

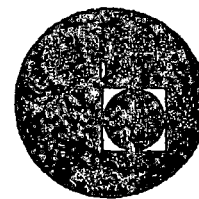
## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES

Fecha	Duración	Tema	Profesor
<b>CUBIERTAS DE ESTRUCTURA DE CONCRETO</b>			
Agosto 17	18 a 21 h	1.1 Paraboloide hiperbólico	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
" 19	18 a 21 h	1.2 Paraboloide elíptico y velarias	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
" 24	18 a 21 h	1.3 Conoides	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
" 26	18 a 21 h	1.4 Cilíndricas	M. en C. Neftalí Rodríguez Cuevas
" 31	18 a 21 h	1.5 Placas plegadas	M. en C. Neftalí Rodríguez Cuevas
Sept. 2	18 a 21 h	<b>CUBIERTAS DE ESTRUCTURAS DE ACERO</b>	
" 7	18 a 21 h	2.1 Armaduras convencionales	Ing. José Luis Sánchez
" 9	18 a 21 h	2.2 Arcos en celosía	Ing. José Luis Sánchez
" 14	18 a 21 h	2.3 Marcos simples	Ing. Oscar de Buen López de H.
" 21	18 a 21 h	2.4 Marcos múltiples	Ing. Oscar de Buen López de H.
		2.5 Tubulares tridimensionales	M. en C. Neftalí Rodríguez Cuevas
<b>COSTOS DE ESTRUCTURA</b>			
Sept. 23 y 28	18 a 21 h c/día	3.1 Concreto 3.2 Acero 3.3 Comparación de costos en un caso particular.	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio

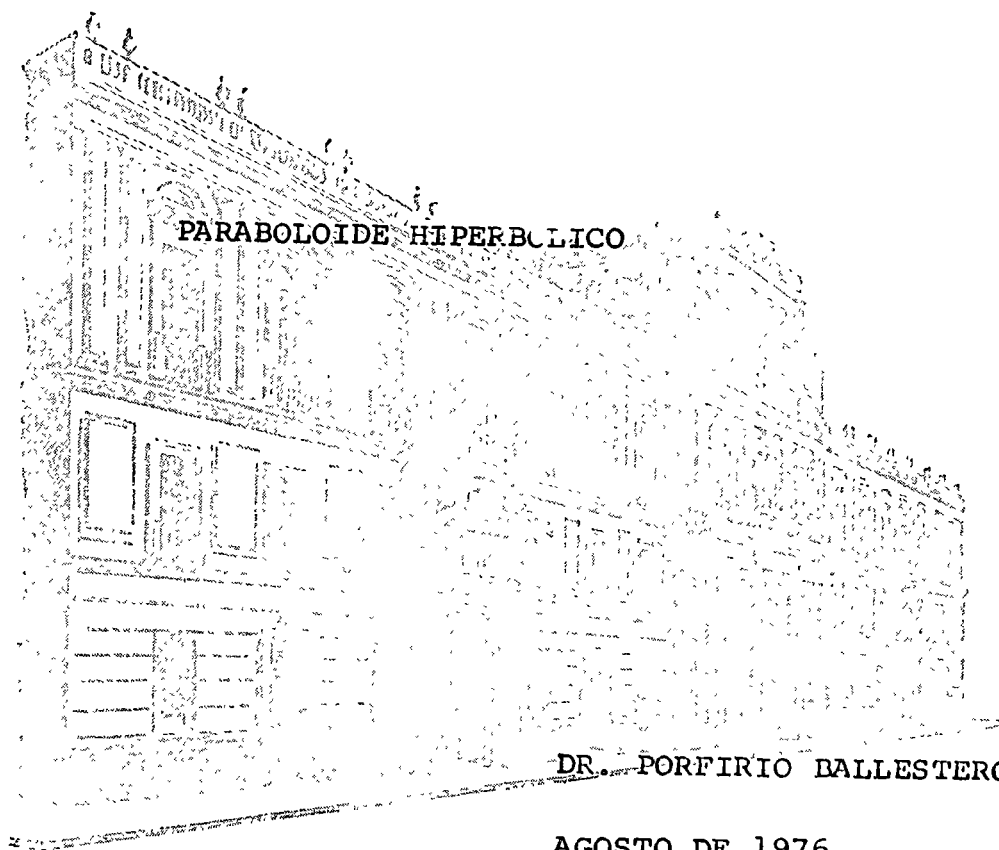




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



REPUBLICAN PARTY OF CALIFORNIA  
COUNTY OF LOS ANGELES  
COUNTY OF LOS ANGELES





Hyperbolic Paraboloid Shells

The following discussion is a brief resume of a talk given at the Thin Shell Seminar in Chicago in March 1955. This is not intended to be a complete treatise on the analysis of hyperbolic paraboloid shells but has been prepared to give a physical picture of the structural action involved. Results obtained agree with the exact solution presented by F. Candela in the January 1955 issue of the ACI Journal as far as uniform loads are concerned.

Figure 1

Consider the horizontal plane  $A'C'E'G'$ . This surface contains the generatrices  $i_n$  parallel to the y axis and  $h_n$  parallel to the x axis. A warping of this surface is achieved by vertically depressing the corners  $A'$  and  $E'$  to new positions  $A$  and  $E$  respectively. During this action the  $i_n$  generatrices pivot about the fixed axis  $FOB$  while the  $h_n$  generatrices pivot about  $HOD$ . The resulting warped surface is the hyperbolic paraboloid and contains two systems of straight lines  $h_n$  and  $i_n$ , these systems being parallel to the planes  $XOZ$  and  $YOZ$  respectively which form an arbitrary angle  $\omega$ . Every point on this surface may be considered the intersection of two straight lines contained in the surface.

Figure 2:

The portion of the hyperbolic paraboloid with which we are concerned is the square  $ABOH$ , representing a portion of the roof structure in Figure 8. Figure 2, illustrating this section, shows that any point on the surface may be defined in

terms of  $x$ ,  $y$  and  $z$  where  $z$  equals a constant multiplied by the  $X$  and  $Y$  coordinates.

Figure 3:

For convenience, the axes  $OX$  and  $OY$  shown in Figure 2 are rotated through an angle  $\phi$  of  $45^\circ$ , so that the axis  $OY'$  now lies in a vertical plane with  $OA$ . Figure 3 gives the standard formulas for transformation of coordinates by rotation. These formulas are modified for application here by introduction of the angle  $\phi = 45^\circ$ .

Figure 4:

Figure 4 shows the transformed coordinates  $OX'$  and  $OY'$  in position above  $ABOH$ . At the top of Figure 4 the equation defining the surface of the hyperbolic paraboloid in terms of  $x$ ,  $y$  and  $z$  is transformed to the new coordinate system by means of expressions given with Figure 3. When  $x'$  is given a constant value in the transformed equation the result is the equation of a parabola lying either in or parallel to the  $Y'Z$  plane. The vertex of the parabola defined by setting  $x' = 0$  intersects the  $X'$  axis at the origin of the  $X'$ ,  $Y'$  and  $Z$  axes, but for any other value of  $x'$  the vertex falls <sup>above</sup> ~~below~~ the  $X'Y'$  plane. In any case the principal axes of all these parabolas are parallel to the  $Z$  axis and lie in the  $X'Z$  plane.

In a similar manner, for any given value of  $y'$  the general expression becomes the equation of a parabola lying either in or parallel to the  $X'Z$  plane. If  $y' = 0$  the equation is for a parabola having a vertex which intersects the  $Y'$  axis at the origin. Any other value of  $y'$  defines a parabola having

its vertex below the X'Y' plane but with its principal axis parallel to the Z axis and lying in the Y'Z plane.

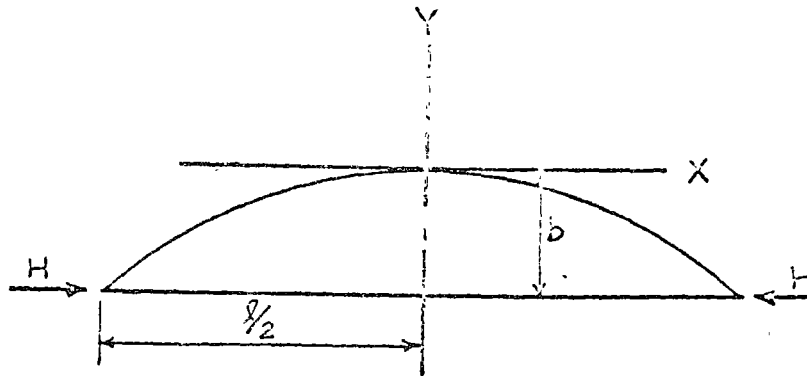
It is important to note that for any given warped surface either x' or y' may be varied without affecting the term "0.5k" in the parabolic equation. As a result, all parabolas in both directions have the same shape. In addition it can be seen that one of the expressions is positive while the other is negative. This difference in sign indicates that parabolas parallel to the X'Z plane are concave upward while those parallel to the Y'Z plane are concave downward.

If z is given a constant value in the general expression the warped surface is cut by a horizontal plane, the elevation of which depends on the particular value given to z. This cutting plane forms a hyperbola.

Figure 5:

Figure 5 illustrates the advantage resulting from the fact that the hyperbolic paraboloid is made up entirely of two sets of parabolic arches, one set normal to the other and all of the same shape.

Assume that the total load w is divided equally in two directions so that any given arch carries a load of intensity  $\frac{w}{2}$ . The midspan simple beam bending moment due to this uniform load is  $\frac{w}{2} \cdot \frac{l^2}{8}$ . The only other force acting on any of the arches is the horizontal thrust H which, when multiplied by the arm b, also produces a midspan moment equal to  $\frac{w}{2} \cdot \frac{l^2}{8}$  but opposite in direction to the uniform load moment. To prove that H produces the same midspan moment as the uniform load consider the parabolic arch shown below.



The general equation for this parabola is  $y = px^2$ . The parameter  $p$  may be evaluated from the fact that  $y=b$ , when  $x = \frac{L}{2}$ ; therefore,  

$$p = \frac{4b}{L^2}$$

The general equation may then be written:

$$y = \frac{4b}{L^2} x^2$$

The general expression for simple beam bending moment in an arch is:

$$M_s = \frac{W}{2} \frac{L^2}{8} - \frac{W}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{W}{2} \frac{L^2}{8} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (1)$$

while the general expression for moment due to thrust  $H$  is:

$$M_t = H (b-y) = H \left( b - \frac{4b}{L^2} x^2 \right) = Hb \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (2)$$

For the two-hinged arch carrying uniform load:

$$\Delta H = 0 = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{My ds}{EI} = \int_0^{\frac{L}{2}} (M_t + M_s) \frac{y ds}{EI} \quad (3a)$$

$$0 = Hb \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \frac{y dx}{EI} + \frac{W}{2} \frac{L^2}{8} \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \frac{y dx}{EI} \quad (3b)$$

from which:

$$Hb = - \frac{W}{2} \cdot \frac{L^2}{8} \quad (4)$$

Substituting (4) in (2) reveals that  $M_t$  and  $M_s$  are equal and opposite and as a result under uniform load there is zero moment

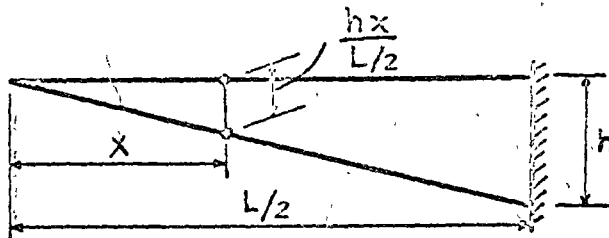
throughout the arch. Horizontal thrust  $H$  may be expressed as  $\frac{w}{2k}$  as shown.

Figure 6:

Figure 6 shows the theoretical parabolic arches of the roof in plan. It is evident that at any point along the edge of the roof where two perpendicular arches intersect the components (normal to the edge) of horizontal thrust  $H$  are equal in magnitude but opposite in direction. As a result there is no force normal to the edge. Components parallel to the edge all act in the same direction and, as shown in Figure 6, produce a constant shearing stress along the edge equal to  $\frac{w}{2k}$ . This shear combines with the vertical component of arch thrust to put pure compression in the edge beam. The accumulated horizontal compression at the intersection of edge beam and column then equals  $\frac{wb}{h} \cdot \frac{L^2}{2}$  as shown on Figure 7.

Figure 7:

Compression at the column may be checked by statics by referring to the figure below which represents an elevation view of the roof section ABOH cantilevered from the central post.



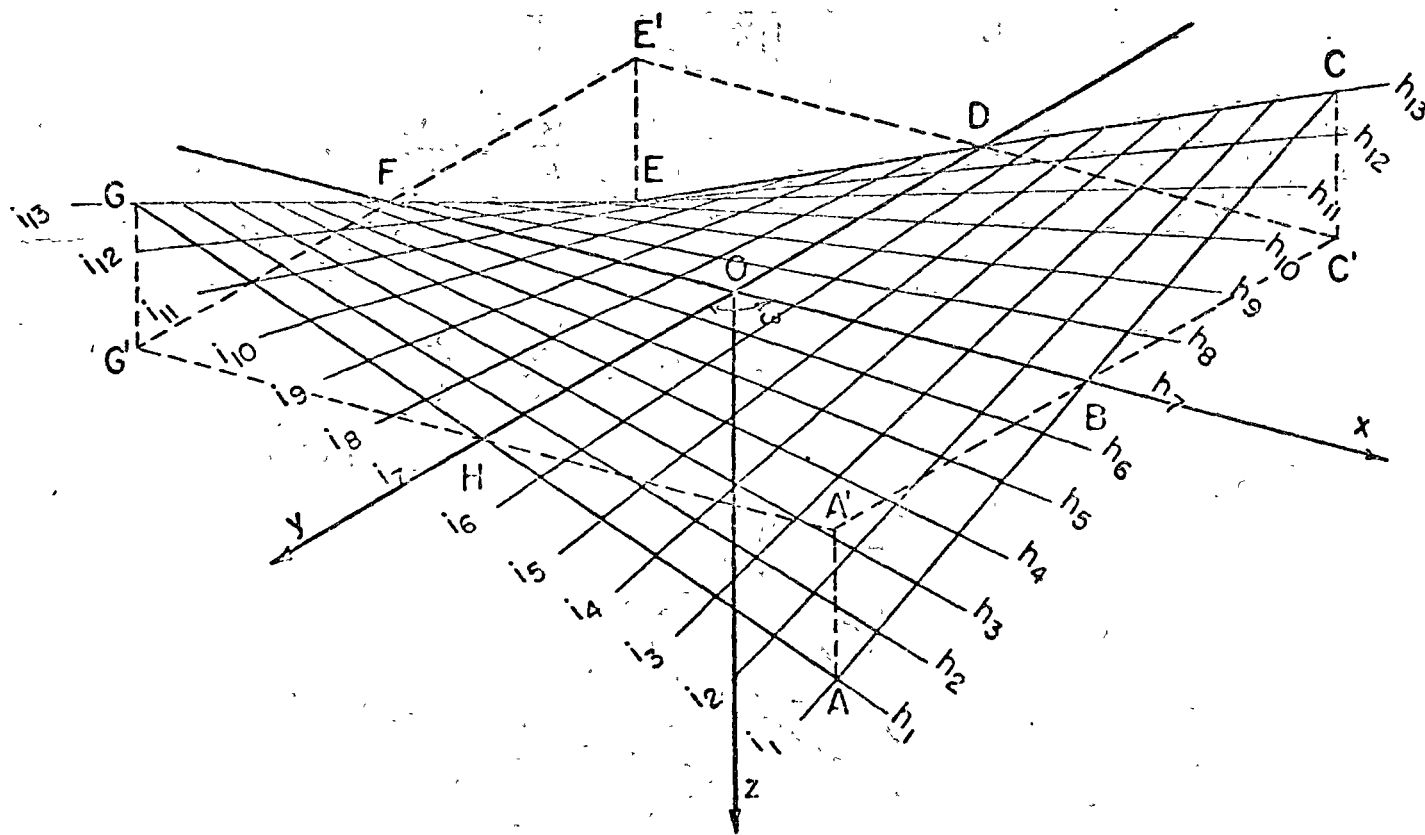
Moment at any section due to a uniform load  $w$  is  $\frac{wx^2}{2}$ . Dividing this moment by the depth of the roof at that point gives the magnitude of horizontal compression at the bottom fiber equal to

$\frac{wx^2}{2} \cdot \frac{1}{2hx} = \frac{Wx}{2h} \cdot \frac{1}{2}$ . Therefore, thrust at the support, considering the load  $w$  applied to an area  $ab$  where  $x = \frac{1}{2} = a$  is

$$\frac{wa^2}{2h} \cdot b = \frac{wb}{h} \cdot \frac{a^2}{2}$$

Summary:

This material agrees with the derivations for warped surfaces given on pages 402-404 of the January 1955 issue of the ACI Journal.

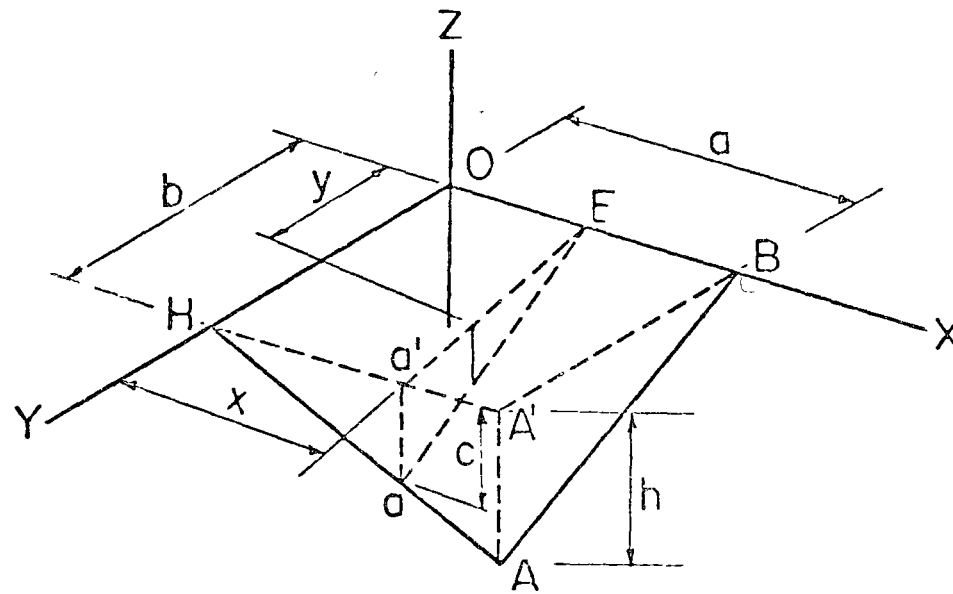


SURFACE DEFINITIONS

Fig. 1

7

T



In  $\triangle HA'A$

$$\frac{c}{h} = \frac{x}{a} \text{ or } c = \frac{xh}{a}$$

In  $\triangle Ed'a$

$$\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$$

$$z = \frac{yc}{b} = \frac{y}{b} \cdot \frac{xh}{a} = xy \cdot \frac{h}{ab}$$

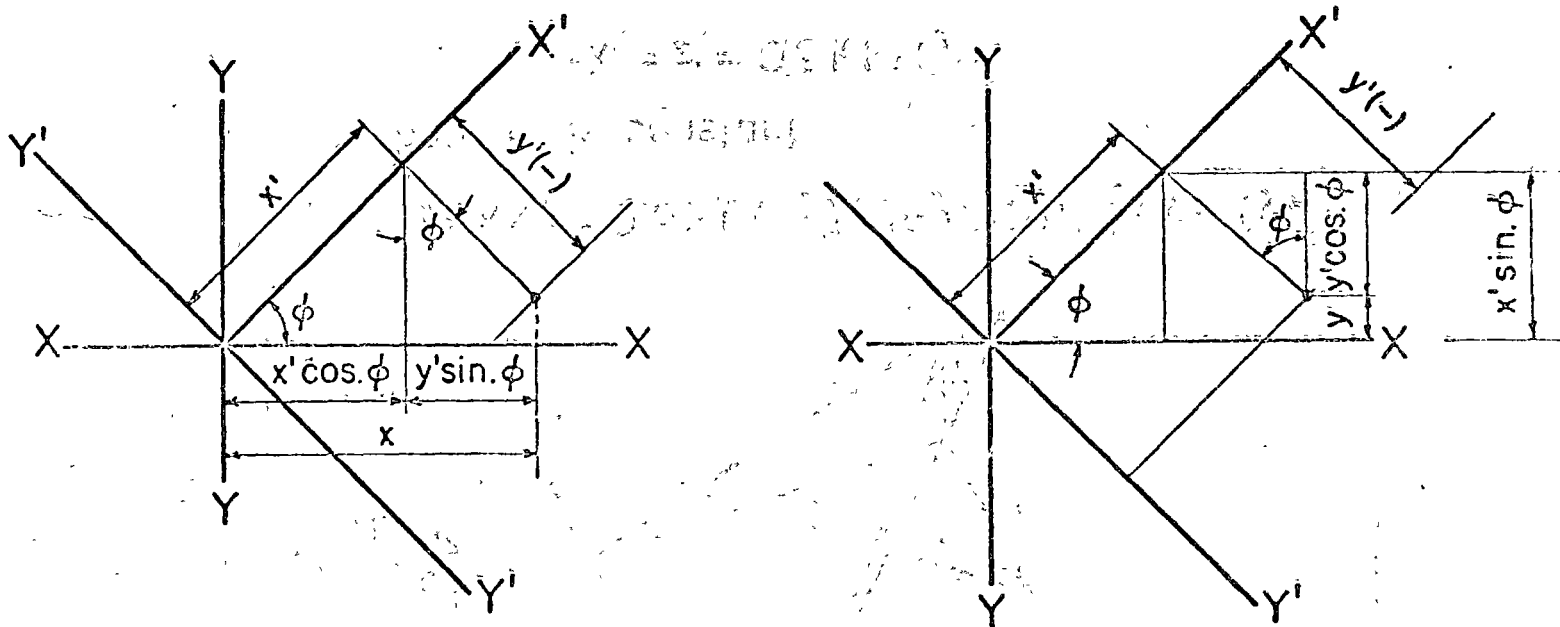
letting  $k = \frac{h}{ab}$

$$z = kxy$$

Fig 2



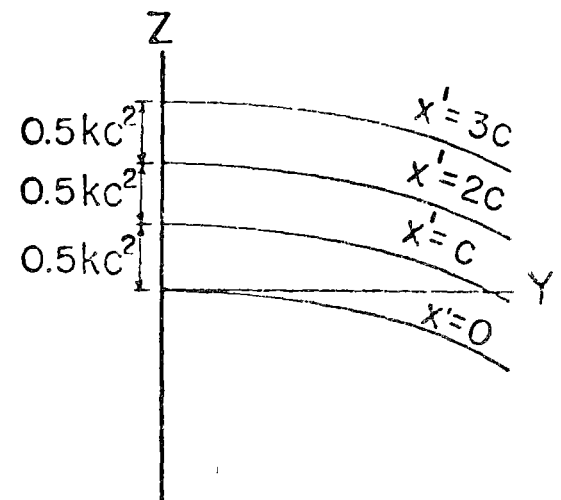
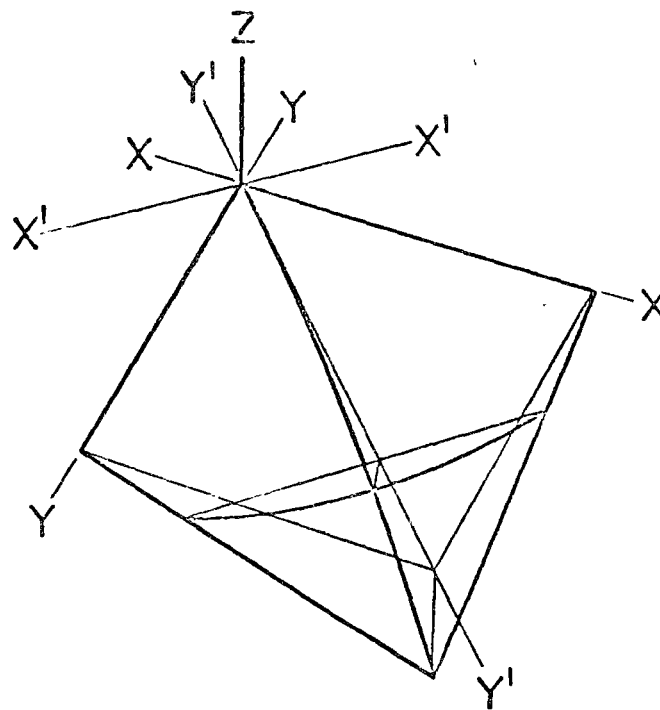
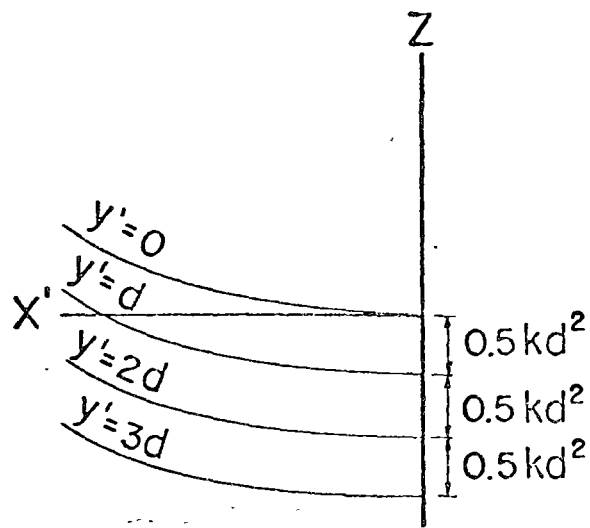
6



$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi = .707 (x' - y')$$

$$y = y' \cos \phi + x' \sin \phi = .707 (x' + y')$$

Fig. 3



$$z = kxy = 0.5k(x'+y')(x'-y') = 0.5k[(x')^2 - (y')^2]$$

when  $x'$  is constant

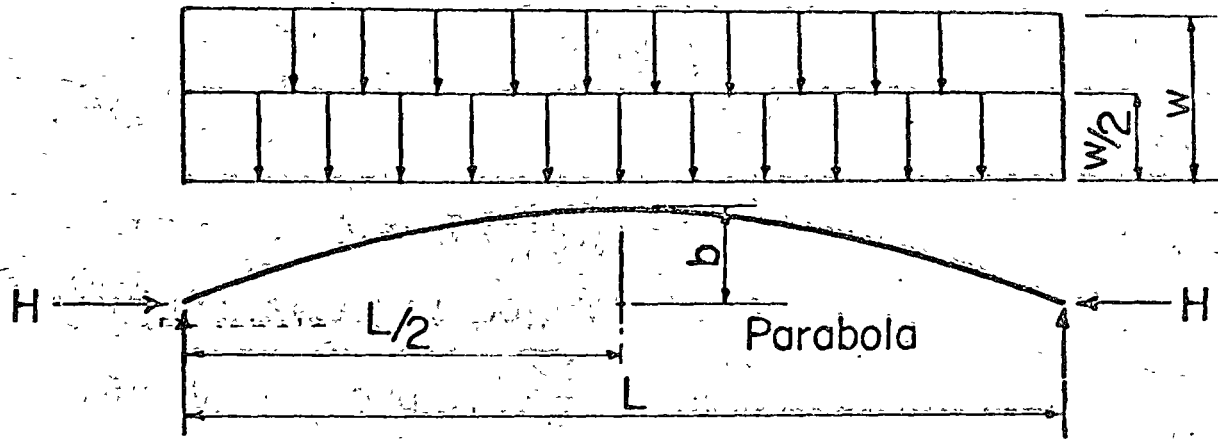
$$z - k_1 = z' = 0.5k(-)(y')^2$$

when  $y'$  is constant

$$z - k_2 = z' = 0.5k(x')^2$$

when  $z$  is constant

$$1 = k_3[(x')^2 - (y')^2]$$



$$\text{Simple Beam Bending Moment} = \frac{w}{2} \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$Hb = \frac{w}{2} \cdot \frac{L^2}{8} \quad \text{or} \quad H = \frac{wL^2}{16b} = \frac{w}{4} \cdot \frac{L^2}{4b}$$

Equation of Parabola

$$y = px^2 \quad \text{when} \quad y = b \quad x = \frac{L}{2}$$

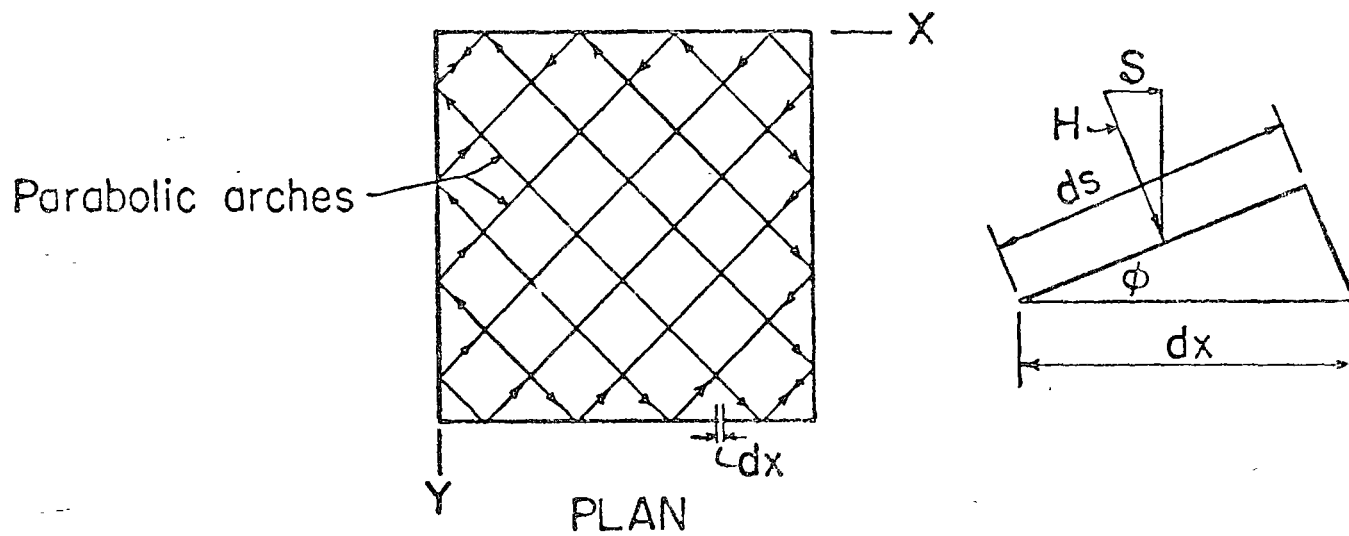
Therefore

$$b = p \frac{L^2}{4} \quad \text{or} \quad \frac{L^2}{4b} = \frac{1}{p}$$

Hence

$$H = \frac{w}{4} \cdot \frac{1}{p} = \frac{w}{4} \cdot \frac{1}{0.5k} = \frac{w}{2k}$$

Fig. 5



$$\text{Total Force} = S = Hds \sin \phi$$

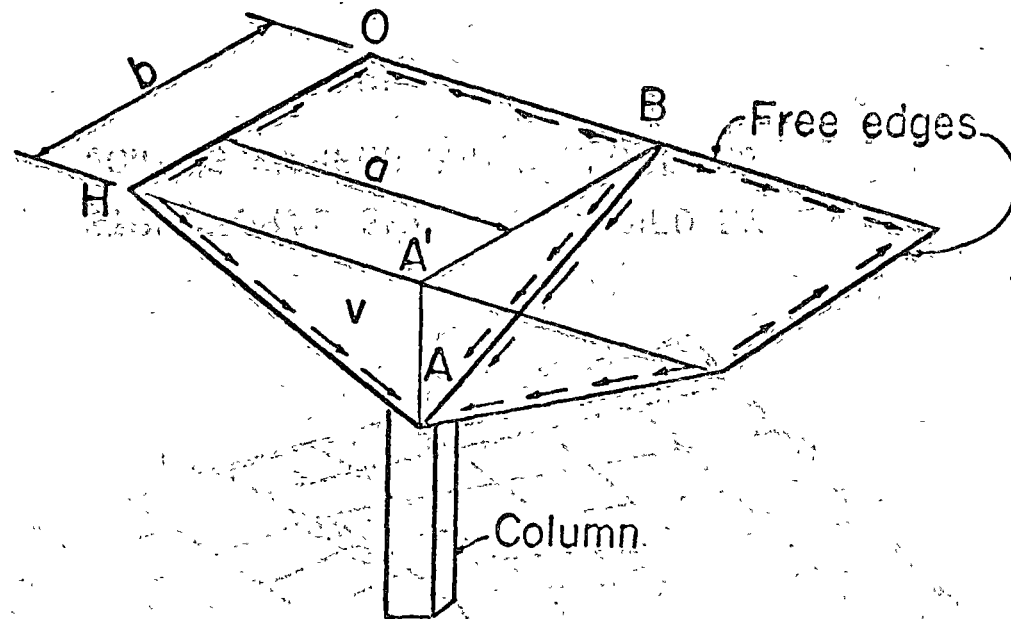
$$\text{Unit Force} = s = \frac{S}{dx} = \frac{Hds \sin \phi}{dx} = H \sin \phi \cos \phi$$

$$\text{With } \phi = 45^\circ \text{ and } H = \frac{w}{2k}$$

Combining effect of both arches

$$v = 2 \left( \frac{0.5w}{2k} \right) = \frac{w}{2k}$$

Fig. 6



$$C = \sum s = \frac{wa}{2k}$$

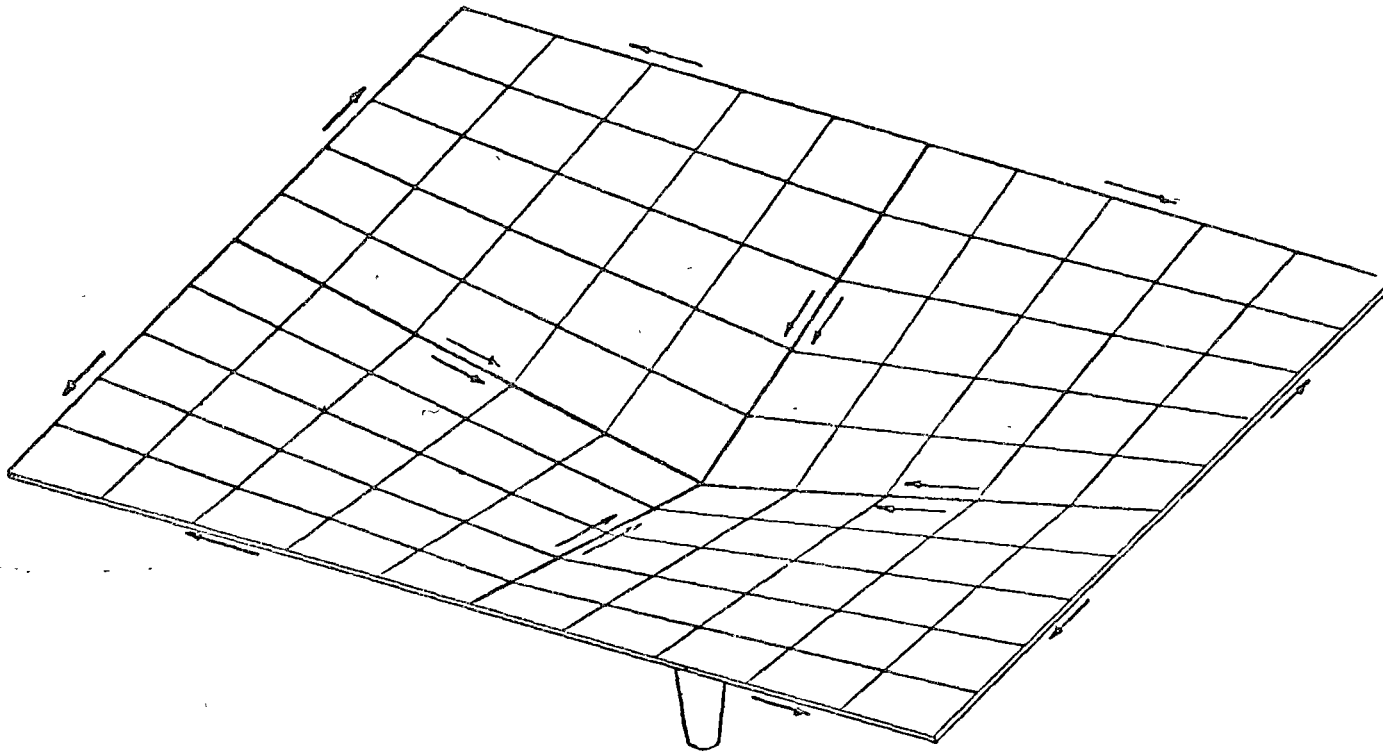
$$\text{Since } k = \frac{h}{ab}$$

$$C = \frac{wa}{2} \cdot \frac{ab}{h} = \frac{wb \cdot a^2}{h \cdot 2}$$

From Statics

$$C = \frac{wba^2}{2h}$$

Fig. 7



STRUCTURAL SHAPE OBTAINED BY  
JOINING WARPED PARALLELOGRAMS

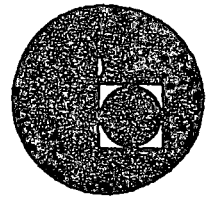
Fig. 8.

171

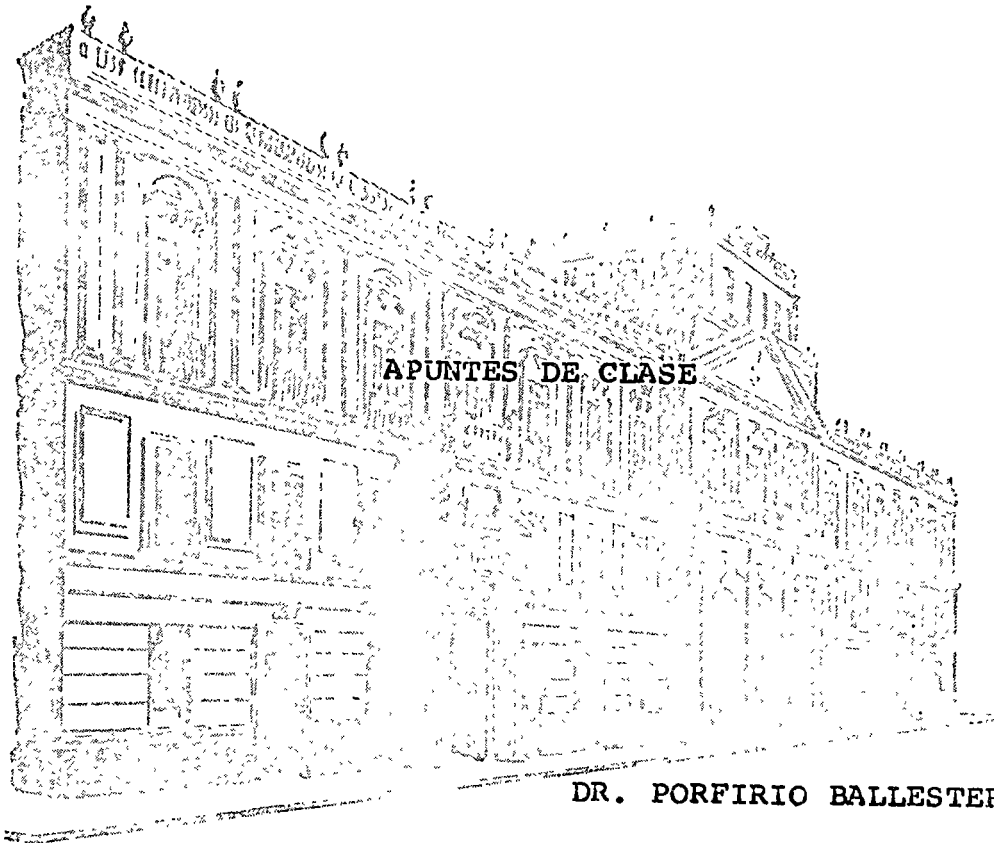




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

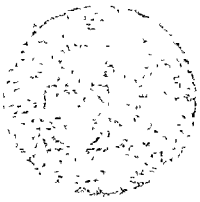


**DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES**



**DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.**

**AGOSTO DE 1976.**



1. Suministro de alimentos  
 2. de los animales de la granja  
 3. de los animales de la granja



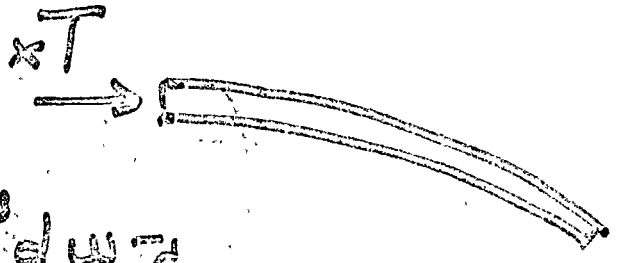
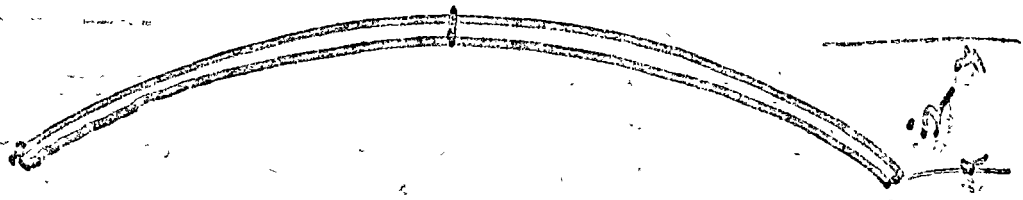
4. de los animales de la granja



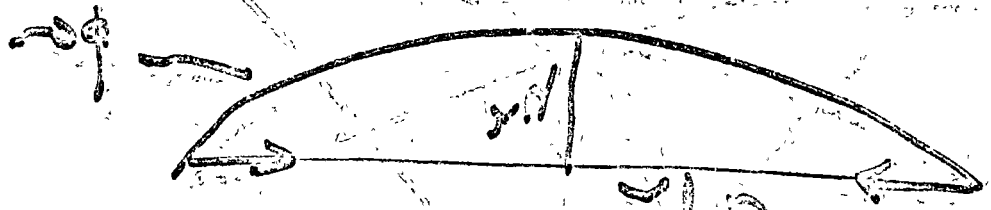
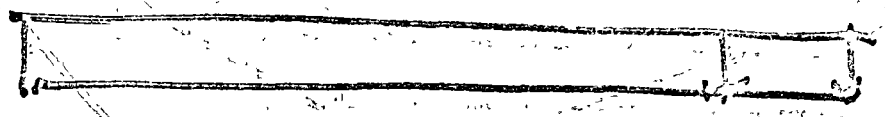
5. de los animales de la granja



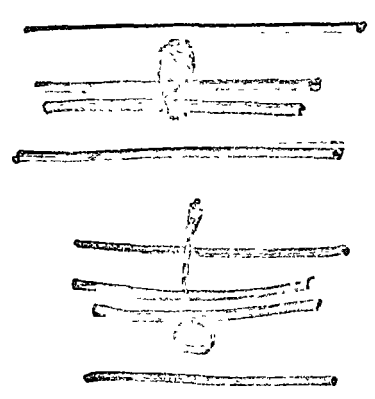
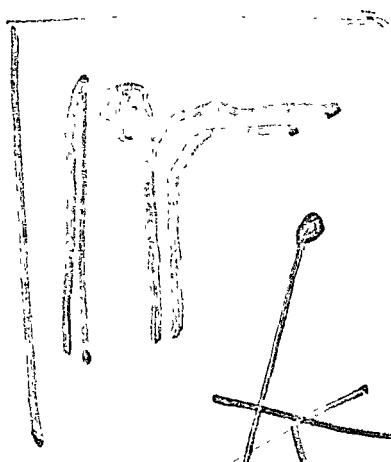
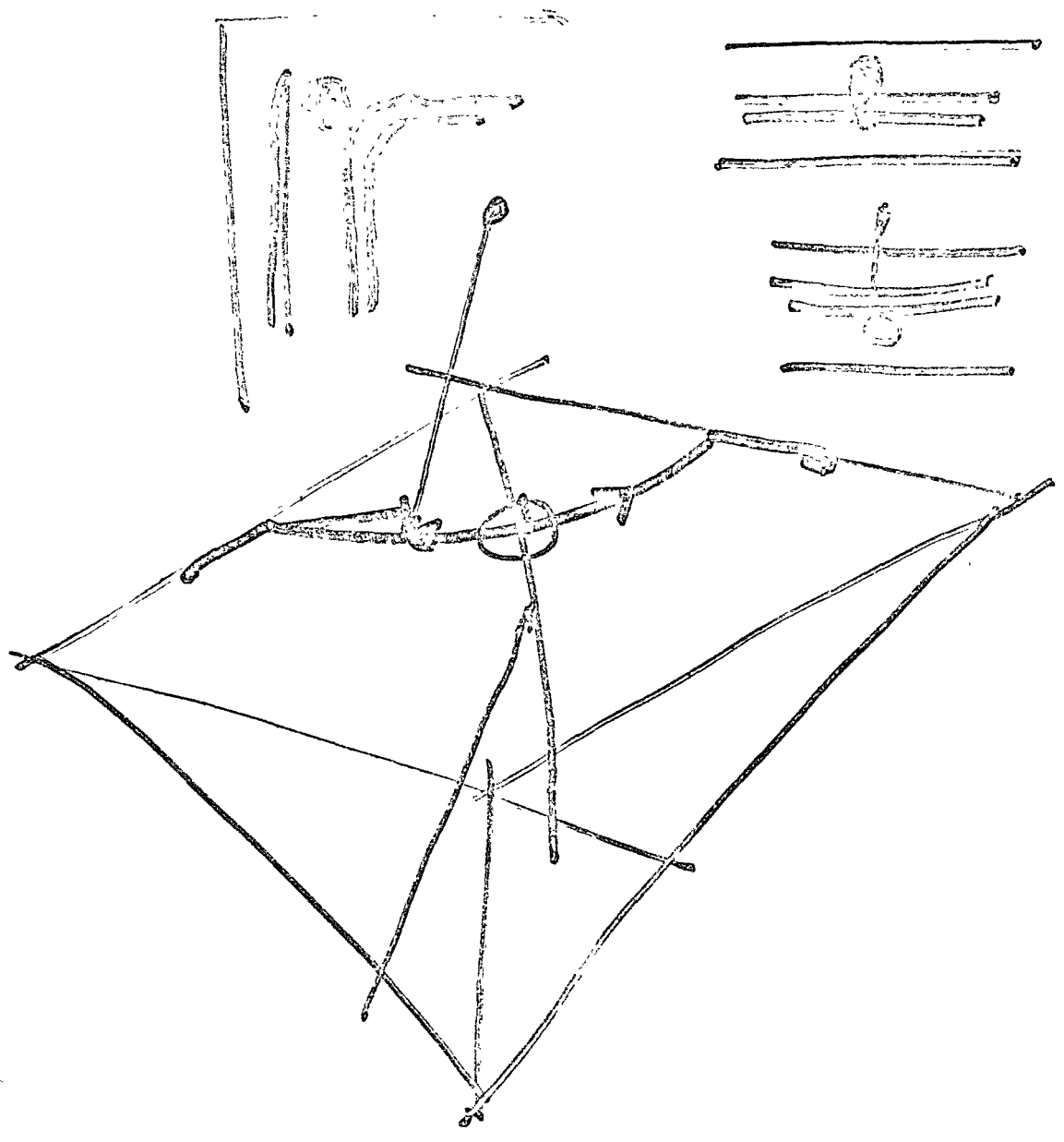




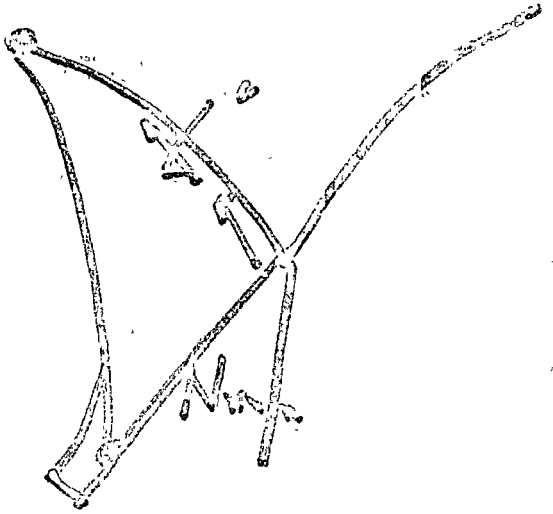
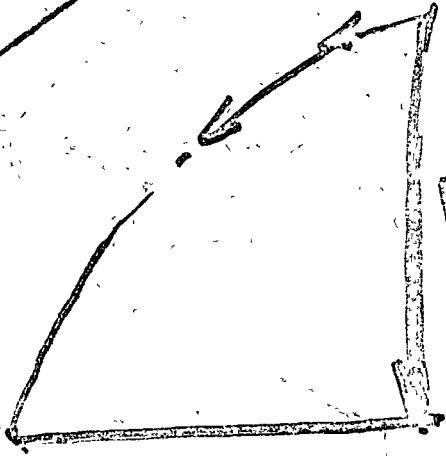
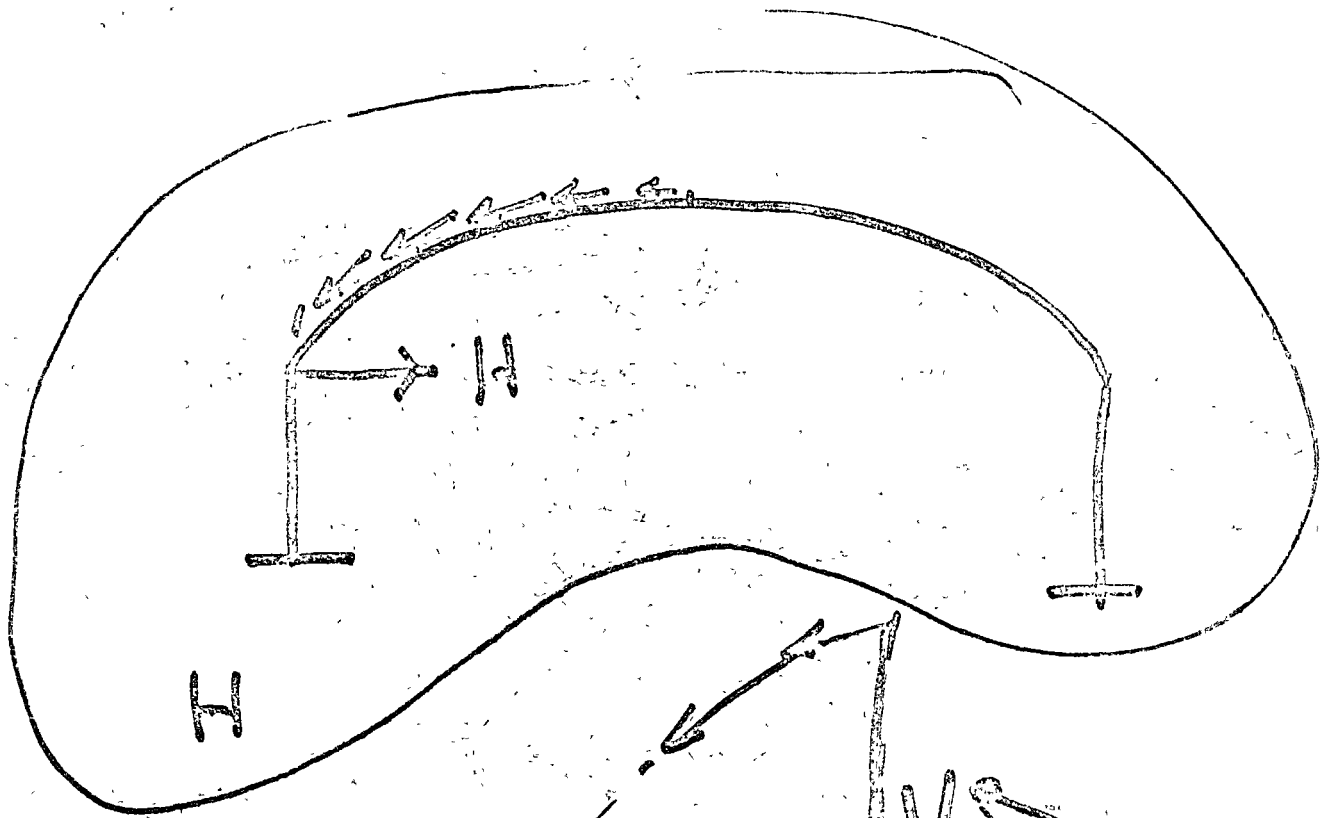
$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI} T$   
 $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI} T x + C_1$   
 $w = \frac{1}{2EI} T x^2 + C_1 x + C_2$



$$F = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI} T$$



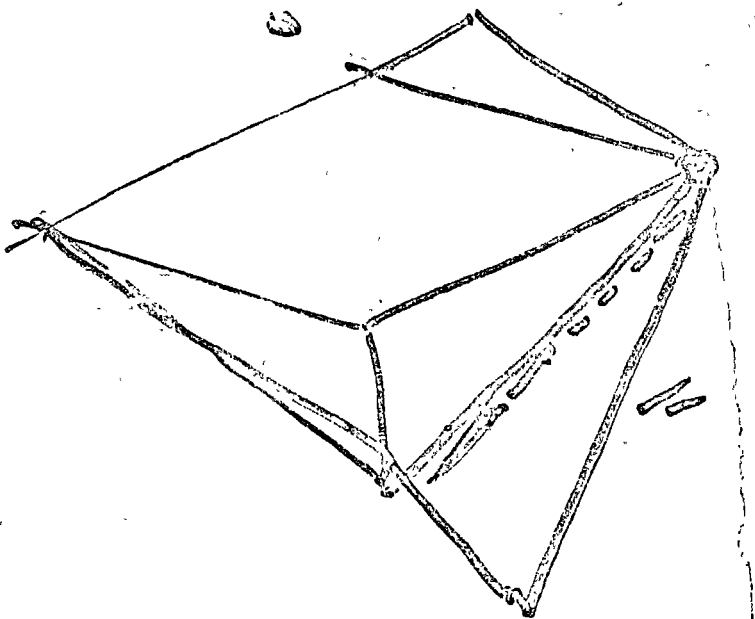
Handwritten text, possibly a signature or a note, located to the right of the diagram.

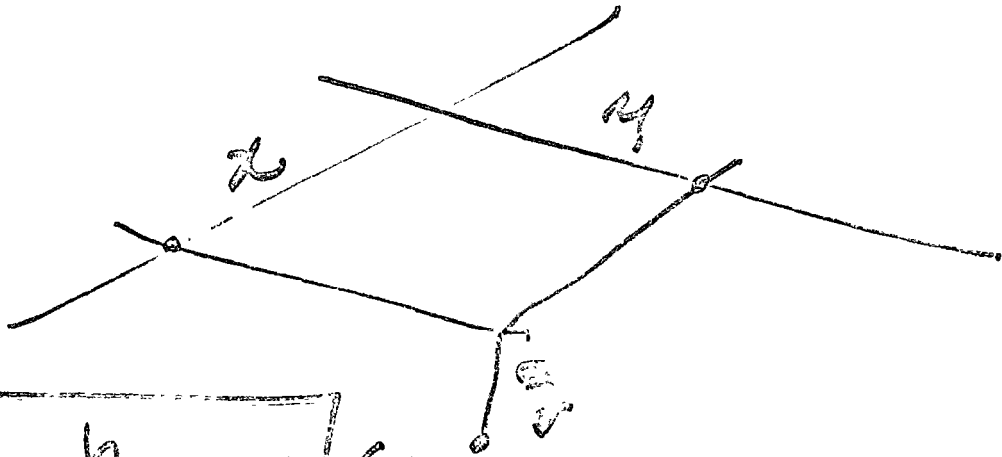
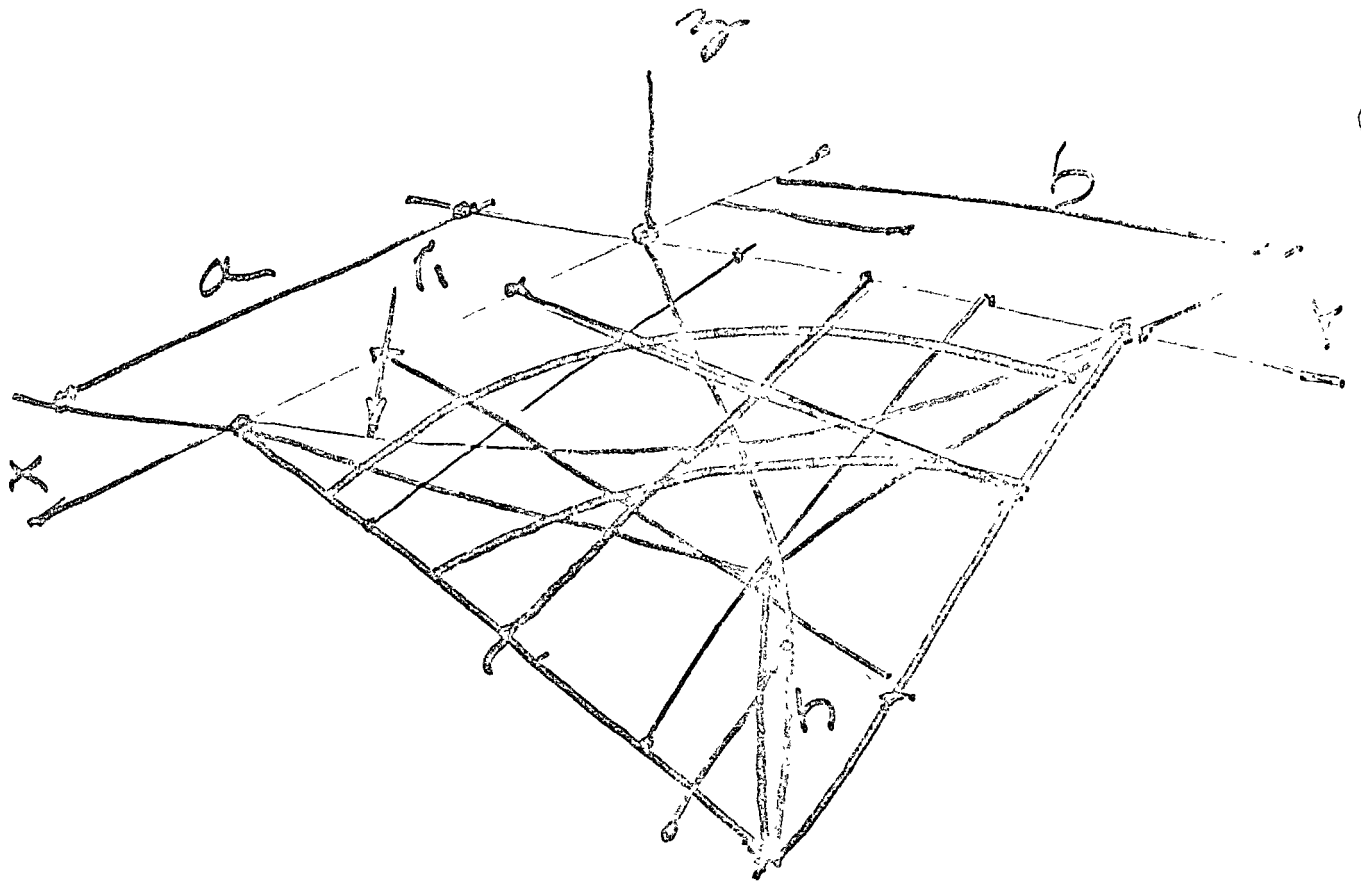


$$2 \int_{0}^{a} N_u \cdot \sin \alpha \cdot ds +$$

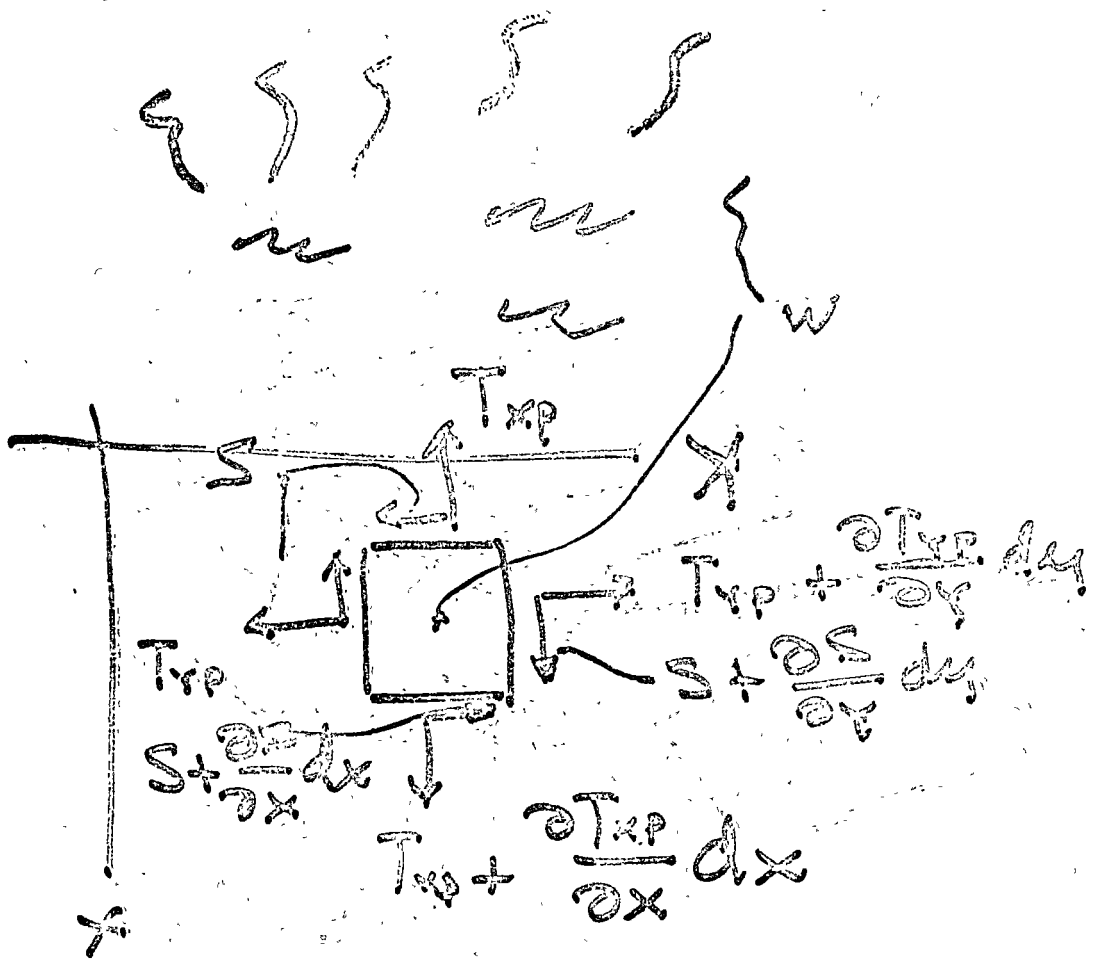
$J_{ab}$

$$M_c - \frac{q_{ab}}{2f}$$

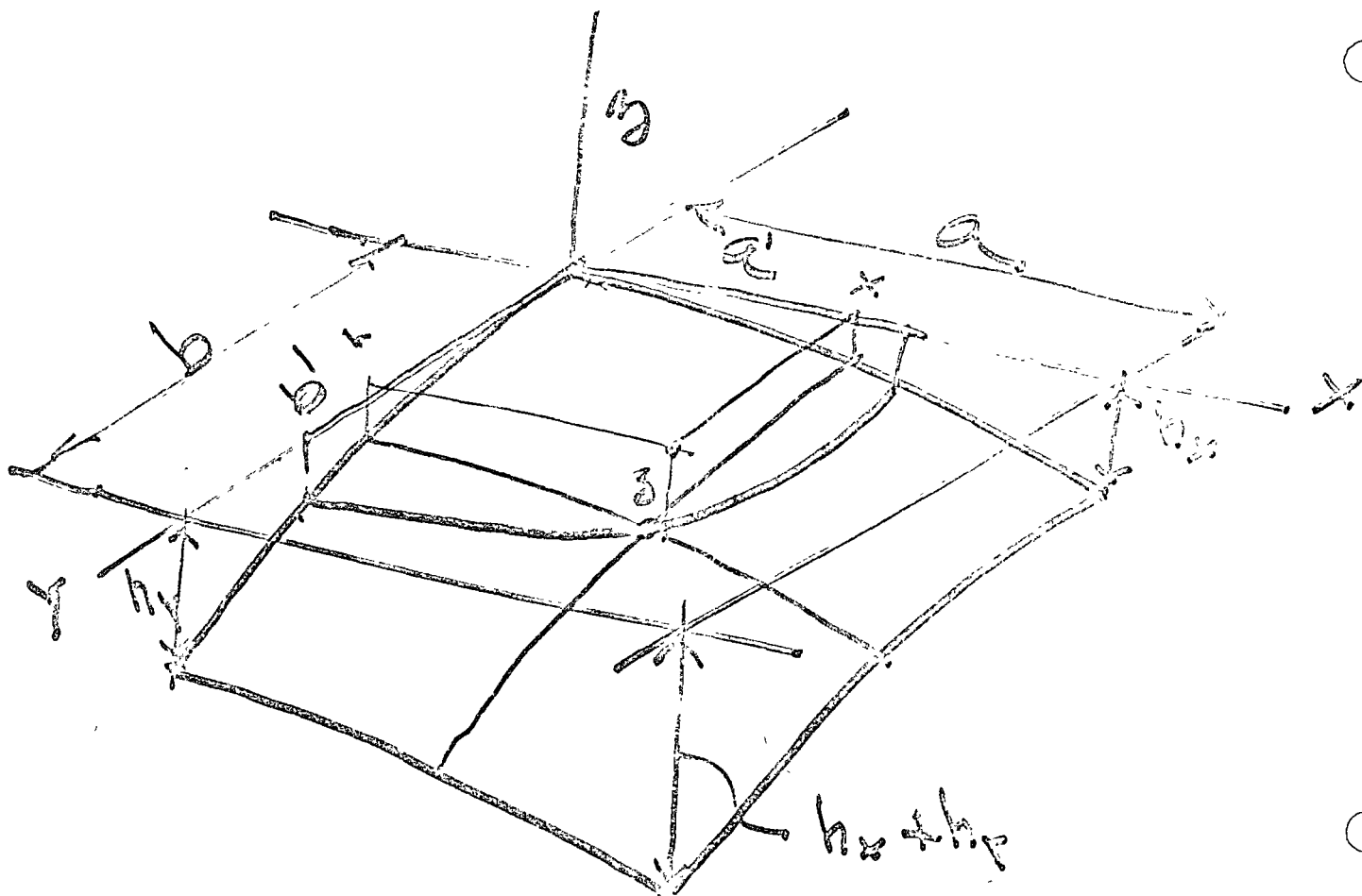




$$g = \frac{h}{ab} \times \frac{z}{z} \quad (1)$$



$T_{xp}$   
 $T_{xp}$



$$z = \frac{h_x}{a} x + \frac{h_y}{b} y$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = k$$

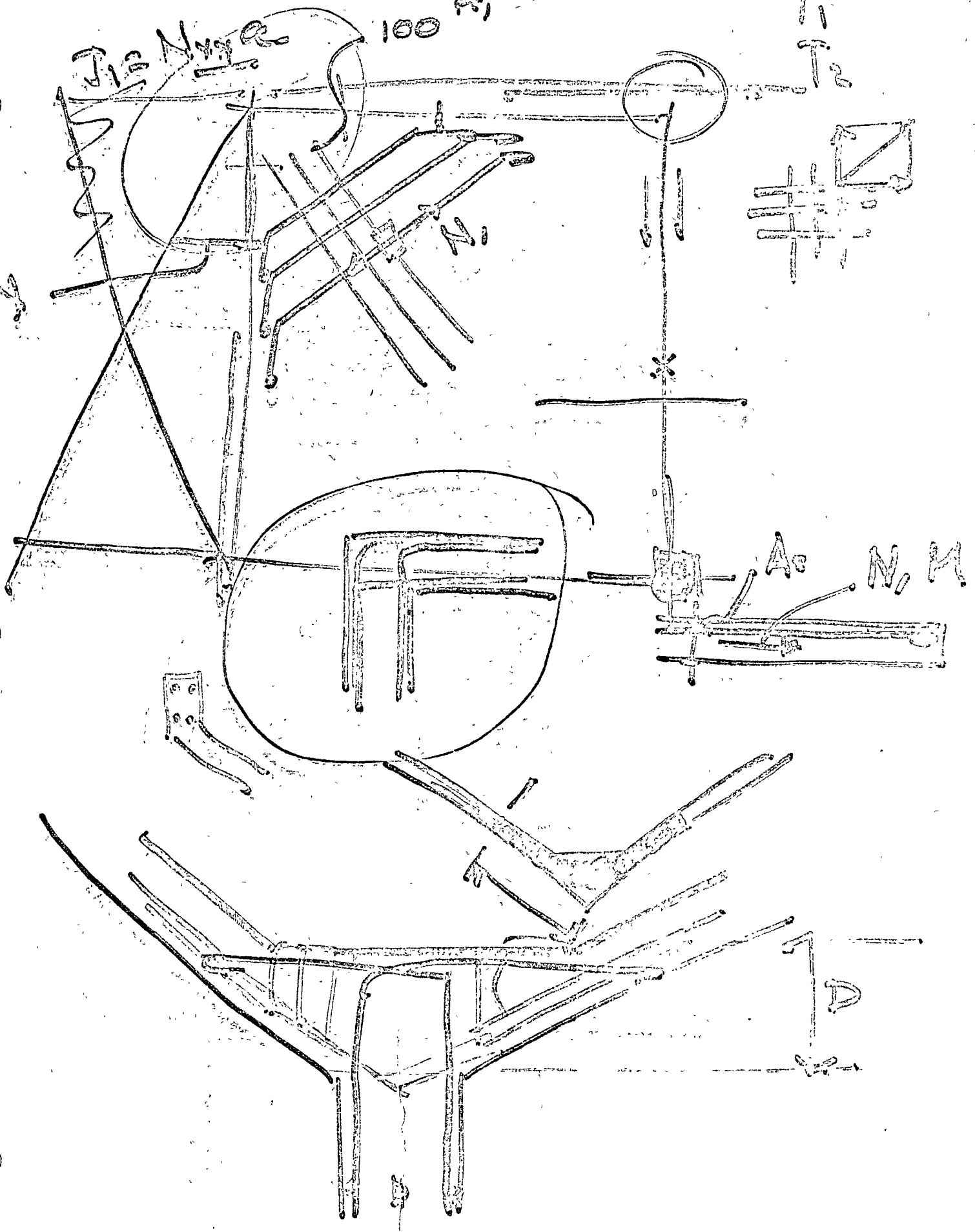
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

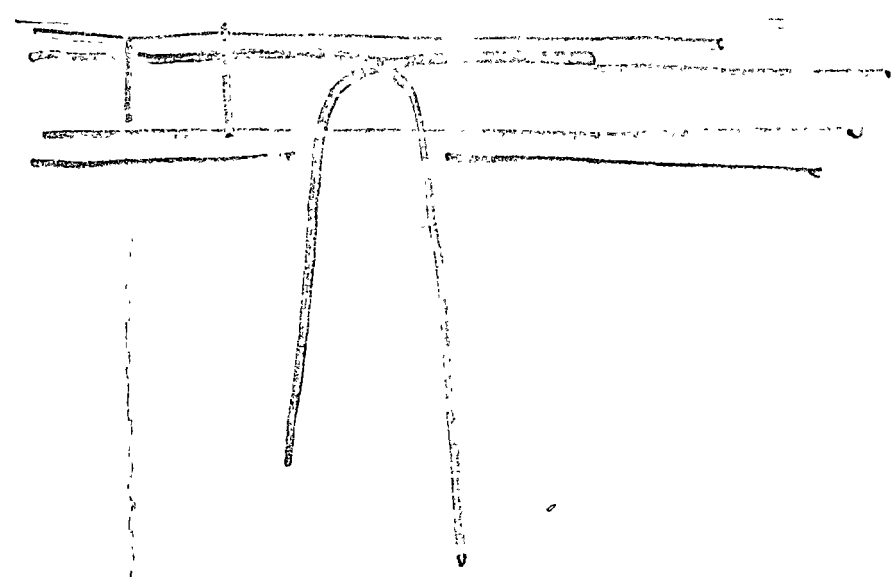
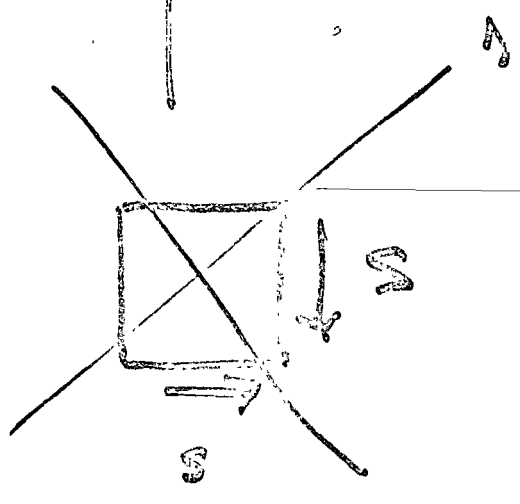
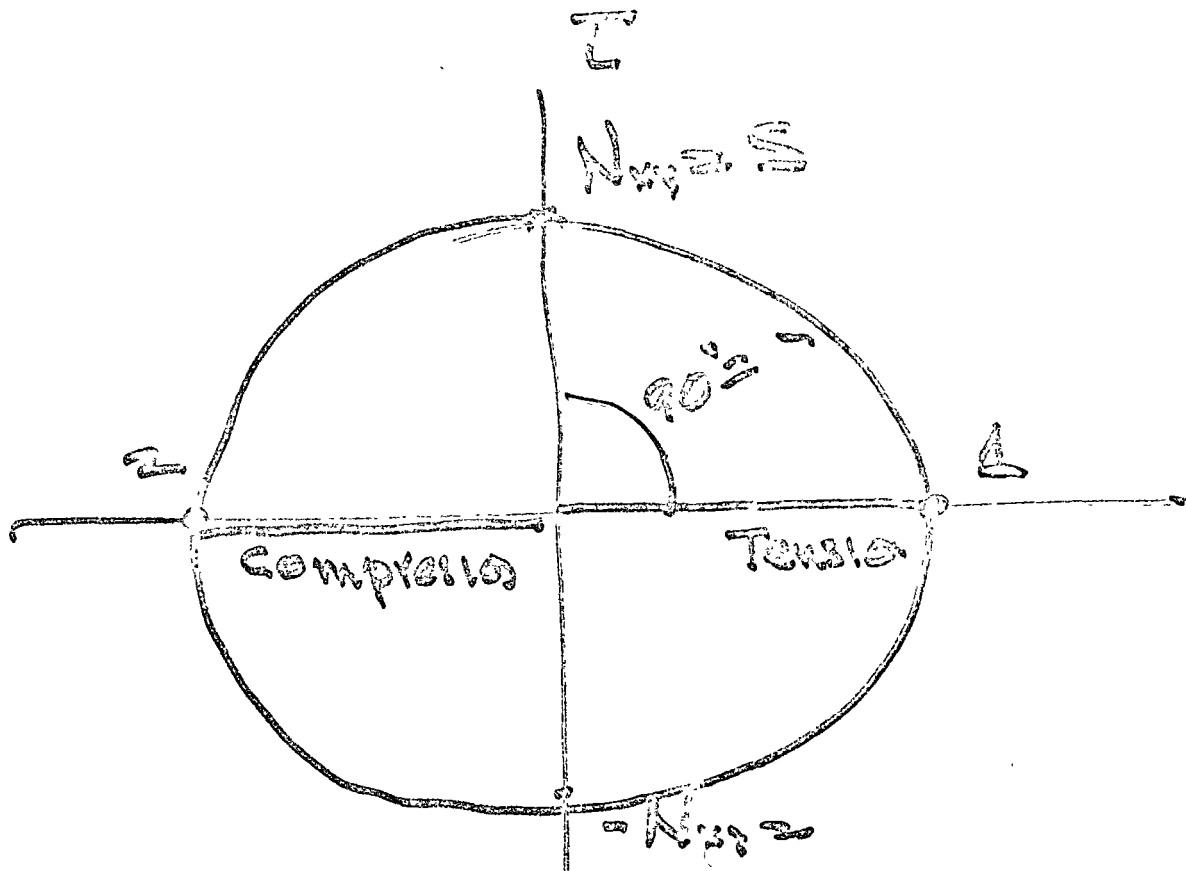

---

Fig. 1

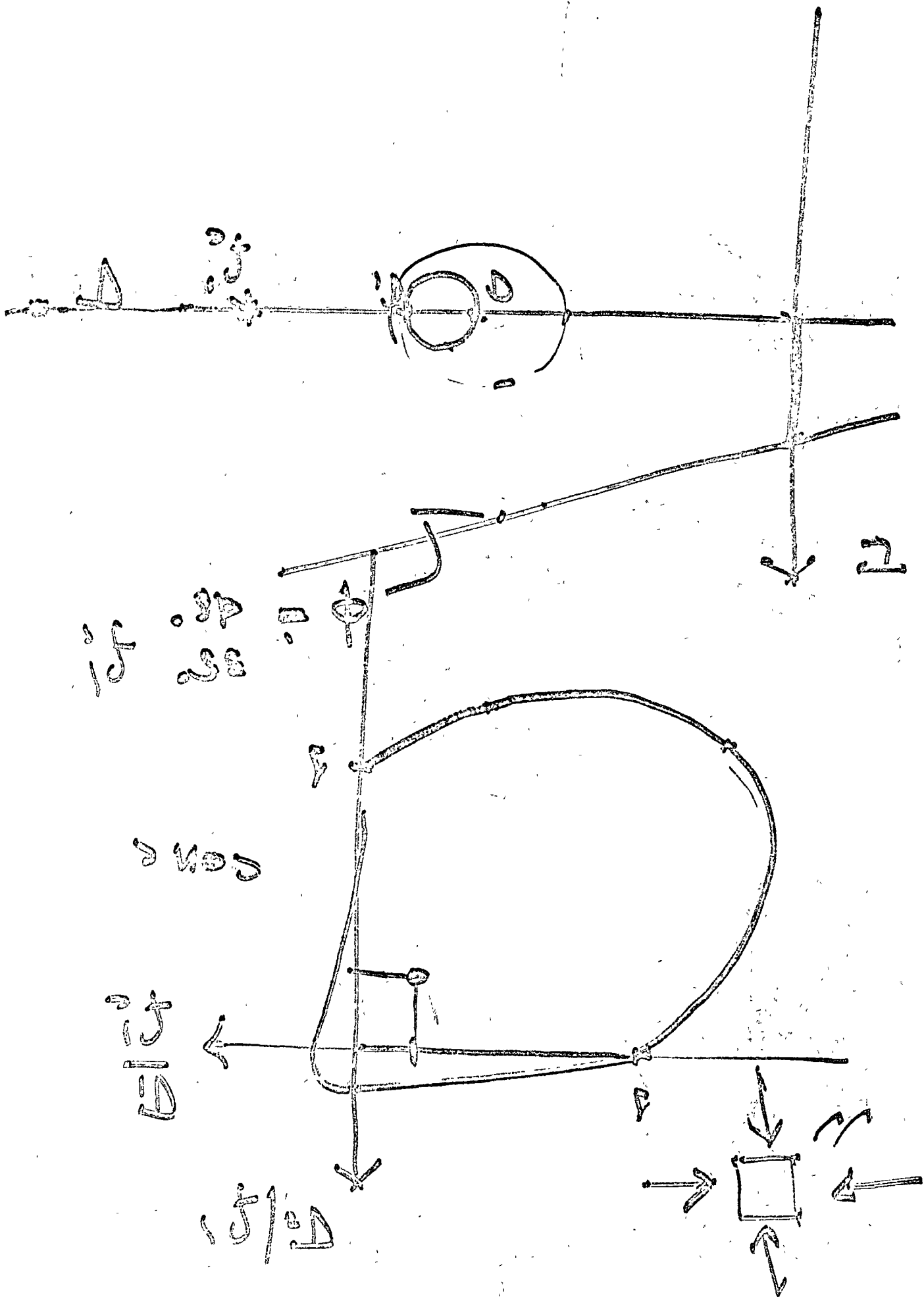
100 Hz

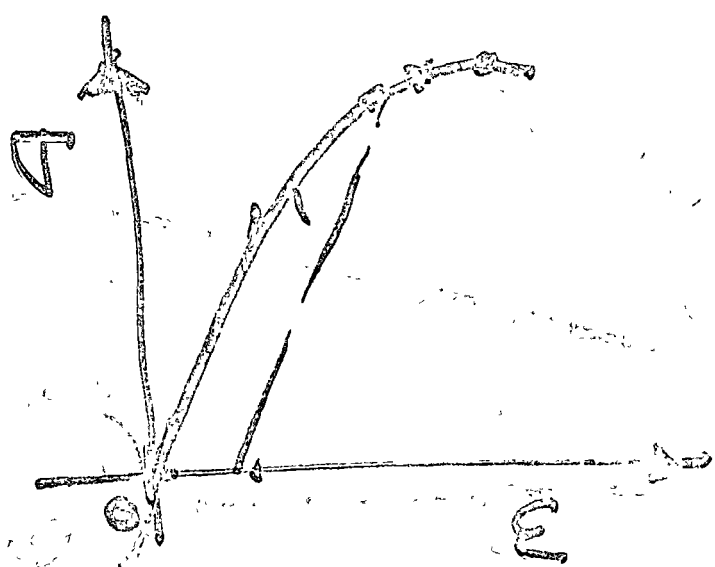
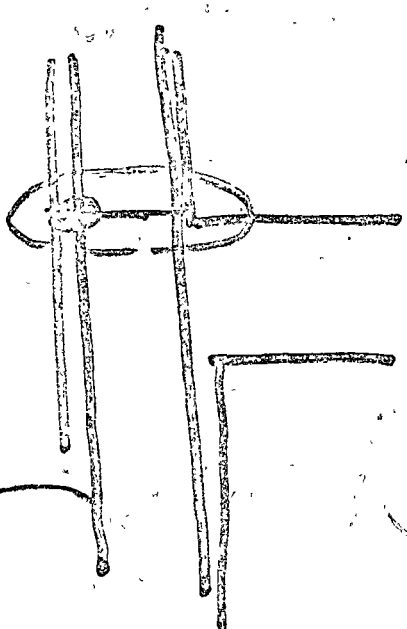
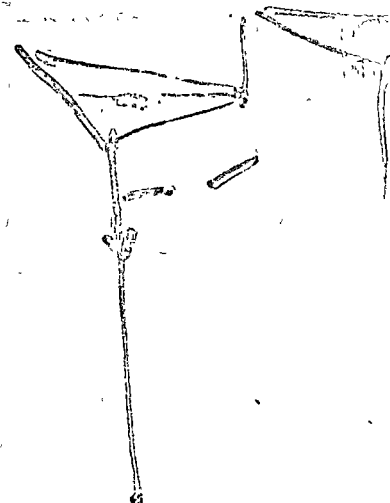
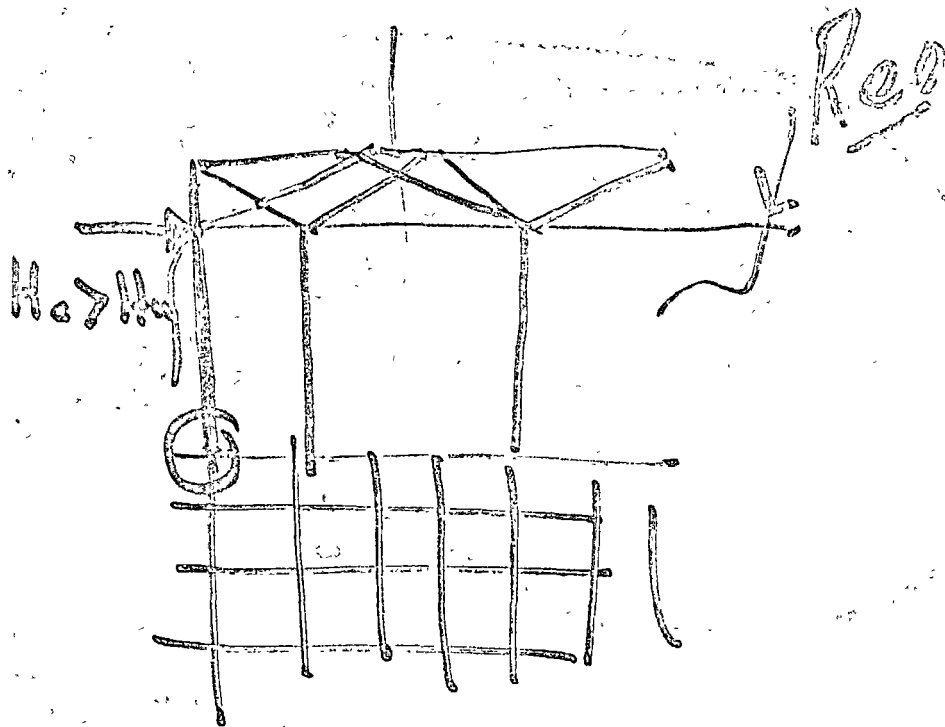
T<sub>1</sub>  
T<sub>2</sub>



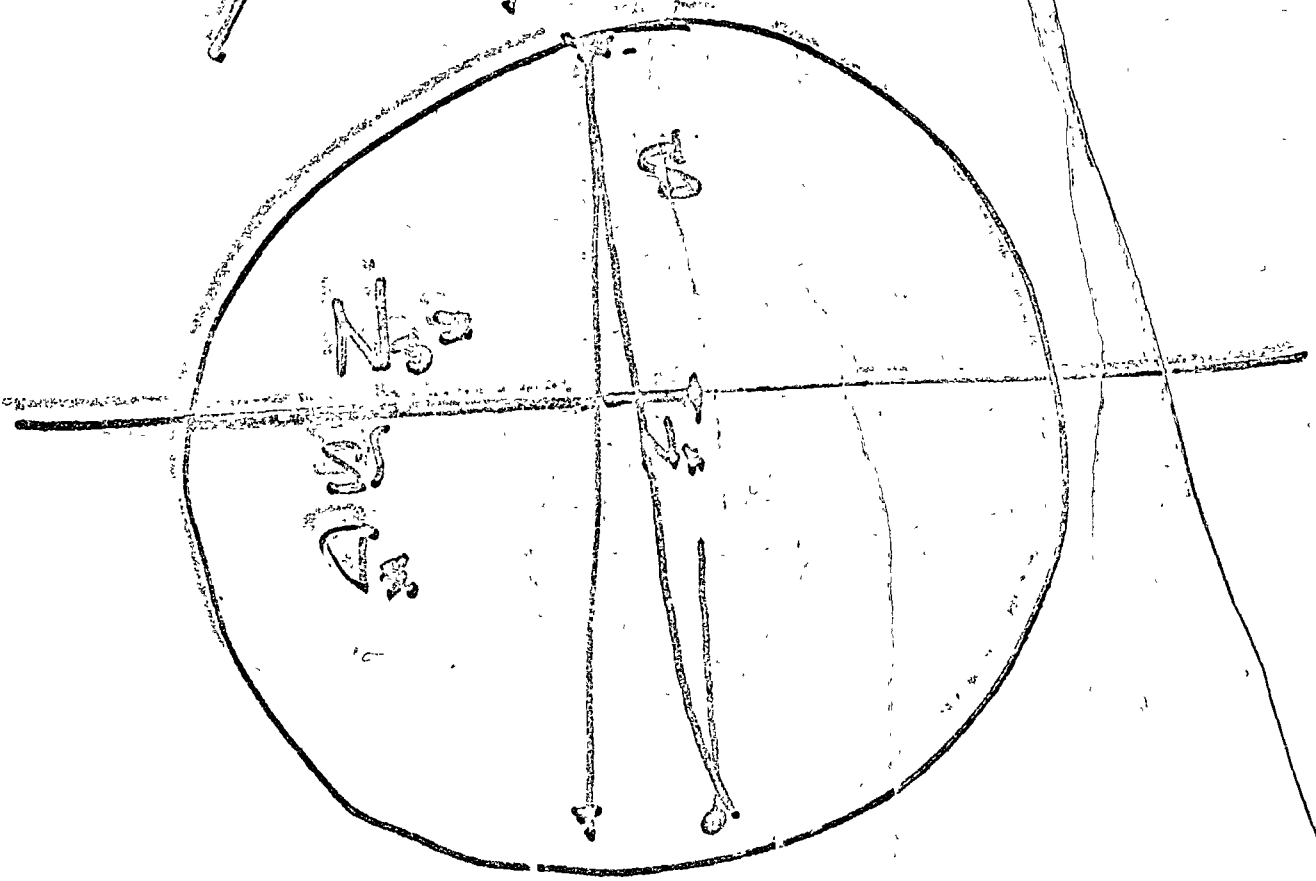
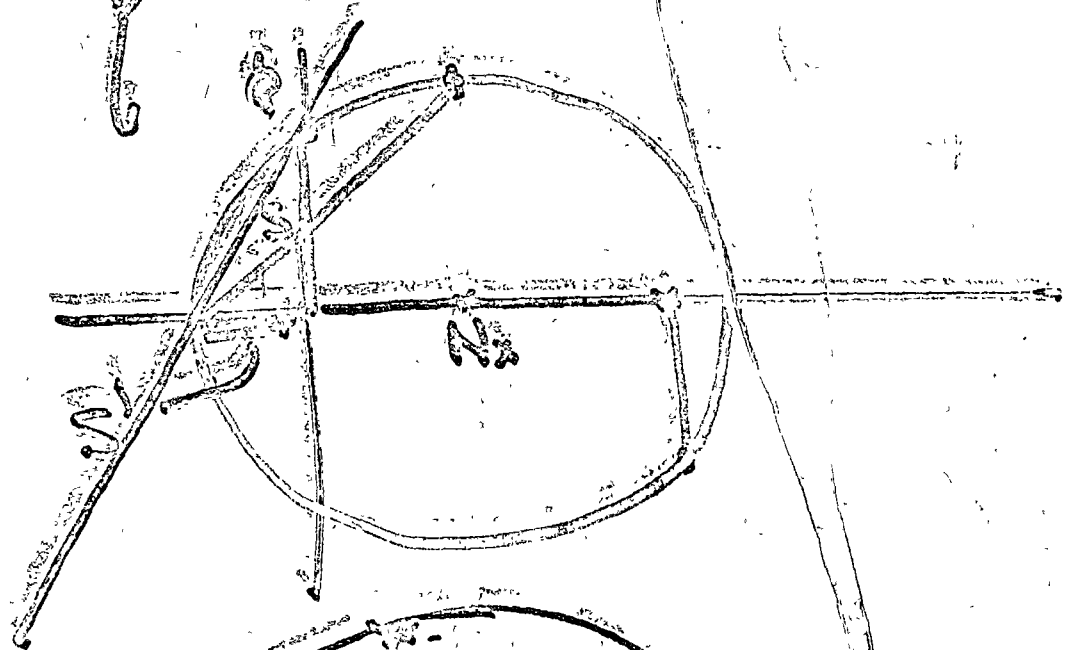
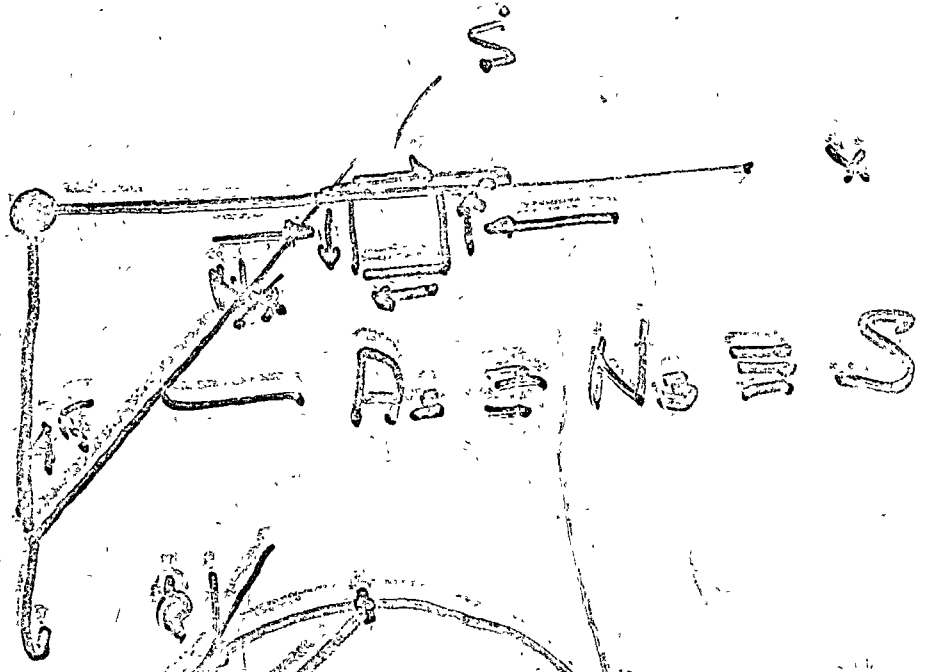


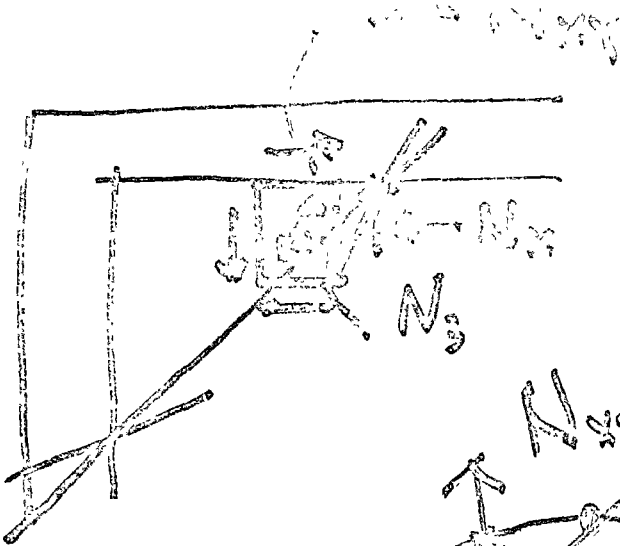




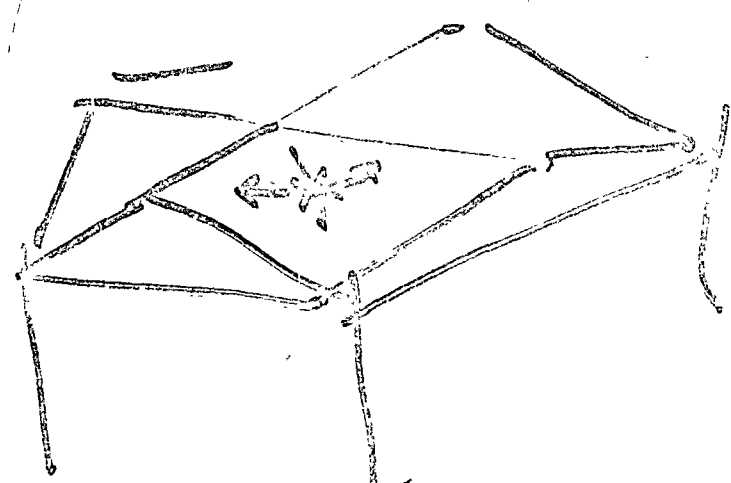
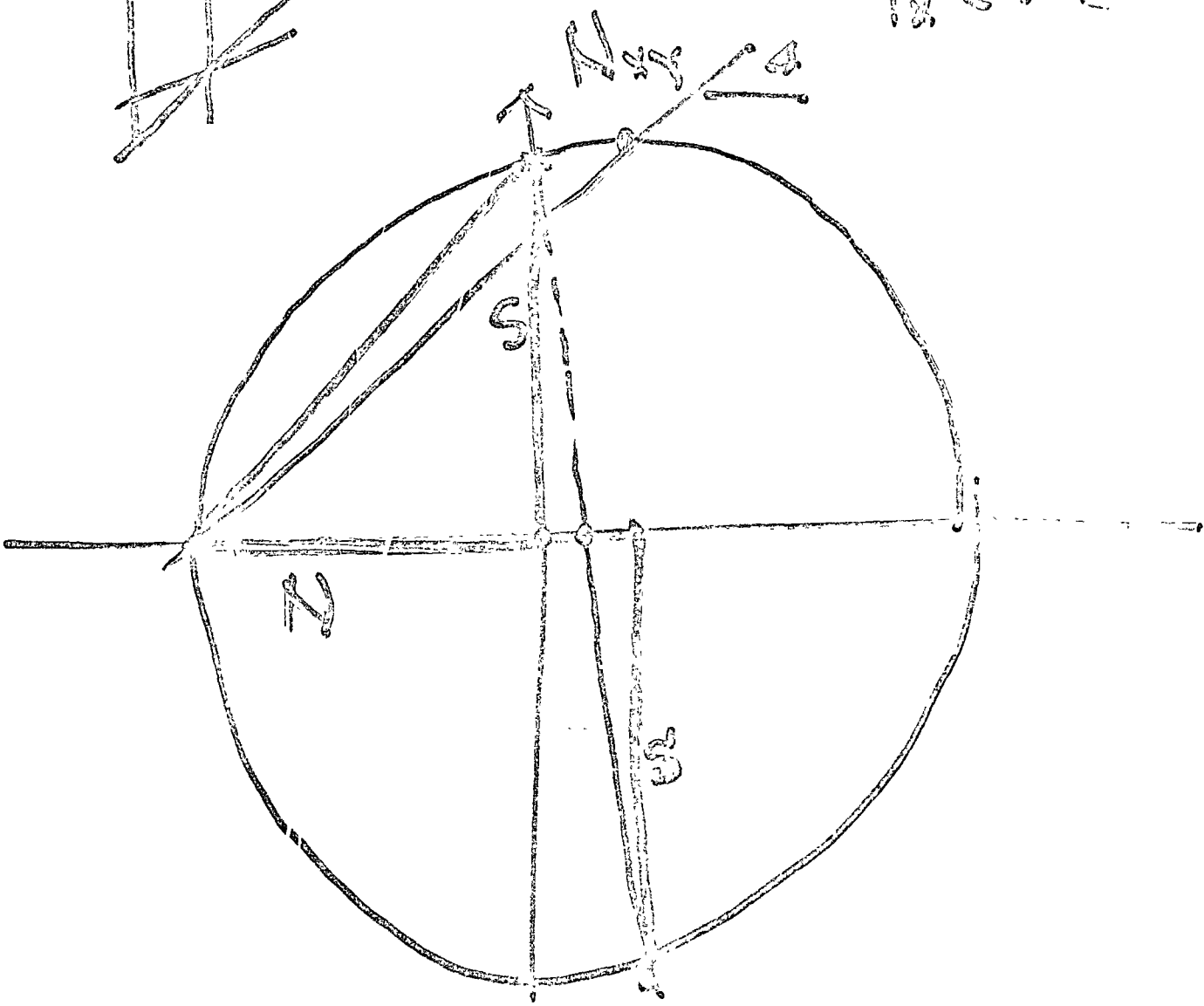


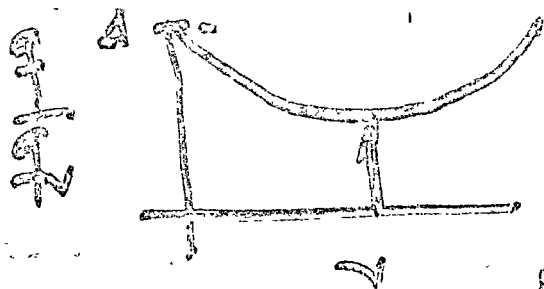
27-90  
%



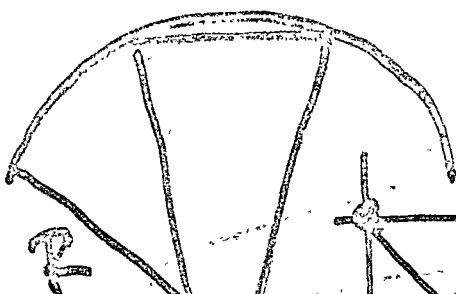


Handwritten notes in the top right corner, including a horizontal arrow pointing right and several lines of illegible text.





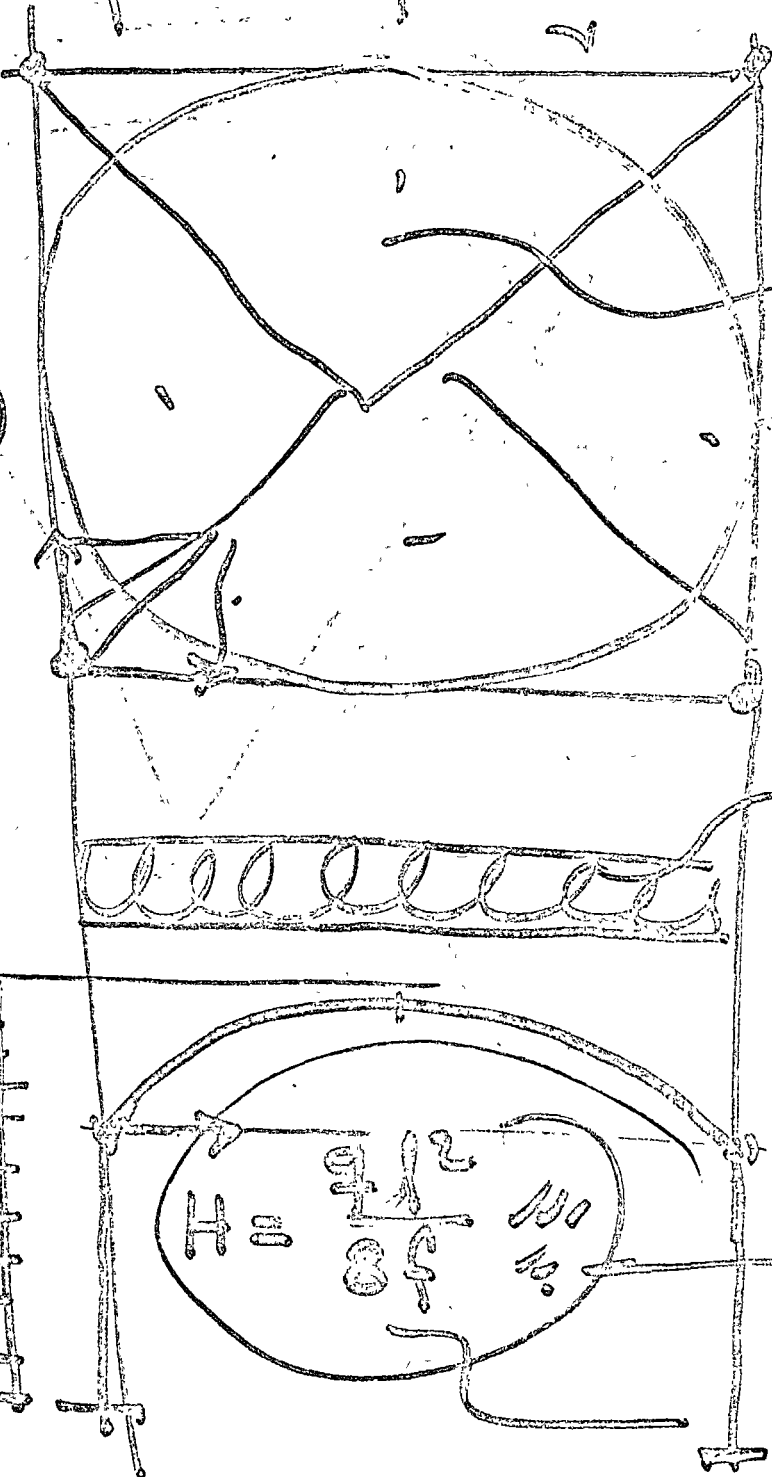
0.05



$R_i$

$R_i$

$(R_i, R_i, \dots)$

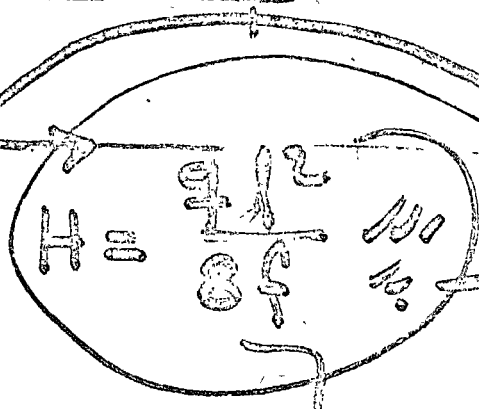
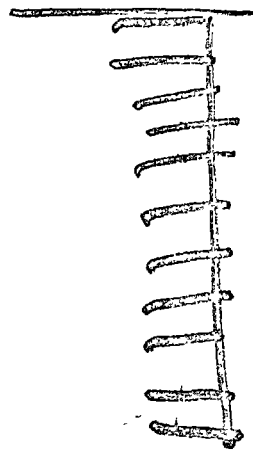


$R_i$

$D_i$

$R_i$

$H_i$

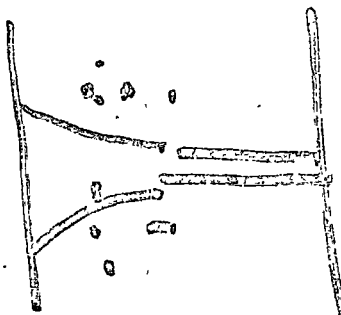


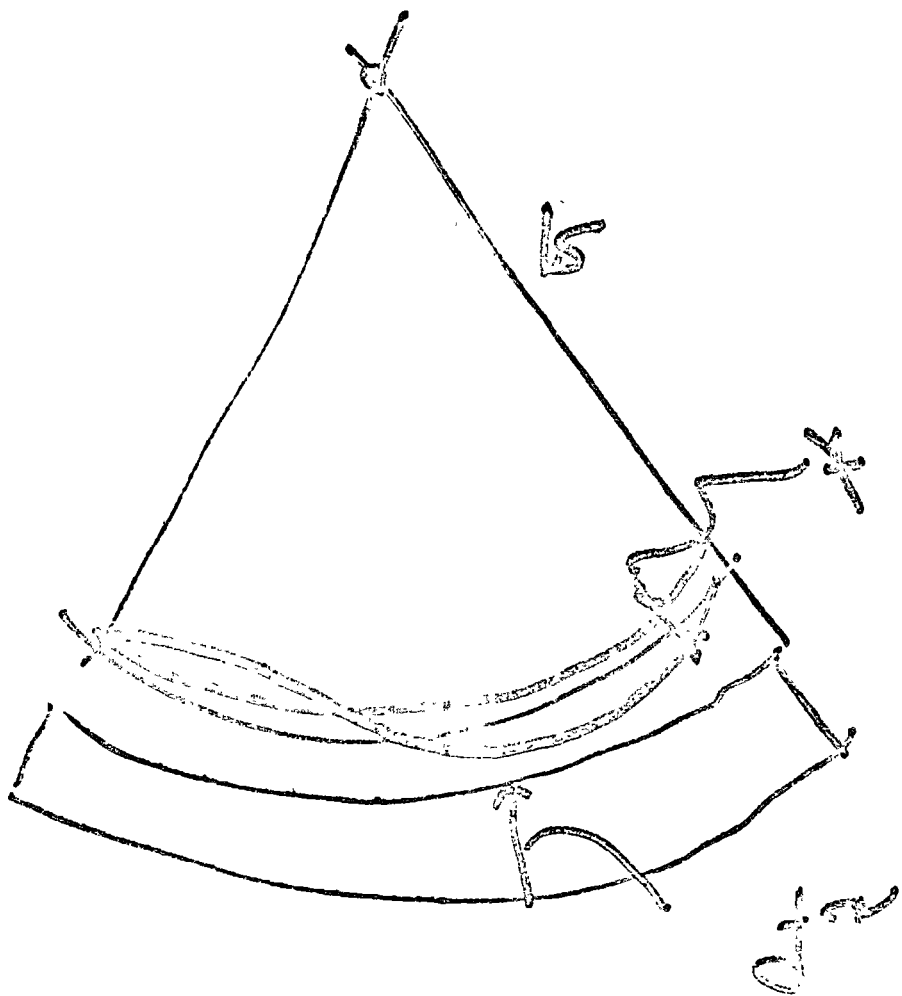
$H = \frac{912}{8f}$

100

1. minto  
Sci.

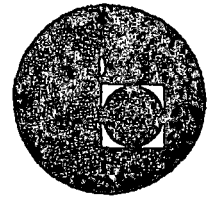
$H_e < H = \frac{912}{8f}$





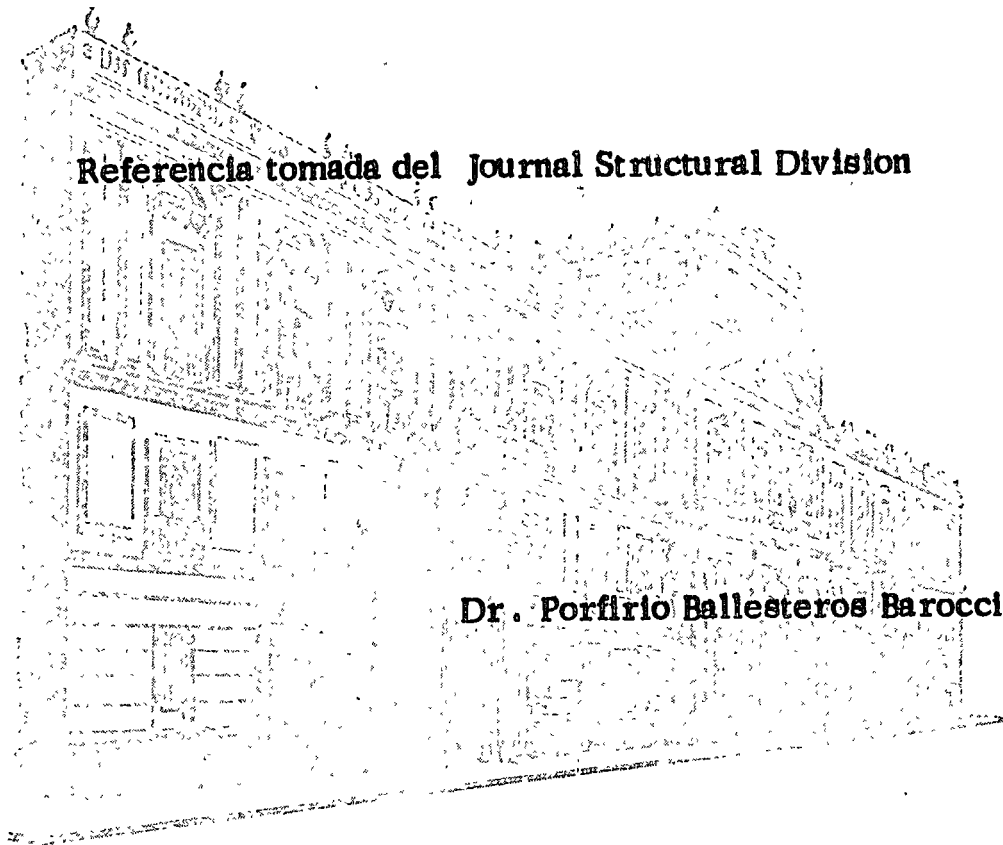


centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES

Referencia tomada del Journal Structural Division



Dr. Porfirio Ballesteros Baroccio

1 13 55074 470

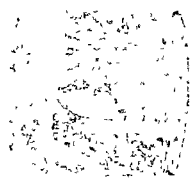


1 13 55074 470

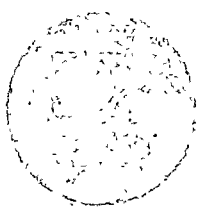


1 13 55074 470

1 13 55074 470



1 13 55074 470





mercial utilization of the waterway appears to be developing at a more rapid rate than was anticipated. When Columbia Lock and Dam and the Walter F. George development are completed (approximately June, 1963) the entire project will be complete and all project purposes will be served. At that time, when 9-ft navigation will extend up the Chattahoochee River to Columbus, increased use of the waterway should be accelerated by the additional savings made possible by means of barge transportation over the greater distances made available thereby.

### CONCLUSIONS

The federal project for the Apalachicola River Basin consists of channel improvement of the Apalachicola River; three locks and dams, one near the head of the Apalachicola River with a power installation and two on the Chattahoochee River south of Columbus (one to contain power-generating facilities); and a multiple-purpose dam and reservoir on the Chattahoochee River above Atlanta for flood control, streamflow regulation, and hydroelectric-power generation. The entire project is scheduled for completion in 1963, although all the purposes are at least partly served at the present time. In fact, streamflow regulation and flood control in the Atlanta area have been a reality for approximately 3 yr, as was flood reduction at points farther downstream, and 9-ft navigation has been available to Bainbridge and Columbia since March, 1957. When the project is completed the 9-ft navigation channel will be extended to Columbus, and hydroelectric power-generating facilities with a total capacity of 246,000 kw will have been installed that will produce an annual average of 819,000,000 kw-hr.

The three large reservoirs will offer unexcelled opportunities for water sports and recreation of all types. The two that are now essentially complete, Buford Reservoir and Jim Woodruff Reservoir, are already used extensively for these purposes. The intensive use of Buford Reservoir, which is close to the Atlanta metropolitan area, will increase greatly as the reservoir fills and with the passage of time. In addition to providing the usual recreational opportunities, Walter F. George Reservoir and Jim Woodruff Reservoir promise excellent havens for waterfowl. For that reason hunting may be popular in these reservoir areas.

In its function of regulating and conserving water supply for productive use, the project will be extremely valuable to the area served. Industries, farms, and communities, including Atlanta, will be assured of an abundant and dependable water supply. Many modern industries require a large quantity of water for cooling and processing. The water supply made available by the project should attract industries because of the economy of locating near an adequate source of water. Low-cost transportation and a satisfactory power supply at reasonable prices are also attractive to industries, and will either be provided or promoted by the project. By enabling goods to be produced and transported at less cost than elsewhere, by protecting crops and improvements from damage and destruction, and by making it possible for equal or better crops to be raised with less effort, thereby conserving energies for additional economic activities, the project will serve the economy and welfare of the entire nation.

# AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

Founded November 5, 1852

## TRANSACTIONS

Paper No. 2951

### SHELLS OF DOUBLE CURVATURE

BY ALFRED L. PARME,<sup>1</sup> A. M. ASCE

WITH DISCUSSION BY MESSRS. TUNG AU; W. WATTERS PAGON; SANTI P. BANERJEE; MARIO G. SALVADORI; AND ALFRED L. PARME

#### SYNOPSIS

A comprehensive derivation of formulas for the evaluation of the membrane forces acting in any doubly curved shell is presented. For the specific case of an elliptical paraboloid shell, numerical tables are given, thus simplifying the determination of the stresses. The applicability of these tabular values to other doubly curved shells is shown together with illustrative examples.

#### INTRODUCTION

The great strength of doubly curved concrete shells with edges stiffened by arches or ribs is due to their ability to support any continuous load principally by direct stresses—that is, by axial compression or tension. Moreover, the stresses for these shells, including those that are extremely thin, are relatively small compared with the compressive strength of concrete. The shell is free of flexural forces except for localized bending, which may occur near the edges of a doubly curved shell, due to the effect on the shell of the displacement of the edge members. This behavior is not restricted solely to surfaces of revolution that are suitably restrained horizontally and vertically at the base, but is typical of most doubly curved shells with edge beams. As will be described subsequently, it is not necessary that the edge members be capable of resisting lateral forces.

The direct forces acting in a doubly curved shell are obtained directly from a consideration of statics only. There are innumerable coordinate systems that can be used to express the interrelationship between the internal forces acting in a shell. It has been found, however, that for the general case the Cartesian system leads to the simplest expressions.

NOTE.—Published, essentially as printed here, in September, 1958, in the Journal of the Structural Division, as Proceedings Paper 1057. Positions and titles given are those in effect when the paper or discussion was approved for publication in Transactions.

<sup>1</sup> Mgr., Structural & Railways Bureau, Portland Cement Assn., Chicago, Ill.

Adopting this coordinate system for convenience, a representative small element of a shell of double curvature is formed, as shown in Fig. 1, by two radial planes whose horizontal lines are parallel to the  $y$ -axis and by two other radial planes in which the horizontal lines are parallel to the  $x$ -axis. The direct forces,  $T_x$  and  $T_y$ , measured in pounds per unit length, are considered positive when they create tension. The shearing force,  $S$ , also measured in pounds per unit length, is positive when it creates tension in the diagonal direction of increasing values of  $x$  and  $y$ . The surface load,  $w$ , is considered positive when acting downward. The forces acting on the element are resolved into components that are parallel to the coordinate system but have their direction tangential to the surface. Thus, force  $T_o$  is parallel to the  $(xz)$ -plane but is inclined by the angle,  $\phi$ , to the  $(xy)$ -plane

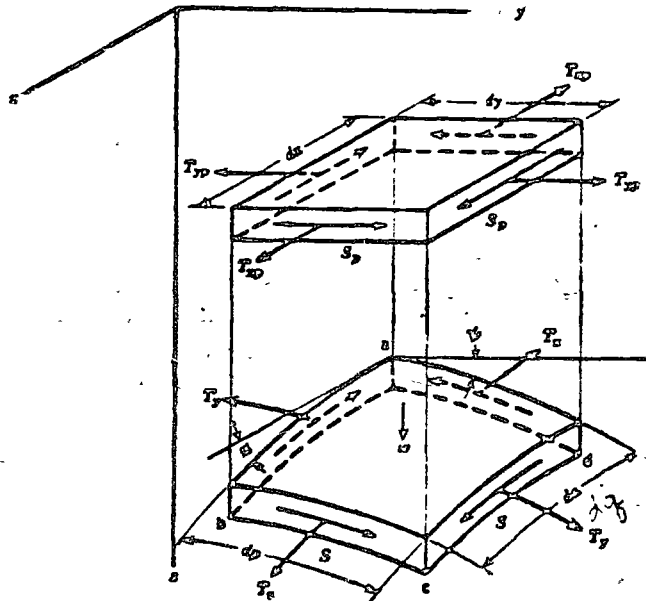


FIG. 1.—ELEMENT OF A SHELL OF DOUBLE CURVATURE

A considerable simplification<sup>2</sup> in the expressions for the equilibrium of forces parallel to the various axes results if the actual forces are transformed into fictitious forces acting on the projected area of the lower element in Fig. 1. From geometry it is evident that

$$dp \cos \psi = dy \dots \dots \dots (1a)$$

and

$$dq \cos \phi = dx \dots \dots \dots (1b)$$

The horizontal component of the normal force,  $T_x$ , acting on face  $ad$  is  $T_x \cos \phi \, dp$

<sup>2</sup> "Stress Conditions in Shells Neglecting Bending," by K. W. Johansen, *Bygningstatistiske Modelde*, Danak Selskab for Bygningstatistik, Copenhagen, 1933, pp. 81-84.

which, by introducing the notation of Eq. 1a, becomes  $T_o (\cos \phi / \cos \psi) \, dy$ . If the projected element is to have the same total force acting on it as the actual element,

$$T_{op} \, dy = T_o \frac{\cos \phi}{\cos \psi} \, dy \dots \dots \dots (2a)$$

or

$$T_{op} = T_o \frac{\cos \phi}{\cos \psi} \dots \dots \dots (2b)$$

Similarly,

$$T_{yp} = T_y \frac{\cos \psi}{\cos \phi} \dots \dots \dots (3)$$

Equating the horizontal component of the shear acting on face  $ad$  to the shear on the projected element,

$$S \, dp \cos \psi = S_p \, dy \dots \dots \dots (4a)$$

Substituting for the value of  $dp$  its value from Eq. 1a results in

$$S = S_p \dots \dots \dots (4b)$$

Assuming that only a vertical load acts on the shell and recognizing that the forces acting on the element vary from the near face to the far face, the equilibrium of forces in the  $x$ -direction expressed in terms of  $T_{xp}$ ,  $T_{yp}$ , and  $S_p$  (horizontal components of the actual forces) yields

$$\frac{\partial T_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Equilibrium of the forces in the  $y$ -direction results in

$$\frac{\partial T_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial S_p}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

In order to establish the equations of equilibrium of forces in the  $z$ -direction, it is necessary first to obtain their vertical components. The vertical component of the normal force,  $T_x$ , acting on face  $ad$  is  $T_x \sin \phi \, dp$ . Substituting for  $T_o$  and  $dp$  their values as given by Eqs. 2b and 1a yields

$$T_{xp} \frac{\sin \phi}{\cos \psi} \, dy = T_{xp} \tan \phi \, dy = T_{xp} \frac{\partial s}{\partial x} \, dy \dots \dots \dots (7)$$

The vertical component acting per unit of length along the  $y$ -axis is, therefore,

$T_{xp} (\partial z / \partial x)$ . Similarly, the vertical component of  $T_p$  per unit of length along the  $x$ -axis is  $T_{yp} (\partial z / \partial y)$ . The vertical component of the shear force on face  $cd$  is  $S_p \sin \psi$ , which equals  $S_p (\partial z / \partial y) dy$  which, per unit of length along the  $y$ -axis, equals  $S_p (\partial z / \partial y)$ . Similarly, the vertical component of shear acting on face  $ab$  is  $S_p (\partial z / \partial x)$ . Taking into account the variation in the magnitude of forces from one face to the other, the summation of forces in the  $z$ -direction yields

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_{xp} \frac{\partial z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (T_{yp} \frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (S_p \frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_p \frac{\partial z}{\partial x}) + w_p = 0 \quad (8c)$$

in which  $w_p$  is the load per unit of projected area. Eq. 8c reduces to

$$T_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 S_p \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial T_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial T_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial S_p}{\partial x} \right) = -w_p \quad (8b)$$

By Eqs. 5 and 6, the terms in the parentheses equal zero. Hence, Eq. 8b reduces to

$$T_{xp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_{yp} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 S_p \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -w_p \quad (8e)$$

Eqs. 5, 6, and 8a can be reduced to a single equation with one unknown by introducing the function,  $F$ , so that

$$\frac{\partial F}{\partial y} = T_{xp} \quad (9a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = T_{yp} \quad (9b)$$

and

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = S_p \quad (9c)$$

These values satisfy the requirements of Eqs. 5 and 6 and reduce Eq. 8e to

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -w_p \quad (10)$$

Except for a few special cases, the algebraic solution of differential Eq. 10 is difficult, and a numerical procedure such as finite differences must be used.

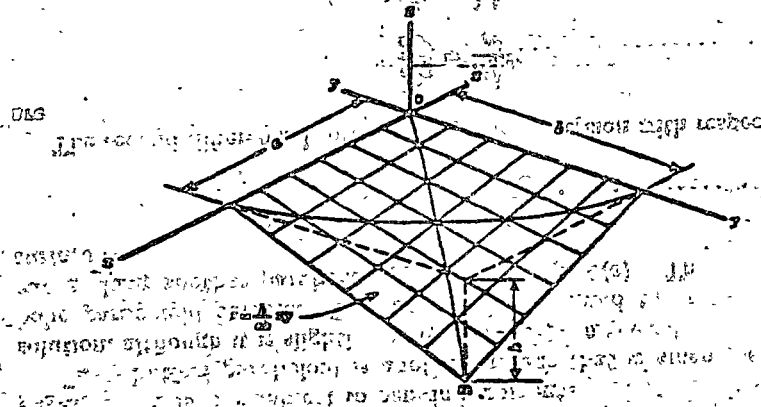


FIG. 2—SECTIONS OF A HYPERBOLIC PARABOLOID SURFACE TAKEN AT 45° TO THE COORDINATE AXES

One of the simpler cases to solve is the hyperbolic paraboloid shell subject to a uniform load. The surface of a hyperbolic paraboloid shell (Fig. 2) is formed by a series of straight lines parallel to the  $(xz)$ -plane and  $(xy)$ -plane and, hence, is defined by

$$z = \frac{\lambda}{ab} xy \quad (11)$$

The second differential of Eq. 11 equals zero. Therefore, for a hyperbolic paraboloid shell, Eq. 10 becomes

$$-2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\lambda}{ab} = -w_p \quad (12)$$

which simplifies by means of Eq. 9c to

$$S_p = \frac{ab}{2\lambda} w_p \quad (13)$$

Because the differential of  $S_p$  with respect to  $y$  and  $x$  is zero, when the direct forces normal to the edge are zero, it is seen from the relationships in Eqs. 5 and 6 that

$$T_{xp} = T_{yp} = 0 \quad (14)$$

Eq. 14 indicates that the entire shell is subject solely to pure shear of constant intensity when uniformly loaded. Along the edges this uniform shear must be resisted by the edge member.

it could be  $T_{xp} = f_1(y)$

This state of pure shear, which actually resolves into principal stresses of equal and opposite magnitude acting on sections at 45° to shear plane, can be deduced from purely physical considerations without recourse to differential equations. As shown in Fig. 2, sections of a hyperbolic paraboloid surface taken at 45° to the coordinate axes form identical parabolic arches. In other words, the surface shown in Fig. 2 can be obtained by translating (moving) a parabolic curve along curve om. The parabolas parallel to om curve downward, whereas those at right angles to these parabolas curve in the opposite direction.

Assuming that the load is equally divided between the two sets of perpendicular parabolas, it is evident that at the edge the parabolas parallel to curve om exert an outward thrust, whereas those perpendicular to this curve exert an inward pull. Although opposite in character, the magnitude of these forces

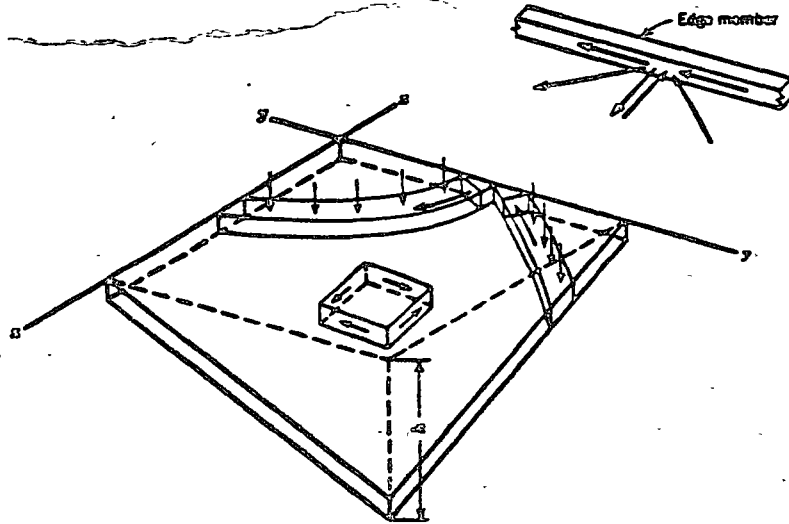


FIG. 3.—FORCES ACTING ON EDGE MEMBERS OF PARABOLIC ARCHES.

intersecting at any point on the boundary of the surface is equal because the intersecting parabolas are identical. The net effect, as shown in Fig. 3, is that the outward force acting on the edge is cancelled and only pure shear acts along the edge. This shear must be resisted by a rigid edge member. Because horizontal reactions are supplied to the ends of the parabolas by the interaction of one on the other, it is valid to assume that the load is carried by a series of parabolas.

For most hyperbolic paraboloid shells of moderate rise, it is satisfactory to consider the load as being uniform. However, when the rise is great the dead load can no longer be considered as acting uniformly on the projected area. For this condition the dead load of the shell is

$$w_s = \frac{w}{\cos \phi \cos \psi} \dots \dots \dots (15a)$$

which, by trigonometry, can be shown to equal

$$w_s = w \sqrt{\left[1 + \left(\frac{hx}{ab}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{hy}{ab}\right)^2\right]} \dots \dots \dots (15b)$$

Neglecting

$$\left(\frac{hx}{ab}\right)^2 \left(\frac{hy}{ab}\right)^2$$

because it is small, Eq. 15b reduces to

$$w_s = w \sqrt{1 + \left(\frac{hx}{ab}\right)^2 + \left(\frac{hy}{ab}\right)^2} \dots \dots \dots (15c)$$

From Eqs. 10 and 13,

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{2h}{ab} = S_p \frac{2h}{ab} = w \sqrt{1 + \left(\frac{hx}{ab}\right)^2 + \left(\frac{hy}{ab}\right)^2} \dots \dots \dots (16)$$

Differentiating Eq. 16 and integrating according to Eqs. 5 and 6 yields

$$T_{xy} = -w \frac{y}{2} \log \left[ \frac{hx}{ab} + \sqrt{1 + \left(\frac{hx}{ab}\right)^2 + \left(\frac{hy}{ab}\right)^2} \right] + f(y) \dots \dots (17)$$

$$T_{xy} = -w \frac{x}{2} \log \left[ \frac{hy}{ab} + \sqrt{1 + \left(\frac{hx}{ab}\right)^2 + \left(\frac{hy}{ab}\right)^2} \right] + f(x) \dots \dots (18)$$

in which  $f(y)$  and  $f(x)$  are constants of integration. With only one constant of integration available for each normal force and with two edges for each force—that is, at  $x = 0$  and  $x = a$  for  $T_{xy}$ , or at  $y = 0$  and  $y = b$  for  $T_{xy}$ —it is evident that, for pure membrane or direct-force action, normal reactions are required. If normal reactions are not provided along at least one of the two parallel edges, the surface is subject to bending moments.

The elliptical paraboloid is another surface that is amenable to algebraic solution, although it is slightly more involved than the solution for the hyperbolic paraboloid surface. This surface is generated by moving a parabolic curve along another parabola, as shown in Fig. 4(a). The equation of this surface is

$$z = \frac{h_y y^2}{b^2} + \frac{h_x x^2}{a^2} \dots \dots \dots (19)$$

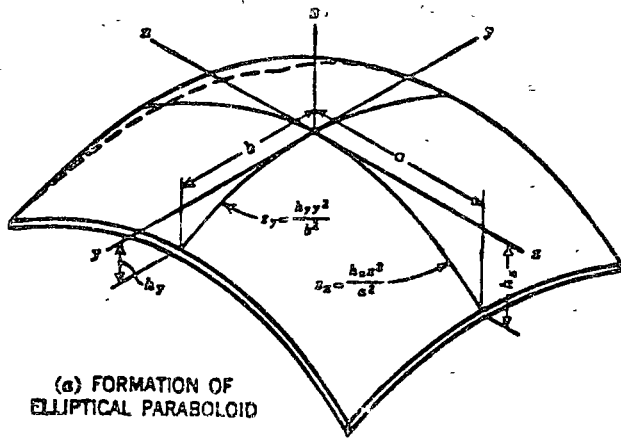
The second differentials of the foregoing expression with respect to  $x$  and  $y$  are

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2h_x}{a^2} \dots \dots \dots (20a)$$

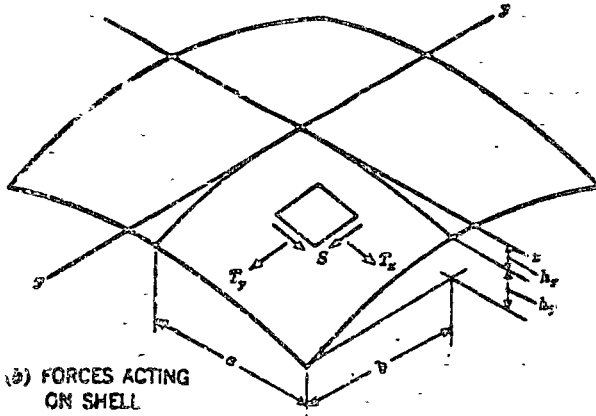
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2h_y}{b^2} \dots \dots \dots (20b)$$

and

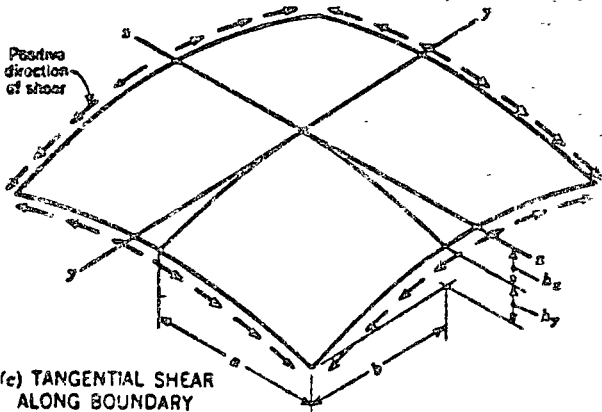
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots \dots (20c)$$



(a) FORMATION OF ELLIPTICAL PARABOLOID



(b) FORCES ACTING ON SHELL



(c) TANGENTIAL SHEAR ALONG BOUNDARY

FIG. 4.—ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

Substituting these expressions in Eq. 10, for a uniform load,  $w_x = w$ ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{h_y \sigma^2 \partial^2 F}{h_a b^2 \partial x^2} = -\frac{\sigma^2}{2 h_a} w \dots \dots \dots (21)$$

Differential Eq. 21 is satisfied if

$$F = - \left[ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n (\cosh \beta x) (\cos \lambda y) \right] - \frac{\sigma^2 y^2 w}{4 h_a} \dots \dots \dots (22)$$

in which

$$\beta = \sqrt{\frac{h_a}{h_y} \frac{n \pi}{2 a}} \dots \dots \dots (23a)$$

and

$$\lambda = \frac{n \pi}{2 b} \dots \dots \dots (23b)$$

In the foregoing expressions, the values of  $n$  considered are the odd integers. This can be checked by differentiating Eq. 22 and substituting the resulting values in Eq. 21. If the value of  $F$  is used in accordance with Eqs. 9, the expressions for the forces are

$$T_{xy} = \left[ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \lambda^2 (\cosh \beta x) (\cos \lambda y) \right] - \frac{\sigma^2 w}{2 h_a} \dots \dots \dots (24a)$$

$$T_{yy} = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \beta^2 (\cosh \beta x) \cos \lambda y \dots \dots \dots (24b)$$

and

$$S_y = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \beta \lambda (\sinh \beta x) \sin \lambda y \dots \dots \dots (24c)$$

At the boundary,  $y = \pm b$ ,  $T_{yy} = 0$  because  $\cos \lambda b = 0$  for all values of  $n$ . In order to satisfy the condition that  $T_{xy} = 0$  at  $x = \pm a$ , it is necessary that  $\frac{\sigma^2 w}{2 h_a}$  be expressed as a Fourier series. The general expression of the trigonometric series for a constant is

$$1 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4 (-1)^{(n-1)/2} \cos \lambda y}{n \pi} \dots \dots \dots (25)$$

Therefore, at  $x = \pm a$ , Eq. 24a becomes

$$T_{xy} = 0 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ A_n \lambda^2 \cosh \beta a - \left[ \frac{4 (-1)^{(n-1)/2} \sigma^2 w}{n \pi} \right] \right\} \cos \lambda y \dots (26)$$

This expression can equal only zero for all values of  $y$  if

$$A_n = \frac{2 \sigma^2 w (-1)^{(n-1)/2}}{n \pi h_a \lambda^2 \cosh \beta a} \dots \dots \dots (27)$$

Substituting  $A_n$  in Eqs. 24 and cancelling the common terms results in

$$T_{xy} = \frac{w a^2}{h_0} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2} \cosh \beta z}{n \cosh \beta a} \cos \lambda y - \frac{1}{2} \right] \dots (28a)$$

$$T_{yz} = -\frac{w b^2}{h_y} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2} \cosh \beta z}{n \cosh \beta a} \cos \lambda y \right] \dots (28b)$$

and

$$S_x = -\frac{w a b}{\sqrt{h_x h_y}} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2} \sinh \beta z}{n \cosh \beta a} \sin \lambda y \right] \dots (28c)$$

By means of Eq. 28 and Eqs. 2b, 3, and 4b, the actual internal forces can be computed as the sum of a series. If  $h_x/h_y$  is greater than unity, rapid convergence of the series is obtained for most values, and, therefore, only the first three or four terms ( $n = 1, 3, 5$ , and  $7$ ) are required to obtain sufficient accuracy. However, at the boundary  $z = \pm a$  the expression for shear converges very slowly. In this case one can restate Eq. 28c at the boundary  $z = \pm a$  as

$$S_x = -\frac{w a b}{\sqrt{h_x h_y}} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[ \left( \frac{\sinh \beta a}{\cosh \beta a} - 1 \right) + 1 \right] \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \right\} \sin \lambda y \dots (29)$$

However,

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \sin \lambda y = \frac{1}{2} \log \left( \sec \frac{\pi y}{2b} + \tan \frac{\pi y}{2b} \right)^2 \dots (30)$$

Therefore, Eq. 29 reduces to

$$S_x = -\frac{w a b}{\sqrt{h_x h_y}} \left[ \frac{1}{2\pi} \log \left( \sec \frac{\pi y}{2b} + \tan \frac{\pi y}{2b} \right)^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} (1 - \tanh \beta a) \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \sin \lambda y \right] \dots (31)$$

For values of  $h_x/h_y$  greater than 1, for practical purposes,  $\tanh \beta a$  is equal to 1. Therefore, the second term in Eq. 31 can be ignored; thus, the expression for shear converges rapidly.

At  $y = \pm b$ ,  $\sec (\pi y/2b)$  and  $\tan (\pi y/2b)$  are infinite. Therefore, the log of these values is also infinite. Consequently, Eq. 31 indicates that the shear at the corner is infinite. This would be true if the corner were completely free of normal forces and if the shell had no bending resistance. However, because of the integral action of the supporting ribs and shell, normal forces do exist at the corner. These normal forces alter the resistance to the extent that the shear does not need to be infinite to satisfy statics. Moreover, at the corner some of the load can be, and is, resisted by flexural resistance. From studies made of cylindrical shells, it has been found that this flexural action is confined to a distance of approximately  $0.4 \sqrt{r t}$  from the rib, in which  $r$  is the

radius of the shell and  $t$  is the shell thickness. Therefore, it is felt that Eqs. 28c and 31 do not apply within the distance  $0.4 \sqrt{r t}$  from the corner. Shear can be considered maximum at the point  $y = b - 0.4 \sqrt{r t}$ .

The symbols,  $T_x$ ,  $T_y$ , and  $S$ , represent forces per unit of length. In order to obtain stresses, these values must be divided by the thickness of the shell.

The trigonometric functions involved in Eqs. 2b, 3, and 4b can be readily expressed as functions of  $x$  and  $y$ . Differentiating Eq. 19 with respect to  $x$  yields

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2 h_x z}{a^2} = \tan \phi \dots (32)$$

By utilizing

$$\tan^2 \phi = \frac{1}{\cos^2 \phi} - 1 \dots (33)$$

Eq. 2b reduces to

$$\left( \frac{2 h_x z}{a^2} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \phi} \dots (34)$$

or

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2 h_x z}{a^2} \right)^2}} \dots (35a)$$

Similarly,

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2 h_y y}{b^2} \right)^2}} \dots (35b)$$

and, therefore,

$$\frac{\cos \phi}{\cos \psi} = \sqrt{\frac{1 + \left( \frac{2 h_y y}{b^2} \right)^2}{1 + \left( \frac{2 h_x z}{a^2} \right)^2}} \dots (35c)$$

In order to avoid mathematical complications, the value of  $w$ , was assumed to be constant in establishing Eq. 21. However, although the algebraic computations become extensive and rather formidable, the procedure outlined for the uniform load can also be applied to the case of any symmetrical loading, such as the dead weight of the shell. In this case the load is expressed in terms of the double Fourier series,

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots} \sum_{m=1,3,5,\dots} \beta_{nm} \cos \gamma z \cos \lambda y \dots (36)$$

in which  $\gamma = m\pi/2a$ .

The resulting expressions for  $T_{xy}$  and  $T_{yz}$ , obtained by expressing  $w$  in this manner, indicate that any symmetrical loading can be resisted by direct forces without the necessity for lateral or normal forces at the boundaries. The behavior of the elliptical paraboloid shell under dead load therefore differs from that of the hyperbolic paraboloid shell, for which the dead load induces some bending if no lateral restraint is provided.

TABLE 1.—COEFFICIENTS FOR COMPUTING FORCE COMPONENTS OF ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

Table with columns for z/a, Force component, and sub-tables for h\_x/h\_y ratios (1.0, 0.5, 0.2). Rows include force components T\_x, T\_y, and S for various z/a values.

In order to expedite the analysis of the elliptical paraboloid shells and to obtain a better understanding of their load-carrying characteristics, Table 1 has been compiled on the basis of Eqs. 28 and Fig. 4(b). The expressions inside the parentheses in Eqs. 28 contain only the parameter, h\_x/h\_y. Therefore, the behavior of this doubly curved shell can be expressed as a function of this single parameter.

Coefficients are given for computing the three force components, T\_x, T\_y, and S, at the eighth points of a dome. The forces determined by multiplying the coefficients by constants are

Three equations: T\_y = - (w b^2 / k h\_y) (coefficient) (37a), T\_x = - (w a^2 k / h\_x) (coefficient) (37b), S = - (w a b / sqrt(h\_x h\_y)) (coefficient) (37c), and k = sqrt(1 + [(2 h\_x/a)(x/a)]^2) (37d)

and

These constants are dependent only on the selected dimensions of the shell and on the load. In this connection for the sake of completeness, the factor k has been included. In practice the additional accuracy secured by the inclusion of this term is unwarranted because the stresses due to T\_x and T\_y are never critical. Except in the zone near the corners in which the principal stress due to the combination of the three force components is tensile, the stresses are so low in compression for spans being considered that an investigation of the stresses in a dome is of academic interest only. Therefore, the real reason and need for computing stresses in a shell with a fair degree of accuracy are to obtain a reliable determination of the tangential load which must be carried by the supporting arches.

For this purpose the tangential shear existing along the boundaries (Fig. 4(c)) at the tenth intervals of half the chord are shown in Table 2. Table 2 also permits a better evaluation of the tension near the corner because the principal stresses are primarily related to S.

A graphical presentation of the values in Table 1 for T\_y at midspan is shown in Fig. 5 for various values of h\_x/h\_y. The values of T\_y for h\_x/h\_y from 1.0 to 5.0 are obtained from the values of T\_x by symmetry. For example, the value of T\_y at y = 0 for h\_x/h\_y = 5 is the same as the value of T\_x at z = 0 for h\_x/h\_y = 0.2. At x = +/- a, for all values of h\_x/h\_y,

T\_y = - (0.5 w b^2 / h\_y) = - (0.125 w L^2 / h\_y) (38)

The last term in Eq. 38 is the thrust in a parabolic arch subject to the uniform load, w. This identity is not surprising because at the boundary the force normal to the edge was made equal to zero. Consequently,

imposed condition of restraint compels the entire load in the immediate vicinity of the edge to be carried by arch action in the  $y$ -direction. Furthermore,  $0.5 b^2/h_y$  equals the radius of the parabola at its crown. Therefore, the value  $T_{yp}$  at  $x = a$  and  $y = 0$  represents merely the thrust induced in a ring with the appropriate radius due to a radial load,  $w$ .

Near the crown, marked variations in the value of  $T_{yp}$  occur as  $h_x/h_y$  varies. When the rise in the  $x$ -direction is small compared with the rise in the  $y$ -direction—for example, when  $h_x/h_y = 0.2$ —the curves in Fig. 5 are almost horizontal, indicating that a large proportion of the load is being resisted in the  $y$ -direction. This can be anticipated from the geometry of the shell. As the

TABLE 2.—SHEAR ALONG THE EDGES OF ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

$a/b$	$h_x/h_y$				
	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
	$\Delta x = \pm a$				
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0419	0.0389	0.0342	0.0307	0.0137
0.2	0.0854	0.0793	0.0701	0.0550	0.0286
0.3	0.1319	0.1231	0.1096	0.0872	0.0481
0.4	0.1836	0.1721	0.1546	0.1254	0.0731
0.5	0.2432	0.2294	0.2081	0.1726	0.1075
0.6	0.3204	0.3066	0.2859	0.2493	0.1818
0.7	0.4071	0.3897	0.3627	0.3173	0.2296
0.8	0.5063	0.5178	0.4887	0.4400	0.3443
0.9	0.6279	0.6090	0.5791	0.5292	0.4308
0.95	0.7570	0.7378	0.7074	0.6667	0.5559
0.98	0.9777	0.9582	0.9276	0.8763	0.7741
1.0	∞	∞	∞	∞	∞
$a/c$	$\Delta x = \pm b$				
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0419	0.0444	0.0468	0.0488	0.0507
0.2	0.0854	0.0903	0.0950	0.0990	0.1014
0.3	0.1319	0.1391	0.1460	0.1519	0.1553
0.4	0.1836	0.1930	0.2019	0.2095	0.2140
0.5	0.2432	0.2545	0.2652	0.2743	0.2798
0.6	0.3204	0.3317	0.3425	0.3516	0.3571
0.7	0.4071	0.4213	0.4348	0.4463	0.4532
0.8	0.5063	0.5515	0.5659	0.5782	0.5855
0.9	0.6279	0.6434	0.6582	0.6707	0.6782
0.95	0.7570	0.7729	0.7878	0.8005	0.8081
0.98	0.9777	0.9935	1.0087	1.0215	1.0290
1.0	∞	∞	∞	∞	∞

curvature in one direction is flattened, thereby approaching a horizontal plane as a limit, it is natural that the load is transmitted in the other direction.

With no normal forces along the edges, it follows that the increase in the proportion of load carried in the  $y$ -direction as  $h_x/h_y$  decreases must be accompanied by an increase in the tangential shears along the edges,  $x = \pm a$ . Such an increase is confirmed by the coefficients listed in Table 2. Although these coefficients diminish at  $x = \pm a$  as  $h_x/h_y$  decreases, they do not diminish as rapidly as  $\sqrt{h_x/h_y}$ .

For large values of  $h_x/h_y$ , the values of  $T_{yp}$  become appreciably smaller as the crown is approached, and, therefore, for such shells by the exterior

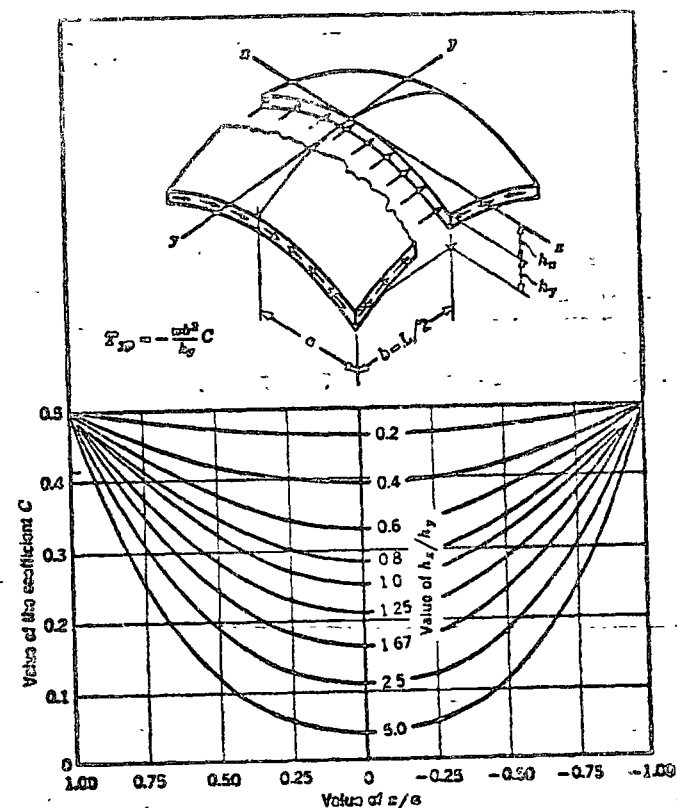


FIG. 5.—COEFFICIENT VALUES FOR VARIOUS VALUES OF  $h_x/h_y$

portion of the shell is resisting load in the  $y$ -direction. At the crown the curve for  $h_x/h_y = 1.0$  shows that half of the load is carried in one direction and the remaining half is carried in the other direction, which is natural from the condition of equal rise in the two directions.

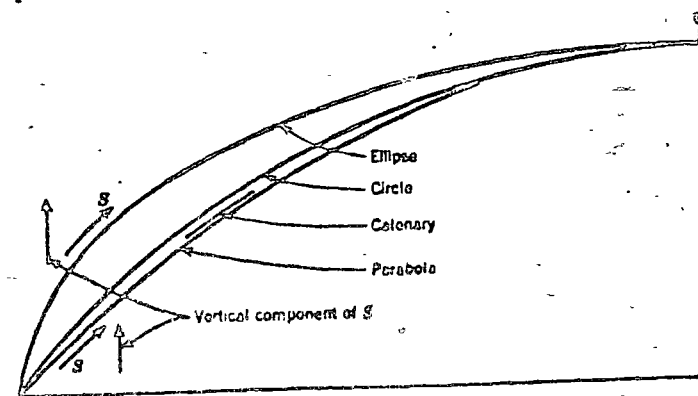


FIG. 6.—SLOPE COMPARISON FOR VARIOUS CURVES



An interesting question is whether or not the coefficients in Tables 1 and 2 can be applied to domes of other shapes with an equal rise and span. As stated previously, the critical stresses are a function of the shear near the corners. However, the summation of the vertical components of the shear along an edge must equal the load on the shell. If the same variation of shear along an edge is assumed for all shapes, it is apparent that, to satisfy the foregoing condition of equilibrium, the intensity of the tangential shear is dependent on the steepness of the slope near the corner. This is particularly true because the maximum shear occurs at the corner.

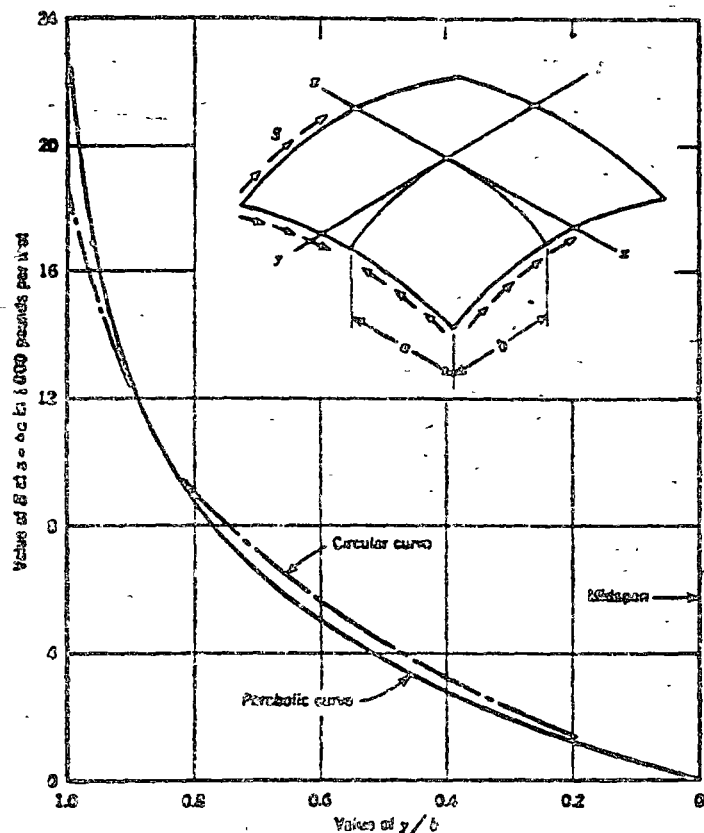


FIG. 7.—COMPARISON OF TANGENTIAL SHEAR

The slope near the corner of most of the commonly used shells of other curvature generally will be steeper than the slope of the elliptical paraboloid, shown in Fig. 6. Consequently, the shear at the edge should be less for shells of other curvature than for an elliptical paraboloid of the same dimensions. The magnitude of the reduction is dependent on the relative slopes near the corners of the surfaces being compared. For domes whose edges are elliptical, the magnitude of the shear should be considerably less than that for domes with other shapes. If the edge of the dome is circular, the

tangential shear should be approximately the same as for an elliptical paraboloid.

To confirm this hypothesis, Fig. 7 compares the tangential shear computed<sup>3</sup> for domes at a factory in Brynmawr, England, and that obtained for an elliptical paraboloid of the same dimensions. The shape used for the Brynmawr dome was a surface of translation generated by moving one vertical circle on another. Fig. 7 shows good agreement between the two curves except in the immediate vicinity of the corner, in which a finite value is given for the circular curve in contrast to the infinite value implied for the parabolic curve. The reason for this apparent discrepancy is that, due to mathematical difficulties, a numerical procedure based on finite-differences equations was used to determine the forces for the Brynmawr dome. Because this procedure is based on the average value between the chosen interval, a finite value results at the corner. If a rigorous mathematical solution had been used, an infinite value for the circular curve would have resulted.

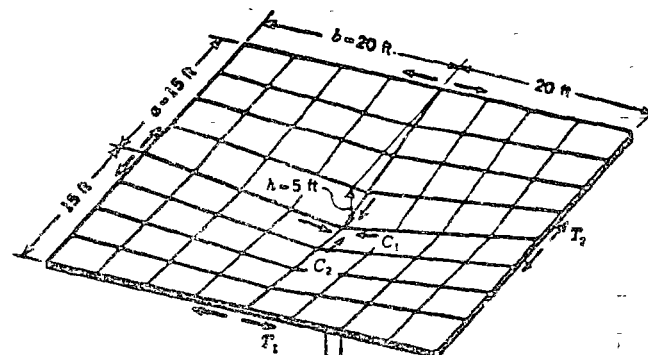


FIG. 8.—ROOF DESIGNED IN EXAMPLE 1

At  $y = b - 0.4 \sqrt{rt}$ , the point previously recommended as the breakoff place for shear evaluation, the shear computed for the parabolic curve is approximately 7% higher than that for the circular curve. Whether this difference is real or merely due to dissimilarity in methods of computation is not known. However, the difference is in the proper direction.

**Example 1.**—A hyperbolic paraboloid shell with a column at the center is designed. The roof shown in Fig. 8 is obtained by joining four identical sections in a manner similar to the method used in Fig. 2. Many other arrangements can be used,<sup>4</sup> all of which are designed in the same manner by considering each quadrant of a rectangular unit individually.

Assuming  $w = 60$  lb per sq ft, the internal forces at the critical points of the shell roof shown in Fig. 8 are

$$S = \frac{wab}{2h} = \frac{60 \times 15 \times 20}{2 \times 5} = 1,800 \text{ lb-ft} \quad \frac{\text{lbs}}{\text{ft}}$$

$$T_1 = -C_1 1,800 \times 20 = 36,000 \text{ lb}$$

<sup>3</sup>"The Design of a Reinforced Concrete Factory at Brynmawr, South Wales," by Ole Nyquist and Ronald Jenkins, Pt. III, *Proceedings, Inst. C. E.*, London, December, 1933, pp. 315-327.  
<sup>4</sup>"Structural Applications of Hyperbolic Paraboloidal Shells," by Felix Candela, *Journal, A.C.I.*, Vol. 26, No. 5, 1924, pp. 397-415.

and

$$T_1 = - C_2 1,800 \times 15 = 27,000 \text{ lb}$$

Because the shell is subject to pure shear, the principal tensile force will also be 1,800 lb per ft. An allowable steel stress of 20,000 lb per sq in. results in a required area of steel of 0.09 sq in. per ft. Therefore, No. 2 bars, 6 in. on centers, are sufficient. This reinforcement should be placed diagonally, extending from one free edge to the other.

The shell exerts a constant shear on the edge members, which have been omitted in Fig. 8. The total thrust or pull exerted by this shear is equal to the product of the length of the edge member affected and the magnitude of the shear. In this example this equals 36,000 lb. Because there is no external reaction acting on the edge beams, either at the corners or along the edge, it is evident that the maximum tension or compression in the edge members

TABLE 3.—INTERNAL FORCES IN AN ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL FOR EXAMPLE NO. 2

a/b	Force	VALUE OF a/b				
		0	0.25	0.50	0.75	1.00
0	$T_p/b$	-4,300	-4,100	-3,200	-1,900	0
	$T_c/b$	-1,900	-2,100	-2,600	-3,500	-4,600
0.25	$T_p/b$	-4,600	-4,300	-3,400	-2,000	0
	$T_c/b$	-1,800	-2,000	-2,500	-3,400	-4,600
0.50	$T_p/b$	-5,200	-5,000	-4,200	-2,500	0
	$T_c/b$	-1,400	-1,600	-2,100	-3,000	-4,600
0.75	$T_p/b$	-6,200	-6,100	-5,500	-4,100	0
	$T_c/b$	-800	-900	-1,200	-2,100	-3,500
1.00	$T_p/b$	-7,500	-7,500	-7,500	-7,500	0
	$T_c/b$	0	-1,200	-2,700	-4,200	-5,600

occurs at the midspan. The tension and compression in the edge member diminish along the length to zero at the ends.

To determine the type of force (compression or tension) present in the edge members, it is recommended that free body diagrams be drawn of the member being considered rather than relying merely on a sign convention. Thus, the possibility of making serious errors in complicated layouts will be minimized. For this case the layout is so simple that the type of force present can be ascertained by inspection. Because the shear is positive and the coordinate of each quadrant occurs at the corner, the shear is outward along the four horizontal edges and inward along the four sloping edges. Hence, the edge beams at the exterior edges are in tension, whereas those extending out from the column are in compression.

Example 2.—An elliptical paraboloid shell is designed. Table 3 shows the internal forces divided by  $k$  or  $1/k$  acting in an elliptical paraboloid subject to a uniform load of 60 lb per sq ft and spanning 100 ft in one direction and 70 ft in the other with a total rise of 18 ft. These values are obtained by multiplying the coefficients for  $h_a/h_b = 0.8$  shown in Table 1 by one of the following values:

For  $T_p$ —

$$\frac{w b^2}{h_a} = \frac{60 (50)^2}{10} = 15,000 \text{ lb per ft}$$

For  $T_c$ —

$$\frac{w a^2}{h_b} = \frac{60 (35)^2}{8} = 9,200 \text{ lb per ft}$$

For  $S$ —

$$\frac{w a b}{\sqrt{h_a h_b}} = \frac{60 (50) (35)}{\sqrt{8} (10)} = 11,700 \text{ lb per ft}$$

Because the stresses are small the effect of  $k$  is ignored. The maximum compression due to an assumed load of 60 lb per sq ft on the shell is 7,500 lb

TABLE 4.—SHEAR  $S$  AND PRINCIPAL STRESS  $S'$  ALONG EDGE

a/b	S	a/b				
		0	0.1	0.2	0.3	0.4
0	0	0	460	930	1,440	2,010
0.25	0	0	80	110	270	500
0.50	0.8	0.7	0.6	0.56	0.9	0.85
0.75	-3,880	-4,560	-5,060	-5,130	-5,830	-6,200
1.00	1,640	2,160	3,380	4,300	4,980	5,060
a/b	S'	a/b				
		0	0.1	0.2	0.3	0.4
0	0	0	520	1,060	1,630	2,290
0.25	0	0	80	230	520	920
0.50	0.8	0.7	0.6	0.55	0.9	0.85
0.75	-3,880	-4,950	-5,450	-5,530	-6,040	-6,500
1.00	2,210	3,140	4,550	5,570	7,030	7,500

per ft. If the thickness of the shell is assumed as 3 in., the maximum compressive stress is only

$$f_c = \frac{7,500}{3 \times 12} = 208 \text{ lb per sq in.}$$

which is considerably lower than the allowable stress of concrete.

To obtain knowledge of the tensile forces existing in the shell, the minimum principal stresses have been evaluated along the edges in Table 4. The value of the shear,  $S$ , is computed by using Table 2, with the multiplier in this case being 11,700 lb per ft taken from Table 3. The principal stress,  $S'$ , is computed

as described in most standard mechanics textbooks. The direct force at  $y = b$  is 4,600 lb per ft, and the direct force at  $x = a$  is 7,500 lb per ft. In most of the cases these principal values along the shell represent the maximum value in their zone.

At the corner the radius of curvature in the  $x$ -direction can be computed from

$$R_x = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}} \dots \dots \dots (39)$$

in which

$$r = \frac{8x^2}{35^2} + \frac{10y^2}{50^2}$$

and

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{16x}{35^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{16}{35^2}$$

At the corner  $x = 35$ , Eq. 39 yields

$$R_x = \frac{35^2 [1 + (16/35)^2]^{3/2}}{16} = 102 \text{ ft}$$

and, similarly

$$R_y = 156 \text{ ft}$$

The maximum shear can therefore be expected to be at

$$\frac{x}{a} = \frac{35 - 0.4 \sqrt{101 \times \frac{1}{2}}}{35} = 0.94$$

and at

$$\frac{y}{b} = \frac{50 - 0.4 \sqrt{156 \times \frac{1}{2}}}{50} = 0.95$$

Therefore, from Table 4 the largest minimum principal stress along the edges is 9,500 lb per ft. Several points in the interior should be investigated also to determine the extent of the tensile area. Using the internal forces shown in Table 3, the principal stress at  $y/b = z/a = 0.75$  and at  $y/b = z/a = 0.5$  is

$$S^x = - \left( \frac{4,100 + 2,100}{2} - \sqrt{\frac{2,000^2}{4} + 4,100^2} \right) = 1,100 \text{ lb per ft}$$

and

$$S^y = - \left( \frac{4,200 + 2,100}{2} - \sqrt{\frac{2,100^2}{4} - 1,600^2} \right) = -1,200 \text{ lb per ft}$$

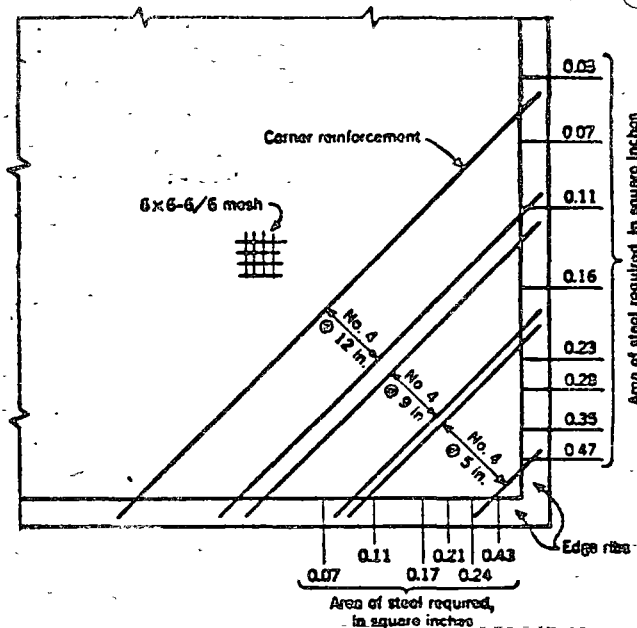


FIG. 9.—REQUIRED STEEL FOR ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

Assuming a linear variation in principal stress between these points, zero tension would occur at  $x/a = y/b = \frac{1}{2}$ .

From a theoretical point of view, the reinforcement should follow the lines of principal stress. However, this is not practical, and, therefore, it is customary to place the reinforcement in the corners along diagonal lines, as shown in Fig. 9. For this particular example and probably for all instances, the controlling tension for any group of bars occurs at the edge. The amount of reinforcement, with  $f_s = 20,000$  lb per sq in., computed from the principal stresses shown in Table 4 is shown along the edge ribs of one corner.

For most of the shells of double curvature, even for such a simple case as a translational shell formed by moving one circular curve on the other, an algebraic solution becomes extremely involved. In such cases the conversion of the various differential equations into finite-differences equation<sup>1</sup> is

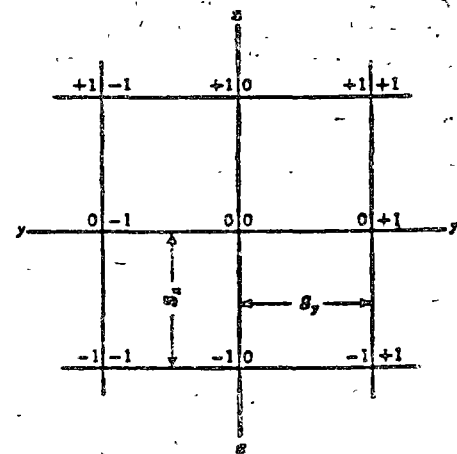


FIG. 10.—FINITE-DIFFERENCES EQUATIONS, NOTATION

<sup>1</sup> "Solution of Difficult Structural Problems by Finite Differences," by Alfred Parmo, *Journal A.C.I.* Vol. 22, November, 1920, pp. 237-256.

more practical. This numerical procedure consists of substituting for the surface a grid of evenly spaced lines that simulate the behavior of the surface. For each intersection, a finite-differences equation is established that expresses the relationship between the stresses or functions of the stresses at this point, and at neighboring points and the load at the intersection.

Using the notation in Fig. 10, the general finite-differences equation equivalent to differential Eq. 10 is

$$F_{01} - 2F_{00} + F_{0-1} + k_1(F_{10} - 2F_{00} + F_{-10}) - 0.5k_2(F_{11} - F_{-11} - F_{1-1} + F_{-1-1}) = -\frac{w_s S_y^2}{\partial^2 z / \partial x^2} \dots (40)$$

in which

$$k_1 = \frac{\partial^2 z / \partial y^2 S_y^2}{\partial^2 z / \partial x^2 S_x^2} \dots (41a)$$

and

$$k_2 = \frac{\partial^2 z / \partial x \partial y S_y^2}{\partial^2 z / \partial x^2 S_x S_y} \dots (41b)$$

The finite-differences equations for Eqs. 9a and 9b are, respectively,

$$T_{0p} = \frac{F_{0-1} - 2F_{00} + F_{01}}{S_y^2} \dots (42)$$

and

$$T_{pp} = \frac{F_{10} - 2F_{00} + F_{-10}}{S_x^2} \dots (43)$$

Because of the quantity of equations which result even with a coarse grid, a direct solution of the simultaneous equations obtained from Eq. 40 is not feasible. Generally, an iteration process called the relaxation method<sup>6</sup> is used.

Eqs. 42 and 43 have a disadvantage in that a value for  $F$  must be determined quite accurately to obtain reliable stress values. With the stress equal to the second differences in  $F$  (Eqs. 9), minor errors in  $F$  greatly affect the value of the stresses. In addition it is somewhat difficult to estimate the initial values to commence the iteration process. For this reason finite-differences equations based on the internal forces are preferable. For the general case these equations become cumbersome. However, for the case of translational shells, the resulting equations are no more complicated than Eq. 40.

To express the relationship in terms of the internal forces, first express  $T_{0p}$  in terms of  $T_{pp}$  by differentiating Eqs. 5 and 6 with respect to  $x$  and  $y$ , respectively, which yields

$$\frac{\partial^2 T_{0p}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_{pp}}{\partial y^2} = 0 \dots (44)$$

Because  $\partial^2 z / \partial x \partial y = 0$ , Eq. 8c can be rewritten as

$$T_{pp} + T_{pp} \frac{\partial^2 z / \partial y^2}{\partial^2 z / \partial x^2} = -\frac{w_s}{\partial^2 z / \partial x^2} \dots (45)$$

<sup>6</sup>"Some Improvements in the Use of Relaxation Methods for the Solution of Ordinary and Partial Differential Equations," *Proceedings, Royal Soc. of London, Series A-190, 1947.*

Differentiating Eq. 45 twice with respect to  $x$  and subtracting Eq. 44 from the result yields

$$\frac{\partial^2 T_{pp}}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial^2 T_{pp}}{\partial x^2} + 2k_2 \frac{\partial T_{pp}}{\partial x} + k_3 T_{pp} = -k_4 \dots (46)$$

in which

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial^2 z / \partial y^2}{\partial^2 z / \partial x^2} \\ k_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z / \partial y^2}{\partial^2 z / \partial x^2} \right) \\ k_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 z / \partial y^2}{\partial^2 z / \partial x^2} \right) \\ k_4 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{w_s}{\partial^2 z / \partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

Allowing  $T$  to equal  $T_{pp}$ , the finite-differences equation corresponding to differential Eq. 46 is

$$T_{01} - 2T_{00} + T_{0-1} + \left(\frac{S_y}{S_x}\right)^2 k_1 (T_{10} - 2T_{00} + T_{-10}) + \frac{k_2 S_y^2}{S_x} (T_{10} - T_{-10}) + k_3 T_{00} = -k_4 S_y^2 \dots (48)$$

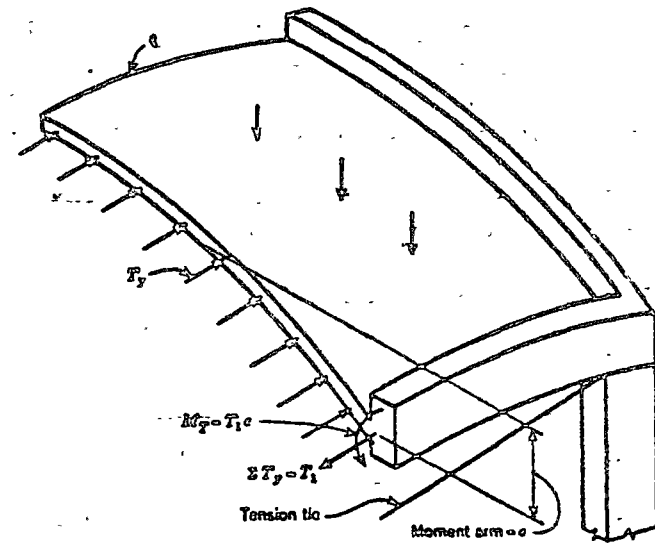


FIG. 11.—BENDING MOMENT IN SHELLS OF DOUBLE CURVATURE

The ribs supporting the arches must be designed to carry the tangential shear load imparted to them by the shell. Because this problem involves only a routine analysis of an arch, this subject will not be examined herein except to note that the analysis of the arch can be made by dealing only with the

tangential shear obtained from the coefficients in Table 2, or by using directly the surface loads on the shell.<sup>7</sup>

If the vertical loads are used directly for shells of double curvature, consideration must be given to the bending moment created by the rise of the shell in the direction normal to the arch. This moment, as shown in Fig. 11, equals the product of the summation of the  $T_{sp}$ -forces or  $T_{vp}$ -forces from the midspan to the edge and the lever arm between the centroid of the internal forces in the shell and the centroidal axis of the arch. The tensile force,  $T_1$ , must be superimposed on the thrust due to the end reactions in order to obtain the net thrust in the arch.

#### APPENDIX. BIBLIOGRAPHY

- "Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells," by Eric Reisaner, *Proceedings*, Conference on Thin Concrete Shells, Massachusetts Inst. of Technology, Cambridge, June, 1954, p. 81.
- "Hyperbolic Paraboloids," by Felix Candela, *ibid.*, p. 91.
- "Skew Shell Utilized in Unusual Roof," by Felix Candela, *Proceedings, A.C.I.*, 1953, Vol. 49, pp. 657-664.
- "Deformation of Hyperbolic Paraboloid Shells," by Shisuo Ban, *Publications, International Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 13, 1953, p. 1.
- "Simple Concrete Shell Structures," by Felix Candela, *Proceedings, A.C.I.*, Vol. 48, 1952, p. 321.
- "Theory of New Forms of Shell," by R. S. Jenkins, *Paper No. 7*, Symposium on Concrete Shell Roof Construction, Cement and Concrete Assn., London, July 2-4, 1952.
- "Hyperbolic Paraboloid Concrete Roofs in Czechoslovakia," by K. Hruban, *Concrete and Constructional Engineering*, London, Vol. 44, No. 8, 1949, pp. 247-252.
- "Hyperbolic Paraboloid Shells," by I. Fytos, *Technika Chronika*, Athens, Vol. 26, Nos. 295-296, 1949, pp. 35-44.
- "Analysis of Hyperbolic Tanks in Reinforced Concrete," by A. Favini, *Giornale del Genio Civile*, Rome, Vol. 87, 1949, pp. 515-533.
- "Doubly Curved Thin Slab Structures," by M. P. Borkowski, *Translation No. 31*, Cement and Concrete Assn., London, 1951.
- "Calculations for Shells of Double Curvature Using Differential Equations," by A. Pücher, *Bauingenieur*, Vol. 18, 1937, p. 118.

<sup>7</sup>"Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs," *Manual of Engineering Practice No. 31*, ASCE, 1953, p. 69.

- ✓ "Treatise on Statics of Parabolic Hyperboloidal Shells Not Stiff in Bending," by F. Aimond, *Publications, International Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 4, 1936, p. 1.
- ✗ "Calculation of Thin Shells in Reinforced Concrete," by L. Issenmann Pirlaski, Dunod, Paris, 1935, Chapter 7.
- ✓ "General Investigation Concerning Skew Surface Shells," by B. Laffaille, *Publications, International Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 3, 1935, p. 295.
- ✓ "Thin Shells in the Shape of Hyperbolic Paraboloids," by B. Laffaille, *Le Genie Civile*, Paris, Vol. 104, 1934, pp. 409-410.

# Elementary Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells

## Introduction

The rapid growth of interest in one of the newest forms of shell roof construction—the hyperbolic paraboloid—is due largely to its economical use of construction materials, the simplicity of its structural action and to its inherent beauty.

The hyperbolic paraboloid is one of the types of construction that make efficient use of materials by relying on form or shape for strength rather than on mass. Double curvature enables loads to be transferred to supports entirely by direct forces so that all material in the cross-section of the shell is uniformly stressed.

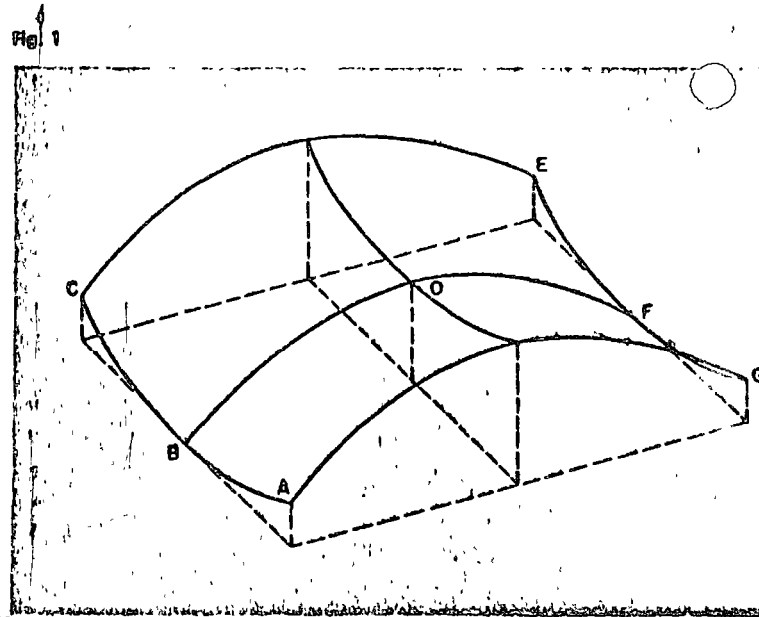
Although intricacies of mathematics obscured the analysis of hyperbolic paraboloids for many years, it will be shown that the underlying static principles are not difficult to understand or to apply and that the design can be handled as easily as the design of many other types of structures.

Economy in the construction and design of hyperbolic paraboloids allows the architect to depart from the conventional practice of forcing all structures to conform to networks of linear members confined to three perpendicular planes and to make imaginative use of the many graceful shapes that may be developed.

## Surface Definition

The doubly curved surface of the hyperbolic paraboloid may be defined in two ways, either as a surface of

translation or as a warped parallelogram. In the first case the surface can be defined by translating or moving a vertical parabola having upward curvature over another parabola with downward curvature, the parabola of translation lying in a plane perpendicular to the first but moving parallel to it. This is shown graphically in Fig. 1 where the saddle-shaped surface is formed by moving parabola *ABC* over parabola *BOF*.



The hyperbolic paraboloid surface may also be generated as shown in Fig. 2 by moving along the  $Y$  axis a straight line that remains parallel to the  $XZ$  plane at all times but pivots while sliding along the straight line  $ABC$ . The resulting surface is represented in Fig. 2 by the grid of straight lines  $h_n$  and  $i_n$ , and every point on it may be considered to be the intersection of two such lines contained in the surface. This surface can be visualized by considering the horizontal plane  $A'C'E'G'$  to be warped by vertically depressing corners  $A'$  and  $E'$  to new positions  $A$  and  $E$ . Straight lines  $h_n$  and  $i_n$  are, of course, longer in the warped surface than in the projected horizontal surface in order that an intersection such as  $A$  may remain directly under  $A'$ .

### Structural Shapes

A variety of roof forms may be developed either by use of the entire warped surface or by combining parts of it in various ways. A few of these are illustrated in Fig. 3.

The surface in Fig. 3a has been used successfully to give a striking appearance to such diverse structures as churches, banks and restaurants. This is the complete warped surface identical to that shown in Fig. 2.

Surfaces in Figs. 3b, 3c and 3d are formed by combining in various ways one quadrant of the surface in Fig. 2. For example, consider quadrant  $ABOH$  in which lines  $BO$  and  $OH$  are horizontal, coincident with the axes

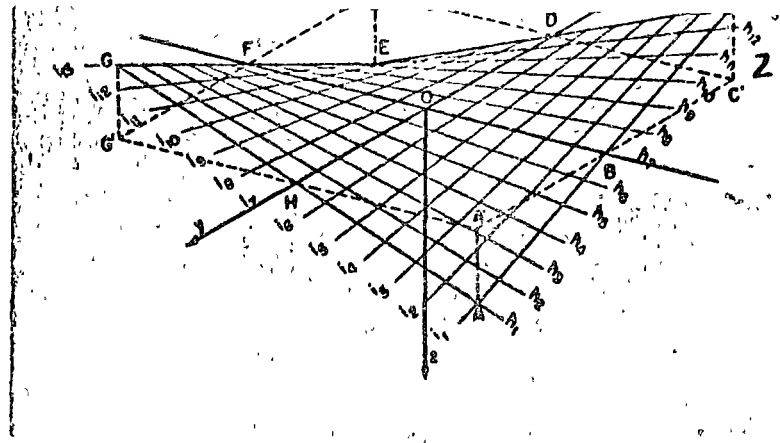
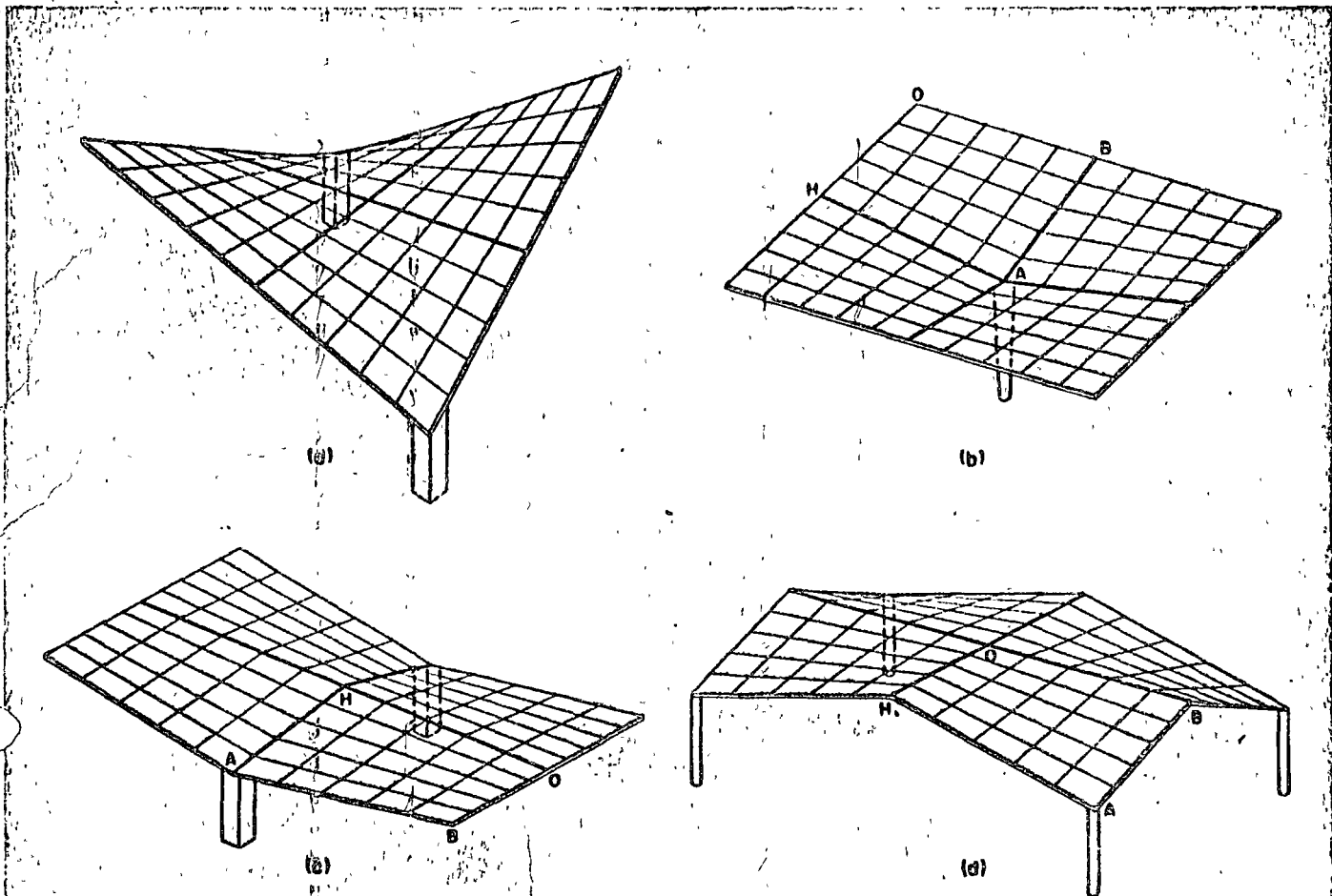


Fig. 2. Surface definitions.

$OX$  and  $OY$ . In Fig. 3b four of these quadrants are joined, with the horizontal edges of each quadrant at the exterior of the roof and all depressed corners  $A$  at the single center column. This shape is commonly known as the inverted umbrella.

In Fig. 3c, edges  $HO$  and  $OB$  of the near quadrant are horizontal, while the depressed corner  $A$  is at the column. A corresponding arrangement of the other three sections of the roof results in one horizontal ridge line and two horizontal exterior edges. In contrast to Fig. 3c, both ridge lines in Fig. 3d are horizontal, the roof dropping to each of the corner columns. Roof types in Figs. 3b, 3c and 3d are well suited for covering the large rectangular areas common to industrial plants.

Fig. 3. (Edge beams and ties not shown)



### Construction

One of the principal economies of the hyperbolic paraboloid is that its forming is simple, even though the doubly curved surface has the appearance of posing a complicated forming problem. Because the surface is defined by two intersecting systems of straight lines, the formwork requires only straight wood joist generators. The smooth, warped surface may be secured merely by covering these joists with flexible plywood sheathing.

Stresses in the hyperbolic paraboloid roof are low and require only a minimum thickness of concrete. In fact, the roof of the Cosmic Ray Pavilion at the University of Mexico has a thickness of only  $\frac{3}{8}$  in. Generally, however, shell thickness depends upon the concrete cover required for the reinforcement, with 3 in. being an average figure.

### Geometry

The study of the hyperbolic paraboloid may be confined to the basic quadrant  $ABOH$  of the surface shown in Fig. 2. Referring to Fig. 4, any point on the surface may be defined in terms of  $x$ ,  $y$  and  $z$ , where  $z$  equals the product of the  $x$  and  $y$  coordinates and a constant  $h/ab$ . For example, in triangle  $HA'A$ , by similar triangles,

$$\frac{c}{h} = \frac{x}{a} \text{ or } c = \frac{xh}{a}$$

Similarly in triangle  $Ed'd$ ,

$$\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$$

from which

$$z = \frac{yc}{b} = \left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{xh}{a}\right) = xy\left(\frac{h}{ab}\right)$$

Letting  $k = \frac{h}{ab}$

$$z = kxy \tag{1}$$

For convenience in analysis, axes  $OX$  and  $OY$  shown in Fig. 4 are rotated through an angle  $\phi = 45^\circ$  so that the axis  $OY'$  lies in a vertical plane with  $OA$ . Using the standard formulas for transformation of coordinates by rotation and letting  $\phi = 45^\circ$  in Fig. 5, gives

$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi = 0.707 (x' - y') \tag{2a}$$

and

$$y = y' \cos \phi + x' \sin \phi = 0.707 (x' + y') \tag{2b}$$

Substituting equations (2a) and (2b) into equation (1) gives

$$\boxed{\begin{aligned} z &= kxy = 0.5k (x' + y') (x' - y') \\ &= 0.5k [(x')^2 - (y')^2] \end{aligned}} \tag{3}$$

which defines the surface of the hyperbolic paraboloid in terms of the new coordinate system. The rotated position of the coordinates above the quadrant  $ABOH$  is shown in Fig. 6.

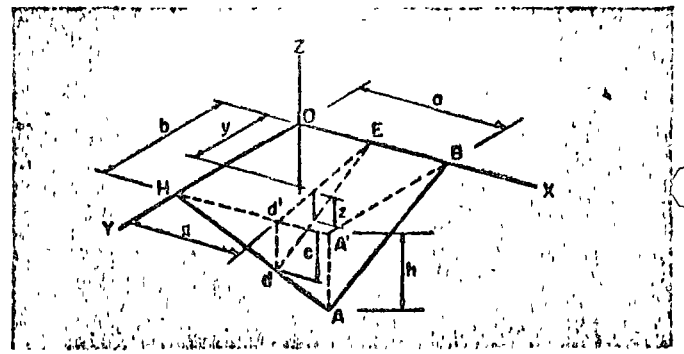


Fig. 4

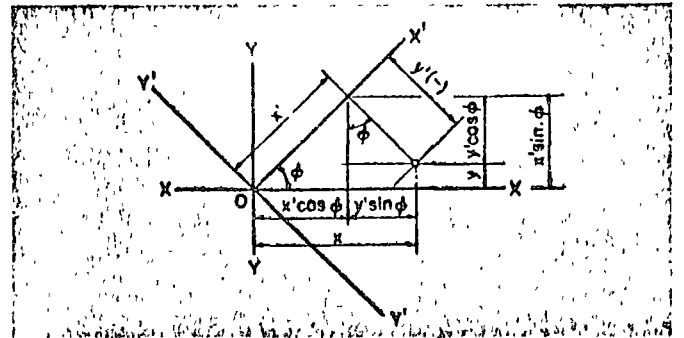
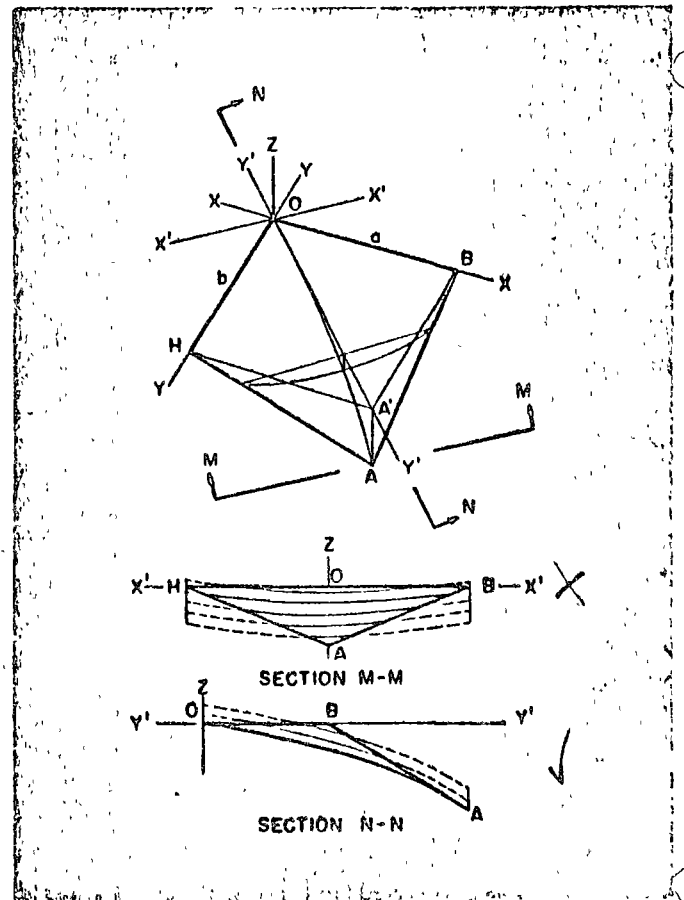


Fig. 5

Fig. 6





A study of physical properties of the surface is possible by introducing specific values of  $x'$ ,  $y'$  and  $z$  into equation (3). When  $x'$  is constant,

$$z - 0.5k(x')^2 = z - k_1 = z' = -0.5k(y')^2 \quad (4)$$

which is the equation of a parabola lying either in or parallel to the  $Y'Z$  plane. The vertex of the parabola defined by setting  $x' = 0$  intersects the  $X'$  axis at the origin of the  $X'$ ,  $Y'$  and  $Z$  axes, but for any other value of  $x'$  the vertex is above the  $X'Y'$  plane. In any case the principal axes of all these parabolas are parallel to the  $Z$  axis and lie in the  $X'Z$  plane.

In a similar manner, if  $y'$  is constant,

$$z + 0.5k(y')^2 = z + k_2 = z' = 0.5k(x')^2 \quad (5)$$

Equation (5) is the general expression for a parabola lying either in or parallel to the  $X'Z$  plane. If  $y' = 0$  the equation represents a parabola having a vertex which intersects the  $Y'$  axis at the origin. Any other value of  $y'$  defines a parabola having its vertex below the  $X'Y'$  plane but with its principal axis parallel to the  $Z$  axis and lying in the  $Y'Z$  plane.

It is important to note in equations (4) and (5) that for any given warped surface the value of either  $x'$  or  $y'$  may be varied without affecting the term "0.5k" in the equation for the parabola. As a result, all parabolas in both directions have the same shape. Also note that one of the expressions is positive while the other is negative. This difference in sign indicates that parabolas parallel to the  $X'Z$  plane are concave upward, while those parallel to the  $Y'Z$  plane are concave downward.

If  $z$  is given a constant value in equation (3),

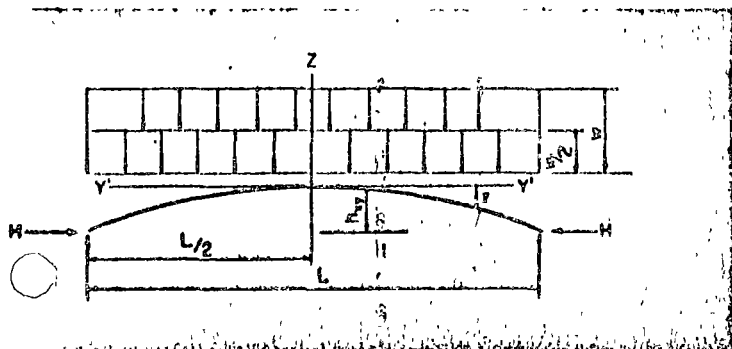
$$1 = k_3 [(x')^2 - (y')^2] \quad (6)$$

This is the equation of a horizontal plane cutting the warped surface, the elevation of which depends on the particular value given to  $z$ . This cutting plane forms a hyperbola, thereby indicating the reason for the designation hyperbolic paraboloid for the surface.

#### Design

In Fig. 7, a typical parabolic arch is shown representing a strip cut parallel to the  $Y'Z$  plane. Since the surface

Fig. 7



is made up entirely of two sets of parabolic arches, one set normal to the other and all having the same shape, it can be assumed that the total load  $w$  is divided equally in two directions. Any given arch will therefore, carry a load of intensity  $w/2$ .

The internal moment in any two-hinged arch is equal to the simple beam bending moment minus the moment due to the horizontal reaction  $H$ . Midspan simple beam bending moment due to uniform load is  $\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{8}\right)$ . The bending moment throughout a parabolic arch supporting only a uniform load equals zero. Hence moment produced by horizontal thrust must be equal and opposite to the simple beam bending moment. Therefore, thrust moment  $Hh_{xy}$  at midspan is

$$H(-h_{xy}) = \frac{w}{2} \frac{L^2}{8} \quad (7a)$$

$$\text{or } H = -\frac{w}{4} \frac{L^2}{4h_{xy}} \quad (7b)$$

But the expression for all arches in this direction has been shown in equation (4) to be:

$$z' = -0.5k(y')^2$$

Letting  $z' = h_{xy}$  and  $y' = \frac{L}{2}$ :

$$h_{xy} = -0.5k \left(\frac{L^2}{4}\right)$$

$$\text{or } \frac{L^2}{4h_{xy}} = -\frac{1}{0.5k}$$

Substituting this in equation (7b) gives

$$H = -\frac{w}{4} \left[-\frac{1}{0.5k}\right] = \frac{w}{2k} = \frac{wab}{2h} \quad (8)$$

Equation (8) gives the tensile or compressive thrust, induced in the shell by a uniform load. The shell must be reinforced only for this force. Actually, since the slope of the surface steepens near the column, the load is not strictly uniform; but the departure from uniform loading is insignificant.

#### Proof of Analysis

In the foregoing it has been assumed that the arches are properly supported at their ends. The validity of this assumption will be demonstrated.

Fig. 8a shows theoretical positions of typical parabolic arches and indicates their action on edge members of the roof. Each arch exerts both a vertical and horizontal force at its ends. It is seen in Fig. 8b that where two perpendicular arches intersect an edge, the normal components  $H_N$  of  $H$  are equal in magnitude but opposite in direction. As a result both components cancel each other and there is no force normal to any edge.

