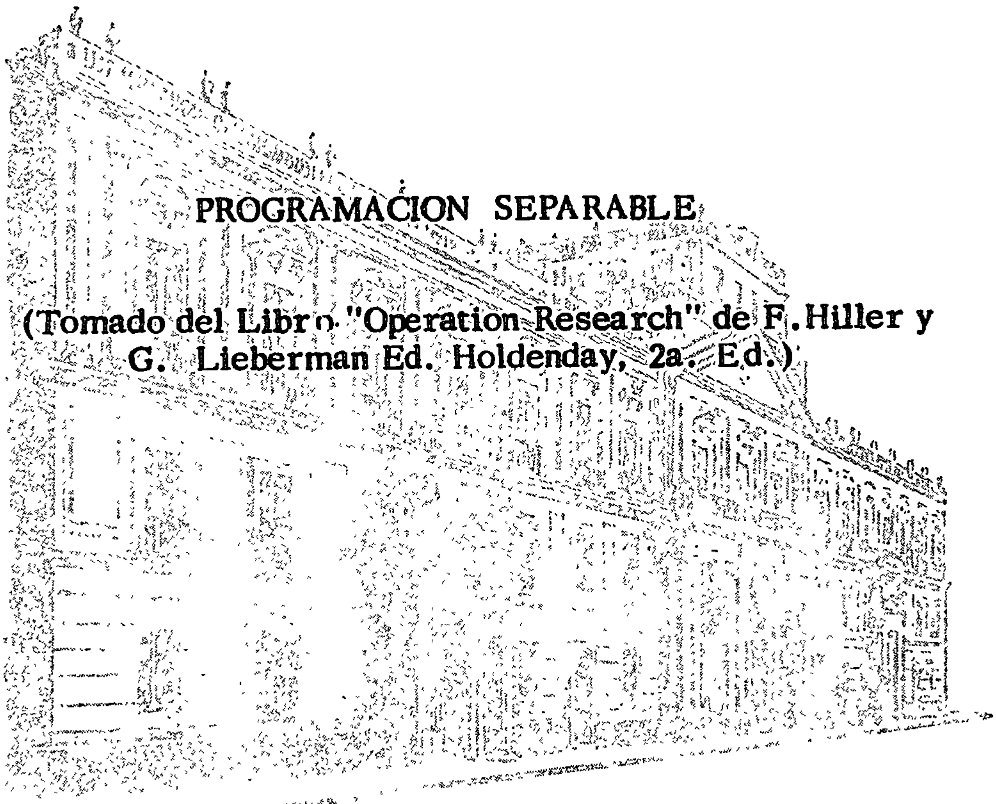
f. no es necesario pasarse de (n + 1) restricciones; a medida que se agregan nuevos planos de corte hay otros que se vuelven redundantes, y se pueden suprimir.

4. El método de Rómulo González y Young es un método primal-factible, que si no converge, al menos proporciona en cada etapa una solución sub-óptima. También el de Glover. Requieren un tableau inicial de puros elementos enteros.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA

PARA EJECUTIVOS



PROGRAMACION SEPARABLE

(Tomado del Libro "Operation Research" de F. Hiller y G. Lieberman Ed. Holdenday, 2a. Ed.)

DR. SERGIO FUENTES MAYA

Febrero de 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 512-31-23

Ref: Operation Research:
F. Hiller & G. Lieberman.
Holden day: 2nd Ed.

18 Nonlinear Programming

The fundamental role of *linear programming* in operations research is accurately reflected by the fact that it is the focus of *four* chapters and is used in several others. However, a key assumption of linear programming is that *all* its functions (objective function and constraint functions) are *linear.* Although this assumption essentially holds for numerous practical problems, it frequently does not. We described in Sec. 4.1 how it is *sometimes* possible to *reformulate* nonlinearities into a linear programming format. Nevertheless, it often is necessary to deal directly with *nonlinear programming problems*, so we now turn our attention to this important area.

In one general form, the *nonlinear programming* problem is to find $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ so as to

$$\text{Maximize } f(\mathbf{x}),$$

subject to

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \text{ for } i = 1, 2, \ldots, m,$$

and

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

where $f(\mathbf{x})$ and the $g_i(\mathbf{x})$ are given functions of the n decision variables. No algorithm is available that will solve *every* specific problem fitting this format. However, by making various assumptions about these functions, substantial progress has been made for some important special cases of this problem, and research is continuing very actively. This is a large area, and we shall not have space to survey it completely. However, we shall present some fundamental results in the next section and then describe an important algorithm for each of two basic special cases in Secs. 18.2 and 18.3.

18.1 THE KUHN-TUCKER CONDITIONS

Before considering algorithms it is necessary to learn how to recognize an *optimal solution* to a nonlinear programming problem. This section gives the so-called Kuhn-Tucker conditions, which describe such optimal solutions.

