centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar el Segundo Día de Clases, en las oficinas del Centro, con la Señorita Barraza, de lo contrario no será posible. El control de asistencia se efectuará a través de la persona encargada de entregar notas, en la mesa de entrega de material, mediante listas especiales. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tésis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, es importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción con los datos que se les solicitan al iniciarse el curso.

ATENTAMENTE

ING. SALVADOR MEDINA RIVERO
COORDINADOR DE CURSOS.

'eds.

Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.

CURSOS DE MAESTRIA Y DOCTORADO

La División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, ofrece las siguientes Maestrías y Doctorados:

M a e s t r í a s		D o c t o r a d o s
Control	Mecánica	Estructuras
Electrónica	Mecánica de Suelos	Hidráulica
Estructuras	Petrolera	Mecánica de Suelos
Hidráulica	Potencia	Mecánica Teórica y Aplicada
Investigación de Operaciones	Planeación	Investigación de Operaciones
Mecánica teórica y Aplicada	Sanitaria	

Programa de actividades para el segundo semestre de 1976

Exámenes de admisión: 10, 11 y 12 de mayo

Inscripciones: 31 de mayo al 4 de junio

Iniciación de clases: 7 de junio

Requisitos de admisión

a) Cumplir con una de las siguientes condiciones:

1. Poseer título profesional en Ingeniería o en alguna disciplina afín a las maestrías que se ofrecen en la División, otorgado por la UNAM o por cualquier institución nacional o extranjera.

2. Ser pasante de la Facultad de Ingeniería, UNAM

b) Aprobar los exámenes de admisión que se efectuarán en las fechas señaladas arriba.

c) Presentar, dentro del período de inscripciones arriba mencionado, la documentación que se indica en el folleto de Actividades Académicas 1975 de la DESFI

Mayores informes: División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Apartado Postal 70-256, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. Tel.: 548-58-77

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, febrero 3. 1976

EL DIRECTOR DE LA FACULTAD
M. en C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON

EL JEFE DE LA DIVISION
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Abril 19	18 a 18:30 h	Presentación del curso	M. en I. Francisco Aguilar López de Nava
	18:30 a 20 h	I. INTRODUCCION	
	20 a 21 h	Mecánica Teórica	Ing. Alberto García Rubio
" 21	18 a 19:30 h	Dinámica Estructural	Ing. Alberto García Rubio
	19:30 a 21 h	II. Excitación Dinámica	M. en I. Francisco Aguilar López de Nava
" 23	18 a 19:30 h	Dinámica de Rotores	M. en I. Francisco Aguilar López de Nava
	19:30 a 21 h	Instrumentación	Ing. Liborio González Contreras
" 26	18 a 21 h	III. Propiedades Mecánicas de los Suelos Generalidades Características de los suelos Determinación de Constantes Dinámicas	M. en I. José Luis León Torres
" 28	18 a 21 h	Métodos Sísmicos	
" 30	18 a 21 h	Modelos Dinámicos	M. en I. Jorge López Ríos
Mayo 3	18 a 19:30 h	Modelos Dinámicos	M. en I. Jorge López Ríos
	19:30 a 21 h	IV. DISEÑO DE CIMENTACIONES	M. en I. Jorge López Ríos
" 7	18 a 21 h	Cimentaciones Masivas	M. en I. Jorge López Ríos
" 12	18 a 19:30 h	Cimentaciones Masivas	M. en I. Jorge López Ríos
	19:30 a 21 h	Cimentaciones Reticuladas	Ing. Alberto García Rubio

DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Mayo 14	18 a 19:30 h	Cimentaciones Reticuladas	Ing. Alberto García Rubio
	19:30 a 21 h	Cimentaciones Reticuladas	M. en I. Juan Dyer de León
Mayo 17	18 a 19:30 h	Reglamentos	M. en I. Juan Dyer de León
	19:30 a 21 h	V Aislamiento de Vibraciones	M. en I. Francisco Aguilar López de N.
" 19	18 a 21 h	Estado del Conocimiento	M. en I. Jorge López Ríos M. en I. Francisco Aguilar López de Nava

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION

TEMA: INTRODUCCION

M. en I. FRANCISCO AGUILAR LOPEZ DE NAVA

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123

DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION

Introducción:

Las cimentaciones que soporta equipo y maquinaria vibratorios deben deseñarse para condiciones de carga tanto estáticas como dinámicas.

Dentro de las primeras se encuentran la capacidad estática del terreno y el asentamiento, mientras que las segundas incluyen el cálculo de la amplitud de vibración para diferentes modos de vibración, las frecuencias naturales, los factores de amplificación dinámica así como factores de transimisibilidad y en algunos casos la respuesta dinámica.

También deben considerarse las probabilidades de falla por fatiga de las conecciones del equipo a la cimentación o de la propia cimentación.

Por otra parte existen condiciones especiales de diseño tales como efectos psicológicos en las personas, efectos indeseables sobre equipos sensibles adyacentes, licuación de suelos, vecindad con fuentes de vibración, etc.

Para diseñar una cimentación que va a estar sometida a cargas dinámicas por efecto de partes movibles de un equipo o maquinaria es necesario disponer de gran cantidad de datos dentro de los que se cuentan: dibujo dimensional del equipo, peso de los diversos componentes, localización espacial del centro de gravedad, rango de velocidades de operación, componentes y frecuencias de las fuerzas desbalanceadas tanto primarias como secundarias, puntos de aplicación, cargas eventuales, cargas de tuberías, límites de vibración del equipo im--

...

puestos por condiciones específicas, formación del suelo, parametros del suelo tales como densidad, relación de Poisson, módulo de elasticidad al cortante, coeficiente de rigidez; - nivel de aguas freáticas, capacidad de carga; también son necesarios datos sobre características de vibraciones existentes y atenuaciones en el lugar de la instalación, variaciones de temperatura.

La cimentación resultante deberá de cumplir además de- los requisitos de resistencia, rigidez y asentamientos admisibles con limitaciones relativas al movimiento de la misma- y el equipo que soporta tanto para evitar cualquier daño a - la maquina o sus diversas conexiones como para que las oscilaciones resultantes no sean dañinas o intolerables al personal que opera los equipos.

El diseño de cimentaciones de maquinaria sujeta a vi-- bración es un problema bastante complejo principalmente por- las siguientes razones:

1) No se conocen con precisión las fuerzas dinámicas a -- que va a estar sujeta la estrucutra.
2) No existe suficiente información sobre las características dinámicas del suelo donde se desplantará la es-- tructura.
3) Los modelos para estudiar el problema son demasiado - complicados y no consideran todos los efectos.
4) No existen reglamentos adecuados.

Por estos motivos ha sido usual diseñar estas cimentaciones- por medio de recetas más o menos empíricas que por lo general únicamente son aplicables a situaciones muy particulares.

Otro procedimiento muy utilizado es el que podríamos denominar método estático que consiste en incrementar las car-- gas vivas por factores de impacto o dinámicos y diseñar para-

...

cargas estáticas así incrementadas, aunque con este procedimiento se cumplen los requisitos de capacidad de carga y asentamientos permisibles, no se toma en cuenta ninguna de las características dinámicas del problema con resultados algunas veces catastróficos y en otras antieconómicos, por lo que este procedimiento sólo debe utilizarse como primera aproximación.

Probablemente el paso más importante en el proceso de diseño de cimentaciones es el establecimiento del criterio de diseño, ya que es difícil definir que es lo que puede considerarse falla en una cimentación sujeta a cargas dinámicas por lo general estos criterios se relacionan con la respuesta de la cimentación y se establecen en términos de valores límites de desplazamiento, velocidad ó aceleración bajo diferentes condiciones de operación.

Cabe hacer notar que las magnitudes de vibración involucrados en estos criterios son mucho más pequeños que los utilizados en el diseño de cimentaciones cargados estáticamente, siendo del orden de una milésima de pulgada.

Existen en la literatura gran cantidad de curvas y tablas de amplitud de vibración permisible, cinco de las cuales se anexan como referencia, sin embargo no son muy consistentes y es muy importante conocer las condiciones particulares para las cuales fueron obtenidos para poder utilizarlas.

Ocasionalmente es necesario diseñar la cimentación de equipo extremadamente delicado en cuyo caso el fabricante deberá establecer el criterio de diseño para obtener una operación adecuada, por ejemplo para un microscopio electrónico se estableció un valor límite de aceleración de 10^{-4}g's.

Suponiendo que las cargas dinámicas se conocen por informa--

ción del fabricante, por mediciones en equipos similares o se han valuado analíticamente, el siguiente paso es obtener su relación con los criterios de falla. Debido a las órdenes de magnitud tan pequeñas de desplazamiento permisibles el mecanismo de falla ocurre en el rango elástico de deformaciones del suelo, de manera que las soluciones basadas en consideraciones elásticas proporcionan relaciones satisfactorias entre las cargas aplicadas y la respuesta dinámica de la cimentación Un número importante de soluciones esta basado en la teoría de elasticidad, lo que requiere de la evaluación de constantes del material, tales como el módulo de elasticidad al constante y el módulo de Poisson.

Probablemente el paso más difícil del proceso de diseño sea la obtención de valores representativos de las propiedades del suelo, ya que se deben obtener muestras del lugar de la construcción y probarse en laboratorio en condiciones que tratan de simular las condiciones de operación.

Respecto a los procedimientos para satisfacer los criterios de diseño la tendencia general ha sido utilizar modelos discretos en los que los constantes de rigidez y amortiguamiento se obtienen de la teoría de elasticidad para medios semiinfinitos y las masas se fijan de acuerdo a diversos criterios.

DINAMICA DE SISTEMAS VIBRATORIOS LINEALES

Definiciones:

Un sistema elástico o estructura consiste de un conjunto de elementos rígidos, masas interconectados entre sí mediante elementos elásticos y elementos disipativos, amortiguadores.

Se conoce como grados de libertad al número de coordenadas necesarias para determinar la configuración o estado de desplazamientos de una estructura en un instante dado.

Una estructura continua tal como una viga puede considerarse formada por un número infinito de masas concentradas infitesimales unidas entre sí, hablándose en este caso de un sistema de infinito número de grados de libertad.

Cuando se requiere una sola coordenada, cantidad de traslación en una dirección dada o magnitud de rotación alrededor de algún eje, para definir en cualquier instante la posición de cualquier sección de una estructura se dice que tiene un solo grado de libertad, cuando se requieren varias coordenadas o variables se dice que la estructura se mueve con varios grados de libertad.

Llamaremos respuesta de una estructura al conjunto de parametros que definen el movimiento de la misma.

Se dice que una respuesta es libre cuando es provocada por condiciones iniciales de desplazamiento, no por --

...

fuerzas: y una respuesta es forzada cuando es provocada por fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

La respuesta libre es función de las características- intrínsecas de la estructura, mientas que la respuesta forzada es función además del sistema perturbador. En una estructura pueden presentarse en diferentes intervalos de -- tiempo vibraciones libres y vibraciones forzadas.

Las vibraciones son estacionarias en un intervalo de- tiempo cuando se presentan durante todo el intervalo, mientras que son transitorias si únicamente se presentan en una parte del intervalo.

Cuando sobre una estructura actúa una perturbación externa que posteriormente es removida, la estructura responde moviéndose en forma oscilatoria. En una estructura elástica el desplazamiento varía periódicamente dentro de ciertos límites específicos que se denominan amplitud del movimiento, si durante el movimiento hay resistencia por fric-- ción la amplitud no permanecerá constante sino que disminuirá con el tiempo hasta hacerse nula, es decir, se amortiguará. El agente que produce tal resistencia puede ser la -- fricción interna del material de que está hecha la estructura o la fricción con estructuras adyacentes que estén en -- contacto con ella, o bien la resistencia ofrecida por el medio en que se encuentra sumergida la estructura.

Cuando todo el movimiento se ha amortiguado la estructura - queda en posición de equilibrio estático.

Cuando existen fuerzas de fricción se habla de vibraciones libres amortiguadas, del mismo modo durante el intervalo en que actúe una perturbación externa se habla de vi-- braciones forzadas amortiguadas.

...

Algunos problemas de Ingeniería pueden considerarse como problemas de una sola masa concentrada, p. ej: un péndulo invertido como el mostrado en la figura que en su extremo libre soporta un peso concentrado cuya masa es muy grande en comparación con la masa del resto de la estructura.

Durante las fibraciones libres de esta estructura las fuerzas que entran en juego son la fuerza de inercia debida a la aceleración de la masa, la fuerza restauradora asociada a la elasticidad de la estructura y las fuerzas existentes de fricción.

La estructura descrita es continua por lo que tiene un número infinito de grados de libertad que matemáticamente corresponden a una función de desplazamientos, cuya determinación puede efectuarse resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que resulta de considerar el equilibrio dinámico en forma continua.

Por otra parte las estructuras con un número finito de grados de libertad requieren tan solo la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La relativa facilidad de solución de estos sistemas sobre los de ecuaciones diferenciales parciales conduce muchas veces a aproximar la masa distribuída por un número finito de masas concentradas.

En general se requieren 6 coordenadas, 3 componentes de desplazamiento y 3 de rotación, para definir completamente la posición de una masa en el espacio, de manera que para un sistema de n masas concentradas se pueden llegar a requerir hasta 6 n grados de libertad, sin embargo no siempre todos los grados de libertad son significativos.

...

En el cantiliver descrito se tiene que la masa concentrada es tan grande en comparación con la distribuída en la columna, que las fuerzas de inercia asociadas con ella cuando la estrucutra vibre serán mucho mayores que las correspondientes a la masa distribuída pudiendo llegar a considerarse en el límite, que la estructura se mueve como si fuera de una sola masa.

Vibraciones Libres no Amortiguadas con un Grado de Libertad

Considerando el equilibrio dinámico de la masa M para una posición X cualquiera tenemos

$M\ddot{x} + kx=0$

La constante de resorte k es una propiedad de la estructura y por tanto es independiente del sistema perturbador que puede ser determinada mediante consideraciones de equilibrio estático, en cualquier caso se define como la fuerza (par) necesaria para producir una traslación (rotación) unitaria de la estructura en el punto de liga con la masa concentrada.

Introduciendo la rotación $w^2= \frac{k}{m}$ nos queda

o $\ddot{X} + w^2x = 0$

Suponiendo una solución del tipo $X=Ce^{mt}$ se obtiene la siguiente ecuación

$m^2+w^2=0$ $m = \pm wi$ por lo que la solución puede escribirse como

$x=C_1e^{wit} + Ce^{-wit}$

aplicando las fórmulas de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \,\text{sen}\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \,\text{sen}\theta$

$x = (C_1+C_2) \cos wt + (C_1i-C_2i) \,\text{sen}\, wt$

$X= A \cos wt + B\text{sen}\, wt$ que se puede escribir como:

$X=C \cos (wt-\alpha)$

siendo $A=C \cos\alpha$ $B=C \,\text{sen}\alpha$ $C^2=A^2 + B^2$ $\tan\alpha= \frac{B}{A}$

en donde C = amplitud y α= ángulo fase

...

La velocidad de la masa en cualquier instante está dada por la primera derivada del desplazamiento es decir:
$\dot{x}$=Bx cos wt + Aw (-sen wt) = Bw cos wt- Aw sen wt.
veremos ahora que tanto el desplazamiento como la velocidad son funciones periódicas del tiempo. Para un tiempo cualquiera $t=t_1$ tenemos:

x_1= Bsenwt_1 + Acoswt_1

$\dot{x}_1$= Bwcoswt_1 - Awsenwt_1

Para un tiempo posterior t_2= t_1+T tenemos

x_2= Bsenw (t_1+T) + Acosw (t_1+T)

$\dot{x}_2$= Bwcosw (t_1+T) + Awsenw (t_1+T)

debido a la periodicidad de las funciones seno y coseno es evidente que si escogemos $T=\frac{2\pi}{w}$,

Las expresiones para el desplazamiento y la velocidad en t_2 son iguales a los valores en t_1.

El período T está medido en seg/ciclo pero usualmente se da en seg, su recíproco $f=\frac{w}{2\pi}$ se denomina frecuencia natural y se mide en ciclos por seg, mientras que la cantidad w se llama frecuencia circular y se expresa en radianes por seg.

Estas 3 cantidades T, f y w dependen de las características de la estructura y no dependen del agente que causa el movimiento.

La valuación de las constantes A y B ó C y α requiere el conocimiento de dos fuentes de información independientes del desplazamiento y/o la velocidad del movimiento por ejemplo: el desplazamiento en dos tiempos diferentes, la velocidad en dos tiempos diferentes, el desplazamiento en un tiempo y la velocidad en otro tiempo ó el desplazamiento y la velocidad en el mismo tiempo.

Si por ejemplo conocemos la velocidad y el desplaza-en el mismo tiempo $t=t_n$ es decir $x\ (t_n) = x_n \quad \dot{x}\ (t_n) = \dot{x}_n$

$$x_n = B\,\mathrm{sen}\,wt_n + A\cos wt_n \qquad \ldots.(1)$$

$$\dot{x}_n = Bw \cos wt_n - Aw\,\mathrm{sen}\,wt_n \qquad \ldots.(2)$$

Multiplicando (1) por $\mathrm{sen}\ wt_n$ y (2) por $\frac{\cos wt_n}{w}$ y sumamos, obtenemos:

$$x_n\,\mathrm{sen}\,wt_n + \frac{\dot{x}_n}{w}\cos wt_n =$$

$$B\,\mathrm{sen}^2 wt_n + A\cos wt_n\,\mathrm{sen}\,wt_n + B\cos^2 wt_n - A\,\mathrm{sen}\,wt_n\cos wt_n$$

$$B = x_n\,\mathrm{sen}\ wt_n + \frac{\dot{x}_n}{w}\cos wt_n$$

Similarmente se puede obtener

$$A = x_n\cos wt_n - \frac{\dot{x}_n}{w}\ \mathrm{sen}\,wt_n$$

Sustituyendo los valores de las constantes en la ecuación de x (t)

$$x(t) = \left(x_n\,\mathrm{sen}\,wt_n + \frac{\dot{x}_n}{w}\ \cos wt_n\right)\ \mathrm{sen}\,wt +$$

$$\left(x_n\cos wt_n - \frac{\dot{x}_n}{w}\ \mathrm{sen}\,wt_n\right)\ \cos wt$$

$$x(t) = x_n\cos\ w(t-t_n) + \frac{\dot{x}_n}{w}\ \mathrm{sen}\,w\ (t-t_n)$$

$$\dot{x}\ (t) = -x_n\ w\ \mathrm{sen}\ w(t-t_n) + \dot{x}_n\ \cos w\ (t-t_n)$$

para el caso de $t_n = o$

$$x\ (t) = x_o\ \cos wt + \frac{\dot{x}_o}{w}\ \mathrm{sen}\,wt = C\cos\ (wt-\alpha)$$

$$\dot{x}\ (t) = -x_o\ w\ \mathrm{sen}\,wt + \dot{x}_o\ \cos wt$$ siendo

$$C = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o}{w}\right)^2} \quad y \quad \tan\alpha = \frac{\dot{x}_o}{x_o w}$$

VIBRACIONES LIBRE AMORTIGUADAS.

Como hemos visto en las vibraciones libres el movimiento continúa indefinidamente sin disminución de la amplitud ni cambio en la frecuencia, sin embargo esto nunca se verifica porque existen fuerzas de resistencia tales que sin importar la forma exacta de esa resistencia el resultado final es el amortiguamiento de toda vibración libre.

Aunque la formulación matemática de las fuerzas resistentes debidas al amortiguamiento es muy difícil (si no imposible) de derivar para sistemas físicos reales, se han propuesto aproximaciones que guien nuestro criterio respecto a esas fuerzas. La mayoría de las formulaciones sugeridas son casos especiales de la fuerza resistente general $D(t)=C\dot{X}^n$ en donde $D(t)$ es una función del tiempo, C es una constante de proporcionalidad, $\dot{X}$ la velocidad de la masa en movimiento y n es un entero.

Para el caso en que $n=0$ tenemos la formulación de la resistencia de fricción seca acreditada a Coulomb. En este caso la fuerza resistente es una constante $D(t)=C$ cuya dirección es opuesta al vector desplazamiento.

Para el caso $n=1$, amortiguamiento viscoso, tenemos $D(t)=C\dot{X}$ es decir la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, esta expresión se considera adecuada para representar la resistencia debida al aire que rodea a un cuerpo que se - mueve a baja velocidad o bien la fuerza de fricción interna- de la mayoría de los materiales sólidos. Esta formulación - tiene el importante atributo de que es manejable matemáticamente.

Para el caso n=2 tenemos $D(t)= CX^2$ esta formulación se usa para representar la resistencia que ofrece el aire a cuerpos que se mueven a altas velocidades o bien en el caso de resistencia hidráulica.

Una formulación que se usa en diseño de aviones tiene la forma $D(t) = CiX$ en donde i es el número imaginario $\sqrt{-1}$ y X es el desplazamiento.

Para efectos de la practica ingenieril se puede suponer razonablemente que el valor de la fuerza D(t) esta dado por la - expresión del amortiguamiento viscoso.

Para vibraciones libres con amortiguamiento la ecuación diferencial de equilibrio dinámico se convierte en

$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$ C= Coef. de amortiguamiento

dividiendo entre M, llamando $\frac{K}{M} = W^2$ y $\frac{C}{2M} = h$

Tenemos $\ddot{X} + \frac{C}{M}\dot{X} + \frac{K}{M}X = 0$

o sea: $\ddot{X} + 2h\dot{X} + W^2 X = 0$ .. (3

Suponiendo soluciones de la forma $X= Ae^{mt}$

$\dot{X} = Ame^{mt}$ $\ddot{X}= Am^2 e^{mt}$ sustituyendo en (3
$Am^2 e^{mt} + 2h\, Ame^{mt} + W^2 Ae^{mt} = 0$ dividiendo entre Ae^{mt}

$m^2 + 2hm + W^2 = 0$ ecuación característica cuya solución es

$$m= -h\pm \sqrt{h^2-W^2}$$

$$m1 = -h + \sqrt{h^2 - W^2}; \quad m_2= -h - \sqrt{h^2 - W^2}$$

$$X(t) = A_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - W^2})t} + A_2 e^{(-h- \sqrt{h^2 - W^2})t} =$$

$$e^{-ht}(A e^{\sqrt{h^2- W^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{h^2 - W^2}\, t})$$

Esta ecuación representa la respuesta libre de un sistema - amortiguado, y pueden distinguirse 3 casos dependiendo de - los valores relativos de h y W.

1) Amortiguamiento crítico.

Cuando $h^2 = W^2$ tenemos el caso que se conoce como amortiguamiento crítico en este caso las raices de la ecuación característica son repetidas: $m= -h$

$$X = A_1 e^{-ht} + A_2 t e^{-ht} = e^{-ht} (A_1 + A_2 t)$$

De esta ecuación se puede concluir que no hay movimiento vibratorio, para ilustrar consideramos las siguientes condiciones iniciales: $X(o) = X_o, \dot{X}(o) = o$

Esto conduce a: $A_1 = X_o$, $A_2 = hX_o$

Aunque el caso de amortiguamiento crítico es de poca importancia en si, es de gran significación ya que sirve como medida de la capacidad amortiguadora de la estructura.

Habíamos obtenido que cuando $h = W$ $C=2MW=2\sqrt{KM} = C_{cr}$

El coeficiente de amortiguamiento C para otros casos puede - expresarse adecuadamente como un porcentaje del amortiguamiento crítico por ejemplo si una estructura tiene 20% del - amortiguamiento crítico tendrá un coeficiente
$C= 0.2(2MW)=0.4MW$.

2) Sobre amortiguamiento.-

Cuando $h > W$ las raices de la ecuación característica:

$m_i = - h \pm \sqrt{h^2 - W^2}$ son reales y negativas ya que h^2-W^2 es positiva y menor que (h^2) .

La solución de la ecuación diferencial del movimiento es:

$X(t) = e^{-ht} \; (A_1 e^{\sqrt{h^2-W^2}t} +$

De la ecuación se observa que no hay movimiento vibratorio cuando se suelta la masa en t = 0, ésta regresa lentamente a su posición de equilibrio estático.

Para constantes de amortiguamiento C mayores que C_{cr} el sistema no oscila cuando se le deja vibrar libremente, para constantes de amortiguamiento menores que C_{cr} el sistema si oscila pero tendiendo a alcanzar su posición de equilibrio estático.

3) Subamortiguamiento.-

Para valores de $h < W$ las raices de la ecuación característica son imaginarias ya que el radical es menor que cero; de modo que $m_i = h \pm W'i$

en donde $W' = \sqrt{W^2 - h^2}$ e i es $\sqrt{-1}$

En este caso la solución es: $X = e^{-ht} \; (A_1 e^{W'it} + A_2 e^{-W'it})$

Empleando la fórmula de Euler $E^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{Sen}\theta$ Se convierte en $X = e^{-ht} \left[(A_1 + A_2) \cos w't + i(A_1 - A_2) \operatorname{sen} w't \right]$

$X = e^{-ht} (C_1 \cos \sqrt{w^2 - h^2}\, t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{w^2-h^2}\, t) \quad \ldots \text{(I}$

$W' = \sqrt{W^2 - h^2} = \sqrt{\frac{K}{M} + (\frac{C}{2M})^2}$

Esta expresión se puede escribir también como

$X = e^{-ht}\, C \cos (w't - \beta)$ así la respuesta de un sistema sub-amortiguado de un grado de libertad que vibra libremente es un movimiento cuya amplitud decrece con el tiempo en forma excepcional. El período del movimiento es constante con el tiempo y es un poco mayor que el período para vibraciones libres no amortiguadas del mismo sistema.

$$T' = \frac{2\pi}{W'} = \frac{2\pi}{\sqrt{W^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{W}\sqrt{\frac{1}{1-(h/W)^2}} \text{ y como } T = \frac{2\pi}{W}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-(h/W)^2}}$$

Es conveniente introducir la relación $\beta = C/C_{cr}$ que es una medida del amortiguamiento. Así el coeficiente de amortiguamiento en cualquier caso se puede expresar como:

$$C = \beta\, 2MW \qquad \frac{C}{M} = 2\beta W \quad \text{pero} \quad \frac{C}{M} = 2h$$

$\therefore h = \beta W$ así la expresión de W' puede expresarse como

$$W' = \sqrt{W^2 - h^2} = \sqrt{W^2 - (W\beta)^2} = W\sqrt{1-\beta^2},$$ de la misma manera

$T' = \dfrac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$; W' se llama frecuencia amortiguada

En los problemas que más nos interesan se ha encontrado que $C \ll C_{cr}$ y β varía entre 1 y 10% por lo que $W' \approx W$ y $T' \approx T$

So ahora consideramos ciertas condiciones iniciales tales como $X(0) = Xo$ y $\dot{X}(o) = C$ obtenemos sust. en (I

$$X_o = C_1 \qquad 0 = C_2 W' - h\, C_1 \qquad C_2 = \frac{hXo}{W'}$$

$$X(t) = e^{-ht}\left(\frac{hXo}{W'} \operatorname{sen} W't + Xo \cos W't\right) =$$

$$e^{-ht}\sqrt{Xo^2 + \left(\frac{hXo}{W'}\right)^2}\, \operatorname{Cos}\,(W't - \phi)$$

$$X(t) = C\ e^{-ht} \cos(W't - \emptyset)$$

$$\text{siendo } C = \sqrt{Xo^2 + \left(\frac{hXo}{W}\right)^2} = Xo\sqrt{1+\beta^2}$$

Si medimos el desplazamiento en un tiempo t y en un tiempo t + T' encontramos que su relación es una cantidad constante.

Es decir $\frac{X_t}{X_{t+T'}} = \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} = e^{hT'}$ tomando logaritmos naturales de ambos miembros se obtiene $\log_e \frac{X_t}{X_{t+T'}} = hT' = \delta$

teniendo en cuenta que $T' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y que $T = \frac{2\pi}{W}$ se obtiene:

$$\delta = \frac{hT}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi h}{W\sqrt{1-\beta^2}}$$

y como $\beta = \frac{h}{W}$ $\qquad \delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

otra relación entre el decremento logaritmico y el % decimal

β del amortiguamiento crítico es:

$C = \beta\ C_{cr} = \beta\ 2MW = 2Mh = 2M\frac{\delta}{T'}$ o sea $\beta = \frac{\delta}{WT'}$

RESEÑA HISTORICA DE LA DINAMICA DE ROTORES.

El análisis de dinámica de rotores fue iniciado por Rankine en 1869, quien estudió el movimiento radial no amortiguado de una flecha flexible, concluyendo erróneamente que ningún rotor podría operar arriba de la velocidad crítica. Este resultado limitó el diseño de maquinaria rotatoria, hasta que DE-LAVAL en 1889 demostró experimentalmente que sí era posible, y que el único efecto notable era un incremento en las amplitudes del movimiento.

Fopl en 1895, extendió el análisis de Rankine para sustanciar los resultados anterioes. Greenhill, investigó la estabilidad dinámica de una flecha girando sometida a carga axial y momento torsionante y obtuvo fórmulas para distintas condiciones de frontera. En 1895, Dunkerley efectó investigaciones extensas sobre sistemas y métodos de cálculo de valocidades críticas, enfatizando que, aún para configuraciones simples involucraba gran complejidad analítica, por lo que se preocupo por encontrar métodos sencillos. El tema de la aplicabilidad y comprensión del método de Dunkerley, fue examinado pro analistas eminentes como Chree (1904), Jeffcott (1919) y Morley (1909). En aquella época, los análisis del fenómeno de velocidad críticas estaban fundados en un concepto erróneo de estabilidad elástica, siendo Kerr en 1916 quien publicó resultados teóricos y experimentales que dieron lugar a revisar la mecánica del comportamiento de los rotores, recibiendo la atención entre otros de Chree, Stadola y Jeffcott (1917) siendo éste último quien resolvió la contruversia. Estos conceptos fueron ampliados por Rogers en 1922. Robertson, en una serie de artículos publicados en 1933-1936 discutió diversos problemas sobre la orbitación de rotores, como el efecto de rigidez lateral asimétrica, influencia de oscilaciones de la velocidad de rotación y efecto de perturbaciones dinámicas en el movimiento de orbitación.

También estableció sin resolver, las ecuaciones básicas para - un rotor infinitamente largo, soportado sobre chumaceras cilíndricas, utilizando la teoría de la lubricación de Sommerfeld.

Durante el desarrollo de un turbo soplador de alta velocidad,- New Kirk y Kimball encontraron que existían amplitudes de orbitación que no podían eliminarse mediante un balanceo más cuidadoso del rotor, el cual operaba sobre chumaceras de baleros y arriba de la velocidad crítica en flexión, las conclusiones preliminares establecieron que se trataba de un caso de orbitación histeretica. Posteriormente, en 1925, los mismos investigadores notaron que en rotores soportados sobre chumaceros hidrodinámicas, ocurrían amplitudes grandes de orbitación, cuando la- velocidad de rotación era mayor al doble de la velocidad crítica en flexión, a este tipo de fenómeno lo denominaron chicoteo resonante, obtservando que podía suprimirse disminuyendo el claro libre de las chumaceras e incrementando la viscosidad del - lubricante. En 1936, Swift, analizando la influencia de componentes de armónicas superiores en chumaceras cilíndricas, en-- contró que la capacidad de carga de las mismas tiende a cero,- cuando la frecuencia de la excitación es el doble de la velocidad de rotación, este resultado corroboró los resultados de -- New Kirk.

El nivel de conocimiento fue extendido grandemente por Burwell de 1947 a 1951 y Shawki en 1955, quienes llevaron a cabo análisis teóricos y experimentales muy detallados, incluyendo la -- utilización de computadores digitales para la solución de la- ecuación hidrodinámica con fuerzas dependientes del tiempo.

Durante mucho tiempo, la principal característica dinámica de- un sistema, fue la velocidad crítica y los cálculos estuvieron basados en los métodos de Dunkerley, Rayleigh y Morley. Sin - embargo, para rotores complejos, solo rara vez se efectuaban-- cálculos hasta que Prohl en 1945 desarrolló un método de análi sis adecuado para programarse en una computadora digiral. Myklestad en 1944 presentó un método similar. Ambos métodos son una adaptación del método de Holzer para velocidades críticas - torsionales, e incluyen efectos adicionales como cortante y - efectos giroscopicos.

Mas recientemente Lund (1962), desarrolló un método para obtener la respuesta dinámica de un sistema rotor-chumaceras, para-diversos desbalaceos inducidos. Una subrutina de este programa calcula velocidades críticas.

En lo relativo al comportamiento de las chumaceras, Stodola fue el primero en reportar sus propiedades, posteriormente Hagg entre 1946 y 1952 presentó, en compañía de Warner y Shankey valores más refinados. Sternlich en 1959, obtuvo los coeficientes-elásticos y de amortiguamiento para la chumacera cilíndrica. En 1963, Warner y Thomas investigaron la respuesta dinámica de un-rotor de dos masas sobre chumaceras parciales y presentaron gráficas de diseño. Lund (1965), extendió el análisis para incluir el efecto de la masa y rigidez del pedestal.

En años recientes, han parecido tantos artículos técnicos sobre diferentes aspectos del problema dinámico rotor-chumaceras, que no es posible efectuar una reseña histórica de los mismos, pero indican la importancia que tienen en la actualidad este tipo de problemas.

BALANCEO.

Ningún rotor es capaz de operar en condiciones satisfactorias sin un balanceo adecuado. Los esfuerzos de diseño más sofisticados, no pueden asegurar un buen balanceo; sin embargo, el desbalanceo que existe en el rotor después de su construcción, puede minimizarse asignando tolerancias adecuadas para cada componente del rotor y procedimientos efectivos de inspección. Todos los rotores de alta velocidad, deben ser balanceados externamente, mediante máquinas balanceadoras después de su fabricación, y entre más refinada sea la técnica de balanceo, menor será el desbalanceo residual en el rotor. Un rotor bien balanceado dará lugar a fuerzas transmitidas, vibraciones y ruido muy pequeños, así como problemas dinámicos a muy largo plazo. Sin embargo, ninguna cantidad de balanceo puede eliminar los problemas de chicoteo de aceite, orbitación a media frecuencia o inestabilidad ó rigidez asimétrica. Estos efectos requieren un diseño adecuado del sistema y de su amortiguamiento para minimizarlos, el desbalanceo varía en magnitud, posición y ángulo, a lo largo de la longitud del rotor, durante la operación, el desbalanceo produce fuerzas centrífugas y momentos que flexionen al rotor induciéndolo a orbitar alrededor de su posición de equilibrio estático. Un desbalanceo excesivo puede poner en peligro la operación satisfactoria de una máquina. El balanceo de un rotor consiste en determinar la magnitud y localización del desbalanceo residual seguido de la introducción de pesos correctivos en planos seleccionados de balanceo para nulificar los efectos de desbalanceo.
Los rotores nunca se balancean perfectamente, ya que ésto requeriría un número exageradamente grande de mediciones para determinar la distribución del desbalanceo, que es completamente al azar, seguido de la introducción de los pesos correctivos en donde se necesitaron, ambos requerimientos son imprácticos, de manera que lo que se hace, es seleccionar un nivel de desbalanceo que en la práctica asegure amplitudes de orbitación pequeñas, en el rango de operación del equipo.

El desbalanceo de un rotor generalmente, se especifica en onzas-pulgadas, debido a que se considera como el producto del peso desbalanceado por su distancia al eje geométrico del rotor en el plano desbalanceado. La fuerza centrífuga generada por este efecto se calcula como:

$$\left[\text{Fuerza centrífuga, lbs.}\right] = \frac{(2\pi)^2}{16(386.4)}\left[\text{Desbalanceo, onzas-pulg.}\right]\cdot\left[\text{Velocidad, rad/seg.}\right]^2$$

Este concepto es válido únicamente en el caso de rotores rígidos, pero no describe la condición que existe en un rotor flexible de alta velocidad.

BALANCEO DE ROTORES RIGIDOS.

Se sabe que un rotor rígido puede balancearse agregando pesos correctivos en dos planos cualesquiera normales a la flecha. El movimiento completo del rotor puede describirse mediante el desplazamiento de su centro de gravedad y por la inclinación del rotor, de hecho, se considera como una partícula y todas las fuerzas y momentos que determinen su movimiento incluyendo el desbalanceo, pueden encontrarse en una sola fuerza y un momento actuando en el centro de gravedad del rotor. En consecuencia, reducir el desbalanceo es equivalente a reducir las fuerzas que determinan el movimiento de un rotor rígido, siendo posible especificar el desbalanceo total, mediante dos cantidades conocidas como desbalanceo estático y desbalanceo dinámico, respectivamente. El desbalanceo estático puede determinarse y corregirse sin rotación, colocando el rotor sobre apoyos de cuchilla y permitiéndole que encuentre su posición de equilibrio, que es cuando el peso está lo más bajo posible. El balanceo estático se logra adicionando pesos correctivos, de manera que el efecto total de los mismos, equilibre el desbalanceo estático del rotor, sin importar la posición axial de los pesos introducidos. El debalanceo dinámico, por el contrario, sólo puede detectarse haciendo girar el rotor, y en este caso, la distribución axial de los pesos correctivos - que se introduzcan es importante, debido a que el momento de - desbalanceo también debe quedar balanceado. Debe notarse que- con un máximo de dos pesos colocados correctamente, se puede - eliminar el desbalanceo de un rotor rígido. Además, el tamaño, posición y orientación angular de los pesos correctivos es completamente opcional, con tal de que su efecto cancela al de -- desbalanceo.

BALANCEO DE ROTORES FLEXIBLES.

Un rotor flexible presente un problema más difícil, debido a - que la distribución y variación del desbalanceo produce deflexiones en el rotor, de acuerdo a las fuerzas centrífugas resultantes. Ese perfil de deflexiones puede tener una forma com-- plicada, en cualquier caso no es posible reproducir o anular - la misma configuración aplicando una sola fuerza y un solo momento en el centro de la gravedad, como en el caso de rotor rígido. Entonces, si un rotor flexible se balancea como si fuera rígido agregandole pesos correctivos en dos planos que cancelen el desbalanceo estático y el dinámico, el rotor permanecerá después flexionando localmente. Cuando la velocidad es suficientemente alta, las fuerzas centrífugas resultantes de - - esas deformaciones locales, pueden generar amplitudes de orbitación grandes, capaces de hacer que el balanceo original no - tenga sentido. Además, cuando el rotor se acerca a una de sus velocidades críticas, trata de adoptar la forma modal correspondiente a esa velocidad crítica en proporción al desbalanceo residual.

Entre mayor sea la velocidad de un rotor, se requieren más planos de balanceo para distribuir los pesos correctivos más uniformemente a lo largo del rotor y lograr un nivel uniforme de- amplitudes pequeñas. Si el rotor es suficientemente flexible-y la velocidad es suficientemente alta, dos planos de balanceo no son suficientes. En teoría, es necesario tener como mínimo, tantos planos de balanceo como el número de la siguiente velocidad crítica que se encuentre arriba del rango de velocidades de operación.

En la práctica, existen dos tipos básicos de balanceo; uno en el taller posterior al ensamble del rotor, y otro, balanceo en el campo después de la instalación en la planta. Todas las máquinas de balanceo convencional operan a través de la adición de pesos correctivos en dos planos de balanceo. Por los comentarios anteriores, es obvio que estas máquinas solo son útiles para rotores que se comportan como si fueran rígidos en todo su rango de valocidades de operación, Las velocidades de balanceo son bajas y el rotor se soporta sobre apoyos que no tienen nada que ver con las chumaceras y pedestales sobre los cuales estarán apoyados en la realidad. Como el movimiento del rotor depende en gran parte de la rigidez y amortiguamiento de las chumaceras, normalmente no es posible lograr un nivel suficientemente fino de balanceo, mediante una maquina balanceadora de este tipo por lo tanto, casi siempre es necesario refinar el balanceo en el campo.

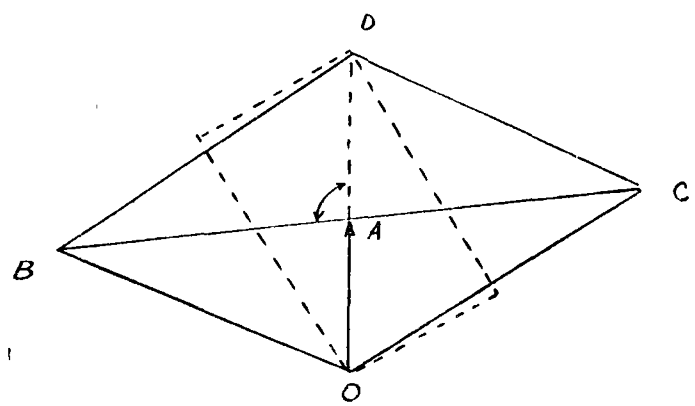
DETERMINACION DE LOS PESOS CORRECTIVOS REQUERIDOS PARA BALANCEO.

Cuando la máquina balanceadora tiene sensores de desplazamiento capaces de detectar los desplazamientos de la flecha durante el balanceo, los pesos requeridos para la corrección, pueden determinarse con la siguiente técnica. Primero se opera el rotor desbalanceado, segundo, con un peso de prueba en una posición seleccionada y tercero con el mismo peso colocado diametralmente opuesto al de la segunda corrida. Si en los tres casos se obtienen lecturas de los desplazamientos, el peso requerido para balancer y su posición angular, pueden determinarse como se muestra en la figura, los pasos para la determinación son:

Sea OA el desbalanceo original del rotor a cierta escala y su pongámos que representa a una escala diferente, la amplitud de las vibraciones observada durante la primera corrida del rotor.

Sea OB el vector después de que el peso supuesto ha sido agregado. De acuerdo a las leyes de suma de vectores tenemos OB = OA + AB, en donde AB representa el desplazamiento debido al peso supuesto agregado.

Similarmente, OC representa el desplazamiento total debido al desbalanceo determinado durante la tercera corrida. En este caso, OC = OA + AC y como el desbalanceo en este caso está a 180° de diferencia en fase respecto a su posición en la segunda corrida, se concluye que AC es igual y opuesta a AB como se muestra en la figura.



Las medidas de amplitud proporcionan información respecto a las longitudes relativas de las fuerzas de desbalanceo OA, OB y OC, pero sus magnitudes absolutas y sus relaciones de fase permanecen desconocidos. Estos hechos pueden obtenerse geométricamente. Notando que OA es la mediana de el triángulo OBC del cual las dos longitudes relativas OB, OC son conocidas y la magnitud de BC es el doble de la longitud de OA para formar OD. Entonces en el triángulo ODC, el lado DC es igual a OB, de manera que en ODC los tres lados son conocidos. De manera que las longitudes relativas de AB y OA son conocidas y como AB representa un desbalanceo conocido introducido artificialmente, se puede deducir la magnitud del desbalanceo original OA. Además, en esta representación se puede determinar la localización angular del desbalanceo original OA con respecto a la localización angular conocida AB.

En la construcción anterior, existe una ambiguedad, ya que al encontrar el triángulo original, OCD, a partir de los vectores de desbalanceo, también podría obtenerse el triángulo OC'D, ésto habría conducido a obtener la dirección C'D' para los pesos desbalanceados en lugar de la dirección CB. Esta ambiguedad puede eliminarse mediante una cuarta corrida.

Este método supone que la respuesta en desplazamiento del rotor es proporcional a la masa desbalanceada, habiéndose encontrado en la práctica que ésta es una hipótesis válida. Para lograr cualquier grado deseado de balanceo, basta con repetir los pasos anteriores varias veces.

METODO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA.

Como se ha mencionado, el balanceo en dos planos es inadecuado para maquinaria de alta velocidad en cuyo caso, debe usarse el método que se describirá a continuación. Este método está basado en la hipótesis de que el sistema rotor-chumaceras tiene una respuesta lineal y que la amplitud de orbitación es directamente proporcional al desbalanceo del rotor. Existen ciertos casos en donde la hipótesis de linearidad se ve afectada por diversos efectos que; sin embar go, por lo general no influyen mucho y puede utilizarse este método para obtener un buen balanceo en la práctica. En teoría, cualquier rotor puede balancearse al nivel deseado si se proporciona un número adecuado de planos de balanceo.

Supongámos que los desplazamientos del rotor van a medirse en cada chumacera con sensores de desplazamiento y que las amplitudes en esos puntos se denotarán con X_1 y X_2 Supongámos también, que existen cuatro planos de balanceo y que el desbalanceo total del rotor está representado por cuatro desbalanceos discretos; U_1, U_2, U_3 y U_4 localizados en los planos de balanceo. Entonces para cualquier velocidad, las amplitudes de orbitación pueden expresarse mediante las ecuaciones siguientes:

$$X_1 = \alpha_{11}U_1 + \alpha_{12}U_2 + \alpha_{13}U_3 + \alpha_{14}U_4$$

$$X_2 = \alpha_{21}U_1 + \alpha_{22}U_2 + \alpha_{23}U_3 + \alpha_{24}U_4$$

Los términos Alpha se conocen como coeficientes de influencia y su valor numérico depende de la velocidad de rotación, su naturaleza es conpleja con componentes en las direcciones XY para tomar en cuenta la magnitud del desplazamiento y el ángulo local de fase, similarmente tanto X como U son complejas.

Teniendo cuatro planos de balanceo y únicamente dos sensores, es necesario llevar a cabo diez corridas separadas a dos diferentes velocidades, siendo el procedimiento como sigue:

1.- Seleccione una velocidad adecuada del rotor a la que se efectuará el balanceo.
2.- Seleccione un plano angular de referencia, a partir del cual se medirán las posiciones angulares de los desbalan

ceos. Este plano de referencia contiene al eje real para la representación compleja.

3.- Obtenga la magnitud de las dos amplitudes y el ángulo de fase con el rotor en su condición original, girando a la velocidad seleccionada y denotando los valores resultantes con X_{10} y X_{20}

4.- Inserte un peso supuesto D sobre la línea de referencia en el plano de balanceo I y gire el rotor hasta la velocidad de prueba.

5.- Mida las amplitudes como en el paso 3 denotando esos valores con X_{11} y X_{21}

6.- Calcule los valores de los coeficientes de influencia como se indica a continuación:

$$\alpha_{11} = \frac{X_{11} - X_{10}}{D} \qquad \alpha_{21} = \frac{X_{21} - X_{20}}{D}$$

7.- Proceda de esta manera, agregando pesos supuestos en los tres planos de balanceo restantes hasta obtener el conjunto completo de ocho coeficientes de influencia.

8.- Seleccione una segunda velocidad de balanceo.

9.- Repita la secuencia de prueba de los pasos 3 a 7 y obtenga un segundo conjunto de coeficientes.

10.- Utilizando las cuatro mediciones de amplitud para rotor original, obtenga un conjunto de cuatro ecuaciones con los cuatro componentes de desbalanceo como incógnitas.

$$X_{10} = \alpha_{11} U_1 + \alpha_{12} U_2 + \alpha_{13} U_3 + \alpha_{14} U_4$$

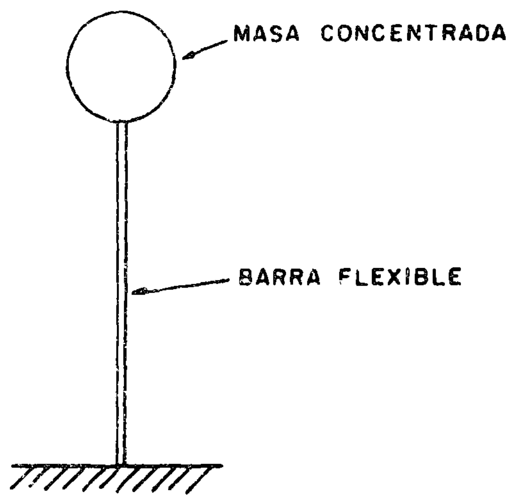
$$X_{20} = \alpha_{21} U_1 + \alpha_{22} U_2 + \alpha_{23} U_3 + \alpha_{24} U_4$$

$$X_{30} = \alpha_{31} U_1 + \alpha_{32} U_2 + \alpha_{33} U_3 + \alpha_{34} U_4$$

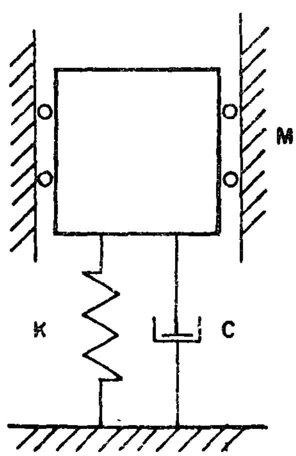
$$X_{40} = \alpha_{41} U_1 + \alpha_{42} U_2 + \alpha_{43} U_3 + \alpha_{44} U_4$$

NIVELES ACEPTABLES DE DESBALANCEO.

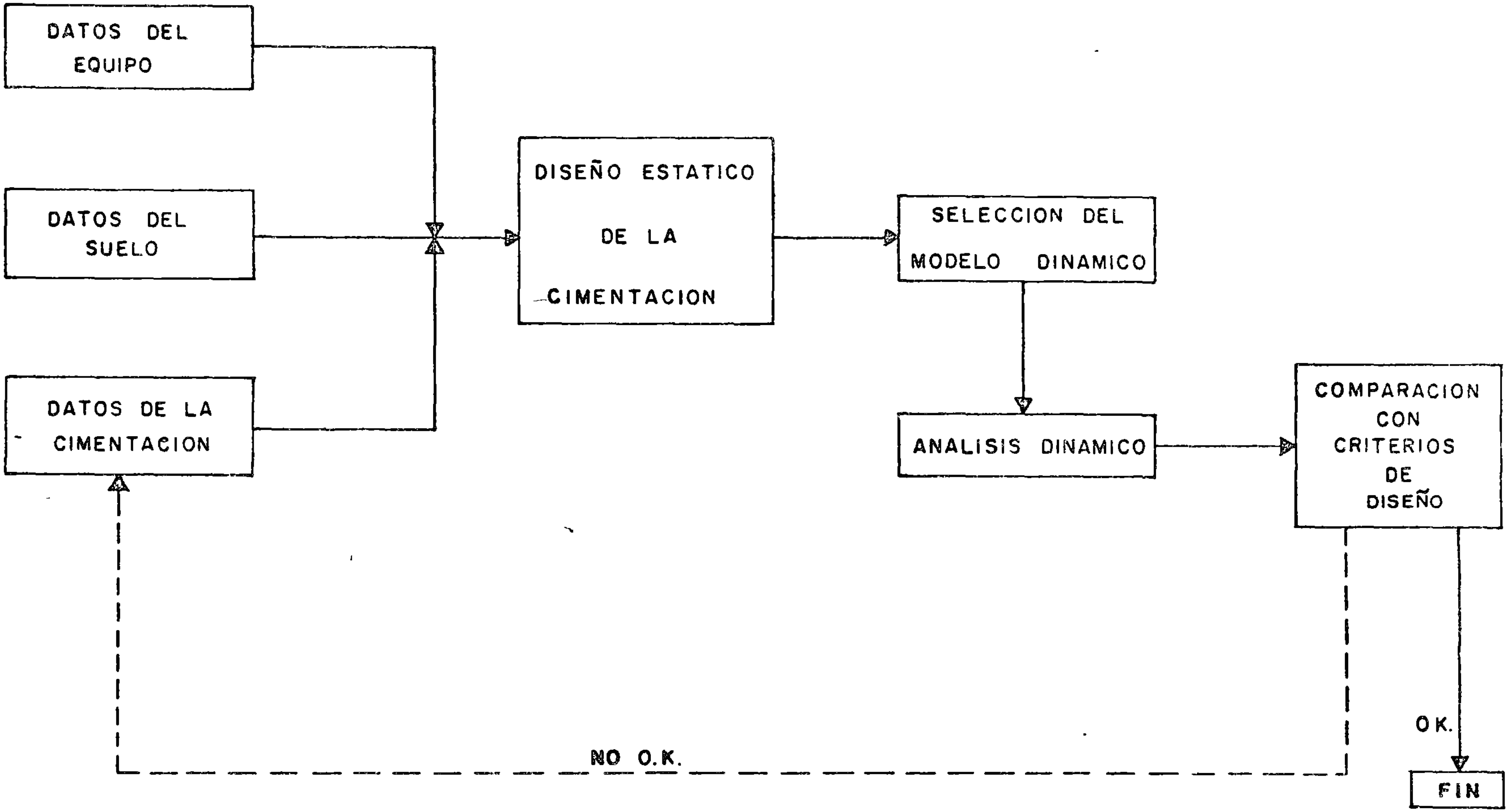
El grado de desbalanceo residual que permite a una máquina operar en condiciones seguras y eficientes a lo largo de períodos sostenidos de tiempo, es difícil de especificar, debido a los diversos factores y criterios involucrados. Por ejemplo, una máquina puede operar satisfactoriamente aunque su nivel de ruido pueda molestar a los operadores, o bien, un desbalanceo que es factible para un rotor a cierta velocidad, puede ser innecesario y estar fuera del rango de la capacidad de las máquinas convencionales de balanceo, o bien, balanceo en el campo en dos planos puede ser la única posibilidad práctica debido a factores de construcción, o bien, que debido a especificaciones del cliente, se debe balancear en muchos planos para obtener cierto nivel de balanceo.



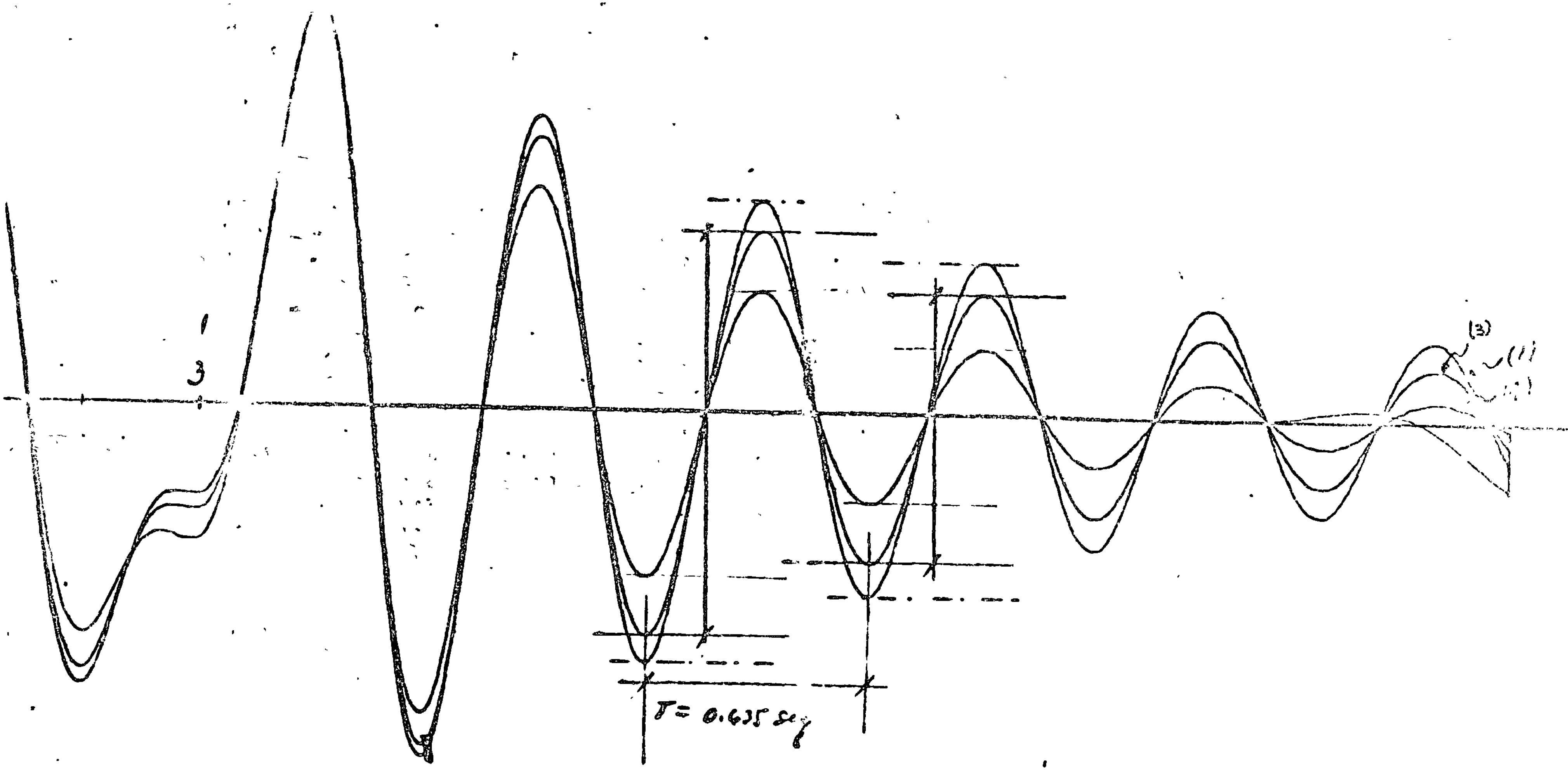
PENDULO INVERTIDO



MODELO DE UN GRADO DE LIBERTAD



PROCEDIMIENTO DE DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION



$$\zeta = \frac{0.392}{6.28} = 0.0625$$

$$\zeta = \frac{0.322}{6.28} = 0.051$$

GUIA PARA LA CALIDAD REQUERIDA DE BALANCEO.

GRUPO	VELOCIDAD (RPM)	TIPO DE ROTOR	DESPLAZ. DEL C.G. EN MILS.
A	7000 - 40000	Aparatos pequeños de alta velocidad, Giroscopos.	± 0.008 to 0.039
B	7000 - 40000	Motores de alta velocidad. Turbinas de gas Sopladores.	± 0.020 to 0.073
C	1000 - 7000	Motores pequeños. Turbogeneradores, Supercargadores.	± 0.078 to 0.390
D	1000 - 7000	Motores eléctricos comerciales. Ventiladores, motores de combustión	± 0.197 to 0.985
E	200 - 1000	Compresores y equipos reciprocantes, propelas de barco.	± 0.780 to 3.900

VIBRACION EN SISTEMAS MECANICOS. ORIGENES Y REMEDIOS.

ORIGEN	CAUSA	REMEDIO
1.- Máquina de combustión interna.	Fluctuaciones en la presión del gas. Diseño inadecuado de componentes.	Modificar orden de encendido ángulos de cigueñal y tiempo Utilizar volante mayor. Rebalancear.
2.- Propelas Ventiladores, bombas, turbinas.	Vibración de álabes. Vibraciones de la presión durante la rotación.	Incrementar número de álabes Reducir efectos de cavitación. Modificar ángulo de álabes guia. Utilizar datos. Incrementar claro libre. Aumentar amortiguamiento interno del material.
3.- Engranes	Montaje excentrico. Error en los dientes. Juego excesivo.	Corregir montaje. Aumentar dientes. Realinear chumaceras. Usar dientes helicoidales.
4.- Desbalanceo rotatorio.	Excentricidad de la flecha. Flexibilidad excesiva. Asimetría de la flecha.	Rectificar eje. Balances en varios planos. Cortes para lograr simetría.
5.- Coples	Alineamiento inadecuado.	Realinear. Aumentar flexibilidad del cople.
6.- Desbalanceo eléctrico.	Motor	Modificar diseño magnético de los polos

FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE UN SISTEMA ROTOR-CHUMACERA.

ORIGEN	DESCRIPCION	CAUSA
1.- Fuerzas transmitidas a la cimentación, carcaza o pedestales.	Constante unidireccional	Aceleración lineal constante
	Constante rotacional	Rotación en campo gravitacional o magnético
	Variable unidireccional	Movimiento impuesto del terreno o cimentación.
	Impulso	Explosión o temblor. Eq. desbalanceado cercano.
	Aleatoria	Impacto, golpes.
2.- Fuerzas generadas por el movimiento del rotor.	Desbalanceo	Inherente
	Flecha doblada	Imperfecciones de fabricación
	Fuerza de coriolis	Movimiento alrededor de trayectoria curva de radio variable
	Histerésis elástica del rotor	Propiedad del material que ofrece durante cargas cíclicas.
	Fricción de Coulomb	Amortiguamiento proveniente de movimientos relativos en componentes ajustados.
	Fricción de fluidos	Fluido accionado por la maquinaria
	Fuerzas hidrodinámicas	Efectos viscosos en chumaceras
	Momentos giroscópicos	Causados por discos giratorios grandes
3.- Aplicados al rotor.	Par de torsión	Operación a velocidad constante
	Fuerzas cíclicas	Movimiento de pistones
	Momentos oscilatorios.	Coples desalineados
	Pares transitorios	Engranes con errores de maquinado
	Campos magnéticos	Devanados giratorios
	Fuerzas axiales	Empuje por presión desbalanceada.

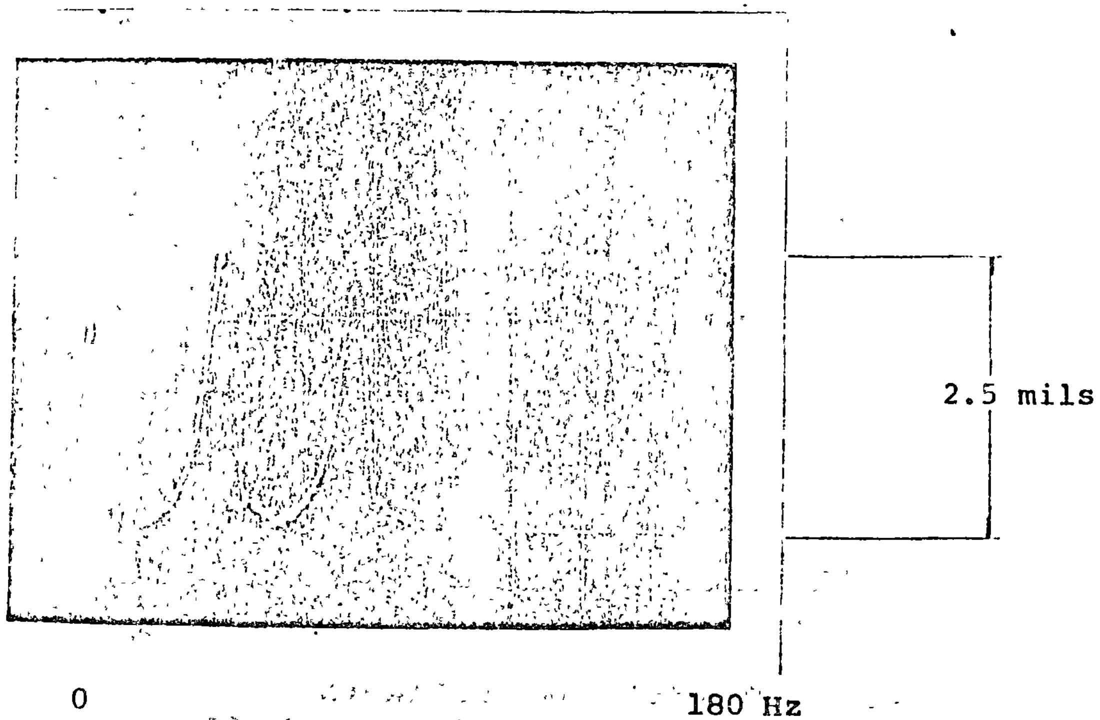


FIG. 7 ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTO. DIC.-75
COMPRESOR NUOVO PIGNONE CK-C-201-D-E
PUNTO: 6 VERT. (CHUMACERA COMP. LADO LIBRE)
TREN: CK-CT-201-C
PLANTA: BUTADIENO "CK"
VEL. DE OPERACION 5050 a 5100 r.p.m.

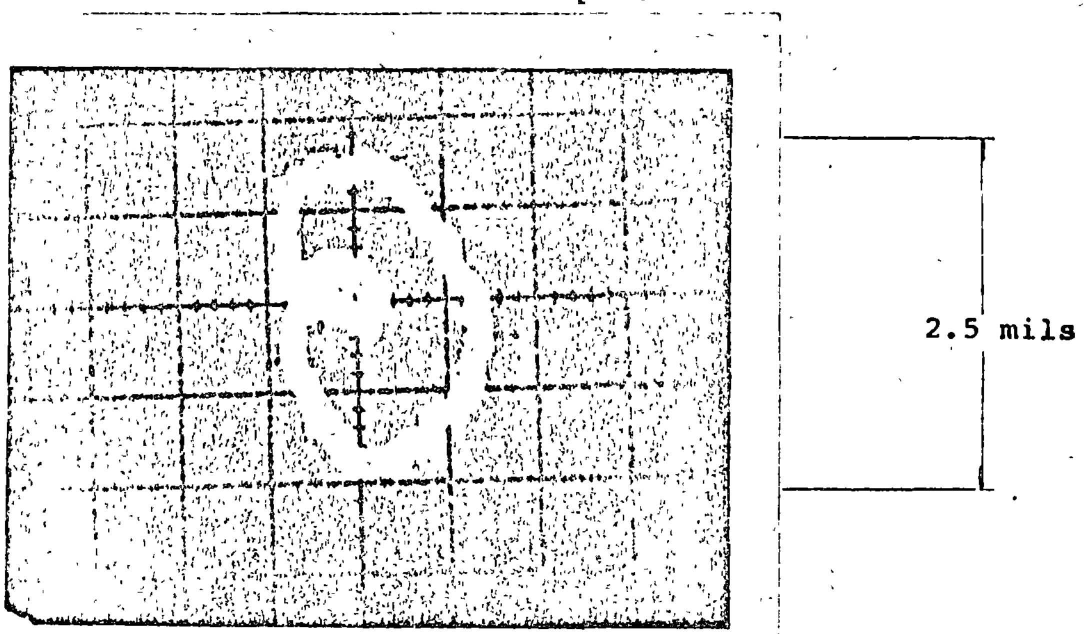


FIG. 8 ORBITACION DE LA FLECHA DIC.-75
COMPRESOR NUOVO PIGNONE CK-C-201-D-E
PUNTO: 6 (CHUMACERA COMP. LADO LIBRE)
TREN: CK-CT-201-C
PLANTA: BUTADIENO "CK"
VEL. DE OPERACION 5050 a 5100 r.p.m.

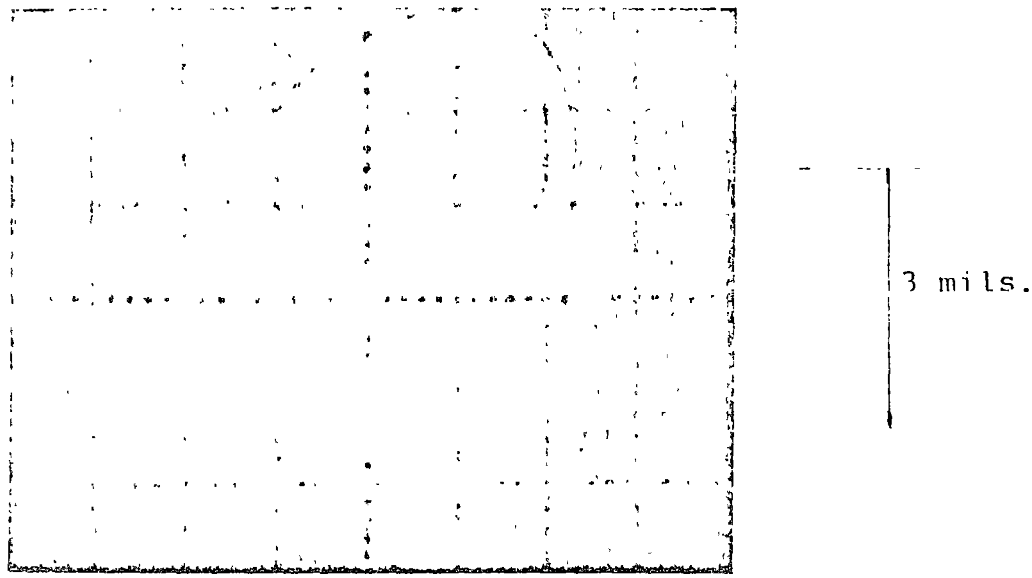


FIG. 16 MOVIMIENTO DE ORBITACION
COPLE RIGIDO TURBINA-GENERADOR
VEL. DE OPERACION 3600 r.p.m.
CARGA 3000 KW CON LA LINEA DE
EXTRACCION CONECTADA, SIN
EXTRACCION DE VAPOR

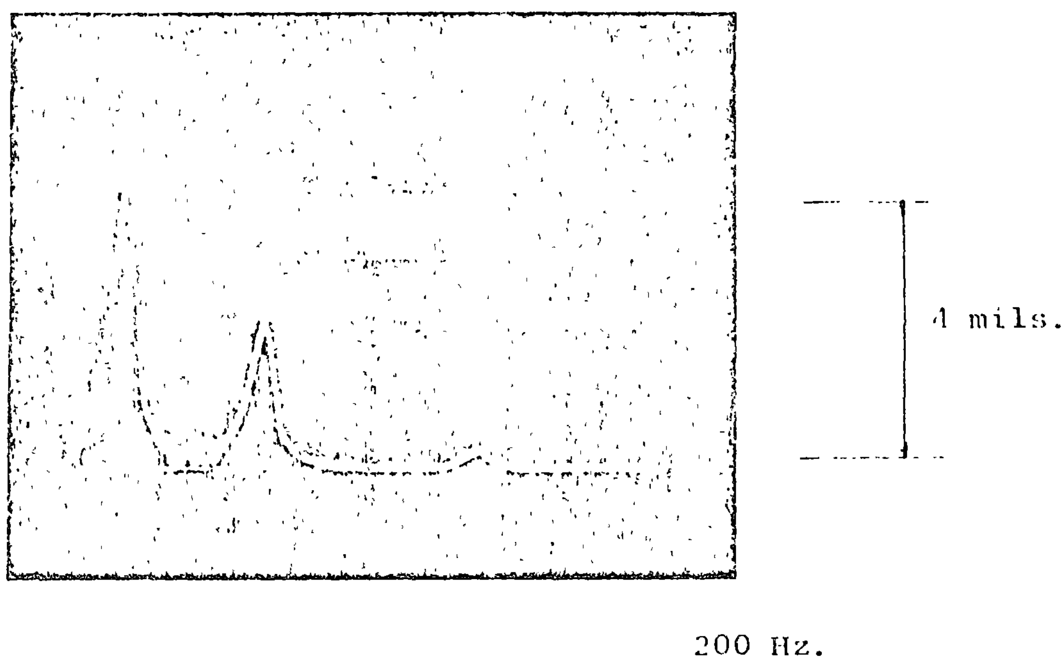


FIG. 17 EXPECTRO DE DESPLAZAMIENTO VERTICAL
EXTREMO COPLE RIGIDO TURBINA-GENERADOR
VEL. DE OPERACION 3600 r.p.m.
CARGA 3000 KW. LINA DE EXTRACCION
CONECTADA, SIN EXTRACCION DE VAPOR

FIG. 8 ORBITACION FLECHA GENERADOR SIEMENS (18-IV-75)
EXTREMO LADO COPLE RIGIDO
TREN TURBO-GENERADOR # 4 ATZCAPOTZALCO
VEL. DE OPERACION 3600 r.p.m.
VEL. BOMBA ALIMENTACION: 1400 r.p.m.

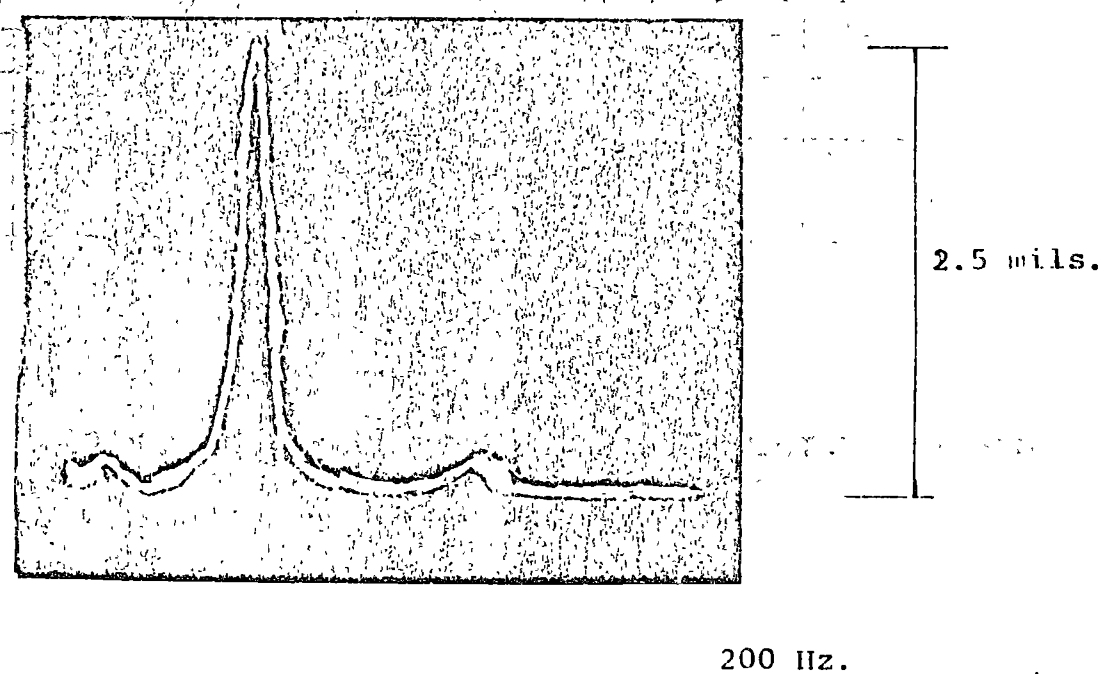
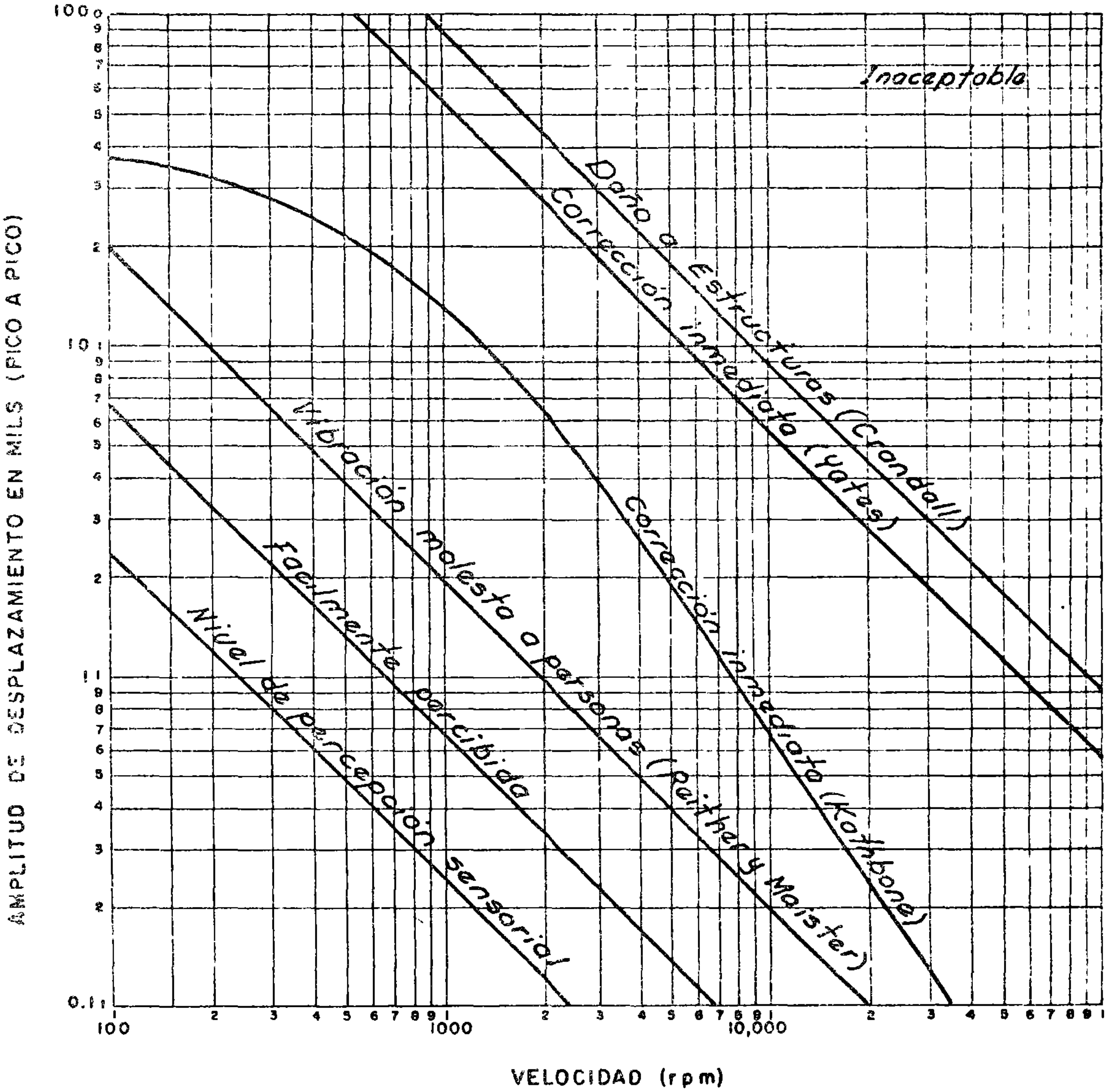


FIG. 9 ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTO
PUNTO 3 VERTICAL (FLECHA DEL GENERADOR LADO COPLE RIGIDO)
TREN TURBO-GENERADOR # 4
PLANTA TERMO-ELECTRICA ATZCAPOTZALCO
VEL. DE OPERACION 3600 r.p.m.



GRAFICA DE TOLERANCIA A LA VIBRACION — FISIOLOGICA Y MECANICA

DINAMICA DE MAQUINARIA ROTATORIA

F. AGUILAR
Maestro en Ciencias

Subdirección de
Ingeniería de Proyectos
del I.M.P.

En el presente artículo se establecen de manera simplificada los puntos que debe abarcar un programa adecuado de prevención de fallas de maquinaria rotatoria, haciendo énfasis en la proposición para llevar a cabo una revisión del comportamiento dinámico del equipo durante la etapa de diseño.

Después de describir una serie de conceptos básicos, tales como orbitación síncrona, velocidades críticas, modos de orbitación, etc., se introduce el concepto de "mapa de velocidades críticas", que constituye una herramienta muy poderosa para el análisis de problemas dinámicos, de sistemas rotor-chumaceras. A continuación se plantea un método de análisis para obtener las velocidades críticas, consistente en la aplicación del concepto denominado "matrices de transición", a la solución de un problema de valores característicos.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos mediante un programa de computadora para el rotor denominado de "Prohl".

INTRODUCCION

La necesidad de efectuar estudios analíticos en el área de vibración de maquinaria rotatoria de alta velocidad, está plenamente justificada por las experiencias, tanto de los fabricantes, como de los usuarios, ya que por una parte éstos, no pueden tolerar fallas que les ocasionen pérdidas de sus productos o de su capacidad de generación de potencia, mientras que aquéllos, no desean tener reclamaciones motivadas por problemas que ocasione su maquinaria.

El problema de las fallas mecánicas se ha aceptado como un fenómeno inevitable lo cual no es absolutamente cierto, ya que aunque no podemos eliminarlas, la probabilidad de que ocurran, puede reducirse tanto mediante modificaciones en el diseño basadas en estudios analíticos, como a través de programas adecuados de prevención, que deben empezar en la etapa en que se hace la requisición del equipo y deben abarcar los siguientes puntos:

1) Establecer especificaciones realistas.
2) Efectuar una revisión de la ingeniería durante la etapa de diseño
3) Especificar pruebas de prototipo en las instalaciones del fabricante
4) Incorporar instrumentación adecuada.

Dado que la experiencia ha mostrado que la causa más frecuente de vibraciones excesivas y/o fallas es la coincidencia de la velocidad de operación y sus armónicas con las frecuencias críticas de vibración del sistema, es importante tener un conocimiento básico del comportamiento del mismo en la cercanía de las resonancias.

En el presente artículo nos referiremos al segundo punto y concretamente a la revisión del comportamiento dinámico.

GENERALIDADES

La parte principal de toda maquinaria rotatoria es el rotor mismo, que consiste en una flecha sobre la cual están montadas componentes tales como impulsores, ruedas de compresor, engranes, camisas, etc. El rotor está soportado sobre chumaceras cuya función es mantener separada la superficie giratoria del rotor de las partes estacionarias de la carcaza. Las chumaceras pueden ser a base de rodamientos o lubricadas con película de fluido, el cual puede ser aceite, agua, metal líquido, fluido de dos fases o gas.

Debido a que los rotores no son completamente rígidos (de hecho en muchas aplicaciones son sumamente flexibles), responden dinámicamente cuando se les somete a la acción de fuerzas excitadoras, que pueden ser de tipo aerodinámico, magnético o mecánico, siendo las más comunes las debidas a desbalanceo, el cual puede ser inherente, o resultar de cambios durante la operación tales como flujo plástico, erosión, corrosión, desgaste, distorsiones por presión o temperatura, depósito de materiales, etc., teniéndose que en general el desbalanceo varía a lo largo del rotor, tanto en magnitud como en posición angular.

Cuando un rotor está girando a cierta velocidad, las fuerzas centrífugas debidas al desbalanceo le introducen flexión, produciendo que el rotor efectúe un movimiento de orbitación alrededor de su posición de equilibrio en sincronía con la velocidad de rotación. Si la orbitación y la rotación tienen el mismo sentido, el movimiento se denomina "orbitación síncrona" hacia adelante.

Debe notarse que este movimiento no es una vibración, ya que el rotor se mantiene durante todo el tiempo en la misma elástica. Sin embargo, si se observa la amplitud de orbitación en una sola dirección —por ejemplo con un sensor— el movimiento parece ser una vibración. Esta analogía es más evidente cuando se analiza el fenómeno de las llamadas velocidades críticas de un rotor.[2]

Consideremos un rotor soportado sobre apoyos rígidos formado por un solo disco excéntrico de peso W montado sobre una flecha flexible de peso despreciable, que está girando con una velocidad angular ω (fig. 1).

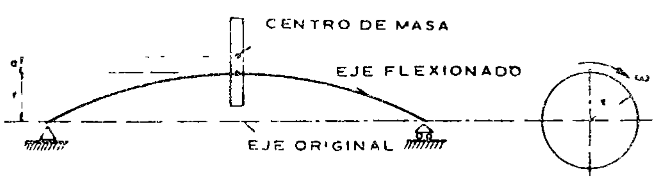


Fig. 1

La ecuación de equilibrio dinámico de la masa para un instante cualquiera resulta ser

$$Kr = M\ddot{r} = M\omega^2 (r + a) \qquad (1)$$

siendo K la rigidez de la flecha,

a la excentricidad de la masa respecto al eje de la flecha.

$\ddot{r} = \omega^2 (r + a)$ · la aceleración de la masa.

De la ecuación (1), se tiene

$$r = \frac{M\omega^2 a}{K - M\omega^2}$$

expresión que nos permite calcular el radio de orbitación del centro del disco en función de la velocidad de rotación de la flecha. Se observa que cuando $\omega \to \sqrt{\frac{K}{M}} = \omega_{cr}$ dicho radio tiende a infinito, a esta velocidad se le denomina "velocidad crítica" del rotor. Puede notarse que cuando $\omega < \omega_{cr}$, r es positivo, cuando $\omega > \omega_{cr}$, r se vuelve negativo y finalmente cuando $\omega >> \omega_{cr}$, $r = 0$ a esta característica se le llama efecto autobalanceante del rotor a velocidades supercríticas.

La amplitud infinita que predice la teoría al alcanzarse una velocidad crítica, no ocurre en la práctica debido a la presencia de amortiguamiento en el sistema, debiendo notarse que el amortiguamiento inherente del material, no contribuye a limitar las amplitudes del movimiento ya que la flecha no cambia de forma durante la orbitación, y que el amortiguamiento del sistema, proviene principalmente de los sellos y chumaceras.

Para ilustrar el efecto de la flexibilidad de las chumaceras en la dinámica de un rotor en una forma sencilla, consideremos que éste está soportado sobre un conjunto de resortes lineales en serie que representan las rigideces de: la película de aceite, la propia chumacera, el pedestal y la estructura de apoyo, cuya rigidez combinada es K_r, en este caso la velocidad crítica de nuestro modelo queda determinada por

$$\omega'_{cr} = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M}} \quad \text{en donde:} \quad K_{eq} = \sqrt{\frac{K K_r}{K + K_r}}$$

obteniéndose

$$\omega'_{cr} = \sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{\frac{K_r}{K + K_r}} = \omega_{cr} \sqrt{\frac{K_r}{K + K_r}}$$

que es menor que la correspondiente a apoyos rígidos, siendo comunes reducciones de hasta 40% en ω_{cr}, sin embargo, en la ecuación anterior no se ha tomado en cuenta el amortiguamiento, el cual hace que la reducción no sea tan grande.

En virtud de que los rotores reales son cuerpos elásticos y tienen masa distribuida, poseen un número infinito de velocidades críticas, afortunadamente por el momento, sólo son de interés practico algunas de las más bajas. Asociado a cada velocidad crítica se tiene una elástica denominada "modo" o "forma modal" que es simplemente la forma flexionada del rotor a esa velocidad.

Para ilustrar el efecto de las chumaceras en los modos de un rotor, consideremos un modelo simple consistente en una flecha uniforme, soportada sobre resortes iguales de rigidez K. Si $K \to \infty$ el rotor se comporta como una viga simplemente apoyada, por el contrario cuando $K \to 0$ el rotor se comporta como un cuerpo rígido, siendo su frecuencia más baja la correspondiente a orbitación cilíndrica, recuérdese que el rotor no vibra sino efectúa un movimiento de orbitación, mientras que, la segunda corresponde a una orbitación cónica, siendo interesante notar, que aún para chumaceras muy flexibles sólo hay dos modos de cuerpo rígido, ya que la tercera velocidad crítica siempre involucra flexión del rotor Fig. 2.

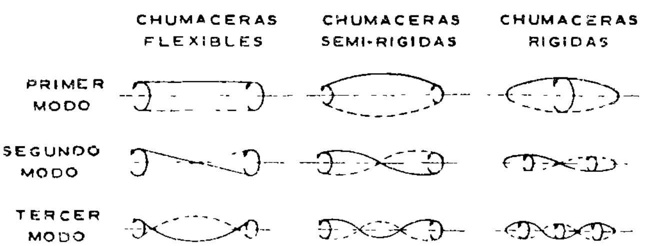


Fig. 2.- Influencia de la rigidez de las chumaceras en los modos de orbitación.

Si se grafican en papel logarítmico las velocidades críticas de un rotor, en función de la rigidez de las chumaceras, resulta un conjunto de curvas que se denomina "mapa de velocidades críticas", el cual constituye una herramienta muy valiosa para el análisis de problemas de vibración. En esta representación las velocidades críticas del cuerpo rígido resultan ser líneas rectas con pendiente igual a ½, mientras las de rotor flexible y apoyos rígidos son líneas horizontales. Fig. 3.

Si se dispone de las características de rigidez de las chumaceras de un sistema rotor-chumaceras en función de la velocidad de rotación, y se superponen sobre un mapa de velocidades críticas, las intersecciones nos definen los valores de las velocidades críticas no amortiguadas del sistema.

En todos los casos deberá evitarse que alguno de esos valores coincida con la velocidad de operación, ya que de lo contrario pueden aparecer amplitudes de oscilación inadmisibles. Para el efecto existen varios métodos

1) Incrementar la rigidez de las chumaceras
2) Disminuir la rigidez de las chumaceras
3) Cambiar la geometría del rotor.

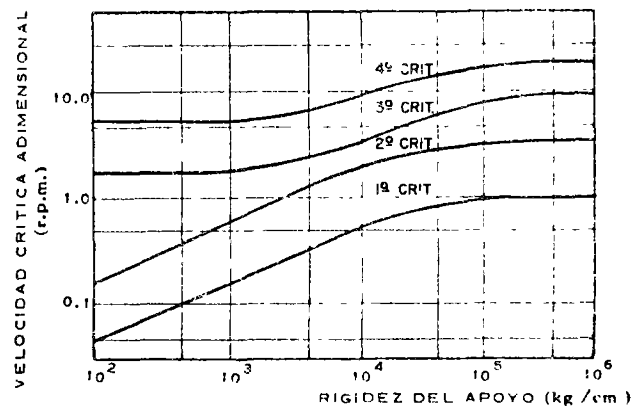


Fig. 3.-

METODO DE ANALISIS

Describiremos ahora un método para calcular las velocidades críticas de un rotor, basado en la analogía entre el problema de vibraciones planas en flexión de una viga y el de la orbitación síncrona de un rotor.

Para lo cual vamos a introducir algunas simplificaciones tales como sustituir una estructura continua por una discreta, es decir, reemplazaremos al rotor real por una serie de masas rígidas, conectadas entre sí mediante porciones de eje, sin masa y de rigidez constante, en donde la masa de cada estación será la carga concentrada existente en ese punto más un peso tributario del eje, repartido entre las estaciones a modo de preservar el centro de gravedad.

La selección del número de estaciones está gobernada tanto por el número de masas y cambios de sección, como por el número deseado de modos, ya que se ha observado que para obtener resultados numéricos satisfactorios el número de masas debe ser mayor al doble del orden del modo deseado más alto.

El procedimiento que se describirá consiste en determinar las velocidades de rotación para las cuales, las fuerzas y momentos de inercia están en equilibrio con las fuerzas elásticas internas en todos los puntos del rotor y al mismo tiempo se satisfacen las condiciones de frontera.

A continuación se plantean las ecuaciones que relacionan los estados entre diversas secciones y se describe la técnica denominada "matrices de transición" para la obtención de las velocidades críticas.[1]

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio al tramo de eje entre las estaciones i e i-1, se obtiene (Fig 4)

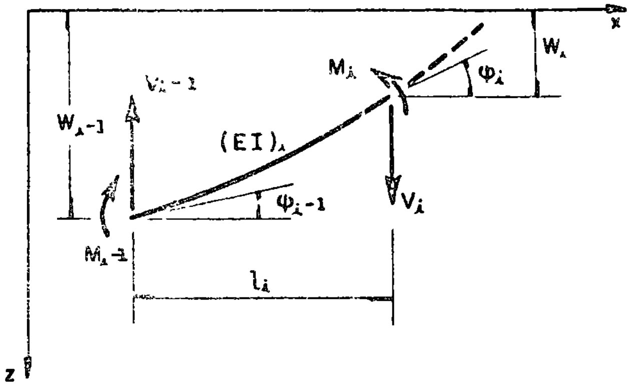


Fig. 4

$$V_i + V_{i-1} = 0 \qquad (2)$$

$$M_i - M_{i-1} - V_i l_i = 0 \qquad (3)$$

De la teoria de Resistencia de Materiales, el desplazamiento y la pendiente del extremo i está dada por

$$W_i = W_{i-1} - \Psi_i l_i - M_i \frac{l_i^2}{2(EI)_i} + V_i \frac{l_i^3}{6\,(EI)_i} \qquad (4)$$

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} + M_i \frac{l_i}{(EI)_i} - V_i \frac{l_i^2}{2(EI)_i} \qquad (5)$$

Estas cuatro ecuaciones pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/2EI & l^3/6EI \\ 0 & 1 & l/EI & l^2/2EI \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1}$$

$$Z_i = F_i Z_{i-1} \qquad (6)$$

en donde Z_i respresenta el vector de estado en la sección i, y F_i es la matriz de transición del tramo de eje i-1, i.

Al analizar las estaciones donde hay masas concentradas, podemos considerar dos casos:

a) Masa concentrada considerada como puntual, la cual introduce durante las vibraciones una fuerza de inercia que produce una discontinuidad en la fuerza cortante (fig. 5).

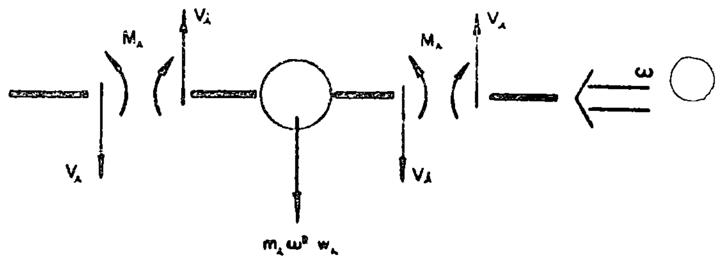


Fig. 5

obteniéndose por simple equilibrio

$$V_i = V_i - m_i \omega^2 W_i \qquad (7)$$

Además debe tenerse que la deflexión, la pendiente y el momento sean contínuos a través de la carga concentrada, de modo que

$$W_i = W_i \quad ; \quad \Psi_i = \Psi_i \quad ; \quad M_i = M_i \qquad (8)$$

En notación matricial (7), (8) quedan como

$$\begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i^{der.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i^{izq.}$$

ó $$\bar{Z}_i^{der.} = P_i \bar{Z}_i^{izq.} \qquad (9)$$

en donde P_i es la matriz de transición de la masa concentrada, y

b) Masas concentradas tomando en cuenta sus dimensiones, pudiéndose distinguir dos casos: vibraciones laterales y orbitación síncrona.

Para un rotor que está vibrando en un plano transversal con una velocidad ω aparecen en cada masa, una fuerza de inercia y un momento debido a la inercia rotacional del disco cuyo valor está dado por $M = I_T\omega^2\phi$, siendo I_T el momento transversal de inercia de masa de disco y ϕ el ángulo de rotación del disco (fig. 6)

Si consideramos ángulos pequeños podemos substituir la pendiente ψ, por el ángulo ϕ obteniéndose

$$M_i = M_i - I_T \omega^2 \Psi \quad ; \quad V_i = V_i - m_i \omega^2 W_i$$

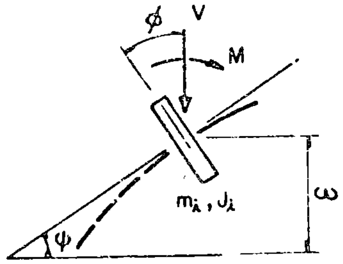


Fig. 6

Por otra parte para un rotor que está orbitando con una velocidad ω (fig. 7) aparece sobre cada masa concentrada un momento debido al llamado efecto giroscópico, que de acuerdo a las fórmulas de Euler vale

$$M = H_y\,\omega = (H_a \operatorname{sen}\Psi - H_b \cos\phi)\,\omega$$

En donde H_a, H_b son las componentes del momento angular y están dadas por

$$H_a = I_p\,\omega \cos\phi \quad , \quad H_b = I_T\,\omega \operatorname{sen}\phi$$

siendo I_T el momento transversal de inercia de masa, si aceptamos que sen $\phi = \phi$; cos $\phi = 1$ y que $\Psi = \phi$ se obtiene $M = (I_p - I_T)\omega^2\Psi$

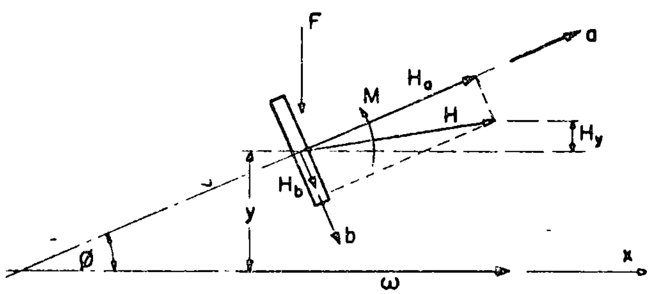


Fig. 7

Para un disco sólido de diámetro D, espesor h y densidad ρ se tiene

$$I_p = \frac{\pi\,\rho\,h\,D^4}{32}$$

$$I_T = \frac{\pi\,\rho\,h\,D^4}{64}\left[1 + \frac{4}{3}\left(\frac{h}{D}\right)^2\right]$$

Cuando h es pequeño: $I_T = 0.5\,I_p$

Finalmente para las estaciones donde están localizadas las chumaceras que consideraremos como apoyos de resortes, los vectores de estado quedan relacionados por una matriz que incluye la discontinuidad en la fuerza cortante debida a la fuerza del resorte, obteniéndose

$$\begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ M \\ V \end{bmatrix}_i , \text{ ó } \bar{Z}_i^{der} = P_i \bar{Z}_i^{izq} \qquad (10)$$

A partir de las relaciones (6), (9) y (10) podemos relacionar entre sí a los vectores de estado adyacentes y mediante un proceso de sustitución, usando productos matriciales es posible eliminar a los vectores de estado intermedios. Así para el rotor de la figura (8) tenemos

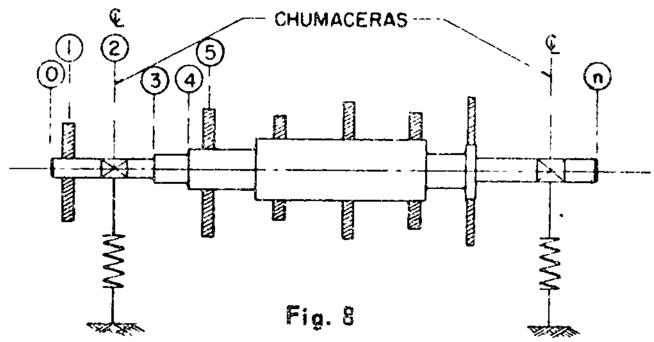


Fig. 8

$$\bar{Z}'_1 = F_1\,\bar{Z}'_0 \qquad \bar{Z}^d_1 = P\,\bar{Z}'_1 \qquad \bar{Z}'_2 = F_2\,\bar{Z}'_1$$

$$\bar{Z}'_{n-1} = F_{n-1}\,\bar{Z}'_{n-2} \qquad \bar{Z}^d_{n-1} = P_{n-1}\,\bar{Z}'_{n-1} \qquad \bar{Z}'_n = F_n\,\bar{Z}'_{n-1}$$

sustituyendo regresivamente estas 3 últimas expresiones

$$\bar{Z}'_n = F_n\,P_{n-1}\,\bar{Z}'_{n-1} = F_n\,P_{n-1}\,F_{n-1}\,\bar{Z}'_{n-2}$$

y en general

$$\bar{Z}'_n = F_n P_n F_{n-1} P_{n-1} F_{n-2} P_{n-2} \cdots F_2 P_1 F_1 \bar{Z}_o = U_{no}\,\bar{Z}'_o \qquad (11)$$

En donde U_{no} es la matriz de transición total de la flecha

Finalmente para definir completamente el problema, necesitamos especificar las condiciones de frontera

Si los extremos del rotor están libres tenemos

$$\bar{Z}_o = \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_o \quad ; \quad \bar{Z}_n = \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_n$$

por lo tanto la ecuación (11) se convierte en

$$\begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}_n = \left[\begin{array}{cc|cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}_o$$

de donde se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \end{bmatrix}_o \qquad (12), \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} -W \\ \Psi \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W \\ \Psi \end{bmatrix}_o \qquad (13)$$

Para que el sistema (12) tenga solución se requiere que el determinante sea nulo, lo que conduce a un polinomio de grado "N" en (ω^2), en donde N es el número de estaciones, denominado "ecuación característica" o "de frecuencias", cuyas raíces son las velocidades críticas del rotor Sin embargo, el álgebra involucrada puede resultar prohibitiva, por lo que es recomendable efectuar el procedimiento en forma numérica.

Lo cual se logra suponiendo distintos valores de la frecuencia ω y calculando el valor de determinante del sistema (12), a partir de estos resultados podemos trazar una gráfica (fig. 3) cuyas intersecciones con el eje horizontal son las velocidades críticas del sistema.

Una vez obtenida cada velocidad crítica, es necesario determinar el modo de vibración correspondiente, que no es mas que la elástica deformada del rotor a esa velocidad, y está formado por los primeros elementos de todos los vectores de estado calculados para la velocidad crítica correspondiente.

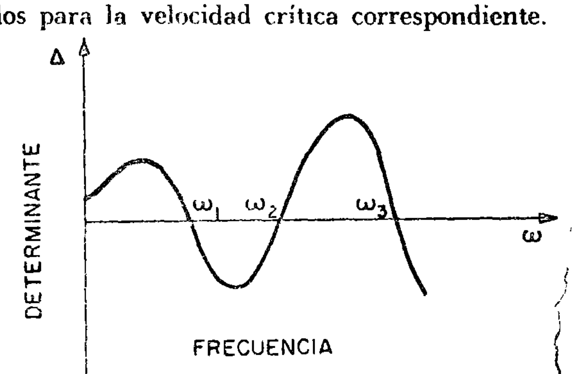


Fig. 9

Debido a la gran cantidad de operaciones que es necesario efectuar para generar información suficiente para hacer el mapa de velocidades críticas de un rotor, es necesario recurrir a una computadora. Actualmente en el Instituto se cuenta con un programa de computadora para este tipo de cálculos, cuyo diagrama de flujo se muestra en la (fig. 10).

DIAGRAMA DE FLUJO PROGRAMA DE VELOCIDADES CRITICAS

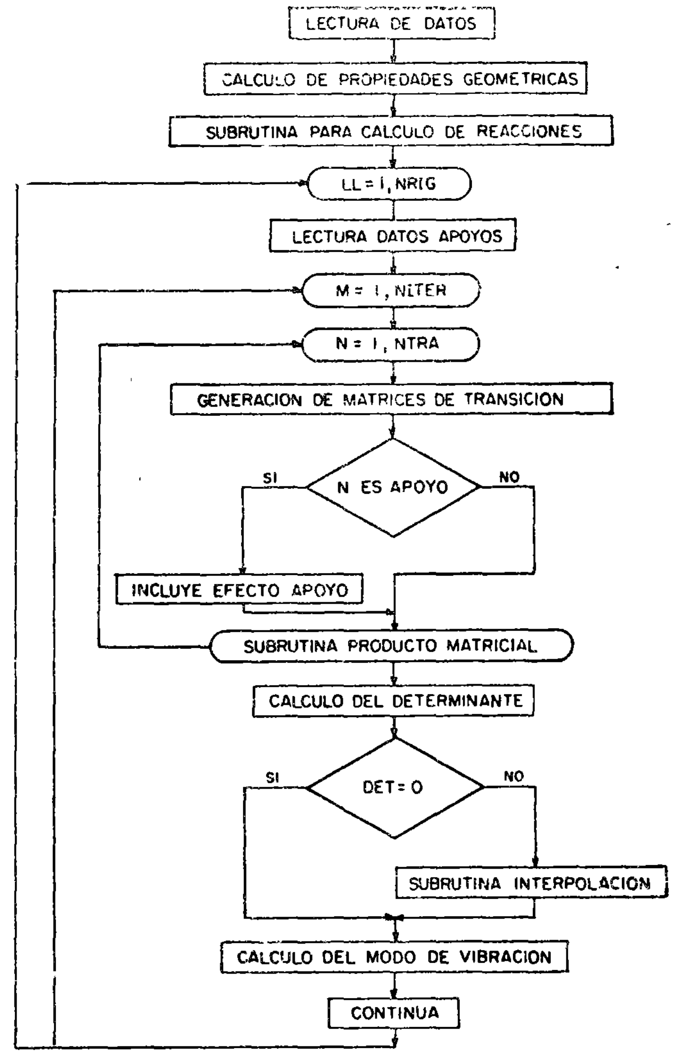


Fig. 10

Con objeto de mostrar una aplicación práctica, se generó el mapa de velocidades críticas del rotor denominado de "Prohl" representado en la (fig. 11), cuyos datos geométricos aparecen en la Tabla I y fueron tomados de la referencia 1.

El mapa de velocidades críticas generado por el programa de computadora, se muestra en la (fig 12), las velocidades críticas para apoyos rígidos se compararon con los resultados reportados en la referencia

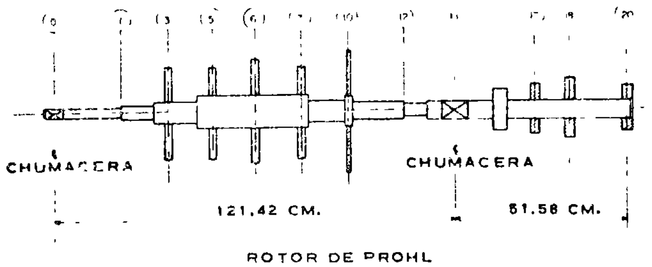


Fig. 11

TABLA I

DATOS GEOMETRICOS DEL ROTOR DE PROHL

Tramo	L (cm)	D E. (cm)	W (kg)	Ip (kg-c2)
1	20 64	4 21	0 0	0 0
2	9 21	4 21	0 0	0 0
3	3 97	5 95	5 50	252 C
4	9 21	5 95	0 0	0 0
5	4 45	14 68	3.52	189.0
6	13 41	14.68	7 63	647.0
7	14 33	14 68	3 52	189 0
8	1 90	14 68	0 0.	0.0
9	10 79	5.95	0 0	0 0
10	1 27	12 70	9 16	820 0
11	1 27	12.70	0 0	0 0
12	15 56	5 56	0 0	0 0
13	6.03	5 08	0 0	0 0
14	9 37	5 56	0 0	0.0
15	10 79	5 56	0 0	0.0
16	5 08	12 54	0 0	0.0
17	9 68	5 56	3 56	85.5
18	10 79	5 56	5 06	164.5
19	14 13	5 56	3.18	70.0
20	1 11	5 56	0 0	0.0

1, obteniéndose muy buena correlación, las velocidades críticas en el caso de apoyos flexibles no pudieron compararse porque el método de Prohl no incluye la flexibilidad de los apoyos.

Es interesante mencionar que frecuentemente la información proporcionada por el fabricante de equipo rotatorio, incluye datos de velocidad crítica correspondiente a una condición de apoyos rígidos. Basándose en estos valores la mayor parte de los equipos operan arriba de la primera velocidad crítica pero abajo de la segunda. Sin embargo, si se toma en cuenta la flexibilidad de los soportes, se observa que estos equipos operan bien arriba de la segunda, en proximidad a la tercera y aún arriba de la tercera crítica.

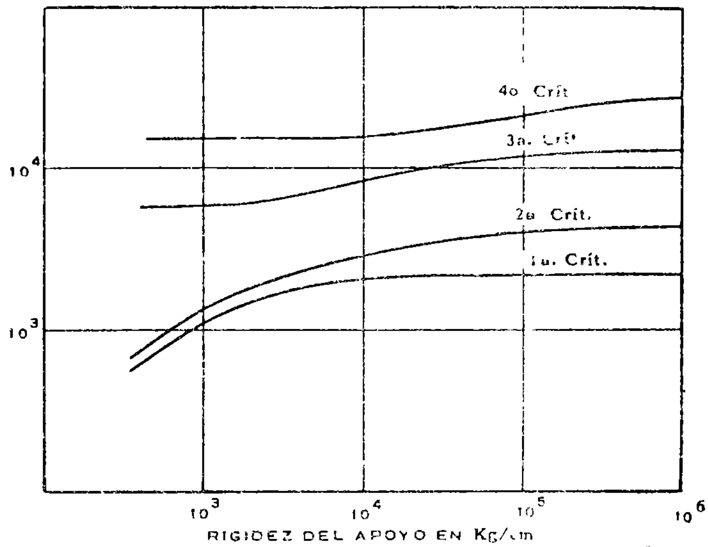


Fig. 12.- Rotor de Prohl.

La información acerca de la región en la cual opera un equipo, es muy valiosa en términos de operación confiable a largo plazo, ya que hay ciertas regiones muy sensitivas a cambios del desbalanceo con el tiempo, lo cual puede ser causa de problemas dinámicos durante la operación.

Como el tratamiento anterior no considera el efecto del amortiguamiento, es necesario en algunos casos, recurrir a análisis más refinados como el de respuesta del rotor a una excitación tal como desbalanceo. En el cual, se introducen desbalanceos conocidos en las secciones más probables de sufrir cambios con el tiempo y se obtienen las amplitudes de orbitación, así como la elástica deformada bajo las condiciones impuestas de desbalanceo.

Asi mismo, es necesario tomar en cuenta a las chumaceras en forma más precisa, para lo cual se tiene que recurrir a la Teoría de Lubricación Hidrodinámica.

Dada la importancia de estos dos temas Respuesta al Desbalanceo y Chumaceras Lubricadas con aceite, se creyó conveniente presentarlos por separado.

Por último, se presenta una lista de otros análisis que es necesario efectuar para establecer que el comportamiento dinámico de un equipo es confiable, en términos de operación a largo plazo.

Vibraciones Torsionales
Cargas en Engranes
Influencia dinámica de los Sellos
Vibraciones Axiales
Análisis de Inestabilidad Hidrodinámica
y Vibraciones de Alabes.

NOMENCLATURA

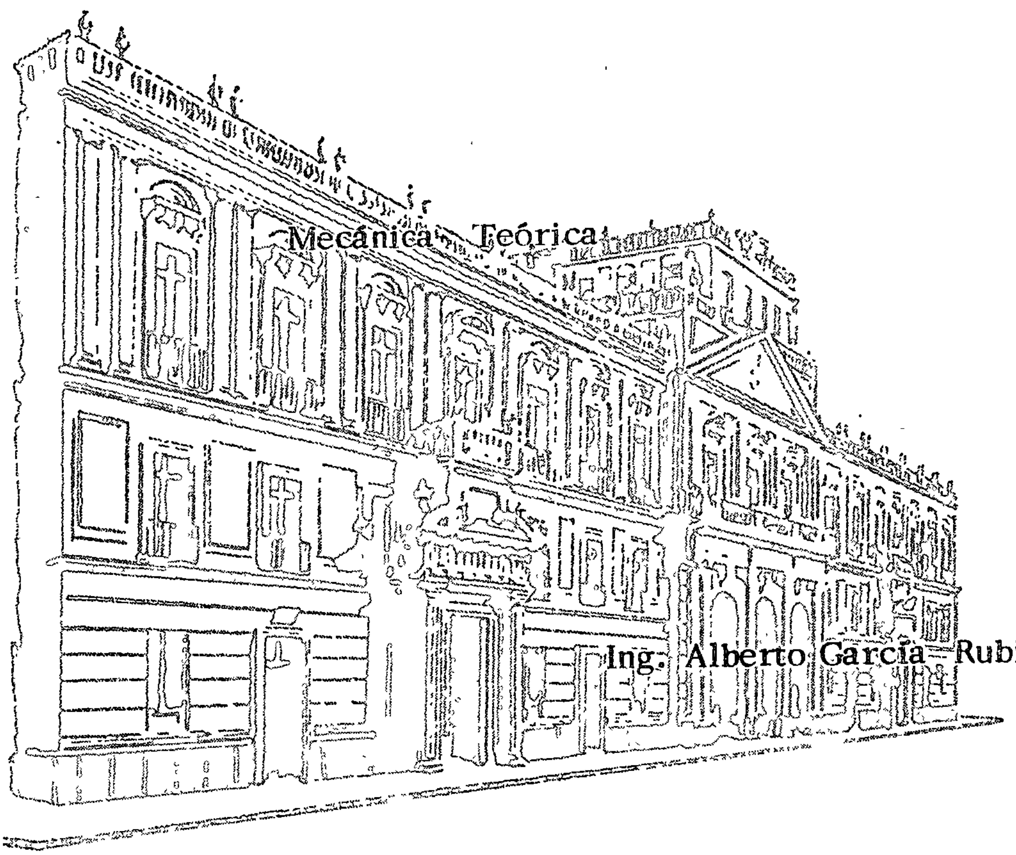
W Peso concentrado, en kg
K Rigidez a la flexión de la flecha, en kg/cm
a Excentricidad del centro de masa, en cm
r Aceleración absoluta del centro de masa, en cm/seg²
m Masa concentrada, en kg-seg²/cm
ω Velocidad de rotación, en rad/seg.
w Deflexión de la flecha, en cm
ψ giro o pendiente, en rad.
M Momento flexionante, en kg-cm
V Fuerza cortante, en kg
l Longitud de un tramo de flecha, en cm
E Módulo de elasticidad, en kg/cm²
I I_t Momento de inercia transversal de la flecha. cm.
Z Vector de estado
F Matriz de transición de campo
P Matriz de transición de punto
φ Angulo de rotación, en rad
J, I_p Momento polar de inercia de masa, en kg-cm²
H Momento angular o momento de momentum, en kg-cm-seg
ρ Densidad, en kg/cm³
D Diámetro, en cm
h Espesor, en cm

REFERENCIAS

1 Prohl M A "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors" *Journal of Applied Mechanics.* Vol. 12 Trans. ASME Vol 67
2 B Sternlich y P. Lewis: "Vibration Problems with High Speed Turbomachinery".
3 W. Hurty y M Rubinstein· "Dynamics of Structures". *Prentice Hall* (1964).

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION



Mecánica Teórica

Ing. Alberto García Rubio

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123

Cualquier estructura se puede analizar estática o dinámicamente. El primer análisis corresponde a una aplicación lenta del sistema externo de cargas de manera que la resistencia interna de la estructura tiene tiempo suficiente para movilizarse y en cualquier instante existe igualdad entre los sistemas de fuerzas externo e interno.

Cuando el sistema de cargas se aplica rápidamente, se produce una vibración o sea un movimiento del sistema con respecto a su posición de equilibrio. La fuerza que origina y mantiene una vibración tiene carácter fluctuante y recibe el nombre de fuerza excitadora.

Estas fuerzas excitadoras y las vibraciones correspondientes se presentan en sistemas con elementos en movimiento: producen efectos indeseables en la mayoría de los casos, ya que se aumentan los esfuerzos de trabajo de los materiales y pueden afectar el funcionamiento de la máquina o los dispositivos cercanos.

Como ejemplo sencillo de un sistema vibratorio, se puede considerar una masa de peso W, suspendida de un resorte de rigidez k y de peso despreciable como se muestra en la figura 1.

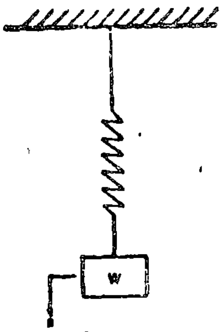


FIG. 1

La constante k es la fuerza necesaria para producir una deformación unitaria del resorte. La masa está en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas de la misma magnitud, colineales y de sentidos opuestos: el peso W actuando hacia abajo y la fuerza en el resorte $k\delta_{st}$; dirigida hacia arriba, donde δ_{st} es el desplazamiento estático del resorte, debido al peso W. Esta posición en la que todas las fuerzas están en equilibrio, es la llamada posición de equilibrio, y los desplazamientos x de la masa se miden a partir de ella.

Si la masa es desplazada una distancia x hacia abajo y se le suelta instantáneamente, entonces la fuerza en el resorte excede en kx al peso W, y la masa se mueve hacia arriba aumentando su velocidad hasta pasar por la posición de equilibrio, momento en que x cambia de signo: el resorte se comprime y la velocidad de la masa disminuye hasta un valor cero. En ese instante la masa desciende aumentando primero su velocidad y disminuyéndola después a un valor nulo en su posición extrema y así sucesivamente.

