centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar el Segundo Día de Clases, en las oficinas del Centro, con la Señorita Barraza, de lo contrario no será posible.
El control de asistencia se efectuará a través de la persona encargada de entregar notas, en la mesa de entrega de material, mediante listas especiales. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.
Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tésis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.
Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.
Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, es importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción con los datos que se les solicitan al iniciarse el curso.

ATENTAMENTE

ING. SALVADOR MEDINA RIVERO
COORDINADOR DE CURSOS.

Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

'eds.

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.

CURSOS DE MAESTRIA Y DOCTORADO

La División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, ofrece las siguientes Maestrías y Doctorados:

M a e s t r í a s

Control
Electrónica
Estructuras
Hidráulica
Investigación de Operaciones
Mecánica teórica y Aplicada
Mecánica
Mecánica de Suelos
Petrolera
Potencia
Planeación
Sanitaria

D o c t o r a d o s

Estructuras
Hidráulica
Mecánica de Suelos
Mecánica Teórica y Aplicada
Investigación de Operaciones

Programa de actividades para el segundo semestre de 1976

Exámenes de admisión: 10, 11 y 12 de mayo

Inscripciones: 31 de mayo al 4 de junio

Iniciación de clases: 7 de junio

Requisitos de admisión

a) Cumplir con una de las siguientes condiciones:

1. Poseer título profesional en Ingeniería o en alguna disciplina afín a las maestrías que se ofrecen en la División, otorgado por la UNAM o por cualquier institución nacional o extranjera.

2. Ser pasante de la Facultad de Ingeniería, UNAM

b) Aprobar los exámenes de admisión que se efectuarán en las fechas señaladas arriba.

c) Presentar, dentro del período de inscripciones arriba mencionado, la documentación que se indica en el folleto de Actividades Académicas 1975 de la DESFI

Mayores informes: División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Apartado Postal 70-256, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. Tel.: 548-58-77

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, febrero 3. 1976

EL DIRECTOR DE LA FACULTAD
M. en C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON

EL JEFE DE LA DIVISION
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

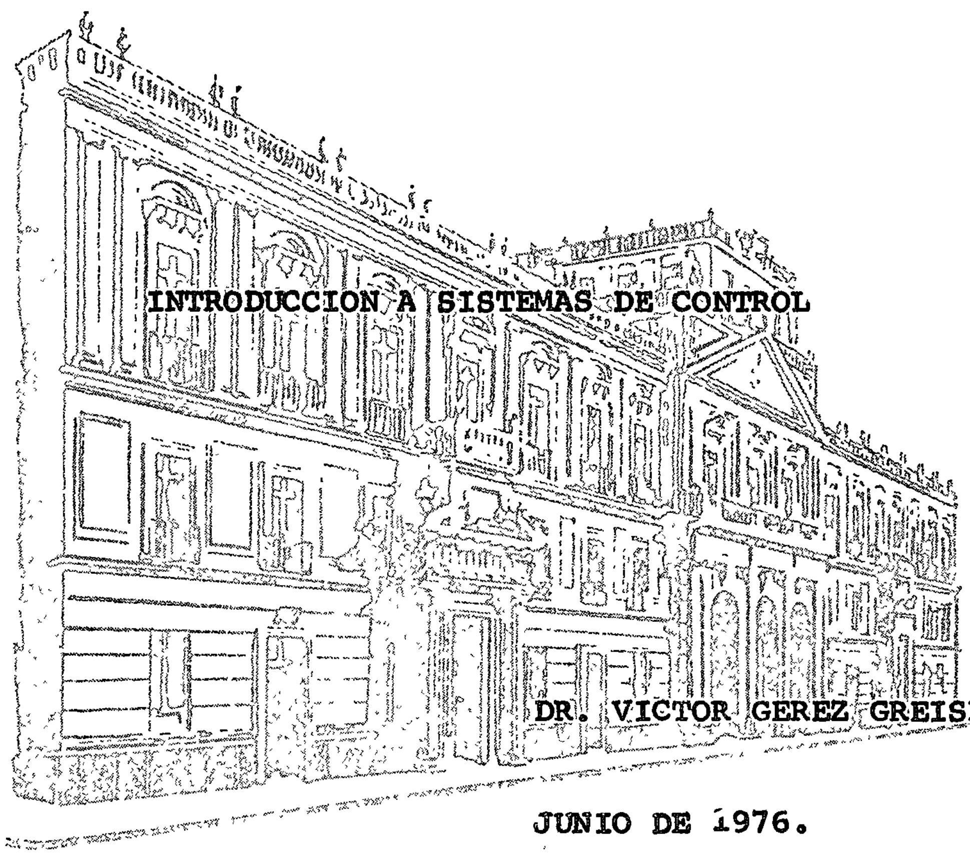
INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO

FECHA	HORA	TEMARIO	EXPOSITOR
JUNIO 4	17:00 - 18:00 h	INTRODUCCION	Dr. Víctor Gerez Greiser
	18:00 - 21:00 h	Modelado con Variables de Estado	
5	9:00 - 13:00 h	Transformada de Laplace	M. en C. Marcial Portilla R.
		Matriz de Transferencia	M. en C. José Ruiz Ascencio
	14:00 - 18:00 h	Laboratorio * (Realimentación)	M. en C. Marcial Portilla R.
11	17:00 - 19:00 h	Reogramas y su Reducción	
	19:00 - 21:00 h	Patrón de Polos y Ceros y la Respuesta Tansistoria	
		Error de Estado Estable	M. en C. René Lara Sánchez
12	9:00 - 13:00 h	Parámetros de Diseño y Sistemas de Segundo Orden	
		Simulación Análogica	M. en C. José Luis Vázquez
	14:00 - 18:00 h	Laboratorio * (Simulación)	
18	17:00 - 21:00 h	Respuesta en Frecuencia	M. en C. Marcial Portilla R.
19	9:00 - 13:00 h	Análisis de Estabilidad	Dr. Víctor Gerez Greiser
		Laboratorio *	M. en C. René Lara Sánchez
25	17:00 - 21:00 h	Análsis de Estabilidad	Dr. Víctor Gerez Greiser
26	9:00 - 13:00 h	Redes de Adelanto y Atrazo	M. en C. René Lara Sánchez
		Realimentación de Variables de Estado	
	14:00 - 18:00 h	Laboratorio *	M. en C. René Lara Sánchez

* Laboratorio de Ingeniería de Control del Departamento de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Facultad de Ingeniería, UNAM.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO



INTRODUCCION A SISTEMAS DE CONTROL

DR. VICTOR GEREZ GREISER

JUNIO DE 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123

VICTOR GEREZ

1 INTRODUCCION A SISTEMAS DE CONTROL

1.1 INTRODUCCION

1.1.1 Definiciones

La Ingeniería de Sistemas de Control, trata del análisis y síntesis de sistemas, cuyo objetivo es transformar ciertos recursos llamados insumos en otros recursos llamados productos de mayor valor que los primeros. Lo anterior puede esquematizarse en un diagrama como el mostrado en la figura 1.1.1

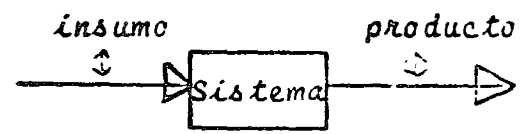


Fig. 1.1.1 Ejemplo de un Sistema

* Para poder controlar esta transformación es necesario poder analizar al sistema y para poder realizar este análisis, es necesario entender el funcionamiento del mismo.

* Conocimiento del sistema → control del sistema

* Para poder entender un sistema, es indispensable poder establecer del mismo un modelo que como veremos en el transcurso de esta obra, de preferencia deberá ser matemático

* Para analizar hay que establecer un modelo matemático

* En el análisis de cualquier sistema, el proceso de modelado es, sin lugar a duda el más delicado, ya que ningún resultado puede ser mejor que el modelo - del cual fué deducido. (G1 - cap. 4)

* Los resultados dependen del modelo

* Para la solución de problemas relacionados con el análisis y síntesis de sistemas de control, es necesario integrar conocimientos de teoría de redes, - comunicación, sistemas lineales y sistemas retroalimentados. La Ingeniería de Sistemas de Control, trasciende de las fronteras de las disciplinas clásicas y resulta fundamentalmente interdisciplinaria, ya que - en un sistema de control en general incluye elementos eléctricos, mecánicos, fluídicos y químicos. Esta -- disciplina tiene además importantes aplicaciones en el análisis de la dinámica de sistemas sociales, económicos y políticos. Por esta razón en esta obra se complementa la presentación teórica con ejemplos tomados de los más diversos campos de aplicación de la ingeniería de control.

* La ingeniería de sistemas [illegible] multidisciplinaria

* Es posible distinguir 2 tipos de sistemas de control:

* Sistemas de lazo abierto y sistemas de lazo cerrado o retroalimentados

En esta obra fundamentalmente se estudian sistemas del último tipo que son los que tienen mayor interés para el profesionista.

* Puede definirse como sistema (G1 - cap 1)

* Un sistema es una interconexión de componentes

un conjunto interconectado de componentes. El conjunto realiza funciones que no puede ejecutar ninguna de las partes por separado.

Para ilustrar la idea de sistemas de lazo abierto y cerrado, considérese el siguiente problema de control, que esquematiza la fig. 1.1.2

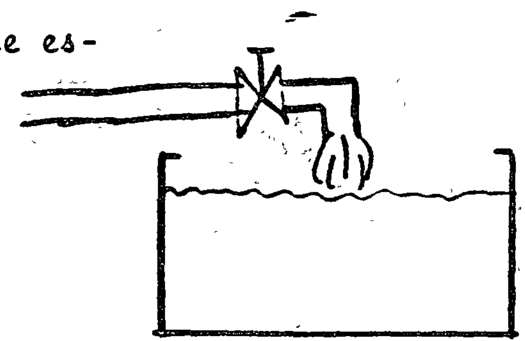


Fig. 1.1.2 Sistema de Control de lazo abierto.

Se desea llenar el tanque de agua hasta un nivel h_d, después de haberlo vaciado. Se ha observado que manteniendo la válvula abierta t seg. se llena el tanque hasta la altura de seada. * Puede por lo tanto implementarse la siguiente estrategia de control:

* Esta regla de control sin embargo tiene el siguiente problema; supóngase que cambia la presión en la tubería de admisión de agua, entonces el tiempo de llenado, varia. Si se vuelve a dejar entrar el agua durante t seg. el tanque o no alcanza el nivel deseado o se pasa. Empleando el lenguaje de la ingeniería de control, se dice que un sistema de lazo abierto no puede mantener la * variable de salida, el nivel en el tanque, en su valor deseado, si hay disturbios en el sistema, en este caso el cambio de presión.

El problema de control puede resolverse empleando un * controlador humano por ejemplo, que visualmente lea la altura del agua en el tanque y mantenga la llave abierta mientras el nivel h del agua no tiene el valor deseado h_d.

* De esta manera el tanque se llevará hasta el nivel [illegible] la presión y por lo tanto el gas- [illegible] llave.

* Estrategia de Control:
Llene el tanque durante t seg

* Si cambia la presión, cambia el tiempo de llenado

* Variable de salida [illegible] nivel en el tanque
Disturbio = cambio [illegible] presión

* Controlador humano [illegible] para el valor deseado [illegible] la variavle de salida [illegible] el valor actual h

* El sistema de lazo cerrado permite controlar ~~la variable~~ el [illegible] deseada aún si hay --

La realimentación permite por lo tanto controlar el sistema aún si hay disturbios que afectan el sistema. La figura 1.1.3 ilustra este tipo de sistema

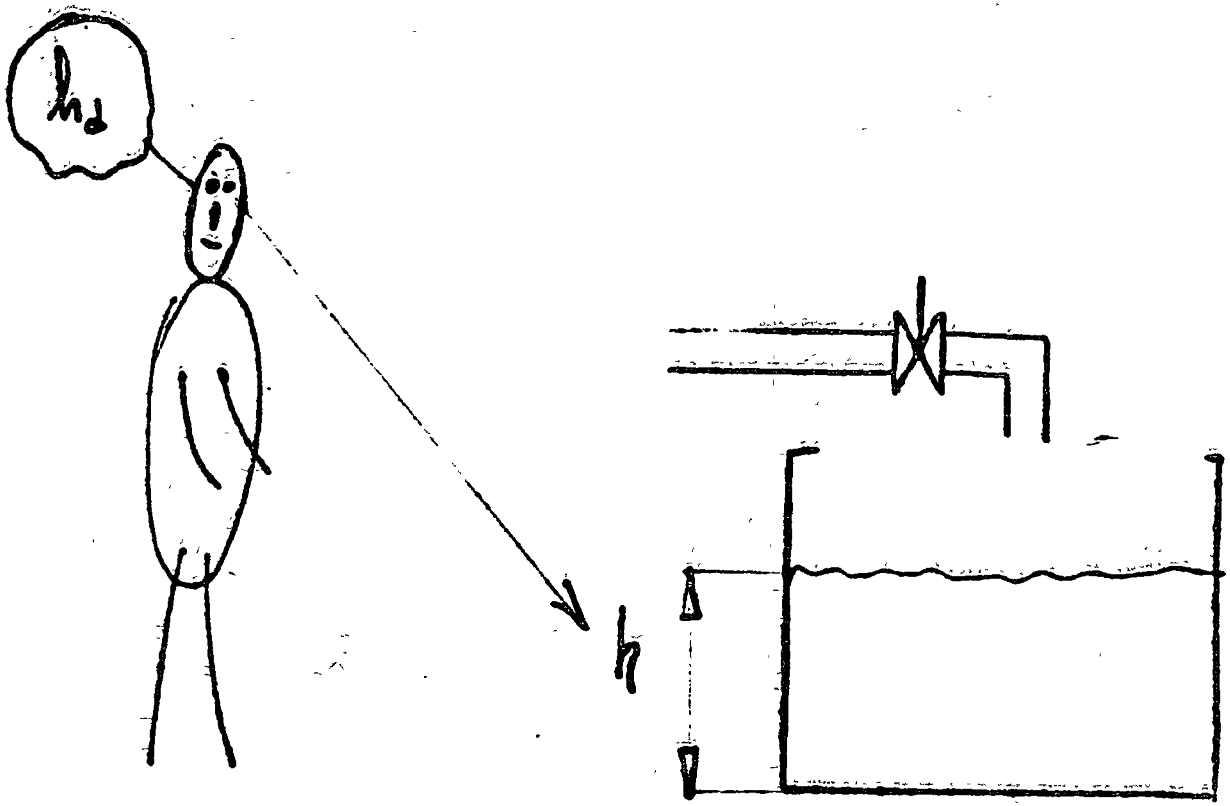
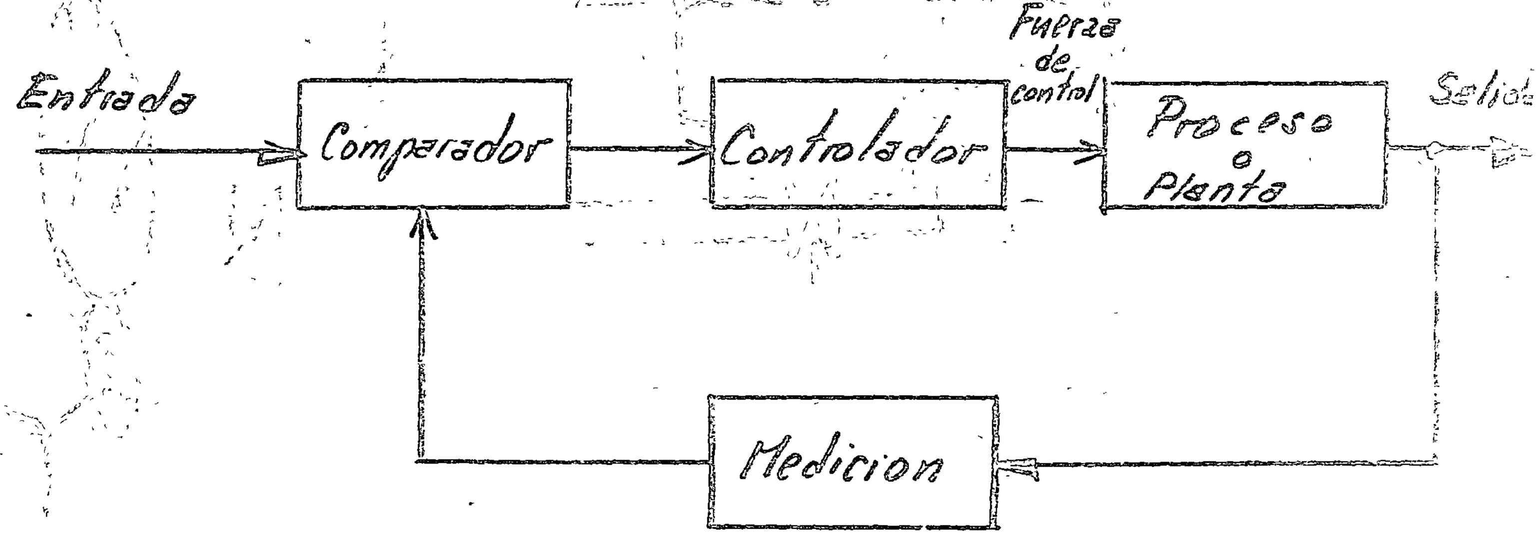


Fig. 1.1.3 Esquema de un Sistema de control de lazo cerrado

* Empleando los diagramas de bloque que se emplean para representar relaciones entre señales de entrada, también llamados <u>excitaciones</u> y señales de salida, también llamados <u>respuestas</u>, puede representarse el sistema de control de lazo cerrado, como lo muestra la figura 1.1.4



* Fig. 1.1.4. Sistema de Control de lazo cerrado

* Haciendo referencia a la fig. 1.1.4 puede distinguirse en un sistema de control

* El elemento llamado controlador què recibe información sobre el valor que debe tener la variable para controlar que puede ser por ejemplo: la temperatura, en un sistema de aire acondicionado. En base a esta señal y realizando una amplificación de energía genera una señal de salida, que puede designarse con el nombre de fuerza de control, esta señal actuá como variable de entrada sobre el proceso o planta cuya salida es la señal que se desea controlar, por ejemplo: la temperatura del cuarto.

* El controlador y el proceso estan conectados en serie

* En los sistemas de control de lazos cerrados o retroalimentados, la señal que hace operar el controlador se origina de comparar la señal de salida en un elemento que se puede - llamar genericamente el comparador. Este elemento compara - el valor deseado de la variable de salida con el valor actual de la señal, medida a la salida del sistema, y obtiene su diferencia. Esta señal es la de entrada del controlador. En muchos sistemas modernos, es necesario controlar el valor de varias variables, y en estos casos se tienen sistemas de Control multivariables, como el que aparece en la figura 1.1.5

* Los sistemas de lazo cerrado incluyen un comparador

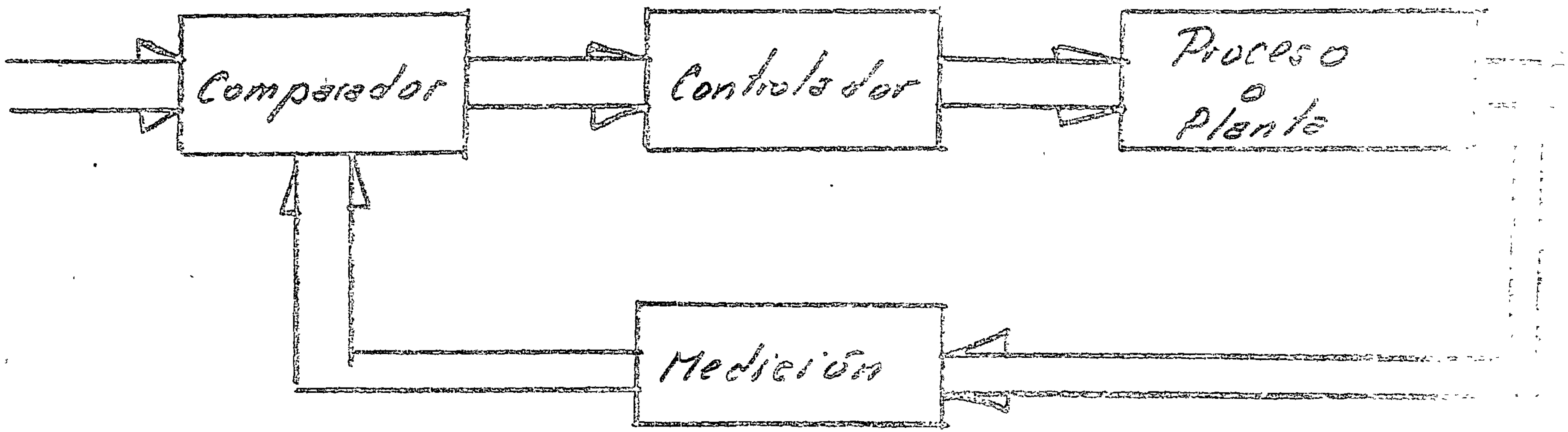


Fig. 1.1.5 Sistema de control multivariable

En esta figura los segmentos dirigidos de trazo doble representan un vector, cuyas componentes son las variables que maneja el sistema de control.

automático en el mundo occidental. Se atribuye a J. Watt, el invento del control centrífugo de velocidad para la máquina de vapor.

Los rusos atribuyen a I. Polzunov haber inventado en 1765 el 1er. mecanismo retroalimentado de control. En este caso se trata de un dispositivo que regula la admisión de agua a una caldera. La figura 1.16., esquematiza este mecanismo.

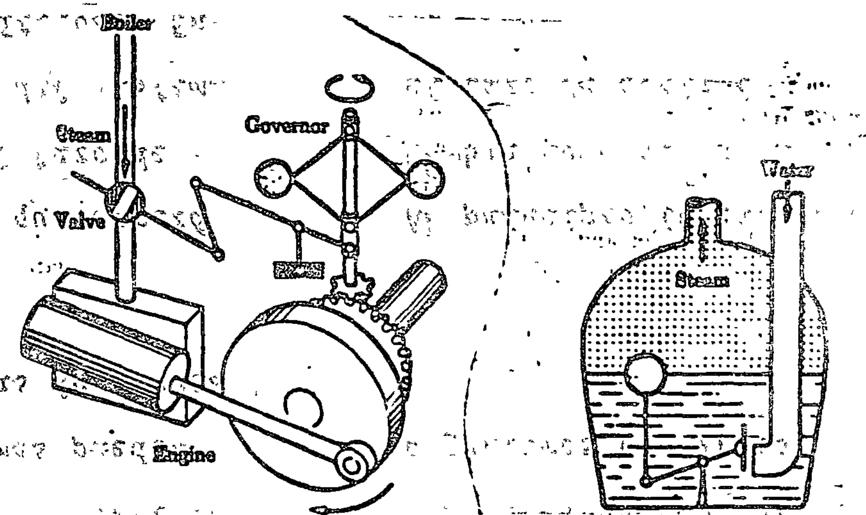


Fig. 1.16. Esquema del control centrífugo de Watt y del control de admisión de agua a una caldera

1.1.2 Antecedentes Históricos

* Muchos sistemas de control automático se encuentran en la naturaleza, como ejemplos de estos sistemas pueden citarse el control biológico de las mas diversas funciones de los organismos vivientes.

* Funciones de control en organismos vivientes

* El hombre primitivo empleó dispositivos que empezó controlándolos interviniendo directamente en el lazo de control. Posteriormente este operador humano del sistema empezó a ser sustituido con dispositivos automáticos. Entre estos ejemplos de sistemas puede citarse el control del suministro de agua que se empleó en Egipto y en la cuenca de los ríos Eufrates y Tigris.

* Al principio intervino el hombre como operador en el lazo de control

* Como se esenaló anteriormente los dispositivos de control, donde un operador humano realiza la comparación entre las variables de salida y las de entrada y toma la decisión de control, sigue empleándose.

* Los sistemas de control con operador humano siguen empleándose

Existe una pequeña controversia sobre quién fué el originador del primer dispositivo industrial de control -

Durante la 2a. mitad del siglo XIX, los dispositivos de control del timón de los barcos empezarón a ser operadas por vapor. * J. C. Maxwell, el famoso fundador de la teoría de campo, en 1868 público el primer tratado matemático sobre un mecanismo de control. Durante las decadas que precidieron a la 2a. guerra mundial, la teoría de control evolucionó debido a los avances en la teoría de las comunicaciones fundamentalmente. Sin embargo este avance fué diferente en el mundo Occidental y en Rusia. * En los Estados Unidos, sobre todo con los trabajos de H. Nyquist, que fueron motivados por el deseo de mejorar las características de los sistemas telefonicos, se empleó

* J. C. Maxwell redactó el primer tratado matemático sobre control

* Los trabajos de H. Nyquist iniciaron el análisis de los sistemas de control en

fundamentalmente el dominio de la frecuencia para caracterizar la operación de sistemas en términos de diversas variables de frecuencia.

el dominio de la frecuencia

* En Rusia el estudio de los sistemas de control, se enfocó fundamentalmente al empleo de ecuaciones diferenciales, ya que ahí estos trabajos fueron realizados por eminentes matemáticos y mecánicos teóricos. Entre los nombres de algunos científicos de esta escuela, podemos citar al de A.M. Lyapunov.

* En Rusia se empleó el dominio del tiempo en este análisis

Durante la 2a. guerra mundial, la teoría de control automático recibió un gran impulso debido a los requerimientos de control extricto de sistemas modernos de armamento.

Se desarrollaron pilotos automáticos para avión, sistemas de posicionamiento y control de radar entre otros. * Puede decirse que antes de la 2a. guerra mundial, el diseño de servomecanismos era un arte basada en la prueba y el error, durante la guerra pasó a convertirse en una ciencia. Siguieron dominando las técnicas

* En la década de los 40 el diseño de sistemas de control pasó de ser un arte a ser una ciencia

de Nyquist y Bode y se popularizó el empleó de la transformada de Laplace.

En los primeros años de la década de los 50, el análisis de sistemas de control lineales, recibió otro fuerte impulso con las técnicas de análisis del lugar geométrico de las raices introducidas por W. R. Evans. * Con el avenimiento de las computadoras analógicas y digitales durante la década de los 50 la ingeniería de control recibió otro fuerte impulsoy se hizo posible controlar simultáneamente con un gran número de variables.

* Las Computadoras analógicas y digitales permitierón controlar simultáneamente varias variables

* La introducción de la computadora digital hizo necesario además el desarrollo de una nueva teoría de sistemas que manejan información discreta. En esa época se desarrolló la teoría de la Transformada -Z una poderosa herramienta para analizar sistemas lineales discretos.

* Las computadoras digitales manejan información discreta

* Con el avenimiento de la era espacial, iniciado por el lanzamiento del primer sputnik, fué necesario, no solamente controlar sistemas, sino hacerlo en forma óptima. R. Bellmann en Estados Unidos y L. S. Pontryagin en Rusia, desarrollarón la teoría del control óptimo.

* El control óptimo fué iniciado por R. Bellmann y L. S. Pontryagin

- En la actualidad el ingeniero de control debe tener conocimientos, de las técnicas de análisis en el dominio de la frecuencia y en el tiempo, para poder resolver problemas de análisis y diseño de estos sistemas.

- Hay que conocer técnicas de análisis en el dominio de la frecuencia y del -- tiempo

1.2 APLICACIONES DE SISTEMAS DE CONTROL

1.2.1 Aspectos Generales

Para controlar un proceso físico en una planta industrial, el ingeniero de control puede hacer uso de diferentes métodos de diseño y emplear equipo diverso. • Puede seleccionar instrumentos que trabajan a base de señales físicas que varían en forma continua como pueden ser la tensión, la corriente, ó la presión de aire. Generalmente estos sistemas controlan una sola variable a la vez, y se conocen con el nombre de convencionales.

• Hay sistemas que trabajan con señales de variación continua

• Es posible controlar simultáneamente un número mayor de variables empleando dispositivos analógicos, sin embargo éstos tienen la desventaja de ser poco flexibles. Esta falta es superada con los sistemas de control digital

• Las computadoras analógicas, permiten controlar un número mayor de variables

• El nivel de automatización en una planta varía. Puede ser que se controle un número pequeño de variables y se usen abundantes operadores humanos para realizar funciones de control. En otras plantas, la automatización es casi total sobre todo en los niveles de control de proceso, disminuyendo el grado de automatismo a medida de que se avan-

• Se emplean diversos niveles de automatización en las plantas ce jerarquicamente en la empresa, como se discute en el capítulo 7.

* Las computadoras digitales que se empezaron a introducir en sistemas de control automático hacia fines de la década de 1960, permiten controlar simultáneamente varias variables. *En la actualidad se emplean fundamentalmente en cuatro formas:
En el capítulo 7 sobre control digital directo, se estudian con mayor detalle estas aplicaciones de las computadoras digitales.

* Los sistemas de control también encuentran cada día mayor aplicación como componentes en la automatización de líneas modernas de la producción. Con la introducción de las máquinas transfer a fines de la década de los 40, fué necesario introducir técnicas de control para automatizar estas máquinas. Estas máquinas son --

* Se emplean como:
Registradoras y Proce[illegible]
de Información,
Sistemas de Control [illegible]
Directo,
Sistemas de Control [illegible]
sorio y
Sistemas de Control [illegible]
co

* El control se emplea [illegible]
para automatizar líneas [illegible]
producción

dispositivos que transportan, posicionan y realizan varias funciones de maquinado en una pieza. En las primeras máquinas se requería la intervención de un operador humano para los ajustes finales de la pieza y de la herramienta de maquinado. Como intervenía un operador humano en estas operaciones los ~~tipos~~ tiempos de ajustes eran largos y solamente se justificaba el empleo de este tipo de máquinas para series de producción grandes.

La necesidad de maquinar series más pequeñas, obtener importantes ganancias en la presición de la manufactura, combinada con operaciones de monitorio automáticos durante el maquinado, hizo necesaria la introducción de sistemas complejos de control retroalimentados en estos sistemas de producción.

La computadora digital por su capacidad de aceptar cambios rápidos a nuevos programas, y manejar grandes cantidades de variables, ha sido una herramienta importante en esta automatización. Además el control de lazo cerrado permite compensar durante el maquinado en forma automática desgastes de herramienta y otros de desajustes.

1.2.2 Ejemplos de sistemas de Control.

Feedback control is a fundamental fact of modern industry and society. Driving an automobile is a pleasant task when the auto responds rapidly to the driver's commands. Many cars have power steering and brakes which utilize hydraulic amplifiers for amplification of the force to the brakes or the steering wheel. A simple block diagram of an automobile steering control system is shown in Fig. 1-7. The desired course is compared with a measurement of the actual course in order to generate a measure of the error. This measurement is obtained by visual and tactile (body movement) feedback. There is an additional feedback from the feel of the steering wheel by the hand (sensor). This feedback system is a familiar version of the steering control system in an ocean liner or

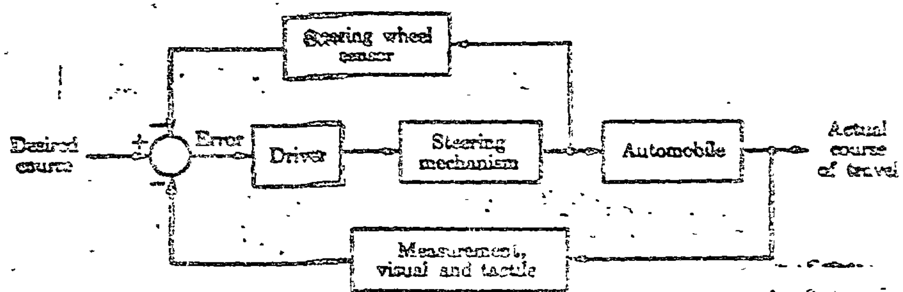


FIG. 1-7. Automobile steering control system.

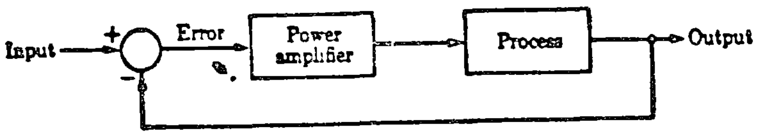


FIG. 1-8. Basic closed-loop control system.

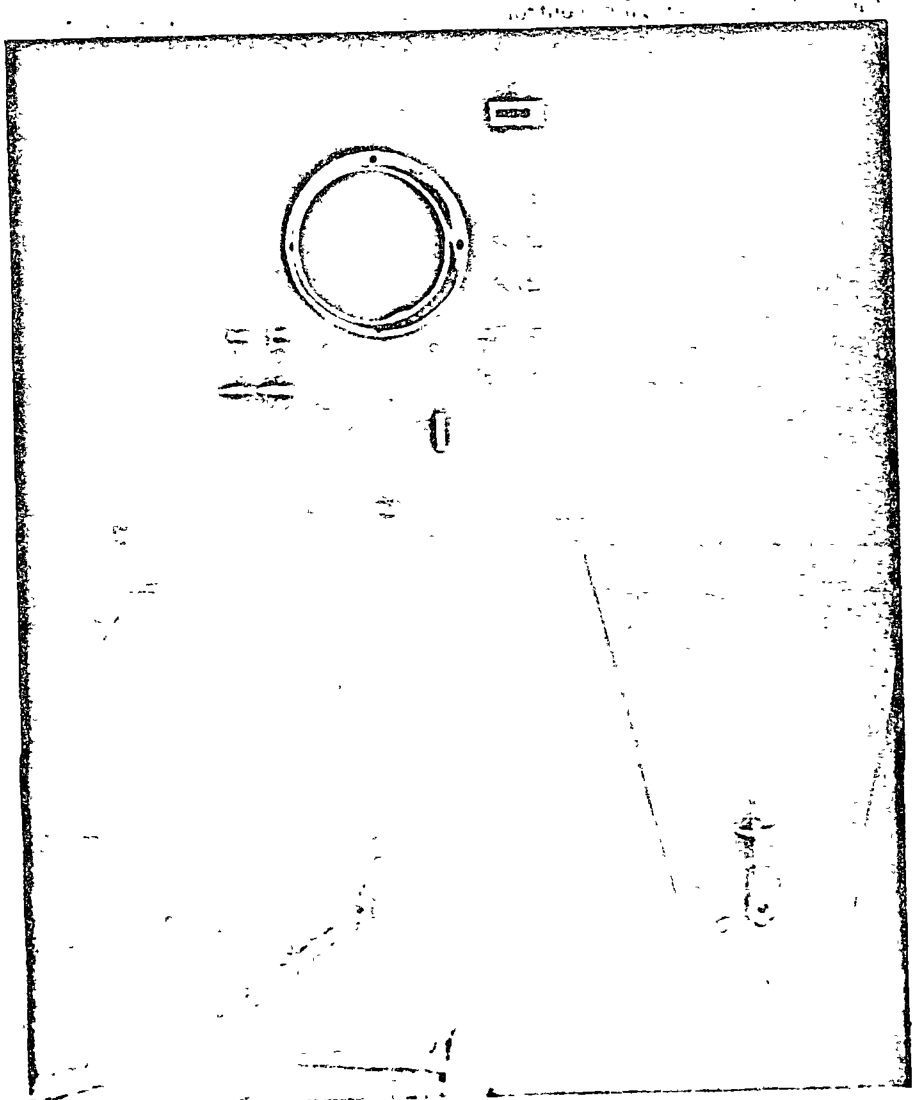


FIG. 1-9. A manual control system for a space vehicle. (Photo courtesy of Lockheed Missile and Space Co.)

the flight controls in a large airplane. All these systems operate in a closed-loop sequence as shown in Fig. 1-8. The actual and desired outputs are compared and a measure of the difference is used to drive the power amplifier. The power amplifier actuates the process in order to reduce the error. The sequence is such that if the ship is heading incorrectly to the right, the rudder is actuated in order to direct the ship to the left. The system shown in Fig. 1-8 is a *negative feedback* control system, since the output is subtracted from the input and the difference is used as the input signal to the power amplifier.

A manual control system similar to those utilized by astronauts for controlling the attitude of a manned space vehicle is shown in Fig. 1-9. The hand controller on the arm of the astronaut's seat is used to actuate the control jets. The measured attitude and error information is usually presented to the astronaut as shown in Fig. 1-9.

Other very familiar control systems have the same basic elements as the system shown in Fig. 1-8. A refrigerator has a temperature setting or desired temperature, a thermostat to measure the actual temperature and the error, and a compressor motor for power amplification. Other examples in the home are the oven, furnace, and water heater. In industry, there are speed controls, process temperature and pressure controls, position, thickness, composition, and quality controls among many others [8].

In order to provide a mass transportation system for modern urban areas, a large, complex, high-speed system is necessary. Several automatic train systems are being designed for trains to run at 2-minute intervals at high speeds. Automatic control is necessary in order to maintain a constant flow of trains and for comfortable deceleration and braking conditions at stations. The block diagram of a train control system is shown in Fig. 1-10 [9]. A measurement of the distance from the station and the speed of the train is used to determine the error signal and therefore the braking signal.

There has been considerable discussion recently concerning the gap between practice and theory in control engineering [10]. However, it would be natural

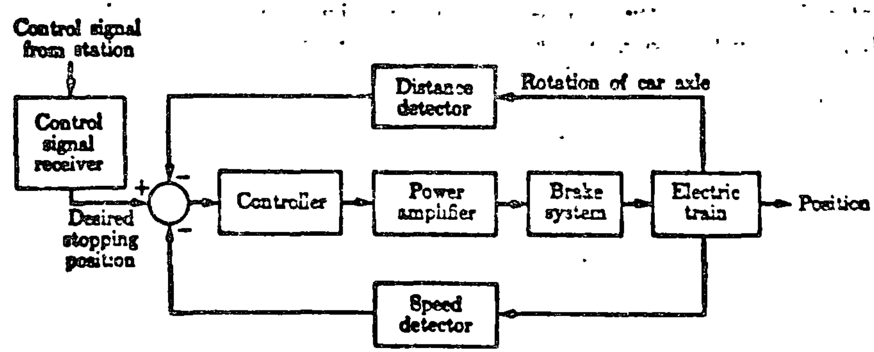


FIG. 1-10. Train-brake-control system.

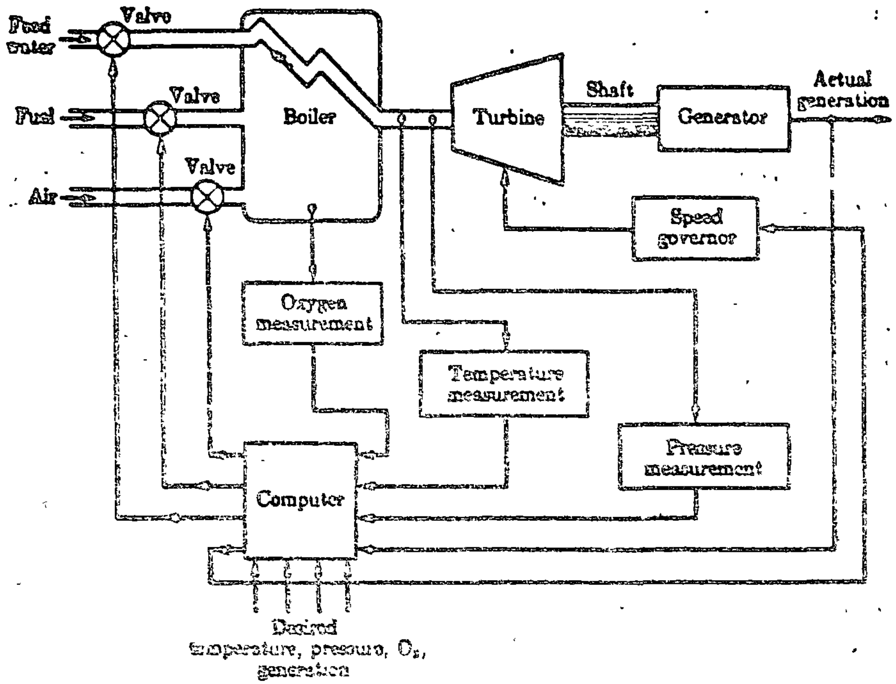


FIG. 1-11. Coordinated control system for a boiler-generator.

that theory precedes the applications in many fields of control engineering. Nonetheless, it is interesting to note that in the electric power industry, the largest industry in the United States, the gap is relatively insignificant [11]. The electric power industry is primarily interested in energy conversion, control, and distribution. The modern large capacity plants which exceed several hundreds of megawatts require automatic control systems which account for the interrelationship of the process variables and the optimum power production. It is common to have as many as ninety or more manipulated variables under coordinated control. A simplified model showing several of the important control variables of a large boiler-generator system is shown in Fig. 1-11. It is estimated that about seventy computer control systems have been installed in the United States [11]. The electric power industry has utilized the modern aspects of control engineering for significant and interesting applications. It appears that in the process industry, the factor that maintains the applications gap is the lack of instrumentation to measure all the important process variables, including the quality [illegible] composition of the product. As these instruments become available, [illegible] control theory to industrial [illegible] should increase [illegible].

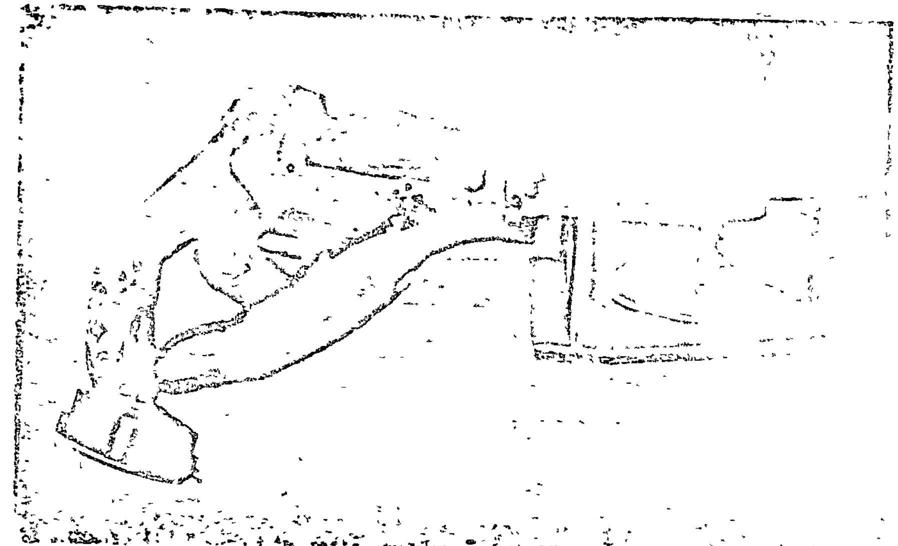


FIG. 1-12. An artificial hand developed by Professor Tomovic is operated by [illegible] myographic signals from the amputee's stump. An amputee can grip a glass [illegible] breaking it because the hand has force feedback. (Photo courtesy of Prof. [illegible] Tomovic, University of Belgrade, Yugoslavia.)

Another very important industry, the metallurgical industry, has [illegible] siderable success in automatically controlling its processes. In [illegible] cases, the control applications are beyond the theory [12]. For [illegible] strip steel mill which involves a 100-million-dollar investment [illegible] temperature, strip width, thickness, and quality.

There has been considerable interest recently in applying the feed[illegible] trol concepts to automatic warehousing and inventory control [1[illegible]]. Fur[illegible] automatic control of agricultural systems (farms) is meeting increased [illegible] Automatically controlled silos and tractors have been developed and tested [illegible]

Also, there have been many applications of control system theory to biomed[illegible] experimentation, diagnosis, prosthetics, and biological control systems [illegible] The control systems under consideration range from the cellular level to the central nervous system, and include temperature regulation, neurological, respiratory, and cardiovascular control. Most physiological control systems are closed-loop systems. However, we find not one controller but rather [illegible] loop within control loop forming a hierarchy of systems. The modeling of the structure of biological processes confronts the analyst with a high-order model and a complex structure. An artificial hand which uses force feedback signals and is controlled by the amputee's bioelectric control signals, which are called electromyographic signals, is shown in Fig. 1-12.

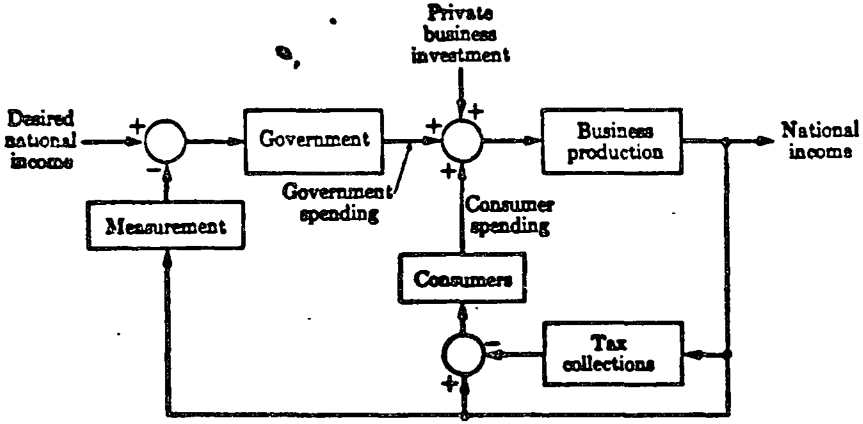


Fig. 1-13. A feedback control system model of the economy.

Finally, it has become of interest and value to attempt to model the feedback processes prevalent in the social, economic, and political spheres. This approach is undeveloped at present but appears to have a reasonable future. Society, of course, is comprised of many feedback systems and regulatory bodies such as the Interstate Commerce Commission and the Federal Reserve Board which are controllers exerting the necessary forces on society in order to maintain a desired output [8]. A simple lumped model of the national income feedback control system is shown in Fig. 1-13. This type of model helps the analyst to understand the effects of government control—granted its existence—and the dynamic effects of government spending. Of course, many other loops not shown also exist, since, theoretically, government spending cannot exceed the tax collected without a deficit, which is itself a control loop containing the Internal Revenue Service and the Congress. Of course, in a communist country the loop due to consumers is deemphasized and the government control is emphasized. In that case, the measurement block must be accurate and must respond rapidly; both are very difficult characteristics to realize from a bureaucratic system. This type of political or social feedback model, while usually nonrigorous, does impart information and understanding.

Feedback control systems are used extensively in industrial applications. An industrial manipulator controlled by a human operator is shown in Fig. 1-14.

The potential future application of feedback control systems and models appears to be unlimited. It appears that the theory and practice of modern control systems have a bright and important future, and certainly justify the study of modern automatic control system theory and application. In the next chapter, we shall study the system models further to obtain quantitative mathematical models useful for engineering analysis and design.

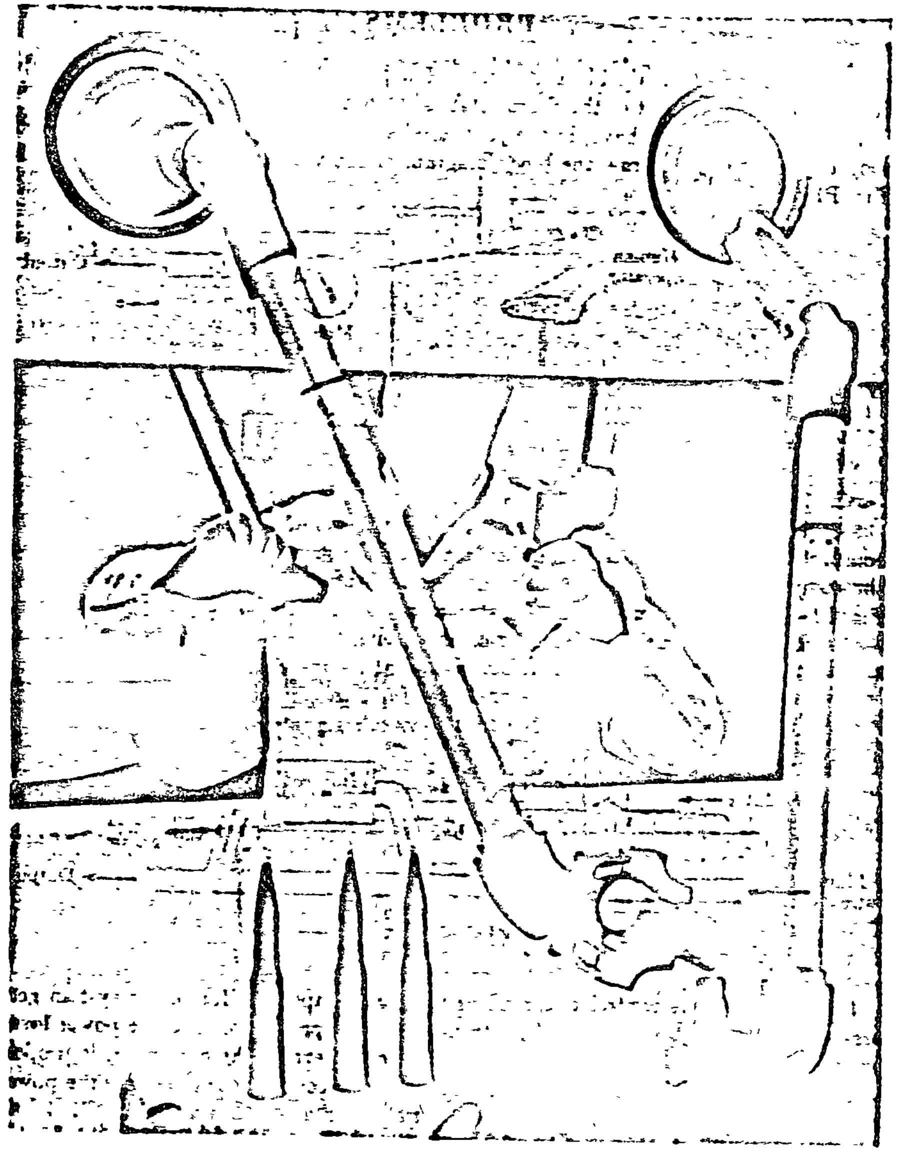


Fig. 1-14. An industrial manipulator controlled by a human operator uses visual feedback. This is the Mini-Manip, manufactured by AMF Co. (Photo courtesy of American Machine and Foundry Co.)

Pressure control systems. Figure 1-5 shows a pressure control system. The pressure in the furnace is controlled by the position of the damper. This pressure is measured by a pressure-measuring element. The signal thus obtained is fed to the controller for comparison with the desired value. If there is any difference or error, the controller output is fed to the actuator which positions the damper in order to reduce the error.

Speed control systems. The basic principle of Watt's governor for steam engines is illustrated in the schematic diagram of Fig. 1-6. The amount of steam admitted to the engine cylinder is adjusted according to the difference between the desired and the actual engine speeds.

The sequence of actions may be stated as follows: The reference input (set point) is set according to the speed desired. If the actual speed drops below the

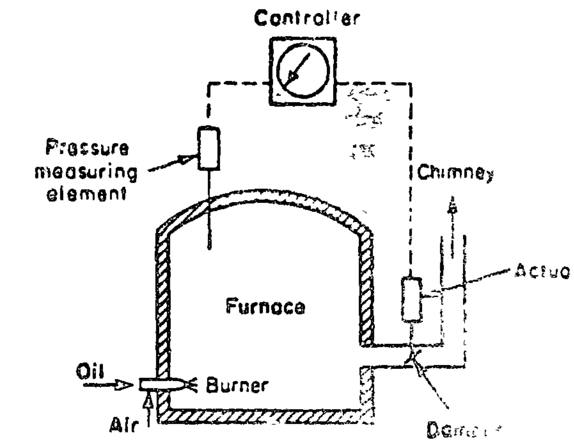


Fig. 1-5. Pressure control system.

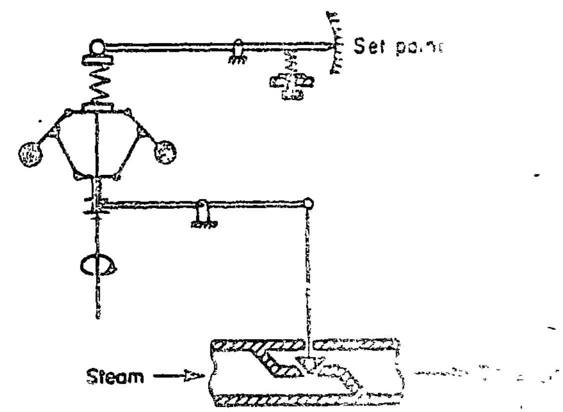


Fig. 1-6. Speed control system.

desired value, then the decrease in the centrifugal force of the speed governor causes the control valve to move upward, supplying more steam, and the speed of the engine increases until the desired value is reached. On the other hand, if the speed of the engine increases above the desired value, then the increase in the centrifugal force of the governor causes the control valve to move downward. This decreases the supply of steam and the speed of the engine decreases until the desired value is reached.

Numerical control systems. Numerical control is a method of controlling the motions of machine components by use of numbers. In numerical control the motion of a workhead may be controlled by the binary information contained on tape.

In such control, symbolic numerical values are converted into physical values (dimensions or quantities) by electrical (or other) signals that are translated into linear or circular movement. These signals are either digital (pulses) or analog (time-varying voltages).

The system shown in Fig. 1-7 works as follows: A tape is prepared in binary

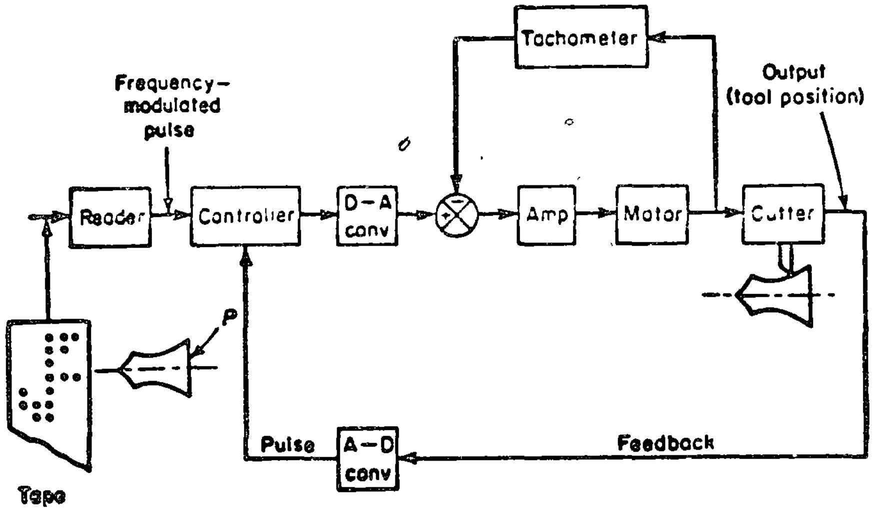


Fig. 1-7. Numerical control of a machine.

orm representing the desired part P. To start the system, the tape is fed through he reader. The frequency-modulated input pulse signal is compared with the feed-ack pulse signal. The digital-to-analog converter converts the pulse into an analog ignal which represents a certain magnitude of voltage which, in turn, causes the ervomotor to rotate. The position of the cutterhead is controlled according to he input to the servomotor. The transducer attached to the cutterhead converts the notion into an electrical signal which is converted to the pulse signal by the analog-o-digital converter. Then this signal is compared with the input pulse signal. The ontroller carries out mathematical operations on the difference in the pulse signals. f there is any difference between these two, a signal is sent to the servomotor to educe it.

An advantage of numerical control is that complex parts can be produced with niform tolerances at the maximum milling speed.

Computer control systems. Figure 1-8 shows a schematic diagram of the omputer control of a blast furnace. The blast furnace is a huge structure about 00 ft high. Modern furnaces are built to produce over 4000 tons of pig iron per ay and must be kept in continuous operation because of the nature of the smelting rocess.

The iron ore, coke, and limestone are charged into the furnace from the top in roper proportions. (Approximately 2 tons of ore, 1 ton of coke, $\frac{1}{2}$ ton of flux, nd $4\frac{1}{2}$ tons of air are needed to produce 1 ton of pig iron.) Air, which is quite mportant in this process, is heated in stoves and blown into the furnace. The heat n the furnace is produced by burning coke, from which carbon monoxide gas is roduced by the process of partial combustion. This gas, together with the coke, educes the iron ore in the furnace to metal, and the limestone acts as a flux, slagging he impurities. The molten iron sinks to the bottom of the furnace, and the liquid

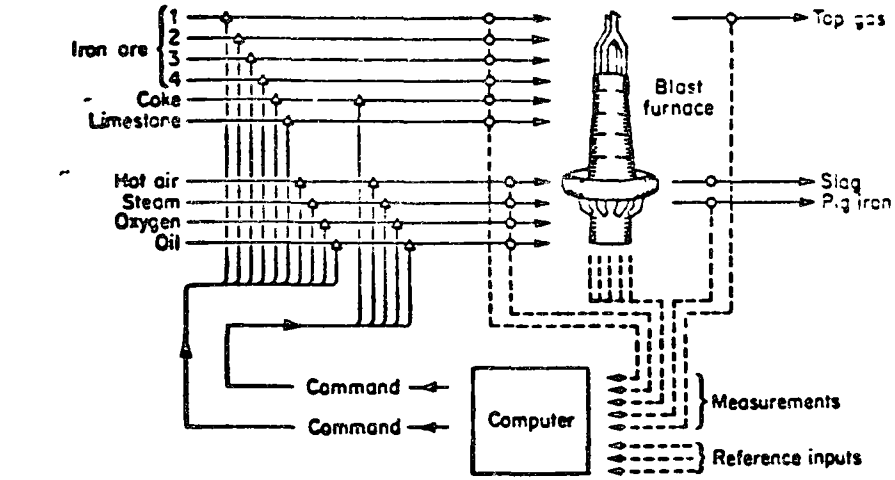


Fig. 1-8. Computer control of a blast furnace.

slag rises to the surface. The molten iron and liquid slag are periodically drai off through tap holes provided for this purpose.

Since the presence of carbon, manganese, silicon, sulfur, phosphorus, e depends largely upon the composition of the ore, coke, and limestone used, i quite difficult for human operators to control the chemical composition of iron issuing from the furnace.

In the computer control of such furnaces, information about the compositi of pig iron, slag, and top gas, the temperature, and the pressure in the furna as well as the compositions of ore, coke, and limestone, are fed to the compute certain time intervals. The complex computations for determining the optir quantities of various raw materials to be charged are handled by the comput It is then possible to keep the composition of pig iron as desired. It is also possi to maintain the steady-state operation of the blast furnace at a satisfactory co dition.

Note that in the computer control of such a process it is necesssary to ha mathematical models available. But deriving suitable models may be a diffic problem because not all the factors that affect the system dynamics are kno Note also that the measurement of all the variables necessary for computer cont may be difficult or impossible, in which case the unmeasurable variables must estimated by statistical methods.

Traffic control systems. As stated in Section 1-3, traffic control by means traffic signals operated on a time basis constitutes an open-loop control syste If, however, the number of cars waiting at each traffic signal in a congested area o city is continuously measured and the information fed to the central control co puter which controls the traffic signals, then such a system becomes closed-lo

Traffic movement in networks is quite complex because the variation in tra volume depends heavily upon the hour and day of the week, as well as on ma other factors. In some cases the Poisson distribution may be assumed for the arrivals at intersections, but this is not necessarily valid for all traffic problems. In fact, minimizing the average waiting time is a very complex control problem.

Biological systems. Consider the competition of two species of bacteria whose populations are x_1 and x_2. The two are competing in the sense that they consume the same food supply. Under certain conditions the populations x_1 and x_2 change with time according to

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_2 - a_{22}x_1x_2$$

where a_{11}, a_{12}, a_{21}, and a_{22} are positive constants and x_1 and x_2 are nonnegative. These equations are called Volterra's competition equations.

If a certain chemical is given to the species, the populations change according to the following equations:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2 - b_1u$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_2 - a_{22}x_1x_2 - b_2u$$

where b_1 and b_2 are positive constants and u is the controlling input (the amount of chemical in this example). An interesting problem is to minimize within a given time period the population x_1 while keeping the population x_2 as large as possible. This is an example of a biological system to which control theory can be applied.

Inventory control systems. The industrial programming of production rate and inventory level is another example of a closed-loop control system. The actual inventory level, which is the output of the system, is compared with the desired inventory level, which may change from time to time according to the market. If there is any difference between the actual inventory level and the desired inventory level, then the production rate is adjusted so that the output is always at or near the desired level which is chosen to maximize profit.

Business systems. A business system may consist of many groups. Each task assigned to a group will represent a dynamic element of the system. Feedback methods of reporting the accomplishments of each group must be established in such a system for proper operation. The crosscoupling between functional groups must be made a minimum in order to reduce undesirable delay times in the system. The smaller this crosscoupling, the smoother the flow of work signals and materials will be.

A business system is a closed-loop system. A good design will reduce the managerial control required. Note that disturbances in this system are the lack of manpower or materials, interruption of communication, human errors, etc.

The establishment of a well-founded estimating system based on statistics is mandatory to proper management. (Note that it is a well-known fact that the performance of such a system can be improved by use of "lead time" or "anticipation.")

To apply control theory to improve the performance of such a syste[m] must represent the dynamic characteristics of the component groups of the by a relatively simple set of equations.

Although it is certainly a difficult problem to derive mathematical repre[sentations] of the component groups, the application of optimization techniques to [busi]ness systems represents an interesting area in which significant improveme[nts in] performance may be expected.

2

1.2.3

DESIGN PRINCIPLES OF CONTROL SYSTEMS

General requirements of a control system. Any control system ... This is a primary requirement. In addition to absolute stability, ... must have a reasonable relative stability; that is, the speed of ... reasonably fast and this response must show reasonable damping. ... must also be capable of reducing errors to zero or to some small ... Any useful control system must satisfy these requirements.

The requirement of reasonable relative stability and that of steady-... tend to be incompatible. In designing control systems, we therefore ... to make the most effective compromise between these two requirements.

Basic problems in control system design. Figure 1-9 is a block diagram ... control system. The controller produces control signals based on ... variables and the output variables. In practical situations there are ... turbances acting on the plant. These may be of external or intern... may be random or predictable. The controller must take into ... disturbances which will affect the output variables.

To determine the optimal control signal, it is necessary to def... index. Such an index is a quantitative measure of the performance, ... tion from ideal performance. The specification of the con...

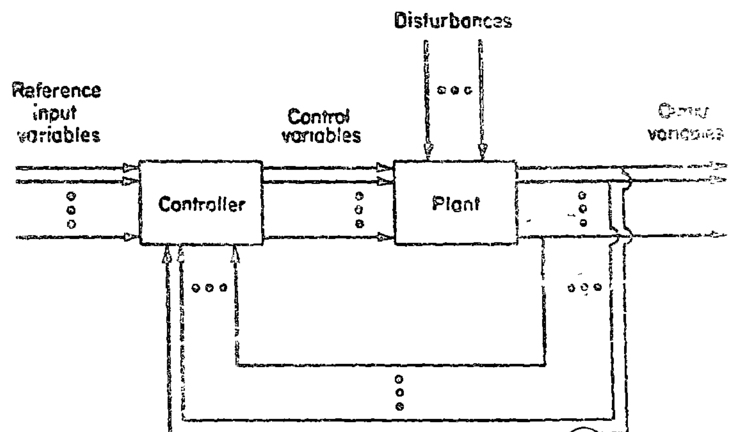


Fig. 1-9. Block diagram of a control syst[em].

erating time interval is called the *control law*. Mathematically, the basic control oblem is to determine the optimal control law, subject to various engineering d economic constraints, that minimizes a given performance index.

For relatively simple systems, the control law may be obtained analytically. r complex systems, it may be necessary to generate the optimal control law with on-line digital computer.

Analysis. By the analysis of a control system, we mean the investigation, under ecified conditions, of the performance of the system whose mathematical model known.

Since any system is made up of components, analysis must start with a mathe- tical description of each component. Once a mathematical model of the complete tem has been derived, the manner in which analysis is carried out is independent whether the physical system is pneumatic, electrical, mechanical, etc.

Design. To design a system means to find one which accomplishes a given task. general, the design procedure is not straightforward and will require trial-and- or methods.

Synthesis. By synthesis, we mean finding by a direct procedure a system that ll perform in a specified way. Usually such a procedure is entirely mathematical om the start to the end of the design process. Synthesis procedures are now avail- le for linear networks and for optimal linear systems.

Basic approach to control system design. The basic approach to the design of y practical control system will necessarily involve trial-and-error procedures. e synthesis of linear control systems is theoretically possible, and the control gineer can systematically determine the components necessary to perform the en objective. In practice, however, the system may be subjected to many con- aints or may be nonlinear, and in such cases no synthesis methods are available present. In addition, the characteristics of components may not be precisely own. Thus, trial-and-error procedures are always necessary.

Situations are often encountered in practice where a plant is given and the ntrol engineer has to design the rest of the system so that the whole will meet the en specifications in accomplishing the given task. Note that the specifications ust be interpreted in mathematical terms.

It is important to remember that some of the specifications may not be realistic. such a case, the specifications must be revised in early stages of the design.

In many cases, the design of a control system proceeds as follows: The engineer gins the design procedure knowing the specifications or performance index, e dynamics of the given plant, and the dynamics of the components; the last volves design parameters. The control engineer will apply synthesis techniques if ailable, along with other techniques, to build a mathematical model of the system. Once he formulates the design problem in terms of this model, he carries out a athematical design which yields the solution to the mathematical version of the

design problem. (At this stage, simulation of the mathematical model on a comput is important. Note that optimal control theory is very useful in this stage of th design because it gives the upper boundary of system performance for a give performance index.)

After the mathematical design has been completed, the control engineer simu lates the model on a computer to test the behavior of the resulting system in re sponse to various signals and disturbances. Usually, the initial system configuratio is not satisfactory. Then the system must be redesigned and corresponding analys completed. This process of design and analysis is repeated until a satisfacto system is obtained. Then a prototype physical system can be constructed.

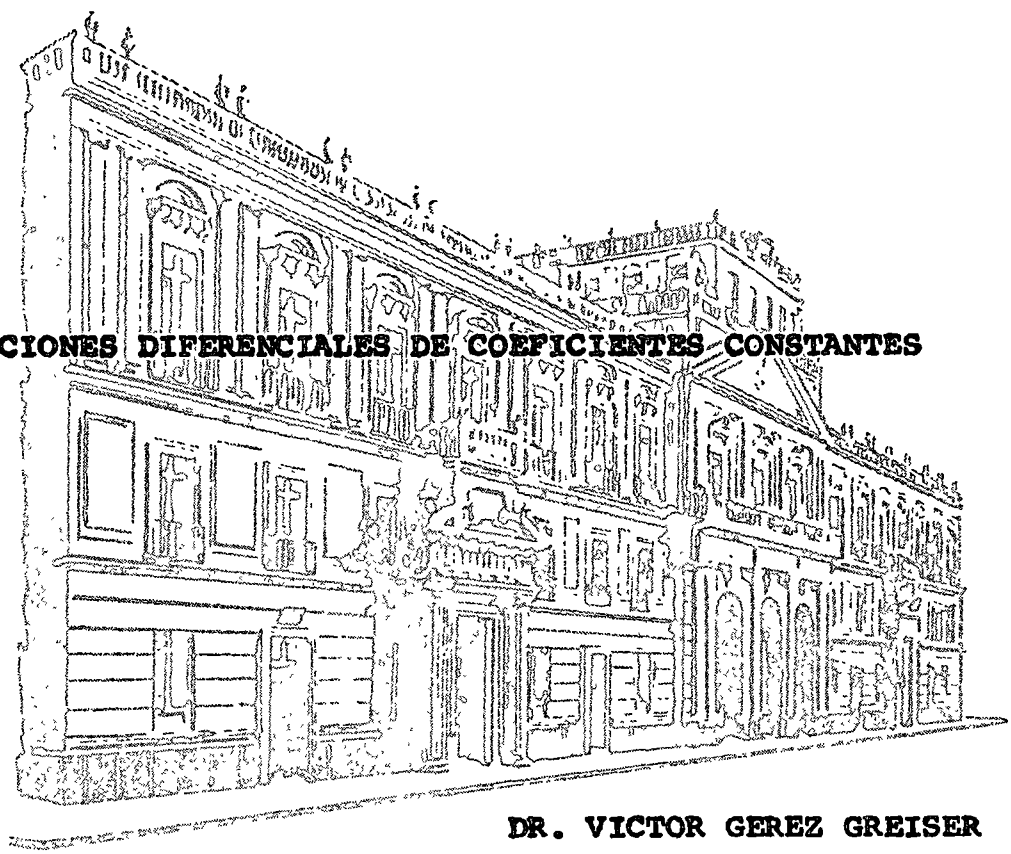
Note that this process of constructing a prototype is the reverse of that o modeling. The prototype is a physical system that represents the mathematic model with reasonable accuracy. Once the prototype has been built, the enginee tests it to see whether or not it is satisfactory. If it is, the design is complete. If no the prototype must be modified and tested. This process continues until the proto type is completely satisfactory.

1.2.4 Organización del texto

G1 . Gerez, V y Grijalva, J.P.M. "EL enfoque de Sistemas"
Limusa, 1976, Mexico, D.F.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO



ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

DR. VICTOR GEREZ GREISER

JUNIO DE 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels: 521-40-23 521-73-35 5123-123

VICTOR GEREZ

A.1. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

A.1.1 Introducción

En este apéndice se condensan algunos métodos de solución directos o en el dominio del tiempo de ecuaciones diferenciales.

Como no existen métodos analíticos generales para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables de orden superior al primero, en este apéndice se estudian solamente métodos de solución para ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes (e.d.l.c.c.).

En el capítulo 2 de la presente obra, se señala la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos de las componentes de Sistemas de Control.

Se estudian las componentes de la solución de una e.d.l.c.c., y se les identifica con las componentes de las respuestas del modelo físico.

En el apéndice siguiente se revisan los conceptos básicos del algebra lineal y de la solución de ecuaciones de estado.

En el apéndice C, se señalan las bases de la computación analógica y en el último apéndice se estudian los aspectos básicos de la transformada de Laplace.

A.1.2 El operador diferencial D

En esta sección, se introduce el operador diferencial D que posteriormente se emplea para encontrar la solución de e.d.l.c.c.

Se define como operador diferencial D a un operador que aplicado a una función y (.) dá por resultado su derivada:

$$D\,y\,(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

y por D^na:

$$D^n y\,(t) = \frac{d^n y\,(t)}{dt^n} \qquad (A.1.1)$$

Este operador es lineal, es decir, es homogéneo y aditivo:

$$(a_m D^m + a_n D^n)\ y\ (t) = a_m D^m\ y\ (t) + a_n D^n\ y\ (t) \qquad (A.1.2)$$

El lector puede comprobar que este operador, satisface las leyes asociativas y conmutativas de la suma y las conmutativas, asociativas y distributivas de la multiplicación. En particular, se tiene que:

$$D^m\ (D)^n y\ (t) = D^{m+n} y\ (t) \qquad (A.1.3)$$

Una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes es del siguientes tipo:

$$a_0 \frac{d^n\ y\ (t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y\ (t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y\ (t) = e\ (t) \qquad (A.1.4)$$

donde:

a_i son coeficientes

t la variables independiente

$y\ (t)$ la variable dependiente o función de respuesta

$e(t)$ la función de excitación

Empleando el operador diferencial introducido anteriormente se tiene la siguiente expresión para una e.d.l.c.c.

$$a_0 D^n y(t) + a_1 D^{n-1} y(t) + \ldots + a_{n-1} D y(t) + a_n y(t) = e(t) \qquad (A.1.5)$$

Tomando en cuenta la propiedad asociativa del operador D podemos introducir un nuevo operador:

$$L \triangleq a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n \qquad (A.1.6)$$

Simbólicamente una ecuación diferencial de coeficientes constantes, pueden escribirse, empleando el operador L de la siguiente manera:

$$L\, y(t) = e(t) \qquad (A.1.7)$$

Este nuevo operador L es también lineal, es decir:

$$L\big(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\big) = c_1 L y_1(t) + c_2 L y_2(t) \qquad (A.1.8)$$

A.2 SOLUCIONES COMPLEMENTARIA Y PARTICULAR

A.2.1 Solución Complementaria

La solución de la ecuación diferencial

$$Ly(t) = e\ (t) \qquad (A.1.7)$$

donde la función de excitación $e(t)$ es nula, se conoce con el nombre de solución complementaria de la e.d.l.c.c., es decir, la solución de:

$$Ly\ (t) = 0 \qquad (A.2.1)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación homogénea de la e.d.l.c.c. (A.1.7)

Emplenado el operador diferencial D la ecuación homogénea puede escribirse como:

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_nD)\ y = 0 \qquad (A.2.2)$$

Considerando a D como una variable, recibe el nombre de ecuación característica de la ecuación homogénea (A.2.2) de la e.d.l.c.c. (A.1.7) el siguiente polinomio en D de grado n:

$$a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (A.2.3)$$

Para empezar, supongase que este polinomio tiene n raíces distintas: $s_1, s_2, \ldots s_n$, (posteriormente se estudiará el caso de raíces múltiples). La expresión:

$$y(t) = c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t) + \ldots + c_n \exp(s_n t) \quad (A.2.4)$$

es la solución de la ecuación homogénea (A.2.1) como el lector podrá comprobar por simple sustitución. Las constantes -- .... $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dependen de los valores iniciales como se señala más adelante. A continuación se ilustra este método para encontrar la solución de una -- ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Ejemplo A.2.1

Obtenga la solución complementaria de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{d y(t)}{dt} + 6 y(t) = 0 \quad (A.2.5)$$

Solución:

Emplenado la notación operacional, esta ecuación puede escribirse como:

$$(D^2 + 5D + 6\ y) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$D^2 + 5D + 6 = 0$$

Sus raíces como polinomio de orden 2 en D son: -2 y -1; es decir:

$$D^2 + 5D + 6 = (D + 2) \quad (D + 3)$$

La solución de la ecuación diferencial esta dada, por lo tanro por

$$y\ (t) = c_1 \exp\ (-2t) + c_2 \exp\ (-3t)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación A.2.5 se puede comprobar que efectivamente es la solución de la ecuación diferencial propuesta.

Los valores de las raíces $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de la ecuación característica, desde luego, podrán ser complejos, en cuyo caso, por tener una ecuación característica con coeficientes reales, siempre aparecerá en parejas conjugadas, dando lugar a términos armónicos amortiguados o no amortiguados, como se ilustra en el texto en varios ejemplos y en el ejemplo A.2.2

A.2.2 Solución particular

A continuacion se estudia como se obtiene la solución particular de una e.d.l.c.c., puede demostrarse facilmente que la solución completa de la e.d.l.c.c.

$$L\ y\ (t) = e\ (t) \qquad (A.1.7)$$

consta de la suma de dos partes, a saber:

De la solución complementaria $y_c\ (t)$ de la ecuación homogénea

$$L\ y_c\ (t) = 0 \qquad (A.2.6)$$

y de una solución particular $y_p(t)$ que satisface a la ecuación

$$L\, y_p(t) = e(t) \tag{A.1.7}$$

Para el cálculo de la solución particular $y_p(t)$ solo se estudiará el método de coeficientes indeterminados. El lector interesado en otros métodos puede consultar obras especializadas en ecuaciones diferenciales (R.1)

Solamente se consideran funciones excitadoras de importancia en problemas de sistemas. La tabla A.2.1, ilustra varias funciones excitadoras y la solución particular correspondiente.

Con una serie de ejemplos se ilustrará este método de coeficientes indeterminados y las modificaciones que hay que hacer cuando la ecuación característica tiene una raíz nula o la función excitadora coentiene un término que aparece en la solución complementaria.

Función excitadora	Forma de la solución particular
$\sum_{i=0}^{k} K_i t^i$	$\sum_{i=0}^{k} A_i t^i$
$K \exp(\cdot t)$	$A \exp(t)$
$K_1 \cos t + K_2 \operatorname{sen} t$	$A_1 \cos t + A_2 \operatorname{sen} t$
	$= A_3 \operatorname{sen}(t + \vartheta_1)$
	$= A_4 \cos(t + \vartheta_2)$

TABLA A.2.1

Funciones excitadoras y soluciones particulares correspondientes.

Ejemplo A.2.2

Obtenga la solución compleja de la ecuación diferencial inhomogénea siguiente:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2\frac{d\,y(t)}{dt} + 2\,y(t) = 2t + 2t^2 \quad (A.2.7)$$

Solución:

La ecuación característica de la ecuación homogénea es:

$$D^2 - 2D + 2 = 0$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = +1 - j$$
$$s_2 = +1 + j$$

por lo tanto la solución complementaria es:

$$y_c = c_1 \exp(+1-j)\, t + c_2 \exp(+1+j)\, t$$

Aplicando la fórmula Euler, esta fórmula se puede escribir como:

$$y_c = K \exp(t) \cos(t + \theta)$$

De la tabla A.2.1, se tiene la solución particular:

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

Derivando esta expresión se tiene:

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = A_1 + 2 A_2 t$$

$$\frac{d}{dt} y_p^2(t) = 2 A_2$$

Sustituyendo este valor en (A.2.7,) obtenemos

$$2A_2 - 2(A_1 + 2A_2 t) + 2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = 2t + 2t^2$$

Igualando coeficientes de potencias de igual orden en t, se tiene:

para t^0: $2A_2 - 2A_1 + 2A_0 = 0$

para t: $-4A_2 + 2A_1 = 2$

para t^2: $2A_2 = 2$

de donde:

$$A_2 = 1; \quad A_1 = 3; \; A_0 = 2$$

La solución particular de este problema es:

$$y_p\,(t) = 2 + 3t + t^2$$

y la solución general es, por lo tanto:

$$y(t) = y_c\,(t) + y_p\,(t) = K\,\exp(t)\cos\,(t+\theta) + 2 + 3t + t^2$$

Como A_0, A_1, y A_2 son coeficientes desconocidos, este método recibe el nombre de método de los coeficientes indeterminados.

El siguiente ejemplo, ilustra que, en caso de tener la ecuación característica una raíz nula, la solución particular debe ser la integral de la solución particular indicada en la tabla A.2.1. Desde luego, en caso de ser la raíz nula de orden n, hay que integrar n veces la solución particular señalada.

Ejemplo A.2.3

Encuentre la solución general de la ecuación:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^2} - 16\,\frac{dy(t)}{dt} = 8t \qquad \text{(A.2.8)}$$

Solución:

La ecuación característica es:

$$D(D^2 - 16) = 0$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = 0$$
$$s_2 = +4$$
$$s_3 = -4$$

La solución complementaria es de la siguiente:

$$y_c(t) = c_1 + c_2 \exp(4t) + c_3 \exp(-4t)$$

La solución particular de acuerdo con la tabla A.2.1, debe ser de la forma

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (A.2.8) se encuentra que el método de igualación de coeficientes lleva a:

$$0 - 16A_1 = 8t$$

ya que:

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = A_1$$

Resulta evidente que esta igualdad no es posible.

Volviendo a la ecuación (A.2.8) se puede considerar que:

$$D(D^2 - 16)\, y\,(t) = 8\, t$$

es equivalente a:

$$(D^2 - 16)\, y\,(t) = \int 8t\,dt = 4t^2 + k \quad (A.2.9)$$

La solución particular de (A.2.9) puede encontrarse fácilmente por el método de los coeficientes indeterminados de la tabla A.2.1, - $y_p(t)$ debe ser de la forma

$$y_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

Los derivados de estas expresiones son:

$$\frac{d}{dt}\, y_p\,(t) = A_1 + 2A_2 t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\, y_p\,(t) = 2A_2$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\, y_p\,(t) = 0$$

Sustituyendo los valores de las derivadas (A.2.8) se llega a:

$$-16(A_1 + 2\, A_2 t) = 8t$$

Igualando los términos que corresponden a iguales potencias de la variable indepen-diente se tiene:

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = -1.0$$

El valor de A_0 no tiene importancia, ya que en la solución:

$$y(t) = c_1 + c_2 \exp(4t) + c_3 \exp(-4t) + A_0 - 1.0t^2$$

el valor de A_0 puede considerarse in-cluido en c_1, es decir:

$$y(t) = c_1' + c_2 \exp(4t) + c_3 \exp(-4t) - 1.0t^2$$

Los valores de las constantes c_1, c_2 y c_3, dependen de las condiciones iniciales. - Nótese que por tratarse de una ecuación dife rencial de orden 3 se tienen 3 constantes ar bitrarias. Para su determinación es necesa-rio conocer 3 condiciones iniciales.

A.2.3. ECUACIONES DE RAICES MULTIPLES

Considerese la ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes dada por

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy\ (t)}{dt} + a_2 y(t) = 0 \qquad (A.2.10)$$

cuya ecuación característica tiene una raíz doble s_1:

$$D^2 + a_1 D + a_2 = (D - s_1)^2$$

Si se emplea la técnica de la sección -- (A.2.2) se encuentra que la solución complementaria debería ser:

$$y_c(t) = c_1 \exp\ (s_1 t) + c_2 \exp(s_1 t)$$

o bien:

$$y_c(t) = (c_1 + c_2) \exp\ (s_1 t)$$

Agrupando los coeficientes

$$c_1 + c_2 = c$$

la solución es:

$$y_c\ (t) = c\ \exp\ (s_1 t) \qquad (A.2.11)$$

Como la ecuación (A.2.10) es de segundo orden, su solución debe contener dos constantes arbitrarias. Por esta razón (A.2.11) no es la solución complementaria.

Puede demostrarse (GI - Apéndice B) que la solución de la ecuación (A.2.10) en el caso de una raiz doble s_1 de la ecuación característica, es de la forma:

$$y\ (t) = \exp\ (s_1 t)\ (c_1 + c_2 t) \qquad (A.2.12)$$

Es decir la exponencial de la raíz debe multiplicarse por un polinomio ent.

Lo anterior resultado puede generalizarse a ecuaciones con raíces de orden k. Si la ecuación característica tiene una raiz, s_i de multiplicidad k_i, la parte de la solución correspondiente a la raíz es:

$$y_c(t) = \exp(s_i t)\,(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_k t^{k-1}) \qquad \text{(A.2.13)}$$

Con el siguiente ejemplo, se ilustra la aplicación del resultado anterior.

Ejemplo A.2.4

Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 15\,\frac{d\,y(t)}{dt} + 9\,y(t) = -11 \operatorname{sen} t + 17 \cos t \qquad \text{(A.2.14)}$$

La ecuación característica es de esta e.d.c.c. es:

$$D^3 + 6D^2 + 15D + 9 = 0$$

Las raíces de este polinomio en D son:

$$s_{1,2} = -3$$
$$s_3 = -1$$

Empleando los resultados de la sección anterior se tiene:

$$y_c(t) = (c_1 + c_2 t)\exp(3t) + c_3 \exp(t)$$

De la tabla A.2.1, se obtiene la siguiente solución particular:

$$y_p(t) = A_1 \cos t + A_2 \operatorname{sen} t$$

cuyas derivadas son:

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = -A_1 \operatorname{sen} t + A_2 \cos t$$

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} = -A_1 \cos t - A_2 \operatorname{sen} t$$

$$\frac{d^3 y_p(t)}{dt^3} = A_1 \operatorname{sen} t - A_2 \cos t$$

Sustituyendo el valor propuesto de la solución particular y de sus derivados en la ecuación diferencial (A.2.14), e igualando coeficientes de sen t y cos t se obtiene:

$$\operatorname{sen} t: -14A_1 + 3A_2 = -11$$
$$\cos t: 3A_1 + 14A_2 = 17$$

Este sistema de ecuaciones lineales algebraícas en A_1 y A_2 tiene como solución: $A_1 = A_2 = 1$

La solución particular $y_p(t)$ es: $y_p(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$

La solución general de la e.d.l.c.c. es la suma de la solución complementaria y particular, por lo tanro:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$
$$=(c_1+c_2t) \exp 3t + c_3 \exp(t) + \cos t + \operatorname{sen} t$$

El siguiente ejemplo, se ilustra otro caso en donde la solución particular no se puede obtener directamente empleando las tablas del método de coeficientes indeterminados. Este caso se presenta cuando la función excitadora contiene un término que aparece en la función complementaria, en este caso, se emplea la misma técnica que en el caso de raices múltiples.

Ejemplo A.2.5 Encuentre la solución general de la e.d.l.c.c.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\,y(t) = \exp(-2t) \qquad (A.2.15)$$

Solución:

La ecuación característica es:

$$D^2 - 4 = 0$$

Este polinomio tiene las raices siguientes:

$$s_1 = 2 \quad y \quad s_2 = -2$$

La solución complementaria de la e.d.l. c.c. (A.2.15) es:

$$y_c(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(-2t)$$

De acuerdo con la tabla (A.2), la solución particular correspondiente es:

$$y_p(t) = k \exp(2t)$$

Sustituyendo este valor en la e.d.l.c.c. (A.2.15) se tiene:

$$4k \exp(-2t) - 4\exp(-2t) = \exp(-2t)$$

es decir:

$$0 = \exp(-2t)$$

Este resultado no es posible. En este caso, cuando la función excitadora contiene algún término que aparezca en la solución complementaria, se usa la misma técnica que en el caso de raíces múltiples. Es decir, se supone una solución complementaria de la forma: $y_p(t) = At \exp(-2t)$

Las derivadas de esta función son:

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = A \exp(-2t) - 2At \exp(-2t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_p(t) = -4A \exp(-2t) + 4At \exp(-2t)$$

Sustituyendo la solución particular y sus derivadas en la ecuación (A.2.15) se obtiene:

$$-4A \exp(-2t) + 4At \exp(-2t) - 4At \exp(-2t) = 8 \exp(-2t)$$

De donde se obtiene el siguiente valor del coeficiente A. a saber: $A = -2$

La solución general, suma de las soluciones complementaria y particular es:

$$y(t) = c_1 \exp(2t) + (c_2 - 2t) \exp(-t)$$

A.3 Problemas

1.- Obtenga la solución general de las siguientes e.d.l.c.c.

a) $$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = 0$$

b) $$\frac{d^3y}{dt^3} - 9\frac{dy}{dt} = 0$$

c) $$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 10 = 0$$

2.- *Obtenga la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales mostradas.*

a) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32 = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad \frac{dy(0)}{dt} = 1$$

b) $$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\frac{dX}{dt} + 10X = 5\cos t$$

$$y(0) = 1 \qquad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

c) $$\frac{d^3y}{dt^2} + 2\frac{dy^2}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + 4y = \exp(-5t)$$

$$y(0) = 1 \qquad \frac{dy(0)}{dt} = 1 \qquad \frac{d^2y(0)}{dt^2} = 0$$

d) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} + 20y = \exp(-5t)$$

$$y(0) = 1 \qquad \frac{dy(0)}{dt} = -2$$

e) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 16\,y = \operatorname{sen} 4t$$

$$y(0) = 4 \qquad \frac{dy(0)}{dt} = 4$$

3.- Obtenga el valor de las condiciones iniciales para que en la solución de la ecuación diferencial del problema anterior no aparezca el término: $\exp(-4t)$

A.4 Bibliografía

Gerez Greiser, V. y Murray Lasso, M. A., Teoría de Sistemas y Circuitos; Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A. México, D. F., 1974.

Ross, Sh. L., Differential Equations; Blaisdell Publishing Co. New York, N. Y., 1965

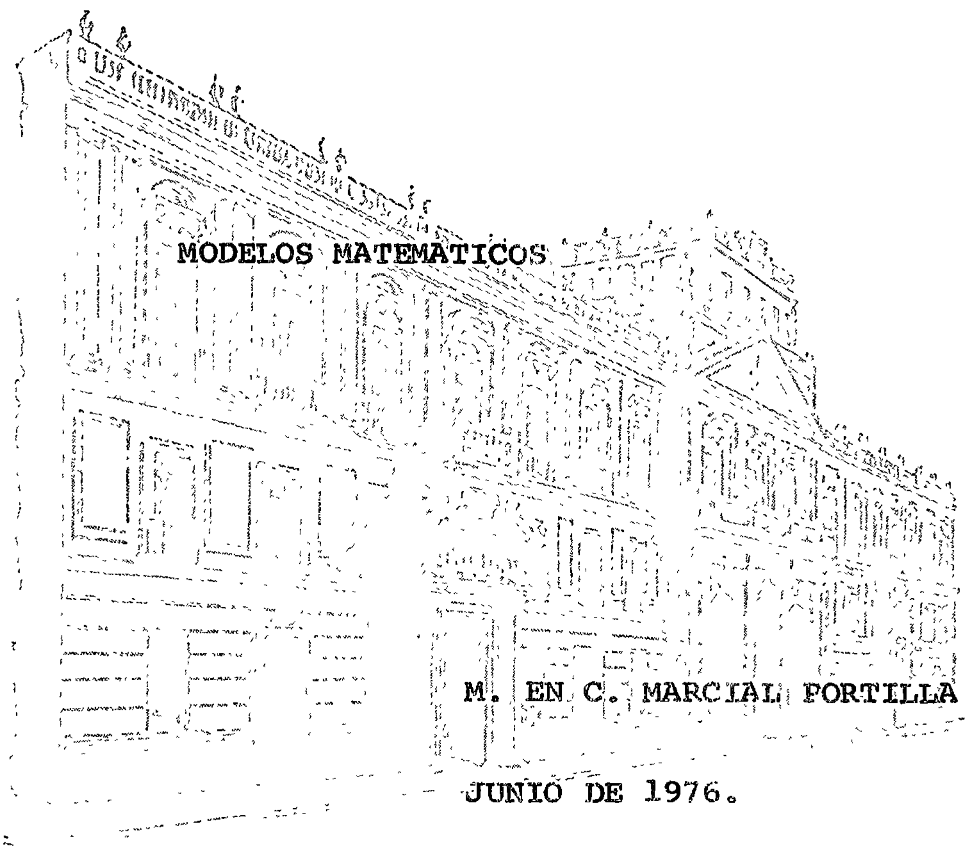
Kreider, D. L., Kuller, R. G., y Ostberg, D.R., Ecuaciones Diferenciales; Fondo Educativo Interamericano, S.A., Bogotá, Colombia, 1973

Cooddington, E., Introduction to Ordinary Differential Equations; Prentice - Hall, Englewood Cliffs. N. J., 1961.

Pontryagin , L., Ordinary Differential Equations; Addison - Wesley, Reading Mass., - 1962.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO



MODELOS MATEMATICOS

M. EN C. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON

JUNIO DE 1976.

MARCIAL PORTILLA

2.- MODELOS MATEMATICOS.

En este primer capítulo introduciremos diversos conceptos básicos de la teoría de sistemas, como son los conceptos de linealidad, superposición e invariancia.

Consideramos que es de fundamental importancia que el lector entienda estos conceptos, ya que la mayoría de los métodos analíticos de análisis de sistemas son solamente aplicables a sistemas lineales e invariantes.

Posteriormente discutiremos el problema de modelado de sistemas o fenómenos físicos. Estos modelos se construyen interconectando componentes ideales que pueden ser de tipo distribuido o concentrado.

Se discute la descripción matemática de las principales componentes tanto eléctricas como no eléctricas de dos terminales. En el capítulo 2 se estudian las componentes de cuatro terminales. Se señalan siempre las analogías que existen entre las expresiones matemáticas que caracterizan a las componentes de diversos sistemas dinámicos. Este enfoque permite al lector entender mejor las características de las componentes.

Se estudian las propiedades de parámetros no lineales. Finalmente se introducen las relaciones de energía en los principales parámetros.

2.1 Conceptos basicos

Sistema y circuito

Un *sistema* es un agregado de objetos físicos o abstractos. Un *sistema mecánico* oscilatorio, está formado por componentes mecánicas (masa, resortes, amortiguadores) interconectadas. Pero también podremos hablar de otros sistemas, *económicos*, por ejemplo, formados por partes (consumidores, industrias, gobierno) que interaccionan entre sí. Un *circuito eléctrico* en particular se forma interconectando componentes eléctricas (resistencias, inductancias, capacitancias).

El objetivo del análisis de sistemas es permitir predecir el comportamiento del sistema si se conoce la interconexión de las diversas componentes físicas o abstractas que lo forman.

Empecemos definiendo dos importantes conceptos.

Excitación y respuesta

Si conectamos un artefacto eléctrico (una plancha por ejemplo) a una fuente de tensión (contactos de un receptáculo eléctrico) circula por él una corriente. La plancha que se calienta al paso de la corriente, la podemos representar por una resistencia. Empleando la terminología de teoría de sistemas, decimos que la fuente de tensión *excitó* al circuito. La *respuesta* a esta excitación fue el paso de corriente (que se manifiesta en la plancha por calentamiento).

En la bocina de un radio la señal de entrada (una tensión) aplicada a la bobina la *excita* haciendo vibrar la membrana. Este movimiento que se manifiesta como sonido, es la *respuesta* a la *excitación.*

En un sistema dinámico, ciertas señales llamadas *excitaciones* producen otras señales llamadas *respuestas*. Entre las señales de excitación y respuesta se establece, convencionalmente, una relación *causa-efecto*. En un circuito eléctrico las excitaciones y las respuestas pueden ser tensiones o corrientes. En un sistema mecánico las excitaciones pueden ser fuerzas o desplazamientos y las respuestas desplazamientos o velocidades.

En ingeniería de sistemas empleamos los *diagramas de bloque* para representar a todo un sistema o a una par-

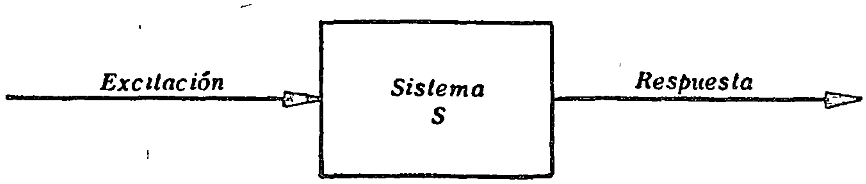


Fig.2.1.1. Representación de un sistema usando un diagrama de bloque

te del mismo (subsistema). En estos diagramas el segmento de recta dirigido que entra al bloque representa la *excitación* y el que sale representa la *respuesta*. La fig.2.1.1.

muestra un bloque (rectángulo) que puede representar a la plancha. La flecha que entra representa a la excitación (tensión) y la que sale a la respuesta (corriente).

Un sistema puede tener una sola excitación y una sola respuesta, como en el caso de la plancha. En este caso en el diagrama de bloque mostraremos a la excitación y a la respuesta como en la fig. 2.1.1. En general, sin embargo, un sistema tendrá múltiples excitaciones y respuestas. En este caso consideraremos que las diversas excitaciones son las componentes de un vector que llamaremos vector de excitación o excitación simplemente, y las diversas respuestas son las componentes de un vector de respuesta o respuesta a secas, como en la fig. 2.2.1.

Para establecer la relación matemática entre la excitación y la respuesta del sistema, se formulan todas las ecuaciones que simulan su comportamiento y se eliminan las variables que no son ni excitación ni respuesta. Entre las variables no eliminadas queda establecida una relación funcional (usualmente en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales) que en muchos casos, presenta las propiedades de *linealidad e invariancia* que definimos a continuación.

2.2 Linealidad, superposición e invariancia

Linealidad

Supongamos un sistema, en el cual una excitación $x]_1$ produce una respuesta $y]_1$, y una excitación $x]_2$ produce una respuesta $y]_2$. Si la excitación $a_1\, x]_1 + a_2\, x]_2$ produce la respuesta $a_1\, y]_1 + a_2\, y]_2$ y lo anterior se cumple para cualquier pareja de excitaciones $x]_1$ y $x]_2$, y cualquier pareja de números reales, a_1 y a_2, se dice entonces, que el sistema es *lineal.**

La fig. 2.2.1 ilustra esta definición.

* La notación $x]$ representa un vector (ver apéndice A).

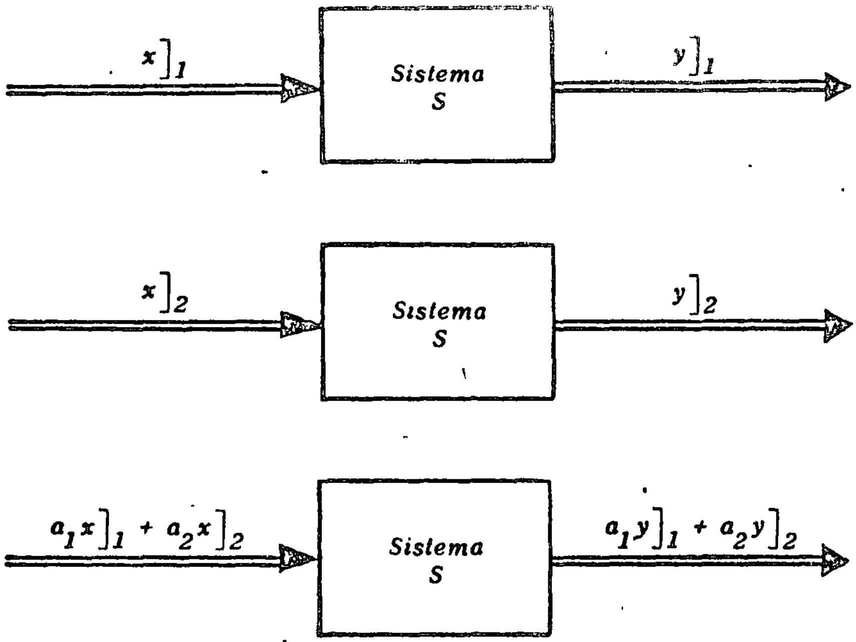


Fig. 2.2.1. Relaciones excitación - respuesta de un sistema lineal

Superposición:

El principio de superposición es una interpretación física del concepto de linealidad. Por lo tanto en un sistema lineal será válido el principio de la superposición que establece: La respuesta de un sistema *lineal* producida por *varias excitaciones* actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que produce en el sistema *cada excitación actuando por separado.**

Todos hemos oído decir que la deformación de muchos resortes dentro de ciertos límites es proporcional a la fuerza aplicada. Un sistema de resortes es por lo tanto lineal. La fig. 1.2.2 ilustra la aplicación del principio de superposición a un sistema lineal de resortes.

Una fuerza F_1 aplicada al resorte *I* lo deforma $x_1\,m$ y aplicada al resorte *II* lo alarga $x_2\,m$ (figs. 2.2.2 a y b). Al conectarlos en serie y aplicarles las fuerzas que se muestran en la fig. 2.2.2c los extremos *a* y *b* se deforman

*Desde luego las condiciones iniciales deben considerarse como excitaciones. Estos conceptos se definirán más adelante.

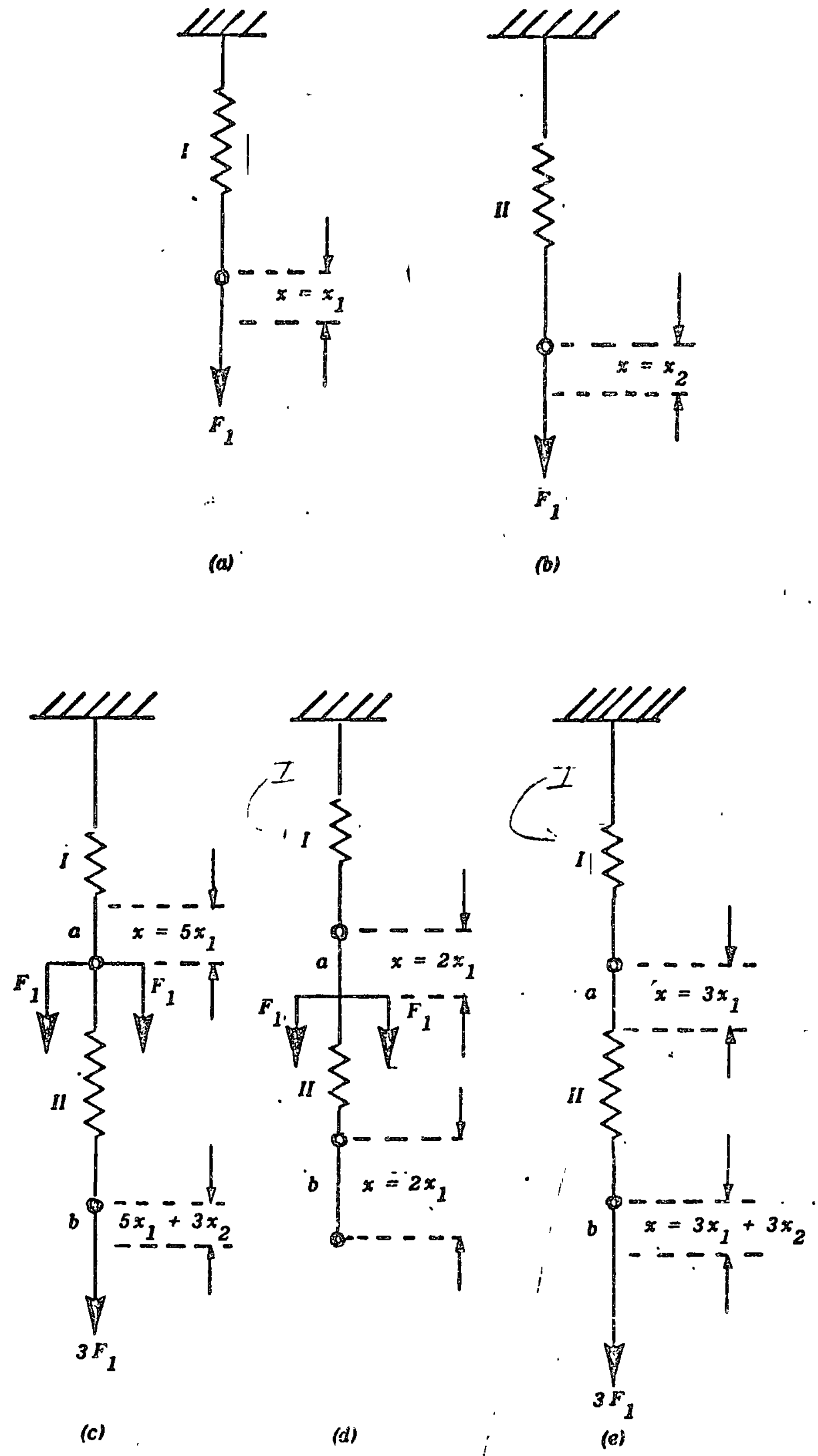


Fig. 2.2.2. Aplicación del principio de superposición a un grupo de resortes lineales

según se indica. Sin embargo, estas deformaciones no son más que la suma de las deformaciones que producen las cargas (fuerzas) actuando solo en el punto a (fig. 1.2.2d) y después sólo en b (fig. 1.2.2e), lo que demuestra la superposición.

Invariancia

Si una excitación $\boxed{x(t)}$ produce una respuesta $\boxed{y(t)}$ y una excitación $\boxed{x(t-T)}$ produce como respuesta $\boxed{y(t-T)}$ para cualquier T, entonces se dice que el sistema es *invariante*.

Tratemos de visualizar gráficamente el concepto de *invariancia* considerando un sistema con una sola excitación x y una sola respuesta y. La fig. 2.2.4a muestra las señales de *excitación* $x(t)$ y la *respuesta* $y(t)$. La fig. 2.2.4b muestra la excitación $x(t-T)$ que no es más que la señal $x(t)$ atrasada T unidades, y la correspondiente respuesta, que para un sistema *invariante*, es la misma señal $y(t)$ anterior *atrasada* T unidades, o sea: $y(t-T)$.

La mayoría de los sistemas que estudiaremos satisfacen las propiedades de *linealidad* e *invariancia*. En rigor ningún sistema es lineal e invariante, pero varios sistemas importantes, dentro de sus límites de operación normales, lo son aproximadamente. Analizaremos también casos que no satisfacen estas propiedades. Llamaremos a dichos sistemas *no-lineales* o *con variación en el tiempo*. Estas últimas propiedades son muy importantes, ya que sistemas que las poseen, son mucho más difíciles de analizar que los lineales e invariantes.

Unos ejemplos nos servirán para ilustrar los conceptos de linealidad e invariancia.

EJEMPLO 2.2a Supóngase que un dispositivo tiene una respuesta $y(t)$ proporcional al cuadrado de la excitación $x(t)$; es decir:

$$y(t) = K\, x(t)^2$$

Diga si es lineal este dispositivo.

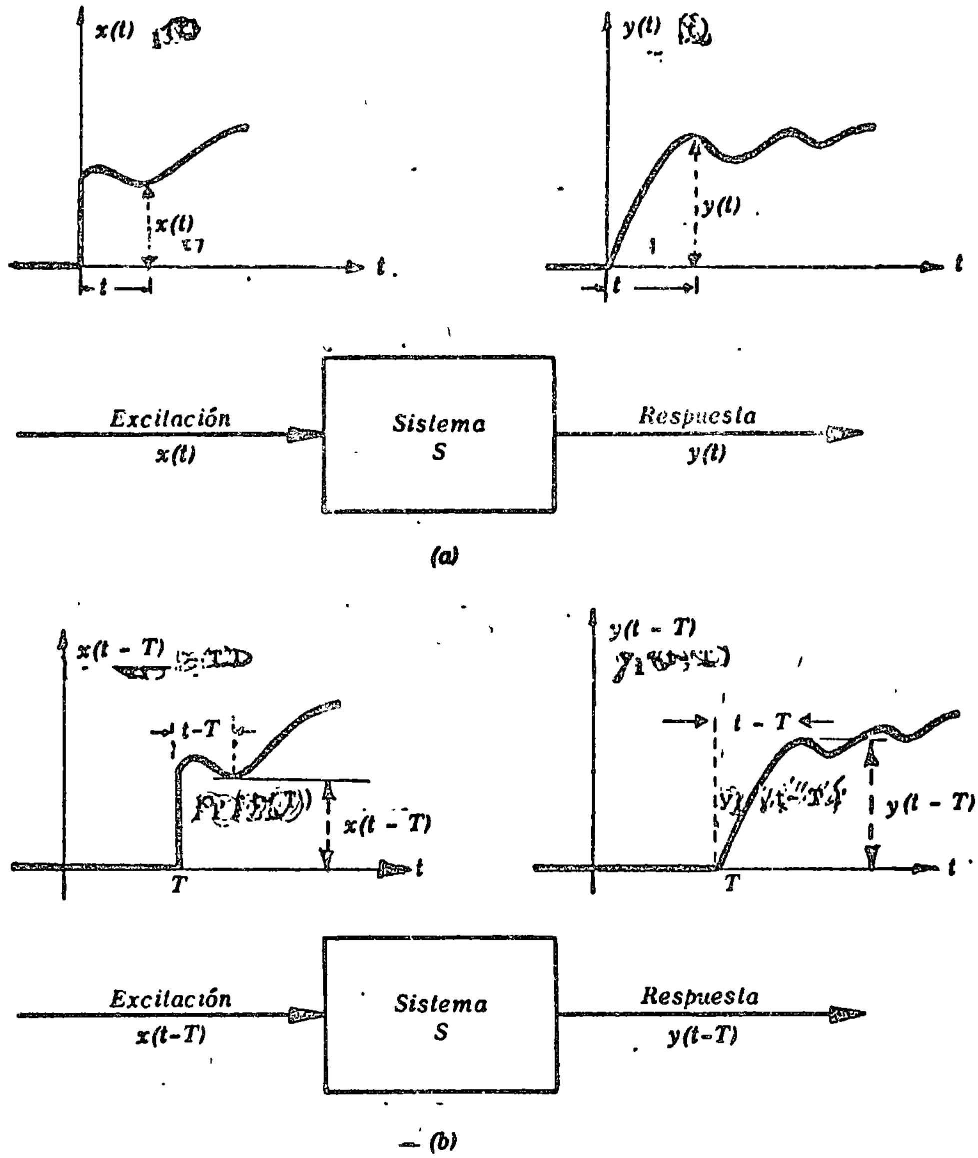


Fig. 2.2.4. Relaciones excitación - respuesta de un sistema invariante

Solución:

Sea $y_1(t)$ la respuesta a la excitación $x_1(t)$ y $y_2(t)$ la de $x_2(t)$. Calculemos la respuesta $y(t)$ a l.. excitación $a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$. Esta respuesta es:

$$y(t) = K(a\,x_1(t) + b\,x_2(t))^2$$

$$= K(a^2\,x_1(t)^2 + 2a\,b\,x_1(t)\,x_2(t) + b^2\,x_2(t)^2).$$

Si el sistema es lineal, esta respuesta deberá ser igual a

$a\,y_1(t) + b\,y_2(t).$

Pero como

$y_1(t) = K\,x_1(t)^2$

y

$y_2(t) = K\,x_2(t)^2$

entonces

$$a\,y_1(t) + b\,y_2(t) = a\,K\,x_1(t)^2 + b\,K\,x_2(t)^2$$
$$= K(a\,x_1(t)^2 + b\,x_2(t)^2),$$

que no es igual a la respuesta $y(t)$ a la excitación $a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$. Es decir, el dispositivo no es lineal.

EJEMPLO 2.2b La respuesta y de un sistema es igual al producto de sus dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Establezca si este dispositivo es lineal.

Solución:

A una pareja de excitaciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ corresponde la respuesta

$y(t) = x_1(t)\,x_2(t).$

Si estas excitaciones se multiplican por a la respuesta es:

$$y'(t) = a^2\, x_1(t)\, x_2(t) \neq a\, y(t).$$

Por lo tanto, el sistema no es lineal.

EJEMPLO 2.2c La respuesta $y(t)$ de un sistema y la excitación $x(t)$ satisfacen la relación

$$y(t) = x(t) + C.$$

Analice si es lineal el sistema.

Solución:

A una excitación $x_1(t)$ corresponde la respuesta

$$y_1(t) = x_1(t) + C$$

y a $x_2(t)$ corresponde

$$y_2(t) = x_2(t) + C$$

por lo que

$$a\, y_1(t) + b\, y_2(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t) + (a+b)\, C$$

Para un sistema lineal esto debería ser gual a la respuesta a la excitación $a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$, que es

$$a\, x_1(t) + b\, x_2(t) + C,$$

por lo que el sistema no es lineal.

EJEMPLO 2.2d En un sistema la relación entre el vector de excitación

$$x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y el de respuesta

$$y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix}$$

es:

$$y] = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Diga si el sistema es lineal.

Solución:

A una excitación

$$x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

corresponde de acuerdo con la fórmula (1.1.1) una respuesta

$$y] = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

y a una excitación:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

corresponde la respuesta

$$z = \begin{bmatrix} \omega_1 + 2\omega_2 \\ \\ \omega_2 - \omega_3 \end{bmatrix}.$$

A la combinación lineal de excitaciones

$$a\,x\big] + b\,\omega\big] = \begin{bmatrix} a\,x_1 + b\,\omega_1 \\ a\,x_2 + b\,\omega_2 \\ a\,x_3 + b\,\omega_3 \end{bmatrix}$$

corresponde, según la fórmula (2.1.1), la respuesta

$$z'\big] = \begin{bmatrix} a\,x_1 + b\,\omega_1 + 2(a\,x_2 + b\,\omega_2) \\ \\ a\,x_2 + b\,\omega_2 - (a\,x_3 + b\,\omega_3) \end{bmatrix}.$$

El lector puede comprobar fácilmente que

$$z'\big] = a\,y\big] + b\,z\big];$$

y por lo tanto el sistema es lineal.

EJEMPLO 2.2e Un sistema tiene una respuesta $y(t)$ dada por

$$y(t) = 3t\, x(t).$$

Diga si este sistema es invariante.

Solución:

A una excitación $x(t-T)$ corresponde la respuesta $y'(t)$ dada por:

$$y'(t) = 3t\, x(t-T)$$

Esta respuesta es diferente de:

$$y(t-T) = 3(t-T)\, x(t-T)$$

El sistema *no* es, por lo tanto, invariante.

2.3 Modelos

Las características de un sistema físico son tan complejas y diversas que para analizarlo es necesario describirlo en términos de un modelo idealizado formado por la interconexión de elementos también ideales. El establecimiento del modelo de un sistema físico constituye la etapa más crítica en el estudio de sistemas. Si el modelo es demasiado sencillo, pueden perderse en él características que son muy importantes; si se incluyen demasiados detalles en el modelo, su análisis resulta demasiado díficil o imposible. Al establecer el modelo de un sistema es necesario tener en cuenta el objetivo del análisis y la precisión que se necesita en los resultados.

Los elementos ideales que al interconectarse forman el modelo de un sistema son modelos simples que se emplean para representar a un elemento o fenómeno físicos. Un elemento ideal puede caracterizarse con detalle, mientras que un elemento o fenómeno físico puede describirse sólo en forma aproximada. Así por ejemplo, una resistencia ideal es un elemento que satisface la conocida ley de Ohm. Las resistencias reales sólo la satisfacen en forma aproximada. Si la corriente que circula por la resistencia varía con el tiempo, se presentan fenómenos de inducción magnética; además pueden presentarse fenómenos capacitivos. En muchos casos un solo elemento real se representa con la combinación de varios elementos ideales. Una resistencia puede ser necesario modelarla combinando una resistencia y una inductancia ideales. El conocido cuerpo rígido también es un modelo ideal de un cuerpo físico, ya que en rigor ningún cuerpo es rígido, siempre se deforma bajo la acción de un sistema de fuerzas. A pesar de que los modelos sólo representan en forma aproximada a un sistema, se les emplea con éxito para el análisis y diseño del más diverso tipo de sistemas.

Existen dos tipos de sistemas, *sistemas de parámetros concentrados* y *sistemas de parámetros distribuidos*. Los primeros se forman conectando parámetros concentrados como, por ejemplo, las resistencias, inductancias y capacitancias en los circuitos eléctricos. En los sistemas mecánicos tenemos las masas concentradas como ejemplo de un parámetro concentrado. La característica general de estos elementos es su reducida dimensión, en los circuitos eléctricos con respecto a la longitud de onda correspondiente a su frecuencia normal de operación. En un elemento eléctrico concentrado de dos terminales, la tensión y la corriente asociadas a él, son cantidades bien definidas en todo instante de tiempo.

En este libro solamente estudiaremos sistemas de parámetros concentrados, en primer lugar por ser su análisis más sencillo y en segundo lugar por ser la base del análisis de sistemas de parámetros distribuidos.

Aclaremos la idea de parámetro concentrado para un circuito eléctrico. Un parámetro puede considerarse concentrado, si las longitudes de onda de las señales son muy grandes con respecto a las dimensiones de los elementos. Por ejemplo, la longitud de onda de una corriente de 50 Hz es de $3 \times 10^8/50 = 6{,}000$ km. Esta longitud es mucho mayor que la dimensión de un circuito, y se le puede considerar por lo tanto concentrado. Sin embargo, un circuito a la frecuencia de micro-ondas del orden de $10\,\mathrm{GHz} = 10 \times 10^9$ Hz, con una longitud de onda $= 3\times 10^8/19 \times 10^9 = 3$ cm no puede considerarse como un circuito de parámetros concentrados. Sus elementos tienen ya dimensiones comparables a la longitud de onda.

Empezaremos estudiando las características de modelos ideales lineales, porque el análisis de sistemas formados por la interconexión de elementos lineales ideales es mucho más sencilla; además, diversos sistemas físicos permiten ser analizados con suficiente aproximación con estos elementos.

En la sección 1.8 introduciremos diversos parámetros no lineales, ya que en muchos casos no puede analizarse un sistema real empleando un modelo formado por la interconexión de parámetros lineales exclusivamente.

2.4.1 Respuesta libre

En esta sección estudiaremos cómo se obtiene la respuesta libre de un sistema de segundo orden, lineal e invariante.

La fig. 5.1.1 muestra un péndulo. Consideremos toda la masa m concentrada en el punto A y además que no hay fricción en el punto B.

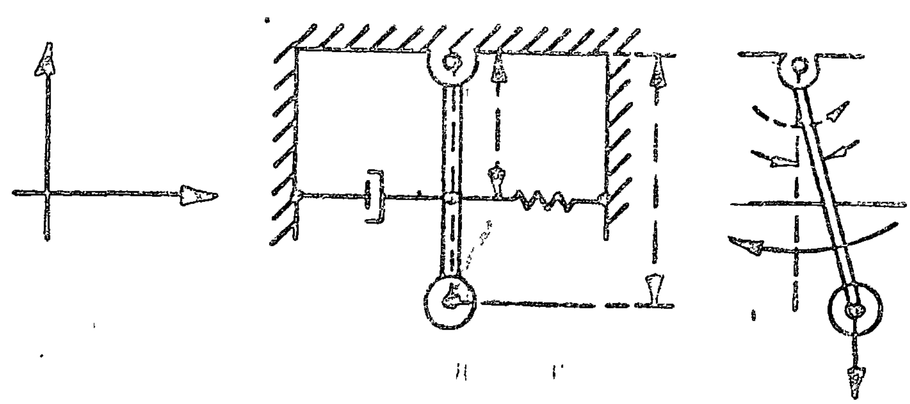


Fig. 5.1.1. *Péndulo y su diagrama de campo libre*

Las fuerzas y pares que actúan sobre el péndulo son:

a) La fuerza de amortiguamiento f_D dada por:

(5.1.1) $$f_D(t) = D\,S_C(t)$$

pero la velocidad del punto C, S_c, es:

$$S_C(t) = \omega(t)\,a$$

Si consideramos que el movimiento angular del péndulo es Θ, la velocidad angular ω está dada por

$$\omega(t) = \frac{d.\Theta(t)}{dt}$$

sustituyendo estos valores en (5.1.1)

(5.1.2) $$f_D(t) = D\,a\,\frac{d\,\Theta(t)}{dt}$$

b) La fuerza elástica f_R está dada por

(5.1.3) $$f_R(t) = K\,x_C(t)$$

pero el desplazamiento horizontal del punto c, $x_c(t)$, está dado por

$$x_C(t) = \theta(t)\,a$$

en esta ecuación se considera que el desplazamiento x_c es *pequeño*. Sustituyendo este último valor en (5.1.3) obtenemos:

(5.1.4) $f_R(t) = K\,a\,\theta$

c) El peso de la masa dado por

(5.1.5) $w = mg$

d) El momento de inercia $T_i(t)$ dado por

(5.1.6) $T_i(t) = I\,\alpha(t)$

Como hemos considerado toda la masa concentrada en el punto A, el momento de inercia I está dado por

$$I = ml^2$$

la aceleración angular α es por otra parte:

$$\alpha(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Sustituyendo estos valores en (5.1.6) obtenemos:

(5.1.7) $T_i(t) = ml^2 \dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$

Como hemos introducido el par de inercia T_i, la suma de momentos respecto a cualquier punto debe ser nula. Tomemos el pivote B. Haciendo referencia al diagrama de cuerpo libre de la fig. 5.1.1b la suma de momentos es:

$$(f_R(t) + f_D(t)) - a\cos\theta(t) + mga\ \mathrm{sen}\ \theta(t) + T_i(t) = 0$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de $f_D(t)$, $f_R(t)$ y $T(t)_i$ dados por (5.1.2), (5.1.4) y (5.1.7) se obtiene:

(5.1.8)
$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + Da^2 \cos\theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$+ Ka^2 \cos\theta(t)\,\theta(t) + mga \operatorname{sen}\theta(t) = 0$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden es *no lineal*. Para poder aplicarle las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales lineales es necesario considerar que el desplazamiento angular θ es suficientemente pequeño para realizar las siguientes aproximaciones:

$\cos\theta(t) \cong 1$

$\operatorname{sen}\theta(t) \doteq \theta(t)$

sustituyendo estos valores en la ec. (5.1.8) obtenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y homogénea.

(5.1.9)
$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + Da^2 \frac{d\theta(t)}{dt} + (Ka^2 + mga)\,\theta(t) = 0$$

Dividiendo entre el coeficiente de la segunda derivada obtenemos:

(5.1.10)
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{Da^2}{ml^2} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{Ka^2 + mga}{ml^2}\,\theta(t) = 0$$

Con objeto de normalizar el estudio de los *sistemas de segundo orden*, o sean aquéllos en que la respuesta libre está caracterizada por una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, suelen designarse los coeficientes del término en la primer derivada y el de la respuesta con:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{Da^2}{ml^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{Ka^2 + mga}{ml^2} \tag{5.1.11}$$

La constante α recibe el nombre de *constante de amortiguamiento* y ω_0 el de *velocidad angular de oscilación no amortiguada.*

Posteriormente quedarán justificados estos nombres.

Sustituyendo los valores (5.1.11) en la ecuación diferencial (5.1.10) obtenemos:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2\,\theta(t) = 0 \tag{5.1.12}$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes. Su ecuación característica es:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \tag{5.1.13}$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Las raíces s_1 y s_2 de la ecuación característica reciben el nombre de *frecuencias naturales del circuito.*

La solución de (5.1.12) depende de los valores de α y ω_0 y su forma general es:

$$\theta(t) = K_1\exp(s_1t) + K_2\exp(s_2t);\ t>0 \tag{5.1.15}$$

donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias que se determinarán usando las condiciones iniciales:

$$\theta(t)\Big|_{t=0} \quad y \quad \frac{d\theta(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

o sea el desplazamiento y velocidades angulares iniciales. Para $t = 0$ de (5.1.15) tenemos:

(5.1.16) $$\theta(0) = K_1 + K_2$$

Por otra parte derivando (5.1.15) y poniendo $t = 0$

(5.1.17) $$\omega(0) = \frac{d\theta(t)}{dt}\Big|_{0} = s_1K_1 + s_2K_2.$$

Las ecs. (5.1.16) y (5.1.17) son dos ecuaciones lineales simultáneas con incógnitas K_1 y K_2. Este sistema se resuelve para obtener las constantes K_1 y K_2.

Sustituyendo estos dos valores y los de s_1 y s_2, dados por la ec. (5.1.14) en la ec. (5.1.15) se obtiene el desplazamiento del péndulo en función del tiempo.

Este sistema mecánico ha servido para ilustrar y además como puede transformarse en algunos casos una ecuación diferencial no lineal en lineal si el valor de la variable es pequeño.

2.4.2

~~5.2~~ Comportamiento de la respuesta libre

Si comparamos la respuesta libre del sistema de segundo orden del ejemplo 5.1a con la del sistema del ejemplo 5.1b observamos que son de naturaleza distinta. En el primer ejemplo la respuesta *no oscila,* decae exponencialmente a cero a partir de su valor inicial. En el segundo ejemplo la respuesta *oscila* y la amplitud de estas oscilaciones decae a cero. Observamos que en el curso de la respuesta no oscilante las raíces de su ecuación característica son reales, mientras que en el segundo caso son complejas.

En esta sección estudiaremos la relación entre las diferentes formas de la respuesta libre de un sistema de segundo orden y las raíces de su ecuación característica.

Las raíces o frecuencias naturales s_1, s_2 de la ecuación característica (5.1.13) dadas por (5.1.14) pueden ser de cuatro tipos:

1. Reales y distintas (cuando $\alpha > \omega_0$)
2. Reales e iguales (cuando $\alpha = \omega_0$)
3. Complejas y conjugadas (cuando $\alpha < \omega_0$)
4. Imaginarias y conjugadas (cuando $\alpha = 0$)

Cuando las raíces son reales y distintas, la forma más conveniente de expresar la solución, es la de la ec. (5.1.15). En este caso la respuesta libre, tal como se ilustró en el ejemplo 5.1a, consta de la suma de dos exponenciales decrecientes, cuyo valor inicial depende de las constantes K_1 y K_2 y cuya velocidad de decrecimiento depende de la localización de s_1 y s_2 en el plano complejo s. Cuanto más negativo sea su valor, tanto más rápido decrecen dichas exponenciales. La fig. 5.2.1a muestra la localización de las raíces s_1 y s_2 en el plano complejo y la correspondiente respuesta libre.

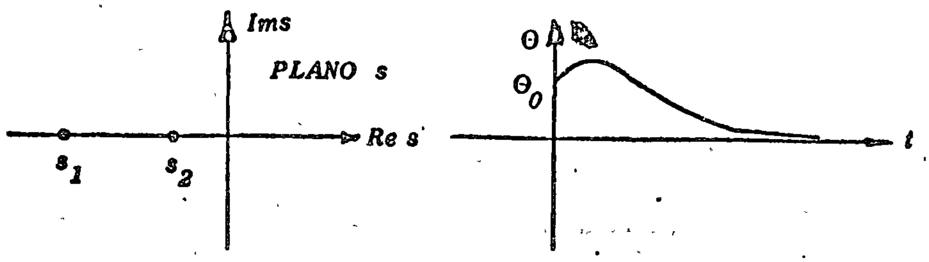
Cuando las raíces son reales e iguales, la solución homogénea ya no es de la forma (5.1.15) sino de la forma.

(5.2.1) $$\Theta(t) = K_1 \exp(s_1 t) + K_2 t \exp(s_2 t)$$

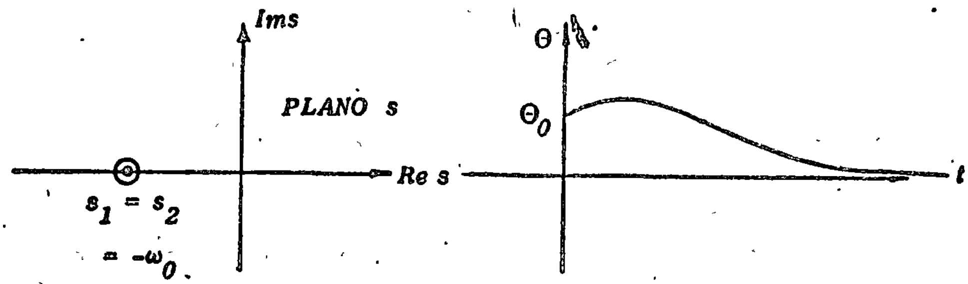
en donde $s_1 = -\alpha$ es la raíz doble.

Las constantes K_1 y K_2 se determinan imponiendo las condiciones iniciales del problema. En la fig. 5.2.1b se muestra la localización de s_1 en el plano complejo y la forma de la respuesta.

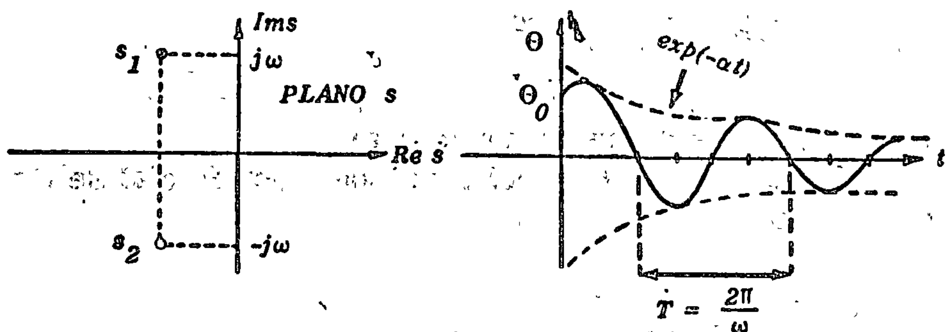
Cuando las raíces son complejas y conjugadas, la solución homogénea (5.1.15) sigue siendo válida, pero es en general más conveniente expresarla en otra forma para evitar la aparición de números complejos. Dichos números complejos podrían dar la impresión que la solución es una función compleja, pero como las exponenciales de las raíces



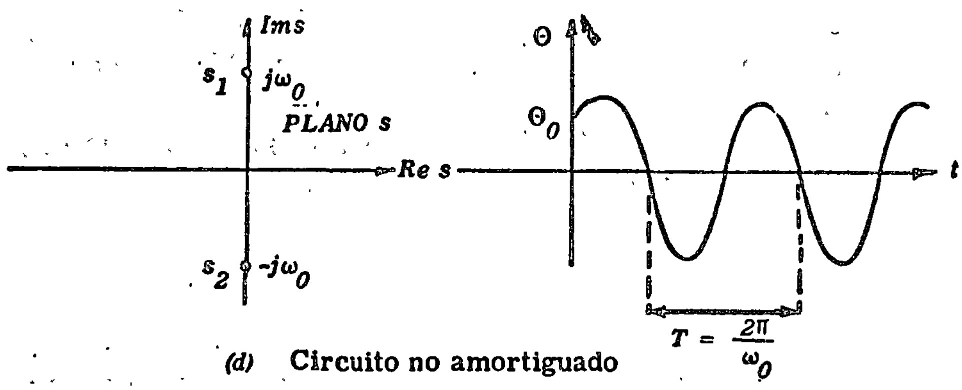
(a) **Circuito sobreamortiguado**



(b) **Circuito críticamente amortiguado**



(c) **Circuito subamortiguado**



(d) **Circuito no amortiguado**

Fig. 5.2.1. *Respuesta libre de un sistema de segundo orden*

complejas conjugadas se suman, darán una respuesta siempre real, como veremos a continuación.

Como $\alpha < \omega$, en este caso, $\omega^2 - \alpha^2 > 0$ y las raíces de la ecuación son:

$$s_1 = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

(5.2.2)

$$s_2 = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

donde j es el número complejo

$$j = \sqrt{-1}$$

Sean K_1 y K_2 las dos constantes de la ec. (5.1.15) y supóngamos que son los números complejos dados por:

$$K_1 = a + bj \quad y \quad K_2 = c + dj$$

donde a, b, c y d son números reales.

Para satisfacer la primera condición inicial se tiene, de (5.1.15)

$$\theta(0) = a + bj + c + dj$$

Pero como el desplazamiento inicial $\theta(0)$ es real forzosamente $b = -d$.

Para satisfacer la segunda condición inicial dada por la ec. (5.1.17), usando (5.1.14) tenemos:

$$(-\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2})(a + bj)$$

$$+ (-\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2})(c - bj)$$

Como la velocidad inicial $\omega(0)$ es también real, la suma de las partes imaginarias del miembro izquierdo de la ecuación debe valer cero, por lo que:

$$a \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \alpha b + \alpha b - c \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 0$$

de donde $a = c$. En vista de que las partes reales de K_1 y K_2 son iguales y sus partes imaginarias de signo contrario K_1 y K_2 son conjugadas y podemos escribir

$$K_2 = \bar{K}_1$$

donde $\bar{K}_1$ es el complejo conjugado de K_1.

Si definimos:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{5.2.3}$$

donde ω recibe el nombre de *velocidad angular de oscilación amortiguada* la solución homogénea (5.1.15) queda:

$$\Theta(t) = exp(-\alpha t) \left[K_1\, exp(j\,\omega t) + \bar{K}_1\, exp(-j\omega t)\right] \tag{5.2.4}$$

Si utilizamos la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} exp(j\omega t) &= cos\,\omega t + j\ sen\,\omega t \\ exp(-j\omega t) &= cos\,\omega t - j\ sen\,\omega t \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

la ec. (5.2.4) se puede escribir, recordando que $K_1 = a + bj$, como:

$$\Theta(t) = 2\ exp(-xt)\ (a\ cos\ \omega t - b\ sen\ \omega t) \tag{5.2.6}$$

lo cual es una función real, como queríamos demostrar.

Podemos escribir $\Theta(t)$ de otra forma definiendo un ángulo ϕ como se muestra en la fig. 5.2.2

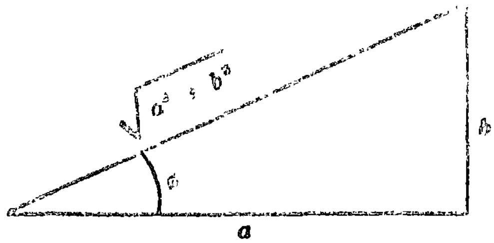


Fig. 5.2.2. *Definición del ángulo* ϕ

La ec. (5.2.6) se puede escribir en términos de ϕ como

$$\Theta(t) = 2\sqrt{a^2 + b^2}\, exp(-\alpha t)\,(\cos\phi \cos\omega t - sen\,\phi\; sen\,\omega t)$$

(5.2.7)

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2}\, exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \phi)$$

(5.2.8) $\phi = tan\ (b/a)$

Observemos que a y b son las partes real e imaginaria de K_1 respectivamente.

Las figs. 5.1.5 y 5.2.1c muestran la respuesta en este caso, que es una curva senoidal amortiguada. Observemos que de $\alpha = |Re\ s_1| = |Re\ s_2|$ depende la velocidad con que se amortigua la senoide. Entre más negativa es $Re(s_1) = Re(s_2)$, tanto más rápido se amortigua la respuesta libre. Por otro lado la velocidad de oscilación de la respuesta depende de $\omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, o sea de la parte imaginaria de las raíces s_1 y s_2 de la ecuación característica. Entre mayor sea $|Im\ s_1| = |Im\ s_2|$ tanto más rápida es la oscilación. El lector debe recordar estas relaciones entre la posición de las raíces de la ecuación característica y el comportamiento de la respuesta libre.

Finalmente, si las raíces son imaginarias y conjugadas, lo cual sucede cuando $\alpha = 0$ en el sistema. En este caso, usando la ec. (5.2.7), la respuesta se reduce a:

(5.2.9) $i_L(t) = 2\sqrt{a^2 + b^2}\cos(\omega t + \phi)$

(5.2.10) $\phi = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

En la fig. 5.2.1d mostramos este tipo de respuesta libre.

Suponiendo que los parámetros del sistema sean positivos, lo que implica partes reales negativas en las raíces s_1 y s_2 de la ecuación característica, se tendrán cuatro tipos de comportamiento para la respuesta libre:

1. *Sobreamortiguada;* ; la respuesta es una suma de exponenciales negativas, y por lo tanto la respuesta tiende a cero para $t \to \infty$. La respuesta está dada por la ec. (5.1.15), y s_1 y s_2 están dadas por la ec. (5.1.14). Este caso se presenta cuando $\alpha > \omega_0$, y la fig. 5.2.1a muestra la respuesta.
2. *Críticamente amortiguada;* la solución es el producto de una exponencial negativa por una recta. La solución tiende a cero para $t \to \infty$. La solución está dada por la ec. (5.2.1) donde $s_1 = s_2 = -\alpha$ y $\alpha = \omega_0$. En este caso la respuesta aparece en la fig. 5.2.1b.
3. *Subamortiguada;* la solución es el producto de una exponencial por una cosenoide defasada un ángulo ϕ. La solución tiende a cero cuando $t \to \infty$ y está dada por la ec. (5.2.6) o por la ec. (5.2.7). El ángulo ϕ se encuentra empleando la ec. (5.2.8). Las dos raíces son complejas y conjugadas y están dadas por la expresión (5.2.2). El caso se presenta cuando $\alpha < \omega_0$, y la forma de la respuesta aparece en la fig. 5.2.1c.
4. *No amortiguada;* la solución oscila y es una cosenoide defasada un ángulo ϕ. La respuesta está dada por la ec. (5.2.9) y el ángulo de fase por (5.2.10). Este caso se presenta cuando α la constante de amortiguamiento de acuerdo con (5.1.11) es nula y $s_{1,2} = \pm j\,\omega_0$ por (5.1.14). En la fig. 5.2.1d aparece este tipo de respuesta libre.

EJEMPLO 5.2a Supongamos que los parámetros del sistema mecánico de la fig. 5.1.2 son:

$k = 1{,}000\ n/m$

$D = 200\ ns/m$

$m = 10\ kg$

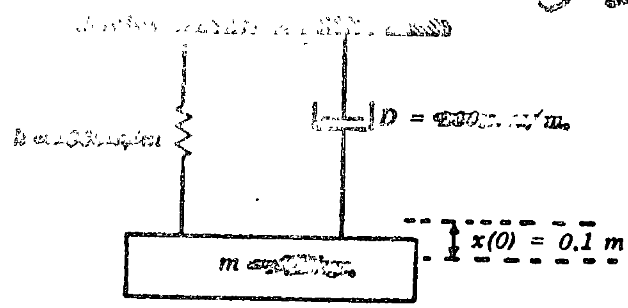


Fig. 5.1.2. Sistema vibratorio de segundo orden

y que las condiciones iniciales sean:

$x(0) = 0.1\ m$

$s(0) = -0.9\ m/s$

Calcule la respuesta $x(t)$.

Solución:

Comparando la ecuación diferencial (5.1.21) que rige a este sistema mecánico con la ec. (5.1.2), vemos que en este caso las constantes α y ω_0 son:

$$\alpha = \frac{D}{2m} = 10$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} = 100$$

La ecuación característica

$$s^2 + 20s + 100 = 0$$

tiene raíces *dobles*

$$s_1 = s_2 = -10$$

y de acuerdo con (5.2.1) la solución es:

(5.2.11) $$x(t) = (K_1 + K_2 t)\ exp(-10t)$$

la derivada de (5.2.11) es la velocidad

(5.2.12) $$s(t) = (-10K_1 + K_2 - 10tK_2)e$$

Usando las ecs. (5.2.11) y (5.2.12) en $t = 0$ y los valores de las condiciones iniciales, se obtienen los siguientes valores para las constantes K_1 y K_2:

$$K_1 = 0.1$$

$$K_2 = 1.0$$

La solución es, por lo tanto:

$$x(t) = 0.1(1 + 10t)\ exp(-10t)$$

EJEMPLO 5.2b Calcule la respuesta $x(t)$ del sistema mecánico de la fig. 5.1.2, si los parámetros son:

$$k = 1{,}250\ n/m$$

$$D = 100\ ns/m$$

$$m = 10\ kg$$

y las condiciones iniciales son:

$x(0) = 0.1\ m$

$s(0) = -0.5\ m/s$

Solución:

Las constantes α y ω_0 en este caso son:

$$\alpha = \frac{D}{2m} = 5$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} = 125$$

La ecuación característica

$$s^2 + 10s + 125 = 0$$

tiene como raíces:

$$s_{1,2} = -5 \pm j10$$

De acuerdo con (5.2.7) la solución es:

$$x(t) = A\ exp(-5t)(cos(10t + \phi))$$

(5.2.13) y derivando (5.2.13) se obtiene la velocidad

$$s(t) = A\ exp(-5t)\ (-5\ cos\ (\omega t + \phi) - 10\ sen\ (\omega t + \phi))$$

Usando las condiciones iniciales se pueden calcular las constantes A y ϕ, a saber:

para $t = 0$

$$x(0) = A \cos \phi = 0.1$$

$$s(0) = A(-5 \cos \phi - 10 \operatorname{sen} \phi) = -0.5$$

de donde:

$$A = 0.1$$

$$0 = \phi$$

La respuesta es por lo tanto:

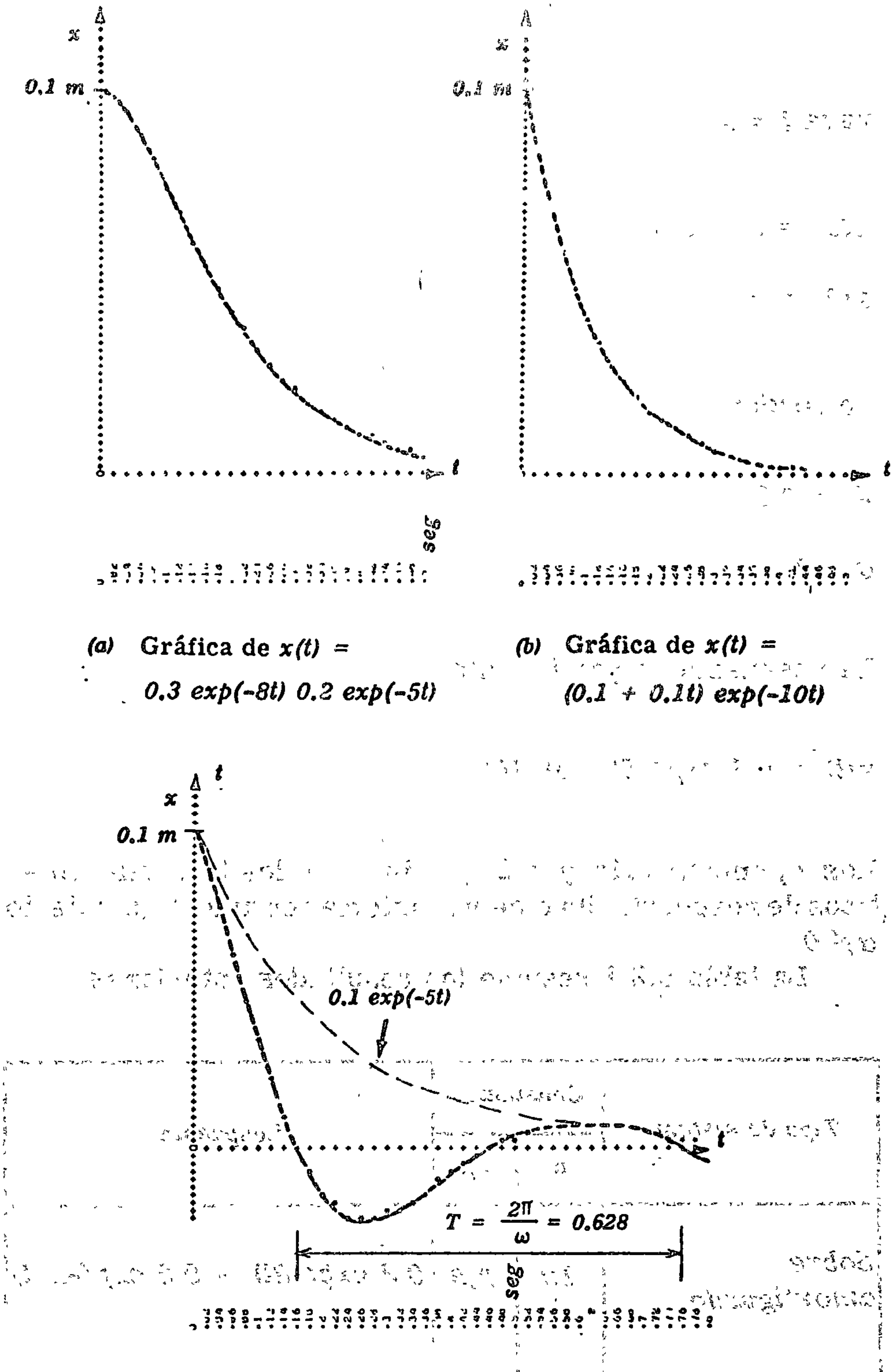
$$x(t) = 0.1 \exp(-5t) \cos 10t$$

Los ejemplos 5.1a y 5.2a y b ilustran los tres diferentes tipos de respuesta libre de un sistema con amortiguamiento $\alpha \neq 0$.

La tabla 5.2.1 resume los resultados anteriores:

Tipo de sistema	*Constantes*		*Respuesta*
	α	ω_0	
Sobre amortiguado	10	9.8	$0.3 \exp(-8t) - 0.2 \exp(-12t)$
Amortiguamiento crítico	10	10	$0.1(1 \times t) \exp(-10t)$
Sub amortiguados	5	11.2	$0.1 \exp(-5t) \cos 10t$

Tabla 5.2.1



(a) **Gráfica de** *x(t) =*
0.3 exp(-8t) 0.2 exp(-5t)

(b) **Gráfica de** *x(t) =*
(0.1 + 0.1t) exp(-10t)

(c) **Gráfica de** *x(t) = 0.1 exp(-5t) cos 10t*

Fig. 5.2.3. *Los tres tipos de respuesta libre de un sistema de segundo orden según tabla 5.2.1*

La fig. 5.2.3 muestra las gráficas $(t - x)$ para estos tres tipos de respuesta libre.

Los anteriores ejemplos ilustran cómo depende la respuesta libre de un sistema de segundo orden de la posición de las raíces de la ecuación característica en el plano complejo. Esta posición es a su vez función del valor de los parámetros. A continuación exploraremos como varía la posición de las raíces al variar los parámetros. Mantendremos constantes el valor de la constante elástica K y de la masa m. Variaremos el valor de la constante de amortiguamiento D.

Empecemos considerando que la constante de amortiguamiento D es nula, por lo tanto el coeficiente de amortiguamiento

$$\alpha = \frac{D}{2m}$$

es nulo.

Este caso corresponde al último, es decir al de una solución no amortiguada. Las raíces o frecuencias naturales son:

$$s_{1,2} = \pm\, j\omega_0$$

En el plano complejo s estas raíces están localizadas sobre el eje imaginario como lo muestra la fig. 5.2.1d.

La velocidad angular de estas oscilaciones no amortiguadas es:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0$$

Esta constante, medida en radianes/seg, es la velocidad angular de oscilación ω_0 y se llama *velocidad de oscilación no amortiguada*. La *frecuencia en Hertz* o ciclos/seg que corresponde a la velocidad de oscilación ω_0 es:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\Pi} \ (Hz) \qquad (5.2.14)$$

y se le llama *frecuencia de oscilación no amortiguada.*

Al recíproco de la frecuencia f se le llama período t. Al período correspondiente a f_0 o sea a:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \text{ (seg)} \tag{5.2.15}$$

se le llama *período de oscilación no amortiguada,* y se mide en segundos.

Consideremos ahora un valor de la constante de amortiguamiento D mayor que cero, para que $\alpha < \omega_0$; las raíces $s_{1,2}$ son complejas y conjugadas, a saber:

$$s_{1,2} = \alpha \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

El módulo de este complejo es:

$$|s_{1,2}| = \sqrt{\alpha^2 + (\omega_0^2 - \alpha^2)} = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

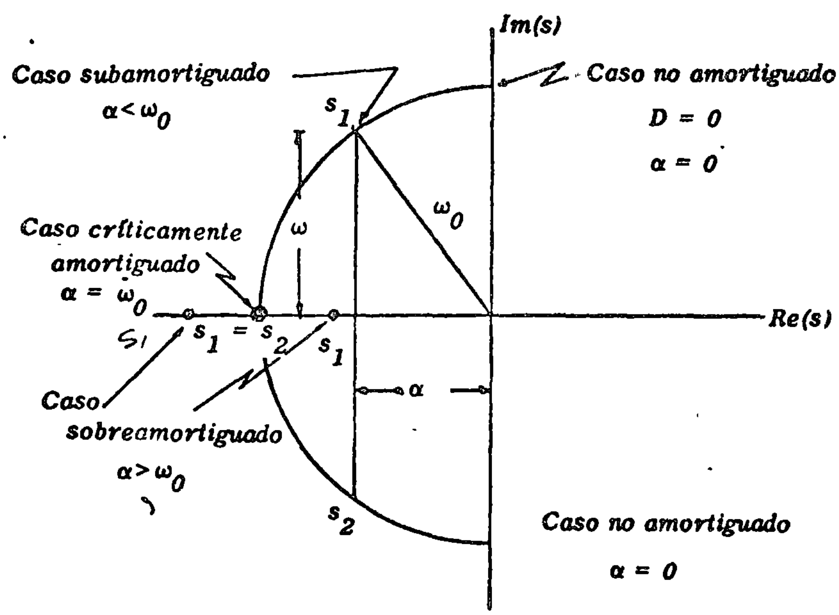


Fig. 5.2.4. Lugar de las raíces de la ecuación característica para K y m constantes

que resulta independiente de D. Por lo tanto al ir variando D, las raíces van describiendo el semicírculo que se muestra en la fig. 5.2.4.

Mientras las raíces s_1 y s_2 de la ecuación característica se encuentran sobre el semicírculo de la fig. 5.2.4 ; la respuesta está dada por (5.2.7). Recordando que

(5.2.16) $$|K_1| = \sqrt{a^2 + b^2}, (x(t) = 2\,|K_1|\, exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \phi)$$

por lo que la constante ω, es la velocidad con que oscila la respuesta y se llama *velocidad de oscilación amortiguada.* Se mide en radianes/seg. La correspondiente frecuencia en Hertz es:

(5.2.17) $$f = \frac{\omega}{2\Pi} (Hz)$$

y se llama *frecuencia de oscilación amortiguada.* A esta frecuencia le corresponde un período T:

(5.2.18) $$T = \frac{1}{f} (seg)$$

que se llama *período de oscilación amortiguada,* y se mide en segundos.

Observemos de la fig. 5.2.4 que al ir aumentando D va disminuyendo la velocidad de oscilación ω y aumentando por lo tanto el período de oscilación amortiguada hasta que llega un momento en que dicho período se vuelve infinito, es decir, el circuito deja de oscilar. Esto sucede cuando las raíces se encuentran en el eje real a una distancia ω_0 del origen en el punto $-\alpha$. En este caso $\omega_0 = \alpha$, es decir:

(5.2.19) $$\omega_0^2 = \alpha^2$$

(5.2.19) $$\frac{K}{m} = \frac{D^2}{4m^2}$$

El valor del amortiguamiento que satisface a la ec. (5.2.19) se llama crítico y es, por lo tanto:

(5.2.20) $$D_c = 2\sqrt{Km}$$

Para valores de D mayores que D_c, las raíces son reales, negativas y distintas y la respuesta es sobreamortiguada. Al ir aumentando D, una de las raíces se vuelve muy negativa y la otra permanece dentro del circulo acercándose al origen. En el límite cuando $D \to \infty$ una de las raíces tiende a $(-\infty)$ y la otra al origen por el lado izquierdo.

En el problema 1 se pide al lector que repita este análisis para un circuito *RLC* serie y *RLC* paralelo.

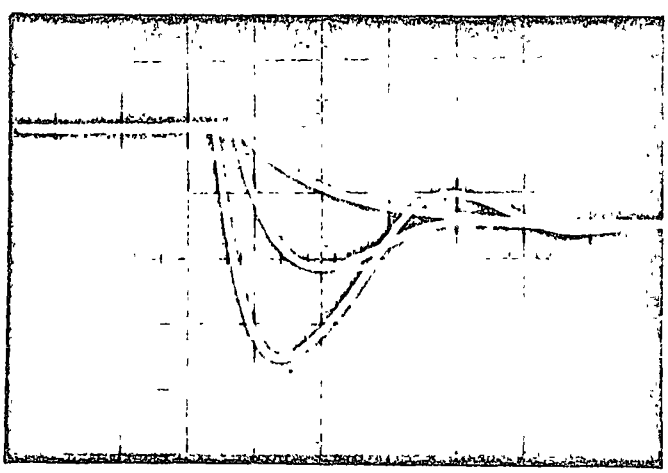


Fig. 5.2.5. Fotografía de las curvas (t - v_c) de un circuito RLC serie

Con ayuda de un osciloscopio puede observarse la forma de onda de la respuesta libre de un sistema. En la fig.

5.2.5 aparece la fotografía de tres ondas de tensión v_C sobrepuestas. La tensión v_C medida en las terminales de la capacitancia es la respuesta libre de un circuito R, L, C serie. Cada curva corresponde a un valor diferente de la resistencia R, mientras que el valor de la inductancia y capacitancia se mantuvo constante. Al invertirse la resistencia R la respuesta libre cambia de oscilante a exponencial como puede observarse en dicha fig.

2.5.1

~~5.3~~ Respuesta forzada y respuesta total

Supongamos que en lugar de un sistema libre, tenemos un circuito serie RLC excitado con una fuente de tensión, aplicada en $t = 0$, como se muestra en la fig. 5.3.1. Este circuito tiene una malla y tres ramas.

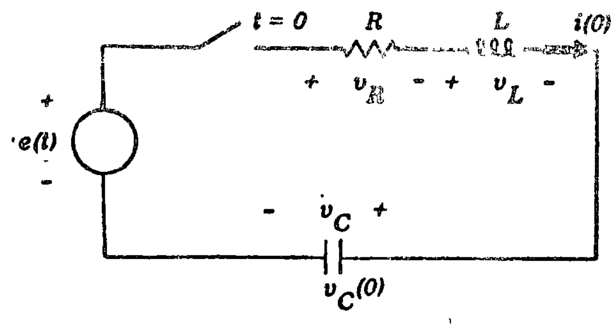


Fig. 5.3.1. Circuito serie RLC con excitación forzada

La ecuación de tensiones de Kirchhoff *(LTK)* aplicada a la malla da:

$$v_R + v_C + v_L = e(t) \tag{5.3.1}$$

Si consideramos como respuesta a la tensión en el capacitor, haciendo uso de la relación $i_R = i_L = i_C$ y de las ecs. (5.1.31), (5.1.32), (5.1.33) y (5.3.1) se puede escribir la ecuación diferencial que caracteriza al circuito de la fig. 5.3.1 como

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,v_C(t) = \frac{e(t)}{LC} \tag{5.3.2}$$

Si definimos $\alpha = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$ la ecuación diferencial anterior se puede escribir como:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_0^2\,v_C(t) = \frac{e(t)}{LC} \tag{5.3.3}$$

Comparando la ec. (5.1.38) con esta ec. (5.3.3) igualada a cero (sin excitación forzada), vemos que tanto un circuito *RCL* serie como un circuito *RCL* paralelo están caracterizados por la misma ecuación diferencial (5.1.12), si en el circuito paralelo la respuesta es la corriente i_2

y en el serie es la tensión v_c. La única diferencia es que $\alpha = 1/2RC$ para el circuito RCL paralelo y $\alpha = R/2L$ para el circuito RLC serie; mientras que $\omega_0^2 = 1/LC$ *en ambos casos.*

La solución de esta ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, no homogénea, en este caso particular de segundo orden, está dada por la suma de la respuesta v_h de la ecuación homogénea asociada, y de una respuesta v_p (apéndice B).

Por lo tanto la solución general de la ec. (5.3.3) es:

$$v_c = v_h + v_p \tag{5.3.4}$$

En la sección 5.2 estudiamos cómo se obtiene la solución homogénea para diferentes valores de los parámetros de la ec. (5.1.12). El lector recordará que hay que obtener las raíces s_1 y s_2 de la ecuación característica de (5.3.3); la forma de la solución dependerá de los valores de éstas raíces.

En esta sección estudiaremos cómo se obtiene la respuesta particular v_p, si la excitación es un escalón o un impulso, con objeto de obtener la respuesta total a estas excitaciones. Con un ejemplo ilustraremos cómo se obtiene la respuesta cuando la excitación es periódica.

Respuesta a un escalón:

La exitación $e(t)$ es en este caso igual a $e(t) = K_0\, u(t)$ donde $u(t)$ es la función escalón definida en el apéndice D. Para tiempos positivos, la solución particular de (5.3.3) es:

$$v_p(t) = K_0,\ t > 0 \tag{5.3.5}$$

Por lo tanto, la solución general para tiempos positivos es:

(5.3.6) $v_C(t) = K_1 \exp(s_1 t) + K_2 \exp(s_2 t) + K_0;\ t > 0$

si las raíces no son dobles y

(5.3.7) $v_C(t) = (K_1 + K_2 t) \exp(-\alpha t) + K_0$

si las raíces son dobles e iguales $a - \alpha$,

$s_1 = s_2 = -\alpha$

K_1 y K_2 son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales del problema. Su evaluación se realiza de la siguiente manera:

para $t = 0$ de (5.3.6) se tiene:

(5.3.8) $v_C(0) - K_0 = K_1 + K_2 =$

y derivando (5.3.6) y recordando que

$$\left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{C}\, i(0)$$

tenemos:

(5.3.9) $\frac{1}{C}\, i(0) = s_1 K_1 + s_2 K_2$

Resolviendo simultáneamente (5.3.8) y (5.3.9) obtenemos las constantes K_1 y K_2.

Una serie de ejemplos servirán para ilustrar cómo se obtiene la respuesta particular, la homogénea y la total si las excitaciones son funciones de escalón y periódicas. Además se identificarán todas las componentes de la respuesta y se señalarán sus principales propiedades.

EJEMPLO 5.3a Calcule la respuesta considerada como la tensión en el capacitor del circuito RLC serie de la fig. 5.3.1 si la fuente de tensión constante $e(t)$ de 20 volts se aplica en $t = 0$ y las condiciones iniciales son:

$$i_L(0) = 10a$$

$$v_C(0) = 0v$$

El valor de los parámetros es:

$$R = 7\ ohm,\ L = 1\ henry \quad y \quad C = \frac{1}{10}\ farad$$

Solución:

Sustituyendo valores en la ec. (5.3.2)

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + 7\frac{dv_c(t)}{dt} + 10\, v_c(t) = 200 \tag{5.3.10}$$

La ecuación característica es:

$$s^2 + 7s + 10s = 0$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = -2$$

$s_2 = -5$

La solución homogénea es por lo tanto:

$$v_h(t) = K_1 \exp(-2t) + K_2 \exp(-5t)$$

y la solución particular es de acuerdo con (5.3.5)

$$v_p(t) = 20$$

La solución general empleando (5.3.6) es:

(5.3.11) $$v_c(t) = K_1 \exp(-2t) + K_2 \exp(-5t) + 20 \quad t \geq 0$$

Las condiciones iniciales son:

$$v_c(0) = 0 \text{ volt}$$

$$\left.\frac{dv_c(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}\, i(0) = 100 \text{ volt/seg}$$

Sustituyendo en (5.3.11) y su derivada las condiciones iniciales se tiene:

$$0 = K_1 + K_2 + 20$$

$$100 = -2K_1 - 5K_2$$

de donde

$K_1 = 0$

$K_2 = -20$

Sustituyendo en (5.4.7) tenemos:

(5.3.12) $v_c(t) = -20 \exp(-5t) + 20 \quad t \geq 0$

Notemos que la respuesta no contiene ningún término en *exp(-2t)* En la respuesta, o sea la tensión del capacitor para las condiciones iniciales dadas, no aparece la constante de tiempo del circuito correspondiente a la raíz de -2.

Identifiquemos las componentes de la *respuesta completa* (5.3.12).

El término de la respuesta total de igual forma de onda que la excitación es la *respuesta permanente*. En este ejemplo la excitación es constante a partir de $t = 0$, o sea:

$e(t) = 20 \quad t \geq 0$

Por lo tanto la respuesta permanente es:

(5.3.13) $v_p(t) = 20 \quad t \geq 0$

La diferencia entre la respuesta total y la permanente es la *respuesta transitoria*, por lo tanto:

(5.3.14) $v_t(t) = -20 \exp(-5t) \quad t \geq 0$

es la respuesta transitoria.

Identifiquemos ahora la *respuesta libre y la forzada*. Para calcular la primera debemos considerar que la excitación del circuito es nula. La respuesta libre es por lo tanto la solución de la ecuación diferencial homogénea.

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + 7\,\frac{dv_c(t)}{dt} + 10\, v_c(t) = 0$$

con condiciones iniciales

$$v_c(0) = 0 \text{ volt}$$

$$\left.\frac{dv_c(t)}{dt}\right|_{t=0} = 100 \text{ volt/seg}$$

El lector puede calcular fácilmente que la respuesta libre es:

$$v_l(t) = \frac{100}{3}\, exp(-2t) - \frac{100}{3}\, exp(-5t)\; t \geq 0 \tag{5.3.15}$$

La *respuesta forzada* es la solución de la ec. (5.3.10) con condiciones iniciales nulas. Esta solución es:

$$v_f(t) = -\frac{100}{3}\, exp(-2t) + \frac{40}{3}\, exp(-5t) + 20 \; t \geq 0 \tag{5.3.16}$$

Obsérvese que la respuesta total es la suma de la respuesta libre y la respuesta forzada. Se debe aclarar que esta situación es válida sólo para circuitos lineales, variables o invariantes. *No es cierta para circuitos no lineales.*

La respuesta total dada por (5.3.12) puede por lo tanto descomponerse en:

$$\overbrace{\underbrace{v_c(t) = \frac{100}{3}\, exp(-2t) - \frac{100}{3}\, exp(-5t)}_{\text{Respuesta libre}}}^{\text{Respuesta transitoria}}$$

$$\overbrace{-\frac{100}{3}\exp(-2t)+\frac{40}{3}\exp(-5t)}^{\text{Respuesta transitoria}}+\overbrace{20}^{\text{Respuesta permanente}}$$

$$\underbrace{-\frac{100}{3}\exp(-2t)+\frac{40}{3}\exp(-5t)+20}_{\text{Respuesta forzada}}$$

Interpretemos físicamente el comportamiento forzado del circuito dado por la ec. (5.3.12). Si las condiciones iniciales son nulas, al conectar la fuente en $t = 0$ ni la tensión en el capacitor ni la corriente en la inductancia pueden variar instantáneamente, por lo tanto:

$$v_C(0) = 0$$

$$i_L(0) = 0$$

Como la resistencia está en serie con la inductancia la corriente en la resistencia es también nula en $t = 0$.

$$v_R(0) = 0$$

Por lo tanto en $t = 0$ toda la tensión $K_0\,u(t)$ aparece en las terminales de la inductancia

$$v_L(0) = K_0\,u(t)$$

La corriente de la inductancia empieza a aumentar gradualmente. El capacitor en $t=0$ se comporta como un corto circuito, ya que la tensión entre sus terminales es nula y la inductancia como un circuito abierto ya que $i_L(0) = 0$.

Posteriormente al ir aumentando la tensión en el capacitor irá aumentando la corriente en la inductancia y la resistencia. Finalmente cuando $t \to \infty$.

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} = 0$$

y de acuerdo con la ec. (5.3 2) toda la tensión aplicada $K_0\, u(t)$ aparece entre las terminales del capacitor, y la inductancia actúa como si estuviera en corto circuito.

$$\lim_{t \to \infty} v_C(t) = K_0$$

Observemos que estos resultados, a los que hemos llegado por consideraciones físicas, coinciden con los obtenidos al resolver la ecuación diferencial. Recomendamos al lector que se familiarice con este tipo de razonamientos físicos con objeto de adquirir intuición en el análisis de circuitos.

2.6 TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.61.

~~8.1 Respuesta forzada de un circuito con excitación armónica~~

Una función recibe el nombre de *armónica*, si *es periódica y de forma de onda senoidal.*

Una función es periódica *de período T*, si:

$$f(t) = f(t \pm nT) \tag{8.1.1}$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

y tiene forma de onda senoidal (o cosenoidal) si:

$$f(t) = A \cos (\omega t + \psi_0) \tag{8.1.2}$$

La fig. 8.1.1, muestra una función armónica.

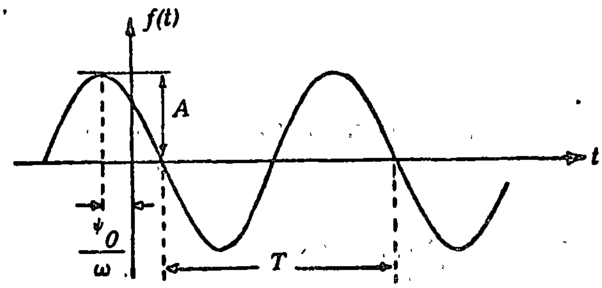


Fig. 8.1.1. Función armónica $f(t) = A \cos (\omega t + \psi_0)$

A recibe el nombre de *amplitud*, y ω el de *velocidad angular*, y ψ_0 el de *ángulo de desplazamiento*.

Observamos que en (8.1.2), la función repite su valor si ωt se incrementa en 2π radianes, por lo tanto:

$$\omega T = 2\pi$$

(8.1.3) $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

donde T es el período.

El recíproco del período se conoce con el nombre de *frecuencia* f, o sea

(8.1.4) $$f = \frac{1}{T}$$

Consideremos un circuito serie R-L-C (fig. 8.1.2) excitado por una función armónica $v(t) = V_0 \cos(\omega_f t + \psi_0)$.

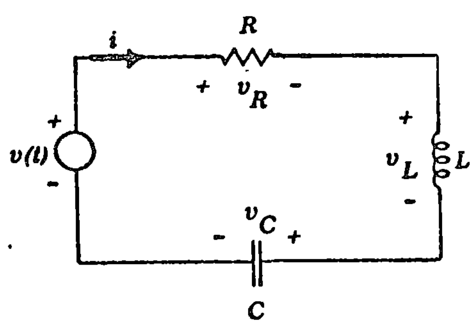


Fig. 8.1.2. Circuito serie R-L-C

La excitación no es más que:

(8.1.5) $$v(t) = Re\left[V_0 \exp(j\psi_0) \exp(j\omega_f t)\right]$$

pues, por la fórmula de Euler,

$$\exp(j(\psi_0 + \omega_f t)) = \cos(\psi_0 + \omega_f t) + j\ \mathrm{sen}(\psi_0 + \omega_f t)$$

cuya parte real es precisamente $\cos(\psi_0 + \omega_f t)$, o sea:

$$Re\left[\exp(j(\psi_0 + \omega_f t))\right] = \cos(\psi_0 + \omega_f t)$$

La ecuación diferencial que caracteriza al circuito de la fig. 8.1.2 es:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' = v(t) \qquad (8.1.6)$$

Si las *condiciones iniciales son nulas* y derivamos (8.1.6), obtenemos:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{d}{dt}v(t) \qquad (8.1.7)$$

Consideremos que la excitación es del tipo $V\exp(st)$, donde s es un número complejo.