What are the characteristics of optimal solutions to nonlinear programming problems? Classical calculus provides some motivation for the answer to this question. To begin, consider the case where there are *no* constraints (not even nonnegativity constraints), and the objective function is differentiable. If the objective function contains only *one variable*, it is well known (see Appendix 2) that $x_1 = x_1^*$ can maximize $f(x_1)$ only if $df/dx_1 = 0$ at $x_1 = x_1^*$, where this is also a *sufficient condition* if $f(x_1)$ is a *concave function* (as defined in Appendix 1). Similarly, Appendix 2 indicates that if the function contains *several variables*, then $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ can maximize $f(\mathbf{x})$ only if $\partial f/\partial x_j = 0$ at $x_j = x_j^*$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. This becomes a *sufficient condition* if $f(\mathbf{x})$ is a *concave function*. Now suppose that the nonnegativity constraints $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ are introduced. The only revision that must be made in the above statement is that if $x_j^* = 0$, then the condition $\partial f/\partial x_j = 0$ at $x_j = x_j^*$ is replaced by the condition $\partial f/\partial x_j \leq 0$ at $x_j = x_j^*$.

Unfortunately, it becomes much more difficult to characterize an optimal solution if the other constraints involving the $g_i(\mathbf{x})$ functions are also introduced. The difficulty is that increasing x_j may require changing other variables to avoid violating the constraints, so it is no longer sufficient to just look at the $\partial f/\partial x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. However, Kuhn and Tucker derived the results[1] for this case that are analogous to those given above for simpler cases. Their basic result is embodied in the following theorem.

THEOREM 18.1 Assume that $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ are *differentiable* functions satisfying certain regularity conditions.[2] Then

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

can be an *optimal* solution to the nonlinear programming problem only if there exist m numbers, $u_1, u_2, \ldots, u_m$, such that *all* of the following conditions are satisfied:

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \\ &2.\quad x_j^*\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \text{at } x_j = x_j^*, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

[1] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming," in Jerzy Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, pp. 481–492, 1951.

[2] *Ibid.* p. 483.

$$\left.\begin{aligned} &3.\quad g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \leq 0 \\ &4.\quad u_i\,(g_i(\mathbf{x}^*) - b_i) = 0 \end{aligned}\right\} \text{for } i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$5.\quad x_j^* \geq 0, \qquad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$6.\quad u_i \geq 0, \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m.$$

These conditions are commonly referred to as the *Kuhn-Tucker conditions*. The u_i are somewhat analogous to the *dual variables* of linear programming, and they have a comparable economic interpretation. (However, the u_i actually arose in the mathematical derivation as generalized Lagrange multipliers.) Conditions (3) and (5) do nothing more than help ensure the feasibility of the solution. The other conditions eliminate most of the feasible solutions as possible candidates for the optimal solution. However, it should be noted that satisfying these conditions does not guarantee that the solution is optimal. Just like the analogous condition for an unconstrained function that its partial derivatives be zero, these conditions are only *necessary*, and *not sufficient*, for optimality. However, just as before, if certain additional *convexity* assumptions are satisfied, these conditions do become sufficient to guarantee optimality. Kuhn and Tucker proved the following extension of the theorem.

COROLLARY Assume that $f(\mathbf{x})$ is a *concave function* and that $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ are *convex functions* satisfying the regularity conditions. Then $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ is an *optimal solution* if and only if *all* the conditions of the theorem are satisfied.

EXAMPLE To illustrate the formulation and application of the Kuhn-Tucker conditions, consider the two-variable nonlinear programming problem

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = \ln(x_1 + x_2),$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

and

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

where *ln* denotes *natural logarithm*. Thus $m = 1$ and $g_1(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$, so $g_1(\mathbf{x})$ is *convex*. Furthermore, it is easily verified (see Appendix 1) that $f(\mathbf{x})$ is *concave*. Hence the corollary to Theorem 17.1 applies, so any optimal solution can definitely be obtained by solving the Kuhn-Tucker conditions. These conditions are

$$(1a)\qquad \frac{1}{x_1 + x_2} - u_1 \leq 0.$$

$$(2a)\qquad x_1\left(\frac{1}{x_1 + x_2} - u_1\right) = 0.$$

(1b) $$\frac{1}{x_1 + x_2} - 2u_1 \le 0.$$

(2b) $$x_2\left(\frac{1}{x_1 + x_2} - 2u_1\right) = 0.$$

(3) $$x_1 + 2x_2 - 5 \le 0.$$

(4) $$u_1(x_1 + 2x_2 - 5) = 0.$$

(5) $$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

(6) $$u_1 \ge 0.$$

To solve these conditions, note that $x_1 + x_2$ must be *strictly positive* because $(x_1 + x_2)^{-1}$ is not even defined at $x_1 + x_2 = 0$. Therefore, $u_1 > 0$ from condition (1), so that $x_1 + 2x_2 - 5 = 0$ from condition (4). Furthermore, condition (1a) then implies that condition (1b) must hold with a *strict* inequality, so that $x_2 = 0$ in condition (2b). Hence $x_1 = 5$ and $u_1 = \frac{1}{5}$, so that $(x_1, x_2, u_1) = (5, 0, \frac{1}{5})$ satisfy all the conditions. Consequently, $x^* = (5,0)$ is an optimal solution for the nonlinear programming problem.