Este movimiento que se repite después de un cierto tiempo, se denomina periódico. Se llama periodo al tiempo necesario para una repetición del movimiento, y ciclo a una repetición completa del movimiento. La frecuencia es el número de ciclos en la unidad de tiempo. La amplitud del movimiento es igual al máximo desplazamiento producido con respecto a la posición de equilibrio.

La vibración del ejemplo anterior es rectilínea: se puede considerar un sistema de vibración torsional, por ejemplo, el péndulo a torsión, mostrado en la figura 2.

En este caso, la rigidez K es el momento necesario que hay que aplicar para producir un giro unitario θ. J indica el momento de inercia de la masa circular.

Debido a la semejanza entre los tipos de vibración rectilínea y torsional, el análisis de un tipo es aplicable igualmente al otro.

Se llama vibración libre a aquélla que ocurre bajo la acción de las propias fuerzas del sistema, sin la acción de ninguna fuerza externa excitadora. La vibración es forzada cuando actúan fuerzas externas fluctuantes en el sistema durante su movimiento vibratorio.

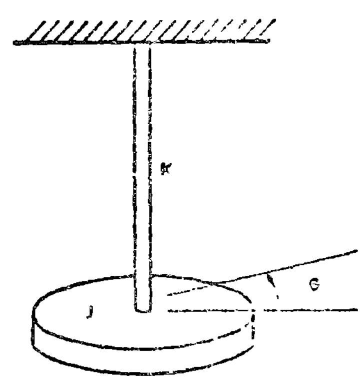


FIG. 2

Fuerza de restauración es la que tiende a [illegible] la masa a su posición [illegible] En la mayoría de los sistemas vibratorios aparece con mayor o menor intensidad una fuerza de fricción que produce un amortiguamiento, es decir, una fuerza que se opone al movimiento [illegible] y que eventualmente ocasionará la terminación de la [illegible] Este amortiguamiento puede ser producido por el aire, por fricción en un fluido, magnéticamente, etc.

Frecuencia natural es la del sistema que tiene vibración libre y que no tiene fricción. Se llama frecuencia natural amortiguada cuando incluye el efecto de fricción. El cálculo de la frecuencia natural de un sistema es muy importante por el efecto de resonancia; este ocurre cuando en una vibración forzada la frecuencia de la fuerza excitadora es igual a la frecuencia natural del sistema. En este caso, la amplitud de la vibración aumenta [illegible] y se regula únicamente por la [illegible] del amortiguamiento del sistema.

Los grados de libertad de un sistema son el mínimo número de coordenadas que [illegible] para definir completamente y en cualquier instante la configuración del sistema vibratorio.

Los ejemplos de las figuras 1 y 2 son de un solo grado de libertad, ya que basta la coordenada x o la coordenada θ para definir la configuración del sistema en cualquier momento. El resorte se considera sin masa, ya que de otra manera el sistema tendría un número infinito de grados de libertad. Una partícula moviéndose en el espacio de tres dimensiones tiene tres grados de libertad. Un tipo de movimiento muy importante es el movimiento armónico simple, que es el movimiento periódico más sencillo. Este movimiento lo describe una partícula con movimiento rectilíneo cuando su aceleración siempre es proporcional a la distancia de la partícula a un punto fijo de la trayectoria y dirigida a ese punto fijo. Los sistemas con movimientos periódicos vibratorios sencillos o complejos, se pueden considerar formados de movimientos simples o de una combinación de movimientos armónicos simples de diferentes amplitudes y frecuencias utilizando las series de Fourier.

Un movimiento armónico se puede representar por la función seno o coseno, por ejemplo

$$x = A \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

donde x es el desplazamiento en cualquier tiempo t, A es la amplitud, ω es constante y es la frecuencia circular o angular del movimiento en radianes por unidad de tiempo, siendo ωt un ángulo medido en radianes. El periodo angular de la función es 2π, de la cual se deduce que el periodo del movimiento es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

La frecuencia f vale:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{3}$$

En la ecuación (3) se observa que la frecuencia circular ω es proporcional a la frecuencia f del movimiento.

Considérense dos movimientos de la misma frecuencia circular ω, representados por las ecuaciones

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega t \tag{4}$$

$$x_2 = A_2 \operatorname{sen} (\omega t + \phi) \tag{5}$$

Comparando los desplazamientos entre los dos movimientos se observa una diferencia de desplazamientos entre estos dos movimientos. El ángulo ϕ se denomina ángulo de fase. La ecuación (5) se puede escribir

$$x_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega\left[\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right] \tag{6}$$

Se llama diferencia de fase al cociente ϕ/ω y se representa el desplazamiento relativo entre los dos movimientos, según se muestra en la figura 3.

Supóngase que la ecuación del movimiento de un sistema está dada por

$$x = A \operatorname{sen} \omega t \tag{7}$$

La velocidad del sistema se obtiene por simple derivación con respecto al tiempo, obteniéndose

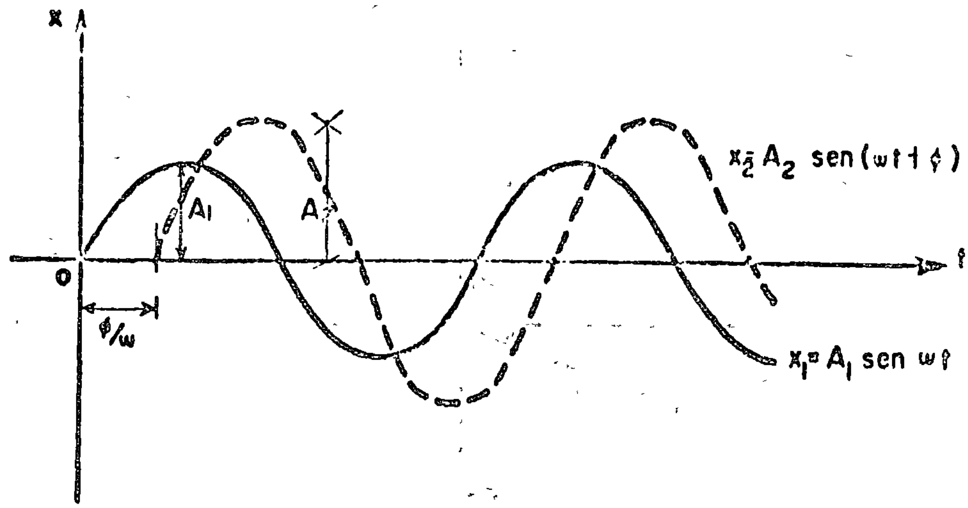


FIG. 3

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v = A\omega \cos \omega t \qquad (8)$$

donde $A\omega$ es la amplitud de la velocidad.
La aceleración del sistema se obtiene derivando (8) con respecto a t.

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \qquad (9)$$

donde $A\omega^2$ es la amplitud de la aceleración.

El movimiento armónico se puede representar por un vector que gira alrededor del centro de rotación. En la figura 4 se muestra un vector de magnitud A, girando alrededor del origen con una velocidad angular ω.

La proyección vertical del vector es:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t \qquad (10)$$

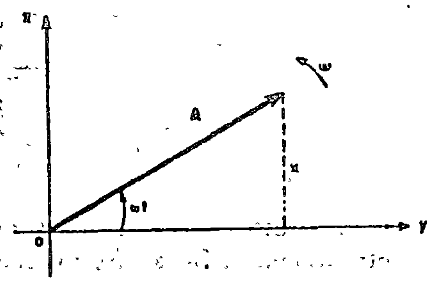


FIG. 4

Cualquiera de las dos proyecciones, vertical u horizontal, representa un movimiento armónico.

Las ecuaciones (8) y (9) se pueden escribir respectivamente

$$\dot{x} = A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) \qquad (11)$$

$$\ddot{x} = A\omega^2 \cos(\omega t + \pi/2) \qquad (12)$$

teniendo en cuenta las relaciones entre funciones trigonométricas.

Por lo tanto, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un movimiento armónico se pueden representar por vectores, de manera que partiendo del vector desplazamiento se gira cada vez 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, y multiplicando la amplitud por ω cada vez para obtener respectivamente los vectores velocidad y aceleración. Esto se ilustra en la figura 5.

Este método vectorial es muy útil para sumar movimientos armónicos de igual frecuencia y diferentes amplitudes y ángulos de fase. Basta hacer la suma de los dos vectores correspondientes.

Supónganse los movimientos armónicos

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega t \qquad (13)$$

$$x_2 = A_2 \operatorname{sen} (\omega t + \phi) \qquad (14)$$

La suma de estos movimientos está dada por

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \beta) \qquad (15)$$

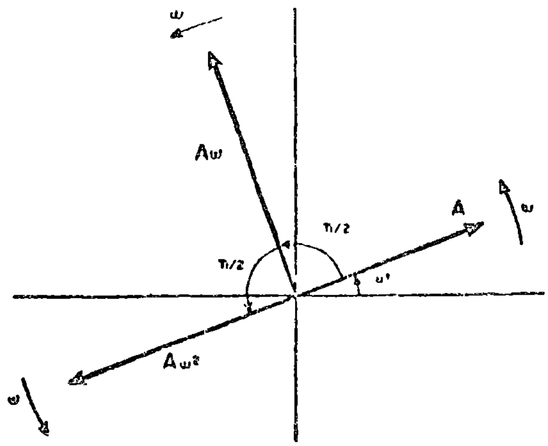


FIG. 5

donde

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos\beta)^2 + (A_2 \operatorname{sen}\beta)^2} \tag{16}$$

y

$$\beta = \text{áng tan } \frac{A_2 \operatorname{sen}\beta}{A_1 + A_2 \cos\beta} \tag{17}$$

La construcción gráfica correspondiente se muestra en la figura 6.

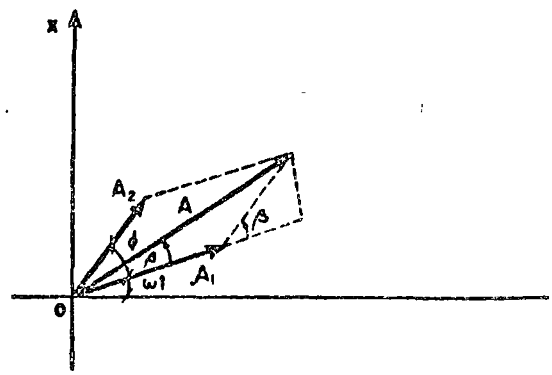


FIG. 6

Obsérvese que la suma de dos movimientos armónicos de misma frecuencia es también un movimiento armónico. Si las frecuencias son diferentes, el movimiento resultante no es armónico y en general no es periódico.

SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

VIBRACION LIBRE

1) Vibración libre no amortiguada.

Considérese el sistema de masa y resorte linealmente elástico que se indica en la figura 7a. Se trata de determinar la ecuación de movimiento del sistema. Para muchos sistemas la ecuación de movimiento se puede encontrar aplicando la segunda ecuación de Newton:

$$\Sigma F = m\,a \tag{18}$$

donde el primer miembro es la suma de las fuerzas en la misma dirección del movimiento y en el segundo miembro a denota la aceleración de la masa m. Algunas ecuaciones de movimiento se pueden determinar más fácilmente por el metodo energetico, ecuación de Lagrange, etc.

Si el cuerpo oscila verticalmente, el diagrama de cuerpo libre es como se indica en la figura 7b

Las fuerzas iniciales estáticas son el peso $W = mg$ hacia abajo y su equilibrante $k\delta_{st}$ hacia arriba. La ecuación de movimiento aplicando (18), es:

$$-k(\delta_{st} + x) + mg = m\ddot{x} \tag{19}$$

o simplificando

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{20}$$

donde x es el desplazamiento medido a partir de la posición de equilibrio. Obsérvese que la ecuación (20) se puede establecer considerando únicamente las fuerzas debidas de la deformación del sistema.

Las ecuaciones de movimiento tienen la misma forma general de la ecuación (20) para los sistemas mostrados en la figura 8. Se consideran ángulos θ pequeños.

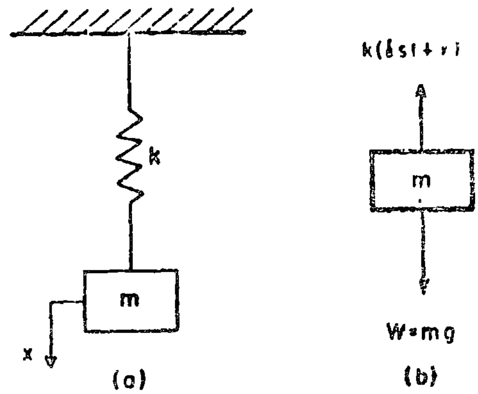


FIG. 7

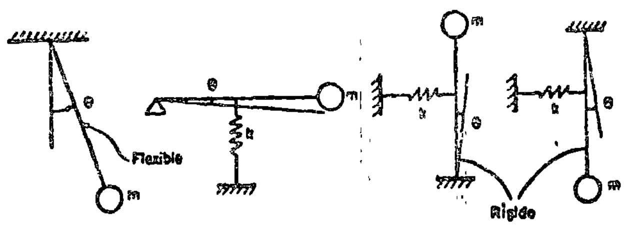


FIG. 8

La ecuación (20) se puede escribir

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{21}$$

donde

$$\omega_n^2 = k/m \tag{22}$$

La forma más general de la solución de la ecuación (21) está dada por

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \tag{23}$$

o

$$x = C \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi) \tag{24}$$

donde A y B ó C y ϕ, son constantes que se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales del sistema. La frecuencia angular natural es ω_n.

Supóngase un desplazamiento inicial

$$x = x_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \tag{25}$$

y una velocidad inicial del sistema

$$\dot{x} = v_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \tag{26}$$

Sustituyendo (25) en (23) se obtiene

$$B = x_0 \tag{27}$$

Derivando (23) con respecto al tiempo t

$$\dot{x} = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t \tag{28}$$

sustituyendo (26) en (28)

$$v_0 = A\omega_n \tag{29}$$

$$\therefore \quad A = v_0/\omega_n \tag{30}$$

Reemplazando (27) y (30) en (23)

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t \tag{31}$$

La ecuación (31) se puede cambiar a la forma

$$x = C \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi) \tag{32}$$

Utilizando la representación vectorial en (31), como se muestra en la figura 9, se obtiene

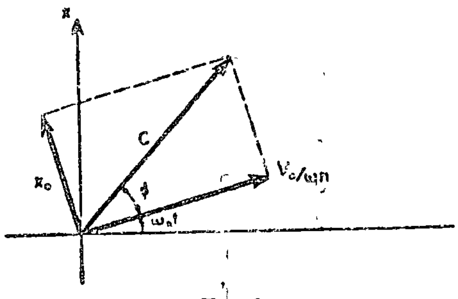


FIG. 9

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \tag{33}$$

$$\phi = \text{áng tan} \frac{x_0 \omega_n}{v_0} \tag{34}$$

La gráfica de las ecuaciones (31) y (32) se presenta en la figura 10.

Teniendo en cuenta (22), la frecuencia natural del sistema es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{35}$$

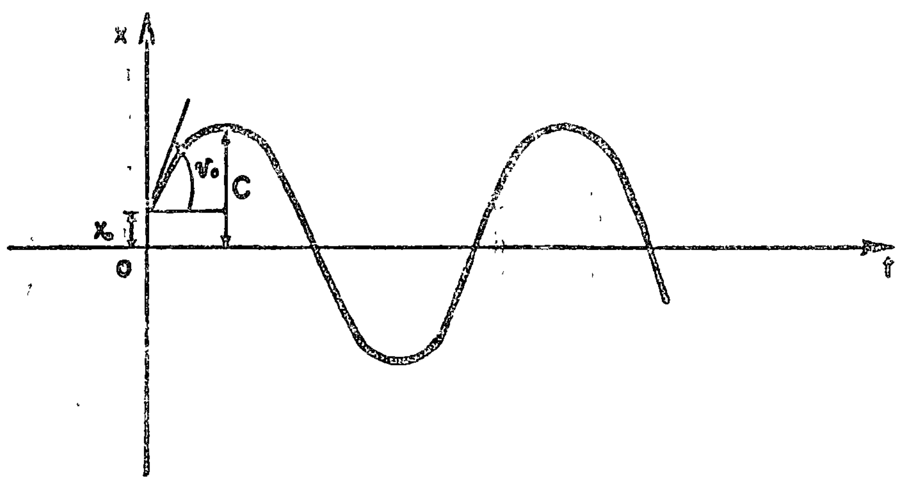


FIG. 10

En la ecuación (35) sólo se considera el valor positivo del radical, ya que la frecuencia es una cantidad positiva.

Utilizando la ecuación (2) se obtiene para el periodo natural del movimiento:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{36}$$

Obsérvese en la ecuación (35), que la frecuencia natural del movimiento aumenta al aumentar la rigidez k del resorte, y que disminuye al aumentar la masa m del sistema. Además, el valor de la frecuencia es independiente de las condiciones iniciales del sistema.

Teniendo presente la equivalencia

$$W = mg = k\delta_{st} \tag{37}$$

se obtiene que

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{st}} \tag{38}$$

Sustituyendo (38) en (35) se obtiene para la frecuencia natural del sistema

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)} \tag{39}$$

La fórmula (39) es una manera conveniente de expresar la frecuencia debido a que en muchos problemas se puede determinar δ_{st} fácilmente o se puede aproximar rápidamente

Por ejemplo: considérese una viga simplemente apoyada con una carga concentrada de masa m **actuando en su punto medio**, como se muestra en la figura 11

La masa de la viga se considera despreciable comparada con **la masa** m. **El** desplazamiento estatico del punto medio de la **viga es:**

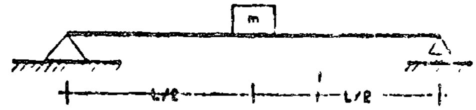


Fig. 11

$$\delta_{st} = \frac{W L^3}{48 EI} \qquad (40)$$

donde E **es el** módulo de elasticidad, e I el momento de inercia de la sección transversal de la viga

Aplicando (36) se obtiene para la frecuencia natural del sistema

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g\, 48 EI}{mg L^3}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3 EI}{m L^3}} \; \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \qquad (41)$$

2) Vibración libre amortiguada

En la práctica, en todos los sistemas existe amortiguamiento, por pequeño que éste sea En general **se supone** que el amortiguamiento proporciona una resistencia proporcional a la velocidad de la masa. **ya que** desde el punto de vista teórico es el tipo más sencillo de amortiguamiento Este tipo de amortiguamiento ocurre por la resistencia viscosa de los fluidos, y se le llama amortiguamiento viscoso c; **se define** como la fuerza necesaria para producir una velocidad unitaria del sistema.

El dispositivo amortiguador se muestra en la figura **12a. Para** determinar la ecuación de movimiento del **sistema, se presenta** el diagrama de cuerpo libre en la **figura 12b**, observándose que se añade la fuerza $c\dot{x}$ con **respecto al movimiento** sin amortiguamiento La ecuación de movimiento del sistema se reduce a:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (42)$$

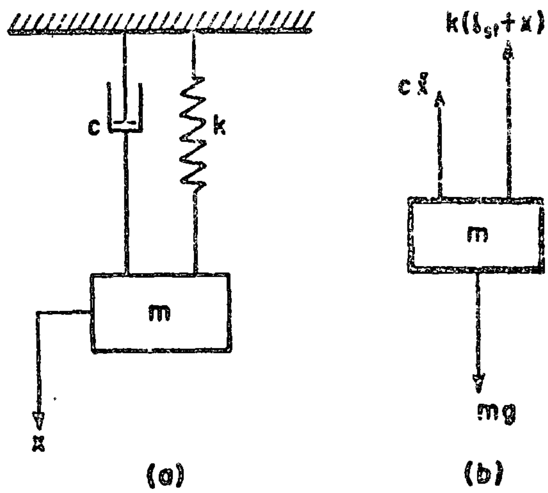


Fig. 12

La forma general de la ecuación (42) es la misma **para los sistemas** mostrados en la figura 13, donde θ **indica un ángulo** pequeño.

La solución general de una ecuación diferencial, **de la forma de la** ecuación (42), está dada por

$$x = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t} \qquad (43)$$

donde A y B son constantes que se determinan a partir **de las condiciones** iniciales del sistema, y r_1, r_2 son las **raíces de la ecuación auxiliar**

$$m r^2 + c r + k = 0 \qquad (44)$$

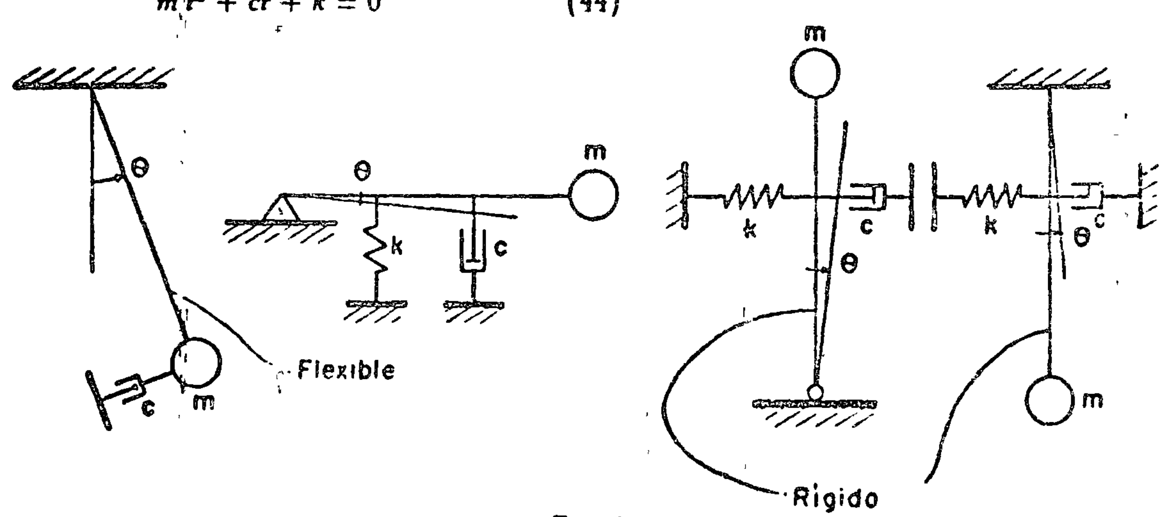


Fig. 13

La solución de (44) produce las raices

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{45}$$

$$r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{46}$$

Si se hace

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{47}$$

y

$$\zeta = \frac{c}{2m\,\omega_n} \tag{48}$$

llamado factor de amortiguamiento y se sustituyen (47) y (48) en las ecuaciones (45) y (46) se obtienen respectivamente:

$$r_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{49}$$

$$r_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{50}$$

Se distinguen tres casos

a) Si $\zeta > 1$, las raices r_1 y r_2 son reales y negativas y por tanto se tiene un movimiento no oscilatorio independientemente de las condiciones iniciales del sistema. El movimiento es sobreamortiguado y la ecuación (43) se puede escribir

$$x = A\,e^{-r_1 t} + B\,e^{-r_2 t} \tag{51}$$

b) Si $\zeta = 1$, el movimiento es no oscilatorio, pero representa la transición entre los movimientos oscilatorio y no oscilatorio, y por tanto se le llama también la condición crítica. Las raices r_1 y r_2 son reales e iguales y la solución se puede escribir

$$x = (A + Bt)\,e^{-\omega_n t} \tag{52}$$

El valor del amortiguamiento c que corresponde al caso $\zeta = 1$ se denomina amortiguamiento crítico c_{cr}. Si en la ecuación (48) se hace $\zeta = 1$ se tiene

$$c_{cr} = 2m\,\omega_n \tag{53}$$

o teniendo en cuenta la ecuación (47)

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \tag{54}$$

Teniendo en cuenta (53) en la ecuación (48) se obtiene que el factor de amortiguamiento es

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \tag{55}$$

c) Si $\zeta < 1$, las raices r_1 y r_2 son complejas y conjugadas, de la forma

$$r_1 = \omega_n\left(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \tag{56}$$

$$r_2 = \omega_n\left(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \tag{57}$$

Se obtiene un movimiento oscilatorio cuya solución general (43) se puede escribir

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + B\,\mathrm{sen}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) \tag{58}$$

Se llama frecuencia angular amortiguada y se representa con ω_d a:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{59}$$

Reemplazando (59) en (58)

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\omega_d t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right) \tag{60}$$

o también

$$x = C\, e^{-\zeta\omega_n t}\, \text{sen}\,(\omega_d t + \phi) \tag{61}$$

en donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{62}$$

y

$$\phi = \text{ang tan}\, A/B \tag{63}$$

La ecuación (61) representa un movimiento armónico simple, de frecuencia angular ω_d y de amplitud $C\, e^{-\zeta\omega_n t}$ que decrece exponencialmente con el tiempo. Por lo tanto, el movimiento representado por la ecuación (61) no es periódico en el sentido estricto de la palabra, porque las amplitudes de ciclos sucesivos son diferentes. Sin embargo, los periodos de ciclos sucesivos sí son iguales, teniéndose un movimiento periódico en el tiempo y de periodo

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{64}$$

Para las estructuras reales ζ varía de 0.02 a 0.15, o sea que se tiene muy poco amortiguamiento para la mayoría de las estructuras, y por lo tanto, el amortiguamiento tiene muy poca influencia en la frecuencia de la vibración libre. Para fines prácticos, se pueden reemplazar las frecuencias y periodos amortiguados por los valores correspondientes sin amortiguamiento.

En la ecuación (60) las constantes A y B dependen de las condiciones iniciales del sistema. Si para $t = 0$, se tienen $x = x_0$ y $\dot{x} = v_0$, se demuestra que

$$A = x_0 \tag{65}$$

$$B = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \tag{66}$$

Cálculo del factor de amortiguamiento.

Para calcular el factor de amortiguamiento considérese la gráfica de la ecuación (61) mostrada en la figura 14. En la misma figura se hace la gráfica de la función $C\, e^{-\zeta\omega_n t}$, observando que las dos curvas son tangentes cada vez que

$$\text{sen}\,(\omega_d t + \phi) = 1 \tag{67}$$

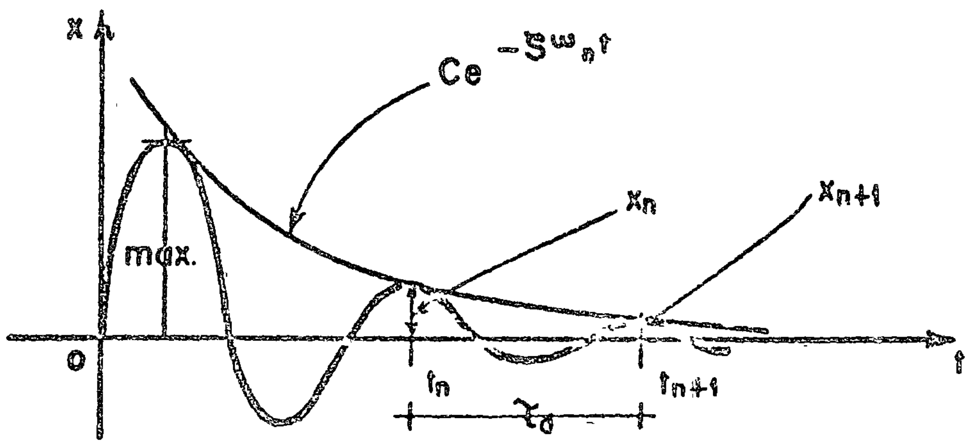


Fig. 14

Para pequeñas cantidades de amortiguamiento, estos puntos de tangencia coinciden con los máximos relativos, aunque para los máximos se requiere en realidad cumplir la condición $dx/dt = 0$. Por lo tanto, las tangentes en los puntos de tangencia no son horizontales y los valores máximos de x se encuentran un poco a la izquierda de los puntos de tangencia. Sin embargo, se considera que los valores máximos relativos de x ocurren cuando se cumple la condición (67).

Se define como decremento logarítmico y se representa con δ al logaritmo natural del cociente de dos amplitudes consecutivas, es decir

$$\delta = ln \frac{x_n}{x_{n+1}} \tag{68}$$

Obsérvese que el decremento logarítmico sólo tiene sentido en el caso de un movimiento oscilatorio.

Se tiene

$$x_n = C\, e^{-\zeta\omega_n t_n} \tag{69}$$

donde t_n indica el tiempo cuando ocurre x_n

Por otra parte

$$x_{n+1} = C\, e^{-\zeta\omega_n t_{n+1}} \tag{70}$$

donde

$$t_{n+1} = t_n + \tau_d \tag{71}$$

Teniendo en cuenta (64) en (71)

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{72}$$

Sustituyendo (69) y (70) en (68) y teniendo en cuenta (72)

$$\delta = ln \frac{C\, e^{-\zeta\omega_n t_n}}{C\, e^{-\zeta\omega_n t_{n+1}}} = ln \frac{e^{-\zeta\omega_n t_n}}{e^{-\zeta\omega_n t_n}\, e^{-\frac{\zeta 2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}} = ln\, e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{73}$$

Para valores pequeños de ζ se tiene en (73) que

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} \tag{74}$$

fórmula que permite calcular el factor de amortiguamiento. El valor de δ se determina con la ecuación (68) o usando para valores pequeños de $\delta(\delta < 0.5)$, la fórmula simplificada

$$\delta = \frac{2(x_n - x_{n+1})}{(x_n + x_{n+1})} \tag{75}$$

Finalmente, conviene hacer notar que en el estudio de vibraciones con amortiguamiento, basta hacer $\zeta = 0$ para obtener la condición correspondiente al caso de vibraciones sin amortiguamiento.

VIBRACION FORZADA

La vibración forzada ocurre cuando actúan fuerzas externas en el sistema durante su movimiento vibratorio. Usualmente se considera una fuerza de variación armónica actuando en la masa en movimiento, y el sistema tenderá a vibrar en su propia frecuencia natural y en la frecuencia de la fuerza excitadora. Sin embargo, cuando existe amortiguamiento, la parte de la vibración no sostenida por la fuerza excitadora, se amortigua con el tiempo; se denomina vibración transitoria, y el sistema vibrará con la misma frecuencia de la fuerza excitadora, independientemente de las condiciones iniciales o de la frecuencia natural del sistema. Esta parte de la vibración sostenida, recibe el nombre de estado de vibración estable o respuesta del sistema.

Se considera en este estudio el caso más general de la vibración forzada con amortiguamiento, y como se indicó anteriormente, la vibración sin amortiguamiento es un caso particular del caso general amortiguado, en el que basta hacer $\zeta = 0$ para obtener el caso correspondiente no amortiguado.

Supóngase el sistema de la figura 15 sujeto a la acción de un impulso rectangular de duración infinita, producido por la aplicación instantánea de una fuerza F_0, como se indica en la figura 16.

Utilizando el diagrama de cuerpo libre presentado en la figura 15b, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \tag{76}$$

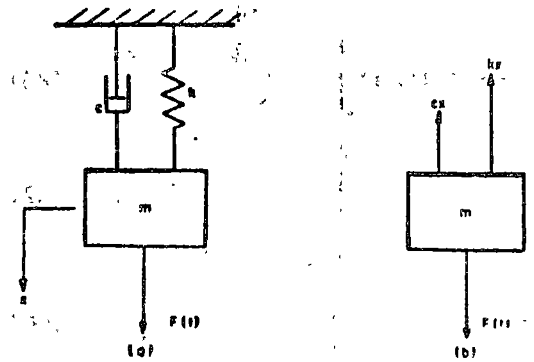


FIG. 15

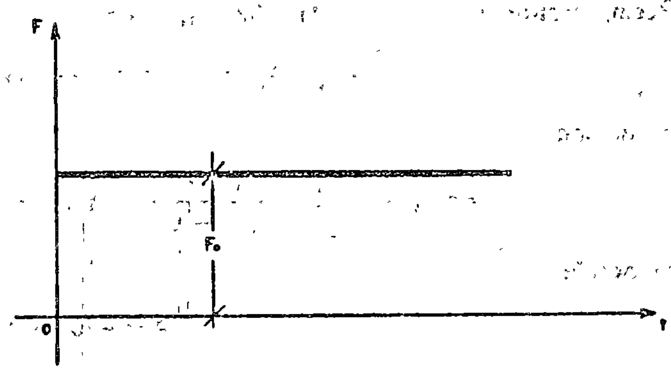


FIG. 16

en donde igual que antes, x se mide a partir de la posición de equilibrio, y la fuerza excitadora se considera positiva en la dirección del desplazamiento positivo, considerándose positivas la velocidad y la aceleración en esta misma dirección.

La ecuación (76) se puede escribir

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \tag{77}$$

que con las ecuaciones (47) y (48) se puede escribir

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 \frac{F_0}{k} \tag{78}$$

La solución general de esta ecuación diferencial de segundo orden y de coeficientes constantes es de la forma

$$x = x_c + x_p \tag{79}$$

en la que x_c es la solución complementaria u homogénea, obtenida igualando a cero el segundo miembro de la ecuación (78), ecuación diferencial considerada anteriormente en la vibración libre. A x_p se le llama solución particular y es una función que depende de las características de la fuerza aplicada.

En este caso, como el segundo miembro de (78) es una constante, se deduce por inspección que

$$x_p = \frac{F_0}{k} \tag{80}$$

solución que se verifica fácilmente sustituyéndola en la ecuación (78).

Por otra parte, se acostumbra definir a $(x_{st})_0$ como el desplazamiento producido estáticamente por el máximo valor de la fuerza excitadora aplicada al sistema, y para este problema

$$(x_{st})_0 = \frac{F_0}{k} \tag{81}$$

La solución general (79) se puede escribir teniendo en cuenta (60), (80) y (81)

$$x = (x_{st})_0 + e^{-\zeta\omega_n t}\,[A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen} \omega_d t] \tag{82}$$

Si el sistema se considera inicialmente en reposo, se tienen como condiciones iniciales:

$$x = \dot{x} = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \tag{83}$$

Sustituyendo (83) en (82) se obtiene

$$A = -(x_{st})_0 \tag{84}$$

$$B = -(x_{st})_0 \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{85}$$

Reemplazando (84) y (85) en (82), se tiene

$$x = (x_{st})_0 \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right)\right] \tag{86}$$

o también

$$x = (x_{st})_0 \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \beta)\right] \tag{87}$$

en donde

$$\beta = \text{ang tan}\,\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{88}$$

como se observa en la figura 17.

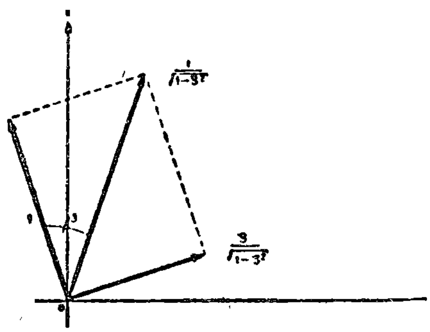


FIG. 17

Si se considera un sistema sin amortiguamiento, basta sustituir $\zeta = 0$ en las ecuaciones anteriores, obteniéndose de (87) que:

$$x = (x_{st})_0\,(1 - \cos\omega_n t) \tag{89}$$

$$\therefore\quad x = (x_{st})_0\left(1 - \cos 2\pi\frac{t}{\tau}\right) \tag{90}$$

La gráfica del desplazamiento x de la ecuación (90), se puede obtener sumando algebraicamente los dos diagramas del segundo miembro de (90), que son de fácil cálculo. Se acostumbra presentar esta gráfica en forma adimensional, cambiando la ecuación (90) a la forma

$$\frac{x}{(x_{st})_0} = 1 - \cos 2\pi\frac{t}{\tau} \tag{91}$$

La gráfica de la ecuación (91) se presenta en la figura 18.

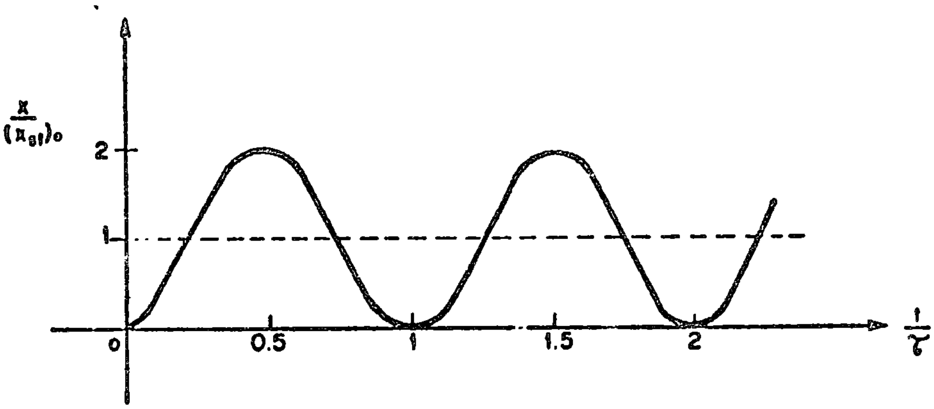


FIG. 18

Se denomina factor de amplificación de desplazamientos y se representa con F.A. al cociente del máximo desplazamiento dinámico, en valor absoluto, entre el máximo desplazamiento estático producido.

Para el problema considerado, se tiene

$$\text{F.A.} = \frac{x_{máx}}{(x_{st})_0} = 2 \tag{92}$$

Si se considera el mismo sistema con iguales condiciones iniciales pero con un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.1$, se obtiene la curva de la figura 19.

Cuando $\zeta = 0.1$, el factor de amplificación es

$$\text{F.A.} = \frac{x_{máx}}{(x_{st})} = 1.73 \tag{93}$$

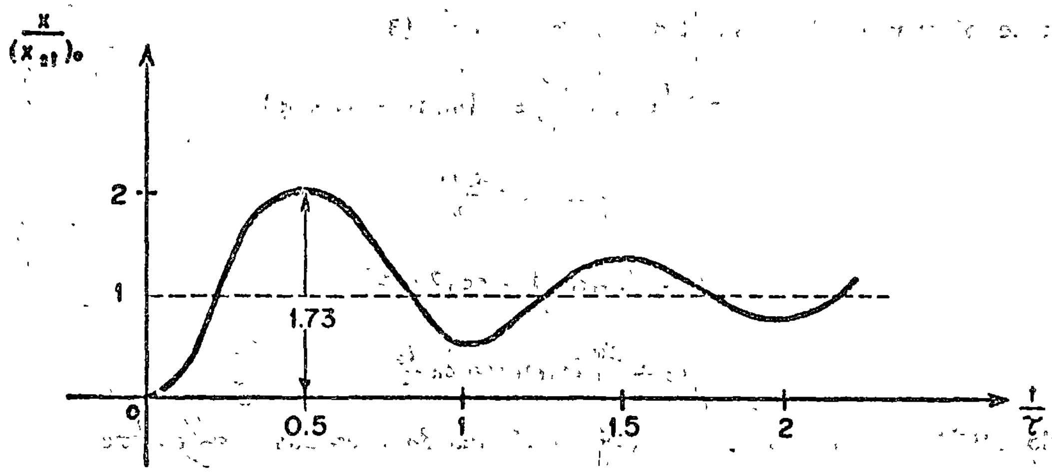


FIG. 19

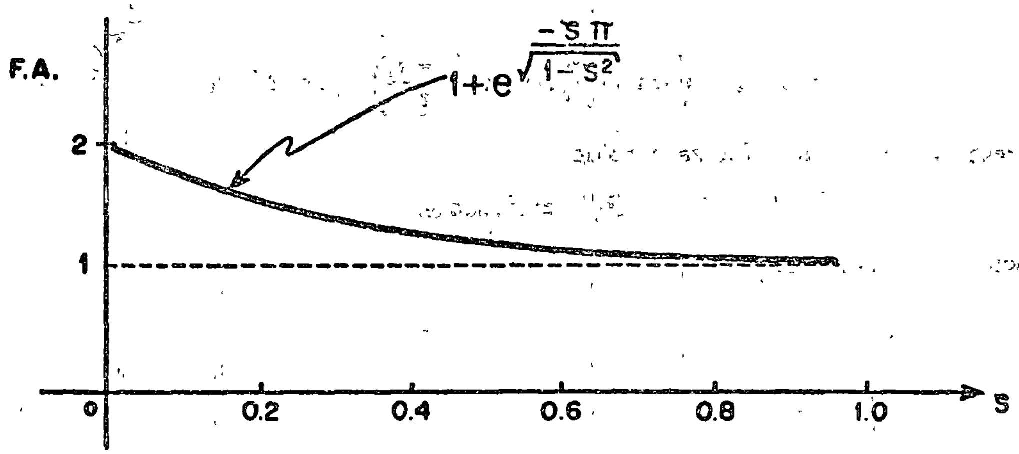


FIG. 20

Para el mismo sistema en estudio y con el cuerpo inicialmente en reposo, se presenta en la figura 20 el efecto del amortiguamiento en el factor de amplificación

Considérese ahora un impulso rectangular de duración finita, como se muestra en la figura 21.

Las ecuaciones de movimiento son, despreciando el amortiguamiento.

a) Para $t \leq t_1$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \tag{94}$$

b) Para $t \geq t_1$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{95}$$

La ecuación (90) es la solución del primer caso, correspondiendo al problema anterior

$$\therefore \quad x = (x_{st})_0 \left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{\tau}\right) \quad \text{para } t \leq t_1 \tag{96}$$

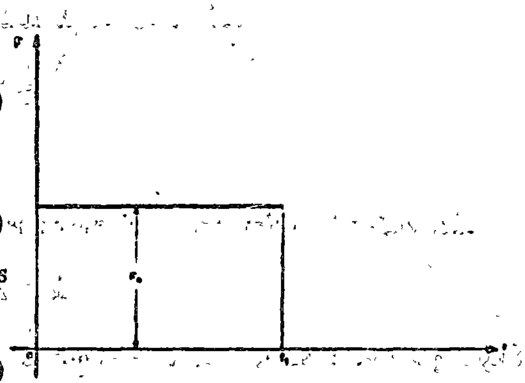


FIG. 21

Obsérvese que el primer máximo ocurre cuando $t = \tau/2$ y si $t_1 > \tau/2$ entonces F.A. = 2. Sin embargo, si $t_1 < \tau/2$, el primer máximo tendrá lugar después de terminar la acción de la fuerza excitadora

Para el caso $t \geqslant t_1$, supóngase que

$$x = x_1, \quad \dot{x} = v_1 \text{ cuando } t = t_1 \tag{97}$$

La solución de la ecuación (95) está dada por la ecuación (32)

$$\therefore \quad x = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega_n}\right)^2} \operatorname{sen} [\omega_n (t - t_1) + \phi] \tag{98}$$

donde

$$\phi = \text{ang } \tan \frac{x_1 \omega_n}{v_1} \tag{99}$$

$$x_1 = (x_{st})_o \left(1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{\tau}\right) \tag{100}$$

$$v_1 = \frac{2\pi}{\tau} (x_{st})_o \operatorname{sen} 2\pi \frac{t_1}{\tau} \tag{101}$$

Sustituyendo (100) y (101) en (98) y (99) y efectuando operaciones, se obtiene

$$\phi = \frac{\omega_n t_1}{2} \tag{102}$$

$$x = 2(x_{st})_o \left(\operatorname{sen} \pi \frac{t_1}{\tau}\right) \operatorname{sen} \left(\pi \frac{2t - t_1}{\tau}\right) \quad \text{para } t \geqslant t_1 \tag{103}$$

Considérese el caso de una fuerza senoidal

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{104}$$

como se indica en la figura 22.

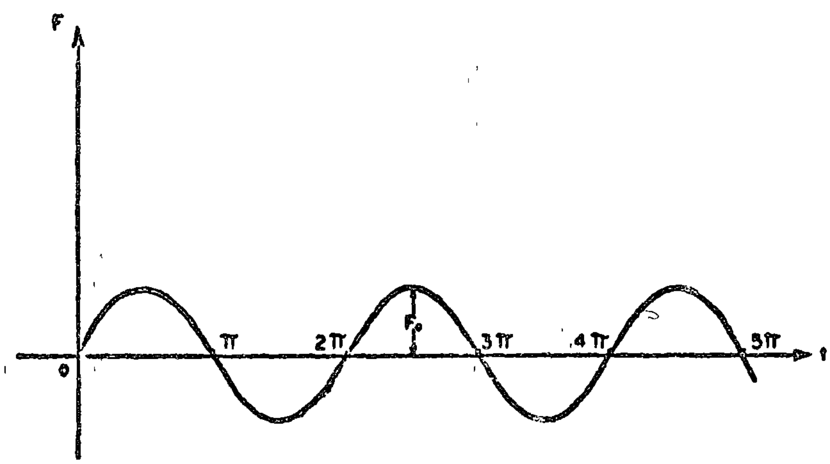


FIG. 22

La ecuación diferencial del movimiento es

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t \tag{105}$$

Supóngase el caso $\zeta < 1$, obteniéndose la solución general

$$x = x_c + x_p \tag{106}$$

en donde aplicando la ecuación (60) se tiene

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen} \omega_d t) \tag{107}$$

La solución particular es de la forma

$$x_p = C \operatorname{sen} \omega t + D \cos \omega t \tag{108}$$

Reemplazando (108) en (105), se obtienen dos ecuaciones simultáneas en las incógnitas C y D, cuya solución proporciona los valores

$$C = (x_{st})_0 \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{109}$$

$$D = -(x_{st})_0 \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{110}$$

en donde

$$(x_{st})_0 = \frac{F_0}{k} \tag{111}$$

Reemplazando (109) y (110) en (108)

$$x_p = (x_{st})_0 \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \operatorname{sen} \omega t$$

$$- (x_{st})_0 \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t \tag{112}$$

o también según la ecuación (61)

$$x_p = \frac{(x_{st})_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \operatorname{sen} (\omega t - \phi) \tag{113}$$

donde el ángulo de fase ϕ está dado por:

$$\phi = \operatorname{ang\,tan} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{114}$$

La solución general x es la suma de las ecuaciones (107) y (113).

Otros métodos para obtener el desplazamiento x, son la integral de Duhamel o gráficamente por medio del girograma.

Integral de Duhamel.

Se considera un sistema inicialmente en reposo y sujeto a una fuerza excitadora cualquiera como se muestra en la figura 23. En el tiempo $t = t'$ se considera un impulso

$$F(t')\, dt' \tag{115}$$

que es igual a la masa por el cambio de velocidad en dt'. El cambio de velocidad es

$$dv = \frac{F(t')}{m} dt' \tag{116}$$

y se produce un desplazamiento dado por la ecuación (60), en donde las constantes A y B se determinan respectivamente por (65) y (66), suponiendo el sistema inicialmente en reposo, obteniéndose

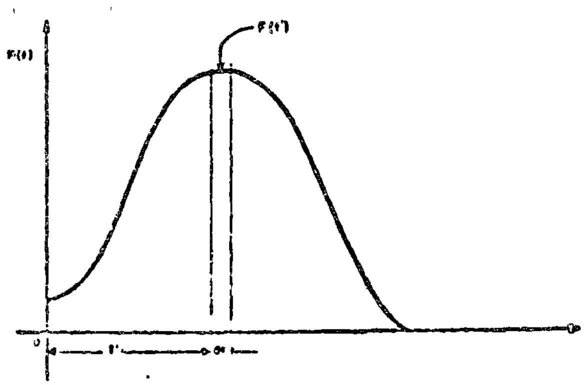


FIG. 23

$$dx = e^{-\zeta\omega_n(t-t')}\,\frac{dv}{\omega_d}\,\text{sen}\,[\omega_d(t-t')] \tag{117}$$

teniendo en cuenta (116)

$$dx = e^{-\zeta\omega_n t}\,\frac{F(t')}{m\,\omega_d}\,e^{\zeta\omega_n t'}\,\text{sen}\,[\omega_d(t-t')]dt' \tag{118}$$

en donde t' es el tiempo del origen al instante en que se aplica el impulso, y t indica el tiempo en que se calcula el desplazamiento.

Para una fuerza excitadora continua y como el sistema es elástico linealmente, se aplica el principio de superposición, y por lo tanto

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\int_0^t \frac{F(t')}{m\,\omega_d}\,e^{\zeta\omega_n t'}\,\text{sen}\,[\omega_d(t-t')]\,dt' \tag{119}$$

que es la integral de Duhamel.

Considérese, por ejemplo, el impulso rectangular finito de la figura 21. Sustituyendo valores en (119) y recordando que no se considera amortiguamiento, se tiene

a) Para $t < t_1$

$$x = \int_0^t \frac{F_0}{m\,\omega_n}\,\text{sen}\,[\omega_n\,(t-t')]\,dt' = \frac{F_0}{m\,\omega_n}\,\frac{1}{\omega_n}\left\{\cos\,[\omega_n\,(t-t')]\right\}_0^t$$

$$x = (x_{st})_0\,(1-\cos\omega_n t)$$

$$x = (x_{st})_0\left(1-\cos 2\pi\,\frac{t}{\tau}\right) \tag{120}$$

que coincide con la ecuación (96)

b) Para $t > t_1$

$$x = \int_0^{t_1} \frac{F_0}{m\,\omega_n}\,\text{sen}\,[\omega_n\,(t-t')]\,dt' + \int_{t_1}^t 0\,dt'$$

Se integra hasta t_1 porque la función $F(t)$ es continua hasta este punto. Efectuando operaciones

$$x = \frac{F_0}{m\,\omega_n^2}\left\{\cos\,[\omega_n\,(t-t')]\right\}_0^{t_1} = (x_{st})_0\left\{\cos\,[\omega_n\,(t-t_1)] - \cos\omega_n t\right\}$$

$(x_{st})_0$

pero $$\cos\phi_1 - \cos\phi_2 = -\,2\,\text{sen}\,\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\,\text{sen}\,\frac{\phi_1+\phi_2}{2}$$

$$x = (x_{st})_0\left[-\,2\,\text{sen}\,\frac{\omega_n}{2}\,(t-t_1-t)\,\text{sen}\,\frac{\omega_n}{2}\,(t-t_1+t)\right]$$

$$\therefore\quad x = 2(x_{st})_0\left(\text{sen}\,\pi\,\frac{t_1}{\tau}\right)\text{sen}\left(\pi\,\frac{2t-t_1}{\tau}\right) \tag{121}$$

que coincide con la ecuación (103).

El sistema se supuso inicialmente en reposo, pero de no ser así, en las ecuaciones (120) y (121) se debe añadir el efecto de las condiciones iniciales del sistema.

Girograma

Es un método gráfico para resolver la ecuación de movimiento de un sistema de un solo grado de libertad, sin amortiguamiento y linealmente elástico.

Si en el instante t_1 se aplica un impulso rectangular de magnitud F_0 y el sistema tiene en ese instante un desplazamiento x_1 y una velocidad v_1, se sabe de la ecuación (89) y del efecto de las condiciones x_1 y v_1, que se obtiene de la ecuación (31), que la solución es de la forma siguiente para $t > t_1$:

$$x = (x_{st})_0 [1 - \cos \omega_n t'] + \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t' + x_1 \cos \omega_n t' \tag{122}$$

en donde

$$(x_{st})_0 = \frac{F_0}{k} \tag{123}$$

y t' es el tiempo medido a partir de t_1, cuando se aplica la fuerza.

La ecuación (122) se puede transformar en

$$x - (x_{st})_0 = [x_1 - (x_{st})_0] \cos \omega_n t' + \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t'$$

$$x - (x_{st})_0 = R \operatorname{sen} (\omega_n t' + \phi), \tag{124}$$

en donde

$$R = \sqrt{[x_1 - (x_{st})_0]^2 + \left(\frac{v_1}{\omega_n}\right)^2} \tag{125}$$

es una constante para un caso dado.

La velocidad se obtiene derivando la ecuación (124) con respecto al tiempo

$$\frac{v}{\omega_n} = R \cos (\omega_n t' + \phi) \tag{126}$$

La ecuaciones (124) y (126) son las ecuaciones paramétricas del círculo de ecuación

$$\left(\frac{v}{\omega_n}\right)^2 + [x - (x_{st})_0]^2 = R^2 \tag{127}$$

de centro $[0, (x_{st})_0]$ y de radio R. Por otra parte, de la ecuación (125) el radio es la distancia del centro del círculo al punto $\left(\frac{v_1}{\omega_n}, x_1\right)$ que representa las condiciones iniciales del sistema. El círculo se dibuja girando en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 24. El tiempo se mide por el ángulo θ y se tiene

$$\omega_n t' = \theta \text{ (radianes)} \tag{128}$$

$$\frac{2\pi}{\tau} t' = \theta$$

$$\therefore \quad \frac{t'}{\tau} = \frac{\theta}{360^\circ} \text{ (grados)} \tag{129}$$

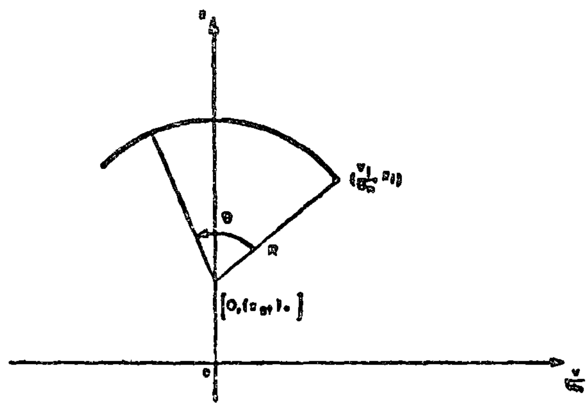


Fig. 24

Como ejemplo de aplicación, considérese un sistema inicialmente en reposo y sujeto a un impulso rectangular de duración finita, como se indica en la figura 25.

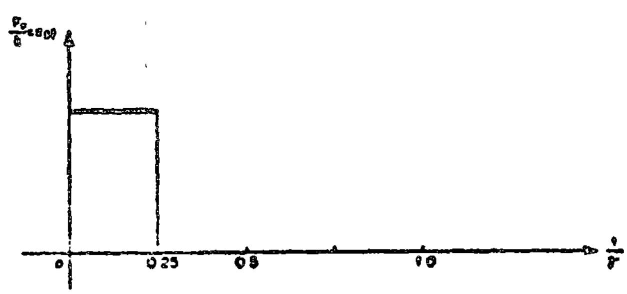


Fig. 25

En este problema, los tiempos t y t' coinciden y se miden a partir del origen de coordenadas. La solución se presenta en la figura 26.

El centro c_1 tiene coordenadas (0, 1) y se gira un ángulo θ_1 que es según (129):

$$\theta_1 = 0\,25\ (360^\circ) = 90^\circ$$

Este arco de círculo se inicia en el origen de coordenadas, porque el sistema está en reposo inicialmente, obteniéndose el punto A de coordenadas $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. En este momento termina la aplicación del impulso

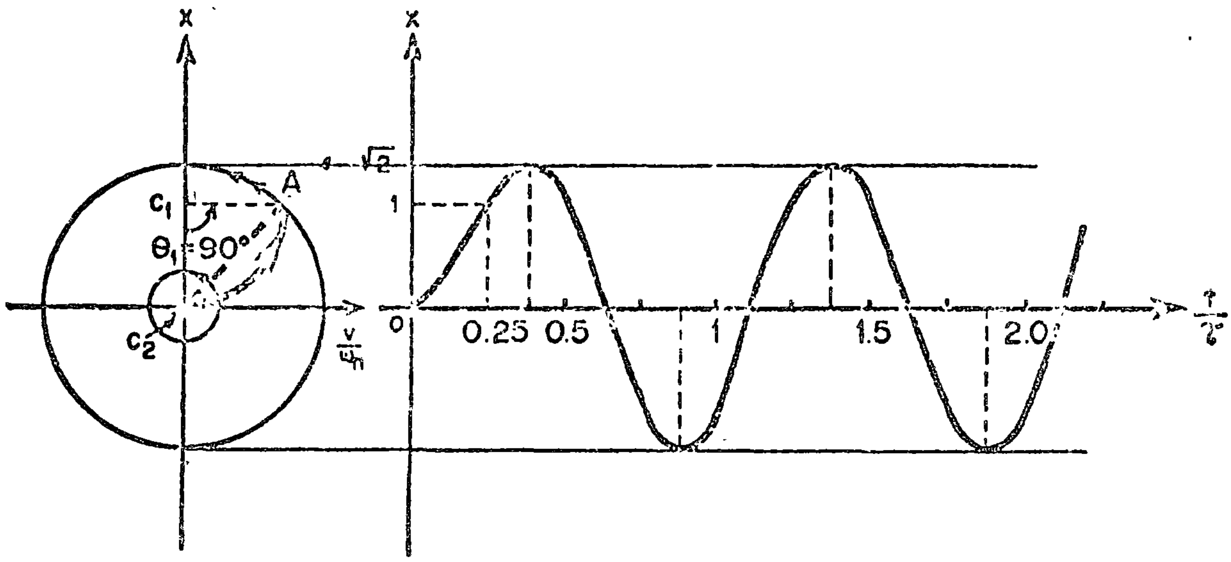


FIG. 26

rectangular y por tanto el centro del nuevo circulo es c_2 $(0, 0)$. Se tiene una vibración libre y con centro c_2 se traza un círculo completo que pase por el punto A. En la figura 26b, se indica la variación del desplazamiento, siendo el desplazamiento máximo

$$x_{máx} = \sqrt{2}\,(x_{st})_0$$

que ocurre cuando $t/\tau = 0.375$.

Obsérvese que como el impulso tiene una duración $t/\tau < 0.5$, el primer máximo tiene lugar después de terminar la acción de la fuerza excitadora, como se indicó al iniciar el estudio de la vibración forzada.

Este método permite considerar de manera aproximada, un impulso representado por una curva de cualquier forma, considerándolo formado por una serie de impulsos rectangulares.

También se puede considerar un sistema bilineal, inelástico, como se muestra en la figura 27

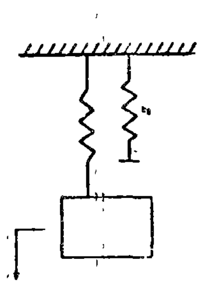


FIG. 27

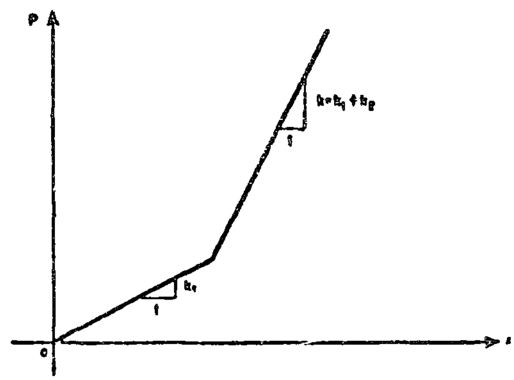


FIG. 28

Si el sistema está desacoplado, sólo trabaja un resorte y la rigidez del sistema es k_1, mientras que si los resortes están acoplados, la rigidez del sistema es $k = k_1 + k_2$. La relación carga-desplazamiento de los resortes se presenta en la figura 28.

Factor de Amplificación

Considérese el caso de un sistema sujeto a una fuerza senoidal, como se muestra en la figura 2?.
La solución general se indicó en la ecuación (106):

$$x = x_c + x_p \tag{130}$$

donde la solución x_c incluye la frecuencia natural del sistema y x_p incluye la frecuencia de la fuerza excitadora. Supóngase el tiempo suficiente para que la parte transitoria x_c de la solución general desaparezca y la única componente de la solución sea la de la vibración estacionaria. La solución general está dada entonces por la ecuación (113).

$$x = \frac{(x_{st})_0}{\sqrt{(1-r^2)^2+4\zeta^2 r^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{131}$$

en donde

$$\phi = \operatorname{ang\,tan} \frac{2\zeta r}{1-r^2} \tag{132}$$

es el ángulo de fase y

$$r = \omega/\omega_n \tag{133}$$

es el cociente de frecuencias.

Los valores máximos de x se obtienen cuando

$$\operatorname{sen}(\omega t - \phi) = 1 \tag{134}$$

El factor de amplificación es

$$\frac{x_{max}}{(x_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+4\zeta^2 r^2}} \tag{135}$$

que sólo depende del factor de amortiguamiento y del cociente de frecuencias. En la figura 29 se presentan gráficas del factor de amplificación dado por la ecuación (135).

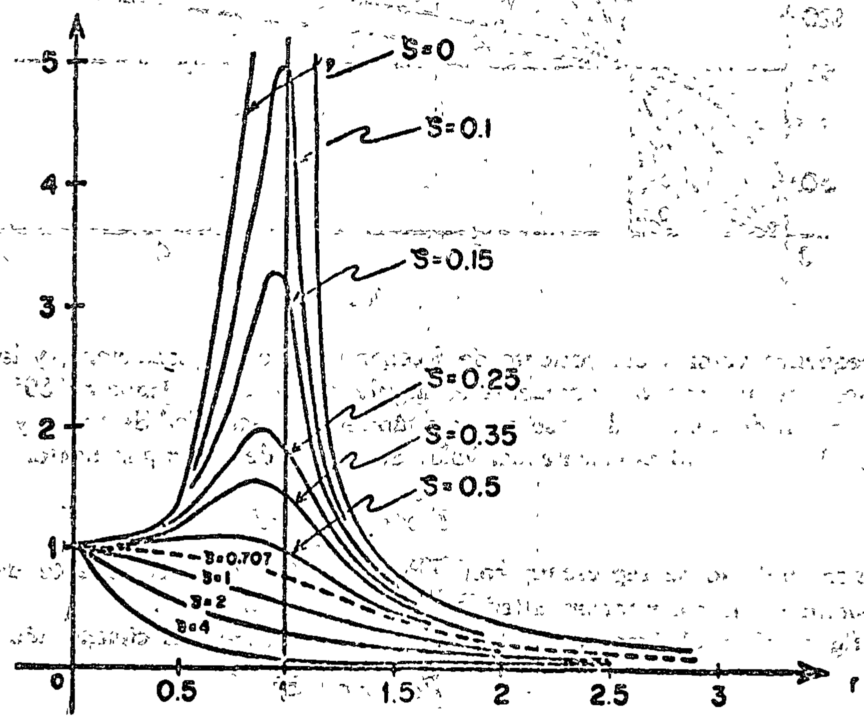


Fig. 29.

La frecuencia de resonancia ocurre cuando $r = 1$ y el factor de amplificación vale:

$$F.A. = \frac{1}{2\zeta} \tag{136}$$

Cuando no hay amortiguamiento, el factor de amplificación tiende a infinito para $r = 1$. Obsérvese que al aumentar el amortiguamiento, los valores máximos de los factores de amplificación decrecen y se desplazan hacia la izquierda, ocurriendo en las abscisas

$$r = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{para} \quad \zeta < 0.707 \tag{137}$$

Para $\zeta > 0.707$ el factor de amplificación máximo es igual a uno. Sin embargo, como en la mayoria de los sistemas en la practica tienen muy poco amortiguamiento se puede suponer que los factores de amplificación máximo y de resonancia son iguales, y que ocurren en la frecuencia de resonancia, porque en esta frecuencia se calcula más fácilmente el factor de amplificación

Excepto en la vecindad de $r = 1$, el factor de amplificación no es muy sensible al amortiguamiento. Por lo tanto, en la mayoria de los casos sólo se necesita considerar el amortiguamiento en la vecindad de la resonancia.

La vibración indicada en la ecuación (131) tiene una frecuencia igual a la frecuencia de la fuerza excitadora, pero no están en fase. Esto es obvio observando la gráfica del ángulo de fase, mostrada en la figura 30 y cuya ecuación es la (132).

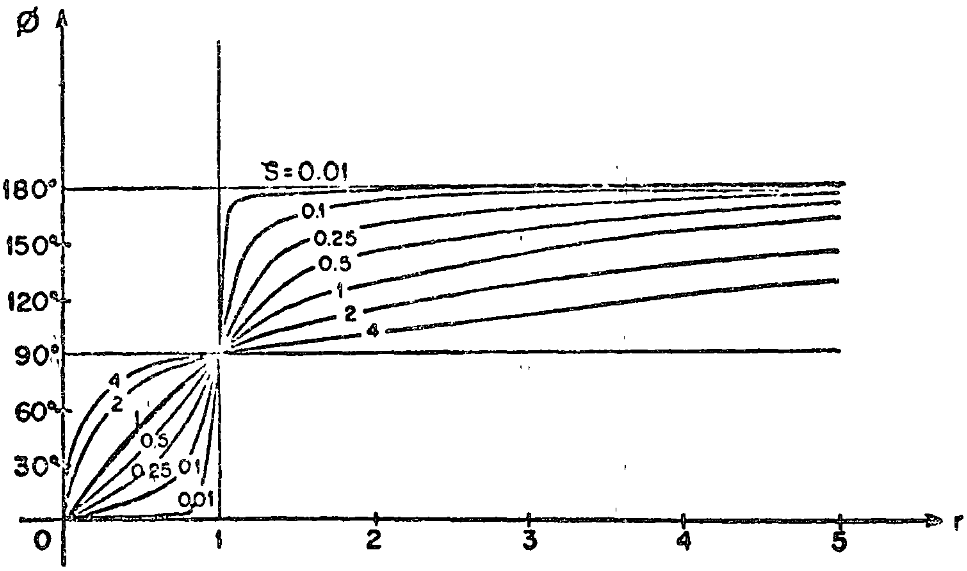


FIG. 30

Para pequeños valores del cociente de frecuencias r, el desplazamiento y la fuerza excitadora casi están en fase, pero al aumentar r aumenta el ángulo de fase, que tiende a 180° para valores muy altos de r. La variación del ángulo de fase es muy rápida en la vecindad de $r = 1$, y para este valor el ángulo de fase es 90° independientemente del valor del factor de amortiguamiento.

Transmisibilidad

La transmisibilidad se representa con TR; se define cómo el cociente de las amplitudes de la fuerza transmitida a la cimentación entre la fuerza aplicada.

De la figura 15 se deduce que la fuerza total transmitida a la cimentación es

$$F_t = kx + c\dot{x} \qquad (138)$$

donde el desplazamiento x para el caso considerado de fuerza senoidal y de vibración estable, se presenta en la ecuación (131) Calculando la derivada de esta ecuación y sustituyéndola al igual que (131), en la ecuación (138) se tiene

$$F_t = \frac{k(x_{st})_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) + \frac{c\omega\,(x_{st})_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \cos(\omega t - \phi) \qquad (139)$$

Teniendo en cuenta (111) y (48) en (139)

$$F_t = \frac{F_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \left[\operatorname{sen}(\omega t - \phi) + 2\zeta r \cos(\omega t - \phi)\right] \qquad (140)$$

que se puede escribir

$$F_t = F_0 \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2 r^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \beta) \tag{141}$$

Por lo tanto, la transmisibilidad TR vale

$$TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2 r^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \tag{142}$$

En la figura 31 se presentan gráficas de la ecuación (142) para valores diferentes del factor de amortiguamiento.

En esta figura se observa que para $r = \sqrt{2}$, la transmisibilidad siempre es igual a uno independientemente del factor de amortiguamiento. Si $r > \sqrt{2}$, la transmisibilidad es menor que la unidad y disminuye de valor al disminuir el valor del amortiguamiento. El amortiguamiento es deseable en la práctica porque reduce los desplazamientos cerca de la zona de resonancia cuando se desconecta la máquina y se para su funcionamiento.

Para $r < \sqrt{2}$ la fuerza transmitida es mayor que la fuerza aplicada.

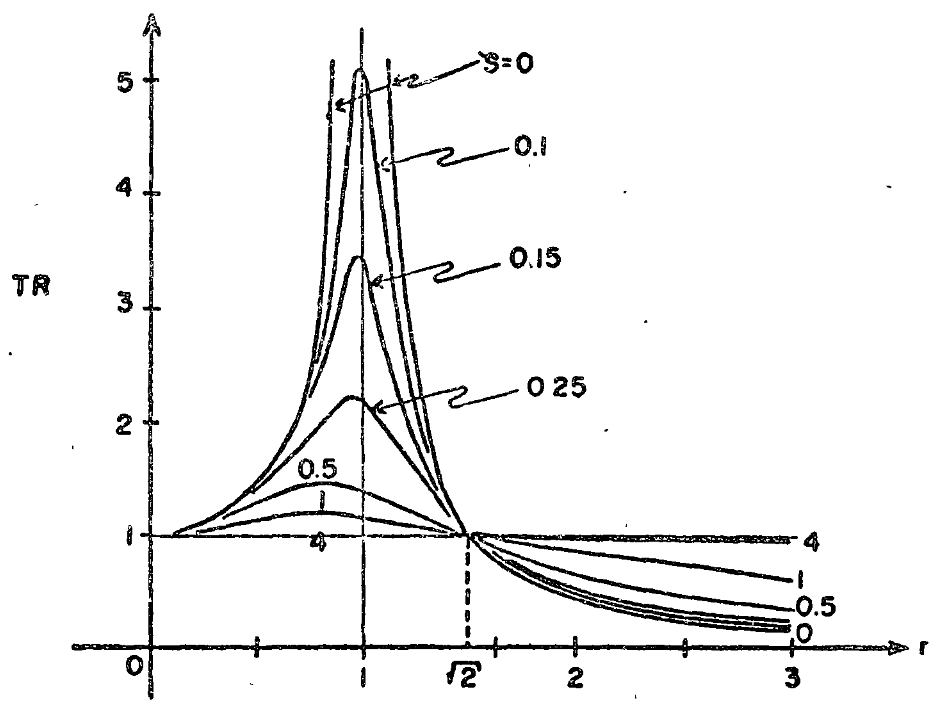


FIG. 31

Movimiento vibratorio de la cimentación

Considérese el sistema indicado en la figura 32, donde la base está sujeta a un movimiento armónico

$$x_2 = A \operatorname{sen} \omega t \tag{143}$$

Supóngase que $x_1 > x_2$, entonces el desplazamiento relativo x es

$$x = x_1 - x_2 \tag{144}$$

que es la deformación del resorte. La ecuación de movimiento del sistema es:

$$m\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0 \tag{145}$$

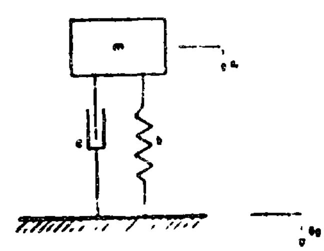


FIG. 32

Teniendo en cuenta (144)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_1 \tag{146}$$

Considerando la ecuación (143)

$C = \zeta 2 m \omega_n$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mA\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{147}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = \frac{mA\,\omega^2}{m} \operatorname{sen} \omega t \tag{148}$$

que es la misma ecuación (105) de un sistema sujeto a una fuerza senoidal, donde F_0 está reemplazado por el término $mA\,\omega^2$. El desplazamiento que corresponde al estado de vibración estable, lo proporciona la ecuación (131) y por tanto utilizando también (111)

$$x = \frac{\dfrac{mA\,\omega^2}{k}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \operatorname{sen} (\omega t - \phi) \tag{149}$$

$$x = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \operatorname{sen} (\omega t - \phi) \tag{150}$$

La ecuación diferencial (145) se puede escribir también

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = A\,(k \operatorname{sen} \omega t + c\omega \cos \omega t) \tag{151}$$

que se puede transformar en

$$\ddot{x}_1 + 2\zeta\omega_n\,\dot{x}_1 + \omega_n^2\,x_1 = \frac{A\,k}{m}\sqrt{1 + 4\zeta^2 r^2} \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \tag{152}$$

De manera semejante, para vibración en el estado estable, la solución es

$$x_1 = \frac{A\sqrt{1 + 4\zeta^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \operatorname{sen} (\omega t + \theta - \beta) \tag{153}$$

Para valores máximos del desplazamiento, cuando la función trigonométrica vale uno, se tiene

$$\frac{x_{1,\,\text{máx}}}{A} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \tag{154}$$

que es la misma fórmula (142) para la transmisibilidad

Por lo tanto, si se desea aislar un cuerpo o un instrumento, del movimiento de la base, la eficiencia del aislamiento se mide por el cociente de la amplitud de vibración del cuerpo, entre la amplitud del movimiento de la base. Este cociente es el mismo que el de transmisibilidad de las fuerzas, y por lo tanto dicho aislamiento es bueno para fuerzas como para desplazamientos.

Instrumentos sísmicos

Básicamente son sistemas que constan de una masa ligada a una base por medio de resortes y amortiguadores. La base se fija al cuerpo cuyo movimiento se desea medir; el registro del movimiento relativo entre la masa y la base indicará el movimiento del cuerpo.

Para medir la amplitud de la vibración de la base se usa el vibrómetro, que es un aparato de frecuencia natural pequeña, comparada con la frecuencia de la vibración que se desea medir. Para que el cociente de frecuencias r sea grande, se necesita disminuir el valor de ω_n, que se logra con resortes muy flexibles o con una masa m muy pesada. Si en la expresión (150) se toma el límite cuando r crece indefinidamente, se obtiene el desplazamiento relativo $x = A$ y $\phi = 180°$, lo que indica que los dos movimientos están fuera de fase en 180° y también $x = -A$. El desplazamiento relativo lo registra la gráfica que traza una pluma sobre un tambor giratorio; su amplitud proporciona la amplitud de la vibración del cuerpo que interesa.

El acelerómetro es un instrumento para medir aceleraciones; en este caso el cociente de frecuencias r es de bajo valor. Se necesita aumentar el valor de ω_n y para ello se colocan resortes muy rígidos

Si en la ecuación (150) se consideran valores pequeños de r, el denominador es igual a la unidad y

$$x = Ar^2 = A\omega^2/\omega_n^2 \tag{155}$$

El término $A\omega^2$ es la amplitud de la aceleración del cuerpo de vibración según la ecuación (143), y por lo tanto, el desplazamiento relativo es una medida de la aceleración del cuerpo que interesa.

Amortiguamiento de Coulomb

Se llama así al efecto de una fuerza de fricción constante que se opone al movimiento de un cuerpo; se presenta en el movimiento de dos superficies de deslizamiento, secas. Un caso típico se muestra en la figura 33, donde f indica el coeficiente de fricción. Se denomina coeficiente de amortiguamiento de Coulomb al cociente $f\,mg/k$

Supóngase que de la posición de equilibrio se desplaza la masa una distancia x_0 a la derecha y se le suelta.
La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + kx - f\,mg = 0 \tag{156}$$

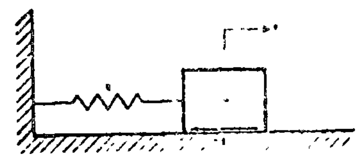


FIG 33

cuya solución general es

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t + f\,mg/k \tag{157}$$

Las condiciones iniciales son

$$x = x_0,\ \dot{x} = 0 \text{ cuando } t = 0 \tag{158}$$

que reemplazadas en (157) dan

$$A = 0 \text{ y } B = x_0 - f\,mg/k \tag{159}$$

La posición extrema izquierda ocurre cuando $t = \pi/\omega_n$, o sea al final de medio ciclo, cuando la velocidad de la masa se anula. En este punto, se tiene un desplazamiento

$$x = -x_0 + 2f\,mg/k \tag{160}$$

Si la masa se desplaza a la derecha, el término independiente en la ecuación (156) cambia de signo porque cambia el sentido de la fricción. La solución se obtiene de manera semejante, considerando como condiciones iniciales el desplazamiento (160) y una velocidad cero cuando $t = \pi/\omega_n$. La distancia de la posición extrema derecha a la posición de equilibrio es $x_0 - 4f\,mg/k$ y se ha completado un ciclo. En cada medio ciclo la amplitud de la vibración disminuye en $2f\,mg/k$, y la masa quedará en reposo en una de las posiciones extremas cuando la amplitud de la vibración sea menor que $f\,mg/k$. Por lo tanto, el movimiento no es armónico simple sino que cambia cada medio ciclo. La frecuecia natural sin amortiguamiento es igual a la frecuencia natural con amortiguamiento de Coulomb. Para demostrarlo se hace el cambio de variable

$$x_1 = x - f\,mg/k \tag{161}$$

que se reemplaza en la ecuación (156), obteniéndose

$$m\ddot{x} + kx_1 = 0 \tag{162}$$

La frecuencia natural amortiguada es $\sqrt{k/m}$ que es también la frecuencia natural sin amortiguamiento. Por lo tanto, la frecuencia de vibración de un sistema no se afecta si el amortiguamiento es constante.

SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Se dice que un sistema tiene n grados de libertad cuando se necesitan n coordenadas independientes para especificar las posiciones de las masas. Por ejemplo, en la figura 34 se presentan sistemas de dos grados de libertad en (a) y (b) y de tres grados en (c). Se observa que las coordenadas pueden ser desplazamientos lineales, angulares o una mezcla de ambos.

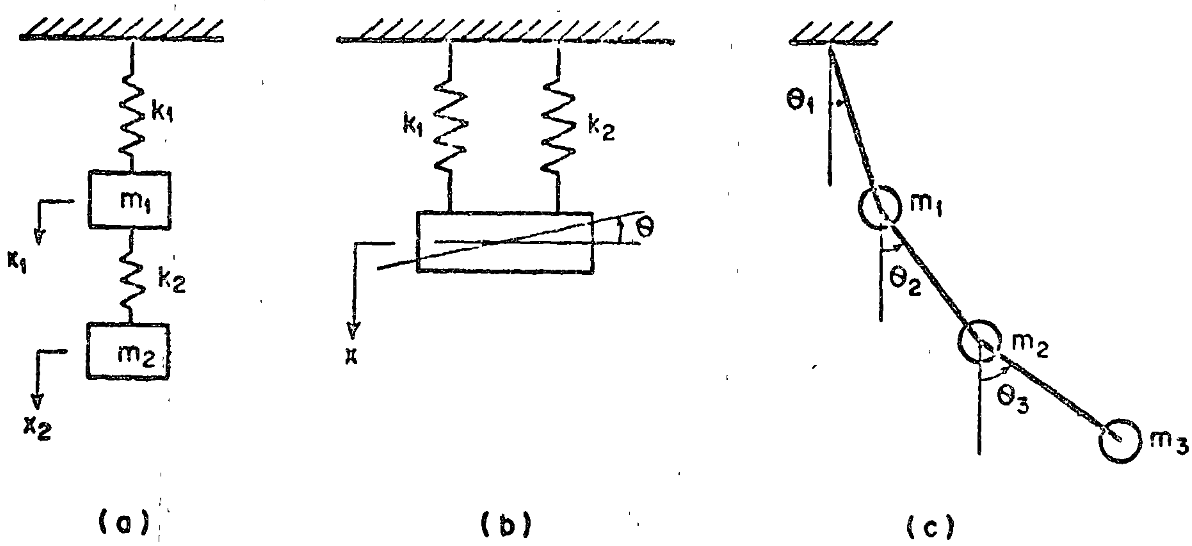


FIG. 34

El movimiento de un sistema de n grados de libertad se representa con n ecuaciones diferenciales. obtenida cada una de ellas al determinar la ecuación de movimiento de cada una de las masas. La solución de este sistema de ecuaciones conduce a las frecuencias naturales del sistema. y hay tantas como grados de libertad tenga el sistema.

En general, la vibración libre de un sistema de varios grados de libertad no es armónica, sino que es la suma de varios movimientos armónicos con frecuencias diferentes. Por lo tanto, la variación de la configuración del sistema con el tiempo, será irregular y en general no es periódica. Se denomina modo de vibración a la variación de la configuración del sistema con el tiempo.

La mínima frecuencia natural se llama frecuencia fundamental o primera frecuencia del sistema, y es la más importante en cualquier estudio. El modo natural de vibración correspondiente se denomina modo natural fundamental de vibración. A las frecuencias naturales siguientes en orden ascendente, se les llama frecuencias naturales segunda, tercera, etc., e igualmente se procede con los modos naturales correspondientes.

Si se considera una frecuencia natural y el modo de vibración correspondiente, quiere decir que todo el sistema vibrará con esa frecuencia y se comporta como un sistema de un solo grado de libertad: los desplazamientos de las distintas coordenadas siempre guardarán la misma relación entre sí. Si se conoce una de las amplitudes se conocen todas las otras Cuando esta amplitud de referencia, llamada amplitud del modo natural se hace igual a la unidad, se obtiene el denominado modo normal de vibración. Este método de normalizar los modos naturales, es el más sencillo para indicar las amplitudes del modo.

La configuración irregular del sistema se produce cuando los modos naturales de vibración ocurren al mismo tiempo y es por lo tanto una suma de modos naturales.

Considérese un sistema de dos grados de libertad como se muestra en la figura 35a, con el diagrama de cuerpo libre presentado en 35b. Este sistema se considera una idealización del marco de edificio que se muestra en la figura 35c, donde el amortiguamiento entre niveles corresponde al amortiguador.

La ecuación de movimiento de cada masa conduce a las siguientes ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)\, x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \tag{163}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = F_2(t) \tag{164}$$

Supóngase el caso de una variación libre sin amortiguamiento, entonces

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\, x_1 - k_2 x_2 = 0 \tag{165}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \tag{166}$$

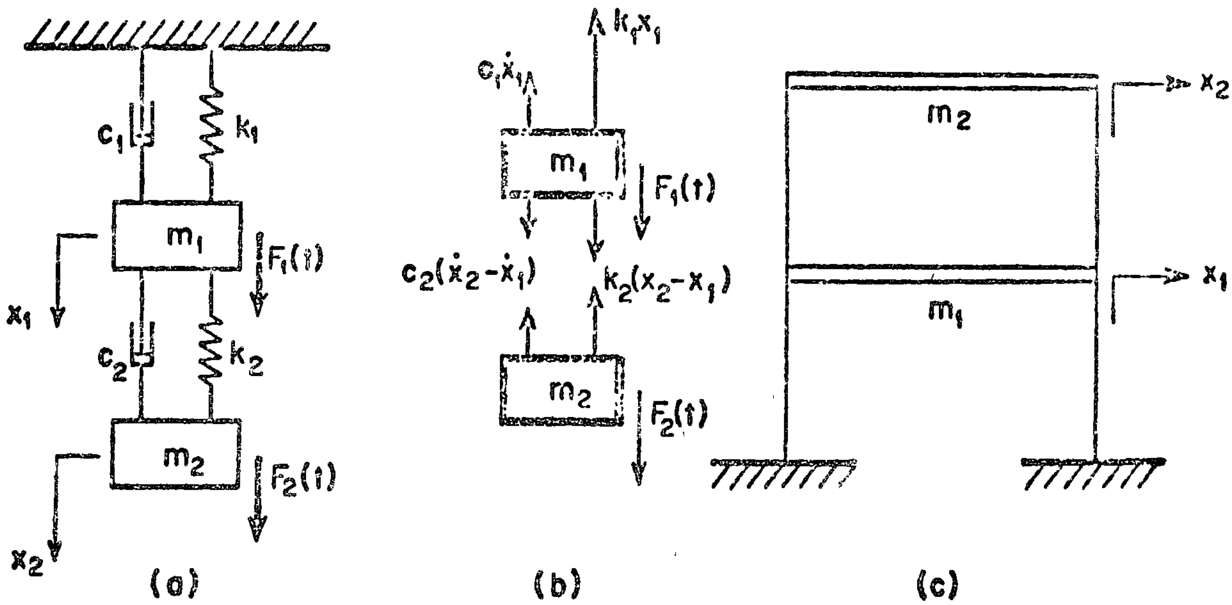


FIG. 35

El movimiento se considera descompuesto en movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias, o sea

$$x_1 = A \operatorname{sen} (\omega t + \psi) \tag{167}$$

$$x_2 = B \operatorname{sen} (\omega t + \psi) \tag{168}$$

donde A, B y ψ son constantes arbitrarias y ω es una de las frecuencias naturales del sistema. Sustituyendo (167) y (168) en las ecuaciones (165) y (166).

$$[(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) A - k_2 B] \operatorname{sen} (\omega t + \psi) = 0$$

$$[-k_2 A + (k_2 - m_2 \omega^2) B] \operatorname{sen} (\omega t + \psi) = 0$$

Como estas ecuaciones se verifican para cualquier valor de t, se concluye que

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) A - k_2 B = 0 \tag{169}$$

$$-k_2 A + (k_2 - m_2 \omega^2) B = 0 \tag{170}$$

que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en A y B. La solución no trivial se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, obteniéndose

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) \omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \tag{171}$$

De las ecuaciones (169) y (170) se conoce la relación B/A

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \omega^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2} \tag{172}$$

Efectuando operaciones en las dos últimas expresiones de (172), se obtiene la ecuación de frecuencias (171). La solución de esta ecuación es

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{2 m_1} + \frac{k_2}{2 m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \tag{173}$$

Se obtienen dos frecuencias ω_1 y ω_2 que son la frecuencia fundamental y la segunda frecuencia natural respectivamente. Si en (172) se sustituye ω_1, se obtiene una configuración B_1/A_1, que es el modo fundamental, y para ω_2 se obtiene B_2/A_2, que es el segundo modo natural de vibración. Los modos se normalizan haciendo la amplitud $A = 1$.

La solución general de las ecuaciones (167) y (168), es por lo tanto,

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} (\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen} (\omega_2 t + \psi_2) \tag{174}$$
$$x_2 = B_1 \operatorname{sen} (\omega_2 t + \psi_2) + B_2 \operatorname{sen} (\omega_2 t + \psi_2) \tag{175}$$

donde las constantes A_1, A_2, ψ_1, ψ_2, se determinan a partir de las condiciones iniciales y B_1, B_2 son función de A_1, A_2, respectivamente, por la ecuación (172).

Se puede enunciar ahora el principio de la ortogonalidad. Los modos principales de vibración son ortogonales y esta propiedad es muy útil para el cálculo de frecuencias naturales. Para el sistema de dos grados de libertad el principio de ortogonalidad es:

$$m_1 A_1 A_2 + m_2 B_1 B_2 = 0 \tag{176}$$

Para un sistema de n grados de libertad, el principio de ortogonalidad es

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s = 0 \tag{177}$$

donde $r \neq s$ son los modos principales de vibración del sistema.

Ecuación de Lagrange

La ecuación de Lagrange permite determinar las ecuaciones de movimiento de un sistema. Se determinan tantas ecuaciones de movimiento como grados de libertad tiene el sistema. La forma fundamental de la ecuación, usando las coordenadas generales q_i, es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(K.E.)}{\partial q_i} + \frac{\partial(P.E.)}{\partial q_i} + \frac{\partial(D.E.)}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{178}$$

en donde

$K.E.$ es la energía cinética del sistema $= \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$P.E.$ es la energía potencial $= \frac{1}{2} k x^2$

$D.E.$ es la energía de disipación $= \frac{1}{2} c \dot{x}^2$

Q_i es la fuerza externa generalizada que actúa en el sistema.

Coordenadas generalizadas

Una coordenada generalizada es usualmente alguna cantidad física como una longitud, un ángulo o una combinación de longitudes y ángulos. La configuración de un sistema se puede especificar en general por más de un solo grupo de coordenadas independientes. Por ejemplo, en la figura 34c se pueden escoger tres ángulos, tres distancias verticales a las masas, tres distancias horizontales de las masas a un eje vertical o una combinación de estos parámetros. Las coordenadas generalizadas comprenden a todos los conjuntos independientes de coordenadas que se pueden utilizar en la solución de un problema vibratorio. El numero de coordenadas generalizadas es, por lo tanto, igual al número de grados de libertad del sistema en estudio y el problema se puede simplificar escogiendo las coordenadas adecuadas

Por ejemplo, considérese el problema de la figura 35, donde se tiene que

$$K.E. = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

$$D.E. = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

Sustituyendo en la ecuación (178) para las coordenadas generalizadas x_1 y x_2, se obtienen respectivamente:

$$m_1 \ddot{x}_1 - 0 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) + c_1 \dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - 0 + k_2(x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F_2(t)$$

que son precisamente las ecuaciones (163) y (164).

Supóngase que para el sistema de la figura 35 se desea conocer el movimiento de una vibración libre amortiguada. Para las ecuaciones de movimiento basta igualar a cero los segundos miembros de las ecuaciones (163) y (164).

Como para un sistema amortiguado el movimiento que interesa es osciiatorio y con amplitudes que decrecen en valor, entonces

$$x_1 = A\, e^{st}, \qquad x_2 = B\, e^{st} \tag{179}$$

Estas ecuaciones se reemplazan en (163) y (164), obteniéndose

$$[m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)]\, A - [(c_2 s + k_2)]\, B = 0$$

$$-(c_2 s + k_2)\, A + (m_2 s^2 + c_2 s + k_2)\, B = 0$$

Desarrollando el determinante del sistema, se obtiene la ecuación característica del sistema, que es de cuarto grado en s, y por tanto su solución produce cuatro valores de s. Las soluciones generales (179) son

$$x_1 = A_1\, e^{s_1 t} + A_2\, e^{s_2 t} + A_3\, e^{s_3 t} + A_4\, e^{s_4 t}$$

$$x_2 = B_1\, e^{s_1 t} + B_2\, e^{s_2 t} + B_3\, e^{s_3 t} + B_4\, e^{s_4 t}$$

donde las constantes A_1, A_2, A_3, A_4, se determinan con las condiciones iniciales del sistema y las B_i correspondientes se calculan de los cocientes

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{m_1 s_i^2 + (c_1 + c_2)\, s_i + k_1 + k_2}{c_2 s_i + k_2} = \frac{c_2 s_i + k_2}{m_2 s_i^2 + c_2 s_i + k_2}$$

Considérese el caso de vibración forzada no amortiguada. Las fuerzas excitadoras son

$$F_1(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{180}$$

$$F_2(t) = 0 \tag{181}$$

La solución estable se supone de la forma

$$x_1 = X_1 \operatorname{sen} (\omega t + \phi) \tag{182}$$

$$x_2 = X_2 \operatorname{sen} (\omega t + \phi) \tag{183}$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento del sistema, de las ecuaciones (180) a la (183) y efectuando operaciones, se demuestra que si

$$C = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_2 + m_2 k_1)\, \omega^2 + k_1 k_2$$

entonces

$$X_1 = F_0\, (k_2 - m_2 \omega^2)/C$$

$$X_2 = F_0\, k_2/C$$

Finalmente, considérese el caso de vibración forzada con amortiguamiento. Las ecuaciones de movimiento son (163) y (164), donde las fuerzas excitadoras se indican en (180) y (181).

La solución estable se supone de la misma forma que las ecuaciones (182) y (183). Efectuando las sustituciones y operaciones correspondientes se demuestra que si

$$D^2 = [(k_1 - m_1 \omega^2)\, (k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 k_2 \omega^2]^2 + \omega^2 c_2^2\, (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)^2$$

entonces

$$X_1 = \sqrt{F_0^2\, (k_2 - m_2 \omega^2)^2 + c_2^2 \omega^2}\ / D$$

$$X_2 = \sqrt{F_0^2\, (k_2^2 + c_2^2 \omega^2)}\ /D$$

Para sistemas de tres o más grados de libertad se establecen las ecuaciones del movimiento del sistema y el análisis se puede efectuar de manera semejante al caso de dos grados de libertad. Sin embargo, determinar las frecuencias naturales y modos principales de vibración es muy laborioso para sistemas de varios grados de libertad y se pueden utilizar otros métodos de calculo, como los siguientes:

Método de Stodola-Vianello

Este es un método iterativo para el cálculo de frecuencias naturales y modos principales de vibración para sistemas con vibración libre no amortiguada.

Las ecuaciones de movimiento son semejantes a las ecuaciones (165) y (166) y de forma general

$$m_i \ddot{x}_i + k_i x_i = 0$$

Si se supone una solución de la forma

$$x_i = A_i \operatorname{sen} \omega t$$

donde ω es la frecuencia natural de uno de los modos principales de vibración, entonces

$$k_i A_i = \omega^2 m_i A_i \tag{184}$$

Para cada una de las masas se obtiene una ecuación de la forma (184).

Se supone arbitrariamente la configuración de un modo, se sustituyen valores en cada una de las ecuaciones (184) y se calcula ω^2 en cada una de ellas. Si la configuración supuesta corresponde a la de un modo principal de vibración, los valores calculados ω^2 tienen el mismo valor en todas las ecuaciones. En general, esto no ocurre y se procede a una nueva iteración suponiendo una configuración modificada que se obtiene comparando ambos miembros de (184) y dividiendo entre una misma constante arbitraria todas las ecuaciones. Con esta nueva configuración se calcula nuevamente el valor de ω^2 en cada una de las ecuaciones y de ser necesario se repite sucesivamente el método iterativo hasta que todos los valores de ω^2 se encuentran dentro de una tolerancia especificada. El método converge al máximo valor de ω^2 y de esta manera se obtiene la frecuencia máxima y el modo natural correspondiente.

Si la ecuación (184) se cambia a la forma

$$m_i A_i = \frac{1}{\omega^2} k_i A_i \tag{185}$$

entonces se obtiene la frecuencia fundamental del sistema y el modo natural de vibración correspondiente.

Utilizando el principio de ortogonalidad cuando se conoce un modo de vibración, se pueden determinar los otros modos principales de vibración y sus frecuencias correspondientes, reduciendo cada vez en uno el número de ecuaciones del sistema.

Método de Holzer

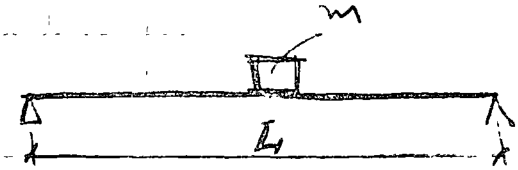
Con este método se pueden determinar las frecuencias naturales de sistemas con vibración libre o forzada, con o sin amortiguamiento.

Para aplicar el método se supone una frecuencia del sistema, calculándose la configuración que corresponde a la frecuencia supuesta. Cada cálculo es independiente de cualquier otro y por lo tanto se pueden determinar todas las frecuencias naturales del sistema.

Para un valor supuesto de ω, se inicia el proceso considerando una amplitud unitaria de la primera masa. En forma sucesiva se calculan las amplitudes y fuerzas de inercia de todas las masas restantes del sistema. Para la última masa se debe tener una fuerza total nula o sea el equilibrio de la fuerza de inercia y las fuerzas del resorte y amortiguador. Si esta fuerza total es cero entonces la frecuencia supuesta y la configuración calculada corresponden a uno de los modos principales. En general se obtiene una fuerza total diferente de cero o sea que existe una fuerza residual en la última masa. Se hace una gráfica con este residuo como ordenada y la frecuencia supuesta en las abscisas. Para cada frecuencia supuesta se determina su residuo y un punto del diagrama. Se traza una curva que pasa por todos estos puntos y las intersecciones de esta curva con el eje de las frecuencias determinan las frecuencias naturales del sistema. Conocidas las frecuencias se pueden calcular los modos de vibración correspondientes.

Usualmente este método se combina con el anterior o con cualquier otro que determine la frecuencia fundamental y a partir de este valor se calculan las frecuencias naturales restantes del sistema.

1) Una viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro del claro, se muestra en la figura. Si la masa de la viga es despreciable comparada con la masa actuante, encontrar la frecuencia natural del sistema.



Sabemos que $m\ddot{x} + kx = 0$ (vibración libre)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

donde $\frac{k}{m} = \omega_n^2 \;\therefore\; \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

y la deformación al centro sea $\delta = \frac{PL^3}{48EI}$

$\therefore k = \frac{P}{\delta}$ si $P = 1$ entonces $k = \frac{48EI}{L^3}$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{L^3 m}} \left(\frac{rad}{seg}\right)$$

2) En la fig. se muestra una masa suspendida de un resorte. Por medio de algún agente externo, se hace que el soporte del resorte en X' se mueva en la dirección vertical como movimiento armónico. Este movimiento se expresa como a sen ωt. Si cuando $t=0$, se desplaza la masa hasta una posición inferior distante 1", y si en esta posición la masa tiene una velocidad hacia abajo de 3 pulg/seg,

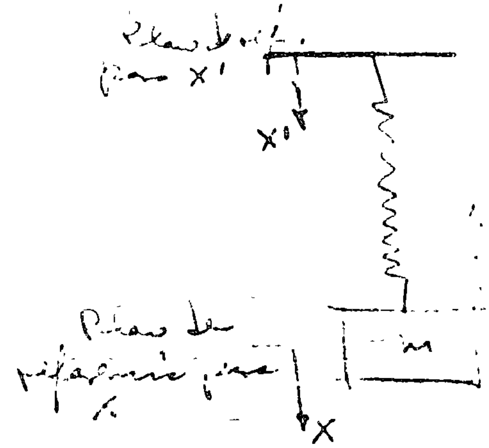
¿Cuál es la posición de la masa cuando t = 3 seg?

datos $a = 5$ pulg

$\omega = 10 \ seg^{-1}$

$K = 50 \ lb/pie$

$m = 1$ slug



Solución

Aplicando la 2ª ley de Newton se tiene:

$$F = ma$$

la extensión del resorte está dada por $x - x'$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -K(x - x') \quad \cdots \quad (1)$$

ó

Sust. x' por la función conocida del tiempo, se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = \frac{Ka}{m} \operatorname{sen} \omega t \quad --- \quad (2)$$

la sol homogénea de la ec. diferencial es de la forma

$$x_c = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

donde $\omega_n^2 = \frac{K}{m} \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

la sol. particular será:

$$x_p = C \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{Sust } x_p \text{ en } (2)$$

$$-C\omega^2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{K}{m} C \operatorname{sen} \omega t = \frac{Ka}{m} \operatorname{sen} \omega t$$

$$\therefore\ C = \frac{Ka/m}{K/m - \omega^2}$$

La solución general es $X = X_c + X_p$

Sustituyendo y ordenando términos se tiene:

$$X = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \frac{a}{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)^2} \operatorname{sen} \omega t$$

Poniendo los valores numéricos, se tiene:

$$X = A \operatorname{sen} 22.4\, t + B \cos 22.4\, t + 6.25 \operatorname{sen} 10t \text{ (pulgadas)}$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales, resulta:

$$B = 1$$

derivando X respecto a t y sust. valores, tenemos:

$$3 = 22.4\, A + (6.25)(10) \quad \therefore\ A = -2.65$$

El movimiento está expresado por:

$$X = -2.65 \operatorname{sen} 22.4t + \cos 22.4 t + 6.25 \operatorname{sen} 10t \text{ (pulg)}$$

Cuando $t = 5$ seg., la posición de la masa respecto al equilibrio X será:

$$(X)_5 = -2.65 \operatorname{sen} (22.4)(5) + \cos (22.4)(5) + 6.25 \operatorname{sen} 50$$

$$= \underline{1.174 \text{ pulgadas}}$$

SISTEMAS VIBRATORIOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PLANTEAMIENTO MATRICIAL.-

Sea la siguiente ecuación de movimiento.

$$[M]\ddot{\bar{x}} + [C]\dot{\bar{x}} + [K]\bar{x} = [F(t)] \quad \text{--- (1)}$$

Si consideramos vibración libre sin amortiguamiento, se tiene:

$$[M]\ddot{\bar{x}} + [K]\bar{x} = \hat{0} \quad \text{----- (2)}$$

donde: $[M]$ → Matriz diagonal de Masas (Sistema discreto)

$[K]$ → Matriz de rigidez del sistema (simétrica).

$\bar{X}$ → Vector de desplazamientos.

$\ddot{\bar{X}}$ → Vector de aceleración.

es decir:

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \vdots \\ \ddot{X}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ & & \cdots & \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \hat{0}$$

Sabemos que para vibraciones libres sin amortiguamiento, el movimiento será armónico o periódico, suponemos entonces la solución siguiente:

$$\{x\} = \{A\}\, e^{i\omega t}$$

$\therefore$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{A\}\, e^{i\omega t}$$

es decir: de (2)

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{bmatrix} \{A\}(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \{A\}\, e^{i\omega t} = \tilde{0}$$

dividiendo entre $e^{i\omega t}$ tenemos:

$$[M]\{A\}(-\omega^2) + [K]\{A\} = \tilde{0}$$

ó

$$[K - \omega^2 M]\{A\} = \tilde{0} \quad --- \quad (3)$$

El sistema se resuelve para $\{A\} = 0$, la cual constituye una solución trivial; para que haya solución distinta de la trivial debe cumplirse que

$$\det |K - \omega^2 M| = 0$$

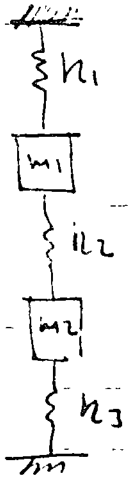
lo cual nos lleva a concluir que el sistema de ecs. es linealmente dependiente, a la ecuación obtenida de hacer el determinante $= 0$, se le conoce como ecuación característica del sistema, y las raíces de esta ecuación nos dan las frecuencias naturales de dicho sistema.

La ecuación resultante (3) es de la forma $[A - \lambda I] X = 0$; que es la forma estandar de un problema de valores característicos, cuya solución son los valores propios (eigen values) que pueden obtenerse empleando algun método numérico establecido, por ejemplo el método de Jacobi, el cual también es llamado característico.
Los valores característicos de este sistema nos dan las frecuencias naturales de vibración elevadas al cuadrado, y los vectores característicos asociados, nos dan los modos de vibración correspondientes.

Los vectores característicos [A] del sistema (3), se obtienen resolviendo este sistema para c/u de los valores característicos obtenidos. Correspondiendo a c/valor uno y un solo vector característico asociado; el cual nos define la configuración del sistema para los diversos estados estacionarios del mismo.

Ejemplo.-

Sea el siguiente sistema de 2 grados de libertad:



datos

$m_1 = 2 \text{ kg } \frac{seg^2}{cm}$ $\qquad k_1 = 1 \text{ kg}/cm$

$m_2 = 3 \text{ kg } \frac{seg^2}{cm}$ $\qquad k_2 = 2 \text{ kg}/cm$

$k_3 = 3 \text{ kg}/cm$

Encontrar las frecuencias y los modos de vibración

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Sust. en el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \hat{0}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \hat{0}$$

$$\begin{bmatrix} (3-2\omega^2) & -2 \\ -2 & (5-3\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \hat{0} \qquad \alpha)$$

sabemos que se trata de una matriz singular ∴

$\Delta = 0$, es decir:

$(3-2\omega^2)(5-3\omega^2) - 4 = 0$ ecuación característica.

$15 - 10\omega^2 - 9\omega^2 + 6\omega^4 - 4 = 0$

$6\omega^4 - 19\omega^2 + 11 = 0$

$\therefore \omega^2 = \dfrac{19 \pm \sqrt{(19)^2 - 4(6)(11)}}{2 \times 6} = \dfrac{19 \pm \sqrt{361 - 264}}{12}$

$\omega^2 = \dfrac{19 \pm 9.85}{12}$ $\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{28.85}{12} = 2.404 \therefore \omega_1 = 1.55 \text{ seg}^{-1} \\ \omega_2^2 = \dfrac{9.15}{12} = 0.762 \therefore \omega_2 = 0.87 \text{ seg}^{-1} \end{cases}$

Sust. ω_1 en la ecuación α):

$$\begin{bmatrix} 3 - 2(2.404) & -2 \\ -2 & 5 - 3(2.404) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \tilde{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1.808 & -2 \\ -2 & 2.212 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \tilde{0}$$

con la 1ª ecuación.

$-1.808 A_1 - 2A_2 = 0$

con la 2ª ecuación: $-2A_1 + 2.212 A_2 = 0$

de la 1ª ec: $\dfrac{A_1}{A_2} = -\dfrac{2}{1.808} = -1.106$

de la 2ª ec: $\dfrac{A_1}{A_2} = -\dfrac{2.212}{2} = -1.106$

Si hacemos $A_2 = 1$ entonces $A_1 = -1.106$

y el vector característico será: $\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -1.106 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Sustituyendo ω_2 en (d):

$$\begin{bmatrix} 3-2(0.762) & -2 \\ -2 & 5-3(0.762) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = 0$$

es decir

$$\begin{bmatrix} 1.475 & -2 \\ -2 & 2.714 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \hat{0}$$

desarrollando la primera ecuación:

$$1.475\,\Delta_1 - 2\Delta_2 = 0 \quad \text{ó,} \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2}{1.475} = 1.355$$

si $\Delta_2 = 1 \therefore \Delta_1 = 1.355$

y el vector característico será: $\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.355 \\ 1 \end{Bmatrix}$

debe cumplirse la ortogonalidad de los modos, a través de la matriz de pesos que en este caso es la matriz de masas:

$$[\Delta_1, \Delta_2]_1 \left[M \right] \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}_2 = 0$$

$$[-1.106 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.355 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2.212 \quad 3] \begin{bmatrix} 1.355 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Normalización de los modos respecto de la matriz de masa: debe cumplirse para

1er Modo - $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -1.106$

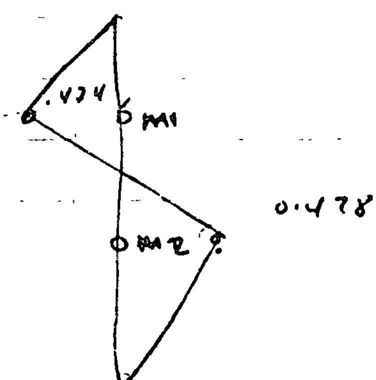
y que $\begin{bmatrix} -1.106\Delta_2 & , \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.106\Delta_2 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = 1$

$$\begin{bmatrix} -2.218\Delta_2 & 3\Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.106\Delta_2 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = 2.453\Delta_2^2 + 3\Delta_2^2 = 1$$

o sea, $5.453\,\Delta_2^2 = 1 \qquad \Delta_2 = \sqrt{\frac{1}{5.453}} = \underline{0.428}$

y $\Delta_1 = 0.428(-1.106) = \underline{-0.474}$

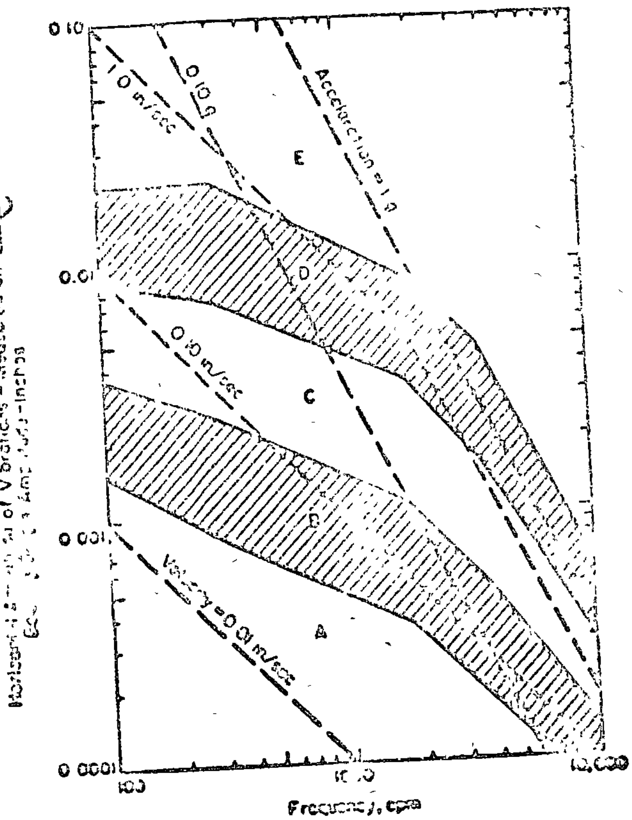
el primer modo normalizado será: $\begin{Bmatrix} -0.474 \\ 0.428 \end{Bmatrix}$



configuración del 1er modo que se llama fundamental.

"There's no glory on foundations"

K. Terzaghi



Explanation of cases:
E Dangerous. Shut it down now to avoid danger
D Failure is near. Correct within two days to avoid breakdown
C Faulty. Correct within 10 days to save maintenance dollars
B Minor faults. Correction wastes dollars
A No faults. Typical new equipment

Figure 10-2. Criteria for vibrations of rotating machinery (after Blake, 1966).

C. A link-suspended centrifuge operating at 950 rpm shows 2.5 mils, with the basket empty. The service factor is 0.3 and the effective vibration is 0.75 mils (0.00075 in.). The point at 950 rpm and 0.00075 in. in Fig. 7-2 falls in Class *B*.

For special types of machines, the organizations concerned with their manufacture, installation, and operation often develop ratings for different operating conditions. For example, Parvis and Appendino (1966) give values for vibrations at the bearings of turboalternator sets operating at 3000 rpm which have the ratings indicated in Table 10-3.

Table 10-3 Range of Values of Vibrations for Turboalternators Operating at 3000 rpm*

Rating of Turboalternator Operation	Vibration (Single-Amplitude) On Bearing Caps (in.)	On Shaft (in.)	On Turbine Table (in.)
Excellent	0.0002	0.0010	0.00002
Good	0.0004	0.0020	0.00004
Fair	0.0008	0.0040	0.00008
Bad	0.0016	0.0080	0.00016
Dangerous	0.0032	0.0160	0.00032

* After Pa[illegible] and Appendino (1966)

Additional information relating to the operation of rotating machinery in general is noted in Table 10-4 (from Baxter and Bernhard 1967). These limits are based on peak-velocity criteria alone and would be represented by straight lines on plots similar to those of Figs. 10-1 and 10-2. Note the similarity in values of peak velocity for the lower limit of the range for machines as "smooth" (0.010 in./sec in Table 10-4) and the lower limit of the range "barely noticeable to persons" (0.01 in./sec in Fig. 10-1). Similarly, note the lower limits for "slightly rough" for machines (0.160 in./sec in Table 10-4) and "troublesome to persons" (0.10 in./sec in Fig. 10-1), and the Table 10-4) and "troublesome to persons" (0.10 in./sec in Fig. 10-1), and the danger limits of "very rough" (. 0.63 in./sec in Table 10-4) and the Rausch limit for machines (1.0 in./sec in Fig. 10-1). The "dangerous" rating for turboalternators of 0.0032 in. at 3000 rpm (Table 10-3) also corresponds to 1.0 in./sec.

Baxter and Bernhard (1967) have also given a tentative guide to vibration tolerances for machine tools—this information is shown in Table 10-5. The

Table 10-4 General Machinery-Vibration–Severity Data*

Horizontal Peak Velocity (in./sec)	Machine Operation
0.005	Extremely smooth
0.005-0.010	Very smooth
0.010-0.020	Smooth
0.020-0.040	Very good
0.040-0.080	Good
0.080-0.160	Fair
[illegible]	Slightly rough
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

[illegible]

Table 10-5. Tentative Guide to Vibration Tolerances for Machine Tools*

Type Machine	Displacement of Vibrations as Read with Pickup on Spindle Bearing Housing in the Direction of Cut
Grinders	Tolerance Range (mils†)
Thread grinder	0.01-0.06
Profile or contour grinder	0.03-0.08
Cylindrical grinder	0.03-1.0
Surface grinder (vertical reading)	0.03-0.2
Gardner or Besly type	0.05-0.2
Centerless	0.04-0.1
Boring machines	0.06-0.1
Lathe	0.2-1.0

* These values came from the experience of personnel who have been troubleshooting machine tools for over ten years. They merely indicate the range in which satisfactory parts have been produced and will vary depending on size and finish tolerance. After Baxter and Bernhard (1967).
† 1 mil = 0.001 in.

motions indicated in this table represent only general magnitudes, actual operating tolerances must depend on the size and finish tolerances of the parts to be machined.

Vibrations of Structures

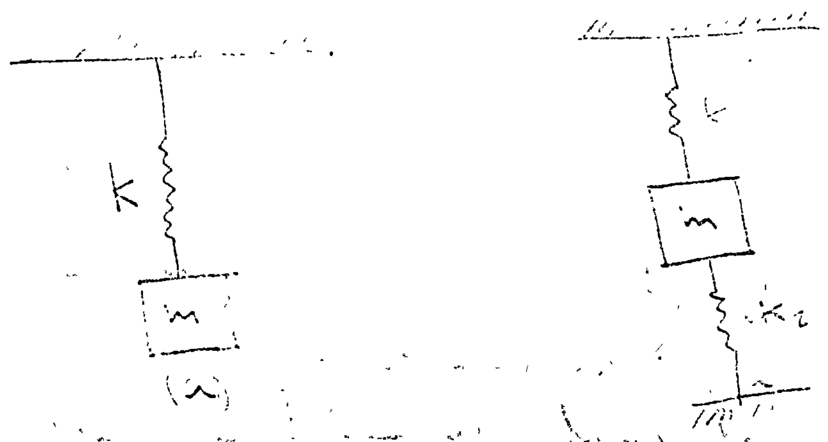
Although the topics of vibrations of structures and the allowable limits for such vibrations are beyond the scope of this book, it is useful to include a few comments on this subject. This is particularly important in relation to the problem of preventing damage to structures because of machine operations or construction operations in the immediate vicinity.

In Fig. 10-1 and in the text describing this figure, it was noted that limits have been established (Crandell, 1949) for motions of structures caused by blasting. Although the lower limit for the zone (in Fig. 10-1) denoted "caution to structures" represents a peak velocity of 3 in./sec, it is general practice to limit the peak velocity to 2 in./sec (see Wiss, 1968). The U.S. Bureau of Mines criteria for structural safety against damage from blasting involve both a limiting peak velocity and a limiting peak acceleration. Below 3 cycles/sec the limit is 2 in./sec peak velocity, and above 3 cycles/sec the limit is (0.10)g peak acceleration.

For future conditions governed by limiting values of peak velocity or [illegible], it is sometimes more convenient to [illegible]

Problemas de Vibraciones. Tarea 2.

1) Encontrar las frecuencias naturales de vibración para los siguientes sistemas de 1 grado de libertad, sujetos a vibración libre

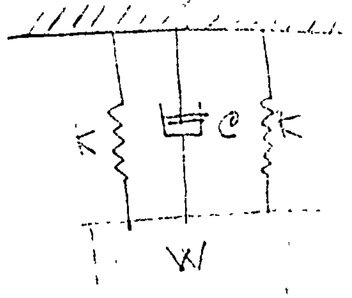


2) La masa mostrada en la figura se encuentra inicialmente en reposo cuando se le imprime al cuerpo una velocidad de 4 in/seg. Encontrar las ecuaciones para la velocidad y desplazamiento de la masa indicada:

Datos:

amortig. = $C = 25\ lb \frac{seg}{in}$; $K = 25\ lb/in$; $W = 40\ lb$.