En el apéndice B señalamos que si en un sistema lineal invariante *el término de excitación es del tipo $V\exp(st)$, la respuesta particular es del tipo $I\exp(st)$* (apéndice B).

Sustituyendo los valores anteriores de la excitación y respuesta en (8.1.7), obtenemos:

$$Ls^2 I\exp(st) + RsI\exp(st) + \frac{1}{C}I\exp(st) = sV\exp(st) \qquad (8.1.8)$$

donde I y V pueden ser valores complejos. Estos valores se conocen con el nombre de *fasores* y se estudiarán en el capítulo 9.

Dividiendo entre $\exp(st)$ ambos miembros de (8.1.8) y despejando el cociente I/V obtenemos:

$$\frac{I}{V} = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} \qquad (8.1.9)$$

Analizaremos con detalle la fórmula (8.1.9), pero primero introduzcamos una definición.

Definición:

La relación I/V recibe el nombre de *función de transferencia*. Generalizando podemos decir que la *función de transferencia de un sistema lineal e invariante*, es la relación que existe entre *la respuesta particular y el término excitador de forma exponencial.* Más adelante estudiaremos la relación de este concepto con la transformada de Laplace.

El empleo de funciones de transferencia permite obtener de inmediato las características de la respuesta particular a excitaciones exponenciales. Más adelante estudiaremos otras importantes propiedades de la función de transferencia.

La ecuación característica de (8.1.7) es:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{CL} = 0$$

Las raíces de esta ecuación representan las frecuencias naturales de la variable dependiente en estudio.

Observemos que esta ecuación característica no es más que el denominador de la función de transferencia (8.1.9). En general podemos afirmar que el denominador de la función de transferencia de un sistema lineal e invariante contiene a la ecuación característica del circuito. Las raíces de este denominador son precisamente las frecuencias naturales de la variable seleccionada como respuesta (variable independiente), o sea la corriente en este ejemplo.

La excitación considerada $V\ exp(st)$ y la excitación armónica (8.1.5) están relacionadas por:

$$v(t) = Re\left[V\ exp(st) \right]$$

si el complejo V toma el valor:

$$V = V_0\ exp(j\psi_0)$$

y la variable compleja toma el valor:

$$s = j\omega_{ft}$$

La respuesta particular a la excitación armónica será:

$$Re\left[I\ exp(st)\right]$$

pero

$$s = j\omega f$$

por lo tanto, la respuesta es:

$$Re\left[I\ exp(j\omega_f t)\right]$$

donde el complejo I está dado, empleando (8.1.4), por:

$$I = Re\left\{\frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}}\left[V_0\ exp(j\psi_0)\right]\right\}_{S = j\omega_f}$$

En el capítulo 9 estudiaremos con más detalle respuestas particulares de circuitos con excitación armónica.

8.2 Solución de sistemas lineales invariantes empleando la transformada de Laplace

Como señalamos en el apéndice C y en la introducción al presente capítulo, una de las principales aplicaciones de la transformada de Laplace es la solución de ecuaciones diferenciales o integro-diferenciales lineales de coeficientes constantes. Un ejemplo nos servirá para ilustrar la aplicación de este método y la relación de la transformada de Laplace con la función de transferencia estudiada en la sección anterior.

Consideremos el circuito de la fig. 8.1.2 excitado por la función $v(t)$. La ecuación diferencial que caracteriza al circuito es:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{t} i(t')dt' + V_C(0^-) = v(t) \tag{8.2.1}$$

Obtengamos la transformada de Laplace de (8.2.1). Empleando la tabla C.1 y la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, tenemos:

$$L\left[SI(s) - i(0^-)\right] + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} = V(s) \tag{8.2.2}$$

donde

$$I(s) = \mathcal{L}\,(i(t)) = \int_{0^-}^{\infty} i(t')\,exp(-st')dt'$$

$$V(s) = \mathcal{L}\,(v(t)) = \int_{0^-}^{\infty} v(t')\,exp(-st')dt'$$

Si las condiciones iniciales $i(0^-)$ y $v_C(0^-)$ son nulas, la relación $I(s)/V(s)$ es:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} \tag{8.2.3}$$

Observemos que la relación (8.2.3) es la función de transferencia dada por la ec. (8.1.9). Otra definición de la función de transferencia es, por lo tanto:

Definición:

La función de transferencia de un *sistema lineal invariante* es la relación entre las transformadas de Laplace de la respuesta (en nuestro ejemplo $I(s)$) y la excitación ($V(s)$ en nuestro problema) si las *condiciones iniciales son nulas.*

Observemos que al pasar de la ecuación integro-diferencial (8.2.1) que caracteriza al circuito, y cuyas variables (i y v) son *función del tiempo* a la ecuación algebraica (8.2.2) cuyas variables (i y v) son función de la variable compleja s, las condiciones iniciales ($V_C(0^-)$ e $i(0^-)$ han quedado automáticamente incluidas en el problema. Es, desde luego, más fácil trabajar con una ecuación algebraica (en las transformadas de Laplace) que con una ecuación integro-diferencial (en las variables originales, i y v), lo cual constituye una de las ventajas de emplear la trasformada de Laplace. Para resolver el problema hay que encontrar la solución en términos de las transformadas de Laplace, y volver a las variables originales usando una tabla de transformadas inversas de Laplace.

Volviendo al ejemplo de la fig. 8.1.1, consideremos que el circuito en $t = 0^-$ esta relajado, o sea las condiciones iniciales del mismo, $i(0^-)$ y $v_C(0^-)$, son nulas.

Si en $t = 0$ aplicamos un impulso de tensión unitario, o sea:

(8.2.4) $$v(t) = \delta(t)$$

cuya transformada de Laplace de acuerdo con C.1 es:

(8.2.5) $$V(s) = \left[\delta(t)\right] = 1$$

y sustituimos (8.2.5) en (8.2.3) obtenemos que la transformada de Laplace $I(s)$ de la respuest $i(t)$ esta dada por:

$$(8.2.6) \quad I(s) = \frac{\dfrac{s}{L}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}}$$

La relación (8.2.6) nos permite definir a la función de transferencia de un sistema *lineal e invariante en el tiempo*, como la transformada de Laplace de la respuesta si la excitación es un impulso unitario aplicado a un sistema relajado (con condiciones iniciales nulas).

Hemos definido a la función de transferencia de tres maneras distintas que conviene recordar.

En la siguiente sección estudiaremos cómo se obtiene la función $i(t)$ a partir de su transformada de Laplace $I(s)$.

8.3 Obtención de la tranformada inversa de Laplace

Para obtener la transformada inversa ($\mathcal{L}^{-1}$) de una función en el dominio complejo $F(s)$ puede emplearse la ecuación

$$(C.4.8) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\phi}^{\phi} F(s)\,exp(st)ds$$

que es una integral compleja, cuya solución requiere un conocimiento básico de funciones de variable compleja. Sin embargo, empleando un desarrollo por fracciones parciales y empleando la tabla C.1 de transformadas elementales de Laplace puede en muchos casos obtenerse la transformada inversa, sin necesidad de recurrir a la integración compleja.

Con una serie de ejemplos ilustraremos éste método:

EJEMPLO 8.3a Calcule la velocidad $v(t)$ de la masa de la fig. 8.3.1, si la fuerza se aplica en $t = 0$ y es constante.

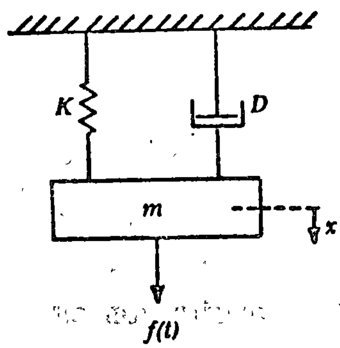


Fig. 8.3.1. *Sistema vibratorio de un grado de libertad*

Solución:

La ecuación diferencial que caracteriza al sistema es:*

$$m\frac{ds(t)}{dt} + Ds(t) + K\int_{0^-}^{t} s(t')dt' + Kx(0^-) = f(t)$$

Tomando la transformada de Laplace de los dos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$m(sS(s) - s(0^-)) + DS(s) + \frac{KS(s)}{s} + \frac{Kx(0^-)}{s} = F(s)$$

donde

$$S(s) = \left[s(t)\right]$$

y

$$F(s) = \left[F(t)\right]$$

Despejando a $S(s)$ se tiene:

$$S(s) = \frac{F(s) - \dfrac{Kx(0^-)}{s} + ms(0^-)}{D + sm + \dfrac{K}{s}} \tag{8.3.1}$$

Como la fuerza se aplica en $t = 0$, la excitación es:

$$f(t) = Fu(t)$$

donde $u(t)$ es la función escalón y F es una constante. La transformada de Laplace de la excitación es:

$$F(s) = \frac{F}{s}$$

Sustituyendo en (8.3.1) tenemos:

$$S(s) = \frac{F - Kx(0^-) + ms(0^-)}{s^2 m + sD + K}$$

Consideremos los siguientes valores para los parámetros del sistema:

$$\begin{aligned} F &= 100 \text{ newtons } t \geq 0 \\ s(0^-) &= 10 \ \ m/s \\ x(0^-) &= 10/3 \ m \\ m &= 1 \ \ kg \\ D &= 4 \ \ newtons/m \\ K &= 3 \ \ newtons/m \end{aligned}$$

$$S(s) = \frac{100 - 10 + s10}{s^2 + 4s + 3} = \frac{105 - 90}{s^2 + 45 + 3} \tag{8.3.2}$$

Realizaremos una expansión por fracciones parciales de (8.3.2). Factorizando el denominador, se obtiene:

$$(s^2 + 4s + 3) = (s + 3)(s + 1)$$

por lo que

$$S(s) = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 3}$$

por lo tanto:

$$\frac{90 + s10}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 3} \tag{8.3.3}$$

Multiplicando por $s + 3$ ambos miembros de (8.3.3) y tomando $s = -3$

$$\left.\frac{90 + s10}{s + 1}\right|_{s = -3} = \left.\frac{A(s + 3)}{s + 1}\right|_{s = -3} + B$$

$$\frac{90 - 30}{-2} = B$$

$$B = -30$$

Multiplicando por $(s + 1)$ ambos miembros de (8.3.3) y tomando $s = -1$

$$\left.\frac{90 + s10}{s + 3}\right|_{s = -1} = A + \left.\frac{B(s + 1)}{s + 3}\right|_{s = -1}$$

$$A = 40$$

Por lo tanto:

$$S(s) = \frac{40}{s+1} - \frac{30}{s+3} \tag{8.3.4}$$

Empleando la tabla C.1 obtenemos:

$$s(t) = 40\,exp(-t) - 30\,exp(-3t),\ t \geq 0^- \tag{8.3.5}$$

que es la respuesta buscada para raíces reales y distintas del denominador de $S(s)$.

Hemos ilustrado la obtención de la transformada inversa de una función (en este caso $S(s)$) cuando el denominador de $S(s)$ es un polinomio en s con *raíces reales no repetidas.*

Repitamos el problema cambiando el valor del parámetro K a

$K = 4$ *newtons/m.*

En este caso la función $S(s)$ es:

$$S(s) = \frac{10s + 86.6}{s^2 + 4s + 4} \tag{8.3.6}$$

El desarrollo en fracciones parciales en este caso nos lleva a:

(8.3.7)

$$S(s) = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$\frac{10s + 86.6}{(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)}$$

Multiplicando ambos términos por $(s+2)^2$ y tomando $s = -2$ se tiene:

$$10s + 86.6 \Big|_{s=-2} = A$$

$$A = 66.6$$

Para calcular B procedemos a multiplicar (8.3.7) por $(s+2)^2$ obteniendo:

$$10s + 86.6 = A + B(s+2)$$

Derivando con respecto a s se tiene:

$$10 = B$$

El lector podrá comprobar estos valores realizando la expansión de (8.3.7) e igualando coeficientes de potencias iguales de s.

El valor de la transformada de Laplace $S(s)$ es:

$$S(s) = \frac{66.6}{(s+2)^2} + \frac{10}{(s+2)}$$

El teorema de la translación en el dominio complejo (sección C.4) y las fórmulas 9 y 3 de la tabla C.1, nos permiten encontrar:

$$s(t) = (66.6t + 10)\, exp(-2t),\ t \geq 0^- \tag{8.3.8}$$

que es la respuesta buscada en el caso en que el denominador de $S(s)$ tiene raíces reales repetidas.

Empleemos ahora los mismos parámetros anteriores pero con los siguientes valores:

$$D = 2\ newtons/m$$

$$K = 2\ newtons/m$$

En este caso el valor de $S(s)$ es:

$$(8.3.9) \quad S(s) = \frac{10s + 93.3}{s^2 + 2s + 2}$$

En este caso el denominador tiene por raíces:

$$-1 \pm j1$$

Estas raíces del denominador son distintas, por lo que podríamos seguir el método delineado en el primer ejemplo para raíces reales no repetidas, o sea desarrollando (8.3.9) por fracciones parciales y luego encontrando la transformada inversa de la suma de dos expresiones del tipo

$$\frac{a}{s - b}.$$

Sin embargo, en este caso de raíces del denominador complejas, seguiremos otro método para obtener la solución, o sea la transformada inversa $s(t)$.

El denominador de (8.3.9) se puede escribir de la forma

$$(s - \alpha)^2 + \beta^2$$

o sea

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1^2$$

Asimismo, podemos expresar $S(s)$ en la forma

$$S(s) = \frac{A(s + \alpha) + B\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

o en nuestro ejemplo

$$S(s) = \frac{10(s + 1)}{(s + 1)^2 + 1^2} + \frac{83.3}{(s + 1)^2 + 1^2} \tag{8.3.10}$$

El teorema de la translación en el dominio complejo y las fórmulas 4 y 5 de la tabla C.1 nos llevan a la solución:

$$s(t) = exp(-t)\ (10 \cos t + 83.3\ sen\ t)$$

Esto se puede expresar de otra forma construyendo un triángulo como el mostrado en la fig. 8.3.2:

$$v(t) = \sqrt{10^2 + 83.3^2}\ exp(-t) \left(\frac{10}{\sqrt{10^2 + 83.3^2}} \cos t + \frac{83.3}{\sqrt{10^2 + 83.3^2}}\ sen\ t \right) \tag{8.3.11}$$

$$v(t) = 80.6\ exp(-t)(\cos\ 84° \cos t + sen\ 84°\ sen\ t)$$

$$v(t) = 80.6\ exp(-t) \cos (t + 84°)$$

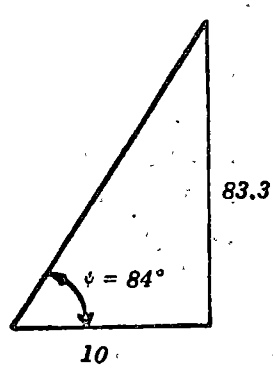


Fig. 8.3.2. *Triángulo para combinar 10 cos t + 83.3 sen t*

Las respuestas de los tres casos estudiados se muestran explícitamente en la tabla 8.3 señalándose el tipo de respuesta según las definiciones estudiadas en el capítulo 4. Se incluyen los valores de α (coeficiente de amortiguamiento) y ω_0 (frecuencia natural), calculados con las fórmulas:

$$\alpha = \frac{D}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

Tipo de respuesta	Valores de α ω_0	Valor de la respuesta
Sobreamortiguada	$2 > 1.7$	$40 \exp(-t) - 30 \exp(-3t)$
Crítica	$2 = 2$	$(66.6t + 10) \exp(-2t)$
Subamortiguada	$1 < 1.4$	$80.6 \exp(-t) \cos(t + 84°)$

Tabla 8.3. *Respuesta de un sistema mecánico de primer orden*

Hemos obtenido la transformada inversa de una función compleja $S(s)$ con denominador de segundo orden en 3 casos:
a) Denominador con raíces reales diferentes
b) Denominador con raíces reales dobles
c) Denominador con raíces complejas

Antes de formalizar los métodos empleados en el ejemplo, introduzcamos una definición:

Definición:

Se llaman polos de una función de variable compleja a aquellos valores que anulan su denominador y, por lo tanto, hacen tender a infinito a la función. Los ceros son aquellos que anulan al numerador y, por lo tanto, hacen tender a cero a la función.

En la función (8.3.2)

$$S(s) = \frac{10(s + 9)}{(s + 1)(s + 3)} \tag{8.3.2}$$

Los ceros son

$$Z_1 = -9$$

y los polos son

$$P_1 = -1 \quad \text{y} \quad P_2 = -3$$

En general, las funciones que aparecen en sistemas de parámetros concentrados en el dominio complejo son un cociente de polinomios

$$F(s) = K\,\frac{s^m + s^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{8.3.12}$$

de coeficientes *reales positivos*.

El grado del polinomio del denominador puede ser mayor que el del numerador. En dicho caso decimos que se trata de una *función racional propia*, en el caso contrario, se llama función racional no propia. Dada una función racional $F(s)$ no propia, dividimos el numerador entre el denominador para obtener

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \hat{F}(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

donde $\hat{F}(s)$ es el cociente del tipo $\sum_{i=1}^{n} a_i s^i$, su transformada inversa $f(t)$ es una secuencia de funciones de impulso y sus derivadas ya que Li $a_0 = a_0\,\delta(t)$, Li $a_1 s = a_1\,\delta'(t)$ . . . . $R(s)$ es el residuo y su grado será desde luego menor que el de $Q(s)$, por lo que:

$$\frac{R(s)}{Q(s)}$$

es una fracción racional propia. Para obtener su transformada inversa conviene factorizar $R(s)$ y $Q(s)$ y realizar expansiones por fracciones parciales.

Sea $F(s)$ una función racional propia, Z_i las raíces de su numerador y P_i las raíces de su denominador. Podemos, por lo tanto, escribir:

$$F(s) = K\,\frac{(s - Z_1)\,(s - Z_2)\,.\,.\,.\,(s - Z_m)}{(s - P_1)\,(s - P_2)\,.\,.\,.\,(s - P_n)} \tag{8.3.13}$$

Una expresión de este tipo puede siempre descomponerse en una suma de fracciones parciales que en el caso de polos *no repetidos* es del tipo:

$$F(s) = \frac{A}{s - P_1} + \frac{B}{s - P_2} + \frac{C}{s - P_3} \quad . . . \tag{8.3.14}$$

Empleando la tabla C.1 la transformada inversa es:

$$f(t) = A\,exp(P_1 t) + B\,exp(P_2 t) + C\,exp(P_3 t) + . . . \tag{8.3.15}$$

El problema consiste, como se vió en el ejemplo, en encontrar las constantes $A, B, C\dots$ llamadas residuos.

Pasemos al cálculo de estos residuos en el caso de *polos simples* no repetidos primero:

Igualando (8.3.13) y (8.3.14)

$$\frac{A}{s - P_1} + \frac{B}{s - P_2} + \dots + \dots + \frac{R_K}{s - P_K} + \dots$$

(8.3.16)
$$= K \frac{(s - Z_1)(s - Z_2)\dots}{(s - P_1)\dots(s - P_{K-1}) \times (s - P_K)(s - P_{K+1})\dots(s - P_n)}$$

Multiplicando (8.3.15) por $s - P_K$

$$\left(\frac{A}{s - P_1} + \frac{B}{s - P_2} + \dots + \frac{R_{K-1}}{s - P_{K-1}} + \frac{R_{K+1}}{s - P_{K+1}} \dots\right)(s - P_K) + R_K$$

(8.3.17)
$$= \frac{(s - Z_1)(s - Z_2)\dots}{(s - P_1)\dots(s - P_{K-1})(s - P_{K+1})\dots(s - P_n)}$$

$$= F(s)\,(s - P_K)$$

Si en (8.3.17) hacemos $s = P_K$, obtenemos la fórmula para el cálculo del residuo R_K correspondiente a un polo *no múltiple* P_K:

(8.3.18)
$$R_K = F(s)\,(s - P_K)\Big|_{s = P_K}$$

En la fórmula (8.3.18) es necesario, antes de sustituir s por P_K, simplificar primero el factor $(s - P_K)$ con el correspondiente término del denominador de $F(s)$.

Sustituyendo $s = P_K$ en (8.3.17), podemos también expresar R_K como:

$$R_K = K \frac{(P_K - Z_1)(P_K - Z_2)\ldots}{(P_K - P_1)\ldots(P_K - P_{K-1}) \cdot (P_{K-1})\ldots(P_K - P_n)} \tag{8.3.19}$$

El valor del K-ésimo residuo R_K se puede encontrar interpretando geométricamente la fórmula (8.3.19). Para hacerlo, primero hay que encontrar los polos y las raíces de $F(s)$, o sea hay que factorizar la función $F(s)$ para que adopte la forma de la ec. (8.3.13). En el plano complejo o de Argand, se indica en un rectángulo el valor de la constante K, con una cruz la localización de los polos y con círculos la posición de los ceros de la función $F(s)$.

Por ejemplo, si la función $F(s)$ es la dada por la ecuación

$$\frac{10(s + 9)}{(s + 1)(s + 3)} \tag{8.3.2}$$

la raíz única es -9, los polos son -1 y -3, y la constante vale 10; estos valores quedan representados en el plano complejo

$$s = \sigma + j\omega$$

en la fig. 8.3.3.

Los polos y ceros de una función se conocen como *singularidades* de la función.

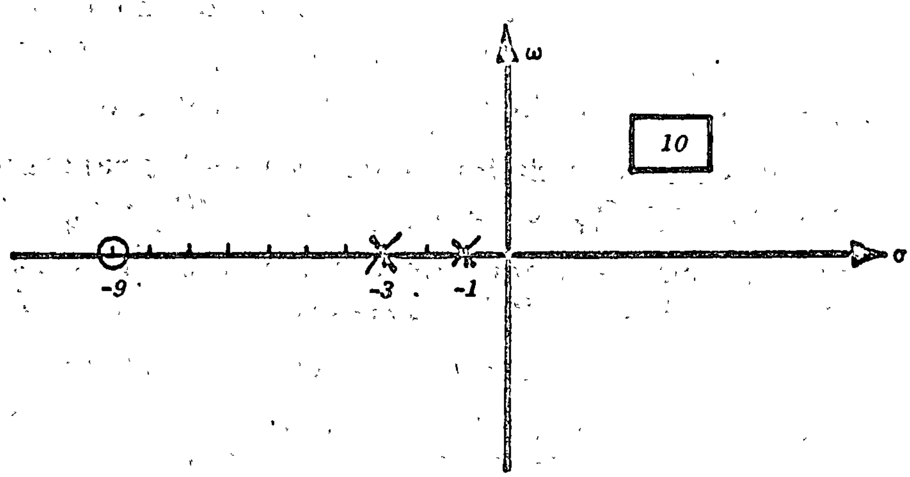


Fig. 8.3.3. Representación de la constante K, los polos y las raíces de la ec. 10(s + 9)/(s + 1)(s + 3)

Observación :

Las singularidades, de ser complejas, aparecerán en parejas de complejos conjugados por ser raíces de polinomios en s de coeficientes reales (que es el caso en sistemas).

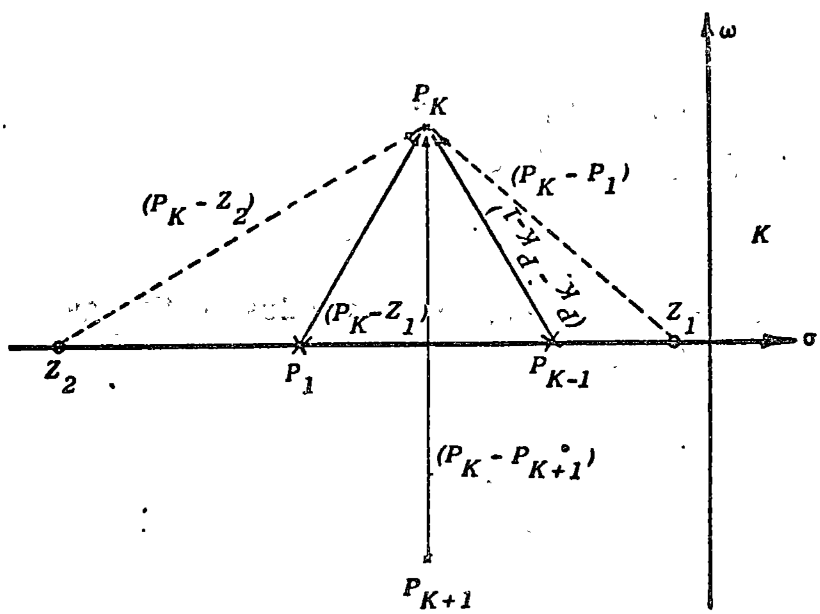


Fig. 8.3.4. Interpretación geométrica de la fórmula (8.3.19)

La fig. 8.3.4 muestra la localización de la constante K y de algunos de los polos $(P_1, P_{K-1}, P_K, P_{K+1})$ y ceros (Z_1, Z_2) de una función $F(s)$. Con trazo punteado se muestran los segmentos dirigidos que van de las raíces de la función al polo P_K (o sea, $(P_K - Z_1)$ y $(P_K - Z_2)$, y con trazo continuo los segmentos dirigidos que van de los polos de la función al polo P_K -o sea, $(P_K - P_1)$, $(P_K - P_{K-1})$ y $(P_K - P_{K+1})$. Hay que notar que estos segmentos representan precisamente los factores del numerador y del denominador de la fórmula (8.3.19) para el K-ésimo residuo R_K.

De una observación de la fig. 8.3.4 puede establecerse la siguiente regla para la determinación de los residuos correspondientes a polos no *múltiples* (o simples): El residuo del polo K-ésimo es igual a la constante (K) multiplicada por los complejos representados por los segmentos que van de los ceros al polo K-ésimo dividido entre el producto de los complejos representados por los segmentos que van de todos los polos diferentes del K-ésimo al polo K-ésimo.

Para los polos múltiples procedemos de la siguiente manera para calcular los residuos.

Sea la función racional de variable compleja $F(s)$ y P_1 un polo de multiplicidad dos. Entonces $F(s)$ puede escribirse como:

$$F(s) = \frac{K(s - Z_1)(s - Z_2)\ldots}{(s - P_1)^2 (s - P_2)\ldots} \tag{8.3.20}$$

La expansión por fracciones parciales de $F(s)$ es:

$$F(s) = \frac{A_1}{(s - P_1)^2} + \frac{A_2}{(s - P_1)} + \frac{B}{(s - P_2)} + \ldots \tag{8.3.21}$$

Multiplicando ambos miembros de (8.5.21) por $(s - P_1)^2$

$$F(s)\,(s - P_1)^2 = A_1 + A_2(s - P_1) + \left(\frac{B}{s - P_2} + \frac{C}{s - P_3} + \ldots\right)(s - P_1)^2 \tag{8.3.22}$$

Haciendo $s = P_1$, llegamos a:

$$A_1 = F(s)\,(s - P_1)^2 \Big|_{s = P_1} \tag{8.3.23}$$

Para calcular A_2 derivemos (8.3.22) con respecto a s:

$$\frac{d}{ds}\left(F(s)\,(s - P_1)^2\right) = A_2 + 2(s - P_1)\left[\frac{B}{s - P_2} + \frac{C}{s - P_3} + \ldots\right] + (s - P_1)^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{B}{s - P_2} + \frac{C}{s - P_3} \ldots\right) \tag{8.3.24}$$

y tomando $s = P_1$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[F(s)\,(s - P_1)^2\right]_{s = P_1} \tag{8.3.25}$$

Este ejemplo de un polo P_1, ilustra el camino a seguir cuando se tienen polos de multiplicidad dos. Si el orden de multiplicidad del polo P_1 es n, las constantes A_1, A_2, . . ., A_n de los términos correspondientes en la expansión por fracciones parciales de $F(s)$,

$$\frac{A_1}{(s - P_1)^n} + \frac{A_2}{(s - P_1)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{(s - P_1)}$$

están dados por

$$A_1 = F(s)(s - P_1)^n \Big|_{s = P_1}$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[F(s)(s - P_1)^n\right]\Big|_{s = P_1}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[F(s)(s - P_1)^n\right]\Big|_{s = P_1}$$

La transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ de un término del tipo

$$\frac{A_1}{(s - P_1)^2}$$

es:

$$\frac{A_1}{(s - P_1)^2} = A_1 \exp(p_1 t) \cdot \left[\frac{A}{s^2}\right] \tag{8.3.26}$$

por el teorema de la translación en el dominio complejo. Por la fórmula de la tabla C.1 tenemos finalmente:

$$(8.3.27) \quad \left(\frac{A_1}{(s - P_1)^2}\right) = At\, exp(p_1 t)$$

En forma análoga, la transformada inversa de Laplace de un término de la forma

$$\frac{A}{(s - P_1)}$$

está dada por:

$$\frac{A}{(s - P_1)^n} = At^{n-1}\, exp(P_1 t)$$

El ejemplo 8.3b ilustra la aplicación del método geométrico al cálculo de residuos correspondientes a polos complejos. Desde luego, este método también es aplicable a polos reales.

EJEMPLO 8.3b Calcule el valor de $i(t)$ para un circuito serie R-L-C (fig. 8.1.2) con excitación:

$$v(t) = 10\, u(t)$$

donde $u(t)$ es la función escalón parámetros:

$$R = 3\Omega$$

$$L = 8H$$

$$C = \frac{1}{4} F$$

y condiciones iniciales:

$$v_c(0^-) = 2.\ volts$$

$$i_L(0^-) = 8\ amp$$

Solución:

El lector podrá comprobar que en el dominio complejo el valor de la corriente es:

$$(8.3.28) \quad I(s) = \frac{3\left(s + \frac{1}{3}\right)}{s^2 + \frac{3}{8} s + \frac{1}{2}}.$$

El cero de la función es:

$$Z_1 = -\frac{1}{3}$$

y los polos son, como era de esperarse, complejos conjugados:

$$P_2 = \frac{-3 \pm j10.9}{16} = -0.187 \mp j0.68$$

La fig. 8.3.5 muestra a la función $I(s)$ (8.3.28) en el plano complejo y a los segmentos dirigidos que representan a los términos $(Z_1 - P_1)$ y $(P_2 - P_1)$ que intervienen en el cálculo del residuo correspondiente al polo

$$P_1 = -0.187 + j0.68$$

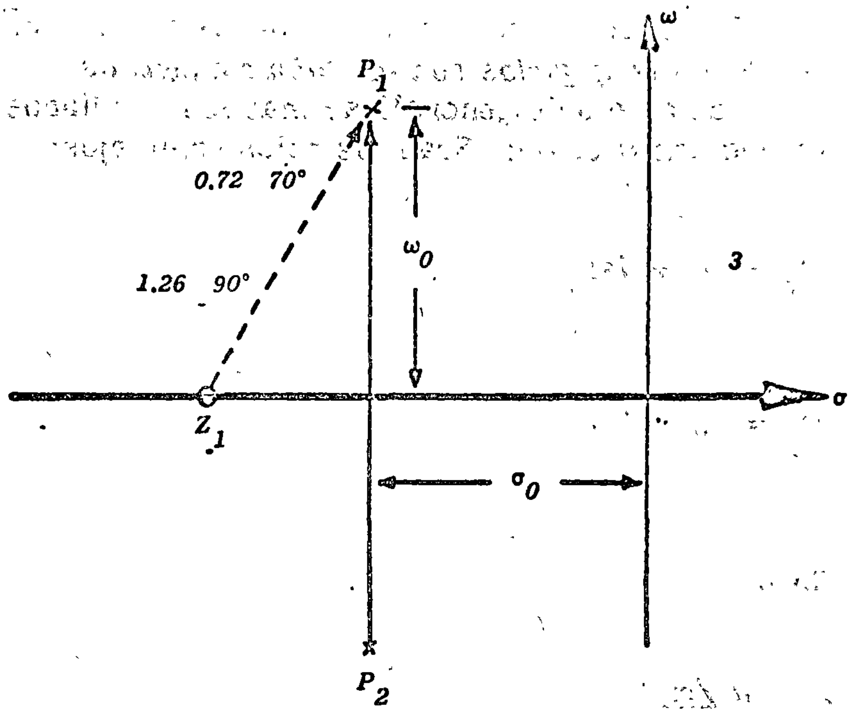


Fig. 8.3.5. *Representación geométrica de los polos y las raíces de $I(s) = 3(s + 1/3)/s^2 + 3/8s + 1/2$*

de acuerdo con la fórmula (8.3.19).

La corriente es igual a:

$$(8.3.29) \qquad I(s) = \frac{A}{(s - P_1)} + \frac{B}{(s - P_2)}$$

y el residuo A por (8.3.19) es:

$$A = 3\ \frac{.72\ \underline{/70^\circ}}{1.26\ \underline{/90^\circ}} = 1.71\ \underline{/-20^\circ}$$

y el B es:

$$B = 1.71\ \underline{/+20^\circ}$$

Se observa que los dos *residuos que corresponden a dos polos conjugados son también conjugados.*

Con objeto de generalizar más los resultados trabajaremos con literales. Sean los polos complejos:

$$P_1 = -\sigma + jw_0$$

(8.3.30)

$$P_2 = -\sigma - jw_0$$

Sean

$$A = a \underline{/\alpha}$$

y

$$B = a \underline{/-\alpha}$$

los residuos, correspondiendo el primero al *polo de parte imaginaria positiva.*

Sustituyendo en (8.3.29)

$$I(s) = \frac{a \underline{/\alpha}}{s - (-\sigma + jw_0)} + \frac{a \underline{/-\alpha}}{s - (-\sigma - jw_0)}$$

Empleando la fórmula 3 de la tabla C.1 se tiene:

$$i(t) = a \underline{/\alpha} \, exp\left[(-\sigma + j\omega_0)t\right] + a \underline{/-\alpha} \, exp\left[(-\sigma - j\omega_0)t\right]$$

$$= exp(-\sigma t) \left[a \underline{/\alpha} \, exp(+j\omega_0 t) + a \underline{/-\alpha} - exp(-j\omega_0 t)\right]$$

Recordemos que

$$a\underline{/\pm\alpha} = a \cos \alpha \pm j a \operatorname{sen} \alpha$$

y

$$exp(+j\omega_0 t) = \cos \omega_0 t \pm j \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Sustituyendo éstas relaciones en la ecuación anterior, obtenemos

$$i(t) = exp(-\sigma t)\Big[(a \cos \alpha + j a \operatorname{sen} \alpha)(\cos \omega_0 t + j \operatorname{sen} \omega_0 t)$$

$$+ (a \cos \alpha - j a \operatorname{sen} \alpha)(\cos \omega_0 t - j \operatorname{sen} \omega_0 t)\Big]$$

$$= exp(-\sigma t)\Big[(a \cos \alpha + a \cos \alpha) \cos \omega_0 t$$

$$+ (-a \operatorname{sen} \alpha - a \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \omega_0 t\Big]$$

$$= 2\, exp(-\sigma t) a \Big[\cos \alpha \cos \omega_0 t - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega_0 t\Big]$$

$$i(t) = 2a\, exp(-\sigma t)\Big[\cos(\alpha + \omega_0 t)\Big]$$

La transformada inversa correspondiente a los polos

$$-\sigma \pm j\omega_0$$

es por lo tanto

(8.3.31) $$2a\, exp(-\sigma t)\, cos\, (\omega_0 t + \alpha)$$

en donde:

- a = magnitud del residuo del polo de parte *imaginaria positiva.*
- α = argumento del residuo del polo de parte *imaginaria positiva*
- σ = valor absoluto de la parte real del polo.
- ω_0 = valor absoluto de la parte imaginaria del polo.

Para el ejemplo 8.3b.

$$i(t) = 2(1.71)\, exp\left[-(0.187)t\right] cos\left[(0.68)t + (-20°)\right]$$

(8.3.32)

$$i(t) = 3.42\, exp(-.187t)\, cos\,(.68t - 20°)$$

Esta respuesta tiene por velocidad angular .68, y por período

$$T = \frac{2\Pi}{\omega_0} = 9.2\ seg$$

La fig. 8.3.6a muestra a la función

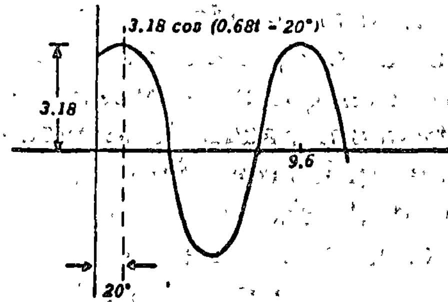
$$3.42\, cos\,(.68t - 20°)$$

y la fig. 8.3.6b muestra al término exponencial

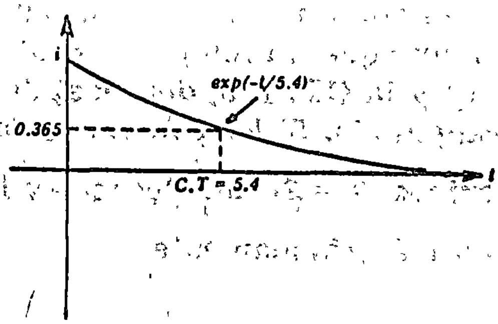
$$exp(-0.187t)$$

Si

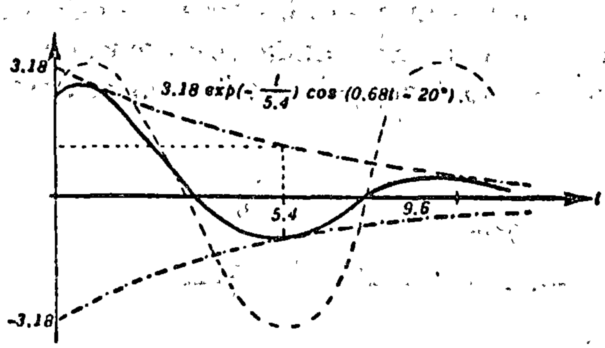
$$t = \frac{1}{0.187} = 5.4 = C.T.$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.3.6. Factores de la respuesta del ejemplo 8.3b dada por la ec. (8.3.32)

el valor del término exponencial ha disminuido a $1/e = 0.365$

Este valor de t se conoce con el nombre de *constante de tiempo del circuito* (CT) (capítulo 4).

Finalmente la fig. 8.3.7c muestra la respuesta completa (8.3.32). Hemos ilustrado dos formas distintas para calcular la función del tiempo correspondiente a dos polos complejos conjugados del dominio s. Conviene recordar ambos. El primero, empleado en el ejemplo 8.3b ilustra las posibles manipulaciones a las que hay que someter las funciones $F(s)$ para encontrar expresiones que aparezcan en una tabla de transformadas de Laplace. El ejemplo 8.3b ilustra el método gráfico y permite obtener las principales características de la respuesta en el dominio t por inspección de la posición de las singularidades de $F(s)$.

Comparando los parámetros σ (amortiguamiento) y ω_0 (velocidad angular) de la respuesta en el dominio de los tiempos, ec. (8.3.31), con la localización de los polos de la respuesta en el dominio complejo (ec. (8.3.30) o fig. 8.3.4), podemos concluir que, si los polos se alejan del eje imaginario, σ crece y la CT, $1/\sigma$, decrece, desapareciendo más rápido el transitorio. Si los polos se alejan del eje real, ω_0 crece el período $T = 2\pi/\omega_0$ decrece y la respuesta transitoria oscila más rápidamente:

EJEMPLO 8.3c El circuito de la fig. 8.3.7 muestra un circuito con una fuente de tensión controlada por corriente. Si las condiciones iniciales son nulas y $e(t) = u(t)$, calcule $i_2(t)$ para $t \geq 0$.

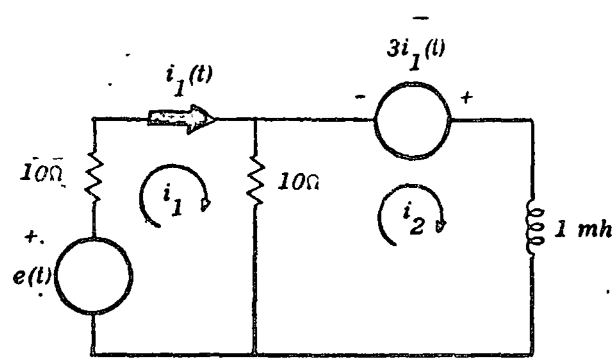


Fig. 8.3.7. *Circuito con una fuente controlada del ejemplo 8.3c*

Solución:

Las ecuaciones integro-diferenciales de malla són:

$$e(t) = 20i_1(t) - 10i_2(t)$$

$$3i_1(t) = -10i_1(t) + 10i_2(t) + 10^{-3}\frac{di_2(t)}{dt}$$

la transformada de Laplace de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & I_1(s) \\ -10 - 3 & +10 + 10^{-3}s & I_1(s) \end{bmatrix}$$

Aplicando la ley de Cramer $I_2(s)$ es:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 20 & E(s) \\ -13 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -13 & 10 + 10^{-3}s \end{vmatrix}}$$

Desarrollando las dos determinantes se obtiene

$$I_2(s) = \frac{650}{s(3500 + s)}$$

Una expansión por fracciones parciales da por resultado:

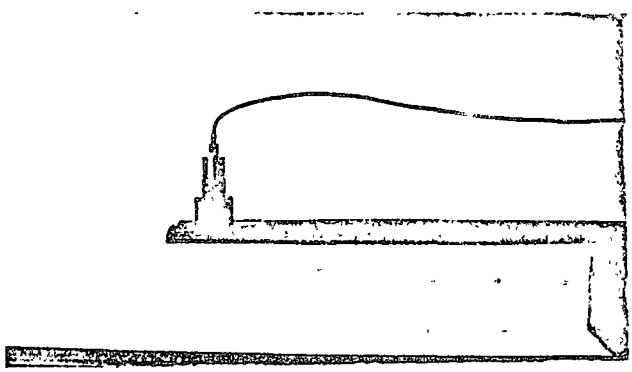
$$I_2(s) = \frac{13}{70}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 3500}\right)$$

y la transformada inversa $i_2(t)$ se obtiene de inmediato:

$$i_2(t) = \left\{ \frac{13}{70s} - \frac{13}{70(3500 + s)} \right\}$$

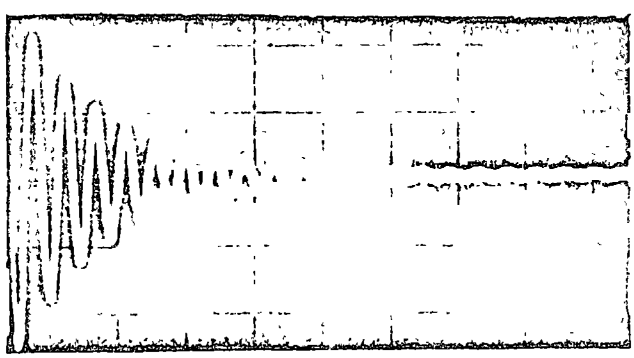
$$= \frac{13}{70} \left[1 - exp(-3500t) \right] t \geq 0$$

EJEMPLO 8.3d Muchos sistemas tienen un comportamiento libre que resulta aproximadamente igual al de un sistema de segundo orden de parámetros concentrados. Por ejemplo, la regla



Oscilograma

(a)



(b)

Fig. 8.3.8. ***Sistema vibratorio y oscilograma de su respuesta del ejemplo 8.3d***

de la fig. 8.3.8a, al dársele a su extremo un desplazamiento inicial, registra una aceleración en dicho punto, cuya función $(t - a)$ tiene la forma que aparece en el oscilograma de la fig. 8.3.8b. Cada división del eje horizontal, que es el de los tiempos, es de 0.2 seg. Encuentre los polos de:

$$\mathcal{L}(a(t)) = A(s)$$

donde a es la aceleración del extremo.

Solución:

De acuerdo con los conceptos estudiados en el capítulo 5 el comportamiento de este sistema es subamortiguado. Del oscilograma de la fig. 8.3.8b concluimos que 2.5 ciclos tienen una duración de 0.2 seg. La frecuencia de las oscilaciones libres es:

$$f = \frac{2.5}{0.2} = 12.5\ Hz$$

A esta frecuencia corresponde una velocidad angular de

$$\omega_0 = 2\pi f = 78\ seg^{-1}$$

Además, se observa en el oscilograma que las oscilaciones disminuyen de 1.7 a 0.9 de amplitud en 0.2 seg.

Por lo tanto:

$$\frac{1.7}{0.9} = \frac{A_m\, exp(-\sigma t)}{A_m\, exp(-\sigma(t + 0.2))}$$

$$1.9 = exp(\alpha 0.2)$$

de donde el coeficiente de amortiguamiento σ vale:

En este capítulo trataremos sistemas generales de orden superior. Empezaremos estudiando el análisis nodal y de mallas de circuitos.

Las ecuaciones de movimiento y comportamiento de diversos tipos de sistemas, mecánicos, térmicos y de fluidos, resultan ser análogas. Estas analogías permiten usar los firmes cimientos analíticos que se establezcan para un tipo de sistemas, en este libro los eléctricos, para estudiar sistemas de otro tipo. Formalizaremos posteriormente las relaciones entre los circuitos eléctricos y los no eléctricos, desarrollando analogías entre los sistemas eléctricos y los sistemas mecánicos, térmicos y de fluidos. Para finalizar el capítulo estudiaremos algunos conceptos energéticos de sistemas.

6.1 El análisis por mallas o nodos

En esta sección ilustraremos dos importantes y básicos métodos para analizar circuitos: el de mallas y el de nodos. Los conceptos de mallas y el de nodos fueron introducidos en el capítulo 3.

Consideremos el circuito de la fig. 6.1.1. Por los conceptos estudiados en el capítulo 3, sabemos que este circuito tiene dos mallas independientes, que pueden ser las dos

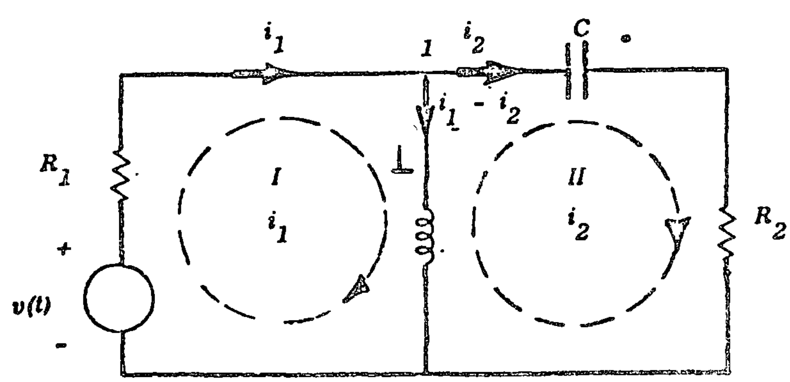


Fig. 6.1.1. Circuito de dos mallas

mostradas en la fig. 6.1.1. La rama con la inductancia resulta común a las dos mallas y aplicando la ley de corrientes al nodo 1 , la corriente en dicha rama resulta de $i_1(t) - i_2(t)$ en el sentido mostrado.

La ley de tensiones de Kirchhoff aplicada a la malla I daría:

$$v(t) = R_1 i_1(t) + L \frac{d}{dt}(i_1(t) - i_2(t)) \tag{6.1.1}$$

y aplicada a la malla II:

$$0 = R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(t')dt' - L\frac{d}{dt}(i_1(t) - i_2(t)) \tag{6.1.2}$$

Definamos como *corriente de malla* a la corriente que pasa por las ramas de una malla no situada entre dos mallas. De acuerdo con esta definición, en el circuito de la fig. 6.1.1 $i_1(t)$ e $i_2(t)$ son las corrientes de las mallas 1 y 2 respectivamente. Observamos que la corriente en la rama común a dos mallas se obtiene sumando algebraicamente (tomando en cuenta su sentido) las corrientes de las mallas a las que la rama en cuestión es común.

En general, para obtener las ecs. (6.1.1) y (6.1.2) conocidas como ecuaciones de malla, se procede de la siguiente manera:

a) Se considera que sólo circula la corriente en la malla en estudio. Las corrientes en las restantes mallas se toman como iguales a cero y se establece la ley de tensiones de Kirchhoff.

En nuestro ejemplo para la malla I con $i_1(t) \neq 0$ e $i_2(t) = 0$

$$v(t) = R_1 i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt}$$

b) Luego se toma nula la corriente en la malla en estudio, y se van considerando, una a una, diferentes de cero las corrientes en todas las mallas adyacentes a la en estudio; se encuentra la caída de tensión que dichas corrientes producen en esas ramas adyacentes, tomando en cuenta la polaridad de dichas caídas en la rama en cuestión.

En nuestro caso la rama con la inductancia es común a las dos mallas. Con $i_1(t) = 0$ e $i_2(t) \neq 0$, la caída que produce $i_2(t)$ en dicha rama común es

$$- L \frac{di_2(t)}{dt}$$

El signo negativo se debe a que las direcciones relativas de $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en dicha rama son opuestas.

La ecuación de malla será igual a la suma de las ecuaciones así establecidas. Para nuestro ejemplo por lo tanto:

$$v(t) = R_1 i_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} - L \frac{di_2(t)}{dt}$$

De manera similar se procede para el resto de las mallas.

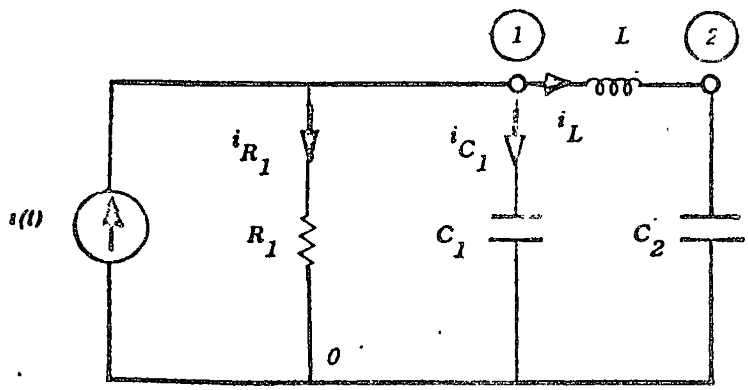


Fig. 6.1.2. Circuito de 2 nodos independientes

En los capítulos subsiguientes tendremos oportunidad de emplear frecuentemente estas ecuaciones o las de nodos que estudiaremos a continuación.

En la fig. 6.1.2 se muestra un circuito con dos nodos independientes, 1 y 2. Sean $v_1(t)$ y $v_2(t)$ las tensiones de estos nodos con respecto al nodo de referencia (0).

La ley de Kirchhoff aplicada a los nodos (1) y (2) da:

Para el nodo (1)

$$i(t) = i_{R_1}(t) + i_{C_1}(t) + i_L(t) \tag{6.1.3}$$

pero

$$i_{R_1}(t) = \frac{v_1(t)}{R_1}$$

$$i_{C_1}(t) = C\frac{dv_1(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}(v_1(t') - v_2(t'))dt'$$

Sustituyendo estos últimos valores en (6.1.3)

$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R} + C_1\frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}(v_1(t') - v_2(t'))dt' \tag{6.1.4}$$

El lector fácilmente puede encontrar que la ley de corrientes de Kirchhoff aplicada al nodo (2) lleva a:

$$0 = C_2\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int^{t}(v_2(t') - v_1(t'))dt' \tag{6.1.5}$$

Las ecs. (6.1.4) y (6.1.5) se conocen con el nombre de *ecuaciones de nodos*. Podemos establecerlas de la siguiente manera sistemática:

a) Consideremos nulas las tensiones de todos los nodos menos la del nodo bajo estudio, considerada positiva. Si en estas condiciones aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff *(LCK)* al nodo en cuestión, encontraremos que entra (o sale) al nodo en estudio la corriente proveniente de las fuentes de corriente y sale corriente de dicho nodo a los demás nodos conectados con él (ya que la tensión es mayor que cero en el nodo en estudio y se considera nula en todos los otros nodos). En nuestro ejemplo de la fig. 6.1.2 la regla anterior lleva a:

$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R} + C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v_1(t')dt'$$

b) Ahora consideremos nula la tensión del nodo en estudio y mayor que cero la de todos los nodos restantes adyacentes al primero. Todos estos nodos "inyectarán" ahora corriente al nodo en estudio. Estas corrientes tendrán por lo tanto un sentido supuesto contrario al encontrado en el paso a).

En nuestro ejemplo; el nodo 2 , al tener una tensión $v_2 > 0$ y $v_1 = 0$ inyecta a 1 una corriente igual a:

$$- \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v_2(t')dt'$$

Finalmente se suman los resultados de los pasos a) y b), obteniéndose en efecto para nuestro ejemplo la ec. (6.1.4)

El procedimiento descrito se repite para los restantes nodos *independientes* del circuito para obtener el sistema de ecuaciones de nodos linealmente independientes.

En el capítulo 10 estudiaremos varios métodos sistemáticos para el establecimiento de las ecuaciones de malla y nodos. Si se emplean las ecuaciones de malla, es conveniente transformar todas las fuentes de corriente en fuentes de tensión. En caso de usarse ecuaciones de nodos conviene transformar todas las fuentes de tensión en fuentes de co-

...rri...
en ...te. Si no se realizan estas transformaciones, entonces do... el caso del análisis nodal, la diferencia de tensión entre fue... nodos es un dato del problema, y es igual al valor de la ecu... ...e de tensión entre dichos nodos. En el análisis por fija ...ciones de malla, una fuente de corriente en una rama, mal... el valor de la diferencia de las corrientes de las dos cia ...las adyacentes a las ramas. En la fig. 6.1.3 la diferencia de corrientes de malla $i_j(t) - i_i(t)$ resulta igual al valor de la fuente de corriente $i_s(t)$ por lo tanto:

$$i_j(t) - i_i(t) = i_s(t) \qquad (6.1.6)$$

Por lo tanto solamente una de las corrientes de malla es una incógnita.

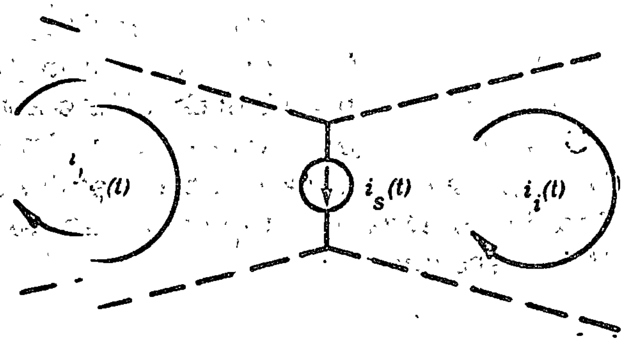


Fig. 6.1.3. Ejemplo de corrientes de malla no linealmente independientes

Los conceptos de malla y nodo estudiados en esta sección nos permitirán analizar formalmente las relaciones entre diversos sistemas dinámicos. En la siguiente sección se estudiarán las relaciones de analogía entre un sistema mecánico y un circuito eléctrico.

6.2 Sistemas mecánicos

En el capítulo 1 señalamos las analogías que existen entre los diversos parámetros de un circuito eléctrico y los de un sistema mecánico. En esta seccion estudiaremos formalmente dichas relaciones con objeto de poder aplicar la metodología de la teoría de circuitos a la solución de problemas dinámicos en general, y mecánicos oscilatorios en particular.

Se establecerán las dos analogías básicas entre un sistema mecánico y uno eléctrico, la analogía fuerza-tensión y la analogía fuerza-corriente. Para esto demos primero una definición:

Definición:

El número de grados de libertad de un sistema mecánico, está fijado por el número de variables de desplazamiento que se necesitan para fijar la posición de todos sus elementos.

En la fig. 6.2.1a, tenemos por lo tanto, un sistema mecánico, de un solo grado de libertad.

Consideremos un sistema vibratorio mecánico de un grado de libertad, un circuito eléctrico de una malla con elementos en serie y otro de un nodo independiente con elementos en paralelo, tal como lo muestra la fig. 6.2.1.

En el sistema mecánico de la fig. 6.2.1 el desplazamiento x, que fija la posición de la masa m, satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$f(t) = m\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) \tag{6.2.1}$$

donde f es la fuerza, m es la masa, D es la constante de amortiguamiento, K la constante del resorte y x el desplazamiento.

Empleando como variable a la velocidad $s = dx/dt$, podemos escribir

$$f(t) = m\dot{s}(t) + Ds + \int_0^t Ks(t')dt' + Kx_0 \tag{6.2.2}$$

donde x_0, es el desplazamiento inicial del resorte, $x(0)$.

Para la red de una malla mostrada en la fig. 6.2.1b, tenemos la siguiente ecuación, de tensiones (LTK)

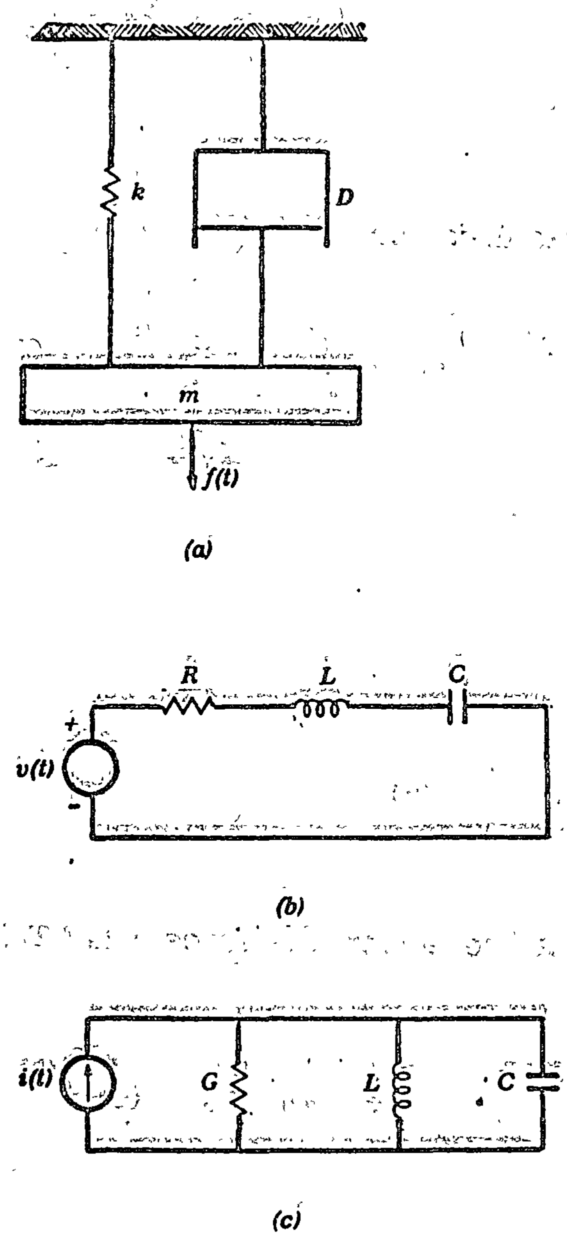


Fig. 6.2.1. *Sistema mecánico y circuitos eléctricos equivalentes*

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_i(t)$$

Las caídas de tensión expresadas en términos de las corrientes están dadas por:

$$v_R(t) = R\,i(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$$

Pero la carga $q(t)$ está dada por

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t)dt' = \int_{-\infty}^{0} i(t)dt' + \int_{0}^{t} i(t)dt'$$

$$= q(0) + \int_{0}^{t} i(t')dt'$$

por lo que

$$v_C(t) = \frac{1}{C} q(0) + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i(t')dt'$$

Sustituyendo las caídas de tensión anteriores en la LTK obtenemos:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \int_{0}^{t} \frac{1}{C}\, i(t')dt' + \frac{q(0)}{C} \tag{6.2.3}$$

Para la red de un nodo independiente (fig. 6.2.1c) podemos establecer la siguiente ecuación de corriente: *(LCK)*

$$i(t) = i_G(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

Tratemos de expresar las corrientes en función de la tensión de nodo. Integrando la ecuación

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

obtenemos

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t')dt' + i(0)$$

Como

$$V_c(t) = \frac{1}{C} q(t)$$

entonces

$$C V_c(t) = q(t)$$

Derivando esta ecuación obtenemos

$$C \frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt} = i_c(t)$$

Recordando que

$$i_G(t) = G V_G(t)$$

y que $V_L(t) = V_C(t) = V_G(t) = V(t)$, la ecuación de corriente *(LCK)* anterior se puede escribir como:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t')dt' + i_0 + G v(t)$$

Comparando las ecs. (6.2.2), (6.2.3) y (6.2.4) podemos establecer la siguiente tabla de equivalencias.

SISTEMA MECANICO DE TRANSLACION	
Fuerza	(f)
Masa	(m)
Velocidad	($\overset{\circ}{s}$)
Amortiguador	(D)
Resorte	(K)
Desplazamiento	(x)

SISTEMA ELECTRICO			
Analogía fuerza-tensión		*Analogía fuerza-corriente*	
Tensión	(v)	*Corriente*	(i)
Inductancia	(L)	*Capacitancia*	(C)
Corriente	(i)	*Tensión*	(v)
Resistencia	(R)	*Conductancia*	(G)
Capacitancia	($1/C$)	*Inductancia*	($1/C$)
Carga	(q)	*Flujo*	(ϕ)

Tabla 6.2.1

Existe, desde luego, analogía entre los sistemas de rotación y translación, de acuerdo con la tabla 6.2.2.

En la analogía fuerza-tensión, las masas son sustituidas por inductancias que podrían ocupar dos posiciones.

a) En las ramas no comunes a dos mallas, en cuyo caso, la caída está dada por $L(di/dt)$ o por su equivalente mecánico $m(ds/dt)$.

b) En la rama común a dos mallas, la i y la j, en cuyo caso la caída en la inductancia está dada por $L(di_i/dt - di_j/dt)$ o su equivalente mecánico $\left[\overset{\circ}{s}_i - \overset{\circ}{s}_j\right]$.

Como la fuerza de inercia depende de la aceleración absoluta, es evidente que la primera alternativa es la correcta, pudiendo, por lo tanto, establecerse que en la analogía fuerza-tensión el elemento que sustituye a la masa debe ir en las ramas no comunes a las mallas.

ROTACION	
Par	(τ)
Aceleración angular	(α)
Velocidad angular	(ω)
Momento de inercia	(I)
Coeficiente de amortiguación	
(Rotacional)	(D_θ)
Rigidez torsional.	(K_θ)
TRANSLACION	
Fuerza	(F)
Aceleración	(a)
Velocidad	(s)
Masa	(m)
Coeficiente de amortiguación.	
(Translación)	(D)
Rigidez	(K)

Tabla 6.2.2

De una manera análoga en la analogía fuerza-corriente puede demostrarse que el elemento capacitivo que equivale a la masa debe ir siempre conectado al nodo de referencia, que tiene tensión nula, lo que equivale a velocidad nula en el sistema mecánico.

En general es más conveniente el empleo de la analogía fuerza-corriente, ya que no se altera la topología del sistema; los nodos del sistema mecánico equivalen a nodos en el sistema eléctrico.

EJEMPLO 6.2a Establezca el circuito equivalente por analogía fuerza-corriente del sistema mecánico mostrado en la fig. 6.2.2a y plantee las ecuaciones diferenciales correspondientes.

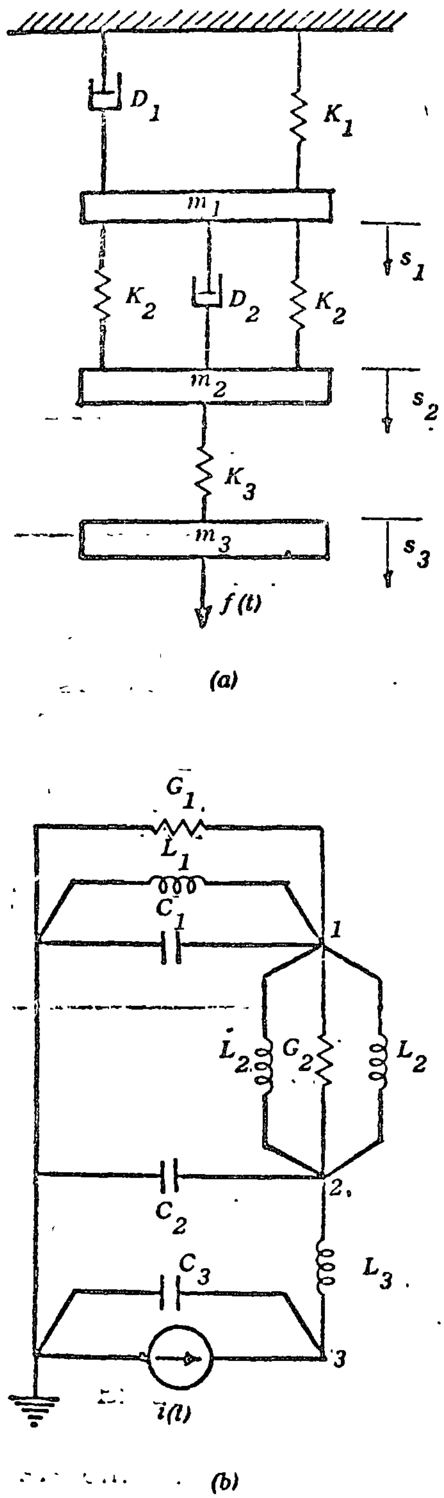


Fig. 6.2.2. Sistema mecánico para el ejemplo 6.2a

Solución:

Empleando las relaciones de la tabla 6.2.1, fácilmente llegamos al circuito eléctrico de la fig. 6.2.2b. Las ecuaciones diferenciales son:

Nodo 1:

Para el sistema eléctrico

$$0 = G_1 v_1(t) + \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^{t} v_1(t')dt' + C_1 \frac{dv_1(t)}{dt}$$

$$+ \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^{t} (v_1(t') - v_2(t'))dt'$$

$$+ \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^{t} (v_1(t') - v_2(t'))dt' + G_2(v_1(t) - v_2(t))$$

Para el sistema mecánico

$$0 = D_1 s_1(t) + K_1 \int_{-\infty}^{t} s_1(t')dt' + m_1 \frac{ds(t)}{dt}$$

$$+ K_2 \int_{-\infty}^{t} (s_1(t') - s_2(t'))dt'$$

$$+ K_2 \int_{-\infty}^{t} (s_1(t') - s_2(t'))dt + D_2(s_1(t) - s_2(t))$$

Nodo 2:

Para el sistema eléctrico

$$0 = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{2}{L_2} \int_{-\infty}^{t} (v_2(t') - v_1(t'))dt'$$

$$+ \frac{1}{L_3} \int_{-\infty}^{t} (v_2(t') - v_3(t'))dt' + G_2(v_2(t) - v_1(t))$$

Para el sistema mecánico

$$0 = m_2 \frac{ds_2(t)}{dt} + 2K_2 \int_{-\infty}^{t} (s_2(t') - s_1(t'))dt'$$

$$+ K_3 \int_{-\infty}^{t} (s_2(t') - s_3(t'))dt' + D_2(s_2(t) - s_1(t))$$

Nodo 3:

Para el sistema eléctrico

$$i(t) = \frac{1}{L_3} \int_{-\infty}^{t} (v_3(t') - v_2(t'))dt' + C_3 \frac{dv_3(t)}{dt}$$

Para el sistema mecánico

$$f(t) = K_3 \int_{-\infty}^{t} (s_3(t') - s_2(t'))dt' + m_3 \frac{ds_3(t)}{dt}$$

EJEMPLO 6.2b Determine, empleando la analogía par-corriente, el circuito equivalente al sistema mecánico mostrado en la fig. 6.2.3a, que consta de dos discos conectados a flechas elásticas.

Solución:

Para la analogía par-corriente la equivalencia entre las variables mecánicas y eléctricas esta dada por la tabla 6.2.3; además, el empleo de esta analogía no modifica la topología de los sistemas. Los nodos del sistema mecánico corresponden a los nodos del circuito eléctrico.

El circuito equivalente, indicando solamente los parámetros mecánicos, es el de la fig. 6.2.3b.

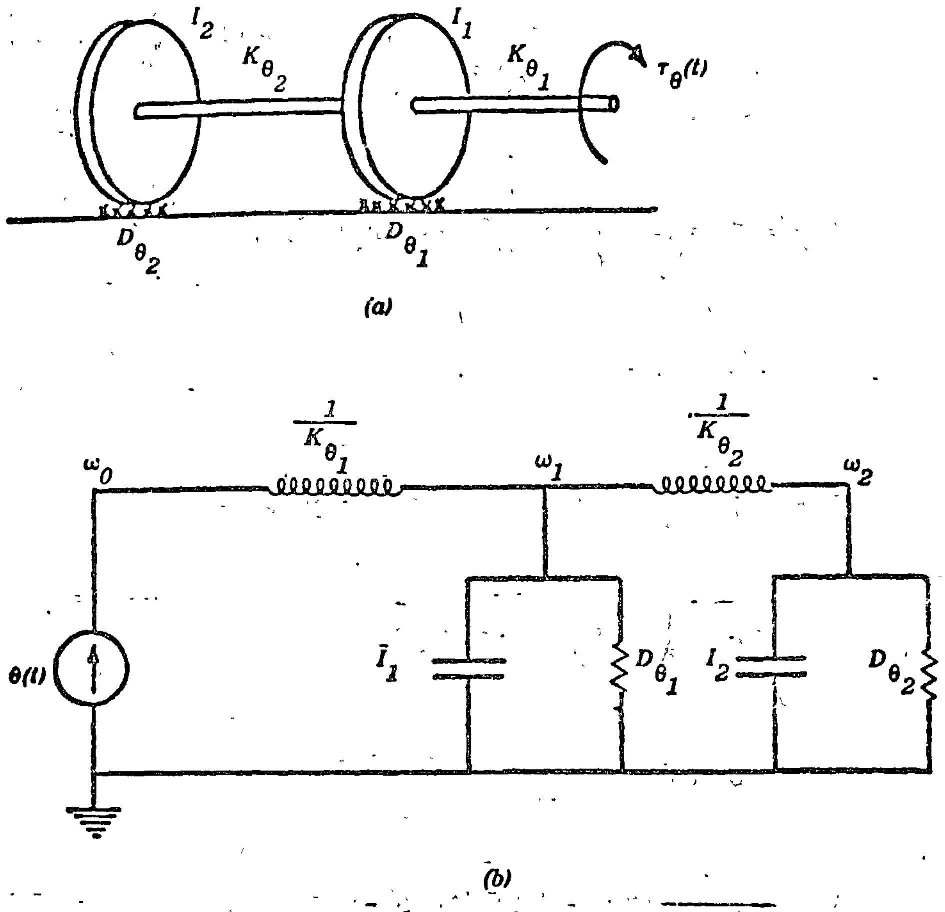


Fig. 6.2.3. *Sistema mecánico y circuito equivalente para el ejemplo 6.2b*

ANALOGIA PAR-CORRIENTE			
Sistema rotacional		*Sistema eléctrico*	
Par	(τ)	Corriente	(i)
Momento de inercia	(I)	Capacitancia	(C)
Velocidad angular	(ω)	Tensión	(v)
Coeficiente de amortiguamiento	(D_θ)	Conductancia	(G)
Rigidez torsional	(K_θ)	Inductancia	$(1/L)$
Desplazamiento angular	(θ)	Flujo	(ϕ)

Tabla 6.2.3

Las ecuaciones de nodos para este sistema, empleando variables mecánicas son:

Nodo 0:

$$\tau_0(t) = K_{\theta_1} \int_{-\infty}^{t} (\omega_0(t') - \omega_1(t'))dt'$$

Nodo 1:

$$0 = K_{\theta_1} \int_{-\infty}^{t} (\omega_1(t') - \omega_0(t'))dt' + D_{\theta_1} \omega_1(t) + I_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt}$$

$$+ K_{\theta_2} \int_{-\infty}^{t} (\omega_1(t') - \omega_2(t'))dt'$$

Nodo 2:

$$0 = K_{\theta_2} \int_{-\infty}^{t} (\omega_2(t') - \omega_1(t'))dt' + D_{\theta_2} \omega_2(t) + I_2 \frac{d\omega_2(t)}{dt}$$

Recomendamos al lector que se familiarice con el establecimiento de ecuaciones integro-diferenciales de nodos o mallas, como las anteriores para sistemas mecánicos, empleando directamente variables mecánicas, como se hizo en el ejemplo anterior.

EJEMPLO 6.2c Establezca el circuito equivalente del sistema rotacional mostrado en la fig. 6.2.4a. Para representar el acoplamiento mediante engranes emplee los resultados de la sección 2.3.

Solución:

Usando la analogía par-corriente, tal como aparece en la tabla del ejemplo 6.1b, el lector podrá establecer fácilmente el circuito equivalente mostrado en la fig. 6.2.4b.

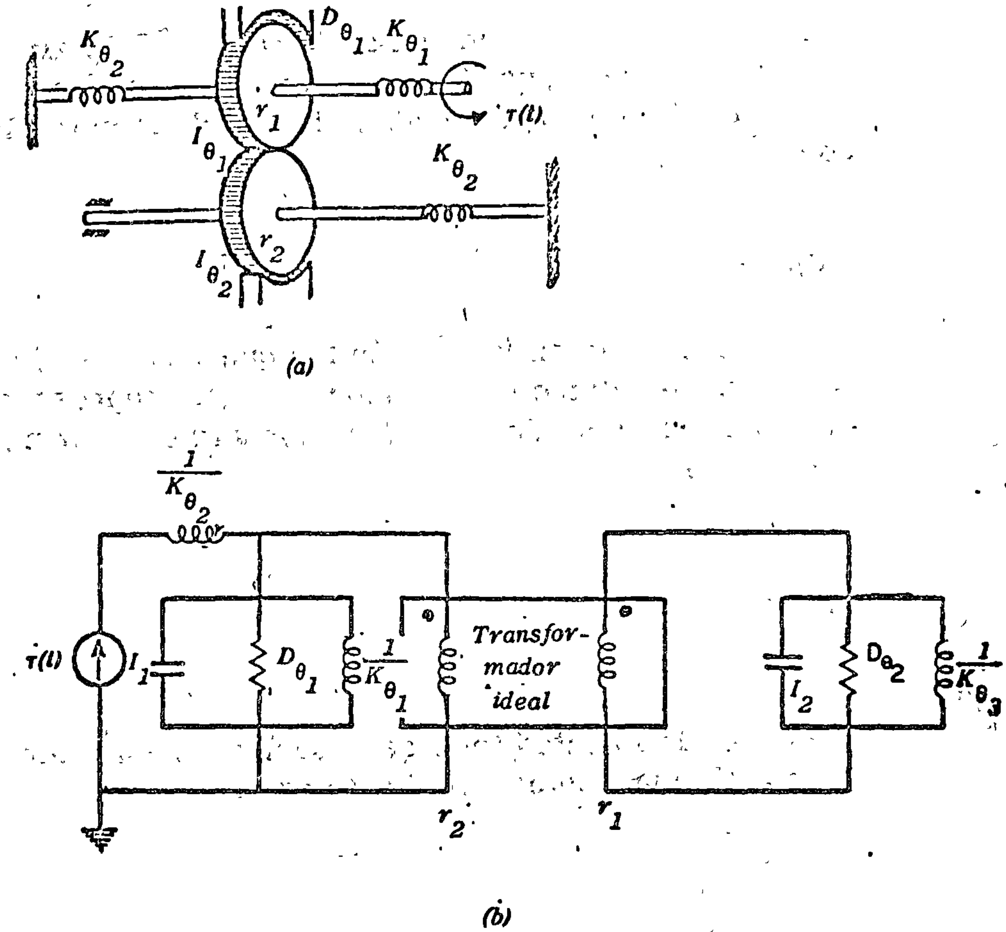


Fig. 6.2.4. *Sistema mecánico rotacional y circuito eléctrico análogo*

EJEMPLO 6.2d Este ejemplo ilustra cómo se emplean los conceptos de acoplamiento electromecánico estudiados en la sección 2.3 al estudio de sistemas electromecanicos. Estableceremos un circuito eléctrico con un transformador ideal que es equivalente al sistema electromecánico. En el siguiente ejemplo ilustraremos cómo se analiza un circuito eléctrico con acoplamiento magnético (transformador) entre sus partes.

La fig. 6.2.5a muestra, en forma esquemática, un galvanómetro. Este instrumento de medición eléctrica opera de la siguiente manera: la fuente de tensión hace circular por el circuito de la bobina móvil I, que está enrollado alrededor de un núcleo de fierro dulce II, una corriente. Esta corriente produce al interaccionar con el campo magnético radial uniforme, producido por las piezas polares N y S, un par que tiende ha hacer girar la bobina. Este giro es registrado por la aguja III sujeta a la bobina y dependerá de la intensidad de la corriente. Trace el circuito eléctrico equivalente.

Solución:

Hemos visto en la sección 2.3, que la interacción entre el sistema eléctrico y el mecánico se puede representar por un transformador ideal. La relación entre la corriente i y el par τ es:

$$\frac{i(t)}{\tau(t)} = \frac{1}{B\,l\,r}$$

donde l es la longitud total de la bobina y r su radio. En la fig. 6.2.5b aparece el circuito equivalente.

EJEMPLO 6.2e La fig. 6.2.6a muestra un circuito con acoplamiento magnético entre sus dos partes.

En este ejemplo ilustraremos cómo se analiza un problema con un transformador ideal, modificando el circuito eliminando el transformador.

Solución:

Llamemos a la parte del circuito conectada a las terminales izquierdas del transformador "primario" y a la conectada a la derecha el "secundario".*

Las ecuaciones de tensión de Kirchhoff para el primario y secundario son:

$$V_f(t) = R_1 i_1(t) + v_1(t) \tag{6.2.5}$$

*En general se considera como primario el embobinado del transformador conectado a la fuente de energía.

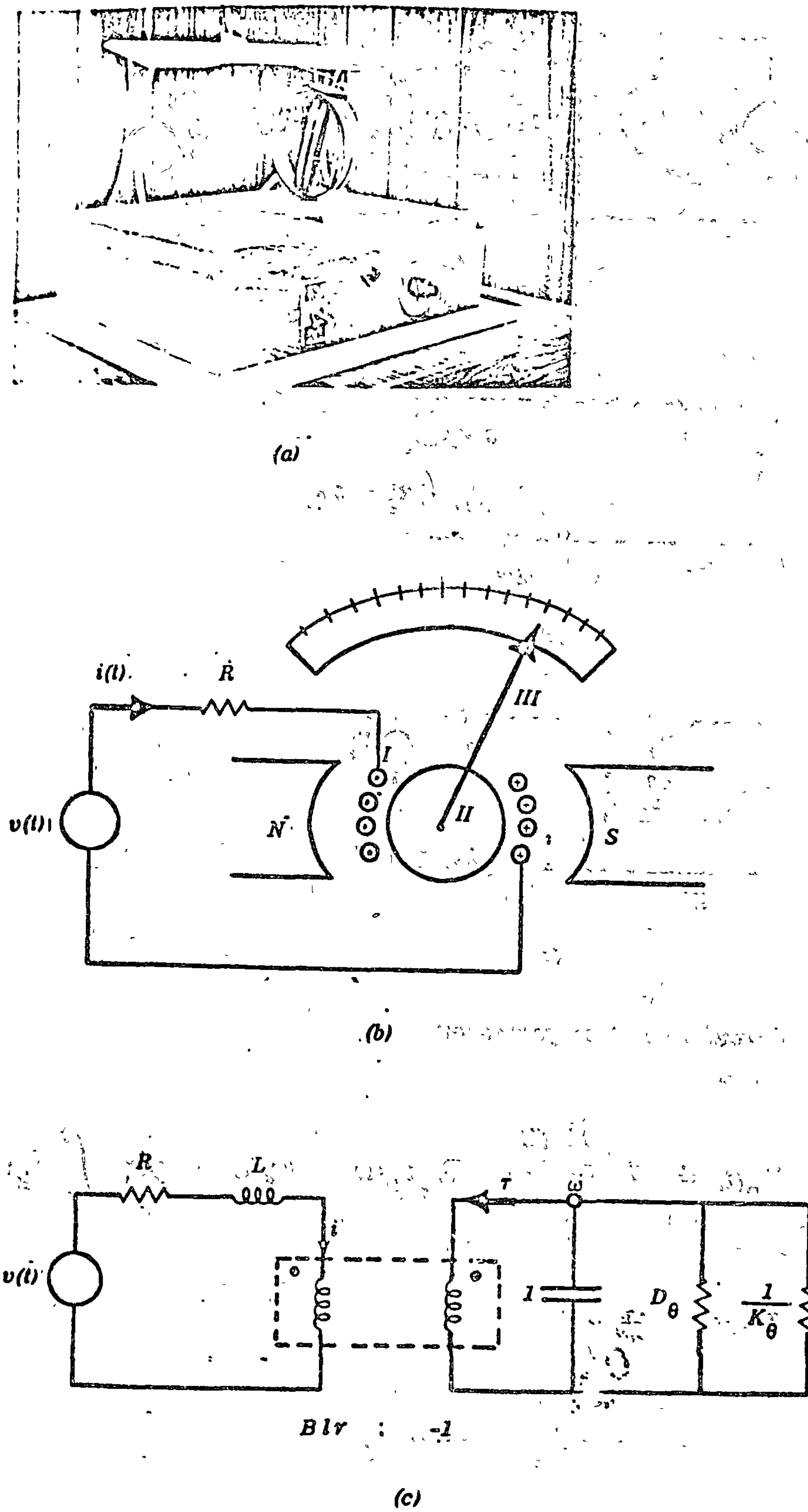


Fig. 6.2.5. Esquema del galvanómetro y su circuito eléctrico

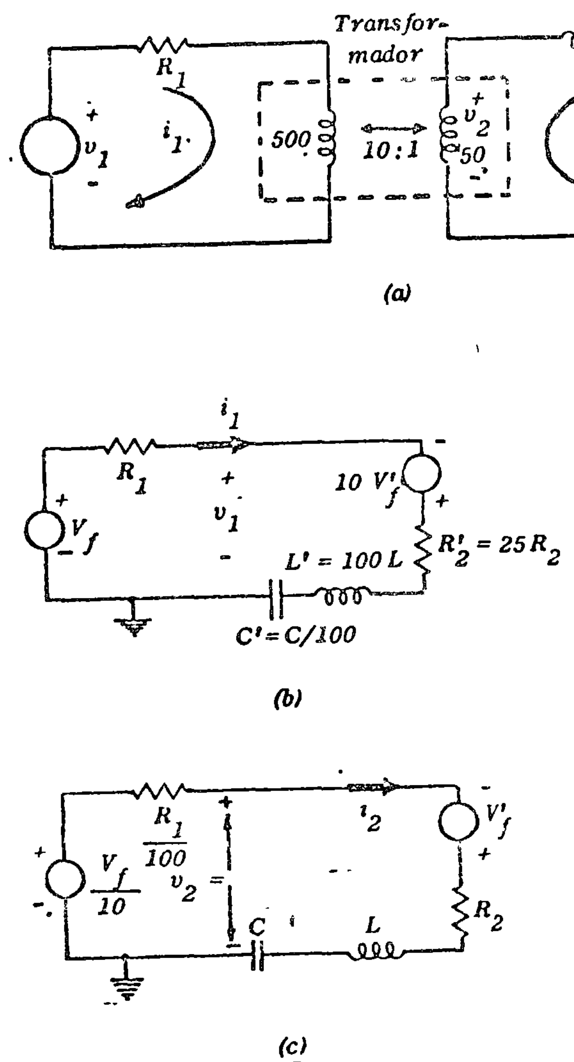


Fig. 6.2.6. Circuito con transformador

(6.2.6) $$V_2(t) = -L\,\frac{di_2(t)}{dt} - R_2\,i_2(t) - V'_f(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(t')\,dt'$$

Pero

(6.2.7) $$v_1(t) = \frac{500}{50}\,v_2(t) = 10\,v_2(t)$$

(6.2.8) $$i_1(t) = -\frac{50}{500}\,i_2(t) = -\frac{1}{10}\,i_2(t)$$

Sustituyendo estas últimas relaciones en las ecuaciones de Kirchhoff (6.2.5) y (6.2.6) se obtiene al eliminar $i_1(t)$ y $v_2(t)$.

$$V_f(t) = R_1 i_1(t) + v_1(t)$$

$$v_1(t) = 100\,L \frac{di_1(t)}{dt} + 100 R_2 i_2(t) + 10\,V_f'(t)$$

$$+ \frac{100}{C} \int_{-\infty}^{0} i_1(t')dt'$$

El lector podrá comprobar fácilmente que el circuito de la fig. 6.2.6b está caracterizado por estas ecuaciones. El circuito de la fig. 6.2.6b se conoce con el nombre de circuito equivalente referido al "primario", pues se usan los volts como los del primario, sustituyendo las relaciones (6.2.7) y (6.2.8) en (6.2.5)

$$\frac{V_f(t)}{10} = - \frac{R_1}{100} i_2(t) + v_2(t) \tag{6.2.9}$$

Esta última ecuación y la (6.2.6) caracterizan el circuito de la fig. 6.2.6c que representa al circuito que se conoce con el nombre de circuito equivalente referido al "secundario".

En los restantes cursos de ingeniería eléctrica el lector usará repetidas veces estos circuitos equivalentes.

6.3 Sistemas electrohidraulicos e hidromecanicos

Este tipo de sistemas tiene innumerables aplicaciones en sistemas de control y de accionamiento de maquinaria de todo tipo. En las secciones 1.4 a 1.6 estudiamos la equivalencia de los parámetros eléctricos con los hidráulicos. En la fig. 6.1.2, se indican estas equivalencias. En el ejemplo

6.3a se aplican estas analogías para analizar un sistema hidráulico y el ejemplo 6.3b nos sirve para estudiar un problema hidromecánico. En todos estos ejemplos se ilustra la metodología para transformar sistemas no eléctricos (mixtos) en circuitos eléctricos.

Resulta de gran utilidad poder analizar sistemas no eléctricos o electromecánicos y electrohidráulicos con la metodología de la teoría de circuitos, sobre todo cuando hay que recurrir a la simulación analógica, ya que las variables eléctricas son más fáciles de medir y los parámetros más fáciles de variar.

EJEMPLO 6.3a La fig. 6.3.1 muestra una bomba que hace circular fluido por el sistema mostrado. El fluido en el cilindro está sometido a una presión debida al peso que soporta el émbolo. La descarga es contra la presión atmosférica $p_0(t)$. Encuentre el circuito equivalente.

Solución:

El circuito eléctrico debe tener un nodo por cada presión diferente en la tubería. A la presión atmosférica la tomamos como presión de referencia y corresponderá a la del nodo de referencia. Todas las presiones serán diferencias de presión con respecto a la atmosférica.

Usando la fig. 6.3.1 podemos de inmediato encontrar el circuito equivalente. R_1 y R_2 representan las resistencias hidráulicas de los tramos de tubo entre la bomba y el tanque y entre el tanque y la descarga respectivamente. Estas resistencias se están considerando concentradas a la entrada del tanque. La presión ejercida por el peso W sobre el émbolo de área A y el fluido es $p_3(t) = W(t)/A$ y se representa por una fuente de tensión.

Sistemas hidromecánicos

En general una bomba hace circular el fluido por una tubería. La bomba hace circular el fluido con un gasto $Q(t)$

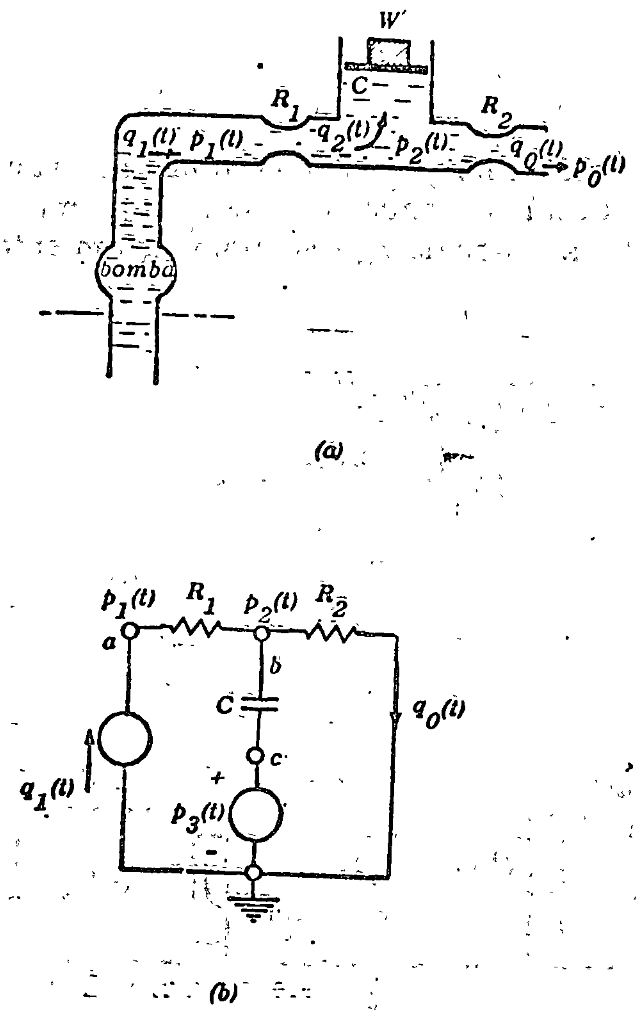


Fig. 6.3.1. *Sistema hidráulico y su circuito equivalente para el ejemplo 6.3a*

que podemos considerar proporcional a la velocidad angular o sea

$$Q(t) = k_p \Omega(t) \tag{6.3.1}$$

donde k_p es la constante de proporcionalidad y $\Omega(t)$ es la velocidad angular.

La potencia mecánica es igual a $\Omega(t)\ \tau(t)$, y si no hay pérdidas, ésta debe ser igual a la potencia hidráulica $p(t)\ Q(t)$ de donde:

$$p(t) = \frac{1}{k_p}\,\tau(t) \tag{6.3.2}$$

En la fig. 6.3.2a una bomba impulsa un fluido que hace girar un motor hidráulico conectado a una carga mecánica representada por su inercia I_Θ y su amortiguamiento D_Θ.

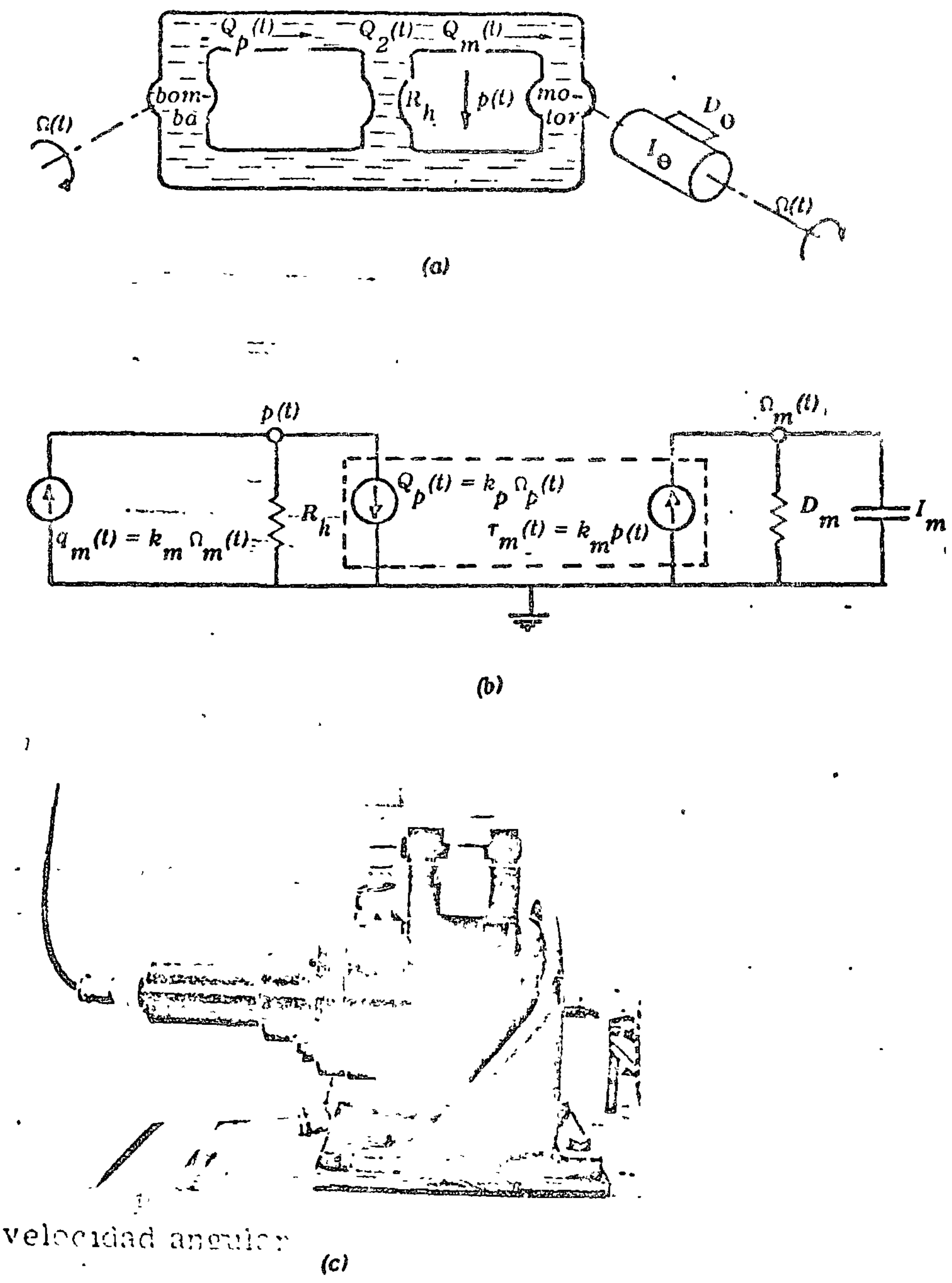


Fig. 6.3.2. Sistema hidromecánico del ejemplo 6.3b

Como existe fuga en el sistema, no todo el fluido que circula por la bomba, circula por el motor. Esta fuga está representada en la figura por la tubería en paralelo con una resistencia hidráulica de valor R_h.

Solución:

La bomba constituye una "fuente de corriente" $Q_p(t)$ de valor:

$$Q_p(t) = k_p \Omega_p(t)$$

El acoplamiento entre el sistema hidráulico y mecánico se realiza como lo muestra la fig. 6.3.2b. Para la parte mecánica se ha empleado una analogía par-corriente. (Tabla 6.2.3)

Obsérvese que el acoplamiento entre el sistema mecánico y el hidráulico esta representado por una "fuente de corriente controlada por corriente".

6.4 Sistemas térmicos

En las secciones 1.3 a 1.6 señalamos la analogía entre un circuito eléctrico y el proceso de transmisión de calor.

El siguiente ejemplo ilustra como podemos aplicar esas analogías para encontrar un circuito eléctrico equivalente a un fenómeno de trasmisión de calor.

EJEMPLO 6.4 Consideremos el fenómeno de transmisión de calor del cuerpo A al cuerpo B, como se muestra en la fig. 6.4.1a.

Consideremos que las paredes tienen una capacitancia térmica muy baja; pero cada una de ellas una resistencia térmica apreciable R_1. El material situado entre las dos paredes tiene una capacidad térmica C_1 y una resistencia R_1.

En la fig. 6.4.1 se muestra además la variación inicial ($t = 0$) y la variación final ($t = \infty$) de la temperatura en el cuerpo. Solamente cuando $t = 0$, o sea iniciarse el proceso de transmisión, la temperatura, sobre todo la del material intermedio, puede considerarse uniforme y el sistema puede representarse como uno de parámetros concentrados. Para $t > t_0$, la temperatura en las paredes y el material intermedio varía con la distancia; sin embargo, podemos considerar que el material intermedio está formado por varias capas paralelas, suficientemente delgadas, para considerar

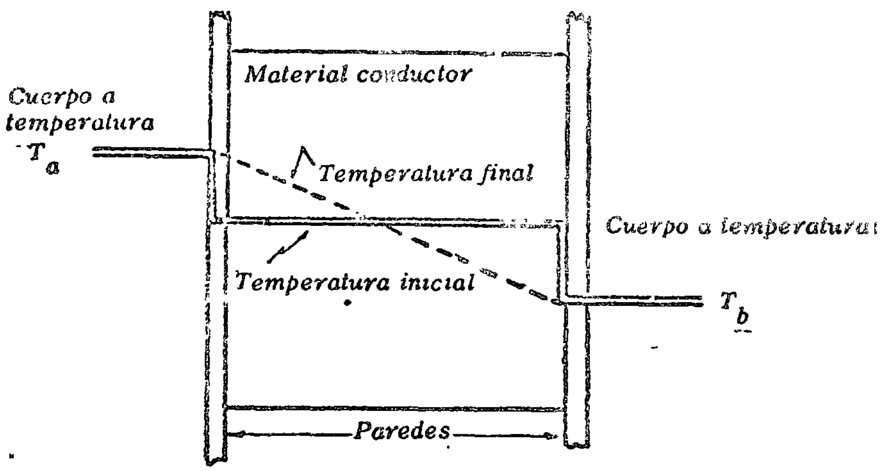


Fig. 6.4.1. Sistema de transmisión de calor

la temperatura en cada una de ellas como constante. Cada una de estas capas puede representarse por un elemento concentrado, tal como lo muestra la fig. 6.4.2a. Esta aproximación será tanto mejor mientras más capas paralelas se consideren. El lector que ha estudiado el problema del análisis de líneas de transmisión notará la analogía de este procedimiento con el usado en el estudio de líneas.

Considerando solamente dos capas y concentrando la resistencia térmica del material intermedio al centro de las dos paredes, tenemos el sistema térmico concentrado de la fig. 6.4.1. El sistema eléctrico análogo de la fig. 6.4.2c puede establecerse de inmediato con ayuda de las relaciones de la fig. 1.6.2.

Solución:

Empleando la analogía *fuerza-corriente,* obtenemos el circuito equivalente de la fig. 8.4.9. En este circuito se señala el valor de los parámetros mecánicos.

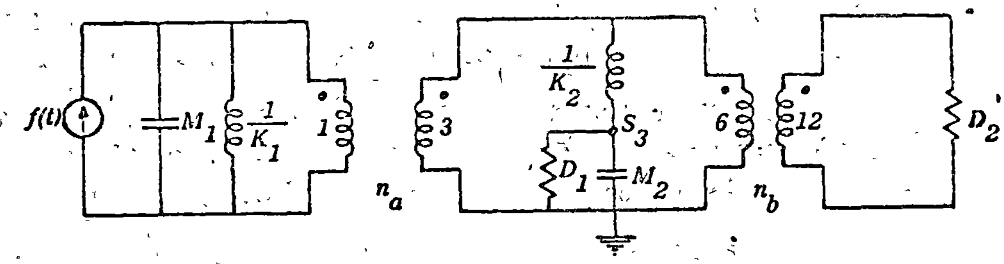


Fig. 8.4.9. *Circuito equivalente al sistema de la fig. 8.4.8*

Para establecer circuitos equivalentes al primario o al secundario de un transformador (figs. 8.4.10; 6.2.6a y 6.2.6b) conviene recordar la siguiente regla nemotécnica: si impedancias se refieren a un lado de mayor número de vueltas, debe aumentarse su valor y si son admitancias debe disminuirse su valor. El factor de amplificación o disminución es el cuadrado de la relación de transformación o su recíproco. Si el cambio se hace a un embobinado de menor número de vueltas debe seguirse la regla inversa.

Empleando cuidadosamente la metodología del ejemplo 6.2e eliminamos los trasformadores y podemos establecer el circuito equivalente de la fig. 8.4.10, como sigue.

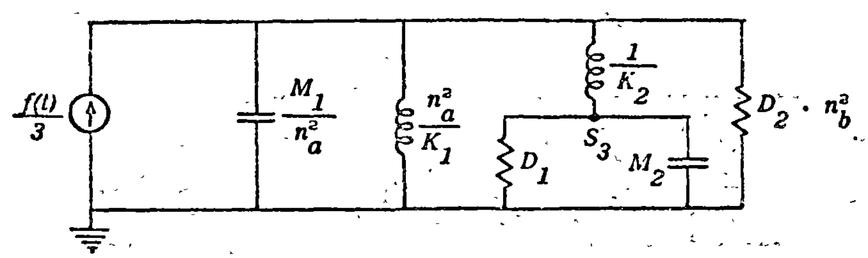


Fig. 8.4.10. *Circuito equivalente al sistema de la fig. 8.4.9*

Tomemos la masa M_1 que en la analogía fuerza-corriente equivale a un capacitor. Su impedancia será:

$$\frac{1}{sM_1}$$

El acoplamiento de la parte del circuito que contiene a la masa M_1 es la parte central del circuito a través de un transformador con mayor número de vueltas en el embobinado conectado a dicha parte. Por lo tanto, al referir la impedancia $1/sM_1$ a la parte central debe aumentar su valor; es decir, hay que multiplicar la impedancia por $n_a^2 = (3/1)^2$. La impedancia resultante $9/sM_1$, o equivalentemente un capacitor de $M_1/9$, debe conectarse a la parte central.

Veamos qué sucede con la conductancia de valor D_2. Su impedancia es $1/D_2$. Al referirla a la parte central, la impedancia debe disminuir en $1/n_b^2 = (6/12)^2$ ya que el transformador de acoplamiento tiene menor número de vueltas en la bobina conectada a la parte central. La impedancia conectada a la parte central tiene un valor de $1/4D_2$, tal como aparece en la fig. 8.4.10.

Para obtener la relación $S_3(s)/F(s)$ hacemos un circuito equivalente al de la fig. 8.4.10 con todos los parámetros sustituidos por su *admitancia*.

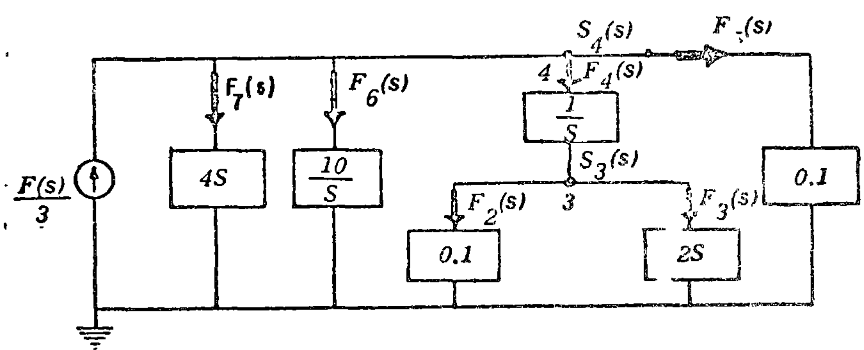
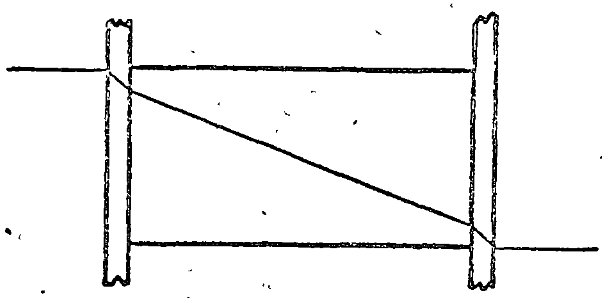
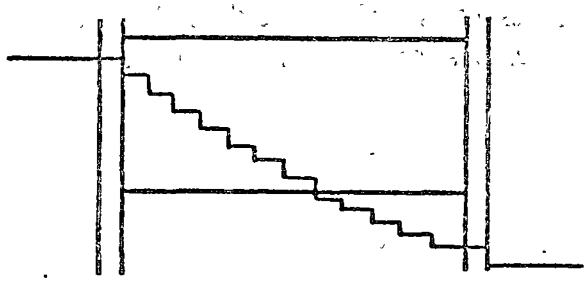


Fig. 8.4.11. *Circuito equivalente al sistema de la fig. 8.4.10*

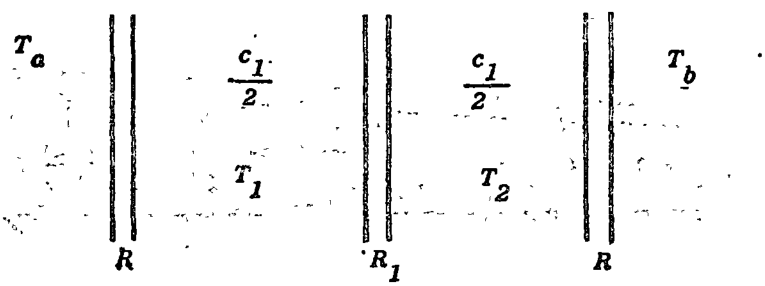


Cambio de temperatura en el SISTEMA REAL

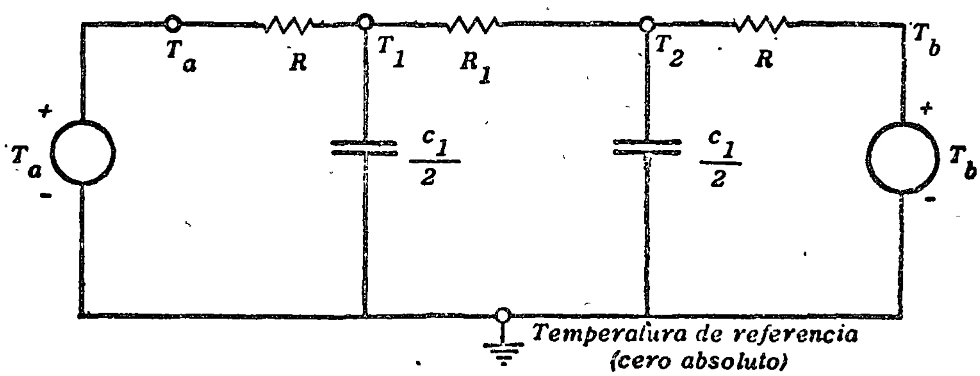


Cambio de temperatura en el SISTEMA REALIZADO

(a)



(b)



(c)

Fig. 6.4.2. *Circuito equivalente del sistema del ejemplo 6.4*

EJEMPLO 8.4c La fig. 8.4.8 muestra un sistema de palanca. Determine la admitancia de transferencia o función de transferencia

$$\frac{S_3(s)}{F(s)}$$

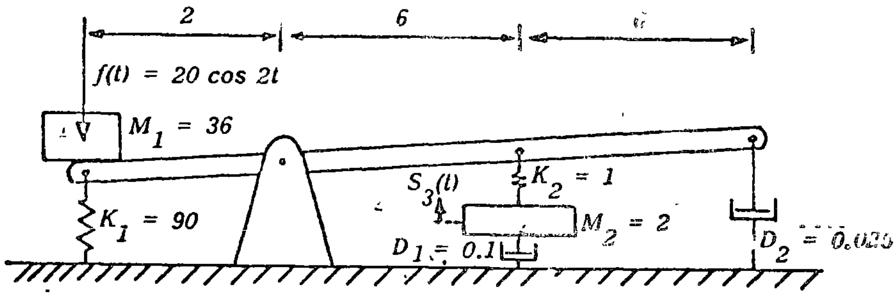


Fig. 8.4.8. Sistema mecánico del ejemplo 8.4c todas las unidades en sistema MKS

Partiendo del numerador de la admitancia de transferencia $S_3(s)$ calculemos las diferentes fuerzas (corrientes) y velocidades (voltajes) hasta relacionar $F(s)$ con $S_3(s)$.

Dos de las fuerzas (corrientes) asociadas al nodo 3 son:

$$F_2(s) = 0.1\, S_3(s)$$

$$F_3(s) = 2s\, S_3(s)$$

La suma de fuerzas aplicadas al nodo 3 permite calcular:

$$F_4(s) = (0.1 + 2s) S_3(s)$$

La velocidad entre 4 y 3 (caída de tensión) será:

$$S_4(s) - S_3(s) = \frac{s}{1}(0.1 + 2s) S_3(s)$$

Por lo que la velocidad de 4 (tensión de 4) será:

$$S_4(s) = S_3(s)\,(0.1s + 2s^2 + 1)$$

Las fuerzas asociadas al nodo 4 son:

$$F_5(s) = 0.1\, S_4(s)$$

$$F_6(s) = \frac{10}{s}\, S_4(s)$$

$$F_7(s) = 4s\, S_4(s)$$

Finalmente el equilibrio de fuerzas aplicadas al nodo 4 da:

$$\frac{1}{3} F(s) = F_5(s)\; F_6(s) + F_7(s) + F_4(s)$$

$$= \left(0.1 + \frac{10}{s} + 4s\right) S_4(s) + (0.1 + 2s)\; S_3(s)$$

$$\frac{1}{3} F(s) = \left(0.1 + \frac{10}{s} + 4s\right)(0.1s + 2s^2 + 1)\; S_3(s)$$

$$+ (0.1 + 2s)\; S_3(s)$$

$$\frac{1}{3} F(s) = S_3(s)\left(8s^3 + 0.6s^2 + 26.01s + 1.2 + \frac{10}{s}\right)$$

La función de transferencia buscada es:

$$Y(s) = \frac{S_3(s)}{F(s)}$$

$$= \frac{s}{3 \cdot (8s^4 + 0.6s^3 + 26.01s^2 + 1.2s + 10)}$$

El conocimiento de la excitación $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s)$ y de la función $Y(s)$, permite calcular la respuesta forzada $S_3(s)$ en el dominio complejo s. La transformada inversa permite finalmente calcular $S_3(t)$.

En el siguiente ejemplo ilustraremos cómo se obtiene una función de transferencia si el circuito tiene fuentes controladas.

EJEMPLO 8.4d La fig. 8.4.12 muestra un circuito de 2 puertos con una fuente de corriente controlada por tensión.

a) Calcule la relación de tensiones de salida a entrada.

b) Si la excitación $v_i(t)$ es un impulso $\delta(t)$ de tensión, calcule la respuesta forzada $v_0(t)$.

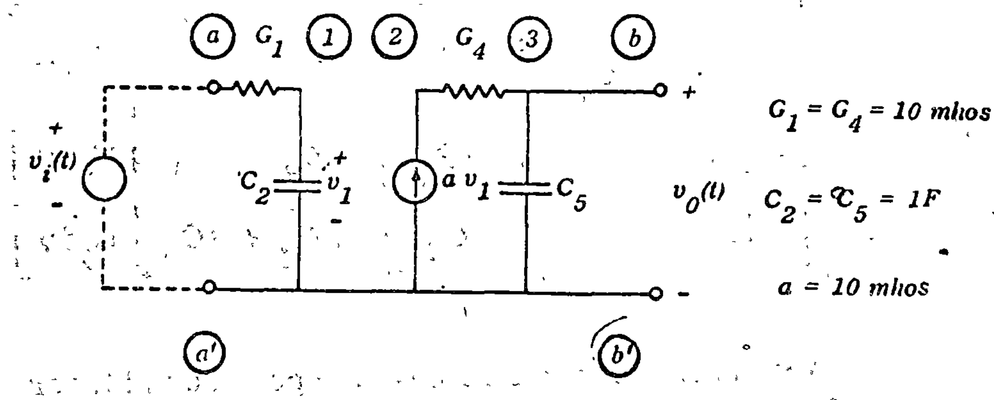


Fig. 8.4.12. Circuito para el ejemplo 8.4d

Solución:

Empleemos un análisis de nodos, ya que nos interesa conocer la tensión de salida. Transformando primero la fuente de tensión v_i en una fuente de corriente las ecuaciones de nodos son:

Nodo 1:

$$G_1\, v_i(t) = G_1\, v_1(t) + C_2 \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Nodo 2:

$$a\, v_1(t) = G_4(v_2(t) - v_0(t))$$

Nodo 3:

$$0 = G_4(v_0(t) - v_2(t)) + C_5 \frac{dv_0(t)}{dt}$$

La transformada de Laplace de estas ecuaciones, teniendo presente que las condiciones iniciales son nulas, es:

$$\begin{bmatrix} V_i(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{sC_2}{G_1} & 0 & 0 \\ -a & +G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & +G_4 + sC_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_0(s) \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla de Cramer podemos obtener $V_0(s)$ a saber:

$$V_0(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \frac{sC_2}{G_1} & 0 & V_2 \\ -a & G_4 & 0 \\ 0 & -G_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \frac{sC_2}{G_1} & 0 & 0 \\ -a & G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + sC_5 \end{vmatrix}}$$

De donde la función de transferencia buscada es:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{aG_1}{s(sC_2C_5 + G_1C_5)}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$H(s) = \frac{100}{s(s + 10)}$$

b) Como la función de transferencia es el circuito:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$$

bajo condiciones iniciales nulas, la $\mathcal{L}$ de la respuesta forzada será:

$$V_0(s) = H(s)\ V_i(s)$$

pero como la excitación es un impulso $\delta(t)$

$$V_i(s) = 1$$

por lo tanto

$$V_0(s) = H(s)$$

y

$$V_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\ (H(s))$$

El lector puede comprobar fácilmente que:

$$v_0(t) = 10(1 - exp(-10t))\ t \geq 0^+$$

El siguiente ejemplo ilustra la obtención de la función de transferencia de un sistema de medición mecánico.

EJEMPLO 8.4e La fig. 8.4.13 muestra esquemáticamente un dispositivo para medir la aceleración (velocidad o desplazamiento) de la superficie horizontal II sobre la que está colocado. La señal de entrada al dis [illegible] señal de salida es el desplazamiento relativo z, de la masa m con respecto a la caja del dispositivo, medida por la aguja I sujeta a la masa sobre la escala fija a la caja. Encuentre la función de transferencia.

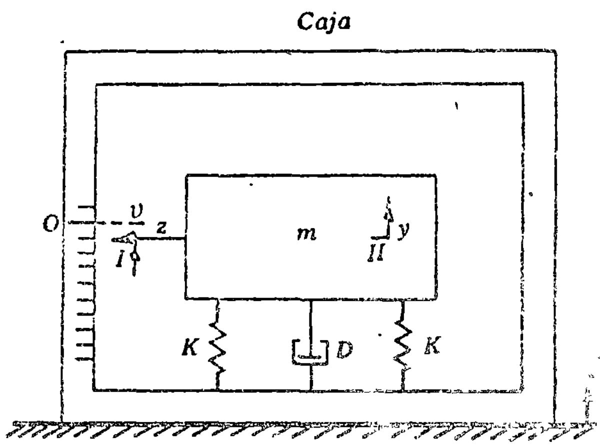


Fig. 8.4.13. *Esquema de un acelerómetro*

Solución:

La ecuación diferencial que caracteriza al movimiento de la suma m es:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + D \frac{d}{dt} (y(t) - x(t)) + 2K(y(t) - x(t)) = 0$$

obsérvese que $y(t) - x(t)$ es la velocidad relativa de la masa con respecto a la caja, que esta sujeta firmemente a la superficie II. Por lo tanto:

$$z(t) = y(t) - x(t)$$

Como nos interesa relacionar la respuesta $z(t)$ con la excitación $x(t)$ eliminemos a $y(t)$ de la ecuación diferencial.

$$m \frac{d^2}{dt^2} (z(t) + x(t)) + D \frac{dz(t)}{dt} + 2K z(t) = 0$$

La transformada de Laplace de la anterior ecuación, con condiciones iniciales nulas, es:

$$(ms^2 + Ds + 2K)\, Z(s) = -ms^2\, X(s)$$

de donde la función de transferencia entre la excitación y la respuesta es:

$$H(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + \frac{Ds}{m} + \frac{2K}{m}} \,.$$

si la excitación es la velocidad $\dot{x}$, o sea se emplea el instrumento para medir la velocidad de *II*, puede obtenerse fácilmente la función de transferencia a partir de la anterior de la siguiente manera. Recordemos que la velocidad $s(t)$ es igual a:

$$s(t) = \frac{dx(t)}{dt} \,.$$

Como son nulas las condiciones iniciales

$$S(s) = sX(s)$$

y sustituyendo en la ec. (8.4.14) se obtiene la función de transferencia buscada:

$$\frac{Z(s)}{S(s)} = \frac{-s}{s^2 + \frac{Ds}{m} + \frac{2K}{m}}$$

Finalmente si el aparato se desea usar como *acelerómetro*, o sea para medir la aceleración de la superficie *II*, la función de transferencia será:

$$\frac{Z(s)}{A(s)} = \frac{-1}{s^2 + \frac{Ds}{m} + \frac{2K}{m}}$$

donde $A(s)$ es la transformada de Laplace de la aceleración de II. El lector puede comprobar facilmente este último resultado.

En el volumen II, al estudiar diagramas de respuesta armónica, discutiremos el empleo de las funciones de transferencia anteriores para obtener la relación adecuada entre los parámetros m, D y K para un medidor de desplazamiento (sismógrafo), uno de velocidad y uno de aceleración (acelerómetro).

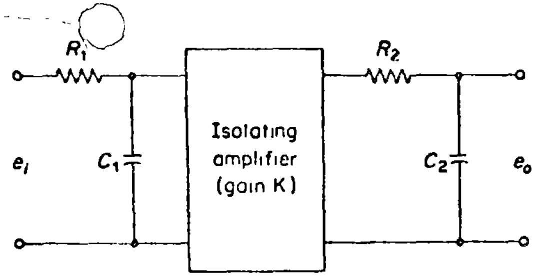


Fig. 4-11. Electrical system.

ave negligible loading effects and the transfer function of the entire circuit equals he product of the individual transfer functions. Thus, in this case,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \left(\frac{1}{R_1C_1s+1}\right)(K)\left(\frac{1}{R_2C_2s+1}\right) = \frac{K}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$

-3 LINEARIZATION OF A NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL

This section presents a linearization technique applicable to many nonlinear ystems. We shall apply this technique to a hydraulic servomotor and obtain a ransfer function for a linearized hydraulic servomotor.

Linear approximation of nonlinear systems. In order to obtain a linear mathema- ical model for a nonlinear system, we assume that the variables deviate only lightly from some operating condition. Consider a system whose input is $x(t)$ nd output is $y(t)$. The relationship between $y(t)$ and $x(t)$ is given by

$$y = f(x) \tag{4-17}$$

f the normal operating condition corresponds to $\bar{x}$, $\bar{y}$, then Eq. (4-17) may be xpanded into a Taylor series about this point as follows:

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x-\bar{x})^2 + \cdots \tag{4-18}$$

vhere the derivatives df/dx, d^2f/dx^2, . . . are evaluated at $x = \bar{x}$. If the variation $x - \bar{x}$ is small, we may neglect the higher-order terms in $x - \bar{x}$. Then Eq. (4-18) nay be written

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \tag{4-19}$$

vhere

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=\bar{x}}$$

Equation (4-19) may be rewritten as

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \tag{4-20}$$

which indicates that $y - \bar{y}$ is proportional to $x - \bar{x}$. Equation (4-20) gives a lir mathematical model for the nonlinear system given by Eq. (4-17).

Next, consider a nonlinear system whose output y is a function of two in x_1 and x_2, so that

$$y = f(x_1, x_2) \tag{4}$$

In order to obtain a linear approximation to this nonlinear system, we may exp Eq. (4-21) into a Taylor series about the normal operating point $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. T Eq. (4-21) becomes

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2)\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1-\bar{x}_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2-\bar{x}_2)^2\right] + \cdots$$

where the partial derivatives are evaluated at $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$. Near the nor operating point, the higher-order terms may be neglected. The linear mathemat model of this nonlinear system in the neighborhood of the normal operating co tion is then given by

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

where

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$K_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\bar{x}_1,\, x_2=\bar{x}_2}$$

$$K_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\bigg|_{x_1=\bar{x}_1,\, x_2=\bar{x}_2}$$

Hydraulic servomotor. Figure 4-12 shows a hydraulic servomotor. It is ess tially a pilot-valve-controlled hydraulic power amplifier and actuator. The p valve is a balanced valve, in the sense that the pressure forces acting on it are balanced. A very large power output can be controlled by a pilot valve, which be positioned with very little power.

The operation of this hydraulic servomotor is as follows: If the pilot valv moved to the right, then port I is connected to the supply port, and the pressu oil enters the left-hand side of the power piston. Since port II is connected to drain port, the oil in the right-hand side of the power piston is returned to the dr. The oil flowing into the power cylinder is at high pressure, and the oil flowing from the power cylinder into the drain is at low pressure. The resulting differ in pressure on both sides of the power piston will cause it to move to the The returned oil is pressurized by a pump and is recirculated in the system. W the pilot piston is moved to the left, the power piston will move to the left.

In practice, ports a, b, and c shown in Fig. 4-12 are often made wider th corresponding valves A, B, and C. In this case, there is always leakage t the valve. This improves both the sensitivity and the linearity of the

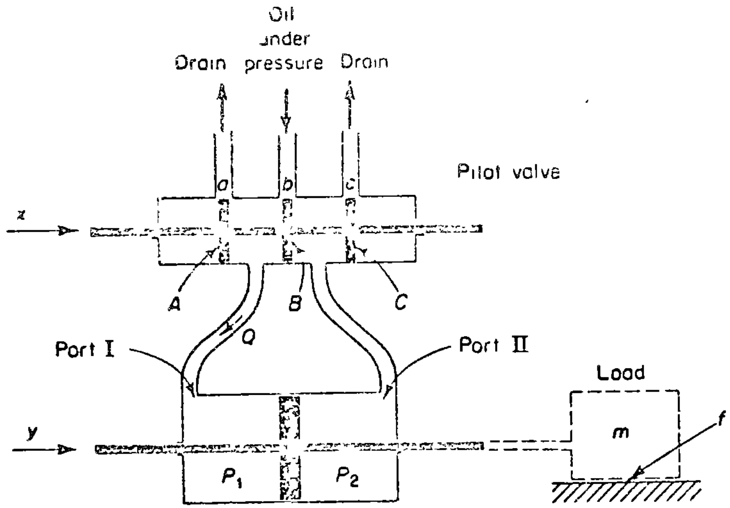


Fig. 4-12. Schematic diagram of a hydraulic servomotor.

servomotor. We shall make this assumption in the following analysis. [Note that sometimes a dither signal, a high-frequency signal of very small amplitude (with respect to the maximum displacement of the valve), is superimposed on the motion of the pilot valve. This also improves the sensitivity and the linearity. In this case also there is leakage through the valve.]

Let us define

Q = rate of flow of oil to the power cylinder, lb/sec
$\Delta P = P_2 - P_1$ = pressure difference across the power piston, lb/in.^{2}
x = displacement of pilot valve, in.

In Fig. 4-12, one can see that Q is a function of x and ΔP. In general, the relationship among the variables Q, x, and ΔP is given by a nonlinear equation:

$$Q = f(x, \Delta P)$$

Linearizing this nonlinear equation near the normal operating point $\bar{Q}, \bar{x}, \Delta\bar{P}$, we obtain

$$Q - \bar{Q} = K_1(x - \bar{x}) - K_2(\Delta P - \Delta\bar{P}) \tag{4-22}$$

where

[illegible]

Note [illegible]

$$Q = K_1 x - K_2 \Delta P \tag{4-23}$$

Figure 4-13 shows this linearized relationship among Q, x, and ΔP. The straight lines shown are the characteristic curves of the linearized hydraulic servomotor. This family of curves consists of equidistant parallel straight lines, parameterized by x.

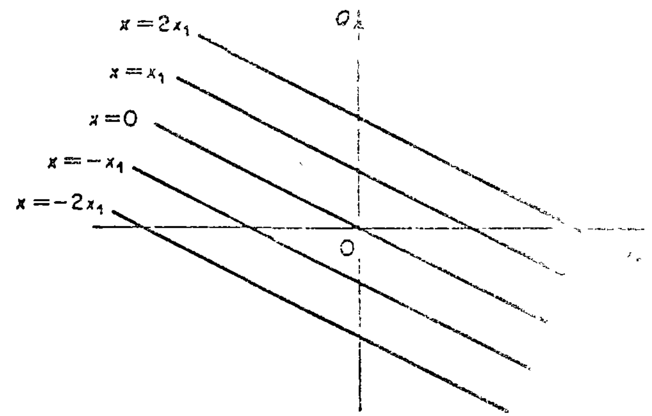


Fig. 4-13. Characteristic curves of the linearized hydraulic servomotor

Referring to Fig. 4-12, we see that the rate of flow of oil Q (lb/sec) is equal to the power piston displacement dy (in.) times the piston area A (in.^{2}) times the density of oil ρ (lb/in.^{3}). Thus, we obtain

$$A\rho\, dy = Q\, dt$$

Notice that for a given flow rate Q, the larger the piston area A is, the lower will be the velocity dy/dt. Hence, if the piston area A is made smaller, the other variables remaining constant, the velocity dy/dt will become higher. Also an increased flow rate Q will cause an increased velocity of the power piston and will make the response time shorter.

Equation (4-23) can now be written as

$$\Delta P = \frac{1}{K_2}\left(K_1 x - A\rho \frac{dy}{dt}\right)$$

The force developed by the power piston is equal to the pressure difference times the piston area A or

$$\text{Force developed by the power piston} = A\,\Delta P$$
$$= \frac{A}{K_2}\left(K_1 x - A\rho\frac{dy}{dt}\right)$$

For a given [illegible] force, if the pressure difference is sufficiently high, the [illegible] cylinder, can be made small. Consequently [illegible] controller, we must make the supply pressure sufficiently high.

Assume that the power piston moves a load consisting of a mass and [illegible] friction. [illegible] developed by the power piston is applied to the load [illegible]

$$m\ddot{y} + f\dot{y} = \frac{A}{K_2}(K_1x - Ap\dot{y})$$

$$m\ddot{y} + \left(f + \frac{A^2p}{K_2}\right)\dot{y} = \frac{AK_1}{K_2}x \tag{4-24}$$

re m is the mass (lb-sec^2/in.) of the load and f is the viscous-friction coefficient ec/in.).

Assuming that the pilot valve displacement x is the input and the power piston lacement y is the output, we find that the transfer function for the hydraulic omotor is, from Eq. (4-24),

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s\left[\left(\frac{mK_2}{AK_1}\right)s + \frac{fK_2}{AK_1} + \frac{Ap}{K_1}\right]}$$

$$= \frac{K}{s(Ts+1)} \tag{4-25}$$

re

$$K = \frac{1}{\frac{fK_2}{AK_1} + \frac{Ap}{K_1}} \quad \text{and} \quad T = \frac{mK_2}{fK_2 + A^2p}$$

n Eq. (4-25), one can see *that this transfer function is of the second order.* e ratio $mK_2/(fK_2 + A^2p)$ is negligibly small or the time constant T is negligible, ransfer function can be simplified to give

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

A more detailed analysis shows that if oil leakage, compressibility (including effects of dissolved air), expansion of pipelines, etc., are taken into considera-, the transfer function becomes

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

re T_1 and T_2 are time constants. As a matter of fact, these time constants end on the volume of oil in the operating circuit. The smaller the volume, smaller the time constants.

BLOCK DIAGRAMS

A control system may consist of a number of components. In order to show the ctions performed by each component, in control engineering, we commonly a diagram called the "block diagram."

Block diagrams. A block diagram of a system is a pictorial representation he functions performed by each component and of the flow of signals. Such iagram depicts the interrelationships which exist between the various com-

ponents. Different from a purely abstract, mathematical representation, a blo diagram has the advantage of indicating more realistically the signal flows of t actual system.

In a block diagram, all system variables are linked to each other through fu tional blocks. The "functional block," or simply "block," is a symbol for the matl matical operation on the input signal to the block which produces the outp The transfer functions of the components are usually entered in the correspondi blocks, which are connected by arrows to indicate the direction of the flow of signa Note that the signal can pass only in the direction of the arrows. Thus, a blo diagram of a control system explicitly shows a unilateral property.

Figure 4-14 shows an element of the block diagram. The arrowhead pointi toward the block indicates the input and the arrowhead leading away from t block represents the output. Such arrows are referred to as signals.

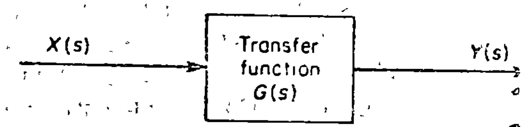


Fig. 4-14. Element of a block diagram.

Note that the dimensions of the output signal from the block are the dimensio of the input signal multiplied by the dimensions of the transfer function in the bloc

The advantages of the block diagram representation of a system lie in the fa that it is easy to form the overall block diagram for the entire system by mere connecting the blocks of the components according to the signal flow and th it is possible to evaluate the contribution of each component to the overall pe formance of the system.

In general, the functional operation of the system can be visualized more readi by examination of the block diagram than by examination of the physical syste itself. A block diagram contains information concerning dynamic behavio but it does not contain any information concerning the physical construction o the system. Therefore, many dissimilar and unrelated systems can be represente by the same block diagram.

It should be noted that in a block diagram the main source of energy is no explicitly shown and, also, that a block diagram of a given system is not unique A number of different block diagrams may be drawn for a system, depending upo the viewpoint of the analysis.

Error detector. The error detector produces a signal which is the differenc between the reference input and the feedback signal of the control system. I design, the choice of the error detector is quite important and must be carefully decided. This is because any imperfections in the error detector will inevitably impair the performance of the entire system. The block diagram representation of the error detector is shown in Fig. 4-15.

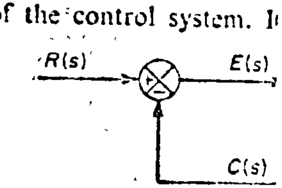


Fig. 4-15. Block diagram of an error detector

Note that a circle with a cross is the symbol which icates a summing operation. The plus or minus sign at each arrowhead in-ates whether that signal is to be added or subtracted. It is important that the antities being added or subtracted have the same dimensions and the same units.

Block diagram of a closed-loop system. Figure 4-16 shows an example of a ock diagram of a closed-loop system. The output $C(s)$ is fed back to the summing int, where it is compared with the reference input $R(s)$. The closed-loop nature the system is clearly indicated by the figure. The output of the block, $C(s)$ in this se, is obtained by multiplying the transfer function $G(s)$ by the input to the block, $s)$.

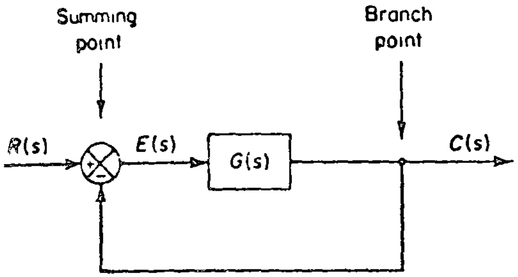
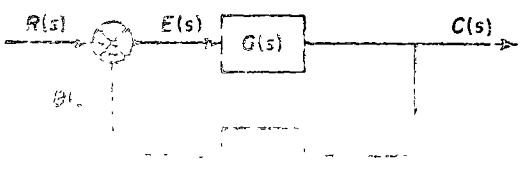


Fig. 4-16. Block diagram of a closed-loop system.

Any linear control system may be represented by a block diagram consisting blocks, summing points, and branch points. A branch point is the point from hich the output signal from a block goes concurrently to other blocks or summing oints.

When the output is fed back to the summing point for comparison with the put, it is necessary to convert the form of the output signal to that of the input nal. For example, in a temperature control system, the output signal is usually controlled temperature. The output signal, which has the dimension of tempera-re, must be converted to a force or position before it can be compared with the put signal. This conversion is accomplished by the feedback element whose trans- function is $H(s)$, as shown in Fig. 4-17. Another important role of the feedback ement is to modify the output before it is compared with the input. In the present ample, the feedback signal which is fed back to the summing point for compari-on with the input is $B(s) = H(s)C(s)$.



[illegible]

The ratio [illegible] is called the open-loop [illegible]

Open-loop transfer function $= \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$

The ratio of the output $C(s)$ to the actuating error signal $E(s)$ is called the feedforward transfer function, so that

$$\text{Feedforward transfer function} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

If the feedback transfer function is unity, then the open-loop transfer function and the feedforward transfer function are the same. For the system shown in Fig. 4-17, the output $C(s)$ and input $R(s)$ are related as follows:

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - B(s)$$
$$= R(s) - H(s)C(s)$$

Eliminating $E(s)$ from these equations gives

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

or

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

The transfer function relating $C(s)$ to $R(s)$ is called the closed-loop transfer function. This transfer function relates the closed-loop system dynamics to the dynamics of the feedforward elements and feedback elements.

From Eq. (4-26) $C(s)$ is given by

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Thus the output of the closed-loop system clearly depends on both the closed-loop transfer function and the nature of the input.

Closed-loop system subjected to a disturbance. Figure 4-18 shows a closed-loop system subjected to a disturbance. When two inputs (the reference input and disturbance) are present in a linear system, each input can be treated independently of the other; and the outputs corresponding to each input alone can be added to give the complete output. The way each input is introduced into the system is shown at the summing point by either a plus or minus sign.

Consider the system shown in Fig. 4-18. In examining the effect of the dist

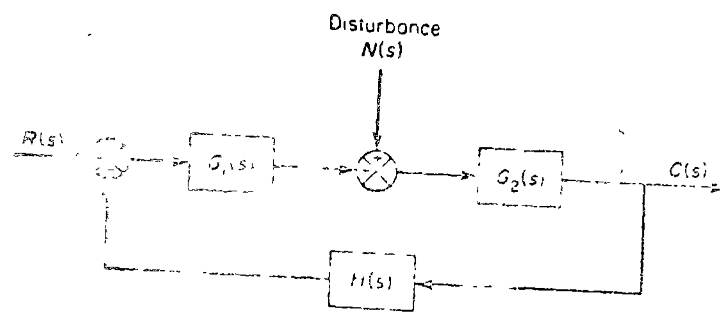


Figure 4-18. Closed-loop system subjected to a dist

ce $N(s)$, we may assume that the system is at rest initially with zero error; we then calculate the response $C_N(s)$ to the disturbance only. This response can found from

$$\frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

the other hand, in considering the response to the reference input $R(s)$, we may ime that the disturbance is zero. Then the response $C_R(s)$ to the reference input can be obtained from

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

response to the simultaneous application of the reference input and disturce can be obtained by adding the two individual responses. In other words, response $C(s)$ due to the simultaneous application of the reference input $R(s)$ disturbance $N(s)$ is given by

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s)$$
$$= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)R(s) + N(s)]$$

Consider now the case where $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ and $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$. In case, the closed-loop transfer function $C_N(s)/N(s)$ becomes almost zero, the effect of the disturbance is suppressed. This is an advantage of the closed-system.

On the other hand, the closed-loop transfer function $C_R(s)/R(s)$ approaches (s) as the gain of $G_1(s)G_2(s)H(s)$ increases. This means that if $|G_1(s)G_2(s)H(s)|$, then the closed-loop transfer function $C_R(s)/R(s)$ becomes independent of $s)$ and $G_2(s)$ and becomes inversely proportional to $H(s)$ so that the variations $G_1(s)$ and $G_2(s)$ do not affect the closed-loop transfer function $C_R(s)/R(s)$. This is ther advantage of the closed-loop system. It can easily be seen that any closed-system with unity feedback, $H(s) = 1$, tends to equalize the input and output.

Procedures for drawing block diagrams. To draw a block diagram for a system, write the equations which describe the dynamic behavior of each component, take the Laplace transforms of these equations, assuming zero initial condiis, and represent each Laplace-transformed equation individually in block form. ally, assemble the elements into a complete block diagram.

As an example, consider the RC circuit shown in Fig. 4-19 (a). The equations this circuit are

$$i = \frac{e_i - e_0}{R} \tag{4-27}$$

$$e_0 = \frac{\int i\,dt}{C} \tag{4-28}$$

Laplace transforms of Eqs. (4-27) and (4-28), with an initial condition of zero, ome

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_0(s)}{R} \tag{4-29}$$

$$E_0(s) = \frac{I(s)}{Cs} \tag{4-30}$$

Equation (4-29) represents a summing operation, and the corresponding diagram is shown in Fig. 4-19 (b). Equation (4-30) represents the block as shown in Fig. 4-19 (c). Assembling these two elements, we obtain the overall block diagram for the system as shown in Fig. 4-19 (d).

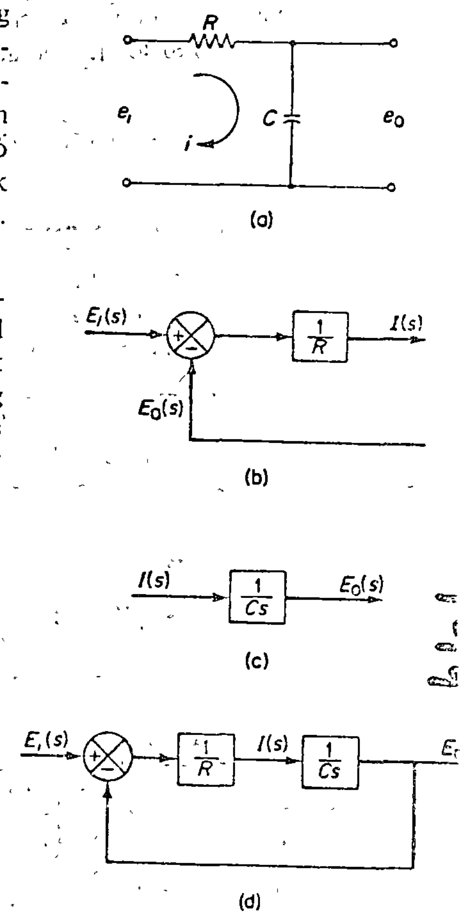


Fig. 4-19. (a) RC circuit; (b) block diagram representing Eq (4-29), (c) block diagram representing Eq. (4-30), (d) block diagram of the RC circuit.

Block diagram reduction. It is important to note that blocks can be connected in series only if the output of one block is not affected by the next following block. If there are any loading effects between the components, it is necessary to combine these components into a single block.

Any number of cascaded blocks representing nonloading components can be replaced by a single block, the transfer function of which is simply the product of the individual transfer functions.

A complicated block diagram involving many feedback loops can be simplified by a step-by-step rearrangement, using rules of block diagram algebra. Some of these important rules are given in Table 4-3. They are obtained by writing the same equation in a different way. Simplification of the block diagram by rearrangements and substitutions reduces considerably the labor needed for subsequent mathematical analysis. It should be noted, however, that as the block diagram is simplified, new blocks become more complex because new poles and zeros are generated.

In simplifying a block diagram, remember the following:

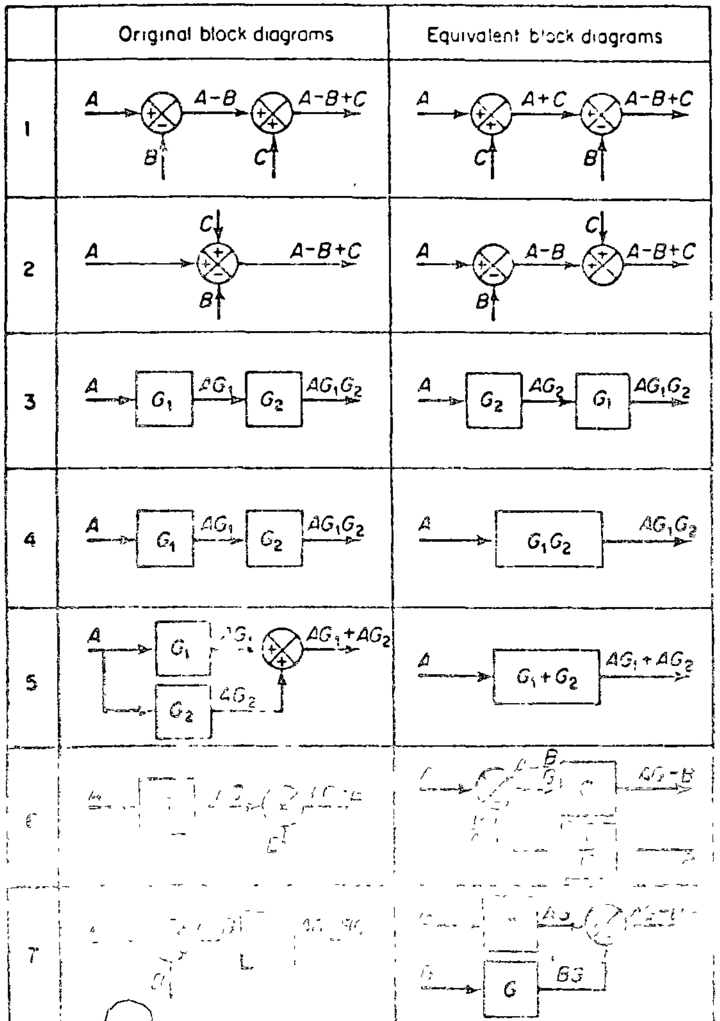
1. The product of the transfer functions in the feedforward direction must remain the same
2. The product of the transfer functions around the loop must remain the same.

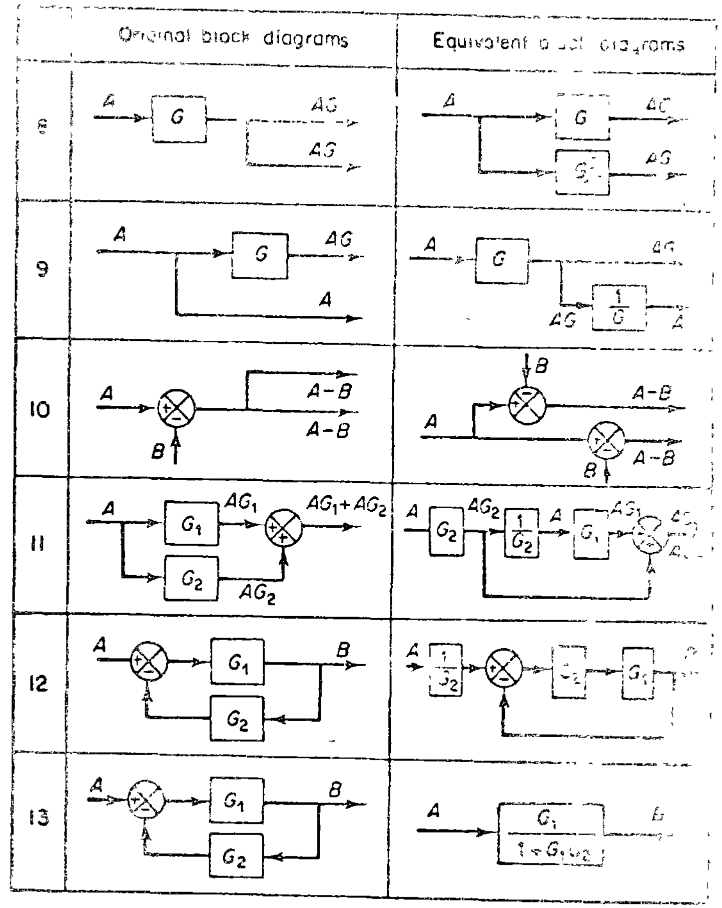
A general rule for simplifying a block diagram is to move branch points and summing points, interchange summing points, and then reduce internal feedback loops.

As an example of the use of the rules in Table 4-3, consider the system shown in Fig. 4-20 (a). By moving the summing point of the negative feedback loop containing H_2 outside the positive feedback loop containing H_1, we obtain Fig. 4-20 (b). Eliminating the positive feedback loop, we obtain Fig. 4-20 (c). Then, eliminating the loop containing H_2/G_1, we obtain Fig. 4-20 (d). Finally, by eliminating the feedback loop, we obtain Fig. 4-20 (e).

Notice that the numerator of the closed-loop transfer function $C(s)/R(s)$ is the product of the transfer functions of the feedforward path. The denominator of $C(s)/R(s)$ is equal to

Table 4-3. RULES OF BLOCK DIAGRAM ALGEBRA





$$1 - \sum \text{(product of the transfer functions around each loop)}$$
$$= 1 - (G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - \cdots$$
$$= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + \cdots$$

(The positive feedback loop yields a negative term in the denominato

4-5 DERIVING TRANSFER FUNCTIONS OF PHYSICAL SYSTEMS

Control systems may consist of components of different types, such as electrical, mechanical, hydraulic, pneumatic, or thermal. A control engineer must be familiar with the fundamental laws underlying these components.

In Sections 4-2 and 4-3, we derived transfer functions for several ... In this section we shall present additional examples showing the derivation of transfer functions of various types of physical systems.

In deriving transfer functions, note the following:

1. In approximating physical systems by linear lumped-parameter mod-

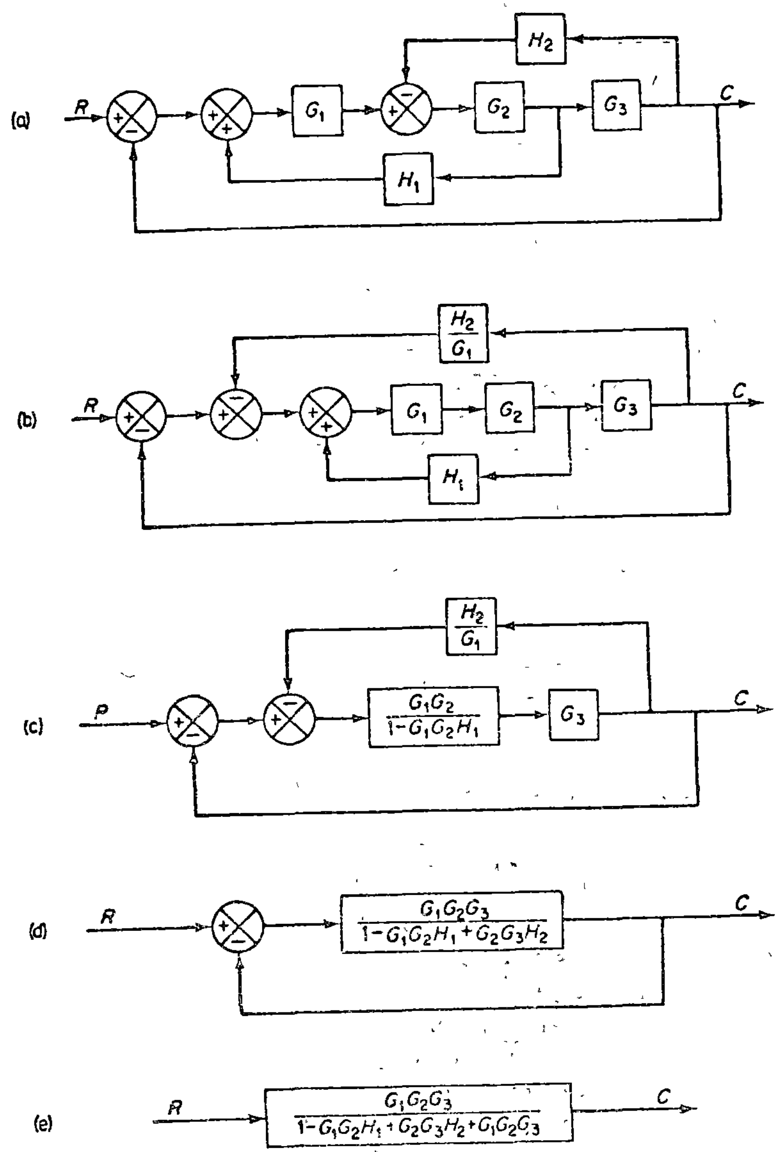


Fig. 4-20. (a) Multiple-loop system; (b)–(e) successive reduction of the block diagram shown in (a).

ertain assumptions are necessary. In general, these assumptions depend on the perating ranges of the system. Assumptions which may be good for certain perating conditions may not be suitable for different ones. In practice, making roper assumptions is a very important part of the analysis of a system since the ccuracy of the results depends on the validity of such assumptions. In this connecion the engineer must realize that although the analytically obtained transfer ...tions show clearly the general effect of variations in system parameters on

the solution of the equation, numerical predictions obtainable from the analytical study of physical systems may not be accurate. In other words, although qualitative characteristics of the system dynamics may be seen clearly from the transfer function, quantitative information may not necessarily be accurate. If quantitative accuracy is needed, it will be necessary to carry out experimental studies in addition to analytical ones.

2. It is desirable to check the validity of the transfer function by assuming that certain parameters of the system are either zero or infinity. Since this simplifies the transfer function, its validity can be checked easily.

The transfer functions obtained in the following are based on the assumption that there is no loading effect upon the output. (Remember that if there is any loading effect, it must be accounted for when the transfer function is derived.)

Mechanical and Electromechanical Systems

Seismograph. Figure 4-21 shows a schematic diagram of a seismograph. A seismograph indicates the displacement of its case with respect to inertial space It is used to measure the ground displacement during earthquakes.

Let us define

x_i = displacement of the case relative to inertial space

x_0 = displacement of the mass m relative to inertial space

$y = x_0 - x_i$ = displacement of the mass m relative to the case

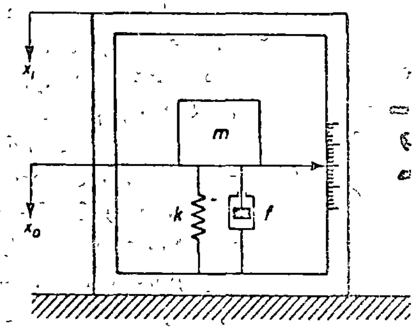


Fig. 4-21. Schematic diagram of a seismograph.

(Note that since gravity produces a steady spring deflection, we measure the displacement x_0 of mass m from the static equilibrium position.) The equation for this system is found to be

$$m\ddot{x}_0 + f(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k(x_0 - x_i) = 0$$

By substituting $x_0 = y + x_i$ in this last equation, we obtain a differential equation in y. (Note that y is a signal we can actually measure.)

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_i \tag{4-31}$$

Taking the Laplace transform of Eq. (4-31), assuming zero initial conditions we obtain

$$[ms^2 + fs + k]Y(s) = -ms^2X_i(s)$$

Considering x_i as input and y as output, the transfer function is

$$\frac{Y(s)}{X_i(s)} = \frac{-ms^2}{ms^2 + fs + k}$$

$$= -\frac{s^2}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

For very low frequency inputs, the mass m follows the case up and down, and the spring deflection is quite small. If the input x_i consists of signals whose frequencies are very much lower than $\sqrt{k/m}$, then the transfer function may be approximated by

$$\frac{Y(j\omega)}{X_i(j\omega)} = \frac{\omega^2}{\frac{k}{m}} \tag{4-32}$$

[Note that in Eq. (4-32), s is replaced by $j\omega$ Such a transfer function is called a sinusoidal transfer function. For details, refer to Chapter 9.] As an example, if $y(t)$ is found to be of sinusoidal form $A \sin \omega t$, where $\omega \ll \sqrt{k/m}$, then from the recording of $y(t)$ the input signal $x_i(t)$ can be determined as $(A/\omega^2)(k/m) \sin \omega t$.

Since in seismographs the undamped natural frequency $\sqrt{k/m}$ is made small, if the input frequency is much higher than $\sqrt{k/m}$, the mass m will remain almost fixed in inertial space and the motion of the case will indicate the relative motion between the case and mass. If the input signal x_i has a very high frequency, then the transfer function may be approximated by

$$\frac{Y(j\omega)}{X_i(j\omega)} = -1$$

This implies that if $y(t)$ is found to be $A \sin \omega t$, where $\omega \gg \sqrt{k/m}$, then the input $x_i(t)$ can be determined as $-A \sin \omega t$.

Servomotors. The servomotors we shall consider here are two-phase servomotors, armature-controlled dc motors, and field-controlled dc motors. We shall first consider the effect of load on the servomotor dynamics.

Effect of load on servomotor dynamics. Most important among the characteristics of the servomotor is the maximum acceleration obtainable. For a given available torque, the rotor moment of inertia must be a minimum. Since the servomotor operates under continuously varying conditions, acceleration and deceleration of the rotor occur from time to time. The servomotor must be able to absorb mechanical energy as well as to generate it. The performance of the servomotor when used as a brake should be satisfactory.

Let J_m and f_m be, respectively, the moment of inertia and friction of the rotor, and let J_L and f_L be, respectively, the moment of inertia and friction of the load on the output shaft. Assume that the moment of inertia and friction of the gear train are either negligible or included in J_L and f_L, respectively. Then, the equivalent moment of inertia J [illegible] referred to the motor shaft and equivalent friction f_{eq} referred to the motor shaft [illegible] (for [illegible] see Problem [illegible]-4-2)

[illegible]

where [illegible] the load. If the [illegible] the load referred to the motor shaft and $J_m \gg n^2 J_L$ [illegible] is negligible with [illegible] to the rotor moment of inertia. A similar argument applies to the load friction. In general, when the gear ratio n is small, the transfer function of the electric servomotor may be obtained without taking into account the load moment of inertia and friction. If neither J_m nor $n^2 J_L$ is negligibly small compared with the other, however, then the equivalent moment of inertia J_{eq} must be used for evaluating the transfer function of the motor-load combination.

Two-phase servomotors. A two-phase servomotor, commonly used for instrument servomechanisms, is similar to a conventional two-phase induction motor except for its special design considerations. It uses a squirrel-cage rotor. [illegible] has a small diameter-to-length ratio to minimize the moment of inertia and [illegible] obtain a good accelerating characteristic. The two-phase servomotor is very [illegible] and reliable.

In many practical applications, the power range for which two-phase [illegible]tors are used is between a fraction of a watt and a hundred watts.

A schematic diagram of a two-phase servomotor is shown in Fig [illegible] Here one phase (fixed field) of the motor is continuously excited from the [illegible] voltage, the frequency of which is usually 60, 400, or 1000 cycles; and [illegible] phase (control field) is driven with the control voltage (a suppressed carrier signal) which is 90° phase-shifted in time with respect to the reference voltage. ([illegible] control voltage is of variable magnitude and polarity.)

Note that the voltage of the control phase is made 90° out of phase with respect to the voltage of the fixed phase. The stator windings for the fixed [illegible] phases are placed 90° apart in space. These considerations are based [illegible] the torque is produced most efficiently on a shaft when the phase windings [illegible] in space quadrature and voltages in the two phases are in time quadrature.

The two stator windings are normally excited by a two-phase power [illegible] If a two-phase power supply is not available, however, then the fixed phase [illegible] may be connected to a single-phase power supply through a capacitor, [illegible] provide the 90° phase shift. The amplifier to which the control phase [illegible] connected is supplied from the same single-phase power supply.

In the two-phase servomotor, the polarity of the control voltage [illegible] the direction of rotation. The instantaneous control voltage $e_c(t)$ is of [illegible]

$$\begin{aligned} e_c(t) &= E_c(t) \sin \omega t && \text{for} \quad E_c(t) > 0 \\ &= |E_c(t)| \sin (\omega t + \pi) && \text{for} \quad E_c(t) < 0 \end{aligned}$$

This means that a change in the sign of $E_c(t)$ shifts the phase by π radians. [illegible] a change in the sign of the control voltage $E_c(t)$ reverses the direction of rotation of the motor. Since the reference voltage is constant, the torque T and angular speed $\dot{\theta}$ are also functions of the control voltage $E_c(t)$. If variations in $E_c(t)$ are slow compared with the ac supply frequency, the torque developed by the motor is proportional to $E_c(t)$. Figure 4-22 (b) shows the curves $e_c(t)$ versus t, $E_c(t)$ versus t, and torque $T(t)$ versus t. The angular speed at steady state is proportional to the control voltage $E_c(t)$.

A family of torque-speed curves, when the rated voltage is applied to the fixed phase winding and various voltages are applied to the control phase winding,

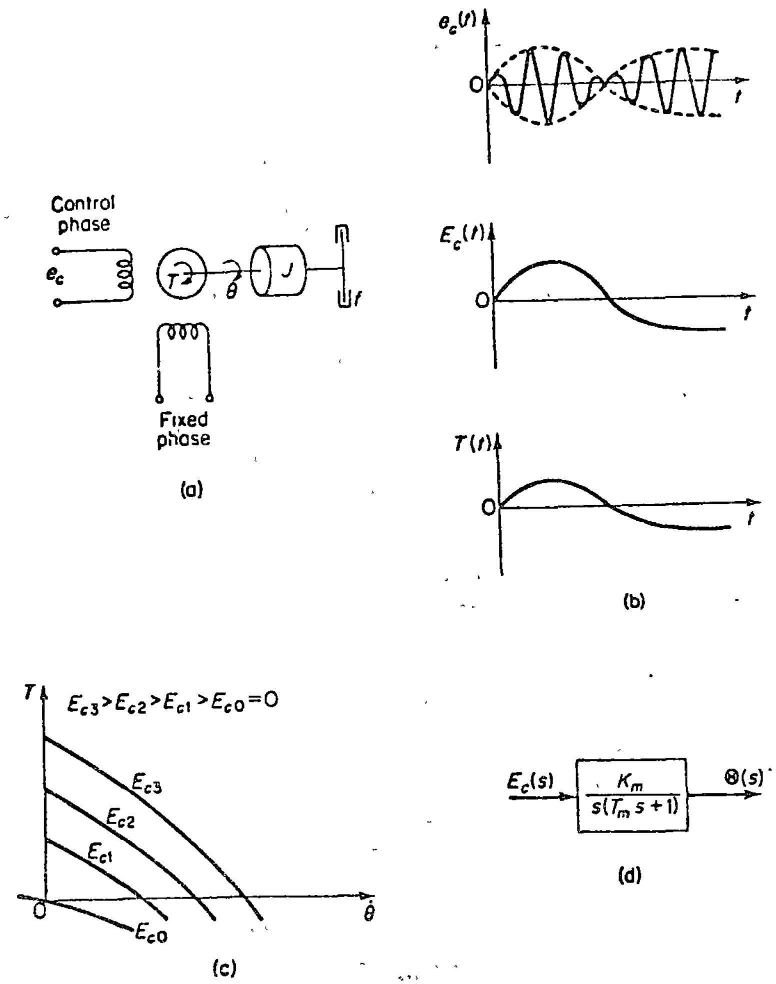


Fig. 4-22. (a) Schematic diagram of a two-phase servomotor; (b) curves showing $e_c(t)$ versus t, $E_c(t)$ versus t, and $T(t)$ versus t; (c) torque-speed curves; (d) block diagram of a two-phase servomotor.

gives steady-state characteristics of the two-phase servomotor. The transfer function of a two-phase servomotor may be obtained from such torque-speed curves if they are parallel and equidistant straight lines. Generally, the torque-speed curves are parallel for a relatively wide speed range but they may not be equidistant; i.e., for a given speed, the torque may not vary linearly with respect to the control voltage. In a low-speed region, however, the torque-speed curves are usually straight lines and equidistant in a region of low control voltages. Since the servomotor seldom operates at high speeds, the linear portions of the torque-speed curves may be extended to the high-speed region. If the assumption is made that they are equidistant for all control voltages, then the servomotor may be considered linear

Figure 4-22 (c) shows a set of torque-speed curves for various values of cont voltages. The torque-speed curve corresponding to zero control voltage pas through the origin. Since the slope of this curve is normally negative, if the cont phase voltage becomes equal to zero, the motor develops that torque necess to stop the rotation.

The servomotor provides a large torque at zero speed. This torque is necess for rapid acceleration. From Fig. 4-22 (c), we see that the torque T generated a function of the motor-shaft angular speed $\dot{\theta}$ and the control voltage E_c. T equation for any torque-speed line is

$$T = -K_n\dot{\theta} + K_c E_c \qquad (4\text{-}$$

where K_n and K_c are positive constants. The torque-balance equation for the tv phase servomotor is

$$T = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \qquad (4\text{-}$$

where J is the moment of inertia of the motor and load referred to the mo shaft and f is the viscous-friction coefficient of the motor and load referred to motor shaft. From Eqs. (4-33) and (4-34), we obtain the following equatic

$$J\ddot{\theta} + (f + K_n)\dot{\theta} = K_c E_c$$

Noting that the control voltage E_c is the input and the displacement of the mo shaft is the output, we see that the transfer function of the system is given

$$\frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{Js^2 + (f + K_n)s} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \qquad (4\text{-}$$

where

$K_m = K_c/(f + K_n) =$ motor gain constant
$T_m = J/(f + K_n) =$ motor time constant

Figure 4-22 (d) shows a block diagram for this system. From the transfer fu tion of this system, we can see that $(f + K_n)s$ is a viscous-friction term produc by the motor and load. Thus, K_n, the negative of the slope of the torque-speed cur together with f, defines the equivalent viscous-friction of the motor and load co bination. For steeper torque-speed curves, the damping of the motor is high If the rotor inertia is sufficiently low, then for most of the frequency range have $|T_m s| \ll 1$ and the servomotor acts as an integrator.

The transfer function given by Eq. (4-35) is based on the assumption that servomotor is linear. In practice, however, it is not quite so. For torque-speed cur not quite parallel and equidistant, the value of K_n is not constant and, therefo the values of K_m and T_m are also not constant; they vary with the control volta

Armature-controlled dc motors. A dc motor is often employed in a cont system where an appreciable amount of shaft power is required. The dc mot are much more efficient than two-phase ac servomotors.

The dc motors have separately excited fields. They are either armature-control with fixed field or field-controlled with fixed armature current. For example,

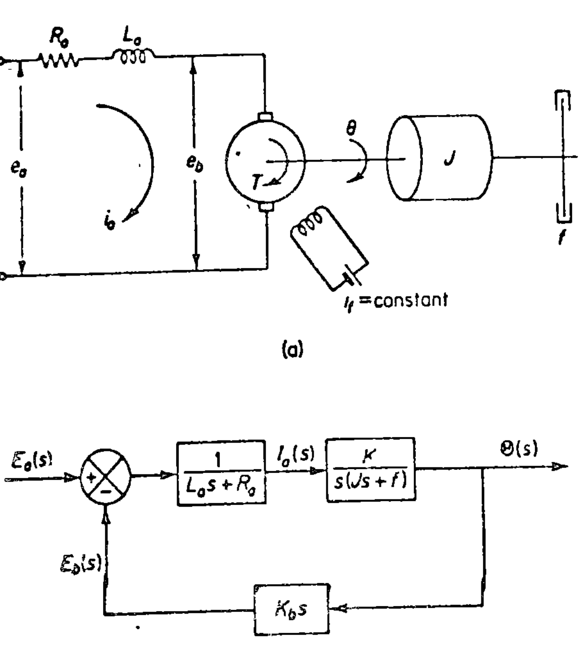


Fig. 4-23. (a) Schematic diagram of an armature-controlled dc motor; (b) block diagram.

motors used in instruments employ a fixed permanent-magnet field, and the control signal is applied to the armature terminals.

The performance characteristics of the armature-controlled dc motor resemble the idealized characteristics of the two-phase ac servomotor.

Consider the armature-controlled dc motor shown in Fig. 4-23 (a). In this system,

R_a = armature-winding resistance, ohms
L_a = armature-winding inductance, henrys
i_a = armature-winding current, amperes
i_f = field current, amperes
e_a = applied armature voltage, volts
e_b = back emf, volts
θ = angular displacement of the motor shaft, radians
T = torque delivered by the motor, lb-ft
J = equivalent moment of inertia of the motor and load referred to the motor shaft, [illegible]
f = equivalent viscous-friction coefficient of the motor and load referred to the motor shaft, [illegible]

The torque developed by the motor is proportional to the product of the armature current i_a and the air gap flux ψ, which in turn is proportional to the field current or

$$\psi = K_f i_f$$

where K_f is a constant. The torque T can, therefore, be written

$$T = K_f i_f K_1 i_a$$

where K_1 is a constant.