You can check this optimal solution by using the fact that maximizing $\ln(x_1 + x_2)$ is *equivalent* to maximizing $x_1 + x_2$ (since ln is a monotone strictly increasing function).

For problems more complicated than this example, it may be difficult, if not essentially impossible, to derive the optimal solution *directly* from the Kuhn-Tucker conditions. Nevertheless, these conditions still provide valuable clues as to the identity of the optimal solution, and they also permit checking whether a proposed solution may be optimal. Furthermore, there are many valuable *indirect* applications of the Kuhn-Tucker conditions. You will see one of these in the next section.

18.2 QUADRATIC PROGRAMMING

The term "quadratic programming" now conventionally refers to the problem of maximizing (or minimizing) a *quadratic objective function* subject to *linear constraints*. Thus the quadratic programming problem differs from the linear programming problem only in that the *objective function* also includes x_j^2 and $x_j x_k (j \ne k)$ terms. In short, the problem is to find $x_1, x_2, \dots, x_n$ so as to

$$\text{Maximize} \quad \left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k\right\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, m,$$

and

$$x_j \ge 0, \text{ for } j = 1, 2, \dots, n,$$

where the q_{jk} are given constants such that $q_{jk} = q_{kj}$.

Several algorithms have been developed for the special case of the quadratic programming problem where the objective function is a *concave* function. (A way to verify it is a concave function is to verify the equivalent condition that

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k \ge 0$$

for all values of $x_1, x_2, \dots, x_n$. Mathematically speaking, this equivalent condition is that the q_{jk} are the elements of a *positive semidefinite* matrix.) We shall describe one[1] of these that has been particularly popular because it only requires using the *simplex method* with a slight modification.

The first step for this algorithm is to formulate the *Kuhn-Tucker conditions* for the problem. A convenient form for expressing them for this case is

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{n+i} - y_j = c_j, && \text{for } j = 1, 2, \dots, n,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, && \text{for } i = 1, 2, \dots, m,\\
&x_j \ge 0, && \text{for } j = 1, 2, \dots, n+m,\\
&y_j \ge 0, && \text{for } j = 1, 2, \dots, n+m,\\
&x_j y_j = 0, && \text{for } j = 1, 2, \dots, n+m,
\end{aligned}$$

where the y_{n+i} are the u_i of the preceding section, and where the y_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ and the x_j $(j = n+1, \dots, n+m)$ are slack variables. (You are asked in Prob. 2 to verify that these indeed are one form of the Kuhn-Tucker conditions). Since the objective function is assumed to be concave and the constraint functions are linear and therefore convex, the corollary to Theorem 18.1 applies. Thus $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is *optimal* if and only if there exist values of $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, y_1, \dots, y_{n+m}$ such that $(x_1, \dots, x_{n+m}, y_1, \dots, y_{n+m})$ satisfies all these conditions. The problem is thereby reduced to finding a *feasible solution* to these conditions.

Now notice the key fact that, with the exception of the last restriction ($x_j y_j = 0$ for $j = 1, 2, \dots, n+m$), these Kuhn-Tucker conditions are nothing more than *linear programming constraints* involving $2(n+m)$ variables. Furthermore, this $x_j y_j = 0$ restriction simply says that it is not permissible for both x_j and y_j to be *basic variables* when considering (nondegenerate) basic feasible solutions. Therefore the problem reduces to finding an *initial basic feasible solution* to any linear programming problem having these constraints, subject to this additional restriction on the identity of the basic variables. (This

[1] Philip Wolfe, "The Simplex Method for Quadratic Programming," *Econometrica*, 27:382–398, 1959. This paper develops both a "short form" and a "long form" of the algorithm. We present a version of the *short form*, which assumes that the objective function is *strictly* concave.

"initial" basic feasible solution may be the only feasible solution in this case.) The initial basic variables for the second group of equations,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

would be the x_{n+i} (assuming the b_i are positive). However, since most or all of the c_j normally are positive, it is not obvious what the initial basic variables should be for the other equations:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{n+i} - y_j = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

The standard linear programming technique when there is not an obvious initial basic feasible solution is to introduce *artificial variables* that are eventually forced to equal zero (see Sec. 2.10.). Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be these artificial variables, where the only (initial) restriction on them is

$$z_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

These equations are then (except when the coefficient of z_j is -1 when $c_j < 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{n+i} - y_j + z_j = c_j, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