(Tip. Se trata de un problema de vibración libre con un grado de libertad)

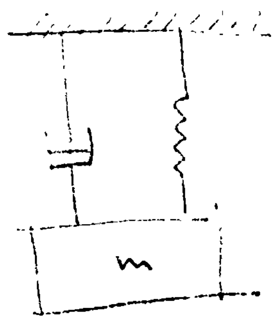


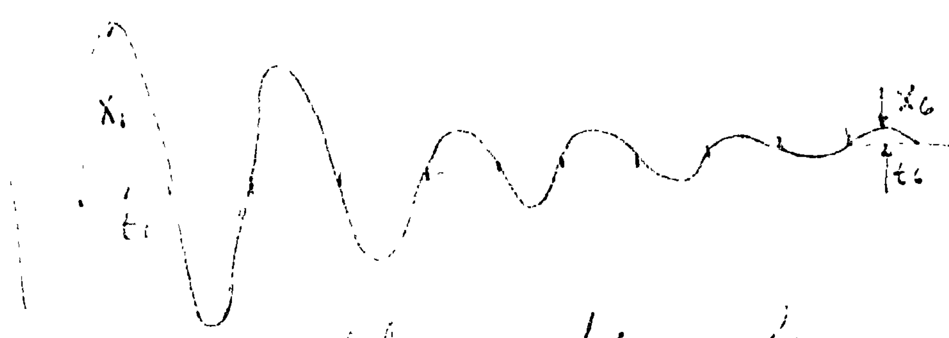
3) Calcular la respuesta ... y ... del problema 2) si se permite una fuerza de excitación sobre la masa cuya expresión es

$$F_0 \operatorname{sen} \omega t = 10 \operatorname{sen} 15 t$$

(Encontrar la expresión para X solamente)

4) La amplitud de vibración del sistema ... disminuye a 25% del valor inicial después de 5 ciclos consecutivos como se muestra en la figura.
Determine el amortiguamiento C del sistema
si $k = 20$ lb/in ; $m = 10$ lb



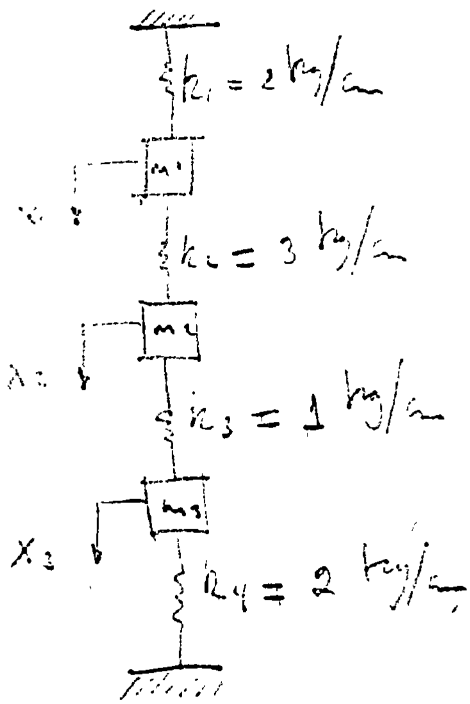


Tip
Se tiene que para vibración libre amortiguada.

$$X = C\, e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

y: $\frac{X_1}{X_6} = \frac{1}{0.25}$

5) Encontrar las frecuencias naturales en [illegible] y la configuración de uno de los modos, para el sistema que se muestra en la figura.



$m_1 = 3 \ kg \frac{seg^2}{cm}$

$m_2 = 1 \ kg\,s^2/cm$

$m_3 = 2 \ kg\,seg^2/cm$

Nota.–

Emplear el método de valores característicos (Matrices)

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

DISEÑO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION

TEMA III Propiedades Mecánicas de los Suelos

Generalidades
Características de los suelos
Determinación de Constantes Dinámicas
Métodos Sísmicos.

M. en I. José Luis León Torres

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123

Centro de Educación Continua
División de Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería, UNAM

Curso sobre: DISEÑO DE MAQUINARIA SUJETA A VIBRACION

Propiedades de los suelos
ING. JOSE LUIS LEON TORRES

1. NOCIONES DE MECANICA DE SUELOS

1.1 Definiciones y Relaciones Gravimétricas S_s, e, ω, G_w, γ_{seco}, γ_{sat}, γ_{sum}, Granulometría

1.2 Propiedades índice

1.2.1 Plasticidad

LL, LP, LC y su significado. Carta de Plasticidad de Casagrande. Posición de ω respecto a LL y LP

1.2.2 Compacidad relativa

e_{max}, e_{min}, variación de e_{max} y e_{min} con la angulosidad de los granos y granulometría

1.2.3 Identificación de los suelos (clasificación SUCS)

1.3 Propiedades mecánicas

1.3.1 Principio de esfuerzos efectivos

1.3.2 Angulo de fricción y cohesión

1.3.3 Resistencia no drenada en arcillas, S_u, Sensitividad, S_e

1.3.4 G (influencia de factores como σ, e, ν)

1.3.5 D (influencia de factores como σ, e, ν)

1.3.6 E

1.4 Prueba de penetración estándar

2. DETERMINACION DE PROPIEDADES MECANICAS EN ARCILLAS

2.1 En el laboratorio

2.2.1 Pruebas triaxiales

UU, q_u, CU

2.1.2 Corte directo o simple

2.1.3 De columna resonante

2.1.4 De la curva esfuerzo-deformación

2.1.5 Influencia de la alteración de las muestras, de las trayectorias de esfuerzos y de la anisotropía. Necesidad de efectuar las pruebas en las condiciones más semejantes al estado de esfuerzos inicial y a las acciones que actuaron en el suelo

2.2 En el campo

2.2.4 Prospección sísmica

2.2.2 Veleta

2.2.3 Vibración forzada

2.3 Mediante relaciones empíricas

3. DETERMINACION DE PROPIEDADES MECANICAS EN SUELOS GRANULARES

3.1 En el laboratorio

Dificultad en la obtención de muestras representativas

3.2 En el campo

3.2.1 Prospección sísmica

3.2.2 Vibración forzada

3.3 Mediante relaciones empíricas

4. SUELOS QUE PRESENTAN PROBLEMAS

4.1 Arenas uniformes en estado suelto (abajo y arriba del nivel freático)

4.2 Arcillas blandas

1. NOCIONES DE MECANICA DE SUELOS

1.1 Definiciones y Relaciones Gravimétricas S_s, e, w, G_w, seco, sat, sum, Granulometría

Referencias.

1. E. Juárez B., y A. Rico R. "Mecánica de Suelos" Tomo I "Fundamentos de la Mecánica de Suelos", México, D.F. 1963.

2. Design Manual. "Soil Mechanics, Foundations, and Earth Structures. NAVDOCKS DM-7. Washington, D.C., 1962.

3. A. R. Jumikis, "Soil Mechanics, University Series In - Civil Engineering And Applied Mechanics". Princeton - New Jersey, 19?8.

4. T. W. Lambe y R. V. Whitman, "Soil Mechanics", Massa-- chusetts Institute of Technology, 1969.

5. K. Terzaghi y R. B. Peck,"Soil Mechanics In Engineering Practice. Segunda Edición, 1967.

6. G. Leonards, "Foundation Engineering.

7. Richart, Hall y Woods, "Vibrations of Soils and Founda-- tion. 19?9.

8. B. O. Hardin, M. ASCE y V. P. Drnevich, "Shear Modulus - and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects. junio 1972, No. SM6

9. H. B. Seed y I. M. Idriss, "Soil Moduli and Damping Fac- tors for Dynamic Response Analyses", EERC 70-10. Diciem- bre de 1970, University of California, Berkeley, Calif.

10. B. Martínez, J. L. León T., O. A. Rascón, A. Villarreal, "Determinación de las Propiedades Mecánicas de la Arcilla en el Vaso de Texcoco". Revista Ingeniería, abril-junio - 1974, F. I. UNAM.

11. E. Faccioli y D. Reséndiz, "Soil Dynamics Behavior Inclu- ding Liquefaction", Instituto de Ingeniería, E 15, mayo - 1975. UNAM.

que las propiedades del conjunto difieren grandemente de las de las partes.

El análisis químico es útil, pero da la composición integral de la arcilla y no informa sobre cómo se distribuyen sus componentes, en el caso de que se trate de arcillas producto de la mezcla de varias clases de minerales. Aún en arcillas puras, formadas por un solo mineral, la composición de éste puede tener variaciones importantes, por lo que los métodos químicos pueden ser de conclusiones inseguras.

REFERENCIAS

1 Sullivan J. D — *Physico-chemical control of properties of clays* — Trans. Electrochem. Soc. — 1939.

2 Winterkorn, H. F. y Baver, L. D. — *Sorption of liquids by Soil Colloids* — Soil Science.

3 Bridgman, P. W. — Proc. Am. Academy. Vol. 47 — 1912.

4 Terzaghi K. y Peck R. B. — *Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica* — (Trad. O. Moretto) — Ateneo Ed. — 1955.

BIBLIOGRAFIA

Soil Mechanics, Foundations and Earth Structures — G. P. Tschebotarioff — McGraw-Hill Book Co. — 1957.

Principles of Engineering Geology and Geotechnics — D. P. Krynine y W. R. Judd, McGraw-Hill Book Co. — 1957.

A Study of Changes in Physical Properties of Putnam Soil Induced by Ionic Substitution — H. F. Winterkorn, L. D. Baver y B. E. Moorman — Proc., H. R. B. Vol. 21 — 1941.

CAPITULO III

RELACIONES VOLUMETRICAS Y GRAVIMETRICAS EN LOS SUELOS

III-1. Fases del suelo. Símbolos y definiciones

En un suelo se distinguen tres fases constituyentes: la sólida, la líquida y la gaseosa. La fase sólida está formada por las partículas minerales del suelo (incluyendo la capa sólida adsorbida); la líquida por el agua (libre, específicamente), aunque en los suelos pueden existir otros líquidos de menor significación; la fase gaseosa comprende sobre todo el aire, si bien pueden estar presentes otros gases (vapores sulfurosos, anhídrido carbónico, etc.). La capa viscosa del agua adsorbida que presenta propiedades intermedias entre la fase sólida y la líquida, suele incluirse en esta última, pues es susceptible de desaparecer cuando el suelo es sometido a una fuerte evaporación (secado).

Las fases líquida y gaseosa del suelo suelen comprenderse en el *Volumen de Vacíos*, mientras que la fase sólida constituye el *Volumen de los Sólidos*.

Se dice que un suelo es *totalmente saturado* cuando todos sus vacíos están ocupados por agua. Un suelo en tal circunstancia consta, como caso particular, de sólo dos fases, la sólida y la líquida. Muchos suelos yacientes bajo el nivel freático son totalmente saturados.

Algunos suelos contienen, además, materia orgánica en diversas formas y cantidades: en las turbas, estas materias predominan y consisten en residuos vegetales parcialmente descompuestos.

Aunque el contenido de materia orgánica y las capas adsorbidas son muy importantes desde el punto de vista de las propiedades mecánicas del suelo, no es preciso considerarlos en la medición de pesos y volúmenes relativos de las tres fases principales; su influencia se toma en cuenta más facilmente en etapas posteriores del estudio de ciertas propiedades de los suelos.

En los laboratorios de Mecánica de Suelos puede determinarse fácilmente el peso de las muestras húmedas, el peso de las muestras secadas al horno y el peso específico relativo de los suelos. Estas magnitudes no son, empero, las únicas cuyo cálculo es necesario; es preciso obtener relaciones sencillas y prácticas, a fin de poder medir algunas otras magnitudes en términos de éstas. Estas relaciones, de tipo volumétrico y graviméfico, son de la mayor importancia para la aplicación sencilla y rápida de la teoría y su dominio debe considerarse indispensable.

La Fig. III-1 representa un esquema de una muestra de suelo, en que aparecen las fases principales, así como los conceptos de uso más común, con los símbolos con que se indicarán en lo que sigue.

El significado de los símbolos es el siguiente:

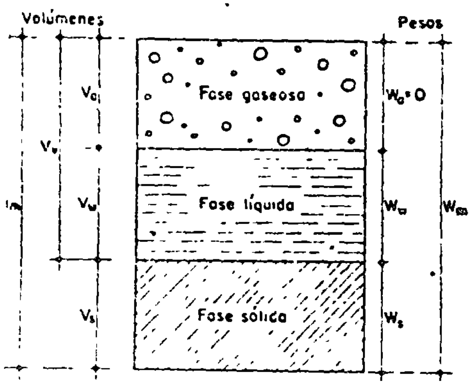


FIG III-1 ESQUEMA DE UNA MUESTRA DE SUELO, PARA INDICACIÓN DE LOS SÍMBOLOS USADOS

V_m = Volumen total de la muestra de suelo (volumen de la masa).

V_s = Volumen de la fase sólida de la muestra (volumen de sólidos).

V_v = Volumen de los vacíos de la muestra de suelo (volumen de vacíos).

V_w = Volumen de la fase líquida contenida en la muestra (volumen de agua).

V_a = Volumen de la fase gaseosa de la muestra (volumen de aire).

W_m = Peso total de la muestra del suelo (peso de la masa).

W_s = Peso de la fase sólida de la muestra de suelo (peso de los sólidos).

W_w = Peso de la fase líquida de la muestra (peso del agua).

W_a = Peso de la fase gaseosa de la muestra, convencionalmente considerado como nulo en Mecánica de Suelos.

Existe problema para definir el peso de sólidos, o sea del suelo seco, obtenido eliminando la fase líquida. El problema proviene del hecho de que la película de agua adsorbida no desaparece por completo al someter al suelo a una evaporación en horno, a temperaturas prácticas; la cuestión está convencionalmente resuelta en Mecánica de Suelos al definir como estado seco de un suelo al que se obtiene tras someter el mismo a un proceso de evaporación en un horno, con temperaturas de 105° C a 110° C y durante un período suficiente para llegar a peso constante, lo que se logra generalmente en 18 ó 24 horas.

En el anexo III-a de este capítulo, se trata la cuestión con más detalle.

III-2. Relaciones de pesos y volúmenes

En Mecánica de Suelos se relaciona el peso de las distintas fases con sus volúmenes correspondientes, por medio del concepto de peso específico, es decir, de la relación entre el peso de la sustancia y su volumen.

Se distinguen los siguientes pesos específicos:

γ_0 = Peso específico del agua destilada, a 4° C de temperatura y presión atmosférica correspondiente al nivel del mar. En sistemas derivados del métrico, es igual a 1 ó a una potencia de 10.

γ_w = Peso específico del agua en las condiciones reales de trabajo; su valor difiere poco del de γ_0, en muchas cuestiones prácticas, ambos son tomados como iguales. En el anexo III-b de este Capítulo aparece una tabla de la variación de los valores de γ_w en función de la temperatura, que es el concepto que influye en dicha variación.

γ_m = Peso específico de la masa del suelo. Por definición se tiene

$$\gamma_m = \frac{W_m}{V_m} = \frac{W_s + W_w}{V_m}$$

γ_s = Peso específico de la fase sólida del suelo

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$$

El peso específico relativo se define como la relación entre el peso específico de una sustancia y el peso específico del agua a 4° C, destilada y sujeta a una atmósfera de presión.

En sistemas de unidades apropiados, su valor es idéntico al módulo del peso específico correspondiente, según se desprende de lo anterior. Se distinguen los siguientes pesos específicos relativos.

s_m = Peso específico relativo de la masa del suelo. Por definición:

$$s_m = \frac{\gamma_m}{\gamma_0} = \frac{W_m}{V_m \gamma_0}$$

s_s = Peso específico relativo de la fase sólida del suelo (de sólidos, s_s), para el cual se tiene:

$$s_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \frac{W_s}{V_s \gamma_0} \quad (3\text{-}4)$$

III-3. Relaciones fundamentales

Las relaciones que se dan a continuación son importantísimas para el manejo comprensible de las propiedades mecánicas de los suelos y un completo dominio de su significado y sentido físico es imprescindible para poder expresar en forma asequible los datos y conclusiones de la Mecánica de Suelos.

a) Se denomina *Relación de Vacíos, Oquedad o Indice de poros* a la relación entre el volumen de los vacíos y el de los sólidos de un suelo:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \qquad (3\text{-}5)$$

La relación puede variar teóricamente de 0 ($V_v = 0$) a ∞ (valor correspondiente a un espacio *vacío*). En la práctica no suelen hallarse valores menores de 0.25 (arenas muy compactas con finos) ni mayores de 15, en el caso de algunas arcillas altamente compresibles.

b) Se llama *porosidad* de un suelo a la relación entre su volumen de vacíos y el volumen de su masa. Se expresa como porcentaje:

$$n\,(\%) = \frac{V_v}{V_m} \times 100 \qquad (3\text{-}6)$$

Esta relación puede variar de 0 (en un suelo ideal con sólo fase sólida) a 100 (espacio *vacío*). Los valores reales suelen oscilar entre 20% y 95%.

c) Se denomina *grado de saturación* de un suelo a la relación entre su volumen de agua y el volumen de sus vacíos. Suele expresarse también como un porcentaje.

$$G_w\,(\%) = \frac{V_w}{V_v} \times 100 \qquad (3\text{-}7)$$

Varía de 0 (suelo seco) a 100% (suelo totalmente saturado).

d) Se conoce como *contenido de agua* o *humedad* de un suelo, la relación entre el peso de agua contenida en el mismo y el peso de su fase sólida. Suele expresarse como un porcentaje:

$$w\,(\%) = \frac{W_w}{W_s} \times 100 \qquad (3\text{-}8)$$

Varía teóricamente de 0 a ∞. En la naturaleza la humedad de los suelos varía entre límites muy amplios. En arcillas japonesas se han registrado contenidos de agua de 1,200-1,400%, si bien estos valores son excepcionales. En México existen valores de 1 0 0% en arcillas procedentes de la región sureste del país. En el valle de México son normales humedades de 500-600%.

e) El *grado de saturación de aire* es una magnitud de escasa importancia práctica, respecto a las anteriores relaciones. Se define:

$$G_A\,(\%) = \frac{V_A}{V_v} \times 100 \qquad (3\text{-}9)$$

III-4. Correlación entre la relación de vacíos y la porosidad

C[illegible] adoptar de [illegible] arbitrariamente el valor unidad para el volumen de sólidos; los demás conceptos aparecen calculados con base en ese dato de partida, aplicando las definiciones correspondientes. Lo anterior equivale a calcu-

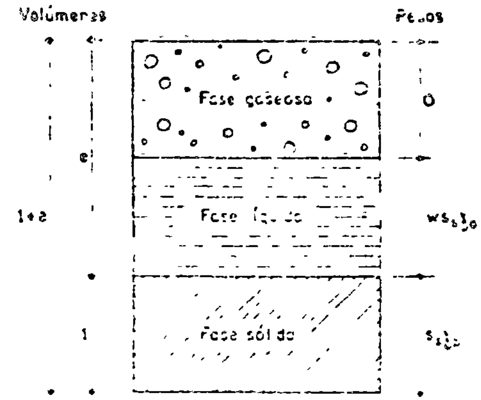


Fig. III-2. Esquema de una muestra de suelo

[illegible] todos los conceptos [illegible] a una escala de unidades tal que en ella se tenga $V_s = 1$. Por ejemplo, si $V_s = 1$ el W_s puede calcularse con la expresión (3-4) ligeramente modificada:

$$W_s = V_s s_s \gamma_0 \quad \therefore \quad W_s = s_s \gamma_0$$

y teniendo en cuenta (3-8), en forma decimal, se tiene $W_w = ws_s\gamma_0$ tal como aparece en el esquema.

Aplicando la definición de Porosidad.

$$n = \frac{V_v}{V_m} = \frac{e}{1+e} \qquad (3\text{-}10)$$

La expresión (3-10) anterior da una correlación importante entre la Relación de Vacíos y la Porosidad de un suelo.

De (3-10) se deduce de inmediato que:

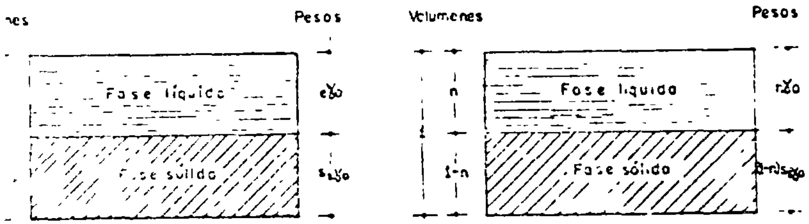
$$e = \frac{n}{1-n} \qquad (3\text{-}11)$$

Ptem[illegible] presentarse la cuestión de cuál sea la razón [illegible] de [illegible] la magnitud del volumen de [illegible] la relaciones para de [illegible]

...tra de suelo. En efecto, tanto la Relación de Vacíos como la Porosidad cubren tal finalidad. El término porosidad es más antiguo y se ha usado en diferentes campos de la ingeniería civil; la Mecánica de Suelos lo ha preferido en lo referente a las arenas. Para suelos compresibles (arcillas) es de interés conocer la disminución del volumen de vacíos bajo la influencia de las cargas: en tal caso la porosidad tiene la desventaja de representar una relación entre dos variables, mientras la relación de vacíos expresa la relación de una cantidad variable a una constante, aún para un suelo en compresión. En vista de lo anterior, Terzaghi consideró oportuno introducir el concepto de relación de vacíos, originalmente para suelos finos; hoy, el concepto se ha hecho de uso general.

5. Fórmulas más útiles referentes a suelos saturados

Varias relaciones utilísimas referentes a suelos saturados pueden obtenerse de los esquemas mostrados en la Fig. III-3. El (a) está formado a partir de la adopción del valor unidad para el volumen de sólidos, tal como antes se hizo; en el (b) se tomó como unitario el volumen de la masa, en forma análoga.



(a) (b)

FIG. III-3. ESQUEMAS PARA INDICACIÓN DE CORRELACIONES EN SUELOS SATURADOS.

De (a), usando (3-8), se puede obtener

$$w = \frac{e\gamma_0}{s_s\gamma_0} \quad \therefore \quad e = ws_s \tag{3-12}$$

es una relación fundamental en suelos saturados.

Usando (3-1) y (3-3) en (a) y (b) puede obtenerse

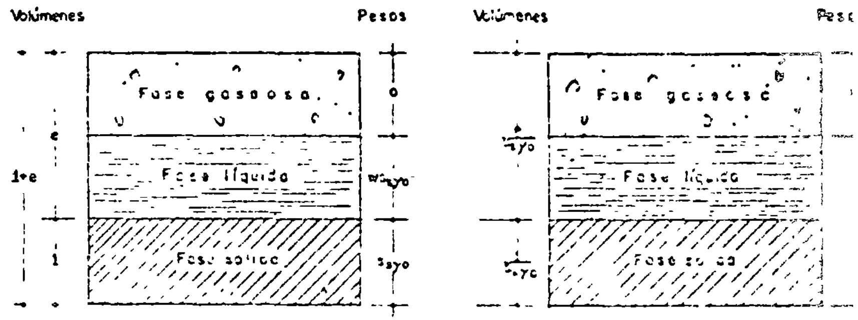
$$s_m = \frac{s_s + e}{1 + e} = \frac{s_s(1 + w)}{1 + s_s w} = n + (1 - n)\, s_s \tag{3-13}$$

$$\gamma_m = s_m\gamma_0 = \frac{s_s + e}{1 + e}\gamma_0 = \frac{s_s(1 + w)}{1 + s_s w}\gamma_0 = [n + (1 - n)\, s_s]\,\gamma_0 \tag{3-14}$$

Fórmulas muy usadas para el cálculo de los pesos específicos en función de diferentes datos muy comunes en la práctica.

III-6. Formulas más útiles referentes a suelos parcialmente saturados

En la Fig. III-4 aparecen dos esquemas de suelos parcialmente saturados; el (a) es análogo al de la Fig. III-2 y el (b) está obtenido haciendo unitario el peso de los sólidos.



(a) (b)

FIG. III-4. ESQUEMAS PARA INDICACIÓN DE CORRELACIONES EN SUELOS PARCIALMENTE SATURADOS.

En (b), al considerar unitario a W_s, el peso W_w resulta ser numéricamente igual al contenido de agua por definición de este concepto.

Aplicando a los esquemas (a) y (b) de la Fig. III-4 las definiciones (3-1), (3-3) y (3-7) se tiene:

$$\gamma_m = \frac{1 + w}{1 + e}\gamma_s \tag{3-15}$$

$$s_m = \frac{1 + w}{1 + e}s_s \tag{3-16}$$

$$G_w = \frac{ws_s}{e} \tag{3-17}$$

La ecuación (3-17) es la réplica en suelos no saturados de la (3-12), válida únicamente para suelos totalmente saturados.

III-7. Peso específico seco y saturado

El primero es un valor particular de γ_m para el caso en que el grado de saturación del suelo sea nulo:

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V_m} \tag{3-18}$$

El peso específico saturado es el valor de γ_m cuando $G_w = 100\%$

$$\gamma_{sat.} = \frac{W_s + W_w}{V_m} \tag{3-19}$$

III-8. Suelos sumergidos

Atención especial debe darse al cálculo de pesos específicos de suelos situados bajo el nivel freático. En tal caso, el empuje hidrostático ejerce influencia en los pesos, tanto específicos como específicos relativos.

El peso específico relativo de la materia sólida sumergida vale

$$s_s' = s_s - 1 \tag{3-20}$$

pues el empuje hidrostático neto es el peso en agua del volumen desalojado por los sólidos.

Análogamente

$$s_m' = s_m - 1 \tag{3-21}$$

Los pesos específicos correspondientes son:

$$\gamma_s' = s_s'\gamma_0 = \gamma_s - \gamma_0$$

$$\gamma_m' = s_m'\gamma_0 = \gamma_m - \gamma_0 \tag{3-22}$$

En la Fig. III-3 puede obtenerse, teniendo en cuenta las fórmulas anteriores, que:

$$\gamma_m' = \frac{s_s - 1}{1 + e}\gamma_0 = \frac{s_s - 1}{1 + s_s w}\gamma_0 \tag{3-23}$$

y también

$$\gamma_m' = \frac{s_s - 1}{s_s}\gamma_d \tag{3-24}$$

Las fórmulas (3-23) y (3-24) son muy usadas para el cálculo de los pesos específicos sumergidos.

Nótese que en lo anterior los suelos sumergidos se consideran como ...; esto es razonable en la gran mayoría de los casos, dada su posición bajo el nivel freático.

ANEXO III-a

Variación del contenido de agua con la temperatura de secado en suelos

En III-1 se mencionó la convención existente en Mecánica de Suelos, referente al secado de un suelo.

En realidad la temperatura escogida (105-110° C) es relativamente arbitraria, pues como se ve en la gráfica III-a 1, el suelo sigue conservando a esa temperatura una película de agua adherida, la cual puede hacerse disminuir aún más a temperaturas mayores de secado. A 105-110° C se considera que el agua remanente forma ya parte de la fase sólida, pero la gráfica mencionada indica, para suelos de muy variables características, que el intervalo escogido carece de una significación especial.

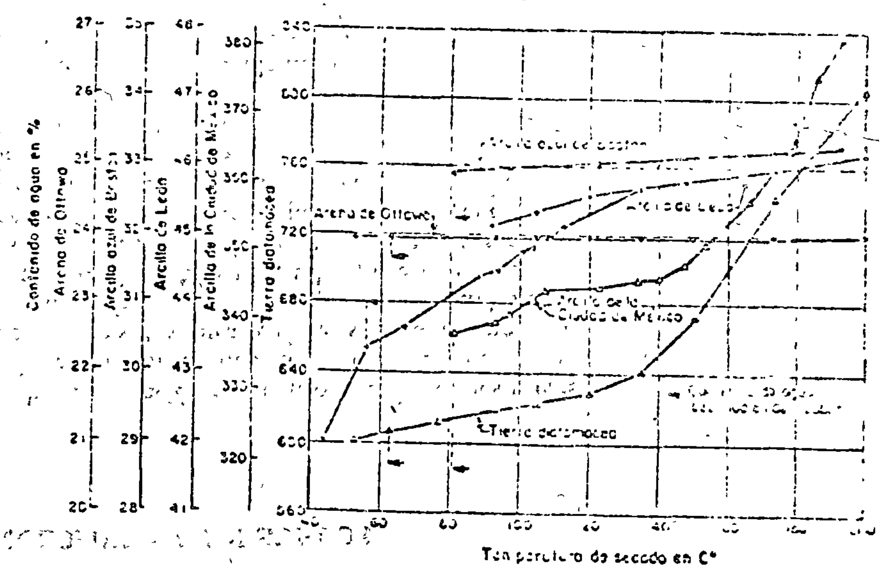


Fig. III-a1. Curvas de secado

CAPITULO V

GRANULOMETRIA EN SUELOS

V-1. Introducción

En los comienzos de la investigación de las propiedades de los suelos se creyó que las propiedades mecánicas dependían directamente de la distribución de las partículas constituyentes según sus tamaños; por ello era preocupación especial de los ingenieros la búsqueda de métodos adecuados para obtener tal distribución. Aún hoy, tal parece que todo técnico interesado en suelos debe pasar a modo de etapa de iniciación, por una época en que se siente obligado a creer que, con suficiente experiencia, es posible deducir las propiedades mecánicas de los suelos a partir de su distribución granulométrica o descripción por tamaños; es común, sin embargo, que una no muy dilatada experiencia haga que tal sueño se desvanezca.

Solamente en suelos gruesos, cuya granulometría puede determinarse por mallas, la distribución por tamaños puede revelar algo de lo referente a las propiedades físicas del material; en efecto, la experiencia indica que los suelos gruesos bien graduados, o sea con amplia gama de tamaños, tienen comportamiento ingenieril más favorable, en lo que atañe a algunas propiedades importantes, que los suelos de granulometría muy uniforme; en capítulos posteriores, habrá ocasión de resaltar este punto.

Más aún en esos suelos gruesos, ha de señalarse, según ya se dijo, que el comportamiento mecánico e hidráulico está principalmente definido por la compacidad de los granos y su orientación, características que destruye, por la misma manera de realizarse, la prueba de granulometría, de modo que en sus resultados finales se ha tenido que perder toda huella de aquellas propiedades tan decisivas. De esto se desprende lo muy deseable que sería poder hacer una investigación granulométrica con un método tal que respetara la estructuración inalterada del material; este método, sin embargo, hasta hoy no se ha encontrado y todo parece indicar que no se podrá desarrollar jamás.

En suelos finos, de estructura panaloide o floculenta en estado inalterado, las propiedades mecánicas e hidráulicas dependen en tal grado

·· su estructuración e historia geológica, que el conocimiento de su granulometría, resulta totalmente inútil. Sin embargo, el ingeniero interesado en suelos debe estar suficientemente familiarizado con los criterios técnicos, hoy superados, basados en la distribución granulométrica y con los métodos más importantes para su determinación, pues estos temas ocupan aún un espacio apreciable dentro de la literatura técnica y se hace necesario al ingeniero moderno estar más informado sobre esta materia que aquellos que, sin la conveniente meditación de sus ideas, aplican normas simplistas, conducentes a conclusiones inaceptables.

·2. Sistemas de clasificación de suelos basados en criterios de granulometría

Los límites de tamaño de las partículas que constituyen un suelo, ofrecen un criterio obvio para una clasificación descriptiva del mismo. Tal criterio fue usado en Mecánica de Suelos desde un principio e incluso antes de la etapa moderna de esta ciencia. Originalmente, el suelo se dividía únicamente en tres o cuatro fracciones debido a lo engorroso de los procedimientos disponibles de separación por tamaños. Posteriormente, con el advenimiento de la técnica del cribado, fue posible efectuar el trazo de curvas granulométricas, contando con agrupaciones de las partículas del suelo en mayor número de tamaños diferentes. Actualmente se pueden ampliar notablemente las curvas en los tamaños finos, gracias a la aplicación de técnicas de análisis de suspensiones.

Algunas clasificaciones granulométricas de los suelos según sus tamaños, son las siguientes:

a) *Clasificación Internacional.*

Basada en otra desarrollada en Suecia.

Tamaño en mm

2.0	0.2	0.02	0.002	0.0002
Arena gruesa	*Arena fina*	*Limo*	*Arcilla*	*Ultra-Arcilla (coloides)*

b) *Clasificación M.I.T.*

Fue propuesta por G. Gilboy y adoptada por el Massachusetts [illegible] of Technology.

Tamaño en mm

2.0	0.6	0.2	0.06	0.02	0.006	0.002	0.0006	0.0002
Gruesa	*Media*	*Fina*	*Gruesa*	*Media*	*Fino*	*Gruesa*	*Media*	*Fina (coloides)*
ARENA			LIMO			ARCILLA		

c) La siguiente clasificación utilizada a partir de 1936 en Alemania está basada en una proposición original de Kopecky.

TABLA 5-1

MATERIAL	CARACTERISTICA	TAMAÑO mm
Piedra	------	Mayor de 70 mm
Grava	Gruesa	[illegible] 70
	Media	5 a [illegible]
	Fina	[illegible]
Arena	Gruesa	[illegible] a 2
	Media	[illegible]
	Fina	[illegible]
Polvo	Grueso	0.05 a 0.1
	Fino	0.02 a 0.05
Limo	Grueso	0.006 [illegible]
	Fino	0.002 [illegible] 0.006
Arcilla	Gruesa	0.0006 a 0.002
	Fina	[illegible]
Ultra-Arcilla	------	[illegible] a 0.0002

Abajo de 0.00002 mm las partículas constituyen disoluciones verdaderas y ya no se depositan.

Con frecuencia se han usado otros tipos de clasificación, destacando el método gráfico del Public Roads Administration de los E.U.A., pero su 's es hoy menor cada vez, por lo cual se considera que las clasifica-s señaladas son suficientes para dar idea del mecanismo utilizado elaboración.

Puede notarse que las clasificaciones anteriores y otras existentes se ceden en ocasiones, y a un intervalo que se nombra de una manera na clasificación le corresponde otra palabra en otro sistema. Pero ..da, la objeción más importante que puede hacerse a estos sistemas uso que hacen de las palabras *limo* y *arcilla* para designar fraccio-te suelo definidas exclusivamente por tamaños. Estos términos se han en ingeniería como nombres para designar tipos de suelo con pro-ides físicas definidas; la razón por la que estos nombres se introdu-para ciertas fracciones de tamaños fue la idea errónea de que tales ños eran las causas de aquellas características típicas. Sin embargo, se sabe que las características de una arcilla típica se deben en forma preponderante a las propiedades de su fracción más fina. Un suelo ado por partículas de cuarzo del tamaño de las arcillas o un depó-natural de harina de roca de la misma graduación, tendría que clasi-se como 100% de arcilla, a pesar de que el conjunto no presenta ... de las propiedades que definen el comportamiento de ese mate-... otra parte, un suelo de comportamiento típicamente arcilloso, ... de ... ales apropiados de humedad, posiblemente no contenga más ... 20% de arcilla, según el criterio granulométrico. En lo sucesivo, los ...inos *limo* y *arcilla* se emplearán únicamente para designar *tipos de* ... recurriendo a la mención específica de un tamaño de partícula ...ndo se requiera designar cierta fracción granulométrica.

5. Representación de la distribución granulométrica

Siempre que se cuente con suficiente número de puntos, la represen-ión gráfica de la distribución granulométrica debe estimarse preferi-a la numérica en tablas.

La gráfica granulométrica suele dibujarse con porcentajes como ...enadas y tamaños de las partículas como abscisas. Las ordenadas se ...eren a porcentaje, en peso, de las partículas menores que el tamaño ...respondiente. La representación en escala semilogarítmica (eje de abs-...s en escala logarítmica) resulta preferible a la simple representación ...al, pues en la primera se dispone de mayor amplitud en los tamaños ...os y muy finos, que en escala natural resultan muy comprimidos, ... un módulo práctico de escala.

La forma de la curva da inmediata idea de la distribución granulo-... del suelo; un suelo constituido por partículas de un solo tamaño, ... representado por una línea vertical (pues el 100% de sus partícu-... en peso, es de menor tamaño que cualquiera mayor que el que el

suelo posea y 60% de partículas tienen tamaño menor); una curva muy tendida indica gran variedad en tamaños (suelo bien graduado).

En la Fig. V-1 se muestran algunas curvas granulométricas reales.

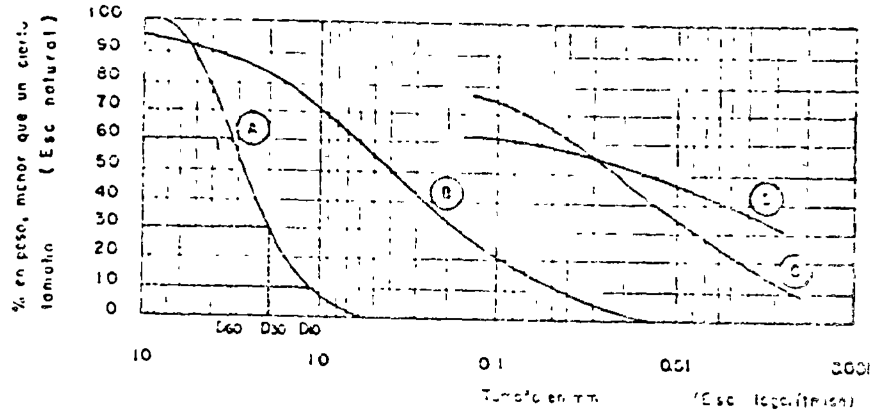


FIG. V-1 CURVAS GRANULOMÉTRICAS DE ALGUNOS SUELOS

(A) Arena muy uniforme de Ciudad Cuauhtémoc, México
(B) Suelo bien graduado Puebla, Méx.
(C) Arcilla del Valle de México (curva obtenida con hidrómetro)
(D) Arcilla del Valle de México (curva obtenida con hidrómetro).

Como una medida simple de la uniformidad de un suelo, Allen Hazen propuso el coeficiente de uniformidad.

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} \qquad (5\text{-}1)$$

En donde

D_{60}: Tamaño tal, que el 60%, en peso, del suelo, sea igual o menor.

D_{10}: Llamado por Hazen diámetro efectivo, es el tamaño tal que sea igual o mayor que el 10%, en peso, del suelo.

En realidad, la relación (5-1) es un coeficiente de no uniformidad, pues su valor numérico decrece cuando la uniformidad aumenta. Los suelos con $Cu < 3$ se consideran muy uniformes, aún las arenas naturales muy uniformes rara vez presentan $Cu < 2$.

Como dato complementario, necesario para definir la uniformidad, se define el coeficiente de curvatura del suelo con la expresión.

$$C_c = \frac{(D_{30})^2}{D_{60} \times D_{10}} \qquad (5\text{-}2)$$

D_{30} se define análogamente que los D_{10} y D_{60} anteriores. Esta relación [illegible] valor entre 1 y 3 en suelos bien graduados, con amplio margen [illegible] de partículas y cantidades apreciables de cada tamaño intermedio.

A partir de las curvas granulométricas acumulativas descritas, es posible encontrar la curva correspondiente a la función

$$y = \frac{d(p)}{d(\log D)}$$

p es el porcentaje, en peso, de las partículas menores que un cierto tamaño y D el tamaño correspondiente; la curva anterior, que se dibuja en escala semilogarítmica, suele denominarse el *histograma* del suelo y representa la frecuencia con que se presentan en ese suelo partículas entre ciertos tamaños. El área bajo el histograma es 100, por representar la totalidad de las partículas del suelo. En la Fig. V-2 aparece un histograma de un suelo en el que predominan partículas de tamaño próximo a 1 mm.

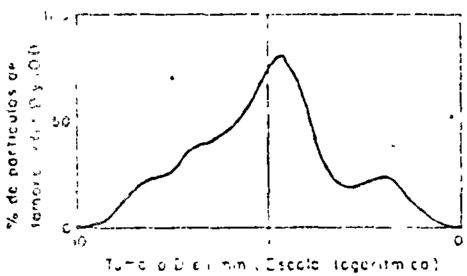


FIG. V-2 HISTOGRAMA DE UN SUELO

Los valores más altos del histograma corresponden a zonas muy verticales de la curva acumulativa primeramente vista y los valores más bajos a zonas con tendencia a la horizontalidad. Actualmente el uso de histogramas no está muy extendido en los laboratorios.

También se han representado las curvas granulométricas en escala doblemente logarítmica, con la ventaja, para algunos usos, de que en este caso la forma de las curvas se acerca notablemente a una línea recta en muchos suelos naturales.

V-4. Análisis mecánico

Bajo ese título general se comprenden todos los métodos para la separación de un suelo en diferentes fracciones, según sus tamaños. De tales métodos existen dos que merecen atención especial: el cribado por mallas y el análisis de una suspensión del suelo con hidrómetro (densímetro).

El primero se usa para obtener las fracciones correspondientes a los tamaños mayores del suelo; generalmente se llega así hasta el tamaño correspondiente a la malla N° 200 (0.074 mm). La muestra de suelo se hace pasar sucesivamente a través de un juego de tamices de aberturas descen-

dentes, hasta la malla N° 200; los retenidos en cada malla se pesan y el porcentaje que representan respecto al peso de la muestra total se suma a los porcentajes retenidos en todas las mallas de mayor tamaño; el complemento a 100% de [illegible] que el tamaño representado [illegible] un punto de la curva [illegible] método se dificulta [illegible] el cribado a través de las mallas N° 100 [illegible] N° 200 [illegible] suele requerir agua para ayudar el paso de la muestra (procedimiento de lavado).

Los tamaños menores del suelo exigen una investigación fundada en otros principios. El método del hidrómetro (densímetro) es hoy, quizá, el de uso más extendido y el único que se verá [illegible] Como todos los de este grupo, el método [illegible] velocidad de sedimentación de partículas en un líquido es función de su tamaño. El método fue propuesto independientemente por Goldschmidt en Noruega (1926) y por Bouyoucos en los E.U.A. (1927).

Debido a lo importante de los errores que afectaban a los resultados originales, el método no satisfizo [illegible] posteriores, el Public Road Administration de los E.U.A. encomendó al Dr. A. Casagrande [illegible] y revisar su corrección [illegible]

La ley fundamental de que se hace uso en el procedimiento del hidrómetro es debida a Stokes y proporciona una relación entre la velocidad de sedimentación de las partículas del suelo en un fluido y el tamaño de esas partículas. Esta relación [illegible] haciendo observaciones con microscopio [illegible] G. G. Stokes [illegible] aplicable a una esfera que cae en un fluido [illegible] infinita. Aún con esa limitación importante, pues las partículas de suelo se apartan muchísimo de la forma esférica, la ley de Stokes es preferible a las observaciones empíricas. [illegible] *diámetro equivalente* de la partícula, que es el diámetro de una esfera del mismo S_s [illegible] se sedimenta con [illegible] aproximadamente [illegible] medio diámetro real, pero en [illegible] el diámetro real puede ser hasta cuatro veces el equivalente [illegible] que en partículas muy finas, esta forma es la más [illegible] razón más para que dos curvas granulométricas iguales, correspondientes [illegible]

1.2 [illegible] índice

1.2.1 Plasticidad

LL, LP, IP y su significado. Carta de plasticidad de Casagrande. Posición de w respecto a LL y LP

REFERENCIAS

1. Tyler, W.S., Co. — *Catálogo 53* — Cleveland, Ohio. — 1947

BIBLIOGRAFIA

The Hydrometer Method for Mechanical Analysis of Soils and other Granular Materials — A. Casagrande — Cambridge, Mass. — 1931

Fundamentals of Soil Mechanics — D.W. Taylor — John Wiley and Sons, Inc. 1956

La Mecánica de los Suelos en la Ingeniería Práctica — K. Terzaghi y R.B. Peck (Trad. O. Moretto) — Ed. El Ateneo — 1955.

Mecánica del Suelo — J.A. Jiménez Salas — Ed. Dossat — 1954.

Soil Testing for Engineers — T.W. Lambe — John Wiley and Sons — 1958

Laboratory Testing in Soil Engineering — T.N.W. Akroyd — G.T. Foulis and Co. 1957.

Instructivo para Ensaye de Suelos — Secretaría de Recursos Hidráulicos — México — 1954.

NOTA: El presente Capítulo ha sido elaborado prestando especial atención a un resumen de las clases impartidas por los Profs. Dr. A. Casagrande e Ing. S.D. Wilson en la Universidad de Harvard, E.U.A.

CAPITULO VI

PLASTICIDAD

VI-1. Generalidades y definiciones

Existen suelos que al ser remoldeados, cambiando su contenido de agua si es necesario, adoptan una consistencia característica, que desde épocas antiguas se ha denominado *Plástica*. Estos suelos han sido llamados arcillas, originalmente, por los hombres dedicados a la cerámica; la palabra pasó a la Mecánica de Suelos, en épocas más recientes, con idéntico significado. La plasticidad es, en este sentido, una propiedad tan evidente que ha servido antaño para clasificar suelos en forma puramente descriptiva. Pronto se reconoció que existía una relación específica entre la plasticidad y las propiedades físico-químicas [illegible] del comportamiento [illegible] de los [illegible]. En [illegible] plasticidad se [illegible] en una propiedad [illegible] tro, dejando de ser una cualidad [illegible] descriptiva [illegible] bilidad [illegible] las investigaciones posteriores han probado que la plasticidad de un suelo es debida a su contenido de partículas más finas de forma laminar. Ya se ha visto (Capítulo IV) [illegible] ejerce una influencia importante en [illegible] del [illegible] mientras que el pequeño tamaño propio de esas partículas hace que la permeabilidad del conjunto sea muy baja; existe, así, una relación entre la plasticidad y esas y otras propiedades físicas de importancia.

Por otra parte, en épocas recientes, otras ramas de la ingeniería han desarrollado otra interpretación del concepto plasticidad, fundada en las características esfuerzo-deformación de los materiales. Cuando un material se sujeta a esfuerzos de tensión uniaxial, por ejemplo, su comportamiento mecánico [illegible] descrito por [illegible] nes; una hipótesis [illegible] compresibilidad [illegible] criterio de falla. La forma de una curva esfuerzo-deformación depende naturalmente de las características del material con que se trabaje [illegible] na [illegible]. Por ejemplo, para esfuerzos lo suficientemente pequeños en cada caso, la relación esfuerzo-deformación es reversible (comportamiento elástico); para valores mayores del esfuerzo, sin embargo, la relación se hace irreversible, teniéndose un comportamiento llamado plástico.

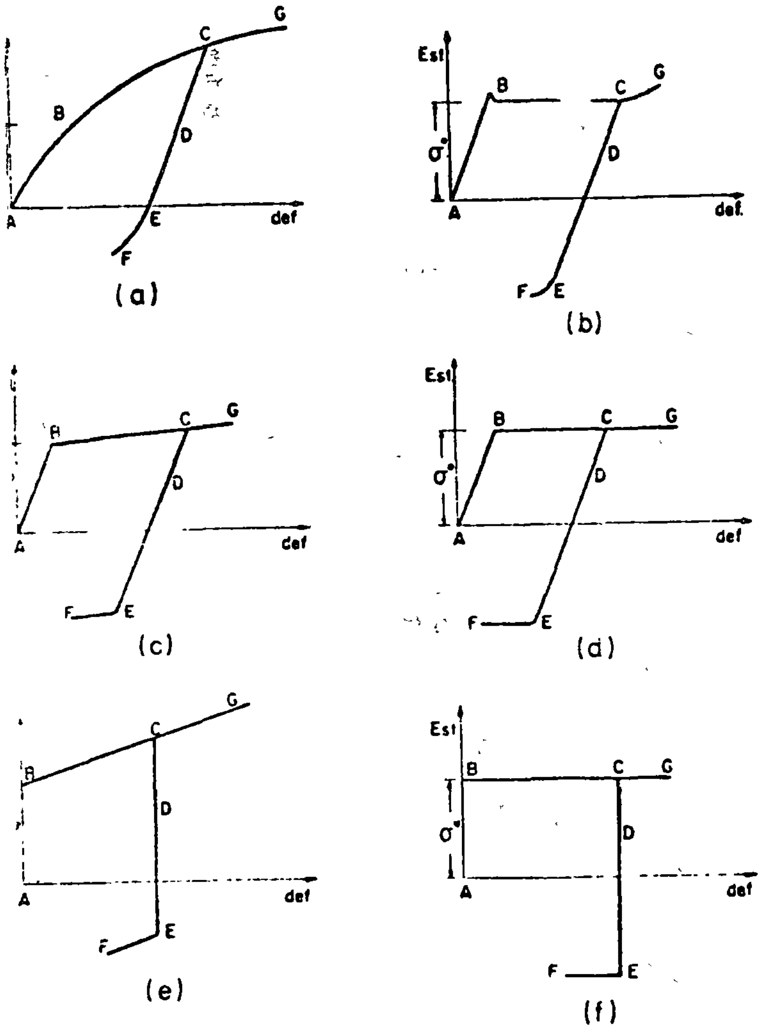


FIG VI - 1 DISTINTAS CURVAS ESFUERZO-DEFORMACION

a) - Concreto
b) - Hierro dulce
c) - Material elasto plastico, con endurecimiento por deformación
d) - Material elasto plástico perfecto
e) - Material rígido plastico, con endurecimiento por deformacion
f) - Material rígido plastico perfecto

La transición entre los estados plástico y elástico puede ser abrupta (Fig. VI-1.b) o gradual (Fig. VI-1.a); en el primer caso resulta el esfuerzo de transición, en el segundo ha de ser convencionalmente definido. Las curvas esfuerzo-deformación de los materiales reales no resultan a veces apropiadas para ser utilizadas en la teoría, por lo cual se hace necesario frecuentemente recurrir a idealizaciones más sencillas y esquemáticas. Por ejemplo, la curva (*c*) (Fig. VI-1) es una simplificación de la (*a*) de la misma figura; en este caso el segmento $\overline{AB}$ representa el comportamiento elástico y el *BC*, el plástico; si *BC* fuera horizontal (como en el caso *d* o en el *f*) se diría que el comportamiento representado es perfectamente plástico. Hay ocasiones en que las deformaciones elásticas son despreciables en comparación con las plásticas; en tal caso son posibles las idealizaciones del tipo (*e*) y (*f*) de la Fig. VI-1 (sólidos rígido-plásticos). En lo anterior no hay modo de distinguir el comportamiento plástico del elástico no lineal; para realizar la distinción es preciso considerar a la curva que se obtiene al descargar al material; en los materiales elásticos no lineales la curva de descarga regresa al origen redescribiendo la misma gráfica correspondiente al proceso de carga; en los materiales plásticos el proceso de carga es irreversible; es decir, la curva de descarga toma una forma distinta y al esfuerzo cero corresponde al final una deformación permanente.

La distinción entre el comportamiento plástico y el elástico se ha de establecer claramente, puesto que las conclusiones y criterios del ingeniero ante ambas posibilidades son muy diferentes. Naturalmente no es este el lugar apropiado para establecer detalladamente la distinción, que comprende dos aspectos básicos: la influencia de la historia previa de esfuerzos y deformaciones del material y la razón de variación actual de esos esfuerzos.

El primer aspecto se relaciona con dos características, llamadas "puntos de fluencia" (de tensión y compresión), teniendo el material comportamiento elástico mientras el esfuerzo actual se mantenga entre esos límites; al principio esas dos características son numéricamente iguales y, en el caso de un material perfectamente plástico, se conservan constantes. Pero para materiales en que haya endurecimiento por deformación progresiva, los valores de esos límites dependen de la historia de esfuerzos. Por ejemplo, en la Fig. VI-1, (*a*), (*c*) y (*e*), en la zona *D* los puntos de fluencia en tensión y compresión son los esfuerzos en *C* y *E*, respectivamente, mientras que, inicialmente eran $\pm\sigma^{\circ}$, siendo σ° el esfuerzo en el punto *B*. Pero aún si el esfuerzo no se mantiene entre los límites anteriores, es preciso que se cumpla una segunda condición para poder considerar su comportamiento plástico; es necesario que la razón de variación de los esfuerzos no disminuya en el punto de fluencia de tensión y no aumente en el punto de fluencia de compresión. Por ejem-

ANEXO XII - A

...ICADO DE CLASIFICACION DE SUELOS
...CLUYENDO IDENTIFICACION Y DESCRIPCION

NOMBRES TIPICOS	INFORMACION NECESARIA PARA LA DESCRIPCION DE LOS SUELOS	CRITERIO DE CLASIFICACION EN EL LABORATORIO	
...as bien graduadas, mezclas de grava arena con poco o nada de finos	Dese el nombre típico, indíquense los porcentajes aproximados de grava y arena, tamaño máximo, angulosidad, características de la superficie y dureza de las partículas gruesas, nombre local y geológico, cualquier otra información descriptiva pertinente y el símbolo entre paréntesis	Coeficiente de uniformidad (C_u) Coeficiente de curvatura (C_c) $C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$, mayor de 4. $C_c = \frac{(D_{30})^2}{D_{10} \times D_{60}}$, entre 1 y 3	
...as mal graduadas, mezclas de grava arena con poco o nada de finos		No satisfacen todos los requisitos de graduación para GW	
...avas limosas, mezclas de grava arena y limo		Límites de plasticidad abajo de la "línea A" ó I_p menor que 4	Arriba de la "línea A" y con I_p entre 4 y 7 son casos de frontera que requieren el uso de símbolos dobles
...avas arcillosas, mezclas de grava, arena y arcilla	Para los suelos inalterados agréguese información sobre estratificación, compacidad, cementación, condiciones de humedad y características de drenaje	Límites de plasticidad arriba de la "línea A" con I_p mayor que 7	
...as bien graduadas, arenas con grava, con poco o nada de finos		$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$, mayor de 6 $C_c = \frac{(D_{30})^2}{D_{10} \times D_{60}}$, entre 1 y 3	
...as mal graduadas, arenas con grava, con poco o nada de finos	EJEMPLO	No satisfacen todos los requisitos de graduación para SW	
...as limosas, mezclas de arena y limo	Arena limosa con grava, como un 20 % de grava de partículas duras, angulosas y de 1.5 cm de tamaño máximo; arena gruesa a fina de partículas redondeadas o subangulosas, ...redondeadas, de ... ...no plásticos de ba...ja resistencia en estado seco; compacta y húmeda en el lugar, arena aluvial (SM)	Límites de plasticidad abajo de la "línea A" ó I_p menor que 4	Arriba de la "línea A" y con I_p entre 4 y 7 son casos de frontera que requieren el uso de símbolos dobles
...as arcillosas, mezclas de arena y arcilla		Límites de plasticidad arriba de la "línea A" con I_p mayor que 7	

Úsese la curva granulométrica para identificar las fracciones de suelo anotadas en la columna de identificación en el campo

Determínense los porcentajes de grava y arena de la curva granulométrica

Dependiendo del porcentaje de finos (fracción que pasa la malla Nº 200) los suelos gruesos se clasifican como sigue:

Menos de 5% GW, GP, SW, SP

Más de 12 % GM, GC, SM, SC

5% a 12 % Casos de frontera que requieren el uso de símbolos dobles

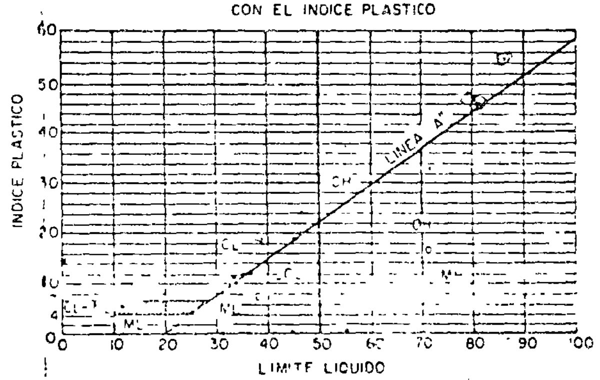
EQUIVALENCIA DE SIMBOLOS

G Grava, M Limo, O- Suelos orgánicos, W- Bien graduado, L- Baja compresibilidad

S Arena, C- Arcilla, Pt- Turba, P- Mal graduado, H- Alta compresibilidad

NOMBRES TIPICOS	INFORMACION NECESARIA PARA LA DESCRIPCION DE LOS SUELOS
...imos inorgánicos, polvo de roca, limos ...nosos o arcillosos ligeramente plásticos	Dese el nombre típico, indíquense el grado y carácter de la plasticidad, cantidad y tamaño máximo de las partículas gruesas, color del suelo húmedo, nombre local y geológico, cualquier otra información descriptiva pertinente y el símbolo entre paréntesis
...rcillas inorgánicas de baja o media plasticidad, arcillas con grava, arcillas arenosas, arcillas limosas, arcillas pobres	
Limos orgánicos y arcillas limosas orgánicas de baja plasticidad	
Limos inorgánicos, limos micáceos o diatomáceos, limos elásticos	Para los suelos inalterados agréguese información sobre la estructura, estratificación, consistencia tanto en estado inalterado como remoldeado, condiciones de humedad y drenaje
...rcillas inorgánicas de alta plasticidad, arcillas francas	
Arcillas orgánicas de media a alta plasticidad, limos orgánicos de media plasticidad	EJEMPLO
Turba y otros suelos altamente orgánicos	Limo arcilloso, café, ligeramente plástico, porcentaje reducido de arena fina, numerosos ... firme y seco en el lugar, ... (ML)

COMPARANDO SUELOS A IGUAL LIMITE LIQUIDO LA TENACIDAD Y LA RESISTENCIA EN ESTADO SECO AUMENTAN CON EL INDICE PLASTICO



CARTA DE PLASTICIDAD

PARA CLASIFICACION DE SUELOS DE PARTICULAS FINAS EN EL LABORATORIO

...s ... arena bien graduada con cementante arcilloso

PROCEDIMIENTOS DE IDENTIFICACION PARA SUELOS FINOS O FRACCIONES FINAS DE SUELO EN EL CAMPO

Estos procedimientos se ejecutan con la fracción que pasa la malla No. 40 (aproximadamente 0.5 mm).

Para fines de clasificación en el campo si no se usa la malla simplemente se quitan a mano las partículas gruesas que interfieren con las pruebas.

DILATANCIA
(Reacción al agitado)

Después de quitar las partículas mayores que la malla No. 40, prepárese una pastilla de suelo húmedo aproximadamente igual a 10 cm^3, si es necesario añádase suficiente agua para dejar el suelo suave pero no pegajoso.

Colóquese la pastilla en la palma de la mano y agítese horizontalmente, golpeando vigorosamente contra la otra mano varias veces. Una reacción positiva consiste en la aparición de agua en la superficie de la pastilla, la cual cambia adquiriendo una consistencia de hígado y se vuelve lustrosa. Cuando la pastilla se aprieta entre los dedos el agua y el lustre desaparecen de la superficie, la pastilla se vuelve tiesa y finalmente se agrieta o se desmorona. La rapidez de la aparición del agua durante el agitado y de su desaparición durante el apretado sirve para identificar el carácter de los finos en un suelo.

Las arenas limpias muy finas dan la reacción más rápida y distintiva, mientras que las arcillas plásticas no tienen reacción. Los limos inorgánicos, tales como el típico polvo de roca, dan una reacción rápida moderada.

RESISTENCIA EN ESTADO SECO
(Características al rompimiento)

Después de eliminar las partículas mayores que la malla No. 40, moldéese una pastilla de suelo hasta alcanzar una consistencia de masilla añadiendo agua si es necesario. Déjese secar la pastilla completamente en un horno, al sol o al aire y pruébese su resistencia rompiéndola y desmoronándola entre los dedos. Esta resistencia es una medida del carácter y cantidad de la fracción coloidal que contiene el suelo. La resistencia en estado seco aumenta con la plasticidad.

Una alta resistencia en seco es característica de las arcillas del grupo CH. Un limo inorgánico típico posee solamente muy ligera resistencia. Las arenas finas limosas y los limos tienen aproximadamente la misma ligera resistencia, pero pueden distinguirse por el tacto al pulverizar el espécimen seco. La arena fina se siente granular, mientras que el limo típico da la sensación suave de la harina.

TENACIDAD
(Consistencia cerca del límite plástico)

Después de eliminar las partículas mayores que la malla No. 40, moldéese un espécimen de aproximadamente 10 cm^3 hasta alcanzar la consistencia de masilla. Si el suelo está muy seco debe agregarse agua, pero si está pegajoso debe extenderse el espécimen formando una capa delgada que permita algo de pérdida de humedad por evaporación. Posteriormente el espécimen se rola a mano sobre una superficie lisa o entre las palmas hasta hacer un rollito de 3 mm de diámetro aproximadamente, se amasa y se vuelve a rolar varias veces. Durante estas operaciones el contenido de humedad se reduce gradualmente y el espécimen llega a ponerse tieso, pierde finalmente su plasticidad y se desmorona cuando se alcanza el límite plástico. Después de que el rollo se ha desmoronado, los pedazos deben juntarse continuando el amasado ligeramente entre los dedos hasta que la masa se desmorona nuevamente.

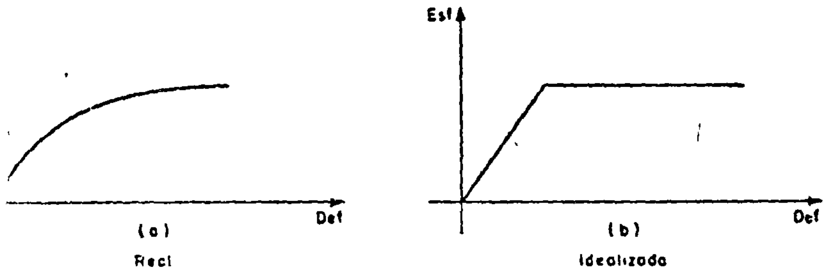
La potencialidad de la fracción coloidal arcillosa de un suelo se identifica por la mayor o menor tenacidad del rollito al acercarse al límite plástico y por la rigidez de la muestra al romperse finalmente entre los dedos. La debilidad del rollito en el límite plástico y la pérdida rápida de la coherencia de la muestra al rebasar este límite, indican la presencia de arcilla inorgánica de baja plasticidad o de materiales tales como arcillas del tipo caolín y arcillas orgánicas que caen abajo de la "línea A". Las arcillas altamente orgánicas se sienten muy débiles y esponjosas al tacto en el límite plástico.

o Irapuato

o Chetumal ·

el punto C (Fig. VI-1) puede tener comportamiento plástico si los [illegible] varían hacia CG o elástico, si lo hacen hacia CD.

En Mecánica de Suelos el concepto plasticidad se ha introducido a [illegible] como queda dicho, de ideas más antiguas y primarias que las que [illegible] se han expuesto y solamente después se comprobó que las ideas adquiridas podrían hasta cierto punto fundamentarse mejor, teóricamente, recurriendo a las relaciones esfuerzo-deformación. En la Fig. VI-2



[illegible] VI-2 GRÁFICAS REAL E IDEALIZADA DE UNA ARCILLA EN SU INTERVALO PLÁSTICO

[illegible] curvas real e idealizada de la relación esfuerzo-deformación [illegible] arcilla suave en su intervalo plástico. Puede notarse su similitud con las curvas presentadas en la Fig. VI-1. De este modo la Mecánica de Suelos se relaciona con las Teorías de la Plasticidad y [illegible] son parcialmente aplicables a ella. Desafortunadamente [illegible] el desarrollo de estas disciplinas y su aplicación están aún incompletamente realizados y puede decirse que mucho falta por hacer en este campo.

Resulta muy útil, en nuestros días, seguir manejando en Mecánica de Suelos un concepto simple de plasticidad, basado en ideas con un sentido físico inmediato, incorporando las conclusiones aplicables de la Teoría de la Plasticidad en forma gradual, en etapas más avanzadas del estudio y siempre con un criterio que permita adoptar puntos de [illegible] teóricos claramente confirmados por la experimentación y el laboratorio.

Al tratar de definir en términos simples la plasticidad de un suelo, [illegible] resulta suficiente decir que un suelo plástico puede deformarse y [illegible] sin agrietamiento, pues una arena fina y húmeda tiene esas [illegible] cuando la deformación se produce [illegible] y, sin embargo, no es plástica en un sentido más amplio de la palabra; hay entre [illegible] comportamiento de la arcilla y el de la arena en cuestión una impor[illegible] el volumen de la arcilla permanece constante durante [illegible], mientras que el de la arena varía; además, la arena se [illegible] en deformación rápida.

En Mecánica de Suelos [illegible] definir [illegible] la *propiedad de un material por la cual es capaz de soportar deformaciones rápidas, sin rebote elástico, sin variación volumétrica [illegible] y sin desmoronarse ni agrietarse.* Con esta definición [illegible] la propiedad a las arcillas en ciertas circunstancias, según se verá más adelante.

Los experimentos realizados por Atterberg, Terzaghi y Goldschmidt han revelado que la plasticidad de los suelos se debe a la carga eléctrica de las partículas laminares, que generan campos, que actúan como condensadores e influyen en las moléculas bipolares del agua según ya se mencionó (Capítulo II); en los suelos plásticos, el espesor de estas capas de agua sólida y viscosa [illegible], y su efecto en la interacción de las partículas de suelo determinan su plasticidad. Si esta hipótesis, desarrollada sobre todo por Goldschmidt, fuera correcta, otros líquidos bipolares mezclados con polvo de arcilla deberían de producir suelos plásticos, mientras que los líquidos no bipolares generarían suelos exentos de tal propiedad; Goldschmidt demostró que tales hechos se revelaban claramente en el laboratorio. También se vio que las partículas equidimensionales, de pequeña relación área a volumen y, por lo tanto, de escasa actividad eléctrica superficial, nunca constituyen suelos plásticos, independientemente de su tamaño y otros factores (experimentos de Atterberg).

VI-2. Estados de consistencia. Límites de plasticidad

Para medir la plasticidad de las arcillas se han desarrollado varios criterios, de los cuales uno solo, el debido a Atterberg, se mencionará en lo que sigue. Atterberg hizo ver que, en primer lugar, la plasticidad no era una propiedad permanente de las arcillas, sino circunstancial y dependiente de su contenido de agua. Una arcilla muy seca puede tener la consistencia de un ladrillo, con plasticidad nula, y esa misma, con gran contenido de agua, puede presentar las propiedades de un lodo semilíquido o, inclusive, las de una suspensión líquida. Entre ambos extremos, existe un intervalo del contenido de agua en que la arcilla se comporta plásticamente. En segundo lugar, Atterberg hizo ver que la plasticidad de un suelo exige, para ser expresada en forma conveniente, la utilización de dos parámetros en lugar de uno solo, como hasta su época se había creído; además, señaló esos parámetros y un modo tentativo, hoy perfeccionado, de valuarlos.

Según su contenido de agua en orden decreciente, un suelo susceptible de ser plástico puede estar en cualquiera de los siguientes estados de consistencia, definidos por Atterberg.

1. Estado líquido, con las propiedades y apariencia de una suspensión

2. Estado semilíquido, con las propiedades de un fluido viscoso
3. Estado plástico, en que el suelo se comporta plásticamente
4. Estado semisólido, en el que el suelo tiene la apariencia de un sólido, pero aún disminuye de volumen al estar sujeto a secado
5. Estado sólido, en que el volumen del suelo no varía con el secado

Los anteriores estados son fases generales por las que pasa el suelo al irse secando y no existen criterios estrictos para distinguir sus fronteras. El establecimiento de éstas ha de hacerse en forma puramente convencional. Atterberg estableció las primeras convenciones para ello, bajo el nombre general de *límites de consistencia*.

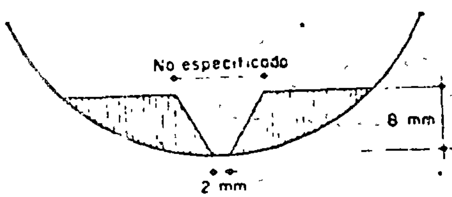


FIG VI-3 ESQUEMA DEL SUELO COLOCADO EN LA CÁPSULA Y RANURADO PARA DETERMINAR SU LÍMITE LÍQUIDO SEGÚN ATTERBERG

La frontera convencional entre los estados semi-líquido y plástico fue llamada por Atterberg *límite líquido*, nombre que hoy se conserva. Atterberg lo definió en términos de una cierta técnica de laboratorio que consistía en colocar el suelo remoldeado en una cápsula, formando en él una ranura, según se muestra en la figura VI-3, y en hacer cerrar esa ranura golpeando secamente la cápsula contra una superficie dura; el suelo tenía el contenido de agua correspondiente al límite líquido, según Atterberg, cuando los bordes inferiores de la ranura se tocaban, sin mezclarse, al cabo de un cierto número de golpes.

El procedimiento descrito resultó suficiente para Atterberg, que manejaba un laboratorio cuyo personal estaba entrenado por él mismo. Sin embargo, es de notar que muchos detalles de la prueba quedan sin especificar y la experiencia demuestra que esos detalles son de trascendencia en los resultados de la misma.

La frontera convencional entre los estados plástico y semi-sólido fue llamada por Atterberg *límite plástico* y definida también en términos de una manipulación de laboratorio. Atterberg colaba un fragmento de suelo hasta convertirlo en un cilindro de espesor no especificado; el agrietamiento y desmoronamiento del rollito, en un cierto momento, indicaba que se había alcanzado el límite plástico y el contenido de agua en tal momento era la frontera deseada. A esta prueba se le puede señalar el mismo inconveniente indicado para la de límite líquido, en lo que se refiere a su realización en otros laboratorios diferentes del de Atterberg.

A las fronteras anteriores, que definen el intervalo plástico del suelo se les ha llamado *límites de plasticidad*.

Atterberg consideraba que la plasticidad del suelo quedaba determinada por el límite líquido y por la cantidad máxima de una cierta arena, que podía ser agregada al suelo, estando éste con el contenido de agua correspondiente al límite líquido, sin que perdiera por completo su plasticidad. Además encontró que la diferencia entre los valores de los límites de plasticidad, llamada *índice plástico*, se relacionaba fácilmente con la cantidad de arena añadida, siendo de más fácil determinación, por lo que sugirió su uso, en lugar de la arena, como segundo parámetro para definir la plasticidad.

$$I_p = LL - LP \qquad (6\text{-}1)$$

Además de los límites de plasticidad (líquido y plástico) ya señalados, Atterberg definió otros límites de consistencia, que se mencionan a continuación:

1. El límite de adhesión, definido como el contenido de agua con el que la arcilla pierde sus propiedades de adherencia con una hoja metálica, por ejemplo, una espátula. Es de importancia en agricultura
2. El límite de cohesión, definido como el contenido de agua con el que los grumos de arcilla ya no se adhieren entre sí
3. El límite de contracción, frontera entre los estados de consistencia semi-sólido y sólido, definido como el contenido de agua con el que el suelo ya no disminuye su volumen al seguirse secando

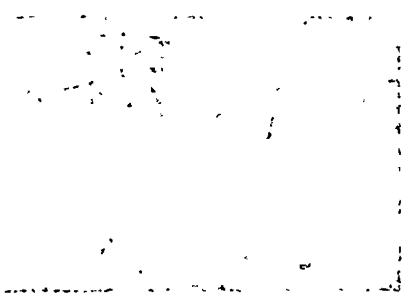
De estos límites, sólo el de contracción presenta un interés definido en algunas importantes aplicaciones de la Mecánica de Suelos. Este límite se manifiesta visualmente por un característico cambio de tono oscuro a más claro que el suelo presenta en su proximidad, al irse secando gradualmente. Atterberg lo determinaba efectuando mediciones durante el proceso de contracción.

En épocas recientes (1948) se definió en Noruega el *límite de firmeza*, de importancia en arcillas extra-sensitivas; se ha visto en él un límite para la posibilidad de licuación de tales arcillas bajo la acción de causas no bien definidas. A este límite le corresponden, por lo general, contenidos de agua bastante mayores que el límite líquido. En laboratorio se determina por el mínimo contenido de agua que hace que una pasta de arcilla bien mezclada, fluya por peso propio en un tubo estándar de 11 mm de diámetro, tras 1 minuto de reposo.

VI-3. Determinación actual del límite líquido

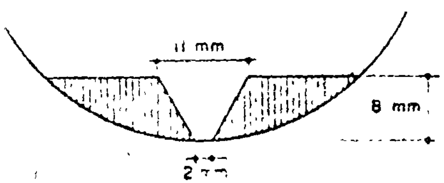
Cuando la plasticidad se convirtió en una propiedad índice fundamental, a partir de la utilización que Terzaghi y Casagrande hicieron de ella, la determinación de los límites de plasticidad se transformó en

... de rutina en todos los laboratorios; en este caso, los métodos de ...erg se revelaron ambiguos, dado que la influencia del operador ...nde y que muchos detalles, al no estar especificados, quedaban a su ...n. En vista de lo cual, Terzaghi sugirió a Casagrande[1 y 2] la tarea ...borar un método de prueba para la determinación del límite lí... estandarizando todas sus etapas, de modo que operadores diferentes en laboratorios distintos obtuviesen los mismos valores.



...VI-4. Detalles de la copa de Casagrande

Como resultado de tal investigación nació la técnica basada en el uso de la Copa de Casagrande (Fig. VI-4) que es un recipiente de bronce o latón con un tacón solidario del mismo material; el tacón y la copa giran en torno a un eje fijo unido a la base. Una excéntrica hace que la copa caiga periódicamente golpeándose contra la ... dispositivo, que es de hule duro o micarta 221. La altura de caída ... la copa es, por especificación, de 1 cm, medido verticalmente desde el ...no de la copa que toca la base al caer, hasta la base misma, estando ...copa en su punto más alto. Es importante que este ajuste se haga con ...o cuidado, usando un prisma metálico de 1 cm de lado, para hacer la calibración; este prisma se introduce entre base y copa, cuidando que su arista superior quede en contacto con el punto de la copa que golpee la base. (En las copas usadas este punto se delata por la brillantez causada por el desgaste.)



...g VI-5. Dimensiones de la ranura en la Copa de Casagrande

La copa es esférica, con ...dio interior de 51 mm, espesor 2 mm y peso 200 ± 20 gr incluyendo el ...cón.

Sobre la copa se coloca el suelo y se procede a hacerle una ranura ...apropiada con las dimensiones mostradas en la Fig. VI-5.

Para hacer la ranura debe usarse el ranurador laminar que aparece ... la Fig. VI-6. La copa se sostiene con la mano izquierda, con el tacón ...cia arriba y el ranurador se pasa a través de la muestra, manteniéndolo normal a su superficie, a lo largo del meridiano que pasa por el ...ntro del tacón, con un movimiento de arriba hacia abajo.

En poco tiempo se adquiere la soltura necesaria para hacer una ranura apropiada, con una sola pasada suave del ranurador, en una arcilla bien mezclada, sin partículas gruesas. En mezclas no uniformes o con partículas gruesas los bordes de la ranura tienden a rasgarse, cuando esto suceda el suelo ha de volver a remoldearse con la espátula, colocándolo de nuevo y formando otra vez la ranura. En los suelos con arena o con materia orgánica no se puede formar la ranura con el ranurador, debiendo usarse entonces la espátula, utilizando el ranurador sólo para verificar las dimensiones.

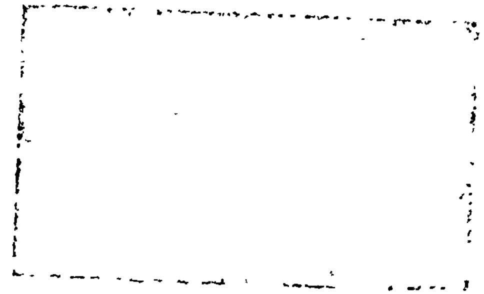


Fig. VI-6. Conjunto de la copa de Casagrande con ranurador laminar

En ocasiones se ha usado otro tipo de ranurador, curvo con sección trapecial, que no rebana el suelo al ser introducido en él, sino que forma la ranura desplazándolo, lo cual hace que se rompa la adherencia entre el suelo y la copa, especialmente en suelos arenosos, en tal caso los golpes

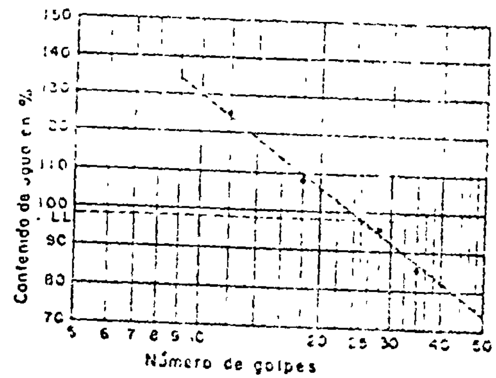


Fig. VI-7. Determinación del Límite Líquido en la Curva de Flujo

hacen que el suelo deslice, cerrándose más pronto la ranura por la falta de aquella adherencia, por ...

La prueba se ejecuta según se indica en el Anexo VI-a de este Capítulo, en un cuarto húmedo. Un ambiente ... de la prueba debido a la evaporación durante el remoldeo y manipulación en la copa, esto es suficiente para que el número de golpes muestre un aumento demasiado rápido.

A partir de extensas investigaciones sobre los resultados obtenidos por Atterberg con su método original, ya descrito y usando determinaciones efectuadas por diferentes operadores en varios laboratorios, se estableció que el límite líquido obtenido por medio de la copa de Casagrande corresponde al de Atterberg, si se define como el contenido de agua del suelo para el que la ranura se cierra a lo largo de 1.27 cm (½"), con 25 golpes en la copa. Esta correlación permitió incorporar a la experiencia actual toda la adquirida previamente al uso de la copa.

De hecho, el límite líquido se determina conociendo 3 ó 4 contenidos de agua diferentes en su vecindad, con los correspondientes números de golpes y trazando la curva Contenido de agua — Núm. de golpes. La ordenada de esa curva correspondiente a la abscisa de 25 golpes es el contenido de agua correspondiente al límite líquido. Se encontró experimentalmente (A. Casagrande) que usando papel semilogarítmico (con los contenidos de agua en escala aritmética y el número de golpes en escala logarítmica), la curva anterior, llamada de fluidez, es una recta cerca del límite líquido. En la Fig. VI-7 aparece esa curva y el modo de determinar el límite líquido.

La ecuación de la curva de flujo es:

$$w = F_w \log N + C \tag{6.2}$$

w = Contenido de agua, como porcentaje del peso seco

F_w = Indice de fluidez, pendiente de la curva de fluidez, igual a la variación del contenido de agua correspondiente a un ciclo de la escala logarítmica

N = Número de golpes. Si N es menor de 10, aproxímese a medio golpe; por ejemplo, si en el 6º golpe se cerró la ranura 0.63 cm (¼") y en el 7º se cerró 1.9 cm (¾"), repórtense 6.5 golpes

C = Constante que representa la ordenada en la abscisa de 1 golpe; se calcula prolongando el trazo de la curva de fluidez

Para construir la curva de fluidez sin salirse del intervalo en que puede considerarse recta, A. Casagrande recomienda registrar valores entre los 6 y los 35 golpes, determinando 6 puntos, tres entre 6 y 15 golpes y tres entre 23 y 32. Para consistencias correspondientes a menos de 6 golpes se hace ya muy difícil discernir el momento del cierre de la ranura y si ésta se cierra con más de 35 golpes, la gran duración de la prueba causa excesiva evaporación. En pruebas de rutina basta con determinar 4 puntos de la curva de fluidez.

La fuerza que se opone a la fluencia de los lados de la ranura proviene de la resistencia al esfuerzo cortante del suelo, por lo que el número de golpes requerido para cerrar la ranura es una medida de esa resistencia, al correspondiente contenido de agua. De lo anterior puede deducirse que la resistencia de todos los suelos en el límite líquido debe ser la misma, siempre y cuando el impacto sirva solamente para deformar al suelo, como es el caso de los suelos plásticos; pero en el caso de los suelos no plásticos (arenosos), de mayor permeabilidad que las arcillas, las fuerzas de impacto producen un flujo del agua hacia la ranura, con la consecuencia de que el suelo se reblandece en las proximidades de aquélla, disminuyendo su resistencia al esfuerzo cortante; por ello en esos suelos, el límite líquido ya no representa un contenido de agua para el cual el suelo presente una resistencia al corte definida. Por medio de pruebas de laboratorio se determinó que el límite líquido de un suelo plástico corresponde a una resistencia al corte de 25 gr/cm^2. La hipótesis de que el número de golpes es una medida de la resistencia al corte del suelo, fue enunciada por A. Casagrande y se confirma por el hecho de que una gráfica semilogarítmica de la resistencia contra el contenido de agua es recta y no sólo en la vecindad del límite líquido, sino en consistencias bastante distintas.

VI-4. Determinación actual del límite plástico

La prueba para la determinación del límite plástico, tal como Atterberg la definió, no especifica el diámetro a que debe llegarse al formar el cilindrito de suelo requerido. Terzaghi agregó la condición de que el diámetro sea de 3 mm (⅛"). La formación de los rollitos se hace usualmente sobre una hoja de papel totalmente seca, para acelerar la pérdida de humedad del material, también es frecuente efectuar el rolado sobre una placa de vidrio. Cuando los rollitos llegan a los 3 mm, se doblan y presionan, formando una pastilla que vuelve a rolarse, hasta que en los 3 mm justos ocurra el desmoronamiento y agrietamiento; en tal momento se determinará rápidamente su contenido de agua, que es el límite plástico.

Se han hecho varios intentos para sustituir el rolado manual por la acción mecánica de algún aparato, pero sin resultados satisfactorios, debido, en primer lugar, a que la experiencia ha demostrado que en esta prueba la influencia del operador no es importante y, en segundo, a que, hasta la fecha, no ha podido desarrollarse ningún aparato en que la presión ejercida se ajuste a la tenacidad de los diferentes suelos; en el rolado manual, el operador, guiado por el tacto, hace el ajuste automáticamente.

VI-5. Consideraciones sobre los límites de plasticidad. Indice de tenacidad

Atterberg demostró que la plasticidad de una arcilla puede describirse en términos de dos parámetros: el *límite líquido* y el *índice plástico*, éste numéricamente igual a la diferencia del límite líquido y el plástico.

...l *límite líquido*, según se dijo, indica el contenido de agua para ...l el suelo tiene una cierta consistencia, con una resistencia al corte ... gr/cm². Por el contrario, la resistencia de diferentes suelos arci... en el *límite plástico* no es constante, sino que puede variar am...ente. En las arcillas muy plásticas, la tenacidad en el límite plás... es alta, debiéndose aplicar con las manos considerable presión para ...r los rollitos, por el contrario, las arcillas de baja plasticidad son ... tenaces en el límite plástico.

...lgunos suelos finos y arenosos pueden, en apariencia, ser simi... a las arcillas, pero al tratar de determinar su límite plástico se ... imposibilidad de formar los rollitos, revelándose así la falta ...lasticidad del material; en estos suelos el límite líquido resulta ...icamente igual al plástico y aún menor, resultando entonces un ... plástico negativo. Las determinaciones de plasticidad no con... a ningún resultado de interés y los límites líquido y plástico ...en de sentido físico.

Cuando dos suelos plásticos tienen los mismos límites de plasti... o el mismo índice plástico, pero diferentes curvas de flujo, el ...cuya curva sea más tendida, es decir, el de menor índice de flui... tendrá mayor resistencia en el límite plástico, la resistencia al ... de una arcilla en el límite plástico es una medida ... tenacidad por lo cual puede decirse que la tenacidad de las ... igual índice plástico crece a menor índice de fluidez. En ... sean:

LL = límite líquido
LP = límite plástico
I_p = índice plástico ($LL - LP$)
F_w = índice de fluidez
s_1 = 25 gr/cm², resistencia al esfuerzo cortante de los suelos plásticos, en el límite líquido
s_2 = resistencia al esfuerzo cortante correspondiente al límite plástico, cuyo valor puede usarse para medir la tenacidad de una arcilla

Según (6-2), poniendo en lugar de N su equivalente Cs, donde C ...resenta la relación entre el número de golpes y la correspondiente ...istencia, puede escribirse:

$$LL = -F_w \log Cs_1 + C' \quad \text{(a)}$$
$$LP = -F_w \log Cs_2 + C' \quad \text{(b)}$$

Restando (a) y (b), se obtiene:

$$I_p = LL - LP = F_w (\log Cs_2 - \log Cs_1)$$
$$I_p = F_w \log \frac{s_2}{s_1}$$

De donde:

$$T_w = \frac{I_p}{F_w} = \log \frac{s_2}{s_1} \qquad (6\text{-}3)$$

Para tener una medida relativa de la tenacidad basta definir a T_w como *índice de tenacidad* evitando resolver en cada caso la ecuación (6-2) para calcular s_2.

El índice de tenacidad, conjuntamente con el de fluidez, es útil para establecer una diferenciación adicional en lo que se refiere a las características de plasticidad de las arcillas. El índice de tenacidad generalmente varía entre 1 y 3 y rara vez alcanza valores de 5 o menores que 1; un alto valor de T_w no implica que los límites de plasticidad sean altos.

Entre los diversos métodos posibles para representar y comparar las propiedades de plasticidad de los suelos, es preferible uno debido a A. Casagrande, en el que se dibujan como abscisas los límites líquidos y como ordenadas los índices plásticos. En la Fig. VI-8, aparece una representación de varios suelos típicos.

Cada línea gruesa representa los datos obtenidos por A. Casagrande en una serie de muestras de la misma localidad y de la misma formación geológica, los puntos aislados se determinaron con un solo material. Los puntos conectados con línea discontinua son datos obtenidos de una sola muestra, los puntos [illegible] estado natural y los [illegible] secada al horno. En la gráfica resultan ciertas características generales. Por ejemplo se encontró que cuanto más altos están los puntos de la gráfica, tanto más tenaces son las arcillas. En las arcillas inorgánicas que no sean de origen volcánico, es poco frecuente un límite líquido mayor de 100, sin embargo, en arcillas volcánicas u orgánicas son relativamente frecuentes valores sobre ese número; las bentonitas, por ejemplo, alcanzan valores hasta de 600, siendo significativo que su contenido de partículas laminares coloidales sea de 70% aproximadamente, mientras que el de las arcillas ordinarias de alta plasticidad es de alrededor de 30%. Los datos obtenidos en una experimentación sistemática realizada por el mismo A. Casagrande originalmente, sobre mezclas de arena y arcilla, quedan señalados en la gráfica por líneas cuya tendencia general coincide con las líneas gruesas de la Fig. VI-3, esto indica que en la mayoría de los casos, las muestras de la misma zona y del mismo origen geológico difieren esencialmente en su contenido de partículas gruesas, mientras que el carácter de la fracción cola del permanece esencialmente invariable.

Los puntos correspondientes al caolín y a polvos de mica indican que tales suelos y otros polvos artificiales constituidos parcial o totalmente de partículas laminares relativamente gruesas en comparación a las partículas coloidales de las arcillas plásticas, poseen menor plasicidad que las arcillas ordinarias; por lo tanto, un índice plástico bajo no indica necesariamente un contenido de materia orgánica.

El secado, según se desprende de los experimentos anteriores, produce cambios irreversibles en las características de la fracción coloidal orgánica de un suelo; a falta de otros medios, se podrían diferenciar los suelos orgánicos de los inorgánicos de bajo índice plástico, repitiendo

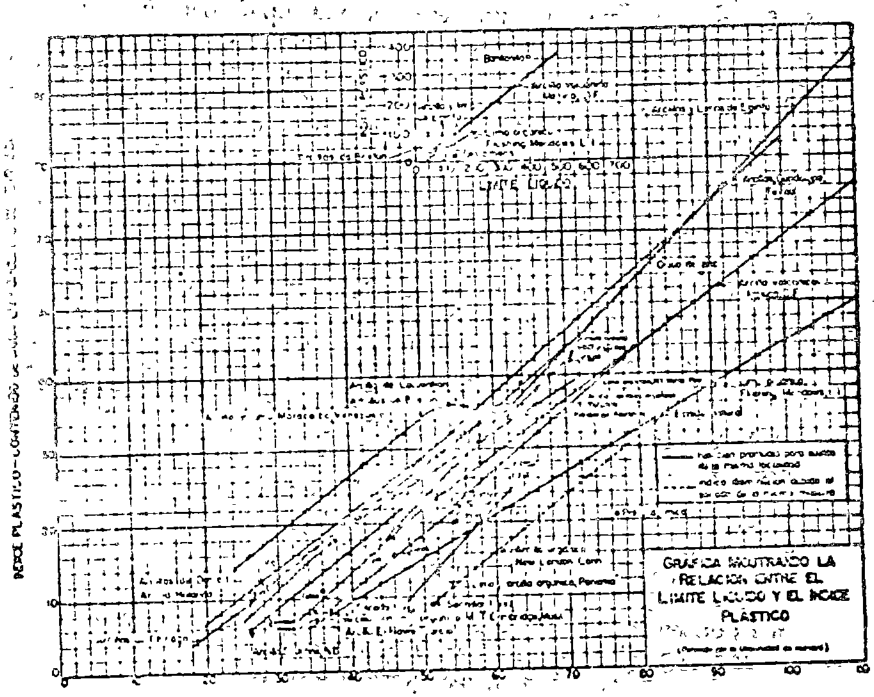


FIG VI-8

las determinaciones de los límites con el material secado al horno; este secado causa invariablemente una apreciable disminución de los límites del suelo orgánico (véanse los suelos de Cambridge, New London o Turquía, en la Fig. VI-8). Los límites de los suelos inorgánicos también se afectan por el secado al horno, pero en mucho menor escala; además, en este caso los límites pueden aumentar o disminuir, dependiendo del suelo.

Los límites de algunas arcillas se afectan también por la intensidad del mezclado; el límite plástico varía normalmente en la misma dirección del líquido, pero sus variaciones suelen ser sólo del orden de un tercio de las del límite líquido.

A. Casagrande, para mostrar la influencia de los conceptos anteriores sobre el límite líquido de algunas arcillas inorgánicas, presenta la siguiente tabla:

TABLA 6-1

Procedencia de la arcilla probada	*Estado natural, mezclada a mano*	*Secada al aire, mezclada a mano*	*Secada al aire, mezclada mecánicamente*	*Secada 1 vez en horno, mezclada a mano*	*Secada 2 veces en horno, mezclada a mano*
BOSTON (Arcilla azul)	41.1	43.6	46.0	42.1	—
CHICAGO	53.0	49.6	—	46.0	—
LAGO LAURENTIAN	49.7	45.7	—	41.5	38.7

En lo referente al Valle de México, merecen citarse los datos que sobre la influencia del secado en los valores de los límites de plasticidad, han obtenido Marsal y Mazari.[3] Según estos investigadores, la influencia del secado en los materiales arcillosos del Valle de México es importante según muestra la Fig. VI-9. Esta gráfica presenta las variaciones en los límites líquido y plástico por secado gradual en el medio ambiente. Como se observa, la deshidratación no afecta al valor de los límites, cuando el contenido de agua con que se inician las pruebas está comprendido entre su valor natural y 150%; en cambio, los límites disminuyen muy rápidamente cuando las muestras se secan con mayor intensidad, previamente a las determinaciones. Cuando el secado se hace al horno, llegando a contenidos de agua muy pequeños, los límites disminuyen muy apreciablemente al ser determinados añadiendo agua a las muestras a partir de esas bajas humedades. En el caso que se cita, el límite líquido llegó a valer 80%, cuando se secó en el horno por completo, mientras que fue del orden de

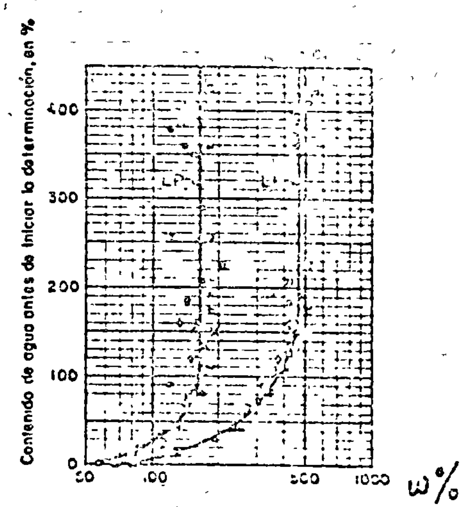


FIG. VI-9. INFLUENCIA DEL SECADO EN LOS LIMITES LIQUIDO Y PLASTICO DE UNA ARCILLA DEL VALLE DE MEXICO

, cuando se determinó a partir de un contenido de agua mayor
0%.

A. Warlam clasificó las arcillas en cuatro grupos, según la varia-
de su límite líquido por efecto del secado:

1. *LL* no se afecta prácticamente por secado
2. *LL* aumenta por secado al aire y en horno
3. *LL* disminuye por secado al aire y en horno
4. *LL* aumenta por secado al aire y disminuye por secado al horno

Los grupos 1) y 4) son muy poco frecuentes, mientras los 2) y 3) resentan normalmente.

Uno de los materiales investigados por Warlam exhibió la propie- muy peculiar de que el límite líquido no varió por secado al aire horno, pero el límite plástico disminuyó fuertemente.

Los valores de los límites también se ven influenciados por el po que se deje transcurrir entre la preparación de la pasta de suelo ejecución de la prueba.

En estudios de estabilización de suelos se ha investigado el efecto sobre los límites ejercen diversas sustancias adicionales, encontrán- que las que más los afectan son las de base sódica, que hacen entar los límites considerablemente, en la mayoría de los casos; sin argo, la sal común (NaCl) produce frecuentemente disminución límite líquido. Algunas sustancias pueden afectar en sentido con- io a suelos muy similares en apariencia.

El hecho de que la plasticidad de las arcillas sea una propiedad sensible que pueda disminuir o aumentar con pequeños cambios en procedimiento, es desafortunado desde el punto de vista de las prue- de rutina, pero muy ventajoso para diferenciar arcillas de apariencia ilar; desde este punto de vista puede decirse que apenas comienza utilización de las pruebas.

Siempre deberá señalarse el procedimiento para la ejecución de las ebas de límite líquido, especialmente en lo que se refiere a si la estra se manejó a partir de su humedad natural o si fue secada al e o en horno. Sería muy deseable realizar las pruebas de los límites moldeando y mezclando el suelo inalterado hasta lograr, añadiendo ua si es preciso, una pasta uniforme, que deberá dejarse en reposo r lo menos 24 horas, bien protegida contra la evaporación; después, s nuevo remoldeo, reducir cuidadosamente su contenido de agua, r secado al aire, hasta la consistencia apropiada para las pruebas.

I-6. Selección de muestras para la determinación de los límites de plasticidad

Es importante que las muestras seleccionadas para determinación los límites sean lo más homogéneas que pueda lograrse. A este res-

pecto, ha de tenerse en cuenta que el aspecto de una arcilla inalterada es muy engañoso; a simple vista puede no presentar la menor indicación de estratificación, ni cambio de color y, ello no obstante, su contenido natural de humedad puede variar grandemente (hasta en una tercera parte o algo más, en el caso de las arcillas del Valle de México)

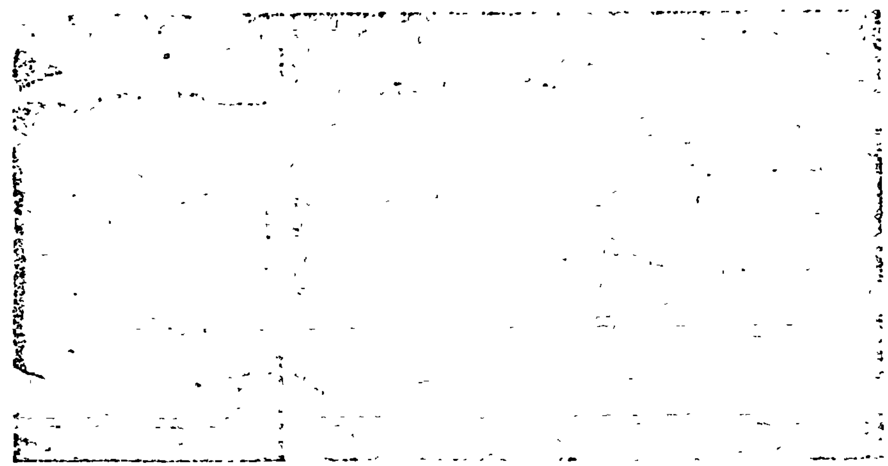
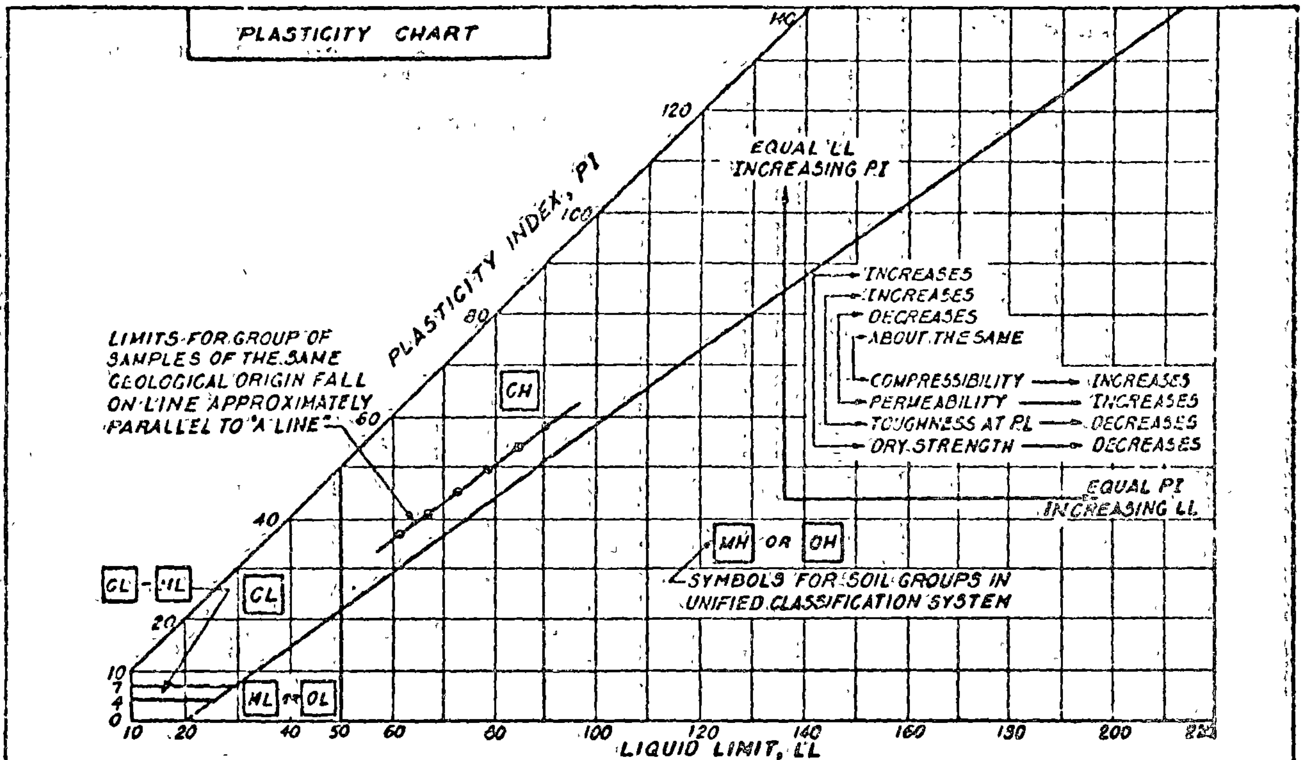


Fig. VI-10. Estratificaciones en una muestra de arcilla. Desembocadura del río Pánuco. México

en diferentes zonas de la misma muestra extraída del terreno, con correspondientes variaciones apreciables en los límites líquidos (Fig. VI-10). Si se mezclan porciones de muestra con límites diferentes, se obtiene un material con propiedades distintas a las de cada parte componente.

Desgraciadamente, una gran cantidad de la información disponible sobre las pruebas de límites en los laboratorios de Mecánica de Suelos en todo el mundo es insegura, debido al hecho de que no se toman las debidas precauciones para evitar las mezclas heterogéneas en las muestras que se manipulan. Solamente una clase de material debió haberse usado, en lugar de una mezcla de materiales adyacentes de la muestra extraída del terreno. En la correlación de los resultados de pruebas de consolidación con los límites, frecuentemente se comparan arcillas adyacentes en el suelo, pero de propiedades diferentes, a pesar de su apariencia exterior idéntica. Sobre tal base, naturalmente, nunca será posible llegar a una correlación empírica general entre la compresibilidad de una arcilla y sus límites, si es que tal correlación existe.

Para evitar estas confusiones y la acumulación de datos engañosos, se recomienda seguir el siguiente procedimiento de selección de muestras para las pruebas de límites, que ha sido desarrollado por el



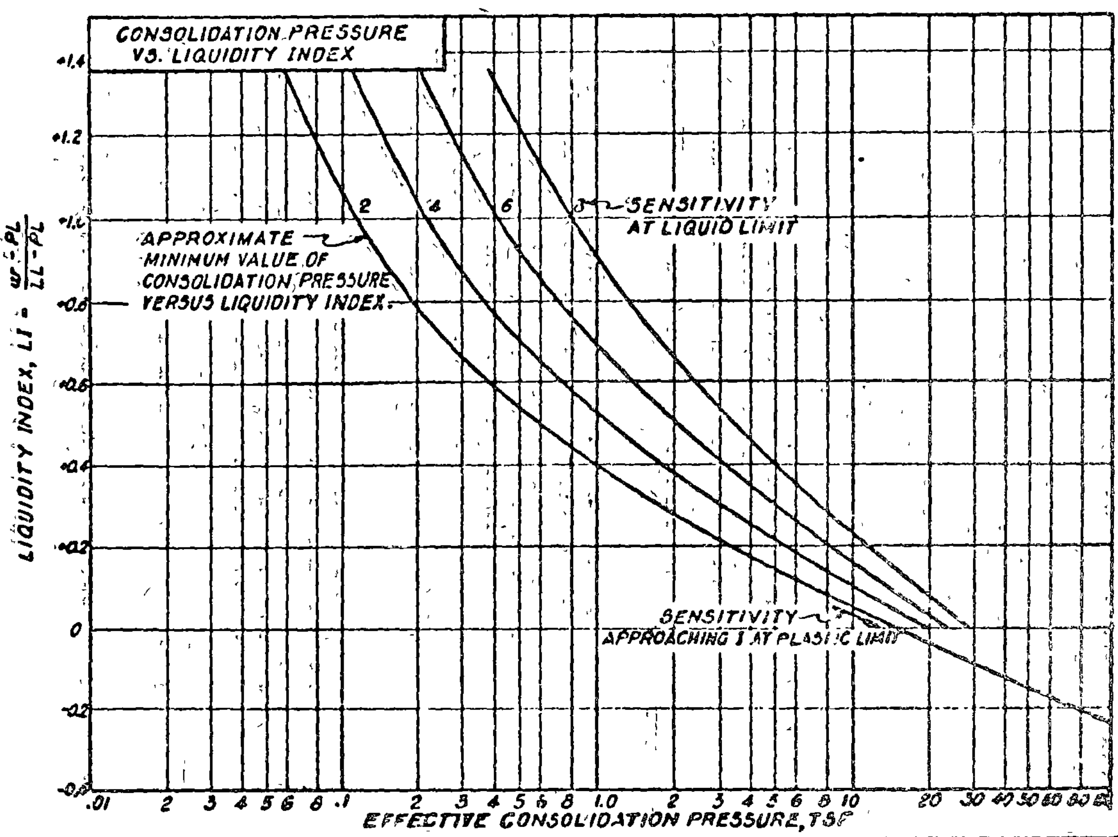


FIGURE 3-1
Utilization of Atterberg Plasticity Limits

1.2.2 Compacidad Relativa

e_{max}, e_{min}, variación de e_{max} y e_{min} con la angulosidad de los granos y granulometría [illegible] fórmula en la que todas las magnitudes son mesurables en laboratorio. El peso del frasco lleno de agua hasta el enrase es función [illegible] de prueba [illegible] debido al cambio de volumen del [illegible] por la dilatación del vidrio y a la variación del peso específico del agua. No resulta práctico ejecutar la prueba a una misma temperatura, por lo que es conveniente medir el peso del matraz lleno de agua (W_{fw}) para varias temperaturas y trazar una gráfica de la variación de esos pesos. De esta curva de calibración puede obtenerse W_{fw} en cada caso específico.

El peso seco de los sólidos (W_s) debe determinarse antes de la prueba en materiales gruesos y después de ella, en suelos finos plásticos. La razón es que en estos últimos suelos, el secado previo forma grumos de los que es difícil desalojar al aire atrapado. En el anexo IV-a de este Capítulo se da una descripción detallada del procedimiento de prueba en el laboratorio.

IV-3. Estructuración de los suelos

Se estudiarán ahora las disposiciones que adoptan las partículas [illegible] para dar lugar al conjunto llamado suelo. Ante todo conviene [illegible] una afirmación ya asentada (I-2): un suelo nunca es un mero agregado desprovisto de organización, antes al contrario, sus partículas se disponen siempre en forma organizada, siguiendo algunas leyes fijas y [illegible] de fuerzas naturales susceptibles de análisis.

En los suelos formados por partículas relativamente grandes (gravas y arenas) las fuerzas que intervienen para formar la estructura son [illegible] y sus efectos son relativamente simples de calificar [illegible] bien conocidas y sus efectos son relativamente simples [illegible] por ello, prácticamente no hay discusión respecto al mecanismo de [illegible] que, por otra parte, es verificable a simple vista. Por el contrario, en los suelos formados por partículas muy pequeñas (limos [illegible]), las fuerzas que intervienen en los procesos de estructuración [illegible] complejo y las estructuras resultantes, son [illegible] verificables por métodos indirectos, relativamente complejos y aún en plena etapa de desarrollo. Todo ello hace que los mecanismos de estructuración y aún las mismas estructuras resultantes sean, en estos suelos, materia de hipótesis.

[illegible] las estructuras simple, panal [illegible] como las básicas en los suelos reales. En [illegible] más [illegible] de separar aquel cuadro tradicional introdu[illegible] en las ideas anteriores, a la luz de algunos resultados [illegible] experimentos realizados con técnicas más modernas. [illegible] ideas de muchos investigadores acerca [illegible] de estructuración de los suelos, sino que, inclusive,

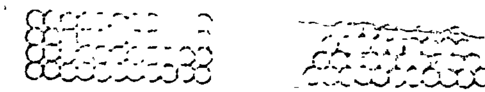
han aparecido [illegible], no estaban incluidas en el cuadro tradicional.

En lo que sigue [illegible] el conjunto de estructuras y mecanismos [illegible] algunas de las ideas de mayor aceptación actual.

a) *ESTRUCTURA SIMPLE.* Es aquella producida cuando las fuerzas debidas al campo gravitacional terrestre son claramente predominantes en la disposición de las partículas; es, por lo tanto, típica de suelos de grano grueso (gravas y arenas [illegible]) de masa comparativamente importante. Las partículas [illegible] apoyándose directamente unas en otras y cada partícula posee varios puntos de apoyo.

Desde un punto de vista ingenieril, el comportamiento mecánico e hidráulico de un suelo de estructura simple, queda definido principalmente por dos características: la *compacidad* del manto y la *orientación* de sus partículas.

El término *compacidad* se refiere al grado de acomodo alcanzado por las partículas del suelo, dejando [illegible] vacíos entre ellas. En un suelo muy compacto, las partículas [illegible] que lo constituyen tienen un alto grado de acomodo y la capacidad de deformación bajo carga del conjunto será pequeña. En suelos poco compactos el grado de acomodo es menor [illegible] y, por ende, la capacidad de deformación [illegible] mayores. Una base de comparación para tener una idea de la compacidad alcanzable por una estructura simple, se tiene, estudiando la disposición de un conjunto de esferas iguales. En la Fig. IV-2 se muestran en frente, perfil o planta, los estados más suelto y más compacto posible de tal conjunto. Los valores de n y e correspondientes a ambos casos pueden calcularse fácilmente y son:



(a) Estado más suelto (b) Estado más compacto

FIG. IV-2. Compacidad de un conjunto de esferas iguales

$$\text{Estado más compacto: } n = 26\ \%; \quad e = 0.35$$
$$\text{Estado más suelto: } n = 47.6\ \%; \quad e = 0.91$$

Las arenas naturales muy uniformes en tamaño poseen valores de n y e que se acercan mucho a los arriba [illegible]. Pero en las arenas comunes, [illegible] de partículas [illegible] el volumen de vacíos en el estado más suelto, en arenas [illegible], con [illegible] tamaños, los estados más suelto y [illegible] mucho menores que los que corresponden a la acumulación de esferas iguales.

Para medir la compacidad de un manto de estructura simple, Terghi n arrolló una relación empírica, determinable en laboratorio, llamada *Compacidad Relativa* (C_r).

$$C_r\,(\%) = \frac{e_{máx.} - e_{nat.}}{e_{máx.} - e_{mín.}} \qquad (4\text{-}2)$$

En la anterior relación:

$e_{máx.}$ = Relación de vacíos correspondiente al estado más suelto del suelo

$e_{mín}$ = Relación de vacíos correspondiente al estado más compacto del mismo

$e_{nat.}$ = Relación de vacíos de la muestra en estado natural

Para determinar $e_{máx}$ debe echarse el suelo a volteo en un recipiente volumen conocido; previamente el suelo se habrá secado al horno. relación de vacíos, determinada como se indicó en el Anexo III-d, toma como la correspondiente al estado más suelto posible. La $e_{mín}$ se termina introduciendo el suelo seco en el mismo recipiente, pero por pas, varillando y vibrando enérgicamente cada capa, hasta observar e no adquiere mayor compacidad. enrasado el recipiente, puede se- irse el procedimiento señalado en el Anexo III-d para calcular la e l material así tratado, la cual, convencionalmente, se acepta como la $_{ín}$ La determinación de la e_{nat} puede ser mucho más difícil si el nto en estudio no es fácilmente accesible o imposible en muchos casos ácticos si está profundo y bajo el nivel freático (en tales casos la com- cidad relativa medible directamente no puede obtenerse y el ingeniero de atenerse a otras fuentes de información, como la Prueba Estándar Penetración, por ejemplo). Si el manto arenoso es accesible, puede tenerse una muestra inalterada presionando cuidadosamente contra el elo un cilindro abierto y con filo, a la vez que se excava el material a lados del cilindro, hasta que la muestra sobresalga por el borde supe- or del mismo; el material en exceso puede removerse, enrasando el cipiente cuidadosamente; el método descrito en III-d permite calcu- la e_{nat}.

Para el caso de arenas gruesas limpias, los valores de e en las con- ciones más compacta y más suelta pueden determinarse en estado seco en estado completamente saturado, aunque debe estimarse preferible primero. En arenas finas puede haber gran diferencia en los resulta- os, según se hagan las determinaciones en uno u otro estado; además, ando se hacen las determinaciones en estado seco, los resultados depen- n del tiempo transcurrido a partir del momento de la extracción de la uestra del horno o desecador, pues el aire puede transmitirle humedad. ambién influyen el tamaño del recipiente donde se compacta la mues-

tra (para la determinación de $e_{mín}$) y el proceso de compactación; se han propuesto varios métodos, pero hasta hoy, ninguno debe considerarse perfecto. Por ejemplo, en un suelo bien graduado, con 10% de partículas de tamaño menor que 0.01 mm de diámetro, se encontró en una prueba que su relación de vacíos variaba entre 0.57 y 0.62 en el estado más suelto y entre 0.28 y 0.30, en el más compacto, estas fluctuaciones se atribuyeron a la humedad higroscópica, pues se han encontrado variaciones de 0.01 en una relación de vacíos al sacar la muestra de un desecador y exponerla al aire durante 10 ó 15 minutos. En otra muestra del mismo suelo se obtuvieron valores de 0.32 y 0.6 para las relaciones correspondientes a los estados más compacto y más suelto, respectivamente. Las variaciones anteriores son suficientes para predecir una diferencia en la compacidad relativa del orden de 10%. Por lo tanto, dicha compacidad relativa no puede considerarse como una cantidad fija y, en cada caso, debe describirse detalladamente el método de determinación empleado.

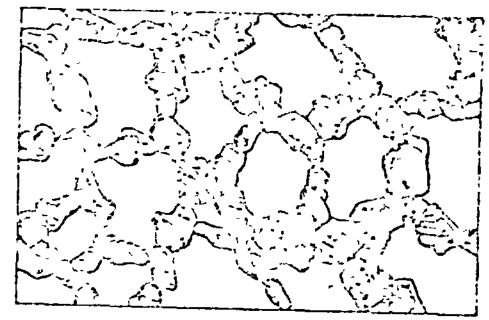


FIG. IV-3 ESTRUCTURA PANALOIDE

La *orientación* de las partículas de arena sedimentadas en agua, es tanto más pronunciada cuanto más se aparta su forma de la esférica; esta orientación produce, como efecto principal, una muy distinta permeabilidad del suelo, según que el flujo del agua sea normal o paralelo a la dirección de orientación; el efecto aumenta notablemente si el suelo contiene un porcentaje apreciable de partículas laminares. Aún en arenas naturales con formas prácticamente equidimensionales el efecto de la orientación sobre la permeabilidad es apreciable.

b) *ESTRUCTURA PANALOIDE.* Esta estructura se considera típica en granos de pequeño tamaño (0.02 mm de diámetro o algo menores), que se depositan en un medio continuo, normalmente agua y, en ocasiones, aire. En estas partículas, la gravitación ejerce un efecto que hace que tiendan a sedimentarse, pero dada su pequeña masa, otras fuerzas naturales pueden hacerse de magnitud comparable; concretamente, si la partícula, antes de llegar al fondo del depósito, toca a otra partícula ya depositada, la fuerza de adherencia desarrollada entre ambas, puede neutralizar al peso, haciendo que la partícula quede detenida antes de completar su carrera; otra partícula puede ahora añadírsele y el

TABLA 1.- Resultados de calas, granulometría, y compacidad relativa en los materiales granulares de la presa N° 4, Taxco Gro.

MUESTRA	w_n	γ_{sn}	$\gamma_{smáx}$	$\gamma_{smín}$	S_s	e_n	$e_{mín}$	$e_{máx}$	C_r	C_u	C_c	%F	d_{50}	$d_{máx}$	COMENTARIOS
M-1	4.22	1776	1980	1575	3.10	0.745	0.56	0.97	54.9	2.5	0.96	13	0.16	0.5	
M-2	4.5	1760 1988(?)	1882	1479	3.39	0.92 0.705(?)	0.80	1.29	75.8 119(?)	4.1	0.79	8	0.27	1	
M-3	5.45	1699	1850	1425	3.10	0.825	0.66	1.16	47.0	4.1	0.83	12	0.22	0.8	
M-4	5.65	1646	1834	1415	3.17	0.926	0.73	1.24	61.6	3.7	0.93	12	0.21	0.6	
M-5	3.15	1917	2123	1690	3.40	0.774	0.60	1.01	57.6	3.9	0.83	4	0.31	≈ 4	
M-5	3.33		2083	[illegible]	3.28		0.57	0.97		4.4	1.11	6	0.33	≈ 3	
M-6	3.84		1935	1535	3.16		0.63	1.06		4.2	0.94	7	0.29	1	

w_n - Contenido de agua natural, por ciento (valor sujeto a error por la evaporación del agua de las muestras)

γ_{sn} - Peso volumétrico seco natural, Kg/m³

$\gamma_{smáx}$ - Peso volumétrico seco máximo, Kg/m³

$\gamma_{smín}$ - Peso volumétrico seco mínimo, Kg/m³

S_s - Densidad de sólidos

e_n - Relación de vacíos natural

$e_{mín}$ - Relación de vacíos mínima

$e_{máx}$ = Relación de vacíos máxima

C_r = Compacidad relativa, por ciento

C_u - Coeficiente de uniformidad

C_c = Coeficiente de curvatura

%F - Por ciento de finos

$d_{máx}$ - Tamaño máximo de partícula, mm

d_{50} Tamaño tal que el 50 por ciento de las partículas, en peso, son menores que el, mm.