In the armature-controlled dc motor, the field current is held constant. F[illegible] a constant field current, the flux becomes constant, and the torque becomes direc[illegible] proportional to the armature current so that

$$T = Ki_a$$

where K is a motor-torque constant. When the armature is rotating, a volta[illegible] proportional to the product of the flux and angular veclocity is induced in the arm[illegible]ture. For a constant flux, the induced voltage e_b is directly proportio[illegible] angular velocity $d\theta/dt$. Thus,

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \qquad (4\text{-}[illegible])$$

where K_b is a back emf constant.

The speed of an armature-controlled dc motor is controlled by the [illegible] voltage e_a. The armature voltage e_a is supplied by an amplifier (or by a gen[illegible] which is supplied by an amplifier). The differential equation for the arm[illegible] circuit is

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \qquad (4\text{-}[illegible])$$

The armature current produces the torque which is applied to the inertia [illegible] [illegible]on; hence

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} = T = Ki_a$$

Assuming that all initial conditions are zero, and taking the Laplace [illegible] of Eqs. (4-36), (4-37), and (4-38), we obtain the following equations:

$$K_b s\Theta(s) = E_b(s)$$

$$(L_a s + R_a)I_a(s) + E_b(s) = E_a(s)$$

$$(Js^2 + fs)\Theta(s) = T(s) = KI_a(s)$$

Considering $E_a(s)$ as the input and $\Theta(s)$ as the output, we can construct [illegible] diagram from Eqs. (4-39), (4-40), and (4-41), as shown in Fig. 4-23 (b). The [illegible] of the back emf is seen to be the feedback signal proportional to the speed of [illegible] motor. The back emf thus increases the effective damping of the system. T[illegible] transfer function of this system is obtained as

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a J s^2 + (L_a f + R_a J)s + R_a f + KK_b]} \qquad (4\text{-}$$

The inductance L_a in the armature circuit is usually small and may be neglec[illegible]. If L_a is neglected, then the transfer function given by Eq. (4-42) reduces to

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \qquad (4\text{-}$$

ere

$K_m = K/(R_a f + KK_b)$ = motor gain constant

$T_m = R_a J/(R_a f + KK_b)$ = motor time constant

From Eqs. (4-42) and (4-43), it can be seen that the transfer functions involve term $1/s$. Thus, this system possesses an integrating property. In Eq. (4-43), tice that the time constant of the motor is smaller for a smaller R_a and smaller With small J, as the resistance R_a is reduced, the motor-time constant approaches o, and the motor acts as an ideal integrator.

---

ample 4-1. Positional Servomechanism. Obtain the closed-loop transfer function for positional servomechanism shown in Fig. 4-24. Assume that the input and output of system are the input shaft position and the output shaft position, respectively. Asne the following numerical values for system constants:

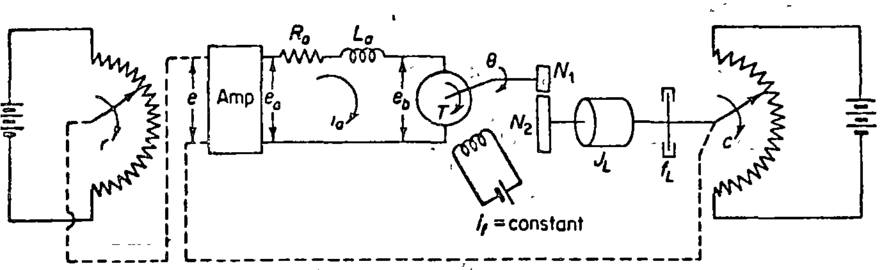


Fig. 4-24. Positional servomechanism.

r = angular displacement of the reference input shaft, radians
c = angular displacement of the output shaft, radians
θ = angular displacement of the motor shaft, radians
K_1 = gain of the potentiometric error detector = $24/\pi$ volts/rad
K_p = amplifier gain = 10 volts/volt
e_a = applied armature voltage, volts
e_b = back emf, volts
R_a = armature-winding resistance = 0.2 ohms
L_a = armature-winding inductance = negligible
i_a = armature-winding current, amperes
K_b = back emf constant = 5.5×10^{-2} volts-sec/rad
K = motor torque constant = 6×10^{-5} lb-ft/amp
J_m = moment of inertia of the motor = 1×10^{-5} lb-ft-sec²
f_m = viscous-friction coefficient of the motor = negligible
J_L = moment of inertia of the load = 4.4×10^{-3} lb-ft-sec²
f_L = viscous-friction coefficient of the load = 4×10^{-2} lb-ft/rad/sec
n = gear ratio N_1/N_2 = 1/10

The equations describing the system dynamics are as follows:

r the potentiometric error detector:

$$E(s) = K_1[R(s) - C(s)] = 7.64[R(s) - C(s)] \tag{4-44}$$

r the amplifier:

$$E_a(s) = K_p E(s) = 10E(s) \tag{4-45}$$

For the armature-controlled dc motor: The equivalent moment of inertia J and equivalent viscous friction f referred to the motor shaft are, respectively,

$$J = J_m + n^2 J_L$$
$$= 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5}$$
$$f = f_m + n^2 f_L$$
$$= 4 \times 10^{-4}$$

Referring to Eq. (4-43), we obtain

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

where

$$K_m = \frac{K}{R_a f + KK_b} = \frac{6 \times 10^{-5}}{(0.2)(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.72$$

$$T_m = \frac{R_a J}{R_a f + KK_b} = \frac{(0.2)(5.4 \times 10^{-5})}{(0.2)(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.13$$

Thus

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{10C(s)}{E_a(s)} = \frac{0.72}{s(0.13s + 1)} \tag{4-46}$$

Using Eqs. (4-44), (4-45), and (4-46), we can draw the block diagram of the system as shown in Fig. 4-25 (a). Simplifying this block diagram, we obtain Fig. 4-25 (b). The closed-loop transfer-function of this system is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{42.3}{s^2 + 7.7s + 42.3}$$

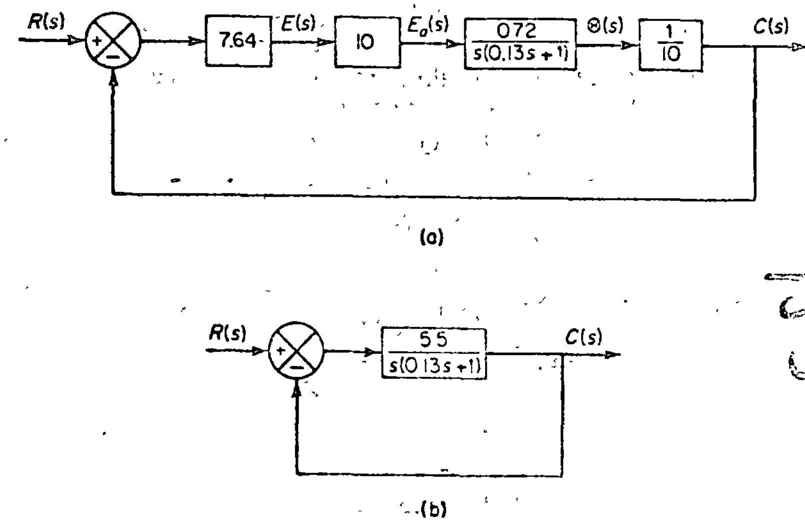


Fig. 4-25. (a) Block diagram of the system shown in Fig. 4-24; (b) simplified block diagram.

Field-controlled dc motor. Figure 4-26 (a) is a schematic diagram of a field-controlled dc motor. Let us define

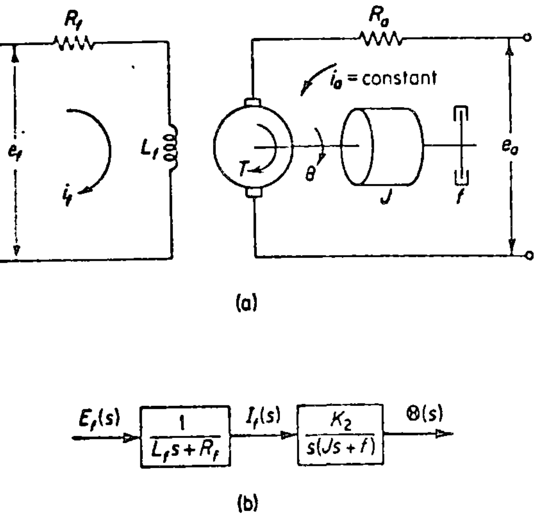


Fig. 4-26. (a) Schematic diagram of a field-controlled dc motor, (b) block diagram.

R_f = field-winding resistance, ohms
L_f = field-winding inductance, henrys
i_f = field-winding current, amperes
e_f = applied field voltage, volts
R_a = sum of the armature resistance and the inserted resistance, ohms
i_a = armature current, amperes
θ = angular displacement of the motor shaft, radians
T = torque developed by the motor, lb-ft
J = equivalent moment of inertia of the motor and load referred to the motor shaft, slug-ft²
f = equivalent viscous-friction coefficient of the motor and load referred to the motor shaft, lb-ft/rad/sec

In this system, the field voltage e_f is the control input. It is the output of an [illegible]plifier. The armature current i_a is maintained constant; this may be accomplished by applying a constant voltage source to the armature and inserting a very large resistance in series with the armature. If the voltage drop in this resistance is large compared with the maximum back emf induced by the rotation of the armature windings in the magnetic field, the effect of the back emf is made small. Then the armature current i_a can be kept approximately constant The efficiency of the motor in such an operation is necessarily low, but such a field-controlled dc motor may be used for a speed control system. Note that maintaining a constant armature current i_a is more difficult than maintaining a constant field current i_f, because of the back emf [illegible]

The torque T [illegible] proportional to [illegible] air-gap flux ψ and [illegible] so that

$$T = K_1 \psi i_a \qquad (4\text{-}47)$$

where K_1 is a constant. Since the air-gap flux ψ and the field current i_f are propor-

tional for the usual operating range of the motor and i_a is assumed to be consta[illegible] Eq. (4-47) can be written as

$$T = K_2 i_f$$

where K_2 is a constant. The equations for this system are

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \qquad (4\text{-}$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_f \qquad (4\text{-}$$

Taking the Laplace transforms of Eqs. (4-48) and (4-49), assuming ze[illegible] conditions, we obtain the following equations:

$$(L_f s + R_f) I_f(s) = E_f(s)$$
$$(Js^2 + fs)\Theta(s) = K_2 I_f(s)$$

Considering $E_f(s)$ as the input and $\Theta(s)$ as the output, we may co[illegible] block diagram from Eqs. (4-50) and (4-51), as shown in Fig. 4-26(b). [illegible] block diagram, the transfer function of this system is obtained as

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(Js + f)} = \frac{K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

where

$K_m = K_2/(R_f f)$ = motor gain constant
$T_f = L_f/R_f$ = time constant of field circuit
$T_m = J/f$ = time constant of inertia-friction element

Since the field inductance L_f is not negligible, the transfer function of [illegible] controlled dc motor is of the third order.

Comparison of the performances of the armature-controlled dc [illegible] the field-controlled dc motor. An advantage of the field control of [illegible] that the amplifier required can be simplified because of the low power [illegible] in the control field The requirement of a constant current source [illegible] a serious disadvantage of field-controlled operations. Providing a const[illegible] source is much more difficult than providing a constant voltage source [illegible] controlled operation has a few more disadvantages over the armature-con[illegible] operation of the dc motor. In the armature-controlled dc motor, the back e[illegible] acts as a damping; in the field-controlled dc motor, however, this is not the ca[illegible] and the necessary damping must be provided by the motor and load. [illegible] of the low efficiency of field-controlled operations, the heat generated in the arm[illegible]ture may be a problem

The time constants of the field-controlled dc motor are generally large [illegible] with the time constants of a comparable armature-controlled motor In mak[illegible] a comparison of time constants between field-controlled operations and armatur[illegible] controlled operations, however, we must take the time constant of the pow[illegible] amplifier into consideration in the study of armature-controlled operations

LIQUID-LEVEL SYSTEMS

Fluid-flow laws. In analyzing systems involving fluid flow, we find it necessary to ivide flow regimes into laminar flow and turbulent flow, according to the magni-ude of the Reynolds number. If the Reynolds number is greater than about 3000 ~ 000, then the flow is turbulent. The flow is laminar if the Reynolds number is less an about 2000. In the laminar case, fluid flow occurs in streamlines with no urbulence. Systems involving turbulent flow often have to be represented by onlinear differential equations, while systems involving laminar flow may be epresented by linear differential equations. (Industrial processes often involve low of liquids through connecting pipes and tanks. The flow in such processes s often turbulent and not laminar.)

Resistance and capacitance of liquid-level systems. It is convenient to introduce he concept of resistance and capacitance to describe dynamic characteristics of iquid-level systems.

Consider the flow through a short pipe connecting two tanks. The resistance for liquid flow in such a restriction is defined as the change in the level difference (the difference of the liquid levels of the two tanks) necessary to cause a unit change in flow rate; namely,

$$R = \frac{\text{change in level difference, ft}}{\text{change in flow rate, ft}^3/\text{sec}}$$

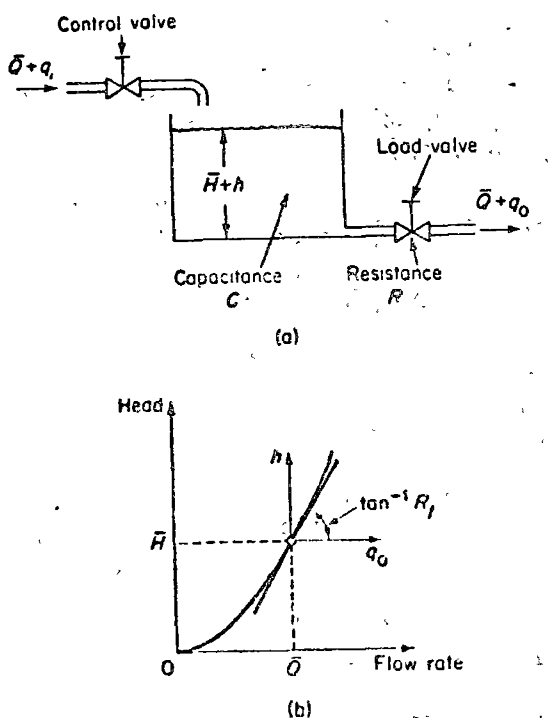


Fig. 4-27. (a) Liquid-level system; (b) head versus flow rate curve.

Since the relationship between the flow rate and level difference differs for laminar flow and turbulent flow, we shall consider both cases in the followi-

Consider the liquid-level system shown in Fig. 4-27 (a). In this system the liq spouts through the load valve in the side of the tank. If the flow through t restriction is laminar, the relationship between the steady-state flow rate and stea state head at the level of the restriction is given by

$$Q = KH$$

where

Q = steady-state liquid flow rate, ft^3/sec
K = coefficient, ft^2/sec
H = steady-state head, ft

Notice that the law governing laminar flow is analogous to Coulomb's law, wh states that the current is directly proportional to the potential difference.

For laminar flow, the resistance R_ℓ is obtained as

$$R_\ell = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

The laminar-flow resistance is constant and is analogous to the electrical resistan

If the flow through the restriction is turbulent, the steady-state flow rate given by

$$Q = K\sqrt{H} \tag{4-5}$$

where

Q = steady-state liquid flow rate, ft^3/sec
K = coefficient, ft$^{2.5}$/sec
H = steady-state head, ft

The resistance R_t for turbulent flow is obtained from

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{2H}{Q}$$

The value of the turbulent-flow resistance depends upon the flow rate and the hea

By use of the turbulent-flow resistance, we may linearize the nonlinear rel tionship between Q and H, as given by Eq. (4-53). Such linearization is vali provided that changes in the head and flow rate from their respective steady-sta values are small. The linearized relationship is given by

$$Q = \frac{2H}{R_t}$$

The value of R_t may be considered constant if the changes in head and flow ra are small.

In many practical cases, the value of the coefficient K in Eq. (4-53), whic depends upon the flow coefficient and the area of restriction, is not known. The the resistance may be determined by plotting the head versus flow rate curv based on experimental data and measuring the slope of the curve at the operatir condition. An example of such a plot is shown in Fig. 4-27 (b), and a steady-sta operating point and resistance R_t are indicated in the figure. (The resistance R

is the slope of the curve at the operating point.) The linear approximation is based on the fact that the actual curve does not differ much from its tangent line if the operating condition does not vary too much.

The capacitance C of a tank is defined to be the change in quantity of stored liquid necessary to cause a unit change in the potential (head). (The potential is the quantity which indicates the energy level of the system.)

$$C = \frac{\text{change in liquid stored, ft}^3}{\text{change in head, ft}}$$

It should be noted that the capacity (ft^3) and the capacitance (ft^2) are different. The capacitance of the tank is equal to its cross-sectional area. If this is constant, the capacitance is constant for any head.

Liquid-level systems. Consider the system shown in Fig. 4-27 (a). The variables are defined as follows:

$\bar{Q}$ = steady-state flow rate (before any change has occurred), ft^3/min
q_i = small deviation of inflow rate from its steady-state value, ft^3/min
q_0 = small deviation of outflow rate from its steady-state value, ft^3/min
$\bar{H}$ = steady-state head (before any change has occurred), ft
h = small deviation of head from its steady-state value, ft

As stated previously, a system can be considered linear if the flow is laminar. Even if the flow is turbulent, the system can be linearized if changes in the variables are kept small. Based on the assumption that the system is either linear or linearized, the differential equation of this system can be obtained as follows: Since the inflow minus outflow during the small time interval dt is equal to the additional amount stored in the tank, we see that

$$C\,dh = (q_i - q_0)\,dt$$

From the definition of resistance, the relationship between q_0 and h is given by

$$q_0 = \frac{h}{R}$$

The differential equation for this system for a constant value of R becomes

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i \tag{4-54}$$

Note that RC is the time constant of the system. Taking the Laplace transforms of both sides of Eq. (4-54), assuming a zero initial condition, we obtain

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s)$$

where

$$H(s) = \mathscr{L}[h] \quad \text{and} \quad Q_i(s) = \mathscr{L}[q_i]$$

If q_i is considered the input and h the output, the transfer function of the system is

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

If, however, q_0 is taken as the output, the input being the same, then the transf function is

$$\frac{Q_0(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

where we have used the relationship

$$Q_0(s) = \frac{1}{R}H(s)$$

Liquid-level systems with interaction. Consider the system shown in Fig. 4-2 In this system, the two tanks interact. Thus the transfer function of [illegible] not the product of two first-order transfer functions.

In the following, we shall assume only small variations of the varia[illegible] the steady-state values. Using the symbols as defined in Fig. 4-28, we [illegible] the following equations for this system:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \tag{4-5}$$

$$C_1\frac{dh_1}{dt} = q - q_1$$

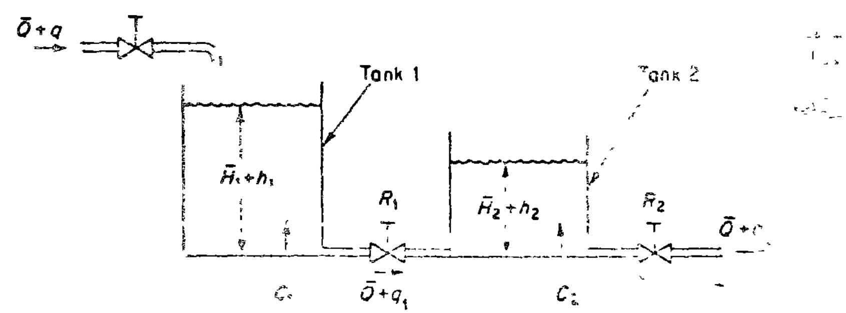
$$\frac{h_2}{R_2} = q_2$$

$$C_2\frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

If q is considered the input and q_2 the output, the transfer function of the system [illegible]

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$$

It is instructive to obtain Eq. (4-59), the transfer function of the system, by block diagram reduction. From Eqs. (4-55) through (4-5[illegible]



$\bar{Q}$. Steady-state flow rate
$\bar{H}_1$ Steady-state liquid level of tank 1
$\bar{H}_2$ Steady-state liquid level of tank 2

Fig. 4-28. Liquid-level system with interaction.

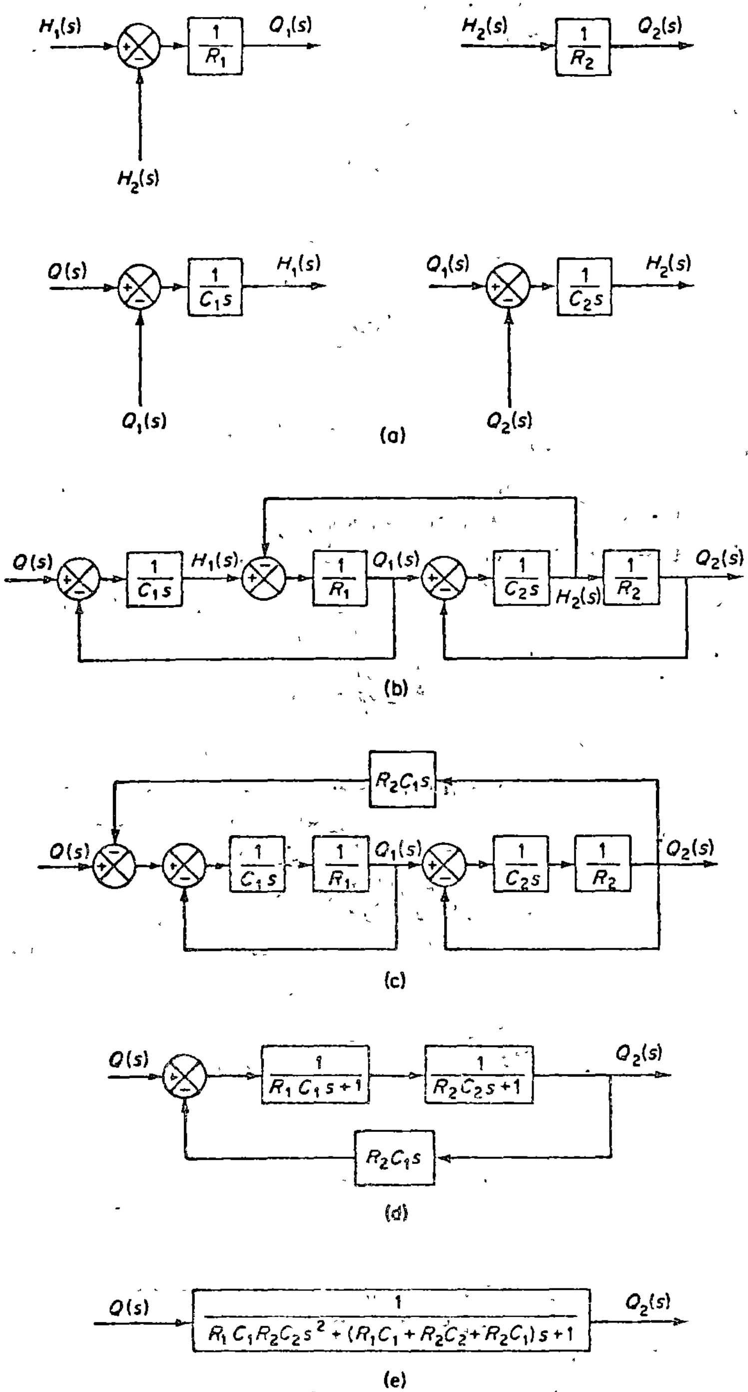


Fig. 4-29. (a) Elements of the block diagram of the system shown in Fig. 4-28; (b) block diagram of the system; (c)-(e) successive reduction of the block diagram.

elements of the block diagram, as shown in Fig. 4-29 (a). By connecting sign properly, we can construct a block diagram, as shown in Fig. 4-29 (b). By use the rules of block diagram algebra given in Table 4-3, this block diagram can simplified, as shown in Fig. 4-29 (c). Further simplification results in Figs. 4-29 and (e). Figure 4-29 (e) is equivalent to Eq. (4-59).

Pressure Systems

Resistance and capacitance of pressure systems. Many industrial process and pneumatic controllers involve the flow of a gas or air through connect pipelines and pressure vessels.

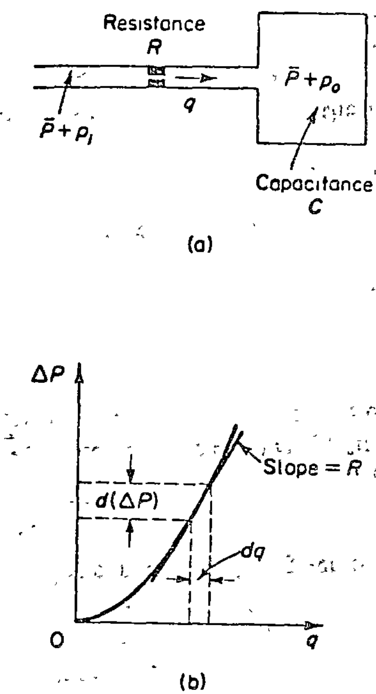


Fig. 4-30. (a) Schematic diagram of a pressure system; (b) pressure difference versus flow curve.

Consider the pressure system shown in Fig. 4-30 (a). The gas flow through the restriction is function of the gas pressure difference $p_i - p_o$. Such a pressure system may be characterized in terms of a resistance and a capacitance.

The gas flow resistance R may be defined as follows:

$$R = \frac{\text{change in gas pressure difference, lb/ft}^2}{\text{change in gas flow rate, lb/sec}}$$

or

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \tag{4-6}$$

where $d(\Delta P)$ is a small change in the gas pressure difference and dq is a small change in the gas flow. Computation of the value of the gas flow resistance R may be quite time-consuming. Experimentally, however, it can be easily determined from a plot of the pressure difference versus flow curve by calculating the slope of the curve at given operating condition, as shown in Fig. 4-30 (b).

The capacitance of the pressure vessel may be defined by

$$C = \frac{\text{change in gas stored, lb}}{\text{change in gas pressure, lb/ft}^2}$$

or

$$C = \frac{dm}{dp} = V\frac{d\rho}{dp} \tag{4-6}$$

where

C = capacitance
m = mass of gas in vessel, lb
p = gas pressure, lb/ft²

V = volume of vessel, ft^3
ρ = density, lb/ft^3

The capacitance of the pressure system depends on the type of expansion process involved. The capacitance can be calculated by use of the ideal gas law. (See Problems A-4-15 through A-4-17.) If the gas expansion process is polytropic and the change of state of the gas is between isothermal and adiabatic, then

$$p\left(\frac{V}{m}\right)^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{constant} \tag{4-62}$$

where

n = polytropic exponent

For ideal gases,

$$p\bar{v} = \bar{R}T \qquad \text{or} \qquad pv = \frac{\bar{R}}{M}T$$

where

p = absolute pressure, lb/ft^2
$\bar{v}$ = the volume occupied by 1 mole of a gas, ft^3/lb-mole
$\bar{R}$ = universal gas constant, ft-lb/lb-mole °R
T = absolute temperature, °R
v = specific volume of gas, ft^3/lb
M = molecular weight of gas per mole, lb/lb-mole

Thus

$$pv = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M}T = R_{gas}T \tag{4-63}$$

where

R_{gas} = gas constant, ft-lb/lb °R

The polytropic exponent n is unity for isothermal expansion. For adiabatic expansion, n is equal to the ratio of specific heats c_p/c_v, where c_p is the specific heat at constant pressure and c_v is the specific heat at constant volume. In many practical cases, the value of n is approximately constant, and thus the capacitance may be considered constant. The value of $d\rho/dp$ is obtained from Eqs. (4-62) and (4-63) as

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{nR_{gas}T}$$

The capacitance is then obtained as

$$C = \frac{V}{nR_{gas}T} \tag{4-64}$$

The capacitance [illegible] vessel [illegible] constant if the tem[illegible] stays constant. [illegible] many prac[illegible] approximately 1.0 ~ 1.2 for gases in [illegible]

Pressure system. [illegible] in Fig. 4-30(a). If we assume only small deviations [illegible] their respective steady-state values, then this system [illegible] considered linear.

Let us define

$\bar{P}$ = gas pressure in the vessel at steady-state (before changes in pressure have occurred), lb/ft^2
p_i = small change in inflow gas pressure, lb/ft^2
p_0 = small change in gas pressure in the vessel, lb/ft^2
V = volume of the vessel, ft^3
m = mass of gas in vessel, lb
q = gas flow rate, lb/sec
ρ = density of gas, lb/ft^3

For small values of p_i and p_0, the resistance R given by Eq. (4-60) becomes const[illegible] and may be written as

$$R = \frac{p_i - p_0}{q}$$

The capacitance C is given by Eq. (4-61), rewritten

$$C = \frac{dm}{dp} = V\frac{d\rho}{dp}$$

Since the pressure change dp_0 times the capacitance C is equal to the gas a[illegible] the vessel during dt seconds, we obtain

$$C\,dp_0 = q\,dt$$

or

$$C\frac{dp_0}{dt} = \frac{p_i - p_0}{R}$$

which can be written as

$$RC\frac{dp_0}{dt} + p_0 = p_i$$

If p_i and p_0 are considered the input and output, respectively, the[illegible] function of the system is

$$\frac{P_0(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

where RC has the dimension of time and is the time constant of the system.

Thermal Systems

Resistance and capacitance of thermal systems. Thermal systems are those which involve the transfer of heat from one substance to another. Thermal systems may be analyzed in terms of resistance and capacitance, although the thermal capacitance and thermal resistance may not be represented accurately as lumped parameters since they are usually distributed throughout the substance. For precise analysis, distributed-parameter models must be used. Here, however, in order to simplify the analysis we shall assume that a thermal system can be represented by a lumped-parameter model, that substances that are characterized by resistance to heat flow have negligible heat capacitance, and that substances that are characterized by heat capacitance have negligible resistance to heat [illegible]

There are three different ways heat can flow from one substance to another: conduction, convection, and radiation.

For conduction or convection heat transfer,

$$q = K\,\Delta\theta$$

where

q = heat flow rate, Btu/sec
$\Delta\theta$ = temperature difference, °F
K = coefficient, Btu/sec °F

The coefficient K is given by

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \quad \text{for conduction}$$
$$= HA \quad \text{for convection}$$

where

k = thermal conductivity, Btu/ft sec °F
A = area normal to heat flow, ft²
ΔX = thickness of conductor, ft
H = convection coefficient, Btu/ft² sec °F

For radiation heat transfer, the heat flow is given by

$$q = K_r(\theta_1^4 - \theta_2^4)$$

where

q = heat flow rate, Btu/sec
K_r = coefficient which depends on the emissivity, size, and configuration of the emanating surface and those of the receiving surface
θ_1 = absolute temperature of emitter, °R
θ_2 = absolute temperature of receiver, °R

Since the constant K_r is a very small number, radiation heat transfer is appreciable only if the temperature of the emitter is very high.

The thermal resistance R for heat transfer between two substances may be defined as follows:

$$R = \frac{\text{change in temperature difference, °F}}{\text{change in heat flow rate, Btu/sec}}$$

The thermal resistance for conduction or convection heat transfer is given by

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

Since the thermal conductivity and convection coefficient are almost constant, the thermal resistance for either conduction or convection is constant. The thermal resistance for radiation heat transfer is given by

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{4K_r\bar{\theta}^3}$$

where

$\bar{\theta}$ = effective temperature difference of the emitter and receiver

The radiation resistance is not constant; it varies. It may be considered con only for a small range of the operating conditions.

The thermal capacitance C is defined by

$$C = \frac{\text{change in heat stored, Btu}}{\text{change in temperature, °F}}$$

or

$$C = Wc_p$$

where

W = weight of substance considered, lb
c_p = specific heat of substance, Btu/°F-lb

Thermal systems. Consider the system shown in Fig. 4-31. It is assumed the tank is insulated to eliminate heat loss to the surrounding air. It is also assu that there is no heat storage in the insulation and that the liquid in the tan perfectly mixed so that it is at a uniform temperature. Thus, a single tempera is used to describe the temperature of the liquid in the tank and of the outflov liquid.

Let us define

$\bar{\Theta}_i$ = steady-state temperature of inflowing liquid, °F
$\bar{\Theta}_0$ = steady-state temperature of outflowing liquid, °F
G = steady-state liquid flow rate, lb/sec
M = mass of liquid in tank, lb
c = specific heat of liquid, Btu/lb °F
R = thermal resistance, °F sec/Btu
C = thermal capacitance, Btu/°F
$\bar{H}$ = steady-state heat input rate, Btu/sec

Assume that the temperature of the inflowing liquid is kept constant and t the heat input rate is suddenly changed from $\bar{H}$ to $\bar{H} + h_i$, where h_i represe a small change in the heat input rate. The heat outflow rate will then change grad ally from $\bar{H}$ to $\bar{H} + h_0$. The temperature of the outflowing liquid will also changed from $\bar{\Theta}_0$ to $\bar{\Theta}_0 + \theta$. For this case, h_0, C, and R are obtained, respective as

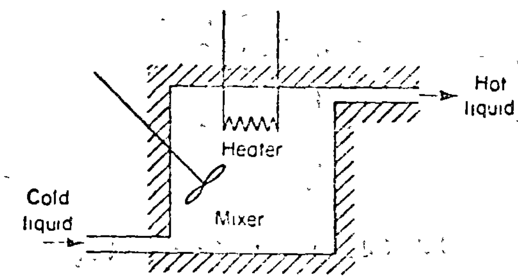


Fig. 4-31. Thermal system.

$$h_0 = Gc\theta$$
$$C = Mc$$
$$R = \frac{\theta}{h_0} = \frac{1}{Gc}$$

The differential equation for this system is

$$C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_0$$

which may be rewritten as

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i$$

Note that the time constant of the system is equal to RC or M/G seconds. The transfer function relating θ and h_i is given by

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

where

$$\Theta(s) = \mathscr{L}[\theta(t)] \qquad \text{and} \qquad H_i(s) = \mathscr{L}[h_i(t)]$$

In practice, the temperature of the inflowing liquid may fluctuate and may act as a load disturbance (If a constant outflow temperature is desired, an automatic controller may be installed to adjust the heat inflow rate in order to compensate for the fluctuations in the temperature of the inflowing liquid.) If the temperature of the inflowing liquid is suddenly changed from $\bar{\Theta}_i$ to $\bar{\Theta}_i + \theta_i$ while the heat input rate H and the liquid flow rate G are kept constant, then the heat outflow rate will be changed from $\bar{H}$ to $\bar{H} + h_0$, and the temperature of the outflowing liquid will be changed from $\bar{\Theta}_0$ to $\bar{\Theta}_0 + \theta$. The differential equation for this case is

$$C\frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_0$$

which may be rewritten

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

The transfer function relating θ and θ_i is given by

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

where

$$\Theta(s) = \mathscr{L}[\theta(t)] \qquad \text{and} \qquad \Theta_i(s) = \mathscr{L}[\theta_i(t)]$$

If the [illegible] system is subjected to changes in both the temperature of the inf[illegible] and [illegible] while the liquid flow rate is kept constant, [illegible] outflowing liq[illegible] given by the following [illegible]

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i$$

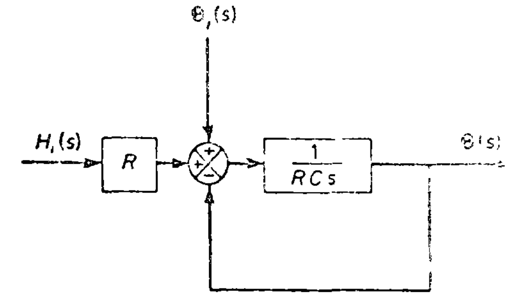


Fig. 4-32. Block diagram of the system shown in Fig 4-31.

A block diagram corresponding to this case is shown in Fig. 4-32. (Notice that [illegible] system involves two inputs. We shall discuss multiple-input–multiple-output systems in Section 4-6.)

4-6 MULTIVARIABLE SYSTEMS AND TRANSFER MATRICES

In Section 4-2, the transfer function was defined for the single-input–single-output system. In this section we shall extend the transfer-function representation to systems with multiple inputs and multiple outputs.

Transfer matrices. Consider a system with m inputs and n outputs. [illegible] consider the m inputs to be the components of a vector. We shall call such [illegible] an *input vector*. Similarly we may regard the n outputs as the components [illegible] output vector. The matrix which relates the Laplace transform of the output [illegible] to the Laplace transform of the input vector is called the *transfer matrix* [illegible] the output vector and the input vector.

Consider the system shown in Fig. 4-33. This system has two inputs [illegible] outputs. From Fig. 4-33, the relationship between the outputs and inputs [illegible] by

$$X_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$
$$X_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

where $G_{ij}(s)$ is the transfer function relating the ith output to the jth input. Using vector-matrix notation, we can write this transfer relation as

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

A system having multiple inputs and multiple outputs is called a *multivariable* system. If such a system has m inputs and n outputs, and if the transfer function between the ith output and jth input is given by $G_{ij}(s)$, then the Laplace transform of the ith output is related to the Laplace transforms of the m inputs by

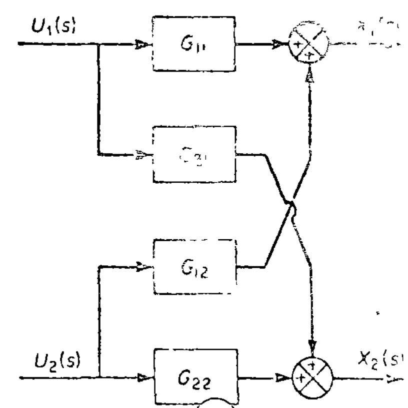


Fig. 4-33 Multiple-input–multiple-output system.

$$X_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \cdots + G_{im}(s)U_m(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Note that in defining $G_{ij}(s)$, only the jth input is considered and the other inputs are assumed to be zero. In matrix form, the Laplace transform of the output vector is related to the Laplace transform of the input vector by the following equation:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \cdots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m(s) \end{bmatrix} \tag{4-65}$$

Equation (4-65) shows the interactions between the m inputs and n outputs. Equation (4-65) can be rewritten as

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

where

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n(s) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \cdots & G_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}(s)$ is the Laplace transformed output vector, $\mathbf{U}(s)$ is the Laplace transformed input vector, and $\mathbf{G}(s)$ is the transfer matrix between $\mathbf{X}(s)$ and $\mathbf{U}(s)$.

Example 4-2. Consider the mechanical system shown in Fig. 4-34. We assume that the system is initially at rest. This system has two inputs $u_1(t)$ and $u_2(t)$ and two outputs $x_1(t)$ and $x_2(t)$. The equations describing the system dynamics are

$$m_1\ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 = u_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 + f_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2x_2 = u_2$$

Taking the Laplace transforms of these two equations and substituting the zero initial conditions, we obtain

$$(m_1s^2 + f_1s + k_1)X_1(s) - f_1sX_2(s) = U_1(s)$$
$$(m_2s^2 + f_1s + k_2)X_2(s) - f_1sX_1(s) = U_2(s)$$

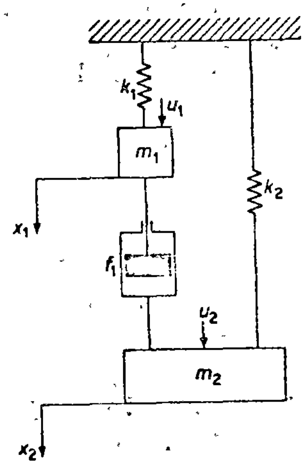


Fig. 4-34. Mechanical system.

In vector-matrix form, we obtain

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + f_1s + k_1 & -f_1s \\ -f_1s & m_2s^2 + f_1s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{4-66}$$

Let us define

$$\Delta = (m_1s^2 + f_1s + k_1)(m_2s^2 + f_1s + k_2) - f_1^2s^2 \neq 0$$

Then, by premultiplying by the inverse of the 2×2 matrix in Eq. (4-66), we obtain

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2s^2 + f_1s + k_2}{\Delta} & \dfrac{f_1s}{\Delta} \\ \dfrac{f_1s}{\Delta} & \dfrac{m_1s^2 + f_1s + k_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

The 2×2 matrix in this last equation is the transfer matrix between the outputs and the inputs. Clearly, the time responses $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are given by

$$x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m_2s^2 + f_1s + k_2}{\Delta}U_1(s) + \frac{f_1s}{\Delta}U_2(s)\right] \tag{4-67}$$

$$x_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{f_1s}{\Delta}U_1(s) + \frac{m_1s^2 + f_1s + k_1}{\Delta}U_2(s)\right] \tag{4-68}$$

To find the responses $x_1(t)$ and $x_2(t)$ for $u_1 \neq 0$, $u_2 = 0$ (or $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$), we simply substitute $U_2(s) = 0$ [or $U_1(s) = 0$] into Eqs. (4-67) and (4-68).

Example 4-3. The system shown in Fig. 4-35 has two inputs, the reference input and the disturbance input, and one output. Obtain the transfer matrix between the output and the inputs.

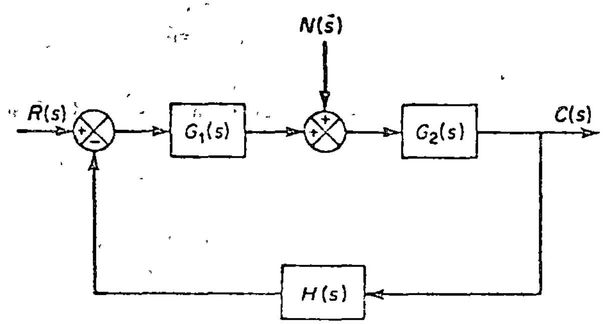


Fig. 4-35. System having two inputs and one output.

The Laplace transform of the output, $C(s)$, can be obtained as

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

In vector matrix form,

$$C(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} & \dfrac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \tag{4-69}$$

The transfer matrix between the output $C(s)$ and the inputs $R(s)$ and $N(s)$ is the 1×2 matrix given in Eq. (4-69).

Comments. In this section, we have presented a definition of the transfer matrix and we have derived the transfer matrices for two systems The transfer-matrix representation for multivariable systems is an extension of the transfer-function representation of single-input–single-output systems. The analysis and optimal control of multivariable systems can be carried out most conveniently by use of state variables. We shall therefore postpone the further analysis of multivariable systems to Chapters 14–16, where we shall study the state-space approach to the analysis and opimization of control systems.

4-7 SIGNAL FLOW GRAPHS

The block diagram is useful for graphically representing control systems. For a very complicated system, however, the block diagram reduction process becomes quite time-consuming. An alternate approach for finding the relationships among the system variables of a complicated control system is the signal flow graph approach, due to S. J. Mason.

Signal flow graphs. A signal flow graph is a diagram which represents a set of simultaneous linear algebraic equations. When applying the signal flow graph method to analyses of control systems, we must first transform linear differential equations into algebraic equations in s.

A signal flow graph consists of a network in which nodes are connected by directed branches Each node represents a system variable, and each branch connected between two nodes acts as a signal multiplier. Note that the signal flows in only one direction. The direction of signal flow is indicated by an arrow placed on the branch, and the multiplication factor is indicated along the branch. The signal flow graph depicts the flow of signals from one point of a system to another and gives the relationships among the signals.

As might be expected, a signal flow graph contains essentially the same information as a block diagram. The advantage of using a signal flow graph to represent a control system is that a gain formula, called Mason's gain formula, is available which gives the relationships among system variables without requiring a reduction of the graph.

Definitions. Before we discuss signal flow graphs, we must define certain terms.

Node. A node is a point representing a variable or signal.

Transmittance The transmittance is a gain between two nodes

Branch A branch is a directed line segment joining two nodes. The gain of a branch is a transmittance

Input node or source. An input node or source is a node which has only outgoing branches. This corresponds to an independent variable.

Output node or sink. An output node or sink is a node which has only incoming branches. This corresponds to a dependent variable.

Mixed node. A mixed node is a node which has both incoming and outgoing branches.

Path. A path is a traversal of connected branches in the direction of the branch arrows. If no node is crossed more than once, the path is open. If the path ends at the same node from which it began and does not cross any other node more than once, it is closed. If a path crosses some node more than once but ends at a different node from which it began, it is neither open nor closed.

Loop. A loop is a closed path.

Loop gain. The loop gain is the product of the branch transmittances of a loop

Nontouching loops. Loops are nontouching if they do not possess any common nodes.

Forward path. A forward path is a path from an input node (source) to an output node (sink) which does not cross any nodes more than once.

Forward path gain A forward path gain is the product of the branch transmittances of a forward path.

Figure 4-36 shows nodes and branches, together with transmittances.

Properties of signal flow graphs. A few important properties of signal flow graphs are listed below.

1. A branch indicates the functional dependence of one signal upon another. A signal passes through only in the direction specified by the arrow on the branch.
2. A node adds the signals of all incoming branches and transmits this sum to all outgoing branches
3. A mixed node, which has both incoming and outgoing branches, may be treated as an output node (sink) by adding an outgoing branch of unity transmittance. (See Fig 4-36. Notice that a branch with unity transmittance is directed from x_3 to another node, also denoted by x_3.) Note, however, that we cannot change a mixed node to a source by this method.
4 For a given system, a signal flow graph is not unique. Many different signal flow graphs can be drawn for a given system by writing the system equations differently.

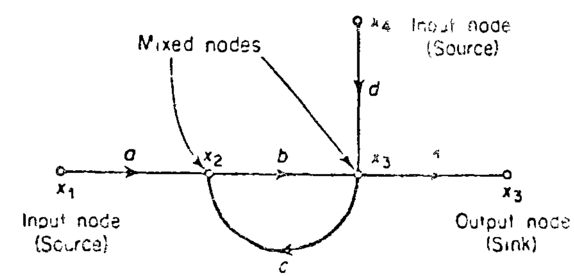


Fig. 4-36. Signal flow graph

Signal flow graph algebra. A signal flow graph of a linear system can be drawn using the foregoing definitions. In doing so, we usually bring the input nodes (sources) to the left and the output nodes (sinks) to the right. The independent and dependent variables of the equations become the input nodes (sources) and output nodes (sinks), respectively. The branch transmittances can be obtained from the coefficients of the equations.

To determine the input-output relationship, we may use Mason's formula, ich will be given later, or we may reduce the signal flow graph to a graph conning only input and output nodes. To accomplish this, we use the following rules:

1. The value of a node with one incoming branch, as shown in Fig. 4-37 (a), is $x_2 = ax_1$.
2. The total transmittance of cascaded branches is equal to the product of all the branch transmittances. Cascaded branches can thus be combined into a single branch by multiplying the transmittances, as shown in Fig. 4-37 (b).
3. Parallel branches may be combined by adding the transmittances, as shown in Fig. 4-37 (c).
4. A mixed node may be eliminated, as shown in Fig. 4-37 (d).
5. A loop may be eliminated, as shown in Fig. 4-37 (e). Note that

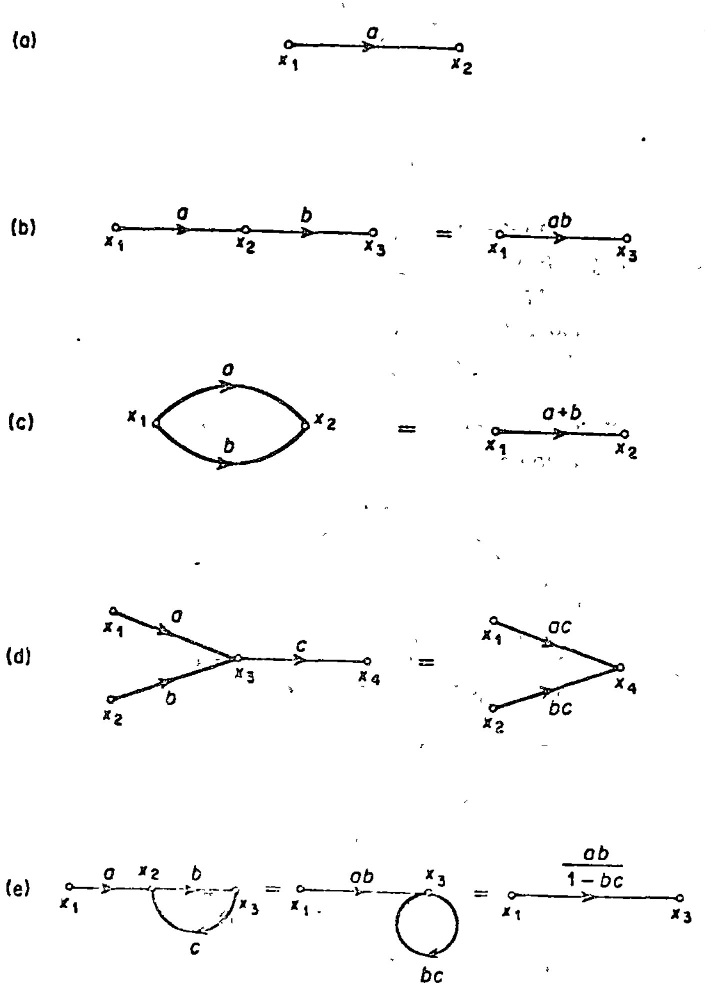


Fig. 4-37. Signal flow graphs and simplifications.

$$x_3 = bx_2, \qquad x_2 = ax_1 + cx_3$$

Hence

$$x_3 = abx_1 + bcx_3 \tag{4-70}$$

or

$$x_3 = \frac{ab}{1 - bc}x_1 \tag{4-71}$$

Equation (4-70) corresponds to a diagram having a self-loop of transmittanc bc. Elimination of the self-loop yields Eq. (4-71), which clearly shows that th overall transmittance is $ab/(1 - bc)$.

Signal flow graph representation of linear systems. Signal flow graphs are widel applied to linear-system analysis. Here the graph can be drawn from the syster

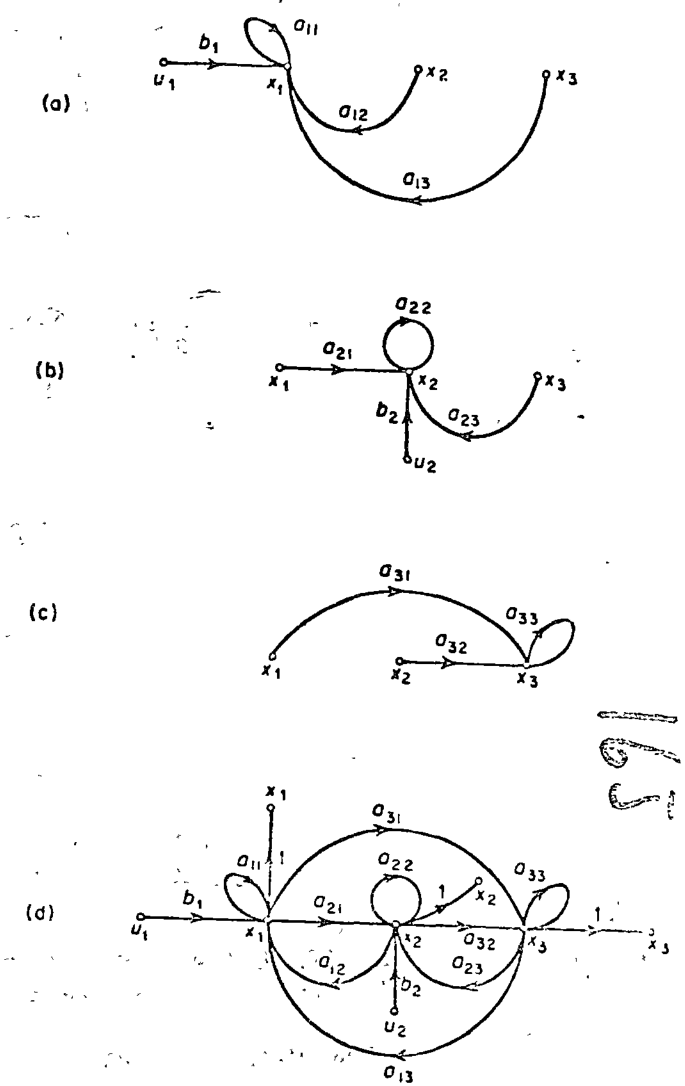


Fig. 4-38. (a) Signal flow graph representing Eq. (4-72); (b) signal flow graph representing Eq. (4-73); (c) signal flow graph representing Eq. (4-74), (d) complete signal flow graph for the system described by Eqs. (4-72), (4-73), and (4-74).

juations or, with practice, can be drawn by inspection of the physical system. outine reduction by use of the foregoing rules gives the relation between an input nd output variable.

Consider a system defined by the following set of equations:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \tag{4-72}$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_3 \tag{4-73}$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \tag{4-74}$$

here u_1 and u_2 are input variables; x_1, x_2, and x_3 are output variables. A signal ow graph for this system, a graphical representation of these three simultaneous quations, indicating the interdependence of the variables, can be obtained as folows: First locate the nodes x_1, x_2, and x_3, as shown in Fig. 4-38 (a). Note that a_{ij} the transmittance between x_j and x_i. Equation (4-72) states that x_1 is equal to he sum of the four signals $a_{11}x_1$, $a_{12}x_2$, $a_{13}x_3$, and b_1u_1. The signal flow graph epresenting Eq. (4-72) is shown in Fig. 4-38 (a). Equation (4-73) states that x_2 equal to the sum of $a_{21}x_1$, $a_{22}x_2$, $a_{23}x_3$, and b_2u_2. The corresponding signal flow raph is shown in Fig. 4-38 (b) The signal flow graph representing Eq. (4-74) shown in Fig. 4-38 (c).

The signal flow graph representing Eqs. (4-72), (4-73), and (4-74) is then obtained y combining Figs. 4-38 (a), (b), and (c). Finally the complete signal flow graph or the given simultaneous equations is shown in Fig. 4-38 (d).

In dealing with a signal flow graph, the input nodes (sources) may be considered ne at a time. The output signal is then equal to the sum of the individual contriutions of each input.

The overall gain from an input to an output may be obtained directly from the ignal flow graph by inspection, by use of Mason's formula, or by a reduction of he graph to a simpler form.

Signal flow graphs of control systems. Some signal flow graphs of simple control ystems are shown in Fig 4-39. For such simple graphs, the closed-loop transfer unction $C(s)/R(s)$ [or $C(s)/N(s)$] can be obtained easily by inspection. For more omplicated signal flow graphs, Mason's gain formula is quite useful.

Mason's gain formula for signal flow graphs. In many practical cases, we ish to determine the relationship between an input variable and an output variable of the signal flow graph. The transmittance between an input node and an utput node is the overall gain, or overall transmittance, between these two nodes.

Mason's gain formula, which is applicable to the overall gain, is given by

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

here

P_k = path gain or transmittance of kth forward path

Δ = determinant of graph

= 1 − (sum of all different loop gains) + (sum of gain products of all possible combinations of two nontouching loops) − (sum of gain products of all possible combinations of three nontouching loops) + . . .

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

$\sum_a L_a$ = sum of all different loop gains

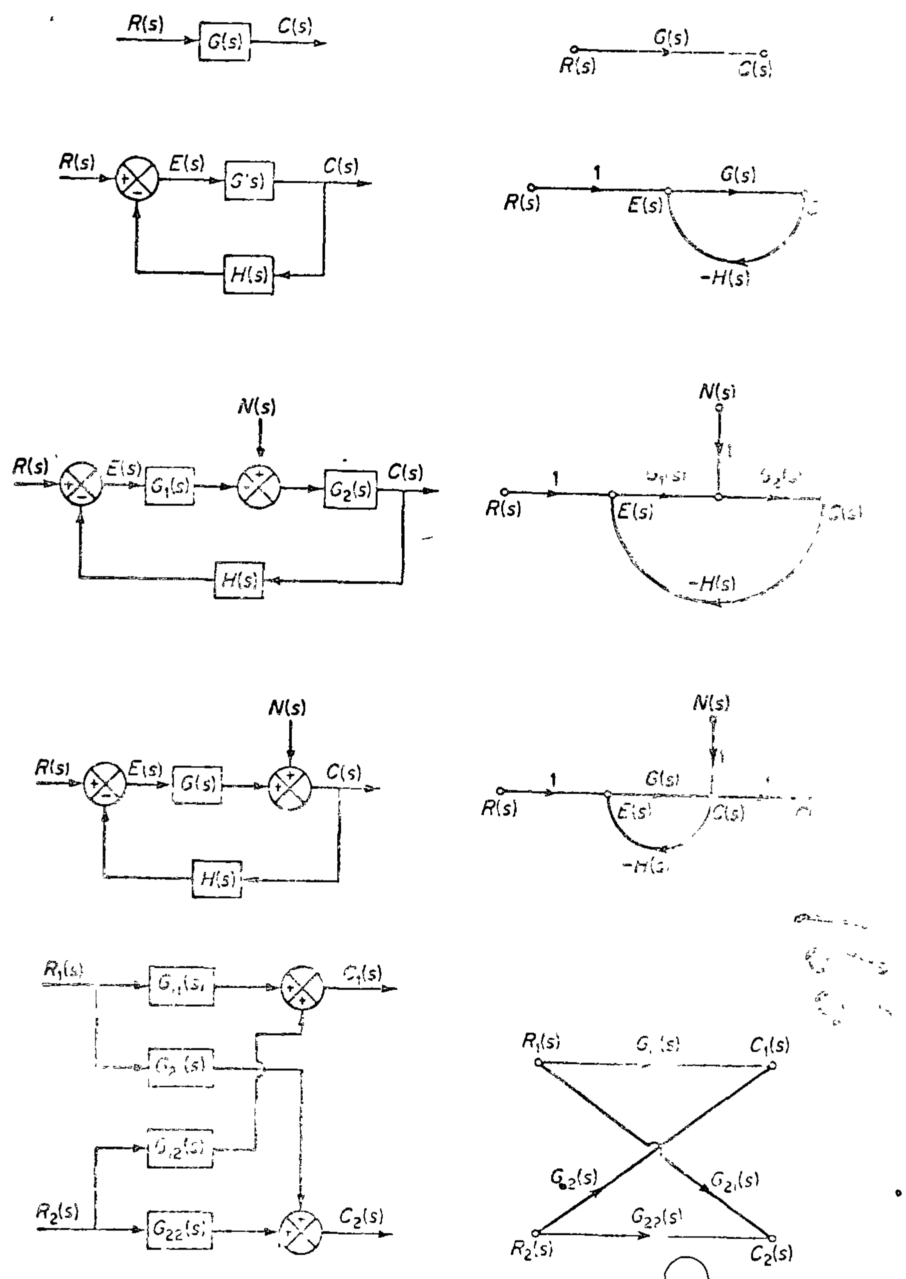


Fig. 4-39. Block diagrams and corresponding signal flow graphs.

$\sum_{b\,c} L_b L_c$ = sum of gain products of all possible combinations of two nontouching loops

$\sum_{e\,f} L_d L_e L_f$ = sum of gain products of all possible combinations of three nontouching loops

Δ_k = cofactor of the kth forward path determinant of the graph with the loops touching the kth forward path removed

te that the summations are taken over all possible paths from input to output.)
In the following, we shall illustrate the use of Mason's gain forumla by means vo examples.

---

mple 4-4. Consider the system shown in Fig. 4-40. A signal flow graph for this system iown in Fig. 4-41. Let us obtain the closed-loop transfer function $C(s)/R(s)$ by use Iason's gain formula.

In this system there is only one forward path between the input $R(s)$ and the output). The forward path gain is

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

m Fig. 4-41, we see that there are three individual loops. The gains of these loops

$$L_1 = G_1G_2H_1$$
$$L_2 = -G_2G_3H_2$$
$$L_3 = -G_1G_2G_3$$

e that since all three loops have a common branch, there are no nontouching loops. ice, the determinant Δ is given by

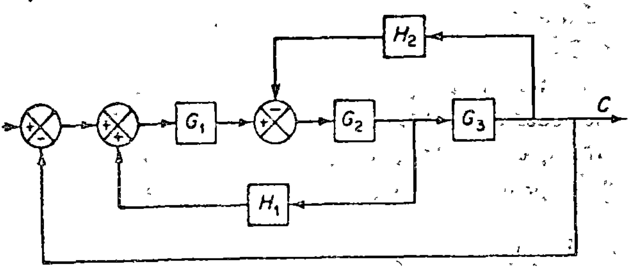


Fig. 4-40. Multiple-loop system.

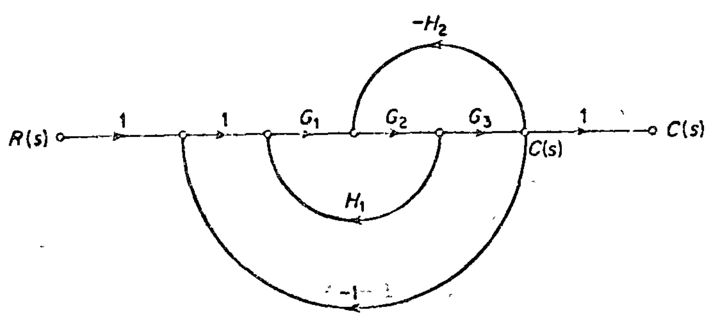


Fig. 4-41 Signal flow graph for the system shown in Fig 4-40.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$
$$= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

The cofactor Δ_1 of the determinant along the forward path connecting the input node and output node is obtained by removing the loops that touch this path. Since path P_1 touches all three loops, we obtain

$$\Delta_1 = 1$$

Therefore, the overall gain between the input $R(s)$ and the output $C(s)$, or the closed-loop transfer function, is given by

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1\,\Delta_1}{\Delta}$$
$$= \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

which is the same as the closed-loop transfer function obtained by block diagram reduction. Mason's gain formula thus gives the overall gain $C(s)/R(s)$ without a reduction o the graph.

Example 4-5. Consider the system shown in Fig. 4-42. Obtain the closed-loop transfe function $C(s)/R(s)$ by use of Mason's gain formula.

In this system, there are three forward paths between the input $R(s)$ and the outpu $C(s)$. The forward path gains are

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$
$$P_2 = G_1G_6G_4G_5$$
$$P_3 = G_1G_2G_7$$

There are three individual loops. The gains of these loops are

$$L_1 = -G_4H_1$$
$$L_2 = -G_2G_7H_2$$
$$L_3 = -G_6G_4G_5H_2$$

Loop L_1 does not touch loop L_2. (loop L_1 touches loop L_3, and loop L_2 touches loo L_3) Hence, the determinant Δ is given by

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 \tag{4-75}$$

The cofactor Δ_1 is obtained from Δ by removing the loops that touch path P_1. Therefore by removing L_1, L_2, L_3, and L_1L_2 from Eq (4-75), we obtain

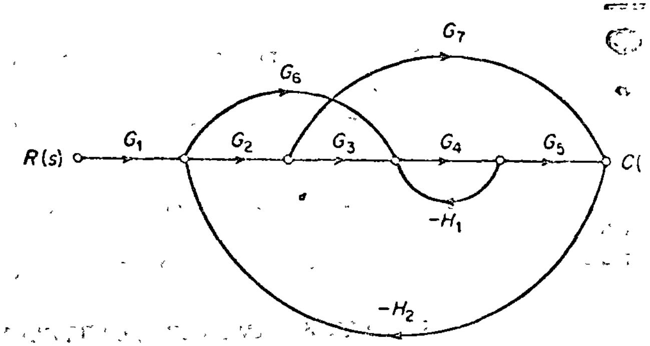


Fig. 4-42. Signal flow graph for a system

$$\Delta_1 = 1$$

imilarly, the cofactor Δ_2 is

$$\Delta_2 = 1$$

he cofactor Δ_3 is obtained by removing L_2, L_3, and L_1L_2 from Eq. (4-75), giving

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

he closed-loop transfer function $C(s)/R(s)$ is then

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{1}{\Delta}(P_1\,\Delta_1 + P_2\,\Delta_2 + P_3\,\Delta_3)$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2}$$

Concluding comments. The usual application of signal flow graphs is in system iagramming. The set of equations describing a linear system is represented by signal flow graph by establishing nodes which represent the system variables and y interconnecting the nodes with weighted, directed, transmittances, which repre-ent the relationships among the variables. Mason's gain formula may be used to stablish the relationship between an input and an output. (Alternatively, the vari-bles in the system may be eliminated one by one with reduction techniques.) Mason's gain formula is especially useful in reducing large and complex system iagrams in one step, without requiring step-by-step reductions.

Example Problems and Solutions

PROBLEM A-4-1. Figure 4-43 shows the schematic diagram of an accelerometer. Assume that the case of the accelerometer is attached to an aircraft frame. (The accelerometer indicates the acceleration of its case with respect to inertial space.) The tilt angle θ mea-

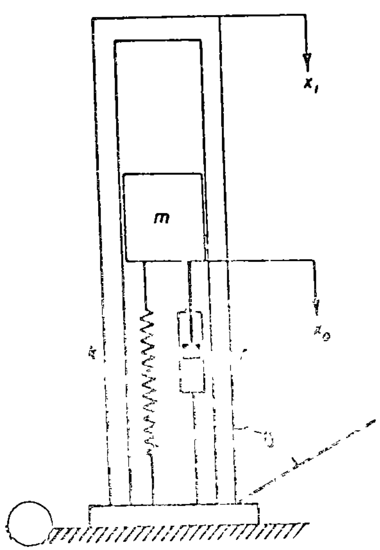


Fig. 4-43. Schematic diagram of an accelerometer

sured from the horizontal line is assumed to be constant during the measurement peri

Show that for low-frequency inputs, the acceleration of the case relative to iner space can be determined by the displacement of the mass m with respect to its case.

Solution. Let us define

x_i = displacement of the case relative to inertial space
x_0 = displacement of the mass m relative to inertial space
$y = x_0 - x_i$ = displacement of the mass m relative to the case

The equation for this system is

$$m\ddot{x}_0 + f(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k(x_0 - x_i) - mg\sin\theta = 0$$

In terms of y, we obtain

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_i + mg\sin\theta$$

Since θ is assumed to be constant during the measurement period, $mg\sin\theta$ is const and it is possible to calibrate the displacement and define a new variable z such that

$$z = y - \frac{mg}{k}\sin\theta$$

Then we obtain

$$m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = -m\ddot{x}_i$$

If the input acceleration (the acceleration of the case relative to inertial space) $\ddot{x}_i$ is to be the input to the system and the displacement z is taken to be the output, then t transfer function of the system becomes

$$\frac{Z(s)}{s^2X_i(s)} = -\frac{1}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

If the input frequency is very low compared with $\sqrt{k/m}$, then

$$\frac{Z(s)}{s^2X_i(s)} \doteqdot -\frac{m}{k}$$

which means that $z = y - (mg/k)\sin\theta$ is nearly proportional to the slowly varying inp acceleration. Thus, for low-frequency inputs, the acceleration of the case relative to iner tial space can be given by

$$\ddot{x}_i = -\frac{k}{m}\left(y - \frac{mg}{k}\sin\theta\right)$$

Note that such an accelerometer must have a sufficiently high undamped natural f quency $\sqrt{k/m}$ compared with the highest input frequency to be measured.

PROBLEM A-4-2. Gear trains are often used in servomechanisms to reduce speed, magnify torque, or to obtain the most efficient power transfer by matching the driv member to the given load.

Consider the gear train system shown in Fig. 4-44. In this system, a load is driven a motor through the gear train. Assuming that the stiffness of the shafts of the gear tra is infinite (there is neither backlash nor elastic deformation) and that the number of tee on each gear is proportional to the radius of the gear, obtain the equivalent moment inertia and equivalent friction referred to the motor shaft and referred to the load shaft

In Fig. 4-44, the numbers of teeth on gears 1, 2, 3, and 4 are N_1, N_2, N_3, and N respectively. The angular displacements of shafts 1, 2, and 3 are θ_1, θ_2, and θ_3, respe

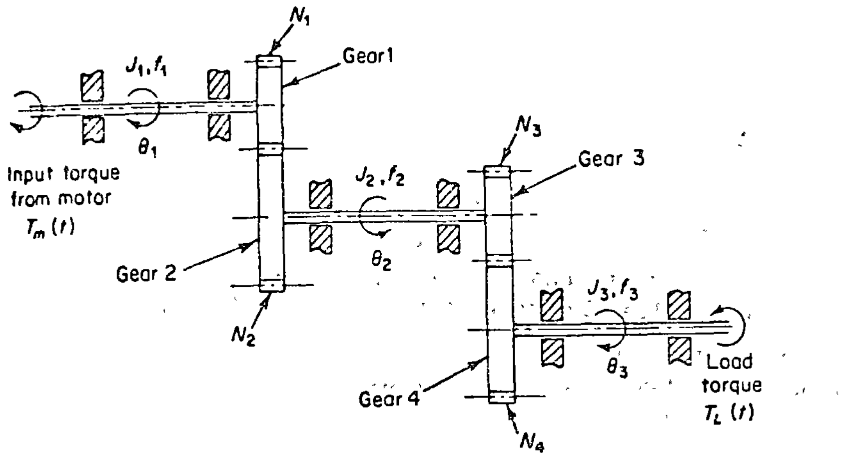


Fig. 4-44. Gear-train system.

vely. Thus, $\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2$ and $\theta_3/\theta_2 = N_3/N_4$. The moment of inertia and viscous fric-on of each gear train component are denoted by J_1, f_1; J_2, f_2; and J_3, f_3; respectively. J_3 and f_3 include the moment of inertia and friction of the load.)

olution. For this gear train system, we can obtain the following three equations: For he first shaft,

$$J_1\ddot{\theta}_1 + f_1\dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \tag{4-76}$$

where T_m is the torque developed by the motor and T_1 is the load torque on gear 1 due to he rest of the gear train. For the second shaft,

$$J_2\ddot{\theta}_2 + f_2\dot{\theta}_2 + T_3 = T_2 \tag{4-77}$$

where T_2 is the torque transmitted to gear 2 and T_3 is the load torque on gear 3 due to he rest of the gear train. Since the work done by gear 1 is equal to that of gear 2,

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \qquad \text{or} \qquad T_2 = T_1\frac{N_2}{N_1}$$

f $N_1/N_2 < 1$, the gear ratio reduces the speed as well as magnifies the torque. For the hird shaft,

$$J_3\ddot{\theta}_3 + f_3\dot{\theta}_3 + T_L = T_4 \tag{4-78}$$

where T_L is the load torque and T_4 is the torque transmitted to gear 4. T_3 and T_4 are elated by

$$T_4 = T_3\frac{N_4}{N_3}$$

and θ_3 and θ_1 are related by

$$\theta_3 = \theta_2\frac{N_3}{N_4} = \theta_1\frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}$$

Elimination of T_1, T_2, T_3, and T_4 from Eqs. (4-76), (4-77), and (4-78) yields

$$J_1\ddot{\theta}_1 + f_1\dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2}(J_2\ddot{\theta}_2 + f_2\dot{\theta}_2) + \frac{N_1N_3}{N_2N_4}(J_3\ddot{\theta}_3 + f_3\dot{\theta}_3 + T_L) = T_m \tag{4-79}$$

Eliminating θ_2 and θ_3 from Eq. (4-79) and writing the equation in terms of θ_1 and its time derivatives, we obtain

$$\left[J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3\right]\ddot{\theta}_1 + \left[f_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 f_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 f_3\right]\dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_3}{N_4}\right)T_L = T_m \quad \text{(4-}$$

Thus, the equivalent moment of inertia and friction of the gear train referred to sl 1 are given by

$$J_{1eq} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3$$

$$f_{1eq} = f_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 f_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 f_3$$

Similarly, the equivalent moment of inertia and friction of the gear train referred to load shaft are

$$J_{3eq} = J_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_1$$

$$f_{3eq} = f_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 f_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 f_1$$

The relationship between J_{1eq} and J_{3eq} is thus

$$J_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_{3eq}$$

and that between f_{1eq} and f_{3eq} is

$$f_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 f_{3eq}$$

The effect of J_2 and J_3 on an equivalent moment of inertia is determined by the g ratios N_1/N_2 and N_3/N_4. For speed-reducing gear trains, the ratios N_1/N_2 and N_3/N_4 usually less than unity. If $N_1/N_2 \ll 1$ and $N_3/N_4 \ll 1$, then the effect of J_2 and J_3 on equivalent moment of inertia J_{1eq} is negligible. Similar comments apply to the equival friction f_{1eq} of the gear train. In terms of the equivalent moment of inertia J_{1eq} and equ alent friction f_{1eq}, Eq. (4-80) can be simplified to give

$$J_{1eq}\ddot{\theta}_1 + f_{1eq}\dot{\theta}_1 + nT_L = T_m$$

where

$$n = \frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}$$

Considering $T_m - nT_L$ as the input to the system and θ_1 as the output, the trans function of this system is

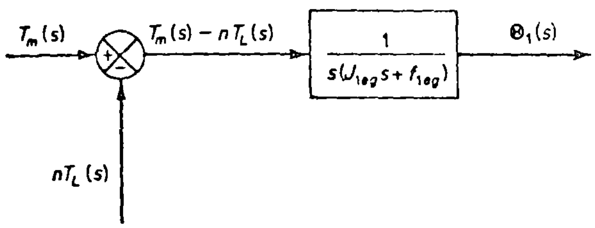
$$\frac{\Theta_1(s)}{T_m(s) - nT_L(s)} = \frac{1}{s(J_{1eq}s + f_{1eq})}$$

The block diagram is shown in Fig 4-45(a). If $(T_m - nT_L)$ and θ_3 are considered to the input and output, respectively, then the transfer function becomes

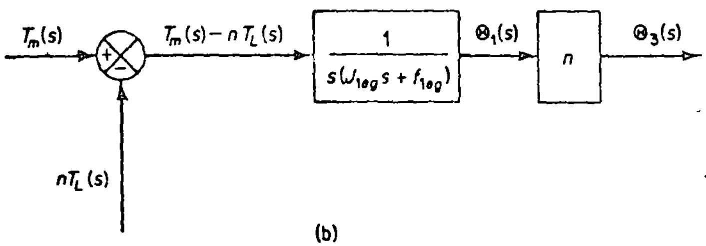
$$\frac{\Theta_3(s)}{T_m(s) - nT_L(s)} = \frac{\frac{1}{n}}{s(J_{3eq}s + f_{3eq})}$$

Since

$$\frac{\Theta_3(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{N_1N_3}{N_2N_4} = n$$



(a)



(b)

Fig. 4-45. Block diagrams of the gear-train system shown in Fig. 4-44.

in terms of J_{1eq} and f_{1eq}, this transfer function can be written

$$\frac{\Theta_3(s)}{T_m(s) - nT_L(s)} = \frac{n}{s(J_{1eq}s + f_{1eq})}$$

The block diagram for this case is shown in Fig. 4-45(b).

From the analysis above, it can be seen that in a system where a servomotor is driving load inertia and load viscous friction, the load inertia and friction are, at the motor shaft, the original values multiplied by the square of the gear ratio. If the gear ratio is a small number, the moment of inertia and friction of the servomotor give dominant effects on the dynamic behavior of the system.

PROBLEM A-4-3. Show that the torque-to-inertia ratios referred to the motor shaft and to the load shaft differ from each other by a factor of n. Show also that the torque squared-to-inertia ratios referred to the motor shaft and to the load shaft are the same.

Solution. Suppose that T_{max} is the maximum torque which can be produced on the motor shaft. Then the torque to-inertia ratio referred to the motor shaft is

$$\frac{T_{max}}{J_m + n^2 J_L}$$

where

J_m = moment of inertia of the rotor
J_L = moment of inertia of the load
n = gear ratio

The torque-to-inertia ratio referred to the load shaft is

$$\frac{\frac{T_{max}}{n}}{\quad J_m}$$

Clearly, they differ from each other by a factor of n. Hence, in comparing torque inertia ratios of motors, we find it necessary to specify which shaft is the refe...

Note that the ratio of torque squared to inertia referred to the motor shaft is

$$\frac{T_{max}^2}{J_m + n^2 J_L}$$

and that referred to the load shaft is

$$\frac{\frac{T_{max}^2}{n^2}}{J_L + \frac{J_m}{n^2}}$$

These two ratios are clearly the same.

PROBLEM A-4-4. The moment of inertia J of a motor may be available in ... facturer's catalog or may be computed if the dimensions and material of ... roto known.

The effective moment of inertia of a motor and gear train system can also ... mined by experimental means. Discuss methods for determining the momen... J of a two-phase ac motor.

Solution. To determine the effective moment of inertia J of a motor and gear train sy apply a step input e_i and record the transient response. The transfer function ... phase ac motor is given by Eq. (4-35) as follows:

$$\frac{\Theta(s)}{E_i(s)} = \frac{K_c}{Js^2 + (f + K_n)s}$$

If the input voltage e_i is a step input of magnitude E_1, then the resulting sha...

$$s\Theta(s) = \frac{K_c E_1}{s(Js + f + K_n)}$$

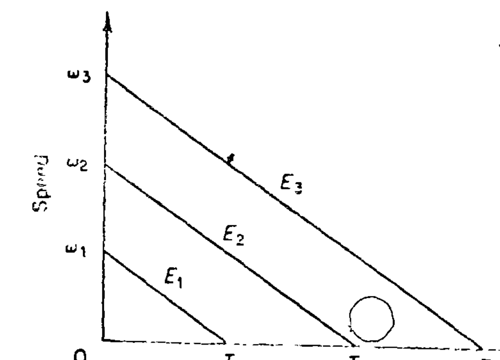
Hence the angular velocity $\omega(t)$ is

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{K_c E_1}{f + K_n}\left[1 - \exp\left(-\frac{f + K_n}{J}t\right)\right]$$

From the record of $\omega(t)$ versus time, the time constant $J/(f + K_n)$ can be deter...

Since the steady-state angular velocity is

$$\omega(\infty) = \frac{K_c E_1}{f + K_n}$$



-obtain

$$f + K_n = \frac{K_c E_1}{\omega(\infty)}$$

determine $f + K_n$, we need to know K_c. [E_1 and $\omega(\infty)$ are known quantities.] The lue of the torque constant K_c can be determined from the torque-speed curves, as own in Fig. 4-46, provided these curves are parallel. From the curves, we obtain

$$K_c = \frac{T_1}{E_1} = \frac{T_2}{E_2} = \frac{T_3}{E_3}$$

ice we know the time constant $J/(f + K_n)$, the steady-state angular velocity $\omega(\infty)$, d the torque constant K_c, the moment of inertia J can be determined.

The moment of inertia J of the rotor can also be determined experimentally by means a torsional pendulum experiment. If the damping coefficient is very small, the period oscillation of the pendulum is related to J by the following equation:

$$J = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

iere

J = moment of inertia of the rotor
k = torsional spring constant of the elastic shaft to which the motor rotor is attached
T = period of the oscillation

ROBLEM A-4-5. Obtain the transfer function of the two-phase servomotor whose rque-speed curve is shown in Fig. 4-47. The maximum-rated fixed-phase and control-ase voltages are 115 volts. The moment of inertia J of the rotor (including the effect load) is 7.77×10^{-4} oz-in.-sec² and the viscous-friction coefficient of the motor (includ- the effect of load) is 0.005 oz-in./rad/sec.

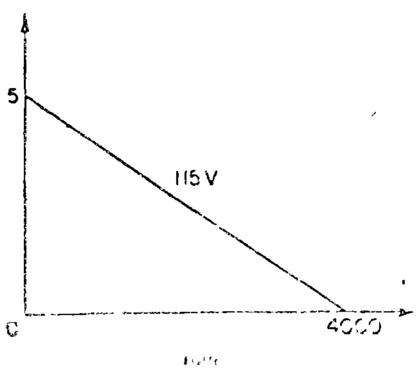
lution. The equation for the torque-speed curve is

$$T + K_n \dot{\theta} = K_c E_c$$

iere

$$K_n = \frac{5}{4000}\frac{60}{2\pi} = 0.0119 \text{ oz-in./rad/sec}$$

$$K_c = \frac{5}{115} = 0.0435 \text{ oz-in./volt}$$



Thus

$$T + 0.0119\dot{\theta} = 0.0435 E_c$$

The motor gain constant K_m is then

$$K_m = \frac{K_c}{f + K_n} = \frac{0.0435}{0.005 + 0.0119} = 2.57$$

The motor time constant T_m is

$$T_m = \frac{J}{f + K_n} = \frac{7.77 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3} + 11.9 \times 10^{-3}}$$

Using the numerical values thus obtained, the transfer function given by Eq. (4-35) is as follows:

$$\frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} = \frac{2.57}{s(0.046s + 1)}$$

PROBLEM A-4-6. Assuming that a two-phase servomotor has a linear torque-speed curve so that the no-load speed is ω_0 and the stall torque is T_s, find the maximum motor shaft output power P_{max}.

Solution. The torque-speed curve is

$$T = T_s - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)T_s$$

The shaft output power P is given by

$$P = T\omega = \left(T_s - \frac{\omega}{\omega_0}T_s\right)\omega$$

To find P_{max}, let us differentiate P with respect to ω:

$$\frac{dP}{d\omega} = T_s - 2\frac{\omega}{\omega_0}T_s$$

By setting $dP/d\omega = 0$, we obtain

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}$$

Clearly, $d^2P/d\omega^2 = -2T_s/\omega_0 < 0$. Hence P is maximum at $\omega = \omega_0/2$. P_{max} is

$$P_{max} = T\omega|_{\omega=\omega_0/2} = \left(T_s - \frac{T_s}{2}\right)\frac{\omega_0}{2} = \frac{T_s\omega_0}{4}$$

For the two phase servomotor considered in Problem A-4-5, $T_s = 5$ oz-in. and $\omega_0 =$ 4000 rpm. The maximum power output P_{max} is

$$P_{max} = \frac{5 \times 4000}{4} \times \frac{1}{1352} = 3.7 \text{ watts}$$

The maximum power occurs at $\omega = 2000$ rpm.

PROBLEM A-4-7. The maximum acceleration which the servomotor can achieve may b indicated by the torque-to-inertia ratio, which is the ratio of the maximum torque a standstill to the rotor inertia. The higher this ratio, the better the acceleration charac teristic is. Referring to the two-phase servomotor considered in Problem A-4-5, find th torque-to-inertia ratio.

Solution. The rotor moment of inertia J of the two-phase servomotor is $7.77 \times 10^{-}$ oz-in.-sec². The maximum torque at standstill is 5 oz-in. Hence the torque-to-inertia ra

$$\frac{T_{max}}{J} = \frac{5}{7.77 \times 10^{-4}}$$
$$= 6435 \text{ rad/sec}^2$$

In selecting a servomotor, it is important to satisfy a given requirement on accelerations.

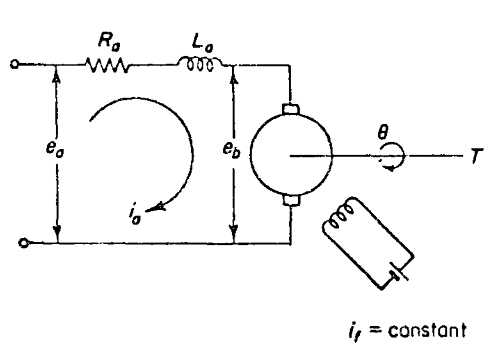


Fig. 4-48. Armature-controlled dc motor.

PROBLEM A-4-8. Consider the armature-controlled dc motor shown in Fig. 4-48. In Section 4-5 it was shown that

$$e_b = K_b\dot{\theta}$$
$$T = K_f i_f K_1 i_a = K i_a$$

where K_b is the back emf constant, i_f is the constant field current, and K_f and K_1 are constants. Show that

$$\frac{K_b}{K} = 1.356 \text{ watts-sec/ft-lb}$$

Solution. The mechanical power $T\dot{\theta}$ must be equal to the electrical power $e_b i_a$ developed by the armature current flowing through the armature back emf. Hence from

$$e_b i_a = K_b\dot{\theta} i_a \text{ (watts)} = \frac{K_b\dot{\theta} i_a}{746} \text{ (hp)}$$

$$T\dot{\theta} = K i_a\dot{\theta} \text{ (ft-lb/sec)} = \frac{K i_a\dot{\theta}}{550} \text{ (hp)}$$

we obtain

$$\frac{K_b}{K} = 1.356 \text{ watts-sec/ft-lb}$$

PROBLEM A-4-9. Referring to the dc motor shown in Fig. 4-48, for fixed values of the armature voltage, the torque versus speed curves may be represented by

$$T = \frac{K}{R_a}(e_a - K_b\omega)$$

Determine K and K_b from these torque versus speed curves.

Solution. For the no load condition, $T = 0$, Hence

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_0}$$

where

ω_0 = no-load speed

If the motor is stalled, then $\omega = 0$, and we obtain

$$K = \frac{T_s R_a}{e_a}$$

where

T_s = stall torque

PROBLEM A-4-10. Determine the transfer function $\Theta(s)/E_a(s)$ of the armature-controlled dc motor shown in Fig. 4-48. In the diagram

e_a = 26 volts
L_a = negligible
$J = 2.59 \times 10^{-4}$ oz-in.-sec²
$f = 3 \times 10^{-3}$ oz-in./rad/sec

Assume that the stall torque is 10 oz-in. and the no-load speed is 520 rad/sec.

Solution. From Eq. (4-43), the transfer function $\Theta(s)/E_a(s)$ is

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$
$$= \frac{K}{s(R_a J s + R_a f + K K_b)}$$

where

$$K = \frac{T_s R_a}{e_a} \qquad (T_s = \text{stall torque})$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_0} \qquad (\omega_0 = \text{no-load speed})$$

In Problem A-4-8, we found that

$$\frac{K_b}{K} = 1.356 \text{ watts-sec/ft-lb}$$
$$= 7.06 \times 10^{-3} \text{ watts-sec/in.-oz}$$

Hence

$$K_b = \frac{26}{520} = 5 \times 10^{-2} \text{ volt/rad/sec}$$

and

$$K = \frac{K_b}{7.06 \times 10^{-3}}$$
$$= \frac{5 \times 10^{-2}}{7.06 \times 10^{-3}}$$
$$= 7.08 \text{ in.-oz/amp}$$

The value of R_a is then obtained as

$$R_a = \frac{K e_a}{T_s}$$
$$= 7.08 \times \frac{26}{10}$$
$$= 18.4 \text{ ohms}$$

The transfer function $\Theta(s)/E_a(s)$ is then

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{7.08}{s[(18.4)(2.59 \times 10^{-4})s + (18.4)(3 \times 10^{-3}) + (7.08)(5 \times 10^{-2})]}$$
$$= \frac{17.3}{s(0.0116s + 1)}$$

PROBLEM A-4-11. Find the transfer function $\Theta(s)/E_f(s)$ of the field-controlled dc motor shown in Fig. 4-26(a). Assume that in the diagram

e_f = 110 volts
i_a = 15 amperes
$\omega_{ss} = \dot{\theta}_{ss}$ = 1200 rpm

$L_f = 20$ henrys
$R_f = 120$ ohms
$J = 1$ lb-ft-sec^2
$f = 0.5$ lb-ft/rad/sec

Solution. From Eq. (4-52), the transfer function $\Theta(s)/E_f(s)$ is

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(Js + f)}$$

From this equation, we obtain the steady-state angular velocity ω_{ss} as follows: Noting that for a step input $e_f = 110$ volts, we obtain

$$\Theta(s) = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(Js + f)} \frac{110}{s}$$

Hence

$$\omega_{ss} = \lim_{s \to 0} s[s\Theta(s)] = \lim_{s \to 0} \frac{110K_2}{(L_f s + R_f)(Js + f)} = \frac{110K_2}{R_f f}$$

Since $\omega_{ss} = 1200$ rpm $= 20 \times 2\pi$ rad/sec, $R_f = 120$ ohms, $f = 0.5$ lb-ft/rad/sec, we obtain

$$40\pi = \frac{110K_2}{120 \times 0.5}$$

or

$$K_2 = \frac{40\pi \times 60}{110} \text{ ohms lb-ft/volt} = 68.5 \text{ lb-ft/amp}$$

The transfer function $\Theta(s)/E_f(s)$ is then obtained as follows:

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{68.5}{s(20s + 120)(s + 0.5)} = \frac{1.14}{s(0.167s + 1)(2s + 1)}$$

PROBLEM A-4-12. Consider the positional servomechanism shown in Fig. 4-49. Assume that the input to the system is the reference shaft position and the system output is the output shaft position. Assume the following numerical values for the system constants:

r = angular displacement of the reference input shaft, radians
c = angular displacement of the output shaft, radians
θ = angular displacement of the motor shaft, radians
K_1 = gain of the potentiometer error detector = $24/\pi$ volts/rad
K_p = amplifier gain = 10 volts/volt
R_f = field-winding resistence = 2 ohms
L_f = field-winding inductance = 0.1 henry
i_f = field-winding current, amperes
e_f = applied field voltage, volts
K_2 = motor torque constant = 0.05 newton-m/amperes
n = gear ratio = 1/10
J = moment of inertia of the motor and load referred to the motor shaft = 0.02 kg-m^2

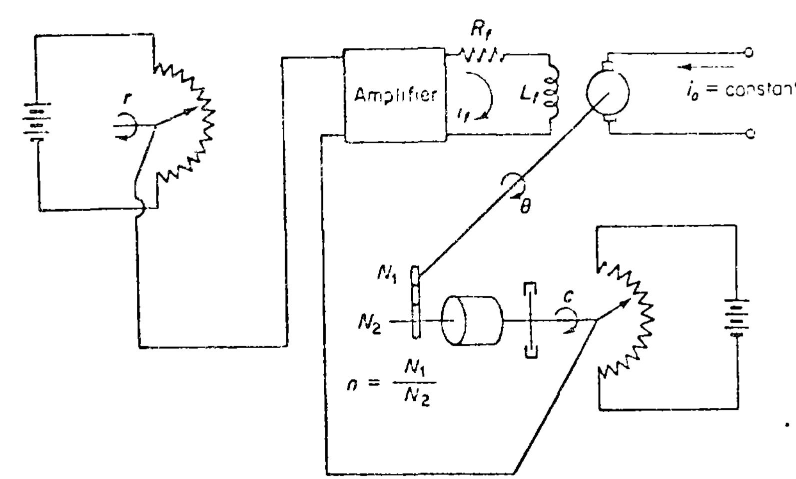


Fig. 4-49. Positional servomechanism

f = equivalent viscous-friction coefficient of the motor and load referred to motor shaft = 0.02 newton-m/rad/sec

Draw a block diagram of the system. Find the transfer function of each block. Fi... simplify the block diagram.

Solution. The equations describing the system dynamics are as follows:

For the potentiometric error detector:

$$E(s) = K_1[R(s) - C(s)] = \frac{24}{\pi}[R(s) - C(s)]$$

For the amplifier:

$$E_f(s) = K_p E(s) = 10E(s)$$

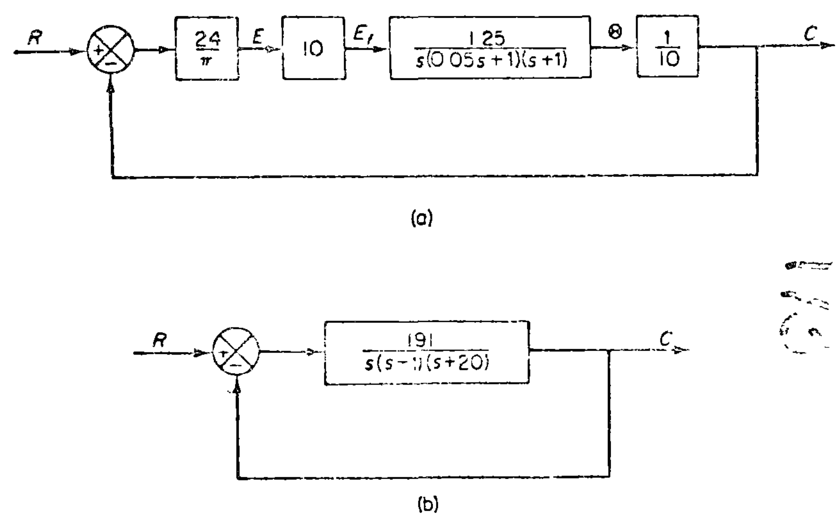


Fig. 4-50. (a) Block diagram of the positional servomechanism shown in Fig. 4-49; (b) simplified block diagram.

the field-controlled motor: Referring to Eq. (4-52), we see that

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

ere

$$K_m = \frac{K_2}{R_f f} = \frac{0.05}{2 \times 0.02} = 1.25 \text{ rad/volt-sec}$$

$$T_f = \frac{L_f}{R_f} = \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ sec}$$

$$T_m = \frac{J}{f} = \frac{0.02}{0.02} = 1 \text{ sec}$$

ence

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{1.25}{s(0.05s + 1)(s + 1)} \tag{4-83}$$

From Eqs. (4-81), (4-82), and (4-83), we obtain the block diagram shown in Fig. 50(a). Simplification of the block diagram of Fig. 4-50(a) yields Fig. 4-50(b).

ROBLEM A-4-13. In feedback control systems, dc generators are used for producing rge power amplification. (Vacuum-tube amplifiers, transistor amplifiers, etc., are not itable for use in directly controlling a dc motor of more than 100 watts if small time onstants and good linearity are desired.) In the diagram shown in Fig. 4-51 (a), the dc enerator drives an armature-controlled dc motor. In the schematic diagram of Fig. -51 (b),

R_f = field-winding resistance of the dc generator, ohms
L_f = field-winding inductance of the dc generator, henrys
i_g = field-winding current of the dc generator, amperes
e_f = applied field-winding voltage of the dc generator, volts
R_a = armature-winding resistance, ohms
L_a = armature-winding inductance, henrys
i_a = armature-winding current, amperes
e_a = armature-generated voltage, volts
$\dot{\theta}_g$ = constant speed of the dc generator, rad/sec
i_f = field current of the dc motor (constant), amperes
e_b = back emf, volts
θ = angular displacement of the motor shaft, radians
T = torque delivered by the motor, lb-ft
J = moment of inertia of the motor and load referred to the motor shaft, slug-ft^2
f = viscous-friction coefficient of the motor and load referred to the motor shaft, lb-ft/rad/sec

he generator is rotated at a constant speed $\dot{\theta}_g$. The armature generated voltage e_a is etermined by the voltage e_f applied to the generator field. Derive the transfer function etween θ and e_f.

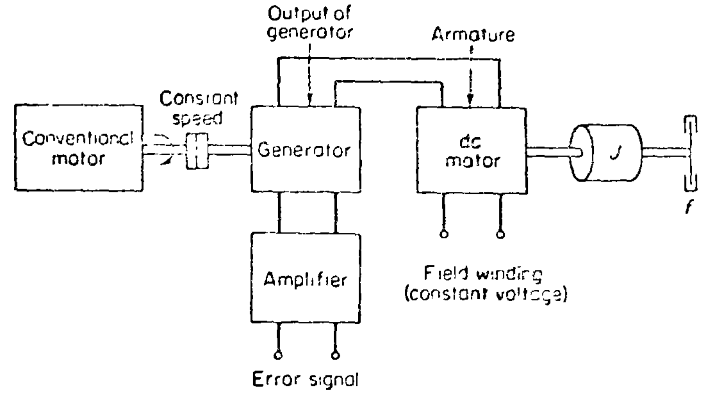
olution. Equations for this system are

$$L_f \frac{di_g}{dt} + R_f i_g = e_f \tag{4-84}$$

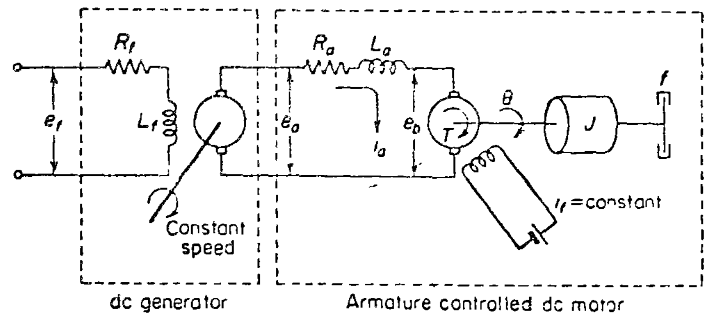
nd

$$e_a = K\dot{\theta}_g \psi_g$$

re K is a con[illegible] and ψ_g is the air gap flux. Since the field-winding current and the [illegible] flux are [illegible]tional and $\dot{\theta}_g$ is a constant, e_a can be written



(a)



(b)

Fig. 4-51. (a) A dc generator-motor system; (b) schematic diagram.

$$e_a = K_a i_g \tag{4-85}$$

where K_a is a constant. Eliminating i_g from Eqs. (4-84) and (4-85), we obtain

$$L_f \frac{de_a}{dt} + R_f e_a = K_a e_f$$

The transfer function between the armature-generated voltage e_a and field-winding voltage e_f is then

$$\frac{E_a(s)}{E_f(s)} = \frac{K_a}{L_f s + R_f} \tag{4-86}$$

In the armature-controlled dc motor, the armature is energized by the output of the generator and the field current is held constant. The transfer function between θ and e_a was obtained in Section 4-5 and given by Eq. (4-42). Rewritten, it is

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a J s^2 + (L_a f + R_a J)s + R_a f + K K_b]} \tag{4-87}$$

Hence the transfer function between θ and e_f is obtained from E[illegible]4-86) and (4-87) a

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{KK_a}{(L_f s + R_f)s[L_a J s^2 + (L_a f + R_a J)s + R_a f + KK_b]} \tag{4-88}$$

The inductance L_a in the armature circuit is usually small and may be neglected. If L_a is neglected, then the transfer function given by Eq. (4-88) reduces to

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_g K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

where

$K_g = K_a/R_f$ = generator gain constant
$T_f = L_f/R_f$ = generator time constant
$K_m = K/(R_a f + KK_b)$ = motor gain constant
$T_m = R_a J/(R_a f + KK_b)$ = motor time constant

PROBLEM A-4-14. Considering small deviations from steady-state operation, draw the block diagram of the air heating system shown in Fig. 4-52. Assume that the heat loss to the surroundings and the heat capacitance of the metal parts of the heater are negligible.

Solution. Let us define

$\bar{\Theta}_i$ = steady-state temperature of inlet air, °F
$\bar{\Theta}_o$ = steady-state temperature of outlet air, °F
G = flow rate of air through the heating chamber, lb/sec
M = air contained in the heating chamber, lb
c = specific heat of air, Btu/lb °F
R = thermal resistance, °F sec/Btu
C = thermal capacitance of air contained in the heating chamber = Mc, Btu/°F
$\bar{H}$ = steady-state heat input, Btu/sec

Let us assume that the heat input is suddenly changed from $\bar{H}$ to $\bar{H} + h$ and the inlet air temperature is suddenly changed from $\bar{\Theta}_i$ to $\bar{\Theta}_i + \theta_i$. Then the outlet air temperature will be changed from $\bar{\Theta}_o$ to $\bar{\Theta}_o + \theta_o$.

The equation describing the system behavior is

$$C\,d\theta_o = [h + Gc(\theta_i - \theta_o)]\,dt$$

or

$$C\frac{d\theta_o}{dt} = h + Gc(\theta_i - \theta_o)$$

Noting that

$$Gc = \frac{1}{R}$$

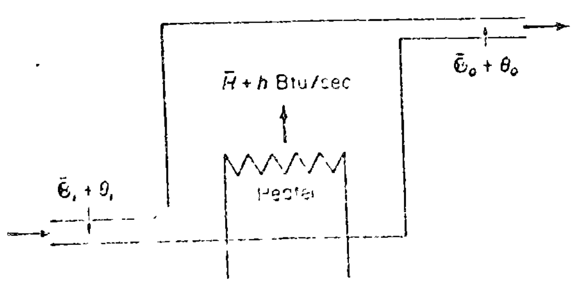


Fig. 4-52. Air heating system.

we obtain

$$C\frac{d\theta_o}{dt} = h + \frac{1}{R}(\theta_i - \theta_o)$$

or

$$RC\frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = Rh + \theta_i$$

Taking the Laplace transforms of both sides of this last equation and substituting t initial condition that $\theta_o(0) = 0$, we obtain

$$\Theta_o(s) = \frac{R}{RCs + 1}H(s) + \frac{1}{RCs + 1}\Theta_i(s)$$

The block diagram of the system corresponding to this equation is shown in Fig. 4-53.

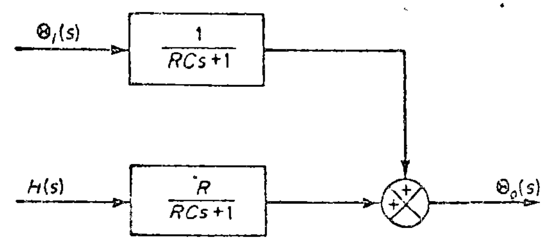


Fig. 4-53. Block diagram of the air heating system shown in Fig. 4-52.

PROBLEM A-4-15. Consider an ideal gas changing from a state represented by (p_1, v_1, T_1) to a state represented by (p_2, v_2, T_2). If we keep the temperature constant at but change the pressure from p_1 to p_2, then the volume of gas will change from v_1 v' such that

$$p_1 v_1 = p_2 v' \tag{4-8}$$

Now keep the pressure constant but change the temperature to T_2. Then the volume gas reaches v_2. Thus

$$\frac{v'}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} \tag{4-9}$$

By eliminating v' between Eqs. (4-89) and (4-90), we obtain

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}$$

This means that, for a fixed quantity of gas, no matter what physical changes occu pv/T will be constant. We may therefore write

$$pv = kT$$

where the value of constant k depends on the quantity and nature of the gas considere

In dealing with gas systems, we find it convenient to work in molar quantities sinc mole of any gas contains the same number of molecules. Thus 1 mole occupies the sa volume if measured under the same conditions of temperature and pressure.

If we consider 1 mole of gas, then

$$p\bar{v} = \bar{R}T \tag{4-9}$$

The value of $\bar{R}$ is the same for all gases under all conditions. The constant $\bar{R}$ is called t universal gas constant. At standard temperature and pressure (that is, at 492°R and 1 psia), 1 lb-mole of any gas is found to occupy 359 ft³. [For example, at 492°R(= 32°

and 14.7 psia, the volume occupied by 2 lb of hydrogen, 32 lb of oxygen, or 28 lb of nitrogen is the same, 359 ft³.] This volume is called the molal volume and is denoted by $\bar{v}$.

Obtain the value of the universal gas constant.

Solution. By substituting $p = 14.7$ lb/in.², $\bar{v} = 359$ ft³/lb-mole, and $T = 492$°R into Eq. (4-91), we obtain

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{14.7 \times 144 \times 359}{492}\\ &= 1545 \text{ ft-lb/lb-mole °R}\\ &= 1.987 \text{ Btu/lb-mole °R}\end{aligned}$$

PROBLEM A-4-16. The molecular weight of a pure substance is the weight of one molecule of the substance compared to the weight of one oxygen atom, which is taken to be 16. That is, the molecular weight of carbon dioxide (CO_2) is $12 + (16 \times 2) = 44$. The molecular weights of oxygen (molecular) and water vapor are 32 and 18, respectively.

Obtain the specific volume of a mixture which consists of 100 ft³ of oxygen, 5 ft³ of carbon dioxide, and 20 ft³ of water vapor. Assume the temperature and pressure to be 70°F and 14.7 psia, respecively.

Solution. The mean molecular weight of the mixture is

$$M = \left(32 \times \frac{100}{125}\right) + \left(44 \times \frac{5}{125}\right) + \left(18 \times \frac{20}{125}\right) = 25.6 + 1.76 + 2.88 = 30.24$$

Thus

$$\begin{aligned}v &= \frac{\bar{R}}{M}\frac{T}{p}\\ &= \frac{1545 \times 530}{30.24 \times 14.7 \times 144} = 12.8 \text{ ft}^3/\text{lb}\end{aligned}$$

PROBLEM A-4-17. The value of the gas constant for any gas may be determined from accurate experimental observations of simultaneous values of p, v, and T.

Obtain the gas constant R_{air} for air. Note that at 32°F and 14.7 psia the specific volume of air is 12.39 ft³/lb. Then obtain the capacitance of a 20-ft³ pressure vessel which contains air at 160°F. Assume that the expansion process is isothermal

Solution

$$R_{air} = \frac{pv}{T} = \frac{14.7 \times 144 \times 12.39}{460 + 32} = 53.3 \text{ ft-lb/lb °R}$$

Referring to Eq. (4-64) the capacitance of a 20-ft³ pressure vessel is

$$C = \frac{V}{nR_{air}T} = \frac{20}{1 \times 53.3 \times 620} = 6.05 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{lb/ft}^2}$$

PROBLEM A-4-18. Consider the system shown in Fig. 4-54. Obtain the closed-loop transfer function $H(s)/Q(s)$.

Solution. In the given system, there is only one forward path that connects the input $Q(s)$ and the output $H(s)$. Thus,

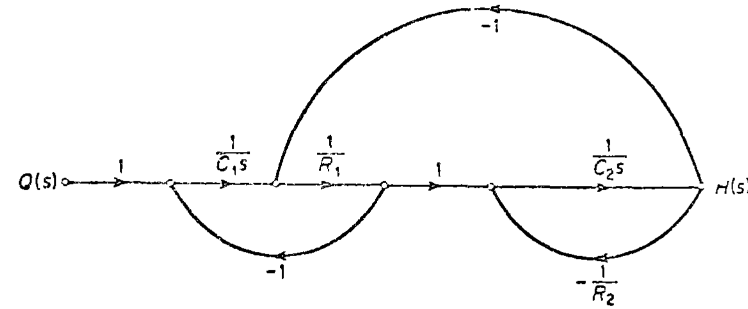


Fig. 4-54. Signal flow graph of a control system.

$$P_1 = \frac{1}{C_1 s}\frac{1}{R_1}\frac{1}{C_2 s}$$

There are three individual loops. Thus,

$$\begin{aligned}L_1 &= -\frac{1}{C_1 s}\frac{1}{R_1}\\ L_2 &= -\frac{1}{C_2 s}\frac{1}{R_2}\\ L_3 &= -\frac{1}{R_1}\frac{1}{C_2 s}\end{aligned}$$

Loop L_1 does not touch loop L_2. (Loop L_1 touches loop L_3, and loop L_2 touches lo L_3). Hence the determinant Δ is given by

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_2)\\ &= 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_1 C_2 s} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}\end{aligned}$$

Since all three loops touch the forward path P_1, we remove L_1, L_2, and L_3 from Δ a evaluate the cofactor Δ_1 as follows:

$$\Delta_1 = 1$$

Thus we obtain the closed-loop transfer function as shown:

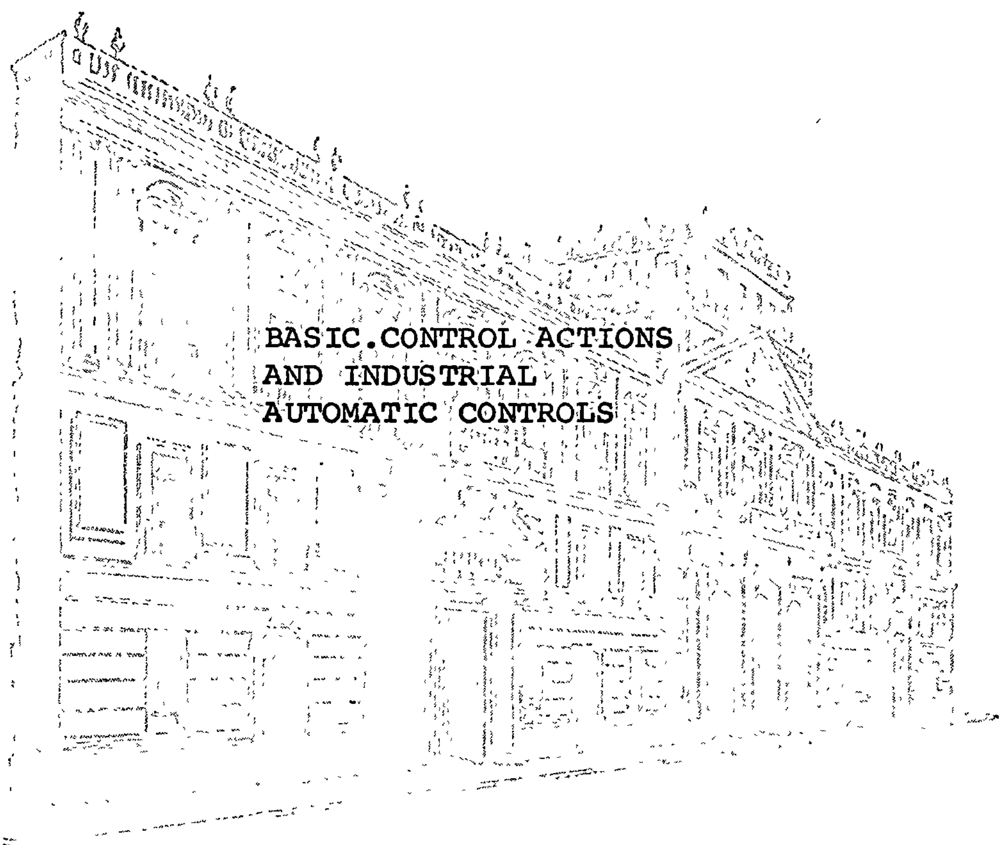
$$\begin{aligned}\frac{H(s)}{Q(s)} &= \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}\\ &= \frac{\dfrac{1}{R_1 C_1 C_2 s^2}}{1 + \dfrac{1}{R_1 C_1 s} + \dfrac{1}{R_2 C_2 s} + \dfrac{1}{R_1 C_2 s} + \dfrac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}}\\ &= \frac{R_2}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}\end{aligned}$$

PROBLEMS

PROBLEM B-4-1. Obtain the transfer functions of the mechanical systems shown in Figs. 4-55 (a) and (b). Also obtain electrical analogs of the mechanical systems.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO



BASIC.CONTROL ACTIONS AND INDUSTRIAL AUTOMATIC CONTROLS

DR. VICTOR GEREZ GREISER

JUNIO DE 1976.

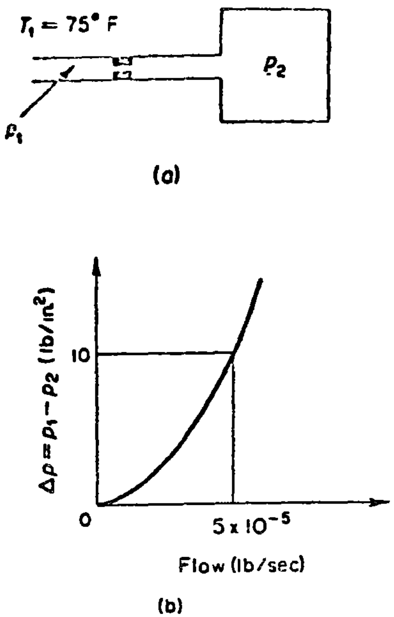


Fig. 4-63. (a) Pressure system; (b) Δp versus flow curve.

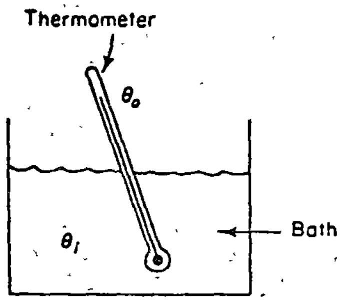


Fig. 4-64. Thermometer system.

ll is 3.2 oz. Assume also that the specific heats of the thermocouple and thermal well the same.

OBLEM B-4-14. Figure 4-65 is the block diagram of an engine-speed control system. e speed is measured by a set of flyweights. Draw a signal flow graph for this system.

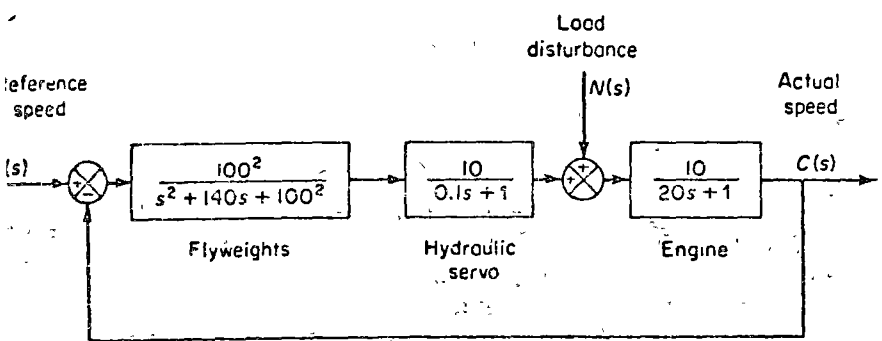


Fig. 4-65. Block diagram of an engine-speed control system.

VICTOR GEREL

3

BASIC CONTROL ACTIONS AND INDUSTRIAL AUTOMATIC CONTROLS

5-1 INTRODUCTION

An automatic controller compares the actual value of the plant output wit the desired value, determines the deviation, and produces a control signal whic will reduce the deviation to zero or to a small value. The manner in which the auto matic controller produces the control signal is called the *control action.*

In this chapter, we shall present the basic control actions commonly used i industrial automatic controllers. First we shall introduce the principle of operatio of automatic controllers and the methods for generating various control signals such as the use of the derivative and integral of the error signal. Next we shal discuss the effects of particular control modes on the system performance. The we shall give a brief discussion of methods for reducing the effects of externa disturbances on the system performance. Finally, we shall introduce fluid amplifiers present basic principles of fluidics, and discuss applications of fluidic devices.

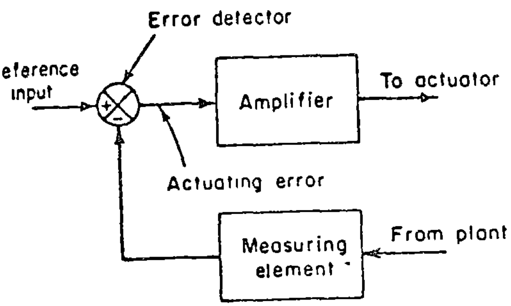
Classifications of industrial automatic controllers. Industrial automatic con trollers may be classified according to their control action as

1. two-position or on-off controllers
2. proportional controllers
3. integral controllers

4. proportional-plus-integral controllers
5. proportional-plus-derivative controllers
6. proportional-plus-derivative-plus-integral controllers

Most industrial automatic controllers use electricity or pressurized fluid such oil or air as power sources. Automatic controllers may also be classified according the kind of power employed in the operation, such as pneumatic controllers, draulic controllers, or electronic controllers. What kind of controller to use must decided by the nature of the plant and the operating conditions, including such nsiderations as safety, cost, availability, reliability, accuracy, weight, and size.

Elements of industrial automatic controllers. An automatic controller must etect the actuating error signal, which is usually at a very low power level, and mplify it to a sufficiently high level. Thus, an amplifier is necessary. The output of n automatic controller is fed to a power device, such as a pneumatic motor or alve, a hydraulic motor, or an electric motor.



3.2.1

Fig. 5-1. Block diagram of an industrial automatic controller and measuring element.

Figure 5-1 shows a block diagram of an industrial automatic controller together with a measuring element. The controller consists of an error detector and amplifier. The measuring element is a device which converts the output variable into another suitable variable, such as a displacement, pressure, or electric signal, which can be used for comparing the output to the reference input signal. This element is in the feedback path of the closed-loop system. The set point of the controller must be converted to a reference input of the same units as the feedback signal from the measuring element. The amplifier amplifies the power of the actuating error signal, which in turn operates the actuator. (Quite often an amplifier, together with a suitable feedback circuit, is used to alter the actuating error signal by amplifying and sometimes by differentiating and/or integrating it to produce a better control signal.) The actuator is an element which alters the input to the plant according to the control signal so that the feedback signal may be brought into correspondence with the reference input signal.

Self-operated controllers. In most industrial automatic controllers, separate units are used fo[illegible] measuring element and for the actuator. In a very simple ... such as a self-operated controller, these elements are assembled

in one unit. Self-operated controllers utilize power developed by the measuring element and are very simple and inexpensive. An example of such a self-operated controller is shown in Fig 5-2. The set point is determined by the adjustment of the spring force. The controlled pressure is measured by the diaphragm. The actuating error signal is the net force acting on the diaphragm. Its position determines the valve opening.

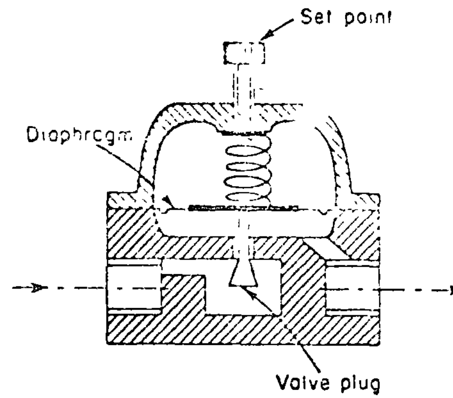


Fig. 5-2. Self-operated controller.

The operation of the self-operated controller is as follows: Suppose that the output pressure is lower than the reference pressure, as determined by the set point. Then the downward spring forc is greater than the upward pressure force, resulting in a downward movement of th diaphragm. This increases the flow rate and raises the output pressure. When th upward pressure force equals the downward spring force, the valve plug stay stationary and the flow rate is constant. Conversely, if the output pressure higher than the reference pressure, the valve opening becomes small and reduce the flow rate through the valve opening. Such a self-operated controller is widel used for water and gas pressure control. In such a controller, the flow rate throug the valve opening is approximately proportional to the actuating error signal.

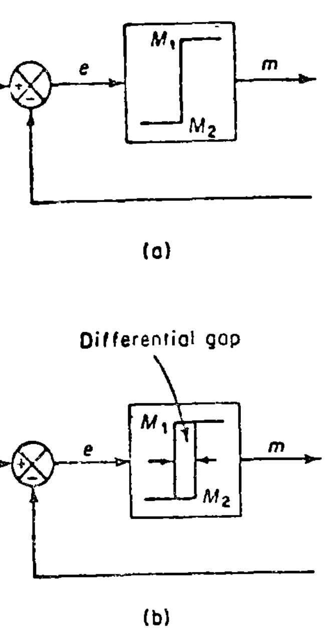
Control actions. The following six basic control actions are very commo among industrial auomatic controllers: two-position or on-off, proportiona integral, proportional-plus-integral, proportional-plus-derivative, and proportiona plus-derivative-plus-integral control action. These six will be discussed in th chapter. Note that an understanding of the basic characteristics of the variou actions is necessary in order for the control engineer to select the one best suite to his particular application.

Two-position or on-off control action. In a two-position control system, th actuating element has only two fixed positions which are, in many cases, simpl on and off. Two-position or on-off control is relatively simple and inexpensive and for this reason, is very widely used in both industrial and domestic control system

Let the output signal from the controller be $m(t)$ and the actuating erro signal be $e(t)$. In two-position control, the signal $m(t)$ remains at either a maximum or minimum value, depending on whether the actuating error signal is positive o negative, so that

$$m(t) = M_1 \quad \text{for } e(t) > 0$$
$$= M_2 \quad \text{for } e(t) < 0$$

where M_1 and M_2 are constants. The minimum value M_2 is usually either ... o



5-3. (a) Block diagram of an on-off controller; (b) block diagram of on-off controller with differential gap.

$-M_2$. Two-position controllers are generally electrical devices, and an electric solenoid-operated valve is widely used in such controllers. Pneumatic proportional controllers with very high gains act as two-position controllers and are sometimes called pneumatic two-position controllers.

Figures 5-3(a) and (b) show the block diagrams for two-position controllers. The range through which the actuating error signal must move before the switching occurs is called the differential gap. A differential gap is indicated in Fig. 5-3(b). Such a differential gap causes the controller output $m(t)$ to maintain its present value until the actuating error signal has moved slightly beyond the zero value. In some cases, the differential gap is a result of unintentional friction and lost motion; however, quite often it is intentionally provided in order to prevent too frequent operation of the on-off mechanism.

Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-4. With two position control, the valve is either open or closed. Thus the water inflow rate is either a positive constant or zero. As shown in Fig. 5-5, the output signal continuously moves between the two limits required to cause the actuating element to move from one fixed position to the other. Notice that the output curve follows one of two exponential curves, one corresponding to the filling curve and the other to the emptying curve. Such output oscillation between two limits is a typical response characteristic of a system under two-position control.

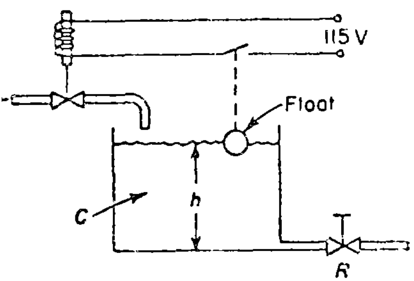


Fig. 5-4. Liquid-level control system

From Fig. 5-5, we notice that the amplitude of the output oscillation can be [r]educed by decreasing the differential gap. This, however, increases the number [of] on-off switchings per minute and reduces the useful life of the component. The [magn]itude of the differential gap must be determined from such considerations as [the] accuracy required and the life of the component. Further analysis of control [syste]ms with two-position controllers is deferred to Chapter 11.

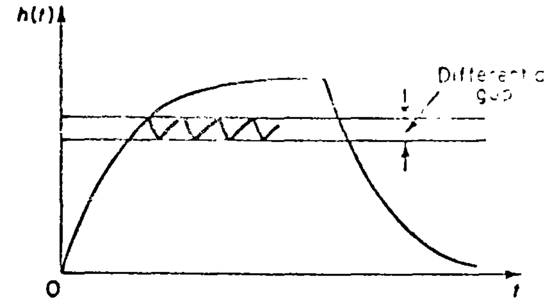


Fig. 5-5. Level $h(t)$ versus t curve for the system shown in Fig 5-4.

Proportional control action. For a controller with proportional control action, the relationship between the output of the controller $m(t)$ and the actuating error signal $e(t)$ is

$$m(t) = K_p e(t)$$

or, in Laplace-transformed quantities,

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

where K_p is termed the proportional sensitivity or the gain.

Whatever the actual mechanism may be and whatever the form of the operating power, the proportional controller is essentially an amplifier with an adjustable gain. A block diagram of such a controller is shown in Fig. 5-6.

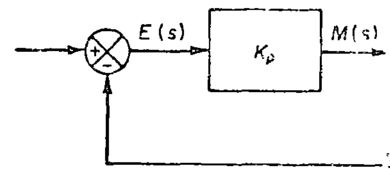


Fig. 5-6. Block diagram of a proportional controller.

Integral control action. In a controller with integral control action, the value of the controller output $m(t)$ is changed at a rate proportional to the actuating error signal $e(t)$. Namely,

$$\frac{dm(t)}{dt} = K_i e(t)$$

or

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t)\, dt$$

where K_i is an adjustable constant. The transfer function of the integral controller is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

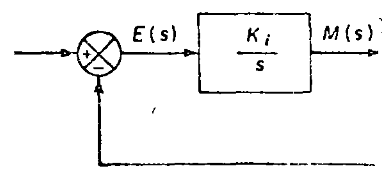


Fig. 5-7. Block diagram of an integral controller.

If the value of $e(t)$ is doubled, then the value of $m(t)$ varies twice as fast. For zero actuating error, the value of $m(t)$ remains stationary. The integral control action is sometimes called reset control. Figure 5-7 shows a block diagram of such a controller.

Proportional-plus-integral control action. The control action of a proportional-
ıs-integral controller is defined by the following equation:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

the transfer function of the controller is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

ıere K_p represents the proportional sensitivity or gain, and T_i represents the tegral time. Both K_p and T_i are adjustable. The integral time adjusts the integral ntrol action, while a change in the value of K_p affects both the proportional and tegral parts of the control action. The inverse of the integral time T_i is called the set rate. The reset rate is the number of times per minute that the proportional part the control action is duplicated. Reset rate is measured in terms of repeats per inute. Figure 5-8(a) shows a block diagram of a proportional-plus-integral

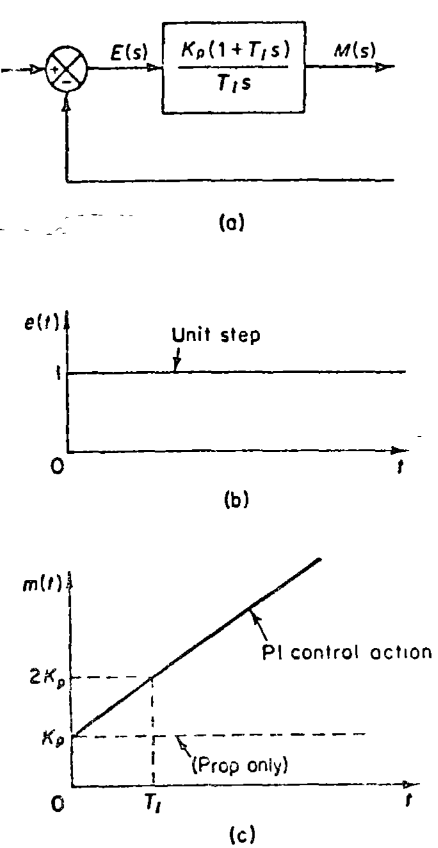


Fig. 5-8. (a) Block diagram of a proportional-plus-integral controlle( ) and (c) diagrams depicting a unit-step input and the controller

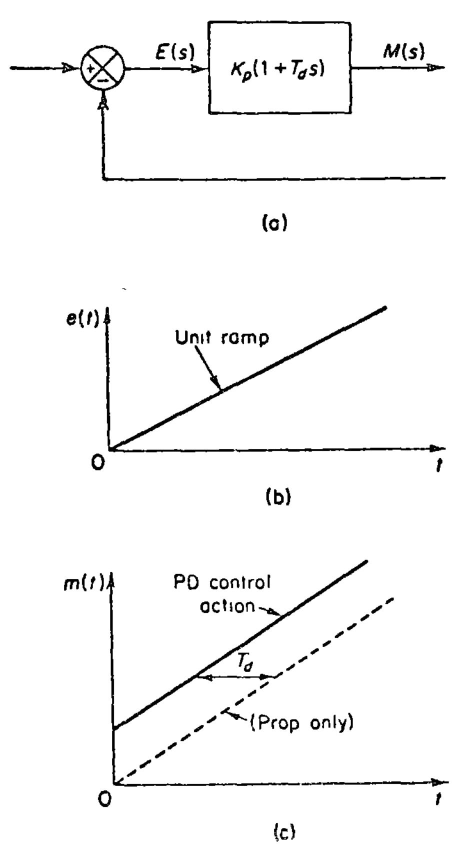


Fig. 5-9. (a) Block diagram of a porportional-plus-derivative controller; (b) and (c) diagrams depicting a unit-ramp input and the controller

controller. If the actuating error signal $e(t)$ is a unit-step function as shown Fig. 5-8(b), then the controller output $m(t)$ becomes as shown in Fig. 5-8(c).

Proportional-plus-derivative control action. The control action of proportion plus-derivative controller is defined by the following equation:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

and the transfer function is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

where K_p represents the proportional sensitivity and T_d represents the derivati time. Both K_p and T_d are adjustable. The derivative control action, sometim called rate control, is where the magnitude of the controller output is proportior to the rate of change of the actuating error signal. The derivative time T_d is the tii interval by which the rate action advances the effect of the proportional conti action. Figure 5-9(a) shows a block diagram of a proportional-plus-derivati controller. If the actuating error signal $e(t)$ is a unit-ramp function as shown Fig. 5-9(b), then the controller output $m(t)$ becomes as shown in Fig. 5-9(c). may be seen from Fig. 5-9(c), the derivative control action has an anticipato

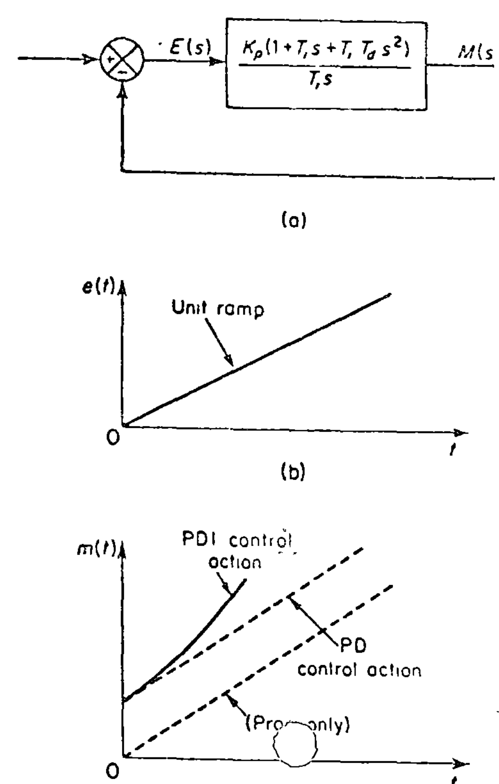


Fig. 5-10. (a) Block diagram of a proportional-plus-derivative-plus-integral controller, (b) and (c) diagrams depicting a

acter. As a matter of course, however, derivative control action can never cipate any action that has not yet taken place.

While derivative control action has an advantage of being anticipatory, it has disadvantages that it amplifies noise signals and may cause a saturation effect e actuator.

Note that derivative control action can never be used alone because this control on is effective only during transient periods.

Proportional-plus-derivative-plus-integral control action. The combination of portional control action, derivative control action, and integral control action rmed proportional-plus-derivative-plus-integral control action. This combined on has the advantages of each of the three individual control actions. The ation of a controller with this combined action is given by

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

he transfer function is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$$

re K_p represents the proportional itivity, T_d represents the derivative e, and T_i represents the integral time. block diagram of a proportional- -derivative-plus-integral controller own in Fig. 5-10(a). If $e(t)$ is a unit- p function as shown in Fig. 5-10(b), the controller output $m(t)$ becomes own in Fig. 5-10(c).

Effects of the measuring element on em performance. Since the dynamic static characteristics of the measur- element affect the indication of the al value of the output variable, the suring element plays an important in determining the overall perfor- ce of the control system. The mea- g element usually determines the sfer function in the feedback path e time constants of a measuring ele- are negligibly small compared with time constants of the control sys- the transfer function of the measur- ment simply becomes a constant. 5-11(a), (b), and (c) show block

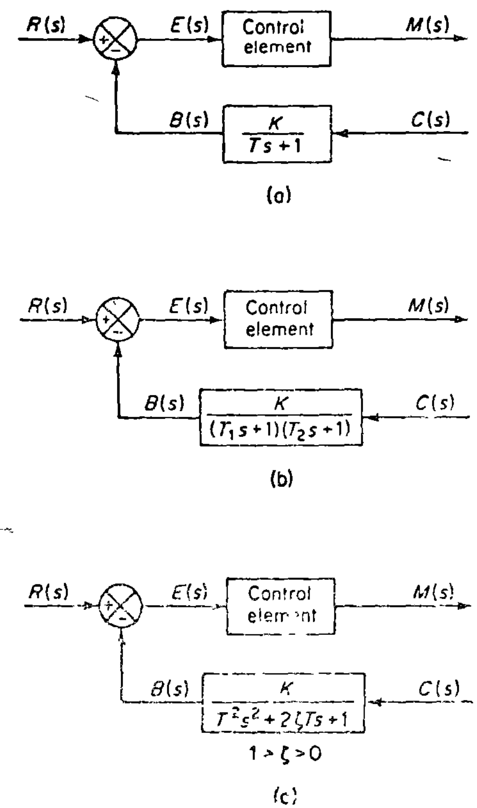


Fig. 5-11. Block diagrams of automatic controllers with (a) first-order measuring element, (b) overdamped second-order measuring element, (c) underdamped second-order measuring element.

diagrams of automatic controllers having a first-order, an overdamped secon order, and an underdamped second-order measuring element, respectively. T response of a thermal measuring element is often of the overdamped second-ord type.

Block diagrams of automatic control systems. A block diagram of a simp automatic control system may be obtained by connecting the plant to the aut matic controller, as shown in Fig. 5-12. Feedback of the output signal is accon

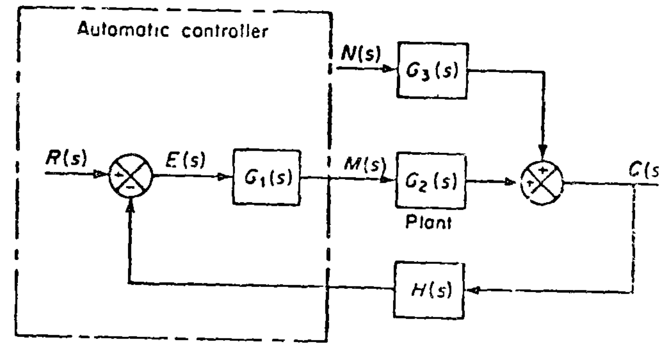


Fig. 5-12. Block diagram of a control system.

plished by the measuring element. The equation relating the output variable C(to the reference input $R(s)$ and disturbance variable $N(s)$ may be obtained a follows:

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

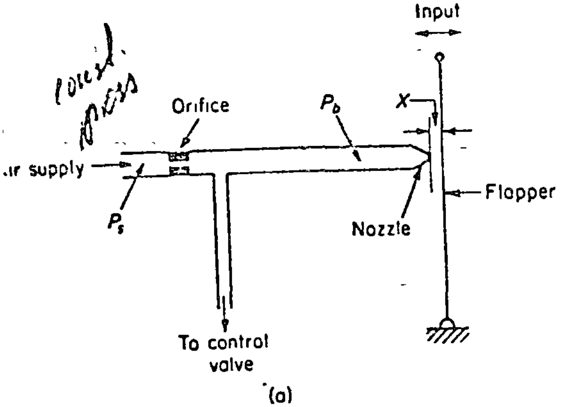
In process control systems, we are usually interested in the response to th load disturbance $N(s)$. In servomechanisms, however, the response to a varyin input $R(s)$ is of most interest. We shall postpone the analysis of the system respons to changes in load disturbances to Section 5-4. The system response to changes i the reference input will be studied in detail in Chapter 6.

3.2.3 5-2 PROPORTIONAL CONTROLLERS

In this section, we shall illustrate the fact that proportional controllers utiliz the principle of negative feedback in themselves. We shall give a detailed discussio of the principle by which proportional controllers operate by considering pneumatic ones. We shall then show that the same principle applies to hydraulic and electronic controllers. Throughout this discussion, we shall place emphasis on the fundamental principles rather than on the details of the operation of the actual mechanisms.

Pneumatic systems. Low-pressure pneumatic controllers have been well developed for industrial control systems and have been used extensively in industrial processes. Reasons for the widespread use of pneumatic controllers are their explosion-proof characteristics, simplicity, and ease of maintenance

Pneumatic nozzle-flapper amplifiers. A schematic diagram of a pneumatic ozzle-flapper amplifier is shown in Fig. 5-13(a). The power source for this amplifer a supply of air at constant pressure. The nozzle-flapper amplifier converts small ıanges in the position of the flapper into large changes in the back pressure in ıe nozzle. Thus a large power output can be controlled by the very little power ıat is needed to position the flapper.



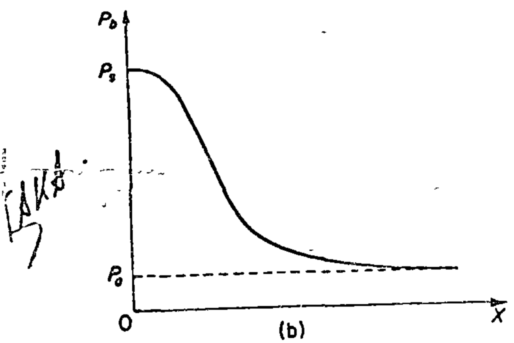


Fig. 5-13. (a) Schematic diagram of a pneumatic nozzle-flapper amplifier; (b) characteristic curve relating nozzle back pressure and nozzle-flapper distance.

In Fig. 5-13(a), pressurized air is fed through the orifice, and the air is ejected from the nozzle toward the flapper. Usually the supply pressure P_s for such a controller is 20 psig. The diameter of the orifice is of the order of 0.010 in. and that of the nozzle is of the order of 0.015 in. The nozzle diameter must be larger than the orifice diameter for the proper functioning of the amplifier. The flapper is positioned against the nozzle opening, and the nozzle back pressure P_b is controlled by the nozzle-flapper distance X. As the flapper approaches the nozzle, the opposition to the flow of air through the nozzle increases, with the result that the nozzle back pressure P_b increases. If the nozzle is completely closed by the flapper, the nozzle back pressure P_b becomes equal to the supply pressure P_s. If the flapper is moved away from the nozzle, so that the nozzle-flapper distance is wide (of the order of 0.01 in.), then there is practically no restriction to flow and the nozzle back pressure P_b takes on a minimum value which depends on the nozzle-flapper device. (The lowest possible pressure will be the ambient pressure P_a.)

Note that because the air jet puts a force against the flapper, it is necessary make the nozzle diameter as small as possible.

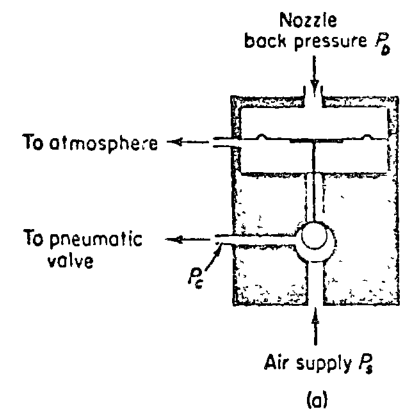
A typical curve relating the nozzle back pressure P_b to the nozzle-flapp distance X is shown in Fig. 5-13(b). The steep and almost linear part of the cu is utilized in the actual operation of the nozzle-flapper amplifier. Because the ran of flapper displacements is restricted to a small value, the change in output pressu is also small, unless the curve happens to be very steep.

The nozzle-flapper amplifier converts displacement into a pressure sign Since industrial process control systems require large output power to oper large pneumatic actuating valves, the power amplification of the nozzle-flapp amplifier is usually not sufficient. Therefore, a pneumatic relay is often employ as a power amplifier in connection with the nozzle-flapper amplifier.

Pneumatic relays. In a practical pneumatic controller, a nozzle-flapper amplif acts as the first-stage amplifier and a pneumatic relay as the second-stage amplifi The pneumatic relay is capable of handling a large quantity of air flow.

A schematic diagram of a pneumatic relay is shown in Fig. 5-14(a). As t nozzle back pressure P_b increases, the ball valve is forced toward the lower se thus decreasing the control pressure P_c. Such a relay is called a reverse acting rel

When the ball valve is at the top of the seat, the atmospheric opening is clos and the control pressure P_c becomes equal to the supply pressure P_s. When the b



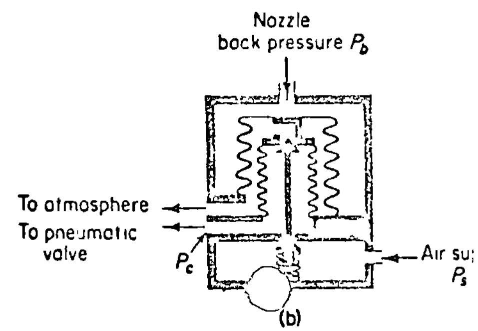


Fig. 5-14. (a) Schematic diagram of a bleed-type relay; (b) schematic diagram of a nonbleed-type relay.

valve is at the bottom of its seat, it shuts off the air supply and the control pressure P_c drops to the ambient pressure. The control pressure P_c can thus be made to vary from 0 psig to full supply pressure, usually 20 psig.

The total movement of the ball valve between the upper and lower seat is very small (of the order of 0.01 in.). In all positions of the ball valve, except at the top seat, air continues to bleed into the atmosphere, even after the equilibrium condition is attained between the nozzle back pressure and the control pressure. Thus the relay shown in Fig. 5-14(a) is called a bleed-type relay.

There is another type of relay, the nonbleed type. In this one the air bleed stops when the equilibrium condition is obtained and, therefore, there is no loss of pressurized air at steady-state operation. Note, however, that the nonbleed type relay must have an atmospheric relief to release the control pressure P_c from the pneumatic actuating valve. A schematic diagram of a nonbleed-type relay is shown in Fig. 5-14(b).

In either type of relay, the air supply is controlled by a valve, which is in turn controlled by the nozzle back pressure. Thus, the nozzle back pressure is converted into the control pressure with power amplification.

Since the control pressure P_c changes almost instantaneously with changes in the nozzle back pressure P_b, the time constant of the pneumatic relay is negligible compared with the other larger time constants of the pneumatic controller and the plant.

Pneumatic proportional controllers (force-distance type). Two types of pneumatic controllers, one called the force-distance type and the other the force-balance type, are used extensively in industry. Regardless of how differently industrial pneumatic controllers may appear, careful study will show the close similarity in the functions of the pneumatic circuit. Here we shall consider only force-distance pneumatic controllers.

Figure 5-15(a) shows a schematic diagram of such a proportional controller. The nozzle flapper amplifier constitutes the first-stage amplifier, and the nozzle back pressure is controlled by the nozzle-flapper distance. The relay-type amplifier constitutes the second-stage amplifier. The nozzle back pressure determines the position of the ball valve for the second-stage amplifier, which is capable of handling a large quantity of air flow.

In most pneumatic controllers, some type of pneumatic feedback is employed. Feedback of the pneumatic output reduces the amount of actual movement of the flapper. Instead of mounting the flapper on a fixed point, as shown in Fig. 5-15(b), it is often pivoted on the feedback bellows, as shown in Fig. 5-15(c). The amount of feedback can be regulated by introducing a variable linkage between the feedback bellows and the flapper connecting point. The flapper then becomes a floating link. It can be moved by both the error signal and the feedback signal.

The operation of the controller shown in Fig. 5-15(a) is as follows: The input signal to the two-stage pneumatic amplifier is the actuating error signal. Increasing the actuating error signal moves the flapper to the right. This will, in turn, decrease the nozzle back pressure, and the bellows B will contract, which results in an upward

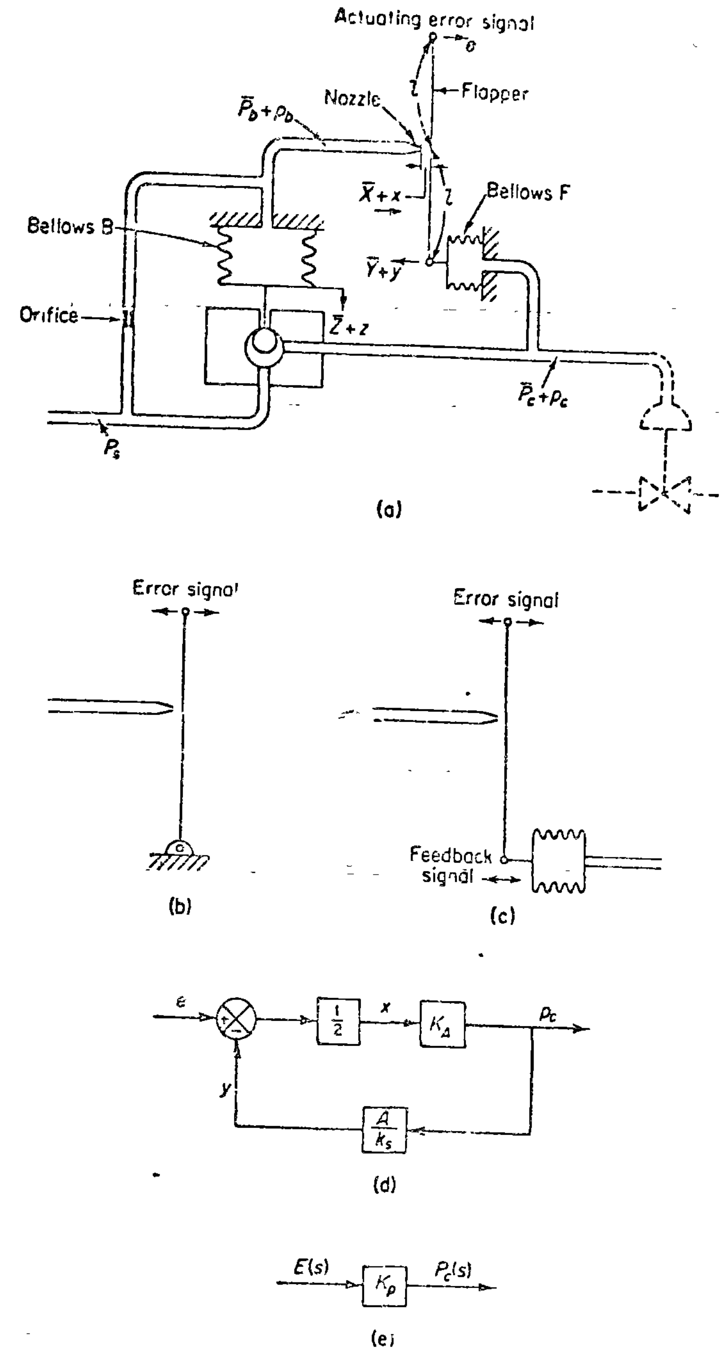


Fig. 5-15. (a) Schematic diagram of a force-distance type pneumatic proportional controller, (b) flapper mounted on a fixed point, (c) flapper mounted on a feedback bellows, (d) block diagram for the controller; (e) simplified block diagram for the controller.

movement of the ball valve. This will cause more flow to the pneumatic valve, and the control pressure will increase This increase will cause the bellows F to expand and move the flapper to the left, closing the nozzle.

The nozzle-flapper displacement is very small because of this feedback, but the change in the control pressure can be large. In the case where the actuating error decreases, the nozzle back pressure increases and the ball valve moves down, resulting in a decrease in supply flow to the valve and an increase in bleeding to the atmosphere. This will cause the control pressure to decrease.

It is important to note that the feedback bellows should move the flapper less than that movement caused by the error signal alone. If these two movements were equal, no control action would result.

Equations for this controller can be derived as follws: When the actuating error is zero, or $e = 0$, and equilibrium state exists with the nozzle-flapper distance equal to $\bar{X}$, the displacement of the bellows F equal to $\bar{Y}$, the displacement of the bellows B equal to $\bar{Z}$, the nozzle back pressure equal to $\bar{P}_b$, and the control pressure equal to $\bar{P}_c$. When there is any actuating error, the nozzle-flapper distance, the displacements of the bellows F and B, the nozzle back pressure, and the control pressure deviate from their respective equilibrium values. Let these deviations be x, y, z, p_b, and p_c, respectively. (The positive direction for each displacement variable is indicated by an arrowhead.)

Assuming that the relationship between the variation in the nozzle back pressure and the variation in the nozzle-flapper distance is linear, we have

$$p_b = -K_1 x \tag{5-1}$$

where K_1 is a constant. For the bellows B

$$p_b = K_2 z \tag{5-2}$$

where K_2 is a constant. The position of the ball valve which depends upon the displacement of the bellows B determines the control pressure. If the ball valve is such that the relationship between p_c and z is linear, then

$$p_c = -K_3 z \tag{5-3}$$

where K_3 is a constant. From Eqs. (5-1), (5-2), and (5-3), we obtain

$$p_c = -\frac{K_3}{K_2} p_b = K_A x \tag{5-4}$$

where $K_A = K_1 K_3 / K_2$ is a constant. For the flapper movement, we have

$$x = \frac{e - y}{2} \tag{5-5}$$

The bellows F acts like a spring, and the follwing equation holds:

$$A p_c = k_s y \tag{5-6}$$

where A is the effective area of the bellows F, and k_s is the equivalent spring constant or the stiffness due to the action of the corrugated side of the bellows.

Assuming that all variations in the variables are within the linear range, we may obtain a block diagram for this system from Eqs. (5-4), (5-5), and (5-6), as

shown in Fig. 5-15(d). From Fig. 5-15(d), it can clearly be seen that the pne controller shown in Fig. 5-15(a) itself is a feedback system. The transfer fu between p_c and e is given by

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{2}K_A}{1 + \frac{K_A A}{2k_s}} = K_p$$

A simplified block diagram is shown in Fig. 5-15(e). Since p_c and e are propor the pneumatic controller shown in Fig. 5-15(a) is called a pneumatic propo controller.

Note that since the value of $K_A A/k_s$ is generally very much greater thar in actual controllers, the transfer function given by Eq. (5-7) can be simpl give

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{2}K_A}{\frac{K_A A}{2k_s}} = \frac{k_s}{A}$$

As seen from Eq. (5-7) or (5-8), the gain of the pneumatic proportional co can be widely varied by adjusting the effective value of k_s. This can be a plished easily by adjusting the flapper connecting linkage. [The flapper con linkage is not shown in Fig. 5-15(a).] In most commercial proportional cont an adjusting knob or other mechanism is provided for varying the gain by ing this linkage.

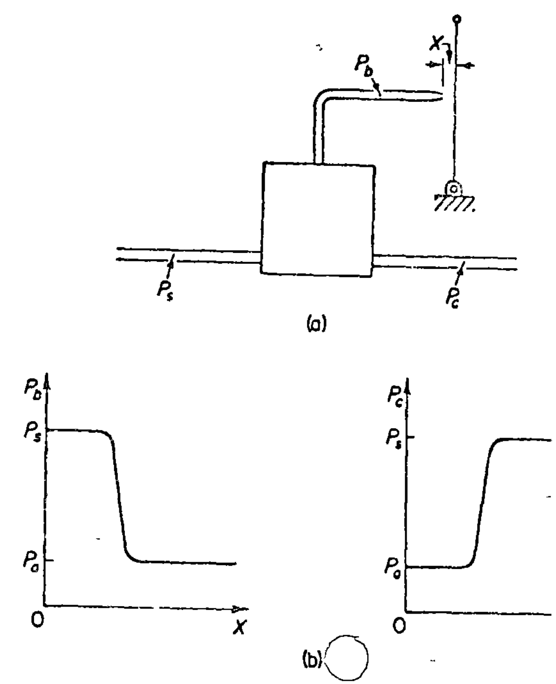


Fig. 5-16. (a) Pneumatic controller without a feedback mechanism; (b) curves P_b versus X and P_c versus X.

As we have seen previously, the actuating error signal moved the flapper in one irection, and the feedback bellows moved the flapper in the opposite direction, ut to a smaller degree. The effect of the feedback bellows is thus to reduce the ensitivity of the controller. The principle of feedback is commonly used to obtain ide proportional-band controllers.

Pneumatic controllers which do not have feedback mechanisms [which means hat one end of the flapper is fixed, as shown in Fig. 5-16(a)] have high sensitivity nd are called narrow-band proportional controllers or two-position controllers. n such a controller, only a small motion between the nozzle and the flapper is equired to give a complete change from the maximum to the minimum control ressure. The curves relating P_b to X and P_c to X are shown in Fig. 5-16(b). Notice hat a small change in X can cause a large change in P_b, which causes the ball valve o be completely open or completely closed.

Pneumatic actuating valves. One characteristic of pneumatic controls is that ney almost exclusively employ pneumatic actuating valves. A pneumatic actuating alve can provide a large power output. (Since a pneumatic actuator requires a arge power input to produce a large power output, it is necessary that a sufficient uantity of pressurized air be available.) In practical pneumatic actuating valves, ne valve characteristics may not be linear; i.e., the flow may not be directly pro- ortional to the valve stem position, and also there may be other nonlinear effects, uch as hysteresis.

Consider the schematic diagram of a pneumatic actuating valve shown in ig. 5-17. Assume that the area of the diaphragm is A. Assume also that when the ctuating error is zero, the control pressure is equal to $\bar{P}_c$ and the valve displace- ent is equal to $\bar{X}$.

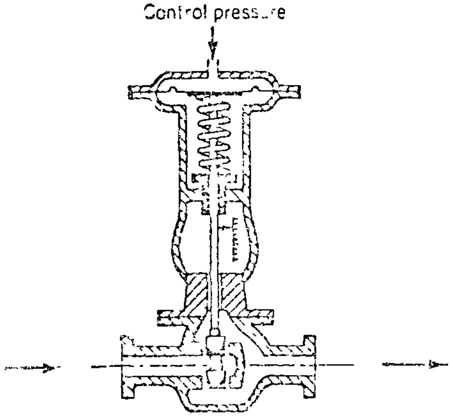


Fig. 5-17. Schematic diagram of a pneumatic actuating valve.

In the following analysis, we shall consider small variations in the variables and arize the pneumatic actuating valve. Let us define the small variation in the rol pressure and the corresponding valve displacement to be p_c and x, respect- y. Since a small change in the pneumatic pressure force applied to the dia- m repositions the load, consisting of the spring, viscous friction, and mass,

$$Ap_c = m\ddot{x} + f\dot{x} + kx$$

where

m = mass of the valve and valve stem
f = viscous-friction coefficient
k = spring constant

If the force due to the mass and viscous friction are negligibly small, then Eq. (can be simplified to

$$Ap_c = kx$$

The transfer function between x and p_c thus becomes

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$

where $X(s) = \mathscr{L}[x]$ and $P_c(s) = \mathscr{L}[p_c]$. If q_i, the change in flow through the pr matic actuating valve, is proportional to x, the change in the valve-stem displ ment, then

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

where $Q_i(s) = \mathscr{L}[q_i]$ and K_q is a constant. The transfer function between q_i an becomes

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

where K_v is a constant.

The standard control pressure for this kind of a pneumatic actuating valv between 3 and 15 psig. The valve-stem displacement is limited by the allowa stroke of the diaphragm and is only a few inches. If a longer stroke is need a piston-spring combination may be employed.

In pneumatic actuating valves, the static-friction force must be limited to a l value so that excessive hysteresis does not result. Because of the compressibi of air, the control action may not be positive; i.e., an error may exist in the val stem position. The use of a valve positioner results in improvements in the perf mance of a pneumatic actuating valve

A schematic diagram of a valve postioner is shown in Fig. 5-18. The princi of operation of this device is that if the valve position does not correspond to

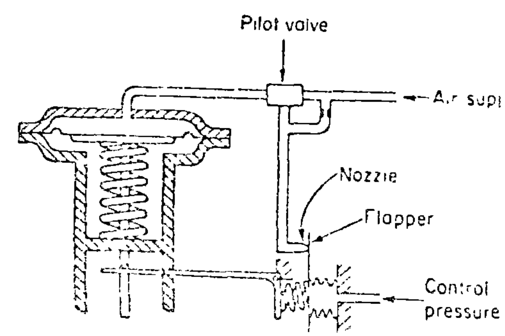


Fig. 5-18. Schematic diagram of a valve positioner

control pressure, then the pilot valve will operate until the valve position corresponds exactly to the control pressure.

Liquid-level control systems. Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-19. It is desired to maintain the liquid level at a constant value, regardless of the change in the opening of the load valve.

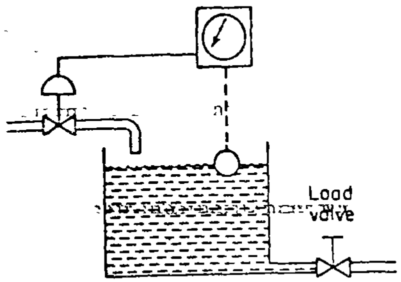


Fig. 5-19. Liquid-level control system.

Let us assume that the controller is of the proportional type, as shown in Fig. 5-15(a), and that the control valve is that shown in Fig. 5-17. If the liquid level rises as a result of a change in the load valve, the float moves upward, causing the flapper to move into closer contact with the nozzle, increasing the nozzle back pressure. Since the relay is reverse acting, this will result in a reduction in the control pressure and will cause a decrease in the opening of the pneumatic actuating valve. This is in the proper direction to correct for the rising level.

Proportional control of a first-order system. Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-20(a). [The controller is assumed to be the proportional controller shown in Fig. 5-15(a).] We assume that all the variables r, q_i, h_1, and q_0 are measured from their respective steady-state values $\bar{R}$, $\bar{Q}$, $\bar{H}$, and $\bar{Q}$. We also assume that the magnitudes of the variables r, q_i, h_1, and q_0 are sufficiently small so that the system can be approximated by a linear mathematical model, i.e., a transfer function.

Referring to Section 4-5, we can obtain the transfer function of the liquid-level system as

$$\frac{H_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

Since the controller is a proportional controller, the change in inflow q_i is proportional to the actuating error e so that $q_i = K_p K_v e$, where K_p is the gain of the controller and K_v is the gain of the control valve. In terms of Laplace-transformed quantities,

$$Q_i(s) = K_p K_v E(s)$$

A block diagram of this system is shown in Fig. 5-20(b). A simplified block diagram is given in Fig. 5-20(c), where $X(s) = (1/K_b)R(s)$, $K = K_p K_v R K_b$, and $T = RC$.

In what follows we shall investigate the response $h_1(t)$ to a change in the reference input. We shall assume a unit-step change in $x(t)$, where $x(t) = (1/K_b)r(t)$. The closed-loop transfer function between $H_1(s)$ and $X(s)$ is given by

$$\frac{H_1(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts+1+K} \tag{5-10}$$

Since the Laplace transform of the unit-step function is $1/s$, substituting $X(s) = 1/s$ into Eq. (5-10) gives

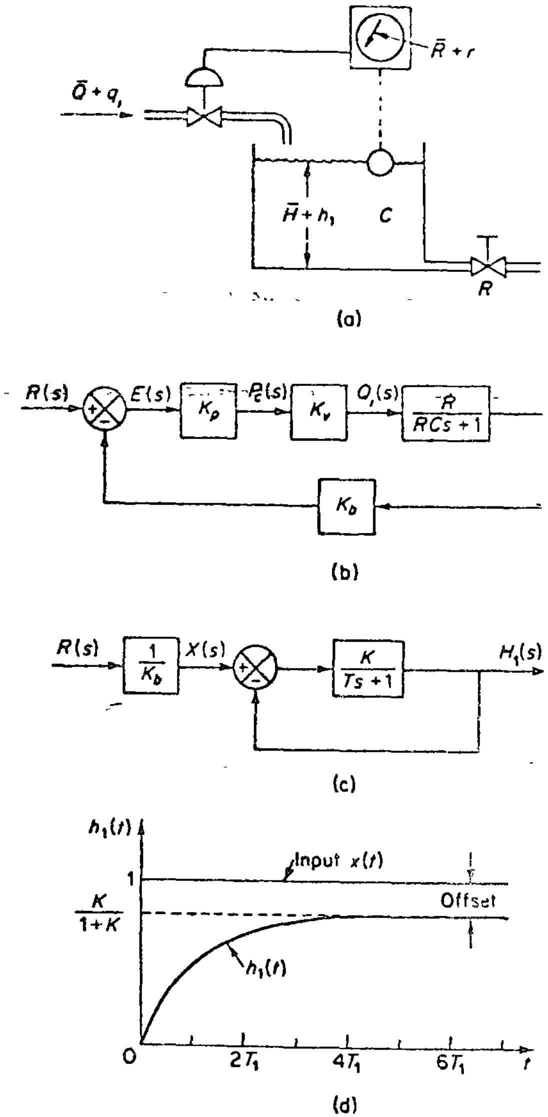


Fig. 5-20. (a) Liquid-level control system; (b) block diagram; (c) simplified block diagram; (d) curve $h_1(t)$ versus t.

$$H_1(s) = \frac{K}{Ts+1+K}\frac{1}{s}$$

Expanding $H_1(s)$ into partial fractions gives

$$H_1(s) = \frac{K}{1+K}\frac{1}{s} - \frac{TK}{1+K}\frac{1}{Ts+1+K}$$

Taking the inverse Laplace transforms of both sides of Eq. (5-11), we the following time solution $h_1(t)$:

$$h_1(t) = \frac{K}{1+K}(1-e^{-t/T_1}) \qquad (t \geq 0)$$

here

$$T_1 = \frac{T}{1+K}$$

he response curve $h_1(t)$ is plotted in Fig. 5-20(d). From Eq. (5-12), notice that the me constant T_1 of the closed-loop system is different from the time constant T f the feedforward block.

From Eq. (5-12), we see that as t approaches infinity, the value of $h_1(t)$ pproaches $K/(1+K)$, or

$$h_1(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

ince $x(\infty) = 1$, there is a steady-state error of $1/(1+K)$ Such an error is called *ffset*. The value of the offset becomes smaller as the gain K becomes larger.

Offset is a characteristic of the proportional control of a plant whose transfer unction does not possess an integrating element (Clearly, we need a nonzero error n order to provide a nonzero output.) To eliminate such offset, we must add integral ontrol action. (Refer to Section 5-3.)

Pneumatic proportional controllers (force-balance type). Figure 5-21 shows a chematic diagram of a force-balance pneumatic proportional controller. Force-alance controllers are in extensive use in industry. Such controllers are sometimes alled stack controllers. The basic principle of operation does not differ from that f the force-distance controller. The main advantage of the force-balance controller s that it eliminates many mechanical linkages and pivot joints, thereby reducing he effects of friction.

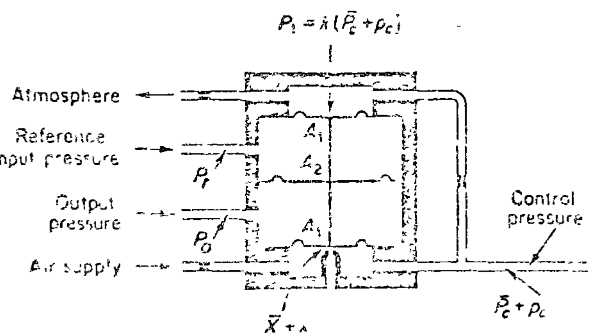


Fig. 5-21. Schematic diagram of a force-balance type pneumatic proportional controller.

In what follows, we shall consider the principle of the force-balance controller. n the controller shown in Fig. 5-21, the reference input pressure P_r and the output ressure P_o are fed to large diaphragm chambers. Note that a force-balance pneumatic controller operates only on pressure signals Therefore, it is necessary to convert the reference input and system output to corresponding pressure signals.

As in the case of the force-distance controller, this controller employs a flapper, nozzle, and orifices. In Fig 5-21, the drilled opening in the bottom chamber is the nozzle The diaphragm just above the nozzle acts as a flapper.

The operation of the force-balance controller shown in Fig 5-21 may be sum-

marized as follows: 20 psig air from an air supply flows through an orifice, causing a reduced pressure in the bottom chamber. Air in this chamber escapes to the atmosphere through the nozzle. The flow through the nozzle depends upon the gap and the pressure drop across it. An increase in the reference input pressure P_r, while the output pressure P_o remains the same, causes the valve stem to move down, decreasing the gap between the nozzle and the flapper diaphragm. This causes the control pressure P_c to increase. Let

$$p_e = P_r - P_0$$

If $p_e = 0$, there is an equilibrium state with the nozzle-flapper distance equal to $\bar{X}$ and the control pressure equal to $\bar{P}_c$. At this equilibrium state, $P_1 = \bar{P}_c k$ (where $k < 1$) and

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \tag{5-13}$$

where α is a constant.

Let us assume that $p_e \neq 0$ and define small variations in the nozzle-flapper distance and control pressure as x and p_c, respectively. Then we obtain the following equation:

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_c)A_1 - (\bar{P}_c + p_c)kA_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{5-14}$$

From Eqs. (5-13) and (5-14), we obtain

$$x = \alpha[p_c(1-k)A_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{5-15}$$

At this point, we must examine the quantity x. In the design of pneumatic controllers, the nozzle-flapper distance is quite small. In view of the fact that x/α is a higher-order term than $p_c(1-k)A_1$ or $p_e(A_2 - A_1)$: that is, for $p_e \neq 0$,

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_c(1-k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_2 - A_1)$$

we may neglect the term x in our analysis. Equation (5-15) can then be rewritten to reflect this assumption as follows:

$$p_c(1-k)A_1 = p_e(A_2 - A_1)$$

and the transfer function between p_c and p_e becomes

$$\frac{P_c(s)}{P_e(s)} = \frac{A_2 - A_1}{A_1}\,\frac{1}{1-k} = K_p$$

Thus, the controller shown in Fig 5-21 is a proportional controller. The value of gain K_p increases as k approaches unity. Note that the value of k depends upon the diameters of the orifices in the inlet and outlet pipes of the feedback chamber. (The value of k approaches unity as the resistance to flow in the orifice of the inlet pipe is made smaller.)