The other components of the horizontal forces  $H$ , called  $S_p$  in Fig. 8b, act in the same direction for both

sets of arches and, therefore, are additive. When applied to the surface of length  $ds$ , each force equals  $S_p ds$  or  $H \sin \phi ds$ . To determine the intensity of shear  $S$  per unit of length along the edge beam, an equation of equilibrium is written for forces parallel to the edge acting on the small triangular wedge:

$$2H \sin \phi ds = S dx$$

from which

$$S = 2H \sin \phi \frac{ds}{dx} = 2H \sin \phi \cos \phi$$

With  $\phi = 45^\circ$  and  $H = \frac{w}{2k}$

$$S = 2 \left[ \frac{0.5w}{2k} \right] = \frac{w}{2k} = \frac{wab}{2h} \quad (9)$$

The effect of vertical components  $V$  along horizontal edges  $OB$  and  $OH$  is different from that at the sloped edges  $AB$  and  $AH$ . In either case, because the thrust line in a parabolic arch supporting a uniform load follows the centroidal axis, the combined vertical component at any point due to the thrust in the two arches is

$$V = \Sigma H \tan \theta = H \frac{dz}{dy'} + H \frac{dz}{dx'} \quad (10)$$

where the angle  $\theta$  lies in a vertical plane between the arch thrust line and its horizontal projection as shown in Fig. 8c. From equation (3), slopes of the arches are

$$\frac{dz}{dy'} = (-0.5k)(2y') = -ky' \quad (11a)$$

and

$$\frac{dz}{dx'} = (0.5k)(2x') = +kx' \quad (11b)$$

At any point on the horizontal edge  $OH$ ,  $x' = y'$  as evident in Fig. 6. Therefore by equations (11) the slope of two arches must be equal but of different sign. Vertical components, therefore, cancel because they are equal in magnitude and opposite in direction. Vertical components along edge  $OB$  also nullify each other.

Along sloping edges, coordinates  $x'$  and  $y'$  are not equal at any point. With edge  $OB$  in Fig. 6 equal to  $a$  and  $OH$  equal to  $b$ , the equation of line  $AB$  is from the general expression  $y = mx + b$ :

$$y' = x' - a\sqrt{2} \quad (12)$$

Substituting this value in equations (11), slopes of arches at edge  $AB$  are

$$\frac{dz}{dy'} = -k(x' - a\sqrt{2}) \quad (13a)$$

and

$$\frac{dz}{dx'} = kx' \quad (13b)$$

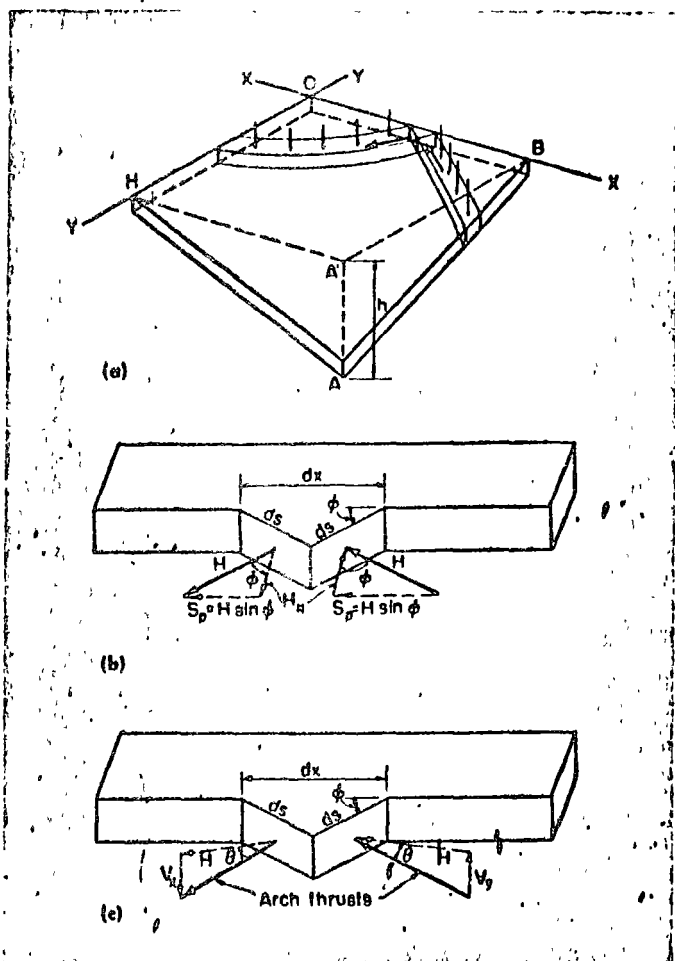


Fig. 8

Substituting in equation (10), net vertical component of arch thrusts at the edge is

$$V = H \left[ -k(x' - a\sqrt{2}) \right] + H(kx') = Hka\sqrt{2} \quad (14)$$

With  $k = \frac{h}{ab}$  equation (14) may be written

$$V = H \frac{h}{ab} a\sqrt{2} = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} \quad (15)$$

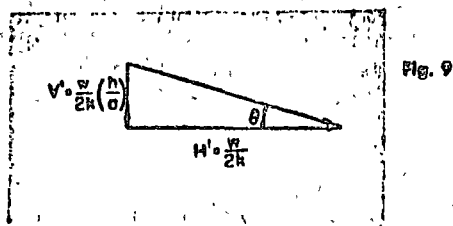
The force  $V$  is applied on the surface having the length  $ds$  in Fig. 8c. To determine intensity  $V'$  per unit length of the edge beam,

$$V' dx = V ds = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} ds$$

$$V' = V \frac{ds}{dx} = V \cos \phi = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Therefore, from equation (15)

$$V' = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{Hh}{b} \quad (16a)$$



In a similar manner it can be shown that the vertical force exerted by the shell along edge *HA* is

$$V' = \frac{Hh}{a} \quad (16b)$$

If there were no other force present along the inclined edges, the shell would require vertical supports. However, as shown previously the arches simultaneously exert a horizontal force in the plane of the edge. The two forces, horizontal and vertical, combine as shown in Fig. 9 to produce a resultant force parallel to the edge.

In summary, the net result of the interaction of the two systems of arch elements is that they exert merely shearing forces parallel to the edges. Therefore, the assumption that the ends of the arches are adequately supported is justified, proper support being provided by the presence of members parallel to the edges only, as shown in Fig. 10.

#### Statical Check

The horizontal thrust given by equation (8) may be checked by comparing it with the thrust determined statically using the total shell as a free body. In the elevation view of Fig. 11, assume the structure left of section *PP* to be a cantilever beam carrying the uniform load *w*. Moment at section *PP* equals  $2wba \frac{a}{2}$ . Dividing this by the height *h* gives thrust

$$\frac{2wba^2}{2} \left( \frac{1}{h} \right) = \frac{wba^2}{h} \quad (17)$$

The force expressed by equation (17) may be thought of as the force which occurs in the top and bottom flanges of an I-beam, with the flanges represented here by edge beams. In the lower or sloping edge beam this thrust is the horizontal component of the axial force in the beam. The corresponding vertical component is

$$\frac{wba^2}{h} \left( \frac{h}{a} \right) = wba \quad (18)$$

This indicates that of the total vertical roof load  $2wba$  applied left of section *PP*, an amount  $wba$  is carried down beam *HA* and that the remainder, or  $2wba - wba = wba$ , must be carried down beams *AB* and *AB'* as shown in plan, Fig. 11. Shears acting on the shell adjacent to these beams are shown in section *PP*, and vertical components of these shears must add up to the load  $wba$ . Calling  $S_s$  the shear intensity per unit length in the

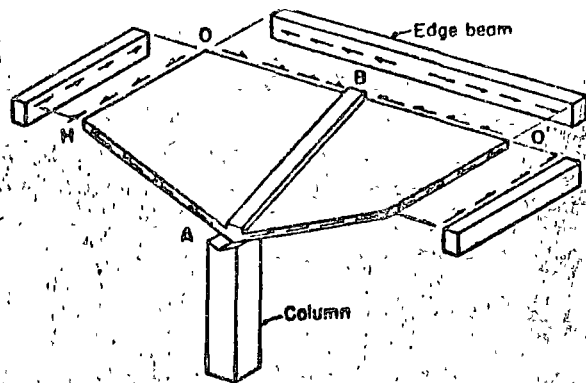


Fig. 10

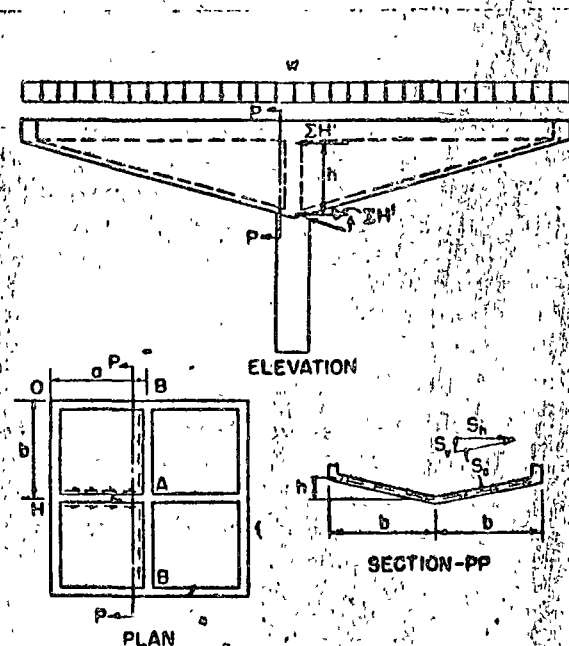


Fig. 11

sloped direction and assuming it uniformly distributed along the shell, total shear in the sloped direction is found by multiplying  $S_s$  by the total sloped length, or

$$S_s (2\sqrt{h^2 + b^2})$$

The total vertical component then is expressed as

$$S_s (2\sqrt{h^2 + b^2}) \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) = wba$$

from which

$$S_s = \frac{wba}{2h} = \frac{w}{2k} \quad (19)$$

which agrees with equation (9).

It should be noted that  $S_s$  in section *PP*, Fig. 11, is not a vertical shear, but is the vertical component of the thrust in the shell. The presence of any radial shear would necessitate bending in the shell, a condition which does not exist under uniform loads.

### Skewed Hyperbolic Paraboloids

The preceding discussion concerns hyperbolic paraboloids that are rectangular in plan. However, the same basic approach may be applied to the more general case of roofs skewed in plan as shown in Fig. 12. In this case the surface is defined by the equation

$$z = \frac{h}{ab} uv \quad (20)$$

in which  $u$  and  $v$  represent skewed coordinates. In this system the location of any point is designated by a distance  $u$  measured parallel to the  $U$  axis and a distance  $v$  measured parallel to the  $V$  axis. Hence the surface still contains two systems of straight lines parallel to the coordinate axes,  $U$  and  $V$ .

As with the rectangular surface, it is necessary first to determine the directions of the load-carrying parabolic arches. The procedure for determining this direction is developed in the Appendix. Briefly it consists of rotating the axes  $U$  and  $V$  (Fig. 12), skewed at the angle  $\omega$ , through the angle  $\phi$  to new positions  $U'$  and  $V'$ . The angle of rotation  $\phi$  which defines the positions of the parabolas is given by the expression

$$\sin \phi = \frac{\sin \omega}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

Note that the parabolas as well as the axes intersect at the angle  $\omega$  instead of being perpendicular to each other as in the rectangular roof.

As shown in the derivation in the Appendix, arch thrusts in the skewed shell are

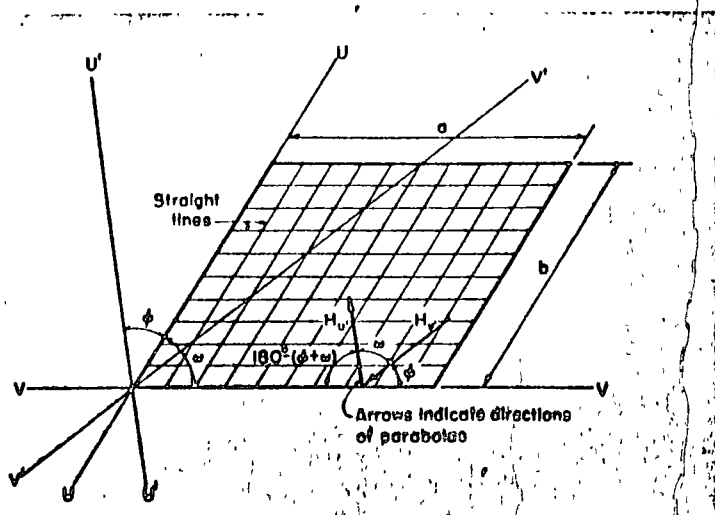
$$H_{V'} = \left( \frac{wab}{4h} \right) \frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin(\omega - \phi)} \quad (22a)$$

$$\text{and } H_{U'} = \left( \frac{wab}{4h} \right) \frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin(\omega + \phi)} \quad (22b)$$

equations (22) correspond to equation (8) and give thrusts induced in the  $V'$  and  $U'$  directions. Shear at the boundaries is equal to

$$S = \frac{wab}{2h} \sin \omega \quad (23)$$

Fig. 12



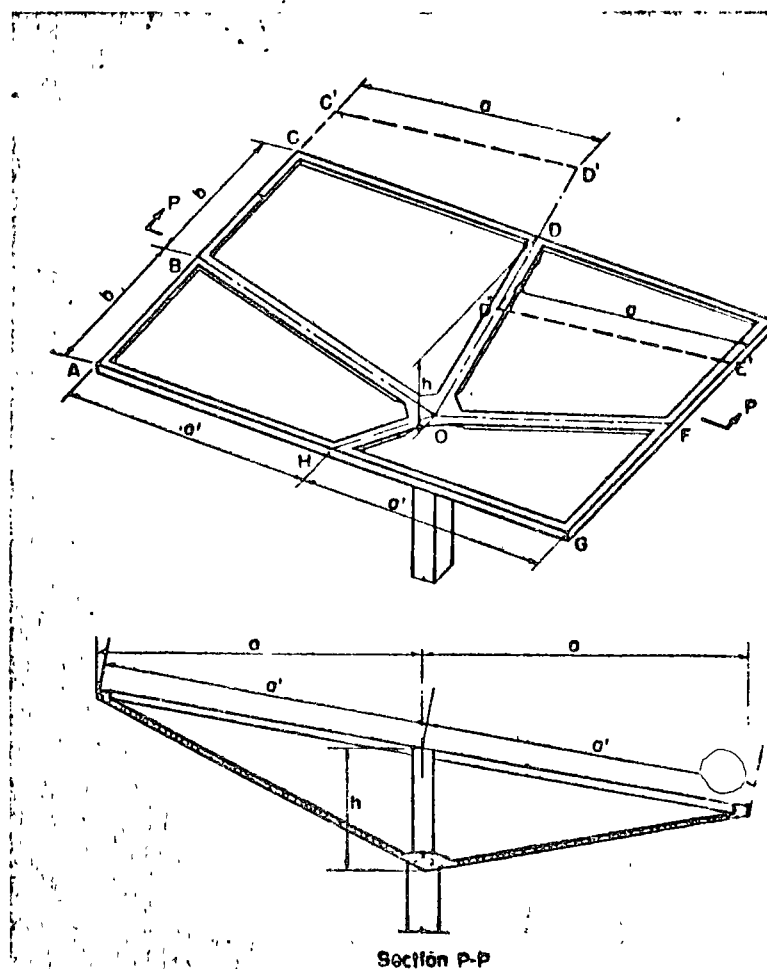
The derivation in the Appendix also shows that the horizontal components of the thrusts of any two arches intersecting at the edge of the surface combine so that no force is exerted normal to the edge. Only shears parallel to the edge exist, and these can be resisted effectively by an edge member.

### Sloping Hyperbolic Paraboloids

In the previous derivations it was assumed that each hyperbolic paraboloid shell has two horizontal intersecting edge beams. However, this is not a necessary condition. The method is equally suitable for a sloping hyperbolic paraboloid shown in Fig. 13. For example, each quadrant of the structure in Fig. 13 is composed of hyperbolic paraboloids with one horizontal and three sloping edge beams. The magnitude of the forces acting in the arches can be determined by extending the shell in quadrant  $BCDO$  so that two edges  $BC'$  and  $C'D'$  are horizontal, and substituting the dimensions of  $BC'D'O$  in equation (9). Since, in previous derivations, it was shown that components of the arch thrust perpendicular to sections parallel to the axis nullify each other, the force obtained for quadrant  $BC'D'O$  applies equally well to quadrant  $BCDO$  even though edge  $CD$  is free. If the preceding operation is performed in general terms the resulting equation reduces to

$$H = \pm \frac{wab}{2h} \quad (24)$$

Fig. 13



Equation (24) is the same as equation (9). It should be noted that dimension  $a$  is the projected length rather than the true length of the edge beam. The same expression may be derived by considering quadrant  $DEFO$ . The horizontal edges in this case are  $E'F$  and  $E'D''$  or  $EE'$  and  $E'D''$ , and the dimensions of  $D'E'FO$  or  $D'E'ED$  may be used to substitute in equation (9). As previously, total force in any edge beam equals the sum of the shear forces acting along its length. For example,

$$T = \frac{wab}{2h} a' \text{ etc.} \quad (25)$$

#### Design Example

The following example illustrates the design of a typical hyperbolic paraboloid shell roof.

Consider a roof unit of the shape shown in Fig. 3b having exterior edges horizontal. A unit 40x40 ft. in plan is selected as being typical of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. Because compressive stresses in the concrete are quite low, shell thickness is controlled only by requirements of adequate coverage for reinforcement, and in this case a thickness of 3 in. is selected. Vertical rise  $h$  of the shell from column to exterior edge beam is chosen to be 5½ ft. A live load of 30 psf plus 5 psf to account for the weight of the edge beams is added to the 37.5 psf for weight of the shell to give a uniform load  $w$  of 72.5 psf.

Horizontal thrusts created in the parabolic arches by this load are, by equation (8),

$$H = \pm \frac{wab}{2h} = \pm \frac{72.5 \times 20 \times 20}{2 \times 5.5} \\ = \pm 2,640 \text{ lb. per ft.}$$

Reinforcement required for negative thrust is

$$A_s = \frac{2,640}{20,000} = 0.132 \text{ sq.in. per ft.}$$

Compressive stress in the concrete is

$$f_c = \frac{2,640}{3 \times 12} = 74 \text{ psi}$$

Although no reinforcement is indicated in the direction of the parabolic arches under compression, a nominal amount should be used to take care of shrinkage stresses. In Fig. 14, reinforcement is shown placed diagonally, but if due account is taken of the direction of the stress it can be placed parallel to the edges.

Total force in any edge beam equals the sum of the shear forces acting along its length. In the horizontal edge members of this example, tension at the roof corner is zero and increases to a maximum value at the center. Therefore, the maximum force equals the sum of shear forces acting over only one-half the length of the edge beam.

Tension in the horizontal edge beams is

$$H_o = 2,640 \times 20 = 52,800 \text{ lb.}$$

from which

$$A_s = \frac{52,800}{20,000} = 2.64 \text{ sq.in.}$$

The steel should be detailed so that its centroid coincides with the line of application of the shear forces, otherwise due account should be taken of the eccentricity. In this connection, the effect of secondary bending moments induced near the corners and discussed under the heading of Secondary Stresses should also be included in the design of the edge members.

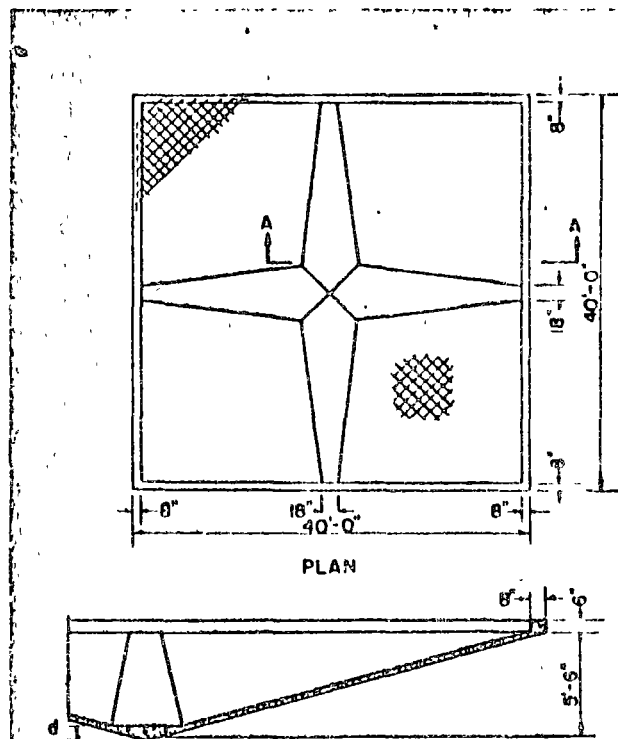
Compression in the sloped edge members is

$$2Ha \frac{20.75}{20} = 2 \times 52,800 \times \frac{20.75}{20} = 109,560 \text{ lb.}$$

Note that the shearing force at both sides of a sloped member contributes to its total axial force.

There is some question regarding the allowable stress and method of analysis to be used in determining the area of the compression member in the valley of the shell. Because this member is only subject to an axial thrust with small eccentricity, the use of column formulas is indicated. But since the member also acts as the flange of an I-beam having the shell as a web, the use of the allowable compressive stress permitted in flexure is justified. For average spans the section area obtained from column formulas is small and a design is not penalized by this conservative interpretation. Furthermore, it is desirable to reduce strains in edge members as much as possible to minimize bending moments caused by the interaction of shell and edge beam. Although analysis of the shell does not include effect of no strains parallel to the edge beam, strains occurring in the edge beam are

Fig. 14



reflected into the shell because the two are joined integrally. This effect is reduced when beams are slightly larger than required.

Using the standard formula for tied columns with a percentage of steel  $p_o = 0.01$ , the gross area required at the valley for the sloped beam is

$$A_o = \frac{P}{0.8(0.225f'_c + f_o p_o)}$$

$$= \frac{109,560}{540 + 10,000 \times 0.01} = 157 \text{ sq.in.}$$

With a rise of  $5\frac{1}{2}$  ft. in 20 ft., the depth  $d$  shown in section  $AA$  of Fig. 14 is

$$d = \sqrt{\frac{157 \times 5.5}{20}} = 7 \text{ in.}$$

A depth of 9 in. will be used at this point to provide sufficient strength in bending for unsymmetrical loading conditions.

### Groined Vaults

The approach just outlined—examining a shell in terms of the behavior of individual arches—can also be employed in considering other shells. One of these is the groined vault made by the hyperbolic paraboloid surface as shown in Fig. 15. Although for clarity only the rectangular plan is shown, intersecting barrels can also be adapted in many ways to triangular or polygonal plans.

The chief difference between previously discussed shells and the groined vault is that in the former case the

free edges were placed along the straight lines, but in this case the free edges occur as shown in Fig. 15, parallel to the arches. For one particular segment as previously derived, the equation of the surface is

$$z = kw = \frac{h_x}{a'b'} uv \quad (26)$$

This expression can be altered to the form

$$z = -h_x \left(\frac{x}{a}\right)^2 + h_y \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad (27)$$

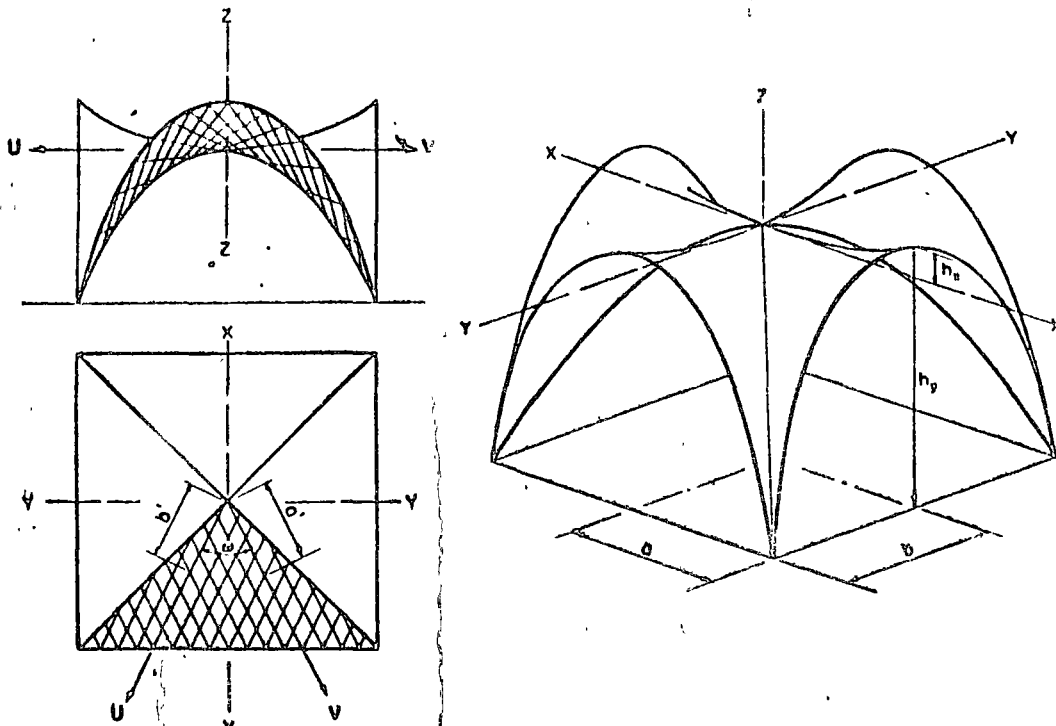
which may be more suitable in preparing a layout and studying the general arrangement.

In the case of the groined vault it is advantageous to consider arches that are parallel and perpendicular to the free edges. It is apparent that the arches normal to the free edge, being unrestrained at that edge, can offer little resistance to the load. Hence, loads are carried mainly by the arches acting parallel to the free edges.

In the case of a uniform load, these arches are completely free of bending, and thus the load is transmitted directly to the intersection of the barrels as pure axial thrust. The horizontal component of this thrust is merely equal to  $wa^2/2h_y$  or  $wb^2/2h_x$ , depending on the barrel that is being considered. However, for this type of hyperbolic paraboloid the dead load of structure cannot be assumed as uniform, since the weight per square foot of projected area is considerably more at the support than at the crown.

For this loading condition, if the shell is considered as a series of independent arches parallel to the free edges, each arch would be subject to bending as well as axial load.

Fig. 15



Although the calculated bending moments in the arches would be relatively small, such moments do not exist in the shell. Hence, a modification of the general arch treatment is necessary.

If the arches are to be completely free of bending, the thrust line must follow the axis of the arch. The dead load cannot by itself satisfy the requirement. However, as an arch tends to deflect, it creates a difference in shear between itself and the neighboring arch. This difference in shear between the various elements can be regarded as an external load on the arch. The magnitude and distribution of this shear must be such that the thrust line produced by the shear and dead load lies on the axis of the arch. Since the edge of the shell is completely free of shear, one could commence from this plane and by trial and error determine the shear required at various sections to maintain the arches free of bending. Such a procedure is, however, very lengthy and involved. To simplify the task, Table 1 gives force coefficients to permit rapid calculation of internal forces throughout a shell.

To obtain a generalized solution it was found more advantageous to solve the differential equations expressing the behavior of the shell, rather than a lengthy arch analysis. Further simplification was achieved by assuming that the dead weight varied as

$$w = w_c \left[ k_1 + k_2 \cos \frac{\pi y}{2b} \right] \quad (28)$$

In Table 1,  $T_x$ ,  $T_y$  and  $S$  represent the internal forces acting tangent to the surface in pounds per foot occurring in the shell at various points designated as  $y/b$  in the first column and as  $(1 - x/a) \sqrt{h_x/h_y}$  in the top row.

As noted in Table 1 the formulas and coefficients are applicable only to shells where  $h_x \neq 0$ . If the dimension  $h_x$  becomes zero, the groined vault is no longer composed of hyperbolic paraboloids. The component units are sections of parabolic cylinders. The formulas for the limiting condition  $h_x = 0$  are transformed to

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{16 h_y} w_c k \left[ \pi^2 \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{2b} \right] \quad (29a)$$

$$T_y = - \frac{k_1 b^2}{2 h_y} \frac{w_c}{k} \left[ \frac{k_2}{k_1} \cos \frac{\pi y}{2b} + 1 \right] \quad (29b)$$

$$S = \frac{k_2 a b}{4 h_y} w_c \left[ \pi \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{2b} \right] \quad (29c)$$

The definition of the various symbols is the same as in the table.

The foregoing analysis has been predicated on the basis that the shell is rigidly supported along the intersections or groins. Since this is not the case, the groin must be designed to transmit the reaction from the shell to the support. Depending on the type of support, the groin can be considered either as a fixed or two-hinged arch. For small spans (because of the small stiffness oc-

curing at the crown) it is possible to consider the groin as three-hinged.

To determine the moments and stresses produced in the arch, it is necessary to estimate what portion of the shell acts as the arch. For a very conservative estimate, it could be assumed that half the width of the arch is equal to eight times the thickness of the shell. For a more realistic figure, it could be assumed that the effective width acting as an arch equals  $1.52 \sqrt{rt}$ , in which  $r$  is the average radius at the intersection. Even when a constant effective width is assumed, the moment of inertia will vary because the cross-section of the arch rib depends on the slope at which the two adjacent shells intersect, the angle or  $V$  being most acute near the corner.

The analysis for an arch consists of solving for the unknown horizontal reaction by means of the moments produced by the external loads and the elastic properties of the arch. Two methods can be used to determine the loading which the arch is subjected to. The first and most natural one is to compute the internal forces acting in the shell along the intersection. These forces are then resolved into vertical and horizontal forces in the plane of the arch, and used as external loads on the arch. This method has the disadvantage that the determination of the angle at the intersections and the components of the forces parallel to the arch is complicated.

The second method, shown in Fig. 16, consists of treating an entire section of the shell as a free body. In such a free body, the moment parallel to the direction of the arch axis produced by the external loads and the internal forces can be obtained quite readily. For example, the moment at  $C$  equals the algebraic sum of the moments of the load  $w$  and the reaction  $V$  as in an ordinary arch, and the moments of the internal forces  $T_y$  and  $S$ . The internal forces are computed from Table 1. For these forces, only the component of the moment acting parallel to the arch axis is used. It will be necessary to find the slope of the

Fig. 16

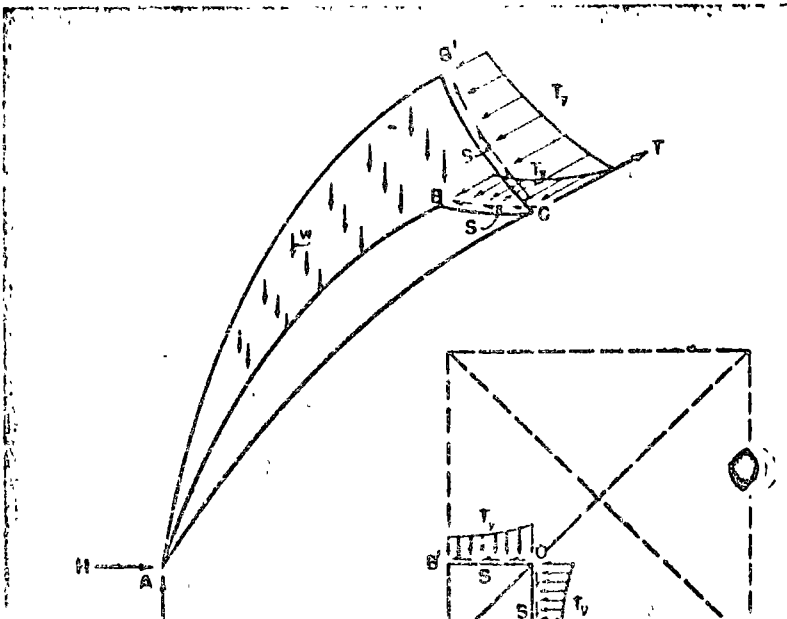


TABLE V - INTERNAL FORCES IN GRAVEL VAULTS (continued)

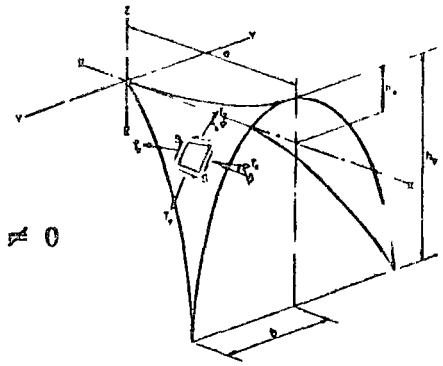
$w_c$  = intensity of distributed load at the crown, (lb. per sq.ft.)

$$k = \frac{\sqrt{1 + [(2h_x/a)(x/a)]^2}}{\sqrt{1 + [(2h_y/b)(y/b)]^2}}$$

$$k_1 = \sqrt{1 + (2h_y/b)^2}$$

$$k_2 = 1 - k_1$$

NOTE:  $h_x \neq 0$



Force	$\frac{y}{b}$	$(1 - \frac{x}{a})\sqrt{h_x/h_y}$																
		0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{2h_x} w_c k \text{ (coefficient)}$$

$T_x$	$\frac{y}{b}$	0.0000	.0020	.0079	.0177	.0314	.0489	.0702	.0952	.1237	.1557	.1910	.2396	.2929	.3506	.4122	.4775	.5460	.6173
	0.10	.0000	.0019	.0078	.0175	.0310	.0483	.0694	.0940	.1222	.1538	.1886	.2366	.2893	.3462	.4071	.4716	.5393	.6097
0.20	.0000	.0019	.0075	.0168	.0299	.0465	.0668	.0905	.1176	.1481	.1816	.2279	.2786	.3334	.3920	.4541	.5193	.5871	
0.30	.0000	.0018	.0070	.0158	.0280	.0436	.0626	.0848	.1102	.1387	.1702	.2135	.2610	.3123	.3673	.4255	.4865	.5500	
0.40	.0000	.0016	.0064	.0143	.0254	.0396	.0568	.0770	.1001	.1259	.1545	.1938	.2370	.2836	.3335	.3863	.4417	.4994	
0.50	.0000	.0014	.0056	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1694	.2071	.2479	.2915	.3376	.3861	.4365	
0.60	.0000	.0012	.0046	.0104	.0185	.0288	.0413	.0559	.0727	.0915	.1123	.1408	.1722	.2060	.2423	.2807	.3209	.3628	
0.70	.0000	.0009	.0036	.0080	.0143	.0222	.0319	.0432	.0562	.0707	.0867	.1088	.1330	.1591	.1871	.2168	.2479	.2803	
0.80	.0000	.0006	.0024	.0055	.0097	.0151	.0217	.0294	.0382	.0481	.0590	.0740	.0905	.1083	.1274	.1476	.1687	.1908	
0.90	.0000	.0003	.0012	.0028	.0049	.0077	.0110	.0149	.0193	.0244	.0299	.0375	.0458	.0548	.0645	.0747	.0854	.0966	
1.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	

$$T_y = -\frac{k_1 b^2}{2h_y} \frac{w_c}{k} \left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} \text{ (coefficient)} \right]$$

$T_y$	$\frac{y}{b}$	0.0000	.9980	.9921	.9823	.9686	.9511	.9298	.9048	.8763	.8443	.8090	.7604	.7071	.6494	.5878	.5225	.4540	.3827
	0.10	.9877	.9857	.9799	.9702	.9567	.9393	.9183	.8937	.8655	.8339	.7991	.7510	.6984	.6415	.5805	.5161	.4484	.3780
0.20	.9511	.9492	.9436	.9342	.9212	.9045	.8843	.8605	.8334	.8030	.7694	.7232	.6725	.6177	.5590	.4969	.4318	.3640	
0.30	.8910	.8892	.8840	.8752	.8630	.8474	.8284	.8062	.7808	.7523	.7208	.6775	.6300	.5787	.5237	.4655	.4045	.3410	
0.40	.8090	.8074	.8026	.7947	.7836	.7694	.7522	.7320	.7089	.6831	.6545	.6152	.5721	.5254	.4755	.4227	.3673	.3096	
0.50	.7071	.7057	.7013	.6946	.6849	.6725	.6574	.6398	.6196	.5970	.5721	.5377	.5000	.4592	.4158	.3693	.3210	.2706	
0.60	.5878	.5866	.5831	.5774	.5693	.5590	.5465	.5318	.5151	.4963	.4755	.4470	.4156	.3817	.3455	.3071	.2668	.2249	
0.70	.4540	.4531	.4504	.4459	.4397	.4318	.4221	.4108	.3978	.3833	.3673	.3452	.3210	.2948	.2668	.2372	.2061	.1737	
0.80	.3090	.3084	.3066	.3035	.2993	.2939	.2873	.2796	.2708	.2609	.2500	.2350	.2185	.2007	.1816	.1615	.1403	.1183	
0.90	.1564	.1561	.1552	.1537	.1515	.1488	.1454	.1415	.1371	.1321	.1266	.1190	.1106	.1016	.0919	.0817	.0710	.0599	
1.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	

$$S = \frac{k_2 ab}{2\sqrt{h_x h_y}} w_c \text{ (coefficient)}$$

$S$	$\frac{y}{b}$	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	0.10	.0000	.0098	.0196	.0293	.0389	.0483	.0576	.0666	.0754	.0838	.0920	.1016	.1106	.1190	.1266	.1344	.1394	.1445
0.20	.0000	.0194	.0387	.0579	.0768	.0955	.1138	.1316	.1489	.1656	.1816	.2007	.2195	.2350	.2500	.2635	.2753	.2853	
0.30	.0000	.0285	.0569	.0851	.1129	.1403	.1671	.1933	.2187	.2433	.2669	.2948	.3210	.3452	.3673	.3871	.4045	.4194	
0.40	.0000	.0369	.0737	.1101	.1462	.1816	.2164	.2503	.2832	.3150	.3455	.3817	.4156	.4470	.4755	.5012	.5237	.5410	
0.50	.0000	.0444	.0886	.1325	.1759	.2185	.2603	.3011	.3407	.3789	.4156	.4502	.5000	.5377	.5721	.6029	.6300	.6533	
0.60	.0000	.0508	.1014	.1516	.2012	.2500	.2978	.3445	.3897	.4335	.4755	.5254	.5721	.6152	.6545	.6898	.7208	.7474	
0.70	.0000	.0559	.1117	.1670	.2216	.2753	.3280	.3794	.4292	.4774	.5237	.5707	.6300	.6775	.7208	.7597	.7939	.8232	
0.80	.0000	.0597	.1192	.1782	.2365	.2939	.3501	.4049	.4582	.5096	.5590	.6177	.6725	.7232	.7694	.8109	.8474	.8787	
0.90	.0000	.0620	.1238	.1831	.2456	.3052	.3636	.4203	.4758	.5292	.5806	.6415	.6984	.7510	.7991	.8421	.8800	.9123	
1.00	.0000	.0628	.1253	.1874	.2487	.3090	.3681	.4258	.4818	.5358	.5878	.6494	.7071	.7604	.8090	.8526	.8910	.9239	



forces  $T_v$  and  $S$  before proceeding with the summation of moments. The angle  $\psi$  which  $T_v$  makes with the horizontal is obtained from the relationship that

$$\tan \psi = \frac{2h_v y}{b^2} \quad (30a)$$

and angle  $\phi$  between force  $S$  and the horizontal can be calculated from the relationship that

$$\tan \phi = \frac{2h_r x}{a^2} \quad (30b)$$

#### Design Example

The following example illustrates the design of a typical groined vault using Table 1.

Consider the unit shown in Fig. 17. The roof is 100x100 ft. in plan with a maximum height  $h_v=37.5$  ft. The rise of the central arch  $h_r=6.0$  ft. and the shell thickness is 4 in. The dead load of the shell, roofing, etc. is  $w_c=60$  psf, with a uniform live load equal to 30 psf.

Before the calculation of internal forces the quantities  $k_1$  and  $k_2$  must be computed from the expressions shown in Table 1.

$$k_1 = \sqrt{1 + (2h_v/b)^2} = \sqrt{1 + (2 \times 37.5/50)^2} = 1.8$$

$$k_2 = 1 - k_1 = 1 - 1.8 = -0.80$$

and

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{-0.8}{1.8} = -0.444$$

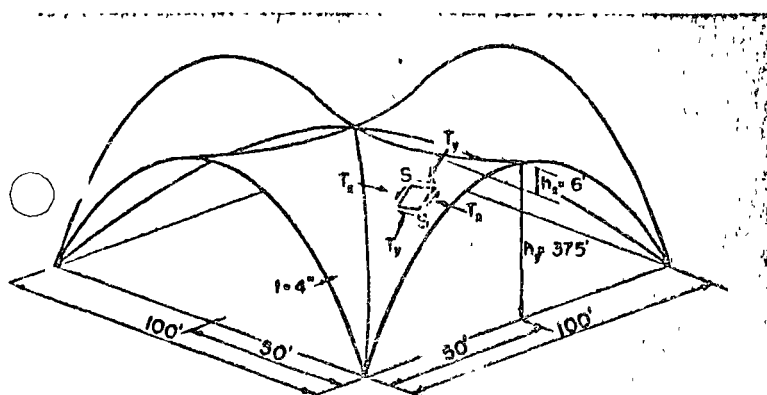
The internal forces will be obtained for  $\frac{x}{a}$  and  $\frac{y}{b}$  varying at intervals of 0.2, therefore coefficient  $k$  must also be evaluated for the same points from the equation for  $k$  shown in Table 1. For example at point  $\frac{x}{a} = 0.6, \frac{y}{b} = 0.4$ .

$$k = \sqrt{\frac{1 + [(2h_r/a)(x/a)]^2}{1 + [(2h_v/b)(y/b)]^2}} \\ = \sqrt{\frac{1 + [(2 \times 6/50)(0.6)]^2}{1 + [(2 \times 37.5/50)(0.4)]^2}} = 0.866$$

The values of the coefficient  $k$  for the remaining points on the shell are shown in the first section of Table 2.

All the constants required to determine internal forces are now available. The procedure will be illustrated by calculating forces at the same point  $\frac{x}{a} = 0.6, \frac{y}{b} = 0.4$ .

Fig. 17



From Table 1, for  $\frac{y}{b} = 0.4$  and

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) \sqrt{h_r/h_v} = (1 - 0.6) \sqrt{6/37.5} = 0.16$$

the coefficients for  $T_x, T_v$  and  $S$  are 0.0254, 0.7836 and 0.1462 respectively. Using the equations shown in Table 1,

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{2h_r} w_c k \text{ (coefficient)} \\ = \frac{-0.8 \times 50^2}{2 \times 6} \times 60 \times 0.866 \times 0.0254 \\ = -220 \text{ lb. per ft.}$$

$$T_v = -\frac{k_1 b^2}{2h_v} \left(\frac{w_c}{k}\right) \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \text{ (coefficient)}\right] \\ = -\frac{1.8 \times 50^2}{2 \times 37.5} \times \frac{60}{0.866} \left[1 - 0.444 \times 0.7836\right] \\ = -2,709 \text{ lb. per ft.}$$

$$S = \frac{k_2 ab}{2\sqrt{h_r h_v}} w_c \text{ (coefficient)} \\ = \frac{-0.8 \times 50 \times 50}{2\sqrt{6 \times 37.5}} \times 60 \times 0.1462 \\ = -585 \text{ lb. per ft.}$$

The internal forces due to dead load for the entire shell are shown in Table 2. It should be noted that values below the horizontal broken line in the tables were omitted because these points lie below the groin. Calculations of constants beyond the boundary of the shell are only needed when it is necessary to obtain values at the groin by interpolation.

As mentioned previously, uniform load such as live load is transmitted to the support by pure axial thrust; therefore only forces  $T_v$  exist for this loading condition. The horizontal component  $T_v^H$  of this thrust with a live load of 30 psf for all points on the shell is

$$T_v^H = \frac{w a^2}{2h_v} = \frac{30 \times 50^2}{2 \times 37.5} = 1,000 \text{ lb. per ft.}$$

The axial thrust is obtained from

$$T_v = \frac{T_v^H}{\cos \psi}$$

where angle  $\psi$  is evaluated from equation (30a):

$$\tan \psi = \frac{2h_v y}{b^2}$$

For all points along the line  $\frac{y}{b} = 0.4$ ,

$$\tan \psi = \frac{2 \times 37.5}{50} \times 0.4 = 0.6$$

and therefore

$$\cos \psi = 0.857$$

$$\text{Therefore } T_y = -\frac{1,000}{0.857} = -1,166 \text{ lb. per ft.}$$

and the final dead plus live load force is

$$T_y = -(2,709 + 1,166) = -3,875 \text{ lb. per ft.}$$

Internal forces  $T_x$  and  $S$  are a function of dead load only, and are not increased by the live load.

Examination of Table 2 shows that the forces are compressive throughout the shell. Furthermore, their magnitude is very small. The maximum compressive force  $T_y$  occurs at  $\frac{x}{a} = 1.0, \frac{y}{b} = 1.0$ . The live load force at this point is  $-1,803$  lb. per ft. and the dead load force from Table 2 is  $-6,316$  lb. per ft. Thus the maximum compressive stress is

$$f_c = -\frac{1,803 + 6,316}{4 \times 12} = -169 \text{ psi}$$

Compressive stresses due to  $T_x$  are considerably smaller. The maximum shear stress shown in Table 2 is

$$v = \frac{866}{4 \times 12} = 18 \text{ psi}$$

By inspection of Table 2 it is evident that the combined stresses are small; therefore it will not be necessary to compute them. Although the above stresses do not require any reinforcing, it is advisable to provide at least the minimum steel specified by the ACI Code to accommodate unsymmetrical loads and stresses due to volumetric changes.

The last step is the analysis and design of the groin arch by either one of the two procedures already described. The forces computed in Table 2 should be used in determining the loading to which the arch is subjected.

#### Unsymmetrical Loads

In the preceding discussion it was assumed that all of the quadrants were equally and uniformly loaded. In certain cases, however, such as the inverted umbrella shown in Fig. 3b, it may be desirable to investigate the effect of unsymmetrical loading or the effect of lateral loads.

To visualize readily the behavior of a shell under unsymmetrical loading, it is preferable to consider the action of the shell and the edge beams separately. Furthermore, in the initial stage the edge beams must be considered restrained in a manner similar to the fictitious clamping assumed in the moment distribution technique.

From the physical relationship just discussed, it should be apparent that a uniform load on any one quadrant will create internal forces in the shell of that quadrant in accordance to formulas previously derived. For example, a uniform load on the two quadrants in Fig. 18 is resisted by parabolic arches which require only shearing forces at their ends for stability. These shearing forces

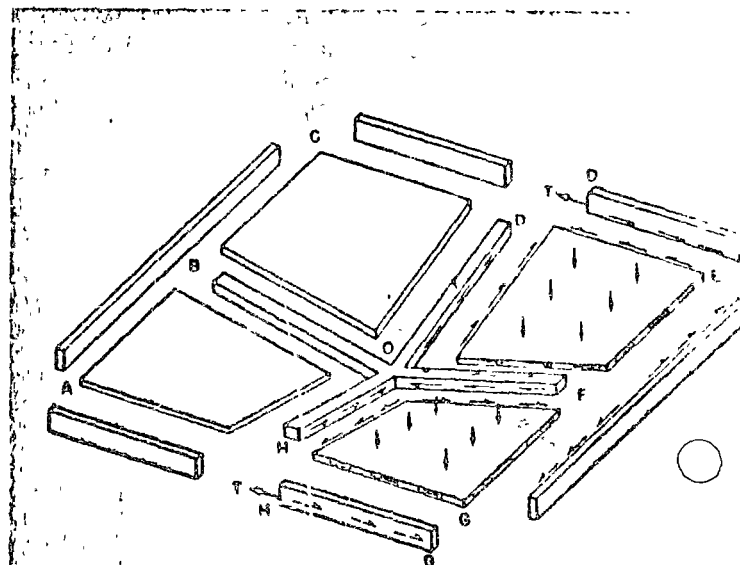
are computed by equation (8). Thus even though part of the structure is loaded, the shell proper is in equilibrium with the stresses readily determinable.

Table 2 - Coefficients and Internal Forces due to Dead Loads in Example Groined Vault

	$\frac{y}{b}$	$\frac{x}{a}$					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		$[1 - (x/a)]\sqrt{h_x/h_y}$					
		0.40	0.32	0.24	0.16	0.08	0
$k$	0	1.000	1.001	1.005	1.010	1.018	1.028
	0.2		0.959	0.962	0.968	0.975	0.985
	0.4			0.861	0.866	0.873	0.882
	0.6				0.751	0.757	0.764
	0.8					0.652	0.658
	1.0						0.570
$T_x$	0	-1910	-1238	-706	-317	-80	0
	0.2		-1178	-643	-289	-73	0
	0.4			-489	-220	-56	0
	0.6				-139	-35	0
	0.8					-16	0
	1.0						0
$T_y$	0	-2303	-2195	-2101	-2030	-1977	-1945
	0.2		-2363	-2272	-2196	-2143	-2110
	0.4			-2783	-2709	-2652	-2614
	0.6				-3581	-3523	-3481
	0.8					-4769	-4720
	1.0						-6316
$S$	0	0	0	0	0	0	0
	0.2		-596	-435	-307	-155	0
	0.4			-866	-565	-295	0
	0.6				-805	-406	0
	0.8					-477	0
	1.0						0

Note: Coefficient  $k$  is dimensionless. Forces  $T_x, T_y$  and  $S$  are in lb. per ft.

Fig. 10



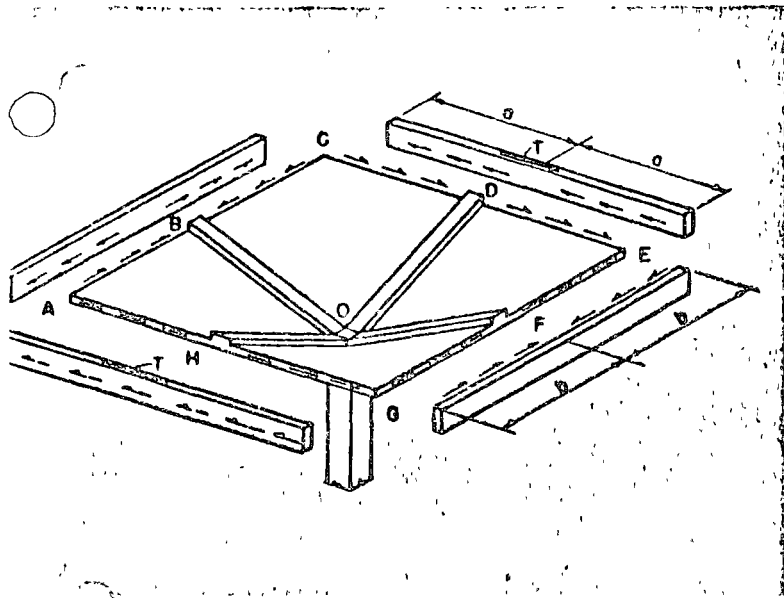


Fig. 19

Tensile and compressive forces in the edge beams can be determined from these. Assuming the column capable of resisting horizontal forces, all edge beams are in equilibrium except beams *AHG* and *CDE*. For these beams, the shear acts in only one direction. To maintain equilibrium, a concentrated force *T* is needed at *D* and *H*. If it is assumed that restraint exists at *D* and *H*, then the force *T* can be considered as an external load.

This is contrary to the actual boundary conditions. Hence, a concentrated load equal and opposite to *T* must be applied at *D* and *H*. In this case, the entire roof is considered to act as a unit (see Fig. 19). Determination of the exact distribution of stresses created by this horizontal load involves lengthy and complex arithmetical calculations. Fortunately, as in the case of flat plate floors, such refinement is not necessary. The effect of this concentrated load can be bracketed within narrow ranges.

Since the concentrated load acts parallel to the edge beam, it is reasonable to assume that resistance to the load will be provided by nonuniform tangential shears acting at the junction of the shell and edge beam with the maximum intensity at center. Hence, the shell proper is subject to a shearing force parallel to the exterior edges. If there was no warping of the shell surface, the shearing forces would penetrate to the interior edge with only a slight change in their distribution. However, because of warping, the direction of the tangential shear at any section or at the interior edges is different than that at the exterior. For equilibrium of forces of a section of the shell as a free body, shears normal to the surface as well as tangential shears must be created. These normal shearing forces, generally termed radial shears, are naturally concentrated in that area near the valley at which the change in elevation is most pronounced.

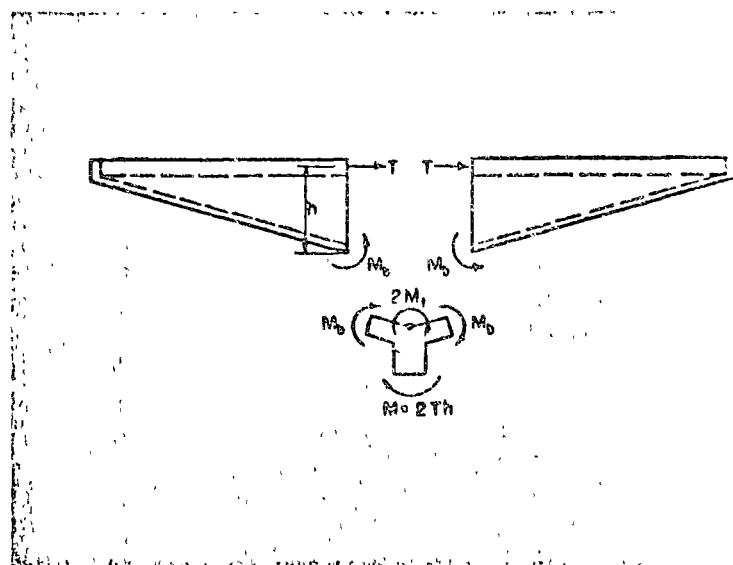
ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*, indicates that the bending moment produced by tangential shears in a shell is very small. On this basis, most of the shell is relatively free of bending, with bending moments concentrated only in that area near the column support at which radial shears are developed. However, in this area, since the edge beams stiffen the shell, it is probable that only slight bending is developed. Consequently for average spans, the bending moments produced in the shell are not usually critical.

But the presence of radial shears near the column produces bending of the two interior sloping edge beams parallel to the direction of *T*, and torsion of the edge beams perpendicular to the force *T*. Considering only the concentrated load *T*, because it is antisymmetrical, the moment resisted by the two interior edge beams must be equal and opposite as shown in Fig. 20. In this figure, the concentrated load is shown as *T* because the effect at the two edges, the near and the far, are considered. A force of *T/2* is considered acting respectively on *AH* and *CD*.

If it were not for the presence of the torsional resisting moment *M<sub>t</sub>*, provided by members *HO* and *OD*, the moments *M<sub>s</sub>* acting at the junction of the members and the column, could be determined exactly, and would be equal to *Th*. Since it is difficult to ascertain how much help the torsional resistance contributes, a conservative approach is to design the area near edge beams *BO* and *OF* at the columns for a moment *Th*. From a consideration of the geometry of Fig. 20 and strain relationship, the magnitude of the moment along the valley reduces to zero at *B* and *F*. A conservative assumption is that the moment varies linearly from *O* to *B* and *O* to *F*.

The minimum depth of the resisting moment arm at the junction of the edge beam and column can be taken as the depth of the beam. At this and other sections some

Fig. 20



of the shell will act together with the edge beam, forming a V-section. From a practical point of view the effective width can be considered as that defined by lines radiating at 45 deg. from the edges of the columns.

Test

To substantiate the capacity of hyperbolic paraboloid shells to carry a variety of loads, a series of tests was carried out by the Structural Development Section of the Research and Development Division of the Portland Cement Association. The shell tested was of the type shown in Fig. 3b. It covered an area of 24x24 ft. with a 1½-in. shell thickness and a 2-ft. 10-in. rise. The reinforcing in the shells consisted of No. 3 bars at 12 in. each way. All edge beams projected above the shells. The perimeter edge beams were 4x6 in. and were reinforced with No. 4 bars. The dimensions of the interior edge beams varied from 15x5 in. at the columns to 9x1½ in. (the shell thickness) at the perimeter. They were reinforced with 3 No. 4 bars. The structure was supported on a 15x15-in. square tied column reinforced with 12 No. 8 bars and a 4-ft. 6-in. square footing which was anchored at four corners. A uniform load on the shell was simulated by simultaneously applying equal concentrated loads on a 3x3-ft. grid.

The test program included three different loading conditions on the same structure. Therefore, only the last test was carried to destruction.

In the first test a uniform load was applied and increased to a maximum of 48.5 psf. The sum of dead load and maximum applied load produced a calculated thrust in the arches of 95 psi and a tensile stress in the perimeter beam reinforcing of 25,750 psi. No distress was observed under this load.

The loading in the second test consisted of two equal concentrated loads applied on the shell, near the center of two adjacent quadrants. The contact area between the load and the shell was a single 3x4-in. washer, or 12 sq.in. Some minor radial and circumferential cracking appeared at the points of loading when the concentrated loads reached 4,510 lb. each, at which point the second test was concluded. A concentrated load of 4,510 lb. will produce a local bending moment of 1.0 kip-ft./ft. at the point of application of the load\* and a punching shear of 322 psi.

Regarding the problem of concentrated loads, a point loading  $P$  on a flat plate whose thickness-to-span ratio is more than 0.083 will cause a positive moment under the load whose maximum value is  $0.42P$  irrespective of the support condition. For a spherical dome with

a thickness-to-radius ratio of 0.04 or more, the moment created by a radial concentrated load with small bearing area has been shown to be equal to  $0.26P$ . For design purposes, an average value of  $0.34P$  appears justified. Where the moment is critical, advantage should be taken of the thrust produced in curved shells.

The third loading condition consisted of a uniform load applied to two adjacent quadrants. This unsymmetrical load was gradually increased to 58 psf. No distress was observed over the major portion of the shell even as the ultimate capacity was approached. Cracking occurred at the interior edge beams and in the shell in the vicinity of the column. Cracks in the unloaded side of the structure occurred at the underside of the interior edge beam almost adjacent to the column. In the loaded side the cracks started at the top of the interior edge beam. Torsional cracks appeared in the other two interior edge beams. The 58 psf load applied over half of the structure produced a bending moment of 100 kip-ft., considerably more than the capacity of the two 15x5-in. interior beams. It is, therefore, evident that the participation of the 1½-in. shell acting as a deep V-shaped beam, and to a minor extent the torsion in the other two beams, were instrumental in carrying the unsymmetrical load. Hence, the recommendation that the unbalanced moment is resisted by two edge beams is extremely conservative!

This test demonstrated that hyperbolic paraboloids, even with a shell thickness of only 1½ in., can resist large concentrated loads as well as unsymmetrical loads.

Secondary Stresses

One question that arises about these shells is the degree of flatness that can be used without invalidating the membrane analysis. This depends to a large extent on the magnitude of the secondary bending moments caused by axial strain. The analysis presented is based on a satisfaction solely of the equilibrium of forces, and no attention is given to the compatibility between strains and stresses. For the usual rise,  $h/a=1/5$  or  $h/b=1/5$ , the effect of axial strains is unimportant and can be ignored safely. However, when the ratio  $h/a$  decreases, the effect of axial strains begins to exert a dominant influence on the behavior of the shell. The departure in behavior from that indicated by the simple membrane analysis in a flat shell is analogous to that occurring in a two-hinged parabolic arch subject to uniform load as the ratio of rise to span decreases. For very flat parabolic arches, it can be shown that if the rib-shortening effect (axial deformations) is included in the analysis, the horizontal component of the reaction for a given span decreases as the ratio of rise to span decreases. With no rise the horizontal component decreases to zero, and, thus, the secondary bending due to axial strains approaches the simple-beam bending moment as a limiting value.

\*The moment calculation is based on material presented by Eric Reissner, in Appendix I of "Thin-Shelled Domes Loaded Eccentrically" by Voss, Peabody, Sibley and Dieltz, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 113, 1948, pages 312-314.

The structural action of a hyperbolic paraboloid shell is due to the fact that its curved surface resists the load by two sets of parabolic arches perpendicular to each other, as shown in Fig. 8a. Therefore, some insight into the effect of curvature can be obtained by examining a strip parallel to the arches as a free body. If the shearing forces and normal forces on the two opposite faces are ignored, and if it is assumed that the ends of the arches are not free to move, then the secondary bending moments due to lack of curvature can be determined as for an arch. The result of such a study is presented in

Fig. 21 for various ratios of  $\frac{ht}{ab}$ .

The secondary bending moment at various distances from the corner, designated by the dimensionless quantity  $x/t$ , is expressed in terms of the simple-beam bending moments occurring in a strip of length  $L$ . Fig. 21 indicates that because the ratio of rise to span approaches zero at the corner, the load is carried entirely by beam action, which is contrary to what can be expected from membrane theory. For strips farther away from the corner, the secondary moment decreases. The rate of the decrease is a function of  $\frac{ht}{ab}$ . The larger the ratio of  $\frac{ht}{ab}$ , the more rapid the decrease in the magnitude of the secondary moments. The usual value of  $\frac{ht}{ab}$  for the umbrella type of hyperbolic paraboloid is approximately

0.004. Assuming that the thickness is 3 in., the secondary moment becomes unimportant at a distance of approximately 5 ft. from the corner.

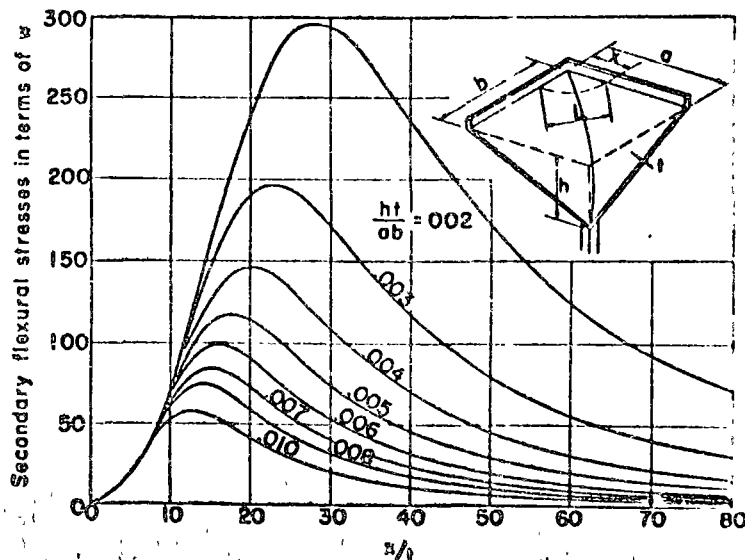
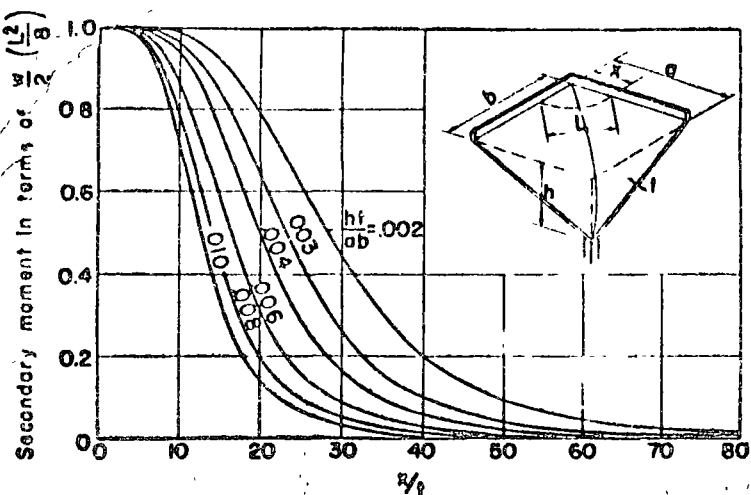
Fig. 21 shows another important characteristic observed on some of the shells that have been built. At the corner the load is carried mainly by ordinary beam action. Hence, the load is transmitted to the edge beams principally by radial shears. The edge beams near the corner are thus loaded vertically and act as cantilevers for a small part of their length. Consequently, the edge beams in this vicinity should not only be designed for the tension computed by membrane theory, but should also be deepened to prevent excessive deflection and should be reinforced for negative moment. This is especially desirable when the edge beam is upturned.

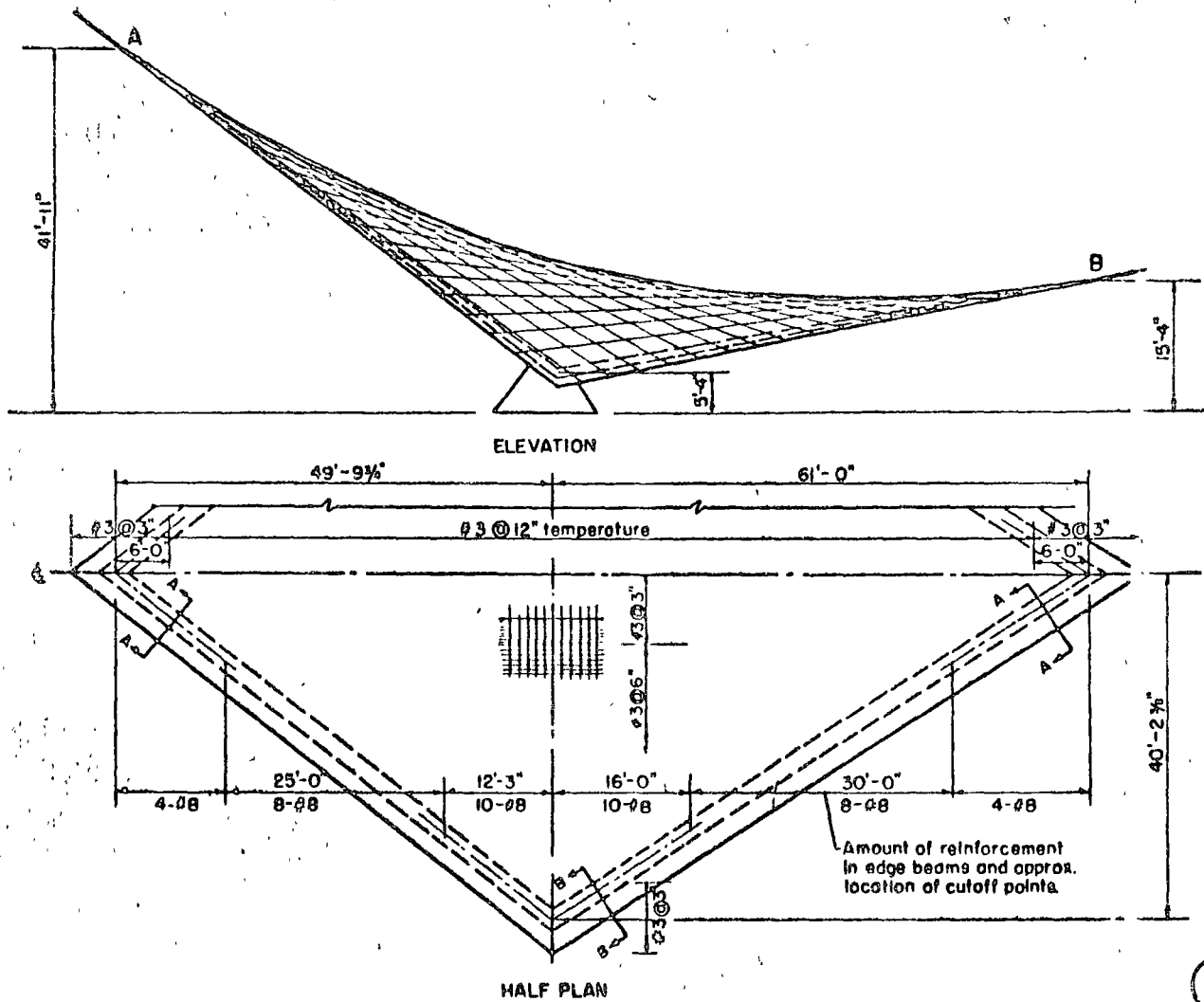
Because the value of  $L$  increases linearly in proportion to the distance from the corner, it is more expedient to show the effect of axial strains in terms of the secondary flexural stresses that are created. Such values are plotted in Fig. 22, which brings into sharper relief the importance of curvature on the magnitude of the secondary stresses. For an umbrella type of hyperbolic paraboloid subjected to a load of 72 psf and with a ratio of  $\frac{ht}{ab} = 0.004$ , the maximum secondary stresses occur at  $x/t = 20$  and are

$$f_c = \frac{145 \times 72}{144} = 72 \text{ psi.}$$

Fig. 21

Fig. 22

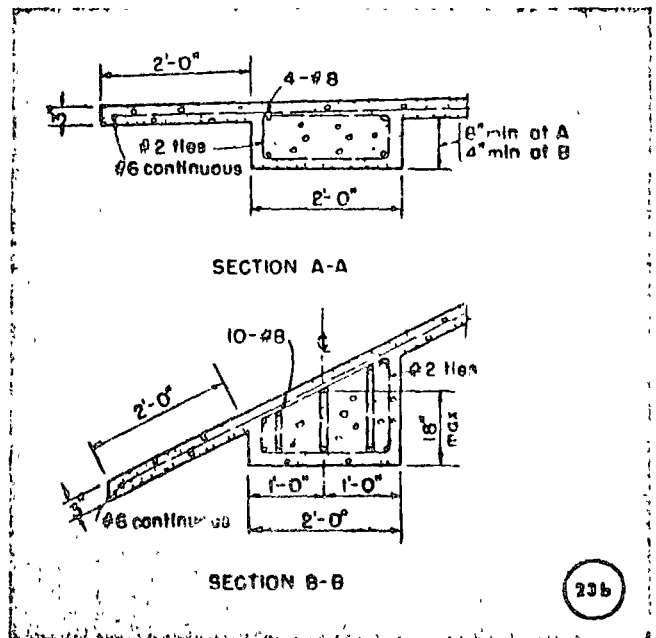




23a

**Examples**

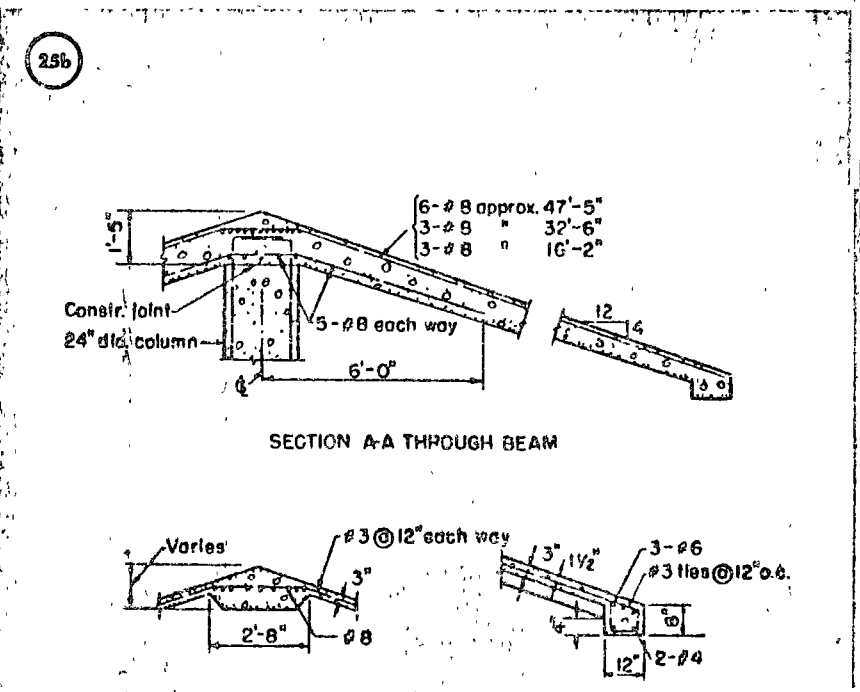
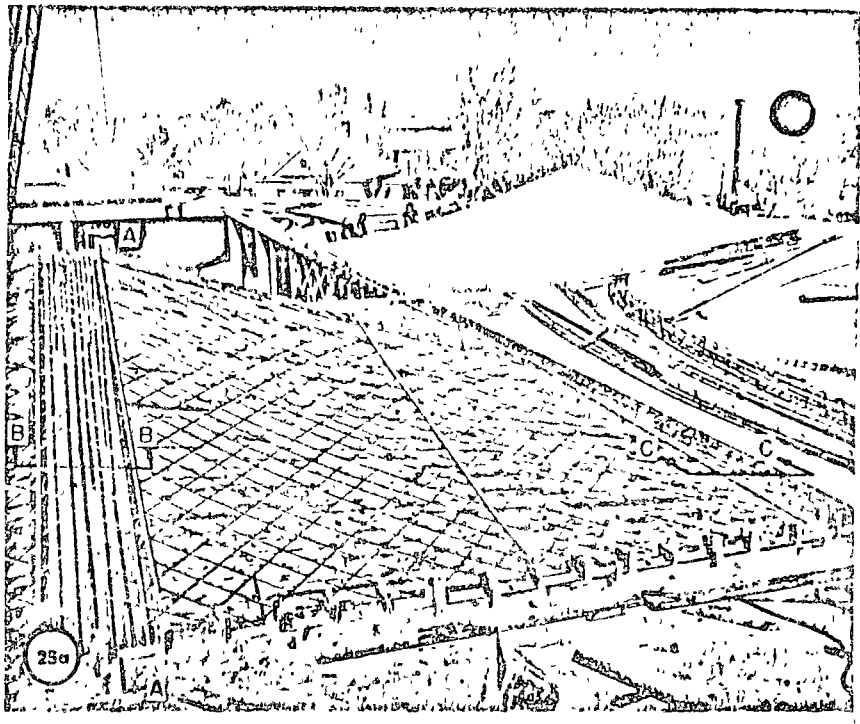
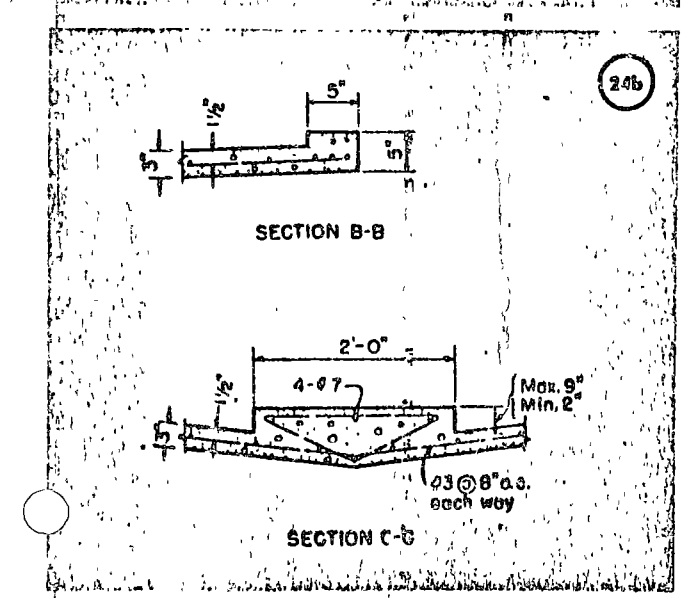
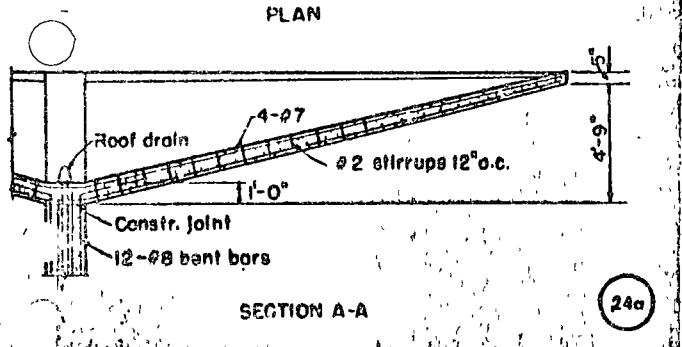
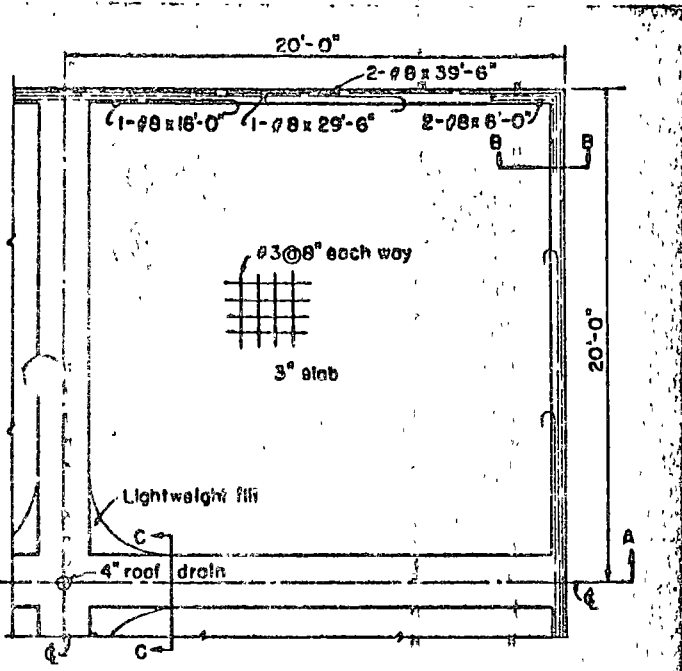
The previous discussion on secondary stresses pointed out the importance of providing sufficient curvature in a hyperbolic paraboloid surface. Since there has not yet been developed any exact method of determining the minimum rise-to-span ratio which can be tolerated, salient features of three shells selected from the large number already built are presented merely as a guide. The dimensions do not represent limits of applicability. These typical shells have been built in accordance with theory presented previously and are behaving satisfactorily.



23b

Figs. 23 a, b. The roof of St. Edmund's Episcopal Church, Elm Grove, Wis., features a 3-in. thick hyperbolic paraboloid shell supported on two narrow concrete buttresses. The tilt of the saddle shape gives the effect of spaciousness in the sanctuary. Architect was Wm. P. Wenzler of Milwaukee, Wis. General contractor was Cobbeard-Borghammer, Inc., of Milwaukee.

Figs. 24 a, b. Ralph's Supermarket, in Wichita, Kan., has nine adjacent hyperbolic paraboloid shells, each 40 ft. square, covering the store, work rooms and outside walks. For a live load of 30 psf, each shell has an average thickness of 4.5 in. and 2.4 lb. of reinforcement per square foot. A roof drain is located at the low lint of each shell, with the drain line carried down through the column core. Architects were Vanlandingham and Haney. Structural engineers were G. Hartwell and Co. of Wichita. General contractor was W. F. Soil Construction Co. of Wichita.



Figs. 25 a, b. Fifty-two hyperbolic paraboloid concrete shells form new roof for Argentine reservoir in Kansas City, Kan. Measuring 45 ft. 6 in. square with a rise of 7 ft. 8 in., the 3-in. thick shells were built with movable forms constructed in two sections that match on centerline of the shell. Design live load was 30 psf. An average thickness of 4 1/2 in. and 2.7 lb. of reinforcement per square foot were required for each shell. Design was by Burns and McDonnell Engineering Co. of Kansas City, Mo., for the Board of Public Utilities, Kansas City, Kan. General contractor was Eastman Construction Co. of Kansas City, Mo.

## Appendix

### Derivation of Formulas for Skewed Hyperbolic Paraboloid Shells

The derivation of formulas for analyzing hyperbolic paraboloid surfaces is somewhat similar to the derivation for these rectangular in plan.

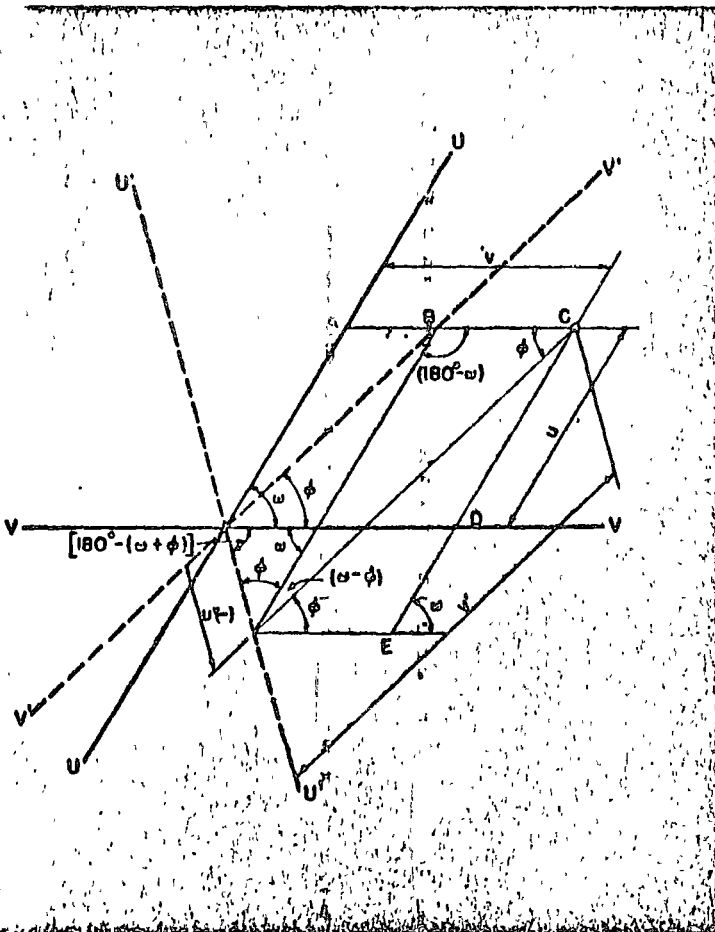
With reference to Fig. 26, in accordance with the law of sines,

$$BC = \frac{v' \sin(\omega - \phi)}{\sin(180^\circ - \omega)} = \frac{v' \sin(\omega - \phi)}{\sin \omega}$$

and

$$AB = \frac{-u' \sin \phi}{\sin \omega}$$

Fig. 26



Therefore, since  $v = AB + BC$ ,

$$v = \frac{1}{\sin \omega} \left[ v' \sin(\omega - \phi) - u' \sin \phi \right] \quad (31)$$

Also,

$$CE = \frac{v' \sin \phi}{\sin \omega}$$

and

$$DE = \frac{-u'}{\sin \omega} \sin \left[ 180^\circ - (\omega + \phi) \right] \\ = \frac{-u' \sin(\omega + \phi)}{\sin \omega}$$

hence

$$u = CE - DE = \frac{1}{\sin \omega} \left[ v' \sin \phi + u' \sin(\omega + \phi) \right] \quad (32)$$

Substituting equations (31) and (32) into equation (20) gives

$$z = \frac{h}{ab} uv = \frac{h}{ab \sin^2 \omega} \left\{ \left[ v' \sin(\omega - \phi) - u' \sin \phi \right] \left[ v' \sin \phi + u' \sin(\omega + \phi) \right] \right\}$$

Expanding this expression and substituting the trigonometric identity  $\sin^2 \omega - \sin^2 \phi$  for  $\sin(\omega - \phi) \sin(\omega + \phi)$ , gives

$$z = \frac{h}{ab \sin^2 \omega} \left\{ \sin \phi \left[ (v')^2 \sin(\omega - \phi) - (u')^2 \sin(\omega + \phi) \right] + v'u' \left[ \sin^2 \omega - 2 \sin^2 \phi \right] \right\} \quad (33)$$

The coefficient of  $v'u'$  becomes zero where the value of  $\phi$  is chosen so that

$$\sin \phi = \frac{\sin \omega}{\sqrt{2}} \quad (34)$$



Designating the particular value which will satisfy the condition as  $\phi_c$ , equation (33) reduces to

$$z = \frac{h}{ab \sin^2 \omega} \sin \phi_c \left[ (v')^2 \sin(\omega - \phi_c) - (u')^2 \sin(\omega + \phi_c) \right] \quad (35)$$

It should be noted that equation (35) is of the same form as equation (3) because  $\omega$  and  $\phi_c$  are constants for a particular angle of skew  $\omega$ . Therefore, the oblique surface  $z = \frac{huv}{ab}$  can also be formed by translating one parabola along another. In this general case, however, the parabolas are not perpendicular to each other as in the specific rectangular case, but are skewed at the angle  $\omega$ .

At the edge of the skewed surface horizontal arch thrusts  $H_U'$  and  $H_V'$  of the two systems of arches are determined in a manner similar to that illustrated in equations (7) and (8). For example, thrust  $H_V'$  may be expressed

$$H_V' = \frac{w}{4} \left( \frac{L^2}{4h_{xy}} \right) \quad (36)$$

If the term involving  $u'^2$  in equation (35) is constant, the expression for parabolas parallel to the  $V'$  axis is

$$z' = \frac{h \sin \phi_c}{ab \sin^2 \omega} \left[ v'^2 \sin(\omega - \phi_c) \right] \quad (37)$$

Setting  $z' = h_{xy}$  at  $v' = L/2$  gives

$$\frac{L^2}{4h_{xy}} = \frac{ab}{h} \left[ \frac{\sin^2 \omega}{\sin \phi_c \sin(\omega - \phi_c)} \right] \quad (38)$$

Substituting equation (38) into equation (36) gives

$$H_V' = \frac{w}{4} \left( \frac{ab}{4} \right) \frac{\sin^2 \omega}{\sin \phi_c \sin(\omega - \phi_c)}$$

But from equation (34)  $\sin \phi = \frac{\sin \omega}{\sqrt{2}}$ ; therefore

$$H_V' = \frac{wab}{4h} \left[ \frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin(\omega - \phi_c)} \right] \quad (39)$$

In a similar manner it may be shown that

$$H_U' = \frac{wab}{4h} \left[ \frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin(\omega + \phi_c)} \right] \quad (40)$$

To prove that components of the horizontal thrust acting normal to the edge of the skewed surface nullify each other, the combined normal components of both  $H_U'$  and  $H_V'$  are expressed

$$H_N = H_V' \sin^2 \phi_c - H_U' \sin^2(\omega + \phi_c) \quad (41)$$

Substituting equations (39) and (40) in equation (41),

$$H_N = \frac{wab \sqrt{2} \sin \omega}{4h} \left[ \frac{\sin^2 \phi_c}{\sin(\omega - \phi_c)} - \sin(\omega + \phi_c) \right] \quad (42)$$

or

$$H_N = \frac{wab \sqrt{2} \sin \omega}{4h} \left[ \frac{2 \sin^2 \phi_c - \sin^2 \omega}{\sin(\omega - \phi_c)} \right] \quad (43)$$

However, the numerator of the term inside the bracket was previously made equal to zero. Therefore, equation (43) equals zero, indicating that the combined thrusts exerted by intersecting arches produce no force normal to the edge.

Shear exerted along the edge of the skewed surface is obtained by adding algebraically the components of the horizontal thrusts  $H_U'$  and  $H_V'$  parallel to the edge:

$$S = H_V' \sin \phi_c \cos \phi_c - H_U' \sin(\omega + \phi_c) \cos(\omega + \phi_c)$$

Substituting for  $H_V'$  and  $H_U'$ , their values given by equations (39) and (40),

$$S = \frac{wab \sin \omega}{2 \sqrt{2} h} \left[ \frac{\sin \phi_c \cos \phi_c}{\sin(\omega - \phi_c)} - \cos(\omega + \phi_c) \right] \quad (44)$$

Utilizing the identity that  $\sin \omega \cos \omega - \sin \phi \cos \phi = \cos(\omega + \phi) \sin(\omega - \phi)$ , equation (44) reduces to

$$S = \frac{wab \sin \omega}{2 \sqrt{2} h} \left[ \frac{\sin \phi_c \cos \phi_c - \sin \omega \cos \omega + \sin \phi_c \cos \phi_c}{\sin \omega \cos \phi_c - \cos \omega \sin \phi_c} \right]$$

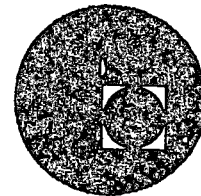
Substituting for  $\sin \phi_c$  its value given by equation (34), then

$$S = \frac{wab \sin \omega}{2 \sqrt{2} h} \left[ \frac{\sqrt{2} \sin \omega \cos \phi_c - \sin \omega \cos \omega}{\sin \omega \cos \phi_c - \frac{\cos \omega \sin \omega}{\sqrt{2}}} \right] = \frac{wab \sin \omega}{2h} \quad (45)$$





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES

EJEMPLOS DE APLICACION

DISEÑO DE CASCARON CILINDRICO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

AGOSTO DE 1976.

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header, which is mostly illegible due to fading and bleed-through.





DISEÑO DE CASCARON

CILINDRICO PARA

UNION CARBIDE MEXICANA.

FEBRERO - 1968

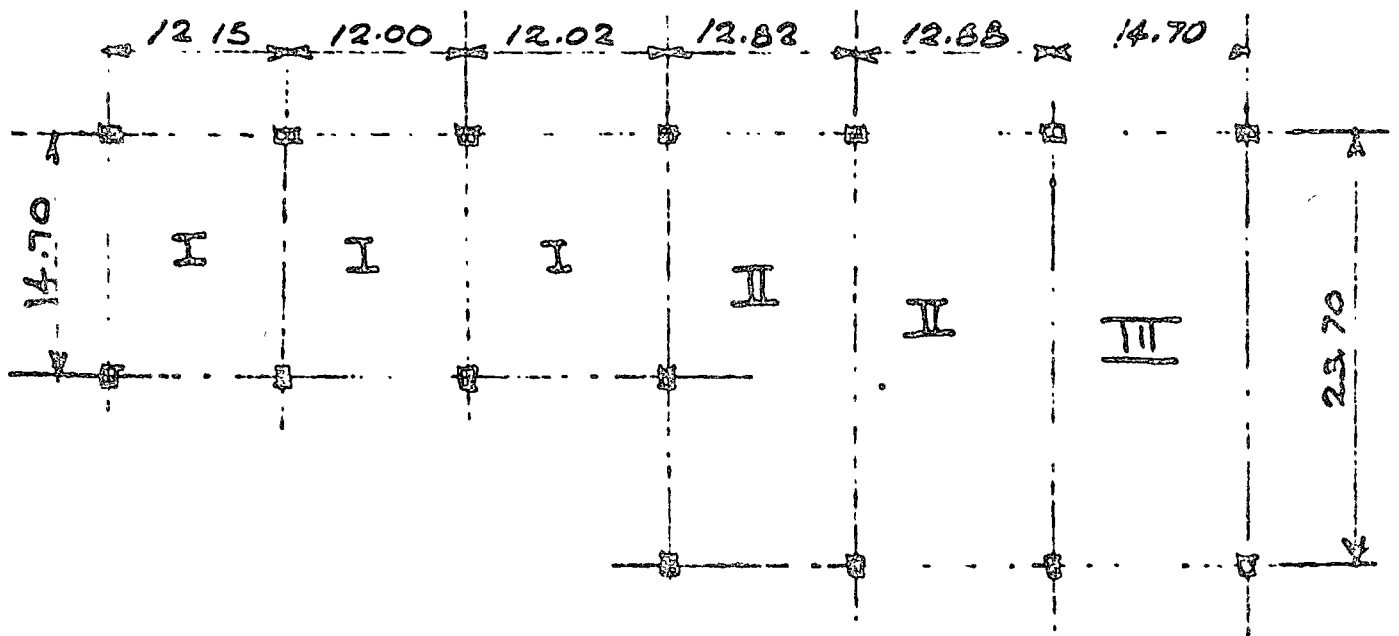
# PARABOLOIDES HIPERBOLICOS GAMESA

## Almacen Producto Elaborado

P. Ballesteros

PARA EL CASO DE ESTA CUBIERTA SE ESCOGIO UN PARABOLOIDE HIPERBOLICO DE CUATRO PUNTOS CUYA SOLUCION SE EX-  
PONDRÁ MAS ADELANTE.

SE TIENEN ADEMÁS TRES TIPOS DE PARABOLOIDE POR SUS DIFERENTES CLAROS A CUBIR POR LO TANTO SE HAZIAN TRES CALCULOS POR SEPARADO.



PLANTA DE LA CUBIERTA CON SUS DIFERENTES CLAROS.

# ANALISIS DE LA ESTRUCTURA

SELECCIONANDO UNA SECCION TRANSVERSAL PARABOLICA, EL ESTADO DE ESFUERZOS EN ESTO TIPO DE CASCARON SERA EL SIGUIENTE:

LA ECUACION DIFERENCIAL DE TEORIA DE MEMBRANA PARA CASCARONES DE CUALQUIER FORMA REFERIDA A UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO ES: (FIG. 1)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= -z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int_{x_0}^x X dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int_{y_0}^y Y dy \quad (1)$$

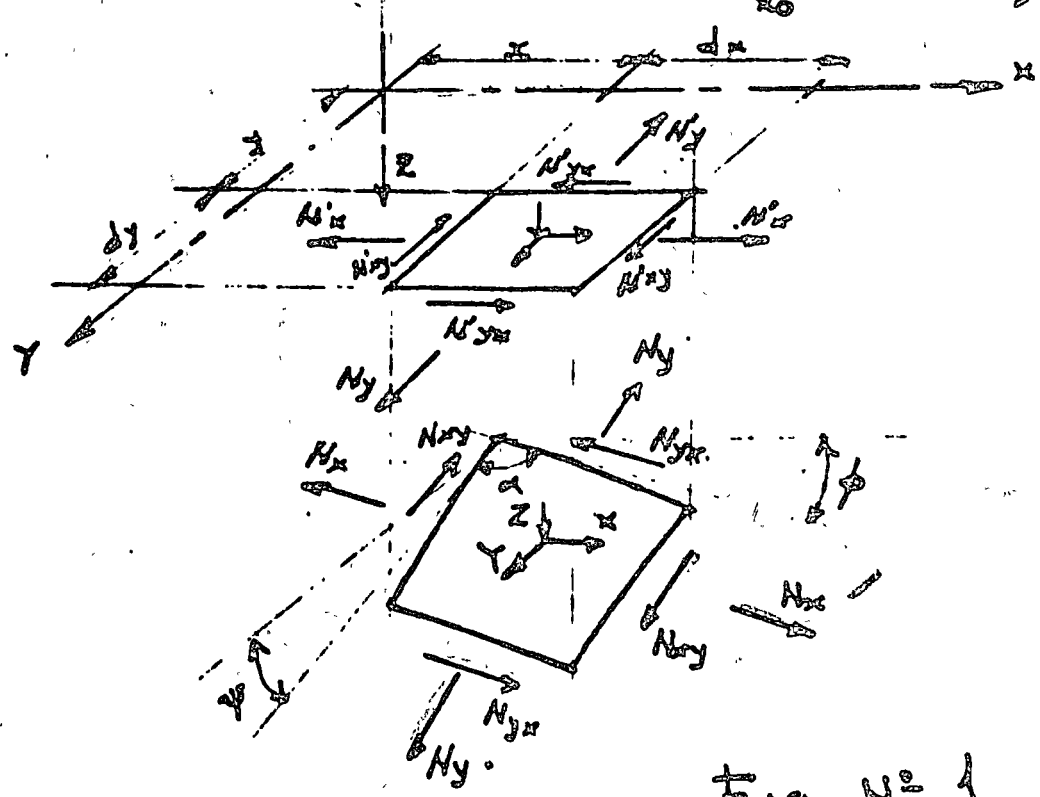


Fig. No 1.

DONDE LAS FUERZAS DE MEMBRANA SE EXPRESAN EN TERMINOS DE LA FUNCION DE ESTUCCIOS COMO SIGUE.

$$N'_x = N_x \frac{\cos \phi}{\cos \psi} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_{x_0}^x X dx$$

$$N'_y = N_y \frac{\cos \psi}{\cos \phi} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_{y_0}^y Y dy$$

$$N'_{xy} = N_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

(2)

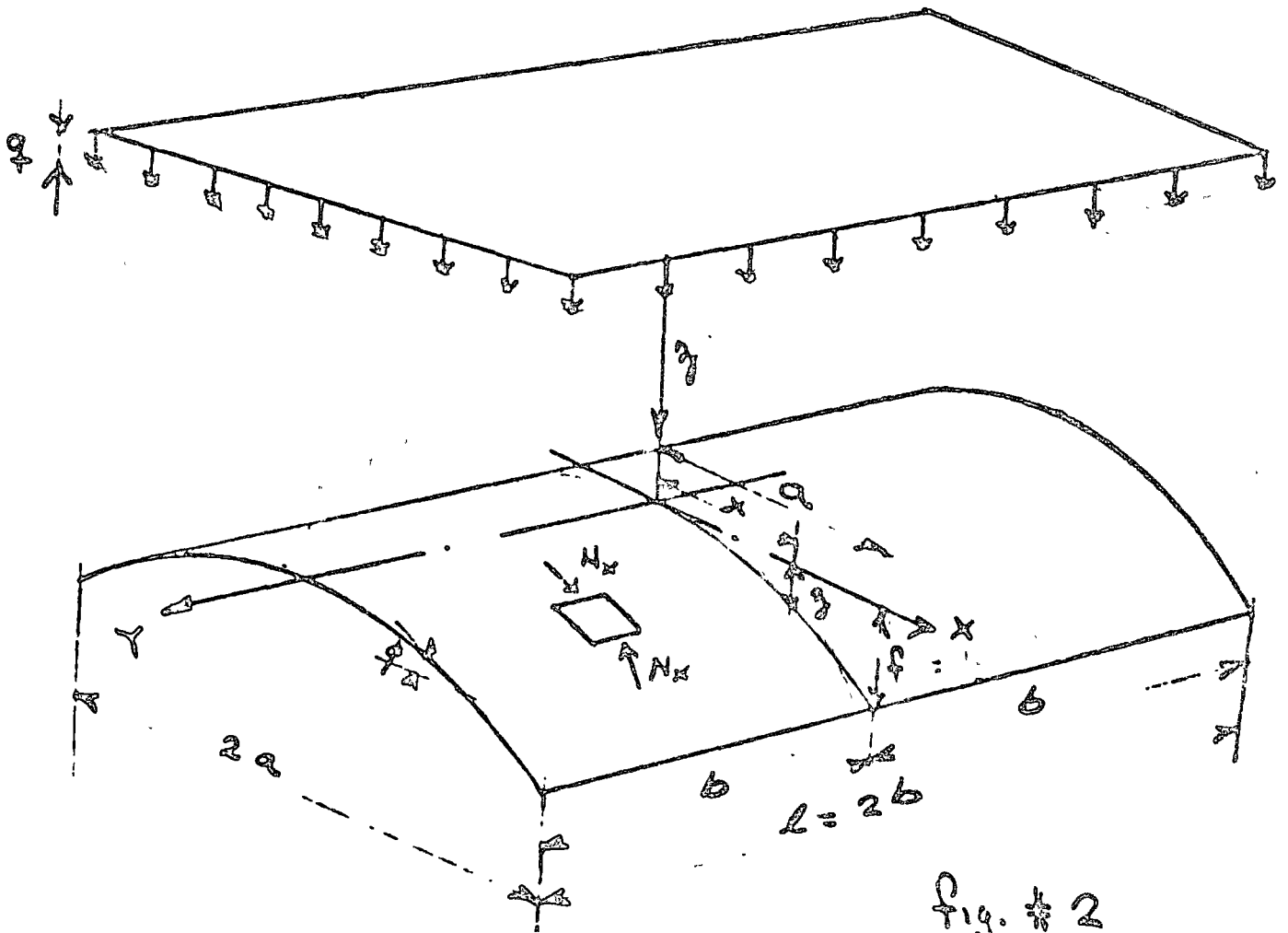


Fig. # 2



LA ECUACION DE LA SUPERFICIE EN ESTE CASO PARTICULAR ES

$$z = \frac{f}{a^2} x^2 \quad \text{--- (1)}$$

DONDE "f" ES LA FLECHA Y "a" EL SEMICLARO  
LOS CARGOS EN ESTE CASO SON:

$$x = y = 0$$

$$z = q$$

$$p \neq 0 \quad y = 0$$

SUBSTITUYENDO (4) Y (3) EN (1) SE OBTIENE:

$$\frac{2f}{a^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -q \quad \text{--- (5)}$$

DE (5) Y (2) SE OBTIENE:

$$N'_x = -\frac{qa^2}{2f} = -\frac{ql^2}{8f} \quad \text{--- (6)}$$

DE (2) SE OBSERVA QUE

$$N_x = \frac{1}{\cos \phi} N'_x = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} N'_x \quad \text{--- (7)}$$

(5)

SUBSTITUYENDO (5) y (6) EN (7) SE OBTIENE

$$N_x = -\sqrt{1 + \frac{4l^2}{a^2} x^2} \times \frac{ql^2}{8f} \quad \text{--- (8)}$$

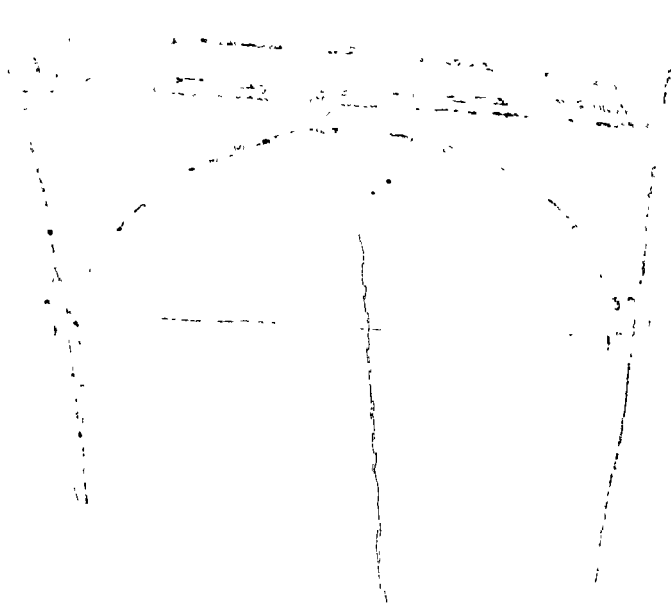
$$N_{x \text{ MAX}} = -\sqrt{1 + \frac{4l^2}{a^2} x^2} \times \frac{ql^2}{8f}$$

$x=0.$

(-) COMPRESION.

(+) TENSION.

ESTAS CONDICIONES DE BORDE DE LA ESTRUCTURA SE LOGRAN PERFECTAMENTE EN LA REALIDAD POR EL EMPLEO DE VIGAS DE BORDE LONGITUDINALES Y TIRANTES.



CARGAS:

W<sub>pp</sub> = 16.6 x 1.00 x 0.03 x 2400 = 1,210 Kgs

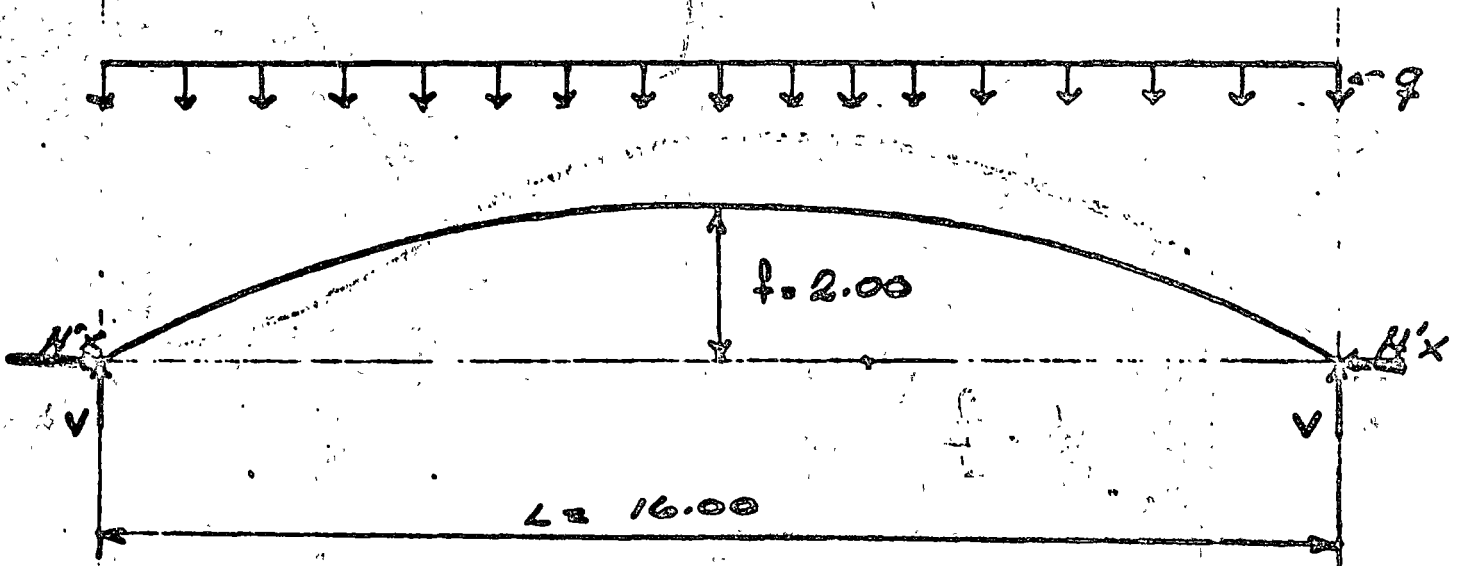
W<sub>imp</sub> = 16.0 x 1.00 x 76 = 1,216 Kgs

W<sub>sc.</sub> = 100 x 1.00 x 16 = 1,600 Kgs

N<sub>TOTAL</sub> = 4,800 Kgs.

q = 4800 / 16.00 = 300 kg/ml.

REACCIONES:



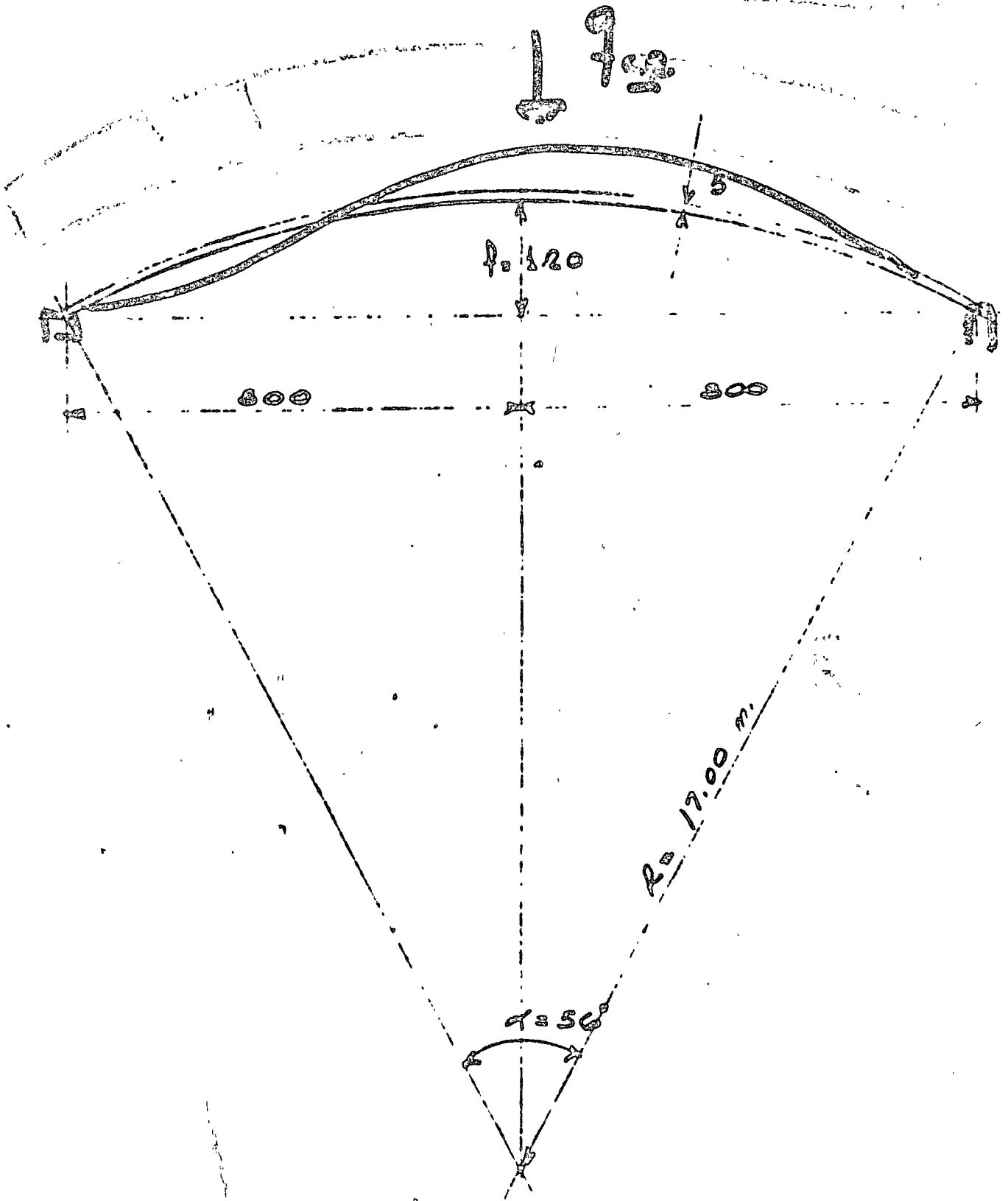
N<sub>A'</sub> = (qL^2) / (8f) = (300 x 16^2) / (8 x 2.00) = 4800 kg/m.

V = (qL) / 2 = (300 x 16) / 2 = 2,400 kg/m.

6a

1

SECCION PROPUESTA:



$$L = 2\pi (17.00) \left( \frac{56}{360} \right) = 16.60 \text{ m.}$$

$$N_{x \max} = \sqrt{\frac{1 + 4(2)^2}{(8)^2}} \left( \frac{300 \times 16^{-2}}{8 \times 2} \right)$$

$$= 5,380 \text{ kg/m.}$$

$$N_{x \min} = N_x = 4,800 \text{ kg/m.}$$

$$V_{\text{comp.}} = \frac{5,380}{100 \times 8} = 10.8 \text{ kg/cm}^2 < 0.25 f'_c \approx 50 \text{ kg/cm}^2$$

PANDEO DEL ARCO:

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} \left( \frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)$$

$q_{cr}$  = CARGO DE PANDERO CRITICA.

$$E = 15,000 \sqrt{f'_c} \approx 210,000 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Modulo de ELASTICIDAD)}$$

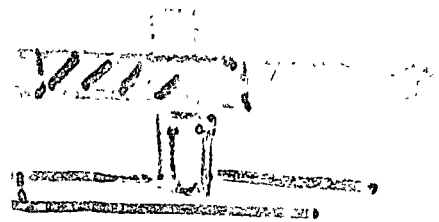
$$I = \frac{1}{12} b d^3 = \frac{1}{12} \times 100 \times 5^3 = 1,042 \text{ cm}^4 \text{ (Mom. de INERCIA)}$$

$$R = 17.00 \text{ m} \text{ (Radio de CURVATURA)}$$

$$\alpha = 56^\circ \text{ (ANGULO CENTRAL)}$$

$$\begin{aligned}
 q_{CR} &= \frac{210,000 \times 1042}{17.0^3 \times 10^6} \left( \frac{47^2}{\left(\frac{56}{180} \pi\right)^2} - 1 \right) \\
 &= \frac{44700}{10^6} \left( \frac{39.3}{[0.977]^2} - 1 \right) = \frac{44700}{10^6} \left( \frac{39.3}{0.955} - 1 \right) \\
 &= \frac{447}{10^3} (41.2 - 1) = \frac{447}{10^3} (40.2) = 18.0 \text{ kg/cm}^2.
 \end{aligned}$$

$$q_{CR} = 1800 \text{ kg/m}^2.$$



COSFICIENTE DE PANDEO:

$$C = \frac{q_{CR}}{q_i} = \frac{1800}{300} = 6 //$$

ACERO DE REFUERZO:

$$A_s = 0.002 \times 100 \times 5 = 1 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

USAR VRS.  $\phi$  5/16" @ 30 EN AMBAS DIRECCIONES.

# DISEÑO DE VIGAS LATERALES.

REACCION HORIZONTAL. = 4,800 Kg/m

REACCION VERTICAL = 2400 Kg/m

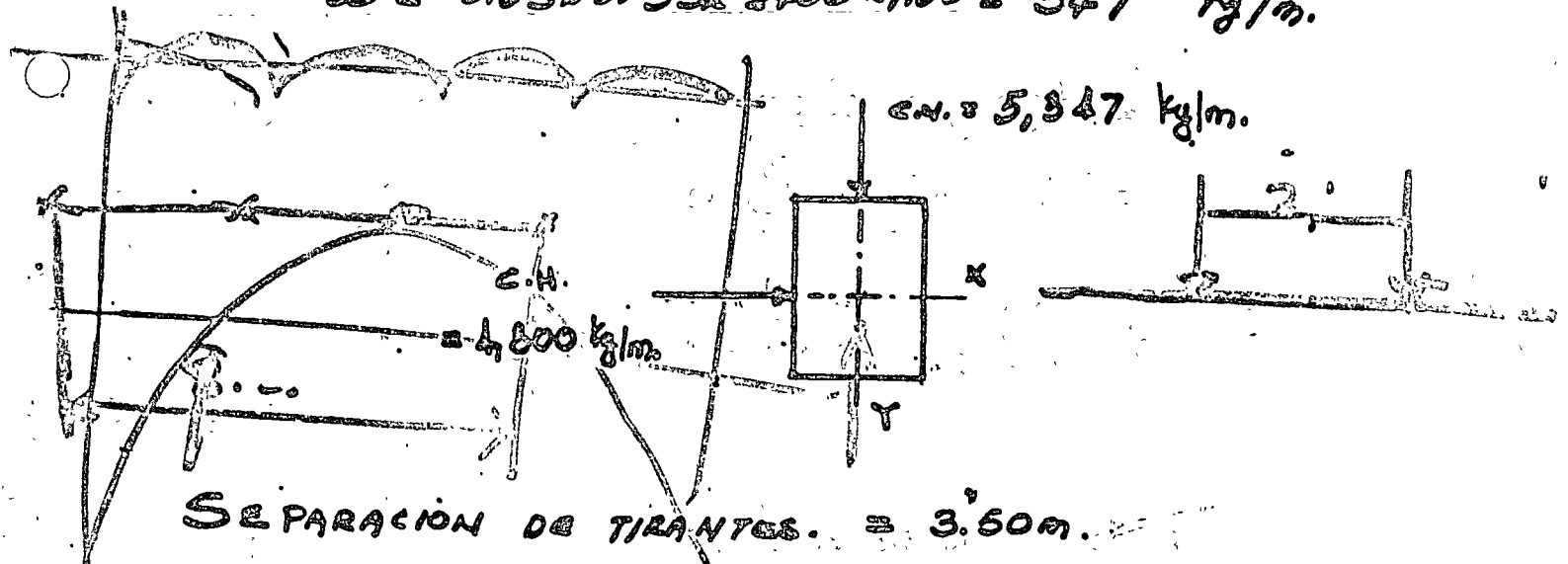
VIGA CENTRAL  $w_y = 2 \times 2400 = 4,800$  Kg/m.

VIGA LATERAL  $w_y = 2,400$  Kg/m

SE TOMARA PARA EL DISEÑO: LA VIGA CENTRAL  
DEBIDO A FUTURAS AMPLIACIONES.

CARGA PESO PROPIO

$w = 0.65 \times 0.35 \times 2400 \times 1.00 = 547$  Kg/m.



SEPARACION DE TIRANTES. = 3.50m.

CARGA POR TIRANTE =  $4,800 \times 3.5 = 16,800$  Kgs.

CARGA ADMISIBLE POR CABLE DE

7mm  $\phi$   $f_t = 14,500$  Kg/cm<sup>2</sup> = 3,000 Kgs.

$\#$  CABLES =  $\frac{16,800}{3000} = 6$  CABLES DE 7mm  $\phi$ .

$$M_x = \frac{1}{10} \omega_y l^2$$

$$= \frac{1}{10} \times 5347 \times 7.00^2 = 26,300 \text{ kg-m.}$$

$$M_y = \frac{1}{10} \omega_x l^2$$

$$= \frac{1}{10} \times 4,800 \times 3.5^2 = 5,900 \text{ kg-m.}$$

$$M_{ue_x} = \frac{1}{3} \times 210 \times 35 \times 60^2$$

$$= 70 \times 35 \times 3600$$

$$= 88,300 \text{ kg-m.}$$

$$F.S._x = \frac{88,300}{26,300} = 3.36 \quad \checkmark$$

$$M_{ue_y} = \frac{1}{3} \times 210 \times 65 \times 30^2$$

$$= 70 \times 65 \times 900$$

$$= 41,000 \text{ kg-m.}$$

$$F.S._y = \frac{41,000}{5,900} = 6.95 \quad \checkmark$$



$$A_{sx} = \frac{M}{f_s J d} = \frac{26,300 \times 100}{2000 \times 0.85 \times 60} = 25.8 \text{ cm}^2$$

USAR 7 VRS.  $\phi \frac{7}{8}$ ". ARRIBA EN LOS APOYOS.  
Y 4 VRS.  $\phi \frac{7}{8}$ " ABAJO EN EL CENTRO.

$$A_{sy} = \frac{5900 \times 100}{2000 \times 0.85 \times 80} = 11.6 \text{ cm}^2$$

USAR 3 VRS.  $\phi \frac{7}{8}$ " EN LAS CARAS (AMBAS)

EN LA VIGA CENTRAL SOLO SE PROPORCIONARA  
REFUERZO PARA LOS EFECTOS DE  $w$  Y DEBIDO  
A QUE LOS COCEROS LATERALES SE ANULAN.

$$V_{max} = 1.5 \frac{w \lambda}{2} = \frac{1.5 \times 5,347 \times 7.00}{2}$$

$$= 21,500 \text{ Kgs.}$$

$$V_c = 4.2 \times 55 \times 60 = 8,810 \text{ Kgs.}$$

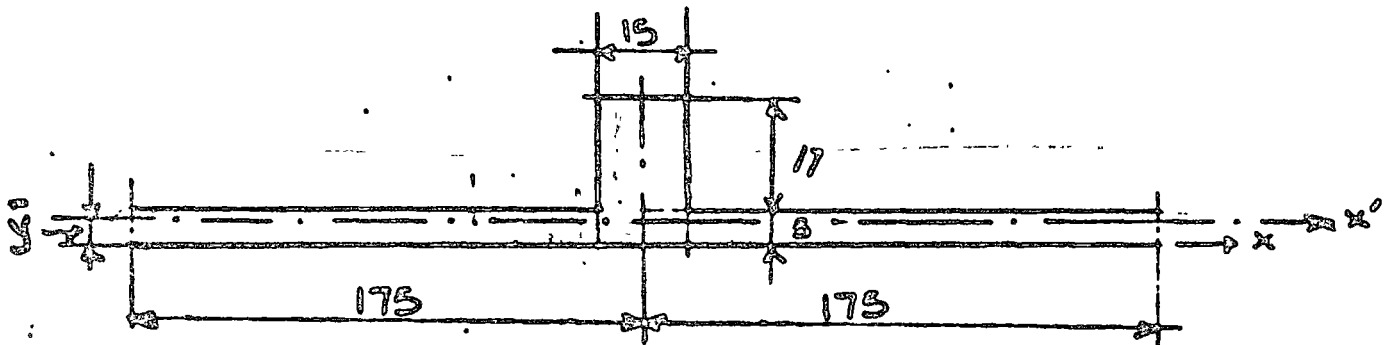
$$V' = V - V_c = 21,500 - 8,810 = 12,690 \text{ Kgs.}$$

$$S = \frac{4 \times 0.71 \times 1700 \times 0.85 \times 60}{12,690} = 20 \text{ cms.}$$

EST.  $\phi \frac{7}{8}$ " @ 20 EN LOS APOYOS (DOBLES)

# ARCOS DE RIGIDEZ.

SE COLOCARAN ARCOS DE RIGIDEZ A CADA 7.00 MTS.



## SECCION PROYECTA.

LOCALIZACION DEL EJE CENTROIDAL:

$$\sum M_x = A_T \bar{y}$$

$$A_T = 17 \times 15 + 350 \times 5 = 255 + 1750 \\ = 2005 \text{ cm}^2$$

$$M_x = (17 \times 15)(13.5) + (350 \times 5)(2.5) \\ = 3440 + 4380 = 7820$$

$$\bar{y} = \frac{7820}{2005} = 3.91 \text{ cms.}$$

DETERMINACION DE  $I_{x'}$ :

$$I_{x'} = \frac{1}{12} (15) 17^3 + (15 \times 17)(13.5^2) + \frac{1}{12} (350)(5^3) + (350 \times 5) 1.91^2$$

$$I_{x'} = 6030 + 23500 + 3550 + 2470$$

$$= 35,550 \text{ cm}^4$$

PUNDEO :

$$q_{TCR} = \frac{210,000 \times 35550}{17.0^3 \times 10^6} \left( \frac{4\pi^2}{\left(\frac{56}{180}\right)^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1,520,000}{10^6} \left( \frac{99.3}{0.955} - 1 \right)$$

$$= \frac{152}{10^2} (40.2) = 610 \text{ kg/cm.}$$

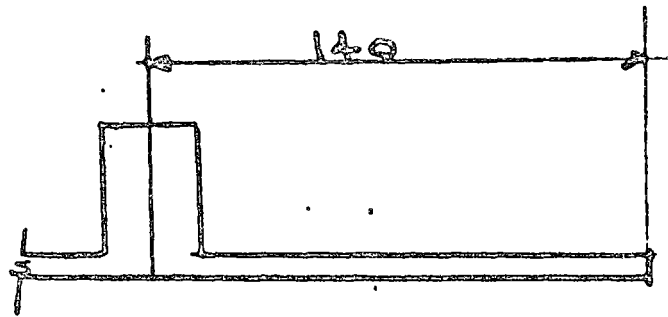
$$q_{CR} = 6100 \text{ kg/m}$$

$$C = \frac{q_{CR}}{q} = \frac{6100}{300} < \frac{1}{3.5} = 5.8$$

USAR LA SECCION INDICADA CON 4 VRS.  $\phi 5/8''$

Y EST.  $\phi 5/16'' @ 30 \text{ cms}$

## Revisión de los Volgaros:



$$M_1 = \frac{q l^2}{2} = \frac{300 \times 1.4^2}{2} = 294 \text{ kg-m/m}$$

$$A_s = \frac{M}{f_s d} = \frac{294 \times 100}{2400 \times 0.15 \times 3} = \frac{29.4}{6 \times 0.85}$$

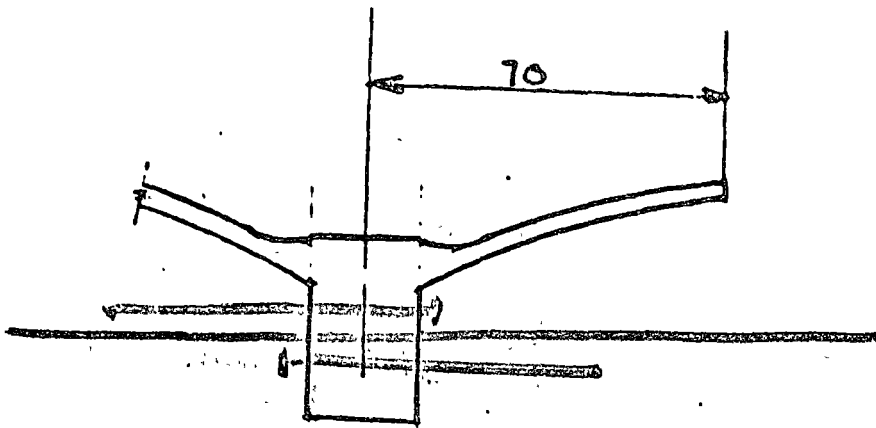
$$= 5.75 \text{ cm}^2$$

con 4rs.  $\phi$  5/16"

$$S = \frac{100 A_s r}{A_s} = \frac{49}{5.75} = 8.5 \text{ cm}.$$

Usar 2 4rs.  $\phi$  3/8" entre cada 2 de 5/16" hasta

$l = 70 \text{ cm}$ . desde ahí prolongar solo una.



$$M_1 = \frac{q l^2}{2} = \frac{300 \times 0.7^2}{2} = 73.5 \text{ kg-m/m}$$

$$A_s = \frac{M}{f_s J d} = \frac{73.5 \times 100}{2000 \times 0.85 \times 3} = 1.44 \text{ cm}^2$$

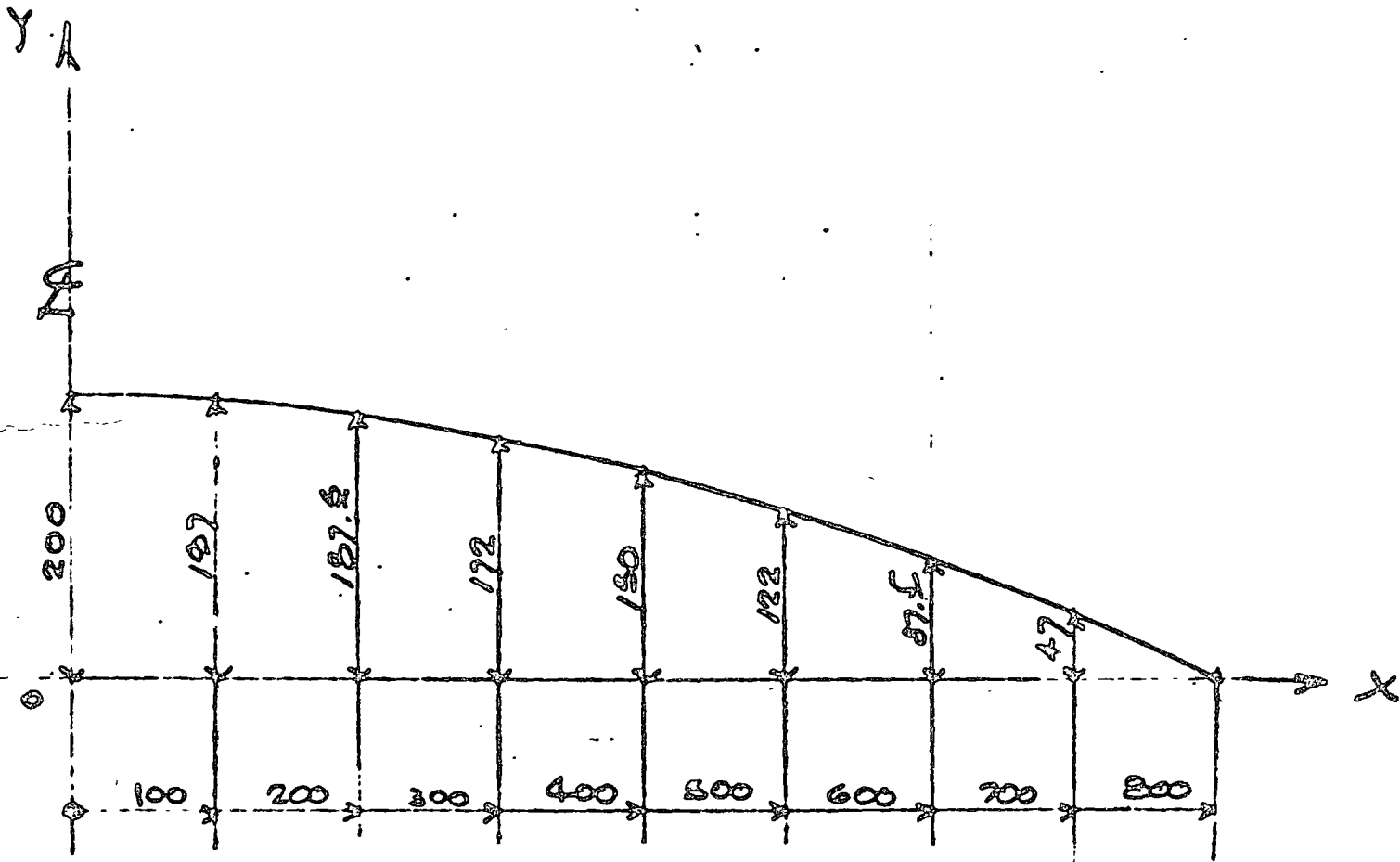
con  $\varphi$  vs.  $\phi^5/16''$

$$S = \frac{100 A_s}{f_s} = \frac{49}{1.44} = 34 \text{ cm}.$$

Pasar lamalla del cascaron unicamente.

$$M_{res} = \frac{1}{3} f'_c b d^2 = \frac{1}{3} (210) (100) (3^2) = 630 \text{ kg/m}$$

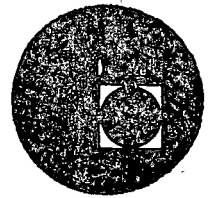
$$F.S. = \frac{630}{294} = 2.15 \quad \checkmark \checkmark$$



GENERATRIZ GEOMETRICA DE LA CINTRA.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES

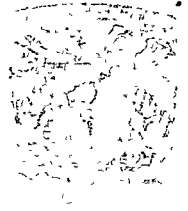


DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

AGOSTO DE 1976.



Билгийн нэрбичигч нь ( )  
Этэ гэгээрэл нь ( )  
МБД ( )





P Ballesteros

# ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA:

PARA LA CUBIERTA ELEGIDA TIENE FORMA DE Hiperbolico FIG. # 2. EL ESTADO DE ESFUERZOS EN LA MEMBRANA SERA EN SIGUIENTE:

LA ECUACION DIFERENCIAL DE TEORIA DE MEMBRANA PARA CASCARONES DE CUALQUIERA FORMA REFERIDAS A UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO ES (FIG. # 1)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \times \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= -Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int_{x_0}^x X dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int_{y_0}^y Y dy \quad (a)$$

DONDE LAS FUERZAS DE MEMBRANA SE EXPRESAN EN TERMINOS DE LA FUNCION DE ESFUERZOS COMO SIGUE

$$N'_x = N_x \frac{\cos \beta}{\cos \psi} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_{x_0}^x X dx$$

$$N'_y = N_y \frac{\cos \psi}{\cos \phi} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_{y_0}^y Y dy \quad (b)$$

$$N'_{xy} = N_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

P. Ballesteros

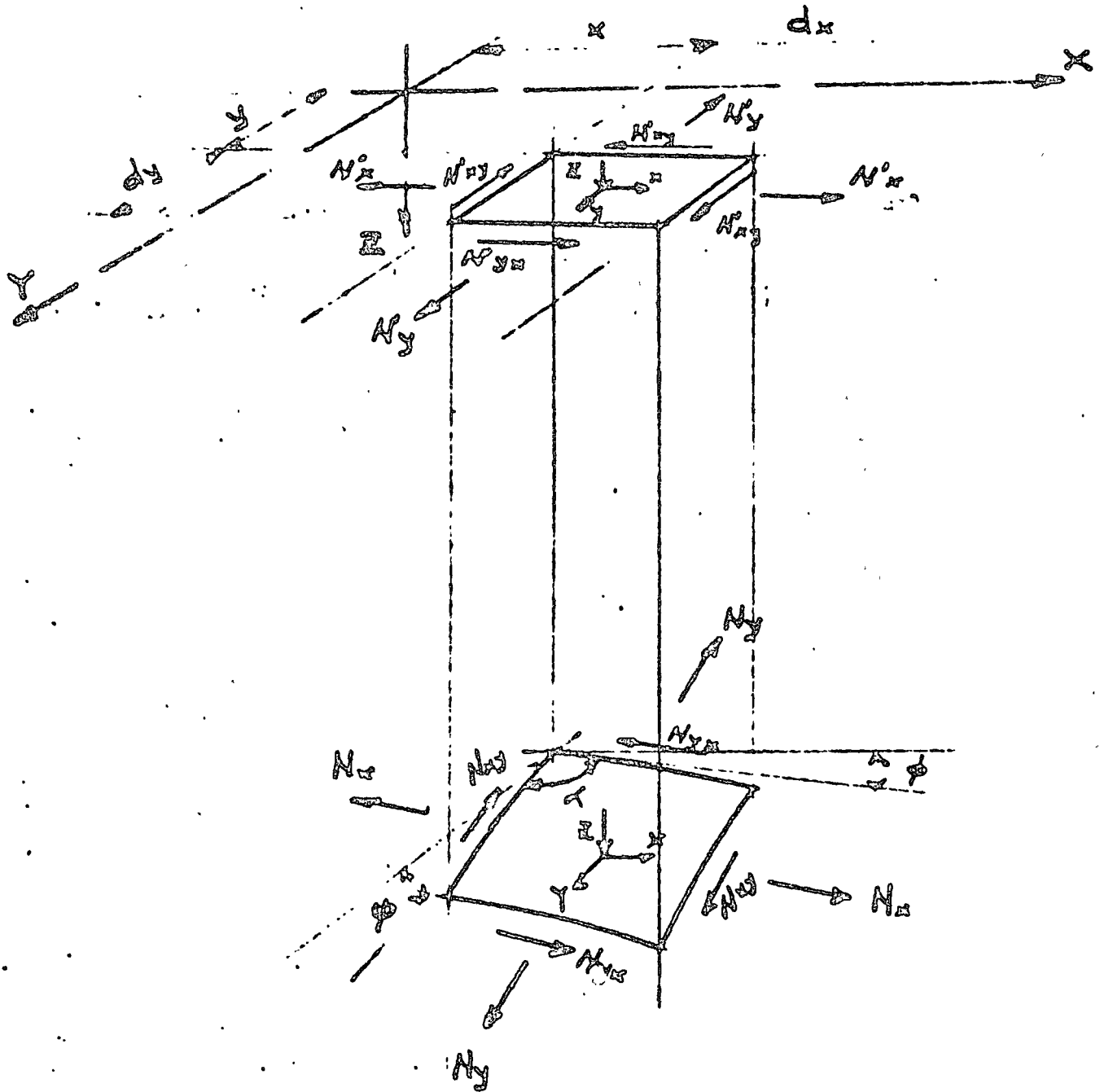


FIG. # 1 ESTADO DE ESFUERZOS.

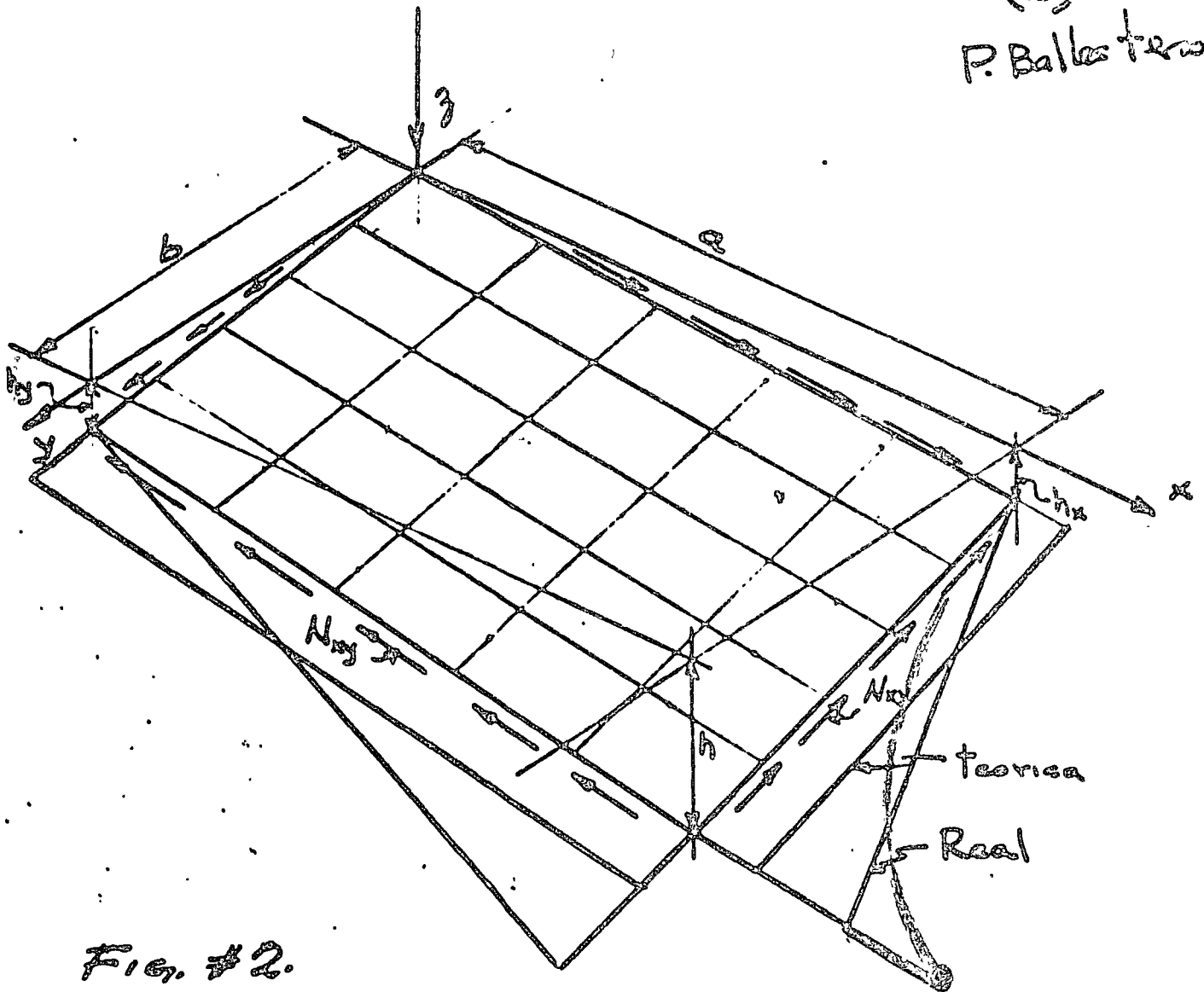


Fig. #2.

SUPERFICIE ESCOGIDA.

LA ECUACION DE LA SUPERFICIE ES:

$$z = Ax + By + Cx + Dy \quad (1)$$

DE

$$\left. \begin{aligned} z(0,0) &= 0 \\ z(a,0) &= h_x \\ z(0,b) &= h_y \\ z(a,b) &= h \end{aligned} \right\} (2)$$

DE (1) y (2) SE OBTIENE. P. Ballesteros

$$A = \frac{h - h_x - h_y}{ab}, \quad B = \frac{h_x}{a}, \quad C = \frac{h_y}{b}, \quad D = 0 \quad (3)$$

SUBSTITUYENDO (3) EN (1) SE OBTIENE

$$z = \frac{h - h_x - h_y}{ab} xy + \frac{h_x}{a} x + \frac{h_y}{b} y. \quad (4)$$

SUBSTITUYENDO (4) EN LA ECUACION DIFERENCIAL GENERAL DE TEORIA DE MEMBRANA(1) PARA CASCARONES DE CUALQUIER FORMA:

$$-2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{h - h_x - h_y}{ab} = -q$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{q ab}{2(h - h_x - h_y)} = -N_{xy}.$$

$$N_{xy} = - \frac{q ab}{2(h - h_x - h_y)} \quad (5)$$

EN NUESTRO PROBLEMA PARA LOS TRES TIPOS DE CASCARONES SE TIENE:

P. Ballesteros

4

$$\text{CARGO VIVA} = 100 \text{ kg/m}^2.$$

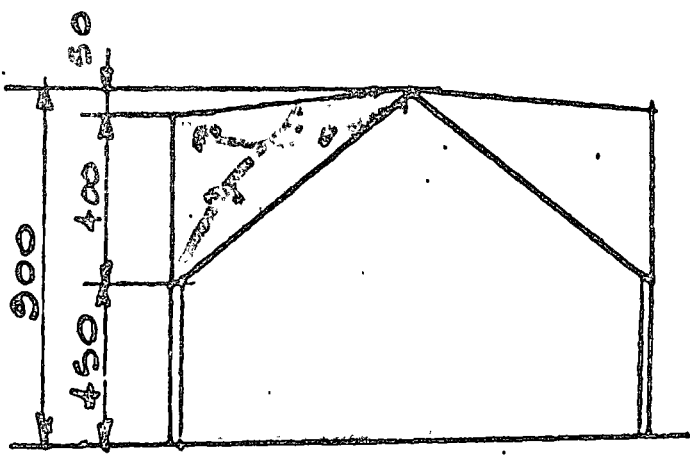
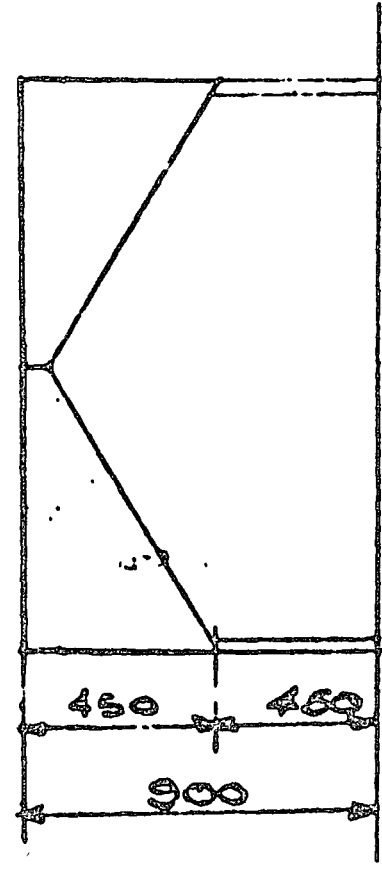
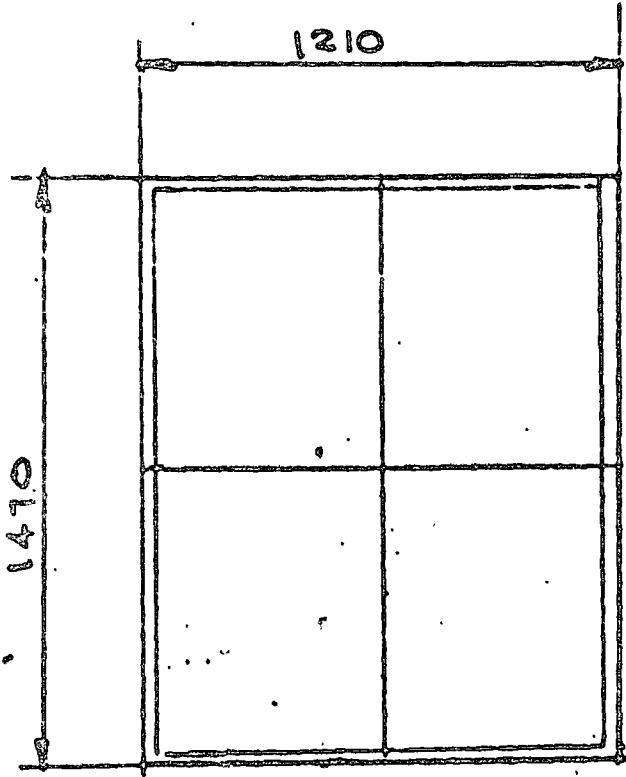
$$\begin{aligned} \text{CARGO MUERTA} \\ \text{(VIGAS DE BORDE E} \\ \text{IMPERMEABILIZANTE)} \end{aligned} = 200 \text{ kg/m}^2.$$

---

$$q = 300 \text{ kg/m}^2.$$

# CASCARON TIPO I.

P. Ballesteros



P. Ballesteros

- Datos :
- $q = 300 \text{ kg/m}^2$
  - $h_x = 0$
  - $h_y = 0.50 \text{ m.}$
  - $h = 4.50 \text{ m.}$
  - $a = 7.35 \text{ m.}$
  - $b = 6.05 \text{ m.}$

SUBSTITUYENDO ESTOS VALORES EN (5) :

$$N_{xy} = - \frac{300 \times 7.35 \times 6.05}{2(4.5 - 0.5)} = - \frac{13,400}{8}$$

$$= - 1,675 \text{ kg/m.}$$

$$a_s = \frac{N_{xy}}{f_s} = \frac{1,675}{2000} = 0.84 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

USAR MALLA  $\phi 5/16'' @ 30 \text{ cms.}$   $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

TENSION EN LOS TIRANTES :

$$\frac{1}{2} H_x = N_{xy} l \cos \alpha$$

$$H_x = 2 N_{xy} a.$$

$$\frac{1}{2} H_y = N_{xy} l \cos \beta$$

$$H_y = 2 N_{xy} b.$$

⑦

P. Balasteros

$$H_x = 2 \times 1675 \times 7.35 = 24,700 \text{ Kgs.}$$

$$H_y = 2 \times 1675 \times 6.05 = 20,300 \text{ Kgs.}$$

USANDO CABLES DE 7 m.m.  $\phi$  con  $f_y \geq 14,500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

CARGO ADMISIBL DE CABLES = 3,000 Kgs.

Nº DE CABLES EN "X"

$$\frac{24,700}{3,000} = 8 \text{ CABLES.}$$

USAR 8 CABLES DE 7 mm  $\phi$  EN EJE "X"

Nº DE CABLES EN "Y"

$$\frac{20,300}{3,000} = 8 \text{ CABLES.}$$

USAR 8 CABLES DE 7 mm  $\phi$  EN EJE "Y"

ESFUERZOS EN VIGAS DE BORDE:

$$(T_x)_m = N_{xy} a = 1,675 \times 7.35 = 12,350 \text{ Kgs.}$$

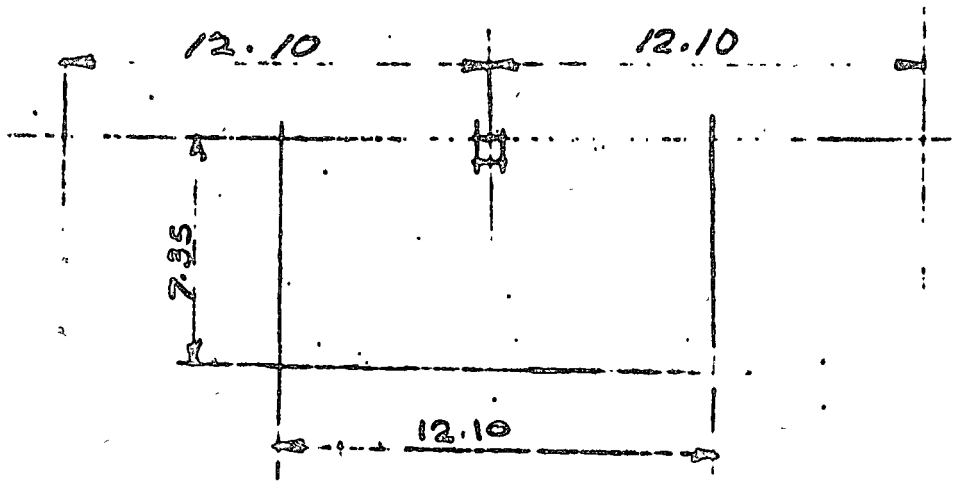
$$(T_y)_m = N_{xy} b = 1,675 \times 6.05 = 10,150 \text{ Kgs.}$$

As = 6 VRS.  $\phi \frac{1}{2}$ "



# DISEÑO DE COLUMNAS:

P. Ballester



ÁREA TRIBUTARIA =  $12.10 \times 7.35 = 89 \text{ m}^2$

$H_{\text{col.}} = 89 \times 300 = 26,700 \text{ kgs.}$

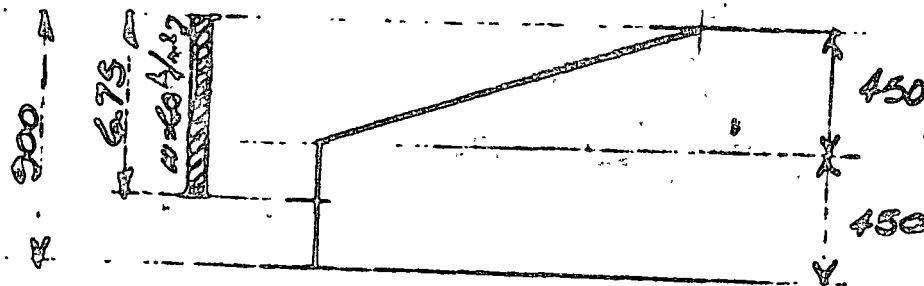
$w_{\text{sup}} = 0.310 \times 40 \times 240 = 6150 \text{ kgs.}$

$H_{\text{total}} = 27,850 \text{ kgs.}$

$H_{\text{SISMICA}} = C \times \text{PESO DE LA ESTRUCTURA}$

$= 0.10 \times 27,850 = 2,785 \text{ kgs}$

VIENTO  $w = 2 \text{ kg/m}^2.$



$H_{\text{VIENTO}} = 60 \times 6.75 \times 12.0 = 4870 \text{ kgs} > 2785 \text{ kgs}$

P. Ballesteros

$$H_{col} = \frac{4870}{2} = 2435 \text{ kgs.}$$

$$M = 2435 \times 4.5 = 10,950 \text{ kgs-m.}$$

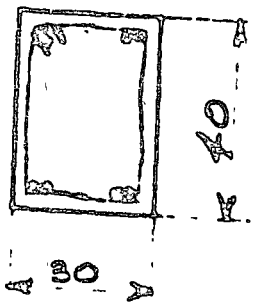
SOLICITACIONES EN COLUMNAS:

$$H = 27,850 \text{ kgs.}$$

$$M = 10,950 \text{ kgs-m.}$$

$$e' = \frac{M}{H} = \frac{10950 \times 100}{27,850} = 39.2 \text{ cms.}$$

PROPONIENDO LA SIGUIENTE SECCION Y REVISANDO:



$$8 \phi 3/4 \quad A_s = 22.9 \text{ cm}^2$$

$$\text{st. } \phi 5/16 \text{ @ } 30 \text{ cms.}$$

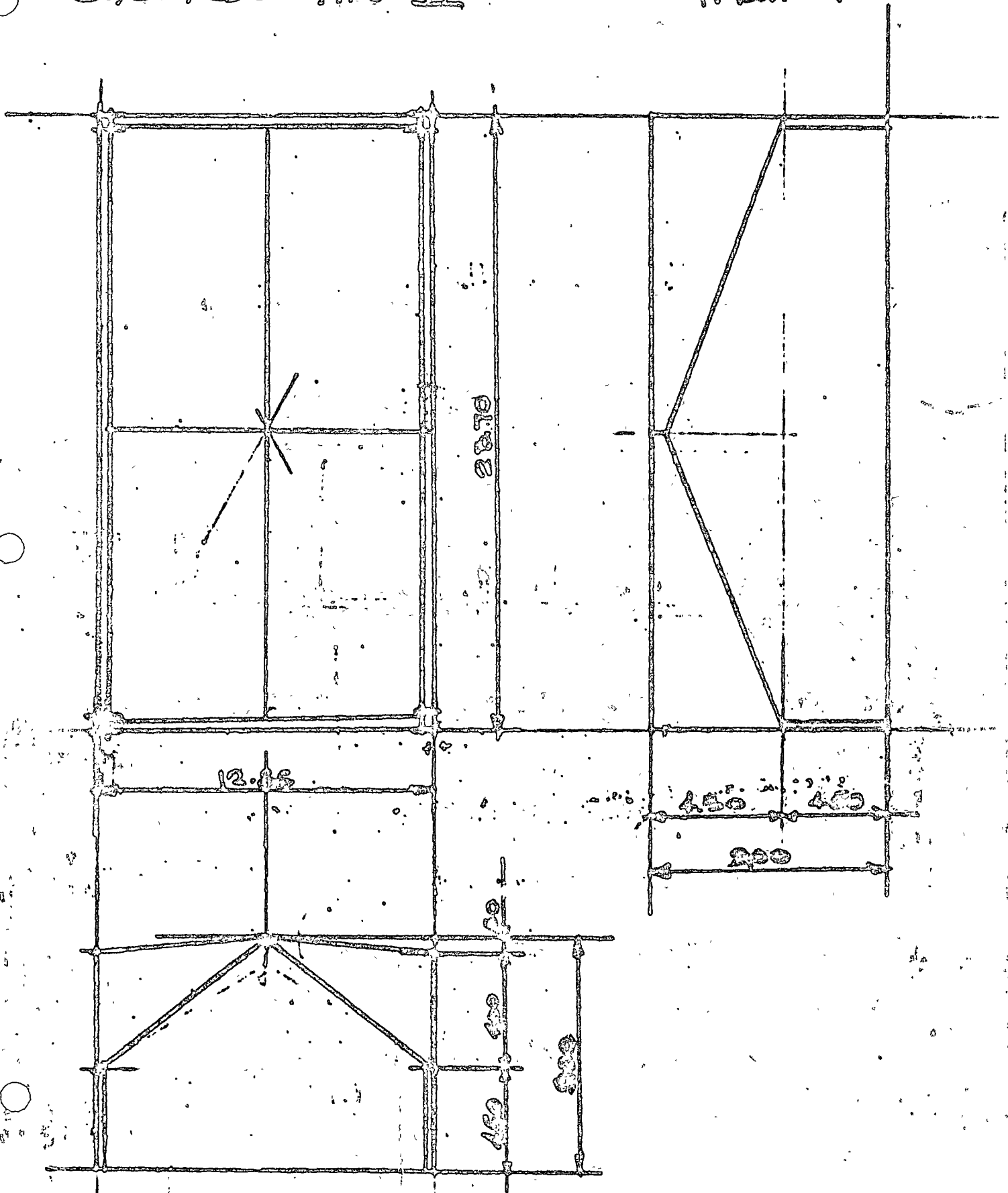
$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{22.9}{30 \times 40} = 0.0191$$

$$m = \frac{f_y}{0.85 f_c} = \frac{4200}{0.85 \times 210} = 23.5$$

$$\frac{d}{t} = \frac{35}{40} = 0.875 \quad \frac{l}{t} = \frac{400}{30} = 13.3 \text{ Col. corta.}$$

CASERON TIPO II

P. Ballesteros



DATOS:

$$q = 300 \text{ kg/m}^2$$

$$h_x = 0 \text{ m.}$$

$$h_y = 0.50 \text{ m.}$$

$$h = 4.50 \text{ m.}$$

$$a = 11.85 \text{ m.}$$

$$b = 6.43 \text{ m.}$$

P. Ballarín

SUBSTITUYENDO ESTOS VALORES EN (5):

$$N_{xy} = - \frac{300 \times 11.85 \times 6.43}{2(4.5 - 0.5)} = \frac{22,800}{8}$$

$$= 2,850 \text{ kg/m.}$$

$$a_s = \frac{N_{xy}}{f_s} = \frac{2,850}{2,000} = 1.42 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

USAR MALLA  $\phi \frac{5}{16}$ " @ 30 cms.  $f_y \geq 4,200 \text{ kg/cm}^2$ .

TENSION EN LOS TIRANTES:

$$H_x = 2 N_{xy} a$$

$$= 2 \times 2,850 \times 11.85 = 67,800 \text{ kgs}$$

$$H_y = N_{xy} b$$

$$= 2,850 \times 6.43 = 18,400 \text{ kgs.}$$

USANDO CABLES DE 7mm  $\phi$  con  $f_y \geq 14,500 \text{ kg/cm}^2$ .

CARGA ADMISIBLE POR CABLE = 3000 kgs.

○ N° COROLES EN "X" P. Ballestero

$$\frac{67,800}{2,800} = 24 \text{ COROLES}$$

USAR 24 COROLES DE 7mm  $\phi$  EN EL "X"

N° COROLES EN "Y"

$$\frac{18,400}{2,100} = 8 \text{ COROLES}$$

USAR 8 COROLES 7mm  $\phi$  EN EL "Y".

○ ~~RESUERZOS EN VIGOS DE BORDE:~~

$$(Tx)_m = N \times y \ a = 2,850 \times 11.85 = 33,800 \text{ kgs.}$$

$$(Ty)_m = N \times y \ b = 2,850 \times 6.43 = 18,300 \text{ kgs.}$$

AS = 6 VRS.  $\phi$  1/2"

DISEÑO DE COLUMNAS:

○ AREA TRIANGULAR =  $12.85 \times 11.85 = 152.5 \text{ m}^2$

N<sub>com</sub> =  $300 \times 152.5 = 45,750 \text{ k}$

$$w_{pp} \text{ sup. } 0,25 \times 0,45 \times 2400 \times 600 = 1500 \text{ kgs}$$

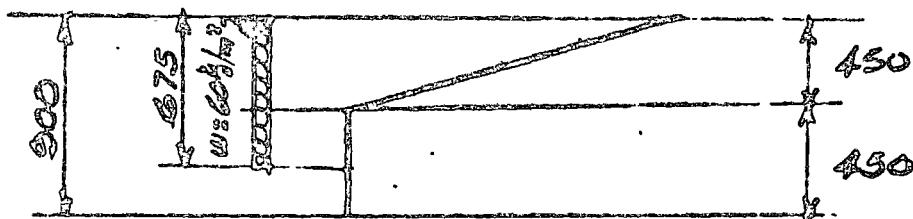
P. Ballestero

$$N_{\text{TOTAL}} = 47,300 \text{ kgs.}$$

H SISMICA = C + PESO DE LA ESTRUCTURA

$$= 0,10 \times 47,300 = 4,730 \text{ kgs.}$$

VIENTO  $w = 60 \text{ kg/m}^2$



$$H_{\text{VIENTO}} = 60 \times 6,75 \times 12,85 = 5,200 \text{ kgs} > 4,730 \text{ kgs}$$

$$H_{\text{COL.}} = \frac{5,200}{2} = 2,600 \text{ kgs.}$$

$$M = 2,600 \times 4,5 = 11,700 \text{ kgs-m.}$$

SOLICITACIONES EN COLUMNAS:

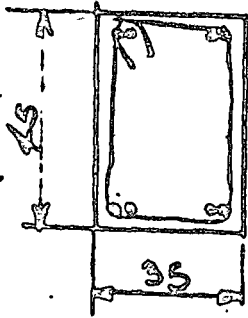
$$N = 47,300 \text{ kgs}$$

$$M = 11,700 \text{ kgs-m.}$$

$$e' = \frac{M}{N} = \frac{11,700 \times 100}{47,300} = 248 \text{ cms.}$$

P. Ballesterro

PROPONIENDO LA SIGUIENTE SECCION Y  
REVISANDO



$$3 \phi \frac{3}{4}'' \quad A_s = 22.9 \text{ cm}^2$$

$$E \text{ ST. } \phi \frac{5}{10}'' @ 30 \text{ cms.}$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{22.9}{35 \times 45} = 0.01475$$

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{4200}{0.85 \times 210} = 23.5$$

$$d/t = \frac{40}{45} = 0.90 \quad \frac{l}{t} = \frac{450}{35} = 13 \quad \text{Col. corta.}$$

$$p_t m = 0.01475 \times 23.5 = 0.347$$

$$e'/t = \frac{24.8}{45} = 0.55$$

$$k = 0.41$$

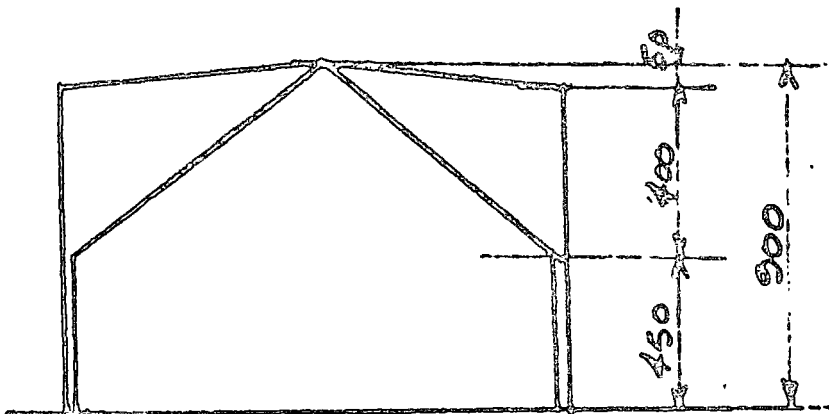
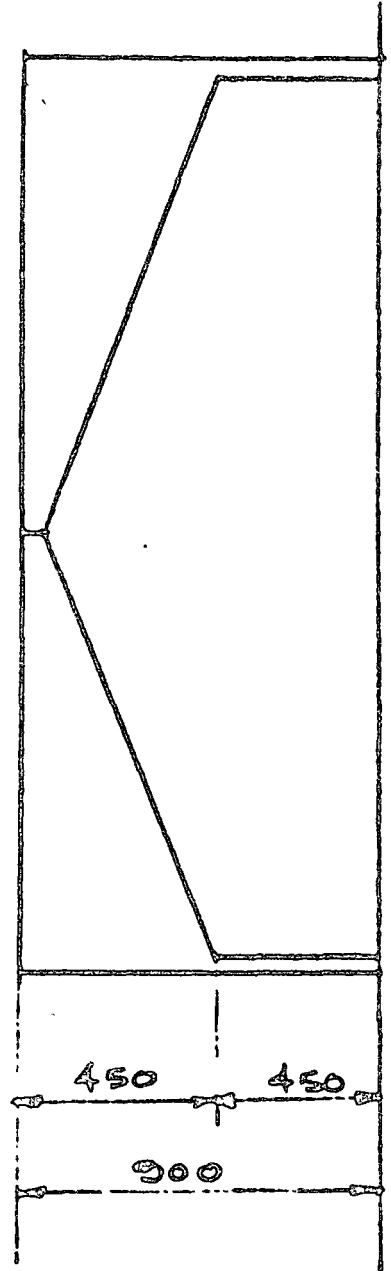
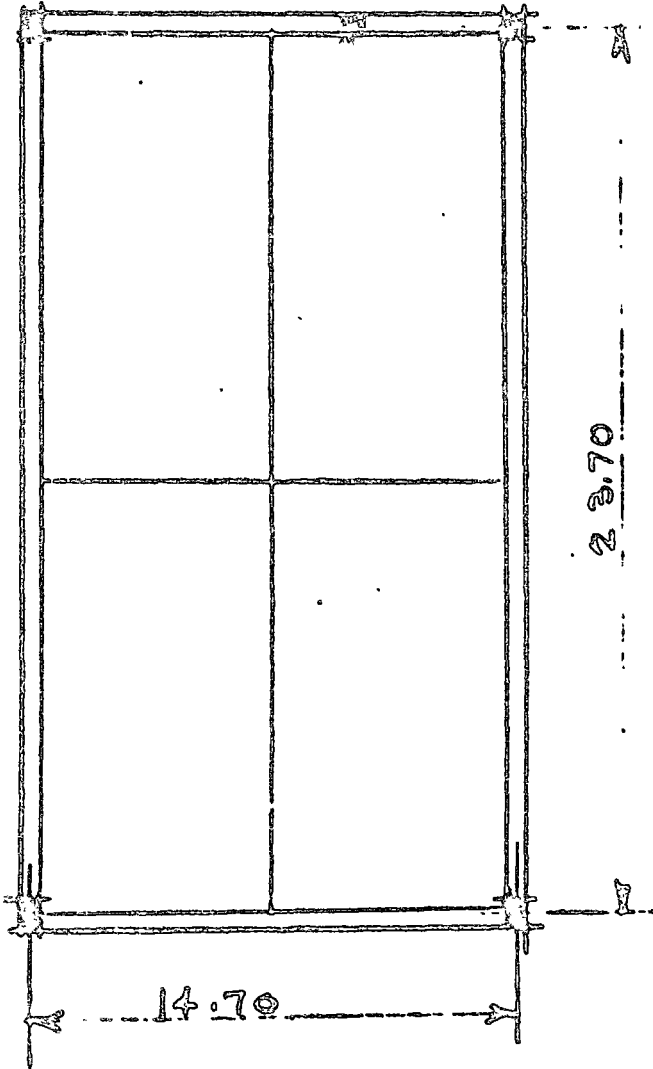
$$k = \frac{P_{ue}}{bt f'_c}$$

$$P_{ue} = 0.41 \times 95 \times 45 \times 210 = 135,500 \text{ kgs.}$$

$$F.S. = \frac{P_{ue}}{N} = \frac{135,500}{47,300} = 2.88 \checkmark \checkmark$$

CASCARON TIPO III

P. Ballesteros





DATOS :  $q = 300 \text{ kg/m}^2$   
 $h_x = 0$   
 $h_y = 0.50 \text{ m.}$   
 $H = 4.50 \text{ m.}$   
 $a = 11.85 \text{ m.}$   
 $b = 7.35 \text{ m.}$

P. Ballesteros

SUBSTITUYENDO ESTOS VALORES EN (5) :

$$N_{xy} = - \frac{300 \times 11.85 \times 7.35}{2(4.5 - 0.5)} = \frac{26200}{8}$$

$$N_{xy} = 3,280 \text{ kg/m}$$

$$a_s = \frac{N_{xy}}{f_s} = \frac{3,280}{2000} = 1.64 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Usar malla  $\phi 5/10$  @ 30 cm  $f_y \geq 4200 \text{ kg/cm}^2$

TENSION EN LOS TIRANTES :

$$H_x = N_{xy} a$$

$$= 3,280 \times 11.85 = 38,880 \text{ kgs.}$$

$$H_y = N_{xy} b$$

$$= 3,280 \times 7.35 = 24,100 \text{ kgs.}$$

USANDO CABLES DE 7mm  $\phi$  con  $f_y \geq 14,500 \text{ kg/cm}^2$   
 CADA ...

Nº DE CABLES EN "X"

P. Ballastara

$$\frac{38,800}{3,000} = 12 \text{ CABLES}$$

USAR 12 CABLES DE 7mm  $\phi$  EN EJE "X"

Nº DE CABLES EN "Y"

$$\frac{24,100}{3000} = 8 \text{ CABLES}$$

USAR 8 CABLES DE 7mm  $\phi$  EN EJE Y

ESFUERZOS EN VIGAS DE BORDE:

$$(T_x)_m = N_{xy} a = 3,280 \times 11.85 = 38,800 \text{ Kgs}$$

$$(T_y)_n = N_{xy} b = 3,280 \times 7.35 = 24,100 \text{ Kgs.}$$

$$A_s = 6 \text{ Vrs. } \phi 1/2''$$

USAR LA MISMA COLUMNA QUE PARO  
EL CASCARON ANTERIOR.

# CARGA CRITICA DE PANDERO:

Datos:

$$a = 12.05 \text{ m}$$

$$b = 5.00 \text{ m}$$

$$h = 0.03 \text{ m}$$

$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.18$$

P. Balasram

$$(N_{xy})_{cr} = \frac{5.7 T^2 D}{b^2}$$

D = RIGIDEZ FLEXIONANTE

$$= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2.1 \times 10^5 \times 0.03^3}{(1-0.18)^2 (12)} = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}$$

$$(N_{xy})_{cr} = \frac{5.7 T^2 \times 2.1 \times 10^6}{600^2}$$

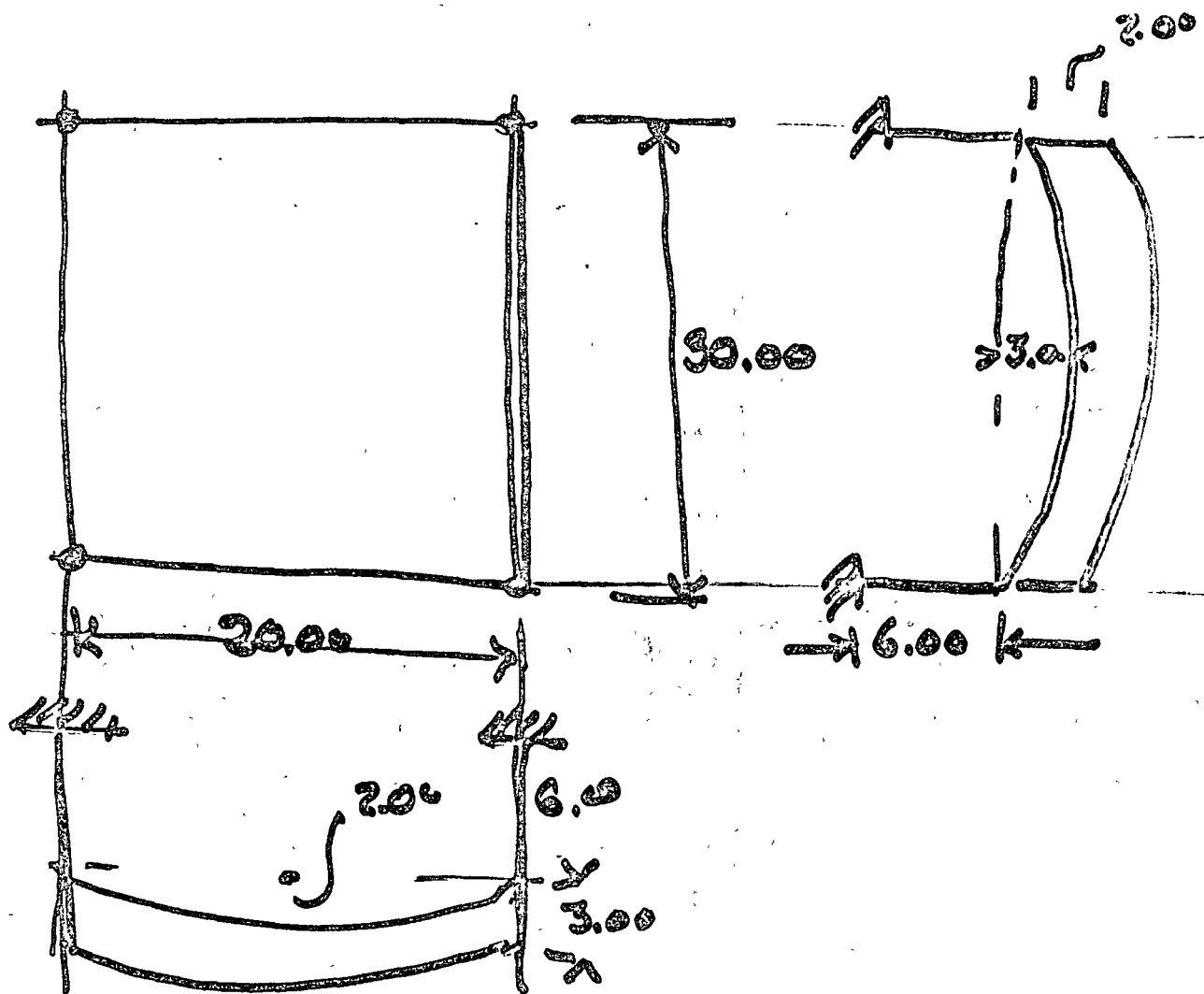
$$= 49,800 \text{ kg/m}$$

$$\frac{(N_{xy})_{cr}}{(N_{xy})_m} = \frac{49,800}{3,230} = 15.4 \quad \checkmark \checkmark$$

9



# #1 Parab. Eliptico



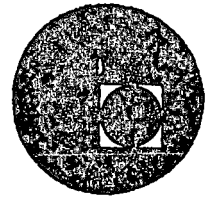
Cargas:  $100 \text{ Kg/m}^2$  + peso propio.

- Determinar:
- Espeor
  - Seccion en tirantes
  - " Arcos de Bord
  - " columnas
  - Armado en el cascarón
  - Croquis a Mano de los Arco
- $f_c = ?$



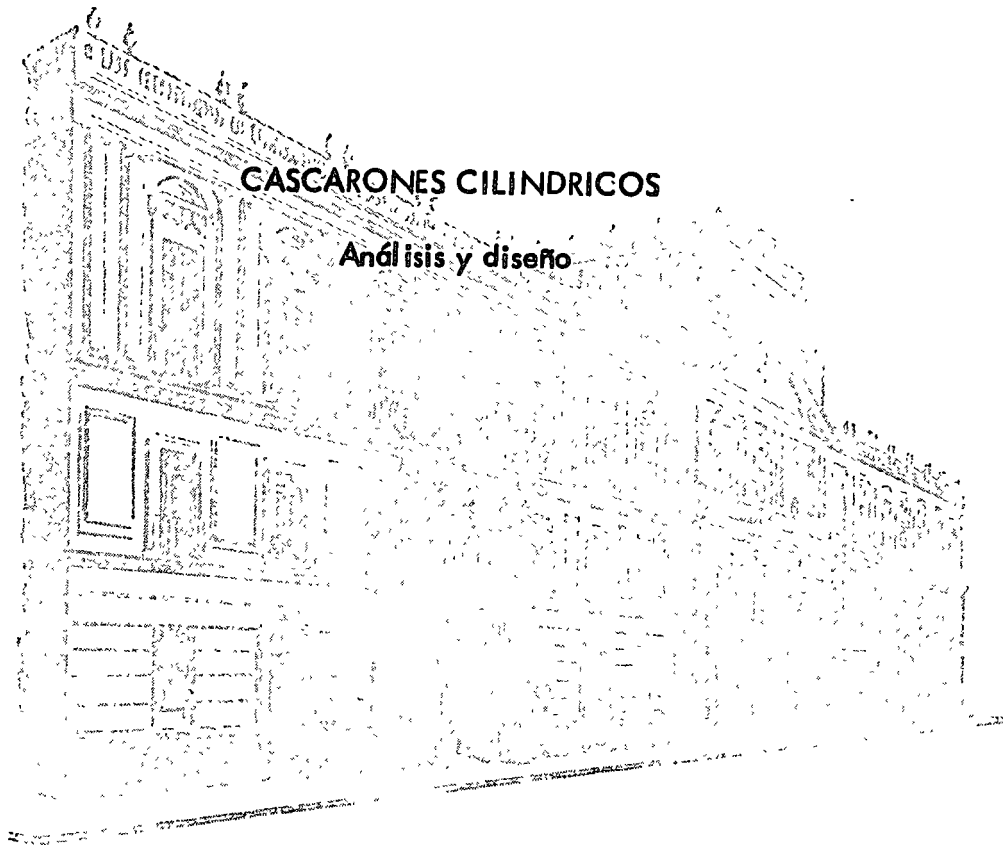


centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



**CURSO SOBRE CUBIERTAS**

**INDUSTRIALES**



**CASCARONES CILINDRICOS**

**Análisis y diseño**

**Prof. Nefalí Rodríguez Cuevas**

**Agosto 1976**



Handwritten text, possibly a title or header, located at the top center of the page.





## Cascarones cilíndricos.

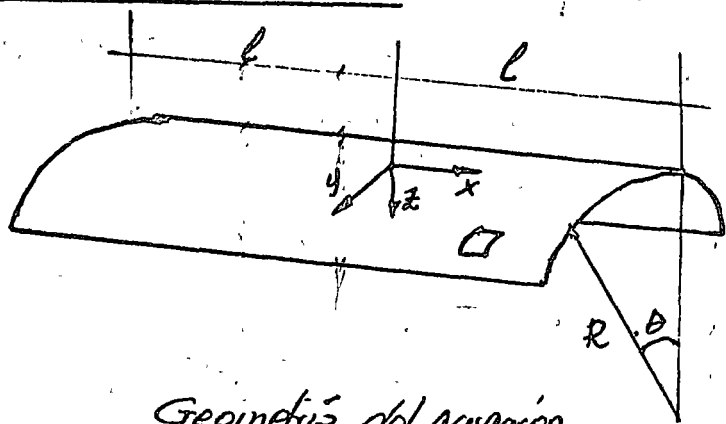
Las teorías para análisis de este tipo de cubiertas fueron desarrolladas por varios analistas.

El primer intento de análisis analítico fue presentado por G. Lame y E. Clapeyron en 1828, para el análisis de esfuerzos de membrana por cascarones cilíndricos apoyados en cuatro bordes. Love, en 1892, incluyó los efectos de cortantes y momentos.

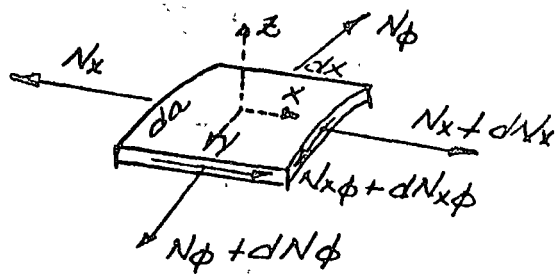
En 1930, U. Finsterwalder presentó una teoría aproximada, que proporcionó los desplazamientos de un cascarón cilíndrico en concordancia con resultados experimentales. F. Dischinger mejoró aún más la solución y H. Schöler, en 1936, presentó una simplificación a la solución de Finsterwalder.

En estas notas se resumen estos planteamientos y se aplican al cálculo de cascarones cilíndricos.

### 1. Análisis de membrana.



Geometría del cascarón



elemento diferencial.

Aceptando la existencia de fuerzas de membrana, se pueden establecer condiciones de equilibrio que definen relaciones entre las cargas y las fuerzas de membrana.

Pueden establecerse tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas, que relacionan  $N_x$ ,  $N_\phi$  y  $N_{x\phi}$  con las cargas  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Considerando en primer lugar el equilibrio a lo largo de la normal

$$-N_\phi dx \frac{d\theta}{2} - (N_\phi + \frac{\partial N_\phi}{\partial a} da) dx \cdot \frac{d\theta}{2} + Z dx da = 0$$

Despreciando términos de orden superior se obtiene:

$$-N_\phi dx d\theta + Z dx R d\theta = 0$$

$$\therefore \boxed{N_\phi = Z R} \quad (1)$$

Ahora, el equilibrio en dirección transversal queda definido por:

$$(N_\phi + \frac{\partial N_\phi}{\partial a} da) dx - N_\phi dx + (N_{x\phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} dx) da - N_{x\phi} da + Y dx da = 0$$

que al ser simplificada conduce a:

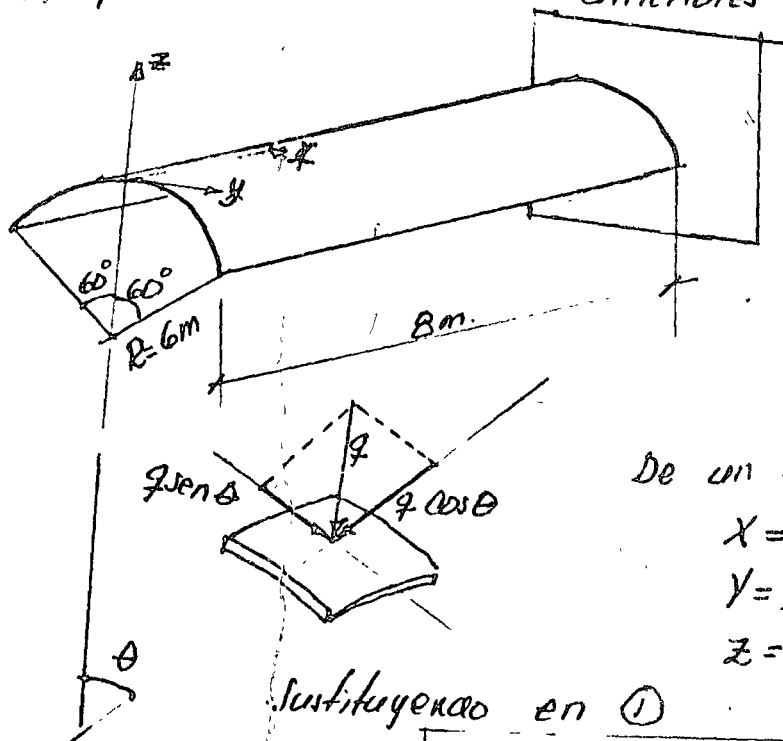
$$\boxed{\frac{\partial N_\phi}{\partial a} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + Y = 0} \quad (2)$$

Finalmente, el equilibrio en sentido longitudinal queda definido por:

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) da - N_x da + (N_{x\phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial a} da) dx - N_{x\phi} dx + X dx da = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial a} + X = 0} \quad (3)$$

Apliquemos las ecuaciones anteriores al problema siguiente:



Consideremos que actúa únicamente la acción del peso propio

$$q = \gamma t$$

siendo  $t$  el espesor del cascarón cilíndrico.

De un elemento diferencial cualquiera

$$X = 0$$

$$Y = q \sin \theta$$

$$Z = -q \cos \theta$$

Substituyendo en (1)

$$\boxed{N_\phi = Z R = -q R \cos \theta} \quad (a)$$

Sustituyendo el valor de  $N_\phi$  y  $V$  en la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (-qR \cos \theta) + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + q \sin \theta = 0$$

$$\therefore \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -2q \sin \theta \quad \therefore N_{x\phi} = -2qx \sin \theta + F_1(\theta)$$

Sabemos que para  $x=0$   $N_{x\phi}=0$  por ser un borde libre

$$\therefore 0 = -2q(0) \sin \theta + F_1(\theta) \quad \therefore F_1(\theta) = 0$$

$$\therefore \boxed{N_{x\phi} = -2qx \sin \theta} \quad (6)$$

Sustituyendo este valor y el de  $x$  en la ecuación (3), se obtiene:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (-2qx \sin \theta) + 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial N_x}{\partial x} = \left( \frac{2q}{R} \cos \theta \right) x ; \text{ Integrando } N_x = \frac{2qx^2}{R} \cos \theta + F_2(\theta)$$

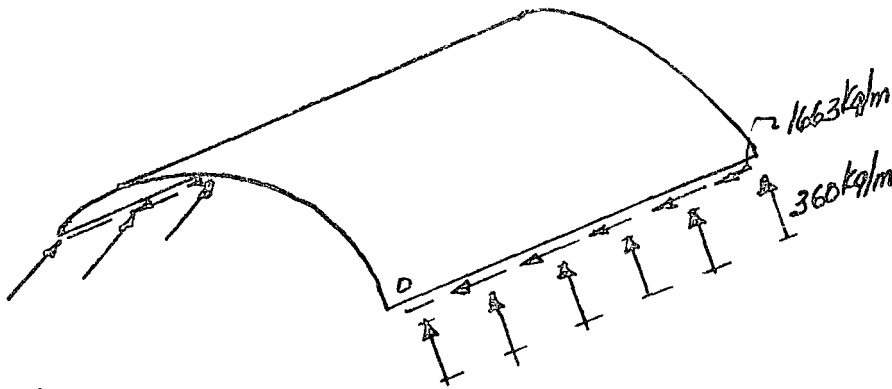
ya que para  $x=0$   $N_x=0$  por ser borde libre,  $F_2(\theta)=0$

$$\therefore \boxed{N_x = \frac{2qx^2}{R} \cos \theta} \quad (c)$$

Las ecuaciones a, b y c definen a los esfuerzos de membrana en cada punto del cascarón. Sustituyendo  $x=0, 2, 4, 6, 8$  mts y  $\theta = 0, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  y  $60^\circ$  se obtiene:

$0 \leq x \leq 8 \text{ mts}$				$x=0$		$x=2m$		$x=4m$		$x=6m$		$x=8m$	
$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$N_\phi$	$N_{x\phi}$	$N_x$	$N_{x\phi}$	$N_x$	$N_{x\phi}$	$N_x$	$N_{x\phi}$	$N_x$	$N_{x\phi}$	$N_x$
$0$	$0$	$1.0000$	$-720.0$	$0$	$0$	$0$	$80.0$	$0$	$320.0$	$0$	$720.0$	$0$	$1280.0$
$15^\circ$	$0.2598$	$0.9659$	$-625.5$	$0$	$0$	$-124.2$	$77.3$	$-248.5$	$309.1$	$-372.7$	$695.5$	$-496.9$	$1236.3$
$30^\circ$	$0.5000$	$0.8660$	$-623.5$	$0$	$0$	$-240.0$	$59.3$	$-480.0$	$271.1$	$-720.0$	$623.5$	$-960.0$	$1108.5$
$45^\circ$	$0.7071$	$0.7071$	$-520.1$	$0$	$0$	$-339.4$	$56.3$	$-678.8$	$226.3$	$-1018.2$	$509.12$	$-1357.6$	$925.1$
$60^\circ$	$0.8660$	$0.5000$	$-320.0$	$0$	$0$	$-415.7$	$40.0$	$-831.4$	$160.0$	$-1247.0$	$360.0$	$-1662.7$	$640.0$

Valores en  $\text{kg/m}$  para  $q = 120 \text{ kg/m}^2$

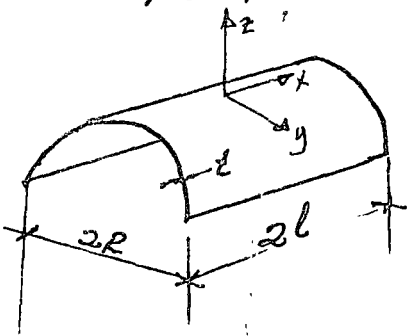


Condiciones de frontera del cascarón, a lo largo de los bordes longitudinales.

Los resultados anteriores indican que el cascarón en voladizo, sujeto a la acción de fuerzas de membrana, requiere que en sus bordes longitudinales se apliquen acciones que permitan el equilibrio de la membrana.

En caso en que estas fuerzas no se apliquen en el borde, no se genera régimen de membrana, sino que el peso propio se soporta por la aparición de momentos flexionantes y torsionantes en el cascarón.

Consideremos ahora un segundo ejemplo. Sea un cascarón semi-circular de concreto armado, apoyado en sus extremidades en dos pilares. Sea  $l = 8\text{ m}$   $2l = 36\text{ m}$   $t = 60\text{ cm}$ .



Considerando

$$q = 1.1 \times 0.06 \times 2500 = 150 \text{ kg/m}^2$$

Usando las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$N_{\phi} = -1200 \cos \theta \quad N_{\phi x} = -300x \sin \theta$$

$$N_x = -(6075 - 18.75 x^2) \cos \theta$$

Usando las expresiones anteriores, es posible obtener las fuerzas de membrana, en kg/m, en todas y cada una de las juntas del cascarón. Los resultados aparecen condensados en la siguiente tabla, para puntos donde  $x$  varía de 0, 4.5, 9.0, 13.5 y 18.0 m, y  $\theta$  variando de  $0^\circ$  a  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ .

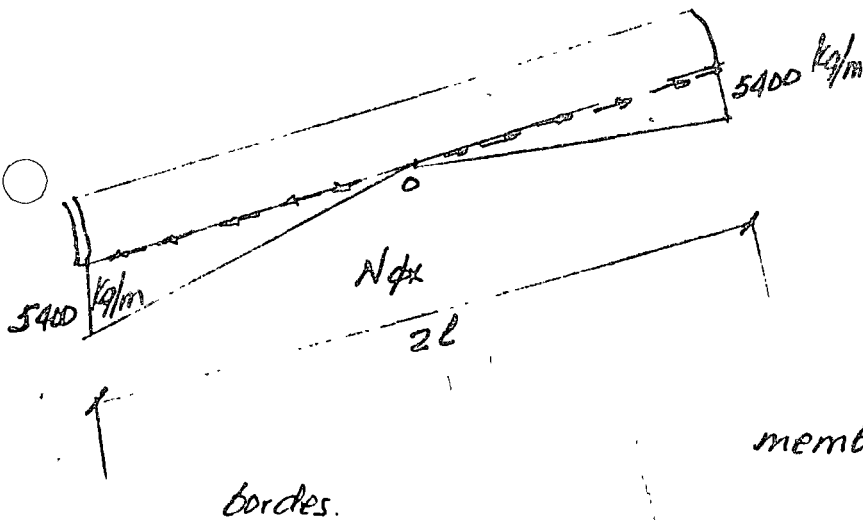
$\theta$	$0^\circ$			$30^\circ$			$60^\circ$			$90^\circ$		
	$-N_\phi$	$-N_{\phi x}$	$-N_x$	$-N_\phi$	$-N_{\phi x}$	$-N_x$	$-N_\phi$	$-N_{\phi x}$	$-N_x$	$-N_\phi$	$-N_{\phi x}$	$-N_x$
0	1200	0	6075	1039	0	5261	600	0	3037	0	0	0
4.5	1200	0	5695	1039	675	4932	600	1169	2847	0	1350	0
9.0	1200	0	4556	1039	1350	3946	600	2238	2278	0	2700	0
13.5	1200	0	2658	1039	2025	2302	600	3507	1329	0	4050	0
18.0	1200	0	0	1039	2700	0	600	4677	0	0	5400	0

Valores en  $\text{kg/m}$

Se observa que el esfuerzo máximo se presenta en  $x=0$   $\theta=0^\circ$  encontrándose

$$\sigma_x = -\frac{6075}{100 \times 6} = -10.1 \text{ kg/cm}^2$$

El borde requiere fuerzas de membrana como se indican en la figura, para poder mantener el equilibrio.



Las fuerzas  $N_{\phi x}$  varían linealmente, mientras que  $N_\phi = 0$  en todo el borde.

Será por tanto necesario aplicar  $N_{\phi x}$  linealmente para generar régimen de membrana en el cascarón, en ambos bordes.

## 2.- Desplazamientos en la membrana.

En el estudio de cascarones es necesario en algunas cosas conocer los desplazamientos de puntos del cascarón.

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  las componentes del desplazamiento de un punto en dirección de  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Sean  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\gamma$  las deformaciones unitarias en el punto.

Es posible demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w = R\epsilon_2$$

$$\frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma$$

Usando relaciones constitutivas elásticas, se puede escribir:

$$\epsilon_x = \frac{N_x - \nu N_\phi}{E t} \quad \epsilon_\phi = \frac{N_\phi - \nu N_x}{E t} \quad \gamma_{xy} = \frac{2N\phi_x}{E t} (1+\nu)$$

Para obtener  $u$ ,  $v$  y  $w$ , basta sustituir los valores de las fuerzas de membrana en equilibrio y efectuar integraciones tomando en cuenta las condiciones de sujeción del cascarón.

Usemos estos razonamientos en el cascarón cilíndrico en voladizo antes estudiado. Veamos si la acción del peso propio provoca el siguiente campo de desplazamientos:

$$u = \frac{\gamma \cos \theta}{E} \left[ \frac{1}{3R} (x^3 - l^3) + \nu R (x - l) \right] \quad (a)$$

$$v = \frac{\gamma \sin \theta}{E} \left[ 2(1+\nu)(l^2 - x^2) + \frac{1}{3R^2} \left( \frac{x^4}{4} - l^3 x + \frac{3l^4}{4} \right) + \nu \left( \frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2} \right) \right] \quad (b)$$

$$w = -\frac{\gamma \cos \theta}{E} \left[ 2(1+\nu)(l^2 - x^2) + \frac{1}{3R^2} \left( \frac{x^4}{4} - l^3 x + \frac{3l^4}{4} \right) + \nu \left( \frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2} \right) + R^2 + \nu x^2 \right] \quad (c)$$

En efecto, sabemos que

$$N_\phi = -qR \cos \theta \quad N_{\phi x} = -qx \sin \theta \quad N_x = \frac{qx^2}{R} \cos \theta$$

Por tanto

$$\epsilon_x = \frac{N_x - \nu N_\phi}{E t} = \frac{qx^2 \cos \theta}{R E t} + \frac{\nu q R \cos \theta}{E t} = \frac{q \cos \theta}{E t} \left( \frac{x^2}{R} + \nu R \right)$$

$$\text{pero } q = \gamma t \quad \therefore \epsilon_x = \frac{\gamma \cos \theta}{E} \left( \frac{x^2}{R} + \nu R \right) \quad \dots \quad (d)$$

$$\text{Por otra parte} \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\gamma \cos \theta}{E} \left[ \frac{3x^2}{3R} + \nu R \right] \quad \dots \quad (e)$$

Observándose que (d) y (e) son idénticas.

Por otra parte

$$\epsilon_\phi = \frac{N_\phi - \nu N_x}{E t} = \frac{-qR \cos \theta - \nu \frac{qx^2}{R} \cos \theta}{E t} = -\frac{\gamma}{E} \cos \theta \left( R + \frac{\nu x^2}{R} \right) \quad \dots \quad (f)$$

Por condiciones cinemáticas

$$R \epsilon_\phi = \frac{\partial v}{\partial \theta} + w = \frac{\gamma}{E} \cos \theta \left[ 2(1+\nu)(l^2 - x^2) + \frac{1}{3R^2} \left( \frac{x^4}{4} - l^3 x + \frac{3l^4}{4} \right) + \nu \left( \frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2} \right) \right]$$

$$- \frac{\gamma}{E} \cos \theta \left[ 2(1+\nu)(l^2 - x^2) + \frac{1}{3R^2} \left( \frac{x^4}{4} - l^3 x + \frac{3l^4}{4} \right) + \nu \left( \frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2} \right) + R^2 + \nu x^2 \right]$$

Simplificando 
$$R \epsilon_{\theta} = - \frac{\gamma \cos \theta}{E} (R^2 + \nu x^2) \dots \dots \dots (g)$$

que resulta ser idéntico a (f)

Finalmente 
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} (1 + \nu) = - \frac{4 \gamma x \sin \theta}{E t} (1 + \nu) = - \frac{4 \gamma x \sin \theta}{E} (1 + \nu) \quad (h)$$

Cinemáticamente 
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\gamma \sin \theta}{E} \left[ - \frac{1}{3 R^2} (x^3 - l^3) - \nu (x - l) + 2(1 + \nu) \left( - \frac{2x}{3 R^2} + \frac{1}{3 R^2} (x^2 - l^2) + \nu (x - l) \right) \right]$$

Simplificando 
$$\gamma_{xy} = - \frac{4 \gamma x \sin \theta}{E} (1 + \nu) \dots \dots \dots (i)$$

que resulta idéntico a (h). En consecuencia, el campo de desplazamientos definido por (a) (b) y (c) conduce a un campo de deformaciones unitarias compatible con el régimen de membrana en el cascarón en voladizo.

Observemos el campo de desplazamientos en el empotramiento

○ Para  $x = l$

$$u = \frac{\gamma \cos \theta}{E} [0 + 0] = 0 \quad \therefore \underline{u = 0}$$

$$v = \frac{\gamma \sin \theta}{E} \left[ 0 + \frac{1}{3 R^2} \left( \frac{l^4}{4} - l^4 + \frac{3}{4} l^4 \right) + \nu \left( \frac{l^2}{2} - l^2 + \frac{l^2}{2} \right) \right] = 0 \quad \therefore \underline{v = 0}$$

$$w = - \frac{\gamma \cos \theta}{E} [0 + 0 + 0 + R^2 + \nu l^2] \quad \therefore \underline{w = - \frac{\gamma \cos \theta}{R^2 E} (1 + \nu) \frac{l^2}{R^2}}$$

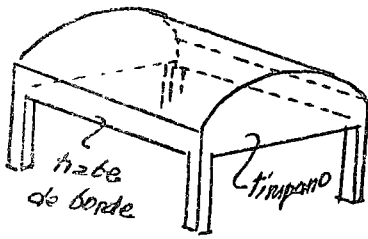
En consecuencia, el arco del cascarón en el empotramiento permanece plano, de igual longitud, pero debe trasladarse hacia el centro del arco.