R...

1) Plot the ... saturated density curve
2) Plot the ... saturation (zero air voids) curve
3) Plot the percent air-voids curve
4) Determine the optimum moisture content and the achieved maximum dry density of this soil
5) Discuss the three curves

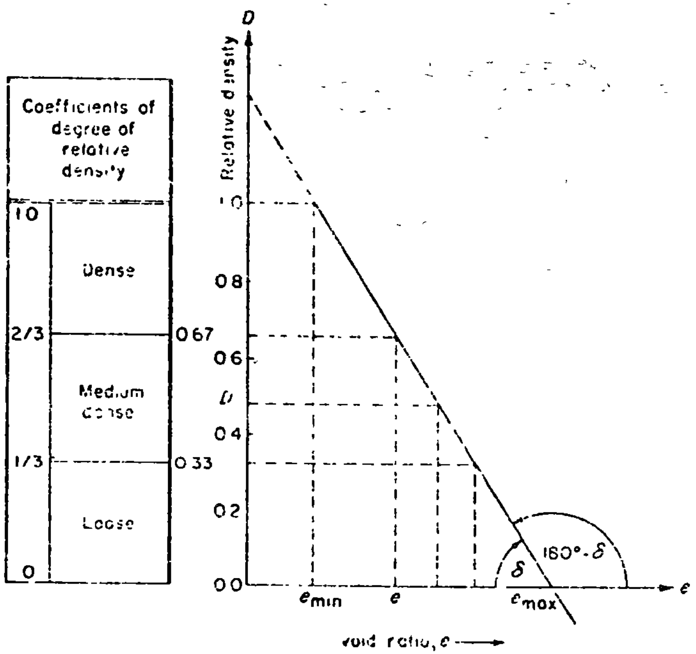


FIG. 7-7 $D = f(e)$.

RELATIVE DENSITY

7-13. The Concept. The concept of "relative density" is a criterion for the density of a sand deposit. This criterion is of an arbitrary character; it is not based on any plausible physical concept of density of any one physical body. Relative density applies only to sand, not silt and/or clay.

Assume that the sand soil is in its loosest state:

$$e_{max} = \frac{V_{vmax}}{V_{smin}} \tag{7-22}$$

for which there is a corresponding coefficient of relative density, $D = 0$. For the same sand in its densest state

$$e_{min} = \frac{V_{vmin}}{V_{smax}}, \tag{7-23}$$

and its relative density is $D = 1$.

One sees that relative density ... a function of void ratio, viz., porosity

$$D = f(e) \tag{7-24}$$

7-14. Derivation of Equation for Relative Density. The foregoing ... relationship can be represented graphically (Fig. 7-7), from which ... mathematically ...

$$\frac{D_{(=1)}}{e_{max} - e_{min}} = \tan\delta \tag{7-25}$$

or

$$e_{max} - e_{min} = \cot\delta \tag{7-26}$$

For any intermediate pair of D-values within the interval from $D = 0$ to $D = 1$ on the D-axis the maximum void ratio can be expressed as

$$e_{max} = e + D\cot\delta = e + D(e_{max} - e_{min}), \tag{7-27}$$

which permits one to solve for the coefficient of relative density

$$D = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}, \tag{7-28}$$

where e = void ratio of sand at its natural density ... viz., density in its natural state in the field or laboratory,
e_{max} = void ratio of the same sand ... in the laboratory ...
e_{min} = void ratio of the same sand under investigation ... state (to be established in the laboratory).

Analyzing the D-equation one notes the following. If the sand in its natural condition already is in its loosest state ($e = e_{max}$), then, according to the D-equation, the coefficient of the relative density of the sand is $D = 0$.

If the sand in its natural condition is in its densest state ($e = e_{min}$), then the coefficient of relative density is $D = 1$. For intermediate values of e the D-values are between 0 and 1.

Sometimes the D-equation is expressed in terms of porosities. Because $e = n/(1 - n)$,

$$D = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} = \frac{(n_{max} - n)(1 - n_{min})}{(n_{max} - n_{min})(1 - n)}, \tag{7-29}$$

where n_{max} = maximum possible porosity of the given sand soil (loosest state)
n_{min} = minimum possible porosity of the given sand soil (densest state) and
n = natural porosity of the given sand soil (natural state in the field or prepared in the laboratory). The most effective means ... densifying sand fills is the method by vibration of the soil.

7-15. Definition. Physically, relative density expresses the ratio of actual decrease in volume of voids in a soil to the maximum possible decrease in volume of voids. In other words, relative density indicates how far a sand under investigation is capable of further densification beyond ... natural state of density under externally applied loads or energy.

7-16. Degree of Relative Density. Attempts have been made to characterize the various degrees or states of densities by means of numerical coefficients. The analysis of the *D*-equation indicates the possibility of doing so. According to Terzaghi, the conventional coefficients are:

For loose sand	$0 < D < \frac{1}{3}$
Medium-dense sand	$\frac{1}{3} < D < \frac{2}{3}$
Dense or well-compacted sand	$\frac{2}{3} < D < 1$

(see Fig 7-7).

As already noticed, a sand in its loosest state of compaction has a relative density of $D = 0$, and in its densest state a value of unity, i.e., $D = 1$.

The loosest state of packing of a sand seems to be a quite clearly defined concept. However, it is to be emphasized that this is not so with the packing of sand in the densest state. Let this be illustrated by the following example Imagine a cubic foot of quartz rock. Obviously this is the densest state of packing with porosity $n = 0$. If this cubic foot of quartz were subdivided by grinding to a sand size (artificial aggregate), and reshoveled, it is obvious that it is no longer possible to restore this sand in its densest state of packing. There will always result some volume of voids regardless of attempts to densify the sand by tamping, rolling, or vibration From this reasoning one arrives at the idea that the densest state of packing is one which the mass of sand permits attaining Above such a density it is then always possible to imagine a more dense state of packing

For very dense *gravelly sand* it sometimes can happen that $D > 1$ This would mean that the natural packing does not permit itself to be repeated in the laboratory. The application of the relative density test to sand is to check the achieved density and the compactness of fills made of granular material. Loose sand can best be densified by vibration[6,7,8]. In evaluating sandy soils, their natural and relative densities are of paramount importance for the evaluation of their properties as a material upon which to found structures.

From the change in the volume of voids in a soil, for example on compaction, it is possible to evaluate the changes in density of a soil medium, and thus to judge the achieved degree of compaction.

Depending upon the properties of the particles of the sand and the texture of the latter, two kinds of sands of the same volume of voids (porosity) may possess totally different abilities of densification (compaction) Hence, the coefficient of relative density of a given sand usually gives us a clearer idea of the density than the value of the void ratio itself.

Example Calculate the relative density of a sand soil whose void ratios are as follows.

$$e_{max} = 0.55; \quad e = 0.30, \text{ and } \quad e_{min} = 0.20.$$

Also, evaluate whether the sand deposit is in a loose state, medium dense or dense state.

$$D = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} = \frac{0.55 - 0.30}{0.55 - 0.20} = 0.71$$

Because $1.00 > 0.71 > 0.66$, the result, $D = 0.71$, indicates that the sand is in a dense state of compaction.

DETERMINATION OF RELATIVE DENSITY

7-17. Equipment. In its natural state of density, a sand soil is characterized by its void ratio, e. However it is very difficult to determine soil density ... degree of compaction, visually Therefore, engineers resort to certain methods of testing For the determination of relative density of sand, relatively simple equipment is used. The apparatus consists essentially of two brass cylinders, I and II, Fig. 7-8 One of the metal cylinders, cylinder I, of known volume, say

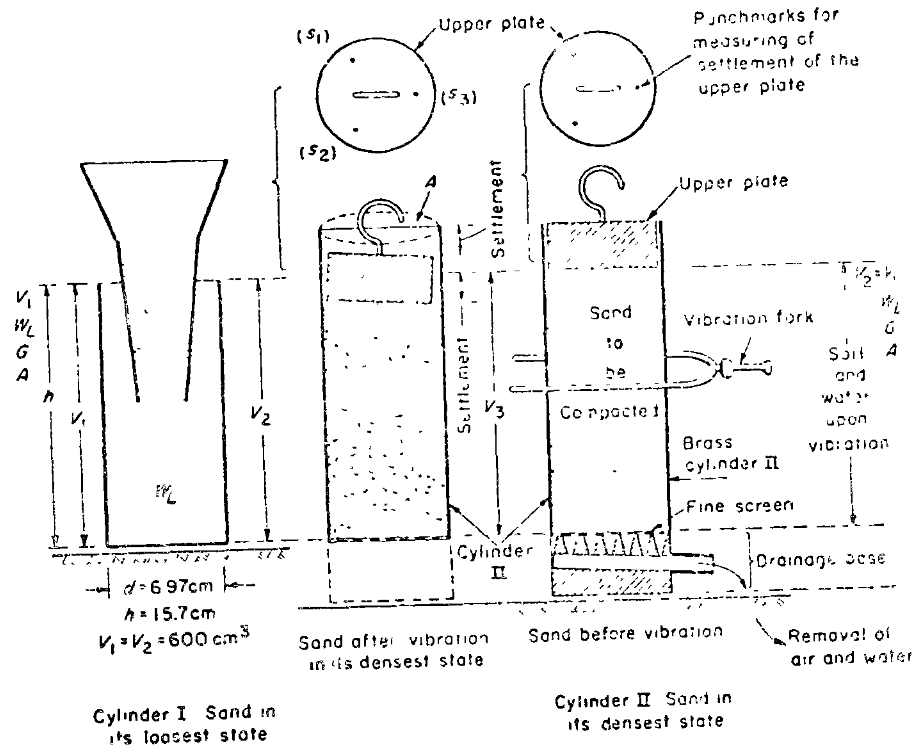


FIG. 7-8 Sketch of relative density test equipment.

$V_1 = 600$ cm^3, has a closed bottom; the other cylinder, cylinder II, of same volume as the first one ($V_2 = V_1 = 600$ cm^3), has a drainage base The cross-sectional area, A, of both cylinders is the same The brass drainage base is connected to an aspirator attached to a spigot to provide a ... for removing water and air from the voids of the sand in cylinder II Also, a large funnel, a straightedge, a scoop, a vibration fork, a cm-scale, depth gage, weighing balance, and a vacuum source (pump or aspirator) belong to the necessary set of equipment The sand to be tested must be oven-dried.

7-18. Procedure.

1) First of all, determine the specific gravity, G, of the sand to be

2) For the determination of porosity, n, of a sand in its *natural state*, proceed as described under the topic "Porosity":

$$n = 1 - n_s = 1 - \frac{W_d}{VG\gamma_w} \tag{5-34}$$

where n_s = relative volume of solid particles of dry soil,
W_d = dry weight of the soil sample obtained in its natural state,
V = volume of the soil sampler (volume of soil sampled in its natural state),
G = specific gravity of sand particles, and
γ_w = unit weight of water.

Now the void ratio of the sand in its natural state is calculated as

$$e = \frac{n}{1-n}.$$

3) To determine the density of sand in its loosest state, viz., n_{max}, or e_{max}, the oven-dried sand is poured loosely through a funnel into the bottomed metal cylinder. By means of a straightedge, level off the sand on the top of the cylinder (I). Determine the loose weight of sand in this cylinder, W_L, and calculate n_{max}:

$$n_{max} = 1 - \frac{W_L}{V_1 G\gamma_w} \tag{7-30}$$

where V_1 = volume of the bottomed cylinder (I) = volume of loose sand. Accordingly,

$$e_{max} = \frac{n_{max}}{1-n_{max}}.$$

4) To determine the porosity of the same sand in its densest state, n_{min}, viz., e_{min}, gradually muddle the weighed sand from the first cylinder into the second one (the one with the drainage base), the volume of which between the screen and the upper plate is $V_2 = V_1$. First fill the cylinder with sand to $\frac{1}{5}$th of its height. Then pour water into this cylinder, and vibrate this cylinder by means of the vibration fork, exerting 30 pairs of blows on the outside walls of the cylinder. Apply vacuum to remove air and water from the soil while vibrating. Then vibrate in the second fifth of the volume, and so on until all of the sand from cylinder I is vibrated into cylinder II. Remember, the weight of the transferred sand is known. Apply vacuum to remove moisture from the voids of the sand and cylinder. Then place the upper plate on top of the vibrated sand in cylinder II, and by means of the depth gage determine the average vibration settlement, viz., decrease in volume of the sand from its loosest state to its densest state at the three punch marks in the upper plate

$$s = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} \tag{7-}$$

Then calculate the vibrated volume of sand, V_3, (the densest state of the vibrated sand):

$$V_3 = V_2 - As,$$

where A is the cross-sectional area of the drainage-based cylinder. Of course, the two cylinders can also be of different dimensions. In the latter case, these have to be observed in calculating V_3 and n_{min}. The minimum porosity is now calculated as

$$n_{min} = 1 - \frac{W_L}{V_3 G\gamma_w}, \tag{7-32}$$

and the minimum void ratio

$$e_{min} = \frac{n_{min}}{1-n_{min}}.$$

5) Now we are ready to calculate the coefficient of relative density D of the sand tested:

$$D = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} \tag{7-29}$$

Example. Determine D from the data as follows.

1), 2) The specific gravity of a sand was found to be $G = 2.65$. The unit weight of water, in the metric system of units, is $\gamma_w = 1$ g cm^3. The porosity of sand in its natural state is $n = 0.329$, or its corresponding void ratio $e = 0.487$. The cross-sectional area of both cylinders: $A = 38.0$ cm².

3) Porosity in the loosest state, n_{max}.
Volume of the bottomed cylinder: $V_1 = 600.0$ cm³.
Weight of dry, loose sand: $W_L = 1030.4$ g.

$$n_{max} = 1 - \frac{1030.4}{(600)(2.65)(1)} = 0.352$$

$$e_{max} = 0.542$$

4) Porosity in the densest state, n_{min}.
Vibration settlement of sand in cylinder II from three measurements:

$$s = \frac{0.99 + 1.02 + 1.05}{3} = 1.02 \text{ (cm)}.$$

Volume of second cylinder: $V_2 = V_1 = 600$ cm³.
Volume of settlement after vibration:

$$V_{s} = As = (38.0)(1.02) = 38.8 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Volume of vibrated sand:

$$V_3 = V_2 - As = 600.0 - 38.8 = 561.2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Minimum porosity:

$$n_{min} = 1 - \frac{1030.4}{(561.2)(2.65)(1)} = 0.307$$

Minimum void ratio:

$$e_{min} = \frac{n_{min}}{1-n_{min}} = 0.443.$$

[illegible].2.3 Identificación de los suelos (Clasificación SUCS)

5) Coefficient of relative density:

$$D = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} = \frac{0.542 - 0.487}{0.542 - 0.443} = 0.555,$$

or

$$D = \frac{(n_{max} - n)(1 - n_{min})}{(n_{max} - n_{min})(1 - n)}$$

$$= \frac{(0.352 - 0.329)(1 - 0.307)}{(0.352 - 0.307)(1 - 0.329)} = 0.554.$$

Because the calculated $D = 0.555$ is

$$0.33 < 0.555 < 0.670,$$

the result indicates that the sand is in a medium-dense state. The conditions involved in this example are illustrated graphically in Fig. 7-9.

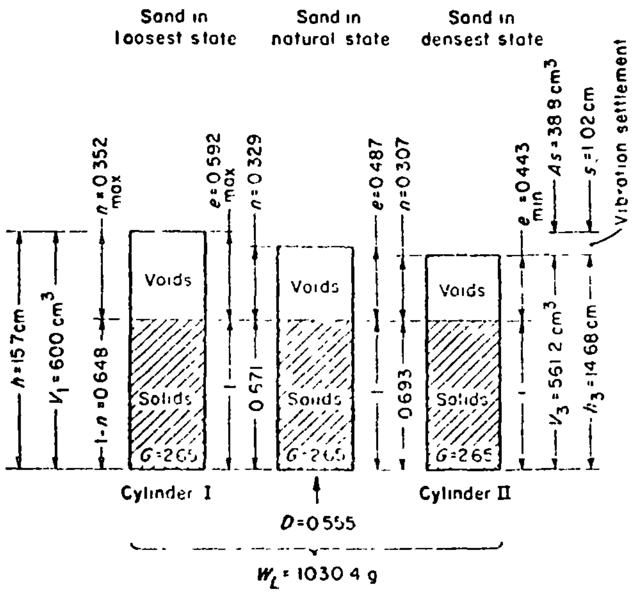


FIG. 7-9 Porosity conditions on determining relative density of sand.

7-19. Discussion. This test is definitely limited to sands. Fine sands should be protected from flowing out of the second cylinder through the drainage base by placing a layer of filter paper on the top of the screen.

Some errors in the test results can easily be introduced when determining porosity in the loosest state: the slightest bit of vibration of cylinder I while pouring the sand would cause the sand to become denser than the loosest state possible. Another important error arises from erratically determined porosity of sand in its natural state. The difficulty here is in correctly obtaining the sand sample in its natural, undisturbed state. Therefore all the necessary experiments must be exercised with great care.

7-20. Applications. The relative density theory finds its application in compaction of granular material, in various soil vibration problems associated with engineering operations in earthworks, foundations of structures (pile driving), foundations of machinery, vibrations transmitted to sandy soil from trains and automobiles, and a number of other applications. In such instances the relative density values of sand give us an indication whether or not unpleasant consequences can be expected from engineering operations which might affect structures or foundations due to *vibration settlement*.

Relative density tests for various points on a lot may show variety in *D*-values and may indicate the necessity of densifying the whole area. Repeated relative density tests then serve as criteria for the achieved degree of density.

REFERENCES

1. R. R. Proctor, "Fundamental Principles of Soil Compaction", *Engineering News-Record*, vol. 111, nos. 9, 10, 12, and 13, 1933.
2. C. A. Hogentogler, Jr., "Essentials of Soil Compaction", *Proceedings*, 16th Annual Highway Research Board Meeting, Washington, D.C., 1936.
3. *Standard Specifications for Highway Materials and Methods of Sampling and Testing*, AASHO, 1950, Part II, pp. 241-243.
4. *Procedures for Testing Soils*, ASTM, April, 1958, pp. 102-107.
5. K. Terzaghi, *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*, Leipzig und Wien, Franz Deuticke, 1925.
6. R. K. Bernhard and J. Finelli, *Compaction and Dynamic Properties of Soils* (mimeographed), New Brunswick, New Jersey, Rutgers University, 1952.
7. R. K. Bernhard and J. Finelli, *Pilot Studies on Soil Dynamics*, Special Technical Bulletin no. 156, ASTM, 1953.
8. R. K. Bernhard, *Dynamic Compaction of Soil*, Engineering Research Bulletin no. 37, New Brunswick, New Jersey, Rutgers University, 1952.

ANEXO VII - A

SISTEMA UNIFICADO DE CLASIFICACION DE SUELOS

INCLUYENDO IDENTIFICACION Y DESCRIPCION

			PROCEDIMIENTO DE IDENTIFICACION EN EL CAMPO (Excluyendo las particulas mayores de 7.6 cm (3") y basando las fracciones en pesos estimados)	SIMBOLOS DEL GRUPO (*)	NOMBRES TIPICOS	INFORMACION NECESARIA PARA LA DESCRIPCION DE LOS SUELOS
SUELOS DE PARTICULAS GRUESAS Mas de la mitad del material es retenido en la malla N° 200 (◊)	GRAVAS Mas de la mitad de la fraccion gruesa es retenida en la malla N° 4	GRAVAS LIMPIAS (Poco o nada de particulas finas)	Amplia gama en los tamaños de las particulas y cantidades apreciables de todos los tamaños intermedios	GW	Gravas bien graduadas, mezclas de grava y arena, con poco o nada de finos	Dese el nombre tipico indiquense los porcentajes aproximados de grava y arena, tamaño maximo, angulosidad, caracteristicas de la superficie y dureza de las particulas gruesas, nombre local y geologico, cualquier otra informacion descriptiva pertinente y el simbolo entre parentesis
			Predominio de un tamaño o un tipo de tamaños, con ausencia de algunos tamaños intermedios	GP	Gravas mal graduadas, mezclas de grava y arena con poco o nada de finos	
		GRAVAS CON FINOS (Cantidad apreciable de particulas finas)	Fraccion fina poco o nada plastica (Para identificacion vease grupo ML abajo)	GM	Gravas limosas, mezclas de grava, arena y limo	
			Fraccion fina plastica (Para identificacion vease grupo CL abajo)	GC	Gravas arcillosas, mezclas de grava, arena y arcilla	Para los suelos inalterados agreguese informacion sobre estratificacion, compacidad, cementacion, condiciones de humedad y caracteristicas de drenaje
	ARENAS Mas de la mitad de la fraccion gruesa pasa la malla N° 4	ARENAS LIMPIAS (Poco o nada de particulas finas)	Amplia gama en los tamaños de las particulas y cantidades apreciables de todos los tamaños intermedios	SW	Arenas bien graduadas, arenas con grava, con poco o nada de finos	
	(Para clasificacion visual puede usarse 1/2 cm como equivalente a la abertura de la malla N° 4)		Predominio de un tamaño o un tipo de tamaños, con ausencia de algunos tamaños intermedios	SP	Arenas mal graduadas, arenas con grava, con poco o nada de finos	EJEMPLO Arena limosa con grava, como un 20 % de grava de particulas duras, angulosas y de 1.5 cm de tamaño maximo, arena gruesa a fina de particulas redondeadas o subangulosas, alrededor de 15% de finos no plasticos de baja resistencia en estado seco, compacta y humeda en el lugar, arena aluvial, (SM)
		ARENAS CON FINOS (Cantidad apreciable de particulas finas)	Fraccion fina poco o nada plastica (Para identificación véase grupo ML abajo)	SM	Arenas limosas, mezclas de arena y limo	
			Fraccion fina plastica (Para identificacion vease grupo CL abajo)	SC	Arenas arcillosas, mezclas de arena y arcilla	

(Las particulas de 0.074 mm de diametro (malla N° 200) son aproximadamente las mas pequeñas visibles a simple vista)

		PROCEDIMIENTO DE IDENTIFICACION EN LA FRACCION QUE PASA LA MALLA N° 40: RESISTENCIA EN ESTADO SECO (Caracteristicas al rompimiento)	DILATANCIA (Reaccion al agitado)	TENACIDAD (Consistencia cerca del limite plastico)	SIMBOLOS DEL GRUPO	NOMBRES TIPICOS	INFORMACION NECESARIA PARA LA DESCRIPCION DE LOS SUELOS
SUELOS DE PARTICULAS FINAS Mas de la mitad del material pasa la malla N° 200	LIMOS Y ARCILLAS Limite liquido menor de 50	Nula o ligera	Rapida a lenta	Nula	ML	Limos inorganicos, polvo de roca, limos arenosos o arcillosos ligeramente plásticos	Dese el nombre tipico indiquense el grado y caracter de la plasticidad, cantidad y tamaño maximo de las particulas gruesas, color del suelo humedo, nombre local y geologico, cualquier otra información descriptiva pertinente y el simbolo entre parentesis
		Media a alta	Nula a muy lenta	Media	CL	Arcillas inorganicas de baja a media plasticidad, arcillas con grava, arcillas arenosas, arcillas limosas, arcillas pobres	
		Ligera a media	Lenta	Ligera	OL	Limos organicos y arcillas limosas organicas de baja plasticidad	
	LIMOS Y ARCILLAS Limite liquido mayor de 50	Ligera a media	Lenta a nula	Ligera a media	MH	Limos inorganicos, limos micaceos o diatomaceos, limos elasticos	Para los suelos inalterados agreguese informacion sobre la estructura, estratificacion, consistencia tanto en estado inalterado como remoldeado, condiciones de humedad y drenaje
		Alta a muy alta	Nula	Alta	CH	Arcillas inorgánicas de alta plasticidad, arcillas francas	
		Media a alta	Nula a muy lenta	Ligera a media	OH	Arcillas organicas de media a alta plasticidad, limos organicos de media plasticidad	EJEMPLO Limo arcilloso, cafe, ligeramente plástico, porcentaje reducido de arena fina, numerosos agujeros verticales de raices, firme y seco en el lugar, loess, (ML)
SUELOS ALTAMENTE ORGANICOS		Facilmente identificables por su color, olor, sensación esponjosa y frecuentemente por su textura fibrosa			Pt	Turba y otros suelos altamente organicos	

Usese la curva granulometrica para identificar las fracciones de suelo anotadas en la columna de identificacion en el campo

Determinense los porcentajes de grava y arena de la curva granulometrica

Dependiendo del porcentaje de finos (fraccion que pasa la malla N° 200)

G-G

S-A

INDICE PLASTICO

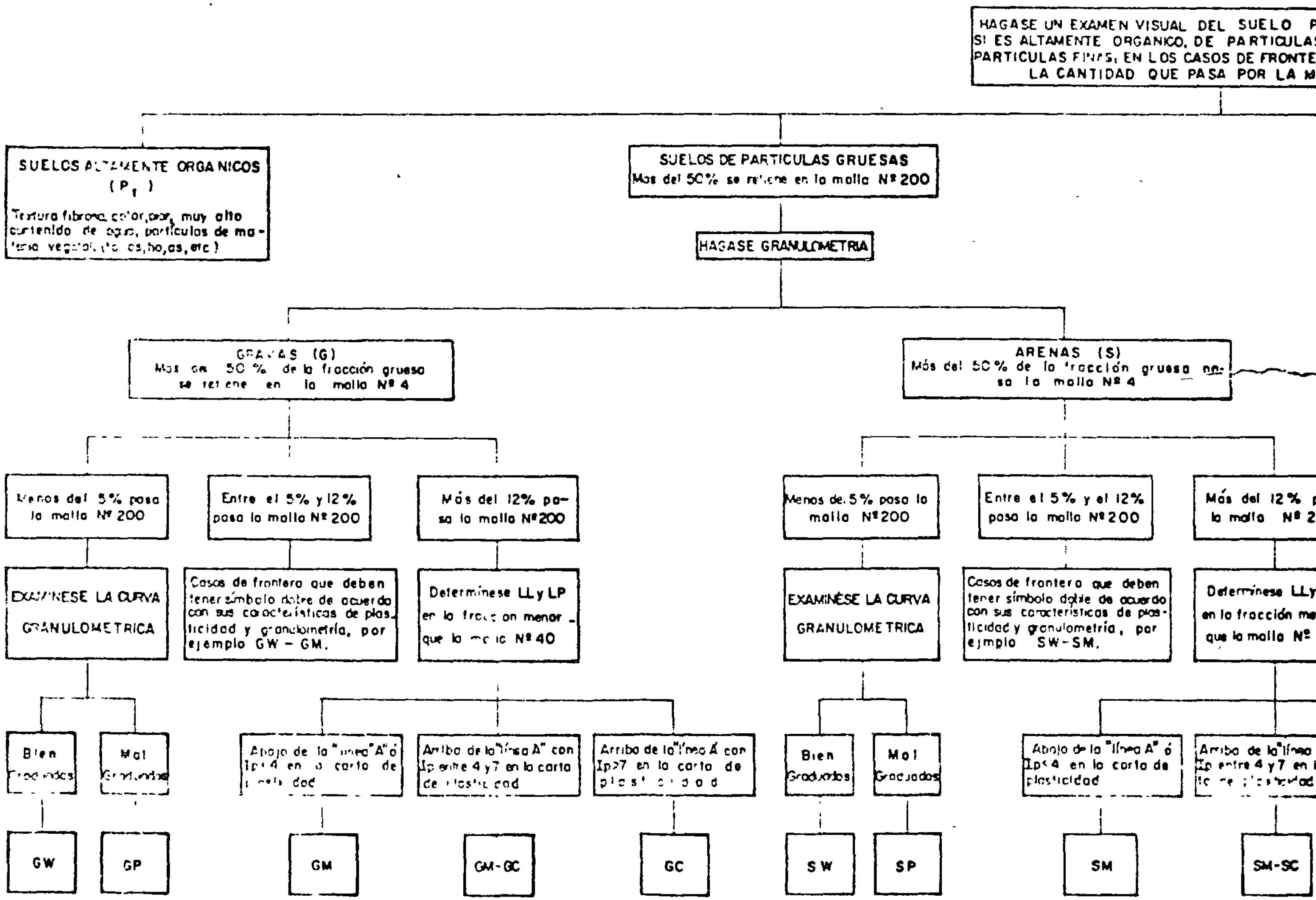
PAR.

(*) Clasificaciones de frontera - Los suelos que posean las caracteristicas de dos grupos se designan con la combinación de los dos simbolos Por ejemplo GW-GC, mezcla de grava y arena bien graduada con cementante arci

(◊) Todos los tamaños de las mallas en esta carta son los U.S. Standard

ANEXO

PROCEDIMIENTO AUXILIAR PARA IDE
EN EL LABOR
S.U.C.S

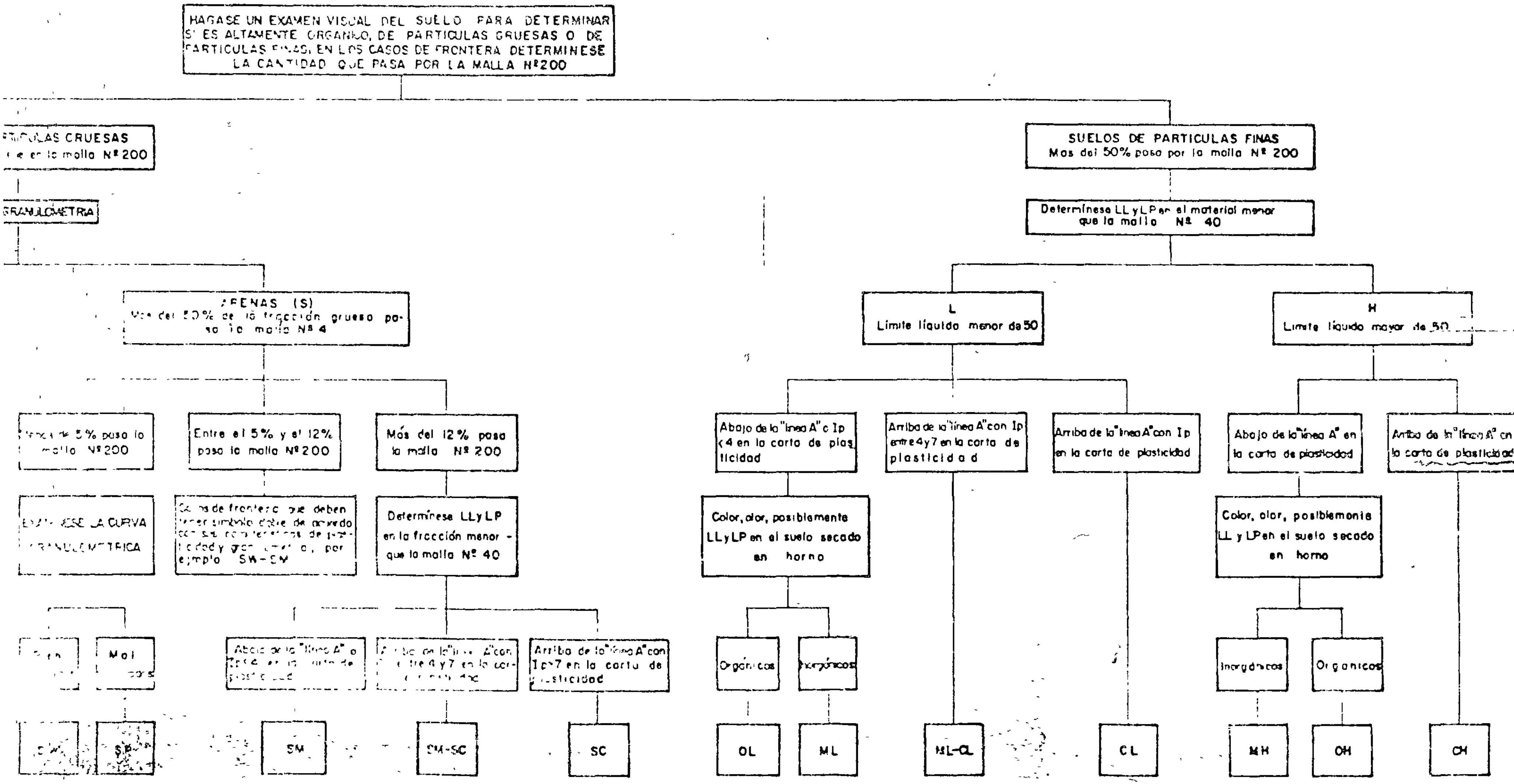


NOTA – Los tamaños de las mallas son de la U S Estándar

ANEXO VII-b

PROCEDIMIENTO AUXILIAR PARA IDENTIFICACION DE SUELOS EN EL LABORATORIO

S.U.C.S.



1.3 Propiedades mecánicas

1.3.1 Principio de esfuerzos efectivos

la a bruscamente una carga P al primer pistón, en el primer momento tendrá éste que soportarla totalmente, generándose en él una presión en exceso de la hidrostática, que se transmite con igual valor a cualquier profundidad. El nuevo diagrama de presiones en el fluido será ahora la línea 3-4 de la Fig. X-8. No existe aún ningún gradiente hidráulico que tienda a producir un movimiento del fluido, si se exceptúa el orificio superior, que está en las condiciones antes analizadas, para el caso de una sola cámara. La diferencia de presiones en dicho orificio (P/A) crea un gradiente hidráulico que produce un flujo del fluido, hacia fuera de la primera cámara; tan pronto como se inicia ese flujo, la presión en el fluido de la primera cámara disminuye, transfiriéndose simultáneamente una parte de la carga al resorte. La reducción de la presión del fluido en la primera cámara causa, por diferencia con la segunda, un desnivel de presiones en el segundo orificio, por lo cual el fluido tenderá a pasar de la segunda a la primera cámara. Como consecuencia, disminuye también la presión del fluido en la segunda cámara, transmitiéndose así la tendencia al flujo a las cámaras inferiores. El fin del proceso será, obviamente, el momento en que la presión en el fluido vuelva a la condición hidrostática, estando la carga P totalmente soportada por los resortes.

En cualquier instante (t) después de la aplicación de la carga (P), la distribución de presiones del fluido y los resortes, u y p respectivamente, es la que se indica con la línea quebrada que aparece en la ya citada Fig. X-8. Nótese que en cada cámara, la presión en el fluido sigue una ley lineal y que las discontinuidades en la presión representadas por los tramos horizontales, se producen solamente en los orificios. Conforme el tiempo pasa, la línea quebrada se desplaza continuamente hacia la izquierda.

Si se considera el volumen de las cámaras muy pequeño y el número de ellas muy grande, el modelo se acercará a la condición que prevalece en los suelos. La línea quebrada que representa la distribución de presión en un número pequeño de cámaras tenderá a convertirse en una curva continua a medida que el número de cámaras aumente. (Curva de trazo discontinuo en la Fig. X-8.)

En el suelo, la estructuración de las partículas sólidas puede considerarse representada por los resortes del modelo, el agua intersticial libre por el fluido incompresible de las cámaras y los canalículos capilares, por los orificios de los émbolos.

Considérese ahora un estrato de suelo de extensión infinita según un plano horizontal y de un espesor, H, tal que la presión debida al peso propio del suelo y del agua del mismo pueda considerarse despreciable, en comparación a las presiones producidas por las cargas aplicadas. (Fig. X-9.)

Se supondrá que el agua sólo puede drenarse por la frontera superior del estrato, al cual se considera confinado inferiormente por una

frontera impermeable. El estrato ha estado sujeto a una presión p_1 durante el tiempo suficiente para consolidarse totalmente bajo esa presión. Considérese que en las condiciones anteriores se aplica al estrato un incremento de presión Δp. La presión total sobre el estrato será

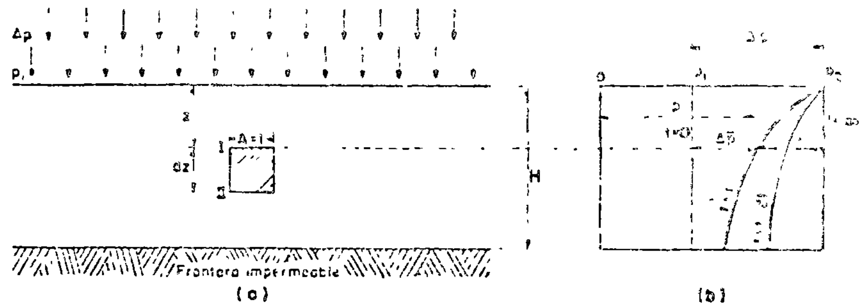


FIG. X-9 ESTRATO DE SUELO DE EXTENSIÓN INFINITA SOMETIDO A UN PROCESO DE CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL

$p_2 = p_1 + \Delta p$. Inmediatamente después de aplicar el incremento de carga, éste se soporta íntegramente por el agua intersticial, que adquirirá por lo tanto una presión en exceso de la hidrostática (a lo largo de todo el espesor H), igual a Δp como se muestra en la Fig. X-9.b.

Al cabo de un cierto tiempo t habrá escapado cierta cantidad de agua por la superficie superior y, consecuentemente, el exceso de presión hidrostática habrá disminuido y parte de la carga ($\Delta\bar{p}$) habrá sido transferida a la estructura sólida del suelo. La distribución de la presión entre la estructura del suelo y el agua intersticial ($\bar{p} = p_1 + \Delta\bar{p}$ y u, respectivamente) queda representada por la curva $t = t$ en la misma Fig. X-9.b.

Es evidente que:

$$\Delta p = \Delta\bar{p} + u \tag{10-2}$$

y la ecuación anterior es válida en cualquier instante, t, y a cualquier profundidad, z. En un instante posterior, $t + dt$, la nueva distribución de presiones aparece también en la Fig. X-9.b. En esta figura se puede ver que tanto la presión $\Delta\bar{p}$, en la estructura del suelo, como la u, en el agua intersticial son funciones de la profundidad, z, y el tiempo t. Puede escribirse:

$$u = f(z,t) \tag{10-3}$$

Por lo tanto:

$$\Delta\bar{p} = \Delta p - u = \Delta p - f(z,t) \tag{10-4}$$

Esta ecuación expresa el progreso del fenómeno de la consolidación unidimensional, con flujo vertical.

X-5. Estudio de las presiones en suelos

Antes de establecer más detalladamente la relación entre las variables que aparecen en la fórmula (10-4), resulta necesario hacer un análisis adicional sobre la naturaleza de las presiones que se manejan en el fenómeno de la consolidación y, en general, en todos los problemas de la Mecánica de Suelos.

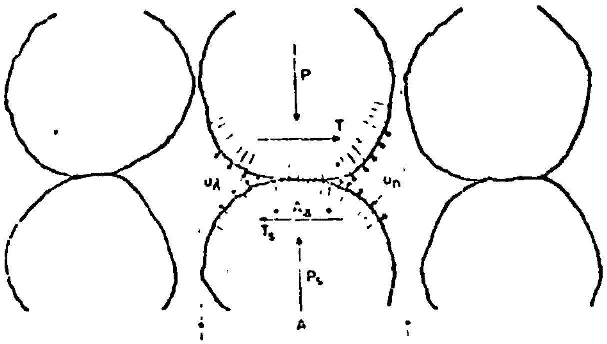


FIG X-10. EQUILIBRIO DE LAS FUERZAS ACTUANTES EN DOS PARTICULAS EN CONTACTO, REPRESENTATIVAS DE UNA MASA DE SUELO

Considérense[1] dos partículas sólidas en contacto sobre una superficie plana de área A_s, representativa de las áreas de contacto en toda la masa de suelo. A esas dos partículas corresponde un área tributaria media A, también representativa de la situación de las partículas en toda la masa (Fig. X-10).

Puede definirse la relación de áreas de contacto como:

$$a = \frac{A_s}{A} \tag{10-5}$$

Si la fuerza total normal al plano de contacto es P y la cortante total es T, los esfuerzos totales, normales y cortantes, se definen como:

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \tau = \frac{T}{A} \tag{10-6}$$

Los esfuerzos en la superficie interfacial son diferentes a los anteriores y, de acuerdo con un criterio semejante, se definen como:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} \qquad \tau_s = \frac{T_s}{A_s} \tag{10-7}$$

P_s y T_s son las fuerzas normal y tangencial actuantes entre las dos partículas sólidas.

Considérese el equilibrio en la dirección normal al plano de contacto.

$$P = P_s + (A - A_s)\, u_n \tag{10-8}$$

u_n, en la ecuación anterior, es la presión en el agua intersticial.

Dividiendo los dos miembros por A y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, puede escribirse:

$$\frac{P}{A} = \frac{P_s}{A_s}\frac{A_s}{A} + \left(1 - \frac{A_s}{A}\right) u_n$$

$$\therefore \quad \sigma = \sigma_s\, a + (1 - a)\, u_n \tag{10-9}$$

Por otra parte, si se define la presión intergranular, σ_g, como

$$\sigma_g = \frac{P_s}{A} \tag{10-10}$$

La ecuación (10-8) conduce, con las manipulaciones anteriores a

$$\sigma = \sigma_g + (1 - a)\, u_n \tag{10-11}$$

Considerando ahora el equilibrio paralelo al plano de contacto, se tiene:

$$T = T_s$$

De donde, de acuerdo con lo anterior:

$$\tau = a\, \tau_s \tag{10-12}$$

La ecuación (10-11) necesita un comentario adicional que tenga en cuenta los problemas prácticos del ingeniero. Los datos normales de un problema que requiera el cálculo de presiones sobre el suelo son la carga total aplicada y el área total de suelo que toma esa carga. En otras palabras, se conocen P y A, pero generalmente no puede obtenerse en forma simple A_s. Como consecuencia, el valor de a que aparece en la ecuación (10-11) no suele poder calcularse numéricamente en la práctica. Sin embargo, en suelos dicho valor es sumamente pequeño y en [illegible] mayoría de los casos, despreciable. Entonces la ecuación (10-11) [illegible] a:

$$\sigma = \sigma_g + u_n \qquad (10\text{-}13)$$

La ecuación (10-11) adquiere importancia cuando se estudia la [illegible] de presiones en materiales porosos, tales como el concreto [illegible] tipos de rocas.

La ecuación (10-13), derivada de la (10-11) tiene una importan[illegible] en la Mecánica de Suelos. El término σ se denomina [illegible] normal total y, como se desprende de lo dicho, es la carga total [illegible] al suelo en un nivel dado entre el área total de la masa del [illegible] u_n es la presión del agua intersticial, conocida tradicionalmente [illegible] Mecánica de Suelos como "presión neutral" y σ_g es la presión in[illegible] obtenida del cociente entre la fuerza que soporta la estruc[illegible] y el área total de la masa de suelo.

Por otra parte, en el estudio del comportamiento mecánico de los [illegible] se ha definido la presión efectiva o esfuerzo efectivo como aque[illegible] esfuerzos normales que gobiernan los cambios volumétricos o la [illegible] de un suelo ($\bar{\sigma}$).

[illegible] se ha considerado a la presión intergranular [illegible] efectiva, para efectos de cálculo y análisis teóricos. En suelos [illegible] hipótesis ha resultado altamente satisfactoria e incluso se ha com[illegible] tanto experimental como teóricamente.[1]

Usando el símbolo de presión efectiva, la ecuación (10-13) queda:

$$\sigma = \bar{\sigma} + u_n$$
$$\bar{\sigma} = \sigma - u_n \qquad (10\text{-}14)$$

Resulta interesante hacer notar que, en principio, no es evidente a [illegible] que la presión intergranular tal como se ha definido sea la que [illegible] gobierna los cálculos de compresibilidad y resistencia, es [illegible] sea la presión efectiva.

En otros materiales diferentes al suelo tales como la roca o con[illegible] se han encontrado expresiones más complicadas para el esfuerzo [illegible] que se acercan más al comportamiento mecánico de esos ma[illegible] que la consideración del esfuerzo intergranular como efectivo. [illegible] que en el caso de los suelos, por ser a despreciable, las [illegible] para el esfuerzo efectivo coincidan con la expresión sencilla [illegible] esfuerzo intergranular.

Dentro del campo de validez de las actuales teorías de la Mecánica [illegible] Suelos, el concepto presión efectiva es, por definición, una realidad [illegible], en el sentido de que gobierna los fenómenos, tal como la ac[illegible] teoría los concibe. Así, el hecho de que el esfuerzo intergranular, en

suelos, resulte, [illegible] al efectivo, indica que el esfuerzo intergranular, tal como ha sido [illegible], sirve como elemento de [illegible] en el comportamiento de los suelos, en la forma en que la Teoría [illegible] analiza actualmente.

En [illegible] problemas de Mecánica de Suelos, por [illegible] solidación, es ventajoso descomponer la presión neutral, u_n, en [illegible] ponentes: la presión hidrostática, u_h, que [illegible] lineal de equilibrio estático y la presión en exceso de [illegible]. Se tiene, evidentemente:

$$u_n = u_h + u \qquad (10\text{-}15)$$

u es el término que juega tan importante papel en la Teoría de [illegible] solidación.

La presión total vertical σ (o frecuentemente p en Mecánica de Suelos) que se tiene en el suelo, a una cierta profundidad z, debida al peso propio del material supuesto homogéneo, puede calcularse en la práctica en forma simple con la expresión:

$$\sigma = p = \gamma_m z \qquad (10\text{-}16)$$

Esto equivale a considerar la totalidad de la carga por peso propio sobre el nivel considerado por unidad de área.

La presión hidrostática, u_h, se calcula [illegible] la forma

$$u_h = \gamma_w z \qquad (10\text{-}17)$$

La presión efectiva vertical por peso propio, será, en un caso en que el agua esté en condición puramente hidrostática ($u = 0 \therefore u_n = u_h$):

$$\bar{p}_0 = \sigma - u_h = (\gamma_m - \gamma_w) z = \gamma'_m z \qquad (10\text{-}18)$$

Si se aplica al suelo una sobrecarga Δp, aparece en el agua del mismo una presión en exceso de la hidrostática. En el primer instante de la aplicación $\Delta p = u$, pero en un instante posterior ocurre el [illegible] ya analizado (X-4).

$$\Delta p = \Delta \bar{p} + u \qquad (10\text{-}2[illegible])$$

y la presión efectiva sobre el suelo se incrementa con el tiempo. En la Fig. X-11 se muestra una repartición de presiones en un estrato con nivel freático en su frontera superior, con [illegible] de ilustración. Al estrato, previamente consolidado bajo su peso propio, se le ha aplicado una sobrecarga Δp.

Debe notarse que en todo tiempo la presión total permanece constante, mientras la neutral y la efectiva cambian, siendo su suma igual a la presión total. En la práctica la presión u_n puede obtenerse en el campo medio de piezómetros, calculándose la presión efectiva con la expresión (10-11). Si no hay presión en exceso de la hidrostática en el agua, la presión efectiva puede calcularse directamente como se dijo.

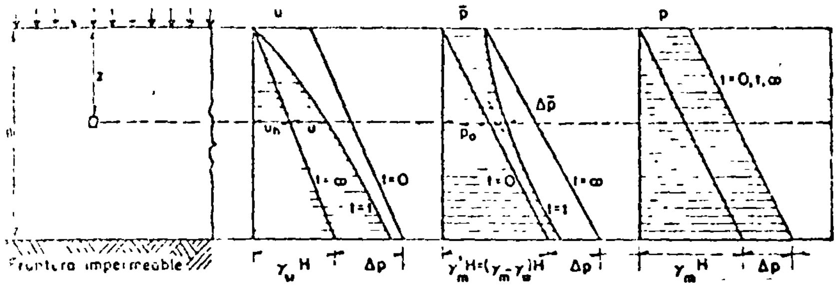


FIG. X-11 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN ESTRATO SUPERFICIAL DE SUELO HOMOGÉNEO Y COMPRESIBLE, CON N. A. F. EN LA FRONTERA SUPERIOR

-3. Ecuación diferencial de la consolidación unidimensional

Se vio que en un proceso de consolidación unidimensional, con flujo vertical, se tiene:

$$u = f(z,t)$$

Se trata ahora de obtener dicha función; en otras palabras, de establecer matemáticamente el fenómeno físico estudiado.

Considérese un elemento de volumen del estrato mostrado en la Fig. X-12. El espesor del elemento es dz. Por simplicidad se considera que las fronteras superior e inferior del elemento cubran un área unitaria.

Sea u la presión del agua en exceso de la hidrostática; en la situación indicada por el punto 1 (tiempo t y profundidad z):

$$u_1 = u \qquad (10\text{-}19)$$

El punto 2 representa la presión en el mismo tiempo, pero a una profundidad $z + dz$; por lo tanto:

$$u_2 = u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \qquad (10\text{-}20)$$

El punto 3 representa la presión a la misma profundidad, pero en un tiempo $t + dt$:

$$u_3 = u + \frac{\partial u}{\partial t} dt \qquad (10\text{-}21)$$

Finalmente, el punto 4 representa una presión que varía en un tiempo dt y en una profundidad dz, respecto a la presión en 1.

$$u_4 = u + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial}{\partial z}\left[u + \frac{\partial u}{\partial t} dt\right]dz =$$

$$= u + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} dt dz \qquad (10\text{-}22)$$

El problema de la consolidación es esencialmente un problema de flujo de agua no establecido a través de una masa porosa. Una hipótesis del análisis que sigue es que tanto el agua como las partículas de suelo

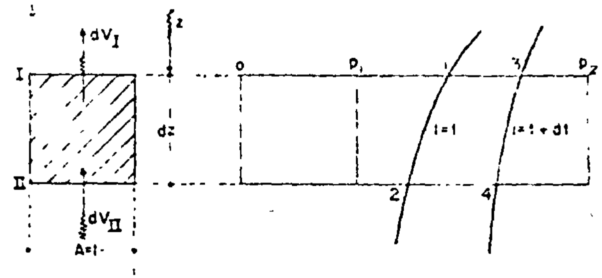


FIG. X-12. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN LOS TIEMPOS t Y t + dt EN UN ELEMENTO DE VOLUMEN SUJETO A CONSOLIDACIÓN

son totalmente incompresibles. También se aceptará que el agua llena totalmente los vacíos del suelo, es decir, que el suelo está totalmente saturado. La primera de las anteriores hipótesis puede considerarse muy cercana a la realidad, dentro del orden de presiones que las estructuras ingenieriles comunican al suelo. La segunda tampoco debe verse como una hipótesis demasiado apartada de la situación prevaleciente en la mayoría de los suelos arcillosos (a los que, como se verá, se aplica sobre todo la Teoría de la Consolidación Unidimensional), propios de depósitos sedimentarios en zonas planas, con nivel freático muy superficial y, por lo tanto, en condición por lo menos muy cercana a la saturación total.

Con las anteriores hipótesis debe tenerse que la diferencia entre la cantidad de agua que sale por la cara I del elemento de suelo mostrado en la Fig. X-12 y la que entra por la cara II del mismo en el tiempo dt, debe ser igual al cambio de volumen (compresión o expansión) del elemento en el mismo tiempo.

Estas cantidades de agua dependen de los gradientes hidráulicos actuantes en ambas caras, los cuales son proporcionales a la pendiente

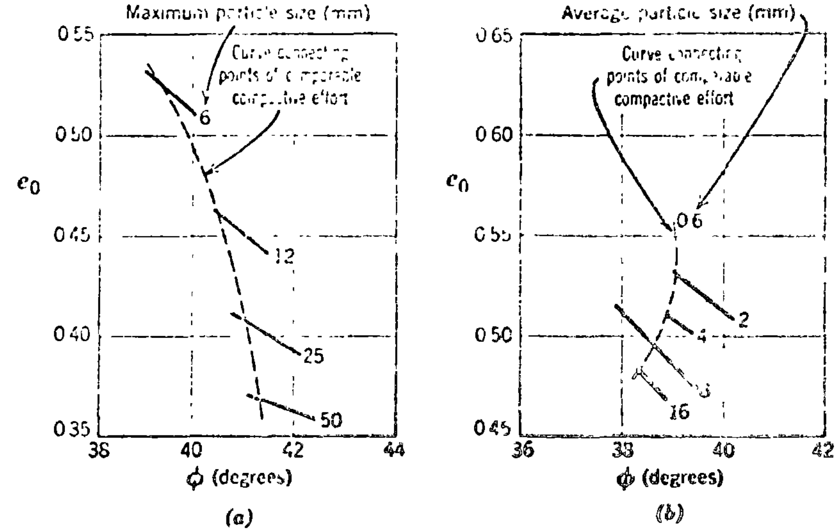


Fig. 11.12 Effect of particle size and gradation on friction angle. (*a*) Soils with same minimum particle size (0.5 mm). (*b*) Soils with same uniformity coefficient. Data from Leslie (1963).

particle size increases the load per particle, and hence crushing begins at a smaller confining stress. Spurred by the increasing popularity of rockfill dams, several laboratories have constructed triaxial testing systems which can accommodate specimens as large as 12 in. in diameter. An apparatus that can test specimens 3.7 ft in diameter and 8.2 ft long has been constructed in Mexico (Marsal, 1963).

Grading of the Sand

Figure 11.12*a* shows data for four soils all having the same minimum particle size but different maximum particle sizes. For comparable compactive efforts, the better graded sand has both a smaller initial void ratio and a larger friction angle. It is apparent that a better distribution of particle sizes produces a better interlocking. This trend is also shown by the data in Table 11.2, and is further confirmed by a series of tests reported by Holtz and Gibbs (1956).

In many soils, a few particles of relatively large size make up a large fraction of the total weight of the soil.

Table 11.2 Effect of Angularity and Grading on Peak Friction Angle

Shape and Grading	Loose	Dense
Rounded, uniform	30°	37°
Rounded, well graded	34°	40°
Angular, uniform	35°	43°
Angular, well graded	39°	45°

From Sowers and Sowers, 1951.

If these particles are numerous enough so that they interlock with each other, it is important that these large particles be present in the test specimen. However, if these larger particles are just embedded in a matrix of much smaller particles so that the shearing takes place through the matrix, then the large particles can safely be omitted from the specimen. Unfortunately, the profession still is lacking definitive guides as to what constitutes a satisfactory test upon a gravelly soil.

A well-graded soil experiences less breakdown than a uniform soil of the same particle size, since in a well-graded soil there are many interparticle contacts and the load per contact is thus less than in the uniform soil. Figure 11.13 illustrates that the better graded soil suffers less decrease in ϕ with increasing confining pressure.

Angularity of Particles

It would be expected that angular particles would interlock more thoroughly than rounded particles, and hence that sands composed of angular particles would have the larger friction angle. The data for peak friction angle presented in Table 11.2 confirm this prediction. Even when a sand is strained to its ultimate condition, so that no further volume change is taking place and the sand is in a loose condition, the sand with the angular particles has the greater friction angle. In gravels the effect of angularity is less because of particle crushing.

Mineral Type

Unless a sand contains mica, it makes little difference whether the sand is composed primarily of quartz, one of the feldspars, etc. A micaceous sand will often have a large void ratio, and hence little interlocking and a low

[illegible].3.3 Resistencia no drenada en arcillas, S_u, Sensitividad, S_o

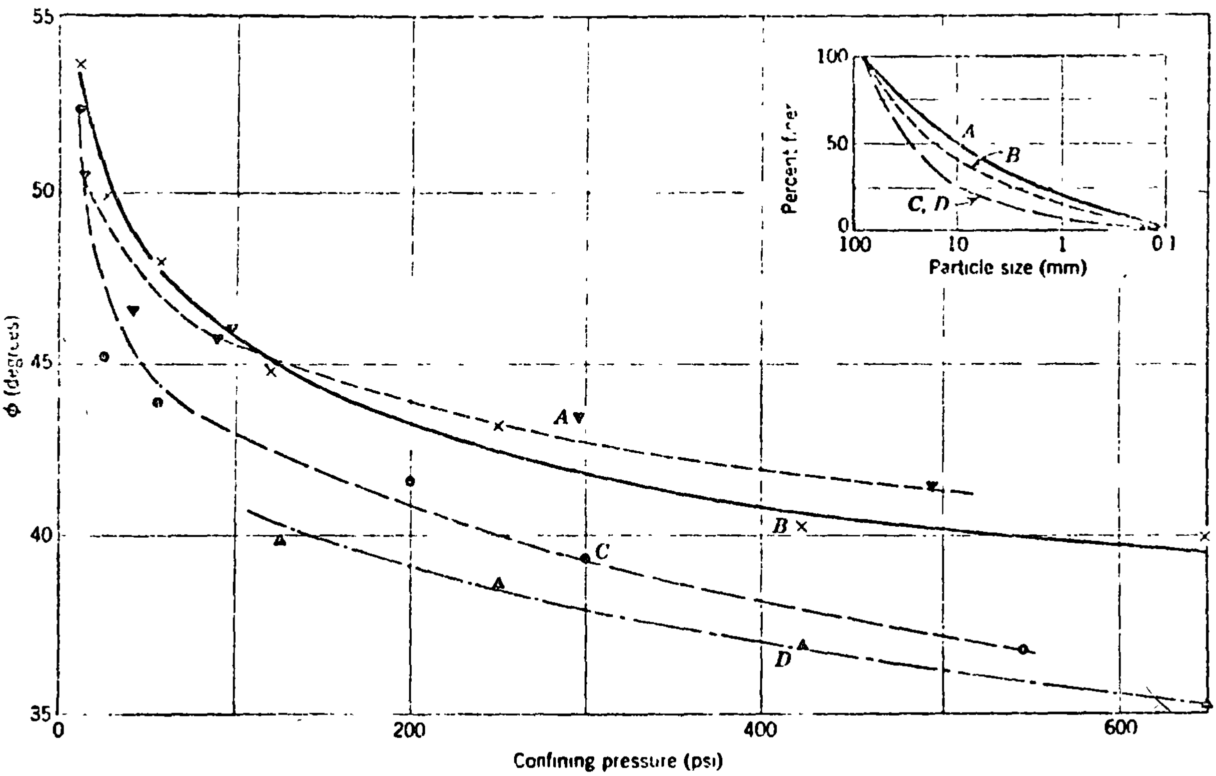


Fig. 11.13 Friction angle versus confining pressure (data from Leslie 1963).

friction angle. The smaller value of ϕ_μ for mica compared to that of quartz has relatively little to do with this result.

Tests (Horn and Deere, 1962) have been carried out using powdered mica with care taken to have the mica flakes oriented nearly parallel. The result was a friction angle (ϕ_μ) of 16°, compared to $\phi_\mu = 13\frac{1}{2}°$. There is some small amount of interlocking in such a case.

Where particles of gravel are an important constituent of soil, the origin of the gravel particles can have an important effect. If the gravel particles are relatively soft, crushing of these particles will minimize the interlocking effect and decrease the friction angle as compared to a comparable soil with hard gravel particles.

Summary

The composition of a granular soil can have an important influence upon its friction angle, indirectly by influencing e_0 and directly by influencing the amount of interlocking that occurs for a given e_0. Table 11.3 provides a summary of data that can be used for preliminary design. However, for final design of an embankment, the actual soil should be tested using the void ratio and stress system that will exist in the field.

11.5 DETERMINATION OF *IN SITU* FRICTION ANGLE

The results presented in the foregoing sections have emphasized the predominant role of the degree of interlocking upon magnitude of the friction angle. Thus, if we wish to determine the friction angle of a sand *in situ*, it is not enough to find the nature and shape of the particles composing the sand. It is essential to know how tightly together these particles are packed in their natural state.

It is extremely difficult to obtain samples of a sand without changing the porosity. Thus, except for

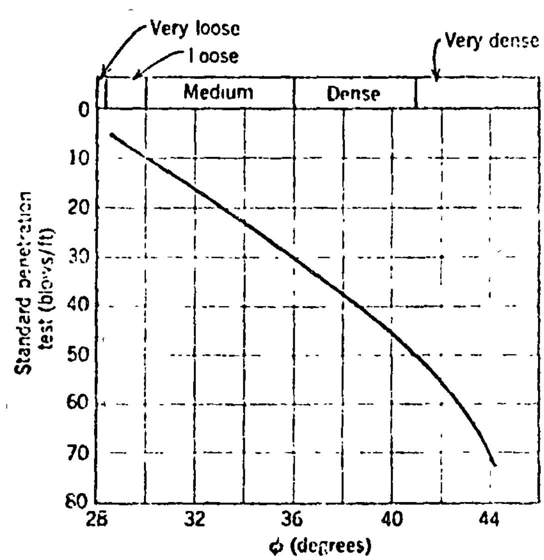


Fig. 11.14 Correlation between friction angle and penetration resistance (From Peck, Hanson, and Thornburn, 1953).

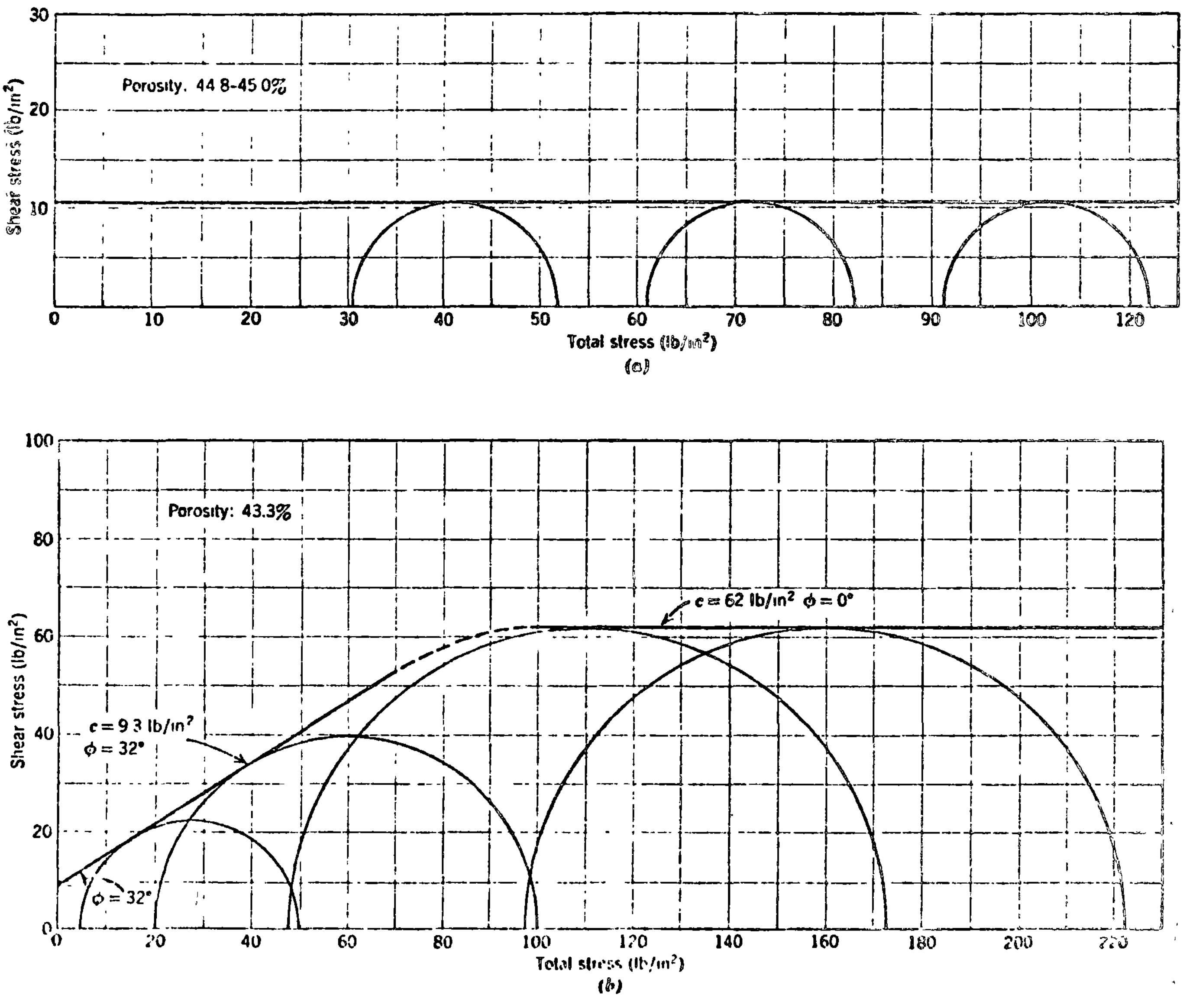


Fig. 29.4 Results of UU tests on saturated sand. Consolidation stress = 5.3 lb/in.^{2}, initially fully saturated (after Bishop and Eldin, 1950).

give the UU strength of clay but not of sand. This is because large negative pore pressures can exist within the tiny pores among clay particles but not within the larger pores among sand particles. The limit of pore pressures before cavitation is related to the capillary rise of water within a soil (Chapter 16) and to the apparent cohesion which can exist above the water table (Chapter 21).

29.2 SENSITIVE CLAYS AND VERY LOOSE SANDS

In Chapter 28 and in the preceding section we have emphasized the unity between drained and undrained strength and have suggested that the q_f versus $\bar{p}_f$ relation (i.e., the $\bar{c}$ and $\bar{\phi}$) is the same for both tests. Now we must consider some deviations and exceptions to this

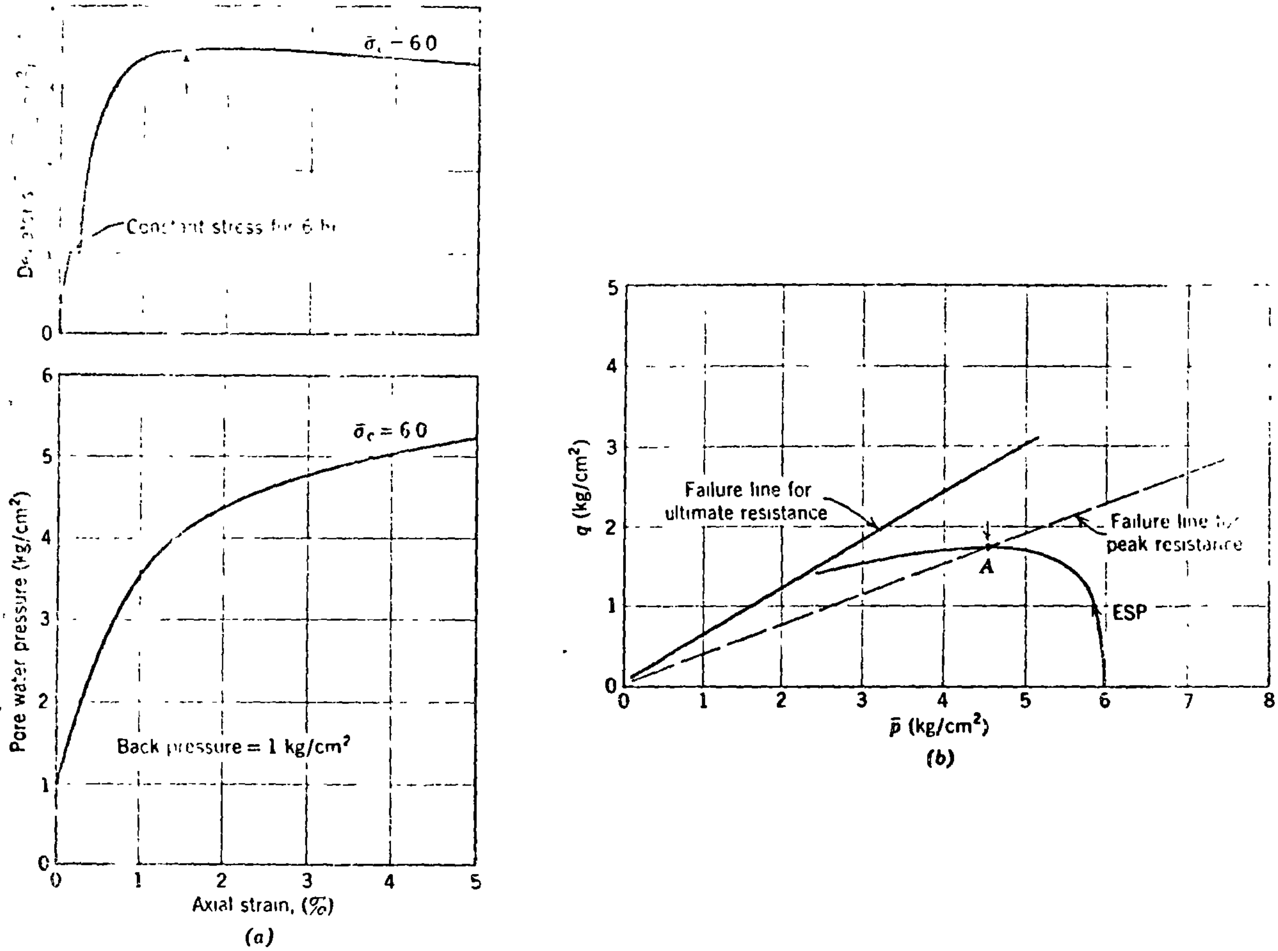


Fig. 29.5 Behavior of sensitive clay during undrained shear (after Crawford, 1959).

simplified picture. The most important of these exceptions occurs in the case of sensitive clays and very loose sands.

Figure 29.5 shows the results of a CU test upon an undisturbed sample of a normally consolidated sensitive clay. The deviator stress reaches a peak at a rather small axial strain, and then decreases with further strain. The pore pressure continues to increase even after the deviator stress has peaked. The effective stress path has a form quite different from that which we encountered with Weald clay, since now the q_f, $\bar{p}_f$ point representing peak strength (point marked with an arrow) lies well below the q_f versus $\bar{p}_f$ relation from drained shear.

This type of behavior results from the very loose metastable skeleton of the sensitive clays. The behavior of this clay during drained shear has already been discussed in Section 21.5: the clay experiences a great decrease in volume. Consequently, large positive pore pressures are induced during undrained shear. As the clay is sheared undrained, two opposing trends develop: (a) more and more of the potentially available friction is mobilized, and (b) the effective stresses decrease. Thus the overall shear resistance, which is related to the product of the effective stress and the mobilized friction factor, reaches a peak before full frictional resistance is mobilized. At very large strains, when all of the available friction is finally mobilized, the overall shear resistance is small because the effective stress is so small.

This important point is illustrated in Example 29.1. Note especially the decrease in $\bar{\sigma}_3$ from the initial value of 6 kg/cm² and the large value of the pore pressure parameter A during the latter stages of the test.

▶ Example 29.1

Given. The data presented in Fig. 29.5.

Find. The principal effective stresses, mobilized friction angle, and pore pressure parameter A (*a*) for an axial strain of 1.5%; (*b*) at the end of the effective stress path (roughly 8% axial strain).

Solution.

Strain (%)	1.5	8	
$\bar{\sigma}_1$ (kg/cm²)	6.25	3.8	$\bar{p} + q$
$\bar{\sigma}_3$ (kg/cm²)	2.75	1.0	$\bar{p} - q$
mobilized $\bar{\phi}$	23°	36°	$\sin^{-1} q/\bar{p}$
q (kg/cm²)	1.75	1.4	
Δu (kg/cm²)	3.25	5.0	$6.0 - \bar{\sigma}_3$
A	0.9	1.8	$\Delta u/2q$

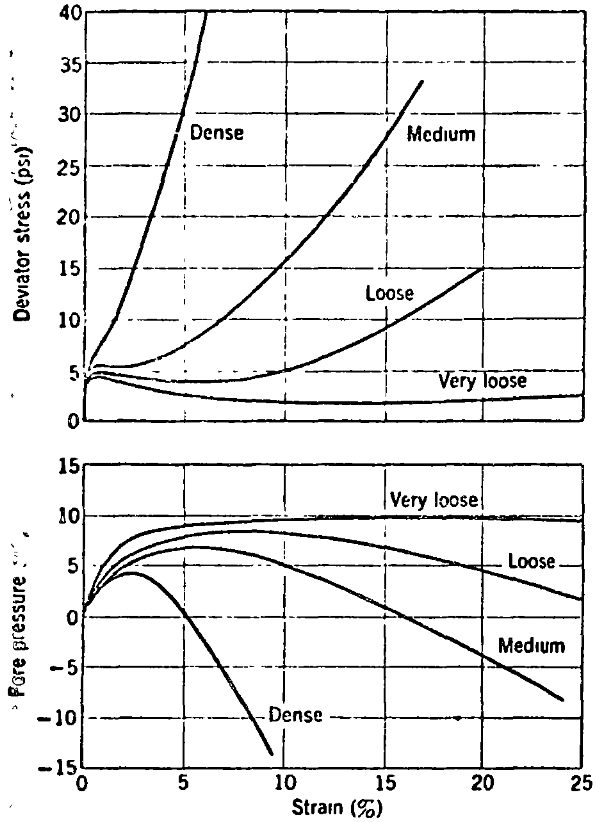


Fig. 29.6 Stress-strain curves for undrained triaxial tests on saturated sand at four densities. Specimens consolidated to 10psi. (From Healy, 1963).

This same type of behavior occurs in very loose sands, as shown by the data presented in Fig. 29.6. The peak deviator stress in the test upon the very loose sand occurred at a very small axial strain of about $\frac{1}{4}$%. At this point, the mobilized friction angle was about 10°, even though the friction angle of the sand in drained shear at this density was about 30°.

The difference between the friction angles mobilized at peak resistance in drained and undrained tests on undisturbed specimens of marine soils is shown in Fig. 29.7. The discrepancy is greatest in soils with the least plasticity—fine sands and silts. That is to say, the tendency toward a metastable structure is greatest in relatively nonplastic soils.

Once again we have seen that the concept of a unique $q_f - \bar{p}_f - w_f$ relation really holds only at very large strains. While the concept of such a relation helps us to understand the connection between drained and undrained strength in all soils, the relation does not apply to the peak resistance of soils with a metastable skeleton. For soils such as remolded Weald clay, the peak undrained shear resistance occurs at the same time that full frictional resistance is mobilized, and the $q_f - \bar{p}_f - w_f$ relation is the same for drained and undrained shear.

The loss of strength with remolding accounts for the phenomenon of *liquefaction* in quick clays and very loose sands. If a hillside of such a material starts to slide, the soil looses its strength and flows away like a liquid (see Fig. 1.13). Liquefaction has been involved in a number of important slope failures, notably in the slide at Fort Peck Dam (Casagrande, 1965). Whether or not a flow slide caused by liquefaction will occur in a sand is related to whether the sand tends to expand or to decrease in volume during shear. Casagrande introduced the concept of a *critical void ratio* (Taylor, 1948). If a sand is at an *in situ* void ratio greater than the critical void ratio for that sand, the sand is highly susceptible to flow slides. The critical void ratio of uniform, fine sand with subrounded grains corresponds to a relative density of 20 to 30% for small initial effective confining stress (up to 0.1 kg/cm²) and a relative density of about 50% for an initial effective confining stress[1] of 10 kg/cm².

[1] Data by Gonzalo Castro at Harvard University, 1968.

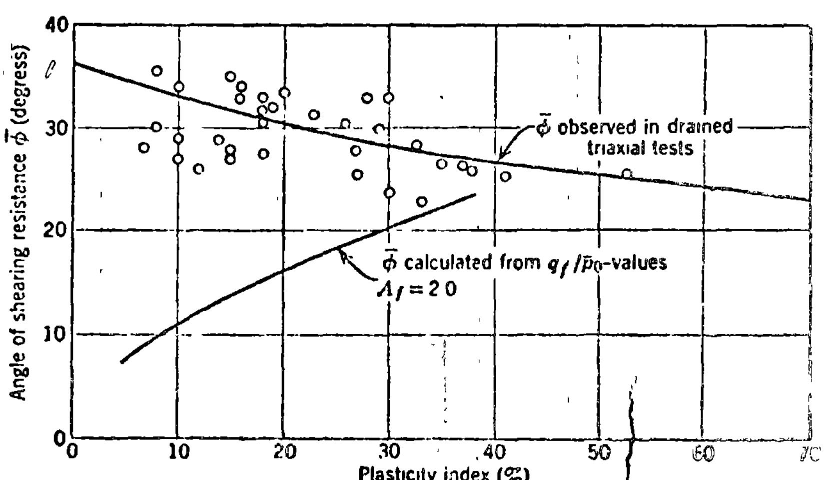


Fig. 29.7 Comparison of friction angles mobilized at peak resistance in drained and undrained tests

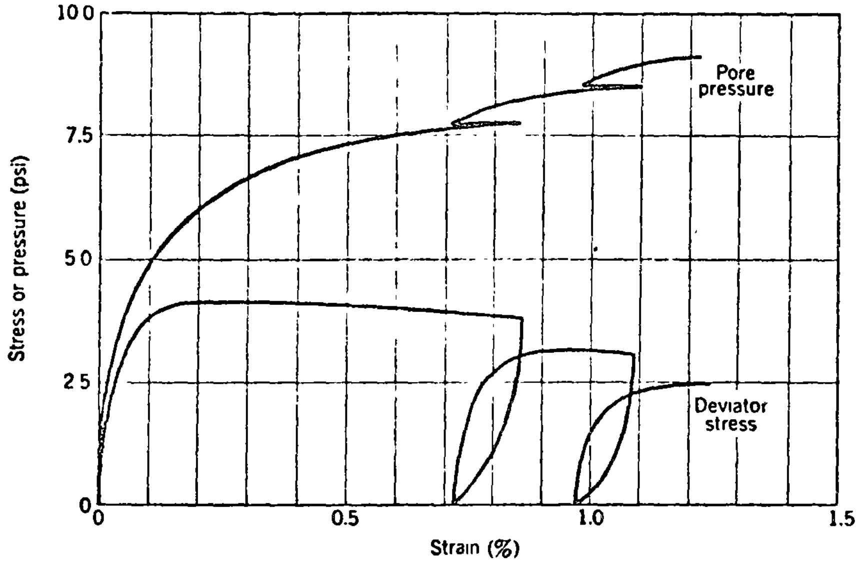
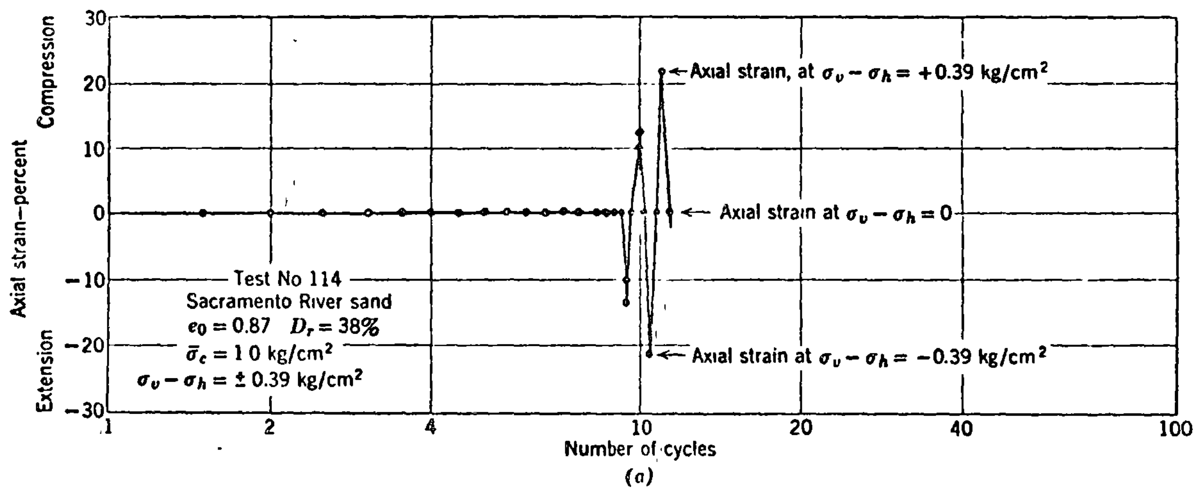


Fig. 29.8 Effect of repeated loading on undrained strength of very loose saturated sand. Specimen consolidated to 10 psi; void ratio = 0.834. (From Healy, 1963.)



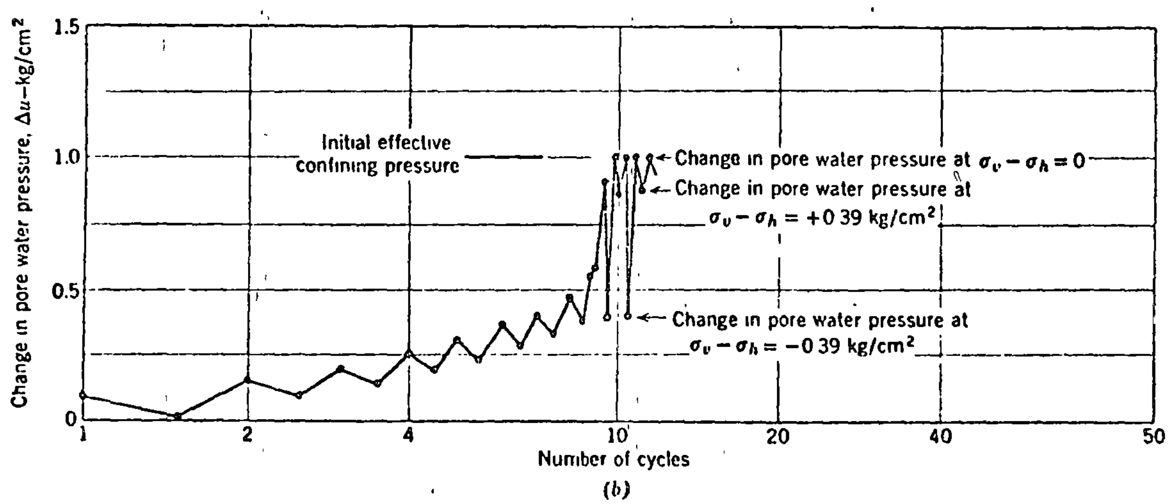


Fig. 29.9 Pore pressure and axial strain versus number of cycles during repeated triaxial loading of loose saturated sand. (*a*) Axial strain versus number of cycles. (*b*) Observed change in pore water pressure versus number of cycles. (From Seed and Lee, 1966.)

29.3 STRENGTH DURING REPETITIVE LOADING

During repeated undrained application of a shear stress, it is possible for a soil to fail at a shear stress less than the shear strength during a single loading. This is especially true when the direction of the shear stress reverses during each cycle of loading. This occurs because the excess pore pressures do not return to zero after each unloading, but rather accumulate as shown in Fig. 29.8. As the pore pressures increase during each cycle of loading, the shear resistance decreases. The increase in pore pressure is caused by a progressive rearrangement of the soil particles during each succesive cycle of loading. In a drained test, these rearrangements would lead to a large decrease in volume, but in an undrained test they permit the soil to be under a much s... ...er effective stress while at constant volume.

With sandy soils, this behavior during repeated loading may cause nearly total loss of resistance to shear, similar to that during liquefaction. This behavior, which may lead to catastrophic failures during earthquakes (see Chapter 31) has been studied by Seed and Lee (1966). Figure 29.9 shows a typical set of results from their repeated load triaxial tests. In this test, little or no strain was observed until the ninth cycle of loading. In the ninth cycle, large strains suddenly developed and within a few cycles these strains exceeded 20%, implying a total failure. The pore pressures had been building up during the first eight cycles, and in the ninth cycle the pore pressure became equal to the confining stress so that the lateral effective stress dropped to zero. The same effect also develops to a lesser degree (momentary or partial liquefaction) in dense sands (see Fig. 29.10). As shown in Fig. 29.11, the stress-strain relation during ...titive loading can be much lower than during a single loading. Figure 29.12 shows the relation between stress to cause failure (20% strain) and number of pulses of loading; this relation will vary depending on the sand and its void ratio. The susceptibility to liquefaction is greatest in the case of a uniform fine sand.

Loss of strength during cyclic loading also occurs in clays (Fig. 29.13), but total loss of strength does not occur until after very large strains have already developed.

29.4 OTHER TEST CONDITIONS AFFECTING STRENGTH

In Chapter 28 we introduced the concept that the effective stress path and strength for an undrained loading are independent of the way in which the loading is applied. It was mentioned that this rule is only approximately true, and now we must mention a few of the complications.

Intermediate principal stress. The undrained strength of a soil may be decreased by as much as 20% if the clay is sheared with $\sigma_2 = \sigma_1$ (extension test) rather than with $\sigma_2 = \sigma_3$ (compression test). This difference arises because the induced pore pressures are greater in the test with $\sigma_2 = \sigma_1$ (Hirschfeld, 1958).

Strain-rate. Increasing the rate at which a saturated soil is sheared increases the undrained strength. For example, the undrained strength typically increases two-fold between a time to failure of an hour and a time to failure of 5 msec (Whitman, 1957).

There is a general agreement that undrained strength is less in a test of long duration (say several months) than in a test of conventional duration (say several minutes). However, there is little agreement as to the magnitude of this time effect. Housel (1965) has suggested that the strength of normally consolidated clays may drop to as little as 50% of its value during tests of conventional duration. Other results (e.g., Bjerrum et al., 1958; Peck and Raamont, 1965) suggest that the drop is no more than 25% provided that samples of good quality are used.

In tests of long duration upon overconsolidated soils the undrained strength may be quite low (Casagrande and Wilson, 1951), although these results may have been influenced by leakage of water into the specimens during the tests.

In all cases where it has been possible to measure the pore pressures during undrained tests at various rates of loading, it has been found that the change in undrained strength results from a difference in induced pore pressure (Richardson and Whitman, 1964). Increasing the rate-of-strain means smaller induced pore pressures.

Duration of consolidation. The time during which the soil remains under the consolidating stress (step 2 of the CU program) influences undrained strength: the longer the time of consolidation, the greater the undrained strength (Taylor, 1955). Again this happens because the pore pressures induced by shear are different in tests with varying consolidation times. Presumably this effect is associated with secondary consolidation (Chapter 27). The longer a specimen remains under the consolidating stress, the denser it becomes and hence the smaller the pore pressures induced by shear.

Discussion. Changes in temperature, changes in the concentration of ions in the pore fluid, and other environmental changes also can alter the magnitude of the pore pressure induced during undrained shear and hence can alter the undrained shear strength.

Each of the factors described in this section has very little effect on the q_f versus $\bar{p}_f$ relation (either that for peak strength or that for the ultimate condition). However, the magnitude of the pore pressures induced during shear, and hence the undrained shear strength, is moderately sensitive to the details of the loading process.

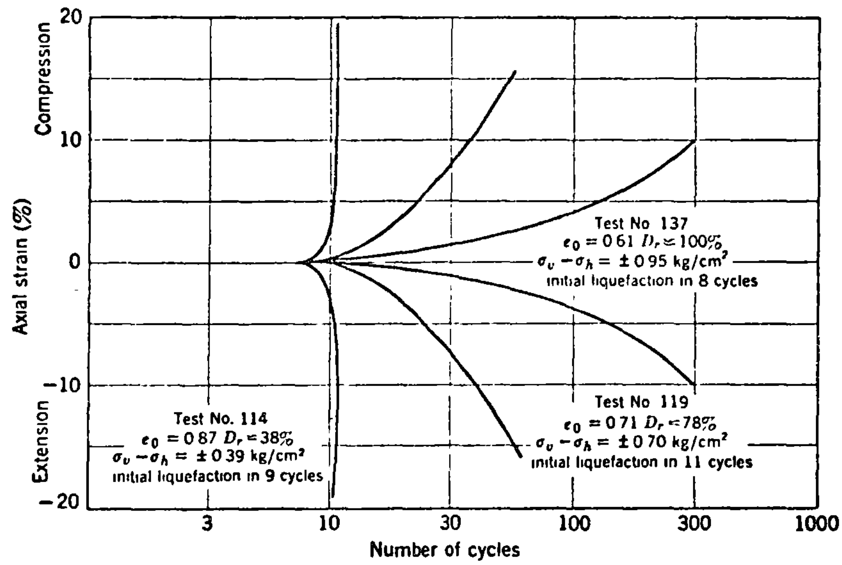


Fig. 29.10 Axial strain versus number of loading cycles for saturated sands at several initial densities. Sacramento River sand, $\bar{\sigma}_0 = 1$ kg/cm². (From Seed and Lee, 1966.)

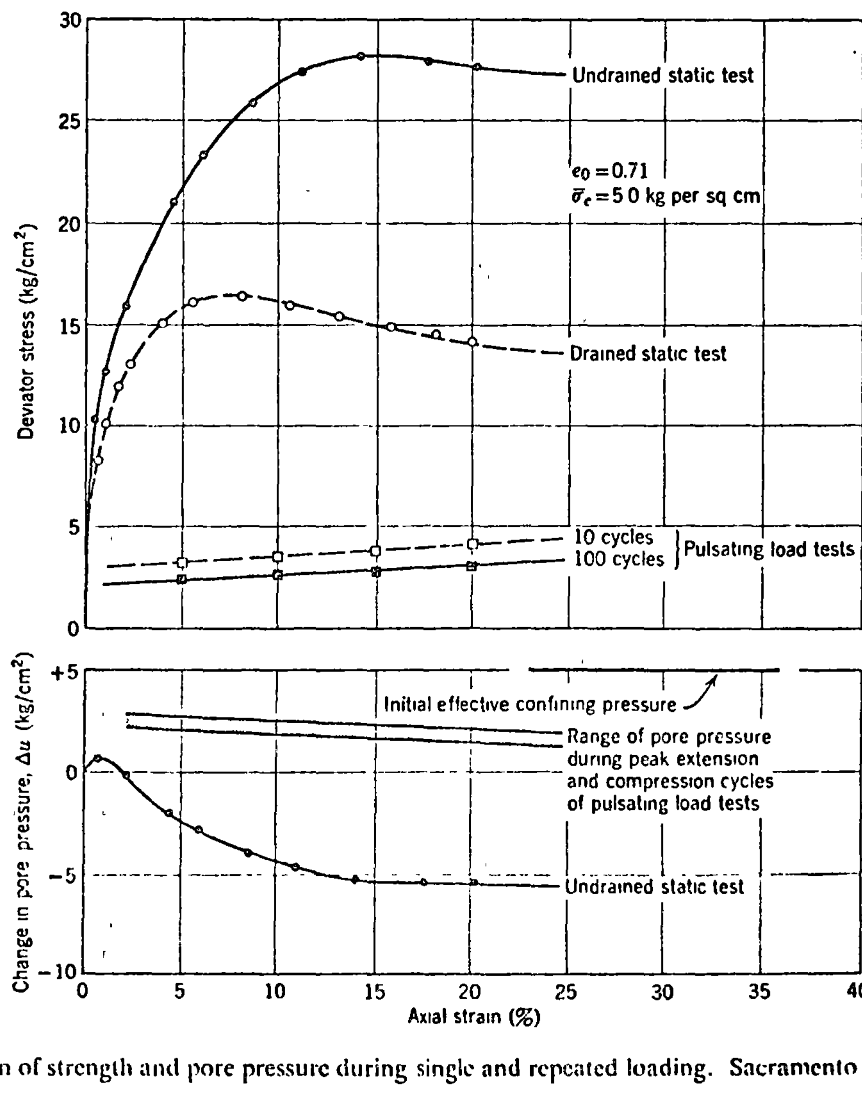


Fig. 29.11 Comparison of strength and pore pressure during single and repeated loading. Sacramento River sand. (From Seed and Lee, 1966.)

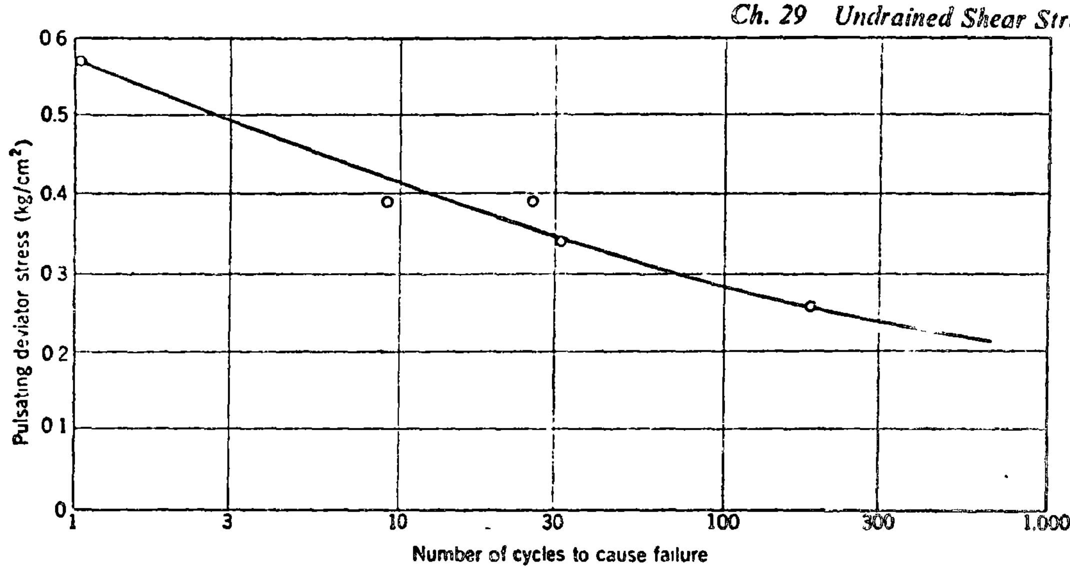


Fig. 29.12 Relationship between pulsating deviator stress and number of cycles required to cause failure Sacremento River sand initial void ratio = 0.87; initial confining stress = 1.0 kg/cm². (from Seed and Lee, 1967.)

29.5 CONSOLIDATION TO NONISOTROPIC STRESS

Thus far we have discussed only the case where prior to shear the soil is consolidated under an isotropic stress, i.e., $\bar{\sigma}_{10} = \bar{\sigma}_{30}$. Since the state of stress before shear has proved to have a controlling influence with regard to undrained strength, it is natural to wonder what will happen if $\bar{\sigma}_{30} < \bar{\sigma}_{10}$. For example, natural soils are usually consolidated *in situ* to a K_0-condition:

$$\bar{\sigma}_{30} = \bar{\sigma}_h = K_0\bar{\sigma}_v = K_0\bar{\sigma}_{10}$$

Theory

Figure 29.14 shows two effective stress paths which might be followed to arrive at a given q_0, $\bar{p}_0$ condition. Stress path 1 involves no lateral strain during any stage of the loading, but shear stresses are present throughout the loading. The second stress path involves first consolidation under an isotropic stress (path 2*A*, involving inward lateral strain) followed by an undrained shear until the stress state q_0, $\bar{p}_0$ is reached (path 2*B*, involving outward lateral strain). It has been found that these two stress paths will lead to approximately the same water content for the stress state q_0, $\bar{p}_0$ (Henkel, 1960).

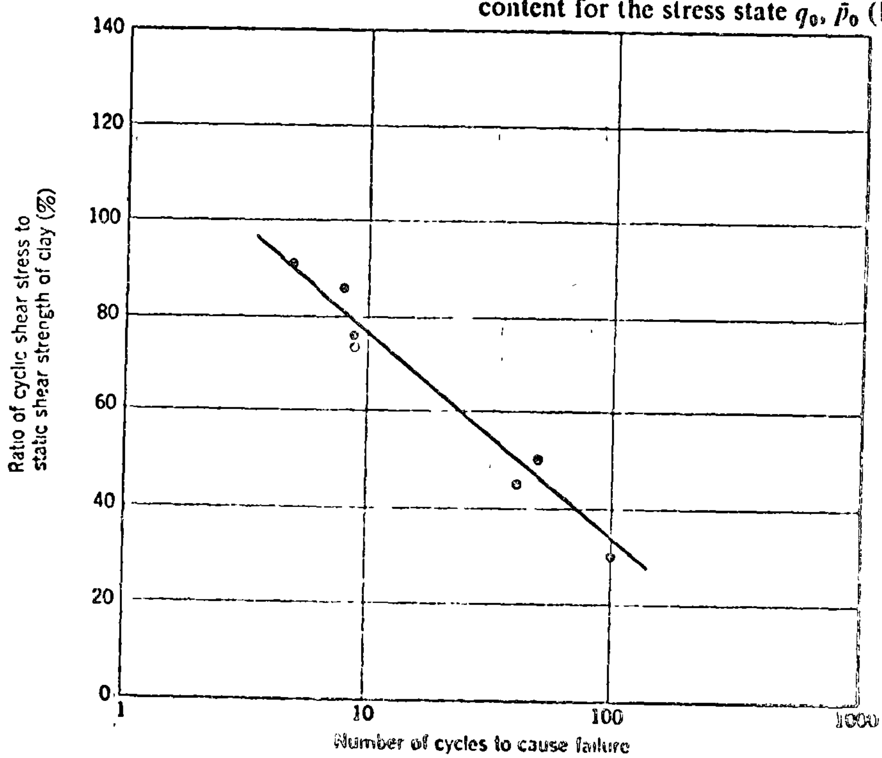


Fig. 29.13 Strength of samples of silty clay under cyclic loading conditions (from Seed and Wilson, 1967).

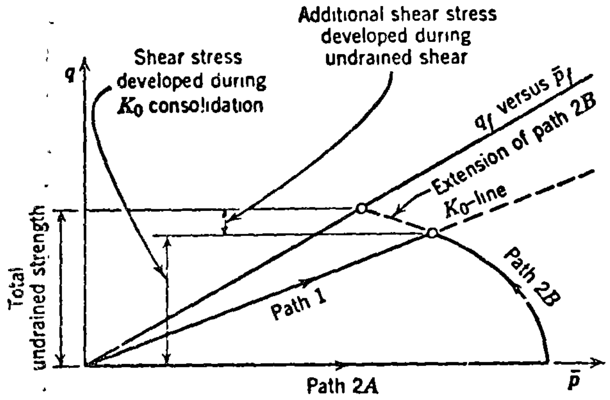


Fig. 29.14 Theory for undrained shear starting from K_0-condition.

The specimen which has been consolidated along stress path A is to be sheared undrained. It would seem reasonable that the effective stress path for this undrained shear would simply be the extension of stress path 2B. That is, the undrained strength for a specimen normally consolidated at the K_0-condition to water content w_0 is the same as the undrained strength of a specimen normally consolidated under isotropic stress to the same water content w_0. This conclusion is simply an application of the principle that, as a first approximation, undrained strength is uniquely related to water content. Note that the additional shear stress developed during undrained shear is a rather small portion of the total shear strength.

As an aid to understanding this principle, let us answer the following question. Suppose we have two specimens normally consolidated to the same $\bar{\sigma}_{10}$. For specimen A, $\bar{\sigma}_{30} = \bar{\sigma}_{10}$, while for specimen B, $\bar{\sigma}_{30} = K_0\bar{\sigma}_{10}$. What is relationship between the undrained strengths of the two specimens? The solution to this question is worked out in Example 29.2. The conclusion is that specimen B is weaker than specimen A, which might be expected since $\bar{p}_0$ is less for specimen B than for specimen A and hence specimen B has the greater water content. The ratio of the strength of specimen B to that of specimen A is typically between 0.75 and 1.0.

Thus (assuming the foregoing theory to be correct), if an actual K_0 consolidation condition is simulated by isotropic consolidation to the same $\bar{\sigma}_{10}$, the undrained strength will be overestimated by an error of as much as 33% in case of normally consolidated soils.

Experimental Results

A typical stress path for undrained shear of a clay consolidated to the K_0-condition is shown in Fig. 29.15. The stress path deviates considerably from that predicted, presumably because the clay had remained at the consolidation condition (the initial point) for some time instead of quickly passing through this stress condition. The magnitude of the peak undrained strength is somewhat greater than predicted by the theory. Ladd (1963) provides experimental data for the relative undrained strength of isotropically and anisotropically consolidated clays.

29.6 REMOLDING AND DISTURBANCE

For many soils there is a great difference between the peak undrained strength of the soil as it exists in the ground and the peak undrained strength of the soil after it has been remolded without change of water content. The ratio of undisturbed to remolded strength has been defined as *sensitivity*.

Figure 29.16 depicts the stress paths for undrained shear of undisturbed and remolded specimens of a sensitive clay. Both specimens are at the same water content but under very different effective stresses. During the remolding, most of the effective stress which had been carried by the mineral skeleton is transferred to the pore water. Figure 29.17 will help to understand what has happened. The physical processes active during remolding have been discussed in Chapter 7.

There is no such thing as a *truly* undisturbed sample. Occasionally the soil of interest in an actual problem can be exposed by excavation and a block sample can be cut by hand. This process results in a relatively high qua-

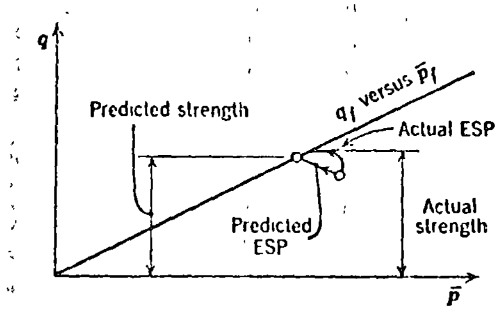


Fig. 29.15 Actual typical effective stress path for undrained shear starting from K_0-condition.

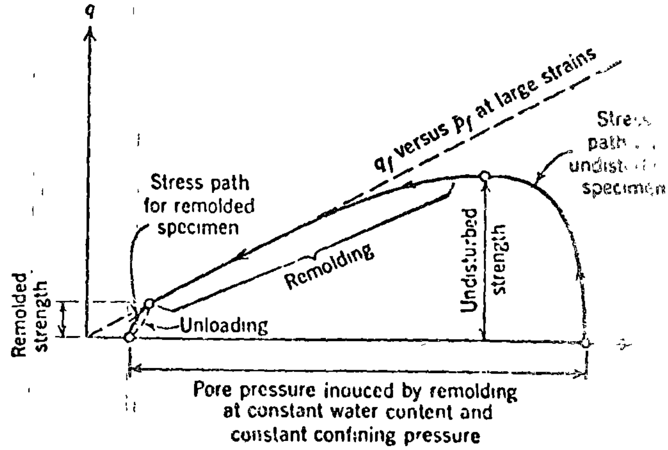


Fig. 29.16 Stress paths for undisturbed and remolded soils.

▶ Example 29.2

Given. q_f versus $\bar{p}_f$ and A for undrained shear starting from isotropic consolidation.
Find. Undrained strength starting from K_0 consolidation.
Solution. According to Eq. 28.2 the undrained strength is proportional to the isotropic stress corresponding to the appropriate stress path:

$$\frac{(q_f)_B}{(q_f)_A} = \frac{(\bar{p}_0')_B}{(\bar{p}_0)_A}$$

Specimen A:

$$(\bar{p}_0)_A = \bar{\sigma}_{10} \qquad \text{(given)}$$

Specimen B:

$$\bar{p}_0' = \bar{p}_0 + (2A_0 - 1)q_0$$

where A_0 is the value of A for loading to the K_0 loading

$$\bar{p}_0 = \frac{1 + K_0}{2}\bar{\sigma}_{10}$$

$$q_0 = \frac{1 - K_0}{2}\bar{\sigma}_{10}$$

$$\bar{p}_0' = \bar{\sigma}_{10}\left[\frac{1 + K_0}{2} + (2A_0 - 1)\frac{1 - K_0}{2}\right]$$
$$= \bar{\sigma}_{10}[K_0 + A_0(1 - K_0)]$$

Hence

$$\frac{(q_f)_B}{(q_f)_A} = K_0 + A_0(1 - K_0) \xleftarrow{\text{Answer}}$$

A_0 typically is somewhat less than A_f; say $0.5 < A_0 < 1$. K_0 typically has values between 0.65 and 0.5.

K_0 \ A_0	1.0	0.5
0.5	1.0	0.75
0.65	1.0	0.82

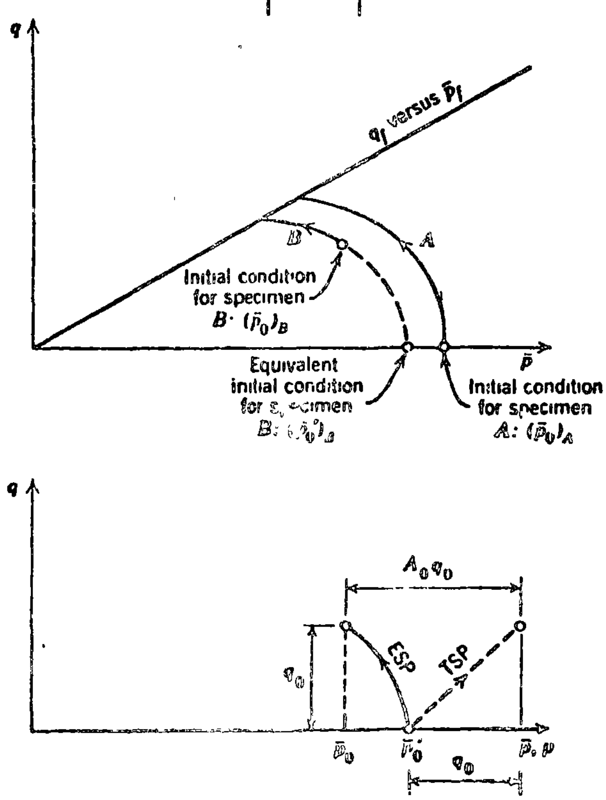


Fig. E29.2

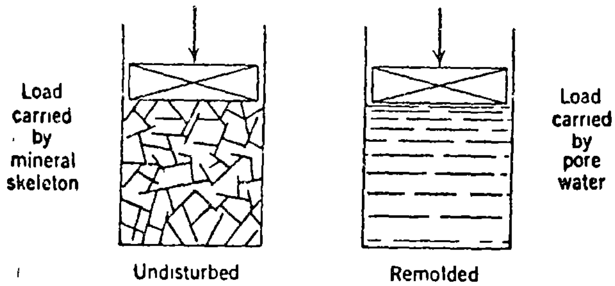


Fig. 29.17 Mechanistic picture of load transfer during remolding.

of soil sample. Unfortunately, the usual situation requires that the sample of soil be extracted by a sampler lowered into the soil through a borehole. The quality of sample obtained by this process tends to be considerably inferior to that obtained by hand cutting.

Even if the process of cutting a chunk of soil from the subsoil, transporting it to the laboratory, trimming a test specimen, and mounting the specimen in the triaxial apparatus were done in a "perfect" fashion, there would have been an inevitable change in stresses acting on the soil. The soil in the ground was subjected to a system of total stresses which have been completely removed by the time the specimen has been mounted in the shear apparatus. Consider, for example, a sample of soil consolidated to a K_0-system of effective stresses, as illustrated by the point C in Fig. 29.18. By the time the element of soil has been removed from the ground and placed in the test apparatus all total stresses have been removed, and the pore water pressures have become negative—resulting in an isotropic effective stress of $\bar{\sigma}_{ps}$ as represented by the point H. In other words, the sample under the effective stresses represented by point C in the ground would exist at the effective stresses shown by point H in the laboratory if a perfect sampling operation had been conducted. (The point H is determined by loading a specimen in the laboratory to point C, removing the total stresses and measuring the negative pore pressure. The effective stress $\bar{\sigma}_{ps}$ is equal to the negative pore pressure.)

Unfortunately, the process of sampling, trimming, and mounting the soil in the test equipment can have a significant influence on the structure of the soil. All of the changes in the soil structure associated with the sampling operation are termed sampling "disturbance." Many experimenters have studied soil disturbance (e.g., Hvorslev, 1949, Schmertmann, 1955, Ladd and Lambe, 1963, Skempton and Sowa, 1963).

An indication of the large effect of disturbance on a clay can be obtained by measuring the negative pore pressure in the soil specimen prior to testing and comparing it with that which would exist had the sampling been "perfect." Test data presented in Fig. 29.18 for the Kawasaki clay show the measured stress $\bar{\sigma}_s$ is approximately one-third of that measured for perfect sampling $\bar{\sigma}_{ps}$. In other words, disturbance during the sampling operation resulted in almost two-thirds of the effective stress in the sample being destroyed. (The actual stress path between the points C and I is not known—only the locations of the two points C and I are known.)

Figure 29.18 also illustrates the effect of sampling disturbance upon undrained strength. When the element of soil in the field is loaded to failure, the stress path CD in Fig. 29.18 is obtained. When a sample is taken of the soil at point C, brought to the laboratory, a test specimen prepared, and an unconfined compression test run, the effective stress path IJ is obtained. Unfortunately, the unconfined compression test gave an undrained strength equal to only 40% of that achieved *in situ*. Further, the unconfined compression test required five times as much strain to reach failure as occurred for the loading C to D. This is the usual effect of disturbance—it increases the strains for a loading.

One possible way to avoid soil disturbance is to use field tests to get stress-strain and strength data. Such a procedure, although obvious, is not easy to carry out. Small-scale field tests load only a small fraction of the soil involved under the actual structure. Frequently the soil of most interest is far below the ground surface. Should a pit be excavated so that the field test can be run on the soil in question, the soil has then undergone a change in stresses similar to that which occurs during the sampling operation. Further, the interpretation of field tests is frequently difficult because of uncertain boundary conditions in the field.

29.7 PRACTICAL METHODS OF MEASURING UNDRAINED STRENGTH

Table 29.2 lists some of the more common methods for measuring undrained shear strength. The vane shear device has been discussed in Chapter 7, as has the so-called standard penetration test. Table 7.4 gives a correlation between unconfined compressive strength (twice the undrained shear strength) and blow count in the standard penetration test. All of the laboratory

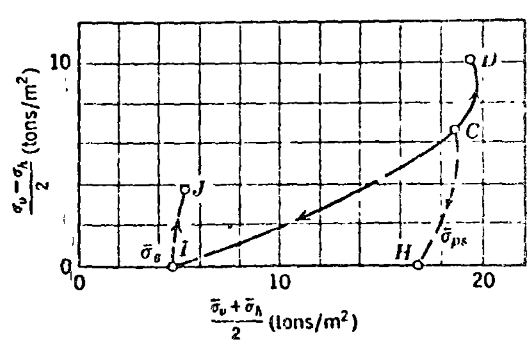


Fig. 29.18 Effect of sampling disturbance.

Table 29.2 Common Methods for Measuring Undrained Strength

Method	Comment
In-situ measurements	
1. Vane test	Usually considered to give best result, but is limited as to strength of soil with which it can be used
2. Penetration test	Gives crude correlation to strength
Measurements upon undisturbed samples	
1. Unconfined compression	Best general purpose test; underestimates strength because disturbance decreases effective stress
2. UU test at *in situ* confining pressure	Most representative of laboratory tests, because of compensating errors
3. CU test at *in situ* confining pressure	Overestimates strength, because disturbance leads to smaller water content upon reconsolidation

procedures depend on obtaining good undisturbed samples.

If there really were a unique relationship among q_f, $\bar{p}_f$, and w_f, all of these procedures which shear the soil at the *in situ* water content would give the same undrained shear strength. In actuality, as we have seen, the $q_f - \bar{p}_f - w_f$ relation is only approximately unique, and undrained strength is sensitive to the details of the applied loading. Since the details of the loading differ for the several methods of Table 29.2, it is natural that each will give somewhat different results. Because of sampling disturbance, unconfined compression tests on even good quality samples usually somewhat underestimate the *in situ* undrained strength, often by a factor of 2 or even more. Use of CU tests compensates for the effects of disturbance; indeed, such tests usually overestimate strength since the density of the soil increases during reconsolidation because disturbance has increased the compressibility of the mineral skeleton.

Whereas the foregoing paragraphs have emphasized the difficulties inherent in sampling, the *in situ* measurements also are not without their difficulties. The standard penetration test provides only a crude estimate of strength. Problems arise with the vane device because of disturbance as the device is inserted into the ground, rate-of-strain, etc. It generally (but not always) has been found that properly conducted vane tests and unconfined compression tests upon *good* undisturbed samples give strengths which agree within 25%. The vane test usually, but not always, gives a larger strength for a given soil than does the unconfined compression test.

In short, because the undrained strength of a soil is somewhat sensitive to test conditions, it is difficult to establish undrained strength within about ±20% at best.

In the last analysis, the true test of any of these methods is how well they predict actual failures. We shall return to this question in Chapter 31.

The choice of the method to be used for any particular engineering problem will depend upon a number of factors, especially availability of equipment and economics. The vane device is especially useful when strength varies considerably over a site and with depth, for this device permits, within a reasonable time, many measurements to establish the extent and pattern of the variations. Where soil properties are reasonably uniform, on the other hand, the behavior of the soil will be most clearly established by means of a relatively few carefully conducted laboratory tests on samples of good quality.

For uniform, normally consolidated clays, the best procedure is to consolidate samples to effective stresses greater than twice those existing *in situ*, and then to correct the measured undrained strength by the ratio of the effective stress *in situ* to the consolidation stress used in the laboratory test. This procedure overcomes errors caused by sampling disturbance.

Use of advanced testing techniques, such as plane strain triaxial tests and simple shear tests, permits a better simulation of all components of the *in situ* stresses and changes in stress caused by loading.

29.8 MAGNITUDE OF UNDRAINED STRENGTH IN VARIOUS SOILS

Here we define undrained shear strength as the peak value of q. Henceforth in this book we shall use the symbol s_u to denote shear strength; i.e., $s_u = q_f$ in an undrained test.[2]

Normally Consolidated Soil

According to Eq. 28.2, the undrained strength of a given normally consolidated soil should increase linearly with overburden stress and hence linearly with depth. Strength variations of this type have already been shown in Figs. 7.7, 7.8, and 7.10.

The ratio of undrained strength to effective overburden stress, $s_u/\bar{\sigma}_{vo}$, is a useful way to characterize the undrained strength of normally consolidated soil.[3] Figure 29.19 shows a correlation between this ratio and plasticity index. The "special clays" include those which have thixotropic behavior or which tend to dilate during shear. Many remolded clays have a $s_u/\bar{\sigma}_{vo}$ ratio of about 0.[illegible] to 0.[illegible].

Relations such as those in Fig. 29.19 are useful for preliminary estimates concerning the undrained strength of normally consolidated soils.

[2] The symbol c is often used in the literature. The literature also often quotes values for unconfined compressive strength, which is equal to $2s_u$.

[3] In the literature this ratio is often expressed as [illegible], where $\bar{p} = \bar{\sigma}_{vo}$ and is not the same as [illegible] in this book.