Hydraulic proportional controllers. Except for low-pressure pneumatic controllers, compressed air has seldom been applied to the continuous control of the motion of devices having significant mass under external load forces For such a case,

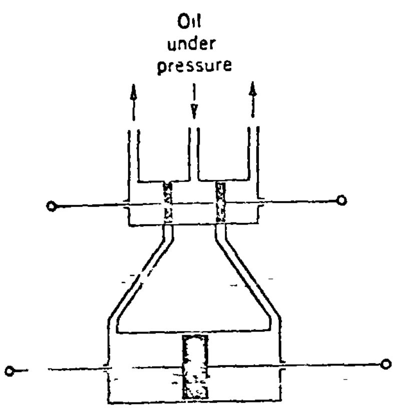
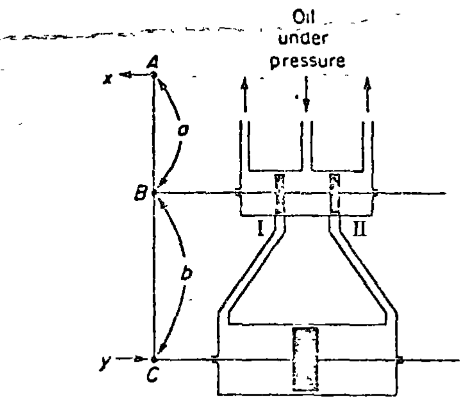


Fig. 5-22. Hydraulic servomotor.

hydraulic controllers are generally preferred. Hydraulic controllers are also used extensively in industry. With high-pressure hydraulic systems, very large force can be obtained. Rapid-acting accurate positioning of heavy loads is possible with hydraulic systems. A combination of electronic and hydraulic systems is widely used because it combines the advantages of both electronic control and hydraulic power.

A brief description of the operation of a hydraulic servomotor was given in Section 4-3. It was shown that for negligibly small load mass, the servomotor shown in Fig. 4-12 acts as an integrator or an integral controller. [Refer to Eq. (4-25).] Such a servomotor constitutes the basis of the hydraulic control circuit.

The servomotor shown in Fig. 5-22 acts as an integral controller. We can modify this servomotor to a proportional controller by including a feedback mechanism. Figure 5-23(a) is identical with Fig. 5-22, with the exception of the link attached to the left side of the power piston joining feedback link ABC at C. Link AC is a floating link rather than one moving about a fixed pivot. We shall see that the servomotor shown in Fig. 5-23(a) acts as a proportional controller.



(a)

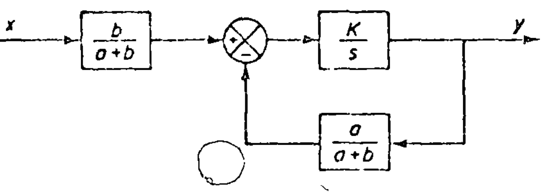


Fig. 5-23. (a) Servomotor which ac… as a proportional controller; (b) block di…ram of the servomotor.

The hydraulic system shown in Fig. 5-23(a) operates as follows: If the inp… moves the pilot piston to the left, this will uncover port I so that high-pressur… flows through port I into the left side of the power piston and forces this pi… to the right. The power piston, in moving to the right, will c… y the feedback AC with it, thus moving the pilot piston to the right. This action continues … the pilot piston again covers ports I and II. A block diagram of the system ca… drawn as in Fig. 5-23(b). The transfer function between y and x is given by

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{K}{s}\dfrac{a}{a+b}} = \frac{bK}{s(a+b) + Ka}$$

Noting that under normal operation $|Ka/s(a+b)| \gg 1$, we obtain

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

The transfer function between y and x becomes a constant, and thus the hydrau… system shown in Fig. 5-23(a) acts as a proportional controller, the gain of wh… is K_p. The gain K_p can be adjusted by effectively changing the lever ratio, b…

We have thus seen that the addition of a feedback lever will cause the hydrau… servomotor to act as a proportional controller.

Electronic proportional controllers. An electronic proportional control… is an amplifier which receives a small voltage signal and produces a voltage output at a higher power level. A schematic diagram of such a controller is shown in Fig. 5-24. For this controller

$$e_0 = K\left(e_i - e_o\frac{R_2}{R_1}\right), \qquad K\frac{R_2}{R_1} \gg 1$$

Thus the transfer function $G(s)$ of this controller is

$$G(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_2} = K_p$$

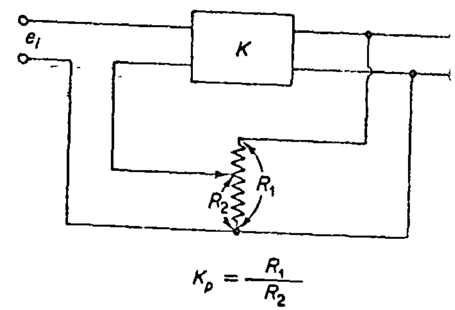


Fig. 5-24. Schematic diagram of an electron… proportional controller.

K_p is the gain of the proportional controller. The gain K_p can be adjusted by changing the ratio of resistances (R_1/R_2… in the feedback circuit.

5-3 OBTAINING DERIVATIVE AND INTEGRAL CONTROL ACTION

In this section, we shall present methods for obtaining derivative and integra… control action. We shall again place the emphasis on the prin…e and not on the details of the actual meachanisms.

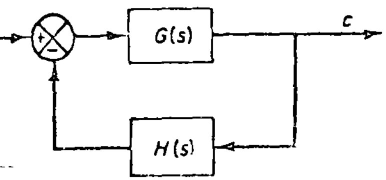


Fig. 5-25. Control system.

The basic principle for generating a desired control action is to insert the inverse of the desired transfer function in the feedback path. For the system shown in Fig. 5-25, the closed-loop transfer function is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

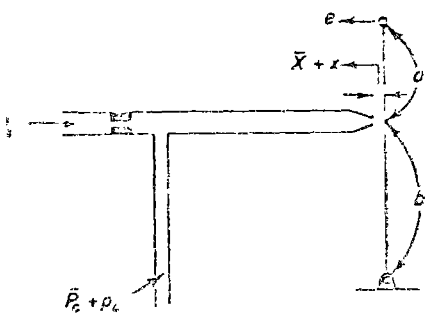
$(s)H(s)| \gg 1$, then $C(s)/R(s)$ can be modified to

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

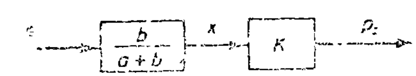
, if proportional-plus-derivative control action is desired, we insert an element ng the transfer function $1/(Ts + 1)$ in the feedback path.

btaining pneumatic proportional-plus-derivative control action. Consider the matic controller shown in Fig. 5-26 (a). This is a narrow-band proportional roller or a pneumatic two-position controller. Suppose that the zero actuating $e = 0$ corresponds to the nozzle-flapper distance $\bar{X}$ and control pressure $\bar{P}_c$. small change in the actuating error from the zero position produces a small ge in x in the nozzle-flapper distance, then a small change p_c is produced in the ol pressure. A block diagram of the system (under the assumption of small tions) can be drawn, as shown in Fig. 5-26(b). The transfer function between d e becomes

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{bK}{a+b} = K_p$$



(a)

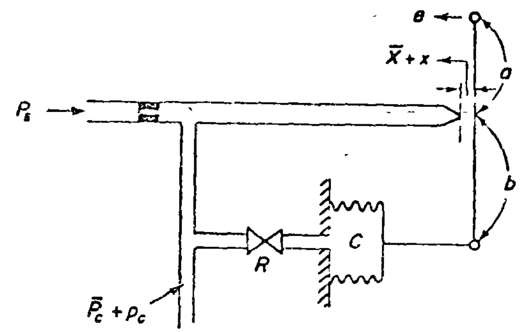


(b)

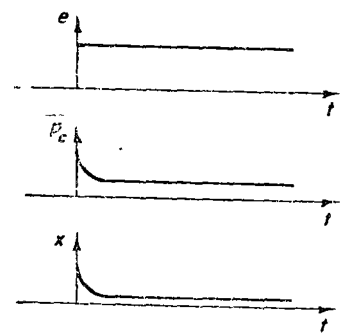
Fig. 5-26. (a) A pneumatic proportional controller, (b) block diagram of the controller.

We shall next show that the addition of delayed negative feedback to the controller shown in Fig. 5-26 (a) will modify the narrow-band proportional controller to a proportional-plus-derivative controller.

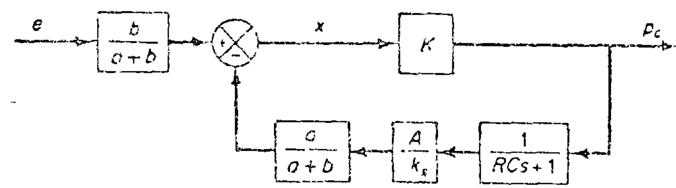
Consider the pneumatic controller shown in Fig. 5-27 (a). Assuming again small changes in the actuating error, nozzle-flapper distance, and control pressure, we can summarize the operation of this controller as follows: Let us first assume a small step change in e. Then the change in the control pressure p_c will be instan-



(a)



(b)



(c)

Fig. 5-27. (a) A pneumatic proportional-plus-derivative controller; (b) step change in e and the corresponding changes in p_c and x plotted versus t; (c) block diagram of the controller.

aneous. The restriction R will momentarily prevent the feedback bellows from ensing the pressure change p_c. Thus the feedback bellows will not respond momen-arily, and the pneumatic actuating valve will feel the full effect of the movement of the flapper. As time goes on the feedback bellows will expand or contract. The change in the nozzle-flapper distance x and the change in the control pressure p_c can be plotted against time t, as shown in Fig. 5-27 (b). At steady state, the feed-back bellows acts like an ordinary feedback mechanism. The curve p_c versus t clearly shows that this controller is of the proportional-plus-derivative type.

A block diagram corresponding to this pneumatic controller is shown in Fig. 5-27 (c). In the block diagram, K is a constant, A is the area of the bellows, and k_s is the equivalent spring constant of the bellows. The transfer function between p_c and e can be obtained from the block diagram as follows:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{1}{RCs+1}}$$

In such a controller the loop gain $|KaA/[(a+b)k_s(RCs+1)]|$ is normally very much greater than unity. Thus the transfer function $P_c(s)/E(s)$ can be simplified to give

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_d = RC$$

Thus, delayed negative feedback, or the transfer function $1/(RCs+1)$ in the feed-back path, modifies the proportional controller to a proportional-plus-derivative controller.

Note that if the feedback valve is fully opened, the control action becomes proportional. If the feedback valve is fully closed, the control action becomes narrow-band proportional (on-off).

Obtaining pneumatic proportional-plus-integral control action. Consider the proportional controller shown in Fig. 5-28 (a). Considering small changes in the variables, we can draw a block diagram of this controller as in Fig. 5-28 (b). We shall show that the addition of delayed positive feedback will modify this propor-tional controller to a proportional-plus-integral controller.

Consider the pneumatic controller shown in Fig. 5-29 (a). The operation of this controller is as follows: The bellows denoted by I is connected to the control pressure source without any restriction. The bellows denoted by II is connected to the control pressure source through a restriction. Let us assume a small step change in the actuating error. This will cause the back pressure in the nozzle to change instantaneously. Thus a change in the control pressure p_c also occurs instan-taneously. Due to the restriction of the valve in the path to bellows II, there will be a pressure drop across the valve. As time goes on, air will flow across the valve

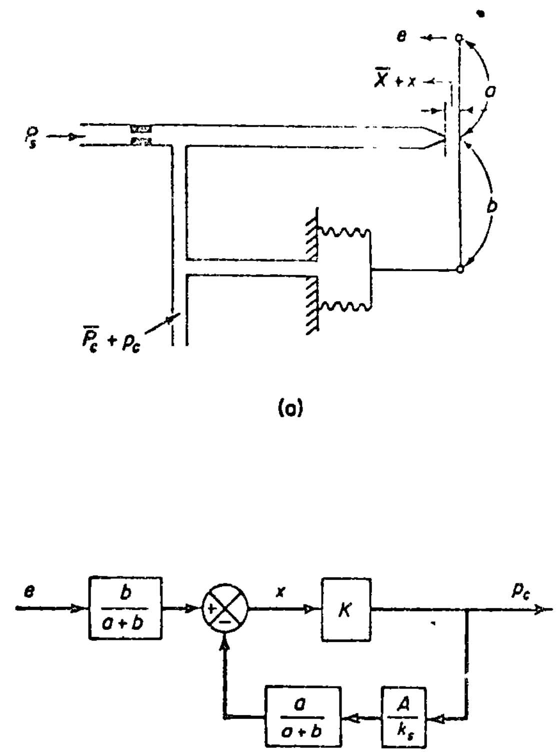


Fig. 5-28. (a) A pneumatic proportional controller; (b) block diagram of the controller.

in such a way that the change in pressure in bellows II attains the value p_c. Thus bellows II will expand or contract as time elapses in such a way as to move the flapper an additional amount in the direction of the original displacement e. This will cause the back pressure p_c in the nozzle to change continuously, as shown in Fig. 5-29 (b).

Note that the integral control action in the controller takes the form of slowly canceling the feedback that the proportional-control originally provided.

A block diagram of this controller under the assumption of small variations in the variables is shown in Fig. 5-29 (c). A simplification of this block diagram yields Fig. 5-29 (d). The transfer function of this controller is

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\left(1 - \dfrac{1}{RCs+1}\right)}$$

where K is a constant, A is the area of the bellows, and k_s is the equivalent spring constant of the combined bellows. If $|KaARCs/[(a+b)k_s(RCs+1)]| \gg 1$, which is usually the case, the transfer function can be simplified to

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

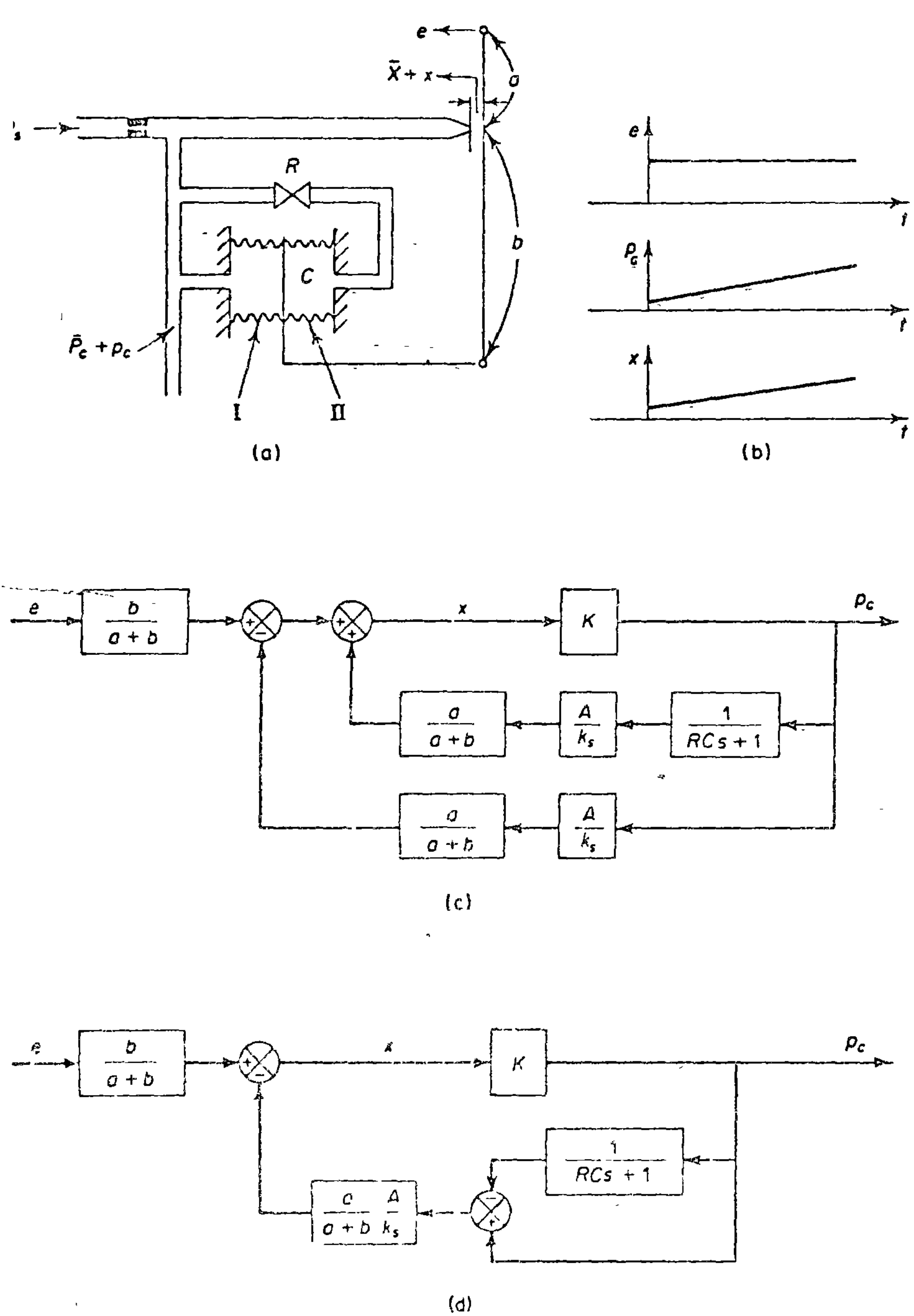


Fig. 5-29. (a) A pneumatic proportional-plus-integral controller, (b) step change in e and the corresponding changes in p_c and x plotted versus t, (c) block diagram of the controller, (d) simplified block diagram.

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_i = RC$$

Obtaining pneumatic proportional-plus-derivative-plus-integral control action. A combination of the pneumatic control actions shown in the systems of Figs. 5-27 (a) and 5-29 (a) yields a proportional-plus-derivative-plus-integral control action. Figure 5-30 (a) shows a schematic diagram of such a controller. Figure 5-30 (b) shows a block diagram of this controller under the assumption of small variations in the variables.

The transfer function of this controller is

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{bK}{a+b}}{1 + \frac{Ka}{a+b}\frac{A}{k_s}\frac{(R_iC - R_dC)s}{(R_dCs+1)(R_iCs+1)}}$$

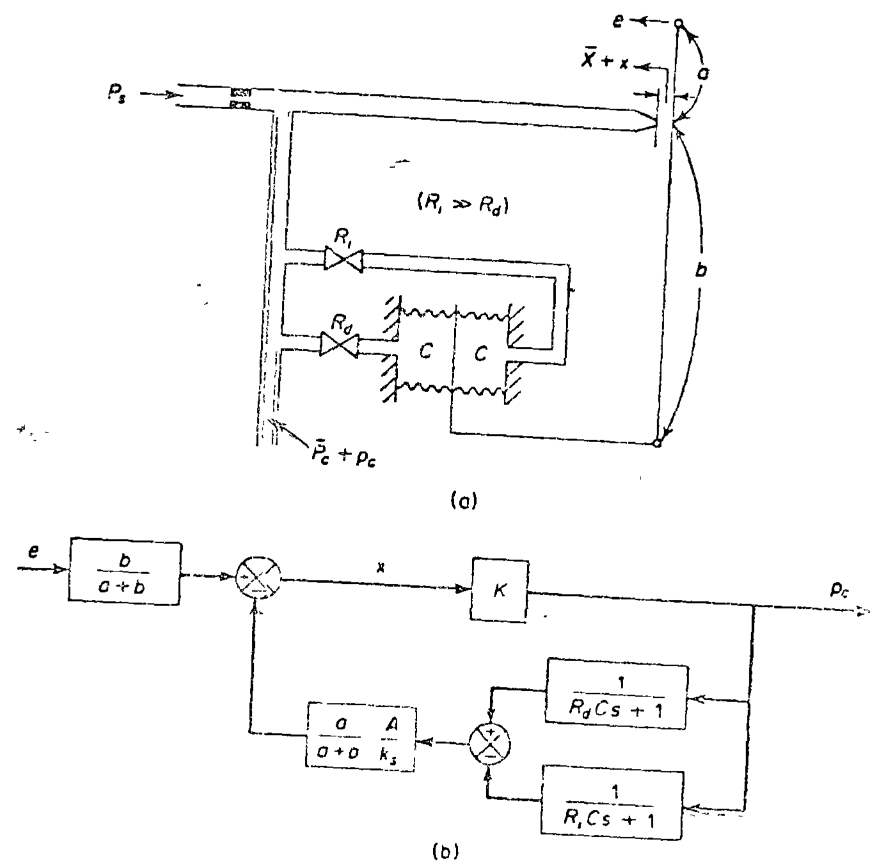


Fig. 5-30. (a) A pneumatic proportional-plus-derivative-plus-integral controller, (b) block diagram of the controller.

By defining

$$T_i = R_i C, \qquad T_d = R_d C$$

and noting that under normal operation $|KaA(T_i - T_d)s/[(a+b)k_s(T_d s+1)(T_i s+1)]| \gg 1$ and $T_i \gg T_d$, we obtain

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteqdot \frac{bk_s}{aA}\,\frac{(T_d s + 1)(T_i s + 1)}{(T_i - T_d)s}$$

$$\doteqdot \frac{bk_s}{aA}\,\frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

$$= K_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) \tag{5-16}$$

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

Equation (5-16) indicates that the controller shown in Fig. 5-30 (a) is a proportional-plus-derivative-plus-integral controller.

Dashpots. The dashpot shown in Fig. 5-31 (a) acts as a differentiating element. Suppose we introduce a step displacement to the piston position x. Then the displacement y becomes equal to x momentarily. Because of the spring force, however, the oil will flow through the resistance R and the cylinder will come back to the original position. The curves x versus t and y versus t are shown in Fig. 5-31 (b).

Let us derive the transfer function between the displacement y and displacement x. Define the pressures existing on the left and right sides of the piston as P_1 (lb/in.^{2}) and P_2 (lb/in.^{2}), respectively. Suppose that the inertia force involved is negligible. Then the force acting on the piston must balance the spring force. Thus

$$A(P_2 - P_1) = ky$$

where

A = piston area, in.^{2}
k = spring constant, lb/in.

The flow rate q is given by

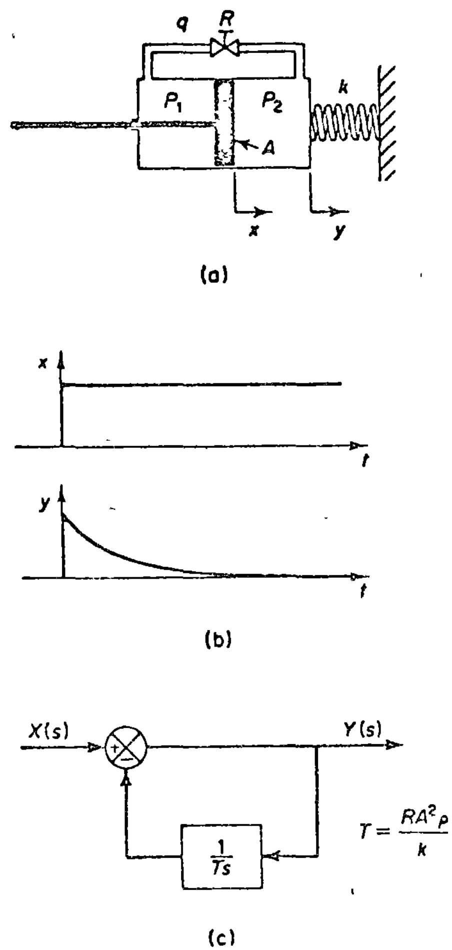


Fig. 5-31. (a) Dashpot; (b) step change in x and the corresponding change in y plotted versus t; (c) block diagram of the dashpot.

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

where

q = flow rate through the restriction, lb/sec
R = resistance to flow at the restriction, lb-sec/in.^{2}-lb

Since the flow through the restriction during dt seconds must equal the change in the mass of oil to the left of the piston during the same dt seconds, we obtain

$$q\,dt = A\rho(dx - dy)$$

where

ρ = density, lb/in.^{3}

(We assume that the fluid is incompressible or ρ = constant.) This last equation can be rewritten as

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_2 - P_1}{RA\rho} = \frac{ky}{RA^2\rho}$$

or

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{ky}{RA^2\rho}$$

Taking the Laplace transforms of both sides of this last equation, assuming zero initial conditions, we obtain

$$sX(s) = sY(s) + \frac{k}{RA^2\rho}Y(s)$$

The transfer function of this system thus becomes

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + \dfrac{k}{RA^2\rho}}$$

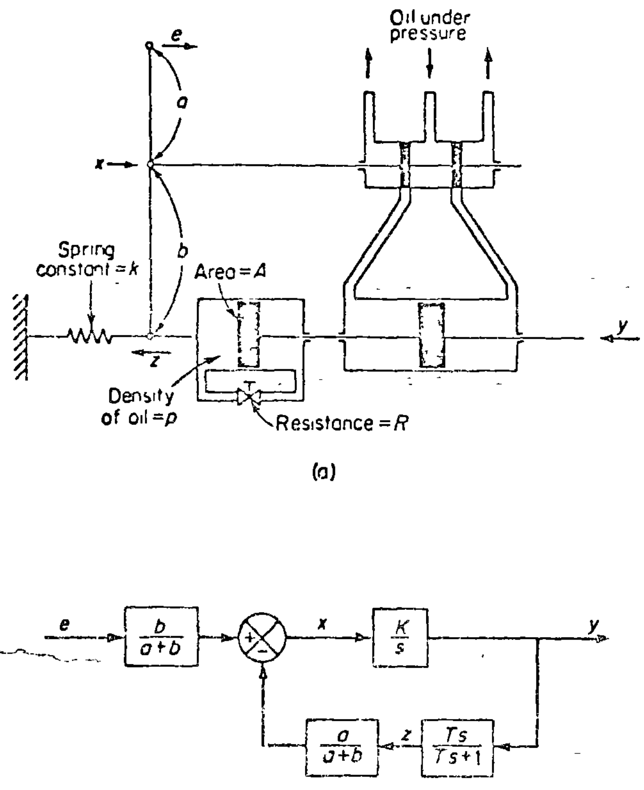
Let us define $RA^2\rho/k = T$. Then

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{Ts}}$$

Figure 5-31 (c) shows a block diagram representation for this system.

Obtaining hydraulic proportional-plus-integral control action. Figure 5-32 (a) shows a schematic diagram of a hydraulic proportional-plus-integral controller. A block diagram of this controller is shown in Fig. 5-32 (b). The transfer function $Y(s)/E(s)$ is given by

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\,\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\,\dfrac{T}{Ts+1}}$$



(b)

Fig. 5-32. (a) Schematic diagram of a hydraulic proportional-plus-integral controller; (b) block diagram of the controller.

In such a controller, under normal operation $|KaT/[(a+b)(Ts+1)]| \gg 1$, with the result that

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$

where

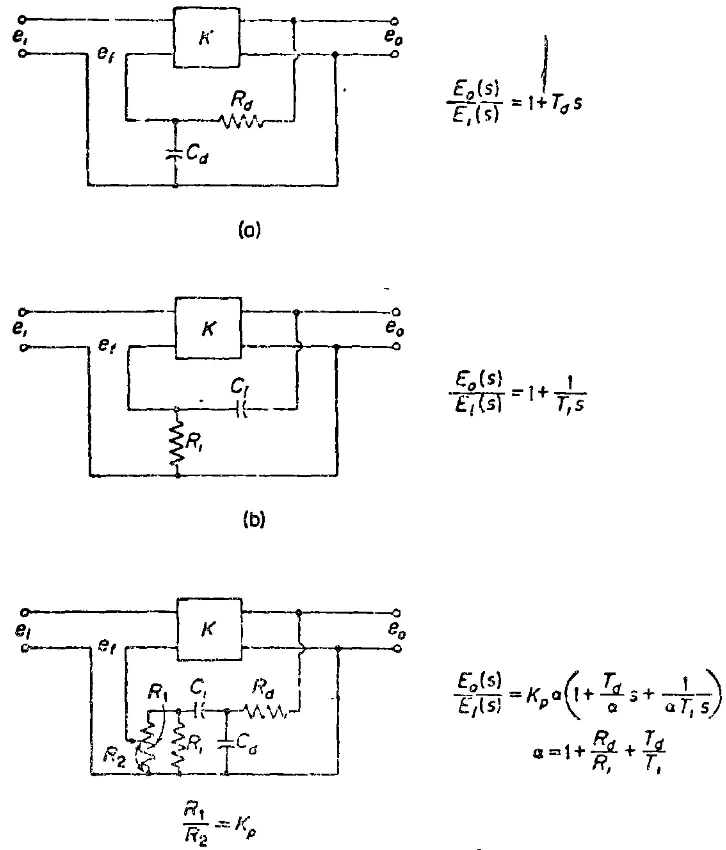
$$K_p = \frac{b}{a}, \qquad T_i = T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Thus the controller shown in Fig. 5-32 (a) is a proportional-plus-integral controller.

Obtaining derivative and integral control action in electronic controllers. Figure 5-33 shows the principle of obtaining derivative and integral control action in electronic controllers. Essentially we insert an appropriate circuit in the feedback path to generate the desired control action. The transfer functions of the controllers may be obtained as follows: For the controller shown in Fig. 5-33 (a),

$$\frac{E_f(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{R_dC_ds+1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_0(s)$$



(c)

Fig. 5-33. Electronic controllers (a) Proportional-plus-derivative controller; (b) proportional-plus-integral controller; (c) proportional-plus-derivative-plus-integral controller.

Hence, for $|K/(R_dC_ds+1)| \gg 1$,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_dC_ds+1)}{R_dC_ds+1+K} \doteqdot R_dC_ds+1 = T_ds+1$$

where $T_d = R_dC_d$.

Similarly, for the controller shown in Fig. 5-33 (b),

$$\frac{E_f(s)}{E_0(s)} = \frac{R_iC_is}{R_iC_is+1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_0(s)$$

Hence, for $|KR_iC_is/(R_iC_is+1)| \gg 1$,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_iC_is+1)}{KR_iC_is+R_iC_is+1} \doteqdot \frac{R_iC_is+1}{R_iC_is} = 1+\frac{1}{T_is}$$

where $T_i = R_iC_i$.

For the controller shown in Fig. 5-33 (c), if the loop gain is very much greater than unity the transfer function may be derived as follows:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_p\alpha\left(1 + \frac{T_d}{\alpha}s + \frac{1}{\alpha T_i s}\right)$$

where

$$\alpha = 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}$$

The derivation of this transfer function is given in Problem A-5-5.

5-4 EFFECTS OF INTEGRAL AND DERIVATIVE CONTROL ACTION ON SYSTEM PERFORMANCE

In this section, we shall investigate the effects of integral and derivative control action on the system performance, but we shall consider only simple systems. (In later chapters we shall study more about integral and derivative control.)

Integral control action. In the proportional control of a plant whose transfer function does not possess an integrator $1/s$, there is a steady-state error, or offset, in the response to a step input. Such an offset can be eliminated if the integral control action is included in the controller.

In the integral control of a plant, the control signal, the output signal from the controller, at any instant is the area under the actuating error signal curve up to that instant. The control signal $m(t)$ can have nonzero value when the actuating error signal $e(t)$ is zero, as shown in Fig. 5-34 (a). This is impossible in the case of the proportional controller since a nonzero control signal requires a nonzero actuating error signal. (A nonzero actuating error signal at steady state means that there is an offset.) Figure 5-34 (b) shows the curve $e(t)$ versus t and the corresponding curve $m(t)$ versus t when the controller is of the proportional type.

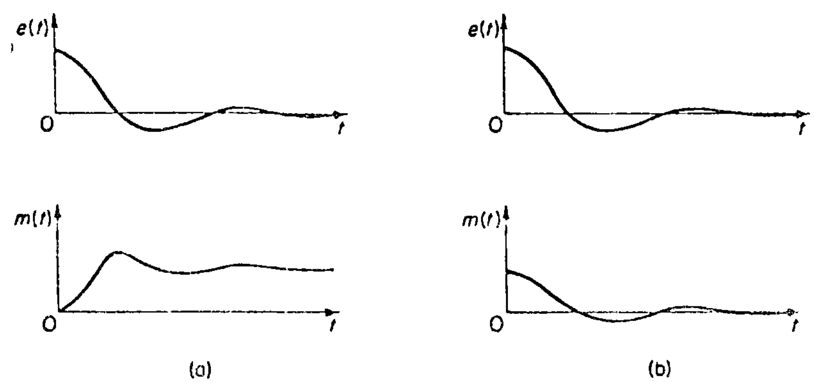


Fig. 5-34. (a) Plots of $e(t)$ and $m(t)$ curves showing nonzero control signal when the actuating error signal is zero; (b) plots of $e(t)$ and $m(t)$ curves showing zero control signal when the actuating error signal is zero

Note that integral control action, while removing offset or steady-state er may lead to oscillatory response of slowly decreasing amplitude or, even increa amplitude, both of which are usually undesirable. (For details, see Chapter

Integral control of liquid-level control systems. In Section 5-2, we found that proportional control of a liquid-level system will result in a steady-state er with a step input. We shall now show that such an error can be eliminated if inte control action is included in the controller.

Figure 5-35 (a) shows a liquid-level control system. We assume that the c troller is an integral controller. We also assume that the variables x, q_i, h, and which are measured from their respective steady-state values $\bar{X}$, $\bar{Q}$, $\bar{H}$, and $\bar{Q}$, small quantities so that the system can be considered linear. Under these assur tions, the block diagram of the system can be obtained as shown in Fig. 5-35 From Fig. 5-35 (b), the closed-loop transfer function between $H(s)$ and $X(s$

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

Hence

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR}$$

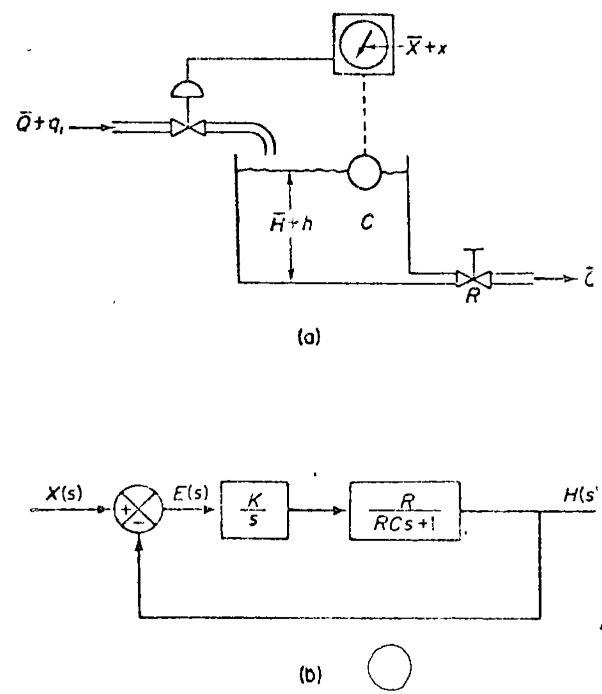


Fig. 5-35. (a) Liquid-level control system; (b) block diagram of the system.

Since the system is a stable one, the steady-state error for the unit-step response is obtained by applying the final value theorem as follows:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR} \frac{1}{s}$$
$$= 0$$

Integral control of the liquid-level system thus eliminates the steady-state error in the response to the step input. This is an important improvement over the proportional control alone which gives offset.

Response to torque disturbances (proportional control). Let us investigate the effect of a torque disturbance occurring at the load element. Consider the system shown in Fig. 5-36. The proportional controller delivers torque T to position the load element, which consists of moment of inertia and viscous friction. Torque disturbance is denoted by N.

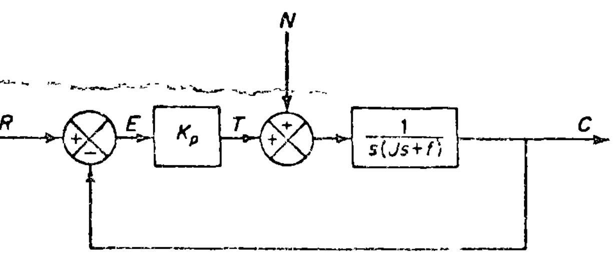


Fig. 5-36. Control system with a torque disturbance.

Assuming that the reference input is zero or $R(s) = 0$, the transfer function between $C(s)$ and $N(s)$ is given by

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + fs + K_p}$$

Hence

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{Js^2 + fs + K_p}$$

The steady-state error due to a step disturbance torque of magnitude T_n is given by

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{-s}{Js^2 + fs + K_p} \frac{T_n}{s}$$
$$= -\frac{T_n}{K_p}$$

At steady state, the proportional controller provides the torque $-T_n$, which is equal in magnitude but opposite in sign to the disturbance torque T_n. The steady-state output due to the step disturbance torque is

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_n}{K_p}$$

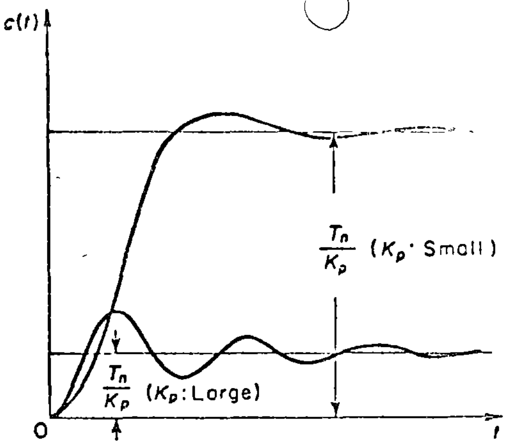


Fig. 5-37. Typical response curves to a step torque disturbance.

The steady-state error can be reduced by increasing the value of the gain K_p. Increasing this value, however, will cause the system response to be more oscillatory. Typical response curves for a small value of K_p and a large value of K_p are shown in Fig. 5-37.

Since the value of the gain K_p cannot be increased too much, it is desirable to modify the proportional controller to a proportional-plus-integral controller.

Response to torque disturbances (proportional-plus-integral control). In order to eliminate offset due to torque disturbance, the proportional controller may be replaced by a proportional-plus-integral controller.

If integral control action is added to the controller, then as long as there is an error signal, there is a torque developed by the controller to reduce this error, provided the control system is a stable one.

Figure 5-38 shows the proportional-plus-integral control of the load element, consisting of moment of inertia and viscous friction.

The closed-loop transfer function between $C(s)$ and $N(s)$ is

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

In the absence of the reference input, or $r(t) = 0$, the error signal is obtained from

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} N(s)$$

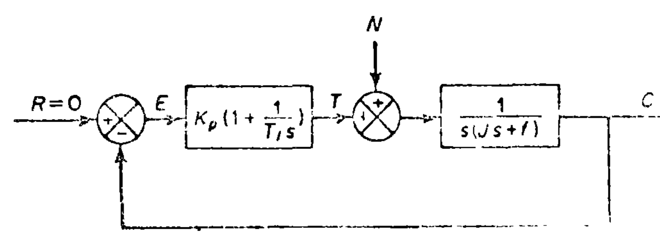


Fig. 5-38. Proportional-plus-integral control of a load element consisting of moment of inertia and viscous friction.

If this control system is a stable one, i.e., if the roots of the characteristic equation

$$Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

have negative real parts, then the steady-state error in the response to a step disturbance torque of magnitude T_n is obtained by applying the final value theorem as follows:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{-s^2}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \frac{T_n}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Thus steady-state error to the torque disturbance can be eliminated if the controller is of the proportional-plus-integral type.

Note that the integral control action added to the proportional controller has converted the originally second-order system to a third-order one. Hence the control system may become unstable for a large value of K_p since the roots of the characteristic equation may have positive real parts. (The second-order system is always stable if the coefficients in the system differential equation are all positive.)

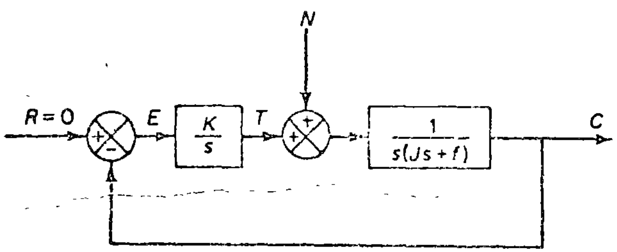


Fig. 5-39. Integral control of a load element consisting of moment of inertia and viscous friction.

It is important to point out that if the controller were an integral controller, as in Fig. 5-39, then the system always becomes unstable because the characteristic equation

$$Js^3 + fs^2 + K = 0$$

will have roots with positive real parts. Such an unstable system cannot be used in practice.

Note that in the system of Fig. 5-38, the proportional control action tends to stabilize the system, while the integral control action tends to eliminate or reduce steady-state error in response to various inputs

Derivative control action. Derivative control action, when added to a proportional controller, provides a means of obtaining a controller with high sensitivity. An advantage of using derivative control action is that it responds to the rate of change of the actuating error and can produce a significant correction before the magnitude of the actuating error becomes too large. Derivative control thus anticipates the actuating error, initiates an early corrective action, and tends to increase the stability of the system.

Although derivative control does not affect the steady-state error directly, it adds damping to the system and thus permits the use of a larger value of the gain K, which will result in an improvement in the steady-state accuracy.

Because derivative control operates on the rate of change of the actuating error and not the actuating error itself, this mode is never used alone. It is always used in combination with proportional or proportional-plus-integral action.

Proportional control of systems with inertia load. Before we discuss the effect of derivative action on system performance, we shall consider the proportional control of an inertia load.

Consider the system shown in Fig. 5-40 (a). The closed-loop transfer function is obtained as

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

Since the roots of the characteristic equation

$$Js^2 + K_p = 0$$

are imaginary, the response to a unit-step input continues to oscillate indefinitely, as shown in Fig. 5-40 (b).

Control systems exhibiting such response characteristics are not desirable. We shall see that the addition of derivative control will stabilize the system.

Proportional-plus-derivative control of a system with inertia load. Let us modify the proportional controller to a proportional-plus-derivative controller whose transfer function is $K_p(1 + T_d s)$. The torque developed by the controller is proportional to $K_p(e + T_d \dot{e})$. Derivative control is essentially anticipatory, measures the instantaneous error velocity, and predicts the large overshoot ahead of time and produces an appropriate counteraction before too large an overshoot occurs.

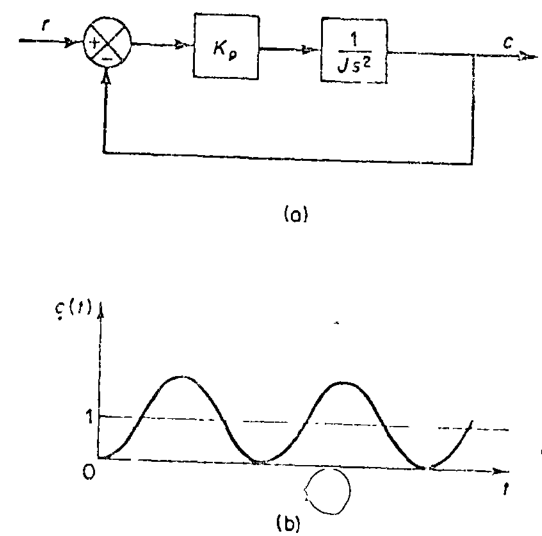


Fig. 5-40. (a) Proportional control of a system with inertia load, (b) response to a unit step-input.

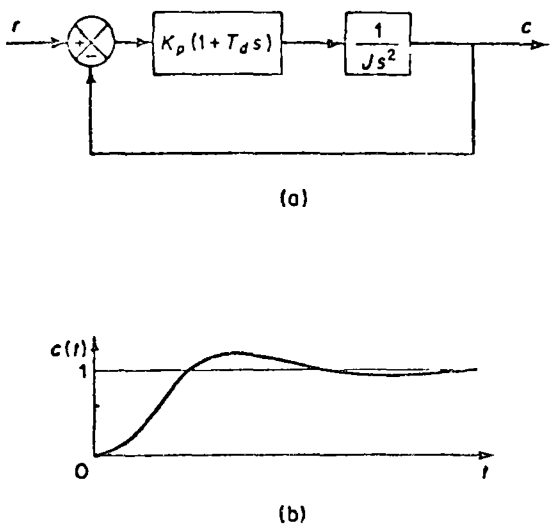


Fig. 5-41. (a) Proportional-plus-derivative control of a system with inertia load; (b) response to a unit step-input.

Consider the system shown in Fig. 5-41 (a). The closed-loop transfer function is given by

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

The characteristic equation

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

now has two roots with negative real parts for positive values of J, K_p, and T_d. Thus derivative control introduces a damping effect. A typical response curve $c(t)$ to a unit-step input is shown in Fig. 5-41 (b). Clearly, the response curve shows a marked improvement over the original response curve shown in Fig. 5-40 (b).

5-5 REDUCTION OF PARAMETER VARIATIONS BY USE OF FEEDBACK

The primary purpose of using feedback in control systems is to reduce the sensitivity of the system to parameter variations and unwanted disturbances.

If we are to construct a suitable open-loop control system, we must select all the components of the open-loop transfer function $G(s)$ very carefully so that they respond accurately. In the case of constructing a closed-loop control system, however, the components can be less accurate since the sensitivity to parameter variations in $G(s)$ is reduced by a factor of $1 + G(s)$

To illustrate this, consider the open-loop and the closed-loop system shown in Figs. 5-42 (a) and (b) respectively. Suppose that, due to parameter variations, $G(s)$ is changed to $G(s) + \Delta G(s)$, where $|G(s)| \gg |\Delta G(s)|$. Then, in the open-loop system shown in Fig. 5-42 (a), the output is given by

$$C(s) + \Delta C(s) = [G(s) + \Delta G(s)]R(s)$$

Hence the change in the output is given by

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s)$$

In the closed-loop system shown in Fig. 5-42 (b),

$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s) + \Delta G(s)}R(s)$$

or

$$\Delta C(s) \doteqdot \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)}R(s)$$

Thus, the change in the output of the closed-loop system, due to the parameter variations in $G(s)$, is reduced by a factor of $1 + G(s)$. In many practical cases, the magnitude of $1 + G(s)$ is generally much greater than one.

Note that in reducing the effects of the parameter variations of the components, we very often bridge the offending component with a feedback loop.

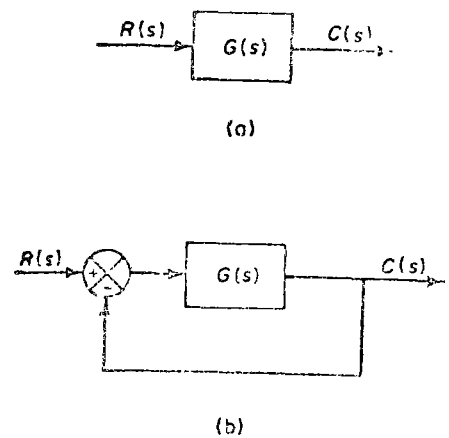


Fig. 5-42. (a) Open-loop system, (b) closed-loop system.

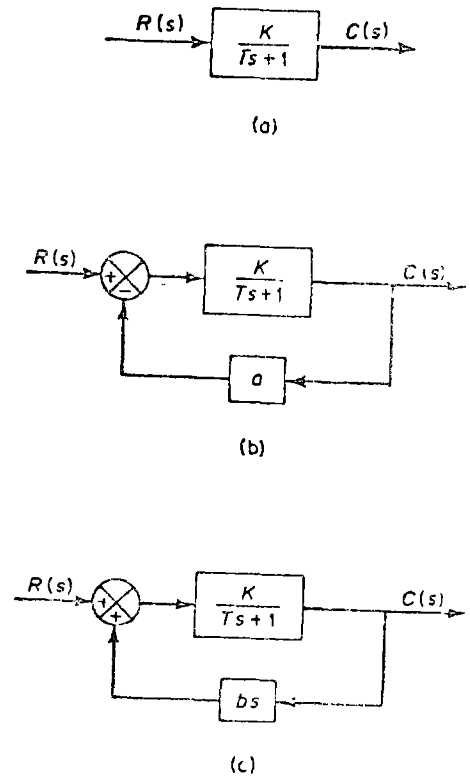


Fig. 5-43. (a) Open loop system, (b) closed-loop system with time constant $T/(1 + K)$, (c) closed-loop system with time constant $T - bK$

Changing time constants by use of feedback. Consider the system shown in Fig. 5-43 (a). The time constant of the system is T. The addition of a negative feedback loop around this element reduces the time constant. Figure 5-43 (b) shows the system with the same feedforward transfer function as that shown in Fig. 5-43 (a), with the exception that a negative feedback loop has been added. The time constant of this system has been reduced to $T/(1 + Ka)$. Note also that the gain constant for this system has also been reduced from K to $K/(1 + Ka)$.

If, instead of a negative feedback loop, a positive feedback loop is added around the transfer function $K/(Ts + 1)$ and if the feedback transfer function is properly chosen, then the time constant can be made zero or a very small value. Consider the system shown in Fig. 5-43 (c). Since the closed-loop transfer function is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(T - bK)s + 1}$$

the time constant can be reduced by properly choosing the value of b. If b is set equal to T/K, then the time constant becomes zero. Note, however, that if disturbances cause $T - bK$ to be negative instead of zero, the system becomes unstable. Hence if positive feedback is employed to reduce the time constant to a small value, we must be very careful so that $T - bK$ never becomes negative.

Increasing loop gains by use of positive feedback. The system shown in Fig. 5-44 (a) has the transfer function $C(s)/R(s) = G(s)$. Consider now the system shown in Fig. 5-44(b). The closed-loop transfer function for this system is

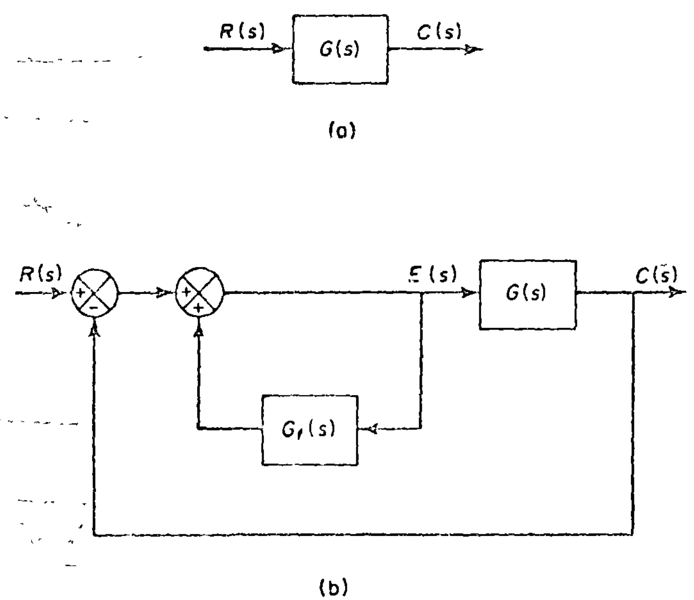


Fig. 5-44. (a) Open-loop system; (b) closed-loop system whose transfer function is nearly unity.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_f(s) + G(s)}$$

If $G_f(s)$ is chosen nearly unity, or $G_f(s) \doteqdot 1$, then

$$\frac{C(s)}{R(s)} \doteqdot 1$$

Essentially, this means that the inner loop, using positive feedback, has increas the feedforward gain to a very large value. As we stated earlier, when the lo gain is very large, the closed-loop transfer function $C(s)/R(s)$ becomes equal the inverse of the transfer function of the feedback element. Since the syste shown in Fig. 5-44 (b) has unity feedback, $C(s)/R(s)$ becomes almost equal to uni [Thus $C(s)/R(s)$ is not sensitive to the parameter variations in $G(s)$.]

Elimination of integration. Addition of a minor loop around an integrator modifies it to a first-order delay element. Consider the system shown in Fig. 5-45 (a). Negative feedback of the output, as shown in Fig. 5-45 (b), modifies the integrator K/s to a first-order delay element $K/(s + K)$.

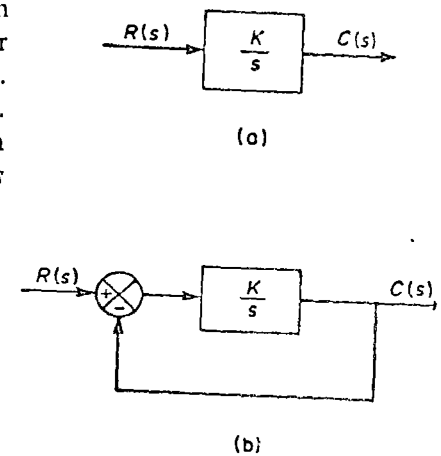


Fig. 5-45. (a) Integrating element; (b) firs order delay element.

Comments on the use of feedback loops. As we have seen in the previous discussion, feedback control, or closed-loop control, reduces the sensitivity of a system to parameter variations and therefore decreases the effects of gain variations in the feedforward path in response to variations of supply pressure, supply voltage, temperature, etc. In the study of controllers made in Sections 5-2 and 5-3, we have also seen that the elements which perfor the various control actions are in the feedback part of the controller mechanism and that the feedback elements in a controller essentially increase the linearity o the amplifier and increase the range of the proportional sensitivity.

The use of feedback loops in control systems, however, will increase the nun ber of components of the systems, will thereby increase the complexity, and also wi introduce the possibility of instability.

5-6 FLUIDICS

Introduction. Fluid devices through which air, gases, or liquids flow in intr cate and precise channels are called *fluidic devices*. Such devices use solid con ponents, or circuits, to perform sensing, logic, amplification, and control function Fluidics, the general study of fluidic devices and systems, is of the newest an ır circuit which allows passage of a signal only if certain control requirements have ›een satisfied.) Table 5-1 shows a few fluidic logic gates and their respective truth ables. (A truth table is a tabular correlation of input and output relationships or logic elements.) As seen from Table 5-1, digital fluidic devices can gate, or ıhibit, signal transmission by the application, removal, or other combinations f input signals.

Digital fluidics perform the same logic functions as their electronic counterpart. 'here are, however, some areas where each has distinct advantages. (Usually, ıe choice is clear.) For example, in applications where reliability in extreme nvironments (e.g., high temperature or radiation) is more important than speed f operations, the digital fluidics should be chosen. If high-speed logic operation in ormal environments is required, electronic devices are preferable. Applications of igital fluidics are most often found in automatic warehousing, machine feeding, equencing, handling, etc.

Many functions of control relays can be performed by fluidic devices, and many ›gic functions of relays and electronic systems can be implemented by fluidic devices.

A typical fluidic application* Fluidic components can sense ›ositions, provide operating commands, perform logic inter- ~~ocking, and control~~ the valving of a machine's control system.

Consider the mechanical system shown in Fig. 5-53. It is lesired to design a control logic system to sequence a drill head o that when the head is retracted and a pushbutton is actuated, he drill will advance downward The head drills in the down- vard position and then returns to the up position to complete he cycle. For emergency return, a pushbutton is required to etract the head at any time.

We shall present a solution to this problem using digital luidics. Figure 5-54 shows a logic circuit which can perform the

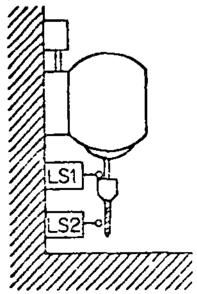


Fig. 5-53. Mechanical system.

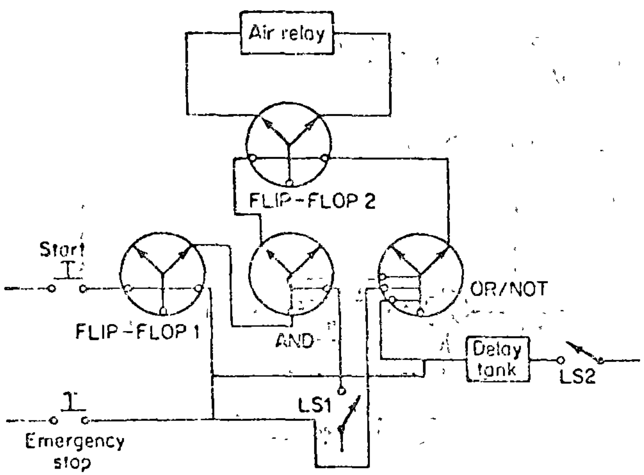


Fig. 5-54. Logic circuit

*This example is taken from "Fluidics-Plugging the Control Capability Gap" by The Gener- al Purpose Control Department, General Electric Company, Bloomington, Illinois.

desired sequence of operations. FLIP-FLOP element 1 is set by the start button. The start button is released, and the element will continue to give the set output. The output of FLIP-FLOP element 1 is fed to AND element, which combines this with the limit switch (LS 1) signal. This signal sets FLIP-FLOP 2, which shifts the air relay and starts the head moving down. The drill moves down and drills until the signal from LS 2 fills the delay tank. This shifts OR/NOT element, which in turn switches FLIP-FLOP 2, which shifts the air relay back to its original state. The drill head now moves up. The cycle will repeat when the start button is pushed and LS 1 is activated.

If the emergency stop button is pushed at any time, it will shift the OR/NOT and FLIP-FLOP 1. The OR/NOT will shift FLIP-FLOP 2 and immediately cause the drill head to retract.

EXAMPLE PROBLEMS AND SOLUTIONS

PROBLEM A-5-1. The term commonly used to define the gain or sensitivity of a proportional controller is the *proportional band.* This is the percentage change in the input to the controller (error signal) required to cause 100% change in the output of the actuator. Thus small proportional band corresponds to high gain or high proportional sensitivity.

What is the proportional band if the controller and actuator have an overall gain of 4%/%? (Note that the total changes in the input to the controller and the output of the actuator are given as 100%. Thus a gain of 4%/% means that there is a change of 4% in the output if the change in input is 1%.)

Solution

$$\text{Proportional band} = \frac{100\%}{\text{gain in } \%/\%} = \frac{100\%}{4\%/\%} = 25\%$$

PROBLEM A-5-2. Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-55. Assume that the set point of the controller is fixed. Assuming a step disturbance of magnitude n_0, determine the error. Assume that n_0 is small and the variations in the variables from their respective steady-state values are also small. The controller is a proportional one.

If the controller is not a proportional one, but integral, what is the steady-state error?

Solution. Figure 5-56 is a block diagram of the system when the controller is proportional with gain K_p. (We assume the transfer function of the pneumatic valve to be unity.) Since

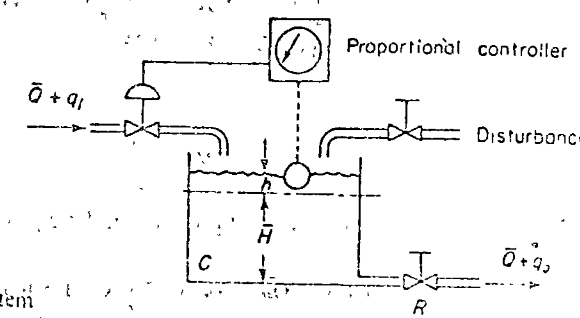


Fig. 5-55. Liquid-level control system

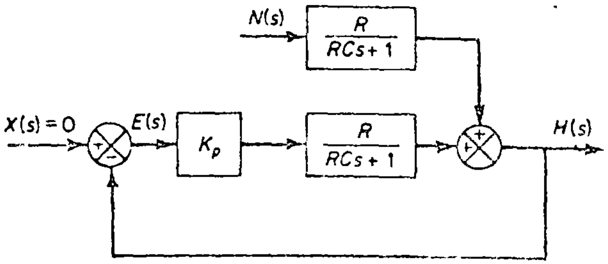


Fig. 5-56. Block diagram of the liquid-level control system shown in Fig. 5-55.

the set point is fixed, the variation in the set point is zero, or $X(s) = 0$. The Laplace transform of $h(t)$ is

$$H(s) = \frac{K_pR}{RCs+1}E(s) + \frac{R}{RCs+1}N(s)$$

Then

$$E(s) = -H(s) = -\frac{K_pR}{RCs+1}E(s) - \frac{R}{RCs+1}N(s)$$

Hence

$$E(s) = -\frac{R}{RCs+1+K_pR}N(s)$$

Since

$$N(s) = \frac{n_0}{s}$$

we obtain

$$\begin{aligned} E(s) &= -\frac{R}{RCs+1+K_pR}\frac{n_0}{s} \\ &= \frac{Rn_0}{1+K_pR}\left(\frac{1}{s+\dfrac{1+K_pR}{RC}}\right) - \frac{Rn_0}{1+K_pR}\frac{1}{s} \end{aligned}$$

The time solution for $t > 0$ is

$$e(t) = \frac{Rn_0}{1+K_pR}\left[\exp\left(-\frac{1+K_pR}{RC}t\right) - 1\right]$$

Thus, the time constant is $RC/(1+K_pR)$. (In the absence of the controller, the time constant is equal to RC.) As the gain of the controller is increased, the time constant is decreased. The steady-state error is

$$e(\infty) = -\frac{Rn_0}{1+K_pR}$$

As the gain K_p of the controller is increased, the steady-state error, or offset, is reduced Thus, mathematically, the larger the gain K_p is, the smaller the offset and time constant are. In practical systems, however, if the gain K_p of the proportional controller is increased to a very large value, oscillation may result in the output since in our analysis all the small lags and small time constants which may exist in the actual control system are neglected (If these small lags and time constants are included in the analysis, the transfer function becomes higher-order and for very large values of K_p the possibility of oscillation or even instability may occur.)

If the controller is an integral one, then assuming the transfer function of the controller to be

$$G_c = \frac{K}{s}$$

we obtain

$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + KR}N(s)$$

The steady-state error for a step disturbance $N(s) = n_0/s$ is

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{-Rs^2}{RCs^2+s+KR}\frac{n_0}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

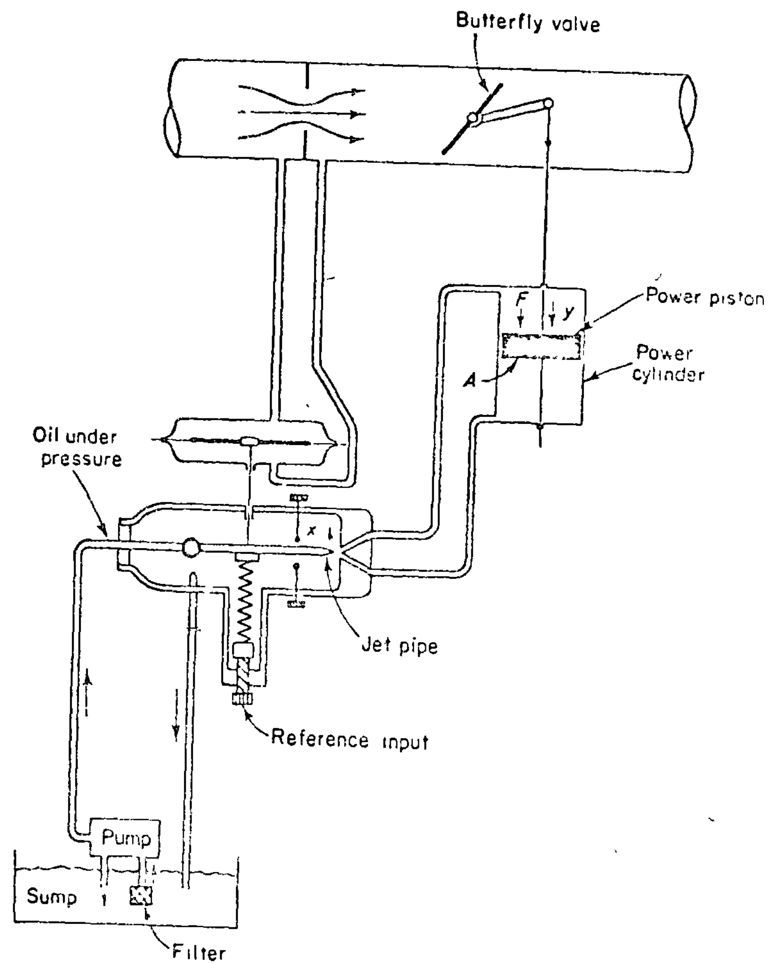


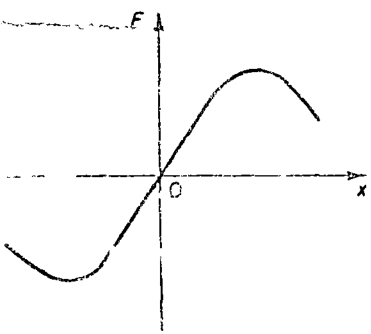
Fig. 5-57. Schematic diagram of a flow control system using hydraulic jet pipe controller.

hus, an integral controller eliminates steady-state error or offset due to the step distur-ance. (The value of K must be chosen so that the transient response due to the command ıput and/or disturbance damps out with a reasonable speed. See Chapter 6 for transient-:sponse analysis.)

ROBLEM A-5-3. Figure 5-57 shows a hydraulic jet pipe controller applied to a flow ɔntrol system. The jet pipe controller governs the position of the butterfly valve. Discuss ıe operation of this system. Plot a possible curve relating the displacement x of the noz-e to the total force F acting on the power piston.

olution. The operation of this system is as follows: The flow rate is measured by the rifice, and the pressure difference produced by this orifice is transmitted to the diaphragm f the pressure-measuring device. The diaphragm is connected to the free swinging nozzle, r jet pipe, through a linkage. High-pressure oil ejects from the nozzle all the time. When ıe nozzle is at a neutral position, no oil flows through either of the pipes to move the ower piston. If the nozzle is displaced by the motion of the balance arm to one side, the igh-pressure oil flows through the corresponding pipe, and the oil in the power cylinder ows back to the sump through the other pipe.

Assume that the system is initially at rest. If the reference input is changed suddenly o a higher flow rate, then the nozzle is moved in such a direction as to move the power ıiston and open the butterfly valve. Then the flow rate will increase, the pressure difference across the orifice becomes larger, and the nozzle will move back to the neutral position. The movement of the power piston stops when x, the displacement of the nozzle, comes back to and stays at the neutral position. (The jet pipe controller thus possesses an integrating property.)



ig. 5-58. Force versus displacement urve.

The relationship between the total force F acting on the power piston and the displacement x of the nozzle is shown in Fig. 5-58. The total force is equal to the pressure difference ΔP across the piston times the area A of the power piston. For a small displacement x of the nozzle, the total force F and displacement x may be considered proportional.

ROBLEM A-5-4. Draw a block diagram of the pneumatic controller shown in Fig. -59. Then derive the transfer function of this controller.

If the resistance R_d is removed (replaced by the line-sized tubing), what control ction do we get? If the resistance R_i is removed (replaced by the line-sized tubing), what ontrol action do we get?

olution. Let us assume that when $e = 0$, the nozzle flapper distance is equal to $\bar{X}$ and he control pressure is equal to $\bar{P}_c$. In the present analysis, we shall assume small deviations rom the respective reference values as follows:

e = small error signal
x = small change in the nozzle-flapper distance
p_c = small change in the control pressure
$p_{\rm I}$ = small pressure change in bellows I due to small change in the control pressure

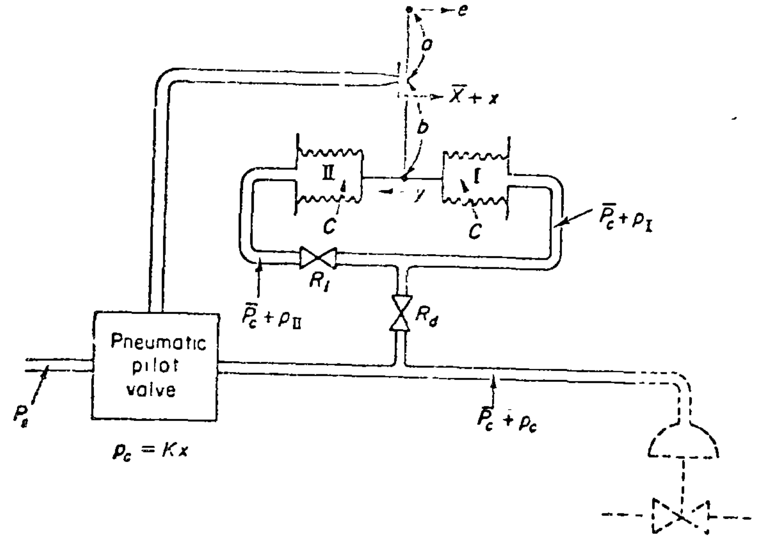


Fig. 5-59. Schematic diagram of a pneumatic controller.

$p_{\rm II}$ = small pressure change in bellows II due to small change in the control pressure
y = small displacement at the lower end of the flapper

In this controller, p_c is transmitted to bellows I through the resistance R_d. Similarly, p_c is transmitted to bellows II through the series of resistances R_d and R_i. An approximate relationship between $p_{\rm I}$ and p_c is

$$\frac{P_{\rm I}(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{R_d Cs + 1} = \frac{1}{T_d s + 1}$$

where

$T_d = R_d C$ = derivative time

Similarly $p_{\rm II}$ and $p_{\rm I}$ are related by the transfer function

$$\frac{P_{\rm II}(s)}{P_{\rm I}(s)} = \frac{1}{R_i Cs + 1} = \frac{1}{T_i s + 1}$$

where

$T_i = R_i C$ = integral time

The force-balance equation for the two bellows is

$$(p_{\rm I} - p_{\rm II})A = k_s y$$

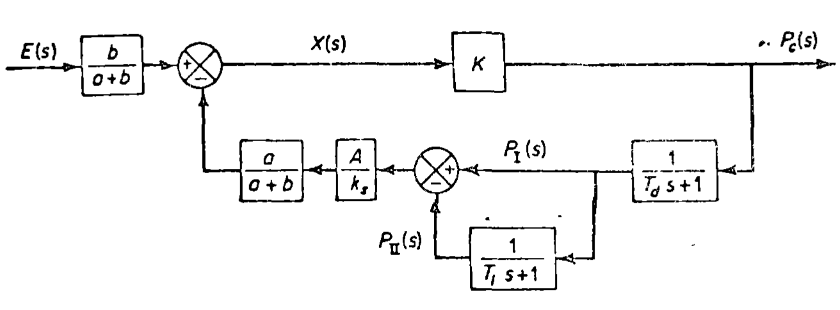
where k_s is the stiffness of the two connected bellows and A is the cross-sectional area of the bellows. The relationship among the variables e, x, and y is

$$x = \frac{b}{a+b}e - \frac{a}{a+b}y$$

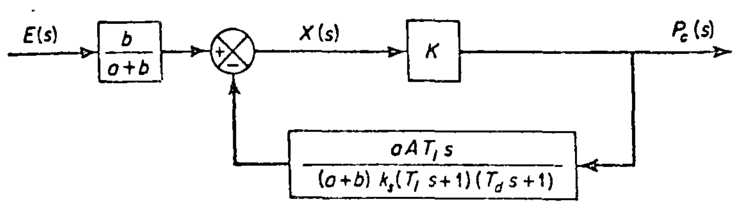
The relationship between p_c and x is

$$p_c = Kx$$

From the equations just derived, a block diagram of the controller can be drawn, as shown in Fig. 5-60(a). Simplification of this block diagram results in Fig. 5-60(b).



(a)



(b)

Fig. 5-60. (a) Block diagram of the pneumatic controller shown in Fig. 5-59, (b) simplified block diagram.

The transfer function between $P_c(s)$ and $E(s)$ is

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1 + K\frac{a}{a+b}\frac{A}{k_s}\left(\frac{T_i s}{T_i s + 1}\right)\left(\frac{1}{T_d s + 1}\right)}$$

For a practical controller, under normal operation $|KaAT_is/[(a+b)k_s(T_is+1)(T_ds+1)]|$ is very much greater than unity and $T_i \gg T_d$. Therefore, the transfer function can be simplified as follows:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteq \frac{bk_s(T_is+1)(T_ds+1)}{aAT_is}$$

$$= \frac{bk_s}{aA}\left(\frac{T_i + T_d}{T_i} + T_ds + \frac{1}{T_is}\right)$$

$$\doteq K_p\left(1 + T_ds + \frac{1}{T_is}\right)$$

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

Thus the controler shown in Fig. 5-59 is a proportional-plus-derivative-plus-integral one.

If the resistance R_d is removed, or $R_d = 0$, the action becomes that of a proportional-plus-integral controller.

If the resistance R_i is removed, or $R_i = 0$, the action becomes that of a narrow-band proportional, or two-position, controller. (Note that the actions of two feedback bellows cancel each other, and there is no feedback.)

PROBLEM A-5-5. Obtain the transfer function of the controller shown in Fig. 5-33 (c).

Solution. *Figure 5-61 shows the feedback circuit. The equations for this feedback circuit* are

$$\frac{1}{C_ds}[I_1(s) - I_2(s)] + R_dI_1(s) = E_0(s)$$

$$\frac{1}{C_ds}[I_2(s) - I_1(s)] + \frac{1}{C_is}I_2(s) + R_iI_2(s) = 0$$

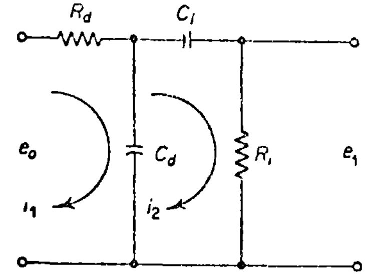


Fig. 5-61. Feedback circuit used in the controller shown in Fig. 5-33 (c).

Hence

$$\frac{I_2(s)}{E_0(s)} = \frac{C_is}{R_iC_iR_dC_ds^2 + (R_iC_i + R_dC_i + R_dC_d)s + 1}$$

or

$$\frac{E_1(s)}{E_0(s)} = \frac{R_iC_is}{R_iC_iR_dC_ds^2 + (R_iC_i + R_dC_i + R_dC_d)s + 1}$$

Noting that in Fig. 5-33 (c)

$$(e_i - e_f)K = e_0, \qquad e_f = e_1\frac{R_2}{R_1}$$

we obtain

$$\left[E_i(s) - \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_iC_isE_0(s)}{R_iC_iR_dC_ds^2 + (R_iC_i + R_dC_i + R_dC_d)s + 1}\right)\right]K = E_0(s)$$

The transfer function $E_0(s)/E_i(s)$ is

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{KR_1[R_iC_iR_dC_ds^2 + (R_iC_i + R_dC_i + R_dC_d)s + 1]}{KR_2R_iC_is + R_1[R_iC_iR_dC_ds^2 + (R_iC_i + R_dC_i + R_dC_d)s + 1]}$$

If the loop gain is very much greater than unity, then this last equation may be simplified to give

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1[R_iC_iR_dC_ds^2 + (R_iC_i + R_dC_i + R_dC_d)s + 1]}{R_2R_iC_is}$$

$$= K_p\left[T_ds + \left(1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}\right) + \frac{1}{T_is}\right]$$

where

$$K_p = R_1/R_2, \qquad T_d = R_dC_d, \qquad T_i = R_iC_i$$

Define

$$\alpha = 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}$$

Then

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_p\alpha\left(1 + \frac{T_d}{\alpha}s + \frac{1}{\alpha T_is}\right)$$

Thus, the controller is a proportional-plus-derivative-plus-integral one.

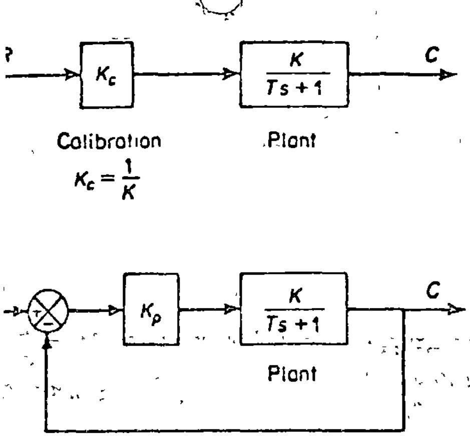


Fig. 5-62. Block diagrams of an open-loop control system and a closed-loop control system.

PROBLEM A-5-6. Consider the open-loop and closed-loop control system shown in Fig. 5-62. In the open-loop one, gain K_c is calibrated so that $K_c = 1/K$. Thus, the transfer function of the open-loop control system is

$$G_0(s) = \frac{1}{K}\frac{K}{Ts+1} = \frac{1}{Ts+1}$$

In the closed-loop control system, gain K_p of the controller is set so that $K_pK \gg 1$.

Assuming a unit-step input, compare the steady-state errors for these control systems.

Solution. For the open-loop control system, the error signal is

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

or

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$= [1 - G_0(s)]R(s)$$

The steady-state error for the unit-step response is

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} s[1 - G_0(s)]\frac{1}{s}$$
$$= 1 - G_0(0)$$

If $G_0(0)$, the dc gain of the open-loop control system, is equal to unity, then the steady-state error is zero. Due to environmental changes and aging of components, however, the dc gain $G_0(0)$ will drift from unity as time elapses, and the steady-state error will no longer be equal to zero. Such steady-state error in an open-loop control system will remain until the system is recalibrated.

For the closed-loop control system, the error signal is

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$= \frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

where

$$G(s) = \frac{K_pK}{Ts+1}$$

The steady-state error for a unit-step input is

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+G(s)}\right]\frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{1+G(0)}$$
$$= \frac{1}{1+K_pK}$$

In the closed-loop control system, gain K_p is set at a large value compared with $1/K$. Thus the steady-state error can be made small, although not exactly zero.

Let us assume the following variation in the transfer function of the plant, assuming K_c and K_p constant:

$$\frac{K+\Delta K}{Ts+1}$$

For simplicity, let us assume $K = 10$, $\Delta K = 1$, or $\Delta K/K = 0.1$. Then the steady-state error for a unit-step input in the open-loop control system becomes

$$e_{ss} = 1 - \frac{1}{K}(K+\Delta K)$$
$$= 1 - 1.1$$
$$= -0.1$$

In the closed-loop control system, if K_p is set at $100/K$, then the steady-state error for a unit-step input becomes

$$e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{100}{K}(K+\Delta K)}$$
$$= \frac{1}{1+110}$$
$$= 0.009$$

Thus, the closed-loop control system is superior to the open-loop control system in the presence of environmental changes, aging of components, etc., which definitely affect the steady-state performance.

PROBLEM A-5-7. The block diagram of Fig. 5-63 shows a speed control system in which the output member of the system is subject to a torque disturbance. In the diagram,

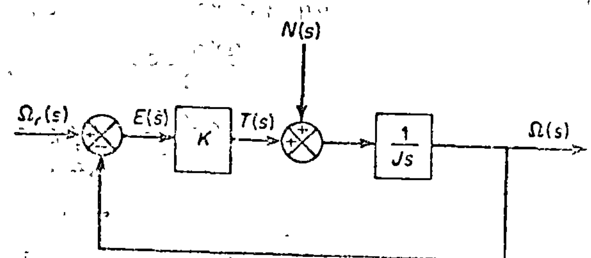


Fig. 5-63. Block diagram of a speed control system.

$\Omega_r(s)$, $\Omega(s)$, $T(s)$, and $N(s)$ are the Laplace transforms of the reference speed, output speed, driving torque, and disturbance torque, respectively. In the absence of a disturbance torque, the output speed is equal to the reference speed.

Investigate the response of this system to a unit step disturbance torque. Assume that the reference input is zero, or $\Omega_r(s) = 0$.

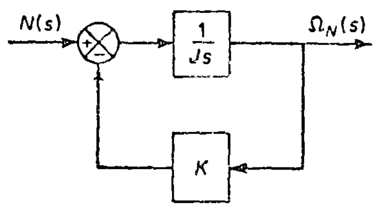


Fig. 5-64. Block diagram of the speed control system of Fig. 5-63 when $\Omega_r(s) = 0$.

Solution. Figure 5-64 is a modified block diagram convenient for the present analysis. The closed-loop transfer function is

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

where $\Omega_N(s)$ is the Laplace transform of the output speed due to the disturbance torque. For a unit-step disturbance torque, the steady-state output velocity is

$$\begin{aligned}\omega_N(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\Omega_N(s)\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{s}{Js+K}\frac{1}{s}\\ &= \frac{1}{K}\end{aligned}$$

From this analysis, we conclude that if a step disturbance torque is applied to the output member of the system, an error speed will result so that the ensuing motor torque will exactly cancel the disturbance torque. To develop this motor torque, it is necessary that there be an error in speed so that nonzero torque will result.

PROBLEM A-5-8. In the system considered in Problem A-5-7, it is desired to eliminate as much as possible the speed errors due to torque disturbances.

Is it possible to cancel the effect of a disturbance torque at steady state so that a constant disturbance torque applied to the output member will cause no speed change at steady state?

Solution. Suppose we choose a suitable controller whose transfer function is $G_c(s)$, as shown in Fig. 5-65. Then in the absence of the reference input, the closed-loop transfer function between the output velocity $\Omega_N(s)$ and the disturbance torque $N(s)$ is

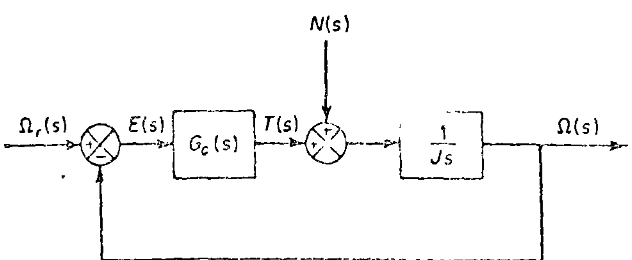


Fig. 5-65. Block diagram of a speed control system.

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} &= \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js}G_c(s)}\\ &= \frac{1}{Js + G_c(s)}\end{aligned}$$

The steady-state output speed due to a unit-step disturbance torque is

$$\begin{aligned}\omega_N(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\Omega_N(s)\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{s}{Js+G_c(s)}\frac{1}{s}\\ &= \frac{1}{G_c(0)}\end{aligned}$$

In order to satisfy the requirement that

$$\omega_N(\infty) = 0$$

we must choose $G_c(0) = \infty$. This can be realized if we choose

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

Integral control action will continue to correct until the error is zero. This controller however, presents a stability problem because the characteristic equation will have two imaginary roots.

One method of stabilizing such a system is to add a proportional mode to the controller or choose

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

With this controller, the block diagram of Fig 5-65 in the absence of the reference input can be modified to that of Fig. 5-66. The closed-loop transfer function $\Omega_N(s)/N(s)$ becomes

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

For a unit-step disturbance torque, the steady-state output speed is

$$\begin{aligned}\omega_N(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\Omega_N(s)\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{s^2}{Js^2+K_p s+K}\frac{1}{s}\\ &= 0\end{aligned}$$

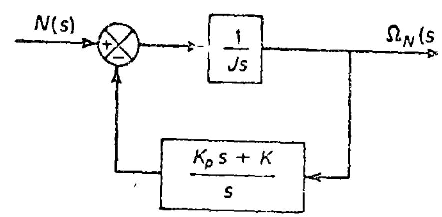


Fig. 5-66. Block diagram of the speed control system of Fig 5-65 when $G_c(s) = K_p + (K/s)$ and $\Omega_r(s) = 0$.

Thus, we see that the proportional-plus-integral controller eliminates speed error at steady state.

The use of integral control action has increased the order of the system by one. (This tends to produce an oscillatory response.)

In the present system, a step disturbance torque will cause a transient error in the output speed, but the error will become zero at steady state. The integrator provides onzero output with zero error. (The nonzero output of the integrator produces a motor rque which exactly cancels the disturbance torque.)

Note that the integrator in the transfer function of the plant does not eliminate the eady-state error due to a disturbance torque. To eliminate this, we must have an integra-r before the point where the disturbance torque enters.

ROBLEM A-5-9. Figure 5-67(a) is a schematic diagram of a pneumatic control device. consists of four chambers separated by three diaphragms which are rigidly linked, as hown in the diagram. This device has two input pipes where two control pressures P_1 nd P_2 are connected. If such pressures are applied, the diaphragm assembly distorts and huts off either one of the two supply inputs. The output pressure P_0 is then equal to either , or 0. The output pressure P_0 can be plotted versus the pressure difference $P_1 - P_2$, s shown in Fig. 5-67(b). Such a device can be used as a logic device.

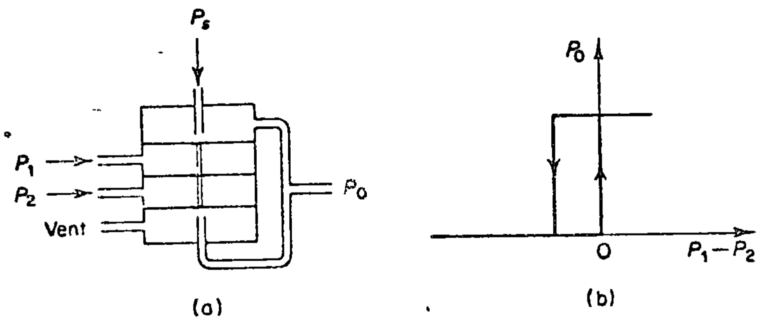


Fig. 5-67. (a) Schematic diagram of a pneumatic control device; (b) characteristic curve.

If a bias pressure is applied to one of the chambers, as shown in Fig. 5-68(a), the characteristic curve is shifted, as shown in Fig. 5-68(b).

Figure 5-69 shows a combination of two such devices. What logic operation can we get from this combination? Assuming the supply pressure is 1 and the input pressures at points A and B are either 0 or 1, find the output pressure at point F.

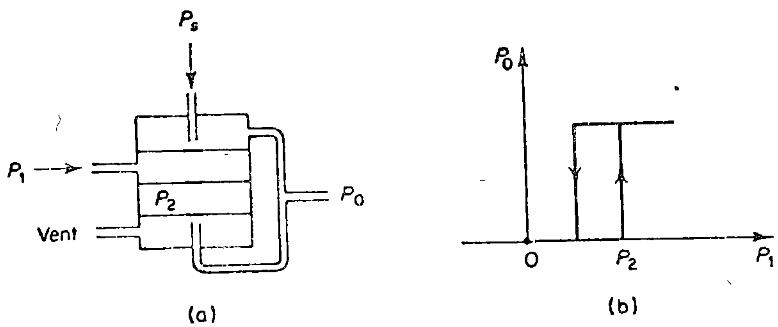


Fig. 5-68. (a) Schematic diagram of a pneumatic control device, (b) characteristic curve.

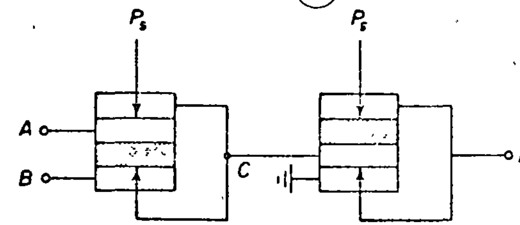


Fig. 5-69. Combination of two pneumatic control devices.

Solution. From Fig. 5-69, we obtain the following table:

A	B	C	F
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

Thus, the logic operation obtained is that of NOR; that is, $F = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

PROBLEMS

PROBLEM B-5-1. The schematic diagram of a pneumatic controller is shown in Fig. 5-70. Draw a block diagram of the controller, and then derive the transfer function.

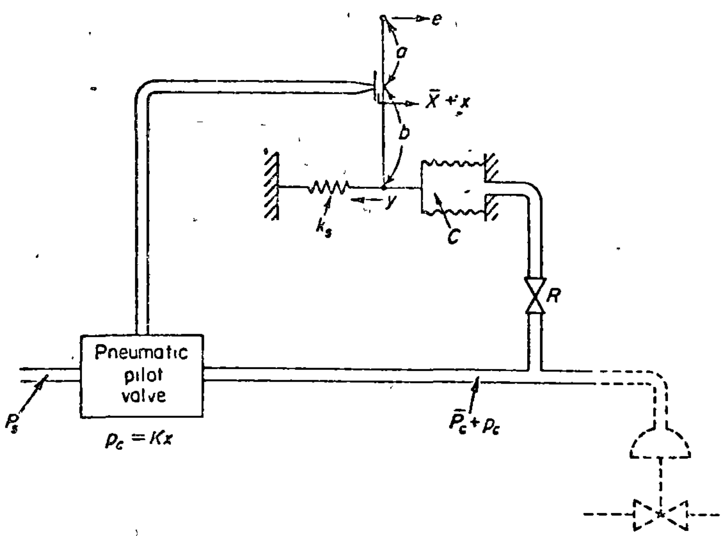
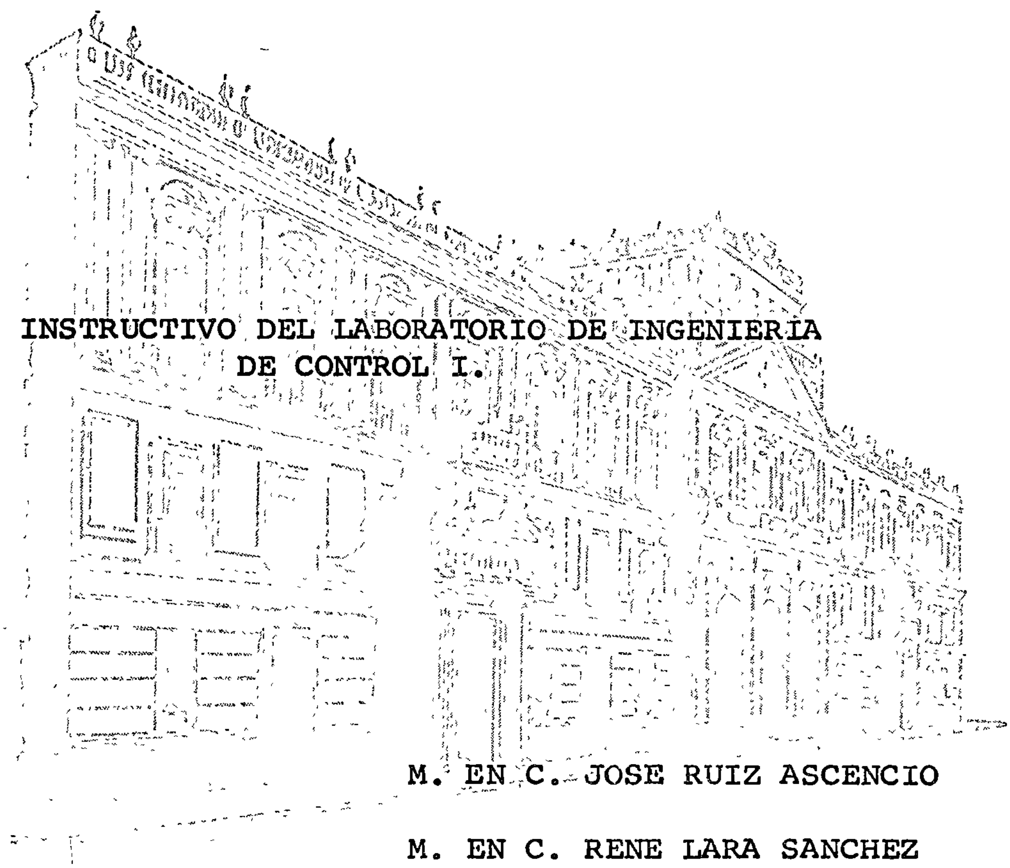


Fig. 5-70. Schematic diagram of a pneumatic controller.

PROBLEM B-5-2. Figure 5-71 shows the schematic diagram of a hydraulic servomotor in which the error signal is amplified in two stages. Draw a block diagram of the system and then find the transfer function between y and x.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO



INSTRUCTIVO DEL LABORATORIO DE INGENIERIA DE CONTROL I.

M. EN C. JOSE RUIZ ASCENCIO

M. EN C. RENE LARA SANCHEZ

JUNIO DE 1976.

Palacio de Minería Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F. Tels: 521-40-23 521-73-35 5123-123

INSTRUCTIVO DEL LABORATORIO DE INGENIERIA DE CONTROL I.

<u>Contenido</u> . El presente instructivo consta de de tres partes fundamentales:

a) Introducción a la computación analógica.

b) Principios y funcionamiento del equipo.

c) Prácticas.

Se presenta al alumno los principios básicos de la computación analógica(modelado,simulación,solución de modelos,escalamiento,etc.).

Se ha prestado mayor atención al manejo de la computadora analógica en vista de que es ésta una de las mas valiosas herramientas de que dispone el Ingeniero.

En el capítulo I se describe detalladamente el funcionamiento de los módulos analógicos,amplificadores operacionales,potenciómetros y fuentes que constituyen una computadora analógica,así como sus modos de operación y medición. El laboratorio dispone de cuatro computadoras analógicas EAI 180 a las que se refiere la descripción,aunque básicamente es el mismo principio para cualquier tipo de computadora.

También se cuenta con tres servomecanismos de CD que pueden operar como control de velocidad o control de posición y que se describen en II.

Análogamente en III,IV y V se describen servosistemas térmico,neumático de posición, y de nivel hidráulico,que también es parte del equipo del que dispone el laboratorio para ejemplificar en diversos tipos de sistemas las técnicas de Control.

Finalmente los capítulos 6 y 7 se refieren al equipo auxiliar: Osciloscopios,generadores de señales y medidores que se emplean para el desarrollo de las prácticas.

Las prácticas se hallan distribuidas en bloques y se identifican mediante el número de bloque al que pertenecen, y las siglas del equipo en que se realizan. Por ejemplo,III EAI .

Esta distribución en bloque se efectuó pensando en la necesidad de que los temas que se analizan en cada práctica deben haberse cubierto con anterioridad en el curso de teoría. Pretendiendo con ésto,valernos del laboratorio para comprobar experimentalmente los conceptos desarrollados en la materia.

Cualquier sugerencia u observación a éste instructivo,favor de dirigirlo a la sección de Control, lo cual sería de gran utilidad para mejorarlo.

INDICE

I INTRODUCCION TEORICA A LA COMPUTACION ANALOGICA.

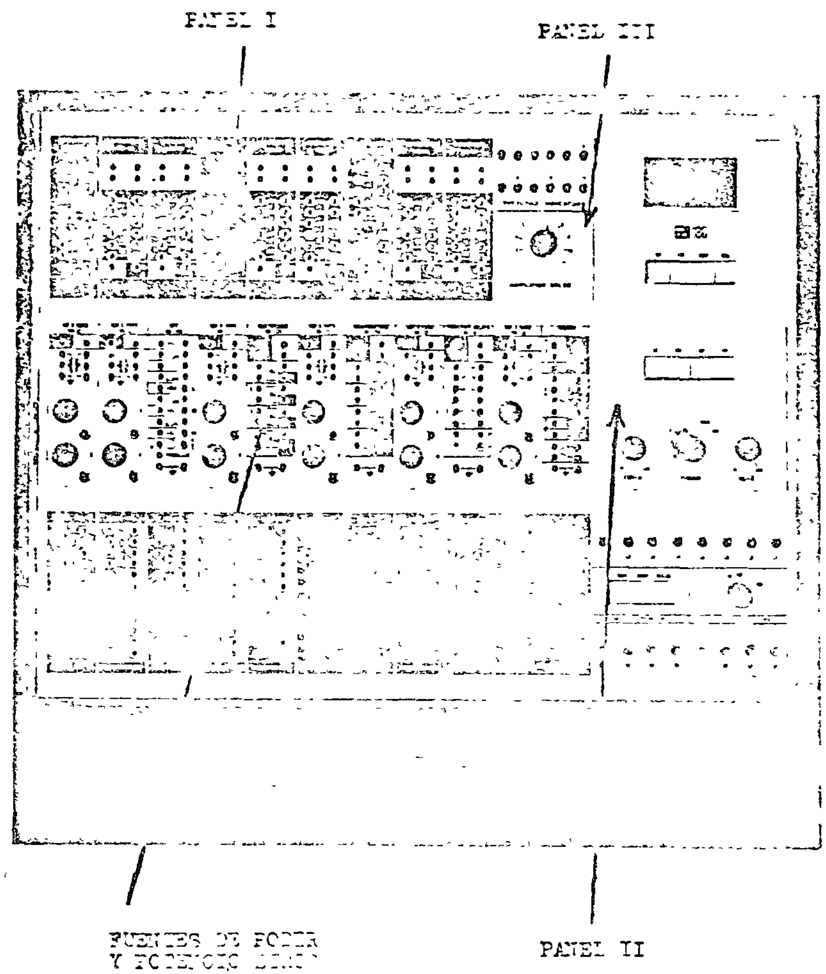


FIG I-0

I.- INTRODUCCION A LA COMPUTADORA ANALOGICA.

1.- MODELOS Y SIMULACION.

El hombre para explicarse los fenómenos que lo rodean, recurre a la creación de modelos. Estos pueden definirse como la representación simbólica de las características de un proceso y pueden ser matemáticas, analógicos, geométricos, etc. La gran mayoría de los modelos que se encuentran en la ingeniería son matemáticos, -- predominando los descritos por ecuaciones diferenciales.

Los modelos matemáticos pueden resolverse mediante diversas técnicas. Las computadoras nos suministran una de las técnicas más eficientes y rápidas. Según la forma de manipulación de las variables, se clasifican en 2 grandes grupos: analógicos y digitales.

En las computadoras analógicas las variables son continuas y resuelven los modelos a partir de la creación de un circuito electrónico, cuyo comportamiento es análogo al de la ecuación que se desea resolver, a este proceso se le conoce como simulación, para llevar a -- efecto esta simulación la computadora analógica dispone de módulos establecidos (integradores, sumadores y potenciómetros) que nos auxilian para completar el modelo. Las computadoras digitales en cambio emplean variables discretas y para la solución de los modelos se valen de métodos numéricos iterativos.

Pregunta 1.- Describa 3 modelos matemáticos de fenómenos físicos. De cuántas maneras diferentes puede resolverlo?

Pregunta 2.- Dé un ejemplo de un método numérico para computadora digital que nos resuelva un modelo.

2.- COMPUTADORA ANALOGICA. EAI-180

Consta de 3 módulos principales: analógicos, de medición y de operación. (Vea FIGURA I-0).

2.1.- Módulos analógicos. (PANEL I).

Básicamente existen 3 módulos analógicos diferentes, amplificadores operacionales, potenciómetros y fuentes de voltaje.

2.1.1.- Amplificador Operacional.

a) DESCRIPCION FISICA: Son dispositivos electrónicos que amplifican una señal de voltaje. Se representan simbólicamente mediante la FIGURA siguiente:

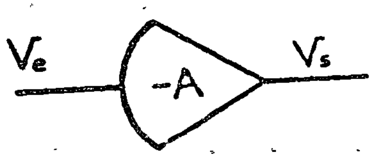


fig I-1

$$\text{i)}\quad -A = \frac{V_s}{V_e}$$

Donde V_e y V_s son los voltajes de entrada y salida y -A es la ganancia del amplificador que se define como en la formula i)

Note que el voltaje de salida V_s, tiene signo opuesto a el voltaje de entrada; ésto es debido a la característica del amplificador. A este tipo de amplificador se les conoce como amplificador inversor.

Supongamos un V_e en forma escalón (como se muestra en la fig I-2) a la entrada de un amplificador operacional de ganancia A = 100. La salida será de la forma: (fig I-3)

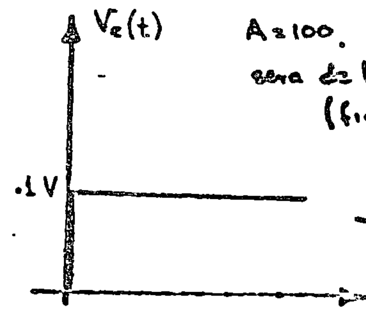
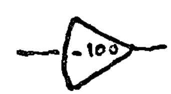


fig I-2



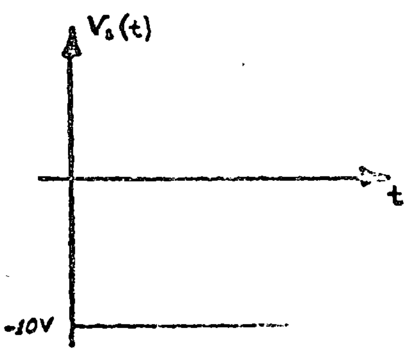


fig I-3

En forma general la constante A es del orden de 10^6, lo que teóricamente equivaldría que para una entrada de .1V, obtuviéramos una salida de 10^5 V que es físicamente imposible nos lo dé un circuito de esas características. La función de transferencia de un amplificador operacional es de la forma:

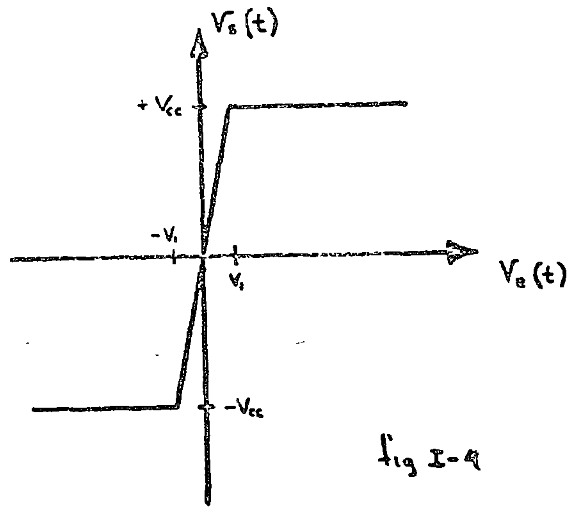


fig I-4

por lo que para voltajes de entrada $-V_1 < V_e < V_1$ el $V_s = \pm V_{cc}$. Este voltaje V_{cc} es el voltaje de alimentación del amplificador (en nuestro caso aproximado $\pm$ 13V).

b) AMPLIFICADOR OPERACIONAL REALIMENTADO.

Para poder trabajar el amplificador en un rango de V_e más grande, es necesario disminuirle su -

ganancia, esto es.

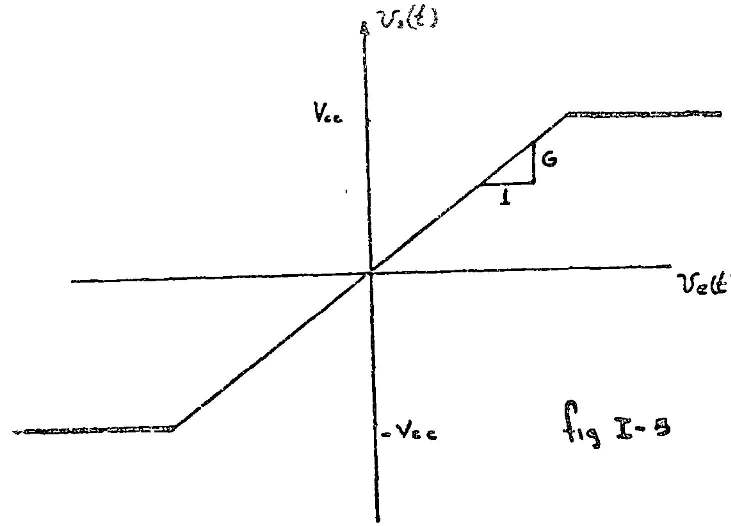


fig I-5

Para lograr ésto lo realimentamos de la siguiente manera:

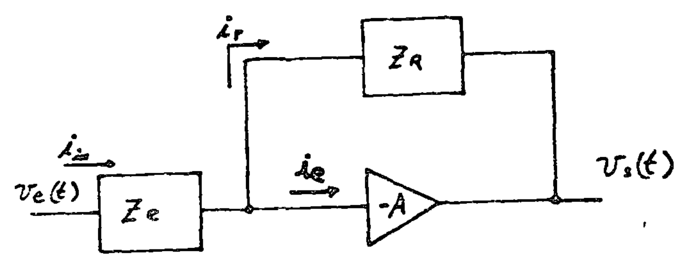


fig I-6

Como se ha visto en la teoría, la ganancia de un sistema realimentado es menor que la de un sistema de malla abierta.

Para realimentar el sistema se toma el V_s y mediante una impedancia $Z_R(s)$ se convierte en una corriente (i_r) que se suma algebraicamente con la corriente (i_u) generando la corriente (i_e). Por lo que:

$$i_e = i_u - i_r \quad \text{para} \quad i_r > 0 \qquad i_e < i_u$$

Pregunta 3.- Exprese el amplificador operacional realimentado mediante la notación de diagramas de bloques, y calcule la ganancia global del sistema.

c) GANANCIA DE UN AMPLIFICADOR OPERACIONAL REALIMENTADO.

Debido a las características físicas de los amplificadores operacionales, la ganancia global se puede aproximar con suficiente precisión mediante la fórmula:

$$G \doteq -\frac{Z_R}{Z_E}$$

A partir de esta aproximación es posible darle al amplificador operacional diversos empleos de acuerdo a las impedancias que se usen.

La demostración de la fórmula anterior puede consultarla en Ingeniería Eléctrica.- Hammond PP 399.

d) SUMADORES. (FIGURA I-8).

Los sumadores son amplificadores operacionales en los que tanto la impedancia de realimentación como la de entrada son resistencias. Su representación esquemática se muestra en la figura I-7

A partir de la fórmula de ganancia obtenemos que:

$$V_s = -\left[\frac{10^6}{10^6} V_{e1} + \frac{10^6}{10^5} V_{e2}\right]$$

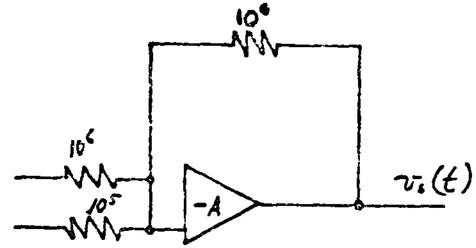


fig I-7

Por lo que ese dispositivo actúa como sumador. Los factores que multiplican a los sumandos se pueden variar ya sea cambiando la resistencia de realimentación o la resistencia de entrada. (Nótese el signo menos afuera del corchete).

En la computadora EAI-180 existen 6 sumadores con la siguiente representación:

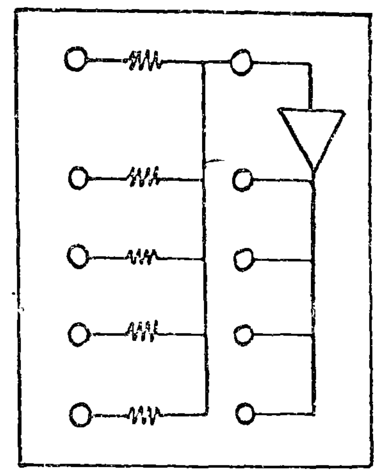


fig I-8

y se dispone de botellas de 2 y 4 patas para realimentar el amplificador operacional. Esta se realiza puenteando una terminal de salida con una de entrada. Las terminales de salida se encuentran en rojo y las de entrada en verde.

Las resistencias etiquetadas con un 1 son de $10^6\ \Omega$ y las etiquetadas con un 10 son de $10^5\ \Omega$.

Variando estos parámetros, es posible obtener ganancias de 1, 10 y 0.1.

Pregunta 4. Represente simbólicamente los circuitos - para ganancias de 1, 10 y C.I.

e) INTEGRADORES. (FIGURA I-9).

Si realimentamos un capacitor en un amplificador operacional, la ganancia será una función de S operador de laplace. (La impedancia de un capacitor $Z_c = \frac{1}{S_c}$). De modo que: ---

$$g = -\frac{\frac{1}{S_c}}{R} = -\frac{1}{SR_c}$$

la ganancia a su vez también es igual:

$$g = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{1}{SPC} \quad \therefore \quad V_s = -\frac{1}{S}\,\frac{1}{R_c}\,V_e$$

si antitransformamos obtenemos que:

$$V_{s(t)} = -\frac{1}{P_c}\left[\int_{t_1}^{t_2} V_{e(t)}\,dt + C.I.\right]$$

por lo que concluimos que un amplificador operacional con impedancia de entrada resistiva - e impedancia de realimentación, un capacitor - constituye un integrador.

En la computadora EA1-180 se dispone de 6 - integradores distribuidos como se muestra en la figura I-9 (Para que éstos funcionen es necesario colocar una botella de 4 patas en las terminales marcadas OP, A, P, $\bar{A}$).

El capacitor etiquetado con un 100 tiene un valor de 10^{-8} f y el de 1 es de 10^{-6} f.

Combinando estos valores con los de las resistencias podemos asignar diferentes ganancias.

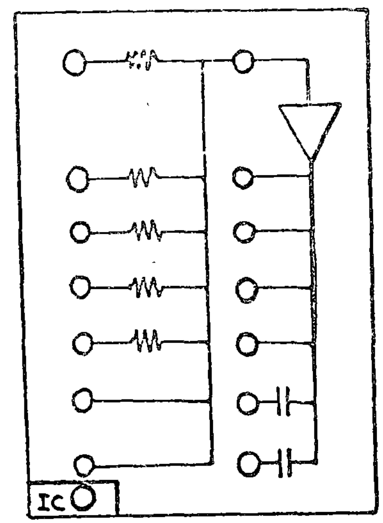


fig I-9

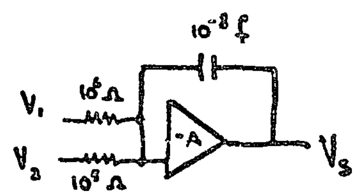


fig I-10

Pregunta 5.- Exprese el $V_{s(t)}$ en función de los voltajes $V_1(t)$ y $V_2(t)$ para la figura I-10

f) CONDICIONES INICIALES

Las condiciones iniciales de la integral se introducen en la terminal marcada IC. (FIGURA 1-9).

El circuito de condiciones iniciales es el de la FIGURA I-11. Aparece ahora el relevador K_3 que se había ignorado en diagramas anteriores. Tampoco aparece K_3 sobre el tablero de la máquina.

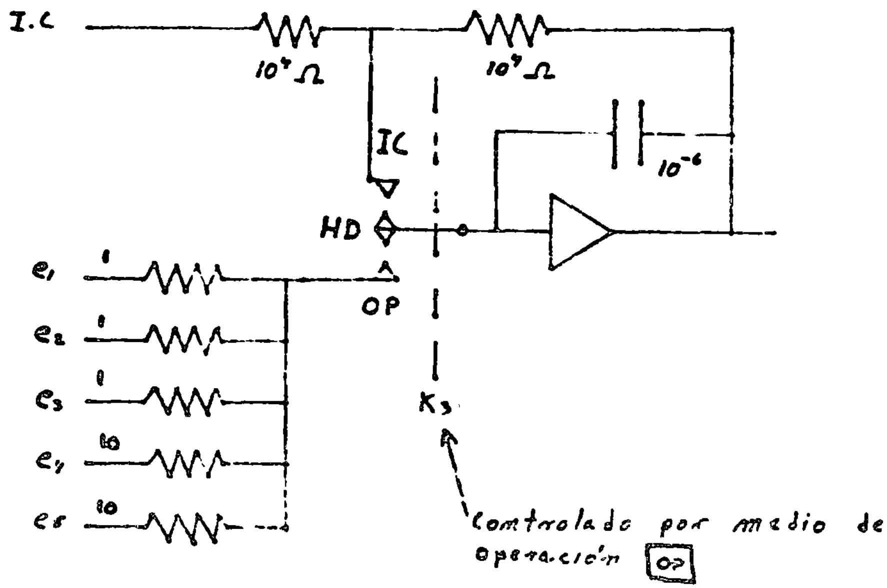


FIGURA I-11.

Los valores corresponden a la máquina EAI-180.

El relevador K_3 tiene tres posiciones controladas por los botones de modos de operación. (Ver sección de operación).

OP: ocurre oprimiendo el botón del modo de operación normal. El circuito se vuelve idéntico al de la FIGURA I-12. La salida es la integral de las señales e_1 a e_5.

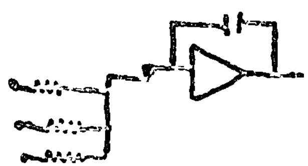


fig I-12

IC: Ocurre en modo de condiciones iniciales, IC ó RS (del inglés "reset"). Las entradas e_1 a e_5 quedan desconectadas. El circuito es:

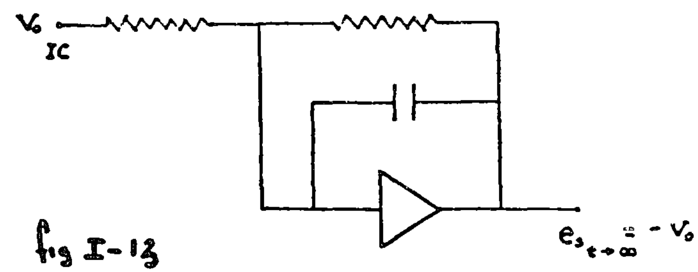


fig I-13

El circuito es casi un sumador, excepto que la presencia del capacitor hace que la salida no siga instantáneamente a la entrada. En unos cuantos milisegundos se carga el capacitor y la salida e_5 alcanza el valor $e_5 = -V_0$.

HD: (Abreviatura del inglés "HOLD", detener). En este modo de operación, el integrador no se ve afectado por ninguna entrada. La carga del capacitor se mantiene, y la salida e_5 se mantiene al valor que tenía al momento de pasar a HD.

Esta posición (HD) se utiliza para "congelar" la simulación de un sistema dinámico en un momento cualquiera, para poder hacer mediciones con aparatos de respuesta lenta.

[illegible]

Controlan el funcionamiento de los integradores.

El botón del modo en uso se ilumina internamente, para señalarlo.

Estos operan de cuatro modos diferentes:

a) Oprimiendo el botón IC (II-1).

   A la salida de los integradores tendremos las condiciones iniciales que se le hayan suministrado por la terminal IC con signo cambiado.

   También se emplea este modo de funcionamiento para desaturar los amplificadores operacionales cuando su capacidad de salida ha sido rebasada ($\pm$ 12 v); la saturación se indica mediante los focos (III-1).

b) Oprimiendo el botón HD (II-2).

   Detiene el proceso de integración en el momento que se oprime el botón HD (del inglés HOLD).

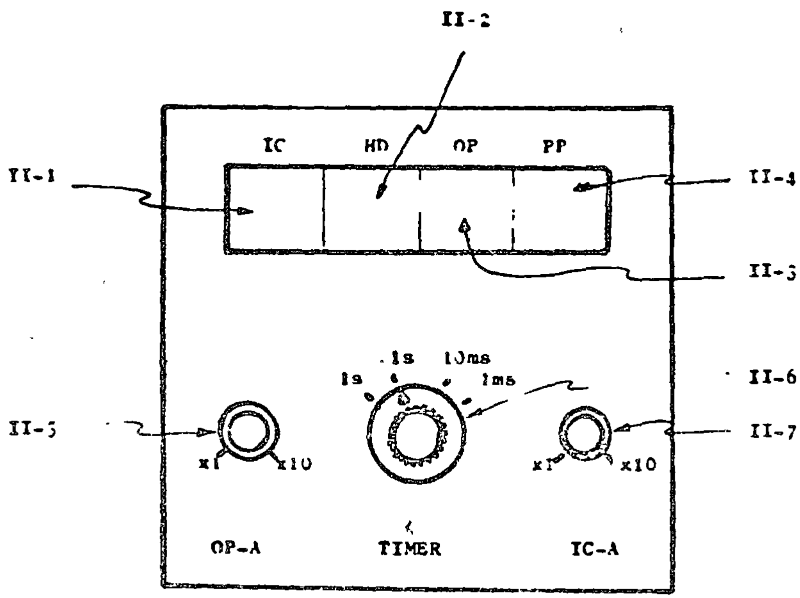
c) Oprimiendo el botón OP (II-3).

   Los integradores se hallan operando en su modo normal.

d) Oprimiendo el botón PP (II-4).

   Accionamos un dispositivo que produce señales de control repetitivas que se envían al modo OP e IC para hacer que la operación oscile entre ambos. Las frecuencias de oscilación se pueden ajustar en los rangos que se muestran en la tabla mediante las perillas (II-5,6,7).

modulos de operacion



(Fig. II)

PERIODO DEL "TIMER"	TIEMPO EN EL MODO DE OP.	TIEMPO EN EL MODO IC
1 seg.	1 a 10 seg.	.1 a 1 seg.
.1 seg.	.1 a 1 seg.	.01 a .1 seg.
10 ms	10 a 100 ms	1 a 10 ms
1 ms	1 a 10 ms	.1 a 1 ms

2.3.- Módulos de Medición. (PANEL III).

Consta de un vóltmetro digital (III-2) y 4 botones (III, 3, 4, 5, 6) que controlan su operación, una perilla selectora de amplificador (III-7) y los focos (III-1) indicadores de saturación.

a) Vóltmetro digital (III-2).

Muestra las mediciones en unidades máquina

1 u.m. = 10 volts.

b) Controles del vóltmetro.

b1) Botón SP (III-3)

Nos sirve para leer los voltajes que existen en los potenciómetros con sólo apretar el ---- switch correspondiente. El diagrama eléctrico se muestra a continuación:

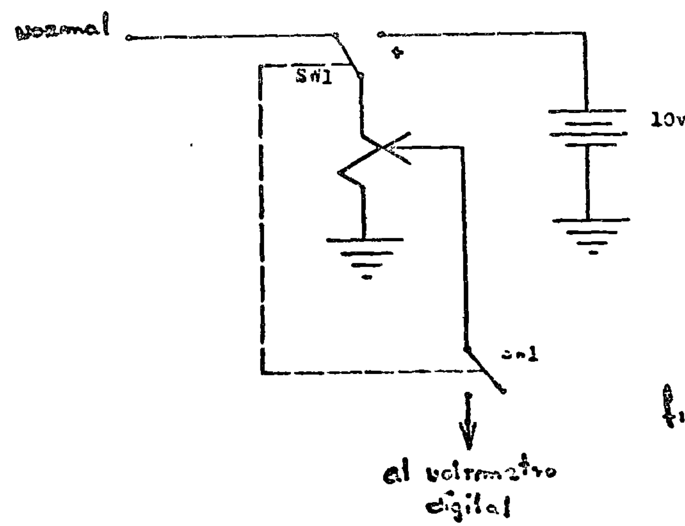
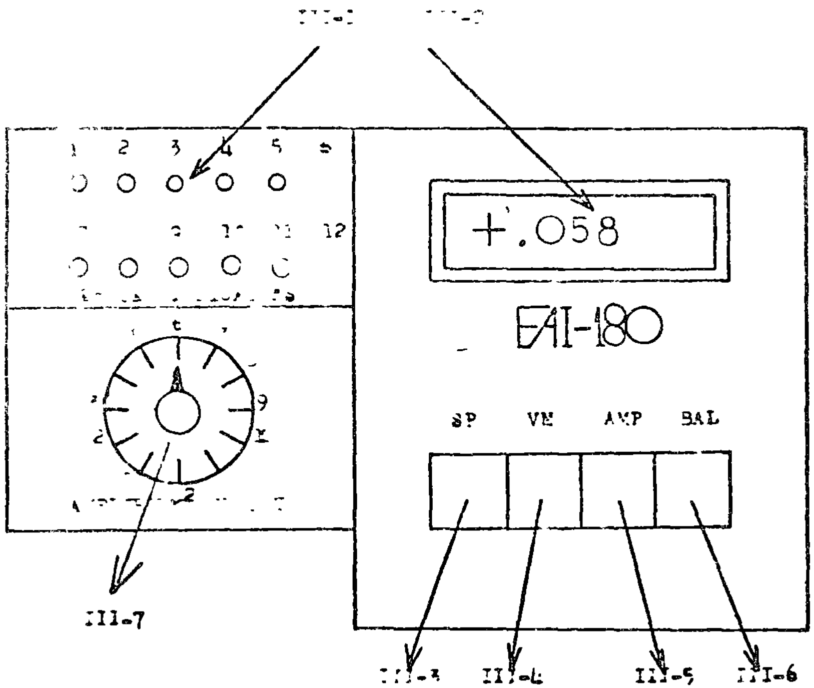


fig II-1

MODULOS DE MEDICION



(Fig. III)

En la posición normal (la del dibujo) el switch no está oprimido.

De acuerdo al diagrama cuando la lectura de los potenciómetros se hace con el botón SP, los voltajes serán siempre positivos e independientes de la alimentación normal.

Un circuito análogo existe para los potenciómetros no aterrizados.

b2) BOTON VM (III-4)

Accionando este botón el vóltmetro mide cualquier voltaje entre ± 10V por la entrada DPM (III-8)

b3) BOTON AMP (III-5)

Mide las salidas del amplificador, que se halla previamente seleccionado mediante la perilla (III-7).

b4) BOTON BAL (III-6)

No es de uso normal y se emplea para ajustar el voltaje de desviación en los operacionales.

2.4.- Otros dispositivos.

Además de los 3 módulos descritos anteriormente la computadora analógica EAI-180 dispone de los siguientes dispositivos: (Vea FIGURA I-0).

a) Generador de pulsos.

De la terminal C_P se puede obtener un tren de pulso de 4 volts y frecuencia variable que se ajusta con la perilla (I -2) de la fig I-0.

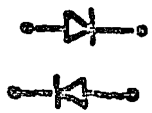
b) Generador de impulsos.

En la terminal P se observa un tren de impulsos de 4 volts y de frecuencia variable que se ajusta con la misma perilla.

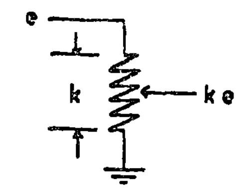
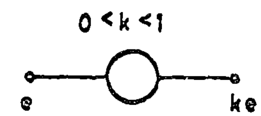
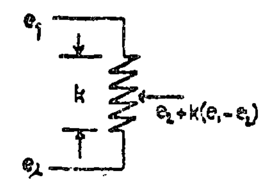
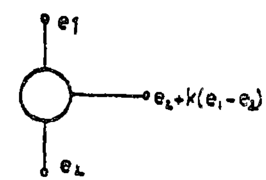
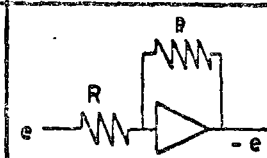
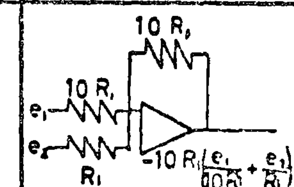
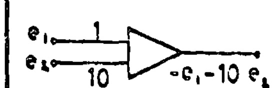
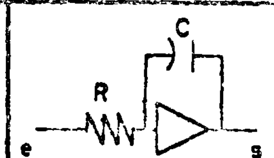
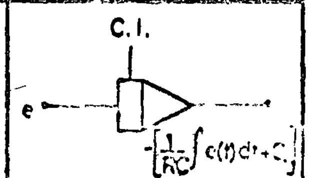
c) Generador de rampa.

De la terminal marcada 

d) Diodos de uso general



RESUMEN

DESCRIPCION DEL CIRCUITO	CIRCUITO	SIMBOLO DE PROGRAMACION
1.- POTENCIOMETRO ATERRIZADO		
2.- POTENCIOMETRO NO ATERRIZADO		
3.- INVERSOR		 el número representa la ganancia
4.- SUMADOR		
5.- INTEGRADOR		

3.- PROGRAMACION.

3.1) Generalidades.- Programar la computadora analógica - consiste en:

a) A partir del modelo matemático del sistema por simular, hacer un diagrama de bloque con las conexiones que se deben realizar entre módulos.

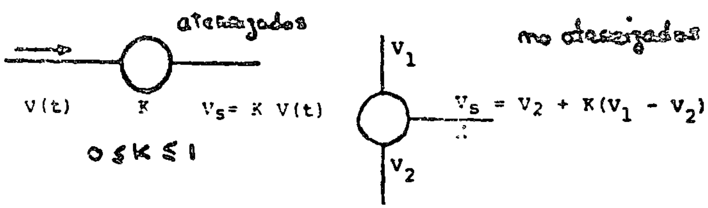
b) Determinar los valores de los potenciómetros y las ganancias de los amplificadores en términos de los parámetros del sistema.

c) Redactar un conjunto de instrucciones de control y medición.

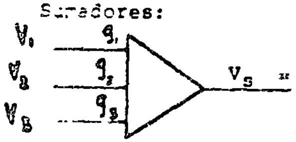
Resumen de módulos analógicos, sus funciones y su símbolo.

Fuentes

Potenciómetros:

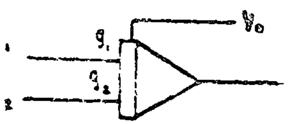


Sumadores:



$$V_s = -\left[g_1V_1 + g_2V_2 + g_3V_3\right]$$

Integradores:



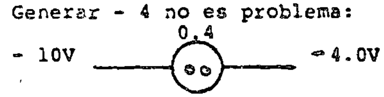
$$V_s = -\left[\int_0^t (g_1V_1 + g_2V_2)\,dt + V_0\right]$$

3.2) Diagrama de Bloque.- Supongamos que se desea generar la función

$$f_1(t) = 4 - T \text{ para } 0 \leq t \leq 10 \text{ seg.}$$

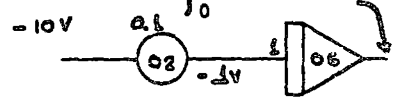
$f_1(t)$ es en primer lugar una suma, por lo cual se requerirá un sumador. Tomando en cuenta la inversión de signo que introduce el sumador:

Generar - 4 no es problema:

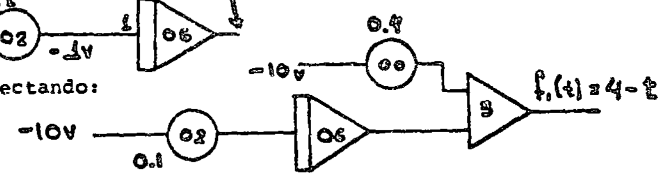


La función t se puede expresar como la integral de la unidad:

$$-\int_0^t (-1)\,dg = t$$



Interconectando:

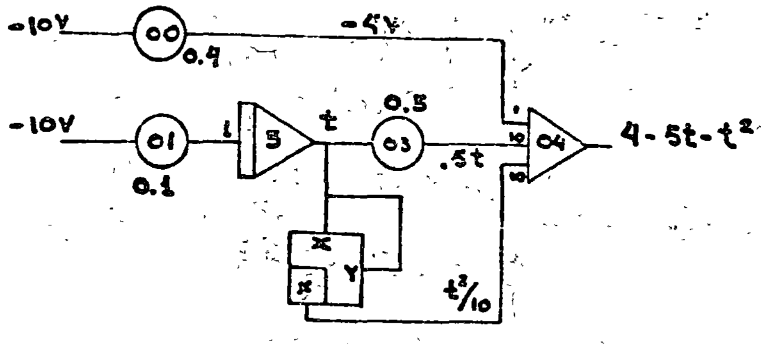


Una vez conectados los módulos y ajustados los potenciómetros según el diagrama sólo resta conectar el amplificador 3 a un graficador y prender la máquina en $\boxed{OP}$ durante 10 segundos.

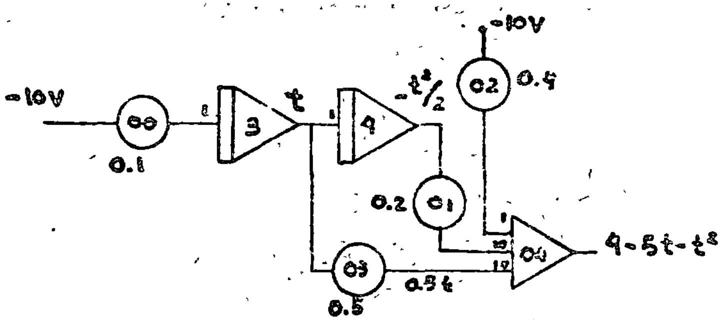
Nótese que los módulos están numerados y que el número se acostumbra escribir dentro del símbolo respectivo.

Si se desea generar $f_2(t) = 4 - 5 \cdot t - t^2$, se ocurren al menos 2 posibilidades.

1) Usar un "multiplicador" que simbolizaros por una caja con entradas X_1 y Y_1 cuya salida es XY/10.



2) Generar t^2 por integración de t.



En la práctica se preferiría la segunda forma, por motivos de simplicidad y mayor exactitud de los integradores respecto de los multiplicadores. Por extrapolación de este ejemplo se puede programar cualquier polinomio. Posteriormente se dá un método eficiente.

Con relación al ejemplo anterior es conveniente introducir los conceptos de <u>escalamiento</u> de las variables y de una corrida en la <u>computadora</u>.

3.3) <u>Corrida, Saturación y Escalamiento</u>. <u>Una corrida es una simulación completa o parcial de un problema que se caracteriza por un ciclo de condiciones iniciales ($\boxed{IC}$)</u> y operación ($\boxed{OP}$) de los integradores de la computadora. En el ejemplo anterior se describió la simulación de la función $f_1(t) = 4 - t$ para $0 \leq t \leq 10$ seg. Para este fin, se activan los integradores durante 10 segundos. <u>La corrida dura 10 segundos</u>.

También se programó la simulación de la función $f_2(t) = 4 - 5t - t^2$. Si esta función se corre durante 10 segundos, al final de la corrida, $f_2(t) = 4 - 50 - 100 = -146$. Implícito en el programa está la relación 1 volt = 1 - unidad de $f_2(t)$. Entonces el resultado debe ser - 146 volts. Pero sabemos que tanto los amplificadores como los integradores tienen una salida V_s limitada al intervalo $-10 < V_s < 10$ volts.

¿Qué sucederá en este caso? Sucede que el amplificador se <u>satura</u>. Si graficamos la salida del amplificador respecto a su entrada a ganancia 1.0, obtenemos la figura IV-1.

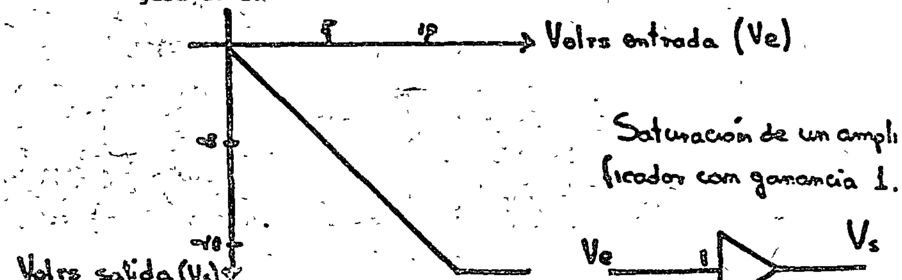


FIGURA IV-1.

Esto se debe a que los componentes electrónicos del amplificador han llegado a su límite de amplificación. Una vez alcanzado un voltaje entre 12 y 13 volts ya no es posible seguir aumentando el voltaje de salida. Entonces ésta permanece constante, independientemente de la entrada.

La condición de saturación debe evitarse a toda costa durante la corrida. Si durante la corrida ocurre saturación en uno de los módulos del programa, los resultados quedan invalidados, pues la saturación es una desconexión temporal entre causa y efecto, lo cual produce resultados arbitrarios.

¿Pero acaso estamos limitados a simular funciones que no pasen de 10 unidades?

Estamos limitados a simular funciones que no pasen de 10 volts, pero a través de un factor de escala apropiado, podemos simular cualquier número de unidades.- Si es necesario simular t^3 hasta t=10, simulamos ---- $\frac{1}{100} t^3$ que es una variable escalada cuyo valor máximo es 10 volts: cuando t = 10 seg, t^3 = 1000 y $\frac{1}{100} t^3 = 10$.

Por el momento se ignoran los problemas de escalamiento, pues posteriormente se les dedica una sección.

3.1. Simulación de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.- Veamos como resolver las -- ecuaciones del tipo

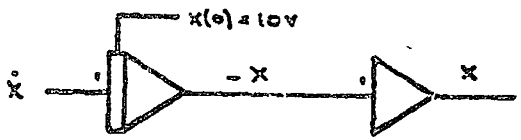
$$x^{n}(t) + a_{n-1}\, x^{n-1}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

(se utiliza la notación $\frac{d^n}{dt^n} x(t) = x^n(t)$).

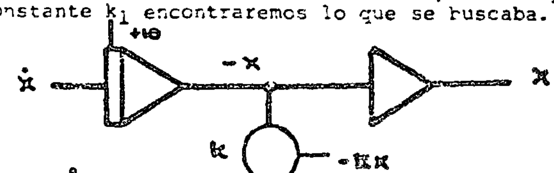
Comenzaremos por la más sencilla:

$$\dot{x} + kx = 0, \text{ con } x(t = 0) = 10 \text{ volts.}$$

Se puede escribir $\dot{x} = -kx$. Si de alguna forma dispusiéramos de $\dot{x}(t)$, sólo tendríamos que conectar un integrador para llegar a la función:



Pero si a la función - x(t) lo multiplicamos por una constante k_1 encontraremos lo que se buscaba.



Ya que $\dot{x}(t) = -kx(t)$ según la definición del problema. Entonces basta conectar la salida del integrador a su entrada, para quedar resuelto el problema. Si queremos graficar + x(t), se alambra como en la figura IV-2

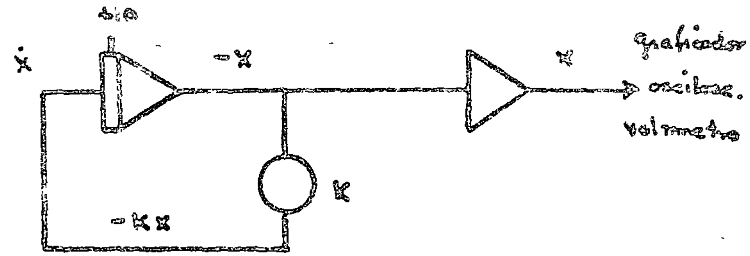


FIGURA IV-2.

A primera vista puede causar sorpresa la programación de ecuaciones diferenciales, especialmente las homogéneas, como el caso anterior. Surge la pregunta ¿se obtuvo la solución de la nada?, se comienza por suponer que se dispone de la derivada, se integra y luego se dice que se ha encontrado la derivada. El proceso se aclara si recordamos que la solución de:

$$\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \; x(0) = x0$$

$$\text{es } \; x(t) = x_0 \; e^{-kt}.$$

La exponencial es una función cuya derivada es una -- constante por la misma función. Lo que en la computadora "echa a andar" la solución es la condición inicial. En efecto, si x_0 = 0 obtendríamos la solución - nula x(t) = 0 para todo tiempo.

De este primer ejemplo se deduce el procedimiento para resolver una ecuación del tipo

$$x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t)$$

y además $f(t)$ conocida.

1o.- Despejar la derivada de mayor orden:

$$x^{n} = f(t) - a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-2} x^{n-2} - \dots - a_1 \dot{x} - a_0 x$$

2o.- Hacer un diagrama de bloque donde figuren integrales sucesivas de esta derivada hasta llegar a la función:

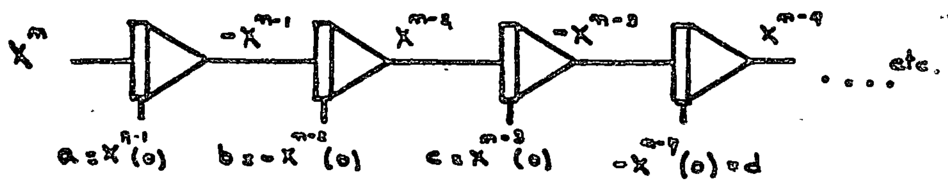


FIGURA IV-3.

Deben figurar las condiciones iniciales con su signo - apropiado.

3o.- Multiplicar cada una de las derivadas por su coeficiente, cuidando de invertir previamente el signo cuando sea necesario.

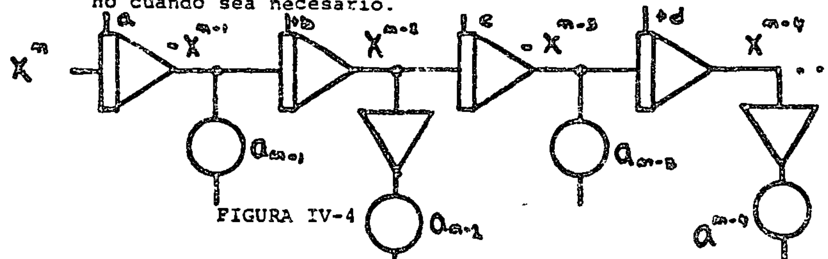
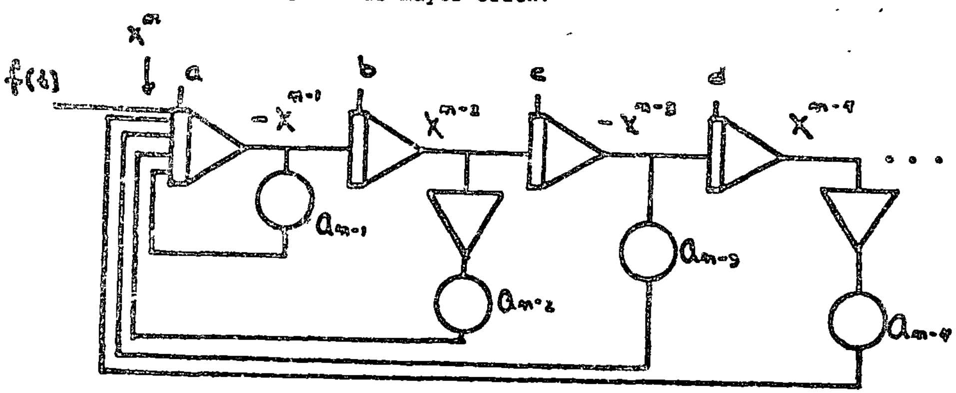


FIGURA IV-4

4o.- Sumar los términos de la función y sus derivadas con la función forzadora si existe, para formar - la derivada de mayor orden.



Ejemplo: programar $\ddot{x} + 10\dot{x} + 2x = \overbrace{4e^{-0.2t}}^{u(t)}$

La función exponencial sabemos generarla a través de su ecuación diferencial.

$\dot{u} = 0.2u$, $x(0) = 4$ tiene como solución $4e^{-0.2t}$

Entonces el diagrama de bloque completo es:

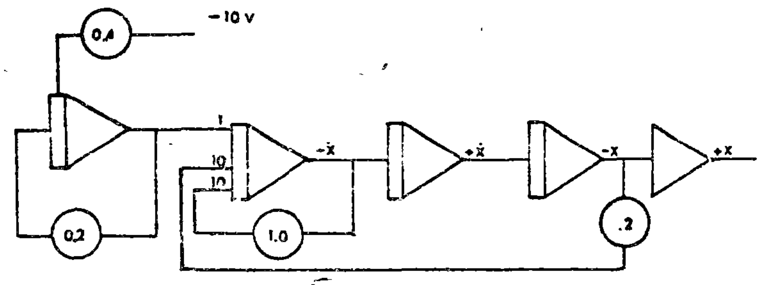


FIGURA IV-6.

En realidad hay muchos diagramas de bloque que resuelven la misma ecuación diferencial.

Difieren entre sí, sólo en el número y orden de inversiones y sumas. Es relevante distinguir dos variantes:

a) Cuando la derivada de mayor orden no aparece como - la salida de un amplificador, sino solamente como - entrada.

b) Cuando sí aparece como salida.

Los ejemplos hasta aquí han sido del primer tipo. Esta variante es de preferirse cuando la derivada de mayor orden no se va a medir, ni se requiere en alguna otra parte del programa. Las ventajas son: simplicidad, economía de módulos y el ahorro de escalamiento para esta variable.

Veamos un ejemplo de problema donde es necesario la variante 2 del diagrama de bloque.

Se requiere simular un sistema masa resorte con ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$ y lo que nos interesa como respuesta es precisamente la aceleración. Entonces el diagrama se genera a partir de:

$$\ddot{x} = \frac{f(t)}{m} - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

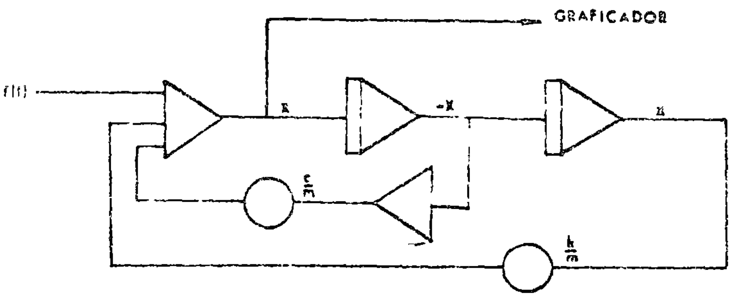


FIGURA IV-7.

Si bastara conocer el desplazamiento, se podría alambrar:

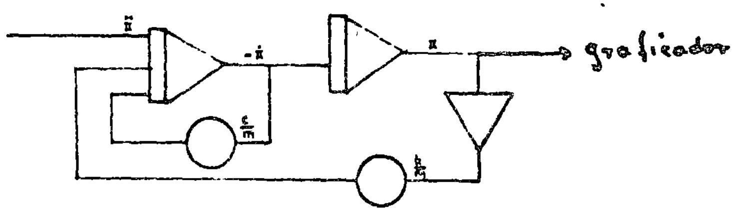


FIGURA IV-8.

3-5 .- Simulación de Polinomios de Grado N. Se vió como es posible formar potencias sucesivas de t por integración. El polinomio se forma después, sumando las potencias, después de multiplicarlas por factores constantes que representan los coeficientes del polinomio. (Sección 2).

Otra manera de programar polinomios es derivando respecto al tiempo N veces hasta llegar a una constante y varias condiciones iniciales:

Por ejemplo:

Si $f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$

entonces $f(0) = a_0$

derivando, $\dot{f}(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$ y $\dot{f}(0) = a_1$

derivando de nuevo $\ddot{f}(t) = 6a_3t + 2a_2$ $\ddot{f}(0) = 2a_2$

derivando:

$\dddot{f}(t) = 6a_3,\ f(0) = a_0,\ \dot{f}(0) = a_1,\ \ddot{f}(0) = 2a_2$

es una ecuación diferencial cuyo diagrama de bloque es:

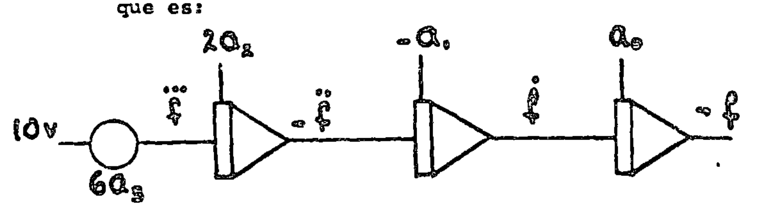


FIGURA IV-9.

3-6 .- Sistemas de ecuaciones diferenciales.- Cuando encontramos ecuaciones del tipo.

a)
$$M_1\ddot{X}_1 + C\dot{X}_1 + KX_1 = f(t) + C\dot{X}_2 + KX_2$$
$$M_2\ddot{X}_2 + C\dot{X}_2 + KX_2 = C\dot{X}_1 + KX_1$$

correspondientes a problemas como las masas acopladas de la FIGURA IV-9.

Inicialmente $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2(0) = 0$

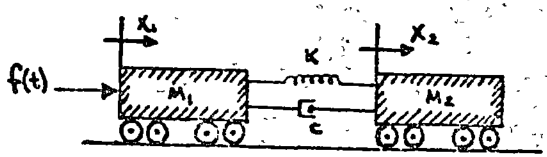


FIGURA IV-9.

el procedimiento para encontrar el diagrama de bloque se parece al de la sección 4.

1o.- Despejar las derivadas de más alto orden:

b)

$$\ddot{x}_1 = \frac{f(t)}{M_1} + \frac{K}{M_1} x_2 + \frac{C}{M_1}\dot{x}_2 - \frac{K}{M_1} x_1 - \frac{C}{M_1}\dot{x}_1$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{C}{M_2}\dot{x}_1 + \frac{K}{M_2} x_1 - \frac{C}{M_2}\dot{x}_2 - \frac{K}{M_2} x_2$$

2o.- Suponemos que existen estas derivadas y por integración generamos las demás derivadas y variables dependientes. Se introducen las condiciones iniciales en los casos en que son no nulas.

3o.- Multiplicando por los coeficientes apropiados, se pueden generar todos los términos del miembro derecho de las ecuaciones b).

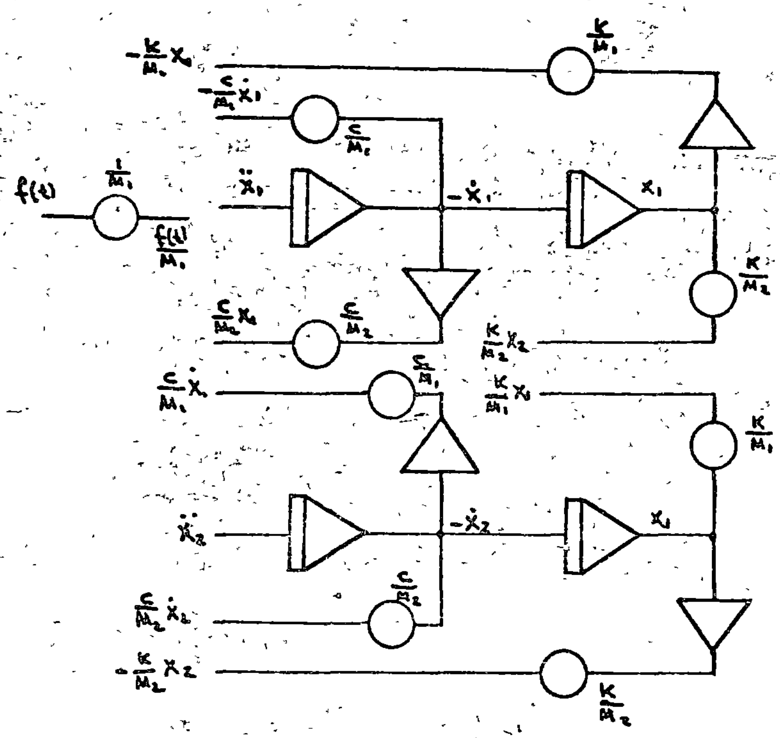


FIGURA IV-10.

Finalmente, se suman los términos que contribu-- yen a dar una de las derivadas de mayor orden. - FIGURA IV-11.

Este mismo procedimiento se utiliza para los modelos dados en forma matricial en términos de variables de estado. FIGURA IV-12.

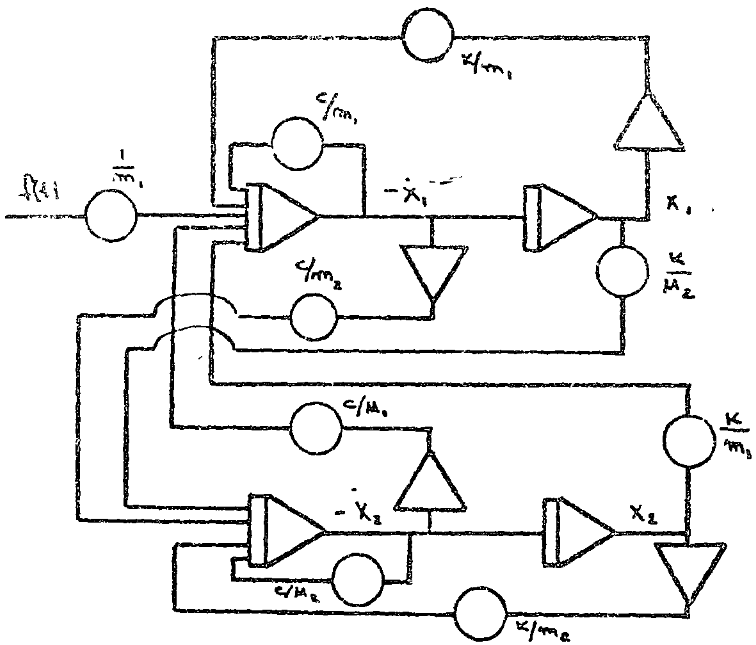


FIGURA IV-11.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

su diagrama analógico:

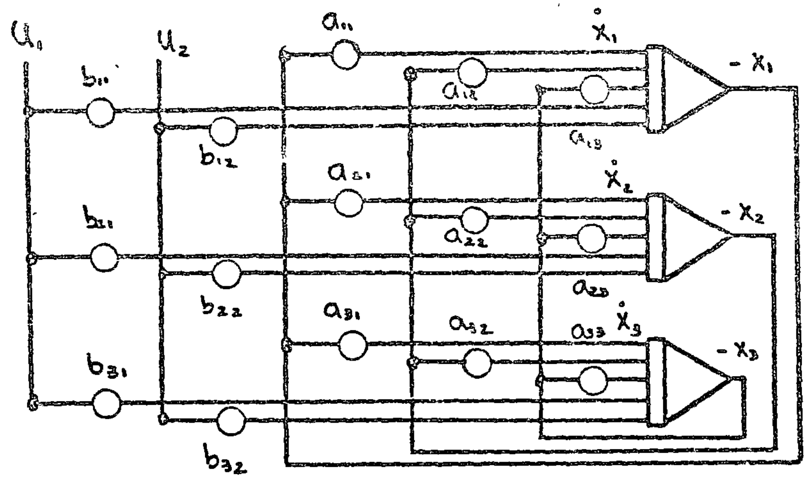


FIGURA IV-12.

3.7 . Simulación de funciones de transferencia.

Dada la función de transferencia

i) $$G(s) = \frac{S(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots b_n s^n} \qquad m \leq n$$

Podemos simularla para condiciones iniciales nulas, introduciendo una variable intermedia:

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Entonces

ii) $$\frac{S(s)}{U(s)} = \frac{a_0X(s) + a_1 sX(s) + \dots + a_m s^m X(s)}{b_0X(s) + b_1 sX(s) + \dots + b_n s^n X(s)}$$

Y podemos considerar que

iiia) $$S(s) = K\left[a_0X(s) + a_1 sX(s) + \dots a_m s^m X(s)\right]$$

iiib) $$U(s) = K\left[b_0X(s) + b_1 sX(s) + \dots b_n s^n X(s)\right]$$

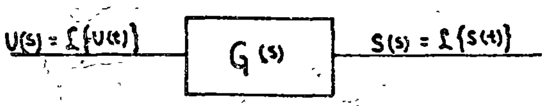
Para fines de relacionar S(s) con U(s), se puede siempre suponer que K = 1.0.

Se puede decir que iiia) y iiib) son las transformadas de

iv a) $$s(t) = a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \dots + a_m x^{m}(t)$$

iv b) $$u(t) = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + \dots + b_n x^{n}(t)$$

Este par de ecuaciones diferenciales se pueden simular para encontrar s(t), pues u(t) es la entrada al sistema representado por G(s)

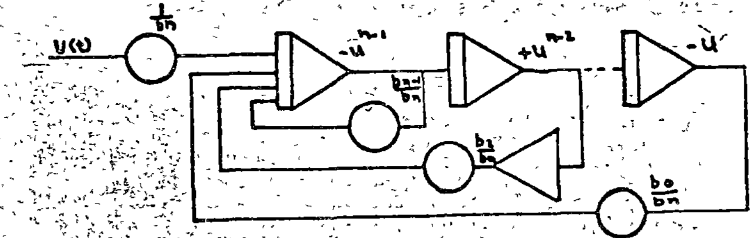


Es decir, siempre es dato.

Primero se simula iv b)

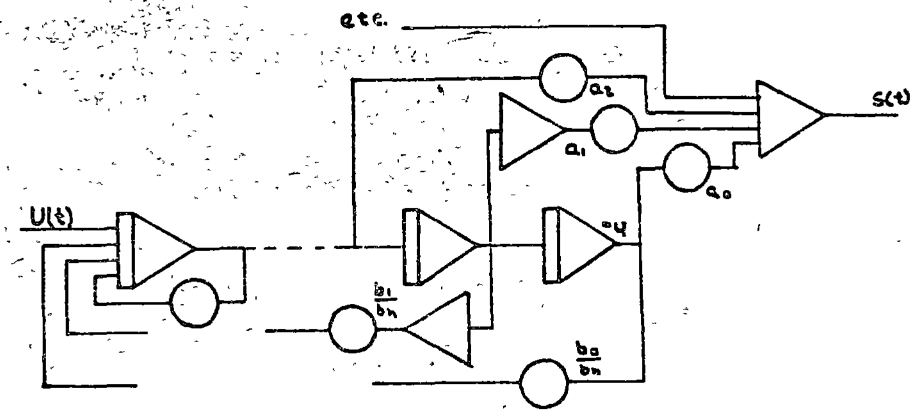
$$x^{(n)}(t) = \frac{1}{b_m}u(t) - \frac{b_0}{b_m}x(t) - \frac{b_1}{b_m}\dot{x}(t) - \frac{b_2}{b_m}\ddot{x}(t) - \dots - \frac{b_{m-1}}{b_m}x^{(n-1)}(t)$$

?



U × X

A continuación se suman las derivadas de x(t) con los coeficientes tales que se obtenga s(t)



Por ejemplo: queremos observar la respuesta de un filtro con función de transferencia

$$F(s) = \frac{s^2 + \omega_p^2}{s^2 + 2\xi\omega_m s + \omega_m^2} = \frac{S(s)}{U(s)}$$

Suponemos que numerador y denominador de F(s) actúan como operadores diferenciales sobre una u(t) _

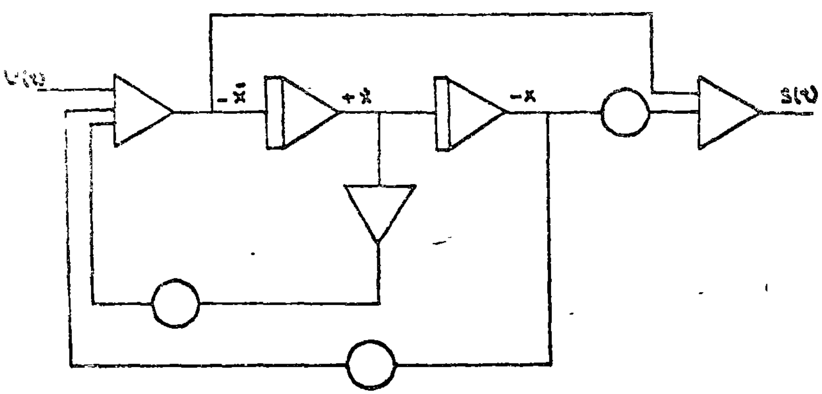
X

con $x(0)=0$. Se obtiene

$$s(t)=\ddot{x}+\omega_p^2 x \qquad u(t)=\ddot{x}+2\xi\omega_m\dot{x}+\omega_m^2 x$$

$$\ddot{x}=u(t)-2\xi\omega_m\dot{x}-\omega_m^2 x$$

Cuyo diagrama de bloques es



De los diagramas de bloque que resultan al simular funciones de transferencia se deduce el porqué de las restricciones $m \leq n$; Si $m > n$, sería necesario utilizar la operación <u>derivada</u> para obtener $c(t)$.

4. ESCALAMIENTO

4.1. <u>Introducción</u> .- Existen dos tipos de escalamiento: Por amplitud y por tiempo. Cada uno de estos escalamientos se realiza generalmente por conveniencia o preferencia del operador (factores externos a la computadora analógica) o por limitaciones de los dispositivos que forman la computadora. Estas limitaciones causan errores en las soluciones que se pueden disminuir haciendo un escalamiento.

4.2. <u>Escalamiento por amplitud</u>

Se mencionó que la salida del amplificador operacional está restringida al intervalo $-10, +10v$.

Este hecho obliga a realizar un escalamiento de tipo 10 volts = M unidades, donde M es el máximo de la variable en cuestión, para los casos en que $M > 10$.

A este escalamiento se denomina "por amplitud".

En cambio, pudiera ser que alguna o todas las variables del problema toman magnitudes máximas mucho menores que 10 volts, durante el período de simulación. En este caso también es necesario escalar por amplitud. Las razones son de precisión en los resultados.

Por una parte es obvio para el que use la máquina, que la precisión de los aparatos medidores y registradores, es bien limitada. En una máquina típica de 10 volts, el voltímetro digital marca volts con centésimas. Si el máximo de una cierta variable $y(t)$ es 0.25 volts, la precisión <u>máxima</u> con que se puede determinar su valor es 0.01 volts/0.25 volts ó 4% ($\pm$ 2%).

Cuando la variable tome valores del orden de 0.025 volts, el error es del orden de 40% ($\pm$ 20%). En este caso, un <u>factor de escala</u> de 40 haría que la variable ($40y$) tenga máximo de 10 volts, medibles con error de 0.01/10 ó .1% ($\pm$ 0.05%). Si la variable toma valores de un 10% del máximo ($40y$) $\approx$ 1 volt, y el error será $\pm$ 0.5%.

Aparte de la precisión del voltímetro digital, otras fuentes de error son el ruido y el corrimiento del cero en los amplificadores. Estos errores son prácticamente de magnitud constante, por lo que conviene hacer que las variables simuladas sean lo mas grande posible respecto de ellos. Estos errores son los que realmente limitan la precisión de las mediciones,haciendo inútil el emplear registradores más precisos.

4.3. Técnica de escalamiento por amplitud .

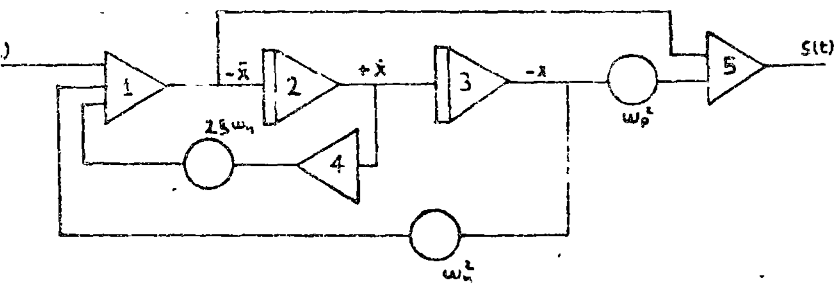
Al final de ésta sección se dará un procedimiento que es útil seguir,especialmente,en problemas con muchas variables. El procedimiento supone que se conocen los máximos de todas las variables,pero no indica como obtenerlos. Por eso comenzaremos dando ejemplos en los que sí se trata el problema de la estimación de máximos.

Para estimar los máximos en éste y muchos otros casos,debe tomarse en cuenta que si el sistema es lineal es posible escalar una variable cualquiera,escalando las entradas. Las derivadas e integrales de ésta variable no necesariamente quedan convenientemente escaladas.

Supóngase que se va a estudiar la respuesta de un filtro con función de transferencia.

$$G(s) = \frac{s^2+\omega_m^2}{s^2+2\xi\omega_m s+\omega_m^2} = \frac{s(s)}{U(s)}$$

Segun la seccion el diagrama de bloques para la analogica es:



La magnitud de la respuesta dependera no solo del tamaño,sino del tipo de excitacion.Primero examinaremos el caso de entrada escalon y despues el de una entrada periodica.

A entrada escalon la respuesta tiene una parte oscilatoria de frecuencia cercana a ,la frecuencia natural del sistema, y otra parte constante. Como se vio en ,G(s) da origen a dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= \ddot{x} + \omega^2 x \\ u(t) &= \ddot{x} + 2\xi\omega_m\dot{x} + \omega_m^2 x \end{aligned}\right\}$$

La parte constante de la respuesta a escalon ocurre cuando han decaido los transitoris . Entonces

$\dot{x} = \ddot{x} = 0$ y $x = cte$ $\therefore u(t) = \omega_m^2 x_{final}$

y $s(t)_{final} = \omega_p^2 x_{final}$

Esto permite escalar x escalando U(t) : El transitorio de la respuesta aescalon en un sistema de segundo no sobrepasa en mas del 100% a la parte permanente de la respuesta, p. ejm.

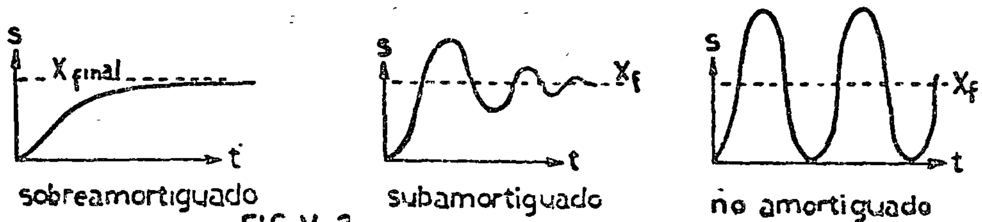


FIG V-2

Entonces para que x(t) tenga maximo 10 volts de magnitud 66 u(t) debe ser un escalon de $5\omega_m^2$ v de altura.

Para escalar las derivadas $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ notese que en el peor de los casos ,la respuesta de x(t) sera del tipo $5\,\mathrm{sen}\,\omega_m t+5$ entonces como primera aproximacion

$$\dot{x} = 5\omega_m\cos\omega_m t \quad y \quad \ddot{x} = -5\omega_m^2\,\mathrm{sen}\,\omega_m t$$

Si deseamos que estas tambien tengan como maximo 10 volts, habria que multiplicar su valor por $2/\omega_m$ y $2/\omega_m^2$ respectivamente. El diagrama de bloque quedaria entonces:

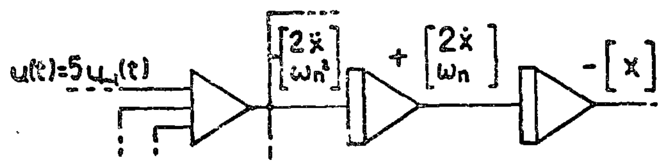
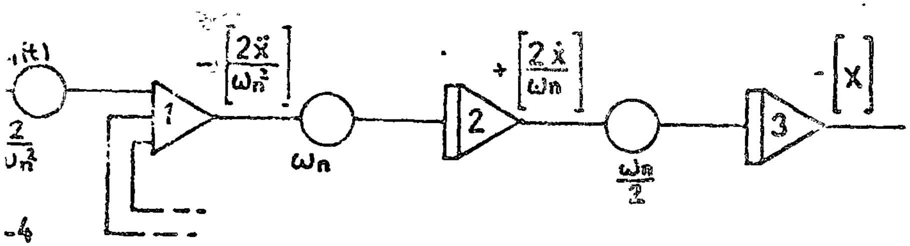


FIG V-3

Claro que estos cambios de variable no se dan solos, tenemos que introducir potenciometros y ganancias de tamaño apropiado.



Las variables que entran al amplificador uno deben cumplir

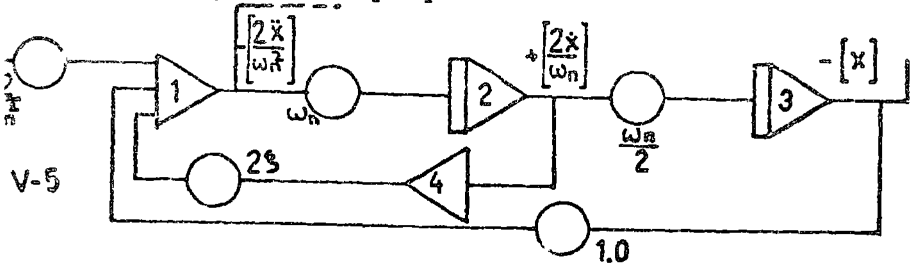
$$\frac{2\ddot{x}}{\omega_m^2} = \frac{2}{\omega_m^2}\left[u(t) - 2\xi\omega_m\dot{x} - \omega_m^2 x\right]$$

y en terminos de las variables escaladas

$$\frac{2\ddot{x}}{\omega_m^2} = \frac{2}{\omega_m^2}\,u(t) - \frac{1}{\omega_m}\,2\xi\omega_m\,\frac{2\dot{x}}{\omega_m} - x$$

el diagrama de bloque queda

V-5



Para escalar s(t), recordemos que

si $x(t) \approx A_0 \operatorname{sen} \omega_m t$; $\ddot{x} \approx \omega_m^2 A_0 \operatorname{sen} \omega_m t$ y

$s(t) \approx -A_0\omega_m^2 \operatorname{sen} \omega_m t + \omega_p^2 \operatorname{sen} \omega_n t$, si $\omega_m \gg \omega_p$ $s \approx \ddot{x} \approx \omega_m^2 x$

la variable escalada debe ser

$\left[\frac{1}{\omega_m^2}\,s(t)\right]$. Si $\omega_m \ll \omega_p$ entonces $s(t) \approx x$

la variable escalada debe ser $\frac{1}{\omega_p^2}\,s(t)$

Si $\omega_m \approx \omega_p$, $s(t) \approx 0$ y en este caso es dificil estimar el maximo sin un diagrama de Bode de la funcion de transferencia. Pero puede ser que el objeto de la simulacion sea precisamente generar una traza de Bode. En este caso se procedepor pruebas, sabiendo que en todo caso

$$s(t) \ll \omega_p^2 x$$

El diagrama de bloques escaladoqueda finalmente:

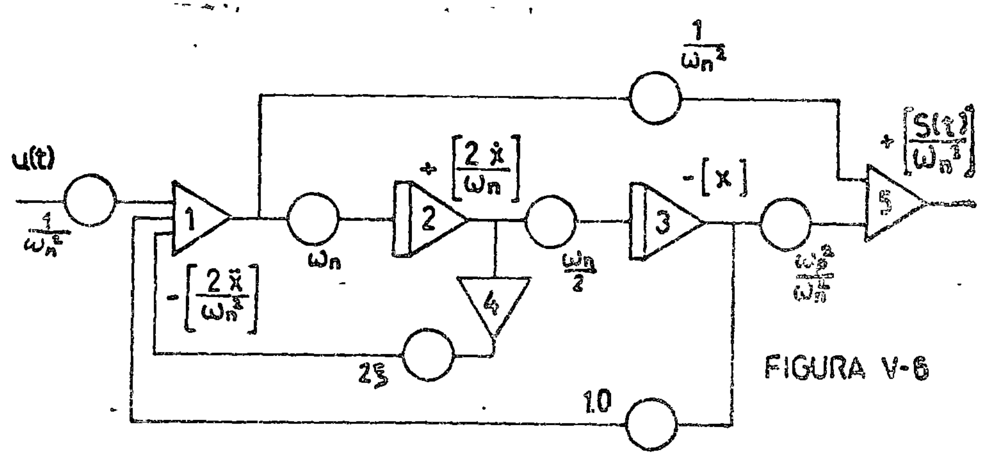


FIGURA V-6

Si la excitacion es periodica,debe definirse un rango de variacion en frecuencia para estimar el maximo de la respuesta. El escalamiento se hace de forma de cubrir el maximo dentro del intervalo. Si la excitacion puede ser de cualquier frecuencia , la respuesta maxima ocurrirá en resonancia y su maximo puede estimarse de la trazas de Bode para distintos amortiguamientos.