This technique provides an *artificial* initial basic feasible solution, namely, $z_j = c_j$ (for $j = 1, 2, \ldots, n$), $x_{n+i} = b_i$ (for $i = 1, 2, \ldots, m$), $x_j = 0$ (for $j = 1, 2, \ldots, n$), and $y_j = 0$ (for $j = 1, 2, \ldots, n+m$). However, a feasible solution to this artificial problem is feasible for the real problem if and only if $z_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. Therefore, $\sum_{j=1}^{n} z_j$ must be decreased to *zero* to obtain the desired feasible solution. To do this, start with the artificial initial basic feasible solution given above and apply a *modification* of the *simplex method* to the following problem:

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^{n} z_j,$$

subject to

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{n+i} - y_j + z_j = c_j, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m$$

and

$$x_j \geq 0, \qquad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n+m$$
$$y_j \geq 0, \qquad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n+m$$
$$z_j \geq 0, \qquad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

The *modification* is that y_j is not permitted to become a basic variable whenever x_j is already a basic variable, and vice versa, for $j = 1, 2, \ldots, n+m$. This ensures that $x_j y_j = 0$ for each value of j. When the optimal solution

$$(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*, y_1^*, \ldots, y_{n+m}^*, z_1 = 0, \ldots, z_n = 0)$$

is obtained to this problem, $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ is the desired optimal solution to the original quadratic programming problem.

EXAMPLE We shall now illustrate this approach on the problem

$$\text{Maximize } \{5x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)^2\},$$

subject to

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

and

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Since $(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2)$, we obtain $q_{11} = 2, q_{12} = -2$, $q_{21} = -2$, and $q_{22} = 2$. Thus the problem to be solved by the modification of the simplex method is

$$\text{Minimize } z_1 + z_2,$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 \quad &+ y_3 \quad - y_1 + z_1 &= 5\\
-2x_1 + 2x_2 \quad &+ y_3 - y_2 \quad + z_2 &= 1\\
x_1 + x_2 + x_3 \quad & &= 2
\end{aligned}$$

and

$$\text{all } x_j \geq 0, y_j \geq 0, z_j \geq 0.$$

The resulting solution is $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 3$, with the rest of the variables zero. (We suggest that you verify this by showing that $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $u_1 = 3$ satisfy the Kuhn-Tucker conditions for this problem when they are written in the form given in Sec. 18.1.) Therefore the optimal solution to the original problem is $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

18.3 CONVEX PROGRAMMING

The *convex programming* problem is the special case of the nonlinear programming problem where $f(\mathbf{x})$ is a *concave* function and all the $g_i(\mathbf{x})$ are *convex* functions. These assumptions greatly simplify the problem. The convexity of the $g_i(\mathbf{x})$ functions implies that the set of feasible solutions is a *convex set*. This property and the concavity of $f(\mathbf{x})$ imply that any *local optimum* is also a *global optimum*; i.e., any feasible solution which maximizes $f(\mathbf{x})$ over the feasible solutions in its immediate neighborhood also maximizes $f(\mathbf{x})$ over the entire set of feasible solutions. Therefore, rather than having to find and compare a large (possibly infinite) number of local optima, it is only necessary to find one local, and therefore global, optimum.

A considerable number of algorithms have been developed for convex programming. Most use the *gradient* of the objective function in some way to obtain a sequence of solutions leading toward the optimal solution. Therefore, before describing one of the algorithms, we shall first discuss the relevance of the gradient.

Role of the Gradient

Assuming the objective function $f(\mathbf{x})$ is differentiable, it possesses a *gradient* denoted by $\nabla f(\mathbf{x})$ at each point $\mathbf{x}$. In particular, the gradient at a specific point $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ is the *vector* whose elements are the respective *partial derivatives* evaluated at $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, so that

$$\nabla f(\mathbf{x}') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \text{ at } \mathbf{x} = \mathbf{x}'.$$

The significance of the gradient is that the (infinitesimal) change in $\mathbf{x}$ which *maximizes* the rate at which $f(\mathbf{x})$ increases is the change that is *proportional* to $\nabla f(\mathbf{x})$. To express this idea geometrically, the "direction" of the gradient, $\nabla f(\mathbf{x}')$, is interpreted as the *direction* of the directed line segment (arrow) from the origin $(0,0, \ldots, 0)$ to the point $(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, where $\partial f/\partial x_j$ is evaluated at $x_j = x_j'$. Therefore it may be said that the rate at which $f(\mathbf{x})$ increases is maximized if (infinitesimal) changes in $\mathbf{x}$ are in the *direction* of the gradient $\nabla f(\mathbf{x})$. Since the objective is to find the feasible solution *maximizing* $f(\mathbf{x})$, it would seem expedient to attempt to move in the direction of the gradient as much as possible.