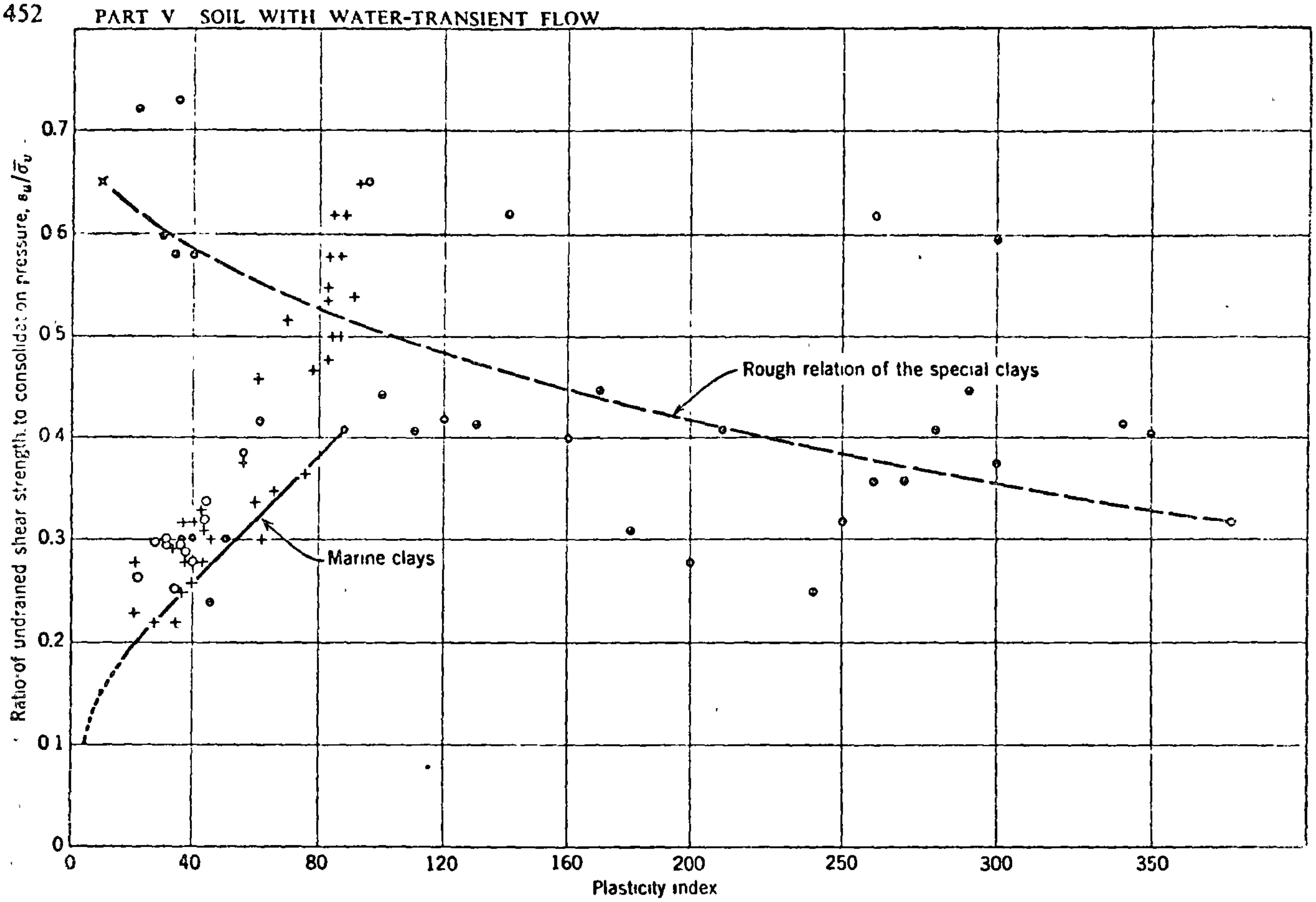


Fig. 29.19 $s_u/\bar{\sigma}_{10}$ ratio as a function of plasticity index (from Osterman, 1959).

Overconsolidated Soils

In overconsolidated soils, undrained strength depends on the maximum past value of $\bar{\sigma}_v$ as well as the present value of this stress. Figure 29 20 shows the relationship of undrained strength of remolded Weald clay, isotropically consolidated, to the ratio $\bar{p}_0/\bar{p}_m$. Example 29.3 illustrates the use of these data to compute the variation of undrained strength with depth in a case where erosion has removed some of the overburden. To simplify the problem, unit weights have been assumed constant with depth and isotropic consolidation has been assumed. In this example, the clay just a short distance below the present ground surface has considerable strength as the result of the preconsolidation. If the depth of overburden removed had been greater, the curve of s_u versus depth would be nearly vertical. There are phenomena other than overburden that can produce a preconsolidation effect: weathering, partial drying, indeed any effect that tends to reduce the void ratio of a soft, normally consolidated clay. Figure 7.7*b* shows a weathered crust over the top of a soft, normally consolidated clay.

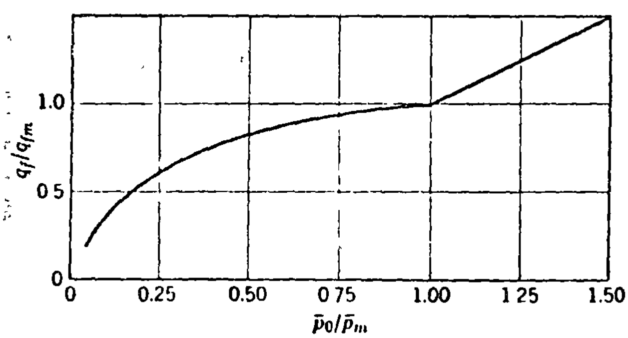


Fig. 29.20 Relationship of undrained strength to overconsolidation ratio.

Figure 7.9 shows the undrained strength versus depth relation in the Boston clay. Past events have conspired to leave the strength more-or-less constant with depth. Many clay deposits have almost a constant undrained strength with depth, at least to the extent it is reasonable to assume a uniform strength for calculation purposes.

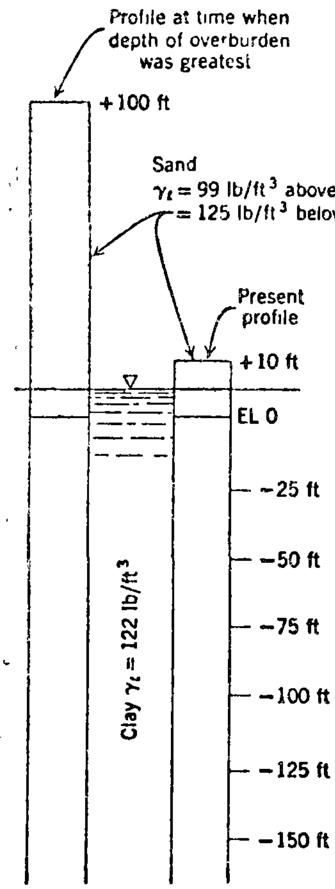
It is impossible to correlate undrained strength of overconsolidated soils directly to index properties because these index properties do not adequately reflect the effects of stress history. The natural water content considered in relation to the liquid and plastic limits gives some idea of the degree of overconsolidation, but does not suffice to permit quantitative estimates of undrained strength. Table 7.4, which correlates strength to blow count in the standard penetration test, gives an idea of the possible range of undrained strength.

▹ Example 29.3

Given. Past and present soil profiles as shown, in Fig. E29.3, with $q_{fm} = 0.29\bar{p}_m$ and q_f/q_{fm} as given in Fig. 29.20.

Find. q_f versus depth for present profile.

Solution. The pertinent stresses are worked out in Fig. E29.3



Depth	$\bar{p}_m$ (lb/ft²)	$\bar{p}_0$ (lb/ft²)	q_{fm} (lb/ft²)	$\bar{p}_0/\bar{p}_m$	q_f/q_{fm}	q_f (lb/ft²)
−25 ft	11,030	3,110	3,200	0.282	0.64	2,050
−50 ft	12,520	4,600	3,630	0.367	0.71	2,580
−75 ft	14,010	6,090	4,060	0.435	0.77	3,130
−100 ft	15,500	7,580	4,500	0.490	0.81	3,640
−125 ft	16,990	9,070	4,920	0.534	0.84	4,140
−150 ft	18,480	10,560	5,360	0.583	0.87	4,660

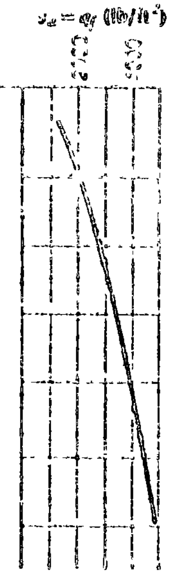


Fig. E29.3

29.9 HISTORICAL NOTE

Foundation engineers 50 years ago were taught that sands were cohesionless and that $\phi = 0$ for saturated clays, with intermediate values for intermediate materials. Clays were thought to be cohesive in the same sense that steel is cohesive, and clays and sands were treated as quite different materials. Today it is realized that the main difference between sands and clays rests with their relative permeabilities and relative capillary heads.

Terzaghi's discovery of the effective stress concept in the early 1920s of course marks the starting point for this new understanding. Once it was understood that the phenomenon of consolidation existed, it was a logical step to explain the dependence of the undrained shear strength of clay upon the stress to which the clay had been consolidated. A major breakthrough came with the realization that excess pore pressures are generated by the application of shear stress even though the average normal stress remains unchanged (Casagrande and Albert, 1930). Now it was possible to relate undrained and drained strengths of clay. Rendulic (1936, 1937), working in Terzaghi's laboratory in Vienna, devised the first systems for measuring pore water pressures, and thus gave the first actual confirmation of the hypothesis of the unifying role of effective stress.

The intervening years have seen the improvement of experimental techniques, especially those for the measurement of pore pressure, and the collection of data to confirm and show the limitations of the effective stress principle. Taylor at M.I.T. made especially important contributions to experimental technique. Rutledge (1947), then at Northwestern University, pointed out the relation of water content to strength. Finally, Skempton (1954) and Bjerrum (1954), through their efforts to develop theoretical relations between volume changes in drained tests and excess pore pressures in undrained tests, have provided a clearer and more concise picture of the importance of effective stress.

29.10 SUMMARY OF MAIN POINTS

This chapter has emphasized that it is not a simple matter to obtain accurate measurements of undrained strength. In particular, great care must be taken in sampling and in preparation of test specimens. To obtain very accurate strengths, all aspects of the *in situ* stress conditions should be reproduced in the tests. Stress history has a great effect upon undrained strength. Strength during repetitive undrained shear can be much less than during a single loading.

PROBLEMS

29.1 Refer to Fig. 29.18. What is the value of pore pressure at point J for the unconfined compression test specimen?

29.2 Refer to Fig. 29.18. Derive the following equation for $\bar{\sigma}_{ps}$:

$$\bar{\sigma}_{ps} = \bar{\sigma}_{v0}[K_0 + A_u(1 - K_0)]$$

where

$$A_u = \frac{\Delta u - \Delta\sigma_h}{\Delta\sigma_v - \Delta\sigma_h}$$

is an A parameter for undrained unloading from K_0 stresses to isotropic stresses.

29.3 The concept of a unique relationship between effective stress and undrained strength for a soil is only valid under certain conditions. List the factors discussed in Chapter 29 that can influence this relationship.

29.4 Refer to the lower part of Fig. 29.4. For the four tests shown on this figure:

a. In which tests did cavitation occur?

b. What was the value of pore pressure at which cavitation occurred?

c. Plot the four Mohr circles in terms of effective stresses and show the pore pressure at failure for each test.

Answer

a. Cavitation occurred in the tests with $\sigma_3 = 5.3$ psi and 20 psi (i.e., those tests with $\phi > 0$).

b. $$-u_{max} = \frac{c}{\tan\phi} = \frac{9.3}{\tan 32^\circ} = 14.7 \text{ psi}$$

c. Draw effective stress envelopes through the origin ($\bar{c} = 0$) and at $\bar{\phi} = 32°$. All circles must be tangent to this envelope.

σ_3	$\bar{\sigma}_3$	u	
5.3	20.0	−14.7	cavitation
20	34.7	−14.7	
45	57	−12	no cavitation
98	57	+41	

direction, because of the design of the shear box, is observed by means of a vertical dial gage. An increase in volume means a decrease in the density of the packing of the soil particles. A decrease in volume means an increase in density of the packing of the soil particles.

At some intermediate state or degree of density in the process of shear, the shear strains do not bring about any change in volume, viz., density. The density of sand at which no change in volume is brought about upon the application of

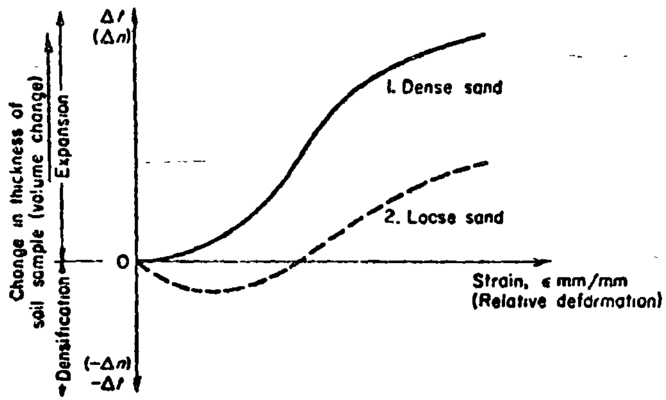


FIG. 19-7 Variation in degree of soil density upon shear.

shear strains is called the critical density. The porosity and void ratio corresponding to the critical density are called the critical porosity and the critical void ratio, respectively. The critical density, viz., porosity or void ratio, is calculated from the vertical changes in the volume of the sand in the shear box. For these quantities the corresponding shear stresses are plotted in a density-shear stress graph, or in a porosity-shear stress graph. The critical density and/or critical porosity are read and scaled off the graph at the numerical value of the ultimate shear stress (stress at continuously sliding shear deformation in Fig. 19-5).

The degree of density of a non-cohesive soil during the process of shear changes within the zone of plastic deformation, attaining a certain constant value of porosity, termed the critical porosity. Every sand has a certain critical density.[2] Sandy soils having a porosity less than critical loosen up, or expand, upon shear but loosely packed sands densify, i.e., reduce their volume, Fig. 19-7.

19-7. Shear Strength of Clay. The shear process of cohesive soils is more complicated than with sands because of the pore water present. The frictional resistance of cohesive soils is less than that of non-cohesive soils because the fine clay particles are easily deformable. The cohesion of clays is considerably larger than that of sands because in clays the sum of the surfaces of the clay particles is very large (large specific surface): this promotes the increase in true cohesion which depends upon the action of the surface forces. Also the capillary system in cohesive soils is much finer, thus contributing considerably to the magnitude of the apparent cohesion.

The shear test results of an undisturbed clay usually exhibit, too, a peak of shear strength on the deformation-shear stress graph. However, when the undisturbed clay is re-molded, the peak point in many instances no longer exists. These conditions are illustrated in Fig. 19-8.

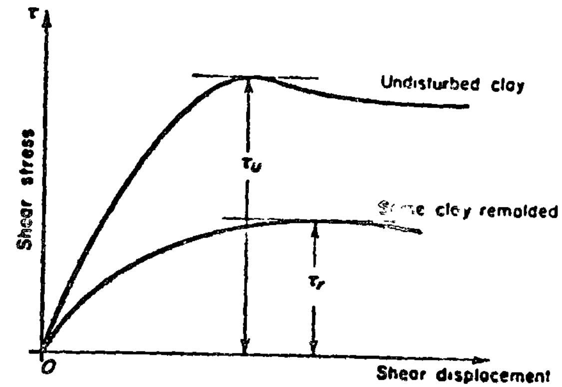


FIG. 19-8 Sensitivity of clay.

Sensitivity of Clay. The ratio of the peak shear strength of the clay, τ_u, to the maximum value of the re-molded shear strength of the same clay, τ_r, is called the *coefficient of sensitivity*, s, of that clay:

$$s = \frac{\tau_u}{\tau_r}. \qquad (19\text{-}2)$$

The larger the coefficient of sensitivity, the less is the remolded shear strength of the clay, and consequently the more sensitive is that clay. The sensitivity of some clays is great, but the sensitivity of shear strength to re-molding is less great in others. Hence, the shear strength of the soil depends very much upon whether its natural structure is disturbed or not.

19-8. Unconsolidated Quick Shear Test of Clay. Clays usually contain a certain amount of free moisture. Under certain conditions the degree of saturation, S, of clays may be practically $S = 100\%$. Because clays, due to their low coefficient of permeability, drain slowly, upon the application of a normal stress to the clay in a shear box, the water has no time to drain out of the voids of the clay. Thus *the normal stress induces a balanced pore-water pressure.* This pore water, until intergranular pressure is established later after some of the water has drained out, carries the normal stress (viz., structural load on clay soil) during the initial period of time. If, at this point, a clay sample is subjected to shear, and the drainage of the water from the voids of the clay soil does not take place effectively, the shear is independent of the normal stress because of the pore water. Such a shear test is termed the undrained, or unconsolidated quick shear test. In such a test, the applied total normal stress is σ_n, and the induced pore water pressure, u, is equal in magnitude to the normal stress, i.e.,

$$\sigma_n = u. \qquad (19\text{-}3)$$

Hence, the effective normal stress is

$$\sigma_{n_{eff}} = \sigma_n - u = 0, \tag{19-4}$$

and the measured shear strength of the clay in this test is

$$\tau = c, \tag{19-5}$$

which, analytically, represents a straight line parallel to the σ_n-axis and distance, c, from the latter.

From the undrained, unconsolidated, quick shear test results of a clay, one should not immediately draw the conclusion that when $\tau = c$, it should also be true that $\tan \phi = 0$. This would be incorrect, because the soil tested may have frictional properties; however, because of the ineffective drainage, the intergranular pressure, $\sigma_{n_{eff}}$, does not start to act immediately (it is counterbalanced during the initial stage of loading by the pore water pressure), because there is no time for consolidation. In other words, time is needed for consolidating the clay sample to bring into play the intergranular pressure, and it may appear that $\phi = 0$. However, it is more correct to say that $\phi = 0$ is the angle of shear resistance because of this particular method of testing the clay under quick, undrained, and unconsolidated conditions.

The unconsolidated quick shear test of clay may in practice find its application to a stability problem of a foundation. If the foundation load is transmitted to an unconsolidated clay, the following question arises: what is the factor of safety of the clayey soil mass against shear immediately after laying the foundation?

In the course of time, as the clay consolidates more and more, the strength of the soil increases, and so does the factor of safety against shear.

19-9. Consolidated Quick Shear Test of Clay. The principle of the consolidated, quick shear test of a clay is that the clay sample in the shear box is subjected to an appropriate normal stress. Under this stress a certain amount of water will drain out of the voids of the clay, bringing about a certain degree of consolidation of the clay. The consolidation brings about a greater density, and, hence, a greater shear strength of the clay. After the appropriate degree of consolidation has been attained, the clay sample is subjected to a quick process of shear, similar to that in the unconsolidated, quick shear test. Because the permeability of clay is usually low, it is assumed that during the quick shear in the consolidated, quick shear test no drainage of water out of the voids of the clay takes place during the period of shear. Therefore, this type of test is sometimes also called the consolidated, undrained shear test of soil.

The testing procedure of clay in this test is to subject a certain number of clay samples of the same type of clay to normal consolidation stress. Each consecutive soil sample out of, say, 5 or 6 samples is subjected to a larger normal stress (or to a smaller normal stress) than the previous one until consolidation is attained, and then sheared off. During the shear, pore water pressure is built up. When each consecutive soil sample is subjected to a larger normal stress than the previous one, for example, [illegible] σ_2, the [illegible] void ratio, e, in each

following soil sample consolidated is less than in the previous consolidated soil sample. The densities of each soil sample after consolidation, γ, in their turn, increase. Thus, soil samples subjected to smaller, normal consolidation stresses, contain more water in their voids than those subjected to larger, normal consolidation stresses.

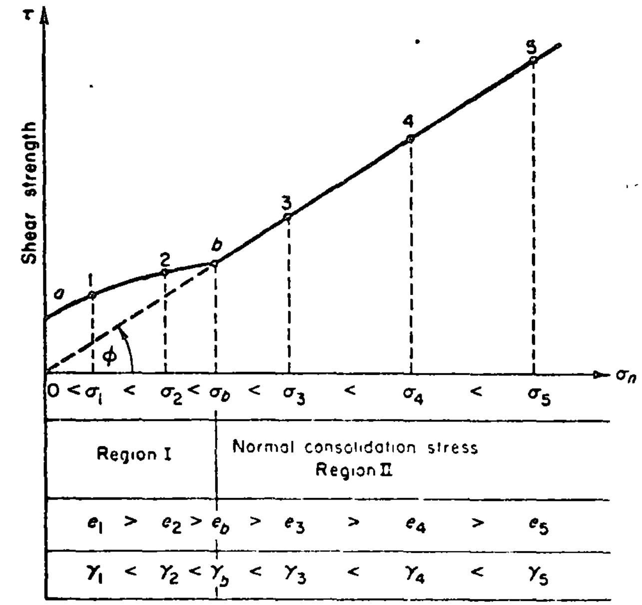


FIG. 19-9 Consolidated, quick shear test results of clay graphically

When the shear test results of the clay at various consolidation stresses are plotted in a shear strength graph of the clay, the plot usually results in a line the first part of which (at smaller normal consolidation stresses) is curved, a-1-2-b, Fig. 19-9. The curved part of the plot is then adjoined at point b by a straight line. Over a certain range of normal, consolidation stresses, $\sigma_{n_{eff}}$, the shear strength of the clay can be approximately expressed analytically as

$$\tau = \sigma_n \tan \phi + c$$

It can be understood, therefore, that the curved part of the shear strength curve is the effect of the amount of water, or the effect of the neutral stress in the voids of the soil.

Within region I, represented by the curved part of the shear strength diagram a-1-2-b, there is more water in the voids of the clay than within region II, in region I the effect of neutral stress is very pronounced as compared with that within region II. Within region II, the intergranular stress is more pronounced than in region I, but the pore water pressure is still present, although to a smaller magnitude than in I.

It can be understood that the [illegible] on the cons[illegible] quick [illegible] strength [illegible] parameters of these [illegible] and not the properties of the soil. The uncertain factor in this test is the magnitude of the neutral stress.

The consolidated, quick shear test is applicable, for example, for stability calculations against failure in shear of consolidated dams, slopes, and other earthworks made of cohesive soil material under conditions of rapid draw-down of water, where the water has not time to drain out of the voids.

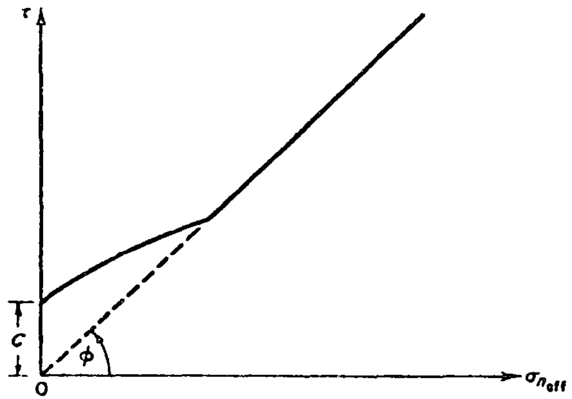


FIG. 19-10 Consolidated, slow shear test results of clay graphically.

19-10. Consolidated Slow Shear Test of Clay. The consolidated, slow shear test on clays is performed by first consolidating the various clay samples to appropriate consolidation stresses and then by shearing the consolidated soil samples very slowly. The slow process of shear affords time enough for the water to drain out of the voids of the soil under the consolidation stress. Therefore, during the shear process in this kind of test, pore water pressures do not build up to any significant degree. This means that the effective, normal stress on the soil sample during shear is equal to the applied, normal consolidation stress. The shear strength diagram obtained from the consolidated, slow shear test of clay is similar in appearance to that obtained from the consolidated, quick shear test. The difference, however, between the two curves is that in the consolidated, slow shear test of clays the ultimate shear resistances, τ, are plotted against the effective, normal stresses, $\sigma_{n_{eff}}$, Fig. 19-10.

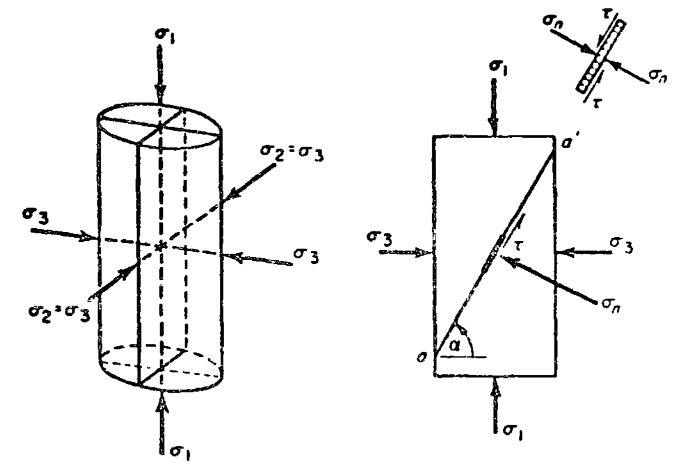
The shear strength of the clay can be expressed analytically over a certain range of effective normal stress as

$$\tau = \sigma_{n_{eff}} \tan \phi + c.$$

In this test, the value of the parameter, ϕ, is larger than that obtained for the same soil from the consolidated, quick shear test, because the neutral stress in the slow (drained) test is practically zero, and the intergranular friction between the soil particles acts in its full magnitude.

19-11. Comments on Direct Shear Tests. The direct shear test, although simple and relatively rapid, has some inherent disadvantages, namely:

1) The stress conditions across the soil sample in the shear box are very complex, because of the change in the shear area in the split shear box with the increase in shear displacement as the test progresses, causing unequal distribution of shear stresses and normal stresses over the potential surface of sliding. The total normal load and the total shear force should, therefore, be divided by the area of the sliding surface at failure, A_f, and not by A, because at failure the upper half of the shear box has been displaced horizontally a few hundredths of an inch relative to the lower half of the shear box. In other words, the corrected area should be used in determining the values of σ_n and τ_f at failure.



(a) Axonometric view of a soil sample showing principal stresses and principal planes

(b) Vertical cross-section through a soil sample showing principal stresses, inclined shear plane a-a', normal stress, σ_n, and shear stress, τ

FIG. 19-11 Stresses acting on a soil sample in triaxial compression test.

2) The water content of saturated samples of many types of soil changes rapidly as a result of a change in stress.
3) The imbedding of the ridges of the metal gratings or filter stones into the soil sample to be tested for shear causes distortion of the sample to a certain degree.
4) When the shear force is applied to the sample, the soil compresses against the sides of these ridges of the gratings.
5) There exists also the question of the effect of lateral restraint by the side walls of the shear box. This restraint does not act the same in the shear apparatus as it would in a foundation.

   Therefore, the value of the shear strength, obtained by dividing the shear force (H) by the rupture area (A), is only approximate.
6) Soils can also be tested in double shear or in torsional shear or in punch shear, for which purpose specially constructed [illegible]

TRIAXIAL COMPRESSION OF SOIL

19-12. Stress Conditions on the Shear Plane. The stress conditions on the shear plane a-a_1 of a cylindrically shaped soil sample, Fig 19-11, can be determined grapho-analytically and analyzed conveniently by Mohr's[3] stress circles, Fig. 19-12.

In this method, the normal stresses ($\sigma_1, \sigma_3, \sigma_n$) acting on a soil sample subjected to a triaxial compression test, are plotted as abscissas and the shear stresses (τ) as ordinates With the difference in major normal stresses, ($\sigma_1 - \sigma_3$), as a diameter, a circle is drawn. The radius of the stress circle is $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Remember from strength of materials that for major principal stresses, σ_1, the corresponding shear on the same plane is $\tau = 0$, and $\tau = 0$ for σ_3. Thus, the ends of the stress diameter on Mohr's stress circle have the coordinates (σ_1; 0) and (σ_3; 0).

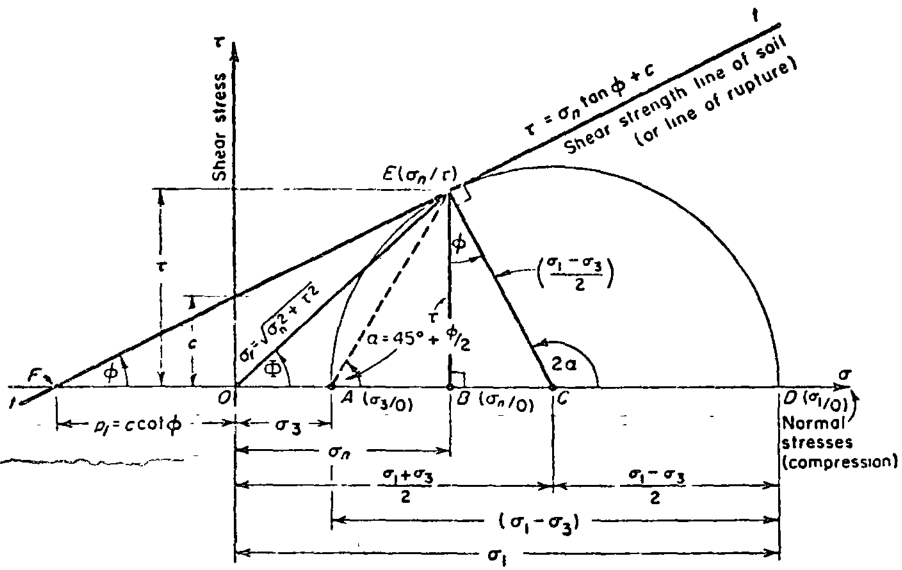


FIG. 19-12 Mohr's stress circle.

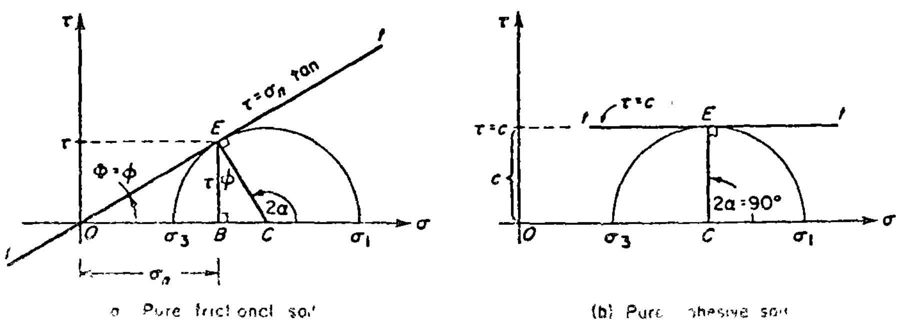


FIG. 19-13 Stress circles for various types of soil.

The normal stress, σ_n, and the shear stress, τ, on an inclined shear plane can be geometrically demonstrated on Mohr's graph as follows:

$$\sigma_n = OB = OC + CB$$

But

$$OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$CB = (CE)\cos 2\alpha,$$

and

$$CE = CA = CD = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Therefore

$$\sigma_n = OB = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha. \qquad (19\text{-}6)$$

Similarly,

$$\tau = BE = (CE)\sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha. \qquad (19\text{-}7)$$

It follows that each point on the circle gives the pair of stresses acting on a rupture plane of specific inclination, α.

A tangent, t-t, drawn to the stress circle at point E, has the equation of

$$\tau = \sigma_n \tan\phi + c, \qquad (19\text{-}8)$$

an equation which characterizes the shear strength of the soil. The slope of this line, $\tan\phi$, physically means the coefficient of internal friction of the soil, ϕ is the angle of internal friction, and c is the cohesion.

For future application, ϕ and c are rather test coefficients obtained by special apparatus and by special methods of testing.

The cut-off, $OF = p_i = c \cot\phi$, Fig. 19-12, made on the normal stress axis by the tangent, t-t, indicates an initial normal stress in the cohesive soil brought about by capillary stresses.

The magnitude of the resultant stress, σ_r, can also be scaled off, or calculated from Mohr's stress diagram.

Again, as was discussed in the section on the direct shear test of soil, for non-cohesive soils $c = 0$,

$$\tau = \sigma_n \tan\phi,$$

and for pure cohesive soils, when $\phi = 0$,

$$\tau = c,$$

i.e., the tangent takes a course parallel to the σ-axis, Figs. 19-13a and b

19-13 Discussion. At failure in shear the stress τ, is equal to the shear strength $\tau = \sigma_n \tan\phi + c$ of the soil. Substitution of the ...

and of the shear stress at failure, τ, into Coulomb's shear strength equation of the soil yields:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha \tag{19-6}$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha \tag{19-7}$$

$$\tau = \sigma_n \tan\phi + c \tag{19-8}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \frac{\sigma_3 \tan\phi + c}{(\frac{1}{2})\sin 2\alpha - \cos^2\alpha\tan\phi}. \tag{19-9}$$

The shear plane of least resistance to shear is caused by the least value (minimum) of the major principal stress, σ_1. But σ_1 is minimum when the term

$$(\tfrac{1}{2})\sin 2\alpha - \cos^2\alpha\tan\phi$$

is a maximum, i.e., when

$$\frac{df}{d\alpha} = (\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha - \cos^2\alpha\tan\phi)' = 0 \tag{19-10}$$

Derivation yields that

$$2\alpha = 90° + \phi \tag{19-11}$$

or

$$\alpha = 45° + \phi/2. \tag{19-12}$$

Substitution of this $\alpha = 45° + \phi/2$ into Eq. (19-9) yields:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45° + \phi/2) + 2c\tan(45° + \phi/2). \tag{19-13}$$

From Eq. (19-13), the magnitude of the cohesion, c, can be calculated.

$$c = \frac{\sigma_1 - \sigma_3\tan^2(45° + \phi/2)}{2\tan(45° + \phi/2)}. \tag{19-14}$$

When $\phi = 0$, then in the triaxial test Eq. (19-13) transforms into

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2c, \tag{19-15}$$

and

$$c = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau. \tag{19-16}$$

When also $c = 0$, Eq (19-15) becomes

$$\sigma_1 = \sigma_3. \tag{19-17}$$

When $c = 0$ (in the triaxial test), Eq (19-13) transforms into

$$\sigma_1 = \sigma_3\tan^2(45° + \phi/2) \tag{19-18}$$

From here the ratio of the principal stresses is

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \tan^2(45° + \phi/2) = \cot^2(45° - \phi/2) = \tag{19-19}$$

$$= \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}. \tag{19-20}$$

Equation (19-18) is used in calculations of earth pressure against a vertical earth retaining wall, with a horizontal ground surface of the backfill material whose $\phi = \phi$, and $c = 0$.

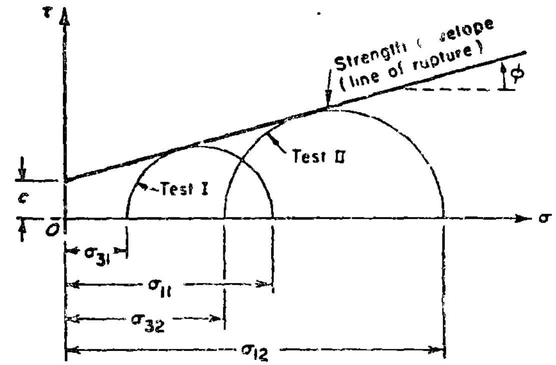


FIG. 19-14 Determination of ϕ and c graphically.

The values of ϕ and c can also be calculated from the geometry of the stress circle and its tangent from Fig 19-12:

$$\sin\phi = \frac{\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c\cot\phi} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c\cot\phi} \tag{19-21}$$

and

$$c = \frac{\sigma_1(1 - \sin\phi) - \sigma_3(1 + \sin\phi)}{2\cos\phi}. \tag{19-22}$$

This indicates that at least two sets of triaxial tests (at different lateral or minor principal stresses, namely at σ_{31} and σ_{32}) are to be performed to determine the two unknowns, ϕ and c

When $c = 0$ (in Eq 19-21), then

$$\sin\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}. \tag{19-23}$$

Two sets of triaxial test Two sets mean that two triaxial tests are performed, each at a specific minor stress, σ_{31} and σ_{32}, and at major principal stresses, σ_{11} and σ_{12}, respectively, till failure in shear Each test is then represented by its own stress circle denoted by test I and test II respectively, as on Fig. 19-14

The indexes at stresses are to be read as follows:

σ_{31} = minor principal stress (σ_3) in first set (1) of triaxial tests;

σ_{32} = minor principal stress in the second set of tests.

Thus, the second indexes, "1" and "2" mean first and second set of tests, respectively.

Generally,

$$\sigma_{11} \neq \sigma_{12},$$

and

$$\sigma_{31} \neq \sigma_{32}.$$

The values of ϕ and c can now be calculated from the results obtained from the two sets of tests by means of the shear strength equation $\tau = \sigma_n \tan\phi + c$, as follows:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{31})\sin 2\alpha &= [\tfrac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{31}) + \tfrac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{31})\cos 2\alpha]\tan\phi + c \\ \tfrac{1}{2}(\sigma_{12}-\sigma_{32})\sin 2\alpha &= [\tfrac{1}{2}(\sigma_{12}+\sigma_{32}) + \tfrac{1}{2}(\sigma_{12}-\sigma_{32})\cos 2\alpha]\tan\phi + c \end{aligned}\right\} \quad (19\text{-}24)$$

assuming that α is constant in both tests.

A simultaneous solution of the system of Eqs. (19-24) for ϕ and c yields:

$$\tan\phi = \frac{[(\sigma_{11}-\sigma_{31})-(\sigma_{12}-\sigma_{32})]\sin 2\alpha}{[(\sigma_{11}-\sigma_{31})-(\sigma_{12}-\sigma_{32})]\cos 2\alpha + (\sigma_{11}+\sigma_{31})-(\sigma_{12}+\sigma_{32})}, \quad (19\text{-}25)$$

and

$$c = \frac{\sin 2\alpha}{2} \times$$

$$\times\left\{\frac{(\sigma_{12}-\sigma_{32})(\sigma_{11}+\sigma_{31})-(\sigma_{11}-\sigma_{31})(\sigma_{12}+\sigma_{32})}{[(\sigma_{11}-\sigma_{31})-(\sigma_{12}-\sigma_{32})]\cos 2\alpha + (\sigma_{11}+\sigma_{31})-(\sigma_{12}+\sigma_{32})}\right\}. \quad (19\text{-}26)$$

Example. Given the results of two sets of triaxial tests on a silty glacial outwash soil:

$\sigma_{11} = 4.0$ t/ft²; $\sigma_{31} = 1.0$ t/ft².

$\sigma_{12} = 6.8$ t/ft²; $\sigma_{32} = 2.0$ t/ft².

The angle of rupture in both tests is measured to be the same, and is:

$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 59°$.

Determine the magnitudes of ϕ and c. Draw a stress diagram.

Solution

Auxiliary quantities for Eqs. (19-25) and (19-26).

$\sigma_{11} - \sigma_{31} = 4.0 - 1.0 = 3.0$ (t/ft²)

$\sigma_{12} - \sigma_{32} = 6.8 - 2.0 = 4.8$ (t/ft²)

$\sin 2\alpha = \sin(2 \cdot 59°) = \sin 118° = \cos 28° = 0.883$

$\cos 2\alpha = \cos 118° = -\sin 28° = -0.470$.

$\sigma_{11} + \sigma_{31} = 4.0 + 1.0 = 5.0$ (t/ft²)

$\sigma_{12} + \sigma_{32} = 6.8 + 2.0 = 8.8$ (t/ft²)

The angle of internal friction, ϕ, by Eq. (19-25):

$\tan\phi = 0.504$, and $\phi = 26°45'$.

Cohesion, by Eq. (19-26):

$c = 0.36$ (t/ft²)

Draw [illegible] stress diagram and scale off ϕ and c from the diagram after the tangent to circles I [illegible] has been drawn

measurement after the triaxial compression test or an unconfined compression test is performed. Note that this angle, $\alpha = 45° + \phi/2$ is the angle of rupture of that surface in which the rupture is impending at a given stress, σ_1 and σ_3.

5) Between $\alpha = 0$ and $\alpha = 45° + \phi/2$, there is a surplus of shear strength in the soil; and so there is a surplus between the angles of $\alpha = 45° + \phi/2$ and $\alpha = 90°$ (see hatched areas).
6) At $\alpha = 0$, the normal stress is the major principal stress, σ_1.
7) At $\alpha = 90°$, the normal stress is the minor principal stress, σ_3.

19-15. Purpose of Triaxial Compression Test. The purpose of the triaxial compression test of soils is to provide basic data on:

1) the ultimate, laterally confined, compressive strength;
2) the angle of internal friction;
3) the cohesion;
4) the shear strength;
5) the so-called modulus of elasticity, and
6) the pore water pressure.

The results obtained from the triaxial compression test are used for:

1) making estimates of the probable bearing capacity of a soil;
2) stability calculations of earthworks, earth retaining structures, and foundations;
3) analyzing stress-strain relationships of loaded soils, and
4) estimating settlements of soil under load.

19-16. Types of Tests. Fundamentally, there are two types of tests which can be performed by means of the triaxial compression apparatus, namely: 1) open-system test, and 2) closed-system test.

In the open-system triaxial test, sometimes called the drained or slow test, the pore water is allowed to drain out of the soil sample

In the closed-system test, sometimes called the undrained or quick test, no drainage is allowed. The water content of the soil sample is assumed to be constant throughout the test.

Consolidation under lateral stress in the open-system test may be allowed to any degree desired. During the process of lateral consolidation, water is allowed to drain Then the soil sample is subjected to axial stress (σ_1) During the application of the axial stress, the system may be either open or closed If it is closed, the shear stress develops at a constant water content which remains in the soil sample after the consolidation under the lateral stress (σ_3)

Tests may also be performed on a soil sample in which no consolidation is allowed prior to the application of the axial stress Drainage may or may not be allowed to take place. Therefore, one distinguishes between:

1) unconsolidated-undrained, also known as unconsolidated-quick test;
2) consolidated-undrained, also known as consolidated-quick test, (Q_c);
3) unconsolidated-drained also known as unconsolidated-slow test and
4) consolidated-drained, also known as consolidated-slow ([illegible] S_c) In this

test, clayey soil samples consolidate very slowly because of low permeability and long drainage path.

The unconfined compression test is an example of an unconsolidated-undrained kind of test.

19-17. Apparatus. A sketch of a triaxial compression chamber is given in Fig. 19-16. The vertical, axial stress, σ_1, can be applied to the soil sample manually by turning the gear-wheel (or by dead weights), or mechanically by means of an electric motor For details of the triaxial testing device refer to Fig. 19-16. The soil sample of a cohesive soil is trimmed to size to fit the apparatus. The height of the soil sample, usually cylindrical in shape, is customarily 2 to 3 times its diameter.

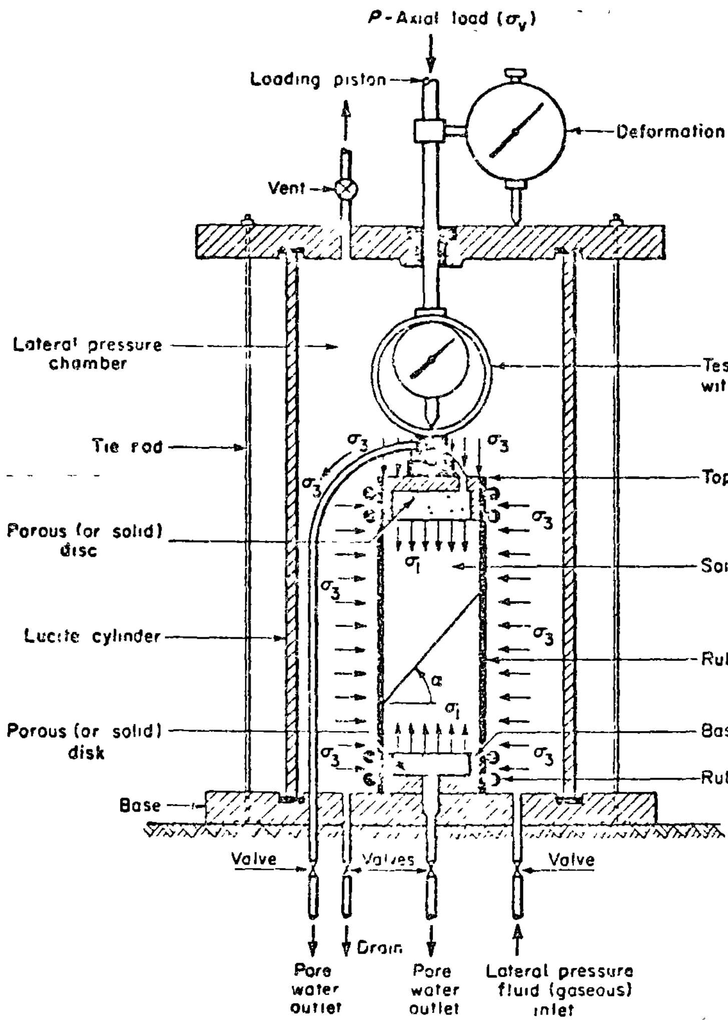


FIG. 19-16 Sketch of a triaxial compression chamber.

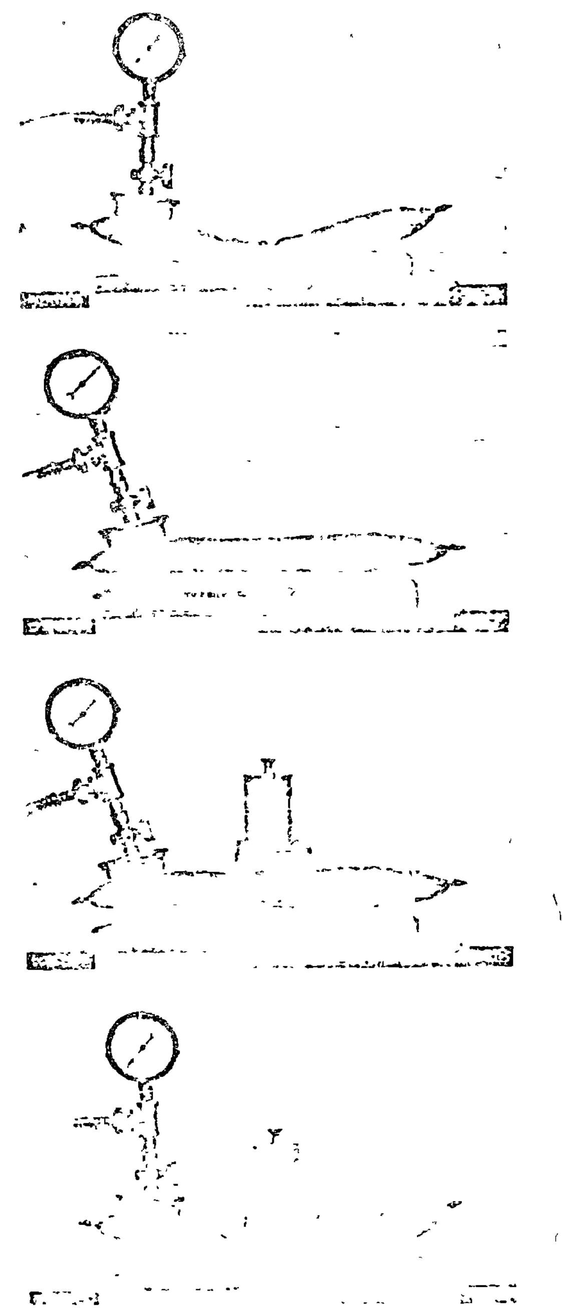


FIG. 19-17 Illustrating the "beam strength" of sand. *From top* sand bag before applying partial vacuum and after removal of vacuum, sand mass subjected to a certain degree of vacuum, sand beam supports external load collapse of "sand beam" after removal of vacuum

b) i) *Normal stress*: with $\alpha = 60°$, $\cos^2 60° = 0.25$, and $\sin^2 60° = 0.75$.

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = (1000)(0.250) + (200)(0.750) = \underline{400 \text{ lb/in}^2}.$$

ii) *Shear stress*: with $\sin 2\alpha = \sin 120° = \cos 30° = 0.866$,

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \frac{1000 - 200}{2}(0.866) = \underline{346.4 \text{ lb/in}^2}.$$

iii) *Resultant stress*:

$$\sigma_r = \sqrt{(\sigma_n)^2 + (\tau)^2} = \sqrt{(400)^2 + (346)^2} = \underline{530 \text{ lb/in}^2}.$$

iv) *Angle of obliquity* (Fig. 19-21b):

$$\beta = \arctan \frac{\tau}{\sigma_n} = \arctan \frac{346}{400} = \arctan (0.864) = \underline{40°50'}.$$

Angle of obliquity of σ_r with shear plane:

$$90° - \beta = 90° - 40°50' = \underline{49°10'}.$$

c) $\tan \phi$: with $\alpha = 60°$, from geometry: $2\alpha = 90° + \phi$,
or $\phi = 120° - 90° = \underline{30°}$; $\tan \phi = \tan 30° = \underline{0.577}$.

d) *Cohesion*: From τ-equation: $\tau = \sigma_n \tan \phi + c$,

$$c = \tau - \sigma_n \tan \phi = 346.4 - (400)(0.577) = \underline{115.6 \text{ lb/in}^2}.$$

e) *Initial stress*.

$$p_i = \frac{c}{\tan \phi} = \frac{115.6}{0.577} = \underline{200 \text{ lb/in}^2}.$$

f) *Coulomb's shear strength equation*:

i) algebraically:

$$\tau = \sigma_{n_{eff}} \tan \phi + c$$

ii) for the particular case:

$$\underline{\tau = (0.577)\sigma_{n_{eff}} + 115.6}$$

g) Coulomb's shear strength equation is used in practice in its modified form, namely, that the normal stress in that equation should be the effective normal stress. $\sigma_{n_{eff}} = \sigma_n - u$, where u is the neutral stress.

UNCONFINED COMPRESSION TEST

19-23. General Notes. Essentially, the unconfined compression test is a special case of the triaxial compression test of soils where the compressive and shear strengths of a soil prism, or cylinder, are measured under zero lateral stress ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), see Fig 19-22. The test is based on the assumption that there is no moisture loss during the test

In this test, carefully prepared prisms, or cylinders, of soils are subjected to gradually increasing vertical pressure, and simultaneous measurements of the deformations of the soil samples are made One of the features of the unconfined compression test is the ability to cause failure in a soil sample [illegible] a weak zone

The unconfined compression [illegible] is applicable to [illegible] slightly disturbed [illegible] cohesive soils [illegible]

soils (sands and gravels) cannot be subjected to this kind of test, because they do not form unsupported prisms and cylinders.

The unconfined compression test is one of the simplest and quickest tests used for the determination of the shear strength of cohesive soils, and also a simple substitute for more cumbersome field tests.

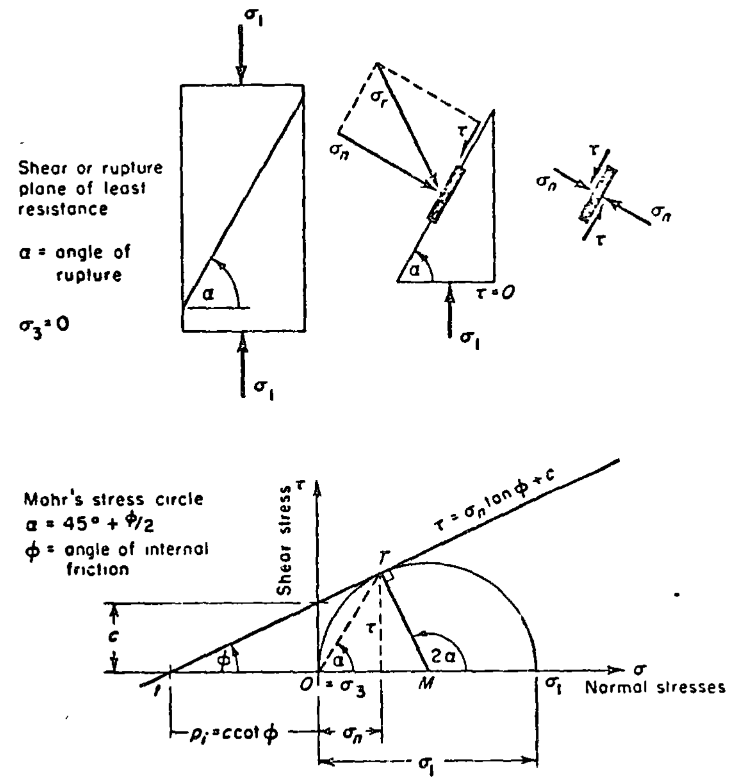


FIG. 19-22 Principle of unconfined compression test.

19-24. Purpose and Application of Unconfined Compression Test. The purpose of the unconfined compression test of cohesive soils is to determine:

1) the ultimate, unconfined compressive strength,
2) the approximate, ultimate shear strength,
3) the approximate angle of internal friction, ϕ,
4) cohesion, c (from Mohr's stress circle), and
5) the so-called Modulus of Elasticity, M_o.

The results obtained from unconfined compression tests are approximate However,

1) they serve as a direct, quantitative measure of the consistency of cohesive soils giving a clue as to the danger of rupture of embankment slopes or other earth masses;

2) they provide basic information on the strength properties, thus permitting us to estimate the possible bearing capacity of the soil in foundations and earthworks;
3) they give the stress-strain relationship under rapid failure conditions, and
4) they permit comparison of soil samples taken from various bore holes of approximately similar soil formation, thus saving most of the expensive and time-consuming shear tests

19-25. Analysis. According to Coulomb's theory, the shear resistance per unit area of soils can be expressed as

$$\tau = \sigma_n \tan\phi + c,$$

where all symbols are as before

When $\sigma_3 = 0$, as in an unconfined compression test, then the normal stress on the shear plane is:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2\alpha. \tag{19-27}$$

The shear stress in the same shear plane is

$$\tau = \frac{\sigma_1}{2}\sin 2\alpha. \tag{19-28}$$

The resultant stress is

$$\sigma_r = \sqrt{(\sigma_n)^2 + (\tau)^2}, \tag{19-29}$$

and the angle of inclination is

$$\beta = \arctan\frac{\tau}{\sigma_n}. \tag{19-30}$$

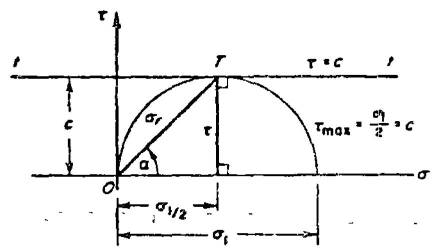


FIG. 19-23 Mohr's stress circle for cohesive, frictionless soil.

The substitution of these σ_n and τ values into the shear strength equation gives a minimum σ_1 as

$$\sigma_1 = 2c\tan(45° + \phi/2) \tag{19-31}$$

and from here

$$c = \frac{\sigma_1}{2\tan(45° + \phi/2)}. \tag{19-32}$$

If the angle of internal friction of plastic, saturated clays can be assumed as approximately zero, then the shear strength of such a soil depends upon its cohesion (Fig 16-23):

$$\tau = c, \quad \text{and} \quad \sigma_1 = 2c.$$

The value of c, in turn, according to theory, = half the unconfined compressive stress, i.e.,

$$c = \frac{\sigma_1}{2} = \tau_{max} \tag{19-33}$$

Note from the geometry of Fig 19-22 that $2\alpha = 90° + \phi$.

19-26. Preparation of Test Samples. Because in many instances soil samples for unconfined compression tests are prepared without due precaution, the following should be noted

1) Identify and describe the soil. Record, on the data sheet, all the necessary descriptive and qualitative information about the soil material to be tested.
2) In order to prevent the loss of moisture due to evaporation, prepare the sample in the humidity room at not less than approximately 90% humidity, if such a room is available. If not, prepare the sample in an ordinary room. The preparation of samples should be done quickly to minimize the moisture loss by evaporation.
3) The shape of the sample to be tested may be prismatic or cylindrical The size of the prismatic sample, in laboratory practice, usually varies from 1.5" × 1.5" × 3.5" (3") to 4" × 4" × 8", but smaller or larger samples can be used. However, as a general criterion the height should be cut 2 to 3 times the width of the sample, $2\frac{1}{2}$ times the diameter or width being the usual height. Smaller or larger cylinders can be used. The dimensions of cylindrical samples usually are 1 4" dia. × 3.5" ht, or 2" dia. × 5" ht Of course, the size of the sample depends also upon the capacity of the loading device and the volumetric size of soil material available.
4) Cut and trim from the supply of cohesive soil one or more prisms of cylinders to the desired size, and weigh them. The ends of the prisms or cylinders should be cut perpendicular to the longitudinal axis of the sample. Immediately after each prism or cylinder is cut, wrap them with sealing paper or thin plastic, or store them in an air-tight container to prevent excessive evaporation.
5) Determine the moisture content of the clay sample from the trimmings.
6) In case the prism or cylinder tends to split or crack at their ends, or if there are difficulties in trimming the ends smooth because of small scattered stones, prepare gypsum caps to provide uniform pressure distribution.
7) For area and volume, measure the free height of the clay prism or cylinder at three places by means of a steel rule or caliper. Measure to the nearest 0.01", or 0.01 cm, and record these data.
8) For area and volume, determine the size of the prism or the diameter of the cylinder at top, middle, and bottom, to the nearest 0 01" or 0 01 cm and record these measures. Use mean of four measurements at 90° at top, middle, and bottom Calculate the average, initial cross-sectional area of the sample as

$$A_{av} = \frac{A_t + 2A_m + A_b}{4}\ \text{(square units)}. \tag{19-34}$$

9) Coat the sides of the samples to be tested with a light coating of grease or vaseline, or dip them into paraffin for a thin paraffin coating to prevent moisture loss during the test.

10) Generally, the previous comment on the preparation of the undisturbed samples apply also to disturbed (remolded) samples which are prepared at any desired density and moisture content.

11) Place the sample to be tested in the testing apparatus in an upright position, center the sample and the loading plate with the ball bearing on top, and bring down the cross-bar of the loading yoke (or piston) until it almost touches the ball bearing. Attach the deformation gage (an Ames dial) and adjust it to read zero.

19-27. Apparatus. Any compression device which permits an unconfined, axial loading and the measurement of strain is suitable for unconfined compression tests of soil. The apparatus may be of the controlled stress or controlled strain type. The axial load, σ_1, may be applied manually, or mechanically, by dead weights; pneumatically, by means of screws, or other means. A pneumatic, unconfined compression apparatus of the controlled strain type is illustrated in Fig. 19-24. The pressure is exerted on the sample and on the testing ring from below. Note in this figure the rupture plane in the tested soil cylinder.

The lower gage shows the compressed gas pressure in the gas chamber of the testing device, and the middle dial gage shows the total deformation (shortening) of the soil cylinder. The upper dial inside the testing rings indicates calibrated, total axial pressure applied on the soil cylinder.

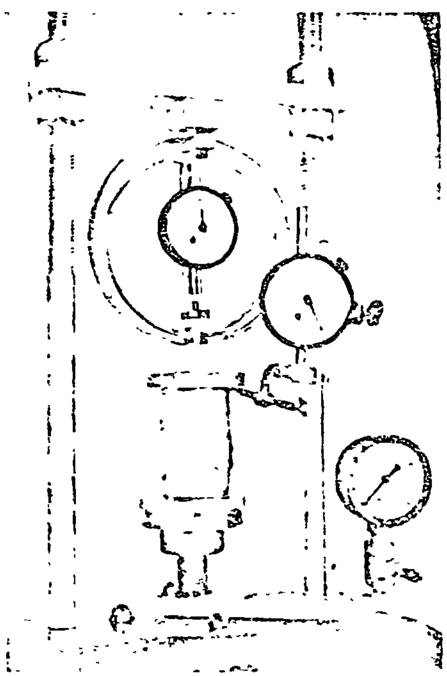


FIG. 19-24 Unconfined compression test device.

19-28. The Vane Shear Test. If a cohesive soil is very plastic, or if it does not support a vertical cylinder or prism suitable for triaxial or unconfined compression test, or when it is difficult to extrude an undisturbed cohesive soil sample below the ground surface, the shear strength of such a material is then determined by a device called the shear vane.

The shear vane usually consists of four steel plates welded orthogonally to a steel torque rod, Fig. 19-25

Two types of shear vanes may be distinguished, namely laboratory and field vanes.

In Fig. 19-25 is sketched the principle of the laboratory shear vane. The field shear vane is similar in principle, but usually of larger dimensions than the laboratory one.

The vane is forced into the soil sample, or into the undisturbed soil at the bottom of a borehole (Fig. 19-26). Then a torque, T, is applied at the torque head to rotate the vane at a uniform speed, the rate usually being 1°/min. The torque is indicated by the angle of twist, α, on a special gage. By rotating the edges of the shear vane a cylindrical surface is cut out in the soil. The applied torque is an approximate measure of the shear strength of the soil.

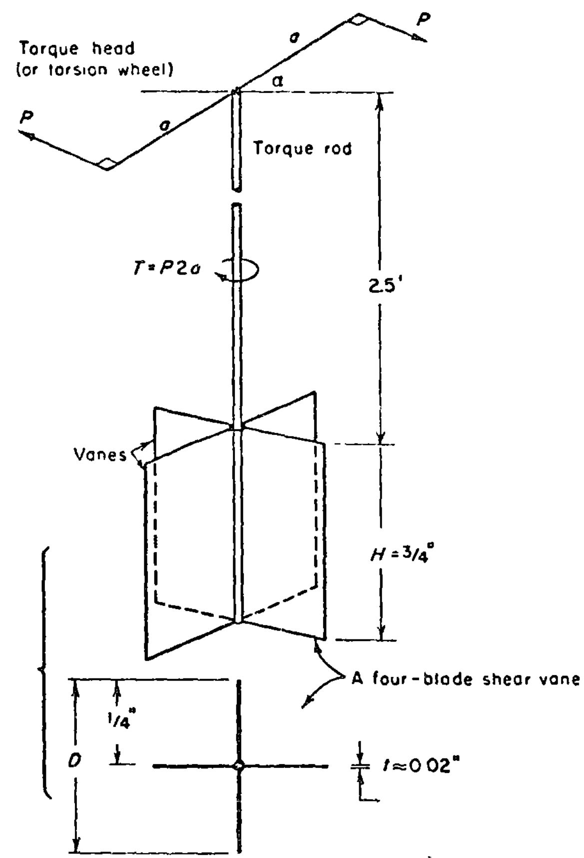


FIG. 19-25 Laboratory shear test vane.

If the two ends and the length of the vane device partake in shearing the clay, then, according to Carlson,[6] and the principle as shown in Fig. 19-26, the maximum torsional shear resistance, M_{max}, of the clay is calculated as

$$M_{max} = \tau\left(\underbrace{\pi D H \frac{D}{2}}_{\text{Middle surface}} + \underbrace{2\,\frac{\pi D^2}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{D}{2}}_{\text{Two ends}}\right) = \pi\tau\left(\frac{D^2 H}{2} + \frac{D^3}{6}\right) \qquad (19\text{-}35)$$

where $M_{max} = T$ = net applied torque
$\tau = c = q_u/2$ = shear strength of clay
q_u = ultimate, unconfined compressive strength of the clay
D = diameter of vane
H = vertical height of vane.

If only one end of the vane partakes in shearing the clay,[7] then

$$M_{max} = \pi c\left(\frac{D^2H}{2} + \frac{D^3}{12}\right). \tag{19-36}$$

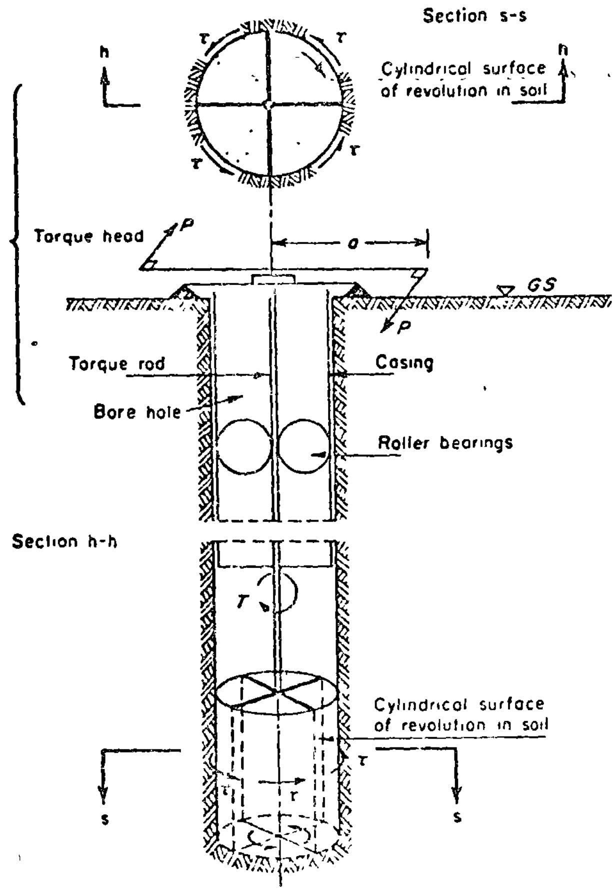


FIG. 19-26 Principle of vane shear test.

As to the shear stress distribution, Darienzo and Vey[8] assume that at failure the shear stress along the height of the blade is uniformly distributed along the surface of the circular cylinder of revolution, Fig 19-27. The distribution of shear stresses at failure over the end shear surfaces are assumed to be triangular, varying from zero at the center of the vane device, to maximum at the edge.

A vane shear test of a cohesive soil material usually gives a value of the shear strength about 15% greater than an unconfined compression test of clay

Fig. 19-28 illustrates a laboratory vane shear testing device of soils manufactured by Leonard Farnell & Co. Ltd, Hatfield, England. The pillars carry the vertically adjustable torque head. The size of the vane is: H = 13.0 mm, D = 12.8 mm; t = 0.6 to 0.9 mm.

The rotation of the vane is brought about by means of a manually operated wheel. This wheel operates a worm gear and a worm wheel on a central shaft mounted on ball races. The lower end of this central shaft turns the upper end of a calibrated torsion spring. The spring, in its turn, causes the lower vane shaft to rotate.

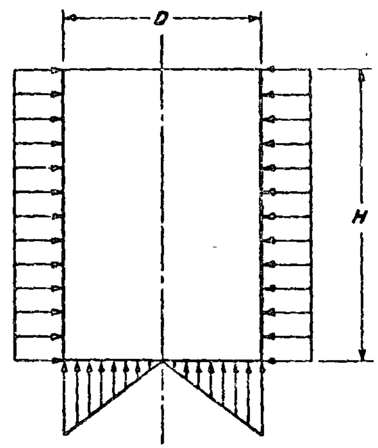


FIG. 19-27 Shear stress distribution around a vane blade.

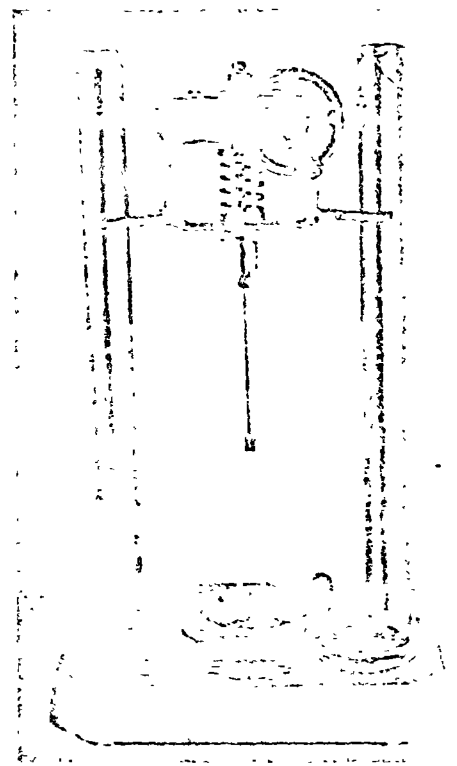


FIG. 19-28 Laboratory shear vane testing device.

The vane shaft is connected through the hollow upper shaft to a resettable pointer. The pointer indicates the number of degrees of rotation of the spring on a graduated dial attached to the worm wheel shaft. The reading from the dial times the spring constant is the torque applied to the instrument.

There are several springs in the set, namely springs which apply a torque of 2 in.-lb, 3 in.-lb, 4 in.-lb, and 5 in -lb for an approximate angular movement of $\alpha = 180°$.

REFERENCES

1. C. A. Coulomb, "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs a l'architecture", *Mémoires de la mathématique et de physique*, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers savants et lûs dans ses Assemblées, Paris, De L'Imprimerie Royale, 1776, vol 7, Année 1773, pp 347-348.

2. A. Casagrande, "Characteristics of Cohesionless Soils Affecting the Stability of Slopes and Earth Fills", *Contributions to Soil Mechanics*, 1925-1940, Boston, Boston Society of Civil Engineers, 1940, pp. 257-276.
3. O. Mohr, *Technische Mechanik*, Berlin, Wilhelm Ernst und Sohn, 1906.
4. K. A. Turner, Jr., *Design and Operation of a Pressure Cell for Measuring Pore Water Pressure* (mimeographed). New Brunswick, New Jersey, Rutgers—The State University, 1955.
5. A. Casagrande, "A Non-Metallic Piezometer for Measuring Pore Pressures in Clay", an Appendix to his paper entitled "Soil Mechanics in the Design and Construction of the Logan Airport", *Contributions to Soil Mechanics*, 1941-1953, Boston Boston Society of Civil Engineers, 1953, pp 198-205
6. L. Carlson, "Determination in Situ of the Shear Strength of Undisturbed Clay by Means of a Rotating Auger", *Proceedings*, Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, 1948, vol. 1, pp. 265-270.
7. E. Vey and L. Schlesinger, "Soil Shear Tests by Means of Rotating Vane", *Proceedings*, 29th Annual Meeting of the Highway Research Board, December 13-16, 1949, Washington, D.C., 1950, p. 547
8. M. Darienzo and E Vey, "Consistency Limits of Clay by the Vane Method", *Proceedings*, 34th Annual Meeting of the Highway Research Board, Washington, D.C., January 11-14, 1955, pp 559-566

Other Pertinent References

Procedures for Testing Soils, Philadelphia, ASTM, 1958, pp 357-359

K. Terzaghi, "The Shearing Resistance of Saturated Soils and the Angle Between the Planes of Shear", *Proceedings*, First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Cambridge, Mass., June 22-26, 1936, vol 1, Paper no d-7, pp 54-56

D. W. Taylor, "Shearing Strength Determination by Undrained Cylindrical Compression Test with Pore Pressure Measurements", *Proceedings*, Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, June, 1948.

A. Casagrande and S D Wilson, *Report to Waterways Experiment Station on Triaxial Research Performed During 1950-51*, Harvard University, December, 1951.

A. Casagrande and S. D. Wilson, "Prestress Induced in Consolidated-quick Triaxial Tests", *Proceedings*, Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Zurich, August, 1953

PROBLEMS

19- 1. Prove analytically that $\alpha = 45° - \phi/2$.

19- 2. Show graphically that $\alpha = 45° - \phi/2$.

19- 3 Why do engineers need to know the shear strength of a soil?

19- 4. A direct shear test of a ϕ-soil at a normal stress of 4 kg/cm² resulted in a shearing stress of 3 kg/cm².
Determine [illegible] the [illegible] of internal friction [illegible] this [illegible] soil.
b) what will be the shear [illegible] at a [illegible] stress of 6 kg/cm²?
c) Report [illegible] of the stresses on a stress diagram

19- 5 What [illegible] the physic[illegible] governing failure in shear of a soil?

19- 6 [illegible] an effective normal stress differ from an applied total normal stress?

19- 7 [illegible]

19- 8. Explain effective and neutral stress in soil and the significance of considering or not considering neutral stress in performing a shear test of a cohesive soil. Make illustrative sketches

19- 9. From Mohr's rupture theory, it can be derived that in the case of a triaxial compression test of a cohesive soil (ϕ-c soil) the major principal stress, σ_1, may generally be expressed in terms of the minor principal stress, σ_3, the cohesion of soil, c, and the general angle of rupture, α, as

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \frac{\sigma_3 \tan\phi + c}{\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha\tan\phi},$$

where ϕ = angle of internal friction of the given soil material.

i) Calculate at which particular algebraic value of the critical angle of rupture, α_{crit}, the major principal stress attains a maximum value to bring about the rupture.

ii) Develop an algebraic expression for σ_{1max} as a function of σ_3 and α_{crit}, and c.

19-10. Given the results of two sets of triaxial tests

$\sigma_{11} = 18.0$ kg/cm², $\sigma_{31} = 10.0$ kg/cm²,
$\sigma_{12} = 28.0$ kg/cm², $\sigma_{32} = 20.0$ kg/cm²

Report the magnitudes of ϕ and c, and draw the stress diagram.

19-11. If the contact pressure on the soil at the base of a footing is 2 t/ft², what should be the least lateral restraint to prevent a lateral expulsion of a soil mass from underneath the footing?
Given: $\phi = 30°$, $c = 200$ lb/ft², and the unit weight of the soil is $\gamma = 100$ lb/ft³. How deep should the foundation pit be dug in order that the lateral restraint would just be enough to maintain equilibrium within the earth mass at the point under consideration?

19-12. Given direct shear test results on a remolded sandy soil at 13.2% moisture content and 109 lb/ft³ dry density The test was performed at [illegible]
The testing ring dial reading constant is 33 lb per 0 0100 inch deformation of [illegible]
The cross-sectional area of the shear area is 4 0 in².

Time in minutes	*Testing ring dial readings in inches*	*Horizontal displacement dial readings in inches*	*Vertical displacement dial readings in inches*	*Remarks*
1	2	3	4	5
0	0 0000	0.0000	0 0000	The [illegible]
0.5	0 0024	0 0012	[illegible]	[illegible]
1.0	0 0038	0 0050	[illegible]	[illegible]
1.5	0.0056	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.0	0 0074	[illegible]	[illegible]	
2 5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3 0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
3.5	0.0114	[illegible]	[illegible]	
4.0	0 0120	0 0345	[illegible]	Plus sign,
4.5	0.0116	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5 0	0.0110	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Plot and analyze the test results, showing three graphs on one drawing: shear stresses as a function of time, horizontal displacement as a function of time, and vertical displacement of soil as a function of time.

Observe the table. What kind of shear test is this? Report the ultimate shear stress. In what state of density is the sand?

19-13. Given the following test results of a remolded sandy soil with some binder at an optimum moisture content of 13% and dry density of 100 lb/ft³. The method of test is the unconsolidated, quick, direct shear test where no time was allowed for the consolidation of the specimen.

σ_n lb/in²	τ lb/in²
3.3	9.6
6.7	11.8
9.9	12.7
13.3	16.8
16.5	20.2

a) Plot the shear strength curve for this soil and for this test condition.
b) Determine the test parameters ϕ and c.
c) Establish the shear strength equation of this soil for a certain range of the strength graph.
d) Analyze and explain the obtained graph.

19-14. A consolidated, quick (undrained) (Q_c) triaxial test on a silt soil furnished the following results.

Total normal stresses σ lb/in²	Stresses on soil cylinders — Test numbers 1	2	3	4
σ_1	19.0	36.5	54.0	72.0
σ_3	10.0	19.5	30.0	40.0

The plot of these stresses gives the apparent angle of internal friction, ϕ_a

	1	2	3	4
Pore water pressure, u, in lb/in²	7.0	13.5	20.0	29.5
Effective normal stresses, $\sigma_{n_{eff}}$, in lb/in²				
$\sigma_{n_{eff}1}$		23.0		
$\sigma_{n_{eff}3}$		6.0		

The plot of these stresses gives the effective angle of internal friction, ϕ_e.

Note that the total normal stresses, as well as pore water pressures were measured in these tests.

a) Calculate the effective normal stresses for tests Nos. 1, 3, and 4, and complete the table.

b) Plot two graphs, the first representing the stress circles based on the total normal stresses, σ_n, and the second representing stress circles based on effective normal stresses, $\sigma_{n_{eff}}$.

c) Draw to the stress circles, in both graphs, Mohr's shear strength envelope as tangents according to the principle of "best fit".

Let the angle of the slope of the tangent to the total, normal stress circles (first graph) be termed the apparent angle of internal friction, ϕ_a of the silt tested, and the angle of the slope of the tangent to the effective, normal stress circles (second graph) be termed the effective angle of internal friction, ϕ_e, of same silt.

Scale off the graphs the angles ϕ_a and ϕ_e, and report their magnitudes. What is the ratio of $(\phi_e)/(\phi_a)$?

Make observations about cohesion in these two graphs.

19-15. A consolidated slow (drained) test, S_c, by method of triaxial compression on a cohesive soil gave the following results.

Effective normal stresses, $\sigma_{n_{eff}}$ lb/in²	*Stresses on Soil Cylinders* — *Test Numbers* 1	2
$\sigma_{n_{eff}1}$	33.0	65.0
$\sigma_{n_{eff}3}$	10.0	20.0

The plot of these stresses gives the true angle of internal friction, ϕ.

a) Plot the stress circles, and Mohr's shear strength envelope for these tests.
b) What is the magnitude of the true angle of internal friction, ϕ, in these tests?
c) Compare ϕ with ϕ_a and ϕ_e.
d) What is your observation on cohesion?

Note. Bring out the idea that ϕ_a, ϕ_e, ϕ, and c are test parameters, rather than soil constants.

19-16. Describe and illustrate how the shear strength of a soil varies with its moisture content. Discuss the deductions concerning the consequences in an earthwork when the moisture content in the soil gradually increases. Under what conditions can moisture content in soil increase in the field as applied to an earthwork?

19-17. Given the following results of five unconfined compression test results.

Axial stresses σ_1 lb/in²	*Shear strength* τ lb/in²
2.50	1.10
5.05	2.30
8.55	3.80
10.20	4.60
10.61	4.80

All rupture angles, α, were measured to be at $\alpha = 63°$ with the horizontal.

Present these test results in the form of stress circles on one drawing.

19-18. What means are used to increase shear strength of a soil used for fills in highway construction?

19-19. Given the following data from an unconfined compression test of a cohesive soil. The angle of rupture was measured to be $\alpha = 63°$ with the horizontal. The diameter of soil sample is 1.5". The height of the soil sample is 3 and 13/16". Type of soil: Greensand (Collington). The moisture content of the soil at its rupture was determined to be $w = 24\%$.

Point Nos. on curve	*Axial load, σ_1, in lb/in²*	*Deformation of soil sample Δh, in inches*	*Remarks*
0	0	0	
1	4.41	0.025	
2	9.03	0.047	
3	15.45	0.093	
4	18.80	[illegible]	
5	19.85	[illegible]	
6	17.60	0.253	
7	16.00	0.294	
8	15.40	0.348	

Required

1) To plot the axial load as a function of deformation, i.e., $\sigma_1 = f(\Delta h)$.
2) Determine the ultimate, unconfined compressive load.
3) Plot the axial stress in lb/in² as a function of strain ($\Delta h/h$), and determine the proportional limit.
4) Plot Mohr's stress diagram, and determine σ_n, τ, ϕ and c.

19-20. Vane shear tests were performed yielding the following shear strength data on the soil tested at a 6 cm depth below the surface of the soil samples.

Plot the shear strength-moisture relationship and report your observations.

Test Nos.	*Moisture Content w %*	*Average shear strength, τ_{av}, t/ft²*
1	13.4	1.50
2	13.8	1.25
3	14.0	0.90
4	20.0	0.35
5	25.0	0.20

conditions for simultaneous failure are likely to be violated because even in a homogeneous material, the strains along a potential surface of sliding are not likely to be uniform. As a consequence, the soil along part of the surface of sliding may be exerting its peak strength while that along the remainder may be exerting a smaller value. Under extreme conditions as, for example, if a clay is extrasensitive, a small shear strain suffices to reduce the shear strength s to a small fraction of its peak value (Fig. 15.6c). Hence, failure of a body of extrasensitive clay starts at the point where the shearing stress becomes equal to s (Eq. 16.5) and from this point is likely to spread over the balance of the potential surface of failure. Failures of this type are said to be *progressive*. They invalidate the results of computations based on the conventional assumption of simultaneous failure.

Because of these differences between real and ideal soils, stability computations based on test results and on Eq. 16.5 are strictly valid only for the ideal plastic material that was substituted for the real soil. The practical consequences of the observed differences between real soils and their ideal substitutes must be compensated by adequate factors of safety. The importance of the differences depends on the type of soil and, for a given soil, on its load history. The only real soil which performs almost exactly like its equivalent ideal plastic material is clean cohesionless sand at a void ratio close to the critical value.

With respect to their shearing characteristics, real soils are commonly divided into two categories: cohesionless soils such as gravels, sands, and nonplastic silts, and cohesive soils such as clays and plastic silts. Cohesionless soils will be discussed in Article 17, and cohesive soils in Article 18.

Selected Reading

Henkel, D. J. (1960). "The shear strength of saturated remolded clays," *Proc. ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils*, pp. 533–554. Summary of triaxial tests in terms of fundamental stress relationships.

Newmark, N. M. (1960). "Failure hypotheses for soils," *Proc. ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils*, pp. 17–32. General discussion of failure hypotheses for ideal materials and their possible applications to soils. See also "Discussions," pp. 987–995.

Schmertmann, J. H. and J. O. Osterberg (1960). "An experimental study of the development of cohesion and friction with axial strain in saturated cohesive soils," *Proc. ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils*, pp. 643–694.

Bishop, A. W. (1966). "The strength of soils as engineering materials," *Géot* 16, pp. 91–128.

ART. 17 SHEARING RESISTANCE OF COHESIONLESS SOILS

Sands and Inorganic Silts

The shear characteristics of sands and inorganic silts can, unless the soil is exceptionally loose, be represented reliably by Eq. 17.1.

$$s = (p - u_w) \tan \phi = \bar{p} \tan \phi \tag{17.1}$$

Deposits of natural sands and silts may be encountered in any state between loose and dense. Depending principally upon the relative density, the value of ϕ may range between fairly wide limits; the grain-size distribution and the shape of the grains also have an influence on ϕ. Representative values for ϕ under effective pressures $\bar{p}$ less than about 5 kg/cm² are given in Table 17.1.

Table 17.1
Representative Values of ϕ for Sands and Silts

	Degrees	
Material	*Loose*	*Dense*
Sand, round grains, uniform	27.5	34
Sand, angular grains, well graded	33	45
Sandy gravels	35	50
Silty sand	27–33	30–34
Inorganic silt	27–30	30–35

Since most of the shearing strength is caused by interlocking of the grains, the values of ϕ are not appreciably different whether the soil is wet or dry.

As the pressure $\bar{p}$ is increased from about 5 to about 50 kg/cm², the values of ϕ decrease gradually by about 10°. The decrease is associated with an increase in the percentage of grains that are crushed as the state of failure is approached.

Figures 15.3c and e pointed out the tendency of a loose sand to decrease in volume, and of a dense sand to dilate, during shear. The permeability of very fine saturated sand and silt is so low that the rapid application of a shearing stress is associated with a temporary increase of pore pressure u_w (Eq. 17.1) if the soil is loose, or with a temporary decrease of u_w if the soil is dense. The strength of the soil is correspondingly temporarily decreased or increased. Hence, for example, if piles are being driven into one of these materials in a loose saturated state, the piles encounter only a slight resistance which is [illegible] independent of depth, whereas in the same material [illegible] piles may meet refusal.

If the sand or silt is at the critical void ratio (Article 15) the pore pressure u_w and, consequently, the shearing resistance, remain practically constant. Therefore, in order to avoid a reduction of shearing strength when a shearing stress is applied, it is commonly considered advisable to compact fills of sand or silt to a void ratio below the critical value. Inasmuch as the critical void ratio decreases somewhat with increasing confining pressure, greater compaction may be required to accomplish this purpose below heavily loaded foundations or beneath high fills than under lighter loads.

Spontaneous Liquefaction and True Quicksands

In a few localities fine sands have been encountered which are so loose that a slight disturbance such as a mild shock causes an important decrease in volume at unaltered value of p (Eq. 17.1). If this decrease takes place below the water table, it is preceded by a temporary increase in u_w to a value almost equal to p, whereupon $\bar{p} = p - u_w$ becomes almost zero and the sand flows like a viscous fluid. This phenomenon is known as *spontaneous liquefaction.* It has occurred both in loose sand fills and in natural sand deposits. Examples of slope failures on natural sand deposits (*true quicksands*) will be given in Article 49.

Experience indicates that spontaneous liquefaction most commonly occurs in fine silty sands. This fact, combined with the observed performance of true quicksands, suggests that the aggregate formed by the sand grains possesses a *metastable structure;* that is, the structure is stable only because of the existence of some supplementary stabilizing influence. A clean sand deposited under water is stable, although it may be loose, because the grains roll down into stable positions. In a sand capable of spontaneous liquefaction, some agent must interfere with this process.

If an artificial deposit of damp sand is placed above the water table, the interfering agent consists of films of moisture; the apparent cohesion produced by the films is sufficient to prevent the grains from rolling into stable positions. This process and its consequences have been reproduced in the laboratory (Geuze 1948, Bjerrum et al. 1961). The experiments also indicated that the relative density of true quicksands is very much lower than that corresponding to the critical void ratio.

Although clean sand deposited under water has a stable structure even if loose, sand deposited simultaneously with silt may develop a metastable structure. The depressions between the grains of sand on [illegible] the sand grains from reaching stable positions. Subsequent consolidation under static pressure, with no lateral strain, is resisted by friction at the points of contact between the grains of sand. However, if slip at the points of contact occurs, for instance on account of a shock with an intensity exceeding a certain threshold value, the metastable structure breaks down and liquefaction takes place. The resulting failure appears to be progressive, starting at one point and proceeding by a chain reaction.

A metastable structure in a natural sand deposit is very difficult to detect, because the structure collapses during sampling and subsequent transportation. Yet, if a layer of true quicksand is located beneath the base of a structure or of an earth dam, it is a potential source of danger. Experience suggests that true quicksands may occur in layers or large lenses between layers of loose or moderately dense sands. Such occurrences are probably the result of seasonal variations in the silt content of the turbid water which transported the sand to the site of deposition. Hence, if a dam is to be built above a thick layer of loose sand, the sand should be compacted as described in Article 50 because it may contain zones of true quicksand.

Liquefaction under Reversals of Stress or Strain

In Article 15 it was pointed out that each reduction and reapplication of stress to a soil is accompanied by an increase in strain, although the magnitude of the increase becomes smaller for each cycle. If the soil is saturated and drainage is prevented, each reduction and reapplication of stress or strain is accompanied by a change in pore pressure, although the magnitude of the change decreases for each cycle.

If a specimen of loose saturated sand is consolidated in a triaxial device under an all-around pressure p_c, and if then at the same cell pressure the axial stress is caused to alternate between $p_c + \Delta p$ and $p_c - \Delta p$ under conditions of no drainage, each alternation produces an increment Δu of pore pressure within the specimen (Fig. 17.1). After a certain number of alternations the value of u_w becomes equal to the effective stress p_c that prevailed before the cyclic loading began, whereupon the specimen loses its strength and is no longer able to maintain its shape. The sudden loss of strength and rigidity corresponds to liquefaction of the sand.

If the test is repeated with the same sand in a dense state, the values of u_w build up in a similar fashion except that the increments of Δu are much smaller per cycle, and the number of cycles to induce liquefaction is greatly increased. An increase in the consolidation pressure p_c, other

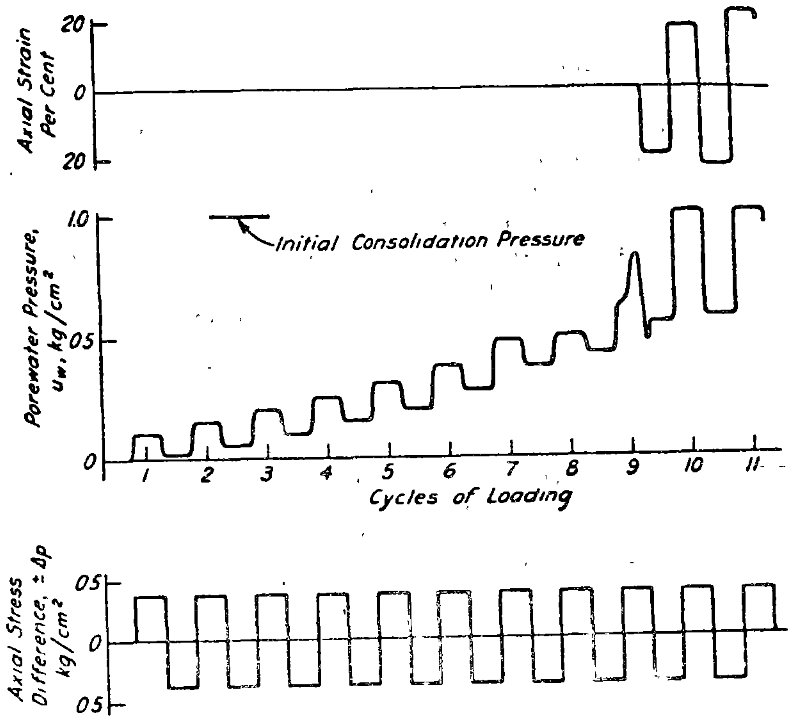


Fig. 17.1. Results of undrained triaxial test on loose saturated sand wherein axial stress alternates between 1 ± 0.39 kg/cm² while cell pressure is maintained at equivalent of 1 kg/cm² (after Seed and Lee 1966).

variables being equal, increases the number of cycles required to induce liquefaction, whereas an increase in Δp has the opposite effect (Seed and Lee 1966). Similar behavior occurs if alternations of strain rather than of stress are imposed on the specimen.

Bodies of loose, relatively fine, uniform sand below the water table are susceptible to liquefaction during an earthquake, especially if the duration of the quake is long enough for the occurrence of a large number of oscillations involving repeated reversals of shearing strains of large amplitude. After a violent earthquake has been in progress for a sufficient time, a loose zone at moderate depth may liquefy, whereupon the excess water will rise to the surface, often in more or less equally spaced sand boils. The sand above the liquefied zone is subjected to an upward hydraulic gradient and also loses its shearing resistance; consequently, footings supported on the sand may sink into the ground (HSEE 1965). Dense sands are less likely to experience liquefaction under these circumstances because the duration of most violent earthquakes is not long enough to encompass the required number of repetitions.

Very loose fills or natural deposits of saturated sand may liquefy, even if they do not possess a metastable structure, under the small provocation of mild vibrations or of a few repeated shocks. One such fill constituted the upstream portion of a dike, with a vertical clay core, located between a concrete storage dam and the right bank of a river valley. The slope had a height of about 50 ft; its inclination decreased from 2:1 at the crest to 4:1 at the toe. The sand, of which 80% of the grains ranged between 0.3 and 1.5 mm, was dumped in irregular layers above the water table, in a moist state without compaction. The slope was stable during the first filling of the reservoir and during a subsequent drawdown of 5 ft; it remained stable while the contractors started by blasting to demolish the upstream cofferdam, about 500 ft upstream. However, the intensity of the charges was gradually increased. About 8 or 10 minutes after the last charge was exploded, the slope started to fail at the junction between the dike and the concrete dam. Within approximately 20 seconds the movement spread over the full length of the slope to a distance of about 250 ft from the starting point. The sand spread out on the floor of the reservoir like a thick blanket and left the major part of the upstream face of the clay core without support.

Selected Reading

Rutledge, P. C. (1947). *Review of the cooperative triaxial shear research program of the Corps of Engineers.* Waterways Experiment Station. Chapter IV, "Detailed results for cohesionless soils," contains considerable data on properties of sands and gravels.

Chen, L. S. (1948). "An investigation of stress-strain and strength characteristics of cohesionless soils by triaxial compression tests," *Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech.*, Rotterdam, 5, pp. 35–43.

Penman, A. D. M. (1953). "Shear characteristics of a saturated silt, measured in triaxial compression," *Géot.*, 3, pp. 312–328.

Holtz, W. G. and H. J. Gibbs (1956*b*). "Triaxial shear tests on pervious gravelly soils," *ASCE J. Soil Mech.*, 82, No. SM1, Paper No. 867, 9 pp.

Wu, T. H. (1957). "Relative density and shear strength of sands," *ASCE J. Soil Mech.*, 83, No. SM1, Paper No. 1161, 23 pp.

Bjerrum, L., S. Kringstad and O. Kummeneje (1961). "The shear strength of a fine sand," *Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech.*, Paris, 1, pp. 29–37.

ART. 18 SHEARING RESISTANCE OF COHESIVE SOILS

Normally Loaded Undisturbed Clays of Low to Moderate Sensitivity

The results of drained triaxial tests on normally loaded cohesive soils can be expressed with satisfactory accuracy by Coulomb's equation in which $c = 0$. Thus

$$s = \bar{p} \tan \phi \tag{18.1}$$

The values of ϕ for such materials, whether in a remolded or an undisturbed state, are related to the plasticity index. Approximate values may be estimated with the aid of Fig 18.1, although the scattering from the curve for most clays may be on the order of 5° (Bjerrum and Simons 1960). However, the exceptionally high value $\phi = 47°$ was obtained (Lo 1962) for clay with a liquid limit of 426% from Mexico City. Hence, it is apparent that the statistical relation represented by Fig. 18.1 is not of general validity and should be used with caution.

Under conditions usually encountered in the field, the low permeability of clays greatly retards the drainage; as a consequence the pore pressures u_w associated with the forces tending to shear the clay may not dissipate readily. Since the pore pressures associated with shear are positive (Fig. 15.5c), the strength indicated by Eq 18.1 may not be developed for a very long time; the time required for dissipation is governed by the consolidation characteristics and dimensions of the cohesive body (Articles 14 and 25).

The conditions associated with complete lack of drainage may be approximated in consolidated-undrained triaxial tests (Article 15). The results of such a test, in which $\bar{p}_1$ and $\bar{p}_3$ are the effective principal

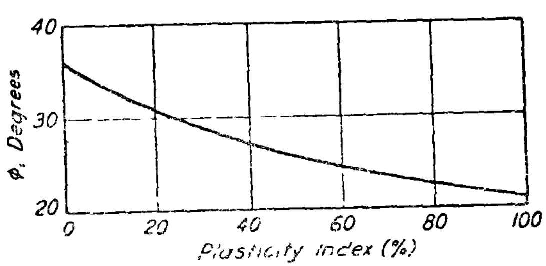


Fig. 18.1. Relation between ϕ and plasticity index for clays of moderate to low sensitivity under drained conditions

stresses at failure, are represented by the rupture circle E, Fig. 18.2a. This circle is tangent to the rupture line defined by Coulomb's equation

$$s = \bar{p} \tan \phi \tag{18.1}$$

At the time of failure, positive pore pressures u_f act in all directions in the sample (see Fig. 18.2a). Hence, the total principal stresses at failure are

$$p_1 = \bar{p}_1 + u_f \tag{18.2}$$

and

$$p_3 = \bar{p}_3 + u_f \tag{18.3}$$

The rupture circle in terms of total stresses is then circle A; it has the same diameter as E but is displaced to the right a distance $\bar{A}_f\Delta p_f$ equal to the pore pressure u_f induced in the sample at failure.

If several tests are carried out under undrained conditions on the same clay initially consolidated under different cell pressures p_3, then, in terms of total stresses, the envelope to the rupture circles is also approximately a straight line passing through the origin (dash line in Fig. 18.2a), with the equation

$$s = p \tan \phi_{cu} \tag{18.4}$$

where ϕ_{cu}, known as the *consolidated-undrained angle of shearing resistance*, is appreciably smaller than ϕ. The relation between ϕ and ϕ_{cu} is determined by the value of the pore pressure induced by the stress difference $p_1 - p_3$ at failure; for normally loaded clays of low to moderate sensitivity this value is approximately equal to the stress difference itself.

It should be noted that the failure circle for a given test has the same diameter whether it is plotted in terms of effective stresses or total stresses. The pore pressure acts with equal intensity in all directions; hence the increment of pore pressure is the same for both the major and minor principal stresses. This conclusion leads to an extremely useful concept, known as the $\phi = 0$ condition. In Fig. 18.2b the solid circle E is the effective stress circle shown in Fig. 18.2a. The total stress circle A corresponds to the consolidated-undrained test in which the pore pressure at the start of the test was zero and the pore pressure at the end of the test was u_f. If, however, after the initial consolidation under the cell pressure p_3, the cell pressure had been increased by an amount u_a without allowing drainage, the initial pore pressure in the sample would have been u_a and the pore pressure at failure $u_a + u_f$. The corresponding failure circle would have been B (Fig. 18.2b). The effective stress circle would, nevertheless, still be E.

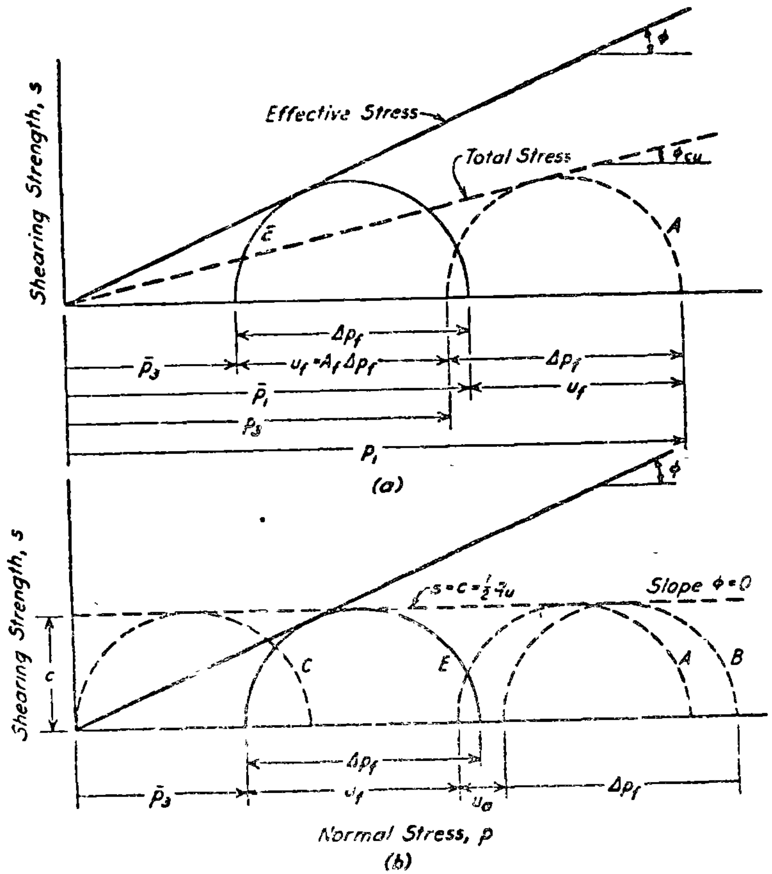


Fig. 18.2. *(a)* Results of consolidated-undrained triaxial tests on normally loaded clay of moderate sensitivity. *(b)* Diagram illustrating $\phi = 0$ condition.

Since any change u_a in cell pressure could have been chosen, it follows that if several samples are consolidated under the same cell pressure $\bar{p}_3$ and then are tested under undrained conditions at different cell pressures, the rupture line *with respect to total stresses* is horizontal. The line may be regarded as a special case of Coulomb's equation in which $s = c$ and $\phi = 0$. Hence, these particular circumstances are known as the *$\phi = 0$ condition* (Skempton 1948). Inasmuch as an unconfined compression test is merely a triaxial test in which the total minor principal stress p_3 is zero (circle C in Fig. 18.2*b*), the shearing strength

under $\phi = 0$ conditions may be evaluated on the basis of unconfined compression tests as

$$s = c = \tfrac{1}{2} q_u \tag{18.5}$$

In connection with soils of such low permeabilities as those possessed by most clays and some silts, there are many practical problems in which we can assume that the water content of the soil does not change for an appreciable time after the application of a stress. That is, undrained conditions prevail. Moreover, if a sample is extracted at the same water content and is tested without allowing change in water content, either in unconfined compression or with a cell pressure $p_3 + u_a$, the strength of the soil with respect to total stresses will be approximately (within the limitations imposed by Eq. 15.4) the value c as determined readily from Eq. 18.5. Hence, as a consequence of the $\phi = 0$ concept, the unconfined compression test assumes unusual practical importance.

Moreover, when undrained conditions can be expected to prevail in deposits of saturated clay in the field, other expedient types of tests can often be used advantageously for evaluating c. Foremost among these are several varieties of *vane shear tests* as shown in Fig. 44.17. (The equipment for performing vane shear tests in the field is described in Article 44). Similar vanes of smaller size are often used in the laboratory, especially for investigating the strength of samples of very weak or remolded clays. Among the most convenient modifications (Fig. 18.3) is the portable *torvane* (Sibley and Yamane 1965). The vanes are pressed to their full depth into the clay, whereupon a torque is applied through a calibrated spring until the clay fails along the cylindrical surface circumscribing the vanes and, simultaneously, along the circular surface constituting the base of the cylinder. The value of c is read directly from the indicator on the calibrated spring. By means of such a device, rapid and detailed surveys of c can be carried out (see Fig. 45.5).

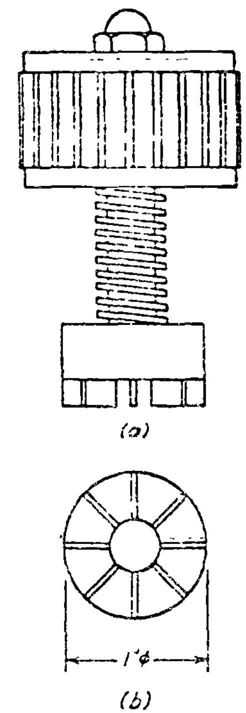


Fig. 18.3. Torvane for determining shear strength of materials for which $s = c$. *(a)* Side view. *(b)* Bottom view of vanes.

... examples of the use of the $\phi = 0$ concept will be developed in Part III.

If a normally loaded clay is consolidated under an all-around pressure p_3 and then failed under undrained conditions, the failure circle with respect to total stresses is represented by A in Fig. 18.2*a*. The shearing strength under $\phi = 0$ conditions is measured by the radius c of this circle. By geometry (Fig. 18.4*a*)

$$\frac{c}{p_3 + c} = \frac{b}{c}$$

whence

$$\frac{c}{p_3} = \frac{\sin \phi_{cu}}{1 - \sin \phi_{cu}}$$

which, for a given clay, is a constant. This relation has suggested (Skempton 1957) that a similar constant ratio should exist between the undrained shear strength of normally loaded natural deposits, as determined by means of unconfined compression or vane tests, and the effective overburden pressure at the depths corresponding to the strength tests. It has been found that this ratio, designated as $c/\bar{p}$, is indeed constant for a given normally loaded deposit, provided the plasticity index is approximately the same throughout the deposit. Moreover, it has also been found that the field $c/\bar{p}$ values for various deposits or fairly homogeneous portions of deposits are correlated closely with the plasticity index, as shown in Fig. 18.4*b*. Like all statistical relations, Fig. 18.4*b* entails the possibility that exceptions may appear, but so far the relation has been found applicable over a wide range of types of sedimented clays.

The $c/\bar{p}$ ratio, estimated by means of Fig. 18.4*b*, makes possible a rough evaluation of the undrained shear strength of normally loaded deposits on the basis of the results of Atterberg limit tests. Conversely, if the undrained strength has been determined by independent tests, comparison with values based on Fig. 18.4*b* may indicate whether the clay is normally loaded or precompressed.

Extrasensitive and Quick Clays

Most natural clay deposits consist of more or less well graded mixtures of particles of sizes intermediate between those of fine sand and clay, and are relatively insensitive. However, clays consisting primarily of clay-size particles in an edge-to-face structure, or possessing a flocculent structure (Article 4) are likely to experience appreciable loss of strength upon remolding and may exhibit at least moderate sensi-

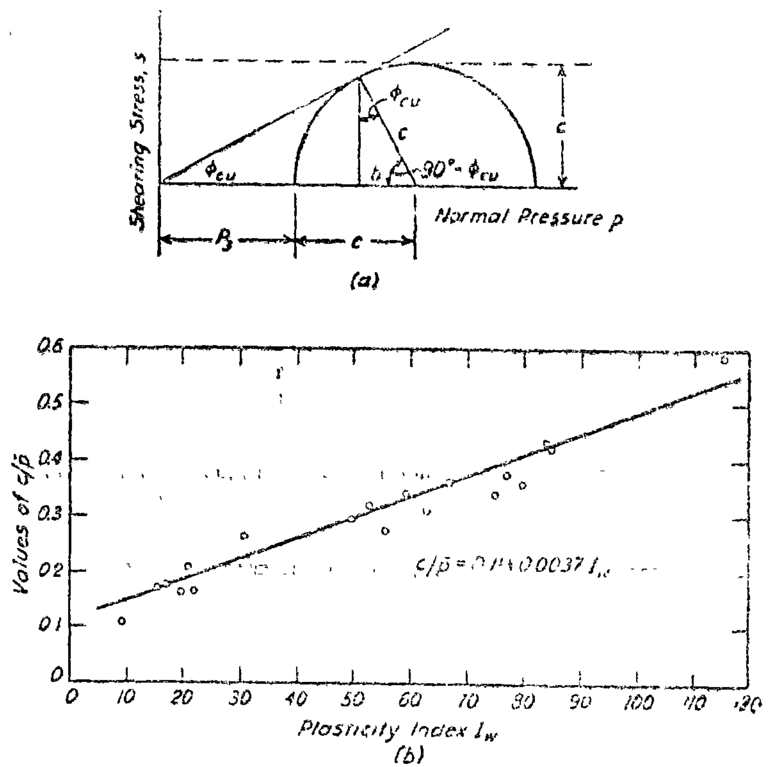


Fig. 18.4. (*a*) Mohr rupture diagram for calculating relation between c and $\bar{p}_3$ for consolidated-undrained test. (*b*) Statistical relation between $c/\bar{p}$ ratio and plasticity index (after Skempton 1957).

tivity. Some natural clay deposits, moreover, consist of a mixture of particles of fairly uniform fine sand and clay. While sedimentation proceeds, the simultaneous deposition of the flaky constituents of the finest fraction and of the equidimensional sand grains interferes with the rolling of the sand grains into stable arrangements. Therefore, if the sand grains touch each other, their configuration may be as metastable as that of true quicksands. However, the interstices between the sand grains are occupied by the clay-size materials which acquire, as a result of such physico-chemical processes as thixotropy and syneresis, appreciable strength as sedimentation proceeds. As a consequence, although the clay is sensitive, it does not exhibit the properties of true quicksands. In many respects, the states of transition from loose sand to true quicksands have their counterparts in the states between clays with low and very high sensitivity.

The failure of extrasensitive clays, like that of true quicksands, appears to be progressive. However, instead of turning throughout into a viscous liquid, extrasensitive clays break up into relatively solid chunks floating in a viscous liquid that can travel on valley floors to distances of several miles at a rate up to 10 miles per hour. One eye-witness, who had the misfortune to be standing on top of one of the chunks in such a slide, graphically described the character of the material in the following words (Terzaghi 1950):

". . . . after reaching the bottom I was thrown about in such a manner that at one time I found myself facing upstream toward what had been the top of the gully . . . . The appearance of the stream was that of a huge, rapidly tumbling, and moving mass of moist clayey earth. . . . At no time was it smooth looking, evenly flowing or very liquid. Although I rode in and on the mass for some time my clothes afterwards did not show any serious signs of moisture or mudstains . . . as I was carried further down the gully away from the immediate effect of the rapid succession of collapsing slices near its head . . . it became possible to make short scrambling dashes across its surface toward the solid ground at the side without sinking much over the ankles."

Quick clays are normally consolidated marine clays that differ from other extrasensitive clays inasmuch as they have acquired their present degree of sensitivity in two steps: the first during deposition, and the second, far more important, by leaching after being lifted above sea level as described in Article 4. In an undisturbed state such clays are as brittle as other extrasensitive clays. A slope failure on such clays commonly starts at the foot of the slope and proceeds by progressive failure in an upward direction, even on very gentle slopes. Examples of quick-clay flows are discussed in Article 49.

Intact Overconsolidated Clays

The shear-strength characteristics of an overconsolidated clay under drained conditions are illustrated by Fig. 18.5*a*. The rupture line corresponding to the peak strengths of normally loaded samples is represented by the straight line *Oa*. We may, however, consolidate a number of identical samples under the same cell pressure $\bar{p}_3$. If one such sample is tested under drained conditions by increasing the vertical pressure, the stress on the failure plane at failure is represented by point *a* on the

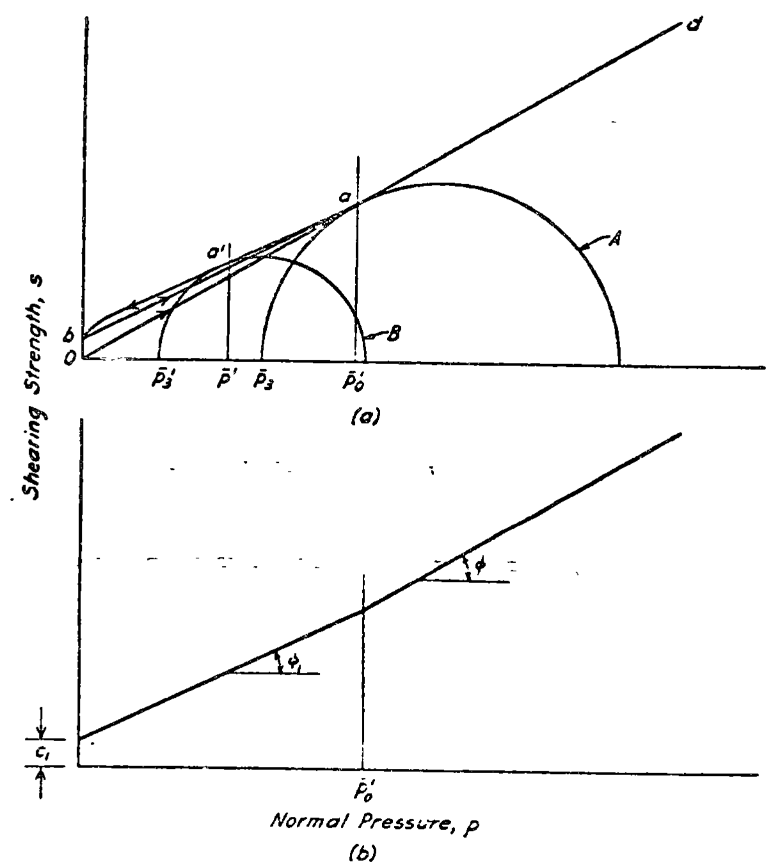


Fig. 18.5. (*a*) Rupture diagram for clay under drained conditions, preconsolidated to $\bar{p}_0'$. (*b*) Simplified rupture lines for same clay.

circle of stress *A*. The normal stress on the failure plane is $\bar{p}_0'$. Circle *A* corresponds to a normally loaded sample.

If one of the samples previously consolidated to $\bar{p}_3$ is allowed to swell under a cell pressure $\bar{p}_3'$ and is then tested under drained conditions, the strength of the sample (circle *B*) exceeds that of a normally loaded sample tested under the same conditions. The failure envelope *aa'b* for such samples lies above the line *Oa* representative of the normally loaded material. The curve *aa'b* corresponds to the rebound curve bc_1 in the *e*-log *p* diagram (Fig. 13.4). If several samples are first consolidated to the stress $\bar{p}_s$, then allowed to swell under zero pressure, and finally [illegible] various [illegible] the performance [illegible] the rupture [illegible] resembles the lower [illegible] for pressures less than $\bar{p}_0'$, but for greater pressures is nearly identical to the rupture line Od for the normally loaded clay. The lower line ba corresponds to the reloading portion of the e-log p curve (Fig. 13.4).

As a rough approximation, the rebound and reloading branches $aa'b$ and ba of the rupture line may be replaced (Fig. 18.5b) up to the pressure $\bar{p}_0'$ by the straight line

$$s = c_1 + \bar{p} \tan \phi_1 \tag{18.6}$$

in which, for a given clay, ϕ_1 is found to be nearly constant whereas c_1, known as the *cohesion intercept*, is found to depend on $\bar{p}_0'$. For pressures greater than $\bar{p}_0'$, the expression

$$s = \bar{p} \tan \phi \tag{18.7}$$

is applicable.

Since for most clays the value of c_1 is very small and ϕ_1 is only slightly smaller than ϕ, a small error on the safe side is made if Eq. 18.7 is considered applicable for all values of $\bar{p}$. Hence, the strength of an intact, moderately overconsolidated clay under drained conditions does not differ significantly from that of normally loaded clays.

In contrast, under undrained conditions the strength of a preloaded clay may be smaller or larger than the drained strength, depending on the value of the overconsolidation ratio. If the overconsolidation ratio lies in the range between 1.0 and about 4 to 8, the volume of the clay tends to decrease during shear and the undrained strength, like that of a normally loaded clay, is less than the drained strength. On the other hand, for values of overconsolidation ratio greater than about 4 to 8, the volume tends to increase, the value of u_w correspondingly decreases, and the undrained strength exceeds the drained value. For high overconsolidation ratios the excess may be very large. However, the strong negative pore pressures associated with high overconsolidation ratios tend to draw water into the soil and cause it to swell, whereupon the strength is reduced. For this reason the undrained strength often cannot be depended upon. Moreover, in most practical problems the attempt to apply the $\phi = 0$ concept for an overconsolidated clay would lead to results on the unsafe side, whereas for a normally loaded clay the [illegible] would lead to errors in the conservative direction. Hence, except for overconsolidation ratios as low as possibly [illegible] the $\phi = 0$ concept should not be used for preloaded clays.

Heavily overconsolidated clays and clay shales are likely to exhibit high peak strengths even when tested under fully drained conditions [illegible] of the [illegible] that have developed between the particles [illegible] of sliding assume an orientation favorable to a low resistance to shear along the surface. The ultimate shearing resistance after very large displacements under fully drained conditions is known as the *residual strength* (Skempton 1964). It cannot be investigated in conventional triaxial tests because the amount of slip in such tests is restricted; special direct shear or torsional shear devices are required (Haefeli 1950). The residual shear strength may be expressed as

$$s_r = \bar{p} \tan \phi_r \tag{18.8}$$

where ϕ_r varies from about 30° for clays having low plasticity indices and a small clay-size fraction to as little as 5° to 12° for some highly plastic clays with a large percentage of clay-size particles (<0.002 mm). Because of the nearly complete destruction of the structure of the natural clay along the surface of sliding, it is likely that the values of ϕ_r are the same irrespective of the stress-history of the clay, and can be determined with sufficient accuracy on remolded specimens (Skempton 1964).

Fissured Overconsolidated Clays

The continuity of heavily overconsolidated clays is commonly disrupted by a network of hair cracks. If the average pressure in such clays has been reduced, either by excavation or by geological processes such as erosion, the shearing resistance decreases at constant shearing stress; it may ultimately become as small as 0.2 ton/ft² irrespective of its original value. Therefore, the failure of slopes in open cuts underlain by such materials may occur many years after the cut is made.