Una regla util para escalar sistemas de 2º orden y en general sistemas con comportamiento oscilatorio:

Si x tiene comportamiento parecido a $A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$
Los factores apropiados para escalar $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ son $\frac{1}{\omega_0}$ y $\frac{1}{\omega_0^2}$

Debe enfatizarse que a menos de conocer los máximos precisos,el proceso de escalamiento es iterativo, es decir, a prueba y error. Si después de de un escalamiento se corre el problema y ocurre saturación,habrá que aplicar un factor de escala mas pequeño. Cuando se logra evitar la saturación se debe examinar la posibilidad de que alguna variable tenga un valor demasiado pequeño.

Un procedimiento sistemático para escalar por amplitud es el siguiente: Primero, con las estimaciones de los máximos de cada variable,hacer una tabla:

42

Variable	Máximo durante la corrida
t	M_t
X_1	M_1
X_2	M_2
X_3	M_3
$\cdot$	$\cdot$
$\vdots$	$\vdots$
X_n	M_n

Segundo: Establecer los factores de escala α
De la tabla de máximos se encuentran las alfas por división.
Buscando que la variable escalada $[\alpha_1 x_1]$ tenga un máximo menor igual que 10.
Entonces nuestra tabla quedaría de la siguiente manera:

Variable	Máximo	Alfa aprox.	Variable escalada
t	M_t	$\alpha_t \doteq 10/M_t$	$[\alpha_t t]$
X_1	M_1	$\alpha_1 \doteq 10/M_1$	$[\alpha_1 x_1]$
X_2	M_2	$\alpha_2 \doteq 10/M_2$	$[\alpha_2 x_2]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_m	M_m	$\alpha_m \doteq 10/m_m$	$[\alpha_m X_m]$

(Las Xis no son necesariamente independientes, pudiendo ser múltiplos o derivadas de otras Xs).

Tercero: Substituir las variables escaladas en las ecuaciones originales. De modo que si originalmente

$$X_4 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

con variables escaladas

$$\alpha_4 X_4 = \frac{\alpha_4}{\alpha_1} a_1 [\alpha_1 x_1] + \frac{\alpha_4}{\alpha_2} a_2 [\alpha_2 X_2] + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} a_3 [\alpha_3 x_3]$$

Cuarto: Pasar éstas ecuaciones a diagramas de bloques. Por ejemplo. Si para el caso anterior X_4 es igual a $\dot{X}_3$ y $\dot{X}_3$ es igual a X_2, el diagrama quedaría

43

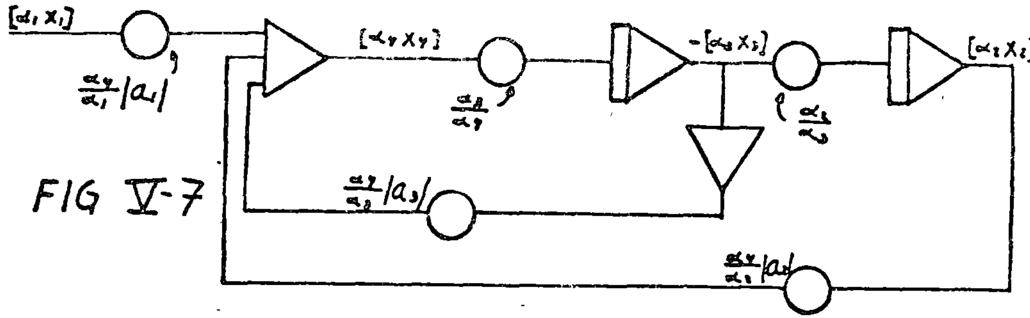


FIG V-7

Suponiendo a_1, a_2 y a_3 negativas.

Ejemplo completo de escalamiento por amplitud.

Sea el siguiente sistema en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Se requiere escalar

$$\dot{X}_1 = U_1 - 2X_1, \quad \dot{X}_2 = U_2 - 10X_2 - X_1 \quad y \quad S = 3X_1 + X_2$$

conociendo los máximos podemos obtener la siguiente tabla.

Tabla de máximos y factores de escala

VARIABLE	maximo	alfa aprox	variable escalada
U_1	5	$\alpha_1 = 10/5$	$2U_1$
U_2	20	$\alpha_2 = 10/20$	$0.5U_2$
X_1	2.5	$\alpha_3 = 10/2.5$	$4X_1$
X_2	2.25	$\alpha_4 = 10/2.25$	$4X_2$
S	$3(2.5)+2(2.25)$	$\alpha_5 = \frac{10}{9.75}$	S

Substituyendo en las ecuaciones: (Si de un integrador saldrá $\alpha_i x_i$ su entrada debe valer $\alpha_i \dot{x}_i$).

$$\dot{x}_1 = \frac{4}{2}[2u_1] - \frac{4}{4}\times 2[4x_1] \; ; \qquad [4\dot{x}_2] = \frac{4}{0.5}[0.5u_2] - \frac{4}{4}\times 10[4x_2] - \frac{4}{4}[4x_1] \; ;$$

$$[S] = \frac{3}{4}[4x_1] + \frac{1}{4}[4x_2] \; ;$$

El diagrama de bloques queda ya escalado así

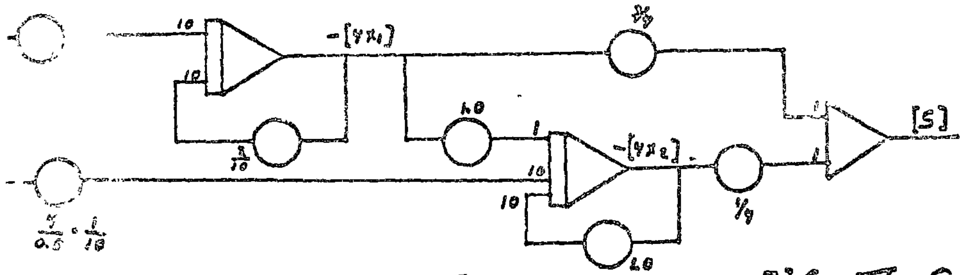


FIG V-8

4,4. Escalamiento por tiempo.

En el escalamiento se modifica únicamente la duración de la simulación sin quedar afectadas las amplitudes.

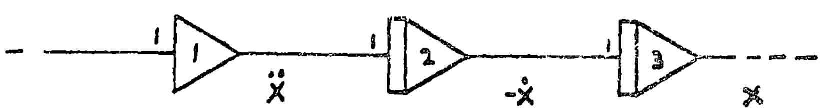
El escalamiento por tiempo se emplea cuando un fenómeno es demasiado rápido o demasiado lento para ser graficado; Por ejemplo, la vibración de una estructura rígida que dura 0.1 segundos; la fragua del cemento; el hundimiento de un suelo o algún otro fenómeno de descomposición de material radioactivo.

Existen dos fuentes de error que son importantes para escalar por tiempo.

a) El amplificador no es un elemento algebraico sino dinámico, por lo que presenta retrasos de tiempo que pueden ser importantes para simular fenómenos de alta frecuencia.

b) El amplificador operacional presenta desbalances (Corrimientos del cero a entrada nula en su salida, aunque instantáneamente sean despreciables en comparación de las señales, pueden acumularse por acción de los integradores y crecer con el tiempo. Esto impone un límite a la duración con que se puede realizar una simulación.

Por ejemplo considérese el siguiente circuito

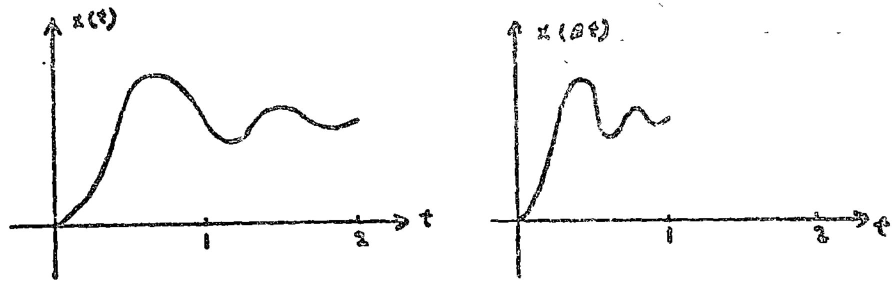


Si el amplificador 1 tiene un corrimiento de .0001 volts al final de 20 seg el error en la salida del amplificador 2 será de .002 volts; en la salida del amplificador 3 será de 0.2 volts, que no se puede despreciar.

El escalamiento por tiempo es un cambio de variable en las ecuaciones que modelan el sistema

$$\tau = \beta t$$

τ es el tiempo de máquina, el tiempo que dura la simulación. β es el factor de escala de tiempo, y t es el tiempo que realmente dura el fenómeno que se simula. Lo que se persigue con el escalamiento por tiempo, es que las variables cambien más rápida o más lentamente



Para demostrar la relación que existe entre la integración a velocidad normal y la integración en un problema escalado por tiempo en la fig se comparan los efectos de ambas.

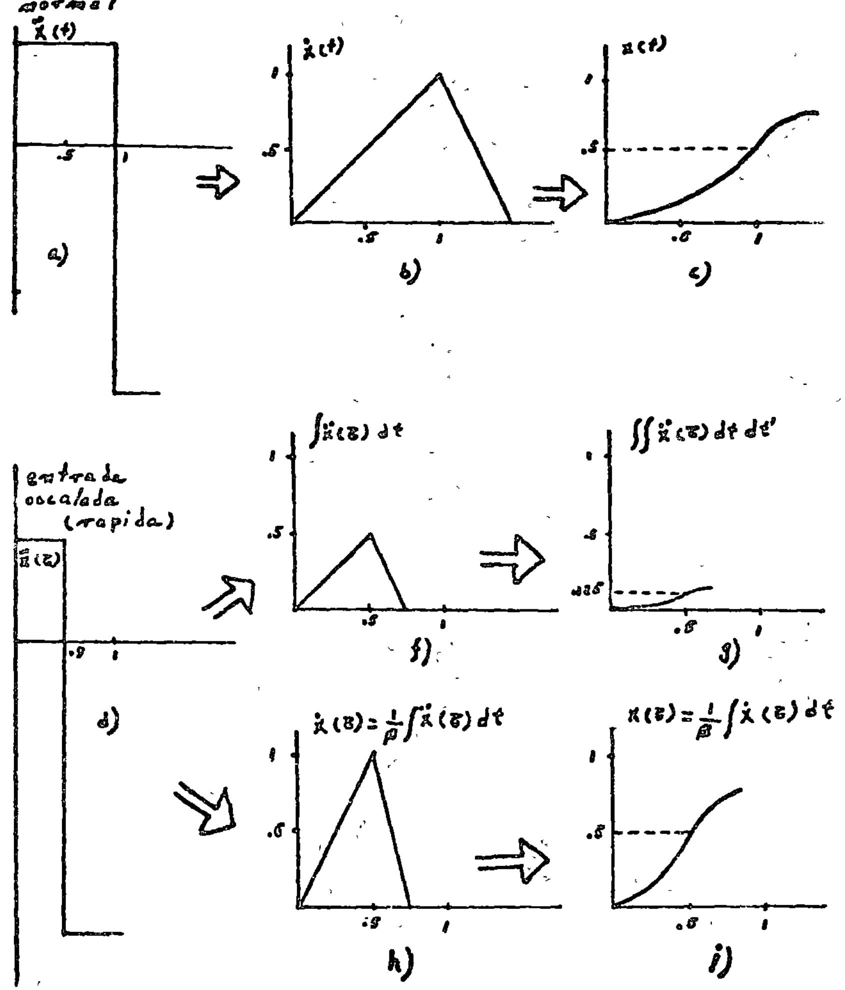
Se muestran 3 secuencias

i) Entrada a tiempo normal, integración a tiempo normal.

ii) Entrada a tiempo acelerado, integración a tiempo normal.

iii) Entrada a tiempo acelerado, integración escalada por tiempo

FIGURA V-10



El problema escalado dura la mitad del tiempo que el problema a tiempo real.

En la secuencia d,f,g se aprecia el efecto de cambiar solo la rapidez de la entrada: Las integrales se ven modificadas por un factor β cada vez que se aplican.

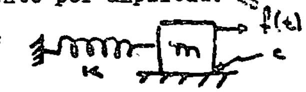
En la secuencia d,h,i se ha aplicado un factor $1/\beta$ a cada integración. El efecto es el deseado, conservar las características de la secuencia a,b,c.

Analizemos la secuencia de figuras para deducir las modificaciones necesarias:

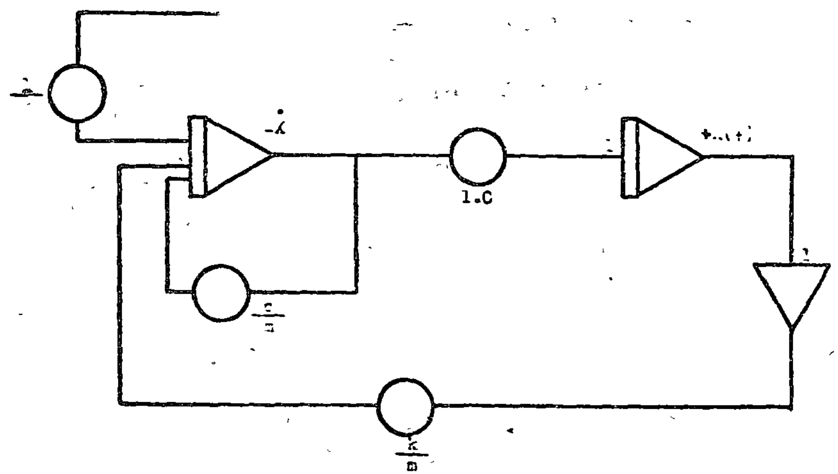
1.- Si existen entradas, éstas deben aplicarse a tiempo escalado.

2.- La ganancia de todos los integradores debe modificarse por un factor $1/\beta$ independientemente de las modificaciones que se hagan por concepto de escalamiento por amplitud.

Ejemplo. Un sistema masa resorte



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = f(t)$$



II INTRODUCCION TEORICA AL SERVOMECANISMO MODULAR DE C.D. MS150

IIA.- INTRODUCCION TEORICA AL SERVOMECANISMO MODULAR DE D.C. MS-150.

1.- GENERALIDADES.

Es muy común encontrar en la industria mecanismos de control de velocidad o posición para el desarrollo de sus procesos. Dependiendo de los requerimientos de éstos se complica o simplifica el mecanismo de control.

2.- CONTROL DE VELOCIDAD.

La velocidad de giro de un motor de C.D. se puede regular variando el voltaje de alimentación a las terminales de armadura, manteniendo el voltaje de campo constante. A esta configuración se le conoce como control de armadura. Los diagramas eléctrico y de bloques se muestran a continuación:

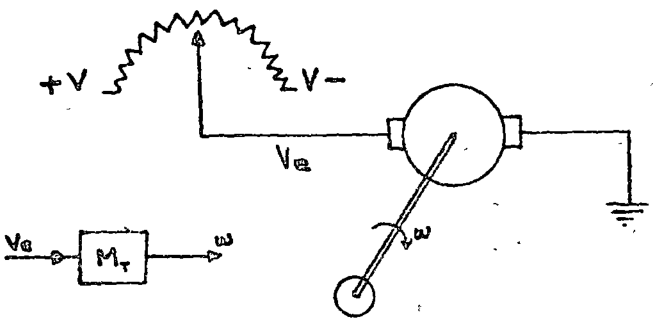


FIGURA II-1.

Para esta configuración el voltaje de entrada es independiente de la velocidad angular y por lo tanto se denomina control de malla abierta.

Si se introducen perturbaciones en la carga del motor la velocidad cambiara del valor deseado. Para solucionar este problema se suministra una información sobre la velocidad a la entrada del sistema, lo que constituye una

realimentación. Los diagramas serían:

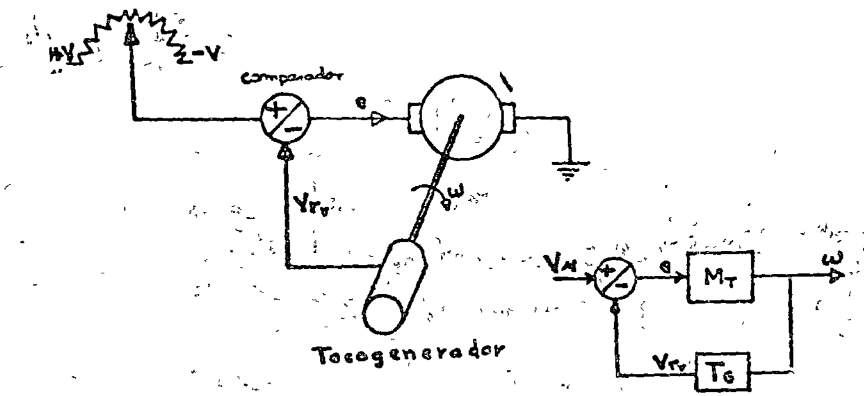


FIGURA II-2.

3.- CONTROL DE POSICION.

Si lo que se desea controlar es la posición de una masa y no su velocidad de giro, es necesario suministrar información de esa posición, la cual se obtiene a partir de la integración de la velocidad ($\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$). Un modo de lograr esta integración se muestra en la FIGURA:

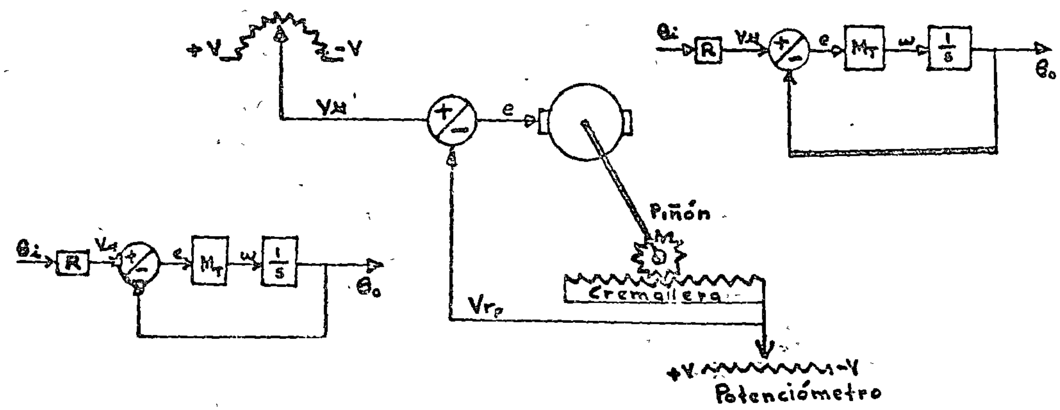


FIGURA II-3.

De modo que cuando $V_{rp} \doteq V_{ta}$ la señal de error (Ve) será igual a cero y el motor se parará.

Pregunta 1.- Obtenga la gráfica θ_i vs. V_u del potenciómetro de entrada.

SERVOMECANISMO MODULAR MS-150

4.- El MS-150 puede funcionar como un control de posición o de velocidad según las conexiones que se realicen en él.

El diagrama de funcionamiento del MS-150 para control de velocidad es el siguiente:

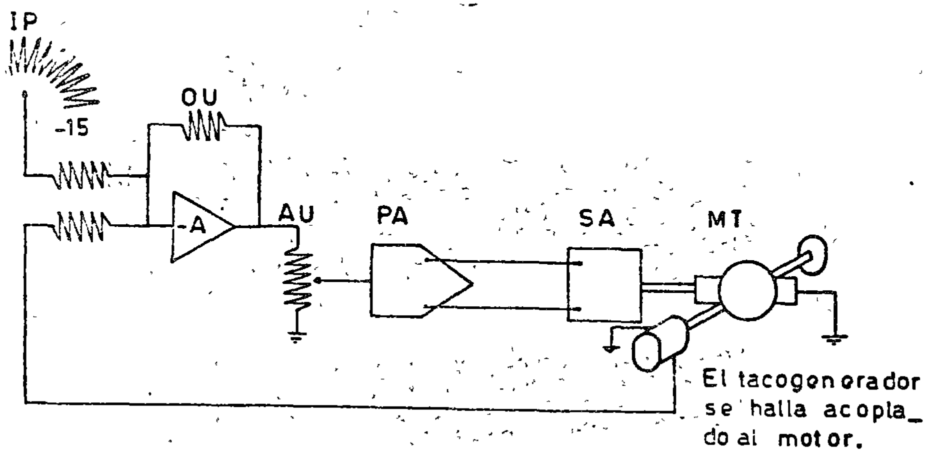


FIGURA II-4.

Para el control de posición el diagrama es el siguiente:

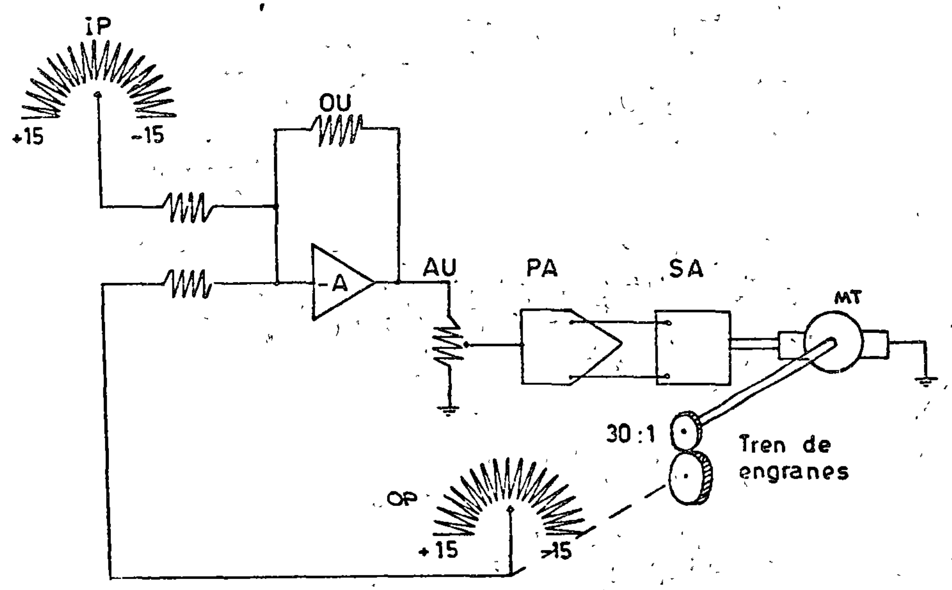


FIGURA II-5.

IP, OU, AU, PA, SA, MT y OP son módulos independientes cuyo funcionamiento se explica en II-B

IIB.- INSTRUCTIVO DEL SERVOMECANISMO MS-150.

1.- FUENTE DE PODER (Power Supply).

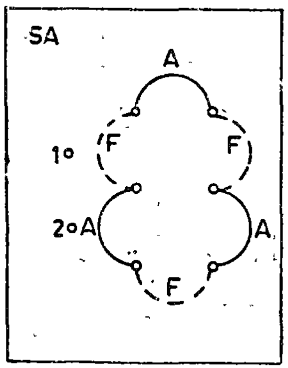
Suministro la de energía para las unidades del Servomecanismo. fija de alimentación

Tiene conexión ~~interna~~ con el Servo-Amplificador y es posible ~~indiferente~~ tomar los voltajes de salida de una o de otra terminal. Se pueden tomar voltajes para diferentes unidades de la misma terminal.

2.- SERVO-AMPLIFICADOR SA.

Controla directamente al motor. a través de una conexión fija.

El motor es de directa y se cambia su velocidad mediante variaciones en la corriente de armadura y/o de campo.



Conexiones para que el control sea de armadura "A" o de campo "F" (field).

A ______ (línea continua)

F _ _ _ _ (línea cortada)

El comportamiento del motor:

La corriente se controla con el voltaje de entrada en las terminales 1 ó 2. del SA

Con la conexión F el motor (su velocidad) es más sensible a las variaciones de voltaje ~~y más propenso a la inestabilidad~~. Normalmente se usará la conexión "A" a menos que se aclare lo contrario. (control de armadura)

Algunas de sus características importantes:

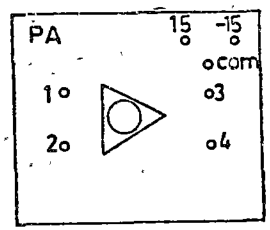
a).- Solo funciona con voltajes de entrada (en "1" ó "2") POSITIVOS.

b).- Con un voltaje en "1" gira en un sentido, con un voltaje en "2" gira en sentido contrario (cada uno está conectado a una bobina del campo y éstas están enrolladas en sentido contrario).

c).- Debido a la fricción estática se requiere un voltaje mínimo para que el motor arranque.

3.- AMPLIFICADOR PA.

Para que funcione debe alimentarse con ~~conectársele a~~ + 15 v, - 15 v y a tierra "COM" del SA.



1) A la entrada "1" o/y "2" se conecta un voltaje cualquiera. Si se conecta un voltaje a "1" y otro a "2" éstos se suman como en el OU (Ver 4). entre ±15V

2) La salida siempre será positiva. 25 veces el voltaje de entrada (pero 15 v es el voltaje máximo de salida).

Si la entrada (ó suma) es positiva la salida será en "3" y "cero" en "4"

Si es [illegible]gativa la entrada, la salida será positiva y por "4" y cero en "3".

c) Por las características de los amplificadores la salida puede no ser 0 (cero) aún siendo la entrada nula; por lo que es necesario medir la salida y girar la perilla marcada "ZERO" hasta que efectivamente lo sea. También se puede utilizar ésto y hacer que el "cero" sea el voltaje necesario para vencer la fricción del rotor (ver 2.-(c)) para que con cualquier entrada por pequeña que sea gire el motor.

La utilidad del Pre-Amplificador es que si se conectan sus salidas a las entradas del Servo-Amplificador (SA) se puede hacer que el motor gire (ver 2.-(a)) a pesar de que la entrada del Pre-Amplificador sea negativa (y gira en sentido contrario).

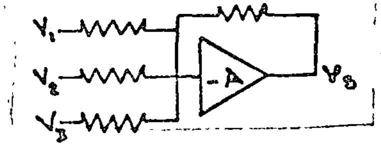
4.- UNIDAD OPERACIONAL OP (Operational Unit).

Puede tener muchos usos (ver instructivo de la computadora analógica) pero aquí se usa fundamentalmente como sumador.

Esto quiere decir que el voltaje de salida será:

$$V_S = -(V1 + V2 + V3)$$

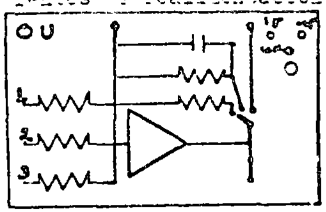
Para que funcione es necesario que esté conectado a + 15 v, - 15 v y a tierra "COM".



a) No se deben conectar voltajes diferentes a la misma entrada; pero si se puede conectar el mismo voltaje a 2 ó 3 de ellas (a la salida se tenirá 2 ó 3 veces dicho voltaje).

b) La salida en 4,5 ó 6 es idéntica.

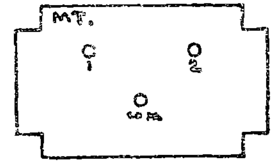
c) Tiene un selector que permite 3 modos diferentes de realimentación; la posición normal será la primera con sólo una resistencia.



d) El "ZERO" se debe ajustar (ver 3c).

5.- Tacómetro MT (Motor Tach. Generator)

Es un pequeño generador que da un voltaje proporcional a la velocidad angular del eje del motor (entre 2. [illegible] v. por cada 1000 rpm).

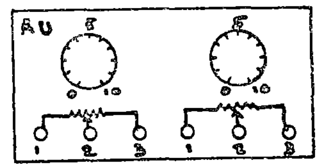


El punto "COM" está internamente conectado a tierra.

a) Para usar o medir éste voltaje es conveniente referirlo a tierra conectando #1" o "2" a "com".

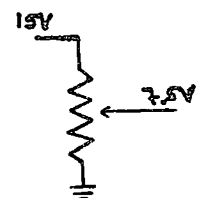
6.- Potenciómetro AU (Atenuation Units).

Aquí se utilizan como divisores de voltaje.



Ejemplo: Si el punto "1" está conectado a tierra y el "3" a 15 v; si se ha girado la perilla a la mitad (a 5) la salida en "2" será de 7.5 volts.

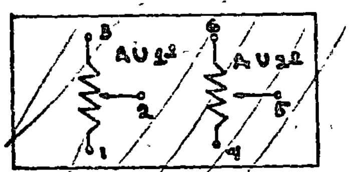
El voltaje a la salida del cursor será de una porción del voltaje total, según la porción que se haya tomado de la resistencia.



a) Lo anterior será cierto sólo mientras no se conecte éste voltaje a otro punto (en general el voltaje disminuirá).

b) Para evitar que el voltaje caiga es conveniente conectarlo a unidades como el OU (ver 4) o el PA (ver 3).

c) El circuito esquematizado es:

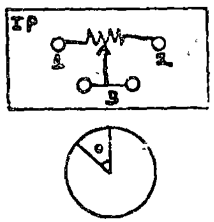


Los dos potenciómetros funcionan independientemente los llamaremos AU 1o. y AU 2o.

7. Potenciómetro de entrada IP (Input potenciometer)

Tiene las mismas características que los potenciómetros antes mencionados (ver 7).

a) - ~~En ambos casos~~ Si se conecta un voltaje de +15 volts a un extremo ("1") y de -15 en el otro ("2") al girar el
disco, ~~les~~ la salida ("3") variará entre dichos voltajes y a la mitad será de 0 volts).



6) A cada ángulo girado corresponderá un voltaje

$$V_3 = \frac{15v}{180^\circ} \cdot \theta$$

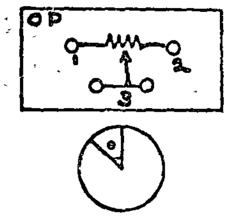
8.- Potenciómetro de salida OP (output potenciometer)

Tiene las mismas características que los potenciómetros anteriores (ver 7 y 8).

c) En este caso el giro de la perilla no es manual sino mediante el giro del "eje lento" del motor.

d) El eje lento se encuentra a un costado del motor y gira 30 veces mas despacio que el eje central.

e) Generalmente se conectarán +15 volts y -15 volts a "1" y "2". El voltaje en "3" es proporcional al ángulo girado.



$$V_3 = \frac{15}{180^\circ} \cdot \theta$$

9.- Freno magnético

El objeto del freno magnético es el de simular "carga" en el motor.

Se ~~puede~~ coloca a ~~los~~ un lado del disco de inercia (Cuando se indique) teniendo cuidado de que no lo roce en ninguna de sus posiciones.

a) Se debe colocar lo mas cerca posible.

10.- Precauciones

a.- No sobrepasar los (2) dos amperes.

b.- Apagarlo cada vez que se hacen conexiones.

c.- Conectar la unidad operacional(OU) y el preamplificador (PA) a +15v, -15 v y tierra "COM", siempre que se usen.

III INTRODUCCION TEORICA AL ENTRENADOR DE PROCESOS PT326

III.- INTRODUCCION TEORICA AL ENTRENADOR DE PROCESOS PT326.

1. I N T R O D U C C I O N .

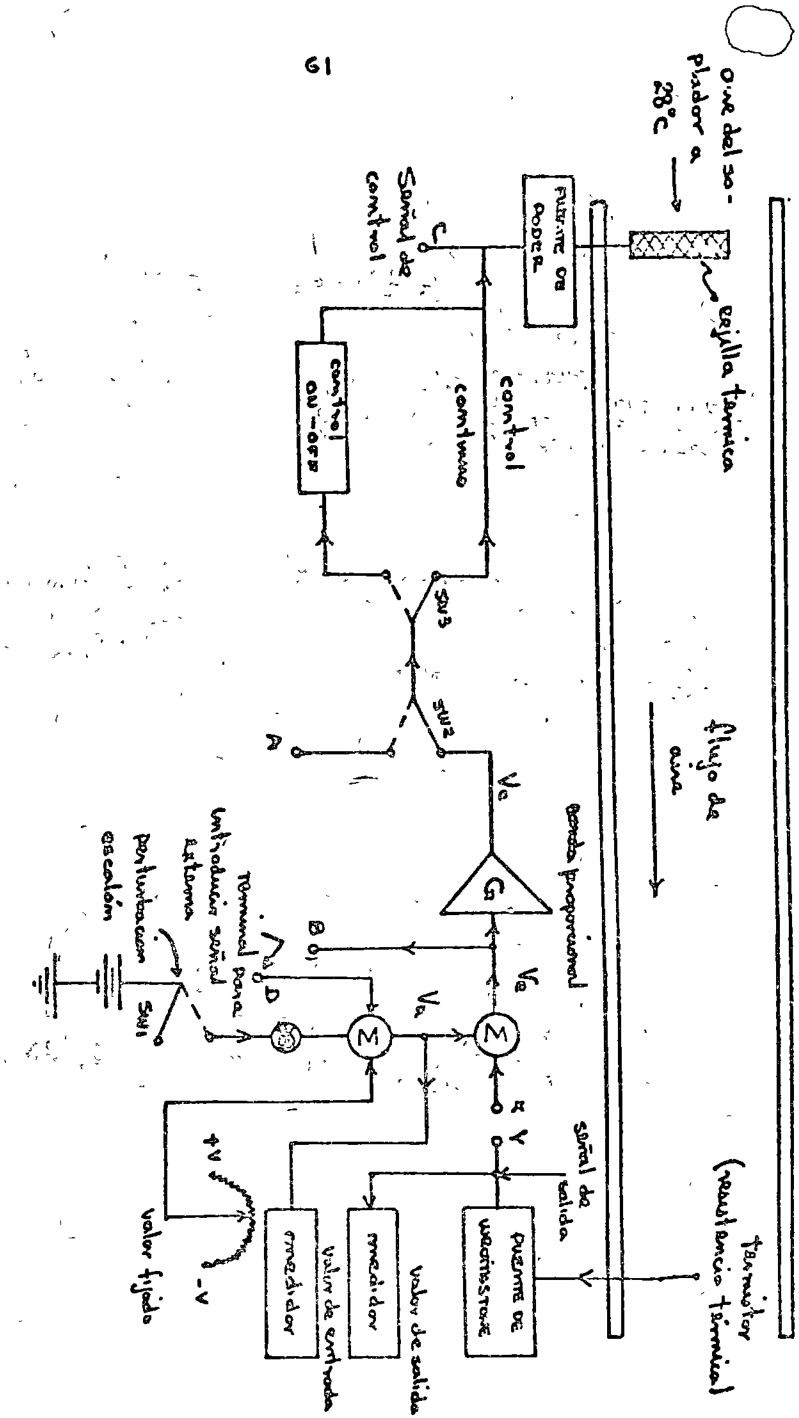
El simulador de procesos PT326 es un sistema controlable - de calentamiento de aire. Tiene las características bási-- cas de una planta real que además del proceso contiene un mecanismo de control versátil en cuanto que puede operar - como un control proporcional ó ON-OFT tanto en malla ---- abierta como en malla cerrada.

2. P R O C E S O .

El aire de la atmósfera es forzado mediante un ventilador a circular a través de un tubo en el que se halla localiza da una rejilla eléctrica de calentamiento con la cual el - aire intercambia calor para obtener la temperatura deseada.

El sistema de control pretende que la temperatura del aire sea igual en todo momento a una temperatura determinada o valor fijado que se puede variar en un rango de 40° a 80°C.

Un diagrama del proceso completo es el siguiente:



DESCRIPCION DEL PROCESO.

Sigamos el diagrama; moviendo la perilla del potenciómetro del valor fijado enviamos una señal voltaje hacia el primer sumador. Suponiendo que no hemos introducido ninguna señal en la conexión D y que el switch (SW1) de perturbación se halla desconectado, será ésta la única señal que entrará al primer sumador y el valor de su salida (Vu) se podrá medir en °C en el medidor de valor fijado;-- esta es la temperatura a la que se desea se encuentre el aire a la salida del proceso.

Si las terminales X e Y no se hallan conectadas la salida del segundo sumador (Ve) será igual a la señal fijada (Vu) y podemos medirla en la terminal B.

La señal (Ve) entra a un amplificador de ganancia variable que la multiplica por una constante (G) de modo que a la salida de él, tendremos una señal $V_c = GV_e$.

El switch SW2 nos permite puentear el amplificador para el caso en que se desea introducir algún otro control entre las terminales A y B (control proporcional + integral, proporcional + integral + derivativa, etc.) A lo largo del curso se operará con el switch en la terminal superior.

El elemento de control que va a procesar la señal V_c puede ser de tipo continuo o un control de 2 posiciones (encendido-apagado), el cual se selecciona con el switch SW3. La forma de la señal controladora se puede observar en la terminal C.

Esta señal de voltaje alimenta una fuente de poder que hace circular una corriente por la rejilla térmica para dar un valor deseado de temperatura al aire que fluye a través de un ducto. Dentro de este ducto se encuentra una resistencia térmica, la que se halla conectada a un circuito -- puente que transduce la temperatura de salida a voltaje; las variaciones de este voltaje se pueden observar en la terminal Y/ó leerse directamente en °C en el medidor de -- salida.

4 SISTEMA MALLA CERRADA.

El proceso descrito anteriormente puede representarse en forma de diagrama de bloques de la siguiente manera:

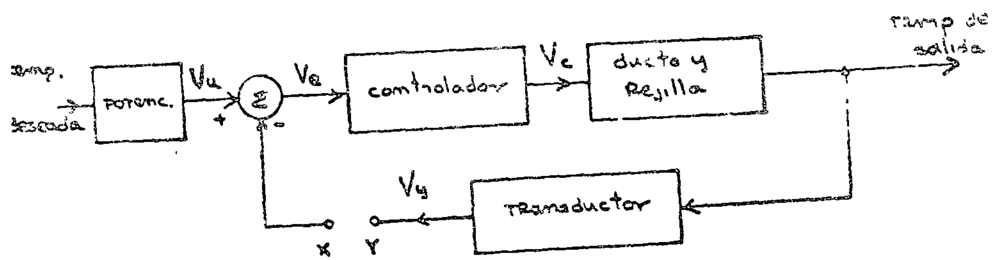


FIGURA III-2.

De donde se puede observar que al puentear las terminales X e Y establecemos una realimentación de la señal de salida (V_y) hacia un sumador, que lo compara con la señal de entrada (V_u), generando una señal de error (V_e), este constituye un sistema de malla cerrada.

5. CONTROL CONTINUO.

Da únicamente acción proporcional, por medio del ajuste de la banda proporcional ésto es, el rango completo de valores de desviación que causarán que la salida del controlador varie sobre el rango completo de trabajo.

De la FIGURA III-3 se observa que la ganancia es:

$$G = \frac{\text{Cambio de la señal de salida}}{\text{Cambio de la señal de entrada}}$$

donde G es adimensional por estar el denominador y numerador en las mismas unidades.

Pero, en algunos controladores las señales de entrada y salida, pueden estar en diferentes unidades, por ejemplo: un cambio en la temperatura que produzca un cambio de presión, y para evitar factores de conversión la relación $\frac{\text{salida}}{\text{entrada}}$ puede expresarse como el rango de señales de entrada que causarán que el controlador opere sobre el rango completo de operación y se expresa como un porcentaje del rango de la condición controlada a que la unidad fue diseñada, llamándose a ésto banda proporcional.

La relación entre ganancia y porciento de banda proporcional es:

$$G = \frac{100}{\%\ PB.}$$

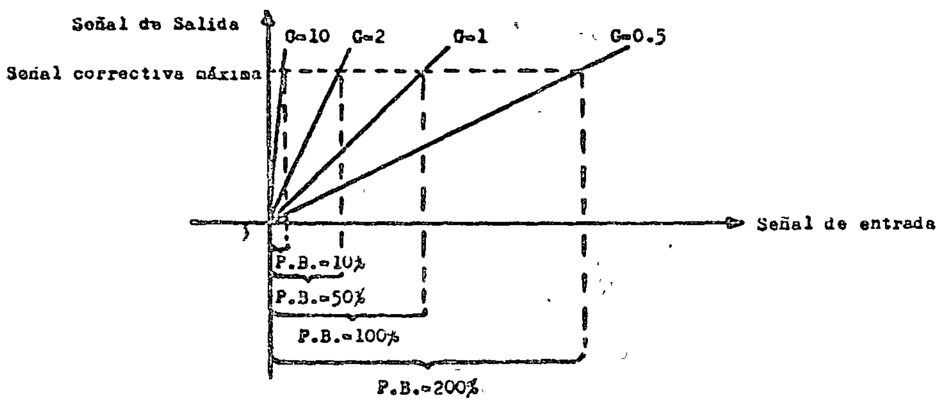


FIGURA III-3.

6. CONTROL DE 2 POSICIONES.

También se les conoce como control ON-OFF, opera sólo en los estados encendido ó apagado según el nivel de la señal de entrada.

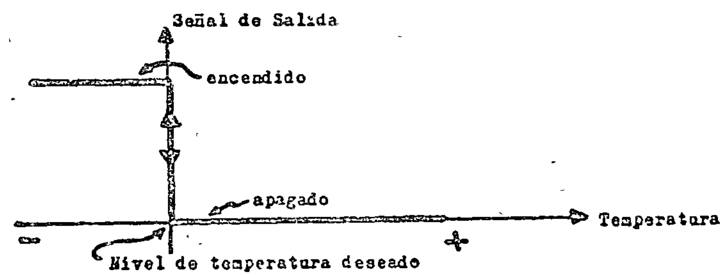
Con este tipo de control se tienen ajustes de la potencia máxima de calentamiento y del traslapo introducido en el sistema.

Potencia Máxima de calentamiento.

Este ajuste permite regular la potencia aplicada al calentador durante los períodos de "encendido" entre 15 y 80 watts.

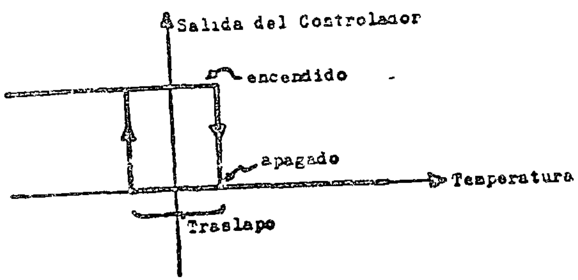
Traslapo.

Con traslapo "cero" la señal de salida del controlador ocasiona que la potencia aplicada al calentador alterne entre los niveles máximos y mínimos cuando la condición de control vaya hacia abajo o arriba del nivel deseado.



Con un traslapo dado, la señal de salida del controlador ocasiona que la potencia aplicada al calentador alterne entre los niveles máximos y mínimos cuando la condición de control este abajo de su límite inferior o arriba de su límite superior.

Traslapo dado se tiene una función de transferencia:



IV INTRODUCCION TEORICA AL POSICIONADOR NEUMATICO PCM140

IV. INTRODUCCION TECNICA AL CONTROLADOR NEUMATICO (PCM 140)

El PCM140 es un servomecanismo neumático de control de posición.

Todos sus elementos son mecánicos y se hallan a la vista ---- para ilustrar su funcionamiento (Fig IV-0).

El sistema se halla estructurado de modo tal que se dispone de módulos que representan elementos puros (un amortiguador viscoso, resorte y masa) que pueden añadirse al sistema básico de malla cerrada para modificar el orden del sistema.

1. SISTEMA BASICO DE MALLA ABIERTA.

El desplazamiento de un pistón neumático es controlado mediante una chapaleta que se halla colocada entre 2 toberas de la siguiente manera (vea Fig IV-1):

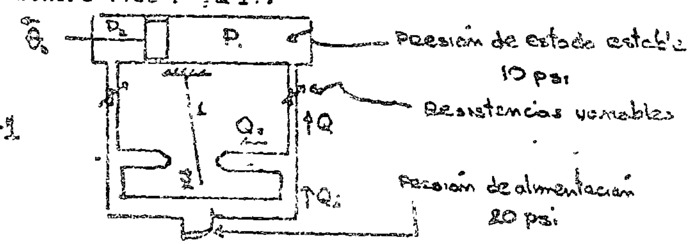


fig IV-1

Al desplazar la chapaleta (I-1) hacia la izquierda (X), obstruimos el flujo de aire de la tobera (1-2) generando un desequilibrio de presión ($P_1 > P_2$), éste a su vez provoca un desplazamiento del pistón en sentido opuesto (θo).

1.1.- ACCION DE LA CHAPALETA EN CANTILIVER.

EL desplazamiento en el extremo de la chapaleta (X) es directamente proporcional a el desplazamiento en las toberas (Y) (vea Fig. II)

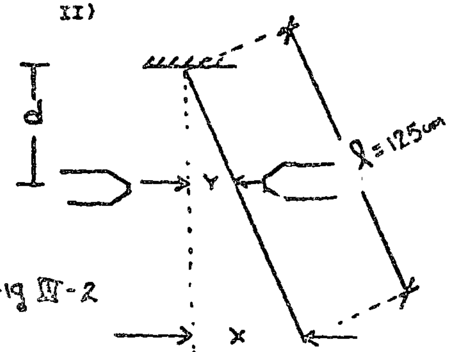
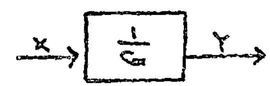


fig IV-2

En diagrama de bloques:



Donde G es una atenuación

PREGUNTA # 1.- Obtenga el valor de la ganancia del cantiliver $\frac{\ell}{G}$ en función de d (longitud de la chapaleta l = 12.5 cm). Considere $Y^2 << d^2$

1.2.- ACCION DEL PISTON Y LAS TOBERAS.

Cuando el sistema se halla operando como un sistema de primero o segundo orden es posible despreciar los efectos de inercia y cargas resistivas en el pistón de modo que las presiones en ambos lados de él se consideran iguales y ctes. consecuentemente el gasto Qi que fluye a través de cada uno de los ductos se mantiene constante (vea fig. 1). Sumando los gastos en las toberas: Q1 = Qo + Q, si suponemos que el gasto varía linealmente con Y y observamos que [illegible] Q1 = Qo obtenemos que Q1 = Qo + K Y y $\boxed{Q = K_1 \ldots}$ (ec. [illegible]), también sabemos que: - - - -

$$u = \frac{\Delta_{Vol}}{\Delta t} = \frac{A\,\Delta\theta_o}{\Delta t} = A.Ve_1 = AD\theta_o \xrightarrow{\text{ecuación}} b) \text{ sustituyendo b)}$$

operador diferenciador

en a)

$AD\theta o = K_1Y \qquad \theta o = \frac{K_1}{AD}Y = \frac{K}{D}Y$. en diagrama de bloques:

$Y \rightarrow \boxed{\frac{K}{D}} \rightarrow \theta_o$ Lo que significa que la combinación del pistón y las toberas representan un integrador.

3 SISTEMA DE MALLA CERRADA

3.1.- ACCION DE LA BARRA DE REALIMENTACION.

PCM 5

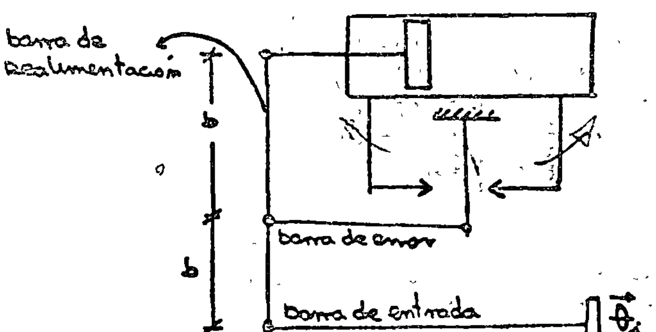


fig III-3

Como sabemos de la teoría, un sistema realimentado requiere de un sensor y una unidad comparadora que genere la señal de error. Esto se logra en este sistema colocando una barra de error entre el extremo de la chapaleta y el punto medio de la barra de realimentación (véase Fig. IV-3).

Analicemos su funcionamiento (véase Fig. IV).

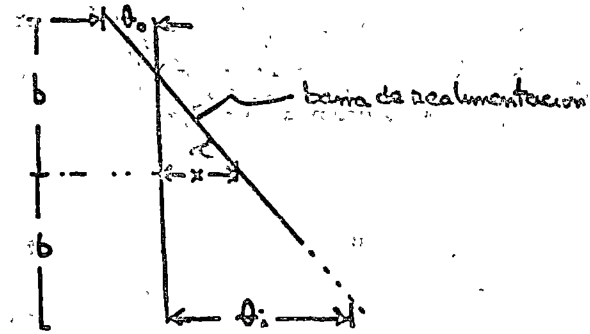
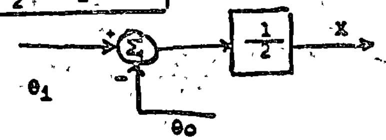


fig IV-4

Al aplicar un desplazamiento θ_i a la barra de entrada, el punto medio de la barra de realimentación experimenta un desplazamiento X obstruyendo la tobera y generando un movimiento θo en el pistón. Analizando los triángulos semejantes obtenemos que: ec. d) $\boxed{X = \frac{1}{2}(\theta_i - \theta o)}$ que en diagrama de bloque se representa como



Concluyendo que la barra de realimentación realiza la función de comparación.

PREGUNTA # (OPTATIVA) 2.- Demuestre la relación dada por la ec. d) (auxíliese de la ley de los senos).

Pregunta # 3.- Obtenga el modelado en diagrama de bloques de el sistema malla cerrada de 1er. orden.

Preg. 4.- La función de transferencia para el modelo anterior se puede expresar como $\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{1}{1+\tau s}$. Exprese en τ función de K y G.

Preg. 5.- Para una entrada escalón $\theta_i(t) = H_i U_{-1}(t)$ calcule $\theta_o(t)$. ¿Que valor tendrá θ_o para $t=\tau$

Ref.: Automatic Control Eng. Raven pp 54-57. Un sistema análogo se describe con detalle en el cap. H pp 40-43 de los apuntes del curso.

3. 2.- Unidad de retraso mecánico.

Los sistemas reales presentan retrasos de tiempo debido a fricciones, longitud de las líneas, etc. Para poder simular éstos fenómenos en el PCM140 se dispone de un amortiguador y un resorte que se colocan como se muestra en la fig. IV-5. La inclusión de éstos mecanismos eleva el orden original del sistema.

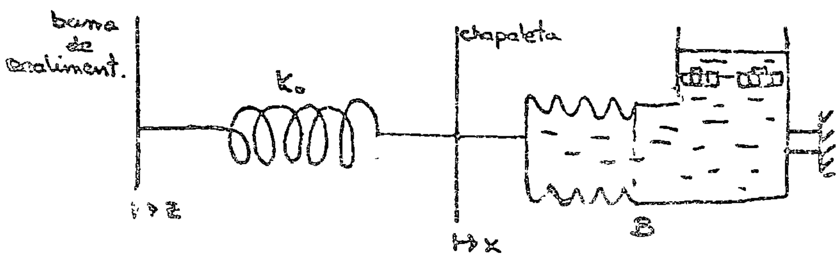


fig IV-5

El modelado de ésta unidad de retraso se obtiene a continuación. Como sabemos:

$$F_R = K_o (Z-X)$$
$$F_B = BDX = B \frac{d}{dt} X$$

Operador diferencial

Donde F_R y F_B son las fuerzas que actúan sobre el resorte y amortiguador respectivamente.

Como $F_R = F_B$ $\therefore$ $K_o(Z-X) = BDX$ que se puede expresar como $\frac{X}{Z} = \frac{1}{1+\tau_o D}$ y en bloques $\xrightarrow{Z} \boxed{\frac{1}{1+\tau_o D}} \xrightarrow{X}$

Pregunta # 6.- Exprese τ_o de la ec. e) en función de B y Ko.

" " 7.- Añada a su diagrama de bloques la unidad de retraso mecánico.

" " 8.- Calcule la función de transferencia $\frac{\theta_o}{\theta_i}$ nueva.

" " 9.- Si expresasemos $\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{Wn^2}{D^2 + 2\tau' WnD + Wn^2}$ que valores tendrían τ' y Wn en función de K, G, B y Ko.

" " 10.- Calcule la respuesta a escalón $\theta_i(t) = H_i U_{-1}(t)$

BIBLIOG. Ogata PP 171-173 Modern Control Engineering

4. DESCRIPCION DEL EQUIPO.

4.1 ALIMENTACION: abra la llave (0 - 18) totalmente y ajuste el regulador (0 - 1) hasta leer en (0 - 20) una presión de alimentación de 20 psi.

4.2 VALVULA DE CONTROL: (0 - 2). Las restricciones variables (0 - 3) deben mantenerse totalmente abiertas. La distancia de las toberas a la chapaleta se ajusta con los tornillos (0 - 4) [ajuste de cero] de modo que para un $\theta_i = 0$ se halle en posición vertical y la presión del pistón (0 - 10) a aproximadamente 10 psi

La ganancia de la válvula G se ajusta con el tornillo (0 - 5).

4.3 MEDIDORES: Sobre el marco del pistón y en la parte posterior de la barra de ent. se hallan una cinta de cartón 200 Ω/in² (0-11) alimentada con 12.5 V para seguir eléctricamente los desplazamientos de entrada y salida. Estos voltajes pueden tomarse de las terminales (0 - 12). También se cuenta con un graficador que funciona mediante el apagador (0 - 13).

4.4 GENERADOR DE SEÑALES: (0 - 14) Es un dispositivo mecánico que nos puede generar funciones escalón y rampa mediante una leva, y seno con un balero. Se enciende con el switch (0 -16). La frecuencia de la señal se puede variar con la perilla (0 - 15).

4.5 PRECAUCIONES.

1.- Las barras de entrada y salida cuentan con unos topes previamente fijadas para limitar sus rangos de desplazamiento si observa que las plumas o la barra de realimentación golpean entre si o com los topes de sus desplazamientos, informeselo al instructor. No realize los ajustes por su cuenta, los Resultados de su practica dependerán de estos ajustes.

3.- Para operar manualmente la entrada retire el resorte (0 - .. que solo debe de colocarse cuando se introduzca la entrada mediante el generador mecánico de señales.

4.- Al variar la ganancia de la válvula de control cuide que la barra de error se mantenga horizontal.

5.- Cuando opere con el amortiguador no lo incline porque el recipiente no es sellado y se sale el aceite.

V INTRODUCCION TEORICA AL REGULADOR DE PROCESOS CA1100

V UNIDAD REGULADORA DE PROCESOS CA1100

INTRODUCCION TEORICA

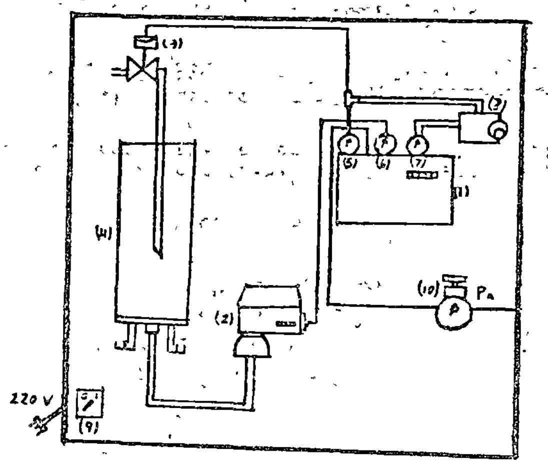


FIGURA 1.

(1) REGULADOR

(2) TRANSDUCTOR DE NIVEL

(3) ACTUADOR

(4) TANQUE DEL PROCESO

(5) PRESION DE CONTROL (P_C)

(6) PRESION DEL TRANSDUCTOR (P_T)

(7) PRESION DE LA CAMARA DE RETRASO (P)

(8) UNIDAD DE RETRASO

(9) CONTROL DE ENCENDIDO DE LA BOMBA

(10) CONTROL DE LA PRESION DE ALIMENTACION (P_A)

V UNIDAD REGULADORA DE PROCESOS CA1100

TEORIA

Es muy común que en un proceso industrial se desee controlar la cantidad de fluido contenida en un tanque, ya sea para mantener un gasto o un nivel constante.

La unidad CA1100 es un sistema de control de nivel hidráulico que opera con potencia neumática. El aparato se representa esquemáticamente en la (FIGURA 1), consta de 4 unidades fundamentales que son:

1.- Actuador (1-3) es una válvula de control que actúa mediante un diafragma que obstruye el gasto de entrada al aumentar la presión de control (P_C).

2.- Planta (1-4) constituida por el tanque y 2 válvulas de desague. Durante el proceso se mantiene una de las válvulas abiertas y se simulan perturbaciones al gasto mediante la otra válvula.

3.- Transductor de Nivel (1-2). Nos convierte la presión hidráulica debido a la altura del tanque en una presión neumática. Opera bajo el principio de balance de fuerzas, un diagrama simplificado se muestra en la figura 2.

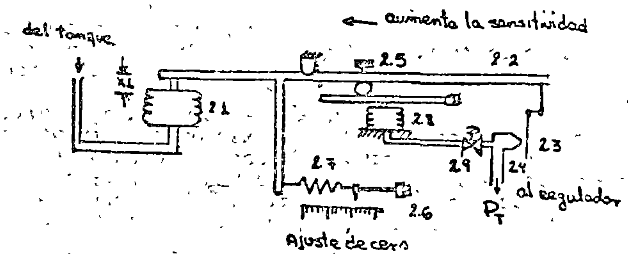


FIGURA 2.

El fuelle (2-1) detecta la presión de la columna de agua (P_{liq}) y ejerce una fuerza sobre la barra (2-2). En el extremo derecho de la barra se halla una cinta metálica que tapa la tobera (2-4) generando un incremento de presión P . Existen 2 fuerzas de reacción que se oponen a P_{liq}, estos son la ejercida por el resorte (2-7) que se regula con el tornillo (2-6) y se conoce como ajuste de cero y la fuerza debida a P_T que se ejerce sobre el punto de apoyo (2-5) al expanderse el fuelle (2-8). Un diagrama de cuerpo libre del transductor se muestra en la FIGURA 2-b.

El tornillo 2-9 es un ajuste de amortiguamiento del fuelle y se halla previamente ajustado. No debe moverse por ningún motivo.

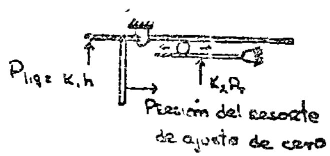


FIGURA 2-b.

El punto de apoyo variable (2-5) fija la ganancia del transductor y también nos varía la sensibilidad del aparato.

4.- Regulador (1-1), opera como unidad de comparación y amplificador neumático. La FIGURA 3 muestra su principio de operación.

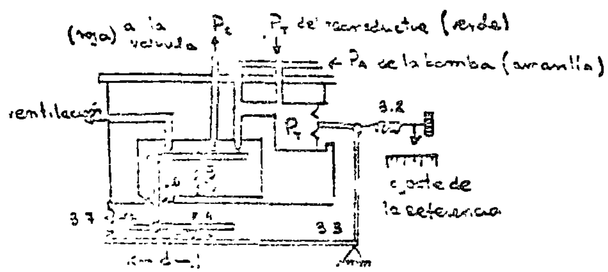


FIGURA 3.

El diafragma (3-1) detecta los P_T, y compara esa presión con la ejercida por el resorte (3-2) generando una señal de error que viaja por la barra (3-3) y se transmite en el punto de apoyo (3-4) a un juego de barras que obstruye la ventilación y destapa el ducto proveniente de la bomba. La presión P_C resultante constituye la señal controladora y se transmite a la válvula de control.

La distancia d del punto de apoyo (3-4), puede variarse y así cambiar la magnitud del momento ejercido, esto constituye el ajuste de la ganancia.

El diafragma (3-6) se halla unido a la barra y al deformarse por la acción de P_C, ejerce una fuerza que restituye el equilibrio de fuerzas en la barra (3-3).

Además de estas 4 unidades fundamentales, el CA1100 cuenta con una unidad de retraso (1-8) que trabaja como integrador para obtener control proporcional + integral. Este dispositivo se analizará cuando sea utilizado en un experimento posterior.

En un costado del regulador se halla un resorte (3-7) que debe de colocarse para el caso en que se opere con una banda proporcional mayor ó igual que 15%.

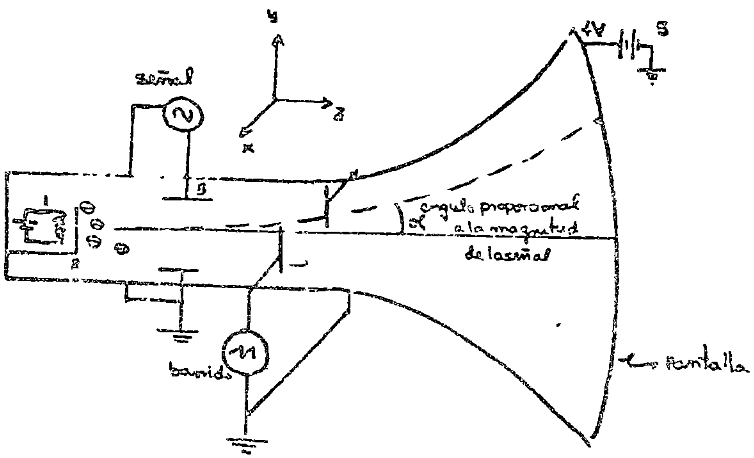
VI Y VII EQUIPOS AUXILIARES.

VI OSCILOSCOPIO

1.- INTRODUCCION TEORICA

Su principio de operación básico es el siguiente.

Un dispositivo térmico (1) calienta una placa metálica,-- (2) excitando sus electrones y formando una nube de electrones libres. Estos electrones son atraídos por un voltaje positivo (5) que los hace incidir en una pantalla. Si aplicamos una diferencia de potencial en las placas (3),- obtendríamos deflexiones de la trayectoria en el eje Y. - Si simultáneamente a esta señal aplicamos un diente de -- sierra (señal de barrido) a unas placas paralelas (4) los electrones viajaran tanto en el eje X como en el Y.



Los osciloscopios cuentan con un barrido interno de - frecuencia variable que nos ayuda a parar la señal en la pantalla. Pero también puede emplearse una señal - externa que tenga la misma frecuencia de la señal de entrada y nos permita una mejor visualización de la - onda.

En el laboratorio se dispone de 3 osciloscopios TEKTRONIX 502A de dos canales y un LAU-313 de 4 canales.

A continuación se describirá el funcionamiento de los osciloscopios TEKTRONIX

Para conseguir la pantalla de 4 canales solicite la ayuda de [illegible]

2.- Osciloscopio de dos canales. (Ver FIGURA adjunta)

MODELO 502 A.

a) Descripción e instrucciones de Operación.

Controles de encendido, Balance de Intensidad, Intensidad y Foco.

Botón 1.- Encendido y apagado del aparato y control de iluminación de la pantalla.

Botón 2.- Balance de intensidad de las luces de uno y otro canal simultáneamente.

Botón 3.- Aumenta o disminuye la intensidad de los dos canales simultáneamente.

Botón 4.- Afoca el canal inferior.

Botón 5.- Afoca el canal superior.

Disparo:

Botón 6.- Selecciona el punto de voltaje sobre la onda de disparo de donde el barrido es disparado.

Selecciona operación automática o recurrente.

Automático 50 H_z (Se recomienda usar nivel automático siempre).

Entrada 7.- Lugar al cual se conecta la señal externa de - disparo, debe ponerse antes el selector [illegible] en - EXT para operación correcta.

Botón 8.- Selector de Disparo: Superior, Inferior y [illegible] no, cada uno con nivel de DC y AC; sincroniza la señal del canal superior, inferior o externa con el instante de disparo.

Posición (Line), hace que el disparo se haga a - la frecuencia de la línea 50/60 H_z y asegura el disparo.

Switch 9.- Provee de un medio de obtener barridos aislados en la pantalla en momentos fijados por el observador, accionando la palanca de.

Botón 10.- Seleccione el tiempo deseado de barrido y puede ajustarse a cualquier frecuencia intermedia entre las que están señaladas por medio del botón rojo que por lo general debe estar girado hasta la derecha para estar calibrado.

Amplificador Horizontal.

Botón 11.- Sirve para amplificar la imagen en la pantalla horizontalmente de 1 a 20 veces, tomando como referencia la parte central de la pantalla.

Y para seleccionar un barrido externo y calibrar la amplitud de dicho barrido con el fin de ocupar una porción determinada en la pantalla.

Botón 12.- Desplaza toda la imagen horizontalmente a la derecha o a la izquierda sin distorcionarla.

Entrada 13.- Para la señal de barrido externo. Poniendo el botón 11 en EXT y calibrando la amplitud deseada.

Amplificador Vertical.

Idéntico para ambos canales.

Botón 14.- Selector de entrada. Conecta la entrada que desea observarse al amplificador vertical seleccionando según se desee observar. AC ó DC, o también la diferencia de las dos señales (A - B) en AC ó DC.

Entrada 15.- Punto donde se conecta la señal, que va a observarse sin invertir.

Entrada 16.- Punto donde se conecta la señal que desea verse pero pasando a través de un inversor.

Entrada 17.- Tierra del Osciloscopio, común para ambos canales.

Botón 18.- Selector de Sensibilidad, seleccione la sensibilidad del amplificador vertical, el botón rojo debe encontrarse girado a la derecha para que el aparato esté calibrado.

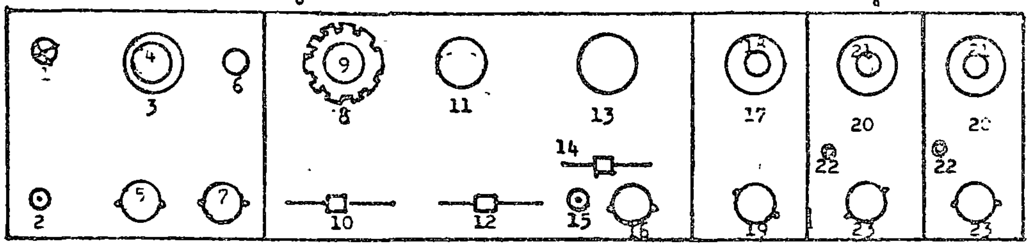
Botón 19.- Balance de Señal, hace que el cero se desplace poco o nada al cambiar de escalas en el botón 18.

Botón 20.- Controla la posición de la imagen verticalmente sin distorcionar la señal.

Botón 23.- Disminuye la ganancia del amplificador vertical

VII GENERADOR DE FUNCIONES

Nos permite disparar de ondas senoidales, cuadrada y triangular en un rango de frecuencias de .0001 a 100K Hz. La disposición de los controles es como sigue.



* 1.- Filoto de encendido
* 2.- Switch de encendido
3.- Selector de modo de operación: Sirve para seleccionar la forma en que se operara el generador: ESI operación automatica, GATE y TRIG. operación controlada por medio de una onda determinada que entra por 7, o manual por medio de 6.
4.- Control de inicio y terminación de fase: Se utiliza para fijar la fase de la onda generada.
5.- Salida de onda de disparo
6.- Boton de disparo manual
7.- Entrada de onda de disparo
* 8.- Multiplicador de frecuencia por unidad
* 9.- " " por decenas
10.- Selector de polaridad: Se utiliza para seleccionar la parte positiva, negativa o ambas de la onda de salida.
* 11.- Control de rango de frecuencia: Sirve para seleccionar el rango de variación de la frecuencia de la onda generada.
12.- Control de simetria de onda: Sirve para seleccionar las partes simetricas de la onda que se desee.
13.- Perilla de expansión: Se utiliza para variar la forma de onda aumentandola o disminuyendola.
14.- Control del rango de voltaje de entrada al VCF(VCO).
15.- Switch inversor del VCF: Sirve para invertir la variacion de la frecuencia del VCF en función del voltaje de entrada.
16.- Entrada al VCF.
17.- Control de polaridad del generador de onda cuadrada.
* 18.- Atenuador: Se utiliza para aumentar o disminuir la amplitud de la onda generada.
19.- Salida del generador de onda cuadrada
* 20.- Selector de onda del generador multiple
21.- Atenuador de onda del generador multiple
22.- Tornillo de ajuste de la forma de onda.
* 23.- Salida de la onda seleccionada mediante la perilla 20

Los dispositivos que se emplearan normalmente son aquellos señalados con *.

B L O Q U E I

IEAI	Módulos analógicos.
IMS	FUNCIONAMIENTO DEL SERVOMOTOR DE C.D. MS-150.
IPT	Control de temperatura con realimentación.
ICA	Funcionamiento del transductor y regulador de nivel hidráulico.

PRACTICA I EAI

MODULOS ANALOGICOS

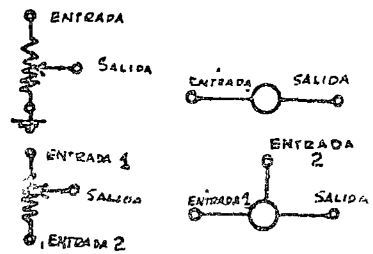
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

a) Uso del vóltmetro digital
b) Potenciómetros
c) Sumadores(Con diferentes ganancias)
d) Integradores (Con diferentes ganancias,condiciones iniciales y modos de operación).
e) Uso del osciloscopio (Para observación de funciones de la computadora).

I. Potenciómetros. Hay dos tipos de potenciómetros

Aterrizados

NO Aterrizados



Nótese que el cursor,cuya posición depende del giro de la perilla,es la salida. Los potenciómetros aterrizados multiplican el voltaje de entrada por un factor que varía desde cero hasta uno. Para medir éste factor se usa el vóltmetro en [SP] (Siempre cuando se usa debe estar la computadora en [IC] y no en operación).

R1 En un potenciómetro aterrizado mida el valor máximo. R2 Y el valor mínimo (Agal. usando [SP] y oprimiendo la palanca que esta junto a la perilla.

Haga la misma operación con un potenciómetro

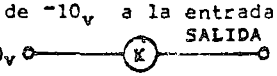
no aterrizado. R3 ¿Funciona para este tipo de potenciómetros esta forma de medir?

Medición de voltajes.

Cuando el voltímetro en [VM] y con una conexión saliéndose de "DPM" se puede medir el voltaje en un potenciómetro, fuente o amplificador.

NOTA: Cuando se hacen mediciones con [VM] y [AMP] la lectura del voltímetro debe multiplicarse por 10.

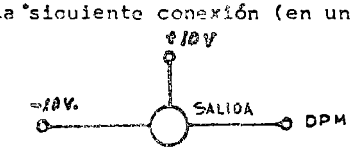
Conecte un voltaje de -10_v a la entrada de un potenciómetro aterrizado



DPM.

Mida entre qué límites de voltaje varía la salida R4 _____ volts y _____ volts. Mida los límites ahora, con una entrada de + 10_V R5 _____ y _____.

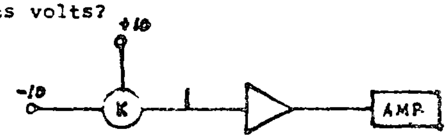
Haga la siguiente conexión (en un potenciómetro no aterrizado)



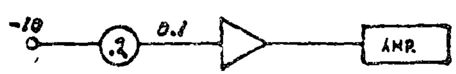
Mida los límites de variación de voltaje a la salida R6 _________ y _________.

II. Sumadores. Ajuste un potenciómetro no aterrizado a valor de +5.0 volts (Conecte las entradas a + 10 y −10 volts)

Conecte el cursor a la entrada del sumador con ganancia 1. Mida la salida con el vóltmetro en $\boxed{\text{AMP}}$ y con el selector de amplificadores indicando el amplificador (sumador) que se esté usando. R7 ¿Cuanto marca el vóltmetro? R8 ¿Cuantos volts?



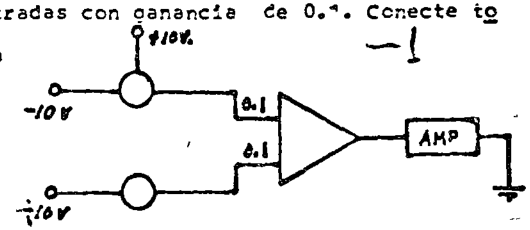
Ahora alambre el siguiente diagrama



R9 ¿Cuantos volts marca el vóltmetro?

Realimente el sumador para que tenga ganancia de 10. Para la misma entrada R10 ¿Que voltaje se obtiene a la salida?

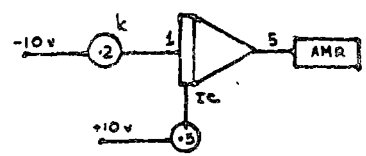
Para observar la operación suma prepare un potenciómetro que suministre −4.0 volts. Realimente el sumador para que tenga 2 entradas con ganancia de 0.1. Conecte todo como en la figura



R11 ¿Cuánto es la salida del amplificador en volts?

R12 ¿Se esperaba ésto?

INTEGRADORES. Alambre el siguiente circuito con 5 volts de condiciones iniciales



$$S = \int k\,dt = kt + IC$$

Seleccione el amplificador y use $\boxed{\text{AMP}}$. En caso de ser variable la medición, diga entre que extremos varía. ¿Cuanto vale en modo $\boxed{\text{IC}}$? R13

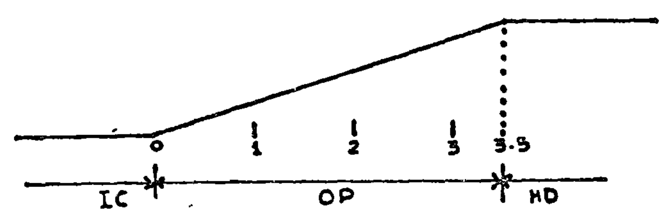
R14 ¿Cuanto vale en modo $\boxed{\text{OP}}$?

El oprimir el botón $\boxed{\text{HD}}$ hace que la operación quede fija. Oprima $\boxed{\text{OP}}$ y a los 4 segundos oprima HD. R15 ¿Cuanto vale la salida?

Note que los focos rojos indican cuando el valor del voltaje llegó a su límite (Saturación). Una vez saturado se debe volver a $\boxed{\text{IC}}$.

Repita las observaciones con un osciloscopio. Seleccione un barrido interno lento, de 1 cm/seg y una escala vertical de 5 volts/cm.

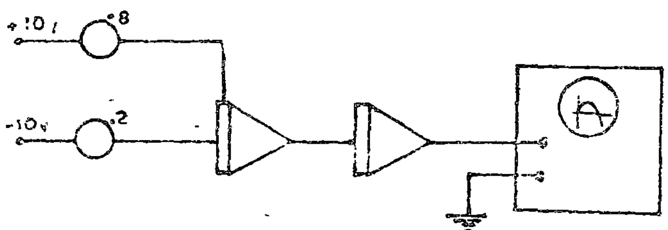
Debe observarse la siguiente figura



La figura es una rampa de condiciones iniciales y pendiente +2.0. El valor que se obtiene depende del momento que se oprime [illegible].

Si se desea producir una rampa de voltaje con condiciones iniciales -8 volts y pendiente +2.0 v (medidos a la salida del integrador, R15 ¿Cuantos volts deben aplicarse como condiciones iniciales? R17 ¿Cuantos volts deben aplicarse a la entrada?

La rampa es la integral de una constante. La parábola es la integral de una rampa. Integre la rampa y obtenga una parábola. Muestre la parábola al instructor por medio del osciloscopio.



Calcule la ecuación de la parábola por integración de la rampa . R18 ¿La ecuación es? (Hágalo teóricamente)

PRACTICA I MS

FUNCIONAMIENTO DEL SERVOMOTOR DE CORRIENTE DIRECTA MS 150.

Objetivos. a) Familiarizar al alumno con el manejo de los elementos que constituyen esta unidad.

b) Comprensión de la función que desempeña cada dispositivo en el funcionamiento global del sistema.

Desarrollo. Consiste en obtener la función de transferencia de cada uno de los elementos que constituyen el sistema.

Característica del potenciómetro de entrada IP.

Este potenciómetro es un medio para producir un voltaje de entrada al control de velocidad, proporcional a la posición angular de su perilla:

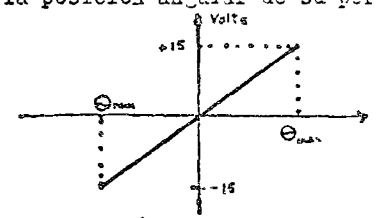


fig 1

R1. Genere una gráfica como la de la figura 1 dando valores al ángulo y midiendo el voltaje de salida. Comience por localizar la posición del cursor que dé cero volts como salida. (Esta posición puede no corresponder con el cero de la escala graduada). A partir de éste punto mida el voltaje para desplazamientos de 30° hasta llegar al tope del cursor, primero en un sentido y después en otro.

R2. ¿Cual es la constante del potenciómetro de entrada? (volts/grado)= K_{IP}

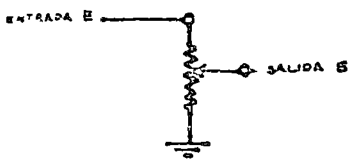
Característica del Sumador OU.

El sumador es un amplificador operacional cuyo funcionamiento es idéntico al de los amplificadores de la [illegible].

R3. Dibuje una gráfica acotada de voltaje de salida contra voltaje de entrada, para entradas 0,+5,+10, +12,+13,+14 y +15 volts. No olvide ajustar antes el cero. (Para el procedimiento a seguir vea la introducción teórica ...). ¿que ganancia obtuvo? K_{amp} = ?

Característica del atenuador AU

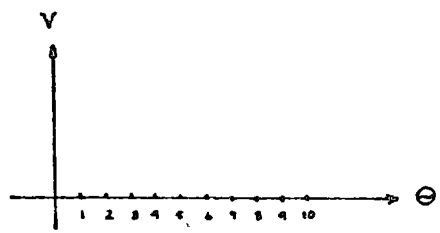
El atenuador es un potenciómetro similar al que se usa en computación analógica



$S = K(E)$

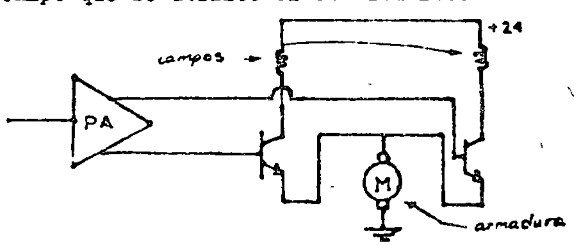
$0 \leq K \leq 1.0$

La constante K debe ser aproximadamente proporcional al desplazamiento angular de la perilla que en éste caso está graduada del 1 al 10. R4 Demuéstrelo experimentalmente por medio de una gráfica acotada de 0 a 15v.



Característica del preamplificador PA

El preamplificador se distingue por tener dos salidas. La razón es que el motor tiene dos bobinas de campo: Una se activa para que el motor gire en un sentido, y la otra para que gire en sentido contrario. El control de armadura se realiza conectándola en serie con la bobina de campo que se utilice en ese momento.



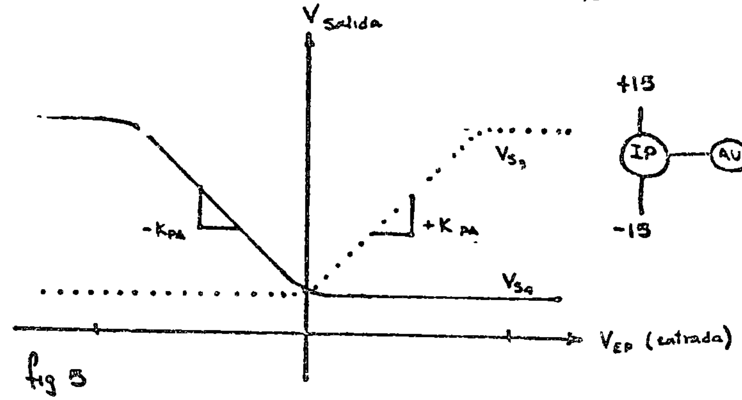


fig 5

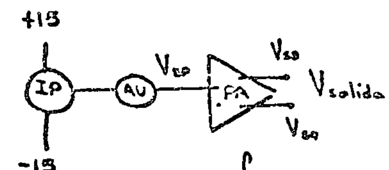


fig 6

Para obtener la función de transferencia del P.A. primero es necesario ajustar el cero de éste. El procedimiento para lograrlo es el siguiente:

Con A.U. en "2" es decir $K_1 = 0.2$ ajuste IP para que la salida de AU (o sea la entrada del PA) valga cero.

Gire la perilla del PA marcada con cero hasta que ambas salidas tengan el mismo valor, el cual a su vez es el mínimo posible.

Con el servo ajustado varíe el IP para que la entrada V_{EP} tome los valores de : 0, ± 0.1, ± 0.2, ± 0.3, ± 0.4 y ± 0.5 volts. (La entrada puede ser en cualquiera de las terminales 1 o 2 del PA).

R5 Con la tabla de valores obtenidos se deben dibujar dos gráficas semejantes a las que aparecen en la fig 5.

CARACTERISTICA DEL MOTOR

Se desea observar el modo de operación del motor MT cuyas entradas se encuentran conectadas mediante el cable negro a la unidad SA. Alambre en SA las conexiones para control de armadura del MT (vea la introducción teórica II-b(2)).

Mediante el IP aplique un voltaje de -5v a +5v a una de las terminales de SA. P6 ¿ Que observó? R7 ¿Es la velocidad proporcional al voltaje?

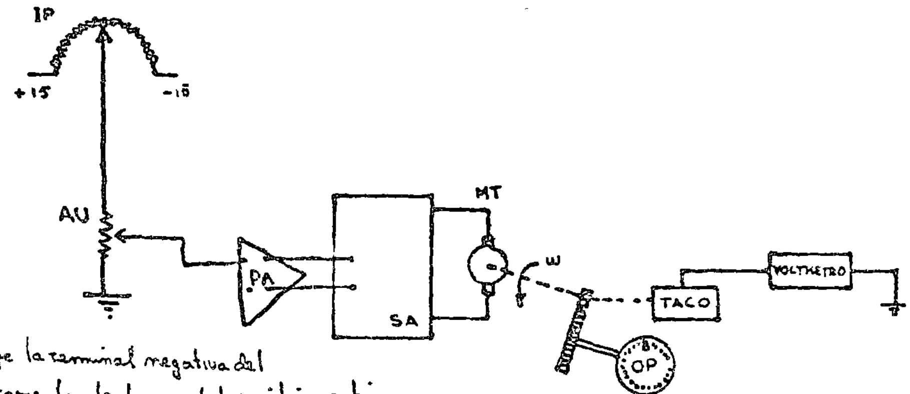
Repita el procedimiento para la otra entrada de SA R8 ¿Que sucede con el sentido de giro?

Característica del tacogenerador TG

El tacogenerador es un sistema cuya entrada es la velocidad angular del eje del motor en rpm ó rads/seg y cuya salida son volts generados.

Para medir la constante K_{TG} del tacogenerador, se conecta el circuito hasta aquí empleado al servoamplificador SA (conecte las terminales de salida de PA a las de entrada de SA).

Debe observarse que el tacogenerador se encuentra montado en forma integral al motor MT



Aterrice la terminal negativa del TG y tome las lecturas del positivo a tierra.

El motor debe tener acoplado el potenciómetro de salida a su eje lento. No debe usarse el freno u otras cargas.

Para encontrar K_ω, ajuste IP hasta dar una velocidad tal que la salida de TG sean 6 volts constantes; aterrize la terminal negativa de TG y tome las lecturas del positivo a tierra. Cuente las revoluciones de OP en 30 seg. Con éste número calcule primeró las rpm del eje lento y luego las del eje rápido, recordando que la relación es 30:1.

B9 Dé la constante del generador K_ω, en (volts/rad/seg) y en (volts/1000 rpm).

Emplearemos tambien la constante inversa $K_\omega^{-1} = \frac{1}{K_\omega}$

que nos da las revoluciones del motor correspondientes a un voltaje generado a la salida del TG.

Potenciómetro de salida OP.

El OP es un potenciómetro similar al IP con la única diferencia que se puede acoplar el cursor al eje lento del motor para obtener un control de posición.

PRACTICA IPT

CONTROL DE TEMPERATURA CON REALIMENTACION

OBJETO:

Observar el efecto de la realimentación en las relaciones entrada-salida del sistema.

Se harán pruebas para la relación valor fijado-valor medido, para observar el efecto de realimentación en reducir la no linealidad.

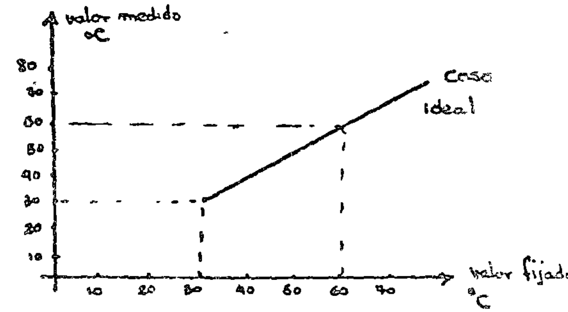
También se harán pruebas de respuesta a escalón.

a) NO LINEALIDAD.

Mediante la perilla de SET VALUE aumenta la temperatura fijada en incrementos de 10°C leyendo la temperatura de salida para cada valor. (Auxíliese de los medidores de calor de valor de salida y valor fijado, vea la FIGURA III-1).

R1-Hágalo para malla abierta y malla cerrada con los valores de banda proporcional de 200, 50 y 30% de modo que obtenga 6 curvas diferentes y dibújelas.-- Coloque la garganta del aire en 60%

observa que el proceso se inicia ≈ a 30°C



R2-De las curvas obtenidas seleccione la configuración del sistema que más se aproxime al caso ideal.

b) RESPUESTA A ESCALON.

Ajuste el valor fijado a 40°C conservando la garganta en 60°.

Aplique el escalón interno mediante el switch (SW1).

En un osciloscopio (barrido 0.5 seg/cm.) observe el escalón aplicado y la señal de salida para los siguientes controles:

a) Malla abierta, % PB a 200, 50 y 5.

b) Malla cerrada, % PB a 100, 50 y 30.

R3-¿De qué valor es el escalón? $U(t) = ?$

R4-Dibuje las formas observadas.

NOTA: La señal de entrada para malla abierta puede observarse en el punto (B) y para malla cerrada en TRIGGER CRO pero con signo cambiado y multiplicado por una constante.

R5-¿Qué sucede con el nivel de la señal de salida (antes de aplicar el escalón) al aumentar la ganancia?.

R6-¿Qué efecto tiene este fenómeno sobre la respuesta escalón?.

R7-¿Son iguales la respuesta a escalón de subida y la de bajada?. Explique su respuesta.

c) RESPUESTA A ONDA CUADRADA.

Coloque la perilla de SET VALUE en "0" y ajuste el generador de señales con f = .15 Hz, rango de entrada de 0-5V, para que en un canal se tenga una onda triangular (OFFSET BIPOLAR, SIMETRIA N, AMP 2V).

Solicite la ayuda del instructor para este punto.

Emplee la onda triangular como barrido externo y aplique en "external" la onda cuadrada.

R8-Hágalo para los casos a) y b) anteriores y dibuje las formas observadas.

R9-Coloque la banda proporcional en 5% para malla cerrada, ¿Qué se observa? dibujelo. ¿A qué se debe ésto?.

PRÁCTICA I CA

UNIDAD REGULADORA DE PROCESOS.

CA1100
PRACTICA I CA

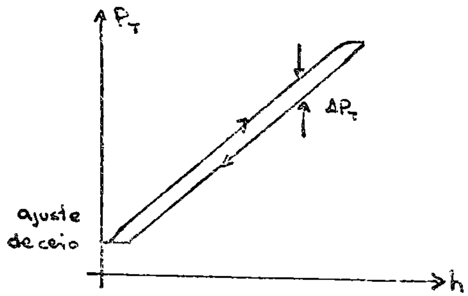
FUNCIONAMIENTO DEL TRANSDUCTOR Y EL REGULADOR.

OBJETIVOS:

a) Que el alumno se familiarice con los mecanismos del sistema y obtenga sus curvas de comportamiento.

I.- TRANSDUCTOR

El transductor es un dispositivo que convierte la presión hidráulica debido a la altura de la columna de agua, en una presión neumática proporcional. Para obtener un buen desempeño en el sistema es necesario que su relación entrada-salida sea una función lineal. Sin embargo es común que ésta presente fenómenos de histéresis.



1) Complete la siguiente tabla y grafíquela para zona de transmisión del 4%. (Recuerda que la zona de transmisión con el tornillo 2-8)

h/cm	0	5	10	15	20	25	30	25	20	15	10	5	0
P_T/psi	2.5												

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{llenado}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{vaciado del tanque}}$

AYUDA:

Para llenar el tanque mantenga el motor apagado y auxiliese de la lata. Recuerde que la presión del transductor se lee en el medidor (1.6); y que el ajuste de cero se realiza con el tornillo (2.6).

Para obtener una mejor linealidad se puede aumentar el nivel de cero y disminuir la sensitividad (variando la zona de transm.).

2) Repita el inciso 1) para 3 psi de ajuste de cero y una zona de transmisión de 20%.

3) Calcule el máximo error de histéresis ΔP_T que se obtiene de las gráficas 1) y 2).

4) ¿Qué efecto tiene el ajuste de cero en el compartimiento del transductor?, ¿Qué efecto da sensitividad?. ¿Qué sucede con el rango de medición?.

5) Explique sus respuestas.

II.- REGULADOR

Los cambios de presión sensados por el transductor son comparados con una señal de referencia generando así una señal de error, esta es generalmente insuficiente para accionar el actuador, por lo que es necesaria una etapa de amplificación entre comparador y actuador. El regulador del CA1100 realiza los procesos de comparación y amplificación. La señal de referencia (altura deseada en el tanque del proceso), se fija con la perilla (3.2) y la ganancia del amplificador se regula con el ajuste de banda proporcional ($PB = 1/K_p \times 100$), mediante el apoyo (3.4). K_p = ganancia proporcional.

La ganancia del regulador se puede calcular a partir de la definición de ganancia como $K_p = \Delta P_C / \Delta P_T$, donde P_C es la presión de control y P_T la del transductor.

1) Calcule experimentalmente los valores de K_p para ---- PB = 40, 20, 10 y 5%.

AYUDA:

Coloque la sensitividad en su máximo valor (zona de transmisión 4%).

Con la bomba apagada ajuste el cero del transductor a P_{T_1} = 4 psi y mueva la referencia (valor fijado) hasta que la señal de control sea P_{C1} = 7.5 psi. Auxiliese de la lata para obtener un ΔP_C = 7.5 psi y mida P_{T_2}. Repita el proceso para los diferentes valores de PB.

2) Calcule teóricamente K_p para PB = 40, 20, 10 y 5% y -- obtenga el error respecto a la medición experimental.

3) ¿En donde se realiza el proceso de comparación? Explique su mecanismo.

===

PB = 5%

$$K_p = \frac{100}{20}$$

B L O Q U E   II

IIEAI	Realimentación.
IIMS	Control de velocidad de un motor.
IIPCM	Sistema de primer orden.

PRACTICA II EAI

REALIMENTACION

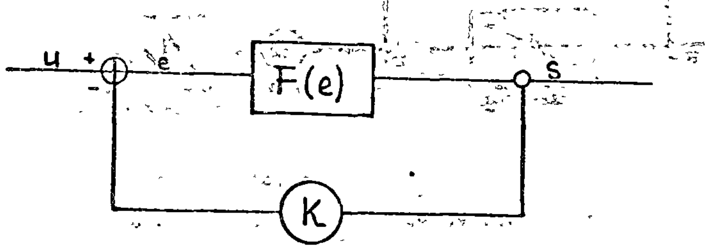
OBJETIVO. Observar dos de los efectos de la realimentación: a) Disminución de no-linealidades en la característica entrada-salida de la planta.

b) Posibilidad de disminuir los efectos de ruido de una planta.

En ambos casos el sistema realimentado pierde ganancia para ganar fidelidad en la salida con respecto a la señal de entrada.

OTRAS METAS DE APRENDIZAJE. Uso del modo de operación repetitivo; sincronización de una onda periódica en el osciloscopio (barrido externo); uso de un generador de ruido.

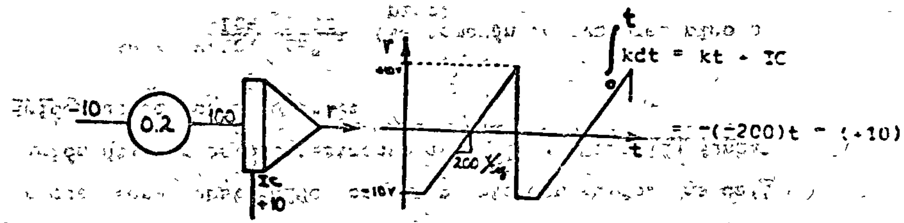
I. Disminución de no-linealidades. Se estudia un sistema del tipo:



Donde es posible variar K y F(e) es una función no-lineal de "e".

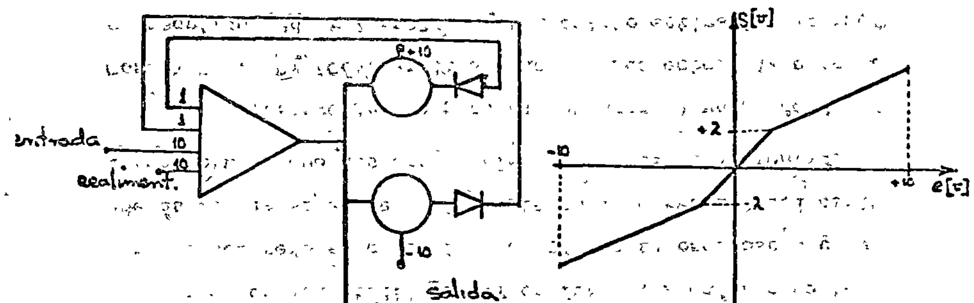
Alámbrese un integrador como generador de señales que produzca rampas en forma repetitiva. La forma de las

rampas y el circuito que las genera son:



Véalo en el osciloscopio. En operación repetitiva RP. Con el TIMER en 10 ms, ajustando el tiempo de operación (con la perilla OP) para que llegue la rampa a +10v antes de volver a las condiciones iniciales (cuyo tiempo se debe reducir al mínimo con la perilla IC).

b) Ahora alambre la planta de característica no lineal, que será un sumador con diodos en la trayectoria de realimentación; la conducción de los diodos dependerá de la magnitud y signo de la salida del sumador.



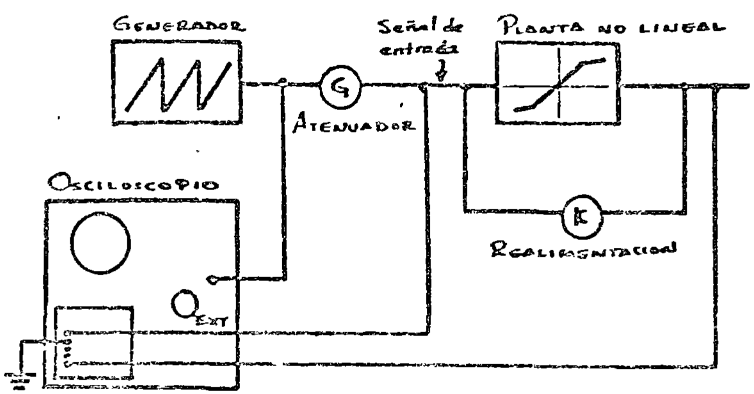
Note el sentido de los diodos y las dos entradas a los potenciómetros no aterrizados.

Observe la salida en el osciloscopio usando [illegible] como entrada la rampa. Los [illegible] se deben ajustar hasta obtener quiebres simétricos entre [illegible] y [illegible] volts. Use un potenciómetro entre la planta y la rampa con valor de [illegible]. En forma de bloques sería:

Note el signo negativo de la salida debido a que el sumador invierte la señal de entrada.

c) Establezca un camino para la realimentación a través de un potenciómetro aterrizado.

Para sincronizar la salida del sistema con el osciloscopio y poder observar directamente la característica entrada-salida, se utiliza la señal diente de sierra sin atenuar (antes de G) como barrido horizontal.



Haremos las observaciones por pasos. Ajuste G = 0.1 y [illegible] 0.[illegible].

En un canal del osciloscopio se observa la entrada y en el otro la salida. P1 ¿Como es la salida respecto a la entrada en magnitud? P2 ¿ Y en forma?. Asegúrese de tener las dos señales a la misma escala(en el osciloscopio) y además que la señal de salida esté en la entrada B del osciloscopio(para que las dos señales tengan el mismo sentido).

Observe lo que pasa al aumentar el valor de K. Con K = 1.0 R3 ¿Cómo es la salida con respecto a la entrada en magnitud R4 y forma? R5 ¿En cuánto estima la disminución de la ganancia?

Debido a que la ganancia se ha reducido,es necesario aumentar la amplitud de la señal de entrada para que la salida sea del rango deseado. Aumente G hasta que el sistema esté a punto de saturarse. ¿ Aparecen de nuevo los quiebres en la señal de salida? R6 . R7. Explique.

II. Disminución de ruido en una planta.

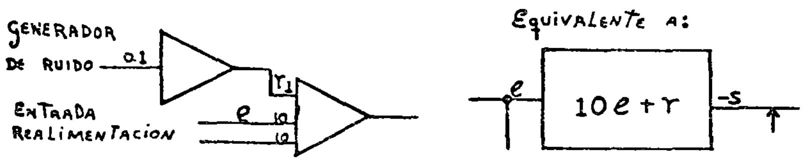
Ahora desalambre únicamente la planta no-lineal, la cual será substituída por una planta con ruido. Una definición útil en éste experimento es la de la Relación Señal-Ruido que se puede definir:

$$RSR = \frac{\text{VALOR SEÑAL}}{\text{VALOR RUIDO}}$$ (se tomarán los valores pico a pico)

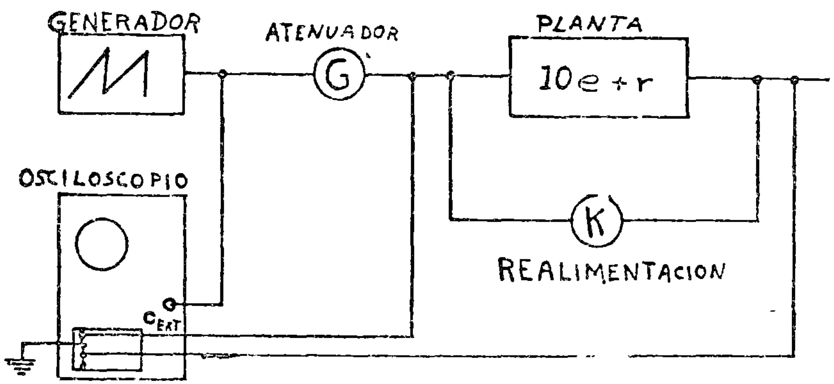
En nuestro experimento se logrará que la señal sea grande con respecto al ruido,o sea que la RSR sea lo mayor posible.

El ruido se toma de un generador a través de la línea coaxial de distribución. Conéctese ésta al osciloscopio. R8 ¿Qué observa? R9 ¿De qué magnitud?

Alambre la siguiente planta:



Con objeto de disminuir la señal de ruido, se usa un sumador con ganancia de 0.1; El esquema general será:



Ajuste K= 0.0 (realimentación nula). Varíe la amplitud de la señal de entrada (variando G). R10 ¿De cuánto es la máxima RSR sin riesgo de saturación? R11 ¿De cuánto es la mínima RSR?

Ahora realimentamos la planta al máximo con K = 1.0. R12 ¿Que le pasa a la ganancia? R13 ¿En cuanto varió la RSR?

Aumente la señal de entrada hasta el máximo valor posible sin saturación (aumentando G) R14 ¿Cual es el valor de la RSR? R15 ¿En cuanto estima la disminución de la ganancia? Mida lo necesario.

PRACTICA II MS

CONTROL DE VELOCIDAD DE UN MOTOR

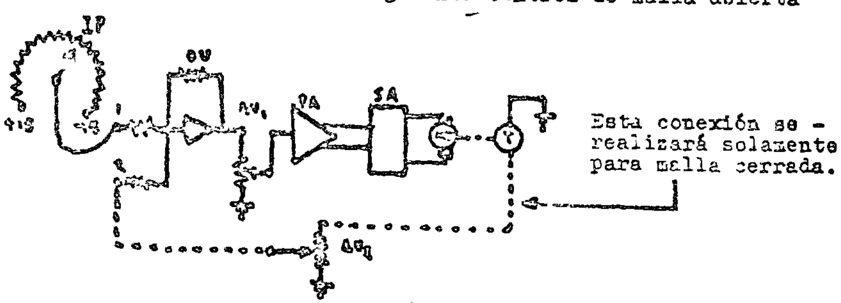
Objetivos. 1) Observar los efectos de la realimentación en un sistema de control electromecánico.

2) Interconectar las unidades para formar un control de velocidad.

Se trata de construir un sistema de control de velocidad, tal que una vez que se fija una velocidad, ésta se mantenga dentro de ciertos límites a pesar de que varíe la carga del motor. Se compara un control de malla abierta con uno realimentado.

Para realizar esta práctica es necesario haber cubierto previamente el material contenido en el instructivo del servomecanismo de corriente directa de las notas.

Alambre el siguiente control de malla abierta



Efectúe las conexiones con el PS apagado. Asegúrese de que el amplificador operacional (OU) y el preamplificador (PA) tengan alimentación de + 15 volts y tierra "COM" que se pueden tomar del PS y SA. Observe que las resistencias del AU deben aterrizarse.

Prenda el aparato. Gire la perilla del potenciómetro de entrada IP y vea como para cada posición del motor gira a una velocidad constante diferente. Note que el motor tarda algunos segundos en alcanzar su velocidad final cada vez que se hace un cambio.

Observe que hay una zona muerta, es decir un rango para el ángulo de IP en el cual el motor está parado. La zona muerta se debe a la fricción estática del rotor del motor, pues se opone a todo movimiento mientras que el par motor no logre romperla y poner en movimiento al rotor.

Se desea hacer la velocidad del motor propor-

cional al desplazamiento angular de la perilla IP, a partir del ángulo marcado como cero. Si al poner IP en cero sigue girando el motor, puede deberse a que IP tiene la perilla corrida y/o a que los amplificadores del servosistema tengan corrimiento del cero a sus salidas. (vea 3c de la introducción teórica).

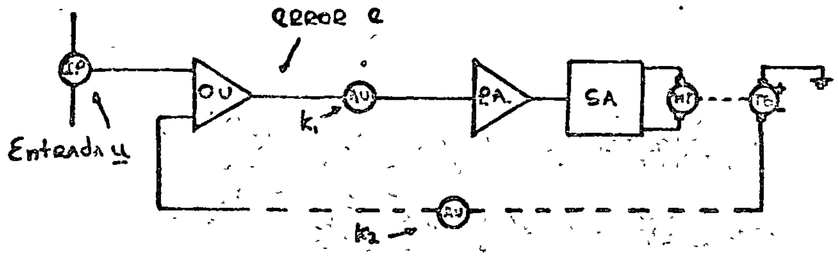
La forma de ajustar los ceros de los amplificadores, es comenzando por las etapas finales y terminar por las etapas de entrada. a) Desconéctese la entrada del preamplificador. Ajuste la perilla de cero del módulo PA para que el motor consuma el mínimo de corriente según el medidor sobre el módulo de fuente (PS). b) Conecte de nuevo la entrada del PA y ahora desconecte el (o las) entrada(s) del amplificador operacional OU. Para hacer con más precisión este ajuste, ponga el potenciómetro atenuador en 10 (para que no haya atenuación de la señal) y mueva el cero del OU hasta volver a ajustar el motor a cero velocidad y mínimo consumo. Devuelva el atenuador a su valor inicial y conecte de nuevo la entrada del OU.

Si después de ajustar los ceros no se detiene el motor al poner IP en cero, puede deberse a que la perilla esté corrida. Esto se verifica fácilmente conectando un voltímetro a la salida del IP ajustado a cero grados. Si la perilla está corrida pida ayuda al instructor (Si está muy apretada la perilla, se puede romper el potenciómetro por dentro al tratar de ajustarla). Recuerde que es posible trabajar con la perilla corrida si se determina el ángulo que corresponde a cero volts.

IIa) Malla abierta . Los experimentos de la práctica IIMS consisten en medir la ganancia del servosistema y los efectos de una carga progresiva del sistema con malla abierta y con varios grados de realimentación.

Primero se ajustará la velocidad del motor sin carga. Después se determinará la ganancia (salida/entrada) sin carga. Por último se medirá la velocidad del motor disminuída al aplicar un freno magnético que produce una fuerza opositora proporcional a la velocidad del motor.

Como entrada se tomará el voltaje medido a la salida del potenciómetro IP. Como salida se tomará el voltaje que produce el tacogenerador TG, que es proporcional a la velocidad angular del motor.

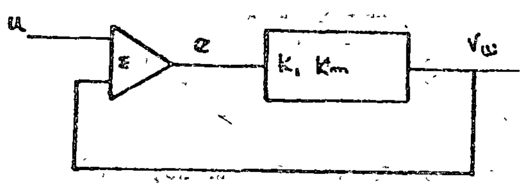


Ajuste IP para que la salida de TG (V_ω) sea 8.0± 0.2 volts (positivos o negativos). El ángulo al que se ajusta IP por lo pronto no es importante. Interesa tener una velocidad inicial conocida, aunque sea en términos de volts.

Mueva la perilla del AU de malla directa de modo que obtenga una ganancia que denominaremos K_1 = 1/10 (por cada volt de entrada se tendrá 0.1 volt de salida).

Mida V_ω al aplicar el freno en posición 2 (vea inciso 9 de la introducción teórica) y en posición 4. R1 y R2.

IIb) Malla cerrada. Retire el freno(posición cero) Ahora realimente el sistema conectando la salida del tacogenerador a la entrada OU, pasando por un atenuador AU ajustado inicialmente a 10. Entonces K_2 = 1.00 y la realimentación es unitaria.



K_m = ganancia del motor

Si no se ha movido IP de la posición que se colocó anteriormente, la velocidad debe bajar al realimentarse el sistema. Si la velocidad, por lo contrario se incremente, la polaridad de la realimentación es positiva, cuando lo que queremos es realimentación negativa. Para invertir la polaridad, inviértase la conexión de TG : El "COM"(tierra) y la salida se intercambian.

En estas condiciones (K_1 = 0.1 y K_2= 1.0), se ajusta nuevamente IP para que V_ω = 8.0± 0.2 volts.

R3. Mida la ganancia (V_ω /u).

Ahora mida la velocidad V_ω al colocar el freno en posiciones 2 y 4. R4 y R5.

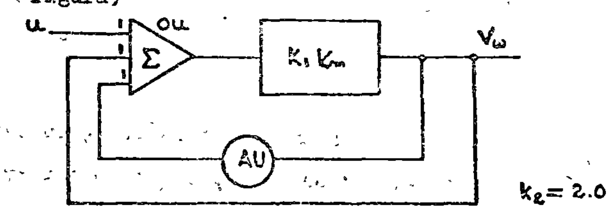
Para ver el efecto sobre el sistema de aumentar la ganancia de malla sin aumentar la realimentación, haga K_1 = 1.0(posición 10). Ahora la ganancia de malla K_2K_1G es diez veces mayor.

Con freno en cero, ajuste V_ω a 8.0 volts. Mida la ganancia salida/entrada R6 y el valor de V_ω con freno en 2, R7 y con freno en 4 R8

Para observar el efecto de cambiar la realimentación, permaneciendo constante la ganancia de la trayectoria directa, repita las mediciones cuando K_1=1.0 y K_2=0.5 (posición 5 del AU correspondiente) Recuerde poner inicialmente el freno en cero. V_ω /u = R9, freno en 2, V_ω = R10 ; freno en 4, V_ω = R11.

Repita las mediciones cuando K_1=1.0 y K_2= 2.0.

Para hacer K_2= 2.0, utilice la posición 10 del AU y conecte otro alambre desde V_ω hasta la entrada de OU, (ver figura)

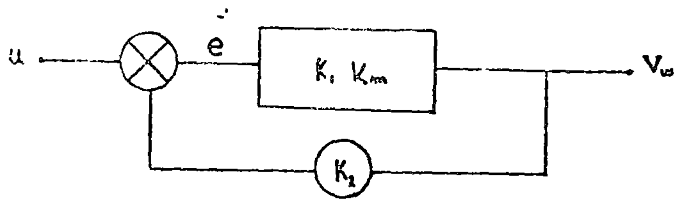


Ganancia= R12 ; freno en 2, V_ω =R13 ; freno en 4, V_ω = R14.

Las variaciones de la velocidad al cargar el motor con el freno magnético se pueden observar en una gráfica de voltaje de salida (V_ω) contra posición del freno (θ_f). Obtenga las diferentes gráficas para el sistema de malla abierta y malla cerrada para las ganancias que se piden.

III. Análisis de resultados

El sistema se puede representar en forma simplificada como



Entonces la ganancia estática salida/entrada es:

$$\frac{V_\omega}{\mu} = \frac{K_1 K_m}{1 + K_2 K_1 K_m}$$

R15 ¿Qué factor afecta mas la ganancia V_ω/u suponiendo K_2K_1G 1.

R16 ¿Que factor determina que la velocidad angular sea inmune a las variaciones de carga? (Considere K_1, K_2; $V\omega/u$ ó $K_1K_2K_m$)

Si se nos pide ganancia $V\omega/u \approx 0.8$, máxima inmunidad posible a variaciones de carga, pero restricción en la ganancia de malla tal que $K_1K_2 \leq 0.675$, R17 ¿Cuánto debe valer K_1? R18 ¿ y K_2 ?

R19 ¿ De que factor ó factores depende que la zona muerta sea pequeña? (Considere K_1, K_2, $V\omega/u$ y $K_1K_2K_m$ mínimamente.

PRÁCTICA # 11.CM

SISTEMA DE PRIMER ORDEN

NOTA: El reporte de la práctica debe de acompañarse de las gráficas obtenidas en clase, debidamente identificadas. Para poder desarrollar la práctica deben de entregarse al iniciarse la sesión las respuestas a las 5 primeras preguntas de la introducción teórica.

EXPERIMENTAR :

a) El efecto de la ganancia sobre la constante de tiempo para un sistema de primer orden.

b) Determinar el valor de la ganancia por el que se presenta el fenómeno de saturación.

DESARROLLO

Como se vió en la introducción teórica la función de transferencia para el sistema de primer orden viene dada por:

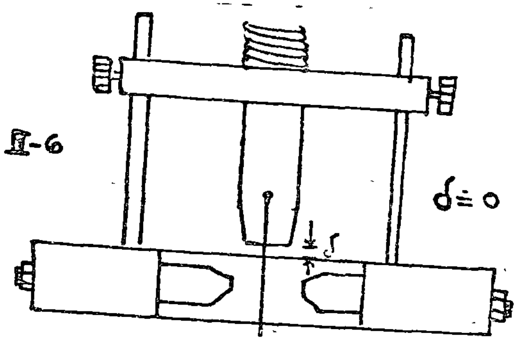
$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Por lo que una vez determinada τ se halla completamente definido el sistema.

Preg. 1. ¿Cómo determinaría usted experimentalmente τ (Utilice una señal escalón de entrada) Recuerde que τ es una constante de tiempo que viene dada en segundos, por lo que es necesario medir la velocidad del papel.

Preg. 2. Hágalo para una ganancia baja (En la posición A) como se indica en la figura IV-6. Asegúrese que se halle ajustado el cero (vea int. teórica) y en caso contrario solicite la ayuda de su instructor. Aplique manualmente la señal de entrada.

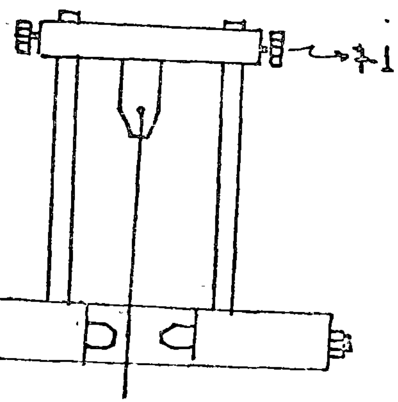
fig IV-6



Preg. 3. Si se desea obtener un valor de τ de 0.3 seg, que ganancia fijaría?

Preg. 4. Aumente la ganancia hasta el máximo valor (Fig. IV-7). Auxíliese de los tornillos 7-1 para sostenerlo en ésa posición. Aplique el escalón de entrada. Explique qué sucede.

fig IV-7



B L O Q U E III

IIIEAI	Modelado y simulación analógica de un sistema eléctrico.
IIIMS	Control de posición.
IIICA	Acciones de Control.
IIIPCM	Lugar de las raíces de un sistema de 2° orden.

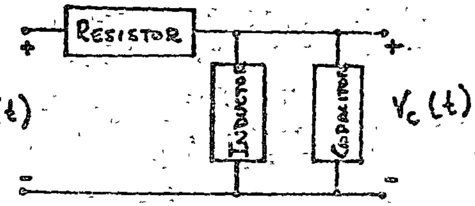
PRACTICA III LAI

MODELADO Y SIMULACION ANALOGICA DE UN SISTEMA ELECTRICO

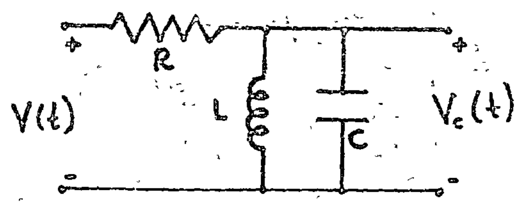
Objetivos. Dado un circuito RLC y siguiendo un modelo de variables de estado: Simular el modelo. Ajustar un parámetro no medible del modelo por comparación de las respuestas real y simulada. Apreciar diferencia entre modelo y sistema físico.

Utilizar el modelo para estudiar el comportamiento del sistema bajo condiciones iniciales no nulas.

Problema. Se trata de modelar el siguiente sistema físico que consta esencialmente de tres elementos pasivos,(fig 1).



La primera consideración no cuesta trabajo aceptarla,y es de suponer que el modelo es como se muestra en la fig. 2.



Sin embargo,la parte mas deficiente de este modelo es el inductor,puesto que un inductor real tiene una resistencia óhmica que puede influir apreciablemente en el corpotamiento de dicho sistema,por lo que en el modelo haremos la consideración de una resistencia adicional R' que será suficiente para aproximar

el comportamiento del sistema y su modelo. La fig 3 resume lo anterior y R' es:

$$R' = r_{\text{óhmica}} + R_{\text{eficaz por histéresis}}$$

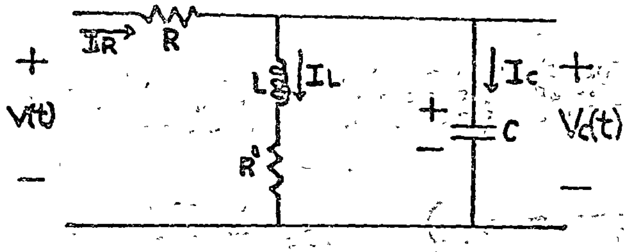


Figura 3

La resistencia óhmica se puede medir directamente(con un óhmetro de CD),pero la resistencia por histéresis se tiene que medir de una manera indirecta, a partir del comportamiento del sistema,(o hacer un análisis complejo del material del núcleo).

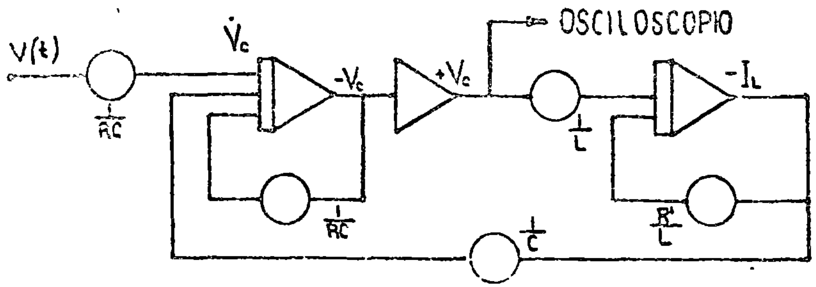
Si se definen V(t) como la entrada,Vc(t) como la salida,y como variables de estado las variables Vc(t) e $I_L(t)$, entonces el modelo de estado correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} V_c(t) \\ I_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R'}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_c(t) \\ I_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_c(t) \\ I_L(t) \end{bmatrix}$$

NOTA. Para elaborar éste modelado,ver página 6 Capítulo 4 de notas de Teoría.

Y uno de los diagramas que simulan las ecuaciones anteriores es:



Deberá observarse que la entrada al integrador que genera la variable I_L toma valores muy grandes (debido a los valores de los parámetros del sistema a simular). De aquí, el integrador que genera a I_L tenderá a saturarse inmediatamente. Para evitar ésta situación, la variable I_L deberá escalarse por amplitud.

Escalamiento por amplitud.

La respuesta de entrada nula del circuito anterior, como la de un análogo RLC, tiene una componente oscilatoria cuya frecuencia angular es aproximadamente $\omega_m = 1/\sqrt{LC}$

Supóngase que el amplificador que produce V_c lo hace a escala real, es decir, 1 volt del amplificador corresponde a 1 volt del circuito RLC. Supóngase además que tal voltaje es de la forma $V_c(t) = 10 \operatorname{sen} \omega_m t$; entonces, a la salida del segundo integrador habrá:

$$-I_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t 10 \operatorname{sen} \omega_m \tau \, d\tau = \frac{1}{L\omega_m} 10 \cos \omega_m t$$

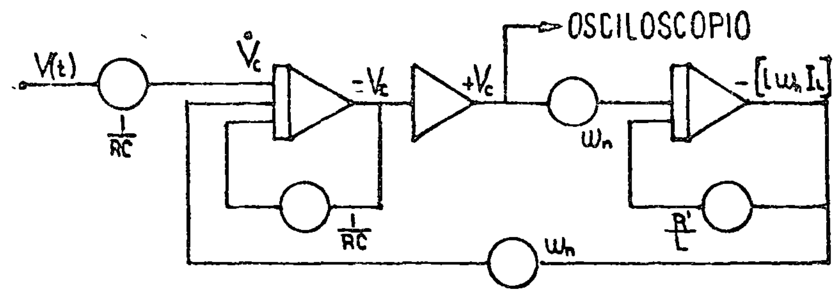
que será una senoide de amplitud diferente a la primera, por un factor de $1/L\omega_m$. Si este factor es mayor que la unidad, entonces $|I_{L\,max}| > 10$ y ésto implica que se saturará el amplificador que produce $I_L(t)$ durante la simulación.

Para evitar la saturación se requiere escalar la variable $I_L(t)$ de forma que $|I_L|_{max} \doteq 10$. Un factor de escala que cumple con ésto es $1/1/L\omega_m$ (vea 4.3 de la introducción teórica). Entonces

$$1/\frac{1}{L\omega_m} = L\omega_m \qquad L\omega_m |I_L|_{max} = L\omega_m \cdot \frac{1}{L\omega_m} \cdot 10 |\cos \omega_m t|_{max} = 10$$

Observe que para obtener éste escalamiento es necesario: al multiplicar el potenciómetro que está entre los integradores que generan V_c e I_L por el factor de escala $(L\omega_m)$, Para que V_c no se altere, se debe multiplicar el valor del potenciómetro que está entre los integradores que generan I_L y V_c, por el inverso del factor de escala, EL cual es $1/L\omega_m$.

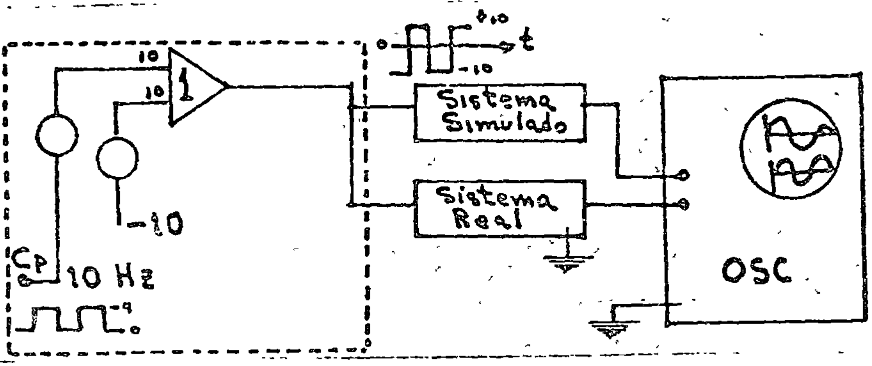
El diagrama escalado se muestra en la figura siguiente.



Al compararse con el anterior diagrama, se debe notar que la única variable que resultó afectada fué la corriente del inductor y L que se convirtió $(L\omega I_L)$.

EXPERIMENTO I

Determinación de R'. Para encontrar R' se aplica la misma entrada al circuito real y a su modelo, observéndose las dos respuestas en un osciloscopio. Para éste fin, se hacen las siguientes conexiones.



La señal de entrada (V(t)) a los dos sistemas (real y simulado) es una onda cuadrada de unos 10 Hz y de -10 a +10 volts de amplitud, que es generada por el sumador 1.

En nuestro laboratorio se cuenta con tres circuitos denominados A,B y C que tienen la misma configuración de elementos R,L y C pero de valores diferentes, los cuáles usaremos en nuestra práctica como sistema real.

R1 ¿Cual circuito esta usted empleando como sistema real? A,B o C?

Las respuestas real y simulada deben parecerse en frecuencia.

Nótese que la respuesta con R'=0 corresponde al modelo de la fig 2. La respuesta simulada se parece a la real. En que característica difieren más las respuestas con R' = 0? (amplitud, amortiguamiento, frecuencia) R2.

Obtendremos un valor para R' que haga al modelo comportarse como el sistema. Ajústese R' hasta obtener dos respuestas lo mas parecido posible. ¿Cuánto vale el potenciómetro de R'? R3. ¿Cuánto vale R'? R4.

Una vez asegurada la bondad del modelo, podemos utilizarlo para estudiar las propiedades del circuito RLC que son mas difíciles de observar y medir directamente del sistema físico. Por ejemplo, con el modelo es muy fácil dar condiciones iniciales arbitrarias a las variables de estado.

EXPERIMENTO II. Evolución del estado nulo.

Se trata de determinar $x(t) = \emptyset(t,u,0,0)$ para tiempos grandes y cuando u=10 volts.

Para hacer ésta medición, eliminaremos la onda cuadrada V(t) que hemos usado para alimentar a los sistemas real y simulado. Ahora alimentaremos a nuestros sistemas con un voltaje positivo de 10 volts (obtenible de las fuentes de referencia de la computadora analógica).

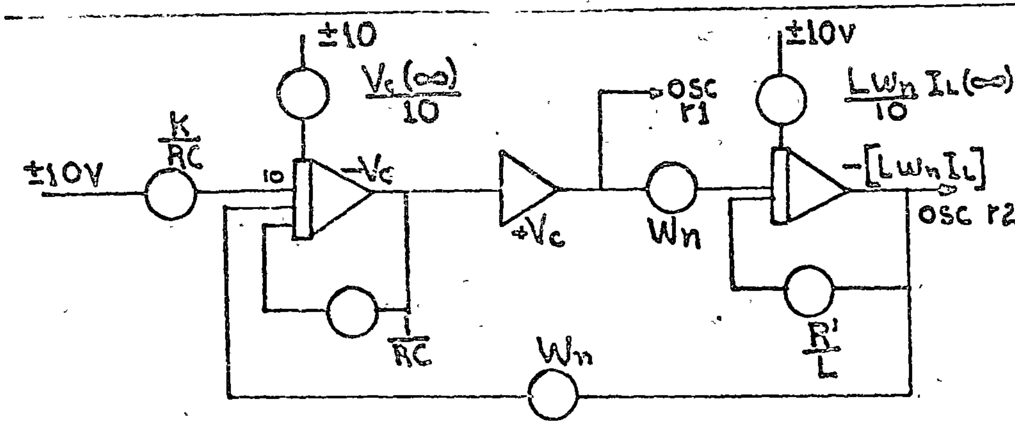
Una vez hecho ésto, oprima el botón de modo de operación OP de la computadora y mida la salida de los amplificadores que generan I_L y V_c.

Una vez hecha la medición de I_L y V_c, tome en cuenta los factores de escala por amplitud. Entonces el vector de estado cuando el tiempo tiende a infinito es: R5.

Para la siguiente experiencia, el vector de estado de la respuesta 5 tómelo como estado inicial del sistema, conservando la misma entrada u= 10 volts, pero a través de un potenciómetro y una ganancia de 10 en el integrador, (ver figura siguiente). El diagrama de computadora quedará completo si se conectan potenciómetros de condiciones iniciales a la entrada IC de los integrados res. Ia respuesta se observa en el osciloscopio en operación repetitiva. Si el potenciómetro de entrada se pone en K=0 inicialmente, ¿ con que valor del potenciómetro se obtiene un vector de estado x(t) = Cte? R6.

La entrada u(t) necesaria es entonces: R7.

Finalmente, como se explica lo anterior? ¿ Que está sucediendo? R8.



PRACTICA III MS

CONTROL DE POSICION.

Objetivos:

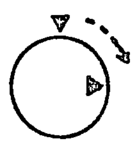
1) Alambrar un sistema que controle una posición angular.

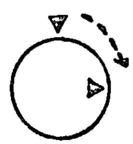
2) Modelar en forma de reogramas el sistema y a partir de él determinar su función de transferencia.

I - Servo de Posición: Real e Ideal.- Un control de posición puede tomar diversas formas dependiendo de aquello cuya posición se va a controlar. Por ejemplo, la posición vertical de una horquilla de montacargas, la posición de un buril de un torno de control numérico, la posición (angular) de una antena parabólica para enlace telefónico vía satélite, la posición de un elevador antes de abrirse la puerta, cuya posición también ha de controlarse. En esta práctica se estudiará un control de posición angular.

Las experiencias que se logran son directamente trasladables prácticamente a todos los controles de posición. Todos ellos tienen señal de error, ganancia de malla, fricción, inercia, límites a la velocidad, etc.

Nuestro problema central es hacer que una perilla "de salida" gire por acción del sistema de control hasta una posición idéntica a la de otra perilla "de entrada" que nosotros giramos con los dedos.


ENTRADA

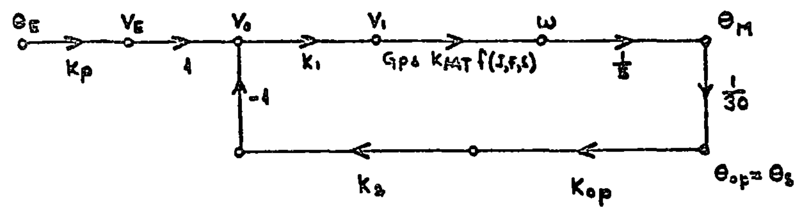

SALIDA

¿Cómo nos gustaría que respondiera la perilla de salida? ¿Cuáles son las características del servo ideal?

La respuesta no es única. Podríamos pedir que la posición de la salida fuera idéntica a la de entrada en todo tiempo. Que el sistema respondiera instantáneamente y con precisión absoluta. Pero ésto no es siempre deseable. (Además, nunca es posible). No queremos que la puerta de un elevador se cierre demasiado rápido, pues no daría tiempo a la gente de quitarse de su camino. Si la respuesta no es instantánea, habrá que especificar el tipo de movimiento que es conveniente entre dos posiciones.

El medio que utilizaremos para mover la perilla de salida es un motor de corriente directa controlado por armadura. La velocidad de este motor es aproximadamente proporcional al voltaje aplicado. El voltaje que se aplica al motor es proporcional a la diferencia de posición entre entrada y salida. Si la diferencia es grande, el motor responderá rápidamente con un movimiento que tiende a anular dicha diferencia de posición. Si la diferencia es cero, el voltaje es cero, sin embargo el motor puede seguirse moviendo por razón de su inercia. En este caso el control podría incluso ser inestable.

El control de posición se puede representar en forma de reograma de la siguiente manera:



Se efectuaron las siguientes asignaciones:

$K_p = K_{IP} = K_{op}$ = ganancia de los potenciómetros de entrada y salida.

K_1 = ganancia del atenuador de malla directa.

K_2 = ganancia del atenuador de malla de realimentación.

G_{pA} = ganancia del preamplificador.

f (J, F, S) = función de la inercia J, la fricción F y la variable S que representa la dinámica del motor.

K_{MT} = ganancia del motor

R1.- Obtenga la función de transferencia θ_s/θ_e considerando f (J, F, S) = $\frac{1}{1+\tau_m s}$

R2.- Determine:

a) Ganancia de trayectoria directa.

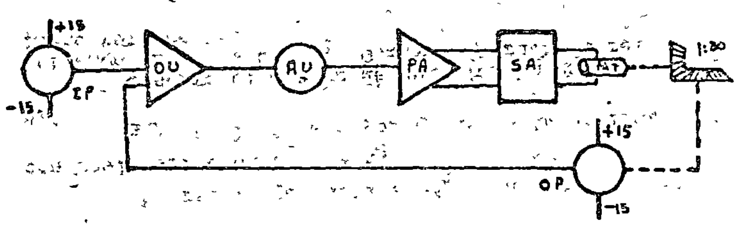
b) Ganancia de realimentación.

c) Ganancia de malla.

d) Señal de error.

II CONTROL BASE

Alambre el siguiente sistema.



No olvide conectar la realimentación. Ajuste el cero del PA y OU como se hizo con anterioridad. Tenga cuidado al manejar los acoplamientos que se utilizan para unir el potenciómetro OP con la flecha lenta (a través de la reducción de engranes) del motor. Alínea las flechas lo mejor posible. Ajuste la ganancia de los atenuadores.

$$K_1 = 0.2 \quad y \quad K_2 = 1$$

Si el servomecanismo se desboca, apáguelo nuevamente. Puede estar equivocada la polaridad del potenciómetro de salida. Corríjala invirtiendo las conexiones de $\pm$ 15 volts sobre el OP.

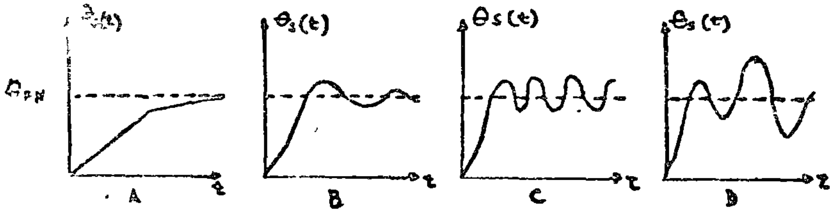
Cada vez que se pida un giro del potenciómetro de entrada IP, se implica un giro brusco con los dedos de 0° a 45°, aproximadamente. (O de 45° a 0°).

Gire IP. El potenciómetro de salida OP debe girar y finalmente ocupar una posición parecida a la de IP. Si OP gira en sentido contrario a IP, cambiar las conexiones de $\pm$ 15 volts de IP.

Primero se observarán las respuestas del sistema al variar la ganancia de la trayectoria directa dada por el atenuador AU.

Auxíliese de un osciloscopio para determinar sus respuestas.

En forma aproximada, las repuestas del servomecanismo tendrán alguna de las siguientes formas:



Diga qué forma tiene la respuesta, identificándola con la letra A, B, C ó D, para los siguientes valores de AU: (K_2=1)

Valor K_1	posición de AU	respuesta No.
0.05	0.5	R3
0.1	1.0	R4
0.2	2.0	R5
0.4	4.0	R6
1.0	10.0	R7

Note que para pequeños valores de AU es posible girar IP sin que responda OP. (Verifíquelo con AU = 1, es decir K = 0.1) Esto se debe a que los contactos del motor introducen fricción estática en el rotor. El resultado es una "zona muerta". Cuando el voltaje aplicado al motor es

es pequeño, el rotor no tiene el par suficiente para despegarse, no gira y no hay respuesta. El efecto de la zona muerta es hacer poco preciso al servo de posición.

Mida la zona muerta en forma aproximada para K_1 = 0.05, moviendo despacio IP hasta que OP comienze a responder. R8 (En grados).

Ahora se observará el efecto de variar la ganancia de realimentación. Ajuste K_1=0.20 y agregue otra conexión de realimentación entre OP y OU; así la ganancia de realimentación K_2=2.0 .

Compare las respuestas de K_1=0.2 , K_2= 1.0 con la de K_1= 0.2 , K_2= 2.0 .

R10 ¿Cual es mas rápida? (frecuencia)

R11 ¿Cual se amortigua mas rápido?

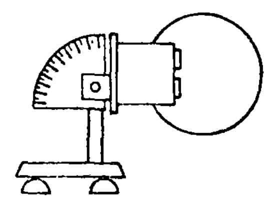
R12 ¿Cual es mas precisa en su condición estática?

Conteste: Primera o segunda.

Observe la ganancia θ_S/θ_E para las respuestas con realimentación K_2=1 y K_2=2.

R13 ¿Cual tiene mayor ganancia de entrada-salida?

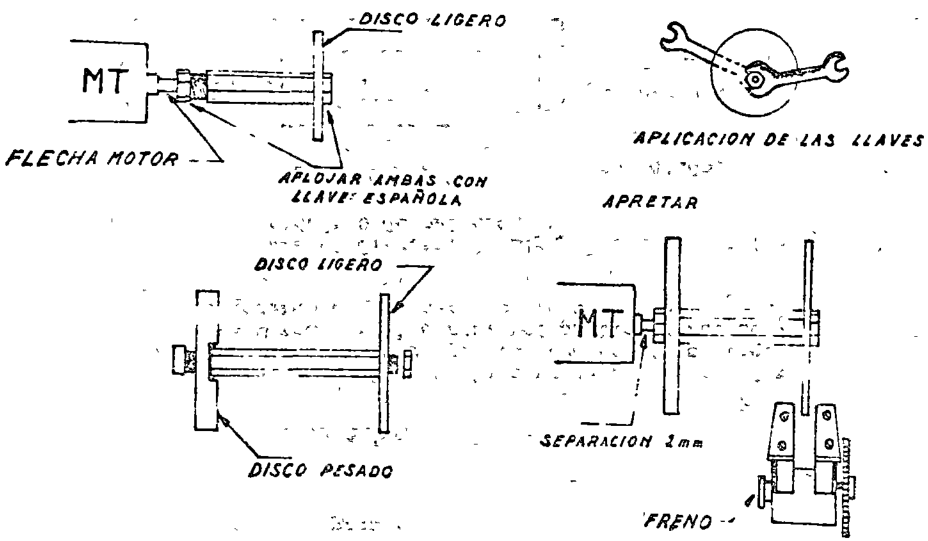
Observe el efecto de aumentar la carga de tipo fricción viscosa. Con K_1 =0.2 y 0.6 pruebe a meter el freno totalmente.



¿Que efectos tiene el freno sobre las respuestas? R14.

Observe el efecto de aumentar la inercia J. Para ésta prueba, ajuste de nuevo K_1= 0.2, K_2=1.0 , freno en 4.0.

Utilizando las llaves españolas afloje el disco de inercia ligero y deslize el ensamble fuera de la flecha del motor. Inserte el disco de inercia pesado en el otro extremo del ensamble, sin apretar ninguna tuerca. Deslice el ensamble de nuevo sobre la flecha y apriete suavemente ambas tuercas.



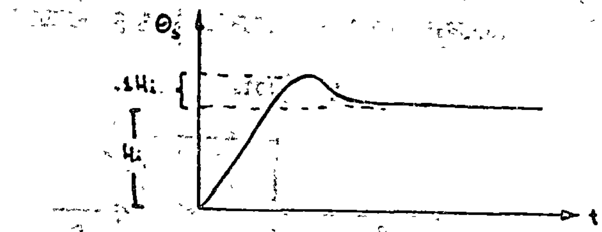
Observe la forma de las respuestas a giros bruscos para K_1 = 0.1 , 0.2 , 0.4.

R15 ¿ Cual es el efecto de aumentar J?

Hay dos formas sencillas de compensar el sistema cuando tiene exceso de inercia:

a) Aumentar la fricción viscosa para que el sistema sea mas lento. b) Agregar una realimentación del tacogenerador TG al OU. Recuerde que un lado de TG se conecta a COM y el otro a OU.

III. Diseño . Deseamos obtener un control de posición cuya respuesta a escalón sea de la forma:



¿Que valores de AU y θ (posición del freno) emplea? R16.

ACCIONES DE CONTROL.

CA1100
PRACTICA [illegible]CA

OBJETIVOS:

a) Observar el desempeño del sistema para las diferentes acciones de control.

b) Ver el efecto de la ganancia de malla directa para un control proporcional.

T E O R I A

En los sistemas de control de malla cerrada un controlador procesa la señal de error para generar una acción controladora que tienda a reducir el error. Los controladores se clasifican de acuerdo a la manera en que procesan la señal de error.

La FIGURA 1, muestra el diagrama de bloque de un controlador junto con un elemento de medición.

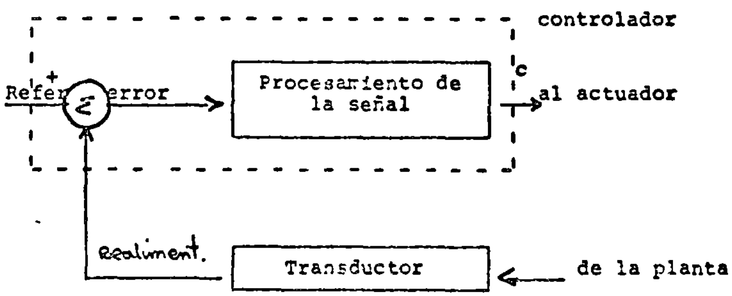


FIGURA 1.

Algunas de las formas más comunes de procesar la señal -- son:

1.- Controladores ON-OFF.

La señal de control toma cualquiera de entre 2 valores distintos según la magnitud del error.

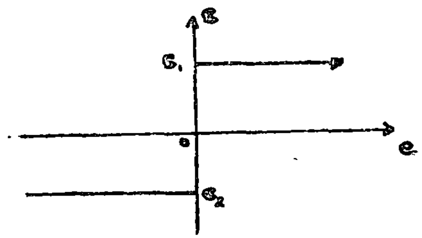


FIGURA 2.

2.- Controladores proporcionales.

Obsérvese que estos presentan un error de estado estable; ya que si $e = 0$ c será también igual a 0.

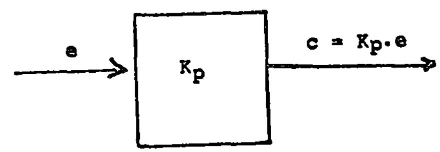


FIGURA 3.

3.- Controladores proporcional más integral.

Hace que la señal de control varíe 2 veces más rápido si el error se duplica, y además le suma a la integral del error un valor proporcional a él.

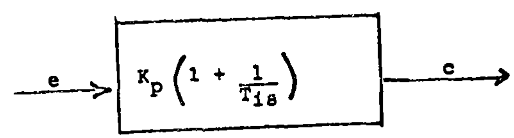


FIGURA 4.

4.- Controladores proporcional + integral + derivativo.

El factor derivativo de gran utilidad en los períodos transitorios, se suma con las características de un control proporcional + integral.

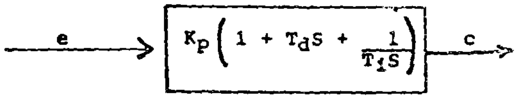


FIGURA 5.

El funcionamiento de las diferentes acciones de control se puede visualizar si suponemos una desviación escalón:

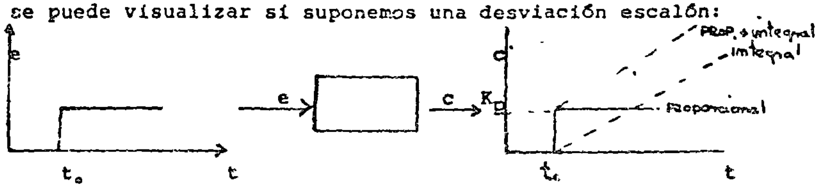
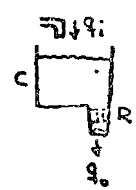


FIGURA 6.

Para más información sobre acciones de control consúltese: Modern Control Eng.- Katsushiko Ogata PP.

1.- CONTROL PROPORCIONAL

La FIGURA 7 muestra la estructura del diagrama de bloques del sistema con control proporcional: 1) Obtenga el modelado de la planta (tanque-válvula de desague); y coloque en cada bloque la función de transferencia correspondiente. Considerando:



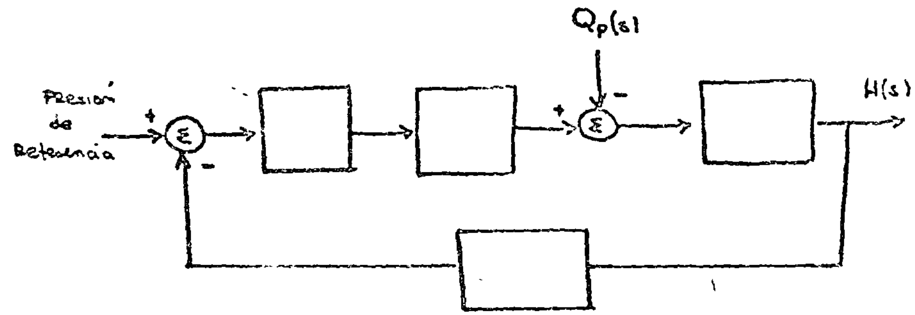
K_p = Función de transferencia del controlador.

K_T = Función de transferencia del transductor.

Q_p = Perturbación al gasto de desague. Sucede al abrir la valvula #2.

$\rho g = \gamma = 1$ para el agua

K_v = funcion de transferencia de la valvula

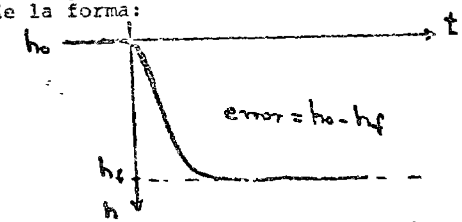


NOTA: Obsérvese que la perturbación Q_p se considera independiente del nivel h.

2) Obtenga la función de transferencia $\frac{H(s)}{Q_{P}(s)}$ y a partir de ella calcule el error de estado estable. Auxíliese del teorema del valor final.

3) Determine experimentalmente el error de estado estable para PB = 40, 20, 10 y 5%. Para ello ajuste la zona de transmisión del transductor a 20% y el ajuste de cero a 3 psi.

La respuesta a perturbación escalón del sistema es de la forma:



Dependiendo ésta de las características del sistema.

Fije $h_o \approx$ 30 cm, introduzca la perturbación y una vez asentado el transitorio determine el error.

4) ¿Qué efecto tiene la ganancia sobre el error de estado estable?

¿Qué efecto sobre el tiempo de asentamiento?

¿Si aumentasemos la ganancia indefinidamente que sucedería?

5) ¿Qué medida tomaría usted para reducir el error de estado estable?

¿Qué medida para anularlo?

LUGAR DE LAS RAICES DE UN SISTEMA DE 2o. ORDEN

PRACTICA III PCM140

Objetivos:

a) Que el alumno obtenga a partir de datos experimentales el lugar geométrico de las raices del Sistema Neumático de control de posición.

b) Que a partir de la respuesta a escalón determine los parámetros del sistema.

NOTA: El reporte de la práctica debe de acompañarse de las gráficas obtenidas en clase debidamente identificadas, así como la respuesta a las últimas preguntas de la introducción teórica.

Procedimiento:

La técnica del lugar de las raices requiere expresar la función de transferencia en la forma $\dfrac{K_1 q(s)}{P(s) + K_1 q(s)}$

R1.- Exprese la función obtenida en la pregunta 8 de la introducción teórica en esta forma, denotando $K_1 = K/_{2G}$.

R2.- Obtenga el lugar geométrico de las raices de la ecuación característica, definiendo las acotaciones (en función de ζ_0) para $K_1 = 0$ y el punto de ruptura.

R3.- Para qué ganancia se presenta el punto de ruptura.

Para modelar el sistema de la Figura I, es necesario obtener los valores numéricos de K_1 y ζ_0 ; los cuales pueden determinarse a partir de los parámetros ω_n y ξ de la forma normalizada de la ecuación de segundo orden:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

(vea pregunta 9 de la introducción teórica).

R4.- Resuelva la ecuación normalizada y determine sus raices para una determinada ganancia, anótelo en la Figura II.

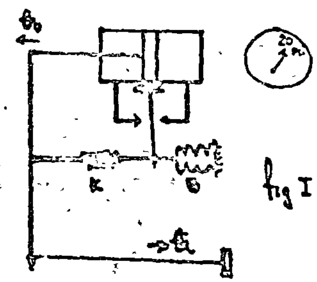


FIGURA I.

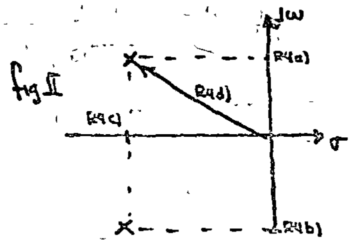


FIGURA II.

La respuesta a escalón del sistema se halla definida por:

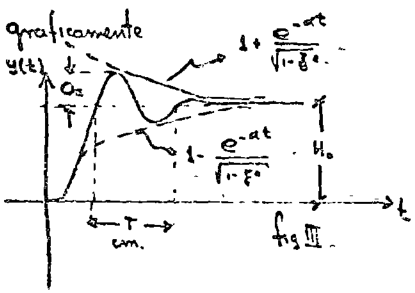


FIGURA III

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_o t + \phi)$$

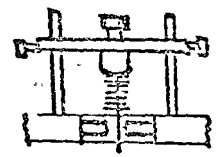
Donde $\alpha \triangleq$ amortiguamiento real $= \xi\omega_n$

$\xi \triangleq$ amortiguamiento relativo

$\omega_o \triangleq$ frecuencia real $= \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Obsérvese que $y(t)$ está compuesto de un producto de una - exponencial decreciente y un seno con frecuencia real ω_o. ω_o puede determinarse a partir de la medición del período T. (Para medir el período real, es necesario dividir T entre la velocidad del papel v = 2.66 cm/seg.).

R5.- Aplique manualmente un escalón al sistema y determine ω_o para mínima ganancia.



El sobrepaso máximo Mp, se define como $Mp = \frac{O_s}{H_o}$ (vea Figura III) y depende del amortiguamiento relativo ξ por la siguiente relación:

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

que gráficamente se puede representar con la siguiente Figura IV.

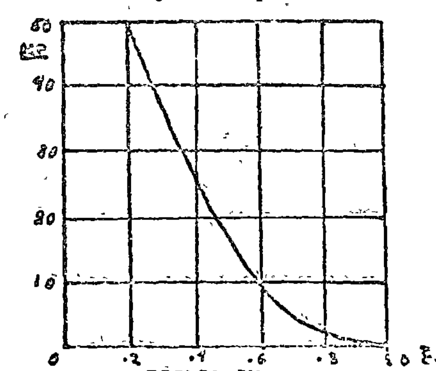


FIGURA IV.

R6.- De la gráfica de respuesta a escalón mida M_p y determine el valor de ξ

R7.- A partir de ω_o y ξ calcule ω_n, K_1 y ζ_o (Cuenta con 2 ecuaciones simultáneas con 2 incógnitas).

R8.- Sustituya estos valores numéricos en el lugar de las raíces dibujado en R2.

R9.- Repita el procedimiento para la chapaleta en la siguiente posición (FIG V)

Determine ω_n, ξ, K_1 y ζ_o

Repita en la misma gráfica, R8 para estos nuevos valores.

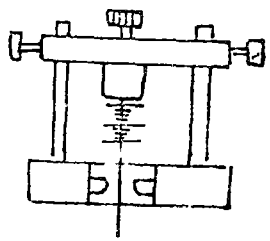


fig V

R10.- Compare los valores de K_1 obtenidos. ¿Porque se hallan dispuestas las raíces de esa manera?

BLOQUE IV

IV EAI	Respuesta en frecuencia.
IV MS	Estabilidad y lugar geométrico de las raíces de un control de posición.
IV PT	Respuesta a la frecuencia en el entrenador de procesos.

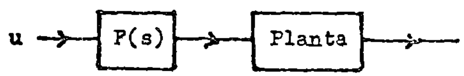
PRACTICA IV EAI

RESPUESTA EN FRECUENCIA

Objetivo. Ejercitar uno de los métodos más comunes en el análisis y diseño de un sistema físico: El diagrama de Bode.

I. Problema. Se tiene una planta de control con amortiguamiento muy bajo. Para evitar la resonancia se antepone un filtro en cascada, con función de transferencia

$$F(s) = \frac{s^2 + 3600}{s^2 + 60s + 800}$$



Haga un diagrama de polos y ceros de F(s). R1.

Según ésto, cuanto vale el amortiguamiento para el filtro? R2.

¿ A que frecuencia tiene resonancia la planta, es decir, que frecuencia elimina el filtro? R3.

Para simular el filtro, es necesario encontrar un diagrama de bloque que simule F(s), es decir, que tenga la misma función de transferencia.

Una manera de encontrar un diagrama de bloque, es generar una ecuación diferencial a partir de F(s). Esto se logra introduciendo una variable intermedia X(s).

$$\text{Si} \quad F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s^2+3600)\,X(s)}{(s^2+60s+800)\,X(s)}$$

Entonces Y(s)/U(s) pódría ser el resultado de tomar la transformada de Laplace del sistema:

$$y(t) = \ddot{x}(t) + 3600\,x(t)$$

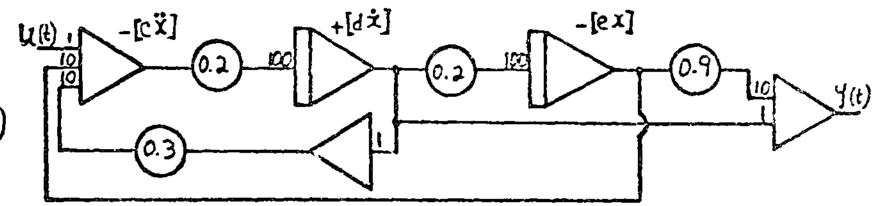
$$u(t) = \ddot{x}(t) + 60\,\dot{x}(t) + 800\,x(t)$$

Con estas ecuaciones se puede generar el diagrama de bloque. Es necesario escoger un escalamiento por amplitud tal que las variables intermedias $\ddot{X}(t)$, $\dot{X}(t)$ y $X(t)$ todas tengan amplitudes del mismo orden de magnitud para las frecuencias de interés.

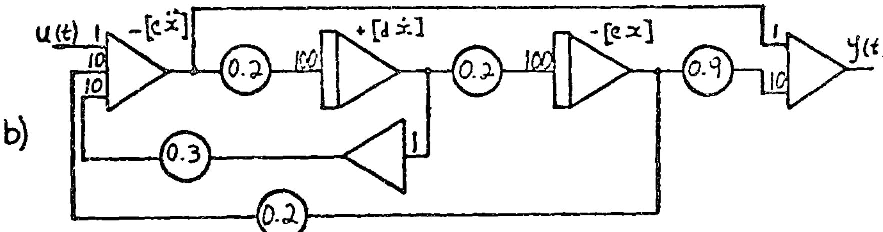
Las frecuencias que se van a analizar están en el intervalo 10 hasta 200 rads/seg.

Escogiendo como frecuencia de escalamiento 20 rads/seg. nos queda un diagrama escalado: a, b ó c R4.

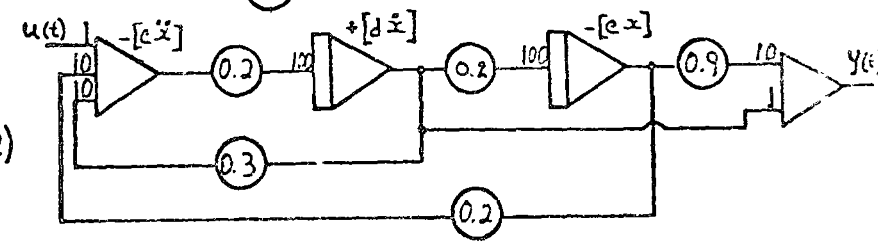
a)



b)



c)

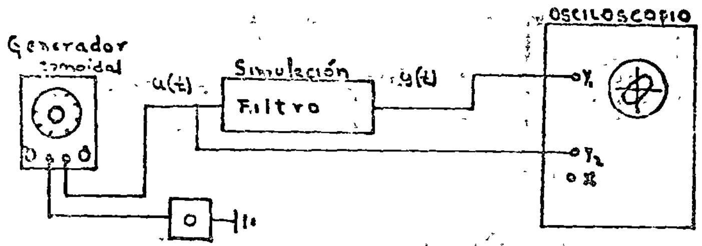


R4 = $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ ó $\boxed{C}$

¿Cuanto valen las constantes de escalamiento c, d y e? R5 , R6 y R7.

(Consulte I 4-3 tecnica de escalamiento por amplitud, en la introduccion a la computación analógica.)

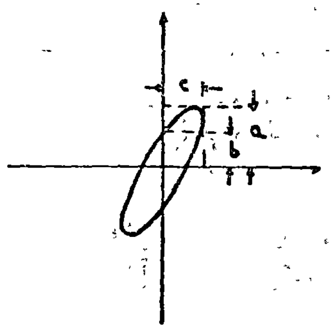
Encuentre el diagrama de Bode en magnitud y fa - se. R8.



Hay dos formas sencillas de medir la fase:
a) Por plano fase de salida Vs. entrada
b) Observando salida y entrada ambas contra el tiempo y midiendo el defasamientos de picos.

Medición de defasamientos en plano fase:

Conéctese u(t) y y(t) a los ejes X & Y del osciloscopio, respectivamente. Ajústese la perilla de amplitud hasta obtener una figura grande y sin saturaciones en la pantalla. Se debe obtener una figura elíptica, composición de las sinusoides u(t) y y(t). Ver figura siguiente

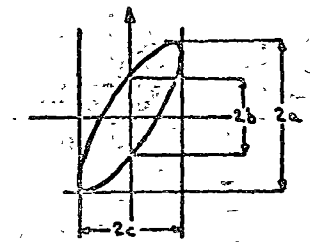


Magnitud: $|F(s)| = \frac{a}{c}$

fase $\angle F(s) = \operatorname{Sen}^{-1} \frac{b}{a}$

No se olvide tomar en cuenta las escalas de las perillas de amplitud X y Y al medir a, b y c. Puede re-

sultar más cómodo medir 2a, 2b, y 2c:



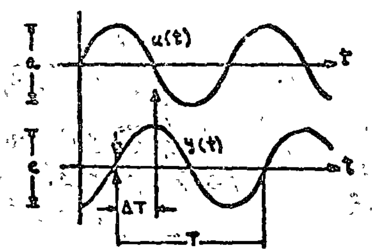
Medición de defasamiento comparando contra tiempo:

Se conectan u(t) y y(t) a los ejes Y_1 y Y_2 de un osciloscopio de dos canales. Se ajusta el barrido interno hasta alcanzar a ver en la pantalla solo 2 o 3 ciclos de ambas señales

magnitud $= \frac{c}{a} = |F(s)|$

fase: $\frac{T}{360^\circ} = \frac{\Delta T}{\angle F(s)}$

$\angle F(s) = \frac{\Delta T}{T} \cdot 360^\circ$



No olvidar escalas de Y_1 y Y_2. La escala de X es irrelevante si se conoce la frecuencia.

Utilize la hoja logarítmica anexa para trazar el diagrama de Bode.

PRACTICA IV MS

AMALISIS DE ESTABILIDAD Y LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES PARA UN CONTROL DE POSICION EN EL SERVO DE D.C.

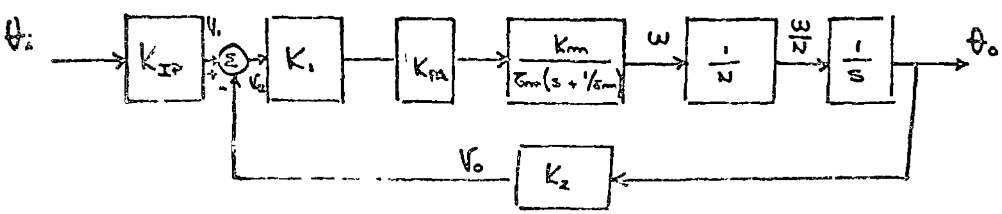
Objetivo. a) Determinar a partir de datos experimentales, el lugar geométrico de las raíces.

b) Obtener a partir del lugar de las raíces, la ganancia crítica (Cruce del eje imaginario).

c) Compensación del sistema a partir de la modificación del lugar de las raíces.

NOTA. Para la realización de ésta práctica, lea el procedimiento empleado en la práctica III PCM y repase los conceptos del lugar geométrico y análisis de estabilidad de Routh-Hurwitz. Las preguntas que deben entregarse resueltas antes de elaborar la práctica, son R1,2,3,6,7,10,11 y 12.

TEORIA. Un control de posición se puede modelar mediante el siguiente diagrama de bloques:



Donde: θ_i :Posición angular del potenciómetro de entrada.

θ_o :Posición angular del potenciómetro de salida.

K_1 :Constante del atenuador.

K_{PA} :Constante del preamplificador.

K_m :Constante de velocidad del motor.

τ_m :Constante de tiempo del motor.

N :Relación de engranes.

Preg. 1. Obtenga la función de transferencia $\frac{\theta_o}{\theta_i}$ y exprese la ecuación característica como $1+\frac{K_T}{s(s+1/\tau_m)} = 1+G(s)H(s)$

Donde $K_T = \frac{K_1 K_{amp} K_m K_2}{N}$

Preg. 2. Obtenga el lugar geométrico de las raíces $\infty > K_T > 0$, sabiendo que $\tau_m = 0.25$ seg. ¿Para que valor de K_T se hace inestable el sistema?

Preg. 3. Calcule la razón de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n del sistema para K_T igual a 10. (Vea práctica III PCM).

AJUSTES PREVIOS

Con el propósito de fijar una ganancia K_T conocida, que se pueda medir en forma de voltaje a la salida del tacogenerador, realice los siguientes ajustes:

a) Alambre el sistema para un control de velocidad.
b) Ajuste el cero del PA y el CU.
c) Fije K_1 a un valor de 0.5 y mueva IP hasta que el motor no gire en ningún sentido. (con ésta atenuación se reduce el efecto de zona muerta).

d [illegible] igual a cero. (Para evitar que se desboque el motor al aplicar una entrada).
e Gire IP un ángulo de 57° respecto a la posición original. (Esto equivale a introducir un radián de error al sistema).

Después de realizados éstos ajustes, la ganancia K_T cumple con la siguiente relación:

$$K_T = \frac{V_{TG}}{0.79}$$

Donde V_{TG}: Es el voltaje a la salida del tacogenerador.

Para fijarle un valor deseado a K_T, mueva la perilla del atenuador hasta obtener el voltaje adecuado en el tacogenerador.

El procedimiento anterior nos permite obtener una relación entre un parámetro que podemos medir (V_{TG}) y K_T.

Observe que ésta K_T es la misma para un control de velocidad que para un control de posición.

Por ejemplo. Si desea usted obtener un valor de K_T igual a 2, coloque el vóltmetro a la salida del tacogenerador y mueva la perilla del atenuador hasta leer un voltaje de 1.58.

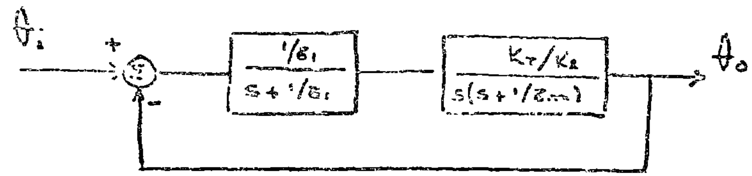
DESARROLLO DE LA PRACTICA

Realimente el sistema para un control de posición con K_T igual a 10.

Empleando como entrada una señal de onda cuadrada positiva de 0.2 Hz y 6 volts de amplitud (En lugar de la señal de IP, el cual se debe desconectar de la entrada de CU), Preg 4 : Determine ζ y ω_n. Ayuda: Para poder determinar los parámetros ζ, ω_n consulte la práctica III FCM. Para una mejor visualización de ω_m, auxíliese del filtro de AC de que dispone el osciloscopio.

R5. En la traza del lugar de las raíces obtenida en R2, señale las raíces obtenidas experimentalmente en R4. ¿Coincide el resultado experimental con el análisis teórico? ¿Porqué?

Si se introduce una constante de tiempo adicional en la trayectoria directa, el diagrama de bloques resultante queda como sigue:



Preg. 6. Obtenga el lugar geométrico de las raíces para esta nueva configuración considerando $\tau_1 = 0.1$ seg.

Preg. 7. Mediante el arreglo de Routh-Hurwitz determine el valor de K_T para el que el sistema se hace inestable.

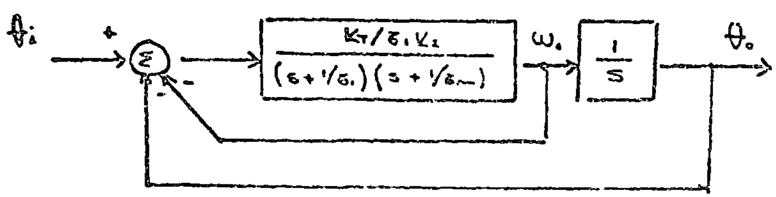
El efecto de introducir una constante de tiempo adicional en el MS se logra realimentando el OU con una impedancia capacitor-resistencia en paralelo (Selector de realimentación del OU en la posición 2)

Preg. 8. Aplicando al sistema la onda cuadrada empleada en R4 determine el valor de K_T que hace inestable el sistema. No rebase ése valor por que puede dañar el equipo. ¿ Que valor tiene K_1 ?

Preg. 9. Calcule el error relativo

$$e = \frac{\text{Valor teórico} - \text{Valor experim.}}{\text{Valor experimental}}$$

La compensación de éste sistema para aumentar el rango dinámico de ganancias en modo estable, se puede lograr realimentando la señal de velocidad simultáneamente a la señal de posición; en el diagrama de bloques esto se representa de la siguiente manera:



Preg. 10. Obtenga θ_o/θ_i

Preg. 11. Determine el lugar de las raíces para esta nueva configuración.