Solo si es posible generar estas condiciones de sujeción en el empotramiento, será posible aceptar la existencia de régimen de membrana en el cascarón.

○ En caso negativo, deben generarse momentos flexionantes y torsionantes para mantener el equilibrio de los elementos del cascarón.

### 3. Las traves de borde y los tímpanos.

Las ~~casarones~~ son necesariamente finitos, tanto longitudinalmente como en sentido transversal, y es necesario aplicar en los bordes las condiciones necesarias para mantener el régimen de membrana, colocando traves de borde y tímpanos.



Estos elementos tienden a proporcionar fuerzas en los bordes que dependen de su rigidez relativa. Por esto, y por interrumpirse la continuidad de la superficie del casarón, estos elementos de borde no proporcionan las fuerzas

que son necesarias para mantener el régimen de membrana. Por tanto, se presentan perturbaciones en los bordes que tienden a provocar la aparición de momentos flexionantes y torsionales, así como fuerzas cortantes que alteran la distribución de esfuerzos en el casarón.

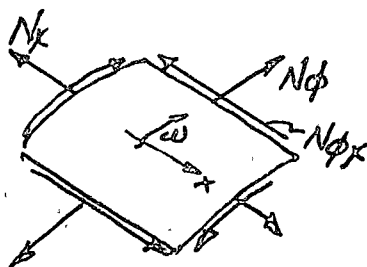
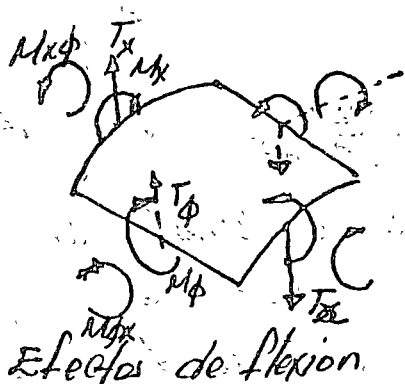
El análisis de estas perturbaciones puede ser llevado a cabo siguiendo la técnica propuesta por Finsterwalder, y Torroja, como a continuación se describe

### 4. Efectos provocados por perturbaciones en el borde.

La aparición de líneas de carga o momentos que tienden a mantener la compatibilidad del casarón y sus elementos de borde, provocan nuevas fuerzas de membrana y momentos flexionantes y torsionales así como fuerzas cortantes, en todo el casarón.

En las figuras que siguen se muestran los elementos mecánicos que introducen las perturbaciones de borde, los cuales deben ser superpuestos al régimen de membrana para obtener la condición final del casarón.





Se considera la existencia de momentos flexionantes unitarios, en sentido longitudinal \$M\_x\$, en sentido transversal \$M\_\phi\$ y momentos torsionantes \$M\_{x\phi}\$

En cascarones cilindricos se considera que \$N\_x\$ es pequeño, debido a los pequeños desplazamientos de las generatrices longitudinales. La teoría considera que \$T\_x\$ y \$M\_x\$ son despreciables. Debido a que se trata de direcciones principales de curvatura, se acepta que \$M\_{x\phi}\$ es nulo.

Las ecuaciones de equilibrio se reducen a cuatro, estableciendo las tres primeras el equilibrio a la translación, y la cuarta el equilibrio de momentos

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \omega} - R \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} - T_\phi = 0$$

$$N_z + \frac{\partial T_\phi}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial M_\phi}{\partial \omega} - R T_\phi = 0$$

Siendo \$\omega\$ el ángulo medido a partir del borde \$\omega = \rho\_0 - \theta\$. De la cuarta ecuación se obtiene \$T\_\phi\$ en función de \$N\_\phi\$; de la tercera se obtiene \$N\_\phi\$ en términos de \$T\_\phi\$ y consecuentemente en términos de \$M\_\phi\$; análogamente, de la segunda y de la primera se obtienen \$N\_{x\phi}\$ y \$N\_x\$ como función de \$M\_\phi\$. Se obtienen así:

$$T_\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial M_\phi}{\partial \omega}$$

$$N_z = -\frac{\partial T_\phi}{\partial \omega} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \omega^2}$$

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial M_\phi}{\partial \omega} + \frac{\partial^3 M_\phi}{\partial \omega^3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{R^3} \left( \frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^4 M_\phi}{\partial \omega^4} \right)$$

Ahora, expresando las derivadas de los desplazamientos que dependen de las fuerzas de membrana...

Los cambios de curvatura pueden ser expresados en términos de derivadas tales como

$$R^2 M_\phi = -D \left( \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 w}{\partial \omega^2} \right) \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad d\omega = -\omega t$$

Derivando dos veces con respecto a  $x$ , y teniendo en cuenta las tres relaciones que se obtienen de equilibrio, se obtiene una ecuación diferencial de octavo orden, que contiene solo términos en  $M_\phi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^8 M_\phi}{\partial \omega^8} + (2+\nu) R^2 \frac{\partial^8 M_\phi}{\partial x^2 \partial \omega^6} + \frac{2 \partial^6 M_\phi}{\partial \omega^6} + (1+2\nu) R^4 \frac{\partial^8 M_\phi}{\partial x^4 \partial \omega^4} + \\ + 2(2+\nu) R^2 \frac{\partial^6 M_\phi}{\partial x^2 \partial \omega^4} + \frac{\partial^4 M_\phi}{\partial \omega^4} + \nu R^6 \frac{\partial^8 M_\phi}{\partial x^6 \partial \omega^2} + (1+\nu)^2 R^4 \frac{\partial^6 M_\phi}{\partial x^4 \partial \omega^2} + \\ + (2+\nu) R^2 \frac{\partial^4 M_\phi}{\partial x^2 \partial \omega^2} + 12(1-\nu^2) \frac{R^6}{t^2} \frac{\partial^4 M_\phi}{\partial x^4} = 0 \end{aligned}$$

Ya que solo aparecen derivadas pares, esta ecuación admite la solución

$$M_\phi = C e^{k \cdot \omega} \cos \frac{n\pi x}{2l} = C e^{k \cdot \omega} \cos \frac{\lambda_n x}{R}$$

donde  $n$  es cualquier número impar. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene la siguiente ecuación característica.

$$\begin{aligned} k^8 + [2 - (2+\nu) \lambda_n^2] k^6 + [1 - 2(2+\nu) \lambda_n^2 + (1+2\nu) \lambda_n^4] k^4 \\ + [-(2+\nu) \lambda_n^2 + (1+\nu)^2 \lambda_n^4 - \nu \lambda_n^6] k^2 + 12(1-\nu^2) \frac{R^2}{t^2} \lambda_n^4 = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación podría ser escrita como.

$$k^8 + a_2 k^6 + a_4 k^4 + a_6 k^2 + a_8 = 0$$

que admite las soluciones siguientes para  $k$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + i\beta_1, \quad \alpha_1 - i\beta_1, \quad -\alpha_1 - i\beta_1, \quad -\alpha_1 + i\beta_1, \\ \alpha_2 + i\beta_2, \quad \alpha_2 - i\beta_2, \quad -\alpha_2 - i\beta_2, \quad -\alpha_2 + i\beta_2 \end{aligned}$$

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser obtenidos algebraicamente, o mediante las siguientes expresiones aproximadas de Timoshenko:

$$\alpha_1 = 0.92388(\rho - a_2/8\rho) + 0.0478 \left( \frac{5a_2^2}{16} - a_4 \right) \frac{1}{\rho^3}$$

$$\beta_1 = 0.38268(\rho + a_2/8\rho) - 0.1155 \left( \frac{5a_2^2}{16} - a_4 \right) \frac{1}{\rho^3}$$

$$\alpha_2 = 0.38268(\rho - a_2/8\rho) - 0.1155 \left( \frac{5a_2^2}{16} - a_4 \right) \frac{1}{\rho^3}$$

$$\beta_2 = 0.92388(\rho + a_2/8\rho) + 0.0478 \left( \frac{5a_2^2}{16} - a_4 \right) \frac{1}{\rho^3}$$

siendo  $\rho$  el valor real y positivo de  $\sqrt[3]{a_8}$ . Esta solución es tanto mejor cuanto mayor sea  $a_8$  respecto a  $a_2, a_4$  y  $a_6$ .

Conocida una solución particular, la solución general se obtiene por superposición de cada uno de los armónicos, obteniéndose

$$n M \phi = \left[ e^{-\alpha_1 \Omega} (A_n \cos \beta_1 \Omega + B_n \sin \beta_1 \Omega) + e^{-\alpha_2 \Omega} (C_n \cos \beta_2 \Omega + D_n \sin \beta_2 \Omega) \right] \frac{\cos \lambda_n x}{R}; \text{ siendo } \Omega = \omega t$$

usando las relaciones entre  $M \phi$  y las elementales mecánicas resistentes, se obtiene:

$$n T \phi = \frac{1}{R} \left[ e^{-\alpha_1 \Omega} ({}_1 A_n \cos \beta_1 \Omega + {}_1 B_n \sin \beta_1 \Omega) + e^{-\alpha_2 \Omega} ({}_1 C_n \cos \beta_2 \Omega + {}_1 D_n \sin \beta_2 \Omega) \right] \cos \frac{\lambda_n x}{R}$$

$$n N \phi = -\frac{1}{R} \left[ e^{-\alpha_1 \Omega} ({}_2 A_n \cos \beta_1 \Omega + {}_2 B_n \sin \beta_1 \Omega) + e^{-\alpha_2 \Omega} ({}_2 C_n \cos \beta_2 \Omega + {}_2 D_n \sin \beta_2 \Omega) \right] \cos \frac{\lambda_n x}{R}$$

$$n M_x \phi = -\frac{1}{R \lambda_n} \left\{ e^{-\alpha_1 \Omega} [({}_1 A_n + {}_3 A_n) \cos \beta_1 \Omega + ({}_1 B_n + {}_3 B_n) \sin \beta_1 \Omega] + e^{-\alpha_2 \Omega} [({}_1 C_n + {}_3 C_n) \cos \beta_2 \Omega + ({}_1 D_n + {}_3 D_n) \sin \beta_2 \Omega] \right\} \frac{\sin \lambda_n x}{R}$$

$$n M_x = \frac{1}{R \lambda_n} \left\{ e^{-\alpha_1 \Omega} [({}_2 A_n + {}_4 A_n) \cos \beta_1 \Omega + ({}_2 B_n + {}_4 B_n) \sin \beta_1 \Omega] + e^{-\alpha_2 \Omega} [({}_2 C_n + {}_4 C_n) \cos \beta_2 \Omega + ({}_2 D_n + {}_4 D_n) \sin \beta_2 \Omega] \right\} \frac{\cos \lambda_n x}{R}$$

$$n \ddot{v} = -\frac{1}{E t \lambda_n^2} \left[ \frac{{}_2 A_n + {}_3 A_n - ({}_3 A_n + {}_5 A_n)}{\lambda_n^2} + \dots \right] \cos \frac{\lambda_n x}{R}$$

$$n \omega = \frac{1}{E t \lambda_n^2} \left[ \frac{(2t \lambda_n^2) {}_2 A_n + (2 - \frac{1}{2t}) {}_1 A_n - {}_1 A_n}{\lambda_n^2} + \dots \right] \cos \frac{\lambda_n x}{R}$$

En las ecuaciones anteriores

$$rA_n = -\alpha_1 (r-1)A_n + \beta_1 (r-1)B_n$$

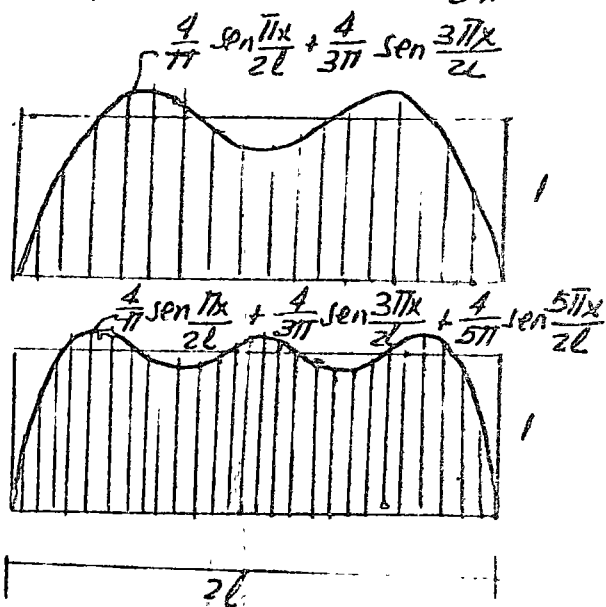
$$rB_n = -\beta_1 (r-1)A_n - \alpha_1 (r-1)B_n$$

$$rC_n = -\alpha_2 (r-1)C_n + \beta_2 (r-1)D_n$$

$$rD_n = -\beta_2 (r-1)C_n - \alpha_2 (r-1)D_n$$

Así, se dispone de ecuaciones suficientes para describir las modificaciones en un cascarón, por la perturbación causada en un borde por un término de carga.

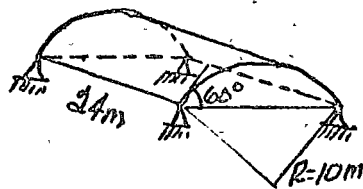
El problema de las ecuaciones consiste en buscar los términos de carga necesarios para representar la interacción entre las travesas de borde y el cascarón. Esto se logra mediante un análisis de Fourier. En las bordes, que sustituyen a las cargas en el borde mediante una serie de Fourier. Normalmente se consideran 2 o tres términos en la serie para representar constantes, como pueden ser  $N\phi$  o bien  $\frac{\partial N\phi}{\partial x}$ .



Así, en las figuras se ilustra como es posible representar un término constante a lo largo de un eje mediante series de Fourier que contengan 2 o tres términos. Resulta obvio que mientras mayor sea el número de términos mejor será la aproximación. Para ilustrar el empleo de

esta técnica se resuelven dos problemas de aproximación:

5. Cascarón cilíndrico sin tiras de borde



Sea un cascarón cilíndrico con  $R=10\text{ m}$   
 $\theta_c = 60^\circ$ ,  $2L=24\text{ m}$ ,  $t=8\text{ cm}$ . Los  
 bordes longitudinales están libres y las  
 extremidades frontales se han rigidizado  
 por tómpanas. Se intenta calcular las  
 sollicitaciones provocadas por peso propio.

Se tiene  $g = 1 \times 1 \times 0,08 \times 2500 = 200\text{ kg/m}^2$   
 los esfuerzos de membrana que resultan son:

$$N_\phi = -2000 \cos \theta \quad N_{x\phi} = -400 \times \sin \theta \quad N_x = (-2880 + 20x^2) \cos \theta$$

En el bordo, donde  $x=0$   $\theta = 60^\circ$  se tiene

$$N_\phi = -1000\text{ kg/m} \quad N_{x\phi} = -346\text{ kg/m}$$

Expresando estas términos en series de Fourier que representan  
 constante

$$N_\phi = -1273 \cos \frac{\pi x}{2L} + 424 \cos \frac{3\pi x}{2L}$$

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -441 \cos \frac{\pi x}{2L} + 127 \cos \frac{3\pi x}{2L}$$

El problema se reduce a tomar estas valores en ambos  
 bordes, mediante términos de carga correspondiente a  $n=1,3$ .

Así, para  $n=1$   $\lambda_1 = \frac{1 \times \pi \times 10}{24} = 1,3090$ .

La ecuación característica resulta

$$K^8 - 1,4270 K^6 - 2,9179 K^4 - 0,4909 K^2 + 550500 = 0$$

Usando la aproximación de Tornoja para  $\rho = 5,2191$ , se obtiene:

$$d_1 = 4,855 \quad \beta_1 = 1,981 \quad d_2 = 2,007 \quad \beta_2 = 4,791$$

Para  $n=3$   $\lambda_3 = \frac{3 \times \pi \times 10}{24} = 3,9270$ . La ecuación cu-

acterística resulta ser  $K^8 - 28,8427 K^6 + 177,1321 K^4 + 206,9747 K^2 + 44590600 = 0$

obteníendase  $\rho = 9,0397$

$\beta_3 = 2,500 \quad \beta_4 = 7,989$

Usando las expresiones que aparecen en la pag 11, se pueden obtener  $N_{\phi}$ ,  $T_{\phi}$ ,  $N_{\phi}$  y  $\frac{DN_{\phi}}{dx}$  en el borde donde  $R=0$ , obteniendose, por  $n=1$

$$A_1 + C_1 = 0$$

$$-4.055 A_1 + 1.981 B_1 - 2.007 C_1 + 4.791 D_1 = 0$$

$$-19.65 A_1 + 19.23 B_1 + 18.93 C_1 + 19.23 D_1 = +12730$$

$$.62.13 A_1 - 134.3 B_1 - 128.1 C_1 + 47.29 D_1 = 44100$$

Resolviendo el sistema:  $A_1 = -1433$ ,  $B_1 = -2321$ ,  $C_1 = +1433$ ,  $D_1 = +108$ .  
De manera similar, por  $n=3$ , se obtiene.

$$A_3 + C_3 = 0$$

$$-8.725 A_3 + 3.294 B_3 - 3.599 C_3 + 7.989 D_3 = 0$$

$$-65.27 A_3 + 57.50 B_3 + 50.87 C_3 + 57.40 D_3 = -4240$$

$$308.9 A_3 - 719.8 B_3 - 638.9 C_3 + 191.5 D_3 = -14700$$

Por tanto  $A_3 = +159$ ,  $B_3 = +247$ ,  $C_3 = -159$ ,  $D_3 = 0$

Conocidas estas valores, se pueden obtener todas las coeficientes que aparecen definiendo a los diversos elementos mecánicas.

Constantes para definir elementos mecánicas.

$n=1$	$A_1 = -1433$	$B_1 = -2321$	$C_1 = +1433$	$D_1 = +108$
	$1A_1 = +2359$	$B_1 = +14107$	$1C_1 = -2359$	$1D_1 = -7082$
	$2A_1 = +16470$	$B_1 = -73160$	$2C_1 = -29200$	$2D_1 = +25510$
	$3A_1 = -225006$	$3B_1 = +322500$	$3C_1 = +180400$	$3D_1 = +88680$
	$4A_1 = +1731006$	$4B_1 = -1120000$	$4C_1 = +61920$	$4D_1 = -1044000$
	$1A_1 + 3A_1 = -226439$	$B_1 + 3B_1 = +336700$	$1C_1 + 3C_1 = +178000$	$1D_1 + 3D_1 = +81600$
	$2A_1 + 4A_1 = +1748000$	$2B_1 + 4B_1 = -1193000$	$2C_1 + 4C_1 = +32720$	$2D_1 + 4D_1 = -1019000$
$n=3$	$A_3 = +159$	$B_3 = +247$	$C_3 = -159$	$D_3 = 0$
	$1A_3 = -573.3$	$1B_3 = -2679$	$1C_3 = +572.2$	$1D_3 = -1270$
	$2A_3 = -3824$	$2B_3 = +25270$	$2C_3 = +8088$	$2D_3 = -9142$
	$4A_3 = -1701000$	$3B_3 = +207800$	$3C_3 = -102210$	$3D_3 = -23760$
	$1A_3 + 3A_3 = +116000$	$4B_3 = +1430000$	$4C_3 = +114300$	$4D_3 = +930300$
	$2A_3 + 4A_3 = -1705000$	$1B_3 + 3B_3 = -210500$	$1C_3 + 3C_3 = -101600$	$1D_3 + 3D_3 = -25030$
	$3A_3 = +116500$	$2B_3 + 4B_3 = +1455000$	$2C_3 + 4C_3 = +122400$	$2D_3 + 4D_3 = +921100$

En base a las datos anteriores se puede calcular cualquier elemento mecánico. Así el momento  $M_\phi$  en la parte superior ( $\theta=0$ ) del cascarón, y en el centro ( $x=0$ ), se obtiene:

$$[M_\phi]_\xi = [-1433(-0.00299) - 2321(0.00542) + 1433(0.03667) + 1108(-0.11662)] \cos \theta + [159(-0.00010) + 247(-0.00003) - 159(-0.01131) + 0(0.02012)] \cos \theta = 31.66 \cos \theta + 1.77 \cos \theta = 33.43 \text{ kg/m.}$$

Este momento es generado por el apoyo izquierdo, y por simetría, el borde derecho provocará un momento igual. Por tanto en el centro el momento resultará ser igual a  $2 \times 33.43 = 67 \text{ kg/m}$ . En ese mismo punto, el esfuerzo provocado por  $N_\phi$  será  $\frac{N_\phi}{t}$  obteniéndose, solo por efecto de perturbación del borde

$$+ [N_\phi]_\xi = -\frac{z}{10} \{ [16470(-0.00299) - 73160(0.00542) - 29200(0.03667) + 25510(-0.11662)] + [-3824(-0.00010) + 25270(-0.00003) + 8088(-0.01131) - 9142(0.02012)] \} = -\left(\frac{z}{10}\right) \{-4492 - 276\} = 3046 \text{ kg/m}$$

El régimen de membrana inicial, provocará  $[N_\phi] = -2000 \text{ kg/m}$

Por tanto, al superponer resultados

$$\text{total } [N_\phi]_\xi = + [N_\phi]_\xi + + [N_\phi]_\xi = 3046 - 2000 = -1046 \text{ kg/m.}$$

Finalmente, obtengamos las fuerzas de membrana en la sección media del cascarón.

En  $\theta = 60^\circ$   $x=0$ , provocada por un borde.

$$+ [N_x]_\xi = \left(\frac{1}{10} \cdot 1.3090^2\right) [1748000(-0.00299) - 1193000(0.00542) + 32720 \cdot 0.03667 - 1019000(-0.11662)] \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 3.9270^2 [-1705000(-0.00010) + 1455000(-0.00003) + 122400(-0.01131) + 921100(0.02012)] \cdot 1 = 6322 + 112 = + 6434 \text{ kg/m.}$$

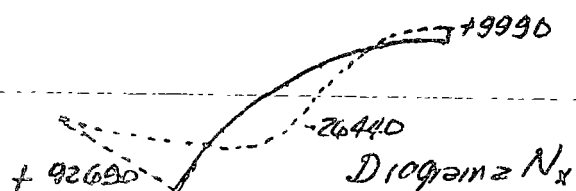
Teniendo en cuenta al borde opuesto y superponiendo los efectos de la membrana inicial

$$\text{total } [N_x]_\xi = 6434 + 6434 - 2880 = + 9988 \text{ kg/m.}$$

Una comprobación que siempre es útil, consiste en obtener la resultante de todas las fuerzas  $N_x$  en la sección media. Basta repetir el cálculo para  $\alpha = 0^\circ - 10^\circ - 20^\circ - 30^\circ - 40^\circ - 50^\circ$  y  $\alpha = 60^\circ$  obteniéndose:

$\alpha$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$
$[N_x]_{\text{total}}$	+92690	+610	-26440	-19140	-3610	+6790	+9990

Representando estos valores sobre la sección media, se obtiene una distribución no lineal de fuerzas de membrana.



Para realizar la integral  $\int N_x dx$  mediante la fórmula de Simpson

$$\int_0^l y dx = \frac{l}{240} [41(y_0 + y_6) + 216(y_1 + y_5) + 27(y_2 + y_4) + 272 y_3]$$

En nuestro caso se obtiene

$$41 \times 102680 + 216 \times 7400 + 27(-30050) + 272(-19140) = 4209280 + 1598400 - 811350 - 5206080 = 5808280 - 6017430$$

La suma debe ser nula, pero la aproximación implica errores del orden de 3.5%

Una segunda comprobación consiste en calcular en la sección media la suma de los momentos  $N_x \cdot x$  respecto al eje centroidal de la sección media, el cual debe resultar ser igual al momento flexionante externo =  $q(24)^2/8$ .

Valuando el área de varias porciones del diagrama de  $N_x$ , usando segmentos  $\Delta x = 1.743 \text{ m}$ , se obtiene:

$$M = 2(-72780 \times 0.50 + 25370 \times 2.30 + 40140 \times 3.20 + 23210 \times 4.00 - 2770 \times 4.80 - 15710 \times 5.00) = 303000 \text{ Kg m.}$$

El peso  $q$  por metro de longitud resulta ser

$$q = 20.94 \times 1.00 \times 0.08 \times 2500 = 4190 \text{ Kg/m}$$

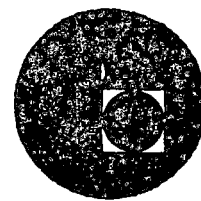
$$\therefore M_{flex} = \frac{q l^2}{8} = 4190 \times \frac{24^2}{8} = 301700 \text{ Kg}$$

diferente en 0.43% del calculado teóricamente





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



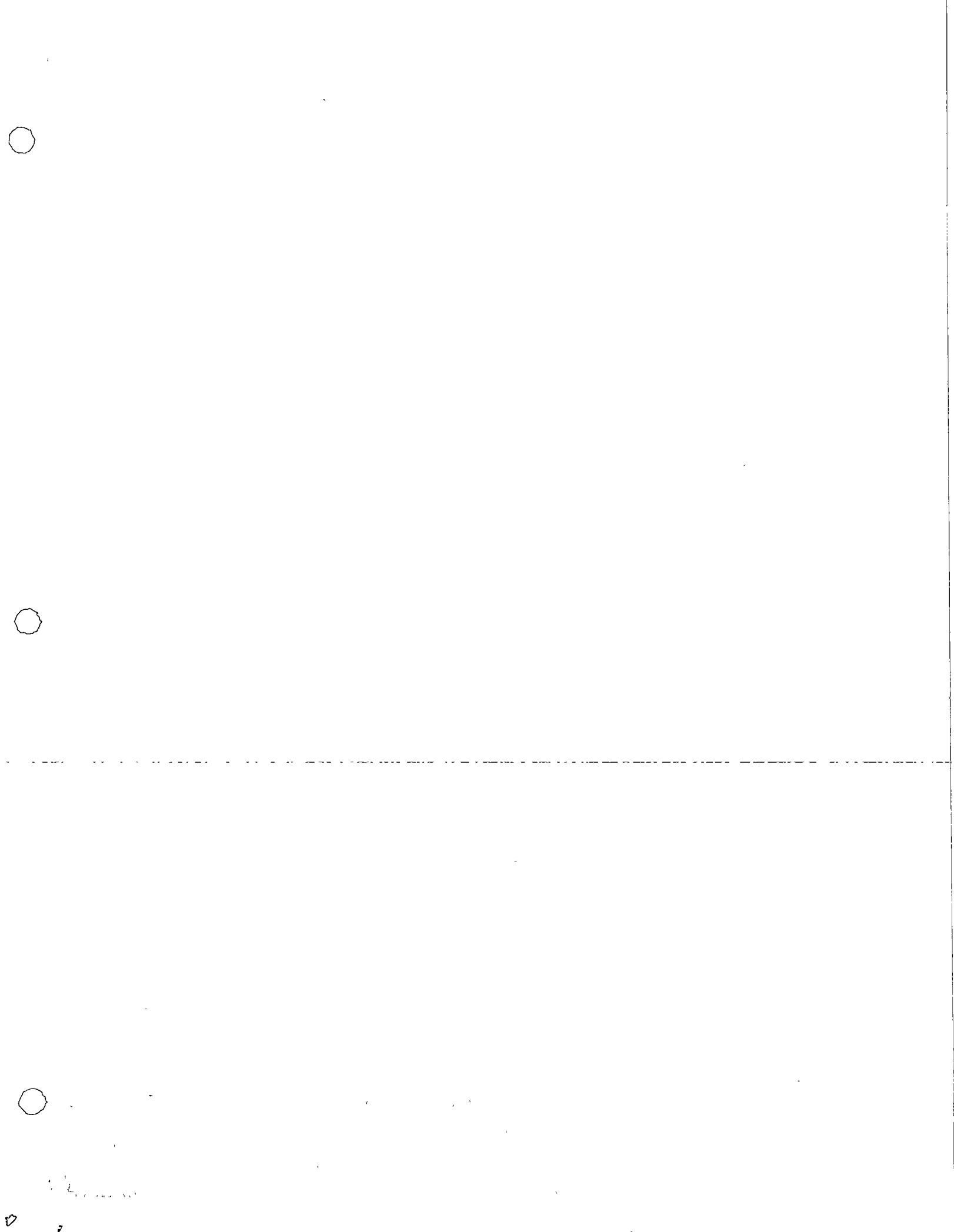
CURSO SOBRE CUBIERTAS

INDUSTRIALES



Prof. Nefthalí Rodríguez Cuevas

Agosto 1976

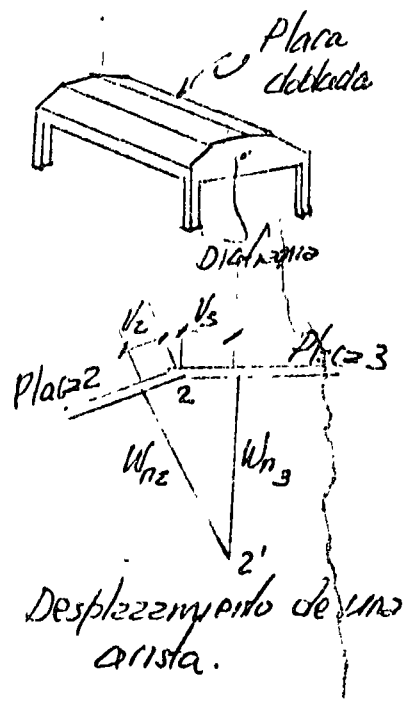


Placas plegadas.

El uso de placas plegadas es reciente y se ha transformado en un sistema popular para cubrir grandes espacios públicos y construcciones industriales, así como en armentaciones. Su desarrollo ha sido frenado por la complejidad del análisis. En estas notas se presenta un método simple, basado en conocimientos comunes de Resistencia de Materiales y Teoría de las estructuras.

Los analistas que iniciaron el análisis de este tipo de cubiertas fueron Ehlers (1930) y Vlasov (1936). Posteriormente Winter y Pei (1947) publicaron en ACI las bases del método de análisis. Posteriormente Weibel (1954) y Yitshaki (1958) sentaron las bases del análisis y diseño de manera exhaustiva. Recientemente Snobrich, Scordelis y Des Fries han sistematizado el análisis de este tipo de cubiertas, mediante la técnica de elemento finito.

1.- Bases de análisis



Placas plegadas son estructuras espaciales formadas por placas rectangulares unidas en las bordes comunes, que definen a las aristas de la placa plegada. Las placas rectangulares que forman la estructura son muy delgadas en relación con el claro libre de la estructura.

La rigidez considerable de la cubiertas depende principalmente de la transferencia de las cargas en el plano de cada placa a los diafragmas extremos.

Las placas que forman la estructura funcionan

a) comportarse como vigas resistentes a las cargas aplicadas en su plano, y capaces de soportar la acción de fuerzas normales mediante flexión y torsión.

Los diafragmas extremos, que funcionan como apoyos a las placas, se consideran rígidos en su plano y capaces de transmitir las reacciones de las placas. Estos diafragmas son indispensables para el funcionamiento espacial de la cubierta.

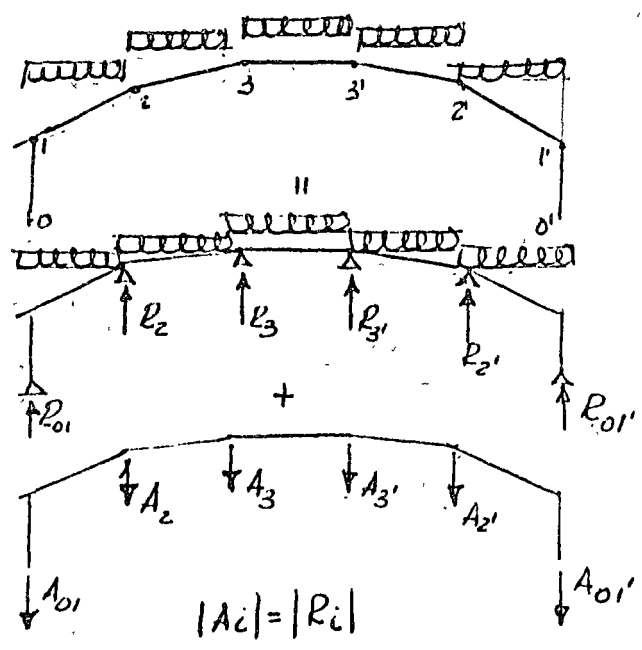
El método de análisis considera los siguientes aspectos:

- a) ~~Supone que todas las aristas están apoyadas,~~ y se obtienen los momentos flexionantes y torsionantes en las placas, así como las fuerzas que sujetan a las aristas en posición.
- b) ~~Ve que el comportamiento estructural de la cubierta permite desplazamientos en las aristas, como el desplazamiento 2-2' en la figura, este puede ser descompuesto en los desplazamientos  $v_2$  y  $v_3$  en los planos de cada placa, así como desplazamientos  $w_{n2}$  y  $w_{n3}$  perpendiculares a la placa.~~  
 Los desplazamientos  $v_2$  y  $v_3$  de las placas 2 y 3, producidos por las componentes coplanarias de las cargas en cada arista, son relativamente pequeñas, ya que las placas, muy peraltadas, son muy rígidas, y tienden a producir efectos de flexión y fuerza axial en cada placa, los cuales se equilibran buscando compatibilidad de esfuerzos en la arista a donde concurren placas de la estructura.
- c) Por otra parte, los desplazamientos  $w_{n2}$  y  $w_{n3}$  son producidos por fuerzas pequeñas, ya que las placas son muy deformables en sentido perpen-

dicular a su plano. Se revisa la cubierta por permitir la compatibilidad de estos desplazamientos en los bordes, y se calculan correcciones a los esfuerzos producidos por los desplazamientos o de cada placa.

Normalmente esta corrección produce esfuerzos pequeños comparados con los producidos por los desplazamientos en los planos de cada placa.

2. Transmisión de las cargas a los apoyos



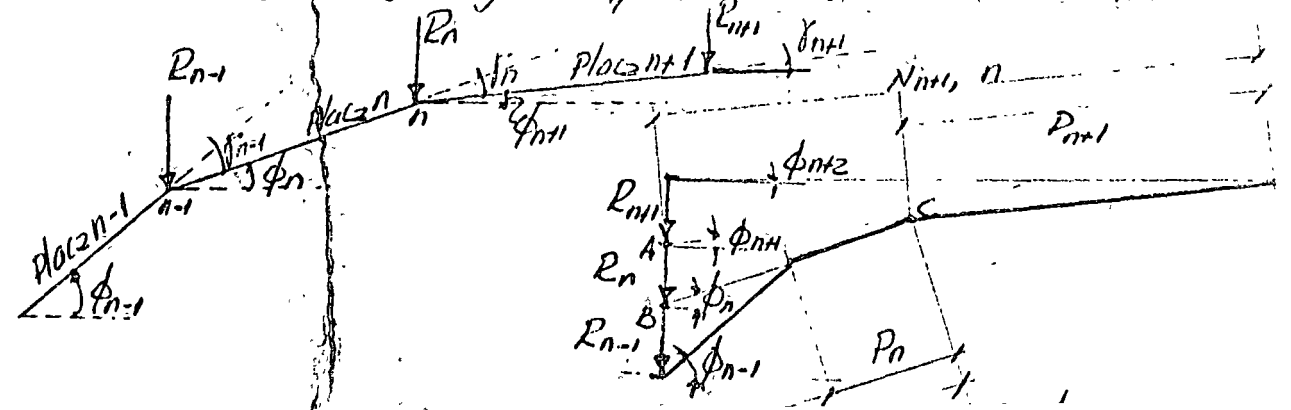
Considerese la sección transversal de la cubierta, sometida a la acción de las cargas de diseño.

El análisis se considera en dos etapas:

1ª etapa de fijación de aristas, para el cálculo de reacciones  $R$  y momentos transversales

2ª etapa: Se aplican acciones  $A$  iguales y de sentido

contrario a  $R$ , para permitir el desplazamiento de las aristas. Las reacciones  $R$  y las acciones  $A$  se consideran como líneas de carga aplicadas en cada arista



La línea de carga  $P_n$ , en cualquier borde, siempre se podrá resolver en dos componentes  $N_{n,n+1}$  y  $N_{n,n-1}$ , contenidas en los planos adyacentes  $n, n+1$

Considerando el triángulo ABC de la figura, se puede establecer que

$$N_{n,n-1} = R_n \frac{\cos \phi_{n+1}}{\sin \beta_n} = R_n \alpha_{n+1}$$

$$N_{n,n+1} = R_n \frac{\cos \phi_n}{\sin \beta_n} = R_n \beta_n$$

en donde, por brevedad

$$\alpha_n = \frac{\cos \phi_n}{\sin \beta_{n-1}} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\cos \phi_{n+1}}{\sin \beta_n} \quad \beta_n = \frac{\cos \phi_n}{\sin \beta_n}$$

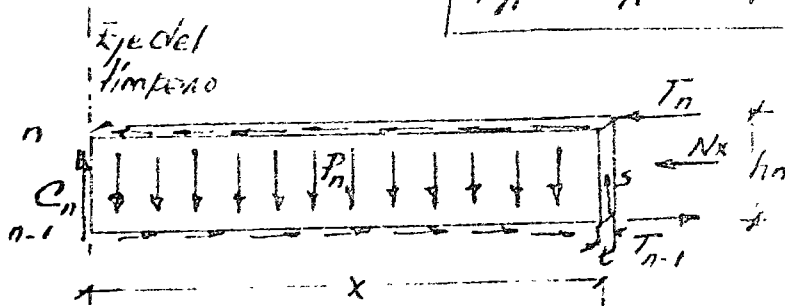
Puede verse que la carga en cada borde puede descomponerse en los planos de cada placa que concurre a una arista.

Analizando cada placa, las líneas de carga  $P$  pueden tener proyección en el plano, correspondientes a cada arista. La diferencia entre ellas  $P_n$ , inducirá flexión en la presente placa. Así

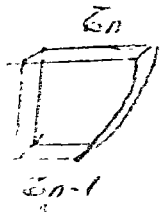
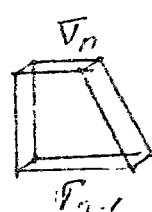
$$P_n = N_{n,n+1} - N_{n+1,n} = R_n \frac{\cos \phi_{n+1}}{\sin \beta_n} - R_{n+1} \frac{\cos \phi_{n-1}}{\sin \beta_{n-1}}$$

y en forma abreviada

$$P_n = R_n \alpha_{n+1} - R_{n+1} \beta_{n-1}$$



Distribución de  $P_n$



Esfuerzos normales. Esfuerzos cortantes

Estos esfuerzos  $P_n$  inducirán esfuerzos normales y tangenciales en cada sección transversal. Los cortantes en cada arista generan las fuerzas de arista  $T_n$

### 3. Cálculo de esfuerzos normales

Por equilibrio  $N_x = \int \sigma_x dA = \int_0^{h_n} \sigma_x t dx$

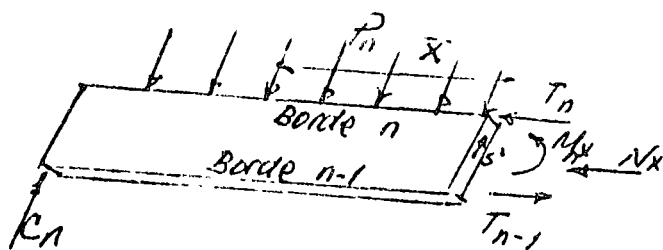
Además  $T_{n-1} = \int_0^x \sigma_m t dx$        $T_n = \int_0^x \sigma_n t dx$

Finalmente, por equilibrio de la sección transversal

$$T_{n-1} - T_n + N_x = 0$$

$$\therefore N_x = T_n - T_{n-1}$$

Por otra parte, aislando la placa, puede calcularse el momento externo en la sección en estudio, obteniéndose



$$M_{nx} = C_n x - \int_0^x P_n (x-x) dx$$

El momento interno resulta igual a:

$$M_n = \int_0^{h_n} s \sigma_x dA + \frac{1}{2} (T_{n-1} + T_n) h_n$$

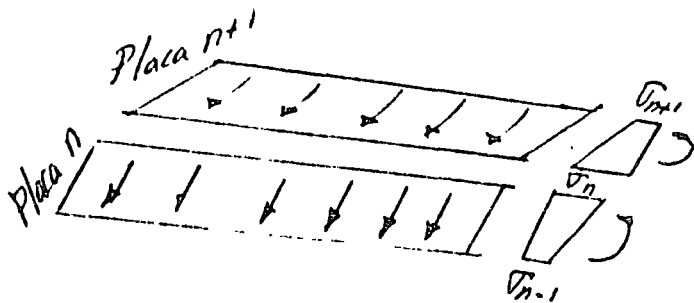
llamemos

$$M_n' = \int_{-b/2}^{b/2} s \sigma_x dA = M_n - \frac{1}{2} (T_{n-1} + T_n) h_n \quad (1)$$

que equivale a considerar el efecto de flexión en la placa, provocado por  $P_n$ , considerando aislada a la placa

Por otro lado, se puede afirmar que

$$N_x = \frac{1}{2} (\sigma_{n-1} + \sigma_n) A_n = T_n - T_{n-1} \quad (2)$$



Para la placa n+1

En base a las expresiones anteriores tratamos de calcular los esfuerzos en cada placa, aceptando hipótesis de resistencia de materiales.

$$\sigma_n = \frac{N_{n+1}}{A_{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} \quad (3)$$

donde  $S_{n+1} = \frac{A_{n+1} h_{n+1}}{6}$  es el módulo de sección de cada placa. ○

Por otra parte, en el mismo borde, para la placa enésima

$$\boxed{\bar{V}_n = \frac{N_n}{A_n} - \frac{M_n'}{S_n}} \quad (4)$$

Usando la ec. (3) para la placa  $n+1$

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= \frac{T_{n+1} - T_n}{A_{n+1}} + \frac{M_{n+1} - \frac{L}{2}(T_n + T_{n+1})h_{n+1}}{S_{n+1}} \\ &= \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} - \frac{4T_n}{A_{n+1}} - \frac{2T_{n+1}}{A_{n+1}} = \bar{V}_{n,n+1} - \frac{4T_n}{A_{n+1}} - \frac{2T_{n+1}}{A_{n+1}} \end{aligned} \quad (5)$$

Usando la ec. (4) para la placa  $n$

$$\bar{V}_n = -\frac{M_n}{S_n} + \frac{2T_{n-1}}{A_n} + \frac{4T_n}{A_n} = -\bar{V}_{n,n-1} + \frac{2T_{n-1}}{A_n} + \frac{4T_n}{A_n} \quad (6)$$

#### 4.- Compatibilidad de esfuerzos en aristas. ○

Considerando que los esfuerzos  $\bar{V}_n$  en la misma arista deben ser iguales en la placa  $n+1$  y en la enésima placa, podrá afirmarse la igualdad entre (5) y (6).

$$\bar{V}_n = -\bar{V}_{n,n-1} + \frac{2T_{n-1}}{A_n} + \frac{4T_n}{A_n} = \bar{V}_{n,n+1} - \frac{4T_n}{A_{n+1}} - \frac{2T_{n+1}}{A_{n+1}}$$

De aquí puede escribirse que:

$$\boxed{\begin{aligned} T_{n-1} \frac{1}{A_n} + 2T_n \left( \frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_{n+1}} \right) + T_{n+1} \frac{1}{A_{n+1}} &= \frac{1}{2} (\bar{V}_{n,n-1} + \bar{V}_{n,n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{M_n}{S_n} + \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} \right) \end{aligned}} \quad (7)$$

Esta expresión es válida para cualquier sección transversal en la placa doblada, y puede ser aceptada para la sección central. ○

Para cada borde es posible escribir una ecuación del tipo 7. Se dispondrá así de un número de ecuaciones igual al número de aristas, por lo que es posible plantear un sistema de ecuaciones de donde se obtienen las fuerzas  $T$  en las aristas.



donde  $S_{n+1} = \frac{A_{n+1} h_{n+1}}{e}$  es el módulo de sección de cada placa.

Por otra parte, en el mismo borde, para la placa enésima

$$\sigma_n = \frac{N_n}{A_n} - \frac{M_n'}{S_n} \quad (4)$$

Usando la ec. (3) para la placa  $n+1$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{T_{n+1} - T_n}{A_{n+1}} + \frac{M_{n+1} - \frac{1}{2}(T_n + T_{n+1})h_{n+1}}{S_{n+1}} \\ &= \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} - \frac{4T_n}{A_{n+1}} - \frac{2T_{n+1}}{A_{n+1}} = \sigma_{n,n+1} - \frac{4T_n}{A_{n+1}} - \frac{2T_{n+1}}{A_{n+1}} \quad (5) \end{aligned}$$

Usando la ec. (4) para la placa  $n$

$$\sigma_n = -\frac{M_n}{S_n} + \frac{2T_{n-1}}{A_n} + \frac{4T_n}{A_n} = -\sigma_{n,n-1} + \frac{2T_{n-1}}{A_n} + \frac{4T_n}{A_n} \quad (6)$$

#### 4. Compatibilidad de esfuerzos en aristas.

Considerando que los esfuerzos  $\sigma_n$  en la misma arista deben ser iguales en la placa  $n+1$  y en la enésima placa, podrá afirmarse la igualdad entre (5) y (6).

$$\sigma_n = -\sigma_{n,n-1} + \frac{2T_{n-1}}{A_n} + \frac{4T_n}{A_n} = \sigma_{n,n+1} - \frac{4T_n}{A_{n+1}} - \frac{2T_{n+1}}{A_{n+1}}$$

De aquí puede escribirse que:

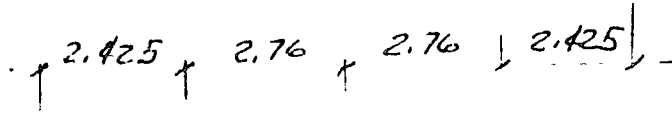
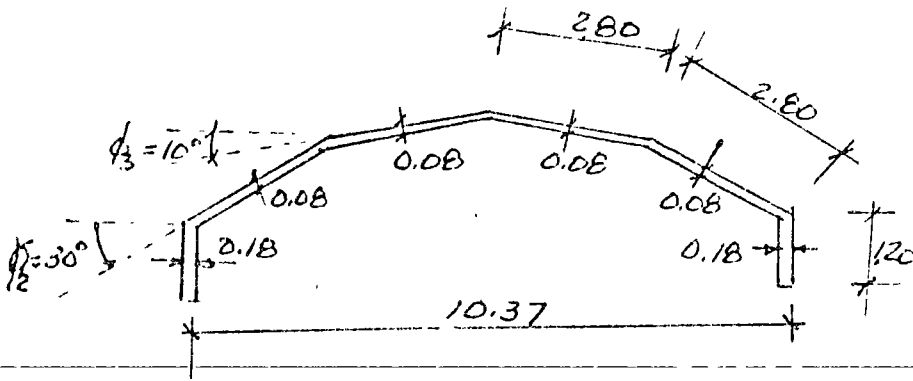
$$\begin{aligned} T_{n-1} \frac{1}{A_n} + 2T_n \left( \frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_{n+1}} \right) + T_{n+1} \frac{1}{A_{n+1}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{n,n-1} + \sigma_{n,n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{M_n}{S_n} + \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Esta expresión es válida para cualquier sección transversal en las placas dobladas, y puede ser aceptada para la sección central.

Para cada borde es posible escribir una ecuación del tipo 7. Se dispondrá así de un número de ecuaciones igual al número de aristas, por lo que es posible plantear un sistema de ecuaciones, dando origen a un sistema de

5. - Placa doblada sometida a la acción de peso propio.

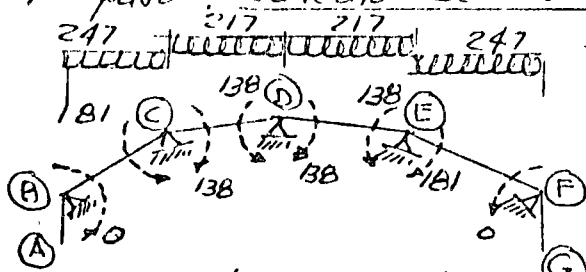
Considere la placa doblada de la figura, apoyada en sus extremos en diafragmas rígidos que se apoyan sobre cuatro columnas. La distancia entre diafragmas extremos es  $L = 20.00 \text{ m}$ .



Se intenta conocer la distribución de esfuerzos normales en la sección

media de la placa doblada, aceptando la acción de peso propio, el cual produce  $570 \text{ kg/m}$  en las traves de borde y  $214 \text{ kg/m}^2$  en las placas inclinadas.

1er paso: Cálculo de las fuerzas de fijación



Momentos de empotramiento (en  $\text{kgm/m}$ )

$$M_{CB} = -\frac{\omega l^2}{8} = -\frac{247 \times 2.42^2}{8} = -181 \frac{\text{kgm}}{\text{m}}$$

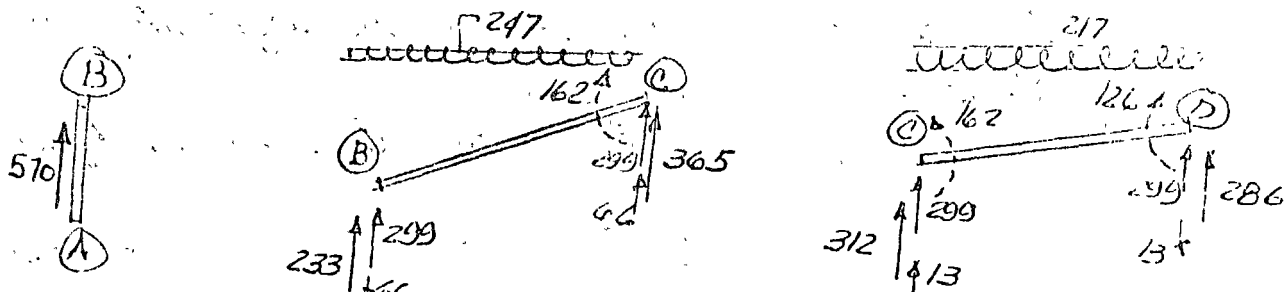
$$M_{CD} = \frac{\omega l^2}{12} = \frac{217 \times 2.76^2}{12} = +138 \frac{\text{kgm}}{\text{m}}$$

$$M_{DE} = -\frac{\omega l^2}{12} = -\frac{217 \times 2.76^2}{12} = -138 \frac{\text{kgm}}{\text{m}}$$

Distribución de los momentos de empotramiento

		C	D	E	F		
Relaciones relativas		0.75	1.0	1.0	1.0	0.75	
Factores de distribución		0.43	0.57	0.50	0.50	0.43	
M. emp.	0	-181	+138	-138	+138	-138	+181
1a dist.		+19	+24	0	0	-24	-19
1a trans.				+12	-12		
M. final	0	-162	+162	-126	+126	-162	+162

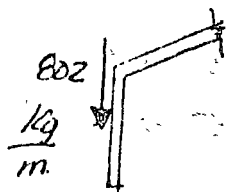
Las fuerzas de fijación de cada placa, por metro, serán:



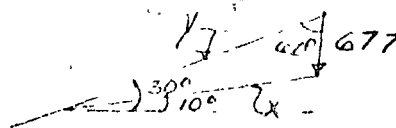
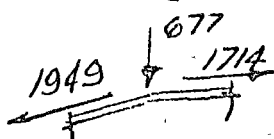
2º) Acciones en cada placa.

Por tanto las acciones en cada nudo serán:

Nudo B



Nudo C



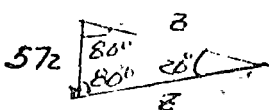
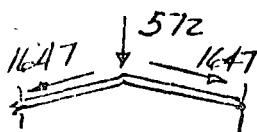
$$\frac{677}{\text{sen } 20^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$x = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 20^\circ} \cdot 677 = 1714 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$\frac{677}{\text{sen } 20^\circ} = \frac{y}{\text{sen } 100^\circ}$$

$$y = \frac{\text{sen } 100^\circ}{\text{sen } 20^\circ} \cdot 677 = 1949 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

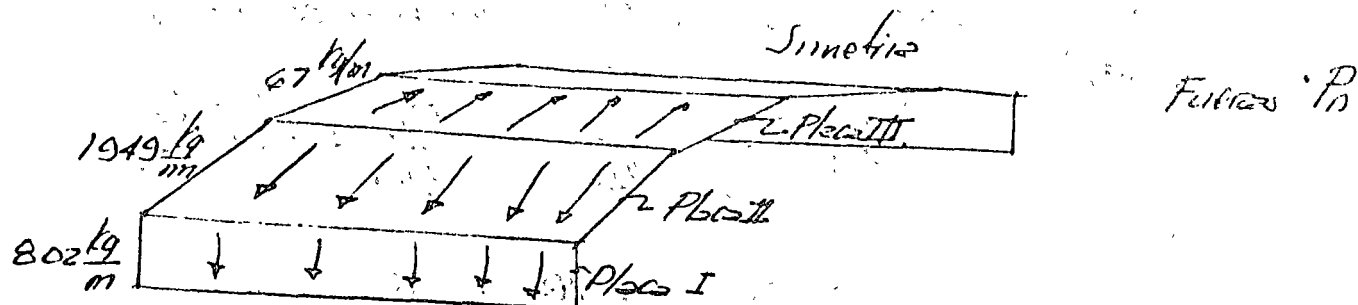
Nudo D



$$\frac{572}{\text{sen } 20^\circ} = \frac{z}{\text{sen } 80^\circ}$$

$$z = \frac{\text{sen } 80^\circ}{\text{sen } 20^\circ} \cdot 572 = 1647 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Así las acciones inducidas en cada placa, para permitir el desplazamiento de las bordes serán:



3er paso: Cálculo de fuerzas en cada arista

Las fuerzas  $P_n$  provocaran los siguientes momentos flexionantes en cada placa

$$(M_n)_I = \frac{w l^2}{8} = \frac{802 \times 20^2}{8} = 40100 \text{ kgm}$$

$$(M_n)_{II} = \frac{w l^2}{8} = \frac{1949 \times 20^2}{8} = 97450 \text{ kgm}$$

$$(M_n)_{III} = -\frac{w l^2}{8} = -\frac{67 \times 20^2}{8} = -3350 \text{ kgm}$$

Estos momentos actuaran sobre placas e ligas eiras y módulos de sección son:

$$A_I = 0.216 \text{ m}^2$$

$$S_I = 0.0432 \text{ m}^3$$

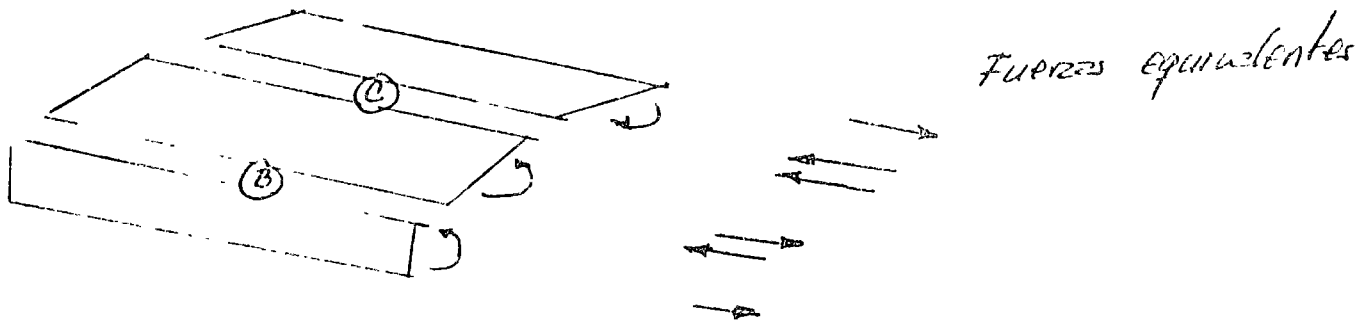
$$A_{II} = 0.224 \text{ m}^2$$

$$S_{II} = 0.1045 \text{ m}^3$$

$$A_{III} = 0.224 \text{ m}^2$$

$$S_{III} = 0.1045 \text{ m}^3$$

Los momentos  $M_n$  provocaran las siguientes fuerzas en cada una de las aristas de la placa doblada.



4º paso: Distribución de fuerzas cortantes en aristas

En las aristas (B) y (C) aplicaremos la siguiente ecuación:

$$\frac{T_{n-1}}{A_n} + 2T_n \left( \frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_{n+1}} \right) + \frac{T_{n+1}}{A_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{n-1}}{S_n} + \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} \right)$$

En la arista (B), la ecuación resulta ser:

$$\text{Borde libre } \frac{0}{0.216} + 2T_B \left( \frac{1}{0.216} + \frac{1}{0.224} \right) + \frac{T_C}{0.224} = \frac{1}{2} \left( \frac{40100}{0.0432} + \frac{97450}{0.1045} \right)$$

Haciendo operaciones, se obtiene

$$18.1878 T_B + 4.4643 T_C = 930388 \quad (1)$$

En la arista (C) se tiene:

*por simetría y antisimetría*

$$\frac{T_B}{0.224} + 2T_C \left( \frac{1}{0.224} + \frac{1}{0.224} \right) + \frac{0}{0.224} = \frac{1}{2} \left( \frac{97450}{0.1045} - \frac{3350}{0.1045} \right)$$

Efectuando operaciones:

$$4.4643 T_B + 17.8571 T_C = 450239 \quad (2)$$

Puede formarse así el sistema:

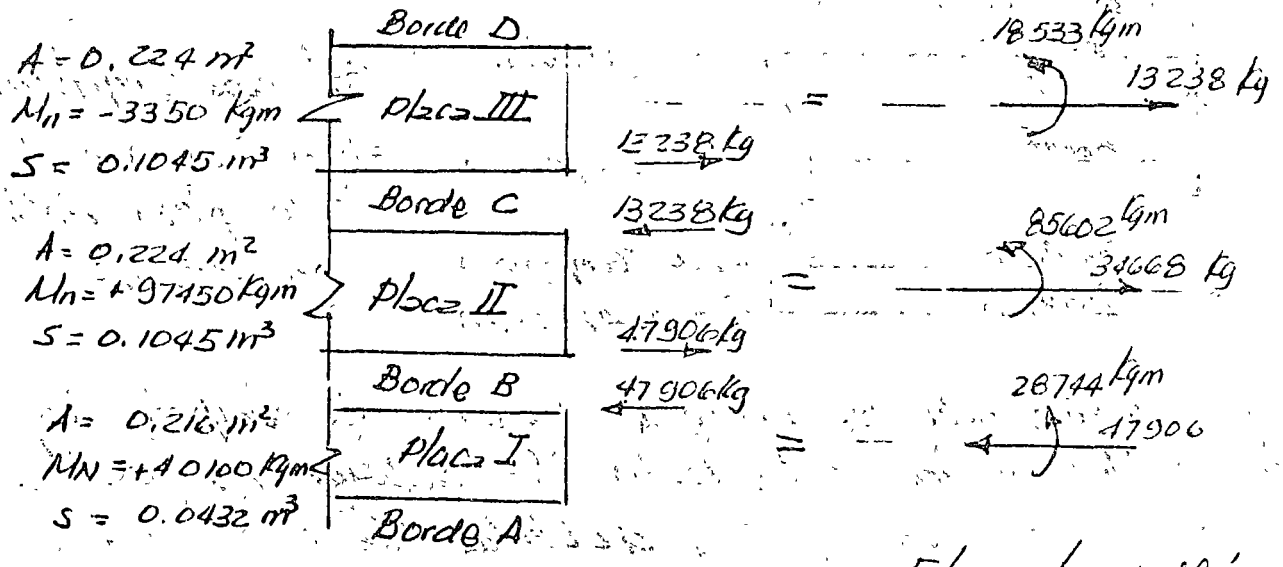
$$\begin{bmatrix} 18.1878 & 4.4643 \\ 4.4643 & 17.8571 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_B \\ T_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 930388 \\ 450239 \end{Bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{Bmatrix} T_B \\ T_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.1878 & 4.4643 \\ 4.4643 & 17.8571 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 930388 \\ 450239 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} T_B \\ T_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.8571 & -4.4643 \\ -4.4643 & 18.1878 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3052 \\ 1477 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47906 \\ 13238 \end{Bmatrix} [kg]$$

En consecuencia se tendrán las siguientes fuerzas en las aristas de la placa doblada:



Opciones  
inerciales

Elementos mecánicos  
correctivos

5º paso: Cálculo de los esfuerzos longitudinales en la sección transversal media.

Para el cálculo de los esfuerzos longitudinales, recordamos a las expresiones:

$$\bar{V}_n = -\frac{M_n}{S_n} + 2 \frac{T_{n-1}}{A_n} + \frac{4 T_n}{A_n} = \frac{M_{n+1}}{S_{n+1}} - \frac{4 T_n}{A_{n+1}} - 2 \frac{T_{n+1}}{A_{n+1}}$$

Así:

$$\bar{V}_{DC} = -\frac{3350}{.1045} + 2 \frac{13238}{0.224} + 4 \frac{0}{0.224} = -32057 + 118196 = 86139 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = +8.6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

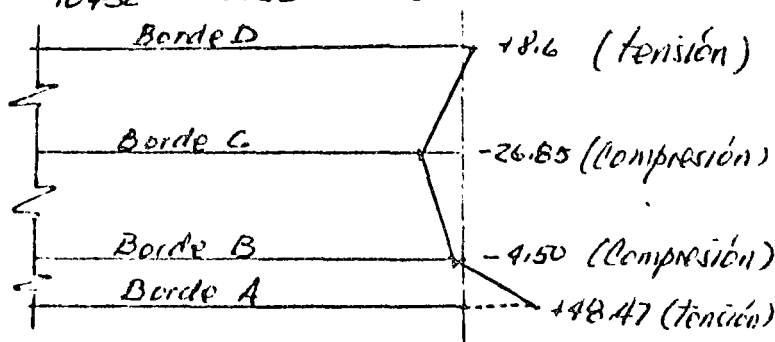
$$\bar{V}_{CD} = -\frac{3350}{.1045} - 4 \frac{13238}{0.224} - 2 \frac{0}{0.224} = -32057 - 236393 = -268450 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = -26.85 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\bar{V}_{CB} = -\frac{97450}{.1045} + 2 \frac{47906}{0.224} + \frac{4 \times 13238}{0.224} = -932536 + 427732 + 236393 = -268411 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = -26.84 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\bar{V}_{BC} = \frac{97450}{.1045} - \frac{4 \times 47906}{0.224} - \frac{2 \times 13238}{0.224} = 932536 - 863111 - 118196 = -48771 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = -4.88 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\bar{V}_{BA} = -\frac{40100}{.0432} + 2 \frac{0}{0.216} + \frac{4 \times 47906}{0.216} = -928241 + 887148 = -441093 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = -41.09 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\bar{V}_{AB} = \frac{40100}{.0432} - 4 \frac{0}{0.216} - \frac{2 \times 47906}{0.216} = +928241 - 443574 = +484667 = +48.47 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

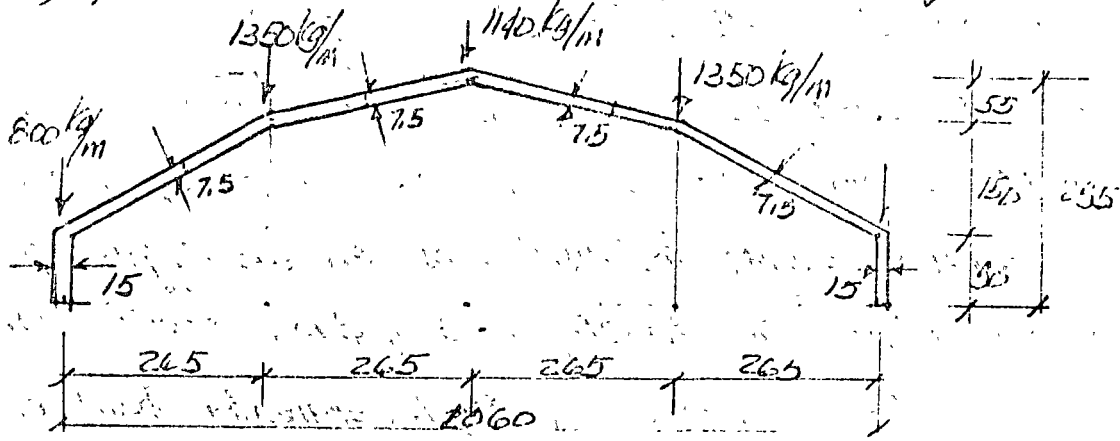


Esfuerzos longitudinales en la sección central de la placa doblada, en  $\text{kg}/\text{cm}^2$

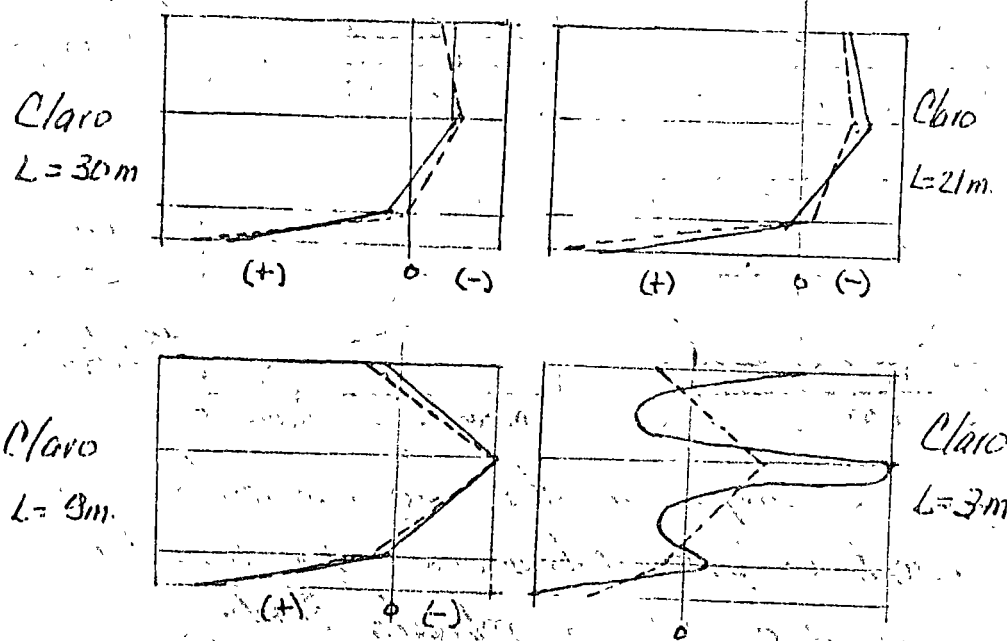
Esta solución debe ser corregida buscando la compatibilización de desplazamientos en los bordes. Sin embargo, es posible demostrar que para placas dobladas de estas dimensiones, dichas correcciones no alteran sensiblemente la distribución de esfuerzos mostrada en la figura anterior.

6. Distribución de esfuerzos normales en placas dobladas.

A fin de minimizar el error sobre distribuciones de esfuerzos en placas dobladas, a continuación se resumen los resultados obtenidos del análisis de una cubierta formada por placas dobladas, manteniendo la forma transversal y las condiciones de apoyo, pero alterando el claro entre diatragmas



Bajo la acción de las fuerzas en las aristas mostradas en la sección transversal, se obtienen las siguientes distribuciones:



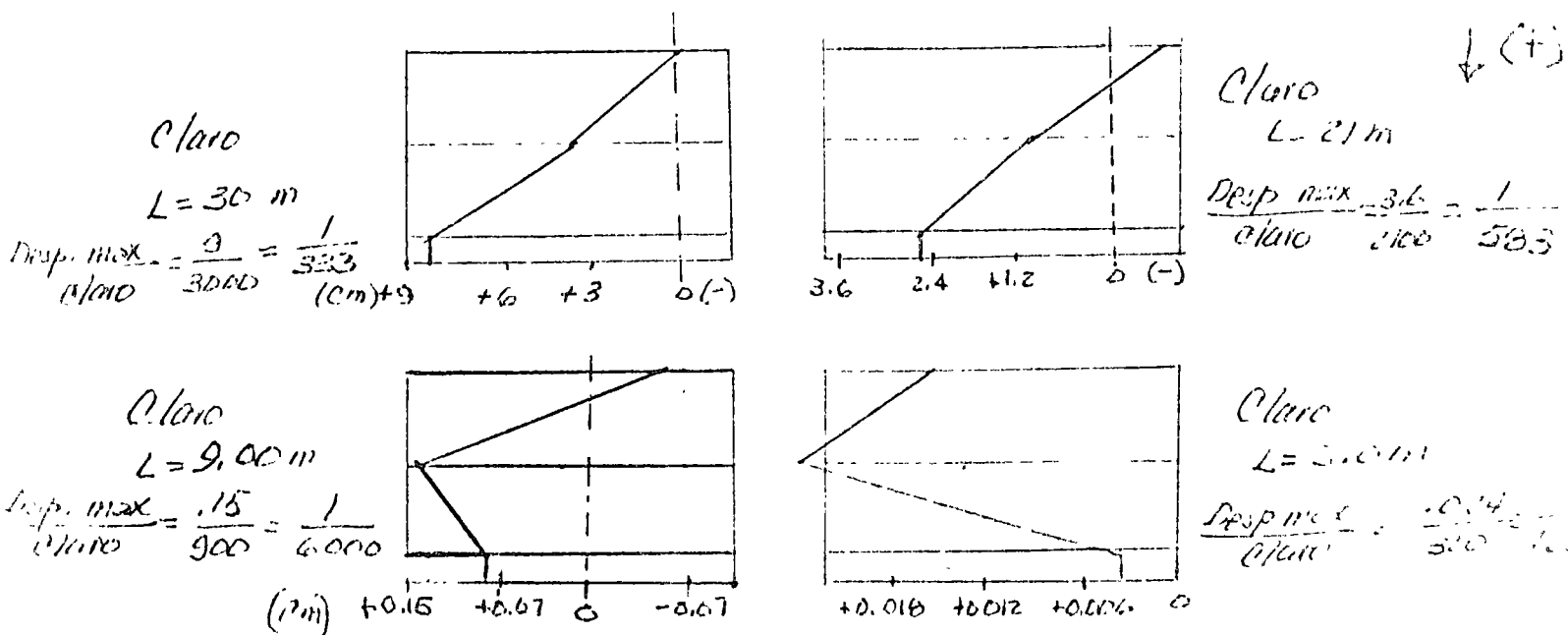
— Solución mediante elemento finito.  
 - - - Solución usando el método propuesto.

Se observa que el método aproximado antes descrito proporciona soluciones comparables con las obtenidas mediante el uso de

ya que las hipótesis de Resistencia de Materiales resultan ser satisfactorias. Si la relación  $P_e/EI$  es mayor que  $L^3$ , la distribución lineal de esfuerzos en cada placa deja de ser válida, ya que pueden presentarse distribuciones e incluso que invalidar la hipótesis de distribución lineal.

7.- Desplazamientos en placas plegadas

Usando la placa plegada anterior, fue posible definir el campo de desplazamientos en los aristas de la placa, en el centro del claro, condensándose los resultados en las siguientes figuras, para los claros de  $L=30, 21, 9$  y  $3$  m. Líneas entre tiempos extremos. Se consideran los desplazamientos positivos hacia abajo.

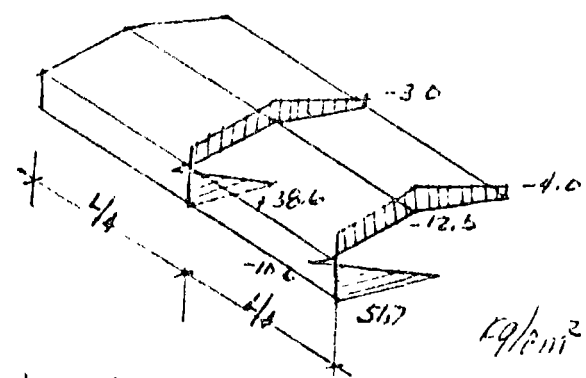


Se observa que los desplazamientos se encuentran entre límites comúnmente aceptados para estructuras. La distribución no es uniforme y cambia con la relación  $P_e/EI$ . Es entonces posible afirmar que la sección transversal se deforma y que cambian el ángulo relativo entre placas.

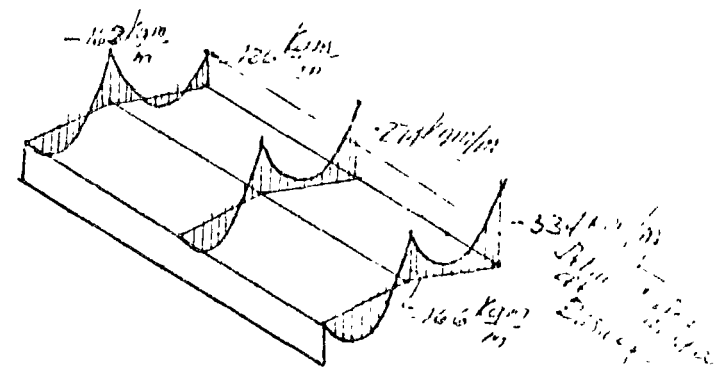


8. Resultados obtenidos del análisis de una cubierta plástica

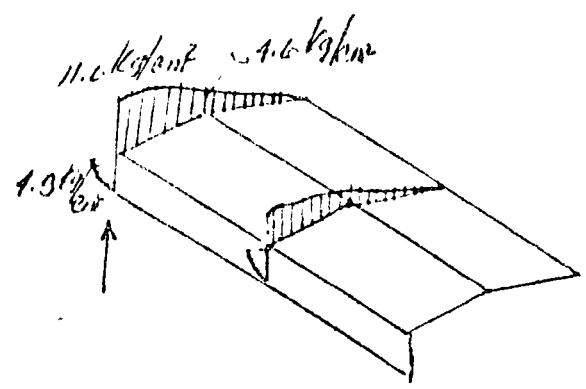
Después de realizar el análisis completo de una cubierta plástica se obtienen los resultados que se representan en la figura para una placa doblada, similar a la presentada anteriormente, haciendo las correcciones por desplazamiento relativo entre las bordes de las placas



a) Distribución de esfuerzos longitudinales en la placa doblada



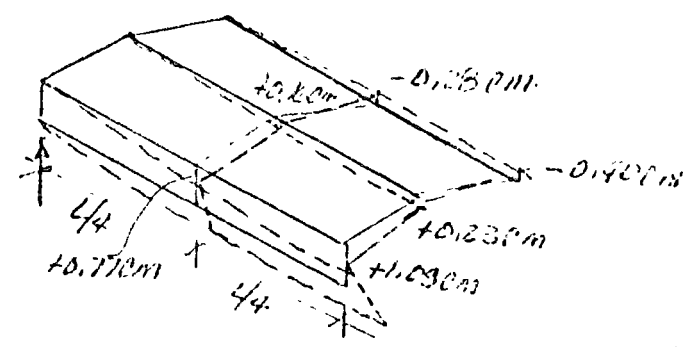
b) Distribución de momentos transversales



c) Distribución de esfuerzos cortantes

Cubo 20 m

$$\frac{\text{Desp. max}}{\text{Cubo}} = \frac{1.09}{2000} = \frac{1}{1835}$$



d) Distribución de desplazamientos

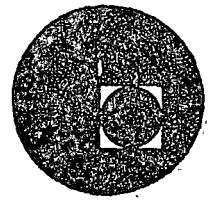
En base a las dos primeras distribuciones se tienen los elementos importantes necesarios para revisar y diseñar el refuerzo de la placa, mediante parrillas de refuerzo, y varillas en el borde inferior, así como las mismas para el caso de un muro

9. Cálculo de cascarones cilíndricos como placas dobladas.

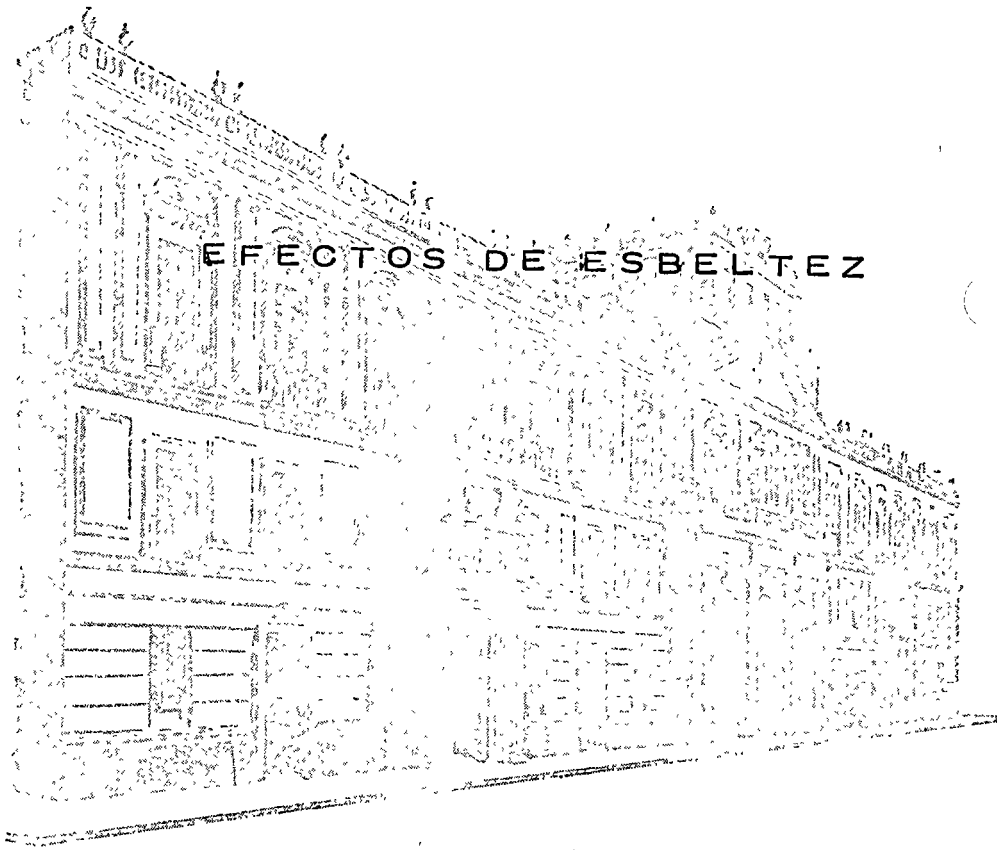
Han surgido autores que proponen analizar a las cascarones cilíndricos como placas dobladas, para simplificar el análisis de este tipo de cubiertas, mediante la suposición de una placa doblada esquelética, que represente al cascarón cilíndrico.



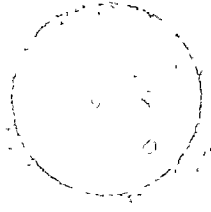
centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ



Suministro de alimentos para el ganado  
de cinco a diez días de duración  
1940



1940



1940

## EFFECTOS DE ESBELTEZ

### I.- PIEZAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

Quando una pieza corta es sometida a compresión axial, la carga que actúa sobre ella puede incrementarse hasta que el esfuerzo normal que produce llega al valor correspondiente a la resistencia última del material y a su rotura o aplastamiento ( $f'_c$  para el concreto,  $f_y$  para el acero, etc.).

A primera vista puede pensarse que el mismo comportamiento debería presentarse en todos los casos, independientemente de la longitud de la pieza, siempre que esta fuera perfectamente recta y la carga perfectamente axial. Obviamente esto no ocurre así.

Quando una pieza larga se carga con una fuerza creciente de compresión axial, se observa que, para un determinado valor de la fuerza, ocurre una flexión repentina a la que de inmediato sigue el colapso. Si se calcula el esfuerzo que corresponde a la carga que inicia la falla, se encuentra que es bastante menor al de la resistencia última del material. Puede concluirse, por ello, que la falla en este caso no se ha debido al hecho de que la resistencia del material se haya agotado, sino a que el estado de equilibrio en que la pieza se encontraba se ha perdido; esta pérdida repentina del equilibrio es lo que caracteriza el comportamiento de este tipo de piezas.

A la carga para la que se inicia la falla se le llama Carga Crítica y a la falla en sí, Falla por Pandeo de la columna.

El problema del pandeo es entonces un problema de estabilidad y no de resistencia.

Para valores de la carga axial menores que el valor de la carga crítica la configuración recta de la columna es de equilibrio estable; si se somete a la columna a la acción de una pequeña fuerza normal al eje de la misma, la columna se flexiona ligeramente, pero cuando la fuerza se retira la columna regresa a su posición recta de equilibrio.

Para valores de la carga axial mayores que el de la

carga crítica la configuración recta es también de equilibrio, pero el equilibrio en este caso es inestable, basta cualquier fuerza accidental, excentricidad o falta de homogeneidad en el material para que la falla sobrevenga, la experiencia ha demostrado que no es posible sobrepasar la carga crítica o siquiera llegar a ella sin que ocurra la falla porque imperfecciones de algún tipo son inevitables.

La carga crítica corresponde a la transición de la condición de equilibrio estable a la de equilibrio inestable, esto es, corresponde a la condición de equilibrio indiferente; para ella son posibles dos configuraciones de equilibrio, una recta y una ligeramente deformada; en efecto, como antes se dijo, si durante la condición de equilibrio estable se aplica una pequeña fuerza transversal al eje longitudinal de la pieza esta sufre una deformación también pequeña, y al cesar la acción de la carga transversal la pieza regresa a su posición original. Si durante la condición de equilibrio inestable se repite la operación, la pieza no regresa a su posición original sino que falla. Puede pensarse en una condición intermedia, correspondiente a la condición de equilibrio indiferente, tal que la deformación producida por la carga transversal permanece una vez que esta carga cesa de actuar. Se dice en este caso que ocurre una bifurcación de la posición de equilibrio y en este hecho se basa la determinación de la carga crítica.

En la figura 1 se presenta una analogía que puede ayudar a visualizar los conceptos anteriores.

El diagrama muestra la curva de carga versus desplazamiento para un sistema elástico. La curva comienza en el origen y se curva hacia arriba, representando un comportamiento elástico no lineal. El punto de bifurcación ocurre cuando la curva se vuelve horizontal, lo que indica una pérdida de estabilidad. Después de este punto, la curva continúa hacia arriba pero en una dirección diferente, representando un nuevo estado de equilibrio.

El punto de bifurcación se encuentra en el punto donde la curva cambia de dirección, lo que indica una transición de un estado estable a uno inestable.

La carga crítica es el valor de la carga en el punto de bifurcación, donde el sistema pierde su estabilidad.

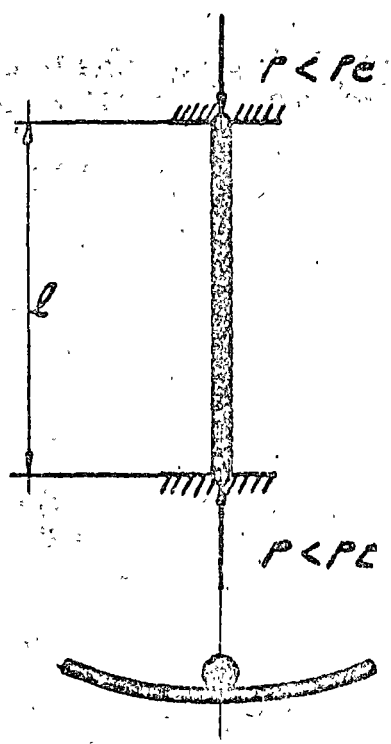
El diagrama ilustra cómo una pequeña perturbación puede llevar al sistema a un estado de equilibrio diferente, dependiendo de la carga aplicada.

Este tipo de análisis es crucial para entender el comportamiento de estructuras sometidas a cargas críticas, especialmente en el diseño de componentes de ingeniería.

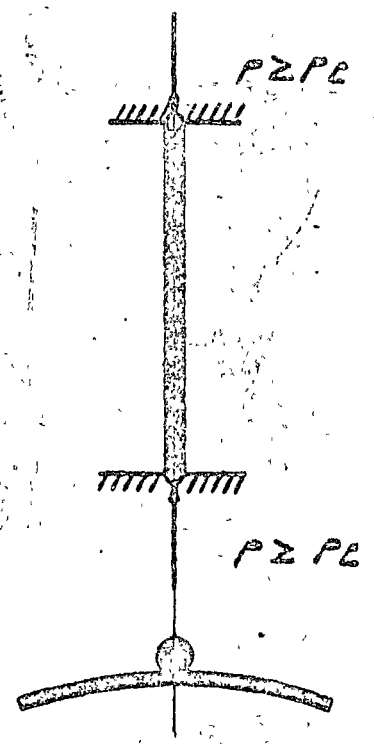
Para un análisis más detallado de la estabilidad de estructuras, se recomienda consultar la literatura especializada en el tema.

FIGURA 1-

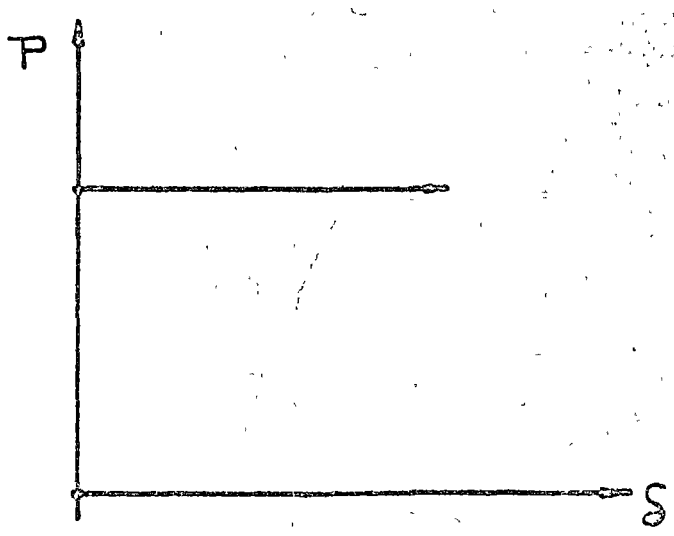
EFFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.



EQUILIBRIO ESTABLE.



EQUILIBRIO INESTABLE.



DIFURCACION DE LA POSICION DE EQUILIBRIO.

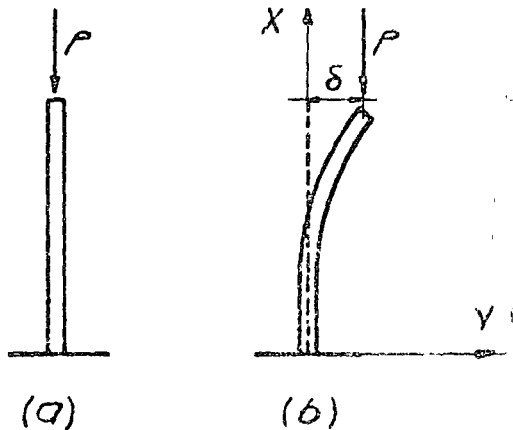
La determinación de la carga crítica para columnas --  
fué realizada por primera vez en 1759 por Euler y a él se deben los prime--  
ros estudios teóricos sobre el comportamiento de columnas largas.

En la figura 2 se presenta la obtención de la carga --  
crítica para el caso de una columna empotrada en un extremo y libre en el --  
otro.



FIGURA 2-

## EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.



DOS CONFIGURACIONES  
DE EQUILIBRIO POSIBLES  
SI  $P = P_{cr}$

SI EL MATERIAL ES ELASTICO Y LAS DEFORMACIONES SON PEQUEÑAS:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y) \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \boxed{1}$$

SI:  $k^2 = \frac{P}{EI} \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \boxed{2}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \delta \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \boxed{3}$$

LA SOLUCION ES:  $y = \delta + A \cos kx + B \sin kx \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \boxed{4}$

COMO:  $y = 0$  PARA  $x = 0$   $A = -\delta$

Y COMO:  $\frac{dy}{dx} = 0$  PARA  $x = 0$   $B = 0$

Y  $y = \delta (1 - \cos kx) \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \boxed{5}$

PARA  $x = L$   $\delta = \delta (1 - \cos kL)$

SE CUMPLE PARA  $\delta = 0$  Y PARA  $\cos kL = 0$

ESTO ES:  $kL = (2n+1) \pi/2 = L \sqrt{P/EI}$

$$P_{min.} = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

PARA  $n=0$  SE OBTIENE EL VALOR  
MINIMO QUE CORRESPONDE A LA  
CARGA CRITICA.

Si en la ecuación 5 de la figura 2

$$y = \delta(1 - \cos kx) \dots \dots \dots (5)$$

se hace:  $kL = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$

se tiene:  $y = \delta \left[ 1 - \cos \left( (2n + 1) \frac{\pi}{2L} x \right) \right]$

Esta ecuación proporciona las formas que la pieza podría adquirir al pandearse (los modos de pandeo) y es la ecuación característica de este problema.

La amplitud  $\delta$  permanece indeterminada y puesto que  $n$  puede adquirir cualquier valor entero, hay un número infinito de modos de pandeo, sin embargo solo el que se obtiene para  $n = 0$  tiene sentido físico y corresponde a la carga crítica.

El valor de la carga crítica para una pieza doblemente articulada es  $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ , se puede obtener en forma similar al caso mostrado y se le ha llamado Carga Crítica Fundamental o de Euler.

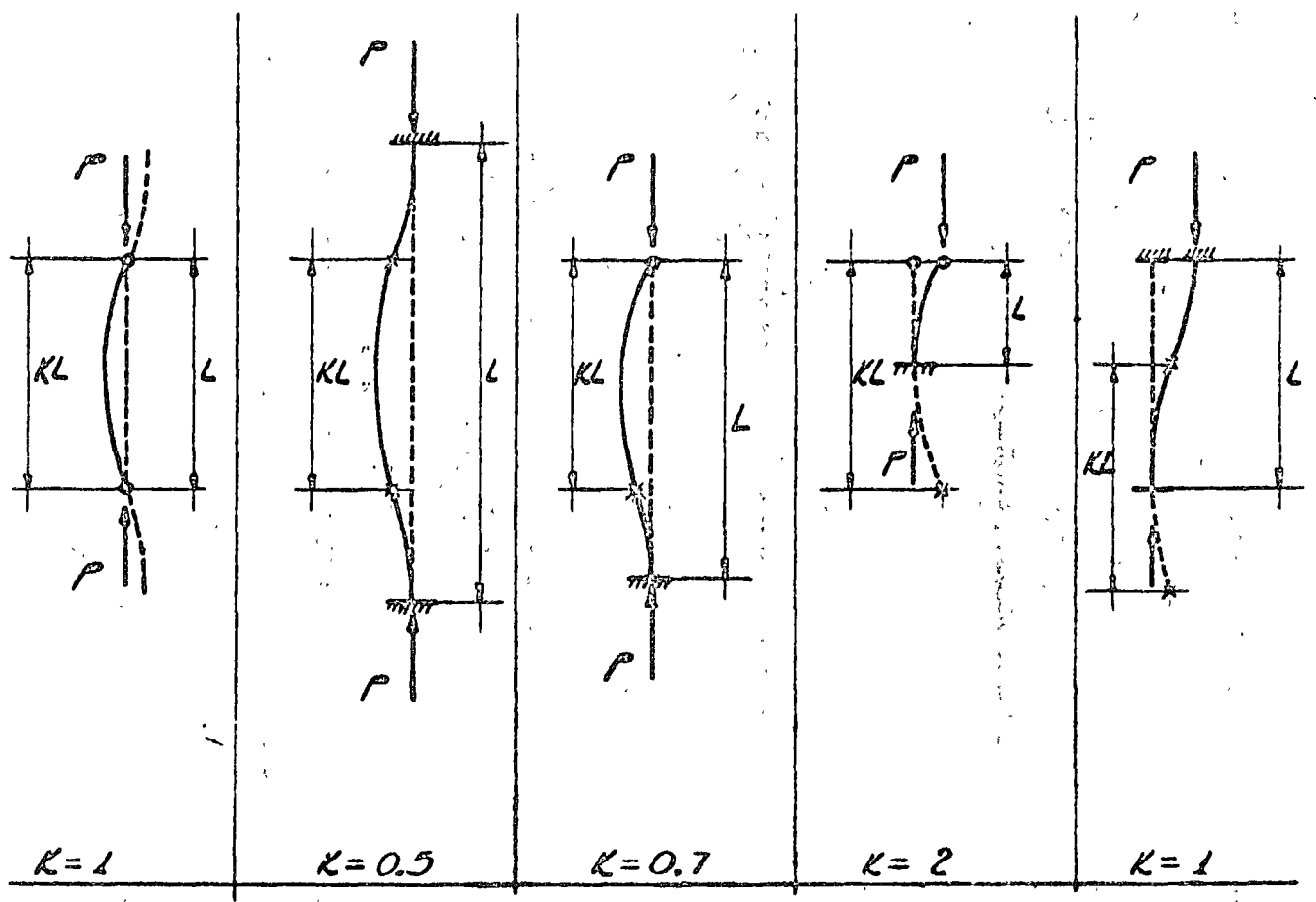
Para diferentes condiciones de apoyo se obtienen diferentes valores para la carga crítica que en general pueden expresarse haciendo uso de la siguiente fórmula:  $P_{cr} = \pi^2 EI/(Kl)^2$ . En ella  $k$  es un coeficiente que varía con el tipo de apoyo.

Al producto  $kL$  se le conoce con el nombre de Longitud Efectiva de Pandeo de la columna en cuestión. En la figura 3 se indican los Valores de  $k$  para diferentes casos.

FIGURA 3:

EFFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.

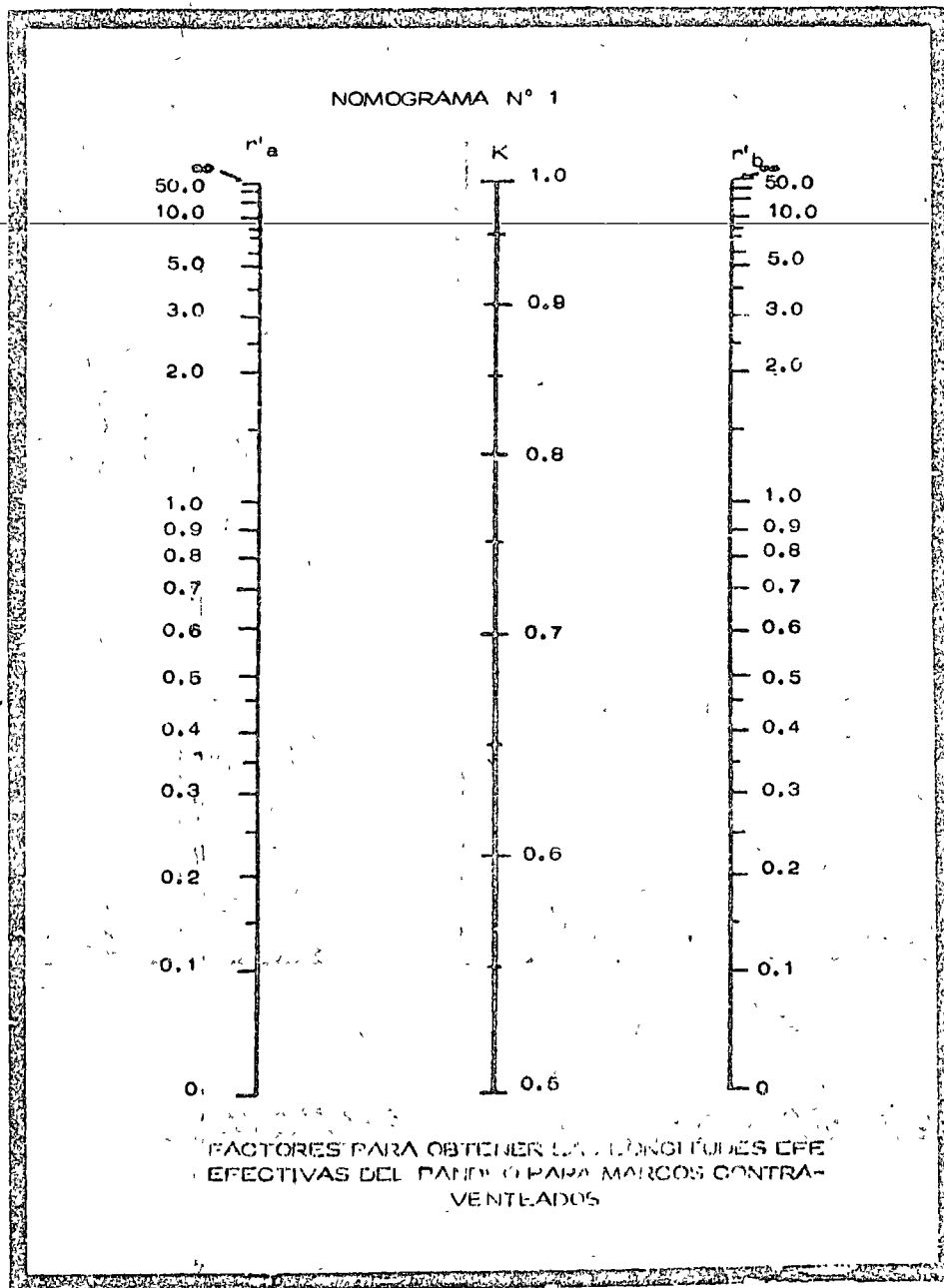
$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$



LONGITUDES DE PANDEO.

Las figuras 4 y 5 son nomogramas que permiten obtener valores de  $k$  para casos más generales, en función de las rigideces de los elementos que concurren a los extremos de la columna en estudio.

FIGURA 4.-

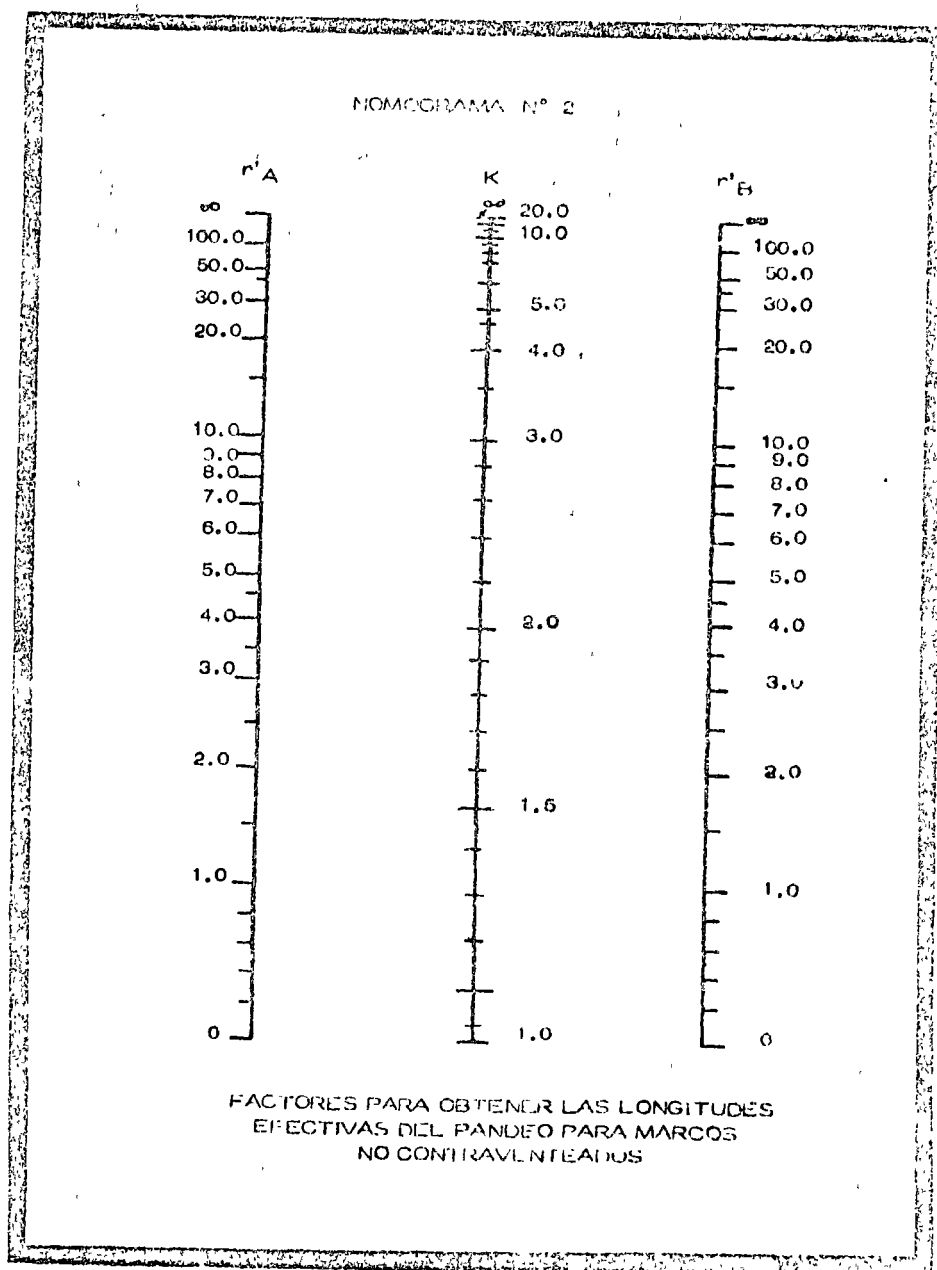


$$r'_a = \frac{\left[ \sum (I/L) \text{ columnas} \right]}{\left[ \sum (I/L) \text{ trabes} \right]} \text{ en el nudo a.}$$

FIGURA 5.-

EFECTOS DE ESBELTEZ EN  
COLUMNAS CON CARGA AXIAL.

$r'a = 0$  en un empotramiento.  
 $r'a = \infty$  en una articulación.



A partir de la carga crítica puede obtenerse el esfuerzo crítico de pandeo, simplemente dividiéndola entre el área de la sección recta de la pieza.

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

En esta expresión el número  $KL/r$  se conoce con el nombre de Relación de Esbeltez de la pieza.

Cuando las condiciones de apoyo de los extremos de una columna son las mismas en todas direcciones el cálculo del esfuerzo crítico debe hacerse considerando el radio de giro mínimo de la sección. Diremos en este caso que el pandeo ocurre alrededor del eje de menor momento de inercia y con ello queremos establecer que la pieza al pandearse se flexionará alrededor de ese eje.

Cuando las condiciones de apoyo son diferentes en direcciones distintas, deberá investigarse el pandeo al menos en dos direcciones perpendiculares y se utilizará para el cálculo del esfuerzo crítico el mayor de ambos valores de la relación de esbeltez.

La obtención de las fórmulas presentadas anteriormente se basa en la hipótesis fundamental de que la columna se comporta elásticamente hasta la aparición del fenómeno de pandeo; por lo tanto dichas fórmulas no son válidas en piezas en que el esfuerzo crítico de pandeo es mayor que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad del material de que están compuestas.

El rango de aplicación de la fórmula de Euler quedará entonces limitado por la condición:

$$f_{cr} = f_{LP}$$

Muchas de las piezas que se usan en la práctica tienen relaciones de esbeltez menores que la que corresponde a la limitación anterior, o simplemente son de materiales no elásticos en los que el límite de proporcionalidad no está definido; es por ello importante estudiar el problema de pandeo en el rango de comportamiento inelástico del material del que está constituida una columna.

Dicho problema fué atacado por primera vez por Engeser en 1889 en que publicó su teoría del módulo tangente, esta teoría se basa en la suposición de que para un determinado valor del esfuerzo, el esfuerzo crítico, es posible una configuración deformada de equilibrio, esto es, un estado de equilibrio indiferente, y que la deformación que se presenta depende del valor del módulo de elasticidad tangente correspondiente a ese esfuerzo crítico.

Esta suposición implica la aplicación de la fórmula de Euler--  
sustituyendo  $E$  por  $E_t$ .

(Ver la figura N° 6).

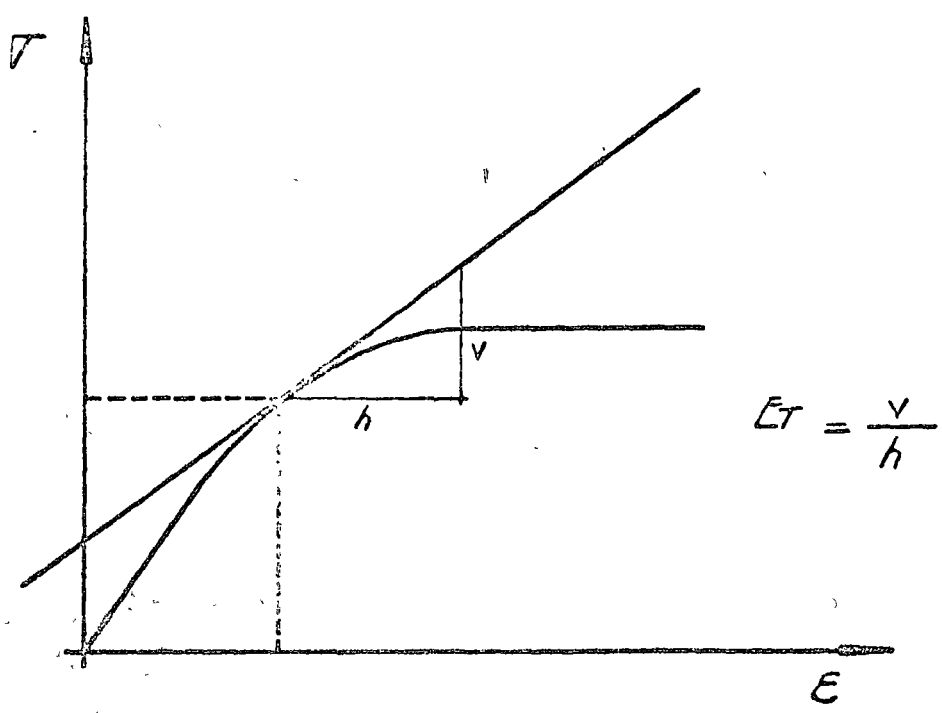
FIGURA 6-

EFFECTOS DE ESDELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.

LIMITE DE APLICACION DE LA FORMULA DE EULER.

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(k L/r)^2} = f_{LP}$$

$$\therefore \frac{kL}{r} = \pi \sqrt{E/f_{LP}}$$



$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_T}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2}$$



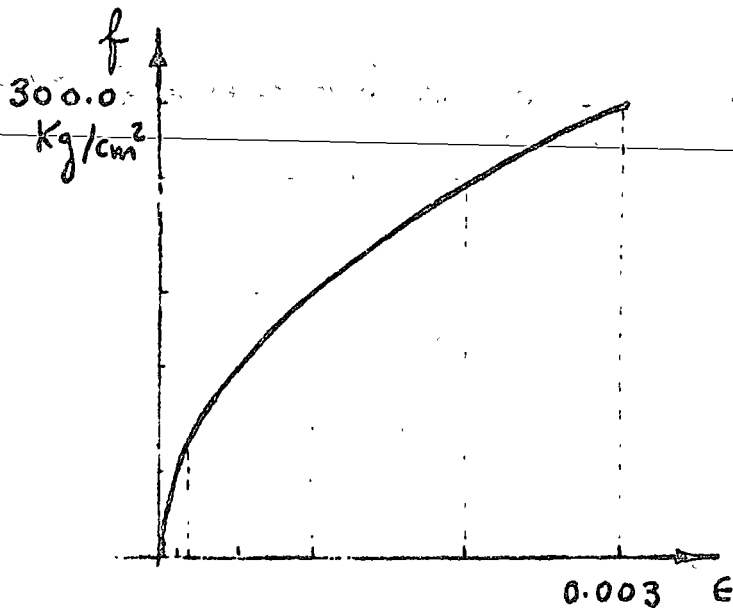
Dada la gráfica esfuerzo deformación de un material, se puede obtener de ella el valor del módulo tangente para cualquier esfuerzo, si se supone que ese esfuerzo es el crítico para una columna determinada, se puede aplicar la fórmula:  $f_{cr} = \frac{\pi^2 Et}{(kL/r)^2}$  y despejar el valor de  $L/r$  que corresponde al  $f_{cr}$  considerado.

La obtención de la carga crítica con la teoría del módulo tangente no es totalmente correcta desde un punto de vista estricto, pero se ha demostrado que en la práctica da resultados muy aceptables. - - (Shanley, Strength of Materials, McGraw Hill, 1957.)

El método general esbozado se aplica en el ejemplo -- siguiente.

## EJEMPLO 1. — EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

Dada la gráfica esfuerzo - deformación unitaria de un material, encontrar una gráfica esfuerzo crítico - relación de esbeltez que permita diseñar columnas esbeltas de ese material.



Ecuación de la gráfica:

$$f^2 = 3 \times 10^7 \epsilon$$

Expresión del módulo tangente.-

$$E_t = \frac{df}{d\epsilon} = \frac{2738.6}{\sqrt{\epsilon}}$$

Relación entre esfuerzo crítico y relación de esbeltez según la teoría del módulo tangente

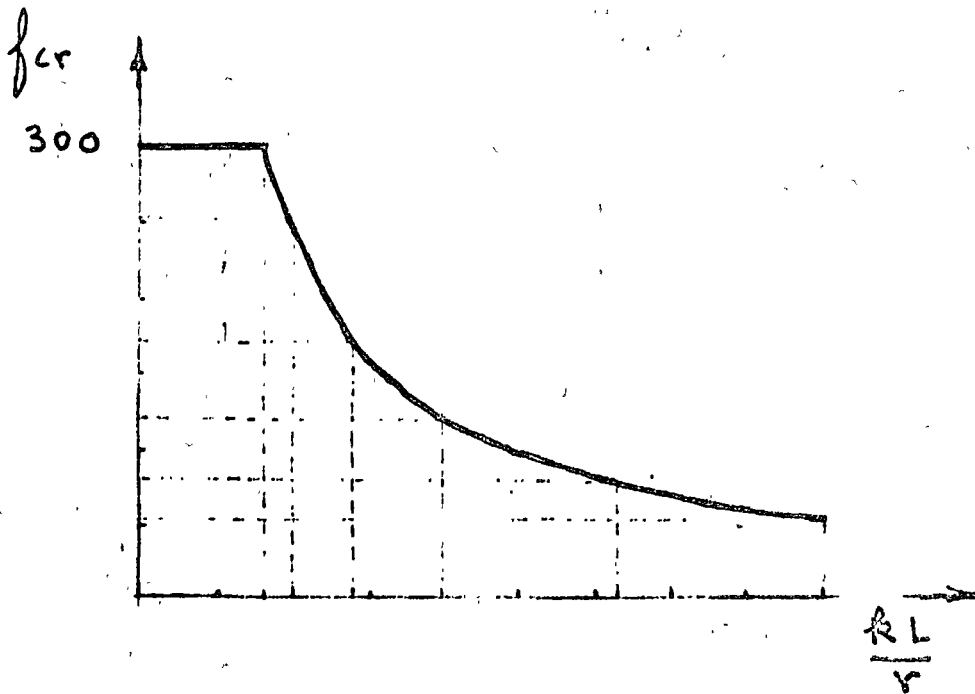
$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2} \quad \therefore \quad \frac{kL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{f_{cr}}}$$

## EJEMPLO 1.

EFECTOS DE ESBELTEZ EN  
COLUMNAS CON CARGA AXIAL

TABLA DE CALCULOS

$\epsilon$	$f$	$E_t$	$\frac{KL}{r}$
0.0001	54.8	273860	222.1
0.0002	77.5	193649	157.0
0.0005	122.5	122474	99.3
0.0010	173.2	86602	70.2
0.0020	244.9	61237	49.7
0.0030	300.0	50000	40.6

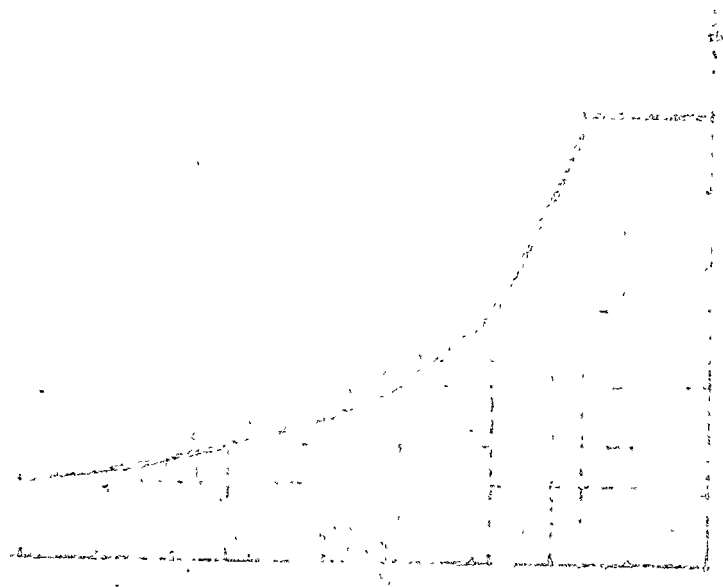


GRAFICA ESFUERZO CRITICO - RELACION DE ESBELTEZ

El caso especial del acero estructural

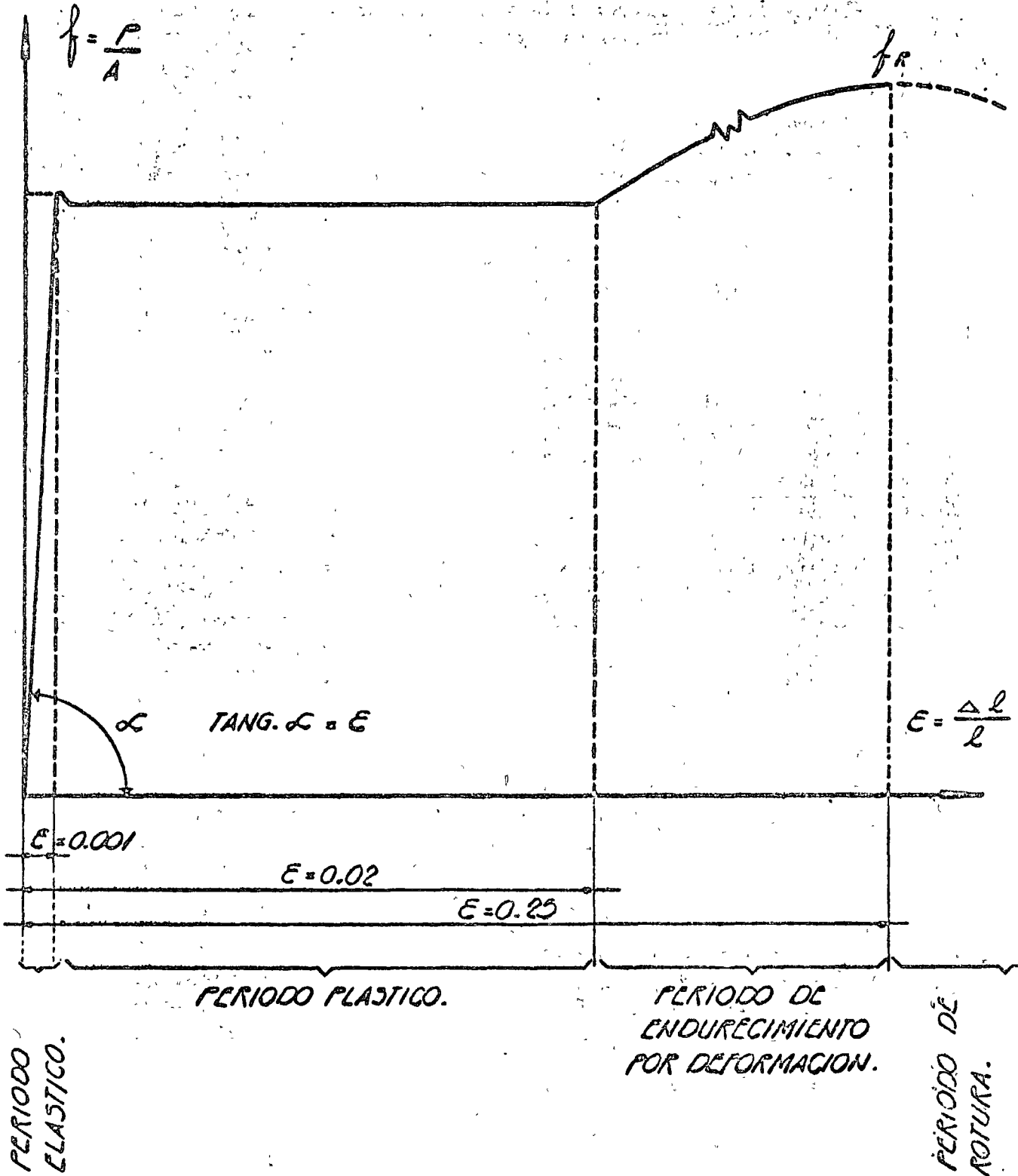
En el caso del acero estructural es muy conocida la gráfica correspondiente a una probeta libre de esfuerzos residuales sometida a tensión.

S.OT	T.1288	S.871	0.1288
T.871	T.1288	P.475	0.871
A.1288	T.1288	0.008	0.008



ESTABLER UN NO. DE... ESTABLECER UN NO. DE...

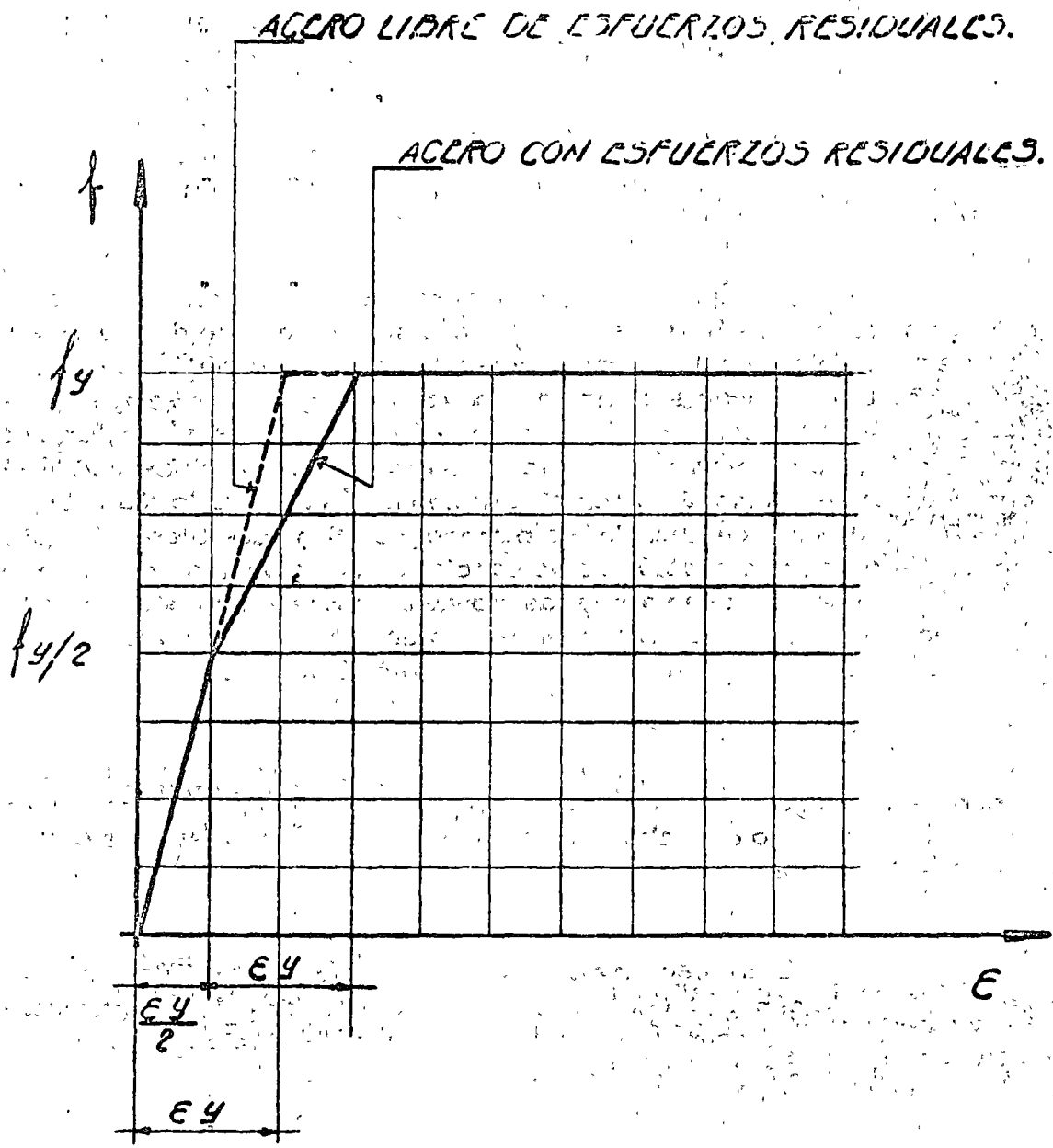
FIGURA 7 =

EFECTOS DE ESBOCITEZ EN  
COLUMNAS CON CARGA AXIAL.

Menos conocida que la gráfica anterior pero quizá más importante por ser más real, es la gráfica que se obtiene cuando la probeta — que se utiliza es un tramo de perfil estructural real, por ejemplo una vigueta o una sección formada por varias placas soldadas.

FIGURA 8.

EFFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.



Puede notarse que en el segundo caso, a diferencia del primero, el material no se conserva elástico hasta llegar al esfuerzo  $F_y$ , sino que para un valor del esfuerzo de aproximadamente  $F_y/2$  la gráfica deja de ser recta y se convierte en una curva que se prolonga hasta  $F_y$ , valor a partir del cual la gráfica es una línea recta horizontal.

La diferencia entre las dos gráficas puede explicarse por el hecho de que en el segundo caso la probeta está sometida, antes de que las cargas exteriores actúen sobre ella, a un estado de esfuerzos en equilibrio.

Dichos esfuerzos reciben el nombre de esfuerzos residuales y se pueden deber a varias causas, la más importante se encuentra en el proceso de fabricación del perfil.

Es bien sabido que para fabricar un perfil el acero que lo ha de formar se funde, se le da la forma requerida y luego se deja enfriar; al producirse este enfriamiento las partículas de acero se contraen, si esa contracción se efectuara libremente no se produciría ningún esfuerzo, sin embargo las distintas partes del perfil no se enfrían simultáneamente, en una viga por ejemplo, se enfrían primero los extremos de los patines y al hacerlo se contraen arrastrando al material adyacente aún en estado plástico; después se enfrían la parte central de los patines y el alma que tratan también de contraerse, pero esa contracción se ve parcialmente impedida por las partes ya endurecidas, esto da lugar a que las fibras de estas zonas queden con una longitud algo mayor de la que hubieran tenido de haberse enfriado libremente y por ello quedan sometidas a un esfuerzo inicial de tensión.

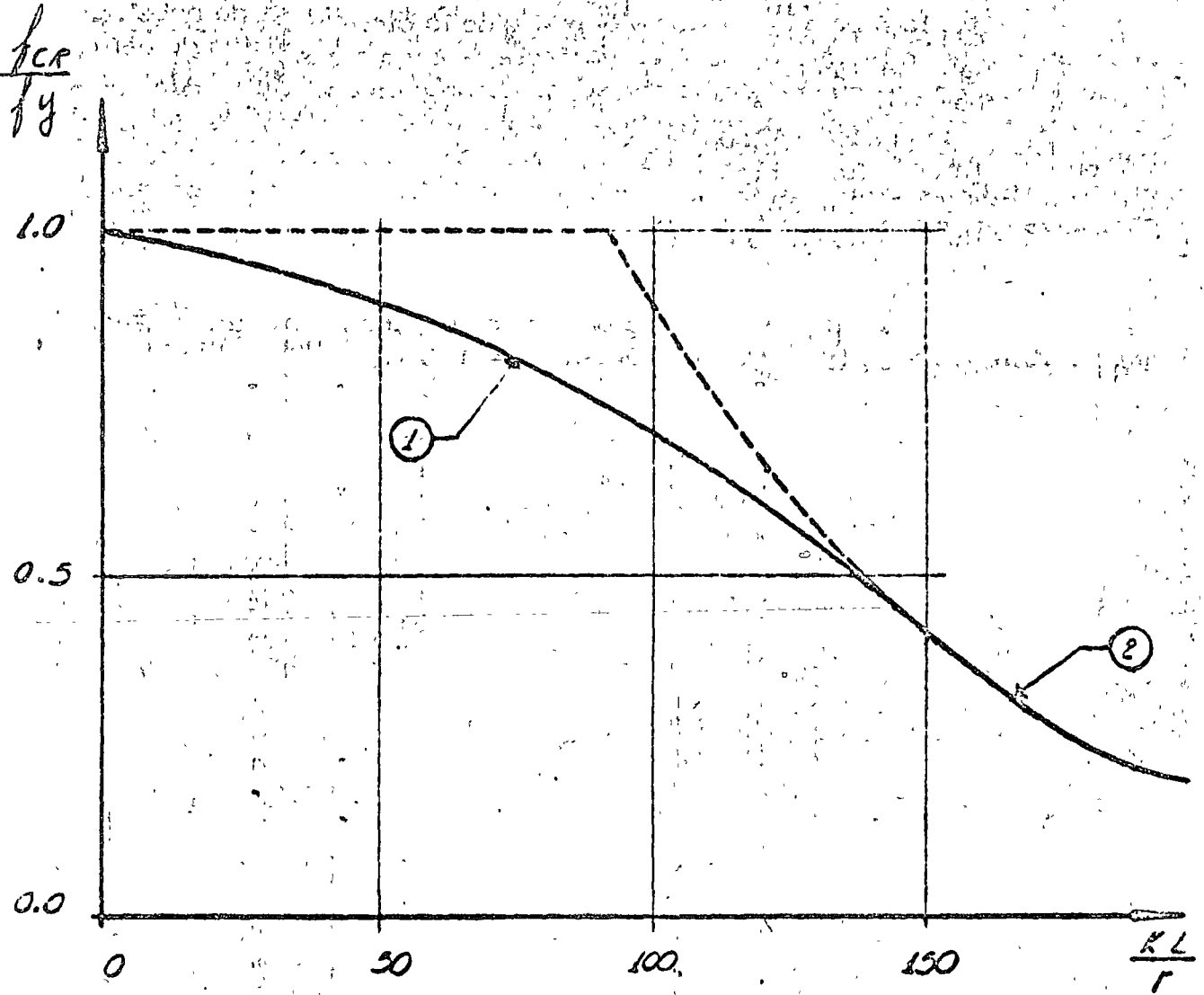
Es fácil mostrar por que el efecto de estos esfuerzos residuales consiste en reducir el valor del esfuerzo en el límite de proporcionalidad. (De Buen, Diseño de Columnas de Acero Cargadas axialmente. Ingeniería Vol. XXXIII N° 2).

La aplicación de la teoría general del módulo tangente a la gráfica esfuerzo deformación unitaria del acero estructural de la figura 8, permite obtener gráficas esfuerzo crítico - relación de esbeltez, como la de la figura 9, utilizables para diseño de columnas.



FIGURA 9-

EFFECTOS DE ESDELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.



CURVA  $f_{cr} - \frac{f}{r}$

- FORMULAS DEL A.I. 3. C.
- ①  $f_y \left( 1 - \frac{(KL/r)^2}{2 C_c^2} \right)$  ————— PANDEO INELASTICO.
  - ② —————  $\frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$  PANDEO ELASTICO (FORMULA DE EULER.)

La primera parte de la curva de la figura 9 se traza fácilmente utilizando la fórmula de Euler, pero para relaciones de esbeltez medias o bajas la forma de la curva depende de la distribución de esfuerzos residuales en la columna que es variable de caso a caso, se ha obtenido sin embargo una curva que se aproxima aceptablemente a la mayor parte de los casos prácticos suponiendo que el material se comporta elásticamente hasta un esfuerzo igual a  $F_y/2$ . Muchas especificaciones para diseño (AISC, Reglamento D.F., Manual de la CFE) presentan fórmulas obtenidas directamente de la figura 9.

La tabla 1 proporciona los esfuerzos permisibles  $F_a$  que se obtienen de aplicar las fórmulas del A.I.S.C.

TABLA 1-

EFFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

ESFUERZOS ADMISIBLES EN Kg/cm<sup>2</sup> PARA MIEMBROS EN COMPRESION

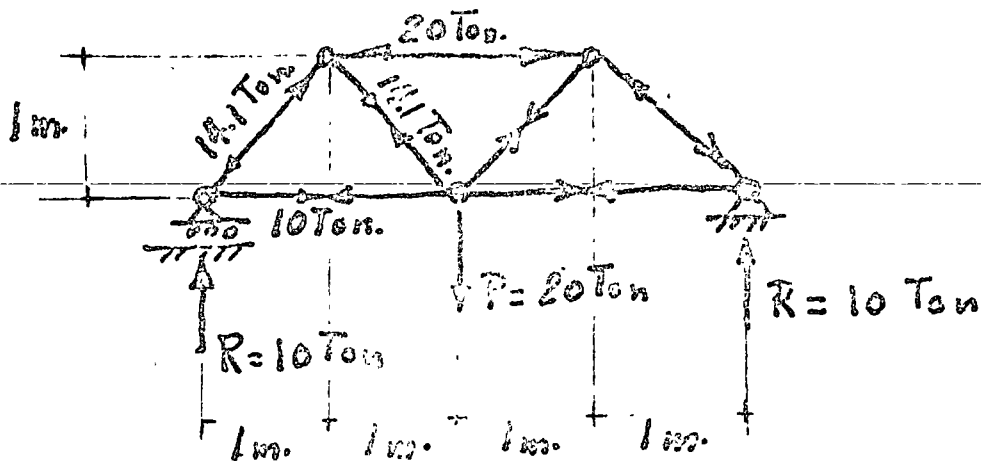
Miembros Principales y Secundarios con $\frac{Kl}{r}$ no mayor de 120				Miembros Principales con $\frac{Kl}{r}$ de 121 a 200				Miembros Secundarios * con $l/r$ de 121 a 200					
$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{Kl}{r}$	$F_a$ Kg/cm <sup>2</sup>
1	1516	41	1344	81	1072	121	713	161	405	121	710	161	510
2	1513	42	1338	82	1064	122	702	162	400	122	709	162	506
3	1510	43	1332	83	1056	123	693	163	395	123	703	163	503
4	1507	44	1326	84	1048	124	682	164	390	124	690	164	501
5	1504	45	1320	85	1040	125	671	165	386	125	687	165	499
6	1501	46	1315	86	1031	126	662	166	381	126	682	166	496
7	1498	47	1303	87	1024	127	651	167	376	127	674	167	492
8	1494	48	1303	88	1015	128	641	168	372	128	667	168	487
9	1491	49	1297	89	1007	129	631	169	368	129	661	169	487
10	1488	50	1290	90	998	130	622	170	364	130	654	170	484
11	1484	51	1284	91	991	131	612	171	359	131	648	171	482
12	1480	52	1278	92	982	132	603	172	355	132	641	172	480
13	1477	53	1271	93	973	133	593	173	351	133	635	173	477
14	1473	54	1265	94	965	134	585	174	347	134	629	174	475
15	1470	55	1259	95	956	135	576	175	343	135	623	175	473
16	1465	56	1252	96	948	136	567	176	339	136	617	176	471
17	1461	57	1245	97	939	137	560	177	335	137	612	177	469
18	1457	58	1239	98	930	138	551	178	331	138	606	178	467
19	1453	59	1233	99	921	139	543	179	328	139	600	179	465
20	1449	60	1226	100	913	140	536	180	324	140	596	180	463
21	1444	61	1218	101	903	141	528	181	321	141	590	181	461
22	1440	62	1212	102	894	142	521	182	317	142	585	182	459
23	1435	63	1205	103	885	143	513	183	314	143	580	183	453
24	1431	64	1198	104	877	144	506	184	310	144	575	184	456
25	1426	65	1191	105	867	145	499	185	307	145	571	185	454
26	1422	66	1184	106	858	146	493	186	304	146	566	186	453
27	1417	67	1177	107	849	147	486	187	300	147	562	187	451
28	1412	68	1170	108	840	148	480	188	297	148	558	188	450
29	1407	69	1162	109	830	149	473	189	294	149	553	189	449
30	1402	70	1155	110	821	150	467	190	291	150	549	190	447
31	1397	71	1148	111	811	151	461	191	288	151	545	191	446
32	1392	72	1140	112	802	152	454	192	285	152	541	192	445
33	1387	73	1133	113	792	153	447	193	282	153	537	193	444
34	1382	74	1126	114	783	154	443	194	279	154	534	194	443
35	1377	75	1118	115	773	155	437	195	276	155	529	195	442
36	1371	76	1110	116	763	156	432	196	274	156	526	196	441
37	1365	77	1103	117	753	157	426	197	271	157	522	197	440
38	1360	78	1095	118	743	158	420	198	268	158	520	198	439
39	1355	79	1088	119	733	159	416	199	265	159	516	199	433
40	1349	80	1080	120	723	160	410	200	262	160	513	200	437

\* K = 1 Para miembros secundarios.

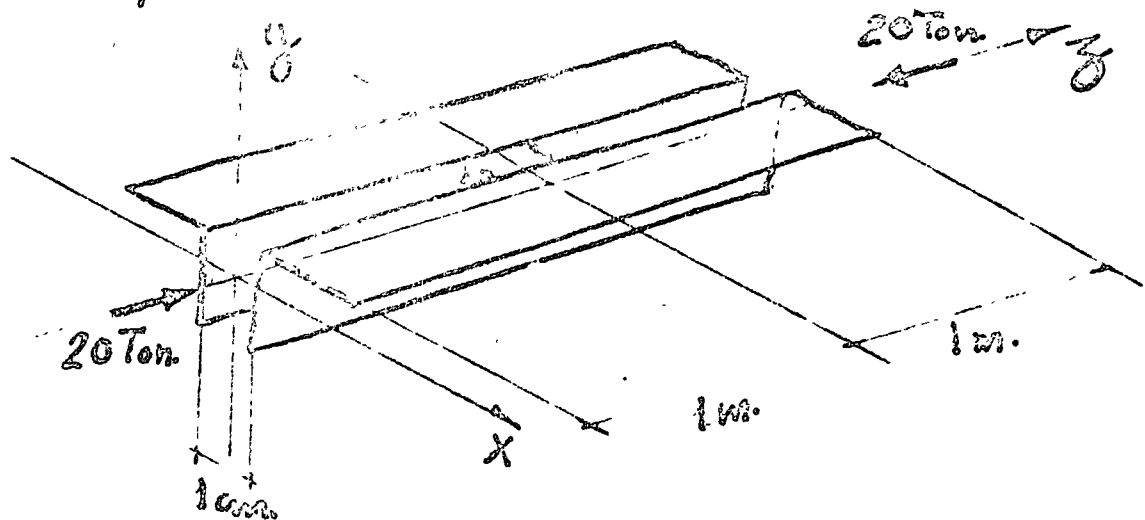
## EJEMPLO 2

## EFFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

Diseñar la cuerda superior de una armadura de acero A-36 libremente apoyada.  
Análisis:



Cuerda Superior



Se proponen dos ángulos espaldada con espaldada ligados al centro por una placa.

## EJEMPLO 2

## EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

Sean 2 ángulos de  $3" \times 3" \times \frac{1}{4}"$   
Del Manual de la Cia Fundidora de Monterrey:

$$r_{\min} = 1.59 \text{ cm.}$$

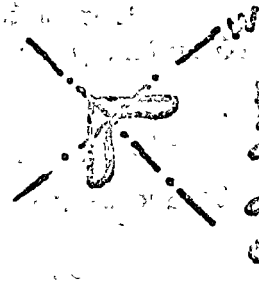
$$r_x = 2.36 \text{ cm.}$$

$$r_y = 3.50 \text{ cm.}$$

$$L = 200$$

$$k = 0.9^*$$

$$\frac{kLw}{r_{\min}} = \frac{100 \times 0.9}{1.59} = 56.6$$



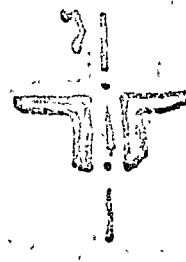
pandeo  
alrededor  
del  
eje w

$$\frac{kLx}{r_x} = \frac{200 \times 0.9}{2.36} = 76.4$$



pandeo  
alrededor  
del eje x

$$\frac{kLy}{r_y} = \frac{200 \times 0.9}{3.5} = 51.1$$



pandeo  
alrededor  
del eje y

Rige 76.4

De la tabla 1

$$F_a = 1103 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Area necesaria} = \frac{2000 \text{ Kg}}{1103} = 18.2 \text{ cm}^2$$

Dos ángulos de  $3" \times 3" \times \frac{1}{4}"$  tienen un área de  $20 \text{ cm}^2$  luego pueden aceptarse.

\* Steel Structures McGuire p. 574 (Prentice Hall)

### El caso especial del concreto reforzado

Aunque las columnas de concreto reforzado sometidas a carga axial no se presentan en la práctica, conviene ocuparse de este caso para presentar los conceptos que se usarán en el caso común de columnas de este material sometidas a flexocompresión. Por otra parte la capacidad de una columna sometida a compresión axial representa el límite superior de su resistencia, valor que a menudo conviene conocer.

Para atacar el problema con los conceptos vistos anteriormente se debe tener en cuenta que en este caso se trata de secciones compuestas de dos materiales y que debemos por ello contar con la gráfica esfuerzo-deformación unitaria de ambos.

Una gráfica típica correspondiente al acero estructural se presentó en la figura 7.

Por lo que se refiere al concreto simple se utiliza con frecuencia la que se presenta en la figura N° 10.

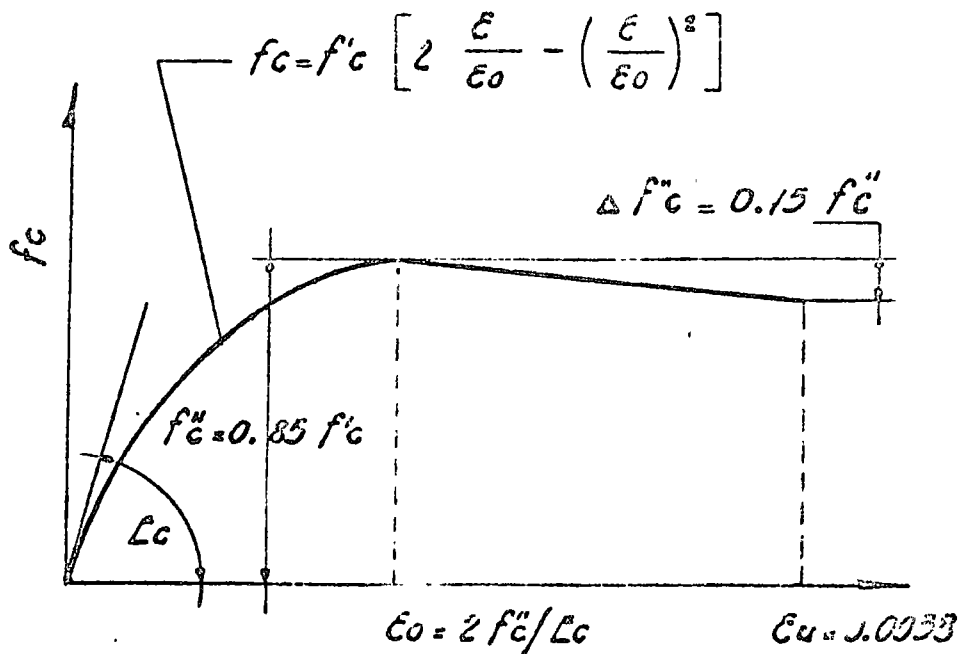
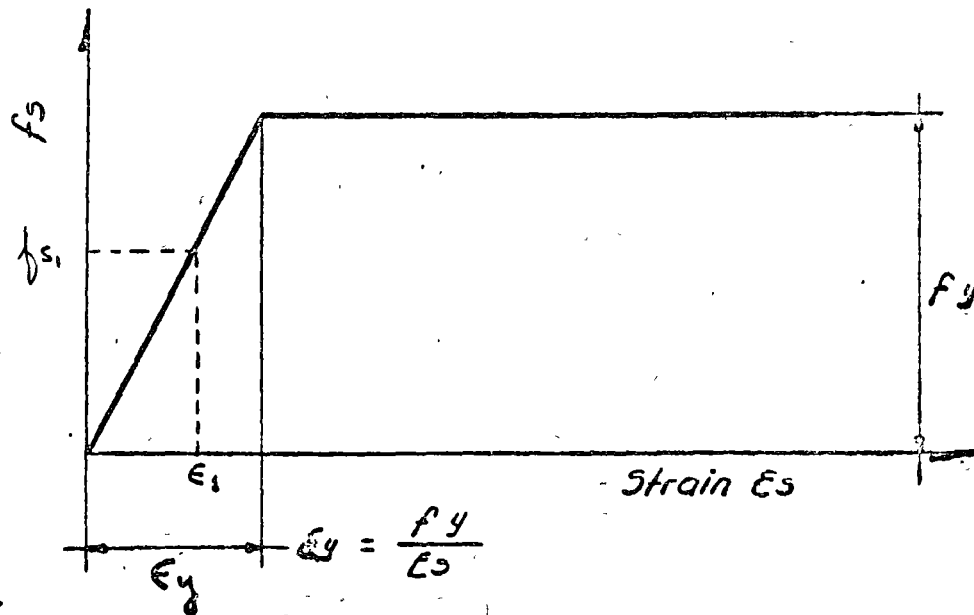
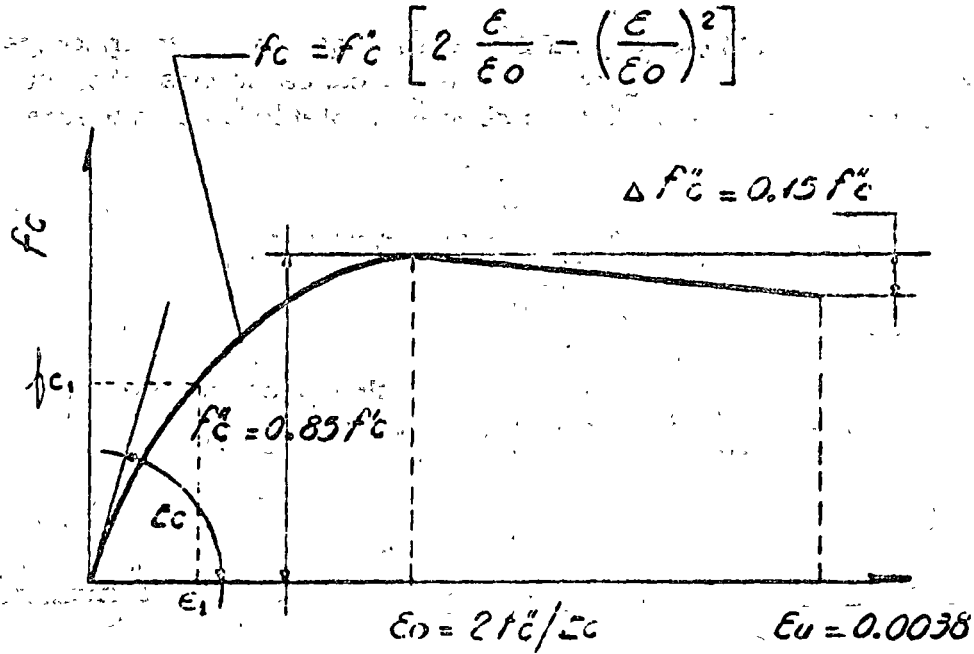


FIGURA 10

FIGURA 11-

EFFECTOS DE ESDELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL.



Es fácil conociendo ambas gráficas obtener una tercera que represente el material compuesto y que pueda utilizarse para la aplicación directa de la teoría del módulo tangente y la obtención de gráficas de diseño.

En efecto, para una  $\epsilon_c$  dada se puede encontrar el esfuerzo en ambos materiales y por lo tanto la carga correspondiente  $P = f_c A_c + f_s A_s$  y el esfuerzo correspondiente en el material compuesto

$$f_{cr} = \frac{f_c A_c + f_s A_s}{A_c + A_s}$$

Enseguida y utilizando el procedimiento del ejemplo 1 se podría encontrar la gráfica  $f_{cr} - L/r$  de diseño.



Es claro que este procedimiento es poco adecuado para los cálculos rutinarios que se realizan en la práctica, es por ello que se han buscado simplificaciones que permitan obtener expresiones que resuelvan el problema con mayor sencillez.

El Instituto Americano del Concreto recomienda valuar la constante EI haciendo uso de las expresiones siguientes que siendo muy generales proporcionan diseños conservadores en la mayor parte de los casos:

$$EI = \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_s}{1 + \beta_d}$$

6

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d}$$

$E_c$  = módulo de elasticidad del concreto

$I_g$  = momento de inercia de la sección total de concreto

$I_s$  = momento de inercia del refuerzo

$\beta_d$  = relación de la carga muerta que actúa sobre la columna a la carga total. Este factor tiene en cuenta las deformaciones diferidas debidas al flujo plástico del concreto.

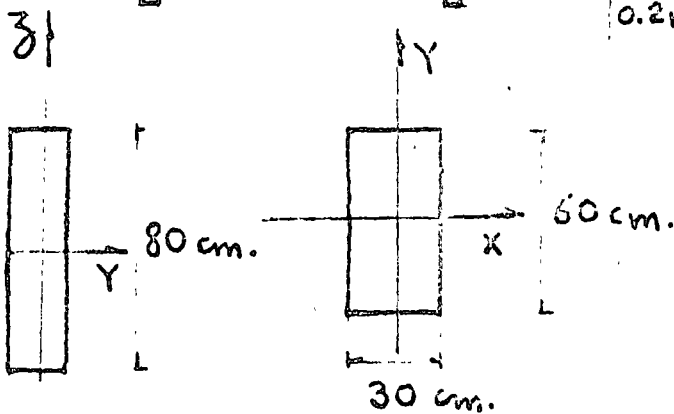
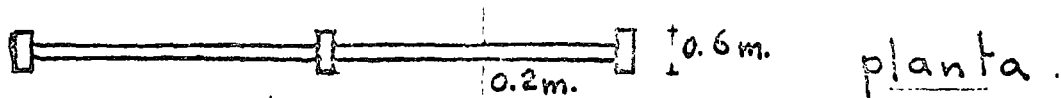
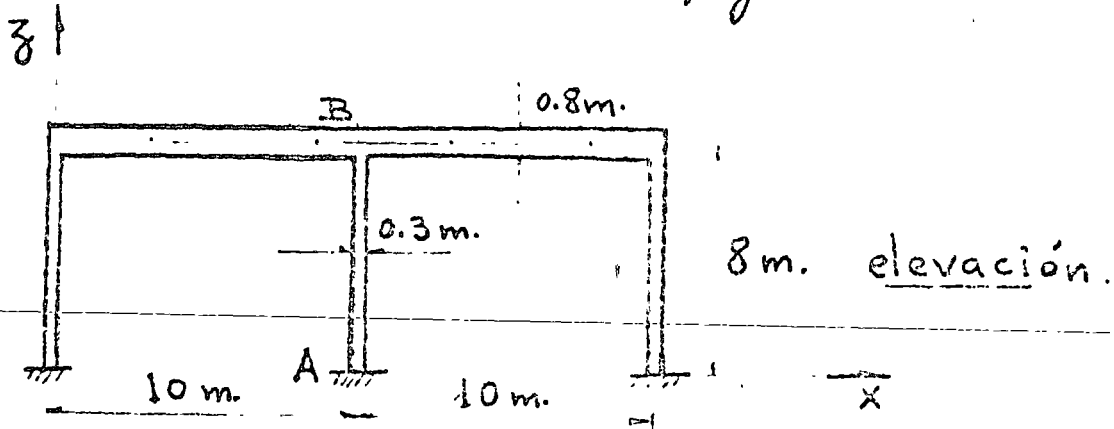
Existen varias proposiciones relativas a este problema (Wang and Salnon; p. 590 "Reinforced Concrete Design").

Puede entonces estimarse la carga crítica utilizando la teoría del módulo tangente y tomando como  $EI$  los valores anteriores.

### EJEMPLO 3.-

### EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

Encontrar la capacidad de carga de la columna AB del marco aislado de la figura:



20 cm.  
TRABE

COLUMNA

$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ "}$$

$$A_s = 4 \phi 1" = (20 \text{ cm}^2)$$

$$\text{Carga total} = 1000 \text{ Kg/m}^2$$

$$\text{Carga muerta} = 750 \text{ Kg/m}^2$$

a) Cálculo de momentos de inercia

a) Trabe

$$I = \frac{20 \times 60^3}{12} = 853333 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{853333}{1000} = 853 \text{ cm}^3$$

### EJEMPLO 3.

### EFECTOS DE ESQUELETOS EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

a2) Columna

$$I_x = \frac{30 \times 60^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4.$$

$$I_y = \frac{60 \times 30^3}{12} = 135000 \text{ cm}^4.$$

$$\frac{I_u}{L} = \frac{135000}{800} = 169 \text{ cm}^3.$$

b) Cálculo de la longitud efectiva de pandeo:

b1) Determinación de  $k_y$ . (ver fig. 5)

$$r'_A = 0 \quad (\text{empotramiento})$$

$$r'_B = \frac{169}{(853+853)} = 0.1$$

Del nomograma  $k_y = 1.03$

b2) Determinación de  $k_x$  (ver fig. 3)

$$k_x = 2 \quad (\text{cantiliver})$$

b3) Longitud efectiva

$$L_y = k_y L = 1.03 \times 800 = 824 \text{ cm.}$$

$$L_x = k_x L = 2.0 \times 800 = 1600 \text{ cm.}$$

c) Cálculo del producto EI.

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta d}$$

$$E_c = 10000 \sqrt{f'_c} = 142000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_{gx} = 540000 \text{ cm}^4; \quad I_{gy} = 135000 \text{ cm}^4.$$

## EJEMPLO 3.

EFECTOS DE ESELETEZ  
EN COLUMNAS CON CARGA AXIAL

3

$$\beta d = \frac{750}{1000} = 0.75$$

$$EI_x = \frac{0.4 \times 142000 \times 540000}{1 + 0.75} = 17526857000 \text{ Kg-cm}^2$$

$$EI_y = \frac{0.4 \times 142000 \times 135000}{1 + 0.75} = 4381714285 \text{ Kg-cm}^2$$

d) Cálculo de la carga crítica.

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 EI_x}{L_x^2} = \frac{1.75 \times 10^{10} \pi^2}{1600^2} = 67570 \text{ Kg.}$$

$$P_{cry} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_y^2} = \frac{0.43 \times 10^{10} \pi^2}{824^2} = 63690 \text{ Kg.}$$

Rige  $P_{cry}$ .

e) Cálculo de la resistencia como columna corta:

$$P_0 = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y$$

$$P_0 = 0.85 \times 200 \times 1800 + 20 \times 4000 = 386000 \text{ Kg.}$$

La falla ocurre por pandeo alrededor del eje y y la capacidad de carga de la columna es de:

$$\underline{63690 \text{ Kg}}$$

II. - PANDEO LATERAL DE VIGAS

Dado que parte de la sección de una pieza trabajando a flexión está sometida a esfuerzos de compresión, son de esperarse en ella problemas de pandeo.

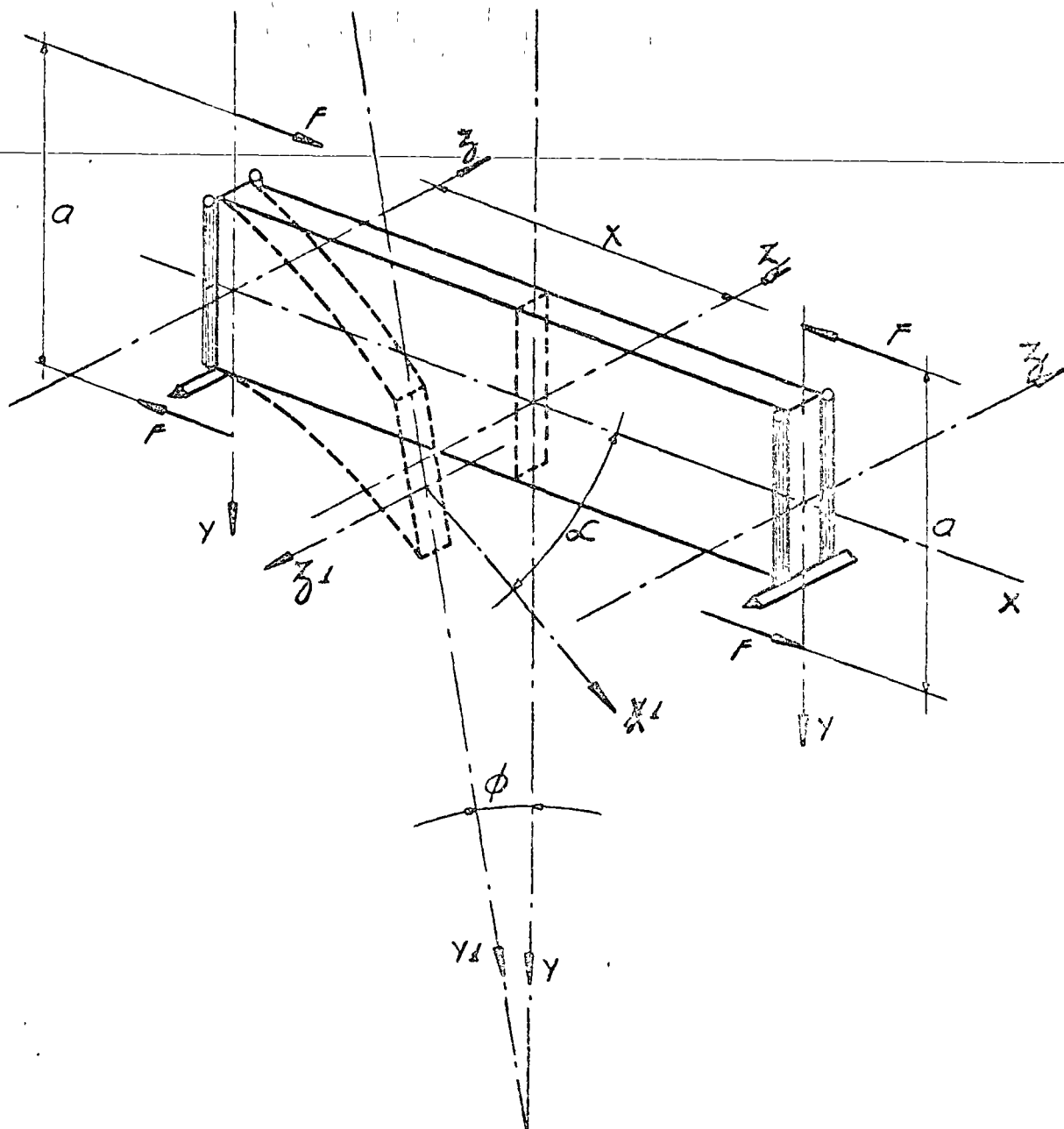
En efecto, si el momento que actúa sobre una viga se aumenta paulatinamente a partir de un valor pequeño, los esfuerzos normales irán aumentando también hasta que, para un valor determinado del momento la pieza falla. Con frecuencia, en piezas de longitud considerable y poco espesor, el esfuerzo que corresponde a la falla es menor que el que se requeriría para agotar la resistencia del material. Esto nos indica que, en este caso, como en el de columnas esbeltas, la falla se ha producido debido a un problema de inestabilidad.

El pandeo en vigas es un problema más complejo que el de columnas sometidas a carga axial por el efecto estabilizador que proporciona la parte de la pieza sometida a tensión.

La forma de falla se muestra en la figura N° 12, para una pieza sometida a flexión pura mediante momentos  $M_z = F \cdot a$  en sus extremos, y apoyada de tal modo que solo pueden presentarse los giros alrededor de los ejes "z" y "y".

FIGURA 12-

PANDEO LATERAL DE VIGAS.

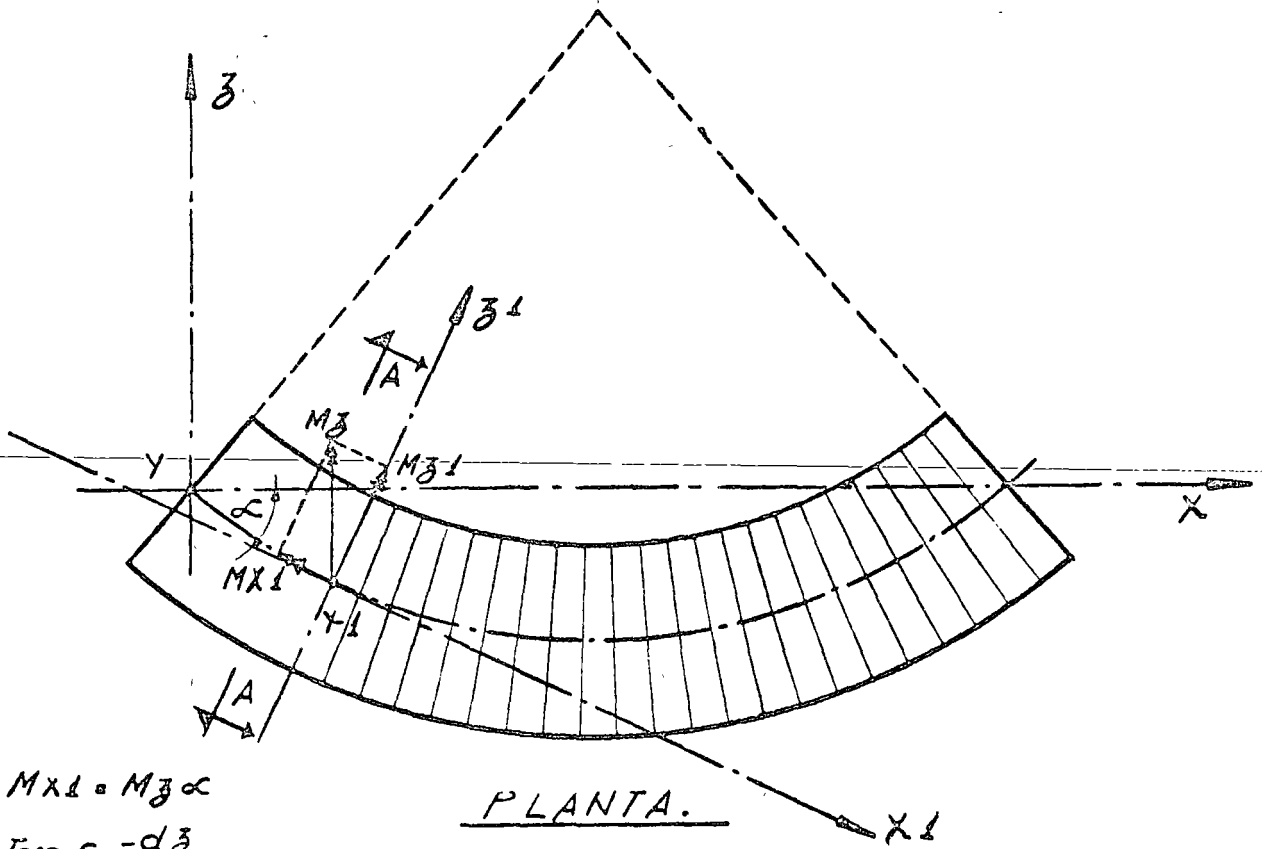


El momento correspondiente a la falla por pandeo lateral recibe el nombre de momento crítico y cuando se llega a él son posibles dos configuraciones de equilibrio (en forma similar a lo que ocurre cuando se llega a la carga crítica en piezas cargadas axialmente). La primera de ellas es una flexión solo alrededor del eje  $Z$ , es decir, en el plano  $YZ$ , y la segunda - una configuración ligeramente deformada como se muestra en la figura 13 que implica la aparición de momentos alrededor de los ejes  $X_1$ ,  $Y_1$  y  $Z_1$  que pueden valuarse en función del momento exterior actuante  $M_z$  que los produjo.

En efecto, si se observa la figura 13 en que se presenta - en planta y corte la pieza ligeramente deformada se nota que el momento flexionante actuante  $M_z$  puede descomponerse en los momentos  $M_{x1}$  y  $M_{z1}$  alrededor de los ejes  $X_1$  y  $Z_1$ .

FIGURA 13:

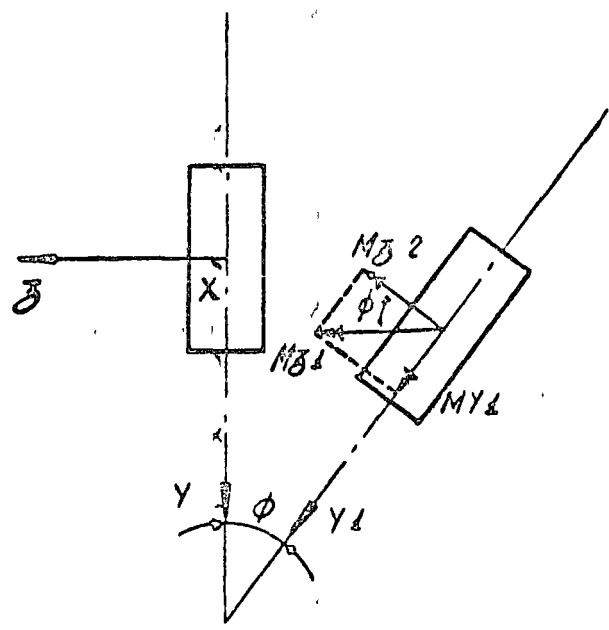
PANDEO LATERAL DE VIGAS.



PLANTA.

$$M_{X1} = M_3 \alpha$$

$$\alpha = \text{Tang } \alpha = -\frac{d\delta}{dX}$$



VISTA A-A

- a. -  $M_{31} = M_3$
- b. -  $M_{X1} = -\frac{d\delta}{dX} M_3$
- c. -  $M_{32} = M_{31} = M_3$
- d. -  $M_{Y1} = M_3 \phi$



Dado que el ángulo  $\alpha$  es muy pequeño podemos suponer que  $\cos \alpha = 1$  y por tanto que  $M_z = M_{z1}$  y también que  $M_{x1} = 0$ ;  $M_z = -dz/dx M_z$

Si se tiene en cuenta ahora el giro  $\phi$ , también muy pequeño, vemos que el momento  $M_z$  tiene también una componente según el eje  $y$  - con valor  $M_{y1} = M_z \cdot \phi$

Se pueden establecer entonces las siguientes ecuaciones:

$$\text{II - 1.-} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_z}{EI_z} \quad (\text{Ver cuaderno 2 apuntes de Mecánica de Materiales I})$$

$$\text{II - 2.-} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_{y1}}{EI_y} \quad \text{''}$$

$$\text{II - 3.-} \quad \frac{d\phi}{dx} GJ - CwE \frac{d^3 \phi}{dx^3} = M_{x1} \quad (\text{Ver apuntes de Mecánica de Materiales relativos a torsión}).$$

Las expresiones 1 y 2 son las ecuaciones diferenciales de la elástica que relacionan las curvaturas con los momentos con respecto a los ejes  $z_1$  y  $y_1$  que necesariamente las acompañan.

La expresión 3 relaciona la deformación por torsión con el momento que la produce, el primer término del primer miembro representa el momento torsionante requerido para hacer girar a la sección alrededor de su eje longitudinal venciendo la rigidez torsional  $GJ$  de la pieza.

El segundo término aparece debido al hecho de que, excepto en ciertos casos especiales (piezas de sección recta circular por ejemplo), al producirse la torsión, las secciones rectas planas antes de la deformación no continúan siéndolo después de ella si no que se alabean y, en los casos en que este alabeo no puede producirse libremente, se requiere la aplicación de un momento de torsión, que si bien en ciertas secciones es pequeño comparado con el requerido para vencer la rigidez torsional de la pieza, en otros casos (viguetas por ejemplo) tiene una gran importancia.

$C_w$  (llamada constante de alabeo) es un coeficiente que depende de la forma de la sección recta de la pieza y define la importancia relativa de este efecto del alabeo.

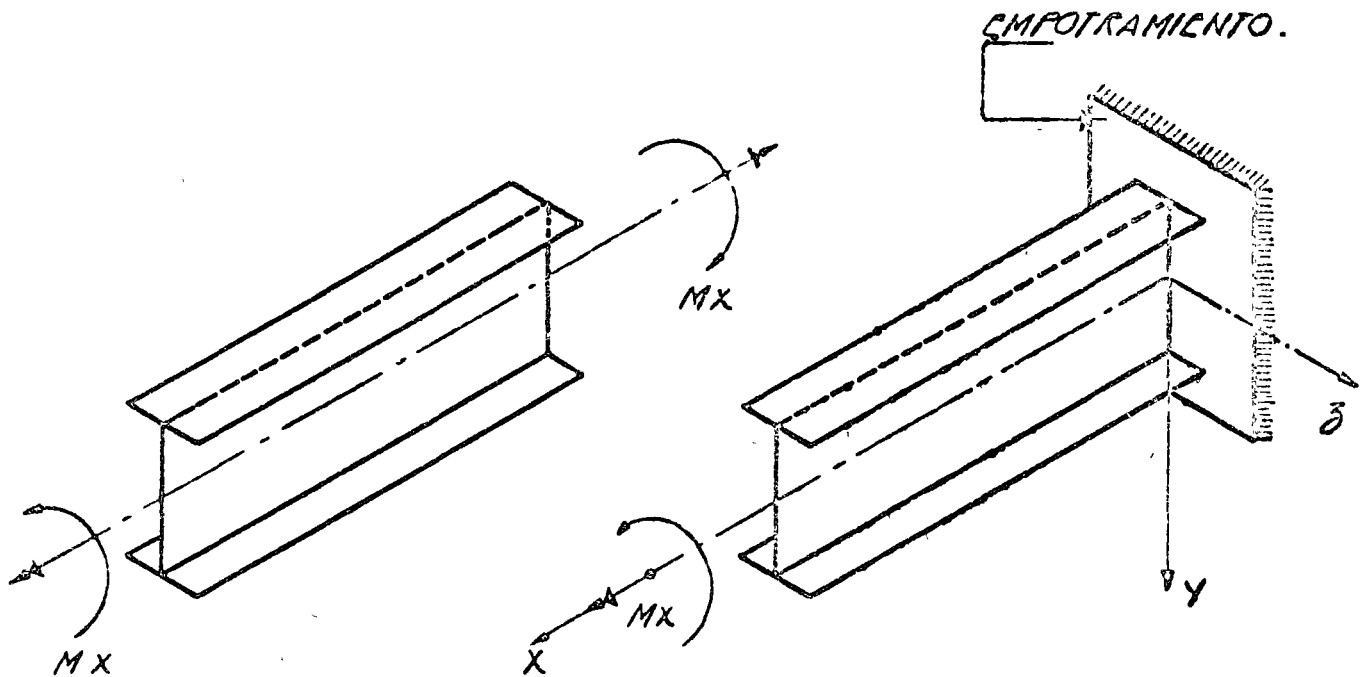
Conviene aclarar lo anterior con un ejemplo específico. En la figura N° 14 se muestra en dos casos distintos una vigueta sometida a torsión. En el primer caso la pieza está aislada y en equilibrio solo por la acción de los dos momentos torsionantes que se presentan. En el segundo caso está empotrada en uno de sus extremos y el momento de torsión actúa en el otro.

En el primer caso la resistencia al giro es proporcionada solamente por la rigidez torsional de la sección.

En el segundo caso contribuye también a la resistencia el hecho de que el desplazamiento lateral del patín no se produce libremente sino que se ve impedido por la presencia del apoyo empotrado.

FIGURA 14-

PANDEO LATERAL  
DE VIGAS.



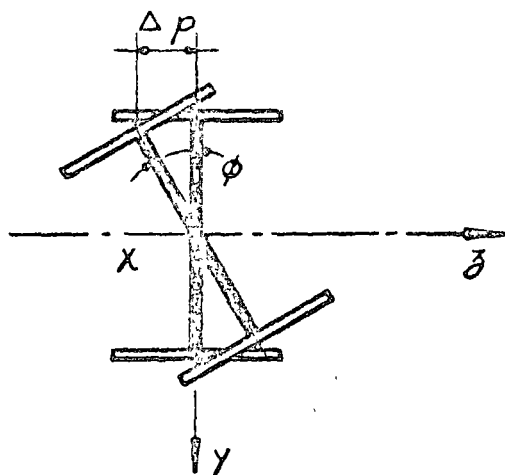
AL GIRO DE LA SECCION  
SE OPONE LA RIGIDEZ  
TORSIONAL DE LA PIEZA.

AL DESPLAZAMIENTO  
LATERAL DEL PATIN  
NO HAY OPOSICION.

AL GIRO DE LA SECCION SE  
OPONE LA RIGIDEZ TORSIONAL  
DE LA PIEZA.

AL DESPLAZAMIENTO LATERAL  
DEL PATIN SE OPONE LA  
RESISTENCIA A FLEXION DEL MISMO.

FIGURA 15 :

PANDEO LATERAL  
DE VIGAS.

$$M_{\bar{x}} = M_{\bar{x}1} + M_{\bar{x}2}$$

$$M_{\bar{x}1} = GJ \frac{d\phi}{d\bar{x}}$$

$$\Delta p = \frac{h}{2} \phi = \delta$$

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = - \frac{M_p}{EI_p}$$

$$M_p = - \frac{d^2\delta}{dx^2} EI_p$$

$$M_p = - EI_p \frac{h}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

$$T_p = \frac{dM_p}{dx} = - EI_p \frac{h}{2} \frac{d^3\phi}{dx^3}$$

$M_p$  = MOMENTO QUE APARECE  
EN EL PATIN DEBIDO  
A  $\Delta p$  respecto al eje  $y$

$I_p$  = MOMENTO DE INERCIA  
DEL PATIN RESPECTO  
AL EJE  $y$

$T_p$  = FUERZA CORTANTE QUE  
APARECE EN EL PATIN  
DEBIDO A  $\Delta p$

$T_p$  APARECE EN AMBOS PATINES CON SENTIDO CONTRARIO Y  
OCASIONA UN PAR  $M_{\bar{x}2}$

$$M_{\bar{x}2} = - EI_p \frac{h^2}{2} \frac{d^3\phi}{dx^3}$$

SI SE HACE  $I_p \frac{h^2}{2} = C_w$

$$M_{\bar{x}2} = - E C_w \frac{d^3\phi}{dx^3}$$

Y POR LO TANTO :

$$M_{\bar{x}} = GJ \frac{d\phi}{d\bar{x}} - E C_w \frac{d^3\phi}{dx^3}$$

Si sustituimos en las expresiones II-2 y II-3,  $M_{y1}$  y  $M_{x1}$  por sus valores en función de  $Mz$ , se tiene:

II - 4. -  $EI_y \frac{d^2 z}{dx^2} - Mz \phi = 0$

II - 5. -  $\frac{d\phi}{dx} GJ - CwE \frac{d^3 \phi}{dx^3} + \frac{dz}{dx} Mz = 0$

Diferenciando esta última ecuación con respecto a x.

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} GJ - CwE \frac{d^4 \phi}{dx^4} + \frac{d^2 z}{dx^2} Mz = 0$$

pero de II-4,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{Mz}{EI_y} \phi$$

luego:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} GJ - CwE \frac{d^4 \phi}{dx^4} + \frac{Mz^2}{EI_y} \phi = 0$$

esto es:

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} - 2\alpha \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \beta \phi = 0$$

donde:

$$\alpha = \frac{GJ}{2 E Cw} \quad y \quad \beta = \frac{Mz^2}{EI_y Cw}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial y determinando las constantes de integración a partir de la condición de que, en sus extremos, es tá evitada la rotación de la pieza alrededor del eje x, ( $\phi = \frac{d\phi}{dx} = 0$  para  $x = 0$  y  $x = l$ ) se llega a obtener el valor del momento crítico:

II - 6.-

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{E I_y G J \left( 1 + \frac{E C_w}{G J} \frac{\pi^2}{L^2} \right)}$$

La expresión anterior tiene una serie de limitaciones con las que las piezas que se utilizan en la práctica como piezas a flexión, en general no cumplen.

Es por ello que se afecta con ciertos coeficientes que la hacen más general.

En primer término consideraremos la limitación consistente en que la expresión es solo aplicable en el rango de comportamiento elástico del material, esto es, para esfuerzos menores, que el correspondiente al límite de proporcionalidad. Se puede, como en el caso de columnas con carga axial, subsanar esta limitación si se sustituye el módulo de elasticidad  $E$  por el módulo tangente  $E_t$  y  $G$  por  $G_t$ .

Otras limitaciones que deben tenerse en cuenta son las que se refieren a la variación del momento flexionante a lo largo de la viga (ya que la expresión deducida corresponde a un momento flexionante constante) y las que se refieren a la forma de aplicación de la carga sobre la viga (solo momentos en los extremos en la fórmula deducida).

Con objeto de subsanar también estas limitaciones se afecta la ecuación II-6 de un factor  $C$  que depende tanto de la forma del diagrama de momentos como del modo en que la carga se aplica.

II - 7.-

$$M_{cr} = \frac{C}{L} \sqrt{E I_y G J_T}$$

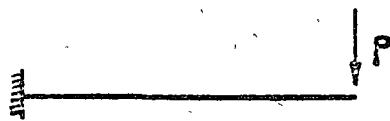
$$M_{cr} = \frac{C_1}{L} \sqrt{E I_y G J}$$

La carga que produce el momento crítico puede expresarse en función de este.

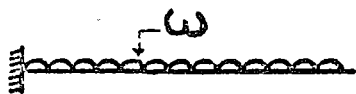
$$C_2 P_{cr} L = \frac{C_1}{L} \sqrt{E I_y G J}$$

$$P_{cr} = \frac{C_1}{C_2 L^2} \sqrt{E I_y G J} = \frac{K}{L^2} \sqrt{E I_y G J}$$

El valor de  $K$  se ha obtenido (Timoshenko, Estabilidad Elástica) para distintas condiciones y, para secciones en que la constante de alabeo  $C_w$  es despreciable (secciones cerradas), se pueden utilizar los valores siguientes:



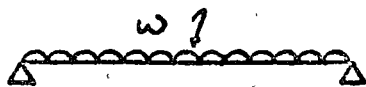
$$K = 4.013$$



$$wL = P; \quad K = 12.85$$



$$K = 16.93$$



$$K = 28.3$$

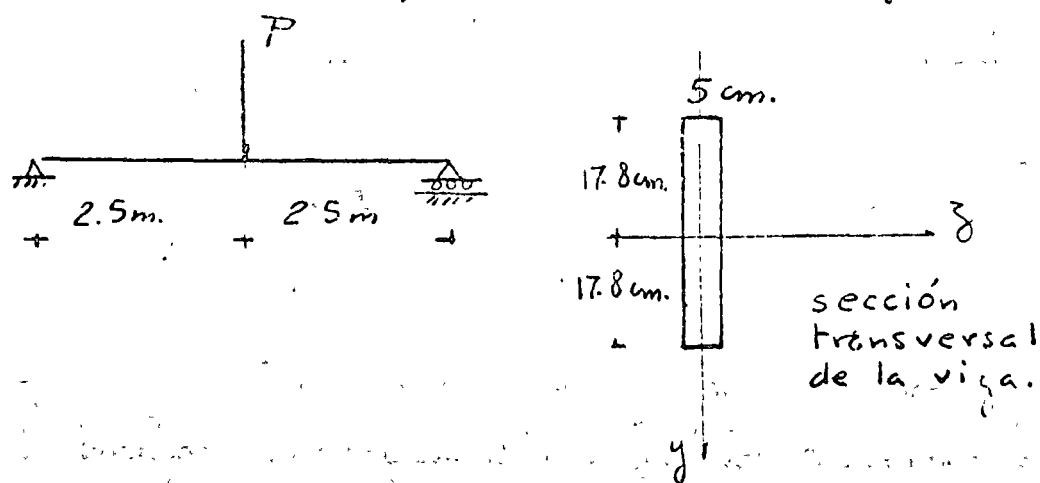
Sin perder demasiada precisión puede utilizarse  $G = \frac{3}{8} E$  y en el caso de que los esfuerzos excedan el límite de proporcionalidad del material deben multiplicarse tanto  $E$  como  $G$  por la relación  $\frac{Et}{E}$ .

El valor de  $J$  puede sustituirse por la constante de torsión  $J_r$  (ver apuntes de Mecánica de Materiales referentes a Torsión).

EJEMPLO 4

PANDEO LATERAL DE VIGAS

Una viga de madera de pino blanco está cargada como se muestra en la figura. Si el módulo de elasticidad de la madera se considera de 85000  $\text{Kg/cm}^2$  y las características geométricas de la viga son las mostradas, determinese si el pandeo lateral requiere el diseño de la pieza y el valor de la carga crítica.



$$P_{cr} = \frac{K}{L^2} \sqrt{E I_y G J_R}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}; \quad J_R = \frac{b^3 h}{3}; \quad K = 16.93; \quad G = \frac{3}{8} E$$

$$P_{cr} = \frac{K}{L^2} \sqrt{\frac{3}{8} E^2 \left(\frac{b^3 h}{12}\right) \left(\frac{b^3 h}{3}\right)} = \frac{K E b^3 h}{L^2} \sqrt{\frac{3}{8 \times 12 \times 3}}$$

$$= \frac{0.1 K E b^3 h}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{0.1 \times 16.93 \times 85000 \times 5^3 \times 35.6}{250000} = 2560 \text{ Kg}$$



## EJEMPLO 4

## PANDEO LATERAL DE VIGAS.

2

Si se desea un coeficiente de seguridad de 2 con respecto a la falla por pandeo, la máxima carga que podría aplicarse sería  $P = 1280 \text{ Kg}$ .

El esfuerzo debido a esta fuerza sería:

$$f = \frac{M_y}{I_y} \text{ y } ; \quad M_y = \frac{1280 \times 500}{4} = 160000 \text{ Kg-cm.}$$

$$I_y = \frac{5 \times 35.6^3}{12} = 18800 \text{ cm}^4$$

$$f = \frac{160000}{18800} \times 17.8 = 152 \text{ Kg/cm}^2$$

Si el esfuerzo permisible es en este caso de  $80 \text{ Kg/cm}^2$  este es el que rige y la carga máxima que puede aplicarse a la viga es de:

$$M_{\max} = \frac{80 \times 18800}{17.8} = 84500 \text{ Kg-cm.}$$

$$P = \frac{4 \times 84500}{500} = 675 \text{ Kg.}$$

Se ve que el pandeo no regiría el diseño de la sección.

## El caso especial del acero estructural

En vigas de concreto o de madera el problema de pandeo lateral es en la mayor parte de los casos poco importante, solo en situaciones excepcionales en que se utilicen piezas excesivamente delgadas o largas puede ser decisivo. Esto se debe principalmente al hecho de que en esos casos generalmente se utilizan secciones de forma rectangular con una rigidez torsional considerable.

El problema adquiere importancia si la sección recta de las piezas sometidas a flexión es abierta (secciones con forma de vigueta o canal) ya que la rigidez torsional de ellas es pequeña.

Es precisamente con este tipo de secciones con las que se trabaja con mayor frecuencia cuando se usan estructuras de acero.

Para el caso concreto de viguetas se han desarrollado algunas expresiones que establecen los esfuerzos máximos que pueden aceptarse considerando la posibilidad de pandeo lateral, todas ellas se basan en la expresión:

$$M_{cr} = \frac{C}{L} \sqrt{E_t I_y G_t J_r}$$

a la que se hacen ciertas simplificaciones para obtener fórmulas más fácilmente utilizables en el trabajo rutinario de cálculo.

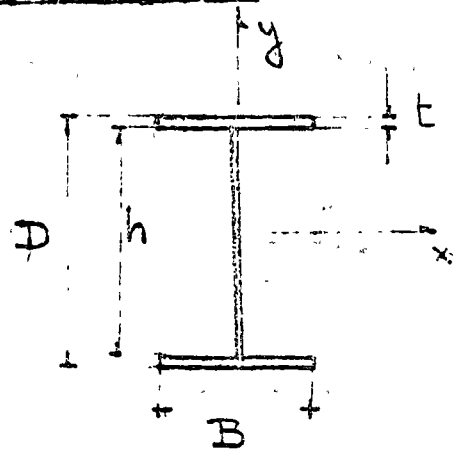
En la figura N° 16 se presentan las expresiones que recomiendan las especificaciones para el diseño de edificios de acero estructural del A.I.S.C. (American Institute of Steel Construction).

FIGURA 16

## PANDEO LATERAL DE VIGAS DE ACERO

## FORMULAS DEL A. I. S. C. PARA DISEÑO DE VIGUETAS DE ACERO :-

$$1.- \quad F_b = \frac{843700}{L^2/Bt} \quad (\text{II-8})$$

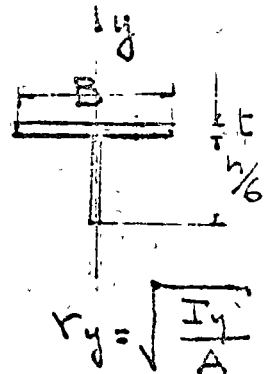


$$2.- \quad \text{Si } \frac{L}{r_y} > C_c = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 C_b}{F_y}} \quad (\text{Pandeo elástico})$$

$$F_b = \frac{11.95 \times 10^6 C_b}{(L/r_y)^2} \quad (\text{II-9})$$

$$\text{Si } \frac{L}{r_y} < C_c \quad (\text{Pandeo inelástico})$$

$$F_b = \left[ \frac{2}{3} - \frac{F_y (L/r_y)^2}{107.6 \times 10^6 C_b} \right] F_y \quad (\text{II-10})$$



$F_b$  = Esfuerzo máximo permisible a flexión  
Utilizar como  $F_b$  el mayor de los valores dados por 1 o por 2.-

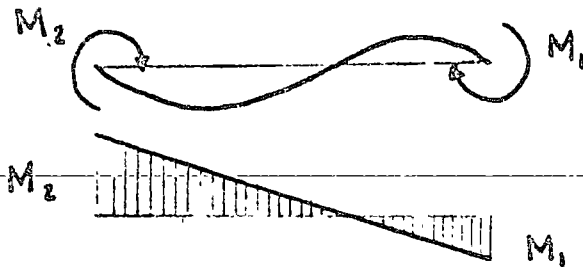
$C_b$  = factor que tiene en cuenta la variación del momento flexionante en la viga (ver hoja siguiente)

En ningún caso  $F_b > 0.6 F_y$

$$C_b = 1.75 + 1.05 (M_1/M_2) + 0.3 (M_1/M_2)^2 \leq 2.3$$

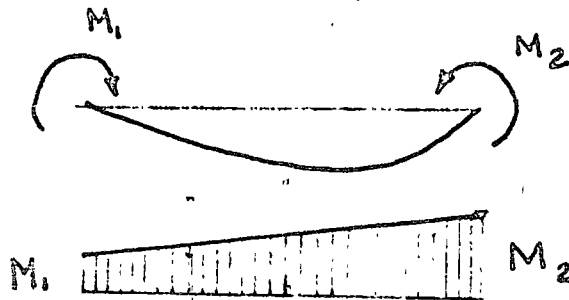
$M_1$  es el menor y  $M_2$  el mayor de los momentos flexionantes en los extremos de la viga.

$M_1/M_2$  es positivo cuando tienen signo contrario (doble curvatura)



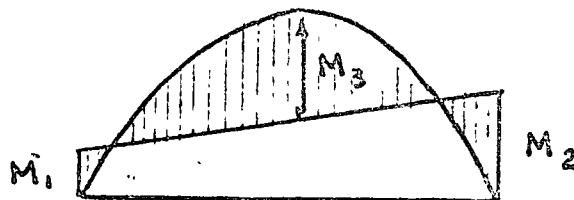
$$\frac{M_1}{M_2} +$$

$M_1/M_2$  es negativo cuando los momentos flexionantes tienen el mismo signo - (curvatura simple).



$$\frac{M_1}{M_2} -$$

$C_b = 1$  cuando el momento entre los extremos es mayor que en estos



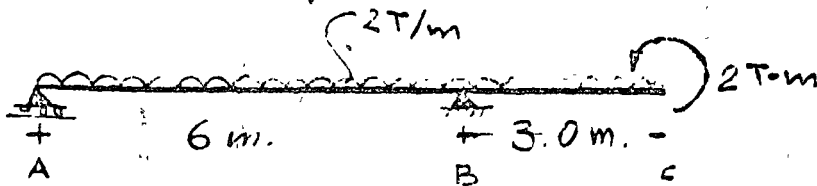
$$M_3 > M_2 > M_1$$

## EJEMPLO 5.-

## PANDEO LATERAL DE VIGAS DE ACERO.

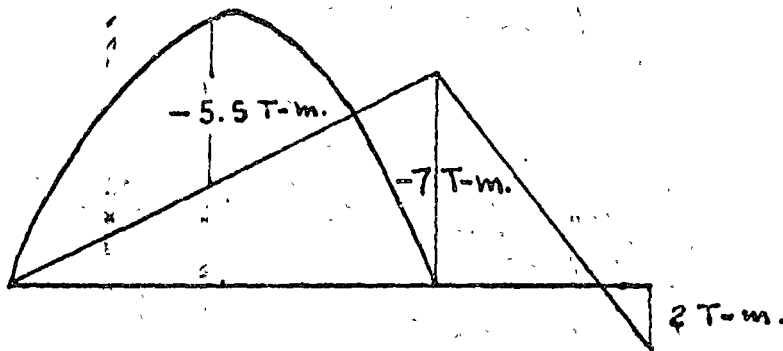
1

Investigar si una vigueta I15L es adecuada para el caso siguiente:

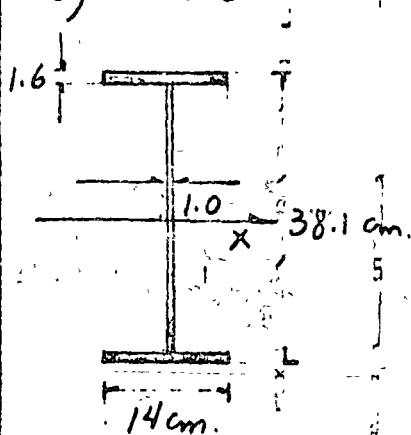


Supóngase evitado el pandeo en ambos apoyos y en el extremo del cantiliver.

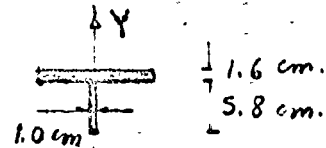
a) Diagrama de momentos.



b) Características geométricas de la sección:



$$S_x = 965 cm^3$$



$$I_y = \frac{14^3 \times 1.6}{12} = 365.9$$

$$A = 14 \times 1.6 + 5.8 \times 1 = 28.2 cm^2$$

$$r_y = \sqrt{\frac{365.9}{28.2}} = 3.6 cm$$

Acero A36;  $F_y = 2530 kg/cm^2$ .

## EJEMPLO 5.-

PANDEO LATERAL DE  
VIGAS DE ACERO

2

c) Revisión del tramo A-B

ci) Esfuerzo permisible:

$$M_1/M_2 = \frac{0}{7} = 0 \quad \therefore C_b = 1.75 < 2.3$$

$$C_c = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 \times 1.75}{2530}} = 157.5$$

$$\frac{L}{r_y} = \frac{600}{3.6} = 166.7 > 157.5$$

Se aplica la ec. II-9

$$F_b = \frac{11.95 \times 10^6 \times 1.75}{166.7^2} = 753 \text{ Kg/cm}^2$$

ó la II-8:

$$F_b = \frac{843700}{(600 \times 38.1)/(14 \times 1.6)} = 823 \text{ Kg/cm}^2$$

c2) Revisión:

$$\frac{M}{S} = \frac{700000 \text{ Kg-cm}}{965 \text{ cm}^3} = 725 \text{ Kg/cm}^2 < 823 \text{ Kg/cm}^2$$

La sección es adecuada.

d) Revisión del tramo B-C

di) Esfuerzo permisible:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{2}{7} = 0.29$$

$$C_b = 1.75 + 1.05 \times 0.29 + 0.3 \times 0.29^2 = 2.08 < 2.3$$

$$C_c = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 \times 2.08}{2530}} = 171.7 > \frac{L}{r_y} = \frac{300}{3.6} = 83.3$$

Se aplica la ec. II-10

$$F_b = \left[ \frac{2}{3} - \frac{2530 \times 83.3^2}{107.6 \times 10^6 \times 2.08} \right] 2530 = 1484 \text{ Kg/cm}^2$$

## EJEMPLO 5.-

PANDEO LATERAL DE  
VIGAS DE ACERO

3

Con la ec. II-8

$$F_b = \frac{843700}{(300 \times 38.1) / (14 \times 1.6)} = 1653 \text{ Kg/cm}^2 > 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

Luego

$$F_b = 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

dz) Revisión:

$$\frac{M_x}{S} = 725 \text{ Kg/cm}^2 < 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

En este tramo la sección está sobrada.

### III).- PIEZAS SOMETIDAS A FLEXOCOMPRESION.

En el diseño de piezas largas sometidas a flexocompresión deben distinguirse dos problemas diferentes.

El primero es el que se presenta debido a que las deformaciones por flexión no son despreciables y por ello en el cálculo de los momentos flexionantes debe tenerse en cuenta el momento que produce la carga axial.

El segundo es el problema de inestabilidad o pandeo.

Para visualizar el primer caso consideremos una pieza libremente apoyada que se deforma por flexión en curvatura simple y sobre la que actúa en sus extremos una fuerza de compresión  $P$ .

Las cargas transversales producen momentos que son función de ellas, la carga axial produce momentos secundarios que deben añadirse a los primeros.

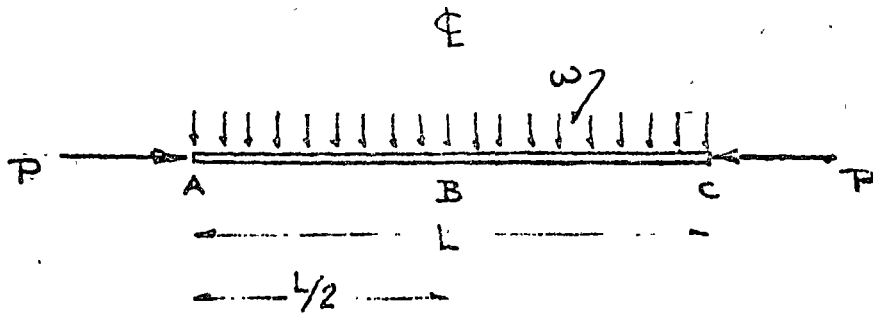
Se puede suponer que la ley de variación de los momentos secundarios es una senoide con valor cero en los apoyos y máximo en el centro. Bajo esta hipótesis puede determinarse el valor de la deformación debida a la carga  $P$  haciendo uso de los teoremas área-momento o de Mohr (Apuntes Mecánica de Materiales, Cuaderno I p.69).

En la figura N° 17 se presenta el cálculo de la flecha máxima para la condición de carga mencionada.

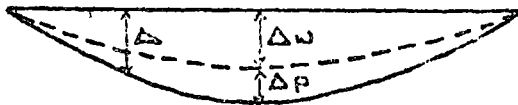


FIGURA 17.-

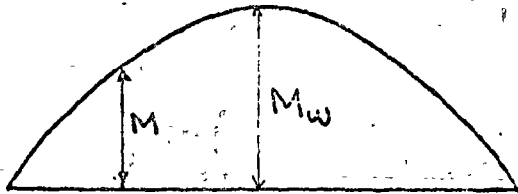
## PIEZAS A FLEXOCOMPRESION



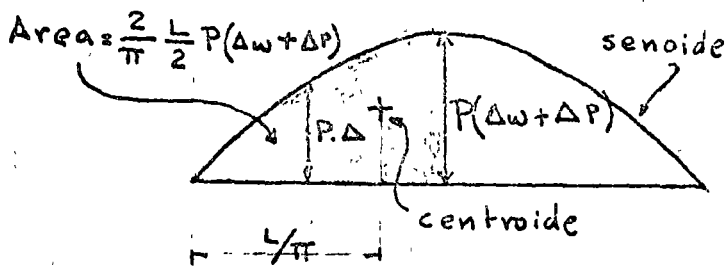
carga.



deformación.



momentos principales debidos a la carga transversal.



momentos secundarios debidos a la carga P.

$$\Delta P = t_{AB} = \left[ \frac{P(\Delta w + \Delta P)}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right] \frac{2}{\pi} \frac{L}{\pi} = (\Delta w + \Delta P) \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$$

$$\Delta P = \frac{PL^2 / (\pi^2 EI)}{1 - PL^2 / (\pi^2 EI)}$$

$$\text{si } \alpha = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} = \frac{P}{P_E} \quad ; \quad \text{y } P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\Delta_{max} = \Delta w + \Delta P = \Delta w + \Delta w \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) = \frac{\Delta w}{1 - \alpha}$$

Utilizando los datos de la figura 17, se puede escribir:

$$M_{max} = M_w + P \Delta_{max}$$

Pero:

$$P = \alpha \pi^2 EI / L^2$$

y

$$M_{max} = M_w + \frac{\alpha \pi^2 EI}{L^2} \frac{\Delta_w}{1 - \alpha}$$

$$M_{max} = M_w \left[ 1 + \frac{\alpha \pi^2 EI \Delta_w}{M_w L^2 (1 - \alpha)} \right]$$

$$M_{max} = M_w \left[ \frac{1 - \alpha + \left( \frac{\pi^2 EI \Delta_w}{M_w L^2} \right) \alpha}{1 - \alpha} \right]$$

$$M_{max} = M_w \left[ \frac{1 + \left( \frac{\pi^2 EI \Delta_w}{M_w L^2} - 1 \right) \alpha}{1 - \alpha} \right]$$

Si:

$$C_m = 1 + \left( \frac{\pi^2 EI \Delta_w}{M_w L^2} - 1 \right) \alpha$$

$$M_{max} = M_w \left( \frac{C_m}{1 - \alpha} \right) = M_w \delta$$

Se dice que  $\delta$  es un coeficiente de amplificación.

El valor de  $C_m$  puede obtenerse en forma aproximada usando las recomendaciones del Reglamento del A.C.I. (American Concrete Institute) que establecen  $C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2$ .