If the problem had *no* constraints, this interpretation of the gradient suggests that an efficient *search procedure* should keep moving in the direction of the gradient until it (essentially) reaches an optimal solution $\mathbf{x}^*$, where $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$. However, it normally would not be practical to change $\mathbf{x}$ *continuously* in the direction of $\nabla f(\mathbf{x})$ because this would require continuously *reevaluating* the $\partial f/\partial x_j$ and changing the direction of the path. Therefore a better approach is to keep moving in a *fixed* direction until $f(\mathbf{x})$ stops increasing and then recalculate the gradient to determine the new direction in which to move. With this approach, each *iteration* involves changing the *current* point $\mathbf{x}$ as follows:

$$\text{Reset} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} + t^* \nabla f(\mathbf{x}),$$

where t^* is the positive value of t that *maximizes* $f(\mathbf{x} + t \nabla f(\mathbf{x}))$; that is,

$$f(\mathbf{x} + t^* \nabla f(\mathbf{x})) = \max_{t \geq 0} f(\mathbf{x} + t \nabla f(\mathbf{x})).$$

The iterations of this gradient search procedure would continue until $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ (within a small tolerance).

The most difficult part of this procedure usually is to find t^*, the value of t that maximizes f in the direction of the gradient, at each iteration. Since $\mathbf{x}$ and $\nabla f(\mathbf{x})$ have fixed values for the maximization, this problem should be viewed as maximizing a *concave* function of a *single variable* t. Therefore classical optimization methods for such functions (see Appendix 2) are applicable, so it may be possible to obtain an analytical solution by setting the derivative with respect to t equal to zero and solving. Alternatively, it is quite straightforward for this kind of function to find t^* (within a small tolerance) by *trial and error*. Various methods are available[1] for doing this *systematically* in an efficient way.

To illustrate the *gradient search procedure*, consider the two-variable problem

$$\text{Maximize} \quad f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2.$$

Thus

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_2 - 2x_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 2 - 4x_2.$$

It also can be verified (see Appendix 1) that $f(\mathbf{x})$ is *concave*. To begin the procedure, the initial trial solution can be selected arbitrarily. Suppose $\mathbf{x} = (0,0)$ is selected. Since the respective partial derivatives are 0 and 2 at this point, the gradient is

$$\nabla f(0,0) = (0,2).$$

Therefore, for the first iteration,

$$\text{Reset} \quad \mathbf{x} = (0,0) + t^*(0,2) = (0,2t^*).$$

Since

$$f(0, 2t^*) = \max_{t \geq 0} f(0, 2t) = \max_{t \geq 0} \{4t - 8t^2\},$$

and

$$\frac{d}{dt}\{4t - 8t^2\} = 4 - 16t = 0,$$

it follows that

$$t^* = \frac{1}{4}, \text{ so } \mathbf{x} = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

For this new point, the gradient is

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1,0).$$

[1] Douglass J. Wilde, *Optimum Seeking Methods*, chap. 2, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

Thus, for the second iteration,

$$\text{Reset} \quad \mathbf{x} = \left(0, \frac{1}{2}\right) + t^*(1,0) = \left(t^*, \frac{1}{2}\right),$$

where

$$f\left(t^*, \frac{1}{2}\right) = \max_{t \geq 0} f\left(t, \frac{1}{2}\right) = \max_{t \geq 0}\left\{t - t^2 + \frac{1}{2}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left\{t - t^2 + \frac{1}{2}\right\} = 1 - 2t = 0,$$

so

$$t^* = \frac{1}{2}, \text{ and } \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

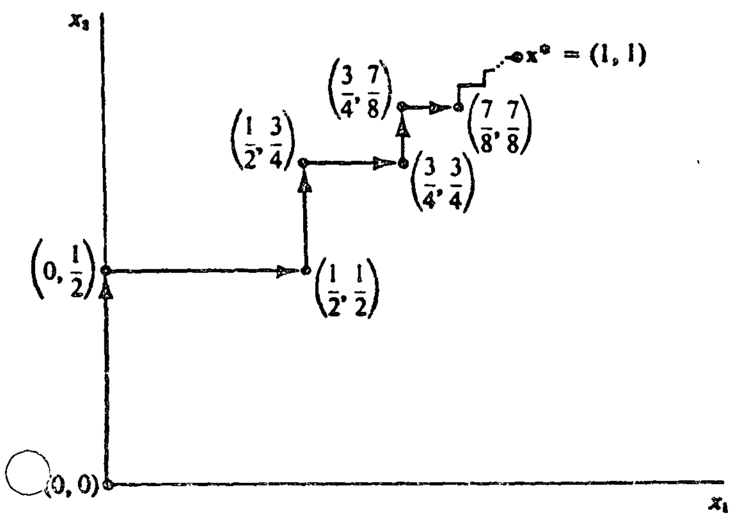
Continuing in this fashion, the subsequent points would be $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$, $(\frac{7}{8}, \frac{7}{8})$, ..., as shown in Fig. 18.1. Since these points are converging to $\mathbf{x}^* = (1,1)$, this is the optimal solution, as verified by the fact that

$$\nabla f(1,1) = (0,0).$$

As Fig. 18.1 suggests, the gradient search procedure usually *zig zags* rather than moving in a straight line to the optimal solution. Some modifications of the procedure have been developed that *accelerate* movement toward the optimum by taking this typical behavior into account.