Preg. 12. ¿ Llega a hacerse inestable el sistema para algún valor de K_T ? Explique su respuesta.

Preg. 13. Compruebe sus resultados experimentalmente. (No olvide introducir aparte de la realimentación de posición, una realimentación de velocidad). Hágalo para K_1=1, 2,......,10.

ENTRENADOR DE PROCESOS

RESPUESTA A LA FRECUENCIA

PT-326
PRACTICA IV P(

OBJETIVO:

A partir del diagrama de Bode del sistema a malla abierta, se obtendrán algunos valores característicos del sistema a malla cerrada.

I.- MALLA ABIERTA

Un método muy empleado para obtener la traza de Bode de un sistema consiste en observar el efecto de la frecuencia en la amplitud y fase de la señal de salida, dado que la señal de entrada tiene una amplitud constante.

1).- Explique brevemente en qué consiste la traza de Bode y cuáles son sus características más sobresalientes.

2).- Para frecuencias 0.1 < f < 6 Hz, valor fijado de 35°C, ángulo del estrangulador 40° y banda proporcional del 100%. Obtenga el diagrama de Bode del sistema para malla abierta.

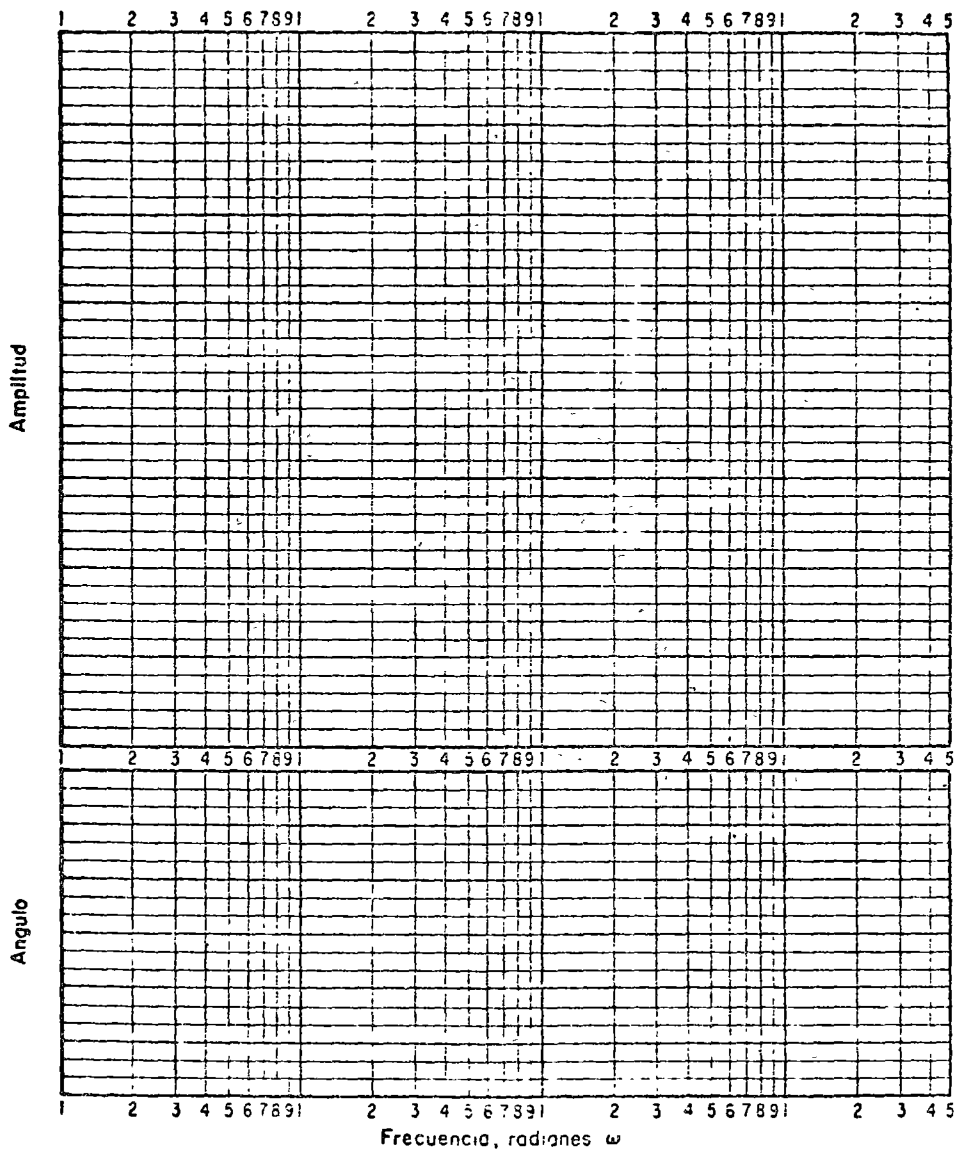
II.- MALLA CERRADA

Para obtener un sistema de malla cerrada puentee XeY.

3).- ¿Qué se entiende por margen de ganancia? Calcúlelo por la traza obtenida en el punto 2) y diga cuál es la ganancia mínima de oscilación.

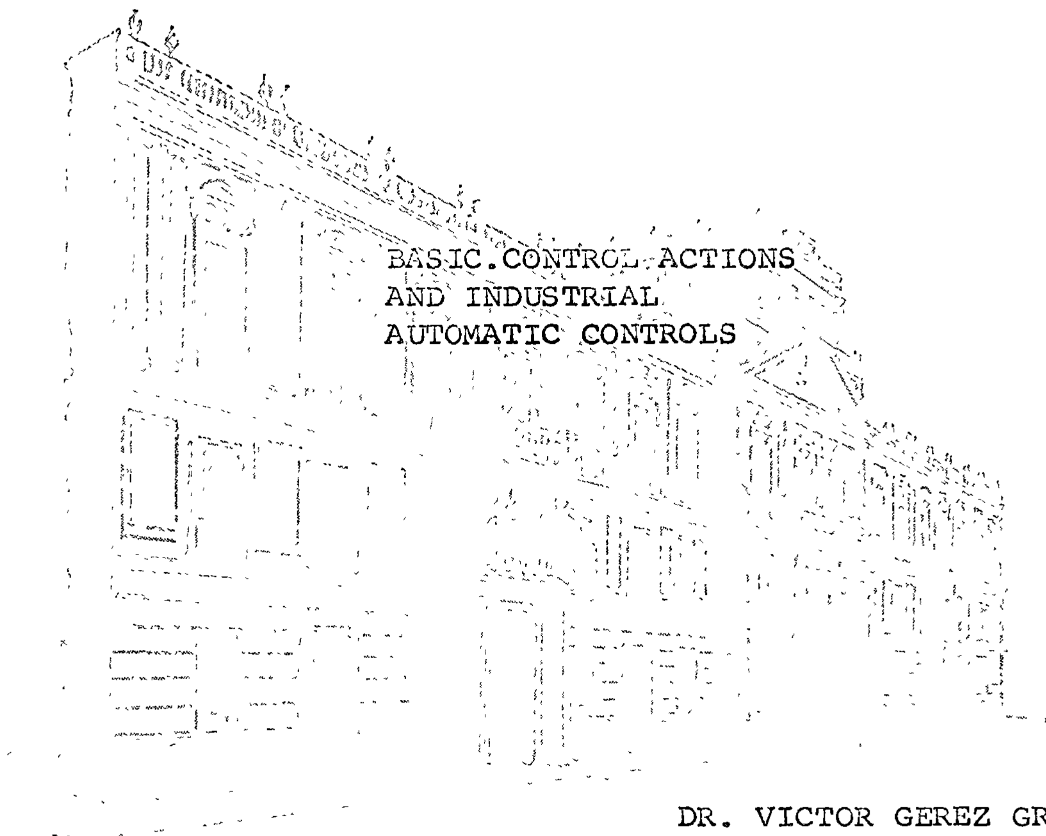
4).- Demuestre su resultado. Auxíliese de una onda cuadrada que puede obtener del generador de señales a una frecuencia de .2 Hz.

3).- Aumente el % PB al doble del valor obtenido en 3) ¿Qué sucede al sistema?. Grafique sus respuestas.


Amplitud
Angulo
Frecuencia, radianes ω

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO



BASIC CONTROL ACTIONS
AND INDUSTRIAL
AUTOMATIC CONTROLS

DR. VICTOR GEREZ GREISER

JUNIO DE 1976.

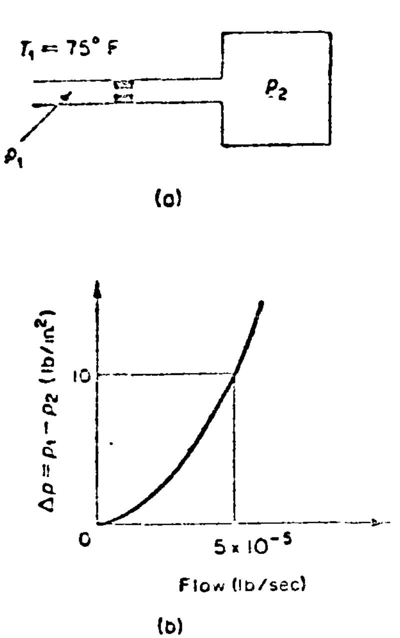


Fig. 4-63. (a) Pressure system; (b) Δp versus flow curve.

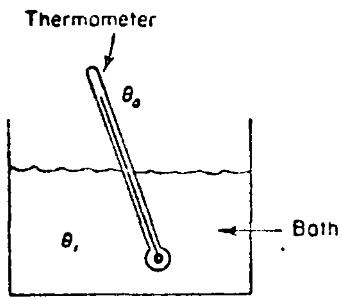


Fig. 4-64. Thermometer system.

ll is 3 2 oz. Assume also that the specific heats of the thermocouple and thermal well the same.

ROBLEM B-4-14. Figure 4-65 is the block diagram of an engine-speed control system. e speed is measured by a set of flyweights. Draw a signal flow graph for this system.

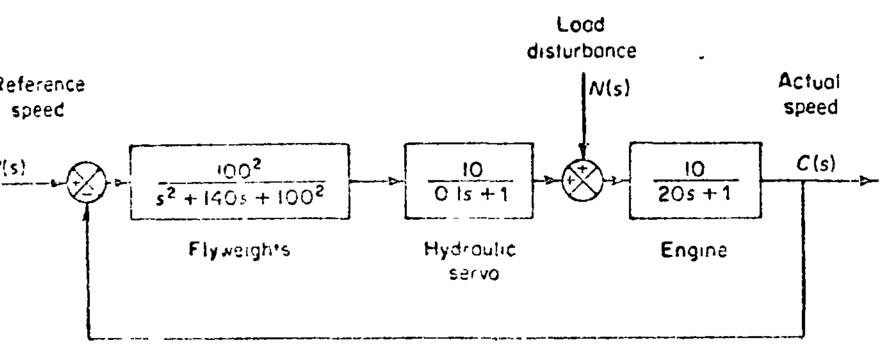


Fig. 4-65. Block diagram of an engine-speed control system.

VICTOR GEREZ

3

BASIC CONTROL ACTIONS AND INDUSTRIAL AUTOMATIC CONTROLS

5-1 INTRODUCTION

An automatic controller compares the actual value of the plant output wit the desired value, determines the deviation, and produces a control signal whic will reduce the deviation to zero or to a small value. The manner in which the auto matic controller produces the control signal is called the *control action.*

In this chapter, we shall present the basic control actions commonly used in industrial automatic controllers. First we shall introduce the principle of operation of automatic controllers and the methods for generating various control signals, such as the use of the derivative and integral of the error signal. Next we shall discuss the effects of particular control modes on the system performance. Then we shall give a brief discussion of methods for reducing the effects of external disturbances on the system performance. Finally, we shall introduce fluid amplifiers, present basic principles of fluidics, and discuss applications of fluidic devices.

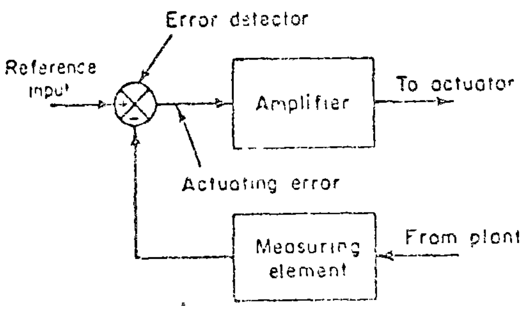
Classifications of industrial automatic controllers. Industrial automatic controllers may be classified according to their control action as

1. two-position or on-off controllers
2. proportional controllers
3. integral controllers

4. proportional-plus-integral controllers
5. proportional-plus-derivative controllers
6. proportional-plus-derivative-plus-integral controllers

Most industrial automatic controllers use electricity or pressurized fluid such as oil or air as power sources. Automatic controllers may also be classified according to the kind of power employed in the operation, such as pneumatic controllers, hydraulic controllers, or electronic controllers. What kind of controller to use must be decided by the nature of the plant and the operating conditions, including such considerations as safety, cost, availability, reliability, accuracy, weight, and size.

Elements of industrial automatic controllers. An automatic controller must detect the actuating error signal, which is usually at a very low power level, and amplify it to a sufficiently high level. Thus, an amplifier is necessary. The output of an automatic controller is fed to a power device, such as a pneumatic motor or valve, a hydraulic motor, or an electric motor.



3.2

Fig. 5-1. Block diagram of an industrial automatic controller and measuring element.

Figure 5-1 shows a block diagram of an industrial automatic controller together with a measuring element. The controller consists of an error detector and amplifier. The measuring element is a device which converts the output variable into another suitable variable, such as a displacement, pressure, or electric signal, which can be used for comparing the output to the reference input signal. This element is in the feedback path of the closed-loop system. The set point of the controller must be converted to a reference input of the same units as the feedback signal from the measuring element. The amplifier amplifies the power of the actuating error signal, which in turn operates the actuator. (Quite often an amplifier, together with a suitable feedback circuit, is used to alter the actuating error signal by amplifying and sometimes by differentiating and/or integrating it to produce a better control signal.) The actuator is an element which alters the input to the plant according to the control signal so that the feedback signal may be brought into correspondence with the reference input signal.

Self-operated controllers. In most industrial automatic controllers, separate units are used for the measuring element and for the actuator. In a very simple one, however, such as a self-operated controller, these elements are assembled

in one unit. Self-operated controllers utilize power developed by the measuring element and are very simple and inexpensive. An example of such a self-operated controller is shown in Fig. 5-2. The set point is determined by the adjustment of the spring force. The controlled pressure is measured by the diaphragm. The actuating error signal is the net force acting on the diaphragm. Its position determines the valve opening.

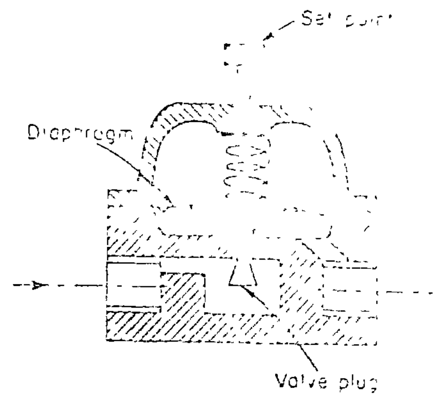


Fig. 5-2. Self-operated controller.

The operation of the self-operated controller is as follows: Suppose that the output pressure is lower than the reference pressure, as determined by the set point. Then the downward spring force is greater than the upward pressure force, resulting in a downward movement of the diaphragm. This increases the flow rate and raises the output pressure. When the upward pressure force equals the downward spring force, the valve plug stays stationary and the flow rate is constant. Conversely, if the output pressure is higher than the reference pressure, the valve opening becomes small and reduces the flow rate through the valve opening. Such a self-operated controller is widely used for water and gas pressure control. In such a controller, the flow rate through the valve opening is approximately proportional to the actuating error signal.

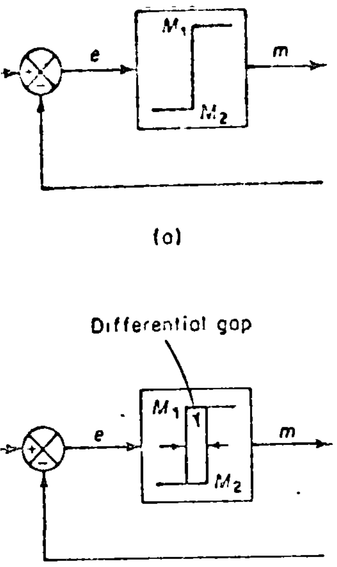
Control actions. The following six basic control actions are very common among industrial automatic controllers: two-position or on-off, proportional, integral, proportional-plus-integral, proportional-plus-derivative, and proportional-plus-derivative-plus-integral control action. These six will be discussed in this chapter. Note that an understanding of the basic characteristics of the various actions is necessary in order for the control engineer to select the one best suited to his particular application.

Two-position or on-off control action. In a two-position control system, the actuating element has only two fixed positions which are, in many cases, simply on and off. Two-position or on-off control is relatively simple and inexpensive and, for this reason, is very widely used in both industrial and domestic control systems.

Let the output signal from the controller be $m(t)$ and the actuating error signal be $e(t)$. In two-position control, the signal $m(t)$ remains at either a maximum or minimum value, depending on whether the actuating error signal is positive or negative, so that

$$m(t) = M_1 \qquad \text{for } e(t) > 0$$
$$= M_2 \qquad \text{for } e(t) < 0$$

where M_1 and M_2 are constants. The minimum value M_2 is usually either zero or



. 5-3. (a) Block diagram of an on- controller; (b) block diagram of on-off controller with differential).

$-M_1$. Two-position controllers are generally electrical devices, and an electric solenoid-operated valve is widely used in such controllers. Pneumatic proportional controllers with very high gains act as two-position controllers and are sometimes called pneumatic two-position controllers.

Figures 5-3(a) and (b) show the block diagrams for two-position controllers. The range through which the actuating error signal must move before the switching occurs is called the differential gap. A differential gap is indicated in Fig. 5-3(b). Such a differential gap causes the controller output $m(t)$ to maintain its present value until the actuating error signal has moved slightly beyond the zero value. In some cases, the differential gap is a result of unintentional friction and lost motion; however, quite often it is intentionally provided in order to prevent too frequent operation of the on-off mechanism.

Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-4. With two position control, the valve is either open or closed. Thus the water inflow rate is either a positive constant or zero. As shown in Fig. 5-5, the output signal continuously moves between the two limits required to cause the actuating element to move from one fixed position to the other. Notice that the output curve follows one of two exponential curves, one corresponding to the filling curve and the other to the emptying curve. Such output oscillation between two limits is a typical response characteristic of a system under two-position control.

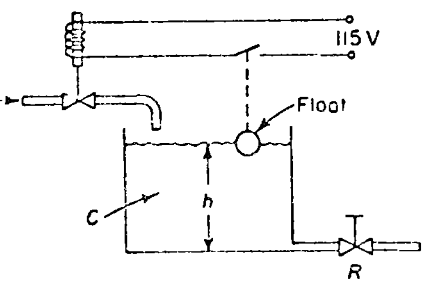


Fig. 5-4. Liquid-level control system.

From Fig. 5-5, we notice that the amplitude of the output oscillation can be duced by decreasing the differential gap. This, however, increases the number on-off switchings per minute and reduces the useful life of the component. The required of the differential gap must be determined from such considerations as e accuracy required and the life of the component. Further analysis of control stems with two-position controllers is deferred to Chapter 11.

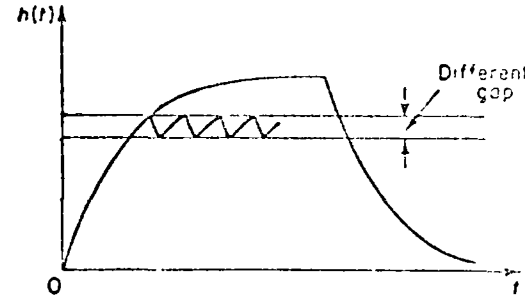


Fig. 5-5. Level $h(t)$ versus t curve for the system shown in Fig. 5-4.

Proportional control action. For a controller with proportional control action the relationship between the output of the controller $m(t)$ and the actuating error signal $e(t)$ is

$$m(t) = K_p e(t)$$

or, in Laplace-transformed quantities,

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

where K_p is termed the proportional sensitivity or the gain.

Whatever the actual mechanism may be and whatever the form of the operating power, the proportional controller is essentially an amplifier with an adjustable gain. A block diagram of such a controller is shown in Fig. 5-6.

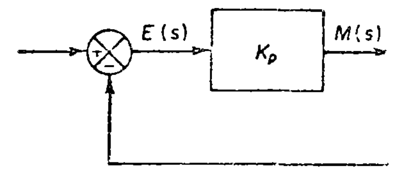


Fig. 5-6. Block diagram of a proportional controller.

Integral control action. In a controller with integral control action, the value of the controller output $m(t)$ is changed at a rate proportional to the actuating error signal $e(t)$. Namely,

$$\frac{dm(t)}{dt} = K_i e(t)$$

or

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t)\, dt$$

where K_i is an adjustable constant. The transfer function of the integral controller is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

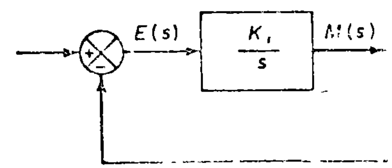


Fig. 5-7. Block diagram of an integral controller.

If the value of $e(t)$ is doubled, then the value of $m(t)$ varies twice as fast. For zero actuating error, the value of $m(t)$ remains stationary. The integral control action is sometimes called reset control. Figure 5-7 shows a block diagram of such a controller.

Proportional-plus-integral control action. The control action of a proportional-us-integral controller is defined by the following equation:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

the transfer function of the controller is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

here K_p represents the proportional sensitivity or gain, and T_i represents the tegral time Both K_p and T_i are adjustable The integral time adjusts the integral ntrol action, while a change in the value of K_p affects both the proportional and tegral parts of the control action The inverse of the integral time T_i is called the set rate. The reset rate is the number of times per minute that the proportional part f the control action is duplicated. Reset rate is measured in terms of repeats per inute. Figure 5-8(a) shows a block diagram of a proportional-plus-integral

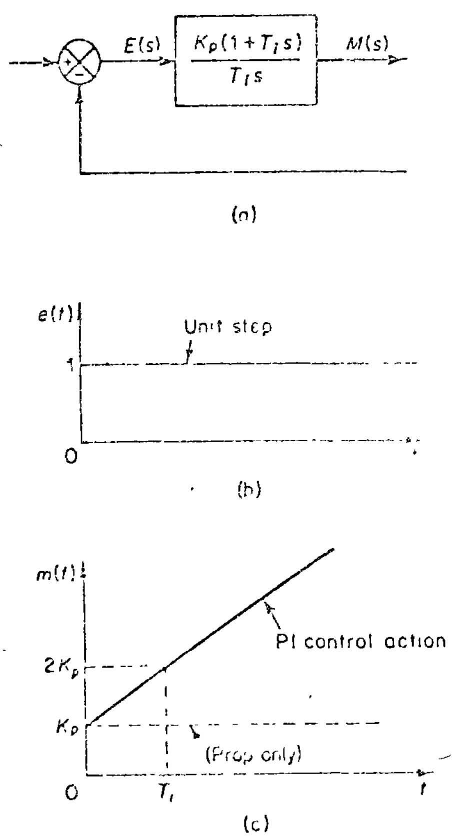


Fig. 5-8. (a) Block diagram of a proportional-plus-integral controller; (b) and (c) diagrams depicting a unit-step input and the controller

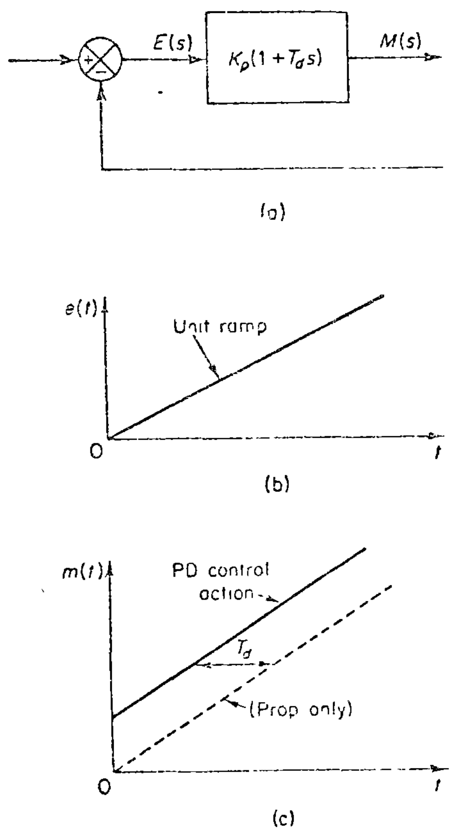


Fig 5-9. (a) Block diagram of a porportional-plus-derivative controller, (b) and (c) diagrams depicting a unit-ramp input and the controller output.

controller. If the actuating error signal $e(t)$ is a unit-step function as shown Fig. 5-8(b), then the controller output $m(t)$ becomes as shown in Fig. 5-8(c).

Proportional-plus-derivative control action. The control action of a proportional-plus-derivative controller is defined by the following equation:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

and the transfer function is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

where K_p represents the proportional sensitivity and T_d represents the derivati time Both K_p and T_d are adjustable The derivative control action, sometim called rate control, is where the magnitude of the controller output is propor to the rate of change of the actuating error signal The derivative time T_d is the ti interval by which the rate action advances the effect of the proportional cont action. Figure 5-9(a) shows a block diagram of a proportional-plus-derivati controller. If the actuating error signal $e(t)$ is a unit-ramp function as shown Fig. 5-9(b), then the controller output $m(t)$ becomes as shown in Fig. 5-9(c). may be seen from Fig. 5-9(c), the derivative control action has an anticipato

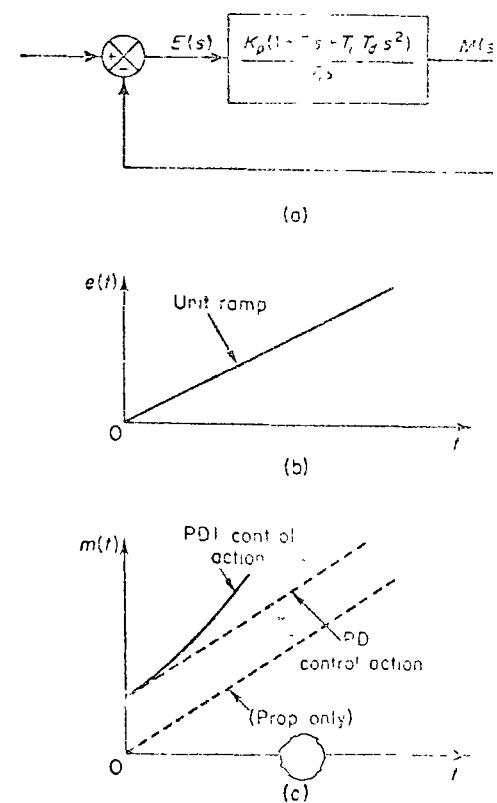


Fig. 5-10. (a) Block diagram of a proportional-plus-derivative-plus-integral controller; (b) and (c) diagrams depicting a unit-ramp input and the controller output.

aracter. As a matter of course, however, derivative control action can never ticipate any action that has not yet taken place.

While derivative control action has an advantage of being anticipatory, it has e disadvantages that it amplifies noise signals and may cause a saturation effect the actuator.

Note that derivative control action can never be used alone because this control tion is effective only during transient periods.

Proportional-plus-derivative-plus-integral control action. The combination of oportional control action, derivative control action, and integral control action termed proportional-plus-derivative-plus-integral control action. This combined tion has the advantages of each of the three individual control actions. The uation of a controller with this combined action is given by

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t)\, dt$$

the transfer function is

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$$

ere K_p represents the proportional nsitivity, T_d represents the derivative ne, and T_i represents the integral time. e block diagram of a proportional-us-derivative-plus-integral controller shown in Fig. 5-10(a) If $e(t)$ is a unit-mp function as shown in Fig 5-10(b), en the controller output $m(t)$ becomes shown in Fig 5-10(c)

Effects of the measuring element on stem performance. Since the dynamic d static characteristics of the measur- g element affect the indication of the tual value of the output variable, the easuring element plays an important le in determining the overall perfor- ance of the control system. The mea- ring element usually determines the nsfer function in the feedback path. the time constants of a measuring ele- ent are negligibly small compared with er time constants of the control sys- n, the transfer function of the measur- g element simply becomes a constant. ures 5-11(a), (b), and (c) show block

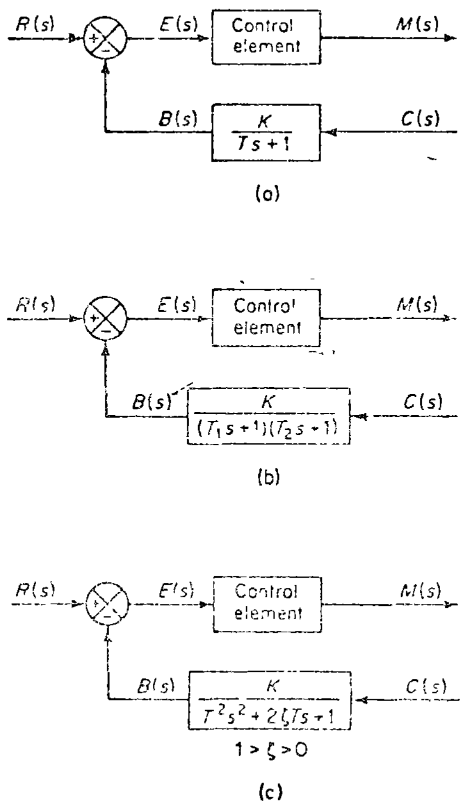


Fig. 5-11 Block diagrams of automatic controllers with (a) first-order measuring element; (b) overdamped second-order measuring element, (c) underdamped second-order measuring element

diagrams of automatic controllers having a first-order, an overdamped secon order, and an underdamped second-order measuring element, respectively. T response of a thermal measuring element is often of the overdamped second-orc type.

Block diagrams of automatic control systems. A block diagram of a simp automatic control system may be obtained by connecting the plant to the aut matic controller, as shown in Fig. 5-12. Feedback of the output signal is accor

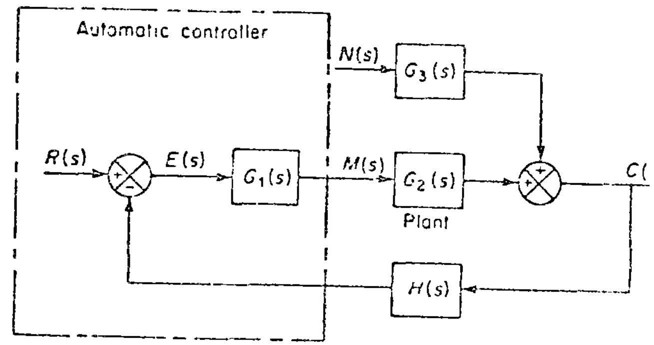


Fig. 5-12. Block diagram of a control system.

plished by the measuring element. The equation relating the output variable C(to the reference input $R(s)$ and disturbance variable $N(s)$ may be obtained follows:

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

In process control systems, we are usually interested in the response to tl load disturbance $N(s)$ In servomechanisms, however, the response to a varyi input $R(s)$ is of most interest We shall postpone the analysis of the system respon to changes in load disturbances to Section 5-4 The system response to changes the reference input will be studied in detail in Chapter 6.

3.2.5

5-2 PROPORTIONAL CONTROLLERS

In this section, we shall illustrate the fact that proportional controllers utiliz the principle of negative feedback in themselves. We shall give a detailed discussio of the principle by which proportional controllers operate by co ...ing pneumati ones. We shall then show that the same principle applies to hydrau c and electroni controllers Throughout this discussion, we shall place emphasis on the fundamenta principles rather than on the details of the operation of the actual mechanisms.

Pneumatic systems. Low-pressure pneumatic controllers have been wel developed for industrial control systems and have been used extensively in industria processes. Reasons for the widespread use of pneumatic controllers are thei explosion-proof characteristics, simplicity, and ease of maintenance.

Pneumatic nozzle-flapper amplifiers. A schematic diagram of a pneumatic ɔzzle-flapper amplifier is shown in Fig 5-13(a) The power source for this amplifier a supply of air at constant pressure The nozzle-flapper amplifier converts small ıanges in the position of the flapper into large changes in the back pressure in ıe nozzle. Thus a large power output can be controlled by the very little power ıat is needed to position the flapper.

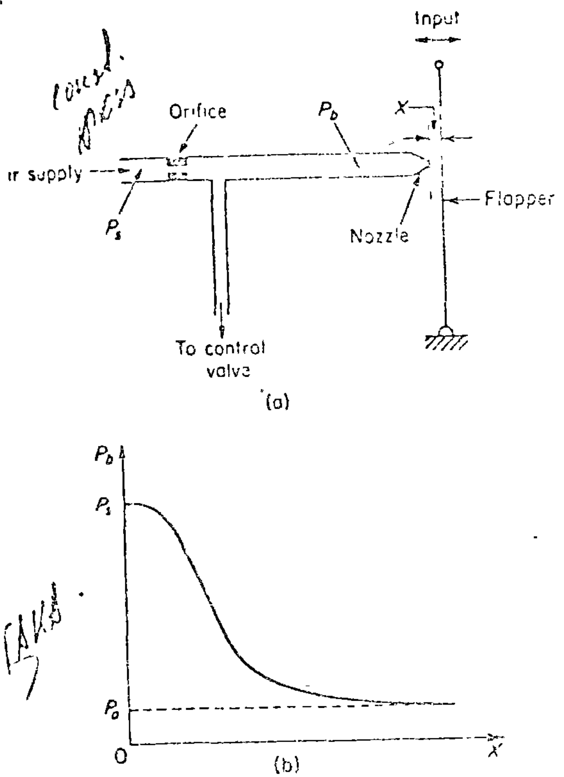


Fig. 5-13. (a) Schematic diagram of a pneumatic nozzle-flapper amplifier; (b) characteristic curve relating nozzle back pressure and nozzle-flapper distance

In Fig. 5-13(a), pressurized air is fed through the orifice, and the air is ejected from the nozzle toward the flapper Usually the supply pressure P_s for such a controller is 20 psig. The diameter of the orifice is of the order of 0 010 in and that of the nozzle is of the order of 0 015 in. The nozzle diameter must be larger than the orifice diameter for the proper functioning of the amplifier. The flapper is positioned against the nozzle opening, and the nozzle back pressure P_b is controlled by the nozzle-flapper distance X. As the flapper approaches the nozzle, the opposition to the flow of air through the nozzle increases, with the result that the nozzle back pressure P_b increases If the nozzle is completely closed by the flapper, the nozzle back pressure P_b becomes equal to the supply pressure P_s If the flapper is moved away from the nozzle, so that the nozzle-flapper distance is wide (of the order of 0.01 in.), then there is practically no restriction to flow and the nozzle back pressure P_b takes on a minimum value which depends on the nozzle-flapper device. (The lowest possible pressure will be the ambient pressure P_a.)

Note that because the air jet puts a force against the flapper, it is necess ry make the nozzle diameter as small as possible.

A typical curve relating the nozzle back pressure P_b to the nozzle-flapr distance X is shown in Fig 5-13(b). The steep and almost linear part of the cur is utilized in the actual operation of the nozzle-flapper amplifier Because the r of flapper displacements is restricted to a small value, the change in output press is also small, unless the curve happens to be very steep.

The nozzle-flapper amplifier converts displacement into a pressure sign Since industrial process control systems require large output power to oper large pneumatic actuating valves, the power amplification of the nozzle-fl amplifier is usually not sufficient. Therefore a pneumatic relay is often used as a power amplifier in connection with the nozzle-flapper amplifier

Pneumatic relays. In a practical pneumatic controller, a nozzle-flapper amplif acts as the first-stage amplifier and a pneumatic relay as the second-stage amplifi The pneumatic relay is capable of handling a large quantity of air flow.

A schematic diagram of a pneumatic relay is shown in Fig 5-14(a). As t nozzle back pressure P_b increases, the ball valve is forced toward the lower se thus decreasing the control pressure P_c. Such a relay is called a reverse acting rel When the ball valve is at the top of the seat, the atmospheric opening is clos and the control pressure P_c becomes equal to the supply pressure P_s. When the b

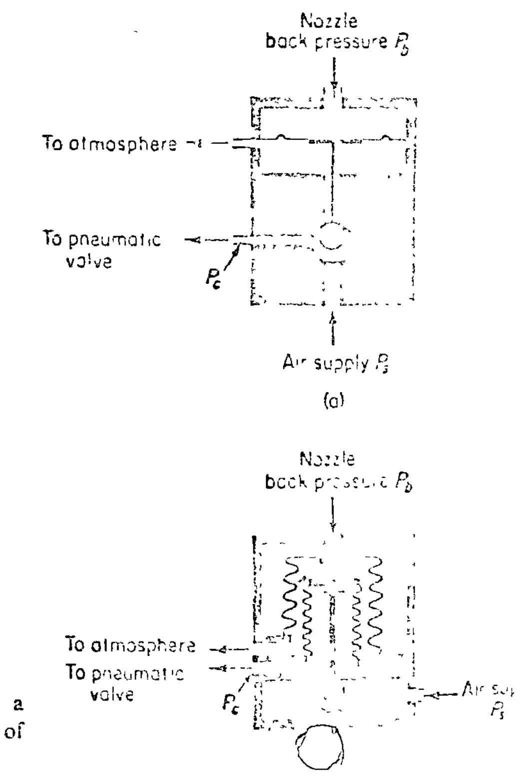


Fig. 5-14. (a) Schematic diagram of a bleed-type relay; (b) schematic diagram of a nonbleed-type relay

alve is at the bottom of its seat, it shuts off the air supply and the control pressure P_c drops to the ambient pressure. The control pressure P_c can thus be made to vary rom 0 psig to full supply pressure, usually 20 psig.

The total movement of the ball valve between the upper and lower seat is very mall (of the order of 0.01 in.). In all positions of the ball valve, except at the top eat, air continues to bleed into the atmosphere, even after the equilibrium condi- ion is attained between the nozzle back pressure and the control pressure. Thus he relay shown in Fig. 5-14(a) is called a bleed-type relay.

There is another type of relay, the nonbleed type. In this one the air bleed stops when the equilibrium condition is obtained and, therefore, there is no loss of pres- urized air at steady-state operation. Note, however, that the nonbleed type relay nust have an atmospheric relief to release the control pressure P_c from the pneu- natic actuating valve. A schematic diagram of a nonbleed-type relay is shown in Fig. 5-14(b).

In either type of relay, the air supply is controlled by a valve, which is in turn controlled by the nozzle back pressure. Thus, the nozzle back pressure is converted nto the control pressure with power amplification.

Since the control pressure P_c changes almost instantaneously with changes in he nozzle back pressure P_b, the time constant of the pneumatic relay is negligible compared with the other larger time constants of the pneumatic controller and the plant.

Pneumatic proportional controllers (force-distance type). Two types of pneumatic controllers, one called the force-distance type and the other the force-balance type, re used extensively in industry. Regardless of how differently industrial pneumatic controllers may appear, careful study will show the close similarity in the functions of the pneumatic circuit. Here we shall consider only force-distance pneumatic controllers.

Figure 5-15(a) shows a schematic diagram of such a proportional controller. The nozzle-flapper amplifier constitutes the first-stage amplifier, and the nozzle back pressure is controlled by the nozzle-flapper distance. The relay-type amplifier constitutes the second-stage amplifier. The nozzle back pressure determines the position of the ball valve for the second-stage amplifier, which is capable of handling a large quantity of air flow.

In most pneumatic controllers, some type of pneumatic feedback is employed. Feedback of the pneumatic output reduces the amount of actual movement of the flapper. Instead of mounting the flapper on a fixed point, as shown in Fig. 5-15(b), it is often pivoted on the feedback bellows, as shown in Fig. 5-15(c). The amount of feedback can be regulated by introducing a variable linkage between the feedback bellows and the flapper connecting point. The flapper then becomes a floating link. It can be moved by both the error signal and the feedback signal.

The operation of the controller shown in Fig 5-15(a) is as follows: The input signal to the two-stage pneumatic amplifier is the actuating error signal. Increasing the actuating error signal moves the flapper to the right. This will, in turn, decrease the nozzle back pressure, and the bellows B will contract, which results in an upward

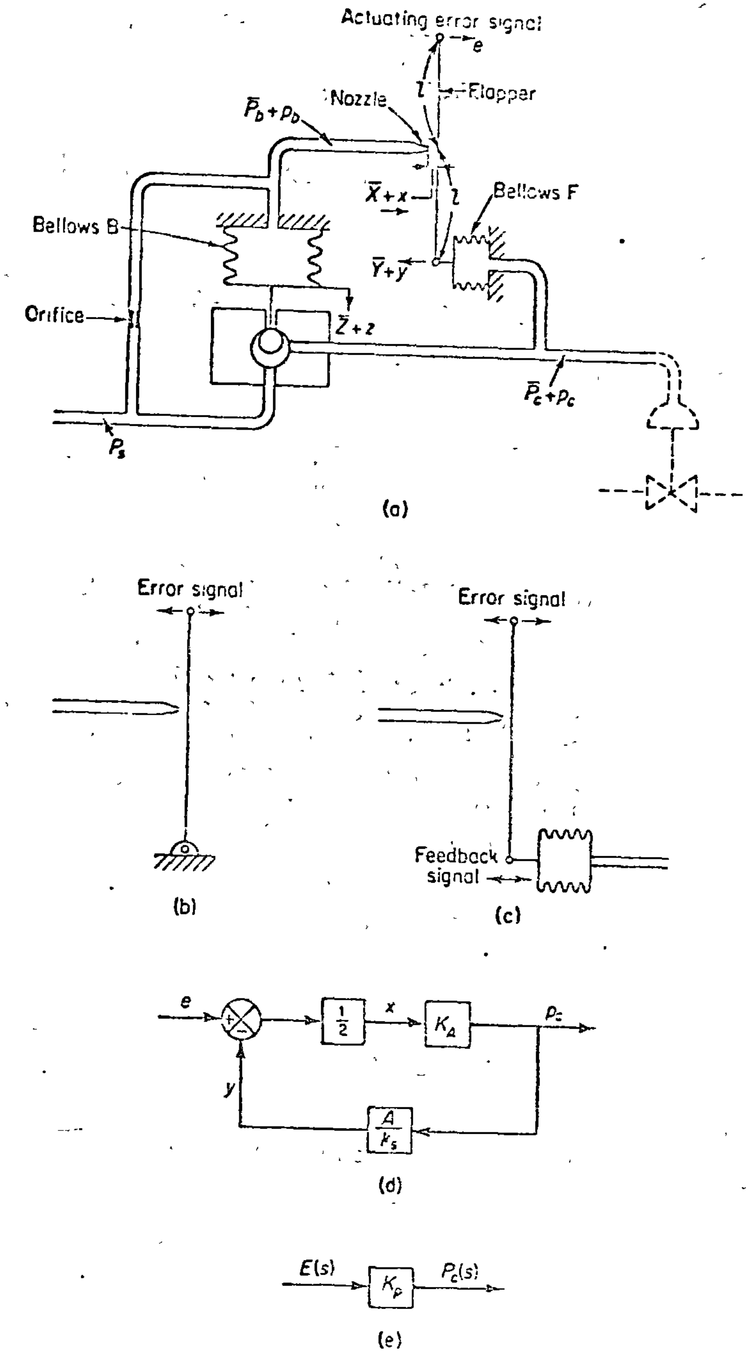


Fig. 5-15. (a) Schematic diagram of a force-distance type pneumatic proportional controller, (b) flapper mounted on a fixed point, (c) flapper mounted on a feedback bellows; (d) block diagram for the controller, (e) simplified block diagram for the controller.

novement of the ball valve. This will cause more flow to the pneumatic valve, and ne control pressure will increase. This increase will cause the bellows F to expand nd move the flapper to the left, closing the nozzle.

The nozzle-flapper displacement is very small because of this feedback, but he change in the control pressure can be large. In the case where the actuating error ecreases, the nozzle back pressure increases and the ball valve moves down, esulting in a decrease in supply flow to the valve and an increase in bleeding to the tmosphere. This will cause the control pressure to decrease.

It is important to note that the feedback bellows should move the flapper less han that movement caused by the error signal alone. If these two movements were qual, no control action would result.

Equations for this controller can be derived as follws: When the actuating error s zero, or $e = 0$, and equilibrium state exists with the nozzle-flapper distance qual to $\bar{X}$, the displacement of the bellows F equal to $\bar{Y}$, the displacement of the bellows B equal to $\bar{Z}$, the nozzle back pressure equal to $\bar{P}_b$, and the control pressure qual to $\bar{P}_c$. When there is any actuating error, the nozzle-flapper distance, the splacements of the bellows F and B, the nozzle back pressure, and the control essure deviate from their respective equilibrium values. Let these deviations be x, y, z, p_b, and p_c, respectively. (The positive direction for each displacement variable s indicated by an arrowhead.)

Assuming that the relationship between the variation in the nozzle back pressure and the variation in the nozzle-flapper distance is linear, we have

$$p_b = -K_1 x \tag{5-1}$$

where K_1 is a constant. For the bellows B

$$p_b = K_2 z \tag{5-2}$$

where K_2 is a constant. The position of the ball valve which depends upon the displacement of the bellows B determines the control pressure. If the ball valve is such that the relationship between p_c and z is linear, then

$$p_c = -K_3 z \tag{5-3}$$

where K_3 is a constant. From Eqs. (5-1), (5-2), and (5-3), we obtain

$$p_c = -\frac{K_3}{K_2} p_b = K_A x \tag{5-4}$$

where $K_A = K_1 K_3 / K_2$ is a constant. For the flapper movement, we have

$$x = \frac{e - y}{2} \tag{5-5}$$

The bellows F acts like a spring, and the follwing equation holds:

$$A p_c = k_s y \tag{5-6}$$

where A is the effective area of the bellows F, and k_s is the equivalent spring constant or the stiffness due to the action of the corrugated side of the bellows.

Assuming that all variations in the variables are within the linear range, we may obtain a block diagram for this system from Eqs. (5-4), (5-5), and (5-6), as

shown in Fig. 5-15(d). From Fig. 5-15(d), it can clearly be seen that the pneum controller shown in Fig. 5-15(a) itself is a feedback system. The transfer fun between p_c and e is given by

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{2}K_A}{1 + \frac{K_A A}{2k_s}} = K_p$$

A simplified block diagram is shown in Fig. 5-15(e). Since p_c and e are proporti the pneumatic controller shown in Fig. 5-15(a) is called a pneumatic proport controller.

Note that since the value of $K_A A/k_s$ is generally very much greater than in actual controllers, the transfer function given by Eq. (5-7) can be simplifi give

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{2}K_A}{\frac{K_A A}{2k_s}} = \frac{k_s}{A}$$

As seen from Eq. (5-7) or (5-8), the gain of the pneumatic proportional cont can be widely varied by adjusting the effective value of k_s. This can be ac plished easily by adjusting the flapper connecting linkage. [The flapper conne linkage is not shown in Fig. 5-15(a).] In most commercial proportional contr an adjusting knob or other mechanism is provided for varying the gain by ad ing this linkage.

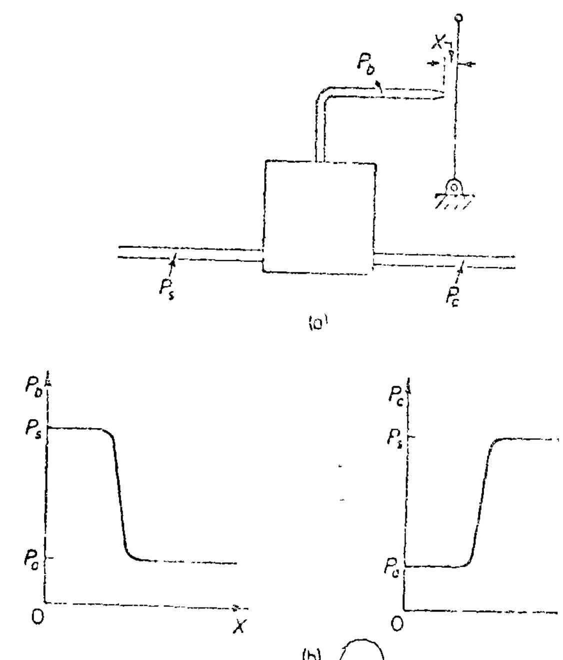


Fig. 5-16. (a) Pneumatic controller without a feedback mechanism, (b) curves P_b versus X and P_c versus X.

As we have seen previously, the actuating error signal moved the flapper in one rection, and the feedback bellows moved the flapper in the opposite direction, ut to a smaller degree. The effect of the feedback bellows is thus to reduce the nsitivity of the controller. The principle of feedback is commonly used to obtain ide proportional-band controllers.

Pneumatic controllers which do not have feedback mechanisms [which means at one end of the flapper is fixed, as shown in Fig. 5-16(a)] have high sensitivity nd are called narrow-band proportional controllers or two-position controllers. such a controller, only a small motion between the nozzle and the flapper is quired to give a complete change from the maximum to the minimum control essure. The curves relating P_b to X and P_c to X are shown in Fig. 5-16(b). Notice at a small change in X can cause a large change in P_b, which causes the ball valve be completely open or completely closed.

Pneumatic actuating valves. One characteristic of pneumatic controls is that ey almost exclusively employ pneumatic actuating valves. A pneumatic actuating alve can provide a large power output. (Since a pneumatic actuator requires a rge power input to produce a large power output, it is necessary that a sufficient uantity of pressurized air be available.) In practical pneumatic actuating valves, e valve characteristics may not be linear; i.e., the flow may not be directly proortional to the valve stem position, and also there may be other nonlinear effects, ich as hysteresis.

Consider the schematic diagram of a pneumatic actuating valve shown in ig. 5-17. Assume that the area of the diaphragm is A. Assume also that when the ctuating error is zero, the control pressure is equal to $\bar{P}_c$ and the valve displaceent is equal to $\bar{X}$.

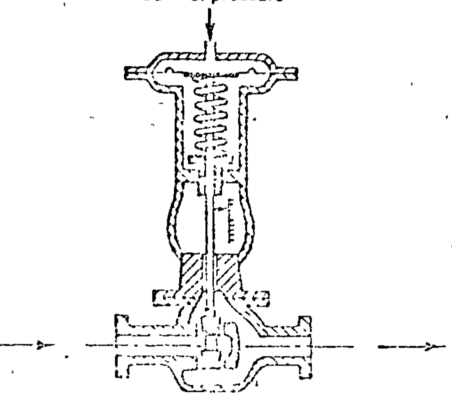


Fig. 5-17. Schematic diagram of a pneumatic actuating valve.

In the following analysis, we shall consider small variations in the variables and earize the pneumatic actuating valve. Let us define the small variation in the control pressure and the corresponding valve displacement to be p_c and x, respectely. Since a small change in the pneumatic pressure force applied to the diaphragm repositions the load, consisting of the spring, viscous friction, and mass,

$$Ap_c = m\ddot{x} + f\dot{x} + kx \quad (5$$

where

m = mass of the valve and valve stem
f = viscous-friction coefficient
k = spring constant

If the force due to the mass and viscous friction are negligibly small, then Eq. (5 can be simplified to

$$Ap_c = kx$$

The transfer function between x and p_c thus becomes

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$

where $X(s) = \mathscr{L}[x]$ and $P_c(s) = \mathscr{L}[p_c]$. If q_i, the change in flow through the pn matic actuating valve, is proportional to x, the change in the valve-stem displa ment, then

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

where $Q_i(s) = \mathscr{L}[q_i]$ and K_q is a constant. The transfer function between q_i and becomes

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

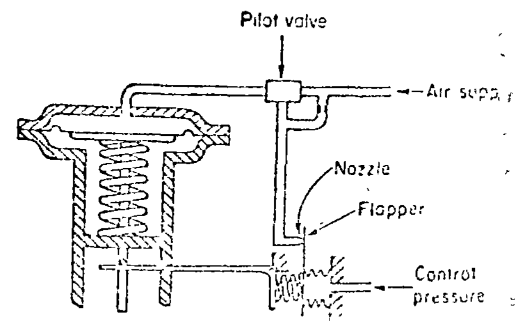
where K_v is a constant.

The standard control pressure for this kind of a pneumatic actuating valve between 3 and 15 psig. The valve-stem displacement is limited by the allowa stroke of the diaphragm and is only a few inches. If a longer stroke is need a piston-spring combination may be employed.

In pneumatic actuating valves, the static-friction force must be limited to a l value so that excessive hysteresis does not result. Because of the compressibili of air, the control action may not be positive; i.e., an error may exist in the valv stem position. The use of a valve positioner results in improvements in the perfo mance of a pneumatic actuating valve.

A schematic diagram of a valve postioner is shown in Fig. 5-18. The princip of operation of this device is that if the valve position does not correspond to th

Fig. 5-18. Schematic diagram of a valve



control pressure, then the pilot valve will operate until the valve position corresponds exactly to the control pressure.

Liquid-level control systems. Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-19. It is desired to maintain the liquid level at a constant value, regardless of the change in the opening of the load valve

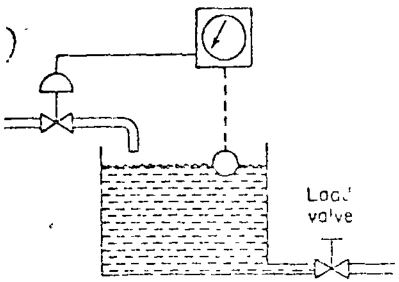


Fig. 5-19. Liquid-level control system

Let us assume that the controller is of the proportional type, as shown in Fig. 5-15(a), and that the control valve is that shown in Fig. 5-17. If the liquid level rises as a result of a change in the load valve, the float moves upward, causing the flapper to move into closer contact with the nozzle, increasing the nozzle back pressure. Since the relay is reverse acting, this will result in a reduction in the control pressure and will cause a decrease in the opening of the pneumatic actuating valve. This is in the proper direction to correct for the rising level.

Proportional control of a first-order system. Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-20(a). [The controller is assumed to be the proportional controller shown in Fig. 5-15(a).] We assume that all the variables r, q_i, h_1, and q_0 are measured from their respective steady-state values $\bar{R}$, $\bar{Q}$, $\bar{H}$, and $\bar{Q}$. We also assume that the magnitudes of the variables r, q_i, h_1, and q_0 are sufficiently small so that the system can be approximated by a linear mathematical model, i.e., a transfer function.

Referring to Section 4-5, we can obtain the transfer function of the liquid-level system as

$$\frac{H_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Since the controller is a proportional controller, the change in inflow q_i is proportional to the actuating error e so that $q_i = K_p K_v e$, where K_p is the gain of the controller and K_v is the gain of the control valve. In terms of Laplace-transformed quantities,

$$Q_i(s) = K_p K_v E(s)$$

A block diagram of this system is shown in Fig. 5-20(b). A simplified block diagram is given in Fig. 5-20(c), where $X(s) = (1/K_b)R(s)$, $K = K_p K_v R K_b$, and $T = RC$.

In what follows we shall investigate the response $h_1(t)$ to a change in the reference input. We shall assume a unit-step change in $x(t)$, where $x(t) = (1/K_b)r(t)$. The closed-loop transfer function between $H_1(s)$ and $X(s)$ is given by

$$\frac{H_1(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1 + K} \tag{5-10}$$

Since the Laplace transform of the unit-step function is $1/s$, substituting $X(s) = 1/s$ into Eq. (5-10) gives

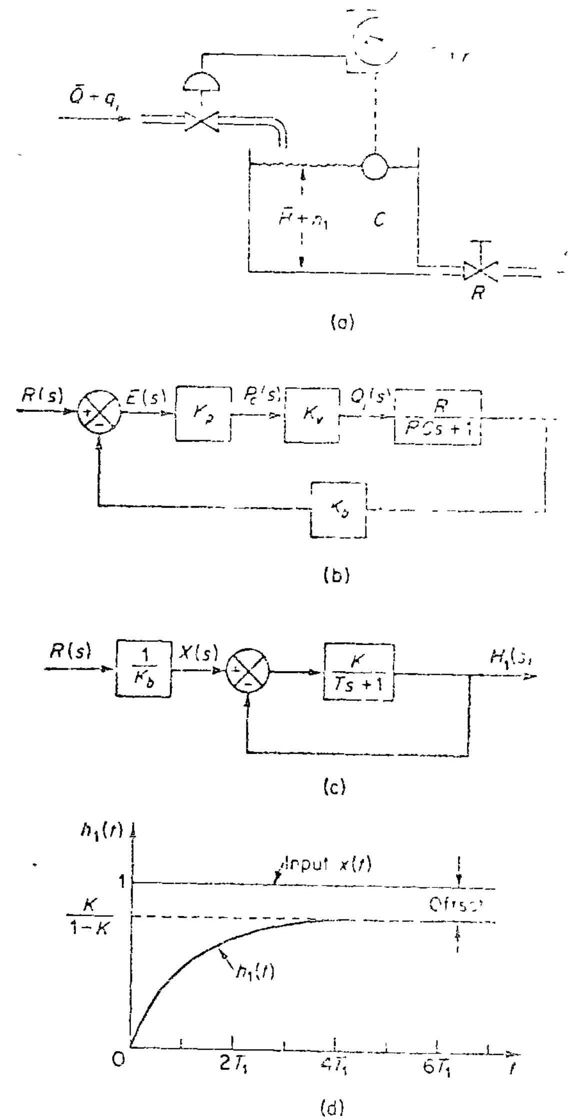


Fig. 5-20. (a) Liquid-level control system, (b) block diagram, (c) simplified block diagram, (d) curve $h_1(t)$ versus t

$$H_1(s) = \frac{K}{Ts + 1 + K}\frac{1}{s}$$

Expanding $H_1(s)$ into partial fractions gives

$$H_1(s) = \frac{K}{1 + K}\frac{1}{s} - \frac{TK}{1 + K}\frac{1}{Ts + 1 + K} \tag{5}$$

Taking the inverse Laplace transforms of both sides of Eq. (5-11), we obtain the following time solution $h_1(t)$.

$$h_1(t) = \frac{K}{1 + K}(1 - e^{-t/T_1}) \qquad (t \geq 0) \tag{5}$$

where

$$T_1 = \frac{T}{1 + K}$$

The response curve $h_1(t)$ is plotted in Fig. 5-20(d). From Eq. (5-12), notice that the time constant T_1 of the closed-loop system is different from the time constant T of the feedforward block.

From Eq. (5-12), we see that as t approaches infinity, the value of $h_1(t)$ approaches $K/(1 + K)$, or

$$h_1(\infty) = \frac{K}{1 + K}$$

Since $x(\infty) = 1$, there is a steady-state error of $1/(1 + K)$. Such an error is called *offset*. The value of the offset becomes smaller as the gain K becomes larger.

Offset is a characteristic of the proportional control of a plant whose transfer function does not possess an integrating element. (Clearly, we need a nonzero error in order to provide a nonzero output.) To eliminate such offset, we must add integral control action. (Refer to Section 5-3.)

Pneumatic proportional controllers (force-balance type). Figure 5-21 shows a schematic diagram of a force-balance pneumatic proportional controller. Force-balance controllers are in extensive use in industry. Such controllers are sometimes called stack controllers. The basic principle of operation does not differ from that of the force-distance controller. The main advantage of the force-balance controller is that it eliminates many mechanical linkages and pivot joints, thereby reducing the effects of friction.

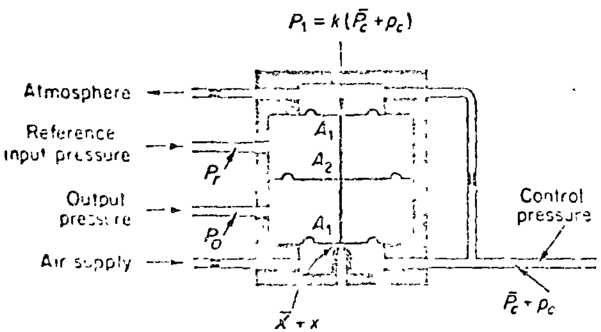


Fig. 5-21. Schematic diagram of a force-balance type pneumatic proportional controller.

In what follows, we shall consider the principle of the force-balance controller. In the controller shown in Fig. 5-21, the reference input pressure P_r and the output pressure P_o are fed to large diaphragm chambers. Note that a force-balance pneumatic controller operates only on pressure signals. Therefore, it is necessary to convert the reference input and system output to corresponding pressure signals.

As in the case of the force-distance controller, this controller employs a flapper, nozzle, and orifices. In Fig. 5-21, the drilled opening in the bottom chamber is the nozzle. The diaphragm just above the nozzle acts as a flapper.

The operation of the force-balance controller shown in Fig. 5-21 may be summarized as follows: 20 psig air from an air supply flows through an orifice, causing a reduced pressure in the bottom chamber. Air in this chamber escapes to the atmosphere through the nozzle. The flow through the nozzle depends upon the gap and the pressure drop across it. An increase in the reference input pressure P_r, while the output pressure P_o remains the same, causes the valve stem to move down, decreasing the gap between the nozzle and the flapper diaphragm. This causes the control pressure P_c to increase. Let

$$p_e = P_r - P_o$$

If $p_e = 0$, there is an equilibrium state with the nozzle-flapper distance equal to $\bar{X}$ and the control pressure equal to $\bar{P}_c$. At this equilibrium state, $P_1 = \bar{P}_c k$ (where $k < 1$) and

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \tag{5-1}$$

where α is a constant.

Let us assume that $p_e \neq 0$ and define small variations in the nozzle-flapper distance and control pressure as x and p_c, respectively. Then we obtain the following equation:

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_c)A_1 - (\bar{P}_c + p_c)kA_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{5-1}$$

From Eqs. (5-13) and (5-14), we obtain

$$x = \alpha[p_c(1 - k)A_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{5-1}$$

At this point, we must examine the quantity x. In the design of pneumatic controllers, the nozzle-flapper distance is quite small. In view of the fact that x/α is a higher-order term than $p_c(1 - k)A_1$ or $p_e(A_2 - A_1)$: that is, for $p_e \neq 0$,

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_c(1 - k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_2 - A_1)$$

we may neglect the term x in our analysis. Equation (5-15) can then be rewritten to reflect this assumption as follows:

$$p_c(1 - k)A_1 = p_e(A_2 - A_1)$$

and the transfer function between p_c and p_e becomes

$$\frac{P_c(s)}{P_e(s)} = \frac{A_2 - A_1}{A_1}\,\frac{1}{1 - k} = K_p$$

Thus, the controller shown in Fig. 5-21 is a proportional controller. The value of gain K_p increases as k approaches unity. Note that the value of k depends upon the diameters of the orifices in the inlet and outlet pipes of the feedback chamber. (The value of k approaches unity as the resistance to flow in the orifice of the inlet pipe is made smaller.)

Hydraulic proportional controllers. Except for low-pressure pneumatic controllers, compressed air has seldom been applied to the continuous control of the motion of devices having significant mass under external load forces. For such a case,

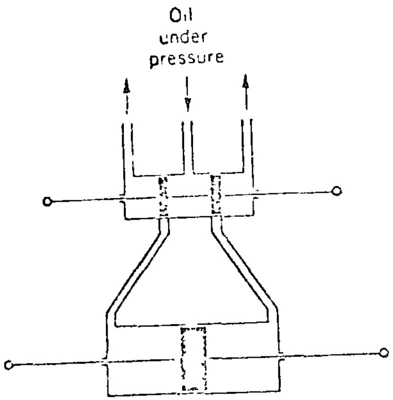
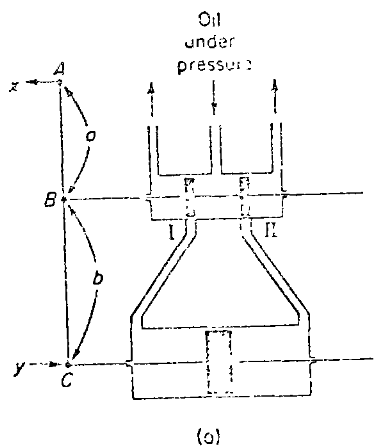


Fig. 5-22. Hydraulic servomotor.

hydraulic controllers are generally preferred. Hydraulic controllers are also used extensively in industry. With high-pressure hydraulic systems, very large force can be obtained. Rapid-acting accurate positioning of heavy loads is possible with hydraulic systems. A combination of electronic and hydraulic systems is widely used because it combines the advantages of both electronic control and hydraulic power.

A brief description of the operation of a hydraulic servomotor was given in Section 4-3. It was shown that for negligibly small load mass, the servomotor shown in Fig. 4-12 acts as an integrator or an integral controller. [Refer to Eq. (4-25).] Such a servomotor constitutes the basis of the hydraulic control circuit.

The servomotor shown in Fig. 5-22 acts as an integral controller. We can modify this servomotor to a proportional controller by including a feedback mechanism. Figure 5-23(a) is identical with Fig 5-22, with the exception of the link attached to the left side of the power piston joining feedback link ABC at C. Link AC is a floating link rather than one moving about a fixed pivot. We shall see that the servomotor shown in Fig 5-23(a) acts as a proportional controller.



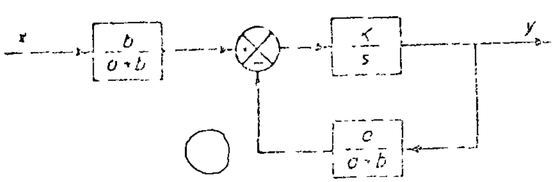


Fig. 5-23 (a) Servomotor which acts as a proportional controller, (b) block diagram of the servomotor.

The hydraulic system shown in Fig 5-23(a) operates as follows: If the input x moves the pilot piston to the left, this will uncover port I so that high-pressure oil flows through port I into the left side of the power piston and forces this piston to the right. The power piston, in moving to the right, will carry the feedback link AC with it, thus moving the pilot piston to the right. This action continues until the pilot piston again covers ports I and II. A block diagram of the system can be drawn as in Fig 5-23(b). The transfer function between y and x is given by

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1+\dfrac{K}{s}\dfrac{a}{a+b}}$$

$$= \frac{bK}{s(a+b)+Ka}$$

Noting that under normal operation $|Ka/s(a+b)| \gg 1$, we obtain

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

The transfer function between y and x becomes a constant, and thus the hydraulic system shown in Fig 5-23(a) acts as a proportional controller, the gain of which is K_p. The gain K_p can be adjusted by effectively changing the lever ratio b/a.

We have thus seen that the addition of a feedback lever will cause the hydraulic servomotor to act as a proportional controller.

Electronic proportional controllers. An electronic proportional controller is an amplifier which receives a small voltage signal and produces a voltage output at a higher power level. A schematic diagram of such a controller is shown in Fig 5-24. For this controller

$$e_0 = K\left(e_i - e_o\frac{R_2}{R_1}\right), \qquad K\frac{R_2}{R_1} \gg 1$$

Thus the transfer function G(s) of this controller is

$$G(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_2} = K_p$$

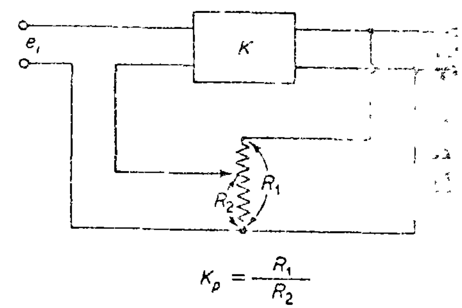


Fig. 5-24. Schematic diagram of an electronic proportional controller.

K_p is the gain of the proportional controller. The gain K_p can be adjusted by changing the ratio of resistances (R_1/R_2) in the feedback circuit.

5-3 OBTAINING DERIVATIVE AND INTEGRAL CONTROL ACTION

In this section, we shall present methods for obtaining derivative and integral control action. We shall again place the emphasis on the principle and not on the details of the actual mechanisms.

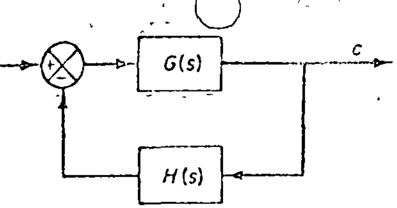


Fig. 5-25. Control system.

The basic principle for generating a desired control action is to insert the inverse of the desired transfer function in the feedback path. For the system shown in Fig. 5-25, the closed-loop transfer function is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$G(s)H(s) | \gg 1$, then $C(s)/R(s)$ can be modified to

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

s, if proportional-plus-derivative control action is desired, we insert an element ng the transfer function $1/(Ts + 1)$ in the feedback path.

Obtaining pneumatic proportional-plus-derivative control action. Consider the ımatic controller shown in Fig. 5-26 (a). This is a narrow-band proportional roller or a pneumatic two-position controller. Suppose that the zero actuating r $e = 0$ corresponds to the nozzle-flapper distance $\bar{X}$ and control pressure $\bar{P}_c$. small change in the actuating error from the zero position produces a small nge in x in the nozzle-flapper distance, then a small change p_c is produced in the rol pressure A block diagram of the system (under the assumption of small ations) can be drawn, as shown in Fig. 5-26(b). The transfer function between nd e becomes

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{bK}{a + b} = K_p$$

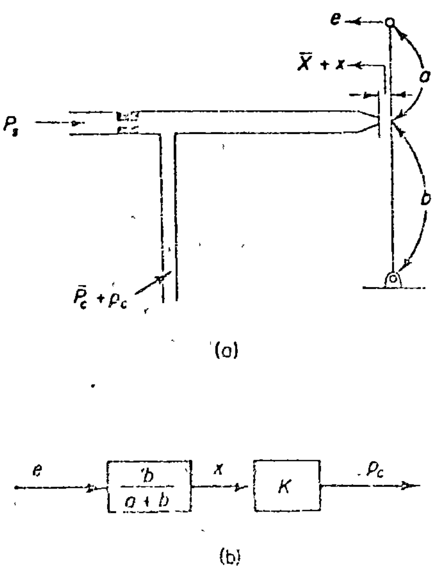


Fig. 5-26. (a) A pneumatic proportional controller; (b) block diagram of the controller.

We shall next show that the addition of delayed negative feedback to the controller shown in Fig. 5-26 (a) will modify the narrow-band proportional controller to a proportional-plus-derivative controller.

Consider the pneumatic controller shown in Fig. 5-27 (a). Assuming again small changes in the actuating error, nozzle-flapper distance, and control pressure, we can summarize the operation of this controller as follows: Let us first assume a small step change in e. Then the change in the control pressure p_c will be instan-

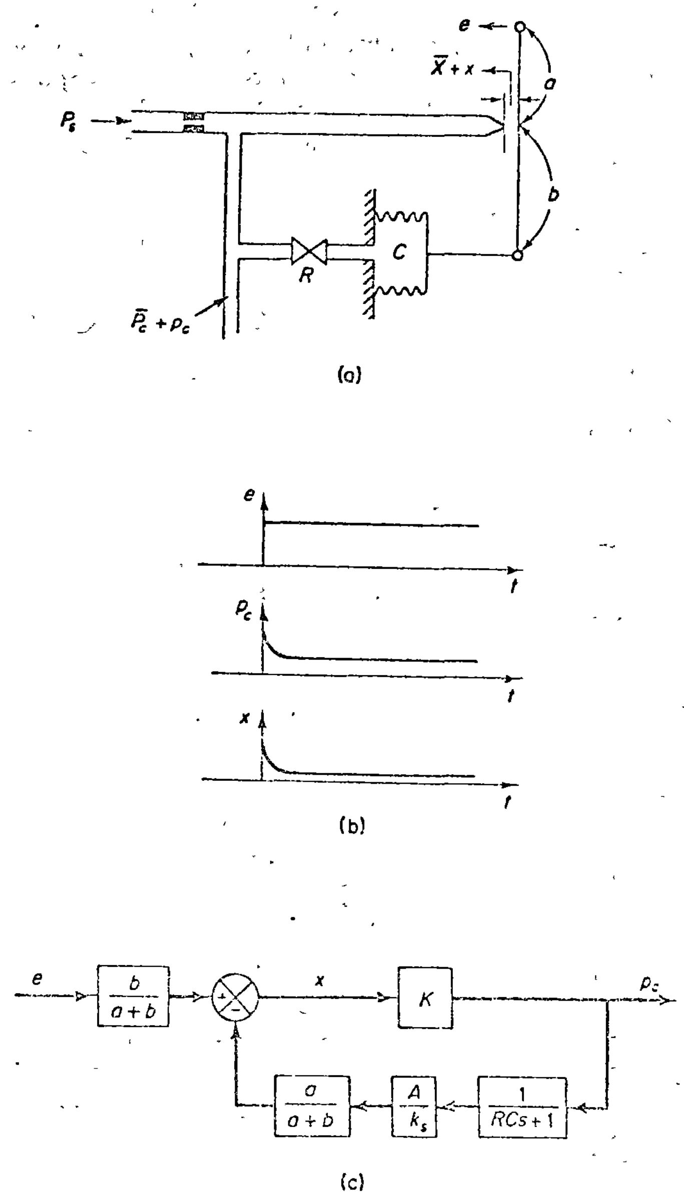


Fig. 5-27. (a) A pneumatic proportional-plus-derivative controller, (b) step change in e and the corresponding changes in p_c and x plotted versus t, (c) block diagram of the controller.

taneous. The restriction R will momentarily prevent the feedback bellows from sensing the pressure change p_c. Thus the feedback bellows will not respond momentarily, and the pneumatic actuating valve will feel the full effect of the movement of the flapper. As time goes on the feedback bellows will expand or contract. The change in the nozzle-flapper distance x and the change in the control pressure p_c can be plotted against time t, as shown in Fig. 5-27 (b). At steady state, the feedback bellows acts like an ordinary feedback mechanism. The curve p_c versus t clearly shows that this controller is of the proportional-plus-derivative type.

A block diagram corresponding to this pneumatic controller is shown in Fig. 5-27 (c). In the block diagram, K is a constant, A is the area of the bellows, and k_s is the equivalent spring constant of the bellows. The transfer function between p_c and e can be obtained from the block diagram as follows:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{1}{RCs+1}}$$

In such a controller the loop gain $|KaA/[(a+b)k_s(RCs+1)]|$ is normally very much greater than unity. Thus the transfer function $P_c(s)/E(s)$ can be simplified to give

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_d = RC$$

Thus, delayed negative feedback, or the transfer function $1/(RCs+1)$ in the feedback path, modifies the proportional controller to a proportional-plus-derivative controller.

Note that if the feedback valve is fully opened, the control action becomes proportional. If the feedback valve is fully closed, the control action becomes narrow-band proportional (on-off).

Obtaining pneumatic proportional-plus-integral control action. Consider the proportional controller shown in Fig. 5-28 (a). Considering small changes in the variables, we can draw a block diagram of this controller as in Fig. 5-28 (b). We shall show that the addition of delayed positive feedback will modify this proportional controller to a proportional-plus-integral controller.

Consider the pneumatic controller shown in Fig. 5-29 (a). The operation of this controller is as follows: The bellows denoted by I is connected to the control pressure source without any restriction. The bellows denoted by II is connected to the control pressure source through a restriction. Let us assume a small step change in the actuating error. This will cause the back pressure in the nozzle to change instantaneously. Thus a change in the control pressure p_c also occurs instantaneously. Due to the restriction of the valve in the path to bellows II, there will be a pressure drop across the valve. As time goes on, air will flow across the valve

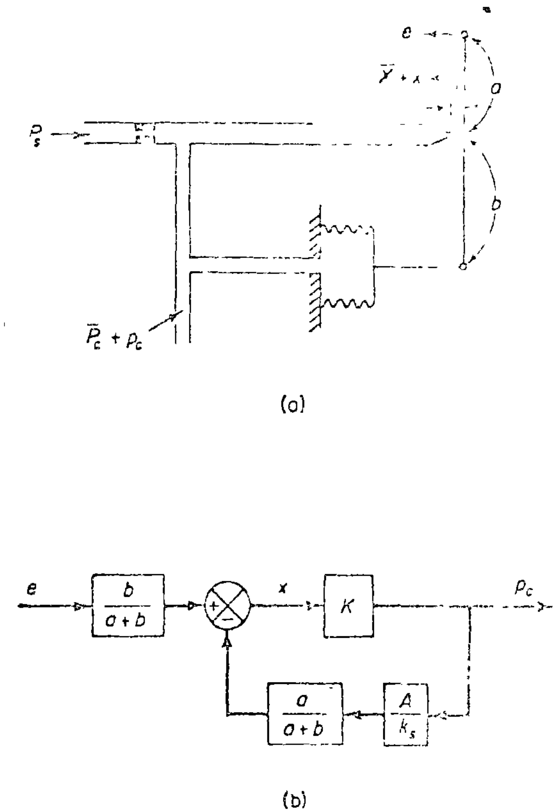


Fig. 5-28. (a) A pneumatic proportional controller, (b) block diagram of the controller

in such a way that the change in pressure in bellows II attains the value p_c. Thus bellows II will expand or contract as time elapses in such a way as to move the flapper an additional amount in the direction of the original displacement e. This will cause the back pressure p_c in the nozzle to change continuously, as shown in Fig. 5-29 (b).

Note that the integral control action in the controller takes the form of slowly canceling the feedback that the proportional control originally provided.

A block diagram of this controller under the assumption of small variations in the variables is shown in Fig. 5-29 (c). A simplification of this block diagram yields Fig. 5-29 (d). The transfer function of this controller is

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\left(1 - \dfrac{1}{RCs+1}\right)}$$

where K is a constant, A is the area of the bellows, and k_s is the equivalent spring constant of the combined bellows. If $|KaARCs/[(a+b)k_s(RCs+1)]| \gg 1$, which is usually the case, the transfer function can be simplified to

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

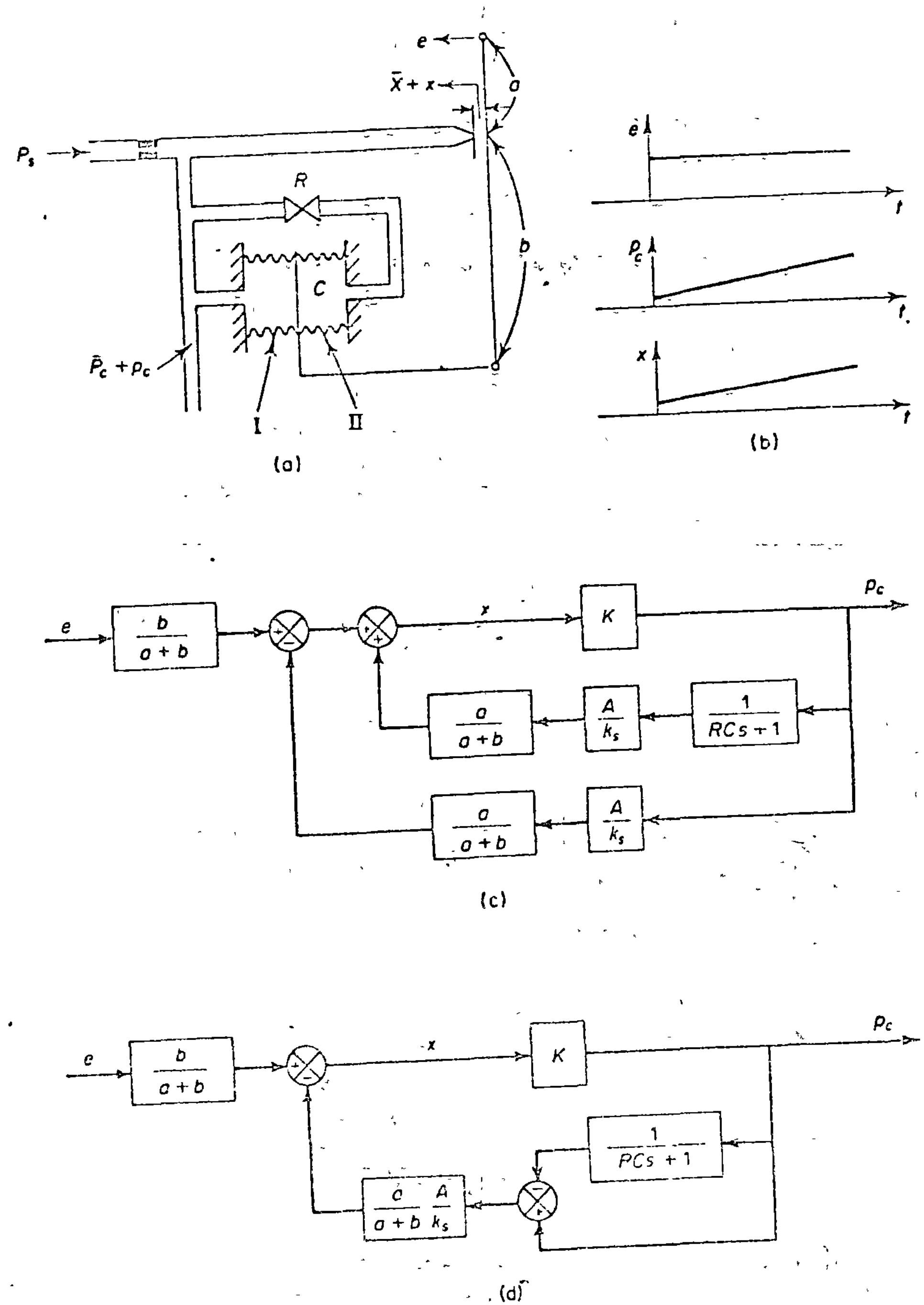


Fig. 5-29. (a) A pneumatic proportional-plus-integral controller, (b) step change in e and the corresponding changes in p_c and x plotted versus t, (c) block diagram of the controller; (d) simplified block diagram.

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_i = RC$$

Obtaining pneumatic proportional-plus-derivative-plus-integral control action. Combination of the pneumatic control actions shown in the systems of Figs. 5-27 and 5-29 (a) yields a proportional-plus-derivative-plus-integral control action. Figure 5-30 (a) shows a schematic diagram of such a controller. Figure 5-30 (b) shows a block diagram of this controller under the assumption of small variations in the variables.

The transfer function of this controller is

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{bK}{a+b}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{(R_iC - R_dC)s}{(R_dCs+1)(R_iCs+1)}}$$

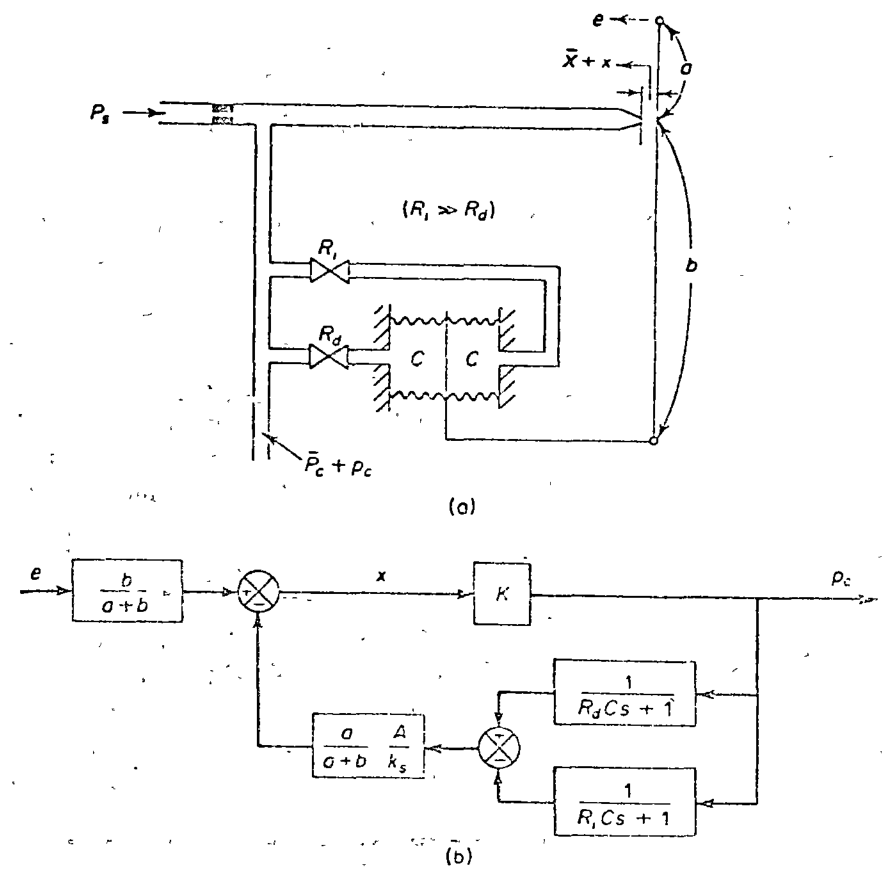


Fig. 5-30. (a) A pneumatic proportional-plus-derivative-plus-integral controller; (b) block diagram of the controller.

By defining

$$T_i = R_i C, \qquad T_d = R_d C$$

and noting that under normal operation $|KaA(T_i - T_d)s/[(a+b)k_s(T_d s+1)(T_i s+1)]| \gg 1$ and $T_i \gg T_d$, we obtain

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteqdot \frac{bk_s}{aA}\frac{(T_d s+1)(T_i s+1)}{(T_i - T_d)s}$$

$$\doteqdot \frac{bk_s}{aA}\frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

$$= K_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) \tag{5-16}$$

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

Equation (5-16) indicates that the controller shown in Fig. 5-30 (a) is a proportional-plus-derivative-plus-integral controller.

Dashpots. The dashpot shown in Fig. 5-31 (a) acts as a differentiating element. Suppose we introduce a step displacement to the piston position x. Then the displacement y becomes equal to x momentarily. Because of the spring force, however, the oil will flow through the resistance R and the cylinder will come back to the original position. The curves x versus t and y versus t are shown in Fig. 5-31 (b).

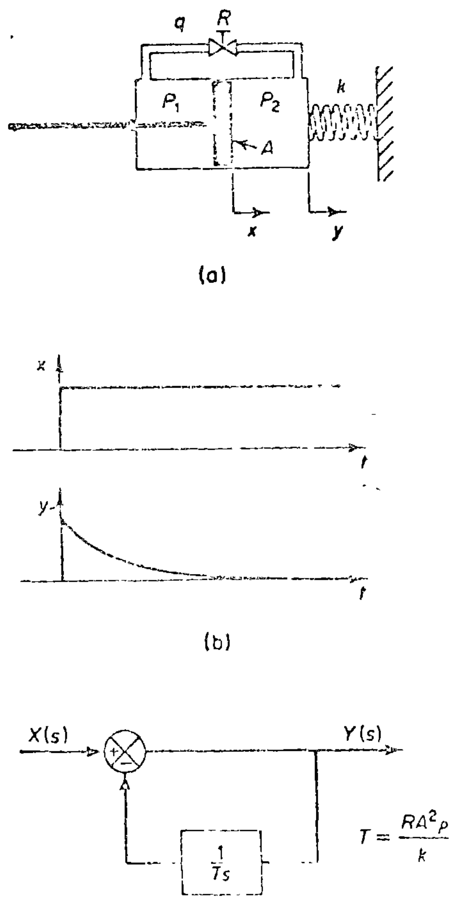
Let us derive the transfer function between the displacement y and displacement x. Define the pressures existing on the left and right sides of the piston as P_1 (lb/in.^{2}) and P_2 (lb/in.^{2}), respectively. Suppose that the inertia force involved is negligible. Then the force acting on the piston must balance the spring force. Thus

$$A(P_2 - P_1) = ky$$

where

A = piston area, in.^{2}
k = spring constant, lb/in.

The flow rate q is given by



(c)

Fig. 5-31. (a) Dashpot, (b) step change in x and the corresponding change in y plotted versus t, (c) block diagram of the dashpot.

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

where

q = flow rate through the restriction, lb/sec
R = resistance to flow at the restriction, lb-sec/in.^{2}-lb

Since the flow through the restriction during dt seconds must equal the change in the mass of oil to the left of the piston during the same dt seconds, we obtain

$$q\,dt = A\rho(dx - dy)$$

where

ρ = density, lb/in.^{3}

(We assume that the fluid is incompressible or ρ = constant.) This last equation can be rewritten as

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_2 - P_1}{RA\rho} = \frac{ky}{RA^2\rho}$$

or

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{ky}{RA^2\rho}$$

Taking the Laplace transforms of both sides of this last equation, assuming zero initial conditions, we obtain

$$sX(s) = sY(s) + \frac{k}{RA^2\rho}Y(s)$$

The transfer function of this system thus becomes

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + \dfrac{k}{RA^2\rho}}$$

Let us define $RA^2\rho/k = T$. Then

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ts}{Ts+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{Ts}}$$

Figure 5-31 (c) shows a block diagram representation for this system.

Obtaining hydraulic proportional-plus-integral control action. Figure 5-32 (a) shows a schematic diagram of a hydraulic proportional-plus-integral controller. A block diagram of this controller is shown in Fig. 5-32 (b). The transfer function $Y(s)/E(s)$ is given by

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{T}{Ts+1}}$$

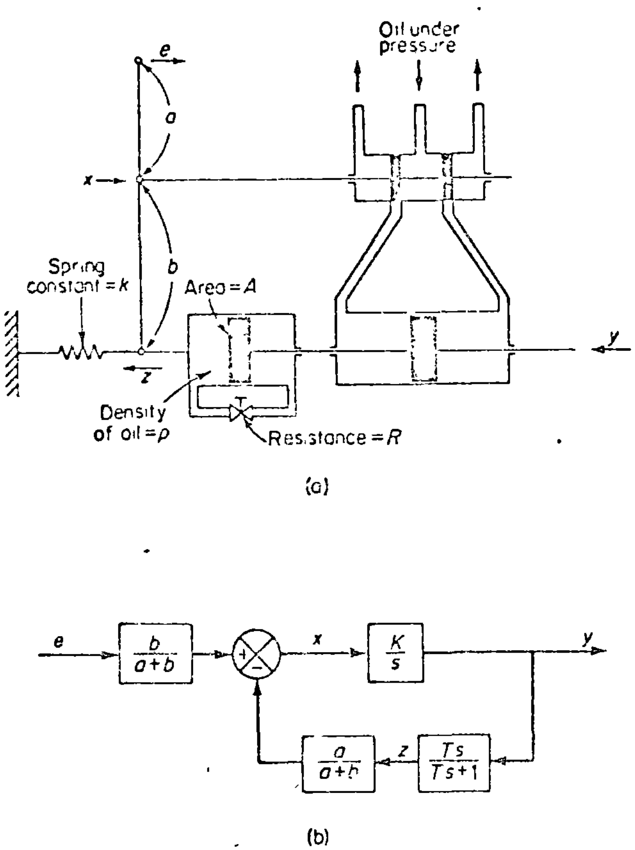


Fig. 5-32. (a) Schematic diagram of a hydraulic proportional-plus-integral controller; (b) block diagram of the controller.

In such a controller, under normal operation $|KaT/[(a+b)(Ts+1)]| \gg 1$, with the result that

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

where

$$K_p = \frac{b}{a}, \qquad T_i = T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Thus the controller shown in Fig 5-32 (a) is a proportional-plus-integral controller.

Obtaining derivative and integral control action in electronic controllers. Figure 5-33 shows the principle of obtaining derivative and integral control action in electronic controllers. Essentially we insert an appropriate circuit in the feedback path to generate the desired control action The transfer functions of the controllers may be obtained as follows: For the controller shown in Fig. 5-33 (a),

$$\frac{E_f(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{R_d C_d s + 1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_0(s)$$

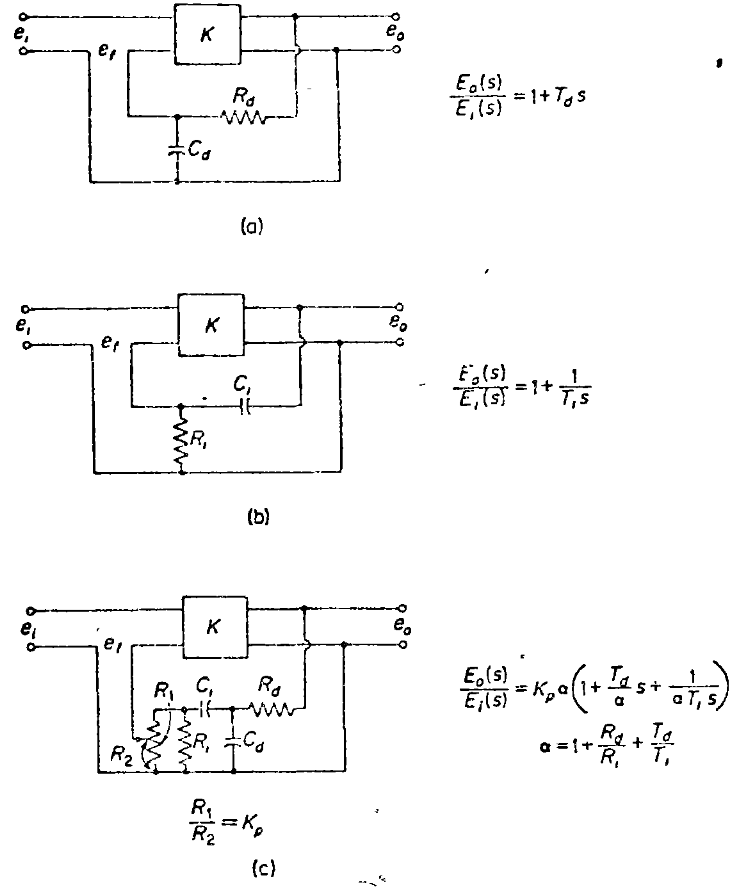


Fig. 5-33. Electronic controllers (a) Proportional-plus-derivative controller; (b) proportional-plus-integral controller, (c) proportional-plus-derivative-plus-integral controller.

Hence, for $|K/(R_d C_d s + 1)| \gg 1$,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_d C_d s + 1)}{R_d C_d s + 1 + K} \doteq R_d C_d s + 1 = T_d s + 1$$

where $T_d = R_d C_d$.

Similarly, for the controller shown in Fig. 5-33 (b),

$$\frac{E_f(s)}{E_0(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_0(s)$$

Hence, for $|KR_i C_i s/(R_i C_i s + 1)| \gg 1$,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_i C_i s + 1)}{KR_i C_i s + R_i C_i s + 1} \doteq \frac{R_i C_i s + 1}{R_i C_i s} = 1 + \frac{1}{T_i s}$$

where $T_i = R_i C_i$

For the controller shown in Fig. 5-33 (c), if the loop gain is very much greater than unity the transfer function may be derived as follows:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_p\alpha\left(1 + \frac{T_d}{\alpha}s + \frac{1}{\alpha T_i s}\right)$$

where

$$\alpha = 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}$$

The derivation of this transfer function is given in Problem A-5-5.

5-4 EFFECTS OF INTEGRAL AND DERIVATIVE CONTROL ACTION ON SYSTEM PERFORMANCE

In this section, we shall investigate the effects of integral and derivative control action on the system performance, but we shall consider only simple systems. (In later chapters we shall study more about integral and derivative control.)

Integral control action. In the proportional control of a plant whose transfer function does not possess an integrator $1/s$, there is a steady-state error, or offset, in the response to a step input. Such an offset can be eliminated if the integral control action is included in the controller.

In the integral control of a plant, the control signal, the output signal from the controller, at any instant is the area under the actuating error signal curve up to that instant. The control signal $m(t)$ can have nonzero value when the actuating error signal $e(t)$ is zero, as shown in Fig. 5-34 (a). This is impossible in the case of the proportional controller since a nonzero control signal requires a nonzero actuating error signal. (A nonzero actuating error signal at steady state means that there is an offset.) Figure 5-34 (b) shows the curve $e(t)$ versus t and the corresponding curve $m(t)$ versus t when the controller is of the proportional type.

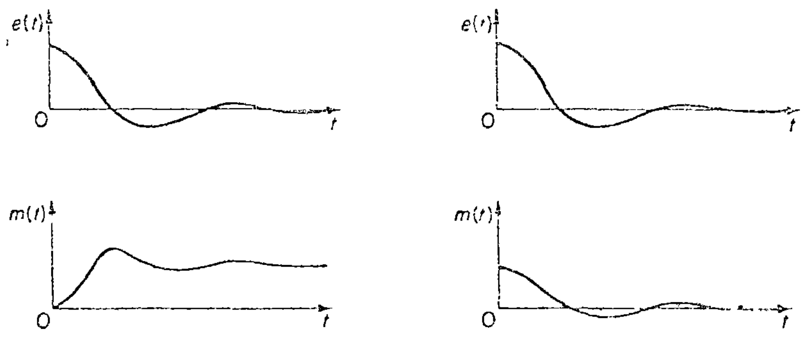


Fig. 5-34. (a) Plots of $e(t)$ and $m(t)$ curves showing nonzero control signal when the actuating error signal is zero; (b) plots of $e(t)$ and $m(t)$ curves showing zero control signal when the actuating error signal is zero.

Note that integral control action, while removing offset or steady state error, may lead to oscillatory response of slowly decreasing amplitude or even increasing amplitude, both of which are usually undesirable. (For details, see Chapter 6.)

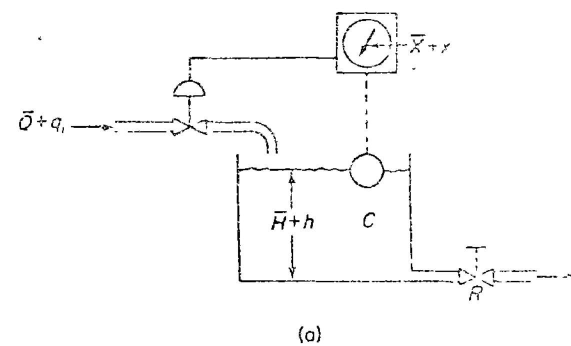
Integral control of liquid-level control systems. In Section 5-2, we found that the proportional control of a liquid-level system will result in a steady-state error with a step input. We shall now show that such an error can be eliminated if integral control action is included in the controller.

Figure 5-35 (a) shows a liquid-level control system. We assume that the controller is an integral controller. We also assume that the variables x, q_i, h, and q_o, which are measured from their respective steady-state values $\bar{X}$, $\bar{Q}$, $\bar{H}$, and $\bar{Q}$, are small quantities so that the system can be considered linear. Under these assumptions, the block diagram of the system can be obtained as shown in Fig. 5-35 (b). From Fig. 5-35 (b), the closed-loop transfer function between $H(s)$ and $X(s)$ is

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

Hence

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)}$$
$$= \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR}$$



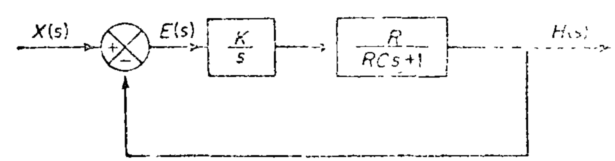


Fig. 5-35. (a) Liquid-level control system; (b) block diagram of the system.

Since the system is a stable one, the steady-state error for the unit-step response is obtained by applying the final value theorem as follows:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR}\frac{1}{s}$$
$$= 0$$

Integral control of the liquid-level system thus eliminates the steady-state error in the response to the step input. This is an important improvement over the proportional control alone which gives offset.

Response to torque disturbances (proportional control). Let us investigate the effect of a torque disturbance occurring at the load element. Consider the system shown in Fig. 5-36. The proportional controller delivers torque T to position the load element, which consists of moment of inertia and viscous friction. Torque disturbance is denoted by N.

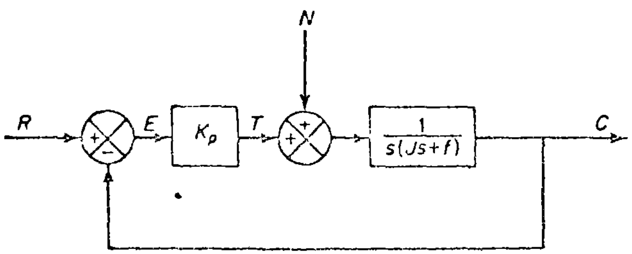


Fig. 5-36. Control system with a torque disturbance.

Assuming that the reference input is zero or $R(s) = 0$, the transfer function between $C(s)$ and $N(s)$ is given by

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + fs + K_p}$$

Hence

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{Js^2 + fs + K_p}$$

The steady-state error due to a step disturbance torque of magnitude T_n is given by

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{-s}{Js^2 + fs + K_p}\frac{T_n}{s}$$
$$= -\frac{T_n}{K_p}$$

At steady state, the proportional controller provides the torque $-T_n$, which is equal in magnitude but opposite in sign to the disturbance torque T_n. The steady-state output due to the step disturbance torque is

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_n}{K_p}.$$

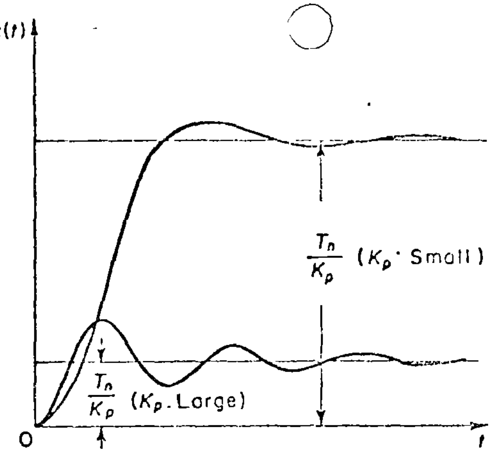


Fig. 5-37. Typical response curves to a step torque disturbance.

The steady-state error can be reduced by increasing the value of the gain K_p. Increasing this value, however, will cause the system response to be more oscillatory. Typical response curves for a small value of K_p and a large value of K_p are shown in Fig. 5-37.

Since the value of the gain K_p cannot be increased too much, it is desirable to modify the proportional controller to a proportional-plus-integral controller.

Response to torque disturbances (proportional-plus-integral control). In order to eliminate offset due to torque disturbance, the proportional controller may be replaced by a proportional-plus-integral controller.

If integral control action is added to the controller, then as long as there is an error signal, there is a torque developed by the controller to reduce this error, provided the control system is a stable one.

Figure 5-38 shows the proportional-plus-integral control of the load element, consisting of moment of inertia and viscous friction.

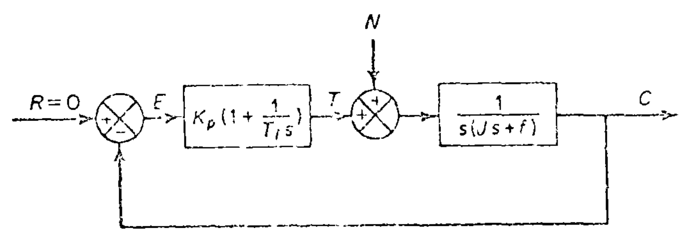
The closed-loop transfer function between $C(s)$ and $N(s)$ is

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

In the absence of the reference input, or $r(t) = 0$, the error signal is obtained from

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}N(s)$$

Fig. 5-38. Proportional-plus-integral control of a load element consisting of moment of inertia and viscous friction.



If this control system is a stable one, i e , if the roots of the characteristic equation

$$Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

have negative real parts, then the steady-state error in the response to a step disturbance torque of magnitude T_n is obtained by applying the final value theorem as follows:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{-s^2}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}} \frac{T_n}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Thus steady-state error to the torque disturbance can be eliminated if the controller is of the proportional-plus-integral type.

Note that the integral control action added to the proportional controller has converted the originally second-order system to a third-order one. Hence the control system may become unstable for a large value of K_p since the roots of the characteristic equation may have positive real parts. (The second-order system is always stable if the coefficients in the system differential equation are all positive.)

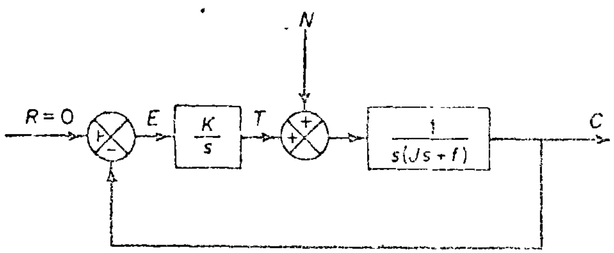


Fig. 5-39. Integral control of a load element consisting of moment of inertia and viscous friction.

It is important to point out that if the controller were an integral controller, as in Fig 5-39, then the system always becomes unstable because the characteristic equation

$$Js^3 + fs^2 + K = 0$$

will have roots with positive real parts. Such an unstable system cannot be used in practice

Note that in the system of Fig. 5-38, the proportional control action tends to stabilize the system, while the integral control action tends to eliminate or reduce steady-state error in response to various inputs.

Derivative control action. Derivative control action, when added to a proportional controller, provides a means of obtaining a controller with high sensitivity. An advantage of using derivative control action is that it responds to the rate of change of the actuating error and can produce a significant correction before the magnitude of the actuating error becomes too large. Derivative control thus anticipates the actuating error, initiates an early corrective action, and tends to increase the stability of the system.

Although derivative control does not affect the steady-state error directly, it adds damping to the system and thus permits the use of a larger value of the gain K, which will result in an improvement in the steady-state accuracy.

Because derivative control operates on the rate of change of the actuating error and not the actuating error itself, this mode is never used alone. It is always used in combination with proportional or proportional-plus-integral action.

Proportional control of systems with inertia load. Before we discuss the effect of derivative action on system performance, we shall consider the proportional control of an inertia load

Consider the system shown in Fig. 5-40 (a). The closed-loop transfer function is obtained as

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

Since the roots of the characteristic equation

$$Js^2 + K_p = 0$$

are imaginary, the response to a unit-step input continues to oscillate indefinitely, as shown in Fig. 5-40 (b).

Control systems exhibiting such response characteristics are not desirable We shall see that the addition of derivative control will stabilize the system.

Proportional-plus-derivative control of a system with inertia load. Let us modify the proportional controller to a proportional-plus-derivative controller whose transfer function is $K_p(1 + T_d s)$. The torque developed by the controller is proportional to $K_p(e + T_d \dot{e})$. Derivative control is essentially anticipatory, measures the instantaneous error velocity, and predicts the large overshoot ahead of time and produces an appropriate counteraction before too large an overshoot occurs

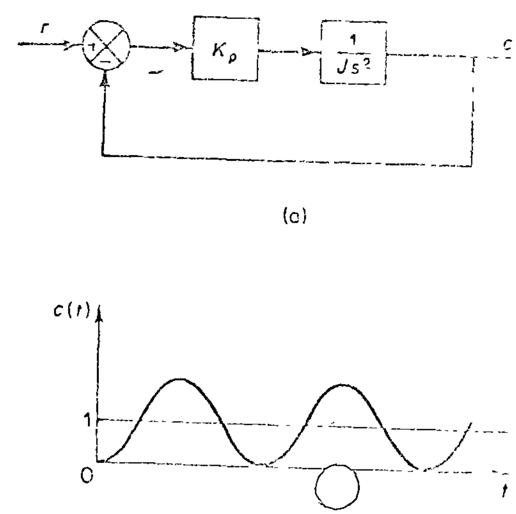


Fig. 5-40. (a) Proportional control of a system with inertia load, (b) response to unit-step input.

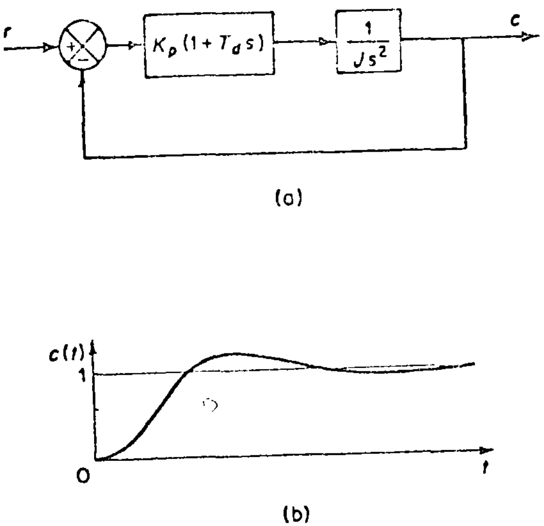


Fig. 5-41. (a) Proportional-plus-derivative control of a system with inertia load; (b) response to a unit step-input.

Consider the system shown in Fig. 5-41 (a). The closed-loop transfer function is given by

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

The characteristic equation

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

now has two roots with negative real parts for positive values of J, K_p, and T_d. Thus derivative control introduces a damping effect. A typical response curve $c(t)$ to a unit-step input is shown in Fig 5-41 (b). Clearly, the response curve shows a marked improvement over the original response curve shown in Fig 5-40 (b).

5-5 REDUCTION OF PARAMETER VARIATIONS BY USE OF FEEDBACK

The primary purpose of using feedback in control systems is to reduce the sensitivity of the system to parameter variations and unwanted disturbances.

If we are to construct a suitable open-loop control system, we must select all the components of the open-loop transfer function $G(s)$ very carefully so that they respond accurately. In the case of constructing a closed-loop control system, however, the components can be less accurate since the sensitivity to parameter variations in $G(s)$ is reduced by a factor of $1 + G(s)$.

To illustrate this, consider the open-loop and the closed-loop system shown in Figs. 5-42 (a) and (b), respectively. Suppose that, due to parameter variations, $G(s)$ is changed to $G(s) + \Delta G(s)$, where $|G(s)| \gg |\Delta G(s)|$. Then, in the open-loop system shown in Fig. 5-42 (a), the output is given by

$$C(s) + \Delta C(s) = [G(s) + \Delta G(s)]R(s)$$

Hence the change in the output is given by

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s)$$

In the closed-loop system shown in Fig. 5-42 (b),

$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s) + \Delta G(s)}R(s)$$

or

$$\Delta C(s) \doteqdot \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)}R(s)$$

Thus, the change in the output of the closed-loop system, due to the parameter variations in $G(s)$, is reduced by a factor of $1 + G(s)$. In many practical cases, the magnitude of $1 + G(s)$ is generally much greater than one.

Note that in reducing the effects of the parameter variations of the components, we very often bridge the offending component with a feedback loop.

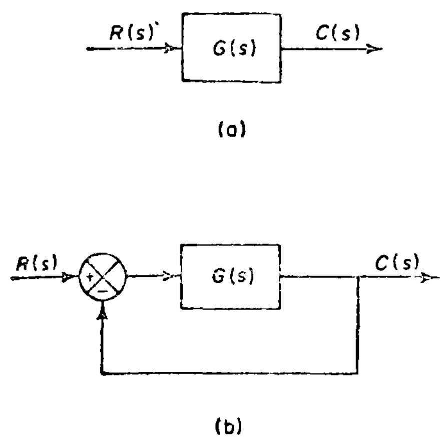


Fig. 5-42. (a) Open-loop system; (b) closed-loop system

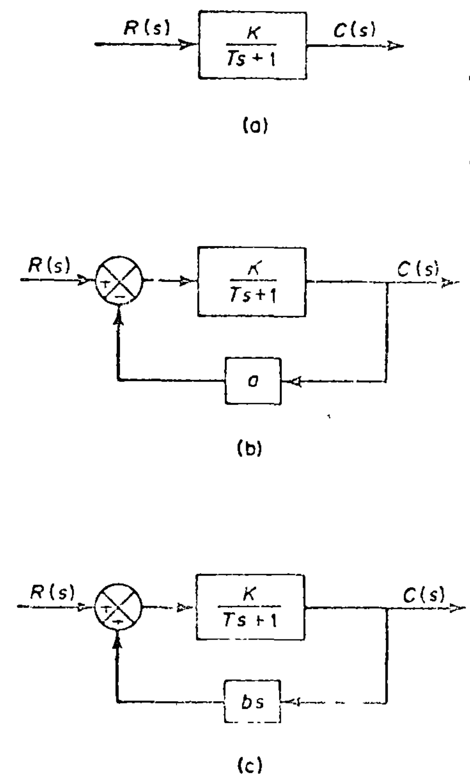


Fig. 5-43. (a) Open-loop system, (b) closed-loop system with time constant $T/(1 + Ka)$, (c) closed-loop system with time constant $T - bK$.

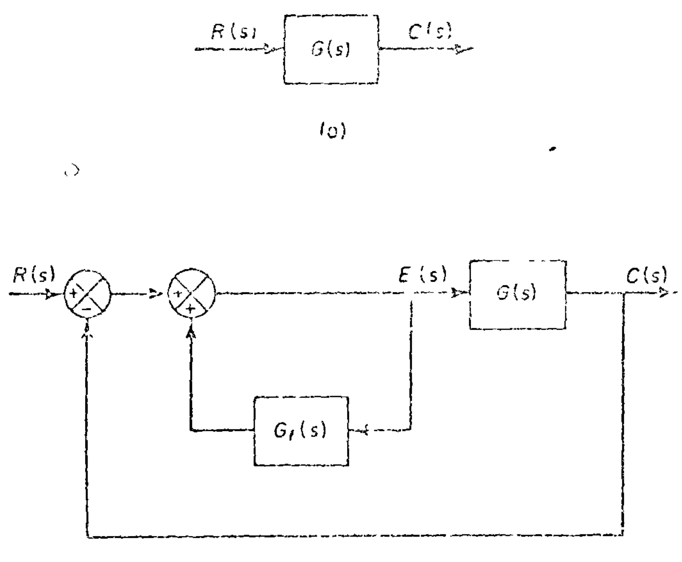
Changing time constants by use of feedback. Consider the system shown in Fig. 5-43 (a). The time constant of the system is T. The addition of a negative feedback loop around this element reduces the time constant. Figure 5-43 (b) shows the system with the same feedforward transfer function as that shown in Fig. 5-43 (a), with the exception that a negative feedback loop has been added. The time constant of this system has been reduced to $T/(1 + Ka)$. Note also that the gain constant for this system has also been reduced from K to $K/(1 + Ka)$.

If, instead of a negative feedback loop, a positive feedback loop is added around the transfer function $K/(Ts + 1)$ and if the feedback transfer function is properly chosen, then the time constant can be made zero or a very small value. Consider the system shown in Fig. 5-43 (c). Since the closed-loop transfer function is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(T - bK)s + 1}$$

the time constant can be reduced by properly choosing the value of b. If b is set equal to T/K, then the time constant becomes zero. Note, however, that if disturbances cause $T - bK$ to be negative instead of zero, the system becomes unstable. Hence if positive feedback is employed to reduce the time constant to a small value, we must be very careful so that $T - bK$ never becomes negative.

Increasing loop gains by use of positive feedback. The system shown in Fig. 5-44 (a) has the transfer function $C(s)/R(s) = G(s)$. Consider now the system shown in Fig. 5-44(b). The closed-loop transfer function for this system is



(a)

(b)

Fig. (a) Open-loop system, (b) closed-loop system whose transfer function is nearly unity.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_f(s) + G(s)}$$

If $G_f(s)$ is chosen nearly unity, or $G_f(s) \doteq 1$, then

$$\frac{C(s)}{R(s)} \doteq 1$$

Essentially, this means that the inner loop, using positive feedback, has increased the feedforward gain to a very large value. As we stated earlier, when the loop gain is very large, the closed-loop transfer function $C(s)/R(s)$ becomes equal to the inverse of the transfer function of the feedback element. Since the system shown in Fig. 5-44 (b) has unity feedback, $C(s)/R(s)$ becomes almost equal to unity. [Thus $C(s)/R(s)$ is not sensitive to the parameter variations in $G(s)$.]

Elimination of integration. Addition of a minor loop around an integrator modifies it to a first-order delay element. Consider the system shown in Fig. 5-45 (a). Negative feedback of the output, as shown in Fig. 5-45 (b), modifies the integrator K/s to a first-order delay element $K/(s + K)$.

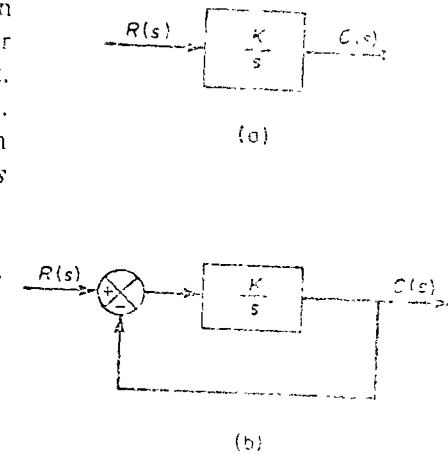


Fig. 5-45 (a) Integrating element, (b) first-order delay element.

Comments on the use of feedback loops. As we have seen in the previous discussion, feedback control, or closed-loop control, reduces the sensitivity of a system to parameter variations and therefore decreases the effects of gain variations in the feedforward path in response to variations of supply pressure, supply voltage, temperature, etc. In the study of controllers made in Sections 5-2 and 5-3, we have also seen that the elements which perform the various control actions are in the feedback part of the controller and that the feedback elements in a controller essentially increase the ... the amplifier and increase the range of the proportional sensitivity.

The use of feedback loops in control systems, however, will increase the number of components of the systems, will thereby increase the complexity, and also introduce the possibility of instability.

5-6 FLUIDICS

Introduction. Fluid devices through which air, gases, or liquids flow in intricate and precise channels are called *fluidic devices*. Such devices use solid components, or circuits, to perform sensing, logic, amplification, and control functions. Fluidics, the general study of fluidic devices and systems, is one of the newest ...

r circuit which allows passage of a signal only if certain control requirements have een satisfied.) Table 5-1 shows a few fluidic logic gates and their respective truth ables. (A truth table is a tabular correlation of input and output relationships or logic elements.) As seen from Table 5-1, digital fluidic devices can gate, or nhibit, signal transmission by the application, removal, or other combinations f input signals.

Digital fluidics perform the same logic functions as their electronic counterpart. here are, however, some areas where each has distinct advantages. (Usually, he choice is clear.) For example, in applications where reliability in extreme nvironments (e.g., high temperature or radiation) is more important than speed f operations, the digital fluidics should be chosen. If high-speed logic operation in ormal environments is required, electronic devices are preferable. Applications of igital fluidics are most often found in automatic warehousing, machine feeding, equencing, handling, etc.

Many functions of control relays can be performed by fluidic devices, and many ogic functions of relays and electronic systems can be implemented by fluidic devices.

A typical fluidic application* Fluidic components can sense positions, provide operating commands, perform logic interlocking, and control the valving of a machine's control system.

Consider the mechanical system shown in Fig. 5-53. It is desired to design a control logic system to sequence a drill head so that when the head is retracted and a pushbutton is actuated, the drill will advance downward. The head drills in the downward position and then returns to the up position to complete the cycle. For emergency return, a pushbutton is required to retract the head at any time.

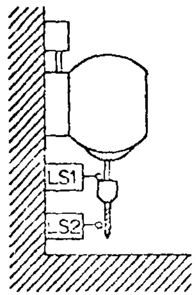


Fig. 5-53. Mechanical system.

We shall present a solution to this problem using digital fluidics. Figure 5-54 shows a logic circuit which can perform the

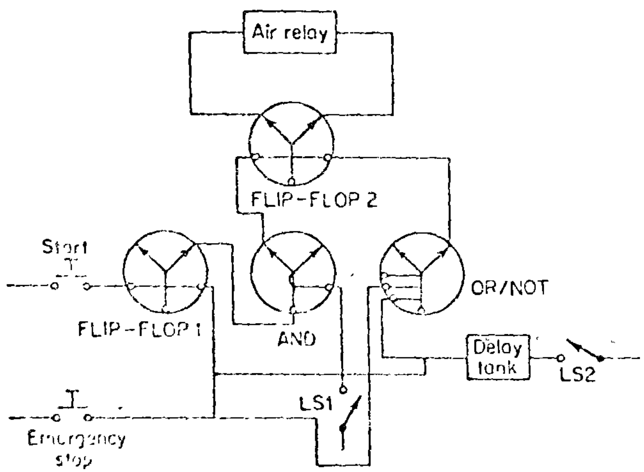


Fig. 5-54. Logic circuit.

* This example is taken from "Fluidics-Plugging the Control Capability Gap" by The General Purpose Control Department, General Electric Company, Bloomington, Illinois.

desired sequence of operations. FLIP-FLOP element 1 is set by the start button. The start button is released, and the element will continue to give the set output. The output of FLIP-FLOP element 1 is fed to AND element, which combines this with the limit switch (LS 1) signal. This signal sets FLIP-FLOP 2, which shifts the air relay and starts the head moving down. The drill moves down and drills until the signal from LS 2 fills the delay tank. This shifts OR/NOT element, which in turn switches FLIP-FLOP 2, which shifts the air relay back to its original state. The drill head now moves up. The cycle will repeat when the start button is pushed and LS 1 is activated.

If the emergency stop button is pushed at any time, it will shift the OR/NOT and FLIP-FLOP 1. The OR/NOT will shift FLIP-FLOP 2 and immediately cause the drill head to retract.

Example Problems and Solutions

PROBLEM A-5-1. The term commonly used to define the gain or sensitivity of a proportional controller is the *proportional band*. This is the percentage change in the input to the controller (error signal) required to cause 100% change in the output of the actuator. Thus small proportional band corresponds to high gain or high proportional sensitivity.

What is the proportional band if the controller and actuator have an overall gain of 4%/%? (Note that the total changes in the input to the controller and the output of the actuator are given as 100%. Thus a gain of 4%/% means that there is a change of 4% in the output if the change in input is 1%.)

Solution

$$\text{Proportional band} = \frac{100\%}{\text{gain in } \%/\%} = \frac{100\%}{4\%/\%} = 25\%$$

PROBLEM A-5-2. Consider the liquid-level control system shown in Fig. 5-55. Assume that the set point of the controller is fixed. Assuming a step disturbance of magnitude n_0, determine the error. Assume that n_0 is small and the variations in the variables from their respective steady-state values are also small. The controller is a proportional one.

If the controller is not a proportional one, but integral, what is the steady-state error?

Solution. Figure 5-56 is a block diagram of the system when the controller is proportional with gain K_p. (We assume the transfer function of the pneumatic valve to be unity.) Since

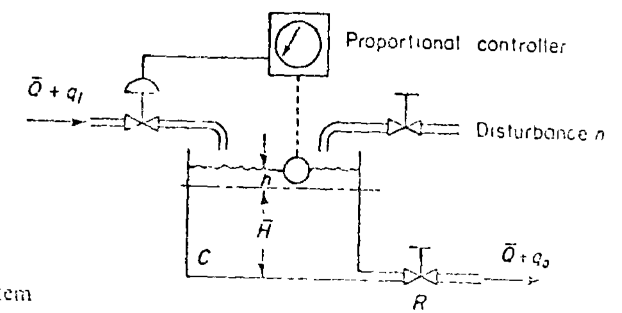


Fig. 5-55. Liquid-level control system.

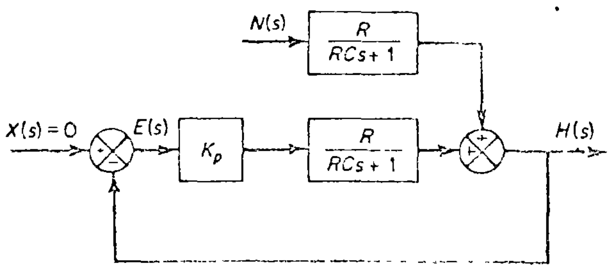


Fig. 5-56. Block diagram of the liquid-level control system shown in Fig 5-55

the set point is fixed, the variation in the set point is zero, or $X(s) = 0$. The Laplace transform of $h(t)$ is

$$H(s) = \frac{K_p R}{RCs + 1} E(s) + \frac{R}{RCs + 1} N(s)$$

Then

$$E(s) = -H(s) = -\frac{K_p R}{RCs + 1} E(s) - \frac{R}{RCs + 1} N(s)$$

Hence

$$E(s) = -\frac{R}{RCs + 1 + K_p R} N(s)$$

Since

$$N(s) = \frac{n_0}{s}$$

we obtain

$$E(s) = -\frac{R}{RCs + 1 + K_p R}\frac{n_0}{s}$$
$$= \frac{Rn_0}{1 + K_p R}\left(\frac{1}{s + \frac{1 + K_p R}{RC}}\right) - \frac{Rn_0}{1 + K_p R}\frac{1}{s}$$

The time solution for $t > 0$ is

$$e(t) = \frac{Rn_0}{1 + K_p R}\left[\exp\left(-\frac{1 + K_p R}{RC}t\right) - 1\right]$$

Thus, the time constant is $RC/(1 + K_p R)$. (In the absence of the controller, the time constant is equal to RC.) As the gain of the controller is increased, the time constant is decreased. The steady-state error is

$$e(\infty) = -\frac{Rn_0}{1 + K_p R}$$

As the gain K_p of the controller is increased, the steady-state error, or offset, is reduced. Thus, mathematically, the larger the gain K_p is, the smaller the offset and time constant are. In practical systems, however, if the gain K_p of the proportional controller is increased to a very large value, oscillation may result in the output since in our analysis all the small lags and small time constants which may exist in the actual control system are neglected. (If these small lags and time constants are included in the analysis, the transfer function becomes higher order and for very large values of K_p the possibility of oscillation or even instability may occur.)

If the controller is an integral one, then assuming the transfer function of the controller to be

$$G_c = \frac{K}{s}$$

we obtain

$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + KR} N(s)$$

The steady-state error for a step disturbance $N(s) = n_0/s$ is

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{-Rs^2}{RCs^2 + s + KR}\frac{n_0}{s}$$
$$= 0$$

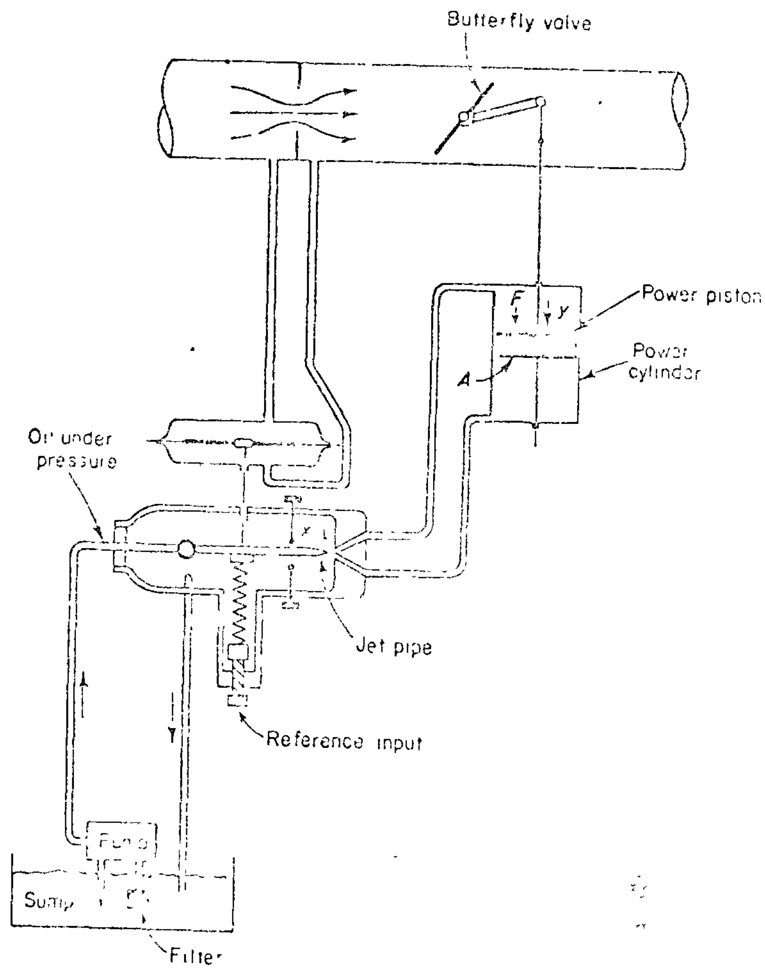


Fig. 5-57. Schematic diagram of a flow control system using a hydraulic jet pipe controller.

Thus, an integral controller eliminates steady-state error or offset due to the step disturbance. (The value of K must be chosen so that the transient response due to the command input and/or disturbance damps out with a reasonable speed. See Chapter 6 for transient-response analysis.)

PROBLEM A-5-3. Figure 5-57 shows a hydraulic jet pipe controller applied to a flow control system. The jet pipe controller governs the position of the butterfly valve. Discuss the operation of this system. Plot a possible curve relating the displacement x of the nozzle to the total force F acting on the power piston.

Solution. The operation of this system is as follows: The flow rate is measured by the orifice, and the pressure difference produced by this orifice is transmitted to the diaphragm of the pressure-measuring device. The diaphragm is connected to the free swinging nozzle, or jet pipe, through a linkage. High-pressure oil ejects from the nozzle all the time. When the nozzle is at a neutral position, no oil flows through either of the pipes to move the power piston. If the nozzle is displaced by the motion of the balance arm to one side, the high-pressure oil flows through the corresponding pipe, and the oil in the power cylinder flows back to the sump through the other pipe.

Assume that the system is initially at rest. If the reference input is changed suddenly to a higher flow rate, then the nozzle is moved in such a direction as to move the power piston and open the butterfly valve. Then the flow rate will increase, the pressure difference across the orifice becomes larger, and the nozzle will move back to the neutral position. The movement of the power piston stops when x, the displacement of the nozzle, comes back to and stays at the neutral position. (The jet pipe controller thus possesses an integrating property.)

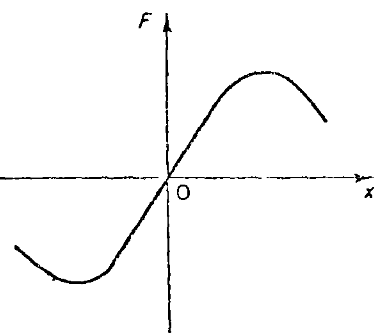


Fig. 5-58. Force versus displacement curve.

The relationship between the total force F acting on the power piston and the displacement x of the nozzle is shown in Fig. 5-58. The total force is equal to the pressure difference ΔP across the piston times the area A of the power piston. For a small displacement x of the nozzle, the total force F and displacement x may be considered proportional.

PROBLEM A-5-4. Draw a block diagram of the pneumatic controller shown in Fig. 5-59. Then derive the transfer function of this controller.

If the resistance R_d is removed (replaced by the line-sized tubing), what control action do we get? If the resistance R_i is removed (replaced by the line-sized tubing), what control action do we get?

Solution. Let us assume that when $e = 0$, the nozzle-flapper distance is equal to $\bar{X}$ and the control pressure is equal to $\bar{P}_c$. In the present analysis, we shall assume small deviations from the respective reference values as follows:

e = small error signal

x = small change in the nozzle-flapper distance

p_c = small change in the control pressure

p_I = small pressure change in bellows I due to small change in the control pressure

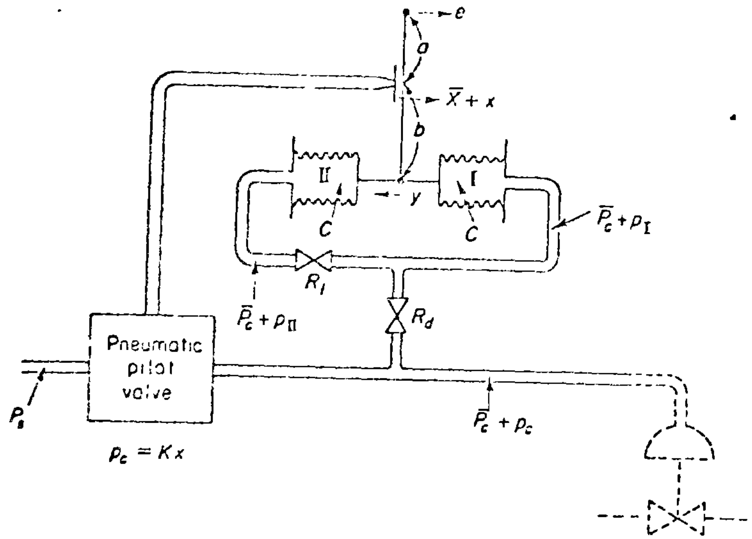


Fig. 5-59. Schematic diagram of a pneumatic controller.

p_{II} = small pressure change in bellows II due to small change in the control pressure

y = small displacement at the lower end of the flapper

In this controller, p_c is transmitted to bellows I through the resistance R_d. Similarly, p_c is transmitted to bellows II through the series of resistances R_d and R_i. An approximate relationship between p_I and p_c is

$$\frac{P_I(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{R_d C s + 1} = \frac{1}{T_d s + 1}$$

where

$T_d = R_d C$ = derivative time

Similarly p_{II} and p_I are related by the transfer function

$$\frac{P_{II}(s)}{P_I(s)} = \frac{1}{R_i C s + 1} = \frac{1}{T_i s + 1}$$

where

$T_i = R_i C$ = integral time

The force-balance equation for the two bellows is

$$(p_I - p_{II})A = k_s y$$

where k_s is the stiffness of the two connected bellows and A is the cross-sectional area of the bellows. The relationship among the variables e, x, and y is

$$x = \frac{b}{a+b}e - \frac{a}{a+b}y$$

The relationship between p_c and x is

$$p_c = Kx$$

From the equations just derived, a block diagram of the controller can be drawn, as shown in Fig. 5-60(a). Simplification of this block diagram results in Fig. 5-60(b).

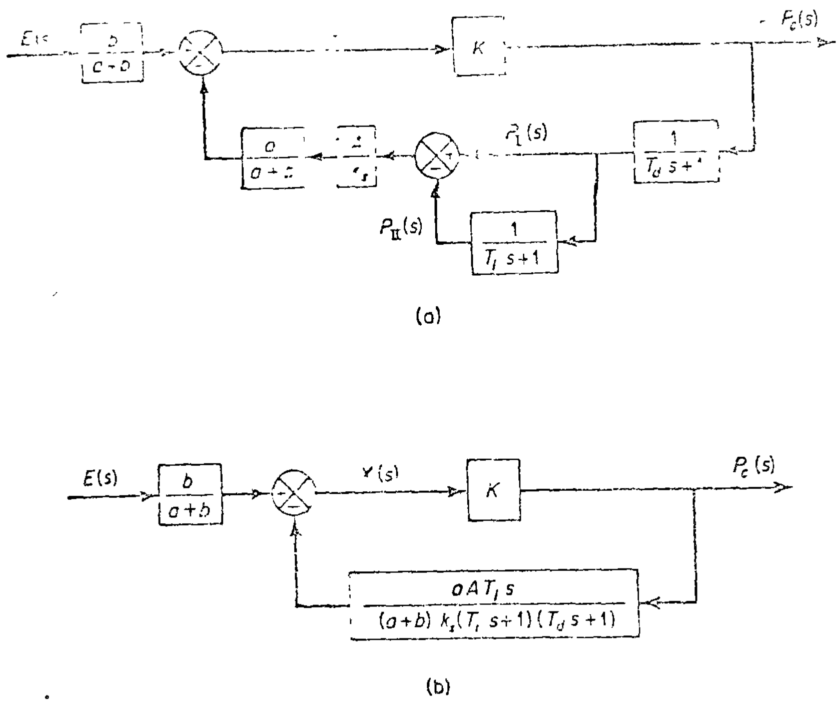


Fig. 5-60. (a) Block diagram of the pneumatic controller shown in Fig. 5-59, (b) simplified block diagram

The transfer function between $P_c(s)$ and $E(s)$ is

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1+K\frac{a}{a+b}\frac{A}{k_s}\left(\frac{T_is}{T_is+1}\right)\left(\frac{1}{T_ds+1}\right)}$$

For a practical controller, under normal operation $|KaAT_is/[(a+b)k_s(T_is+1)(T_ds+1)]|$ is very much greater than unity and $T_i \gg T_d$. Therefore, the transfer function can be simplified as follows:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteq \frac{bk_s(T_is+1)(T_ds+1)}{aAT_is}$$

$$= \frac{bk_s}{aA}\left(\frac{T_i+T_d}{T_i}+T_ds+\frac{1}{T_is}\right)$$

$$\doteq K_p\left(1+T_ds+\frac{1}{T_is}\right)$$

where

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

Thus the controller shown in Fig. 5-59 is a proportional-plus-derivative-plus-integral one.

If the resistance R_d is removed, or $R_d = 0$, the action becomes that of a proportional-

If the resistance R_i is removed, or $R_i = \infty$, the action becomes that of a narrow-band proportional, or two-position, controller. (Note that the actions of two feedback bellows cancel each other, and there is no feedback.)

PROBLEM A-5-5. Obtain the transfer function of the controller shown in Fig. 5-33 (c).

Solution. Figure 5-61 shows the feedback circuit. The equations for the feedback circuit are

$$\frac{1}{C_ds}[I_1(s)-I_2(s)] + R_dI_1(s) = E_0(s)$$

$$\frac{1}{C_ds}[I_2(s)-I_1(s)] + \frac{1}{C_is}I_2(s) + R_iI_2(s) = 0$$

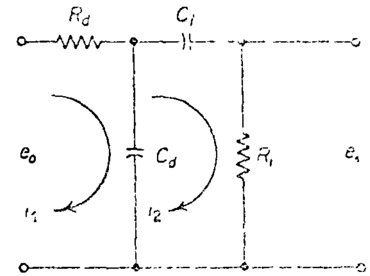


Fig. 5-61. Feedback circuit used in the controller shown in Fig. 5-33 (c)

Hence

$$\frac{I_2(s)}{E_0(s)} = \frac{C_is}{R_iC_iR_dC_ds^2+(R_iC_i+R_dC_i+R_dC_d)s+1}$$

or

$$\frac{E_1(s)}{E_0(s)} = \frac{R_iC_is}{R_iC_iR_dC_ds^2+(R_iC_i+R_dC_i+R_dC_d)s+1}$$

Noting that in Fig. 5-33 (c)

$$(e_i - e_f)K = e_0, \qquad e_f = e_1\frac{R_2}{R_1}$$

we obtain

$$\left[E_i(s) - \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_iC_isE_0(s)}{R_iC_iR_dC_ds^2+(R_iC_i+R_dC_i+R_dC_d)s+1}\right)\right]K = E_0(s)$$

The transfer function $E_0(s)/E_i(s)$ is

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{KR_1[R_iC_iR_dC_ds^2+(R_iC_i+R_dC_i+R_dC_d)s+1]}{KR_2R_iC_is+R_1[R_iC_iR_dC_ds^2+(R_iC_i+R_dC_i+R_dC_d)s+1]}$$

If the loop gain is very much greater than unity, then this last equation may be simplified to give

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1[R_iC_iR_dC_ds^2+(R_iC_i+R_dC_i+R_dC_d)s+1]}{R_2R_iC_is}$$

$$= K_p\left[T_ds+\left(1+\frac{R_d}{R_i}+\frac{T_d}{T_i}\right)+\frac{1}{T_is}\right]$$

where

$$K_p = R_1/R_2, \qquad T_d = R_dC_d, \qquad T_i = R_iC_i$$

Define

$$\alpha = 1+\frac{R_d}{R_i}+\frac{T_d}{T_i}$$

Then

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_p\alpha\left(1+\frac{T_d}{\alpha}s+\frac{1}{\alpha T_is}\right)$$

Thus, the controller is a proportional-plus-derivative-plus-integral one.

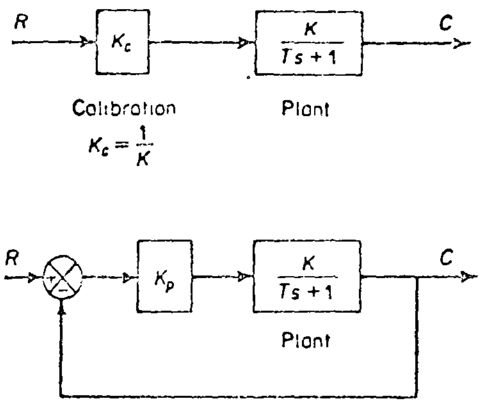


Fig. 5-62. Block diagrams of an open-loop control system and a closed-loop control system.

PROBLEM A-5-6. Consider the open-loop and closed-loop control system shown in Fig. 5-62. In the open-loop one, gain K_c is calibrated so that $K_c = 1/K$. Thus, the transfer function of the open-loop control system is

$$G_0(s) = \frac{1}{K}\frac{K}{Ts+1} = \frac{1}{Ts+1}$$

In the closed-loop control system, gain K_p of the controller is set so that $K_pK \gg 1$.

Assuming a unit-step input, compare the steady-state errors for these control systems.

Solution. For the open-loop control system, the error signal is

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

or

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$= [1 - G_0(s)]R(s)$$

The steady-state error for the unit-step response is

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} s[1 - G_0(s)]\frac{1}{s}$$
$$= 1 - G_0(0)$$

If $G_0(0)$, the dc gain of the open-loop control system, is equal to unity, then the steady-state error is zero. Due to environmental changes and aging of components, however, the dc gain $G_0(0)$ will drift from unity as time elapses, and the steady-state error will no longer be equal to zero. Such steady-state error in an open-loop control system will remain until the system is recalibrated.

For the closed-loop control system, the error signal is

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$= \frac{1}{1 + G(s)}R(s)$$

where

$$G(s) = \frac{K_pK}{Ts+1}$$

The steady-state error for a unit-step input is

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{1}{1 + G(s)}\right]\frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{1 + G(0)}$$
$$= \frac{1}{1 + K_pK}$$

In the closed-loop control system, gain K_p is set at a large value compared with $1/K$. Thus the steady-state error can be made small, although not exactly zero.

Let us assume the following variation in the transfer function of the plant, assuming K_c and K_p constant:

$$\frac{K + \Delta K}{Ts+1}$$

For simplicity, let us assume $K = 10$, $\Delta K = 1$, or $\Delta K/K = 0.1$. Then the steady-state error for a unit-step input in the open-loop control system becomes

$$e_{ss} = 1 - \frac{1}{K}(K + \Delta K)$$
$$= 1 - 1.1$$
$$= -0.1$$

In the closed-loop control system, if K_p is set at $100/K$, then the steady-state error for a unit-step input becomes

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G(0)}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{100}{K}(K + \Delta K)}$$
$$= \frac{1}{1 + 110}$$
$$= 0.009$$

Thus, the closed-loop control system is superior to the open-loop control system in the presence of environmental changes, aging of components, etc., which definitely affect the steady-state performance.

PROBLEM A-5-7. The block diagram of Fig. 5-63 shows a speed control system in which the output member of the system is subject to a torque disturbance. In the diagram,

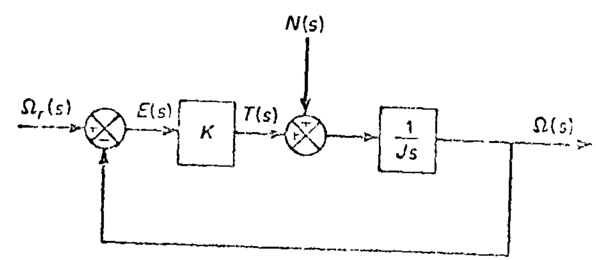


Fig. 5-63. Block diagram of a speed control system.

$\Omega_r(s)$, $\Omega(s)$, $T(s)$, and $N(s)$ are the Laplace transforms of the reference speed, output speed, driving torque, and disturbance torque, respectively. In the absence of a disturbance torque, the output speed is equal to the reference speed.

Investigate the response of this system to a unit step disturbance torque. Assume that the reference input is zero, or $\Omega_r(s) = 0$.

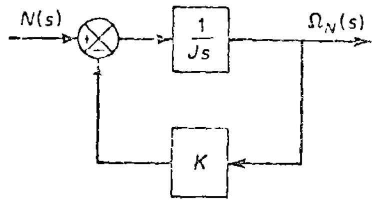


Fig. 5-64. Block diagram of the speed control system of Fig. 5-63 when $\Omega_r(s) = 0$.

Solution. Figure 5-64 is a modified block diagram convenient for the present analysis. The closed-loop transfer function is

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

where $\Omega_N(s)$ is the Laplace transform of the output speed due to the disturbance torque. For a unit-step disturbance torque, the steady-state output velocity is

$$\omega_N(\infty) = \lim_{s \to 0} s\Omega_N(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{s}{Js + K}\frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{K}$$

From this analysis, we conclude that if a step disturbance torque is applied to the output member of the system, an error speed will result so that the ensuing motor torque will exactly cancel the disturbance torque. To develop this motor torque, it is necessary that there be an error in speed so that nonzero torque will result.

PROBLEM A-5-8. In the system considered in Problem A-5-7, it is desired to eliminate as much as possible the speed errors due to torque disturbances.

Is it possible to cancel the effect of a disturbance torque at steady state so that a constant disturbance torque applied to the output member will cause no speed change at steady state?

Solution. Suppose we choose a suitable controller whose transfer function is $G_c(s)$, as shown in Fig. 5-65. Then in the absence of the reference input, the closed-loop transfer function between the output velocity $\Omega_N(s)$ and the disturbance torque $N(s)$ is

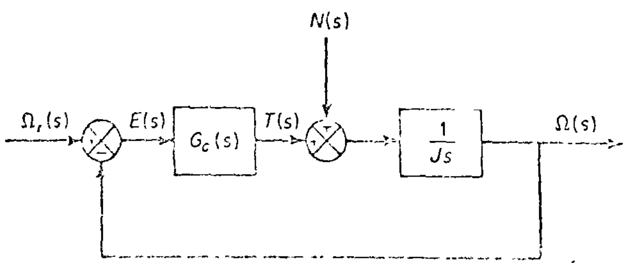


Fig. 5-65. Block diagram of a speed control system.

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js}G_c(s)}$$
$$= \frac{1}{Js + G_c(s)}$$

The steady-state output speed due to a unit-step disturbance torque is

$$\omega_N(\infty) = \lim_{s \to 0} s\Omega_N(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{s}{Js + G_c(s)}\frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{G_c(0)}$$

In order to satisfy the requirement that

$$\omega_N(\infty) = 0$$

we must choose $G_c(0) = \infty$. This can be realized if we choose

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

Integral control action will continue to correct until the error is zero. This controlle however, presents a stability problem because the characteristic equation will have tv imaginary roots.

One method of stabilizing such a system is to add a proportional mode to the contro ler or choose

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

With this controller, the block diagram of Fig. 5-65 in the absence of the reference inp can be modified to that of Fig. 5-66. The closed-loop transfer function $\Omega_N(s)/N(s)$ becom

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

For a unit-step disturbance torque, the steady-state output speed is

$$\omega_N(\infty) = \lim_{s \to 0} s\Omega_N(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K}\frac{1}{s}$$
$$= 0$$

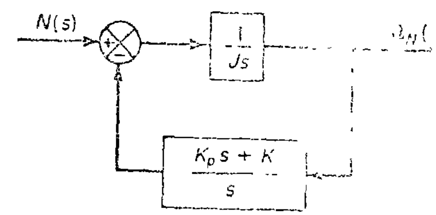


Fig. 5-66. Block diagram of the speed co trol system of Fig. 5-65 when $G_c(s) = K_p + (K/s)$ and $\Omega_r(s) = 0$

Thus, we see that the proportional-plus-integral controller eliminates speed error at steady state.

The use of integral control action has increased the order of the system by o (Th tends to produce an oscillatory response.)

In the present system, a step disturbance torque will cause a transient error in t output speed, but the error will become zero at steady state. The integrator provides onzero output with zero error. (The nonzero output of the integrator produces a motor orque which exactly cancels the disturbance torque.)

Note that the integrator in the transfer function of the plant does not eliminate the teady-state error due to a disturbance torque. To eliminate this, we must have an integrator before the point where the disturbance torque enters.

PROBLEM A-5-9. Figure 5-67(a) is a schematic diagram of a pneumatic control device. It consists of four chambers separated by three diaphragms which are rigidly linked, as shown in the diagram. This device has two input pipes where two control pressures P_1 and P_2 are connected. If such pressures are applied, the diaphragm assembly distorts and shuts off either one of the two supply inputs. The output pressure P_0 is then equal to either P_s or 0. The output pressure P_0 can be plotted versus the pressure difference $P_1 - P_2$, as shown in Fig. 5-67(b). Such a device can be used as a logic device.

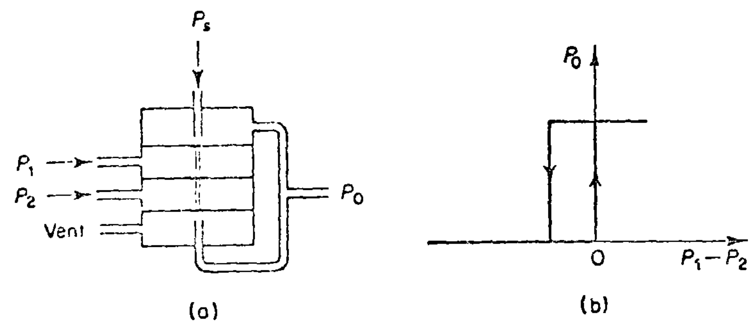


Fig. 5-67. (a) Schematic diagram of a pneumatic control device; (b) characteristic curve

If a bias pressure is applied to one of the chambers, as shown in Fig. 5-68(a), the characteristic curve is shifted, as shown in Fig. 5-68(b).

Figure 5-69 shows a combination of two such devices. What logic operation can we get from this combination? Assuming the supply pressure is 1 and the input pressures at points A and B are either 0 or 1, find the output pressure at point F.

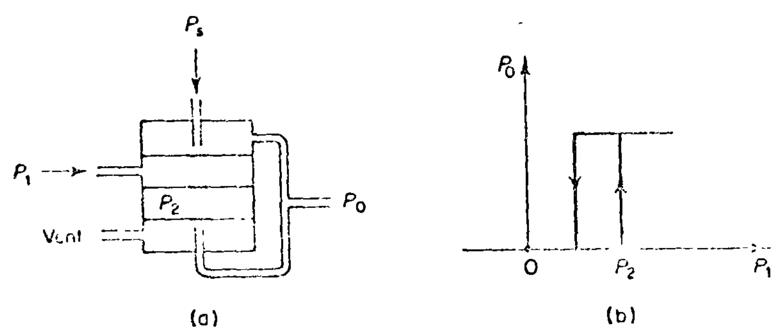


Fig. 5-68. (a) Schematic diagram of a pneumatic control device, (b) characteristic curve.

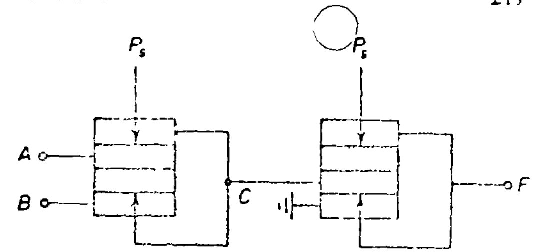


Fig. 5-69. Combination of two pneumatic control devices

Solution. From Fig. 5-69, we obtain the following table:

A	B	C	F
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

Thus, the logic operation obtained is that of NOR; that is, $F = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

PROBLEMS

PROBLEM B-5-1. The schematic diagram of a pneumatic controller is shown in Fig. 5-70. Draw a block diagram of the controller, and then derive the transfer function.

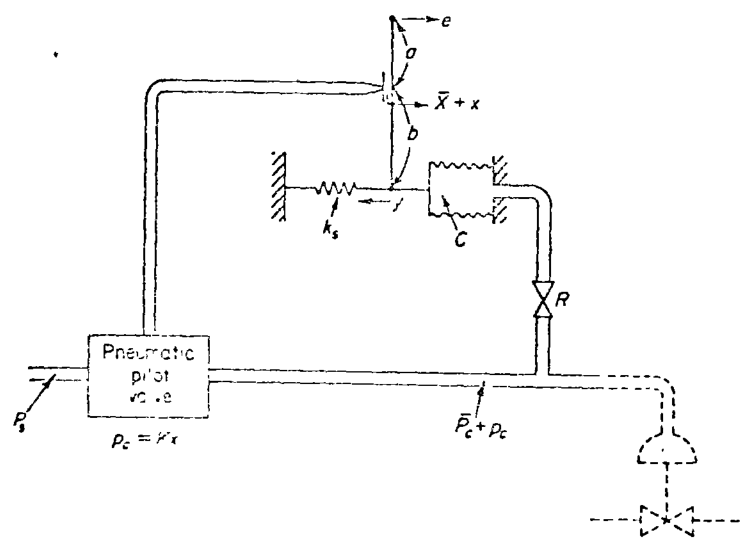


Fig. 5-70. Schematic diagram of a pneumatic controller.

PROBLEM B-5-2. Figure 5-71 shows the schematic diagram of a hydraulic servomotor in which the error signal is amplified in two stages. Draw a block diagram of the system and then find the transfer function between y and x.

Además se puede concluir de los dos últimos ejemplos, que mientras más alejados estén los polos del eje real, tanto mayor será la velocidad de oscilación de la respuesta. Finalmente, cuanto más cerca del eje imaginario estén los polos, tanto más pronunciado será el pico de la curva de la magnitud de la función de transferencia.

En la siguiente sección, estudiaremos métodos gráficos para el trazo de los diagramas $(\omega, H(j\omega))$ y $(\omega, \measuredangle H(j\omega))$, y daremos una interpretación física de los polos y ceros de $H(s)$.

7.6 DIAGRAMAS DE BODE

En esta sección daremos un método para trazar los diagramas de respuesta armónica, sin necesidad de calcular el valor de la función compleja $H(j\omega)$ directamente.

Si llamamos *ganancia* a la magnitud de la función $H(j\omega)$, se define como *ganancia en decibeles* $|H(j\omega)|_{db}$ a la función:

$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \qquad (7.6.1)$$

Observemos que la ganancia en decibéles, o sea $|H(j\omega)|_{db}$, es positiva si $|H(j\omega)| > 1$, y resulta negativa si $|H(j\omega)| < 1$. Esto nos indica que la ganancia en decibeles *no* es una magnitud (que no puede ser negativa), aunque la ganancia si lo es.

El lector podría comprobar fácilmente las siguientes equivalencias.

Ganancia	Ganancia en *db*
1	0
10	20
100	40
1000	60

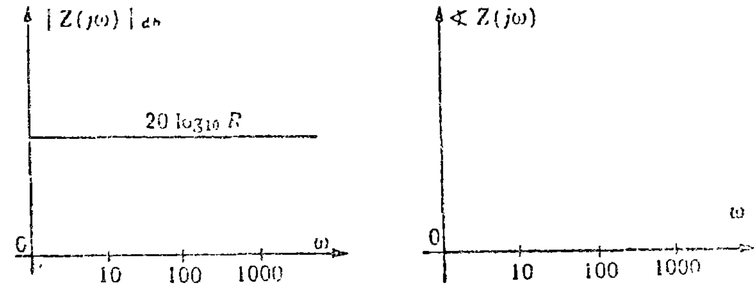
Si empleamos decibeles para especificar la magnitud de la función del sistema $H(j\omega)$, entonces los diagramas $(\omega, |H(j\omega)|)$ y $(\omega, \measuredangle H(j\omega))$ se conocen con el nombre de *diagramas de Bode*.

En los diagramas de Bode, en el eje de las abscisas (o sea el eje de la velocidad angular ω) se emplea una escala logarítmica. Esto permite incluir un rango más amplio de frecuencia. Los diagramas de Bode se emplean más frecuentemente cuando los polos y ceros de la función $H(s)$ están en o cerca del eje real en el plano de la variable s, pues en este caso el diagrama de ganancias en decibeles puede aproximarse por una suma de líneas rectas, como se estudiará en esta sección. Antes de introducir este método daremos una definición.

Se conoce con el nombre de *década*, a un intervalo de frecuencia angular ω correspondiente a un incremento en esta variable del orden de diez. Así, el intervalo entre $\omega = 1$ y $\omega = 10$ es una década, al igual que el intervalo entre $\omega = 10^7$ y $\omega = 10^8$ es una década.

Empezaremos encontrando los diagramas de Bode de los tres elementos fundamentales de un circuito: la resistencia, la inductancia y la capacitancia.

a) En una resistencia, la impedancia vale $Z(s) = R$, por lo que la magnitud de la función $Z(j\omega) = R$ es constante y su argumento nulo, tal como lo muestran las figuras 7.6.1a y b.



(a) Magnitud (b) Fase

Fig 7.6.1 Diagramas de Bode de una resistencia.

b) En una inductancia, la impedancia vale $Z(s) = sL$, por lo que la respuesta a la frecuencia está dada por $Z(j\omega) = j\omega L$. La magnitud de la función $Z(j\omega)$ del sistema es $|Z(j\omega)| = \omega L$, por lo que la ganancia en decibeles es

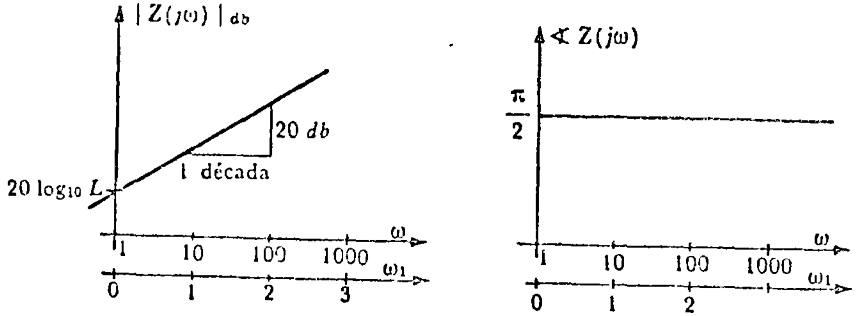
$$|Z(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \omega L = 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} L \qquad (7.6.2)$$

Empleando una escala logarítmica en el eje de las abscisas, y definiendo a la abscisa como:

$$\omega_1 = \log_{10} \omega \qquad (7.6.3)$$

la ecuación (7.6.2) representa una recta de pendiente 20 y ordenada al origen $20 \log_{10} L$. Obsérvese que ω_1 aumenta en 1 cuando ω aumenta en 10, o sea en una década. Por lo tanto podemos decir también que la recta (7.6.2) tiene una pendiente de 20 decibeles por década, tal como lo muestra la figura 7.6.2a.

El argumento de $Z(j\omega) = j\omega L$ es constante e igual a $\pi/2$ radianes (90°), tal como aparece en la figura 7.6.2b.



a) ganancia. b) fase.

Fig 7.6.2 Diagramas de Bode de una inductancia

c) En una capacitancia, la impedancia vale $Z(s) = 1/sC$, por lo que la respuesta a la frecuencia es $Z(j\omega) = 1/j\omega C$. La magnitud de $Z(j\omega)$ es $|Z(j\omega)| = 1/\omega C$, y la ganancia expresada en decibeles está dada por

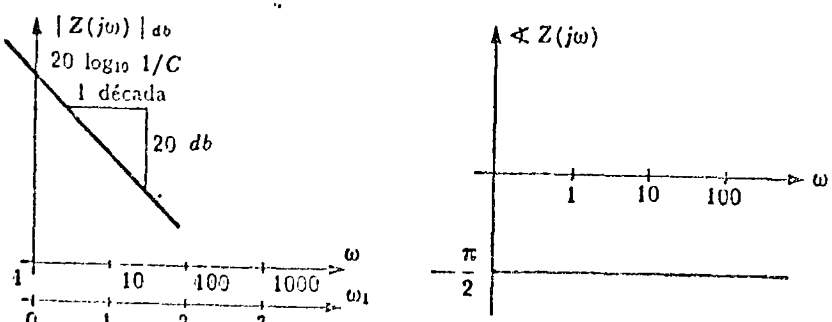
$$|Z(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega C} = 20 \log_{10} \frac{1}{C} - 20 \log_{10} \omega \qquad (7.6.4)$$

Definiendo nuevamente

$$\omega_1 = \log_{10} \omega$$

como abscisa, la ecuación (7.6.4) representa una recta de pendiente -20 y ordenada al origen de $20 \log 1/C$. Esta recta tiene una pendiente de -20 decibeles por década, como se muestra en la figura 7.6.3a.

El argumento de $Z(j\omega) = 1/j\omega C$ es constante e igual a $-\pi/2$ radianes ($-90°$), como se ilustra en la figura 7.6.3b.



(a) ganancia (b) fase

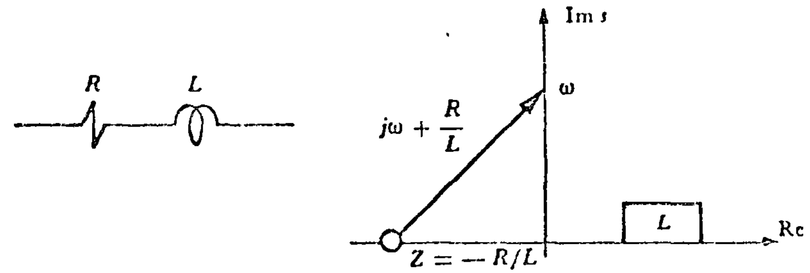
Fig 7.6.3 Diagramas de Bode de un capacitor.

A continuación trazaremos los diagramas de Bode, para circuitos más complejos

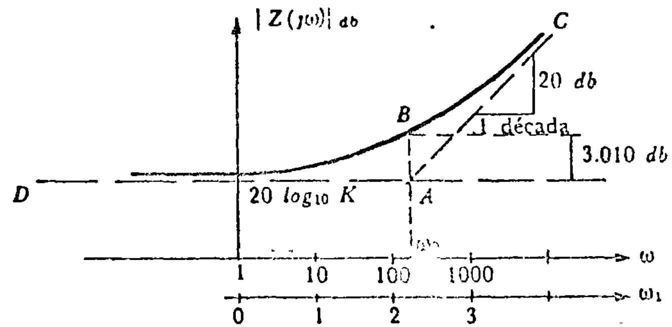
Empecemos con un sistema con un cero, por ejemplo el circuito $R-L$ serie de la figura 7.6.4a. La impedancia de este circuito vale:

$$Z(s) = R + sL = L\left(s + \frac{R}{L}\right)$$

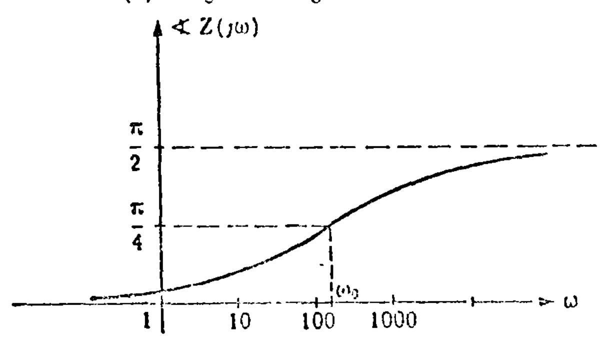
Esta función del sistema tiene un cero en $Z = -\frac{R}{L}$ que aparece en la figura 7.6.4b, junto con el vector $j\omega + \frac{R}{L}$. Encontremos los diagramas de Bode de la función del sistema $Z(s)$.



(a) Circuito R-L serie (b) Representación de $Z(s) = R + sL$



(c) Diagrama de ganancia en decibeles



(d) Diagrama de fase

Fig 7.6.4 Circuito con un cero y sus diagramas de Bode

Para trazar los diagramas de Bode de una función, es conveniente realizar las manipulaciones algebraicas necesarias para llegar a factores del tipo:

$$\left(j\frac{\omega}{\omega_0}+1\right)^n$$

donde n puede ser positivo o negativo.

Para el circuito de la figura 7.6.4a, se tiene:

$$Z(j\omega) = R\left(j\frac{\omega L}{R}+1\right) \tag{7.6.5}$$

Si definimos como constante de tiempo ω_0 a:

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

y a $K = R$, se tiene.

$$Z(j\omega) = K(j\frac{\omega}{\omega_0}+1) \tag{7.6.6}$$

A continuación ilustraremos como se traza el diagrama de ganancia en decibeles, sin necesidad de tabular los valores de $|Z(j\omega)|$.

Empecemos analizando el comportamiento del complejo $Z(j\omega)$ dado por (7.6.6) cuando $\omega \to \infty$, y cuando $\omega \to 0$.