En ningún caso  $C_m \leq 0.4$

Para columnas sin posibilidad de desplazamiento lateral - relativo entre sus extremos y sin cargas transversales.

$M_2$  es el mayor y  $M_1$  el menor de los momentos en los extremos del elemento y su relación es positiva si la flexión es en curvatura simple y negativa si es en curvatura doble.

Para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral o con cargas transversales entre los apoyos  $C_m = 1$

Pueden encontrarse valores más precisos de  $C_m$  en el comentario a las especificaciones del A.I.S.C. (American Institute of Steel Construction).

Para tener en cuenta las condiciones de apoyo se procede en este caso, como en el de columnas sometidas a carga axial, considerando en lugar de la longitud real de la pieza una longitud efectiva  $KL$  en donde el factor  $k$  es el ya definido anteriormente.

En estructuras de concreto reforzado es común considerar el efecto de esbeltez en columnas siguiendo el criterio que se acaba de ver, considerando para el diseño un momento amplificado, y sin tener en cuenta problemas de inestabilidad que, dadas las dimensiones usuales de este tipo de columnas, no son importantes.

Se tendrá entonces:

$$M_{max} = M_w \left( \frac{C_m}{1 - P/P_E} \right)$$

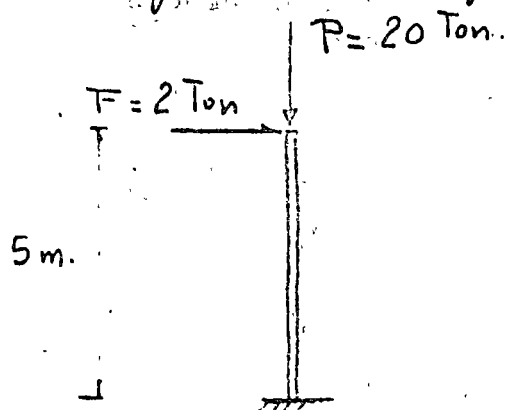
$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2}$$

Aquí  $r$  es el ~~radio de giro~~ momento de inercia de la columna con respecto al eje de flexión de la pieza.

# EJEMPLO 6

# PIEZAS A FLEXO COMPRESION

Encontrar el valor del momento amplificado que se debe usar para el diseño de la columna larga de la figura siguiente:



$$M_w = 2 \text{ Ton} \times 5 \text{ m.} = 10 \text{ T-m.}$$

$$M_{\text{max}} = \delta M_w$$

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \alpha}$$

Columna de 30x30 cm.

$C_m = 1$  (hay desplazamiento relativo entre los extremos)

$$I_g = \frac{30^4}{12} = 67500 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{P}{P_E}$$

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{(k L)^2} ; k = 2 \text{ (ver fig. 3)} \therefore P_E = \frac{\pi^2 E I}{(2 L)^2}$$

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{(1 + \beta d)} ; \text{ si: } E_c = 142000 \text{ Kg/cm}^2 \left. \begin{array}{l} \beta d = 0.1 \\ \text{datos del problema} \end{array} \right\}$$

$$EI = \frac{0.4 \times 142000 \times 67500}{1 + 0.1} = 3.49 \times 10^9 \text{ Kg-cm}^2$$

$$P_E = \frac{3.49 \times 10^9 \pi^2}{(2 \times 500)^2} = \frac{34445}{\cancel{10000}} \text{ Kg}$$

$$\alpha = \frac{20000}{\cancel{34445}} = \frac{0.58}{\cancel{10000}} ; \delta = \frac{1}{1 - \frac{0.15}{\cancel{10000}}} = \frac{1}{1 - 0.15} = \frac{1}{0.85} = 1.176 \approx 2.38$$

$$M_{\text{max}} = \frac{\cancel{10}}{2.38} \times 10 = \frac{23.8}{\cancel{10000}} \text{ T-m.}$$

Por lo que se refiere a columnas de acero se han realizado un gran número de estudios y existen muchos trabajos referentes al problema de inestabilidad de piezas sometidas a flexocompresión. ( Oscar de Buen, Diseño de piezas flexocomprimidas de acero estructural, Revista "Ingeniería" Vol. XXXIV, No. 2 ).

Sin embargo, se presentará aquí un procedimiento de diseño que es por un lado suficientemente simple para el uso rutinario y por otro incluye la influencia de todos los factores que se han presentado antes referentes al problema de pandeo.

El procedimiento consiste en la aplicación de las fórmulas de interacción que se presentan enseguida.

El esfuerzo en una pieza sometida a flexocompresión puede valuararse con la expresión siguiente:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{amplificado}}}{S}$$

o sea:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M C_m}{S (1 - P/P_E)}$$

Si el pandeo no existiera la falla de la pieza se produciría al llegarse al esfuerzo último o de falla con una carga  $P_0$  y un momento  $M_0$  y se tendría:

$$\frac{P_0}{A} + \frac{M_0 C_m}{S (1 - P/PE)} = f_u$$

en que  $f_u$  es el esfuerzo último o de falla del material.

Dividiendo ambos miembros entre  $f_u$  se tiene

$$\frac{P_0}{A f_u} + \frac{M_0 C_m}{S f_u (1 - P/PE)} = 1$$

Cuando el pandeo está presente se utilizará la misma fórmula pero sustituyendo  $f_u$  por  $f_{cr}$ , el esfuerzo crítico de pandeo.

$$\frac{P_0}{A f_{cr1}} + \frac{M_0 C_m}{S (1 - P/PE) f_{cr2}} \leq 1$$

donde:

- $P_0$  = carga que al actuar junto con el momento  $M_0$  produciría la falla.
- $M_0$  = momento que al actuar junto con la carga  $P_0$  produciría la falla.
- $A$  = área de la sección recta de la pieza .
- $S$  = módulo de sección de la pieza .
- $f_{cr1}$  = esfuerzo crítico si solo existiera una carga axial  $P_0$  .
- $f_{cr2}$  = esfuerzo crítico si solo existiera un momento  $M_0$  .

Conviene tener esta fórmula en términos de cargas de trabajo y esfuerzos permisibles.

Si llamamos n al coeficiente de seguridad deseado, tendremos:

$$n P = P_0$$

$$n M = M_0$$

$$n F_a = f_{c1}$$

$$n F_b = f_{c2}$$

y entonces:

$$\frac{P}{F_a A} + \frac{M C_m}{F_b S (1 - P/P_E)} \leq 1$$

P carga actuante

M momento actuante

Fa esfuerzo permisible si solo existiera carga axial

Fb esfuerzo permisible si solo existiera momento

En todo caso se debe cumplir :

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{S} \leq 0.6 F_y$$

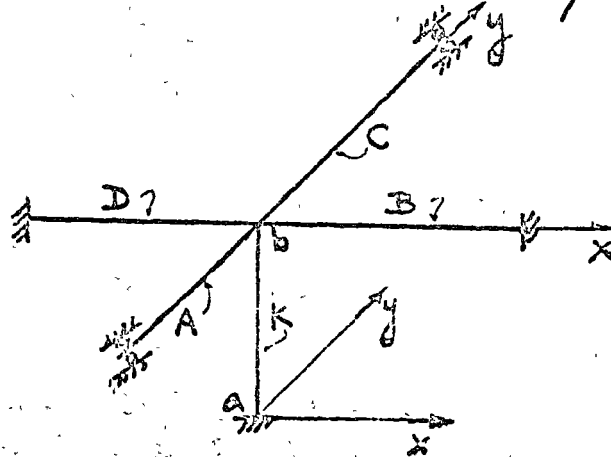
En caso de presentarse flexión en dos sentidos la fórmula de interacción tomaría la siguiente forma:

$$\frac{P}{F_a A} + \frac{M_x C_{m_x}}{F_{b_x} S_x (1 - P/P_{E_x})} + \frac{M_y C_{m_y}}{F_{b_y} S_y (1 - P/P_{E_y})} \leq 1$$



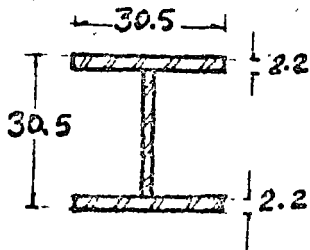
# EJEMPLO 7 PIEZAS SOMETIDAS A FLEJO COMPRESION.

Revisar si la columna K de acero A36 ( $F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ ) que se muestra en la fig. siguiente es capaz de resistir los elementos mecánicos que se indican.



A, B, C y D  
Trabes que concurren al extremo superior de la columna.

## a) Características geométricas



pieza	$I_x$	$I_y$	L	$\frac{I_x}{L}$	$\frac{I_y}{L}$
	$\text{cm}^4$	$\text{cm}^4$	$\text{cm}$	$\text{cm}^3$	$\text{cm}^3$
A	10000	—	500	20	—
B	—	15000	700	—	21.4
C	10000	—	700	14.3	—
D	—	15000	600	—	25
K	29000	10500	500	58	21

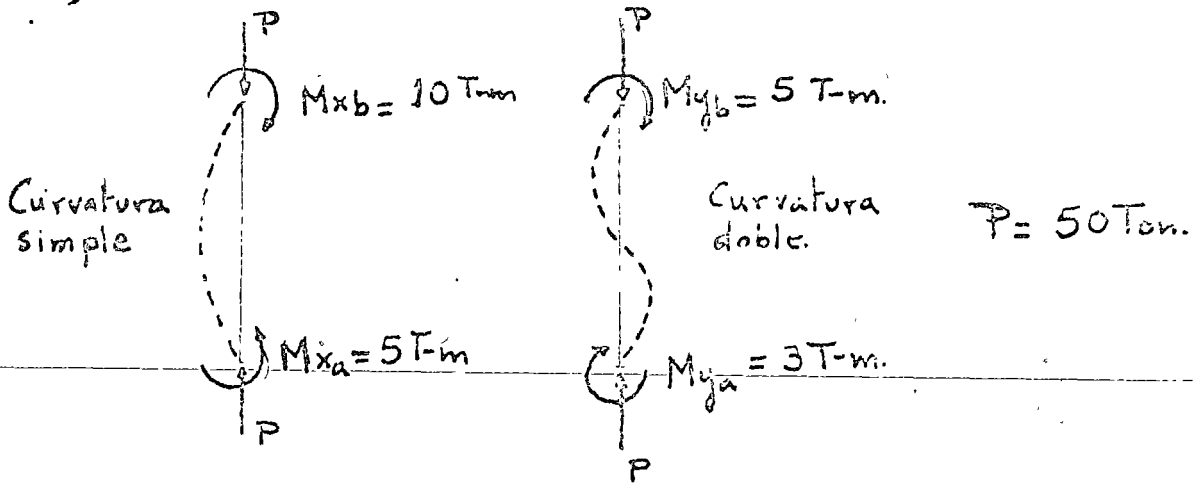
Columna K

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 168.5 \text{ cm}^2 \\ S_x = 1900 \text{ cm}^3 \\ S_y = 690 \text{ cm}^3 \\ r_x = 13.1 \text{ cm.} \\ r_y = 7.9 \text{ cm.} \end{array} \right.$$

EJEMPLO 7.-

PIEZAS SOMETIDAS A FLEXOCOMPRESION

b) Elementos mecánicos actuantes:



c) Longitudes efectivas de pandeo considerando, como se indica esquemáticamente en la fig., que el desplazamiento relativo entre las juntas está permitido para pandeo alrededor del eje x y no lo está para pandeo alrededor del eje y.

En a la columna está empotrada.

$$\sum \left( \frac{I_x}{L} \right) \text{trabes} = \frac{20 + 14.3}{58} = 34.3 \text{ cm}^3$$

$$\sum \left( \frac{I_x}{L} \right) \text{columnas} = \frac{58}{21} \text{ cm}^3$$

$$\frac{58}{34.3} = \frac{1.7}{1.5} \rightarrow k_x = \frac{1.2}{1.5} \text{ (ver fig. 5)}$$

$$\sum \left( \frac{I_y}{L} \right) \text{trabes} = \frac{21.4}{21} + \frac{25}{21} = 46.4 \text{ cm}^3$$

$$\sum \left( \frac{I_y}{L} \right) \text{columnas} = \frac{21}{21} \text{ cm}^3$$

$$\frac{21}{46.4} = \frac{0.46}{35} \rightarrow k_y = \frac{0.57}{35} \text{ (ver fig 4)}$$

## EJEMPLO 7.-

PIEZAS SOMETIDAS A  
FLEXO COMPRESION.

3

$$k_x L = 1.2 \times 500 = 600 \text{ cm.}$$

$$k_y L = 0.57 \times 500 = 285 \text{ cm.}$$

d) Calculo de esfuerzos:

d1) Debido a carga axial:

$$f_a = \frac{50000}{168.5} = 296.7 \text{ Kg/cm}^2.$$

d2) Debido a  $M_x$ :

$$f_{bx} = \frac{1000000}{1900} = 526.3 \text{ Kg/cm}^2.$$

d3) Debido a  $M_y$ :

$$f_{by} = \frac{500000}{690} = 724.6 \text{ Kg/cm}^2.$$

e) Relaciones de esbeltez:

$$\frac{k_x L}{r_x} = \frac{600}{13.1} = 45.8$$

$$\frac{k_y L}{r_y} = \frac{285}{7.9} = 36.08$$

f) Esfuerzos permisibles:

f1) A compresión axial:

$$\text{para } \frac{kL}{r} = 45.8 ; F_a = 1300 \text{ Kg/cm}^2$$

(Ver tabla 1)

## EJEMPLO 7.-

PIEZAS SOMETIDAS A  
FLEXO COMPRESION.

4

f2) A flexión alrededor del eje x:

$$F_{bx} = \frac{843700}{500 \times 30.5 / (30.5 \times 2.2)} = 3712.3 > 0.6 F_y$$

$$\therefore F_{bx} = 0.6 F_y = 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

(Ver Fig. 16)

f3) A flexión alrededor del eje y:

En una vigueta para flexión alrededor del eje de menor momento de inercia puede considerarse conservadoramente:  $F_{by} = 0.6 F_y = 1520 \text{ Kg/cm}^2$

(Ver especificaciones AISC.)

g) Determinación de  $C_m$ .

$$C_{mx} = 1 \quad (\text{posibilidad de desplazamiento relativo entre las juntas})$$

$$C_{my} = 0.6 + 0.4 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) = 0.6 - \left( \frac{3}{5} \right) = 0.36 < 0.4$$

$$\therefore C_{my} = 0.4$$

h) Determinación de  $P_E$ 

$$P_{Ex} = \frac{\pi^2 E I_x}{\left( \frac{L}{K} \right)^2} = \frac{2 \times 10^6 \times 29000 \pi^2}{(1.2 \times 500)^2} = 1590 \times 10^3 \text{ Kg.}$$

## EJEMPLO 7.

PIEZAS SOMETIDAS A  
FLEXO COMPRESION

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_y}{(k_y L)^2} = \frac{2 \times 10^6 \times 10500 \pi^2}{(0.57 \times 500)^2} = 2552 \times 10^3$$

i) Fórmula de interacción:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx} C_{mx}}{F_{bx} \left(1 - \frac{P}{P_{Ez}}\right)} + \frac{f_{by} C_{my}}{F_{by} \left(1 - \frac{P}{P_{Ey}}\right)} \leq 1$$

$$\frac{296.7}{1300} + \frac{526.3 \times 1}{1520 \left(1 - \frac{50000}{1590 \times 10^3}\right)} + \frac{724.6 \times 0.4}{1520 \left(1 - \frac{50000}{2552 \times 10^3}\right)} =$$

$$0.23 + 0.36 + 0.19 = 0.78 < 1$$

Por otro lado:

$$296.7 + 526.3 + 724.6 = 1547.6 \approx 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

Por tanto la columna resulta adecuada para resistir los elementos mecánicos a que esta sometida.



Handwritten text, possibly a title or header, located at the top of the page.

Handwritten text, possibly a subtitle or section header, located below the first line of text.

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

Handwritten text, possibly a section header or a specific point, located in the middle of the page.

Handwritten text, possibly a section header or a specific point, located in the middle of the page.



Handwritten text, possibly a section header or a specific point, located in the lower middle of the page.

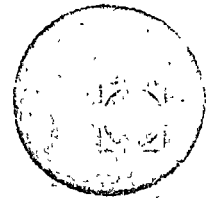
Handwritten text, possibly a section header or a specific point, located in the lower middle of the page.

Handwritten text, possibly a section header or a specific point, located in the lower middle of the page.

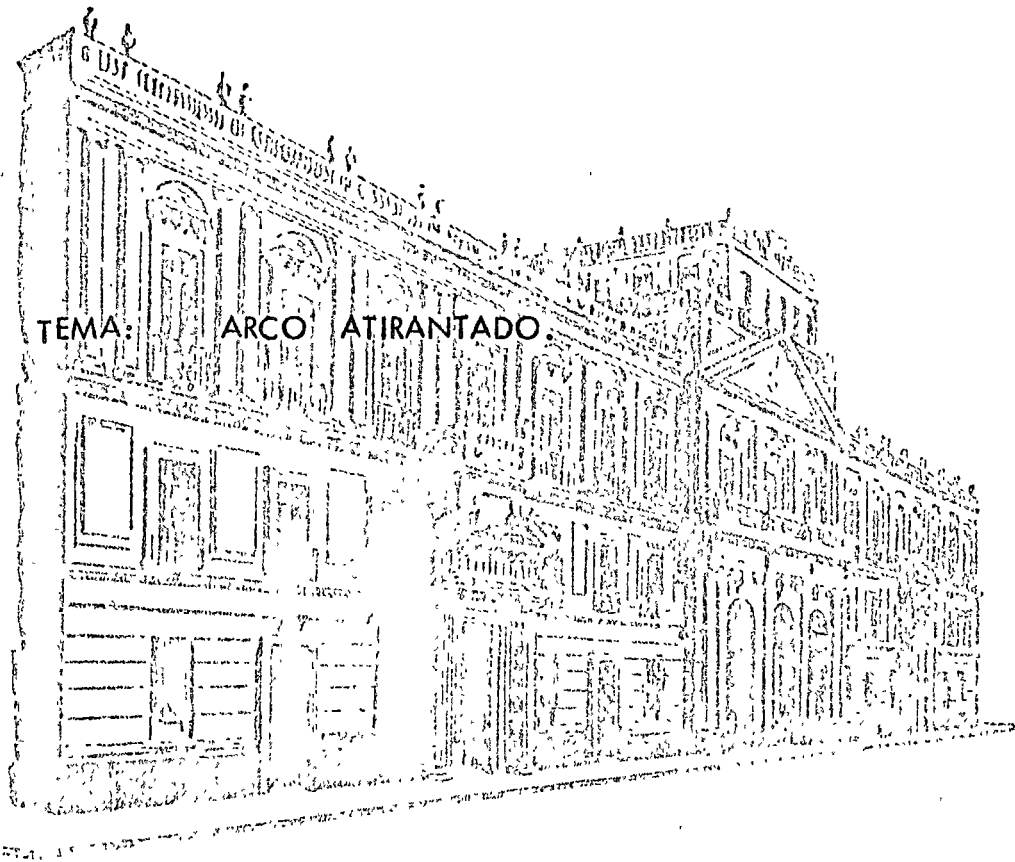




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES.



TEMA: ARCO ATIRANTADO

PROF. JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ.





# Dimensionamiento de Naves Industriales

Arco Atirantado

Jose L. Sanchez M.

## Cubierta con arco circular atirantado -

Las cubiertas metálicas resueltas usando arcos atirantados de cables proporcionan, cuando son factibles dadas las características arquitectónicas y funcionales de la nave, una de las soluciones más económicas posibles.

Esto se debe al hecho de que la forma del arco se acerca a la de la línea horizontal de la carga y por ello estas se transmiten a la cimentación en forma muy eficiente, con momentos flexionantes pequeños.

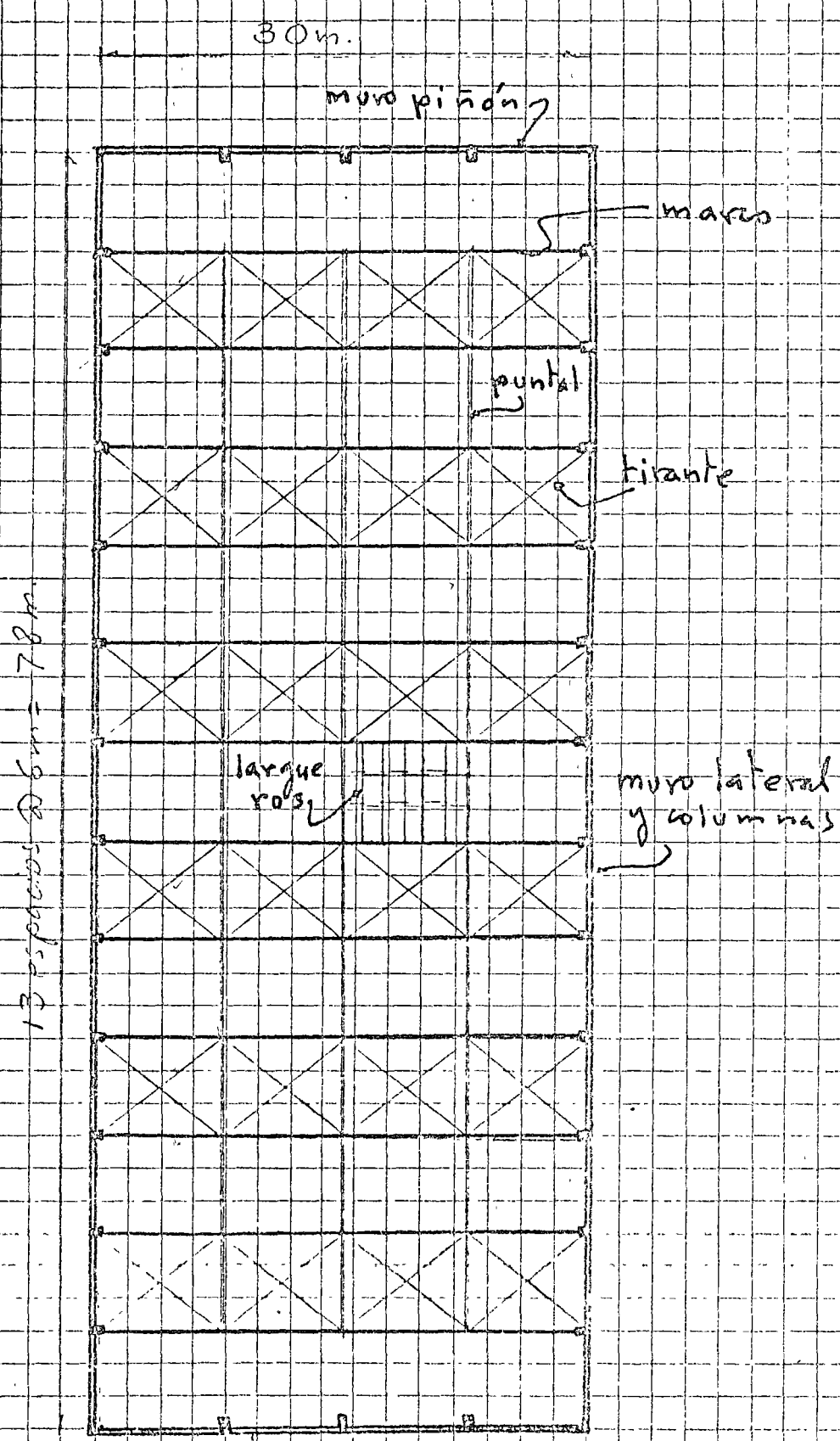
El coque del arco que resulta muy desfavorable para las estructuras de apoyo se toma con el tirante y se logran así reacciones prácticamente verticales. Se presentará aquí el ejemplo esquemático de una nave de 30m de claro y 78m de longitud.

El material de la cubierta será en este caso lámina de asbesto apoyada sobre largueros que descansan sobre arcos separados 6m entre sí.

Las paredes serán de tabique recocido, rigidizadas con dadas y columnas de concreto reforzado.

Sobre estas columnas se apoyan los arcos.

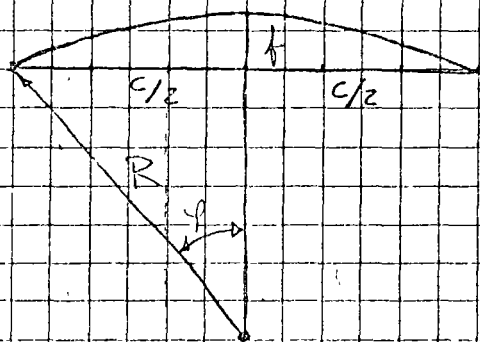
Los muros de cabecera serán muros pilón autoportantes.



PLANTA

Ligando los arcos entre si se dispondrá un sistema de contraventeo que trasmite a las paredes las fuerzas horizontales que pudieran aparecer en la cubierta y que evita el pandeo lateral de los muros, formando armaduras en la superficie de la techumbre.

### Geometría del arco



$$R = \frac{4h^2 + c^2}{8h}$$

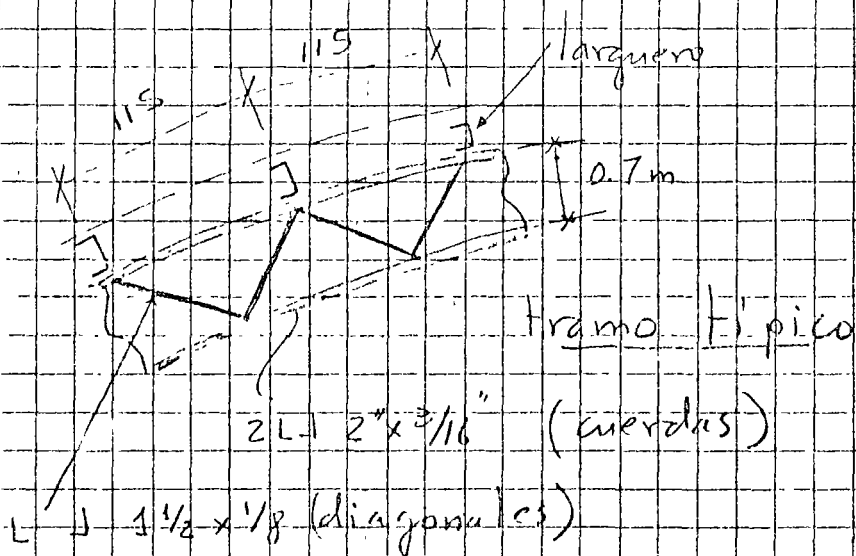
Si  $h = 3.5 \text{ m}$

y  $c = 30 \text{ m}$

$$R = \frac{4 \times 12.25 + 900}{8 \times 3.5} = 33.0 \text{ m}$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{15}{33.0} = 0.44$$

$$\varphi = 26^\circ$$



# CARGAS

## Carga muerta

lámina de asbesto	1.5	
peso de estructura	1.5	$\text{Kg/m}^2$
plafond y lámparas	1.0	"
<b>total</b>	<b>4.0</b>	<b><math>\text{Kg/m}^2</math></b>

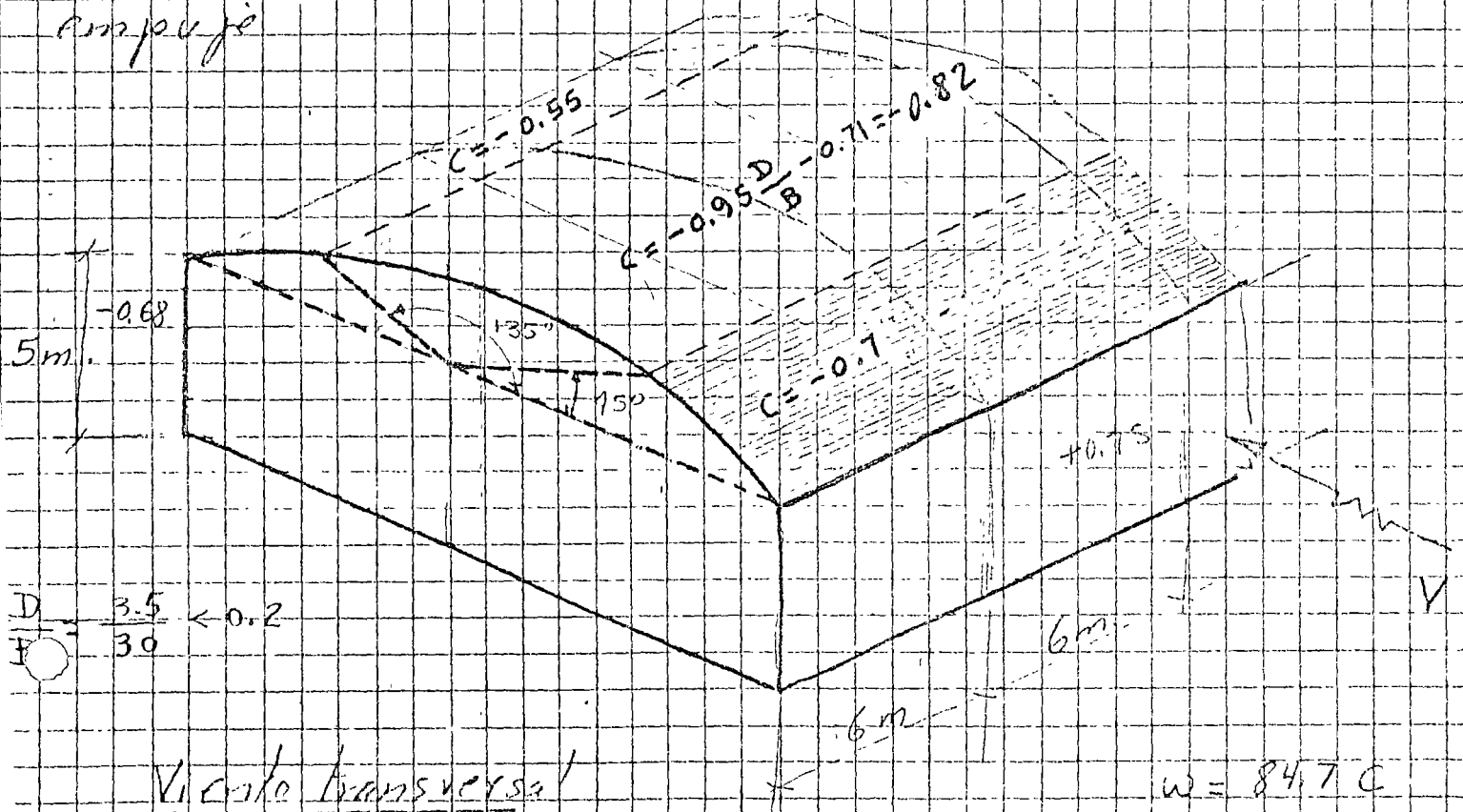
## Carga viva

4.0  $\text{Kg/m}^2$

## Carga accidental

## Viento:-

Se consideraran los siguientes coeficientes de empuje



## 5 descripción

La lámina ONDULADA ESTÁNDAR ASBESTOLIT es un producto de asbesto-cemento-silice, materias primas minerales que lo proporcionan características especiales dentro de los materiales de construcción.

Por su fabricación multilaminar de películas independientemente reforzadas se obtiene una estructura libre de riesgos de puntos débiles, y su ondulación científicamente estudiada le da mayor resistencia, considerándola como elemento estructural proporcional al peso.

## LAMINA ACANALADA CURVA

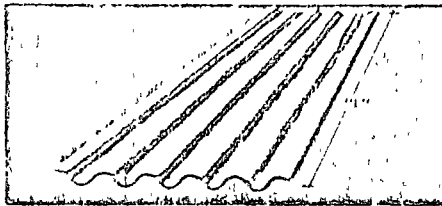


NOVA	RADIO DE CURVATURA R EN CM		ALCANTARILLA DE LA LAMINA EN CM							
	REAL	MIN	3000	3070	3140	3210	3280	3350	3420	
10	Min	1966	15	115	74	60	42	30	19	
	Max	1150	145	191	237	283	329	375	421	
12	Min	1150	145	191	237	283	329	375	421	
	Max	1150	121	86	54	40	31	21		
18	Min	1150	121	86	54	40	31	21		
	Max	1650	171	21	44	30				
20	Min	1650	101	21	44	30				
	Max	2100	71	54	34		19			
25	Min	2100	80	54	34		19			
	Max	3050	57	33	24	19		9	7	
30	Min	3050	57	33	24	19				
	Max	4500	34	25						
40	Min	4500	34	25						
	Max	9100	12	10	0	0				

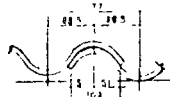
Use láminas onduladas rectas

## especificaciones

### LAMINA ONDULADA STANDARD (RECTA)



### DIMENSION DE ONDA

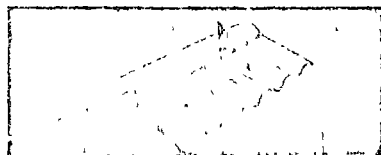


Recubrimiento Lateral 1 Onda

Medio Onda Desplazado = 108  
Onda Completa Desplazada = 217  
Terminación Onda Desplazada = 83.5

ESPEZOR C	R1	R2	H
9	49	46	56
6.5	50.5	44.5	57.5

MTS.	FIEC.	TOTAL	UTIL	POR LAMINA				LAMA 5 1/2		LAMA 6 3/4	
				MT	UTL	MT	UTL	MT	UTL		
3.66	12	3.612	3.106			44.5	14.32			1.17	
3.05	10	3.010	2.566	20.5	11.1	37.1	14.43	0.97		1.45	
2.44	8	2.408	2.038	22.8	11.2	29.7	14.6	1.15		1.15	
2.14	7	2.107	1.766	20.0	11.3	26.0	14.7	1.00		1.00	
1.83	6	1.806	1.496	17.1	11.4	22.3	14.9	0.85		0.85	
1.52	5	1.505	1.226	14.3	11.6	18.5	15.1	0.69		1.30	
1.22	4	1.204	0.956	11.4	11.9	14.8	15.5	1.03		1.07	



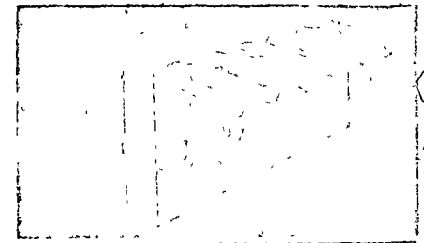
### CABALLETE ARTICULADO (2 piezas)

Longitud útil	885 mm
Rec. Longitud 1 onda	167 mm
Alero	225 mm
Peso por pza.	9.75 kg
Nom. por M.L. útil	11.05 kg
Espeor	6.5 mm



### CABALLETE "P" FIJO 30°

Longitud útil	885 mm
Rec. longitud 1 onda	167 mm
Alero	300 mm
Peso por pza.	9.10 kg
Nom. por M.L. útil	10.30 kg
Espeor	6.5 mm



### C CABALLETE SHED NORMAL

Longitud útil	885 mm
Rec. longitud 1 onda ONDA	167 mm
Alero estándar	300 mm
Espeor	6.5 mm

(B) Caballote shed normal 10°  
Se surten pedidos especiales con ángulo de 5°, 20°, 25°

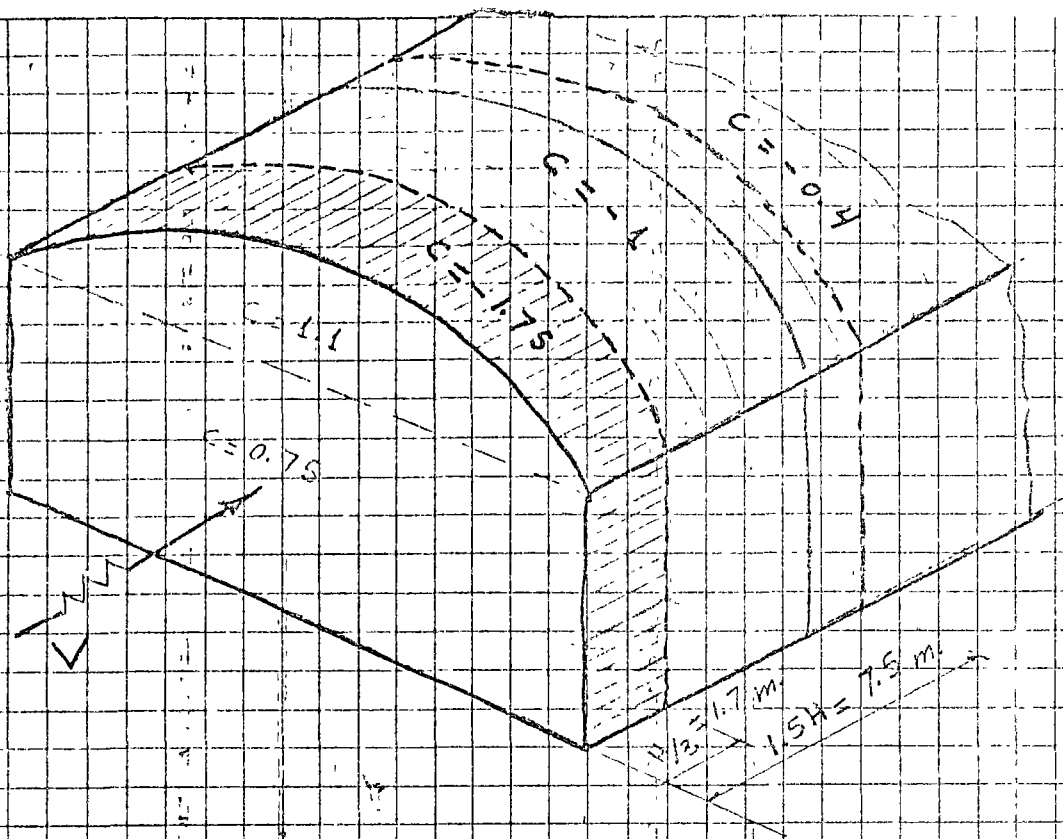
**Nota.** Además de los 3 tipos de caballotes que se ilustran, fabricamos: caballote articulado con ventila, caballote "p" fijo con ventila, caballote articulado faldón liso, caballote mandil, caballote fijo O.C.D., terminal lateral, lámina chimenea y osquineros. Accesorios de fijación: varillas galvanizadas, clavos galvanizados cabeza de plomo y elastoflex impregnado para sellados

## ventajas

Las láminas ASBESTOLIT de asbesto-cemento-silice no requieren mantenimiento y sus cualidades más sobresalientes son: impermeabilidad, incombustibilidad, aislamiento térmico, resistencia estructural, ligerosa, buen aspecto y no se afectan por la intemperie.

## usos e instalación

La lámina ONDULADA ESTANDAR ASBESTOLIT se usa con ventaja en techados y laterales industriales y comerciales, en casas habitación y, en general, en toda clase de cobertizos. Su instalación es fácil con herramientas usuales y su fijación puede hacerse en estructuras metálicas con varillas galvanizadas y en estructuras de madera con clavos galvanizados cabeza de plomo, comunes en el mercado.

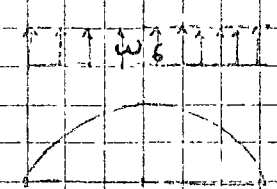
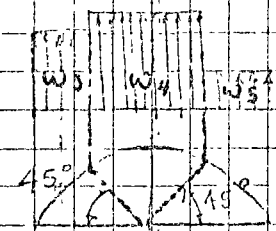
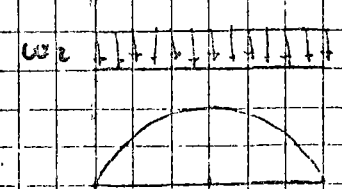
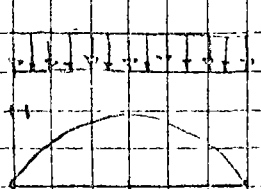


Viento longitudinal

Condiciones de carga para el analisis

Deberán considerarse las condiciones de carga siguientes.

- 1.- Carga muerta
- 2.- Carga viva
- 3.- Viento transversal
- 4.- Viento longitudinal



$w_1 = 240 \text{ Kg/m}$

$w_2 = 240 \text{ Kg/m}$

$w_3 = -355 \text{ Kg/m}$

$w_4 = 432 \text{ Kg/m}$

$w_5 = -415$

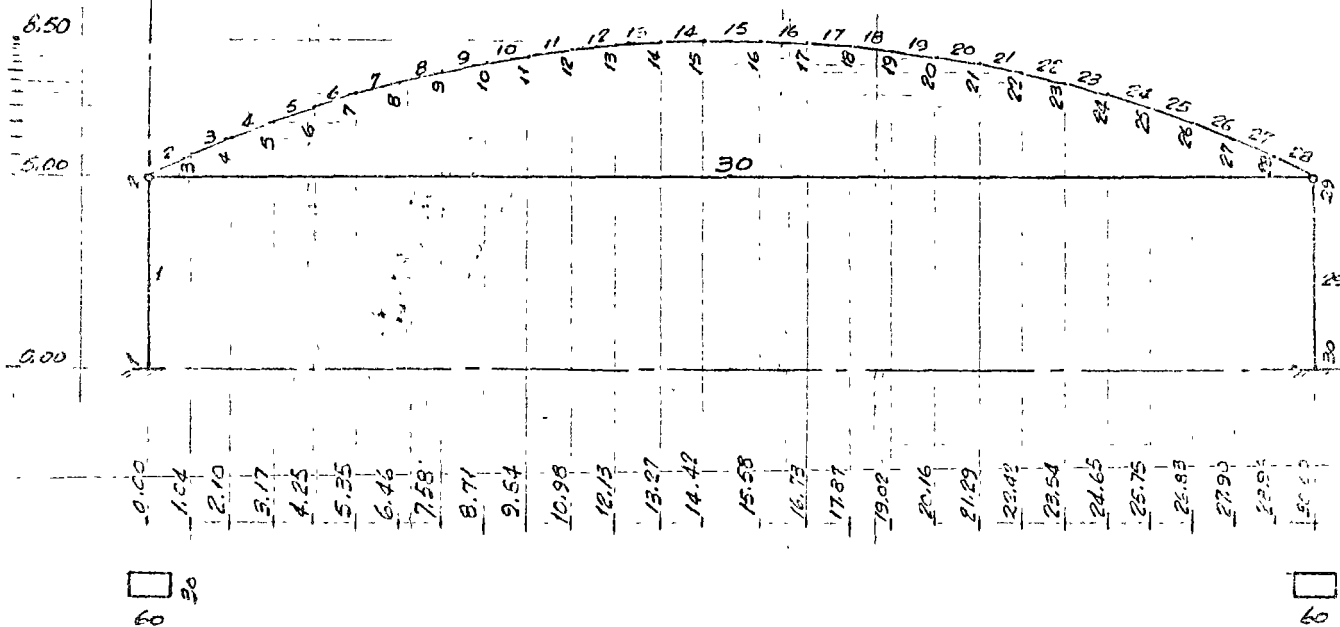
$w_6 = -280$

$5 = 1 + 2$

$6 = (1 + 3) / 1.5$

$7 = (1 + 4) / 1.5$

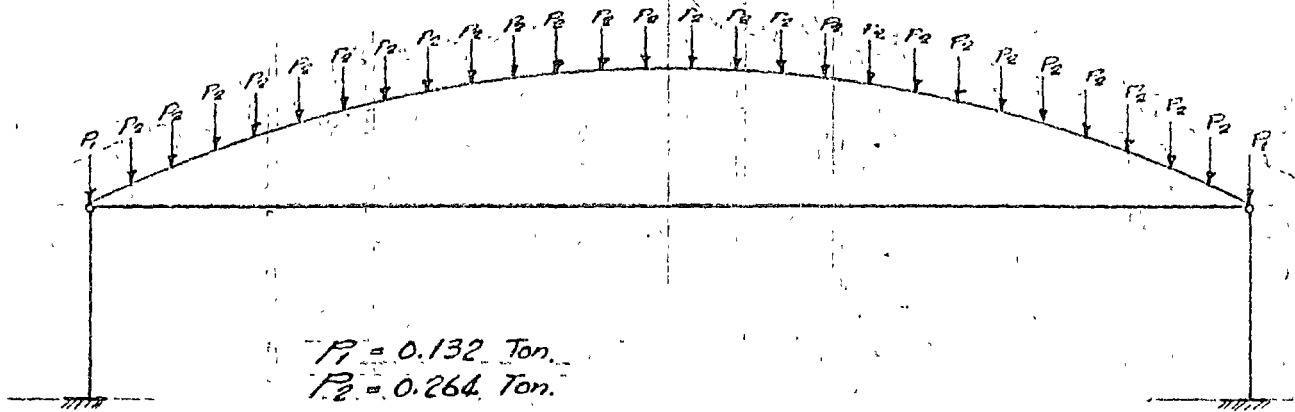
# CUBIERTA CON ARCO CIRCULAR ATIRANTADO



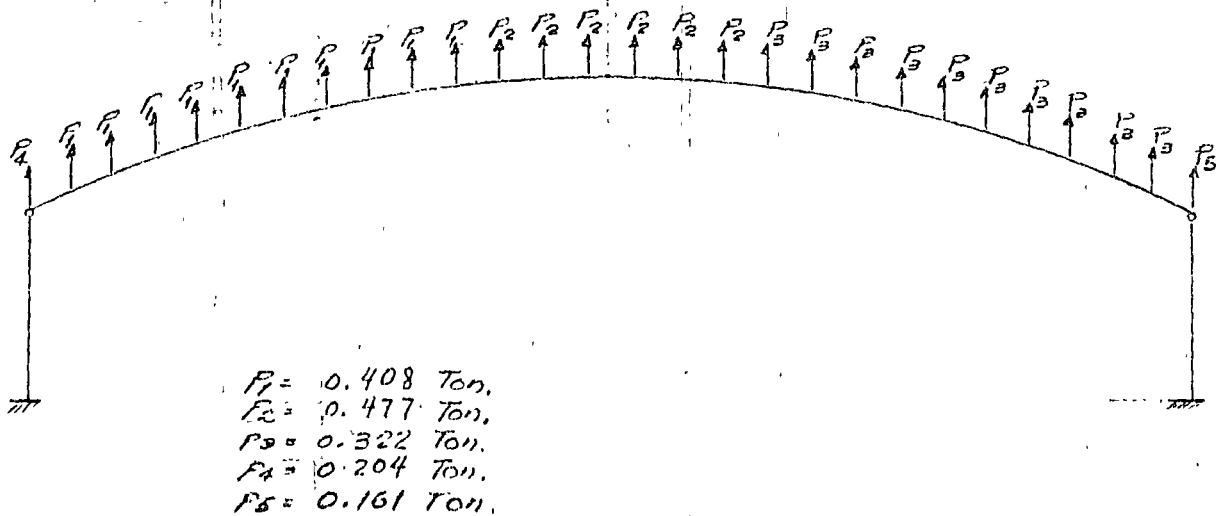
JUNTAS	ORECNADA
2 - 29	5.00
3 - 28	5.49
4 - 27	5.95
5 - 26	6.37
6 - 25	6.75
7 - 24	7.10
8 - 23	7.41
9 - 22	7.68
10 - 21	7.91
11 - 20	8.10
12 - 19	8.26
13 - 18	8.38
14 - 17	8.46
15 - 16	8.50



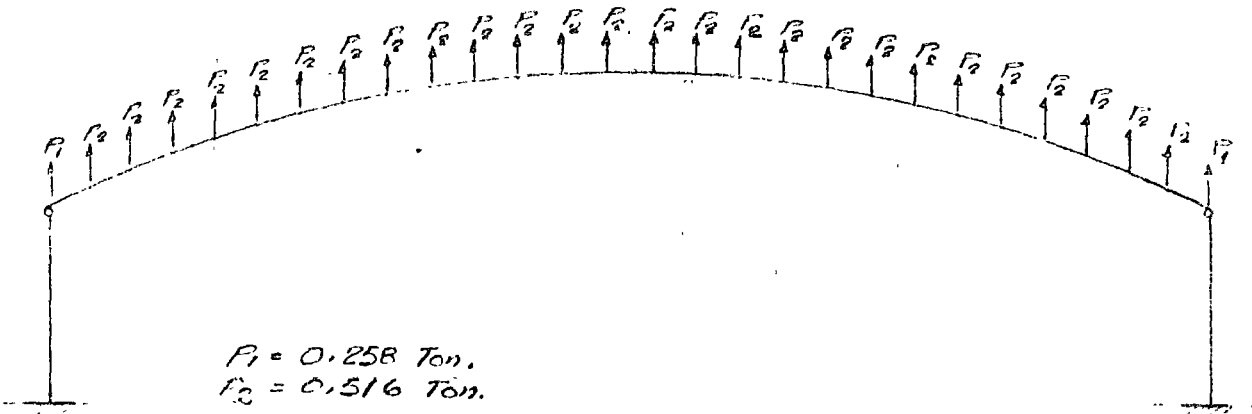
## CARGA MUERTA - CARGA VIVA



## VIENTO TRANSVERSAL -



VIENTO LONGITUDINAL .-



STRUCTURE CUBIERTA CON ARCO ATIRANTADO

TYPE PLANE FRAME

NUMBER OF JOINTS 30

NUMBER OF MEMBERS 30

NUMBER OF SUPPORTS 2

NUMBER OF LOADINGS 2

JOINT COORDINATES

1	0.00	0.00	S
2	0.00	5.00	
3	1.04	5.49	
4	2.10	5.95	
5	3.17	6.37	
6	4.25	6.75	
7	5.35	7.10	
8	6.46	7.41	
9	7.58	7.68	
10	8.71	7.91	
11	9.84	8.10	
12	10.98	8.26	
13	12.13	8.38	
14	13.27	8.46	
15	14.42	8.50	
16	15.58	8.50	
17	16.73	8.46	
18	17.87	8.38	
19	19.02	8.26	
20	20.16	8.10	
21	21.29	7.91	
22	22.42	7.68	
23	23.54	7.41	
24	24.65	7.10	
25	25.75	6.75	
26	26.83	6.37	
27	27.90	5.95	
28	28.96	5.49	
29	30.00	5.00	
30	30.00	0.00	S

MEMBER PROPERTIES PRISMATIC

1	AX	0.180000	IZ	0.005400
2	THPI	28	AX	0.001844
			IZ	0.000226
		29	AX	0.180000
			IZ	0.005400
		30	AX	0.000574
			IZ	0.000001

MEMBER RELEASES

2 START MOMENT Z

28 END MOMENT Z

MEMBER INCIDENCES

1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9

9	9	10
10	10	11
11	11	12
12	12	13
13	13	14
14	14	15
15	15	16
16	16	17
17	17	18
18	18	19
19	19	20
20	20	21
21	21	22
22	22	23
23	23	24
24	24	25
25	25	26
26	26	27
27	27	28
28	28	29
29	30	29

30 2 29

CONSTANTS F 21000000.0 ALL BUT 2000000.0 1 29

TABULATE ALL

LOADING I CARGA MUERTA

JOINT LOADS

2 FORCE Y -0.132  
3 FORCE Y -0.264  
4 FORCE Y -0.264  
5 FORCE Y -0.264  
6 FORCE Y -0.264  
7 FORCE Y -0.264  
8 FORCE Y -0.264  
9 FORCE Y -0.264  
10 FORCE Y -0.264  
11 FORCE Y -0.264  
12 FORCE Y -0.264  
13 FORCE Y -0.264  
14 FORCE Y -0.264  
15 FORCE Y -0.264  
16 FORCE Y -0.264  
17 FORCE Y -0.264  
18 FORCE Y -0.264  
19 FORCE Y -0.264  
20 FORCE Y -0.264  
21 FORCE Y -0.264  
22 FORCE Y -0.264  
23 FORCE Y -0.264  
24 FORCE Y -0.264  
25 FORCE Y -0.264  
26 FORCE Y -0.264  
27 FORCE Y -0.264  
28 FORCE Y -0.264  
29 FORCE Y -0.132

LOADING II CARGA MUERTA + CARGA VIVA

COMBINE 1 2.0

SOLVE

PROBLEM CORRECTLY SPECIFIED, EXECUTION TO PROCEED.

STRUCTURE CURVEPTA CON ARCO ATIRANTADO

LOADING 1 CARGA MUERTA

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	3.559	-1.708	
1	2	-3.559	1.708	-0.00
2	2	7.796	0.115	0.00
2	3	-7.796	-0.115	0.13
3	3	7.684	0.114	-0.13
3	4	-7.684	-0.114	0.20
4	4	7.578	0.140	-0.20
4	5	-7.578	-0.140	0.42
5	5	7.481	0.161	-0.42
5	6	-7.481	-0.161	0.61
6	6	7.393	0.136	-0.61
6	7	-7.393	-0.136	0.76
7	7	7.312	0.147	-0.76
7	8	-7.312	-0.147	0.93
8	8	7.241	0.152	-0.93
8	9	-7.241	-0.152	1.11
9	9	7.178	0.152	-1.11
9	10	-7.178	-0.152	1.28
10	10	7.125	0.138	-1.28
10	11	-7.125	-0.138	1.44
11	11	7.082	0.070	-1.44
11	12	-7.082	-0.070	1.52
12	12	7.047	0.059	-1.52
12	13	-7.047	-0.059	1.59
13	13	7.023	0.035	-1.59
13	14	-7.023	-0.035	1.63
14	14	7.008	0.020	-1.63
14	15	-7.008	-0.020	1.65
15	15	7.003	0.000	-1.65
15	16	-7.003	-0.000	1.65
16	16	7.008	-0.019	-1.65
16	17	-7.008	0.019	1.63
17	17	7.023	-0.025	-1.63
17	18	-7.023	0.035	1.59
18	18	7.047	-0.059	-1.59
18	19	-7.047	0.059	1.52

19	19	7.081	-0.070	-1.52
19	20	-7.081	0.070	1.44
20	20	7.125	-0.137	-1.44
20	21	-7.125	0.137	1.28
21	21	7.178	-0.151	-1.28
21	22	-7.178	0.151	1.11
22	22	7.240	-0.151	-1.11
22	23	-7.240	0.151	0.93
23	23	7.312	-0.146	-0.93
23	24	-7.312	0.146	0.76
24	24	7.392	-0.136	-0.76
24	25	-7.392	0.136	0.60
25	25	7.481	-0.161	-0.60
25	26	-7.481	0.161	0.42
26	26	7.578	-0.139	-0.42
26	27	-7.578	0.139	0.26
27	27	7.683	-0.113	-0.26
27	28	-7.683	0.113	0.13
28	28	7.795	-0.115	-0.13
28	29	-7.795	0.115	0.00
29	30	3.559	1.708	8.54
29	29	-3.559	-1.708	0.00
30	2	5.294	-0.000	0.00
30	29	5.294	0.000	-0.00

APPLIED JOINT LOADS, FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
2	0.000	-0.131	0.00
3	0.000	-0.263	0.00
4	-0.000	-0.263	0.00
5	0.000	-0.263	0.00
6	0.000	-0.263	0.00
7	0.000	-0.263	0.00
8	-0.000	-0.263	0.00
9	-0.000	-0.263	0.00
10	-0.000	-0.263	0.00
11	0.000	-0.263	0.00
12	-0.000	-0.263	0.00
13	-0.000	-0.263	0.00
14	-0.000	-0.263	0.00
15	0.000	-0.263	0.00
16	-0.000	-0.263	0.00
17	-0.000	-0.263	0.00
18	-0.000	-0.263	0.00
19	0.000	-0.263	0.00
20	0.000	-0.263	0.00
21	-0.000	-0.263	0.00
22	-0.000	-0.263	0.00
23	-0.000	-0.263	0.00
24	0.000	-0.263	-0.00
25	-0.000	-0.263	-0.00

26	-0.000	-0.263	0.00
27	-0.000	-0.263	-0.00
28	-0.000	-0.263	-0.00
29	0.000	-0.132	-0.00

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	1.708	3.559	-8.53
30	-1.708	3.559	8.54

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	ROTATION
2	-0.0065	-0.0000	0.0019
3	-0.0052	-0.0035	-0.0032
4	-0.0039	-0.0070	-0.0031
5	-0.0028	-0.0104	-0.0031
6	-0.0018	-0.0138	-0.0029
7	-0.0010	-0.0170	-0.0028
8	-0.0004	-0.0201	-0.0026
9	0.0000	-0.0229	-0.0023
10	0.0003	-0.0255	-0.0020
11	0.0004	-0.0277	-0.0017
12	0.0005	-0.0295	-0.0013
13	0.0004	-0.0308	-0.0009
14	0.0002	-0.0318	-0.0006
15	0.0001	-0.0322	-0.0002
16	-0.0001	-0.0322	0.0002
17	-0.0002	-0.0318	0.0006
18	-0.0004	-0.0308	0.0009
19	-0.0005	-0.0295	0.0013
20	-0.0004	-0.0276	0.0017
21	-0.0003	-0.0255	0.0020
22	-0.0000	-0.0229	0.0023
23	0.0000	-0.0201	0.0026
24	0.0010	-0.0170	0.0028
25	0.0018	-0.0138	0.0029
26	0.0028	-0.0104	0.0031
27	0.0039	-0.0070	0.0031
28	0.0052	-0.0035	0.0032
29	0.0065	-0.0000	-0.0019



STRUCTURE CUBIERTA CON ARCO ATIRANTADO

LOADING II CARGA MUERTA + CARGA VIVA

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	7.118	-3.416	-17.07
1	2	-7.118	3.416	-0.00
2	2	15.592	0.231	0.00
2	3	-15.592	-0.231	0.26
3	3	15.368	0.228	-0.26
3	4	-15.368	-0.228	0.52
4	4	15.157	0.280	-0.52
4	5	-15.157	-0.280	0.85
5	5	14.962	0.323	-0.85
5	6	-14.962	-0.323	1.22
6	6	14.786	0.273	-1.22
6	7	-14.786	-0.273	1.53
7	7	14.625	0.294	-1.53
7	8	-14.625	-0.294	1.87
8	8	14.482	0.304	-1.87
8	9	-14.482	-0.304	2.22
9	9	14.356	0.305	-2.22
9	10	-14.356	-0.305	2.57
10	10	14.250	0.276	-2.57
10	11	-14.250	-0.276	2.89
11	11	14.164	0.141	-2.89
11	12	-14.164	-0.141	3.05
12	12	14.095	0.119	-3.05
12	13	-14.095	-0.119	3.19
13	13	14.046	0.070	-3.19
13	14	-14.046	-0.070	3.27
14	14	14.016	0.040	-3.27
14	15	-14.016	-0.040	3.31
15	15	14.000	0.000	-3.31
15	16	-14.000	-0.000	3.31
16	16	14.016	-0.038	-3.31
16	17	-14.016	0.038	3.27
17	17	14.046	-0.070	-3.27
17	18	-14.046	-0.070	2.19
18	18	14.095	-0.118	-3.19
18	19	-14.095	0.118	3.05
19	19	14.163	-0.140	-3.05

19	20	-14.163	0.140	2.57
20	20	14.250	-0.275	-2.57
20	21	-14.250	0.275	2.57
21	21	14.356	-0.303	-2.22
21	22	-14.356	0.303	2.22
22	22	14.481	-0.303	-2.22
22	23	-14.481	0.303	1.87
23	23	14.624	-0.292	-1.87
23	24	-14.624	0.292	1.53
24	24	14.785	-0.273	-1.53
24	25	-14.785	0.273	1.21
25	25	14.962	-0.323	-1.21
25	26	-14.962	0.323	0.84
26	26	15.156	-0.279	-0.84
26	27	-15.156	0.279	0.52
27	27	15.367	-0.227	-0.52
27	28	-15.367	0.227	0.26
28	28	15.591	-0.230	-0.26
28	29	-15.591	0.230	0.00
29	30	7.118	3.417	17.00
29	29	-7.118	-3.417	0.00
30	2	-10.589	-0.000	0.00
30	29	10.589	0.000	-0.00

APPLIED JOINT LOADS, FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
2	0.000	-0.253	0.00
3	0.000	-0.527	0.00
4	-0.000	-0.527	0.00
5	0.000	-0.527	0.00
6	0.000	-0.527	0.00
7	0.000	-0.527	0.00
8	-0.000	-0.526	0.00
9	-0.000	-0.527	0.00
10	-0.000	-0.526	0.00
11	0.000	-0.526	0.00
12	-0.000	-0.527	0.00
13	-0.000	-0.527	0.00
14	-0.000	-0.526	0.00
15	0.000	-0.526	0.00
16	-0.000	-0.526	0.00
17	-0.000	-0.527	0.00
18	-0.000	-0.527	0.00
19	0.000	-0.527	0.00
20	0.000	-0.526	0.00
21	-0.000	-0.526	0.00
22	-0.000	-0.527	0.00
23	-0.000	-0.526	0.00
24	0.000	-0.527	-0.00
25	-0.000	-0.527	-0.00
26	-0.000	-0.527	0.00

27	-0.000	-0.527	-0.00
28	-0.000	-0.527	-0.00
29	0.001	-0.264	-0.00

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	3.416	7.118	-17.07
30	-3.417	7.118	17.08

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	ROTATION
2	-0.0131	-0.0000	0.0039
3	-0.0104	-0.0070	-0.0064
4	-0.0078	-0.0140	-0.0063
5	-0.0056	-0.0209	-0.0062
6	-0.0037	-0.0276	-0.0059
7	-0.0021	-0.0341	-0.0056
8	-0.0008	-0.0403	-0.0052
9	0.0000	-0.0459	-0.0047
10	0.0006	-0.0510	-0.0041
11	0.0009	-0.0554	-0.0034
12	0.0010	-0.0590	-0.0027
13	0.0008	-0.0617	-0.0019
14	0.0005	-0.0636	-0.0012
15	0.0002	-0.0645	-0.0004
16	-0.0002	-0.0645	0.0004
17	-0.0005	-0.0636	0.0012
18	-0.0008	-0.0617	0.0019
19	-0.0010	-0.0590	0.0027
20	-0.0009	-0.0553	0.0034
21	-0.0006	-0.0510	0.0041
22	-0.0000	-0.0459	0.0047
23	0.0008	-0.0402	0.0052
24	0.0021	-0.0341	0.0056
25	0.0037	-0.0276	0.0059
26	0.0056	-0.0209	0.0062
27	0.0078	-0.0140	0.0063
28	0.0104	-0.0070	0.0064
29	0.0131	-0.0000	-0.0039

MEMBER COORDINATES COORDINATE ATIPANT ADD

TYPE PLANE FRAME

NUMBER OF JOINTS 30

NUMBER OF MEMBERS 30

NUMBER OF SUPPORTS 2

NUMBER OF LOADINGS 2

JOINT COORDINATES

1	0.00	0.00	S
2	0.00	5.00	
3	1.04	5.40	
4	2.11	5.95	
5	3.17	6.37	
6	4.25	6.75	
7	5.25	7.10	
8	6.46	7.41	
9	7.68	7.68	
10	8.71	7.91	
11	9.84	8.10	
12	10.88	8.26	
13	12.03	8.38	
14	13.27	8.46	
15	14.52	8.50	
16	15.58	8.50	
17	16.73	8.46	
18	17.87	8.38	
19	19.12	8.26	
20	20.16	8.10	
21	21.29	7.91	
22	22.42	7.68	
23	23.54	7.41	
24	24.65	7.10	
25	25.75	6.75	
26	26.83	6.37	
27	27.90	5.95	
28	28.96	5.49	
29	30.00	5.00	
30	30.00	0.00	S

MEMBER PROPERTIES ISGNATIC

1 AX 0.180000 IZ 0.005400

2 THRU 28 AX 0.001844 IZ 0.000226

29 AX 0.180000 IZ 0.005400

30 AX 0.000001 IZ 0.000001

MEMBER RELEASES

2 START MOMENT Z

28 END MOMENT Z

MEMBER INCIDENCES

1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	"
8	8	9

9	9	10
10	10	11
11	11	12
12	12	13
13	13	14
14	14	15
15	15	16
16	16	17
17	17	18
18	18	19
19	19	20
20	20	21
21	21	22
22	22	23
23	23	24
24	24	25
25	25	26
26	26	27
27	27	28
28	28	29
29	30	29
30	2	29

CONSTANTS E 21000000.0 ALL BUT 2000000.0 1 29

TABULATE ALL

LOADING III VIENTO TRANSVERSAL

JOINT LOADS

2	FORCE Y	0.204
3	FORCE Y	0.408
4	FORCE Y	0.408
5	FORCE Y	0.408
6	FORCE Y	0.408
7	FORCE Y	0.408
8	FORCE Y	0.408
9	FORCE Y	0.408
10	FORCE Y	0.408
11	FORCE Y	0.408
12	FORCE Y	0.408
13	FORCE Y	0.477
14	FORCE Y	0.477
15	FORCE Y	0.477
16	FORCE Y	0.477
17	FORCE Y	0.477
18	FORCE Y	0.477
19	FORCE Y	0.322
20	FORCE Y	0.322
21	FORCE Y	0.322
22	FORCE Y	0.322
23	FORCE Y	0.322
24	FORCE Y	0.322
25	FORCE Y	0.322
26	FORCE Y	0.322
27	FORCE Y	0.322
28	FORCE Y	0.322
29	FORCE Y	0.161

LOADING IV VIENTO LONGITUDINAL

JOINT LOAD

2 FORCE Y 0.258  
3 FORCE Y 0.516  
4 FORCE Y 0.516  
5 FORCE Y 0.516  
6 FORCE Y 0.516  
7 FORCE Y 0.516  
8 FORCE Y 0.516  
9 FORCE Y 0.516  
10 FORCE Y 0.516  
11 FORCE Y 0.516  
12 FORCE Y 0.516  
13 FORCE Y 0.516  
14 FORCE Y 0.516  
15 FORCE Y 0.516  
16 FORCE Y 0.516  
17 FORCE Y 0.516  
18 FORCE Y 0.516  
19 FORCE Y 0.516  
20 FORCE Y 0.516  
21 FORCE Y 0.516  
22 FORCE Y 0.516  
23 FORCE Y 0.516  
24 FORCE Y 0.516  
25 FORCE Y 0.516  
26 FORCE Y 0.516  
27 FORCE Y 0.516  
28 FORCE Y 0.516  
29 FORCE Y 0.258

SOLVE

PROBLEM CORRECTLY SPECIFIED, EXECUTION TO PROCEED.

STRUCTURE CUBIERTA CON ARCO ATIRANTADO

LOADING III VIENTO TRANSVERSAL

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	-5.526	9.414	47.05
1	2	5.526	-9.414	0.01
2	2	-10.832	-0.780	-0.00
2	3	10.832	0.780	-0.89
3	3	-10.640	-0.740	0.89
3	4	10.640	0.740	-1.75
4	4	-10.459	-0.736	1.75
4	5	10.459	0.736	-2.59
5	5	-10.290	-0.724	2.59
5	6	10.290	0.724	-3.42
6	6	-10.141	-0.648	3.42
6	7	10.141	0.648	-4.17
7	7	-10.002	-0.618	4.17
7	8	10.002	0.618	-4.88
8	8	-9.878	-0.581	4.88
8	9	9.878	0.581	-5.55
9	9	-9.770	-0.537	5.55
9	10	9.770	0.537	-6.17
10	10	-9.679	-0.473	6.17
10	11	9.679	0.473	-6.71
11	11	-9.605	-0.332	6.70
11	12	9.605	0.332	-7.09
12	12	-9.546	-0.269	7.08
12	13	9.546	0.269	-7.39
13	13	-9.498	-0.112	7.39
13	14	9.498	0.112	-7.52
14	14	-9.472	0.022	7.52
14	15	9.472	-0.022	-7.49
15	15	-9.467	0.168	7.49
15	16	9.467	-0.168	-7.30
16	16	-9.484	0.313	7.30
16	17	9.484	-0.313	-6.94
17	17	-9.454	0.454	6.94
17	18	9.454	-0.454	-6.42
18	18	-9.581	0.602	6.41

18	19	9.581	-1.602	-5.72
19	19	-9.641	0.579	1.72
19	20	9.641	-0.579	-5.15
20	20	-9.707	0.633	5.05
20	21	9.707	-0.633	-1.22
21	21	-9.786	0.615	.32
21	22	9.786	-0.615	-3.62
22	22	-9.877	0.577	3.61
22	23	9.877	-0.577	-2.05
22	23	-9.977	0.532	2.95
23	24	9.977	-0.532	-2.34
24	24	-10.087	0.481	2.32
24	25	10.087	-0.481	-1.78
25	25	-10.204	0.479	1.75
25	26	10.204	-0.479	-1.23
26	26	-10.331	0.414	1.22
26	27	10.331	-0.414	-0.75
27	27	-10.467	0.344	0.75
27	28	10.467	-0.344	-0.35
28	28	-10.605	0.312	0.35
28	29	10.605	-0.312	0.00
29	30	-4.915	-0.416	-4.06
29	30	4.915	0.416	-0.01
30	31	0.000	0.000	-0.01
30	30	-0.000	-0.000	0.01

APPLIED JOINT LOADS, FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
2	-1.000	0.000	-1.00
3	-1.000	0.000	-0.00
4	-1.000	0.000	-0.00
5	-1.000	0.000	-1.00
6	-1.000	0.000	-0.00
7	-1.000	0.000	-1.00
8	-1.000	0.000	-0.00
9	-1.000	0.000	-0.00
10	-1.000	0.000	-1.00
11	-1.000	0.000	-0.00
12	-1.000	0.000	-0.00
13	-1.000	0.000	-0.00
14	-1.000	0.000	-0.00
15	-1.000	0.000	-0.00
16	-1.000	0.000	-0.00
17	-1.000	0.000	-0.00
18	-1.000	0.000	-0.00
19	-1.000	0.000	0.00
20	-1.000	0.000	-0.00
21	-1.000	0.000	0.00
22	-1.000	0.000	-0.00
23	-1.000	0.000	-0.00
24	-1.000	0.000	-0.00



25	0.000	0.221	-0.00
26	0.000	0.321	0.00
27	0.000	0.322	0.00
28	0.001	0.321	-0.00
29	-0.003	0.161	0.00

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	-9.414	-5.526	47.05
30	9.416	-4.965	-47.06

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	ROTATION
2	0.0263	0.0000	-0.0108
3	0.0292	0.0157	0.0148
4	0.0278	0.0314	0.0145
5	0.0171	0.0468	0.0139
6	0.0122	0.0616	0.0132
7	0.0080	0.0758	0.0123
8	0.0046	0.0890	0.0117
9	0.0020	0.1010	0.0099
10	0.0002	0.1115	0.0085
11	0.0009	0.1203	0.0069
12	-0.0016	0.1274	0.0052
13	-0.0019	0.1326	0.0035
14	-0.0018	0.1356	0.0017
15	-0.0016	0.1366	-0.0000
16	-0.0013	0.1355	-0.0018
17	-0.0011	0.1323	-0.0025
18	-0.0012	0.1273	-0.0052
19	-0.0016	0.1204	-0.0066
20	-0.0025	0.1120	-0.0079
21	-0.0039	0.1022	-0.0091
22	-0.0058	0.0913	-0.0100
23	-0.0083	0.0795	-0.0108
24	-0.0115	0.0669	-0.0115
25	-0.0154	0.0539	-0.0120
26	-0.0197	0.0406	-0.0123
27	-0.0247	0.0271	-0.0126
28	-0.0303	0.0135	-0.0127
29	-0.0363	0.0000	-0.0108

STRUCTURE CUBIERTA CON ARCO ATIRANTADO

LOADING IVa VIENTO LONGITUDINAL

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	-6.942	12.035	60.15
1	2	6.942	-12.035	0.01
2	2	-13.796	-0.889	-0.00
2	3	13.796	0.889	-1.02
3	3	-13.658	-0.842	1.02
3	4	13.658	0.842	-1.99
4	4	-13.331	-0.841	1.99
4	5	13.331	0.841	-2.96
5	5	-13.122	-0.830	2.96
5	6	13.122	0.830	-3.91
6	6	-12.935	-0.735	3.91
6	7	12.935	0.735	-4.76
7	7	-12.701	-0.701	4.76
7	8	12.701	0.701	-5.56
8	8	-12.469	-0.660	5.56
8	9	12.469	0.660	-6.32
9	9	-12.271	-0.606	6.32
9	10	12.271	0.606	-7.02
10	10	-12.032	-0.524	7.02
10	11	12.032	0.524	-7.62
11	11	-12.731	-0.353	7.62
11	12	12.731	0.353	-8.03
12	12	-12.588	-0.279	8.03
12	13	12.588	0.279	-8.55
13	13	-12.361	-0.174	8.55
13	14	12.361	0.174	-8.55
14	14	-12.114	-0.092	8.55
14	15	12.114	0.092	-8.55
15	15	-12.104	-0.004	8.65
15	16	12.104	0.004	-8.65
16	16	-12.114	0.089	8.65
16	17	12.114	-0.089	-8.55
17	17	-12.146	0.175	8.55
17	18	12.146	-0.175	-8.35
18	18	-12.196	0.273	8.35
18	19	12.196	-0.273	-8.03
19	19	-12.271	0.348	8.03

19	20	12.271	-0.348	-7.63
20	20	-12.362	0.525	7.63
20	21	12.362	-0.525	-7.03
21	21	-12.474	0.601	7.03
21	22	12.474	-0.601	-6.33
22	22	-12.609	0.659	6.33
22	23	12.609	-0.659	-5.57
23	23	-12.762	0.700	5.57
23	24	12.762	-0.700	-4.76
24	24	-12.936	0.736	4.76
24	25	12.936	-0.736	-3.91
25	25	-13.122	0.829	3.91
25	26	13.122	-0.829	-2.96
26	26	-13.331	0.841	2.96
26	27	13.331	-0.841	-1.99
27	27	-13.558	0.843	1.99
27	28	13.558	-0.843	-1.02
28	28	-13.796	0.892	1.02
28	29	13.796	-0.892	0.00
29	30	-6.944	-12.039	-60.17
29	29	6.944	12.039	-0.00
30	2	0.064	0.000	-0.00
30	29	-0.064	-0.000	0.00

APPLIED JOINT LOADS, FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
2	-0.000	0.257	-0.00
3	-0.001	0.515	-0.00
4	0.000	0.515	-0.00
5	-0.000	0.515	0.00
6	-0.000	0.515	0.00
7	0.000	0.513	-0.00
8	-0.000	0.511	-0.00
9	-0.000	0.514	-0.00
10	-0.000	0.515	-0.00
11	0.000	0.511	0.00
12	-0.000	0.512	-0.00
13	-0.000	0.519	-0.00
14	-0.000	0.510	-0.00
15	0.000	0.508	-0.00
16	-0.000	0.514	-0.00
17	-0.000	0.515	-0.00
18	-0.000	0.512	-0.00
19	0.000	0.513	-0.00
20	0.000	0.516	0.00
21	0.000	0.509	-0.00
22	0.000	0.519	-0.00
23	-0.000	0.511	-0.00
24	-0.000	0.516	-0.00
25	0.000	0.514	0.00
26	0.000	0.516	0.00

27	0.000	0.516	0.00
28	0.001	0.516	0.00
29	-0.003	0.256	0.00

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	-12.035	-6.942	60.15
30	12.039	-6.944	-60.17

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	ROTATION
2	0.0464	0.0000	-0.0139
3	0.0279	0.0190	0.0180
4	0.0300	0.0381	0.0176
5	0.0231	0.0569	0.0170
6	0.0171	0.0750	0.0162
7	0.0120	0.0924	0.0151
8	0.0078	0.1087	0.0139
9	0.0046	0.1235	0.0124
10	0.0023	0.1368	0.0108
11	0.0008	0.1481	0.0090
12	-0.0001	0.1575	0.0071
13	-0.0004	0.1646	0.0051
14	-0.0004	0.1694	0.0031
15	-0.0001	0.1718	0.0010
16	0.0001	0.1718	-0.0010
17	0.0004	0.1694	-0.0021
18	0.0004	0.1646	-0.0051
19	0.0000	0.1575	-0.0071
20	-0.0008	0.1482	-0.0090
21	-0.0023	0.1368	-0.0108
22	-0.0046	0.1236	-0.0124
23	-0.0078	0.1087	-0.0139
24	-0.0120	0.0924	-0.0151
25	-0.0171	0.0750	-0.0162
26	-0.0231	0.0569	-0.0170
27	-0.0300	0.0382	-0.0176
28	-0.0379	0.0191	-0.0180
29	-0.0464	0.0000	0.0139

PAGE 1

JOB

LOG DRIVE 0000    CART SPEC 076A    CART AVAIL 076A    PHY DRIVE 0000

VT M11    ACTUAL RK    CONFIG RK

// FOR

\*IOCS(CARD,1132 PRINTER)  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*LIST SOURCE PROGRAM