If $f(\mathbf{x})$ were *not* a *concave* function, the gradient search procedure still would converge to a *local* maximum. The only change in the description of the procedure for this case is that t^* now would correspond to the *first local maximum* of $f(\mathbf{x} + t\,\nabla f(\mathbf{x}))$ for positive values of t.

Figure 18.1 Illustration of the gradient search procedure.



If the objective were to *minimize* $f(\mathbf{x})$ instead, one change in the procedure would be to move in the *opposite* direction of the gradient at each iteration. In other words, the rule for obtaining the next point now would be

$$\text{Reset} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} - t^*\,\nabla f(\mathbf{x}).$$

The only other change is that t^* now would be the positive value of t that *minimizes* $f(\mathbf{x} - t\,\nabla f(\mathbf{x}))$; that is,

$$f(\mathbf{x} - t^*\,\nabla f(\mathbf{x})) = \min_{t \geq 0} f(\mathbf{x} - t\,\nabla f(\mathbf{x})).$$

(This is the form of the gradient search procedure that will be used by the convex programming algorithm described below.)

We have described the gradient search procedure under the assumption that the optimization problem has *no* constraints. This is the *only* case for which it is designed, so it is *not* directly applicable to *convex programming*, where constraints are an important part of the problem. However, several algorithms have been developed that *adapt* the procedure in different ways to take the constraints into account. One widely used algorithm does this by applying the procedure (without modification) to a *sequence* of *unconstrained* minimization problems, where the resulting sequence of optimal solutions *converges* to an optimal solution for the convex programming problem—as we shall now describe.

The Sequential Unconstrained Minimization Technique (SUMT)

The sequential unconstrained minimization technique assumes that the convex programming problem has been reformulated in the *minimization* form

$$\text{Minimize} \quad g(\mathbf{x}),$$

subject to

$$h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ for } i = 1, 2, \ldots, m,$$

so $g(\mathbf{x})$ now is *convex* and the $h_i(\mathbf{x})$ are *concave* functions. These constraints *include* the *nonnegativity constraints* as needed ($h_i(\mathbf{x}) = x_j$), with m adjusted accordingly, and any constant terms have been taken over to the left-hand side ($h_i(\mathbf{x}) = b_i - g_i(\mathbf{x})$).

The procedure used by this technique is a very simple one. It deals *simultaneously* with the objective function and constraints by *combining* them into a single function:

$$P(\mathbf{x}; r) = g(\mathbf{x}) + r\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i(\mathbf{x})},$$

where r is a *strictly positive* scalar. Starting with a *feasible* initial trial solution, it then repeatedly uses the *gradient search procedure* (or a similar method) to

$$\text{Minimize} \quad P(\mathbf{x}; r)$$

for successively smaller values of r approaching zero. The resulting minimizing solutions converge to an optimal solution for the original problem.

The key to this technique is that each $1/h_i(\mathbf{x})$ approaches *infinity* as $h_i(\mathbf{x})$ approaches *zero* from above. Therefore, by starting with an initial trial solution such that $h_i(\mathbf{x}) > 0$ for all i, it is *guaranteed* that the gradient search procedure will find a minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$ that is *feasible* for the original problem In effect,

$$r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i(\mathbf{x})}$$

is a *boundary repulsion term* (also called a *penalty function*) that prevents the gradient search procedure from crossing (or even reaching) the *boundary* of the feasible region where one or more $h_i(\mathbf{x}) = 0$.

However, if an *optimal* solution for the original problem lies on or sufficiently near the boundary of the feasible solution, the boundary repulsion term also will prevent this solution from being the minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$. This is the reason for repeatedly minimizing $P(\mathbf{x}; r)$ for successively *smaller* values of r. As r approaches zero, $P(\mathbf{x}; r)$ approaches $g(\mathbf{x})$, so the minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$ converges to the desired optimal solution. Therefore, only enough minimizing solutions need to be obtained to permit extrapolating to this limiting solution.

Useful information is available for guiding the decision on when this extrapolating should be done. In particular, if $\bar{\mathbf{x}}$ is a minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$, then

$$g(\bar{\mathbf{x}}) - r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i(\bar{\mathbf{x}})} \leq g(\mathbf{x}^*) \leq g(\bar{\mathbf{x}}),$$

where $\mathbf{x}^*$ is the (unknown) *optimal* solution for the original problem. Thus $g(\bar{\mathbf{x}})$ can not exceed $g(\mathbf{x}^*)$ by more than the value of the boundary repulsion term for $\bar{\mathbf{x}}$. Therefore it would be reasonable to extrapolate to the optimal solution whenever the resulting maximum error is considered to be sufficiently small.

Selected References 1 and 2 present a detailed coverage of the theory and implementation of SUMT and related methods, including extensions to other cases.