The mechanics of the process of softening is explained in Article 49. At any given time the shearing resistance of the clay increases rapidly with increasing depth below the surface. After a slide occurs the material underlying the newly exposed surface begins to soften and the process continues until another slide occurs. Hence, the side slopes of valleys located in such clays are subject to intermittent superficial landslides from the time the valleys originate; the process does not stop until the slope angle becomes compatible with the softest consistency the clay can acquire. Thus the slopes become gentler. In some regions, such as the valley of the Saskatchewan River south of Saskatoon in Canada, slides still occur without provocation on slopes rising at 1 vertical on 15 horizontal. The problem of determining the shear characteristics of such clays for design purposes has not yet been solved (Peterson et al. [illegible]).

Seed, H. B., J. K. Mitchell, and C. K. Chan. *The strength of compacted cohesive soils*, p. 877.

Simons, N. E. *Comprehensive investigations of the shear strength of an undisturbed Drammen clay*, p. 727.

Simons, N. E. *The effect of overconsolidation on the shear strength characteristics of an undisturbed Oslo clay*, p. 747.

ART. 19 EFFECT OF VIBRATIONS ON SOILS

It is a matter of common experience that vibrations due to pile driving, traffic, or the operation of machinery usually increase the density of a sand and cause its surface to subside. Damage to buildings may be caused by the subsidence and is often the subject of lawsuits against the parties responsible for the vibrations. On the other hand, vibrations are also one of the most economical means for compacting embankments of sand or natural layers of loose sand prior to the construction of foundations (Article 50). Hence, the effect of vibrations on soils may be harmful or beneficial, but it always deserves attention.

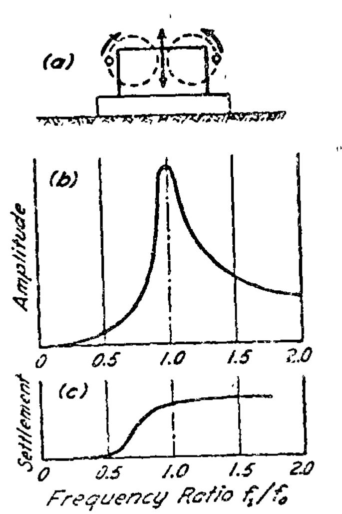


Fig. 19.1. (*a*) Principle of soil vibrator. (*b*) Relation between frequency and amplitude of vibrations. (*c*) Relation between frequency and settlement of vibrator base (after Hertwig et al. 1933).

In order to investigate the factors that influence the compacting effect of vibration, apparatus shown diagramatically in Fig. 19.1*a* (Hertwig et al. 1933) has been used. It consists of a bearing plate and two equal eccentric weights which rotate in opposite directions. The total force exerted on the ground by the base plate of the apparatus consists of a static force equal to the weight of the equipment, plus a pulsating force with a maximum value equal to the centrifugal force of the two eccentric weights. The number of revolutions of the eccentric weights per unit of time is the *frequency*, usually expressed in cycles per second. The greatest vertical distance through which the base moves from its equilibrium position is called the *amplitude* of vibration of the base. At a certain frequency the amplitude is a maximum (see Fig. 19.1*b*). This frequency is approximately equal to the natural frequency f_0 of the vibrator and the vibrating portion of the supporting soil.

The term *natural frequency* indicates the frequency of the vibrations that ensue if a body with well-defined boundaries is acted on by a single impulse. If the impulse is periodic, the amplitude of the resulting *forced vibrations* increases as the frequency f_1 of the impulse approaches the natural frequency of the body. At a frequency close to the natural frequency, the amplitude is a maximum. This state is called *resonance.* In Fig. 19.1*b* it is represented by a peak.

Table 19.1 contains values of the resonant frequency of a vibrator such as that shown in Fig. 19.1 operating on different soils and soft rocks (Lorenz 1934). The vibrator had a weight of 6000 lb and a contact area of 10.7 ft². The values were obtained by steadily increasing the frequency of the impulse up to and beyond the occurrence of resonance.

Table 19.1
Resonant Frequency of Vibrator on Various Types of Soil

Supporting Soil or Rock	Frequency, cycles per second
Loose fill	19.1
Dense artificial cinder fill	21.3
Fairly dense medium sand	24.1
Very dense mixed-grained sand	26.7
Dense pea gravel	28.1
Soft limestone	30.0
Sandstone	34.0

The resonant frequency depends not only on the properties of the supporting soil but also to a certain extent on the weight and dimensions of the vibrator. These variables have been investigated by the U.S. Corps of Engineers in two series of tests, one on a cohesive silty clay and the other on cohesionless sand. The weight of the vibrator and its base varied from 13,000 to 65,000 lbs, the diameters of the loaded areas from 5 to 16 ft, and the contact areas from 21 to 200 ft². Several modes of vibration were induced separately (WES 1963). The results have substantially extended the range of the pertinent variables, but do not differ fundamentally from those illustrated in Fig 19.1.

If a particular vibrator is used on different soils, the resonant frequency increases with increasing density and decreasing compressibility of the soil. By taking advantage of this fact, extensive use has been made of such equipment for determining the degree of compaction of artificial fills and for comparing the effectiveness of different methods of compaction.

If a vibrator operates on sand, the sand beneath the bearing plate becomes compacted. At constant frequency of the impulses, the size of the zone of compaction increases at a rate that decreases with time. The ultimate size of the zone depends on the intensity of the periodic impulses exerted by the vibrator and on the initial density of the sand. Beyond the boundaries of this zone the density of the sand remains practically unchanged.

Since the vibrator rests on the surface of the zone of compaction, the process of compaction is associated with a settlement of the vibrator. If the frequency of the impulse is gradually increased, the corresponding settlement of the vibrator increases as shown in Fig. 19.1c. As the resonant frequency is approached, the settlement increases rapidly and becomes many times greater than the settlement produced by a static load of the same magnitude as the pulsating force. The range of frequencies within which the increase of settlement is greatest is called the *critical range*. It seems to extend from $\frac{1}{2}$ to $1\frac{1}{2}$ times the resonant frequency.

If the frequency of a vibrating engine supported on sand is within the critical range for the sand, the resulting settlement is very much greater than that which would be caused by the equivalent static forces. The frequency of vibrations caused by the slight but inevitable eccentricity of the rotating parts of steam turbines happens to be within the critical range for sand (Article 60). Therefore, foundations for steam turbines on strata of loose sand settle excessively unless the sand is artificially compacted before the turbine foundations are constructed. Whatever the subsoil conditions may be, it is advisable to make special provisions to reduce the amplitude of the forced vibrations.

The effect of vibration on clays is far less conspicuous than on sand because the cohesive bond between clay particles interferes with intergranular slippage. Nevertheless, even a soft clay consolidates to a moderate extent when it is continually subjected to intense vibrations having a frequency close to the natural frequency of the clay.

In reality, vibrating engines oscillate not only vertically but in several other modes each of which may be characterized by a different resonant frequency. The resulting motions are very complex and cannot usually be predicted reliably, although for simple cases the resonant frequencies can be approximated (Barkan 1962, Lysmer and Richart 1966).

Similar phenomena of resonance may be induced if a vibrator is mounted at the top of a pile. The principle has found application in pile driving. In this instance the vibrator is operated at the natural frequency of longitudinal vibrations in the pile itself, whereupon the pile may penetrate readily into the ground (ASCE 1961).

Chapter 3

DRAINAGE OF SOILS

ART. 20 WATER TABLE, SOIL MOISTURE, AND CAPILLARY PHENOMENA

Definitions

The terms *water level*, *water table*, and *phreatic surface* designate the locus of the levels to which water rises in observation wells in free communication with the voids of the soil in situ. The water table can also be defined as the surface at which the neutral stress u_w (Article 12) in the soil is equal to zero.

If the water contained in a soil were subject to no force other than gravity, the soil above the water table would be perfectly dry. In reality, every soil in the field is completely saturated for a certain distance above the water table and is partly saturated above this level. The water that occupies the voids of the soil located above the water table constitutes *soil moisture*.

If the lower part of a mass of dry soil comes into contact with water, the water rises in the voids to a certain height above the free-water surface. The upward flow into the voids of the soil is attributed to the *surface tension* of the water. The seat of the surface tension is located at the boundary between air and water. Within the boundary zone the water is in a state of tension comparable to that in a stretched rubber membrane attached to the walls of the voids of the soil. However, in contrast to the tension in a stretched membrane, the surface tension in the boundary film of water is entirely unaffected by either the contraction or stretching of the film. The concepts regarding the molecular interactions that produce surface tension are still in a controversial state. Nevertheless, the existence of a tensile stress in the surface film was established beyond any doubt more than a century ago, and the intensity of this stress has since been determined by very different methods with consistent results.

Rise of Water in Capillary Tubes

The phenomenon of capillary rise can be demonstrated by immersing the lower end of a very small-diameter glass tube into water.

effective stresses, can be written

$$s = c' + \sigma' \tan \phi' \qquad (2\text{-}85)$$

The rupture envelope in consolidated-undrained shear can be written

$$s = c_{cu} + \sigma_c \tan \phi_{cu} \qquad (2\text{-}86)$$

where σ_c is the consolidation pressure immediately prior to shearing.

The rupture envelope in undrained shear can be written

$$s = c_u = c \qquad (2\text{-}87)$$

Equations (2-85) to (2-87) are similar in form to Coulomb's (1776) original equations for representing the shearing resistance of soils. It cannot be emphasized too strongly that, in this form, the parameters c and ϕ are merely coefficients representative of limiting drainage conditions. The equations can be used only if *in situ* conditions correspond to the laboratory tests on the basis of which the magnitudes of the shear-strength parameters were obtained.

2-40. Shearing Resistance of Saturated Undisturbed Clays

While the concepts discussed in Secs. 2-38 and 2-39 are applicable, in general, to saturated undisturbed clays, a number of additional factors must be considered. Among the more important of these factors are:

1. Most natural deposits of clay soils have a flocculated structure. Marine deposits may have been uplifted, and the salts in the pore water removed by leaching. At least in the upper zones, the minerals are generally altered as a result of weathering.

Flocculated structures are subject to substantial alteration during the shearing process (Sec. 2-31). Different boundary stresses, rate and amount of shear strain, and structural changes in oriented water with time are factors that must be accounted for separately. Such particle reorientations can have a particularly large effect on the interparticle forces in the case of leached marine clays, where the ions left in solution are originally concentrated very close to the particle surfaces. Shear strains, in addition to changing the orientation of particles, can change the distribution of these ions, further complicating the macroscopic behavior.

2. Natural deposits of clay soils are anisotropically consolidated *in situ*. Consolidation of samples isotropically to obtain the effective stress parameters ϕ' and c' changes the initial condition of the sample and thereby the subsequent pore pressures produced by the application of shear stresses. This limitation is usually ignored in applying the results of laboratory tests to practical problems; moreover, the state of knowledge makes it difficult to assess the magnitude of the error involved.

3. The removal of a sample from the ground, with its attendant structural disturbances and changes in stress conditions, also alters the initial condition of the sample to be tested. Although devices are available for measuring *in situ* undrained shear strength (by use of the vane), the orientation of principal stresses in such tests differs from those that are applied in the laboratory test, and both of these are different from the orientations of principal stresses in many practical problems, such as slope stability, earth pressure, and foundation design. Because soil deposits are anisotropically consolidated, it is difficult to assess the effects of the changes in principal stress orientations on the undrained shearing resistance. No *in situ* methods for determining effective stress parameters are as yet available.

4. Overconsolidated natural deposits frequently possess large-scale structural defects, such as fissures and slickensides, whose effects must be accounted for when testing small samples.

5. Many practical problems are concerned with long-term time effects that are difficult to evaluate from short-term laboratory tests, even if the latter are conducted over a period of a few years. In addition, some problems are concerned with the shearing resistance that can be mobilized over long periods of time where the amount of shear strain is restricted (retaining structures, tunnels, and the like). This involves consideration of stress-strain phenomena whose evaluation is seriously restricted by present inadequacies in the measurement of strains (Sec. 2-35).

6. Natural soil deposits are generally heterogeneous. As analyses are restricted to homogeneous (or layers of homogeneous) strata, substantial errors are introduced in averaging test results, even if systematic sampling, testing, and enlightened interpretation of results are used. Limitations of time and economy further restrict the accuracy of these interpretations. Current procedures which in part attempt to account for the factors mentioned above will now be discussed.

Undrained Shearing Resistance. The undrained shearing resistance may be applied in stability analyses in cases where the change in total stress is approximately compensated by a concomitant change in pore pressure and the time period involved is too short to permit appreciable dissipation of pore pressure to occur. Typical examples are (for saturated clays) the initial bearing capacity of footings or of the foundations for embankments, the initial stability of the slopes or of the bottom of an open cut, or the initial stability of a braced excavation. In such problems, field experiences (Skempton and Golder, 1948; Bjerrum and Eide, 1956) indicate that the errors associated with the effect of the rotation of principal stress directions are unlikely to exceed ±20 per cent.

The undrained shearing resistance is commonly determined by means of undrained, unconfined compression tests. For soils that are comparatively insensitive to remolding (sensitivity less than about 4) and for comparatively shallow depths (less than 30 to 40 ft) shelby tube samples are satisfactory. For greater depths and for soils of higher sensitivity, refined sampling techniques are necessary. For clays with sensitivities greater than about 8 to 12 (particularly if the activity is less than about 0.5 and the depths involved exceed 40 ft), *in situ* tests with the vane are highly desirable (Chap. 13).

In normally consolidated clays that are comparatively uniform, the undrained shearing resistance increases approximately linearly with depth; i.e., the ratio of undrained strength c_u to the effective overburden pressure p_o is approximately constant. The value of the ratio c_u/p_o appears to be closely correlated with the plasticity index, as illustrated in Fig. 2-53 (after Skempton, 1957, and others). A relation between the

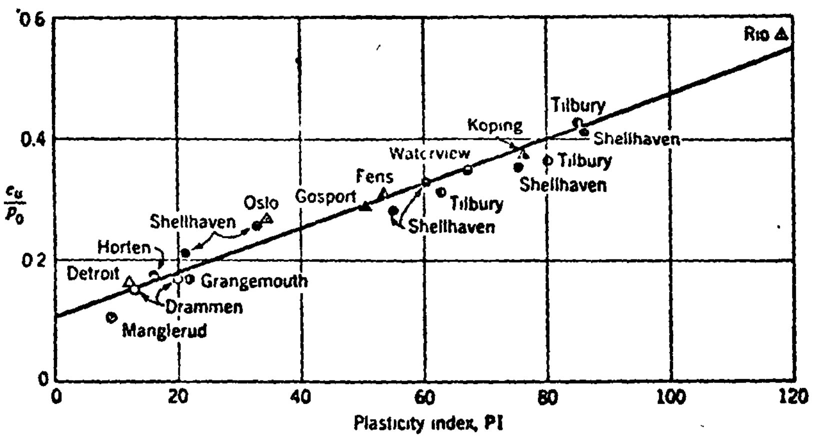


FIG. 2-53. Relationship between c_u/P_o and PI for normally consolidated clays. (*After Skempton, 1957, and others.*)

undrained shear strength and the c', ϕ' parameters can be derived as follows:

The initial conditions and the stress conditions at failure are shown in Figs. 2-54*a* and 2-54*b*, respectively, on page 212 (K_0 is the coeff. of earth pressure at rest). The Mohr stress circles at failure for total and effective normal stresses are shown in Fig. 2-54*c*. From the geometry of the effective stress circle at failure,

$$\sin\phi' = \frac{c_u}{\dfrac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} + c'\dfrac{\cos\phi'}{\sin\phi'}} \qquad (2\text{-}88a)$$

or

$$c_u = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2}\sin\phi' + c'\cos\phi'$$
$$= \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2}\sin\phi' + \sigma_3'\sin\phi' + c'\cos\phi'$$
$$= c_u\sin\phi' + (\sigma_3 - u)\sin\phi' + c'\cos\phi' \qquad (2\text{-}88b)$$

Thus

$$c_u = \frac{c'\cos\phi' + (\sigma_3 - u)\sin\phi'}{1 - \sin\phi'} \qquad (2\text{-}88c)$$

From Fig. 2-54*b*,

$$\sigma_3 - u = K_0p_o + \Delta\sigma_3 - u$$
$$= K_0p_o + \Delta\sigma_3 - [\Delta\sigma_3 + A_f(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]$$
$$= K_0p_o - A_f(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \qquad (2\text{-}88d)$$

Also, from Fig. 2-54,

$$c_u = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \tfrac{1}{2}(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) + \tfrac{1}{2}(1 - K_0)p_o$$

Therefore

$$\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3 = 2c_u - (1 - K_0)p_o \qquad (2\text{-}88e)$$

Combining Eqs. (2-88*d*) and (2-88*e*),

$$\sigma_3 - u = p_o[K_0 + A_f(1 - K_0)] - 2A_fc_u \qquad (2\text{-}88f)$$

Substituting $(\sigma_3 - u)$ from Eq. (2-88*f*) into Eq. (2-88*c*),

$$c_u = \frac{c'\cos\phi' + p_o\sin\phi'[K_0 + A_f(1 - K_0)]}{1 + (2A_f - 1)\sin\phi'} \qquad (2\text{-}88)$$

In a normally consolidated clay, $c' = 0$. Equation (2-88) reduces to

$$\frac{c_u}{p_o} = \frac{\sin\phi'[K_0 + A_f(1 - K_0)]}{1 + (2A_f - 1)\sin\phi'} \qquad (2\text{-}89)$$

From Eq. (2-89), it is seen that the ratio c_u/p_o (commonly called c/p) is a constant. Determining this ratio (perhaps most reliably by vane tests) *in situ* and measuring ϕ' and A_f in the laboratory permits the indirect determination of K_0, the coefficient of earth pressure at rest. For best results, ϕ' and A_f should be determined using anisotropic consolidation. Techniques for direct measurement of K_0 in the laboratory are also available (Bishop and Henkel, 1957; Bishop, 1958).

It is perhaps of historical interest to note that as late as 1945, it was widely believed that in many normally consolidated deposits the undrained shearing resistance was approximately constant with depth; in fact hypotheses of sedimentation processes and soil structure were proposed to explain this phenomenon. Vane tests have shown that this is due to sampling disturbance. When refined sampling techniques are used, the unconfined compressive strengths also increase with depth (cf. Bjerrum, 1955).

Many overconsolidated clays contain fissures and slickensides not directly apparent to the unaided eye. Samples from such soil deposits frequently contain these fissures, and undrained shear strengths determined from unconfined compression tests will give values that are much too low from the standpoint, say, of computing the bearing capacity of footings. In such cases, the undrained shear strength should be determined by means of triaxial tests, with cell pressures exceeding the overburden pressure. However, these shear strengths should not be applied

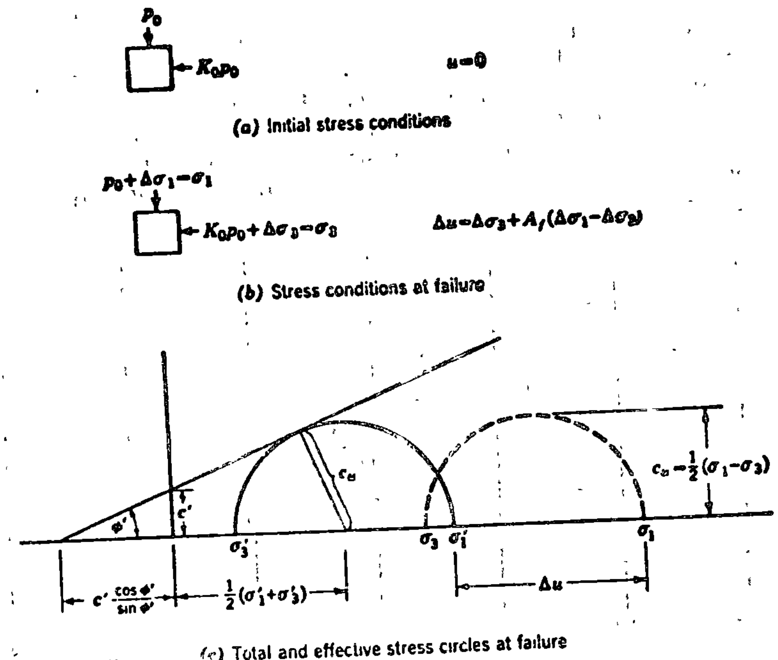


FIG. 2-54. Relationship between undrained shear strength and $c' - \phi'$ parameters.

to stability problems where the fissures may be free to separate, such as in the case of vertical cuts in fissured clays, where the critical height of the unsupported slope may be as low as 10 ft, regardless of the strength of the clay (cf. Terzaghi and Peck, 1948, p. 343; Terzaghi, 1936b, 1940). The long-term shear strength of stiff fissured clays also requires separate treatment (Skempton and Delory, 1957).

Effective Stress Parameters. Whenever pore pressures can change independently from the total stresses, it is necessary to carry out stability analyses in terms of the effective stress parameters. Typical examples are earth dams when steady-state seepage conditions have developed and natural earth slopes that are in equilibrium with the water table

[illegible]y analyses of natural slopes are sometimes erroneously made on [illegible] of the undrained shearing resistance c_u. If a soil is heavily overconsolidated, an undrained shear test will result in the development of negative pore pressures, while in the field the pore pressures will be (essentially) in equilibrium with the free water table. The analysis therefore yields too high a factor of safety. On the other hand, in very sensitive clays, the pore-pressure coefficient at failure A_f may be greater than 1 (Table 2-9), giving values for the shear strength that are lower

TABLE 2-9. APPROXIMATE VALUES OF PORE-PRESSURE COEFFICIENT A AT FAILURE

Soil type and condition	A_f
Fine sand, very loose	2-5
Saturated clay:	
Very sensitive to quick	1.5-3.0
Normally consolidated	0.7-1.3
Lightly overconsolidated	0.3-0.7
Highly overconsolidated	−0.5-0
Saturated silt, moderately dense	~0.5

than the *in situ* conditions and, consequently, too low a factor of safety. In normally consolidated clays, analyses using undrained shear strengths may be approximately correct. Table 2-10 (after Bjerrum and Kjaernsli, 1957) summarizes the pertinent data that illustrate this phenomenon.

TABLE 2-10. STABILITY OF NATURAL CLAY SLOPES INVESTIGATED BY $s = c_u$ AND $s = c' + \sigma' \tan \phi'$ ANALYSES
(Modified after Bjerrum and Kjaernsli, 1957)

Locality	w	LL	PL	PI	LI	Factor of safety by: $s = c_u$	$s = c' + \sigma' \tan \phi'$
Stable slopes							
Normally consolidated:							
Drammen	33	35	21	14	0 90	0 70	1 25
Bakklandet	30	25	18	7	1.72	0 65	1.45
Borregaard	18	18	11	7	1 0	0.85	1.25
Slides							
Normally consolidated:							
Lodalen	31	36	18	18	0 72	1.01	1.05
Drammen	31	50	19	11	1 09	0 60	1 15
Eau Brink cut	33	55	29	26	0 92	1 02	1.02
Overconsolidated, intact,							
Tynemouth	...	...	...	...	...	1.6	
Overconsolidated, fissured:							
Bearpaw shale	28	110	20	90	0 09	6 3	
Folkstone	20	65	28	37	−0.22	14	
Jackfield	20	45	20	25	0	4	

The $c' - \phi'$ parameters may be obtained from drained shear tests or from consolidated-undrained shear tests. The values thus obtained are essentially identical for remolded clays; it is not always the case for undisturbed clays. Table 2-11 shows a comparison of results from the two types of tests on undisturbed samples of normally consolidated clay obtained by Hirschfeld (1958). Although there is some scatter in the results (due to natural variations between samples), the data indicate that the two types of tests do not always give identical results. The causes for these differences in results have not been established, although they have been attributed to the different overconsolidation ratios on the failure plane (Casagrande and Wilson, 1951a), to the differences in the time of shearing (Hirschfeld, 1958), to the work done against (or by) volume changes in the drained test, and to the volume changes in the drained test causing a change in c_e, the "true" cohesion.

The effects of differences in time of consolidation and rate of shearing have not been resolved. As early as 1936, Terzaghi (1936b) called attention to softening along the fissures of overconsolidated fissured clays causing failure along zones of local weakening. On the basis of stability analyses by Skempton and Delory (1957) of natural slopes in London clay, and by Henkel (1957) of long-term failures of a retaining wall and a cutting in London clay, it is suggested that the effect of softening in stiff fissured clays subjected to an unloading process can be analyzed on the basis of letting c' approach zero. To date, this suggestion is the only rational approach available, but it should be used with caution pending confirmation in other overconsolidated fissured deposits. Slow rates of shearing under undrained conditions have recently been studied by Bjerrum et al. (1958) and by Hirschfeld (1958). Both these investigations confirm earlier results by Casagrande and Wilson (1951) that sustained shear stresses at constant volume reduce the undrained shear strength substantially (the strength for a 3-day test being 0.4 to 0.8 of the strength for a 1-min test). The reduction in strength is due to a pore-pressure build-up, which is probably caused by the tendency to volume reduction as a result of the applied shear stresses. Bjerrum et al. (1958) showed that if the strengths are compared on an effective-stress basis, the effect of rate of loading is considerably reduced. On the other hand, Crawford (1959) reported that strain rate had a large influence on the effective stress parameters for the (sensitive) Leda clay. Great care must be exercised in such tests to prevent leakage of water (or fluid) from the cell into the sample, since such leakage has been shown to be important in long-term tests (Hirschfeld, 1958).

The shearing resistance that can be mobilized over a period of time if the amount of shear strain is restricted is, at present, more obscure than any other factor affecting the strength of saturated clays. Several

TABLE 2-11. COMPARISON OF EFFECTIVE-STRESS PARAMETERS OBTAINED FROM DRAINED AND CONSOLIDATED-UNDRAINED TESTS ON UNDISTURBED SAMPLES OF NORMALLY CONSOLIDATED CLAY
(After Hirschfeld, 1958)

Sample	LL	PL	PI	Drained tests			Consolidated-undrained tests		
				No. of tests	σ'_1/σ'_3 at failure	ϕ'_{cu} deg	No. of tests	σ'_1/σ'_3 at failure	ϕ_d deg
Boston blue clay (inorganic medium-plastic clay)	43	18	25	2	2.88 (2.86–2.90)	29.0 (28.8–29.2)	14	2.99 (2.59–3.40)	29.8 (26.3–33.1)
Weymouth clay (medium-plastic, organic silty clay)	47	23	24	2	3.53 (3.53–3.53)	34.0 (34.0–34.0)	19	4.06 (3.58–5.03)	37.1 (34.3–41.9)
New Haven clay (organic silty clay)	74	46	28	2	3.71 (3.56–3.87)	35.6 (34.2–36.2)	3	5.30 (4.87–5.69)	43.0 (41.2–44.5)

related problems arise in this connection. It is generally agreed that the small deformations required to install a bracing system or a tunnel fully mobilize the undrained shearing resistance of natural clays that do not have a fluid consistency (Peck, 1943, Terzaghi and Peck, 1948). It is also known that with time the lateral earth pressures will increase (Housel, 1943). The question arises, what shear-strength parameters will be mobilized at equilibrium? A similar problem arises in the case of the long-term stability of a retaining wall. As the pressure builds up with time, the wall yields, and the clay backfill "creeps" to keep up with the wall movement. What shear-strength parameters are mobilized at equilibrium in this case? Tschebotarioff and Welch (1948) proposed the hypothesis that in both of the above-mentioned problems the equilibrium conditions correspond to the full development of sliding friction only and that cohesion and friction due to interlocking of grains (which are supposed to require motion to be mobilized) are not mobilized. Unfortunately, the terms "cohesion" and "friction due to interlocking of grains" were not rigorously defined, but this hypothesis is analogous to that originally proposed by Rankine (1857). Tschebotarioff (1951) further proposes that for plastic clays the equilibrium state, which is referred to as "consolidated equilibrium," is equivalent to the "neutral," or at-rest, earth-pressure condition. However, instead of measuring the shear-strength parameters at zero lateral strain, which, by definition, corresponds to the at-rest earth-pressure condition, Tschebotarioff and coworkers (Schmid et al., 1957) measure the consolidated-equilibrium condition in a cell test in which the rate of change of lateral strain with time *approaches* zero. Although the distinction between at rest and consolidated equilibrium is recognized, Schmid et al. (1958) claim that the difference is small. Data are not available to evaluate this contention. Rowe (1957) proposed the hypothesis that for normally consolidated clays at equilibrium, Hvorslev's parameter c_e approaches zero. Circumstantial evidence is presented in support of this hypothesis, which is equivalent to that proposed by Tschebotarioff and Welch (1948), except that the "cohesion" which is not mobilized is defined by Rowe as Hvorslev's c_e. One factor in favor of Rowe's hypothesis is that the coefficient of earth pressure at rest K_0 computed from ϕ_e (with $\bar{c}_e = 0$), that is, $K_0 \approx \tan^2 (45° - \phi_e/2)$, is the only laboratory shear-strength parameter thus far suggested that agrees approximately with observed values of K_0.

With the advent of rocket-launching pads, bomb-resistant structures, and the possibilities for near vertical take-off and landing of aircraft, interest in the dynamic shearing resistance of soils has greatly increased in recent years. It is well known (Casagrande and Shannon, 1948, 1949) that the shearing resistance of soils is greater for rapid loading than for slow loading, with the effect on clay soils much more marked than on

granular soils. However, practically nothing is known of the mechanisms involved, and the effects of pulsating loads remain to be evaluated.

SHEARING RESISTANCE OF GRANULAR SOILS

2-41. General Considerations

Compared with clay soils, the shearing resistance of granular soils is a relatively simple phenomenon, yet some factors are still imperfectly understood. Particle orientations are of importance, but to a lesser degree than in clays; surface forces are comparatively insignificant, and the effective stresses [as defined by Eq. (2-39)] essentially control their properties, except in such cases where the normal stresses are sufficiently large to crush the grains [according to data presented by Roberts and deSouza (1958) the order of magnitude of these pressures generally exceeds 100 tons per sq ft]. In spite of the fact that the coefficient of sliding friction of the mineral grains in sands, excluding all interlocking effects, is strongly influenced by the presence or absence of water (Tschebotarioff and Welch, 1948a), the angle of shearing resistance with respect to effective stresses ϕ' is influenced only slightly by the presence of water (Nash, 1953; Bishop and Eldin, 1953). These facts tend to indicate that under slowly applied shear deformations, the shearing resistance of granular soils is due mostly to rolling friction and to interlocking. The c value with respect to effective stresses for clean, uncemented granular soils is essentially zero. The parameters necessary to completely define the shearing resistance are therefore ϕ' and σ', and their relationship is given by

$$s = \sigma' \tan \phi' \tag{2-90}$$

where the symbols are as previously defined.

For a given granular soil, in a given state of compaction and particle orientation, ϕ' is essentially a constant. It is affected only to a minor degree by the magnitude of the intermediate principal stress (Kirkpatrick, 1957), unless the particle shapes depart significantly from "bulky" grains (Jakobson, 1957); it is hardly at all influenced by previous stress history (Bishop and Eldin, 1953), and it is only moderately influenced by the rate of shear strain (Casagrande and Shannon, 1948; Whitman, 1958, 1959). The effect of confining pressure on ϕ' can be neglected within the pressure range of practical interest (Taylor, 1948; Bishop and Eldin, 1953).

With respect to the variation in ϕ' between granular soils of different composition, the following factors (arranged approximately in order of importance) have a significant effect:

1. .4 (influencia de factores como , e,)

CHAPTER 12

Stress-Strain Relationships

Once an engineer has satisfied himself that a soil mass is not going to fail totally, he generally must then ascertain the amount of movement that will result from the application of loads and decide whether this movement is permissible. To do this, the engineer requires a stress-strain relationship for soil.

From our general study of stress-strain behavior in Chapter 10, we know that this behavior can be very complex. The amount of strain caused by a stress will depend on the composition, void ratio, past stress history of the soil, and manner in which the stress is applied. An equation giving the stress-strain relationship of one sand for any loading with constant direction of principal stresses has been developed by Hansen (1966). However, this expression is extremely complicated. Usually it is preferable to use formulas and data that are adapted to the particular problem at hand.

For many problems, the best approach often is to measure directly the strains produced in a laboratory test using stresses that will occur in the actual soil mass. This approach will be discussed in Chapter 14.

For other problems, it helps greatly to use concepts and formulas from the theory of elasticity. This means that the actual nonlinear stress-strain curves of a soil must be "linearized", i.e., replaced by straight lines. Then one speaks in terms of the *modulus* and *Poisson's ratio* of soil. Obviously, modulus and Poisson's ratio are not constants for a soil, but rather are quantities which approximately describe the behavior of a soil for a particular set of stresses. Different values of modulus and Poisson's ratio will apply for any other set of stresses. Especially when speaking of modulus, one must be very careful to specify what is meant.

The terms *tangent modulus* and *secant modulus* are used frequently. Tangent modulus is the slope of a straight line drawn tangent to a stress-strain curve at a particular point on the curve (see Fig. 12.1). The value of tangent modulus will vary with the point selected. The tangent modulus at the initial point of the curve is the *initial tangent modulus*. Secant modulus is the slope of a straight line connecting two separate points of the curve. The value of secant modulus will vary with the locations of both points. As the two points come closer together, the secant modulus becomes equal to the tangent modulus. For a truly linear material, all of these values of modulus are one and the same.

12.1 CONCEPTS FROM THE THEORY OF ELASTICITY

If we apply a uniaxial stress σ_z to an elastic[1] cylinder (Fig. 12.1), there will be a vertical compression and a lateral expansion such that

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \tag{12.1}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu\epsilon_z \tag{12.2}$$

where

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ = strains in the x, y, z directions, respectively (plus when compressive)

E = *Young's modulus* of elasticity

μ = *Poisson's ratio*

If shear stresses τ_{zx} are applied to an elastic cube, there will be a shear distortion such that

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \tag{12.3}$$

where G = *shear modulus*. Equations 12.1 to 12.3 define the three basic constants of the theory of elasticity: E, G, and μ. Actually only two of these constants are needed, since

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{12.4}$$

[1] The word "elastic" actually denotes an ability of a material to recover its original size and shape after removal of stress. In this book, we use the word in a more restrictive sense to mean a material having a linear, reversible stress-strain curve.

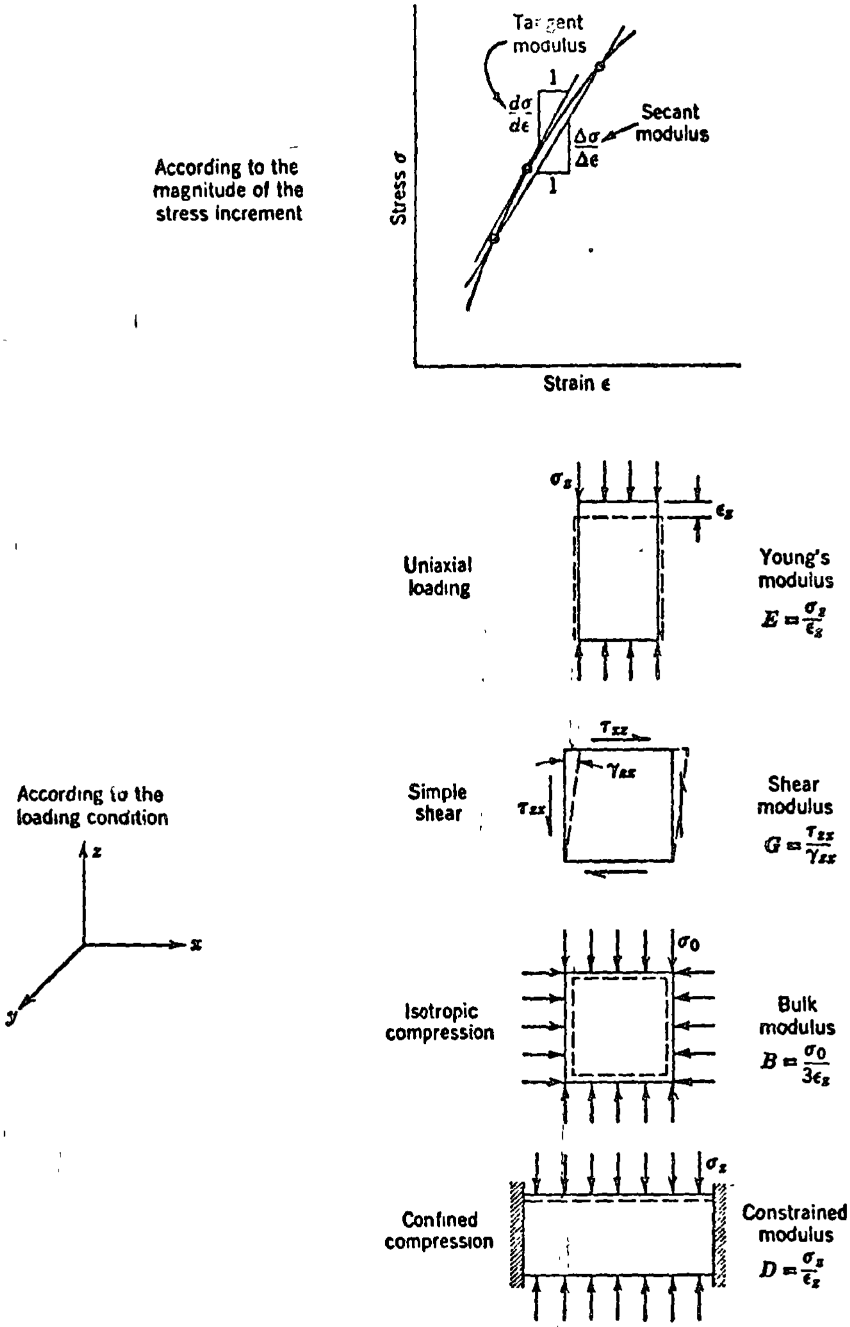


Fig. 12.1 Various types of modulus.

For an elastic material with all stress components acting, we can employ the principle of superposition to obtain

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \tag{12.5a}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \tag{12.5b}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \tag{12.5c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{12.5d}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \tag{12.5e}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \tag{12.5f}$$

The volumetric strain is

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{12.5g}$$

For the special case where $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0$ and $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, the volumetric strain equals

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma_0}{E}(1 - 2\mu)$$

The *bulk modulus B* is defined as

$$B = \frac{\sigma_0}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \tag{12.6}$$

Still another special type of modulus is the *constrained modulus*, *D*, which is the ratio of axial stress to axial strain for confined compression (Fig. 12.1). This modulus can be computed from Eqs. 12.5 by setting $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Thus

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1 - \mu}\sigma_z \tag{12.7}$$

$$D = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \tag{12.8}$$

Uniaxial loading and confined compression involve both shear strain and volume change. This important fact is demonstrated in Example 12.1.

▶ Example 12.1

Find. Volumetric strain ($\Delta V/V$) and maximum shear strain during (*a*) uniaxial loading, (*b*) confined compression.
Solution.

Condition	Volumetric	Shear
Uniaxial loading	$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (1 - 2\mu)\frac{\sigma_z}{E}$	$\tau_{max} = \frac{\sigma_z}{2}$; $\gamma_{max} = \frac{\sigma_z}{2G}$
Confined compression	$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)\sigma_z}{E(1 - \mu)}$	$\tau_{max} = \frac{\sigma_z}{2}\frac{(1 - 2\mu)}{1 - \mu}$; $\gamma_{max} = \frac{\sigma_z}{2G}\frac{(1 - 2\mu)}{1 - \mu}$

Note. The volumetric strain becomes zero for $\mu = \frac{1}{2}$. τ_{max} occurs on planes inclined at 45° to the horizontal. γ_{max} occurs for an element whose sides are at 45° to the horizontal. ◀

For an elastic material, the foregoing equations apply for increments of stress starting from some initial stress, as well as for increments of stress starting from zero stress. Example 12.2 derives equations which may be used to find E and μ from measured strains.

▶ Example 12.2

Given. Strains $\Delta\epsilon_x = \Delta\epsilon_y$, $\Delta\epsilon_z$ caused by stresses $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$, $\Delta\sigma_z$ upon a cylinder of an elastic material.
Find. Expressions for Young's modulus and Poisson's ratio.
Solution. Eqs. 12.5a and 12.5c become

$$E\Delta\epsilon_x = \Delta\sigma_x - \mu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_z)$$
$$E\Delta\epsilon_z = \Delta\sigma_z - 2\mu\Delta\sigma_x$$

These may be solved to give

$$E = \frac{(\Delta\sigma_z + 2\Delta\sigma_x)(\Delta\sigma_z - \Delta\sigma_x)}{\Delta\sigma_x(\Delta\epsilon_z - 2\Delta\epsilon_x) + \Delta\sigma_z\Delta\epsilon_z}$$
$$\mu = \frac{\Delta\sigma_z\Delta\epsilon_x - \Delta\epsilon_z\Delta\sigma_x}{\Delta\sigma_x(\Delta\epsilon_z - 2\Delta\epsilon_x) + \Delta\sigma_z\Delta\epsilon_z}$$ ◀

Wave Velocities

The velocity of wave propagation, or simply *wave velocity*, is defined as the distance moved by a wave in a unit of time (Fig. 12.2). There are several different wave velocities, each corresponding to a wave involving different types of strain:

Rod velocity $C_L = \sqrt{E/\rho}$ (12.9a)

Shear velocity $C_S = \sqrt{G/\rho}$ (12.9b)

Dilatational velocity $C_D = \sqrt{D/\rho}$ (12.9c)

where
ρ = mass density, equal to γ/g
g = acceleration of gravity
C_L and C_D = velocities of compressive waves for uniaxial loading and confined compression, respectively

Because of these simple relationships between modulus and velocity, velocity is often measured and used to evaluate modulus.

12.2 BEHAVIOR DURING CONFINED COMPRESSION

Figure 10.5 gives a typical stress-strain curve for a sand during confined compression. Since there is no lateral strain during this test, the axial strain is exactly equal to the volumetric strain. Example 12.3 gives values of

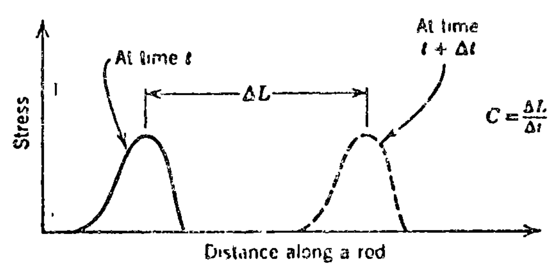


Fig. 12.2 Meaning of wave velocity.

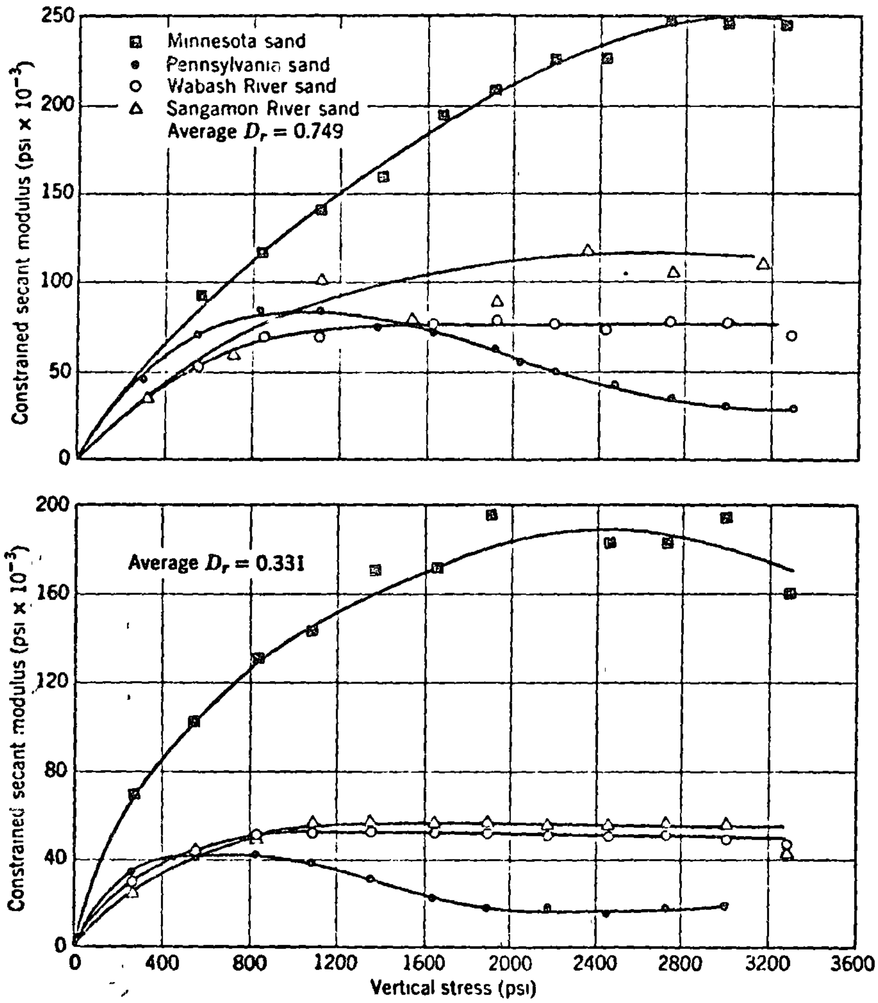


Fig. 12.3 Behavior of several sands during one-dimensional compression. Secant modulus from zero psi to indicated stress. (From Hendron, 1963.)

Example 12.3

Given. Stress-strain curve in Fig. 10.5.
Find.

a. Secant modulus from 0 to 1 kg/cm², first loading.
b. Secant modulus from 1 to 8 kg/cm², first loading.
c. Secant modulus from 1 to 8 kg/cm², second loading.
d. Secant modulus from 1 to 8 kg/cm², second unloading.
e. Tangent modulus at 1 kg/cm², first loading.

Solution.

Case	$\Delta\sigma$ (kg/cm²)	$\Delta\epsilon$	Modulus (kg/cm²)	Modulus (psi)
a	1	0.0078	130	1,900
b	7	0.0120	580	8,300
c	7	0.0043	1630	23,000
d	7	0.0031	2300	32,000
e[a]	7	0.0298	230	3,200

[a] Measurements made along tangent line, from 1 to 8 kg/cm².

constrained modulus as measured from this curve. The general magnitude of the constrained modulus for a sand should be noted, together with the fact that the sand becomes stiffer as it is loaded and reloaded.

As was discussed in Chapter 10, crushing and breaking of particles become increasingly important for stresses greater than 500 psi. Thus for large stresses the modulus tends to become constant, or may even decrease (Fig. 12.3). The Minnesota sand was composed of hard, rounded particles, whereas the Pennsylvania sand was made up of softer, angular particles. The other two curves illustrate the behavior of well-graded sands.

Initial Relative Density

As would be expected, the looser the soil the smaller the modulus for a given loading increment. This is illustrated by the results given in Table 12.1.

Repeated Loadings

Figure 12.4 illustrates the increase in modulus during successive cycles of loading. The modulus increases

Table 12.1 Secant Constrained Modulus for Several Granular Soils during Virgin Loading

Soil	Relative Density	Modulus (psi × 10^{-3}) $\Delta\sigma_1$ from 9 to 15 psi	$\Delta\sigma_1$ from 29 to 74 psi
Uniform gravel	0	4.4	8.7
1 mm < D < 5 mm	100	17.0	26.0
Well graded sand	0	2.0	3.7
0.02 mm < D < 1 mm	100	7.5	17.6
Uniform fine sand	0	2.1	5.1
0.07 mm < D < 0.3 mm	100	7.4	17.4
Uniform silt	0	0.4	2.5
0.02 mm < D < 0.07 mm	100	5.1	11.0

From Hassib, 1951.

markedly between the first and second loadings. The increase gradually becomes less and less during successive cycles, and after several hundred cycles the stress-strain curve stabilizes.

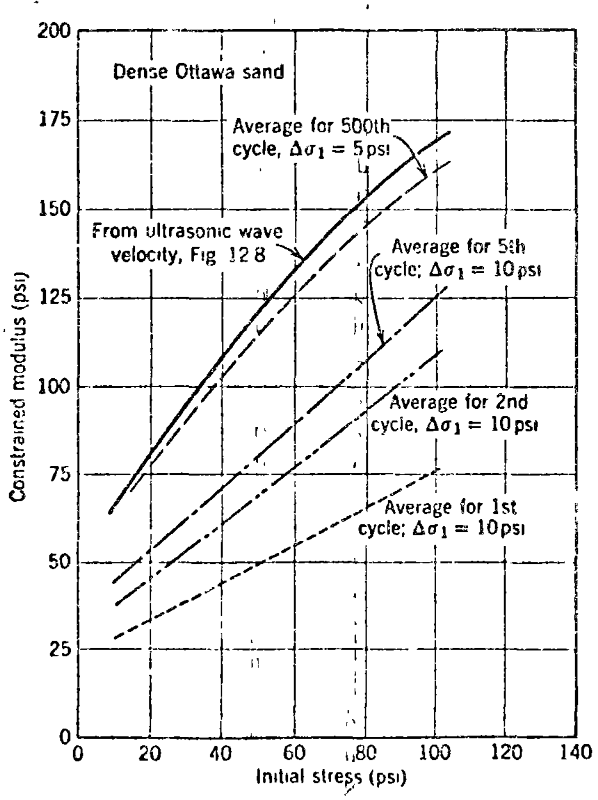


Fig. 12.4 Increase in secant constrained modulus with successive cycles of loading. *Note.* Average curves have been drawn through scattered data.

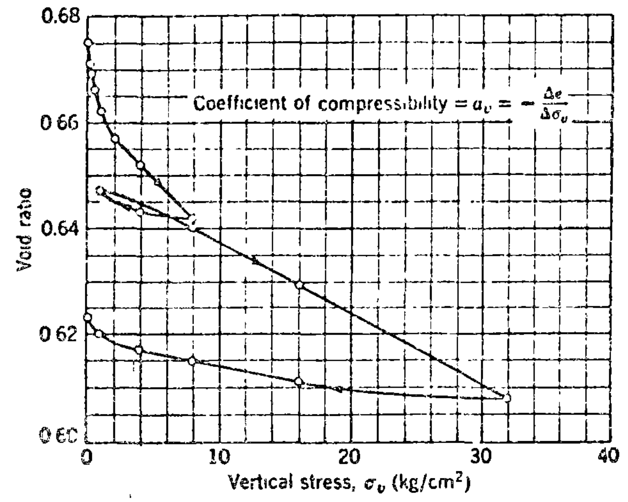


Fig. 12.5 Results of confined compression test plotted as void ratio versus stress on natural scale.

Rate of Compression

For an initial loading on a sand, the modulus is affected by the time required to achieve peak stress. The modulus may double if the loading time is 5 msec instead of the usual several seconds (see Whitman et al., 1964). The influence of the loading time is much less during subsequent cycles of a repeated loading.

Composition

As in the case of friction angle, modulus is affected in two ways by composition: composition affects the void ratio for a given relative density, and then it affects the modulus for that relative density. For a given relative density, the modulus of an angular sand will be less than that of a rounded sand. Table 12.1 indicates the influences of particle size and grading. In general, modulus decreases as the particle size leads to a larger void ratio for a given relative density. The effect of composition tends to disappear at very large stresses and during subsequent cycles of a repeated loading.

Alternate Methods of Portraying Data

In addition to the simple form of stress-strain curve in Fig. 10.5, two other methods of plotting stress-strain data are often used.

Figure 12.5 shows the results of Fig 10.5 plotted as void ratio versus vertical stress σ_v. The slope of the resulting curve is defined as the *coefficient of compressibility* a_v:

$$a_v = -\frac{de}{d\sigma_v} \quad \text{or} \quad a_v = -\frac{\Delta e}{\Delta\sigma_v} \tag{12.10}$$

Figure 12.6 shows the same results plotted as void ratio versus the logarithm of vertical stress. This form of plot is useful for two reasons: (*a*) it is convenient for

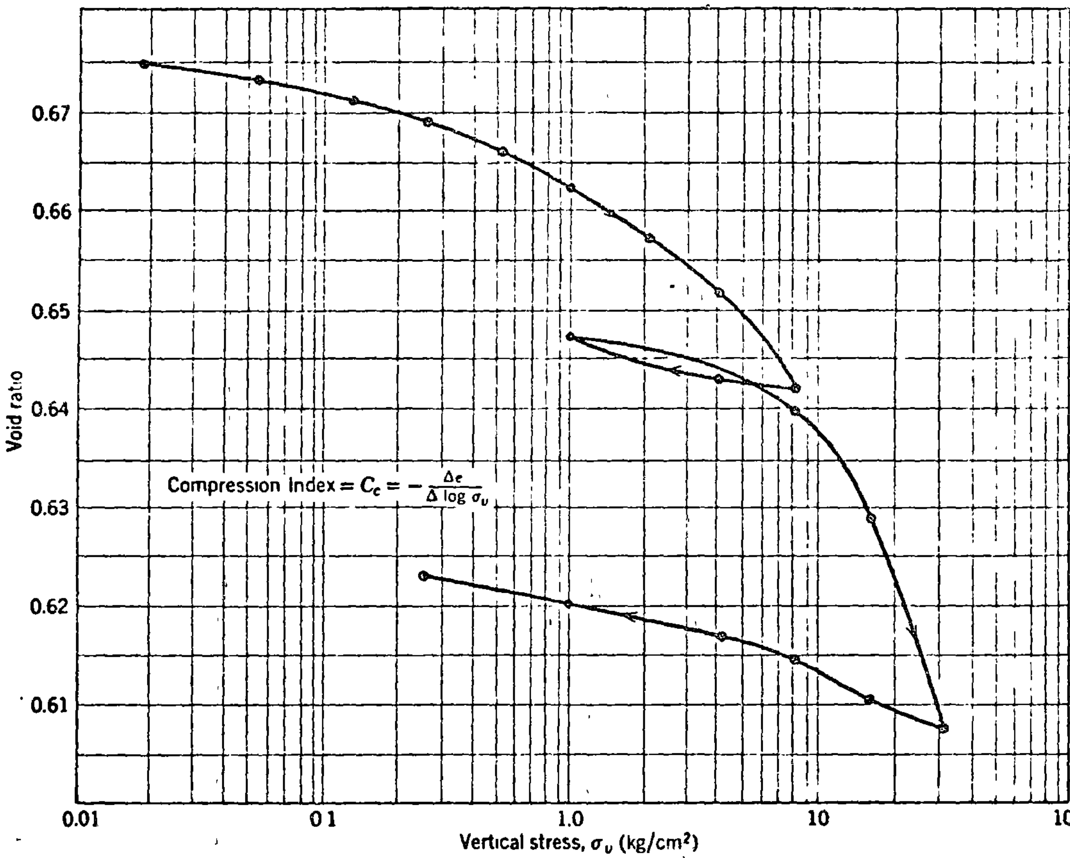


Fig. 12.6 Results of confined compression test plotted as void ratio versus stress on logarithmic scale.

showing stress-strain behavior over a wide range of stresses; and (*b*) such curves usually become more-or-less straight at large stresses. As will be seen in Part IV, this form of plot is especially useful for clays. Figure 12.7 shows the curves of Fig. 10.5 replotted in this way. At large stresses, the curves for the different sands tend to fall along a common path. The slope of this type of curve is the *compression index* C_c:

$$C_c = -\frac{de}{d(\log \sigma_v)} \quad \text{or} \quad C_c = -\frac{\Delta e}{\Delta(\log \sigma_v)} \qquad (12.11)$$

C_c is thus the change in void ratio per logarithmic cycle of stress.

Still another term used to describe stress-strain behavior in confined compression is the *coefficient of volume change* m_v, which is simply the reciprocal of constrained modulus:

$$m_v = \frac{d\epsilon_v}{d\sigma_v} \quad \text{or} \quad m_v = \frac{\Delta\epsilon_v}{\Delta\sigma_v} \qquad (12.12)$$

The relationships among D, m_v, a_v, and C_c are given in Table 12.2. The vertical strain during confined compression equals $\Delta e/(1 + e_0)$, where e_0 is the initial void ratio. Example 12.4 illustrates typical numerical values.

▶ **Example 12.4**

Given. Stress-strain curves in Figs. 10.5, 12.5, and 12.6.

Find. Values of m_v, a_v, and C_c for the same stresses used in Example 12.3.

Solution. The values may be scaled from the figures. They may be computed using the equations in Table 12.2, but this computation is inaccurate in the case of secant values of C_c, since the choice of the average stress σ_{va} greatly affects calculated values.

Case	m_v (cm²/kg)	a_v (cm²/kg)	C_c
a	0.0078	0.0130	0.0065
b	0 0017	0.0028	0.0225
c	0.0006	0.0010	0.0079
d	0.00045	0.00073	0.0066
e	0.0045	0 0065	0.0140

Note. C_c is dimensionless; a change per logarithmic cycle is the same for any set of units. ◀

Note that the compressibilities a_v and m_v decrease as the stress increases, but that C_c increases. The maximum value of C_c in Fig. 12.6 is 0.07.

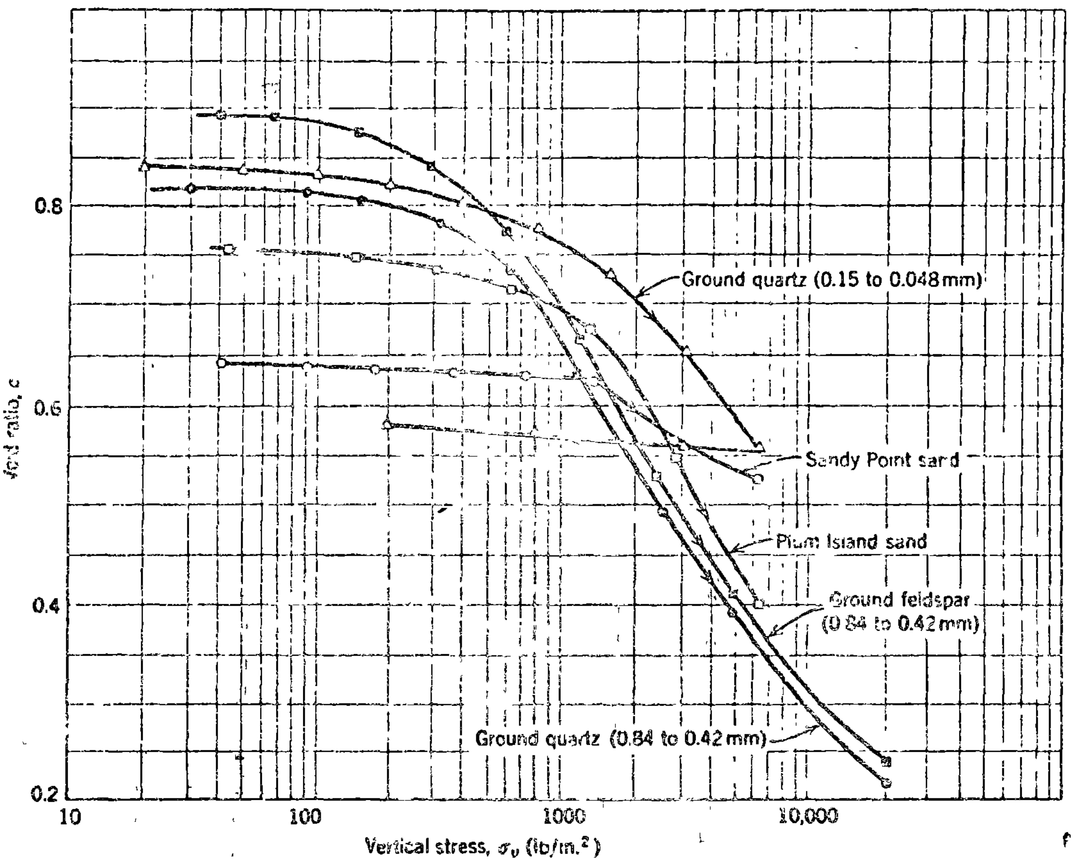


Fig. 12.7 Results of high-stress, confined compression tests on several sands (data from Roberts, 1964).

The stress-strain curve for an initial loading generally resembles a parabola. Hence the stress-strain relationship may be expressed as

$$\sigma_v = C(\epsilon_v)^n \tag{12.13}$$

The coefficient C varies with the type of soil and its initial void ratio. For a wide variety of soils, however, the exponent n has been found to be very close to 2. For a perfect packing of elastic spheres, this exponent would be 3. The difference between the theoretical and actual values for the exponent is the result of sliding among and rearrangement of the particles within an actual soil. Equation 12.13 implies that both secant modulus from zero stress and the tangent modulus should increase as $\sqrt{\sigma_v}$.

Table 12.2 Relations Between Various Stress-Strain Parameters for Confined Compression

	Constrained Modulus	Coefficient of Volume Change	Coefficient of Compressibility	Compression Index
Constrained modulus	$D = \dfrac{\Delta\sigma_v}{\Delta\epsilon_v}$	$D = \dfrac{1}{m_v}$	$D = \dfrac{1+e_0}{a_v}$	$D = \dfrac{(1+e_0)\sigma_{va}}{0.435C_c}$
Coefficient of volume change	$m_v = \dfrac{1}{D}$	$m_v = \dfrac{\Delta\epsilon_v}{\Delta\sigma_v}$	$m_v = \dfrac{a_v}{1+e_0}$	$m_v = \dfrac{0.435C_c}{(1+e_0)\sigma_{va}}$
Coefficient of compressibility	$a_v = \dfrac{1+e_0}{D}$	$a_v = (1+e_0)m_v$	$a_v = -\dfrac{\Delta e}{\Delta\sigma_v}$	$a_v = \dfrac{0.435C_c}{\sigma_{va}}$
Compression index	$C_c = \dfrac{(1+e_0)\sigma_{va}}{0.435D}$	$C_c = \dfrac{(1+e_0)\sigma_{va}m_v}{0.435}$	$C_c = \dfrac{a_v\sigma_{va}}{0.435}$	$C_c = -\dfrac{\Delta e}{\Delta \log \sigma_v}$

Note. e_0 denotes the initial void ratio. σ_{va} denotes the average of the initial and final stresses.

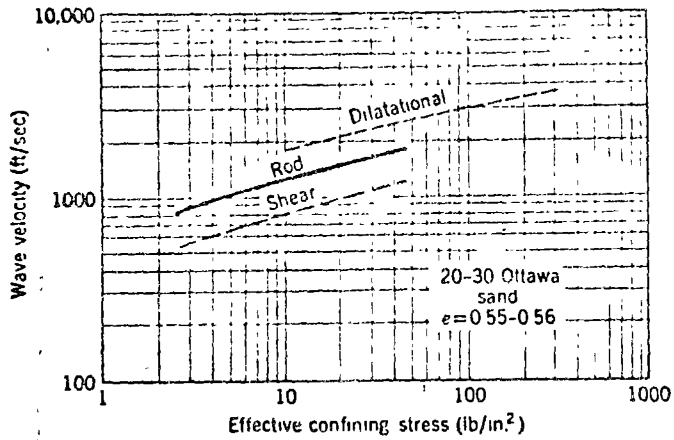


Fig. 12.8 Wave velocities through sand as function of confining stress. Dilatational and shear velocities from Whitman and Lawrence (1963); rod velocities from Hardin and Richart (1963).

Relationship to Wave Velocity

Figure 12.8 shows typical values for dilatational wave velocity through granular soils. The velocity typically increases as $\sigma_v^{0.25}$, which according to Eq. 12.9c means that constrained modulus should increase as $(\sigma_v)^{1/2}$. However, the modulus as computed from measured wave velocity using Eq. 12.9c generally is much larger than the constrained modulus as measured directly in an oedometer. This is illustrated by Example 12.5. The difference

▶ **Example 12.5**

Given. Wave velocity versus stress in Fig. 12.8 and modulus versus stress in Fig. 12.4.

Find. Constrained modulus for stress of 20 psi. Compare with modulus as measured directly.

Solution. $C_D = 1900$ ft/sec. Typical value for $\gamma = 105$ pcf, or $\rho = 3.26$ slugs/ft³.

$$D = \rho C_D^2 = 3.26 \times 3.61 \times 10^6 \text{ pcf} = 82{,}000 \text{ psi}$$

versus 30,000 psi as measured directly. ◁

arises because the small stresses associated with a seismic wave mainly cause elastic deformations of particles, whereas the large stresses applied in an oedometer test cause slippage between adjacent particles. This situation has been sketched in Fig. 10.10. If very small stress increments are used in the oedometer, then the modulus as measured directly becomes approximately equal to the modulus as calculated from wave velocity (Whitman et al., 1964). Furthermore, the modulus as measured after many cycles of loading, even using large stress increments, is also about equal to the modulus calculated from wave velocity (Fig. 12.4).

Hence wave velocity is not a useful direct measure of the compressibility of a soil during a single intense loading, but it does indicate the compressibility during repeated loadings. This appears to be true regardless of the frequency of the repeated loading.

For further discussion of wave velocity, see Hardin and Richart (1963), Whitman (1966).

12.3 BEHAVIOR DURING TRIAXIAL COMPRESSION TEST

The standard triaxial test (i.e., with constant confining stress and increasing axial stress) gives a direct measure of Young's modulus. Modulus decreases with increasing axial stress, and at the peak of the stress-strain curve the tangent modulus becomes zero.

When a value of Young's modulus is quoted for soil, it usually is the secant modulus from zero deviator stress to a deviator stress equal to ½ or ⅓ of the peak deviator stress. This is a common range of working stresses in actual foundation problems, since typically a safety factor of 2 or 3 is used in these problems. Example 12.6 illustrates

▶ **Example 12.6**

Given. Stress-strain curve for test in Fig. 10.13.

Find. Secant Young's modulus for deviator stress equal to ½ of peak stress.

Solution.

$$\Delta\sigma_v \text{ at peak} = 3.8 \text{ kg/cm}^2$$
$$\Delta\sigma_v \text{ at } \tfrac{1}{2} \text{ peak} = 1.9 \text{ kg/cm}^2$$
$$\Delta\epsilon_v = 0.002$$
$$E = 950 \text{ kg/cm}^2 = 13{,}500 \text{ psi}$$ ◁

the computation of modulus from a typical stress-strain curve. For the scale to which this curve has been plotted, it is difficult to tell whether or not the curve is linear or curved up to ½ the peak. However, the very precise data given in Fig. 12.9 show that the curve is nonlinear almost from the beginning of loading.

Kondner and Zelasko (1963) suggested that the stress-strain curves of sand in standard triaxial compression can be fitted by a hyperbolic equation of the form

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_1}{a + b\epsilon_1} \tag{12.14}$$

where a and b are constants.

Confining Stress

As the confining stress increases, the modulus increases. For the case where the initial stress σ_0 is isotropic, the modulus increases as σ_0^n where n varies from 0.4 to 1.0. A reasonable average value is $n = 0.5$. The larger values of the exponent tend to apply to loose sands.

In most practical problems, the stresses before loading are not isotropic. The effect of the actual state of stress on modulus is not clear, but the best available rule is that modulus depends on the average of the initial principal

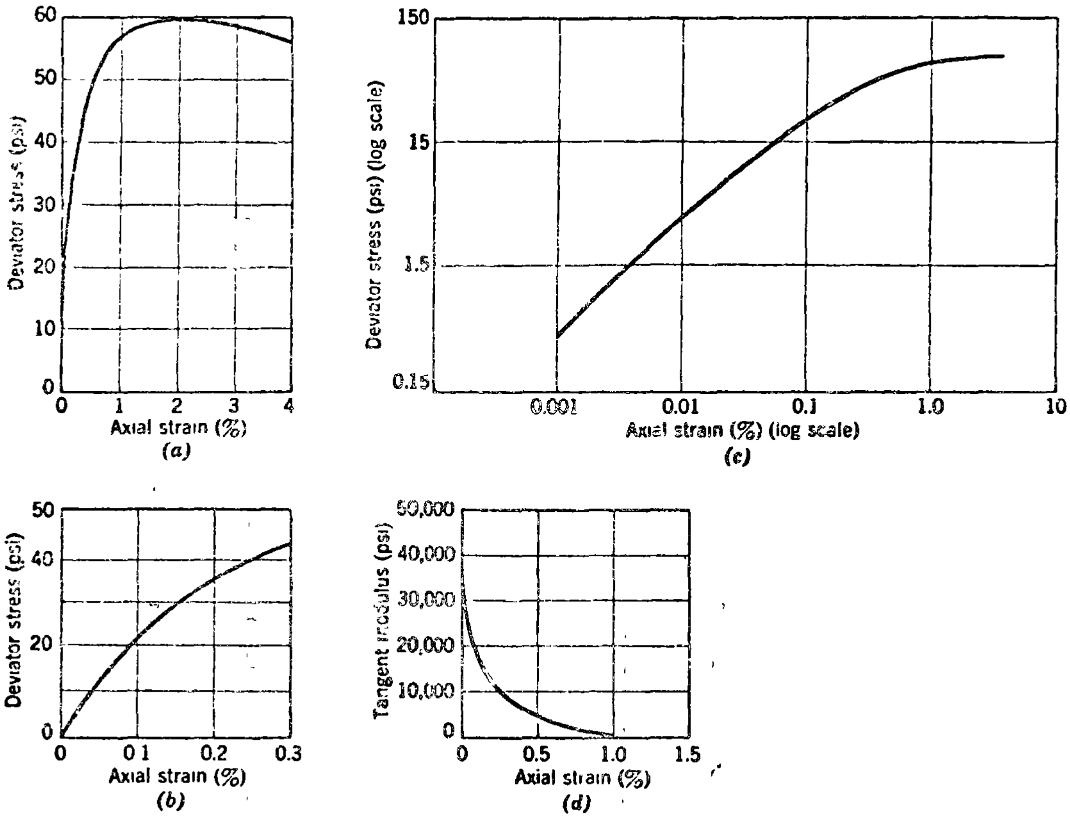


Fig. 12.9 Stress-strain data from a triaxial test. *Note.* Medium, subangular sand: porosity = 0.39; confining stress = 14.3 lb/in.[2] (From Chen, 1948.)

stresses; thus

$$E \sim \sqrt{\sigma_v \frac{1 + 2K_0}{3}} \qquad (12.15)$$

where K_0 is the coefficient of lateral stress at rest. Equation 12.15 holds only when $\frac{1}{2} < K_0 < 2$ and when the or of safety against failure is 2 or more.

Various Factors

The effect of void ratio, composition, stress history, and loading rate upon E is the same as their effect upon D. Table 12.3 indicates the general effect of void ratio and composition on E for a first loading to one-half the peak deviator stress. Table 12.4 gives values of E obtained after several cycles of loading. The values in Table 12.4

Table 12.3 Young's Modulus for Initial Loading

	Loose	Dense
Angular, breakable particles	140 kg/cm² 2000 psi	350 kg/cm² 5000 psi
Hard, rounded particles	560 kg/cm² 8000 psi	1050 kg/cm² 15,000 psi

Note. Secant modulus to $\frac{1}{2}$ peak deviator stress, with 1 atm confining stress.

Table 12.4 Young's Modulus for Repeated Loadings

Soil (1 atm confining pressure)	Young's Modulus (psi) Loose	Young's Modulus (psi) Dense
Screened crushed quartz, fine angular	17,000	30,000
Screened Ottawa sand, fine rounded	26,000	45,000
Ottawa Standard sand, medium, rounded	30,000	52,000
Screened sand, medium, subangular	20,000	35,000
Screened crushed quartz, medium, angular	18,000	27,000
Well graded sand, coarse, subangular	15,000	28,000

From Chen, 1948.

are also indicative of the initial tangent modulus and of the modulus which is computed from rod wave velocity.

It is of interest to compare these values of E with those for the minerals of which the particles of a granular soil

Table 12.5 Poisson's Ratio and Young's Modulus for Various Materials

Material	Poisson's Ratio	Young's Modulus (psi)
Amphibolite	0.28–0.30	$13.6–17.6 \times 10^6$
Anhydrite	0.30	9.8×10^6
Diabase	0.27–0.30	$12.6–16.9 \times 10^6$
Diorite	0.26–0.29	$10.9–15.6 \times 10^6$
Dolomite	0.30	$16.0–17.6 \times 10^6$
Dunite	0.26–0.28	$21.6–26.5 \times 10^6$
Feldspathic Gneiss	0.15–0.20	$12.0–17.2 \times 10^6$
Gabbro	0.27–0.31	$12.9–18.4 \times 10^6$
Granite	0.23–0.27	$10.6–12.5 \times 10^6$
Ice	0.36	1.03×10^6
Limestone	0.27–0.30	$12.6–15.6 \times 10^6$
Marble	0.27–0.30	$12.6–15.6 \times 10^6$
Mica Schist	0.15–0.20	$11.5–14.7 \times 10^6$
Obsidian	0.12–0.18	$9.4–11.6 \times 10^6$
Oligoclasite	0.29	$11.6–12.3 \times 10^6$
Quartzite	0.12–0.15	$11.9–14.0 \times 10^6$
Rock salt	0.25	5.13×10^6
Slate	0.15–0.20	$11.5–16.3 \times 10^6$
Aluminum	0.34–0.36	$8–11 \times 10^6$
Steel	0.28–0.29	29×10^6

Values for rock computed from compressibility measurements by Brace (1966) at confining stresses of 3–5 kilobars. Values for steel and aluminum from Lange (1956).

are composed, and with steel and aluminum (see Table 12.5). The great compressibility of soil, the result of its particulate nature, is evident from this comparison.

Poisson's Ratio

Poisson's ratio may be evaluated from the ratio of the lateral strain to axial strain during a triaxial compression test with axial loading. Figure 10.13 has shown values of this ratio at various stages during a typical test. During the early range of strains for which the concepts from theory of elasticity are of use, the Poisson's ratio is varying with strain. The Poisson's ratio for sand becomes constant only for large strains which imply failure, and then has a value greater than 0.5. Such a value of μ implies expansion of the material during a triaxial test (see Example 12.1). Poisson's ratio is less than 0.5 only during the early stages of such a test where the specimen decreases in volume.

Because of this behavior, it is very difficult to make an exact evaluation of the value of μ for use in any problem. Fortunately, the value of μ usually has a relatively small effect upon engineering predictions. For the early stages of a first loading of a sand, when particle rearrangements are important, μ typically has values of about 0.1 to 0.2. During cyclic loading μ becomes more of a constant, with values from 0.3 to 0.4. The ratio of two different types of wave velocities is often used to estimate the value of μ applicable to a cyclic loading.

12.4 BEHAVIOR DURING OTHER TESTS

Simple Shear

The shear modulus of soil finds its widest use in connection with foundation vibration problems and is generally evaluated through a measurement of shear wave velocity. Figure 12.8 indicated the typical variation of shear wave velocity with confining stress. Figure 12.10 shows the effect of void ratio. Factors such as composition affect C_S by influencing void ratio. Figure 12.10 can be used for a wide variety of granular soils.

As is the case for constrained and rod modulus, the shear modulus from a static repeated loading is for practical purposes equal to the modulus calculated from the wave velocity for the same initial stress. This is true for stresses much less than those associated with failure. The confining stress may be taken equal to

$$\sigma_v\left(1 + \frac{2K_0}{3}\right)$$

Special Triaxial Tests

In order to duplicate the type of loading expected within an actual mass of soil, both confining stress and axial stress are often varied during a triaxial test. Using the equations developed in Example 12.2, values of E and μ may still be evaluated from such a test. This is illustrated in Example 12.7.

▶ **Example 12.7**

Given. Data for Test *B*, Figs. 10.21 and 10.23.

Find. E and μ at end of first loading.

Solution. The first step is to find the values of $\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_y$ and $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

$$\Delta\sigma_z = \Delta p + \Delta q = 1.52 + 0.81 = 2.33$$
$$\Delta\sigma_x = \Delta p - \Delta q = 1.52 - 0.81 = 0.71$$

The strains from this loading are

$$\Delta\epsilon_z = 0.00268$$
$$\Delta\epsilon_x = 0.00020$$

Then, from Example 12.2,

$$E = \frac{(2.33 + 2 \times 0.71)(1.62)}{0.71(0.00268 - 0.0004) + 2.33(0.00268)}$$
$$= \frac{3.75(1.62)}{0.00162 + 0.00625} = 772\ \text{kg/cm}^2$$
$$\mu = \frac{0.71(0.00268) - 0.00020(2.33)}{0.00787}$$
$$= \frac{0.00189 - 0.00047}{0.00787} = 0.18$$

◀

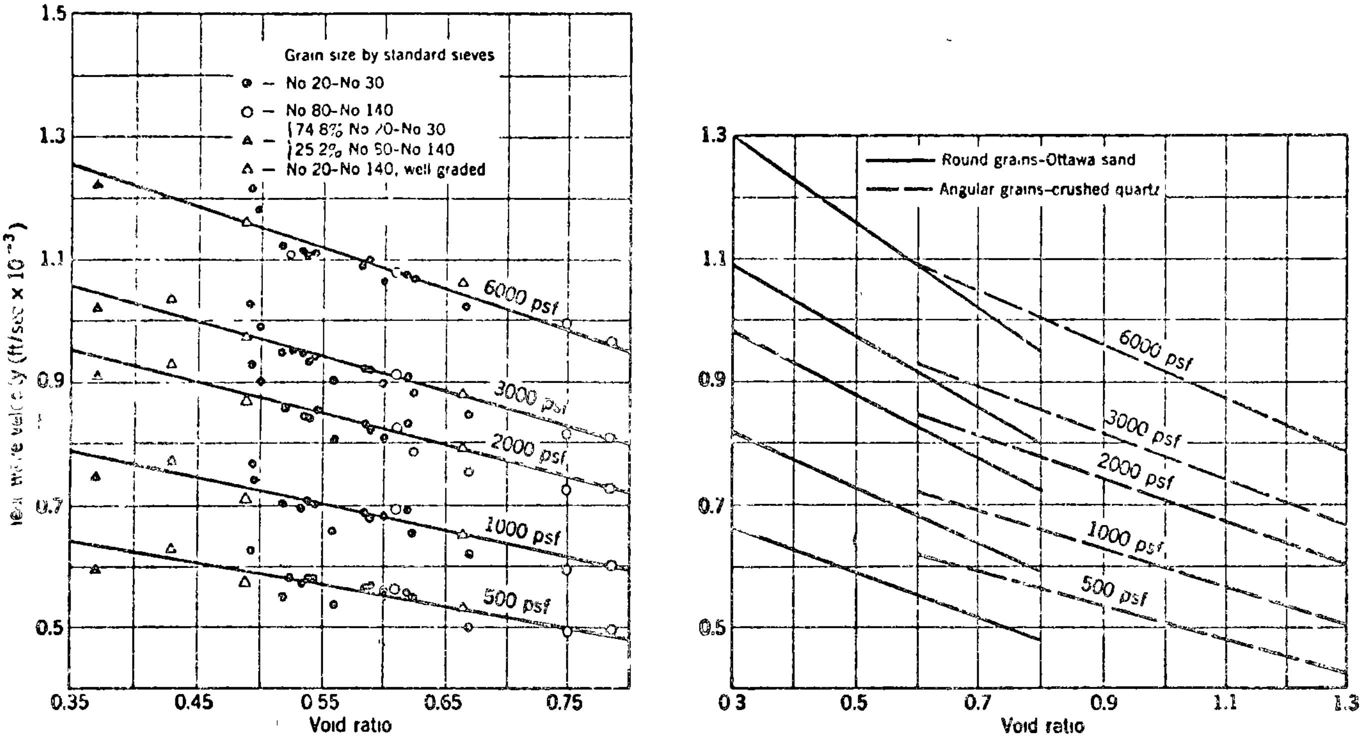


Fig. 12.10 Shear wave velocities through quartz sands (From Hardin and Richart, 1963).

12.5 SUMMARY OF MAIN POINTS

The concepts from the theory of elasticity apply to soil only in a very approximate way. Nonetheless, it is often useful to use these concepts and to use values of modulus and Poisson's ratio which apply approximately for a particular loading. Clearly, good judgment is needed when choosing values for these parameters.

The same factors that affect ϕ also affect modulus. However, the effect upon modulus is more marked. It is difficult to estimate values of modulus with much accuracy, and test data for the particular soil will be necessary whenever an accurate estimate is needed.

Since modulus depends on void ratio, and it is difficult to obtain undisturbed samples of granular soils, it is especially difficult to measure the modulus of granular soils reliably. From experience, it appears that the second cycle of loading during a laboratory test usually gives the best measure of *in situ* modulus. Apparently the effects of sample disturbance are compensated by the effects of the initial loading. There are no reliable correlations between modulus and blow count.

PROBLEMS

12.1 If $E = 16{,}000$ psi and $\mu = 0.35$, evaluate the constrained modulus D and shear modulus G.

12.2 For the data given in Problem 12.1, compute the dilatational velocity C_D, rod velocity C_L, and shear velocity C_S. Assume a value of ρ which is reasonable for a dense sand.

12.3 K_0 for a sand is found to be 0.45. Assuming that sand is an elastic material, compute Poisson's ratio μ.

12.4 Refer to Figs. 10.21 and 10.23. For Test D, initial loading, compute E and μ for (a) the entire stress increment, and (b) the increment to the first data point. First assume that E and μ can be computed as though this were an ordinary triaxial test using Eqs. 12.1 and 12.2. Then use the equations in Example 12.2.

12.5 Repeat Problem 12.4, using the results for Test A, second loading.

12.6 Estimate Young's modulus (secant modulus to $\frac{1}{2}$ of failure load for a first loading) for a well-graded, subangular, dense sand located at a depth of 200 ft below ground surface. *Hint.* You will need to estimate several factors in order to arrive at a satisfactory estimate.

12.7 Using the data in Fig. 12.10, estimate the shear modulus at 20-ft depth of a sand having $e = 0.6$, $G = 2.7$, $K_0 = 0.5$.

1.3.5 D (influencia de factores como , e,)

1.3.6 E

prestrain amplitude of 1.6×10^{-4} and $\bar{\sigma}_o = 612$ lb/ft², no measurable influence was noted for 10^5 prestrain cycles, and only a minor influence occurred with 10^6 cycles. However, when $\bar{\sigma}_o$ was increased to 2340 lb/ft², a peak was reached at about 6×10^6 cycles, and a decrease occurred for greater numbers of cycles. For the prestrain amplitude of 6×10^{-4} and $\bar{\sigma}_o = 1188$ lb/ft², the dropoff in low-amplitude G-value was more striking at prestrain cycles above the peak value. The results shown in Fig. 6-12 indicate that (1) there is probably a lower limiting value of prestrain amplitude which does not induce strain-history effects at the low-amplitude vibration, (2) the maximum strain-history effect occurs at something over 10^6 cycles at these levels of prestrain, and (3) a peak value of the prestrain effect may occur after which additional prestrain cycles may reduce or eliminate this gain. From additional tests, Drnevich (1967) determined that a prestrain amplitude of 10^{-4} represented the lower limit of effective prestrain amplitudes. Amplitudes less than this value produced no prestrain effects.

These studies of the strain-history effects on cohesionless soils raise a number of questions and provide few answers. Obviously, there is a need for intensive study of the strain history on the small-amplitude dynamic response of cohesionless, cohesive, and—in particular—partially saturated soils.

Internal Damping in Soils

When a rod of any material is set into a state of free vibration, the vibration will decrease in amplitude and eventually disappear. This reduction in amplitude of vibration is caused by internal damping within the mass of the material, and its decay is similar to that described for free vibration of a viscously damped system. It should be stated at the start of this discussion that the internal damping in soils is *not* considered to be the result of a viscous behavior; nevertheless, the theory for a single-degree-of-freedom system with viscous damping is a useful framework for describing the effect of the damping which actually occurs in soils.

The decay of free vibration of a single-degree-of-freedom system with viscous damping is described by the *logarithmic decrement*, which is defined as the natural logarithm of two successive amplitudes of motion, or

$$\delta = \ln \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}} \tag{2-39}$$

The logarithmic decrement is obtained experimentally, for example, from the resonant-column test by setting a soil sample into steady-state forced vibration, then shutting off the driving power and recording the amplitude

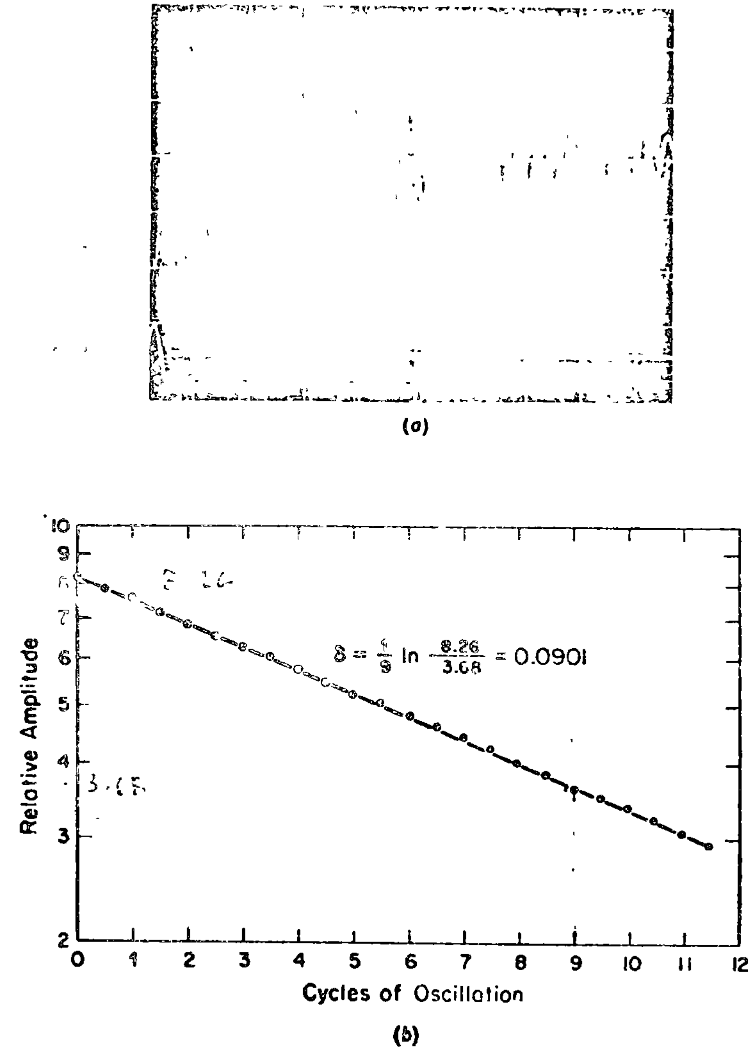


Figure 6-13. Typical free vibration-decay curves obtained from resonant-column tests of Ottawa sand (*from Hall, 1962*). (a) Amplitude-time decay curves. (b) Amplitude vs cycle number plot.

decay with time. Figure 6-13a shows a typical vibration-decay curve obtained from a resonant-column test of Ottawa sand. The evaluation of logarithmic decrement from the decay curve can be accomplished by plotting each amplitude against cycle number on semilog graph paper, as shown in Fig. 6-13b. If the damping in the material produces an effect similar to that predicted by the theory for viscously damped free vibrations, a straight line will be developed on this semilog plot. Hall found that the damping determined from the decay of steady-state vibrations in resonant-column samples of rounded granular materials behaved like viscous damping. The values of logarithmic decrement varied from 0.02 to approximately 0.20 for the materials and test conditions employed in these tests.

Hardin (1965) described continued and expanded studies of resonant-column tests for evaluating the damping in sands. He also presented an analytical study of the applications of the Kelvin–Voigt model (viscous damping) to represent the material for comparison with the test results. From this study he found that the Kelvin–Voigt model satisfactorily represented the behavior of sands in these small-amplitude vibration tests if the viscosity μ in the model was treated as varying with the frequency to maintain the ratio $\mu\omega/G$ constant. This ratio is related to the logarithmic decrement by

$$\delta = \pi\left(\frac{\mu\omega}{G}\right) \tag{6-23}$$

In his conclusions Hardin recommended values of the ratio of $\mu\omega/G$ for use in design, which may be represented in terms of the logarithmic decrement as

$$\delta = \pi 9(\gamma_{zO})^{0.2}(\bar{\sigma}_o)^{-0.5} \tag{6-24}$$

in which γ_{zO} is the shearing-strain amplitude and $\bar{\sigma}_o$ is the confining pressure (expressed in lb/ft²). Note that this empirical equation (Eq. 6-24) is recommended only within the limits of shearing-strain amplitude of 10^{-6} to 10^{-4}, for confining pressures of 500 lb/ft² $< \bar{\sigma}_o <$ 3000 lb/ft², and for frequencies less than 600 cycles/sec.

In his study of high-amplitude shearing strains on the dynamic behavior of sands, Drnevich (1967) included studies of damping. He found that no change occurred in damping with cycles of prestrain for prestrain amplitudes less than 10^{-4}, that the logarithmic decrement varied with $(\bar{\sigma}_o)^{-1/3}$ within the range of 400 to 2000 lb/ft² for all shearing-strain amplitudes between 10^{-5} and 6.0×10^{-4}, and that many cycles of high amplitude prestrain increased damping, in some cases, to twice its original value. A part of the reason for the significant increases in damping is related to the testing procedure of controlling the shearing-strain amplitude. As the shear modulus increases because of the prestraining, the procedure of maintaining constant amplitude developed larger strain energy each cycle. It would be expected that the hysteresis loop would then include a larger area which represents increased damping.

The studies of internal damping in soils are by no means complete, and [illegible] of each of the

variables listed in Eq. (6-16). However, from the studies completed up to the present time, it appears that values of logarithmic decrement for sands may be as large as 0.20 and that they can be estimated from Eq. (6-24). Some additional data corresponding to internal damping for several types of soils are indicated in Table 10-12.

Additional Methods for Evaluating Material Damping

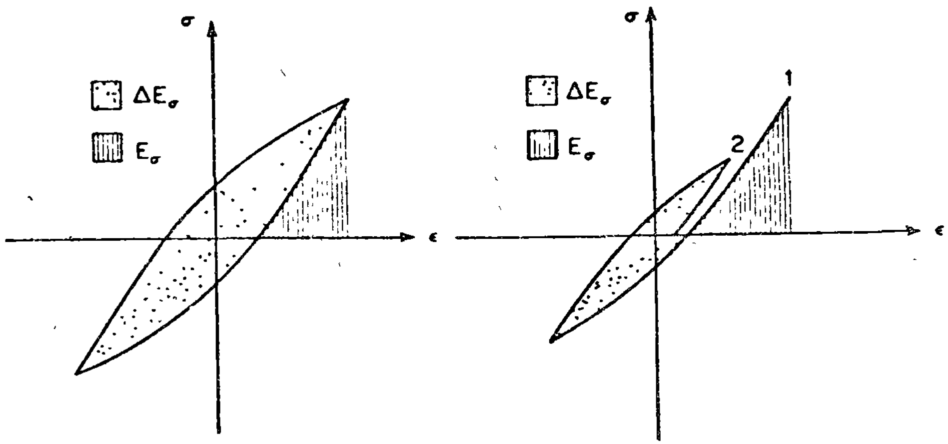
Some of the quantitative expressions used to define the internal damping of materials are viscosity, damping capacity, constant of internal friction, hysteretic constant, specific damping capacity, logarithmic decrement, elastic phase constant, and coefficient of internal friction. Other terms which may be added to this list are damping modulus, resonance-amplification factor, damping factor, specific damping energy, stress–strain phase angle, specific dissipation function, and attenuation. There are numerous references which treat these terms in detail, including the report by Jensen (1959), the bibliography by Demer (1956), and the book by Lazan (1968).

Of these damping terms, the logarithmic decrement was discussed in the preceding section, and the viscosity term was mentioned. The discussion of amplitude–frequency response curves in Chap. 7 covers the resonance-amplification factor. Of the remaining expressions in the above lists, the specific damping capacity, coefficient of attenuation, and specific dissipation functions occasionally occur in the literature for evaluation of the internal damping in soils.

The term "specific damping capacity" indicates the ratio of the *energy absorbed in one cycle of vibration* to the *potential energy at maximum displacement* in that cycle. The "damping capacity" thus defined has a fairly wide acceptance and may be expressed as a percentage or as a decimal. In terms of the stress–strain diagram, the specific damping capacity represents the ratio of the area enclosed by the hysteresis loop to the total area under the hysteresis loop. For the steady-state condition as shown in Fig. 6-14a (note that the horizontal scale in Fig. 6-14 is greatly exaggerated for simplicity of illustration), the specific damping capacity is given by

$$\Delta_{cs} = \frac{\Delta E_a}{L_a} \tag{6-25}$$

The term E_a in Eq. (6-25) represents the strain energy described by the area under the hysteresis loop. The condition for a decaying [illegible] is illustrated in Fig. 6-14b. Point 1 corresponds to the maximum stress of a cycle which starts and ends at points 1 and 2, respectively. It is seen from Fig. 6-14 that the value of Δ_c depends on whether the [illegible] for the



(a) Steady State Vibrations (b) Free Vibrations

Figure 6-14 Stress-strain curves for a system with hysteresis damping.

decaying-vibration condition (Δ_{cd}) is considered when the damping values are large. For the conditions of decaying vibrations, the relationship between the logarithmic decrement and the specific damping capacity is

$$\Delta_{cd} = 1 - \frac{k_{n+1}}{k_n} \exp(-2\delta) \tag{6-26}$$

in which k_n represents the proportionality factor between strain energy and the square of the displacement amplitude for the nth cycle of decaying vibration. It should be emphasized that there is no general relationship between Δ_{cs} and δ; but for small values of δ, $\Delta_{cs} \approx \Delta_{cd}$, and the ratio of the proportionality constants, k_{n+1}/k_n, is approximately 1.

It is often desirable to evaluate the decrease in amplitude of vibration with distance from a source which is caused by energy losses in the soil. This is designated as "attenuation," the energy loss as a function of distance, and is measured in terms of the *coefficient of attenuation* α (1/ft). The coefficient of attenuation is related to the logarithmic decrement by

$$\delta = \frac{2\pi v \alpha}{\omega} = L\alpha \tag{6-27}$$

in which v is the velocity, ω denotes the circular frequency, and L is the wave length of the propagating wave.

Attenuation should be distinguished from *geometrical damping* (see Fig. 3-16 and Sec. 7.7) which occurs in *elastic* systems because of the spreading out of wave energy from a source

A variation of this attenuation coefficient describes the *specific dissipation function* 1/Q as

$$\frac{1}{Q} = \frac{2v\alpha}{\omega} \tag{6-28}$$

Internal damping in materials may also be evaluated by measuring the angle by which the strain lags the stress in a sample undergoing sinusoidal excitation. If the soil is assumed to be a linear viscoelastic solid, the complex shear modulus G^* is considered to be composed of a real and an imaginary component, each of which is a function of frequency, as

$$G^*(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega) \tag{6-29}$$

In Eq. 6-29 $G_1(\omega)$ is the elastic component and $G_2(\omega)$ is the viscous component. The loss angle δ_L is defined by

$$\tan \delta_L = \frac{G_2}{G_1} \tag{6-30}$$

and it is related to the logarithmic decrement δ (and the ratio $\mu\omega/G$, see Eq. 6-23) by

$$\delta = \pi \tan \delta_L \tag{6-31}$$

Several investigators have adopted theoretical procedures based on the complex modulus and have presented their laboratory-test results in terms of $\tan \delta_L$. Equation (6-31) provides the link for interpreting these results in terms of the logarithmic decrement as used in this chapter.

From the preceding paragraphs it is seen that there are several methods for measuring and describing damping in soils. Furthermore, because damping in soils increases with the amplitude of vibration (see Eq. 6-24), it may be convenient to use different methods for different ranges of amplitude. The use of the complex modulus may be warranted for dynamic situations involving large-amplitude vibrations. However, for the order of magnitudes of the vibrations encountered in soils beneath machine foundations, the logarithmic decrement should be less than 0.2. For this value of δ, Eqs. (6-29), (6-30), and (6-31) show that the viscous component of the complex modulus is about 6 per cent of the elastic component. This difference of less than 6 per cent between the elastic and complex modulus does not justify adopting the theories of viscoelasticity for the study of response of machine foundations, particularly when we consider the accuracy of present test methods for determining G. Consequently, the test and design procedures described in this book are based on the assumption of an elastic modulus

When internal damping in soils is considered, it is represented in terms of the logarithmic decrement.

Wave-Propagation Velocity from Field Tests

The general principles involved in the seismic field tests for the compression-wave velocity and the steady-state-vibration method for the Rayleigh-wave velocity were described in Chap. 4. The discussion will be confined here to comparisons between the wave velocities obtained in the field by the steady-state vibrations and in the laboratory by the resonant-column tests.

As noted in Chap. 4, the steady-state–vibration method involves a variable-frequency exciter which produces a vertical oscillating force on the surface of the ground. A pickup is located on the ground surface at varying distances away from the exciter in order to determine the wave length corresponding to a particular frequency of excitation. This wave-length evaluation is recorded for a series of different frequencies and the results shown in a diagram similar to Fig. 4-19. The product of the wave length and frequency is equal to the velocity of the Rayleigh wave, or

$$v_R = fL \tag{6-32}$$

It was demonstrated by Fig. 3-13 that in the ideal elastic body the difference between the Rayleigh-wave velocity and the shear-wave velocity was minor, from an engineering standpoint, for values of Poisson's ratio greater than about 0.25. The ratio of v_R/v_S is noted below as a function of ν (from Knopoff, 1952):

ν	0.25	0.33	0.40	0.50
v_R/v_S	0.92	0.933	0.943	0.956

Thus the value of wave-propagation velocity (v_R) measured in the field by the steady-state method could be expected to be on the order of 5 to 8 per cent lower than the shear-wave velocity measured in the laboratory with the resonant-column device at the same level of shearing strains.

In the steady-state-vibration method the wave velocities obtained from the field tests are plotted at depths corresponding to a distance equal to one-half the wave length. This type of plot is shown in Fig. 6-15 for *in-situ* tests at the [illegible] Field [illegible]. At this site the soil was composed of [illegible] uniform sand with a [illegible] of approximately [illegible]. The average [illegible]

calculated from

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z \tag{6-33}$$

$$\sigma_z = \gamma z \tag{6-34}$$

$$\bar{\sigma}_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{6-35}$$

At the Eglin Field site the unit weight γ was approximately 104 lb/ft³. With this value of γ and an assumption of Poisson's ratio of $\frac{1}{3}$, the stresses σ_z and $\bar{\sigma}_o$ were calculated for several depths within the sand mass. Then these values of $\bar{\sigma}_o$ and ($e = 0.70$) permitted calculations of v_S at the several depths through the use of Eq. (6-18). Finally, the Rayleigh-wave velocities were obtained from the theoretical relation that $v_R = 0.933\, v_S$ for $\nu = \frac{1}{3}$. These calculated values of v_R are shown on Fig. 6-15 as the dashed line.

At this point, it should be reiterated that the steady-state-vibration method (or half-wave-length method) is an *empirical procedure*, and it is remarkable that it works so well. Equation (6-18) also represents an empirical

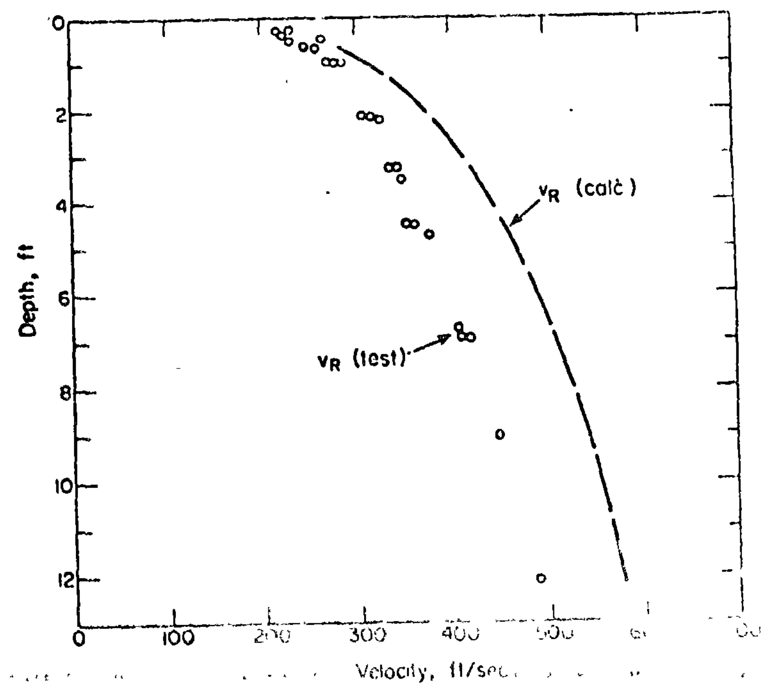


Figure 6-15 Variation of Rayleigh wave velocity with depth – Eglin Field [illegible] (after Fry, 1963)

2. Vinson, T. S., "The Application of Polyurethane Foamed Plastic in Soil Grouting," thesis presented to the University of California, at Berkeley, Calif., in 1970, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

APPENDIX II.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

e = void ratio;
E = initial tangent modulus of elasticity;
R' = nonreactive hydrocarbon radical; and
TDI = tolylene diisocyanate.

Sept-72.

Journal of the
SOIL MECHANICS AND FOUNDATIONS DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

SHEAR MODULUS AND DAMPING IN SOILS: MEASUREMENT AND PARAMETER EFFECTS

By Bobby O. Hardin,[1] M. ASCE and Vincent P. Drnevich,[2] A. M. ASCE

INTRODUCTION

A comprehensive general stress-strain relation for soils would be very complex simply because of the large number of parameters that affect the behavior of soils. One approach towards developing a general constitutive relation is to study special cases. Once these are understood, it may then be possible to link them together to formulate a generalized constitutive relation. The purpose herein is to show how the controlling parameters affect the stress-strain relation of soils subjected to simple shear. Numerous tests on a spectrum of soils as well as information reported by others will be used to describe measurement, parameter effects, and relative importance of parameters.

The writers like to approach the problem by considering shear and volumetric stress separately. However, because there is a coupling of shear and volumetric deformations in soils, both may result from either shear or volumetric stresses. Herein is an analysis of the strains resulting from the application of pure or simple shear to an element of soil initially subjected to some state of stress. Pure and simple shear differ only by a rigid body rotation, thus the stress-strain relation for the two should be the same. However, strictly speaking the tests described herein involve simple shear.

Probably the best example of simple shear in the field is the vibration of horizontal soil layers due to the horizontal component of an earthquake. The initial geostatic state of stress for an element of soil in situ is shown on the element in Fig. 1, where the vertical and horizontal stresses are principal stresses. The simple shear stress and strain due to the earthquake, are also shown on the element in Fig. 1.

Note.—Discussion open until November 1, 1972. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Director, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. SM6, June, 1972. Manuscript was submitted for review for possible publication on September 10, 1970.

[1] Prof. of Civ. Engrg., Univ. of Kentucky, Lexington, Ky.
[2] Asst. Prof. of Civ. Engrg., Univ. of Kentucky, Lexington, Ky.

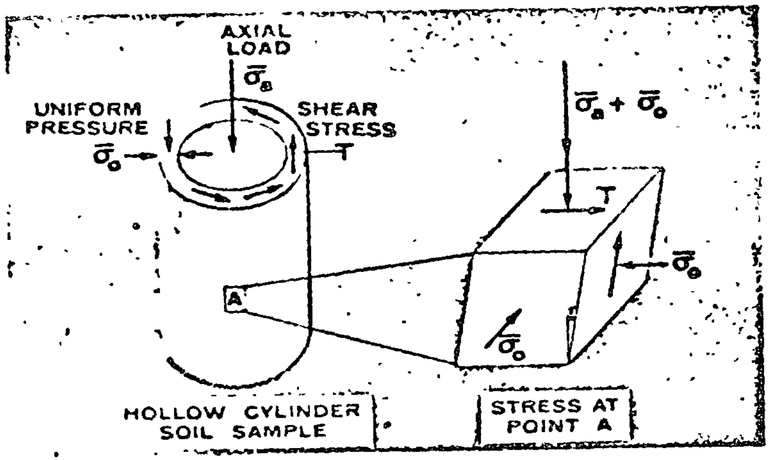


FIG. 1.—HOLLOW CYLINDER SIMPLE SHEAR TEST

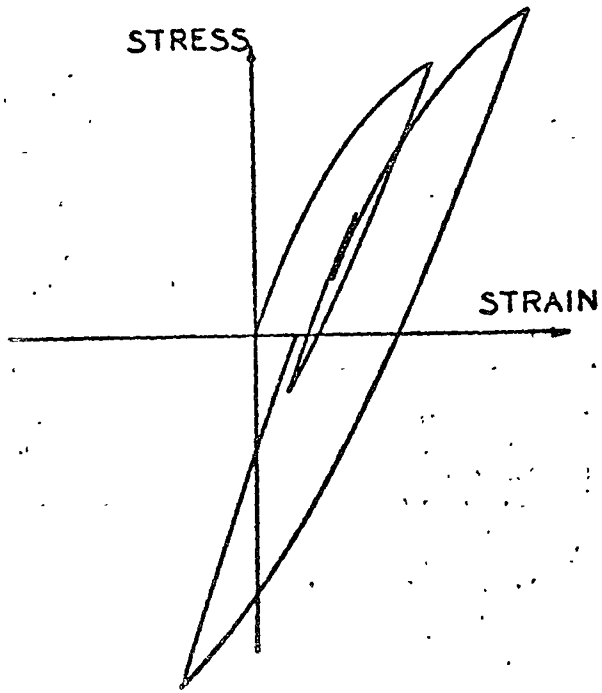


FIG. 2.—POSTULATED GENERALIZED SIMPLE SHEAR STRESS-STRAIN CURVE

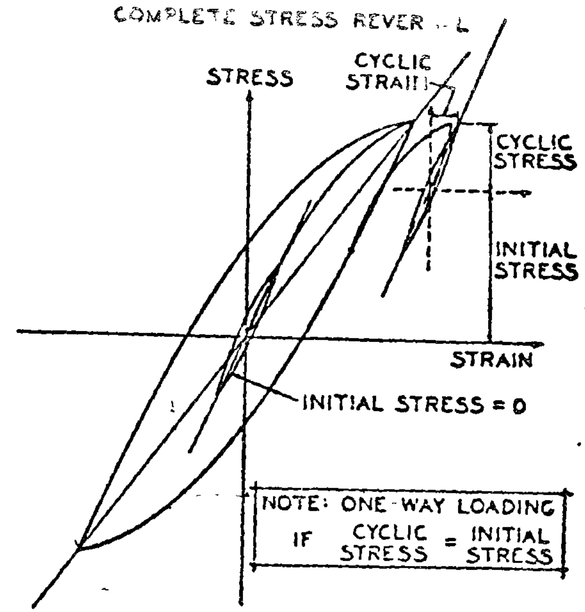


FIG. 3.—COMPLETE STRESS REVERSAL WITH AND WITHOUT INITIAL SHEAR STRESS

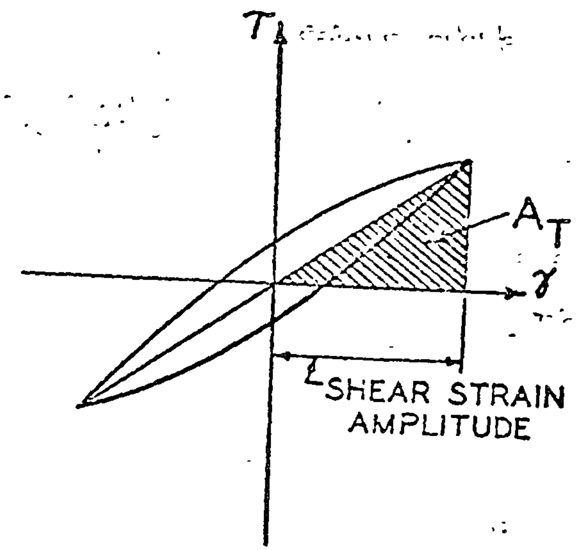


FIG. 4.—DEFINITION OF MODULUS, DAMPING, AND STRAIN AMPLITUDE

This loading condition can be simulated by the hollow cylinder simple shear test as shown in Fig. 1. In this test the initial geostatic state of stress is applied by means of a uniform pressure and an axial load. The simple shear is then applied by a torque about the axis of the hollow cylinder. The torque can be reversed and cycled to simulate an earthquake. In fact, by applying an initial torque, along with the uniform pressure and axial load, any desired combination of ambient principal stresses may be produced in the specimen and an alternating torque may then be superposed.

The simple shear loading produced by an earthquake is characterized by stress reversal, with varying amplitude and frequency. The stress-strain relation for this general simple shear loading is probably something like that shown in Fig. 2. Eventually, the writers hope to define this general, simple shear, stress-strain relation, but herein the two special cases shown in Fig. 3, in which complete stress reversal occurs, will be considered. The first case involves cyclic loading about the origin; i.e., the initial state of stress in the hollow cylinder is produced by a uniform pressure or by uniform pressure and an axial load. For the second case, the initial stress is a combination of uniform pressure, axial load, and torque. It is referred to as complete stress reversal with an initial shear stress.

Herein a cycle is defined to begin and end at maximum shear stress. With this definition, the first complete cycle begins after the specimen has been subjected to a quarter cycle of shear loading. The stress-strain relation for this first complete cycle is a closed loop for a specimen that does not have an initial shear stress or a shear stress history. Two such stress-strain loops for different strain amplitudes are shown in Fig. 3. For the second case, the initial shear stress is first applied by means of an initial torque and then the cyclic simple shear is superposed. As shown in Fig. 3, the loop does not close for the first complete cycle. However, after the first few cycles the loop, for most practical purposes, can be considered to close. Therefore, for the special case of complete stress reversal, the simple shear stress-strain relation is a loop.

Fig. 4 shows how the loop stress-strain relation will be defined. Although it appears possible to write an equation for the sides of the loop, at this point, the loop will be defined by two parameters. First, the slope of a line through the end points of the loop will be called the shear modulus, G. The second parameter is called the damping ratio, $D = A_L/4\pi A_T$, in which A_L = the area of the loop and A_T = the triangular area shown cross hatched in Fig. 4.

TEST EQUIPMENT AND RECORDINGS

Three different testing devices were used herein. The first device tested hollow cylindrical specimens and was designed to make accurate measurements of modulus and damping for shear strains as small as 0.25×10^{-4} in./in., at a frequency of 1/12 Hz. At this low frequency, inertia forces were not significant and the recorded load-deformation relation, measured at the top of the specimen was the load-deformation relation for the specimen. Furthermore, because the state of stress in the specimen was nearly homogeneous, the load-deformation relation was proportional to the stress-strain relation.

The fact that stress and strain vary with the radius in such a test specimen

is not as serious as might first be expected. The test results show that when the behavior is correlated with the average strain in the specimen, the difference between the behavior of solid and hollow cylinders was not significant in most cases. Average strain was computed by $[\int_{area} (\text{strain})\, dA]$/area, assuming linear variation of strain in the radial direction. However, for study of the damping of saturated clean sands and for liquefaction studies, it is important that the ratio of wall thickness to radius of the specimen be small, to reduce pore pressure gradients within the specimen. Measurements of damping in both solid and hollow cylinders of saturated clean sand, showed significantly higher damping in the solid cylinder, even when correlated with the average strain in the specimen. But for cohesive soils and for modulus in clean saturated sand, the thickness of the wall had no significant effect, so long as behavior was correlated to the average strain in the specimen. A major advantage of the hollow cylinder simple shear test is that the circular shape and circumferential direction of shear are analogous to the infinite length that would be desirable, but impractical, in the conventional simple shear test. Most of the boundary condition problems of the conventional test are eliminated.

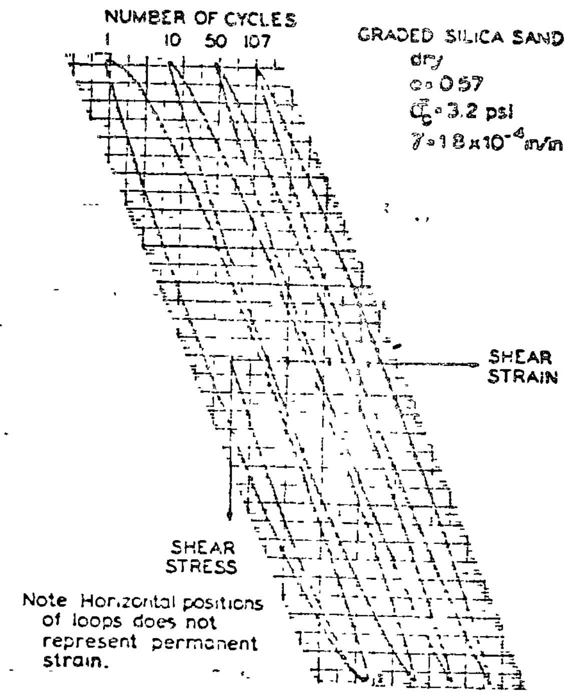


FIG. 5.—STRESS-STRAIN RECORDS FROM LOW FREQUENCY SIMPLE SHEAR APPARATUS FOR COHESIONLESS SOIL

Two specimen sizes were tested in this apparatus. For sands, the hollow cylinder was approximately 9 in. (23 cm) long, 5 in. (13 cm) OD, and 4 in. (10 cm) ID. It was supported by means of a vacuum applied to the specimen voids. Hollow cylindrical specimens of undisturbed cohesive soils were ob-

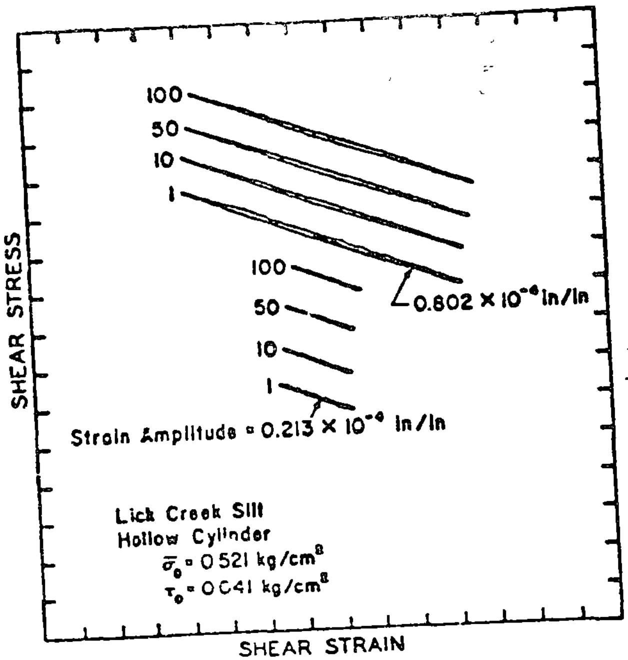


FIG. 6.—STRESS-STRAIN RECORDS FROM LOW FREQUENCY SIMPLE SHEAR APPARATUS FOR COHESIVE SOIL

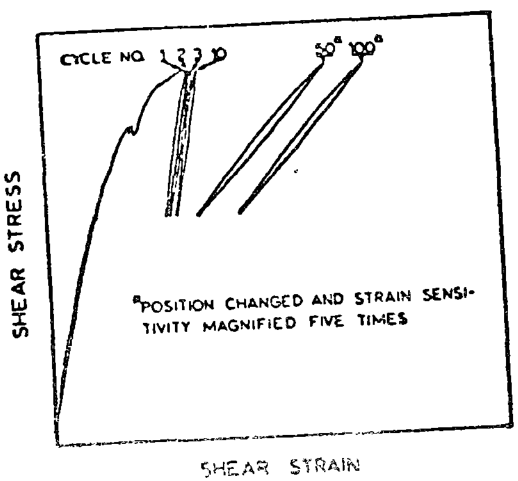


FIG. 7.—STRESS-STRAIN RECORDS FROM LOW FREQUENCY SIMPLE SHEAR APPARATUS FOR TEST WITH INITIAL SHEAR STRESS

tained by trimming a 1.4-in. (3.56-cm) diam hole in the center of a 3-in. (7.62-cm) Shelby tube sample. The outside of the sample was not trimmed and the length was trimmed to 2 in. (5.08 cm). Additional information on this apparatus is given by Hardin and Drnevich (13).