C-ERRS...STNO.C..... F O R T R A N    S O U R C E    S T A T E M E N T S    .....

```

      DIMENSION M(60),J(60),AF1(60),SF1(60),T1(60),AF2(60),SF2(60),T2(60)
      -),ARR(10)
      READ(2,10)ARR
10  FORMAT(10A4)
      DO 20 I=1,60
20  READ(2,30)M(I),J(I),AF1(I),SF1(I),T1(I)
30  FORMAT(16,18,F12.3,F17.3,F19.2)
      DO 40 I=1,60
40  READ(2,30)M(I),J(I),AF2(I),SF2(I),T2(I)
      DO 50 I=1,60
      AF1(I)=(AF1(I)+AF2(I))*0.66667
      SF1(I)=(SF1(I)+SF2(I))*0.66667
50  T1(I)=(T1(I)+T2(I))*0.66667
      WRITE(3,60)ARR
60  FORMAT(///,11 'STRUCTURE CUBIERTA CON ARCO ATIRANTADO',/,2X,
      -69('= '),////4X,'LOADING',10A4,/,2X,69('= '),////11X,'MEMBER FORCES
      -/,///,2X,'MEMBER    JOINT    AXIAL FORCE    SHEAR FORCE    NO.
      -NT')
      DO 70 I=1,60
70  WRITE(3,30)M(I),J(I),AF1(I),SF1(I),T1(I)
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
STANDARD PRECISION  
IOCS-  
1132 PRINTER  
CARD

CORE REQUIREMENTS FOR -  
COMMON-    0,    VARIABLES AND TEMPORARIES-    864,    CONSTANTS AND PROGRAM-

END OF SUCCESSFUL COMPILATION

// XEO

ESTRUCTURA CUADRIETA CON ARCO ADIACENTADO

LOADING + CARGA VERTICAL + SIGMO TRANSVERSAL

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHARP FORCE	MOMENT
1	1	-1.311	0.127	20.08
1	2	1.311	-0.127	0.00
2	2	-2.024	-0.443	0.00
2	3	2.024	0.443	-0.50
3	3	-1.970	-0.417	0.50
3	4	1.970	0.417	-0.97
4	4	-1.927	-0.397	0.98
4	5	1.927	0.397	-1.44
5	5	-1.872	-0.375	1.44
5	6	1.872	0.375	-1.91
6	6	-1.822	-0.341	1.91
6	7	1.822	0.341	-2.27
7	7	-1.772	-0.314	2.27
7	8	1.772	0.314	-2.63
8	8	-1.724	-0.286	2.63
8	9	1.724	0.286	-3.00
9	9	-1.724	-0.286	3.00
9	10	1.724	0.286	-3.28
10	10	-1.702	-0.273	3.28
10	11	1.702	0.273	-3.51
11	11	-1.682	-0.174	3.51
11	12	1.682	0.174	-3.71
12	12	-1.664	-0.140	3.71
12	13	1.664	0.140	-3.81
13	13	-1.651	-0.091	3.81
13	14	1.651	0.091	-3.91
14	14	-1.637	-0.028	3.92
14	15	1.637	0.028	-3.96
15	15	-1.642	0.117	3.97
15	16	1.642	-0.112	-3.97
16	16	-1.656	0.106	3.97
16	17	1.656	-0.100	-3.94
17	17	-1.666	0.279	3.94
17	18	1.666	-0.279	-3.92
18	18	-1.685	0.362	3.91
18	19	1.685	-0.362	-3.86
19	19	-1.726	0.399	3.86
19	20	1.726	-0.339	-3.45
20	20	-1.721	0.300	3.45
20	21	1.721	-0.320	-2.92

21	21	1.738	0.309	2.02
22	22	1.738	-0.309	-1.67
22	22	1.758	0.284	1.66
22	22	1.758	-0.284	-1.34
23	23	1.776	0.257	1.34
23	23	1.776	-0.257	-1.05
24	24	-1.796	0.230	1.04
24	24	1.796	-0.230	-0.78
25	25	-1.815	0.212	0.78
25	25	1.815	-0.212	-0.54
26	26	-1.835	0.183	0.54
26	26	1.835	-0.183	-0.32
27	27	-1.856	0.154	0.32
27	27	1.856	-0.154	-0.14
28	28	-1.875	0.131	0.14
28	28	1.875	-0.131	0.00
29	30	-0.937	-5.138	-25.68
29	29	0.937	5.138	-0.00
30	2	-2.496	0.000	-0.00
30	29	2.496	0.000	0.00

ESTRUCTURA CUBIERTA CON ARCO ATIRANTADO

LOADING: VI CARGA PUERTA + VIENTO LONGITUDINAL

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	-2.255	6.884	34.41
1	2	2.255	-6.884	0.00
2	2	-4.000	-0.516	0.00
2	3	4.000	0.516	-0.55
3	3	-3.916	-0.485	0.55
3	4	3.916	0.485	-1.15
4	4	-3.835	-0.467	1.15
4	5	3.835	0.467	-1.05
5	5	-3.760	-0.446	1.05
5	6	3.760	0.446	-2.20
6	6	-3.694	-0.399	2.20
6	7	3.694	0.399	-2.66
7	7	-3.633	-0.369	2.66
7	8	3.633	0.369	-3.08
8	8	-3.578	-0.338	3.08
8	9	3.578	0.338	-3.47
9	9	-3.531	-0.302	3.47
9	10	3.531	0.302	-3.82
10	10	-3.491	-0.257	3.82
10	11	3.491	0.257	-4.12
11	11	-3.459	-0.218	4.12
11	12	3.459	0.188	-4.54
12	12	-3.434	-0.146	4.54
12	13	3.434	0.146	-4.50
13	13	-3.414	-0.092	4.50
13	14	3.414	0.092	-4.61
14	14	-3.404	-0.048	4.61
14	15	3.404	0.048	-4.66
15	15	-3.400	-0.002	4.66
15	16	3.400	0.002	-4.67
16	16	-3.404	0.046	4.67
16	17	3.404	-0.046	-4.61
17	17	-3.415	0.093	4.61
17	18	3.415	-0.093	-4.50
18	18	-3.434	0.142	4.50
18	19	3.434	-0.142	-4.34
19	19	-3.460	0.185	4.34
19	20	3.460	-0.185	-4.12
20	20	-3.491	0.258	4.12
20	21	3.491	-0.258	-3.83
21	21	-3.530	0.300	3.83



1	22	3.530	-0.300	-3.48
22	22	-3.579	0.338	3.48
22	23	3.579	-0.338	-3.09
23	23	-3.633	0.369	3.09
23	24	3.633	-0.369	-2.66
24	24	-3.696	0.400	2.66
24	25	3.696	-0.400	-2.20
25	25	-3.760	0.445	2.20
25	26	3.760	-0.445	-1.59
26	26	-3.835	0.468	1.59
26	27	3.835	-0.468	-1.15
27	27	-3.916	0.486	1.15
27	28	3.916	-0.486	-0.59
28	28	-4.000	0.518	0.59
28	29	4.000	-0.518	0.00
29	30	-2.256	-6.887	-34.42
29	29	2.256	6.887	-0.00
30	2	-3.486	0.000	-0.00
30	29	3.486	0.000	0.00

## Diseño de largueros.

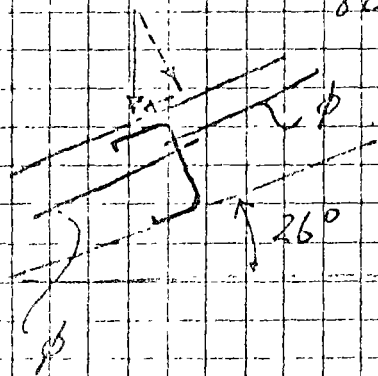
Se usarán perfiles en canal de lámina delgado tipo MONTEN.

Su longitud es de 6m. y su separación de 1.15m.

a) Carga viva + Carga muerta =  $80 \text{ Kg/m}^2$

Carga sobre cada larguero

$$80 \times 6 \times 1.15 = 552 \text{ Kg}$$



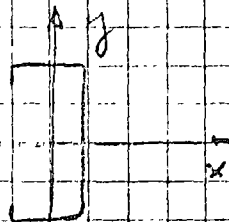
La componente normal de la carga vale:

$$552 \times \cos 26^\circ = 497 \text{ Kg}$$

La componente transversal de la carga vale:

$$552 \times \sin 26^\circ = 243 \text{ Kg}$$

Momento respecto al eje  $x$ :



$$M_x = \frac{6 \times 497}{8} = 373 \text{ Kg-m}$$

Momento alrededor del eje  $y$ :

Se colocarán dos líneas de tirantes de larguero.

que se supone proporcional a apoyo reducido al  
claro respecto a este eje a 2m

$$M_y = \frac{2 \times 81}{8} = 20.25 \text{ Kg-m}$$

b) Carga muerta + viento

El larguero en condiciones más desfavorables tiene

presión del viento:  $- 1.0 \times 84.7 = - 84.7$

carga muerta

$$40.0$$

$$\text{Total} = - 44.7 \text{ Kg/m}^2$$

Momentos sobre el larguero:

$$M_x = - 208.0 \text{ Kg-m}$$

$$M_y = - 11.0 \text{ Kg-m}$$

Para determinar la sección requerida es necesario esta-  
blecer un esfuerzo permisible y para ello debe decidirse  
cuál ha de ser la longitud libre de pandeo lateral.

Para carga muerta y viva una hipótesis usual es  
suponer que la lámina es capaz de impedir este  
pandeo y para el caso de carga de viento en  
que el patín de compresión es el inferior esta  
hipótesis no puede hacerse



Si se supone entonces  $L = 600 \text{ cm}$ .

Se tendrá usando un 8 E 14

$$\frac{Ld}{A_f} = 9400 \quad \therefore \quad F_b = 90 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo existente por carga viva + muerta sería de:

$$f = \frac{M_x}{S_x} + \frac{M_y}{S_y} = \frac{37300}{42.5} + \frac{2720}{8.68} = 878 + 234 = 1112 \text{ Kg/cm}^2$$

que es menor que  $2100 \text{ Kg/cm}^2$

Por carga muerta + viento se tiene:

$$\frac{M_x}{S_x} = \frac{30800}{1.5 \times 42.5} = 326.3 > 90 \text{ Kg/cm}^2$$

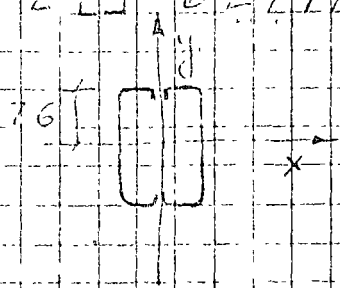
Luego el larguero no sería aceptable.

Si se mencionan las hipótesis de partida respecto a emparrillado y a longitud efectiva de paredes, conviene usar como larguero una sección en cajón que teniendo una gran rigidez torsional no permite el pandeo lateral y puede tomarse como permisible el esfuerzo básico de  $2100 \text{ Kg/cm}^2$ .

En este caso resulta difícil colocar los tramos de larguero por lo que se revisarían los esfuerzos en los conexiones.

en estas condiciones y usando para cada longitud

2 IJ EPR14



$$S_x = 2 \times 23.65 = 47.3 \text{ cm}^3$$

$$I_y = 2 (18.5 + 5.24 \times 3.5^2) = 165 \text{ cm}^4$$

$$S_y = \frac{165}{5} = 33 \text{ cm}^2$$

a)

$$M_x = 373 \text{ Kg-m}$$

$$M_y = \frac{6 \times 243}{8} = 182 \text{ Kg-m}$$

$$f = \frac{37300}{47.3} + \frac{18200}{33} = 788 + 551 = 1339 < 2100$$

b)

Puede que el esfuerzo permisible en este caso se reduce al actuar carga muerta + viva. Pero esto es menor en valor absoluto que la condición de carga viva mas muerta. Registra esta y por ello se podría aceptar la sección propuesta por lo que a diferencia se refiere.

c) Revisión por flecha debida a carga muerta + viva:

$$f = \frac{5}{384} \frac{w l^4}{E I}$$

$$L = 400' = 1.3 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$w = \frac{497}{600} = 0.828 \text{ Kg/cm}$$

$$I = 360 \text{ cm}^4$$

$$f = 2.16$$

Flecha permisible

$$\frac{600}{2100} + 0.3 = 3.5 > 2.16 \text{ cm.}$$

## Diseño de los arcos principales. -

a) Carga viva + carga muerta.

La máxima fuerza de compresión es de 15.6 ton. y el momento máximo es de 5.3 T-m, estos valores cambian poco a lo largo del arco. La fuerza cortante es de aproximadamente 0.3 Ton.

La fuerza en el tirante es de 10.6 Ton.

b) Excepto en las columnas es que al actuar el viento se presentan condiciones más desfavorables en las demás elementos del arco no se presenta esta condición por lo que se considerará la condición a para su diseño.

## Contraventeo de las marcos. -

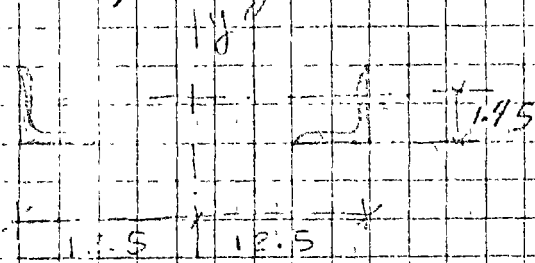
La función más importante del contraventeo que se usa es la de proporcionar el contraventeo lateral a las marcos ya que al trabajar a compresión el problema de pandeo resulta crítico.

Se colocaron tres bitaras de puntales lo que conduce a longitudes libres de pandeo de aproximadamente 7.8 m tanto para las piezas de la cuerda inferior como para las de la superior.

## Cargas

$$T_{ya} \text{ máxima} = \frac{15.6}{2} + \frac{3.3}{0.7} = 12.5 \text{ Ton}$$

Para aumentar el radio de giro en el sentido normal al mar se colocaran los ángulos que forman la siguiente forma que sigue:



Con ángulos de  $2'' \times 3/16''$

$$A = 9.2 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 2 \times 4.6 \times 11.05^2 = 1123 \text{ cm}^4$$

$$r_x = 1.57 ; L_x = 1.1 ;$$

$$\frac{L_x}{r_x} = 73$$

$$F_a = 1133 \text{ kg/cm}^2$$

$$r_y = 11.0 ; L_y = 7.80 ;$$

$$\frac{L_y}{r_y} = 71$$

$$F_{ad} = 1133 \times 0.95 = 1077$$

Usar ángulos de  $2 \times 3/4''$

## Celosis del alma

Puede considerarse el acero como una columna compuesta y utilizar las especificaciones referente a este tipo de miembros para definir las piezas del alma.

La celosis se hará de ángulos buscando que los miembros estén a 1.15 m para que sobre ellos caigan las tensiones se diseñaron para resistir la fuerza cortante calculada al dos por ciento de la fuerza de compresión en el alma.

La relación de esbeltez de cada ángulo se tendrá:



$$V = 0.02 \times 150000 = 3.12 \text{ Kg} \quad , \quad F_{\text{en diagonal}} = 0$$

$$l = 90 \text{ cm} \quad , \quad \frac{l}{r} = 140 \quad , \quad r = \frac{90}{140} = 0.65$$

$$r_x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \quad ; \quad \frac{l}{r_x} = \quad ; \quad r_x =$$

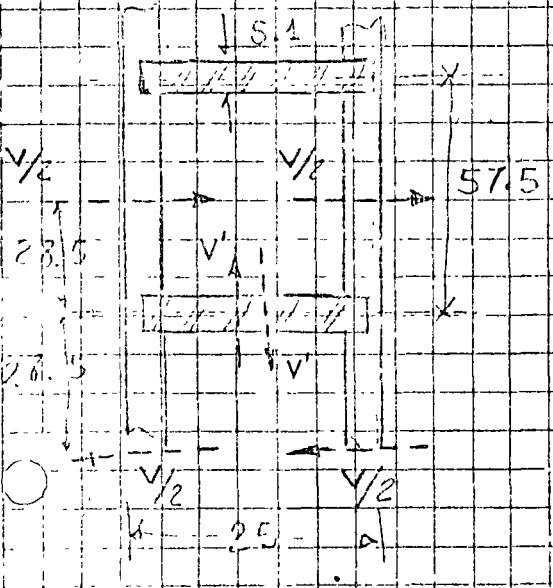
Ligando los ángulos que forman las cuerdas y las diagonales se colocarán placas que reduzcan la longitud libre de pandeo de cada una de ellas y puedan considerarse como se ligo, como un conjunto.

Se cumplirá en este caso también con la condición de:

$$\text{que } \frac{l}{r} = 140 \quad , \quad l = 25 \text{ cm}$$

$$r = \frac{25}{140} = 0.18$$

Por otra parte y de acuerdo con Bleish\* estas placas deberían diseñarse para la condición siguiente:



$$\text{para } \frac{l}{r} = 7.3 \quad \text{e } l = 92$$

$$\frac{V}{A} = 300 \quad , \quad A = \text{area de una cuerda}$$

$$= 12.1 \text{ cm}^2$$

$$= 21 \text{ Kg/cm}^2$$

$$V = 21 \times 12.1 = 44.1 \text{ Kg}$$

$$V' = V \frac{57.5}{25} = 101 \text{ Kg}$$

$$M = V' \frac{25}{2} = 1262.5 \text{ Kg-cm}$$

$$E = \frac{EM}{I} = \frac{6 \times 10^8 \times 1262.5}{1.75 \times 10^8} = 0.2 \text{ cm}$$

\* Buckling Strength of Metal Structures.

from Eq. (355) for structural steel,  $\sigma_p = 25$  kips/in<sup>2</sup> and  $\sigma_y = 33$  kips/in<sup>2</sup>, for values of  $l/r$  between 10 and 200. Below  $l/r = 10$ ,  $\sigma_1$  may become greater than  $\sigma_y$  and Eq. (355) is not applicable. The part of the  $Q_{max}/A$  curve between  $l/r = 0$  and 40 which approaches zero with decreasing  $l/r$  has been replaced, somewhat arbitrarily, by a horizontal line.

Attempts have been made to base the determination of the shearing forces  $Q$  on the concept that imperfections of the column, such as initial crookedness or initial eccentricity of the axial load, may produce shearing forces which must be carried by the members of the lacing system.<sup>1</sup> The initial deflection or eccentricity of the load was assumed a small fraction of the length  $l$ . But in this manner an arbitrary factor which has no

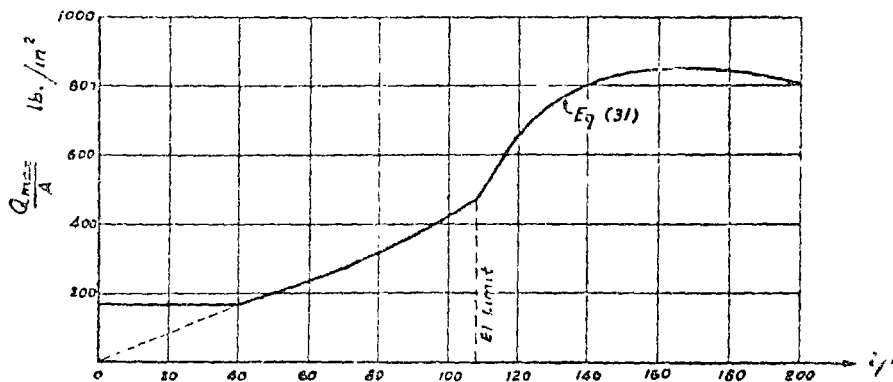


Fig. 92

real relationship to the buckling problem is introduced into the analysis, in contrast to the above-discussed method, which considers the actual performance of the structure in the state of instability.

Using Eq. (355), the design of the details of built-up columns should be based on the yield strength for parts in tension or flexure and on buckling strength for compression members.

**Diagonals in Laced Columns.** With  $Q_{max}$  computed from Eq. (355) the maximum force in the diagonals for lacing systems of the type indicated in Figs. 86 and 87a is given by

$$D_{max} = Q_{max} \frac{d}{h} \quad (356)$$

and for columns having double lacing (Fig. 87b),

$$D_{max} = Q_{max} \frac{d}{2h} \quad (357)$$

<sup>1</sup> Young, D. H., Rational Design of Steel Columns, *Trans. ASCE*, Vol. 101, p. 422, 1936.

Placas extremas

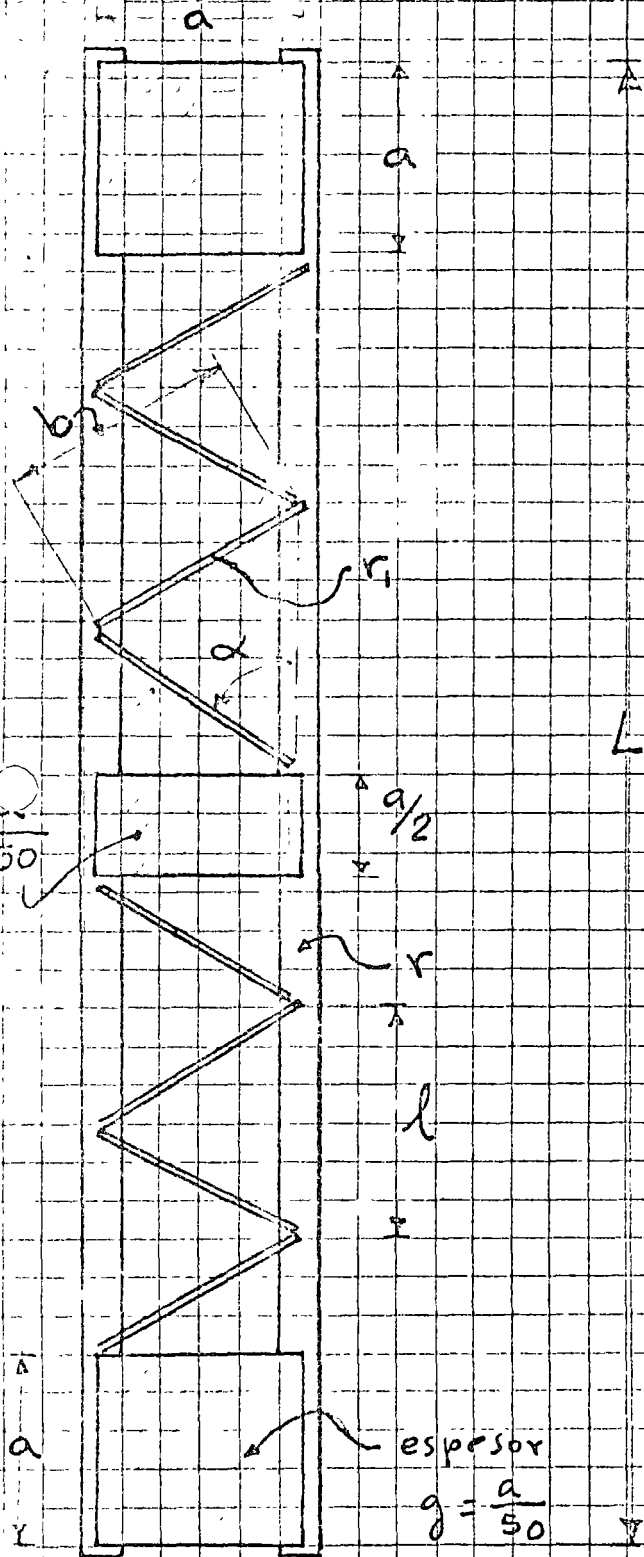
Las verticales serán de 70 cm de longitud y tendrán un espesor de  $\frac{70}{50} = 1.4$  (usar  $5/8$ )

Las horizontales serán de 25 cm con espesor de  $(1/4)$

Tramites

La fuerza en el tirante es de 10600 kg.  
Se requeriran de acuerdo con la tabla de capacidad de  
tension de partes acoradas  $2 \times 5 \frac{3}{8}$   
que podria reducirse en la zona fuera de la zona

c) Perfiles separados y ligados con celosia para formar la sección compuesta.



$$\frac{l}{r} \leq \frac{L}{R}$$

$$\frac{b}{r_1} < 140 \quad \text{celosia simple}$$

$$\frac{0.7b}{r_1} < 200 \quad \text{celosia doble}$$

$$\alpha > 60^\circ \quad \text{celosia simple}$$

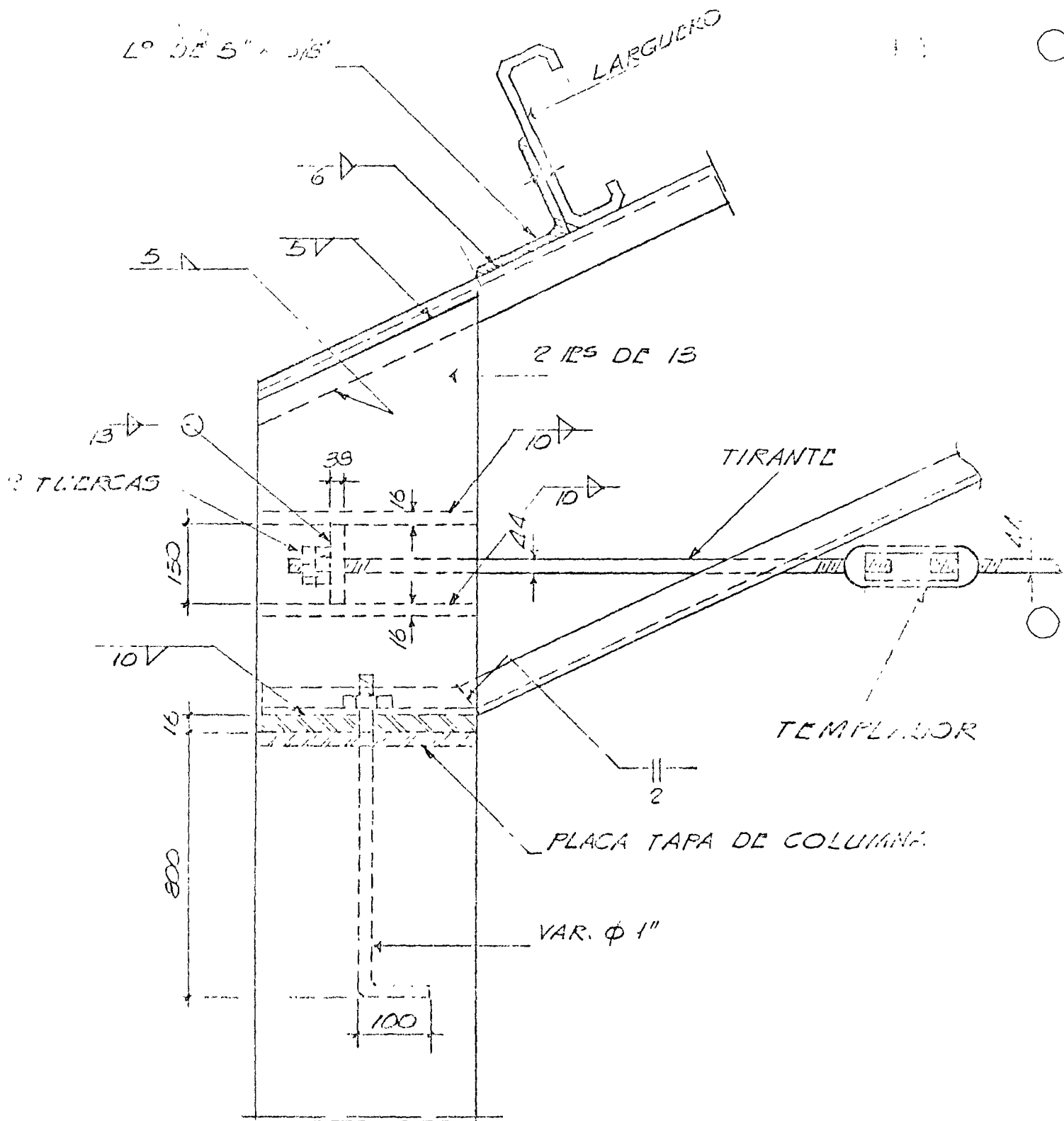
$$\alpha > 45^\circ \quad \text{celosia doble}$$

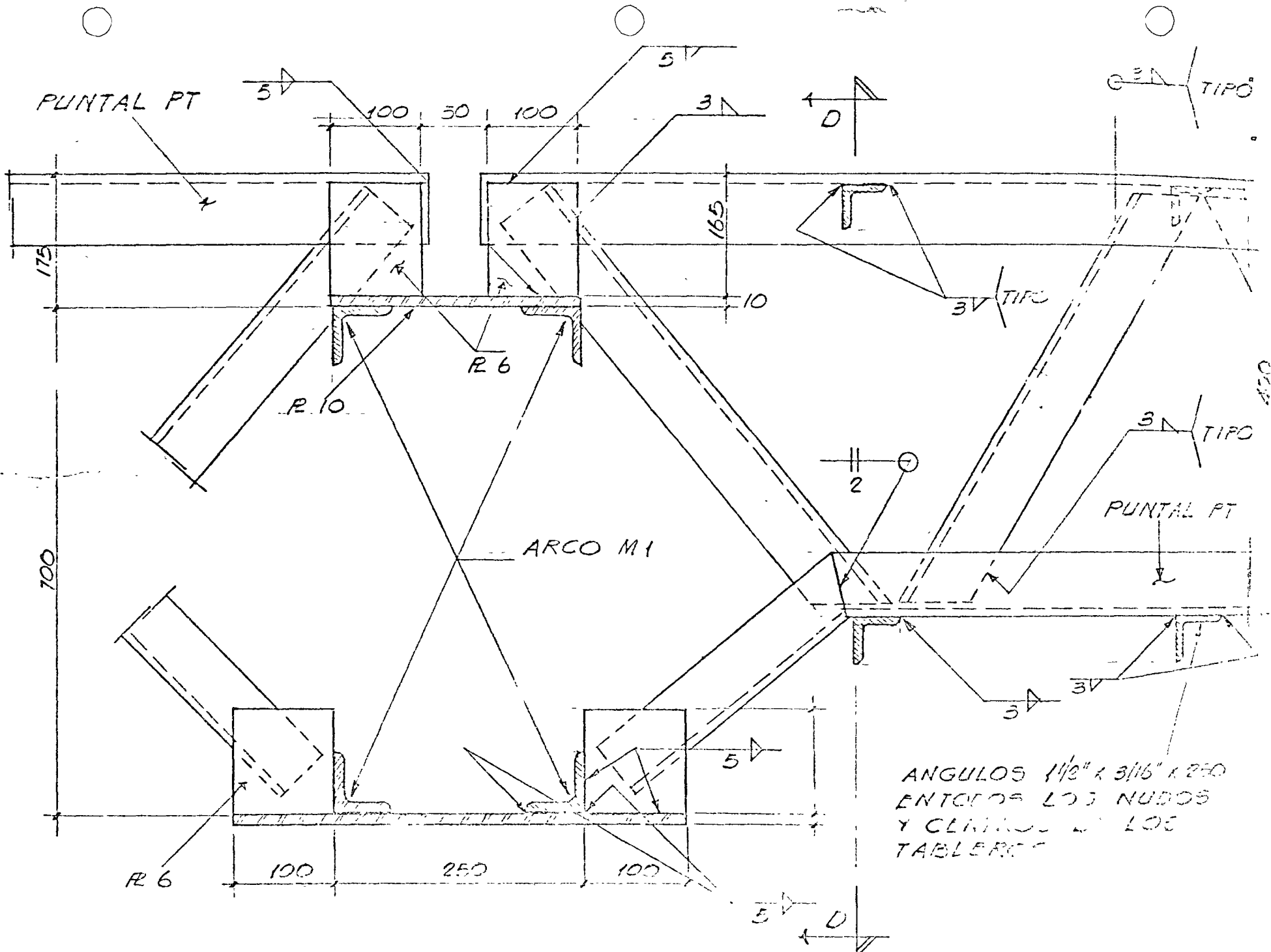
recomendación

En las placas colocar 3 remaches o tornillos @ 6" o soldadura en una longitud de  $\frac{1}{3}$  de la placa

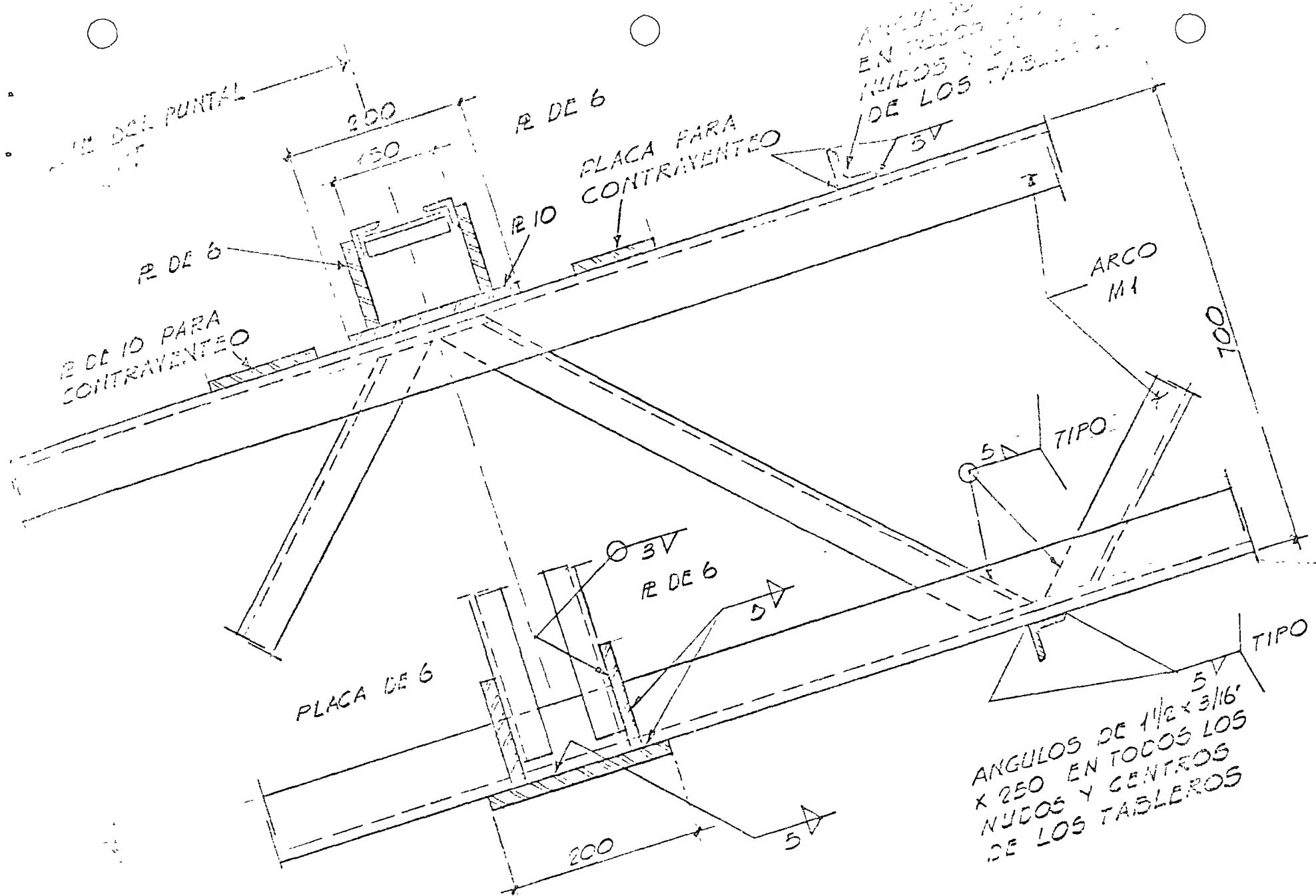
Cuando la distancia entre conexiones en los patines es mayor de 15" usar anzales en la celosia o hacerla doble

Disenar la celosia con una fuerza cortante igual al 2% de la fuerza normal en la celosia





CONEXION DE PUNTALES (PT) CON ARCO (M1)

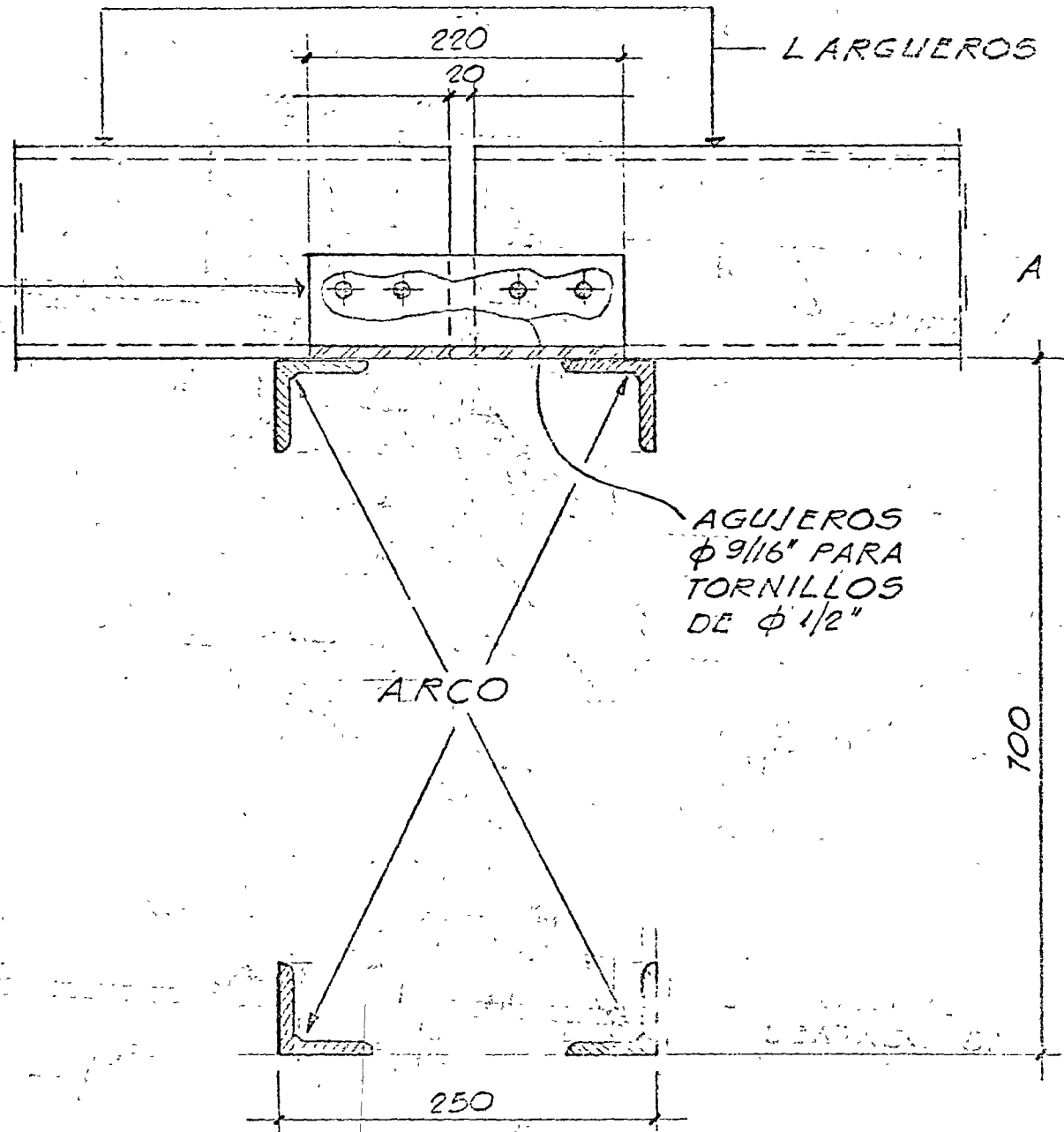


VISTA "D-D"

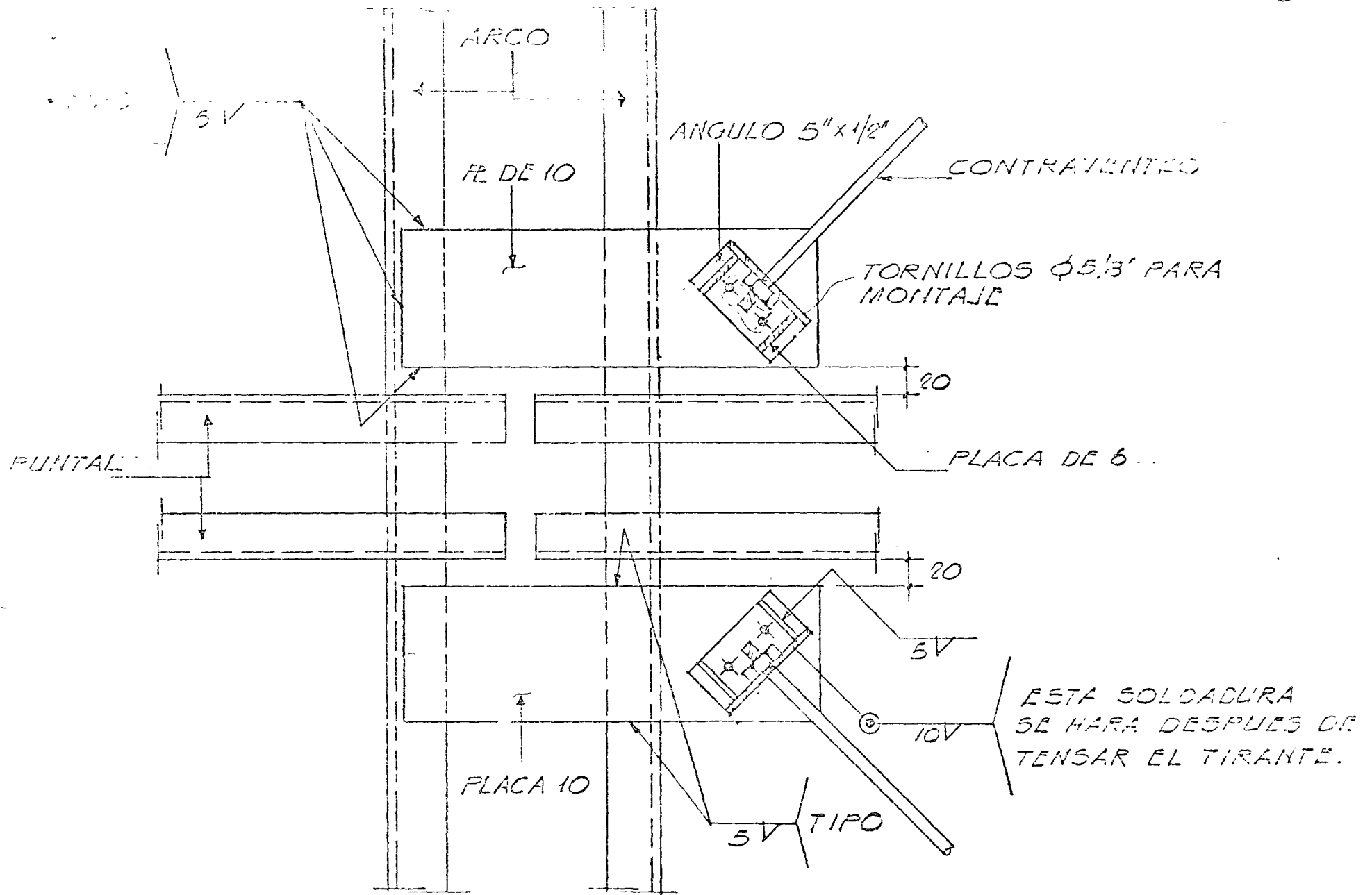
ANGULOS DE 1 1/2 x 3/16' x 250 EN TOCOS EN LOS NUDOS Y CENTROS DE LOS TABLEROS



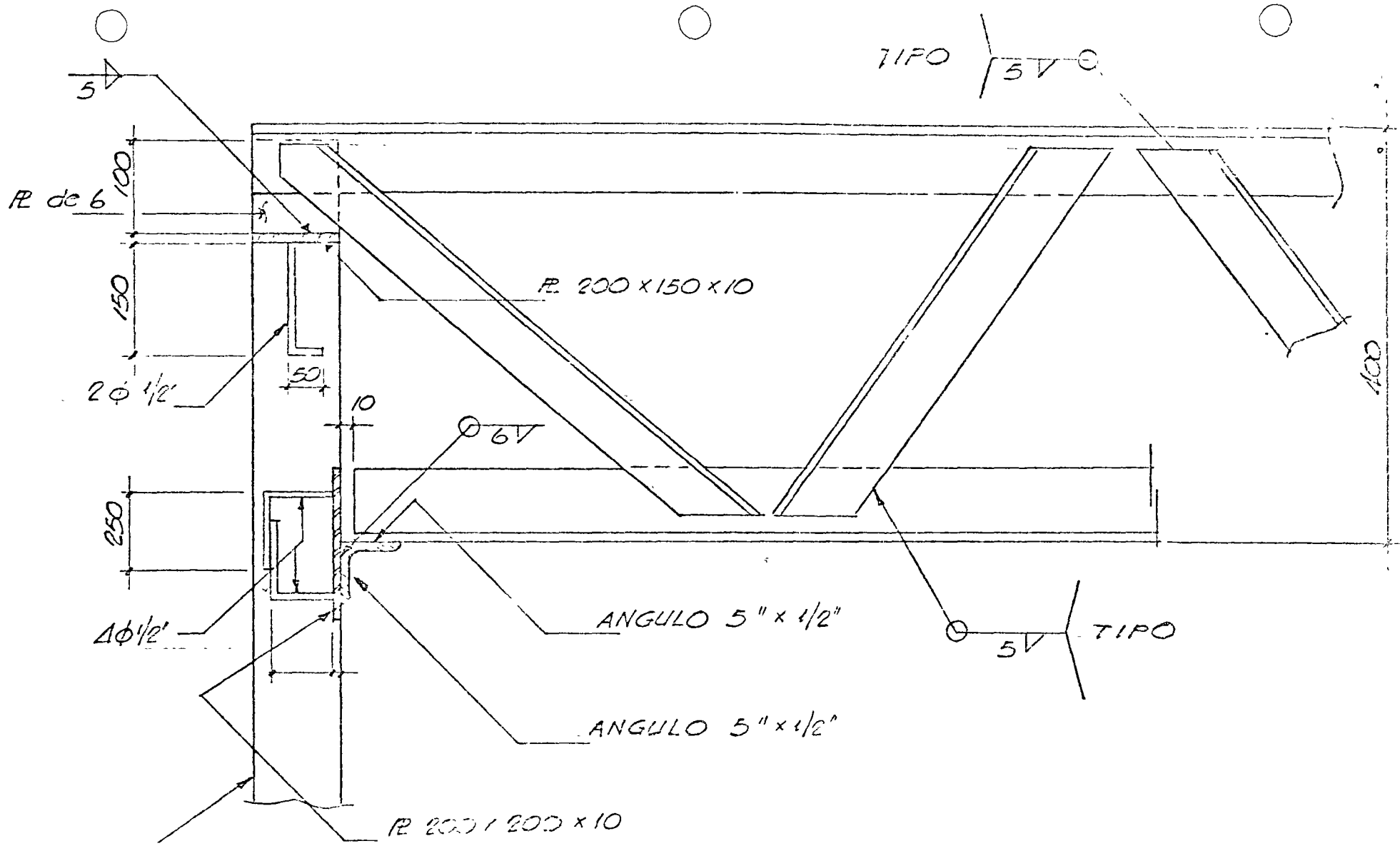
ANGULO DE  
5" x 3/8"



CONEXIÓN DE LARGUEROS A  
ARCOS

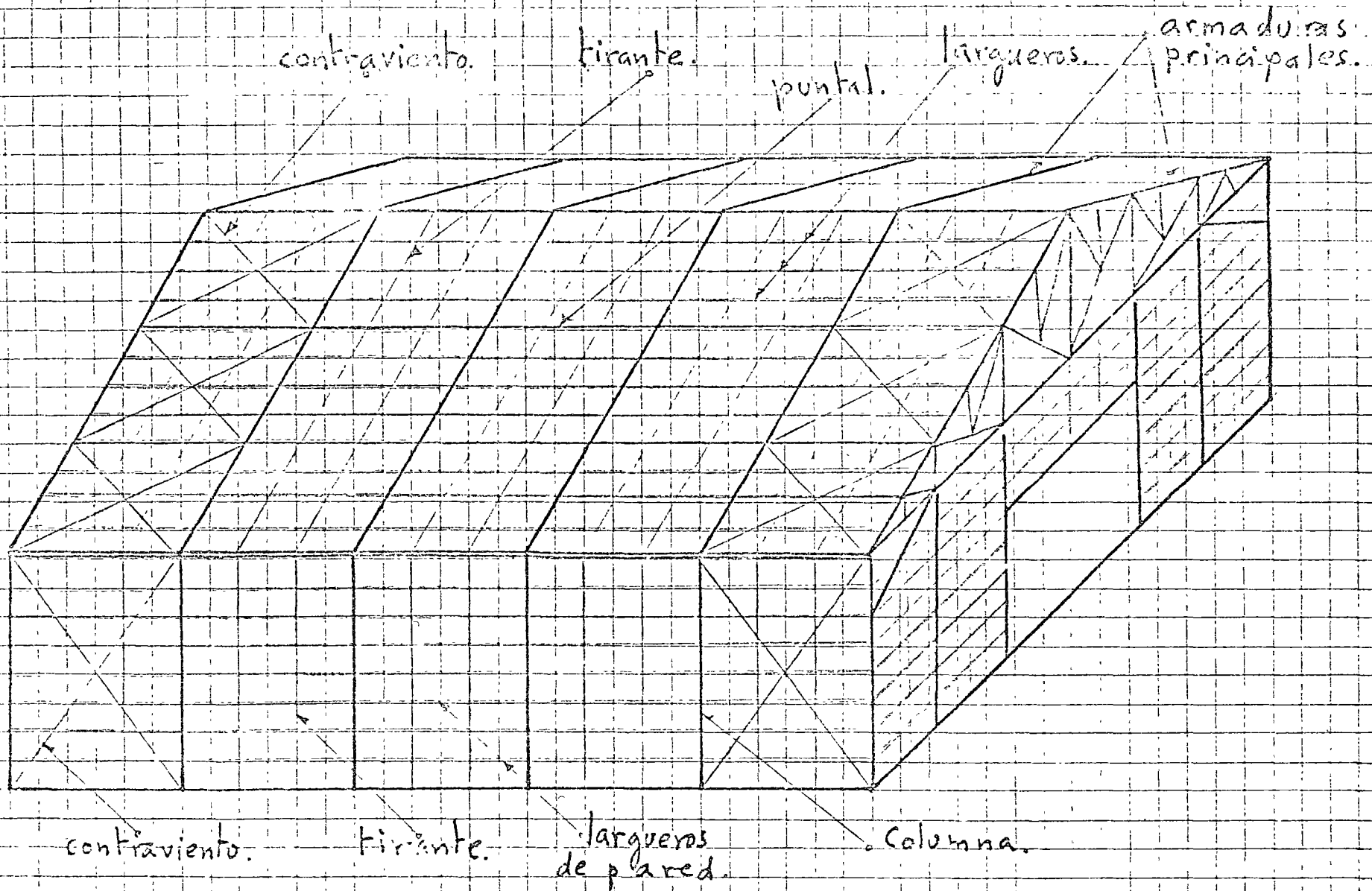


CONEXIÓN DE CONTRAVIENTEO A LA CUERDA SUPERIOR DEL ARCO.



CASTILLO O  
COLUMNA

APOYO DE PUNTAL (P. A.)  
MURO DE FONDO



ELEMENTOS de una NAVE INDUSTRIAL

# Función de los elementos de una nave.

largueros  
del techo.

transmiten la carga en el techo a las armaduras.

armaduras.

transmiten las cargas verticales sobre la cubierta a las columnas.

transmiten las fuerzas horizontales transversales a la cimentación cuando forman marco con las columnas.

columnas

transmiten las cargas verticales de las armaduras a la cimentación.

transmiten las fuerzas horizontales transversales a la cimentación cuando forman marco con las armaduras.

puntales y  
contravientos  
del techo.

transmiten las fuerzas horizontales a las paredes.

evitan el pandeo lateral de las armaduras.

puntales y  
contravientos  
de pared.

transmiten las fuerzas horizontales a la cimentación.

langueros de pared

transmiten las cargas de la lamina de pared a las columnas.

tirantes

evitan la flexión excesiva de los largueros.

Clasificación de los elementos de una nave de acuerdo con el tipo de esfuerzos a que están sometidos.

Tensión      tirantes,  
                  contravientos,  
                  elementos de armaduras.

Compresión      puntales,  
                  elementos de armaduras.

Flexión          largueros,  
                  vigas.

Flexocompresión      columnas,  
                  elementos de armaduras.

Flexotensión      elementos de armaduras.

## Especificaciones relativas a columnas compuestas.

### a) perfiles unidos directamente.

En los extremos colocar remaches o tornillos en una distancia de  $1\frac{1}{2}$  veces el ancho máximo de la columna.

O soldadura en cordón corrido en una longitud igual al ancho máximo del miembro.

La distancia entre remaches, tornillos o soldaduras intermedias será de 24"

Cuando se usen como componentes del miembro placas exteriores la separación entre conexiones intermedias no será mayor de 12" y de 18" si las uniones son al tornillo [o bien  $\frac{127}{\sqrt{F_y}}$  ó  $\frac{190}{\sqrt{F_y}}$ ;  $F_y$  en ksi]

### b) Perfiles separados por rellenos

Se proyectarán de modo que

$\frac{t}{r}$  de cada elemento aislado sea menor que  $\frac{t}{r}$  del perfil compuesto.

[Este es el caso que se presenta en cuerdas y diagonales de armaduras cuando están formadas por un par de ángulos, que es un caso muy común.]

.



1 2





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

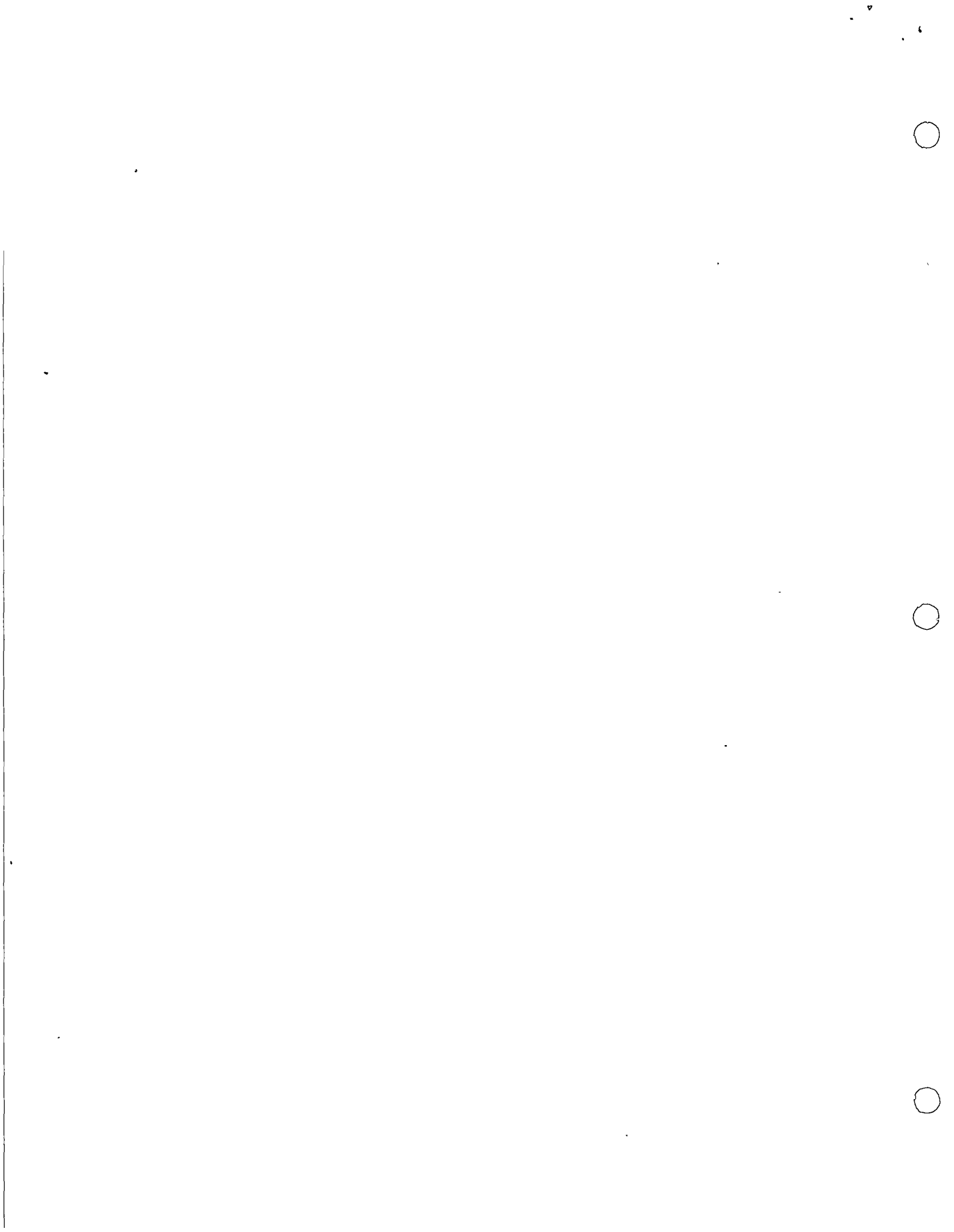


DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES.



PROF. JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ.

Palacio de Minería  
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.  
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION PROFESIONAL

INSTRUCTIVO DE USUARIO

STRUCTURAL ENGINEERING SYSTEM SOLVER

S T R E S S

( ANALISIS DE ESTRUCTURAS MEDIANTE COMPUTADORA )

# S T R E S S

Sistema para resolver problemas de Ingeniería Estructural.

Es un programa que como su nombre lo indica, resuelve problemas de estructuras por medio de la computadora.

El usuario describe el problema en el lenguaje del STRESS para la computadora 1130; esta descripción incluye el tipo y tamaño de la estructura, así como sus dimensiones físicas, cargas actuantes y resultados que se deseen obtener.

El lenguaje del STRESS es fácil de comprender ya que los términos que se utilizan son los mismos que en la Ingeniería\*, una ventaja muy grande es que no se necesita experiencia en programación.

Mediante este programa se pueden analizar vigas, vigas continuas, armaduras planas ó en el espacio, retículas planas, así como marcos planos ó en el espacio.

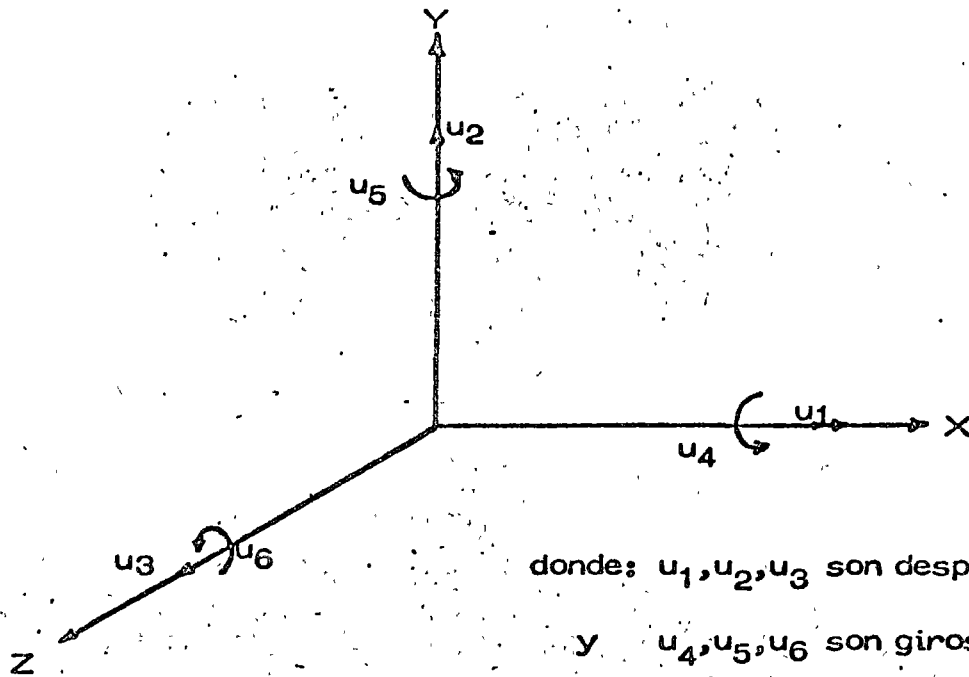
El STRESS analiza estructuras cargadas estáticamente por medio de la teoría elástica, para miembros prismáticos; esto es miembros que se pueden representar por su eje centroidal.

## SISTEMAS COORDENADOS

El STRESS utiliza para situar una estructura, un Sistema de ejes coordenados (Cartesiano). Figura 1

\* términos expresados en idioma Ingles.

## EJES GENERALES



donde:  $u_1, u_2, u_3$  son desplazamientos  
y  $u_4, u_5, u_6$  son giros

Figura 1

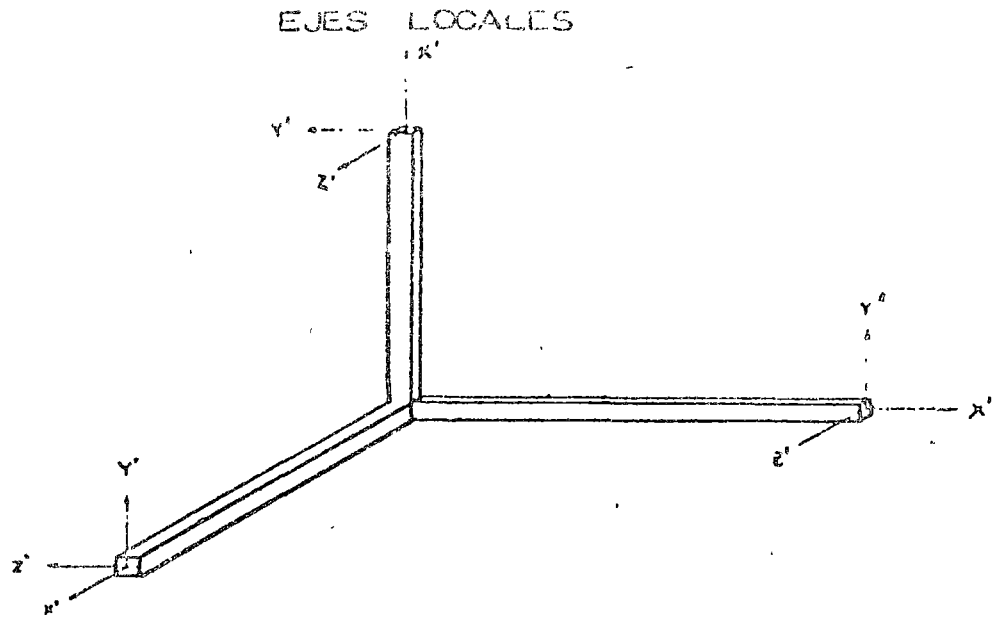
En estos ejes se sitúa la estructura, esto es, las coordenadas de las juntas. Todas las cargas que se tengan actuando en una junta se referirán a éstos ejes; los desplazamientos, así como los elementos mecánicos resultantes del análisis, en los soportes, además de los grados de libertad con que pueda contar alguno de estos apoyos también se referirán a los ejes generales.

## EJES LOCALES

Para las cargas que actúan en las barras, para la libertad de miembros así como para la interpretación de los resultados hay que referirlos a los ejes locales. Figura 2

Los ejes locales quedan definidos de la siguiente forma:

El eje  $x'$  está contenido en el eje centroidal y principal del miembro de que se trate, el sentido queda definido con las incidencias; (p.e. si el miem



Figuro 2

bro N, quedó establecido que va de A a B el sentido sería el mostrado en la Figura 2). El eje  $y^b$  será perpendicular al eje  $x^b$  y el sentido será el del eje Y general. El eje  $z^b$  queda obligado a ser perpendicular al plano formado por los ejes  $x^b$  y  $y^b$  y el sentido será el que de al seguir la regla del tornillo derecho, esto es abatiendo el eje  $x^b$  sobre el eje  $y^b$ .

En el caso del miembro L si suponemos que el miembro va de A a B el sentido  $x^l$  es el mostrado en la figura; el eje  $y^l$  es paralelo al eje X general, pero de sentido contrario. El eje  $z^l$  se localiza con la misma regla que en el ejemplo anterior

#### TIPOS DE ESTRUCTURAS

Los tipos de estructuras que analiza el STRESS son las siguientes:

- i.- Armaduras planas
- ii.- Marcos planos
- iii.- Retículas planas
- iv.- Armaduras en el espacio

v.- Marcos en el espacio

## EL USO DE LIBERTADES EN SOPORTES O JUNTAS RIGIDAS

El lenguaje STRESS 1130 proporciona la palabra "releases" que sirve para indicar que algún componente del vector (Fig. 2) es igual a cero.

Dos tipos de releases son usados en el lenguaje:

- a) Joint releases
- b) Member releases

### JOINT RELEASES

Este tipo de release es usado para las juntas que son soportes, y la libertad que se quiera proporcionar a los soportes deberá estar referida a los ejes generales. Este tipo de release no afecta la continuidad de los miembros que concurran a ese nudo.

Ejemplo

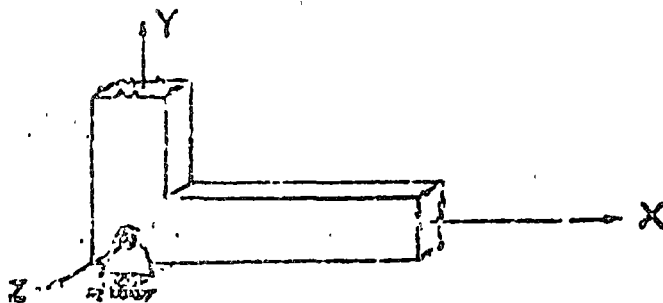


Figura 4

En este ejemplo la junta tiene libertad de desplazamiento en el sentido X así como libertad de giro alrededor del eje Z.

### MEMBER RELEASES

Estos releases como su nombre lo indica se utilizan para dar libertad de giro ó de desplazamiento al principio ó final de un miembro.

### UNIDADES

El STRESS no está programado para hacer transformación de unidades por lo tanto las unidades de entrada deben ser homogéneas. Por ejemplo

si las cargas están dadas en toneladas, las medidas en metros, entonces el módulo de elasticidad E del material deberá estar en  $\text{ton/m}^2$ .

### ORDENES DE ENCABEZADO

STRUCTURE comentario

Esta orden sirve para iniciar un nuevo problema por lo tanto es la primera tarjeta de datos. La parte de comentario se puede utilizar para identificación fecha etc.

Ejemplo

STRUCTURE MARCO SIN CONTRAVENITEO

LOADING comentario

Sirve para definir un determinado número de cargas individuales que actúan como una condición de carga. Las labras que siguen a LOADING se consideran como comentarios.

Ejemplo

LOADING I CARGA VERTICAL

### ORDENES DESCRIPTIVAS

Las siguientes cuatro órdenes definen el tamaño de un problema. Son necesarias para cada nuevo problema.

NUMBER OF JOINTS  $N^*$  número de juntas

\* N número entero (sin punto decimal)



NUMBER OF MEMBERS	N	número de miembros
NUMBER OF SUPPORTS	N	número de apoyos (soportes)
NUMBER OF LOADINGS	N	número de condiciones de carga (no cargas individuales)

Ejemplo.- Si se tiene un grupo de cargas que son el peso propio de la estructura y otro grupo que pudieran ser las fuerzas de sismo entonces tendríamos:

NUMBER OF LOADINGS 2

La siguiente orden es la que especifica el tipo de estructura del que se trata.

TYPE PLANE TRUSS	armadura plana
TYPE PLANE FRAME	marco plano
TYPE PLANE GRID	retícula plana
TYPE SPACE TRUSS	armadura en el espacio
TYPE SPACE FRAME	marco en el espacio

Solamente una orden de TYPE se usará en cada problema.

Para pedir al programa los resultados se utiliza la orden de salida

TABULATE

Después de esta primera palabra se utilizará cualquiera de éstas otras cuatro:

**FORCES** Se obtienen los elementos mecánicos en el principio y final de los miembros.

**DISPLACEMENTS** Tabulación de las reacciones en los soportes, así como las cargas que actúan en las juntas

ALL

Todo lo referente a los tres anteriores

La palabra MEMBER ó JOINT se puede intercalar entre la primera y segunda palabra, con objeto de obtener una mayor comprensión en la orden especificada.

Ejemplo.

TABULATE MEMBER FORCES

TABULATE JOINT REACTIONS

TABULATE ALL

Para la terminación del programa se utiliza la orden SOLVE

### ORDENES DE DATOS DE/EN LA ESTRUCTURA

#### ORDEN DE COORDENADAS

JOINT COORDINATES

encabezado

J X  $\alpha_1$  Y  $\alpha_2$  Z  $\alpha_3$

tabulación

donde J es la junta que se esté tratando,  $\alpha_1$  coordenada X,  $\alpha_2$  coordenada Y y  $\alpha_3$  coordenada Z.

Ejemplo

JOINT COORDINATES

JOINT COORDINATES

1 X 0.0 Y 0.0 Z 0.0

1 0.0 0.0 0.0

2 X 2.0 Y 0.0 Z 0.0

2 2.0 0.0 0.0

3 X 0.0 Y 0.0 Z 1.0

3 0.0 0.0 1.0

4 X 2.0 Y 0.0 Z 1.0

4 2.0 0.0 1.0

El ejemplo de la derecha tiene la misma significación que el de la derecha

## ORDEN DE LIBERTAD EN LAS JUNTAS

JOINT RELEASES

encabezado

J FORCE X Y Z MOMENT X Y Z

tabular

donde J es la junta a la que se quiera dar libertad de desplazamiento ó de giro. El usuario escribirá el tipo de desplazamiento ó giro, según las necesidades en su estructura.

Ejemplo

JOINT RELEASES

5 FORCE X MOMENT Z

2 MOMENT Z

El primer ejemplo indica que la junta # 5 tiene libertad de desplazamiento en X y libertad de girar alrededor del eje Z

## ORDEN DE INCIDENCIA DE LOS MIEMBROS

MEMBER INCIDENCES

encabezado

M JA JB

tabular

donde M miembro del que se trate JA junta donde empieza el miembro y JB junta donde termina el miembro. El sentido del eje x' local queda definido de JA hacia JB.

Ejemplo

MEMBER INCIDENCES

1 4 6

2 7 2

3 1 8

El primer ejemplo significa que el miembro 1 empieza en la junta 4 y termina en la junta 6 .

## ORDEN DE LIBERTAD EN LOS MIEMBROS

MEMBER RELEASES

encabezado

M END FORCE X Y Z MOMENT X Y Z

6

tabular

M START FORCE X Y Z MOMENT X Y Z

donde M miembro del que se trate, END al final del miembro y START al principio del mismo.

Ejemplo

MEMBER RELEASES

6 START MOMENT Z END MOMENT Z

15 START FORCE Y MOMENT Z

El primer ejemplo indica que la barra 6 tiene libertad de giro alrededor del eje  $z'$  en su principio y final.

ORDEN DE PROPIEDADES PRISMATICAS DE LOS MIEMBROS

MEMBER PROPERTIES PRISMATIC

encabezado

M  $AX_{\alpha_1} AY_{\alpha_2} AZ_{\alpha_3} DX_{\alpha_4} IY_{\alpha_5} IZ_{\alpha_6}$

6

tabular

MA THRU MB  $AX_{\alpha_1} AY_{\alpha_2} AZ_{\alpha_3} DX_{\alpha_4} IY_{\alpha_5} IZ_{\alpha_6}$

Se notará la presencia de la palabra THRU, mediante esta proposición es posible establecer, para éste y otros casos(member loads) que un determinado número de miembros tienen las mismas propiedades.

Notación

M miembro que se esté estudiando

MA miembro inicial

MB miembro final

THRU "hasta"

AX area normal

AY area efectiva de cortante en la dirección  $y'$

AZ            area efectiva de cortante en la dirección  $z^i$   
 IX            constante de torsión  
 IY            momento de inercia alrededor del eje  $y^i$   
 IZ            momento de inercia alrededor del eje  $z^i$

Todas las propiedades anteriores sólo son necesarias para cuando se es tá estudiando un marco en el espacio. Para los otros tipos de estructuras no es necesario proporcionar todas las propiedades por ejemplo; para una armadura plana sólo se necesita dar el area normal, para un marco plano, el area normal y el momento de inercia alrededor del eje  $z^i$ .

Ejemplo: para un marco plano

MEMBER PROPERTIES PRISMATIC

1 AX 0.25 IZ 0.00052

2 THRU 7 AX 0.30 IZ 0.00096

ORDEN DE CONSTANTES

CONSTANTS nombre  $\alpha_i$  ALL

$\delta$   
 CONSTANTS nombre  $\alpha_i$  ALL BUT  $\alpha_2 M_1 \dots M_n$

donde el nombre se refiere se refiere a:

E            Módulo de Young  
 G            Módulo de cortante (si no es especificado es tomado como  
               0.4 de E)  
 $\alpha_i$         el valor de la constante  
 ALL        para todos los miembros  
 BUT        para especificar un cambio para otros miembros (pero)  
               el otro valor de la constante  
 $M_1 \dots M_n$  miembros que tienen el segundo valor de la constante

Ejemplos

CONSTANTS E 2000000.0 ALL

CONSTANTS E 2000000.0 ALL BUT 21000000.0 13 18 21

En el segundo ejemplo especifica que el valor de  $E = 2000000.0$  es para todos los miembros, pero que para los miembros 13, 18 y 21 el valor de  $E$  es de  $21000000.0$

### ORDENES DE DATOS DE CARGAS

#### ORDEN DE CARGAS EN LAS JUNTAS

④ JOINT LOADS encabezado

J FORCE  $X_{\alpha_1}$   $Y_{\alpha_2}$   $Z_{\alpha_3}$  MOMENT  $X_{\alpha_4}$   $Y_{\alpha_5}$   $Z_{\alpha_6}$  tabular

donde J es la junta que se esté tratando y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  son valores numéricos con punto decimal. En la forma tabular pueden entrar las 6 posibilidades, como se muestra anteriormente, ó en otros casos unicamente las que se necesiten. Estas cargas deben estar referidas a los ejes generales.

Ejemplos

5 FORCE Y 25.0 MOMENT Z 4.25

3 MOMENT Z -18.0 FORCE X -45.6

#### ORDEN DE DESPLAZAMIENTO EN LAS JUNTAS

JOINT DISPLACEMENTS encabezado

J DISPLACEMENT  $X_{\alpha_1}$   $Y_{\alpha_2}$   $Z_{\alpha_3}$  ROTATION  $X_{\alpha_4}$   $Y_{\alpha_5}$   $Z_{\alpha_6}$  tabular

donde  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  están dados en radianes

Ejemplo

## JOINT DISPLACEMENTS

8 DISPLACEMENT X 0.25 ROTATION Z -0.005

## ORDEN DE CARGA EN LOS MIEMBROS

### MEMBER LOADS

encabezado

M dirección, tipo, identificación de datos y datos

tabular

Dirección.- puede ser alguna de las siguientes:

FORCE X

FORCE Y

FORCE Z

MOMENT X

MOMENT Y

MOMENT Z

Tipo.- tres tipos de carga son admitidas por el programa y están seguidas por la identificación y los datos:

CONCENTRATED  $P_{\alpha_1}$   $L_{\alpha_2}$

carga concentrada

UNIFORM  $W_{\alpha_1}$   $LA_{\alpha_2}$   $LB_{\alpha_3}$

carga uniforme

LINEAR  $WA_{\alpha_1}$   $WB_{\alpha_2}$   $LA_{\alpha_3}$   $LB_{\alpha_4}$

carga lineal

donde:

P carga puntual (concentrada)

L distancia medida del principio del miembro a donde actúa la fuerza

W intensidad de la carga (uniforme), entre LA y LB

LA distancia donde empieza la carga

LB distancia donde termina la carga

WA intensidad de la carga donde empieza ésta

WB intensidad de la carga donde termina la misma

Si LA y LB son omitidos el programa asume que la carga actúa a lo largo de todo el miembro.

Ejemplos:

5 FORCE Y CONCENTRATED P -5.0 L 4.50

12 MOMENT Z UNIFORM W 1.5

Nota: Las cargas en los miembros se deben referir a los ejes locales.

#### ORDEN DE CAMBIO DE TEMPERATURA EN LOS MIEMBROS

MEMBER TEMPERATURE CHANGES  $\beta$  encabezado

M  $\alpha$

6

tabular

MA THRU MB  $\alpha$

donde  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica y  $\alpha$  la cantidad en  $0^{\circ}\text{C}$

de cambio de temperatura, este cambio puede ser + ó -

Ejemplos

MEMBER TEMPERATURE CHANGES 0.000065

1 THRU 10 30.0

MEMBER TEMPERATURE CHANGES 0.000065

11 -10.0

#### ORDEN DE COMBINACION DE CARGAS

LOADING L

COMBINE  $N_1 \alpha_1$   $N_2 \alpha_2$

donde  $N_1$  es una condición de carga,  $N_2$  otra condición de carga y  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  porcentaje que se requiere de cada una.



Aclaración.- Durante el proceso de lectura el programa asigna un orden progresivo a las condiciones de carga dadas, esto es, el primer LOADING lo identifica con el número 1 el segundo como el 2 y así sucesivamente.

Solamente seis condiciones de carga se pueden combinar a la vez.

Ejemplo

LOADING IX

COMBINE 1 1.0 3 1.25 8 0.6

Lo cual quiere decir que la condición de carga IX combina el 100% de la condición 1 más el 125% de la condición 3 más el 60% de la condición 8.

Secuencia de las Ordenes.

- 1.- La primera orden debe ser STRUCTURE.
- 2.- La última orden será SOLVE.
- 3.- El número de juntas debe ser dado antes de cualquier dato de las juntas.
- 4.- El número de miembros será dado antes de cualquier dato de los miembros de la orden de CONSTANTS.
- 5.- El NUMBER OF LOADINGS será especificado antes de cualquier condición de cargas.
- 6.- El TYPE deberá ser dado antes de las propiedades.
- 7.- JOINT COORDINATES precederá a JOINT RELEASES.
- 8.- Si algún TABULATE se especifica antes de cualquier condición de carga, entonces ese TABULATE servirá para todas las demás condiciones de carga. Si TABULATE va después de LOADING, entonces únicamente servirá para esa condición de carga.

Secuencia que se recomienda.

STRUCTURE	obligatoria
NUMBER OF JOINTS	obligatoria
NUMBER OF MEMBERS	obligatoria
NUMBER OF SUPPORTS	obligatoria
JOINT COORDINATES	obligatoria
JOINT RELEASES	opcional
MEMBER PROPERTIES PRISMATIC	obligatoria
MEMBER INCIDENCES	obligatoria
MEMBER RELEASES	opcional

CONSTANTS	opcional
TABULATE	opcional
LOADING	obligatoria (1 ó más)
SOLVE	obligatoria

Notas: Después de LOADING irán las órdenes referentes a las cargas:

MEMBER LOADS, JOINT LOADS, etc.

TIPO DE  
ERROR

CAUSA DEL ERROR

- 0 Palabra de entrada necesaria ó número no establecido.
- 1 Número de punto fijo en un lugar equivocado.
- 2 Número de punto flotante en un lugar equivocado.
- 3 Número de condición de carga más grande, que el número de condiciones especificadas.
- 4 Número de condiciones de carga no especificado.
- 5 Fin de los campos de datos, antes de que se proporcionen todos los datos.
- 6 Orden no aceptable debido a un formato incorrecto ó a un orden incorrecto de los datos de entrada.
- 7 No usado.
- 8 Combinación de cargas incorrectamente especificado.
- 9 Sólomente datos de cargas permitidos después del primer encabezado de condición de carga.
- 10 Número de miembros más grande que el número de miembros especificados.
- 11 Número de juntas más grande que el número de juntas especificado.
- 12 Solamente seis combinaciones son posibles en una condición de carga.
- 13 Datos en una condición de carga incorrectos.
- 14 Ejecución detenida. Las siguientes órdenes serán sólo re

TIPO DE  
ERROR

CAUSA DEL ERROR

visadas.

- 15           Número de soportes no especificado.
- 16           Número de juntas no especificado.
- 17           Número de miembros no especificado.
- 18           Juntas incorrectamente numeradas.
- 19           Tipo de estructura no dado.
- 20           Datos de la estructura redundantes. Propiedades de miembro repetidas.
- 21           Tipo de estructura y libertad de (junta ó miembro) incompatibles.
- 22           Solamente cargas en los extremos de las juntas son posibles en miembros cuya rigidez ó flexibilidad sean dato.
- 23-30       No usada.
- 31           Número de soportes no igual al especificado.
- 33           Número de propiedades de miembro no igual al número de miembros especificado.
- 32           Número de juntas no igual al especificado.
- 34           Número de incidencias de miembro no igual al número de miembros especificado.
- 35           Número de condiciones de carga no igual al número especificado
- 36           Estructura incorrectamente especificada.

## PRIMER EJEMPLO

En este ejemplo se estudia una armadura la cual está sometida a las siguientes cargas: Carga vertical (peso propio + carga viva) y viento.

La armadura que es objeto de estudio es de dos aguas del tipo Pratt.

Se proponen los siguientes elementos:

para la cuerda inferior	2 de 2 1/4	AX = 12.12 cm <sup>2</sup>
para la cuerda superior	2 de 2 1/2 x 1/4	AX = 15.36 cm <sup>2</sup>
diagonales y montantes	2 de 1 1/2 x 5/16	AX = 10.80 cm <sup>2</sup>

Las condiciones de apoyo son las siguientes:

un apoyo (derecha) está empotrado

el otro (izquierda) tiene libertad de desplazamiento en el sentido X

Se efectuará el análisis también por cambio de temperatura, el cual será de 20°C

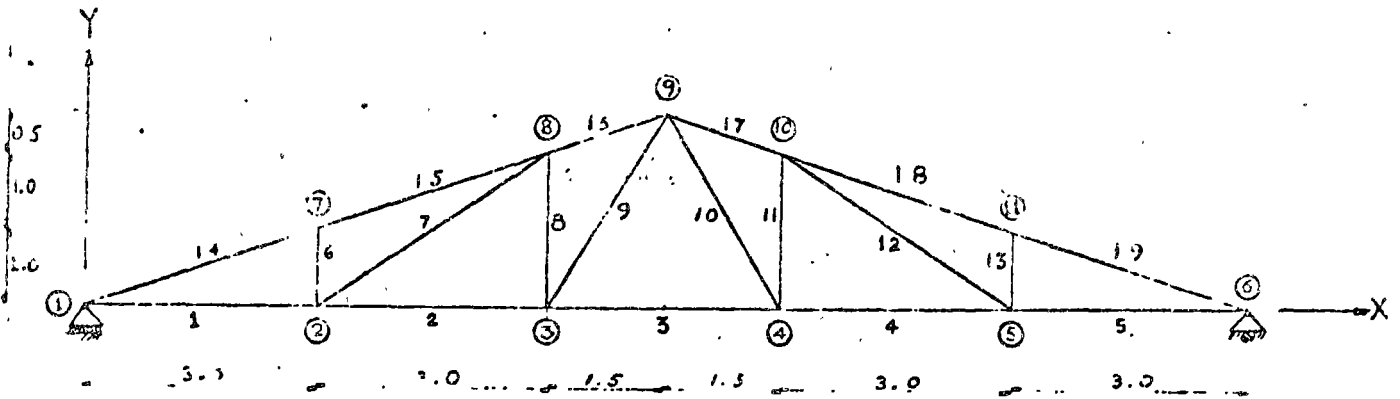
Se harán las combinaciones de carga vertical + viento y de carga vertical + cambio de temperatura.

Notas:

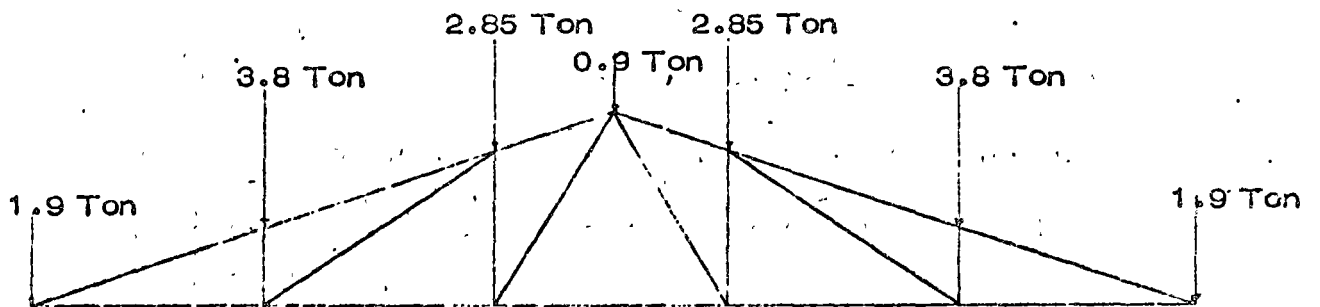
Los números encerrados en círculos se refieren a las juntas y los que no lo están a los miembros.

Todas las unidades son metros y toneladas.

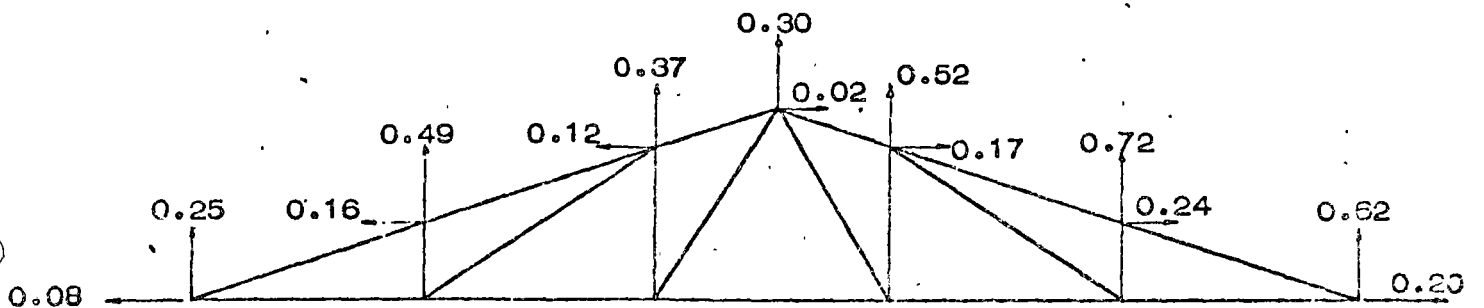
# ARMADURA A DOS AGUAS TIPO PRATT



dimensiones nudos y barras



Carga vertical



Viento perpendicular

# STRESS

STRUCTURE

30  
VII  
74

EJEMPLO N 1

Pablo Enriquez M.

1/7

STRUCTURE		ARMADURA		PRIMER EJEMPLO	
TYPE	PLANE	TRUSS			
NUMBER	OF	JOINTS		11	
NUMBER	OF	MEMBERS		19	
NUMBER	OF	SUPPORTS		2	
NUMBER	OF	LOADINGS		6	
JOINT	COORDINATES				
1	0.00	0.00	0.00	3	
2	3.00	0.00	0.00		
3	6.00	0.00	0.00		
4	9.00	0.00	0.00		
5	12.00	0.00	0.00		
6	15.00	0.00	0.00	5	

# STRESS

30  
VII  
74

EJEMPLO N 1

Pablo Enriquez M

2/7

7	3.00	1.00		
8	6.00	2.00		
9	7.50	2.50		
10	9.00	2.00		
11	12.00	1.00		
JOINT RELEASES				
L FORCE X				



# STRESS

## MEMBER PROPERTIES

30  
VII  
74

EJEMPLO # 1

Pablo Enriquez M

3/7

### MEMBER

### PROPERTIES

### PRISMATIC

2	YNRV	5	AX	0.001212
3	YNRV	13	AX	0.001080
13	YNRV	19	AX	0.001536

# STRESS

## MEMBER INCIDENCES

30  
VII  
74

EJEMPLO # 1

Pablo Enriquez M

4/7

### MEMBER

### INCIDENCES

1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10
10	10	11
11	11	12
12	12	13
13	13	14
14	14	15
15	15	16
16	16	17
17	17	18
18	18	19
19	19	20

# STRESS

CONSTANTS

30  
VII  
74

EJEMPLO # 1

5/7

Tabla Ejemplo # 1

CONSTANTS E 28000000.0 ALL

TABULATE ALL  
LOADING 1 CARGA VERTICAL

JOINT LOADS

7	FORCE	Y	-1.90
8	FORCE	Y	-2.85
9	FORCE	Y	-0.90
10	FORCE	Y	-2.85
11	FORCE	Y	-3.80
6	FORCE	Y	-1.90

LOADING II FUERZA DE VIENTO

JOINT LOADS

1	FORCE	X	-0.08
---	-------	---	-------

# STRESS

30  
VII  
74

EJEMPLO # 1

6/7

Tabla Ejemplo # 1

2	FORCE	Y	0.25
7	FORCE	X	-0.16
7	FORCE	Y	0.59
8	FORCE	X	-0.12
8	FORCE	Y	0.67
9	FORCE	X	0.02
9	FORCE	Y	0.30
10	FORCE	X	0.17
10	FORCE	Y	0.62
11	FORCE	X	0.22
11	FORCE	Y	0.72
6	FORCE	X	0.20
6	FORCE	Y	0.62

LOADING III CAMBIOS DE TEMPERATURA

MEMBER TEMPERATURE CHANGES 0.00130

1 TEMP 19 20.0

LOADING IV COMBINACION DE I Y II

# STRESS

50  
VII  
74

EJEMPLO H L

Pablo Enriquez H.

7/7

COMPONE 2 2.0 2 0.00

LOADING V COMBINACION DE X Y Z

CONDUCE 2 2.0 2 2.0

SOLVE

19'

STRUCTURE ARMADURA PRIMER EJEMPLO

TYPE PLANE TRUSS

NUMBER OF JOINTS 11

NUMBER OF MEMBERS 19

NUMBER OF SUPPORTS 2

NUMBER OF LOADINGS 5

JOINT COORDINATES

1	0.00	0.00	S
2	3.00	0.00	
3	6.00	0.00	
4	9.00	0.00	
5	12.00	0.00	
6	15.00	0.00	S
7	3.00	1.00	
8	6.00	2.00	
9	7.50	2.50	
10	9.00	2.00	
11	12.00	1.00	

JOINT RELEASES

1 FORCE X

MEMBER PROPERTIES PRISMATIC

1 THRU 5 AX 0.001212

6 THRU 13 AX 0.001080

14 THRU 19 AX 0.001536

MEMBER INCIDENCES

1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	2	7
7	2	8
8	3	8
9	3	9
10	4	9
11	4	10
12	5	10
13	5	11
14	1	7
15	7	8
16	8	9
17	9	10
18	10	11
19	11	6

CONSTANTS E 21000000.0 ALL

TABULATE ALL

LOADING I CARGA VERTICAL

JOINT LOADS

1	FORCE Y	-1.90
7	FORCE Y	-3.80
8	FORCE Y	-2.85
9	FORCE Y	-0.90
10	FORCE Y	-2.05
11	FORCE Y	-3.80
6	FORCE Y	-1.90

LOADING II FUERZA DE VIENTO

JOINT LOADS

1	FORCE X	-0.08
1	FORCE Y	0.25

8 FORCE Y 0.37  
9 FORCE X 0.02  
9 FORCE Y 0.30  
10 FORCE X 0.17  
10 FORCE Y 0.52  
11 FORCE X 0.24  
11 FORCE Y 0.72  
6 FORCE X 0.20  
6 FORCE Y 0.62

LOADING III CAMBIOS DE TEMPERATURA  
MEMBER TEMPERATURE CHANGES 0.00120  
1 THRU 19 20.0

LOADING IV COMBINACION DE I Y II  
COMBINE 1 1.0 2 0.66

LOADING V COMBINACION DE I Y III  
COMBINE 1 1.0 2 1.0

SOLVE

PROBLEM CORRECTLY SPECIFIED. EXECUTION TO PROCEED.

STRUCTURE ARMADURA PRIMER EJEMPLO

LOADING I CARGA VERTICAL

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE
1	1	-21.299
1	2	21.299
2	2	-15.599
2	3	15.599
3	3	-12.749
3	4	12.749
4	4	-15.599
4	5	15.599
5	5	-21.299
5	6	21.299
6	2	3.800
6	7	-3.800
7	2	-6.850
7	8	6.850
8	3	4.750
8	8	-4.750
9	3	-5.539
9	9	5.539
10	4	-5.539
10	9	5.539
11	4	4.750
11	10	-4.750
12	5	-6.850
12	10	6.850
13	5	3.800
13	11	-3.800
14	1	22.452
14	7	-22.452
15	7	22.452
15	8	-22.452
16	8	16.443
16	9	-16.443
17	9	16.443
17	10	-16.443

18	10	22.452
18	11	-22.452
19	11	22.452
19	6	-22.452

APPLIED JOINT LOADS FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
2	0.000	0.000
3	0.000	0.000
4	0.000	0.000
5	-0.000	0.000
7	0.000	-3.800
8	-0.000	-2.850
9	0.000	-0.900
10	0.000	-2.850
11	0.000	-3.800

REACTIONS APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
1	0.000	7.100
6	-0.000	7.100

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
2	-0.0076	-0.0289
3	-0.0058	-0.0321
4	-0.0043	-0.0321
5	-0.0025	-0.0289
7	-0.0028	-0.0291
8	-0.0039	-0.0325
9	-0.0051	-0.0317
10	-0.0062	-0.0325
11	-0.0073	-0.0291

SUPPORT JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
1	-0.0102	0.0000
6	0.0000	0.0000

STRUCTURE ARMADURA PRIMER EJEMPLO

LOADING II FUERZA DE VIENTO

=====

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE
1	1	3.313
1	2	-3.313
2	2	2.498
2	3	-2.498
3	3	2.089
3	4	-2.089
4	4	2.675
4	5	-2.675
5	5	3.875
5	6	-3.875
6	2	-0.543
6	7	0.543
7	2	0.979
7	8	-0.979
8	3	-0.681
8	8	0.681
9	3	0.794
9	9	-0.794
10	4	1.138
10	9	-1.138
11	4	-0.976
11	10	0.976
12	5	1.442
12	10	-1.442
13	5	-0.800
13	11	0.800
14	1	-3.577
14	7	3.577
15	7	-3.746
15	8	3.746
16	8	-3.013
16	9	3.013
17	9	-3.179
17	10	3.179
18	10	-4.264
18	11	4.264



19	11	-4.011
19	6	4.011

APPLIED JOINT LOADS. FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
2	=0.000	=0.000
3	=0.000	=0.000
4	0.000	=0.000
5	=0.000	=0.000
7	=0.160	0.490
8	=0.120	0.370
9	0.020	0.300
10	0.169	0.520
11	0.240	0.720

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
1	=0.080	=1.131
6	=0.069	=1.260

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
2	0.0013	0.0047
3	0.0010	0.0054
4	0.0007	0.0056
5	0.0004	0.0052
7	0.0004	0.0047
8	0.0006	0.0055
9	0.0007	0.0054
10	0.0010	0.0056
11	0.0013	0.0052

SUPPORT JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
1	0.0017	0.0000
6	0.0000	0.0000

STRUCTURE ARMADURA PRIMER EJEMPLO

LOADING III CAMBIOS DE TEMPERATURA

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE
1	1	0.007
1	2	-0.007
2	2	0.008
2	3	-0.008
3	3	0.008
3	4	-0.008
4	4	0.009
4	5	-0.009
5	5	0.009
5	6	-0.009
6	2	-0.000
6	7	0.000
7	2	0.000
7	8	-0.000
8	3	0.000
8	8	-0.000
9	3	-0.000
9	9	0.000
10	4	0.000
10	9	0.000
11	4	-0.000
11	10	0.000
12	5	-0.000
12	10	0.000
13	5	0.000
13	11	-0.000
14	1	-0.003
14	7	0.003
15	7	-0.002
15	8	0.002
16	8	0.000
16	9	-0.000
17	9	0.002
17	10	-0.002
18	10	0.002

18	11	-0.002
19	11	0.002
19	6	-0.002

APPLIED JOINT LOADS      FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
2	0.001	0.000
3	0.000	0.000
4	0.000	-0.000
5	0.000	-0.000
7	0.001	0.000
8	0.002	0.000
9	0.001	-0.000
10	0.000	0.000
11	0.000	-0.000

REACTIONS APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
1	0.003	-0.001
6	-0.011	0.000

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
2	-0.2879	0.0000
3	-0.2159	0.0000
4	-0.1439	0.0000
5	-0.0719	0.0000
7	-0.2879	0.0240
8	-0.2159	0.0480
9	-0.1799	0.0600
10	-0.1439	0.0480
11	-0.0719	0.0240

SUPPORT JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
1	-0.3599	0.0000
6	0.0000	0.0000

STRUCTURE ARMADURA PRIMER EJEMPLO

LOADING IV COMBINACION DE I Y II

=====

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE
1	1	-19.112
1	2	19.112
2	2	-13.950
2	3	13.950
3	3	-11.370
3	4	11.370
4	4	-13.833
4	5	13.833
5	5	-18.741
5	6	18.741
6	2	3.441
6	7	-3.441
7	2	-6.204
7	8	6.204
8	3	4.300
8	8	-4.300
9	3	-5.014
9	9	5.014
10	4	-4.787
10	9	4.787
11	4	4.105
11	10	-4.105
12	5	-5.898
12	10	5.898
13	5	3.272
13	11	-3.272
14	1	20.090
14	7	-20.090
15	7	19.979
15	8	-19.979
16	8	14.454
16	9	-14.454
17	9	14.345
17	10	-14.345
18	10	19.637
18	11	-19.637

19	11	19.804
19	6	-19.804

APPLIED JOINT LOADS; FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
2	0.000	0.000
3	0.000	0.000
4	0.000	0.000
5	-0.000	0.000
7	-0.105	-3.476
8	-0.079	-2.605
9	0.013	-0.702
10	0.112	-2.506
11	0.158	-3.324

REACTIONS; APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
1	-0.052	6.353
6	-0.046	6.262

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
2	-0.0068	-0.0258
3	-0.0051	-0.0285
4	-0.0038	-0.0284
5	-0.0022	-0.0255
7	-0.0024	-0.0259
8	-0.0035	-0.0289
9	-0.0045	-0.0281
10	-0.0055	-0.0288
11	-0.0065	-0.0256

SUPPORT JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
1	-0.0090	0.0000
6	0.0000	0.0000

STRUCTURE ARMADURA PRIMER EJEMPLO

LOADING V COMBINACION DE I Y III

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE
1	1	-17.985
1	2	17.985
2	2	-13.100
2	3	13.100
3	3	-10.659
3	4	10.659
4	4	-12.923
4	5	12.923
5	5	-17.423
5	6	17.423
6	2	3.256
6	7	-3.256
7	2	-5.871
7	8	5.871
8	3	4.068
8	8	-4.068
9	3	-4.744
9	9	4.744
10	4	-4.400
10	9	4.400
11	4	3.773
11	10	-3.773
12	5	-5.408
12	10	5.408
13	5	3.000
13	11	-3.000
14	1	18.874
14	7	-18.874
15	7	18.706
15	8	-18.706
16	8	13.430
16	9	-13.430
17	9	13.264
17	10	-13.264
18	10	18.187
18	11	-18.187

19	11	18.440
19	6	-18.440

APPLIED JOINT LOADS      FREE JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
2	0.000	0.000
3	0.000	0.000
4	0.000	0.000
5	-0.000	0.000
7	-0.159	-3.310
8	-0.120	-2.480
9	0.020	-0.600
10	0.170	-2.330
11	0.240	3.080

REACTIONS, APPLIED LOADS SUPPORT JOINTS

JOINT	FORCE X	FORCE Y
1	-0.079	5.968
6	-0.070	5.831

FREE JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
2	-0.0063	-0.0242
3	-0.0048	-0.0267
4	-0.0035	-0.0265
5	-0.0020	-0.0237
7	-0.0023	-0.0243
8	-0.0033	-0.0270
9	-0.0043	-0.0263
10	-0.0051	-0.0268
11	-0.0060	-0.0238

SUPPORT JOINT DISPLACEMENTS

JOINT	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT
1	-0.0084	0.0000
6	0.0000	0.0000

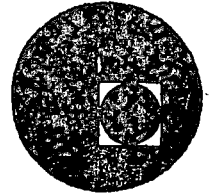
Referencia.

Structural Engineering System Solver (STRESS)  
for the I B M 1130, Versión 2 User's Manual.

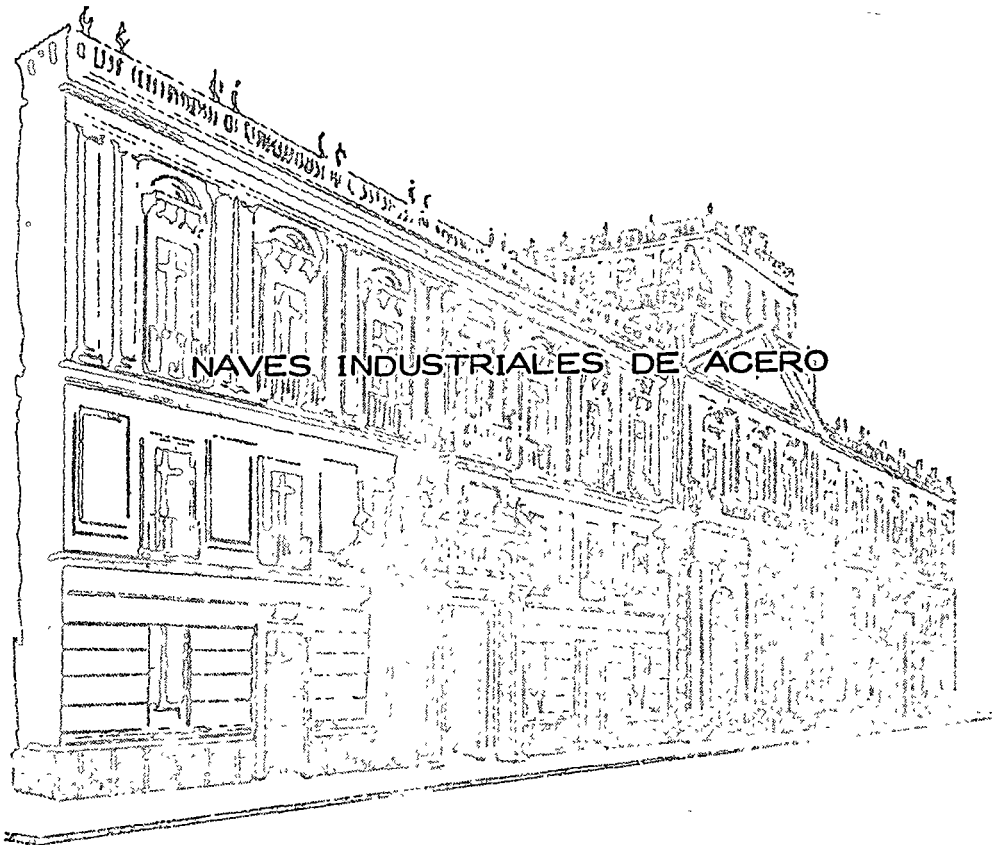




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



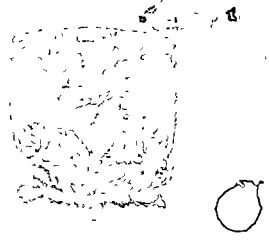
## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ

AGOSTO DE 1976.

WINDROO MICROPHONE J. J. O'NEILL  
... ..  
... ..



... ..

... ..

# Naves Industriales de Acero

## ○ = ESTRUCTURACION

Una nave industrial se caracteriza por llenar los requisitos necesarios para que en su interior puedan realizarse las operaciones típicas de una línea de producción industrial.

Las naves industriales frecuentemente son edificios de un solo piso con muy pocas o ninguna divisiones intermedias de modo que la estructura está localizada en las paredes perimetrales y en la cubierta que salva claros usualmente de magnitud considerable.

○ La función de la cubierta es techar la superficie de la nave, es claro que la carga más importante que actúa sobre una cubierta es su peso propio y que, por lo tanto, conviene que los materiales que la integran sean lo más ligeros posibles. Se han usado tradicionalmente, láminas de asbesto, láminas metálicas, o losas precoladas de concreto ligero, apoyadas sobre estructuras de acero. Esta solución proporciona esa característica de ligereza directamente ligada a la economía de la construcción.

○

Se presentará aquí, esquemáticamente, el proyecto de una cubierta industrial del tipo mencionado.

Las dimensiones de la planta, de  $24 \times 80$  m se muestran en la fig. 1.

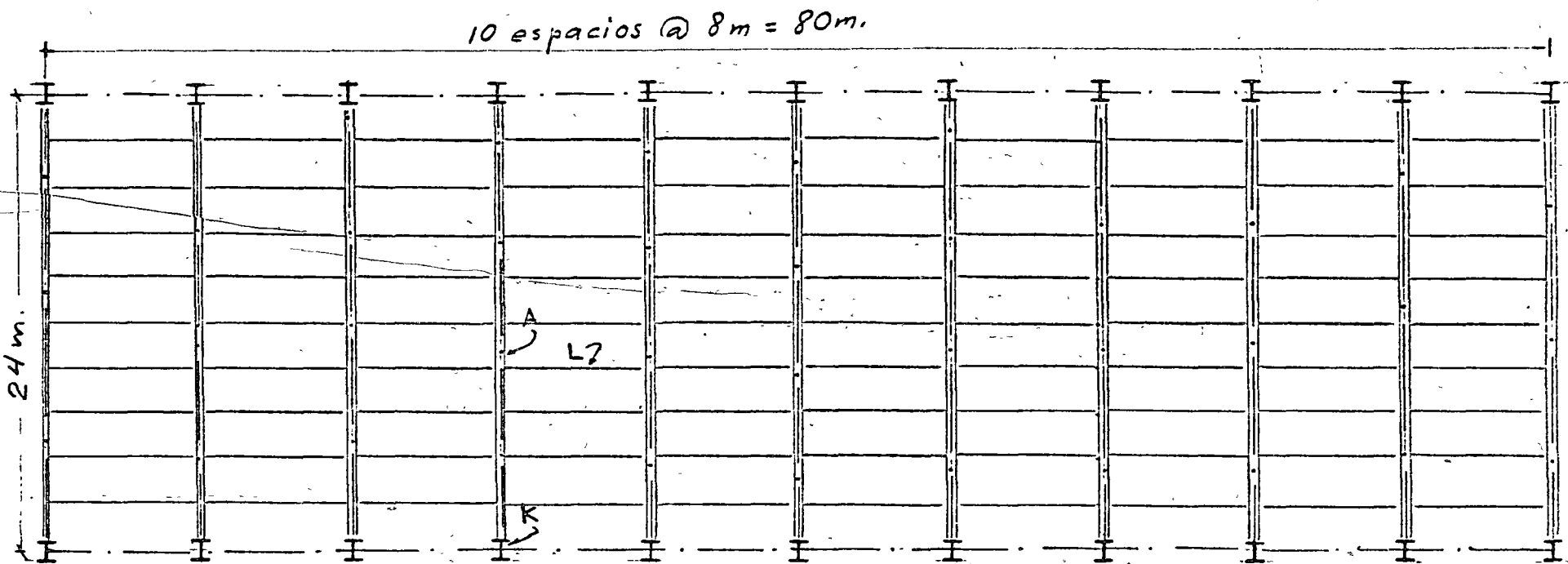
Se proponen como elementos estructurales básicos marcos formados por armaduras de alma abierta apoyadas sobre columnas en forma de vigueta formada con tres placas soldadas.

El material de la cubierta se apoya en un sistema de largueros que tiene por fin transmitir el peso de ese material a las armaduras principales.

Las paredes de la nave, por razones de economía, se forman utilizando láminas de asbesto acanalada que requieren para su apoyo de otro sistema de largueros sustentado en las columnas principales (Fig. 2).

Los elementos estructurales mencionados, largueros, armaduras y columnas, constituyen un conjunto estable para soportar las fuerzas verticales que actuarán sobre la construcción; cargas muertas (peso propio de todos los elementos estructurales o no, que gravitan sobre ella) y cargas vivas (nieve, granizo, etc.). Sin embargo ante la acción de fuerzas horizontales, (sismo o viento) el sistema no resulta estable.

Si las columnas y las armaduras principales se

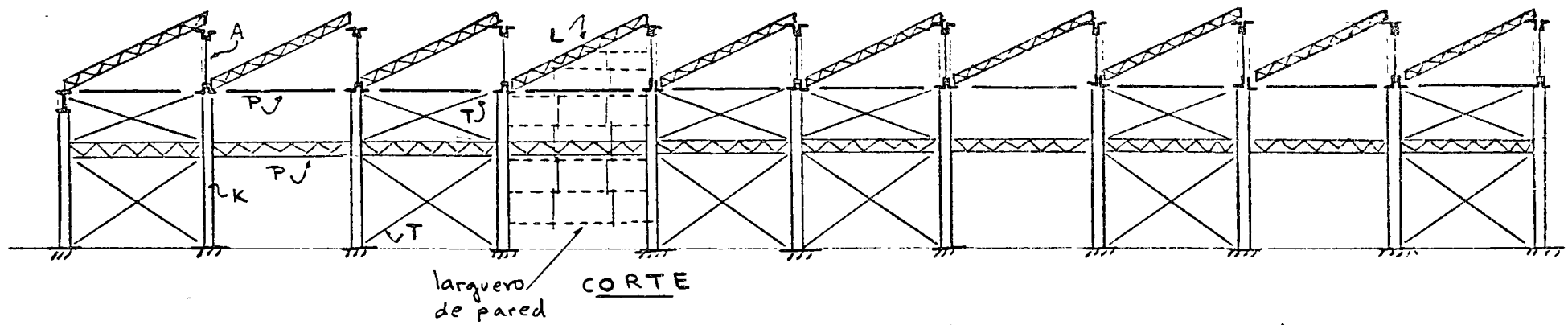


PLANTA

Distribución de columnas, armaduras y largueros.-

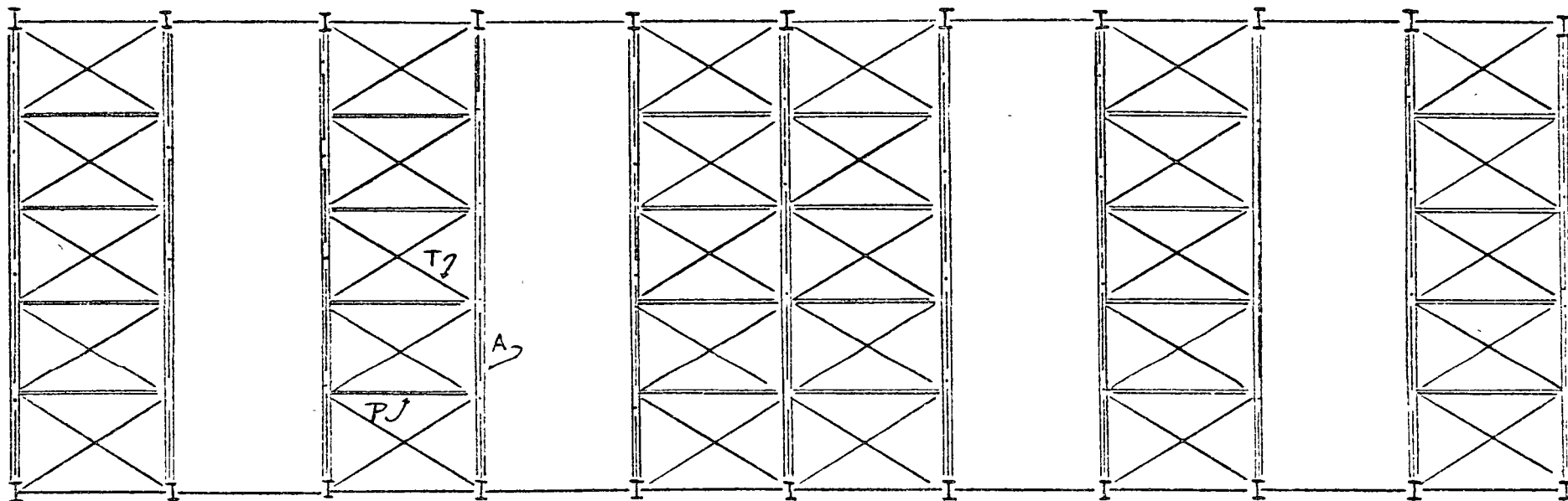
A: Armaduras.  
K: Columnas.  
L: Largueros

FIG.



Colocación de largueros, columnas y estructura de paredes laterales

- L : largueros
  - A : armaduras
  - K : columnas
  - T : tirantes
  - P : puntales
- } estructura de pared lateral.



Distribución de contraventeo en cuerda inferior.-

P: Puntales.  
 T: Tirantes.  
 A: Armaduras.

ligan rigidamente, la estructura se hace resistente en el sentido transversal ante fuerzas en esa dirección inclusive superando la base de las columnas articulada.

Sin embargo, el conjunto no tiene todavía capacidad apreciable ante fuerzas horizontales perpendiculares a su propio plano o sea en el sentido longitudinal de la nave. Cubría la posibilidad de formar marcos rígidos también en esa dirección para lograrla pero resulta en general más eficiente proporcionar en las paredes laterales, un sistema de contraventeo que transmita a la cimentación las cargas horizontales a través de fuerzas axiales en armaduras formadas por el contraventeo, las columnas y puntales longitudinales (fig. 2)

Logada la estabilidad en estas dos direcciones, cualquier fuerza actuando sobre la estructura podrá descomponerse en ellas y la encontrará estable.

Una estructura además de estable debe ser económica y además funcional. El sistema estructural descrito ha demostrado ser una de las soluciones más económicas para resolver este tipo de problemas, al menos en lo que a cantidad de materiales se refiere.

Uno de los problemas de funcionamiento que debe resolverse al proyectar una nave industrial es el de su iluminación adecuada, su solución influye en la solución estructural y es por ella que en este progra



Los largueros se distribuyen en la forma llamada de diente de sierra en que, a través de las armaduras, que funcionarían como grandes ventanas orientadas al norte, se obtiene una iluminación conveniente.

Para que las fuerzas horizontales en el sentido longitudinal lleguen a los elementos que las han de transmitir a la cimentación, esto es, a las armaduras que se han dispuesto en las paredes, es necesario utilizar algunos elementos adicionales que en este caso son contraventeos formando armaduras en el nivel del patin inferior de las principales; cualquier fuerza horizontal longitudinal en la cubierta puede transmitirse a las paredes a través de este sistema de contraventeo (fig 3), la transmisión no sería adecuada sin estos elementos lo que los hace necesarios, además la tendencia de la cubierta a deslizarse hacia abajo también es evitada con este contraventeo que a veces se coloca, también con buenos resultados en el plano del techo.

Aprovechando el efecto de diafragma de la losa del techo (capacidad de transmitir cargas en su propio plano) este contraventeo se colocará uniendo cada dos largueros; además se colocará una cruzija si y otra no ya que esto basta para rigidizar toda la estructura.

## II - CARGAS

### a) Cargas muertas -

Son las que actúan en forma permanente y constante. Incluyen el peso de todos los elementos que componen la estructura, el peso de la losa del techo y la impermeabilización.

Aunque estas cargas son las que pueden valerse con mayor precisión no se conocen en detalle antes de haber diseñado la estructura, por ello tienen que estimarse a partir de un diseño preliminar o como resultado de experiencias anteriores.

En este ejemplo las cargas muertas serían:

para el cálculo de largueras:

losa de siporex (7 cm)	53	Kg/m <sup>2</sup>	(catálogo)
impermeabilización	20	"	estimado
largueras	7	"	"
	<hr/>		
	80	Kg/m <sup>2</sup>	

para el cálculo de las armaduras añadir por peso de armaduras, ventanales y contraventeo

250 Kg/m (estimado)

Sobrecarga útil Kg/m <sup>2</sup>	Longitudes máximas en cm.					
	Espesor de losas, cm.					
	7.5	10	12.5	15	17.5	20
50	250	350	400	475	525	550
100	225	325	375	425	475	525
150	200	300	350	400	450	525
200	175	275	325	400	450	500
250	200	275	350	400	450	500
300	200	250	325	375	425	475
350	175	250	300	350	400	450
400	175	250	275	350	375	425
450	150	225	275	325	375	400
500	150	225	275	325	375	400
550	150	225	250	300	350	375
600	125	200	250	300	325	350
PESO kg/m <sup>2</sup>	49	65	81	98	114	130

## LOSAS STANDARD

Existen para entrega inmediata, con un descuento especial, losas standard de las siguientes características:

Longitud cm.	Losas de techo para sobrecarga útil de			
	50 Kg/m <sup>2</sup>		100 Kg/m <sup>2</sup>	
	Espesor, cm.	Peso Propio, Kg/m <sup>2</sup>	Espesor, cm.	Peso Propio, Kg/m <sup>2</sup>
175	7.5	49	7.5	49
225	7.5	49	10	65
275	10	65	10	65

## INCOMBUSTIBILIDAD

Siporex es totalmente incombustible. Las losas de techo han sido clasificadas en: Suecia, Inglaterra, Alemania, Francia, Canadá y EE.UU., según normas oficiales, como resistentes al fuego.

## AISLAMIENTO TERMICO

El coeficiente de conductividad térmica  $k$  en las losas Siporex de peso volumétrico 0.5 es 0.1K cal/°C, hr, m para fines de cálculo.

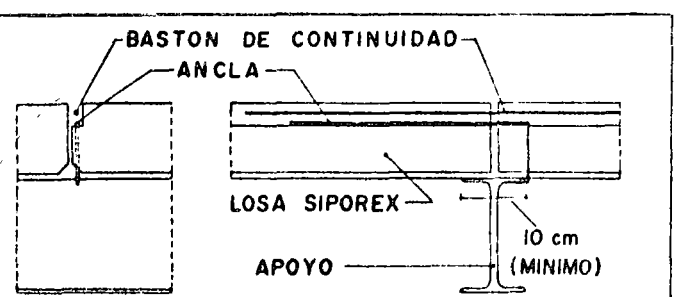


FIG. 2

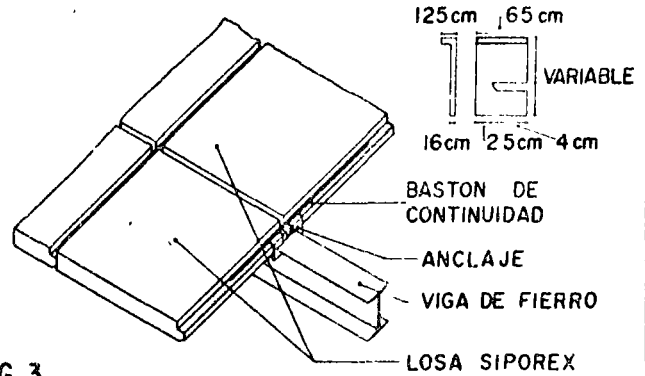


FIG. 3

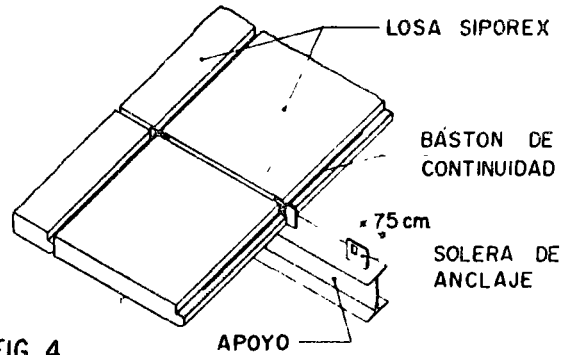


FIG. 4

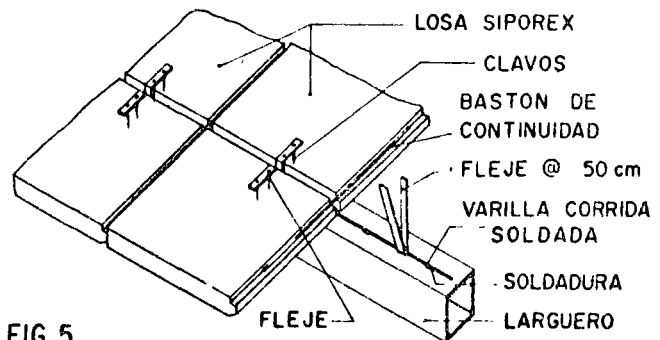


FIG. 5

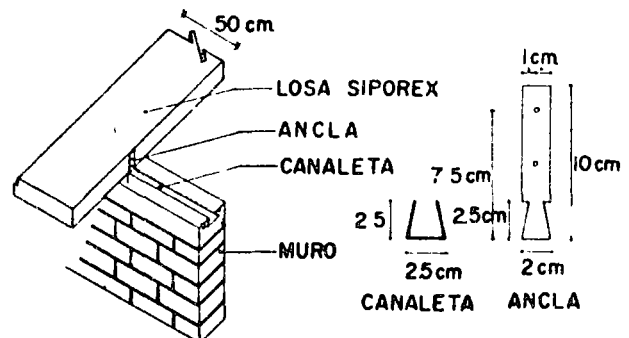


FIG. 6

Esesor de la losa en cm.	7.5	10	12.5	15	17.5	20	22.5	25
$U \frac{K \text{ cal}}{^{\circ}C. \text{ hr. m}^2}$	1.29	1.03	0.86	0.74	0.65	0.58	0.52	0.47

FIG. 7

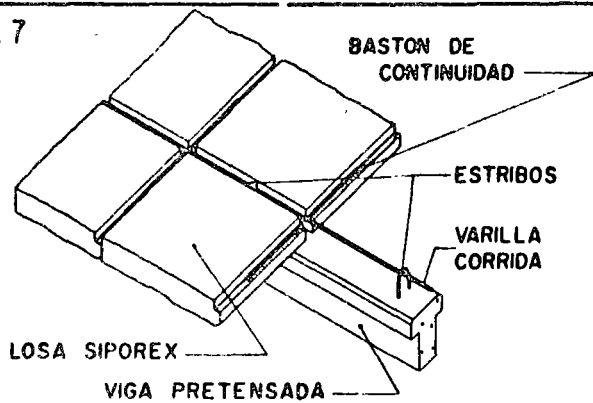


FIG. 8

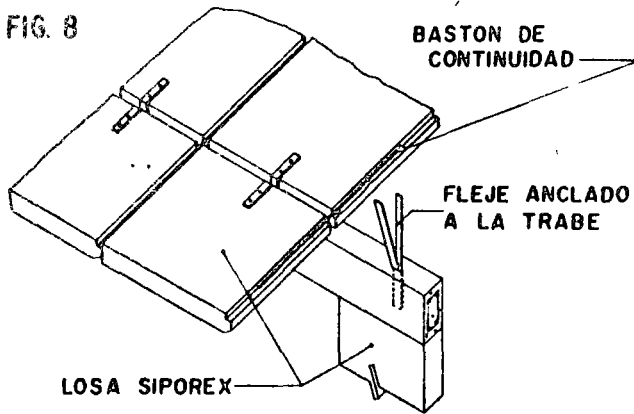


FIG. 9

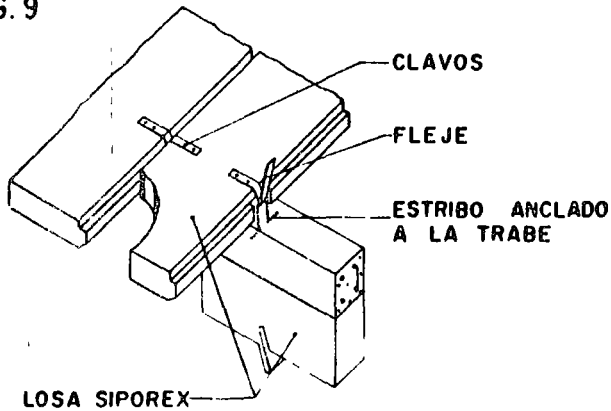
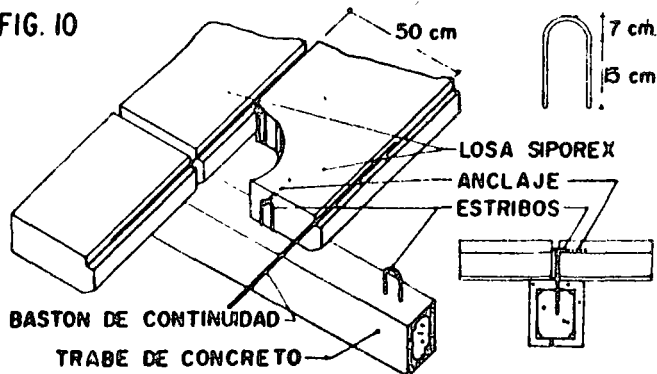


FIG. 10



Los valores U para los techos, considerando la humedad del material y sin tomar en cuenta la impermeabilización son los que se muestran en la tabla anterior.

### ABSORCION DE SONIDOS

Materiales	Frecuencia ciclos por segundo		
	125	500	2000
Siporex aparente	0.02	0.19	0.34
Aplanado liso	0.02	0.02	0.04
Aplanado rugoso	0.04	0.06	0.05
Concreto aparente	0.01	0.02	0.02
Vidrio	0.10	0.04	0.02

### DETALLES CONSTRUCTIVOS

#### ANCLAJE

Es necesario fijar las losas Siporex a los elementos de soporte, mediante algún sistema de anclaje. En las figuras 2 al 10 se muestran algunos ejemplos.

#### BASTONES DE CONTINUIDAD

En las ranuras de las losas, precisamente a la altura de los apoyos, deberán alojarse varillas de  $\phi 6.3$  ó  $7.9$  mm y de longitud aproximadamente igual a  $1/3$  de la longitud de la losa y como mínimo 80 cm. Estas varillas se introducen a presión en el mortero de relleno, en forma tal que queden totalmente embebidas en el mismo y a 10 ó 15 mm. de profundidad

#### JUNTEO

Las ranuras que quedan entre losa y losa, se rellenan con mortero de cemento y arena (1:3), teniendo cuidado de mojar previamente la ranura y de que el mortero se coloque suficientemente fluido. No debe caminarsse sobre las losas antes de que frague este mortero.

## b) Cargas vivas:-

Son las que la estructura soportará normalmente durante su vida útil pero que no tienen carácter permanente.

El caso en estudio no está cubierto precisamente por el Reglamento de las Construcciones que menciona únicamente azoteas.

La carga viva más importante que pueda presentarse en esta estructura es el granizo y se estimará en  $40 \text{ Kg/m}^2$ .

## c) Cargas accidentales:-

Las constituyen las provocadas por la acción del viento y el sismo.

En cubiertas es bastante frecuente que la carga accidental que decide el diseño sea el viento, esto es debido principalmente a dos factores, la ligereza de la estructura y la amplia superficie expuesta al viento.

En este problema la primera condición no se cumple del todo luego conviene considerar ambas posibilidades.

## c) Carga de viento

La presión del viento es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. el Manual de diseño de obras civiles de la C.F.E. da recomendaciones para calcular las fuerzas de viento.

La presión se valúa con la expresión siguiente:

$$p = 0.0048 G C V_0^2$$

en ella

$G$  es un factor que tiene en cuenta la reducción de la densidad de la atmósfera con la altura  $h$  en Km. a la que se halla la construcción respecto al nivel del mar

$$G = \frac{8 + h}{8 + 2h}$$

$V_0$  es la velocidad de diseño que debe considerarse y que varía con las condiciones particulares de cada caso

$$V_0 = V \left( \frac{z}{10} \right)^\alpha$$

$z$  = altura de la estructura o zona de la misma que se estudia, con respecto al suelo.

$\alpha$  = factor que depende de la topografía del terreno.

$$V = K_1 K_2 V_0$$

$V_0$  = Velocidad regional del viento.

$K_1$  = factor de topografía, tiene en cuenta también

las características estructurales de la construcción que hacen que la respuesta al viento sea distinta para diferentes estructuraciones.

$K_2$  = factor que considera la importancia de la estructura que se diseña.

$C$  = factor de forma de la estructura en cuestión.

En la figura 4 se muestran los coeficientes que se considerarán para el caso que se presenta en este ejemplo.

Multiplicando la presión del viento  $p$  por el área expuesta que también es definida para cada caso especial en el Manual mencionado.

Para nuestro caso al considerar el viento en el sentido longitudinal de la nave se recomienda tomar como área expuesta, además de las paredes verticales, el área vertical del primer diente más el 50% de la de todos los demás.

Deben considerarse además presiones o succiones interiores que dependen del porcentaje de aberturas que presente la nave. Cuando este es mayor del

30% del área expuesta se recomienda usar  $C = +0.8$  (presión) o  $C = -0.6$  (succión), lo que resulte más desfavorable. Cuando el porcentaje

es nulo se tomará  $\pm 0.3$  y para valores intermedias se interpolará.

Estas presiones se deben usar solamente para el diseño de elementos aislados y no para el análisis de la estabilidad de conjunto de la estructura.

La estructura que estudiamos supondremos tiene las características que siguen:

Localización: en la mesa central de la República.  
en campo abierto.  
en terreno plano.  
a 1 Km. sobre el nivel del mar.

Estructuración: Tipo 1

Clase: grupo B

En esas condiciones se tiene:

$$p = 0.0048 G C V^2$$

$$G = \frac{8+h}{8+2h} = 0.9$$

$$V_0 = 140 \text{ Km/hora}$$

$$K_1 = 1.0$$

$$K_2 = 1.0$$

$$V = 1.0 \times 1.0 \times 140 = 140 \text{ Km/hora}$$



$$p = 0.0048 \times 0.9 \times 140^2 \text{ C} = 84.7 \text{ C}$$

Fuerza horizontal total de biada al viento -

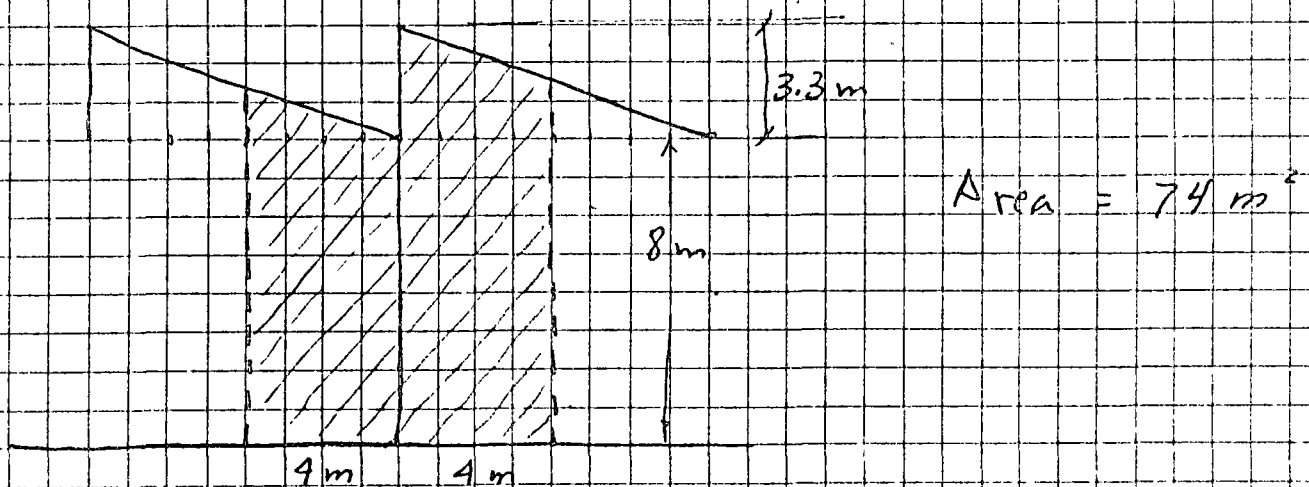
Sentido longitudinal.

Pared de barlovento	$84.7 \times 0.75 \times 11.3 \times 24 = 17222 \text{ Kg}$
Pared de sotavento	$84.7 \times 0.68 \times 8 \times 24 = 11058 \text{ ''}$
Techo	$10 \times 84.7 \times 0.68 \times 24 \times 8.63 \times \text{Sen} 22^\circ = 5117 \text{ ''}$
Ventanas verticales	$84.7 \times 0.75 \times 24 \times 3.3 \times 0.5 \times 9 = 22640 \text{ ''}$
Total	<u>56037 Kg</u>

Sentido trans versal

Consideraremos el área tributaria correspondiente a un

marco

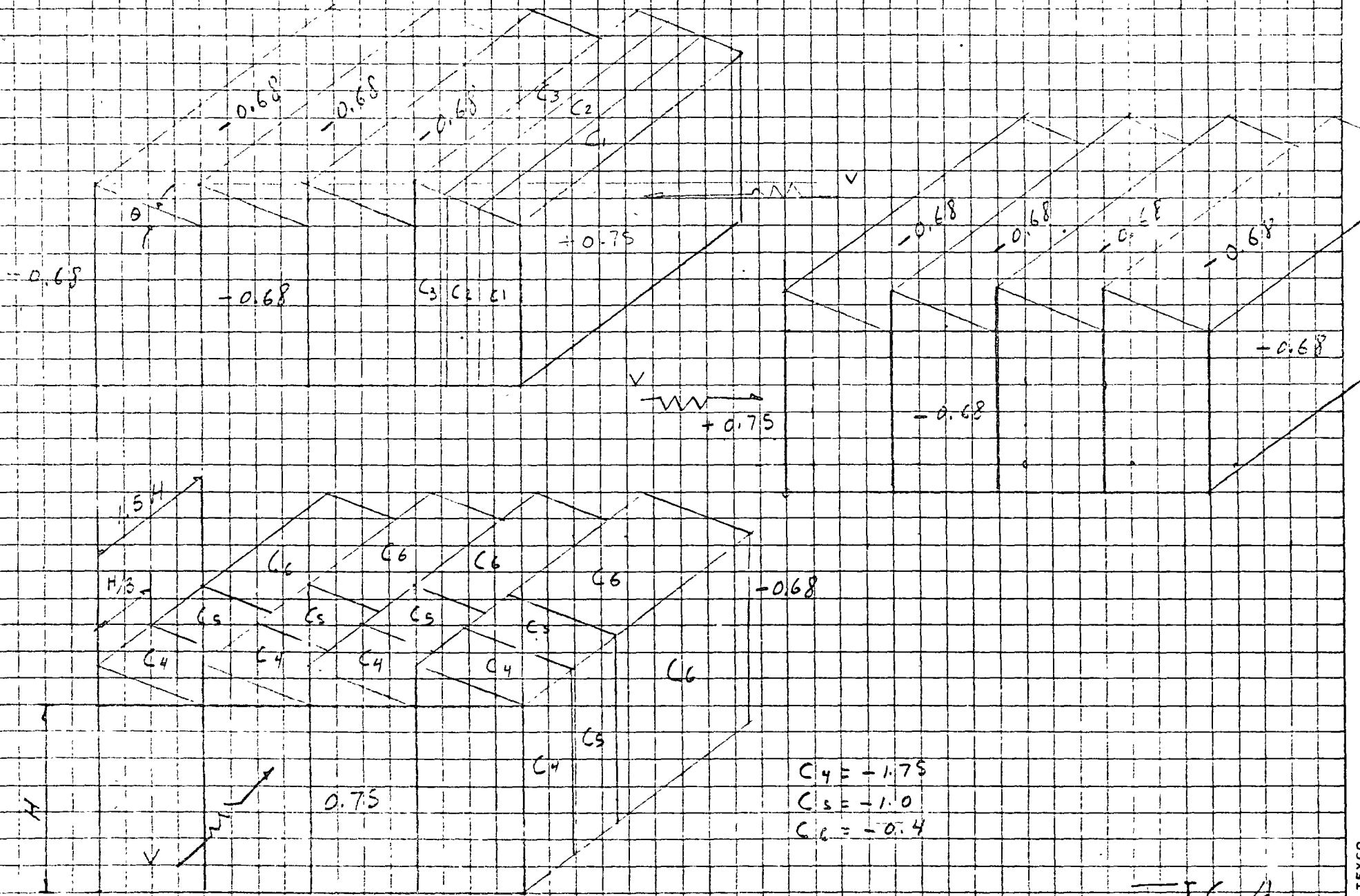


$$F_{empuj} = 84.7 \text{ C } 74 = 84.7 (0.75 + 0.68) 74 = 8950 \text{ Kg}$$

$$C_1 = -2.1 + 0.023 \theta = -1.26$$

$$C_2 = -1.2 + 0.013 \theta = +0.26$$

$$C_3 = -2.1$$



$$C_4 = -1.75$$

$$C_5 = -1.0$$

$$C_6 = -0.4$$

FIG. 4

## Fuerza horizontal total debida al sismo.

De acuerdo con el Reglamento para las Construcciones en el D.F. la fuerza cortante en la base de la construcción que se utilice para el diseño es igual a un coeficiente sísmico multiplicado por el peso de la construcción.

En nuestro caso el peso aproximado es de:

$$\text{En el techo} = 80 \text{ m} \times 24 \text{ m} \times 80 \text{ Kg/m}^2 = 153600 \text{ Kg}$$

$$\text{En las paredes} = 2 \times 80 \text{ m} \times 9.65 \text{ m} \times 20 \text{ Kg/m}^2 = 30880 \text{ "}$$

$$+ 2 \times 24 \text{ m} \times 11.3 \text{ m} \times 20 \text{ "} = \underline{10850 \text{ "}}$$

$$\text{Total} \quad 195330 \text{ Kg.}$$

Y el coeficiente sísmico máximo se presenta en el sentido longitudinal de la nave en que se tiene una estructura contraventada:

zona de baja compresibilidad }  
estructura del grupo b } Coeficiente  
estructura del tipo 2 } sísmico  
0.08

El cortante en la base es entonces de:

$$195330 \times 0.08 = 15626 \text{ Kg.}$$

Esta fuerza es menor a la que se presenta por viento.

Si se considera ahora un marco en el sentido Transversal se tendrá:

$$\text{Peso del techo} \quad 24 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 80 \text{ Kg/m}^2 = 15360 \text{ Kg}$$

$$\text{Peso de las paredes} \quad 2 \times 8 \text{ m} \times 9.65 \text{ m} \times 20 \text{ Kg/m}^2 = 3088 \text{ Kg}$$

El coeficiente sísmico es en este caso de 0.04 por tratarse ahora de una estructura tipo 1, la fuerza será:

$$18448 \times 0.04 = 738 \text{ Kg}$$

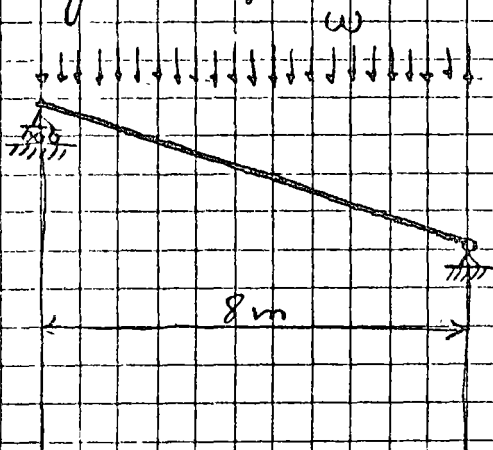
que también es bastante menor que la debida al viento.

### III ANALISIS DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES.

#### 1.- Largueros .-

Se supondrán libremente apoyados en las armaduras

Por carga vertical



w de carga muerta

$$w_{cm} = 80 \text{ Kg/m}^2 \times 2.4 \text{ m} = 192 \text{ Kg/m}$$

w de carga viva

$$w_{cv} = 40 \text{ Kg/m}^2 \times 2.4 = 86 \text{ ''}$$

$$V_{cm} = 768 \text{ Kg}$$

$$V_{cv} = 384 \text{ ''}$$

$$M_{cm} = 1536 \text{ Kg-m}$$

$$M_{cv} = 768 \text{ ''}$$

Por carga vertical + viento

La fuerza sobre el techo es de succión y en el caso

mas des favorable vale:

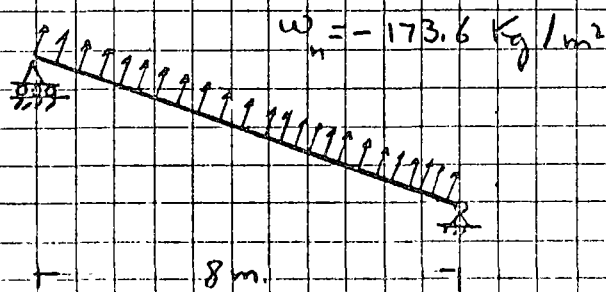
$$p_e = -1.75 \times 84.7 = -148.2 \text{ Kg/m}^2$$

a este valor debera agregarse el debido a las presiones interiores que en este caso supondremos se obtiene con un coeficiente de 0.3

$$p_i = -0.3 \times 84.7 = -25.4 \text{ Kg/m}^2$$

La carga sobre el larguero al actuar el viento sera entonces de:

$$-173.6 \text{ Kg/m}^2$$



Componente vertical:

$$w_v = -163 \text{ Kg/m}^2$$

Fija neta vertical

$$-163 \text{ Kg/m}^2$$

$$+ 80$$

$$+ 83$$

(carga muerta)

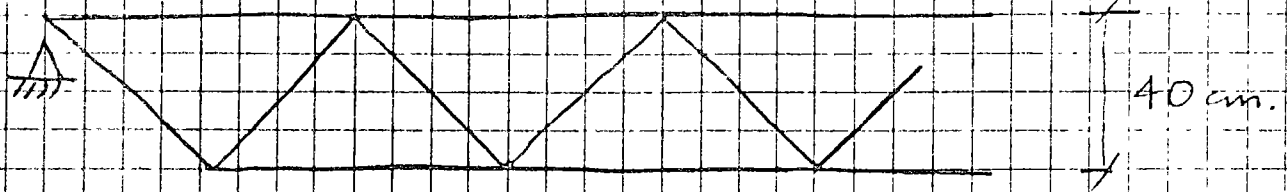
Se tendra entonces por carga muerta + viento:

$$M_v = -1601 \text{ Kg-m}$$

$$V_v = -800 \text{ Kg}$$

La componente horizontal de la fuerza de viento produce una pequeña flexión adicional en el larguero que suele despreciarse.

## Análisis aproximado



Carga viva + muerta:

$$\text{Fza en cada cuerda} = \frac{M}{d} = \frac{1536 + 76.8}{0.4} = 5760 \text{ Kg.}$$

$$\text{Fza en la diagonal más desfavorable} = \frac{V}{\cos 45^\circ} = \frac{76.8 + 384}{0.7071} = 1629 \text{ Kg.}$$

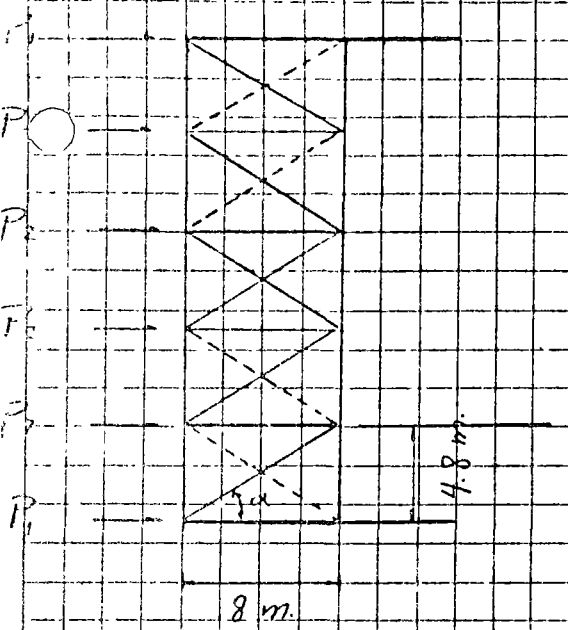
Carga muerta + viento

$$\text{Fza en cuerda} = 4000 \text{ Kg}$$

$$\text{Fza en diagonal} = 1131 \text{ Kg}$$

## 2. Contravanteo horizontal

Supondremos que la primera armadura horizontal soporta la reacción de la estructura de la pared y las fuerzas horizontales del primer tramo del techo.



Carga  $P_2$

por la pared  $0.75 \times 84.7 \times \frac{11.3}{2} \times 4.8 = 1722 \text{ Kg}$

por el techo  $0.68 \times 84.7 \times 4.8 \times 8 \times 0.37 = 818$

por ventana vertical  $0.75 \times 84.7 \times 4.8 \times \frac{5.3}{2} = 503$

Total 3043 Kg

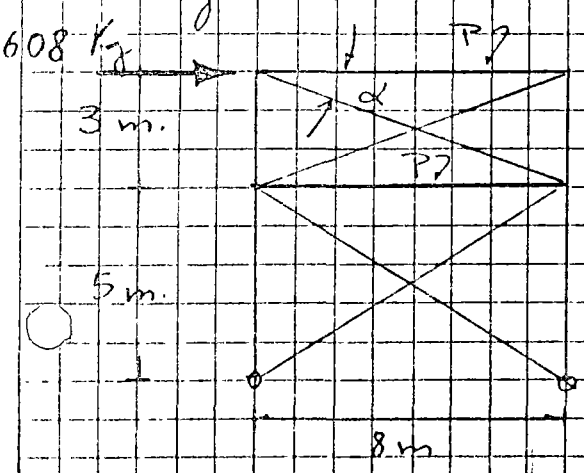
Carga  $P_1$  1522 Kg

Fza en el montante más cargado:  $\frac{2 \times 1522 + 3043 \times 4}{2} = 7608 \text{ Kg}$

Fza en la diagonal más cargada:  $\frac{7608 - 1522}{\cos \alpha} = 7076 \text{ Kg}$

### 3.- Contraventeo vertical

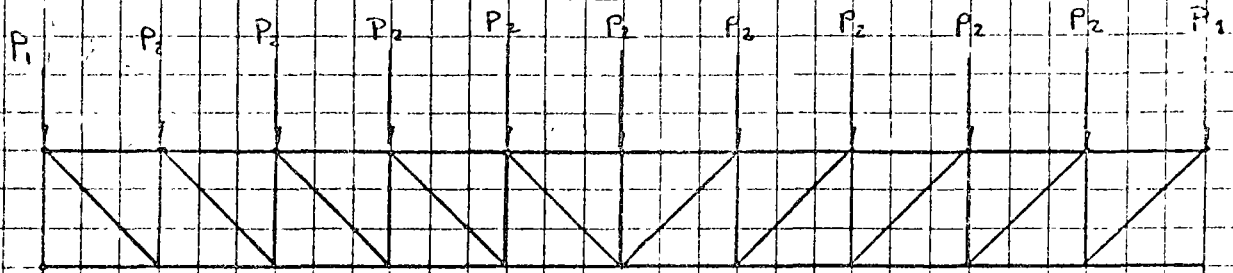
La primera cruzilla debe resistir la carga que le transmite la primera armadura del contraventeo horizontal



Fuerza en el puntal  $P = 7608 \text{ Kg}$

Fuerza en la diagonal  $= \frac{7608}{0.85} = 8950 \text{ Kg}$

a) Carga vertical.



Carga  $P_2$  :

Por reacción del larguero . C.M. = 768 Kg  
C.V. = 384 "d"

Por peso propio de la armadura y el vidrio :

$$250 \text{ Kg/m} \times 2.4 = 600 \text{ Kg}$$

$$P_2 = 1752 \text{ Kg}$$

$$P_1 = 876 \text{ Kg}$$

b) Carga muerta + viento longitudinal

Por reacción del larguero = 800 Kg

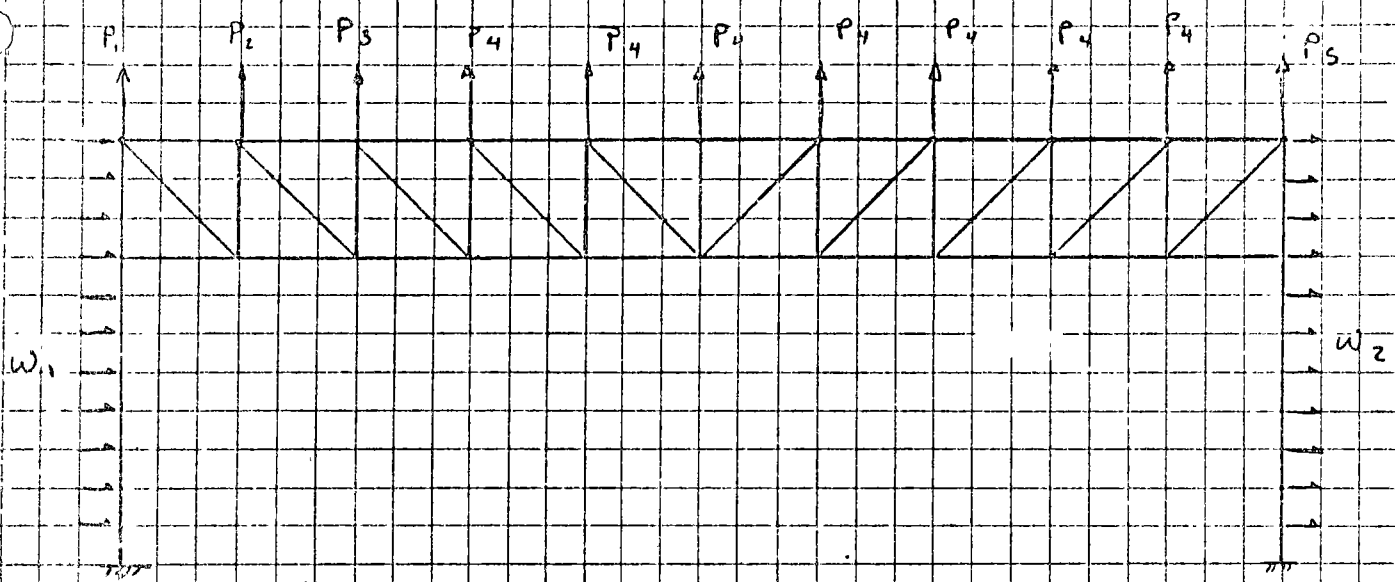
Por peso propio de armadura y vidrio = 600 Kg

$$P_2 = -200 \text{ Kg}$$

$$P_1 = -100 \text{ Kg}$$



# Carga de viento transversal



$$W_1 = 0.75 \times 84.7 \times 73.9 = 4694 \text{ Kg}$$

$$W_2 = 0.68 \times 84.7 \times 73.9 = 4256 \text{ ''}$$

$$P_1 = 1.75 \times 84.7 \times \frac{2.4 \times 8}{2} \cos 22^\circ = 1320 \text{ Kg}$$

$$P_2 = 2640 \text{ ''}$$

$$P_3 = \frac{P_2 + P_4}{2} = \frac{2640 + 1507}{2} = 2073 \text{ ''}$$

$$P_4 = 1.0 \times 84.7 \times 2.4 \times 8 \times \cos 22^\circ = 1507 \text{ ''}$$

## Carga de trabe carril.-

Se supondrá como parte de la nave en estudio una trabe carril sobre la que se apoya una grúa con las características siguientes:

Capacidad en el gancho	50 Ton.
Peso del Puente	83.5 Ton.
Peso del carro	10.0 Ton.
Acercamiento máximo al eje del riel	1.8 m.

De acuerdo con las especificaciones del AISC la carga en el gancho debe incrementarse en 25% por impacto

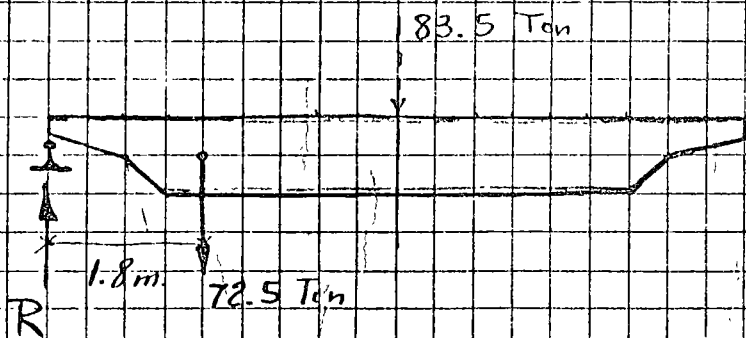
$$P_v = 50 \times 1.25 = 62.5 \text{ Ton.}$$

A demás debe considerarse una fuerza horizontal aplicada en la parte superior del riel del 20% de la carga en el gancho más el peso del carro.

$$P_H = (50 + 10) \times 0.20 = 12 \text{ Ton}$$

Y una fuerza horizontal longitudinal del 10% de la reacción máxima de las ruedas

Reacciones máximas de la trabe guía sobre la armadura vertical.



$$R_{max} = \frac{83.5}{2} + \frac{72.5 \times 22.2}{24} = 109 \text{ Ton.}$$

$$R_{min} = 47 \text{ ton.}$$

Reacción horizontal:

6 ton. sobre cada columna.

Momento debido a la excentricidad de la carga:

$$109 \times 0.25 = 27.25 \text{ T-m}$$

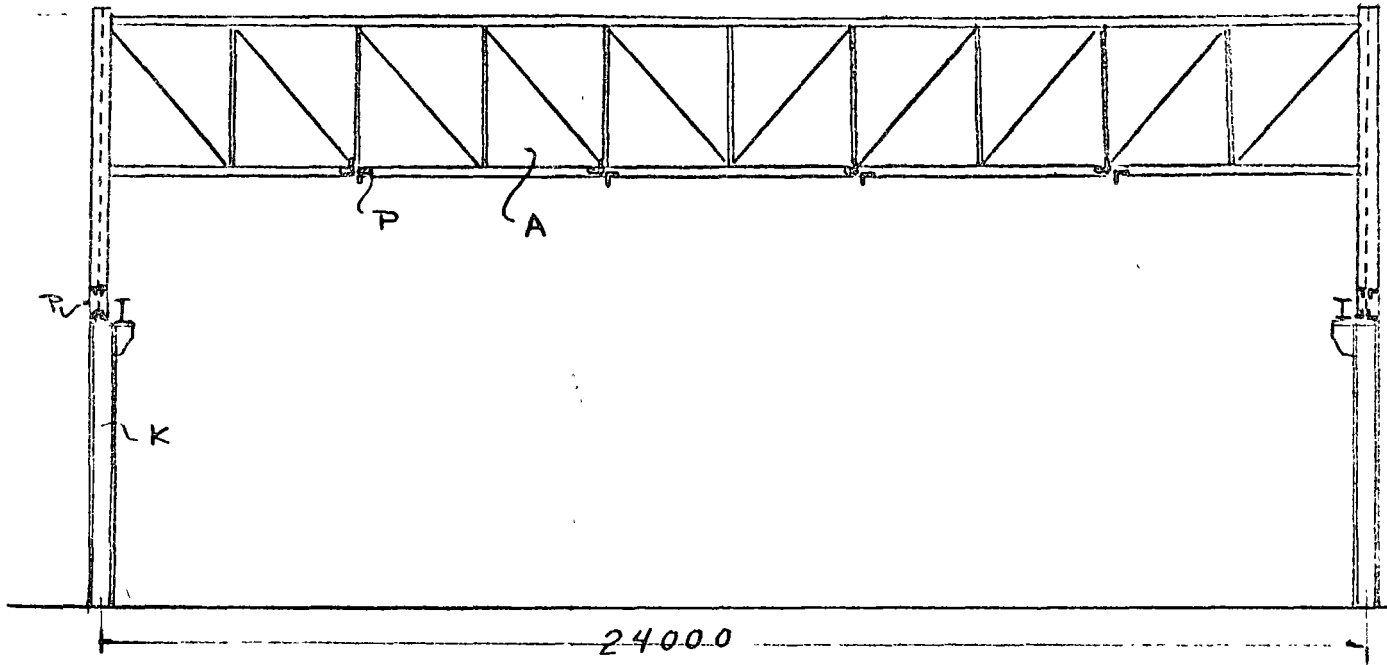
$$47 \times 0.25 = 11.75 \text{ T-m}$$

El análisis en este caso se realiza usando el programa STRESS para la solución de estructuras hiperestáticas que calcula, haciendo uso del método general de las rigideces, los elementos mecánicos y deformaciones en la estructura.

Se consideraran las siguientes condiciones de carga:

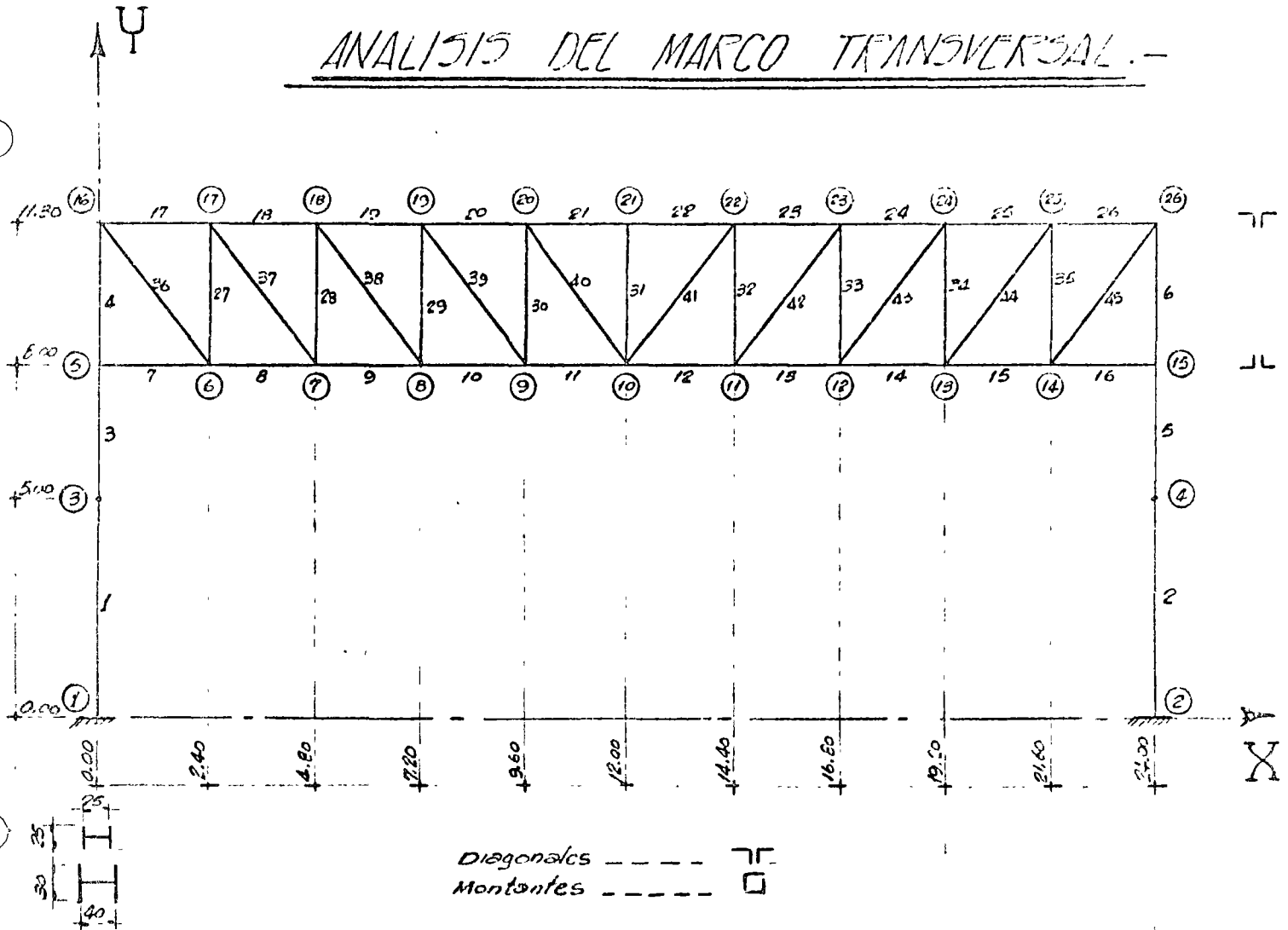
- 1.- Carga muerta.
- 2.- Carga viva.
- 3.- Carga de gusa.
- 4.- Carga de viento transversal.
- 5.- (1 + 2 + 3)
- 6.- (1 + 4) / 1.5

La última condición se divide entre 1.5 para tener en cuenta que en este caso puede aceptarse un coeficiente de seguridad menor por ser el viento una condi-

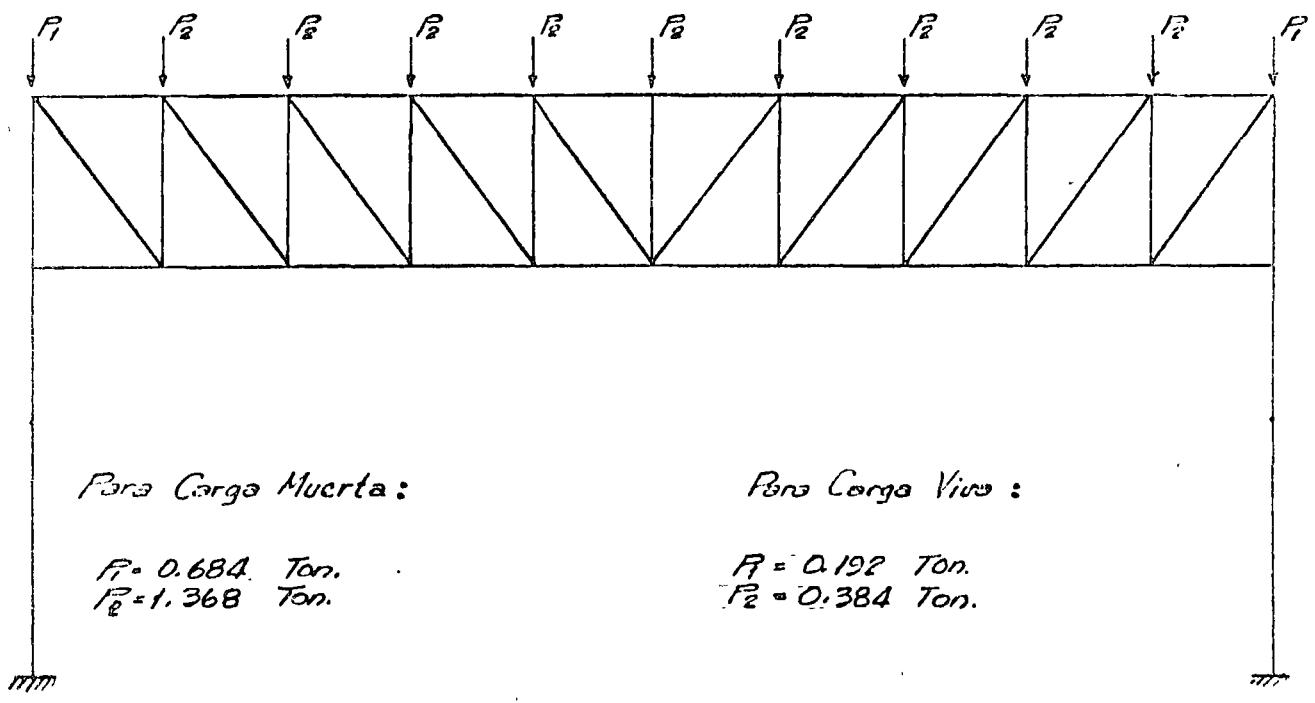


Elevación de un marco transversal tipo.-

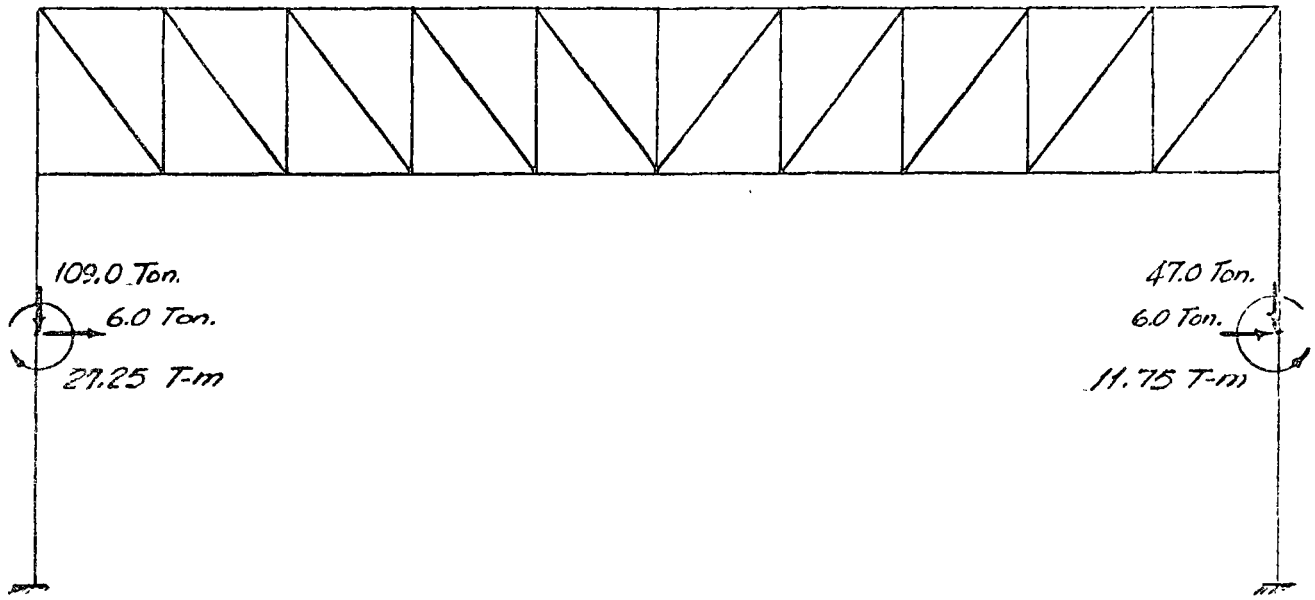
# ANÁLISIS DEL MARCO TRANSVERSAL.-



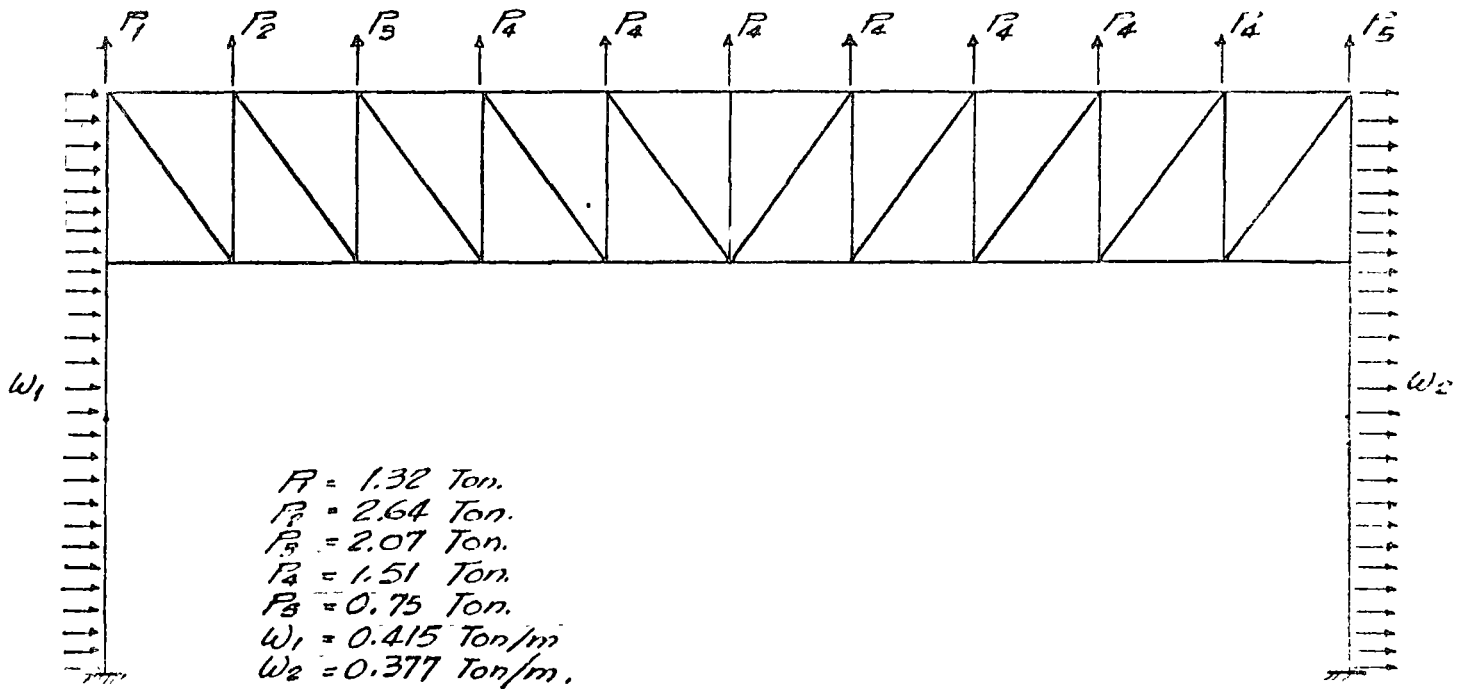
## CARGA VERTICAL.-



CARGA DE GRUA.-



CARGA DE VIENTO TRANSVERSAL.-



STRUCTURE MARCO TRANSVERSAL TIPO

TYPE PLANE FRAME  
 NUMBER OF JOINTS 26  
 NUMBER OF MEMBERS 45  
 NUMBER OF SUPPORTS 2  
 NUMBER OF LOADINGS 6

JOINT COORDINATES

1	0.00	0.00	S
2	24.00	0.00	S
3	0.00	5.00	
4	24.00	5.00	
5	0.00	8.00	
6	2.40	8.00	
7	4.80	8.00	
8	7.20	8.00	
9	9.60	8.00	
10	12.00	8.00	
11	14.40	8.00	
12	16.80	8.00	
13	19.20	8.00	
14	21.60	8.00	
15	24.00	8.00	
16	0.00	11.30	
17	2.40	11.30	
18	4.80	11.30	
19	7.20	11.30	
20	9.60	11.30	
21	12.00	11.30	
22	14.40	11.30	
23	16.80	11.30	
24	19.20	11.30	
25	21.60	11.30	
26	24.00	11.30	

MEMBER PROPERTIES PRISMATIC

1 THRU 2	AX	0.017490	IZ	0.000349373
3 THRU 6	AX	0.000813	IZ	0.000062516
7 THRU 16	AX	0.002296	IZ	0.000001258
17 THRU 26	AX	0.003096	IZ	0.000003088
27 THRU 35	AX	0.001162	IZ	0.000000703
36 THRU 45	AX	0.001162	IZ	0.000000458

MEMBER INCIDENCES

1	1	3
2	2	4
3	3	5
4	5	16
5	4	15
6	15	26
7	5	6
8	6	7
9	7	8
10	8	9
11	9	10
12	10	11
13	11	12

12	12	12
15	13	14
16	14	15
17	16	17
18	17	18
19	18	19
20	19	20
21	20	21
22	21	22
23	22	23
24	23	24
25	24	25
26	25	26
27	6	17
28	7	18
29	8	19
30	9	20
31	10	21
32	11	22
33	12	23
34	13	24
35	14	25
36	16	6
37	17	7
38	18	8
39	19	9
40	20	10
41	10	22
42	11	23
43	12	24
44	13	25
45	14	26

CONSTANTS E 21000000.0 ALL

TABULATE ALL

LOADING I CARGA MUERTA

JOINT LOADS

16	FORCE Y	-0.684
17	FORCE Y	-1.368
18	FORCE Y	-1.368
19	FORCE Y	-1.368
20	FORCE Y	-1.368
21	FORCE Y	-1.368
22	FORCE Y	-1.368
23	FORCE Y	-1.368
24	FORCE Y	-1.368
25	FORCE Y	-1.368
26	FORCE Y	-0.684

LOADING II CARGA VIVA

JOINT LOADS

16	FORCE Y	-0.192
17	FORCE Y	-0.384
18	FORCE Y	-0.384
19	FORCE Y	-0.384
20	FORCE Y	-0.384
21	FORCE Y	-0.384



22 FORCE Y -0.384  
23 FORCE Y -0.384  
24 FORCE Y -0.384  
25 FORCE Y -0.384  
26 FORCE Y -0.192

LOADING III CARGA DE GRUA

JOINT LOADS

3 FORCE X 6.0  
3 FORCE Y -109.0  
3 MOMENT Z -27.25  
4 FORCE X 6.0  
4 FORCE Y -47.0  
4 MOMENT Z 11.75

LOADING IV VIENTO TRANSVERSAL

JOINT LOADS

16 FORCE Y 1.320  
17 FORCE Y 2.640  
18 FORCE Y 2.073  
19 FORCE Y 1.507  
20 FORCE Y 1.507  
21 FORCE Y 1.507  
22 FORCE Y 1.507  
23 FORCE Y 1.507  
24 FORCE Y 1.507  
25 FORCE Y 1.507  
26 FORCE Y 0.7535

MEMBER LOADS

1 FORCE Y UNIFORM W -0.415  
2 FORCE Y UNIFORM W -0.377  
3 THRU 4 FORCE Y UNIFORM W -0.415  
5 THRU 6 FORCE Y UNIFORM W -0.377

LOADING V AEREA MUERTA + CARGA VIVA + CARGA DE GRUA

COMBINE 1 1.0 2 1.0 3 1.0

LOADING VI CARGA MUERTA + VIENTO TRANSVERSAL

COMBINE 1 0.75 4 0.75

SOLVE

PROBLEM CORRECTLY SPECIFIED, EXECUTION TO PROCEED.

STRUCTURE MADCO TRANSVERSAL TIPO

LOADING 1 CARGA MUERTA

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	6.839	-0.233	-1.15
1	3	-6.839	0.233	-0.01
2	2	6.839	0.233	1.15
2	4	-6.839	-0.233	0.01
3	3	6.839	-0.233	0.01
3	5	-6.839	0.233	-0.71
4	5	6.788	0.170	0.63
4	16	-6.788	-0.170	-0.07
5	4	6.839	0.233	-0.01
5	15	-6.839	-0.233	0.71
6	15	6.788	-0.170	-0.63
6	26	-6.788	0.170	0.07
7	5	0.404	0.051	0.07
7	6	-0.404	-0.051	0.04
8	6	-4.018	0.002	-0.00
8	7	4.018	-0.002	0.01
9	7	-7.509	0.009	0.00
9	8	7.509	-0.009	0.01
10	8	-9.991	0.004	0.00
10	9	9.991	-0.004	0.01
11	9	-11.483	0.003	-0.00
11	10	11.483	-0.003	0.00
12	10	-11.483	-0.003	-0.00
12	11	11.483	0.003	0.00
13	11	-9.991	-0.004	-0.01
13	12	9.991	0.004	-0.00
14	12	-7.509	-0.009	-0.01
14	13	7.509	0.009	-0.00
15	13	-4.019	-0.002	-0.01
15	14	4.019	0.002	0.00
16	14	0.404	-0.051	-0.04
16	15	-0.404	0.051	-0.07
17	16	4.235	0.050	0.07
17	17	-4.235	-0.050	0.04
18	17	7.734	0.004	-0.00

12	0.0301	0.0019	-0.0001
13	0.0300	0.0014	-0.0003
14	0.0300	0.0008	0.0001
15	0.0299	0.0000	-0.0028
16	0.0304	0.0009	0.0014
17	0.0304	0.0017	-0.0000
18	0.0304	0.0021	0.0001
19	0.0304	0.0023	0.0000
20	0.0305	0.0024	0.0000
21	0.0305	0.0024	-0.0000
22	0.0306	0.0022	-0.0001
23	0.0307	0.0019	-0.0001
24	0.0307	0.0014	-0.0001
25	0.0308	0.0008	-0.0006
26	0.0308	0.0001	0.0010

STRUCTURE MARCO TRANSVERSAL TIPO

MEMBER FORCES FOR MEMBER 1

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	1	6.839	-0.233	-1.15
1	3	-6.839	0.233	-0.01
2	1	1.919	-0.065	-0.32
2	3	-1.919	0.065	-0.00
3	1	108.658	2.959	31.01
3	3	-108.658	-2.959	-16.21
4	1	-10.074	4.844	20.81
4	3	10.074	-2.769	-1.78
5	1	-117.418	2.660	29.53
5	3	117.418	-2.660	-16.23
6	1	-2.426	3.457	14.74
6	3	2.426	-1.901	-1.34

MEMBER FORCES FOR MEMBER 2

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	2	6.839	0.233	1.15
1	4	-6.839	-0.233	0.01
2	2	1.919	0.065	0.32
2	4	-1.919	-0.065	0.00

3	2	47.341	9.040	35.28
3	4	-47.341	-9.040	8.91
4	2	-7.260	4.105	17.72
4	4	7.260	-2.220	-1.91
5	2	56.101	9.339	37.76
5	4	-56.101	-9.339	8.92
6	2	-0.315	3.254	14.16
6	4	0.315	-1.840	-1.42

MEMBER FORCES FOR MEMBER 3

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	3	6.839	-0.233	0.01
1	5	-6.839	0.233	-0.71
2	3	1.919	-0.065	0.00
2	5	-1.919	0.065	-0.20
3	3	-0.341	-3.040	-11.03
3	5	0.341	3.040	1.91
4	3	-10.074	2.769	1.78
4	5	10.074	-1.524	4.65
5	3	8.418	-3.339	-11.01
5	5	-8.418	3.339	0.99
6	3	-2.426	1.901	1.34
6	5	2.426	-0.967	2.95

MEMBER FORCES FOR MEMBER 4

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	5	6.788	0.170	0.63
1	16	-6.788	-0.170	-0.07
2	5	1.905	0.047	0.17
2	16	-1.905	-0.047	-0.02
3	5	-0.306	-0.583	-1.85
3	16	0.306	0.583	-0.07
4	5	-9.925	-0.676	-4.40
4	16	9.925	2.045	-0.08
5	5	8.387	-0.364	-1.03
5	16	-8.387	0.364	-0.16
6	5	-2.352	-0.378	-2.52
6	16	2.352	1.405	-0.11

MEMBER FORCES FOR MEMBER 5

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	4	6.839	0.233	-0.01
1	15	-6.839	-0.233	0.71
2	4	1.919	0.065	-0.00
2	15	-1.919	-0.065	0.20
3	4	0.341	3.040	2.83
3	15	-0.341	-3.040	6.28
4	4	-7.260	2.220	1.91
4	15	7.260	-1.089	3.04
5	4	9.101	3.339	2.82
5	15	-9.101	-3.339	7.19
6	4	-0.315	1.840	1.42
6	15	0.315	-0.992	2.82

MEMBER FORCES FOR MEMBER 6

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	15	6.788	-0.170	-0.63
1	26	-6.788	0.170	0.07
2	15	1.905	-0.047	-0.17
2	26	-1.905	0.047	0.02
3	15	0.227	-1.913	-6.07
3	26	-0.227	1.913	-0.23
4	15	-7.282	-0.365	-2.99
4	26	7.282	1.610	-0.26
5	15	-8.921	-2.132	-6.89
5	26	8.921	2.132	-0.14
6	15	-0.370	-0.402	-2.72
6	26	0.370	1.335	-0.14

MEMBER FORCES FOR MEMBER 7

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	5	0.404	0.051	0.07
1	6	-0.404	-0.051	0.04
2	5	0.113	0.014	0.02
2	6	-0.113	-0.014	0.01
3	5	2.455	-0.035	-0.06
3	6	-2.455	0.035	-0.02
4	5	-2.200	-0.149	-0.24
4	6	2.200	0.149	-0.10
5	5	2.973	0.030	0.03
5	6	-2.973	-0.030	0.03
6	5	-1.346	-0.073	-0.12
6	6	1.346	0.073	-0.04

MEMBER FORCES FOR MEMBER 8

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	6	-4.018	0.002	-0.00
1	7	4.018	-0.002	0.01
2	6	-1.128	0.000	-0.00
2	7	1.128	-0.000	0.00
3	6	2.708	0.006	0.01
3	7	-2.708	-0.006	0.00
4	6	4.109	0.011	0.03
4	7	-4.109	-0.011	-0.00
5	6	-2.438	0.009	0.00
5	7	2.438	-0.009	0.01
6	6	0.068	0.010	0.02
6	7	-0.068	-0.010	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 9

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	7	-7.509	0.009	0.00
1	8	7.509	-0.009	0.01
2	7	-2.107	0.002	0.00
2	8	2.107	-0.002	0.00
3	7	2.754	-0.001	-0.00
3	8	-2.954	0.001	-0.00
4	7	8.561	-0.014	-0.01
4	8	-8.561	0.014	-0.01
5	7	-6.662	0.010	0.00
5	8	6.662	-0.010	0.01
6	7	0.789	-0.003	-0.00
6	8	-0.789	0.003	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 10

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	8	-9.991	0.004	0.00
1	9	9.991	-0.004	0.01
2	8	-2.804	0.001	0.00
2	9	2.804	-0.001	0.00
3	8	3.204	-0.000	0.00
3	9	-3.204	0.000	-0.00
4	8	11.498	-0.004	0.00
4	9	-11.498	0.004	-0.01
5	8	-9.591	0.005	0.00

5	9	9.591	-0.005	0.01
6	8	1.130	-0.000	0.00
6	9	-1.130	0.000	-0.00

## MEMBER FORCES FOR MEMBER 11

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	9	-11.483	0.003	-0.00
1	10	11.483	-0.003	0.00
2	9	-3.223	0.000	-0.00
2	10	3.223	-0.000	0.00
3	9	3.451	-0.000	0.00
3	10	-3.451	0.000	-0.00
4	9	13.340	-0.004	0.00
4	10	-13.340	0.004	-0.01
5	9	-11.255	0.003	-0.00
5	10	11.255	-0.003	0.01
6	9	1.392	-0.000	-0.00
6	10	-1.392	0.000	-0.00

## MEMBER FORCES FOR MEMBER 12

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	10	-11.483	-0.003	-0.00
1	11	11.483	0.003	0.00
2	10	-3.223	-0.000	-0.00
2	11	3.223	0.000	0.00
3	10	3.948	-0.001	-0.00
3	11	-3.948	0.001	-0.00
4	10	13.739	-0.002	0.00
4	11	-13.739	-0.002	-0.00
5	10	-10.759	-0.005	-0.01
5	11	10.759	0.005	0.00
6	10	1.691	-0.000	0.00
6	11	-1.691	0.000	-0.00

## MEMBER FORCES FOR MEMBER 13

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	11	-9.991	-0.004	-0.01
1	12	9.991	0.004	-0.00
2	11	-2.804	-0.001	-0.00
2	12	2.804	0.001	-0.00

3	11	4.195	-0.000	0.00
3	12	-4.195	0.000	-0.00
4	11	12.293	0.004	0.01
4	12	-12.293	-0.004	-0.00
5	11	-8.600	-0.005	-0.01
5	12	8.600	0.005	-0.00
6	11	1.726	0.000	0.00
6	12	-1.726	-0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 14

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	12	-7.509	-0.009	-0.01
1	13	7.509	0.009	-0.00
2	12	-2.107	-0.002	-0.00
2	13	2.107	0.002	-0.00
3	12	4.446	-0.004	-0.00
3	13	-4.446	0.004	-0.00
4	12	9.761	0.007	0.01
4	13	-9.761	-0.007	0.00
5	12	-5.170	-0.017	-0.02
5	13	5.170	0.017	-0.01
6	12	1.688	-0.001	-0.00
6	13	-1.688	0.001	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 15

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	13	-4.019	-0.002	-0.01
1	14	4.019	0.002	0.00
2	13	-1.128	-0.000	-0.00
2	14	1.128	0.000	0.00
3	13	4.686	0.020	0.01
3	14	-4.686	-0.020	0.03
4	13	6.107	0.016	0.02
4	14	-6.107	-0.016	0.01
5	13	-0.460	0.016	-0.00
5	14	0.460	-0.016	0.04
6	13	1.566	0.010	0.00
6	14	-1.566	-0.010	0.01

MEMBER FORCES FOR MEMBER 16

=====



LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	14	0.404	-0.051	-0.04
1	15	-0.404	0.051	-0.07
2	14	0.113	-0.014	-0.01
2	15	-0.113	0.014	-0.02
3	14	4.952	-0.114	-0.06
3	15	-4.952	0.114	-0.20
4	14	1.454	-0.022	-0.00
4	15	-1.454	0.022	-0.05
5	14	5.470	-0.179	-0.12
5	15	-5.470	0.179	-0.30
6	14	1.394	-0.055	-0.03
6	15	-1.394	0.055	-0.09

MEMBER FORCES FOR MEMBER 17

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	16	4.235	0.050	0.07
1	17	-4.235	-0.050	0.04
2	16	1.189	0.014	0.02
2	17	-1.189	-0.014	0.01
3	16	0.329	0.033	0.06
3	17	-0.329	-0.033	0.01
4	16	-4.241	0.014	0.05
4	17	4.241	-0.014	-0.02
5	16	5.754	0.099	0.16
5	17	-5.754	-0.099	0.07
6	16	-0.004	0.049	0.09
6	17	0.004	-0.049	0.01

MEMBER FORCES FOR MEMBER 18

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	17	7.734	0.004	-0.00
1	18	-7.734	-0.004	0.01
2	17	2.171	0.001	-0.00
2	18	-2.171	-0.001	0.00
3	17	0.082	-0.009	-0.01
3	18	-0.082	0.009	-0.00
4	17	8.708	-0.024	-0.02
4	18	-8.708	0.024	-0.03
5	17	9.988	-0.003	-0.02
5	18	-9.988	0.003	0.01
6	17	-0.730	-0.015	-0.02
6	18	0.730	0.015	-0.01

MEMBER FORCES FOR MEMBER 19

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	18	10.218	0.010	0.00
1	19	-10.218	-0.010	0.02
2	18	2.868	-0.002	0.00
2	19	-2.868	-0.002	0.00
3	18	-0.166	0.001	0.00
3	19	0.166	-0.001	-0.00
4	18	-11.647	-0.005	0.00
4	19	11.647	0.005	-0.02
5	18	12.921	0.014	0.00
5	19	-12.921	-0.014	0.02
6	18	-1.071	0.003	0.00
6	19	1.071	-0.003	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 20

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	19	11.713	0.003	-0.00
1	20	-11.713	-0.003	0.01
2	19	3.288	0.001	-0.00
2	20	-3.288	-0.001	0.00
3	19	-0.414	-0.001	-0.00
3	20	0.414	0.001	-0.00
4	19	-13.492	-0.006	0.00
4	20	13.492	0.006	-0.02
5	19	14.587	0.002	-0.01
5	20	-14.587	-0.002	0.01
6	19	-1.334	-0.002	-0.00
6	20	1.334	0.002	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 21

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	20	12.210	0.004	-0.00
1	21	-12.210	-0.004	0.01
2	20	3.427	0.001	-0.00
2	21	-3.427	-0.001	0.00
3	20	-0.663	0.001	0.00
3	21	0.663	-0.001	0.00
4	20	-14.240	-0.004	0.01
4	21	14.240	0.004	-0.02
5	20	14.974	0.006	-0.00

5	21	-14.974	-0.006	0.02
6	20	-1.522	-0.000	0.00
6	21	1.522	0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 22

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	21	12.210	-0.004	-0.01
1	22	-12.210	0.004	0.00
2	21	3.427	-0.001	-0.00
2	22	-3.427	0.001	0.00
3	21	-0.664	-0.001	-0.00
3	22	0.664	0.001	-0.00
4	21	-14.239	0.004	0.02
4	22	14.239	-0.004	-0.01
5	21	14.973	-0.006	-0.02
5	22	-14.973	0.006	0.00
6	21	-1.522	0.000	0.00
6	22	1.522	-0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 23

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	22	11.713	-0.003	-0.01
1	23	-11.713	0.003	0.00
2	22	3.288	-0.001	-0.00
2	23	-3.288	0.001	0.00
3	22	-0.910	-0.002	-0.00
3	23	0.910	0.002	-0.00
4	22	-13.891	0.001	0.01
4	23	13.891	-0.001	-0.01
5	22	14.091	-0.007	-0.02
5	23	-14.091	0.007	0.00
6	22	-1.633	-0.001	0.00
6	23	1.633	0.001	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 24

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	23	10.219	-0.010	-0.02
1	24	-10.219	0.010	-0.00
2	23	2.868	-0.002	-0.00
2	24	-2.868	0.002	-0.00

2	23	-1.158	0.005	0.00
3	24	1.158	-0.005	0.00
4	23	-12.443	0.016	0.02
4	24	12.443	-0.016	0.00
5	23	11.928	-0.007	-0.02
5	24	-11.928	0.007	0.00
6	23	-1.668	0.004	0.00
6	24	1.668	-0.004	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 25

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	24	7.734	-0.004	-0.01
1	25	-7.734	0.004	0.00
2	24	2.171	-0.001	-0.00
2	25	-2.171	0.001	0.00
3	24	-1.408	-0.029	-0.01
3	25	1.408	0.029	-0.05
4	24	-9.908	-0.018	0.00
4	25	9.908	0.018	-0.05
5	24	8.496	-0.034	-0.03
5	25	-8.496	0.034	-0.04
6	24	-1.630	-0.016	-0.00
6	25	1.630	0.016	-0.03

MEMBER FORCES FOR MEMBER 26

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	25	4.235	-0.050	-0.04
1	26	-4.235	0.050	-0.07
2	25	1.189	-0.014	-0.01
2	26	-1.189	0.014	-0.02
3	25	-1.652	0.113	0.06
3	26	1.652	-0.113	0.21
4	25	-6.247	0.145	0.09
4	26	6.247	-0.145	0.24
5	25	3.772	0.048	0.00
5	26	-3.772	-0.048	0.11
6	25	-1.508	0.070	0.02
6	26	1.508	-0.070	0.12

MEMBER FORCES FOR MEMBER 27

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	6	6.102	-0.017	-0.02
1	17	-6.102	0.017	-0.02
2	6	1.712	-0.004	-0.00
2	17	-1.712	0.004	-0.00
3	6	-0.381	0.001	0.00
3	17	0.381	-0.001	0.00
4	6	-8.780	0.025	0.04
4	17	8.780	-0.025	0.03
5	6	7.433	-0.020	-0.03
5	17	-7.433	0.020	-0.03
6	6	-2.008	0.006	0.01
6	17	2.008	-0.006	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 28

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	7	4.773	-0.008	-0.01
1	18	-4.773	0.008	-0.01
2	7	1.340	-0.002	-0.00
2	18	-1.340	0.002	-0.00
3	7	-0.330	0.000	0.00
3	18	0.330	-0.000	0.00
4	7	-6.075	0.010	0.01
4	18	6.075	-0.010	0.01
5	7	5.783	-0.010	-0.01
5	18	-5.783	0.010	-0.01
6	7	-0.976	0.001	0.00
6	18	0.976	-0.001	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 29

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	8	3.405	-0.006	-0.01
1	19	-3.405	0.006	-0.01
2	8	0.955	-0.001	-0.00
2	19	-0.955	0.001	-0.00
3	8	-0.342	0.000	0.00
3	19	0.342	-0.000	0.00
4	8	-4.031	0.007	0.01
4	19	4.031	-0.007	0.01
5	8	4.018	-0.007	-0.01
5	19	-4.018	0.007	-0.01
6	8	-0.469	0.000	0.00
6	19	0.469	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 30

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	9	2.045	-0.003	-0.00
1	20	-2.045	0.003	-0.00
2	9	0.574	-0.000	-0.00
2	20	-0.574	0.000	-0.00
3	9	-0.339	0.000	0.00
3	20	0.339	-0.000	0.00
4	9	-2.524	0.004	0.00
4	20	2.524	-0.004	0.00
5	9	2.279	-0.004	-0.00
5	20	-2.279	0.004	-0.00
6	9	-0.359	0.000	0.00
6	20	0.359	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 31

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	10	1.360	-0.000	-0.00
1	21	-1.360	0.000	-0.00
2	10	0.381	-0.000	-0.00
2	21	-0.381	0.000	-0.00
3	10	-0.002	0.000	0.00
3	21	0.002	-0.000	0.00
4	10	-1.498	0.000	0.00
4	21	1.498	-0.000	0.00
5	10	1.739	0.000	0.00
5	21	-1.739	-0.000	0.00
6	10	-0.103	0.000	0.00
6	21	0.103	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 32

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	11	2.045	0.003	0.00
1	22	-2.045	-0.003	0.00
2	11	0.574	0.000	0.00
2	22	-0.574	-0.000	0.00
3	11	0.337	0.001	0.00
3	22	-0.337	-0.001	0.00
4	11	-1.981	-0.003	-0.00
4	22	1.981	0.003	-0.00
5	11	2.956	0.005	0.00

5	22	-2.956	-0.005	0.00
6	11	0.047	0.000	0.00
6	22	-0.047	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 33

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	12	3.405	0.006	0.01
1	23	-3.405	-0.006	0.01
2	12	0.955	0.001	0.00
2	23	-0.955	-0.001	0.00
3	12	0.347	0.001	0.00
3	23	-0.347	-0.001	0.00
4	12	-3.472	-0.006	-0.01
4	23	3.472	0.006	-0.01
5	12	4.708	0.009	0.01
5	23	-4.708	-0.009	0.01
6	12	-0.050	-0.000	0.00
6	23	0.050	0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 34

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	13	4.773	0.008	0.01
1	24	-4.773	-0.008	0.01
2	13	1.340	0.002	0.00
2	24	-1.340	-0.002	0.00
3	13	0.307	0.000	-0.00
3	24	-0.307	-0.000	0.00
4	13	-5.010	-0.008	-0.01
4	24	5.010	0.008	-0.01
5	13	6.421	0.011	0.01
5	24	-6.421	-0.011	0.02
6	13	-0.177	-0.000	-0.00
6	24	0.177	0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 35

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	14	6.102	0.017	0.02
1	25	-6.102	-0.017	0.02
2	14	1.712	0.004	0.00
2	25	-1.712	-0.004	0.00

3	14	0.475	0.004	0.01
3	25	-0.475	-0.004	0.00
4	14	-6.345	-0.016	-0.02
4	25	6.345	0.016	-0.03
5	14	8.290	0.026	0.05
5	25	-8.290	-0.026	0.03
6	14	-0.182	0.000	0.00
6	25	0.182	-0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 36

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	16	-7.487	-0.003	-0.00
1	6	7.487	0.003	-0.00
2	16	-2.101	-0.000	-0.00
2	6	2.101	0.000	-0.00
3	16	0.423	0.003	0.00
3	6	-0.423	-0.003	0.00
4	16	10.668	0.013	0.02
4	6	-10.668	-0.013	0.02
5	16	-9.166	-0.000	0.00
5	6	9.166	0.000	-0.00
6	16	2.385	0.007	0.01
6	6	-2.385	-0.007	0.01

MEMBER FORCES FOR MEMBER 37

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	17	-5.914	-0.003	-0.00
1	7	5.914	0.003	-0.00
2	17	-1.660	-0.001	-0.00
2	7	1.660	0.001	-0.00
3	17	0.418	-0.000	-0.00
3	7	-0.418	0.000	-0.00
4	17	7.546	0.003	0.00
4	7	-7.546	-0.003	0.00
5	17	-7.156	-0.005	-0.01
5	7	7.156	0.005	-0.00
6	17	1.224	-0.000	-0.00
6	7	-1.224	0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 38

=====



LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	18	-4.205	-0.002	-0.00
1	8	4.205	0.002	-0.00
2	18	-1.180	-0.000	-0.00
2	8	1.180	0.000	-0.00
3	18	0.422	0.000	0.00
3	8	-0.422	-0.000	0.00
4	18	4.975	0.003	0.00
4	8	-4.975	-0.003	0.00
5	18	-4.963	-0.002	-0.00
5	8	4.963	0.002	-0.00
6	18	0.577	0.000	0.00
6	8	-0.577	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 39

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	19	-2.528	-0.001	-0.00
1	9	2.528	0.001	-0.00
2	19	-0.709	-0.000	-0.00
2	9	0.709	0.000	-0.00
3	19	0.419	0.000	0.00
3	9	-0.419	-0.000	0.00
4	19	3.121	0.001	0.00
4	9	-3.121	-0.001	0.00
5	19	-2.818	-0.001	-0.00
5	9	2.818	0.001	-0.00
6	19	0.444	0.000	0.00
6	9	-0.444	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 40

=====

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	20	-0.837	-0.000	-0.00
1	10	0.837	0.000	-0.00
2	20	-0.235	-0.000	-0.00
2	10	0.235	0.000	-0.00
3	20	0.424	0.000	0.00
3	10	-0.424	-0.000	0.00
4	20	1.261	0.000	0.00
4	10	-1.261	-0.000	0.00
5	20	-0.648	-0.000	-0.00
5	10	0.648	0.000	0.00
6	20	0.318	0.000	0.00
6	10	-0.318	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 41

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	10	-0.837	0.000	0.00
1	22	0.837	-0.000	0.00
2	10	-0.235	0.000	0.00
2	22	0.235	-0.000	0.00
3	10	-0.419	0.000	0.00
3	22	0.419	-0.000	0.00
4	10	0.583	-0.000	0.00
4	22	-0.583	0.000	-0.00
5	10	-1.491	0.000	0.00
5	22	1.491	-0.000	0.00
6	10	-0.190	0.000	0.00
6	22	0.190	-0.000	0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 42

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	11	-2.528	0.001	0.00
1	23	2.528	-0.001	0.00
2	11	-0.709	0.000	0.00
2	23	0.709	-0.000	0.00
3	11	-0.419	0.000	0.00
3	23	0.419	-0.000	-0.00
4	11	2.448	-0.001	-0.00
4	23	-2.448	0.001	-0.00
5	11	-3.657	0.002	0.00
5	23	3.657	-0.002	0.00
6	11	-0.059	-0.000	0.00
6	23	0.059	0.000	-0.00

MEMBER FORCES FOR MEMBER 43

LOADING	JOINT	AXIAL FORCE	SHEAR FORCE	MOMENT
1	12	-4.205	0.002	0.00
1	24	4.205	-0.002	0.00
2	12	-1.180	0.000	0.00
2	24	1.180	-0.000	0.00
3	12	-0.424	0.000	0.00
3	24	0.424	-0.000	0.00
4	12	4.291	-0.002	-0.00
4	24	-4.291	0.002	-0.00
5	12	-5.811	0.004	0.00
5	24	5.811	-0.004	0.00
6	12	0.064	0.000	0.00
6	24	-0.064	-0.000	0.00

## IV DISEÑO DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES

### a) Largueras.

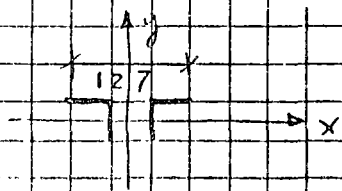
#### Cuerda superior

Puede considerarse sometida a compresión pura pues el siporex que en forma continua se apoya sobre ella tiene suficiente rigidez a la flexión para salvar el claro entre nudos, por otro lado suele suponerse que el apoyo de la losa sobre la cuerda es capaz de proporcionar el arriostramiento necesario para que no se presente su pandeo lateral. En esas condiciones:

Si se usan 2 7F 51 x 51 x 5 mm.

y  $F = 5760 \text{ Kg.}$  (compresión)

pg. 14



$$r_x = 1.17$$

$$k_x = 0.9$$

$$l_y = 80 \text{ cm.}$$

$$\frac{k l}{r} = \frac{80 \times 0.9}{1.17} = 62$$

$$F_a = 1318 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_a = \frac{5760}{9.2} = 626 \text{ Kg/cm}^2 < F_a$$

(E.E. pg. 23)

#### Cuerda inferior

La condición de carga más desfavorable se presenta al actuar el viento en que la cuerda inferior queda sometida a compresión no teniendo en este caso contraventeo lateral a no ser el que pudieran proporcionar las diagonales que suelen desvirtuarse

Usando los mismos ángulos que en la cuerda superior

$$F = \frac{4000}{1.5} = 2666 \text{ Kg}$$

$$r_{ij} = 0.21 \times 12.7 = 3.05 \text{ cm}$$

$$l_{ij} = 800 \text{ cm.}$$

$$k_{ij} = 0.7$$

estimado en función del tipo de conexión de la cuerda

$$\frac{k l}{r} = \frac{0.7 \times 800}{3.05} = 184 ; F_a = 310 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_a = \frac{2666}{9.2} = 289.8 \text{ Kg/cm}^2 < F_a$$

Diagonales

$$2 \text{ LT } 25 \times 25 \times 3 ; r = 2.5 \text{ cm} ; A = 3.04 \text{ cm}^2$$

$$F = 1620 \text{ Kg}$$

$$l = 56 \text{ m} ; \frac{k l}{r} = 22 ; F_a = 1440 \text{ Kg/cm}^2$$

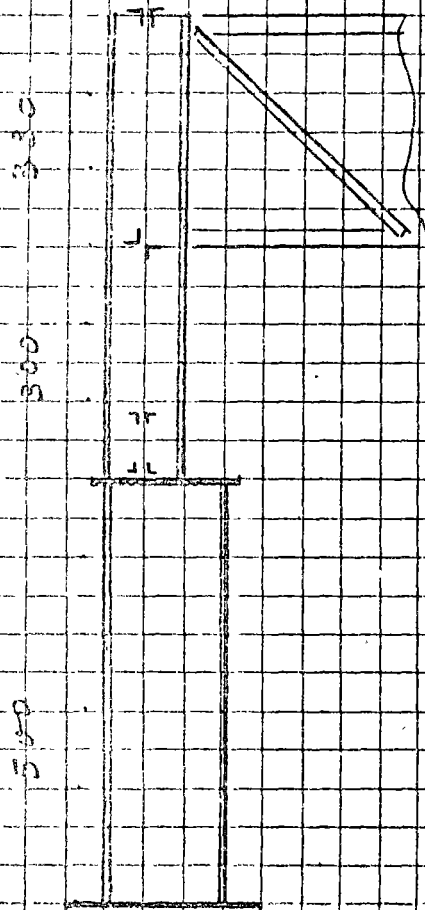
$$f_a = \frac{1620}{3.04} = 535 \text{ Kg/cm}^2 < F_a$$

Los dos ángulos de las diagonales se soldarán para unirlos. Los dos ángulos que forman las cuerdas se unirán en puntos intermedios entre nudos para evitar el gordo local de un solo ángulo de la cuerda.

## b) Marcos principales

b1) Armaduras. Su diseño es similar al de los elementos de los largueros.

## b2) Columnas.



En su extremo inferior está empotrada en la cimentación mediante anclas unidas a la placa de base.

En su extremo superior está unida a la armadura del techo cuya rigidez es mucho mayor que la de la columna y puede suponerse impide su giro, pero no el desplazamiento en el plano del marco.

En el plano perpendicular al marco la columna está anclada por portales que forman parte de las paredes laterales.

El hecho de que la columna sea de sección variable afecta al valor de la carga crítica que puede soportar la columna y por tanto su capacidad.

En la tabla que sigue se dan valores que modifican los resultados que se obtienen suponiendo la columna de sección uniforme para tener en cuenta el hecho de que la sección varía.

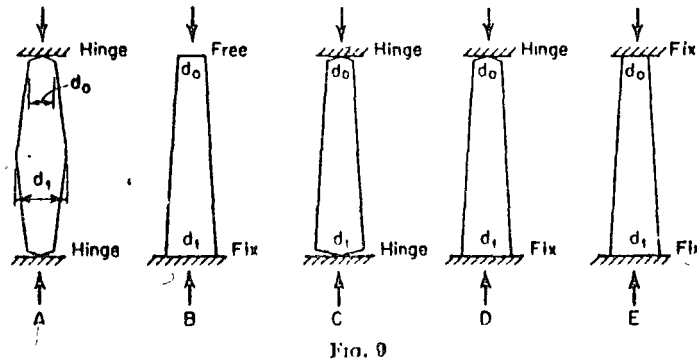


Table 8. Values of  $\mu$  and  $K$  in Eqs. (7) and (8)<sup>a</sup>

Case (Fig. 8)	$K$	$d_1/d_0$					
		1	2	3	4	5	6
A	1	1	2.6	4.9	7.7	11.1	14.9
B	2	1	2.6	4.9	7.7	11.1	14.9
C	1	1	2.1	3.4	4.9	6.6	8.3
D	0.7	1	2.0	3.3	4.7	6.2	7.9
E	0.5	1	2.0	3.3	4.6	6.0	7.6

<sup>a</sup>From Ref. 3.

So long as  $A$  is constant, Eq. (7) is also valid for inelastic buckling, provided  $E$  is replaced by the tangent modulus  $E_t$ .<sup>1</sup> However, in this case the formula must be written

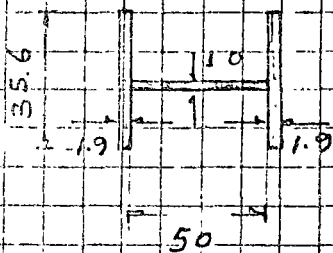
$$P = \frac{\pi^2 E_t A}{\left(\frac{Kl}{\sqrt{\mu}}\right)^2} \quad (8)$$

Usaremos en nuestro problema esta tabla para el diseño del tramo superior de la columna.

Dado que el caso que tratamos es más complejo que el que se presenta en la tabla por tenerse una gran parte de la carga concentrada donde la sección cambia, el tramo inferior se diseñará, dado que está empotrado en su base con una  $K = 2$  (E, E pg 7) lo que probablemente más le es conservador.

# Diseño de la columna

Tramo inferior



$$Area = 185 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 101195 \text{ cm}^3 ; S_x = 3748 \text{ cm}^3$$

$$I_y = 14165 \text{ cm}^3$$

$$r_x = 23 \text{ cm} ; K_x = 2.0 ;$$

$$\frac{K_x A_x}{r_x} = \frac{2 \times 500}{23} ; r_y = 9 \text{ cm} ; K_y = 1.0 ;$$

$$\frac{K_y I_y}{r_y} = \frac{1.0 \times 500}{9} = 56 ; F_a = 1252 \text{ Kg/cm}^2 \left( \frac{E}{K_x r_x^2} \right)$$

$$\frac{L d}{A_f} = \frac{500 \times 44}{35.6 \times 1.9} = 325 ; F_b = 1520 \text{ ''}$$

$$f_a = \frac{117418}{185} = 635 \text{ Kg/cm}^2 ; f_b = \frac{2953000}{3748} = 788 \text{ Kg/cm}^2$$

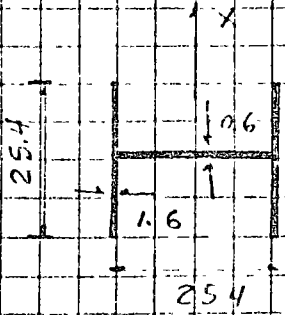
Tomando  $C_m = 0.85$  (Especificaciones AISC) y aplicando la expresión de diseño:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b C_m}{F_b (1 - P/P_E)} \leq 1 \quad (E E \text{ pg } 60)$$

$$\text{donde } P_E = \frac{\pi^2 E I}{(KL)^2} = \frac{2 \pi^2 10^6 \times 101195}{(2 \times 500)^2} = 1997509 \text{ Kg}$$

$$\frac{635}{1252} + \frac{788 \times 0.85}{1520 \left( 1 - \frac{117418}{1997509} \right)} = 0.98$$

Tubo superior:



$A = 96.5 \text{ cm}^2$   
 $I_x = 13109 \text{ cm}^4$  ;  $S_x = 916 \text{ cm}^3$   
 $I_y = 4370 \text{ cm}^4$

$r_x = 11.7 \text{ cm}$  ;  $L_x = 800$  ;  $K_x = 1$  (EE p. 7)  
 $r_y = 6.6 \text{ cm}$  ;  $L_y = 300$  ;  $K_y = 1$

Tomando  $\frac{d_x}{d_y} = 2$  ;  $u = 2$  (de la tabla)

$\frac{1}{\sqrt{u}} \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 \times 800}{11.7} = 49$  ;  $F_a = 1297 \text{ Kg/cm}^2$  (EE p. 2)

$\frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1 \times 300}{6.6} = 46$

$\frac{L d}{A t} = \frac{300 \times 25.4}{25.4 \times 1.6}$  ;  $F_b = 1520 \text{ Kg/cm}^2$

$f_a = \frac{10000}{81.3} = 123$  ;  $f_b = \frac{1103000}{916} = 1204 \text{ Kg/cm}^2$

$\frac{123}{\sqrt{297}} + \frac{1204 \times 0.85}{1520} = 0.1 + 0.67 < 1.0$

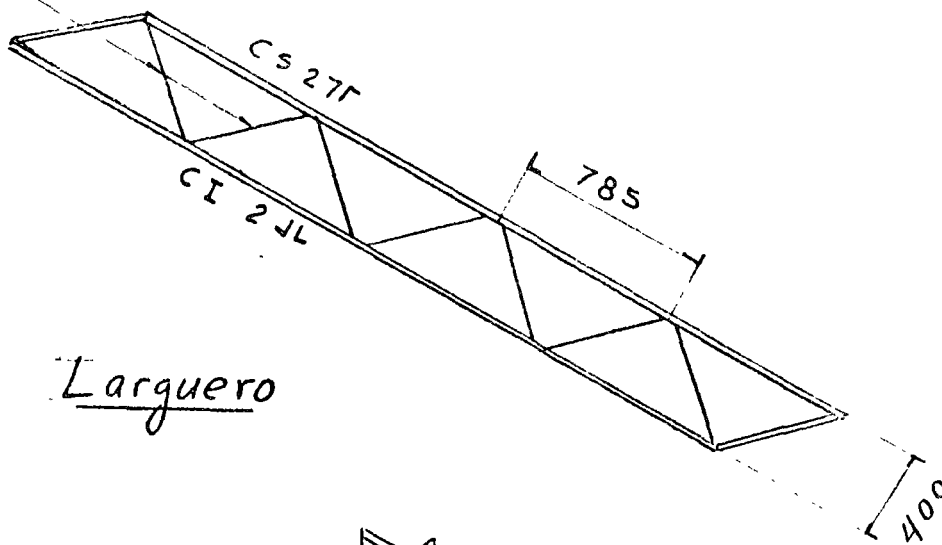


# V CONEXIONES :-

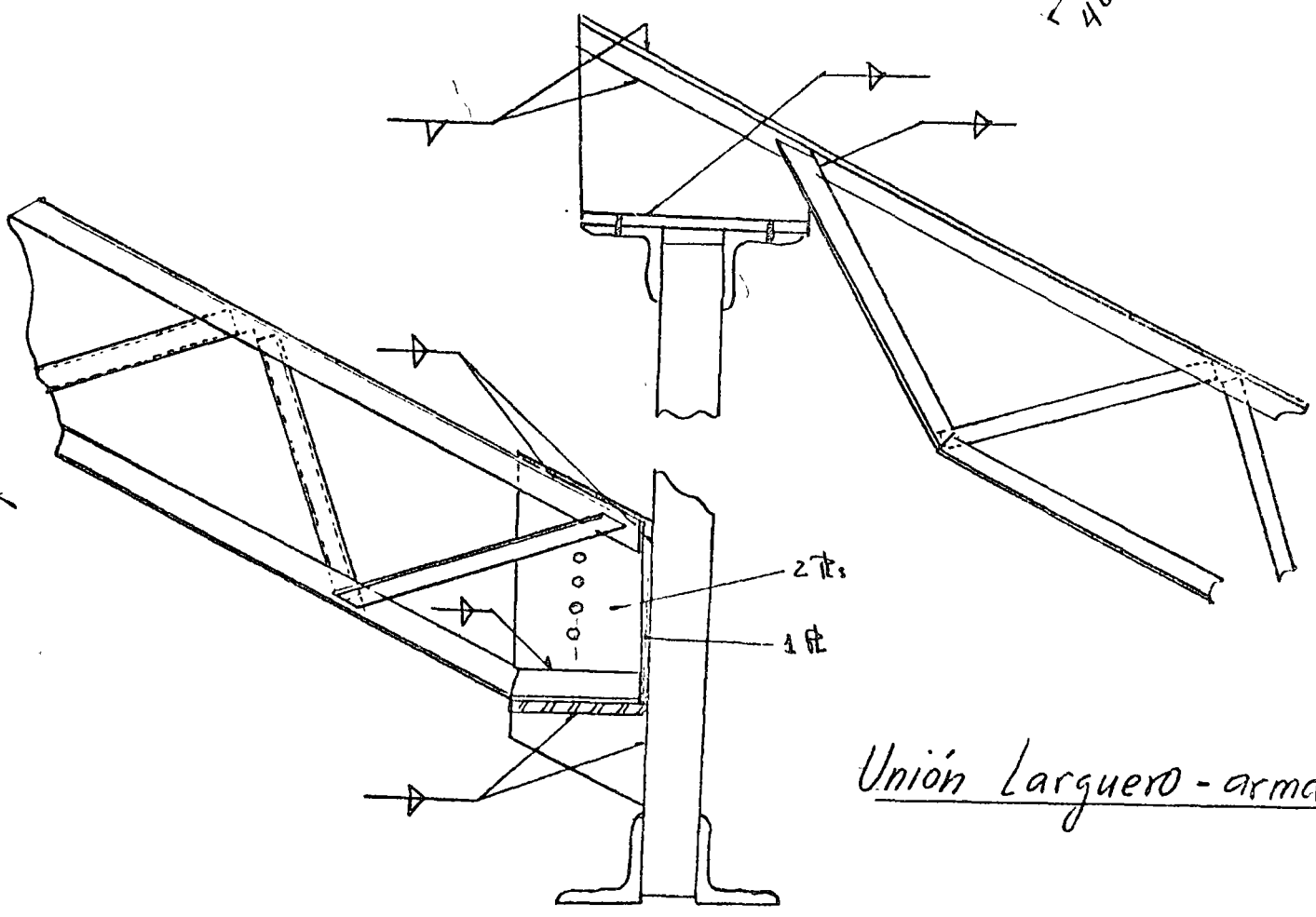
Todas las conexiones son soldadas y se usarán tornillos solo para montaje.

En las figuras que se presentan a continuación se muestran una serie de conexiones típicas.


2 □



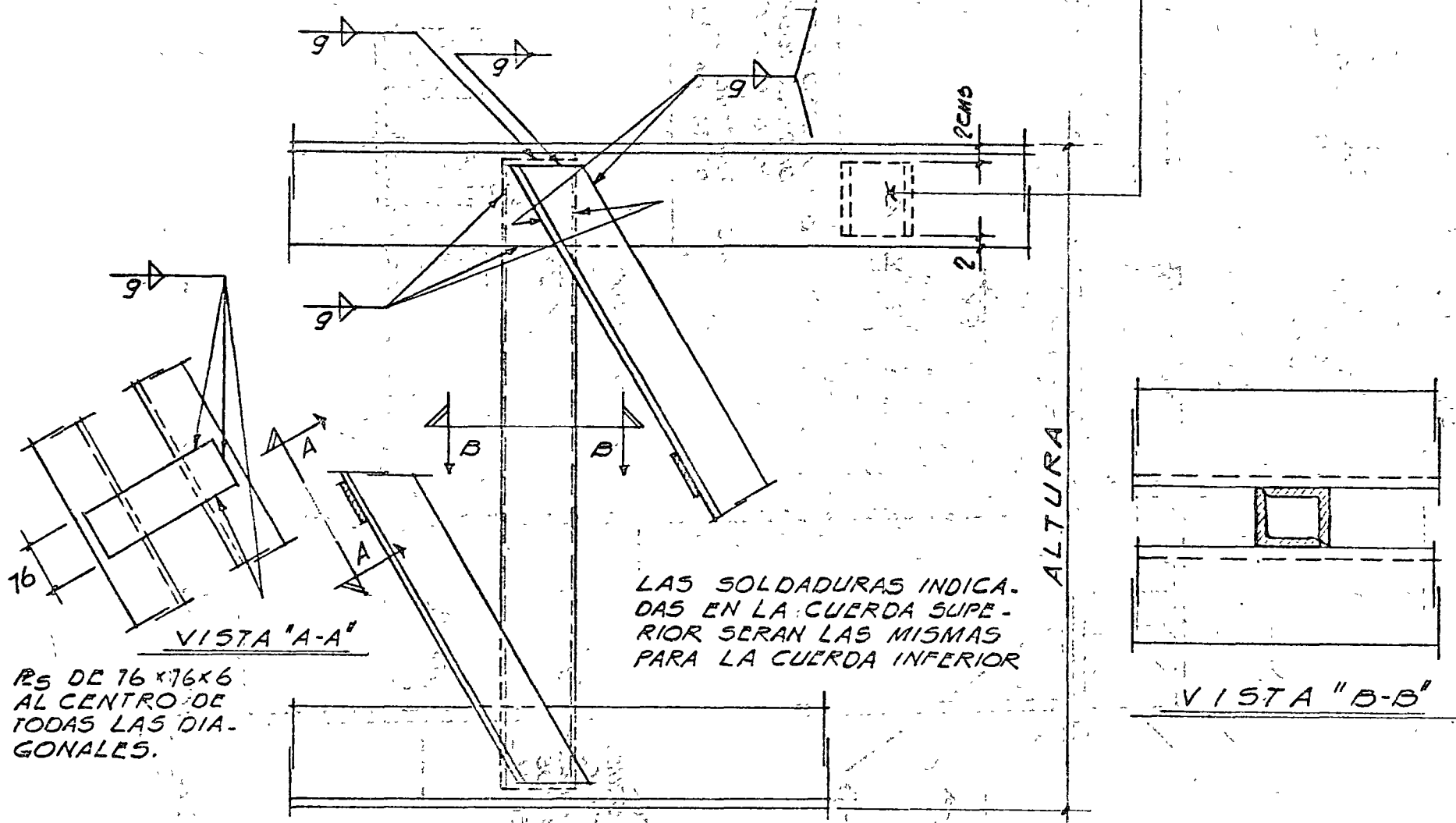
Larguero



Unión Larguero - armadura

g =  MAÑO DE SOLDADURA  
 IGUAL AL GRUESO DEL  
 ANGULO UTILIZADO EN  
 LA DIAGONAL

CAJÓN FORMADO POR  
 DOS ANGULOS  
 (AL CENTRO DE LOS TABLEROS  
 DE AMBAS CUERDAS)



PS DE 76 x 76 x 6  
 AL CENTRO DE  
 TODAS LAS DIA-  
 GONALES.

LAS SOLDADURAS INDICA-  
 DAS EN LA CUERDA SUPE-  
 RIOR SERAN LAS MISMAS  
 PARA LA CUERDA INFERIOR

CONEXION TIPO DE MONTANTES Y  
DIAGONALES A CUERDA SUPERIOR E  
INFERIOR

CAJON FORMADO POR DOS ANGULOS

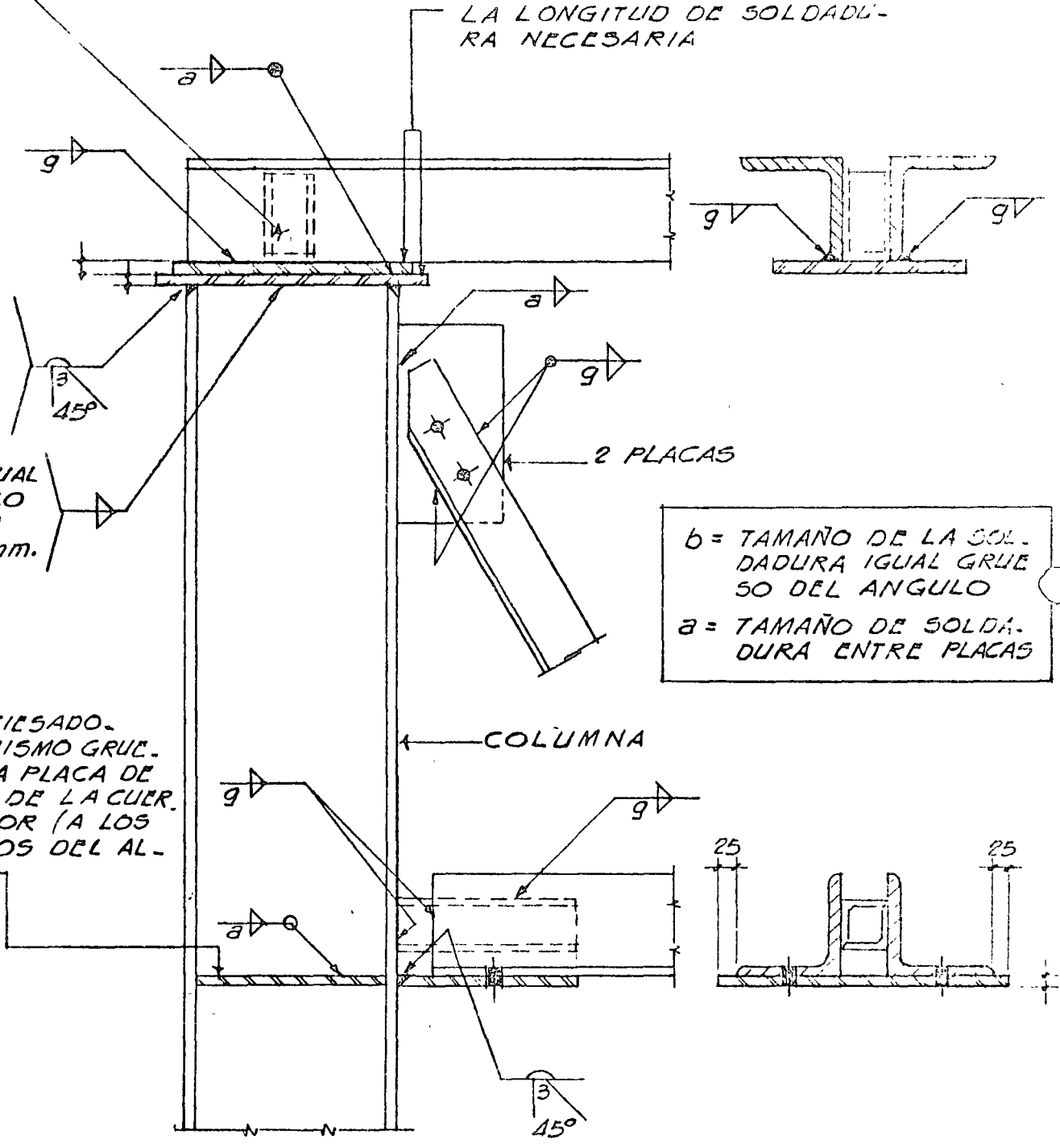
SI ES NECESARIO ESTAS DOS PLACAS SE PROLONGARAN HACIA ADENTRO PARA DAR LA LONGITUD DE SOLDADURA NECESARIA

EN LOS DOS PANTINES

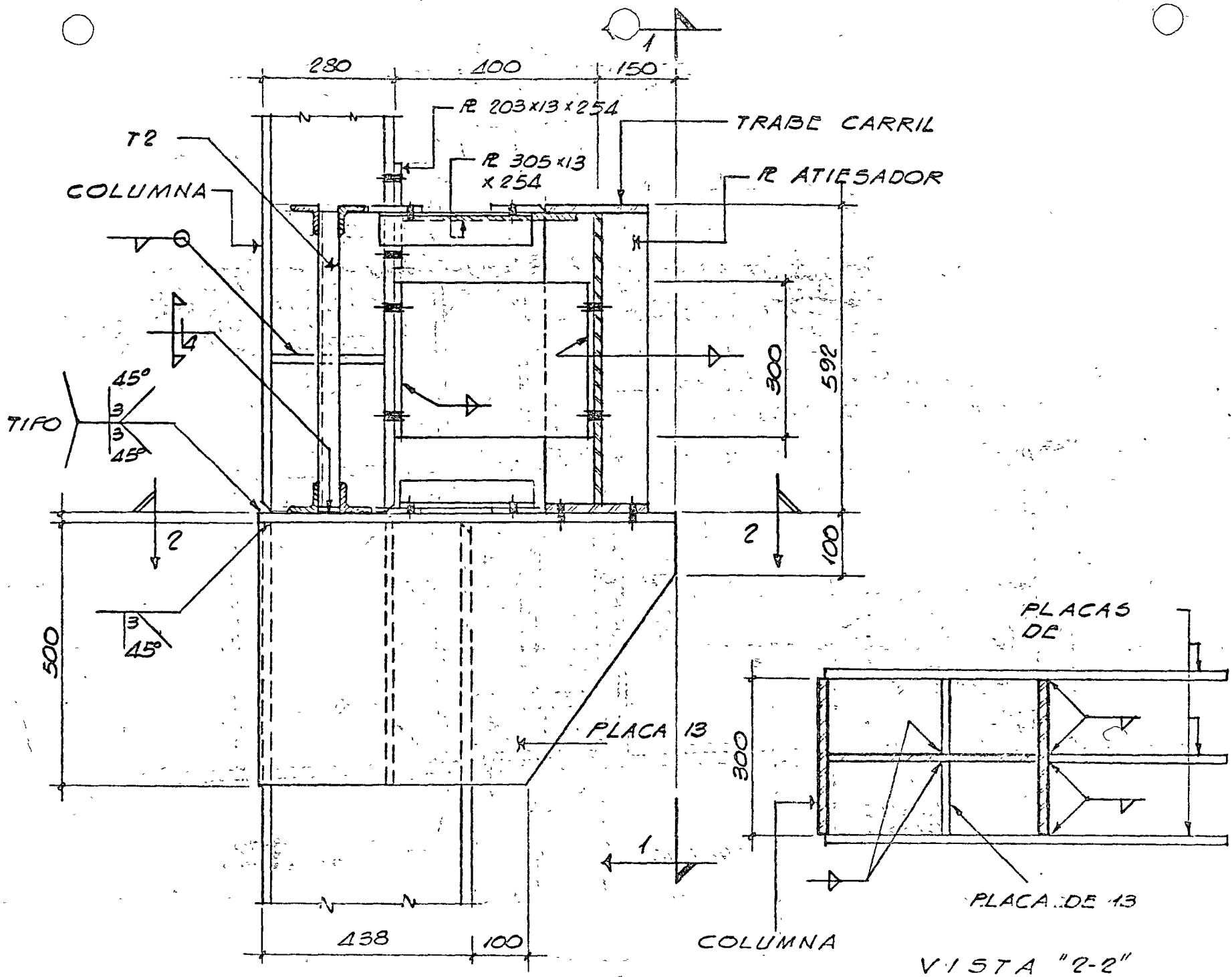
TAMAÑO IGUAL AL GRUZO DEL ALMA MENOS 3mm.

PLACAS ATIESADORAS DEL MISMO GRUESO QUE LA PLACA DE CONEXION DE LA CUBIERTA INFERIOR (A LOS DOS LADOS DEL ALMA.)

b = TAMAÑO DE LA SOLDADURA IGUAL GRUESO DEL ANGULO  
 a = TAMAÑO DE SOLDADURA ENTRE PLACAS



CONEXION DE ARMADURAS A COLUMNAS EXTREMAS.



CONEXIONES TIPO EN COLUMNAS

ATIESADORES ALTERNADOS  
@ APROX.

PLACA DE  
305x

COLUMNA

TRABE  
CARRIL

PLACA DE 300 x 13 x 254  
x 19 x 332

R DE 16

R DE 16

R DE 16

AGUJEROS OVALADOS  
(80x ) SOLO EN UN  
EXTREMO DE LAS TRA-  
BES CARRIL

COLUMNA

VISTA " 1-1"

F 10



## Notas referentes al diseño de juntas.-

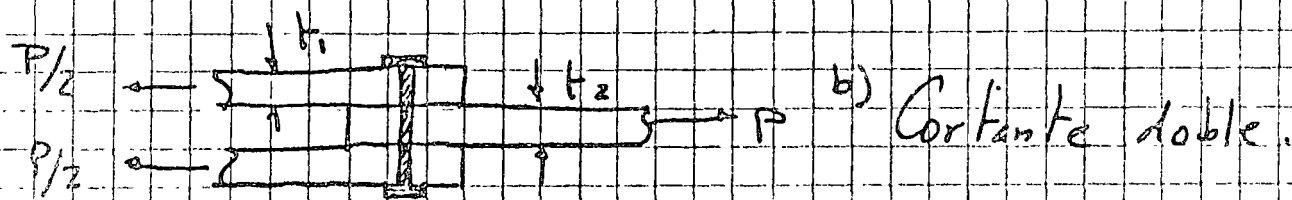
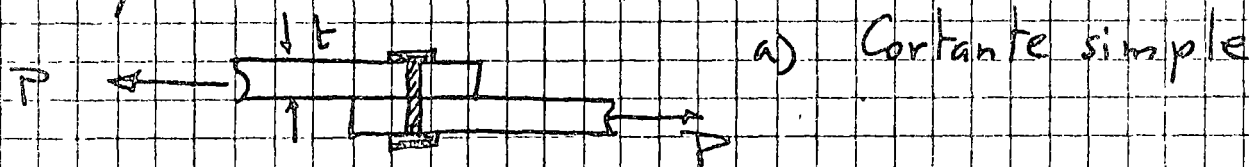
Sin duda el comportamiento de las conexiones es más complejo que el de las piezas que se han de unir. El diseño teórico de juntas es siempre difícil y a menudo imposible. Es por ello que para el diseño práctico es necesario hacer una serie de hipótesis simplificadoras que proporcionan bases sencillas para el proyecto de conexiones, tales hipótesis están avaladas por la experiencia.

### Tornillos y remaches

Tensión Las recomendaciones aparecen en el folleto referente a tensión axial.

### Cortante

Se presentan dos casos:



Se deberá revisar que:

a)  $\frac{T}{A} \leq \sigma_p$

b)  $\frac{T}{A} \leq \sigma_p$

$\sigma_p = \text{esfuerzo permisible.}$

# Aplastamiento

Area de aplastamiento:

$$A_p = D t \quad \text{en cortante simple}$$

$$A_p = \begin{cases} 2 D t_1 \\ D t_2 \end{cases} \quad \text{en cortante doble}$$

D - diametro del tornillo

$$\frac{P}{A_p} \leq f_p = \text{esfuerzo permisible a aplastamiento.}$$

## Cortante y tension

Se aplica una fórmula de interacción que involucra ambos esfuerzos.

Esfuerzos permisibles: (Considerar el area nominal del remache o tornillo.)

	Remaches		Tornillos comunes		Tornillos de alta resistencia		
	A502-1	A502-2	A307 ; partes roscadas	A-36	A325F A325N	A490F	A490N

Cortante	1050	1400	700	756	1050	1400	1575
Aplastamiento	1.35 F <sub>y</sub>						

F<sub>y</sub> = esfuerzo en el límite de fluencia del material que se conecta

A325 F } tornillos en juntas de fricción  
A490 F }

A325 N } tornillos en juntas de cortante, rosca no excluida  
A490 N } del plano de corte.



Cuando la rosca se excluye del plano de corte, en juntas de cortante únicamente, se pueden incrementar los esfuerzos permisibles

## Tensión y Cortante:

$$A502-1 \quad F_t = 1960 - 1.6 f_v \leq 1400 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A502-2 \quad F_t = 2660 - 1.6 f_v \leq 1890 \text{ ''}$$

$$A307 \quad F_t = 1960 - 1.6 f_v \leq 1400 \text{ ''}$$

(en el arco meta)

$$A375N \quad F_t = 3500 - 1.6 f_v \leq 2800 \text{ ''}$$

$$A490N \quad F_t = 4900 - 1.6 f_v \leq 3780 \text{ ''}$$

$f_v$  = esfuerzo cortante existente en el tornillo

$$A325F \quad F_t \leq 1050 (1 - f_t A_b / T_b)$$

$$A490F \quad F_t \leq 1400 (1 - f_t A_b / T_b)$$

$f_t$  = esfuerzo existente a tensión

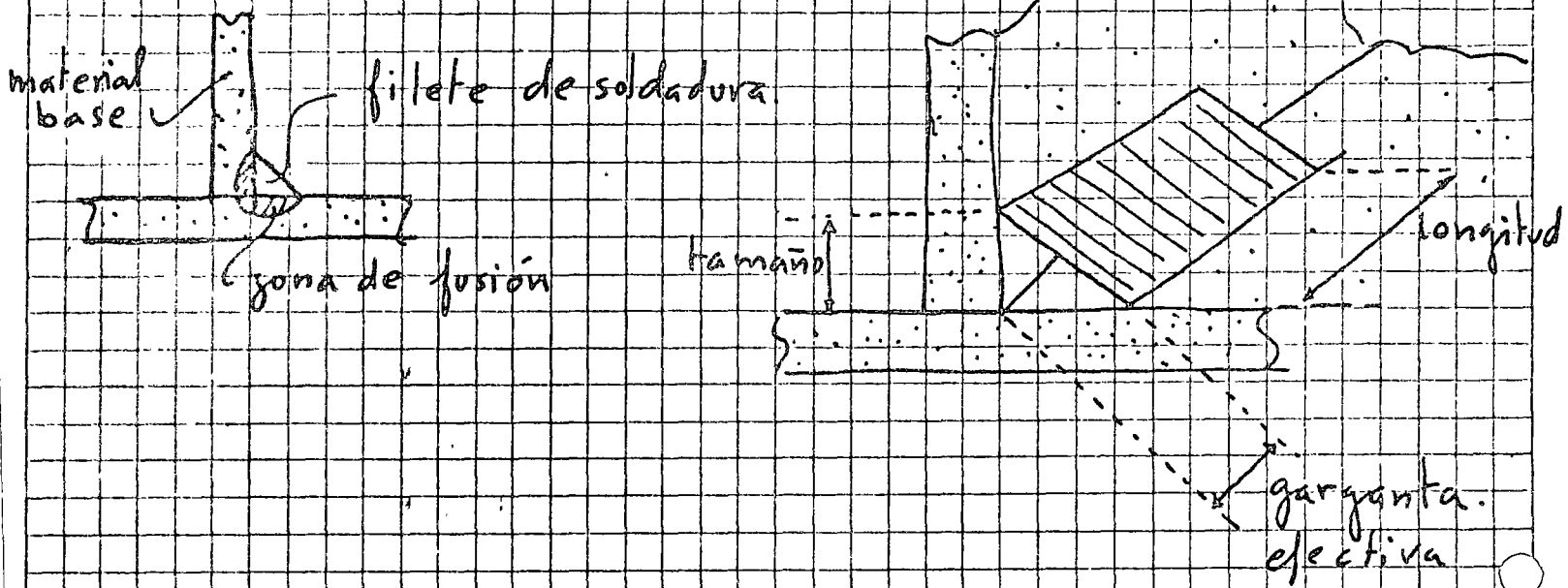
$A_b$  = área nominal del tornillo

$T_b$  = pretensión especificada de el tornillo

# Soldadura

Hay dos tipos básicamente.

## a) Soldadura de filete



## b) Soldadura a tope



Es necesario preparar las placas recortando las para colocar la soldadura excepto en placas muy delgadas.

Garganta efectiva de una soldadura es la sección que se considera capaz de resistir los esfuerzos debidos a las cargas.

En una soldadura de filete es la mostrada en la fig.

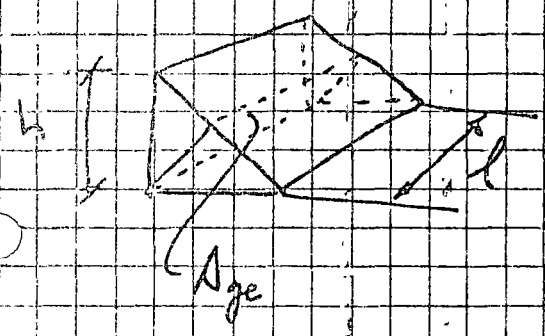
En una soldadura a tope de penetración completa es el espesor del material base. Si la penetración

no es completa la garganta efectiva será menor.

La capacidad de una soldadura se obtiene multiplicando el área de la garganta efectiva por el esfuerzo permisible.

En una soldadura a tope, si la penetración es completa la capacidad será la del material base o la del electrodo, la que resulte menor.

En soldaduras de filete se tiene:



$$A_{ge} = h \cos 45^\circ = 0.707 h$$

Se debe cumplir

$$\frac{F}{A_{ge}} \leq f_p$$

$$\frac{F}{0.707 h} \leq f_p$$

F es la carga que actúa, en cualquier dirección respecto a la soldadura.

El esfuerzo permisible depende del electrodo que se use.

Electrodo	$f_p$		
E 60	1260	Kg/cm <sup>2</sup>	
70	1470		
80	1680		"
90	1890		"
100	2100		"
110	2310		"

# WELDED JOINTS Standard symbols

BASIC WELD SYMBOLS									
BACK	FILLET	PLUG OR SLOT	GROOVE OR BUTT						
			SQUARE	V	BEVEL	U	J	FLARE V	FLARE BEVEL

SUPPLEMENTARY WELD SYMBOLS					
	WELD ALL AROUND	FIELD WELD	CONTOUR		For other basic and supplementary weld symbols, see AWS A2.0 68
			FLUSH	CONVEX	

### STANDARD LOCATION OF ELEMENTS OF A WELDING SYMBOL

Finish symbol

Contour symbol

Root opening, depth of filling for plug and slot welds

Size in inches

Reference line

Specification, process or other reference

Tail (may be omitted when reference is not used)

Basic weld symbol or detail reference

F

A

R

S

T

(Both sides)

(Arrow side)

(Other side)

L @ P

Groove angle or included angle of countersink for plug welds

Length of weld in inches

Pitch (c. to c. spacing) of welds in inches

Weld all-around symbol

Field weld symbol

Arrow connecting reference line to arrow side of joint (also points to grooved member in bevel and J grooved joints when there is a break, thus ).

**Note:**

Size, weld symbol, length of weld and spacing must read in that order from left to right along the reference line. Neither orientation of reference line nor location of the arrow alter this rule.

The perpendicular leg of  $\Delta$ ,  $V$ ,  $V$ ,  $V$  weld symbols must be at left.

Arrow and Other Side welds are of the same size unless otherwise shown.

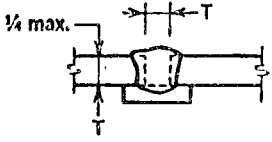
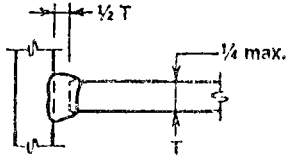
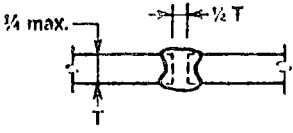
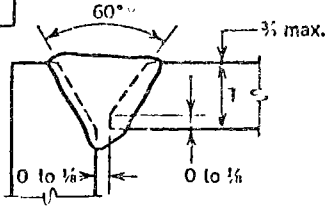
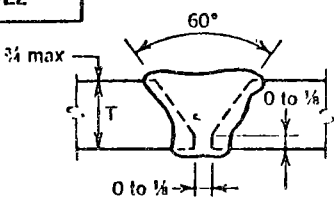
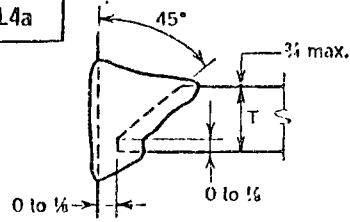
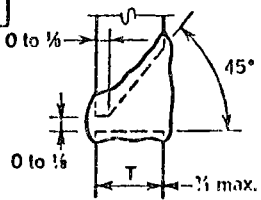
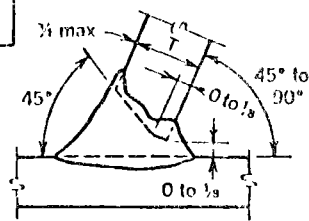
Symbols apply between abrupt changes in direction of welding unless governed by the "all around" symbol or otherwise dimensioned.

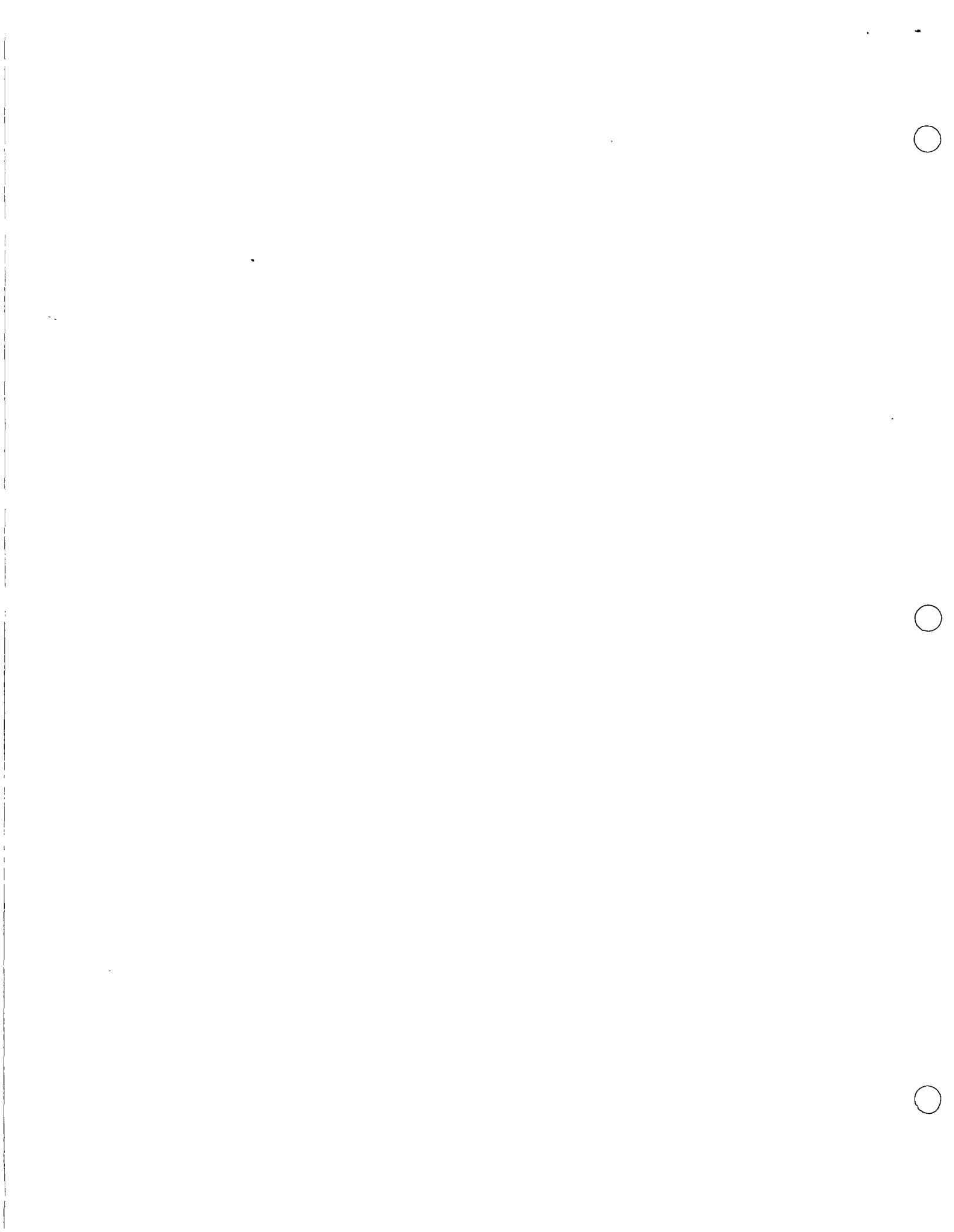
These symbols do not explicitly provide for the case that frequently occurs in structural work, where duplicate material (such as stiffeners) occurs on the far side of a web or ruset plate. The fabricating industry has adopted this convention; that when the billing of the detail material discloses the identity of far side with near side, the welding shown for the near side shall also be duplicated on the far side.

# WELDED JOINTS

## Complete penetration

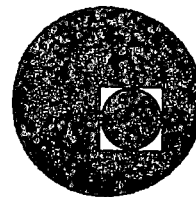
Manual Shielded Metal-Arc Welded Joints of LIMITED Thickness  
(as permitted by AISC Specification Sect. 1.17.2)

<p><b>B-L1a</b></p>  <p style="text-align: center;"><b>SQUARE GROOVE</b></p>	<p><b>TC-L1</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SQUARE GROOVE</b></p>
<p><b>B-L1b</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SQUARE GROOVE</b></p>	<p><b>C-L2</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SINGLE-VEE GROOVE</b></p>
<p><b>B-L2</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SINGLE-VEE GROOVE</b></p>	<p><b>TC-L4a</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SINGLE-BEVEL GROOVE</b></p>
<p><b>B-L4</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SINGLE-BEVEL GROOVE</b></p>	<p><b>TC-L4b</b></p>  <p style="text-align: center;"><sup>a</sup> <b>SINGLE-BEVEL GROOVE</b></p>
<p><sup>a</sup> Gauge root before welding second side</p> <p><sup>b</sup> If used, size of fillet welds reinforcing groove welds in tee and corner joints shall equal T/4 with a 3/8" maximum.</p>	

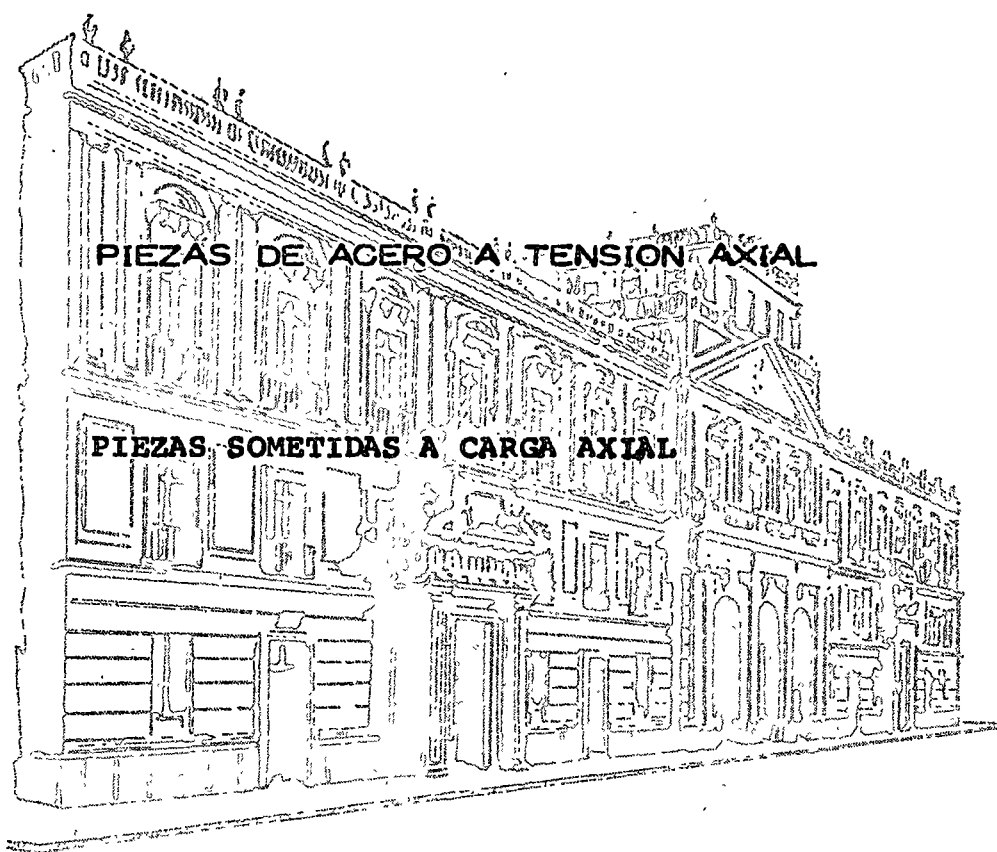




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ

Palacio de AGOSTO DE 1976.  
Tacuba 5, primer piso. México-1, D. F.  
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123





Antes de estudiar métodos para el diseño de elementos estructurales de cualquier material es necesario conocer el comportamiento mecánico de ese material, para ello se recurre a menudo a gráficas esfuerzo-deformación que permiten conocer algunas de las más importantes características de ese comportamiento.

En el caso del acero estructural es muy conocida la gráfica  $\sigma$ - $\epsilon$  correspondiente a una probeta libre de esfuerzos residuales sometida a tensión (Ver figura N°. 1).

Menos conocida que la gráfica anterior pero quizá más importante por ser más real, es la gráfica que se obtiene cuando la probeta que se utiliza es un tramo de un perfil estructural real, por ejemplo una vigueta o una sección formada por varias placas soldadas (Ver. figura N°. 2).

Puede notarse que en el segundo caso, a diferencia del primero, el material no se conserva elástico hasta llegar al esfuerzo  $\sigma_y$  sino que para un valor del esfuerzo de aproximadamente  $\frac{\sigma_y}{2}$  la gráfica deja de ser recta y se convierte en una curva que se prolonga hasta  $\sigma_y$  valor a partir del cual la gráfica es una línea recta horizontal.

La diferencia entre las dos gráficas puede explicarse por el hecho de que en el segundo caso la probeta está sometida, antes de que cargas exteriores actúen sobre ella, a un estado de esfuerzos en equilibrio.

Dichos esfuerzos reciben el nombre de esfuerzos residuales y se pueden deber a varias causas, la más importante se encuentra en el proceso de fabricación del perfil.

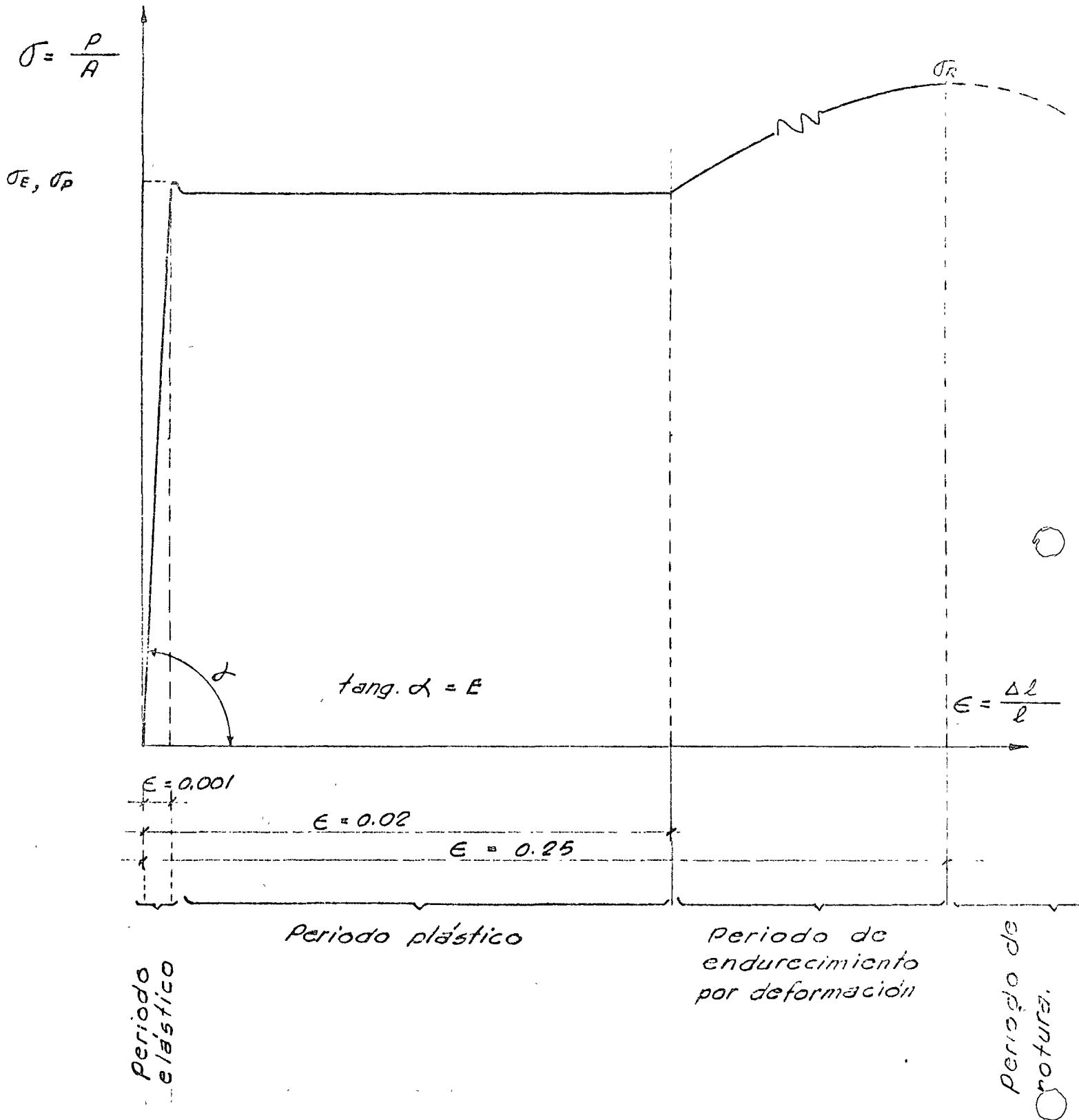
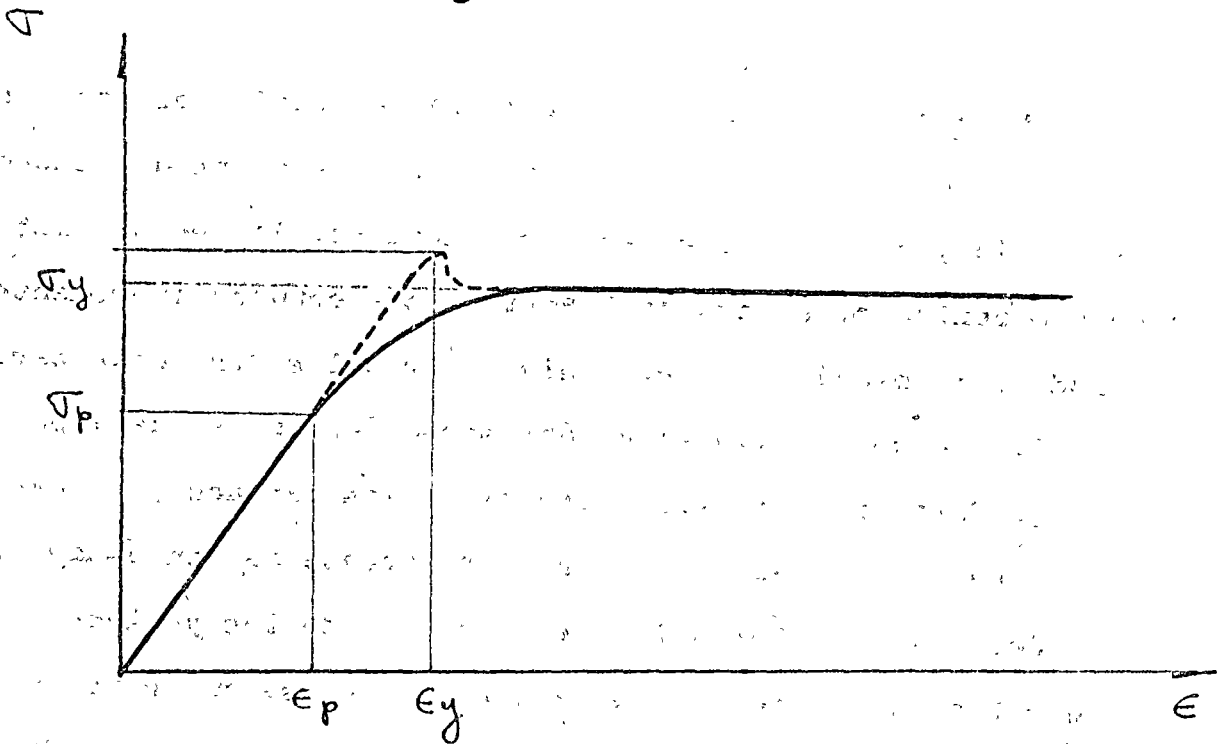
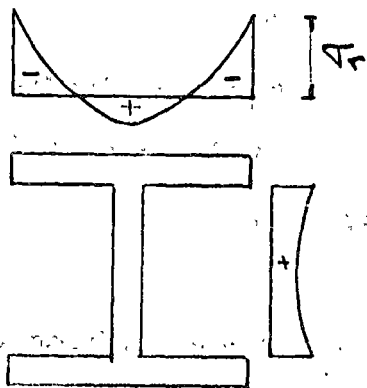


FIGURA 1



GRAFICA TÍPICA ESFUERZO-DEFORMACIÓN  
PARA UN PERFIL DE ACERO ESTRUCTURAL



ESFUERZOS RESIDUALES TÍPICOS EN  
UN PERFIL LAMINADO

FIGURA 2

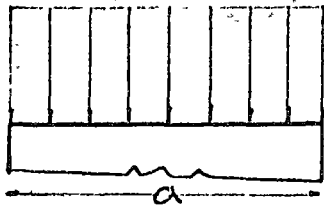
Es bien sabido que para fabricar un perfil el acero que lo ha de formar se funde, se le da la forma requerida y luego se deja enfriar; al producirse este enfriamiento las partículas de acero se contraen, si esa contracción se efectuara libremente no se produciría ningún esfuerzo, sin embargo las distintas partes del perfil no se enfrían simultáneamente, en una vigueta por ejemplo, se enfrían primero los extremos de los patines y al hacerlos se contraen arrastrando al material adyacente aún en estado plástico, después se enfrían la parte central de los patines y el alma que tratan también de contraerse, pero esa contracción se ve parcialmente evitada por las partes ya endurecidas, esto da lugar a que las fibras de estas zonas queden con una longitud algo mayor que la que hubieran tenido de haberse enfriado libremente y por ello quedan sometidas a un esfuerzo inicial de tensión.

Una distribución de esfuerzos residuales típica para una vigueta se muestra en la figura N°. 2.

Es fácil mostrar por qué el efecto de estos esfuerzos residuales consiste en reducir el valor del esfuerzo en el límite de proporcionalidad del material.

En las figuras números 3 y 4 se hace esto para un caso simplificado.

# FIGURA 3

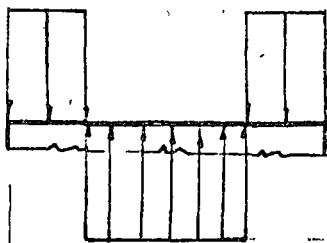
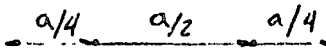


$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Esfuerzos debidos a las cargas.

+

+



$$\frac{\sigma_y}{2}$$

$$\frac{\sigma_y}{2}$$

Distribucion de esfuerzos residuales.

El perfil se comporta elásticamente hasta que:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_y}{2}$$

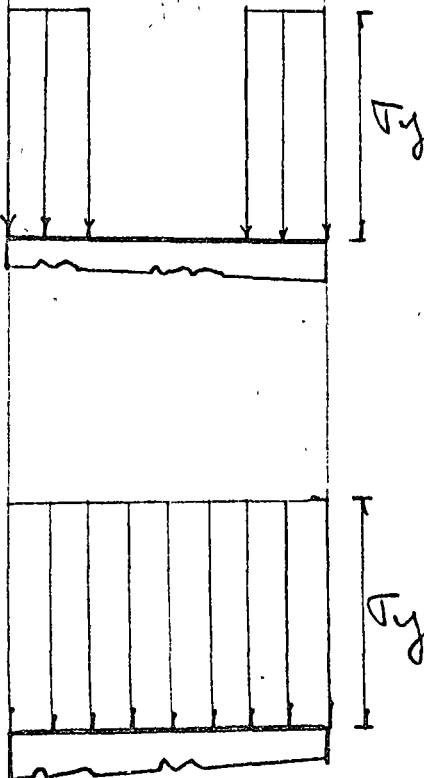
Entonces:

$$\epsilon = \frac{P}{AE} = \frac{\frac{A}{2} \sigma_y}{AE}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_y}{2E} = \frac{\epsilon_y}{2}$$

Si se aumenta la carga se llega finalmente a  $\sigma_y$  en toda la sección:

$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta P}{\frac{A}{2} E} = \frac{\frac{A}{2} \sigma_y}{\frac{A}{2} E} = \frac{\sigma_y}{E} = \epsilon_y$$



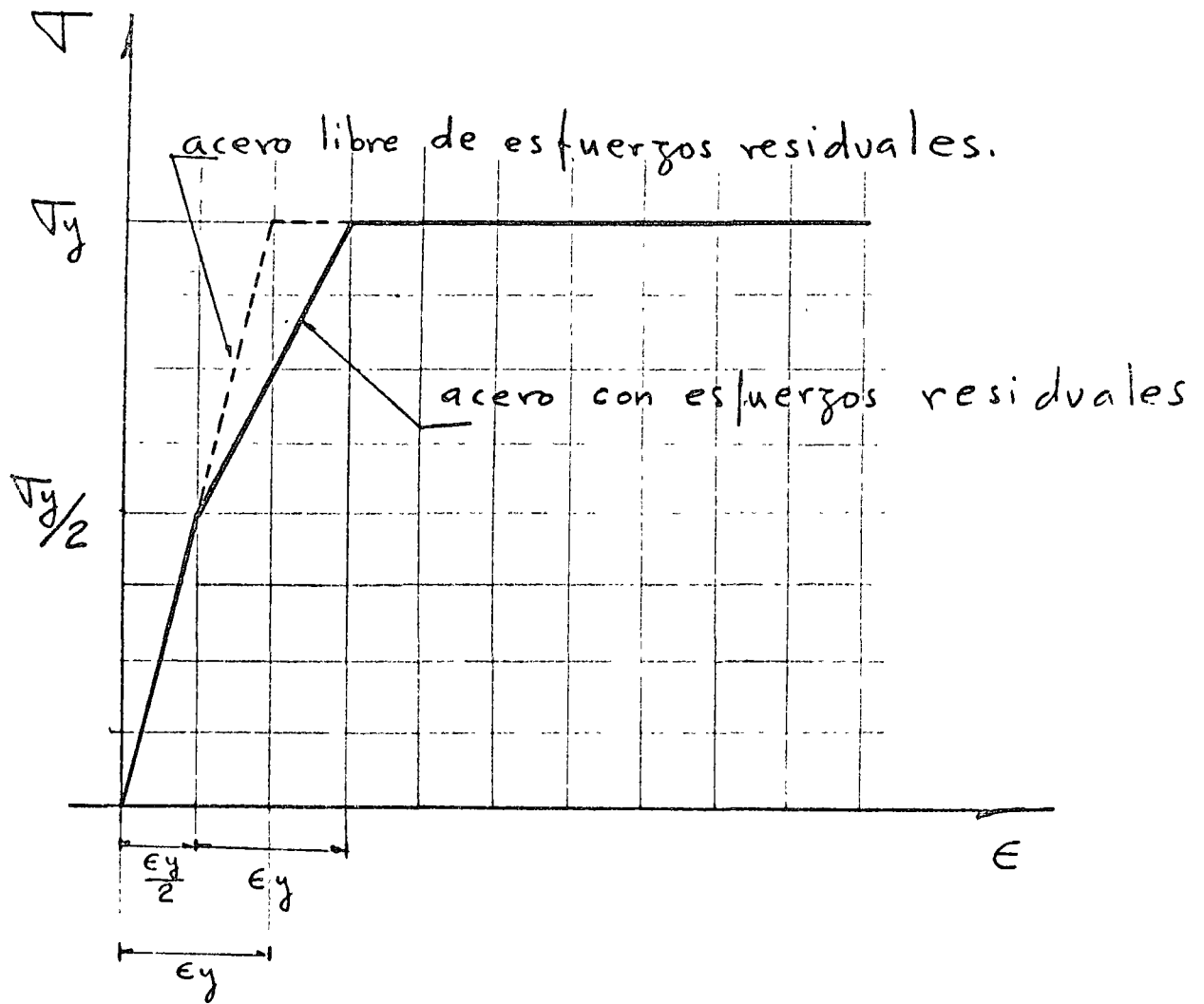


FIGURA 4

Piezas de eje recto cargadas axialmente.

Tesis

Los esfuerzos de tensión o compresión sobre la sección recta de la pieza son uniformes.

a) De las condiciones de equilibrio se deduce que para que los esfuerzos sean uniformes se requiere que la línea de acción de la carga coincida con el eje centroidal de la pieza. (Ver fig. 5)

b) Hipótesis necesarias para que los esfuerzos sean uniformes

1.- Las secciones planas antes de la deformación se conservan planas después de ella.

2.- Al deformarse las secciones se conservan paralelas a sí mismas.

Solo así :  $\epsilon = cte \therefore \tau = cte.$

# Condicion de equilibrio.-

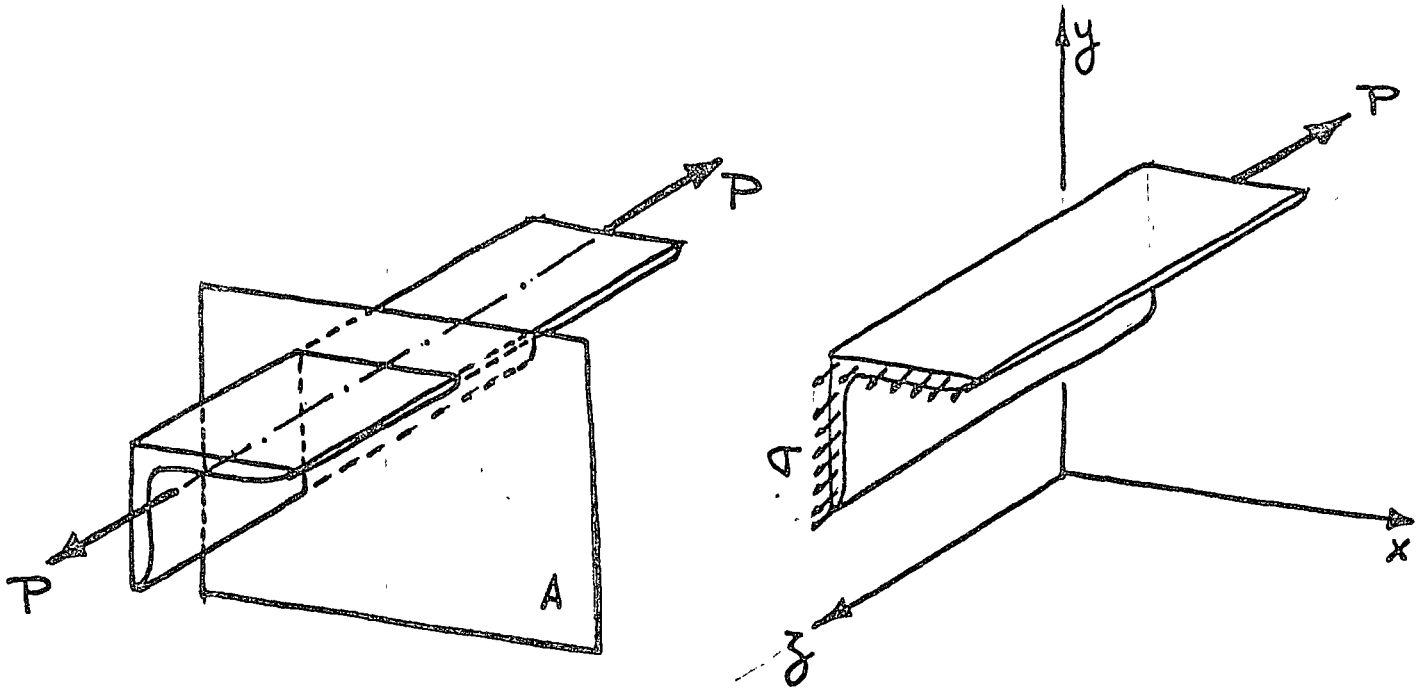


Fig. 5

$$\sum M_x = 0$$

$$P \bar{y} = \sum \nabla_y \Delta A ; \quad P = \nabla A$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y \Delta A}{A} = \text{ordenada del centro de gravedad del area}$$

$$\sum M_y = 0$$

$\bar{x}$  = abscisa del centro de gravedad del area.



TENSION AXIAL.

El problema de diseño de piezas de acero a tensión se reduce a seleccionar una sección con área suficiente para soportar la carga de diseño sin exceder el esfuerzo permisible a tensión.

El esfuerzo permisible se obtiene dividiendo el esfuerzo en el límite de fluencia entre un coeficiente de seguridad que frecuentemente se fija de 1.65 para estructuras para edificios pero que varía de acuerdo con las condiciones del problema.

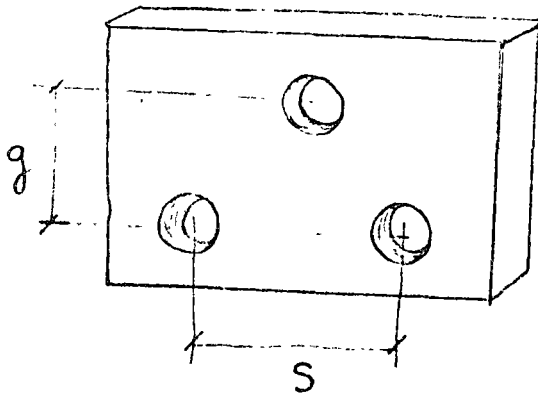
Los miembros metálicos a tensión más comunes son varillas, cables o perfiles laminados, de estos el elemento más usado es el ángulo.

Cuando la unión del elemento a tensión con otras piezas es soldada, se puede considerar el área completa de la pieza para el cálculo de esfuerzos; cuando la conexión es remachada o atornillada el área necesaria debe ser mayor que la obtenida con la fórmula:  $\sigma = \frac{P}{A}$ , el área adicional es necesaria para compensar la presencia de los agujeros para los remaches o tornillos.

Cuando los agujeros están en una serie de líneas normales a la fuerza exterior es fácil determinar la sección que fallará y por tanto el área de huecos que deberá descontarse.

Sin embargo, para distribuciones de agujeros distintas no es tan simple determinar el área de falla que servirá de base para los cálculos de capacidad de carga y de determinación de esfuerzos.

El caso típico es el siguiente:



En este caso la reducción en área que se debe hacer puede ser mayor a la que corresponde a un solo hueco pero menor que la que correspondería a dos. Muchos investigadores han presentado ecuaciones para calcular el ancho neto, la más usada es la siguiente:

$$B_n = B - \sum \phi + \sum_{n=1}^2 \frac{S_n^2}{4g_n^2}$$

$$A_n = B_n \cdot t$$

La línea crítica es la que de menor ancho neto.

Cuando se trate de ángulos, estos se desdoblarán idealmente para trabajarlos como con placas. (Ver. Figura N°. 6).

La presencia de agujeros en una pieza a tensión es causa de la aparición en los puntos vecinos a ellos, de concentraciones de esfuerzos, es decir, de esfuerzos notablemente mayores al esfuerzo promedio =  $\frac{P}{A}$ .

La determinación analítica de la distribución elástica de tales esfuerzos es un problema complicado de la teoría de la elasticidad, por ello para determinarlos se han utilizado métodos experimentales que han permitido comprobar los resultados teóricos en los casos en que se cuenta con ellos, y obtenerlos en las ocasiones en que teóricamente no se han logrado obtener.

En general:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{prom}} \times K$$

K = factor de concentración de esfuerzos.

Este factor para un hueco circular en una placa infinitamente larga es 3, si la placa es más estrecha el factor disminuye.

A pesar de lo anterior y en el caso del acero, el procedimiento de diseño común desprecia estas concentraciones de esfuerzos; la justificación de esto es que este material tiene un rango de comportamiento plástico muy amplio y por ello admite grandes deformaciones cuando se alcanza el esfuerzo en el límite de fluencia; por esto, cuando se llega al esfuerzo  $\sigma_y$  en los puntos más esforzados aumenta la deformación de toda la pieza, manteniéndose el esfuerzo  $\sigma_y$  en estos puntos y aumentando en todos los demás; cuando la falla sobreviene toda la sección está esforzada a  $\sigma_y$ .

De lo anterior puede concluirse que la resistencia máxima a tensión o resistencia última a tensión de una pieza de acero es simplemente el producto del área neta por el esfuerzo en el límite de fluencia del material.

Lo anterior es, sin embargo, solamente cierto para el caso en que la carga no fluctúa un gran número de veces entre límites muy diferentes como suele ocurrir en estructuras para puentes, en grúas o en torres, en estos casos la falla puede producirse por fatiga y la presencia de agujeros u otras causas de concen

tracción de esfuerzos reduce notablemente la capacidad de la pieza. Lo mismo puede decirse en casos en que la estructura trabaja a temperaturas muy bajas o el acero tiene una composición química desfavorable, ya que entonces el acero puede perder en parte su ductilidad y presentar la falla conocida como frágil. Bajo estas circunstancias las concentraciones de esfuerzos son también causa de pérdida de resistencia del miembro.

Puede concluirse por lo tanto que en cualquier caso una buena práctica de diseño es limitar en lo posible las concentraciones de esfuerzos.

Las especificaciones A.I.S.C. recomiendan como esfuerzo permisible en el área neta de piezas a tensión.:

$$F_t = 0.6 \sigma_y.$$

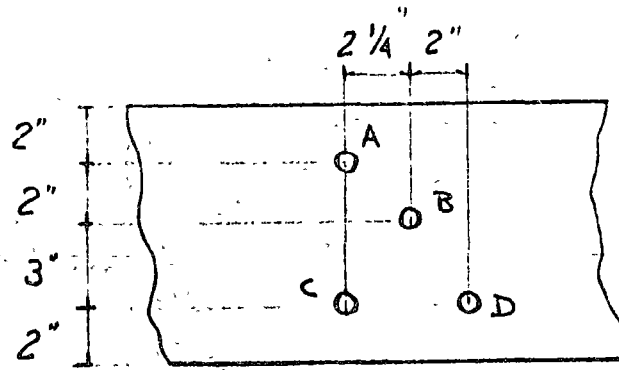
Debido al advenimiento de aceros de gran resistencia a la tensión en que estas, en ocasiones, muy semejante a  $F_y$ , se indica en las últimas especificaciones como precaución adicional, no tomar un esfuerzo permisible mayor que la mitad del correspondiente a la resistencia a la tensión.

Del resultado de un gran número de investigaciones se ha concluido que el esfuerzo en secciones netas de agujeros para pasadores no debe ser mayor de  $0.45 F_y$ .

Se especifica también, de estudios de eficiencia de secciones netas, que esta no se tome nunca mayor de 85% del área de la sección total.

# FIGURA 6

(tomado de  
Beedle pg 170)  
Ronald Press 1964



$$B_n = B - \sum \phi + \sum_{n=1}^n \frac{S_n^2}{4gn}$$

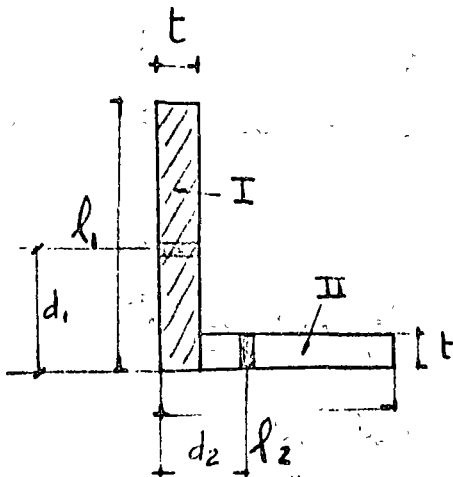
$$A_n = B_n \cdot t$$

$$A-C; \quad B_n = 9 - 2(1) + 0 = 7''$$

$$A-B-C; \quad B_n = 9 - 3(1) + \frac{2.25^2}{4(2)} + \frac{2.25^2}{4(3)} = 7.06''$$

$$A-B-D; \quad B_n = 9 - 3(1) + \frac{2.25^2}{4(2)} + \frac{2^2}{4(3)} = 6.97''$$

La sección crítica es ABD



$$\text{Area de I} = l_1 \cdot t$$

$$\text{Area de II} = (l_2 - t) \cdot t$$

$$B = (l_1 + l_2 - t)$$

$$B = \frac{A}{t}$$

EJEMPLO 3.1. DETERMINACION DE LA CAPACIDAD A TENSION DE UNA PLACA.

CALCULO: F.G.V.

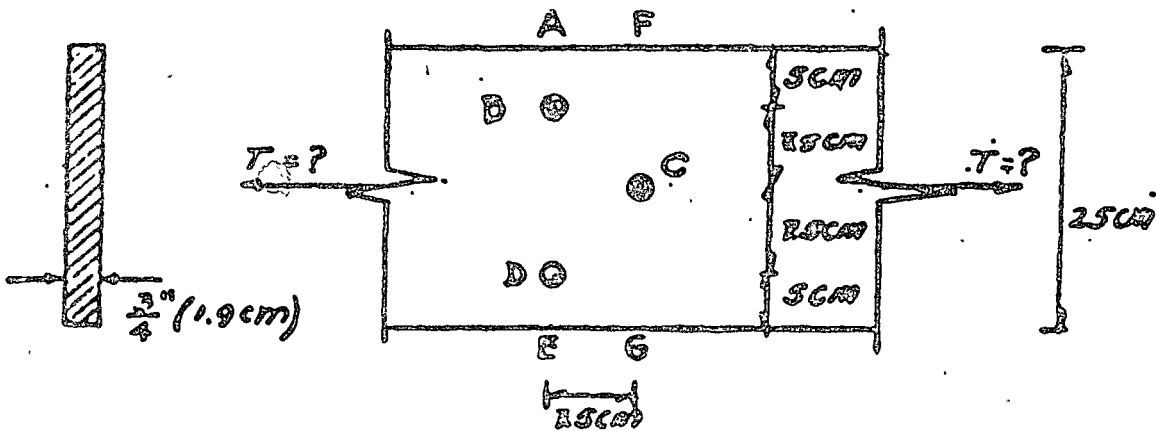
REVISO: J.S.L.V.

FECHA: SEPT. 70

1

1

DATOS



Acero A-36 ( $f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$ )

$\phi$  remache = 2.2 cm

$\phi$  agujero = 2.2 + 0.3 = 2.5 cm

Cálculo de anchos netos

Sección	w(cm)	$\Sigma \phi_{ag.}$ (cm)	$\Sigma \frac{s^2}{4g}$ (cm)	Ancho neto (cm)
FCG	25	2.5	-	22.5
ABDE	25	2.5 + 2.5 = 5	-	20.0
ABCDE	25	2.5 + 2.5 + 2.5 = 7.5	$\frac{15^2}{4 \cdot 15} + \frac{15^2}{4 \cdot 15} = 3.75$	21.25
ABCG	25	2.5 + 2.5 = 5	$\frac{15^2}{4 \cdot 15} = 1.87$	21.87
FCDE	25	2.5 + 2.5 = 5	$\frac{15^2}{4 \cdot 15} = 1.87$	21.87

$\phi$  Ancho neto =  $w - \Sigma \phi_{ag.} + \Sigma \frac{s^2}{4g}$

Ancho mínimo = 20 cm.

85% ancho Total = 0.85 \* 25 = 21.2 cm > 20 cm

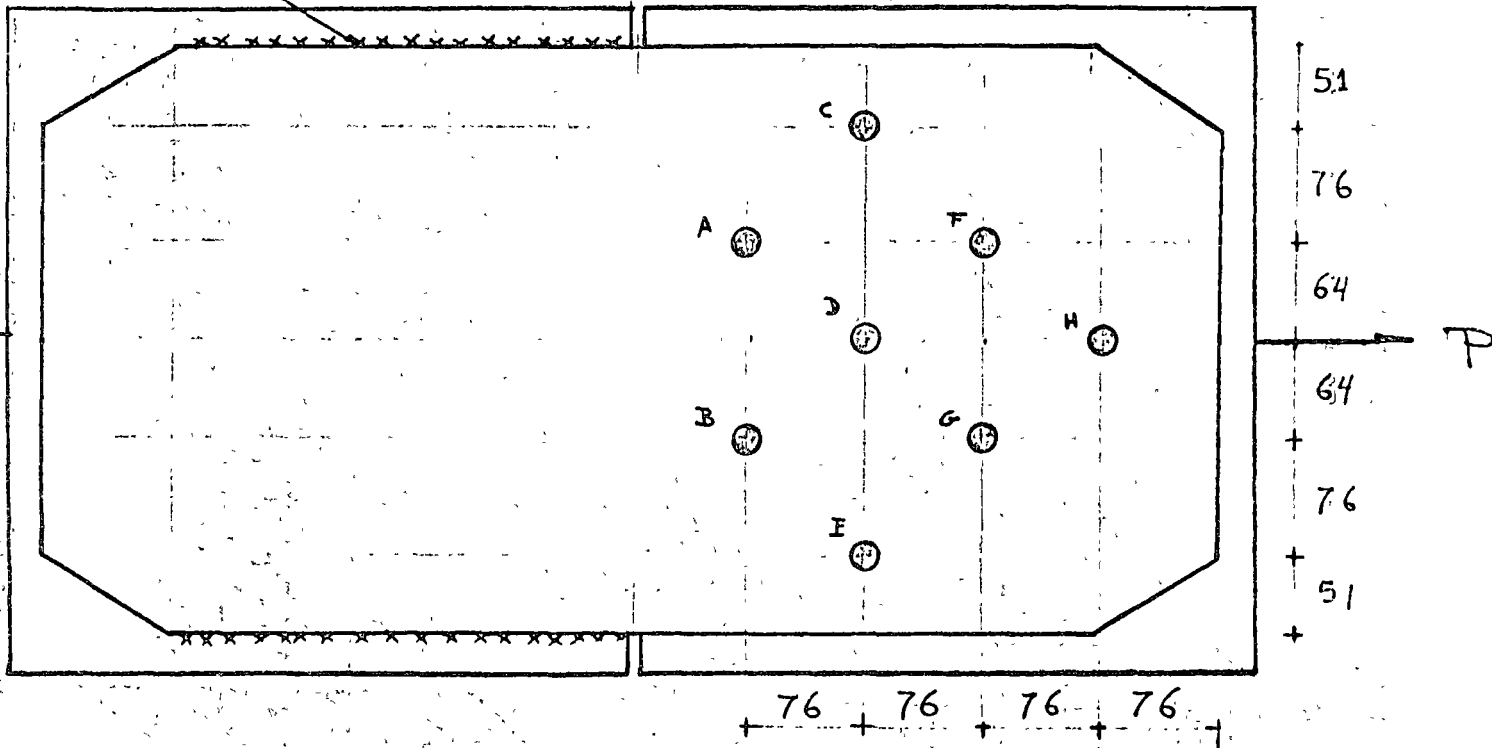
$\therefore$  Area mínima = 20 \* 1.9 = 38 cm<sup>2</sup>

$f_t = 0.6 f_y = 0.6 * 2530 = 1520 \text{ Kg/cm}^2$

$T = A \cdot f_t = 30 \cdot 1520 = 50000 \text{ Kg} = 50 \text{ ton}$

2

Ejercicio.- Calcular e área neta de la placa de conexión de la figura. tornillos de 3/4", agujeros de 7/8" para cálculo del - area neta.



Sección	w	$\Sigma \phi$	$\Sigma \frac{s^2}{4g}$	Bn	Carga
A-B	38.2	4.4	—	33.8	
C-A-B	"	6.6	$\frac{7.6^2}{4 \times 7.6} = 1.9$	33.5	P
C-A-B-E	"	8.8	3.8	33.2	
C-A-D-B-E	"	12.0	$2 \times 1.9 + \frac{7.6^2}{4 \times 6.4} = 8.3$	34.5	
C-A-D-E	"	8.8	$1.9 + 2.25 = 4.15$	33.5	7/8 P
C-D-E	"	6.6	—	31.6	4/8 P

$$\sigma_1 = \frac{P}{33.2t}$$

$$\sigma_2 = \frac{6P}{8 \times 31.6t} = \frac{P}{42.1t}$$

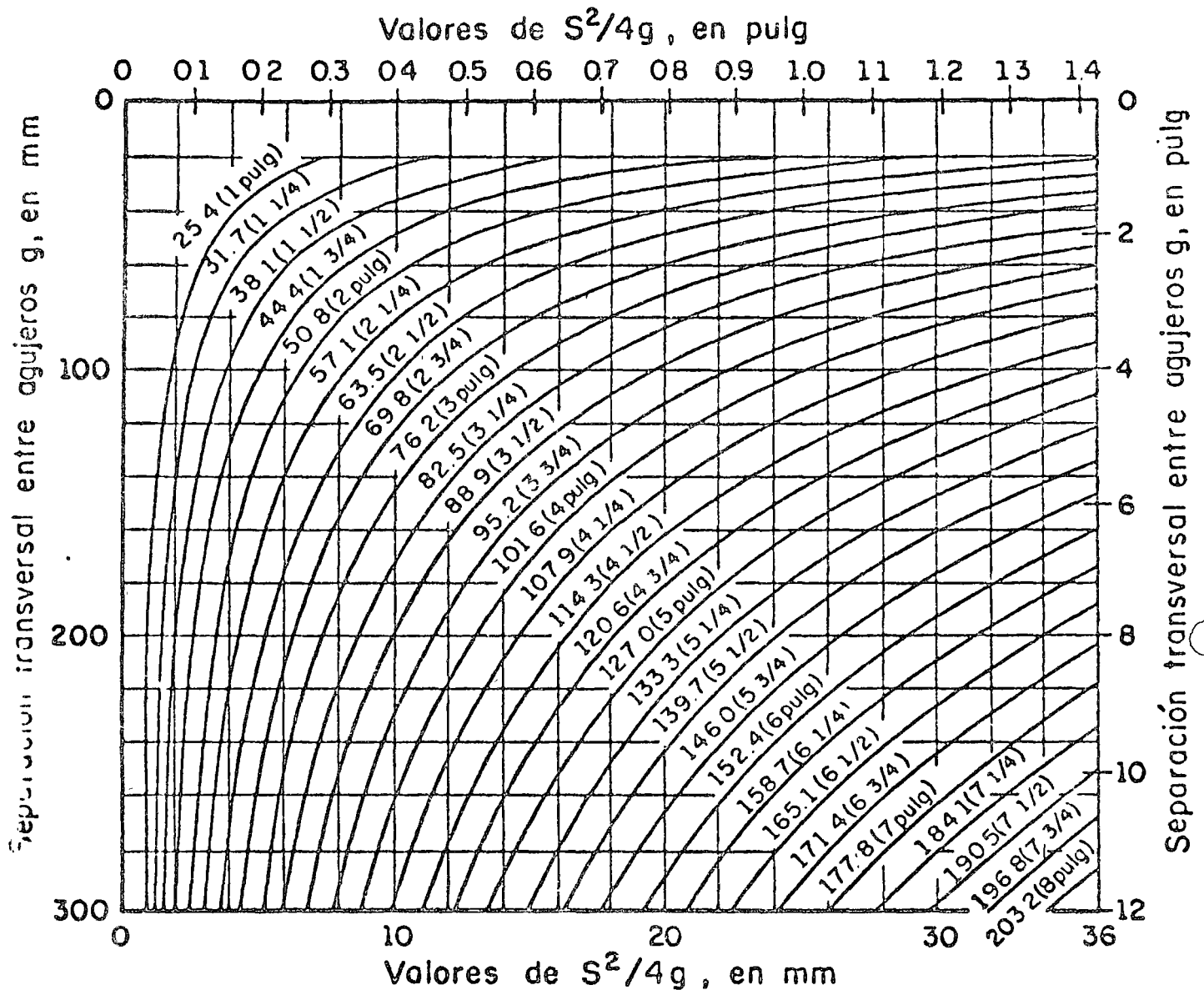
$$= \frac{P}{42.1t}$$

$$= \frac{P}{42.1t}$$

$$\rightarrow \text{Rise} \dots An = 32.5t$$

(Ver 1.5)

## Sección neta de miembros en tensión

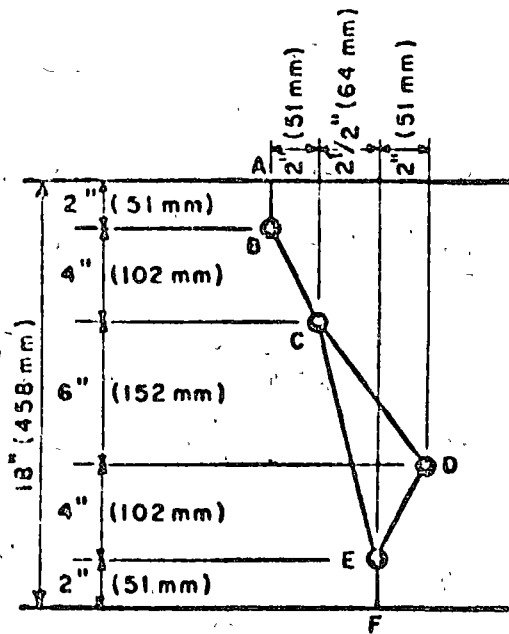


Las curvas son los valores de la separación longitudinal entre agujeros  $S$ , en mm y pulg

Este nomograma simplifica la aplicación de la regla dada en 1.5.a para la determinación del ancho neto. Para utilizarlo se traza una línea recta horizontal a la altura correspondiente a la separación transversal "g" entre los dos agujeros considerados, y en el punto en que se cruza con la curva correspondiente a la separación longitudinal "s" entre esos dos agujeros se traza una recta vertical que proporciona, en el borde superior o inferior de la gráfica, el valor de  $S^2/4g$  buscado.

El paso 1 del ejemplo que sigue ilustra la aplicación de la regla y el uso del nomograma; el paso 2 se refiere a la limitación del área neta al 85% de la total.





Remaches de 3/4"

Paso 1:

Cadena ABCEF

Descontar 3 agujeros:  $3(19 + 3) = -66 \text{ mm}$

BC,  $g = 4''$ ,  $S = 2''$ . Añadir  $S^2/4g = + 6 \text{ mm}$

CE,  $g = 10''$ ,  $S = 2\frac{1}{2}''$ . Añadir  $S^2/4g = + 4 \text{ mm}$

Deducción total = -56 mm

Cadena ABCDEF

Descontar 4 agujeros:  $4(19 + 3) = -88 \text{ mm}$

BC, igual que arriba. Añadir = + 6 mm

CD,  $g = 6''$ ,  $S = 4\frac{1}{2}''$ . Añadir  $S^2/4g = +22 \text{ mm}$

DE,  $g = 4''$ ,  $S = 2''$ . Añadir  $S^2/4g = + 6 \text{ mm}$

Deducción total = -54 mm

Ancho neto =  $458 - 56 = 402 \text{ mm}$

Paso 2: Ancho neto =  $458 \times 0.85 = 389 \text{ mm} < 402$

El ancho neto que rige en este ejemplo es el determinado en el Paso 2 (389 mm).

Comparando la cadena de agujeros CDE con la CE se advierte que si la suma de los dos valores de  $S^2/4g$  para CD y DE excede el valor de  $S^2/4g$  para CE en una cantidad mayor que la que debe descontarse por un agujero, la trayectoria CDE no es crítica en comparación con la CE.

Evidentemente, si el valor de  $S^2/4g$  para un tramo CD de la trayectoria CDE es mayor que la deducción correspondiente a un agujero, la cadena CDE no puede ser crítica en comparación con la CE. Las líneas verticales punteadas que aparecen en el nomograma sirven para indicar, para los diámetros de remaches anotados en su extremo superior, que cualquier valor de  $S^2/4g$  situado a su derecha se ha obtenido de una cadena de agujeros que no es crítica y que, por consiguiente, no necesita tomarse en cuenta.

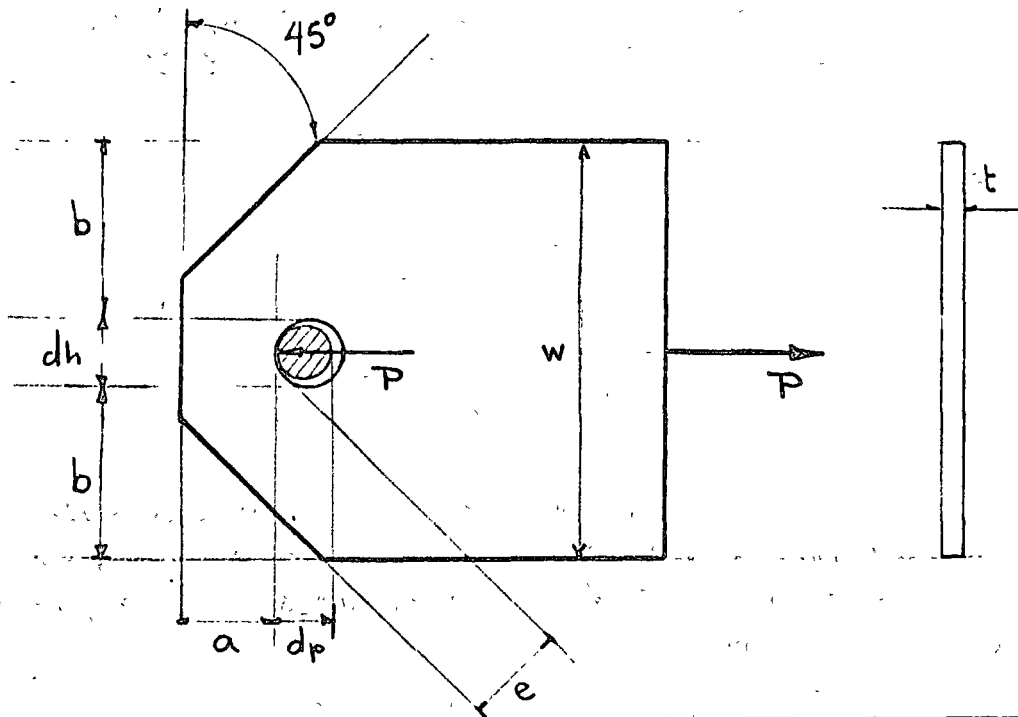
Problemas especiales relativos a tensión axial.-

1.- Placas conectadas por pasadores.-

En ocasiones en que se considera importante apegarse a la condición teórica correspondiente a una articulación, suelen utilizarse pasadores cilíndricos.

Las placas conectadas por los pasadores presentan problemas especiales que han dado lugar a las especificaciones que controlan su diseño.

En la siguiente figura se resumen algunas reglas que proporcionan las normas del A.I.S.C.



1.- $\frac{P}{wt} \leq 0.6 \sigma_y$	1.5.1.1	valor típico para tensión
2.- $\frac{P}{2bt} \leq 0.45 \sigma_y$	1.5.1.1	valor conservador por concentraciones de esfuerzo
3.- $a \geq 4b/3$	1.14.6	para prever falla longitudinal detrás del pasador
4.- $e \geq a$	"	"
5.- $b \leq 4t$	"	para evitar pandeo local
6.- Si $\sigma_y > 4200 \text{ Kg/cm}^2$ ; $dh < 5t$	"	de la placa.
7.- $dh - dp \leq 1/32$		
8.- $dp \geq 1.25$ (la menor de a, e, b)		

## 2.- Partes roscadas y tornillos sometidos a tensión.-

Los tirantes de varilla roscada en sus extremos y las anclas también roscadas son elementos a tensión utilizados muy comúnmente. Para diseñarlos se requiere tener presente la reducción de área que implica la presencia de la zona roscada.

Las últimas especificaciones del AISC, al contrario que las anteriores, recomiendan esfuerzos permisibles que deben compararse con los calculados en base al área efectiva de la pieza y no a la nominal. El área efectiva tiene en cuenta la presencia de la rosca y es un área promedio entre la nominal y la mínima que se ha establecido por medio de la realización de un gran número de pruebas y está dada por la expresión:

$$A_e = 0.7854 \left( D - \frac{0.9743}{n} \right)^2$$

(ver tabla 4-3)

D = diámetro nominal en in.

n = n° de hilos por in.

A<sub>e</sub> = Área efectiva en in.<sup>2</sup>

El esfuerzo permisible especificado es de:

$$0.6 F_y$$

En tornillos a tensión de acero A307 se sigue el mismo criterio y se fija un esfuerzo permisible de

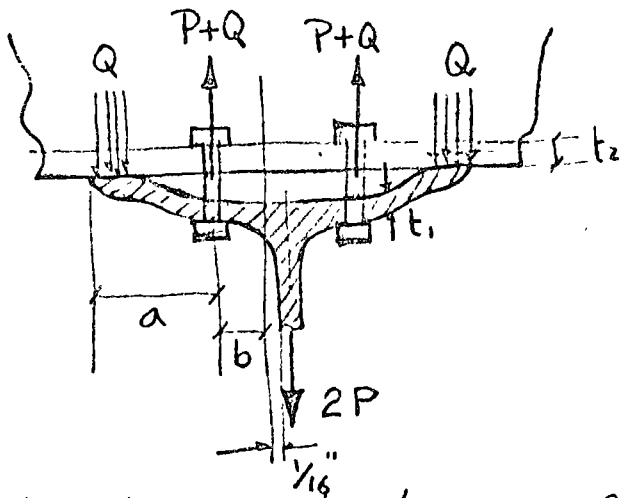
$$1400 \text{ Kg/cm}^2$$

En el caso de tornillos de alta resistencia A325, por el contrario, los cálculos se basan en el área nominal del tornillo, el esfuerzo permisible en este caso es de:

$$2800 \text{ Kg/cm}^2$$

valor bastante alto pero plenamente justificado por evidencia experimental.

En el dimensionamiento de tornillos a tensión es importante tener en cuenta la carga adicional a la fuerza exterior aplicada y que es debida a la flexibilidad de las piezas que transmiten la carga a los tornillos. En la siguiente figura se puede observar la naturaleza de la fuerza adicional mencionada



$Q$  = Fuerza adicional debida a la flexibilidad de la junta

El valor de la fuerza  $Q$  puede estimarse usando la siguiente fórmula semiempírica:

$$Q = \left[ \frac{\frac{1}{2} - \frac{wt^4}{30ab^2Ab}}{\frac{3a}{4b} \left( \frac{a}{4b} + 1 \right) + \frac{wt^4}{30ab^2Ab}} \right] P$$

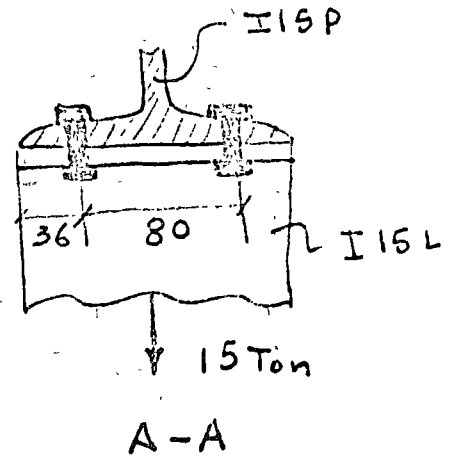
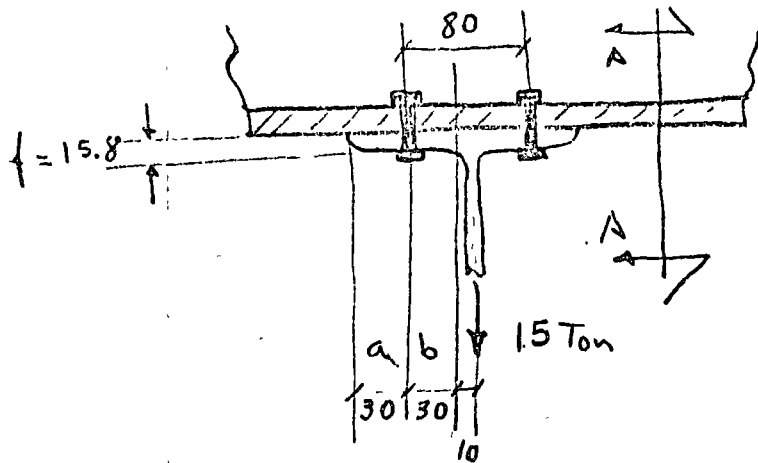
$Ab$  = área nominal del tornillo. -

$t$  = espesor del elemento más delgado.

$w$  = dimensión tributaria al tornillo (normal al eje)

Ejemplo.-

Diseñar la unión de la figura :



Si se usan tornillos de alta resistencia A325 se recomienda la expresión siguiente<sup>(1)</sup> para el cálculo de  $Q$  en vez de la presentada antes :

$$Q = P \left[ \frac{100b (db)^2 - 18w (tf)^2}{70a (db)^2 + 21w (tf)^2} \right]$$

Suponiendo tornillos de  $3/4"$  ;  $db = 1.9 \text{ cm}$  ;  $db^2 = 3.61$   
 $b = 3.0$  ;  $a = 3.0 < 2tf$   
 $w = 7.6 \text{ cm}$  ;  $tf = 1.58 \text{ cm}^2$

$$\begin{array}{r} 100b (db)^2 = 1083.0 \\ - 18w (tf)^2 = \frac{341.5}{741.5} \\ 70a (db)^2 = 758.1 \\ + 21w (tf)^2 = \frac{398.4}{1156.5} \end{array}$$

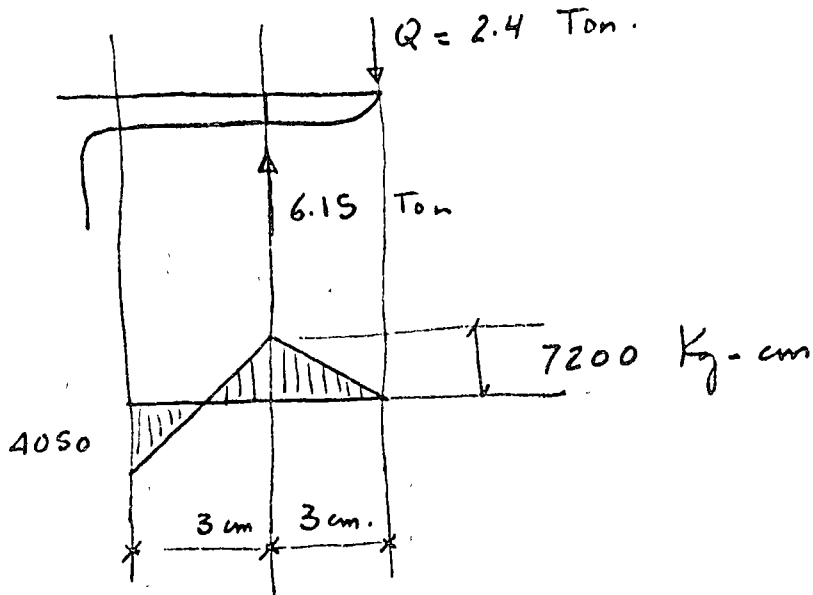
$$Q = 3.75 \times 0.64 = 2.4 \text{ Ton}$$

$$\text{Tension en cada tornillo} = 3.75 + 2.4 = 6.15 \text{ Ton}$$

$$\text{Capacidad del tornillo} = 2.84 \times 2800 = \underline{7.95 \text{ Ton}}$$

(1) Behavior of Bolts in Tee Connections

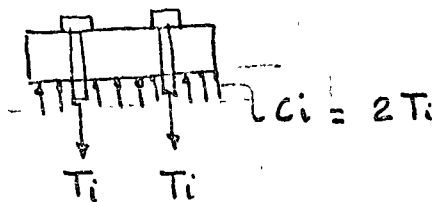
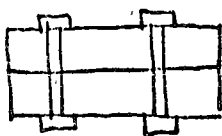
## Revisión del patín .-



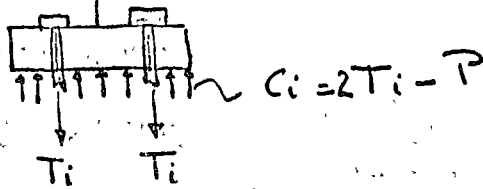
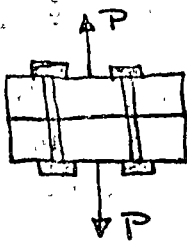
$$f_t = \frac{7200 \times 6}{1.58^2 \times 15.2} = 1138.5 \text{ Kg/cm}^2 < 1900 \text{ Kg/cm}^2$$

Los tornillos de alta resistencia se someten a una tensión inicial considerable al colocarse. Conviene hacer notar que la mencionada tensión no tiene influencia práctica notable en la resistencia de la junta; esto puede ilustrarse con las figuras que siguen en que se muestran, la tensión inicial y diversos valores de la carga exterior:

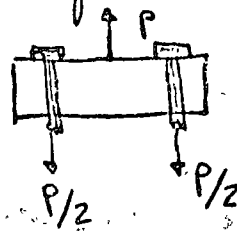
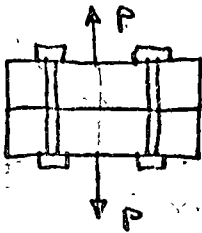
a) Tensión inicial y carga 0:



b) Tensión inicial y carga menor que ella:

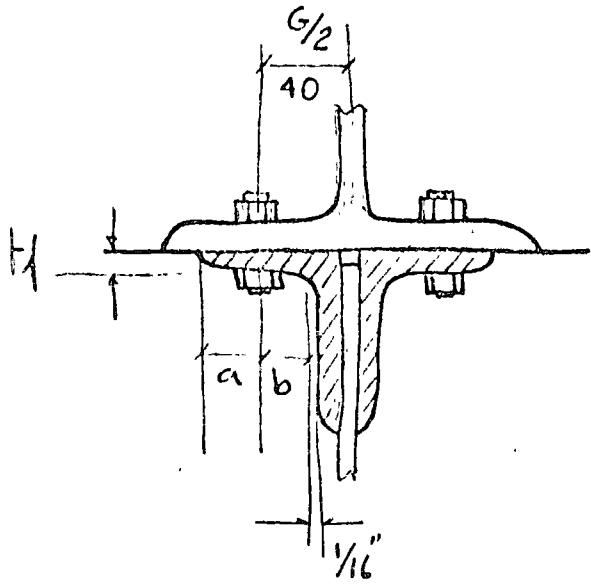


c) Tensión inicial y carga mayor que ella:



Luego los tornillos trabajarán con una carga igual a la tensión inicial o a la carga que se le transmite al trabajar la junta, (la mayor de las dos)

Ejercicio.-

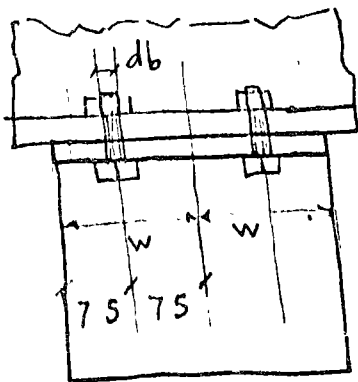


Del patin inferior de una vigueta I15P se colgarán dos ángulos de  $2\frac{1}{2}'' \times 2\frac{1}{2}'' \times \frac{3}{8}''$  para transmitirle una carga de 10 Ton.

Diseñar los cuatro tornillos de alta resistencia A325 que se utilizan en la conexión.

Se utilizará la siguiente expresión empírica

$$Q = F \left[ \frac{100b (d_b)^2 - 18w (t_f)^2}{70a (d_b)^2 + 21w (t_f)^2} \right]$$



$$F = 10 \text{ Ton}$$

$$b = (35 - 10 - 1.5) = 23 \text{ mm.} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Manual} \\ \text{pág 200} \end{array} \right.$$

$$a = (64 - 35) = 29 \text{ mm.} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Manual} \\ \text{pág 200} \end{array} \right.$$

$$d_b = 19 \text{ mm.} \quad (\text{supuesto})$$

$$t_f = 10 \text{ mm.}$$

$$w = 150 \text{ mm.}$$

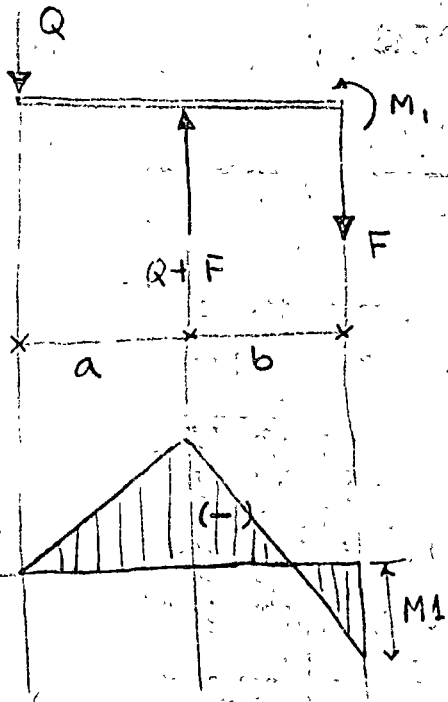
$$Q = 2.5 \left[ \frac{100 \times 2.3 \times 1.9^2 - 18 \times 15 \times 1^2}{70 \times 2.9 \times 1.9^2 + 21 \times 15 \times 1^2} \right] = 1.3 \text{ Ton}$$

Capacidad de 4 tornillos de  $\frac{3}{4}''$  -

18.4 cm<sup>2</sup>



# Revisión del ángulo:



$$Q = 1.3 \text{ Ton}$$

$$F = 2.5 \text{ Ton}$$

$$a = 2.9 \text{ cm}$$

$$b = 2.3 \text{ cm}$$

## Cálculo de momentos:

$$M_2 = Q a = -1.3 \times 2.9 = -3.8 \text{ T-cm}$$

$$M_1 = (Q+F)b - Q(a+b) = 3.8 \times 2.3 - 1.3 \times 5.2 = +1.98 \text{ T-cm}$$

## Revisión de esfuerzos:

$$\tau = \frac{3800 \times 0.5}{\frac{1}{2} \times 15 \times 1.3} = 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

$$< 0.75 F_y = 1897.5 \text{ Kg/cm}^2$$

✓

# RIVETS AND THREADED FASTENERS

## Tension

Allowable loads in kips

Unfinished Bolts and Threaded Parts										
Tension on tensile stress area										
ASTM Designation or Yield Stress		Allowable Tensile Stress $F_t$ , ksi	Nominal Diameter, in.							
			$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
			Tensile Stress Area, sq. in.							
			0.2260	0.3345	0.4617	0.6057	0.7633	0.9691	1.1549	1.4053
A307 Bolts		20.0	4.52	6.69	9.23	12.11	15.27	19.38	23.10	28.11
Threaded Parts $F_u$ , ksi	36	22.0	4.97	7.36	10.16	13.33	16.79	21.32	25.41	30.92
	42	25.2	5.70	8.41	11.64	15.27	19.23	24.42	29.23	35.53
	45	27.0	6.10	9.03	12.47	16.35	20.61	26.17	31.18	37.94
	50	30.0	6.78	10.04	13.85	18.17	22.90	29.07	34.65	42.16
	55	33.0	7.46	11.04	15.24	19.99	25.19	31.98	38.11	46.37
	60	36.0	8.14	12.04	16.62	21.81	—	—	—	—
<p>The definition of tensile stress area is given in the AISC Specification, Section 1.5.2.1. Values are based on UNC thread dimensions.</p> <p>Nuts must meet specifications compatible with threaded parts.</p> <p>For Upsot Rods see AISC Specification, Section 1.5.2.1.</p>										
Rivets and High Strength Bolts										
Tension on gross (nominal) area										
ASTM Designation		Allowable Tensile Stress $F_t$ , ksi	Nominal Diameter, in.							
			$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
			Gross (Nominal) Area, sq. in.							
			0.3068	0.4416	0.6013	0.7854	0.9940	1.2272	1.4849	1.7671
Rivets	A502-1	20.0	6.14	8.84	12.03	15.71	19.88	24.54	29.70	35.34
	A502-2	27.0	8.28	11.93	16.24	21.21	26.84	33.13	40.09	47.71
Bolts	A325	40.0	12.27	17.67	24.05	31.42	39.76	49.09	59.40	70.68
	A490	54.0 <sup>a</sup>	16.57 <sup>a</sup>	23.86 <sup>a</sup>	32.47 <sup>a</sup>	42.41 <sup>a</sup>	53.68 <sup>a</sup>	66.27 <sup>a</sup>	80.18 <sup>a</sup>	95.42 <sup>a</sup>
<p><sup>a</sup> For static loading only.</p> <p>For allowable combined shear and tension loads, see AISC Specification, Section 1.6.3.</p>										

### 3.- El ángulo simple a tensión -

Es uno de los perfiles más utilizados, sobre todo en estructuras ligeras. Debido al tipo de conexión que se requiere para unirlos a los elementos que les transmiten la carga, esta llega al ángulo siempre en forma excéntrica. El efecto que esta excentricidad tenga en la resistencia del ángulo es un punto que se ha discutido ampliamente desde hace tiempo.

Las especificaciones del AASHO y del AREA establecen que el área efectiva de un ángulo a tensión debe ser el área neta del ala del ángulo a la que directamente se transmite la carga más la mitad del otra ala.

Las especificaciones del AISC no establecen este requisito y explícitamente indican que la excentricidad entre el eje centroidal del miembro y los elementos de conexión en los extremos del mismo puede disminuirse. (1.15.3)

La posición del AISC se justifica por dos motivos, por una parte la deformación que experimenta el ángulo y que hace disminuir la excentricidad y por otra la redistribución plástica de esfuerzos que puede observarse en la gráfica de la pag. siguiente y que permite, en aceros estructurales dúctiles, llegar a la carga última o a valores muy cercanos a ella en la generalidad de los casos.

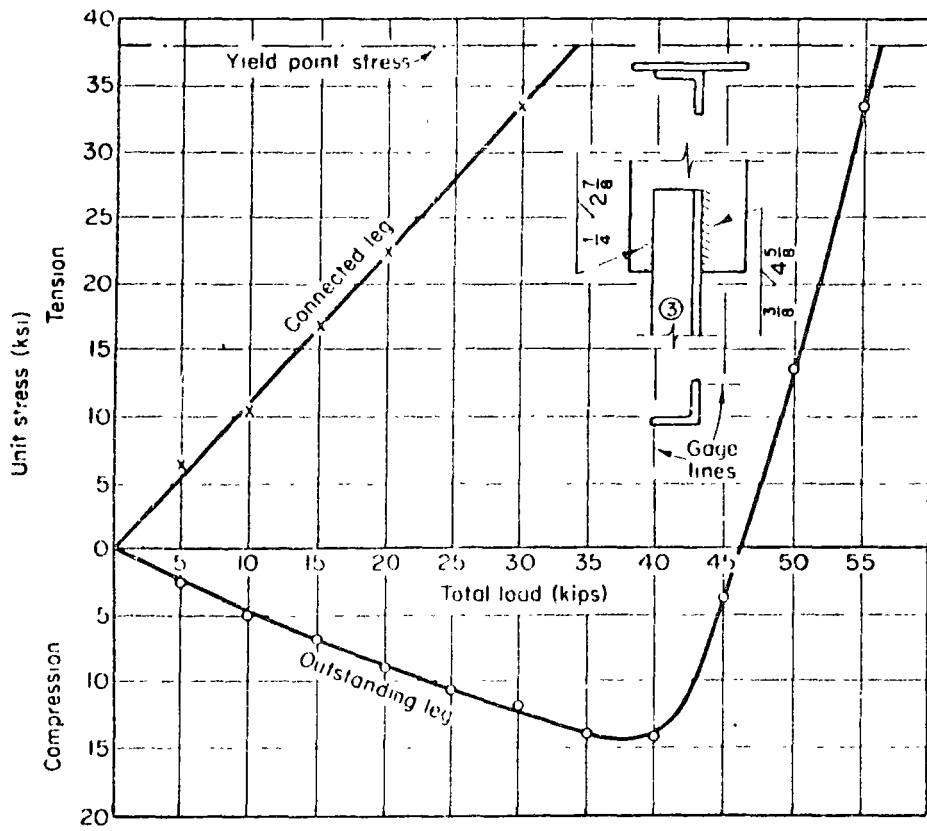
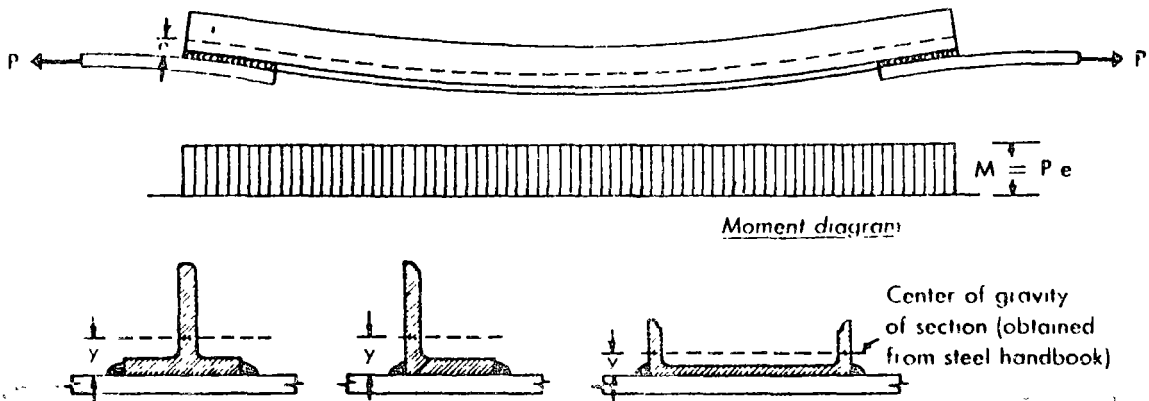


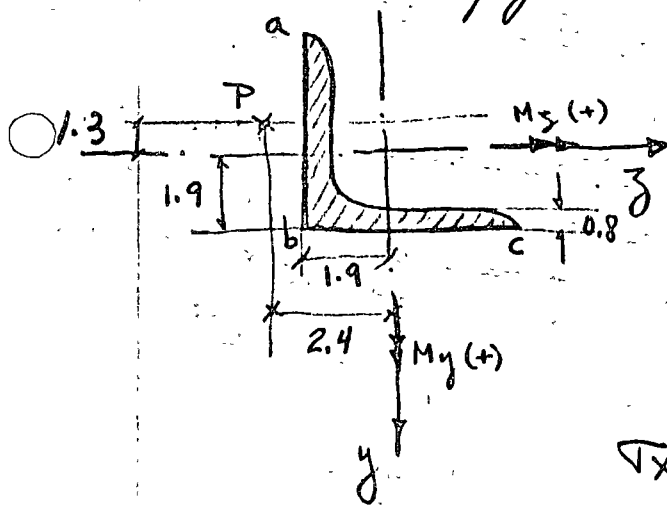
Fig. 5.19. Stress in single angle in tension.

Design of Trusses



Aunque es una situación poco común, podría, en circunstancias especiales, desearse limitar los esfuerzos en un ángulo a determinados valores inferiores al límite elástico del material (en el caso de aceros frágiles por ejemplo), se requeriría entonces calcular dichos esfuerzos una vez definida la posición de la carga con respecto al eje longitudinal centroidal del ángulo.

Consideremos un ángulo de  $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 5/16$  como se indica en la figura siguiente:



Una fórmula generalizada para el cálculo de esfuerzos normales debidos a flexión y referida a ejes no principales es (1):

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$A = 9.48 \text{ cm}^2$ ,  $I_z = I_y = 35.38 \text{ cm}^4$ ;  $I_{yz} = 6.4 \times 0.8 \times (-1.5)(-1.3) + 5.6 \times 0.8 \times 1.5 \times 1.7 = 21.4 \text{ cm}^4$   
 $P/A = 0.1P$

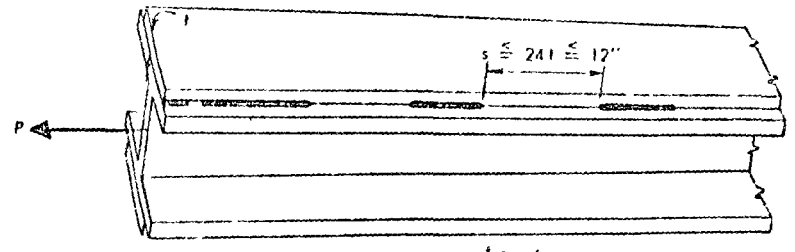
$M_y = -2.4P$ ;  $M_z = 1.3P$ ;  $M_y I_z = -84.9P$ ;  $M_z I_y = 46P$ ;  $M_y I_{yz} = -51.4P$ ;  $M_z I_{yz} = 27.8P$

punto	z	y	$(M_y I_z + M_z I_{yz})z$	$(M_z I_y + M_y I_{yz})y$	$\sigma_x$
a	-1.9	-4.5	108.5P	24.3P	0.21P
b	-1.9	1.9	108.5P	-10.3P	0.25P
c	4.5	1.9	-257P	-10.3P	-0.21P

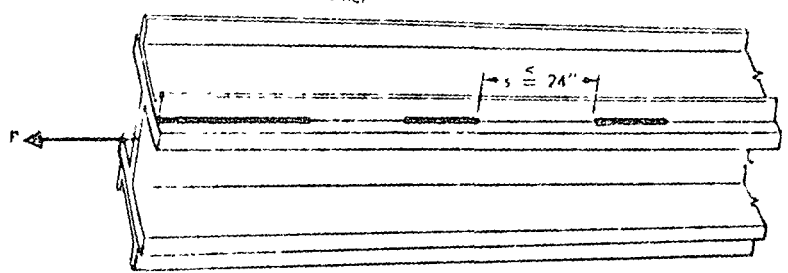
### 3. WELDING OF BUILT-UP TENSION MEMBERS

AISC Section 1.18.3 has established the requirements illustrated in Figure 2.

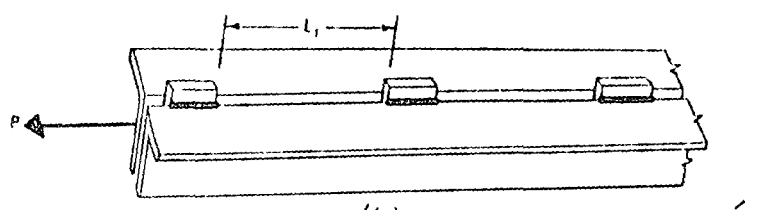
Plate to a rolled shape, or  
2 plates in contact with each other



2 or more shapes in contact with each other

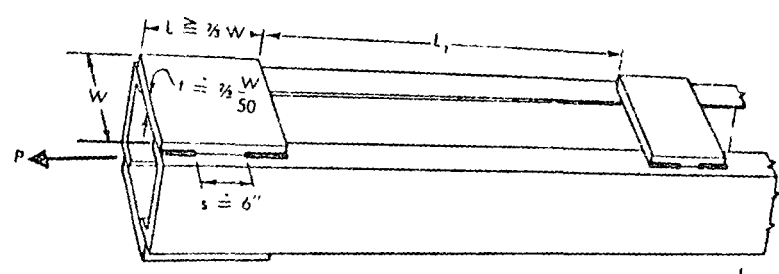


2 or more shapes or plates separated by  
intermittent fillers



The plates used on open sides of  
built up tension members

$\left(\frac{L_1}{r}\right)$  of either element  $\leq 240$



$\left(\frac{L_1}{r}\right)$  of element  $\leq 240$

Plates with access holes may be used in  
built up tension members

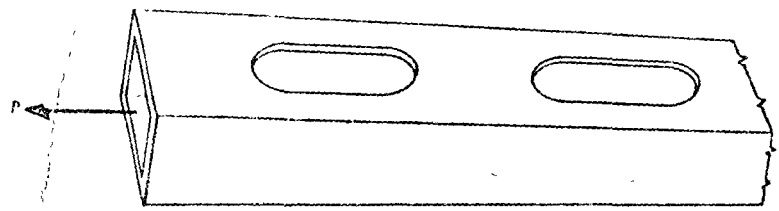


FIGURE 2—Welding of  
Built-Up Tension Members