Example To illustrate SUMT, consider the two-variable problem

$$\text{Minimize} \quad g(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + 1)^3}{3} + x_2,$$

subject to

$$x_1 \geq 1$$
$$x_2 \geq 0.$$

Thus $h_1(\mathbf{x}) = x_1 - 1$ and $h_2(\mathbf{x}) = x_2$. Therefore

$$P(\mathbf{x}; r) = \frac{(x_1 + 1)^3}{3} + x_2 + r\left[\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2}\right].$$

This problem is sufficiently simple enough so that the minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$ can be derived analytically:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = (x_1 + 1)^2 - \frac{r}{(x_1 - 1)^2} = 0, \quad \text{so} \quad (x_1^2 - 1)^2 = r,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 1 - \frac{r}{x_2^2} = 0,$$

so

$$\bar{x}_1 = (\sqrt{r} + 1)^{1/2}, \ \bar{x}_2 = \sqrt{r}.$$

Thus, if the gradient search procedure were still used, it would obtain essentially this solution at each iteration.

A typical sequence of values of r for the iterations would be $r = 1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, \ldots$. Using this sequence gives the results summarized in Table 18.1,

Table 18.1 Illustration of Sequential Unconstrained Minimization Technique

Iteration	r	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$g(\bar{\mathbf{x}}) - r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{h_i(\bar{\mathbf{x}})}$	$g(\bar{\mathbf{x}})$
1	1	1.4142	1	2.27	5.69
2	10^{-2}	1.0488	0.1	2.66	2.97
3	10^{-4}	1.0050	0.01	2.67	2.70
4	10^{-6}	1.0005	0.001	2.67	2.67
		↓	↓	↓	↓
		1	0	2.67	2.67

where the last two columns give the lower and upper bound on $g(\mathbf{x}^*)$. After iteration 4, these two bounds coincide to two decimal places, so $\bar{\mathbf{x}}$ must be extremely close to optimal. It also seems clear that the sequence of solutions is converging to the boundary values of the two variables. Therefore the *optimal* solution must be $\mathbf{x}^* = (1,0)$, as can be verified from the Kuhn-Tucker conditions (or by inspection in this case).

18.4 CONCLUSIONS

Practical optimization problems frequently involve *nonlinear* behavior that must be taken into account. It is sometimes possible to *reformulate* these nonlinearities to fit into a linear programming format. However, the best approach often is to use a *nonlinear programming* formulation.

In contrast to the simplex method for linear programming, there is no efficient all-purpose algorithm that can be used to solve *all* nonlinear programming problems. In fact, some of these problems can not be solved by *any* method in a very satisfactory manner. However, considerable progress has been made for some important classes of problems, including *quadratic programming* and *convex programming*. A variety of algorithms are available for these cases that frequently perform reasonably well.

Nonlinear programming remains a very active research area.

Selected References

1 Bracken, Jerome and Garth P. McCormick: *Selected Applications of Nonlinear Programming*, Wiley, New York, 1968.

2 Fiacco, Anthony V. and McCormick: *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, New York, 1968.

3 Luenberger, David G.: *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.

4 Mangasarian, Olvi L.: *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.

5 Wilde, Douglass J. and Charles S. Beightler: *Foundations of Optimization*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

6 Zangwill, Willard I.: *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

Problems

1 Consider the nonlinear programming problem given in Prob. 15, Chap. 4. Verify that $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)$ is an optimal solution for this problem by applying the *Kuhn–Tucker conditions*.

2 Derive the *Kuhn–Tucker conditions* for the quadratic programming problem. Show that they can be expressed as given in Sec. 18.2.

3 Consider the nonlinear programming problem given in Prob. 7, Chap. 6. Determine whether $(x_1, x_2) = (1,2)$ can be optimal by applying the *Kuhn–Tucker conditions*.

4 Use the Kuhn–Tucker conditions to derive the optimal solution for each of the following problems:

(*a*) Maximize $\{2x_1 - x_1^2 + x_2\}$,

subject to

$$x_1 + x_2 \le 1$$

and

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

(*b*) Maximize $\{x_1 + 2x_2\}$,

subject to

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$

and

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

5 Consider the quadratic programming problem

$$\text{Maximize } \{4x_1 - x_1^2 + 8x_2 - x_2^2\},$$

subject to

$$x_1 + x_2 \le 2$$

and

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

(*a*) Use the *Kuhn–Tucker conditions* to derive the optimal solution.
(*b*) Now suppose that this problem is to be solved by the procedure described in Sec. 18.2. Formulate the *equivalent problem* that is to be solved by a modification of the simplex method.
(*c*) Solve the problem as formulated in part (*b*).

6 Consider the quadratic programming problem

$$\text{Maximize } \{10x_1 + 4x_2 - x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2\},$$

subject to

$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$4x_1 + x_2 \le 18$$

and

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Suppose this problem is to be solved by the procedure described in Sec. 18.2.