Si $\omega \to 0$, $Z(j\omega) \to K$, por lo que $|Z(j\omega)|_{db} \to 20\log_{10}K$ (que es una recta de pendiente nula) y $\sphericalangle Z(j\omega) \to 0$. En las figuras 7.6.4c y d aparecen la magnitud (en db) y el argumento de $Z(j\omega)$ cuando $\omega \to 0$.

Por otra parte, si $\omega \gg \omega_0$, o sea cuando $\omega \to \infty$, la función (7.6.6) puede aproximarse por:

$$Z(j\omega) \to K\,j\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \omega \gg \omega_0$$

por lo que la ganancia es decibeles será:

$$|Z(j\omega)|_{db} \to 20\log_{10}\frac{K}{\omega_0} + 20\log_{10}\omega \qquad \omega \gg \omega_0$$

Si la abscisa es $\omega_1 = \log_{10}\omega$, esta ecuación representa una recta de pendiente 20, o sea de 20 decibeles por década. Cuando $\omega = \omega_0$, la abcisa de esta recta vale $20\log_{10}K$, que es punto designado con la letra A en la figura 7.6.4c.

El aumento de $Z(j\omega) = Kj\omega/\omega_0$ cuando $\omega \gg \omega_0$ tiene un valor constante de $\pi/2$ radianes (90°), como se ilustra en la figura 7.6.4d.

Las consideraciones anteriores nos permiten concluir, que la magnitud de la función $Z(j\omega)$ dada por la ecuación (7.6.6) tiene el comportamiento asintótico que muestran las rectas AC y AD en la figura 7.6.4c. Estas rectas se cruzan en el punto A, de abscisa $\omega = \omega_0$ y de ordenada $20\log_{10}K$.

Analicemos ahora, para $\omega = \omega_0$, en cuanto difiere el valor $10\log_{10}K$ que se obtiene con las aproximaciones asintóticas, del valor real obtenido al aplicar la ecuación (7.6.6).

Para $\omega = \omega_0$, el valor real está dado por:

$$Z(j\omega) = K(j+1)$$

cuya magnitud es:

$$|Z(j\omega)| = (K^2 + K^2)^{1/2} = \sqrt{2}K$$

por lo que la ganancia es decibeles es:

$$|Z(j\omega)|_{db} = 20\log_{10}K + 20\log_{2}\sqrt{2}$$

que difiere de la aproximación en $20\log_{10}\sqrt{2}$, o sea en 3.010. La curva real, en lugar de pasar por A, pasa por el punto B de la fig. 7.6.4c, 3.010 decibeles arriba. Si analizamos la diferencia entre la aproximación y la curva real a media década de ω_0, o sea en $\omega = 0.5\omega_0$ y en $\omega = 5\omega_0$, se encuentra que la diferencia ha bajado a un decibel aproximadamente (ver Problema 16).

Observemos además que, para $\omega = \omega_0$, el valor del argumento de $Z(j\omega)$ es de $\pi/4$, tal como aparece en la figura 7.6.4d.

A continuación indicaremos como se trazan los diagramas de Bode para el caso de funciones de sistemas del tipo

$$H(j\omega) = K\left(\frac{j\omega}{\omega_0}+1\right)^n$$

cuando el exponente n es igual a — 1. Emplearemos como ejemplo el mismo circuito de la figura 7.6.4, ahora caracterizado por su admitancia

$$Y(j\omega) = \frac{K'}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}+1\right)} \tag{7.6.7}$$

donde $K' = 1/R$ y $\omega_0 = R/L$. En este caso $Y(j\omega)$ es una función con un polo $P = -R/L$, en contraste con el ejemplo anterior, en el que $Z(j\omega)$ tenía un cero (en $Z = -R/L$).

El mismo razonamiento que en el caso anterior nos lleva a aproximar los diagramas de Bode como sigue:

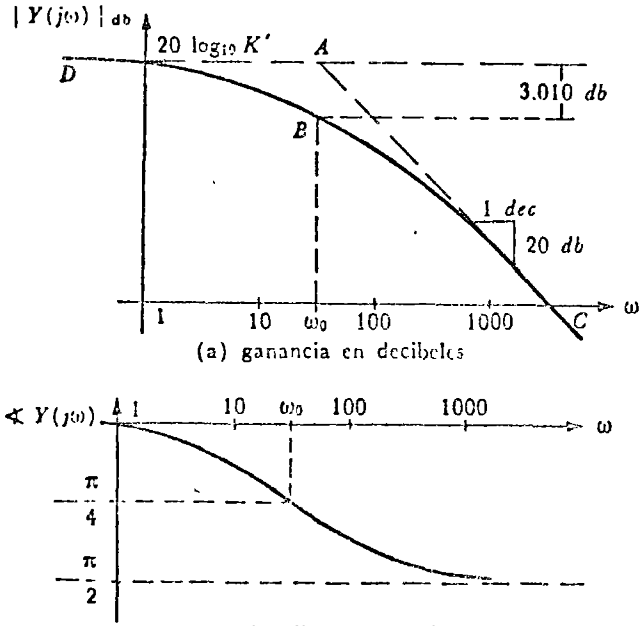
1) Si $\omega \ll \omega_0$, entonces

$$|Y(j\omega)| \longrightarrow K'$$
$$\sphericalangle Y(j\omega) \longrightarrow 0$$

2) Si $\omega \gg \omega_0$, entonces

$$|Y(j\omega)| \longrightarrow K' \frac{\omega_0}{\omega}$$
$$\sphericalangle Y(j\omega) \longrightarrow -\pi/2$$

El diagrama de ganancia en decibeles puede aproximarse por las rectas AC y AD, que muestra la figura 7.6.5a. El correspondiente diagrama de fase aparece en la figura 7.6.5b.



(a) ganancia en decibeles

(b) diagrama de fase

Fig. 7.6.5 Diagramas de Bode del sistema con un polo de la figura 7.6.4a.

A continuación aplicaremos la metodología que acabamos de estudiar, al trazo de diagramas de Bode para sistemas con más de un polo o cero. Veremos la ventaja de expresar la ganancia de una función de sistema en decibeles.

Ejemplo 7.6.1

La figura 7.6.6 muestra un cuerpo de sección cilíndrica A, de menor peso específico que el líquido en que flota. Supongamos que existe fricción viscosa entre el líquido y el cuerpo, y que la magnitud de la fuerza periódica aplicada al cuerpo no lo llega a sumergir totalmente.

Trace los diagramas de Bode de la función de transferencia $F(s)/X(s)$, considerando que la excitación es la fuerza $F_n \cos \omega t$ y la respuesta el desplazamiento $x(t)$, medido a partir de la posición de equilibrio del cuerpo. Los parámetros del sistema tienen los siguientes valores en sistema MKS: $D = 0.60$, $A\rho = 0.05$ y $m = 1$, donde D es la viscosidad del fluido, ρ la densidad del cuerpo, A el área de la sección cilíndrica del cuerpo, y m su masa.

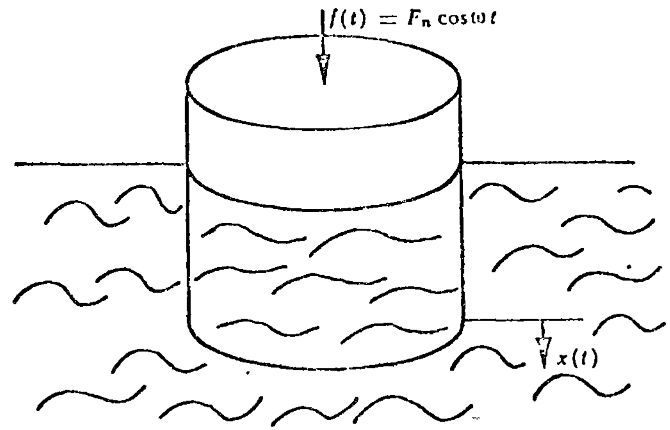


Fig. 7.6.6 Cuerpo flotante del ejemplo 7.6.1.

Solución:

Para un desplazamiento $x(t)$, el empuje ascendente tiene por valor $A\rho x(t)$; este empuje puede considerarse como un resorte cuya constante k vale $A\rho$.

La ecuación diferencial que caracteriza al sistema es:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + A\rho x(t) = f(t)$$

Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación con condiciones iniciales nulas y reorganizando términos, la función de transferencia del sistema se puede expresar como:

$$H(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{D}{m}s + \frac{A\rho}{m}\right)}$$

Sustituyendo el valor de los parámetros y factorizando el denominador se tiene:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 0.1)\ (j\omega + 0.5)}$$

y pasándolo a la forma normal empleada anteriormente:

$$H(j\omega) = \frac{1}{0.05\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)\ \left(\frac{j\omega}{0.5} + \ \right)}$$

Si empleamos decibeles para expresar la ganancia se tendrá:

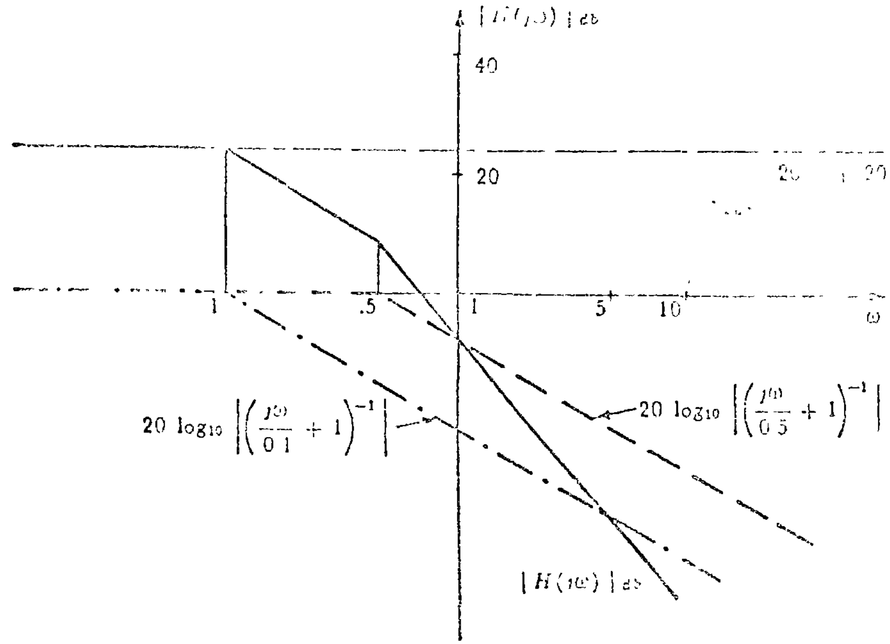
$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} 20 + 20 \log_{10} \left| \left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)^{-1} \right| \cdot$$

$$+ 20 \log_{10} \left| \left(\frac{j\omega}{0.5} + 1\right)^{-1} \right|$$

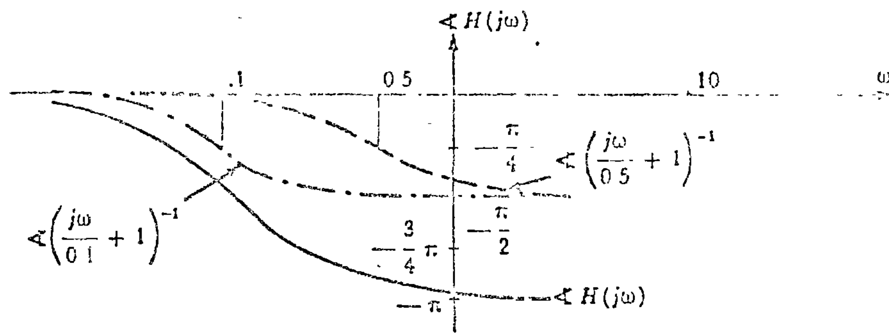
Para el ángulo de fase se tiene

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)^{-1} + \measuredangle\left(\frac{j\omega}{0.5} + 1\right)^{-1}$$

De las dos relaciones anteriores vemos que, si se emplean decibeles para expresar la ganancia, para trazar los diagramas de Bode de un sistema, basta trazar los de las componentes y sumar las ordenadas (tanto para la ganancia como para la fase) para obtener los diagramas de toda la función. Esto se ilustra para este problema en las figuras 7.6.7 a y b, donde aparecen los diagramas tanto de las componentes como de todo el sistema. ◻



(a) Diagrama de ganancia



(b) Diagrama de fase

Fig. 7.6.7 Diagramas de Bode del sistema con dos polos del ejemplo 7.6.1

Ejemplo 7.6.2

Obtenga los diagramas de Bode de la impedancia $Z(s)$ del circuito RLC serie de la figura 7.6.8a.

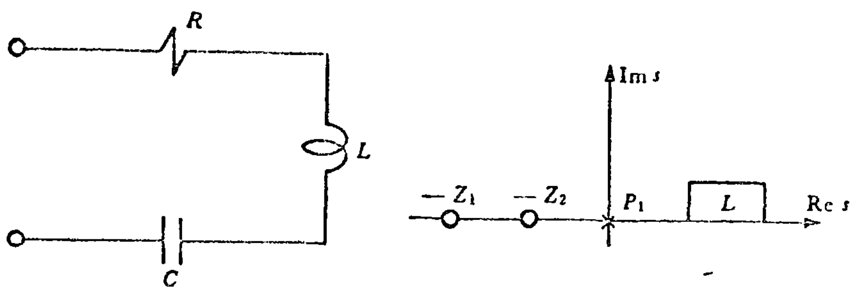
Solución:

La impedancia de este circuito es:

$$Z(s) = L \frac{s^2 + s\dfrac{R}{L} + \dfrac{1}{LC}}{s} \qquad (7.6.8)$$

El polo $P_1(s)$ vale cero, y los dos ceros de $Z(s)$ están dados por:

$$s = -\frac{R}{2L} \pm \left[\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right]^{1/2}$$



a) Circuito serie RLC

b) Representación de la función $Z(s)$ en el plano complejo

Fig 7.6.8 Circuito serie RLC y representación de su función de impedancia en el plano complejo.

Dependiendo de los valores de los parámetros R, L y C, tendremos varios casos posibles de raíces s_1 y s_2:

1) Si $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 > \dfrac{1}{LC}$, s_1 y s_2 son dos raíces reales, negativas y diferentes

2) Si $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 = \dfrac{1}{LC}$, entonces $s_1 = s_2 = -R/2L$ son dos raíces reales, negativas y repetidas.

3) Si $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 < \dfrac{1}{LC}$, las raíces s_1 y s_2 son complejas y conjugadas.

Para el circuito bajo consideración, no podrán haber raíces imaginarias puras, pues esto implicaría $R = 0$.

En este ejemplo estudiaremos con detalle los dos primeros casos, dejando el tercero para el siguiente ejemplo.

Caso 1

Supongamos que la ecuación (7.6.8) tiene dos ceros reales, negativos y diferentes dados por $s_1 = -Z_1$ y $s_2 = -Z_2$, donde Z_1 y Z_2 son reales y positivos. Estos dos ceros y el polo $P_1 = 0$ se muestran en la figura 7.6.8b

En este caso, usando la ecuación (7.6.8), la magnitud de $Z(j\omega)$ estará dada por:

$$|Z(j\omega)| = KZ_1Z_2 \frac{\left|\dfrac{j\omega}{Z_1}+1\right|\left|\dfrac{j\omega}{Z_2}+1\right|}{|j\omega|}$$

donde $K = L$.

Si designamos con α la ganancia en decibeles de $Z(j\omega)$ y con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 la de los factores de $Z(j\omega)$, podemos escribir:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

donde

$$\alpha = 20 \log_{10} |Z(j\omega)|$$

$$\alpha_1 = 20 \log_{10} K\, Z_1\, Z_2$$

$$\alpha_2 = 20 \log_{10} \left|\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right|$$

$$\alpha_3 = 20 \log_{10} \left|\frac{j\omega}{Z_2} + 1\right|$$

$$\alpha_4 = 20 \log_{10} \left|\frac{1}{j\omega}\right|$$

Para el trazo del diagrama de fase podemos emplear la siguiente relación:

$$\beta = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$

donde

$$\beta = \sphericalangle Z(j\omega)$$

$$\beta_2 = \sphericalangle \left(\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right)$$

$$\beta_3 = \sphericalangle \frac{j\omega}{Z_2} + 1$$

$$\beta_4 = \sphericalangle \frac{1}{j\omega}$$

ya que $\beta_1 = \sphericalangle KZ_1 Z_2 = 0$.

Los diagramas de Bode de la función $Z(j\omega)$ se obtendrán sumando simplemente los de las componentes o factores de $Z(j\omega)$, tal como muestran las figuras 7.6 9a y b. Observamos del diagrama de fase (Fig. 7 6 9b) que la función de impedancia $Z(j\omega)$ cruza el eje de las abscisas en ω_c, lo que significa que en este punto $Z(j\omega)$ es un número real. En este ejemplo, el valor de la velocidad angular a la cual el ángulo de fase es nulo, se puede calcular de la siguiente manera:

Como

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

si

$$\sphericalangle Z(j\omega_c) = 0$$

se tiene que

$$\omega_c L = \frac{1}{\omega_c C}$$

y por lo tanto

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

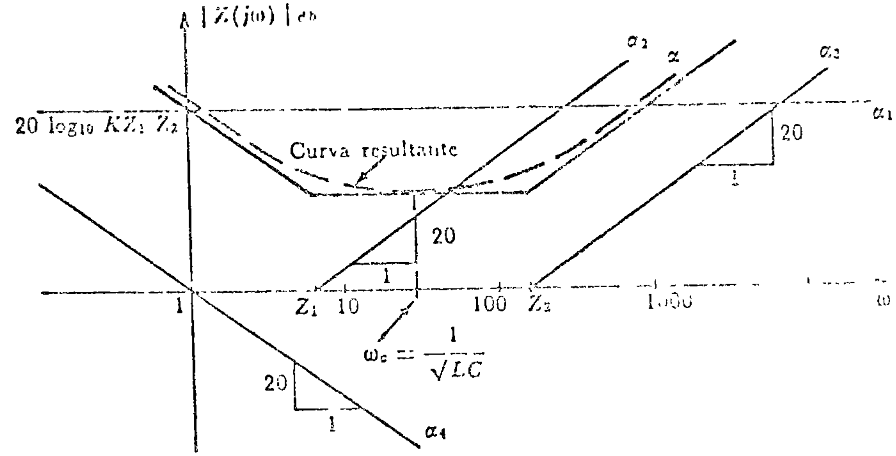
En este caso,

$$Z(j\omega_c) = R$$

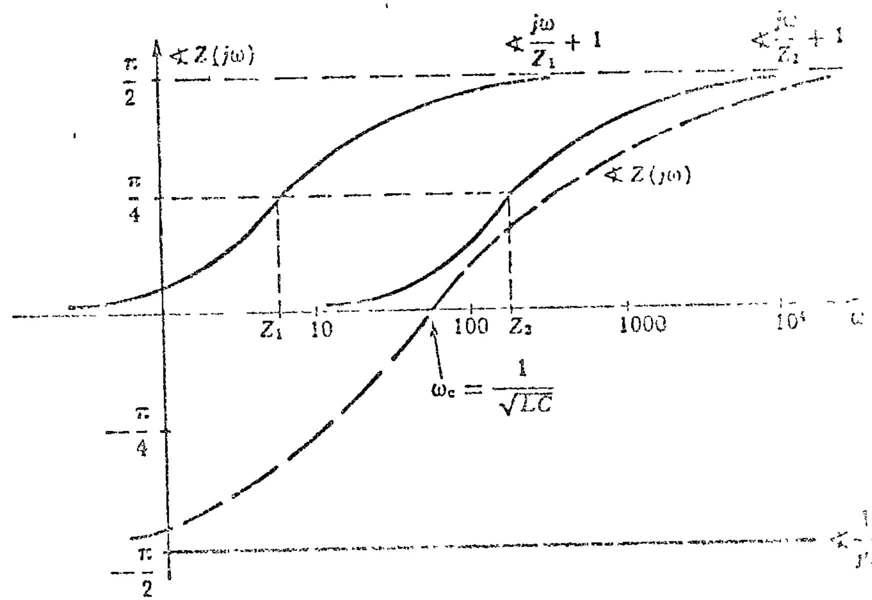
por lo que el circuito se comporta como resistivo puro cuando $\omega = \omega_c$.

La frecuencia ω_c recibe el nombre de *frecuencia de resonancia* del circuito

En general, podemos afirmar que un circuito es resonante, o sea que se comporta como una resistencia o una conductancia, si su diagrama de fase cruza el eje de abscisas para cierto ω.



(a) Diagrama de ganancia



(b) Diagrama de fase

Fig 7.6 9 Diagramas de Bode del circuito de la figura 7 6 8a para el caso de dos ceros reales y diferentes

Por otra parte, vemos de la figura 7.6 9a que la ganancia en decibeles tiene un mínimo. Busquemos el valor de ω para el cual $Z(j\omega)$ es mínimo. Se tiene que

$$|Z(j\omega)| = |R + Lj\omega + \frac{1}{j\omega C}| = [R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2]^{1/2}$$

puesto que $\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$. Dado un circuito con parámetros R, L y C fijos, el mínimo valor de este radicando se obtiene cuando el segundo paréntesis es nulo, o sea cuando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Es decir, $|Z(j\omega)|$ es mínimo a la frecuencia de resonancia ω_c.

Este resultado es general, y se puede demostrar que un circuito es resonante en los valores de ω para los cuales el diagrama de ganancia tiene máximos o mínimos.

A continuación analicemos el caso de ceros de $Z(j\omega)$ repetidos.

Caso 2

Supongamos que el numerador de $Z(j\omega)$, dado por la ecuación (7.6.8), tiene dos raíces iguales, reales y negativas, dadas por $s_1 = s_2 = -R/2L = -Z_1$, donde $Z_1 = R/2L > 0$ (ver Fig. 7.6.10). En este caso:

$$Z(j\omega) = LZ_1^2 \frac{\left(\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right)^2}{j\omega}$$

y

$$|Z(j\omega)| = |LZ_1^2| \left|\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right|^2 \left|\frac{1}{j\omega}\right|$$

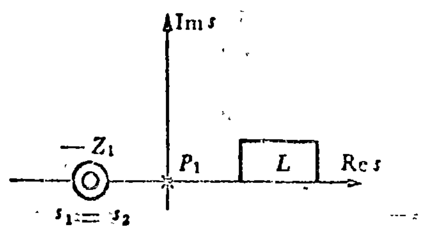


Fig. 7.6.10 Representación de la función $Z(s)$ en el plano complejo.

Para el diagrama de ganancia en decibeles α tenemos:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

donde:

$$\alpha = 20 \log_{10} |Z(j\omega)|$$

$$\alpha_1 = 20 \log_{10} LZ_1^2$$

$$\alpha_2 = 20 \log_{10} \left|\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right|^2$$

$$\alpha_3 = 20 \log_{10} \left|\frac{1}{j\omega}\right|$$

El diagrama de fase β tendrá por componentes β_2 y α_3, y estará dado por

$$\beta = \beta_2 + \beta_3$$

donde:

$$\beta = \sphericalangle Z(j\omega)$$

$$\beta_2 = \sphericalangle\left(\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right)^2$$

$$\beta_3 = \sphericalangle\frac{1}{j\omega}$$

Analicemos las curvas de ganancia α_2 y de fase β_2 que corresponden al término $\left(\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right)^2$ con una singularidad doble. Para la curva de ganancia en decibeles se tendrá:

$$\alpha_2 = 40 \log_{10} \left|\frac{j\omega}{Z_1} + 1\right| \qquad (7.6.9)$$

Esta función puede aproximarse asintóticamente de la siguiente manera:

a) Si $\omega \gg Z_1$, entonces

$$\alpha_2 \to 40 \log_{10} \left|\frac{\omega}{Z_1}\right| \qquad \omega \gg Z_1$$

Esta función, empleando una escala logarítmica en el eje de las abscisas (o sea $\omega_r = \log_{10} \omega$) corresponde a una recta de pendiente igual a 40 decibeles por década que cruza el eje de las abscisas en el punto Z_1, tal como aparece en la figura 7.6.11a.

b) Si $\omega \ll Z_1$, entonces

$$\alpha_2 \to 0 \qquad \omega \ll Z_1$$

Estas dos aproximaciones asintóticas de la función α_2 de la ecuación (7.6.9) aparecen en la figura 7.6.11a.

Para el diagrama de fase del término $\left(\frac{j\omega}{Z_1}+1\right)^2$ con una singularidad doble, tenemos:

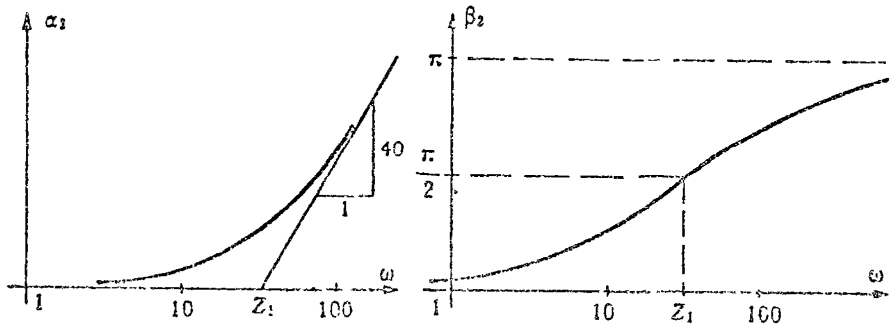
Si $\omega \gg Z_1$ entonces

$$\beta_2 \to \pi$$

y si $\omega \ll Z_1$ entonces

$$\beta_2 \to 0$$

El diagrama de fase correspondiente a este término β_2 aparece en la figura 7.6.11b.



(a) Ganancia en decibeles (b) Fase

Fig. 7.6.11 Diagramas de Bode del término $\left(j\frac{\omega}{Z_1}+1\right)^2$

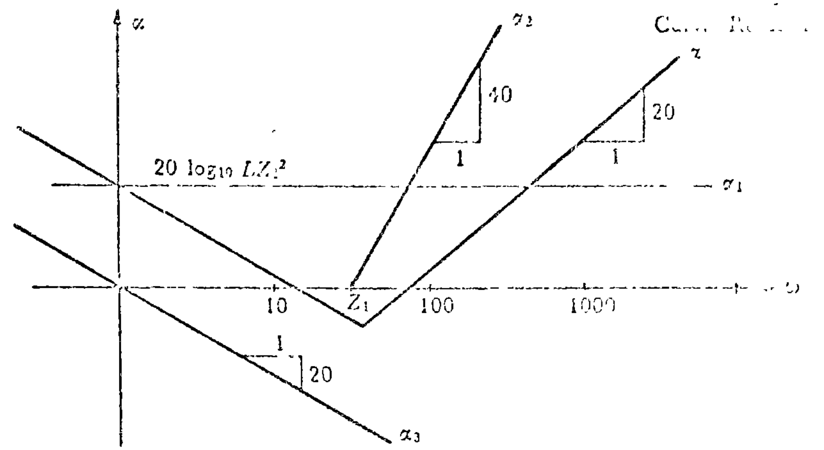
Los diagramas de ganancia en decibeles y de fase para la función de impedancia del circuito de la figura 7.6.8a en el caso de ceros dobles aparecen en las figuras 7.6.12a y b respectivamente, y se obtienen realizando gráficamente las sumas

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

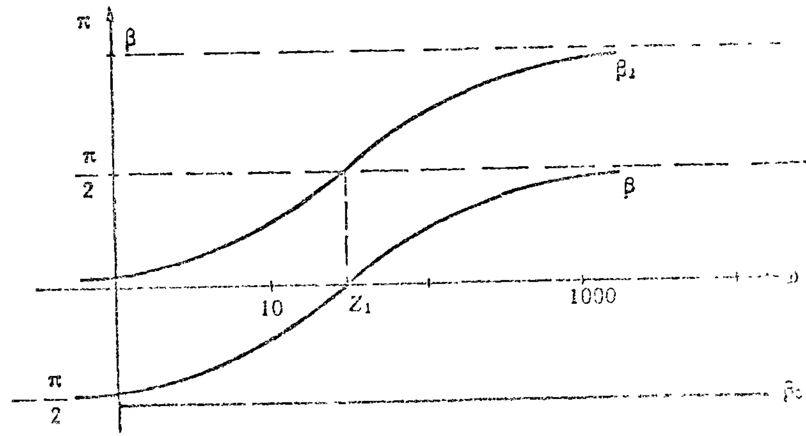
y

$$\beta = \beta_2 + \beta_3. \qquad \blacksquare$$

En el ejemplo anterior vimos dos casos, el de dos ceros reales diferentes y de dos ceros reales iguales. El siguiente ejemplo servirá para ilustrar el trazo de diagramas de Bode en el caso de singularidades complejas.



(a) Diagrama de ganancia



(b) Diagrama de fase

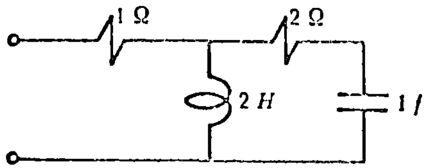
Fig. 7.6.12 Diagramas de Bode del circuito de la figura 7.6.8a en el caso de ceros reales dobles.

Ejemplo 7.6.3

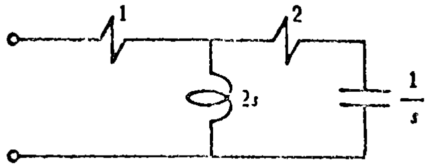
Encuentre la impedancia de entrada del circuito mostrado en la figura 7.6.13a, represéntela en el plano complejo, y determine sus diagramas de Bode.

Solución:

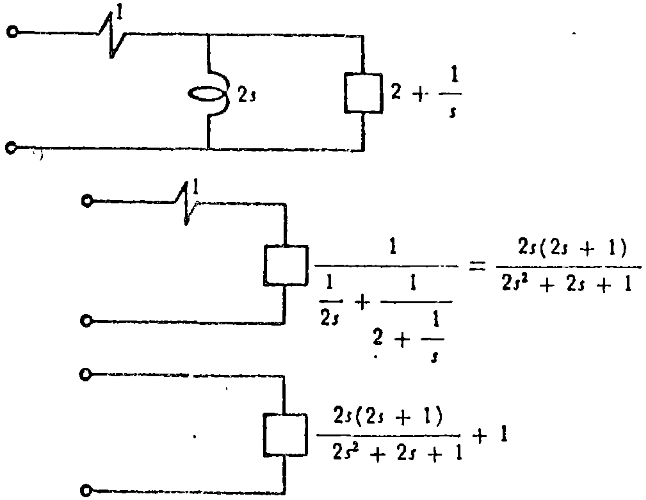
En las figuras 7.6.13b y c se ilustra el cálculo de la impedancia de entrada, dada por:



(a) Circuito en el dominio "t"



(b) Circuito en el dominio "s"



(c) Cálculo de la impedancia de entrada.

Fig 7 6 13 Circuito en el dominio t y en el dominio s y cálculo de la impedancia de entrada.

$$Z(s) = \frac{2s(2s+1)}{2s^2+2s+1} + 1 = \frac{6}{2}\,\frac{s^2+\frac{2}{3}s+\frac{1}{6}}{s^2+s+\frac{1}{2}}$$

Las raíces del numerador están dadas por la solución del polinomio

$$s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{6} = 0$$

por lo que los ceros de la función $Z(s)$ son:

$$Z_{1,2} = \frac{1}{3}\left(-1 \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

Las raíces del polinomio del denominador

$$s^2 + s + \frac{1}{2} = 0$$

son los polos de $Z(s)$ dados por

$$P_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i)$$

En este caso, la impedancia de entrada es igual al cociente de dos binomios de raíces complejas, cuyas singularidades muestra la figura 7.6 14.

Los diagramas de ganancia y de fase en este caso no pueden trazarse empleando el método de aproximación asintótica ilustrado anteriormente. Para trazar los diagramas de Bode correspondientes a binomios de raíces complejas, es conveniente escribir cada binomio en la forma

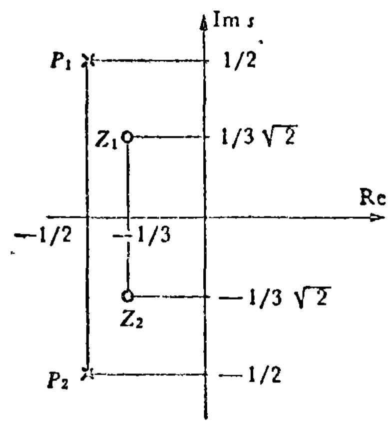


Fig 7.6.14 Representación de las singularidades de $Z(s)$ en el plano complejo

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} \qquad (7.6\ 10)$$

donde la variable ω se encuentra normalizada (ω/ω_n).

En las figuras 7.6.15a aparecen diagramas de ganancia correspondientes al factor $[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n}]^{-1}$ para diversos valores de ξ. En caso de encontrarse dicho factor en el numerador, o sea elevado a la potencia + 1, deben emplearse curvas de ganancia simétricas a las anteriores, o sea invertidas alrededor del eje ω/ω_n. La misma aseveración es válida para las curvas de fase que aparecen en la figura 7 6 15b

Transformemos a la forma normal el numerador y el denominador de la función $Z(j\omega)$ del presente ejemplo·

$$Z(j\omega) = \frac{1 - 6\omega^2 + j4\omega}{1 - 2\omega^2 + j2\omega} \tag{7.6.11}$$

Para el numerador, los valores de ω_1 y ξ están dados por las relaciones:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = 6 \qquad\qquad 2\xi \frac{1}{\omega_1} = 4$$

de donde:

$$\omega_1 = 0.409 \qquad\qquad \xi = 0.818$$

En forma similar, para el denominador

$$\frac{1}{\omega_2^2} = 2 \qquad\qquad 2\xi \frac{1}{\omega_2} = 2$$

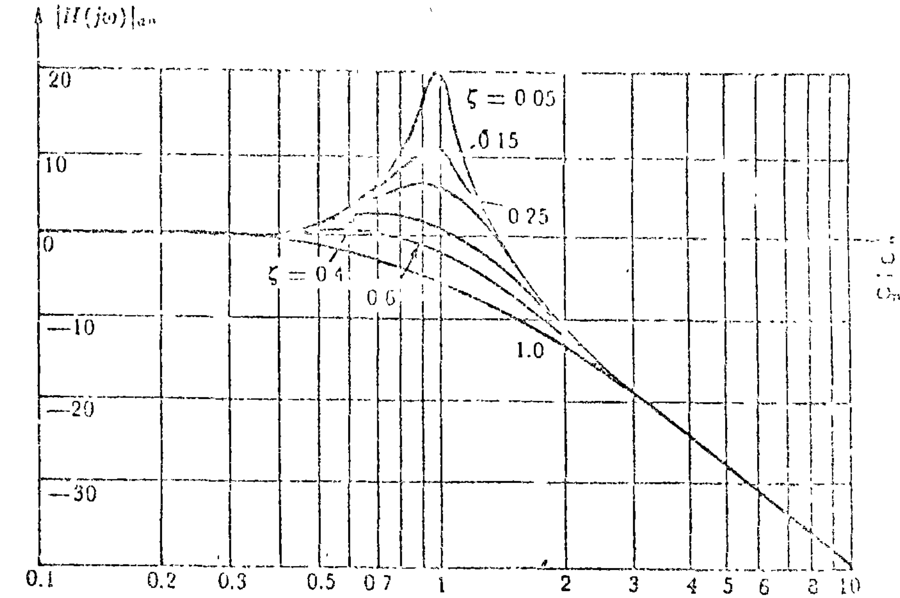
y por lo tanto

$$\omega_2 = 0.707 \qquad\qquad \xi = 0.707$$

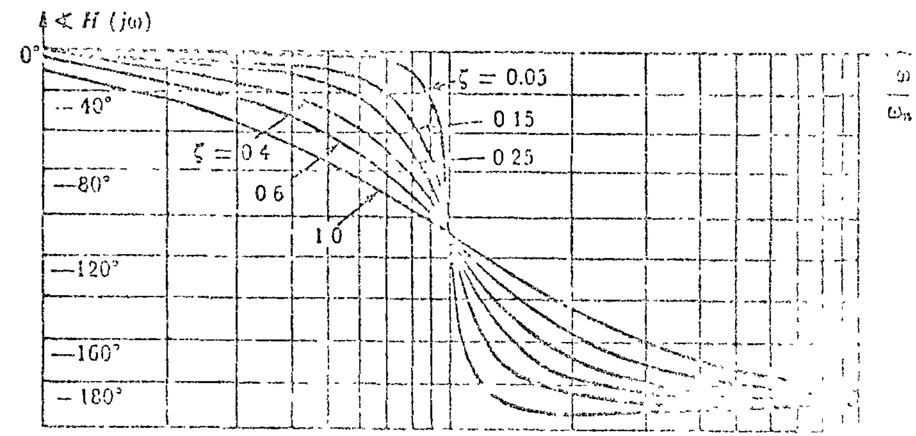
Usando estos valores, la impedancia de entrada $Z(j\omega)$ se puede escribir en forma normalizada como

$$Z(j\omega) = \frac{1 - (\frac{\omega}{0.409})^2 + 2j\,(0.818)\,\frac{\omega}{0.409}}{1 - (\frac{\omega}{0.707})^2 + 2j\,(0.707)\,\frac{\omega}{0.707}}$$

Es necesario observar que en las figuras 7.6 15, el eje de las abscisas corresponde a la velocidad angular normalizada ω/ω_n. Para trazar el denominador de la función $Z(j\omega)$, se debe comprimir la curva en un factor $\omega_2 = 0.707$. Es decir, el punto que en la figura 7.6 15a tiene por abscisa $\omega/\omega_2 = 1$ y por ordenada -3, tendrá la figura 7.6.16, por abscisa $\omega = \omega_2 = 0.707$ y por ordenada -3. Análogamente, la curva del numerador de



(a) Diagrama de ganancia



(b) Diagrama de fase

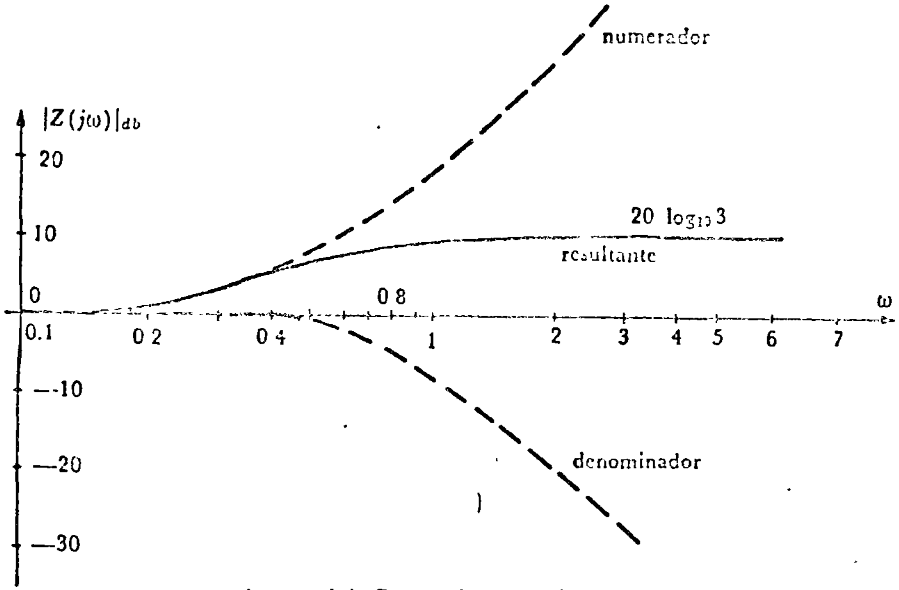
Fig 7.6.15 Diagramas de Bode para factores cuadráticos

$Z(j\omega)$ de la figura 7.6 16a, está comprimida hacia la izquierda en un factor $\omega_1 = 0.409$ (menor que ω_2), e invertida respecto al eje ω.

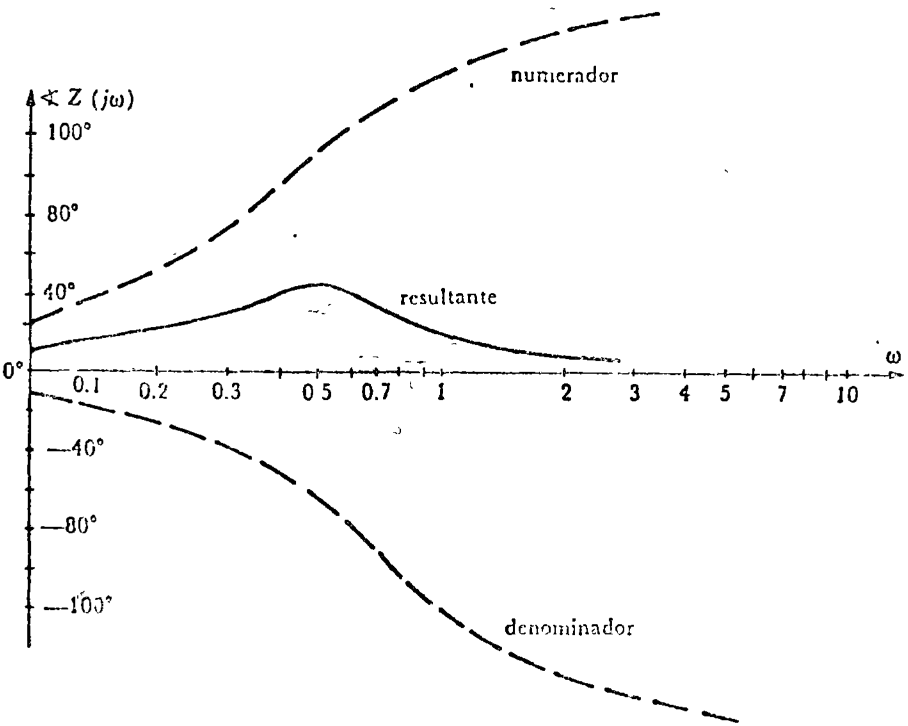
La suma de las curvas de la figura 7.6.16a vale 0 cuando $\omega \to 0$, y tiene un valor constante de

$$|Z(j\omega)|_{db} \longrightarrow 20 \log_{10} 3 \qquad\qquad \omega \longrightarrow \infty$$

cuando $\omega \longrightarrow \infty$, puesto que de la ecuación (7.6.11)



(a) Curvas de ganancia



(b) Curvas de fase

Fig. 7.6.16 Diagramas de Bode de ganancia y fase de $Z(j\omega)$.

$$Z(j\omega) \longrightarrow \frac{-6}{-2} = 3 \qquad \omega \longrightarrow \infty$$

La figura 7.6.16a muestra $|Z(j\omega)|_{db}$ en trazo grueso, que es la suma de las curvas punteadas del numerador y del denominador de la misma figura.

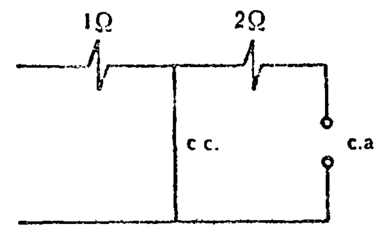
Las curvas de fase de los factores de $Z(j\omega)$ se comprimen hacia la izquierda en forma análoga a las de ganancia, como muestra la figura 7.6.16b. La resultante, o sea la fase de $Z(j\omega)$, tiende a cero cuando $\omega \longrightarrow 0$ y cuando $\omega \longrightarrow \infty$.

De la figura 7.6.13b se observa que, para $s = j\omega$, el circuito original se reduce al de la figura 7.6.17a cuando $\omega \longrightarrow 0$, y al de la figura 7.6.17b cuando $\omega \longrightarrow \infty$. Estos resultados coinciden con los de los diagramas de Bode, pues cuando $\omega \longrightarrow 0$

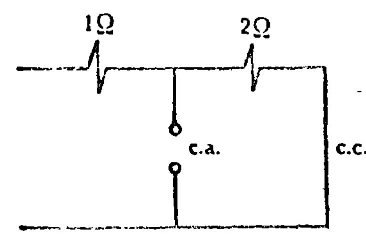
$$\sphericalangle Z(j\omega) \longrightarrow 0$$

$$|Z(j\omega)|_{db} \longrightarrow 0 => |Z(j\omega)| \longrightarrow 1$$

o sea $Z(j\omega) \longrightarrow 1\Omega$, y cuando $\omega \longrightarrow \infty$



(a) Comportamiento del circuito cuando $\omega \longrightarrow 0$



(b) Comportamiento del circuito cuando $\omega \longrightarrow \infty$

Fig. 7.6.17 Comportamiento del circuito de la figura 7.6.13 cuando $\omega \longrightarrow 0$ y cuando $\omega \longrightarrow \infty$.

$$\measuredangle Z(j\omega) \longrightarrow 0$$

$$|Z(j\omega)|_{db} \longrightarrow 20 \log_{10} 3 => |Z(j\omega)| \longrightarrow 3$$

o sea $Z(j\omega) \longrightarrow 3\Omega$. ∎

7.7 PROBLEMAS

1. Si en el ejemplo 7 1 1 las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 1$, obtenga las constantes k_1 y k_2 de la solución, ecuación (7 1.1)

2. Si en el ejemplo 7 1 1 el amortiguamiento D vale 0, obtenga la respuesta libre

3. Demostrar que la respuesta libre dada por la tensión en el capacitor C_1 de la figura 7.7.1, debe contener un término constante. Dar una interpretación física a este fenómeno.

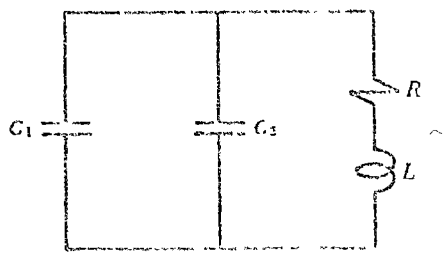


Fig 7.7 1 Circuito para el Problema 3

4. Obtenga las frecuencias naturales de la variable $i_1(t)$ del circuito de la figura 7.7.2.

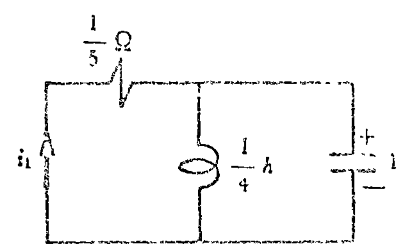


Fig 7.7.2 Circuito para los Problemas 4 y 5

5 Para el circuito del problema anterior, determine que condiciones iniciales excitan la frecuencia natural de mayor valor absoluto

6. Obtenga las frecuencias naturales de la variable desplazamiento $x(t)$, del sistema mecánico de la figura 7.7.3 (Todos los parámetros están dados en sistema MKS)

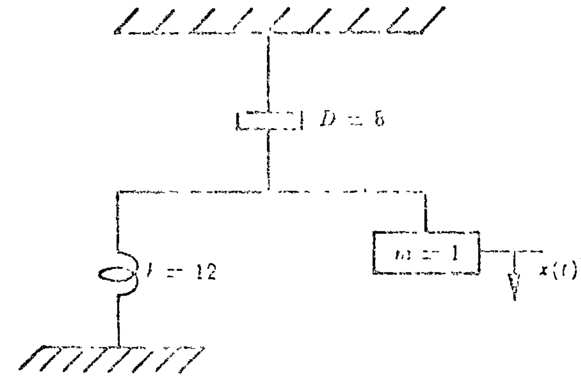


Fig 7.7 3 Sistema mecánico de los Problemas 6 y 11.

7 Demuestre que si $s_k \neq 0$ es una frecuencia natural de una corriente de arista, entonces también es frecuencia natural de la correspondiente tensión de arista

8 Justifique por qué la afirmación del problema anterior no es válida para $s_k = 0$

9 Empleando variables de estado, la respuesta libre de un sistema está caracterizada por la ecuación

$$\dot{x}(t)] = [A]\ x(t)]$$

Relacione ésta ecuación con la expresión (7 2 1).

10 Determine la matriz $[P(s)]$ y los vectores $X(s)]$ y $F(s)]$ para los sistemas (circuitos) de los ejemplos 7 1 2 y 7 1 3

11 Si se considera como respuesta la velocidad de la masa m y como excitación una fuerza aplicada a ella, obtenga la función de transferencia del sistema de la figura 7 7 3

12 Obtenga la relación de tensiones $V_2(s)/V_1(s)$ del circuito mostrado en la figura 7 7 4

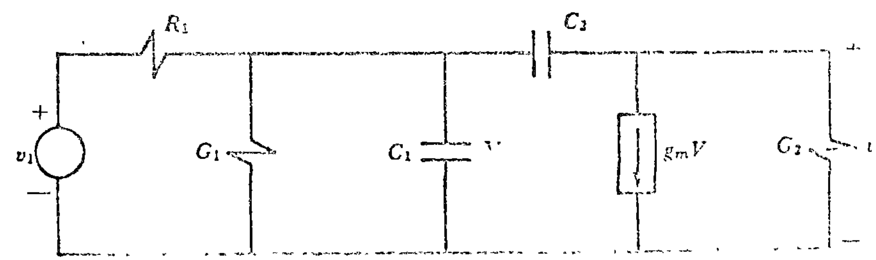


Fig 7 7 4 Circuito del Problema 12

13 Obtenga las frecuencias naturales del sistema mostrado en la figura 7 7 5

capítulo 11

Estabilidad y Sistemas Retroalimentados

En este capítulo solamente estudiaremos criterios de estabilidad de sistemas lineales de parámetros concentrados, pues el estudio de criterios de estabilidad de sistemas no lineales en el tiempo es un tema sumamente amplio, que para su comprensión requiere de conocimientos matemáticos avanzados. Además, la mayoría de dichos criterios resultan poco útiles para evaluar la estabilidad de sistemas en la práctica.

En la primera sección introducimos varias definiciones relacionadas con el concepto de estabilidad de sistemas libres, o sea sin excitación. En la siguiente sección se estudian algunos teoremas importantes que permiten establecer condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales forzados.

En la tercera sección se estudia formalmente la estabilidad de sistemas lineales retroalimentados. Estos sistemas tienen gran importancia en el estudio de sistemas de control.

En las tres secciones restantes son restringimos al análisis de sistemas de excitación y respuesta en forma de escalón. Primero se introduce algunos criterios de estabilidad algebraicos, y posteriormente se estudian el criterio de estabilidad del lugar geométrico de las raíces y el criterio de Nyquist. En estas últimas secciones se trata el problema del análisis de sistemas retroalimentados; se considera que el importante problema de síntesis de estos sistemas debe ser cubierto en cursos de teoría de control. El lector interesado puede consultar los textos de Truxal, Elgerd y Takahashi dados como referencia.

Asimismo nos hemos restringido en las tres últimas secciones a sistemas con señales escalares. Como los sistemas de control con señales vectoriales son cada día más importantes, recomendamos como referencias las obras de Elgerd y de Takahashi.

11.1 ESTABILIDAD DE SISTEMAS LIBRES

Restringiremos nuestro estudio de estabilidad a sistemas lineales e invariantes, con espacio de estado de dimensión finita

Estudiaremos fundamentalmente dos conceptos de estabilidad, el primero relacionado con la respuesta libre (sin excitación) del sistema, y el segundo relacionado con la respuesta forzada (estado inicial nulo) del sistema.

Cuando se estudia el problema de estabilidad de sistemas, se enfoca en general la atención en el estado del sistema, y no en su respuesta. Esto se debe a que la respuesta de un sistema es estable (con todas las componentes de amplitud decreciente) cuando su estado es estable, pero sin embargo es posible que la respuesta muestre un comportamiento estable mientras que el estado presenta componentes inestables (de amplitud creciente) que no aparecen en la respuesta.

Si *una* componente del vector de estado crece sin límite, entonces se considera que el sistema es inestable, aunque las componentes restantes no crezcan sin límite. Un concepto que está relacionado con las componentes de un vector, es el de norma. Clasificaremos la estabilidad de los sistemas de acuerdo con el comportamiento de la norma del vector $x]$, que definiremos a continuación.

Para empezar, demos las propiedades que se desea que cumpla la norma de un vector, así como dos posibles definiciones de norma.

La norma $\| x] \|$ de un vector $x]$ es una función escalar, que tiene las siguientes propiedades:

$$1)\ \| x] \| = 0 \text{ si y solamente si } x] = 0]$$

$$2)\ \| x_1] + x_2] \| \leq \| x_1] \| + \| x_2] \| \tag{11.1.1}$$

$$3)\ \| \alpha x] \| = | \alpha | \, \| x] \|$$

donde α es un escalar de magnitud $|\alpha|$. La segunda propiedad se conoce con el nombre de *desigualdad del triángulo.*

Una posible *norma* del vector $x]$ que satisface estas propiedades es la magnitud de la componente de x de mayor magnitud, es decir

$$\| x] \| = \max_i | x_i | \tag{11.1.2}$$

donde x_i es la i-ésima componente del vector $x]$. Otra posible norma está dada por la relación (ver Problema 1):

$$\| x] \| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2} \tag{11.1.3}$$

La utilidad del empleo de una determinada norma depende del problema particular bajo consideración.

Unos ejemplos nos servirán para ilustrar las relaciones (11.1.1) y (11.1.2)

Ejemplo 11.1.1

Encuentre la norma (11.1.2) del vector

$$x_1] = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Como la componente de mayor valor absoluto es -5, de acuerdo con la relación (11.1.2) la norma del vector $x_1]$ es:

$$\| x_1] \| = 5$$

Ejemplo 11.1.2

Empleando como vector $x_1]$ al del ejemplo anterior y como vector $x_2]$ a:

$$x_2] = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

verifique la desigualdad del triángulo

Solución:

La norma (11.1.2) del vector $x_2]$ es

$$\| x_2] \| = 7$$

por lo que empleando el resultado del ejemplo anterior, la suma de las normas es

$$\| x_1] \| + \| x_2] \| = 5 + 7 = 11$$

Por otra parte, la norma de la suma $x_1] + x_2]$ es:

$$\| x_1] + x_2] \| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = 4$$

por lo que efectivamente se satisface la desigualdad del triángulo (11.1.1):

$$4 \leq 5 + 7$$

A continuación daremos un ejemplo que ilustra la interpretación geométrica de la norma de un vector.

Ejemplo 11.1.3

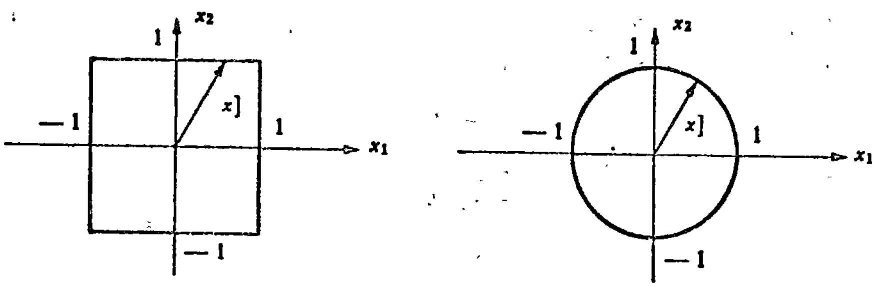
Dar el lugar geométrico de los vectores de dos componentes cuya norma vale uno.

Solución:

Para la norma (11.1.2), los vectores que satisfacen

$$\| x] \| = max \{ | x_1 |, | x_2 | \} = 1$$

son aquellos que van del origen a todos los puntos sobre el cuadrado de la figura 11.1.1a.



(a) Norma (11.1.2)   (b) Norma (11.1.3)

Fig. 11.1.1 Ilustración geométrica de norma.

Por otra parte, para la norma (11.1.3) se tiene:

$$\| x] \| = \{ x_1^2 + x_2^2 \}^{1/2} = 1$$

Las componentes x_1 y x_2 del vector $x]$ que satisfacen esta relación están sobre un círculo de radio unitario con centro en el origen, como muestra la figura 11.1.1*b*. □

Del ejemplo anterior podemos concluir, que la interpretación geométrica de la norma de un vector depende de la norma particular bajo consideración.

Se define como *norma* $\|[A]\|$ *de una matriz* $[A]$ al escalar dado por:

$$\| [A] \| = \max_{x] \neq 0} \frac{\| [A] x] \|}{\| x] \|} \qquad (11.1.4)$$

Esta norma representa el máximo valor del cociente de las normas de los vectores $[A]x]$ y $x]$, con $x]$ arbitrario. Como se pueden definir diferentes normas para un mismo vector, vemos que la norma de una matriz $[A]$ dependerá de la norma de un vector que se esté considerando.

Puede demostrarse que la relación (11.1.4) es equivalente a

$$\| [A] \| = \max_{\| x] \| \leq 1} \| [A] x] \| \qquad (11.1.5)$$

De la norma (11.1.4) se concluye que:

$$\| [A] x] \| \leq \| [A] \| \, \| x] \| \qquad (11.1.6)$$

La norma de una matriz satisface además las siguientes propiedades:

a) Desigualdad del triángulo:

$$\| [A] + [B] \| \leq \| [A] \| + \| [B] \| \qquad (11.1.7)$$

b) Desigualdad de Cauchi-Schwarz:

$$\| [A] [B] \| \leq \| [A] \| \, \| [B] \| \qquad (11.1.8)$$

c)

$$\left\| \int [A(t)] \, dt \right\| \leq \int \| [A(t)] \| \, dt \qquad (11.1.9)$$

Tanto la norma de un vector como la norma de una matirz son finitas si y sólo si todas sus componentes son finitas.

A continuación daremos un ejemplo que ilustra el concepto de norma de una matriz.

Ejemplo 11.1.4

Calcular la norma de la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

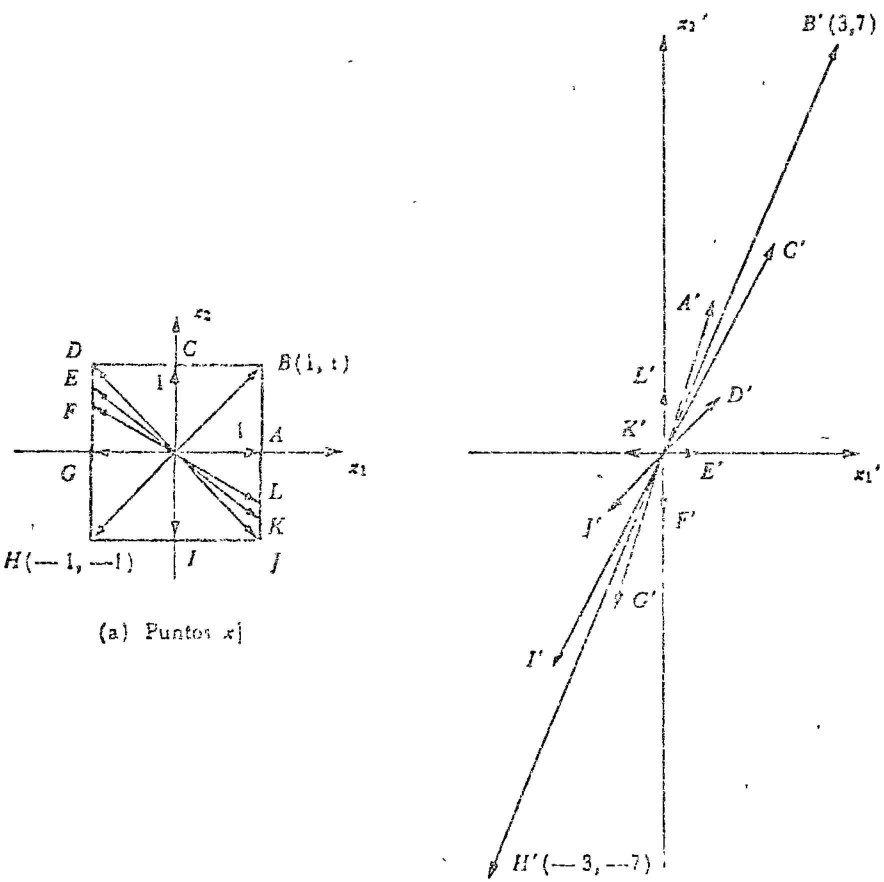
Solución:

Si por conveniencia tomamos $\|x]\| = 1$, de la relación (11.1.4) vemos que

$$\| [A] \| = max \| [A] x] \| \tag{11.1.10}$$

Consideremos primero la relación (11.1.2) como norma de los vectores $[A]x]$ y $x]$. Como la norma de $x]$ vale uno en todos los puntos del cuadrado de la figura 11.1.1a, es necesario calcular $[A]x]$ para dichos puntos. La figura 11.1.2b muestra los puntos $[A]x]$ correspondientes a algunos puntos $x]$ de la figura 11.1.2a.

El producto $[A]x]$ se puede escribir como



(a) Puntos $x]$

(b) Mapeo $[A]x]$

Fig. 11.1.2 Puntos con $\|x]\| = 1$ y su mapeo $[A]x]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Dado que

$$-1 \leq x_1 \leq 1$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1$$

de la relación anterior vemos que los vectores $[A]x]$ de mayores y de menores componentes en este intervalo son

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

correspondientes a los vectores $x]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Estos puntos $B(1, 1)$ y $H(-1, -1)$ y sus mapeos $B'(3, 7)$ y $H'(-3, -7)$ se muestran en la figura 11.1.2b. La norma de ambos vectores $[A]x]$ es 7, y como es la máxima norma de $[A]x]$ con $\|x]\| = 1$ de la relación (11.1.10) vemos que la norma de la matriz $[A]$ vale 7:

$$\|[A]\| = 7$$

Definamos finalmente el concepto de *función acotada*. Una función vectoral $f(t)]$ de valor real definida en el intervalo T está acotada en T, si existe una constante M tal que

$$\| f(t)] \| \leq M \quad \forall\ t \in T$$

Una función matricial $[A(t)]$ de valor real definida en el intervalo T está acotada en T, si existe una constante M tal que

$$\| [A(t)] \| \leq M \quad \forall\ t \in T$$

Se dice que un sistema dinámico de representación $D = (U, \Sigma, Y, h]$ $o]$) (ver sección 6.3) con un espacio de estado Σ finito es *asintóticamente estable en el límite* si $h]$ $(x_0], u], t_0, t_1)$ (véase sección 6.2), para cualquier estado inicial $x_0] \subset \Sigma$ y cualquier tiempo inicial $t_0 \in T$, es una función acotada en (t_0, ∞) y

$$h]\ (x_0],\ 0]_U,\ t_0,\ t_1) \to 0]_\Sigma \text{ cuando } t \to \infty \tag{11.1.11}$$

Esta relación señala que, bajo condiciones libres (sin excitación, o sea $u] = 0]_U$) la transición de estado $h]$ debe tender al elemento nulo del espacio de estado $0]_\Sigma$ cuando $t \to \infty$.

Otra definición de importancia relacionada con la estabilidad de un sistema es la siguiente El sistema dinámico $D = (U, \Sigma, Y, h], o])$ es estable de estado nulo y excitación y respuesta acotadas, si para cada número positivo U_0 existe un número finito $M(U_0, t_0)$ tal que

$$\| r]\, (0]_\Sigma, u], t_0, t_1) \| \leq M\,(U_0, t_0) \tag{11.1.12}$$

para toda función de excitación $u(t)]$ acotada por U_0 en (t_0, ∞), es decir

$$\| u(t)] \| \leq U_0 \quad \forall \ t \geq t_0$$

La relación (11.1.12) establece lo siguiente: La respuesta de estado inicial nulo $0]_\Sigma$ *debe* estar acotada, si la excitación $u(t)]$ lo está

Las definiciones anteriores no agotan el tema de definiciones de estabilidad, pero son las más importantes para sistemas lineales e invariantes. No cansaremos al lector con definiciones adicionales.

11.2 ESTABILIDAD DE SISTEMAS FORZADOS

Como señalamos en la introducción, solamente estudiaremos el problema de estabilidad de sistemas lineales e invariantes, es decir de sistemas cuya representación es:

$$\dot{x}(t)] = [A]\, x(t)] + [B]\, u(t)] \tag{11.2.1}$$

$$y(t)] = [C]\, x(t)] + [D]\, u(t)] \tag{11.2.2}$$

donde $[A]$, $[B]$, $[C]$ y $[D]$ son matrices constantes (invariantes). Como se vio en el capítulo seis, la función de transición de estado $h](x_0], u], t_0, t)$ para estos sistemas es:

$$h]\,(x_0], u], t_0, t) = \left[\exp\,\{[A]\,(t - t_0)\}\right] x_0] + \int_{t_0}^{t} \left[\exp\,\{[A]\,(t-\tau)\}\right] [B]\, u(\tau)]\, d\tau \tag{11.2.3}$$

y la función de respuesta:

$$r]\,(x_0], u], t_0, t) = [C]\,\left[\exp\,\{[A]\,(t - t_0)\}\right] x_0] + \int_{t_0}^{t} [C]\,\left[\exp\,\{[A]\,(t-\tau)\}\right][B]\, u(\tau)]\, d\tau + [D]\, u(t)] \tag{11.2.4}$$

A continuación estableceremos condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de representación (11.2.1) y (11.2.2) sea asintóticamente estable en el límite

Teorema 11.2.1

El sistema de representación (11.2.1) y (11.2.2) es *asintóticamente estable* cuando $t \to \infty$ si y solamente si todos los valores característicos de la matriz $[A]$ tienen parte real negativa.

Demostración:

Recordemos* que la matriz $[\exp\{[A](t - t_0)\}]$ se puede expresar como:

$$[\exp\,\{[A]\,(t - t_0)\}] = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, [A]^i \tag{11.2.5}$$

donde n es el orden de la matriz cuadrada $[A]$, y los coeficientes $\alpha_i(t - t_0)$ se obtiene de las relaciones

$$\exp\,\{\lambda_j\,(t - t_0)\} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, \lambda_j^i \tag{11.2.6}$$

donde λ_j son los valores característicos de $[A]$ (ver ejemplo 11.2.1 y Problema 2).

Si cada valor característico λ_j es de parte real negativa, entonces de la relación (11.2.6) cada $\alpha(t - t_0)$ es una combinación lineal de funciones decrecientes De la ecuación (11.2.5), cada elemento de la matriz de transición $[\exp\{[A](t - t_0)\}]$ tiende a cero cuando $t \to \infty$, y lo mismo sucede con la relación (11.2.3). Por lo tanto, podemos concluir que el hecho de que los valores característicos λ_j tengan parte real negativa, es condición *suficiente* para que el sistema sea asintóticamente estable cuando $t \to \infty$.

* Ver apéndice A, tomo I, *Teoría de Sistemas y Circuitos*, V. Gerez Greiser y M. A. Murray-Lasso, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, 1972

Examinemos a continuación la condición *necesaria*. Supongamos que uno de los valores característicos tiene parte real positiva. Sea λ_1 ese valor, y sea $u]_1$ el vector característico correspondiente. En la sección 7.3 se demostró que, si el estado inicial $x_0]$ se hace igual al vector $u]_1$, entonces solamente se excita la frecuencia natural λ_1, es decir

$$h](x_0], 0]_U, t_0, t) = \left[\exp\ \{\lambda_1(t - t_0)\right] x_0] \qquad (11.2.7)$$

y como por hipótesis $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$, entonces $h](x_0, 0]_U, t_0, t)$ *no* tiende a cero al tender el tiempo a infinito. Como este razonamiento es válido para cualquier valor característico de $[A]$ de parte real positiva, se ve que es condición *necesaria* y *suficiente* para la estabilidad del sistema que todos los valores característicos tengan parte real negativa, con lo que queda demostrado el teorema. ◻

Ejemplo 11.2.1

Encontrar $[\exp\{[A]t\}]$ si

$$[A] = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

La ecuación característica $|[A] - \lambda[I]| = 0$ es:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)\ (\lambda + 2) = 0$$

por lo que los valores característicos de la matriz $[A]$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. De la ecuación (11.2.6) podemos establecer que

$$\exp\ (\lambda_1 t) = \alpha_0 \lambda_1^0 + \alpha_1 \lambda_1^1$$

$$\exp\ (\lambda_2 t) = \alpha_0 \lambda_2^0 + \alpha_1 \lambda_2^1$$

y sustituyendo los valores de λ_1 y λ_2:

$$\exp\ (-t) = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$\exp\ (-2t) = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

Despejando de este sistema de dos ecuaciones a las dos incógnitas α_0 y α_1 obtenemos

$$\alpha_0 = 2\exp\ (-t) - \exp\ (-2t)$$

$$\alpha_1 = \exp\ (-t) - \exp\ (-2t)$$

Estas dos variables son combinaciones lineales de funciones exponenciales, como se comentó en la demostración del teorema anterior. Las exponenciales, y por lo tanto también α_0 y α_1, son decrecientes por ser negativa la parte real de los valores característicos.

Sustituyendo α_0 y α_1 en la relación (11.2.5) y recordando que $[A]^0$ es la matriz identidad, se obtiene

$$[\exp\ \{[A]t\}] = \alpha_0[I] + \alpha_1[A]$$

$$= \begin{bmatrix} 2\exp\ (-2t) - \exp\ (-t) & \exp\ (-2t) - \exp\ (-t) \\ 2\exp\ (-t) - 2\exp\ (-2t) & 2\exp\ (-t) - \exp\ (-2t) \end{bmatrix}$$

que se deseaba obtener. ◻

Recordemos que, para condiciones iniciales nulas, las transformadas de Laplace de las ecuaciones (11.2.1) y (11.2.2) son:

$$sX(s)] = [A]\,X(s)] + [B]\,U(s)]$$

$$Y(s)] = [C]\,X(s)] + [D]\,U(s)]$$

Despejando $X(s)]$ de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda se obtiene:

$$Y(s)] = [C]\,(s[I] - [A])^{-1}[B]\,U(s)] + [D]\,U(s)]$$

de donde la función de transferencia del sistema $[H(s)] = Y(s)]U(s)]^{-1}$ está dada por:

$$[H(s)] = Y(s)]\,U(s)]^{-1} = [C]\,(s[I] - [A])^{-1}\,[B] + [D]$$

A continuación estableceremos, en términos de $[H(s)]$, condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de estado inicial cero y excitación y respuesta acotadas, sea estable.

Teorema 11.2.2

El sistema de representación (11.2.1) y (11.2.2), de estado inicial nulo y respuesta y excitación acotadas, es estable si y solamente si la función de transferencia del sistema

$$[H(s)] = [D] + [C]\,(s[I] - [A])^{-1}[B] \tag{11.2.8}$$

tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo del plano complejo, es decir si $\text{Re}(P_i) < 0$ donde P_i son los polos de (11.2.8).

Demostración.

Empecemos por demostrar que las condiciones señaladas son suficientes. Supongamos que la función (11.2.8) solamente tiene polos con $\text{Re}(P_i) < 0$, $\forall i$. Como la matriz constante $[D]$ no tiene polos (por no ser función de s), entonces la matriz

$$[C]\,(s[I] - [A])^{-1}[B]$$

tiene por polos P_i. Como además las matrices $[C]$ y $[B]$ son constantes, dichos polos P_i son los polos de $(s[I] - [A])^{-1}$. Observemos que no *todos* los polos de $(s[I] - [A])^{-1}$ son *necesariamente* polos de $[C]\,(s[I] - [A])^{-1}[B]$, porque al multiplicar por las matrices constantes $[C]$ y $[B]$ algunos polos de $(s[I] - [A])^{-1}$ se pueden cancelar. Los polos de $(s[I] - [A])^{-1}$ son los ceros de

$$s[I] - [A]$$

que son precisamente los valores característicos de $[A]$. Es decir, los polos de la función de transferencia $[H(s)]$ están incluidos en los valores característicos de la matriz $[A]$.

La respuesta del sistema está dada por

$$r]\,(0]_{\Sigma}, u], t, t_0) = [D]\,u(t)] + \int_{t_0}^{t} [C]\,[\exp\{[A]\,(t-\tau)\}]\,[B]\,u(\tau)]\,d\tau$$

Tomando la norma de esta expresión y haciendo uso de la desigualdad del triángulo (11.1.7), se obtiene

$$\|r]\,(0]_{\Sigma}, u], t, t_0)\| \leq \|[D]\,u(t)]\| + \left\|\int_{t_0}^{t} [C]\,[\exp\{[A]\,(t-\tau)\}]\,[B]\,u(\tau)]\,d\tau\right\| \tag{11.2.9}$$

Empleando la desigualdad de Cauchi-Schwarz (11.1.8), se puede establecer que

$$\|[D]\,u(t)]\| \leq \|[D]\|\,\|u(t)]\|$$

Si la excitación $u(t)]$ está acotada por U_0, o sea

$$\|u(t)]\| \leq U_0 \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{11.2.10}$$

de la expresión anterior tenemos

$$\|[D]\,u(t)]\| \leq \|[D]\|\,U_0 \tag{11.2.11}$$

Por otra parte, empleando las relaciones (11.1.9) y (11.1.8) se puede establecer que:

$$\left\|\int_{t_0}^{t} [C]\exp\{[A]\,(t-\tau)\}]\,[B]\,u(\tau)]\,d\tau\right\| \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} \|[C]\,[\exp\{[A]\,(t-\tau)\}]\,[B]\|\,U_0\,d\tau$$

donde se hizo uso de la desigualdad (11.2.10). Sustituyendo esta expresión y la (11.2.11) en la (11.2.9), se refuerza la desigualdad para obtener:

$$\|r]\,(0]_{\Sigma}, u], t, t_0)\| \leq \|[D]\|\,U_0 + U_0 \int_{t_0}^{t} \|[C][\exp\{[A]\,(t-\tau)\}]\,[B]\|\,d\tau \tag{11.2.12}$$

Examinemos el integrando. Por la relación (11.2.5) vemos que

$$[C]\,[\exp\{[A]\,(t-\tau)\}]\,[B] = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i [C]\,[A]^i\,[B] \tag{11.2.13}$$

donde α_i es una combinación lineal de términos de la forma $\exp\{\lambda_i(t-\delta)\}$. Como se observó, los valores característicos λ_i de la matriz $[A]$ incluyen a los polos P_i de la función del sistema $[H(s)]$. Como por hipótesis los polos P_i tienen parte real negativa, todas las funciones $\exp\{\lambda_i(t-\tau)\}$ son decrecientes, y por lo tanto las funciones α_i son decrecientes. Dichas funciones α_i tienden asintóticamente a cero, por lo que están acotadas, y lo mismo se puede afirmar de la matriz $[C]\,[\exp\{[A]\;(t-\tau)\}]\;[B]$. El valor de la integral de la expresión (11.2.12) es acotado, por lo que la respuesta de estado inicial nulo

$$\|r]\;(0]_{\Sigma},u],t,t_0)\| \leq U_0\{\|[D]\|+k\}$$

es acotada.

Hemos demostrado, por lo tanto, que si los polos de $[H(s)]$ tienen parte real negativa, el sistema de estado inicial nulo y excitación y respuesta acotadas, es estable.

A continuación, demostraremos por contradicción que es *necesario* que los polos de $[H(s)]$ tengan parte real negativa, para que el sistema de estado incial nulo y excitación y respuesta acotadas, sea estable.

Supongamos que $[H(s)]$ tiene un polo P_1 de parte real mayor o igual a cero. Entonces las α_i de la relación (11.2.13), que son combinaciones lineales de términos de la forma $\exp\{P_i(t-\tau)\}$, contienen un término correspondiente a P_1 de magnitud constante o creciente. Por lo tanto la norma de (11.2.13) es o constante o creciente, y de la relación (11.2.12) la respuesta *no* es acotada, y el sistema es inestable, con lo que queda demostrado el teorema. ☐

Debemos hacer notar que un sistema puede ser estable de estado nulo y excitación y respuesta acotadas, y ser sin embargo inestable en el límite, es decir con componentes en el vector de estado que tienden a infinito cuando $t \to \infty$, como muestra el siguiente ejemplo (ver también Problema 3). Lo anterior es la razón que justifica el empleo de variables de estado para determinar la estabilidad de un sistema.

Ejemplo 11.2.2

Demuestre que el sistema de representación

$$\dot{x}(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t)] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1]\;x(t)] + 1\;u(t)$$

es asintóticamente inestable en el límite cuando $t \to \infty$, pero estable de estado inicial nulo y excitación y respuesta acotadas.

Solución:

Los valores característicos de la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

son 1 y -3. Como 1 es mayor que cero, por el teorema 11.2.1 el sistema es asintóticamente inestable en el límite cuando $t \to \infty$.

Analicemos ahora la expresión

$$[C]\;(s[I]-[A])^{-1}[B] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+2s-3} & \dfrac{1}{s^2+2s-3} \\ 0 & \dfrac{s-1}{s^2+2s-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s+3}$$

El polo de esta función es -3, por lo que por el teorema 11.2.2 el sistema es estable de estado inicial nulo y excitación y respuesta acotadas. ☐

11.3 RETROALIMENTACION

El resto de este capítulo trata diversos aspectos de la *retroalimentación*, concepto que introduciremos a continuación.

Todos los sistemas que estudia el ingeniero son diseñados para desempeñar funciones específicas. La naturaleza de las funciones que debe desarrollar un sistema y el funcionamiento del mismo, deben ser especificados y analizados en función de una serie de variables físicas convenientes. Desde el punto de vista funcional, el sistema puede considerarse dividido en una serie de subsistemas, cada uno de los cuales realiza una función específica. Desde el punto de vista dinámico, el sistema impone restricciones determinadas al flujo de energía.

Tanto las funciones que realizan los subsistemas, como el sistema integrado, pueden describirse desde el punto de vista causal, mediante una relación entre las variables de entrada y las de salida.

Pueden desde luego emplearse otras relaciones para describir el com portamiento dinámico de sistemas o subsistemas, como lo son las variables de estado

Así pues, el comportamiento total del sistema queda descrito en función del comportamiento de cada uno de los subsistemas. Si se emplean relaciones de entrada y salida para caracterizar cada subsistema, entonces los subsistemas se representan con diagramas de bloque. A continuación demos un ejemplo.

La figura 11.3.1 esquematiza un control de velocidad tipo Ward-Leonard. El funcionamiento del sistema es el siguiente. Un motor mueve a velocidad constante a un generador. Su campo, que produce la excitación, es alimentado por un amplificador, cuya tensión de entrada es controlable. La tensión en las terminales del generador, que es función de la excitación, depende por lo tanto de la tensión de entrada al amplificador. El motor que mueve la carga tiene una excitación constante, y su tensión de armadura es igual a la tensión es las terminales del generador. Finalmente la velocidad del motor, que varía al variar la tensión de armadura, puede controlarse por la tensión aplicada a la entrada del amplificador.

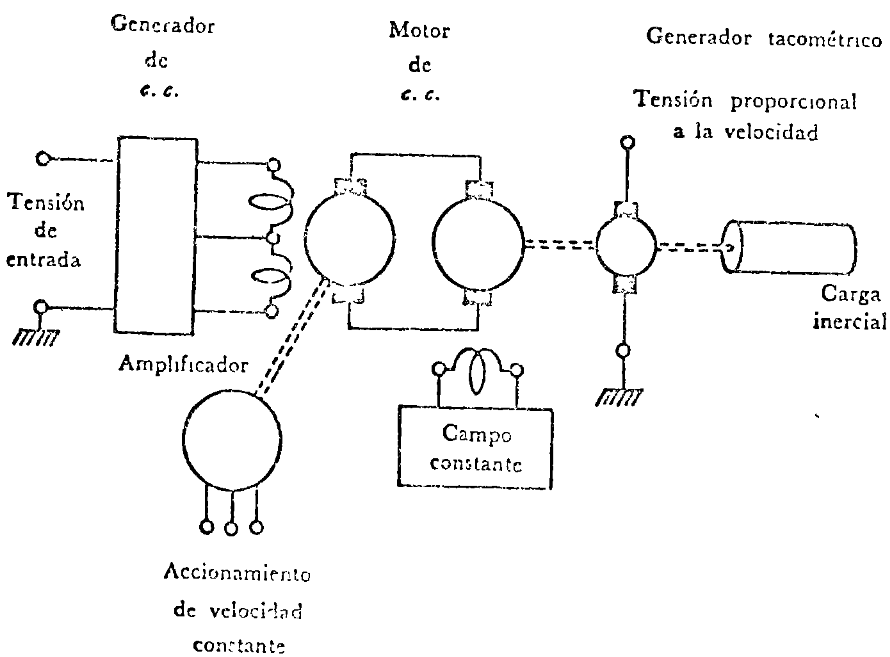


Fig. 11.3.1 Sistema de control de velocidad Ward-Leonard

Las relaciones funcionales descritas anteriormente quedan representadas por el diagrama de bloques de la figura 11.3.2, que el lector no debe tener problemas en interpretar.

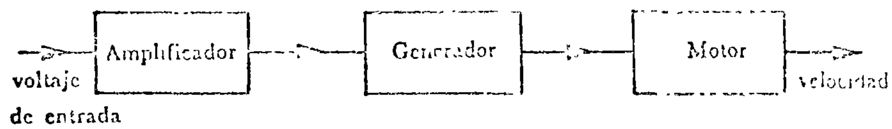


Fig. 11.3.2 Diagrama de bloque del sistema Ward-Leonard

El sistema representado por el diagrama de bloque de la figura 11.3.2 es insatisfactorio para controlar la velocidad del motor, pues cualquier variación en la velocidad del generador, en la excitación del motor, en la carga, etc. afectaría la velocidad por controlar del sistema. Para mantener una velocidad determinada, es necesario influir una acción reguladora en el sistema. Una forma de lograrlo es empleando la configuración esquematizada en la figura 11.3.3.

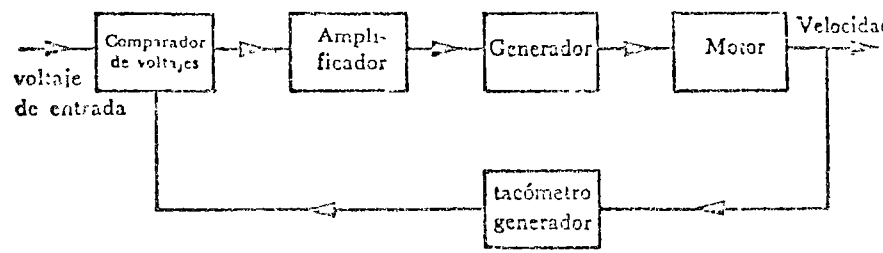


Fig. 11.3.3 Sistema de control de velocidad retroalimentado.

En dicha figura, un generador tacométrico es actuado por la flecha de salida del sistema. Su tensión de salida es proporcional a la velocidad de la flecha. Esta tensión se retroalimenta a un comparador de tensión, cuya señal de salida es proporcional a la diferencia entre la tensión de referencia y la tensión retroalimentada. Si existe diferencia entre estas tensiones, lo que equivale a hacer una velocidad de salida diferente a la entrada, varía de tal manera la excitación, que la velocidad de salida vuelve a su valor deseado.

Un sistema como el descrito, se conoce con el nombre de *sistema retroalimentado,* ya que una señal proporcional a la diferencia entre un valor de referencia y la variable medida a la salida del sistema, se retroalimenta al sistema. La figura 11.3.4 muestra el diagrama de bloque de un sistema general de este tipo.

A continuación deduciremos la función de transferencia de un sistema retroalimentado. Si $KG(s)$ es la función de transferencia del sistema de control y del sistema controlado, y $H(s)$ es la función de transferencia de los subsistemas de la trayectoria de retroalimentación (es decir, entre la salida del sistema y el comparador de entrada), el sistema queda representado como aparece en la figura 11.3.5a. La función que realiza el comparador es obtener la *diferencia* entre la variable de referencia $E(s)$ y la señal retroalimentada $R(s)\ H(s)$. La figura 11.3.5a muestra los signos que llevan las variables para calcular dicha diferencia.

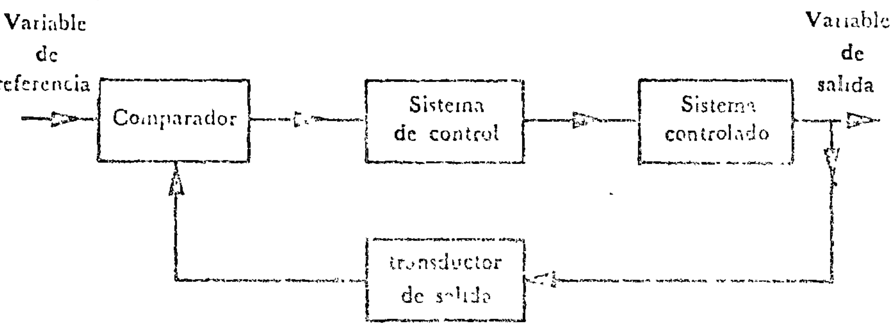
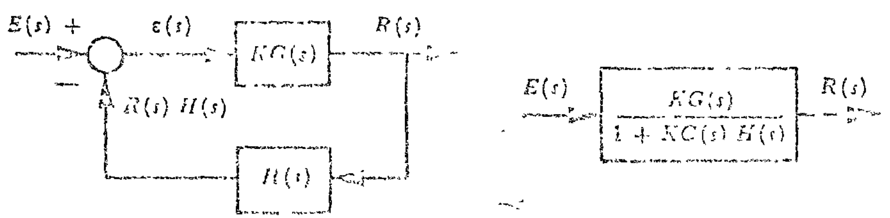


Fig. 11.3.4 Diagrama de bloque de un sistema general de retroalimentación.



(a) Sistema retroalimentado (b) Sistema equivalente

Fig. 11.3.5 Diagrama de bloque de un sistema general retroalimentado que muestra las funciones de transferencia de las componentes y el sistema equivalente.

Sean $e(t)$ y $r(t)$ las señales de entrada y salida respectivamente, y $E(s)$ y $R(s)$ sus transformadas de Laplace. La función $\varepsilon(s)$ representa el error entre la señal de entrada $e(t)$ y la señal de la trayectoria de retroalimentación. Las relaciones entre estas funciones en el dominio complejo y las funciones de transferencia son:

$$R(s) = \varepsilon(s)\ KG(s)$$

$$\varepsilon(s) = E(s) - R(s)\ H(s)$$

Sustituyendo la segunda relación en la primera se tiene:

$$R(s) = [E(s) - R(s)\ H(s)]\ KG(s)$$

y finalmente la relación $R(s)/E(s)$, función de transferencia $W(s)$ de todo el sistema, es:

$$W(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)\ H(s)} \qquad (11.3.1)$$

Esta relación permite evaluar analíticamente el comportamiento de entrada-salida, de estado inicial nulo, de un sistema retroalimentado, como muestra la figura 11.3.5b.

La primera característica que debe tener un sistema de retroalimentación es el ser estable.

De acuerdo con el teorema 11.2.2, la estabilidad de estado inicial nulo y respuesta y excitación acotadas depende precisamente de la localización de los polos de la función* de transferencia (11.3.1). En las secciones restantes de este capítulo estudiaremos métodos para determinar la estabilidad de entrada salida de un sistema retroalimentado.

Debemos volver a hacer hincapié en que la estabilidad de estado inicial nulo, con excitación y respuesta acotadas, no necesariamente implica estabilidad de estado, como se señaló en la sección anterior y como ilustró el ejemplo 11.2.2. A pesar de la importancia de los métodos que se estudian en las siguientes secciones para evaluar la estabilidad de un sistema retroalimentado y su comportamiento general de entrada-salida, es necesario tener presente las limitaciones de estos métodos, que no toman en cuenta el estado del sistema.

11.4 CRITERIOS ALGEBRAICOS DE ESTABILIDAD

En esta sección daremos algunos criterios algebraicos de estabilidad aplicables a sistemas retroalimentados.

Consideremos un sistema lineal e invariante cuya función de transferencia tiene por denominador al polinomio en s dado por:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

Los polos de dicha función de transferencia son las raíces de la ecuación característica

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (11.4.1)$$

* Se emplea la notación $[H(s)]$ para la función de transferencia de sistemas lineales e invariantes de representación (11.2.1) y (11.2.2), y $W(s)$ para la función de transferencia de sistemas retroalimentados, que son un caso particular de [illegible]

Una forma de determinar si el sistema es estable, consiste en encontrar las raíces de la ecuación (11.4.1), o sea los polos de la función de transferencia. Si ninguna raíz tiene parte real positiva, entonces por el teorema 11.2.2 el sistema es estable de entrada-salida. Empleando programas de biblioteca en una computadora digital, se pueden determinar dichas raíces sin mayor problema. Si no se tiene acceso a una computadora digital, los criterios que se exponen a continuación son de utilidad para determinar la existencia de raíces de parte real positiva. El primer criterio establece condiciones necesarias, aunque no suficientes, y es conveniente aplicarlo siempre, se use o no una computadora.

Teorema 11.4.1

Para que la función de transferencia de un sistema *no* tenga polos de parte real positiva, es necesario (aunque no suficiente) que todos los coeficientes de la ecuación característica (11.4.1) sean *diferentes de cero y del mismo signo*.

En particular, si $a_1 > 0$, entonces $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ constituye una condición necesaria para la ausencia de raíces con parte real positiva. Sin embargo, por ser solamente necesaria pero no suficiente esta condición, puede cumplirse y a pesar de ello existir raíces de parte real positiva, como ilustra el siguiente ejemplo.

La ecuación característica

$$s^4 + 2s^3 + 29s^2 + 28s + 340 = 0$$

cumple con las condiciones del teorema anterior, y sin embargo dos de sus cuatro raíces

$$-2 \pm 4j$$
$$1 \pm 4j$$

tienen parte real positiva.

Si un sistema *no* cumple con las condiciones del teorema anterior, no es necesario proceder con pruebas más sofisticadas, pues el sistema es inestable.

Sin embargo, si el teorema anterior *no* indica que el sistema inestable, debe procederse a hacer una prueba que sea *suficiente* para garantizar la inexistencia de raíces con parte real positiva. Entre estas pruebas está la descubierta independientemente por Routh y por Hurwitz. Antes de enunciar esta prueba, demos unas definiciones.

Se dice que un *polinomio* es de tipo *Hurwitz* si todas sus raíces tienen parte real negativa.

Desde luego, un sistema lineal e invariante, cuya ecuación característica (o sea el denominador de la función de transferencia) es un polinomio de Hurwitz, es estable.

Sea $[H]$ la matriz de $n \times n$ dada por

$$[H] = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad (11.4.2)$$

formada de la siguiente manera:

El primer renglón está formado por los coeficientes de la ecuación característica (11.4.1) de orden non, $a_1, a_3, \ldots$, hasta agotar los coeficientes del polinomio. Las posiciones restantes hasta llegar a n términos en el renglón, donde n es el orden del polinomio, se llenan con ceros. El segundo renglón se llena con los coeficientes de orden par, empezando con a_0, hasta agotar todos los coeficientes, y las posiciones restantes hasta llegar a n términos se llenan con ceros. Los renglones tercero y cuarto se obtienen desplazando los dos primeros una columna hacia la derecha y poniendo ceros en la primer columna, y así sucesivamente, hasta formar *n renglones*. Para un polinomio de orden 7, la matriz $[H]$ es:

$$[H] = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{bmatrix}$$

Los *menores principales* Δ_i de la matriz $[H]$ de la ecuación (11.4.2) son los determinantes

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente

Teorema 11.4.2

La condición necesaria y suficiente para que el polinomio característico (11.4.1) con $a_0 > 0$ sea un polinomio de *Hurwitz,* es que todos los menores principales de la matriz $[H]$ sean positivos

Ejemplo 11.4.1

Determine si el polinomio

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 2 = 0$$

es de Hurwitz

Solución:

La matriz $[H]$ de 3×3 (por ser 3 el orden del polinomio) es.

$$[H] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyos menores principales son:

$$\Delta_1 = |2| = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Como todos los menores principales de la matriz $[H]$ son positivos, por el teorema 11.4.2, el polinomio es Hurwitz, y todas sus raíces tienen la parte real negativa (ver Problema 4).

La demostración de los dos teoremas anteriores puede basarse en el criterio de estabilidad de Liapunov. El lector interesado en conocer dichas demostraciones puede consultar alguno de los excelentes libros que existen sobre sistemas.*

11.5 LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAICES

En la sección 11.3 indicamos que un sistema de control lineal y retroalimentado, de entrada y salida escalares, pueden representarse mediante el diagrama de bloque que aparece en la figura 11.5.1

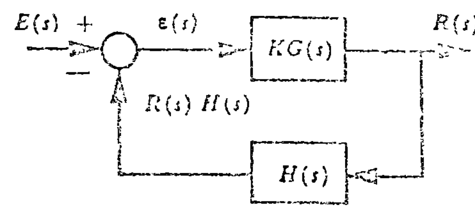


Fig. 11.5.1 Sistema lineal retroalimentado.

En la sección 11.3 determinamos que la función de transferencia del sistema de la figura 11.5.1 está dado por la ecuación (11.3.1):

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)\,H(s)} \qquad (11.5.1)$$

Consideremos que los polos y ceros de las funciones $G(s)$ y $H(s)$ son conocidos, y que deseamos conocer los polos y ceros de la función de transferencia $W(s)$ (11.5.1), ya que estos determinan el comportamiento del sistema retroalimentado. La relación entre los *ceros* de $W(s)$ y las singularidades de las funciones $G(s)$ y $H(s)$ son:

a_1) $W(s)$ tiene un cero donde $G(s)$ tiene un cero

a_2) $W(s)$ tiene un cero donde $H(s)$ tiene un polo no cancelado por un cero de $G(s)$

* Ver, por ejemplo, R. J. Schwarz e I. Friedland *Linear Systems* McGraw-Hill, 1965 Capítulo 1.

La relación entre los *polos* de $W(s)$ y las singularidades de $G(s)$ y $H(s)$ es:

b_1) $W(s)$ tiene un polo donde $G(s)$ tiene un polo y $G(s)\,H(s)$ es o finito o cero o tiene un polo de orden menor.

b_2) $W(s)$ tiene un polo donde $1 + KG(s)\,H(s) = 0$.

De las consideraciones anteriores puede concluirse que los ceros de la función de transferencia del sistema retroalimentado (o *cerrado*) se pueden encontrar por inspección de las funciones $G(s)$ y $H(s)$. Los polos en el caso b_1 también se pueden encontrar en esta forma; en el caso b_2 hay que encontrar las raíces del polinomio

$$1 + KG(s)\,H(s) = 0 \tag{11.5.2}$$

A continuación ilustraremos las afirmaciones anteriores con un ejemplo.

Ejemplo 11.5.1

Las funciones de transferencia de los elementos de un sistema retroalimentado son:

$$G(s) = \frac{(s+a)\,(s+b)}{(s+d)^2}$$

$$H(s) = \frac{s+d}{(s+b)\,(s+c)}$$

Localice los polos y ceros de la función de transferencia $W(s)$ del sistema retroalimentado.

Solución

Empleando la relación (11.5.1), la función de transferencia $W(s)$ de este ejemplo está dada por

$$W(s) = \frac{K\dfrac{(s+a)\,(s+b)}{(s+d)^2}}{1 + K\dfrac{(s+a)\,(s+b)}{(s+d)^2}\;\dfrac{(s+d)}{(s+b)\,(s+c)}}$$

$$= \frac{K(s+a)\,(s+b)\,(s+c)}{(s+d)\,[(s+d)\,(s+c) + K\,(s+a)]}$$

Por inspección de esta función se determina que los ceros de $W(s)$ son:

$$Z_1 = -a$$

$$Z_2 = -b$$

$$Z_3 = -c$$

Los dos primeros ceros de $W(s)$ son también los ceros de $G(s)$ (caso a_1). El tercer cero $Z_3 = -c$ es uno de los polos de $H(s)$ (caso a_2) Sin embargo, el polo $-b$ de $H(s)$ no es cero de $W(s)$, por estar cancelado por el cero $-b$ de $G(s)$ (caso a_2).

Un polo de $W(s)$ es $-d$, que es un polo de $G(s)$ (caso b_1). El producto

$$G(s)\,H(s) = \frac{(s+a)}{(s+d)\,(s+c)}$$

tiene un polo de orden 1 en $-d$, mientras $G(s)$ tiene un polo de orden dos en el mismo $-d$.

Los otros dos polos de $W(s)$ son las raíces de

$$(s+d)\,(s+c) + K(s+a) = 0$$

que es precisamente $1 + KG(s)\;H(s) = 0$ (caso b_2). ◻

Al analizar un sistema de control (retroalimentado), resulta útil conocer no solamente si existen o no raíces de parte real positiva, sino también en cuanto hay que variar K para que el sistema se vuelva estable en caso de ser inestable. Los métodos algebraicos no dan este tipo de información.

El método del lugar geométrico de las raíces que expondremos a continuación, permite visualizar la relación que existe entre K y la posición de las raíces del polinomio (11.5.2).

Cualquier valor de la variable compleja s que satisface la ecuación (11.5.2) es un polo de la función de transferencia $W(s)$ del sistema cerrado. Para encontrar dichos valores, escribamos primero la ecuación (11.5.2) en la siguiente forma:

$$G(s)\,H(s) = -\frac{1}{K}$$

de donde

$$|G(s)\,H(s)| = \frac{1}{K} \tag{11.5.3}$$

$$\measuredangle\, G(s)\,H(s) = n\pi \quad n \text{ impar} \tag{11.5.4}$$

La solución analítica de estas dos ecuaciones es más difícil de obtener que la solución de (11.5.2); sin embargo, puede encontrarse una simple solución gráfica basada en la naturaleza del producto $G(s)\ H(s)$ considerado como una fracción racional, y la geometría del plano de la variable compleja s. Factorizando el numerador y el denominador de la función de transferencia de sistema abierto $G(s)\ H(s)$, se tiene:

$$G(s)\ H(s) = \frac{(s - s_1)\ (s - s_2)\ \dots\ (s - s_Z)}{(s - \hat{s}_1)\ (s - \hat{s}_2)\ \dots\ (s - \hat{s}_P)} \qquad (11.5.5)$$

donde $s_1, s_2, \dots, s_Z$ son los ceros de $G(s)\ H(s)$ y $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_P$ son los polos de $G(s)\ H(s)$

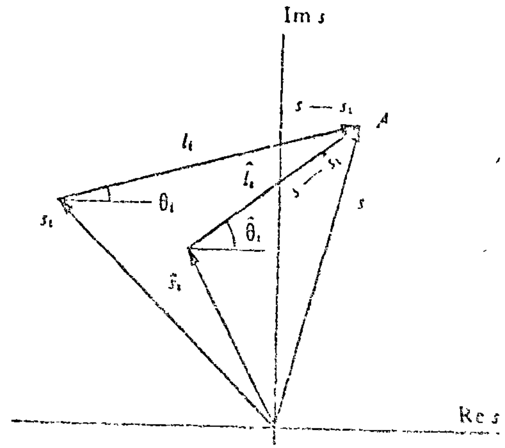


Fig. 11.5.2 Polos y ceros de $G(s)$ y $H(s)$ en el plano complejo.

Los polos y ceros de producto $G(s)\ H(s)$ se pueden representar gráficamente como muestra la figura 11.5.2. Los segmentos de línea dirigidos $(s - s_1)$ y $(s - \hat{s}_1)$ forman con el eje real los ángulos θ_1 y $\hat{\theta}_1$ respectivamente, y sus magnitudes están dadas por las longitudes l_1 y $\hat{l}_1$ de dichos segmentos de línea.

Sea A un punto de coordenada s, como muestra la figura 11.5.2. Sean $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Z$ los ángulos de las líneas trazadas desde los ceros de $G(s)\ H(s)$ al punto A, y $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_P$ los ángulos de las líneas trazadas desde los polos de $G(s)\ H(s)$ al punto A. Si A es un polo de la función de transferencia $W(s)$, entonces la relación

$$\measuredangle\, G(s)\ H(s) = (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_Z) - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \dots + \hat{\theta}_P) \qquad (11.5.6)$$

satisface la condición (11.5.4)

Si el ángulo (11.5.6) no es igual a $n\pi$ (n impar), entonces el punto A no puede ser una raíz de $1 + K\ G(s)\ H(s)$ por la relación (11.5.4). Si el ángulo (11.5.4) es igual a $n\pi$ (n impar), entonces A *puede* ser una raíz de $1 + K\ H(s)\ G(s)$. El valor de K que hace que A sea una raíz del denominador de $W(s)$ estará dado por la relación (11.5.3) en la forma

$$|G(s)\ H(s)| = \frac{l_1 l_2\ \dots\ l_Z}{\hat{l}_1 \hat{l}_2\ \dots\ \hat{l}_P} = \frac{1}{K} \qquad (11.5.7)$$

donde $l_1, l_2, \dots, l_Z$ son las longitudes de las rectas trazadas de los ceros de $G(s)\ H(s)$ al punto A, y $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_P$ son las longitudes de las líneas trazadas desde los polos de $G(s)\ H(s)$ al punto A.

Se llama *lugar geométrico de las raíces* de $1 + K\ G(s)\ H(s)$, al conjunto de puntos del plano complejo, que para diversos valores de K (desde 0 a ∞) pueden ser raíces de dicho polinomio. Este lugar geométrico se encuentra haciendo uso de la relación (11.5.4). Una vez trazado este lugar geométrico, es posible determinar los valores de K (llamado *ganancia*) para los diversos puntos sobre el lugar geométrico, empleando la ecuación (11.5.3).

A continuación daremos algunas reglas de construcción del lugar geométrico de las raíces, que después demostraremos, y que determinan el conjunto de puntos que pueden ser raíces de $1 + K\ G(s)\ H(s) = 0$.

Veremos que una regla y un transportador son los únicos aparatos necesarios para determinar el lugar geométrico de las raíces.

TRAZO DE LA GRAFICA DEL LUGAR GEOMETRICO

Las raíces de $1 + K\ G(s)\ H(s)$ son polos de la función de transferencia $W(s)$ del sistema retroalimentado. No son los únicos polos, pues [illegible] adicionales pueden ser encontrados directamente por inspección de $G(s)\ H(s)$ como ya se explicó al comienzo de ésta sección. Con los ceros de $W(s)$, que también pueden ser encontrados a partir de las singularidades de $G(s)$ y $H(s)$, se completa la descripción de la función $W(s)$ del sistema de circuito cerrado. El método del lugar geométrico permite localizar aquellos polos de $W(s)$ que no pueden ser encontrados por inspección de las singularidades de $G(s)$ y $H(s)$.

Las siguientes reglas, que después demostraremos, permiten bosquejar la gráfica del lugar geométrico de las raíces de $1 + K\ G(s)\ H(s)$:

Regla 1

Son partes del lugar geométrico de las raíces de $1 + K\ G(s)\ H(s)$ aquellas porciones de eje real, situadas a la izquierda de un número non de polos o ceros reales de $G(s)\ H(s)$.

El siguiente ejemplo ilustra esta regla.

Ejemplo 11.5.2

Determine el lugar geométrico de las raíces de $1 + K\,G(s)\,H(s)$ para el sistema retroalimentado de la figura 11 5 3

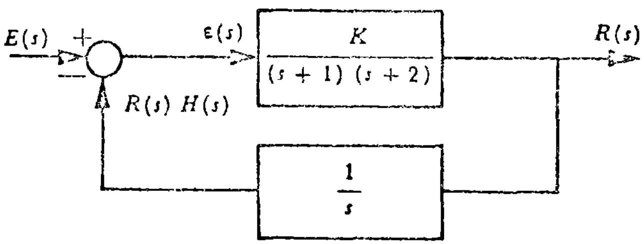


Fig 11 5 3 Sistema retroalimentado.

Solución: —

Comparando la figura 11 5.3 con la 11.5.1, vemos que para este ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}$$
$$H(s) = \frac{1}{s} \qquad (11.5.8)$$

por lo que la función de transferencia de circuito abierto $G(s)\,H(s)$ está dada por·

$$G(s)\,H(s) = \frac{1}{s(s+1)\,(s+2)} \qquad (11.5.9)$$

y el problema consiste en encontrar el lugar geométrico de las raíces de

$$1 + \frac{1}{s(s+1)\,(s+2)} = 0$$

De la ecuación (11 5 9), vemos que las singularidades de $G(s)\,H(s)$ son 0, — 1 y — 2, como muestra la figura 11.5.4.

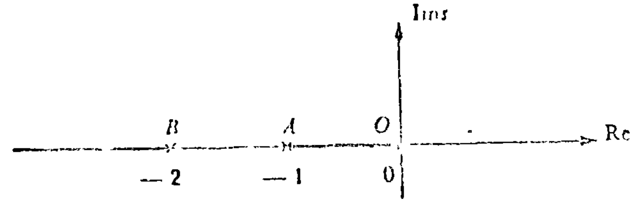


Fig 11.5 4 Polos de $G(s)\,H(s)$.

De acuerdo con la regla dada, son porciones del lugar geométrico de las raíces el segmento OA y el segmento de B hasta $-\infty$ de la figura 11 5.4

Con este mismo ejemplo iremos ilustrando cada regla para la construcción del lugar geométrico de las raíces La segunda regla es·

Regla 2

Lejos del origen, el lugar geométrico de las raíces al aumentar K, (que se indica con una flecha), se acerca asintóticamente a las líneas rectas que pasan por el centroide

$$\frac{\begin{Bmatrix}\text{Suma partes reales}\\ \text{de polos de } G(s)H(s)\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{Suma partes reales}\\ \text{de ceros de } G(s)H(s)\end{Bmatrix}}{\mathrm{P} - \mathrm{Z}} \qquad (11\,5\,10)$$

y que forman los ángulos

$$\phi = \frac{n\pi}{P - Z} \qquad n \text{ impar} \qquad (11.5.11)$$

con el eje real, donde

P = número de polos finitos de $G(s)\,H(s)$
Z = número de ceros finitos de $G(s)\,H(s)$

De la relación (11.5.10), se ve que el centroide de los polos y ceros de $H(s)\,G(s)$ está sobre el eje real a una distancia (11.5.10) del origen

De acuerdo con la fórmula (11.5 10), el centroide del ejemplo 11.5 2 está en

$$\frac{-0 - 1 - 2}{3} = -1$$

y de acuerdo con la fórmula (11.5.11), las asíntotas forman con el eje real los ángulos $\pi/3$, π y $5\pi/3$. Esta etapa de la construcción del lugar geométrico de las raíces se muestra en la figura 11 5 5. Obsérvese que en este caso la asíntota que se acerca a la recta de ángulo π coincide con ella, de -2 a ∞.

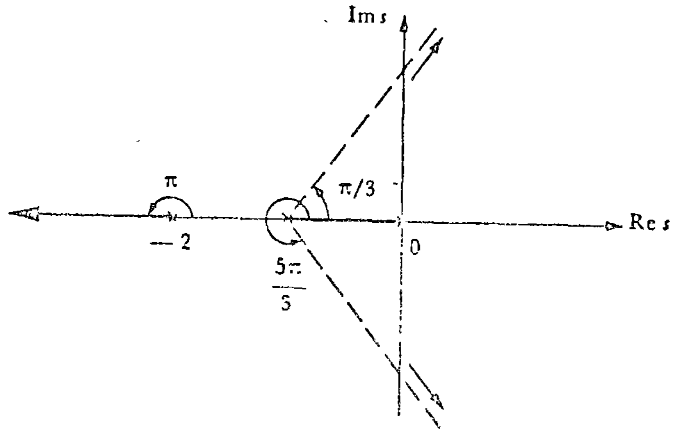


Fig 11 5.5 Ilustración de la segunda regla

Regla 3

El lugar geométrico de las raíces principia ($K = 0$) en los polos de $G(s)$ $H(s)$ y termina ($K = \infty$) en los ceros de $G(s)$ $H(s)$. El desplazamiento de las raíces al aumentar K se muestra en el diagrama del lugar geométrico de las raíces con cabezas de flecha

En nuestro ejemplo 11 5 2, los ceros están en ∞. El desplazamiento se muestra en la figura 11.5 6

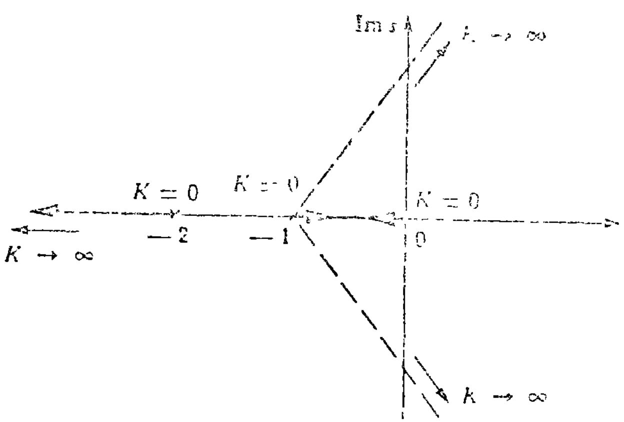


Fig 11 5 6 Desplazamiento de los ceros de $1 + KG(s)$ $H(s)$ al variar la ganancia K.

Regla 4

El lugar geométrico de las raíces es continuo y simétrico respecto al eje real

Estas cuatro reglas nos permiten visualizar la forma del lugar geométrico de las raíces sin necesidad de aplicar la relación (11 5 4) a todos los puntos del plano complejo s

Empleando las reglas anteriores, se puede trazar en forma aproximada el lugar geométrico de las raíces de la función $1 + KG(s)$ $H(s)$ para diversos valores de K. Para el sistema del ejemplo 11 5 2 con el que hemos ilustrado la aplicación de estas reglas, el lugar geométrico aparece en la figura 11 5 7. Este diagrama nos permite obtener las siguientes conclusiones a) Cuando la ganancia K es baja, los polos del sistema cerrado, correspondientes a los ceros de $1 + KG(s)$ $H(s) = 0$, están sobre el eje real negativo. Recordemos que la transformada de Laplace de la respuesta está dada por

$$R(s) = E(s)\ W(s)$$

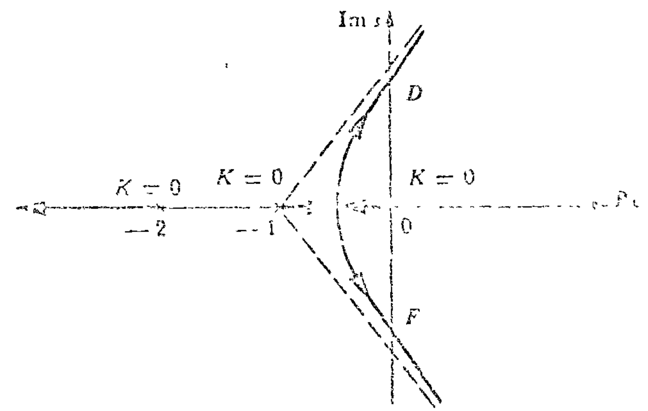


Fig 11 5 7 Lugar geométrico de las raíces del ejemplo 11 5 2

donde $E(s)$ es la entrada, y que el factor de la función de transferencia $W(s)$ correspondiente a un polo P_i es de la forma $C_i/(s - P_i)$, que da origen a la componente

$$C_i \exp\ (P_i t) \qquad (11\ 5.12)$$

de la respuesta. Como cuando la ganancia K es baja, los polos están sobre el eje real negativo, se concluye que la parte de la respuesta correspondiente a los ceros de $1 + KG(s)H(s) = 0$, está formada por exponenciales decrecientes

b) Al aumentar la ganancia K, hay parejas complejas conjugadas de polos que se separan del eje real negativo. Como cada pareja $\alpha \pm j\omega$ corresponde a un término de la respuesta de la forma

$$\exp(\alpha t)\cos(\omega t + \theta) \tag{11.5.13}$$

con $\alpha < 0$ (por estar los polos en el semiplano izquierdo del plano complejo), la respuesta se vuelve oscilatoria decreciente.

c) A partir de cierta ganancia K, algunas parejas complejas conjugadas de polos pasan a la mitad derecha del plano complejo, donde su parte real α es positiva, y la respuesta se vuelve oscilatoria creciente. En este caso el sistema se vuelve inestable para ganancia K alta.

De la figura 11.5.7 vemos que, para el ejemplo que hemos venido estudiando, a partir de cierta ganancia K, la función de transferencia $W(s)$ tiene dos polos de parte real positiva, por lo que el sistema se vuelve inestable. El valor máximo de K para el cual el sistema todavía es estable, será aquel valor de K para el cual dos de las ramas del lugar geométrico de las raíces de $1 + KG(s)\,H(s)$ crucen el eje imaginario (puntos D y F de la figura 11.5.7). El siguiente ejemplo ilustra como se localizan estos puntos, y cómo se determina el valor correspondiente de K.

Ejemplo 11.5.3

Localice las intersecciones del lugar geométrico de las raíces de $1 + G(s)\,H(s) = 0$ con el eje imaginario para el sistema del ejemplo 11.5.2. Calcule el valor correspondiente de K para el cual los polos de $W(s)$ se encuentran en dichos puntos, y el valor de la tercera raíz de $1 + KG(s)\,H(s)$ que tiene ese valor de K.

Solución:

Para un punto $A = ia$ sobre el eje imaginario, los ángulos $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ de la figura 11.5.2, mostrados en la figura 11.5.8, satisfacen las relaciones

$$\tan\hat{\theta}_2 = \frac{a}{1} \tag{11.5.14}$$

$$\tan\hat{\theta}_3 = \frac{a}{2} \tag{11.5.15}$$

de donde

$$\tan\hat{\theta}_2 = 2\tan\hat{\theta}_3 \tag{11.5.16}$$

Por otra parte, para que $A = ia$ sea un polo de $W(s)$, la relación (11.5.6) debe satisfacer la condición (11.5.4), por lo que con $n = 1$ obtenemos

$$-(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3) = \pi = 180°$$

Como $\hat{\theta}_1 = 90°$, se cumple que

$$\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 = -270° = 90°$$

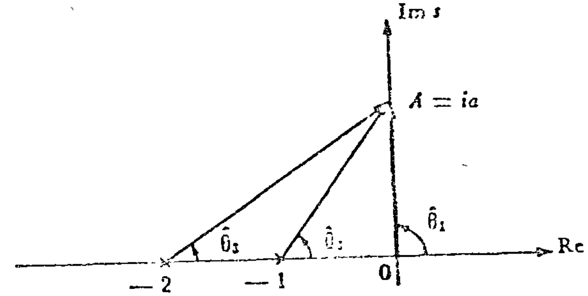


Fig. 11.5.8 Localización de los puntos de cruce del lugar geométrico de las raíces con el eje de las ordenadas.

de donde

$$\hat{\theta}_3 = 90° - \hat{\theta}_2 \tag{11.5.17}$$

Sustituyendo este ángulo en la relación (11.5.16) se tiene:

$$\tan\hat{\theta}_2 = 2\tan(90° - \hat{\theta}_2)$$
$$= 2\cot\hat{\theta}_2$$
$$= 2\frac{1}{\tan\hat{\theta}_2}$$

por lo que

$$\tan^2\hat{\theta}_2 = 2$$
$$\tan\hat{\theta}_2 = \sqrt{2}$$

De esta relación se tiene que

$$\theta_2 = 54°\,44'$$

y además sustituyendo en (11.5.14)

$$a = \sqrt{2}$$

Sustituyendo el valor de θ_2 obtenido en la ecuación (11.5.17) se tiene

$$\theta_3 = 35°\,16'$$

Como $a = \sqrt{2}$, por razones de simetría (regla 4) el lugar geométrico de las raíces cruza al eje imaginario en los puntos D y F de ordenadas $\sqrt{2}j$ y $-\sqrt{2}j$, como muestra la figura 11.5.9.

Calculemos ahora el valor de la ganancia K correspondiente a los puntos D y F. De la figura 11.5.9 se ve que

$$l_1 = \sqrt{2}$$
$$l_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$
$$l_3 = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

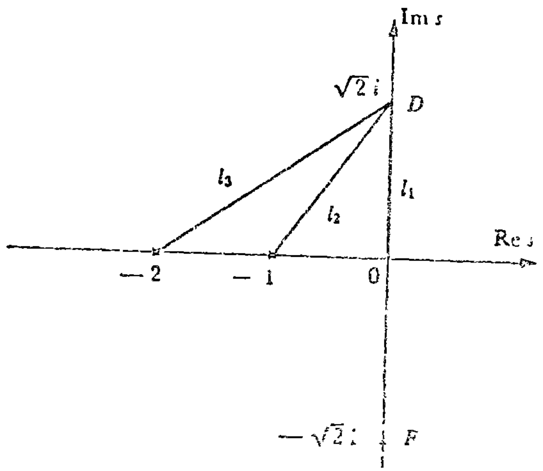


Fig. 11.5.9 Cálculo de la ganancia K

y sustituyendo la ecuación (11.5.7) se obtiene.

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}}$$

donde dimos el valor 1 al numerador para este caso en que el cero se encuentra en $s = \infty$. De la ecuación anterior el valor de K es

$$K = 6$$

por lo que el sistema retroalimentado es estable entre $K = 0$ y $K = 6$.

Calculemos a continuación el valor de la tercera raíz cuando $K = 6$. Tenemos de (11.5.1) y (11.5.8) que

$$W(s) = \frac{\dfrac{K}{(s+1)(s+2)}}{1 + \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{Ks}{s(s+1)(s+2)+K}$$

Para $K = 6$, el denominador de la función de transferencia $W(s)$ vale

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$$

Sabemos que para $K = 6$ dos de las raíces de este polinomio son los puntos D y F de la figura 11.5.9, o sea $s_1 = \sqrt{2}j$ y $s_2 = -\sqrt{2}j$. Como $(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 2$, dividiendo la relación anterior entre este producto encontramos que

$$s - s_3 = s + 3$$

por lo que la tercera raíz es $s_3 = -3$, como muestra la figura 11.5.10.

El lector puede calcular fácilmente (ver Problema 5) que, para $K = 1.83$, los polos de $W(s)$ son $s_1 = -0.25 + j0.71$, $s_2 = -0.25 - j0.71$ y $s_3 = -2.5$.

Es posible dar reglas adicionales, por ejemplo para calcular el punto en que el lugar geométrico de los puntos deja el eje real, pero como nuestro análisis es de carácter introductorio, referimos al lector a un libro más especializado.*

En la figura 11.5.10 aparece el lugar geométrico de las raíces de $1 + KG(s)H(s) = 0$, o sea el lugar geométrico de los polos de la función de transferencia $W(s)$, para diversos valores de la ganancia K. Vemos que al variar la ganancia K de 0 a 6, un polo de $W(s)$ se mueve de A a lo largo de la curva $A\,B\,C\,D$, otro a lo largo $O\,B\,E\,F$, y el tercero a lo largo de $G\,H\,I$. Únicamente en estos segmentos del lugar geométrico de las raíces, es estable el sistema retroalimentado de la figura 11.5.3.

* Ver A. W. Langill Jr. *Automatic Control Systems Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1965, Vol. I, capítulo 10

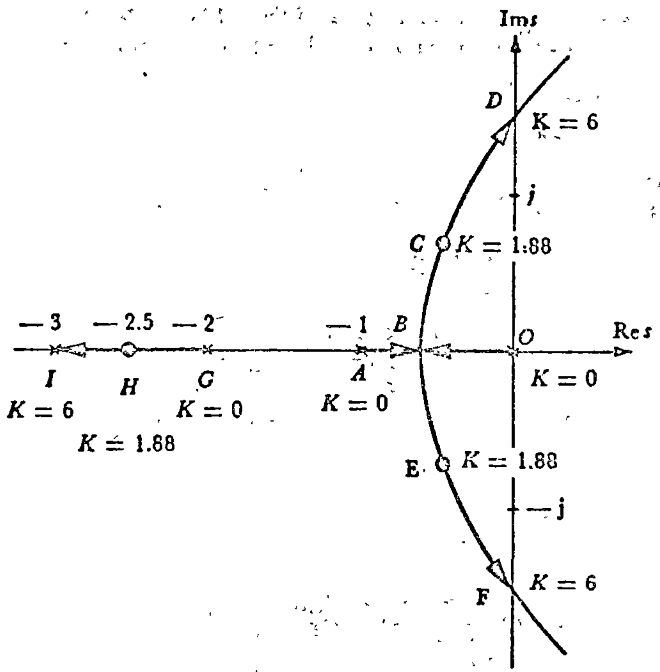


Fig. 11.5.10 Lugar geométrico de las raíces y diversos valores de K.

Mientras la ganancia K es tal que todos los polos de $W(s)$ son reales, la respuesta es exponcial decreciente (ver ecuación (11.5.12)). Cuando dos de los polos se vuelven complejos conjugados, la respuesta es una constante más una oscilatoria decreciente, y su frecuencia va aumentando al alejarse los polos del eje real (ecuación 11.5.13)). Cuando la ganancia K es mayor que 6, la respuesta se vuelve oscilatoria creciente, por lo que el sistema es inestable.

Los ejemplos 11.5.2 y 11.5.3 han ilustrado mediante el método del lugar geométrico de las raíces, el cálculo de los límites de la ganancia K entre los cuales el sistema retroalimentado es estable. Asimismo, han mostrado claramente la visualización geométrica que este método permite, con respecto a la variación de la localización de los polos y por lo tanto de la forma de la respuesta, al variar K. A continuación se incluye un ejemplo adicional.

Ejemplo 11.5.4

Encuentre el lugar geométrico de las raíces del sistema retroalimentado de la figura 11.5.11.

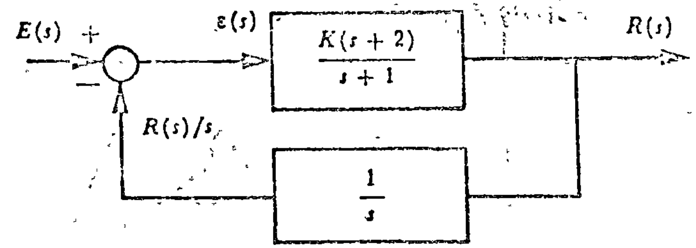


Fig. 11.5.11 Sistema retroalimentado.

Solución:

En este ejemplo $H(s) = 1/s$, y $G(s) = (s + 2)/(s + 1)$, por lo que

$$G(s)\,H(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)}$$

Los polos de esta función son 0 y -1, y su cero vale -2. De acuerdo con la primera regla, son parte del lugar geométrico de las raíces los segmentos de $-\infty$ a -2 y de -1 a 0, como muestra la figura 11.5.12a. Por la segunda regla, el centroide está en

$$\frac{(0 - 1) - (-2)}{2 - 1} = 1$$

y la asíntota forma el ángulo π con el eje real positivo. Esta asíntota coincide con la porción del lugar geométrico de las raíces que está situado sobre el eje negativo y va hacia $-\infty$.

De acuerdo con la tercera regla, $K = 0$ en 0 y -1, y $K = \infty$ en -2, con las flechas como muestra la figura 11.5.12a.

Observemos lo siguiente de la figura. Cuando $K = \infty$, la función

$$1 + KG(s)\,H(s) = 1 + \frac{K(s + 2)}{s(s + 1)}$$

no vale cero en ningún punto del intervalo de -1 a 0; es decir, el lugar geométrico que empieza con $K = 0$ en 0 y en -1 no tiene aparentemente fin en un punto con $K = \infty$. Por otra parte, en el segmento de -2 a $-\infty$ no hay lugar donde $K = 0$, o sea donde empiece el lugar geométrico que termina en $-\infty$ o en -2. De acuerdo con la cuarta regla, el lugar geométrico debe ser continuo.

Para que se cumpla dicha regla, el lugar geométrico va a tener que pasar por ciertos valores complejos conjugados, simétricos alrededor del origen, como muestra la figura 11 5 12b.

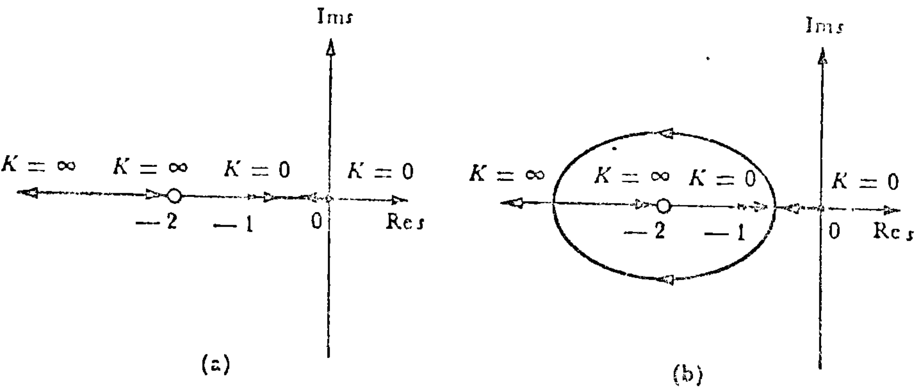


Fig 11.5.12 Dos etapas en la construcción del lugar geométrico de las raíces

Desde $K = 0$ hasta el valor en que los dos polos se desprenden del eje real, la respuesta es exponencial decreciente—ecuación (11.5 12). Cuando los polos se vuelven complejos conjugados, la respuesta es oscilatoria decreciente —empezando la frecuencia en cero, subiendo hasta cierta frecuencia máxima, y volviendo a bajar a cero— como se ve de la ecuación (11 5 13). Cuando K aumenta aún más, la respuesta se vuelve nuevamente oscilatoria decreciente. El sistema es estable para todo valor de la ganancia K. ∎

A continuación demostraremos las reglas de construcción del lugar geométrico de las raíces de $1 + KG(s)\,H(s) = 0$.

Regla 1

Un grupo de polos y ceros de la función $G(s)\ H(s)$ se muestran en la figura 11.5.13 De la figura observamos que, como los polos y ceros complejos aparecen en parejas complejas conjugadas, el ángulo con el que contribuyen a la ecuación (11.5 6) es de 2π —ver P_2 y P_3, y Z_2 y Z_3 de la figura Como 2π es un múltiplo par de π, de la relación (11 5 4) vemos que los polos y ceros complejos conjugados no modifican los cálculos para encontrar el lugar geométrico de las raíces sobre el eje real Por otra parte, cada polo o cero real negativo a la derecha de A contribuye con π a la relación (11.5.6) Para que esta ecuación satisfaga (11 5.4), el lugar geométrico de las raíces debe estar a la izquierda de un número impar de polos o ceros reales de $G(s)\ H(s)$, con lo que queda demostrada la primera regla.

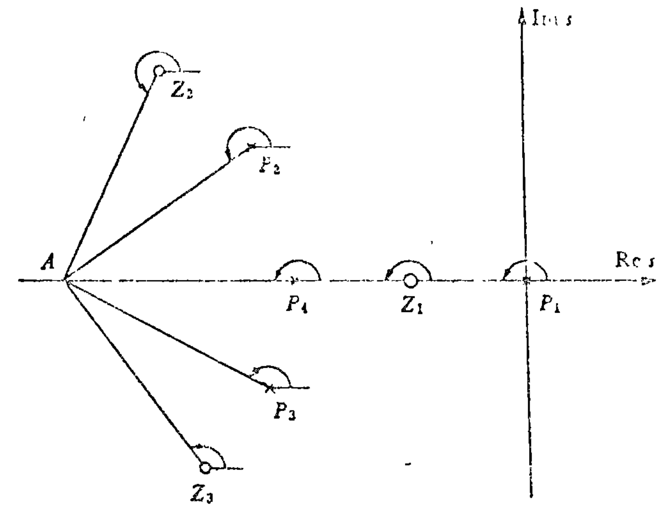


Fig 11 5 13 Polos y ceros de $G(s)\ H(s)$.

Regla 2

Realizando los productos señalados en la ecuación (11.5.5) tenemos:

$$G(s)\,H(s) = \frac{s^Z - (s_1 + s_2 + \dots + s_Z)\,s^{Z-1} + \dots}{s^P - (\hat{s}_1 + \hat{s}_2 + \dots + \hat{s}_P)\,s^{P-1} + \dots} \qquad (11\ 5\ 18)$$

donde Z es el orden del polinomio en s del numerador —o sea Z es el número de ceros finitos de $G(s)\ H(s)$— y P es el orden del polinomio del denominador —o sea el número de polos finitos de $G(s)\ H(s)$. Dividiendo el numerador de (11 5 18) entre el denominador se tiene:

$$G(s)\,H(s) = s^{Z-P} + \{(\hat{s}_1 + \dots + \hat{s}_P) - (s_1 + \dots + s_Z)\}\,s^{Z-P-1} + \dots \qquad (11.5.19)$$

Podemos designar a la suma de polos y ceros con

$$s_1 + s_2 + \dots + s_Z = Z_r$$
$$\hat{s}_1 + \hat{s}_2 + \dots + \hat{s}_P = P_r \qquad (11\ 5\ 20)$$

Como tantos polos como ceros aparecen en parejas complejas conjugadas, éstas sumas son iguales a las partes reales de los ceros y de los polos respectivamente

Sustituyendo las definiciones (11.5.20) en (11.5.19) obtenemos:

$$G(s)\,H(s) = s^{Z-P} + (P_r - Z_r)\, s^{Z-P-1} + \ldots$$

Lejos del origen, donde s es grande, podemos aproximar $G(s)\ H(s)$ por sus dos primeros términos:

$$G(s)\,H(s) \simeq s^{P-Z} + (P_r - Z_r)\, s^{P-Z-1}$$

Por otra parte, como de la relación (11.5 2)

$$G(s)\,H(s) = -\frac{1}{K}$$

podemos escribir

$$s^{Z-P}\left(1 - \frac{P_r - Z_r}{s}\right) \simeq -\frac{1}{K}$$

Si elevamos ambos miembros a la potencia $1/(Z-P)$ obtenemos:

$$s\left(1 + \frac{P_r - Z_r}{s}\right)^{\frac{1}{Z-P}} \simeq \left(-\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{Z-P}} \qquad (11.5.21)$$

Recordemos la expansión en serie

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + n\left(\frac{n-1}{2!}\right)x^{n-2}y^2 + \ldots$$

Si y es pequeña, esta serie se puede aproximar por

$$(x+y)^n \simeq x^n + nx^{n-1}y \qquad (11.5.22)$$

Como hemos considerado que s es grande, $(P_r - Z_r)/s$ es pequeño, y podemos emplear la aproximación (11.5.22) en (11.5.21):

$$s\left(1 + \frac{P_r - Z_r}{(Z-P)\,s}\right) \simeq \left(-\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{Z-P}}$$

Realizando el producto por s y despejando a s obtenemos:

$$s \simeq \left(-\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{Z-P}} + \frac{P_r - Z_r}{P-Z}$$

Si representamos -1 por $\exp(-jn\pi)$, n impar, esta relación queda como:

$$s \simeq \frac{P_r - Z_r}{P-Z} + \left(K^{\frac{1}{P-Z}}\right)\exp\left(\frac{jn\pi}{P-Z}\right) \qquad n \text{ impar} \qquad (11.5.23)$$

El número complejo s dado por (11.5.23) es la suma de los dos vectores mostrados en la figura 11 5.14. Para grandes valores de s, el lugar geométrico de las raíces está dado por la ecuación (11.5.23), o sea por la recta que forma el ángulo $n\pi/(P-Z)$ con el eje real, y la cual corta al eje real en el punto $(P_r - Z_r)/(P-Z)$. Este es precisamente el enunciado de la segunda regla, por lo que ha quedado demostrada.

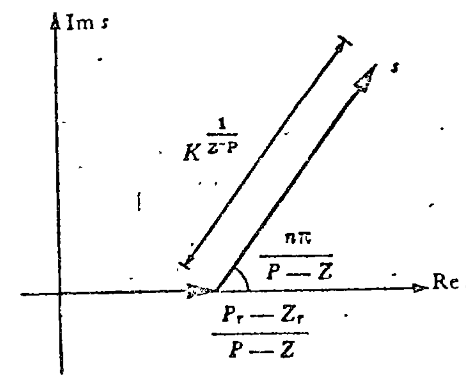


Fig. 11.5 14 Lugar geométrico de las raíces para s grande.

Regla 3

De la relación (11.5.7) sabemos que:

$$|G(s)\,H(s)| = \frac{1}{K}$$

Cuando $K \to 0$, $|G(s)\ H(s)| \to \infty$, o sea $G(s)\ H(s)$ tiene un polo.

Cuando $K \to \infty$, $|G(s)\ H(s)| \to 0$, lo cual sucede en los ceros de $G(s)\ H(s)$. Por lo tanto, el lugar geométrico de las raíces principia ($K = 0$) en los polos de $G(s) \cdot H(s)$, y termina ($K = \infty$) en los ceros de $(G(s)\ H(s)$, con lo que queda demostrada la tercera regla.

Regla 4

La ganancia K puede expresarse, empleando la fórmula (11.5.7), como

$$K = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2 \ldots \hat{l}_p}{l_1 l_2 \ldots l_z} \tag{11.5.24}$$

donde $\hat{l}_i$ es la distancia desde un punto A sobre el lugar geométrico de las raíces al polo P_i, l_i es la distancia de A al cero Z_i. Cuando K varía en forma continua de 0 a ∞, la relación (11.5.24) muestra que un cambio pequeño en K corresponde a cambios pequeños en las distancias l_i y l_j $\forall i, \forall j$, que son las distancias al lugar geométrico de las raíces, por lo que dicho lugar geométrico es continuo.

Por otra parte, el lugar geométrico representa los posibles polos del sistema retroalimentado. Como la función del sistema $W(s)$ es un cociente de polinomios en s con coeficientes reales, los polos se presentan en parejas de complejos conjugados. Como los conjugados tienen simetría respecto al eje real, el lugar geométrico debe tener la misma simetría, con lo que queda demostrada la cuarta regla. □

Existen reglas adicionales para refinar el trazo del lugar geométrico de las raíces; sin embargo las anteriores son las más importantes. En la sección de problemas el lector puede encontrar problemas que le facilitarán familiarizarse con este método (Problemas 6 a 10).

En la siguiente sección estudiaremos el criterio de estabilidad de Nyquist para sistemas de entrada y salida escalar.

11.6 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

Para determinar si un sistema retroalimentado es estable, es necesario localizar las raíces de la ecuación $1 + K\,G(s)\,H(s) = 0$, donde $G(s)\,H(s)$ es el producto de las funciones de transferencia de la malla de retroalimentación. El criterio de Nyquist permite determinar el número de polos de $W(s)$ con parte real positiva, conociendo la localización de los polos y ceros de $G(s)\,H(s)$. Este criterio se basa en el *principio de representación conforme* de funciones de variable compleja, que esbozaremos a continuación.

En el estudio de funciones reales de variable real del tipo $y = f(x)$, con x y y reales, basta un plano para representar gráficamente la relación de la variable independiente x y la variable dependiente y, como ilustra la figura 11.6.1.

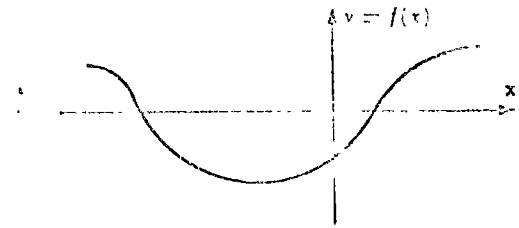
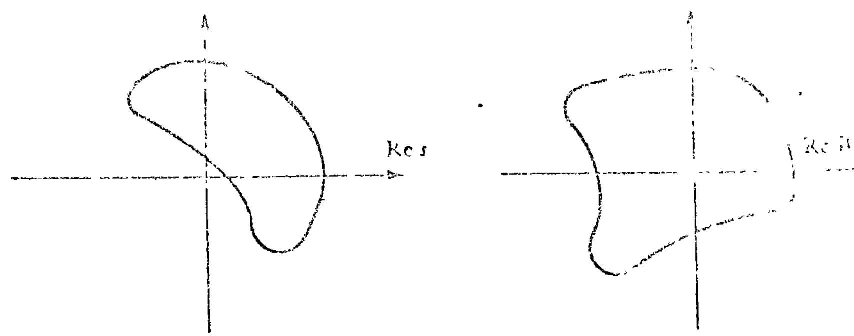


Fig. 11.6.1 Gráfica de una función real de variable real.

Por otra parte, consideremos a la función compleja $W(s)$ de la variable compleja s. Para representar gráficamente a la variable independiente $s = \sigma + j\omega$, (σ y ω reales), se necesitan los dos ejes de un plano complejo. Asimismo, la variable dependiente $W(s) = u + jv$, (u y v reales) se ha de representar en otro plano complejo. Por lo tanto, para representar gráficamente la variación de $W(s)$ al cambiar s, se necesitan dos planos complejos. Como no es posible mostrar gráficamente el valor de la variable dependiente $W(s)$ para cada valor de la variable independiente s, se suelen mostrar curvas en el plano complejo $W(s)$ correspondientes a curvas en el plano complejo s. La operación de encontrar la curva recorrida por la variable dependiente $W(s)$, conocida la curva que recorre la variable independiente s, se conoce con el nombre de *mapeo* (ver figura 11.6.2). Cuando el ángulo entre dos curvas en el plano s se conserva en un mapeo, tanto en magnitud como en sentido, se dice que el mapeo es conforme. Uno de los aspectos que trata la *representación conforme*, es graficar funciones complejas de variable compleja.



(a) Plano s (b) Plano $W(s)$

Fig. 11.6.2 Mapeo de una función compleja de variable compleja.

A continuación, un ejemplo nos servirá para ilustrar la idea de la representación gráfica de una función compleja de variable compleja.

Ejemplo 11.6.1

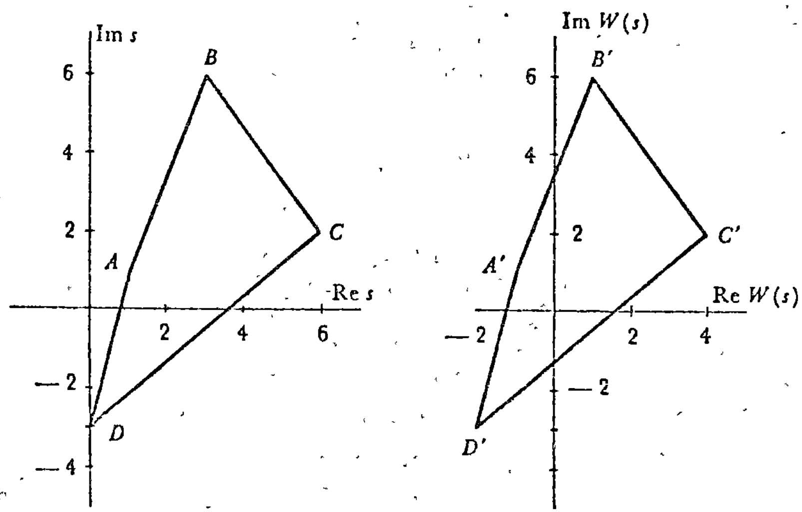
Represente gráficamente la función $W(s) = s - 2$ para los valores de s que quedan sobre las rectas que conectan a los puntos $A = 1 + j$, $B = 3 + 6j$, $C = 6 + 2j$ y $D = -3j$.

Solución:

Los valores de la función compleja $W(s) = s - 2$ para los valores A, B, C y D (mostrados en la figura 11.6.3a) de la variable compleja s son:

s	$W(s)$
$A = 1 + j$	$A' = -1 + j$
$B = 3 + 6j$	$B' = 1 + 6j$
$C = 6 + 2j$	$C' = 4 + 2j$
$D = -3j$	$D' = -2 - 3j$

Estos valores de $W(s)$ y las líneas que los conectan aparecen graficados en la figura 11.6.3b. ◻



(*a*) Plano s (*b*) Plano $W(s)$

Fig 11.6.3 Representación de la función $W(s) = s - 2$.

Observemos que en el ejemplo anterior la función $W(s) = s - 2$ tiene un cero en $s = 2$, y que este cero está encerrado dentro de la trayectoria cerrada $ABCD$ de la variable independiente s. Por otra parte, la trayectoria $A'\ B'\ C'\ D'$ de la variable dependiente $W(s)$ encierra al origen. Esta propiedad es un caso especial del siguiente teorema:

Teorema 11.6.1

El número de vueltas alrededor del origen que da una trayectoria de $W(s)$, es igual a la diferencia entre el número de ceros y de polos de $W(s)$ que encierra la trayectoria correspondiente de s. Si esta diferencia es negativa, $W(s)$ dará vuelta al origen en sentido contrario al recorrido de la trayectoria de s.

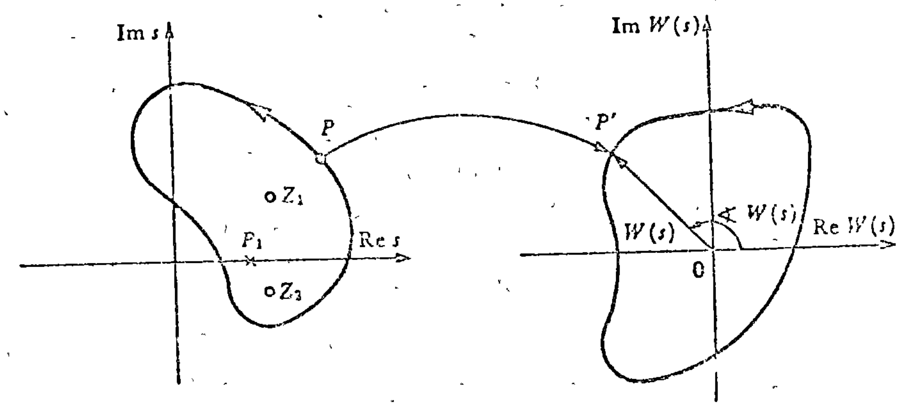
Demostración:

Si $W(s)$ tiene un número finito de polos y ceros, puede descomponerse en un cociente de polinomios de la forma

$$W(s) = K\,\frac{(s - Z_{w_1})\,(s - Z_{w_2})\,\ldots\,(s - Z_{w_n})}{(s - P_{w_1})\,(s - P_{w_2})\,\ldots\,(s - P_{w_m})}$$

donde Z_{w_i} son los ceros de la función $W(s)$ y P_{w_i} los polos

Consideremos una trayectoria cerrada en el plano complejo s recorrida en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj, tal como la mostrada en la figura 11.6.4a. Si dicha trayectoria cerrada encierra un cero Z_{w_i}, al recorrerla el argumento de $(s - Z_{w_i})$, y por lo tanto también el de $W(s)$, aumenta en 2π; si Z_{w_i} está fuera de la trayectoria, el argumento de $(s - Z_{w_i})$ no cambia. Por otra parte, si el polo P_{w_i} está dentro de la trayectoria cerrada, al recorrerla el argumento de $(s - P_{w_i})$ aumenta en 2π y el de $W(s)$ disminuye en 2π; si P_{w_i} está fuera de la trayectoria, el argumento de



(*a*) Plano s (*b*) Plano $W(s)$

Fig 11.6.4 Trayectorias cerradas en los planos s y $W(s)$.

$W(s)$ correspondiente no cambia Puede afirmase, por lo tanto, que el aumento total del argumento de $W(s)$ es de 2π $(M - N)$, donde M es el número de ceros de $W(s)$ dentro de la trayectoria cerrada en el plano s, y N es el número de polos de $W(s)$ dentro de dicha trayectoria cerrada.

Este aumento en el argumento de $W(s)$ determina el número de vueltas alrededor del origen que da la trayectoria cerrada en el plano $W(s)$. Por ejemplo, si P' de la figura 11 6.4b es la imagen de P de la figura 11.6.4a, el número de vueltas alrededor del origen que da P', es igual al número de ceros menos el número de polos cerrados en la trayectoria que recorre P en el plano s Con ésto queda demostrado el teorema. ◻

El *criterio de Nyquist*, que expondremos a continuación, se basa en el teorema anterior

Para determinar si un sistema retroalimentado es inestable, es decir si la función de transferencia $W(s)$ tiene polos de parte real positiva, se empieza construyendo una trayectoria "C" que abarque todo el semiplano derecho del plano complejo, para cuyos puntos $Re\, s > 0$ Después se encuentra la trayectoria "D" que sigue la función $1 + K\, G(s)\, H(s)$ en el plano complejo correspondiente, al variar s a lo largo de la trayectoria "C". Encontrada la trayectoria "D", se cuenta el número de vueltas N que da al origen Por el teorema 11.6.1, este número es igual a la diferencia del número de polos y de ceros de $1 + K\, G(s)\, H(s)$ encerrados en la trayectoria "C":

$$N = Z - P \tag{11.6.1}$$

donde

$N =$ número de vueltas de D al origen, positivas si son en igual sentido que el de recorrido de la curva C, negativas si son en sentido contrario.

$Z =$ número de ceros de $1 + KG(s)\, H(s)$ encerrados en la trayectoria C
$=$ número de ceros de $1 + KG(s)\, H(s)$ de parte real positiva

$P =$ número de polos $1 + KG(s)\, H(s)$ encerrados en la trayectoria C.
$=$ número de polos de $1 + KG(s)\, H(s)$ de parte real positiva

En la práctica, en lugar de mapear la función $1 + KG(s)\, H(s)$, se mapea simplemente la función $G(s)\, H(s)$, por lo que en lugar de contar el número de vueltas N que da la curva $1 + KG(s)\, H(s)$ al origen, se determina el número de vueltas N que da $G(s)\, H(s)$ al punto $-1/K$. Esto equivale a trasladar $-1/K$ hacia la izquierda el eje de las ordenadas

Por otra parte, como los polos de $1 + KG(s)\, H(s)$ y de $G(s)\, H(s)$ son los mismos, P es también el número de polos que encierra la trayectoria C en el plano complejo de la variable independiente.

Resumiendo, el criterio de Nyquist se puede expresar como sigue. El número de raíces

$$Z = N + P \tag{11.6.2}$$

de $1 + KG(s)\, H(s)$ se obtiene sumando el número de vueltas N que da $G(s)\, H(s)$ al punto $-1/K$, y el número de polos P de $G(s)\, H(s)$ encerrados en la trayectoria de s Para que el sistema retroalimentado sea estable, el número de raíces Z debe ser nulo, ya que dichas raíces, de parte real positiva. son los polos de la función de transferencia $W(s)$.

Hemos señalado que la trayectoria de la variable independiente s debe abarcar toda la parte derecha del plano complejo Como la trayectoria debe abarcar todo el eje imaginario, podemos distinguir: 1) que $G(s)\, H(s)$ no tenga polos sobre el eje imaginario, y 2) que sí los tenga Trataremos ambos casos separadamente, dando ejemplos ilustrativos.

Primer caso. $G(s)\, H(s)$ *no tiene ningún polo sobre el eje imaginario*

En este caso, la trayectoria cerrada C va de $-j\infty$ a $+j\infty$ y se cierra mediante un semicírculo de radio infinito, como muestra la figura 11 6 5

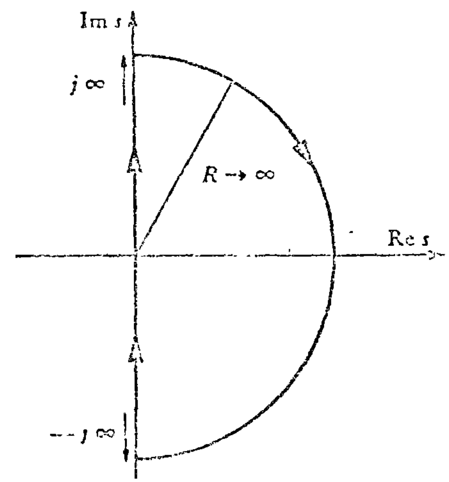


Fig 11 6 5 Trayectoria de la variable s cuando $KG(s)\, H(s)$ no tiene polos sobre el eje imaginario

Ejemplo 11.6.2

Determine, empleando el criterio de Nyquist, si el sistema de la figura 11.6 5 es estable

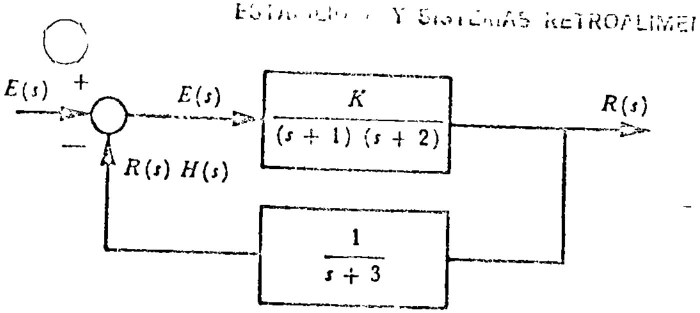


Fig 11.6.6 Sistema retroalimentado del ejemplo 11.6.2.

Solución:

Empleando el cirterio de Nyquist, analizaremos las raíces de $1 + KG(s) H(s)$, o sea los polos de la función de transferencia

$$W(s) = \frac{\dfrac{K}{(s+1)(s+2)}}{1 + \dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

para determinar si el sistema retroalimentado es estable.

Los polos de $1 + KG(s) H(s)$, que son los polos de

$$G(s) H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

son en este caso -1, -2, y -3. Como ninguno de estos polos es imaginario puro, trazemos en el plano s la trayectoria C que muestra la figura 11.6.7a, para la cual $\operatorname{Re} s \geq 0$. Como ninguno de los tres polos está dentro de la trayectoria C, en este caso

$$P = 0 \tag{11.6.3}$$

A continuación, analicemos por tramos la trayectoria que recorre $G(s)\ H(s)$, cuando la variable independiente s recorre la trayectoria $A\ B\ C\ D\ A$ de la figura 11.6.7a.

En el tramo AB, la variable independiente s varía desde $s = 0$ hasta $s = +j\infty$, como ilustra la figura 11.6.7b. A lo largo de dicho tramo AB, s es igual a $j\omega$, por lo que la variable dependiente $G(s)\ H(s)$ vale $G(j\omega)\ H(j\omega)$. La trayectoria correspondiente de $G(s)\ H(s)$, no será más

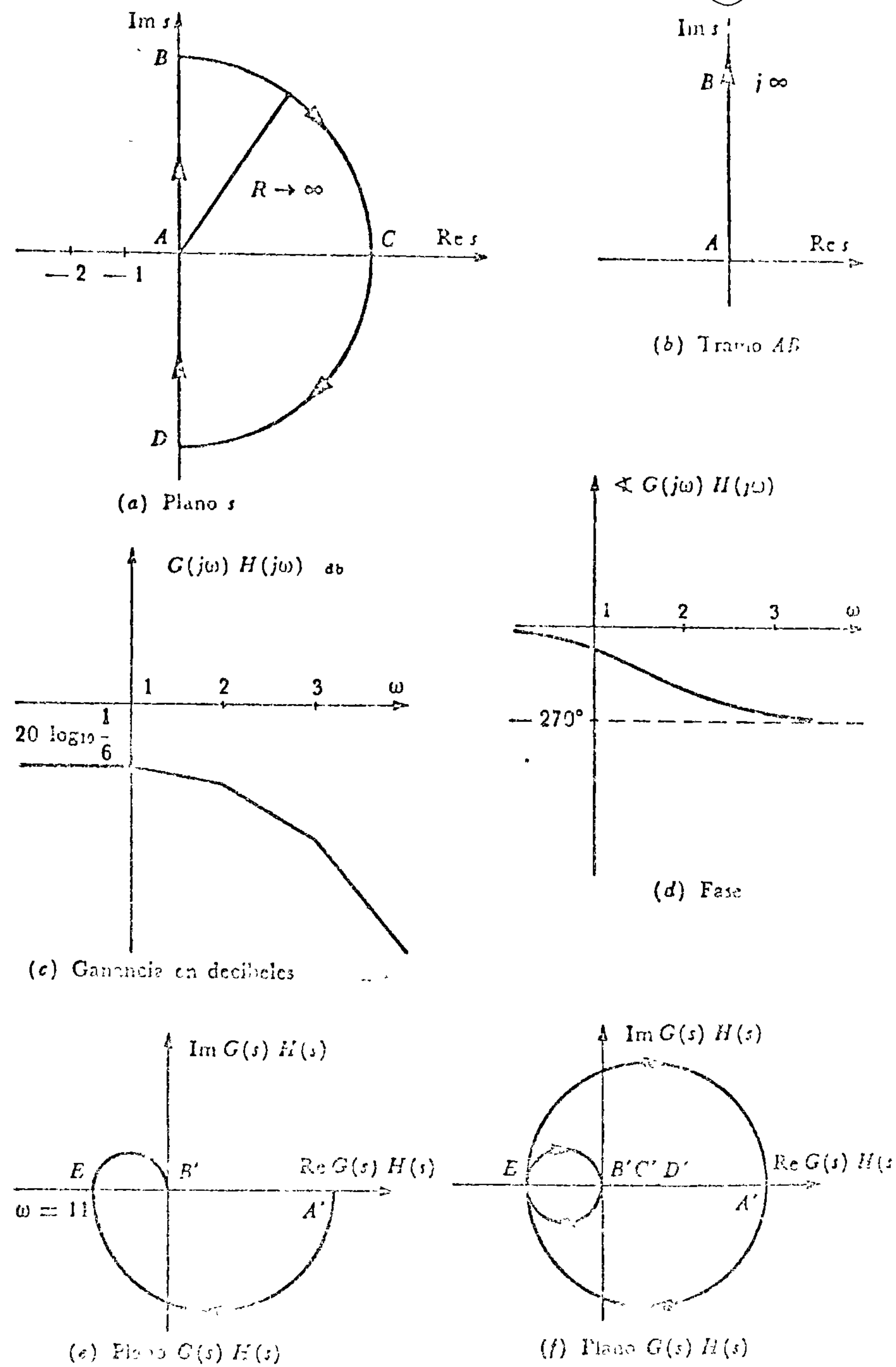


Fig 11.6.7 Determinación de la trayectoria de $G(s)\ H(s)$ correspondiente a la trayectoria C en el plano s

que el diagrama polar de la respuesta armónica de la función, el cual puede determinarse de los diagramas de amplitud y fase, como se vió en el capítulo 7. Tracemos pues los diagramas de respuesta armónica de

$$G(j\omega)\,H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)\,(j\omega+2)\,(j\omega+3)}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{(j\omega+1)\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)}$$

Empleando la metodología estudiada en el capítulo 7, los diagramas de Bode de la función $G(j\omega)\,H(j\omega)$ son los que aparecen en las figuras 11.6.7c y d. Estos diagramas muestran que, para $s = 0$ (o sea $\omega = 0$) la ganancia es de $1/6$, y el ángulo de fase es nulo — punto A' de la figura 11.6.7c.

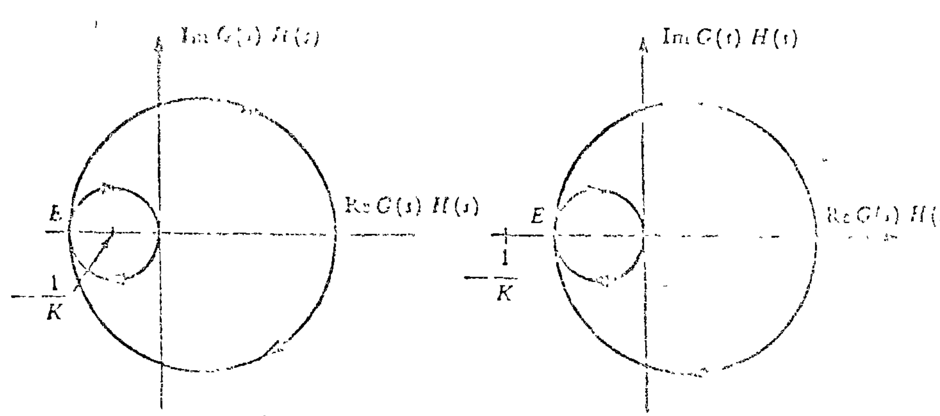
Al ir aumentando ω, la magnitud de $G(j\omega)\,H(j\omega)$ decrece (Fig. 11.6.7c) y su ángulo de fase pasa por $-90°$ y $-180°$ hasta tender a $-270°$ cuando $\omega \to \infty$ (Fig. 11.6.7d). Cuando $\omega \to \infty$, la magnitud de $G(j\omega)\,H(j\omega)$ tiende a cero (punto B' en la figura 11.6.7c). Toda esta información sobre la variación de $G(s)\,H(s)$ al valor s desde el punto A al B en la figura 11.6.7a, aparece en el diagrama polar de la figura 11.6.7e.

En el tramo DA de la figura 11.6.7a, $s = -j\omega$, por lo que la trayectoria de $G(s)\,H(s)$ será simétrica a la trayectoria AB, como muestra la figura 11.6.7f.

Por último, para el tramo BCD, $s \to \infty$, y como el orden del denominador de $G(s)\,H(s)$ es mayor que el del numerador, $G(s)\,H(s) \to 0$. Por lo tanto el mapeo de la trayectoria semicircular BCD en el plano s, es el origen del plano de la variable dependiente $G(s)\,H(s)$. Es decir, los puntos B', C' y D' coinciden en el origen como muestra la figura 11.6.7f.

El mapeo completo de $G(s)\,H(s)$ cuando la variable dependiente s recorre la trayectoria $A\,B\,C\,D\,A$, aparece en la figura 11.6.7.

Deseamos determinar el número de raíces de $1 + KG(s)\,H(s)$ localizadas en el semiplano con $\mathrm{Re}\,s \geq 0$, o sea en la región encerrada por la trayectoria $A\,B\,C\,D\,A$. Para ello, es necesario determinar el número de vueltas N que da $1 + KG(s)\,H(s)$ al origen, o equivalentemente el número de vueltas que da $G(s)\,H(s)$ al punto $(-\frac{1}{K}, 0)$. En el presente ejemplo se pueden presentar los dos casos ilustrados en la figura 11.6.8, dependiendo del valor de K.



(a) Dos vueltas a $-\frac{1}{K}$ (b) Cero vueltas a $-\frac{1}{K}$

Fig. 11.6.8 Posibles diagramas de Nyquist del ejemplo 11.6.2

Para la figura 11.6.8a, la trayectoria en el plano $G(s)\,H(s)$ da dos vueltas al punto $-1/K$, por lo que $N = 2$. Como de (11.6.3) $P = 0$ en este ejemplo, de la ecuación (11.6.2) se tiene que

$$Z = 2$$

Esta relación indica que en este caso hay dos raíces de $1 + KG(s)\,H(s)$ —y por lo tanto dos ceros de la función de transferencia $W(s)$— con parte real positiva $\mathrm{Re}\,s > 0$ (o sea encerrados en la trayectoria $A\,B\,C\,D\,A$ de la figura (11.6.7a) por lo que el sistema es inestable.

Para el caso ilustrado en la figura 11.6.8b, la trayectoria de $G(s)\,H(s)$ no da ninguna vuelta al punto $-1/K$, o sea que $N = 0$, y de las relaciones (11.6.3) y (11.6.2)

$$Z = 0$$

Es decir, en este caso el sistema es estable.

Este ejemplo ilustra la importancia del punto de cruce E de las figuras 11.6.8a y b, para la determinación de la estabilidad del sistema. Si E está a la izquierda del punto $-1/K$ (figura 11.6.8a), el sistema es inestable, mientras que si se encuentra a la derecha de $-1/K$ (figura 11.6.8b) el sistema es estable.

Para el punto E, el ángulo de fase es de $-180°$. Como este ángulo corresponde al punto donde la trayectoria cruza el eje real, ... de importancia para la determinación de la estabilidad de un sistema retroalimentado, la posición del punto donde el ángulo de fase de $G(j\omega)\,H(j\omega)$ es de $180°$, respecto al punto $(-1/K, 0)$.

A continuación, determinemos los valores de K para los cuales el sistema retroalimentado es estable. Para ello, empecemos calculando la frecuencia ω a la cual el ángulo de fase de $G(j\omega)\ H(j\omega)$ es de $-180°$. Se tiene que

$$G(s)\ H(s) = \frac{1}{(s+1)\ (s+2)\ (s+3)}$$
$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

por lo que sustituyendo $s = j\omega$ se obtiene:

$$G(j\omega)\ H(j\omega) = \frac{1}{6 - 6\omega^2 + j\,(-\omega^3 + 11\ \ )}$$

Para que esta función sea real, o sea de argumento 0° ó 180°, es necesario que

$$\mathrm{Im}\ [G(j\omega)\ H(j\omega)] = 0$$

es decir

$$-\omega^3 + 11\omega = 0$$

cuyas raíces son $\omega = 0$ y $\omega = \pm\ \sqrt{11}$. La raíz $\omega = 0$ corresponde al punto A sobre el eje imaginario $s = j\omega$ de la figura 11.6.7a. Este punto se mapea en el punto A' de la figura 11.6.7f, cuyo argumento es nulo. Las raíces $\omega = \pm\ \sqrt{11}$ son las que corresponden al punto de interés E, para el cual

$$G(j\omega)\ H(j\omega) = -\frac{1}{60}$$

El punto E es fijo, y tiene por coordenadas $(-\ 1/60,\ 0)$. Por otra parte, el punto $-1/K$ es variable, y depende de la ganancia K. Como vimos, el sistema es estable cuando $-1/K$ está a la izquierda de E, o sea cuando $K < 60$. El sistema es inestable para $K > 60$. ◻

Como ejercicio para el lector, recomendamos que determine, empleando el criterio del lugar geométrico de las raíces, los valores de K para los cuales es estable el sistema retroalimentado del ejemplo anterior (ver Problema 10).

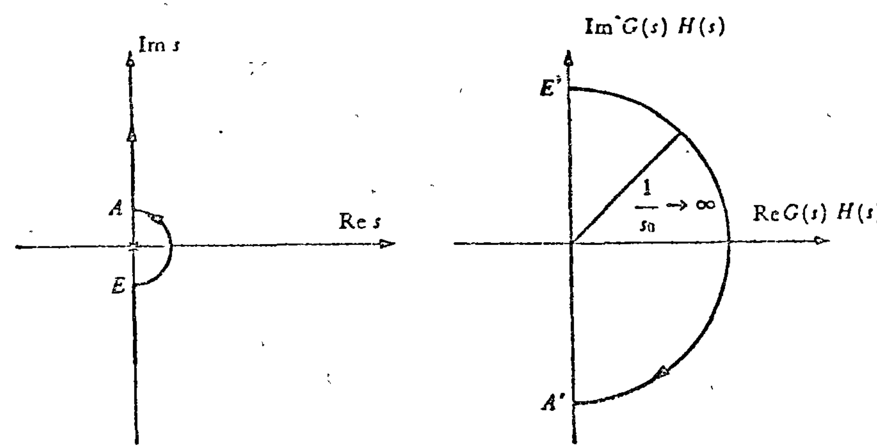
El ejemplo 11.6.2 ha ilustrado la aplicación del método de Nyquist a

sistemas cuya función de transferencia de circuito abierto $G(s)\ H(s)$ no tiene polos sobre el eje imaginario, incluyendo el origen. Investiguemos a continuación el segundo caso:

Segundo caso. $G(s)\ H(s)$ tiene pólos sobre el eje imaginario.

Consideremos un sistema para el cual $G(s)\ H(s)$ tiene un polo sobre el eje imaginario, por ejemplo en el origen. En este caso la trayectoria de s no puede pasar por el origen, pues para $s = 0$ la función $G(s)\ H(s)$ está indefinida (tiende a infinito). Para evitar este problema construyamos, para la trayectoria de la variable independiente s, una desviación semicircular alrededor del origen cuyo radio tiende a cero, como muestra la figura 11.6.9a.

Analicemos la trayectoria que recorre $G(s)\ H(s)$ mientras s recorre esta "desviación".



(a) Plano s (b) Plano $G(s)\ H(s)$

Fig. 11.6.9 Desviación de la trayectoria de s alrededor de un polo de $G(s)\ H(s)$ sobre el eje imaginario, en el origen.