The other two testing devices were resonant column devices, where the modulus and damping were determined from the vibration response of the system, composed of the specimen and its attached apparatus. The resonant frequency of the system was used to measure the modulus of the soil. The damping was determined from the magnification factor at resonance or from the decay in amplitude of the freely vibrating system. Both methods of measuring damping were used and compared herein. The results were essentially the same. One resonant column device was designed to test hollow cylinders and operates in the frequency range generally between 20 Hz and 100 Hz. Details of this apparatus have been reviewed by Drnevich, Hall, and Richart (3) and Hardin and Drnevich (13). The other resonant column device was used to test solid cylinders only, and operates at frequencies generally between 200 Hz and 260 Hz. With this device, an axial load can be applied during vibration to test the effects of anisotropic states of initial stress. This device has been reviewed by Hardin, et al. (15,16). With the resonant column devices accurate measurements of modulus and damping can be made at extremely small strain amplitudes (as low as 10^{-6} in./in.).

These three devices complemented each other permitting tests to be made over a wide range of variables. With the low frequency resonant column device (20 Hz-100 Hz) the first measurement was usually made at 1,000 cycles and 100,000 cycles could be applied easily in a reasonable length of time. Thus it was possible to study the effects of frequency between 0.1 Hz and 260 Hz and the effects of loading cycles between 1 and more than 100,000.

Examples of the stress-strain relations recorded with the 1/12 Hz testing device are shown in Figs. 5, 6, and 7. Fig. 5 shows four loops for a specimen of graded silica sand with a void ratio, e = 0.57, under an effective mean principal stress, $\bar{\sigma}_o$ = 3.2 psi (0.221 bars), and for a strain amplitude, γ = 1.8 × 10^{-4} in./in. The 1st, 10th, 50th, and 107th loops were recorded. The centers of the loops were positioned with the recorder, otherwise they would coincide. Their positions in Fig. 5 do not indicate permanent strain. Note that the first quarter cycle is inside the first loop and the first loop closes. With careful measurement of these loops, the behavior of modulus and damping with cycles of loading can be accurately determined.

The loops in Fig. 6 are for a hollow specimen of undisturbed cohesive soil, Lick Creek Silt. These loops illustrate the sensitivity of the 1/12 Hz testing device. The figure shows that a line about 1 in. (2.5 cm) long was recorded for the small strain amplitude of 0.213 × 10^{-4} in./in. This allowed accurate measurement of the modulus for this small strain amplitude. Careful measurement of these loops for a cohesive soil enables accurate studies to be made of the effects of number of cycles of loading and strain amplitude as well as conditions of different stress histories.

The third example in Fig. 7 shows the effect of initial shear stress. As can be seen, the modulus for the first quarter cycle was much less than for the first loop. The permanent strain for the first 10 cycles is shown. The first few loops do not close but the 10th loop is essentially closed. The recorder position and sensitivity were changed to record the 50th and 100th loops in the upper part of the figure.

PARAMETERS AFFECTING SHEAR MODULUS AND DAMPING

Relative Importance of Parameters.—Because so many parameters affect the shear modulus and damping of soils, the parameters have been grouped into three categories: very important, less important, and relatively unimportant. These groupings (see Table 1) are based on the findings of this research and previously published data and will form an outline for the analysis of parameter effects.

There are five parameters that, in general, are very important. From Table 1, e.g., strain amplitude, effective mean principal stress, and void ratio are very important parameters for the modulus and damping in all soils. Whereas, overconsolidation ratio is a less important parameter, for cohesive soils, and is unimportant for clean sands. Table 1 also shows that a parameter such as grain characteristics is relatively unimportant for both modulus and damping in all soils, except as it affects other parameters listed. Grain characteristics will affect both the void ratio, a very important parameter, and effective strength envelope, a less important parameter. But if the void ratio and effective strength envelope of the soil are accounted for, then these two parameters will also account for most of the effects of grain characteristics, making it relatively unimportant in this context.

TABLE 1.—PARAMETERS AFFECTING SHEAR MODULUS AND DAMPING FOR COMPLETE STRESS REVERSAL

Parameter	Importance to[a]			
	Modulus		Damping	
	Clean sands	Cohesive soils	Clean sands	Cohesive soils
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Strain Amplitude	V	V	V	V
Effective Mean Principal Stress	V	V	V	V
Void Ratio	V	V	V	V
Number of Cycles of Loading	R[b]	R	V	V
Degree of Saturation	R	V	L	U
Overconsolidation Ratio	R	L	R	L
Effective Strength Envelope	L	L	L	L
Octahedral Shear Stress	L	L	L	L
Frequency of Loading (above 0.1 Hz)	R	R	R	L
Other Time Effects (Thixotropy)	R	L	R	L
Grain Characteristics, Size, Shape, Gradation, Mineralogy	R	R	R	R
Soil Structure	R	R	R	R
Volume Change Due to Shear Strain (for strains less than 0.5 %)	U	R	U	R

[a] V means Very Important, L means Less Important, and R means Relatively Unimportant except as it may affect another parameter; U means relative importance is not clearly known at this time.

[b] Except for saturated clean sand where the number of cycles of loading is a Less Important Parameter.

Effects of Very Important Parameters on Shear Modulus.—Fig. 8 shows the effects of strain amplitude, effective mean principal stress, and number of cycles of loading on the shear modulus of a clean sand. The modulus decreases very rapidly with strain amplitude. There is apparently no strain level below which the modulus is constant (i.e., no proportional limit). Measurements with the resonant column test for strains as low as about 10^{-6} in./in. indicate that the curves can be extrapolated, as shown in Fig. 8, to zero strain, to obtain a value of G_{max}. Note that for $\bar{\sigma}_o$ = 0.25 kg/cm² and N = 100 cycles in Fig. 8, G_{max} = 8.50 ksi (586 bars).

For practical purposes it seems reasonable to assume that values of modulus measured for strain amplitudes less than 0.25 × 10^{-4} in./in. are equal to G_{max}. Thus, G_{max} can be measured directly by vibration tests, in both laboratory and field, or by seismic techniques in the field. Vibration tests are well suited to measuring G_{max} because accurate measurements can be made for strain amplitudes much smaller than 0.25 × 10^{-4} in./in. But, in order to determine G_{max} by measuring the load-deformation relation in a low frequency or static test, as was done to obtain the data in Fig. 8, special testing equipment such as used in these tests is required. It must have the necessary sensitivity to make accurate measurements for strains as small as 0.25 × 10^{-4} in./in. Note that the modulus at a strain amplitude of 10 × 10^{-4} in./in. (0.1 %) may be as low as $G_{max}/3$. It is obvious that an accurate determination of G_{max} cannot be made with a testing device for which the lowest strain where an accurate measurement can be made is 0.1 %. In the writers' opinion this explains why initial tangent moduli measured with con-

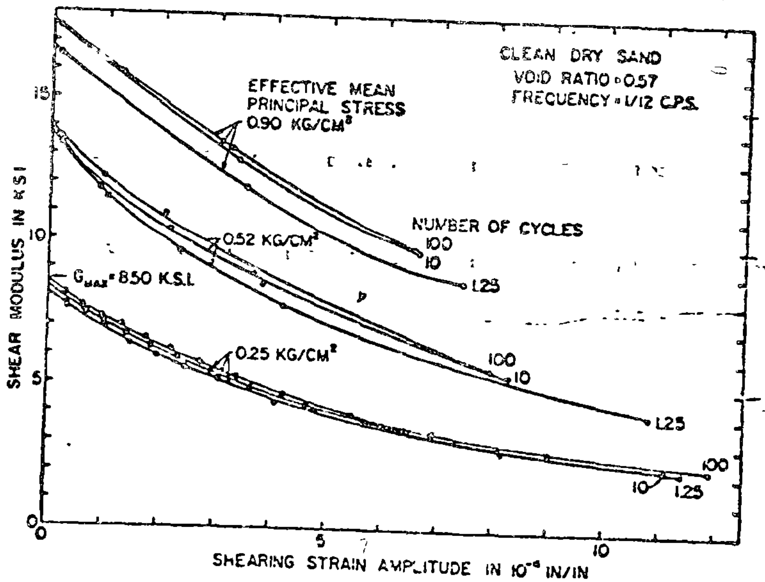


FIG. 8.—EFFECTS OF STRAIN AMPLITUDE, EFFECTIVE MEAN PRINCIPAL STRESS, AND NUMBERS OF CYCLES OF LOADING ON SHEAR MODULUS OF CLEAN SAND

ventional testing equipment are usually much lower than values measured by
seismic or vibration techniques. Such initial tangent moduli often really cor-
respond to some strain amplitude on the order of 0.1 % strain or higher. This
is one reason that much of the published data obtained with other simple shear
devices (1,2,24,25) could not be used herein. In most of the cases, the simple
shear devices were used for shear strength determination. Another reason is
that much of the data are reported without giving values for the important
parameters that influence behavior.

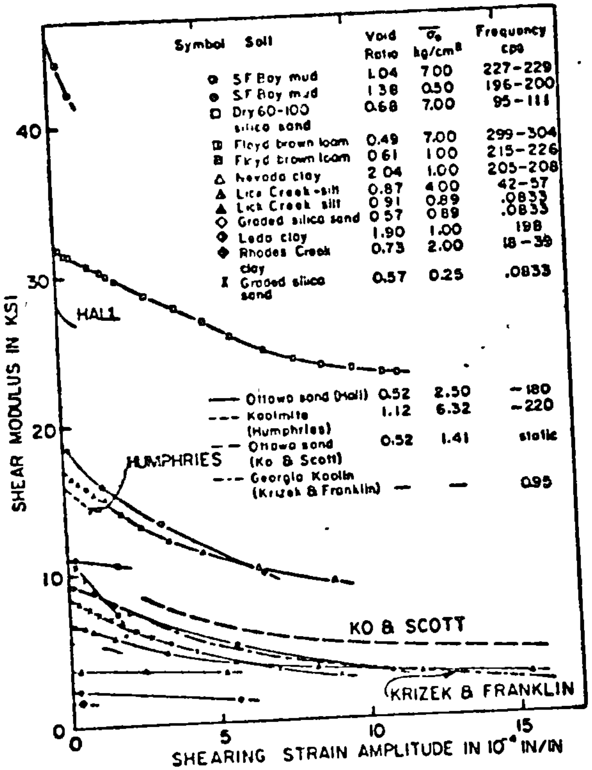


FIG. 9.—SHEAR MODULUS VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR VARIETY OF SOILS

The data in Fig. 8 are for a sand, but the general shape of the modulus-
strain amplitude curves is the same for cohesive soils and other sands. This
can be seen in Fig. 9 where shear modulus is plotted versus shearing strain
amplitude for many different soils. Included in this figure are data on Ottawa
sand reported by Hall (6) and Ko and Scott (19) and data on remolded kaolinite
reported by Humphries (18) and Krizek and Franklin (20). Resonant column
devices were used by Hall and by Humphries while Ko and Scott used a soil
test box and Krizek and Franklin used a rheogoniometer. The characteristic
shape of these data appears quite consistent with that obtained by the writers.
Fig. 9 clearly shows that the rate at which the modulus decreases with in-

creasing strain amplitude is not the same for all soils. This rate depends primarily on the values of G_{max} and on the shear strength of the soil. It is also somewhat different for cohesive and cohesionless soils, other conditions being equal. A complete analysis of the shape of the modulus-strain amplitude curve, with a method of normalizing strain is given in a companion paper (14).

Fig. 8 shows how the modulus increases with effective mean principal stress $\bar{\sigma}_o$. A great deal of data have been published to show that G_{max} varies with the square root of $\bar{\sigma}_o$ (4,8,10,11,22). However, at large strain amplitudes the modulus depends mainly on the strength of the soil, which is more nearly a function of $\bar{\sigma}_o$ to the first power. Thus, the power of $\bar{\sigma}_o$ with which modulus varies increases from 0.5 at zero strain amplitude to 1.0 at large strain

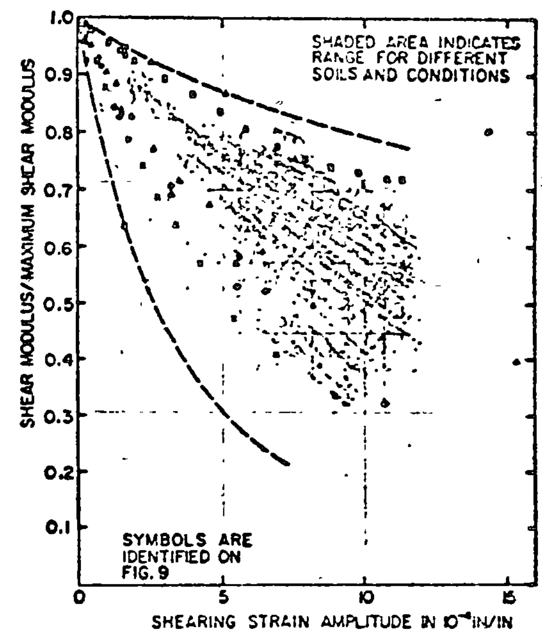


FIG. 10.—NORMALIZED SHEAR MODULUS VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR VARIETY OF SOILS

amplitudes. The effect of $\bar{\sigma}_o$ on the modulus of various soils can be seen in Fig. 9.

From Fig. 9, the effect of void ratio on the modulus can be demonstrated, particularly its effect on G_{max}. (It is more difficult to separate the effects at higher strain amplitudes because of the effect of strength and other factors on the shape of the modulus-strain amplitude relation.) For example, compare the values of G_{max} for the Leda Clay, Lick Creek Silt and Floyd Brown Loam, three cohesive soils, at nearly equal effective mean principal stress [$\bar{\sigma}_o$ = 0.89 kg/cm² (0.87 bars) to 1.00 (0.98 bars) kg/cm²]. Respectively, the values of void ratio and G_{max} are: Leda Clay, 1.90, 1.7 ksi (117 bars); Lick Creek Silt, 0.91, 6.9 ksi (476 bars); and Floyd Brown Loam, 0.61, 11.0 ksi (758 bars). This six fold difference in G_{max} [1.7 ksi (117 bars) to 11.0 ksi

(758 bars)] for these three cohesive soils, is primarily due to the difference in void ratio (1.90 to 0.61). The effect of void ratio, e, on G_{max} has been reviewed in several references (8,11,12,17,21,23) and the function $F(e) = (2.973 - e)^2/(1 + e)$ has been proposed (11,12) to account for the effect. When the value of $F(e)$ is calculated for the preceding three cases and G_{max} is divided by $F(e)$ to remove the effect of void ratio, the range for $G_{max}/F(e)$ is 3.1 ksi (214 bars) to 4.3 ksi (296 bars), as compared to the range in G_{max} of 1.7 ksi (117 bars) to 11.0 ksi (758 bars). Many additional test results for both cohesive and cohesionless soils show that for void ratios less than approximately 2, $F(e)$ accounts for the effects of void ratio on G_{max}.

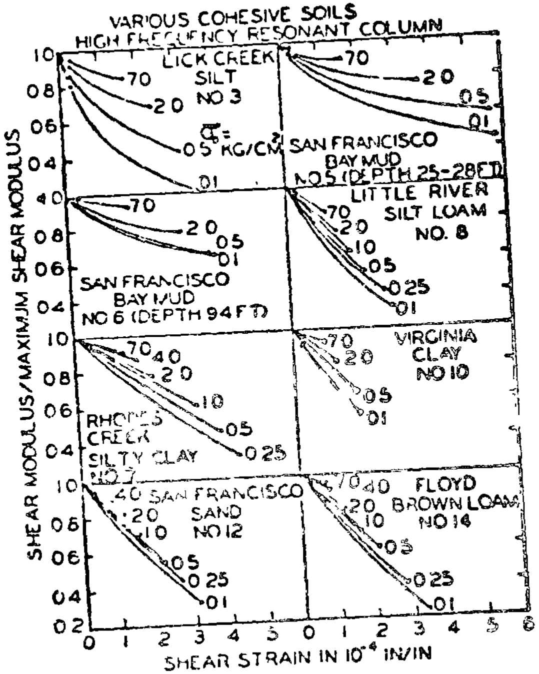


FIG. 11.—NORMALIZED SHEAR MODULUS VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR VARIOUS COHESIVE SOILS

The value of G_{max} was determined for each test in Fig. 9 that had sufficient data. The modulus was then normalized and G/G_{max} is plotted against strain amplitude in Fig. 10. The range of the relationship between G/G_{max} and strain amplitude is shown by the shaded area between the two heavy dashed lines. This figure shows clearly that there is not a single curve that can describe this relationship, even for cohesionless soils alone. Compare the tests on sands at 0.25 kg/cm² (0.24 bars) and 7.00 kg/cm² (6.86 bars) (x and open square data points). The range for the cohesive soils in Fig. 10 is even greater. From Fig. 10 the modulus corresponding to a strain of 0.1 % may equal any value from 15 % to 80 % of G_{max}, depending on the soil and environmental conditions. Similar results are shown in Fig. 11 for eight different undisturbed

cohesive soils. From the data in Fig. 11, it is apparent that for the modulus of soft cohesive soils, subjected to very low effective mean principal stress [0.1 kg/cm² (0.098 bars)], the modulus decreases very rapidly with increasing strain amplitude, and may be less than 20 % of G_{max} at a strain of 0.05 %. This is one reason for some of the very low values of modulus reported in the literature, where the specimens were unconfined and the lowest strains where accurate measurements could be made were on the order of 0.1 % or higher. In Ref. 14, a method of dealing with strain is presented whereby the data in Figs. 10 and 11 can be described by a simple relationship.

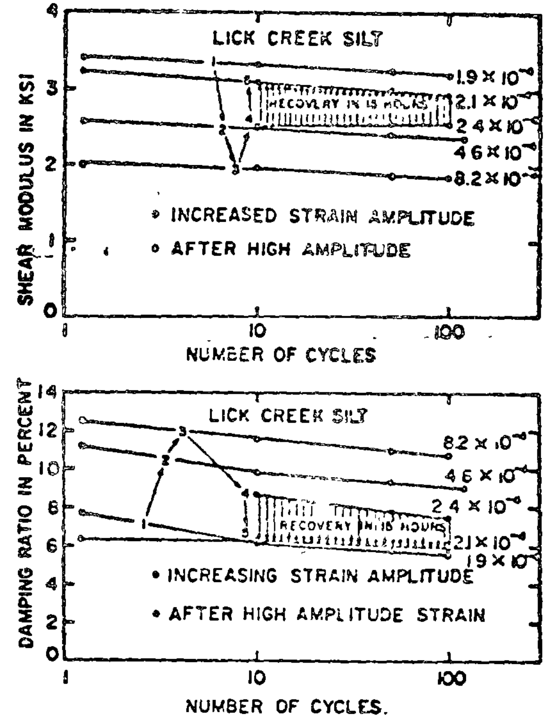


FIG. 12.—RECOVERY OF SHEAR MODULUS AND DAMPING RATIO WITH TIME AFTER ALTERATION BY HIGH AMPLITUDE CYCLIC LOADING

Looking again at Fig. 8, the effect of number of cycles of loading, N, on the modulus is shown. The curves are for the 1st (one and one-quarter cycles as defined herein), 10th, and 100th cycle of loading. The curves for 0.25 kg/cm² (0.24 bars) effective mean principal stress show the effect of N on a sand that has not been subjected to a history of initial shear stress, as defined in Fig. 3. When the data for the effective mean principal stresses of 0.52 kg/cm² (0.51 bars) and 0.90 kg/cm² (0.88 bars) were obtained, the specimen had been subjected to a history of initial shear stress. A history of initial shear stress causes the modulus to be lower for the first few cycles of loading than it would be for the same soil without such a history of loading. However, the effect of the history of initial shear stress is worked out by the 10th cycle, and the 10th and 100th cycle data are similar for all three values of $\bar{\sigma}_o$. The

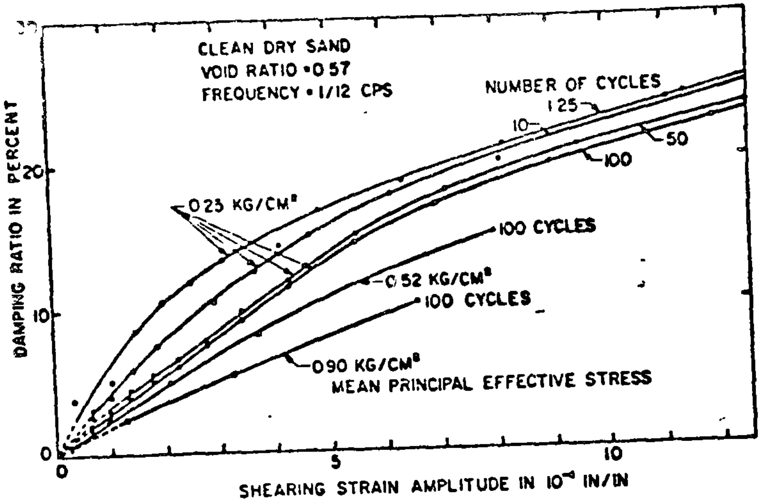


FIG. 13.—DAMPING RATIO VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR CLEAN DRY SAND

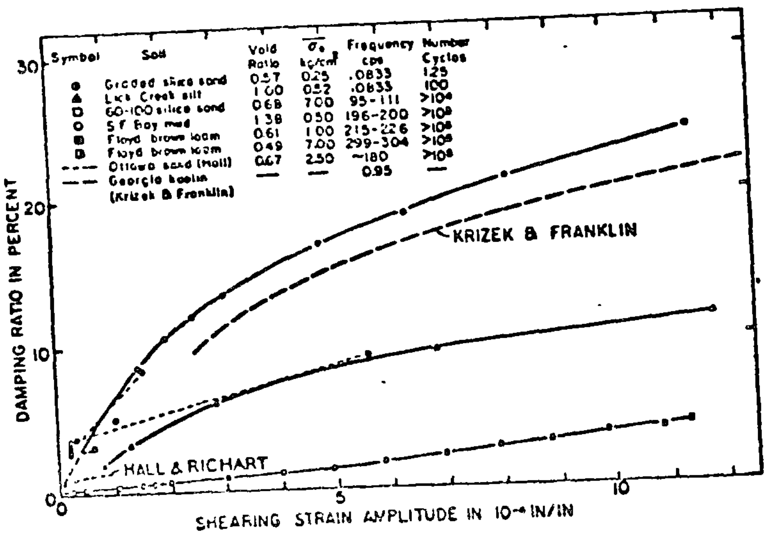


FIG. 14.—DAMPING RATIO VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR VARIETY OF SOILS

data in Fig. 8 are for a sand and the modulus increases slightly with the number of cycles of loading. However, for cohesive soils the modulus decreases somewhat with the number of cycles (see Fig. 12). The number of cycles of loading

are not shown in Fig. 9 but are as follows: All of the tests at 1/12 Hz are for 100 cycles of loading; the Lick Creek Silt 4 kg/cm² (3.92 bars) and the Rhodes Creek Clay were at 1,000 cycles; the 60-100 dry sand was at > 10^4 cycles; and the rest were at > 10^5 cycles.

The last of the very important parameters is degree of saturation, which is very important to cohesive soils but unimportant to cohesionless soils. Pore

TABLE 2.—VARIATION OF DAMPING WITH VOID RATIO

Soil name	Damping at strain amplitude of 2×10^{-4}, in inches per inch			
	$\bar{\sigma}_o$ = 0.5 kg/cm² (0.49 bars)		$\bar{\sigma}_o$ = 2.0 kg/cm² (1.96 bars)	
	Void ratio	Damping ratio, as a percentage	Void ratio	Damping ratio, as a percentage
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
San Francisco Sand	0.50	8.8	0.49	7.9
Little River Brown Silt	0.55	11.1	0.52	7.5
Floyd Brown Loam	0.64	11.5	0.58	7.6
Virginia Clay	0.89	11.1	0.87	7.0
Rhodes Creek Clay	0.92	8.3	0.81	6.7
San Francisco Bay Mud	1.23	6.1	1.16	4.5
Nevada Clay	2.05	1.6	1.98	1.6

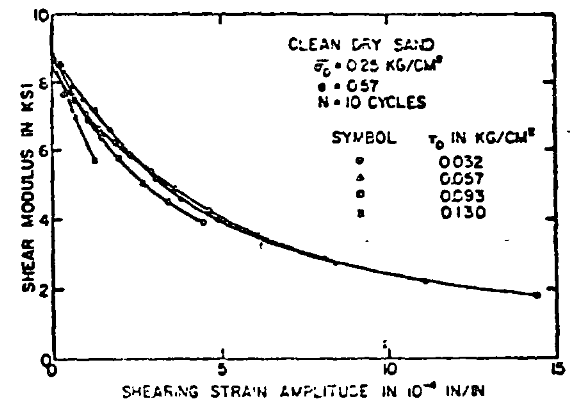


FIG. 15.—EFFECT OF INITIAL SHEAR STRESS ON SHEAR MODULUS VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR CLEAN DRY SAND

pressures may develop in saturated cohesionless soils but are accounted for by using effective stress. Degree of saturation is used as a parameter for cohesive soils because of the difficulty in determining the effective stress in such soils when partially saturated. The lack of influence of degree of saturation on cohesionless soils has been reported by Richart, et al. (7,17,23). As an example for cohesive soils, G_{max} for a silty clay at 100 lb/ft³ (15,700 N/m³) dry density, and under a total mean principal stress of 4 kg/cm² (3.92 bars), decreases from 38 ksi to 17 ksi with increasing degree of saturation from 70 % to 100 %. The liquid limit for this soil was 48 % and the plastic limit was 28 %.

Effects of Very Important Parameters on Shear Damping.—The damping ratio, D, for soils increases with strain amplitude as shown in Fig. 13, and is apparently equal to zero for zero strain amplitude. At least the values measured at strain amplitudes on the order of 10^{-6} in./in. are very small (see Fig. 6). At large strain amplitudes the damping ratio appears to approach a maximum value, D_{max}, asymptotically. This concept of D_{max} has not been proven, but has been used successfully in Ref. 14 to define these damping curves over the range of strain amplitudes tested, using a modified hyperbolic relationship. The characteristic shape of the damping ratio-strain amplitude curves for clean sands, in Fig. 13, also apply to cohesive soils as shown in Fig. 14. (There are test results in Fig. 14 for three cases where only two data points are plotted. In these cases a light dashed line is drawn between the two points to indicate the trend, but is not meant to indicate that damping varies linearly with strain amplitude.) The bold dashed curves in Fig. 14 represent data reported by Hall and Richart (7) for Ottawa sand and data reported by Krizek and Franklin (20) for Georgia kaolin.

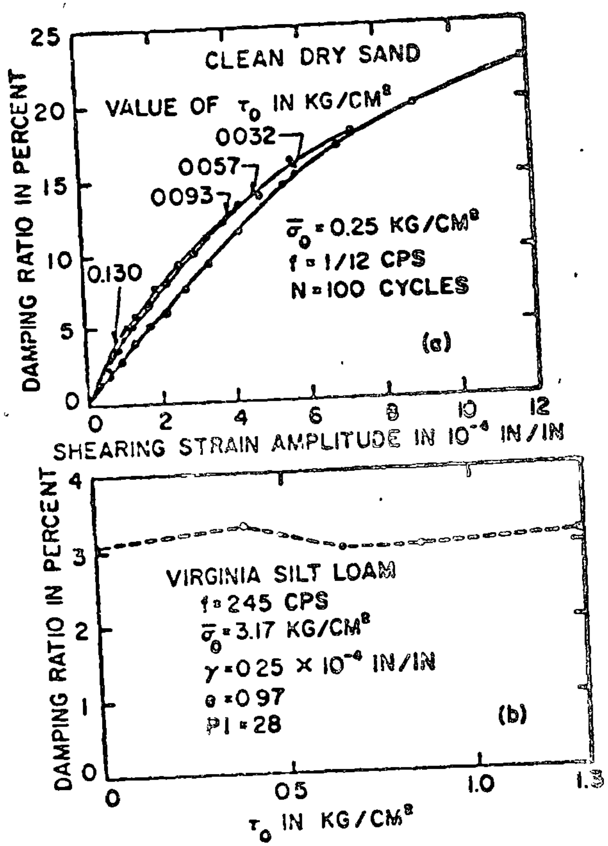


FIG. 16.—(*a*) EFFECT OF INITIAL SHEAR STRESS ON DAMPING RATIO VERSUS SHEARING STRAIN AMPLITUDE FOR CLEAN DRY SAND, (*b*) DAMPING RATIO VERSUS INITIAL SHEAR STRESS FOR VIRGINIA SILT-LOAM

Fig. 13 shows how the damping ratio for a given strain amplitude decreases with both number of cycles of loading and effective mean principal stress. The damping ratio for both cohesive and cohesionless soils decreases approximately with the logarithm of the number of cycles of loading (see Fig. 12). However, there is evidence (4) to indicate that damping begins to increase with number of cycles greater than 50,000. This is thought to involve some fatigue mechanism. The damping decreases approximately with the square root of mean principal effective stress.

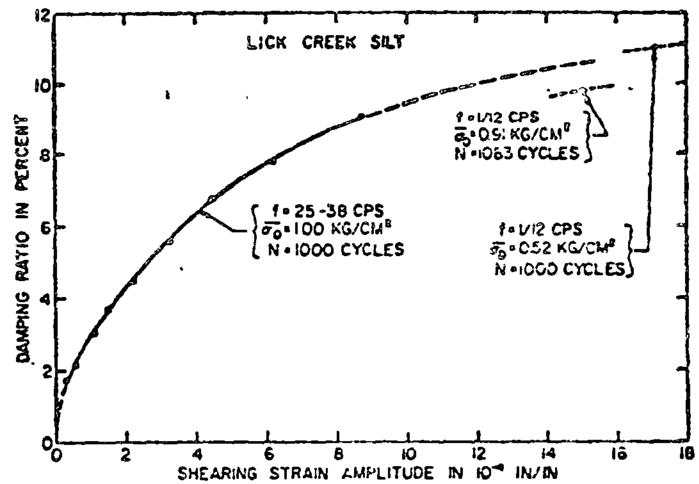


FIG. 17.—EFFECT OF FREQUENCY ON DAMPING RATIO

Fig. 14 indicates the range of damping that can be expected at a given strain amplitude in different soils, under different conditions of stress and density. For the cases shown in Fig. 14, at a strain amplitude of 10 × 10^{-4} in./in. (0.1 %), the damping ratio ranges from 4 % to 23 %. As with modulus it is obvious that a single curve is not sufficient, even for practical purposes, to represent such a wide range. However, the method of dealing with strain presented in Ref. 14 makes it possible to represent all of the curves in Fig. 14 by a simple relationship.

The effect of void ratio on damping is not clearly shown in Fig. 14 but some values of damping determined from the relatively low strain amplitude tests with the high frequency resonant column apparatus are given in Table 2 with the corresponding values of void ratio. The data for these undisturbed natural soils clearly show the trend of decreasing damping ratio with increasing void ratio.

Effects of Initial Shear Stress.—The effects of initial states of stress involving a deviatoric component on G_{max} for sand and clay have been reviewed in the literature (10,11,12). The effect was found to be very small. Additional data showing the effect of an initial shear stress, as defined in Fig. 3, on the modulus are shown in Fig. 15 for 10 cycles of loading. The magnitude of the deviatoric component of stress is defined by the value of the octahedral shear stress, τ_o. The effect of relatively high initial shear stress on the modulus is small after 10 cycles of complete stress reversal when cyclic strain amplitude is measured from the center of the loop. The maximum shear stress applied to the specimen, at the highest strain amplitude for each curve in Fig. 15, is very near (and in some cases slightly above) the estimated static shear strength of the soil (e = 0.57 and ϕ = 43°). Note that only a very small shearing strain amplitude is necessary to produce this condition.

The effect of initial shear stress or damping ratio for the same sand is shown in Fig. 16. The damping is increased by the initial shear stress, the increase being more significant at the lower strain amplitudes. In Fig. 16(a) the τ_o = 0.032 kg/cm² (0.031 bars) was applied to the hollow cylindrical specimen by an axial load from the weight of the top cap and loading arms. The other values of τ_o in Fig. 16(a) are developed by a combination of an axial load and an initial shear stress applied by an initial torque. Using the τ_o = 0.130 kg/cm² (0.127 bars) as an example, 0.032 kg/cm² (0.031 bars) was applied by axial load and the remaining 0.098 kg/cm² (0.096 bars) was applied by an initial torque. For the test data shown in Fig. 16(b) the initial octahedral shear stress was applied only by axial load acting on a solid cylindrical specimen. In Fig. 16(b) the damping ratio for vibration at an average shear strain amplitude in the specimen of 0.25 × 10^{-4} in./in. is shown for different values of τ_o, with $\bar{\sigma}_o$ held constant. These data confirm that the deviatoric component (octahedral shear stress) of the initial state of stress is much less important to the modulus and damping in soils than the isotropic component (effective mean principal stress).

Effects of Frequency.—Fig. 17 shows the damping ratio versus strain amplitude for a specimen of Lick Creek Silt as measured with the low frequency resonant column device (shown by open circle symbols). These measurements were made after 1,000 cycles of loading and the specimen was under $\bar{\sigma}_o$ = 1.00 kg/cm² (0.98 bars). The frequency was between 25 Hz and 38 Hz. Also shown are two values of damping ratio measured at 1,000 and 1,083 cycles, with the 1/12 Hz device, under 0.52 kg/cm² (0.51 bars) and 0.91 kg/cm² (0.89 bars), respectively. Comparison of these data show that for this undisturbed cohesive soil, damping only increased slightly with frequency within the range considered. Hardin and Black (10,12) have shown that dry cohesionless soils are almost unaffected by frequency from essentially zero to a few hundred cycles per second. Although frequencies above 0.1 Hz have a relatively minor effect on the modulus and damping in cohesive soils, the behavior should be expected to change drastically for much lower frequencies where creep phenomena are involved.

Time Effects Other Than Frequency.—The thixotropic behavior of soils causes an increase in the modulus and a decrease in the damping with time. The increase in G_{max} with time, as measured by vibration tests, has been reviewed in the literature (5,11,18). However, Fig. 12 shows the recovery of modulus and damping with time after alteration by high amplitude cyclic loading. In Fig. 12(a) the shear modulus and in Fig. 12(b) the damping ratio are plotted versus number of cycles of loading. The measurement for the curves marked 1 at 1.9 × 10^{-4} in./in. were made first. Then the amplitude was increased successively to 4.6 × 10^{-4} and 8.2 × 10^{-4} in./in. to obtain the data for curves 2 and 3. Immediately after cyclic loading at 8.2 × 10^{-4} in./in., the loading was reduced to the value for curves 1 and the strain amplitude was 2.4 × 10^{-4} in./in. The high strain amplitude loading had caused a decrease in modulus and an increase in damping in the Lick Creek Silt, as shown by curves 4 compared to curves 1. However, when the specimen was allowed to rest overnight (approximately 15 hr) and was then tested under the same loading, almost complete recovery had occurred. The modulus had increased and the damping ratio had decreased during the rest time (curves 5) to near their original small strain amplitude values (curves 1). This behavior indicates that during an earthquake producing low to moderate strains the modulus of cohesive soils decreases and the damping increases with each cycle but that the soil will recover very rapidly from the effect of the quake.

Effects of Other Parameters in Table 1.—The effect, or lack of effect, of overconsolidation ratio, grain characteristics, and soil structure on G_{max} have been reviewed in the literature (11,12,24). The effect of preconsolidation is to increase G_{max} over the normally consolidated value, depending on the plasticity index, PI, of the soil, with almost no effect of overconsolidation for PI = 0. An equation for G_{max} including this effect is given in Ref. 12. The effect of overconsolidation on the behavior at larger strain amplitudes will be shown by the treatment in Ref. 14.

The last parameter in Table 1 to be considered is dilation. What volume changes result from pure or simple shear? The data thus far available indicate that there is very little volume change due to pure or simple shear of cohesive soils for shear strains less than about 0.5 %. This limit on strain will not be a constant for all initial states of stress, environmental conditions, etc., and for some conditions may be much higher. The limit is not at all well established for clean sands and may be much lower than 0.5 %. However for many practical problems the most important range of strains is from 0 % to 0.1 %. If there is no significant volume change due to pure or simple shear within this range, then effective stresses will not be changed during shear, even though undrained conditions prevail. The writers are presently trying to accurately establish the volume changes that result from pure or simple shear of soils.

CONCLUSIONS

The shear modulus and damping in soils are important to the analysis of all soil vibration problems. In particular, the modulus and damping for small strain amplitudes are necessary for the analysis of foundation vibrations. For the analysis of earthquake effects, the modulus and damping for a range of strain amplitudes are needed. The data presented herein should be helpful in choosing the proper values of modulus and damping for such analyses. The data show that single values of modulus and damping cannot be used for the complete analysis because of their dependence on strain amplitude, state of stress, and environmental conditions.

The relative importance of the many parameters that affect the modulus and damping of soils is shown by Table 1. The relative importance assigned to parameters in Table 1 is supported by the data presented herein and by data in the literature.

The following conclusions concern the effects of the more important parameters:

1. The shear modulus decreases and damping ratio increases, very rapidly, with increasing strain amplitude. However, the rate of decrease or increase depends on many parameters and a single relationship between modulus or damping and strain amplitude is not sufficient. The initial rates of decrease in modulus or increase in damping are higher for: (1) Lower effective mean principal stress; (2) higher void ratio; (3) and lower number of cycles of loading. The initial rates are also higher for cohesive than for cohesionless soils (other conditions being equal).

2. The shear modulus increases and the damping ratio decreases with increasing effective mean principal stress. For very small strain amplitudes the modulus varies with the 0.5 power of effective mean principal stress, but at large strain amplitudes the modulus depends primarily on the strength of the soil and the variation is more nearly with the 1.0 power. The damping decreases approximately with the 0.5 power of effective mean principal stress independent of strain amplitude. The deviatoric component of the ambient state of stress in the soil has a much smaller effect than the effective mean principal stress.

3. The modulus decreases and the damping ratio decreases with increasing void ratio in undisturbed cohesive soils. The effect is accounted for by $F(e)$ as defined herein.

4. The shear modulus decreases for cohesive soils and increases slightly for cohesionless soils with the number of cycles of loading. The damping ratio decreases approximately with the logarithm of the number of cycles of loading in both cohesive and cohesionless soils, up to about 50,000 cycles. Beyond this there appears to be a fatigue mechanism involved that causes the damping to increase with the number of cycles.

5. The effect of degree of saturation on the modulus and damping in cohesionless soils is small, but the modulus of cohesive soils increases rapidly with decreasing degree of saturation.

6. Thixotropic effects cause the modulus to increase and the damping ratio to decrease with time, particularly in cohesive soils. The recovery of modulus and damping with time after high amplitude cyclic loading as shown in Fig. 12 is also significant.

ACKNOWLEDGMENTS

Portions of this work were sponsored by National Science Foundation grants GK 532 and GK 3503. The writers are grateful for this support. They would also like to note that the facilities of the computing center at the University of Kentucky were used. The services provided by their staff are greatly appreciated.

APPENDIX I.—REFERENCES

---

1. Bjerrum, L., and Landva, A., "Direct Simple Shear Tests on [illegible] Quick Clay," *Geotech-

nique Vol 16, No 1, London, England, 1966, pp. 1–20.

2. Converse, F. J., "Stress Deformation Relations for Soft Saturated Silt Under Low Frequency Oscillating Direct Shear Forces," *Special Technical Publication No 305*, American Society for Testing and Materials, 1962, pp 15–19.

3. Drnevich, V P, Hall, J R, Jr, and Richart, F E, Jr, "Effects of Amplitude of Vibration on the Shear Modulus of Sand," *Proceedings of the International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials* Albuquerque N M, 1967, pp 189–199.

4. Drnevich, V P, and Richart, F E, Jr, "Dynamic Prestraining of Dry Sand" *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol 96, No SM2, Proc Paper 7160, Mar., 1970, pp. 453–469

5. Gray, D. H, and Kashmeeri, N, "The Use of Dynamic Shear Modulus Measurements to Investigate Thixotropic Behavior of Compacted Clays," Specialty Session 16, *Proceedings*, Seventh Internation Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico City, Mexico, Vol. 3, 1969, p. 529.

6. Hall, J. R., Jr., "Effect of Amplitude on Damping and Wave Propagation in Granular Materials," thesis presented to the University of Florida, at Gainesville, Fla., in 1961, in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy.

7. Hall, J. R., Jr., and Richart, F E, Jr., "Dissipation of Elastic Wave Energy in Granular Soils," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 89, No. SM6, Proc. Paper 3698, Nov., 1963, pp. 27–56.

8. Hardin, B O, "Dynamic Versus Static Shear Modulus for Dry Sand," *Materials, Research and Standards*, American Society for Testing and Materials, Vol 5, No. 5, May, 1965, pp. 232–235.

9. Hardin, B O., "The Nature of Damping in Sands," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol 91, No SM1, Proc. Paper 4206, Jan, 1965, pp 63–97.

10. Hardin, B O, and Black, W L., "Sand Stiffness Under Various Triaxial Stresses," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol 92, No. SM2, Proc. Paper 4712, Mar, 1966, pp. 27–42.

11. Hardin, B O., and Black, W. L., "Vibration Modulus of Normally Consolidated Clay," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol 94, No SM2, Proc. Paper 5833, Mar., 1968, pp 353–369.

12. Hardin, B O, and Black, W. L., closure to "Vibration Modulus of Normally Consolidated Clay," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95, No. SM6, Proc. Paper 6394, Nov., 1969, pp. 1531–1537.

13. Hardin, B O., and Drnevich, V. P., "Shear Modulus and Damping in Sands, I. Measurement and Parameter Effects," *Technical Report No UKY 26-70-CE2*, University of Kentucky, College of Engineering, Soil Mechanics Series No 1, Lexington, Ky., 1970.

14. Hardin, B O., and Drnevich, V. P., "Shear Modulus and Damping in Soils Design Equations and Curves," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 98, No. SM7, Proc Paper 9006, July, 1972.

15. Hardin, B O, and Mossbarger, W. A., Jr, "The Resonant Column Technique for Vibration Testing of Soils and Asphalts," *Proceedings*, Instrument Society of America, Oct., 1966.

16. Hardin, B O, and Music, J., "Apparatus for Vibration of Soil Specimens During the Triaxial Test," *Instruments and Apparatus for Soil and Rock Mechanics*, American Society for Testing and Materials, STP 392, 1965, pp. 55–74.

17. Hardin, B O, and Richart, F. E., Jr, "Elastic Wave Velocities in Granular Soils," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol 89, No SM1, Proc. Paper 3407, Feb., 1963, pp 33–65.

18. Humphries, W K., "The Effects of Stress History on the Dynamic Response of Clay Soils," thesis presented to North Carolina State University, at Raleigh, N C., in 1966, in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy.

19. Ko, H.-Y., and Scott, R F., "Deformation of Sand at Failure," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE Vol. 94, No SM4, Proc. Paper 6028, July, 1968, pp. 883–898.

20. Krizek, R J., and Franklin, A G., "Nonlinear Dynamic Response of Soft Clay," *Vibration Effects of Earthquakes on Soils and Foundations*, American Society for Testing and Materials, STP 450, 1969, pp. 96-114.

21. Lambe, T. W., and Whitman, R. V., "Stress-Strain Relationships," *Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1969, pp. 151-161.
22. Lawrence, F. V., Jr., "Ultrasonic Shear Wave Velocities in Sand and Clay," Report 23, *Response of Soils to Dynamic Loadings*, directed by R. V. Whitman, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., Jan., 1965.
23. Richart, F. E., Jr., Hall, J. R., Jr., and Woods, R. D., "Behavior of Dynamically Loaded Soils," *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1970, pp. 151-170.
24. Roscoe, K. H., Bassett, R. H., and Cole, E. R. L., "Principal Axes Observed During Simple Shear of a Sand," *Proceedings*, Geotechnical Conference, Oslo, Norway, 1967, pp. 231-237.
25. Theirs, G. R., and Seed, H. B., Cyclic Stress-Strain Characteristics of Clay," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 94, No. SM2, Proc. Paper 5871, Mar., 1968, pp. 555-569.

APPENDIX II.—NOTATION

The following symbols are used in this paper:

A_L = area of stress-strain loop;
A_T = area of traingle shown in Fig. 5;
B = amplitude of motion at bottom of soil layers;
D = damping ratio;
e = void ratio;
$F(e)$ = function to account for effect of void ratio on G_{max};
f = frequency of cyclic loading;
G = shear modulus (line through end points of stress-strain loop);
G_{max} = shear modulus at zero shearing strain amplitude;
K_o = coefficient of earth pressure at rest;
MF = magnification factor;
N = number of cycles of loading;
PI = plasticity index;
T = amplitude of motion at top of soil layers;
γ = shearing strain amplitude;
γ_{dry} = dry unit weight;
σ_o = total mean principal stress;
$\bar{\sigma}_a$ = effective vertical stress due to axial load on specimen;
$\bar{\sigma}_o$ = effective mean principal stress;
$\bar{\sigma}_p$ = effective uniform pressure applied to specimen during test;
$\bar{\sigma}_v$ = effective vertical stress;
τ = cyclic shearing stress;
τ_o = octahedral shearing stress; and
ϕ = angle of shearing resistance.

Journal of the
SOIL MECHANICS AND FOUNDATIONS DIVISION
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

EFFECT OF WALL MOVEMENT ON ACTIVE AND PASSIVE PRESSURES

By Ian K. Lee,[1] M. ASCE and John R. Herington[2]

INTRODUCTION

Traditional methods for determining active and passive pressures provide statically admissible solutions based on the assumption that the shear strength along an assumed failure surface can be expressed by the constants, c and ϕ. The analyses also necessitate assuming values of wall adhesion c_w, and friction ϕ_w considered to lie between the smooth (shear stress free) and rough (maximum interfacial shear stress) conditions. The elementary kinematics of the problem dictates the direction of the interfacial shear stresses, thus leading to the alternative positive or negative states for both active and passive pressures.

The effectiveness of these simplifying assumptions can be studied by use of the theory of plasticity, and this more rigorous approach to the problem allows a detailed study to be made of the effect of wall movement on the active and passive thrusts. A c-ϕ-γ rigid plastic material is implied in the traditional methods of analysis and this is the model used in the plasticity solutions. The limitations of this material model, and the conditions under which it is applicable to a real soil, can be examined by a comparison of theoretical predictions with relevant experimental data.

When the rigid plastic behavior is assumed, an infinitesimal movement of the material along the interface develops the rough positive or negative interfacial states. Conversely, however, zero relative interfacial movement can be associated with any stress state intermediate between the two limiting rough states. By comparison, a real soil requires a finite interfacial movement to develop the intermediate stress state.

From a consideration of the velocity field for certain modes of wall move-

Note.—Discussion open until November 1, 1972. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Director, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. SM6, June, 1972. Manuscript was submitted for review for possible publication on October 18, 1971.

[1] Prof. of Civ. Engrg., The Univ. of New South Wales, New South Wales, Australia.
[2] Engr., Dames and Moore, Sydney, Australia.

1.4 Prueba de Penetración estándar

APENDICE

Exploración y muestreo en suelos

A-1. Introducción

De todo lo dicho anteriormente en los diferentes capítulos de la Mecánica de Suelos se desprende de una manera obvia la necesidad que se tiene de contar, tanto en la etapa de proyecto, como durante la ejecución de la obra de que se trate, con datos firmes, seguros y abundantes respecto al suelo con el que se está tratando. El conjunto de estos datos debe llevar al proyectista a adquirir una concepción razonablemente exacta de las propiedades físicas del suelo que hayan de ser consideradas en sus análisis. En realidad es en el laboratorio de Mecánica de Suelos en donde el proyectista ha de obtener los datos definitivos para su trabajo, primero, al realizar las pruebas de clasificación ubicará en forma correcta la naturaleza del problema que se le presenta y de esta ubicación podrá decidir, como segunda fase de un trabajo, las pruebas más adecuadas que requiere su problema particular, para definir las características de deformación y resistencia a los esfuerzos en el suelo con que haya que laborar.

Pero para llegar en el laboratorio a unos resultados razonablemente dignos de crédito es preciso cubrir en forma adecuada una etapa previa e imprescindible: la obtención de las muestras de suelo apropiadas para la realización de las correspondientes pruebas.

Resultan así estrechamente ligadas las dos importantes actividades, el muestreo de los suelos y la realización de las pruebas necesarias de laboratorio. El muestreo debe estar regido ya anticipadamente por los requerimientos impuestos a las muestras obtenidas por el programa de pruebas de laboratorio y, a su vez, el programa de pruebas debe estar definido en términos de la naturaleza de los problemas que se suponga puedan resultar del suelo presente en cada obra, el cual no puede conocerse sin efectuar previamente el correspondiente muestreo. Aparece así un círculo vicioso, de cuyo correcto balance depende el éxito en un programa de muestreo y pruebas. El círculo suele resolverse recurriendo a la ayuda de programas preliminares de exploración y muestreo. Por procedimientos simples y económicos, debe procurar adquirirse una información preliminar suficiente respecto al suelo, información que, con ayuda de pruebas de clasificación, tales como granulometría y límites de plasticidad, permita formarse una idea clara de los problemas que sean de esperar en cada caso particular. El conocimiento apriorístico de tales problemas permite, a su vez, programar en forma completa las pruebas necesarias para la obtención del cuadro completo de datos de proyecto, investigando todas aquellas propiedades físicas del suelo de las que se pueda sospechar que lleguen a plantear en la obra una condición crítica. La realización de esta nueva serie de pruebas definitivas suele presentar nuevas exigencias respecto a las muestras de suelo de que haya de disponerse y ello obligará, en general, a efectuar nuevas operaciones de sondeo y muestreo, a fin de obtener las muestras definitivas.

Así pues, en general, se tendrán dos tipos de sondeos: preliminares y definitivos, cada uno con sus métodos propios de muestreo.

En realidad, la programación de un muestreo correcto es un problema mucho más complejo que lo que dan a entender los párrafos anteriores y muchos aspectos dependen fundamentalmente de la experiencia particular del ingeniero y difícilmente se encasillan en normas fijas.

Uno de los aspectos más importantes de los de esta última categoría es una correcta valuación de la importancia de la obra por ejecutar, en relación con el costo de su correspondiente programa de exploración y muestreo. Una obra de importancia grande ameritará un programa de una envergadura totalmente inadecuada para una obra menor. Y no sólo la importancia de la obra juega papel como norma de criterio del proyectista, sino también el tipo de obra, en relación, por ejemplo, con las consecuencias de su falla respecto a pérdidas en bienes o vidas: puede haber obras de poco costo cuyos requerimientos de seguridad y, por lo tanto, de previsión en el proyecto, sean mucho mayores que en otras obras de mayor inversión presupuestal. Un aspecto importante será siempre que la magnitud, tanto en tiempo como en costo, del programa de exploración y muestreo esté acorde con el tipo de obra por ejecutar.

Otro aspecto de importancia fundamental en los problemas aquí tratados es el buscar la colaboración de ciencias que, como la Geología, pueden dar en ocasiones información de carácter general muy importante. Puede decirse que, sobre todo en obras de importancia, un reconocimiento serio y eficaz, desde un punto de vista geológico, resulta imprescindible. Este reconocimiento será, naturalmente, previo a cualquier otra actividad realizada por el especialista de Mecánica de Suelos.

Del tipo de sedimentos, existencia de fallas, plegamientos, etc., configuración geológica, tipos y carácter de rocas y demás datos de la zona, resultan, por lo general, informaciones vitales para el ingeniero civil, que norman su criterio de antemano en forma útil.

A-2. Tipos de sondeos

Los tipos principales de sondeos que se usan en Mecánica de Suelos para fines de muestreo y conocimiento del subsuelo, en general, son los siguientes:

Métodos exploratorios de carácter preliminar

a) Pozos a cielo abierto, con muestreo alterado o inalterado.
b) Perforaciones con posteadora, barrenos helicoidales o métodos similares.
c) Métodos de lavado.
d) Método de penetración estándar.
e) Método de penetración cónica.
f) Perforaciones en boleos y gravas (con barretones, etc.)

Métodos de sondeo definitivo

a) Pozos a cielo abierto con muestreo inalterado.
b) Métodos con tubo de pared delgada.
c) Métodos rotatorios para roca.

Métodos geofísicos

a) Sísmico.
b) De resistencia eléctrica.
c) Magnético y gravimétrico.

A continuación se describen brevemente los diferentes métodos mencionados.

A-3. Sondeos exploratorios

a) Pozos a cielo abierto

Cuando este método sea practicable debe considerársele como el más satisfactorio para conocer las condiciones del subsuelo, ya que consiste en excavar un pozo de dimensiones suficientes para que un técnico pueda directamente bajar y examinar los diferentes estratos de uelo en su estado natural, así como darse cuenta de las condiciones precisas referentes al agua contenida en el suelo. Desgraciadamente este tipo de excavación no puede llevarse a grandes profundidades a causa, sobre todo, de la dificultad de controlar el flujo de agua bajo el nivel freático; naturalmente que el tipo de suelo de los diferentes estratos atravesados también influye grandemente en los alcances del método en sí. La excavación se encarece mucho cuando sean necesarios ademes y haya excesivos traspaleos a causa de la profundidad.

Deben cuidarse especialmente los criterios para distinguir la naturaleza del suelo "in situ" y la misma, modificada por la excavación realizada. En efecto, una arcilla dura puede, con el tiempo, aparecer como suave y esponjosa a causa del flujo de agua hacia la trinchera de excavación; análogamente, una arena compacta puede presentarse como semifluida y suelta por el mismo motivo. Se recomienda que siempre que se haga un pozo a cielo abierto se lleve un registro completo de las condiciones del subsuelo durante la excavación, hecho por un técnico conocedor.

Si se requiere ademe en el pozo puede usarse madera o acero; por lo regular, el ademe se hace con tablones horizontales, pero deberán ser verticales y bien hincados si se tuviesen suelos friccionantes situados bajo el nivel freático.

En estos pozos se pueden tomar muestras alteradas o inalteradas de los diferentes estratos que se hayan encontrado. Las muestras alteradas son simplemente porciones de suelo que se protegerán contra pérdidas de humedad introduciéndolas en frascos o bolsas emparafinadas. Las muestras inalteradas deberán tomarse con precauciones, generalmente labrando la muestra en una oquedad que se practique al efecto en la pared del pozo. La muestra debe protegerse contra pérdidas de humedad envolviéndola en una o más capas de manta debidamente impermeabilizada con brea y parafina.

b) Perforaciones con posteadora, barrenos helicoidales o métodos similares

En estos sondeos exploratorios la muestra de suelo obtenida es completamente alterada, pero suele ser representativa del suelo en lo referente a contenido de agua, por lo menos en suelo muy plástico. La muestra se extrae con herramientas del tipo mostrado en la Fig. A-1.

Los barrenos helicoidales pueden ser de muy diferentes tipos no sólo dependiendo del suelo por atacar, sino también de acuerdo con la preferencia particular de cada perforista. El principio de operación resulta evidente al ver la Fig. A-1 a. Un factor importante es el paso de la hélice que debe ser muy cerrado para suelos arenosos y mucho más abierto para el muestreo en suelos plásticos.

Posiblemente más usadas en México que los barrenos son las posteadoras (Fig. A-1.b) a las que se hace penetrar en el terreno ejerciendo un giro sobre el maneral adaptado al extremo superior de la tubería de perforación.

Las herramientas se conectan al extremo de una tubería de perforación, formada por secciones de igual longitud, que se van añadiendo según aumenta la profundidad del sondeo.

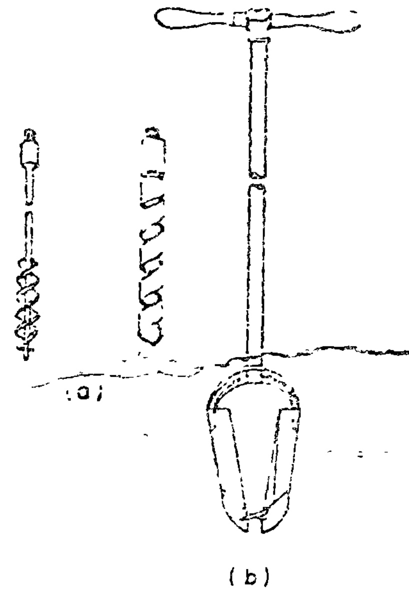


FIG A-1 HERRAMIENTAS PARA SONDEOS EXPLORATORIOS POR ROTACION
a) - Barrenos helicoidales
b) - Posteadora

En arenas colocadas bajo el nivel de aguas freáticas estas herramientas no suelen poder extraer muestras y en esos casos es preferible recurrir al uso de cucharas especiales, de las que también hay gran variedad de tipos. En la Fig. A-2 aparecen esquemáticamente dos de las más comunes.

Las muestras de cuchara son generalmente más alteradas todavía que las obtenidas con barrenos helicoidales y posteadoras; la razón es el efecto del agua que entra en la cuchara junto con el suelo, formando en el interior una pseudo-suspensión parcial del mismo. Es claro que en todos estos casos las muestras son cuando mucho apropiadas solamente para pruebas de clasificación y, en general, para aquellas pruebas que no requieran muestra inalterada. El contenido de agua de las muestras de barreno suele ser mayor del real, por lo que el método no excluye la obtención de muestras más apropiadas, por lo menos cada vez que se alcanza un nuevo estrato.

Frecuentemente se hace necesario ademar el pozo de sondeo, lo cual se realiza con tubería de hierro, hincada a golpes, de diámetro suficiente para permitir el paso de las herramientas muestreadoras. En la parte inferior una zapata afilada facilita la penetración. A veces, la tubería tiene secciones de diámetros decrecientes, de modo que las secciones de menor diámetro vayan entrando en las de mayor. Los diferentes segmentos se retiran al fin del trabajo usando gatos apropiados.

Para el manejo de los segmentos de tubería de perforación y de ademe, en su caso, se usa un trípode provisto de una polea, a una alt.

a que permita las manipulaciones necesarias. Los segmentos manejados se sujetan a través de la polea con "cable de manila" o cable metálico inclusive; los operadores pueden intervenir manualmente en las operaciones, guiando y sujetando los segmentos de tubería de perforación por medio de llaves de diseño especial propias para esas maniobras y para hacer expedita la operación del atornillado de los segmentos.

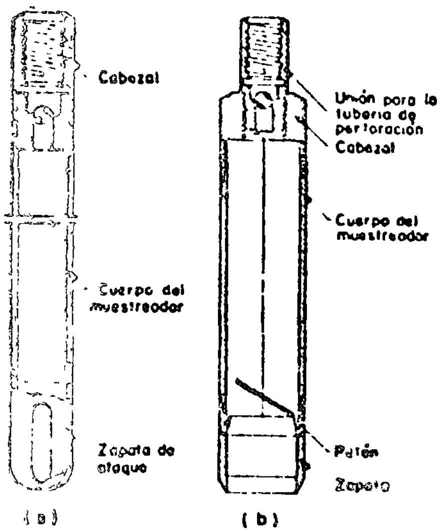


FIG A-2 TIPOS DE CUCHARAS MUESTREADORAS

Un inconveniente serio de la perforación con barrenos se tiene cuando la secuencia estratigráfica del suelo es tal que a un estrato firme sigue uno blando. En estos casos es muy frecuente que se pierda la frontera entre ambos o aun la misma presencia del blando.

El error anterior tiende a atenuarse accionando el barreno helicoidal tan adelantado respecto al ademe como lo permita el suelo explorado.

c) Método de lavado

Este método constituye un procedimiento económico y rápido para conocer aproximadamente la estratigrafía del subsuelo (aun cuando la experiencia ha comprobado que pueden llegar a tenerse errores hasta de 1 m al marcar la frontera entre los diferentes estratos). El método se usa también en ocasiones como auxiliar de avance rápido en otros métodos de exploración. Las muestras obtenidas en lavado son tan alteradas que prácticamente no deben ser consideradas como suficientemente representativas para realizar ninguna prueba de laboratorio.

El equipo necesario para realizar la perforación incluye un trípode con polea y martinete suspendido, de 80 a 150 Kg de peso, cuya función es hincar en el suelo a golpes el ademe necesario para la operación. Este ademe debe ser de mayor diámetro que la tubería que vaya a usarse para la inyección del agua. En el extremo inferior de la tubería de inyección debe ir un trépano de acero, perforado, para permitir el paso del agua a presión. El agua se impulsa dentro de la tubería por medio de una bomba.

La operación consiste en inyectar agua en la perforación, una vez hincado el ademe, la cual forma una suspensión con el suelo en el fondo

del pozo y sale al exterior a través del espacio comprendido entre el ademe y la tubería de inyección, una vez fuera es recogida en un recipiente en el cual se puede analizar el sedimento. El procedimiento debe ir complementado en todos los casos por un muestreo con una cuchara sacamuestras apropiada, colocada al extremo de la tubería en lugar del trépano; mientras las características del suelo no cambien será suficiente obtener una muestra cada 1.50 m aproximadamente, pero al notar un cambio en el agua eyectada debe procederse de inmediato a un nuevo muestreo. Al detener las operaciones para un muestreo debe permitirse que el agua alcance en el pozo un nivel de equilibrio, que corresponde al nivel freático (que debe registrarse). Cualquier al-

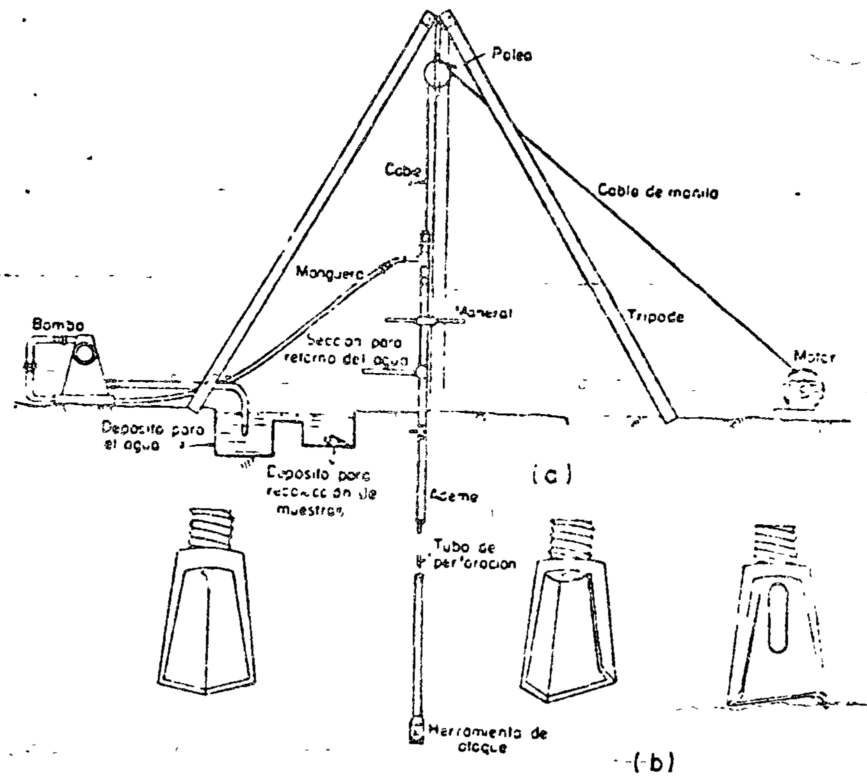


FIG A-3 DISPOSITIVO PARA EL SONDEO POR LAVADO
a) - Conjunto
b) - Barrenos de perforación

·nación de dicho nivel que sea observada en los diferentes muestreos ebe reportarse especialmente.

En la Fig A-3 aparece un esquema del equipo de perforación y lgunos modelos de trépanos perforados.

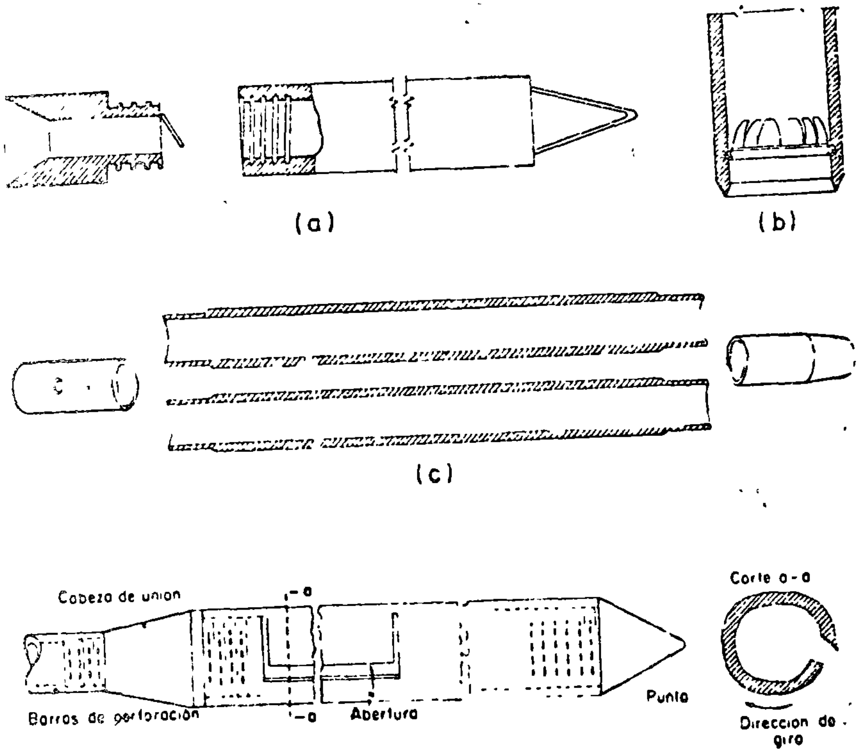


FIG A-4 TIPOS DE MUESTREADORES

En la Fig. A-4 se muestran algunos de los más usados modelos de muestreadores que se colocan en el extremo inferior de la tubería de inyección a fin de obtener muestras representativas.

Los tipos a), b) y c) se introducen a golpes en el suelo y de ellos quizá el más común es el de media caña, así llamado por poder dividirse longitudinalmente para facilitar la extracción de la muestra. El muestreador de trampa de muelles tiene en su parte inferior unas hojas metálicas que dejan entrar la muestra en la cámara inferior, pero que

dificultan su salida. El cucharón raspador es de utilidad para el muestreo de arenas bajo el nivel freático y funciona, naturalmente, por rotación.

d) Método de penetración estándar

Este procedimiento es, entre todos los exploratorios preliminares, quizá el que rinde mejores resultados en la práctica y proporciona más

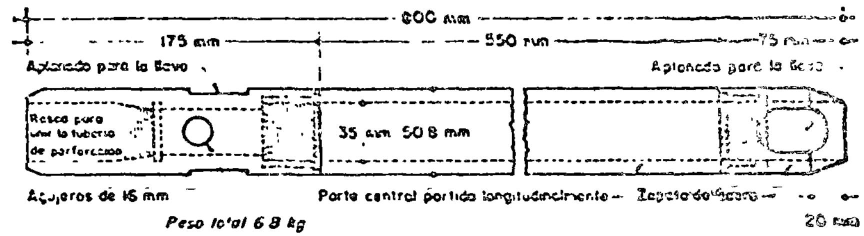


FIG. A-5 PENETRÓMETRO ESTÁNDAR

útil información en torno al subsuelo y no sólo en lo referente a descripción; probablemente es también el más ampliamente usado para esos fines en México.

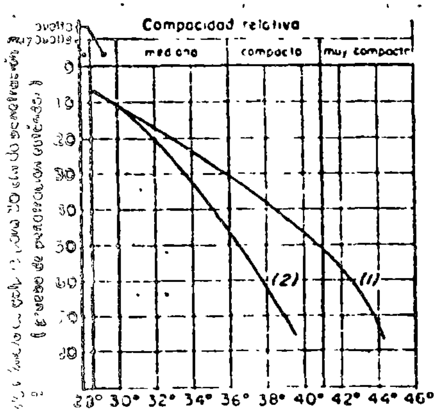
En suelos puramente friccionantes la prueba permite conocer la compacidad de los mantos que, como repetidamente se indicó, es la característica fundamental respecto a su comportamiento mecánico. En suelos plásticos la prueba permite adquirir una idea, si bien tosca, de la resistencia a la compresión simple. Además el método lleva implícito un muestreo, que proporciona muestras alteradas representativas del suelo en estudio.

El equipo necesario para aplicar el procedimiento consta de un muestreador especial (muestreador o penetrómetro estándar) de dimensiones establecidas, que aparece esquemáticamente en la Fig. A-5.

Es normal que el penetrómetro sea de media caña, para facilitar la extracción de la muestra que haya penetrado en su interior. El penetrómetro se enrosca al extremo de la tubería de perforación y la prueba consiste en hacerlo penetrar a golpes dados por un martinete de 63.5 Kg (140 libras) que cae desde 76 cm (30 pulgadas), contando el número de golpes necesario para lograr una penetración de 30 cm (1 pie). El martinete, hueco y guiado por la misma tubería de perforación, es elevado por un cable que pasa por la polea del trípode y dejado caer desde la altura requerida contra un ensanchamiento de la misma tubería de perforación hecho al efecto. En cada avance de

30 cm debe retirarse el penetrómetro, removiendo al suelo de su interior, el cual constituye la muestra.

El fondo del pozo debe ser previamente limpiado de manera cuidadosa, usando posteadora o cuchara del tipo de las mostradas en la Fig. A-2. Una vez limpio el pozo, el muestreador se hace descender hasta tocar el fondo y, seguidamente, a golpes, se hace que el penetrómetro entre 15 cm dentro del suelo. Desde este momento deben contarse los golpes necesarios para lograr la penetración de los siguientes 30 cm. A continuación hágase penetrar el muestreador en toda su longitud. Al retirar el penetrómetro, el suelo que haya entrado en su interior constituye la muestra que puede obtenerse con este procedimiento.



(1) Relación para arenas de grano anguloso o redondeado de mediano a grueso

(2) Relación para arenas finas y para arenas limosas

Fig. A-6 Correlación entre el número de golpes para 30 cm de penetración estándar y el ángulo de fricción interna de las arenas

La utilidad e importancia mayores de la prueba de penetración estándar radican en las correlaciones realizadas en el campo y en el laboratorio en diversos suelos, sobre todo arenas, que permiten relacionar aproximadamente la compacidad, el ángulo de fricción interna, ø, en arenas y el valor de la resistencia a la compresión simple, q_u, en arcillas, con el número de golpes necesarios en ese suelo para que el penetrómetro estándar logre entrar los 30 cm especificados. Para obtener estas relaciones basta realizar la prueba estándar en estratos accesibles o de los que se puedan obtener muestras inalteradas confiables y a los que se les pueda determinar los valores de los conceptos señalados por los métodos usuales de laboratorio; haciendo suficiente número de comparaciones pueden obtenerse correlaciones estadísticas dignas de confianza. En la práctica esto se ha logrado en los suelos friccionantes, para los que existen tablas y gráficas dignas de crédito y aplicables al trabajo práctico; en el caso de suelos arcillosos plásticos las correlaciones de la prueba estándar con q_u son mucho menos dignas de crédito.

En la Fig. A-6 aparece una correlación[1] que ha sido muy usada para arenas y suelos predominantemente friccionantes.

En la gráfica se observa que al aumentar el número de golpes se tiene mayor compacidad relativa en la arena y, consecuentemente,

mayor ángulo de fricción interna. También se ve que en arenas limpias medianas o gruesas para el mismo número de golpes, se tiene un ø mayor que en arenas limpias finas o que en arenas limosas.

Las relaciones de la Fig. A-6 no toman en cuenta la influencia de la presión vertical sobre el número de golpes que es importante, según han demostrado investigaciones más recientes.[2 y 3] En la Fig. A-7 se

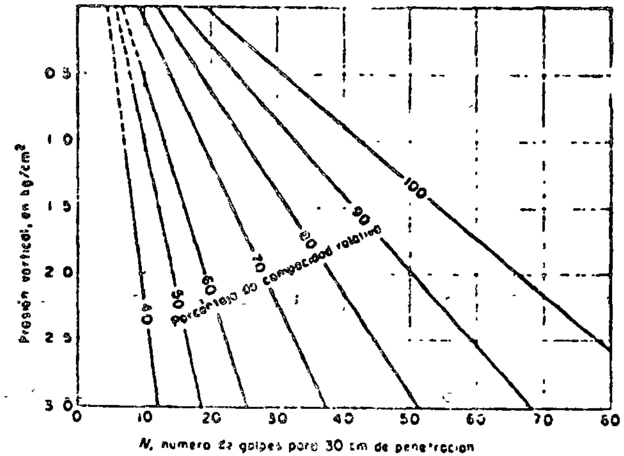


Fig. A-7 Relación entre la penetración estándar, la presión vertical y la compacidad relativa para arenas (Según Referencia 3)

presentan resultados experimentales que demuestran que a un número de golpes en la prueba de penetración estándar corresponden diferentes compacidades relativas, según sea la presión vertical actuante sobre la arena, la cual, a su vez, es función de la profundidad a que se haga la prueba.

Para pruebas en arcillas, Terzaghi y Peck[4] dan la correlación que se presenta en la Tabla A-1.

Tabla A-1

Consistencia	No. de golpes, N	Resistencia a la compresión simple, q_u
		Kg/cm^2
Muy blanda	< 2	< 0.25
Blanda	2-4	0.25-0.50
Media	4-8	0.50-1.0
Firme	8-15	1.0 -2.0
Muy firme	15-30	2.0 -4.0
Dura	> 30	> 4.0

Puede observarse en la tabla que, prácticamente, el valor de q_u, en kg/cm² se obtiene dividiendo entre 8 el número de golpes.

Sin embargo cabe mencionar que las correlaciones de la Tabla A-1 sólo deben usarse como norma tosca de criterio, pues los resultados prácticos han demostrado que pueden existir serias dispersiones y, por lo tanto, las resistencias obtenidas por este procedimiento no deben servir de base para proyecto.

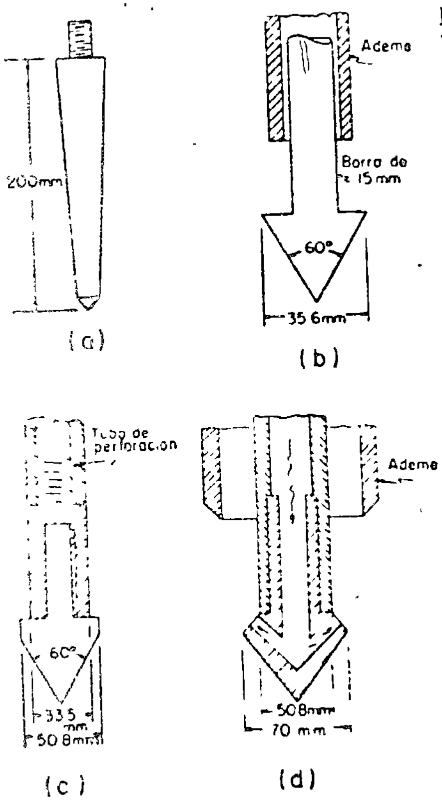


FIG A-8 PENETROMETROS CONICOS

a) - Tipo Danes
b) - Tipo Holandes
c) - Tipo para ensaye dinamico
d) - Tipo de inyeccion

e) Método de penetración cónica

Estos métodos consisten en hacer penetrar una punta cónica en el suelo y medir la resistencia que el suelo ofrece. Existen diversos tipos de conos y en la Fig A-8 aparecen algunos que se han usado en el pasado.

Dependiendo del procedimiento para hincar los conos en el terreno, estos métodos se dividen en estáticos y dinámicos. En los primeros la herramienta se hinca a presión, medida en la superficie con un gato apropiado; en los segundos el hincado se logra a golpes dados con un peso que cae.

En la prueba dinámica puede usarse un penetrómetro del tipo *c*) de la Fig A-8, atornillado al extremo de la tubería de perforación, que se golpea en su parte superior de un modo análogo al descrito para la prueba de penetración estándar. Es normal usar para esta labor un peso de 63.5 Kg, con 76 cm de altura de caída, o sea la misma energía para la penetración usada en la prueba estándar. También ahora se cuentan los golpes para 30 cm de penetración de la herramienta.

Desgraciadamente para este tipo de prueba no existen las correlaciones mencionadas en el caso de la prueba estándar, por lo cual los resultados son de muy dudosa interpretación. Sin embargo, la prueba se ha usado frecuentemente por dos razones básicas: su economía y su rapidez, pues al no haber operaciones de muestreo, no existe la dilación de la prueba estándar para retirar la tubería de perforación y obtener la muestra, cada vez que se efectúe la prueba. Si la prueba se hace sin ademe existe gran fricción lateral sobre la tubería de perforación, pero si se pone ademe se pierden las ventajas de economía sobre la prueba estándar, por lo menos parcialmente.

Las observaciones que hasta ahora se han realizado parecen indicar que, en arenas, la prueba dinámica de cono da toscamente un número de golpes del orden del doble del que se obtendría en prueba estándar, a condición, desde luego, de que la energía aplicada al cono sea la correspondiente a la prueba estándar.

En arcillas, el uso de la penetración cónica dinámica adquiere caracteres aún más peligrosos potencialmente, al no existir correlaciones dignas de crédito, si se tiene en cuenta que la resistencia de esos materiales a las cargas estáticas a que estarán sujetos en la obra de que se trate, puede ser perfectamente mal cuantificada a partir de una prueba dinámica en la que la arcilla puede exhibir unas características totalmente diferentes.

Las pruebas de penetración estática de conos pueden hacerse usando herramientas del tipo de las que aparecen en la Fig A-8.

En general el cono se hinca aplicando presión estática a la parte superior de la tubería de perforación con un gato hidráulico empleando un marco fijo de carga que puede estar sujeto al ademe necesario para proteger la tubería de perforación de la presión lateral. La velocidad de penetración suele ser constante y del orden de 1 cm/seg. A veces se obtiene una gráfica de presión aplicada contra penetración lograda con esa presión, otras veces se anotan contra la profundidad los valores de la presión que haya sido necesaria para lograr una cierta penetración, por ejemplo 50 cm.

Tampoco se obtiene muestra de suelo con este procedimiento y ésta debe verse como una limitación importante. También se tiene el inconveniente de que no existen correlaciones de resistencia en prueba cónica estática con valores obtenidos por otros métodos de eficacia más confiable; en arcillas, existe el inconveniente adicional de que la resistencia de estos materiales depende mucho de la velocidad de aplicación de las cargas, según se indicó repetidamente, por lo que en la prueba pueden tenerse resultados no representativos de la realidad.

A veces se han usado en arenas penetrómetros cónicos ayudados por presión de agua (Fig A-8 d), cuya función es suspender las arenas sobre el nivel de la penetración, para evitar el efecto de la sobrecarga actuante sobre ese nivel, que de otra manera, dificultaría la penetración del cono.

A modo de resumen podría decirse que las pruebas de penetración cónica, estática o dinámica, son útiles en zonas cuya estratigrafía sea ya ampliamente conocida a priori y cuando se desee simplemente obtener información de sus características en un lugar específico; pero son pruebas de muy problemática interpretación en lugares no explorados a fondo previamente. La prueba de penetración estándar debe estimarse preferible en todos los casos en que su realización sea posible.

f) Perforaciones en boleos y gravas

Con frecuencia es necesario atravesar durante las perforaciones estratos de boleos o gravas que presentan grandes dificultades para ser perforados con las herramientas hasta aquí descritas. En estos casos se hace necesario el empleo de herramental más pesado, del tipo de barretones con taladros de acero duro, que se suspenden y dejan caer sobre el estrato en cuestión, manejándolos con cables. En ocasiones se ha recurrido inclusive al uso localizado de explosivos para romper la resistencia de un obstáculo que aparezca en el sondeo.

A-5. Métodos de sondeo definitivo

Se incluyen aquí los métodos de muestreo que tienen por objeto obtener muestras inalteradas en suelos, apropiados para pruebas de compresibilidad y resistencia y muestras de roca, que no pueden obtenerse por los métodos mencionados hasta este momento. En ocasiones, cuando estas muestras no se requieran, los procedimientos estudiados en la Sección A-3, especialmente los que rinden muestras representativas, pueden llegar a considerarse como definitivos, en el sentido de no ser necesaria exploración posterior para recabar las características del suelo; sin embargo, cuando la clasificación del suelo permita pensar en la posibilidad de la existencia de problemas referentes a asentamientos o a falta de la adecuada resistencia al esfuerzo cortante en los suelos, se hará necesario recurrir a los métodos que ahora se exponen.

a) Pozos a cielo abierto con muestreo inalterado

Este método de exploración ya ha sido descrito en la Sección A-3 por lo que no se considera necesario describirlo nuevamente. Sin embargo, es conveniente insistir en el hecho de que cuando es factible, debe considerarse el mejor de todos los métodos de exploración a disposición del ingeniero para obtener muestras inalteradas y datos adicionales que permitan un mejor proyecto y construcción de una obra.

b) Muestreo con tubos de pared delgada

Desde luego de ningún modo y bajo ninguna circunstancia puede obtenerse una muestra de suelo que pueda ser rigurosamente considerada como inalterada. En efecto, siempre será necesario extraer al suelo de un lugar con alguna herramienta que inevitablemente alterará las condiciones de esfuerzo en su vecindad; además, una vez la muestra dentro del muestreador no se ha encontrado hasta hoy y es dudoso que jamás llegue a encontrarse, un método que proporcione a la muestra, sobre todo en sus caras superior e inferior, los mismos esfuerzos que tenía "in situ". Aparte de esto, la remoción de la muestra del muestreador al llegar al laboratorio produce inevitablemente otro cambio en los esfuerzos, pues la fase líquida deberá trabajar a tensión y la fase sólida a compresión en la medida necesaria para que se impida la expansión de la muestra, originalmente confinada en el suelo y ahora libre. La alteración producida por esta extracción es un factor importante aún y cuando se recurra al procedimiento de cortar longitudinalmente al muestreador para evitar el efecto de la fricción lateral, si bien con este procedimiento más costoso se atenúa la alteración. Por lo anterior, cuando en Mecánica de Suelos se habla de muestras "inalteradas" se debe entender en realidad un tipo de muestra obtenida por cierto procedimiento que trata de hacer mínimos los cambios en las condiciones de la muestra "in situ", sin interpretar la palabra en su sentido literal.

Se debe a M. J. Hvorslev un estudio exhaustivo moderno que condujo a procedimientos de muestreo con tubos de pared delgada que, por lo menos en suelos cohesivos, se usan actualmente en forma prácticamente única. Muestreadores de tal tipo existen en muchos modelos y es frecuente que cada institución especializada desarrolle el suyo propio. El grado de perturbación que produce el muestreador depende principalmente, según el propio Hvorslev puso de manifiesto, del procedimiento usado para su hincado; las experiencias han comprobado que si se desea un grado de alteración mínimo aceptable, ese hincado debe efectuarse ejerciendo presión continuada y nunca a golpes ni con algún otro método dinámico. Hincado el tubo a presión, a velocidad constante y para un cierto diámetro de tubo, el grado de alteración parece depender esencialmente de la llamada "relación de áreas".

$$A_r(\%) = 100\,\frac{D_e^2 - D_i^2}{D_e^2} \qquad \text{(A-1)}$$

donde D_e es el diámetro exterior del tubo y D_i el interior. La expresión anterior equivale a la relación entre el área de la corona sólida del tubo y el área exterior del mismo. Dicha relación no debe ser ma-or de 10% en muestreadores de 5 cm (2 pulgadas) de diámetro interior, hoy de escaso uso por requerirse en general muestras de mayor diámetro y, aunque en muestreadores de mayor diámetro pueden admitirse valores algo mayores, no existen motivos prácticos que impidan satisfacer fácilmente el primer valor.

En la Fig. A-9 a aparece uno de los tipos más comunes de muestreador de pared delgada; en la parte *b* de dicha figura se muestra un tipo más elaborado de muestreador de pistón, que tiene por objeto eliminar o casi eliminar la tarea de limpia del fondo del pozo previa al muestreo, necesaria en los musetreadores abiertos; al hincar el muestreador con el pistón en su posición inferior, puede llevarse al nivel deseado sin que el suelo alterado de niveles más altos en el fondo del pozo entre en él; una vez en el nivel de muestreo, el pistón se eleva hasta la parte superior y el muestreador se hinca libremente (pistón retráctil) o bien fijado el pistón en el nivel de muestreo por un mecanismo accionado desde la superficie, se hinca el muestreador relativamente al pistón hasta que se llena de suelo (pistón fijo). En la Fig. A-9.c se muestra un esquema de un dispositivo aplicador de presiones de hincado que puede usarse cuando no se disponga de una máquina perforadora que aplique la presión mecánicamente, un procedimiento alternativo al mostrado en la figura, será cargar la varilla de perforación con peso muerto utilizando gatos hidráulicos.

En ocasiones y en suelos muy blandos y con alto contenido de agua, los muestreadores de pared delgada no logran extraer la muestra, saliendo sin ella a la superficie, esto tiende a evitarse hincando el muestreador lentamente y, una vez lleno de suelo, dejándolo en reposo un cierto tiempo antes de proceder a la extracción. Al dejarlo en reposo la adherencia entre el suelo y muestreador crece con el tiempo, pues la arcilla remoldeada de la superficie de la muestra expulsa agua hacia el interior de la misma aumentando, por lo tanto, su resistencia y adherencia con el muestreador.

En arenas, especialmente en las situadas bajo el nivel freático se tiene la misma dificultad, la cual hace necesario recurrir a procedimientos especiales y costosos para darle al material una "cohesión" que le permita conservar su estructura y adherirse el muestreador. La inyección de emulsiones asfálticas o el congelamiento de la zona de muestreo son métodos que se han usado algunas veces en el pasado. Afortunadamente el problema no es de vital importancia en la práctica de la Mecánica de Suelos dado que la prueba estándar de penetración, al informar sobre la compacidad de los mantos arenosos, proporciona el dato más útil y generalmente en forma suficientemente aproximada, de las características de los mismos.

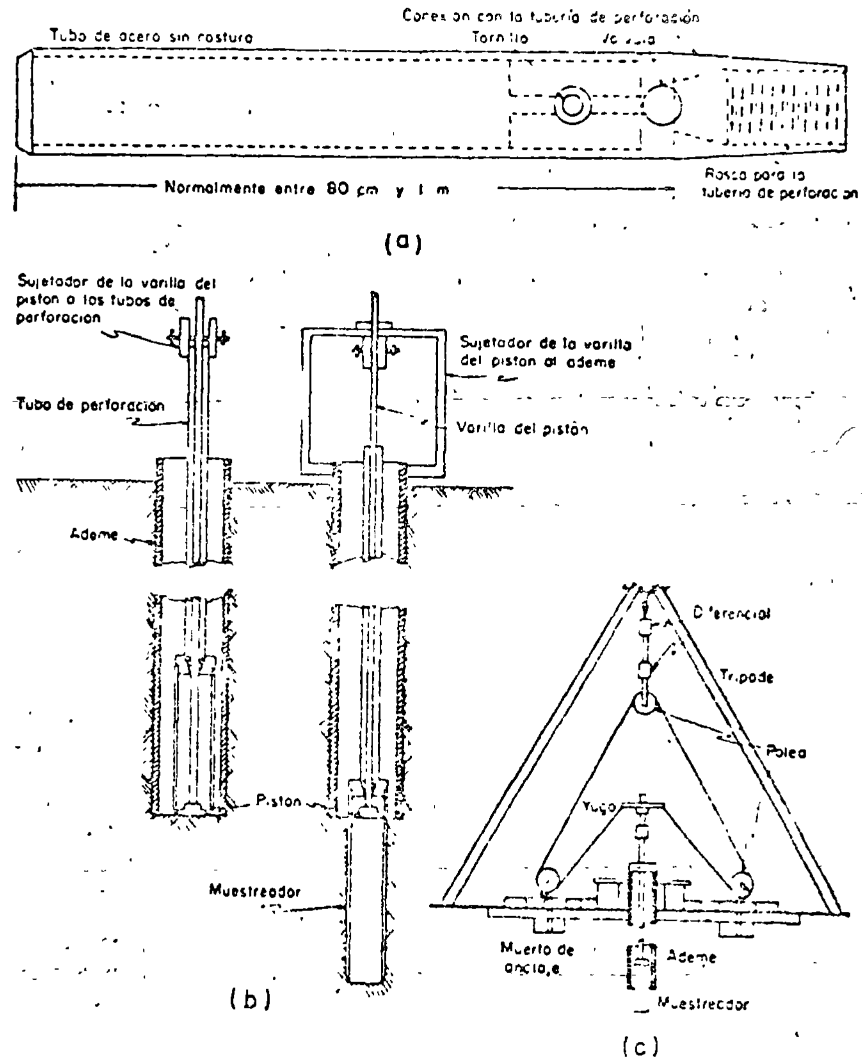


FIG. A-9 MUESTREADORES DE TUBO DE PARED DELGADA

a) - Tipo Shelby b) - De pistón

c) - Dispositivo de hincado por presion de un diferencial

c) Métodos rotatorios para roca

Cuando un sondeo alcanza una capa de roca más o menos firme, o cuando en el curso de la perforación las herramientas hasta aquí descritas tropiezan con un bloque grande de naturaleza rocosa, no es posible lograr penetración con los métodos estudiados y ha de recurrirse a un procedimiento diferente.

En realidad, se mencionó que capas de boleo o grava pueden ser atravesadas con barretones o herramientas pesadas similares, manejadas a percusión. Pero estos métodos no suelen dar un resultado conveniente en roca más o menos sana y además tienen el inconveniente básico de no proporcionar muestras de los materiales explorados. Cuando un gran bloque o un estrato rocoso aparezcan en la perforación se hace indispensable recurrir al empleo de máquinas perforadoras a rotación, con broca de diamantes o del tipo cáliz.

En las primeras, en el extremo de la tubería de perforación va colocado un muestreador especial, llamado de "corazón", en cuyo extremo inferior se acopla una broca de acero duro con incrustaciones de diamante industrial, que facilitan la perforación.

En las segundas, los muestreadores son de acero duro y la penetración se facilita por medio de municiones de acero que se echan a través de la tubería hueca hasta la perforación y que actúan como abrasivo. En roca muy fracturada puede existir el peligro de que las municiones se pierdan. Perforadoras tipo cáliz se han construido con diámetros muy grandes, hasta para hacer perforaciones de 3 m; en estos casos, la máquina penetra en el suelo con la misma broca.

La colocación de los diamantes en las brocas depende del tipo de roca a atacar. En rocas duras es recomendable usar brocas con diamantes tanto en la corona como el interior para reducir el diámetro de la muestra, y en el exterior para agrandar la perforación y permitir el paso del muestreador con facilidad. En rocas medianamente duras suele resultar suficiente emplear brocas con inserciones de carburo de tungsteno en la corona. En rocas suaves, del tipo de lutitas, pizarras, etc., basta usar broca de acero duro en diente de sierra.

En la Fig. A-10 aparece un esquema de una máquina perforadora (que, incidentalmente, puede usarse también para el hincado a presión de muestreadores de tubo de pared delgada), dos muestreadores de corazón comunes y algunos tipos de brocas.

Las velocidades de rotación son variables, de acuerdo con el tipo de roca a atacar. En todos los casos, a causa del calor desarrollado por las grandes fricciones producidas por la operación de muestreo, se hace indispensable inyectar agua fría de modo continuo, por medio de una bomba situada en la superficie. También se hace necesario ejercer presión vertical sobre la broca, a fin de facilitar su penetración. El

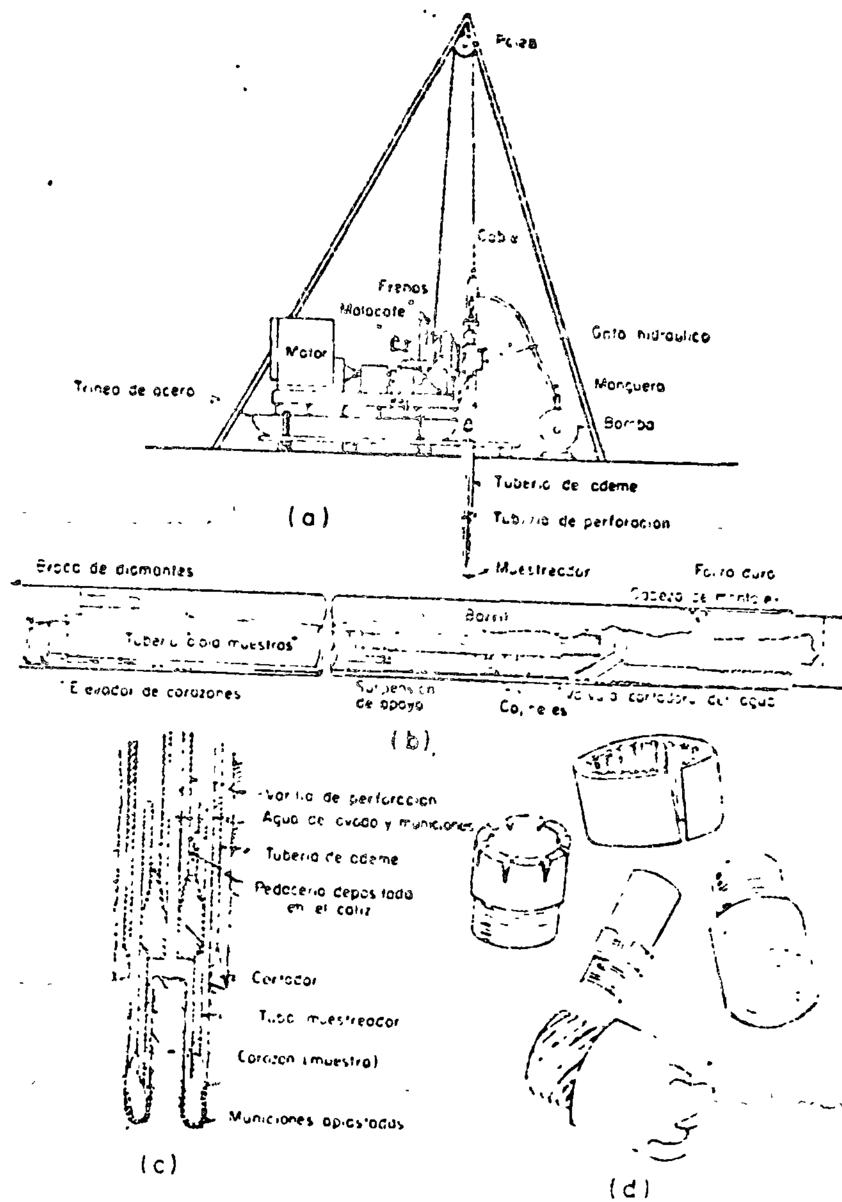


FIG A-10 EQUIPO PARA MUESTREO EN ROCA
a) - Máquina perforadora
b) - Muestreador para broca de diamante
c) - Muestreador tipo cáliz
d) - Algunos tipos de brocas

ıto de una maniobra de perforación rotatoria depende fundamen-
ınente del balance de esos tres factores principales, velocidad de ro-
ıón, presión de agua y presión sobre la broca, respecto al tipo de
:a explorado.

Una vez que el muestreador ha penetrado toda su carrera es pre-
o desprender la muestra de roca (corazón), que ha ido penetrando
su interior, de la roca matriz. Para ello se han desarrollado diver-
; métodos técnicos. Por ejemplo, suele resultar apropiado el inte-
umpir la inyección del agua, lo que hace que el espacio entre la roca
la parte inferior de la muestra se llene de fragmentos de roca, pro-
ıciendo un empaque apropiado; otras veces un aumento rápido de la
·locidad de rotación produce el efecto deseado. Cuando las muestras
· roca son muy largas puede introducirse un muestreador especial que
emplace al usado en la perforación; tal muestreador está provisto
: aditamientos para cortar y retener la muestra. Desgraciadamente,
on cierta frecuencia ninguno de estos métodos rinde el resultado
petecido y la muestra no es extraída.

El equipo de perforación rotatorio trabaja usualmente en cuatro
iámetros y en la Tabla A-2 aparecen sus dimensiones usuales y sus
ombres típicos.

TABLA A-2

Broca	*Diámetro exterior del ademe*		*Diametro exterior de la broca*		*Diámetro interior de la broca*	
—	*mm*	*pulg*	*mm*	*pulg*	*mm*	*pulg*
Ex	46	$1\frac{13}{16}$	37 5	$1\frac{15}{32}$	20.5	$\frac{27}{32}$
Ax	57	$2\frac{1}{4}$	47.5	$1\frac{7}{8}$	20 5	$1\frac{3}{16}$
Bx	73	$2\frac{7}{8}$	51.5	$2\frac{11}{32}$	42	$1\frac{21}{32}$
Nx	89	$3\frac{1}{2}$	75 5	$2\frac{61}{64}$	55	$2\frac{5}{32}$

Probablemente las tuberías Ax y Bx son las más usadas.

Las máquinas perforadoras suelen poder variar su velocidad de
rotación en intervalos muy amplios (frecuentemente de 40 a 1,000 rpm)
y pueden ser de avance mecánico o hidráulico. En las primeras, la
máquina gira a velocidad uniforme y las variaciones se logran con
un juego de engranaje adicional; en las segundas, muy preferibles, la
propia máquina puede variar su velocidad.

A-5. Métodos geofísicos

Se tratan ahora métodos geofísicos de exploración de suelos, des-
arrollados principalmente con el propósito de determinar las variacio-
nes en las características físicas de los diferentes estratos del subsuelo

o los contornos de la roca basal que subyace a depósitos sedimentarios. Los métodos se han aplicado sobre todo a cuestiones de Geología y Minería y en mucha menor escala a Mecánica de Suelos, para realizar investigaciones preliminares de lugares para localizar presas de tierra o para determinar, como se indicó, perfiles de roca basal. Los métodos son rápidos y expeditos y permiten tratar grandes áreas, pero nunca proporcionan suficiente información para fundar criterios definitivos de proyecto, en lo que a la Mecánica de Suelos se refiere. En el caso de estudios para fines de cimentación no se puede considerar que los métodos geofísicos sean adecuados, pues no rinden una información de detalle comparable con la que puede adquirirse de un buen programa de exploración convencional.

A continuación se describen brevemente los principales métodos que se han desarrollado hasta hoy; de ellos los dos primeros han resultado, con mucho, los más importantes.

a) Método sísmico

Este procedimiento se funda en la diferente velocidad de propagación de las ondas vibratorias de tipo sísmico a través de diferentes medios materiales. Las mediciones realizadas sobre diversos medios permiten establecer que esa velocidad de propagación varía entre 150 y 2,500 m/seg en suelos, correspondiendo los valores mayores a mantos de grava muy compactos y las menores a arenas sueltas; los suelos arcillosos tienen valores medios, mayores para las arcillas duras y menores para las suaves. En roca sana los valores fluctúan entre 2,000 y 8,000 m/seg. Como término de comparación se menciona el hecho de que en el agua la velocidad de propagación de este tipo de ondas es del orden de 1,400 m/seg. Esencialmente el método consiste en provocar una explosión en un punto determinado del área a explorar usando una pequeña carga de explosivo, usualmente nitroamonio. Por la zona a explorar se sitúan registradores de ondas (geófonos), separados entre sí de 15 a 30 m. La función de los geófonos es captar la vibración, que se transmite amplificada a un oscilógrafo central que marca varias líneas, una para cada geófono. Suponiendo una masa de suelo homogénea que yazca sobre la roca basal, unas ondas llegan a los geófonos viajando a través del suelo a una velocidad v_1; otras ondas llegan después de cruzar oblicuamente dicho suelo. Hay un ángulo crítico de incidencia respecto a la frontera con la roca basal que hace que las ondas ni se reflejen ni se refracten hacia adentro de la roca, sino que las hace viajar paralelamente a dicha frontera, dentro de la roca, con una velocidad v_2, hasta ser recogidas por los geófonos, después de sufrir nuevas refracciones, para transmitirlas al oscilógrafo. El tiempo de recorrido de una onda refractada está determinado por su ángulo crítico, que depende de la naturaleza del suelo y de la roca. Un esquema del dispositivo aparece en la Fig. A-11.

Puede construirse una gráfica que relacione la distancia del geófono al punto donde se originó la perturbación, con el tiempo que tardó en registrarse la onda en ese geófono. Como las ondas directas y refractadas comienzan a llegar al geófono en tiempos diferentes bien determinados, pueden calcularse de la gráfica anterior los valores típicos de v_1 y v_2. En los geófonos próximos al punto de la explosión las ondas directas llegan antes; en los alejados llegan primero las refractadas. Hay un punto frontera (el 3 de la Fig. A-11), en el cual los dos tipos de onda llegan a la vez. Dibujando los instantes en que el geófono recibe la primera excitación en función del alejamiento del geófono, se obtienen dos rectas. Hasta el punto 3 (en el caso de la Fig. A-11), el primer impulso es de onda directa en la que el tiempo de excitación es proporcional a la distancia del geófono; de 3 en adelante, la primera excitación es de onda refractada en la que el tiempo es una cierta función, $a + bx$, de la distancia, representando "a" el tiempo constante en que se recorren los dos tramos inclinados hasta y desde la roca basal. Se obtienen así dos rectas que, evidentemente, han de cruzarse en la abscisa del punto 3. Si x_1 es la abscisa de tal punto, puede demostrarse en la Fig. A-11 que:

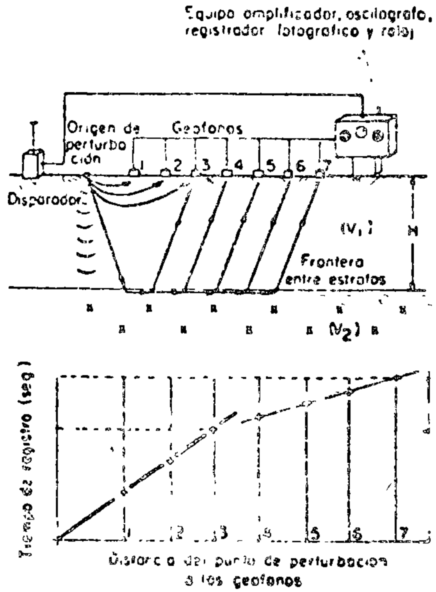


FIG A-11 ESQUEMA DEL DISPOSITIVO PARA EXPLORACION GEOFISICA POR EL METODO SISMICO

$$H = \frac{x_1}{2}\sqrt{\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}} \qquad \text{(A-2)}$$

Donde H es el espesor del estrato de suelo homogéneo y v_1 y v_2 pueden determinarse de las pendientes de las 2 rectas de la Fig. A-11.

Los casos prácticos no son tan sencillos como el arriba discutido y frecuentemente se hace necesaria una gran experiencia por parte del técnico que ha de interpretar los resultados obtenidos y suele ser nece-

saria una exploración convencional del suelo para una interpretación más correcta de dichos resultados.

b) Método de resistividad eléctrica

Este método se basa en el hecho de que los suelos, dependiendo de su naturaleza, presentan una mayor o menor resistividad eléctrica cuando una corriente es inducida a su través. Su principal aplicación está en el campo de la minería, pero en Mecánica de Suelos se ha aplicado para determinar la presencia de estratos de roca en el subsuelo.

La resistividad eléctrica de una zona de suelo puede medirse colocando cuatro electrodos igualmente espaciados en la superficie y alineados; los dos exteriores, conectados en serie a una batería son los electrodos de corriente (medida por un miliamperímetro), en tanto que los interiores se denominan de potencial y están conectados a un potenciómetro que mide la diferencia de potencial de la corriente circulante (Fig. A-12).

Los electrodos de corriente son simples varillas metálicas, con punta afilada, mientras que los de potencial son recipientes porosos llenos de una solución de sulfato de cobre que, al filtrarse al suelo, garantiza un buen contacto eléctrico.

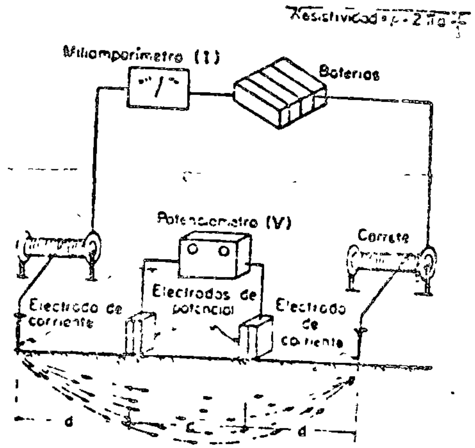


FIG A-12 ESQUEMA DEL DISPOSITIVO PARA EXPLORACION GEOFISICA POR EL METODO DE RESISTIVIDAD ELECTRICA

La resistividad se puede calcular a partir de las lecturas del miliamperímetro I, del potenciómetro V y de la separación entre los electrodos, d, con la fórmula:

$$\rho = 2\pi d \frac{V}{I} \qquad \text{(A-3)}$$

El método sirve, en primer lugar, para medir las resistividades a diferentes profundidades, en un mismo lugar y, en segundo, para medir la resistividad a una misma profundidad, a lo largo de un perfil. Lo primero se logra aumentando la distancia d, entre electrodos, con lo que se logra que la corriente penetre a mayor profundidad. Lo segundo attraction between them. In other words, leaching of the salt in the pore fluid can cause a reduction in shear strength.

The most dramatic example of a reduction in shear strength brought about from pore water leaching is exhibited in the "quick clays". These marine clays were deposited in a highly flocculated condition. Despite the resulting high water content, these clays developed a moderately large strength because of the bonds that formed at the edge-to-face contacts. These clays then had most of the electrolyte in their pore fluid removed by years of leaching. For this new environmental condition, the clay would tend to be in a dispersed condition (see Fig. 7.2*c*), and for the same water content it would have very little strength. However, this change does not show up fully until the clay is subjected to enough disturbance to break the bonds built up by years of con-'ng stress. Upon disturbance, the clay may lose all of its strength and become a soil-water slurry with zero shear strength. These quick clays have caused many engineering problems in the Scandinavian countries and in Canada where they are widespread. The landslide shown in Fig. 1.13 occurred in a quick clay.

The change in temperature from time of deposit formation to a given time under consideration can result in a change of soil behavior. Thus a clay deposited in a glacial lake undergoes a general warming during its life. Further, a soil existing at great depth in the ground, sampled and brought into the laboratory for testing, may undergo property changes due to the difference in temperature between the ground and the laboratory. Decreasing the temperature of a cohesive soil normally causes an expansion of the soil as well as causing some of the air dissolved in the pore fluid to come out of solution.

The engineer can see from the discussion in this section at he must give thought to how the properties of the soil might change during the life of his structure, and not expect to make a proper design solely on the basis of the properties of the soil as it exists prior to construction. He could be faced with a disastrous failure if he designed his earth dam on the basis of the strengths of the soil which exist prior to the construction of the dam. Later chapters in this book will treat the principles needed to select the proper values of strength, permeability, and compressibility to be used in a given soil problem.

7.6 SOIL INVESTIGATION

Table 7.3 lists some of the methods of soil investigation[1] in general use. The proper program of soil investigation for a given project depends on the type of project, the importance of the project, and the nature of the subsoils involved. For example, a large dam project would usually require a more thorough subsoil investigation than would a highway project. A further example is soft clays, which usually require more investigation than do gravels.

The first four methods of soil investigation listed in Table 7.3 normally cover a large area and are intended to give the engineer a general picture of the entire site. Geophysical techniques make possible the detection of markedly different strata in the subsoils. These techniques permit a relatively large volume of subsoil to be explored in a given period of time.

Table 7.3 Methods of Soil Investigation

Reconnaissance
Visual inspection
Airphotos
Geologic reports and maps
Records of past construction
Exploration
Geophysical
Electrical
Pits—sampling and testing
Borings—sampling and testing
Field tests
Penetration tests
Vane tests
Water table—pore pressure tests
Pumping tests
Load tests
Compaction tests

Sampling either from pits or from borings followed by laboratory testing is widely used in soil investigation, especially for important structures and relatively uniform subsoils. The investigator can obtain high-quality undisturbed samples from open pits, but obviously pits can be advanced only to relatively shallow depths. Pits or trenches can be dug by hand or by power equipment such as a back hoe or dozer. Borings can be made by augers either with or without a casing.

There are difficulties in obtaining high-quality undisturbed soil samples, especially from considerable depths. The sampling operation, sample transportation, and specimen preparation require that the soil be subjected to stresse. which are quite different from those that existed in the ground. This inherent change of stress system alters the behavior of the soil. Further, the sampling, transportation and preparation operation usually subjects the specimen to strains that alter the soil structure. For these reasons the determination of *in situ* properties by laboratory tests can be most difficult. Later chapters in this book discuss laboratory testing and

[1] The reader is referred to Terzaghi and Peck (1967) for a more detailed treatment of soil investigation.

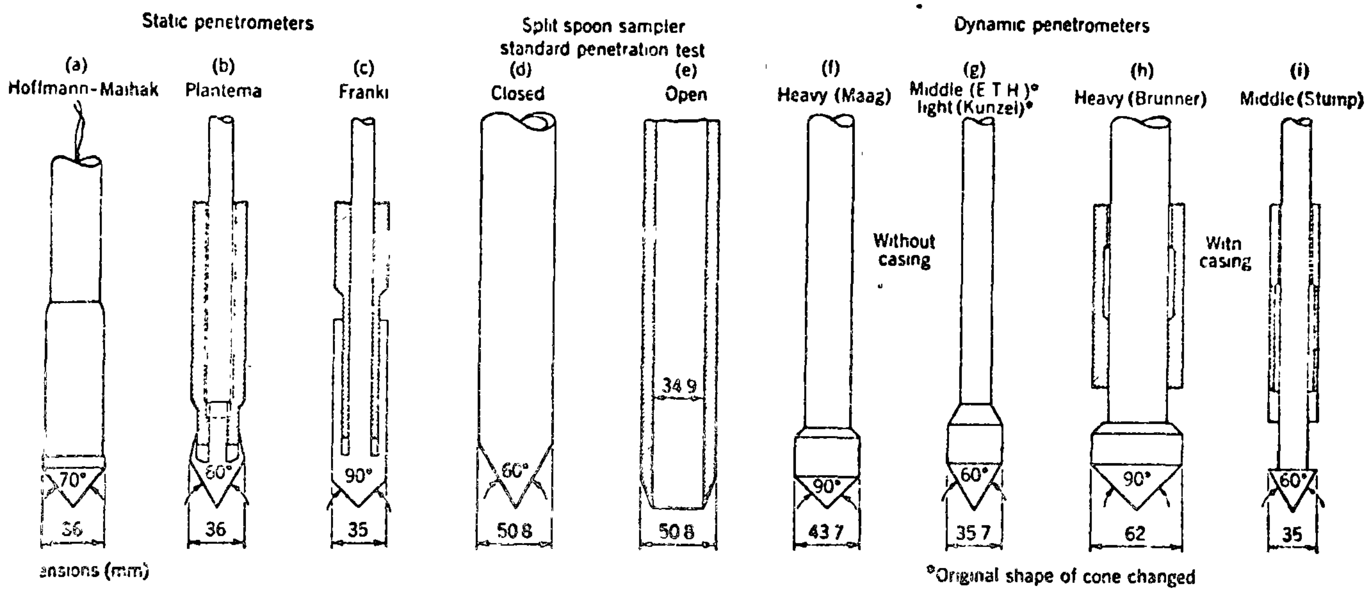


Fig. 7.3 Penetrometers (From Schultze and Knausenberger, 1957).

point out some of the significant influences of sample disturbance.

Field tests take on an increased importance in soils which are sensitive to disturbance and in subsoil conditions where the soils vary laterally and/or vertically. The most widely used field test method is penetration testing. Figure 7.3 shows some of the penetrometers that have been used for soil investigation. These penetrometers are driven or pushed into the ground and the resistance to penetration is recorded. The most widely used penetration test is the "standard penetration test", which consists of driving the spoon, shown in Fig. 7.4, into the ground by dropping a 140-lb weight from a height of 30 in. The penetration resistance is reported in number blows of the weight to drive the spoon 1 ft.

Table 7.4 presents a correlation of standard penetration resistance with relative density for sand and a correlation of penetration resistance with unconfined compressive strength for clay. The standard penetration test is a very valuable method of soil investigation. It should, however, be used only as a guide, because there are many reasons why the results are only approximate.

Figure 7.5 presents the results of some penetration tests run in a large tank in the laboratory. These test data show that the penetration resistance depends on factors other than relative density. As can be seen, the penetration resistance depends on the confining stress and on the type of sand. Further, the figures show that the test data scatter considerably. The influence of sand type on penetration resistance is particularly large at low densities—those of most interest. Another factor that may have a marked influence on the penetration resistance of a sand is the pore pressure conditions during the measuring operation. If the level of water in the drill hole is lowered prior to penetration measurement, a lowered resistance can result.

Experience has shown that the determination of the shear strength of a clay from the penetration test can be very unreliable.

The standard penetration test should be used only as an approximation or in conjunction with other methods of exploration.

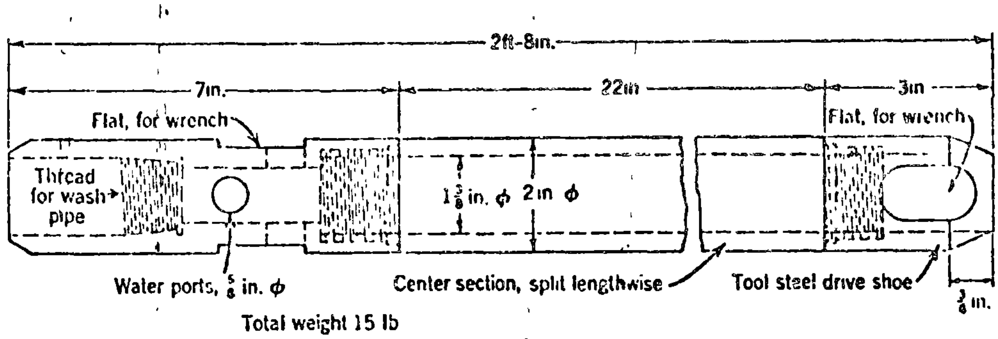


Fig. 7.4 Spoon for standard penetration test (From Terzaghi and Peck, 1967).