Miembros  
Compuestos  
a Tensión  
(tomado del  
Blodgett  
pg 2.3.2)

# Especificaciones relativas a tensión.

Esfuerzo permisible:

$$\sigma \leq 0.6 \sigma_y$$

$$\sigma \leq 0.5 \sigma_T$$

A.I.S.C.

C.F.E.

1.5.1.1

—

1.5.1.1

—

En zonas de pasadores

$$\sigma \leq 0.45 \sigma_y$$

1.5.1.1

—

Area neta:

$$A_n \leq 0.85 A$$

1.14.3

1.5 a

Diametro de agujeros para  
di seño

$$\phi_d = \phi + 3 \text{ mm.}$$

1.14.5

1.5 a

Relación de esbeltez  
(recomendación)

miembros principales  $\frac{L}{r} \leq 240$

1.8.4

1.4

miembros secundarios  $\frac{L}{r} \leq 300$

1.8.4

1.4

FIGURA 6

REDUCCION DE AREAS POR AGUJEROS PARA REMACHES Y TORNILLOS (cm<sup>2</sup>)


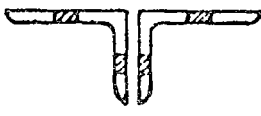
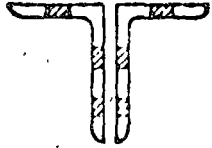
Area en cm<sup>2</sup> = diámetro del agujero por grueso del metal, (para fines de cálculo el diámetro de los agujeros se toma igual al diámetro nominal del remache o tornillo más 1/8").

GRUESO DEL METAL		DIAMETRO DEL REMACHE O TORNILLO, pulg y mm											
pulg	mm	5/8	15.9	3/4	19	7/8	22.2	1	25.4	1 1/8	28.6	1 1/2	31.7
3/16	4.8	0.91		1.06		1.21		1.36		1.51		1.66	
1/4	6.3	1.21		1.41		1.62		1.81		2.01		2.22	
5/16	7.9	1.51		1.76		2.02		2.27		2.52		2.77	
3/8	9.5	1.81		2.12		2.42		2.72		3.02		3.33	
7/16	11.1	2.12		2.47		2.83		3.18		3.53		3.88	
1/2	12.7	2.42		2.82		3.23		3.63		4.03		4.44	
9/16	14.3	2.72		3.18		3.63		4.08		4.53		4.99	
5/8	15.9	3.03		3.53		4.03		4.54		5.04		5.55	
11/16	17.5	3.33		3.88		4.44		4.99		5.54		6.10	
3/4	19.0	3.63		4.23		4.84		5.44		6.05		6.66	
13/16	20.6	3.93		4.59		5.24		5.90		6.55		7.21	
7/8	22.2	4.24		4.94		5.65		6.35		7.05		7.76	
15/16	23.8	4.54		5.29		6.05		6.80		7.56		8.32	
1	25.4	4.84		5.65		6.45		7.26		8.06		8.87	
1/16	27.0	5.14		6.00		6.86		7.71		8.57		9.43	
1/8	28.6	5.45		6.35		7.26		8.17		9.07		9.98	
3/16	30.2	5.75		6.70		7.66		8.62		9.58		10.54	
1/4	31.7	6.05		7.06		8.07		9.07		10.08		11.09	
5/16	33.3	6.35		7.41		8.47		9.53		10.58		11.65	
3/8	34.9	6.66		7.76		8.87		9.98		11.09		12.20	
7/16	36.5	6.96		8.12		9.28		10.44		11.59		12.76	
1/2	38.1	7.26		8.47		9.68		10.89		12.09		13.31	
9/16	39.7	7.56		8.82		10.08		11.34		12.60		13.86	
5/8	41.3	7.87		9.18		10.49		11.80		13.10		14.42	
11/16	42.9	8.17		9.53		10.89		12.25		13.61		14.97	
3/4	44.4	8.47		9.88		11.29		12.70		14.11		15.53	
13/16	46.0	...		10.23		11.69		13.16		14.61		16.08	
7/8	47.6	...		10.59		12.10		13.61		15.12		16.64	
15/16	49.2	...		10.94		12.50		14.07		15.62		17.19	
2	50.8	...		11.29		12.90		14.52		16.13		17.75	
1/16	52.4	...		11.65		13.31		14.97		16.63		18.30	
1/8	54.0	...		12.00		13.71		15.43		17.14		18.85	
3/16	55.6	...		12.35		14.11		15.88		17.64		19.41	
1/4	57.1	...		12.70		14.52		16.33		18.14		19.96	
5/16	58.7	...		13.06		14.92		16.79		18.65		20.52	
3/8	60.3	...		13.41		15.32		17.24		19.15		21.07	
7/16	61.9	...		13.76		15.73		17.69		19.65		21.63	
1/2	63.5	...		14.12		16.13		18.15		20.16		22.18	
5/8	66.7	...		14.82		16.94		19.06		21.17		23.29	
3/4	69.8	...		15.53		17.74		19.96		22.18		24.40	
7/8	73.0	...		16.23		18.55		20.87		23.19		25.51	
3	76.2	...		16.94		19.35		21.78		24.19		26.62	



AREA NETA DE DOS ANGULOS EN cm<sup>2</sup>

agujeros deducidos son 3.2 mm mayores que el diámetro nominal de los remaches

DOS ANGULOS													
DIMENSIONES		DEDUCIENDO 2 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 4 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 6 AGUJEROS DE			
Lados	Espesor	DEDUCIENDO 2 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 4 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 6 AGUJEROS DE			
m.m	mm	19.0	22.2	25.4	28.6	19.0	22.2	25.4	28.6	19.0	22.2	25.4	28.6
152.4 x 152.4	9.5	55.63	55.02	54.42	53.81	52.00	50.79	49.58	48.37	48.37	46.55	44.74	42.92
	12.7	69.36	68.55	67.75	66.94	64.52	62.91	61.30	59.68	59.69	57.26	54.85	52.43
	15.9	85.69	84.68	83.67	82.66	79.64	77.62	75.61	73.59	73.59	70.56	67.54	64.51
	19.0	101.64	100.43	99.22	98.01	94.38	91.96	89.55	87.12	87.12	83.50	79.87	76.24
	22.2	117.07	115.66	114.25	112.83	108.60	105.78	102.96	100.13	100.14	95.89	91.66	87.42
	25.4	132.26	130.65	129.04	127.42	122.59	119.36	116.14	112.90	112.91	108.06	103.23	98.39
152.4 x 101.6	9.5	42.95	42.34	41.74	41.13	39.32	38.11	36.90	35.69	35.69	33.87	32.06	30.24
	12.7	56.46	55.65	54.85	54.04	51.62	50.01	48.40	46.78	46.79	44.36	41.95	39.53
	15.9	69.57	68.56	67.55	66.54	63.52	61.50	59.49	57.47	57.47	54.44	51.42	48.39
	19.0	82.28	81.07	79.86	78.65	75.02	72.60	70.19	67.76	67.76	64.14	60.51	56.88
	22.2	94.49	93.08	91.67	90.25	86.02	83.20	80.38	77.55	77.55	73.31	69.08	64.84
127.0 x 127.0	9.5	42.95	42.34	41.74	41.13	39.32	38.11	36.90	35.69				
	12.7	56.46	55.65	54.85	54.04	51.62	50.01	48.40	46.78				
	15.9	69.57	68.56	67.55	66.54	63.52	61.50	59.49	57.47				
	19.0	82.28	81.07	79.86	78.65	75.02	72.60	70.19	67.76				
101.6 x 101.6	6.3	22.62	22.22	21.82	21.41	20.20	19.40	18.59	17.78				
	7.9	27.94	27.43	26.93	26.42	24.91	23.90	22.90	21.88				
	9.5	33.27	32.66	32.06	31.45	29.64	28.43	27.22	26.01				
	12.7	43.54	42.73	41.93	41.12	38.70	37.09	35.48	33.86				
	15.9	53.43	52.42	51.41	50.40	47.38	45.36	43.35	41.33				
	19.0	62.94	61.73	60.52	59.31	55.68	53.26	50.85	48.42				
101.6 x 76.3	6.3	19.38	18.98	18.58	18.17	16.96	16.16	15.35	14.54				
	7.9	23.94	23.43	22.93	22.42	20.91	19.90	18.90	17.88				
	9.5	28.37	27.76	27.16	26.55	24.74	23.53	22.32	21.11				
	12.7	37.08	36.27	35.47	34.66	32.24	30.63	29.02	27.40				
	15.9	45.29	44.28	43.27	42.26	39.24	37.22	35.21	33.19				
	19.0	53.26	52.05	50.84	49.63	46.00	43.58	41.17	38.74				
76.3 x 76.3	6.3	16.16	15.76	15.36	14.95	13.74	12.94	12.13	11.32				
	7.9	19.94	19.43	18.93	18.42	16.91	15.90	14.90	13.88				
	9.5	23.59	22.98	22.38	21.77	19.96	18.75	17.54	16.33				
	12.7	30.64	29.83	29.03	28.22	25.80	24.19	22.58	20.96				

LONGITUDES DE SOLDADURA DE FILETE NECESARIAS PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE CARGA AXIAL DE ANGULOS EN TENSION

ANGULO		TAMAÑO DEL FILETE		LONGITUD, cm		
				Electrodos E60XX y E70XX o grados SAW-1 y SAW-2 y metal base A-7 ó A373	Electrodos E60XX ó grado SAW-1 y metal base A-36	Electrodos E70XX ó grado SAW-2 y metal base A-36
mm	Pulg'	mm	Pulg'			
152.4x101.6x21.2	6x4x7/8	20.6	13/16	39.1	42.5	36.3
" " 19.0	" " 3/4	17.5	11/16	40.0	43.3	37.2
" " 15.9	" " 5/8	14.3	9/16	41.0	44.7	38.5
" " 12.7	" " 1/2	11.1	7/16	42.8	46.8	40.3
" " 11.1	" " 7/16	9.5	3/8	44.2	48.0	41.3
" " 9.5	" " 3/8	7.9	5/16	46.0	50.1	43.1
" " 7.9	" " 5/16	6.3	1/4	48.0	52.4	45.0
101.6x76.2x19.0	4x3x3/4	17.5	11/16	26.9	29.3	25.1
" " 15.9	" " 5/8	14.3	9/16	28.0	30.5	26.1
" " 12.7	" " 1/2	11.1	7/16	29.3	31.9	27.5
" " 11.1	" " 7/16	9.5	3/8	30.4	33.1	28.4
" " 9.5	" " 3/8	7.9	5/16	31.5	34.4	29.6
" " 7.9	" " 5/16	6.3	1/4	33.4	36.4	31.1
" " 6.3	" " 1/4	6.3	1/4	27.4	29.4	25.3
152.4 x 25.4	6 x 1	23.8	15/16	46.4	50.3	43.3
" 22.2	" 7/8	20.6	13/16	47.5	51.8	44.4
" 19.0	" 3/4	17.5	11/16	48.6	52.9	45.4
" 15.9	" 5/8	14.3	9/16	50.0	54.1	46.6
" 14.3	" 9/16	12.7	1/2	50.4	55.0	47.5
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	51.9	56.7	48.7
" 11.1	" 7/16	9.5	3/8	53.6	58.5	50.1
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	55.6	60.6	52.0
127.0 x 19.0	5 x 3/4	17.5	11/16	39.9	43.5	37.2
" 15.9	" 5/8	14.3	9/16	41.2	44.8	38.5
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	42.9	46.7	40.1
" 11.1	" 7/16	9.5	3/8	44.2	48.0	41.3
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	46.0	50.2	43.0
101.6 x 19.0	4 x 3/4	17.5	11/16	31.1	34.2	29.2
" 15.9	" 5/8	14.3	9/16	32.5	35.2	30.4
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	33.9	36.7	31.6

ANGULO		TAMANO DEL FILETE		LONGITUD, cm		
				Electrodos E60XX y E70XX o grados SAW-1 y SAW-2 y metal base A-7 o A373	Electrodos E60XX o grado SAW-1 y metal base A-36	Electrodos E70XX o grado SAW-2 y metal base A-36
mm	Pulg.	mm	Pulg.			
101.6 x 11.1	4 x 7/16	9.5	3/8	35.0	38.2	32.8
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	36.5	39.7	34.1
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	38.3	41.8	35.8
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	30.8	33.7	29.0
76.2 x 15.9	3 x 5/8	14.3	9/16	23.6	25.8	22.1
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	24.8	27.0	23.2
" 11.1	" 7/16	9.5	3/8	25.7	28.1	24.1
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	26.8	29.3	25.2
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	28.4	31.0	26.6
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	23.0	25.0	21.5
63.5 x 9.5	2 1/2 x 3/8	7.9	5/16	21.8	24.0	21.4
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	23.4	25.5	22.0
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	19.0	20.6	17.8
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	18.9	20.6	17.7
50.8 x 9.5	2 x 3/8	7.9	5/16	17.4	18.8	16.2
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	18.4	20.0	17.2
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	15.0	16.3	14.0
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	15.0	16.3	14.0
" 3.2	" 1/8	3.2	1/8	15.0	16.4	14.1
44.4 x 7.9	1 3/4 x 5/16	6.3	1/4	15.8	17.2	14.8
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	12.8	14.0	12.0
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	13.1	14.3	12.3
" 3.2	" 1/8	3.2	1/8	13.3	14.6	12.5
38.1 x 9.5	1 1/2 x 3/8	7.9	5/16	12.55	13.7	11.7
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	13.40	14.6	12.5
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	10.90	11.8	10.2
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	11.20	12.1	10.4
" 3.2	" 1/8	3.2	1/8	11.40	12.4	10.7

Se han considerado soldaduras de filete de tamaño igual al grueso del ángulo cuando éste es de 6.3 mm (1/4") o menos,

(Ver 1.2)

CAPACIDAD DE CARGA AXIAL DE ANGULOS EN TENSION (Igual a A.σy, de acuerdo con 1.2.a) ACEROS A7 y A36				
A N G U L O		AREA	CAPACIDAD DE CARGA TON	
mm	PULG	cm <sup>2</sup>	A7	A36
152.4 x 101.6 x 22.2	6 x 4 x 7/8	51.48	119.9	130.0
152.4 x 101.6 x 19.0	6 x 4 x 3/4	44.77	104.0	113.0
152.4 x 101.6 x 15.9	6 x 4 x 5/8	37.81	87.8	95.6
152.4 x 101.6 x 12.7	6 x 4 x 1/2	30.65	71.1	77.8
152.4 x 101.6 x 11.1	6 x 4 x 7/16	26.97	62.5	68.0
152.4 x 101.6 x 9.5	6 x 4 x 3/8	23.29	54.1	59.0
152.4 x 101.6 x 7.9	6 x 4 x 5/16	19.44	45.1	49.3
101.6 x 76.2 x 19.0	4 x 3 x 3/4	30.26	70.2	76.5
101.6 x 76.2 x 15.9	4 x 3 x 5/8	25.67	59.7	65.0
101.6 x 76.2 x 12.7	4 x 3 x 1/2	20.96	48.6	53.0
101.6 x 76.2 x 11.1	4 x 3 x 7/16	18.51	43.0	46.8
101.6 x 76.2 x 9.5	4 x 3 x 3/8	16.00	37.1	40.5
101.6 x 76.2 x 7.9	4 x 3 x 5/16	13.48	31.3	34.1
101.6 x 76.2 x 6.3	4 x 3 x 1/4	10.90	25.3	27.6
152.4 x 25.4	6 x 1	70.97	164.3	179.0
152.4 x 22.2	6 x 7/8	62.77	145.6	158.2
152.4 x 19.0	6 x 3/4	54.45	126.5	138.0
152.4 x 15.9	6 x 5/8	45.87	106.3	115.8
152.4 x 14.3	6 x 9/16	41.48	96.0	104.6
152.4 x 12.7	6 x 1/2	37.10	86.1	94.0
152.4 x 11.1	6 x 7/16	32.65	75.9	82.3
152.4 x 9.5	6 x 3/8	28.13	65.2	71.2
127.0 x 19.0	5 x 3/4	44.77	104.0	113.5
127.0 x 15.9	5 x 5/8	37.81	87.8	95.7
127.0 x 12.7	5 x 1/2	30.65	71.1	77.5
127.0 x 11.1	5 x 7/16	26.97	62.5	68.0
127.0 x 9.5	5 x 3/8	23.29	54.0	59.0

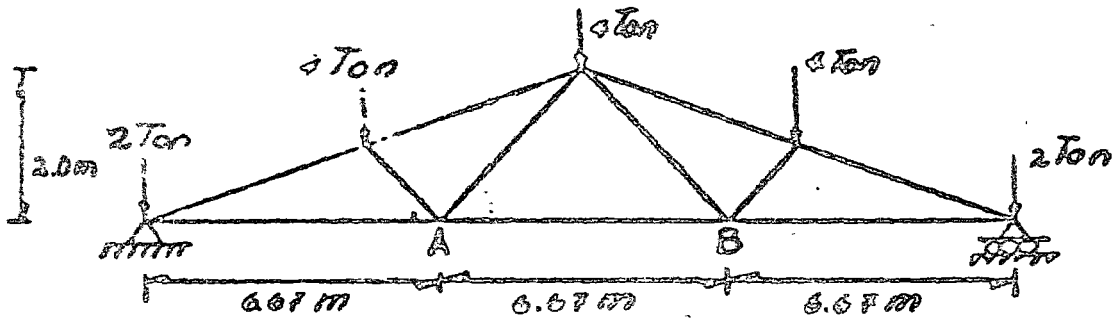
A N G U L O		AREA cm <sup>2</sup>	CAPACIDAD DE CARGA TON	
mm	PULG		A7	A36
101.6 x 19.0	4 x 3/4	35.10	81.3	89.0
101.6 x 15.9	4 x 5/8	29.74	69.1	75.2
101.6 x 12.7	4 x 1/2	24.19	56.2	61.0
101.6 x 11.1	4 x 7/16	21.35	49.5	54.0
101.6 x 9.5	4 x 3/8	18.45	42.9	46.7
101.6 x 7.9	4 x 5/16	15.48	36.0	39.2
101.6 x 6.3	4 x 1/4	12.52	29.0	31.6
76.2 x 15.9	3 x 5/8	21.68	50.2	55.0
76.2 x 12.7	3 x 1/2	17.74	41.1	44.8
76.2 x 11.1	3 x 7/16	15.68	36.4	39.7
76.2 x 9.5	3 x 3/8	13.61	31.6	34.5
76.2 x 7.9	3 x 5/16	11.48	26.6	29.1
76.2 x 6.3	3 x 1/4	9.29	21.6	23.5
63.5 x 9.5	2 1/2 x 3/8	11.16	25.9	28.3
63.5 x 7.9	2 1/2 x 5/16	9.48	22.0	24.0
63.5 x 6.3	2 1/2 x 1/4	7.68	17.8	19.4
63.5 x 4.8	2 1/2 x 3/16	5.81	13.5	14.7
50.8 x 9.5	2 x 3/8	8.77	20.4	22.1
50.8 x 7.9	2 x 5/16	7.42	17.2	18.8
50.8 x 6.3	2 x 1/4	6.06	14.0	15.3
50.8 x 4.8	2 x 3/16	4.61	10.7	11.6
50.8 x 3.2	2 x 1/8	3.10	7.2	7.8
44.4 x 7.9	1 3/4 x 5/16	6.39	14.8	16.1
44.4 x 6.3	1 3/4 x 1/4	5.20	12.1	13.2
44.4 x 4.8	1 3/4 x 3/16	4.03	9.3	10.2
44.4 x 3.2	1 3/4 x 1/8	2.74	6.4	6.9
38.1 x 9.5	1 1/2 x 3/8	6.34	14.8	16.0
38.1 x 7.9	1 1/2 x 5/16	5.40	12.5	13.6
38.1 x 6.3	1 1/2 x 1/4	4.40	10.2	11.1
38.1 x 4.8	1 1/2 x 3/16	3.43	8.0	8.7

EJEMPLO 3.2. DIMENSIONAMIENTO DE UN ELEMENTO SUJETO A TENSION AXIAL

CALCULO: F.G.V.  
 REVISO: S.L.V.  
 FECHA: OCT. 70

DATOS

Diseñar el miembro AB de la armadura mostrada en la figura.



SOLUCION

Resolviendo la armadura por un método conocido, encontramos que el miembro AB trabaja con una fuerza de tensión de 20000 N.

Si la unión es soldada y usamos un ángulo de acero A-36 ( $f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$ ), tenemos:

Esfuerzo permisible

$$f_s = 0.6 f_y = 0.6 \cdot 2530 = 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo del área necesaria

$$A = \frac{T}{f_s} ; A = \frac{20000}{1530} = \underline{\underline{13.20 \text{ cm}^2}}$$

Ec 3.1

Del Manual Monterrey

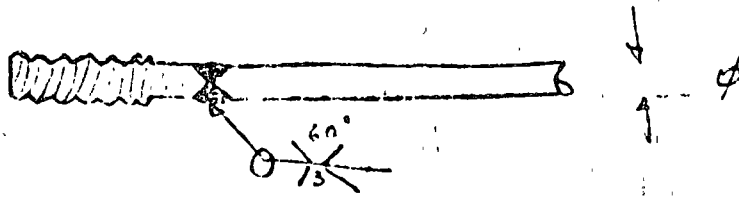
L 4" x 5/16" Tiene un área de 15.46 cm<sup>2</sup> y un radio de giro,  $r = 3.15$ .

Revisión por esbeltez

$$\frac{l}{r} = \frac{6.67}{3.15} = \underline{\underline{2.11}} < 230$$

Ref 3.1

Una solución al mismo problema es mediante un tirante de acero A36 roscado en sus extremos para permitir la conexión



a) zona no roscada

$$A_{req} = \frac{20000}{1530} = 13.2 \text{ cm}^2$$

USAR 2  $\phi$  1 1/4" ( $A = 7.91 \times 2 = 15.82 \text{ cm}^2$ )

Ver tabla  
4-3  
AISC

b) zona roscada

USAR 2  $\phi$  1 3/8" ( $A_e = 7.45 \times 2 = 14.90 \text{ cm}^2$ )

... ..

... ..

... ..

... ..

...

... ..

... ..

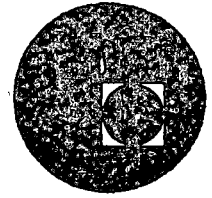
... ..

... ..

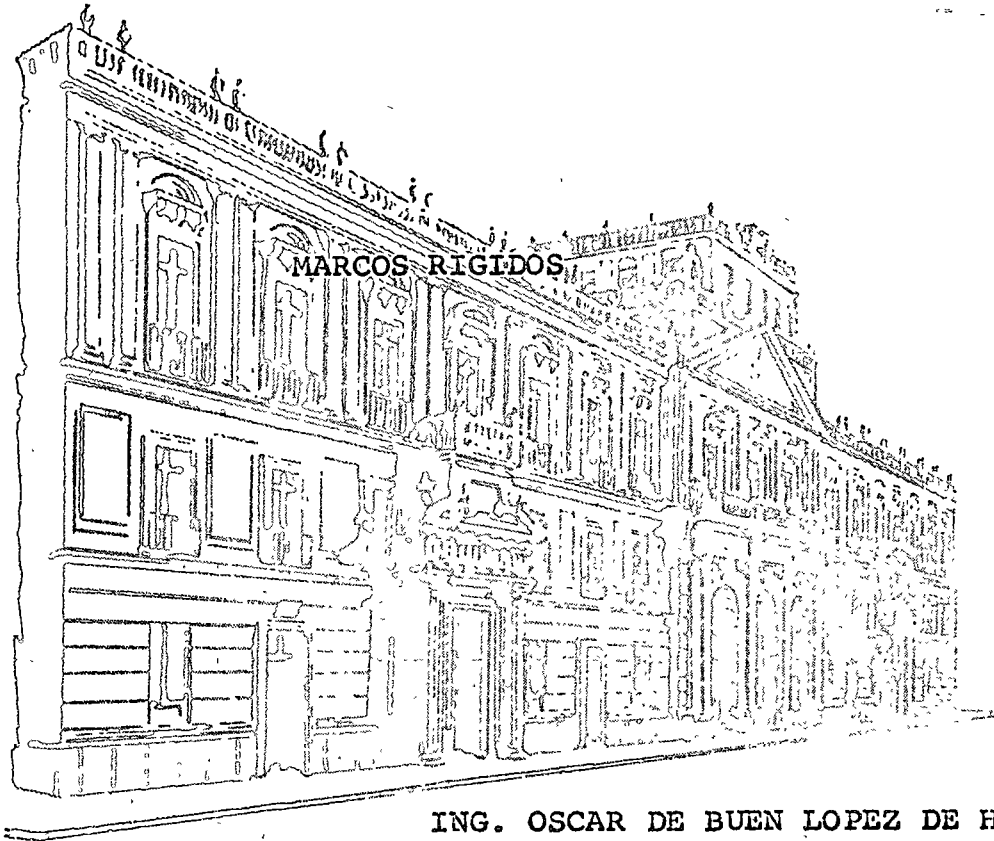




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



ING. OSCAR DE BUEN LOPEZ DE HEREDIA

SEPTIEMBRE DE 1976.

Centre national de la recherche scientifique  
et technologique  
118 route de Noisy  
91190 Evry-Courcouronnes



Centre national de la recherche scientifique

Centre national de la recherche scientifique

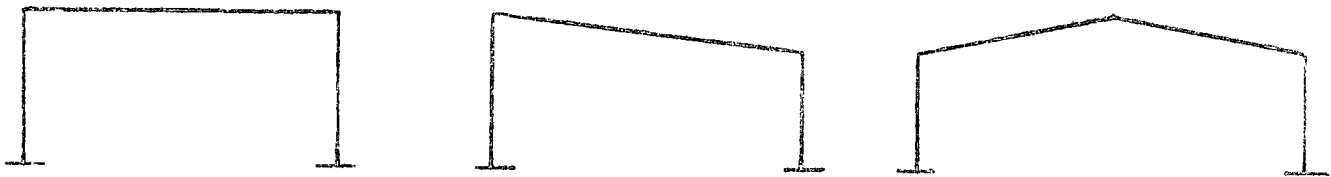
Centre national de la recherche scientifique

## MARCOS RÍGIDOS

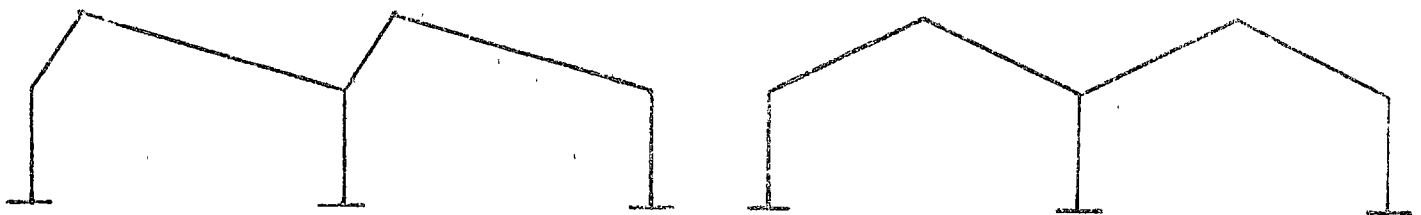
OSCAR DE BUEN

Los marcos rígidos constituyen el esqueleto resistente de gran número de construcciones modernas de muy diversos tipos. Su nombre proviene de que los elementos que los componen, vigas y columnas, están ligados entre sí por medio de conexiones rígidas, que transmiten los momentos, fuerzas normales y cortantes sin que haya desplazamientos lineales o angulares relativos entre los extremos de las barras que concurren en cada nudo, lo que hace que puedan resistir por sí solos, sin ayuda de elementos adicionales de otros tipos, cargas verticales y horizontales.

En estructuras industriales se utilizan con frecuencia marcos rígidos de un solo piso y cabezal horizontal o inclinado, sencillos o de varios claros, ligados entre sí por elementos que reciben la cubierta y proporcionan soporte lateral, evitando que el marco falle por inestabilidad fuera de su plano. En



MARCOS RÍGIDOS SENCILLOS



MARCOS RÍGIDOS CONTINUOS

estas condiciones el marco trabaja como una estructura

plana cargada en su plano, en el que se conserva cuando se deforma.

Los marcos rígidos se emplean cuando se necesita cubrir espacios grandes con pocas columnas intermedias, como sucede en gimnasios, auditorios, mercados, fábricas, bodegas, etc.

Si la cubierta es de lámina, de asbesto-cemento, aluminio o acero, se requieren pendientes considerables para desalojar el agua de lluvia sin que se introduzca entre las láminas, que en general están traslapadas, sin ningún sello entre ellas; se obtiene una buena solución utilizando marcos de cabezal inclinado, cuando el claro es reducido, o de dos aguas, en claros grandes. Las cubiertas inclinadas permiten eliminar los rellenos necesarios para el desagüe de techos horizontales, y como se hacen con materiales ligeros las cargas son reducidas, lo que redundará en economías en estructura y cimentación.

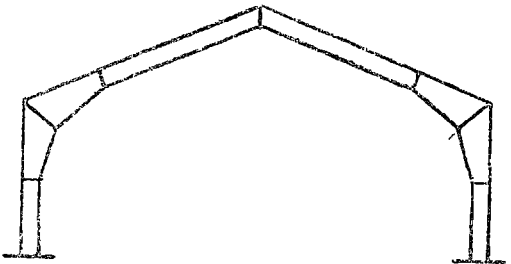
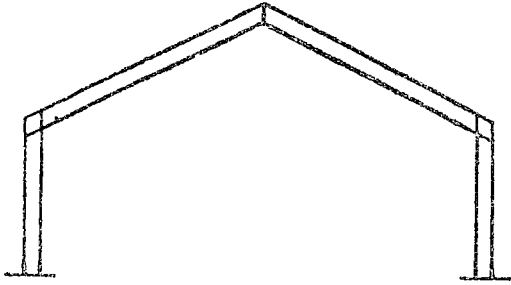
Los marcos rígidos con cabezal horizontal se usan en estructuras en diente de sierra (el cabezal es frecuentemente una armadura, en la que se coloca el ventanal), y cuando los claros no son muy grandes y por requisitos de operación se necesita una cubierta pesada (una losa de concreto, por ejemplo).

Aunque requiere más material que una solución a base de columnas (o muros) y armaduras libremente apoyadas, el marco rígido permite economías en fabricación y montaje, proporciona espacios libres mayores y es mucho más atractivo estéticamente.

Los marcos rígidos se fabrican con perfiles laminados o hechos

con placas soldadas, o con una combinación de ambos; las juntas son soldadas o atornilladas con pernos de alta resistencia.

○ Cuando los claros son grandes suelen utilizarse juntas acarteladas, con lo que pueden disminuirse los tamaños de vigas y columnas.



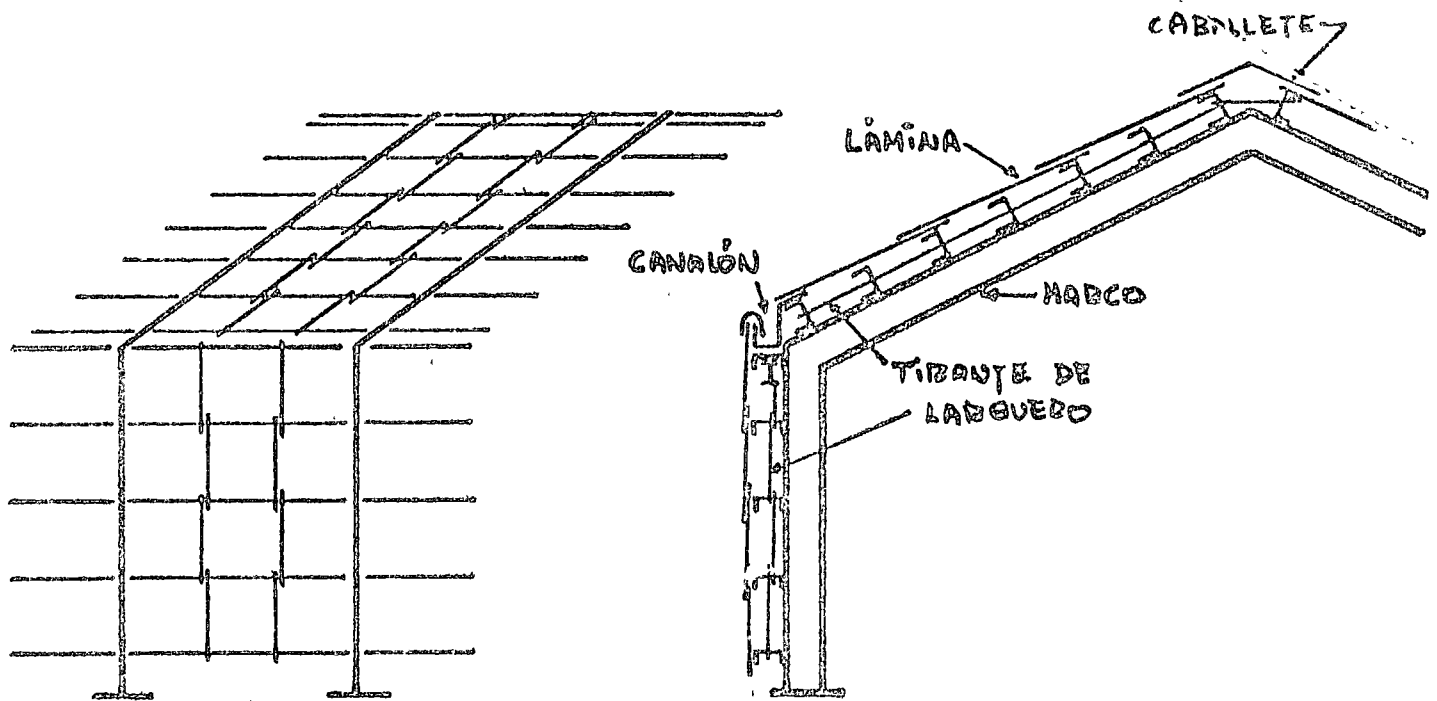
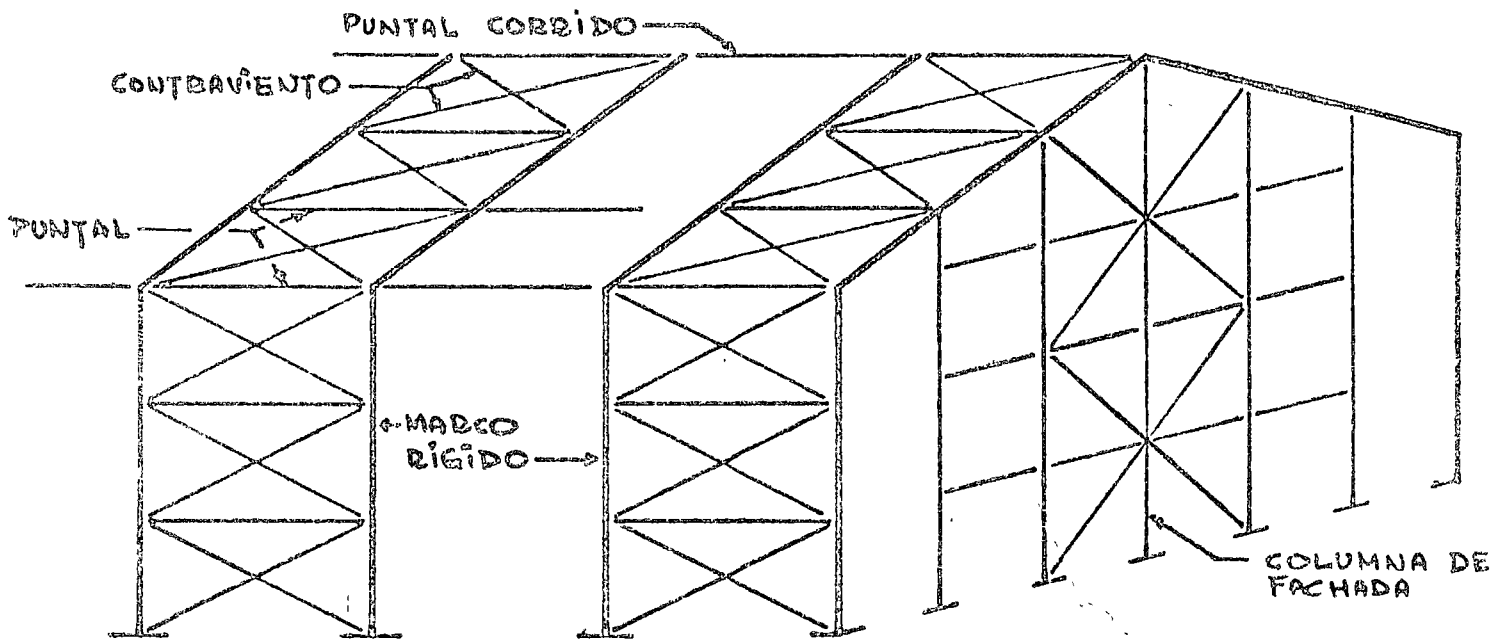
También es común el empleo de miembros de peralte variable. Tanto éstos como las cartelas se hacen con placas soldadas.

Un marco rígido resiste económicamente las cargas en su plano cuando

está provisto de elementos que le dan un soporte lateral adecuado,

○ pero tiene una resistencia casi nula ante fuerzas normales a su plano. El contraventeo desempeña el doble papel de proporcionar soporte lateral a vigas y columnas y darle resistencia y rigidez longitudinal al edificio (ver fig. en hoja 4).

○



LARGUEROS Y TIRANTES (SAG-RODS)

PROBLEMA

La estructura de un taller está formada por marcos rígidos de acero A36, de las dimensiones mostradas en la Fig. 1 y colocados a cada 10m. Diseñese uno de esos marcos para las cargas que se indican (el diseño se hará primero por flexión únicamente, sin considerar cortante, pandeo lateral, etc, y se revisará posteriormente teniendo en cuenta esos efectos).

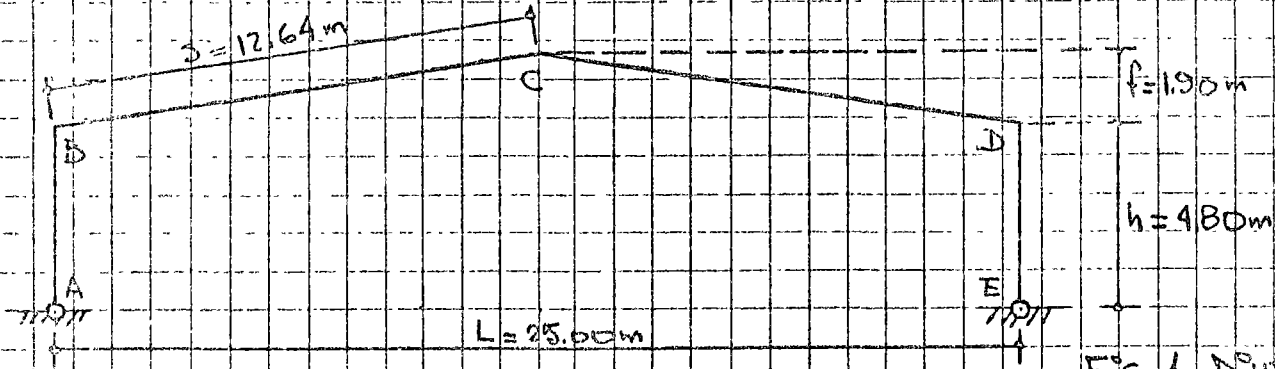


FIG. 1. DIMENSIONES DEL MARCO.

CARGAS Y CONDICIONES DE CARGA

I. CARGA VERTICAL

CARGA VERTICAL PERMANENTE.

Peso propio de la estructura = 20 kg/m<sup>2</sup>

Lamina de asbesto de 6mm = 15 "

TOTAL = 35 kg/m<sup>2</sup>

CARGA VERTICAL VIVA = 40 kg/m<sup>2</sup>

CARGA VERTICAL TOTAL = 35 + 40 = 75 kg/m<sup>2</sup> (750 kg/m)

II. VIENTO Presión neta = 47 kg/m<sup>2</sup>. Los efectos del viento se determinarán de acuerdo con el Reglamento de las Construcciones en el D.F., suponiendo que una de las paredes del taller está abierta en toda la altura.

CONDICIONES DE CARGA

I. Carga vertical completa, permanente + viva.

## II. Carga vertical permanente + viento.

### A. DISEÑO BASADO EN ESFUERZOS PERMISIBLES. (AISC 69, PARTE 1)

En las figuras 2 y 3, hoja 7, se muestran los diagramas de momentos flexionantes correspondientes a carga vertical completa y a la condición de viento más desfavorable (el análisis se hizo con el programa STRESS y una computadora IBM 1130; se supuso que el marco tiene momento de inercia variable, con cabezal acartelado y columnas de mayor peralte en el extremo superior que en el inferior).

A.1 La misma sección en todo el marco. El diseño queda regido por el momento flexionante máximo, que se presenta en la unión del cabezal y la columna de la derecha.

De acuerdo con el AISC, art. 1.5.14.1, si se emplea una sección compacta los momentos negativos producidos por carga vertical pueden disminuirse en 10%, con lo que se obtiene el diagrama dibujado con línea interrumpida en la Fig. 2.

Momento máx. producido por carga vertical (total) =  $-30.1 \text{ Tm}$ .

Mom. máx. producido por c. vertical permanente + viento =  
 $= -33.4 \times 35/75 + 30.0 = +14.4 \text{ Tm}$ .

El diseño queda regido por la condición de carga I (carga permanente completa), lo que es usual en marcos de este tipo, y debe escogerse una sección que resista  $30.1 \text{ Tm}$ .

Se revisará la de la Fig. 4, que tiene un módulo de sección  $S = 2369 \text{ cm}^3$ .



propiedades de los materiales que se usen en el momento de construir  
los cables, con los cuales se construyen y colocan en el momento de  
construirse las torres de la línea.

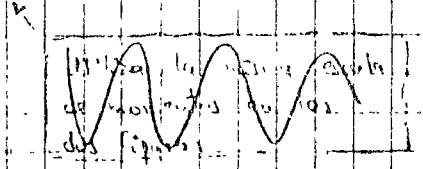
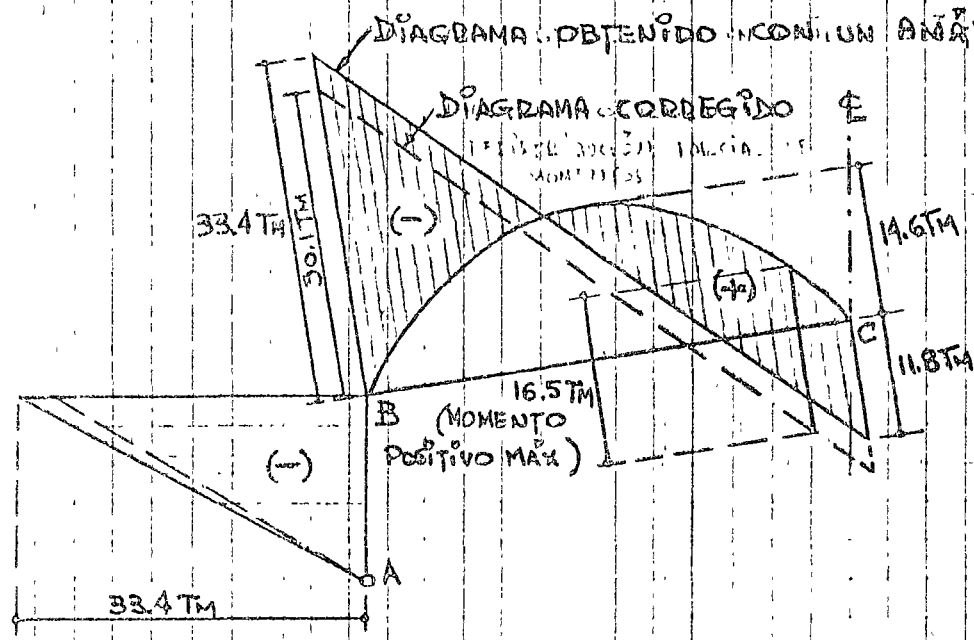


FIG. 2. DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES PRODUCIDOS POR CARGA VERTICAL TOTAL (NEGATIVOS (+) Y POSITIVOS (-)).

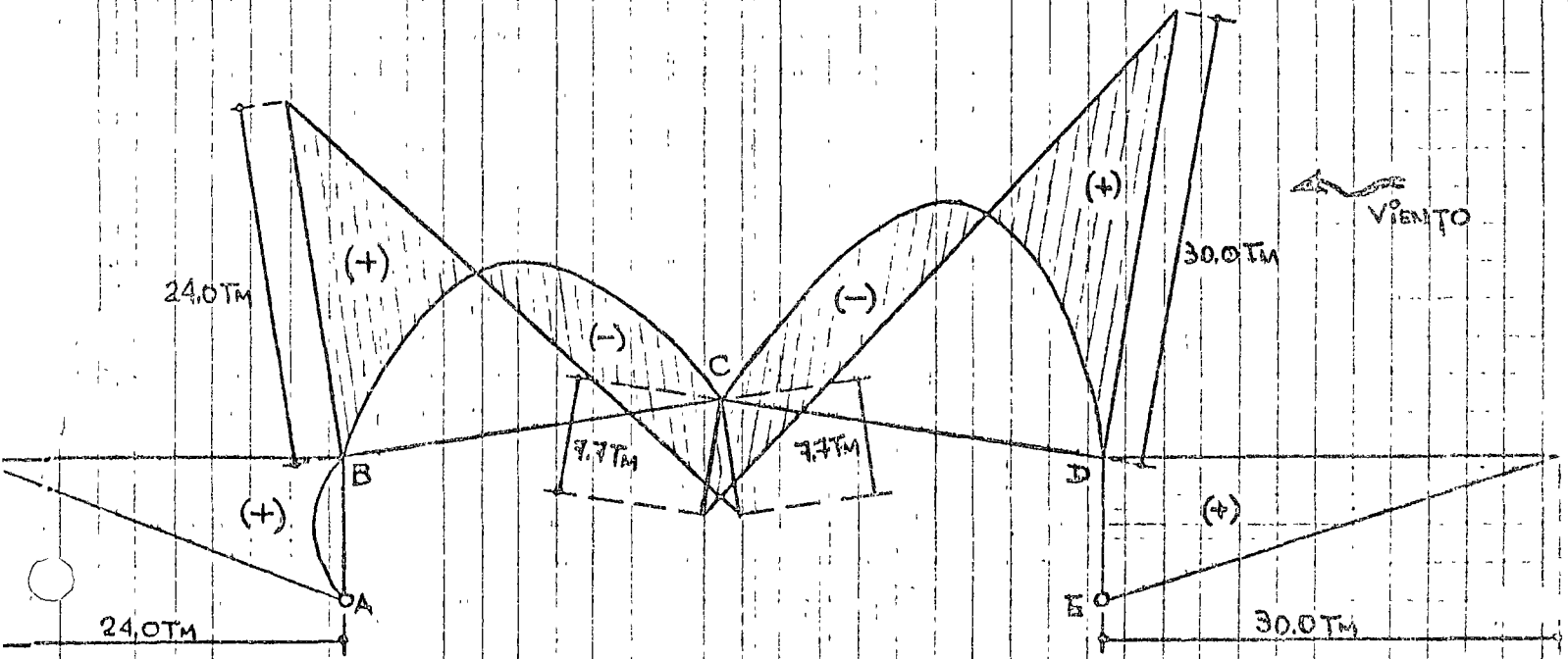


FIG. 3. DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES PRODUCIDOS POR VIENTO; PARED DERECHA ABIERTA

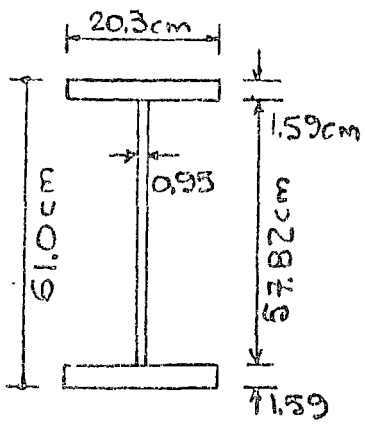


FIG. 4

$$(b/2t)_{\text{pat.}} = 20.3/1.59 \times 2 = 6.38 < 545/\sqrt{2530} = 10.8$$

$$(b/t)_{\text{alma}} = 57.82/0.95 = 60.9 < 5366/\sqrt{2530} = 106.7$$

La sección es compacta, y el esfuerzo permisible es  $F_b = 0.66 F_y = 1670 \text{ kg/cm}^2$ .

El esfuerzo normal máximo producido por el momento de 30.1 Tm es

$$f_b = 3010000/2369 = 1271 \text{ kg/cm}^2 < 1670$$

La sección propuesta está sobrada.

A.2 Sección transversal variable. En la mayor parte del marco puede utilizarse una sección que resista el momento máximo positivo producido por carga vertical completa (165 Tm), la que debe acortarse en las juntas entre columnas y aleros para resistir los momentos mas grandes que hay en esas zonas.

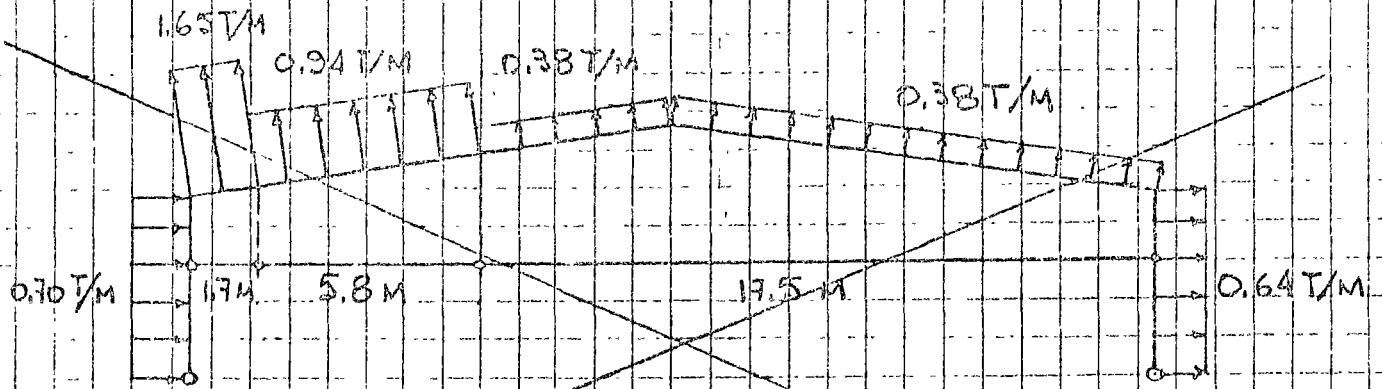
B. DISEÑO PLÁSTICO (AISC 69, PARTE 2).

Factores de carga. Para cargas permanentes,  $\lambda_1 = 1.7$ ; para cargas permanentes + viento,  $\lambda_2 = 1.7/1.33 = 1.28$ .

B.1. La misma sección en todo el marco.

Diseño por carga vertical. Está en las hojas 9 y 10.

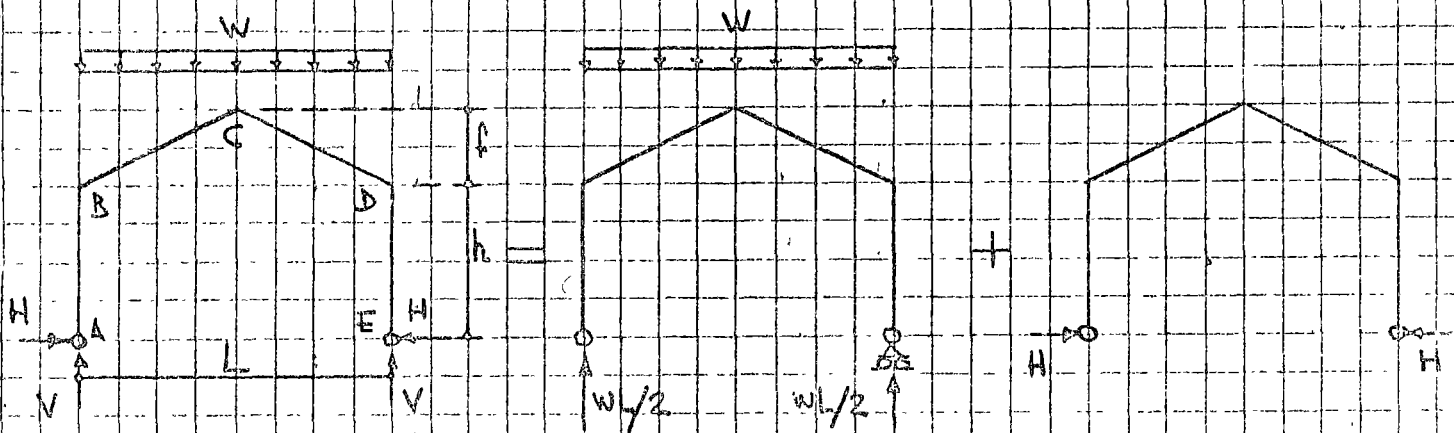
Revisión por cargas permanentes y viento. Para efectuar esta revisión se traza el diagrama isostático de momentos producidos por cargas permanentes + viento con factor de carga  $\lambda_2 = 1.28$ , y se superpone el correctivo siguiendo el camino de la Fig. 5. Si puede obtenerse un diagrama final en el que se cumplan las condiciones de equilibrio y plasticidad, pero no la de mecanismo (es decir, en el que  $M < M_p$  en todas las secciones,



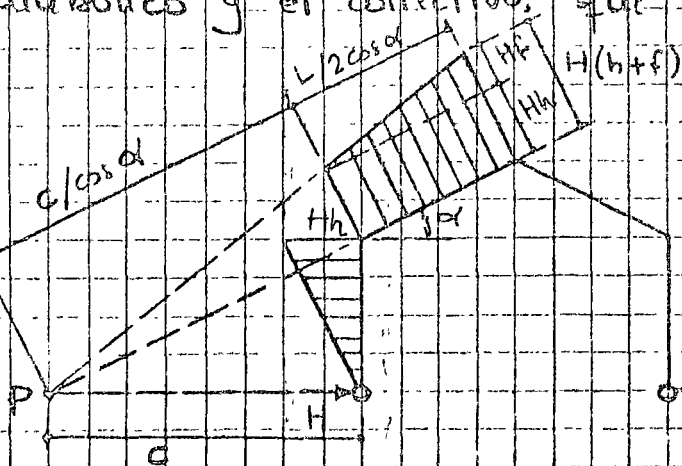
El diseño se hará para carga vertical completa, permanente + viva, con un factor de carga  $\lambda = 1.7$ , o para carga vertical permanente + viento con  $\lambda = 1.7/1.33 = 1.28$ .

DISEÑO POR CARGA VERTICAL

Se utilizará el método estático en la forma que se indica a continuación.



El diagrama de momentos se obtiene superponiendo el isostático parabólico y el correctivo, que se determina como sigue:



$$\frac{HF}{L/2\cos\alpha} = \frac{Hh}{c/\cos\alpha} ; \frac{2HF}{L} = \frac{Hh}{c}$$

$$\therefore c = \frac{HhL}{2HF} = \frac{Lh}{2F}$$

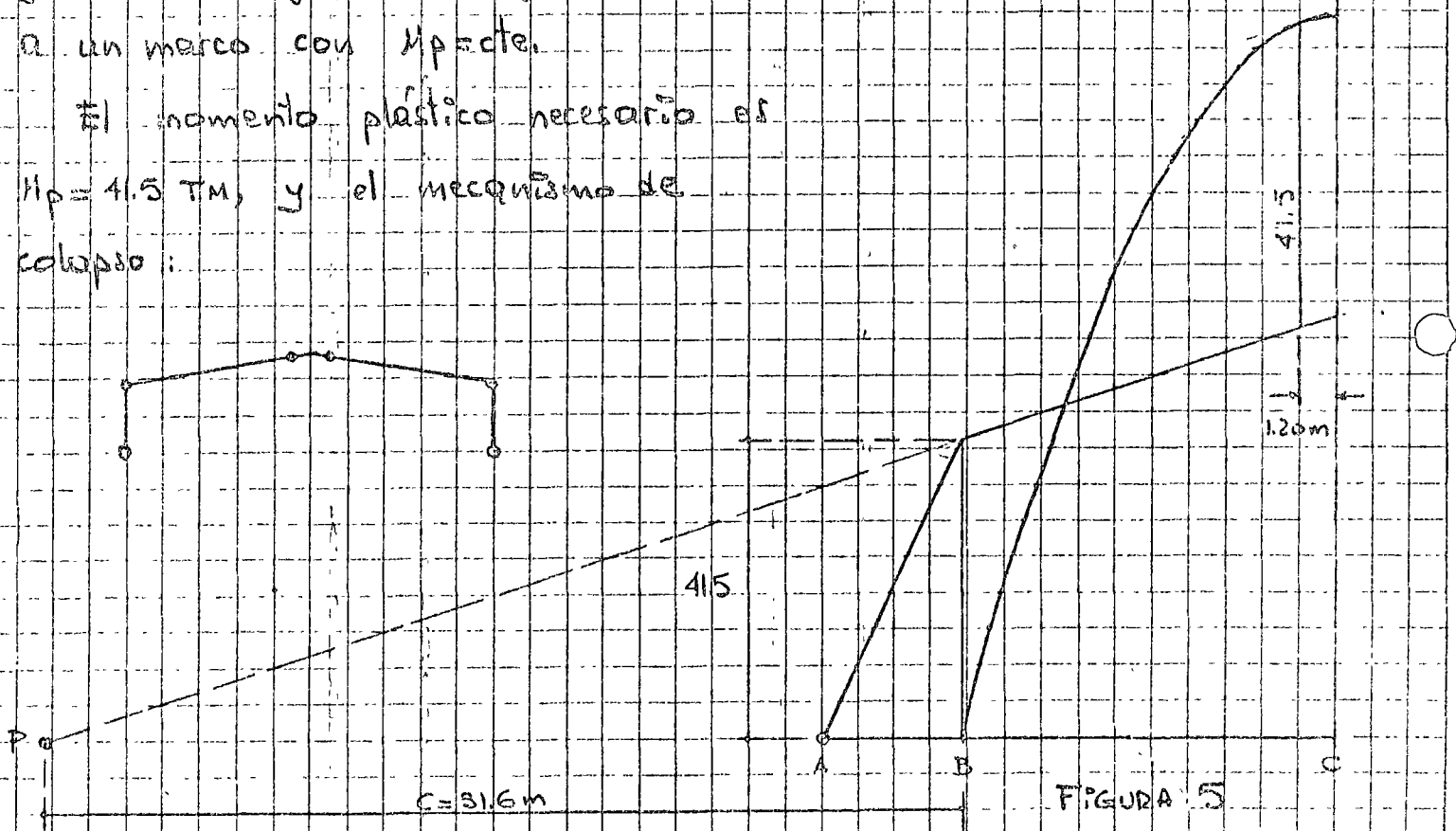
El diagrama correctivo de cada uno de los alcidos es una línea recta de inclinación cualquiera, pero que pasa por el punto P, cuya posición se determina en la hoja anterior.

Carga vertical de diseño  $\lambda \cdot W = 1.7 \times 750 = 1275 \text{ Kg/m}$

$M_{\text{max. isostático}} = \frac{(\lambda \cdot W) L^2}{8} = \frac{1275 \times 25^2}{8} = 99.6 \text{ Tm}; \quad c = \frac{Lh}{2f} = \frac{25 \times 4.8}{2 \times 1.9} = 31.6 \text{ m}$

En la figura se ha dibujado la mitad del diagrama de momentos y se ha dibujado el diagrama correctivo que corresponde a un marco con  $M_p = \text{cte.}$

El momento plástico necesario es  $M_p = 41.5 \text{ Tm}$ , y el mecanismo de colapso:



COMPROBACIÓN: De la pag. A12, "Plastic Design in Steel", (ISC, 1959).  
 $Qh = 1.30 \therefore Q = 1.30/4.80 = 0.300$ . Para  $c = 0$  (carga vertical) y  $Q = 0.300$ ,  
 $M_p/WL^2 = 0.0525 \therefore M_p = 0.0525 \cdot W L^2 = 0.0525 \times 1275 \times 25^2 = 41.8 \text{ Tm} = 41.5$

Si se utiliza un mismo perfil en todo el marco, por carga vertical se requiere que tenga  $M_p = 41.5 \text{ Tm}$ .

O  $M = M_p$  en un número de secciones insuficiente para que se forme un mecanismo, y menor en todas las demás, donde  $M_p$  es el momento plástico necesario por carga vertical) queda demostrado que la condición en estudio no es crítica, y se conservan los perfiles necesarios por carga vertical. En caso contrario, se aumenta el momento plástico hasta el requerido para que el marco se convierta en un mecanismo bajo la acción combinada de cargas permanentes y viento, y queda sobrado para cargas verticales.

En este problema es fácil demostrar que la condición de carga que rige el diseño es la primera, y que la combinación con viento no es crítica.

○ Elección de la sección transversal. Se necesita una sección en la que  $M_p = 25y = 41.5 \text{ Tm}$ , o sea  $Z = 4150000 / 2530 = 1640 \text{ cm}^3$ . El perfil utilizado en el diseño plástico está muy sobrado, pues tiene un módulo de sección plástico  $Z = 2711 \text{ cm}^3$ .

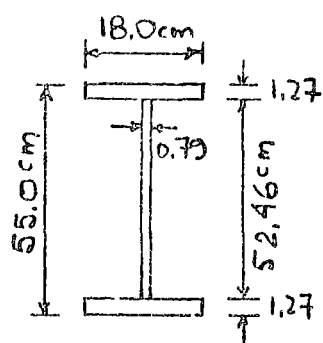


FIG. 6

Las relaciones ancho/grueso de la sección de la Fig. 6 son:

Patines.-  $b/2t = 18.0/2 \times 1.27 = 7.09 < 8.5$

Alma.-  $b/t = 52.46/0.79 = 66.4 < 3452/\sqrt{2530} = 68.6$

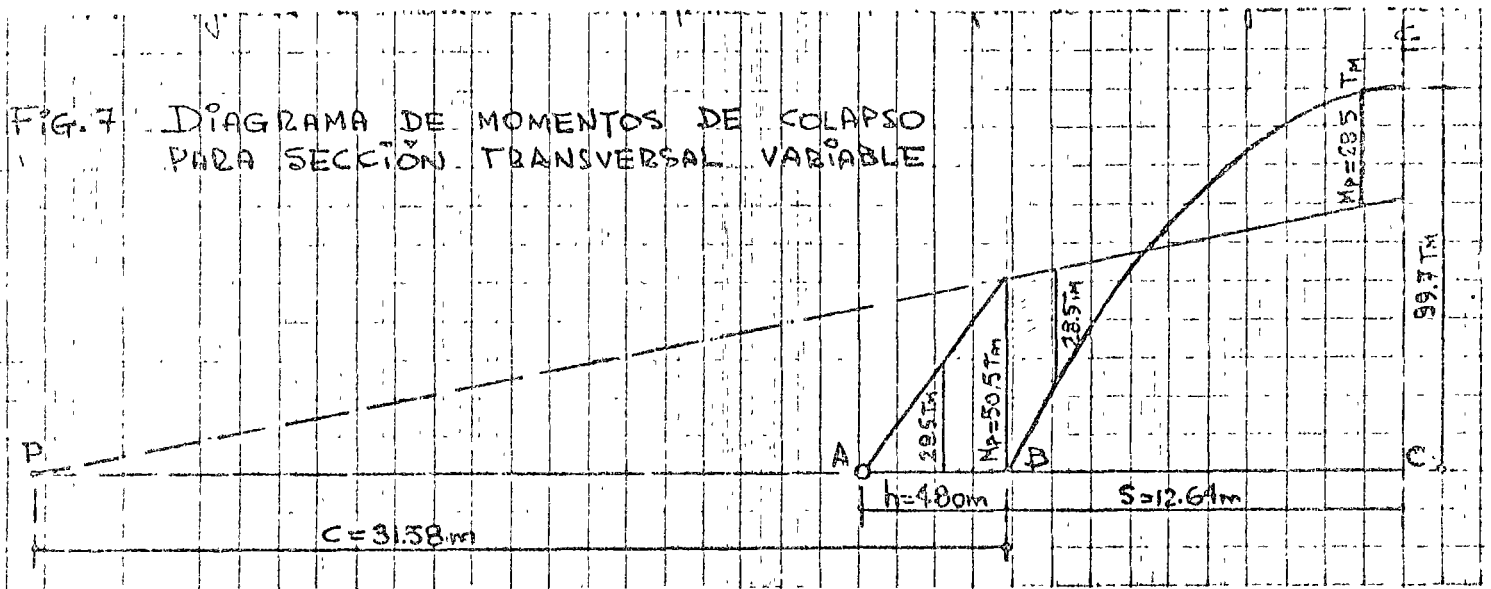
Cumple los requisitos del art. 2.7 de AISC 69

para ser utilizada en estructuras diseñadas plásticamente, y su módulo de sección es  $Z = 1771 \text{ cm}^3 > 1640$ , de manera que la sección de la Fig. 6 es correcta.

B2. Sección transversal variable. En la zona central del cabezal se utilizará una sección con patines de  $15.2 \times 1.27 \text{ cm}$  y alma

de  $42.46 \times 0.63 \text{ cm}$  (peralte total,  $45 \text{ cm}$ ), que tiene  $Z = 1128 \text{ cm}^3$  y  $M_p = 28.5 \text{ Tm}$ .

El diagrama de momentos correspondiente al colapso se traza como el de la Fig. 5, pero la línea correctiva se escoge de



manera que el momento máximo positivo sea de  $28.5 \text{ Tm}$ , que corresponde al perfil básico. En los nudos B y D se utilizan secciones que resistan  $50.5 \text{ Tm}$ , y en las zonas sombreadas se emplean barras acortadas, de resistencia variable (una sección de  $60 \text{ cm}$  de peralte total, con patines de  $20.3 \times 1.27 \text{ cm}$  y alma de  $0.75 \text{ cm}$  tiene  $Z = 2293 \text{ cm}^3$  y  $M_p = 58.1 \text{ Tm}$ ; aunque un poco sobrada, podría emplearse en los nudos B y D).

Se han obtenido hasta ahora las dimensiones de los perfiles teniendo en cuenta únicamente efectos de flexión y admitiendo, por hipótesis, que el marco completo se conserva en su plano original hasta la falla. En lo que sigue se va a completar el diseño, considerando efectos de cortante, flexocompresión, inestabilidad de miembros y de conjunto, etc, y suponiendo que las paredes del taller deben estar abiertas en  $4 \text{ m}$  de altura.

A. DISEÑO BASADO EN ESFUERZOS PERMISIBLES (AISC 69, PARTE 1)

En hojas anteriores se demostró que el diseño queda regido por carga vertical, y la sección transversal requerida se obtuvo con los momentos determinados con un análisis elástico, redistribuidos parcialmente, y con un esfuerzo permisible de  $0.66 F_y$ . Se comprobó que la sección escogida es compacta pero no se revisaron los requisitos adicionales que deben satisfacerse para que se permita la redistribución de momentos y el incremento en los esfuerzos, dado que se supuso que el marco no se sale de su plano original.

A continuación se reproduce el art. 1.5.1.4.1 de AISC 69, en el que se fijan esos requisitos:

“El esfuerzo permisible en tensión o compresión en las fibras extremas de miembros compactos, laminados o hechos con placas, cargados en un plano de simetría que contiene los ejes de menor momento de inercia, y que llenen los requisitos que se dan a continuación, es

$$F_b = 0.66 F_y$$

Las condiciones que deben satisfacerse para que un elemento estructural pueda diseñarse de acuerdo con este artículo son:

a. Los patines están unidos con el alma o almas en forma continua.

b. Cuando el patín comprimido está formado por elementos plenos no atisados, su relación ancho/groeso no excede de  $515/\sqrt{F_y}$ .

c. La relación peralte/groeso del alma o almas no excede de

$$h/t = 5366 (1 - 3.74 f_a/F_y) / \sqrt{F_y} \text{ cuando } f_a/F_y \leq 0.16$$

$$h/t = 2155 / \sqrt{F_y} \text{ cuando } f_a/F_y > 0.16.$$

e. La longitud no soportada lateralmente del patín en compresión no excede de  $637b/\sqrt{F_y}$  ni de  $1400000/(d/A_p)F_y$ . (Los incisos c y f se refieren a secciones en cajón; no se reproducen aquí).

Con la excepción de las trabes hechas con aceros distintos en alma y patines y las de acero A514, las vigas que llenan los requisitos a a f y que son continuas sobre uno o más apoyos, o que están conectadas rígidamente a columnas, pueden diseñarse para 9/10 de los momentos negativos producidos por carga vertical, obtenidos por medio de un análisis elástico, siempre que los momentos máximos positivos se incrementen en 1/10 del promedio de los negativos. Esta reducción no es aplicable a momentos producidos por cargas que actúan sobre vigas en voladizo. La reducción del 10% puede tenerse en cuenta también en el diseño de columnas flexocomprimidas, siempre que el esfuerzo  $f_a$  producido por la fuerza axial no sea mayor que  $0.15F_a$ .

Como las condiciones a a f tienen por objeto obtener estructuras capaces de admitir la formación y rotación de las articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso, pueden liberalizarse en las zonas en que no aparecen esas articulaciones, en las que basta con que se cumplan los requisitos necesarios en estructuras diseñadas elásticamente.

La condición a se cumple si se utiliza un perfil laminado o uno



Formado por placas unidas entre sí por medio de soldaduras continuas.

b) y d). En la sección de la Fig. 4 se tiene:

○ Patina.  $(b/2)/t = 20.3/2 \times 1.59 = 6.38 < 545/\sqrt{F_y} = 10.8$

Alma.  $h/t = 57.82/0.95 = 60.9$ . Las columnas están en condiciones más críticas que las vigas, porque hay en ellas una fuerza normal más elevada, 9.38 ton;  $f_a = 9380/119.48 = 79 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_a/F_y = 0.031 < 0.16$ ,

$(h/t)_{\text{lim.}} = 5366(1 - 3.71 \times 0.031)/\sqrt{2530} = 94.3 > 60.9$ .

e) La distancia máxima admisible entre puntos del patín en compresión soportados lateralmente es la menor de

$637b/\sqrt{F_y} = 637 \times 20.3/\sqrt{2530} = 257.1 \text{ cm}$

$1400000/(d/A_p)F_y = 1400000/(61./32.28)2530 = 292.8 \text{ cm}$

Este requisito puede cumplirse en los aleros, pero no en las

○ columnas, en las que por condiciones de proyecto deben tenerse 4.00m libres.

Los aleros pueden diseñarse utilizando momentos redistribuidos, pero para las columnas deben emplearse los obtenidos en el análisis elástico, sin modificar. En esas condiciones se requiere un perfil más resistente en las columnas que en las vigas, y las articulaciones plásticas se forman en éstas. El diseño es adecuado si las columnas permanecen elásticas y estables bajo carga última y las vigas están contraventeadas de manera que se cuente con la capacidad de rotación necesaria en las articulaciones que se formarían eventualmente en ellas.

○ DISEÑO DE LOS ALEROS. Puede hacerse con momentos redistribuidos y  $F_b = 0.66F_y$ . En la Fig. 8 se muestran los diagramas de elementos mecánicos correspondientes a momentos redistribuidos.

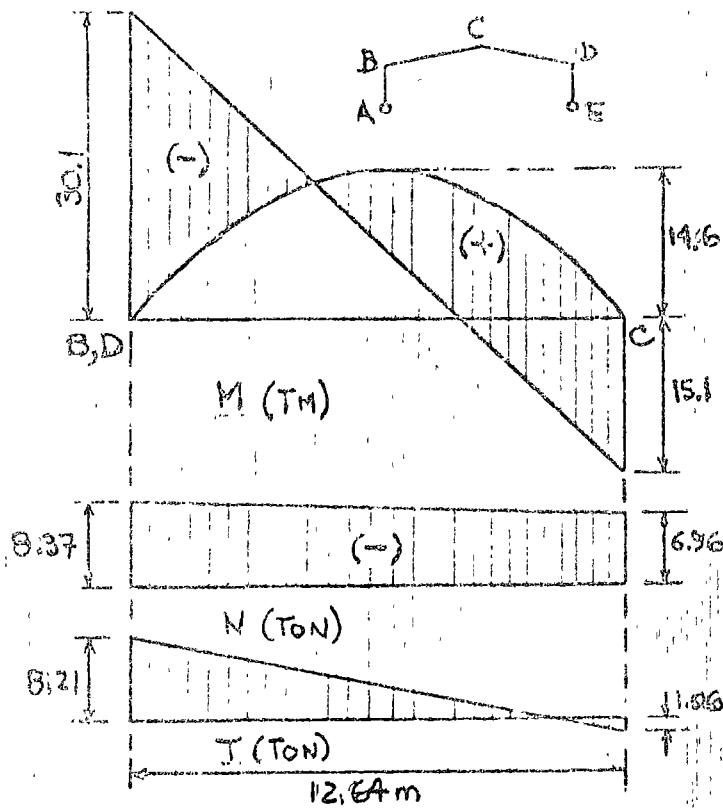


FIG. 8. DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECÁNICOS DE LOS ALEROS

Para calcular esfuerzos permisibles y factores de amplificación puede tomarse  $L_x = 5 = 12.64m$ , Fig. 1,  $L_y$  igual a la separación entre puntos soportados lateralmente, y  $K_x = K_y = 1.0$ .

La sección de la Fig. 4 puede revisarse tomando  $(L/r)_x$  como esbeltez crítica y colocando el contraviento lateral necesario para que lo sea efectivamente.

$$(KL/r)_x = 1.0 \times 1264 / 24.6 = 51,$$

$$F_a = 1284 \text{ kg/cm}^2,$$

$$(KL/r)_y \leq 51, K_y = 1.0, r_y = 4.3 \text{ cm},$$

$\therefore (L_y)_{max} \leq 219 \text{ cm}$ . Cumpliendo esta condición se logra también que el diseño se efectúe con  $F_b = 0.66 F_y$ .

Los largueros se utilizan para dar soporte lateral cuando tienen características adecuadas; en caso contrario, deben reforzarse o colocarse puntales adicionales. En uno u otro caso pueden requerirse contravientos en diagonal.

Revisión del alero en flexocompresión (con momentos redistribuidos y  $F_b = 0.66 F_y$ ).

$f_a = 8370 / 119.48 = 70 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_a / F_a = 70 / 1284 = 0.055 < 0.15$   $\therefore$  Basta comprobar si se satisface la condición  $f_a / F_a + f_b / F_b \leq 1.0$ .

$$f_b = 3010000 / 2367 = 1271 \text{ kg/cm}^2$$

$f_a/F_a + f_b/F_b = 0.055 + 1271/1670 = 0.816 < 1.00$  La sección de la Fig. 4 está sobrada.

Se ensayará otra sección de dimensiones exteriores iguales, pero con patines de 1.27 cm ( $1/2''$ ) y alma de 0.79 cm ( $5/16''$ ), cuyas propiedades geométricas son  $A = 97.79 \text{ cm}^2$ ,  $I_x = 59168 \text{ cm}^4$ ,  $S_x = 1941 \text{ cm}^3$ ,  $r_x = 25.0 \text{ cm}$ ,  $I_y = 1778 \text{ cm}^4$ ,  $r_y = 4.3 \text{ cm}$ .

Relaciones ancho/grueso.

Patines.  $(b/2)/t = 20.3/2 \times 1.27 = 7.99 < 10.8$

Alma.  $f_a = 8370/97.79 = 86 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_a/F_y = 0.034 < 0.16$ ,  $(h/t)_{lim} = 5366 (1 - 3.74 \times 0.034) / \sqrt{2530} = 93.1$ ;  $h/t = 58.4/0.79 = 74.0 < 93.1$ .

La sección es compacta.

Distancia máxima admisible entre secciones con soporte lateral.

$637b/\sqrt{F_y} = 637 \times 20.3 / \sqrt{2530} = 257.1 \text{ cm}$

$1400000 / (d/A_p) F_y = 1400000 \times 20.3 \times 1.27 / 61.0 \times 2530 = 233.9 \text{ cm}$

Si en las zonas de los aleros cercanas a las columnas se soportan lateralmente puntas separadas no más de 234 cm, el diseño puede hacerse con momentos redistribuidos y  $F_b = 1670 \text{ kg/cm}^2$ .

Revisión en flexocompresión.  $(KL/r)_x = 1.0 \times 1264 / 25 = 51$ ,  $F_a = 1284 \text{ kg/cm}^2$ .

$(KL/r)_y \leq 51$ ,  $(L_y)_{max} \leq 51 \times 4.3 = 219 \text{ cm}$

$f_a = 86 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_a/F_a = 0.067 < 0.15$  ∴ se revisa únicamente la fórmula  $f_a/F_a + f_b/F_b \leq 1.0$ .  $f_b = 3010000/1941 = 1551 \text{ kg/cm}^2$

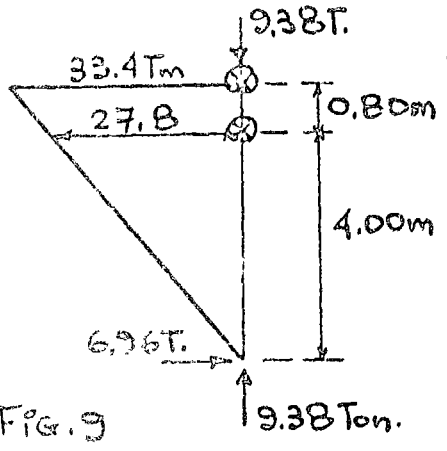
$f_a/F_a + f_b/F_b = 0.067 + 1551/1670 = 0.067 + 0.929 = 0.996 < 1.00$

Revisión por cortante.  $\tau_{max} = 8210 / 58.4 \times 0.79 = 178 \text{ kg/cm}^2 < C_f =$

$0.4 F_y = 1012 \text{ kg/cm}^2$ . El cortante no suele ser crítico en estructuras de este tipo (excepto en las juntas).

Se acepta la sección ensayada, dándole soporte lateral con los

DISEÑO DE LAS COLUMNAS. Se hace con los momentos clásicos (sin redistribución). Los puntos marcados  $\otimes$  en la Fig. 9, y la base de la columna, están soportados lateralmente; los 4m inferiores deben dejarse libres.

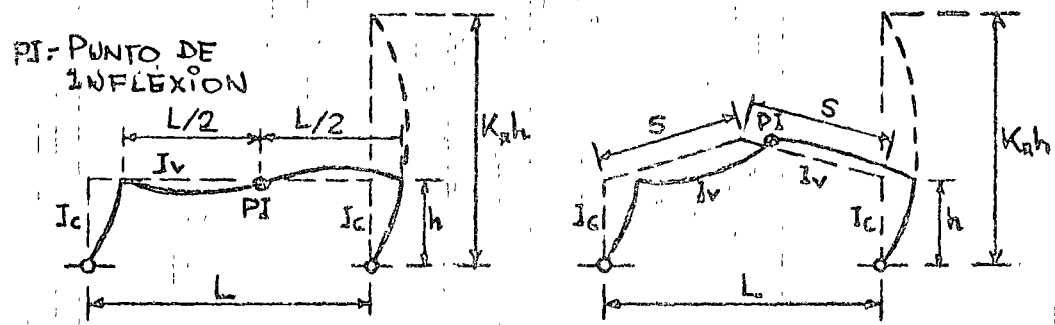


LONGITUDES EFECTIVAS.  $K_y$  puede tomarse

conservadoramente igual a 1.00, pues en las fachadas se colocan puntales y contraentres vertical en equis que impiden que las secciones soportadas lateralmente se salgan

del plano del marco. En cambio, no suele haber elementos auxiliares que impidan los desplazamientos lineales de los nudos del marco, en su plano.

$K_x$  puede determinarse con el nomograma recomendado por el AISC, calculando el factor  $G$  con la longitud total 2S de



FACTORES DE RESTRICCIÓN

EXTREMO DE LA COLUMNA	MARCO RECTANGULAR	MARCO DE DOS AGUAS
SUPERIOR	$G = \frac{I_c/h}{I_v/L}$	$G = \frac{I_c/h}{I_v/2S}$
INFERIOR (ARTICULACIÓN)	$G_{teor.} = \infty$ $G_{rec.} = 10$	$G_{teor.} = \infty$ $G_{rec.} = 10$

FIG. 10 FACTORES DE RESTRICCIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA LONGITUD EFECTIVA DE LAS COLUMNAS. PANDEO CON DESPLAZAMIENTO LATERAL EN EL PLANO DEL MARCO

los aleros en lugar del claro L del caso general (Fig. 10).

Se llega a los resultados siguientes:

$$G_s = \frac{I_c/h}{I_v/25} = \frac{25}{h} = \frac{2 \times 12.64}{4.80} = 5.27 \quad (\text{se ha supuesto } I_c = I_v)$$

$G_i = 10$ , valor recomendado para bases de columnas articuladas, cuando en la construcción no se toman medidas especiales para permitir las rotaciones libremente.

Del nomograma,  $K = 2.6$ .

Revisión de la sección de la Fig. 4

Relaciones ancho/grueso. Como la columna se va a diseñar con los momentos elásticos completos se permiten relaciones ancho/grueso mayores que cuando hay redistribución.

Tramo superior.  $(KL/r)_x = 2.6 \times 480 / 24.6 = 51$ ,  $(KL/r)_y = 80 / 4.3 = 19$ ,

$$F_a = 1284 \text{ kg/cm}^2, f_a = 9380 / 119.48 = 79 \text{ kg/cm}^2, f_a/F_a = 0.062 < 0.15.$$

Basta con revisar la condición  $f_a/F_a + f_b/F_b \leq 1.0$ , y en el cálculo de  $F_b$  se toma  $C_b = 1.75 + 1.05(M_1/M_2) + 0.3(M_1/M_2)^2 \leq 2.3$ .

$$M_1/M_2 = -27.8/33.4 = -0.83, C_b = 1.09$$

$$F_b = \frac{843700 C_b}{L_d/A_p} = \frac{843700 \times 1.09}{80 \times 61 / 32.28} = 6083 \text{ kg/cm}^2 > 1520 \therefore F_b =$$

$$= 1520 \text{ kg/cm}^2. f_b = 3340000 / 2369 = 1410 \text{ kg/cm}^2.$$

$$f_a/F_a + f_b/F_b = 0.062 + 1410/1520 = 0.990 < 1.00$$

Tramo inferior.  $(KL/r)_y = 400 / 4.3 = 93 > (KL/r)_x$ ,  $F_a = 973 \text{ kg/cm}^2$

$$M_1/M_2 = 0, C_b = 1.75, F_b = 1953 \text{ kg/cm}^2 > 1520 \therefore F_b = 1520 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_a = 79 \text{ kg/cm}^2, f_a/F_a = 0.081 < 0.15; f_b = 2780000 / 2369 = 1173 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_a/F_a + f_b/F_b = 0.081 + 1173/1520 = 0.853 < 1.00$$

Se acepta la sección ensayada, Fig. 4, soportada lateralmente en los puntos indicados en la Fig. 9. El diseño queda

regido por el tramo superior de la columna (aunque el tramo inferior tiene una longitud libre de pandeo alrededor de  $\lambda$  bastante mayor que la del superior, disminuye el momento máximo en él, y la disminución del esfuerzo permisible  $f_a$  tiene poca importancia porque la fuerza axial es muy pequeña).

En los perfiles obtenidos en el diseño no se conservan las relaciones entre los momentos de inercia de vigas y columnas que se utilizaron en el análisis lo que obligaría, en teoría, a reanalizar el marco. Sin embargo, los resultados de un análisis elástico cambian poco cuando se modifican ligeramente las rigideces relativas de los miembros de la estructura, y hay otros factores, como la redistribución de momentos, que hacen que los cambios de rigideces sean todavía menos significativos. También se modifica algo el factor  $K_x$  de las columnas.

B. DISEÑO PLÁSTICO (AISC 69, PARTE 2) En la Fig. 5 se muestran el diagrama de momentos y el mecanismo de colapso correspondientes a carga vertical, que es la condición que rige el diseño, y en la Fig. 6 está la sección transversal que se obtuvo al considerar comportamiento en el plano exclusivamente; sus propiedades geométricas principales son  $A = 87.16 \text{ cm}^2$ ,  $A_p = 27.86 \text{ cm}^2$ ,  $I_x = 42514 \text{ cm}^4$ ,  $S_x = 1546 \text{ cm}^3$ ,  $Z_x = 1772 \text{ cm}^3$ ,  $r_x = 22.1 \text{ cm}$ ,  $I_y = 1234 \text{ cm}^4$ ,  $r_y = 3.76 \text{ cm}$ ,  $r_T = 4.55 \text{ cm}$ .

DISEÑO DE LOS ALEROS. Sometida a flexión, la sección de la Fig. 6 satisface los requisitos necesarios para ser utilizada en estructuras diseñadas plásticamente, pero como el alero trabaja a flexocompresión se reduce la relación peralte/grueso admisible

en el alma, y deben cumplirse las condiciones

$$\text{Si: } \frac{P}{P_y} \leq 0.27, \frac{h}{t} \leq \frac{3452}{\sqrt{F_y}} \left(1 - 1.4 \frac{P}{P_y}\right); \text{ Si } \frac{P}{P_y} > 0.27, \frac{h}{t} \leq \frac{2154}{\sqrt{F_y}}$$

$F_y$  se toma en  $\text{kg/cm}^2$ .

En este caso  $P_y = A F_y = 220.5 \text{ Ton}$ ,  $P/P_y = 11.06/220.5 = 0.05 < 0.27$ , luego  $h/t$  no debe exceder de  $(3452/\sqrt{2530})(1 - 1.4 \times 0.05) = 63.8$ ; se tiene  $52.46/0.79 = 66.4$ , ligeramente mayor, pero se acepta teniendo en cuenta que la diferencia es pequeña y que el peralte del alma es realmente la distancia libre entre los bordes de los cordones de soldadura que la unen con los patines.

Los aleros deben soportarse lateral y torsionalmente en las zonas en que se forman las primeras articulaciones plásticas (en la unión con las columnas), para que puedan aceptar las rotaciones asociadas con el mecanismo de colapso.

Se debe soportar lateralmente la sección extrema del alero, en la que se une con la columna, y la situada a una distancia de ella no mayor que

$$L_{cr} = \left[ \left( \frac{96676}{F_y} \right)^{1/2} + 25 \right] r_y \quad (63.2 r_y \text{ para acero A36}), \text{ cuando } M/M_p > -1.5.$$

$$L_{cr} = \left( \frac{96676}{F_y} \right)^{1/2} r_y \quad (38.2 r_y \text{ para acero A36}), \text{ cuando } -0.5 \geq \frac{M}{M_p} > 1.0$$

$M/M_p$  es la relación entre los momentos en los extremos del tramo no contraventado, positiva cuando se flexiona en curvatura doble y negativa en caso contrario;  $F_y$  se toma en  $\text{kg/cm}^2$ .

Para el perfil de la Fig. 6 se obtiene

$$\text{Si: } M/M_p > 0.5, \quad L_{cr} = 63.2 \times 3.76 = 237.6 \text{ cm}$$

$$\text{Si } -0.5 \geq M/M_p > 1.0, \quad L_{cr} = 38.2 \times 3.76 = 143.6 \text{ cm}$$

Si se soporta lateralmente la sección situada a 238 cm del

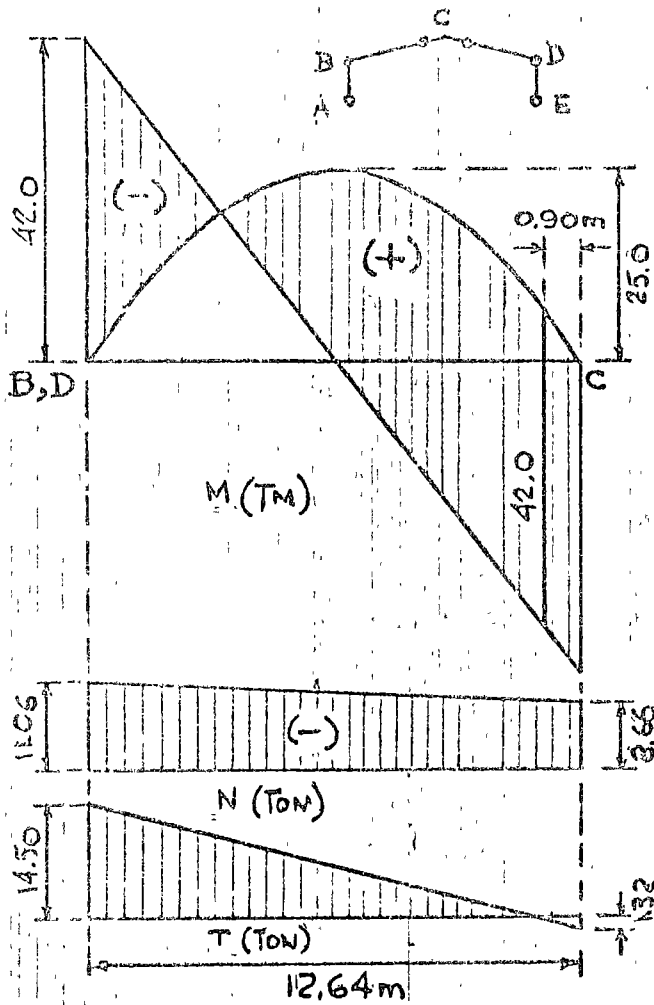


FIG. 4E DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECÁNICOS DE LOS ALEROS.

extremo, Fig. 11,  $M_1/M_2 = -11.5/42.0 = -0.27 > -0.5$ , la ecuación aplicable es la primera y la longitud crítica calculada es correcta.

En la zona cercana a la cumbrera los momentos varían muy lentamente, lo que indica que  $L_{cr}$  no debe ser mayor de 144 cm; sin embargo, como las articulaciones plásticas cercanas a la cumbrera son las últimas, no se requiere que tengan capacidad de

rotación, y basta con disponer el contraventeo necesario para evitar el pandeo lateral por flexotorsión hasta que aparece en ellas el momento  $M_p$ . La longitud no soportada lateralmente es adecuada si se satisfacen los requisitos correspondientes a diseño por esfuerzos permisibles, trabajando con los elementos mecánicos correspondientes al mecanismo de colapso divididos entre el factor de carga.

Revisión por flexocompresión. Debe comprobarse que se satisfacen simultáneamente las condiciones

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{(1 - P/P_{cr}) M_m} \leq 1.0 ; \quad \frac{P}{P_y} + \frac{M}{1.18 M_p} \leq 1.0$$

Además, la relación de esbeltez  $(L/r)$  del alero tiene que



ser menor o igual que  $C_c = \sqrt{211^2 E / F_y}$ ; para calcularla, se toma  $L = 2S$ .

Como la fuerza normal es pequeña y la columna restringe el pandeo lateral del alero, cuando menos hasta que se forma una articulación plástica en la unión entre ambos,  $P_r$  y  $P_e$  se calculan con la longitud  $S$ ; además, se obtiene una buena aproximación, conservadora, haciendo  $C_m = 1 - 0.3 P / P_e$ , que corresponde a una barra flexocomprimida con carga transversal uniforme, un extremo empotrado y el otro libremente apoyado.

$$2S / r_x = 2 \times 1264 / 22.1 = 114.4 < C_c = 126.1$$

$$L / r_x = S / r_x = 57, F_a = 1245 \text{ kg/cm}^2, F_e' = 3227 \text{ kg/cm}^2$$

Para emplear  $F_a = 1245 \text{ kg/cm}^2$  la relación  $(L/r)_y$  no debe exceder de 57, es decir,  $(L_y)_{\max} = 57 \times 3.76 = 214 \text{ cm}$ . Por ahora se supondrá que la cubierta y los largueros tienen características que hacen que éstos proporcionen soporte lateral al alero, de manera que este requisito se satisface sin dificultad; después se repetirá el diseño colocando elementos adicionales de contraventes en los puntos que requieran soporte lateral, como se hace en marcos con cubierta muy flexible (lámina de asbesto-cemento, por ejemplo).

$$P_r = 1.7 A F_a = 1.7 \times 87.16 \times 1.245 = 184.5 \text{ Ton}$$

$$P_e = (23/12) A F_e = (23/12) 87.16 \times 3.227 = 539.1 \text{ Ton}$$

$$C_m = 1 - 0.3 P / P_e = 1 - 0.3 \times 11.06 / 539.1 = 0.994 \quad (P_e \text{ es una buena aproximación de } P_e')$$

Si se supone que los largueros están colocados a cada 1.50m; por ejemplo,  $(L/r)_y = 150 / 3.76 = 40 < 57$ .

$$M_m = \left[ 1.07 - \frac{(P/P_y) \sqrt{F_y}}{26500} \right] M_p = \left( 1.07 - \frac{40 \sqrt{2530}}{26500} \right) M_p = 0.994 \times 44.8 = 44.5 \text{ Tm}$$

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{(1 - P/P_{cr}) M_m} = \frac{11.06}{184.5} + \frac{0.994}{1 - 11.06/539.1} \cdot \frac{41.5}{44.5} = 0.060 + 1.015 \times 0.933 = 1.007 \approx 1.00$$

El factor  $C_m/(1 - P/P_{cr})$  es prácticamente 1.0.

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{1.18 M_p} = \frac{11.06}{220.05} + \frac{41.5}{1.18 \times 44.8} = 0.050 + 0.785 = 0.835 < 1.00$$

Esta segunda condición se satisface necesariamente cuando  $P/P_y \leq 0.15$ .

Se acepta el perfil ensayado.

De acuerdo con las especificaciones AISC, deben colocarse atiesadores en el alma en todas las secciones en que se formen articulaciones plásticas, y conviene dar soporte lateral al patín comprimido (e inferior) en las cercanías a la cumbrera, colocando patas de gallo en los largueros correspondientes.

Revisión suponiendo que los largueros no dan soporte lateral.

Deben soportarse lateralmente las uniones entre aleros y columnas, las secciones situadas a 2.38m, como máximo, de ellas, y las secciones en que se forman las articulaciones plásticas cercanas a la cumbrera (es una práctica usual colocar un puntal corrido en la cumbrera, pero en este caso podría suprimirse, en vista de que deben soportarse puntos muy cercanos a uno y otro lado de ella); además, hay que colocar elementos de contraenteo intermedios para evitar que se tenga una relación  $(L/r)_y$  excesiva. (si se pone poco contraenteo intermedio es probable que haya que aumentar la sección empleada en el alero, y para conservar la mínima posible tal vez se requiera demasiado; conviene

encontrar una solución intermedia).

En la Fig. 12 se indican las secciones que quedan soportadas lateralmente al fijar un punto intermedio adicional, y los elementos

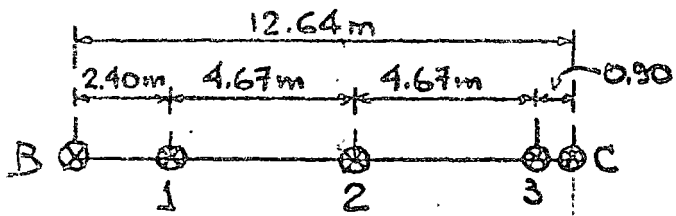
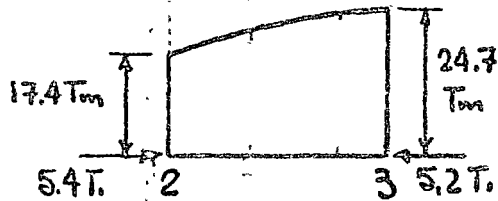


Fig. 12  
(Las sollicitaciones están divididas entre 1.7)



mecánicos en el tramo más crítico, 2-3 (los momentos en sus extremos son mayores que en el 1-2 y, además, tienen una ley de variación más desfavorable).

Puesto que la sección de la Fig. 6 es apenas correcta cuando todos los largueros proporcionan soporte lateral, ahora resulta insuficiente, por lo que se revisará la utilizada en el diseño por esfuerzos permisibles,

determinada en la hoja 17.

Relaciones ancho/grueso.  $P/P_y = 5.4 \times 1.7 / 97.79 \times 2.53 = 0.037$

Patines.  $b/2t = 203/2 \times 1.27 = 7.99$ . Alma.  $h/t = 58.46/0.79 = 74.0$

Las relaciones máximas permisibles en las zonas en que se forman articulaciones plásticas son 8.5 en los patines y  $(3452/\sqrt{2530})(1 - 1.4 \times 0.037) = 65.07$  en el alma, y en el resto del alero  $796/\sqrt{2530} = 15.8$  en los patines y  $2120/\sqrt{2530} = 42.2$  en el alma. El alma de la sección ensayada es demasiado esbelta en las zonas de las articulaciones plásticas, cerca de los puntos B y 3 de la Fig. 12; aumentando su grueso a 9.5mm ( $3/8''$ ) se obtiene  $58.46/0.95 = 61.5$ , que es admisible.

$(L/r)_y = 467/4.3 = 109$ ,  $F_a = 830 \text{ kg/cm}^2$ ,  $F_a = 5400/97.79 = 55 \text{ kg/cm}^2$

$f_a/F_a = 0.066 < 0.15$ .  $C_b = 1.75 - 1.05(17.4/24.7) + 0.3(17.4/24.7)^2 = 1.16$

$f_b = 2470000/1941 = 1273 \text{ kg/cm}^2$ .

$$L/\Gamma = 467/5.2 = 90, F_{b1} = 1680 - 90^2/16.81 \times 1.16 = 1265 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_{b2} = 843700 \times 1.16 / (467 \times 61 / 20.3 \times 1.27) = 886 \text{ Kg/cm}^2 \therefore F_b = 1265 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_a/F_a + f_b/F_b = 0.066 + 1273/1265 = 1.072 > 1.00$$

Aunque está ligeramente exeso, puede aceptarse el perfil ensayado. Sin embargo, es posible mejorar las condiciones en que está trabajando, sin aumentar el número de secciones soportadas lateralmente, moviendo el punto 2, Fig. 12, hacia el 3, con lo que disminuye la longitud del tramo crítico y aumentan los esfuerzos permisibles; aunque el tramo 1-2 se alarga no llega a hacerse crítico, dada la magnitud y ley de distribución de los momentos flexionantes que actúan en él. (Colocando el punto 2 a 3.84m de 1 y 3.50m de 3, el tramo 2-3 sigue siendo crítico, y se obtiene en él  $f_a/F_a + f_b/F_b = 0.941 < 1.00$ ).

DISEÑO DE LAS COLUMNAS. En la Fig. 13 se muestran los momentos y las fuerzas axial y cortante en una columna, tomados de la Fig. 5, así como los puntos soportados lateralmente. En el extremo superior B se forma una articulación plástica y el inferior A está articulado a la cimentación.

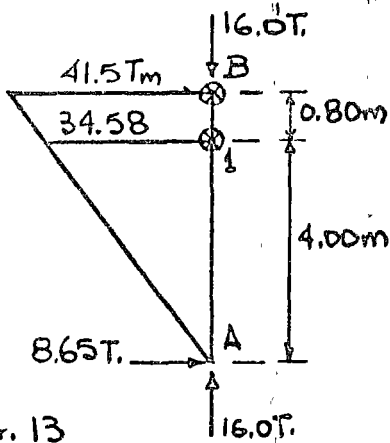


FIG. 13

En el diseño basado en esfuerzos permisibles se obtuvo  $K_x = 2.6$ ,  $K_y = 1.0$ .

Se revisará la sección de la Fig. 6.

La relación ancho/grueso de los patines es  $7.09 < 8.5$ , pero la del alma es 66.4, mayor que la permisible, 61.6; sin embargo la diferencia es pequeña, y puede aceptarse.

$$M_p = 1772 \times 2530 = 4\,483\,000 \text{ Kgcm} = 44.8 \text{ Tm}$$

Distancia máxima entre el extremo superior y otra sección soportada lateralmente =  $38.2 r_y = 38.2 \times 3.76 = 143.6 \text{ cm} > 80 \text{ cm}$ .

Tramo superior (1B).  $(KL/r)_x = 2.6 \times 480 / 22.1 = 56$ ,  $(KL/r)_y = 80 / 3.76 = 21$ ,  $F_a = 1252 \text{ kg/cm}^2$ ,  $F_e' = 3344 \text{ kg/cm}^2$ .  $P_y = 87.16 \times 2.53 = 220.5 \text{ Ton}$   
 $P/P_y = 16.0 / 220.5 = 0.073 < 0.15$ ,  $P_{cr} = 1.7 A F_a = 185.5 \text{ Ton}$ ;  $P_e = (23/12) A F_e' = 558.6 \text{ Ton}$ ;  $C_m = 0.85$  (los extremos superiores de las columnas pueden desplazarse linealmente en el plano del marco).

$$M_m = \left[ 1.07 - \frac{21 \sqrt{2530}}{26500} \right] 44.8 = 1.03 \times 44.8 \therefore M_m = M_p = 44.8 \text{ Tm}$$

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{(1 - P/P_e) M_m} = \frac{16.0}{185.5} + \frac{0.85 \times 44.8}{(1 - 16.0/558.6) 44.8} = 0.086 + 0.811 = 0.897 < 1.00$$

Como  $P/P_y < 0.15$  no es necesario revisar la otra ecuación.

Tramo inferior (A1).  $(KL/r)_y = 400 / 3.76 = 106$ ,  $F_a = 858 \text{ kg/cm}^2$ ,  $F_e' = 3344 \text{ kg/cm}^2$  (corresponde a  $(KL/r)_x = 56$ ).

$P_{cr} = 127.1 \text{ Ton}$ ,  $M_m = \left[ 1.07 - \frac{106 \sqrt{2530}}{26500} \right] 44.8 = 38.9 \text{ Tm}$

$$\frac{16.0}{127.1} + \frac{0.85 \times 38.9}{(1 - 16.0/558.6) 38.9} = 0.126 + 0.778 = 0.904 < 1.00$$

$$\frac{16.0}{127.1} + \frac{0.85 \times 34.58}{(1 - 16.0/558.6) 38.9} = 0.126 + 0.778 = 0.904 < 1.00$$

Se acepta la sección ensayada.

RESUMEN DE RESULTADOS \* Los dos primeros números indican el peralte total y el ancho de los patines, en cm, y el tercero el peso del perfil, en kg/m.

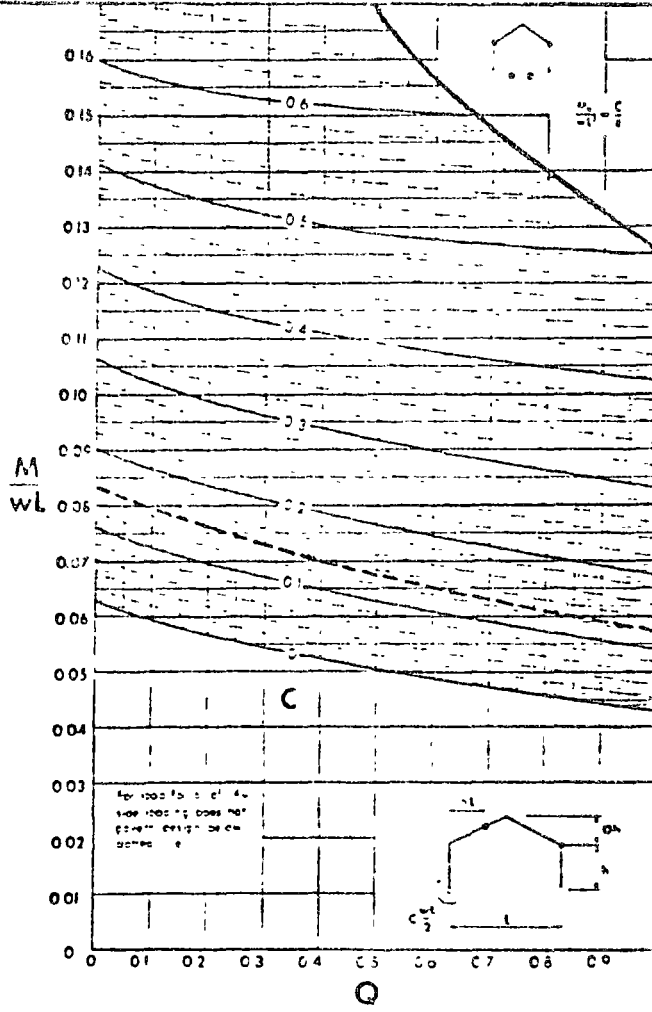
		DISEÑO BASADO EN ESF. PERMISIBLES	DISEÑO PLÁSTICO	
			LOS LARGUEROS DAN SOPORTE LATERAL	LARGUEROS NO DAN SOPORTE LAT.
ALEBROS	PATINES	20.3 x 1.27 cm	18.0 x 1.27 cm	20.3 x 1.27 cm
	ALMA	54.86 x 0.79 cm	52.46 x 0.79 cm	58.46 x 0.79 cm
	DIMENS. Y PESO <sup>W</sup>	61.0 x 20.3 x 77.2	55.0 x 18.0 x 68.9	61.0 x 20.3 x 77.2
COLUMNAS	PATINES	20.3 x 1.59 cm	18.0 x 1.27 cm	
	ALMA	57.82 x 0.95 cm	52.46 x 0.79 cm	
	DIMENS. Y PESO <sup>W</sup>	61.0 x 20.3 x 94.4	55.0 x 18.0 x 68.9	
PESO TOTAL DEL MARCO, KG		2858 (100%)	2403 (84.1%)	2613 (91.4%)

# M<sub>p</sub> AND α CHARTS

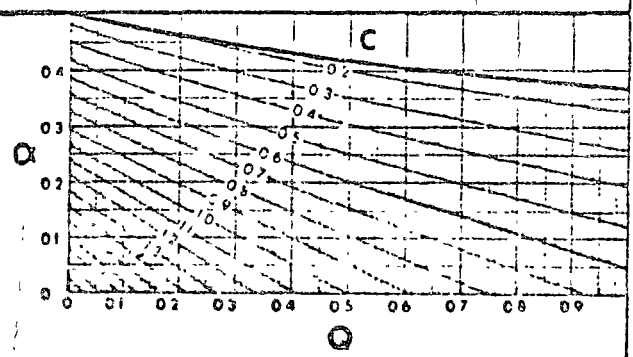
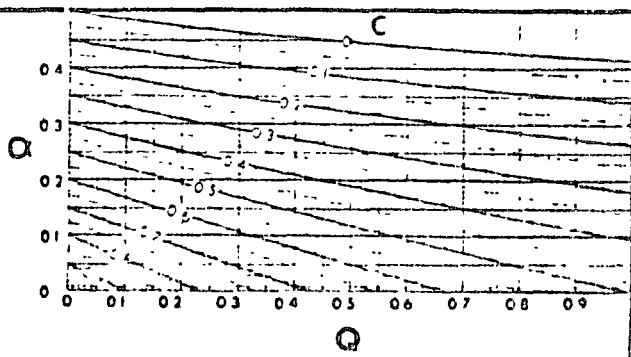
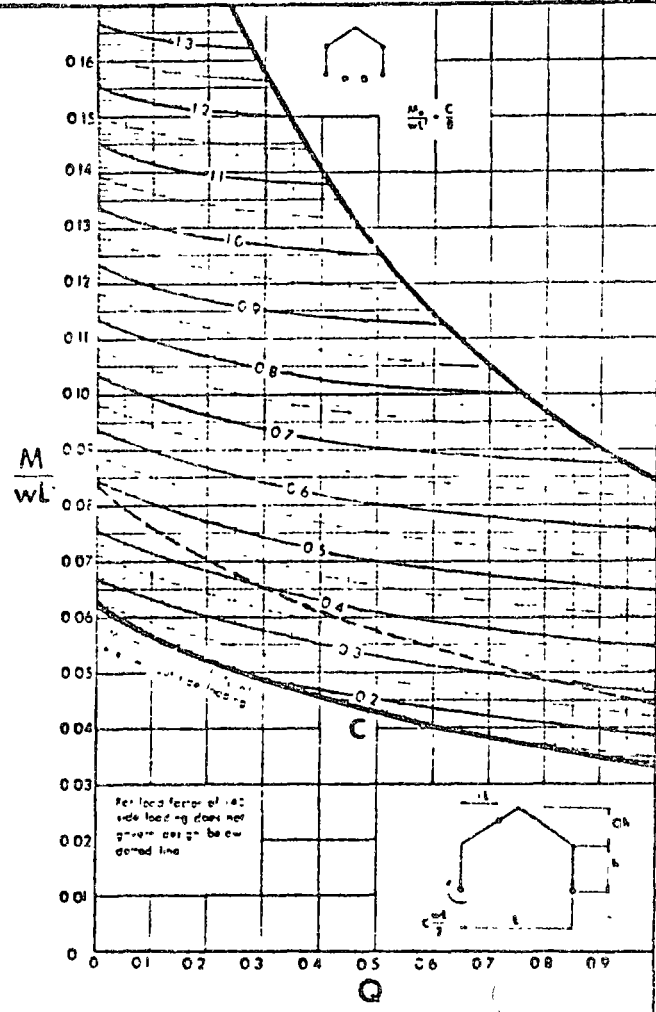
BASED ON FORMULAS GIVEN ON FACING PAGE

With  $w$ ,  $L$  and  $Q$  given multiply value of  $M_p/wL^2$  read from chart by  $wL^2$  to obtain required  $M_p$ .  
 For the case of vertical load alone  $C=0$ .

## PINNED COLUMN BASES



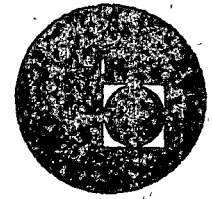
## FIXED COLUMN BASES



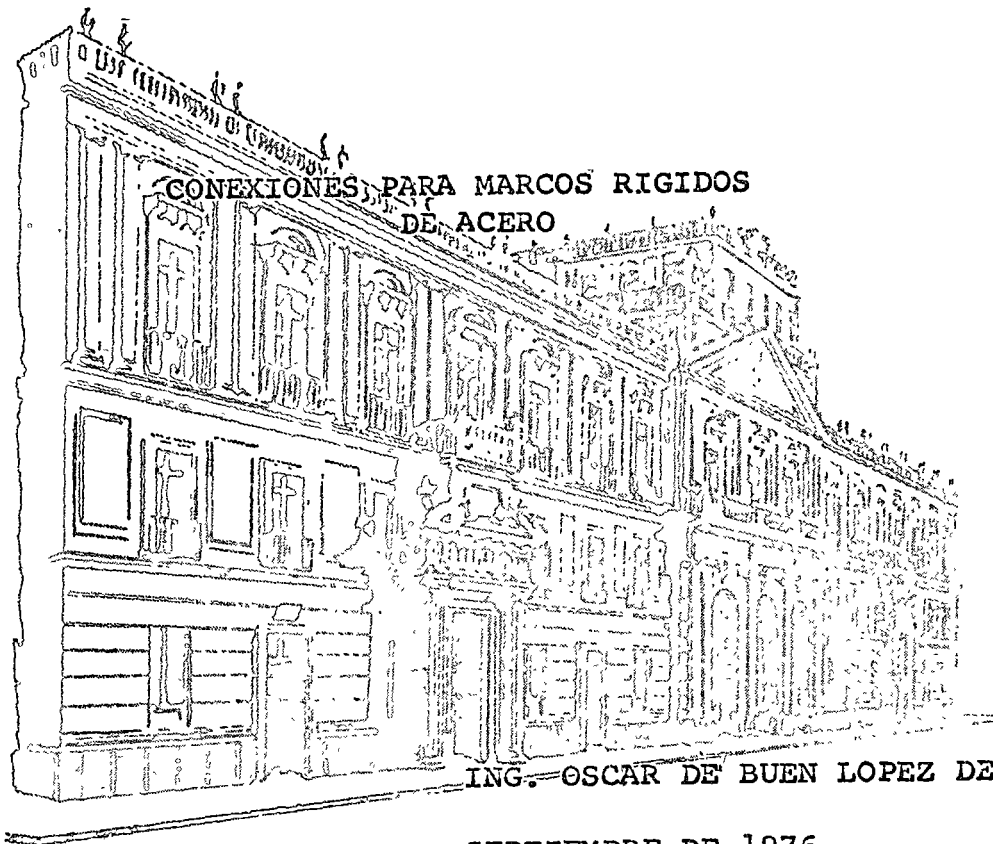
Frame Chart No. 1



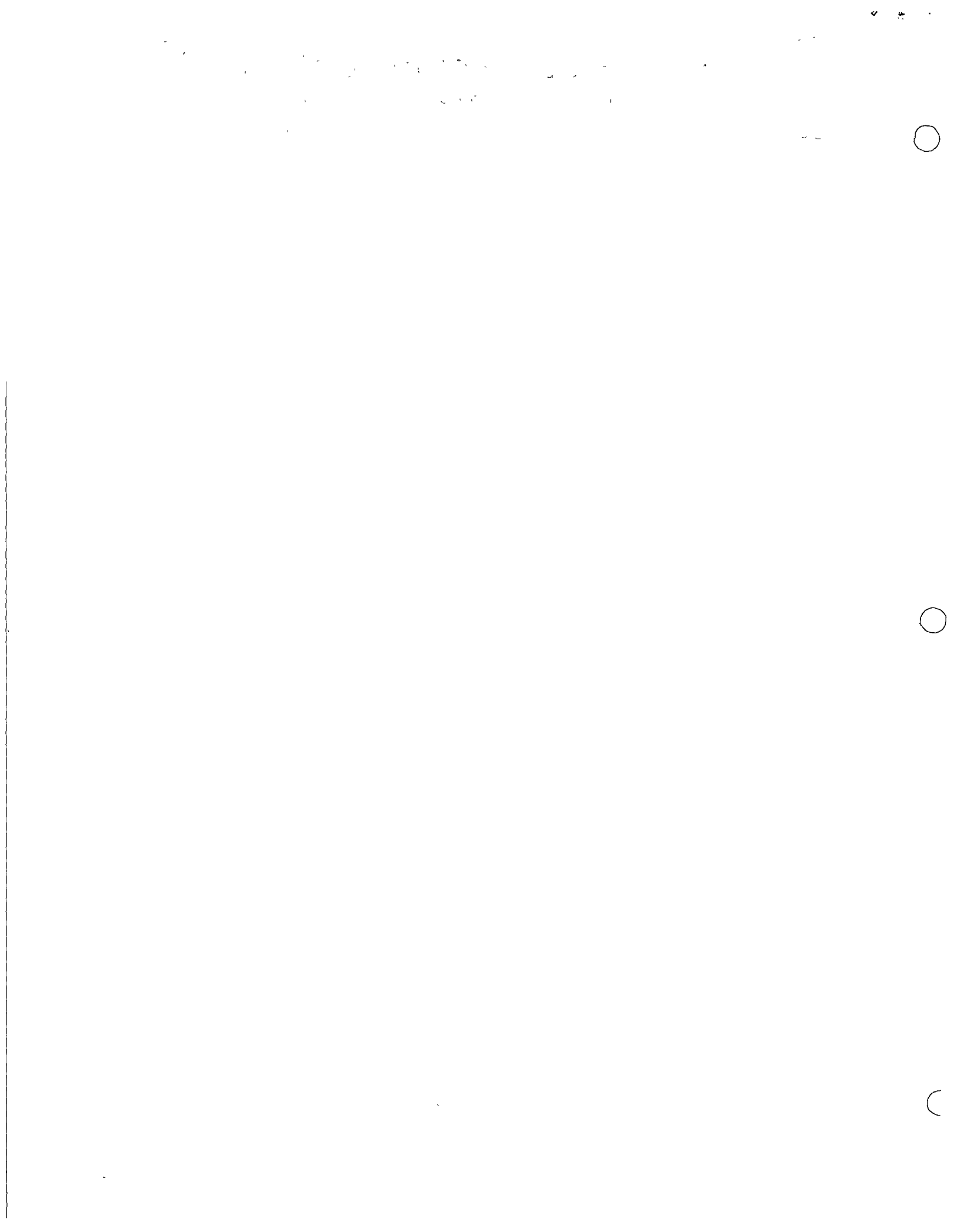
centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



SEPTIEMBRE DE 1976.





# Conexiones para marcos rígidos de acero

Oscar DE BUEN \*

## I. INVESTIGACIONES EXPERIMENTALES. DISEÑO ELÁSTICO

### INTRODUCCION

El análisis de una estructura cualquiera está basado en una serie de hipótesis, siendo una de las más importantes la relativa al comportamiento de las juntas.

En la mayor parte de las estructuras modernas se supone que en las juntas existe una continuidad completa, y es evidente que de nada servirá un análisis y diseño de miembros tan preciso como se quiera si las conexiones no se diseñan y construyen de manera que se comporten de acuerdo con esa suposición.

En este artículo y en otro que se publicará en fecha próxima, se tratará el problema del diseño de juntas de marcos rígidos de acero estructural. En esta primera parte se hará una descripción de las investigaciones experimentales que han llevado a los criterios actuales de diseño y se presentarán varios métodos elásticos, dejando para la segunda parte la presentación de los métodos plásticos de diseño.

Las referencias que aparecen al final de este artículo corresponden tanto a esta primera parte como a la segunda.

### GENERALIDADES

Se da el nombre de marco rígido a una estructura compuesta por miembros verticales y horizontales (o inclinados, como en el caso de marcos de dos aguas) rigidamente unidos entre sí en sus intersecciones, de tal manera que exista una continuidad completa en la transmisión de elementos mecánicos (momentos flexionantes y fuerzas cortantes y normales).

Dos factores son básicamente responsables del empleo, cada vez más extendido en los últimos años, de los marcos rígidos en las construcciones de acero: la soldadura, que permite ligar los elementos que los componen con un máximo de efectividad y un mínimo de material extra, y los métodos de diseño plástico, que presentan sus máximas ventajas cuando se aplican a este tipo de estructuras.

De acuerdo con la definición anterior, es evidente que la resistencia de un marco rígido depende fundamentalmente de sus juntas; si éstas no están bien diseñadas, permitirán en el rango elástico rotaciones mayores que las supuestas, comportándose como juntas semi-rígidas, lo que dará lugar

a que los momentos en otras zonas de la estructura sean mayores que los teóricos (por ejemplo, aumentarán los momentos positivos en las vigas, bajo cargas verticales), y en el rango plástico serán incapaces de alcanzar y mantener durante rotaciones de cierta magnitud los momentos necesarios para la formación del mecanismo de colapso, ocasionando una disminución en la capacidad real de carga de la estructura.

Por este motivo, el diseño correcto de un marco rígido requiere un conocimiento lo más completo posible del comportamiento de sus juntas, en los rangos elástico y plástico, lo que ha dado lugar a que se haya realizado un gran número de estudios tanto teóricos como experimentales tendientes a aclararlo, sobre todo en los últimos años, paralelamente al desarrollo del diseño plástico. La mayor parte de esos estudios se refieren a conexiones soldadas, aunque últimamente se ha despertado un interés creciente en las juntas realizadas con pernos de alta resistencia, cuyo empleo se está generalizando cada vez más, sobre todo en juntas de campo.

TIPOS DE JUNTAS. Las conexiones que se estudiarán en lo que sigue son de los tipos marcados en la fig. 1.

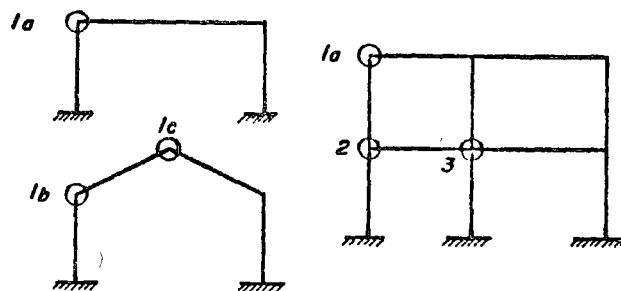


FIGURA 1

Las tipo 1, a, b y c son juntas de esquina, características de marcos rígidos de tipo industrial (se emplean también en las juntas extremas del último nivel de marcos de varios pisos); corresponden a la unión de dos miembros, generalmente una trabe y una columna, como 1a y 1b (a estas juntas se les designa a veces con el nombre de rodillas de un marco rígido), aunque en ocasiones están formadas por dos vigas (junta de cumbre de un marco de dos aguas, 1c).

Las conexiones 2 y 3, a las que se les da el nombre genérico de juntas viga-columna, corresponden a marcos de varios pisos, la 2 a una columna exterior y la 3 a una interior; estas conecio-

\* Profesor de Estructuras, División Profesional y División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

nes se ven complicadas, en la mayoría de los casos, por la existencia de vigas adicionales, normales al plano del marco, a uno o ambos lados de éste.

Los ejes de las dos barras que concurren en una junta de esquina pueden formar un ángulo de  $90^\circ$  (tipo 1a, fig. 1) o mayor (1b ó 1c), y en uno y otro caso pueden ser rectas o acarteladas, con cartelas rectas o curvas (fig. 2). Evidentemente, también las juntas de los tipos 2 y 3 pueden ser acarteladas.

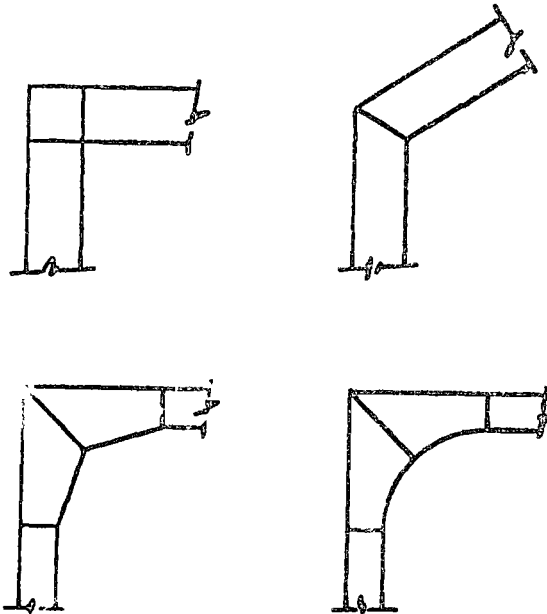


FIGURA 2

**CARACTERÍSTICAS DE UNA JUNTA DE ESQUINA.** Se revisarán en seguida los requisitos que deben satisfacer las juntas de esquina de los marcos rígidos para que su comportamiento sea satisfactorio a) en diseño plástico y b), en diseño elástico.

a) Diseño plástico

1. *Resistencia.* La junta debe ser capaz de resistir en la esquina (punto de intersección de los ejes de viga y columna) el momento plástico  $M_p$  de las secciones que une (o el de la menor de ellas en caso de que sean diferentes).

(El punto crítico mencionado corresponde a juntas rectas; como se verá después, en el caso de juntas acarteladas las secciones críticas son las uniones de los perfiles con las cartelas).

2. *Rigidez.* Es deseable que la rigidez de una conexión sea, como mínimo, igual a la de una longitud equivalente de los miembros unidos.

En la fig. 3 se muestran las longitudes equivalentes  $\Delta L = AC + CB$  de algunas juntas típicas. La condición anterior se reduce, pues, a que se satisfaga la relación

$$\theta_0 \leq \frac{M_p}{EI} \Delta L$$

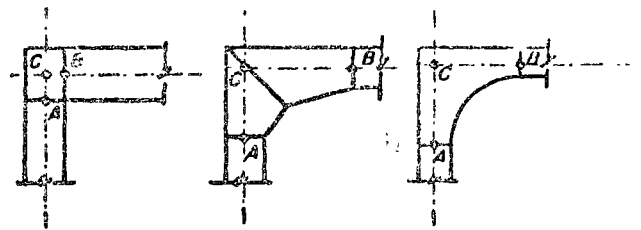


FIGURA 3

que establece que la rotación relativa de las secciones A y B no debe ser mayor que la de una longitud  $\Delta L$  del menor de los miembros unidos, sometido al momento flexionante existente en la junta.

En general, al diseñar una junta no es necesario calcular su rigidez, ya que, siendo las longitudes de las conexiones muy pequeñas comparadas con las dimensiones generales del marco, una flexibilidad algo mayor que la supuesta no es perjudicial, siempre que se cumplan los puntos 1 y 3.

3. *Capacidad de rotación.* Las conexiones deben ser capaces de admitir rotaciones importantes bajo momento constante y de intensidad igual al momento plástico resistente  $M_p$  de los miembros que concurren en ellas (o del menor de los dos).

Esta característica es fundamental, ya que una capacidad de rotación adecuada es necesaria para que en la estructura de que forman parte las juntas puedan formarse todas las articulaciones plásticas necesarias para alcanzar la carga teórica de colapso.

4. *Economía.* Es evidente que siempre se podrán incrementar la resistencia, rigidez y capacidad de rotación de una junta aumentando la cantidad de material utilizada en ella; sin embargo, y puesto que un porcentaje elevado del costo de fabricación de un marco rígido corresponde a las conexiones, éstas deben diseñarse de manera que tengan propiedades correctas con el menor costo posible de material extra y fabricación, ya que en caso contrario el ahorro en material que se obtiene al diseñar un marco rígido puede perderse en las juntas.

Las cuatro condiciones anteriores pueden resumirse diciendo que una junta de esquina debe ser tan rígida y resistente a la flexión como una longitud equivalente del perfil de que esté formada, y debe tener una capacidad de rotación adecuada, gobernada por las características del marco de que

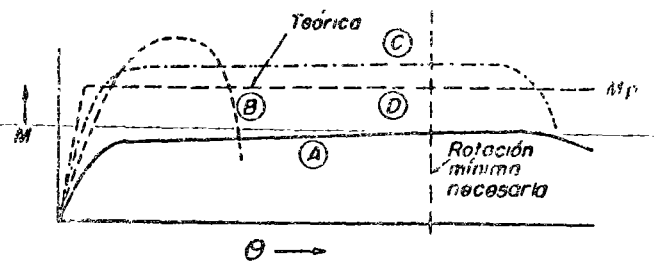


FIGURA 4

forme parte y las cargas que obran sobre él; al mismo tiempo, debe ser de fabricación económica.

Las curvas de la fig. 4 ilustran algunos de los requisitos anteriores. En ella se comparan las curvas momento-rotación de tres conexiones hipotéticas (curvas A, B y C) con la de una viga (D) de longitud equivalente, cuya sección es igual a la utilizada en las conexiones.

La curva A corresponde a una junta incorrecta, ya que no tiene rigidez adecuada (la deformación elástica es considerablemente mayor que el valor supuesto) ni es capaz de desarrollar el momento plástico del perfil; el comportamiento de la conexión B tampoco es satisfactorio para un diseño plástico, pues aunque posee rigidez en el rango elástico y resistencia máxima adecuadas su capacidad de rotación es muy reducida, y la junta falla antes de que se presenten en ella los giros necesarios; una conexión que se comporte de acuerdo con C si es correcta, pues aunque su rigidez en el rango elástico es ligeramente menor que la teórica es capaz de admitir un momento algo mayor que el momento plástico del perfil y de mantenerlo a través de rotaciones de amplitud suficiente para que se formen todas las articulaciones plásticas necesarias en el resto de la estructura.

#### b) Diseño elástico

El primer paso en el diseño elástico de un marco rígido, una vez conocidas sus dimensiones y las cargas que obran sobre él, consiste en suponer, de una manera más o menos arbitraria, las escuadrias de los elementos que lo componen; en seguida se analiza utilizando uno cualquiera de los muchos métodos disponibles y se calculan los esfuerzos existentes (tomando como base las escuadrias supuestas), los que no deben ser mayores, en ninguna parte del marco, que un cierto esfuerzo de trabajo especificado. Los miembros en los que se sobrepase el esfuerzo de trabajo se rediseñan, y se hace un nuevo análisis, con nuevas escuadrias, si el marco resulta considerablemente diferente que el supuesto originalmente.

Teniendo en cuenta el concepto de esfuerzos de trabajo, los requisitos impuestos sobre el comportamiento de las conexiones son los siguientes:

1. *Resistencia.* Una conexión debe ser tan resistente como la más débil de las dos barras que concurren en ella (en el caso de miembros diferentes); el momento correspondiente a la iniciación del flujo plástico  $M_p$ , modificado por la acción de la fuerza normal existente, constituye el criterio de resistencia.

2. *Rigidez.* La rigidez de la conexión debe ser igual, como mínimo, a la de una longitud equivalente del perfil unido, ya que si el análisis se hace en la forma usual, suponiendo que las juntas son rígidas, y posteriormente éstas se diseñan y construyen de tal manera que resultan semi-rígidas, los esfuerzos en otras zonas de la estructura resultarán mayores que los calculados (nótese que este requisito es más importante en diseños basados en esfuerzos de trabajo que en los que tienen como base la resistencia última de las estructuras, ya

que juntas ligeramente más flexibles que lo que deberían ser en teoría ocasionan incrementos que pueden ser importantes en los esfuerzos, pero tienen muy poca influencia en el valor de la carga de colapso).

3. *Capacidad de rotación.* No es necesario ningún requisito respecto a la capacidad de rotación, aunque la ductilidad es deseable como una salvaguardia contra fallas frágiles. (Una junta que forme parte de una estructura diseñada elásticamente no tiene necesidad, teóricamente, de ninguna capacidad de rotación, puesto que la iniciación del flujo plástico constituye el criterio de resistencia; sin embargo, en muchas estructuras reales los métodos elásticos no permiten valorar los esfuerzos más que de una manera burdamente aproximada, ya sea porque las cargas sean difíciles de determinar, tales como las debidas a viento o sismo, o porque la estructura resulte muy compleja por la existencia de muros, contraventeos, etc., y el problema se complica aún más si se tienen en cuenta esfuerzos residuales, concentraciones de esfuerzos, hundimientos de los apoyos, etc.; por consiguiente, las juntas deben diseñarse de tal manera que su comportamiento sea dúctil bajo sollicitaciones mayores que las calculadas, si se quieren obtener las ventajas propias del acero como material estructural, ya que en caso contrario pueden fallar mucho antes de que se agote la capacidad teórica de carga de la estructura; en resumen, aunque la capacidad de rotación no es un requisito teóricamente necesario en un marco diseñado elásticamente, las juntas deberán también construirse de manera que posean esa propiedad en grado suficiente).

4. *Economía.* Respecto a este factor, las consideraciones son las mismas que en una junta diseñada plásticamente

DESCRIPCIÓN DE LAS INVESTIGACIONES EXPERIMENTALES.<sup>1, 2, 3, 6, 9</sup> Como se mencionó con anterioridad, en los últimos años se ha realizado un gran número de investigaciones experimentales tendientes a obtener una visión lo más clara posible del comportamiento de las juntas en marcos rígidos y de la influencia de los distintos factores que intervienen en él. Estas investigaciones se han llevado a cabo, en su mayor parte, en relación con los métodos de análisis y diseño plástico; sin embargo, han aclarado también muchos problemas relacionados con el comportamiento elástico de las juntas, por lo que se presentará una descripción de los estudios experimentales más importantes antes de pasar a los métodos de diseño, elásticos y plásticos.

En la fig. 5 se muestran las características de un número considerable de juntas que han sido sometidas a pruebas de laboratorio; en ella se indican las referencias de donde se han tomado los resultados que se presentan a continuación (con objeto de no complicar al lector interesado el estudio de esas referencias, se ha conservado para las juntas la misma nomenclatura utilizada en ellas); también está anotado en la figura el tipo de cargas a que se sometió a cada una de las juntas.

Tipo	PERFILES Y GEOMETRIA					CARGA	REFERENCIA
1		R1 y R2: 8B13 C: 6I125				C	2
2 2B			2A y 2B: 8B13			C	1
						T	4
4						F, E, D: C T	C: 1 T: 4
			F, E, D, S, T, U: 8B13 D2: 6I125			S, T, U, D2: C	2
5A						J, G H, I: C, T	C: 1 T: 4
						F: C	2
7 7A			P: Viga, 14WF30 Col., 8WF31 A: 6I12.5. E: 6I17.25			C	P: 1 AyE: 2
8B						Todas menos By I Cy T	K, L, Ma comp - 1 K, L, Ma tens. - 4 B. - 2 Ia Va comp. - 5 IIa Va tens. - 6
	15 16			15C y 16N: 8B13		I: 8B13 II: 14WF30 III: 24WF100 IV: 30WF108 V: 36WF230	By I C
<p>En todos los especímenes, excepto el 7P, se utilizó el mismo perfil en viga y columna.</p> <p>C: carga de compresión  T: carga de tensión </p>							

FIGURA 5

Las cargas se aplicaron como se muestra esquemáticamente en la fig. 6, con lo que se produce en cada uno de los dos miembros que forman la junta, simultáneamente, momento flexionante, fuerza normal y fuerza cortante, reproduciendo así las condiciones de carga de las conexiones de esquina en estructuras reales. Dada la forma de aplicación de las cargas (fig. 6), las fuerzas normales y cortantes son siempre numéricamente iguales en todas las secciones transversales de las vigas.

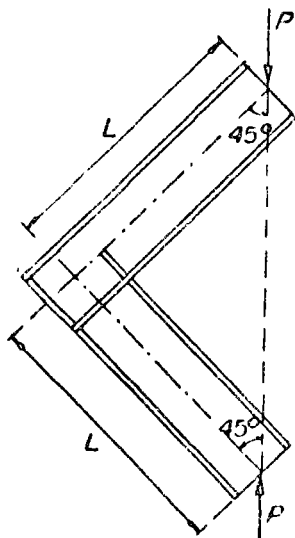


FIGURA 6

Se efectuaron dos tipos de pruebas; en uno de ellos (designadas como pruebas de *compresión* en la fig. 5) las cargas  $P$  tienen los sentidos indicados en la fig. 6 y tienden, por consiguiente, a cerrar la junta (éste es el caso más común en estruc-

turas reales); en el otro, se invierte el sentido de las fuerzas  $P$ , con lo que la junta tiende a abrirse (prueba de *tensión*); este caso, aunque menos frecuente en la práctica, se presenta en algunas ocasiones, y es interesante conocer el comportamiento de las juntas ensayadas en esas condiciones.

Todas las conexiones estudiadas tienen rigidez torsional suficiente para no requerir soporte lateral en el rango elástico, pero una vez iniciado el flujo plástico su resistencia al pandeo lateral disminuye notablemente, por lo que fue necesario soportarlas lateralmente.

Durante el proceso de carga de las conexiones se midió un gran número de deformaciones (acercamiento o alejamiento de los extremos de la junta, desplazamientos laterales de los patines y del alma, etc.): las más significativas de esas mediciones son las que permiten determinar las rotaciones de las juntas, las que se midieron sobre la longitud equivalente  $AC + CB$  definida en la fig. 3.

**JUNTAS EN COMPRESIÓN.**<sup>1,2,5</sup> En las figs 7 a 12 aparecen las curvas momento-rotación de todas las juntas ensayadas en compresión (véase fig. 5), es decir, bajo cargas  $P$  que tienden a cerrar las conexiones y producen, por consiguiente, fuerzas normales de compresión en los miembros que las componen. En todos los casos se ha dibujado también, con fines comparativos, la gráfica momento-rotación del perfil (o perfiles) con que está formada la junta en estudio, determinada experimentalmente. (La única excepción es la fig. 12, en la que se indican únicamente los valores teóricos de los momentos  $M_y$  y  $M_x$ , correspondientes a la iniciación del flujo plástico y a la plastificación total del perfil; nótese que en esta figura las curvas  $M - \phi$  están puestas en forma no dimensional).

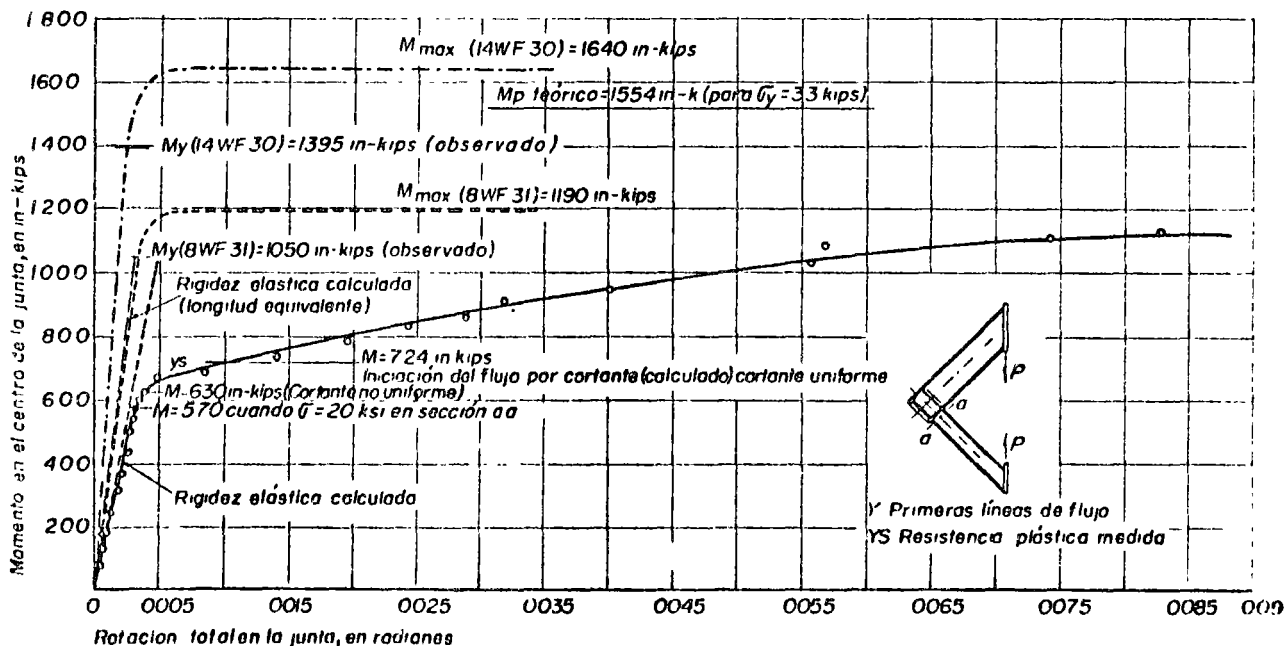


FIGURA 7

Los momentos utilizados para el trazo de las curvas con los medidos o calculados en el punto de intersección de las prolongaciones de los ejes de las dos barras que forman cada una de las juntas.

Es interesante hacer notar que los valores de los momentos plásticos que aparecen en las figuras, correspondientes a las curvas  $M - \phi$  de los perfiles que forman las juntas, determinadas experimentalmente, son en general apreciablemente mayores que los teóricos, obtenidos con el módulo de sección  $Z$  tabulado en los manuales y el esfuerzo de fluencia especificado (2,320 kg/cm<sup>2</sup>, o 33 ksi, para el acero A7, con lo que están fabricadas todas las juntas ensayadas); esto se debe principalmente, y aparte de pequeñas diferencias entre la geometría real y la teórica de los perfiles laminados, a que el esfuerzo de fluencia real es, en general, sustancialmente mayor que el mínimo especificado.<sup>1,2</sup>

#### JUNTAS RECTAS NO ACARTELADAS

1. *Conexiones tipo 7 y 7A.* El comportamiento de estas conexiones merece un estudio detallado por ser las únicas, dentro de las juntas no acarteladas ensayadas, en las que el alma no está reforzada por un atiesador diagonal.

Se discutirá en primer lugar el comportamiento de la conexión *P* (tipo 7)<sup>1</sup>.

Observando la fig. 7, se ve que el comportamiento no lineal de la junta empezó cuando el momento flexionante en ella era algo menor que el momento para el que teóricamente debería haberse iniciado el flujo por cortante; enseguida se desarrolló una rotación bastante mayor de la que podría tolerarse en la mayor parte de las estructuras. La primera línea de flujo se observó cuando el momento alcanzó un valor de 311 kips-pulg; el comportamiento no lineal, determinado visualmente de la curva, se inició al llegar a 493 kips-pulg, y el momento máximo soportado fue de 1,150 kips-pulg. (Los valores teóricos de flujo por cortante son 724 kip-pulg suponiendo una distribución unifor-

me de cortante en el alma y 630 suponiendo una distribución parabólica, y el momento teórico correspondiente a la iniciación del flujo plástico por flexión es 1195 kips-pulg; es, pues, evidente que la falta de capacidad de la conexión para desarrollar su momento resistente teórico se debió a debilidad del alma para soportar la fuerza cortante que obra en ella).

Comparando los resultados teóricos con los experimentales se advierte que la primera línea de flujo se presentó cuando la carga valía alrededor del 50% de la carga teórica de flujo por cortante, el comportamiento no lineal se inició aproximadamente 20% antes del valor predicho por la teoría (estas reducciones se deben a concentraciones de esfuerzos y a esfuerzos residuales de laminación y soldadura, y concuerdan con observaciones hechas en vigas continuas) y la velocidad de incremento de las deformaciones aumentó marcadamente para una carga de tan sólo el 50% de la carga calculada de flujo por flexión.

Aunque admitió rotaciones muy importantes antes de fallar, la conexión no fue capaz de desarrollar la resistencia al momento flexionante del menor de los dos perfiles que la forman, a pesar de que el tipo de carga a que estuvo sujeta tiende a producir fenómenos de endurecimiento por deformación.

La fig. 7 indica también que no hay factor de seguridad contra la iniciación del flujo plástico cuando el diseño se hace con un esfuerzo de trabajo de 1,400 kg/cm<sup>2</sup> (20 ksi); además, la rigidez de la conexión en el rango elástico es del orden de la mitad de la supuesta en teoría; por consiguiente, la junta *P* es también inadecuada desde el punto de vista del diseño elástico ya que, por un lado, el factor de seguridad existente en ella, bajo esfuerzos de trabajo, respecto al flujo plástico, es prácticamente nulo y, por otro, su falta de rigidez daría lugar a que en otras secciones de las estructuras en las que se emplease apareciesen esfuerzos con valores mayores que los calculados.

P E R F I L	P E R A L T E ( Cm )	P A T I N		G R U E S O A L M A ( Cm )	A R E A ( Cm <sup>2</sup> )	M O D U L O D E S E C - C I O N S x ( cm. <sup>3</sup> )
		A N C H O ( Cm )	G R U E S O ( Cm )			
8 B 13	20.3	10.2	0.65	0.58	24.7	162.0
6 I 12.5	15.2	8.16	0.91	0.58	23.3	119.6
6 I 17.25	15.2	9.06	0.91	1.18	32.4	142.6
8 W F 31	20.3	20.3	1.10	0.73	58.9	449.0
14 W F 30	35.2	17.2	0.97	0.69	56.9	686.0
24 W F 100	61.0	30.5	1.97	1.19	190.1	4075.0
30 W F 108	75.8	26.6	1.93	1.39	204.8	4900.0
36 W F 230	91.2	41.8	3.20	1.94	437.0	13700.0

TABLA I- Propiedades geométricas de los perfiles empleados en las juntas

Las conexiones 7A, A y E, difieren de la P en los atesadores verticales, que no son de todo el peralte de la viga, sino se cortan en el eje neutro, tampoco tienen atesador inclinado. Su comportamiento fue mucho mejor que el de P (véanse

figs. 10 y 11), pues ambas desarrollaron el momento plástico de los perfiles laminados de que se componen, y fueron capaces de mantenerlo durante rotaciones importantes; además, en el rango elástico son mucho más rígidas; de las dos, el com-

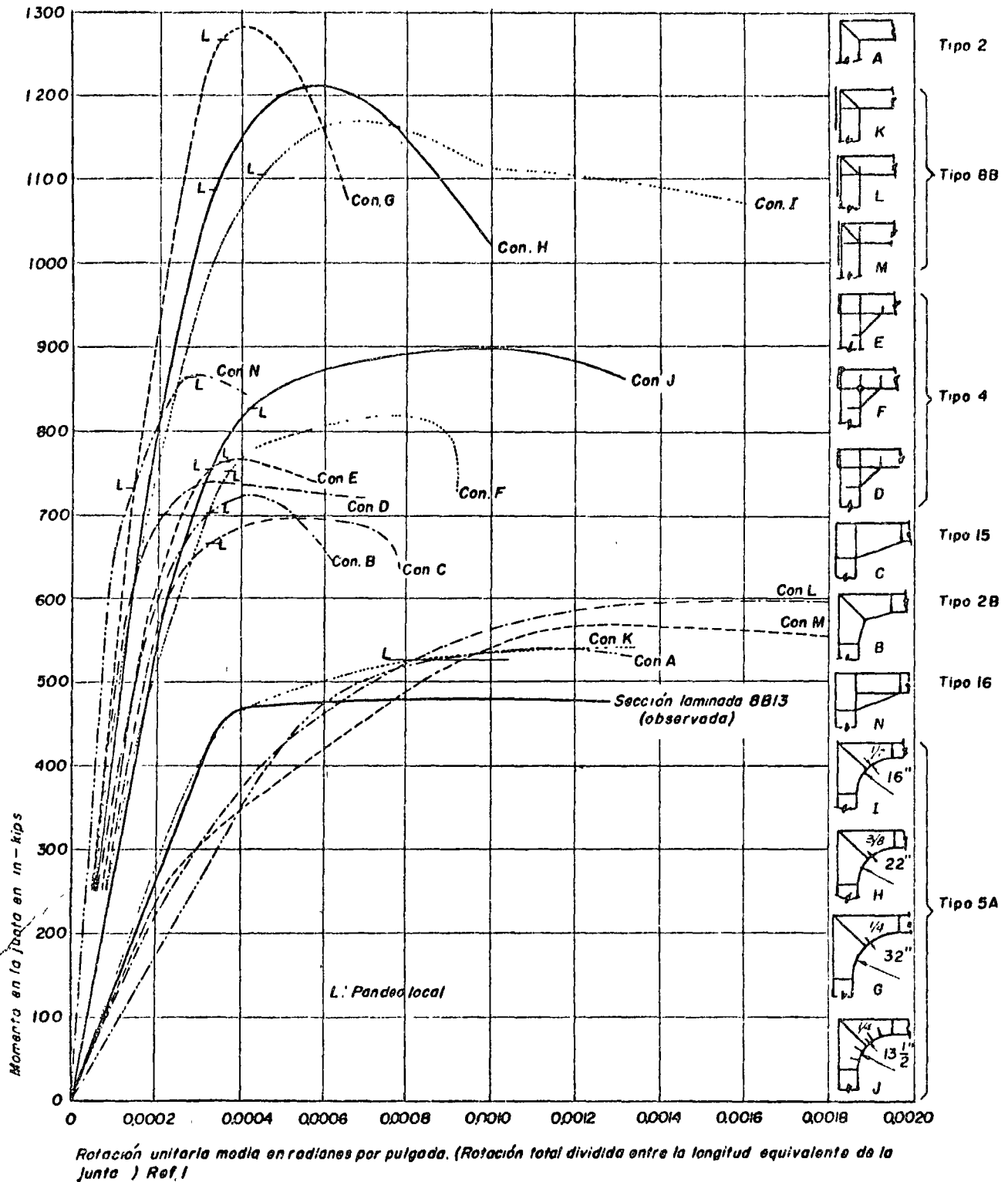


FIGURA 8

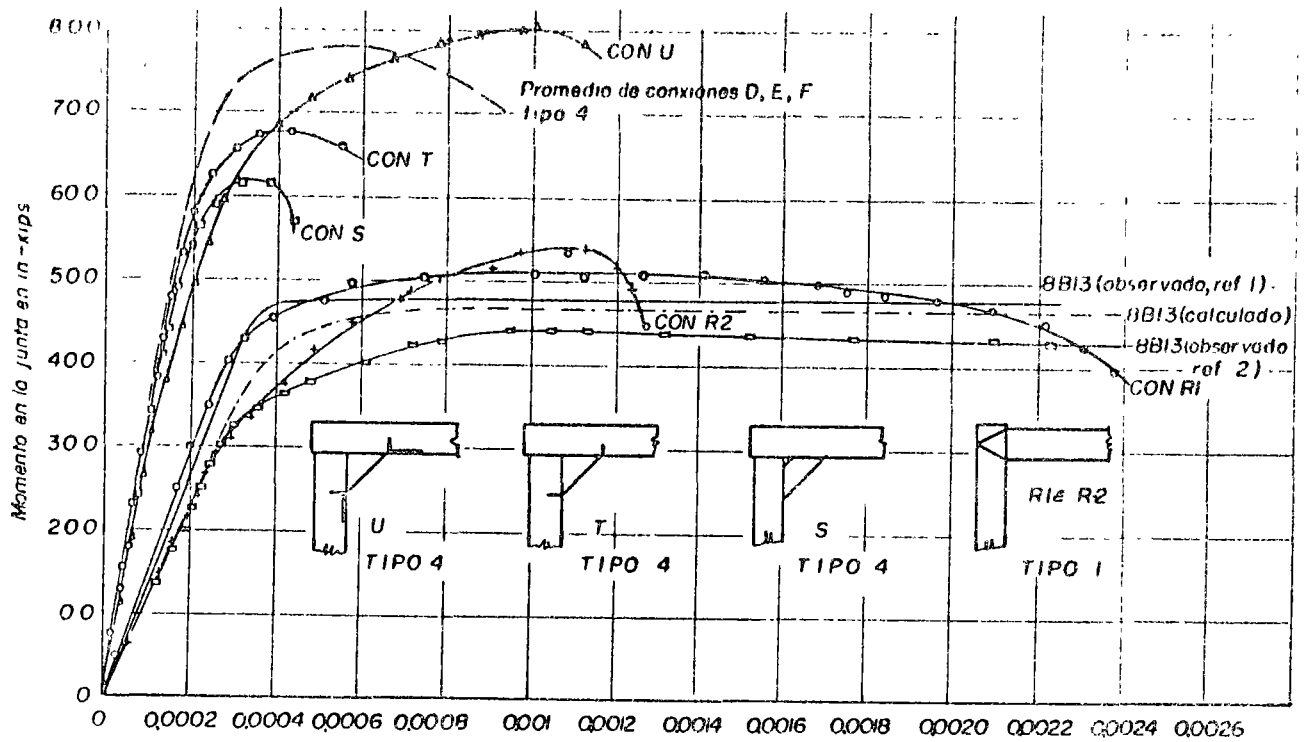


FIGURA 9

portamiento de E es mejor que el de A, ya que es más rígida en el rango elástico, admite un momento máximo proporcionalmente más elevado y tiene mayor capacidad de rotación, todo ello debido a

que su alma es mucho más gruesa que la de A (tabla I): las diferencias entre las juntas P y A se deben, principalmente, a que las segundas se ensayaron provistas de un contraventeo lateral mu-

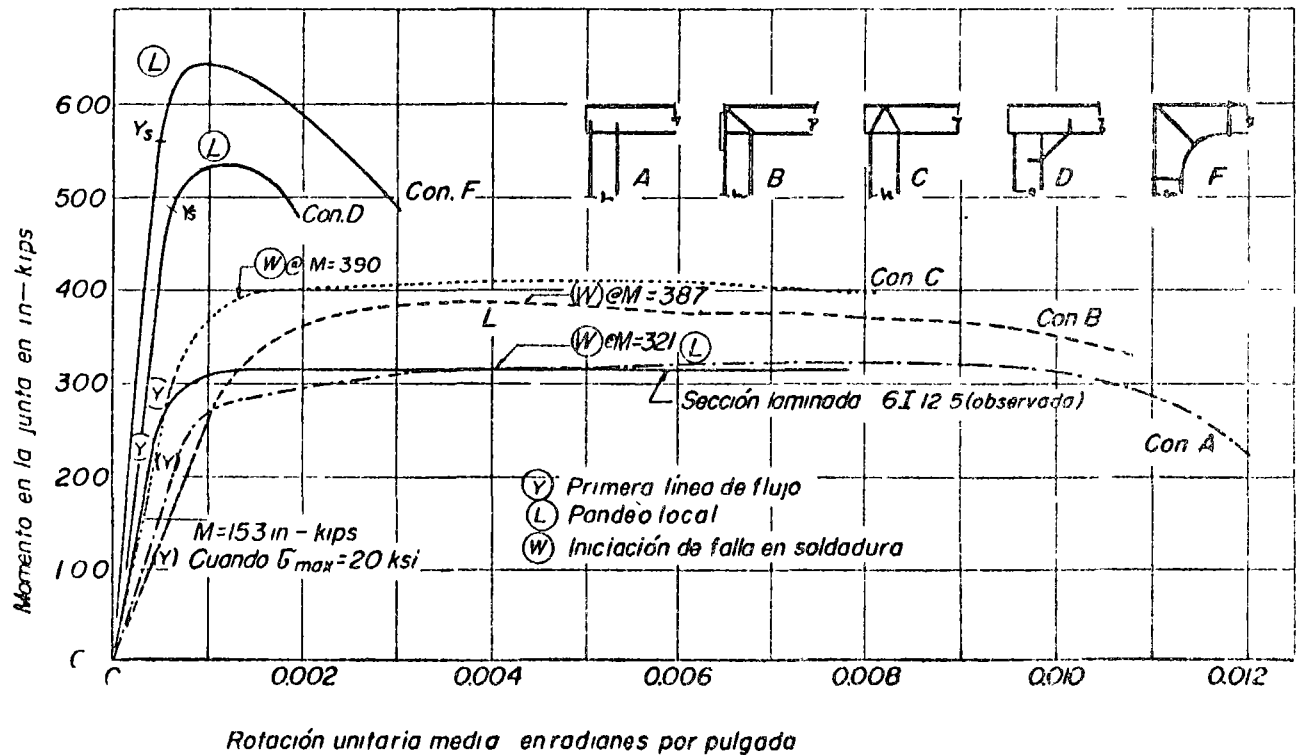


FIGURA 10



no más eficiente que el empleado en la primera<sup>2</sup>, ya que los perfiles que las forman tienen propiedades semejantes.

Debe notarse que, de acuerdo con estas pruebas, los atiesadores interrumpidos en el eje neutro son tan eficientes como los que se prolongan hasta el patín superior del perfil; como se verá después, en algunas ocasiones tienen, inclusive, ventajas.

La falta de rigidez y de resistencia de la conexión *P* se deben, fundamentalmente, a la incapacidad de su alma para tomar los esfuerzos cortantes elevados que aparecen en ella, sin deformarse excesivamente; como se verá más adelante, la mayor parte de los perfiles laminados se encuentran en condiciones análogas, por lo que para lograr que las juntas hechas con ellos sean capaces de admitir momentos no menores que su momento plástico y sean, al mismo tiempo, suficientemente rígidas, es preciso reforzarlas con atiesadores inclinados; las juntas tipos 1, 2 y 8B ilustran diferentes maneras de colocar esos atiesadores, combinados, en el caso de las conexiones 8B, con varias clases de atiesadores verticales y horizontales.

2. *Conexiones Tipo 1, 2 y 8B.* Las curvas momento rotación de las conexiones *A* (tipo 2), *K*, *L* y *M* (tipo 8B) se muestran en la fig. 8, las de *R1* y *R2* en la 9 y las de *B* y *C* en la 10. En estas figuras se han trazado los momentos en las conexiones contra la rotación unitaria promedio de las mismas (rotación total en la junta dividida entre la longitud equivalente). Todas las curvas que aparecen en ellas son experimentales. Todas las conexiones de la fig. 8 están hechas con el mismo perfil, una viga 8B13, por lo que con fines comparativos se ha determinado, también experimentalmente, la curva *M-φ* de ese perfil; utilizando para ello una viga libremente apoyada con cargas concentradas en los tercios del claro, la cual se ha trazado en la figura con línea continua gruesa.

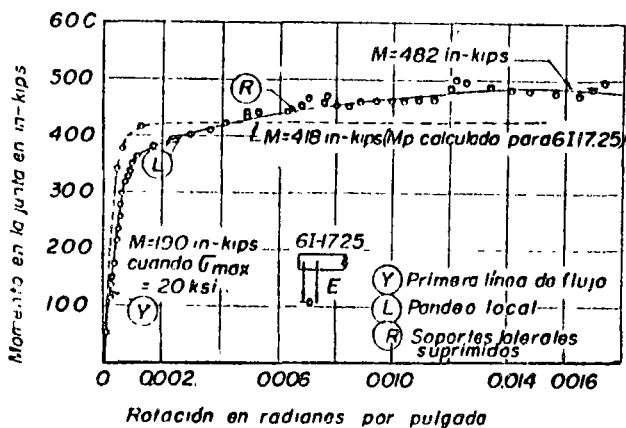


FIGURA 11

Todas estas conexiones fueron capaces de alcanzar y superar el momento plástico del perfil y de admitir rotaciones importantes bajo momento prác-

ticamente constante y mayor que  $M_p$ ; en el rango elástico *A*, *R1*, *R2* y *C* son las más rígidas, algunas de ellas más que el perfil; la rigidez de las demás es menor, pero tienen, como decimos arriba, resistencia y capacidad de rotación adecuadas.

Como sucede en la mayor parte de los miembros estructurales en flexión, la transición del comportamiento elástico al plástico fue muy gradual en las conexiones ensayadas; no se observaron límites de fluencia bien definidos.

Las conexiones rectas no acarteladas muestran un comportamiento no lineal para cargas relativamente más bajas que el resto de las juntas. (Aparentemente, los esfuerzos residuales y las concentraciones de esfuerzos afectan los resultados; en efecto, el número de atiesadores y, por consiguiente, la cantidad de soldadura, aumenta en el orden *A*, *K*, *L*, *M*; en el caso de esta última conexión, la soldadura del atiesador vertical cerca del patín superior introduce en éste esfuerzos residuales de tensión los que, sumados con los esfuerzos, también de tensión, ocasionados por el momento flexionante, dan lugar a un flujo plástico local para cargas menores que las previstas. En las pruebas, la capacidad elástica de las conexiones, tomando como base el momento que ocasiona el flujo plástico general, aumenta en el orden *M*, *L*, *K*, *A*). Sin embargo, el aumento en las deformaciones no se vuelve incontrolado hasta que se alcanza una carga correspondiente, aproximadamente, al momento para el que se forma una articulación plástica en el extremo de la sección laminada.

Las juntas I, II, III, IV y V (fig. 5) son iguales a la *L*, en cuanto a distribución y tipo de atiesadores, pero difieren de ella en el tamaño de los perfiles que las componen; en las pruebas iniciales<sup>2</sup> se ensayaron juntas de muchos tipos, pero empleando en casi todas ellas el mismo perfil, 8B13; de ellas se dedujo que la conexión recta más eficiente es, probablemente, la *L*, por lo que se decidió llevar a cabo un nuevo grupo de experiencias, con juntas semejantes a ella pero fabricadas con distintos perfiles, con objeto de determinar si el tamaño de éstos tiene alguna influencia en su com-

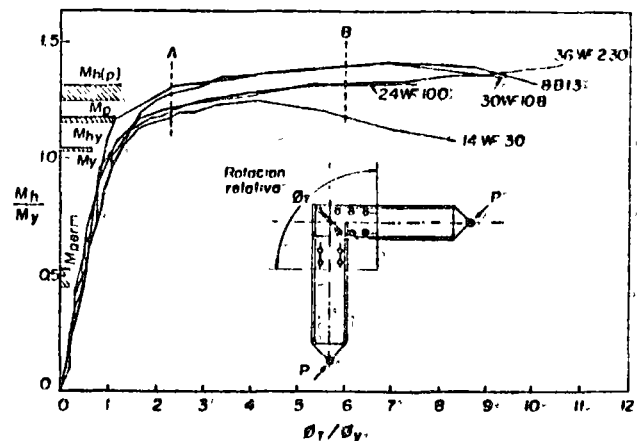


FIGURA 12

portamiento; los atiesadores y soldaduras de las conexiones *I* a *V*, se diseñaron utilizando métodos plásticos, y se sometieron al mismo tipo de carga que las juntas discutidas hasta ahora. Sus gráficas momento-rotación se muestran en la fig. 12.

Observando estas curvas llegamos a la conclusión de que el comportamiento de las juntas estudiadas es correcto, y que el aumento del tamaño de los perfiles laminados que las componen no tiene ningún efecto adverso, de manera que no restringe en forma alguna su diseño; la disminución en el momento resistente de la junta formada con vigas *14W<sup>F</sup>30* para rotaciones menores que en las restantes se debe a que los patines de ese perfil tienen una relación ancho/grueso superior al valor límite necesario para evitar fenómenos de pandeo local antes de que se alcance el rango de endurecimiento por deformación; de hecho, el pandeo local se presentó antes que en las demás conexiones y fue el causante del descenso de la curva  $M - \phi$ .

**JUNTAS ACARTELADAS RECTAS<sup>1,2</sup>.** Todas ellas son capaces de desarrollar un momento mucho mayor que el momento plástico del perfil y su rigidez en el campo elástico es también mayor que la de éste (véanse figs. 8, 9 y 10); sin embargo, su capacidad de rotación es reducida, por lo que, aparentemente, aunque muy eficientes para marcos diseñados elásticamente no son adecuadas para estructuras que deban comportarse correctamente en el rango plástico (como veremos más adelante, este tipo de conexiones se emplea en diseño plástico obligando a que la articulación se forme fuera de ellas, en el perfil laminado, con lo que se tiene la capacidad de rotación de éste).

Lo mismo que en las juntas sin cartelas los atiesadores extremos interrumpidos en el eje neutro parecen tener ciertas ventajas sobre los atiesadores completos, ya que requieren menor cantidad de soldadura y, por consiguiente, contribuyen a crear esfuerzos residuales de menos importancia.

En las juntas *U*, *T*, *S* y *D* se estudió la posibilidad de reducir los atiesadores a un mínimo: todas ellas tienen resistencia y rigidez mayores que el perfil, pero capacidad de rotación muy reducida; en la *U* se mejoró la capacidad de rotación reforzando los patines comprimidos de los perfiles, en las zonas inmediatas a la junta, con placas adosadas a ellos, con lo que se logra retrasar la iniciación del pandeo local.

**JUNTAS ACARTELADAS CURVAS<sup>1,2</sup>.** La rigidez y resistencia de estas juntas son extraordinarias (fig. 8); la primera, en el rango elástico, es del orden de tres veces mayor que la del perfil, y desarrollan momentos máximos dos y media veces mayores, en promedio, que el momento plástico de la viga con que están fabricadas.

Su capacidad de rotación, muy variable, (compárese la de la conexión *I* con la de *G*, fig. 8), es función de una serie de factores, principalmente radio de la curva, grueso del patin comprimido, atiesadores y contraventeo lateral, los que se dis-

cutian en detalle más adelante. En general la capacidad de rotación aumenta al disminuir el radio de curvatura del patin comprimido y al aumentar el grueso de éste.

Como grupo, las conexiones curvas son las más eficientes, pero son también las que requieren mayor cantidad de material extra y las más difíciles de fabricar.

El empleo en un marco de cualquiera de las juntas acarteladas, rectas o curvas, estudiadas experimentalmente en las refs. 1 y 2, asegura una continuidad cuando menos igual a la suposición de continuidad completa en juntas rectas.

**RESISTENCIA PLÁSTICA Y CARACTERÍSTICAS CARGA-DEFORMACIÓN MÁS ALLÁ DEL LA CARGA MÁXIMA.** En todas las conexiones se observaron comportamientos que siguen la misma tendencia general: el rango elástico inicial es seguido por un estado elasto-plástico (una región de plasticidad inicial) en el que rotaciones y deformaciones van siendo gradualmente mayores para incrementos iguales de carga, y después de que el flujo plástico alcanza una cierta extensión se observa inestabilidad plástica local del patin de compresión, la que tiende a hacer que la junta se pandee en una dirección normal a su plano. Al crecer las cargas el pandeo local se hace más pronunciado, y el colapso de la conexión se presenta poco después de la aparición del flujo plástico en el alma.

Todas las conexiones, excepto la *P*, desarrollaron en la intersección de los ejes neutros de trabe y columna el momento correspondiente a la formación de una articulación plástica en el perfil laminado con el que están formadas. Es obvio que las conexiones acarteladas serán más que adecuadas en este aspecto, puesto que en ellas se proporciona una gran cantidad de material adicional; evidentemente, ese material se estaría desperdiciando si el único objeto de las cartelas fuese asegurar que se alcance el momento plástico resistente del perfil en la intersección de los ejes neutros.

Todas las conexiones, con excepción de *P* y *B*, exhiben una reserva de resistencia más allá del límite elástico mayor que la de una viga sometida a flexión simple<sup>1</sup>. Las relaciones varían, en las juntas, entre 1.21 y 1.47, mientras que para una viga en flexión pura la relación de la carga máxima soportada (carga de colapso) a la carga para la que se inicia el flujo plástico varía entre 1.12 y 1.20, y para el perfil *8B13* es 1.15 (esta relación es el factor de forma del perfil).

Aunque en todas las conexiones se sobrepasa el límite de elasticidad para un momento menor que el correspondiente a la iniciación del flujo plástico en la unión con el perfil, todas ellas desarrollaron eventualmente resistencias mayores que la correspondiente a ese momento, excepto la junta *B* y un brazo de la *C*<sup>1</sup>.

Puesto que el patin de compresión *B* se pandeó antes de que se alcanzase la resistencia total de la viga, es evidente que se debería haber hecho más grueso, con lo que mejorarían las características

momento-rotación de la junta, ya que el flujo plástico se presentaría en posiciones fuera de su patin comprimido; tal como se construyó la junta, y dada la ley de variación del momento flexionante a lo largo de ella, prácticamente todo el patin comprimido fluye al mismo tiempo, con lo que la tendencia al pandeo lateral se incrementa considerablemente (este problema se elimina aumentando el grueso del patin, como se dijo antes, o modificando la geometría de las cartelas de manera que el momento resistente de la junta aumente más rápidamente, a lo largo del eje de viga y columna, que el momento flexionante que obra sobre ella).

Otros dos factores que influyeron probablemente en el comportamiento de la junta *B* fueron un soporte lateral insuficiente y la existencia de esfuerzos residuales debidos a la soldadura.

La mayor parte de las conexiones fueron capaces de experimentar deformaciones plásticas importantes manteniendo, al mismo tiempo, la forma de su sección transversal lo suficiente para desarrollar el momento plástico de la viga en la unión de ésta con la junta. Las únicas excepciones fueron las conexiones *7*, *J* y *B*; la primera tiene una buena capacidad de rotación, lo que no sucede con la *J* y la *B*, sobre todo esta última. (De nuevo se hace evidente, como se ha mencionado, que para utilizar conexiones acarteladas, rectas o curvas, en marcos diseñados plásticamente, será necesario reforzarlas lo suficiente para asegurar que las articulaciones plásticas no se formarán en ellas sino en los perfiles laminados, en las secciones inmediatas a la junta).

**INESTABILIDAD PLÁSTICA Y SOPORTE LATERAL.** Las secciones transversales de la mayor parte de los perfiles laminados están proporcionadas de tal manera que el pandeo local de sus elementos constitutivos, alma y patines, no se presenta en el rango elástico (tal es el caso de todos los perfiles utilizados para fabricar las juntas, con la única excepción de la viga de alas anchas *14WF30*); además, se escogieron las longitudes de los miembros que forman las conexiones de manera que tampoco fuese posible el pandeo lateral en ese rango.

Sin embargo, una vez sobrepasado el límite de elasticidad (y los esfuerzos residuales pueden ser causa de que esto ocurra para cargas menores que las teóricas) la tendencia al pandeo local y lateral aumenta rápidamente, al disminuir el valor del módulo de elasticidad tangente (de acuerdo con la teoría clásica, a cero; sin embargo, se ha demostrado que  $E_t$  no se anula cuando el perfil está compuesto por placas suficientemente robustas, sino que toma el valor correspondiente a la iniciación del endurecimiento por deformación)<sup>7</sup>.

Debe hacerse hincapié en que la inestabilidad plástica contribuyó a la falla de todas las conexiones ensayadas, y en la mayor parte de los casos ocasionó su colapso final.

La marcada disminución en la rigidez de las juntas ocasionada por la iniciación del flujo plástico obligó al empleo de soportes laterales en las

conexiones ensayadas, ya que de no evitarse el pandeo lateral no serian capaces de admitir rotaciones en el rango plástico, pues la falla se presentaría inmediatamente después de llegar a él.

La fig. 8 muestra que el resultado de mejorar el soporte lateral es aumentar la capacidad de rotación (compárense las juntas *D* y *E* con *F* y *A* y *K* con *L* y *M*; el soporte lateral de *D*, *E*, *A*, *K* y *M* se proporcionó por medio de guías verticales entre las que deslizar los miembros, fig. 13a, mientras que en *F* y *L* se colocaron dos pares de barras horizontales, flexibles en un plano vertical, fijas a las dos esquinas, interior y exterior, de la junta, ligeramente presforzadas al iniciar la prueba, fig. 13b; el segundo método resultó mucho más eficiente que el primero, y fue el que se utilizó también en las pruebas reportadas en las refs. 2 y 5). La mayor capacidad de rotación de *M*, comparada con *A* y *K*, se debe a otro factor que se discutirá más adelante.

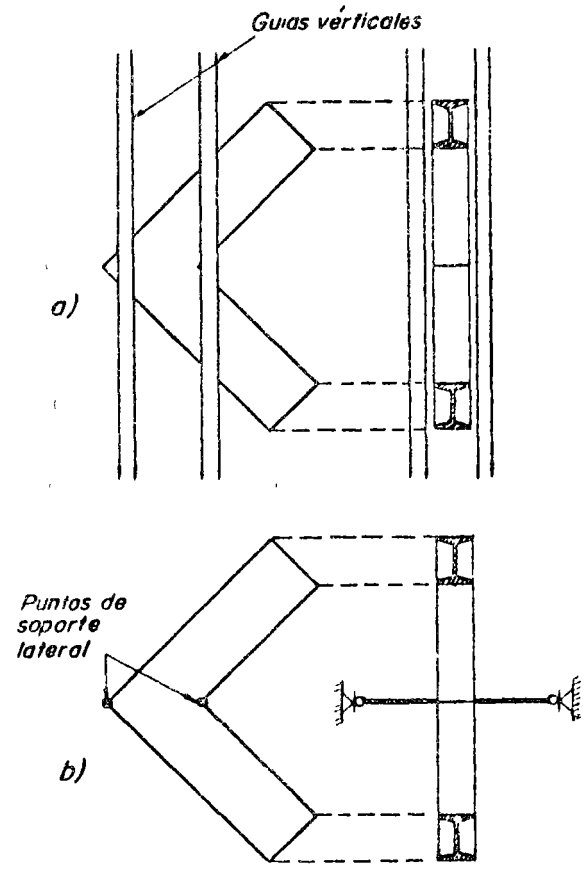


FIGURA 13

Inicialmente bastan fuerzas muy pequeñas para evitar la deformación lateral, pero una vez que los patines se pandean localmente, tendiendo a ocasionar pandeo lateral, esas fuerzas crecen con rapidez; aún así, la intensidad, medida experimentalmente, de las fuerzas necesarias para evitar el pandeo lateral hasta que los miembros alcancen su carga

máxima es pequeña, no mayor de 1 a 2% de la fuerza que ocasionaría el flujo plástico de los miembros que forman la junta si estuviesen cargados axialmente como columnas cortas; por este motivo, el tamaño de los elementos de contraventeo queda en general regido por consideraciones de esbeltez más que de capacidad de carga.

La conexión *D* tiene el alma atiesada en forma más efectiva que la *F*; sin embargo, ésta tiene una capacidad de carga y rotación mayor que aquella, debido a que está provista de un soporte lateral más efectivo.

Se deduce de lo anterior que un apoyo lateral efectivo es más importante que la variación de detalles de fabricación en lo que se refiere a la resistencia de las conexiones en el rango plástico. (Debe notarse que un apoyo lateral poco eficiente no impidió que las juntas discutidas en los párrafos anteriores alcanzasen la carga predicha, pero el mejoramiento de ese apoyo hizo que en ambos casos aumentase la capacidad de carga y, sobre todo, la capacidad de rotación.)

Es evidente que para que su efectividad sea máxima el contraventeo lateral debe colocarse tan cerca como sea posible del punto en que se espera que se forme la articulación plástica; refiriéndose de nuevo a la fig. 8, compárense las juntas acarteladas, en grupo, con las rectas, *A, K, L, M*. En éstas el punto soportado lateralmente, que es la esquina entrante, coincide con el punto donde se inicia el flujo plástico del patin comprimido; por consiguiente, el apoyo se proporciona en la sección en que más se necesita. En cambio, en las juntas acarteladas rectas (*B, C, D, F, E, N*) no puede colocarse soporte lateral a lo largo de todo el patin interior; en las pruebas, el pandeo local se presentó en puntos alejados del punto soportado lateralmente y como una consecuencia, el colapso fue relativamente rápido. El comportamiento de las juntas curvas es semejante; *I* y *J*, que tienen las longitudes efectivas menores, poseen características de rotación plástica mejores que *G* y *H*; éstas se pandean más rápidamente.

En conexiones acarteladas debe proporcionarse apoyo lateral en los extremos de las cartelas (uniones con viga y columna) y en el punto medio del patin interior.

**PANDEO LOCAL Y CAPACIDAD DE ROTACIÓN.** En las curvas de la fig. 8 se indica, por medio de una letra *L*, la iniciación del pandeo local en cada una de las juntas.

Observando las curvas se advierte que el pandeo local es seguido casi inmediatamente por un aumento importante de la deformación por unidad de incremento de carga y en algunos casos por un colapso casi inmediato. (Esto hace que en diseño plástico sea esencial especificar proporciones geométricas adecuadas de los perfiles utilizados, con objeto de evitar un pandeo inelástico prematuro).

El fenómeno que más directamente limita la capacidad de conexión para girar bajo momento constante es el pandeo local seguido por inestabi-

lidad lateral. Si no se presentan fenómenos de inestabilidad, después de alcanzarse la condición de articulación plástica la junta simplemente gira bajo momento prácticamente constante, condición sujeta por la teoría plástica simple y por los métodos de diseño basados en ella.

Por otro lado, la iniciación del pandeo local no da lugar necesariamente a un colapso inmediato si las proporciones geométricas de la sección transversal y el sistema de soporte lateral llenan ciertas condiciones.

Esos dos factores se confirman con los resultados de los ensayos; las conexiones con cartelas más peraltadas y patines más delgados (*G* y *B*) son las que tienen la menor capacidad de rotación (fig. 8), mientras que *II* e *I*, juntas que tienen patines relativamente gruesos y radio pequeño se comportan mejor que *G*. La conexión *J* tiene una buena capacidad de rotación, a la que contribuyen, probablemente, los atiesadores intermedios de que está provista. Ninguna de las rodillas acarteladas tiene una capacidad de rotación tan grande como la de las juntas rectas *L* y *M*.

El segundo factor que gobierna la capacidad de rotación de las conexiones después de que se inicia el pandeo local es la eficiencia del sistema de soporte lateral. En las conexiones rectas el esfuerzo máximo de compresión en los patines se presenta en la esquina entrante, de manera que es en esta región donde comienza el pandeo local; éste es también el punto donde se colocó el soporte lateral, y el pandeo local no fue seguido por pandeo lateral y colapso inmediatos. Si se proporciona un soporte lateral adecuado en el punto donde se espera el pandeo local, éste se presenta en forma simétrica respecto al alma (fig. 14, sección *AA*), con lo que la tendencia del perfil a pandearse lateralmente es pequeña; sin embargo, cuando posteriormente aparecen deformaciones plásticas en secciones transversales alejadas del punto soportado lateralmente, el pandeo local comienza a un lado del patin (fig. 14, sección *BB*) induciendo movimiento lateral, el alma se deforma y la conexión falla.

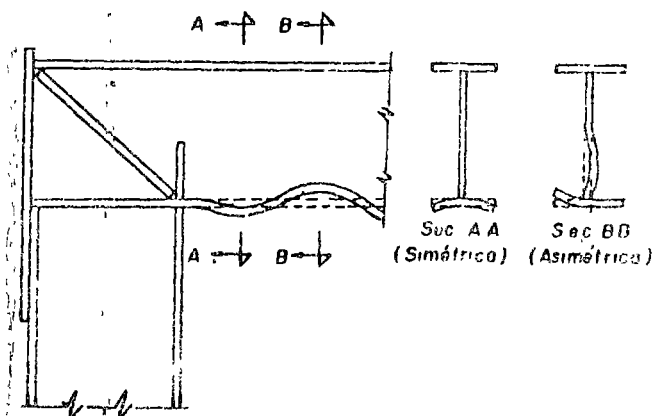


FIGURA 14

Uno de los motivos de la incapacidad de las conexiones acatilladas ensayadas para mantener su momento máximo a través de rotaciones importantes es la imposibilidad, mencionada antes, de proporcionar apoyo lateral en todos los puntos en que puede esperarse pandeo local.

La capacidad de rotación mejora con el empleo de atiesadores que mantienen la forma de la sección transversal e impiden la deformación del alma. Las tres conexiones A, K y M se ensayaron con el mismo sistema de contrayenteo, y de ellas la que tuvo mejor capacidad de rotación fue la M; puesto que es la única provista de un atiesador vertical continuación del patín interior de la columna, es evidente que su colocación representa una mejora en el diseño.

En resumen, prácticamente todas las conexiones ensayadas fallaron por pandeo lateral torsional combinado con pandeo local en los patines y en el alma, pero las juntas formadas por perfiles debidamente proporcionados y soportados lateralmente en forma correcta desarrollaron resistencia y capacidad de rotación suficiente para llenar los requisitos necesarios para su empleo en marcos rígidos diseñados siguiendo procedimientos elásticos o plásticos.

Las investigaciones experimentales discutidas hasta ahora se efectuaron en Estados Unidos; en Inglaterra, A. W. Hendry<sup>8.º</sup> llevó a cabo una serie de experiencias con marcos formados por vigas y columnas en ángulo recto y provistos con diferentes tipos de juntas. Los miembros consistieron en perfiles I ligeros, pequeñas secciones formadas por tres placas y modelos de plástico.

Aunque sus estudios sobre el comportamiento de las conexiones fueron menos completos que los reportados en las refs. 1 y 2, es interesante mencionar las conclusiones siguientes, que concuerdan con los resultados que se han discutido en las páginas anteriores:

1. Las juntas en ángulo recto formadas con perfiles I de proporciones iguales fallan, en general, por inestabilidad del patín de compresión cuando éste no está atiesado ni soportado lateralmente, siendo la carga de falla en esos casos generalmente mucho menor que la resistencia de los miembros conectados. Si el patín de compresión está soportado lateralmente, el alma se pandeará en la junta después de haber fluído plásticamente en forma parcial.

2. Se obtiene un diseño satisfactorio de una junta en ángulo recto reforzándola con un atiesador diagonal, proporcionado para soportar el 40 por ciento de la fuerza debida al cambio de dirección en los patines. De esa manera, la conexión desarrollará la resistencia total de los miembros que la componen. Asimismo se obtienen los mismos resultados si la viga y la columna se sueldan a tope y se añaden posteriormente placas atiesadoras a ambos lados del alma o si los dos miembros se unen por medio de soldaduras de filete a la placa atiesadora (fig. 15, a y b).

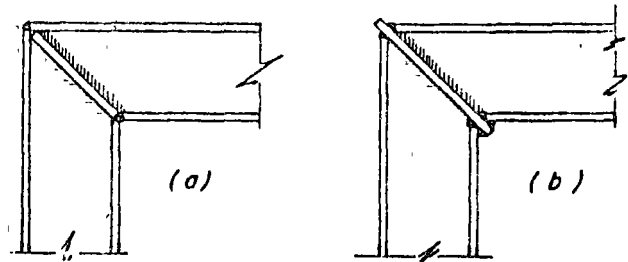


FIGURA 15

Los principios anteriores pueden aplicarse a juntas de marcos de dos aguas, aunque el ángulo entre los dos elementos que las formen sea mayor de 90°.

La solución indicada en la fig. 15b, aunque teóricamente correcta, no es recomendable desde un punto de vista práctico, ya que la placa puede estar hojeada, lo que ocasionaría la falla de la junta; para evitar esa posibilidad es preferible soldar viga y columna a tope.

La regla para proporcionar los atiesadores diagonales no debe emplearse más que para perfiles I pequeños o para secciones de características similares, hechas con placas; para miembros de mayor tamaño, debe hacerse un análisis preciso.

## DISEÑO ELASTICO

### ANÁLISIS ELÁSTICO DE JUNTAS SIN ATIESADORES DIAGONALES

a) Los dos perfiles que forman la junta son iguales. Considérese la conexión tipo 7 mostrada en la fig. 16a. Para determinar los esfuerzos en la junta ABCD se harán las suposiciones siguientes:

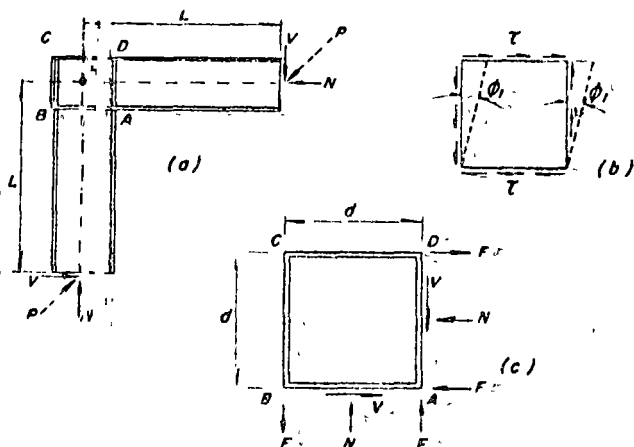


FIGURA 16

1. El momento flexionante en las secciones  $AD$  y  $AB$  es soportado totalmente por los patines. En la junta mostrada, el momento en cualquiera de esas secciones, al que se designará  $M_r$ , vale  $V[L - (d/2)]$ , y ocasiona en cada uno de los patines una fuerza normal de intensidad

$$F = \frac{M_r}{d} = \frac{V}{d} \left( L - \frac{d}{2} \right) = V \left( \frac{L}{d} - \frac{1}{2} \right)$$

El momento existente en la sección extrema del perfil (sección en la que empieza la junta) se designará siempre, en lo que sigue,  $M_r$ , y el momento en el punto  $H$ , intersección de las prolongaciones de los ejes de viga y columna,  $M_h$ .

2. El alma toma toda la fuerza cortante  $V$ , la que se distribuye uniformemente en ella.

3. Los patines toman la totalidad de la fuerza normal  $N$ .

4. Las fuerzas en los patines varían linealmente a lo largo de  $DC$  y  $BC$ , desde un valor máximo en  $D$  y  $B$  hasta cero en la esquina exterior  $C$ .

5. No se toma en cuenta ninguna concentración de esfuerzos.

6. Se desprecian las restricciones debidas a la flexión de los elementos individuales de los patines.

Las hipótesis anteriores no se cumplen rigurosamente en estructuras reales, pero existe una concordancia aceptable entre ellas y el comportamiento de las conexiones.

La fig. 16c muestra las fuerzas que obran sobre la junta, de acuerdo con las suposiciones anteriores, y en las figs. 17, a y b, se indican, respectivamente,

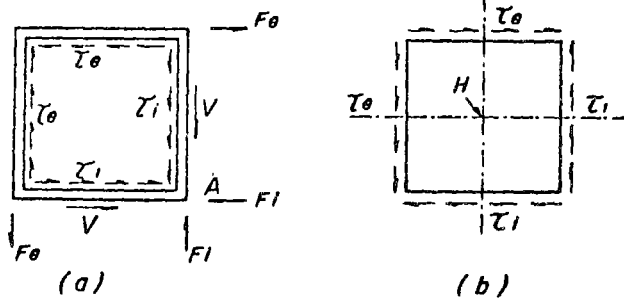


FIGURA 17

mente, las fuerzas y esfuerzos que actúan sobre los patines y sobre el alma (los índices e e i significan que las fuerzas o esfuerzos a los que afectan están aplicados en el patín exterior o en el interior, respectivamente).

Puesto que para la condición de carga en estudio  $N = V$ , la fuerza en el patín exterior vale

$$F_e = \frac{M_r}{d} - \frac{N}{2} = \frac{V(L - d/2)}{d} - \frac{V}{2} = V \left( \frac{L}{d} - 1 \right)$$

En el patín interior,

$$F_i = \frac{M_r}{d} + \frac{N}{2} = \frac{V(L - d/2)}{d} + \frac{V}{2} = \frac{VL}{d}$$

Calculemos ahora los esfuerzos cortantes  $\tau$  en el alma:

$$\tau_e = \frac{F_e}{A_a} = \frac{V}{A_a} \left( \frac{L}{d} - 1 \right)$$

siendo  $A_a$  el área del alma, y

$$\tau_i = \frac{F_i - V}{A_a} = \frac{V(L/d) - V}{A_a} = \frac{V}{A_a} \left( \frac{L}{d} - 1 \right) \quad (1)$$

Se cumple la condición de  $\tau_e = \tau_i$ .

Los esfuerzos están distribuidos en los distintos elementos que forman la junta de la manera siguiente:

1. El alma está sometida a cortante puro.

2. La distribución de esfuerzos en los patines se indica en la fig. 18a, en la que las ordenadas representan esfuerzos normales medios en sus secciones transversales. (Aunque la ley de variación de los esfuerzos en los patines no es rigurosamente lineal, esta suposición concuerda aceptablemente con los resultados de mediciones experimentales).

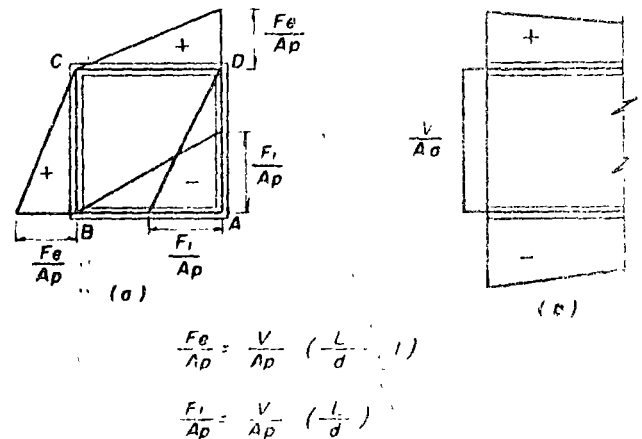


FIGURA 18

3. En la fig. 18b se muestra la distribución de esfuerzos a la derecha de la sección  $AD$  (o abajo de la  $AB$ ); si se considera que el esfuerzo cortante no está uniformemente distribuido en el alma, sino que sigue la ley parabólica dada por la teoría ordinaria de las vigas, se obtienen pequeñas discrepancias en los valores de los esfuerzos, que influyen poco en los resultados finales; además, la dis-

$$\sigma = \frac{M_{r2}}{S_2} + \frac{V}{A_2} = \frac{M_{r2}}{S_2} + \frac{M_h}{A_2 L} =$$

$$= M_h \left[ \frac{1 - (d/2L)}{S_2} + \frac{1}{A_2 L} \right]$$

$$M_{h(\sigma)} = \frac{\sigma_y}{\frac{1 - (d/2L)}{S_2} + \frac{1}{A_2 L}} \quad (8)$$

Aplicando las expresiones 7 y 8 a la conexión P (junta tipo 7, formada por perfiles 8WF31 y 14WF30), utilizando sus dimensiones reales (medidas en las vigas utilizadas para formar la junta ensayada) y las propiedades mecánicas obtenidas por medio de especímenes, se llega al valor siguiente de la relación de momentos.

$$\frac{M_{h(\tau)}}{M_{h(\sigma)}} = \frac{835}{1,140} = 0.732$$

que corresponde al comportamiento de esa junta, descrito con anterioridad<sup>1</sup> (las relaciones de momentos  $M_{h(\tau)}/M_{h(\sigma)}$  para las conexiones A y E tipo 7A, valen, respectivamente, 0.773 y 1.30; el comportamiento aceptable de la junta A se debe a que se ensayó provista de un contraventeo lateral eficiente, gracias al cual la conexión fue capaz de soportar el momento plástico del perfil a pesar de haber experimentado deformaciones por cortante en el alma de bastante importancia)<sup>2</sup>.

Los cálculos anteriores se han efectuado partiendo de la suposición básica de que el esfuerzo cortante está uniformemente repartido en el alma; si cambiamos esa hipótesis por la distribución parabólica dada por la teoría ordinaria de las vigas se obtiene un esfuerzo cortante en el centro del alma ligeramente mayor que el medio (15%, en el caso de la conexión P), lo que hace que el momento  $M_{h(\tau)}$  y el cociente  $M_{h(\tau)}/M_{h(\sigma)}$  disminuyan en la misma proporción.

Aunque con esa modificación se obtiene una concordancia mejor con los resultados experimentales, su único efecto es disminuir las relaciones  $M_{h(\tau)}/M_{h(\sigma)}$  que, como se ha visto, ya eran en general menores que la unidad, es decir, aumenta el énfasis en la necesidad de atiesar el alma para evitar deformaciones indeseables por cortante.

Evidentemente, el análisis que se acaba de presentar es solamente aproximado, ya que no satisface rigurosamente las condiciones de borde (los patines, sobre todo cuando son gruesos, proporcionan restricciones que permiten al alma tomar

cargas mayores antes de que empiece el flujo plástico por cortante) ni toma en cuenta los esfuerzos residuales existentes en la junta, los que dan lugar a que el flujo plástico se inicie para cargas menores que las previstas.

De acuerdo con los pasos usuales para diseñar una conexión tipo 7, se verifica el esfuerzo cortante en la viga y en la columna, pero se ha demostrado que es de importancia fundamental determinar también el valor de ese esfuerzo en el alma de la junta: para que no se presente una falla por cortante, el momento  $M_{h(\tau)}$  para el que se inicia el flujo plástico debido a esfuerzos tangenciales debe ser igual o mayor que el que origina el flujo por flexión,  $M_{h(\sigma)}$ . Partiendo de esta condición y utilizando las ecs. 3 y 4 se llega a una expresión para el cálculo del espesor requerido del alma:

$$c \geq \frac{S}{d^2} \left[ \frac{\sqrt{3}}{\frac{S}{AL} \frac{1}{1 - (d/2L)} + 1} \right] \left[ \frac{1 - \frac{d}{L}}{1 - \frac{d}{2L}} \right] \quad (9)$$

Simplificando la ec. 9 puede obtenerse una expresión conveniente para la determinación del grueso necesario del alma. Considerando las proporciones de la conexión P ( $L/d = 6$ ), el tercer factor en (9) vale 0.91, y el segundo factor varía entre 1.6 y 1.7 para la mayoría de los perfiles laminados, de manera que el promedio del producto de los dos términos entre paréntesis es 1.5 (desde luego, la selección de un solo valor para  $L/d$  es arbitraria, pero permite obtener una buena aproximación para el grueso  $c$  del alma).

Se obtiene una expresión más conservadora para el espesor del alma necesario para evitar deformación inelástica prematura por cortante incrementando el grueso en 15%, aproximadamente, para tomar en cuenta la distribución real, no uniforme, de los esfuerzos.

En esas condiciones, se llega al resultado aproximado siguiente:

$$c \geq 1.75 S/d^2 \quad (10)$$

De acuerdo con la ec. 10, pocos son los perfiles WF cuya alma es suficientemente gruesa para permitir la construcción de conexiones tipo 7 que, sin atiesadores adicionales en diagonal, se comporten de manera correcta.

TABLA III

PERFIL	I 6"	I 7"	I 8"	I 9"	I 10"	I 12"L	I 12"P	I 15"L	I 15"P
<i>l</i> real (cm.)	0.58	0.64	0.69	0.74	0.79	0.89	1.17	1.04	1.50
<i>l</i> necesario, en cm. (ec.10)	0.90	0.94	0.99	1.03	1.09	1.11	1.38	1.17	1.60

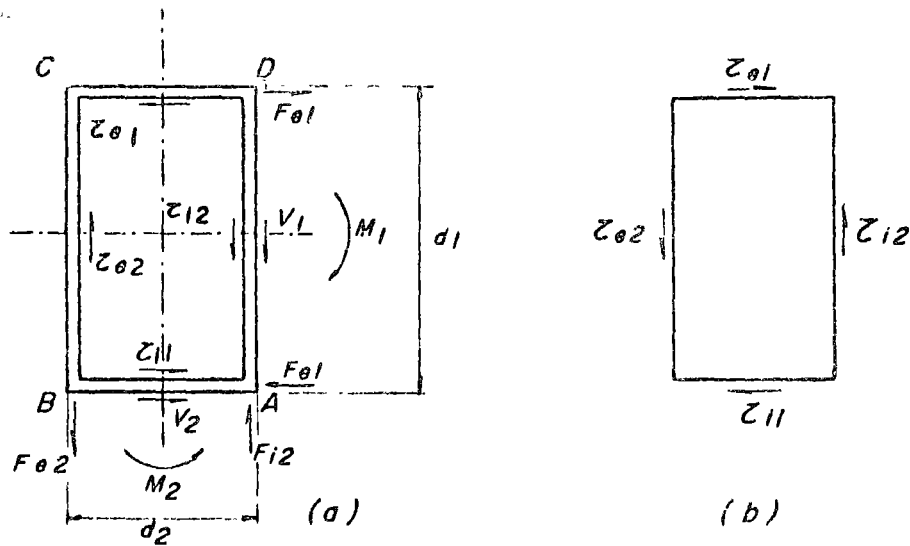


FIGURA 19

los miembros en su unión con la junta, bajo la acción de los esfuerzos normales combinados).

De (3) y (4):

$$\frac{M_{h(\tau)}}{M_{h(\sigma)}} = \frac{\sigma_y c d^2}{\sqrt{3} (1 - d/L)} \left[ \frac{1 - \frac{d}{2L}}{S} + \frac{1}{AL} \right]$$

$$\frac{M_{h(\tau)}}{M_{h(\sigma)}} = \frac{c d^2}{\sqrt{3} \left(1 - \frac{d}{L}\right)} \left( \frac{1 - (d/2L)}{S} + \frac{1}{AL} \right) \quad (5)$$

En la tabla II están anotados los valores de la relación  $M_{h(\tau)}/M_{h(\sigma)}$ , dada por la ec. 5, para algunos perfiles laminados usuales (los seis primeros perfiles de la tabla no se fabrican en México, mientras que los otros seis son secciones que se laminan en el país).

La tabla muestra que el flujo plástico por cortante se presenta generalmente antes que por flexión, excepto para algunos de los perfiles provistos de almas gruesas y con relaciones  $L/d$  bajas; se han tomado en ella dos valores arbitrarios de la relación  $L/d$ , pero se advierte que el problema se agudiza al aumentar el valor de ese cociente.

En un marco rígido real,  $L$  es la distancia del punto de inflexión, en la columna o el cabezal, al centro de la junta la que, normalmente, no es menor de  $6d$  (para una vigueta de 12", por ejemplo,  $6d = 1.83m$ ); por consiguiente, en juntas de marcos rígidos fabricados con perfiles laminados no atiesados existirá, en general, la tendencia a fluir por cortante antes que por momento.

b) Juntas formadas por dos perfiles diferentes ( $d_1 \neq d_2$ ). Se tomará como referencia la fig. 19, y

se conservarán las mismas suposiciones que en el caso anterior; además, se supondrá que  $d_2 < d_1$ . (Los índices 1 y 2 se refieren a los dos miembros que componen la junta).

Procediendo de manera análoga al caso de trabe y columna iguales, se obtienen los mismos valores para los esfuerzos  $\tau$  en los cuatro bordes del table-ro de alma, de manera que, despreciando pequeños efectos de flexión, el alma está en un estado de esfuerzo cortante puro, de intensidad

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V}{c d_1 d_2} \left[ L - \frac{d_1 + d_2}{2} \right] = \\ &= \frac{M_h}{c d_1 d_2} \left[ 1 - \frac{d_1 + d_2}{2L} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

Se hará a continuación un estudio de la iniciación del flujo plástico a cortante en el alma y a flexión en los patines. (El miembro 2 es menor que el 1, de manera que el flujo por flexión se inicia primero en el punto A de la sección AB, fig. 19)

El flujo por cortante se inicia cuando  $\tau = \sigma_y/\sqrt{3}$  luego, de la ec. 6:

$$M_{h(\tau)} = \frac{c d_1 d_2 \sigma_y}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{1 - \frac{d_1 + d_2}{2L}} \right] \quad (7)$$

Desde luego, para lograr que la resistencia al cortante de la junta sea máxima, se correrá el perfil que tenga el alma más gruesa de los dos que la componen.

Siguiendo el mismo camino que para la obtención de la ec. 4, en el punto A se tiene:



bución de fuerzas y esfuerzos en la junta que llevaron a su obtención son razonables.

Sin embargo, esas ecuaciones se han obtenido partiendo de condiciones de carga y dimensiones que, en general, no concuerdan rigurosamente con las que se presentan en las juntas de los marcos rígidos reales, por lo que en problemas de diseño suele ser preferible aplicar directamente la teoría a cada caso particular; como una confirmación adicional de esta manera de proceder, debe recordarse que las ecs. 10 y 14 corresponden a juntas sometidas a las solicitaciones máximas que pueden soportar los miembros que las componen, mientras que en problemas reales de diseño de marcos rígidos es muy común que esos miembros no estén sujetos a los elementos mecánicos máximos teóricos, ya que intervienen factores (relación de esbeltez en columnas, longitud libre de pandeo lateral en traveses, etc.) que obligan a disminuir los esfuerzos permisibles en ellos, lo que no sucede en las juntas, las que deben estar provistas de un soporte lateral adecuado.

Antes de que las amplias investigaciones experimentales permitiesen desarrollar métodos simplificados, el diseño de juntas de marcos rígidos estaba basado en el estudio de placas cargadas en su plano por fuerzas distribuidas en los bordes; los resultados obtenidos siguiendo este camino solían ser tan complicados que, en general, las juntas se diseñaban y se proporcionaban los atiesadores necesarios en ellas siguiendo reglas empíricas, basadas en la experiencia.

Uno de los grupos de fórmulas aplicables al diseño elástico de placas de alma rectangulares es el atribuido a Osgood, cuyo método se presenta, en forma abreviada, a continuación, antes de entrar al estudio del método elástico simplificado, basado en los resultados experimentales discutidos anteriormente.

MÉTODO DE OSGOOD<sup>9,10</sup>. Los elementos mecánicos indicados en la fig. 20 corresponden a las secciones *AD* y *AB*, que limitan la placa rectangular que constituye el alma de la junta. Por equilibrio,

las fuerzas normal y tangencial en la columna son iguales, respectivamente, a las fuerzas tangencial y normal en la trabe; en cambio los momentos no son, en general, iguales, ya que la igualdad de momentos en trabe y columna debe verificarse en la intersección de sus ejes (punto *O*).

Interesa determinar los elementos mecánicos que obran sobre el tablero de alma *ABCD* para, a partir de ellos, calcular los esfuerzos existentes en él.

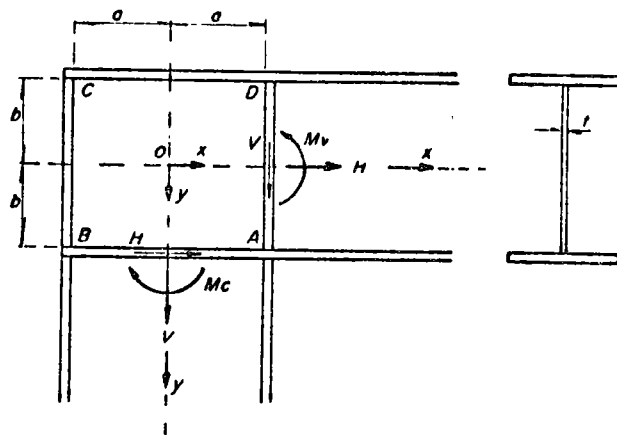


FIGURA 20

Se supondrá que el alma toma la totalidad de la fuerza cortante, en trabe y columna, y que los esfuerzos tangenciales están uniformemente distribuidos en ella; los momentos flexionantes ocasionan esfuerzos normales que varían linealmente en la sección, de acuerdo con la teoría de la flexión de vigas.

Se determinarán primero los esfuerzos existentes en los bordes horizontales *CD* y *AB*.

El momento existente en la viga,  $M_v$ , puede dividirse en dos partes, la que toma el alma y la que toman los patines. Llamando  $I_a$  al momento de inercia del alma e  $I_T$  al de la sección total, ambos

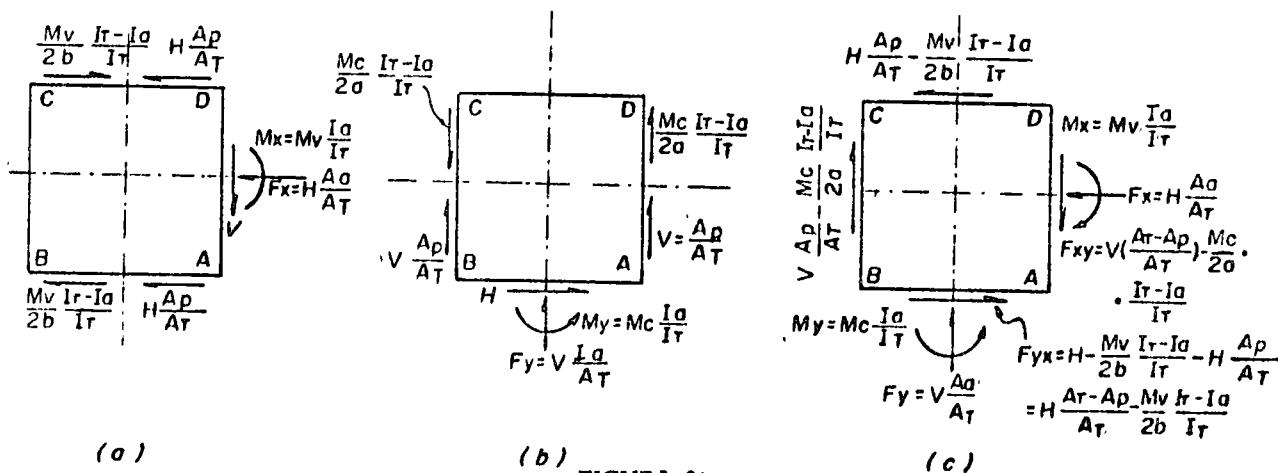


FIGURA 21

Observando la tabla III se ve que tampoco las vigas  $I$  tienen el alma de grueso suficiente para poder emplearse en conexiones tipo 7 sin atiesamiento adicional.

Puesto que el grueso del alma de la mayor parte de los perfiles laminados es insuficiente para conexiones del tipo 7, se recomienda que las reglas de diseño exijan el empleo de atiesadores diagonales o placas adosadas al alma (evidentemente, estos refuerzos pueden no ser necesarios cuando se utilicen perfiles  $I$  formados por placas soldadas, dependiendo del grueso de las placas utilizadas en el alma; sin embargo, en cada caso deberá comprarse si se necesitan o no).

En general, el refuerzo más eficiente y fácil de colocar es el formado por atiesadores diagonales, pero si este sistema no es conveniente por algún motivo, pueden utilizarse placas de refuerzo adosadas al alma, cuyo grueso debe ser tal que, sumado con el alma del perfil, se satisfaga la ec. 10.

El espesor necesario de los atiesadores diagonales puede determinarse suponiendo que el grueso efectivo  $t_{ef}$  del alma está compuesto de dos partes, el grueso real  $t_n$  y un espesor equivalente de atiesador,  $t'_s$ , que se obtiene suponiendo que el material del atiesador está uniformemente repartido sobre el alma de la junta.

En esas condiciones, si los dos miembros que forman la junta son del mismo peralte, se tiene:

Volumen total de material en el atiesador =  $\sqrt{2} db_s t_s$   
( $b_s$  y  $t_s$  son el ancho total y el grueso del atiesador, respectivamente).

Espesor equivalente de atiesador

$$t'_s = \frac{\sqrt{2} d b_s t_s}{d^2} = \frac{\sqrt{2} b_s t_s}{d}$$

Ahora bien,

$$t_{ef} = t_n + t'_s \quad \therefore \quad t'_s = t_{ef} - t_n$$

Igualando los dos valores de  $t'_s$  se obtiene

$$\frac{\sqrt{2} b_s t_s}{d} = t_{ef} - t_n \quad \therefore \quad t_s = \frac{(t_{ef} - t_n) d}{\sqrt{2} b_s}$$

En esta expresión, el espesor efectivo  $t_{ef}$  del alma debe ser igual al grueso necesario, dado por la ec. 10 (Mas adelante se estudiarán otros procedimientos para la determinación de las dimensiones de los atiesadores, basados en el comportamiento de la junta en el rango plástico).

Si el grueso del alma de la viga utilizada en una conexión recta sin atiesadores (tipo  $P$ ) es igual o mayor que el dado por (10), la junta será capaz de soportar el momento flexionante que ocasiona la iniciación del flujo plástico por flexo-compresión sin que se presente antes ningún fenómeno de fluencia por cortante; sin embargo, el cumplimiento de la ec. 10 no garantiza que la junta satisfaga los requisitos de rigidez en el rango elástico.

Este requisito, para conexiones que unan perfiles laminados de peraltes iguales, es que la rotación de la junta  $\varphi_A$ , medida sobre una longitud equivalente  $\Delta L = d$ , no sea mayor que la dada por la expresión<sup>1</sup>

$$\varphi_A = \varphi d \quad (11)$$

en la que  $\varphi$  es la rotación por unidad de longitud del perfil de que está compuesta la junta, sometido a un momento flexionante constante de intensidad  $M_x$ , es decir,

$$\varphi = \frac{M_x}{EI} = \frac{M_h}{EI} \left(1 - \frac{d}{2L}\right) \quad (12)$$

La rotación total en la junta es la suma de la debida a cortante,  $\gamma_A$ , y la debida a flexión,  $\beta_A$ , y está dada por<sup>1</sup>

$$\varphi_A = \gamma_A + \beta_A = \frac{M_h}{td^2G} \left(1 - \frac{d}{L}\right) + \frac{M_h}{2EI} \left(1 - \frac{d}{2L}\right) d \quad (13)$$

Llevando a (11) los valores dados por (12) y (13) y despreciando la influencia de los términos  $(1 - d/L)$  y  $(1 - d/2L)$ , se obtiene

$$\frac{M_h}{td^2G} + \frac{M_h d}{2EI} = \frac{M_h}{EI} d$$

De esta expresión se puede despejar el grueso necesario del alma

$$t = \frac{2EI}{Gd^2} = \frac{ES}{d^2G}$$

Para  $G = 0.38E$  (valor determinado experimentalmente<sup>1</sup>):

$$t \geq 2.6 S/d^2 \quad (14)$$

El grueso del alma dado por (14) proporciona rigidez adecuada en el rango elástico; puede verse que es una condición mucho más restrictiva que la dada por la ec. 10, aunque debe tenerse en cuenta que la (14) proporciona resultados conservadores y que, como se ha mencionado con anterioridad, no es demasiado grave que la rigidez de la junta sea algo menor que la del perfil que la constituye.

**DISEÑO DE JUNTAS RECTAS NO ACARTELADAS** Las ecuaciones deducidas hasta ahora para el cálculo del grueso necesario del alma de juntas rectas no acarteladas sin atiesadores en diagonal proporcionan resultados que coinciden con precisión razonable con los obtenidos experimentalmente<sup>1,2</sup>, lo cual demuestra que las suposiciones respecto a la distri-

respecto al eje centroidal horizontal, la porción del momento total que le corresponde al alma es

$$M_r = M_v \frac{I_a}{I_r}$$

Por consiguiente, los patines deberán tomar el momento restante,  $M_v - M_r$ , el que produce una fuerza de tensión en el patín superior y una de compresión en el inferior, de intensidades iguales, dadas aproximadamente por la expresión siguiente

$$(M_v - M_r) \frac{1}{2b} = M_v \left(1 - \frac{I_a}{I_r}\right) \frac{1}{2b} = \frac{M_v}{2b} \frac{I_r - I_a}{I_r}$$

La fuerza normal  $H$  se distribuye uniformemente en toda la sección, de manera que al alma le corresponde una fuerza  $F_a = H A_a / A_r$  y a cada uno de los patines,  $H A_p / A_r$ , siendo  $A_a$  el área del alma,  $A_p$  el área de cada uno de los patines y  $A_r$  el área total de la sección.

En la fig. 21 se muestra el diagrama de cuerpo libre del tablero de alma  $ABCD$ , sustituyendo el resto de la estructura por los efectos que ejerce sobre él.

En las figs. 21  $a$  y  $b$  se indican, por separado, los efectos debidos a la trabe y a la columna y en la 21  $c$  los acciones completas en todo el peralte  $ABCD$ , obtenidas superponiendo las dos primeras figuras.

En la fig. 21  $a$  se han dibujado las acciones de la viga sobre el tablero  $ABCD$ , calculadas arriba (se supone que las fuerzas existentes en los patines superior e inferior se transmiten al alma uniformemente a lo largo de  $CD$  y  $HA$ , respectivamente), y en la  $(b)$  las acciones de la columna, calculadas con las mismas suposiciones empleadas para determinar los efectos de la viga (aquí se considera que las fuerzas existentes en los patines de la columna pasan íntegramente a los atisadores y de éstos al alma, uniformemente distribuidas).

Superponiendo las figs.  $a$  y  $b$  se obtiene la  $(c)$ , donde están representados los efectos totales sobre  $ABCD$ . (Desde luego, las secciones transversales de viga y columna no son, en general, iguales.)

Conocidas las fuerzas que obran en los bordes de la placa, y suponiendo que los esfuerzos normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  varían linealmente mientras que los tangenciales son uniformes, puede determinarse el estado de esfuerzo en la placa utilizando la función de Airy.

Se llega a los resultados siguientes

$$\sigma_x = \frac{1}{4abt} \left( F_x + \frac{3M_x}{b^2} y \right) (a + x) \quad (15)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4abt} \left( F_y + \frac{3M_y}{a^2} x \right) (b + y) \quad (16)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{4abt} \left[ M_x - a(2F_{xy} + F_y) + F_y x + \right.$$

$$\left. + F_x y - \frac{3M_y}{2} \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \frac{3M_x}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \right] \quad (17)$$

Conocidos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , los esfuerzos principales se calculan con la fórmula usual

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (18)$$

En general, los esfuerzos normales máximos se presentan en la esquina inferior  $A$ , cuyas coordenadas son  $x = +a$ ,  $y = +b$ .

El esfuerzo cortante máximo en el alma se presenta en el punto de coordenadas

$$x = -\frac{F_{xy} a^2}{3M_y} \quad y = -\frac{F_{xy} b^2}{3M_x}$$

Este punto está muy cerca del centro del alma, por lo que  $(\tau_{xy})_{\max}$  puede calcularse con suficiente precisión haciendo  $x = y = 0$  en la ecuación para el esfuerzo cortante:

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_{\max} = & -\frac{1}{4abt} \left[ M_x - a(2F_{xy} + F_y) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2}(M_x + M_y) \right] \quad (17a) \end{aligned}$$

Los momentos y fuerzas que aparecen en las ecs. 15, 16, 17 y 17a son positivos cuando tienen los sentidos indicados en la fig. 20 y negativos en caso contrario.

Si los esfuerzos calculados con las ecs. 17 (ó 17a) y 18 son mayores que los permisibles, será necesario aumentar la capacidad de carga del alma lo que, evidentemente, puede lograrse siempre cambiando los perfiles que forman la junta por otros con mayor área en el alma; si esta solución no es conveniente (y generalmente no lo es, ya que suele resultar muy antieconómica), pueden conservarse los perfiles originales y reforzar el tablero de alma de la junta por medio de placas adhesadas a ella o de atisadores colocados en diagonal, entre las esquinas  $A$  y  $C$ ; éste es el método más comúnmente empleado en la práctica (el diseño elástico de los atisadores constituye un problema muy complicado por lo que, en general, se colocan, empíricamente, de dimensiones iguales a las de los patines de viga y columna).

MÉTODO SIMPLIFICADO. Considérese una junta no acartelada en ángulo recto; no importa, en principio, si la trabe se conecta a tope con el patín de la columna o si descansa sobre ella pero se supondrá que, en uno u otro caso, existen los atisadores necesarios para que el alma de la junta quede ro-

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that this is crucial for the company's financial health and for providing reliable information to stakeholders.

2. The second part of the document outlines the specific procedures for recording transactions. It details the steps from identifying a transaction to entering it into the accounting system, ensuring that all necessary details are captured.

3. The third part of the document addresses the role of the accounting department in monitoring and controlling the company's financial performance. It discusses how regular reviews and audits can help identify areas for improvement and prevent potential issues.

4. The fourth part of the document provides a summary of the key points discussed and offers recommendations for further action. It encourages the company to continue to refine its accounting processes to ensure the highest level of accuracy and transparency.

5. The fifth part of the document discusses the importance of communication and collaboration between different departments. It highlights how clear communication can help ensure that all transactions are recorded accurately and that any discrepancies are identified and resolved quickly.

6. The sixth part of the document provides a detailed overview of the company's current financial position. It includes a breakdown of revenue, expenses, and profit, along with a comparison to the previous period to show trends and growth.

7. The seventh part of the document discusses the company's financial goals for the upcoming period. It outlines the strategies and initiatives that will be implemented to achieve these goals and ensure long-term success.

8. The eighth part of the document provides a final summary and concludes the report. It reiterates the importance of accurate financial reporting and the commitment of the accounting department to providing the highest quality of service.

9. The ninth part of the document discusses the importance of staying up-to-date on changes in accounting standards and regulations. It emphasizes that the company must adapt to these changes to ensure compliance and maintain the integrity of its financial reporting.

10. The tenth part of the document provides a detailed overview of the company's financial performance over the past year. It includes a comprehensive analysis of all financial metrics, from revenue and profit to assets and liabilities, providing a clear picture of the company's overall financial health.

11. The eleventh part of the document discusses the company's financial outlook for the future. It outlines the challenges and opportunities ahead and provides a realistic assessment of the company's ability to meet its financial goals.

12. The twelfth part of the document provides a final summary and concludes the report. It expresses confidence in the company's financial future and the commitment of the accounting department to continue to provide accurate and reliable financial information.

13. The thirteenth part of the document discusses the importance of maintaining a strong relationship with the company's financial institutions. It emphasizes that regular communication and collaboration can help ensure that the company's financial needs are met and that any issues are resolved quickly.

14. The fourteenth part of the document provides a detailed overview of the company's financial performance over the past quarter. It includes a breakdown of all financial metrics, providing a clear picture of the company's recent financial health.

15. The fifteenth part of the document discusses the company's financial performance over the past month. It highlights the key achievements and challenges, providing a detailed analysis of the company's financial performance in the short term.

16. The sixteenth part of the document provides a final summary and concludes the report. It reiterates the company's commitment to financial accuracy and transparency and expresses confidence in the company's future success.

17. The seventeenth part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that this is crucial for the company's financial health and for providing reliable information to stakeholders.

18. The eighteenth part of the document provides a final summary and concludes the report. It reiterates the company's commitment to financial accuracy and transparency and expresses confidence in the company's future success.

deada por un marco rectangular, formado por los atisadores y los patines de trabe o columna.

Como se mencionó con anterioridad, estudios experimentales han demostrado que los esfuerzos son nulos en la esquina exterior de la conexión, y que es aceptable suponer que las fuerzas existentes en los patines se transmiten al alma bajo la forma de esfuerzos cortantes uniformemente repartidos.

Puesto que la transmisión de momento flexionante en la junta se hace a través del alma, ésta queda sometida a esfuerzos cortantes muy superiores, en general, a los existentes en los miembros que concurren en la conexión y es necesario, por consiguiente, determinar sus valores, para saber si se mantienen dentro de límites admisibles; en cambio, no es necesario revisar la junta por flexión, ya que si los dos miembros que la forman están bien diseñados, la junta en sí también será correcta, en lo que respecta a esfuerzos normales (siempre desde luego, que se provea de soporte lateral adecuado para evitar fenómenos de pandeo bajo esfuerzos menores que los de diseño).