Empecemos estudiando el comportamiento de $G(s)\ H(s)$ para un valor $s = s_0$, donde s_0 es un punto, sobre la desviación, cercano al origen. Para este punto se tiene que:

$$G(s_0)\ H(s_0) = \frac{(s_0 - s_1)\ (s_0 - s_2)\ \ldots}{s_0\ (s_0 - \hat{s}_2)\ (s_0 - \hat{s}_3)\ \ldots}$$

donde s_i son los ceros de $G(s)\ H(s)$ y $\hat{s}_i$ los polos. Como s_0 es muy pequeño,

$$s_0 \ll s_0 - s_i$$

y el término más pequeño del denominador, s_0, será el dominante en la expresión $G(s_0)\,H(s_0)$. Puede afirmarse que, cuando $s_0 \to 0$,

$$G(s_0)\,H(s_0) \to \frac{1}{s_0} \tag{11.6.4}$$

Al recorrer s la trayectoria de E a A de la figura 11.6.9a, el argumento de s_0 varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$, recorriendo la media vuelta en sentido antihorario. De la ecuación (11.6.4), vemos que el argumento de $G(s_0)\,H(s_0)$ variará de $\pi/2$ a $-\pi/2$, dando la media vuelta en sentido horario. En el límite cuando $s_0 \to 0$, la trayectoria de $G(s)\,H(s)$ será un semicírculo de radio infinito, recorrido en sentido contrario a la trayectoria que sigue s para librar el origen (ver figura 11.6.9b).

Si el orden del polo sobre el eje imaginario hubiera sido n, el semicírculo en el plano s se hubiera mapeado en n semicírculos de radio infinito para la variable dependiente.

A continuación, algunos ejemplos ilustrarán el caso en que la función de transferencia tiene polos sobre el eje imaginario (ver también Problema 11).

Ejemplo 11.6.3

Analice la estabilidad del sistema retroalimentado del ejemplo 11.5.2 empleando el criterio de Nyquist.

Solución

La función de transferencia de sistema abierto es:

$$G(s)\,H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

que tiene un polo en el origen.

Analicemos primero el mapeo de $G(s)\,H(s)$ cuando s varía del punto A al B de la figura 11.6.10a. Emplearemos para ello los diagramas de respuesta armónica que aparecen en las figuras 11.6.10b y c. Estos diagramas nos indican que, cuando $\omega \to 0$ (cerca del origen, en el punto A de la figura 11.6.10a), $|G(j\omega)\,H(j\omega)| \to \infty$, y su ángulo de fase tiende a $-90°$. Cuando $\omega \to \infty$ (punto B de la figura 11.6.10a), $|G(j\omega)\,H(j\omega)| \to 0$ y su ángulo de fase tiende a $-270°$.

Esta variación de $G(j\omega)\,H(j\omega)$ se muestra en forma polar en la figura 11.6.10d con la curva $A'\,G'\,B'$. La porción $D\,E$ de la trayectoria en el plano s es simétrica con la de $A\,B$, por lo que se mapea en la trayectoria $D'\,G'\,E'$ del plano $G(j\omega)\,H(j\omega)$ de la figura 11.6.10d. El semicírculo $B\,C\,D$ del plano s

se mapea en el origen $B'\,C'\,D'$ del plano $G(s)\,H(s)$, como en el ejemplo 11.6.2. El semicírculo $E\,F\,A$ libra un polo simple en el origen, por lo que como ilustra la figura 11.6.9 se mapea en el semicírculo de radio infinito $E'\,F'\,A'$ en el plano $G(s)\,H(s)$.

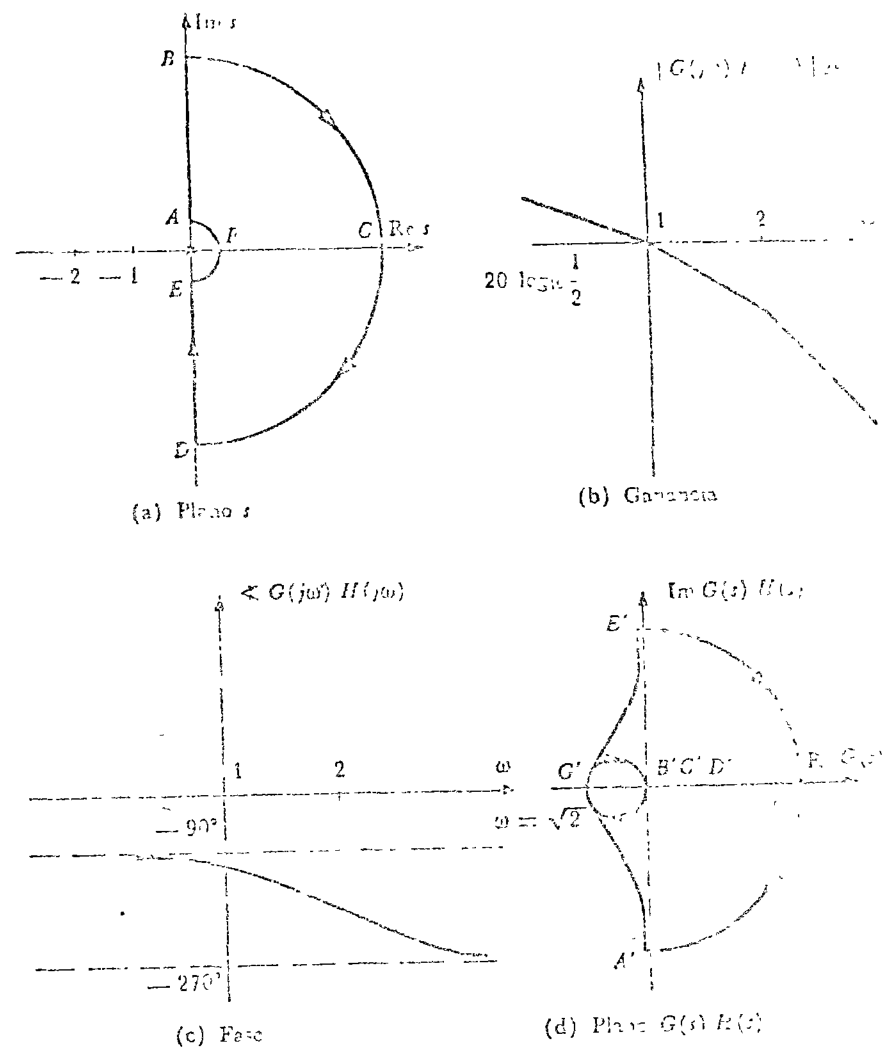


Fig. 11.6.10 Determinación de la trayectoria de $G(s)\,H(s)$ correspondiente a la trayectoria en el plano s

Observemos para empezar que los polos 0, -1 y -2 de $G(s)\,H(s)$ están fuera de la trayectoria de s (Fig. 11.6.10a), por lo que ... otra parte, analizando la curva $G(s)\,H(s)$ de la figura ...

que el punto G' (de ángulo de fase $-180°$) puede estar, o a la derecha, o a la izquierda, del punto $(-1/K, 0)$. Si G' está a la izquierda de $-1/K$, entonces $N = 2$, y de (11.6.2)

$$Z = 2$$

puesto que $P = 0$. En este caso, $1 + K\,G(s)\,H(s)$ tiene dos raíces encerradas en la trayectoria en el plano s, o sea de parte real positiva, y el sistema es inestable.

Por otra parte, si G' está a la derecha de $-1/K$, $N = 0$, $P = 0$ y $Z = 0$, por lo que el sistema es estable.

Calculemos los valores de K para los cuales el sistema retroalimentado es estable.

Para $s = j\omega$ se tiene que

$$G(j\omega)\,H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)\,(j\omega + 2)}$$

$$= \frac{1}{-3\omega^2 + j\,(-\omega^3 + 2\omega)}$$

En el punto G', esta función es real, o sea que

$$-\omega^3 + 2\omega = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $\omega = 0$ (que corresponde al punto F' de la figura 11.6.10d) y $\omega = \pm\sqrt{2}$ (que corresponden al punto G'). El punto G' está en

$$G(j\sqrt{2})\,H(j\sqrt{2}) = -\frac{1}{6}$$

Si $-1/K$ está a la derecha de $-1/6$, o sea si $0 < K < 6$, el sistema es estable, y para $K > 6$ el sistema es inestable.

Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 11.5.3, por el método del lugar geométrico de las raíces □

En los dos ejemplos anteriores, la trayectoria de s que encierra el semiplano derecho, no contenía ningún polo de $G(s)\,H(s)$. El siguiente ejemplo ilustra el caso en que $G(s)\,H(s)$ tiene un polo de parte real positiva.

Ejemplo 11.6.4

Determine para qué valores de K es estable el sistema retroalimentado, cuya función de transferencia de circuito abierto es:

$$G(s)\,H(s) = \frac{s + 2}{(s - 1)\,(s + \frac{8}{3})}$$

Solución:

La trayectoria en el plano s aparece en la figura 11.6.11a.

Nuestro propósito principal en este ejemplo será ilustrar lo que sucede cuando $G(s)\,H(s)$ tiene un polo de parte real positiva, por lo que dejaremos los detalles del desarrollo al lector en el Problema 12.

Los diagramas de amplitud y fase de $G(j\omega)\,H(j\omega)$ aparecen en las figuras 11.6.11b y c. El diagrama de Nyquist correspondiente a la trayectoria de la figura 11.6.11a, se muestra en la figura 11.6.11d.

De la figura 11.6.11d observamos que, si el punto $-1/K$ está a la derecha de A', la trayectoria de $G(s)\,H(s)$ da menos una vuelta ($N = -1$) al punto $(-1/K, 0)$, ya que el sentido de recorrido de dicha curva es el opuesto al de la trayectoria en el plano s. Observemos además que la curva cerrada en el plano s encierra un polo de $G(s)\,H(s)$, en $+1$, por lo que $P = 1$. Por lo tanto, de la relación (11.6.2) se tiene que

$$Z = -1 + 1 = 0$$

por lo que el sistema retroalimentador es estable.

Si la posición del punto A' de la figura 11.6.11d queda a la derecha del punto $(-1/K, 0)$, $N = 0$, y como $P = 1$, de (11.6.2)

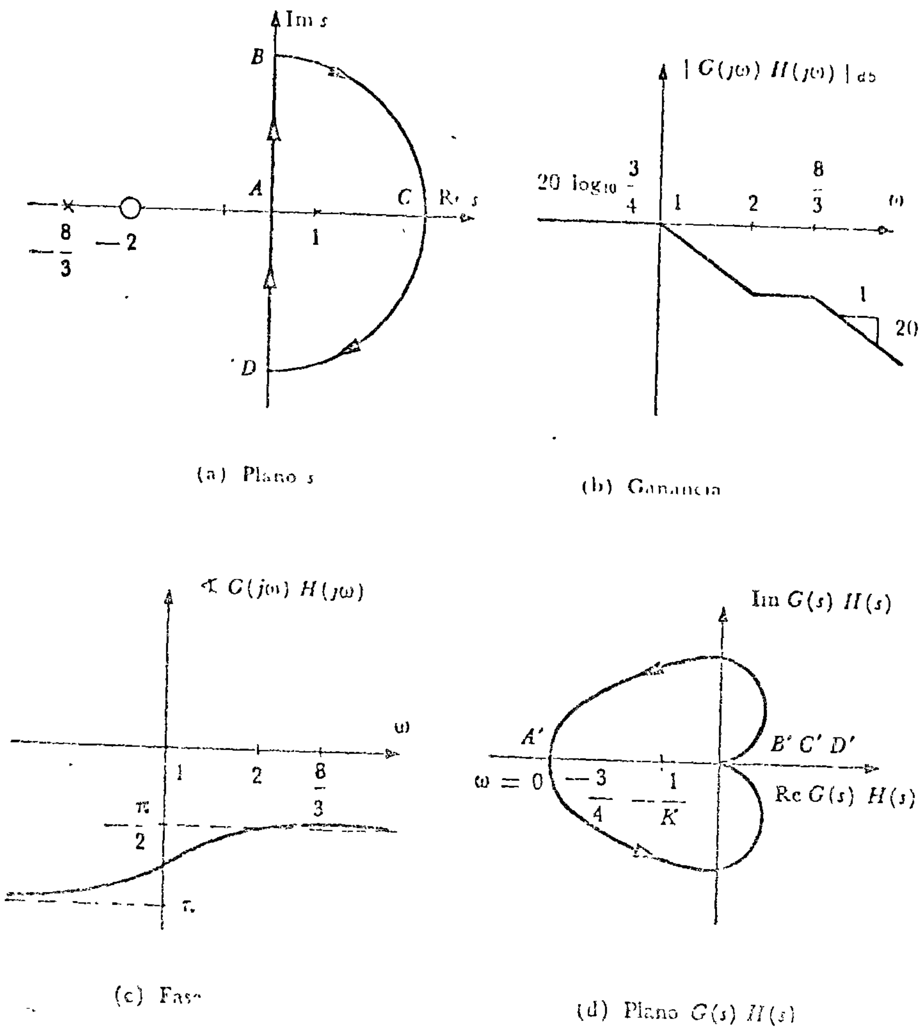
$$Z = 0 + 1 = 1$$

y el sistema retroalimentado es inestable.

El punto A', que es real, corresponde al origen en el plano s, por lo que se encuentra en

$$G(0)\,H(0) = \frac{2}{(-1)\,(\frac{8}{3})} = -\frac{3}{4}$$

Si $K > 3/4$, el sistema retroalimentado es estable, y si $K < 3/4$ el sistema es inestable. En este ejemplo el sistema es estable para grandes valores de la ganancia K, e inestable para K menor que $3/4$. ■



(a) Plano s

(b) Ganancia

(c) Fase

(d) Plano $G(s)\ H(s)$

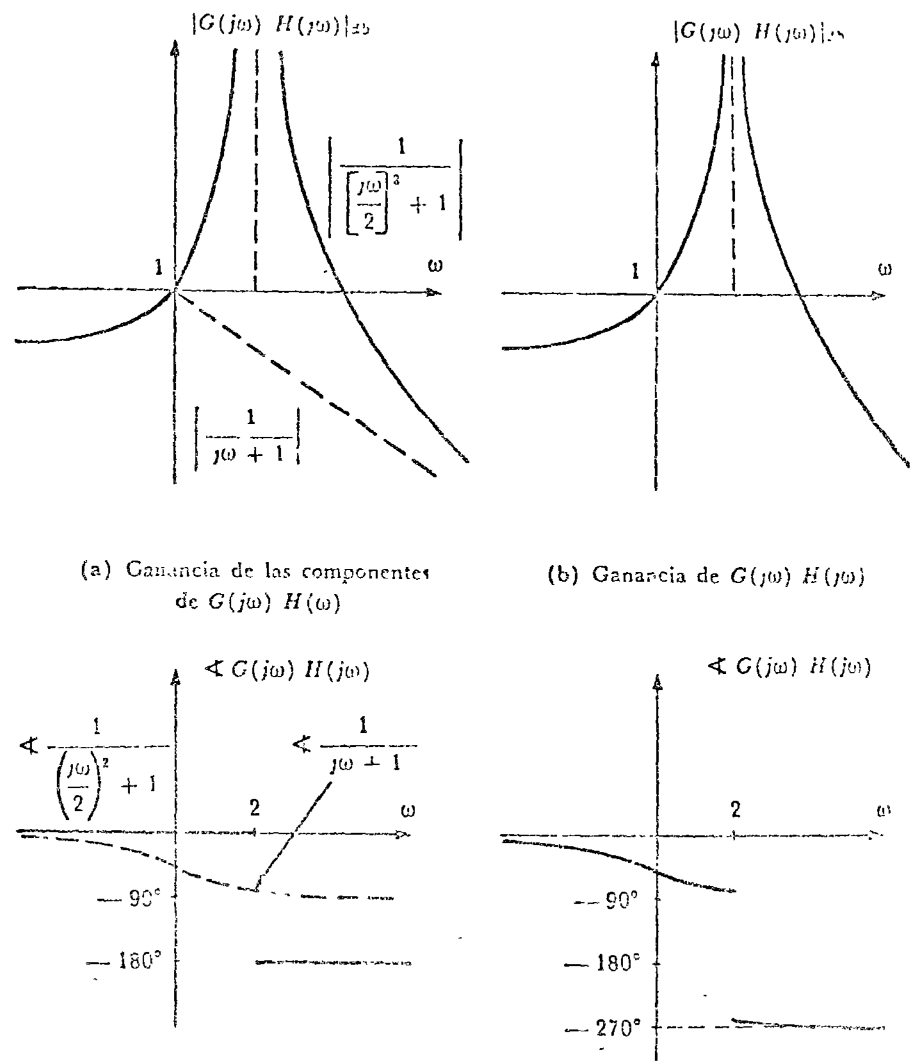
Fig 11.6.11 Diagramas de Nyquist y Bode del ejemplo 11.6.3.

Un último ejemplo nos servirá para ilustrar el caso de un sistema retroalimentado, cuya función de transferencia de circuito abierto tiene polos sobre el eje imaginario, fuera del origen.

Ejemplo 11.6.5

Determine la estabilidad del sistema retroalimentado cuya función de transferencia de sistema abierto es.

$$G(s)\ H(s) = \frac{1}{(s+1)\ (s^2+4)}$$



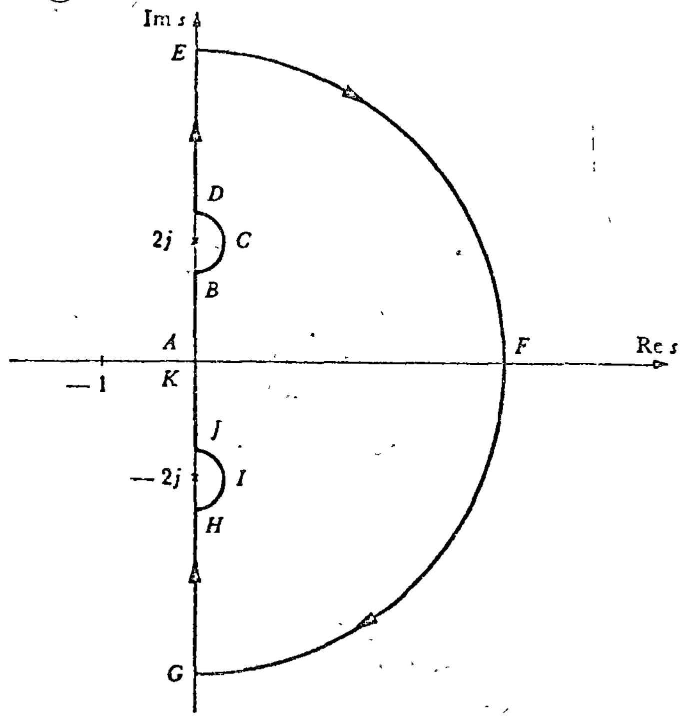
(a) Ganancia de las componentes de $G(j\omega)\ H(\omega)$

(b) Ganancia de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

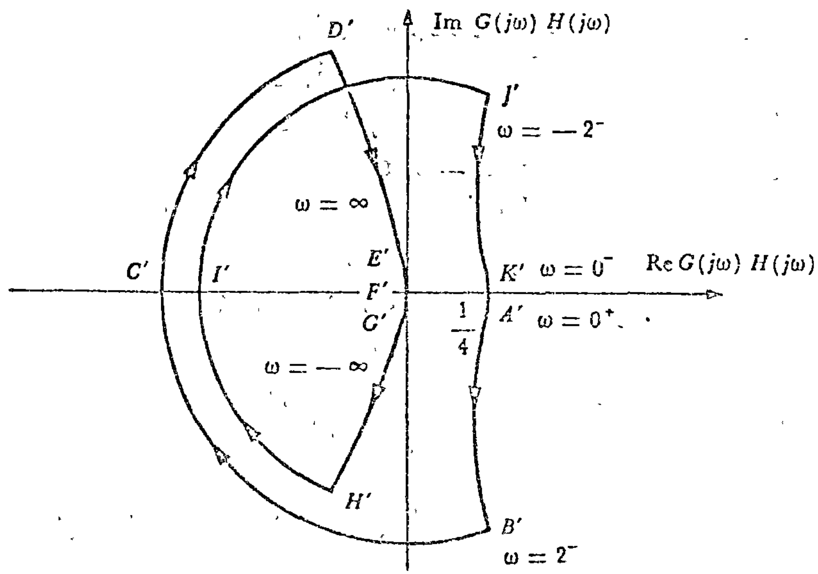
(c) Fase de las componentes de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

(d) Fase de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

Fig 11.6.12 Diagrama de amplitud y fase de $G(s)\ H(s)$ para ejemplo 11.6.5



(a) Trayectoria en el plano s



(b) Trayectoria en el plano $G(s)\ H(s)$

Fig. 11.6.13 Diagrama de Nyquist para el ejemplo 11 6 5.

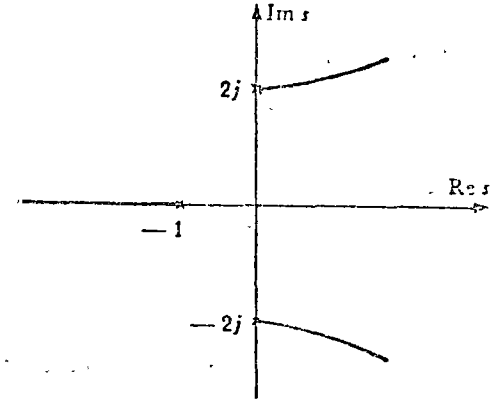


Fig 11.6.14 Lugar geométrico de las raices

Solución:

Los diagramas de magnitud y de fase de las dos componentes de la función de transferencia de circuito abierto se muestran en las figuras 11.6.12a y c, y sus resultantes en las figuras 11.6.12b y d.

La trayectoria de la variable independiente s aparece en la figura 11.6.13a. Empleando las figuras 11 6.12b y d, recomendamos al lector que determine la trayectoria de $G(s)\ H(s)$ que aparece en la figura 11.6 13b (ver Problema 13).

Como los puntos C' y I' de la figura 11.6.13b tienden a $-\infty$, el punto $(-1/K, 0)$ siempre está a su derecha, por lo que $N = 2$. Como $P = 0$, de la relación (11.6.2)

$$Z = 2$$

o sea que hay dos ceros de $1 + K\,G(s)\ H(s)$ de parte real positiva que hacen que el sistema sea inestable para toda K.

Recomendamos al lector trazar el lugar geométrico de las raices de $1 + KG(s)\ H(s)$, que se ilustra en la figura 11.6.14. Esta curva muestra que, en efecto, la función de transferencia

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + K\,G(s)\ H(s)}$$

tiene dos polos de parte real positiva, que producen inestabilidad para cualquier valor de la ganancia K. □

11.7 PROBLEMAS

1. Pueden definirse, como normas de un vector, diversas funciones escalares que satisfacen las condiciones (11 1 1). Si se define como norma del vector $x]$ de componentes x_i, a

$$\|x]\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \tag{11.7.1}$$

verifique la desigualdad del triángulo para los vectores $x_1]$ y $x_2]$ del ejemplo 11 1 2

2 Encontrar la función matricial $[\exp([A]t)]$ si

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Demuestre que el sistema de representación:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)] + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1]\, x(t)]$$

no es estable en el límite, pero sí es estable de estado nulo y excitación y respuesta acotadas

4. Aplique las pruebas de estabilidad algebraica para determinar si los siguientes polinomios son Hurwitz.

a) $s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6$

b) $s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$

c) $s^5 - 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 - 11s - 10$

d) $s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 10s + 10$

5. Calcule los polos de $W(s)$ para el ejemplo 11.5.3, si $K = 1.88$

6. Determine el lugar geométrico de las raíces del sistema retroalimentado para el cual

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$H(s) = 1$$

7. Determine los polos del ejemplo 11.5 4 para $K = 6$

8 Encuentre el lugar geométrico de las raíces del sistema retroalimentado para el cual

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$H(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

9 Trace el lugar geométrico de las raíces y determine los valores de K para los cuales es estable cada uno de los sistemas retroalimentados cuya función de transferencia de circuito abierto es:

a) $G(s)\,H(s) = \dfrac{1}{(T_1 s + 1)\,(T_2 s + 1)}$

b) $G(s)\,H(s) = \dfrac{1}{s^2(s+4)\,(s+5)}$

c) $G(s)\,H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)\,(s-5)\,(s-6)}$

d) $G(s)\,H(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^3}$

e) $G(s)\,H(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+25)}$

10. Repita el problema anterior para el sistema del ejemplo 11 5 2.

11. Para cada una de las funciones de transferencia de sistema abierto del Problema 9:

a) trace el diagrama de Nyquist

b) determine los valores de K para los cuales el sistema es estable.

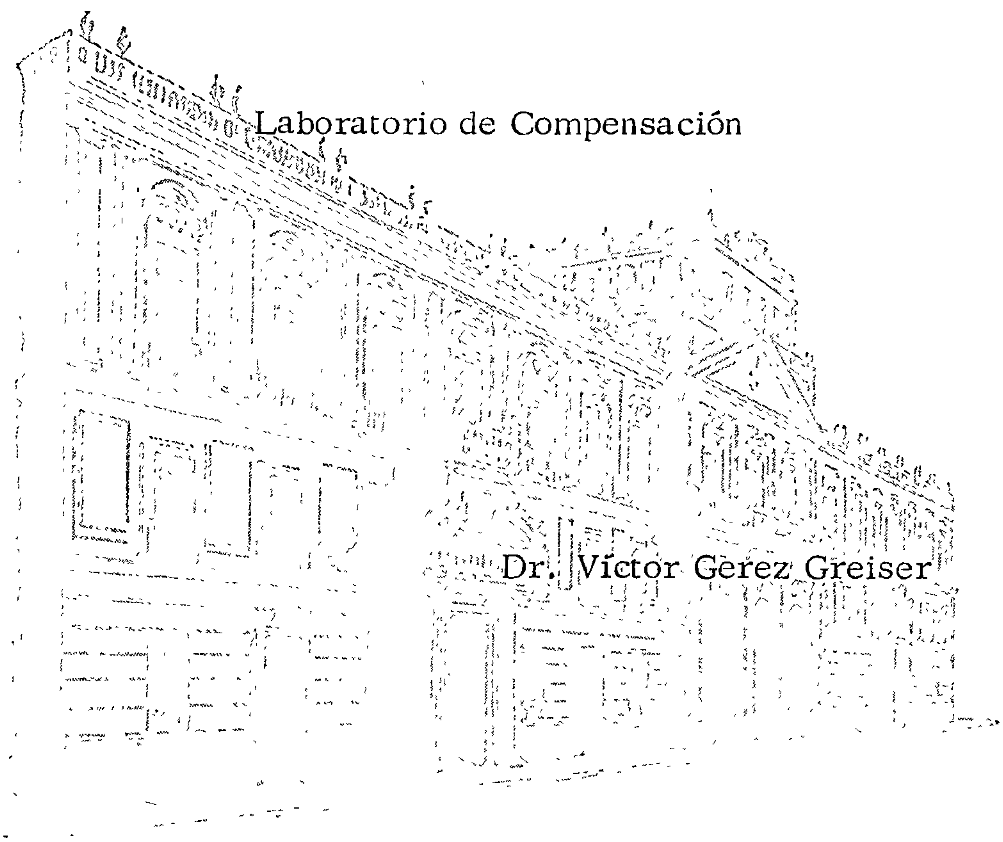
c) compare el resultado del inciso anterior con el obtenido en el Problema 9

12 Complete los pasos omitidos en el ejemplo 11 6 4

13 Complete los pasos omitidos en el ejemplo 11.6 5.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE CONTROL Y ANALISIS DE DISEÑO



Laboratorio de Compensación

Dr. Víctor Gerez Greiser

ING. DE CONTROL

TEMA:

10

COMPENSACION

·ESIGN AND OMPENSATION ECHNIQUES

NTRODUCTION

: primary objective of this chapter is to present procedures for the design ompensation of single-input-single-output linear time-invariant control s Compensation is the adjustment of a system in order to satisfy the given ·ations. The approaches to the control system design and compensation used chapter are the root-locus approach and the frequency-response approach. n design based on modern control theory will be presented in Chapter 16.)

formance specifications. Control systems are designed to perform specific The requirements imposed upon the control system are usually spelled out as nance specifications. They generally relate to accuracy, relative stability, eed of response.

r routine design problems, the performance specifications may be given in of precise numerical values. In other cases, they may be given partially in of precise numerical values and partially in terms of qualitative statements. latter case, the specifications may have to be modified during the course of since the given specifications may never be satisfied (because of conflicting ements) or may lead to a very expensive system

nerally speaking, the performance specifications should not be more string- n necessary to perform the given task If the accuracy at steady-state opera-

tion is of prime importance in a given control system, then we should not require unnecessarily rigid performance specifications on the transient response since such specifications will require expensive components Remember that the most important part of control system design is to state the performance specification precisely so that they will yield an optimal control system for the given purpose.

Trial-and-error approach to system design. In most practical cases, the design method to be used may be determined by the performance specifications applicable to the particular case. In designing control systems, if the performance specifications are given in terms of time-domain performance measures, such as rise time, maximum overshoot, or settling time, or frequency-domain performance measures such as phase margin, gain margin, resonant peak value, or bandwidth, then we have no choice but to use a trial-and-error approach based on the root-locus method and/or frequency-response methods.

The systems which may be designed by a trial-and-error approach are usually limited to single-input-single-output linear time-invariant systems. The designer seeks to satisfy all performance specifications by means of educated trial-and-error repetition After a system is designed, the designer checks to see if the designed system satisfies all the performance specifications If it does not, then he repeats the design process by adjusting parameter settings or by changing the system configuration until the given specifications are met. Although the design is based on a trial-and-error procedure, the ingenuity and know-how of the designer will play an important role in a successful design An experienced designer may be able to design an acceptable system without using many trials.

Modification of plant dynamics. In building a control system, we know that proper modification of the plant dynamics may be a simple way to meet the performance specifications. This, however, may not be possible in many practical situations because the plant may be fixed and may not be modified Then we must adjust parameters other than those in the fixed plant. In this chapter, we assume that the plant is given and unalterable.

System compensation. Setting the gain is the first step in adjusting the system for satisfactory performance. In many practical cases, however, the adjustment of the gain alone may not provide sufficient alteration of the system behavior to meet the given specifications. As is frequently the case, increasing the gain value will improve the steady-state behavior but will result in poor stability or even instability. It is then necessary to redesign the system (by modifying the structure or by incorporating additional devices or components) in order to alter the overall behavior so that the system will behave as desired.

An additional device inserted into the system for such purpose is called a *compensator*. This device compensates for deficient performance of the original system.

Series compensation and feedback (or parallel) compensation. If the compensator $G_c(s)$ is placed in series with the unalterable transfer function $G(s)$, as shown in Fig 10-1 (a), then the compensation is called series compensation.

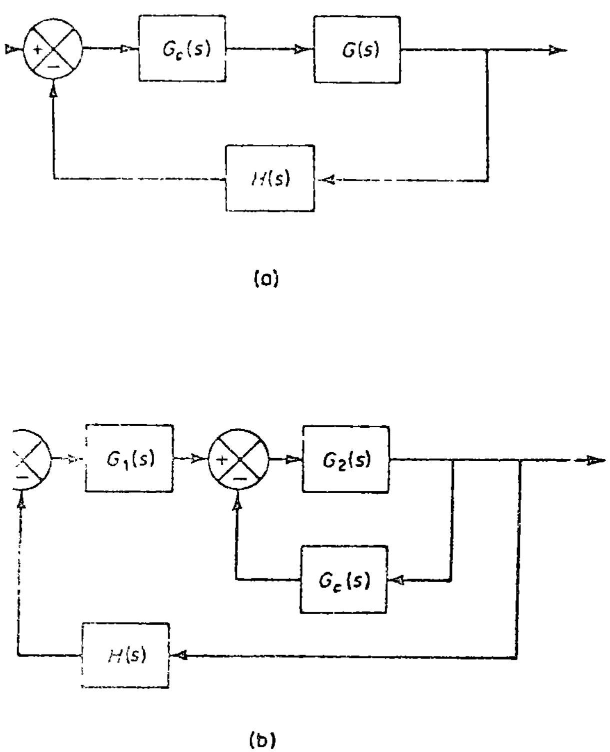


Fig. 10-1. (a) Series compensation, (b) feedback or parallel compensation.

n alternative to series compensation is to feed back the signal(s) from some nt(s) and place a compensator in the resulting inner feedback path, as shown g 10-1 (b). Such compensation is called feedback compensation or parallel ensation.

compensating control systems, we see that the problem usually boils down uitable design of a series or feedback compensator. The choice between series ensation and feedback compensation depends upon the nature of the signals system, the power levels at various points, available components, the de-'s experience, economic considerations, etc.

general, series compensation may be simpler than feedback compensation; ver, series compensation frequently requires additional amplifiers to increase in and/or to provide isolation (In order to avoid power dissipation, the compensator is inserted at the lowest energy point in the feedforward path) that, in general, the number of components required in feedback compensa-ill be less than the number of components in series compensation, provided able signal is available, because the energy transfer is from a higher power o a lower one (This means that additional amplifiers may not be necessary.)

mpensators. If a compensator is needed to meet the performance specifica-the designer must realize a physical device which has the prescribed transfer on of the compensator.

ous physical devices have been used for such purposes In fact, many

noble and useful ideas for physically constructing compensators may be found i the literature.

Among the many compensators, the widely employed series compensators ar the so-called lead compensators, lag compensators, and lag-lead compensator In this chapter, we shall limit our discussions mostly to these three types. They ar usually electrical, mechanical, pneumatic, hydraulic, or combinations thereof an consist of *RC* networks (electrical, mechanical, pneumatic, or hydraulic) and ampl fiers. (In many cases, a compensating *RC* network is an integral part of the ampli fier.)

In the actual design of a control system, whether or not to use an electrica mechanical, pneumatic, or hydraulic compensator is a matter that must be decide partially upon the nature of the controlled plant For example, if the controlle plant involves flammable fluid, then we have to choose a pneumatic compensato and actuator to avoid the possibility of sparks. If, however, no fire hazard exist then electronic compensators are most commonly used. (In fact, we often trans form nonelectrical signals into electrical signals because of the simplicity of trans mission, increased accuracy, increased reliability, ease of compensation, etc)

Design procedures. In the trial-and-error approach to system design, we s up a mathematical model of the control system and adjust the parameters of compensator. The most time-consuming part of such work is the checking of th performance specifications by analysis with each adjustment of the parameter and the designer should make use of an analog or digital computer to avoid muc of the numerical drudgery necessary for this checking.

Once a satisfactory mathematical model has been obtained, the designer mu construct a prototype and test the open-loop system. If absolute stability is assure the designer closes the loop and tests the performance of the resulting closed-lo system. Because of the neglected loading effects among the components, nonlinea ities, distributed parameters, etc , which were not taken into consideration in th original design work, the actual performance of the prototype system will probab differ from the theoretical predictions. Thus, the first design may not satisfy the requirements on performance. By trial and error, the designer must mak changes in the prototype until the system meets the specifications. In doing thi he must analyze each trial, and the results of the analysis must be incorporated in the next trial. The designer must see that the final system meets the performan specifications and, at the same time, is reliable and economical.

It is important to note that in design via a trial-and-error approach or in desi through analysis the given specifications will not yield a unique system. In fa many (and possibly an infinite number of) systems may satisfy the given specific tions An optimal choice among the many possibilities may be made from su considerations as projected overall performance, cost, space, and weight.

Design of complex systems. The root-locus and frequency-response approach to designs which essentially consist of gain adjustment and of the design of compe sators are quite useful but are limited to idealized and relatively simple cont

ns, such as single-input–single-output linear time-invariant ones. Such ap-
-hes to design suffer from severe limitations and difficulties when applied to
esign of multiple-input–multiple-output and time-varying systems.
'hile control system design via the root-locus and frequency-response ap-
hes is an engineering endeavor, system design in the context of modern control
y (to be presented in Chapter 16) employs mathematical formulations of the
em and applies mathematical theory to design problems in which the system
ave multiple inputs and outputs and can be time-varying. By applying modern
ol theory, the designer is able to start from a performance index, together with
raints imposed on the system, and to proceed to design a stable system by a
letely analytical procedure. The advantage of design based on such control
y is that it enables the designer to produce a control system which is optimal
respect to the performance index considered.
is important to note, however, that such a design technique cannot be applied
performance specifications are given in terms of time-domain or frequency-
in quantities, in which case the root-locus or frequency-response techniques
to be quite useful.

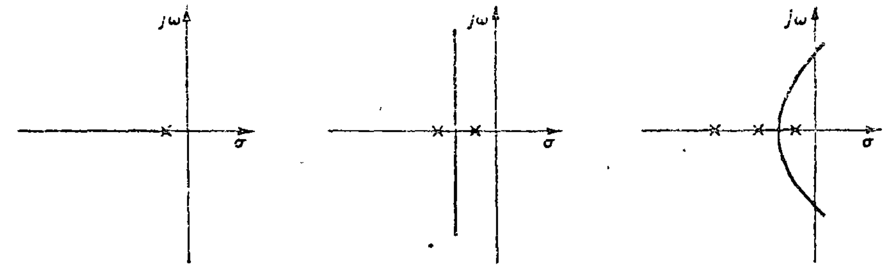
PRELIMINARY DESIGN CONSIDERATIONS

ne design problems we consider in this chapter are those of improving system
rmance by insertion of a compensator. Compensation of a control system is
ed to the design of a filter whose characteristics tend to compensate for the
irable and unalterable characteristics of the plant.
Sections 10-3 through 10-5, we shall specifically consider the design of
compensators, lag compensators, and lag-lead compensators. In such design
ems, we place a compensator in series with the unalterable transfer function
in order to obtain desirable behavior. The main problem then involves the
ious choice of the pole(s) and zero(s) of the compensator $G_c(s)$ in order to
the root locus or frequency response so that the performance specifications
be met.

oot-locus approach to control system design. The root-locus method is a
ical method for determining the locations of all closed-loop poles from knowl-
of the locations of the open-loop poles and zeros as some parameter (usually
ain) is varied from zero to infinity. The method yields a clear indication of the
s of parameter adjustment. An advantage of the root-locus method is that
nd that it is possible to obtain information on the transient response as well
the frequency response from the pole-zero configuration of the system in
plane.
n practice, the root-locus plot of a system may indicate that the desired per-
ance cannot be achieved just by the adjustment of gain. In fact, in some cases,
system may not be stable for all values of gain. Then it is necessary to reshape
t loci to meet the performance specifications

In designing a control system, if other than a gain adjustment is required, we must modify the original root loci by inserting a suitable compensator. Once the effects on the root locus of the addition of poles and/or zeros are fully understood, we can readily determine the locations of the pole(s) and zero(s) of the compensator which will reshape the root locus as desired.

Effects of the addition of poles. The addition of a pole to the open-loop transfer function has the effect of pulling the root locus to the right, tending to lower the system's relative stability and to slow down the settling of the response. (Remember that the addition of integral control adds a pole at the origin, thus making the system less stable.) Figure 10-2 shows examples of root loci illustrating effects of



(a) (b) (c)

Fig. 10-2. (a) Root-locus plot of a single-pole system; (b) root-locus plot of a two-pole system; (c) root-locus plot of a three-pole system.

the addition of a pole to a single-pole system and the addition of two poles to a single-pole system.

Effects of the addition of zeros. The addition of a zero to the open-loop transfer function has the effect of pulling the root locus to the left, tending to make the system more stable and to speed up the settling of the response. (Physically, the addition of a zero in the feedforward transfer function means the addition of derivative control to the system. The effect of such control is to introduce a degree of anticipation into the system and speed up the transient response.) Figure 10-3 (a) shows the root loci for a system which is stable for small gain but unstable for large gain. Figures 10-3(b), (c), and (d) show root-locus plots for the system when a zero is added to the open-loop transfer function. Notice that when a zero is added to the system of Fig. 10-3 (a), it becomes stable for all values of gain.

Frequency-response approach to control system design. In dealing with the problem of compensating control systems via frequency-domain techniques, we secure control over the transient-response behavior in terms of such frequency-domain specifications as phase margin, gain margin, resonant peak value, and bandwidth. Design in the frequency domain is indirect because the system is designed to satisfy these frequency-domain specifications rather than time-domain

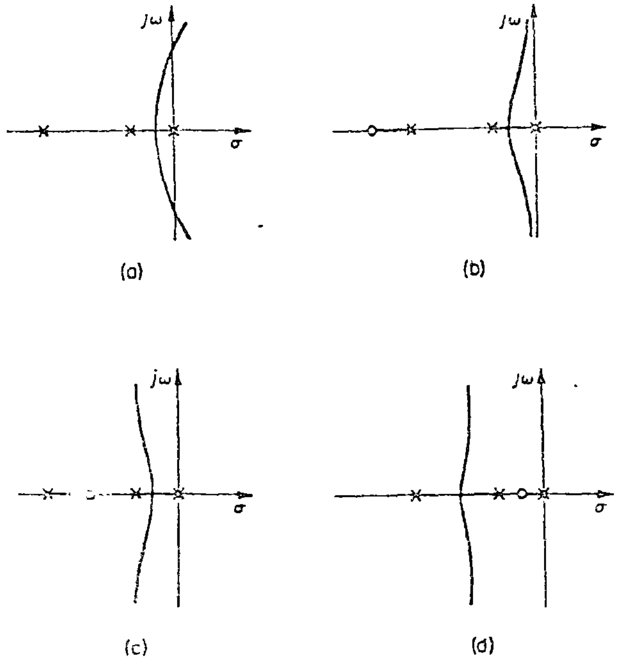


Fig. 10-3. (a) Root-locus plot of a three-pole system, (b), (c), and (d) root-locus plots showing effects of addition of a zero to the three-pole system.

ıcations. After the open loop has been designed by the frequency-response ɔd, the closed-loop poles and zeros can be obtained Then transient-response cteristics must be checked to see whether or not the designed system satisfies quirements in the time domain. If it does not, then the compensator must be ied and the analysis repeated until a satisfactory result is obtained.

ɛsign in the frequency domain is simple and straightforward. The frequency-ıse plot indicates clearly the manner in which the system should be modified, gh the exact quantitative prediction of the transient-response characteristics t be made. The frequency-response approach can be applied to systems or onents whose dynamic characteristics are given in the form of frequency-se data Note that because of difficulty in deriving the equations governing components, such as pneumatic and hydraulic components, the dynamic teristics of such components are usually determined experimentally through ncy-response tests. The experimentally obtained frequency-response plots combined easily with other such plots Note also that in dealing with high-ncy noises we find that the frequency-response approach is more convenient ther approaches.

designing control systems in the frequency domain, if we desire a certain margin or gain margin, we note that Bode diagrams are more convenient ıe polar plots (In using Bode diagrams, unless the exact curves differ con-ly from the straight-line asymptotes near the gain crossover frequency, we nploy the asymptotic plots for design purposes) On the other hand, if we certain value of , the polar plots or the log-magnitude versus phase plots

Information obtainable from open-loop frequency response. The low-frequency region (the region below the gain crossover frequency) of the locus indicates the steady-state behavior of the closed-loop system. The medium-frequency region (the region near the $-1 + j0$ point) of the locus indicates relative stability. The high-frequency region (the region above the gain crossover frequency) indicates the complexity of the system.

Requirements on open-loop frequency response. We might say that, in many practical cases, compensation is essentially a compromise between steady-state error and relative stability.

In order to have a high value of the velocity error coefficient and yet satisfactory relative stability, we find it necessary to reshape the open-loop frequency-response curve.

The gain in the low-frequency region should be large enough, and also, near

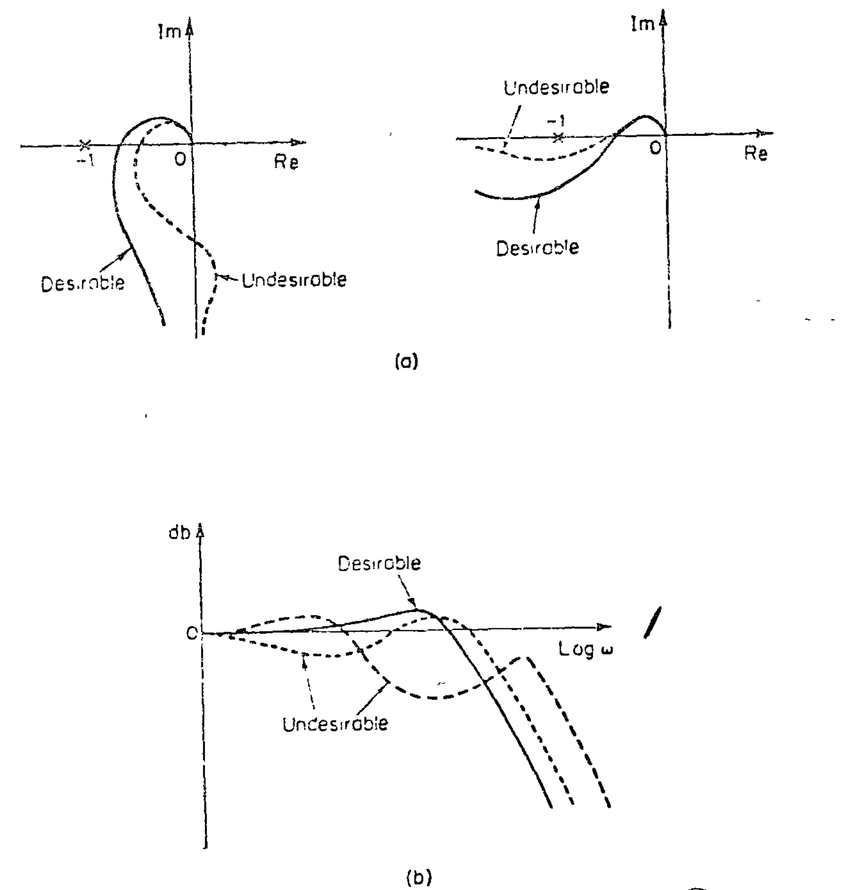


Fig. 10-4. (a) Examples of desirable and undesirable open-loop frequency-response curves; (b) examples of desirable and undesirable closed-loop

e gain crossover frequency, the slope of the log-magnitude curve in the Bode agram should be -20 db/decade This slope should extend over a sufficiently de frequency band to assure a proper phase margin For the high-frequency gion, the gain should be attenuated as rapidly as possible in order to minimize e effects of noise

Examples of generally desirable and undesirable open-loop and closed-loop quency-response curves are shown in Fig. 10-4.

Referring to Fig. 10-5, we see that the reshaping of the open-loop frequency-

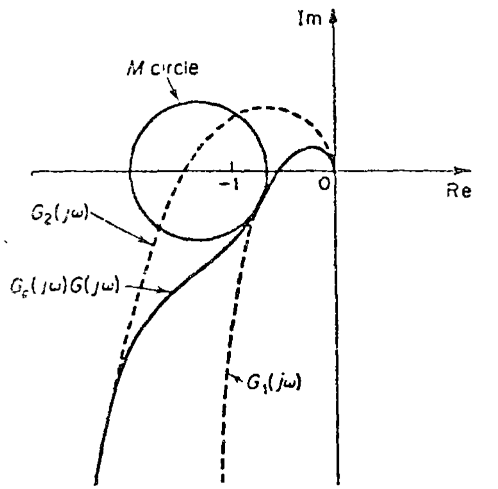


Fig. 10-5. Reshaping of the open-loop frequency-response curve.

ponse curve may be done if the high-frequency portion of the locus follows the $j\omega)$ locus, while the low-frequency portion of the locus follows the $G_2(j\omega)$ us. The reshaped locus $G_c(j\omega)G(j\omega)$ should have reasonable phase and gain rgins or should be tangent to a proper M circle, as shown.

Basic characteristics of lead, lag, and lag-lead compensation. Lead compensation entially yields an appreciable improvement in transient response and a small provement in steady-state accuracy. Lag compensation, on the other hand, ds an appreciable improvement in steady-state accuracy at the expense of reasing the transient-response time. Lag-lead compensation combines the racteristics of both lead compensation and lag compensation. The use of a d or lag compensator raises the order of the system by one The use of a lag-d compensator raises the order of the system by two (unless cancellation occurs ween the zeros of the lag-lead network and the poles of the uncompensated open-p transfer function), which means that the system becomes more complex and s more difficult to control the transient-response behavior The particular situa-n determines the type of the compensation to be used.

3 LEAD COMPENSATION

In this section, we shall first derive the transfer functions of an electrical lead ... and of a mechanical lead network. Then we shall present procedures for

designing lead compensators based on the root-locus and frequency-response approaches.

Lead networks. A schematic diagram of an electrical lead network is shown in Fig 10-6 (a) The name "lead network" comes from the fact that for a sinusoidal

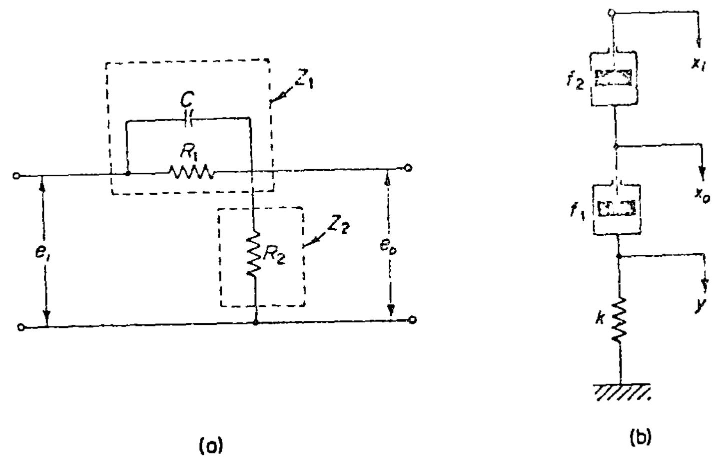


Fig. 10-6. (a) Electrical lead network; (b) mechanical lead network.

input e_i the output e_0 of the network is also sinusoidal with phase lead. The phase lead angle is a function of the input frequency. Let us derive the transfer function for this network. As usual in the derivation of the transfer function of any four terminal network, we assume that the source impedance which the network sees is zero and that the output load impedance is infinite.

Using the sysmbols defined in Fig. 10-6 (a), we find that the complex impedances Z_1 and Z_2 are

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1Cs + 1}, \qquad Z_2 = R_2$$

The transfer function between the output $E_0(s)$ and the input $E_i(s)$ is

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1Cs + 1}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}Cs + 1}$$

Define

$$R_1C = T, \qquad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha < 1$$

Then the transfer function becomes

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

ıre 10-6 (b) shows a schematic diagram of a mechanical lead network. he diagram, we obtain the following equations:

$$f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = f_1(\dot{x}_0 - \dot{y})$$
$$f_1(\dot{x}_0 - \dot{y}) = ky$$

the Laplace transforms of these two equations, assuming zero initial con- and then eliminating $Y(s)$, we obtain

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{f_2}{f_1 + f_2} \frac{\frac{f_1}{k}s + 1}{\frac{f_2}{f_1 + f_2}\frac{f_1}{k}s + 1}$$

the transfer function between $X_0(s)$ and $X_i(s)$. By defining

$$\frac{f_1}{k} = T, \qquad \frac{f_2}{f_1 + f_2} = \alpha < 1$$

ıin

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

racteristics of lead networks. A lead network has the following transfer n:

$$\alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \qquad (\alpha < 1)$$

zero at $s = -1/T$ and a pole at $s = -1/(\alpha T)$. Since $\alpha < 1$, we see that the always located to the right of the pole in the complex plane. Note that for value of α the pole is located far to the left. The minimum value of α is by the physical construction of the lead network The minimum value of ıally taken to be about 0.07. If the value of α is small, it is necessary to cas- amplifier in order to compensate for the attenuation of the lead network.
ure 10-7 shows the polar plot of

$$\alpha\frac{j\omega T + 1}{j\omega\alpha T + 1} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

ıven value of α, the angle between the positive real axis and the tangent line from the origin to the semicircle gives the maximum phase lead angle, ϕ_m. ıll call the frequency at the tangent point ω_m. From Fig. 10-7, the phase t $\omega = \omega_m$ is

$$\sin\phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{10-1}$$

on (10-1) relates the maximum phase lead angle and the value of α.

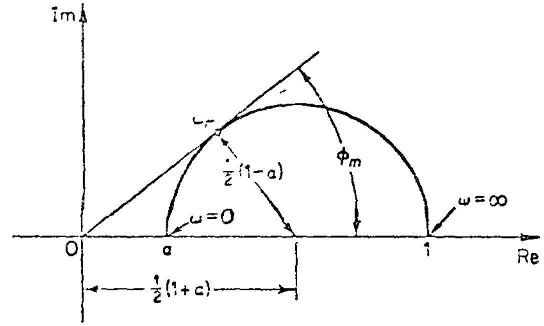


Fig. 10-7. Polar plot of a lead network $\alpha(j\omega T + 1)/(j\omega\alpha T + 1)$, where $0 < \alpha < 1$.

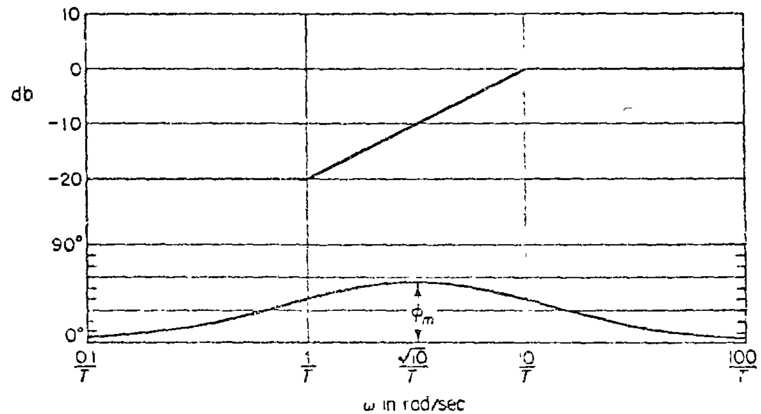


Fig. 10-8. Bode diagram of a lead network.

Figure 10-8 shows the Bode diagram of a lead network when $\alpha = 0.1$. The corner frequencies for the lead network are $\omega = 1/T$ and $\omega = 1/(\alpha T)$. By examining Fig. 10-8, we see that ω_m is the geometric mean of the two corner frequencies, or

$$\log\omega_m = \frac{1}{2}\left[\log\frac{1}{T} + \log\frac{1}{\alpha T}\right]$$

Hence

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T} \tag{10-2}$$

As seen from Fig 10-8, the lead network is basically a high-pass filter. (The high frequencies are passed but low frequencies are attenuated.) Therefore, an additional gain elsewhere is needed to increase the low-frequency gain.

Lead compensation techniques based on the root-locus approach. The root-locus approach to design is very powerful when the specifications are given in terms of time-domain quantities, such as maximum overshoot, rise time, settling time, damping ratio, and undamped natural frequency of the desired dominant closed-loop poles.

In some cases, after the root loci of the original system have been obtained, the dominant closed-loop poles may be moved to the desired location by simple gain adjustment. This is, however, not the case for the present system. Therefore, we shall insert a lead compensator in the feedforward path.

A general procedure for determining the lead compensator is as follows. First, find the sum of the angles at the desired location of one of the dominant closed-loop poles with the open-loop poles and zeros of the original system, and determine the necessary angle ϕ to be added so that the total sum of the angles is equal to $\pm 180°(2k+1)$. The lead network must contribute this angle. (If the angle is quite large, then two or more lead networks may be needed rather than a single one.)

If the original system has the open-loop transfer function $G(s)$, then the compensated system will have the open-loop transfer function

$$G_1(s) = \left(\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\right) K_c G(s)$$

where the first term on the right-hand side corresponds to the lead network, the second term K_c is the gain of the amplifier, and the last term $G(s)$ is the original open-loop transfer function. (Note that the amplifier provides the desired impedance matching as well as the desired gain K_c.) Note that there are many possible values for T that will yield the necessary angle contribution at the desired closed-loop poles.

The next step is to determine the locations of the pole and zero of the lead network; in other words, the value of T. In choosing the value of T, we shall introduce a procedure to obtain the largest possible value for α so that the additional gain required of the amplifier is as small as possible. First, draw a horizontal line passing through point P, the desired location for one of the dominant closed-loop poles. This is shown as line PA in Fig. 10-11. Draw also a line connecting point P and the origin. Bisect the angle between the lines PA and PO, as shown in Fig. 10-11. Draw two lines PC and PD which make angles $\pm\phi/2$

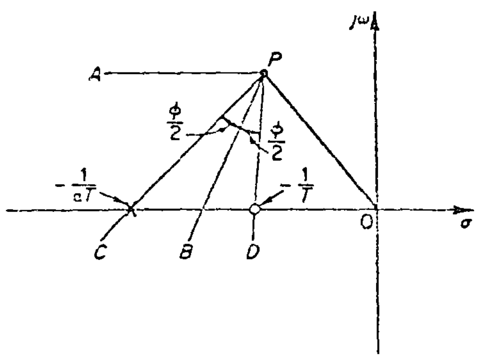


Fig. 10-11. Determination of the pole and zero of a lead network.

with the bisector PB. The intersections of PC and PD with the negative real axis give the necessary location for the pole and zero of the lead network. The compensator thus designed will make point P a point on the root locus of the compensated system. The open-loop gain is determined by means of the magnitude condition.

In the present system, the angle of $G(s)$ at the desired closed-loop pole is

$$\left/ \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210°$$

Thus for the root locus to go through the desired closed-loop pole, the lead network must

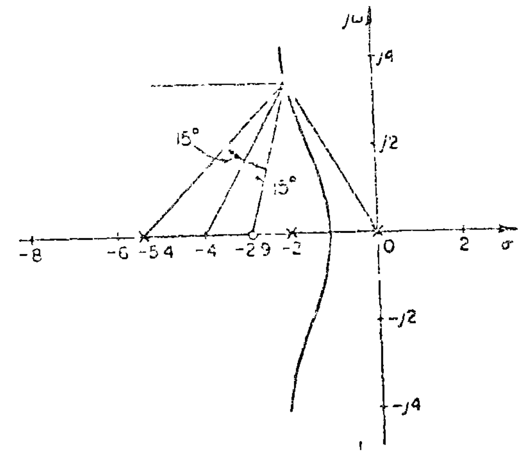


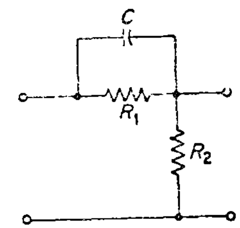
Fig. 10-12. Root-locus plot of the compensated system.

contribute $\phi = 30°$ at this point. By following the foregoing design procedure, we determine the pole and zero of the lead network, as shown in Fig. 10-12, to be

Pole at $s = -5.4$, Zero at $s = -2.9$

This results in the lead network having the parameter values shown in Fig. 10-13. The lead compensator consisting of this lead network and an amplifier has the transfer function

$$G_c(s) = \frac{(s+2.9)}{(s+5.4)} K_c$$



$$\text{Transfer function} = \frac{400}{745}\left(\frac{0.345s+1}{0.185s+1}\right) = \frac{s+2.9}{s+5.4}$$

Fig. 10-13. Lead network.

Thus the open-loop transfer function of the compensated system becomes

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s+2.9)}{(s+5.4)} K_c \frac{4}{s(s+2)}$$
$$= \frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}$$

The root-locus plot for the compensated system is shown in Fig. 10-12. The gain K is evaluated from the magnitude condition as follows:

$$\left| \frac{K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

or

$$K = 18.7$$

It follows that

$$G_c(s)G(s) = \frac{18.7(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}$$

The gain constant K_c of the amplifier is

$$K_c = \frac{K}{4} = 4.68$$

static velocity ... coefficient K_v is obtained from the expression

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{s18.7(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}$$
$$= 5.02 \text{ sec}^{-1}$$

third closed-loop pole is found by dividing the characteristic equation by the known ors as follows:

$$s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9) = (s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+3.4)$$

The foregoing compensation method enables us to place the dominant closed-loop s at the desired points in the complex plane. The third pole at $s = -3.4$ is close to added zero at $s = -2.9$. Therefore, the effect of this pole on the transient response is tively small. Since no restriction has been imposed on the nondominant pole and no ification has been given concerning the value of the static velocity error coefficient, conclude that the present design is satisfactory.

If the value of the static velocity error coefficient K_v were specified, then we must the specification by modifying the pole-zero location of the lead network or nserting a different network. Note that changing the pole-zero location of the network without changing the angle ϕ causes a change in the value of K_v. ... change in the value of K_v can thus be made by altering the pole-zero tions of the lead network. If a large increase in the value of K_v is desired, then must alter the lead compensator to a lag-lead compensator.

Lead compensation techniques based on the frequency-response approach. The nary function of the lead compensator is to reshape the frequency-response e to provide sufficient phase lead angle to offset the excessive phase lag asso- ed with the components of the fixed system.

Let us assume that a unity feedback system is given. We wish to satisfy the ormance requirements, which are given in terms of phase margin, gain margin, r coefficients, etc. The procedures for designing a lead compensator by the uency-response approach may be stated as follows:

1. Determine the open-loop gain K to satisfy the requirement on the error coefficients.
2. Using the gain K thus determined, evaluate the phase margin of the uncompensated system.
3. Determine the necessary phase lead angle ϕ to be added to the system.
4. Determine the attenuation factor α by use of Eq. (10-1). Determine the frequency where the magnitude of the uncompensated system is equal to $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$. Select this frequency as the new gain crossover frequency. This frequency corresponds to ω_m and the maximum phase shift ϕ_m occurs at this frequency.
5. Determine the corner frequencies of the lead network from

$$\omega = \frac{1}{T}, \qquad \omega = \frac{1}{\alpha T}$$

Finally, insert an amplifier with gain equal to $1/\alpha$, or increase the gain of the existing amplifier by a factor of $1/\alpha$.

Example 10-2. Consider the system shown in Fig. 10-14. The open-loop transfer function is

$$G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

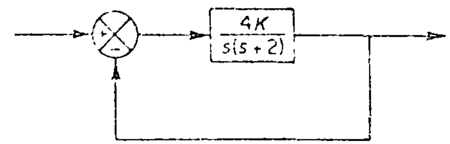


Fig. 10-14. Control system.

It is desired to find a compensator for the system so that the static velocity error coefficient K_v is 20 sec^{-1}, the phase margin is at least 50°, and the gain margin is at least 10 db.

In the present example, the phase and gain margins have been specified. We shall therefore employ Bode diagrams.

The first step in the design is to adjust the gain K to meet the steady-state performance specification or to provide the required static velocity error coefficient. Since this coefficient is given as 20 sec^{-1}, we obtain

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s4K}{s(s+2)} = 2K = 20$$

or

$$K = 10$$

With $K = 10$, the system of Fig. 10-14 satisfies the steady-state requirement.

We shall next plot the Bode diagram of

$$G(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$$

Figure 10-15 shows the magnitude and phase angle curves of $G(j\omega)$. From this plot, the phase and gain margins of the system are found to be 17° and $+\infty$ db, respectively. (A phase margin of 17° implies that the system is quite oscillatory. Thus, satisfying the specification on the steady state yields a poor transient-response performance.) The specification calls for a phase margin of at least 50°. We thus find that the additional phase lead necessary to satisfy the relative stability requirement is 33°. In order to achieve a phase margin of 50° without decreasing the value of K, it is necessary to insert a suitable lead compensator into the system.

Noting that the addition of a lead compensator modifies the magnitude curve in the Bode diagram, we realize that the gain crossover frequency will be shifted to the right. We must offset the increased phase lag of $G(j\omega)$ due to this increase in the gain crossover frequency. Considering the shift of the gain crossover frequency, we may assume that ϕ_m, the maximum phase lead required, is approximately 38°. (This means that 5° has been added to compensate for the shift in the gain crossover frequency.) Since

$$\sin\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$\phi_m = 38°$ corresponds to $\alpha = 0.24$. Once the attenuation factor α has been determined on the basis of the required phase lead angle, the next step is to determine the corner frequencies $\omega = 1/T$ and $\omega = 1/(\alpha T)$ of the lead network. To do so, we first note that the maximum phase lead angle ϕ_m occurs at the geometric mean of the two corner fre-

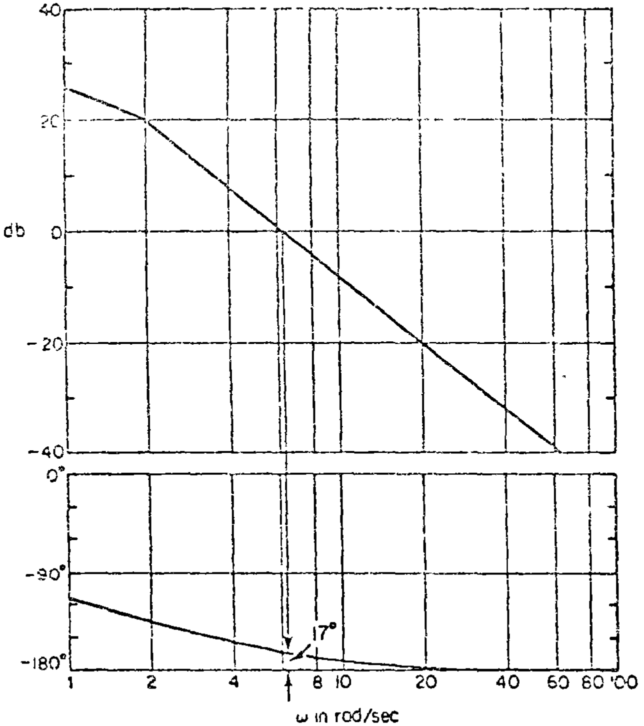


Fig. 10-15. Bode diagram for $G(s) = 40/[j\omega(j\omega + 2)]$.

quencies, or $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$. [See Eq. (10-2).] The amount of the modification in the magnitude curve at $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ is

$$\left|\frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T}\right|_{\omega=1/(\sqrt{\alpha}T)} = \left|\frac{1+j\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1+j\alpha\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Note that

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.24}} = \frac{1}{0.49} = 6.2 \text{ db}$$

and $|G(j\omega)| = -6.2$ db corresponds to $\omega = 9$ rad/sec. We shall select this frequency to be the new gain crossover frequency ω_c. Noting that this frequency corresponds to $1/(\sqrt{\alpha}T)$, or $\omega_c = 1/(\sqrt{\alpha}T)$, we obtain

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\,\omega_c = 4.41$$

and

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 18.4$$

The lead network thus determined is

$$\frac{s+4.41}{s+18.4} = \frac{0.24(0.227s+1)}{0.054s+1}$$

To compensate for the attenuation due to the lead network, we increase the amplifier

gain by a factor of $1/0.24 = 4.17$. (If this were not done, the required static velocity error coefficient could not be realized.) Then the transfer function of the compensator which consists of the lead network and the amplifier becomes

$$G_c(s) = (4.17)\frac{s+4.41}{s+18.4} = \frac{0.227s+1}{0.054s+1}$$

The magnitude curve and phase-angle curve for $G_c(j\omega)$ are shown in Fig. 10-16. The compensated system has the following open-loop transfer function:

$$G_c(s)G(s) = \frac{0.227s+1}{0.054s+1}\,\frac{20}{s(0.5s+1)} = (4.17)\frac{s+4.41}{s+18.4}\,\frac{40}{s(s+2)}$$

The solid curves in Fig. 10-16 show the magnitude curve and phase-angle curve for the

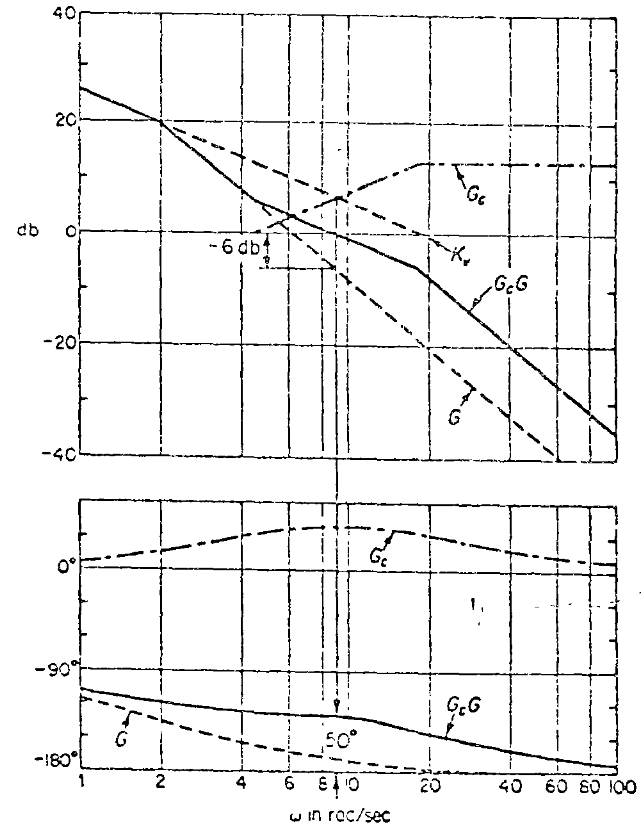


Fig. 10-16. Bode diagram for the compensated system.

compensated system. The lead compensator causes the gain crossover frequency to increase from 6.3 to 9 rad/sec. The increase in this frequency means an increase in bandwidth. This implies an increase in the speed of response. The phase and gain margins are seen to be approximately 50° and $+\infty$ db, respectively. The compensated system shown in Fig. 10-17 therefore meets both the steady-state and the relative-stability requirements.

Note that for type 1 systems, such as the system just considered (with the values considered here), the value of the static velocity error coefficient K_v is merely the value of the frequency corresponding to the intersection of the initial -20 db/decade slope line and the 0-db line, as shown in Fig. 10-16.

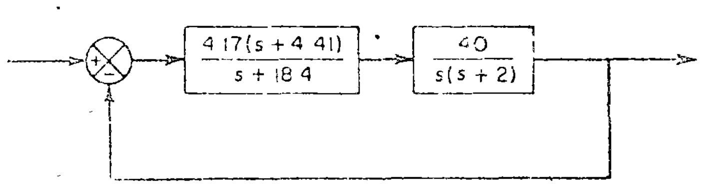


Fig. 10-17. Compensated system.

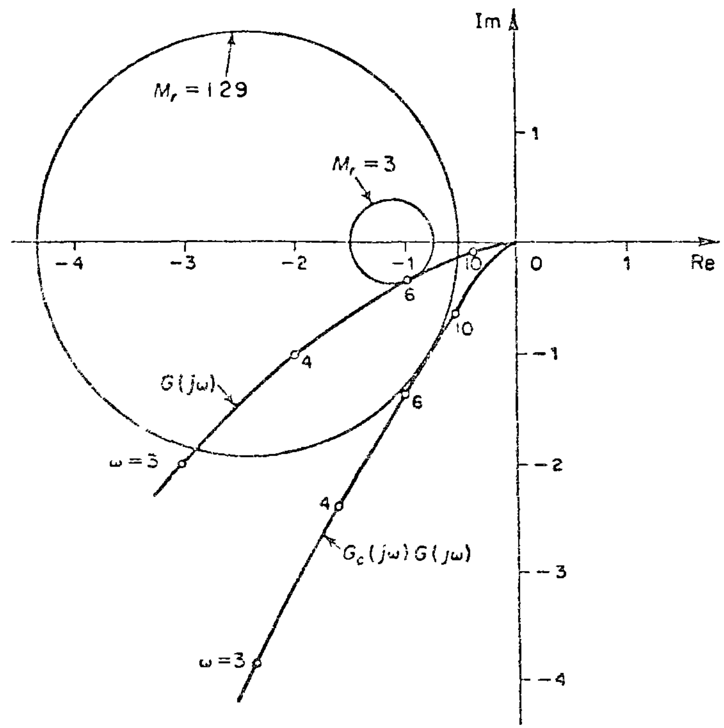


Fig. 10-18. Polar plots of the uncompensated and compensated open-loop transfer function. (G: uncompensated system, G_cG: compensated system.)

Figure 10-18 shows the polar plots of $G(j\omega)$(with $K = 10$) and of $G_c(j\omega)G(j\omega)$. From ig. 10-18, we see that the resonant frequency of the uncompensated system is about rad/sec and that of the compensated system is about 7 rad/sec. (This also indicates at the bandwidth has been increased.)

From Fig. 10-18, we find that the value of the resonant peak M_r for the uncompensated system with $K = 10$ is 3. The value of M_r for the compensated system is found to e 1.29. This clearly shows that the compensated system has improved relative stability. Note that the value of M_r may be obtained easily by transferring the data from the Bode iagram to the Nichol's chart. See Example 10-4.)

Note that if the phase angle of $G(j\omega)$ decreases rapidly near the gain crossover requency, lead compensation becomes ineffective because the shift in the gain rossover frequency to the right makes it difficult to provide enough phase lead at

phase margin, we must use a very small value for α. The value of α, however, should not be smaller than 0.07 nor should the maximum phase lead ϕ_m be more than 60° because such values will require an additional gain of excessive value. [If more than 60° is needed, two (or more) lead networks may be used in series with an isolating amplifier.]

10-4 LAG COMPENSATION

Lag networks. Figure 10-19 (a) shows an electrical lag network. The name "lag network" comes from the fact that when the input voltage e_i is sinusoidal, the

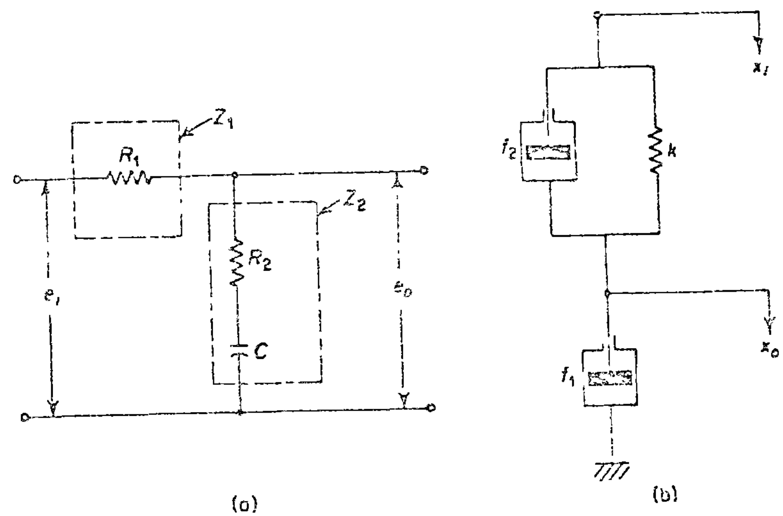


Fig. 10-19. (a) Electrical lag network; (b) mechanical lag network.

output voltage e_o is sinusoidal but lags the input by an angle which is a function of the frequency of the input sinusoid. The complex impedances Z_1 and Z_2 are

$$Z_1 = R_1, \qquad Z_2 = R_2 + \frac{1}{Cs}$$

The transfer function between the output voltage $E_0(s)$ and the input voltage $E_i(s)$ is given by

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

Define

$$R_2C = T, \qquad \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \beta > 1$$

Then the transfer function becomes

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}\right)$$

Figure 10-19 (b) shows a mechanical lag network. It consists of a spring and two dashpots. The differential equation for this mechanical network is

$$f_1\dot{x}_0 = k(x_i - x_0) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0)$$

Taking the Laplace transforms of both sides of this equation, assuming zero initial conditions and then rewriting, we obtain

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{f_2 s + k}{(f_1 + f_2)s + k} = \frac{\frac{f_2}{k}s + 1}{\frac{f_1 + f_2}{k}s + 1}$$

If we define

$$\frac{f_2}{k} = T, \qquad \frac{f_1 + f_2}{f_2} = \beta > 1$$

then the transfer function $X_0(s)/X_i(s)$ becomes

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}\right)$$

Characteristics of lag networks. A lag network has the following transfer function:

$$\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}\right) \qquad (\beta > 1)$$

In the complex plane, a lag network has a pole at $s = -1/(\beta T)$ and a zero at $s = -1/T$. (The pole is located to the right of the zero.)

Figure 10-20 shows a typical polar plot of a lag network. Figure 10-21 shows the Bode diagram of a lag network when $\beta = 10$. The corner frequencies of the lag network are $\omega = 1/T$ and $\omega = 1/(\beta T)$. As seen from Fig. 10-21, the lag network is essentially a low-pass filter.

Lag compensation techniques based on the root-locus approach. Consider the problem of finding a suitable compensation network for the case where the system exhibits satisfactory transient-response characteristics but unsatisfactory steady-state characteristics. Compensation in this case essentially consists of increasing the open-loop gain without appreciably changing the transient-response characteristics. This means that the root locus in the neighborhood of the dominant closed-loop poles should not be changed appreciably, but the open-loop gain should be increased as much as needed. This can be accomplished if a lag compensator is put in cascade with the given feedforward transfer function.

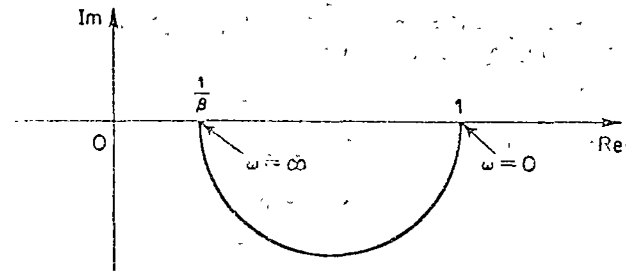


Fig. 10-20. Polar plot of a lag network.

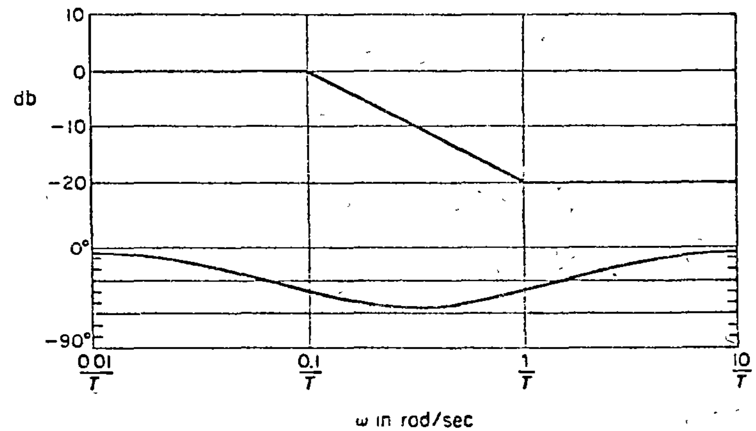


Fig. 10-21. Bode diagram of a lag network $(j\omega T + 1)/(j\omega\beta T + 1)$ with $\beta = 10$.

To avoid an appreciable change in the root loci, the angle contribution of the lag network should be limited to a small amount, say 5°. To assure this, we place the pole and zero of the lag network relatively close together and near the origin of the s plane. Then the closed-loop poles of the compensated system will be shifted only slightly from their original locations. Hence, the transient-response characteristics will be essentially unchanged.

Note that if we place the pole and zero of the lag network very close to each other, then $s_1 + (1/T)$ and $s_1 + (1/\beta T)$ are almost equal, where s_1 is the closed-loop pole. Thus

$$\left|\frac{1}{\beta}\left(\frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}}\right)\right| \doteq \frac{1}{\beta}$$

This implies that the open-loop gain can be increased approximately by a factor of β without altering the transient-response characteristics. If the pole and zero are placed very close to the origin, the value of β can be made large. Usually, $1 < \beta < 15$, and $\beta = 10$ is a good choice.

An increase in the gain means an increase in the static error coefficients. If the open-loop transfer function of the uncompensated system is $G(s)$, then the static velocity error coefficient K_v is

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

If the compensator is chosen as

$$G_c(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{K_c}{\beta}\left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}\right) \tag{10-3}$$

then for the compensated system with the open-loop transfer function $G_c(s)G(s)$ the static velocity error coefficient $\hat{K}_v$ becomes

$$\begin{aligned}\hat{K}_v &= \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)\\ &= \lim_{s \to 0} G_c(s)K_v\\ &= K_cK_v\end{aligned}$$

Thus if the compensator is given by Eq. (10-3), then the static velocity error coefficient is increased by a factor of K_c.

The procedures for designing a lag compensator by the root-locus method may be stated as follows: (We assume that the uncompensated system meets the transient-response specifications by simple gain adjustment. If this is not the case, refer to Section 10-5.)

1. Draw the root-locus plot for the uncompensated system. Based on the transient-response specifications, locate the dominant closed-loop poles on the root locus.
2. Determine the open-loop gain by use of the magnitude condition.
3. Evaluate the particular error coefficient specified in the problem.
4. Determine the amount of increase in the error coefficient necessary to satisfy the specifications.
5. Determine the pole and zero of the lag network which produce the necessary increase in the particular error coefficient without appreciably altering the original root loci.
6. Draw a new root-locus plot for the compensated system. Locate the desired dominant closed-loop poles on the root locus. (If the angle contribution of the lag network is very small, i.e., a few degrees, then the original and new root loci are almost identical. Otherwise there will be a slight discrepancy between them. Then locate, on the new root locus, the desired dominant closed-loop poles based on the transient-response specifications.)
7. Adjust the gain of the amplifier from the magnitude condition that the dominant closed-loop poles lie at the desired location.

Example 10-3 Consider the system shown in Fig. 10-22 (a). The feedforward transfer function is

$$G(s) = \frac{1.06}{\ldots}$$

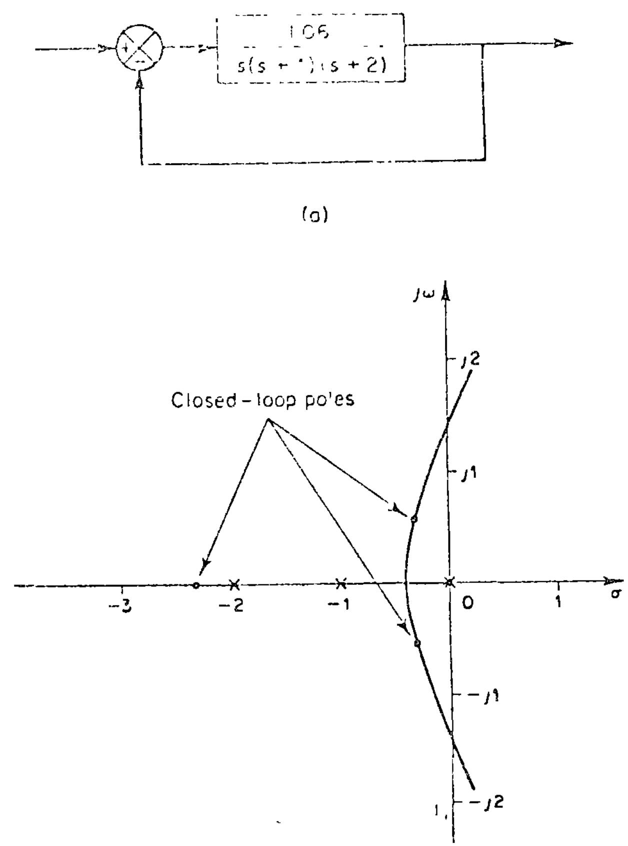


Fig. 10-22. (a) Control system; (b) root-locus plot.

The root-locus plot for the system is shown in Fig. 10-22 (b). The closed-loop transfer function becomes

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{1.06}{s(s+1)(s+2) + 1.06}\\ &= \frac{1.06}{(s + 0.33 - j0.58)(s + 0.33 + j0.58)(s + 2.33)}\end{aligned}$$

The dominant closed-loop poles are

$$s = -0.33 \pm j0.58$$

The damping ratio of the dominant closed-loop poles is $\zeta = 0.5$. The undamped natural frequency of the dominant closed-loop poles is 0.67 rad/sec. The static velocity error coefficient is 0.53 $\sec^{-1}$.

It is desired to increase the static velocity error coefficient K_v to about 5 $\sec^{-1}$ without appreciably changing the location of the dominant closed-loop poles.

To meet this specification, let us insert a lag compensator, which consists of a lag network and an amplifier, in cascade with the given feedforward transfer function. In order to increase the static velocity error coefficient by a factor of about 10, let us place the pole and zero of the lag network at $s = -0.01$ and $s = -0.1$, respectively. The transfer function of the lag network is then

$$\frac{1}{10}\left(\frac{s + 0.1}{s + 0.01}\right)$$

The angle contribution of this lag network near a dominant closed-loop pole is around several degrees. (This is about the maximum we can allow.) Because the angle contribution of this lag network is not very small, there is a small change in the new root locus near the desired dominant closed-loop poles.

In order to account for the attenuation due to the lag network, we cascade an amplifier of gain K_c. The feedforward transfer function of the compensated system then becomes

$$G_1(s) = \frac{1}{10}\left(\frac{s+0.1}{s+0.01}\right)(K_c)\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$
$$= \frac{K(s+0.1)}{s(s+0.01)(s+1)(s+2)}$$

where

$$K = \frac{1.06K_c}{10}$$

The block diagram of the compensated system is shown in Fig. 10-23 (a). The root-locus plot for the compensated system near the dominant closed-loop poles is shown in Fig. 10-23 (b), together with the original root locus.

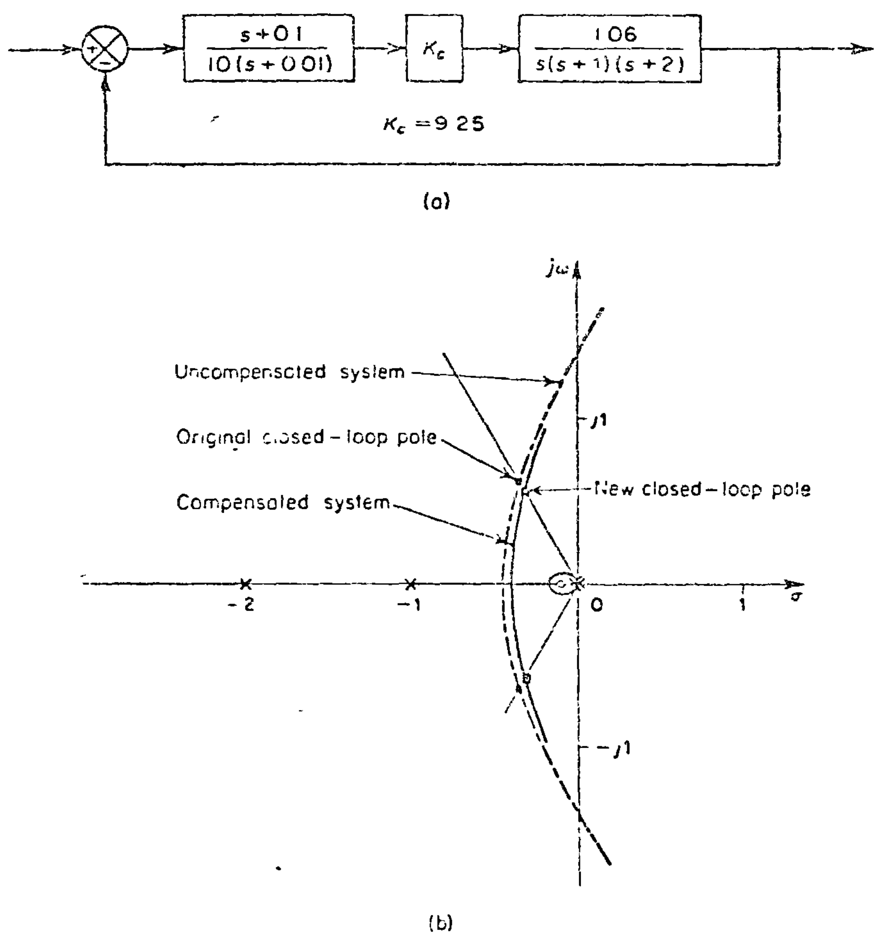


Fig. 10-23. (a) Compensated system, (b) root-locus plots for the compensated system and the uncompensated system.

If the damping ratio of the new dominant closed-loop poles is kept the same, then the poles are obtained from the new root-locus plot as follows:

$$s_1 = -0.28 + j0.51, \qquad s_2 = -0.28 - j0.51$$

The open-loop gain K is

$$K = \left|\frac{s(s+0.01)(s+1)(s+2)}{s+0.1}\right|_{s=-0.28+j0.51} = 0.98$$

Hence the amplifier gain K_c is

$$K_c = \frac{10}{1.06}K = 9.25$$

Thus the compensated system has the following open-loop transfer function:

$$G_1(s) = \frac{0.98(s+0.1)}{s(s+0.01)(s+1)(s+2)} = \frac{4.9(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

The static velocity error coefficient K_v is

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_1(s) = 4.9 \text{ sec}^{-1}$$

In the compensated system, the static velocity error coefficient has increased to 4.9 sec^{-1}, or $4.9/0.53 = 9.25$ times the original value. (The steady-state error with ramp inputs has decreased to about 11% of that of the original system.) We have essentially accomplished the design objective of increasing the static velocity error coefficient to about 5 sec^{-1}. (If we wish to increase the static velocity error coefficient to exactly 5 sec^{-1}, we can either modify the locations of the pole and zero of the lag network or use the present lag network and choose $K_c = 9.44$. In the latter case, however, the damping ratio of the dominant closed-loop poles is less than 0.5. In the present problem, we may consider the present design as quite acceptable.)

The two other closed-loop poles for the compensated system are found as follows:

$$s_3 = -2.31, \qquad s_4 = -0.137$$

The addition of the lag network increases the order of the system from three to four, adding one additional pole close to the zero of the lag network. Because the added pole at $s = -0.137$ is close to the zero at $s = -0.1$, the effect of this pole on the transient response is small. Since the pole at $s = -2.31$ is very far from the $j\omega$ axis compared with the dominant closed-loop poles, the effect of this pole on the transient response is also small. We may therefore discard, with little error, the closed-loop poles s_3 and s_4. The conclusion is that the two closed-loop poles s_1 and s_2 are truly dominant ones. We can predict a fairly accurate response by considering only the dominant closed-loop poles.

The undamped natural frequency of the compensated system is 0.6 rad/sec. This value is about 10% less than the original value, 0.67 rad/sec. This implies that the transient response of the compensated system is slower than that of the original. It will take a longer time to settle down. If this can be tolerated, the lag compensation as discussed here presents a satisfactory solution to the given design problem.

Finally, note that the crossing points of the root loci of the original and of the compensated systems with the $j\omega$ axis are approximately the same. This means that the compensated system is still stable, even if the open-loop gain is increased by a factor of about 10 over the original critical value.

Lag compensation techniques based on the frequency-response approach. The primary function of a lag network is to provide attenuation in the high-frequency range in order to give a system sufficient phase margin. The phase lag characteristic is of no consequence in lag compensation.

The procedures for designing a lag compensator by the frequency-response approach may be stated as follows: (We assume that the system has unity feedback.)

1. Determine the open-loop gain such that the requirement on the particular error coefficient is satisfied.
2. Using the gain thus determined, draw the Bode diagram of the uncompensated system and determine the phase and gain margins of the uncompensated system
3. If the specifications on the phase and gain margins are not satisfied, then find the frequency point where the phase angle of the open-loop transfer function is equal to $-180°$ plus the required phase margin. The required phase margin is the specified phase margin plus 5° to 12°. (The addition of 5° to 12° compensates for the phase lag of the lag network.) Choose this frequency as the new gain crossover frequency.
4. Choose the corner frequency $\omega = 1/T$ (corresponding to the zero of the lag network) one octave to one decade below the new gain crossover frequency. (If the time constants of the lag network do not become too large, the corner frequency $\omega = 1/T$ may be chosen one decade below the new gain crossover frequency.)
5. Determine the attenuation necessary to bring the magnitude curve down to 0 db at the new gain crossover frequency. Noting that this attenuation is $-20 \log \beta$, determine the value of β. Then the other corner frequency (corresponding to the pole of the lag network) is determined from $\omega = 1/(\beta T)$.

Example 10-4. Consider the system shown in Fig. 10-24. The open-loop transfer function is given by

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

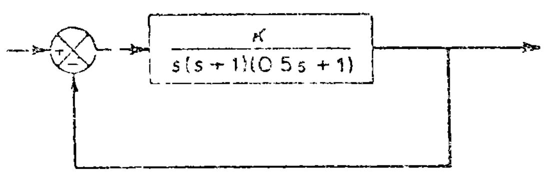


Fig. 10-24. Control system.

It is desired to compensate the system so that the static velocity error coefficient K_v is 5 sec^{-1}, the phase margin is at least 40°, and the gain margin is at least 10 db.

The first step in the design is to adjust the gain K to meet the required static velocity error coefficient. Thus

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)} = K = 5$$

or

$$K = 5$$

With $K = 5$, the system of Fig. 10-24 satisfies the steady-state performance requirement.

We shall next plot the Bode diagram of

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

The magnitude curve and phase-angle curve of $G(j\omega)$ are shown in Fig. 10-25. From this plot, the phase margin is found to be $-20°$, which means that the system is unstable.

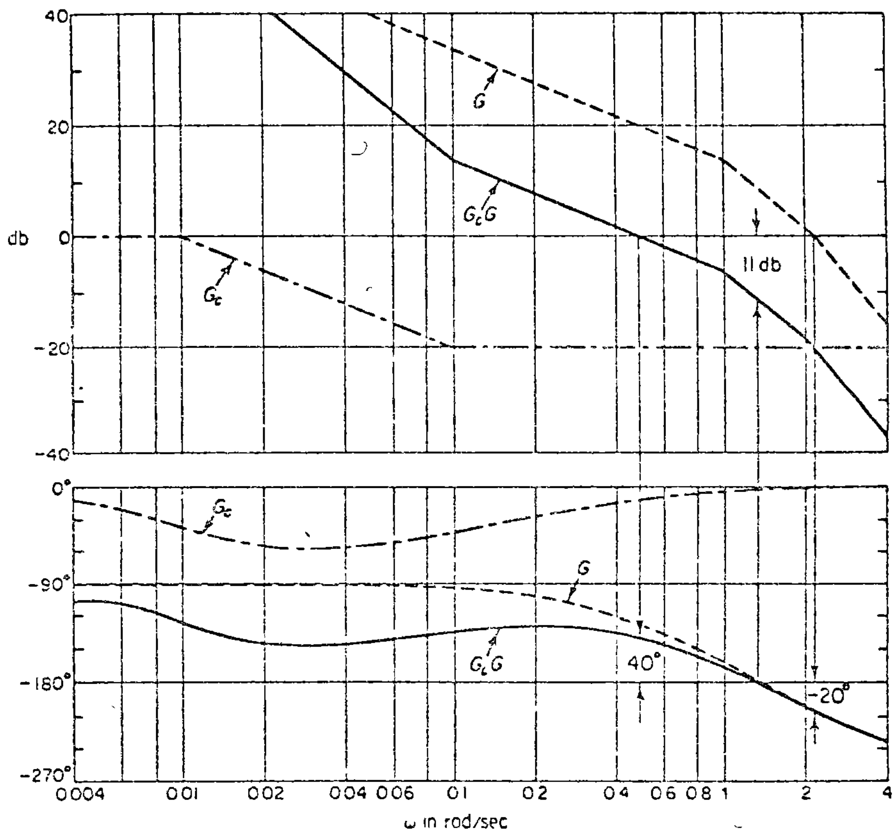


Fig. 10-25. Bode diagrams for the uncompensated system, the compensator, and the compensated system. (G: uncompensated system, G_c: compensator, G_cG: compensated system.)

Lead compensation is rather ineffective in this case. We shall demonstrate the use of lag compensation to meet the required specifications. Noting that the addition of a lag network modifies the phase curve of the Bode diagram, we must allow 5° to 12° to the specified phase margin to compensate for the modification of the phase curve. Since the frequency corresponding to a phase margin of 40° is 0.7 rad/sec, the new gain crossover frequency (of the compensated system) must be chosen near this value. In order to avoid overly large time constants for the lag network, we shall choose the corner frequency

$\omega = 1/T$ (which corresponds to the zero of the lag network) to be 0.1 rad/sec. Since this corner frequency is not too far below the new gain crossover frequency, the modification in the phase curve may not be small. Hence we add about 12° to the given phase margin as an allowance to account for the lag angle introduced by the lag network. The required phase margin is now 52°. The phase angle of the uncompensated open-loop transfer function is $-128°$ at about $\omega = 0.5$ rad/sec. So we choose the new gain crossover frequency to be 0.5 rad/sec. To bring the magnitude curve down to 0 db at this new gain crossover frequency, the lag network must give the necessary attenuation, which, in this case, is -20 db. Hence

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -20$$

or

$$\beta = 10$$

The other corner frequency $\omega = 1/(\beta T)$ (which corresponds to the pole of the lag network) is then determined as

$$\frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/sec}$$

Thus the transfer function of the necessary lag network is given by

$$\frac{1}{10} \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

The open-loop transfer function of the compensated system is

$$G_c(s)G(s) = \frac{5(10s + 1)}{s(100s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

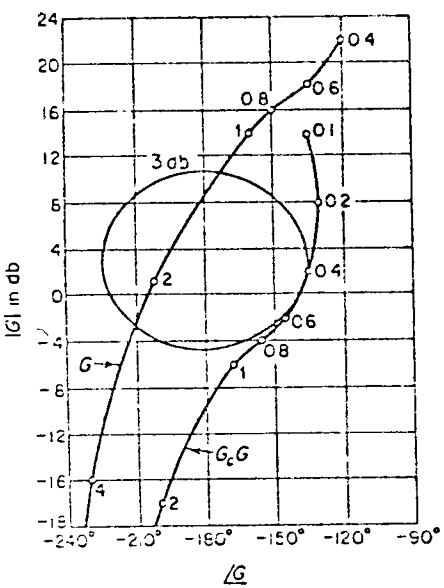


Fig. 10-26 Log magnitude versus phase plots of the uncompensated system and the compensated system (G: uncompensated system, G_cG: compensated system.)

The magnitude and phase-angle curves of $G_c(j\omega)G(j\omega)$ are also shown in Fig. 10-25. Note that the effect on the phase lag of the network is negligible at high frequencies.

The phase margin of the compensated system is about 40°, which is the required value. The gain margin is about 11 db, which is quite acceptable. The static velocity error coefficient is 5 sec^{-1}, as required. The compensated system, therefore, satisfies the requirements on both the steady state and the relative stability.

Note that the new gain crossover frequency is decreased from 2.1 to 0.5 rad/sec. This means that the bandwidth of the system is reduced. Therefore, the speed of transient response of the compensated system will be slower than that of the original system.

To further show the effects of lag compensation, the log-magnitude versus phase plots of the uncompensated system (with $K = 5$) and of the compensated system are shown in Fig. 10-26. The plot of $G(j\omega)$ clearly shows that the uncompensated system is unstable.

The addition of the lag network stabilizes the system. The plot of $G_c(j\omega)G(j\omega)$ is tangent to the $M = 3$ db locus. Thus the resonant peak value M_r is 3 db, or 1.4, and this peak occurs at $\omega = 0.5$ rad/sec.

In comparing the compensated system designed here with that designed in Example 10-3, we note that they are quite close. This, however, may not necessarily be true in other cases. Compensators designed by different methods or by different designers (even using the same approach) may look sufficiently different. Any of the well-designed systems, however, will give similar transient and steady-state performance. The best among many alternatives may be chosen from the economic consideration that the time constants of the lag network should not be too large since the sizes of the resistors and capacitor required are directly related to the magnitudes of the time constants.

A few comments on lag compensation

1. Lag networks are essentially low-pass filters. Therefore, lag compensation permits a high gain at low frequencies (which improves the steady-state error) and reduces gain in the higher critical range of frequencies so as to avoid system instability. Note that in lag compensation, we utilize the attenuation characteristic of the lag network at high frequencies rather than the phase lag characteristic. (The phase lag characteristic is of no use for compensation purposes.)

2. The attenuation due to the lag network will shift the gain crossover frequency to a lower frequency point where the phase margin is acceptable. Thus, the lag network will reduce the bandwidth of the system and will result in slower transient response. [The phase angle curve of $G_c(j\omega)G(j\omega)$ is relatively unchanged near and above the new gain crossover frequency.]

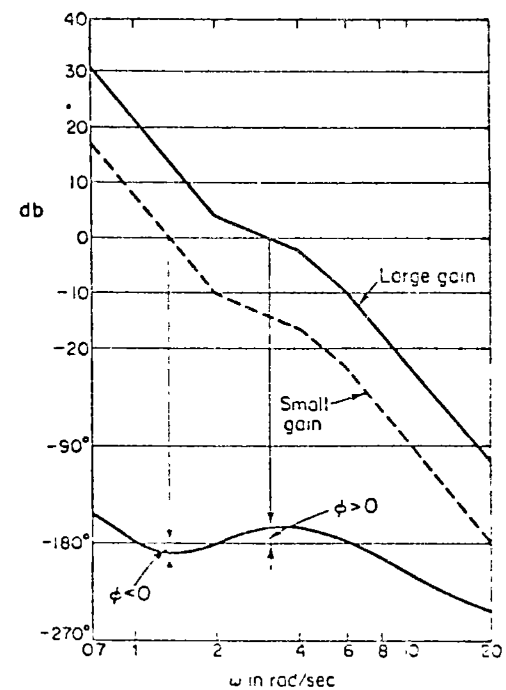


Fig. 10-27. Bode diagram of a conditionally stable system.

3. Since the lag compensator tends to integrate the input signal, it acts approximately as a proportional-plus-integral controller. Because of this, a lag compensated system tends to become less stable. In order to avoid this undesirable feature, the time constant T should be made sufficiently larger than the largest time constant of the system.

4. Conditional stability may occur when a system having saturation or limiting is compensated by use of a lag compensator. When the saturation or limiting takes place in the system, it reduces the effective loop gain. Then the system becomes less stable, and even unstable operation may result, as shown in Fig. 10-27. To avoid this, the system must be designed so that the effect of lag compensation becomes significant only when the amplitude of the input to the saturating element is small. (This can be done by means of minor feedback-loop compensation.)

-5 LAG-LEAD COMPENSATION

Lead compensation increases the bandwidth, which improves the speed of sponse, and also reduces the amount of overshoot. However, improvement in ady state performance is rather small. Lag compensation results in a large provement in steady-state performance but results in slower response due to the duced bandwidth.

If improvements in both transient and steady-state response (namely, large creases in the gain and bandwidth) are desired, then both a lead network and a g network may be used simultaneously. Rather than introducing both a lead twork and lag network as separate elements, however, it is economical to use a ngle lag-lead network. The lag-lead network combines the advantages of the lag d lead networks.

The lag-lead network possesses two poles and two zeros. Therefore, such compensation increases the order of the system by two, unless cancellation of a pole d zero occurs in the compensated system.

Lag-lead networks. Figure 10-28 shows an electrical lag-lead network. For a nusoidal input, the output is sinusoidal with a phase shift which is a function the input frequency. This phase angle varies from lag to lead as the frequency is

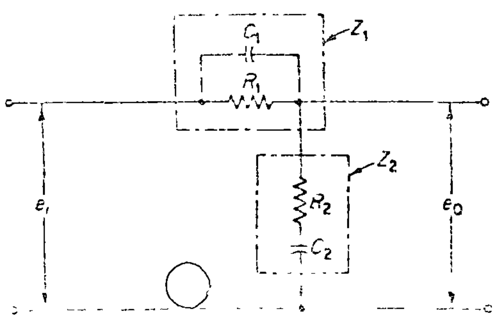


Fig. 10-28. Electrical lag-lead network

increased from zero to infinity. Note that phase lead and lag occur in different frequency bands.

Let us obtain the transfer function of the lag-lead network. The complex impedances Z_1 and Z_2 are

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \qquad Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2s}$$

The transfer function between $E_0(s)$ and $E_i(s)$ is

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + R_1C_2s}$$

The denominator of this transfer function can be factored into two real terms. Let us define

$$R_1C_1 = T_1, \qquad R_2C_2 = T_2$$

$$R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \qquad (\beta > 1)$$

Then $E_0(s)/E_i(s)$ can be simplified to

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)(\beta T_2s + 1)}$$

$$= \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Characteristics of lag-lead networks. Consider the transfer function of the lag-lead network

$$\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right)$$

The first term

$$\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{T_1s + 1}{\frac{T_1}{\beta}s + 1}\right) \qquad (\beta > 1)$$

produces the effect of the lead network and the second term

$$\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} = \beta\left(\frac{T_2s + 1}{\beta T_2s + 1}\right) \qquad (\beta > 1)$$

produces the effect of the lag network.

Figure 10-29 shows the polar plot of the lag-lead network. It can be seen that r $0 < \omega < \omega_1$ the network acts as a lag network, while for $\omega_1 < \omega < \infty$ it acts as a lead network. The frequency ω_1 at which the phase angle is zero is

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

Figure 10-30 shows the Bode diagram of a lag-lead network when $\beta = 10$ and $T_2 = 10T_1$. Note that the magnitude curve has the value 0 db at the low-frequency and high-frequency regions. This is because the transfer function of the lag-lead network as a whole does not contain β as a factor.

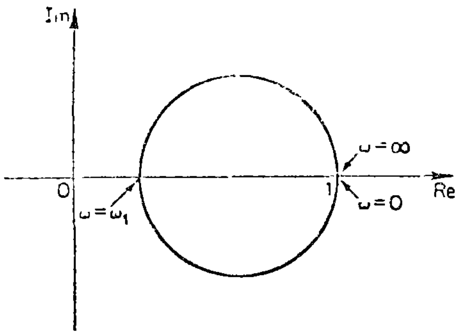


Fig. 10-29. Polar plot of a lag-lead network.

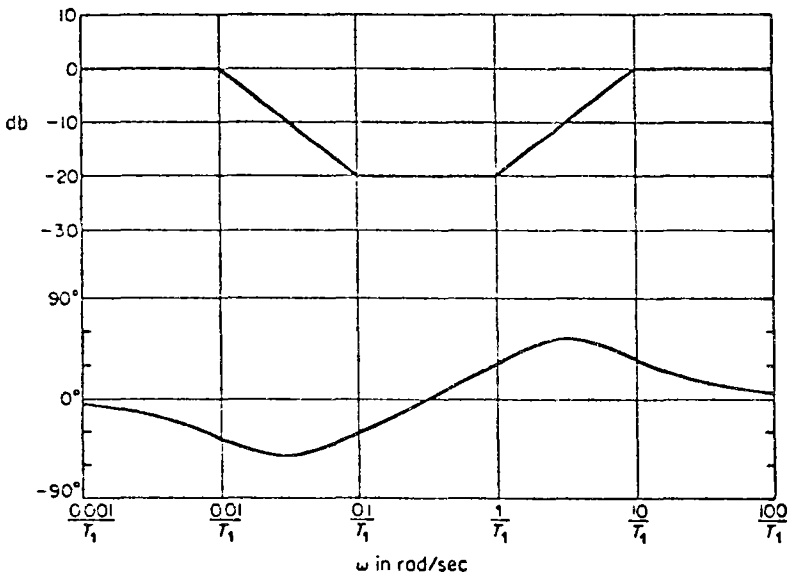


Fig. 10-30. Bode diagram of a lag-lead network. $(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)/\{[(j\omega T_1/\beta) + 1](j\omega\beta T_2 + 1)\}$ with $\beta = 10$ and $T_2 = 10T_1$.

Lag-lead compensation techniques based on the root-locus approach. The procedures for designing a lag-lead compensator may be stated as follows:

1. From the given performance specifications, determine the desired location for the dominant closed-loop poles.

2. In order to have the dominant closed-loop poles at the desired locations, calculate the angle contribution ϕ needed from the phase lead portion of the lag-lead network.

3. Using the following transfer function of the lag-lead compensator:

$$G_c(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right)K_c$$

determine the constant K_c from the requirement on the particular error coefficient specified in the design problem.

4. For the lag-lead compensator, we choose T_2 sufficiently large so that

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}}\right|$$

is approximately unity, where $s = s_1$ is one of the dominant closed-loop poles. Determine the values of T_1 and β from the requirements that

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}}\right| |K_c G(s_1)| = 1$$

$$\angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} = \phi$$

5. Using the value of β just determined, choose T_2 so that

$$\left|\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}}\right| \doteq 1$$

$$0 < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 3^\circ$$

The value of βT_2, the largest time constant of the lag-lead network, should not be too large to be physically realized.

Example 10-5. Consider the control system shown in Fig. 10-31. The feedforward transfer function is

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0.5)}$$

This system has closed-loop poles at

$$s = -0.25 \pm j1.98$$

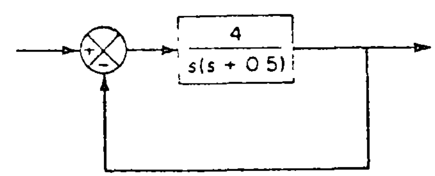


Fig. 10-31. Control system.

The damping ratio is 0.125, the undamped natural frequency is 2 rad/sec, and the static velocity error coefficient is 8 sec^{-1}.

It is desired to make the damping ratio of the dominant closed-loop poles equal to 0.5 and to increase the undamped natural frequency to 5 rad/sec and the static velocity error coefficient to 50 sec^{-1}. Design an appropriate compensator to meet all the performance specifications.

From the performance specifications, the dominant closed-loop poles must be

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

Since

$$\left/\!\underline{\frac{4}{s(s+0.5)}}\right|_{s=-2.50+j4.33} = -235°$$

the phase lead portion of the lag-lead network must contribute 55° so that the root locus passes through the desired location of the dominant closed-loop poles.

The lag-lead compensator has the transfer function

$$G_c(s) = \left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)K_c$$

Thus the compensated system will have the transfer function

$$G_c(s)G(s) = \left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)K_cG(s)$$

The static velocity error coefficient therefore becomes

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_cG(s)$$

The requirement on the static velocity error coefficient is $K_v = 50$ sec^{-1}. Thus

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s\to 0} sK_cG(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s4K_c}{s(s+0.5)} \\ &= 8K_c = 50 \end{aligned}$$

Hence K_c is

$$K_c = 6.25$$

Therefore, the compensated system will have the open-loop transfer function

$$G_c(s)G(s) = \left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)\frac{25}{s(s+0.5)}$$

Since we choose T_2 large enough that

$$\left|\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right|_{s=-2.5+j4.33} \doteq 1$$

if we require that the closed-loop poles lie at $s = -2.5 \pm j4.33$, the magnitude condition becomes

$$|G_c(s)G(s)|_{s=-2.5+j4.33} = \left|\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right|\left|\frac{25}{s(s+0.5)}\right|_{s=-2.5+j4.33} = \left|\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right|\frac{5}{4.77} = 1$$

and the angle condition becomes

$$\left/\!\underline{\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}}\right|_{s=-2.5+j4.33} = 55°$$

It is a simple matter to graphically determine the values of T_1 and β that satisfy these magnitude and angle conditions. Referring to Fig. 10-32, we can easily locate points A and B so that

$$\underline{/APB} = 55°, \qquad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{4.77}{5}$$

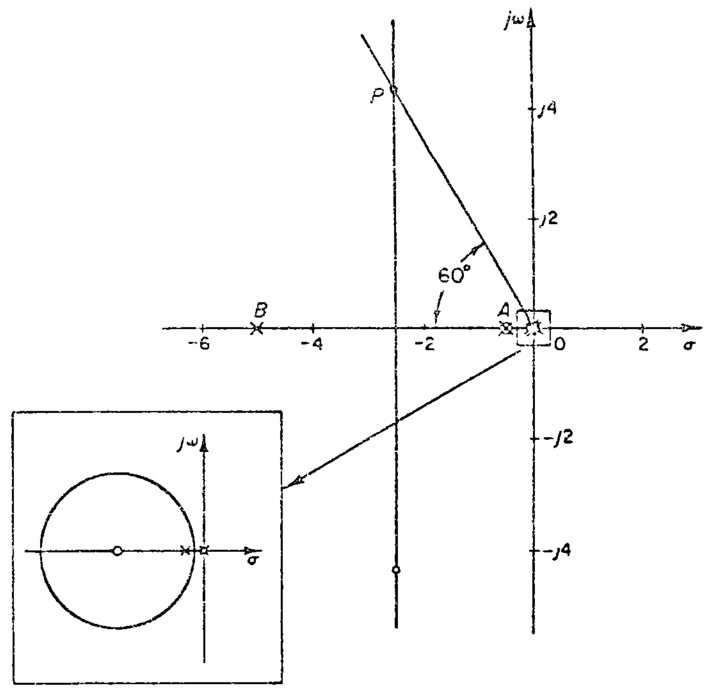


Fig. 10-32. Root-locus plot of the compensated system.

Graphically, from Fig. 10-32, we obtain

$$\overline{AO} = 0.5, \qquad \overline{BO} = 5$$

Hence

$$-\frac{1}{T_1} = -0.5, \qquad -\frac{\beta}{T_1} = -5$$

Thus

$$T_1 = 2, \qquad \beta = 10$$

Therefore, the phase lead portion of the lag-lead network becomes

$$\frac{s + 0.5}{s + 5}$$

For the phase lag portion of the lag-lead network, it is required that

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{10T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} \doteq 1$$

$$0 < \angle \left. \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{10T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} < 3^\circ$$

To satisfy these relationships and, at the same time, to assure that the largest time constant ($10T_2$) of the lag-lead network is not too large to be physically realized, we choose

$$T_2 = 10$$

Then the transfer function of the lag-lead compensator is

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 0.5}{s + 5}\right)\left(\frac{s + 0.1}{s + 0.01}\right)(6.25)$$

and the compensated system will have the open-loop transfer function

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 0.5)(s + 0.1)25}{(s + 5)(s + 0.01)s(s + 0.5)} = \frac{25(s + 0.1)}{s(s + 5)(s + 0.01)}$$

Because of the cancellation of the $(s + 0.5)$ terms, the compensated system is a third-order system. (Mathematically this cancellation is exact, but practically such cancellation will not be exact because some approximations are usually involved in deriving the mathematical model of the system and, as a result, the time constants are not precise.) The root-locus plot of the compensated system is shown in Fig. 10-32.

Because the angle contribution of the phase lag portion of the lag-lead network is quite small, there is no appreciable change in the location of the dominant closed-loop poles from the desired location, $s = -2.5 \pm j4.33$. Therefore, the compensated system meets all the required performance specifications. The third closed-loop pole of the compensated system is located at $s = -0.102$ Since this closed-loop pole is very close to the zero at $s = -0.01$, the effect of this pole on the response is relatively small. (Note that, in general, if a pole and a zero lie close to each other on the negative real axis near the origin, then such a pole-zero combination will yield a long tail of small amplitude in the transient response.)

The unit-step response curves and unit-ramp response curves before and after compensation are shown in Fig. 10-33.

Example 10-6 Consider the control system of Example 10-5. Suppose that the static velocity error coefficient is to be 80 sec^{-1}. The other specifications remain the same as

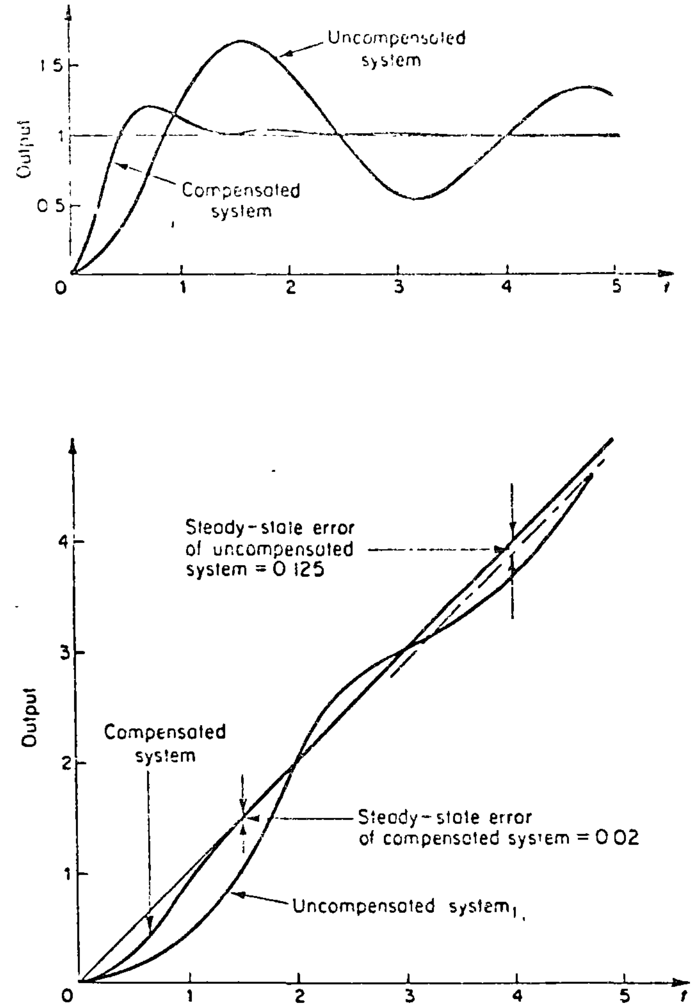


Fig. 10-33. Transient response curves for the uncompensated system and the compensated system. (a) Unit-step response curves; (b) unit-ramp response curves.

those given in Example 10-5. Namely, the damping ratio and the undamped natural frequency of the dominant closed-loop poles are given as 0.5 and 5, respectively. Design an appropriate lag-lead compensator.

The requirement on the static velocity error coefficient is that $K_v = 80$ sec^{-1}. This results in

$$K_c = 10$$

The time constant T_1 and the value of β are determined from

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \left| \frac{40}{s(s + 0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \frac{5}{3} = 1$$

$$\angle \left. \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 55^\circ$$

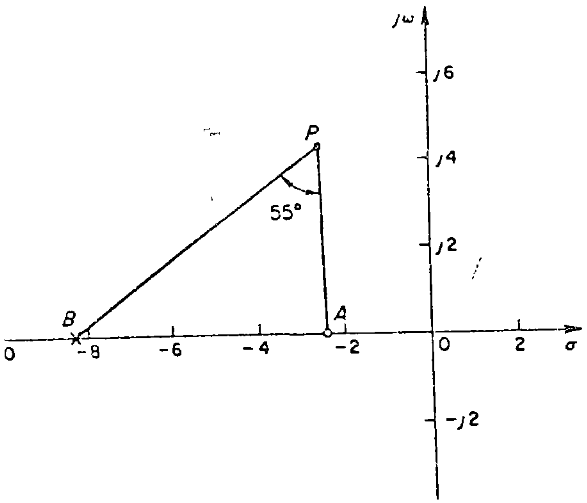


Fig. 10-34. Determination of the desired pole-zero location.

ferr... to Fig. 10-34, we can easily locate points A and B so that

$$\underline{/APB} = 55°, \qquad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{3}{5}$$

... result is

$$\overline{AO} = 2.4, \qquad \overline{BO} = 8.3$$

$$T_1 = \frac{1}{2.4} = 0.416, \qquad \beta = 8.3T_1 = 3.45$$

e phase lead portion of the lag-lead network thus becomes

$$\frac{s + 2.4}{s + 8.3}$$

For the phase lag portion, we may choose

$$T_2 = 10$$

us, the lag-lead compensator becomes

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 2.4}{s + 8.3}\right)\left(\frac{s + 0.1}{s + 0.029}\right)(10)$$

e compensated system will have the open-loop transfer function

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 2.4)(s + 0.1)40}{(s + 8.3)(s + 0.029)s(s + 0.5)}$$

o cancellation occurs in this case, and the compensated system is of fourth order. ecause the angle contribution of the phase lag portion of the lag-lead network is quite all, the dominant closed-loop poles are located very near the desired location.

The two other closed-loop poles are obtained as

$$s = -0.09, \qquad s = -3.74$$

nce the closed-loop pole at $s = -0.09$ and zero at $s = -0.1$ almost cancel each other, e effect of this closed-loop pole is very small. The remaining closed-loop pole ($s =$ -3.7...) is relatively close to the zero at $s = -2.4$, and the effect of this closed-loop pole ... the transient response will again be relatively small. The poles at $s = -2.5 \pm j4.33$

Lag-lead compensation based on the frequency-response approach. The design of a lag-lead compensator by the frequency-response approach is based on the combination of the design techniques discussed under lead compensation and lag compensation. The value of α for the lead network must be equal to the reciprocal of the value of β for the lag network. If α is chosen to be $1/\beta$, then we may simply combine the individually designed lead and lag compensators to produce the single lag-lead compensator.

The phase lead portion of the lag-lead network alters the frequency-response curve by adding phase lead angle and increasing the phase margin at the gain crossover frequency.

The phase lag portion of the lag-lead network provides attenuation near and above the gain crossover frequency and thereby allows an increase of gain at the low-frequency range to improve the steady-state performance.

We shall illustrate the details of the procedures for designing a lag-lead compensator by an example.

Example 10-7. Consider the unity-feedback system whose open-loop transfer function is

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

It is desired that the static velocity error coefficient be 10 sec^{-1}, the phase margin be 50°, and the gain margin be 10 db or more.

From the requirement on the static velocity error coefficient, we obtain

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sK}{s(s + 1)(s + 2)} = 10$$

Hence,

$$K = 20$$

We shall next draw the Bode diagram of the uncompensated system with $K = 20$, as shown in Fig. 10-35. The phase margin of the uncompensated system is found to be $-32°$, which indicates that the uncompensated system is unstable.

The next step in the design of a lag-lead compensator is to choose a new gain crossover frequency. From the phase angle curve for $G(j\omega)$, we notice that $\underline{/G(j\omega)} = -180°$ at $\omega = 1.5$ rad/sec. It is convenient to choose the new gain crossover frequency to be 1.5 rad/sec so that the phase lead angle required at $\omega = 1.5$ rad/sec is about 50°, which is quite possible by use of a single lag-lead network.

Once we choose the gain crossover frequency to be 1.5 rad/sec, we can determine the corner frequency of the phase lag portion of the lag-lead network. Let us choose the corner frequency $\omega = 1/T_2$ (which corresponds to the zero of the phase lag portion of the network) to be one decade below the new gain crossover frequency, or at $\omega = 0.15$ rad/sec. Let us choose

$$\beta = 10$$

Then the corner frequency $\omega = 1/\beta T_2$ (which corresponds to the pole of the phase lag portion of the network) becomes $\omega = 0.015$ rad/sec. The transfer function of the phase lag portion of the lag-lead network then becomes

$$\frac{s + 0.15}{\ldots} = 10\left(\frac{6.67s + 1}{\ldots}\right)$$

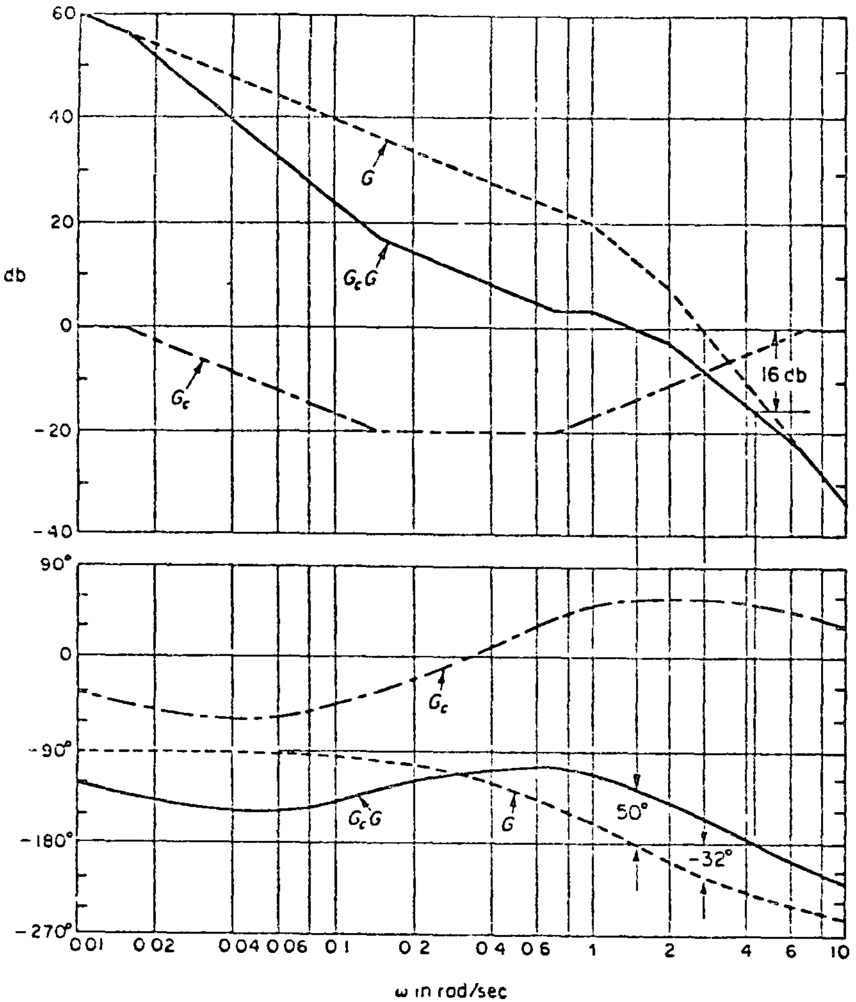


Fig. 10-35. Bode diagrams for the uncompensated system, the compensator, and the compensated system. (G: uncompensated system, G_c: compensator, G_cG: compensated system.)

The phase lead portion can be determined as follows: Since the new gain crossover frequency is $\omega = 1.5$ rad/sec, from Fig. 10-35, $G(j1.5)$ is found to be 13 db. Hence if the lag-lead network contributes -13 db at $\omega = 1.5$ rad/sec, then the new gain crossover frequency is as desired. From this requirement, it is possible to draw a straight line of slope 20 db/decade, passing through the point (-13 db, 1.5 rad/sec). The interesections of this line and the 0-db line and -20-db line determine the corner frequencies. Thus the corner frequencies for the lead potion are $\omega = 0.7$ rad/sec and $\omega = 7$ rad/sec. Thus, the transfer function of the lead portion of the lag-lead network becomes

$$\frac{s+0.7}{s+7} = \frac{1}{10}\left(\frac{1.43s+1}{0.143s+1}\right)$$

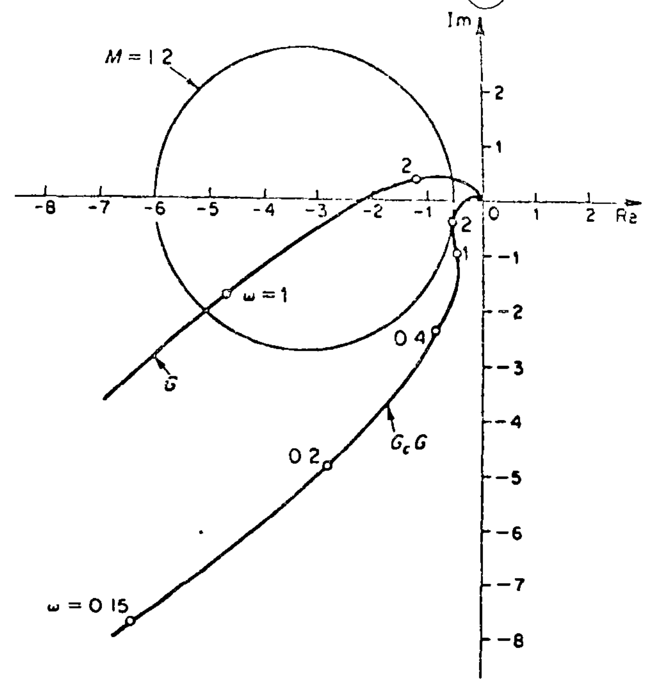


Fig. 10-36. Polar plots of the uncompensated system and the compensated system. (G: uncompensated system, G_cG: compensated system.)

Combining the transfer functions of the lag and lead portions of the network, we obtain the transfer function of the lag-lead compensator

$$\left(\frac{s+0.7}{s+7}\right)\left(\frac{s+0.15}{s+0.015}\right) = \left(\frac{1.43s+1}{0.143s+1}\right)\left(\frac{6.67s+1}{66.7s+1}\right)$$

The magnitude and phase-angle curves of the lag-lead compensator just designed are shown in Fig. 10-35. The open-loop transfer function of the compensated system is

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= \frac{(s+0.7)(s+0.15)20}{(s+7)(s+0.015)s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{10(1.43s+1)(6.67s+1)}{s(0.143s+1)(66.7s+1)(s+1)(0.5s+1)} \end{aligned} \tag{10-4}$$

The magnitude and phase-angle curves of the system of Eq. (10-4) are also shown in Fig. 10-35. The phase margin of the compensated system is 50°, the gain margin is 16 db, and the static velocity error coefficient is 10 sec^{-1}. All the requirements are therefore met, and the design has been completed.

Figure 10-36 shows the polar plots of the uncompensated system and compensated system. The $G_c(j\omega)G(j\omega)$ locus is tangent to the $M = 1.2$ circle at about $\omega = 2$ rad/sec. Clearly, this indicates that the compensated system has satisfactory relative stability. The bandwidth of the compensated system is slightly larger than 2 rad/sec.

10-6 SUMMARY OF CONTROL SYSTEM COMPENSATION METHODS

In Sections 10-3 through 10-5, we have presented detailed procedures for designing lead, lag, and lag-lead compensators by use of simple examples. A satisictory design of a compensator for a given system will require the creative application of these basic design principles (Remember that there is a wealth of literature n the design of complex control systems, and the reader may wish to refer to them or any specific problems he might face.)

Comparison of lead, lag, and lag-lead compensation.

1. Lead compensation achieves the desired result through the merits of its phase lead contribution; whereas lag compensation accomplishes the result through the merits of its attenuation property at high frequencies.

2. In the s domain, lead compensation enables us to reshape the root locus and thus provide the desired closed-loop poles. In the frequency domain, lead compensation increases the phase margin and bandwidth. Large bandwidth means reduction in the settling time. The bandwidth of a system with lead compensation is always greater than that with lag compensation. Therefore, if large bandwidth or fast response is desired, lead compensation should be employed. If, however, noise signals are present, then a large bandwidth may not be desirable since it makes the system more susceptible to noise signals because of increase in the high-frequency gain. In such a case, lag compensation should be used.

3. Lag compensation improves steady-state accuracy; however, it reduces the bandwidth. If the reduction of bandwidth is too excessive, the compensated system will exhibit sluggish response. If both fast response and good static accuracy are desired, a lag-lead compensator must be employed.

4. Lead compensation requires an additional increase in gain to offset the attenuation inherent in the lead network. This means that lead compensation will require a larger gain than that required by lag compensation. (A larger gain, in most cases, implies larger space, greater weight, and higher cost.)

5. Although a large number of practical compensation tasks can be accomplished with lead, lag, or lag-lead networks, for complicated systems, simple compensation by use of these networks may not yield satisfactory results. Then different compensators having different pole-zero configurations must be employed. Note that once the pole-zero configuration of a compensator has been specified, the necessary passive network may be realized by use of standard network synthesis techniques.

Cancellation of undesirable poles. Since the transfer function of elements in ascade is the product of their individual transfer functions, it is possible to cancel ome undesirable poles or zeros by placing a compensating element in cascade, ith its poles and zeros being adjusted to cancel the undesirable poles or zeros of e original system. For example, a large time constant T_1 may be canceled by use f the lead network $(T_1 s + 1)/(T_2 s + 1)$ as follows:

$$\left(\frac{1}{T_1 s + 1}\right)\left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}\right) = \frac{1}{T_2 s + 1}$$

[illegible] much smaller than T_1, [illegible] can effectively eliminate the large time constant

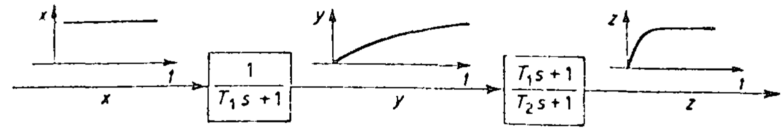


Fig. 10-37. Step-response curves showing the effect of canceling a large time constant.

T_1. Figure 10-37 shows the effect of canceling a large time constant in step transient response.

If an undesirable pole in the original system lies in the right-half s plane, this compensation scheme should not be used since although mathematically it is possible to cancel the undesirable pole with an added zero, exact cancellation is physically impossible because of inaccuracies involved in the location of the poles and zeros. A pole in the right-half s plane not exactly canceled by the compensator zero will eventually lead to unstable operation because the response will involve an exponential term which increases with time.

It should be noted that the ideal control system is not the one which has a transfer function of unity. Physically, such a control system cannot be built since it cannot instantaneously transfer energy from the input to the output. In addition, since noise is almost always present in one form or another, a system with a unity transfer function is not desirable. A desired control system, in many practical cases, may have one set of dominant complex-conjugate closed-loop poles with a reasonable damping ratio and undamped natural frequency. The determination of the significant part of the closed-loop pole-zero configuration, such as the location of the dominant closed-loop poles, is based on the specifications that give the required system performance.

Cancellation of undesirable complex-conjugate poles. If the transfer function of a plant contains one or more pairs of complex-conjugate poles, then a lead, lag, or lag-lead compensator may not give satisfactory results. In such a case, a network which has two zeros and two poles may prove to be useful. If the zeros are chosen so as to cancel the undesirable complex-conjugate poles of the plant, then we can essentially replace the undesirable poles by acceptable ones. That is, if the undesirable complex-conjugate poles are in the left-half s plane and are in the form

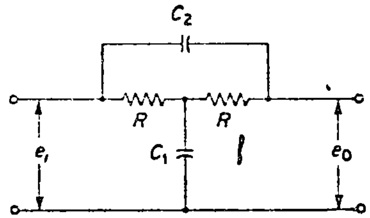
$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}$$

then the insertion of a compensating network having the transfer function

$$\frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}$$

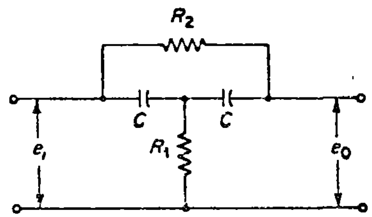
will result in an effective change of the undesirable complex-conjugate poles to acceptable ones. Note that even though the cancellation may not be exact, the compensated system will exhibit better response characteristics. (As stated earlier, this approach cannot be used if the undesirable complex-conjugate poles are in the right-half s plane.)

Familiar networks consisting only of *RC* components whose transfer functions possess two zeros and two poles are the bridged-*T* networks. Examples of bridged-*T* networks and their transfer functions are shown in Fig. 10-38.



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{RC_1RC_2s^2 + 2RC_2s + 1}{RC_1RC_2s^2 + (RC_1 + 2RC_2)s + 1}$$

(a)



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1CR_2Cs^2 + 2R_1Cs + 1}{R_1CR_2Cs^2 + (R_2C + 2R_1C)s + 1}$$

(b)

Fig. 10-38. Bridged-*T* networks.

Feedback compensation. Tachometer feedback is very commonly used in positional servomechanisms. In Section 6-4, we discussed a simple design problem using tachometer feedback; therefore, we shall not repeat it here.

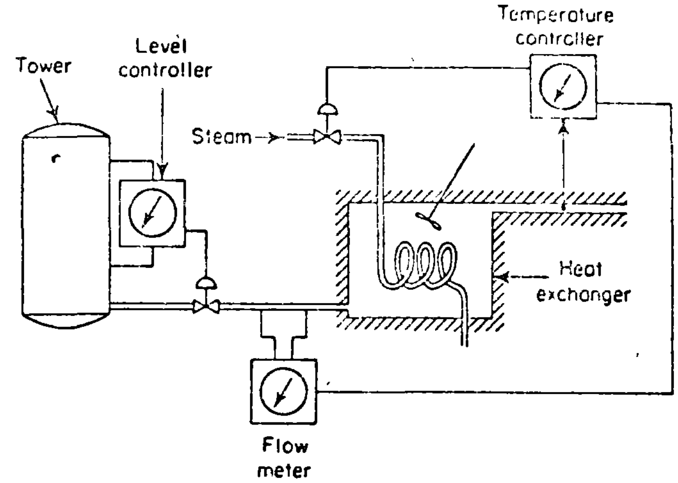
A tachometer is one of the so-called rate feedback devices. Another common rate feedback device is the rate gyro. Rate gyros are commonly used in aircraft autopilot systems.

Eliminating the undesirable effects of disturbances by feedforward control. If disturbances are measurable, feedforward control is a useful method of canceling their effects upon the system output. By feedforward control, we mean control of undesirable effects of measurable disturbances by approximately compensating for them before they materialize. This is advantageous because, in a usual feedback control system, the corrective action starts only after the output has been affected.

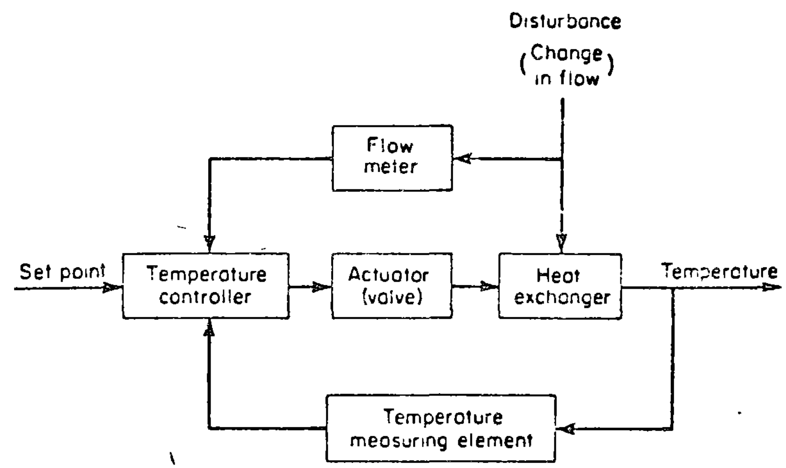
As an example, consider the temperature control system shown in Fig. 10-39 (a). In this system, it is desired to maintain the outlet temperature at some constant value. The disturbance in this system is a change in the inflow rate, which depends on the level in the tower. The effect of a change in this rate cannot be sensed immediately at the output due to the time lags involved in the system.

The temperature controller, which controls the heat input to the heat exchanger, will not act until an error has developed. If the system involves large time lags, it will take some time before any corrective action takes place. In fact, when the error shows up after a certain delay time and the corrective action starts, it may be too late to keep the outlet temperature within the desired limits.

If feedforward control is provided in such a system, then as soon as a change in the inflow occurs, a corrective measure will be taken simultaneously, by adjusting the heat input to the heat exchanger. This can be done by feeding both the signal from the flowmeter and the signal from the temperature-measuring element to the temperature controller.



(a)



(b)

Fig. 10-39. (a) Temperature control system; (b) block diagram.

Feedforward control can minimize the transient error, but since feedforward control is open-loop control, there are limitations to its functional accuracy. Feedforward control will not cancel the effects of unmeasurable disturbances under normal operating conditions. It is, therefore, necessary that a feedforward control system include a feedback loop, as shown in Figs. 10-39 (a) and (b).

Essentially, feedforward control minimizes the transient error caused by measurable disturbances, while feedback control compensates for any imperfections in the functioning of the feedforward control and provides for corrections for unmeasurable disturbances.

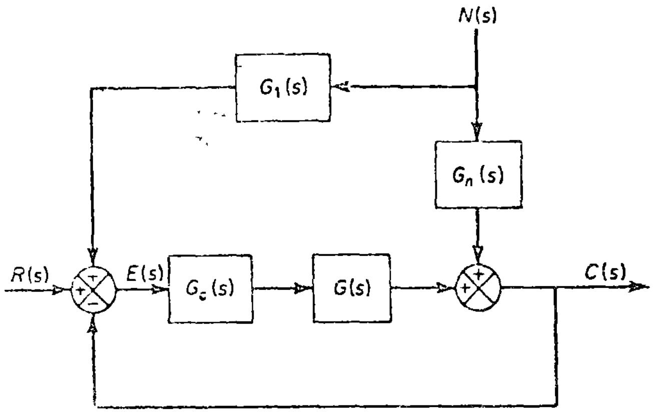


Fig. 10-40. Control system.

Feedforward control of a plant. Consider the system shown in Fig. 10-40. Suppose that the plant transfer function $G(s)$ and disturbance transfer function $G_n(s)$ are known. We shall illustrate a method for determining a suitable controller transfer function $G_c(s)$ and disturbance feedforward transfer function $G_1(s)$. Since the output $C(s)$ is given by

$$C(s) = G_c(s)G(s)E(s) + G_n(s)N(s)$$

where

$$E(s) = R(s) - C(s) + G_1(s)N(s)$$

we obtain

$$C(s) = G_c(s)G(s)[R(s) - C(s)] + [G_c(s)G(s)G_1(s) + G_n(s)]N(s)$$

The effects of $N(s)$ can be eliminated if $G_c(s)$ is chosen so that

$$G_c(s)G(s)G_1(s) + G_n(s) = 0$$

or

$$G_1(s) = -\frac{G_n(s)}{G_c(s)G(s)} \tag{10-5}$$

By properly designing the controller transfer function $G_c(s)$ (as discussed in Sections 10-3 through 10-5), the closed-loop control system can be assured desired performance. Once $G_c(s)$ is determined, then the disturbance feedforward transfer function $G_1(s)$ can be obtained from Eq. (10-5).

Concluding comments. In the design examples presented in this chapter, we have been primarily concerned only with the transfer functions of compensators. In actual design problems, we must choose the hardware. Thus we must satisfy additional design constraints such as cost, size, weight, and reliability.

The system designed may meet the specifications under normal operating conditions but may deviate considerably from the specifications when environmental changes are considerable. Since the changes in the environment affect the gain and time constants of the system, it is necessary to provide automatic or manual means to adjust the gain to compensate for such environmental changes, for nonlinear effects which were not taken into account in the design, and also to compensate

for manufacturing tolerances from unit to unit in the production of system components. (The effects of manufacturing tolerances are suppressed in a closed-loop system; therefore, the effects may not be critical in closed-loop operation but critical in open-loop operation.) In addition to this, the designer must remember that any system is subject to small variations due mainly to the normal deterioration of the system.

Example Problems and Solutions

PROBLEM A-10-1. Show that the lead network and lag network inserted in cascade in an open loop acts as proportional-plus-derivative control (in the region of small ω) and proportional-plus-integral control (in the region of large ω), respectively.

Solution. In the region of small ω, the polar plot of the lead network is approximately the same as that of the proportional-plus-derivative controller. This is shown in Fig. 10-41 (a).

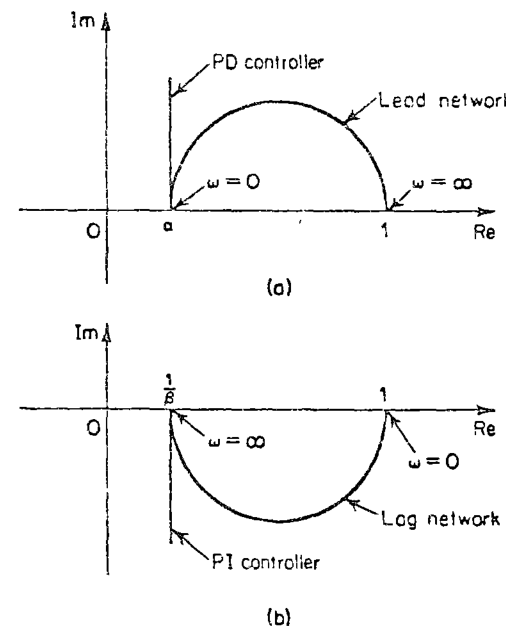


Fig. 10-41. (a) Polar plots of a lead network and a proportional-plus-derivative controller; (b) polar plots of a lag network and a proportional-plus-integral controller.

Similarly, in the region of large ω, the polar plot of the lag network approximates the proportional-plus-integral controller, as shown in Fig. 10-41 (b).

PROBLEM A-10-2. If the open-loop transfer function $G(s)$ involves lightly damped complex-conjugate poles, then more than one M locus may be tangent to the $G(j\omega)$ locus.

Consider the unity-feedback system whose open-loop transfer function is

$$G(s) = \frac{9}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)} \tag{10-6}$$

Draw the Bode diagram for this open-loop transfer function. Draw also the log-magni-

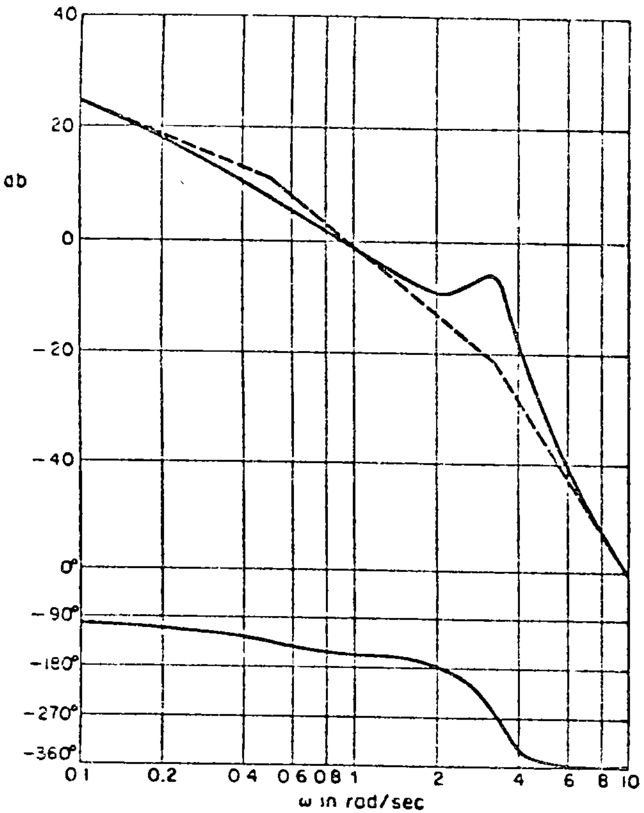


Fig. 10-42. Bode diagram of $G(j\omega)$ given by Eq. (10-6).

tude versus phase plot and show that two M loci are tangent to the $G(j\omega)$ locus. Finally, plot the Bode diagram for the closed-loop transfer function.

Solution. Figure 10-42 shows the Bode diagram of $G(j\omega)$. Figure 10-43 shows the log-magnitude versus phase plot of $G(j\omega)$. It is seen that the $G(j\omega)$ locus is tangent to the $M = 8$ db locus at $\omega = 0.97$ rad/sec and it is tangent to $M = -4$ db locus at $\omega = 2.8$ rad/sec.

Figure 10-44 shows the Bode diagram of the closed-loop transfer function. The closed-loop frequency-response curves show two resonant peaks. Note that such a case occurs when the closed-loop transfer function involves the product of two lightly damped second-order terms and the two corresponding resonant frequencies are sufficiently separated from each other. As a matter of fact, the closed-loop transfer function of this system can be written

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$= \frac{9}{(s^2 + 0.487s + 1)(s^2 + 0.613s + 9)}$$

Clearly, the closed-loop transfer function is a product of two lightly damped second-order terms (the damping ratios are 0.24 and 0.1), and the two resonant frequencies are sufficiently separated.

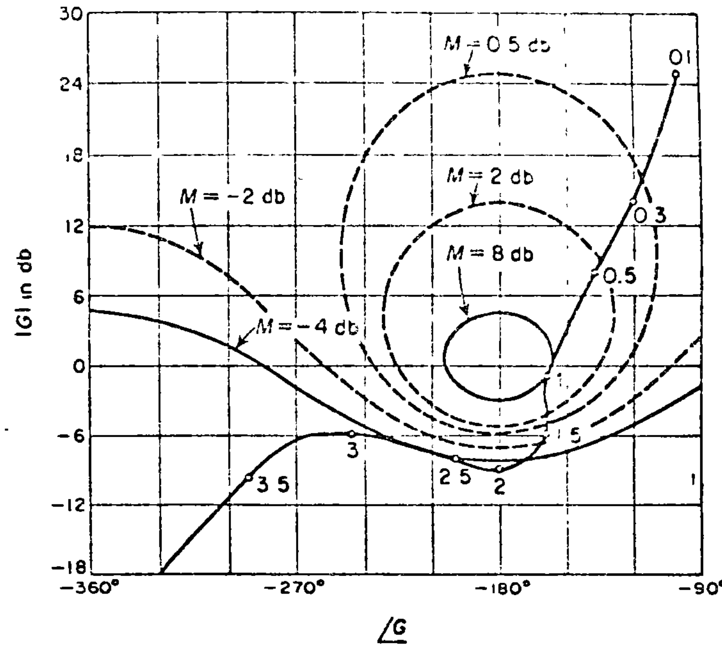


Fig. 10-43. Log-magnitude versus phase plot of $G(j\omega)$ given by Eq. (10-6).

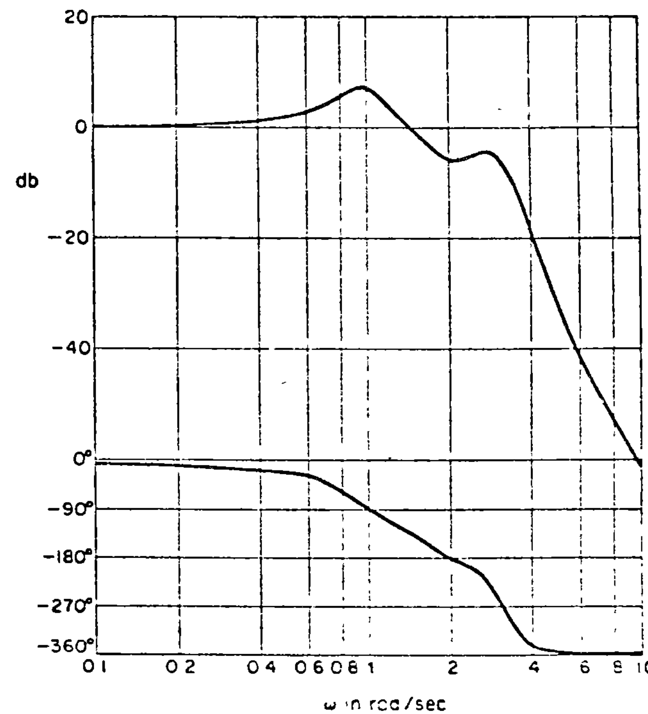


Fig. 10-44. Bode diagram of $G(j\omega)/[1 + G(j\omega)]$ where $G(j\omega)$ is given by Eq. (10-6).

PROBLEM A-10-3. Consider the system shown in Fig. 10-45. Determine the values of the amplifier gain K and the velocity feedback gain K_h so that the following specifications are satisfied:

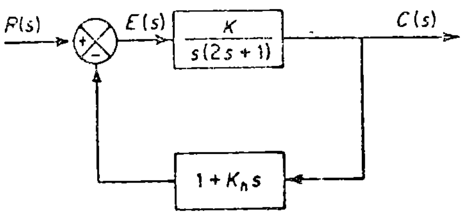


Fig. 10-45. Control system.

1. damping ratio of the closed-loop poles is 0.5
2. settling time ≤ 2 sec
3. velocity error coefficient $K_v \geq 50$ sec^{-1}
4. $0 < K_h < 1$

Solution. The specification on the damping ratio requires that the closed-loop poles lie on lines at 60° in the left-half s plane. The specification on the settling time can be written in terms of the real part of the complex-conjugate closed-loop poles as

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \leq 2 \text{ sec}$$

or

$$\sigma \geq 2$$

Hence, the closed-loop poles must lie on the heavy lines AB and CD in the left-half s plane, as shown in Fig. 10-46.

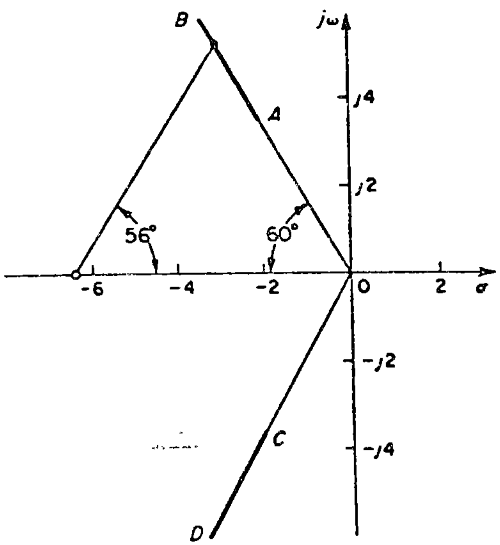


Fig. 10-46. Possible locations for the closed-loop poles in the s plane for the system of Problem A-10-3.

Since the velocity error coefficient K_v is defined by

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$$

we obtain

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(1 + K_h s)}{s(2s + 1)} = K$$

From the given specification on the velocity error coefficient, we obtain

$$K \geq 50$$

For this system, the open-loop poles are at $s = 0$ and $s = -\frac{1}{2}$. The open-loop zero is at $s = -1/K_h$, where K_h is an undetermined constant. First, let the closed-loop poles be $-2 \pm j3.4$ (points A and C in Fig. 10-46). The sum of the angles at the chosen closed-loop pole location with the open-loop poles is $120° + 115° = 235°$. Thus we need a 55° contribution from the zero, so that the total sum is $-180°$. To satisfy the angle condition, we choose the zero to be $s = -4.4$. Then K_h is

$$K_h = \frac{1}{4.4} = 0.227$$

The magnitude condition states that

$$\left| \frac{K(1 + 0.227s)}{s(2s + 1)} \right|_{s=-2+j3.4} = 1$$

Hence

$$K = 31$$

Since $K < 50$, the choice of the closed-loop poles at $-2 \pm j3.4$ is not acceptable.

As a second trial, let the closed-loop poles be $-3 \pm j5.1$. The sum of the angle contributions from the open-loop poles is 236°. We need a 56° contribution from the zero. This implies that the zero must be $s = -6.4$.

The application of the magnitude condition yields $K = 70$. This is quite satisfactory. Since $K_h = 0.156$, the requirement on K_h is satisfied. Thus, all the given specifications are met. Hence a set of acceptable values of K and K_h is

$$K = 70, \qquad K_h = 0.156$$

PROBLEM A-10-4. A closed loop system has the characteristic that the closed-loop transfer function is nearly equal to the inverse of the feedback transfer function whenever the open-loop gain is much greater than unity.

The open-loop characteristic may be modified by adding an internal feedback loop with a characteristic equal to the inverse of the desired open-loop characteristic. Suppose that a unity-feedback system has the open-loop transfer function

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Determine the transfer function $H(s)$ of the element in the internal feedback loop so that the inner loop becomes ineffective at both low and high frequencies.

Solution. Figure 10-47 (a) shows the original system. Figure 10-47 (b) shows the addition of the internal feedback loop around $G(s)$. Since

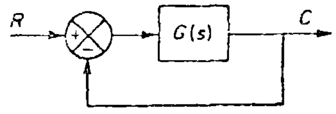
$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

if the gain around the inner loop is large compared with unity, then $G(s)H(s)/[1 + G(s)H(s)]$ is approximately equal to unity, and the transfer function $C(s)/E(s)$ is approximately equal to $1/H(s)$.

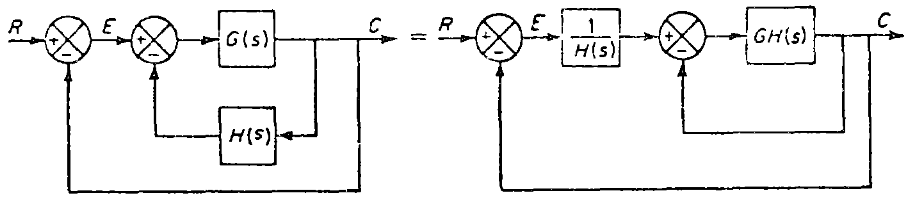
On the other hand, if the gain $G(s)H(s)$ is much less than unity, the inner loop becomes ineffective and $C(s)/E(s)$ becomes approximately equal to $G(s)$.

To make the inner loop ineffective at both the low- and high-frequency ranges, we require that

$$G(j\omega)H(j\omega) \ll 1 \qquad \text{for } \omega \ll 1 \text{ and } \omega \gg 1$$



(a)



(b)

Fig. 10-47. (a) Control system; (b) addition of the internal feedback loop to modify the closed-loop characteristic.

Since in this problem

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

the requirement can be satisfied if $H(s)$ is chosen to be

$$H(s) = ks$$

because

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{Kkj\omega}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{Kkj\omega}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = 0$$

Thus, with $H(s) = ks$, the inner loop becomes ineffective at both the low- and high-frequency regions.

PROBLEM A-10-5. When a disturbance acts on a plant, it takes some time before any effect on the output can be detected. If we measure the disturbance itself (though this may not be possible or may be quite difficult) rather than the response to the disturbance, then a corrective action can be taken sooner, and we can expect a better result. Figure 10-48 is a block diagram showing feedforward compensation for the disturbance.

Discuss the limitations of the disturbance-feedforward scheme in general. Then discuss the advantages and limitations of the scheme shown in Fig. 10-48.

Solution. A disturbance-feedforward scheme is an open-loop scheme and thus depends on the constancy of the parameter values. Any drift in these values will result in imperfect compensation.

In the present system, both open-loop and closed-loop schemes are simultaneously in operation. Large errors due to the main disturbance source can be greatly reduced by the open-loop compensation without requiring a high loop gain. Smaller errors due to other disturbance sources can be taken care of by the closed-loop control scheme. Hence

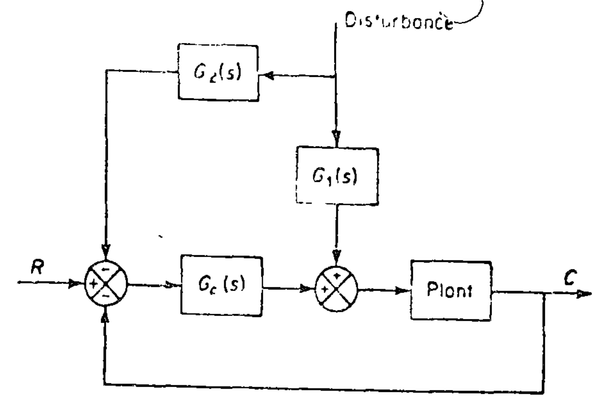


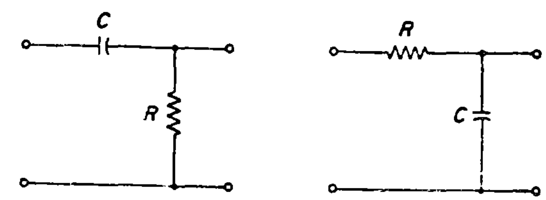
Fig. 10-48. Control system with feedforward compensation for the disturbance.

errors from all causes can be reduced without requiring a large loop gain. This is an advantage from the stability viewpoint.

Note that such a scheme cannot be used unless the main disturbance itself can be measured.

Problems

PROBLEM B-10-1. Draw Bode diagrams of the lead network and lag network shown in Figs. 10-49 (a) and (b), respectively.



(a) (b)

Fig. 10-49. (a) Lead network; (b) lag network.

PROBLEM B-10-2. Consider a unity-feedback control system whose feedforward transfer function is given by

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Determine the value of K so that the dominant closed-loop poles have a damping ratio of 0.5.

PROBLEM B-10-3. Consider a unity-feedback system whose feedforward transfer function is given by

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

It is desired to insert a series compensator so that the open-loop frequency-response curve is tangent to the $M = 3$ db circle at $\omega = 3$ rad/sec. The system is subjected to high-frequency noises and sharp cutoff is desired. Design an appropriate series compensator.

PROBLEM B-10-4. Determine the values of K, T_1, and T_2 of the system shown in Fig. 10-50 so that the dominant closed-loop poles have $\zeta = 0.5$ and $\omega_n = 3$ rad/sec.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO (4,5,11,12,18,19,25,26 DE JUNIO DE 1976)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1.	ING. GABRIEL CASTILLO DUEÑAS Edif. 46-13-203 U. Serdán Lomas de Sotelo México 10, D. F. Tel: 5-57-73-72	RUBIO, S. A. Benjamín Franklin 233-5o. Piso Col. Escandón México 18, D. F. Tel: 5-16-30-20 al 22
2.	JORGE V. CERVANTES PEÑA San Ignacio No. 142 Col. Olivar de los Padres México 20, D. F. Tel: 5-96-45-84	SUBDIRECCION DE EVALUACION Y ACREDITACION México, D. F.
3.	ING. MANUEL E. COLIMA Ave. Huacho 735 Col. Lindavista México 14, D. F. Tel: 5-86-47-24	SIDERURGICA LAZARO CARDENAS LAS TRUCHAS Yucatán No. 15 Col. Condesa México 11, D. F.
4.	ING. JORGE E. FERNANDEZ PARRIEGO Coconetla 18-16 La Cruz México 8, D. F. Tel: 5-30-98-37	INSTITUTO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR Insurgentes Sur No. 1079 México, D. F. Tel: 5-70-23-37
5.	IGNACIO FRANCO SANCHEZ Dr. E. González Martínez No.13-8 Col. Santa Ma. la Rivera México 4, D. F.	INPLINSA-GOPA Plaza Miravalle No. 3 Col. Roma México 7, D. F. Tel: 5-33-46-37
6.	JORGE GARCIA-REYES BARROSO Av. Minerva No. 146 Col. Florida México 20, D. F. Tel: 5-24-05-44	HONEYWELL, S. A. DE C. V. Constituyentes No. 900 México 10, D. F. Tel: 5-70-20-33
7.	TEODORO A. GONZALEZ ESTEBAN Milwaukee No. 42 Col. Nápoles México 18, D. F. Tel: 5-43-01-64	CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA Insurgentes Sur 1677 México, D. F. Tel: 5-34-92-09

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO (4,5,11,12,18,19,25,26 DE JUNIO DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
8. ING. PABLO E. HERRAN SALVATTI Amores 1540-9 Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5-34-77-40	BICA, S. A. DE C. V. Ejército Nacional No. 373 México 17, D. F. Tel: 2-50-57-88
9. RICARDO LARA RODRIGUEZ Pino 23 Int. 5 Col. Sta. María la Ribera México 1, D. F.	DIRECCION GENERAL DE ELECTRICIDAD Cuauhtémoc No. 80 México 1, D. F. Tel: 5-78-82-02
10. ING. MAX PETER LASSMANN KOLL Monte Blanco 1030 Lomas de Chapultepec México 10, D. F. Tel: 5-20-14-06	ING. MAX LASSMANN S. Monte Blanco No. 1030 Lomas de Chapultepec México 10, D. F. Tel: 5-20-14-06
11. ING.JOSE MA. ANGEL MAGALLON RIVERA Fresas No. 5 Depto. 5 Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5-59-12-66	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Vallarta 1-403 Col. San Rafael México 4, D. F. Tel: 5-46-43-36
12. GUSTAVO A. OROPEZA GARCIA Av. Copilco 300 Edif. 7-1 Copilco Universidad México 21, D. F.	FACULTAD DE INGENIERIA,UNAM Ciudad Universitaria México 20, D. F. Tel: 5-50-00-40
13. ING. ROMEO S. ORTEGA Xicotencatl No. 238 Col. del Carmen México 21, D. F. Tel: 5-48-93-55	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO México 20, D. F.
14. ING. FELIPE PRAGET MARTINEZ Lauro Aguirre 279-403 Santo Tomas México 17, D. F. Tel: 5-41-48-21	TAYLOR INSTRUMENT (MEXICO) S. A. DE C. V. Calle 4 No. 34-A Naucalpan, Edo. de México Tel: 5-76-81-66

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE INGENIERIA DE CONTROL: ANALISIS Y DISEÑO (4,5,11,12,18,19,25,26 DE JUNIO DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
15. JOSE LUIS RODRIGUEZ CALDERON Asturias 253-3 Col. Alamos México 13, D. F.	CARTON Y PAPEL DE MEXICO, S. A. Km. 15.05 Carretera antigua a Pachuca México, D. F. Tel: 5-69-25-11
16. ING. SERGIO RAMOS UVALLE México, D. F.	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A. Melchor Ocampo No. 171 México, D. F.
17. ING. LUIS RANCE COMES México, D. F.	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A. Melchor Ocampo No. 171 México, D. F.
18. ING. RAMON SANCHEZ RANGEL México, D. F.	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 México, D. F.
19. ENRIQUE SOLIZ CANEDO Hesiodo No. 534 Col. Polanco México 5, D. F. Tel: 5-45-50-39	HONEYWELL, S. A. DE C. V. Av. Constituyentes No. 900 Lomas Altas México 10, D. F. Tel: 5-70-20-33
20. ING. ARNULFO SOTELO LOPEZ México, D. F.	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A. Melchor Ocampo No. 171 México, D. F.