Table 7.4 Standard Penetration Test

Relative Density of Sand		Strength of Clay		
Penetration Resistance N (blows/ft)	Relative Density	Penetration Resistance N (blows/ft)	Unconfined Compressive Strength (tons/ft^2)	Consistency
0–4	Very loose	<2	<0.25	Very soft
4–10	Loose	2–4	0.25–0.50	Soft
10–30	Medium	4–8	0.50–1.00	Medium
30–50	Dense	8–15	1.00–2.00	Stiff
>50	Very dense	15–30	2.00–4.00	Very stiff
		>30	>4.00	Hard

m Terzaghi and Peck, 1948.

In certain countries, such as Holland, subsoil conditions are such that penetration testing has proved to be a relatively reliable technique. More sophisticated techniques [such as the friction jacket cone (Begemann, 1953)] have been widely used.

The vane test has proved to be a very useful method of determining the shear strength of soft clays and silts. Figure 7.6 shows various sizes and shapes of vanes which have been used for field testing. The vane is forced into the ground and then the torque required to rotate the vane is measured. The shear strength is determined from the torque required to shear the soil along the vertical and horizontal edges of the vane.

As later chapters in this book will show, a proper subsoil investigation should include the determination of water pressure at various depths within the subsoil. ethods of determining pore water pressure are discussed in Part IV. Part IV also notes how the permeability of a subsoil can be estimated from pumping tests.

Various load tests and field compaction tests may be highly desirable in important soil projects. In this type of test, a small portion of the subsoil to be loaded by the prototype is subjected to a stress condition in the field which approximates that under the completed structure. The engineer extrapolates the results of the field tests to predict the behavior of the prototype.

7.7 SUBSOIL PROFILES

Figures 7.7 to 7.17 present a group of subsoil profiles and Table 7.5 gives some information on the geological history of the various profiles. The purposes of presenting these profiles are to:

1. Indicate how geological history influences soil characteristics.
2. Give typical values of soil properties.
3. Show dramatically the large variability in soil behavior with depth.
4. Illustrate how engineers have presented subsoil data.

Three considerations were used in the selection of the profiles: first, examples were chosen with different types of geological history; second, most of the profiles are ones for which there are excellent references giving considerably more detail on the characteristics of the soil and engineering problems involved with the particular profile; and finally, most of the profiles selected have been involved in interesting and/or important soil engineering projects.

Some of the soil characteristics shown in the profiles have already been described in this book. These characteristics include water content, unit weight, void ratio, porosity, Atterberg limits, and particle size. Other characteristics, particularly those referring to strength and compressibility, will be discussed in detail in later portions of this book. Reference will then be made back to these profiles.

The profiles illustrate many concepts presented in the preceding parts of this book; some of them are discussed in the remaining part of this section.

Stress History

In a normally consolidated sedimentary soil both the void ratio and water content decrease with depth in the profile, and the strength therefore increases. This characteristic is illustrated in several of the profiles, e.g., the Norwegian marine clay (Fig. 7.7), the Thames Estuary clay (Fig. 7.10), and the Canadian clay (Fig. 7.11). The London clay is overconsolidated since it was compressed by a greater overburden than now exists. Erosion removed some of the original overburden. As would be expected, the overconsolidated London clay does not

2. DETERMINACION DE PROPIEDADES MECANICAS EN ARCILLAS

2.1 En el laboratorio

2.2.1 Pruebas triaxiales

UU, q_u, CU

2.1.2 Corte directo o simple

2.1.3 De columna resonante

2.1.4 De la curva esfuerzo-deformación

Determinación de las propiedad- dinámicas de la arcil en el Vaso de Texcoc

Belzay Martinez R
José Luis León T
Octavio A. Rascón Ch
Augusto G. Villarreal A *

ABSTRACT

Shear and compression wave velocities for Texcoco Lake clays were determined by seismic prospecting. With this information dynamic shear modulus, G_c, Poisson's ratio, ν, and dynamic young's modulus, E_d, were obtained. Laboratory tests were performed to evaluate the index properties of materials; damping coefficient, D, and dynamic shear modulus, G_l, were determined from forced vibration tests by using a torsional resonant column apparatus. Field test results were compared to those obtained from laboratory tests and from previous field tests carried out at the Alameda Central of Mexico City. Comparison between in situ and laboratory results was made in terms of the amplitude of applied deformations and sampling effects.

Shear dynamic moduli obtained from laboratory tests on undisturbed samples under undained conditions were always lower than those determined by seismic prospecting and decreased for increasing values of the amplitude of applied shear; such disturbing effects of sampling become more pronounced with increasing depth. The soil damping coefficient increased monotonically with shear deformation.

It is recommended that the same acceleration spectrum specified in the Reglamento de las Construcciones del Distrito Federal for soft soils be used for seismic design of structures to be built in the Texcoco Lake area, with the provision that the constant acceleration interval be extended to a natural period of 5 sec. This regulation should be observed until instrumental evidence from strong-motion recorders installed in the area becomes available.

RESUMEN

Mediante pruebas de prospección sísmica se determi naron las velocidades de propagación de las ond longitudinales y transversales en las arcillas del va de Texcoco. Con estos datos se calcularon el módul dinámico de rigidez, G_c, la relación de Poisson, ν, el módulo dinámico de elasticidad, E_d: También se efectuaron ensayes de laboratorio en muestras inalt radas extraídas a diferentes profundidades, las cua consistieron en la determinación de las propieda índice y en la obtención del módulo dinámico de ri dez, G_l, y del amortiguamiento, D, mediante ensaye de vibración forzada en una columna resonante a to sión. Los resultados de las pruebas de campo se compararon con los obtenidos en el laboratorio y co los de pruebas geosísmicas realizadas previamente en la Alameda Central de la ciudad de México. La com paración entre los resultados de las pruebas de campo y los de laboratorio se efectuó tomando en cuenta la magnitud de las deformaciones aplicadas y el efect del muestreo.

Los módulos dinámicos de rigidez determinados a partir de ensayes de laboratorio en muestras inalte radas y en condiciones no drenadas son siempre me nores que los obtenidos mediante prospección sí mica, y disminuyen conforme aumenta la amplitud de la deformación angular aplicada; en general, esta diferencias aumentan conforme crece la profundid de muestreo. El amortiguamiento del suelo determi nado en el laboratorio es función creciente de la de formación angular aplicada al espécimen.

Para el diseño sísmico de las estructuras que se de planten en la zona del vaso de Texcoco se recomie utilizar el mismo espectro de aceleraciones para su blando que se especifica en el Reglamento de Con trucciones del Distrito Federal, pero conservando tramo de aceleración constante hasta un periodo n tural de 5 seg. Esto deberá hacerse por lo men hasta que se tenga evidencia al respecto, con base los datos que suministren los acelerógrafos instalad en la zona estudiada.

* Profesores investigadores, Instituto de Ingeniería, UNAM

NOTACION

A Area de la sección transversal del espécimen

D Fracción de amortiguamiento respecto al crítico

D_e Diámetro exterior de la muestra

D_i Diámetro interior de la muestra

d Deformación angular

d_1 Deformación angular correspondiente a la frecuencia f_n

d_2 Deformación angular correspondiente a la frecuencia $\sqrt{2}\,f_n$

$\ddot{d}$ Aceleración angular

$\ddot{d}_{\max}$ Aceleración angular máxima

$\ddot{d}_1$ Aceleración angular a la frecuencia f_n

$\ddot{d}_2$ Aceleración angular a la frecuencia $\sqrt{2}\,f_n$

E Módulo dinámico de elasticidad

e Relación de vacíos

f Frecuencia del movimiento

f_n Frecuencia de resonancia

G Módulo dinámico de rigidez

G_l Módulo dinámico de rigidez, obtenido mediante pruebas de laboratorio

G_c Módulo dinámico de rigidez, obtenido mediante pruebas de prospección sísmica

H Profundidad del primer estrato

IP Indice de plasticidad

J_θ Momento polar de inercia de la placa y los imanes

K Módulo de compresibilidad

L Longitud de la muestra

LL Límite líquido

LP Límite plástico

q_i Resistencia a la compresión simple de la muestra en estado inalterado

q_r Resistencia a la compresión simple de la muestra en estado totalmente remoldeado

S_s Densidad de sólidos

S_u Sensitividad del material

V_p Velocidad de propagación de las ondas longitudinales o de compresión

V_s Velocidad de propagación de las ondas transversales o de cortante

V_{s_1} Velocidad de propagación de las ondas transversales en el estrato 1

V_{s_2} Velocidad de propagación de las ondas transversales en el estrato 2

w Contenido natural de agua

$\ddot{x}$ Aceleración lineal

x_c Abscisa del punto donde se cruzan las líneas de la gráfica distancia-tiempo, correspondientes a los primeros dos mantos

x_i Amplitud de la aceleración, en vibración libre, para el i-ésimo ciclo

x_{i+1} Amplitud de la aceleración para el ciclo $(i+1)$-ésimo

γ Peso volumétrico del material

γ_a Deformación angular dinámica

γ_p Deformación angular promedio

$(\gamma_p)_{máx}$ Deformación angular promedio máxima

λ Constante de Lamé

ν Relación de Poisson

ρ Densidad del material

σ_c Esfuerzo de confinamiento

θ Rotación en el extremo superior del espécimen

$\ddot{\theta}$ Aceleración angular en el extremo superior del espécimen

1. INTRODUCCION

La Secretaría de Recursos Hidráulicos, mediante el Plan Lago de Texcoco, proyecta construir diversas estructuras en los terrenos del ex vaso de dicho lago. Dada la gran deformabilidad de las arcillas que constituyen este tipo de suelos, interesa conocer, entre otras propiedades, aquellas que se relacionan con el análisis sísmico de estructuras, como el módulo dinámico de rigidez, G, y la relación de Poisson, ν.

A partir de pruebas de laboratorio es posible determinar el módulo dinámico de rigidez mediante ensayes de vibración forzada. También existen procedimientos de campo que permiten obtener este parámetro en forma indirecta, como los que se basan en la determinación de la velocidad con que se propagan las ondas sísmicas a través del terreno en cuestión. En efecto, existe una relación entre el módulo dinámico de rigidez y la velocidad de propagación de las ondas transversales o de cortante, V_s, dada por

$$G = V_s^2 \rho \qquad (1)$$

donde ρ es la densidad del material, igual al cociente del peso volumétrico entre la aceleración debida a la gravedad.

La ec 1 permite obtener la variación G con la profundidad del terreno si V_s y ρ se determinan en forma adecuada.

En general, para obtener la densidad de los materiales es necesario efectuar pruebas de laboratorio en muestras inalteradas extraídas a diferentes profundidades; en muestras sanas, la aproximación que se tiene en la determinación de la densidad a partir de un cierto número de especímenes es, en términos generales, satisfactoria, por lo que la densidad puede inducir errores en los valores de G por este concepto que son inferiores a 5 por ciento. Sin embargo, la influencia de la velocidad de las ondas transversales es mayor debido a que los valores de V_s pueden variar en un intervalo más amplio por los errores inherentes a los instrumentos de medición y a la interpretación de las pruebas de campo, y porque en la ec 1 se encuentra elevado al cuadrado. De ahí que el grado de aproximación con que se obtiene G depende principalmente de la forma como se determine V_s.

El conocimiento de la velocidad de propagación de las ondas longitudinales, V_p, junto con V_s, permite caracterizar el terreno en estudio. Así, a partir de la relación V_p/V_s es factible determinar los parámetros elásticos dinámicos más importantes del terreno, como la relación de Poisson, ν, el módulo dinámico de elasticidad, E, la constante de Lamé, λ, y el módulo de compresibilidad, K. Esto se logra tomando en cuenta las ecuaciones que definen V_p y V_s en función de λ, G y ρ (ref 1), y las de la teoría de elasticidad que relacionan λ, E_d, ν y G, con esto se llega a:

$$\nu = \frac{(V_p/V_s)^2 - 2}{2\ (V_p/V_s)^2 - 2} \qquad (2)$$

$$E = \frac{3\ V_p^2 - 4\ V_s^2}{(V_p/V_s)^2 - 1}\ \rho \qquad (3)$$

$$\lambda = \rho\ (V_p^2 + 2\ V_s^2) \qquad (4)$$

$$K = \rho\ (V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2) \qquad (5)$$

En este trabajo se describen los procedimientos de campo que se emplearon para determinar las velocidades de propagación V_s y V_p, a partir de las cuales se calcularon los principales parámetros elásticos de las arcillas del ex vaso de Texcoco. El sitio escogido se localiza en las inmediaciones del campamento de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, donde el Instituto de Ingeniería, UNAM, ha instalado un acelerógrafo que registrará los temblores intensos que ocurran en la zona en estudio (fig 1). También se describen las pruebas de laboratorio efectuadas en muestras inalteradas de arcilla, correspondientes a distintas profundidades. Los resultados de las pruebas de campo se comparan con los obtenidos en el laboratorio y con los de las pruebas geosísmicas realizadas en la Alameda Central de la ciudad de México (ref 2).

2. PRUEBAS DE CAMPO

En general, la determinación indirecta del módulo dinámico de rigidez mediante pruebas de prospección sísmica presenta algunas ventajas sobre los procedimientos de laboratorio. Debido a que los impactos se aplican sobre masas considerables de terreno, los esfuerzos dinámicos inducidos son muy pequeños, aun empleando cargas de dinamita como fuentes de excitación cuando estos se registran a distancias adecuadas; además, dichos esfuerzos actúan durante lapsos muy cortos, del orden de fracciones de segundo. Esto hace que el material en estudio se comporte dentro del rango lineal y que se acepten los principios de la teoría de propagación de ondas en medios elásticos. Además, los resultados que se obtienen de las pruebas de campo incluyen el efecto de las principales variables que influyen en el comportamiento del terreno, como la presión confinante, el contenido de agua y la relación de vacíos. Otra ventaja es que se puede estimar en forma indirecta y a un costo menor la estratigrafía del subsuelo, en función de la velocidad con que se propagan las ondas transversales y las longitudinales.

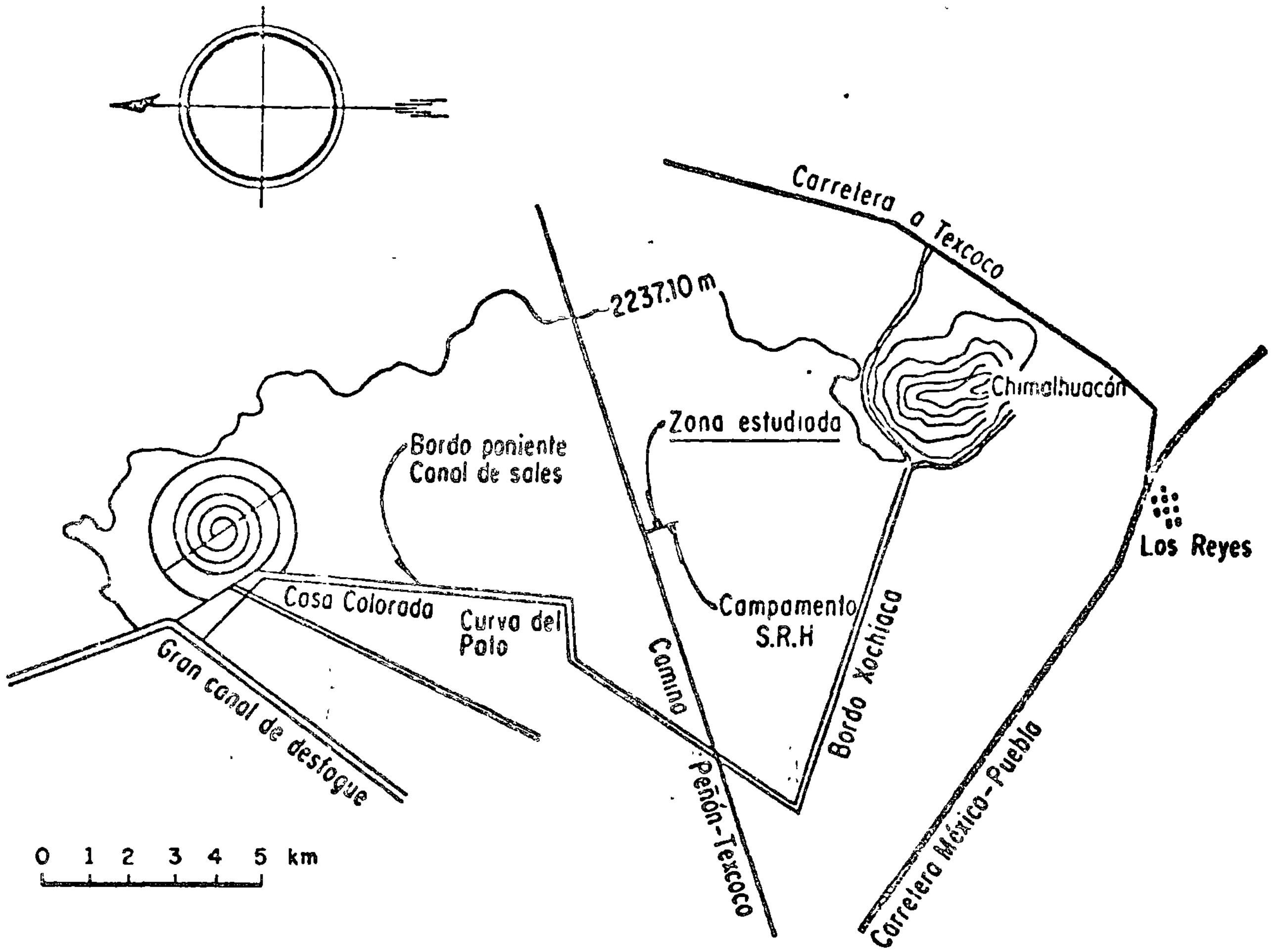


Fig 1. Plano de localización de la zona estudiada

Los principales problemas factibles de presentarse con ese tipo de pruebas consisten en el bajo nivel de las deformaciones, comparadas con las que se originan durante un temblor, a menos que este se genere a distancias relativamente grandes, o que su magnitud sea pequeña. Además, los problemas ocasionados por uido de fondo (excitaciones producidas por mecanismos diferentes al de prueba) puede reducir la aproximación en la estimación de los valores de V_p y V_s, los cuales inciden en los parámetros elásticos dinámicos del terreno en estudio. Para mejorar esto, es necesario contar con técnicas que permitan generar y captar en forma confiable las ondas sísmicas que más interesan desde el punto de vista del análisis dinámico de las estructuras.

En las secciones 2.2 y 2.3 de este trabajo se describen los dos métodos de campo denominados vertical y horizontal, con los cuales se han determinado las velocidades V_s y V_p en forma satisfactoria (refs 3 a 5), utilizando el equipo que se describe en 2.1.

2.1. Descripción del equipo de prueba

Además de los geófonos ya descritos, la instrumentación empleada incluyó un amplificador y un oscilografo de 12 y 24 canales, respectivamente, cada uno provisto de su propio galvanómetro.

En estas pruebas únicamente se emplearon cuatro canales del amplificador; cada uno posee su propio control de ganancia y sensibilidad, lo que permite ajustar la amplitud del movimiento a niveles apropiados. La unidad amplificadora se alimenta con dos acumuladores de 12 V conectados en paralelo, cuya salida se vigila constantemente por medio de un voltímetro manual TMK. Cada canal del amplificador envía la señal a uno del oscilógrafo Honeywell 1508: una lámpara de rayos ultravioleta acoplada al oscilógrafo permite revelar rápidamente en papel fotosensible de 15 cm de ancho los registros obtenidos. El oscilógrafo funciona con corriente alterna generada por una planta de luz portátil de 1 750 W cuya salida se controla mediante un regulador manual de paso discreto; con la unidad registradora (oscilógrafo) se pueden obtener los registros a velocidades 2.5, 5, 10 y 20 cm/seg, y por un mecanismo multiplicador afectar estos valores por los factores 0.1, 1 y 10. El valor más apropiado de la velocidad de papel se selecciona en cada caso de acuerdo con la velocidad de trasmisión de las ondas en el suelo bajo estudio y de la profundidad a la que se sitúa el geófono. El oscilógrafo está provisto también de una unidad que genera marcas de tiempo cada

1.0, 0.1 o 0.01 seg. En el caso específico de estas pruebas, los registros se obtuvieron con una velocidad de papel de 25 cm/seg y marcas de tiempo cada 0.01 seg, debido a que en terrenos arcillosos de gran deformabilidad, como los que constituyen la zona explorada, las ondas sísmicas se propagan a velocidades pequeñas. En la fig 2 se muestra un esquema de la instrumentación empleada.

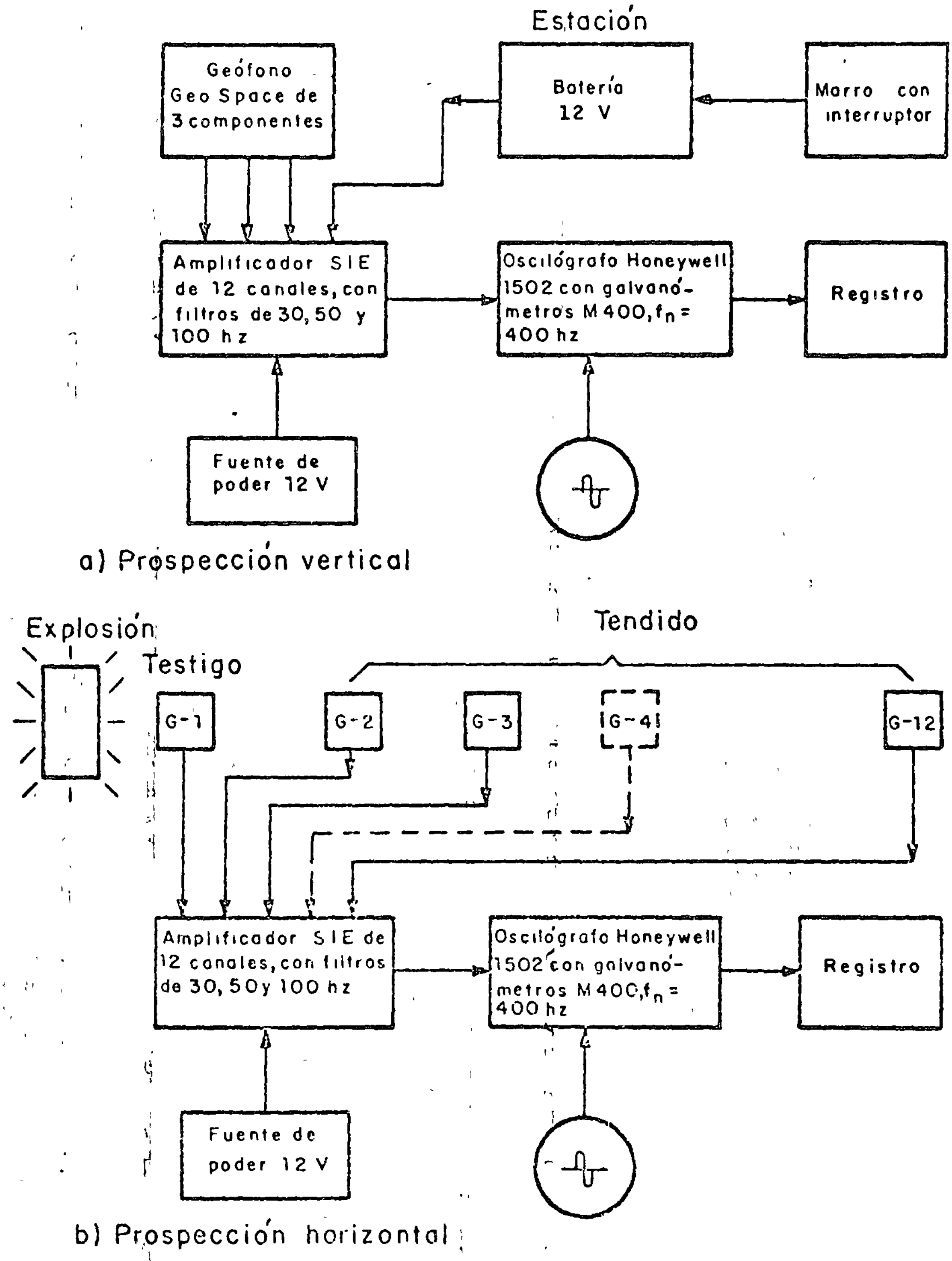


Fig 2. Diagramas de la instrumentación empleada en las pruebas de campo

2.2. Prospección vertical

Este método consiste en colocar, dentro de un barreno de aproximadamente 10 cm de diámetro y 30 m de profundidad. un geofono GEO SPACE de tres componentes ortogonales, el que registra las ondas producidas desde la superficie mediante impactos horizontales o verticales, de acuerdo con el tipo de onda que interese.

Las pruebas se efectuaron en un solo barreno, fijando el geófono a las paredes de este cada 2 m, aproximadamente. Para lograrlo se cubrió el captador con una cámara de hule sellada, la cual se conectó mediante un tubo flexible de 6.3 mm de diámetro a un tanque de aire comprimido a 3 atmósferas; la inyección de aire a la cámara hasta una presión de 0.5 atmósferas permitió obtener un contacto efectivo entre el geófono y las paredes del barreno.

Debido a la naturaleza cohesiva de los materiales en estudio no fue necesario proteger con tubo de plástico las paredes del barreno, lo que resulta indispensable en el caso de arenas o gravas (ref 6), a fin de fijar el geófono o las paredes de la perforación y evitar derrumbes. Así, se avanzó por etapas perforando tramos de prueba de aproximadamente 6 m de longitud, durante los cuales se obtuvieron muestras inalteradas del material, empleando un tubo Shelby de 10 cm de diámetro. Después de obtenerlas se fijaba el geófono como se indicó, dejándolo en condiciones de captar y enviar a la unidad amplifcadora y registradora las señales de vibración producidas desde la superficie. Al terminar las pruebas en un punto determinado del barreno, se procedía a extraer el aire de la cámara de hule, con lo que el geófono podía desplazarse libremente dentro del barreno hasta la siguiente estación de prueba.

La fuente generadora de las ondas transversales o de cortante polarizadas horizontalmente, SH, consistió en un tablón de 240 x 40 x 5 cm, sobre el que se aplicaron impactos horizontales usando un marro de 6 kg de peso. Encima del tablón se colocaron cuatro sacos llenos de arcilla (fig 3) con objeto de reducir los desplazamientos relativos entre este y el terreno, pues el ruido local que producen dificulta la identificación en los registros de la onda en estudio, así como la determinación del tiempo que esta emplea en llegar al captador.

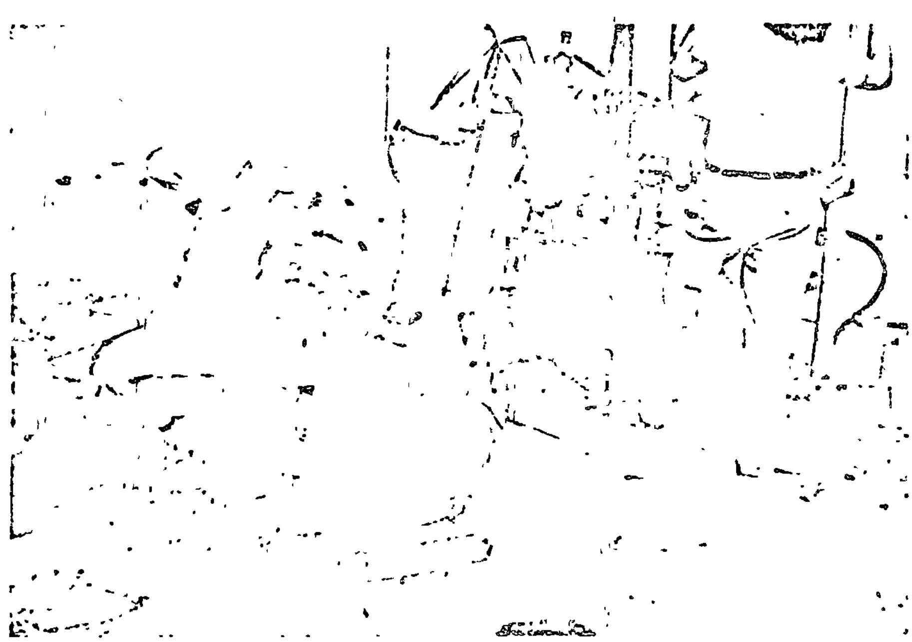


Fig 3. Vista del dispositivo generador de ondas SH empleado en las pruebas de prospección vertical

En general, una vez que el geófono se fijaba a cierta profundidad se aplicaban dos impactos sobre uno de los extremos del tablón y dos mas sobre el extremo opuesto para invertir la fase de la señal e identificar más fácilmente, en los componentes horizontales del registro (fig 4), los tiempos de llegada de las ondas SH.

El tiempo se empezaba a contar a partir de la señal de disparo, la cual se generaba haciendo funcionar un interruptor de tipo electromecánico colocado encima del mango del marro, cerrando sus contactos en el instante en que se producía cada impacto, y enviando al oscilógrafo la señal producida; este interruptor se alimentaba con una batería de 12 V.

Para generar ondas longitudinales se dieron golpes verticales sobre una placa de acero de 30 x 30 x 1.9 cm, empleando un marro de 6 kg. El número de impactos fluctuó entre 2 y 4, los cuales se aplicaron después que el geófono se había fijado dentro del barreno a la profundidad respectiva. El geófono se colocó sucesivamente a distancias aproximadas de 2 m, siguiendo el procedimiento mencionado. La placa de acero se fijó sobre la superficie del terreno a 1.3 m de la perforación; el tablón empleado para generar las ondas SH se colocó a 1.9 m (fig 5).

2.3. Prospección horizontal

Este método consiste en el registro de las ondas sísmicas producidas mediante impactos o cargas de dinamita; estas ondas se captan simultáneamente con geófonos en varios puntos localizados a lo largo de una línea que aquí se denominará **tendido**. En general, las cargas de dinamita se hacen explotar en algún punto de la línea del tendido, repitiendo cada prueba 4 o 5 veces con objeto de promediar los tiempos de arribo a cada uno de ellos de las ondas de interés.

Existen dos técnicos de interpretación de los resultados: la de reflexión, que se basa en la determinación de los tiempos de arribo de las ondas reflejadas, y la de refracción, que se basa en los de las ondas refractadas. Esta última es la más empleada debido a que las velocidades de las ondas longitudinales se determinan a partir de los tiempos de arribo de la primera onda a cada geófono; con ella es posible determinar la profundidad de los estratos subyacentes cuando la rigidez de cada manto aumenta con la profundidad. Las profundidades de detección varían de acuerdo con la potencia de la detonación, la sensibilidad de los captadores y la longitud de los tendidos.

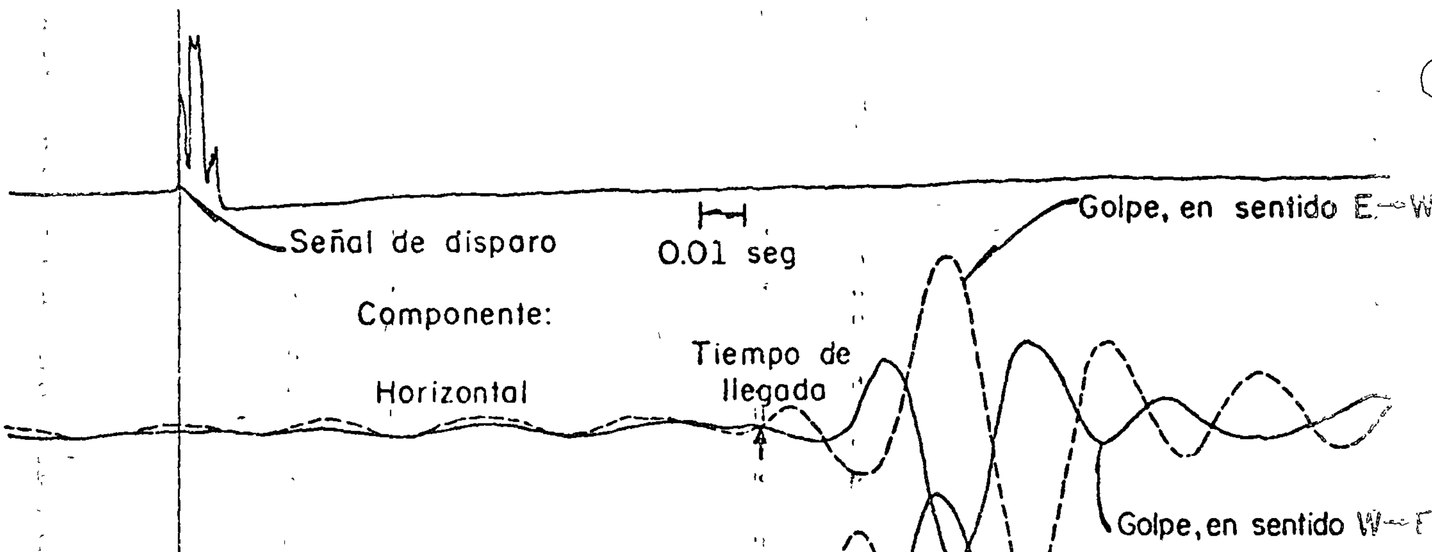


Fig 4 Registro de ondas SH obtenido en una prueba de prospección vertical (nótese la inversión de fase de las ondas)

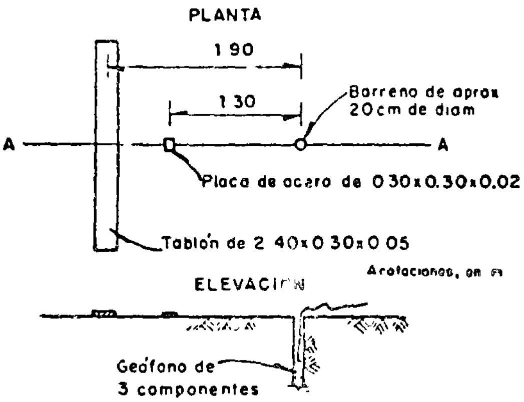


Fig 5. Localización de las fuentes de excitación para pruebas de prospección vertical

El método de refracción se ha aplicado ampliamente para fines de exploración de minerales, de petróleo y de mantos acuíferos, en los cuales es suficiente conocer la velocidad de propagación de las ondas longitudinales, que son las que se identifican más fácilmente en los registros de ondas generadas mediante explosiones. Sin embargo, desde el punto de vista de la ingeniería sísmica, las ondas de cortante desempeñan un papel importante por las razones señaladas en el cap 1. Debido a que en un registro de explosiones con dinamita este tipo de ondas es difícil de identificar, se han desarrollado dispositivos especiales que permiten generar ondas S, como el que se menciona en la ref 3. En este trabajo se usó método de refracción.

Para captar las ondas longitudinales se utilizaron 12 geófonos SIE con sus ejes sensibles orientados verticalmente y con la misma fase, los cuales se colocaron a lo largo de una línea de más o menos 65 m de longitud, espaciados a distancias que variaron entre 2.5 y 10 m, aproximadamente (fig 6); la señal de cada uno se envió a la unidad amplificadora SIE mediante cable duplex No 18. El tiempo de arribo de las primeras ondas se contó a partir de la señal enviada por un geófono colocado junto al sitio donde se efectuaron las explosiones, el que se denominará geófono testigo. En general, cuando se dispone de estopines eléctricos conectados a un detonador mediante alambre nicromel, es posible controlar el instante en que se produce la explosión y, por tanto, el momento en que se debe accionar la unidad de registro.

En cada prueba se colocó un cartucho de dinamita de 40 g en el fondo de un barreno de aproximadamente 20 cm de diámetro y 50 cm de profundidad, localizado en uno de los extremos del tendido (fig 6). Con objeto de aprovechar al máximo la energía liberada durante la explosión, el barreno se rellenó con material compactado.

En la fig 7 se presenta un registro típico de las ondas longitudinales obtenidas con este procedimiento.

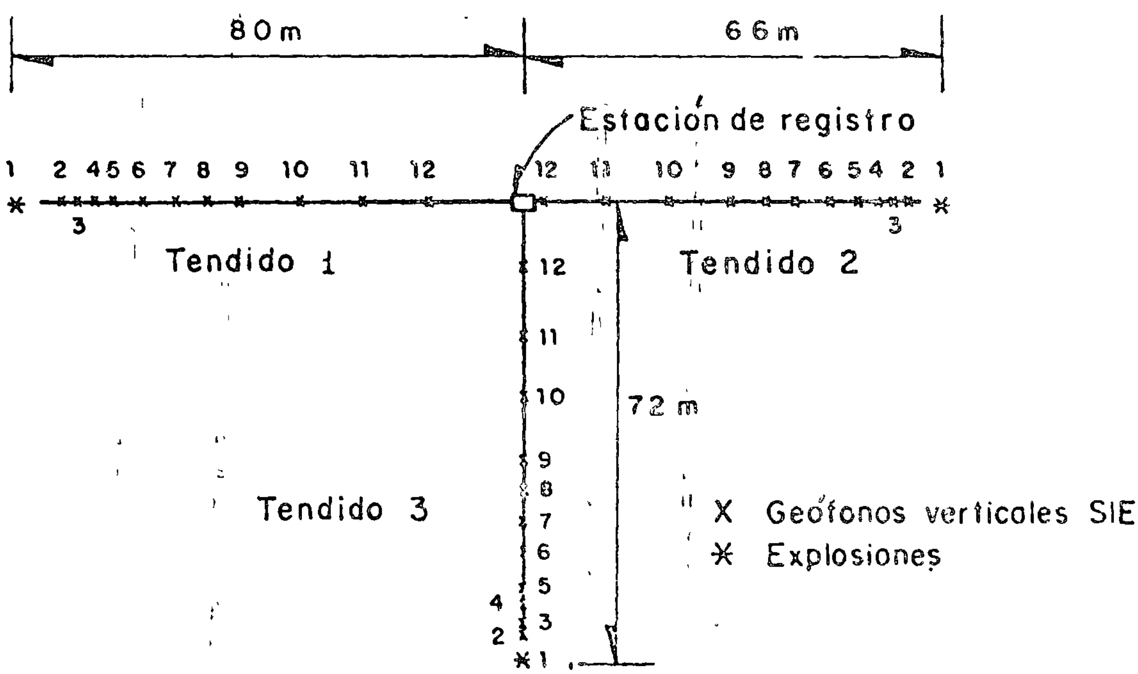


Fig 6. Líneas de prospección horizontal en la zona estudiada

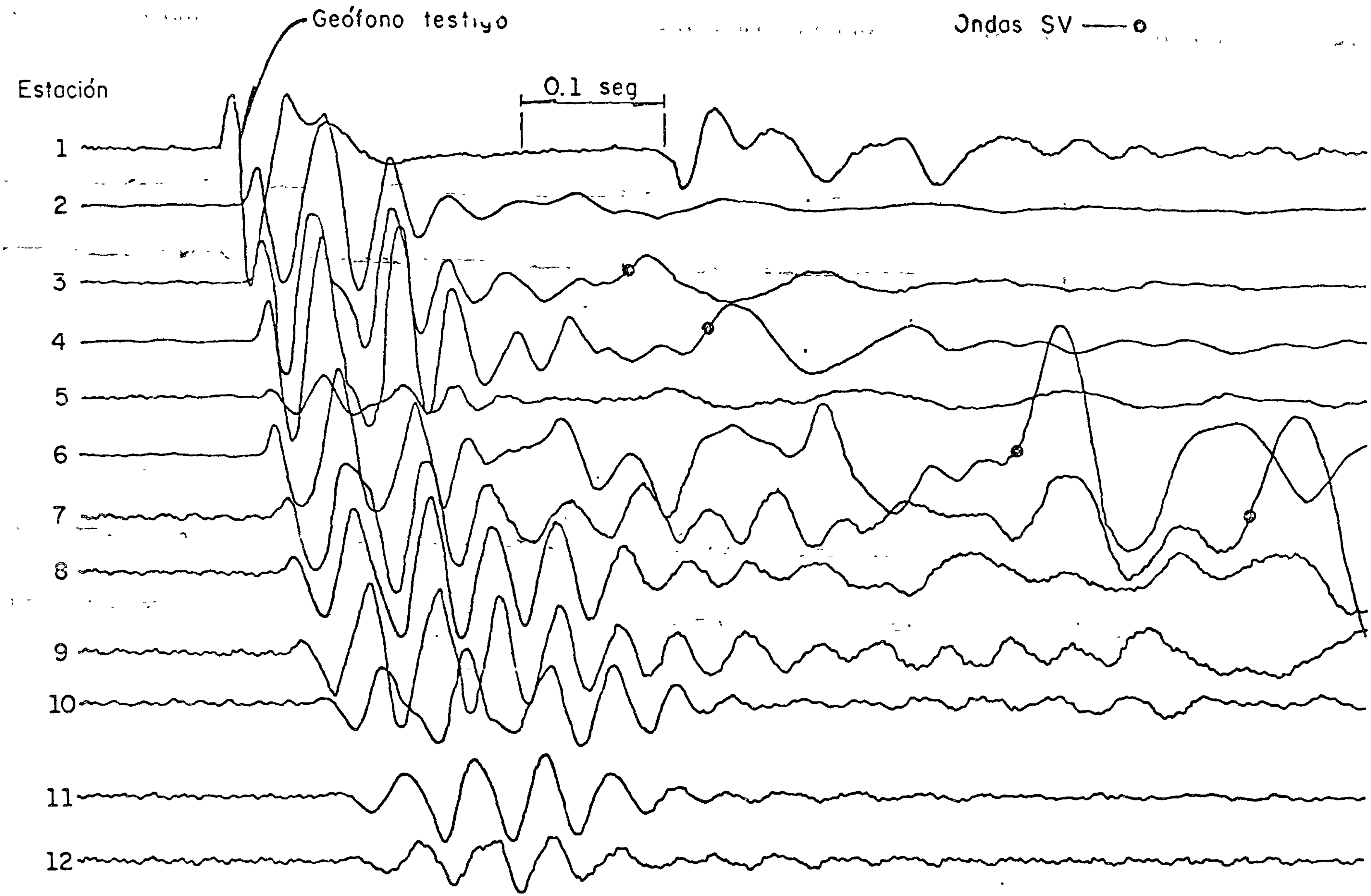


Fig 7. Registro típico de ondas longitudinales generadas mediante explosiones

Para registrar las ondas de cortante se emplearon 12 geófonos GEO SPACE con sus ejes sensibles horizontales igualmente orientados en dirección perpendicular a la línea de prospección, en los mismos sitios donde se fijaron los geófonos SIE (fig 8). El geófono testigo se colocó junto a un pozo de aproximadamente 50 x 100 x 50 cm, en cuyo fondo se situó el dispositivo generador de ondas (fig 9), el cual se diseñó y construyó en el Instituto de Ingeniería. Este dispositivo consistió en un tubo de acero, tapado en un extremo, en el que se puso un cartucho de dinamita de 20 o 40 g y una munición de 2.5 cm de diámetro. El tubo se instaló horizontalmente dentro de la excavación mencionada con su eje orientado en dirección perpendicular al tendido. Frente al extremo libre del tubo se colocó una placa de acero de 30 x 30 cm y 2.5 cm de espesor, la cual se fijó a una de las paredes de la excavación, cuidando de que existiera un contacto efectivo entre esta última y la placa. La distancia a la que se colocó la placa del extremo del tubo fue de 10 cm, aproximadamente. Para reducir los movimientos del dispositivo al producirse la explosión, el tubo se soldó a una base formada por una placa de acero de 2.5 cm de espesor; después de instalar el dispositivo se rellenaba el pozo con material arcilloso compactado por capas, y se puso un sobrepeso. En estas condiciones, el tubo quedaba en aptitud de generar ondas de cortante al golpear la munición sobre la placa de 30 x 30 cm por efecto de la detonación.

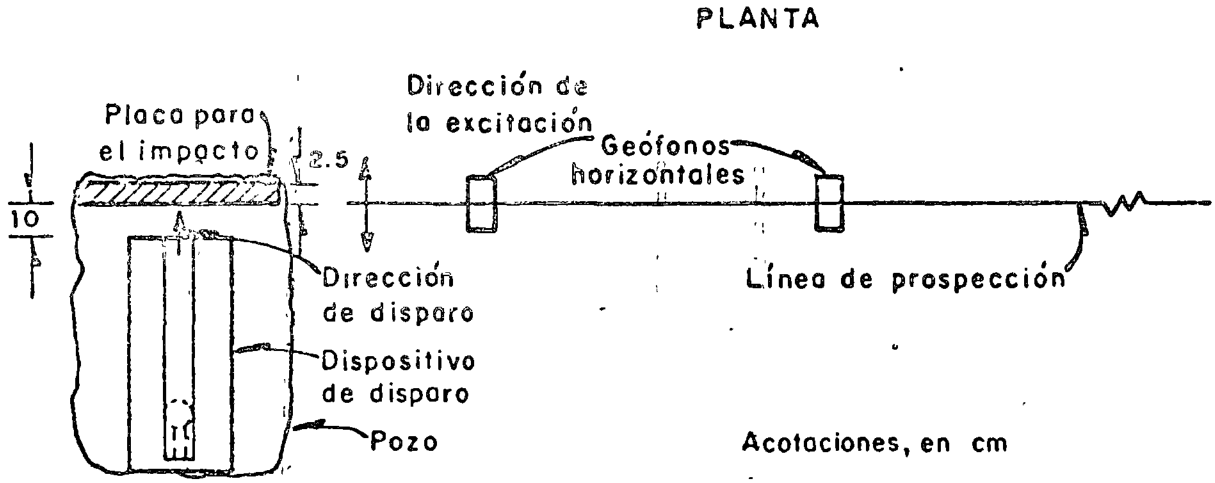


Fig 8. Sistemas de excitación y captación de las ondas registradas en el tendido n. 3

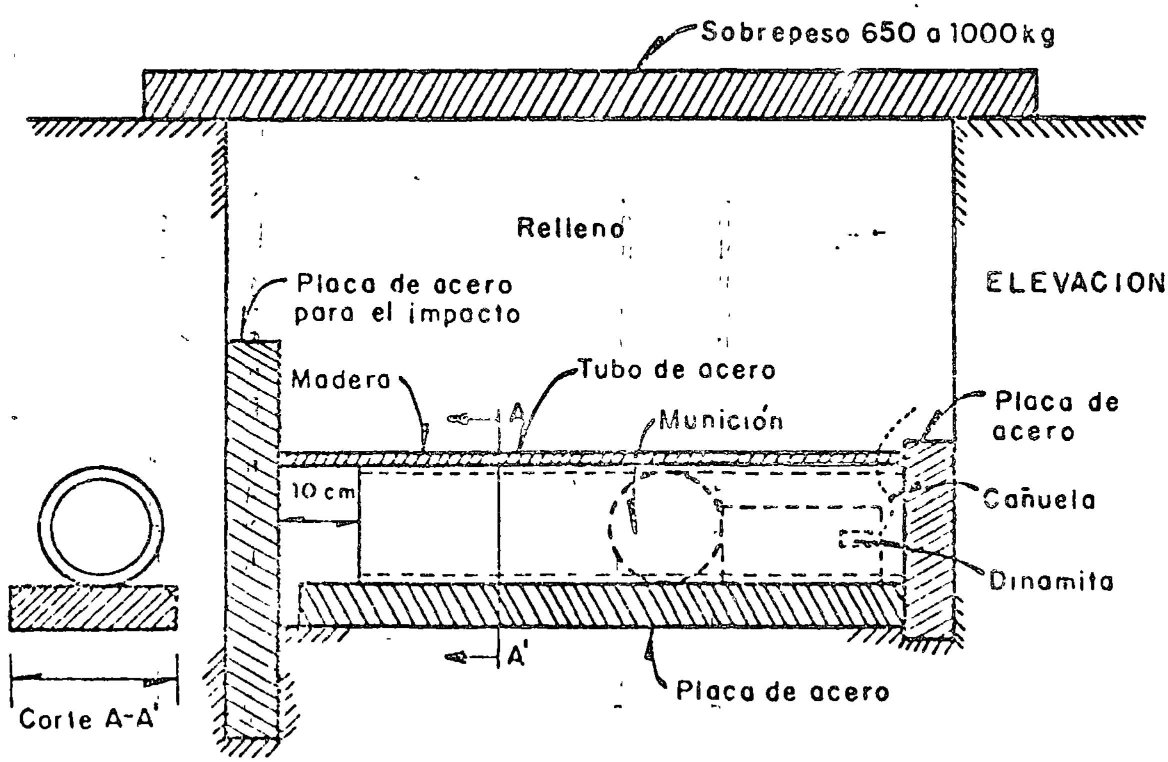


Fig 9. Croquis del generador de ondas accionado con dinamita

...4. Interpretación de resultados

Con base en los registros de las pruebas de prospección vertical, se obtuvieron las velocidades de propagación de las ondas P y SH, ajustando mediante líneas rectas los valores promedio de los tiempos de arribo correspondientes a una determinada profundidad del geófono. En todas las pruebas dicho tiempo se midió tomando en cuenta el punto en el que aparece la primera onda, que es donde ocurre un cambio de pendiente con respecto a la línea base (fig 3). Considerando que el geófono y la fuente de excitación no se localizan en la misma vertical, los tiempos de llegada de los cuatro puntos más superficiales se corrigieron multiplicándolos por un factor que resulta de dividir la profundidad a la que se fija el geófono entre la distancia de este a la fuente de excitación. En los demás puntos no se efectuó esta corrección debido a que su efecto es muy pequeño.

En la fig 10 se presenta la gráfica profundidad-tiempo de arribo de las ondas de cortante. A profundidades menores de 17 m, V_s tiene un valor de 38 m/seg, y de 52 m/seg para una profundidad hasta de 30 m aproximadamente, que fue hasta donde se llevó el sondeo.

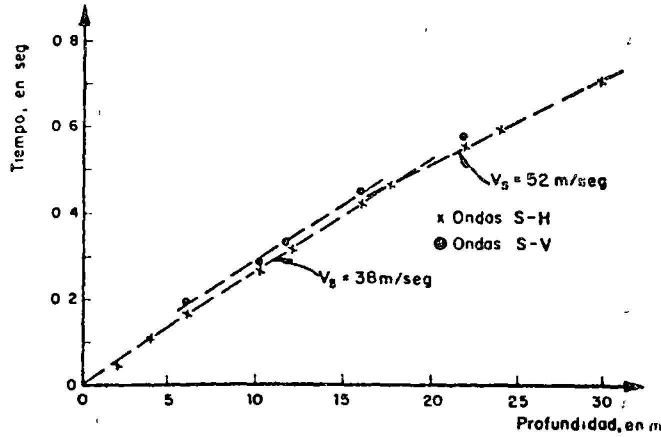


Fig 10. Gráfica profundidad-tiempo de llegada de ondas transversales (prospección vertical)

En forma semejante se procedió a determinar la velocidad de las ondas longitudinales (fig 11), habiéndose detectado un valor de V_p igual a 910 m/seg. En este caso, los tiempos de llegada a profundidades mayores de 24 m no se pudieron detectar, debido a que para ellas la relación señal a ruido era muy pequeña. En la fig 11 no se nota un cambio en la velocidad de las ondas P a 17 m como el observado en el caso de las ondas transversales. Probablemente esta falta de sensibilidad de las ondas longitudinales para detectar un cambio en la rigidez se deba a que el contenido de agua de los materiales es muy elevado (250-450 por ciento), y su influencia en la velocidad de las ondas P oculta las diferencias que pudiera haber por efecto de la rigidez de la estructura del material.

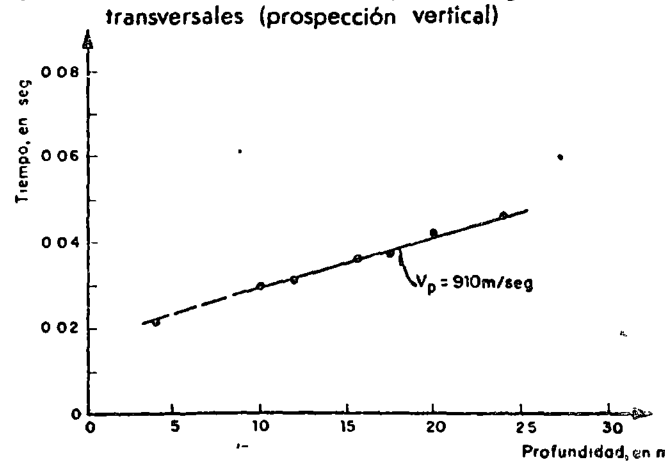


Fig 11. Gráfica profundidad-tiempo de llegada de las ondas longitudinales (prospección vertical)

Por lo que respecta a los resultados de las pruebas de prospección horizontal, se obtuvo un valor promedio de V_p de 940/seg para el tendido 2 (fig 12). En los demás tendidos el valor de V_p fue prácticamente el mismo, no habiéndose detectado ningún cambio de pendiente que hubiera permitido estimar la profundidad de estratos más resistentes, como el determinado a 17 m en la fig 10. Esto se debe a que con las velocidades determinadas en la fig 10 se hubiera necesitado un tendido de longitud superior a 80 m para detectar el cambio de estratigrafía a los 17 m de profundidad. Esto puede verificarse despejando x_c de la ecuación (ref 1):

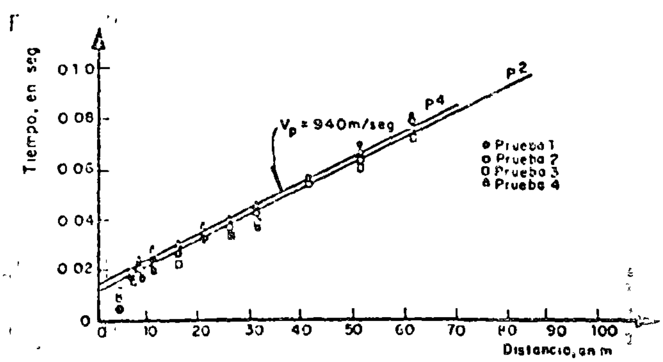


Fig 12. Gráfica distancia-tiempo de llegada de ondas longitudinales en el tendido 2

$$H = \frac{x_c}{2}\sqrt{\frac{V_{s_2} - V_{s_1}}{V_{s_2} + V_{s_1}}} \qquad (6)$$

donde x_c es la abscisa del punto en que se cruzan las líneas de la gráfica distancia-tiempo de arribo, que corresponden a los primeros dos mantos. V_{s_1} y V_{s_2} son las velocidades V_s del primero y segundo estratos, respectivamente, y H es la profundidad del primer estrato.

También se estudiaron ondas transversales, polarizadas verticalmente, SV, generadas por impactos verticales y explosiones con dinamita. Dadas las características de las ondas longitudinales (mayor frecuencia y menor amplitud), a partir de los registros obtenidos en este tipo de pruebas se puede estimar en ocasiones el tiempo de llegada de las ondas SV identificando una onda de mayor amplitud que se presenta después que la onda P disminuye notablemente de tamaño (ref 7). El valor de la velocidad así calculada fue de 38 m/seg (fig 13).

Los registros de las pruebas de prospección horizontal utilizando el dispositivo para generar ondas SH mostraron en su inicio el arribo de las ondas longitudinales de pequeña amplitud, pero más adelante se identificó fácilmente la llegada de las ondas de cortante, tanto por su periodo, que es más largo, como por su amplitud, que también resulta mucho mayor en virtud de que el impacto aplicado es horizontal. La velocidad que se obtuvo para el manto superior (0 a 18 m) fue de 37 m/seg, mientras que para profundidades de 17 a 30 m fue de 50 m/seg, valores que resultan bastante similares a los obtenidos en pruebas de prospección vertical.

Aplicando las ecs 1 a 3, para profundidades de 0 a 17 m, se obtienen

$$\frac{V_p^2}{V_s^2} = \frac{910^2}{38^2} = 572$$

$$\rho = \frac{0.001185}{981} = 1.21 \times 10^{-6} \, \frac{\text{kg-seg}^2}{\text{cm}}$$

$$G = 1.21 \times 10^{-6} \times 3\,800^2 = 17.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 1.21 \times 10^{-6} \, (3 \times 910^2 \times 10^4 - 4 \times 38^2 \times 10^4) \div$$
$$\div (572 - 1) = 52.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = \left(\frac{572}{2} - 1\right)/(572 - 1) = 0.499$$

Para profundidades de 17 a 30 m se llega a

$$V_p^2 \quad V_s^2 = 306$$

$$\rho = 1.22 \times 10^{-6} \, \frac{\text{kg-seg}^2}{\text{cm}}$$

$$G = 32.9 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 98.3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.498$$

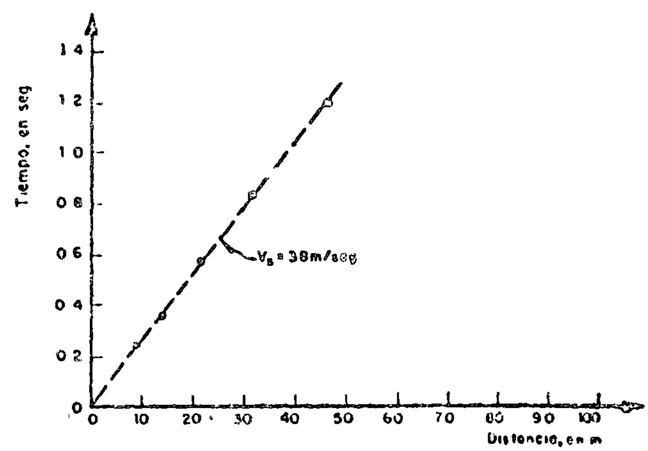


Fig 13. Gráfica distancia-tiempo de llegada de las ondas SV identificadas en los registros de explosiones

3. PRUEBAS DE LABORATORIO

3.1. Programa de pruebas

Con objeto de comparar las propiedades mecánicas de los materiales determinadas in situ con las obtenidas en ensayes de laboratorio, se elaboró el siguiente programa:

— Determinación de propiedades índice: límite líquido (LL), límite plástico (LP), densidad de sólidos (S_s), contenido natural de agua (w) y peso volumétrico de la muestra (γ).

— Pruebas dinámicas de columna resonante; se efectuaron diez ensayes de este tipo, T-1 a T-10, con objeto de conocer la rigidez y el amortiguamiento del material en condiciones dinámicas y bajo deformaciones angulares entre 10^{-4} y 10^{-3} aproximadamente. Todas las pruebas fueron no consolidadas-no drenadas.

3.2. Obtención de muestras

Se obtuvieron muestras inalteradas de un sondeo mixto con tubo Shelby; su localización aparece en la fig 1 La perforación alcanzó 31.20 m, y la muestra más profunda se obtuvo a 30.5 m.

Para evitar una alteración excesiva de las muestras al elaborar las probetas para las pruebas dinámicas, se cortó con segueta el tubo Shelby en la zona deseada; la longitud del tramo fue generalmente de 20 cm; se incrustó un alambre rígido muy cerca del perímetro y se hizo correr por todo el contacto tubo muestra, remoldeando esa zona; luego se apoyó el tubo por su extremo inferior y se levantó, saliendo la muestra por peso propio. El diámetro de la probeta fue de 3.6 cm, y se esculpió de la parte inferior del material sacado del tubo Shelby. A pesar de las precauciones que se tomaron durante el sondeo, algunas muestras resultaron fisuradas (fig 14).

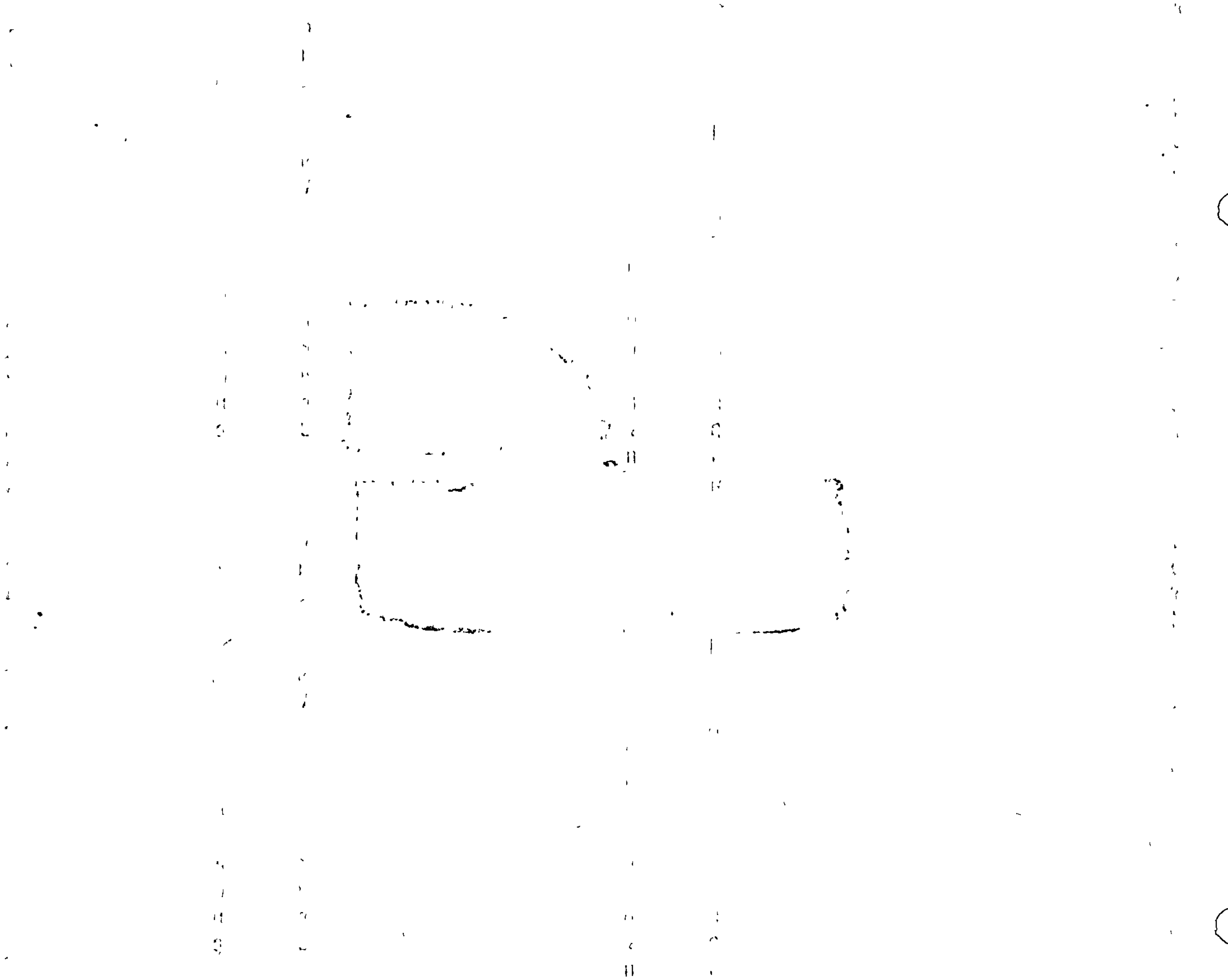


Fig 14. Vista de una muestra fisurada obtenida a 6 m de profundidad

3.3. Breve descripción del aparato utilizado

Este aparato es, básicamente, semejante al desarrollado por Drnevich, Hall y Richart (ref 8). A continuación se mencionarán sus características principales y los procedimientos de ensaye. En la ref 9 se encuentra una descripción más detallada del aparato de que dispone el Instituto de Ingeniería.

Una muestra cilíndrica (de 3.6 cm de diámetro y 8 cm de longitud) se apoya sobre una base rígida; en su parte superior se instala una placa con cuatro imanes (oscilador) que son excitados por igual número de bobinas. Los imanes están colocados de tal manera que produzcan un par de torsión con respecto al eje de la muestra. A través de las bobinas se hace pasar una corriente de voltaje y frecuencia variables, lo que genera un campo magnético en el interior de estas que [illegible] que los imanes se muevan, produciendo entonces una torsión dinámica en la muestra.

Para captar la respuesta del material se utiliza un acelerómetro de tipo piezoeléctrico, colocado en la misma placa que va sobre la muestra, el que permite medir la variación de la aceleración en función tanto del tiempo como del par de torsión. Para aplicar la presión confinante se emplea un cilindro de lucita que rodea a la muestra, apoyado sobre la base rígida. El peso de la placa se toma por medio de un resorte que no presenta resistencia a la torsión.
En un osciloscopio se puede observar tanto la amplitud de respuesta del material como la del momento aplicado a la muestra, el cual es directamente proporcional al voltaje que circula por las bobinas.

.1 Determinación de la rigidez

El procedimiento de ensaye consiste en variar la frecuencia del voltaje aplicado a las bobinas hasta que el sistema muestra-excitador entra en resonancia, con lo cual se obtiene la frecuencia de resonancia, que está directamente relacionada con el módulo dinámico de rigidez, G, del material, mediante la expresión (ref 9):

$$G = \frac{128\,\pi\, J_\theta\, L}{D_e^4 - D_i^4} f_n^2 \qquad (7)$$

donde

G módulo dinámico de rigidez

J_θ momento polar de inercia de la placa puesta sobre la muestra, incluyendo los imanes, respecto al eje del sistema muestra excitador

L longitud de la muestra

D_e diámetro exterior de la muestra

D_i diámetro interior de la muestra (= 0 si la muestra es sólida)

f_n frecuencia de resonancia, en hz

3.3.2. Determinación del amortiguamiento

Para calcular la fracción de amortiguamiento respecto al crítico, D, del material, se puede emplear cualquiera de los siguientes métodos:

— Vibración libre. Consiste en dejar que la muestra vibre libremente y en observar la disminución, con el tiempo, de la amplitud de vibración. El amortiguamiento puede, entonces, calcularse mediante la ecuación (ref 9):

$$D = \frac{1}{2\pi} \log_n \frac{x_i}{x_{i+1}} \qquad (8)$$

donde

x_i amplitud de aceleración, en vibración libre, para el iésimo ciclo

x_{i+1} amplitud de aceleración para el ciclo $(i+1)$ –ésimo

— Factor de amplificación dinámica. Está basado en la relación teórica que existe entre la deformación máxima correspondiente a dos frecuencias diferentes. El modelo matemático utilizado es el de vibración forzada de un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso. El cociente de la deformación angular d_1, que corresponde a la frecuencia de resonancia f_n, y la d_2 asociada a una frecuencia igual a $\sqrt{2}\, f_n$ es, aproximadamente

$$\frac{d_2}{d_1} \doteq 2\,D \qquad (9)$$

Considerando que la deformación y la aceleración angulares, d y $\ddot{d}$, respectivamente, están relacionadas por

$$d = \frac{\ddot{d}}{(2\pi f)^2} \qquad (10)$$

donde f es la frecuencia de vibración, a partir de la ec 9 se llega a

$$D = \frac{\ddot{d}_2}{4\ddot{d}_1} \qquad (11)$$

3.3.3 Determinación de la deformación promedio

La deformación angular en un espécimen cilíndrico sometido a torsión dinámica es función del radio y de la altura del mismo. Puesto que en este tipo de pruebas el momento polar de inercia de la placa y los imanes respecto al eje del sistema muestra-excitador es muy superior al momento polar de inercia del espécimen, la deformación angular es prácticamente independiente de su altura, quedando el radio de este como única variable.

Se define como deformación angular promedio, γ_p, a

$$\gamma_p = \frac{\int_{\acute{a}rea} \gamma_a \, dA}{A}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\theta}{L}\,\frac{D_e^3 - D_i^3}{D_e^2 - D_i^2} = C_1\,\frac{\theta}{L} \qquad (12)$$

donde γ_a es la deformación angular, A el área de la sección transversal del espécimen, θ la rotación en la parte superior del mismo (en su extremo inferior la muestra está fija), L, D_i y D_e tienen el significado ya descrito, y

$$C_1 = \frac{1}{3}\,\frac{D_e^3 - D_i^3}{D_e^2 - D_i^2} \qquad (13)$$

Considerando que la aceleración lineal, $\ddot{x}$, es

$$\ddot{x} = \ddot{\theta}\, r \qquad (14)$$

y además

$$\theta = \frac{\ddot{\theta}}{(2\pi f)^2} \qquad (15)$$

donde r es la distancia del acelerómetro al eje de la muestra, se encuentra que la deformación promedio máximo es

$$(\gamma_p)_{m\acute{a}x} = \frac{C_2\, \ddot{x}_{m\acute{a}x}}{f^2 L} \qquad (16)$$

donde $\ddot{x}_{m\acute{a}x}$ es la aceleración lineal máxima y

$$C_2 = \frac{C_1}{4\pi^2 r} \qquad (17)$$

3.4. Resultados obtenidos

A continuación se resumen los resultados de las pruebas de laboratorio.

3.4.1 Propiedades índice

En la tabla 1 se presentan los valores obtenidos de contenido de agua (w), peso volumétrico (γ), límite líquido (LL), índice plástico (IP) y relación de vacíos (e); en la fig 15 se muestra la variación del contenido de agua con la profundidad, donde se observa que w alcanza valores muy cercanos al límite líquido, y en un caso es superior a él. Además, el contenido de agua de 0 a 17 m de profundidad es, en promedio, superior al de 17 a 30 m.

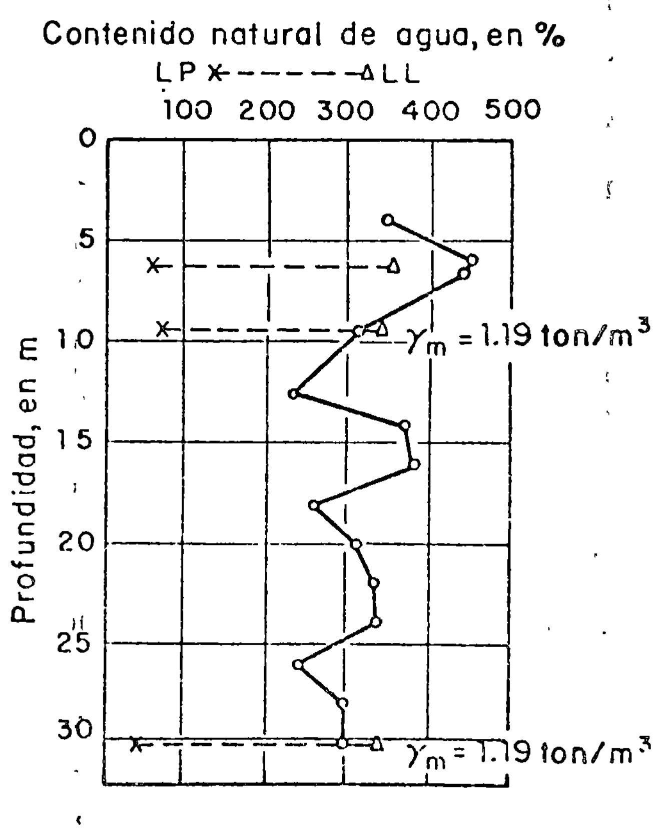


Fig 15 Variación del contenido de agua con la profundidad

TABLA 1. PROPIEDADES INDICE DE LAS MUESTRAS OBTENIDAS EN EL SONDEO MIXTO

Profundidad, en m	Parte	w, en porcentaje	γ, en ton/m³	LL, en porcentaje	IP, en porcentaje	e
3.60 - 4.50	superior	384				10.00
3.60 - 4.50	inferior	344				8.95
6.00 - 6.40	superior	238				6.20
6.00 - 6.40	inferior	445				11.60
6.40 - 6.70	superior	421		380	311	10.90
6.40 - 6.70	media	461				12.00
6.40 - 6.70	inferior	435		429	358	11.30
9.00 - 9.90	superior	318		316	251	8.30
9.00 - 9.90	media	305	1.185	341	272	7.95
9.00 - 9.90	inferior	316				8.24
12.00 - 12.90	superior	232				6.05
12.00 - 12.90	inferior	232				6.05
13.60 - 14.50	superior	355				9.22
13.60 - 14.50	inferior	387				10.20
15.60 - 16.50	superior	377				9.82
15.60 - 16.50	inferior	217				5.65
17.60 - 18.50	superior	259				6.75
17.60 - 18.50	inferior	258				6.75
19.60 - 20.50	superior	335				8.72
19.60 - 20.50	inferior	292				7.60
21.60 - 22.50	inferior	334				8.70
23.60 - 24.10	inferior	341				8.87
26.60 - 26.50	inferior	241				6.26
27.60 - 28.50	inferior	305				7.93
29.60 - 30.50	inferior	297	1.194	317	260	7.73

Nota: En todas las pruebas se consideró un valor de la densidad de sólidos igual a 2.61

3.4.2 Pruebas dinámicas

En la tabla 2 se presentan los resultados obtenidos en las pruebas de vibración forzada, en condiciones no drenadas. En ella se observa que en cada una el módulo dinámico de rigidez no varía con la presión confinante, lo cual era de esperarse en virtud de que las muestras estaban saturadas.

Al comparar los resultados de las pruebas de laboratorio, en muestras inalteradas y en condiciones no drenadas, con los valores del módulo dinámico de rigidez obtenidos mediante ensayes geosísmicos, deben tenerse en cuenta los siguientes factores:

— **Amplitud de la deformación angular.** Experimentos efectuados por diferentes investigadores (refs 10 a 12) parecen demostrar que el módulo dinámico de rigidez disminuye con la deformación angular; para deformaciones menores de 0.25 x 10^{-4}, *G* permanece constante. En las pruebas que se describen en este capítulo, la deformación angular mínima es de 10^{-4}; en cambio, las que se tienen en una prueba geosísmica son más pequeñas, del orden de 10^{-6}, aun cuando no se han podido determinar; por tanto, es de esperarse que debido a este efecto, el módulo dinámico de rigidez obtenido a partir de pruebas de campo resulte mayor que el calculado mediante ensayes de laboratorio. Con relación al amortiguamiento, este tiende a aumentar conforme la deformación aplicada crece, ya que se incrementa la energía disipada inelásticamente.

2.1.5. Influencia de la alteración de las muestras, de las trayectorias de esfuerzos y de la anisotropía. Necesidad de efectuar las pruebas en las condiciones más semejantes al estado de esfuerzos inicial y a las acciones que actuaron en el suelo

2.2 En el campo

2.2.1 Prospección sísmica

2.2.2 Veleta

2.2.3 Vibración forzada

2.2.4 Pruebas de placa

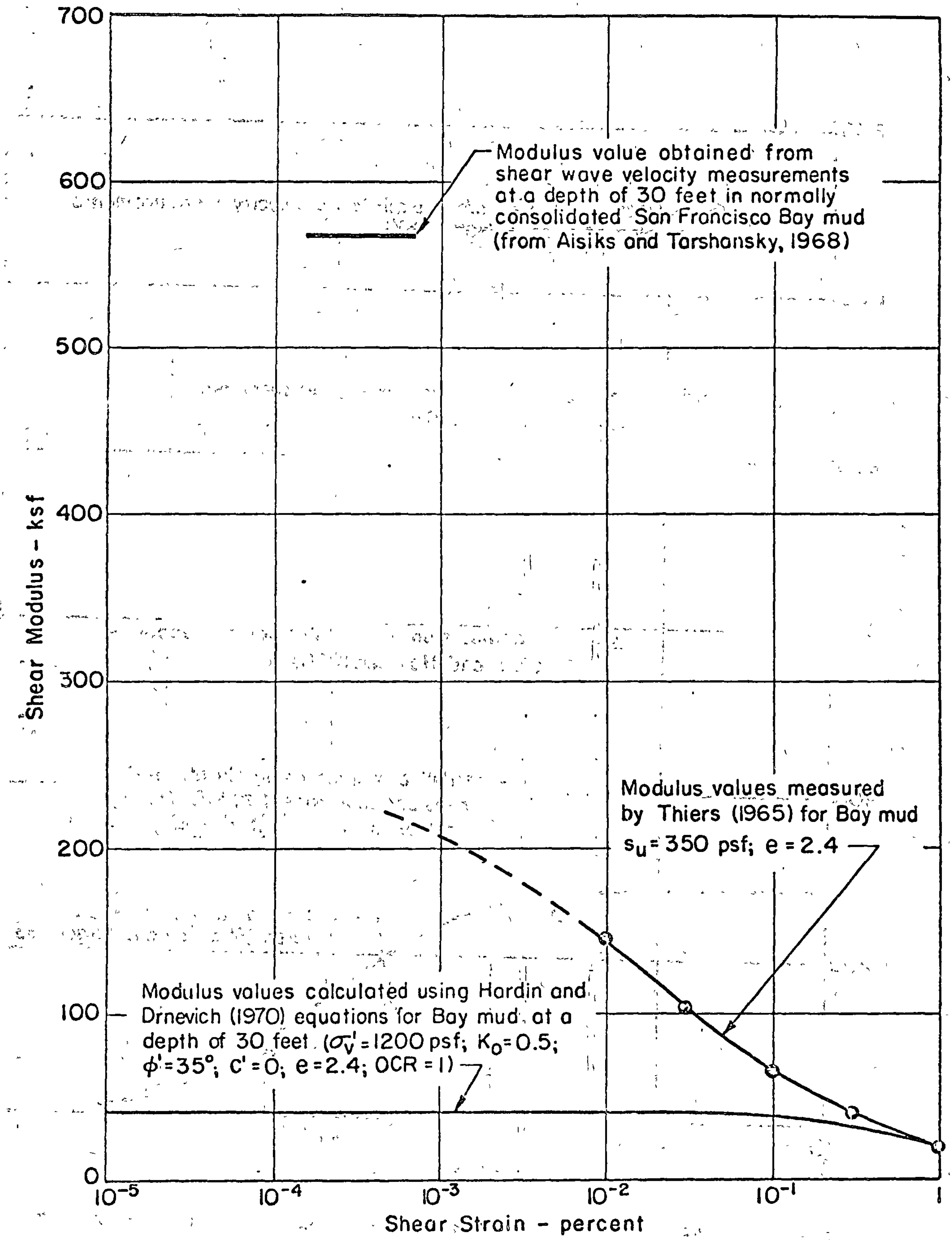


Fig.11 SHEAR MODULUS DETERMINATIONS FOR SAN FRANCISCO BAY MUD.

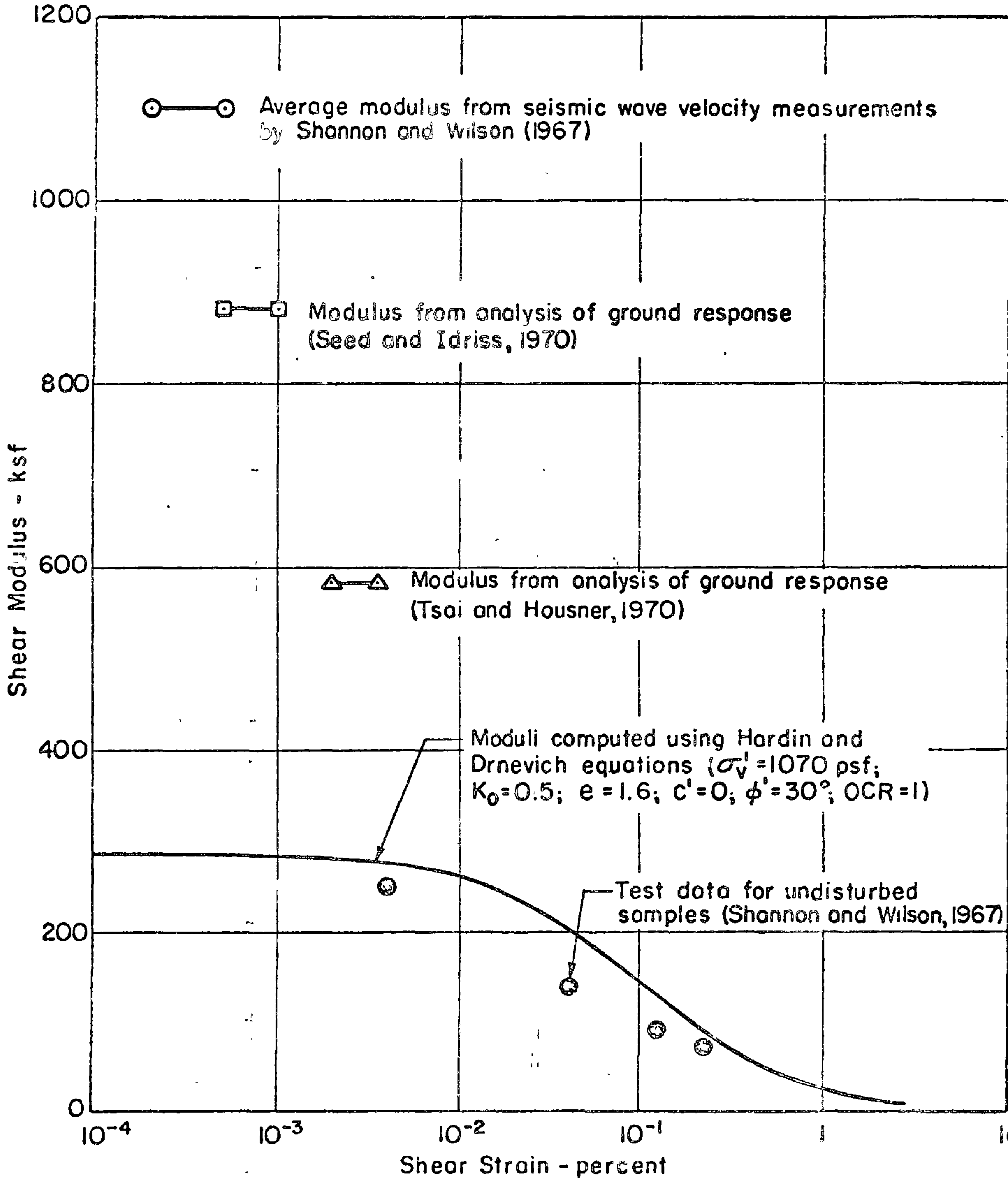


Fig. 12 SHEAR MODULUS DETERMINATIONS FOR UNION BAY CLAY AT DEPTH OF ABOUT 80 FT.

TABLA 2 (CONTINUACION)

Prueba	σ_c, en kg/cm²	f_n, en *hz*	*G*, en kg/cm²	γ_p	*D*
T — 7 w = 22% γ = 1.265 ton/m³ Prof: 21.6 — 22.5 m	0 0 0	6.00 5.70 5.30	20.0 18.0 15.6	0.00014 0.00024 0.00035	0.17 0.14 0.21
T — 8 w = 260% o 310% γ = 1.210 ton/m³ Prof: 19.6 — 20.5 m	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	5.20 5.05 4.98 4.88 4.70 4.65	15.2 14.3 13.9 13.4 12.4 12.1	0.00065 0.00170 0.00310 0.00410 0.00550 0.00600	0.028 0.034 0.026 0.035 0.048 0.052
T — 9 w = 467% γ = 1.100 ton/m³ Prof: 3.6 — 4.5 m	0.25 0.25 0.25	3.65 3.22 3.10	7.4 5.8 5.4	0.00044 0.00100 0.00180	0.125 0.114 0.083
T — 10 w = 408% γ = 1.160 ton/m³ Prof: 13.6 — 14.5 m	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	4.37 4.30 4.20 4.02 4.00	10.7 10.4 9.9 9.1 9.0	0.00051 0.00084 0.00160 0.00270 0.00300	0.025 0.039 0.050 0.050 0.055

— Alteración producida en el material durante el muestreo. Este efecto tiende a disminuir el módulo dinámico de rigidez de la muestras. Una medida de la susceptibilidad a las deformaciones producidas durante el muestreo es la sensitividad, S_u, dada por

$$S_u = q_i / q_r \tag{18}$$

donde q_i es la resistencia a la compresión simple de la muestra en estado inalterado y q_r es la resistencia a la compresión simple en estado totalmente remoldeado, considerando ambas muestras con el mismo contenido de agua. El valor de S_u de la arcilla de Texcoco es del orden de 10 (ref. 15). En esta forma, aun cuando la plasticidad del material es bastante elevada y pudiera pensarse que el efecto del muestreo es pequeño (ref 16), resulta muy probable que se reduzca el módulo dinámico de rigidez debido a la alteración que se produce en el material durante el muestreo.

Fisuración natural de las muestras. Se piensa que este factor no influyó en los resultados de las pruebas de laboratorio, debido a que se realizaron con presión confinante mayor o igual a 0.25 kg/cm², en condiciones no drenadas.

Tomando en cuenta lo anterior, para comparar los resultados de laboratorio con los de prospección geosísmica se obtuvieron los valores de G_l correspondientes a una deformación angular de 2 x 10^{-4}. También se calcularon los valores de G_c considerando los puntos de la gráfica profundidad-tiempo de llegada de las ondas SH (fig 10), con los cuales se obtuvo la variación de V_s con la profundidad. En la fig 16 se muestran los valores del módulo dinámico de rigidez calculados mediante ambos procedimientos.

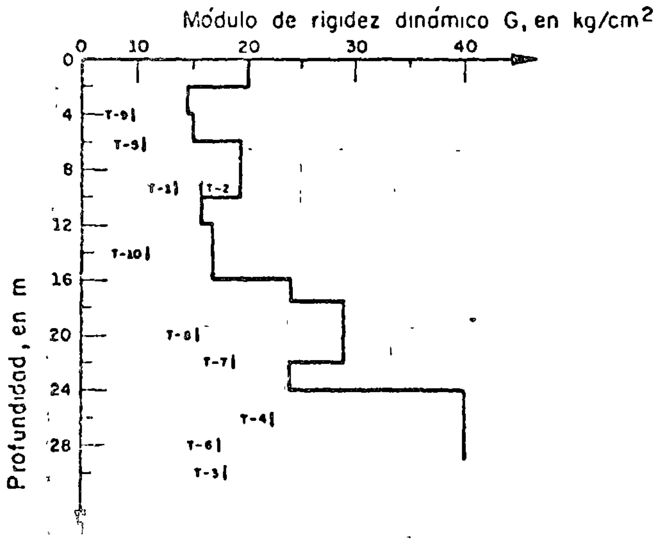


Fig 16. Comparación del módulo de rigidez dinámico obtenido en pruebas de laboratorio y de prospección sísmica

En la fig 17 se presenta la relación G_l/G_c en función de la profundidad. Cuando se tenían dos valores de G_c para una misma profundidad, se calculaban los cocientes respectivos y se hacía pasar una recta por el punto medio de ambos. Debe hacerse notar que para calcular G_c se utilizó el valor de la densidad correspondiente al peso volumétrico saturado del material, teniendo en cuenta que $G = V_s^2 \rho$. Obsérvese en la misma figura que la relación G_l/G_c siempre es menor de uno, y que disminuye con la profundidad. Tomando en cuenta que las deformaciones angulares producidas durante las pruebas de prospección sísmica son muy pequeñas, y de igual orden de magnitud independientemente de la profundidad, y que las deformaciones angulares inducidas en las pruebas de laboratorio son las mismas (2 x 10^{-4}), la disminución de la relación G_l/G_c con la profundidad revela mayor efecto del muestreo con la profundidad.

Actualmente se efectúan en el Instituto de Ingeniería pruebas en muestras inalteradas y consolidadas a distintas presiones de confinamiento, con objeto de reducir el efecto del muestreo y tener mayor número de datos que permita determinar en forma confiable la rigidez y el amortiguamiento de los suelos ante cargas dinámicas.

Respecto al amortiguamiento del suelo, los resultados que se presentan en la tabla 2 confirman que este crece conforme la deformación angular aplicada aumenta. Sin embargo, debido a que no se tienen datos suficientes, no es posible determinar la ley de variación aplicable en este caso. Debe mencionarse que los valores del amortiguamiento quedan sujetos a considerables errores cuando las deformaciones angulares son muy pequeñas; para deformaciones mayores (del orden de 10^{-3}), los valores del amortiguamiento son confiables y llegan a 12.5 por ciento.

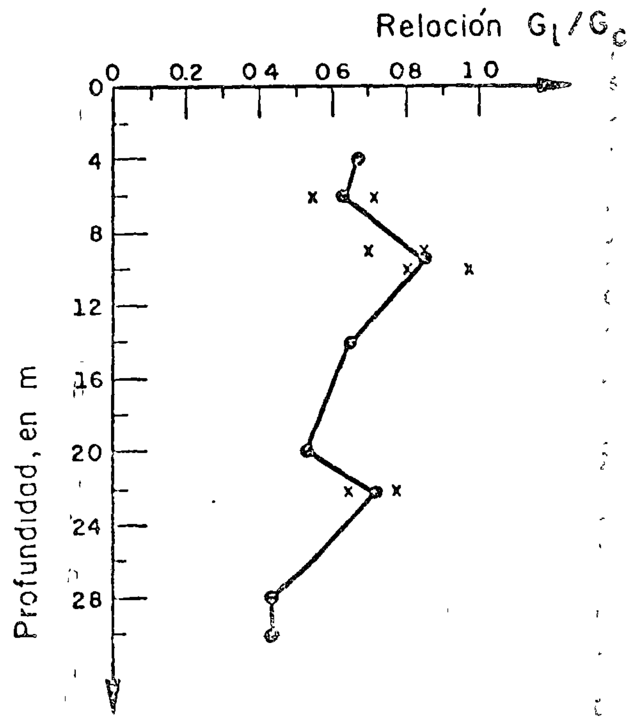


Fig 17. Variación con la profundidad, de la relación G_l/G_c.

2.3 Mediante relaciones empíricas

Table 4. Summary of Investigations of Shear Moduli and Damping Ratios for Saturated Clays.

Type of Test	Soil Tested	Range of Strain		Range of Shear Strength	Data Correction Factor*	Reference
		Shear Strain	Axial Strain			
Field shear wave velocity measurements	S.F. Bay mud	$<10^{-3}$%		200 to 500 psf	1.0	Aisiks and Tarshansky (1968)
Field compression wave velocity measurements	Union Bay clay		$<10^{-3}$%		1.0	Shannon and Wilson (1967)
Lab. Free Vibration Tests: Longitudinal Vibrations	Elkhorn Slough silty clay		3×10^{-2} to 2%	300 to 1100 psf	2.5	Parmalee et al. (1964); Idriss (1966)
Lab. Free Vibration Tests: Shear Vibrations	S.F. Bay mud Kaolinite/Bentonite mixture	2×10^{-2} to 0.5% 5×10^{-2} to 2%		300 psf 44 to 85 psf	2.5 2.5	Kovacs (1968) Kovacs (1968)
Lab. Forced Vibration Tests: Longitudinal Vibrations	Cambridge clay Mississippi gravels		$\approx2.5\times10^{-3}$% $\approx2.5\times10^{-3}$%	1080 psf 520 psf	2.5 2.5	Wilson and Dietrich (1960) Wilson and Dietrich (1960)
Lab. Forced Vibration Tests: Torsional Vibrations	Birch Bay clay Montana clay	$\approx2.5\times10^{-3}$% $\approx2.5\times10^{-3}$%		1000 to 2420 psf 6000 psf	2.5 2.5	Wilson and Dietrich (1960) Wilson and Dietrich (1960)
Lab. Forced Vibration Tests: Torsional Vibrations (consol. samples)	Whidbey Bay clay Silty clay Edgar Plastic Kaolin	$\approx2.5\times10^{-3}$% 0.125% $\approx2.5\times10^{-3}$%		230 to 1800 psf 800 to 1500 psf 1400 to 1800 psf	1.5** 1.0 1.0	Wilson and Dietrich (1960) Zeevaert (1967) Hardin and Black (1968)
Lab. Triaxial Comp. Tests	Ardmore clay Ardmore clay Union Bay clay Silty clay Webb Mark IV clay		0.1 to 0.5% 0.5 to 1% 3×10^{-3} to 0.3% 10^{-2} to 0.1% 0.2 to 1%	- - 200 to 880 psf - -	- - 2.5 - -	Taylor and Menzies (1963) Taylor and Hughes (1965) Shannon and Wilson (1967) Donovan (1969) Taylor and Bacchus (1969)
Lab. Torsional Shear Tests	Georgia Kaolinite	3×10^{-2} to 0.2%		-	-	Krizek and Franklin (1967) Hardin and Drnevich (1970)
Lab. Simple Shear Tests	S.F. Bay mud Kaolinite/Bentonite mixture S.F. Bay mud	0.2 to 4% 0.1 to 2.5% 0.1 to 3%		300 to 400 psf 44 to 85 psf 300 psf	2.5 2.5 2.5	Thiers (1965), Thiers & Seed (1968) Kovacs Kovacs

*Applied to modulus values to allow for sample disturbance.
**Sample disturbed slightly after consolidation.

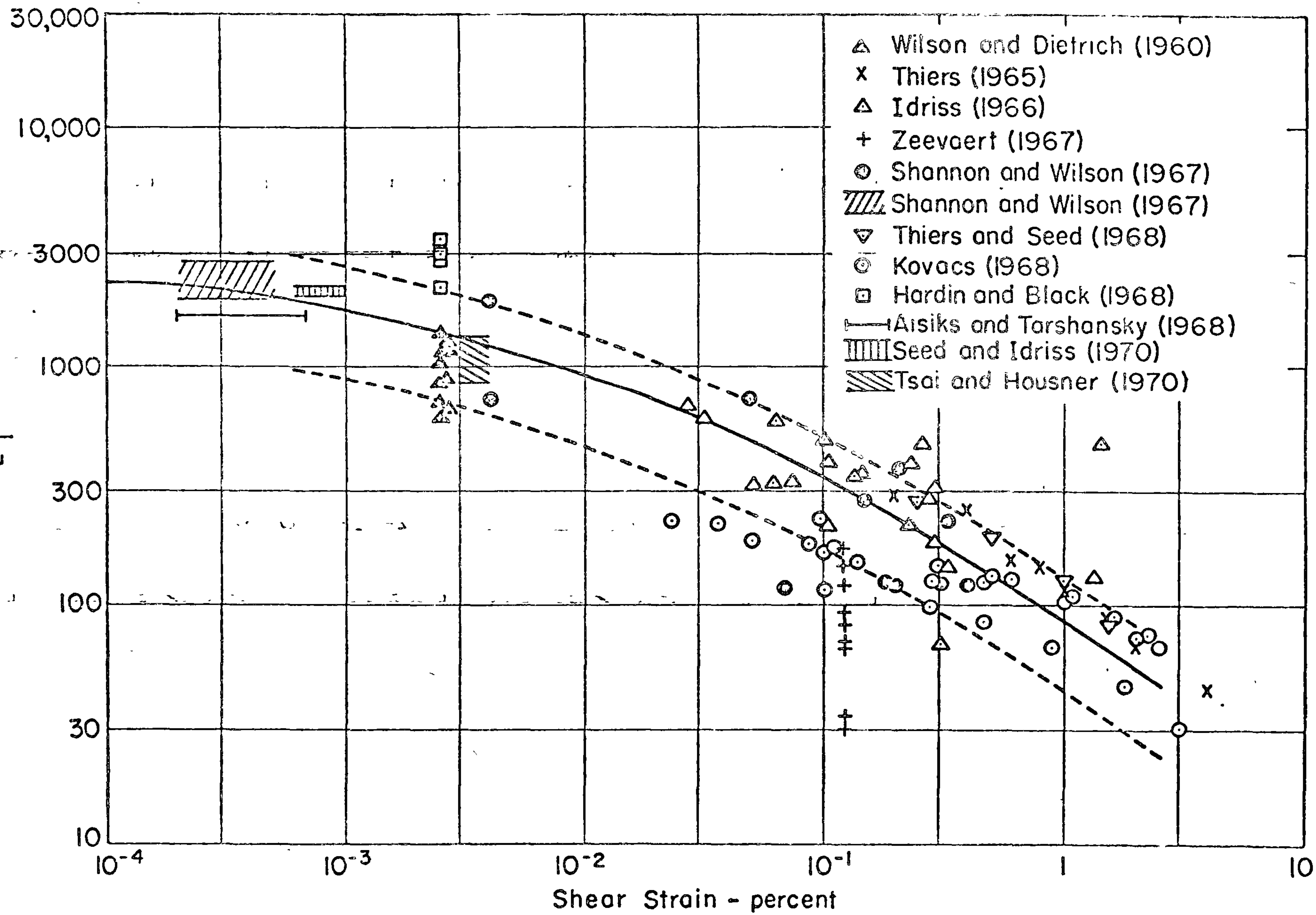


Fig. 13 IN-SITU SHEAR MODULI FOR SATURATED CLAYS.

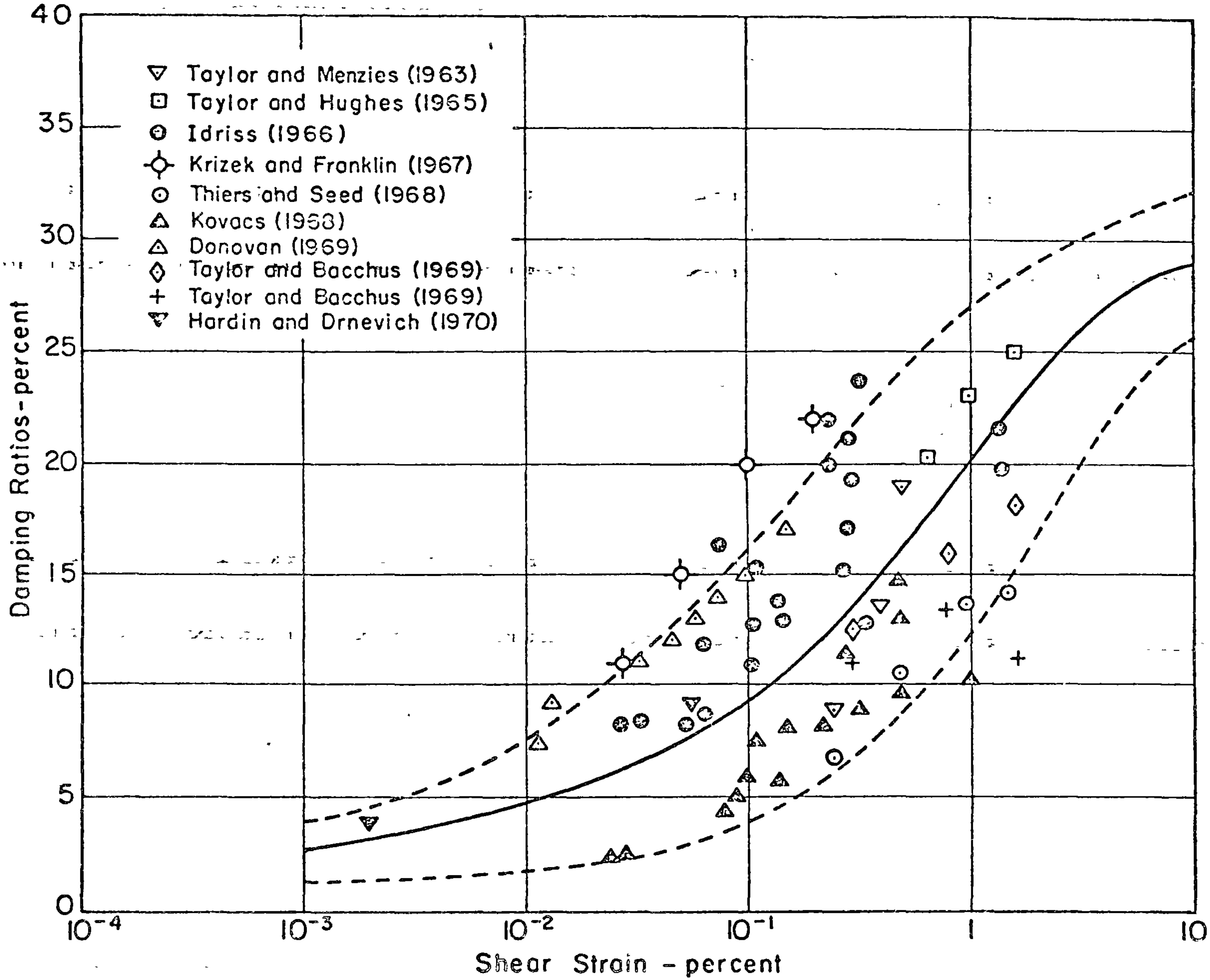


Fig. 15 DAMPING RATIOS FOR SATURATED CLAYS.

and Wilson, 1970) but a summary of the procedures and the approximate ranges of strain within which they have been used is presented in Table 1.

3. Previous Study by Hardin and Drnevich

A comprehensive survey of the factors affecting the shear moduli and damping factors of soils and expressions for determining these properties have recently been presented by Hardin and Drnevich (1970). In this study it was suggested that the primary factors affecting moduli and damping factors are:

Strain amplitude, γ

Effective mean principal stress, σ'_m

Void ratio, e

Number of cycles of loading, N

Degree of saturation for cohesive soils, S

and that less important factors include:

Octahedral shear stress

Overconsolidation ratio, OCR

Effective stress strength parameters, c' and ϕ'

Time effects

Relationships were presented to determine the values of maximum shear modulus (at essentially zero strain) and the variations of modulus values with strain for all soils. The expression for evaluating the maximum shear modulus is:

$$G_{max} = 14760 \times \frac{(2.973 - e)^2}{1 + e} (OCR)^a (\sigma'_m)^{\frac{1}{2}}$$

where G_{max} = maximum shear modulus in psf,

e = void ratio

OCR = overconsolidation ratio

a = a parameter that depends on the plasticity index of the soil, and

σ'_m = mean principal effective stress in psf.

The value of a can be obtained from the following table:

PI	a
0	0
20	0.18
40	0.30
60	0.41
80	0.48
≥100	0.50

The modulus value, G, at a strain level, γ, is then evaluated from the relationship:

$$G = \frac{G_{max}}{1 + \gamma/\gamma_r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

where

$$\gamma_r = \frac{\tau_{max}}{G_{max}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

$$\tau_{max} = \left\{ \left(\frac{1 + K_o}{2} \sigma_v' \sin\phi' + c' \cos\phi' \right)^2 - \left(\frac{1 - K_o}{2} \sigma_v' \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3b)$$

K_o = coefficient of lateral stress at rest,

σ_v' = vertical effective stress, and

c', ϕ' = static strength parameters in terms of effective stress.

Similar relationships were also presented for evaluating the damping ratio. The damping ratio, λ, at a strain level, γ, is given by:

$$\lambda = \frac{\lambda_{max} \cdot \gamma/\gamma_r}{1+\gamma/\gamma_r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

where λ_{max} is the maximum damping ratio corresponding to very large strains. For clean sands, λ_{max} (in percent) is evaluated by:

$$\lambda_{max} = D - 1.5 \log_{10} N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5a)$$

where D = 33 percent for clean dry sands or D = 28 percent for clean saturated sands, and N = number of cycles. For saturated cohesive soils, λ_{max} is given by:

$$\lambda_{max} = 31 - (3+0.03f)(\sigma_m')^{\frac{1}{2}} + 1.5\, f^{\frac{1}{2}} - 1.5 \log N \quad . \; . \; . \; . \quad (5b)$$

where f = frequency of applied cyclic load in cycles per second, and

σ_m' = mean principal effective stress in kg/cm^2.

The significance of the factors involved in these relationships is discussed in the following section.

4. Shear Modulus Values for Sands

All investigations have shown that modulus values for sands are strongly influenced by the confining pressure, the strain amplitude and the void ratio (or relative density) but not significantly by variations in grain size characteristics. It has been found that in general, the shear modulus and confining pressure are related by the equation

$$G = 100\, K_2\, (\sigma_m')^{\frac{1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

so that the influence of void ratio and strain amplitude can be expressed through their influence on the parameter K_2.

Due to thixotropy, several time-dependent effects should be taken into account when determining the shear modulus in cohesive soils.

Crandall *et al.* (1970) found that G_{max} depends on the deformation history of the specimen in such a way that, immediately after inducing shear deformations larger than 10^{-4}, G_{max} decreases as much as 20 percent and then progressively increases with time up to its original value; a similar finding has been reported by Anderson (1974). Also, Afifi (1970) reported losses of 15 to 20 percent in the stiffness developed under a constant effective stress acting 10^4 min after a sudden increase in confining pressure of 10 psi; stiffness was regained with time under constant effective stress.

Elapsed time after primary consolidation also affects G. Marcuson and Wahls (1972) propose Eqs. 4.3 to account for this effect in kaolinites and bentonites, respectively.

$$G_r = 1.0 + 0.046\ T_r \tag{4.3a}$$

$$G_r = 1.0 + 0.242\ T_r \tag{4.3b}$$

G_r is the ratio of the shear modulus at the consolidation time of interest to the shear modulus at 100 percent primary consolidation, and T_r is the ratio of the consolidation time of interest to the time of 100 percent consolidation.

The last effect implies that, when laboratory tests are performed to determine G in freshly consolidated samples, an extrapolation is necessary, using Eqs. 4.3 or other appropriate means, in order to estimate the value of G that applies to field conditions. Stokoe and Woods (1972) and Stokoe and Richart (1973) report that, when a value of T_r corresponding to the age of the deposit is used, the discrepancy between resonant-column and cross-bore hole test results is small. Anderson (1974) has found that a 20 year extrapolation of laboratory results gives, in most cases, good estimates of field values.

3. DETERMINACIÓN DE PROPIEDADES MECANICAS EN SUELOS GRANULARES

3.1 En el Laboratório

Dificultad en la obtención de muestras representativas

3.2 En el campo

3.2.1 Prospección sísmica

3.2.2 Vibración forzada

3.3 Mediante relaciones empíricas

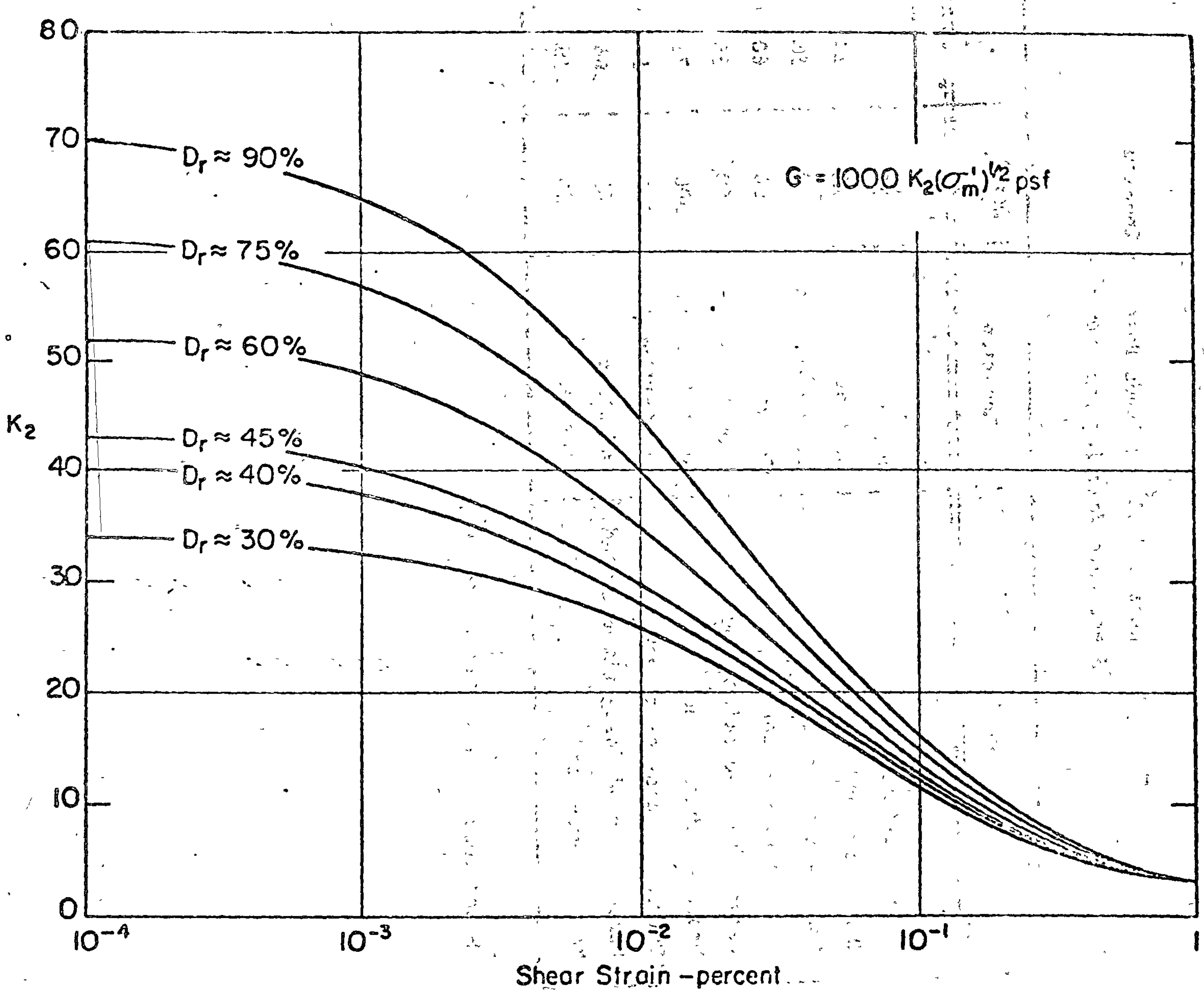


Fig. 5 SHEAR MODULI OF SANDS AT DIFFERENT RELATIVE DENSITIES.

Table 3. Shear Moduli* of Sands Based on In-Situ Shear Wave Velocity Measurements

Soil	Location	Depth ft.	K_2
Loose moist sand	Minnesota	10	34
Dense dry sand	Washington	10	44
Dense saturated sand	So. California	50	58
Dense saturated sand	Georgia	200	60
Dense saturated silty sand	Georgia	60	65
Dense saturated sand	So. California	300	72
Extremely dense silty sand	So. California	125	86
Dense dry sand (slightly cemented)	Washington	65	166
Moist clayey sand	Georgia	30	119

*Shear modulus, $G = 1000\ K_2\ (\sigma_m')^{\frac{1}{2}}$ psf

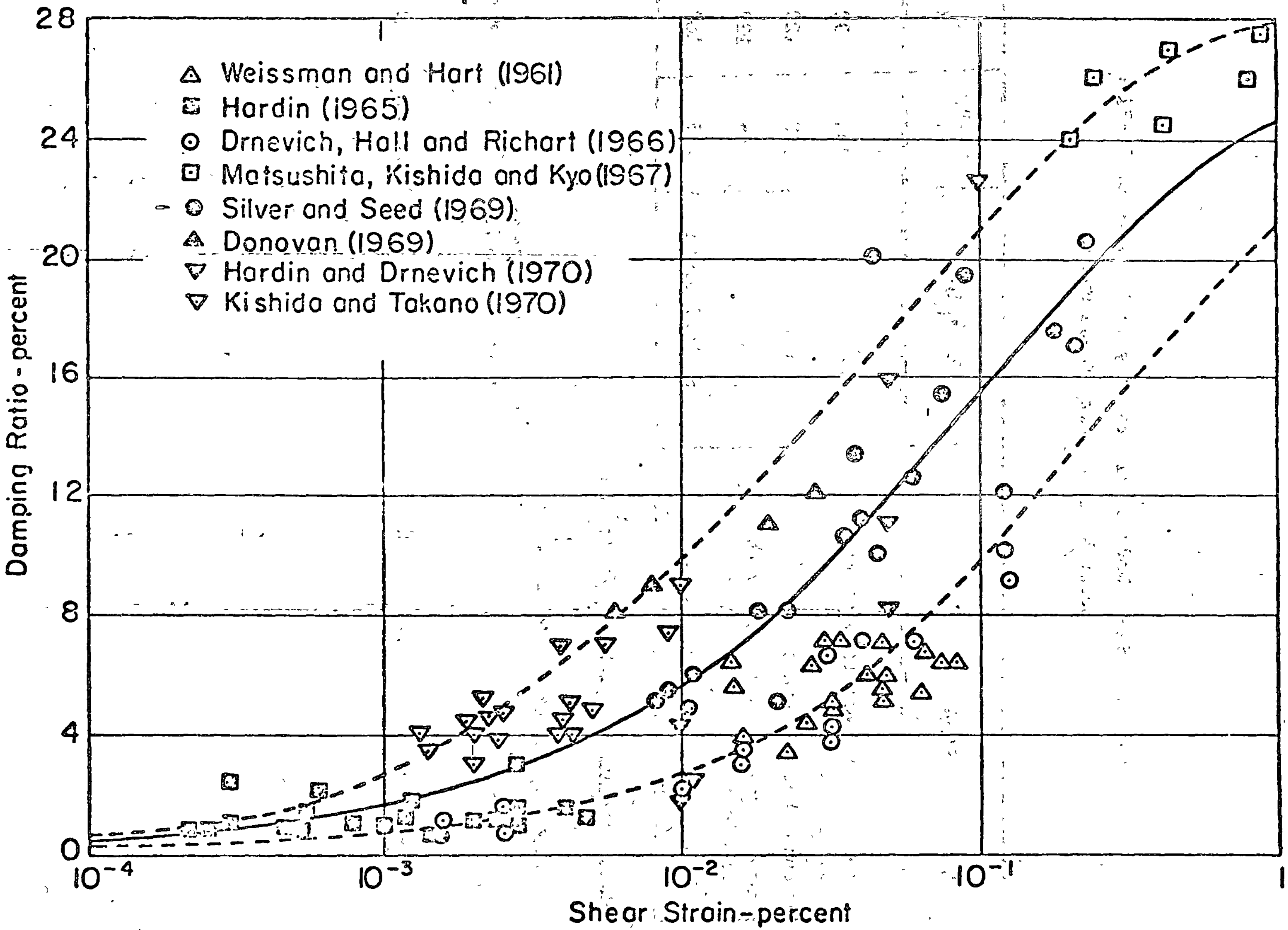


Fig. 10 DAMPING RATIOS FOR SANDS.

Table 5. Shear Moduli* of Gravelly Soils Based on In-Situ Shear Wave Velocity Measurements

Soil	Location	Depth ft.	K_2
Sand, gravel, and cobbles with little clay	Caracas	200	90
Dense sand and gravel	Washington	150	122
Sand, gravel and cobbles with little clay	Caracas	255	123
Dense sand and sandy gravel	So. California	175	188

*Shear modulus $G = 1000\ K_2\ (\sigma_m')^{\frac{1}{2}}$ psf

Sand, gravel with some silt	Lazaro Cardenas, Mich., Mexico	0 – 20	48
Sand and gravel	–	20–100	77