Se obtiene una aproximación bastante correcta del valor de los esfuerzos cortantes en el alma de la junta suponiendo que el momento flexionante y la fuerza normal existentes en los miembros que la forman son resistidos por los patines únicamente, mientras que el alma toma exclusivamente las fuerzas cortantes.

Por equilibrio, las fuerzas horizontales  $H_1$  y  $H_2$  deben ser iguales entre sí, lo mismo que las verticales,  $V_1$  y  $V_2$ ; en cambio,  $M_1$  y  $M_2$  son, en general, diferentes, ya que la igualdad de momentos debe satisfacerse en el punto de intersección de los ejes de viga y columna. (fig. 22).

De acuerdo con las hipótesis hechas hasta ahora, las fuerzas  $F_1$  a  $F_4$  de la fig. 22 b, valen

$$F_1 = \frac{M_1}{h_1} - \frac{V_1}{2} \quad ; \quad F_2 = \frac{M_1}{h_1} + \frac{V_1}{2}$$

$$F_3 = \frac{M_2}{h_2} + \frac{H_2}{2} \quad ; \quad F_4 = \frac{M_2}{h_2} - \frac{H_2}{2}$$

Los esfuerzos cortantes, uniformemente repartidos en el perímetro de la placa del alma, se obtienen dividiendo las fuerzas transmitidas por los patines entre el área de cada borde; por consiguiente, llamando  $t$  al grueso del alma, se obtiene

$$\tau_{en} = \frac{F_4}{h_1 t} = \frac{1}{h_1 t} \left( \frac{M_2}{h_2} - \frac{H_2}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{un} &= \frac{F_3 - H_1}{h_1 t} = \frac{1}{h_1 t} \left( \frac{M_2}{h_2} + \frac{H_2}{2} - H_1 \right) = \\ &= \frac{1}{h_1 t} \left( \frac{M_2}{h_2} - \frac{H_2}{2} \right) \end{aligned}$$

puesto que  $H_1 = H_2$ .

$$\tau_{no} = \frac{F_1}{h_2 t} = \frac{1}{h_2 t} \left( \frac{M_1}{h_1} - \frac{V_1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ao} &= \frac{F_2 - V_2}{h_2 t} = \frac{1}{h_2 t} \left( \frac{M_1}{h_1} + \frac{V_1}{2} - V_2 \right) = \\ &= \frac{1}{h_2 t} \left( \frac{M_1}{h_1} - \frac{V_1}{2} \right), \end{aligned}$$

puesto que  $V_1 = V_2$ .

De acuerdo con las ecuaciones anteriores,

$\tau_{en} = \tau_{un}$  y  $\tau_{no} = \tau_{ao}$ ; además, por equilibrio, los cuatro esfuerzos tangenciales deben ser numéricamente iguales entre sí.

Si los esfuerzos cortantes calculados resultan mayores que los permisibles, será necesario reforzar el alma de la junta.

EJEMPLO 1. Revisar la junta de la fig. 23, utilizando a) el método de Osgood, y b) el método simplificado. Acero A. (esta junta se ha tomado de un marco rígido real).

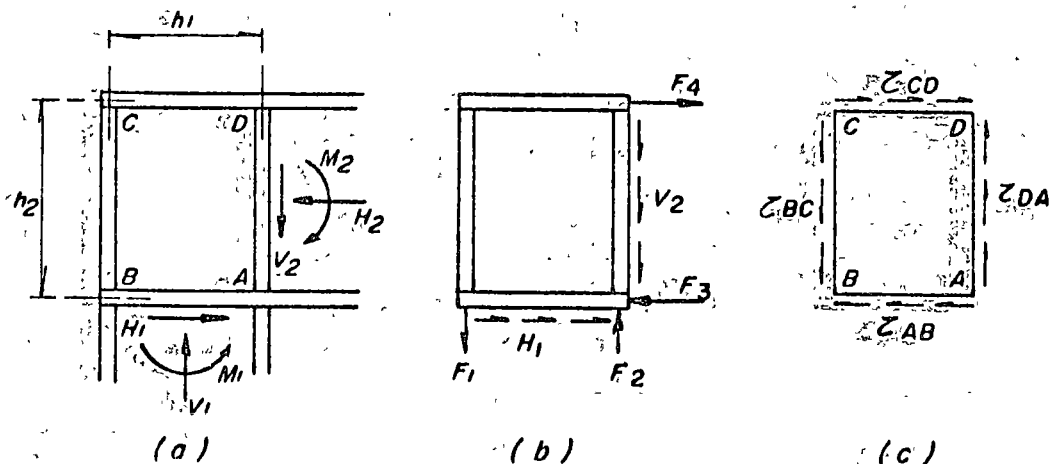


FIGURA 22

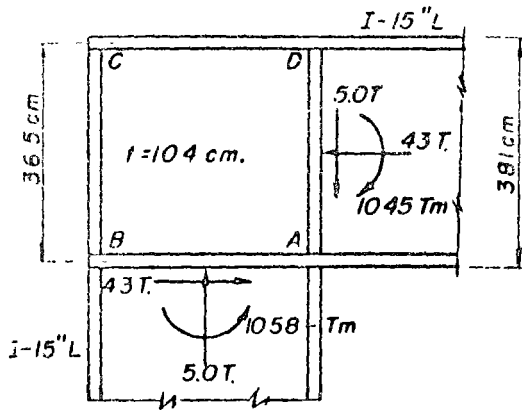


FIGURA 23

a) Método de Osjood

$$I_T = 18,387 \text{ cm}^4; \quad I_A = 2,760 \text{ cm}^4.$$

Petalte del alma = 31.7 cm

$$a = b = \frac{31.7}{2} \approx 15.8 \text{ cm (ver fig. 20)}.$$

$$\Lambda_u = 33.0 \text{ cm}^2,$$

$$\Lambda_v = 80.52 \text{ cm}^2$$

$$F_x = -H \frac{\Lambda_u}{\Lambda_T} = -4,300 \times \frac{33.0}{80.52} = -1,760 \text{ kg}.$$

$$F_y = 5,000 \times \frac{33.0}{80.52} = 2,050 \text{ kg}.$$

$$F_{xy} = 5,000 \times \frac{33.0}{80.52} \times \frac{1,058,000 - 18,387 \cdot 2,760}{31.7 \cdot 18,387} =$$

$$= 2,050 - 28,350 = -26,300 \text{ kg}.$$

$$M_x = -10.45 \times \frac{2,760}{18,387} = -1.57 \text{ tm}.$$

$$M_y = -10.58 \times \frac{2,760}{18,387} = -1.59 \text{ tm}.$$

Esfuerzos en el punto A. ( $x = y = 15.8 \text{ cm}$ ).

$$\sigma_x = \frac{1}{4 \times 15.8 \times 15.8 \times 1.04} \times$$

$$\left( -1,760 - \frac{3 \times 157,000}{15.8^2} \times 15.8 \right) (15.8 + 15.8) =$$

$$= -\frac{31,560 \times 31.6}{1,040} = -958 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1,040} \left( -2,050 - \frac{3 \times 159,000}{15.8^2} \times 15.8 \right)$$

$$\times (15.8 + 15.8) = -\frac{30,200 \times 31.6}{1,040} =$$

$$= -918 \text{ kg/cm}^2$$

Para  $x = y = a = b$ , la ec. 17 se reduce a

$$(\tau_{xy})_A = -\frac{1}{4abt} [M_x - a(2F_{xy} + F_y) +$$

$$+ F_x x + F_y y] = -\frac{1}{1,040} \times$$

$$\times [-157,000 - 15.8(-2 \times 26,300 - 2,050) -$$

$$-2,050 \times 15.8 - 1,760 \times 15.8] =$$

$$= -\frac{1}{1,040} (-157,000 + 864,000 - 60,200) =$$

$$= -\frac{646,800}{1,040} = -622 \text{ kg/cm}^2.$$

Esfuerzo principal máximo de compresión

$$\sigma_{\max} = -\frac{958 + 918}{2} - \sqrt{\left(\frac{958 - 918}{2}\right)^2 + 622^2} =$$

$$= -938 - \sqrt{387,400} = -938 - 622 =$$

$$= -1,560 \text{ kg/cm}^2 > 1,400$$

$$\tau_{\max} \approx -\frac{1}{1,040} \times$$

$$\times \left[ -157,000 - 15.8(-2 \times 26,300 - 2,050) -$$

$$-\frac{3}{2}(-157,000 - 159,000) \right] =$$

$$= -\frac{1}{1,040} (-157,000 + 864,000 + 474,000) =$$

$$= -\frac{1,181,000}{1,040} = -1,138 \text{ kg/cm}^2 > 0.4 \sigma_u =$$

$$= 930 \text{ kg/cm}^2.$$

La junta está escasa tanto por flexión como por cortante, sobre todo por este segundo concepto. De acuerdo con los resultados obtenidos, el grueso del alma debe aumentarse o utilizarse atesadores en diagonal para reforzarla adecuadamente.

b) Método simplificado

$$F_1 = \frac{10.58}{0.365} - \frac{5.0}{2} = 29.0 - 2.5 = 26.5 \text{ ton.}$$

$$F_2 = 29.0 + 2.5 = 31.5 \text{ ton.}$$

$$F_3 = \frac{10.45}{0.365} + \frac{4.3}{2} = 28.7 + 2.1 = 30.8 \text{ ton.}$$

$$F_4 = 28.7 - 2.1 = 26.6 \text{ ton.}$$

$$\tau_{mn} = \frac{26,600}{31.7 \times 1.04} = \frac{26,600}{33.0} = 806 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{AB} = \frac{30,800 - 4,300}{33.0} = \frac{26,500}{33.0} = 803 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{BC} = \frac{26,500}{33.0} = 803 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{AD} = \frac{31,500 - 5,000}{33.0} = \frac{26,500}{33.0} = 803 \text{ kg/cm}^2$$

(Con la aproximación utilizada en los cálculos los cuatro esfuerzos tangenciales pueden considerarse iguales).

$$\tau_{perm} = 0.4 \times 2,320 = 930 \text{ kg/cm}^2 > 803$$

De acuerdo con este método el alma de la junta está sobrada, de manera que no es necesario reforzarla, lo que no coincide con los resultados obtenidos al aplicar el método de Osgood; (debe tenerse en cuenta que ninguno de los dos procedimientos es exacto, y que la aplicación del método simplificado se justifica por su gran sencillez y por el hecho de que las juntas diseñadas de acuerdo con él se comportan satisfactoriamente en la práctica, excepto en lo que se refiere a rigidez, la que resulta algo menor que la necesaria teóricamente).

Por consiguiente, el método simplificado es satisfactorio para el diseño elástico de juntas de marcos rígidos no acarteladas, pero será conveniente utilizar atiesadores diagonales para aumentar la rigidez de la conexión excepto en los casos en que los esfuerzos cortantes en el alma, determinados al aplicarlo, resulten mucho menores que los permisibles.

En general, el grueso de los atiesadores verticales no se calcula, sino se utilizan placas del mismo ancho y espesor que los patines con los que estén almeados; se obtienen así atiesadores algo sobrados, ya que el alma de la junta toma una parte de la fuerza que transmiten los patines.

No siempre es necesario que el atiesador AD (fig. 23), se prolongue hasta el patín superior de la viga, ya que basta con que tenga la longitud requerida para poder transmitir, por medio de soldadura, la fuerza que recibe del patín interior de la columna al alma de la junta.

Inclusive, el atiesador AD puede no ser necesario, si el grueso y el peralte del alma de la viga son tales que sea capaz de soportar la fuerza transmitida por el patín de compresión de la columna sin pandearse local ni lateralmente; sin embargo, se ha comprobado tanto analítica como experimentalmente que la colocación de ese atiesador hace que el comportamiento de la junta mejore extraordinariamente, aún en los casos en que no sea necesario en teoría; lo mismo puede decirse del atiesador diagonal colocado entre A y C.

JUNTAS CON PATINES CURVOS. El diseño de este tipo de conexiones está basado en la teoría aproximada de la flexión para piezas con curvatura inicial fuerte, debida a E. Winkler y H. Résal.<sup>9, 11</sup>

Para que dicha teoría sea aplicable es necesario que cada una de las secciones transversales de la pieza tenga un eje de simetría y que todos estos ejes estén alojados en un mismo plano que, por consiguiente, contiene al eje de la barra, y en el que deben estar aplicadas todas las cargas exteriores; además, se admite la hipótesis de la sección plana y se considera despreciable la influencia de los esfuerzos radiales en la distribución y magnitud de los longitudinales.

La aplicación de la teoría de Winkler-Résal a una barra de sección transversal constante adecuadamente contraventeada (de manera que el pando lateral no sea problema), conduce a la obtención de la ec. 19, la que proporciona el valor del esfuerzo normal longitudinal en cualquier punto de la barra.<sup>9, 11</sup>

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{rA} - \frac{My}{U} \frac{r}{r+y} \quad (19)$$

Las literales que aparecen en ella indican (fig. 24)

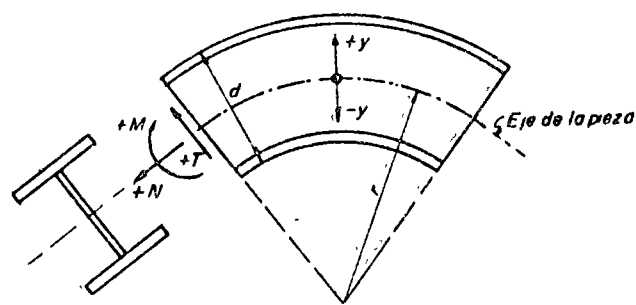


FIGURA 24

N = fuerza normal

M = momento flexionante

A = área de la sección transversal de la barra.

r = radio de curvatura del eje de la pieza antes de la deformación

y = distancia del eje de la barra al punto en el que se quiere calcular el esfuerzo (positiva

cuando se mide hacia fuera del centro de curvatura y negativa cuando se mide hacia él)

$U$  = una cantidad que depende de la forma de la sección, equivalente al momento de inercia  $I$ , dada por

$$U = r \int_{-h_1}^{h_2} \frac{y^2}{r+y} dA$$

Para las secciones usuales en la práctica, que pueden considerarse formadas aproximadamente por rectángulos,  $U$  puede calcularse por medio de la expresión aproximada siguiente

$$U = r^2 \left( 2.30258 r \Sigma b \log \frac{\omega_1}{\omega_2} - A \right)$$

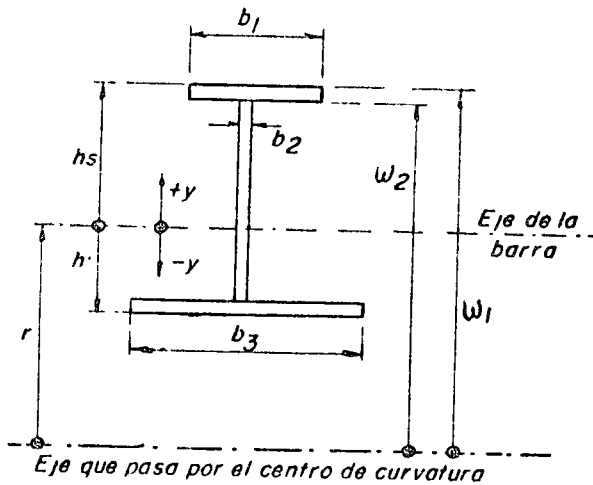


FIGURA 25

Cuando  $r$  es mayor de dos veces el peralte de la pieza,  $U$  puede ser sustituido por  $I$ , pues los valores de las dos cantidades se aproximan mucho ( $U$  es siempre mayor que  $I$ , pero los dos valores se acercan al ir creciendo  $r$ ).

El significado de los símbolos que aparecen en la expresión para  $U$  se explica en la fig. 25. (En ella se muestran los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para el patín superior; los valores correspondientes de los otros dos rectángulos que componen la sección, alma y patín inferior, se definen de una manera análoga).

En barras curvas de sección  $I$  debe emplearse la fórmula de Winkler-Résal para relaciones radio/peralte ( $r/d$ ) menores de 25; para radios mayores puede utilizarse la fórmula usual para flexión de vigas, la que proporciona resultados muy cercanos a los dados por la (19).

**EJEMPLO 2.** Determinense los esfuerzos normales máximos, de tensión y compresión, en una sección transversal cualquiera de la viga curva de la fig. 26.

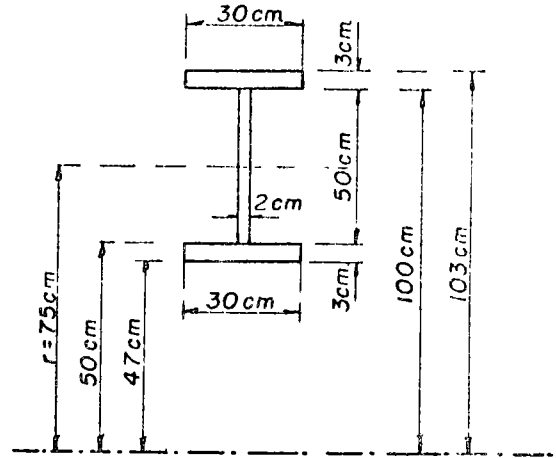
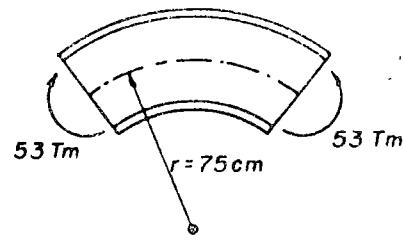


FIGURA 26

$$U = r^2 \left( 2.30258 r \Sigma b \log \frac{\omega_1}{\omega_2} - A \right)$$

$$A = 2 \times 30 \times 3 + 50 \times 2 = 280 \text{ cm}^2$$

$$30 \log(103/100) = 30 \times 0.01284 = 0.3852$$

$$2 \log(100/50) = 2 \times 0.30103 = 0.6021$$

$$30 \log(50/47) = 30 \times 0.02734 = 0.8202$$

$$\Sigma b \log(\omega_1/\omega_2) = 1.8075$$

$$U = 75^2 (2.30258 \times 75 \times 1.8075 - 280) =$$

$$= 180,337.5 \text{ cm}^4$$

(El momento de inercia centroidal de la sección vale  $147,373.3 \text{ cm}^4$ )

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{rA} - \frac{My}{U} \frac{r}{r+y} =$$

$$= 0 - \frac{5,300,000}{75 \times 280} - \frac{5,300,000}{180,337.5} y \frac{75}{75+y} =$$

$$= -252 - 29.4 \frac{75y}{75+y}$$



En el borde superior

$$\sigma = -252 - 29.4 \times \frac{75 \times 28}{75 + 28} = -252 - 600 = -852 \text{ kg/cm}^2$$

En el borde inferior

$$\sigma = -252 - 29.4 \times \frac{75(-28)}{75 - 28} = -252 + 29.4 \times \frac{75 \times 28}{47} = 1,063 \text{ kg/cm}^2$$

(La fórmula ordinaria para barras en flexión pura da

$$\sigma = \pm \frac{5,300,000}{147,373.3} \times 28 = \pm 1,008 \text{ kg/cm}^2.$$

Del estudio de la fórmula 19 se obtienen las conclusiones siguientes, que han sido comprobadas experimentalmente:

1. La distribución de los esfuerzos normales  $\sigma$  a través de la sección se aparta de la distribución lineal, tanto más cuanto menor sea el radio  $r$ .

2. Los esfuerzos existentes en el borde interior de la viga curva son mayores que los dados por las fórmulas ordinarias de flexión; la diferencia aumenta al disminuir el radio de curvatura, ya que tienden a infinito cuando el radio del borde interior tiende a cero, convirtiéndose en una arista viva. Por consiguiente, debe procurarse proporcionar el mayor radio posible cuando se utilicen uniones curvas.

El cambio en la dirección de la fuerza normal existente en los patines de una viga curva da lugar a la aparición de esfuerzos radiales en el alma, los que pueden calcularse por medio de la fórmula siguiente

$$s = \frac{N'}{rt} \quad (20)$$

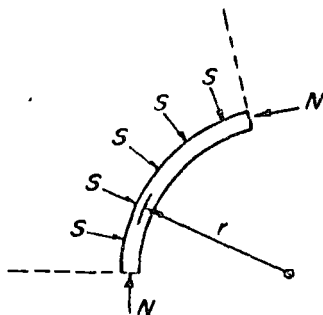
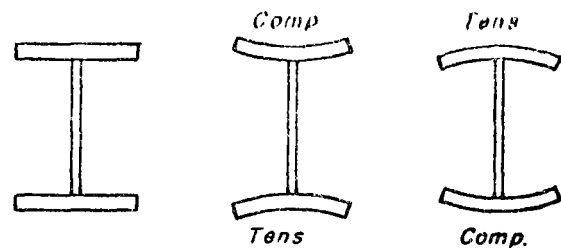


FIGURA 27

en la que  $s$  es el esfuerzo radial en el alma,  $N'$  la fuerza total en el patín,  $r$  el radio de curvatura del patín en consideración y  $t$  el grueso del alma.

Los esfuerzos radiales dados por la ecuación anterior deben sumarse a los esfuerzos cortantes existentes en el alma.

La fuerza  $N$ , sea de compresión o de tensión, está distribuida uniformemente en todo el ancho del patín, mientras que las fuerzas correspondientes a los esfuerzos  $s$  actúan sobre él únicamente a lo largo de la faja central angosta en que se une con el alma; esta distribución ocasiona una flexión transversal del patín, cuyos bordes se mueven hacia el centro de curvatura o se alejan de él, según que los esfuerzos a que está sometido sean de tensión o compresión, (véase la fig. 28).



Eje que pasa por el centro de curvatura

FIGURA 28

Como consecuencia de esta deformación de los patines se presenta una alteración en la distribución de los esfuerzos longitudinales, supuesta originalmente uniforme, y aparecen además esfuerzos normales transversales.

Los efectos de este fenómeno pueden valuarse por medio de los coeficientes  $\nu$  y  $\mu$  de la tabla IV, debida a H. H. Bleich,<sup>9</sup> los que están asociados, respectivamente, con los esfuerzos longitudinales y transversales existentes en los patines: dividiendo el esfuerzo medio  $\sigma$  dado por la fórmula 19 entre el primero de ellos obtenemos el esfuerzo longitudinal máximo, y dividiéndolo entre el segundo, el esfuerzo transversal.

Es decir,

$$\sigma_{transv} = \frac{\sigma}{\mu} \quad \sigma_{máx} = \frac{\sigma}{\nu} \quad (21)$$

En el diseño de los patines y del alma deberá tenerse en cuenta el incremento en los esfuerzos debido a la flexión transversal, a menos que se evite ésta atiesando los patines, ya sea por medio de atiesadores completos o parciales; la separación entre ellos queda a criterio del proyectista, ya que no se han obtenido reglas, matemáticas o empíricas, para fijarla. Este fenómeno deberá tenerse también en cuenta en el diseño de juntas acarteladas curvas.

Las juntas curvas se utilizan en ocasiones en marcos sujetos a cargas móviles (puentes) porque proporcionan una transmisión de esfuerzos muy directa, carente de concentraciones; sin embargo, resultan de fabricación muy costosa, por lo que su empleo es poco frecuente.

**DISEÑO DE JUNTAS ACARTELADAS, RECTAS O CURVAS.** Las juntas acarteladas son, evidentemente, de fabricación más costosa que las uniones simples, pero a cambio de ello permiten disminuir la escuadría de los miembros que concurren en ellas, los que se diseñan para elementos mecánicos que pueden ser apreciablemente menores que los existentes en la intersección de sus ejes; por este motivo, su empleo permite, a veces, obtener estructuras más económicas, en conjunto, que las resultantes de la utilización de conexiones no acarteladas.

La determinación de los esfuerzos en los elementos constitutivos de una junta acartelada, con cartelas rectas o curvas, constituye un problema complejo, por lo que se ha ideado un número considerable de métodos aproximados, suficientemente sencillos para poder ser utilizados en diseños rutinarios. Estudiaremos en lo que sigue dos de esos métodos.

**MÉTODO DE VIERENDEEL.** La junta acartelada curva de la fig. 29 servirá como base para la explicación del método el que evidentemente, es también aplicable al caso en que las cartelas sean rectas.

Los esfuerzos existentes en una sección transversal cualquiera  $AA$  hecha a través de la parte curva de la junta están dados por las expresiones siguientes:

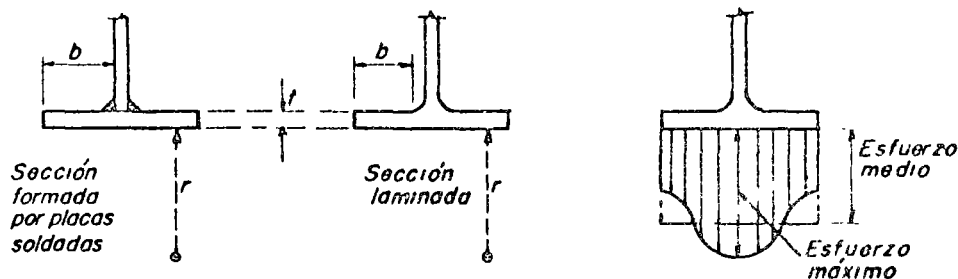
$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_e \\ \sigma_i &= \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_i \\ \tau &= \frac{I}{dt} (T + \sigma_i A_i \sin \phi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$\sigma_i$  y  $\sigma_e$  son los esfuerzos medios en los patines exterior e interior, respectivamente,  $y_e$  y  $y_i$  las distancias de los centroides de esos patines al eje mostrado (prolongación del eje de la viga) y  $\tau$  el esfuerzo tangencial existente en el alma;  $N$ ,  $M$  y  $T$  son los elementos mecánicos en la sección en estudio.

Las ecs., 22 representan una aplicación de las fórmulas usuales al cálculo de los esfuerzos en la sección hipotética de la fig. 30, cuyo patin inferior se obtiene proyectando sobre una vertical el área del patin real, inclinado un ángulo  $\phi$ .

TABLA - IV

$b^2/ri$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\nu$	1.000	0.994	0.977	0.950	0.915	0.878	0.838	0.800	0.762	0.726
$\mu$	0	0.297	0.580	0.836	1.056	1.238	1.382	1.495	1.577	1.636
$b^2/ri$	10	11	12	13	14	15	20	3.0	4.0	5.0
$\nu$	0.693	0.663	0.636	0.611	0.589	0.569	0.495	0.414	0.367	0.334
$\mu$	1.677	1.703	1.721	1.728	1.732	1.732	1.707	1.671	1.680	1.700



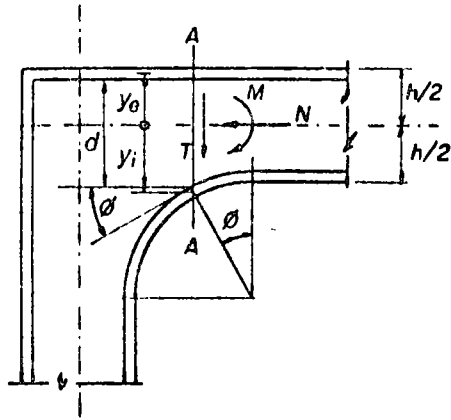


FIGURA 29

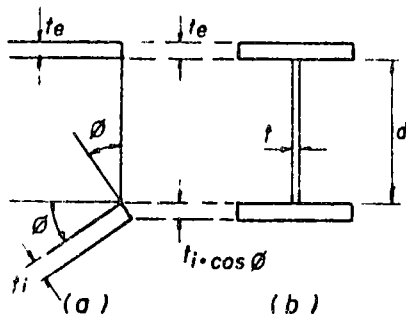


FIGURA 30

Por consiguiente, llamando  $A_e$  y  $A_i$  a las áreas de los patines exterior e interior, respectivamente, se obtiene

$$A = dt + A_e + A_i \cos \phi$$

$$I = td^3/12 + A_e y_c^2 + A_i \cos \phi y_i^2$$

El momento de inercia se calcula respecto a un eje que pasa por la prolongación del eje de la trabe, despreciando el hecho de que no es rigurosamente eje centroidal del alma.

El esfuerzo cortante se calcula, como es costumbre en secciones  $I$ , dividiendo la fuerza cortante total entre el área del alma; al valuar la fuerza tangencial debe tenerse en cuenta la proyección

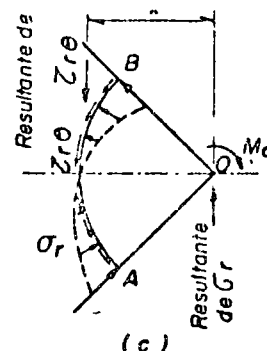
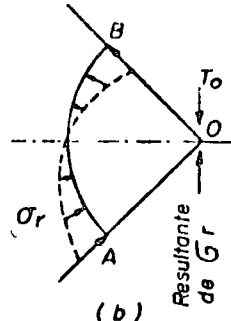
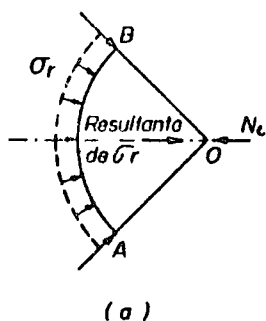


FIGURA 32

vertical de la fuerza en el patin inclinado,  $\sigma_i A_i \sin \phi$ .

Una vez determinados los esfuerzos medios en los patines los esfuerzos máximos en el patin comprimido se calculan utilizando las fórmulas 21 y, si son necesarios, se colocan atiesadores.

MÉTODO DE OLANDER.<sup>12</sup> También es aplicable al diseño de juntas acarteladas, curvas o rectas.

Este método, lo mismo que el anterior, fue desarrollado para la determinación de esfuerzos en esquinas de marcos rígidos en las que los bordes de viga y columna no son paralelos, (cartelas curvas o rectas); los resultados obtenidos aplicándolos han sido comparados con esfuerzos medidos experimentalmente, y se ha encontrado una buena concordancia.<sup>12</sup> El método está basado en una solución aproximada para vigas de forma triangular, obtenida utilizando las fórmulas usuales para vigas con patines paralelos, convenientemente modificadas.

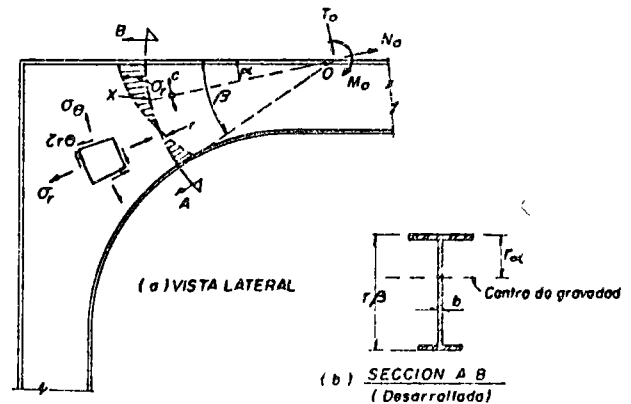


FIGURA 31

Cada aplicación de este procedimiento permite calcular los esfuerzos normales y tangenciales existentes en los puntos situados sobre un arco de círculo que corta las fibras extremas de la barra en ángulo recto, tal como el AB de la fig. 31; el centro de este arco (punto O) se encuentra, por consiguiente, sobre el borde exterior recto de la esquina, ya sea en la columna o en la viga.

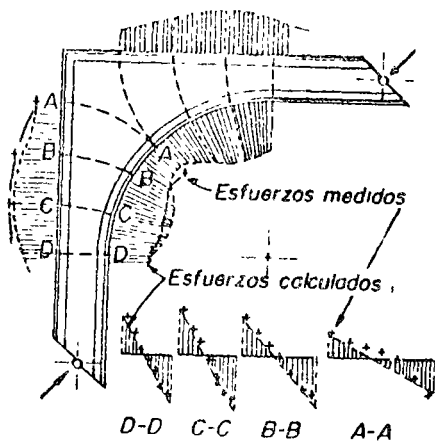
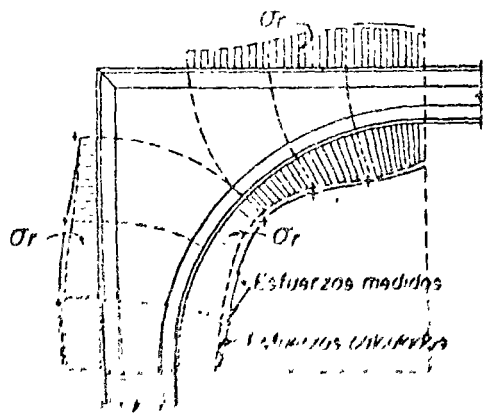


FIGURA 34

Aplicando el método varias veces, para arcos con diversos centros, pueden determinarse los esfuerzos en tantos puntos de la junta como se desee.

El problema consiste en determinar los esfuerzos a lo largo de la sección  $AB$  de la viga triangular  $ABO$ , sobre la que obra una serie de fuerzas, acción del marco sobre ella, a lo largo del borde  $AO$ ; los lados de la viga triangular son tangentes a los bordes de la junta.

El problema se simplifica sustituyendo las fuerzas distribuidas a lo largo del borde  $AO$  por sus resultantes, aplicadas en el vértice  $O$ ; de acuerdo con el principio de Saint Venant, esta simplificación debe afectar poco los esfuerzos en el borde exterior de la sección  $AB$  y tener en cambio una influencia mucho mayor en el borde interior (punto  $A$ ) que se encuentra inmediato a la zona donde se ha llevado a cabo la sustitución del sistema de fuerzas (experimentalmente se ha comprobado que, efectivamente, las discrepancias mayores entre los esfuerzos medidos y calculados se presentan en el borde interior de la junta; sin embargo, la concordancia es aceptable para fines prácticos, como se muestra en las figs. 33 y 34.<sup>12</sup>)

El método de análisis consiste en sustituir todas las fuerzas exteriores a la derecha de  $AB$  por dos

fuerzas y un par aplicados en  $O$  (centro del arco, (la fuerza  $N_0$  pasa por el centro de gravedad de la sección  $AB$ ,  $T$  es normal a ella y  $M_0$  es el momento de las fuerzas alrededor del punto  $O$ , fig. 31) conocidas esas fuerzas, los esfuerzos normales en la sección  $AB$  se calculan como si se tratase de una viga ordinaria, y los cortantes se determinan por medio de  $M_0$ . (fig. 32).

La fuerza cortante total  $T$  en la sección  $AB$  vale  $T = M_0/r$ , de manera que los esfuerzos tangenciales en el alma son iguales a

$$\tau = \frac{TQ}{I_b} = \frac{M_0 Q}{r I_b} \quad (23)$$

(Puede utilizarse también la expresión usual para vigas  $I$ ,

$$\tau = \frac{T}{A_n} = \frac{M_0}{A_n r}.$$

Los esfuerzos normales a la sección están dados por

$$\sigma = \frac{N_0}{A} \pm \frac{My}{I}, \text{ siendo } M = M_0 + T_0 r \quad (24)$$

$M$  es el momento de las fuerzas a la derecha de la sección respecto a su centro de gravedad,  $r$  el radio del arco de círculo que define la sección y  $y$  la distancia del eje que pasa por el centro de gravedad al punto en que se desea calcular el esfuerzo (puede parecer innecesario calcular primero  $T_0$  y  $M_0$  y encontrar después sus momentos respecto al centro de gravedad, en vez de determinar  $M$  directamente, pero debe recordarse que  $M_0$  y  $N_0$  son necesarios de todos modos, por lo que el camino indicado para la obtención de  $\sigma$  no representa ningún trabajo adicional.)

En las fórmulas anteriores,  $A$  e  $I$  son el área y el momento de inercia de la sección transversal desarrollada sobre el arco de círculo  $AB$  (ver fig. 31).

La fuerza cortante  $T_0$  no produce esfuerzos tangenciales en la sección  $AB$ , como puede verse observando las distribuciones de esfuerzos de la fig. 32.  $T_0$ , aplicada en  $O$ , ocasiona en la sección  $AB$  un momento de intensidad  $T_0 r$ , el que origina esfuerzos normales a lo largo de  $AB$  cuya resultante (de los esfuerzos multiplicados por las áreas sobre las que obran, desde luego) es igual, colineal y de sentido contrario a  $T_0$ ; ésta queda equilibrada, por consiguiente, por fuerzas interiores normales únicamente.

En cambio, los esfuerzos producidos por el momento  $M_0$  si son cortantes y normales, ya que la resultante correspondiente a los esfuerzos cortantes es una fuerza vertical, igual y opuesta a la correspondiente, a los normales, pero aplicada a una distancia  $x$  de ella, de tal manera que entre las dos forman un par que equilibra a  $M_0$ .

Ambos métodos, de Viennecel y Olander son incapaces de determinar los esfuerzos existentes en una zona de la junta (ver fig. 35); sin embargo,

la importancia práctica de esta limitación es reducida, ya que los esfuerzos en esas zonas son menores que en el resto de la junta.

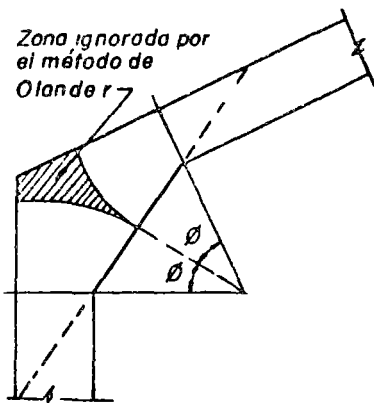
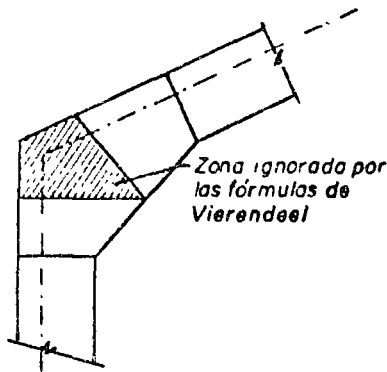


FIGURA 35

En el diseño de juntas acarteladas curvas, los esfuerzos normales en el patin comprimido, determinados por cualquiera de los dos métodos, servirán como base para el cálculo, utilizando las ecs. 21, de los esfuerzos transversales y longitudinales máximos.

En el ejemplo numérico 3 se ilustra la manera de aplicar los dos métodos anteriores.

Del examen de los resultados del estudio experimental de gran número de juntas curvas de marcos rígidos se ha encontrado que el esfuerzo máximo en el patin interior se presenta en un punto C cercano al de iniciación de la curva (fig. 36) cuya posición, relacionada con las dimensiones en la junta, está dada, en forma aproximada, en la tabla V.<sup>17</sup>

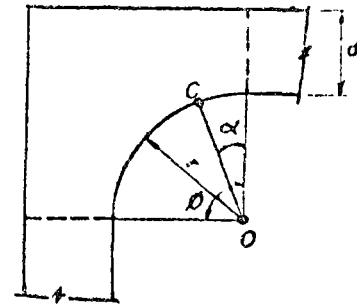


FIGURA 36

Si el ángulo  $\theta$  no es recto, el valor de  $\alpha$  dado por la tabla debe multiplicarse por  $\theta/90$ .

Entre las principales conclusiones relativas al diseño de juntas acarteladas curvas deducidas en la ref. 8 se cuentan las siguientes:

"Las juntas acarteladas curvas fallan generalmente por deflexión lateral del patin comprimido, si éste no está soportado lateralmente; la falla se presenta después de la plastificación de dicho patin. Si se impide el movimiento lateral del patin curvo, el colapso suele presentarse por pandeo del alma. Las fuerzas que tienden a producir el pandeo se reducen considerablemente al aumentar el radio, de manera que puede lograrse que la carga de colapso se aproxime a la máxima resistencia posible, que está limitada por la resistencia de los miembros conectados.

Si se desea que una junta con patin interior curvo, en la que la relación entre el radio de curvatura y el peralte de la barra se encuentre entre 1 y 2, sea capaz de desarrollar la resistencia total del miembro conectado, debe proporcionarse un atizador en diagonal, entre el patin curvo y la esquina exterior de la junta, capaz de soportar, cuando menos, el 30% de la carga total debido al cambio de dirección de las fuerzas en los patines.

Las conexiones entre miembros cuyos ejes forman un ángulo mayor de  $90^\circ$  pueden tratarse de la misma manera sugerida arriba".

EJEMPLO 3. Diseñar la junta acartelada de la fig. 37, utilizando, a) el método de Vierendeel, b), el de Olander.

### METODO DE VIERENDEEL

Se calcularán los esfuerzos en las secciones I, II y III de la trabe.

TABLA - V

$r/d$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$\alpha$ (Grados)	30.0	21.5	16.5	12.5	9.5	7.5

SECCIÓN I

$$M = 12(6 - 2) = 48.0 \text{ tm}$$

$$N = 14.4 \text{ ton}$$

$$T = 12 \text{ ton}$$

$$\sigma_{mix} = -\frac{14,400}{212.9} \pm \frac{4,800,000}{3,951} = -67.6 \pm 1214$$

Borde exterior

$$\sigma_e = -67.6 + 1,214 \cong 1,146 \text{ kg/cm}^2$$

Borde interior

$$\sigma_i = -67.6 - 1,214 \cong -1,282 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{12,000}{45.7 \times 1.27} = 207 \text{ kg/cm}^2$$

Estos esfuerzos (lo mismo que los de la sección IV) deben ser aceptables, puesto que estas secciones corresponden todavía a la viga y a la columna, las cuales se deben diseñar antes de resolver la junta.

SECCIÓN II (fig 38)

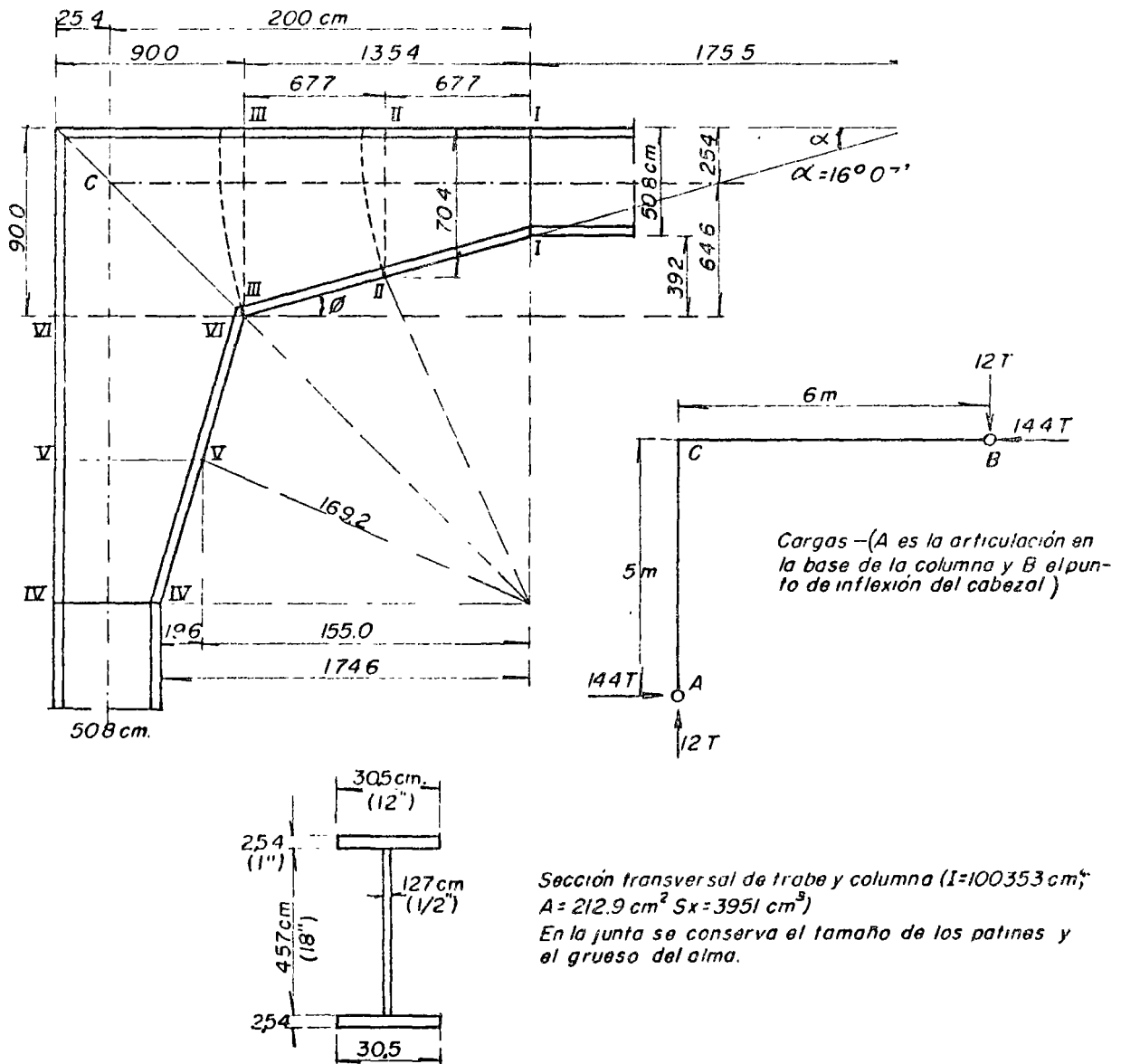
$$M = 12 \times 4.677 = 56.0 \text{ tm}$$

$$N = 14.4 \text{ ton}$$

$$T = 12.0 \text{ ton}$$

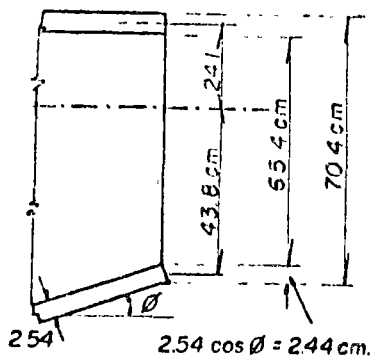
$$A = 65.4 \times 1.27 + 2.54 \times 30.5 + 2.44 \times 30.5 = 83.1 + 77.5 + 74.5 = 235.1 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{1.27 \times 65.4^3}{12} + 77.5 \times 24.1^2 + 74.5 \times 43.8^2 = 217,600 \text{ cm}^4$$



Sección transversal de trabe y columna ( $I=100353 \text{ cm}^4$ ;  $A=212.9 \text{ cm}^2$   $S_x=3951 \text{ cm}^3$ )  
En la junta se conserva el tamaño de los patines y el grueso del alma.

FIGURA 37



SECCION - II  
FIGURA 38

$$I = \frac{1.27 \times 65.4^3}{12} + 77.5 \times 24.1^2 + 74.5 \times 43.8^2 = 217,600 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_o = -\frac{14,400}{235.1} + \frac{5,600,000}{217,600} \times 24.1 = -61 + 621 = 560 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_i = -61 - \frac{5,600,000}{217,600} \times 43.8 = -61 - 1,129 = -1,190 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{1}{83.1} (12,000 + 1,190 \times 74.5 \times 0.289) = \frac{12,000 + 25,600}{83.1} = 436 \text{ kg/cm}^2$$

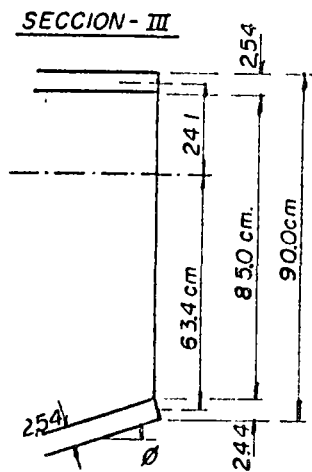


FIGURA 39

SECCION III (fig. 39)

$$M = 12 \times 5.354 = 64.0 \text{ tm}$$

$$N = 14.4 \text{ ton}$$

$$T = 12.0 \text{ ton}$$

JULIO DE 1966

$$A = 85.0 \times 1.27 + 77.5 + 74.5 = 108.0 + 77.5 + 74.5 = 260.0 \text{ cm}$$

$$I = \frac{1.27 \times 85.3^3}{12} + 77.5 \times 24.1^2 + 74.5 \times 63.4^2 = 409,800 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_o = -\frac{14,400}{260} + \frac{6,400,000}{409,800} \times 24.1 = -55 + 376 = 321 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_i = -\frac{14,400}{260} - \frac{6,400,000}{409,800} \times 63.4 = -55 - 991 = -1,046 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{1}{83.1} (12,000 + 1,046 \times 74.5 \times 0.289) = \frac{12,000 + 22,500}{83.1} = 415 \text{ kg/cm}^2$$

Los esfuerzos normales en los patines de las secciones II y III son menores que en la I; los esfuerzos tangenciales son mayores, pero están dentro de límites admisibles; esto indica que la cartela podría hacerse con un peralte máximo un poco menor que el considerado.

Los esfuerzos en las secciones IV, V y VI se calcularían de manera análoga a como se ha hecho arriba, pero utilizando los elementos mecánicos existentes en la columna.

### METODO DE OLANDER

Las secciones en las que se va a aplicar el método se escogen de tal manera que los puntos del patin interior donde se calculan los esfuerzos sean los mismos en que se obtuvieron con las fórmulas de Vierendeel, con objeto de comparar resultados.

Como la cartela no es curva sino recta, el centro 0 es común a todas las secciones transversales circulares, y se obtiene prolongando el borde del patin interior hasta encontrar el del superior; evidentemente, esto simplifica el trabajo numérico con respecto al necesario para diseñar una junta con cartela curva. (Como se vio arriba, también la aplicación del método de Vierendeel resulta más sencilla, por ser constante la inclinación del patin interior).

No es necesario volver a calcular los esfuerzos en la sección I, puesto que están dados por las fórmulas ordinarias para flexión.

SECCION II (figs. 40 y 41)

$$T_o = T \cos(\alpha/2) - N \sin(\alpha/2) = 12 \times 0.990 - 14.4 \times 0.140 = 9.87 \text{ ton}$$

$$N_o = T \sin(\alpha/2) + N \cos(\alpha/2) = 12 \times 0.140 + 14.4 \times 0.990 = 15.95 \text{ ton}$$

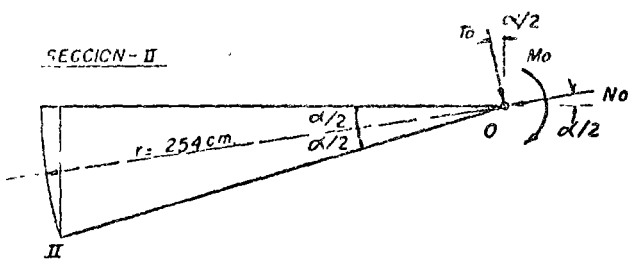


FIGURA 40

$$M_o = 12(6.00 - 3.755) + 14.4 \times 0.254 = 26.95 + 3.66 = 30.61 \text{ tm}$$

$$M = 30.61 + 9.87 \times 2.54 = 55.70 \text{ tm}$$

$$A = 2 \times 77.5 + 1.27 \times 66.4 = 239.3 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{1.27 \times 66.4^3}{12} + 2 \times 77.5 \times 34.5^2 = 215,200 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_o = -\frac{15,950}{239.3} + \frac{5,570,000}{215,200} \times 35.75 = -67 + 926 = 859 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_i = -67 - 926 = -993 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{3,061,000}{254 \times 84.3} = 143 \text{ kg/cm}^2$$

SECCIÓN III

$$r = 324 \text{ cm}$$

$$M = 30.61 + 9.87 \times 3.24 = 30.61 + 32.0 = 62.61 \text{ tm}$$

$$\text{Peralte de la sección desarrollada} = 91.2 \text{ cm}$$

$$A = 1.27 \times 86.1 + 2 \times 77.5 = 264.4 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{1.27 \times 86.1^3}{12} + 2 \times 77.5 \times 44.3^2 = 371,600 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_o = -\frac{15,950}{264.4} + \frac{6,261,000}{371,600} \times 45.6 = -60 + 772 = 712 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_i = -60 - 772 = -832 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{3,061,000}{324 \times 109.4} = 86 \text{ kg/cm}^2$$

Los resultados obtenidos por los dos métodos difieren apreciablemente, sobre todo los esfuerzos normales en el borde exterior y los tangenciales.

Sección desarrollada:

$$\begin{aligned} \text{Peralte total} &= \frac{2 \pi r}{360} \times 16117 = \\ &= \frac{628 \times 254 \times 16117}{360} = 71.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

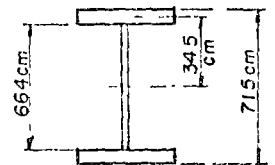


FIGURA 41

Los esfuerzos calculados con las fórmulas de Olander se acercan mucho más a los medidos experimentalmente que los de Vierendeel por lo que será el método que deba emplearse cuando se necesiten resultados más o menos precisos.

RESUMEN DE IDEAS PARA EL DISEÑO ELÁSTICO DE JUNTAS DE MARCOS RÍGIDOS. A pesar de que existen métodos que permiten determinar con relativa facilidad la distribución de esfuerzos existentes en las juntas de los marcos rígidos, el diseño elástico de éstos sigue siendo, en gran parte, empírico, basado en resultados de experiencias de laboratorio y en las enseñanzas acumuladas a través de bastantes años de diseñar y construir estructuras de este tipo.

Considérese una junta tal como la mostrada en la fig. 42a, obtenida uniendo directamente dos miembros cuyos extremos se han cortado en diagonal y no provista de ningún atiesador; aparentemente, se logra en ella una transmisión correcta de las fuerzas existentes en los patines de viga y columna si éstos se unen, por ejemplo, a tope, por medio de soldaduras capaces de desarrollar su resistencia total. Sin embargo, debe recordarse que experimentalmente se ha comprobado que los esfuerzos en los patines exteriores disminuyen a partir de los puntos B y C, hasta alcanzar valores nulos en la esquina exterior A, de manera que la transmisión de las fuerzas existentes en ellos tiene que producirse a través del tablero de alma ABCD; además, los patines comprimidos tienden a pro-

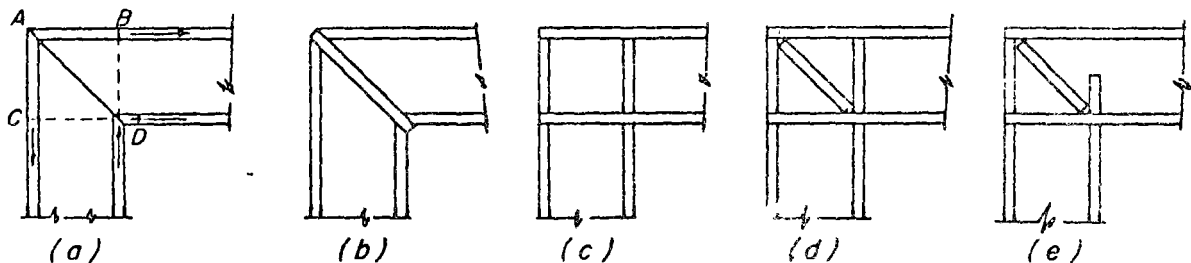


FIGURA 42



ducen problemas de pandeo local en el alma (de hecho, la falla de las juntas de este tipo suele iniciarse por pandeo del alma en la zona de la esquina entrante *D*).

Es necesario, por consiguiente, comprobar si el alma es capaz de soportar los esfuerzos cortantes muy elevados que se presentan en ella (para lo que se han visto varios métodos) y si puede admitir las fuerzas de compresión que recibe de los patines interiores de viga y columna sin pandearse localmente (para esta comprobación pueden aceptarse la distribución de esfuerzos y los valores permisibles indicados en las Especificaciones AISC de 1963<sup>11</sup>, en la sección dedicada al estudio del aplastamiento del alma de vigas y travesaños).

La colocación del atiesador de la fig. 42*b* elimina, o cuando menos reduce drásticamente, los problemas de la conexión mostrada en *a*); es difícil determinar la fuerza para la que debe diseñarse ese atiesador, aunque es evidente que será un porcentaje de la proyección, sobre su eje, de la resultante de las fuerzas de compresión existentes en los patines; de acuerdo con diversos autores, ese porcentaje varía desde el 40 hasta el 100%, mientras que otros simplemente recomiendan que las dimensiones de la sección transversal del atiesador sean iguales a las de los patines de los elementos que forman la junta. (Desde luego, como su trabajo es de compresión, el atiesador debe dimensionarse de manera que no falle por pandeo local).

Otra manera de resolver los problemas señalados con referencia a la fig. 42*a* consiste en resolver la junta como se muestra en 42*c*, prolongando a través de ella la trabe (o la columna) y completando, por medio de placas, los patines de la barra interrumpida, de manera de obtener un tablero de alma encuadrado por patines y atiesadores; desde luego, será necesario calcular los esfuerzos cortantes en ese tablero el que, si es necesario, se reforzará con placas adosadas a él o con atiesadores en diagonal, colocados a uno y otro lado del alma (fig. 42*d*).

(En general, las juntas del tipo mostrado en *c*) son más fáciles de fabricar que las indicadas en *a*), pues se evita el corte en diagonal necesario para éstas; además, son más eficientes, por lo que las conexiones tipo *a*) no suelen utilizarse más que cuando existen requisitos no estructurales que impiden el empleo de atiesadores).

No siempre es necesario que el atiesador vertical colocado a continuación del patín de compresión de la columna (o de la trabe, cuando sea ésta la que se corte) sea completo; muchas veces puede interrumpirse sin alcanzar el patín superior de la viga, simplificando la fabricación de la junta sin pérdida de eficiencia; se llega así a la conexión de la fig. 42*e*, que constituye uno de los tipos más eficientes, cuyo empleo debe preferirse, siempre que sea posible.

Cuando se utilizan juntas acateladas rectas deben colocarse atiesadores en todos los puntos en que el patín de compresión cambie de dirección, proyectados para soportar la fuerza que obre sobre ellos, calculada como en el caso de juntas no acar-

teladas; también se colocarán atiesadores en los arranques de los patines curvos (además, en este caso es necesario, muchas veces, colocar atiesadores radiales para evitar la flexión transversal del patín; si no se colocan deberá diseñarse el patín curvo teniendo en cuenta los esfuerzos adicionales debidos a ese fenómeno).

El patín comprimido debe contraventearse en forma adecuada en todos los casos, para evitar que falle por pandeo lateral.

## RECONOCIMIENTO

El autor agradece a los señores Daniel Ruiz y Luis Esteva el cuidado con que leyeron el manuscrito y las interesantes sugerencias que surgieron de esa lectura, las que se tuvieron en cuenta en la redacción final del artículo.

## REFERENCIAS

1. Topractsoglou, A. A., Beedle, L. S. y Johnston, B. G., "Connections for Welded Continuous Portal Frames", *Welding Journal*, Julio y Agosto de 1951, Nov. de 1952.
2. Toprac, A. A., "An Investigation of Welded Rigid Connections for Portal Frames", *Welding Journal*, Enero 1954.
3. Ruzek, J. M., Knudsen, K. E., Johnston, E. R., y Beedle, L. S., "Welded Portal Frames Tested to Collapse", *Welding Journal*, Sept. 1954.
4. Toprac, A. A., y Beedle, L. S., "Further Studies of Welded Corner Connections", *Welding Journal*, Julio 1955.
5. Fisher, J. W., Driscoll, G. C., y Schutz, F. W., "Behavior of Welded Corner Connections", *Welding Journal*, Mayo 1958.
6. Fisher, J. W., y Driscoll, G. C., "Corner Connections Loaded in Tension", *Welding Journal*, Nov. 1959.
7. De Buen, O., "Pandeo de Placas Comprimidas", *Ingeneria*, Vol. XXXIV, N° 3, México, Julio de 1964.
8. Hendry, A. W., "An Investigation of the Stress Distribution in Steel Portal Frame Knees", *The Structural Engineer*, Marzo, Abril y Dic. de 1947. "An Investigation of the Strength of Welded Portal Frame Connections", *The Structural Engineer*, Oct. y Sept. 1951. "An Investigation of Certain Welded Portal Frames in Relation to the Plastic Method of Design", *The Structural Engineer*, Dic. 1950 y Sept. 1951.
9. Gray, C. S., Kent, L. E., Mitchell, W. A. y Godfrey, G. B., "Steel Designers' Manual", Crosby Lockwood and Son, Ltd. Londres, 1957.
10. Stang, A., Greenspan, M., y Osgood, W. R., "Strength of a Riveted Steel Rigid Frame having Straight Flanges", R. P. 1130, U. S. National Bureau of Standards, *Journal of Research*, Vol. XXI, 1938.
11. Rodríguez-Avilal Azcunaga, F., "Construcciones Metálicas", Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales, Madrid, 1953.
12. Olander, H. C., "Stresses in the Corners of Rigid Frames", *Trans. ASCE*, Vol. 119, 1954.
13. "Structural Details for Metal-Arc Welding", *British Welding Research Ass.*, 1956.
14. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, Nueva York, 1963.
15. "Commentary on the Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, Nueva York, 1963.
16. Fisher, J. W., Driscoll, G. C., y Beedle, L. S., "Plastic Analysis and Design of Square Rigid Frame Knees", *Welding Research Council, Bulletin N° 39*, Nueva York, Abril 1958.

17. Beedle, L. S., "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley and Sons, Nueva York, 1958
18. Driscoll G. C., "Plastic Analysis and Design", Apuntes de Clase, Lehigh University, Department of Civil Engineering, Bethlehem, Pa., 1961.
19. "Plastic Design in Steel", AISC, Nueva York, 1959.
20. "Commentary on Plastic Design in Steel", ASCE, Manual of Engineering Practice N° 41, Nueva York, 1961.
21. Beedle, L. S., Thurlimann, B., y Ketter, R. L., "Plastic Design in Structural Steel, Lecture Notes, Summer Course, Sept. 1955, Lehigh University y AISC.
22. Beedle, L. S., "Experimental Verification of Plastic Theory", Proceedings, AISC National Engineering Conference, 1956.
23. Driscoll, G. C., "Test of Two-Span Portal Frame", Proc. AISC National Engineering Conference, 1956.
24. Schilling, C. G., Schutz, F. W., y Beedle, L. S., "Behavior of Welded Single-Span Frames under Combined Loading", Welding Journal, Mayo 1956
25. Fisher, J. W., Lee, G. C., Yura, J. A., y Driscoll, G. C., "Plastic Analysis and Tests of Haunched Corner Connections", Welding Research Council, Bulletin N° 91, Nueva York, Oct. 1963.
26. "Structural Steel Design", editado por Tall, L., Beedle, L. S., y Galambos, T. V. The Ronald Press Company, Nueva York, 1964.
27. Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1952.
28. Timoshenko, S. P., y Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1961.
29. Haajer, G., "Plate Buckling in the Strain-Hardening Range", Trans. ASCE, Vol. 124, 1959.
30. "Code for Welding in Building Construction", American Welding Society, Nueva York, 1963.
31. Graham, J. D., Sherbourne, A. N., Khabbaz, R. N., y Jensen, C. D., "Welded Interior Beam-to-Column Connections", AISC., Nueva York, 1959 (Publicado tambien en Boletín N° 63, Welding Research Council, Nueva York, Ag. 1960).
32. Beedle, L. S., y Christopher, R., "Tests of Steel Moment Connections", Engineering Journal, Vol. I, N° 4, AISC, Nueva York, Oct. 1964.

### Distinción al Sr. Emilio Rosenblueth

La Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE), acordó otorgar su Premio Moisseiff 1966, por el artículo más meritorio al Dr. Emilio Rosenblueth, Director de la División de Investigaciones de la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., por su trabajo "Efectos de esbeltez en edificios", publicado en la revista de la División de Estructuras, febrero 1965, de dicha Sociedad y en INGENIERIA Vol. XXXV, N° 1, enero 1965.

Nuestras felicitaciones más sinceras al Dr. Rosenblueth por esta nueva distinción.

# Conexiones para Marcos Rígidos de Acero II: Diseño Plástico

Oscar DE BUEN\*

## RESUMEN

Esta es la segunda parte de un artículo referente al diseño de conexiones para marcos rígidos de acero estructural. En la primera parte se enfocó el problema desde el punto de vista elástico y en ésta se presenta su solución utilizando métodos plásticos. El problema del diseño de las juntas viga-columna de marcos de edificios se trata utilizando los dos métodos, elástico y plástico.

## INTRODUCCION

En la primera parte de este artículo\* se trató el problema del diseño elástico de juntas de marcos rígidos de acero estructural, y en esta segunda partes se vuelve a estudiar el mismo problema, pero empleando ahora métodos plásticos para resolverlo. Además, se trata el diseño de las juntas viga-columna de marcos de edificios de varios pisos utilizando los dos métodos, elástico y plástico.

Las figuras, ecuaciones, tablas y ejemplos se han numerado en forma corrida en las dos partes que componen el artículo (en la primera están incluidas las figs. 1 a 42, las ecs. 1 a 24 y las Tablas I a V, así como los ejemplos 1 a 3).

**JUNTAS RECTAS NO ACARTÉLADAS.** El primer paso en el diseño plástico de una conexión en ángulo

\* Véase "Conexiones para marcos rígidos de acero", Parte I, *Ingeniería*, Vol. XXXVI, N° 3, Julio de 1966.

Oscar de Buen, profesor de estructuras en las Divisiones Profesional, de Estudios Superiores y de Investigación de la Facultad de Ingeniería, UNAM. Ingeniero Consultor, con 17 años de experiencia en el análisis y diseño de estructuras, principalmente de acero soldadas.

## SYNOPSIS

This is the second part of a paper on the design of steel rigid frame connections. Elastic design was presented in the first part, and this part is concerned with plastic methods. The design of beam-to-column connections for building frames is also presented, employing both elastic and plastic methods.

recto no acartelada consistirá, lo mismo que cuando se emplean métodos elásticos, en determinar si el grueso del alma es suficiente para que la junta tenga resistencia y capacidad de rotación adecuadas sin necesidad de refuerzos adicionales.

Para llegar a una expresión para el cálculo del grueso necesario del alma se utilizarán los resultados obtenidos al estudiar la conexión P, tipo 7, mostrada en la fig. 16a, la que está provista de atiesadores a continuación de los patines de la columna pero carece de toda clase de atiesamiento adicional.

El momento para el que se presenta el flujo plástico por cortante en el alma (punto H, fig. 17b) está dado por la ec. 3:

$$M_{H(r)} = \frac{\sigma_y t d^2}{\sqrt{3}(1 - d/L)} \quad (3)$$

El diseño debe hacerse de tal manera que puedan desarrollarse los momentos plásticos resistentes de viga y columna (o el menor de los dos, si los perfiles no son iguales) en sus secciones extremas (AD y AB, fig. 16a) antes de que la conexión falle; se obtendrá un diseño balanceado si el diagrama de momentos en el instante del colapso es el mostrado en la fig. 43, ya que en ese caso se alcanzarán, simultáneamente, las condiciones de falla de la junta por cortante y de las barras que la componen por flexión.

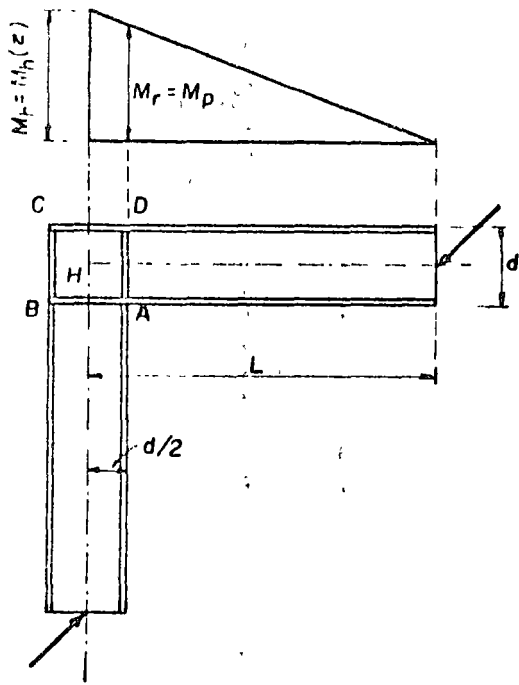


FIGURA 43

Por consiguiente:

$$\frac{M_p}{L - d/2} = \frac{M_{h(\tau)}}{L} \quad \therefore M_p = M_{h(\tau)} \left[ 1 - \frac{d}{2L} \right]$$

Sustituyendo en la ecuación anterior  $M_{h(\tau)}$  por su valor dado por (3), se obtiene

$$M_p = Z\sigma_y = \frac{\sigma_y t d^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - d/2L}{1 - d/L}$$

de donde se puede despejar el valor de  $t$ :

$$t = \frac{\sqrt{3}Z}{d^2} \cdot \frac{1 - d/L}{1 - d/2L} = \frac{\sqrt{3}S}{d^2} \cdot f \cdot \frac{1 - d/L}{1 - d/2L} \quad (25)$$

$Z$  y  $S$  son los módulos de sección plástico y elástico de la sección y  $f$  su factor de forma.

Con las proporciones de la conexión  $P$  ( $L/d = 6$ ) el factor  $(1 - d/L)/(1 - d/2L)$  vale 0.91; teniendo en cuenta este valor y sabiendo que los factores de forma de los perfiles  $I$  oscilan entre 1.10 y 1.15, se obtiene una buena aproximación sustituyendo la (25) por

$$t = \sqrt{3} \frac{S}{d^2}$$

Puesto que el valor de  $t$  dado por la ecuación anterior corresponde a un estado límite, el grueso del alma en conexiones tipo  $P$  (sin atiesador diagonal) será suficiente siempre que se satisfaga la condición

$$t \geq \sqrt{3} \frac{S}{d^2} \quad (26)$$

Obsérvese que la ec. 26 es prácticamente igual a la (10); por consiguiente, las conclusiones que se obtuvieron de su estudio son también válidas ahora, de manera que, lo mismo que el elástico, el diseño plástico indica también la necesidad de reforzar el alma de la mayor parte de los perfiles laminados  $I$  o  $H$  cuando se emplean en conexiones rígidas.

La ec. 26 adolece de los mismos defectos que se mencionaron al discutir, durante el diseño elástico de juntas, las ecs. 10 y 14, provenientes, fundamentalmente, del hecho de que se ha obtenido para conexiones con una geometría dada y sometidas a condiciones de carga fijas que, aunque reproducen con bastante fidelidad las solicitaciones existentes en juntas reales, no pueden corresponder a cada una de las combinaciones de cargas posibles.

Es, pues, conveniente obtener una ecuación semejante a la (26) pero que no tenga sus limitaciones.

Los métodos de análisis que se van a desarrollar en lo que sigue están basados en una distribución de esfuerzos correspondiente a la carga última para la que se satisface el equilibrio y no se viola la condición de plasticidad; por consiguiente, proporcionan soluciones que constituyen límites inferiores de la capacidad de carga de las conexiones.

En la fig. 44 se muestra una conexión típica en ángulo recto sin atiesador diagonal, que servirá para ilustrar los principios básicos de diseño; las conexiones del mismo tipo en las que el ángulo entre viga y columna no es de  $90^\circ$  son menos críticas,<sup>2p, 20</sup> y pueden diseñarse siguiendo el mismo procedimiento.

La fig. 44a representa la conexión mientras que en 44b y c se muestran, respectivamente, los elementos mecánicos que obran sobre la junta y las acciones mutuas entre las distintas partes que la componen; la determinación de la ley de distribución de esas acciones mutuas está basada en la suposición de que los esfuerzos normales, debidos a momento flexionante y fuerza axial, son tomados íntegramente por los patines, mientras que los esfuerzos cortantes son soportados en su totalidad por el alma.

Las fuerzas de tensión existentes en los patines exteriores de viga y columna son transmitidas al alma en la forma de fuerzas cortantes uniformemente distribuidas a lo largo de los bordes  $BA$  y  $DC$ , fig. 44c; (en ambos casos se supone que la fuerza existente en el patín disminuye linealmente desde un máximo en el borde de la junta, punto  $B$  o  $D$ , hasta cero en el borde exterior  $A$ ). La fuerza del patín exterior de la columna pasa primero a la placa vertical extrema y de ésta al alma de la junta.

En los bordes interiores del alma,  $CD$  y  $CB$ , aparecen también fuerzas tangenciales uniformemente distribuidas que provienen de las fuerzas axiales existentes en los patines interiores de viga y columna y de los cortantes existentes en las almas de esos dos miembros.

Para que el comportamiento de la junta sea correcto es necesario que ésta sea capaz de soportar las fuerzas que obran sobre ella sin que se pro-

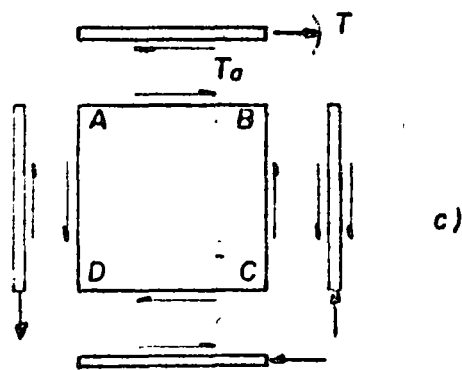
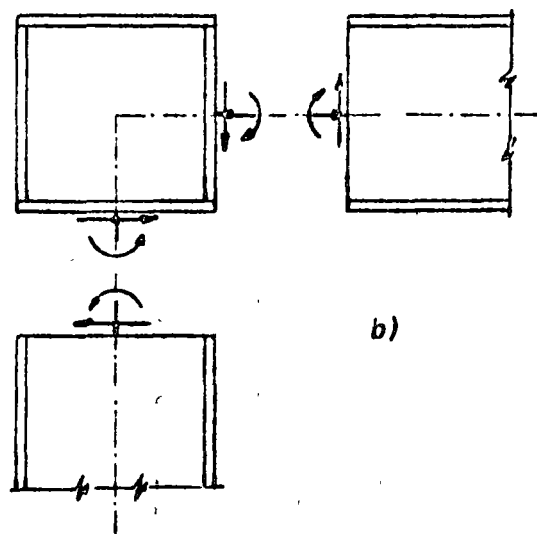
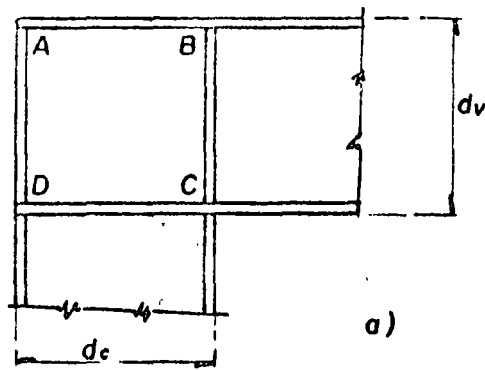


FIGURA 44

duzcan fenómenos de pandeo o de flujo plástico general. Suponiendo que el perfil horizontal se prolonga a través de la junta, es evidente que sus patines no requerirán ninguna revisión, puesto que están diseñados para resistir todas las fuerzas existentes fuera de ella y sus dimensiones se han esco-

gido de tal manera que se evite el pandeo local: la placa extrema  $AD$  debe tener la misma área que el patín de la columna y el atiesador vertical  $CB$  debe ser capaz de transmitir al alma de la viga la fuerza existente en el patín interior de la columna; por consiguiente, el problema se reduce a la revisión del tablero de alma  $ABCD$ , cuyo espesor debe ser suficiente para soportar las fuerzas cortantes que obran sobre él, recibidas de los patines, sin fluir plásticamente.

El estudio del equilibrio de las fuerzas que obran sobre el patín superior  $AB$  (fig. 44c) proporciona una manera de determinar el espesor del alma necesario para que la junta sea capaz de soportar los elementos mecánicos correspondientes al desarrollo del momento plástico resistente en las secciones  $BC$  y  $CD$  de viga y columna.

De acuerdo con las hipótesis relativas a la distribución de esfuerzos en la junta y suponiendo que el brazo del par resistente de la viga es aproximadamente igual a  $0.95 d_v$ , puede escribirse

$$M_p = T(0.95d_v)$$

donde  $T$  es la fuerza existente en cada uno de los patines, igual, por consiguiente a

$$T = \frac{M_p}{0.95d_v}$$

La fuerza cortante máxima que puede soportar el alma de la junta a lo largo de su borde superior  $AB$  es, de acuerdo con la teoría de v. Mises,

$$T_a = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} t d_c$$

siendo  $t$  el grueso del alma y  $d_c$  el peralte de la columna.

Las dos fuerzas anteriores deben ser iguales, por equilibrio:

$$\frac{M_p}{0.95d_v} = \frac{\sigma_y t d_c}{\sqrt{3}}$$

Esta ecuación permite obtener el espesor del alma,<sup>14,15,20,21</sup>

$$t = \frac{\sqrt{3}M_p}{0.95d_v d_c \sigma_y} \quad (27)$$

Puede obtenerse el valor de  $t$  siguiendo un camino algo diferente, basado también en el estudio del equilibrio del patín superior de la junta; efectivamente, se sabe que  $T = T_a$  y que  $T_a = (\sigma_y/\sqrt{3})td_c$ , y, además,  $T$ , fuerza existente en el patín, no puede ser mayor que el producto de su área  $A_p$  por el esfuerzo de fluencia del material que lo constituye, es decir,  $A_p \sigma_y = (\sigma_y/\sqrt{3})td_c$ , luego

$$t = \frac{\sqrt{3}A_p}{d_c} \quad (28)$$

La ec. 28 da valores de  $t$  ligeramente menores que los obtenidos con (27), debido a que al suponer que los patines toman la fuerza normal íntegra se desprecia la contribución del alma al desarrollo del momento plástico del perfil, lo que obliga, en teoría, a la aparición de esfuerzos mayores que  $\sigma_y$  en los patines.

Si el grueso necesario  $t$  obtenido aplicando (27) o (28) es mayor que el existente, es necesario reforzar el alma de la junta, ya sea por medio de placas adosadas a ella que proporcionen al material faltante (la suma de los gruesos del alma y de las placas será igual o mayor que  $t$ ) o por medio de atiesadores colocados entre las esquinas A y C de la junta (ver fig. 44c) los que, trabajando como la diagonal de una armadura, toman el exceso de fuerza cortante y evitan la deformación excesiva del alma. La mayor parte de los perfiles laminados requieren refuerzo cuando se emplean en juntas no acateladas.

Las dimensiones del atiesador pueden determinarse partiendo del equilibrio de las fuerzas que obran sobre el patín superior de una junta atiesada diagonalmente<sup>17,18,20</sup> (fig. 45, a, yb).

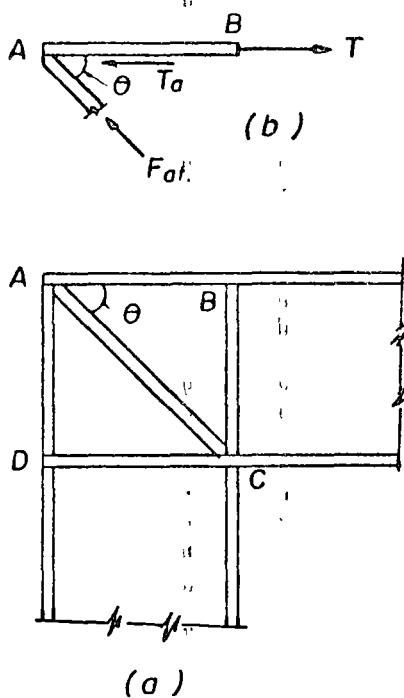


FIGURA 45

De la fig. 45b:

$$T - T_n - F_{at} \cdot \cos \theta = 0$$

Los atiesadores (generalmente se coloca un par, a uno y otro lado del alma) deben ser capaces de soportar una fuerza  $F_{at}$  de intensidad

$$F_{at} = \frac{1}{\cos \theta} (T - T_n) = \frac{1}{\cos \theta} \left( T - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} t d_c \right)$$

De acuerdo con la teoría plástica simple, y sin tener en cuenta fenómenos de endurecimiento por

deformación, la fuerza máxima que pueden soportar los atiesadores es  $A_{at} \cdot \sigma_u$ ; llevando este valor a la ecuación anterior, se obtiene

$$A_{at} \cdot \sigma_u = \frac{1}{\cos \theta} \left( T - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} t d_c \right) \quad (29)$$

expresión que permite, evidentemente, calcular el área necesaria de atiesadores.

De la ec. 29 pueden obtenerse dos ecuaciones ligeramente diferentes para  $A_{at}$ , según que se utilice uno u otro de los procedimientos explicados arriba para el cálculo de la fuerza  $T$  existente en el patín.

$$\text{Si } T = M_p / 0.95 d_n,$$

$$A_{at} = \frac{1}{\cos \theta} \left[ \frac{M_p}{0.95 \sigma_y d_n} - \frac{t d_c}{\sqrt{3}} \right] \quad (30)$$

$$\text{Si } T = A_p \sigma_u,$$

$$A_{at} = \frac{1}{\cos \theta} \left[ A_p - \frac{t d_c}{\sqrt{3}} \right] \quad (31)$$

En las expresiones anteriores,  $A_{at}$  es el área de un par de atiesadores diagonales simétricamente colocados respecto al alma, inclinados en ángulo  $\theta$  respecto al eje de la viga (si se utilizase una sola placa atiesadora, a un solo lado del alma, o dos placas no iguales, la asimetría obligaría a utilizar mayor cantidad de material en ellas, pues no trabajarían a compresión axial, sino a flexo-compresión, condición más favorable).

Evidentemente, los atiesadores deberán proporcionarse de manera que no fallen por pandeo inelástico prematuro (véanse refs. 7 y 14, por ejemplo).

Es interesante hacer notar que para diseñar plásticamente una junta no es necesario conocer los elementos mecánicos existentes en ella, ya que la conexión se proyecta de tal manera que sea capaz de soportar las solicitaciones máximas que pueda recibir de los miembros que la componen, correspondientes a la aparición en ellos de su momento plástico resistente  $M_p$ . (Obviamente, este procedimiento da lugar a conexiones sobradas si los miembros que concurren en ellas lo están, pero es una práctica conveniente, en general, diseñar las juntas para la capacidad máxima de los elementos que las forman).

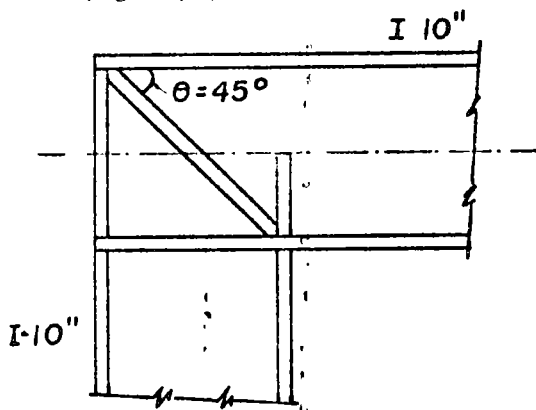
Por consiguiente, los métodos plásticos pueden emplearse también para el diseño de juntas en estructuras dimensionadas elásticamente con lo que se tendrá la seguridad de que, además de trabajar correctamente en el rango elástico, conservarán fuera de él características muy convenientes de resistencia, rigidez y capacidad de rotación.

En los métodos de diseño plástico que se están estudiando no se toma en cuenta, aparentemente, la influencia sobre el comportamiento de las juntas de las fuerzas normales existentes en los miembros

que concurren en ellas; sin embargo, no es así en realidad, ya que si esas fuerzas normales son importantes habrían obligado a escoger secciones mayores que las necesarias por flexión únicamente, y la junta se diseña de manera que esas secciones aumentadas sean capaces de desarrollar su capacidad máxima.

El comportamiento real de conexiones diseñadas de acuerdo con este procedimiento se ha estudiado en gran número de pruebas de laboratorio, efectuadas tanto sobre juntas aisladas como sobre marcos rígidos completos; algunas de las pruebas se han discutido en la primera parte de este artículo, y sus resultados principales están vaciados en las figs. 8 y 12 en las que se advierte el comportamiento correcto de las juntas rectas con atiesamiento diagonal proporcionado de acuerdo con las ecs. 30 y 31. En las refs. 3, 22, 23 y 24 se describe el comportamiento de varios marcos rígidos completos cuyas juntas trabajaron satisfactoriamente permitiendo, en todos los casos, que las cargas alcanzasen los valores teóricos de colapso.

**EJEMPLO 4.** Diseñar una conexión en ángulo recto formada por dos viguetas I-10", de manera que sea capaz de desarrollar la capacidad íntegra de éstas (fig. 46). Acero A36.



Propiedades de la I-10":

$$d = 25.4 \text{ cm} \quad t = 0.79 \text{ cm} \quad S = 400.2 \text{ cm}^3$$

$$A_p = 15.8 \text{ cm}^2 \quad M_p = 14.60 \text{ tm}$$

Grueso necesario del alma:

$$\text{Ec. 26} \quad t = \sqrt{3} \cdot \frac{S}{d^2} = \sqrt{3} \times \frac{400.2}{25.4^2} = 1.07 \text{ cm}$$

$$\text{Ec. 27} \quad t = \frac{\sqrt{3} \times 1.160.000}{0.95 \times 25.4 \times 25.4 \times 2.530} = 1.30 \text{ cm}$$

$$\text{Ec. 28} \quad t = \frac{\sqrt{3} \times 15.8}{25.4} = 1.08 \text{ cm}$$

Los resultados obtenidos con las ecs. 26 y 28 son prácticamente iguales, y la (27) indica que se

necesita un grueso algo mayor del alma; en los tres casos, sin embargo, el grueso requerido es mayor que el existente (0.79 cm), luego debe reforzarse el alma; se hará por medio de atiesadores en diagonal, ya que este procedimiento es el más adecuado en general.

Diseño de atiesadores:

$$\text{Ec. 30} \quad A_{at} = \frac{1}{0.707} \times \left( \frac{1.160.000}{0.95 \times 2.530 \times 25.4} - \frac{0.79 \times 25.4}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{1}{0.707} (19.0 - 11.6) = 10.48 \text{ cm}^2$$

Ec. 31

$$\text{Ec. 31} \quad A_{at} = \frac{1}{0.707} (15.8 - 11.6) = 5.95 \text{ cm}^2$$

Se utilizarán dos placas, una a cada lado del alma, de  $5.1 \times 0.95 \text{ cm}$  ( $2'' \times \frac{3}{8}''$ ), cuya área total es de  $9.7 \text{ cm}^2$ , (relación ancho/grueso  $5.1/0.95 = 5.3 < 8.5$ ).

La placa vertical extrema y los atiesadores verticales se harán con un área igual a la de los patines de la columna; experimentalmente se ha demostrado que los atiesadores pueden cortarse a la mitad del peralte de la viga. (En realidad los atiesadores verticales pueden hacerse con un área algo menor, porque parte de la fuerza existente en el patín interior de la columna la toma directamente el alma de la viga; en la sección de este artículo destinada al diseño de soldaduras se indica un método aproximado para la determinación de esa fuerza).

En relación con el diseño plástico de juntas no acarteladas puede hacerse una discusión semejante a la que se llevó a cabo al estudiar los métodos de diseño elásticos (véase fig. 42). Así, la junta mostrada en 42a, sin atiesamiento de ninguna clase, será correcta si el grueso del alma es tal que se eviten problemas de pandeo local en la esquina interior  $D$  y de flujo plástico por cortante.

Lo mismo que cuando se emplean métodos elásticos, es difícil determinar la fuerza para la que debe diseñarse el atiesador diagonal de la conexión mostrada en  $b$ ) la que será, desde luego, una fracción de la suma de las proyecciones de las fuerzas en los patines interiores.

Experimentalmente se ha encontrado que las juntas que se comportan de una manera más correcta son las atiesadas como se muestra en las figs. 42  $d$  y  $e$ ; desde luego, el atiesador diagonal puede no ser necesario, si el alma es suficientemente gruesa (fig. 42c).

Como se mencionó con anterioridad, las juntas no acarteladas en las que el ángulo entre los ejes de viga y columna no es de  $90^\circ$  se encuentran en condición menos crítica que las que se han estudiado, de manera que pueden diseñarse siguiendo el mismo procedimiento.<sup>20</sup>

**JUNTAS ACARTELLADAS.** El empleo de juntas acarteladas, rectas o curvas, en marcos rígidos, permite muchas veces obtener economías de material al mismo tiempo que se logra una apariencia agradable.

Su uso en marcos diseñados elásticamente hace posible que el momento resistente de la estructura siga aproximadamente la ley de variación del momento flexionante existente en la zona acartelada, con lo que se logran ahorros de material. Similarmente, el empleo de conexiones acarteladas en marcos diseñados plásticamente permite una reducción en el tamaño de los miembros principales, dando lugar a cantidades totales de material menores que cuando esos miembros se unen directamente entre sí (al estudiar, desde un punto de vista económico, la conveniencia de emplear juntas acarteladas en una estructura dada, debe tenerse en cuenta que la cantidad de material empleada no es el único factor que afecta el costo; en efecto, la fabricación de las juntas de momento de inercia variable es más cara que la unión directa de perfiles laminados, y en ocasiones puede dar lugar a un costo final más elevado; sin embargo, el empleo de juntas acarteladas es económicamente conveniente en muchos casos, sobre todo en marcos de claro grande).

Los marcos provistos de juntas acarteladas se diseñan plásticamente empleando los mismos métodos utilizados para estructuras formadas por piezas de sección transversal constante, aunque el trabajo numérico necesario para resolver un problema dado aumenta, ya que las cartelas hacen que crezca el número de secciones donde pueden aparecer articulaciones plásticas.

Por ejemplo, si las juntas del marco mostrado en la fig. 47 no estuviesen acarteladas, podrían aparecer articulaciones plásticas en cinco de sus secciones (los dos extremos de cada una de las dos columnas y el punto de aplicación de la carga vertical), y el número de posibles mecanismos de colapso sería tres, dos independientes y uno combinado; al utilizar las juntas acarteladas aumenta en dos el número de posibles articulaciones (ya que pueden formarse en cualquiera de los dos extremos de cada conexión), con el aumento consiguiente de mecanismos.

En el caso del marco de la fig. 47 el mecanismo real de colapso es el número 4, y la carga última vale

$$P_u = P_4 = \frac{12(3L - 2m)M_p}{5(L - 2m)L} \quad (32)$$

El valor del momento plástico  $M_p$  necesario para los miembros principales, viga y columnas, se reduce como una consecuencia del empleo de juntas acarteladas (por ejemplo, para  $L = 12m$ ,  $m = 1m$ , fig. 47a, se obtiene  $M_p = 1,47 P_u$ , mientras que el momento plástico necesario para el mismo marco sin cartelas es  $M_p = 1,67 P_u$ , o sea 14% mayor, aproximadamente).

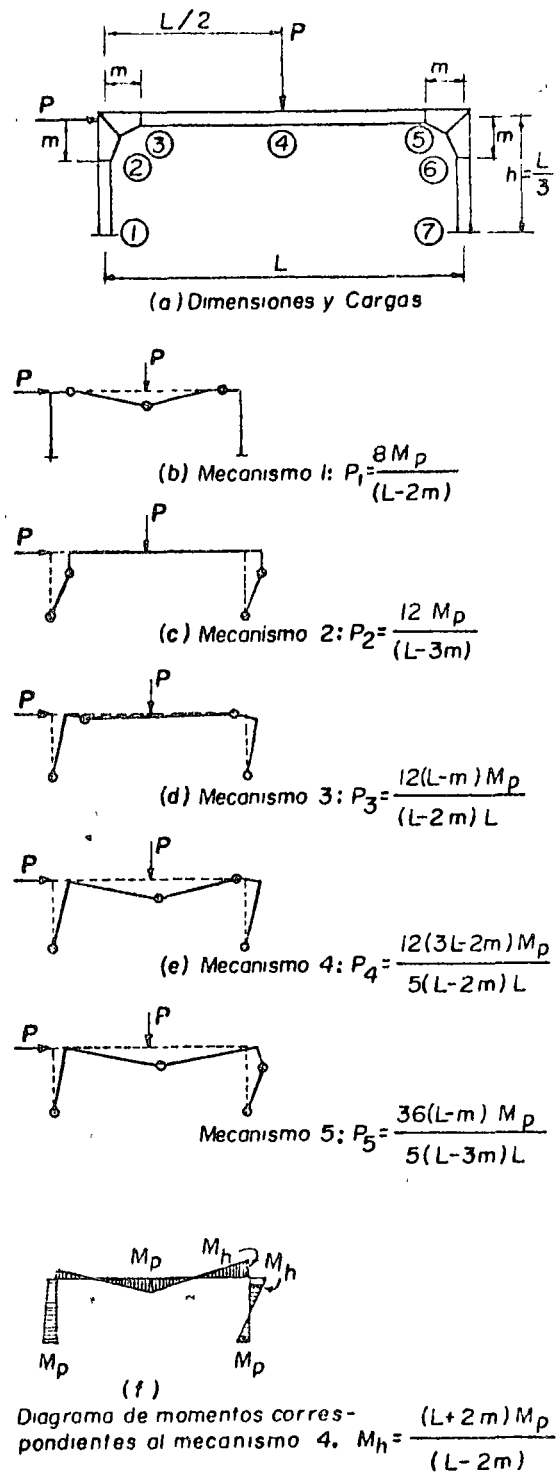


FIGURA 47

El diagrama de momentos correspondiente al mecanismo de colapso (fig. 47g) muestra que la condición de plasticidad no se viola, siempre que las juntas sean capaces de soportar, en la intersección de los ejes de viga y columna, un momento  $M_h$ , que es mayor que  $M_p$  ( $M_h = 1.4 M_p$ , para  $L = 12m$ ,  $m = 1m$ ).



Conocido ese diagrama final de momentos, pueden calcularse los elementos mecánicos necesarios para diseñar las conexiones.

Pruebas de laboratorio efectuadas con juntas acarteladas diseñadas aplicando métodos elásticos han mostrado que esos métodos dan lugar a conexiones que tienen resistencia y rigidez adecuadas, pero que carecen en general de la capacidad de rotación necesaria para ser empleadas en estructuras diseñadas plásticamente (fig. 8).

La incapacidad de las juntas ensayadas para soportar grandes rotaciones bajo momentos cercanos al máximo se debió a que, a causa de un soporte lateral insuficiente o a proporciones inadecuadas de las conexiones mismas, se pandearon lateralmente antes de que se alcanzasen las condiciones de diseño deseadas (la tendencia a este tipo de falla es mayor en las conexiones acarteladas que en las simples debido a que en ellas todo el patin comprimido se encuentra sometido a esfuerzos cercanos al máximo y, además, no se le puede soportar lateralmente en forma continua en toda su longitud).

Por consiguiente, en el diseño de juntas acarteladas que vayan a utilizarse en estructuras diseñadas plásticamente deben tenerse en cuenta consideraciones de resistencia y estabilidad. Las cartelas deben proporcionarse con resistencia suficiente para asegurar que las articulaciones plásticas se formarán en los extremos de los miembros principales, en los puntos en que se unen con ellas, con lo que se facilita el análisis del marco y se asegura una capacidad de rotación adecuada (la del miembro principal); además, deben tener una resistencia adecuada al pandeo lateral, función tanto de sus dimensiones como del contraventeo lateral de que estén provistas.

**JUNTAS ACARTELADAS RECTAS.** Tres son los problemas principales que deben tenerse en cuenta en el diseño de este tipo de juntas:<sup>20</sup> 1) resistencia a la flexión en la porción acartelada de la junta, teniendo en cuenta el efecto de la fuerza normal y tangencial; 2) resistencia al pandeo local y lateral y, 3) efecto de las fuerzas cortantes y de las fuerzas en los patines sobre el tablero de alma de la esquina de la conexión.

*Solución utilizando la teoría plástica simple.* El análisis estará basado en las suposiciones siguientes:<sup>21</sup>

1. Las secciones transversales planas permanecen planas después de la flexión; es decir, las deformaciones longitudinales en los distintos puntos de las secciones transversales son proporcionales a sus distancias al eje neutro.

2. Es válida la relación esfuerzo-deformación utilizada en la teoría plástica simple, tanto para las fibras en tensión como para las comprimidas.

3. Existe equilibrio entre las fuerzas exteriores aplicadas en cada sección y las fuerzas interiores

correspondientes, de manera que se cumplen las igualdades

$$P = \int_A \sigma_v dA \quad \text{y} \quad M = \int_A \sigma_v y dA$$

(Al plantear las ecuaciones de equilibrio, suelen tomarse secciones normales a las prolongaciones de los ejes de trabe o columna).

4. El momento flexionante varía linealmente a lo largo de la junta.

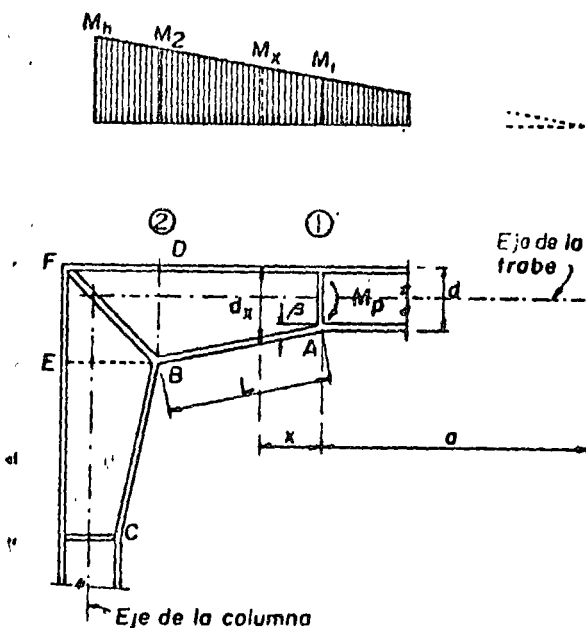


FIGURA 48

La fig. 48 muestra una junta con cartelas rectas típica y la ley de variación de los momentos sujeta. Los elementos mecánicos que obran sobre ella, momento, fuerza cortante y fuerza normal se conocen del análisis de la estructura de la que forma parte.

El alma de la zona acartelada suele hacerse del mismo grueso que las almas de los perfiles adyacentes, con lo que se asegura que su resistencia a la compresión y al cortante será, cuando menos, igual a la de las almas de éstos. También suele acostumbrarse que los patines tengan el mismo ancho en la junta que en los miembros que concurren en ella.

El momento resistente de la conexión en cualquiera de sus secciones transversales debe ser igual o mayor que el momento flexionante existente en esa sección, determinado por medio de un análisis plástico. Por consiguiente, debe satisfacerse la ecuación

$$M_{pr} = \sigma_y Z_r \geq M_r \quad (33)$$

en la que  $Z_r$  es el módulo de sección plástico de la sección considerada y  $M_r$  el momento flexionante existente en esa sección.

Los cambios en la resistencia a la flexión de la junta pueden controlarse modificando su peralte o el grueso de los patines (a veces, aunque con poca frecuencia, se cambia el ancho de éstos). Los patines exteriores suelen ser paralelos a los ejes generales de la estructura y los interiores hacen con ellos un ángulo  $\beta$  que define, por consiguiente, el peralte de la junta en cualquier sección.

El momento plástico resistente de una sección transversal de una viga de peralte constante corresponde a la aparición del esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$  en todos sus puntos, de tensión a un lado del eje neutro y de compresión del otro. Para calcular el valor del momento plástico de una sección transversal de una junta acartelada se hará también la suposición de que la sección se plastifica íntegramente, incluyendo el patín inclinado, pero al establecer las ecuaciones de equilibrio y de equivalencia entre los sistemas de fuerzas externo e interno deberá tenerse en cuenta que la línea de acción de la fuerza correspondiente al patín inclinado forma un ángulo  $\beta$  con el eje de la pieza.

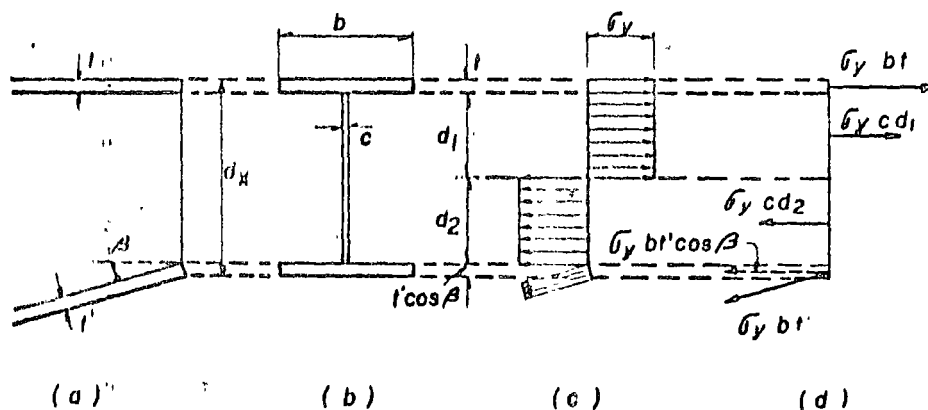


FIGURA 49

En la fig. 49c se muestra la distribución de esfuerzos correspondiente a la plastificación completa de una sección transversal cualquiera de la junta, despreciando el efecto de las fuerzas normal y cortante, y en 49d se indican las resultantes de las fuerzas interiores que obran sobre los dos patines y sobre las porciones del alma situadas arriba y abajo del eje neutro.

Es evidente que si los gruesos  $t$  y  $t'$  de los dos patines son iguales, para que el sistema de fuerzas interiores mostrado en  $d$ ) sea mecánicamente equivalente a un par es necesario que el eje neutro no se encuentre a la mitad del peralte del alma sino más arriba (es decir,  $d_2$  debe ser mayor que  $d_1$ , fig. 49b), puesto que siendo la proyección horizontal de la fuerza en el patín inferior menor que la fuerza en el superior, para restablecer el equilibrio se requiere que  $\sigma_y c d_2$  sea mayor que  $\sigma_y c d_1$ . Por consiguiente, si los dos patines tienen el mismo grueso la sección resulta asimétrica, desde el punto de vista de la manera en que trabaja, lo que complica considerablemente los cálculos.

Afortunadamente, es fácil restaurar la simetría

de la sección: basta para ello con hacer el patín inclinado de un grueso  $t' = t/\cos \beta$ , con lo que la proyección horizontal de la fuerza existente en él vale  $\sigma_y b t$ , igual a la fuerza en el patín superior, y el eje neutro queda colocado a la mitad del peralte del alma ( $d_1 = d_2$ ).

En estas condiciones, el módulo de sección plástico  $Z_x = \int y dA$  puede expresarse en la forma siguiente

$$Z_x = bt(d_x - t) + \frac{c}{4} (d_x - 2t)^2 \quad (34)$$

en la que  $b$  es el ancho de los patines,  $d_x$  el peralte total de la cartela en una sección  $x$  cualquiera,  $c$  el grueso del alma y  $t$  el espesor del patín horizontal; el grueso del patín inclinado debe ser  $t' = t/\cos \beta$  (Si los anchos de los dos patines no son iguales, deberá satisfacerse la igualdad  $A' = A/\cos \beta$ , en la que  $A$  y  $A'$  son, respectivamente, las áreas del patín horizontal y del inclinado).

Para  $\beta = 20^\circ$ , el patín inclinado debe ser aproximadamente 6% más grueso que el horizontal, diferencia que es despreciable en la mayor parte de los problemas de diseño, de manera que para fines prácticos, y siempre que el ángulo  $\beta$  no sea demasiado grande, podrán hacerse los dos patines iguales conservando la suposición de que la sección es simétrica y el eje neutro se encuentra a la mitad de su peralte.

Sustituyendo el valor de  $Z_x$  dado por (34) en la ec. 33 y despejando  $t$  de la expresión así obtenida se llega a una ecuación que permite calcular el grueso  $t_x$  del patín, necesario en cualquier sección transversal:

$$t_x = \frac{d_x - \sqrt{d_x^2 \left( \frac{b}{b-c} \right) - \frac{4M_x}{\sigma_y (b-c)}}}{2}$$

$d_x$  es el peralte de la sección considerada y  $M_x$  el momento existente en ella.

Los resultados anteriores son muy similares a los obtenidos para miembros de peralte constante, siendo la única diferencia el aumento del grueso del patin inclinado en las vigas acarteladas.

**INFLUENCIA DE LA FUERZA NORMAL Y DE LA FUERZA CORTANTE.** La fuerza normal, lo mismo que en las vigas ordinarias, tiende a disminuir la capacidad para soportar momento de una viga acartelada.

Siguiendo un método análogo al empleado para vigas de peralte constante (véase, por ejemplo, la ref. 20), se obtienen ecuaciones y gráficas de interacción que permiten calcular el valor del momento plástico reducido por la acción de la fuerza normal; en la fig. 50<sup>a</sup> se muestran varias de esas curvas, para distintas relaciones del área del patin al área del alma,  $A_p/A_a$ .

Estas curvas son semejantes a las presentadas en la ref. 20 para miembros con patines paralelos, de manera que el problema de la fuerza axial puede manejarse de la misma manera en juntas acarteladas que en secciones laminadas. En los casos en que la fuerza axial  $P$  es menor que  $0.15 P_y$  su efecto es despreciable, y para valores mayores pueden utilizarse las curvas de interacción de la fig. 50.

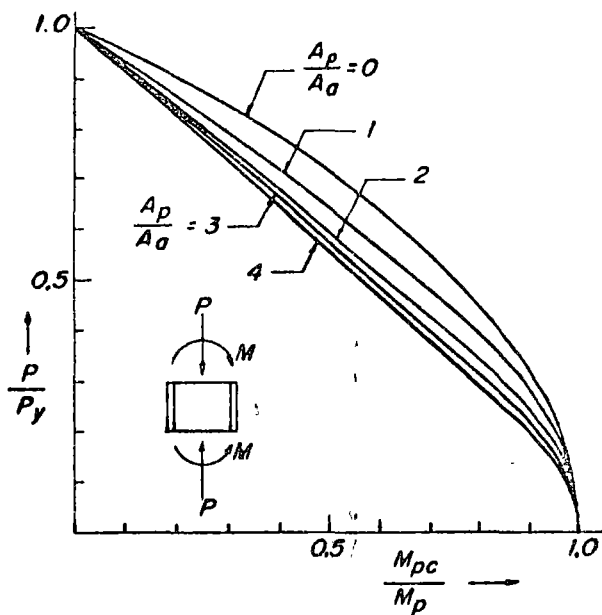


FIGURA 50

Si el grueso del alma de la zona acartelada se conserva igual al de la sección adyacente es evidente que el efecto de la fuerza axial será menor en la conexión que en el miembro inmediato a ella.

Puesto que en las conexiones acarteladas se dispone de mayor cantidad de área en el alma que en los perfiles adyacentes en ellas disminuirá, aparentemente, el valor del esfuerzo cortante. Sin embargo, la fuerza en el patin inclinado modifica la magnitud de la fuerza cortante, por lo que es deseable examinar su influencia y determinar el

efecto de los esfuerzos cortantes resultantes sobre el momento plástico.

En la ref. 25 se estudia este problema y se llega a la conclusión de que en la zona acartelada de la junta puede despreciarse la influencia de la fuerza cortante sobre la capacidad de la sección para tomar momento flexionante.

**VARIACIÓN DEL MOMENTO PLÁSTICO RESISTENTE A LO LARGO DE LA JUNTA Y POSICIÓN DE LA SECCIÓN CRÍTICA.** A diferencia de lo que sucede en un perfil ordinario, cuyo momento plástico resistente es constante en toda la longitud, la capacidad para tomar momento varía a lo largo de una junta acartelada, debido a la inclinación de uno de sus patines. Para que no se viole la condición de plasticidad es evidentemente necesario que el momento plástico resistente no sea, en ninguna sección, menor que el momento existente en ella, obtenido por medio de un análisis plástico de la estructura de que forme parte la junta.

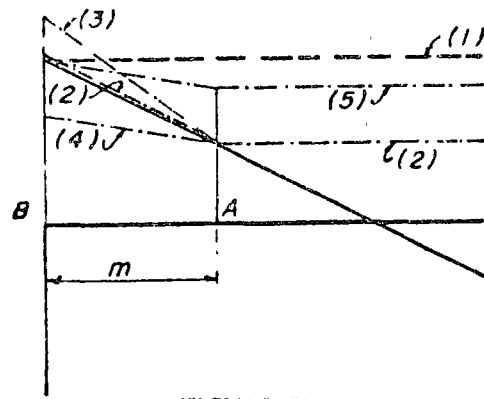


FIGURA 51

La línea llena de la fig. 51 representa el diagrama de momentos existentes en una esquina de un marco rígido (se ha representado únicamente la parte correspondiente a la trabe, pero es obvio que la discusión que sigue es también aplicable a la columna).

La recta horizontal (1) representa el momento plástico resistente necesario en la viga cuando ésta es de peralte constante, es decir, cuando no se emplean cartelas en la junta.

Supóngase ahora que se desea utilizar una cartela de longitud  $m$ : la línea quebrada (2) indica la solución teóricamente ideal, ya que corresponde a una cartela cuyo momento plástico es igual, en toda su longitud, al momento existente.

Si, conservando el grueso del alma y las dimensiones de los patines, se aumenta el ángulo de inclinación del patin interior, manteniendo el mismo perfil a la derecha de A, se obtiene la recta inclinada (3) correspondiente a una cartela sobrada, puesto que es capaz de resistir momentos mayores que los que obran sobre ella; en este caso, la sección crítica, en la que se formará la articulación plástica, es A.

Por último, (4) corresponde a una junta en la que la inclinación del patin es demasiado reducida.

de manera que no es capaz de desarrollar los momentos plásticos necesarios para soportar las cargas exteriores: en efecto, a todo lo largo de la cartela (llamo  $AB$ ) los momentos resistentes son menores que los indicados por el diagrama, de manera que esta solución no es posible (si se deseara utilizar una cartela cuyo patín interior tuviese la misma inclinación que la (4), sería necesario aumentar su peralte, de tal manera que su momento resistente en  $B$  fuese igual al que existe en esa sección; a esta junta le corresponde la gráfica (5) de la fig. 51. Evidentemente esta solución, correspondiente a la formación de una articulación plástica en  $B$ , es posible pero no conveniente, ya que obliga a aumentar la capacidad de carga de la trabe y todo el perfil queda sobrado, excepto en la sección  $B$ ; se acerca a la solución (1) con el inconveniente del aumento de precio correspondiente a la fabricación de la cartela). Además cuando la articulación plástica se forma en  $B$  el mecanismo de colapso corresponde a una distribución de momentos menos favorables, desde el punto de vista económico, que la que se obtiene cuando la articulación aparece en  $A$ .

De acuerdo con la discusión anterior, la posición de la sección crítica no es fija, sino depende de la ley de variación del momento flexionante y de la geometría de la junta; con objeto de localizarla, se supondrá que el momento flexionante varía linealmente entre el punto de inflexión y la intersección de los ejes de los miembros que componen la conexión, suposición que corresponde a la condición de carga más desfavorable para la junta.

El momento plástico  $M_{pr}$ , necesario en cualquier sección transversal dentro de la junta, puede expresarse como una función de las dimensiones y propiedades del perfil utilizado en el elemento principal, viga o columna,  $b$ ,  $d$ ,  $c$  y  $Z$ , de la posición

$$\frac{t}{t_r} = \frac{1 + \frac{x}{d} \tan \beta - \sqrt{\left(1 + \frac{x}{d} \tan \beta\right)^2 \left(\frac{b}{b-c}\right) - \frac{4Z}{d^2(b-c)} \left(1 + \frac{x}{a}\right)}{1 - \sqrt{\frac{b}{b-c} - \frac{4Z}{d^2(b-c)}}$$

de la sección transversal considerada,  $x$ , de la posición del punto de inflexión,  $n$ , y del ángulo de inclinación,  $\beta$  (ver fig. 48). (Se supone que el ancho del patín,  $b$ , y el grueso  $c$  del alma son iguales en la junta que en los miembros adyacentes).

El momento plástico requerido en una sección cualquiera,  $M_{pr} = \sigma_u Z_x$ , puede expresarse en función del momento existente en la sección en que empieza la junta como sigue:

$$\sigma_u Z_x = M_1 \left(1 + \frac{x}{a}\right) \quad (35)$$

Suponiendo que se forma una articulación plástica en la sección en que empieza la junta,  $M_1$  debe ser igual a  $Z\sigma_u$ , donde  $Z$  es el módulo de sección

plástico del perfil. Llevando este valor a (35), y sustituyendo  $Z_x$  por la expresión 34, se obtiene

$$\sigma_u \left[ bt(d_x - t) + \frac{c}{4} (d_x - 2t)^2 \right] = Z\sigma_u \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Ahora bien,  $d_x$ , peralte de la cartela a una distancia  $x$  de su extremo, es igual a  $d + x \tan \beta$ , donde  $d$  es el peralte del perfil (fig. 48), luego la ecuación anterior puede escribirse

$$\begin{aligned} \sigma_u \left[ bt(d - t + x \tan \beta) + \frac{c}{4} (d - 2t + x \tan \beta)^2 \right] = \\ = Z\sigma_u \left(1 + \frac{x}{a}\right) \quad (36) \end{aligned}$$

De esta expresión se despeja  $t$ , grueso necesario de los patines en la cartela:

$$t = \frac{1}{2} \left[ d + x \tan \beta - \sqrt{(d + x \tan \beta)^2 \left(\frac{b}{b-c}\right) - \frac{4Z}{b-c} \left(1 + \frac{x}{a}\right)} \right]$$

El grueso necesario para los patines del miembro principal,  $t_r$ , se obtiene despejando  $t$  de la ec. 34 y sustituyendo en ella  $Z_x$  y  $d_x$  por  $Z$  y  $d$ :

$$t_r = \frac{d - \sqrt{d^2 \left(\frac{b}{b-c}\right) - \frac{4Z}{b-c}}}{2}$$

Por consiguiente:

En la fig. 52 se muestran las relaciones entre  $t/t_r$  y  $x/d$  para distintos valores de  $\beta$  obtenidas para dos secciones consideradas típicas<sup>25</sup> (24WF 100 y 30WF 108), con la suposición de que  $a = 3d$  (estas proporciones se escogieron para simular la geometría real de un marco rígido, ya que se consideró que una longitud menor de  $a$  correspondería a una fuerza cortante más elevada que la que normalmente existe en un marco, mientras que para valores mayores de  $a$  la pendiente del diagrama de momentos es menor, lo que corresponde a una condición más favorable)<sup>27</sup>.

La fig. 52 indica que para valores de  $\beta$  menores de 12 grados el espesor máximo en los patines de la cartela se necesita en la sección en que  $x/d$  adquiere el valor máximo, es decir, en la intersección de los patines inclinados que es, por

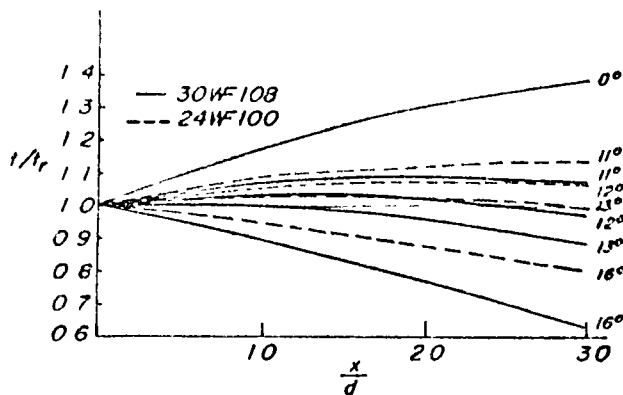


FIGURA 52

consiguiente, la sección crítica (en ella se formaría la articulación plástica si se conservan los patines del mismo grueso que en el miembro principal); cuando  $\beta$  es aproximadamente 12 grados el grueso requerido del patin es prácticamente el mismo en toda la longitud de la junta, y cuando  $\beta$  excede ese valor el grueso necesario de los patines es siempre máximo en  $x/d = 0$ , es decir, en la intersección de la conexión y el miembro principal.

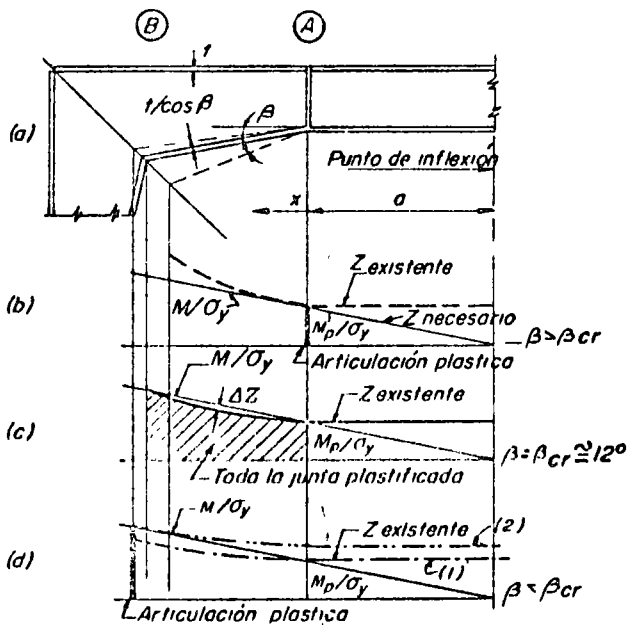


FIGURA 53

En la fig 53 se ilustra de otra manera el efecto que ocasiona el aumento del ángulo entre los patines; en ella se han trazado los módulos de sección plásticos resistentes de la junta y los módulos plásticos necesarios,  $M/\sigma_y$ , a lo largo de la cartela de una conexión típica y para varios valores de  $\beta$ , suponiendo que en la sección en que empieza la junta se ha proporcionado en todos los casos exactamente el valor necesario de  $Z$ . El grueso efectivo de los patines dentro de la junta se mantiene igual al del miembro adyacente, para lo cual el del patin inclinado se debe

incrementar multiplicándolo por el factor  $1/\cos \beta$ .

La fig. 53 indica que el ángulo crítico del patin inclinado es aproximadamente 12 grados: para este valor, la junta acartelada está en estado plástico en toda su longitud. Cuando  $\beta$  es mayor de 12 grados la articulación plástica se forma únicamente en la intersección de viga y conexión, sección A, y cuando es menor, la condición de plastificación total se presenta únicamente en la intersección de las dos mitades de la junta, curva (1), fig. 53d (como ya se mencionó con anterioridad, esta condición no es posible y obliga, si se desea conservar el valor del ángulo  $\beta$ , a aumentar el momento plástico  $Z$  en todo el resto de la junta y en la viga, curva (2), fig. 53d).

Los 12 grados como valor crítico del ángulo  $\beta$  corresponden a ciertas suposiciones acerca de la geometría de la junta y la forma del diagrama de momentos flexionantes, pero es evidente que siempre se podrá hacer un estudio semejante al mostrado en la fig. 53, tomando como base el diagrama de momentos real existente en la junta.

De acuerdo con la fig. 53c, cuando el ángulo  $\beta$  tiene el valor crítico y el momento flexionante varía linealmente, el momento resistente en la zona central de la cartela es algo menor que el necesario teóricamente, debido a que  $Z$  es una función del cuadrado del peralte y, por consiguiente, no varía linealmente entre los extremos; sin embargo, puede demostrarse que la desviación máxima  $\Delta Z$  entre el módulo de sección existente y el requerido no excede de 5%<sup>22</sup>.

En resumen, para un diagrama de momentos dado, obtenido analizando plásticamente la estructura, basta con determinar los valores de  $t$  necesarios en los dos extremos de la cartela, secciones A y B, fig. 53a, y utilizar el mayor; si éste es el correspondiente a la sección A, aquí se formará la articulación plástica y el resto de la junta quedará sobrado, si los dos son iguales, la junta fluye plásticamente en toda su longitud, y si el mayor es el correspondiente a B, en esta sección aparecerá la articulación, quedando sobrado todo el resto de la estructura (como se vio con anterioridad, esta condición no es conveniente, por lo que cuando se presenta es preferible aumentar el valor de  $\beta$ ).

**ESTABILIDAD DEL PATIN COMPRIMIDO.** Las siguientes suposiciones son básicas en la solución del problema de la estabilidad del patin comprimido de una junta acartelada recta<sup>23</sup>:

1. El patin de compresión se pandea independientemente de las demás partes componentes de la sección, fuera del plano de flexión. Se desprecia el efecto de la restricción impuesta por el alma (fig. 54).

2. Todo el patin de compresión se encuentra en estado de endurecimiento por deformación, ocasionado por esfuerzos uniformemente distribuidos de intensidad  $\sigma_y$  que obran en todas sus secciones transversales.

3. El patin comprimido está libremente apoyado en sus extremidades y en la intersección de

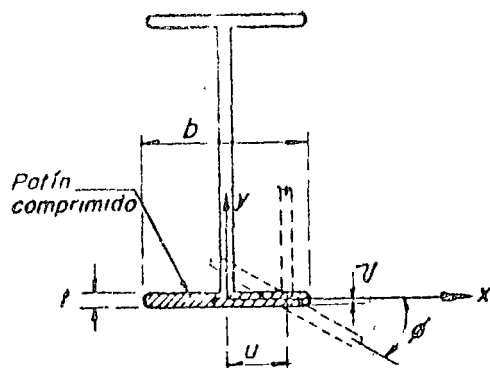


FIGURA 54

las dos pattes que lo componen (puntos A y B, fig. 48), debido a la formación de articulaciones plásticas en esas secciones

4. El centro de torsión coincide con el centroide del patín, debido a su simetría ( $x_0 = y_0 = 0$ ).

5. La rigidez al alabeo es igual a cero ( $II_m = 0$ ).

6. El alma impide el pandeo del patín en el plano de flexión (es decir, obliga a que el patín se pandee alrededor de su eje de mayor momento de inercia como se indica en I).

Llevando estas hipótesis simplificadoras a las ecuaciones diferenciales básicas de pandeo, linealizadas sustituyendo la curvatura por  $d^2u/dz^2$  (véanse las refs. 27 y 28), se obtienen las dos ecuaciones independientes siguientes<sup>25</sup>:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{P_u}{EI_y} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{d\theta}{dz} (GJ - Pr_y^2) = 0 \quad (39)$$

en las que J es el coeficiente de torsión de Saint Venant, igual aproximadamente a  $bt^3/3$ , y  $r_y^2 = (I_x + I_y)/A$ .

La ec. 38 indica que el patín se pandea alrededor del eje y como una columna de longitud AB (fig. 48); teniendo en cuenta las condiciones de borde supuestas, su solución es

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \quad \therefore \left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}}$$

Llamando L a la longitud no soportada lateralmente del patín comprimido de la cartela y teniendo en cuenta que el pandeo se presenta alrededor del eje y, la ecuación anterior puede escribirse

$$\left(\frac{L}{r_y}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}}$$

En el rango inelástico el esfuerzo teórico de pandeo está caracterizado por el módulo tangente<sup>27</sup>, luego

$$\left(\frac{L}{r_y}\right)^2 = \frac{\pi^2 E_t}{\sigma_c} \quad (40)$$

donde  $E_t$  es el módulo tangente.

Utilizando la ec. 40 puede determinarse la longitud crítica de pandeo de la cartela cuando la deformación a lo largo del patín comprimido se acerca al rango de endurecimiento por deformación. Para acero A7 en el estado de endurecimiento por deformación (lo que representa el caso más crítico) el esfuerzo y el módulo tangente toman los valores  $\sigma_u$  y  $E_{rd}$ , respectivamente.

Por consiguiente, si  $E_{rd}$  se toma<sup>28</sup> igual a 63,000 kg/cm<sup>2</sup>, la (40) puede volverse a escribir en la forma

$$\frac{L_{cr}}{r_y} = \pi \sqrt{\frac{63,000}{2,320}} = 16.5 \quad (41)$$

Dada la forma rectangular de las secciones transversales del patín comprimido,

$r_y = \sqrt{I_y/A} = \sqrt{tb^3/12tb} = b/\sqrt{12}$ , valor que, llevado a (41), permite determinar, en forma aproximada, la longitud crítica no soportada del patín:

$$L_{cr} = 16.5 \frac{b}{\sqrt{12}} = 4.8b \doteq 5b$$

Para llegar al resultado anterior se ha hecho una serie de suposiciones del lado de la seguridad (por ejemplo, no se han tomado en cuenta las restricciones impuestas en los extremos del patín por los tramos adyacentes a él, de uno y otro lado), por lo que parece razonable aumentar arbitrariamente la longitud crítica para compensar, al menos parcialmente, el efecto de esas hipótesis conservadoras. El AISC<sup>16</sup> recomienda un incremento de 20%, con lo cual la longitud crítica para la condición más severa es

$$L_{cr} = 6b \quad (42)$$

Para que todo el desarrollo anterior sea válido es necesario que se fijen lateralmente los extremos y el punto de intersección de las dos partes que componen el patín comprimido (puntos A, B y C, fig. 48) por medio de elementos de contraventeo adecuados.

La solución de la ec. 39, que describe el pandeo por torsión del patín comprimido, es<sup>25</sup>

$$\frac{b}{t} = \sqrt{\frac{4G}{\sigma_u} - 1}$$

Para  $G = G_{rd}^{28} = 169,000$  kg/cm<sup>2</sup>,

$$\frac{b}{t} = \sqrt{\frac{4 \times 169,000}{2,320} - 1} \doteq 17.0$$

Para evitar el pandeo local, la relación  $b/t$  del ancho al grueso del patín no debe ser mayor de 17 (véanse refs. 7 y 14), de manera que si  $b/t$  es menor o igual que 17 se satisfacen simultáneamente los requisitos necesarios por pandeo local y torsional, mientras que el pandeo lateral se evita si se cumple la ec. 42.

La longitud crítica dada por (42) es frecuentemente menor que la deseada para el diseño; cuando esto sucede puede colocarse contravento lateral en puntos adicionales, con lo que la longitud de pandeo disminuye, o puede aumentarse el valor de  $L_{cr}$ , cambiando las características de la junta, ya sea aumentando el grueso del patin comprimido o su ángulo de inclinación,  $\beta$ .

**AUMENTO DE LA LONGITUD CRÍTICA DE PANDEO MODIFICANDO EL ESPESOR DEL PATIN COMPRIMIDO.** Puesto que el patin de compresión se comporta aproximadamente como una columna, la relación entre los esfuerzos que pueda soportar y las relaciones de esbeltez debe ser similar a la de una columna; por consiguiente, si en un problema dado se aumenta el grueso del patin, disminuirá la intensidad del esfuerzo a que esté sometido y aumentará la longitud crítica de pandeo.

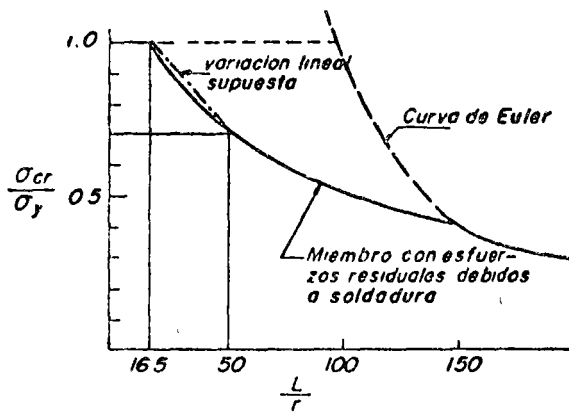


FIGURA 55

En la fig. 55 se muestra la curva esfuerzo-relación de esbeltez para columnas articuladas en sus dos extremos; puede verse en ella que hasta relaciones de esbeltez del orden de 50, la sustitución de la curva por una línea recta no introduce errores de importancia.

La relación de esbeltez crítica cuando el patin se encuentra totalmente plastificado (sometido a esfuerzos uniformes  $\sigma_y$  en todas sus secciones) es 16.5, dada por la (41), y se desea saber ahora qué dimensiones hay que darle al patin para poder aumentar esa relación a 50; de la curva de la fig. 55, para  $L/r = 50$ ,  $\sigma_{cr}/\sigma_y = 0.70$ , es decir, hay que proporcionar el patin comprimido de tal manera que su esfuerzo crítico se reduzca al 70% de  $\sigma_y$ .

Suponiendo que el flujo plástico es ocasionado por flexión únicamente, el momento que ocasiona el pandeo del patin para  $L/r = 50$  vale, aproximadamente

$$M = 0.70 M_p$$

siendo  $M_p$  el momento plástico de una sección dentro de la cartela.

Debe considerarse, además, el efecto de la fuerza axial; para un valor cualquiera de  $P/P_y$ , la

capacidad de momento debe restringirse de tal manera que el esfuerzo normal máximo debido a la flexión no exceda de  $(0.70 - P/P_y)\sigma_y$ , ya que de otra manera el esfuerzo máximo en el patin de compresión sería mayor de  $0.70\sigma_y$ . En consecuencia,

$$M = \left(0.70 - \frac{P}{P_y}\right) M_p \quad \therefore \quad M_p = \frac{M}{0.70 - P/P_y} \quad (43)$$

La relación  $P/P_y$  disminuye al aumentar el área del patin, por lo que, en general, no vale más de 0.10; llevando este valor a (43), se obtiene

$$M_p = \frac{M}{0.60} = 1.67 M \quad (44)$$

La ecuación anterior indica que el módulo de sección plástico requerido en la cartela debe aumentarse en 67% para lograr que  $L_{cr}/r = 50$ , siempre que  $P/P_y \leq 0.10$  (para valores mayores de  $P$  puede obtenerse el porcentaje de incremento llevando  $P/P_y$  a (43), igual que se hizo arriba para  $P/P_y = 0.10$ ).

Si la capacidad adicional para tomar momento se proporciona aumentando el área de los patines, entonces, de la ec. 44,

$$\sigma_y \left[ A'_p d_p + A_n \frac{d_n}{4} \right] = 1.67 \sigma_y \left[ A_p d_p + A_n \frac{d_n}{4} \right]$$

En esta expresión  $A_n$  y  $A_p$  son las áreas originales del alma y de cada uno de los patines,  $A'_p$  el área incrementada de los patines,  $d_p$  la distancia entre centroides de los patines y  $d_n$  el peralte del alma.

Si se conserva el área del alma y se toma  $d_p/d_n = 1.03$ , entonces

$$A'_p = 1.67 A_p + 0.16 A_n \quad (45)$$

En juntas acarteladas diseñadas plásticamente la relación  $A_p/A_n$  varía normalmente entre 0.375 y 0.500; tomando 0.375 como valor crítico, de la (45) se obtiene  $A'_p = 2.1 A_p$ , y si se conserva constante el ancho del patin,

$$t' = 2.1 t, \quad \text{para } L/r_y = 50 \quad (46)$$

Para calcular el grueso del patin necesario para una conexión acartelada cuya relación de esbeltez  $L/r_y$  esté comprendida entre 16.5 y 50 (o, lo que es igual, para  $4.8 \leq L/b \leq 14.8$ ) se adoptará la relación lineal entre esfuerzos y deformaciones mostrada en la fig. 55. Si  $t' = t + \Delta t$ , cuando  $L/b = 4.8$ ,  $\Delta t = 0$ , y cuando  $L/b = 14.8$ ,  $\Delta t = 1.1t$ ; por consiguiente,

$$\frac{\Delta t}{t} = 0.11 \left( \frac{L}{b} - 4.8 \right)$$

Aceptando como longitud crítica para la condición más severa  $L_{cr} = 6b$  (véase la ec. 42) y to-

mundo como factor 0.1 en vez de 0.11, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{\Delta t}{t} = 0.1 \left( \frac{L}{b} - 6.0 \right) \quad (47)$$

Por consiguiente, el grueso necesario en el patín comprimido está dado por

$$t_c = (t + \Delta t) \frac{1}{\cos \beta} = \left[ 1 + 0.1 \left( \frac{L}{b} - 6.0 \right) \right] \frac{t}{\cos \beta} \quad (48)$$

El grueso del patín de tensión debe aumentarse en la misma proporción, de manera que estará dado por una ecuación que difiere de la (48) únicamente en que en ella no aparecerá el  $\cos \beta$ .

Evidentemente, la ec. 48 es válida únicamente para valores de  $L/b$  comprendidos entre 6.0 y 14.8.

AUMENTO DE LA LONGITUD CRÍTICA DE PANDEO MODIFICANDO EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN  $\beta$ . Las ecs 42 y 47 se obtuvieron partiendo de la suposición de que la cartela se encuentra en la condición más severa posible, correspondiente al flujo plástico del patín de compresión en toda su longitud. Ahora bien, si el ángulo  $\beta$  tiene un valor mayor que el crítico ( $12^\circ$ , aproximadamente) a lo largo del patín existirá una condición elasto-plástica que dará lugar a un incremento de la longitud crítica de pandeo. Ese efecto benéfico puede tenerse en cuenta utilizando la ec. 49<sup>20</sup>:

$$L_{cr} = (60 - 40 M/M_p) t_y \quad (49)$$

en la que  $t_y$  vale  $b/\sqrt{12}$ , que es la expresión que se emplea para determinar la longitud crítica de pandeo de un elemento con una articulación plástica en un extremo y sometido a un momento menor que  $M_p$  en el otro<sup>20</sup>.

Los momentos  $M$  y  $M_p$  pueden expresarse como funciones de los esfuerzos y de las propiedades de la sección, con lo que se obtiene<sup>15, 20</sup>

$$L_{cr} = (17.5 - 0.0057f) b, \text{ pero no menor de } 6b. \quad (50)$$

donde  $f$ , dado en  $\text{kg/cm}^2$ , es el esfuerzo en el extremo más aperlado de la cartela, calculado utilizando el módulo de sección ordinario  $S$ ;  $f$  es siempre menor que el esfuerzo de fluencia.

Si los esfuerzos normales, calculados empleando el módulo de sección  $S$ , son menores que el esfuerzo de fluencia en todas las secciones transversales de la cartela, se comprobará si el pandeo lateral tiene o no importancia utilizando fórmulas elásticas; en general, bastará con comprobar que el esfuerzo normal máximo no es mayor de<sup>16</sup>

$$\frac{845,000 \lambda}{ld/A_p}$$

donde  $l$  es la distancia entre puntos soportados lateralmente,  $d$  es el peralte máximo de la cartela entre esos dos puntos,  $A_p$  el área del patín comprimido y  $\lambda$  el factor de carga utilizado en el diseño.

REFUERZO DEL ALMA DE LA CONEXIÓN. Los esfuerzos cortantes y las fuerzas debidas a los patines que obran sobre el tablero  $BDFE$ , fig. 48, son del mismo tipo que las existentes en los bordes del alma de una junta no acartelada, y producen también deformaciones excesivas cuando sobrepasan la capacidad de carga, por cortante, del alma.

El problema adquiere un carácter más general cuando los ejes de los dos miembros que concurren en la junta no forman un ángulo de  $90^\circ$ , como sucede, por ejemplo, en la junta viga-columna de un marco de dos aguas, fig. 56.

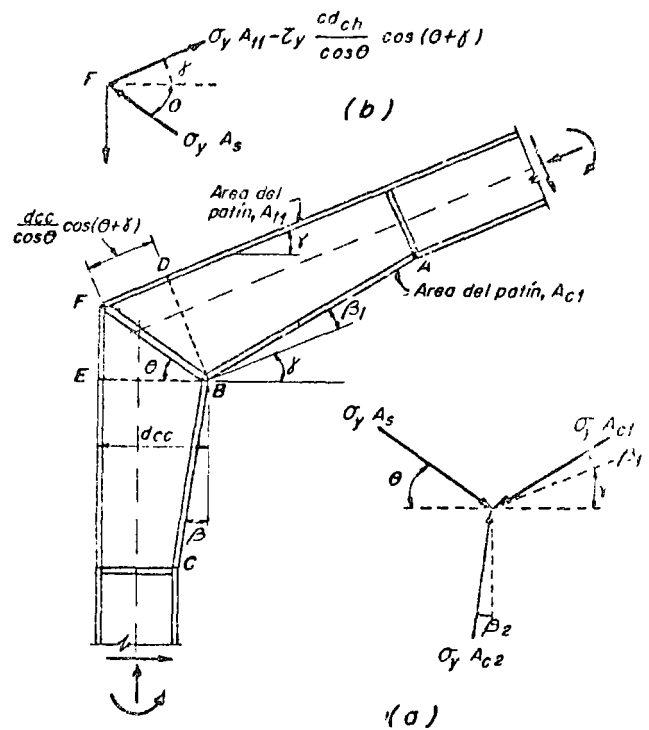


FIGURA 56

Deben calcularse las fuerzas en el tablero  $BDFE$ , para ello, se supone que las secciones  $BD$  y  $B'E'$  están totalmente plastificadas, de manera que sus patines transmiten fuerzas de intensidad  $A_p \sigma_u$  (esto es cierto cuando el ángulo  $\beta$  tiene un valor menor o igual que el crítico y es una buena aproximación, que da resultados del lado de la seguridad, para ángulos mayores).

En la esquina interior  $B$  las fuerzas en los patines tienen una componente en la dirección  $BB'$  que debe ser equilibrada por el alma, pero ésta puede estar totalmente plastificada por flexión en  $B$ , por lo que es conveniente despreciar su capacidad de carga y proporcionar un par simétrico de atesadores a lo largo de  $FB$ , que tomen la totalidad de esa fuerza (únicamente se toma en cuenta la resis-



tencia de la faja de alma de ancho igual al grueso de los atesadores que queda comprendida entre estos).

En la esquina exterior  $F$  la situación es diferente, ya que parte de la fuerza existente en los patines es soportada por cortante en el alma a lo largo de las líneas  $EF$  y  $DF$ , reduciéndose así la intensidad de las fuerzas que deben tomar los atesadores en  $F$ .

Para determinar el tamaño de los atesadores que deben colocarse a lo largo de la diagonal se estudia el equilibrio en sus dos extremos,  $B$  y  $F$ , se determina la fuerza que deben soportar en cada uno de ellos y se diseñan para la mayor de las dos; por razones expuestas arriba, generalmente rige la fuerza determinada en la esquina entrante  $B$ .

En las figs. 56a y b se muestran, respectivamente, las fuerzas máximas posibles en los dos patines y en el atesador en los puntos  $B$  y  $F$ . El área que debe tener el atesador diagonal en cada uno de esos puntos se puede determinar planteando la ecuación de equilibrio de proyecciones sobre un eje horizontal.

Equilibrio en  $B$  (fig. 56a):

$$\sigma_v A_{at} \cos \theta - \sigma_v A_{c1} \cos (\beta_1 + \gamma) + \sigma_v A_{c2} \sin \beta_2 = 0$$

$$\therefore A_{at} = \frac{A_{c1} \cos (\beta_1 + \gamma) - A_{c2} \sin \beta_2}{\cos \theta} \quad (51)$$

Equilibrio en  $F$  (fig. 56b):

$$\sigma_v A_{t1} \cos \gamma - \tau_v \frac{cd_c}{\cos \theta} \cos (\theta + \gamma) \cos \gamma - \sigma_v A_{at} \cos \theta = 0$$

Sustituyendo  $\tau_v$  por  $\sigma_v/\sqrt{3}$  y despejando el área del atesador se obtiene:

$$A_{at} = \left[ \frac{A_{t1}}{\cos \theta} - \frac{cd_c \cos (\theta + \gamma)}{\sqrt{3} \cos^2 \theta} \right] \cos \gamma \quad (52)$$

Los símbolos que aparecen en las ecuaciones anteriores indican:

$A_{at}$  = área de un par simétrico de atesadores en diagonal

$A_{c1}$  y  $A_{c2}$  = área del patín interior de la cartela de la trabe y de la columna, respectivamente

$A_{t1}$  = área del patín exterior de la cartela de la viga

$\gamma$  = ángulo de inclinación de la viga

$\theta$  = ángulo que forma el atesador diagonal con la horizontal

$\beta_1$  y  $\beta_2$  = ángulos de inclinación de los patines interiores de las dos cartelas, medidos respecto a los ejes de viga y columna

$c$  = grueso del alma en las cartelas

$d_{cr}$  = peralte de la cartela de la columna en la sección  $EB$  (fig. 56).

Si la eq. 52 da un resultado nulo o negativo, quiere decir que la capacidad del alma para tomar fuerza cortante es suficiente para transmitir la

fuerza existente en el patín exterior, de manera que los atesadores se necesitan únicamente para equilibrar la resultante de las fuerzas en la esquina interior. Puesto que el alma toma siempre alguna fuerza la (51), basada en el equilibrio en el punto  $B$ , suele ser la que gobierna el diseño de los atesadores.

Evidentemente, las eqs. 51 y 52 son aplicables para juntas en las que los ejes toman un ángulo de  $90^\circ$ , bastando para ello con hacer  $\gamma = 0$ .

En las uniones de viga y columna con la junta (puntos  $A$  y  $C$ , fig. 56) deben colocarse también atesadores transversales, diseñados para soportar la fuerza que aparece en su dirección, debida al quiebre existente en el patín interior y suponiendo que la fuerza en el patín vale  $A_p \sigma_p$ ; como los ángulos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son en general muy pequeños, el tamaño de estos atesadores suele estar gobernado por requisitos de dimensiones mínimas.

RECOMENDACIONES PARA EL DISEÑO.<sup>19,20,25</sup> Como primer paso en el diseño de un marco con juntas acarteladas es necesario escoger las longitudes de las cartelas, con lo que quedan determinadas las secciones en que pueden formarse articulaciones plásticas; enseguida se analiza el marco, utilizando uno cualquiera de los métodos plásticos, se diseñan vigas y columnas y se determinan los elementos mecánicos en las secciones extremas de las juntas, necesarios para el diseño de éstas (en un problema real puede ser necesario ensayar varias longitudes, hasta encontrar la más adecuada).

Por último, y antes de entrar al diseño propiamente dicho de la junta, se escogen los ángulos  $\beta$  entre los patines inclinados y los ejes de viga y columna.

Conocidos elementos mecánicos y geometría, la junta acartelada se diseña como sigue:

1. Obténganse, por medio de un diseño plástico, las dimensiones de las secciones transversales de viga y columna en los puntos en que se ligan con la junta. Por facilidad de fabricación es conveniente que el ancho de los patines y el grueso del alma en las zonas acarteladas se hagan aproximadamente iguales a los de los perfiles adyacentes.

2. Determinese el grueso de los patines de tal manera que el cociente obtenido dividiendo el momento en cualquier punto, debido a la carga última, entre el módulo plástico de la sección correspondiente, tomada normalmente al eje del miembro conectado, no sea mayor que  $\sigma_p$  (Para satisfacer esta condición basta comprobar que  $M/Z \leq \sigma_p$  en las dos secciones extremas de la cartela).

3. Compruébese que la relación  $b/t$  no es mayor de 17; en caso contrario, aumentese  $t$ .

4. Incrementese el espesor del patín comprimido multiplicándolo por el factor  $1/\cos \beta$ .

5a) Si las dimensiones de la cartela son tales que los esfuerzos son aproximadamente iguales a  $\sigma_p$  en los dos extremos ( $M \doteq M_p$  en ambos), límitese la longitud no contraventada  $L$  a no más de 6 veces el ancho del patín (en forma más general,  $L$  no debe ser mayor de  $19.8 r_p$ , siendo  $r_p$  el radio

de que del patin comprimido respecto al eje Y); si este valor es excedido, aumentese el grueso del patin.

5b) Si las proporciones de la cartela son tales que el esfuerzo en un extremo es aproximadamente igual a  $\sigma_u$  mientras que en el otro, calculado utilizando el módulo de sección  $S$  en lugar del módulo plástico  $Z$  es menor que  $\sigma_u$ , límitese la longitud no contraventeada a

$$L = (175 - 0.0057f)b$$

pero no menos de  $6b$ , siendo  $f$  el esfuerzo en el segundo extremo, en  $\text{kg/cm}^2$ .

5c) Si los esfuerzos normales de flexión, calculados utilizando los módulos de sección elásticos  $S$ , son menores que  $\sigma_u$  en todas las secciones transversales de la junta, compruébese que el esfuerzo máximo no sobrepasa el dado por la ecuación

$$\frac{845,000 \lambda}{Ld/bt}$$

en la que  $L$  es la distancia entre puntos fijos lateralmente,  $d$  el peralte máximo de la cartela entre esos dos puntos,  $b$  y  $t$  las dimensiones del patin comprimido y  $\lambda$  el factor de carga utilizado en el diseño de la estructura.

6. Determinése la influencia de la fuerza normal, calculando la relación  $P/P_u$ , en la que  $P_u$  es igual a  $A\sigma_u$ , siendo  $A$  el área total de la sección considerada. Si resulta menor que 0.15 no es necesaria ninguna modificación, pero si  $P/P_u > 0.15$  debe obtenerse el momento plástico reducido  $M_{pr}$  utilizando las curvas de interacción de la fig. 50.

7. Proporcionéense los atiesadores necesarios en los dos extremos de la junta y en la intersección de las dos partes que la componen.

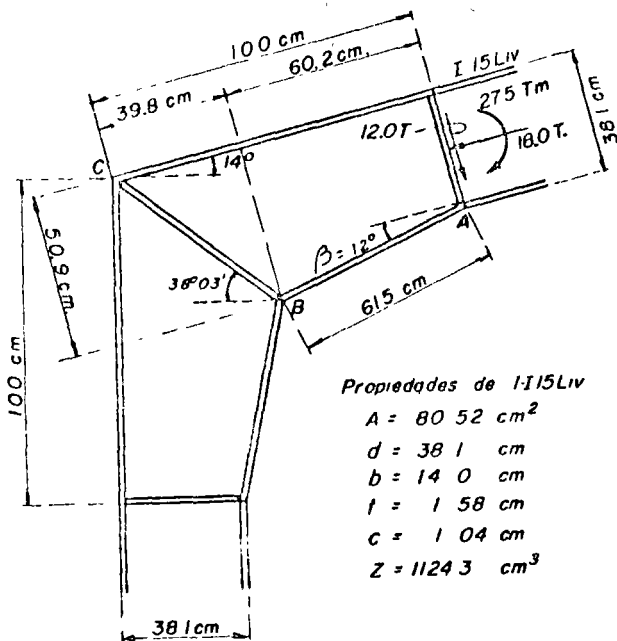


FIGURA 57

EJEMPLO 5. Diseñese la junta para un marco de dos aguas mostrada en la fig. 57.

Se supone que las dimensiones generales de la junta y el perfil laminado adyacente se escogieron de tal manera que se forme una articulación plástica en la intersección del perfil y la junta (sección A). El alma de la conexión se hará con una placa de 1.11 cm ( $\frac{7}{16}$ " ) y el ancho de los patines se conservará igual al del perfil laminado. Se utilizara acero A36.

Una vez escogida la longitud de la cartela (100 cm, en este caso), y conocidos el perfil de la viga y los elementos mecánicos en los extremos de la junta, se supone un ángulo  $\beta = 12^\circ$  y se revisa la sección B; el estado en que se encuentre indicará si se conserva ese valor de  $\beta$  o si es conveniente aumentarlo. A continuación se presenta el diseño de la junta, siguiendo paso a paso los puntos indicados en recomendaciones para el diseño:

1. En la viga se utiliza una I-15L.
2. El momento existente en la sección B vale

$$M_n = 27.5 + 12.0 \times 0.602 - 18.0 \times 0.064 = 27.5 + 7.22 - 1.15 = 33.57 \text{ tm.}$$

Módulo de sección plástico necesario en B:

$$Z = \frac{M_n}{\sigma_u} = \frac{3,357,000}{2,530} = 1,326 \text{ cm}^3$$

Despejando  $t$  de la ec. 34 se obtiene

$$t = \frac{d_s - \sqrt{d_s^2 - \left(\frac{b}{b-c}\right) - \frac{4Z_c}{b-c}}}{2}$$

El grueso necesario del patin exterior en la sección B se obtiene sustituyendo valores en la fórmula anterior:

$$t = \frac{50.9 - \sqrt{(50.9)^2 - \left(\frac{14.0}{14.0 - 1.04}\right) - \frac{4 \times 1,326}{14.0 - 1.04}}}{2} = \frac{50.9 - 48.9}{2} = 1.0 \text{ cm}$$

En la sección A se necesita conservar el grueso del patin igual al de la viga, 1.58 cm, espesor que se conserva en toda la longitud; por consiguiente, la sección B no es crítica, y se tomará para el patin exterior  $t = 1.59 \text{ cm}$  ( $\frac{5}{8}$ " )  $\cong 1.58 \text{ cm}$  (podría disminuirse un poco el valor del ángulo  $\beta$ ).

La liga entre las placas de espesor constante utilizadas en la junta y los patines de la I-15L, de grueso variable, presenta algunas dificultades, las que desaparecen si en la viga se utiliza un perfil formado por tres placas soldadas, en vez de uno laminado.

3.  $b/t = 14.0/1.58 = 8.85 < 17$ . Correcto.

4. Grueso del patín de compresión

$$\frac{1.58}{\cos 12^\circ} = \frac{1.58}{0.978} = 1.61 \text{ cm}$$

Se conserva la placa de 1.58 cm de grueso en el patín interior.

5. El esfuerzo normal en A es aproximadamente igual a  $\sigma_v$ , y en B vale:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{3.357.000}{1.452} = 2.310 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_v$$

Por consiguiente,

$$L_{cr} = (17.5 - 0.0057 \times 2.310)b = (17.5 - 13.2)b = 4.3b < 6b$$

$$\therefore L_{cr} = 6b = 6 \times 14 = 84 \text{ cm} > 61.5$$

(Evidentemente, los cálculos anteriores no son necesarios en este caso, puesto que la longitud del patín comprimido, AB, es menor que 6b, luego no hace falta calcular  $L_{cr}$  de una manera más refinada).

6.  $\frac{P}{P_v} = \frac{18.0}{80.52 \times 2.52} = 0.089 < 0.15$

No es necesaria ninguna modificación por efecto de la fuerza axial.

7. Atiesador diagonal

Area necesaria por equilibrio en la esquina exterior C:

$$A_{at} = \left( \frac{14.0 \times 1.58}{0.787} - \frac{1.11 \times 50.9 \times 0.615}{\sqrt{3} \times 0.787^2} \right) 0.970 = (28.1 - 32.4) 0.970 < 0$$

No se necesita atiesador en la esquina exterior.

Por equilibrio en la esquina interior B:

$$A_{at} = \frac{14.0 \times 1.58 \times 0.899 - 14.0 \times 1.58 \times 0.208}{0.787} = \frac{19.9 - 4.6}{0.787} = 19.4 \text{ cm}^2$$

Tomando el ancho de los atiesadores igual al de los patines, el grueso necesario es:

$$t_{at} = \frac{19.4}{14.0} = 1.38 \text{ cm}$$

Utilísense atiesadores de 1.43 cm ( $\frac{1}{16}$ ").

$$b/t = \frac{14.0}{1.43} < 17.0$$

En la sección A en que empieza la cartela se colocarán atiesadores de 0.95 cm ( $\frac{3}{8}$ ") de grueso, para los que  $b/t = 14.0/0.95 = 14.7 < 17.0$ .

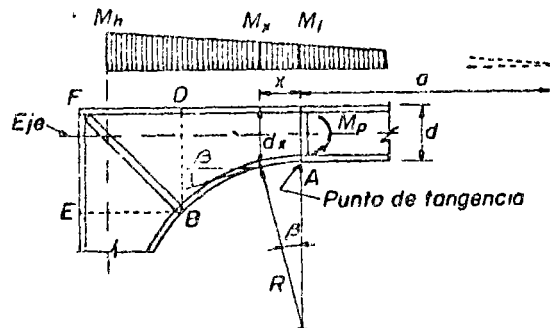


FIGURA 58

**JUNTAS ACARTELADAS CURVAS.** En la fig. 58 se muestra la geometría de una cartela curva típica y las fuerzas que obran sobre ella. La cartela debe diseñarse de manera que sea capaz de soportar el momento correspondiente a la formación de una articulación plástica en el miembro principal en su unión con la junta y cualquier momento de mayor intensidad que se desarrolle en la porción acartelada, como un resultado de la ley de variación del momento flexionante.

El análisis y diseño de las juntas acarteladas curvas es semejante, en muchos aspectos, al de las conexiones con cartelas rectas. Como en éstas, tres son los problemas principales que deben tenerse en cuenta: <sup>20,26</sup> 1) resistencia a la flexión en la zona acartelada de la junta, 2) resistencia al pandeo local y lateral y, 3), esfuerzos cortantes en el tablero de la esquina (BDFE, fig. 58).

*Solución aplicando la teoría plástica simple.* El análisis que se presenta a continuación está basado en las suposiciones y condiciones siguientes: <sup>25</sup>

1. Las secciones transversales permanecen planas después de la flexión.
2. Es aplicable el diagrama esfuerzo-deformación idealizado, y el comportamiento de las fibras en flexión es el mismo que el de las fibras aisladas en compresión y tensión.
3. Existe equilibrio entre las fuerzas y momentos aplicados sobre la junta y las fuerzas interiores que aparecen en ella, de manera que se satisfacen las ecuaciones

$$P = \int \sigma_v dA \quad \text{y} \quad M = \int \sigma_v y dA$$

4. La fuerza normal en los patines curvos es aproximadamente constante en toda su longitud (puesto que el peralte de la cartela crece rápida-

mente para valores de  $\beta$  mayores que  $\pi/8$ , fig. 58, con posibles variaciones considerables en la intensidad de esa fuerza; sin embargo, teniendo en cuenta que se forma una articulación plástica dentro de la porción curva de la junta, la suposición parece razonable cuando se alcanza el valor del momento plástico).

El momento plástico resistente en cualquier sección transversal  $x$  de la cartela, tomada normalmente al eje de la viga (fig. 58), es

$$M_{pr} = \sigma_u Z_x \quad (53)$$

Lo mismo que en las juntas acarteladas rectas, un aumento en el espesor del patin curvo compensa la reducción en sección efectiva debida a su inclinación, y hace que la sección sea simétrica con respecto a un eje horizontal que pase a la mitad de su altura. El grueso requerido teóricamente está dado por

$$t_c = t / \cos \beta \quad (54)$$

siendo  $t_c$  y  $t$  los gruesos del patin de compresión y de tensión, respectivamente, y  $\beta$  el ángulo central entre el punto de tangencia y la sección dada de la junta (fig. 58).

El ángulo  $\beta$  varía de una sección a otra, pero interesa únicamente su valor para la sección crítica, ya que ésta regirá el diseño de la junta; si dicha sección se encuentra cerca del miembro principal, el valor correspondiente de  $\beta$  será pequeño y también lo será el incremento necesario en el grueso del patin. Por consiguiente, será posible diseñar las conexiones acarteladas curvas como si fuesen vigas de peralte constante.

Una vez incrementado el grueso del patin curvo por medio del factor  $1/\cos \beta_c$  ( $\beta_c$  es el valor del ángulo central  $\beta$  correspondiente a la sección crítica), el módulo de sección  $Z_x$  en una sección transversal cualquiera  $x$  está dado por (suponiendo que la sección tiene un eje de simetría horizontal):

$$Z_x = bt(d_r - t) + \frac{c}{4}(d_r - 2t)^2 \quad (55)$$

En esta ecuación:

$d_r$  = peralte de la cartela en cualquier sección  
 $x = d + R(1 - \cos \beta)$

$R$  = radio de curvatura del patin interior (se supone que éste es circular)

$x = R \sin \beta$

El momento plástico resistente en una sección transversal cualquiera, dado por (53), debe ser mayor o igual que el momento flexionante  $M_x$  que obra en esa sección. Sustituyendo  $Z_x$  por su valor dado por (55) en (53), e igualando el resultado a  $M_x$ , se obtiene

$$\sigma_u \left[ bt(d_r - t) + \frac{c}{4}(d_r - 2t)^2 \right] = M_x$$

De aquí puede despejarse el grueso necesario del patin de tensión:

$$t = \frac{d_r - \sqrt{d_r^2 \left( \frac{b}{b-c} \right) - \frac{4M_x}{\sigma_u(b-c)}}}{2} \quad (56)$$

Conocidos el grueso del alma  $c$ , el ancho de los patines  $b$  (que generalmente se conserva igual al de los perfiles adyacentes) y el peralte  $d_r$ , que se determina de la geometría de la junta, la ec. 56 permite obtener el grueso del patin en una sección cualquiera. De todos los gruesos posibles interesa determinar el máximo, correspondiente a la sección crítica.

DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE LA SECCIÓN CRÍTICA EN UNA JUNTA CURVA. Dadas las características geométricas de una junta curva circular, su peralte aumenta lentamente al principio, a partir de la sección en que empieza la conexión, para crecer después con mucha mayor rapidez al aumentar el valor del ángulo  $\beta$ ; esto da lugar a que, en general, el momento plástico resistente de la junta aumente primero con mayor lentitud que el momento flexionante existente en ella para crecer después más rápidamente, a partir de un cierto valor de  $\beta$  (véase la fig. 59), al que llamaremos ángulo crítico,  $\beta_c$ .

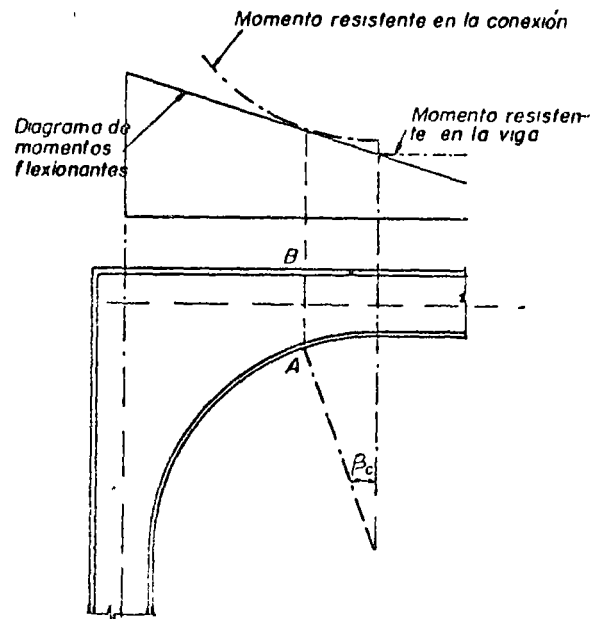


FIGURA 59

Observando en la fig. 59 los diagramas de momentos flexionantes y de momentos resistentes se advierte que es necesario darle a la junta, en el arranque, una capacidad de momento un poco mayor que la de la viga, y que la conexión está sobrada en toda su longitud, con la única excepción de una sección, la AB, cuyo momento flexionante será, por consiguiente, el que rija el diseño. Es,

pues evidente que el problema se simplificará considerablemente si se logra determinar la posición de la sección crítica  $AB$ , en la que se requerirá el grueso máximo de los patines

Como en el caso de las juntas acarteladas rectas, se supondrá que el momento flexionante varía linealmente entre el punto de inflexión y la intersección de los ejes de trabe y columna.

El momento flexionante  $M_r$  en una sección transversal cualquiera situada a una distancia  $x$  del punto de tangencia (fig. 58) puede expresarse en función del momento  $M_1$  existente en la unión de la conexión y el perfil, de la distancia  $a$  al punto de inflexión y del radio de curvatura  $R$  y el ángulo central  $\beta$  en la forma siguiente:

$$M_r = M_1 \frac{a + R \operatorname{sen} \beta}{a} = Z \sigma_y \frac{a + R \operatorname{sen} \beta}{a}$$

$Z$  es el módulo de sección plástico del perfil utilizado en la viga (o en la columna).

Llevando este valor a la ec. 56 y sustituyendo en ella, además,  $d_r$  por  $d + R(1 - \cos \beta)$ , se obtiene

$$t = \frac{1}{2} \left\{ d + R(1 - \cos \beta) - \sqrt{[d + R(1 - \cos \beta)]^2 \left( \frac{b}{b-c} \right) - \frac{4Z(a + R \operatorname{sen} \beta)}{a(b-c)}} \right\}$$

Derivando el segundo miembro de esta ecuación con respecto a  $\beta$  se llega al resultado siguiente:

$$\frac{\partial t}{\partial \beta} = \frac{1}{2} R \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{4} \left\{ \left[ 2[d + R(1 - \cos \beta)] \left( \frac{b}{b-c} \right) R \operatorname{sen} \beta - \frac{4Z}{a(b-c)} R \cos \beta \right] / \sqrt{[d + R(1 - \cos \beta)]^2 \left( \frac{b}{b-c} \right) - \frac{4Z(a + R \operatorname{sen} \beta)}{a(b-c)}} \right\} \quad (57)$$

La ec. 57 se ha trazado en la fig. 60,<sup>21</sup> llevando como ordenadas los valores  $\partial t / \partial \beta$  y como abscisas los ángulos  $\beta$ , en grados. (En la figura están anotados los valores de  $a$  y  $R$ , característicos de conexiones típicas, para los que se calcularon las curvas, así como los perfiles a los que éstas corresponden): puede verse que el ángulo crítico  $\beta_c$  vale aproximadamente  $12^\circ$ , puesto que para este valor  $\partial t / \partial \beta = 0$ , luego el espesor  $t$  del patín adquiere un valor máximo.

La suposición de que el momento flexionante varía linealmente sigue siendo correcta aunque el normal y cortante es siempre menos crítica en la

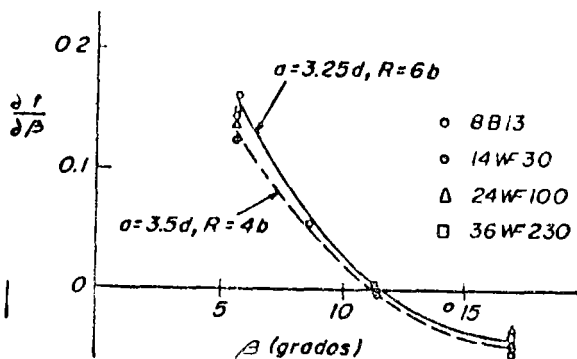


FIGURA 60

ángulo que formen los ejes de trabe y columna no sea de  $90^\circ$ , de manera que la posición de la sección crítica no se modifica.

Todos los ensayos efectuados con conexiones curvas de distintas proporciones han indicado que la sección crítica se encuentra efectivamente en la vecindad de un punto a  $12^\circ$  de la iniciación de la junta,<sup>1,25</sup> lo que confirma que los resultados teóricos obtenidos arriba son razonables para un amplio rango de distribuciones de momentos flexionantes y de radios de la cartela.

Como el ángulo crítico  $\beta_c$  es muy pequeño, el grueso del patín de compresión debe aumentarse tan sólo en 2%, incremento que puede ignorarse para todo fin práctico.

**INFLUENCIA DE LAS FUERZAS NORMALES Y CORTANTES.**<sup>26</sup> Puesto que el área de una sección transversal dentro de la cartela es siempre mayor que la del perfil utilizado en la viga o columna inmediata, puede concluirse que la reducción en momento plástico resistente debida al efecto de las fuerzas

junta que en el perfil. Además, se ha demostrado<sup>26,27</sup> que la fuerza cortante tiene poca influencia en la resistencia máxima a la flexión de la mayor parte de los miembros estructurales. Por consiguiente, si las dimensiones de la sección crítica son iguales o mayores que las del perfil que conecte con el extremo correspondiente de la junta, el efecto de la fuerza normal y de la fuerza cortante puede en general despreciarse. Desde luego, la relación peralte/grueso del alma debe ser tal que no se presenten problemas de pandeo local.

En los casos, poco frecuentes, en que la fuerza normal sea muy intensa, su efecto puede tomarse en cuenta utilizando las curvas de interacción deducidas para las juntas con cartelas rectas (fig. 50).

**ESTABILIDAD DEL PATÍN COMPRIMIDO.** Para que una conexión sea capaz de desarrollar su capacidad plástica máxima es preciso evitar fallas prematuras por inestabilidad local o lateral.

**PANDEO LATERAL DEL PATÍN COMPRIMIDO.** Las siguientes son las hipótesis de partida para resolver este problema:<sup>28</sup>

1. El patín comprimido se pandea independientemente de las demás partes que forman la sección

transversal, y se desprecia la resistencia al pandeo ofrecida por el alma.

2. Se supone que los esfuerzos normales son de intensidad  $\sigma_n$  y están uniformemente distribuidos en toda la longitud del patin curvo, el cual ha llegado al estado de endurecimiento por deformación en todas sus secciones transversales.

3. El patin de compresión está libremente apoyado en sus uniones con el perfil de viga y columna.

4. El pandeo del patin debe presentarse en un plano normal al de la junta.

5. Las fuerzas que impiden el pandeo del patin en el plano de la flexión son transmitidas por el alma. En el desarrollo que sigue se supone que las direcciones de estas fuerzas no cambian durante el pandeo y que los patines se desplazan tan sólo lateralmente, conservándose paralelos a su dirección original.

El problema se resolvió utilizando un método energético, igualando la energía de deformación correspondiente al pandeo lateral al trabajo realizado por las fuerzas en el patin al presentarse la deformación (véase la ref. 25). Se obtiene así la expresión siguiente para la longitud crítica de pandeo del patin curvo:

$$\left(\frac{L}{r_s}\right)_{cr} = \left(\frac{R\alpha_n}{r_s}\right)_{cr} = \pi \sqrt{\frac{E_{ed}}{\sigma_n}} \quad (58)$$

(Véase la fig. 61 para el significado de las literales que aparecen en el segundo miembro de esta ecuación).  $L_{cr}$  es la longitud crítica de pandeo lateral del patin comprimido, medida sobre el arco de círculo, igual a  $(R\alpha_n)_{cr}$ .

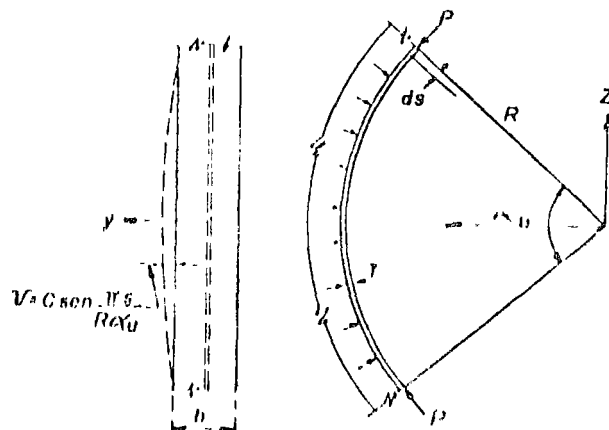


FIGURA 61

El módulo de endurecimiento por deformación  $E_{ed}$  puede tomarse igual a 63,000 kg/cm<sup>2</sup>, de manera que para acero A7 la ec. 58 puede expresarse como sigue:

$$\left(\frac{L}{r_s}\right)_{cr} = \left(\frac{R\alpha_n}{r_s}\right)_{cr} = \pi^2 \sqrt{\frac{63,000}{2,300}} = 16.5 \quad (59)$$

Teniendo en cuenta que para una sección rectangular  $r_s = b/\sqrt{12}$ , la longitud crítica puede expresarse en función del ancho  $b$  del patin:

$$L_{cr} = (R\alpha_n)_{cr} = 16.5 r_s = 4.8b \quad (60)$$

Las suposiciones que han llevado a la obtención de la ec. 60 son conservadoras, ya que los patines de los perfiles adyacentes a la junta restringen parcialmente las rotaciones de los extremos del patin curvo y, además, los esfuerzos no están, en realidad, uniformemente repartidos en toda su longitud, por lo que pueden permitirse incrementos moderados en el valor de  $L_{cr}$ . En las refs. 15 y 19 se recomienda tomar:

$$L_{cr} = (R\alpha_n)_{cr} = 6.0b.$$

Cuando los ejes de viga y columna forman un ángulo de 90° puede obtenerse un valor máximo admisible del radio del patin curvo: si se proporciona apoyo lateral en los puntos A, B y C, fig.

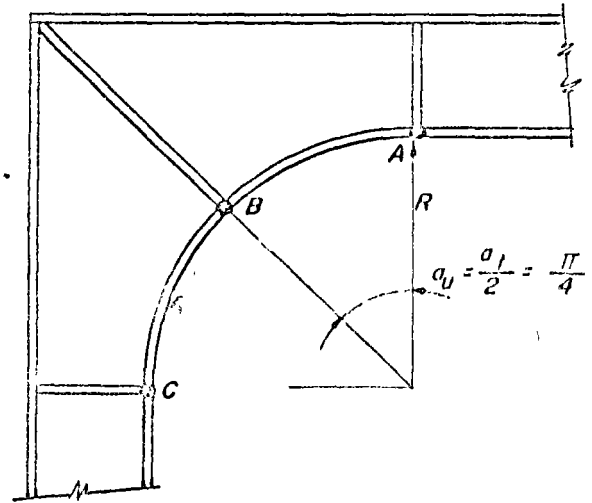


FIGURA 62

62, la longitud crítica será la comprendida entre dos de estos puntos, y  $\alpha_n$  valdrá  $\pi/4$ , luego:

$$R_{cr} \frac{\pi}{4} = 4.8b, \quad R_{cr} = 6b \quad (61)$$

El radio puede llevarse a valores más grandes que estos aumentando el número de puntos de soporte lateralmente, con lo cual disminuye la longitud crítica, o incrementando la magnitud del radio de giro  $r_s$  lo que puede lograrse empleando una placa más ancha en el patin comprimido o utilizando en el un perfil especial. También puede aumentarse el grueso del patin, empleando una fórmula análoga a la que se dedujo para juntas con cartelas rectas:

$$\frac{\Delta t}{t} = 0.11 \left( \frac{R\alpha_n}{b} - 4.8 \right).$$

que puede cambiarse a

$$\frac{\Delta t}{t} = 0.1 \left( \frac{R\alpha_n}{b} - 6.0 \right)$$

Por consiguiente,

$$t_r = t_t = \left( 1 + \frac{\Delta t}{t} \right) t \quad (62)$$

siendo  $t$  el grueso del patín determinado por medio de la ec. 56 utilizando las dimensiones críticas

$$\beta_c = 12^\circ \quad \text{y} \quad R = 6b.$$

Cuando el ángulo entre viga y columna no sea de  $90^\circ$ , como sucede en marcos de dos aguas, por ejemplo, será necesario determinar el ángulo  $\alpha_n = \alpha t/2$  entre los puntos soportados lateralmente antes de que puedan obtenerse la longitud crítica de pandeo y el radio máximo admisible. Puesto que en marcos de dos aguas  $\alpha t/2$  es siempre menor que  $\pi/4$ , el radio máximo admisible será mayor que el permitido para juntas cuyos miembros sean perpendiculares entre sí.

**FLEXIÓN TRANSVERSAL DEL PATÍN COMPRIMIDO.** Los esfuerzos existentes en el patín curvo, que se han supuesto iguales a  $\sigma_y$  en toda la longitud, tienen una componente radial que tiende a flexionar transversalmente el patín comprimido, a uno y otro lado del alma. (Este problema, del que ya se habló al estudiar los métodos elásticos, no se presenta, evidentemente, en las juntas acarteladas rectas).

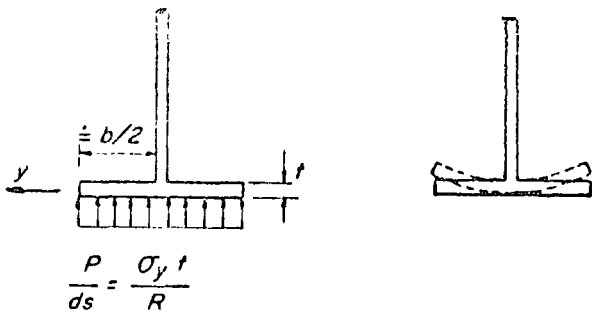
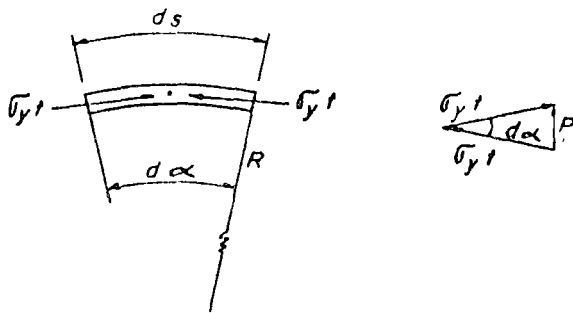


FIGURA 63

La fuerza longitudinal existente en una faja del patín de ancho unitario vale  $\sigma_y t$ , luego en una longitud  $ds$  aparece una fuerza transversal de intensidad (véase fig. 63).

$$p = \sigma_y t d\alpha$$

La fuerza transversal por unidad de longitud es

$$\frac{p}{ds} = \sigma_y t \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sigma_y t}{R} \quad (63)$$

El patín curvo actúa como un doble voladizo, empotrado en el alma, sujeto a las cargas dadas por la ec. 63 (fig. 63), que ocasionan un momento máximo de intensidad

$$M = \sigma_y \frac{t}{R} \frac{b^2}{8t}$$

por unidad de longitud del patín.

El módulo de sección de la porción de placa que debe soportar este momento vale

$$Z = t^2/4$$

El valor límite de los esfuerzos transversales, que es igual a  $\sigma_y$ , está dado por

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M}{Z} = \frac{\sigma_y t b^2}{8R} \left( \frac{4}{t^2} \right) = \frac{\sigma_y b^2}{2Rt} = \sigma_y$$

Por consiguiente,  $b^2/2Rt$  debe ser menor o igual que uno o, expresado como una relación ancho-grueso,

$$\frac{b}{t} \leq \frac{2R}{b} \quad (64)$$

Si se cumple esta condición, el efecto de la flexión transversal sobre el comportamiento de la junta puede ser ignorado.

**ATIESADORES RADIALES.** Deben colocarse atiesadores en la sección media y en las extremidades de las juntas acarteladas curvas, con objeto de evitar una deformación excesiva por cortante y un pandeo prematuro del alma. No existe ninguna solución matemática exacta ni empírica para el diseño de esos atiesadores, por lo que a continuación se presentará un método aproximado para determinar su área.

El atiesador central debe impedir el pandeo del alma que tiende a producirse bajo la acción de las componentes radiales de la fuerza en el patín curvo; se supondrá que la fuerza transmitida al atiesador es igual a las proyecciones, en su dirección, de dos fuerzas de intensidad  $A_r \sigma_y$  y cuya línea de acción pasa por el punto medio del patín curvo y los puntos de tangencia con los perfiles