(*a*) Formulate the *equivalent problem* that is to be solved by a modification of the simplex method.
(*b*) Solve the problem as formulated in part (*a*).

7 Starting from the initial trial solution $(x_1, x_2) = (0,0)$, use the *gradient search procedure* to solve the problem

$$\text{Maximize } f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 8x_2 - 12x_1 - 2x_1^2 - x_2^2.$$

8 Starting from the initial trial solution $(x_1, x_2) = (0,0)$, use the *gradient search procedure* to solve each of the following problems:

(*a*) Maximize $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$.
(*b*) Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2x_2^2 - 10x_1x_2^2 - 2x_1^2x_2 + 20x_1x_2 + x_1^2 + 25x_2^2$.

9 Use the *sequential unconstrained minimization technique* to solve the problem

$$\text{Minimize } g(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1 + 9 + 2x_2,$$

subject to

$$x_1 \ge 3$$
$$x_2 \ge 3.$$

[Derive the minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$ analytically, and use the s sequence of values of r as in Table 18.1.]

10 Use the *sequential unconstrained minimization technique* to solve the problem

$$\text{Minimize} \quad g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 - x_1 x_2,$$

subject to

$$x_1 \geq 0.$$

[Use the *gradient search procedure* to obtain the minimizing solution of $P(\mathbf{x}; r)$ at each iteration, with $r = 1, 10^{-2}, 10^{-4}$. Begin with the initial trial solution $(x_1, x_2) = (1, 1)$, and then begin each of the next two iterations with the minimizing solution from the preceding iteration.]

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS (20,21,27 Y 28 DE FEBRERO 5 Y 6 DE MARZO DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1. ING. ANGEL ALCEDA HERNANDEZ Paseo del Faisán No. 192 Lomas Verdes Sección 1 Edo. de México Tel: 5-72-79-65	DIRECCION GENERAL DE INGENIERIA DE TRANSITO Y TRANSPORTES Puente de Alvarado No. 84-1er.Piso México, D. F. Tel: 5-35-86-84
2. SR. VICENTE CASTAÑEDA PEÑA Educación Pública No. 70 Federal México 9, D. F. Tel: 5-71-65-74	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 69 Col. San Rafael México, D. F. Tel: 5-35-25-25
3. ING. ANTONIO CEJUDO BAEZ Puerto Real No. 30 Col. Condesa México 11, D. F. Tel:5-53-27-86	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 46-9o.Piso México 1, D. F. Tel: 5-91-08-19
4. ING. JUAN D. BUJANOS BUJANOS Fte. Ma. Luisa No. 36 Tecamachalco México 10, D. F. Tel: 5-89-33-36	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-31-62-18
5. SR. SEGISMUNDO KERNER WORTMAN Fresas 102-601 Col. del Valle México 12, D. F.	COCA-COLA EXPORT CORPORATION Río Amazonas No. 43-5o. Piso Col. Cuauhtémoc México 5, D. F.
6. ING. HECTOR MENDEZ BERRUETA Querétaro No. 22-301 Col. Roma México 7, D. F. Tel: 5-74-72-23	DIRECCION GENERAL DEL PETROLEO SEPANAL Rhin 22-1er. Piso Col. Cuauhtémoc México 5, D. F. Tel: 5-66-74-88
7. ARQ. MANUEL MEZA ZATARAIN Avenida Uno No. 9 San Pedro de los Pinos México 18, D. F. Tel: 516-49-70	DIRECCION GENERAL DE OBRAS,UNAM Ciudad Universitaria México 20, D. F. Tel: 5-50-52-15-4768

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE TECNICAS DE OPTIMIZACION CON COMPUTADORA PARA EJECUTIVOS (20,21,27 Y 28 DE FEBRERO 5 Y 6 DE - MARZO DE 1976)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
8.	FISICO WALTER RITTER ORTIZ José Moran 53-206 San Miguel Chapultepec México 18, D. F. Tel: 2-77-75-18	INSTITUTO DE CIENCIAS DEL MAR, UNAM Ciudad Universitaria México 20, D. F.
9.	SR. BENJAMIN SANDOVAL SEVILLA Lago Chapala No. 23 Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-31-14-16	DEIMAN, S. A. DE C. V. Acatl No. 320 Fraccionamiento Industrial San Antonio México 16, D.F. Tel: 5-61-42-00
10.	ING. LUIS R. VERA MOURET Circuito Actores No. 104 Ciudad Satélite Edo. de México Tel: 5-62-72-46	TELEINFORMATICA DE MEXICO, S.A. Paseo de la Reforma No. 30-2o.Piso México 1, D. F. Tel: 5-92-33-61
11.	ING. JESUS ZARATE MANCHA México, D. F.	PRODUCTOS FORESTALES MEXICANOS Ave. Hidalgo No. 5-8o. Piso México 1, D. F. Tel: 5-12-91-05