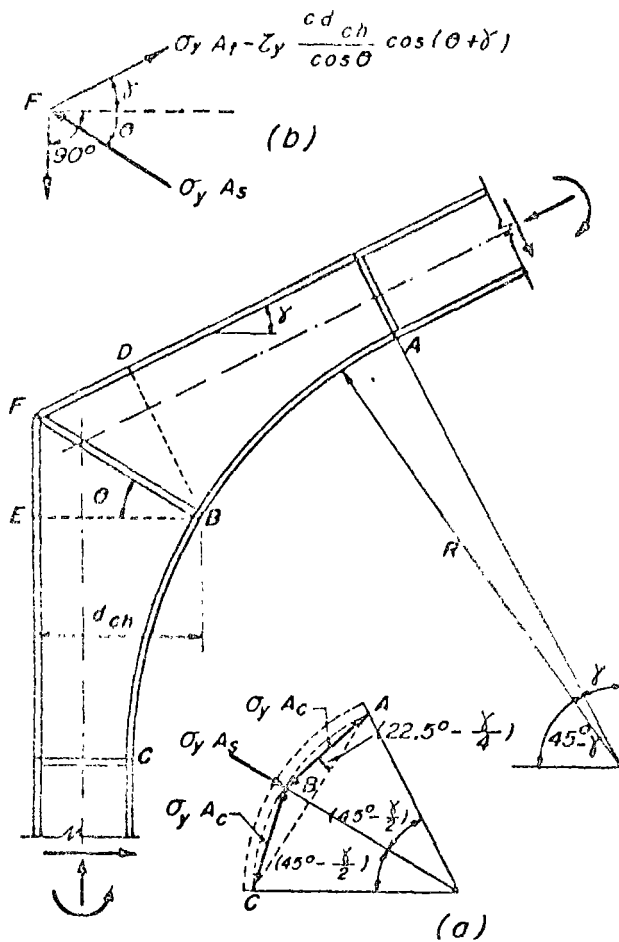


FIGURA 64

utilizados en viga y columna (puntos B, A y C, fig. 64)<sup>20,25</sup>

Evidentemente, la suposición anterior es arbitraria, pero produce resultados lógicos y del lado de la seguridad, ya que las fuerzas transmitidas por el patín curvo al atiesador son mucho menores, puesto que una gran parte de la fuerza radial es tomada por el alma.

Las fuerzas que obran sobre el tablero BDFE, fig. 64, son semejantes a las existentes en una junta con cartelas rectas, de manera que la ec. 52 sigue indicando el tamaño del atiesador necesario en la esquina exterior F.

El área necesaria en el borde interior B se obtiene del equilibrio de fuerzas en ese punto (véase fig. 64a); proyectando las fuerzas en una dirección radial, se obtiene

$$\sigma_u A_{nt} = 2\sigma_u A_r \sin \left( 22.5^\circ - \frac{\gamma}{4} \right)$$

siendo  $A_r$  el área del patín curvo.

Por consiguiente,

$$A_{nt} = 2A_r \sin \left( 22.5^\circ - \frac{\gamma}{4} \right) \quad (65)$$

Esta ecuación es la que controla generalmente el diseño del atiesador central en conexiones con cartelas curvas; el área dada por la (52) es mayor que la dada por (65) únicamente en algunos casos en que el ángulo  $\gamma$  es muy grande y, por consiguiente, las longitudes de alma FD y FE que ayudan a tomar las fuerzas existentes en los patines exteriores se reducen mucho.

Si el ángulo entre los ejes de viga y columna es de  $90^\circ$ , el ángulo  $\gamma$  en la ec. 64 vale cero, y ésta se reduce a

$$A_{nt} = 2A_r \sin 22.5^\circ$$

Haciendo los atiesadores de un ancho igual al del patín comprimido, la ecuación anterior permite calcular su grueso, igual a

$$t_{nt} = 2t \sin 22.5^\circ = 0.766t$$

RECOMENDACIONES PARA EL DISEÑO<sup>19,20,25</sup> Los patines preliminares son exactamente los mismos que en el diseño de juntas con cartelas rectas, y llevan también al conocimiento de las dimensiones generales de la conexión y a la determinación de los elementos mecánicos que obran sobre ella.

En seguida, el diseño de la junta en sí se lleva a cabo de acuerdo con los puntos enumerados a continuación:

1. Las secciones críticas de diseño son las situadas en los puntos de tangencia y las que se encuentran a  $12^\circ$  de ellos

2. Se escogen, aplicando la teoría plástica ordinaria, los perfiles necesarios en viga y columna en las secciones en contacto con la junta; el ancho de los patines y el grueso del alma necesarios en estas secciones suelen conservarse en la conexión.

3. Los gruesos de los patines, tanto interiores como exteriores, se determinan en las secciones críticas, a  $12^\circ$  de los extremos de la junta, por medio de la ec. 56. La influencia de la fuerza normal y cortante es despreciable en general

4. Se comprueba que el valor del grueso  $t$  sea tal que se satisfaga la condición  $b/t \leq 17$ .

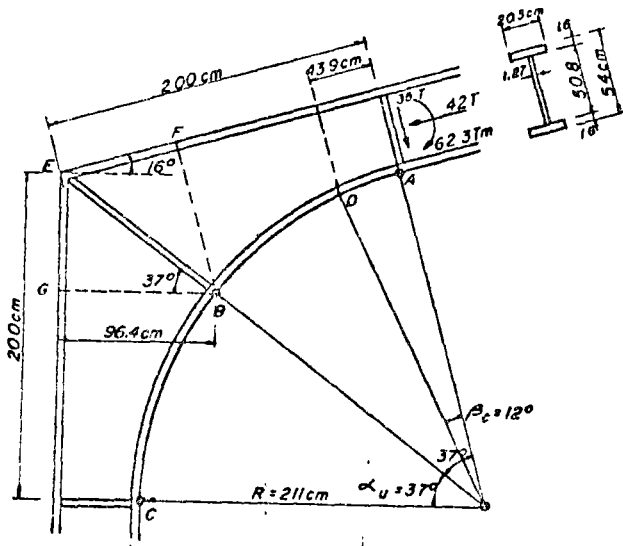
5. El radio máximo admisible del patín curvo de una conexión para un marco de cabezal horizontal es  $R = 6b$ , siempre que se proporcione soporte lateral adecuado en los arranques y en el punto medio de dicho patín. Si se desea aumentar el radio debe colocarse soporte lateral adicional, de tal manera que la longitud del arco entre cada dos puntos de apoyo no sea mayor de  $5b$ . Cuando no sea conveniente colocar contraventeo extra puede aumentarse el radio de giro o el grueso del patín curvo, de acuerdo con las ecs. 59 y 62, respectivamente.

6. Las mismas ideas expresadas en 5 son válidas cuando la junta forma parte de un marco con cabezal inclinado.

7. La relación entre el ancho y el grueso del patín curvo debe ser tal que se satisfaga la ec. 61; de no ser así, es necesario colocar atiesadores a lo largo del patín curvo, para evitar que se flexione transversalmente.



8 Deben colocarse atiesadores en el punto medio y en los extremos del patin curvo. El atiesador central se diseña con las ecs. 52 y 65 y los de los puntos de tangencia pueden ser de tamaño nominal (el atiesador central puede proporcionarse de manera que su área sea igual al 75% de la de los patines, resultado que se obtiene al aplicar la (65) a juntas con viga horizontal; si ésta es inclinada, el área requerida es menor.)



Propiedades de la sección utilizada en la viga:

$A = 1291 \text{ cm}^2$	$c = 1.27 \text{ cm}$
$d = 54.0 \text{ cm}$	$t = 1.6 \text{ cm}$
$b = 20.3 \text{ cm}$	$Z = 2514 \text{ cm}^3$

FIGURA 65

**EJEMPLO 6.** Diseñese la junta de la fig. 65, suponiendo que las dimensiones del perfil utilizado en la viga y las de la junta se han escogido de manera que se forme una articulación plástica en la sección correspondiente al punto de tangencia A. El grueso del alma y el ancho del patin serán iguales en la conexión que en la viga (1.27 y 20.3 cm, respectivamente.) Los puntos A, B y C están soportados lateralmente. El acero empleado es A36.

El problema se resolverá siguiendo paso a paso las instrucciones dadas en recomendaciones para el diseño.

1. La sección crítica es la D, a  $12^\circ$  del punto de tangencia A.
2. Se diseñan la viga y la columna y se conservan en la junta su ancho de patin y grueso del alma
3. Peralte de la sección D:  
 $d_p = 54 + 211(1 - \cos 12^\circ) = 58.6 \text{ cm}$   
 Momento flexionante en D:  
 $M_n = 62.3 + 35 \times 0.439 -$

$$- 42 \left( \frac{0.586 - 0.54}{2} \right) = 76.7 \text{ tm}$$

Módulo de sección plástico necesario en

$$D = \frac{7.670,000}{2,530} = 3,030 \text{ cm}^3$$

(En A,  $P/P_n = 42/129.1 \times 2.53 = 0.128 < 0.15$ , luego la fuerza normal no influye en el diseño de la junta.)

Se determina el grueso de patin necesario en la junta aplicando la ec. 56 a la sección crítica D:

$$t = \frac{1}{2} \left[ 58.6 - \sqrt{(58.6)^2 - \left( \frac{20.3}{20.3 - 1.27} \right) - \frac{4 \times 3030}{20.3 - 1.27}} \right] = 1.75 \text{ cm}$$

Los patines se harán con placa de 11/16" (1.746 cm).

$$4. \frac{b}{t} = \frac{20.3}{1.75} = 11.6 < 17$$

6. De la ec. 60 se despeja el radio crítico:

$$R_{cr} = 4.8 b / \alpha_u$$

$$\alpha_u = 37^\circ = 0.645 \text{ rad}$$

$$R_{cr} = \frac{4.8 \times 20.3}{0.645} = 151 \text{ cm} < 211$$

Modificando la (60) a  $R_{cr} = 6.0b/\alpha_u^{1.6,10}$ , se obtiene  $R_{cr} = 189 \text{ cm}$ , que sigue siendo menor que 211.

Con objeto de seguir conservando el radio indicado en la fig. 64, se aumentará el grueso del patin.

$$\frac{\Delta t}{t} = 0.1 \left( \frac{211 \times 0.645}{20.3} - 6.0 \right) =$$

$$= 0.1 \times 0.67 = 0.067$$

$$t_{(nal)} = (1 + 0.067) 1.75 = 1.865 \text{ cm}$$

Se aumenta el grueso de los patines a 3/4" (1.90 cm)

7. Debe satisfacerse la ecuación  $b/t \leq 2R/b$ .

$$\frac{b}{t} = \frac{20.3}{1.9} = 10.7$$

$$\frac{2R}{b} = \frac{2 \times 211}{20.3} = 20.8 > 10.7 \text{ Correcto.}$$

8. Diseño del atiesador central.

$$\text{Ec. 52: } A_{at} =$$

$$= \left[ \frac{20.3 \times 1.9}{0.799} - \frac{1.27 \times 96.4 \times 0.602}{\sqrt{3} \times 0.799^2} \right]$$

$$\times 0.961 = (48.3 - 66.6) 0.961 < 0$$

Ec. 65:

$$A_{nt} = 2 \times 20.3 \times 1.9$$

$$\times \text{sen} \left( 22.5^\circ - \frac{16^\circ}{4} \right) = 21.5 \text{ cm}^2$$

Como era de esperarse, dado que el ángulo de inclinación del cabezal es pequeño, la (65) es la que rige el diseño; el signo negativo obtenido al aplicar la (52) indica que el atiesador no es necesario para lograr el equilibrio de la esquina exterior *E* (fig. 65) ya que el alma tiene capacidad suficiente, a lo largo de *FE*, para tomar la fuerza que transmite el patin exterior.

En este caso, el área necesaria en el atiesador central es 64% del área de los patines.

Se utilizarán placas de ancho total igual al de los patines y de 1.27 cm (1/2") de grueso

$$(A_{nt} = 20.3 \times 1.27 = 25.8 \text{ cm}^2;$$

$$b/t = 20.3/1.27 = 16 < 17).$$

Atiesadores extremos (secciones *A* y *C*). Se harán igual que el central, pues si se utilizase placa más delgada se violaría la condición de que  $b/t \leq 17$ .

COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS MÉTODOS DE DISEÑO DE JUNTAS ACARTELADAS. Con objeto de comprobar experimentalmente si los métodos teóricos de diseño que se acababan de estudiar proporcionan juntas con características adecuadas de rigidez, resistencia y capacidad de rotación, se ensayaron seis juntas acarteladas, cuatro rectas y dos curvas, diseñadas de acuerdo con ellos.

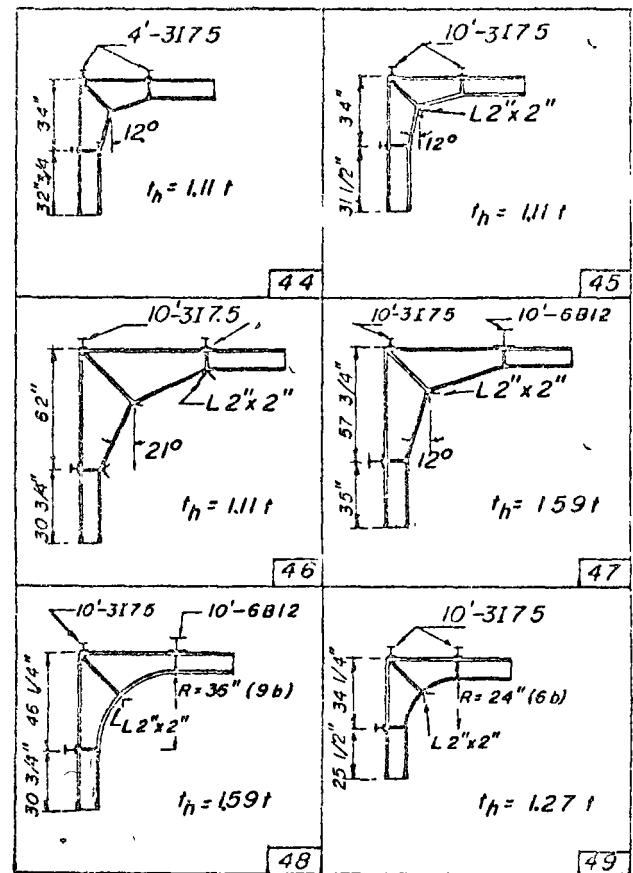
En lo que sigue se presenta un resumen de los resultados de las pruebas (para una exposición detallada de los ensayos, véase la ref. 25.)

Todas las juntas ensayadas se formaron con dos viquetas *I* laminadas 10 $\beta$ 19 (10 1/4" de peralte y 19 lb/pie de peso) de longitud aproximadamente igual a tres veces su peralte, ligadas entre sí a través de la conexión, en la cual se conservaron el grueso del alma y el ancho de los patines iguales, en todos los casos, a los de las vigas.

En la fig. 66 están dibujadas todas las conexiones, en forma esquemática.

Dos de las cuatro conexiones rectas, la 44 y la 45, se diseñaron con valores críticos del ángulo de inclinación y de la longitud de los patines comprimidos ( $\beta = 12^\circ$ ,  $S = 4.8b$ ), mientras que las otras dos se proyectaron para estudiar los efectos de las modificaciones necesarias para evitar fallas ocasionadas por inestabilidad lateral de patines de compresión con longitudes no soportadas de magnitud aproximadamente igual al doble de la crítica teórica. Así, en el espécimen 46 se aumentó el ángulo de inclinación del patin mientras que en el 47 se incrementó su grueso, conservando  $\beta$  su valor crítico de  $12^\circ$ .

El radio del patin interior del espécimen 49 se hizo del valor crítico ( $R = 6b$ ), mientras que en el 48 se aumentó a  $9b$  incrementando, por consiguiente, la longitud no soportada; la tendencia al pandeo lateral del patin comprimido se disminuyó



$t_h =$  grueso de los patines en la junta

FIGURA 66

aumentando su grueso, de acuerdo con los resultados teóricos.

El ensaye 44A se llevó a cabo con el mismo espécimen que el 44, variando únicamente la longitud de las viquetas apoyadas en el patin superior que sirven de contraventeo.

La carga se aplicó en los especímenes a lo largo de la diagonal que une los dos extremos libres de viga y columna, por medio de un gato hidráulico

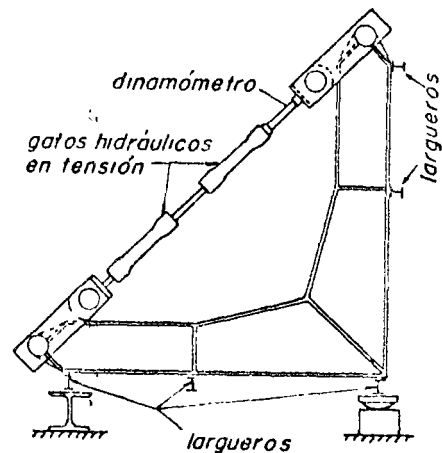


FIGURA 67

operado manualmente: las fuerzas que obran en esos puntos están, por consiguiente, aplicadas en los ejes neutros de los dos perfiles, y su línea de acción forma un ángulo de  $45^\circ$  con los ejes de las piezas, luego ocasionan en ellas una fuerza normal de compresión y una fuerza cortante las que, a su vez, producen fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante en la unión de las dos vigas (fig. 67).

El contraventeo lateral se proporcionó por medio de vigas laminadas ligeras, ligadas al patín exterior (en tensión) de la conexión en la esquina, en las intersecciones de las cartelas y las vigas y en los puntos de carga (véase la fig. 66), con objeto

de lograr un sistema semejante al utilizado en estructuras reales. Por consiguiente, el movimiento lateral del patín exterior de la junta es resistido por las fuerzas axiales que aparecen en los largueros al mismo tiempo que su rigidez a la flexión restringe la tendencia al giro existente en la conexión. Estas reacciones se transmitieron al patín interior, de compresión, de las cartelas, por medio de atiesadores soldados al alma en cada uno de los puntos soportados lateralmente, ya que interesaba determinar si la restricción proporcionada por el conjunto de largueros y atiesadores era suficiente para evitar el pandeo lateral del patín comprimido.

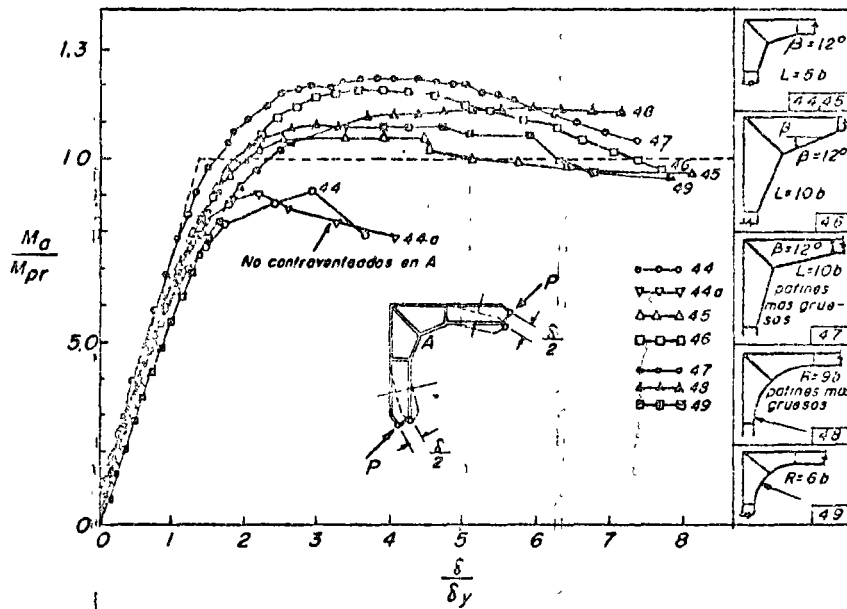


FIGURA 68

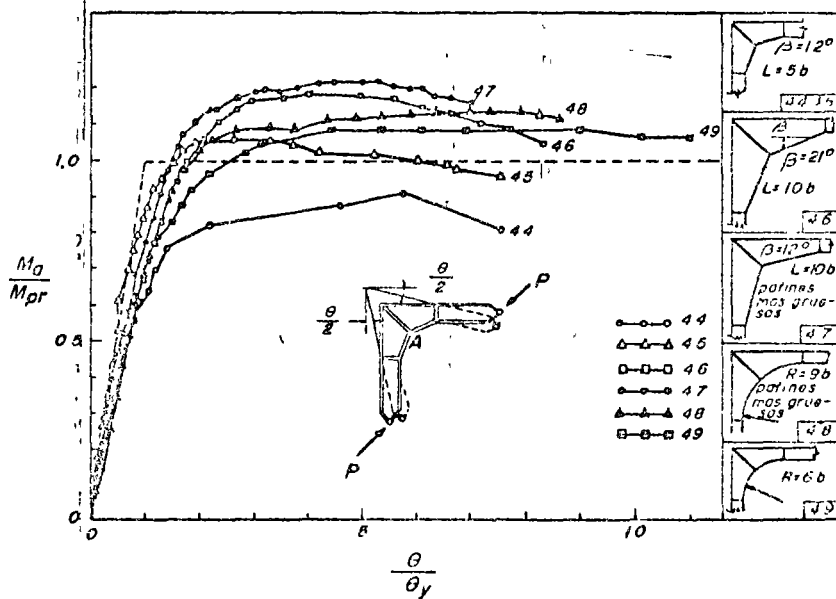


FIGURA 69

Los especímenes 44 y 44a se ensayaron provistos del contraventeo lateral descrito en el párrafo anterior, pero en todos los restantes se colocó, además, un elemento de contraventeo inclinado entre el larguero de la esquina y el borde interior del atesador central.

Los resultados de los ensayos se muestran en las figs 68 y 69 en las que aparecen, en forma no dimensional, las gráficas momento-deformación lineal y momento-rotación de todas las conexiones estudiadas.

En esas figuras,  $M_a$  es el momento aplicado en la intersección de la cartela y el perfil laminado,  $M_p$ , el momento plástico del perfil,  $\delta$  la deformación lineal medida entre los dos extremos del espécimen,  $\delta_p$  el valor teórico de  $\delta$  correspondiente a la iniciación del flujo plástico en el perfil laminado,  $\theta$  la rotación total de la junta, incluyendo 12 pulgadas de viga en cada lado, y  $\theta_v$  la rotación teórica, sobre la misma longitud total de conexión y vigas, correspondiente a la iniciación del flujo plástico en las vigas.

Algunas de las conexiones giraron más de lo que se indica en la fig. 69, pero la distorsión del alma por pandeo lateral desalineó los indicadores de las rotaciones, lo que ocasionó errores en las mediciones.

**CONCLUSIONES.** Todas las conexiones ensayadas, excepto la 44, pueden considerarse satisfactorias para un diseño plástico, ya que son capaces de soportar momentos ligeramente mayores que los teóricos (de 6 a 21%), y conservarlos durante amplias rotaciones.

La conexión 44 no llegó a desarrollar su capacidad teórica a la flexión ( $M_a/M_p = 0.91$ ), debido a la falta de soporte lateral en la esquina entrante, mientras que la 45, igual a ella en todo, pero con contraventeo en esa esquina, alcanzó un  $M_a/M_p$  máximo de 1.06 (16% mayor que el de la conexión 44) y tuvo una capacidad de rotación mucho mayor, como se comprueba observando la fig 68 (De acuerdo con la fig. 69 sus capacidades de rotación son prácticamente iguales, pero esto se debe a los defectos en las mediciones mencionados arriba).

Se puede, pues, concluir que las conexiones acarteladas diseñadas con los métodos descritos satisfacen los requisitos necesarios en un diseño plástico; sin embargo, debe tenerse en cuenta que tanto su capacidad de carga como su capacidad de rotación dependen en gran parte del contraventeo lateral de que esté provista la junta. (La comparación de los ensayos 44 y 45 muestra que la rigidez lateral del atesador, colocado diagonalmente en el alma no es suficiente para impedir el movimiento lateral del patin de compresión en la esquina interior de la junta, de manera que es necesario proporcionar un contraventeo adecuado en ese punto, todos los especímenes provistos de ese contraventeo fueron capaces de soportar un momento mayor que el plástico y de girar satisfactoriamente).

**ESFUERZOS PERMISIBLES.** En la mayor parte de las conexiones se emplean fundamentalmente soldaduras de dos tipos: de penetración y de cordón o filete.

Las soldaduras de penetración realizadas utilizando los electrodos y los procesos adecuados al acero que se esté empleando son capaces de desarrollar resistencias mayores que las del metal base, para cualquier tipo de sollicitación; por consiguiente, tanto en diseño elástico como plástico se supone que tienen, en su sección transversal mínima, la misma capacidad de carga del acero con que esté hecha la estructura, y si son de penetración completa desarrollarán la resistencia íntegra del miembro unido.<sup>14,20,30</sup>

En soldaduras de filete, los esfuerzos permisibles en la garganta son:<sup>14,30</sup>

Para acero A7 960 kg/cm<sup>2</sup>

Para acero A36 1,110 kg/cm<sup>2</sup>

En diseño plástico puede suponerse que las soldaduras de filete son capaces de desarrollar, como mínimo, el esfuerzo de flujo por cortante del metal de aportación, en la sección de la garganta. Se obtiene un valor adecuado para el diseño multiplicando el valor utilizado en diseño elástico por la relación  $\sigma_u/\sigma_p$ , donde  $\sigma_p$  es el esfuerzo permisible de trabajo a la tensión del material base empleado,<sup>20</sup> relación que, de acuerdo con las normas AISC, vale 1.65.

Por consiguiente, las soldaduras utilizadas en estructuras diseñadas plásticamente pueden hacerse trabajar a esfuerzos de 1,580 y 1,830 kg/cm<sup>2</sup> para aceros A7 y A36, respectivamente.

**JUNTAS EN ÁNGULO RECTO NO ACARTELADAS**<sup>5,10</sup>

Se presentará a continuación el procedimiento de diseño de las soldaduras utilizadas en las juntas mostradas en la fig. 70, a y b; las dos juntas son semejantes, aunque difieren en algunos detalles que se discutirán en lo que sigue. Todas las soldaduras se diseñarán utilizando métodos elásticos y plásticos, suponiendo que el acero es A7.

Para transmitir la fuerza existente en el patin exterior de la columna al alma de la junta es necesario utilizar una placa, la que puede colocarse de dos maneras: soldada a tope contra el patin o traslapada con éste, ligada por medio de soldaduras de filete; los dos procedimientos son válidos, pero el segundo no suele utilizarse mas que cuando los perfiles que forman la junta son pequeños, ya que en caso contrario la placa resulta demasiado larga.

1. Soldaduras de filete entre la placa extrema y el patin de la columna (fig. 70b). Puesto que la fuerza en el patin debe transmitirse a la placa, el área necesaria de soldadura es

$A =$  fuerza en el patin/esfuerzo permisible en la soldadura

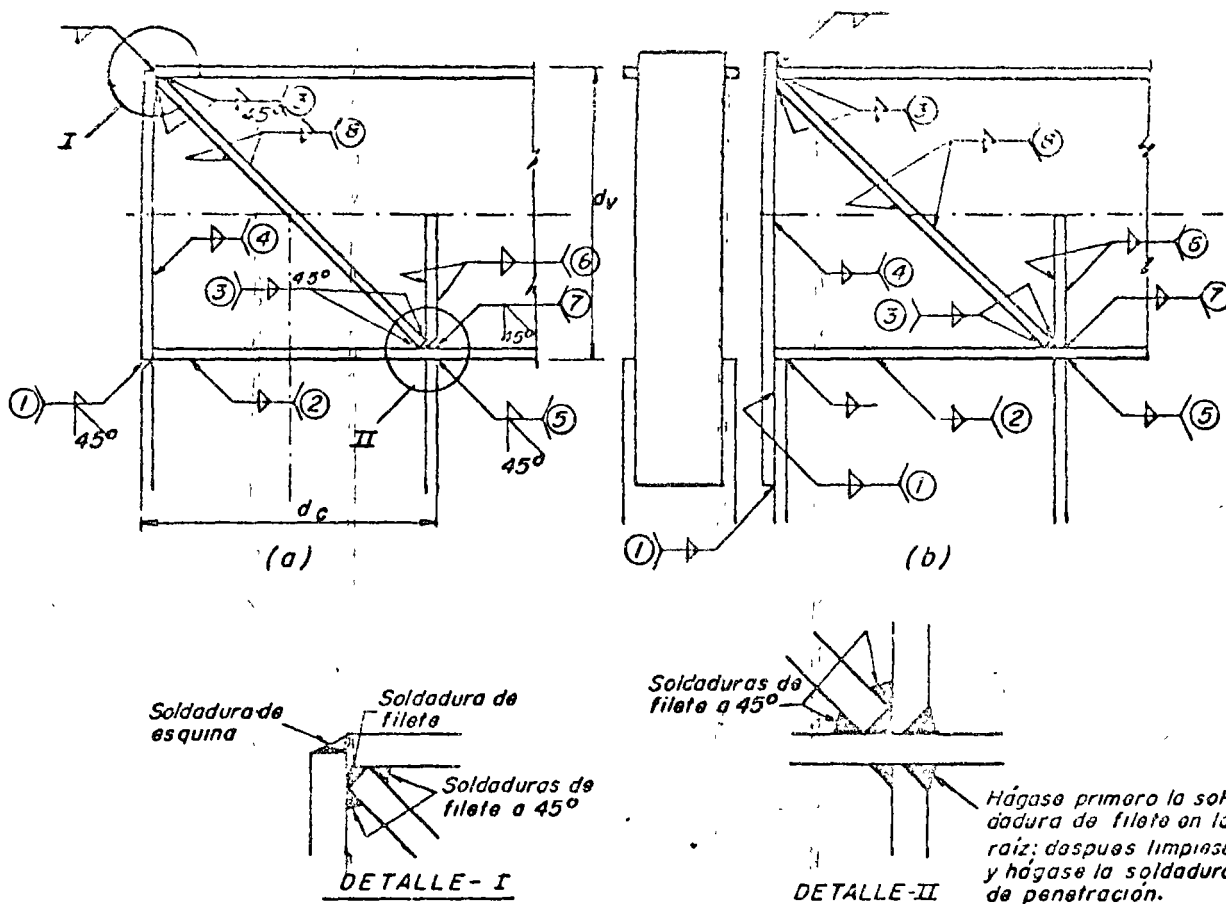


FIGURA 70

**Diseño elástico**  $A = \text{área del patin} \times \text{esfuerzo permisible}/960$

**Diseño plástico**  $A = \text{área del patin} \times \text{esfuerzo de fluencia}/1,580.$

En los dos casos se ha seguido el criterio de diseñar la soldadura para la capacidad total del patin.

Una vez determinada el área necesaria de soldadura, la longitud del cordón o el tamaño de éste se obtienen con la ecuación

$$0.707 DL = \frac{3}{4} A \quad (66)$$

en la que  $D$  es el tamaño de la soldadura y  $0.707D$  la dimensión mínima en la garganta; conocido  $L$ , la ecuación anterior permite calcular  $D$ , y viceversa.

2. **Soldaduras de filete entre el alma de la columna y el patin de la trab.** (figs. 70a y b). Estas soldaduras deben ser capaces de soportar los esfuerzos combinados debidos al momento flexionante y a las fuerzas normal y cortante existentes en la columna.

**Diseño elástico.** La fuerza normal ocasiona una fuerza por unidad de longitud de soldadura de intensidad  $f_N = Nc/2A$ , siendo  $c$  el grueso del alma de la columna,  $A$  el área total de la sección transversal de la columna y  $N$  la intensidad de la fuerza

normal (en efecto, multiplicando el esfuerzo uniforme  $N/A$  existente en la columna por  $c$  se obtiene la fuerza por unidad de longitud del alma, la que dividida entre dos da la que le corresponde a cada uno de los cordones de soldadura, por unidad de longitud).

La fuerza por unidad de longitud de soldadura ocasionada por la fuerza cortante existente en la columna vale  $f' = T/2(d_c - t)$ , siendo  $d_c$  el peralte total del perfil utilizado en la columna y  $t$  el grueso de sus patines.

Por último, la fuerza máxima debida al momento flexionante, también por unidad de longitud de soldadura, vale  $f_M = 3M_u/L^2$ , donde  $M_u$  es el momento flexionante que toma el alma, y  $L/3$  es el módulo de sección de dos cordones de soldadura de longitud  $L$  y ancho unitario (ver fig. 71).

La fuerza unitaria máxima que debe soportar la soldadura se obtiene sumando vectorialmente los tres valores que se acaban de obtener,

$$R = \sqrt{(f_N + f_M)^2 + f_t^2}$$

y el tamaño necesario del filete es

$$D = R/0.707 \times 960.$$

**Diseño plástico.** La fuerza de tensión o compresión, debida a carga axial y momento combinados,

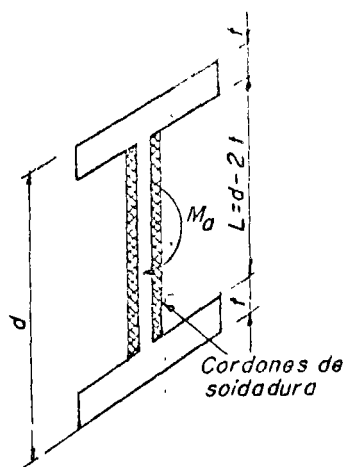


FIGURA 71

vale  $f_v = \sigma_{\parallel}/2$ , por unidad de longitud mientras que la ocasionada por la fuerza cortante tiene una intensidad  $f_T = T_i/2(d - 2t)$ , también por unidad de longitud, siendo  $T_i$  la fuerza cortante correspondiente a cargas de colapso.

Por consiguiente, la fuerza resultante vale  $R = \sqrt{f_N^2 + f_T^2}$ , y el tamaño de la soldadura está dado por  $D = R/0.707 \times 1.580$ .

### 3. Cordones de 45° en los extremos del atiesador diagonal.

**Diseño elástico.** En general estas soldaduras no se diseñan sino se colocan de un tamaño compatible con el grueso del atiesador, ya que es difícil determinar la fuerza existente en él; además, parte de esta fuerza se transmite por contacto directo. (En la ref. 16 se presenta un procedimiento para obtener las dimensiones de estas soldaduras, pero en la mayor parte de los casos su aplicación lleva a un tamaño menor que el mínimo requerido por especificación).

**Diseño plástico.** Puesto que el ángulo que forman los dos lados de estos cordones es de 45°, el tamaño de la garganta vale  $D \cos 22.5^\circ$ , siendo  $D$  el tamaño de la soldadura.

Por consiguiente, se obtendrá el valor de  $D$  de la ecuación siguiente:

$$1.580 D \cos 22.5^\circ (b - c) 2 = F_{at} = A_{at} \sigma_{\parallel}$$

$$\therefore D = A_{at} \sigma_{\parallel} / 2(b - c) \cos 22.5^\circ \times 1.580$$

$b - c$  es la longitud de cada uno de los dos cordones de soldadura, y  $F_{at}$  es la fuerza en el atiesador, igual al producto del área de su sección transversal, dada por las ecs 29, 30 ó 31, multiplicada por el esfuerzo de fluencia del material. Como se menciona arriba, la expresión anterior da resultados del lado de la seguridad, ya que parte de la fuerza se transmite al atiesador por contacto directo.

4. Soldaduras de filete ante la placa extrema y el alma de la viga. Estas soldaduras, trabajando al corte, deben transmitir la fuerza existente en el patin exterior de la columna al alma de la junta.

### Diseño elástico

$D = (\text{área patin}) \sigma_{\parallel} / 2(d_p - 2t) (0.707) 960$   
( $\sigma_{\parallel}$  es el esfuerzo permisible a tensión en el metal base).

### Diseño plástico

$$D = (\text{área patin}) \sigma_{\parallel} / 2(d_p - 2t) (0.707) 1.580$$

5. Soldadura entre el patin interior de la columna y el inferior de la trabe. Puede utilizarse una soldadura de penetración completa (fig. 70a) o dos cordones, colocados a uno y otro lado del patin (fig. 70b). La primera solución es la más común cuando la junta está formada por perfiles importantes, ya que de usarse soldaduras de filete resultarían exageradamente grandes, no requiere ningún cálculo. Si se emplea la segunda solución, los cordones deberán diseñarse para transmitir la fuerza total existente en el patin interior de la columna (en el caso en que las solicitaciones sobre la junta sean tales que ésta tienda a cerrarse se obtiene, evidentemente, un diseño conservador, pues una parte importante de la fuerza total se transmite por contacto directo; estas soldaduras adquieren su importancia máxima en los casos, poco frecuentes pero posibles, en que la junta trata de abrirse).

### Diseño elástico

$$D = (\text{área patin}) \sigma_{\parallel} / (2b - c) (0.707) 960$$

### Diseño plástico

$$D = (\text{área patin}) \sigma_{\parallel} / (2b - c) (0.707) 1.580$$

6. Soldadura entre los atiesadores verticales y el alma de la viga. El tamaño de estas soldaduras se obtiene suponiendo que el patin interior de la columna está trabajando a su capacidad máxima de carga, pero una parte de la fuerza que transmite a la viga es tomada directamente por el alma de ésta, de manera que solamente el resto pasa al atiesador y de aquí a la viga; para determinar la fuerza que toma el alma se supone que la zona que trabaja está limitada por dos líneas a 45°, trazadas partiendo de los bordes del patin de la columna (fig. 72).

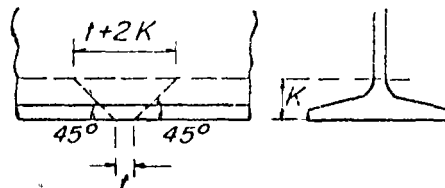


FIGURA 72

El tamaño de las soldaduras está dado por:

$$D = (\text{fuerza en el patin} - \text{fuerza que toma el alma}) / 4(d/2 - k) (0.707) \times \text{esfuerzo en la soldadura.}$$

Los cordones de soldadura son cuatro, dos de cada lado del alma.

### Diseño elástico

$$D = [\text{área patín. } \sigma_{p1} - c(t + 2k)\sigma_{p2}] / 4(d_v/2 - k) \times (0.707) \cdot 960$$

$\sigma_{p1}$  es el esfuerzo máximo permisible a flexión y  $\sigma_{p2}$  al aplastamiento.

### Diseño plástico

$$D = [\text{área patín. } \sigma_u - c(t + 2k)\sigma_u] / 4(d_v/2 - k) \times (0.707) \cdot 1,580$$

7. Soldadura entre los atiesadores verticales y el patín de la viga. Puede utilizarse soldadura de penetración completa o de filete; en este caso se diseñará para la fuerza calculada en 6.

8. Soldadura entre los atiesadores en diagonal y el alma. Esta soldadura es necesaria únicamente para evitar el pandeo lateral del atiesador, de manera que puede hacerse de tamaño mínimo.

EJEMPLO 7. Diseñense las soldaduras de la junta del ejemplo 4, utilizando métodos plásticos y empleando los detalles mostrados en la fig. 70b.

Como el acero es A36, las soldaduras se proporcionarán de manera que queden sometidas a un esfuerzo máximo de 1,830 kg/cm<sup>2</sup> en la garganta.

Las propiedades de la I-10" con que está hecha la junta son las siguientes:

Peralte  $a = 25.4$  cm  
 Grosor del alma  $c = 0.79$  cm  
 Ancho de los patines  $b = 11.8$  cm  
 Grosor medio de los patines  $t = 1.25$  cm

Área de cada patín = 15.8 cm<sup>2</sup>

$k = 2.55$  cm.

Placa extrema. Su área debe ser igual, como mínimo, a la del patín de la columna, o sea 15.8 cm<sup>2</sup>, y se hará de 10.2 cm (4") de ancho, dejando espacio a los lados para los cordones de soldadura (la viga de 10" tiene 11.8 cm de ancho de patín).

Grosor de la placa =  $\frac{15.8}{10.2} = 1.55$  cm. Se utilizará placa de 4" x 5/8" (10.2 x 1.59 cm)

### Soldadura 1.

Se empleará soldadura de 1/4" (0.63 cm), ya que tamaños mayores no caben en los espacios que quedan a los lados de la placa.

Área de soldadura =  $\frac{15.8 \times 2,530}{1,830} = 21.8$  cm<sup>2</sup>

Longitud necesaria =  $21.8 / 0.707 \times 0.63 = 48.9$  cm

Pueden colocarse 10 cm en el borde inferior de la placa y 20 cm de cada lado, o bien soldar únicamente en los bordes verticales, 24 cm de cada lado.

### Soldadura 2.

$t_s = c\sigma_u/2 = 0.79 \times 2,530/2 = 1,000$  kg/cm

$t_t = T_u/2(d_c - 2t) =$   
 $= c(d_c - 2t) \frac{\sigma_u}{\sqrt{3}} / 2(d_c - 2t) =$   
 $= \frac{c}{2\sqrt{3}} \sigma_u = (0.79/2) (2,530/\sqrt{3}) = 577$  kg/cm

$R = \sqrt{(1,000)^2 + (577)^2} = 1,152$  kg/cm

$D = 1,152 / 0.707 \times 1,830 = 0.89$  cm

Soldadura de 3/8" (0.95 cm).

### Soldadura 3.

Los atiesadores diagonales tienen un área total de 9.7 cm<sup>2</sup> (ver ejemplo 4).

$D = 9.7 \times 2,530 / 2(11.8 - 0.79) \times 0.924 \times 1,830 = 0.66$  cm

Soldadura de 1/4" (0.63 cm)

### Soldadura 4.

$D = 15.8 \times 2,530 / 2(25.4 - 2 \times 2.55) \times 0.707 \times 1,830 = 0.76$  cm

Soldadura de 5/16" (0.79 cm)

### Soldadura 5.

$D = 15.8 \times 2,530 / (2 \times 11.8 - 0.79) \times 0.707 \times 1,830 = 1.36$  cm

Soldadura de 9/16" (1.43 cm)

### Soldadura 6.

$D =$   
 $= \frac{15.8 \times 2,530 - 0.79(1.25 + 2 \times 2.55)2,530}{4\left(\frac{25.4}{2} - 2.55\right) \cdot 0.707 \times 1,830} =$   
 $= \frac{39,950 - 12,700}{54,400} = 0.50$  cm

Soldadura de 1/4" (0.63 cm)

### Soldadura 7.

$D = (39,950 - 12,700) / 4(b - c) \times$   
 $\times 0.707 \times 1,830 = 27,250 / 4(11.8 - 0.79) \times$   
 $\times 0.707 \times 1,830 = 0.48$  cm

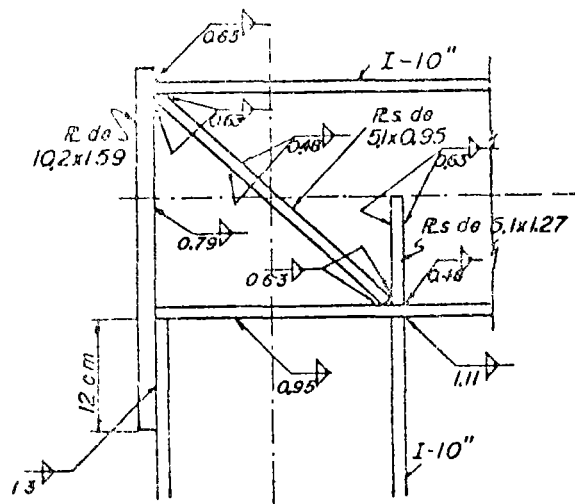
Soldadura de 3/16" (0.48 cm)

### Soldadura 8.

Se hará de 3/16".

En la fig. 73 se muestra la junta y las soldaduras que deben utilizarse en ella.

JUNTAS EN TENSION. Todas las conexiones que se han estudiado hasta ahora han trabajado a



Los tamaños de las soldaduras y de las placas están dados en cm.

FIGURA 73

compresión, es decir, han estado sujetas a cargas que tienden a cerrar el ángulo que forman viga y columna; este es el tipo de trabajo que se presenta con más frecuencia en la práctica. Sin embargo en algunas ocasiones (sobre todo cuando las cargas horizontales son importantes) las sollicitaciones pueden ser tales que hagan que viga y columna trabajen a flexo-tensión y que la junta tienda a abrirse. Es por consiguiente, necesario comprobar si los métodos de diseño estudiados hasta ahora proporcionan juntas capaces de trabajar correctamente bajo ese tipo de cargas.

Con ese objeto se han realizado varias series de experiencias,<sup>16</sup> semejantes a las descritas con anterioridad, pero en las que las juntas han estado sometidas a fuerzas aplicadas en sus extremos que tienden a abrirlas; los resultados obtenidos han sido satisfactorios, es decir, han permitido comprobar que las juntas diseñadas plásticamente con los criterios estudiados tienen resistencia, capacidad de rotación y rigidez adecuadas no solamente cuando están sujetas a cargas que tienden a cerrarlas sino también en el caso contrario, es decir, cuando los elementos mecánicos que obran sobre ellas tratan de abrirlas.

Desde luego, en una junta sometida a esas condiciones de carga las soldaduras entre el patín interior de la columna y el inferior de la trabe quedan en condiciones críticas de trabajo por lo que debe ponerse especial cuidado en su ejecución.

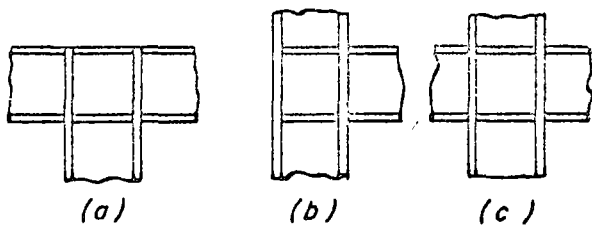


FIGURA 74

CONEXIONES VIGA - COLUMNA EN MARCOS RÍGIDOS DE EDIFICIOS. En la fig. 74 se muestran tres tipos comunes de conexiones viga-columna empleados en marcos de edificios; la a) corresponde al nivel superior del marco, la b) a una columna lateral y la c) es una junta interior cualquiera.

En la mayor parte de las estructuras reales las conexiones reciben no sólo las vigas mostradas en la figura, sino una o dos más, que conectan en el alma de la columna, por los dos lados en los marcos intermedios y por uno en los extremos y que complican, evidentemente, el problema de diseño.

La columna de cualquiera de las conexiones de la fig. 74 debe ser capaz de soportar los elementos mecánicos que le transmiten las traves, momento flexionante y fuerza cortante, principalmente, sin deformarse en forma excesiva; en general son más críticas las juntas en columnas laterales (fig. 74b) ya que los momentos debidos a carga vertical en las dos vigas que recibe una columna central suelen ser de signos contrarios. Además, sobre la conexión pueden obrar también momentos debidos a fuerzas horizontales, viento o sismo, los que deben tenerse en cuenta en el diseño, así como la carga axial existente en la columna.

Si se supone que la columna pasa corrida a través de la junta y en ella se apoyan las vigas (es la condición más común en marcos de edificios), el diseño de una conexión viga-columna consistirá fundamentalmente en:

a) Proyecto de las uniones entre las traves y la columna, las que deben ser capaces de transmitir a ésta el momento y la fuerza cortante existentes en la sección extrema de las traves, estas uniones pueden realizarse de muchas maneras distintas, empleando remaches, soldadura, pernos de alta resistencia, etc.; cuando la junta sea soldada la unión puede realizarse en forma directa, como se muestra esquemáticamente en la fig. 74, o por medio de placas soldadas a los patines, ángulos en el alma, etc.

b) Revisión de la columna para determinar si tiene resistencia adecuada para soportar los elementos mecánicos que le transmitan las vigas que se apoyan en ella y diseño, en su caso, de los refuerzos necesarios.

En ocasiones se emplean conexiones flexibles o semi-rígidas en marcos de edificio, pero no serán tratadas en este trabajo.

DISÑO ELÁSTICO El problema se resuelve siguiendo un camino análogo al utilizado para diseñar la junta trabe-columna de un marco rígido. Se supone que los patines toman la fuerza normal y el momento flexionante mientras que las almas toman la fuerza cortante; se hace el diagrama de cuerpo libre del tablero de alma de la junta, sustituyendo patines y atesadores por las acciones que ejercen sobre él (fig. 75), y se investiga si el esfuerzo cortante existente en sus bordes es mayor o menor que el permisible; si es mayor, se refuerza el alma por medio de atesadores o de placas adosadas a ella.



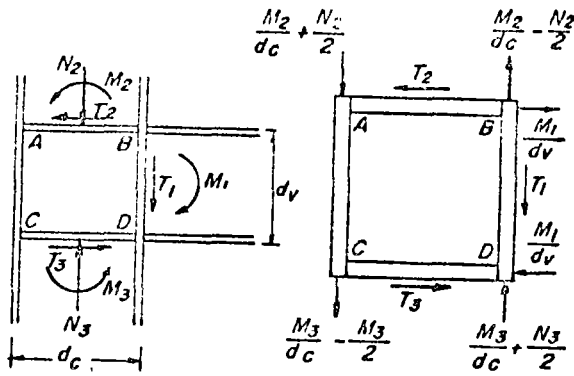


FIGURA 75

Suponiendo que las fuerzas cortantes están uniformemente distribuidas en los cuatro bordes del tablero  $ABDC$ , los esfuerzos en cada uno de ellos valen:

$$\tau_{AB} = \frac{1}{cd_c} \left( \frac{M_1}{d_v} - T_2 \right)$$

$$\tau_{CD} = \frac{1}{cd_c} \left( \frac{M_1}{d_v} - T_3 \right)$$

$$\tau_{AC} = \frac{1}{cd_v} \left( \frac{M_2}{d_c} + \frac{N_2}{2} + \frac{M_3}{d_c} - \frac{N_3}{2} \right)$$

$$\tau_{BD} = \frac{1}{cd_v} \left( \frac{M_2}{d_c} - \frac{N_2}{2} + \frac{M_3}{d_c} - \frac{N_3}{2} + T_1 \right)$$

En las ecuaciones anteriores se han obtenido las fuerzas normales en los patines debidas a los momentos flexionantes dividiendo éstos entre el peralte total del perfil con lo que se obtienen resultados que, aunque no son exactos, si son suficientemente aproximados para fines prácticos.

Comparando los esfuerzos cortantes calculados con los permisibles se ve si es o no necesario reforzar el alma de la junta.

Si la columna recibe vigas por los dos lados (junta interior) el problema se resuelve de manera análoga, haciendo intervenir en el análisis de la junta todos los momentos que obran sobre ella. Evidentemente, si las dos vigas son del mismo peralte y los momentos que ejercen sobre la columna son iguales y de signo contrario (caso que se presenta frecuentemente en estructuras sometidas a cargas verticales únicamente) el problema del cortante en el alma desaparece, bastando con colo-

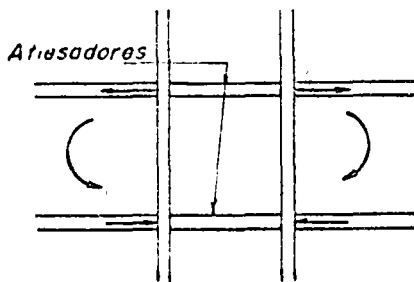


FIGURA 76

car atiesadores en la columna, a la altura de los patines de las vigas, para transmitir las fuerzas directamente a través de ellos (fig. 76).

No existen métodos elásticos que permitan determinar si esos atiesadores son o no necesarios y, en caso de serlo, cuáles deben ser las dimensiones de sus secciones transversales, por lo que se acostumbra hacerlos con las mismas dimensiones que los patines de las vigas.

El problema se complica cuando las dos vigas que llegan a los patines de la columna son de peraltes diferentes y cuando la columna recibe, además, vigas por alma, pero el procedimiento para el diseño de la junta sigue siendo el que se ha expuesto aunque variarán, naturalmente, los detalles constructivos.

**DISEÑO PLÁSTICO.** Se estudiarán en lo que sigue únicamente juntas rígidas, capaces de soportar y transmitir los elementos mecánicos íntegros de los miembros que concurren en ellas, determinados con la suposición de que en las conexiones no se presenta ninguna discontinuidad angular.

Las conexiones rígidas pueden lograrse ligando las barras que las forman por medio de remaches, soldadura o pernos de alta resistencia. Las conexiones remachadas, las más antiguas de los tres tipos, no se estudiarán, debido a que la mayor parte de los ensayos de juntas remachadas se efectuaron hace bastantes años y las cargas se llevaron poco más allá de los valores de trabajo, lo que no permitió conocer su comportamiento en el campo plástico.<sup>34</sup>

La soldadura se utiliza ampliamente para obtener juntas rígidas, las que constituyen el tipo que se estudiará en este trabajo. Por último los pernos de alta resistencia se han estado empleando cada vez más en los últimos 15 ó 20 años, al grado de que constituyen en la actualidad, en los Estados Unidos y en algunos países europeos, el medio de unión más utilizado en juntas de campo.

Una conexión viga-columna satisfactoria debe ser capaz de:

- Desarrollar el momento máximo resistente de las vigas (el momento plástico) mientras que sobre la columna obran las cargas axiales de trabajo.
- Permitir, al mismo tiempo que mantiene su capacidad de momento, una rotación suficiente para que se forme la articulación plástica en la zona central de la viga.

**JUNTAS SOLDADAS.** La exposición que sigue está basada fundamentalmente en la ref. 31, en la que se presenta una serie de investigaciones experimentales y analíticas sobre el comportamiento de conexiones viga-columna de distintos tipos, cuyo objeto fundamental es determinar en qué casos se necesitan atiesadores en la columna y en cuáles no, así como deducir procedimientos para su diseño cuando sean necesarios.

**PROGRAMA EXPERIMENTAL.** Se ensayaron dos tipos fundamentales de conexiones, unas formadas

dos vigas soldadas a los patines de la columna y en otras compuestas de cuatro vigas y la columna que recibe a aquellas en los patines y en los dos lados del alma.

En todos los casos las vigas se soldaron directamente a la columna, por las tres razones siguientes:

1. Las conexiones directas tienen ciertas ventajas económicas y funcionales, por lo que es probable que su empleo se extienda cada vez más.
2. Puesto que la parte más importante de la investigación consistió en la determinación de los esfuerzos y deformaciones en las zonas de la columna en que conectan las trabes, la eliminación de placas de asiento y de placas en los patines suprimió unas cuantas variables innecesarias.
3. La conexión directa, sin ángulos o placas de asiento, da lugar a la condición de carga más desfavorable en la columna en la zona de intersección con las trabes.

Sin embargo, las fórmulas desarrolladas en esta investigación pueden aplicarse también al caso en que los patines de las vigas se conecten a la columna a través de placas soldadas a tope con ésta, sustituyendo simplemente las dimensiones de los patines de las vigas por las de las placas.

**ENSAYOS DE CONEXIONES CON DOS VIGAS.** El programa consistió en el diseño, preparación y ensayo de especímenes del tipo mostrado en la fig. 77, con objeto de determinar el comportamiento y la distribución de esfuerzos en la conexión y en los miembros que la componen. Se prestó principal atención al estudio del problema práctico más importante en el diseño de juntas de este tipo, consistente en la determinación de si es o no necesario colocar atesadores en la columna, y en su diseño cuando son necesarios. Los tamaños de las vigas y las columnas y las condiciones de carga se esco-

gieron tratando de duplicar las condiciones existentes en edificios reales. Así, se utilizaron tres tamaños básicos de columnas: la primera fue un perfil 8WF 31 cargado para simular las condiciones existentes en los niveles superiores de los marcos de edificios, en los que las fuerzas axiales son pequeñas comparadas con las que transmiten las vigas; en el segundo grupo se utilizaron columnas 8WF67, 12WF40 y 12WF65, con cargas del mismo orden de magnitud en vigas y columnas y por último se ensayó un perfil 12WF99 bajo condiciones representativas de las que prevalecen en el tercio inferior de los edificios donde las cargas axiales son grandes comparadas con las de las vigas. Las vigas empleadas en los especímenes fueron todas del mismo tamaño, para eliminar a este como una variable en el problema; se escogió un perfil (16WF36) cuyas dimensiones aseguran el desarrollo del momento plástico resistente  $M_p$  sin que se presente pandeo local en alma o patines.

Se ensayaron conexiones sin y con atesadores, éstos últimos de cuatro tipos diferentes (fig. 77).

En la fig. 78 se presenta un resumen de los resultados obtenidos, en la forma de curvas carga-deformación para todas las conexiones ensayadas.

Las curvas A corresponden a juntas no atesadas, y los ensayos varían desde la columna 8WF31 muy ligera, con alma muy delgada, hasta el perfil más pesado de los utilizados, 12WF99. La conexión A1, hecha con el perfil 8WF31, falló por pandeo del alma de la columna para una carga ligeramente mayor que la de trabajo, 1.12  $V_t$ ; en cambio, los especímenes A2 y A5, hechos con columnas robustas, se comportaron extraordinariamente bien: el pandeo local de los patines de las vigas se presentó para cargas de intensidad 2.08  $V_t$  y 2.26  $V_t$ , respectivamente ( $V_t$  es la carga de trabajo de las vigas). la pérdida de resistencia de las vigas fue muy gradual y soportaron rotaciones grandes antes de que se terminaran las pruebas, y aunque al final de éstas, antes de quitar las cargas en las vigas, se les aplicó a las columnas

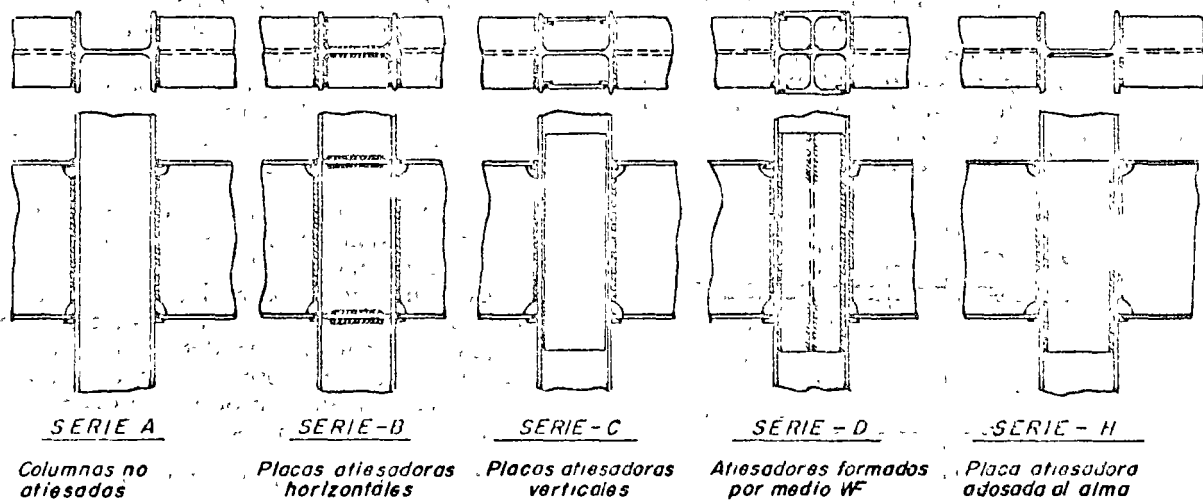
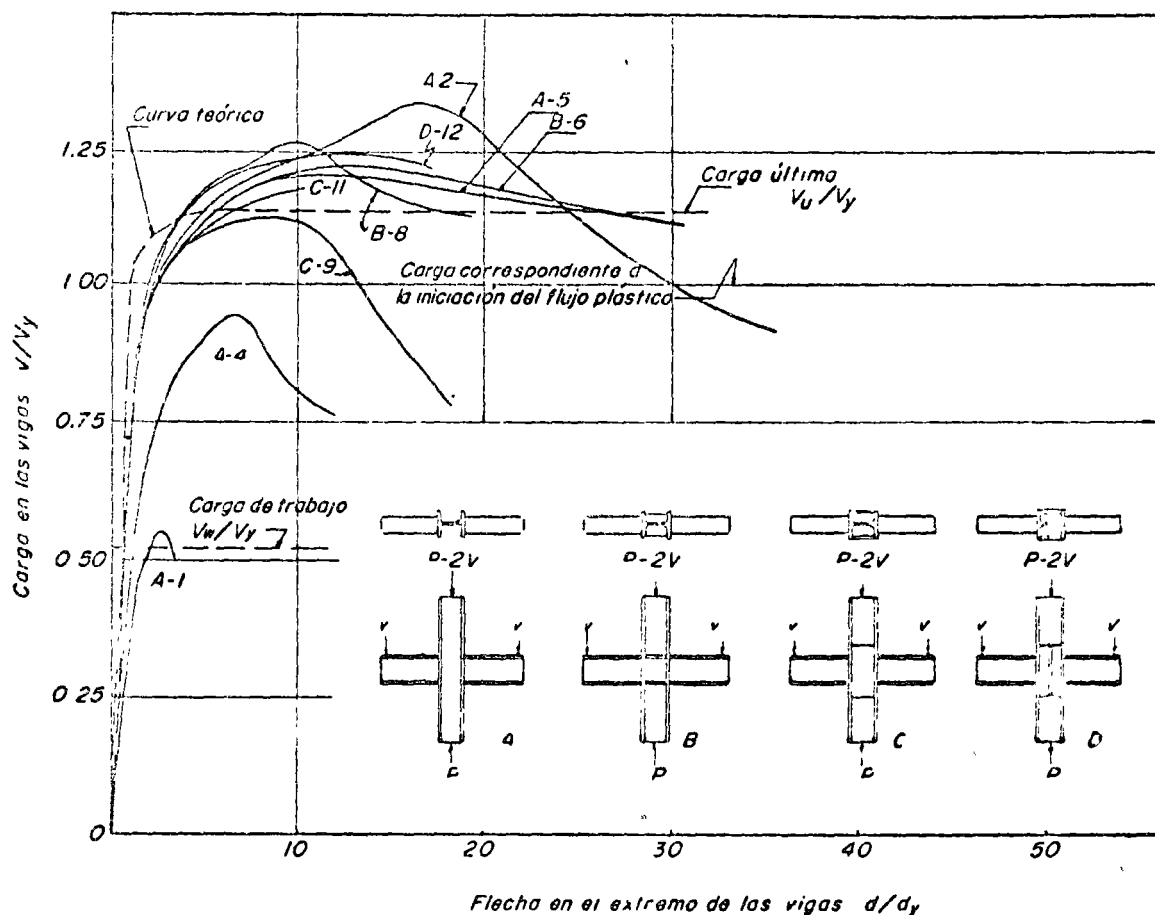


FIGURA 77



Flecha en el extremo de las vigas  $d/d_y$

FIGURA 78

una sobrecarga igual al doble de la carga de trabajo, no se observó ningún indicio de que la falla fuese inminente. La junta A4, cuya alma tiene un grueso intermedio entre las de la A1 y la A2 y A5, falló por pandeo en el alma de la columna cuando la carga alcanzó un valor de  $1.82V_t$ , después de deformarse considerablemente, tanto por tensión como por compresión, en las zonas en que conectan los patines de las vigas.

En los especímenes de la serie B se colocaron atiesadores horizontales soldados al alma y a los patines de la columna, a la altura de los patines de las trabes, como se muestra en la fig. 77. Los atiesadores de B6 tienen el mismo grueso que los patines de las vigas, mientras que los de B8 son más delgados. Este tipo de conexión es sumamente resistente, y ambas pruebas exhibieron excelentes capacidades de carga y de rotación. Los dos especímenes sufrieron pandeo local del patín de compresión de las vigas al iniciarse el endurecimiento por deformación, y el aumento en capacidad de carga más allá de ese nivel fue reducido. La disminución de resistencia a partir de los valores máximos fue gradual y no se observó ningún efecto desfavorable en los atiesadores fuera de la presencia de algunas líneas de flujo; las deformaciones principales se presentaron en las vigas.

Los especímenes de la serie C se atiesaron por medio de dos placas verticales colocadas cerca

de los extremos de los patines de la columna, como se ve en la fig. 77, cuyo espesor se tomó arbitrariamente igual al del alma de la columna. Ambas conexiones, C9 y C11, soportaron las cargas requeridas. En los dos casos hubo evidencia de un pandeo local ligero de los patines comprimidos de las vigas para cargas de  $2.16V_t$ , y en ambos se pandeó el alma de la columna en la zona comprimida entre los patines de compresión de las trabes, iniciándose este fenómeno en C11 cuando la carga valía  $1.97V_t$ . La conexión C11 falló por ruptura de la soldadura a tope en el patín de tensión, y la C9 por pandeo de una de las placas atiesadoras.

Solamente se ensayó una conexión tipo D, la D12. El atiesador en T, aunque ideado para ser empleado principalmente en juntas en que la columna recibe vigas por los cuatro lados, sirvió para eliminar el pandeo de las dos placas atiesadoras laterales y del alma; la conexión, sumamente rígida, falló principalmente por pandeo local de los patines comprimidos de las vigas, fenómeno que adquirió importancia para cargas arriba de  $2.22V_t$ . Aunque se presentaron deformaciones importantes en las vigas la conexión aparentemente permaneció elástica y se observaron deformaciones muy pequeñas en los patines de los atiesadores.

El grupo H consistió también en un solo espécimen, H1. Como la junta A1 fue más resistente en la región de tensión que en la de compresión,

Tabla - VI

Especimen Nº	COLUMA			VIGA			ATIESADORES	
	Perfil	Alma	Patines	Perfil	Alma	Patin	Tipo	Dimensiones
A1	8WF31	7.32	11.00	16W36	7.59	10.87	Ninguno	—
A2	8WF67	14.61	23.70	"	"	"	"	—
A4	12WF65	9.91	15.39	"	"	"	"	—
A5	12WF99	14.73	23.39	"	"	"	"	—
B6	8WF31	7.32	11.00	"	"	"	*	9.92 x 111 cm
B8	12WF40	7.47	13.11	"	"	"	*	9.92 x 0.63 cm
C9	8WF31	7.32	11.00	"	"	"	**	0.79 x 55.88 cm
C11	12WF40	7.47	13.11	"	"	"	**	0.79 x 55.88 cm
D12	12WF40	7.47	13.11	"	"	"	Medio WF Placa adosa da al alma	6WF325 x 55.88 cm.
H1	8WF31	7.32	11.00	"	"	"		0.79 x 50.8 cm

Los gruesos de almas y patines, dados en mm. están tomados del manual del AISC.

\* Atiesadores horizontales colocados al nivel de los patines de las vigas.

\*\* Atiesadores verticales colocados en los bordes de los patines de las columnas.

por medio de esta prueba se investigó el efecto de reforzar el alma de la columna añadiéndole una placa de 5/16" adosada a ella y soldada a la unión de alma y patines (véase fig. 77), de manera que esta conexión se hizo con el mismo perfil empleado en la columna de A1, reforzado como se indica. La falla se presentó en la soldadura de tensión de una de las vigas, en su parte central, cuando la carga alcanzó un valor de 205V<sub>t</sub>, justo abajo de la correspondiente al momento plástico de la viga. La rotación fue adecuada pero la capacidad de carga disminuyó rápidamente después de la falla de la soldadura.

En la Tabla VI se presentan las características de los perfiles y de los atiesadores utilizados en las juntas ensayadas.

Las columnas de las series A y H, no atiesadas en los patines, resultaron menos rígidas contra la rotación que las vigas 16WF36 que conectan en ellas; en cambio, en las conexiones B los atiesadores proporcionaron en las columnas el equivalente de los patines de las vigas, con lo que su rigidez se incrementó hasta igualar la de éstas. Lo mismo sucede en las conexiones C, en las que el alma de la columna soportó la mayor parte de la carga aplicada, aproximadamente de 2.5 a 3 veces más que las placas atiesadoras, bajo cargas de trabajo.

Los especímenes A mostraron grandes concentraciones de esfuerzos en la zona central de los patines de tensión de las vigas, mientras que en los patines comprimidos la distribución fue más uniforme; en los B, los esfuerzos de compresión

se repartieron bastante uniformemente mientras que en las áreas de tensión hubo pequeños incrementos en el centro, en la serie C los esfuerzos estuvieron uniformemente repartidos en ambos patines para cargas de trabajo, pero para 1.5V<sub>t</sub> se presentaron concentraciones importantes en la zona central de los patines a tensión; las distribuciones de esfuerzos en D12 fueron bastante uniformes, mientras que H1 tuvo un comportamiento semejante, desde este punto de vista, al de las juntas A.

CONEXIONES CON CUATRO VIGAS. Se ensayaron tres especímenes cuyas características se muestran en la fig. 79. El tipo AA es semejante al A4 del

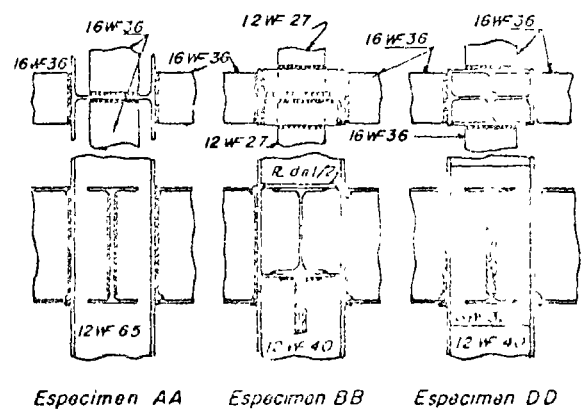


FIGURA 79

del programa pero tiene dos vigas adicionales, también 16WF36, que conectan con el alma de la columna, a la que están soldadas directamente. Análogamente, la junta *DD* es semejante a la *D12*. La conexión *BB*, de carácter exploratorio, no es semejante a ninguna de las descritas con anterioridad; las vigas que conectan en los patines de la columna son 16WF36, como antes, y están soldadas directamente, mientras que los patines de tensión del otro par de vigas, de perfil 12WF27, están soldados a placas atiesadoras horizontales y los comprimidos descansan en asientos tipo *T*, que actúan también como atiesadores de la columna aunque, debido a la diferencia en los peraltes de las vigas que llegan al alma y a los patines, están 4" fuera de su posición ideal.

La conexión *AA* falló por pandeo local de los patines comprimidos de las vigas, el que se presentó para una carga igual a 2.28  $V_c$  en las traveses que conectan en los patines de la columna y para una carga un poco mayor en las que llegan al alma. La disminución en la capacidad de carga de las vigas fue lenta. Cuando la carga en las vigas había bajado al 85% de la última se le aplicó a la columna una carga total doble de la de trabajo y aunque sufrió un flujo plástico considerable no hubo en ella ninguna otra evidencia de falla. Comparando estos resultados con los obtenidos con la junta *A4* se ve que la *AA* es mucho más resistente, lo que muestra en forma evidente que la acción atiesadora proporcionada por las dos vigas que conectan en el alma de la columna refuerza la conexión más de lo que la debilitan los esfuerzos triaxiales que se desarrollan en ella.

En el espécimen *BB* la conexión formada por las dos vigas soldadas directamente a los patines de la columna fue más rígida que la constituida por las vigas que llegan al alma, pero ambas llenaron los requisitos establecidos para ser consideradas satisfactorias.

También en el espécimen *DD* fue más rígida la conexión formada por las vigas soldadas a los patines de la columna que la constituida por las que se apoyan en las medias viguetas atiesadoras, debido a que el grueso del alma de éstas es menor que el de la columna. Las dos vigas conectadas a los atiesadores tuvieron buena capacidad de carga y rotación, mientras que las otras dos mostraron una capacidad de rotación menor, debido a una falla en una de las soldaduras a tope que se inició cuando la carga alcanzó el valor 2.18  $V_c$ . Los atiesadores evitaron efectivamente todo tipo de pandeo en la junta, lo mismo que en la conexión semejante *D12*.

**PRUEBAS DE CONEXIONES SIMULADAS.** Después de examinar los resultados de los ensayos de juntas con vigas conectadas en los patines de las columnas se advirtió que era posible producir un estado de esfuerzo semejante al real en la columna utilizando procedimientos mucho más sencillos y rápidos. Esto dio lugar a pruebas de los tres tipos que se describen a continuación.

**ENSAYES PARA DETERMINAR EL CRITERIO PARA PANDEO DEL ALMA.** El objeto de estas pruebas fue reproducir la parte de la columna en la que conecta el patín comprimido de las vigas; consistieron en un tramo de columna comprimido en los patines entre dos barras de tamaño igual a la sección del patín de la viga simulada. Se efectuaron once ensayos con columnas de distintos tamaños, pero utilizando siempre placas iguales, de 7" x 1/2", correspondientes al patín de las vigas 16WF36 utilizadas en los especímenes completos. (ver fig. 80).

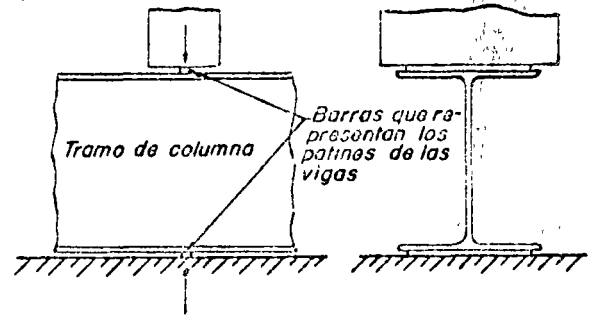


FIGURA 80

En todas las pruebas el plego plástico se inició en el alma de la columna, en la zona inmediata a las placas, y progresó posteriormente dentro del alma en forma de líneas radiales iniciadas en esos puntos y líneas semicirculares perpendiculares a ellas. El flujo plástico se propagó una cierta distancia dentro del alma hasta que ésta falló por pandeo. Cuando las cargas alcanzaron valores del 80% de las de colapso se advirtió una cierta flexión de los patines de la columna.

**ENSAYES PARA DETERMINAR EL CRITERIO PARA LA FALLA POR TENSIÓN.** Estas pruebas, proyectadas para reproducir la parte superior de la conexión en la que los patines de la viga están en tensión, se realizaron soldando dos placas iguales a los patines de la columna y sometiénolas a tensiones creciente (fig. 81); se variaron las dimensiones de

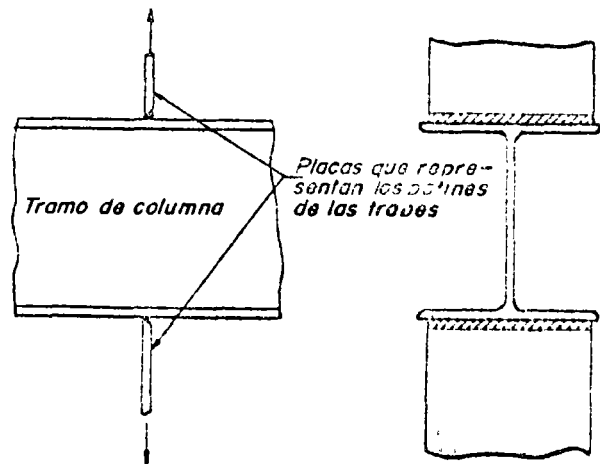


FIGURA 81

placas para estudiar sus influencias respectivas. En total se probaron once especímenes.

Las primeras líneas de flujo se observaron en el alma de la columna y el patín de la columna, inmediatamente bajo la placa, para una carga de alrededor de 40% de la última. El flujo prosiguió a) en el alma de la columna, b) en la zona interior del patín, paralelo a la placa, y c) en el patín de la columna, empezando en el centro de la soldadura y extendiéndose en líneas paralelas al alma.

Siete de los once especímenes fallaron por aparición de una grieta en el centro de la soldadura a tope; la fractura se presentó después de que los patines se flexionaron considerablemente, y se debió a la deformación excesiva en una región cercana al alma de la columna, como un resultado de la flexión de los patines hacia fuera. De los cuatro restantes dos se agrietaron en la unión de alma y patín de la columna y en los otros dos se separó la placa, empezando la separación en los extremos y propagándose hacia el centro, arrancando parte del material de la columna.

**ENSAYES DE ATIESADORES EXCÉNTRICOS.** Los atiesadores de columnas que reciben vigas por cuatro lados suelen estar constituidos por los patines o las placas de asiento de las trabes que conectan con el alma. En ocasiones, cuando las vigas que llegan a los patines y las que llegan al alma son de perfiles diferentes, unos de sus patines, generalmente los de compresión, quedan a alturas diferentes (vease espécimen *BB*, fig. 79) y el grado de atiesamiento que proporcionan es dudoso.

Para determinar la efectividad de ese tipo de atiesamiento se llevó a cabo una serie de ensayos con columnas de perfil *12WF40* y *14WF61*, comprimidas entre dos barras y provistas de atiesadores con 0", 2", 4" y 6" de excentricidad (fig. 82).

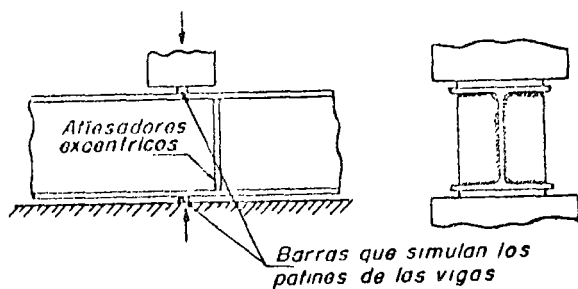


FIGURA 82

El estudio de los resultados de las dos series de pruebas, con los dos perfiles utilizados en las columnas, demostró que los atiesadores con 2" de excentricidad proporcionan alrededor del 65% de la acción atiesadora de los concéntricos, mientras que la eficiencia de los que tienen 4" de excentricidad es del orden del 20% de la de los concéntricos y los atiesadores con excentricidades mayores son prácticamente inefectivos.

Los ensayos efectuados cargando la columna a través de dos placas para reproducir las condiciones de las zonas donde conectan los patines en compresión y en tensión ayudaron considerablemente a determinar la resistencia real de la columna. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que esas pruebas ignoran el efecto de la carga axial existente en la columna, la interacción entre las zonas de tensión y compresión y el efecto sobre ambas de los esfuerzos transmitidos a través del alma de la trabe; afortunadamente, la influencia de esos factores parece ser muy pequeña.

**EFFECTO DE LA CARGA AXIAL EN LA COLUMNA.** La carga axial existente en la columna tuvo muy poca influencia sobre la resistencia y capacidad de rotación de la conexión, tanto en los casos en que solamente son dos las vigas que llegan a la columna como cuando son cuatro. Las columnas no mostraron ningún indicio particular de falla al estar sometidas a una carga de 1.65 veces la de trabajo ni tampoco cuando al final de cada prueba se aumentó ésta al doble de la de trabajo, conservando al mismo tiempo las cargas finales en las vigas (Las cargas de trabajo correspondieron a un esfuerzo axial medio de alrededor de 1,000 kg/cm<sup>2</sup>.)

## ANÁLISIS Y DISEÑO DE LAS CONEXIONES

Como se ha visto con anterioridad, se considera que una conexión es satisfactoria cuando es capaz de desarrollar el momento resistente máximo teórico de las vigas mientras que sobre la columna obra la carga axial de trabajo y tiene, además, una capacidad de rotación adecuada.

Por consiguiente, el análisis debe permitir determinar los factores que son necesarios en la junta para asegurar el desarrollo del momento plástico en la conexión y para capacitar a ésta para que admita los giros necesarios bajo momento prácticamente constante, lo que obliga a investigar los puntos siguientes:

1. La resistencia de la región de la columna adyacente al patín de compresión de la viga cuando no se emplean atiesadores en la columna.
2. La resistencia de la región de la columna adyacente al patín de tensión de la viga cuando no se emplean atiesadores en la columna.
3. El aumento en la resistencia de la conexión debido a la presencia de atiesadores.
4. La posibilidad de falla de la columna ocasionada por una combinación de esfuerzos axiales y locales.
5. El efecto del par de vigas ligadas al alma de la columna sobre el comportamiento de la conexión constituida por la columna y las dos trabes que llegan a sus patines.

5. La rotación requerida de las conexiones y su capacidad de giro.

Los puntos 1, 2 y 3 se discutirán en lo que sigue. Los puntos 4 y 5 ya se han estudiado con anterioridad, determinando su importancia de la observación de los ensayos, de donde se dedujo que los efectos de la carga axial existente en la columna pueden despreciarse y que la acción atiesadora del segundo par de vigas refuerza la conexión más de lo que la debilita el estado triaxial de esfuerzos que se forma en el alma de la columna, por lo que se obtienen resultados conservadores si se analiza la conexión como si no existiesen las vigas por alma.

El punto 6 ha sido investigado analítica y experimentalmente, y aunque la magnitud de la rotación requerida varía con el peralte y el claro de la viga y las cargas que obran sobre ella, se ha logrado calcular un valor tipo de esa rotación, más grande que el necesario en la mayor parte de las conexiones; todas las juntas ensayadas fueron capaces de admitir rotaciones mayores que esa, bajo momento prácticamente constante. Más aún, si la conexión se hace más resistente, de manera que resulte mucho más rígida que la viga cuando sobre ésta obre el momento  $M_m$ , la rotación necesaria se presenta en el extremo de la viga.

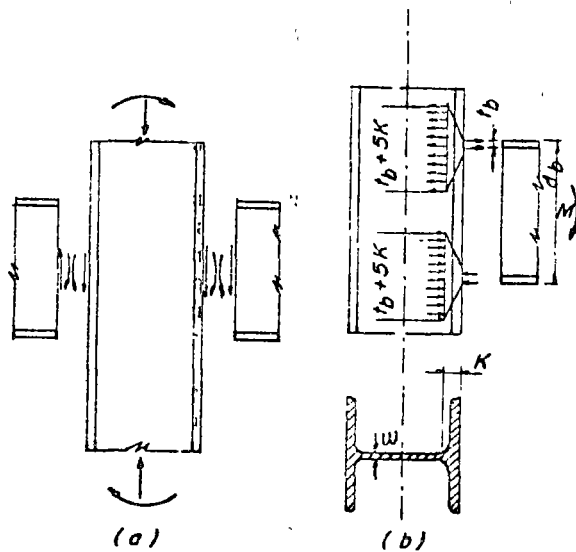


FIGURA 83

En la fig. 83a se muestran esquemáticamente los momentos y fuerzas existentes en una conexión interior viga-columna; en la fig. 83b se sustituye el efecto sobre la columna del momento que le transmite la viga por un par compuesto por las dos fuerzas existentes en los patines, despreciando las fuerzas que actúan en el alma por ser de importancia secundaria.

Las fuerzas en los patines de la viga pueden ocasionar efectos importantes en dos regiones de la columna. La primera es el alma, en la que el

flujo plástico puede presentarse acompañado por pandeo en la zona donde conecta el patín comprimido o por fractura ocasionada por la fuerza de tensión en el otro patín; la segunda región es el patín de la columna en la zona de tensión, ya que su flexión puede contribuir a la fractura de las soldaduras que lo conectan con el patín de la viga.

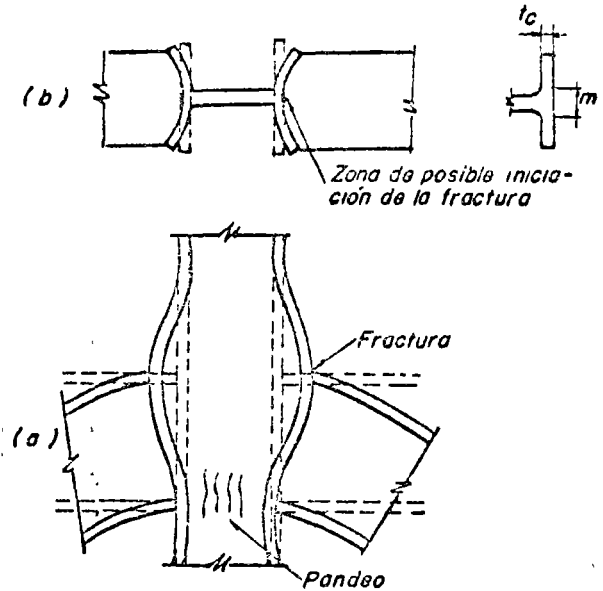


FIGURA 84

Las fuerzas existentes en los patines de las vigas tratan de deformar la columna como se muestra, en forma exagerada, en la fig. 84. En la zona de tensión la poca rigidez de los extremos de los patines de la columna permite que éstos se flexionen hacia afuera, pero en la zona central la deformación está restringida por el alma de la columna, y lo más probable es que ahí se inicie una falla de la soldadura.

Una columna no atiesada debe ser capaz de mantener el equilibrio estático tanto en las regiones de flujo plástico del alma como en las de flexión de los patines. La zona afectada por los esfuerzos ocasionados en la columna por las fuerzas concentradas aplicadas en ella a través de los patines de la viga se va extendiendo al ir penetrando en la columna, de manera que la intensidad de los esfuerzos disminuye hacia el interior del alma. Si el ensanchamiento de la zona cargada es insuficiente para reducir la intensidad de los esfuerzos al valor  $\sigma_y$  en la base de la curva de transición entre patines y alma (es decir, a la distancia  $k$  del borde exterior del patín de la columna) el alma no será capaz de proporcionar la resistencia necesaria para equilibrar la fuerza en el patín; este efecto es más serio en la región frente al patín de compresión, aunque podría en algunos casos llegar a producir la falla en la zona de tensión (evidentemente, será necesario estudiarlo con todo cuidado cuando la columna no sea un perfil laminado, sino

esté formada por tres placas soldadas, ya que en ese caso es muy probable que la fuerza de tensión en el patín ocasione una falla en la soldadura de la columna; el problema se ve agravado porque en estos perfiles no hay curva de liga entre patín y alma, con lo que la distancia  $k$  se reduce a la suma del grueso del patín de la columna más el tamaño de la soldadura entre él y el alma.)

Es difícil determinar analíticamente la forma en que los esfuerzos ocasionados por los patines se distribuyen dentro de la columna, por lo que generalmente se supone una distribución lineal basada en investigaciones experimentales; se obtienen buenos resultados suponiendo una pendiente de 2.5:1 desde el punto de contacto hasta la línea  $k$  (ver fig. 83b). Evidentemente, esta suposición está en desacuerdo con la que se hace en diseño elástico, en el que se utiliza una pendiente de 1:1 (distribución de esfuerzos según rectas a 45° a partir del punto de aplicación de la carga); la discrepancia se debe, probablemente, a que ambas suposiciones están basadas en resultados experimentales, pero mientras que en diseño plástico se llevan las pruebas hasta el colapso de los especímenes en diseño elástico se suspenden cuando las cargas alcanzan valores poco mayores que los de trabajo. Como se muestra en la fig. 83b, la suposición anterior implica que la fuerza existente en cada uno de los patines de la viga es resistida por una porción de alma de la columna de longitud igual a  $t_v + 5k$ , a la distancia  $k$  de la cara exterior del patín, siendo  $t_v$  el grueso del patín de la viga, en la que se supone que los esfuerzos están uniformemente distribuidos.

ANÁLISIS DE LA ZONA COMPRIMIDA DE LA CONEXIÓN. Se efectúa este análisis sustituyendo la viga por una placa de dimensiones iguales a las de uno de sus patines, la que aplica una fuerza de compresión sobre la columna (fig. 85).

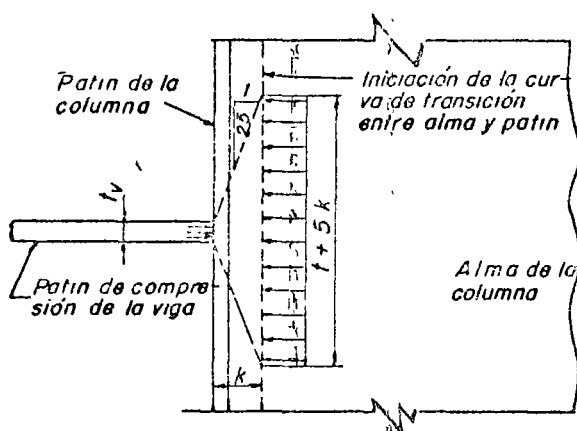


FIGURA 85

De acuerdo con la discusión anterior, se obtiene una estimación conservadora de la resistencia de la región comprimida de la columna suponiendo que ésta opone a la compresión que le transmite

el patín una fuerza de intensidad máxima igual a  $\sigma_y c (t_v + 5k_c)$ , siendo  $c$  el grueso del alma de la columna.

Por consiguiente, en una conexión sin atesadores,

$$Q_c = \sigma_y c (t_v + 5k_c) \quad (66)$$

Ahora bien, la fuerza que ejerce el patín de la viga sobre la columna cuando en la viga obra el momento plástico  $M_p$  es  $A_p \sigma_y$ , siendo  $A_p$  el área del patín, luego el espesor mínimo necesario del alma de la columna está dada por

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k_c) \quad (67)$$

de donde

$$c = \frac{A_p}{t_v + 5k_c} \quad (68)$$

Si  $c > A_p / (t_v + 5k_c)$  no se necesitan atesadores en la zona comprimida de la conexión. Cuando el grueso del alma es menor que el dado por (68) es necesario colocar atesadores; en ese caso, la ec. 67 se modifica para incluir en ella la resistencia de dichos atesadores.

Si se emplean placas horizontales colocadas exactamente a la altura de los patines comprimidos de las vigas los atesadores son 100% eficientes y la ec. 67 se convierte en

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k_c) + \sigma_y A_{at}$$

de donde puede despejarse el área necesaria de atesadores:

$$A_{at} = A_p - c(t_v + 5k_c) \quad (69)$$

Como una limitación adicional, para evitar fenómenos de pandeo local,  $(b/t)_{at} \leq 17$ .

Los ensayos C9, C11 y D12 indican que las placas atesadoras verticales están sometidas a esfuerzos del orden de la mitad de los que obran en el alma de la columna; llevando esa suposición a la ec. 67 ésta se transforma, cuando se colocan atesadores verticales de grueso  $t_{at}$ , en

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k) + \frac{\sigma_y}{2} 2 t_{at} (t_v + 5k)$$

de manera que

$$t_{at} = \frac{A_p}{t_v + 5k} - c \quad (70)$$

La capacidad de carga de los atesadores verticales se ha determinado utilizando la misma expresión que para el alma de la columna, aunque en ellos no hay curva de transición; el procedimiento se justifica al utilizar el esfuerzo  $\sigma_y/2$ , que concuerda con los valores medidos experimentalmente en juntas reales.

Además, debe cumplirse la relación  $d/t_{at} \leq 30$ , donde  $d$  es la longitud del atesador medida perpendicularmente al eje de la columna, que puede tomarse igual al peralte de ésta.



En los casos en que el patin de la columna es mucho más ancho que el de la viga la efectividad de los atesadores verticales disminuye y no es recomendable confiar en ellos cuando el grueso del alma de la columna es mucho menor que el dado por (68).

Los atesadores horizontales deben colocarse en pares situados simétricamente con respecto al alma de la columna, soldados tanto al alma como a los patines de la misma, con soldadura de penetración o de filete. Los verticales deben colocarse también en pares simétricos y su peralte debe ser suficiente para permitir que la fuerza existente en el patin de la viga se distribuya en ellos de la misma manera en que se supone que se reparte en el alma.

Puesto que las pruebas realizadas con atesadores excéntricos fueron muy limitadas, no se pueden obtener de ellas observaciones definitivas referentes a su acción; sin embargo, si puede concluirse que se obtendrá un diseño conservador si se desprecia el efecto de atesadores con más de 2" de excentricidad y se supone que los que tengan excentricidades menores de 2" tienen una efectividad del 50% de la de los atesadores concéntricos. En este caso, la (67) se convierte en

$$A_p \sigma_{II} = \sigma_{II} (t_v + 5k) + 0.6 A_{at} \sigma_{II}$$

de donde se obtiene

$$A_{at} = 1.7 [A_p + c(t_v + 5k)] \quad (71)$$

debiéndose cumplir de nuevo la condición

$$(b/t)_{at} \leq 17.$$

**ANÁLISIS DE LA ZONA DE LA CONEXIÓN SOMETIDA A TENSION.** En este caso es también necesario comprobar si se cumple la ec. 68 ya que de no ser así una columna no atesada fallaría en la zona de tensión por fractura del alma en su unión con el patin. Sin embargo, no es esa, en general, la condición más crítica en esta región de la columna, (excepto en el caso en que ésta sea un perfil formado por tres placas soldadas), ya que la falla suele presentarse de una manera diferente, que se describe a continuación: el patin de la columna actúa como dos placas, cada una de ellas empotrada en tres de sus bordes y libre a lo largo del otro, sometidas a la acción de la fuerza existente en el patin de tensión de la viga. La carga permanece más o menos uniformemente repartida hasta que las placas alcanzan su capacidad de carga última; en esa etapa, los bordes exteriores de los patines se curvan hacia afuera, causando una deformación excesiva en la porción central de la soldadura a tope, en el patin de la columna adyacente a la soldadura y en la unión del alma y el patin; por último, la falla se presenta por agrietamiento de alguna de esas regiones cuando se agota su capacidad de flujo plásticamente.

La fig. 86 ilustra la acción del patin de la columna en la región de la conexión cercana al patin

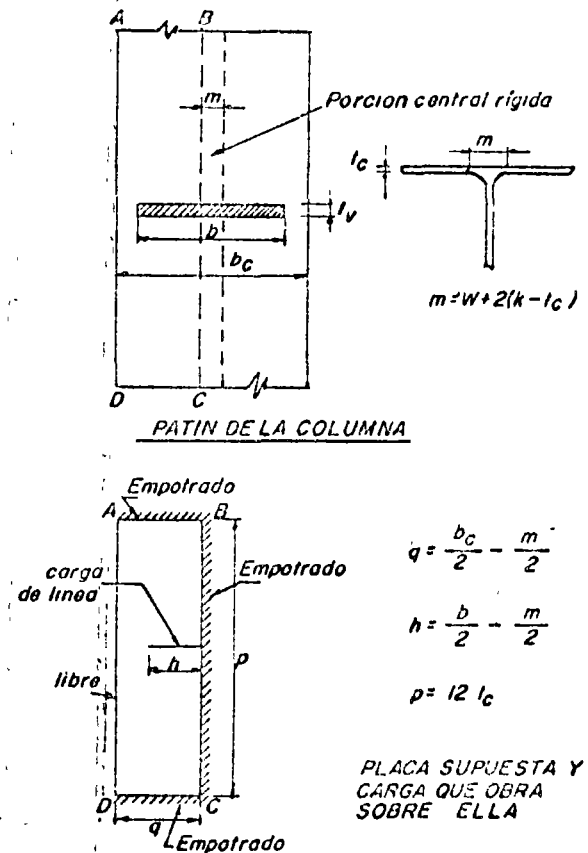


FIGURA 86

de tensión de la trabe. Se considera que el comportamiento del patin es el que tendrían dos placas del tipo ABCD, cuya longitud efectiva se supone igual a  $12t_c$ , empotradas en los extremos de esta longitud y en el alma de la columna, sometidas a la acción de una carga de línea, idealización de la tensión ejercida sobre ellas por el patin de la trabe. El análisis de esta placa por medio de la teoría de las líneas de flujo permite determinar su capacidad última de carga, que es

$$P_u = c_1 \sigma_y t_c^2 \quad (72)$$

donde

$$c_1 = (4/\beta + \beta/\eta)/(2 - \eta/\lambda)$$

y

$$\eta = \beta/4 [\sqrt{\beta^2 + 8\lambda} - \beta]$$

$$\beta = p/q, \quad \lambda = h/q \quad (\text{ver fig. 86}).$$

Para los perfiles WF utilizados en columnas y las vigas empleadas en juntas ordinarias se ha encontrado que  $c_1$  varía entre 3.5 y 5.0, de manera que un valor conservador de la capacidad de carga de cada una de las placas que forman el patin de la columna es  $3.5 \sigma_y t_c^2$ .

Puede considerarse que la parte central rígida de ancho  $m$  (ver fig. 86) adyacente al alma de la columna si es capaz de desarrollar esfuerzos de intensidad  $\sigma_y$ , de manera que puede soportar una

fuerza igual al producto de su área por el esfuerzo de fluencia. Por consiguiente

$$Q_t = \sigma_y t_p m + 2(3.5 \sigma_y t_c^2) \quad (73)$$

La fuerza en el patín de tensión de la viga correspondiente al desarrollo del momento  $M_p$  en su sección extrema es  $A_p \sigma_y$ ; disminuyendo la capacidad de carga del patín en 20%, para obtener en esta zona una fórmula que sea aproximadamente igual de conservadora que la deducida para la región de compresión, se llega a

$$A_p \sigma_y = b_r t_r \sigma_y = 0.8[\sigma_y t_p m + 7\sigma_y t_c^2] \quad (74)$$

De esta expresión puede despejarse  $t_c^2$ , siendo  $t_r$  el grueso requerido del patín de la columna.

$$t_c^2 = \frac{b_r t_r}{7} \left[ 1.25 - \frac{m}{b_r} \right] \quad (75)$$

El valor de  $m/b_r$  para todas las conexiones en que la fórmula 75 es aproximadamente aplicable oscila entre 0.15 y 0.20, si las vigas y columnas son perfiles de los tabulados en el Manual del AISC. Tomando conservadoramente  $m/b_r = 0.15$ , (75) se reduce a

$$t_c = 0.4 \sqrt{b_r t_r} = 0.4 \sqrt{A_p} \quad (76)$$

En los casos en que  $t_c > 0.4 \sqrt{A_p}$  no se necesitan atiesadores en la zona de tensión de la conexión; si  $t_c < 0.4 \sqrt{A_p}$  es necesario colocar atiesadores, con lo que se obtienen configuraciones de equilibrio exactamente iguales a las existentes en la región de compresión, de manera que son aplicables las ecs. 69 y 70 para el diseño de los atiesadores.

En vista de las simplificaciones que han llevado a su obtención, la ec. 76 no es aplicable cuando la columna es un perfil  $I$  estándar o cuando está formado por tres placas soldadas; en cualquiera de esos casos es necesario calcular el valor de la constante  $c$ , de la ec. 72 y sustituirlo en (73), en lugar del 3.5 que aparece en ella.

COMPARACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES Y LOS ANALÍTICOS. Los resultados obtenidos en la zona de compresión pueden resumirse como sigue:

1. Para el espécimen A1, la ec. 68 indica que el alma de la columna debe tener 1.68 cm de grueso; el espesor real fue 0.72 cm, y el alma de la columna falló para una carga ligeramente mayor que la de trabajo.
2. En el ensayo A2, la fórmula requiere un espesor de alma de 1.09 cm y, como era de esperarse, el grueso real de 1.49 cm demostró ser satisfactorio.

3. La conexión A4 requiere un alma de 1.15 cm, con un grueso real de 1.05 cm, sea, como más del 80% del momento teórico.
4. La fórmula muestra que A5 es completamente adecuada sin atiesadores y así lo fue en realidad.
5. H1 es ligeramente inadecuada de acuerdo con la ec. 68, pero fue, sin embargo, capaz de soportar el momento máximo alcanzado en la prueba, que fue el 95% del plástico.
6. De acuerdo con (68) AA es inadecuada pero se comportó satisfactoriamente, probablemente a causa de la acción atiesadora del segundo par de vigas, la que no se consideró en el análisis.
7. Los atiesadores que se colocaron en B6, B3 y BB fueron más gruesos que los requeridos por las fórmulas; durante los ensayos no hubo evidencia de que se sobrecargasen.
8. Las conexiones C, D y DD son teóricamente correctas, y así se comportaron; sin embargo, cuando las vigas fallaron los atiesadores verticales mostraron cierto pandeo.

El espécimen E1, consistente en una columna 12WF40 no atiesada, falló para una carga de 46.6 t, mientras que el EO, en el que la misma columna se reforzó con dos atiesadores horizontales de 1/4", soportó 78.3 t; la diferencia de 31.7 t, se compara favorablemente con las 28.7 t, calculadas con la fórmula teórica.

Una comparación similar entre los especímenes E9 y E20, hechos con columnas 14WF61, muestra una diferencia determinada experimentalmente de 65.7 t, mientras que la teórica es de 52.4 t.

El único espécimen completo no atiesado en el que la causa primaria de falla se presentó en la zona de tensión fue el H1, que falló para una carga aproximadamente igual al 95% de la que ocasionaría la plastificación total de las vigas; el espesor real de los patines de la columna fue 1.10 cm mientras que la fórmula indica que se necesitan 1.75 cm. En este caso la ec. 76 es conservadora.

En todas las pruebas de conexiones simuladas, excepto una (diez en total), la ec. 73 da resultados conservadores.

LIMITACIONES DE LAS FÓRMULAS. La investigación descrita consideró una serie de conexiones con dos y cuatro vigas, las que en todos los casos se fueron cargando en forma gradual y uniforme hasta llegar a la falla, por lo que el comportamiento reportado puede variar algo en los casos siguientes:

a) *Cargas repetidas.* Un número suficiente de ciclos de carga y descarga puede ocasionar una falla prematura, pero no es probable que esto suceda en edificios, en los que la carga muerta constituye un porcentaje importante de la total.

b) *Momentos desiguales en las vigas opuestas.* En este caso aparecen fuerzas cortantes en el alma de la columna, lo que puede introducir algunas modificaciones en el diseño, sobre todo en el caso

tante en que la columna reciba viga en uno solo de sus patines. Esta condición se estudiará más adelante.

c) *Viento o sismo.* Cuando sobre la estructura obran fuerzas horizontales estas tenderán a ocasionar momentos del mismo signo en las dos vigas, y por consiguiente aparecerán fuerzas cortantes importantes en el alma de la columna; de hecho, este caso es semejante al b).

**REFUERZO DEL ALMA POR CORTANTE.**<sup>20</sup> Cuando los momentos en las dos vigas de una conexión interior obran considerablemente en intensidad ocasionan esfuerzos cortantes elevados en el alma de la columna, los que tienden a deformar a ésta de manera análoga a como sucede en una junta de esquina. En estos casos debe calcularse el cortante en el alma y, si es necesario, ésta se reforzará con atiesadores en diagonal o placas adosadas a ella.

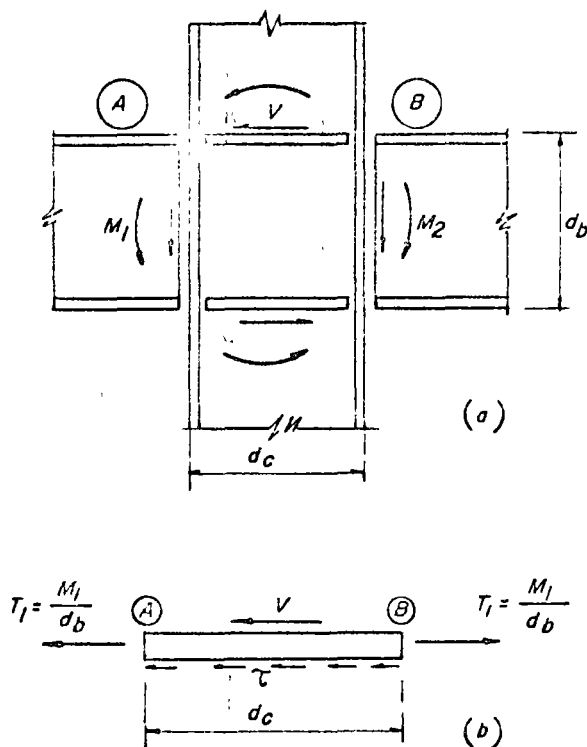


FIGURA 87

En la fig 87a se muestran los momentos y fuerzas cortantes que obran sobre una conexión interior típica y en la 87b aparece un diagrama de cuerpo libre del atiesador superior. Las fuerzas que obran sobre él son \$V\$, fuerza cortante horizontal existente en la columna arriba de la conexión, y dos fuerzas de tensión, \$T\_1\$ y \$T\_2\$, acciones de los patines de las dos vigas, las que son aproximadamente iguales al cociente de cada uno de los momentos entre el peralte de la viga respectiva. La resultante de esas fuerzas debe ser resistida por el esfuerzo cortante \$\tau\$ en el área del alma de la columna, \$cd\_c\$.

Por consiguiente,

$$\tau_v cd_c = M_2/d_v - M_1/d_v - V$$

Sustituyendo \$\tau\_v\$ por \$\sigma\_v/\sqrt{3}\$, y despejando \$c\$, obtenemos el grueso del alma necesario para resistir los esfuerzos cortantes:

$$c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_v d_c} \left( \frac{M_2}{d_v} - \frac{M_1}{d_v} - V \right) \quad (77)$$

Si el espesor del alma de la columna es menor que el dado por (77), el exceso de fuerza cortante se tomará con placas adosadas al alma o con atiesadores en diagonal (estos suelen ser muy incómodos cuando la columna recibe también vigas por alma).

Cuando la columna recibe viga de un sólo lado, uno de los dos momentos de la ec. 77 se anula, y se sumarán los dos cuando tengan el mismo signo, lo que sucede a veces cuando sobre la estructura obran fuerzas horizontales importantes.

**RESUMEN.**<sup>21,20,21</sup> No se requieren atiesadores adyacentes al patín de compresión de las vigas si

$$c \geq \frac{A_p}{t_v + 5 k_c} \quad (68)$$

No se requieren atiesadores adyacentes al patín de tensión de las vigas si

$$t_c \geq 0.4 \sqrt{A_p} \quad (76)$$

(Esta fórmula se ha obtenido a través de simplificaciones válidas para columnas de sección WF por lo que si se utilizan otros perfiles será necesario recurrir a las expresiones no simplificadas; además, es necesario comprobar también si el alma de la columna está en condiciones adecuadas en la zona del patín de tensión, para lo cual se emplea, lo mismo que en la zona de compresión, la ec. 68.)

Si no se satisfacen las ecuaciones anteriores es necesario atiesar la columna; los tamaños mínimos de los atiesadores están dados por

*Atiesadores horizontales concéntricos*

$$A_{at} = A_p - c(t_v + 5 k_c) \quad ;$$

además,

$$\left( \frac{b}{t} \right)_{at} \leq 17.$$

*Atiesadores horizontales con excentricidad de 2" o menos*

$$A_{at} = 1.7[A_p - c(t_v + 5 k_c)]$$

de nuevo,

$$\left( \frac{b}{t} \right)_{at} \leq 17.$$

Atiesadores verticales paralelos al alma de la columna y situados en los extremos de sus patines

$$t_{at} = \frac{A_p}{t_v + 5k_c} c$$

además,

$$\frac{d_c}{t_{at}} \leq 30$$

(En las expresiones anteriores,  $c$  y  $t_v$  son el grueso del alma y del patín de la columna, respectivamente,  $A_p$  el área y  $t_v$  el grueso del patín de la viga,  $k_c$  la distancia del borde exterior del patín de la columna a la sección en que termina la curva de liga con el alma,  $A_{at}$  y  $t_{at}$  el área y el grueso del atiesador y  $d_c$  el peralte de la columna)

Los extremos de los atiesadores deben soldarse a la cara interior del patín opuesta a la carga concentrada de tensión, y pueden ajustarse en el extremo correspondiente a la carga de compresión; deben soldarse también al alma de la columna. Cuando la columna recibe viga de un solo lado no es necesario que los atiesadores excedan la mitad de su peralte, pero deben ligarse al alma con soldadura suficiente para desarrollar la fuerza  $A_{at} \sigma_u$

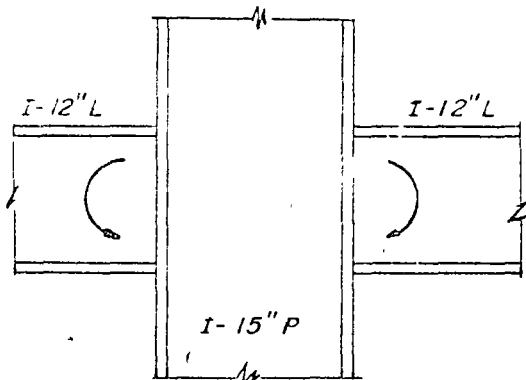


FIGURA 88

EJEMPLO 8. Revisese la conexión viga-columna de la fig 88 y diseñense los atiesadores, en caso de que sean necesarios.

Características de los perfiles

I-12 Lw.  $b = 127 \text{ cm}$

$t_{medio} = 1.50 \text{ cm}$ ,  $A_p = 18.87 \text{ cm}^2$

I-15 Pes.  $b = 15.2 \text{ cm}$

$t_{medio} = 2.07 \text{ cm}$ ,  $c = 1.5 \text{ cm}$

$k = 4.15 \text{ cm}$ .

Zona del patín de compresión

$$\frac{A_p}{t_v + 5k_c} = \frac{18.87}{1.38 + 5 \times 4.15} = \frac{18.87}{22.13} = 0.85 \text{ cm} < 1.5$$

No se necesitan atiesadores

Zona del patín de tensión

Utilizando la fórmula deducida para perfiles WF:

$$0.4 \sqrt{A_p} = 0.4 \sqrt{18.87} = 1.74 \text{ cm} < 2.07$$

No se requieren atiesadores.

Evidentemente, la ecuación  $t_v \geq 0.4 \sqrt{A_p}$  es conservadora para perfiles I estándar (estos tienen patines mucho más gruesos y cortos que los WF) luego no es necesaria ninguna comprobación adicional.

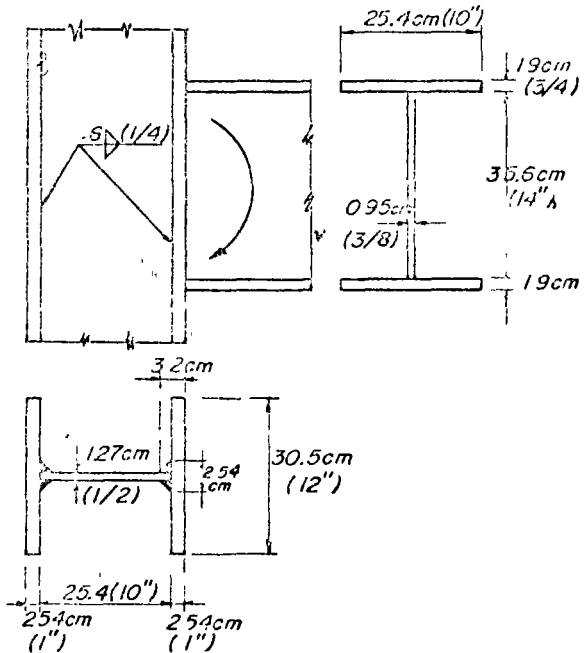


FIGURA 89

EJEMPLO 9. Revisar la conexión de la fig 89 y diseñar los atiesadores que sean necesarios; la columna está formada por tres placas soldadas. El acero es A36.

Zona de compresión

$$\frac{A_p}{t_v + 5k_c} = \frac{25.4 \times 1.9}{1.9 + 5 \times 3.2} = \frac{48.2}{17.9} = 2.7 \text{ cm} > 1.27$$

Se necesitan atiesadores.

Zona de tensión

Utilizando la fórmula para perfiles WF laminados:

$$0.4 \sqrt{A_p} = 0.4 \sqrt{48.2} = 2.78 \text{ cm} > 2.54$$

Como la ecuación anterior no es, en realidad, válida para la sección en estudio, aplicaremos las fórmulas no simplificadas.

Capacidad última de carga de cada mitad del patín  $P_u = c_1 \sigma_y t^2 c$

$$p = 12 t_c = 12 \times 2.54 = 30.5 \text{ cm} ;$$

$$h = 1/2(25.4 - 2.54) \approx 11.4 \text{ cm} ;$$

$$q = 1/2(30.5 - 2.54) \approx 14.0 \text{ cm} ;$$

$$\beta = \frac{30.5}{14.0} = 2.18 ;$$

$$\lambda = \frac{11.4}{14.0} = 0.815 ;$$

$$\eta = 2.18/4(\sqrt{2.18^2 + 8 \times 0.815} - 2.18) = \frac{2.18}{4.56} = 0.478$$

$$c_1 = \left( \frac{4}{2.18} + \frac{2.18}{0.478} \right) / \left( 2 - \frac{0.478}{0.815} \right) = \frac{1.83 + 4.56}{2 - 0.586} = \frac{6.39}{1.414} = 4.51$$

Capacidad de carga total del patín de la columna  $Q_t = \sigma_y t_c m + 2 \times 4.51 \sigma_y t^2 c$ .

$$A_p \sigma_y = b_1 t_c \sigma_y = [\sigma_y t_c m + 9.02 \sigma_y t^2 c] 0.8$$

$$\therefore t_c = \frac{A_p}{9.02} \left[ 1.25 - \frac{m}{b_1} \right] = \frac{A_p}{9.02} \left( 1.25 - \frac{2.54}{25.4} \right) =$$

$$= \frac{1.15}{9.02} A_p = 0.127 A_p$$

$$\therefore t_c = 0.356 \sqrt{A_p} = 0.356 \sqrt{48.2} = 2.47 \text{ cm} \approx 2.54$$

En este caso particular se ha obtenido un resultado bastante parecido al que da la fórmula simplificada ( $0.356 \sqrt{A_p}$  en vez de  $0.40 \sqrt{A_p}$ ).

El patín de la columna puede soportar las fuerzas de tensión que recibe de la viga; sin embargo, son también necesarios atiesadores en esta zona para evitar la falla del alma.

Pueden emplearse dos placas adosadas al alma, ya que los patines no necesitan ser atiesados y en el alma hay esfuerzos cortantes elevados debido a que una sola viga conecta con la columna.

Se colocarán dos placas de  $5/16''$  (0.79 cm), a uno y otro lado del alma, con lo que se obtiene un grueso total de 2.85 cm, mayor que los 2.7 cm requeridos.

Revisión del alma por cortante

$$c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_v} \cdot \frac{M}{d_v} \approx \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \cdot \sigma_y A_p = \frac{\sqrt{3} A_p}{30.5} = 2.74 \text{ cm} < 2.85$$

No se necesita ningún refuerzo extra.

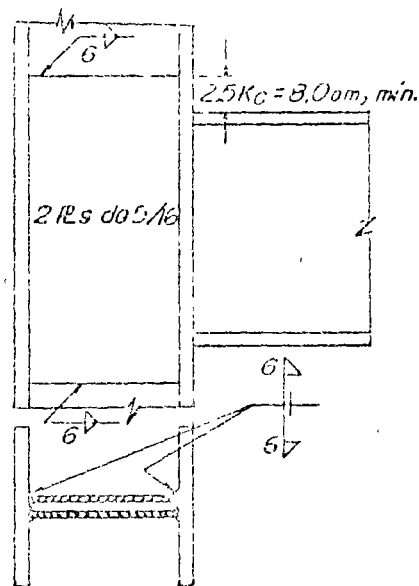


FIGURA 90

En la fig. 90 se muestra la junta reforzada. (En la práctica sería probablemente preferible utilizar una sola placa gruesa en la zona donde el alma necesita refuerzo, sobre todo si la columna recibe también vigas por alma)

#### REFERENCIAS

1. Toproctsoygiou, A. A., Beedle, L. S. y Johnston, B. G., "Connections for Welded Continuous Portal Frames", Welding Journal, Julio y Agosto de 1951, Nov. de 1952.
2. Toprac, A. A., "An Investigation of Welded Rigid Connections for Portal Frames", Welding Journal, Enero 1954.
3. Ruzek, J. M., Knudsen, K. E., Johnston, E. R., y Beedle, L. S., "Welded Portal Frames Tested to Collapse", Welding Journal, Sept. 1954.
4. Toprac, A. A. y Beedle, L. S., "Further Studies of Welded Corner Connections", Welding Journal, Julio 1955.
5. Fisher, J. W., Discoli, G. C., y Schutz, F. W., "Behavior of Welded Corner Connections", Welding Journal, Mayo 1958.
6. Fisher, J. W., y Discoli, G. C., "Corner Connections Loaded in Tension", Welding Journal, Nov. 1959.
7. De Bura, O., "Pando de Placas Comprimidas", Ingeniería Vol. XXXIV, N° 3, México, Julio de 1961.
8. Hendy, A. W., "An Investigation of the Stress Distribution in Steel Portal Frame Knees", The Structural Engineer, Marzo, Abril y Dic. de 1947. "An Investigation of the Strength of Welded Portal Frame Connections", The Structural Engineer, Oct. y Sept. 1951. "An Investigation of Certain Welded Portal Frames in Relation to the Plastic Method of Design", The Structural Engineer, Dic. 1950 y Sept. 1951.
9. Gray, C. S., Kent, L. E., Mitchell, W. A. y Godfrey, G. B., "Steel Designers Manual", Crosby Lockwood and Son, Ltd. Londres, 1957.
10. Stang, A., Greenspan, M., y Osgeod, W. R., "Strength of a Riveted Steel Rigid Frame Having Straight Flanges", R. P. 1130, U. S. National Bureau of Standards, Journal of Research, Vol. XXI, 1938.
11. Rodríguez-Avilal Azucena, F., "Construcciones Metálicas", Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales, Madrid, 1953.

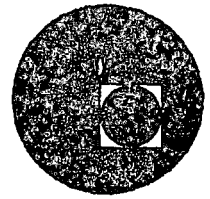
12. O'Rourke, H. C. "Stresses in the Corners of Rigid Frames", Trans. ASCE, Vol. 119, 1954.
13. "Structural Details for Metal Arc Welding", British Welding Research Ass., 1956.
14. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, Nueva York, 1963.
15. "Commentary on the Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, Nueva York, 1963.
16. Fisher, J. W., Driscoll, G. C., y Beedle, L. S. "Plastic Analysis and Design of Square Rigid Frame Knees", Welding Research Council, Bulletin N° 39, Nueva York, Abril 1958.
17. Beedle, L. S. "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley and Sons, Nueva York, 1958.
18. Driscoll, G. C. "Plastic Analysis and Design", Apuntes de Clase, Lehigh University, Department of Civil Engineering, Bethlehem, Pa., 1961.
19. "Plastic Design in Steel", AISC, Nueva York, 1959.
20. "Commentary on Plastic Design in Steel", ASCE, Manual of Engineering Practice N° 41, Nueva York, 1961.
21. Beedle, L. S., Tautimana, B., y Ketter, R. L. "Plastic Design in Structural Steel", Lecture Notes, Summer Course, Sept. 1955, Lehigh University y AISC.
22. Beedle, L. S. "Experimental Verification of Plastic Theory", Proceedings, AISC National Engineering Conference, 1956.
23. Driscoll, G. C. "Test of Two-Span Portal Frame", Proc. AISC National Engineering Conference 1956.
24. Schalung, C. G., Schutz, E. W., y Beedle, L. S. "Behavior of Welded Single-Span Frames under Combined Loading", Welding Journal, Mayo 1956.
25. Fisher, J. W., Lee, G. C., Yura, J. A., y Driscoll, G. C. "Plastic Analysis and Tests of Haunched Corner Connections", Welding Research Council, Bulletin N° 91, Nueva York, Oct. 1963.
26. "Structural Steel Design", editado por Tall, L., Beedle, L. S., y Galambos, T. V. The Ronald Press Company, Nueva York, 1964.
27. Bleich, F. "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1952.
28. Timoshenko, S. P., y Gere, J. M. "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1951.
29. Haager, G. "Plate Buckling in the Strain-Hardening Range", Trans. ASCE, Vol. 124, 1959.
30. "Code for Welding in Building Construction", American Welding Society, Nueva York, 1963.
31. Graham, J. D., Sherbourne, A. N., Khabbaz, R. N., y Jensen, C. D. "Welded Interior Beam-to-Column Connections", AISC, Nueva York 1959 (Publicado también en Boletín N° 63, Welding Research Council, Nueva York, Ag. 1960).
32. Beedle, L. S., y Christopher, R. "Tests of Steel Moment Connections", Engineering Journal, Vol. I, N° 4, AISC, Nueva York, Oct. 1964.

---

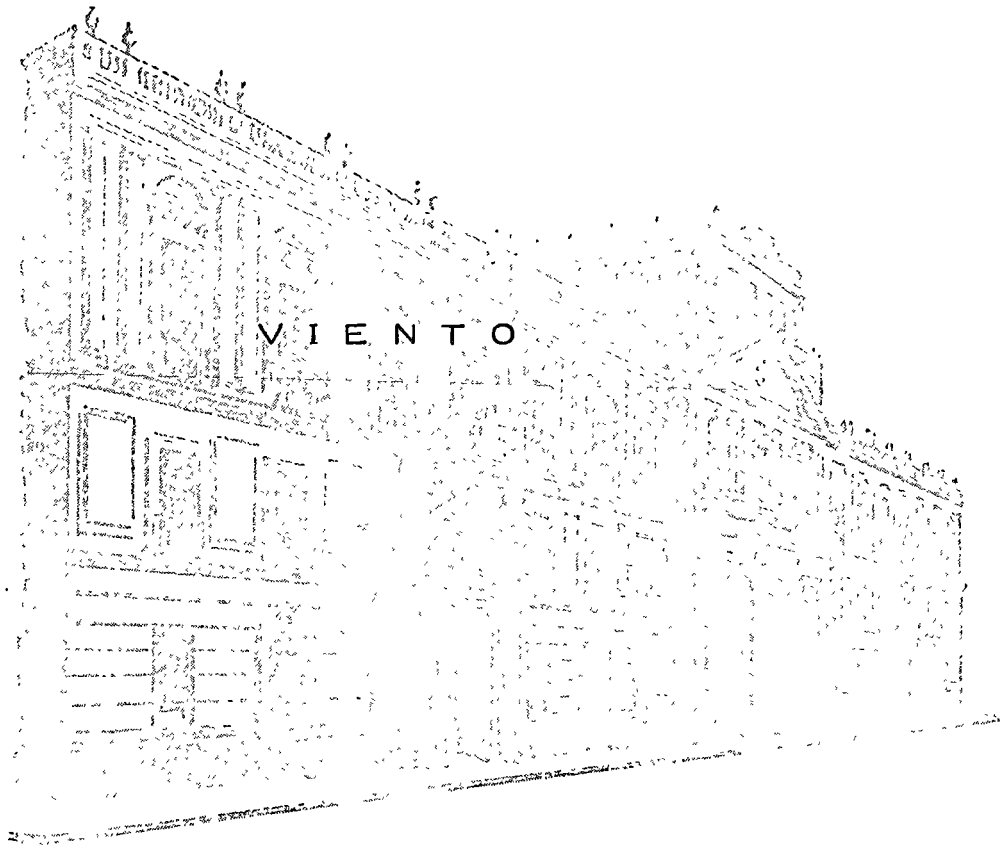
**100 ANIVERSARIO DE LA CREACION DE LAS CARRERAS  
DE INGENIERO CIVIL, INGENIERO MECANICO  
E INGENIERO TOPOGRAFO**



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS INDUSTRIALES



APUNTES DE DISEÑO ESTRUCTURAL  
FACULTAD DE INGENIERIA

FRANCISCO DE PABLO G.



Summae pontificatus sub anno 1947  
apostolicae sedis auctoritate in apostolicis  
litteris promulgamus etc. etc.





## 2.5 VIENTO.

### 2.5.1 Descripción cualitativa de los conceptos fundamentales.

Esencialmente, el viento es aire en movimiento y al igual que cualquier otro fluido, produce distintas presiones y deformaciones sobre los objetos que se le interponen.

Cuando un sólido está colocado en la corriente de un fluido, las partículas de este último desvían su camino y pasan rozando la superficie del sólido. Si la velocidad es muy pequeña, las trayectorias de las partículas envuelven prácticamente al sólido. Al aumentar la velocidad del aire, sus partículas envuelven al sólido en la cara de barlovento, mientras que en la zona de sotavento, las partículas se separan violentamente, creando una serie de alteraciones que se traducen en cambios de velocidad y por lo tanto de presión con el tiempo.

Todas las fuerzas debidas al viento son dinámicas en el sentido de que son producidas por un fluido en movimiento. Bajo determinadas circunstancias un cuerpo sumergido en un fluido, con velocidad constante experimenta fuerzas que se podrían llamar estáticas. En la realidad, no suele presentarse este fenómeno, ya que como se ha explicado, generalmente existen variaciones en la velocidad del fluido o bien se presentan determinadas características locales o de geometría de la estructura que producen variaciones en el tiempo, de las presiones ejercidas sobre el sólido. Estas variaciones pueden ser tanto en la magnitud como en la ley de distribución de fuerzas.

En algunos casos, bastará con representar, la acción del viento, como una fuerza estática de determinadas características. En otros casos esto no será suficiente y habrá que tomar en cuenta además, los efectos dinámicos producidos en el sólido, por una fuerza que es función del tiempo.

En algunas formas estructurales se podrán predecir los efectos dinámicos del viento, pero en otras será necesario realizar pruebas experimentales con modelos físicos, en un túnel

2.5.2 Estadística de vientos.

Para establecer recomendaciones para el diseño de estructuras es necesario contar con datos sobre las máximas velocidades anticipadas y la frecuencia con que pueden presentarse. Esta información se obtiene haciendo estudios de los registros de velocidades proporcionados por anemógrafos. Para estandarizar la información las velocidades suelen referirse a una altura de 10 m. Como los anemógrafos pueden estar instalados a distintas alturas es necesario hacer ajustes de acuerdo con las leyes de variación del viento con la altura.

En la fig. 2.5.1 se muestra un registro típico de velocidades instantáneas registradas por medio de un anemógrafo. Se observa que las velocidades del viento pasan de un máximo en ciclos de varias horas de duración. Además hay oscilaciones en la intensidad con amplitudes de 6 m.s a 20 m.s, con duraciones de unos cuantos segundos. Estas oscilaciones reciben el nombre de "ráfagas".

Las ráfagas tienen duraciones de varios segundos y amplitudes de 6 a 20 m s.

Las ráfagas tienen duraciones de varios segundos y amplitudes de 6 a 20 m s.

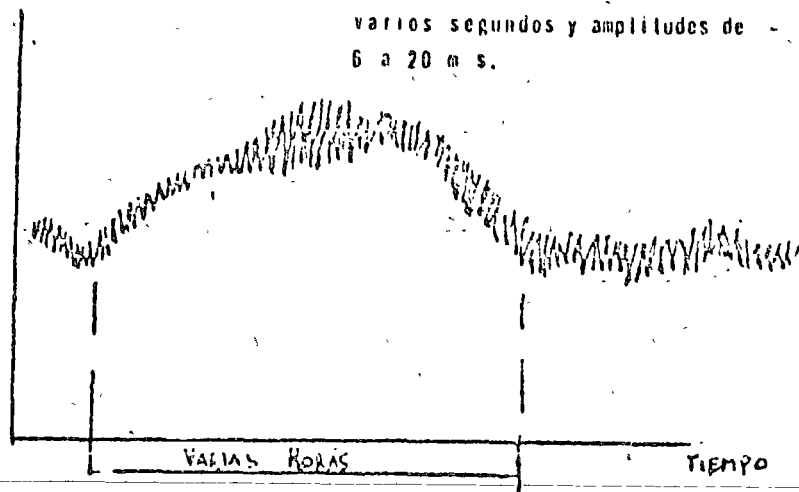


Fig. 2.5.1 Registro de un anemógrafo mostrando la variación de la velocidad instantánea del viento con el tiempo.

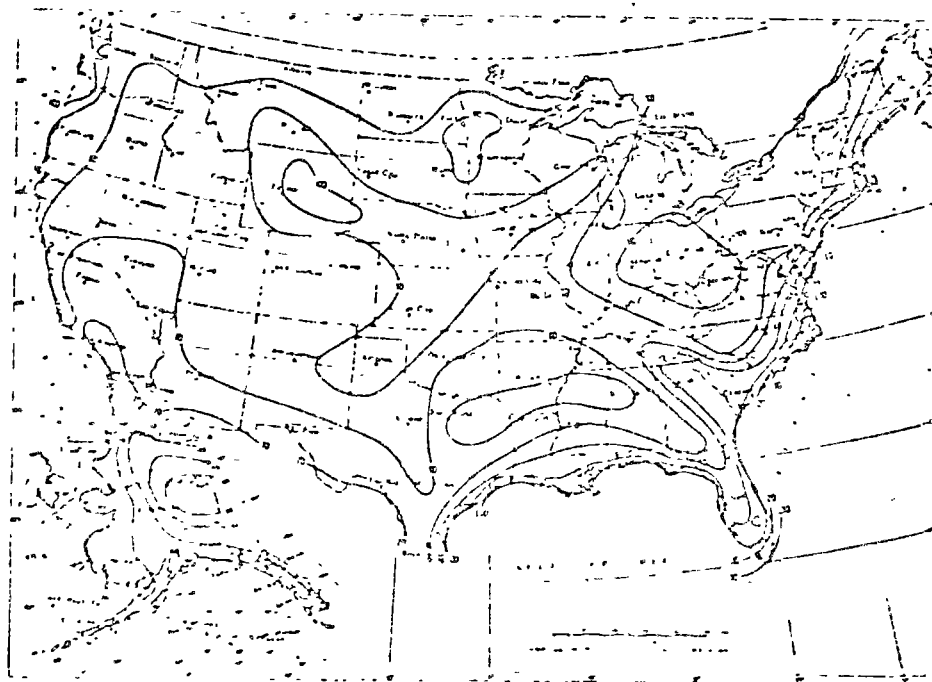


Fig. 2.5.2. Isótacas en Estados Unidos de América. Cuantil de 1% Velocidades en millas hr.

Otro procedimiento de obtener información sobre viento que ha sido propuesto por Davenport, consiste en determinar las velocidades a alturas bajas a partir de la velocidad del viento de gradiente y de las características de la rugosidad del terreno.

Para describir las características del viento es frecuente recurrir al concepto de "velocidad media". Si la velocidad media se refiere a períodos de diez minutos, como es común, la relación entre la velocidad instantánea y la media es del orden de 1.9.

### 2.5.3 Velocidades de diseño.

Velocidad básica.

La teoría y la experiencia concuerdan al afirmar que cuando actúa una corriente de aire paralelamente a la superficie rugosa del terreno, la fricción entre ambos medios hace que la velocidad del viento se reduzca en la vecindad de la superficie de contacto, hasta ser nula a una distancia infinitamente pequeña de ella. Si se miden velocidades medias de viento a alturas diversas, a lo largo de una vertical, se observa que a medida que la altura aumenta, la velocidad media varía más lentamente, hasta que puede considerarse constante. La velocidad del viento por encima de esa altura se denomina "velocidad gradiente".

La altura de la zona de perturbación varía con la configuración del terreno, siendo valores representativos 600 m. para zonas muy accidentadas, como el centro de alguna ciudad importante, y 300 m. para terreno muy plano, como a la orilla del mar. Entre el nivel del terreno y la altura a la que se presenta la velocidad gradiente, la velocidad media durante un temporal varía de acuerdo con una ley que puede representarse por la ecuación.

$$V_{\text{Diseño}} = V \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^{\alpha} \quad (2.5.1)$$

En donde:

$V_{\text{Diseño}}$  = Velocidad de diseño a una altura "z" sobre el terreno (km./hr.)

$V$  = Velocidad básica (km./hr.)

$Z_0$  = 10 M.

$\alpha$  = Coeficiente que depende de la topografía (tabla 2.5.2)

La velocidad básica se obtiene:

$$V = K_1 \cdot K_2 \cdot V_0 \quad (2.5.2)$$

En donde:

$V_0$  = Velocidad regional

$K_1$  = Factor de topografía

$K_2$  = Factor de tiempo de recurrencia

La velocidad de diseño de viento, que corresponde a un tiempo de recurrencia especificado y a las alturas de interés para la estructura en cuestión, puede obtenerse a partir de la velocidad gradiente para el mismo tiempo de recurrencia, empleando las ecuaciones anteriores, para una altura dada de la zona de perturbación. Este criterio tiene la ventaja que basta especificar una misma velocidad gradiente para zonas muy vastas, y proponer valores de alturas de perturbación y leyes de variación de la velocidad con la altura, en función de la configuración del terreno.

Este criterio ha sido adoptado en las recomendaciones de diversos países. En el manual sobre viento de la Comisión Federal de Electricidad se ha optado por proponer los valores de la velocidad regional, o valores que a la altura de 10 m. tendrían un tiempo de recurrencia de 60 años. Si la configuración del terreno fuese equivalente a campo abierto, los factores  $K_1$  y  $\alpha$  de la tabla 2 modifican la velocidad a 10 m. de acuerdo con la configuración local y la altura. La adopción del factor  $K_2$  (tabla 3) para obtener velocidades para otros tiempos de recurrencia supone que la proporción entre vientos de distintas velocidades es constante, independientemente de la localización geográfica. Aunque tal hipótesis no es precisa, las incongruencias que provienen de aceptarlo son poco significativas.

En vista de que no es posible fijar una cota a la velocidad de viento que puede ocurrir en un lugar, la velocidad básica

de diseño es aquella que tiene una cierta probabilidad de no ser sobrepasada por la máxima velocidad que ocurra en un período prefijado. La selección de dicha probabilidad constituye un problema de decisión que compara estructuras diseñadas para diversas velocidades, sus respectivos costos iniciales y los costos de posibles fallas, ligados a las probabilidades correspondientes.

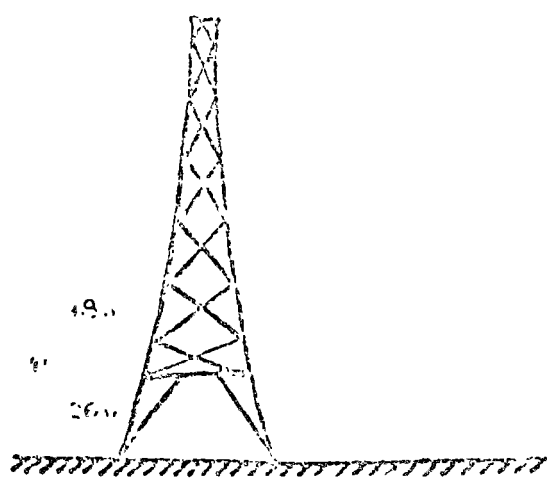
Los datos estadísticos individuales que reportan los observatorios no son velocidades instantáneas, sino velocidades medias durante intervalos de medición que pueden variar entre unos cuantos minutos y varias horas. Si se obtiene dicha velocidad media para un gran número de intervalos de igual longitud durante el período para el cual se quiere calcular la probabilidad de falla, al máximo de dichos valores se le llamará velocidad máxima, en el sentido del párrafo anterior. Su significado no será preciso si no se especifica el intervalo de medición asociado a ella.

Los datos que se empleen para diseño estructural deb corresponder a intervalos de medición suficientemente cortos para permitir observar las máximas velocidades de ráfagas en temporales intensos, pero a la vez suficientemente largos para que tomen en cuenta masas de aire capaces de envolver la estructura y poder ejercer empujes significativos sobre ella. Atendiendo a las dimensiones ordinarias de las estructuras civiles conviene tomar como velocidad básica la determinada con un intervalo de medición de un minuto y que corresponda al período de recurrencia de interés. Un criterio alternativo que conduce prácticamente a los mismos resultados es el que se basa en velocidades de masas de viento de una milla de longitud.

Los valores que presenta la tabla 2.5.1 se obtuvieron estadísticamente. Debido a la heterogeneidad y a los diversos grados de confianza que merecían los datos estadísticos, se simplificó substancialmente el mapa inicial. Las velocidades que presenta son representativas de las que ocurren en terreno plano, con períodos de recurrencia de 60 años e intervalos de medición del orden de varios minutos. Se supuso que las velocidades básicas para otros períodos de recurrencia pueden obtenerse mul-

triplicando las de la tabla 1 por el factor  $K_2$  (tabla 2.5.3) que varía según el tipo de estructura.

La simplificación introduce errores poco significativos.



Velocidades horarias medias máximas.

Fig. 2.5.3 Variación de la velocidad del viento con la altura en la Torre Eiffel.

Las leyes de variación que se especifican en la tabla 2.5.2 ( $K_1$  y  $\alpha$ ) se basan en observaciones en lugares con diversas configuraciones topográficas y ante vientos de distintas velocidades. Por simplicidad, las leyes de variación propuestas se hacen depender únicamente de la topografía, a pesar de que también se ven significativamente afectadas por los valores de las velocidades. Por ejemplo, es bien conocido que los huracanes se caracterizan por velocidad prácticamente constante con la altura.

Tabla 2.5.1 Valores de la velocidad Regional

(Período de recurrencia = 100 años: intervalos de medición: 15 seg.)

Zona	$V_o$ (km/h)
a) Mesa central	140
b) Zona costera (faja de 150 km. de ancho a lo largo de cada - costa) Penínsulas de Baja California y de Yucatán.	170
c) Valle de México	100

Tabla 2.5.2 Efectos de la Topografía sobre las velocidades de diseño.

Topografía	K <sub>1</sub>		α
	Estructuras poco sensibles a ráfagas cortas (tipo 1).	Estructuras sensibles a ráfagas cortas (tipos 2 y 3)	
Muy accidentada, como en el centro de ciudades importantes.	0.70	1.20	0.075
Zonas arboladas, lomeríos, barrios residenciales o industriales.	0.80	1.20	0.075
Campo abierto, terreno plano.	1.00	1.20	0.055
Promontorios	1.20	1.20	0.10

K<sub>1</sub> = factor de topografía, ver 1.3.1.2

= exponente en la ley de variación con la altura.

Tabla 2.5.3 Factores de tiempo de recurrencia.

Clasificación de los edificios (por su destino)	Valor del coeficiente K <sub>2</sub>
Grupo A (Edificios Gubernamentales y de servicio público, hospitales y con frecuencia aglomeración de personas).	1.20
Grupo B (Construcciones de habitación privada).	1.00
Grupo C (Construcciones -- aisladas no contenidas en los grupos anteriores).	No se requiere diseño por viento.



### 2.5.4 Efectos del viento.

Para el diseño de estructuras sometidas a la acción de viento, es necesario considerar los siguientes efectos:

a) Empujes y succiones estáticas.

La forma y dimensiones, además de las características dinámicas de las estructuras, determinan la naturaleza de las posibles sollicitaciones debidas a viento. Ante viento sostenido con velocidad constante las presiones y succiones estáticas constituyen la parte más importante de los efectos en estructuras poco flexibles y con períodos naturales de vibración cortos (no mayores de 2 seg.) La distribución de dichas presiones sobre las superficies expuestas a viento dependen de la geometría, y pueden determinarse experimentalmente a partir de pruebas sobre modelos en túnel de viento.

La magnitud de esta fuerza por unidad de superficie que ejerce el viento sobre una estructura, se puede expresar por:

$$P = \frac{v^2}{2g} \rho$$

En donde  $P$  es la presión,  $v$  es la velocidad del viento,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $\rho$  es el peso volumétrico del aire, que es función de la altura sobre el nivel del mar del punto en el que se obtenga la presión.

Si se consideran dos puntos, uno sobre la estructura y otro punto sumergido en el fluido, pero que no está afectado por la presencia del obstáculo, se pueden obtener las presiones ligadas a estos puntos, aplicando el principio de Bernoulli o de conservación de la energía

$$P + \frac{v^2}{2g} \rho = P_0 + \frac{v_0^2}{2g} \rho$$

en donde

$P, v$  = presión estática y velocidad del viento sobre un punto de la estructura.

$P_0, v_0$  = presión estática y velocidad del viento sobre un punto alejado de la estructura.

$$P - P_0 = \frac{V_0^2}{2g} \rho - \frac{V^2}{2g} \rho$$

$$(P - P_0) \left( \frac{2g}{V_0^2 \rho} \right) = 1 - \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 = C_p$$

Coefficiente de presión:  $C_p = \frac{2g \cdot \Delta P}{V_0^2 \rho}$

El coeficiente de presión expresa, que el cambio de presión entre un punto sobre la estructura y otro dentro de la corriente uniforme del viento, varía con el cuadrado de la relación de velocidades entre ambos puntos. También se puede demostrar que este coeficiente de presión varía con las características del fluido, y con el llamado número de Reynolds que es función de la velocidad del viento, de las dimensiones de la estructura y de la viscosidad del fluido.

Si por algún procedimiento empírico, se hubiera determinado la distribución en la estructura, de los coeficientes de presión, el valor de la fuerza aplicado en un punto sería:

$$P = C_p \frac{1}{2g} V_0^2 \rho$$

b) Empujes dinámicos paralelos y transversales al flujo principal causado por la turbulencia.

Las fluctuaciones en la velocidad del viento ocasiona vibraciones en las estructuras. La acción del viento persistente puede idealizarse como la superposición de un gran número de excitaciones armónicas estacionarias de diferente frecuencia y amplitud. La respuesta máxima de una estructura de período natural y amortiguamiento dados, a una cualquiera de los componentes armónicos estacionarios de la velocidad puede obtenerse a partir de las fórmulas de Dinámica.

Si existe en proporción importante un componente de dicha velocidad que tenga una frecuencia próxima a la natural de la estructura, pueden producirse oscilaciones importantes. Cuando el amortiguamiento es bajo, la amplificación dinámica resulta excesiva se pueden presentar amplitudes objetivas

bles de vibración a pesar de que haya diferencias significativas entre el período de la estructura y el dominante del viento.

Del análisis espectral de registros de velocidades de viento se deduce que los períodos más peligrosos están comprendidos entre 2 y 100 seg. Para fines prácticos, hablaremos en lo sucesivo de períodos mayores de 2 seg., ya que el extremo superior se encuentra muy por encima de los que pueden esperarse en estructuras civiles.

c) Vibraciones causadas por vórtices alternantes transversales al flujo.

Las perturbaciones que algunos cuerpos ocasionan en el flujo del aire se manifiestan en forma de vórtices que se generan periódicamente y que viajan a lo largo de la estela turbulenta, causando empujes dinámicos. El caso más típico es el que se presenta cuando el viento incide normalmente al eje de un cuerpo prismático o cilíndrico.

Entonces se producen remolinos o vórtices cilíndricos, con eje paralelo al del cuerpo y que se desprenden alternadamente a cada lado del mismo. Sus ejes se desplazan a lo largo de la estela, presentando sentidos opuestos de giro, según se trate de vórtices a uno u otro costado del obstáculo. fig. 2.5.A.

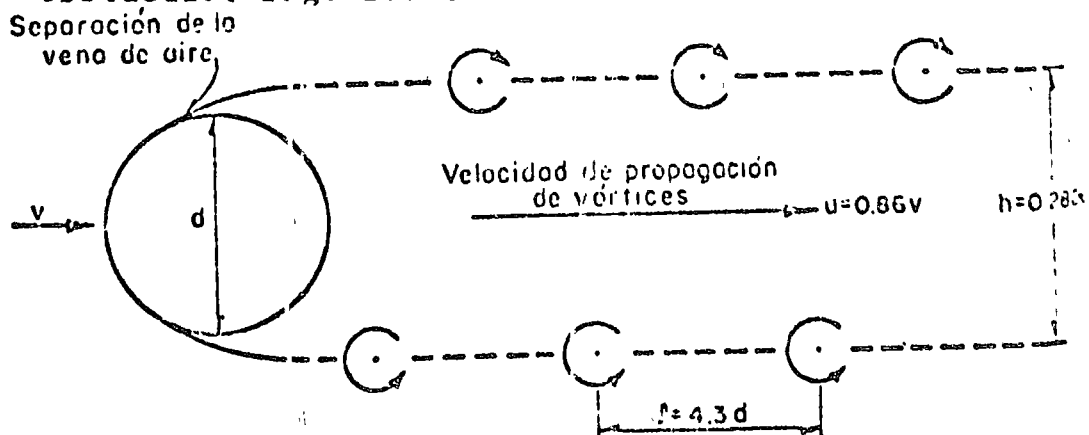


Fig. 2.5.A Vórtices de von Karman.

El resultado de esta perturbación es la generación de fuerzas periódicas de sentido alternante, que actúan transversalmente sobre el cuerpo.

El fenómeno ha sido causa de vibraciones excesivas de chimeneas con períodos naturales próximos a los de la vorticidad y se ha reconocido como uno de los factores que intervinieron en el colapso del puente colgante de Tacoma Narrows.

### 1. Inestabilidad aerolástica.

Al actual el viento sobre una estructura ocasiona desplazamientos de la misma, tanto en la dirección del viento, como normalmente al mismo. La velocidad relativa entre el viento y la estructura varía en magnitud y dirección como función del tiempo, alterándose el ángulo de incidencia. Para ciertas formas de cuerpos y ciertas direcciones de viento puede ocurrir que, actuando con un nuevo ángulo de incidencia, el viento ocasiona fuerzas o desplazamientos mayores en la dirección transversal, que esto dé lugar a nuevos cambios en el ángulo de incidencia y que el fenómeno continúe hasta alcanzarse deformaciones excesivas y eventualmente el colapso de la estructura. Estos problemas pueden presentarse, por ejemplo, en cables de líneas de transmisión o en antenas parabólicas de torres de microondas. Las pruebas en túnel de viento, para distintos ángulos de incidencia, permiten establecer si una forma dada puede ofrecer problemas de estabilidad aerodinámica.

Otro fenómeno importante que puede ocasionar vibraciones peligrosas de estructuras flexibles es el designado como "aleteo" (flutter). Cuando el viento incide con un ángulo de ataque muy bajo sobre grandes áreas planas o de muy baja curvatura, puede excitar simultáneamente vibraciones simétricas y antisimétricas, o bien vibraciones de flexión y de torsión.

Las deformaciones correspondientes a un modo de vibración aumentan los efectos del viento sobre el otro. Si dichos modos tienen períodos próximos entre sí, se acoplan y la amplitud aumenta ciclo tras ciclo. El fenómeno es típico de cubiertas colgantes con curvatura pequeña y de puentes colgantes.

### 2.5.5 Clasificación de las Estructuras.

Las estructuras se pueden clasificar por su destino y por las características de su respuesta ante la acción del viento.

De acuerdo con su destino las construcciones se clasifican igual que para el caso de diseño sísmico, teniendo en cuenta la importancia y las consecuencias de una falla. Por su destino las construcciones pueden pertenecer a los grupos A, B o C.

Según los efectos que el viento produce en las construcciones, éstas se pueden clasificar en los siguientes tipos:

#### a) Estructuras Tipo 1.

De acuerdo con algunas observaciones sobre ráfagas y su efecto en estructuras se concluye que para que una ráfaga actúe en forma efectiva debe ser capaz de recorrer aproximadamente ocho veces la dimensión de la estructura en la dirección del viento. Para estructuras de 20 m. de profundidad paralela al viento, esto conduce a basar el diseño en la ráfaga de máxima velocidad con duración no menor de 10 seg. La designación de las estructuras que pertenecen al Tipo 1 se basó en tener en cuenta sus dimensiones ordinarias y en la brevedad de sus períodos fundamentales. Ejemplos:

- 1) Edificios de habitación u oficinas con altura menor de 30 m. o período natural menor de 1 seg.
- 2) Bodegas, naves industriales, auditorios, construcciones cerradas techadas con sistemas de cubiertas rígidas (armaduras, losas, cascarones) que sea capaz de tomar las

cargas por viento sin que varíe su geometría.

3) Puentes formados por losas, trabes, armaduras o arcos.

b) Estructuras Tipo 2.

Estructuras cuya esbeltez o dimensiones reducidas en su sección transversal, las hacen especialmente sensibles a las ráfagas de corta duración, y cuyos períodos naturales largos favorecen la ocurrencia de oscilaciones importantes. Comprende los edificios con período natural entre 1 y 2 seg. y altura entre 30 y 60 m., y relación de esbeltez mayor de 5. Ejemplos: torres de transmisión, tanques elevados, bardas, anuncios y en general las estructuras que presentan una dimensión muy corta paralela a la dirección del viento.

c) Estructuras Tipo 3.

Estructuras semejantes a las del Tipo 2, y que además la forma de su sección transversal favorece la generación periódica de vórtices o remolinos de ejes paralelos a la mayor dimensión de la estructura. Estos vórtices pueden ocasionar fuerzas transversales periódicas, susceptibles de sufrir amplificación dinámica excesiva. Ejemplos: Estructuras aproximadamente cilíndricas, como chimeneas, líneas de transmisión, torres, etc.

d) Estructuras Tipo 4.

Se incluyen en este tipo, estructuras que ofrecen problemas aerodinámicos especiales, difíciles de cuantificar por medios analíticos. Su diseño por viento usualmente requiere pruebas representativas en túnel de viento. Estos problemas generalmente caen en alguna de las siguientes categorías:

1). Estructuras con período natural mayor de 2 seg. El contenido de energía de vientos turbulentos es muy importante para períodos mayores de 2 seg., ya que puede provocar efectos de resonancia.

- 2) . Estructuras o elementos que parecen formas aerodinámicamente inestables y amortiguamientos bajos. Son construcciones que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones: amortiguamiento interno menor de 5% del crítico; altura mayor de 60 m. y relación de esbeltez mayor de 5.
- 3) . Cubiertas colgantes. Son estructuras flexibles, de gran superficie y de baja curvatura, sobre las que incide el viento con ángulos de ataque pequeños y que puede provocar vibraciones excesivas.

#### 2.5.6 CRITERIOS GENERALES DE ANALISIS.

Tanto el Reglamento de Construcciones para el D.F., como el Manual de Diseño de Obras Civiles de la C.F.E., contienen recomendaciones bastante completas para el diseño de estructuras sujetas a la acción del viento.

En el diseño de construcciones no es necesario considerar la acción simultánea de viento y sismo, ni de viento y carga viva con la distribución más desfavorable.

Los edificios se analizan suponiendo que el viento puede actuar por lo menos según dos direcciones perpendiculares entre sí. Se eligen las direcciones que representan las condiciones más desfavorables para la estabilidad de la estructura.

Se consideran los mismos factores de carga y esfuerzos permisibles que los especificados para el diseño sísmico.

En este análisis se simplifica el problema al pedir revisión en sólo dos direcciones, si bien con ello se pueden producir errores pequeños del lado de la inseguridad para ángulos de incidencia comprendidos entre ciertos límites. Se supone que tales imprecisiones quedarán cubiertas por los factores de seguridad y de carga y por la magnitud de las presiones especificadas. De no ser así, el análisis se complicaría en exceso.

En rigor, los esfuerzos permisibles y factores de carga en diseño por viento deberían diferir de los que se marcan para diseño sísmico en vista de la mayor duración de aplicación de los efectos del viento. Sin embargo, tal multiplicidad de esfuerzos admisibles complicaría injustificadamente el diseño y se ha preferido especificar los mismos esfuerzos. La práctica parece acertada al menos mientras no se disponga de mayores conocimientos sobre criterios de falla de los materiales estructurales y las estructuras ante cargas repetidas de duración corta y moderada.

Debe verificarse la seguridad contra volteo. Para ello deben suponerse nulas las cargas vivas y se estiman los pesos propios con los valores mínimos de los pesos volumétricos de los materiales. El factor de seguridad contra volteo debe ser por lo menos de 1.5.

Las presiones interiores suelen afectar principalmente a las cubiertas ligeras y a los muros y ventanas perimetrales. Es evidente la necesidad de revisar su estabilidad ante la acción combinada de presiones interiores y succiones exteriores. También pueden verse afectadas desfavorablemente las divisiones interiores, sobre todo cuando no portan otra carga que su peso propio, son ligeras y separan entre sí recintos que se comunican con el exterior.

Es conveniente que en el diseño, se tomen íntegras las presiones de viento, sin reducirlas confiando en la protección que pudieran suministrar los edificios o anuncios existentes en la proximidad del inmueble que se considera, pues aquellos pueden ser derribados con anterioridad a ésta, dejándola expuesta. Esta limitación es válida aun tratándose de edificios propiedad de un sólo dueño. Los criterios de cálculo que se especifican para diseño sísmico no permiten aprovechar algunos beneficios derivados de posibles redistribuciones de fuerzas laterales entre marcos o muros paralelos causadas por absorción de energía ante cargas repetidas. Tal posición obedece a falta de



información sobre fenómenos de esta índole. En diseño para resistir presiones de viento, las redistribuciones mencionadas no ocurren en una escala apreciable, ya que en la mayoría de los casos los empujes de viento se aplican con la velocidad del orden de la de una carga estática y no se absorbe una cantidad importante de energía en ciclos alternados de carga y descarga. Por tanto en diseño para resistir presiones de viento se justifica un mayor rigor analítico que en diseño contra temblores.

#### CALCULO DE EMPUJES ESTATICOS.

En el método estático los efectos del viento se traducen en fuerzas. El cálculo de estas fuerzas se funda en las siguientes consideraciones.

##### Para Estructuras Tipo 1.

Se toman las velocidades de diseño que se derivan de considerar la velocidad básica dada por ec 2.5.2 y la ley de variación con la altura dada por la ec 2.5.1.

##### Para Estructuras Tipo 2.

Se multiplican las velocidades de diseño calculadas como para estructuras del Tipo 1, por un factor de ráfaga. Este factor está involucrado en los valores de K, dados para estructuras de los Tipos 2 y 3 en la Tabla 2.5.3. Toma en cuenta el incremento de efectos estáticos de ráfagas tan cortas como de 2 seg., como la posible amplificación dinámica para dichas estructuras caracterizadas por períodos naturales moderadamente largos.

El área "expuesta" sobre la que se supone actúa el viento, se suele corregir como sigue: \*

- a) En superficies planas llenas, el área total de la superficie.
- b) En construcciones tipo torre de sección circular o aproximadamente circular, la proyección vertical de la construcción.
- c) En estructuras reticulares tales como armaduras, el 20% del área limitada por los aristas.

- a) En techos con forma de diente de sierra, la totalidad del área del primer diente, y la mitad del área para cada uno de los demás dientes.
- c) En techos formados por superficies cilíndricas, la proyección vertical de la superficie, salvo que la sección vertical se valuara tomando el área de la proyección horizontal del techo.

Estas definiciones de áreas expuestas son las que deben utilizarse para determinar las condiciones más desfavorables en lo que respecta a las fuerzas laterales para el diseño de la estructura de soporte de la cubierta de un edificio, es decir, marcos, columnas o muros. Las condiciones más desfavorables de la acción del viento sobre los miembros de la cubierta, anclajes, diseño local de tableros, etc., se obtienen aplicando sobre las áreas afectadas, la presión o succión del viento que resulta de sustituir los coeficientes cuyo ejemplo se presenta a continuación.

Los efectos de viento se toman equivalentes a los de una fuerza distribuida sobre el área expuesta. Esta fuerza se supone perpendicular a la superficie sobre la que actúa y su valor por unidad de área se calcula por medio de la ec.

$$p = 0.0048 GCV^2 \quad (2.5.3)$$

en donde

C = coeficiente de empuje (sin dimensiones)

p = presión o succión debida al viento (kg/m<sup>2</sup>)

v = velocidad de diseño (Km/hora)

G =  $\frac{8 - h}{8 - 2h}$  = factor de reducción de densidad de la atmósfera, a la altura h (Km) sobre el nivel del mar.

Cuando C es positivo, se trata de un empuje sobre el área expuesta; cuando es negativo, se trata de succión. (Los valores de los coeficientes de empuje que deben usarse se definen posteriormente).

Para efectos de diseño local, el empuje de viento sobre elementos de dimensiones transversales en comparación con su longitud, tales como cables, tirantes o perfiles estructurales de armaduras, en los que los efectos dinámicos puedan

preciarse, se define por la componente de la fuerza debida a viento, por unidad de longitud del elemento. Para viento actuando normalmente al eje de la pieza, los valores de dichas componentes se calculan de acuerdo con las ecuaciones siguientes:

$$F_L = 0.0048 GC_L BV^2$$

$$F_T = 0.0048 GC_T BV^2$$

donde

B = ancho de la superficie expuesta (m)

$C_L$  = coeficiente de arrastre (sin dimensiones)

$C_T$  = coeficiente de empuje transversal (sin dimensiones)

$F_L$  = empuje en la dirección del viento, por unidad de longitud del elemento estructural (Kg/m)

$F_T$  = empuje transversal, por unidad de longitud del elemento estructural (Kg/m)

V = velocidad de diseño.

Existen tablas que presentan los valores de  $C_L$  y  $C_T$  para diversos perfiles.

#### Coeficiente de empuje.

A continuación se muestran algunos ejemplos sobre la forma en que varían los coeficientes C. de la fórmula anterior. Todos estos coeficientes provienen de aproximaciones conservadoras a los valores experimentales que mediante expresiones más complicadas pueden representarse con mayor precisión. Cuantificando el error como un porcentaje del valor más preciso de C, sólo se introducirían errores inadmisibles en la proximidad de  $C = 0$  para techos inclinados; sin embargo, ese intervalo está cubierto por el requisito de que en ningún caso se tome C menor que 0.4, con lo cual de hecho se cubren condiciones de exposición al viento ante una mayor diversidad de configuraciones topográficas en la vecindad de la estructura, en comparación con lo que es posible esperar de una serie de ensayos en túnel de viento. Por consiguiente cabe adelantar que las expresiones aproximadas propuestas, en conjunción con los límites inferiores que se estipulan para el coeficiente C, darán resultados más ade-

cuados para diseño que expresiones que sean más precisas al jugarlas en comparación con los resultados experimentales disponibles.

Las figuras 2.5.5 y 2.5.6 muestran en forma gráfica las distribuciones de presiones propuestas en estos incisos:

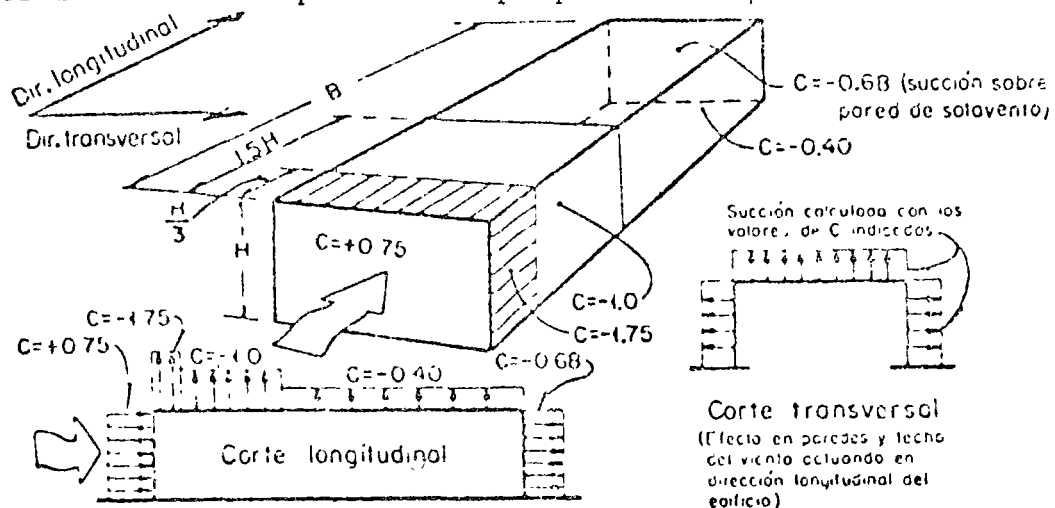


Fig.2.5.5 Distribución del Coeficiente de empuje. Edificios de planta y elevación rectangulares.

#### Presiones interiores.

Cuando existen aberturas en los muros exteriores de una construcción, se presenta un flujo importante de aire a través de la estructura que produce presiones interiores adicionales a las exteriores que se han estudiado.

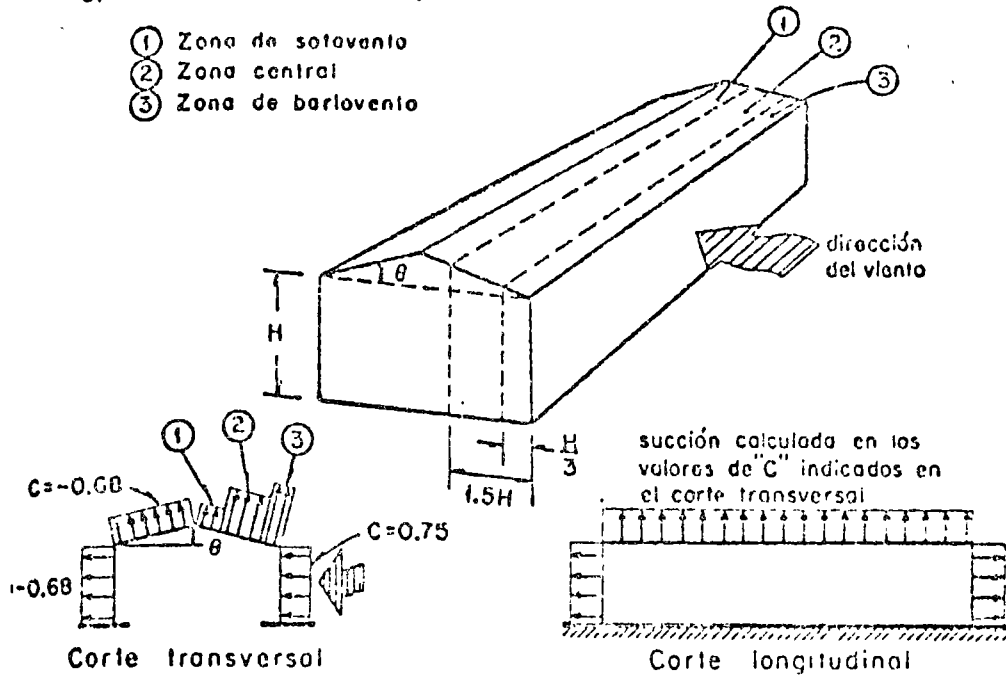
Cuando el porcentaje de aberturas del edificio, en la planta que se analiza, sea mayor que el 30%, el Reglamento del D.F. recomienda considerar presiones interiores iguales a las que resultan de suponer valores de  $C = +0.8$  o  $C = -0.6$ , adoptando el valor más desfavorable, que se combinará con la presión exterior de viento ya calculado.

Cuando el porcentaje de aberturas sea nulo, se tomará para el diseño de cada elemento  $C = +0.3$ , interpolándose linealmente para valores intermedios.

Las presiones interiores no deben considerarse para el análisis de la estabilidad del conjunto de la estructura.

a) Viento normal a las generatrices

- ① Zona de sotavento
- ② Zona central
- ③ Zona de barlovento



VALORES DE C				
$\theta$	SUPERFICIE DE BARLOVENTO			SUPERFICIE DE SOTAVENTO
	Z O N A S			
	de barlovento	central	de sotavento	
$< 15^\circ$	-1.75	-1.00	-0.40	-0.68
$15 \leq \theta \leq 65^\circ$	$-2.1 + 0.023\theta$	$-1.2 + 0.013\theta$	-0.40	-0.68
lómase el mayor de los sig	$0.012\theta$	$0.007\theta$		
$> 65^\circ$	0.75	0.75	0.75	-0.68

b) Viento paralelo a las generatrices:

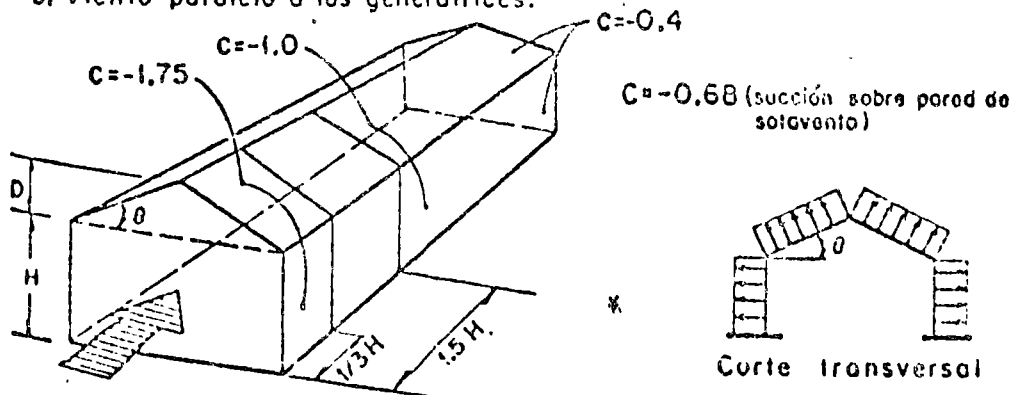


Fig. 2.5.6 Cubiertas de dos aguas

Si el porcentaje de aberturas es cercano al 100%, no pueden generalizarse las condiciones anteriores, ya que pueden ocurrir empujes importantes, tanto exteriores como interiores, distintos a los citados.'

#### Excentricidades accidentales.

Mediciones realizadas en túneles de viento, indican fluctuaciones no uniformes en la presión, como consecuencia de la turbulencia que invariablemente se asocia a los vientos interiores.

Estos efectos se toman en cuenta considerando excentricidades accidentales de la resultante de la presión.

Se suele especificar:

$$\pm (0.3L^2/8H - 0.05L) \text{ para } \frac{L}{H} < 2 \text{ En dirección horizontal.}$$

$$\pm \left( \frac{L}{8} \right) \text{ para } \frac{L}{H} > 2$$

0.05H..... En dirección vertical.

Siendo H y L la altura y la base del área expuesta.

Al pedir que se tomen en cuenta simultáneamente las máximas excentricidades accidentales en dirección tanto vertical como horizontal se yerra un poco del lado conservador, cosa que se justifica por la simplicidad que así se introduce en el análisis.

Las implicaciones de la excentricidad accidental son especialmente de tomarse en cuenta en estructuras soportadas por un solo apoyo (o línea de apoyos aproximadamente centrado, como ocasionalmente se estila en anuncios).

Esta especificación puede no ser suficientemente conservadora para estructuras con períodos naturales muy largos. Para ellas es necesario tener en cuenta la posible amplificación dinámica.

### Efectos de vórtices periódicos.

En el diseño de las estructuras tipo 3, además de los criterios de diseño establecidos para los del tipo 2, deben considerarse los efectos dinámicos producidos por los vórtices.

La ocurrencia de vórtices da lugar a la acción de fuerzas periódicas normales, tanto a la dirección del viento como al eje de cuerpos prismáticos o de proporciones casi prismáticas. Dichas fuerzas pueden suponerse con variación sinusoidal con respecto al tiempo. Su período se ha determinado experimentalmente para miembros con diversas secciones transversales, y puede calcularse a partir de la expresión.

$$T = d \cdot v \cdot S = d (0.28VS)$$

Aunque habrá que seleccionar aquellas características de las fuerzas alternantes que produzcan condiciones más desfavorables. En esta ecuación.

$T$  = período de la fuerza alternante (seg)

$d$  = dimensión característica del cuerpo (m); en elementos prismáticos  $d$  suele tomarse igual al ancho normal a la dirección del viento.

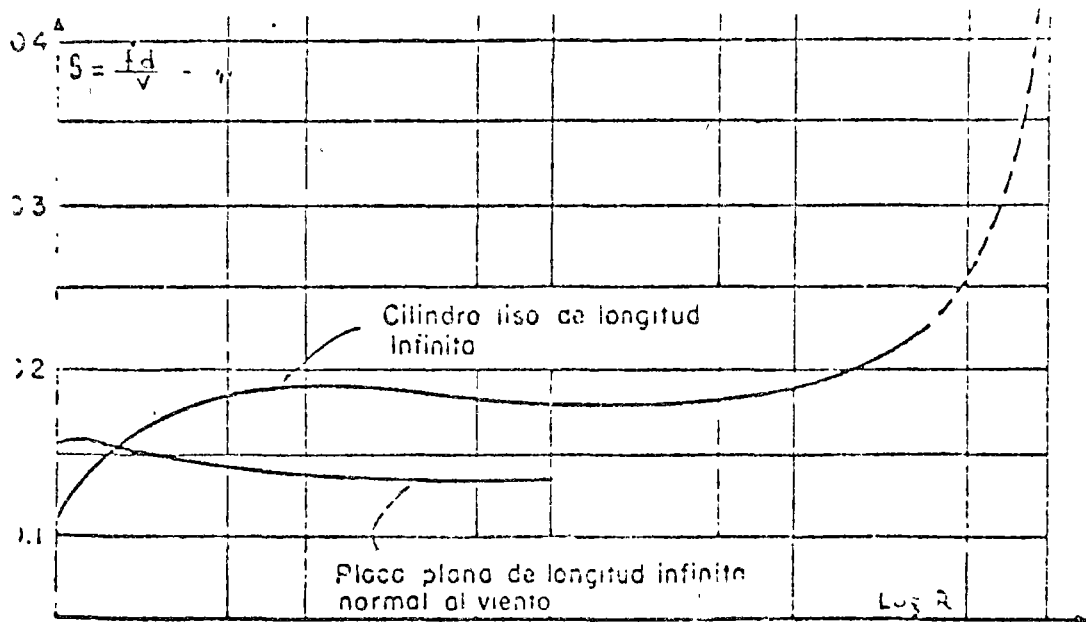
$v$  = velocidad (m/seg)

$V$  = velocidad (Km/hora)

$S$  = número de Strouhal (sin unidades)

El valor  $S$  depende del número de Reynolds, ( $R = 19000 Vd$ ), aunque es poco sensible a él (ver fig. 2.5.8) y puede tomarse

$S = 0.2$  para secciones circulares y  $S = 0.14$  para las rectangulares. El valor  $S = 0.285$  que se emplea tiene por objeto trabajar con velocidades en Km/hora.



La intensidad máxima, por unidad de longitud referida al eje de la pieza, de las fuerzas transversales a partir de la ecuación:

$$w_k = 0.0055 C_k \cdot d \cdot V_i^2$$

$C_k$  = coeficiente de empuje que depende de la velocidad  $V_i$  y de la geometría de la estructura. Este valor se puede obtener a partir de los resultados pruebas de túnel de viento.



$V_1$  = Velocidad del viento, menor o igual que la velocidad de diseño  $V$ , por empuje estático y para cualquier valor de  $T$  comprendido entre  $0.77 d/V_1 S$  y  $d/V_1 S$

$S$  = Coeficiente, de valor 0.056 para estructuras de sección circular y 0.04 para sección rectangular.

El coeficiente  $C_k$ , de empuje, suele adquirir los siguientes valores:

a) Sección circular

$$C_k = 1.0 \quad \text{si} \quad V_1 d < 50$$

$$C_k = 0.2 + \frac{40}{V_1 d} \quad \text{si} \quad V_1 d > 50$$

b) Sección rectangular

$$C_k = 1.5 \quad \text{si} \quad V_1 d < 50$$

$$C_k = 0.5 + \frac{50}{V_1 d} \quad \text{si} \quad V_1 d > 50$$

Una vez que se ha determinado las características de las fuerzas periódicas, se procederá con el análisis dinámico de la estructura, de manera semejante al caso de sismo.

Las estructuras del tipo 4 requieren estudios especiales que tomen en cuenta las características de la turbulencia y sus efectos dinámicos sobre las estructuras.

ANALISIS DE COSTOS PARA MALACATE CON PLUMA

CABLE:

$$\begin{array}{rcl} \text{COSTO CABLE} & = & \$ \frac{164.00}{500} \\ \text{VIDA EN HRS.} & & \end{array} \quad \$ 0.33/\text{Hr}$$

R E S U M E N

EQUIPO	\$ 6.13
COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES	8.02
OPERACION	5.89
CABLE	<u>0.33</u>
COSTO DIRECTO POR HORA	\$ 20.37/Hr.



4

o



2



ANALISIS DE COSTOS PARA MALACATE CON PLUMA

MODELO : 3 TON.

MOTOR: 50 HP GASOLINA

P.	PRECIO DE COMPRA DE LA MAQUINA	\$ 24,000.00	
HV.-	HORAS DE VIDA EFECTIVAS:	10,000	
HA.-	HORAS DE VIDA AL AÑO:	2,000	
VR.-	VALOR DE RESCATE:	5%	
DEPRECIACION:	$\frac{0.95P}{HV} = \frac{0.95 \times \$ 24,000.00}{10,000}$	\$ 2.28	
INTERESES:	$\frac{A + 1}{2A} = 5.6\% \text{ Anual}$	1.33	
TRANSPORTACION Y SEGUROS	0.6 % Anual	0.12	
REFACCIONES:	$\frac{0.7 \times P}{HV} = \frac{0.7 \times 24,000.00}{10,000}$	1.68	
REPARACIONES:	$\frac{0.3 P}{HV} = \frac{0.3 \times 24,000.00}{10,000}$	0.72	
COSTO HORARIO POR EQUIPO:		\$ 6.13/Hr	
COMBUSTIBLE Y LUBRICANTES:			
SUPERMEXOLINA	7.0 Lt/Hr X 0.80/Lt	6.50/Hr	
ACEITE MOTOR	0.2 lt/Hr X 3.10/lt	0.62	
ACEITE TRANSMISION	0.2 lt/Hr X 4.45/lt	0.89	
GRASA	0.1 Kg/Hr X 5.568/kg	0.56	
ESTOPA (FRANELA)	0.1 M/Hr. X 3.50/M	0.35	
COSTO HORARIO POR COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES		\$ 8.02/Hr	
OPERACION:			
	DIA	7°DIA	S. SOCIAL IMP. EDUC. TOTAL
1 OPERADOR	\$34.50	5.75	6.51 \$ 0.35 \$ 47.11
COSTO HORARIO OPERACION:			\$ 5.89/Hr



000000

ANALISIS DE COSTOS DIRECTOS PARA RODILLO VIBRATORIO  
LISO AUTOPROPULSADO

MODELO: DYNAPAC MOD. CG-10. MOTOR GASOLINA 10 HP.

P.-	PRECIO DE COMPRA DE LA MAQUINA	\$ 58,125.00
HV.-	HORAS VIDA EFECTIVA: 8,000 Hrs.	
HA.-	HORAS DE VIDA AL AÑO: 1,600 Hrs.	
VR.-	VALOR DE RESCATE: 15 %	
DEPRECIACION:	$\frac{0.85 P}{HV} = \frac{0.85 \times \$58,125.00}{8,000 \text{ Hrs.}}$	\$ 6.18/Hr
INTERESES:	$\frac{(A + 1)}{2A} = \frac{(5 + 1) 10\%}{2A} = 6\% \text{ Anual}$	2.18
TRANSPORTACION Y SEGUROS	1.6% Anual =	0.58
REFACCIONES:	$\frac{0.8P}{HV} = \frac{0.8 \times \$ 58,125.00}{HV 8,000} =$	5.81
REPARACIONES:	$\frac{0.2 P}{HV} = \frac{0.2 \times \$ 58,125.00}{HV 8,000} =$	1.45
COSTO HORARIO POR EQUIPO:		<u>\$ 16.20/Hr</u>
COMBUSTIBLE Y LUBRICANTES		
SUPERMEXOLINA	1.59Lt/Hr X \$ 0.80 =	1.27/Hr
ACEITE MOTOR	0.1 Lt/Hr X \$ 3.10	0.31
ESTOPA (FRANELA)	0.1 lt/Hr X \$ 3.50	<u>0.35</u>
COSTO HORARIO POR COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES		\$1.93/Hr
OPERACION:		
1 OPERADOR	$\frac{\$ 62.51/\text{Jornada}}{4.75 \text{ Hr}} =$	13.16
Hrs. Efectivas/día		
COSTO HORARIO POR OPERACION:		<u>\$13.20/Hr</u>

R E S U M E N

EQUIPO	\$ 16.20	
COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES	1.93	
OPERACION	<u>13.16</u>	
COSTO DIRECTO POR HORA	\$ 31.29/Hr	





ANALISIS DE COSTOS PARA VIBRADORES DE INMERSION

MODELO : WORMSER      MOTOR: BRIGGS & STRATTON

P.- PRECIO DE COMPRA DE LA MAQUINA: \$ 5,700.00

HV.- HORAS DE VIDA EFECTIVAS: 4,000

HA.- HORAS DE VIDA AL AÑO: 2,000

VR.- VALOR DE RESCATE: 10%

DEPRECIACION:  $\frac{0.9P}{HV} = \frac{0.9 \times \$ 5,700.00}{4,000} =$  \$ 1.28

INTERESES:  $\frac{(A + 1)}{2A} = 7.5 \% \text{ Anual}$  0.21

TRANSPORTACION Y SEGUROS 0.6 % Anaul = 0.01

REFACCIONES:  $\frac{0.8 P}{HV} = \frac{0.8 \times \$ 5,700.00}{4,000.}$  1.14

REPARACIONES:  $\frac{0.2 P}{HV} = \frac{0.2 \times \$ 5,700.00}{4,000.}$  0.28

COSTO HORARIO POR EQUIPO . . . . . \$ 2.92

VIBRADOR

COMBUSTIBLE Y LUBRICANTES

SUPERMEXOLINA	0.8 Lt/Hx.	\$ 0.80/Lt	0.64/Hr
ACEITE MOTOR	0.1 Lt/Hx	3.10/Lt	0.31
ESTOPA (FRANELA)	0.1 M/Hr.	3.50/M	0.35

COSTO HORARIO POR COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES \$ 1.30/Hr.

<u>OPERACION</u>	DIA	7° DIA	S. SOCIAL	IMP. EDUC.	TOTAL DIA
1 VIBRADOR	46.00	7.67	8.38	0.46	62.51

COSTO HORARIO POR OPERACION 8.81/Hr.

RESUMEN

EQUIPO	\$ 2.92/Hr
COMBUSTIBLE	1.30
OPERACION	7.81
<b>COSTO DIRECTO POR HORA</b>	<b>\$ 12.03/Hr</b>



ANALISIS DE COSTOS PARA CAMION DE VOLTEO DE 4 M3

MODELO: 1963 CHEVROLET MOTOR: CHEVROLET DIESEL 85 HP

P.- PRECIO DE COMPRA DE LA MAQUINA \$ 101,000.00  
LLANTAS 6 PIEZAS 8,820.00  
PRECIO SIN LLANTAS \$ 92,180.00

HV.- HORAS DE VIDA EFECTIVAS: 7000

HA.- HORAS DE VIDA AL AÑO: 2,000

VR.- VALOR DE RESCATE: 20%

DEPRECIACION:  $\frac{0.8 P}{HV} = \frac{0.8 \times \$ 92,180.00}{7,000} = \$ 10.53$

INTERESES:  $\frac{(A + 1)}{2A} = 6.4\% \text{ Anual} =$

TRANSPORTACION Y SEGUROS 1.6% Anual

REFACCIONES:  $\frac{0.6 P}{HV} = \frac{0.6 \times \$ 92,180.00}{7,000} = 7.90$

REPARACIONES:  $\frac{0.2 P}{HV} = \frac{0.2 \times \$ 92,180.00}{7,000} = 2.63$

COSTO HORARIO POREQUIPO : . . . . . \$ 24.01

COMBUSTIBLE Y LUBRICANTES

DIESEL 7.0, LT/Hr x \$ 0.35 2.45/Hr  
ACEITE DIESEL 0.14 LT/Hrx \$ 4.46 0.62  
ACEITE TRANSMISION 0.01 LT/Hr x \$ 4.45 0.04  
GRASA 0.01 Kg/Hr x \$ 5,568.00 0.06  
ESTOPA (FRANELA) 0.10 M/Hr x \$ 3.50 0.35  
FILTROS 0.02 Pza./H5 x \$ 21.30 0.43

COSTO HORARIO COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES \$ 3.95/Hr.

OPERACION

1 ÇHOFER \$ 62.51

COSTO HORARIO OPERACION \$ 7.81/Hr.



LLANTAS

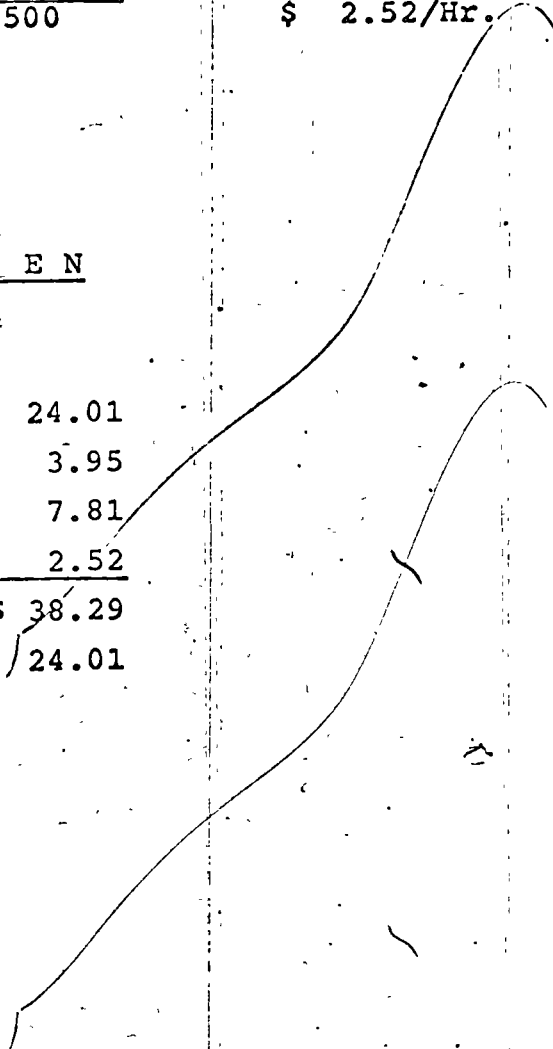
6 LLANTAS  
VIDA EN HORAS

\$ 8,820.00  
3,500

\$ 2.52/Hr.

R E S U M E N

EQUIPO	24.01
COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES	3.95
OPERACION	7.81
LLANTAS	<u>2.52</u>
COSTO DIRECTO HORA EFECTIVA	\$ 38.29
COSTO DIRECTO HORA OCIOSA	24.01





ANALISIS DE COSTOS PARA RETROEXCAVADORA

LLANTAS

6 LLANTAS	\$ 7,421.00	
VIDA EN HORAS	\$ 3,500Hrs.	2,12/H

OPERACION

OPERADOR	\$ 108.08/Jornada	
AYUDANTE	47.11/Jornada	
COSTO DIA OPERACION	\$ 155,19/Jornada	
COSTO HORARIO OPERACION	\$ 155.19 = 8 Hrs.	19.40/H

R E S U M E N

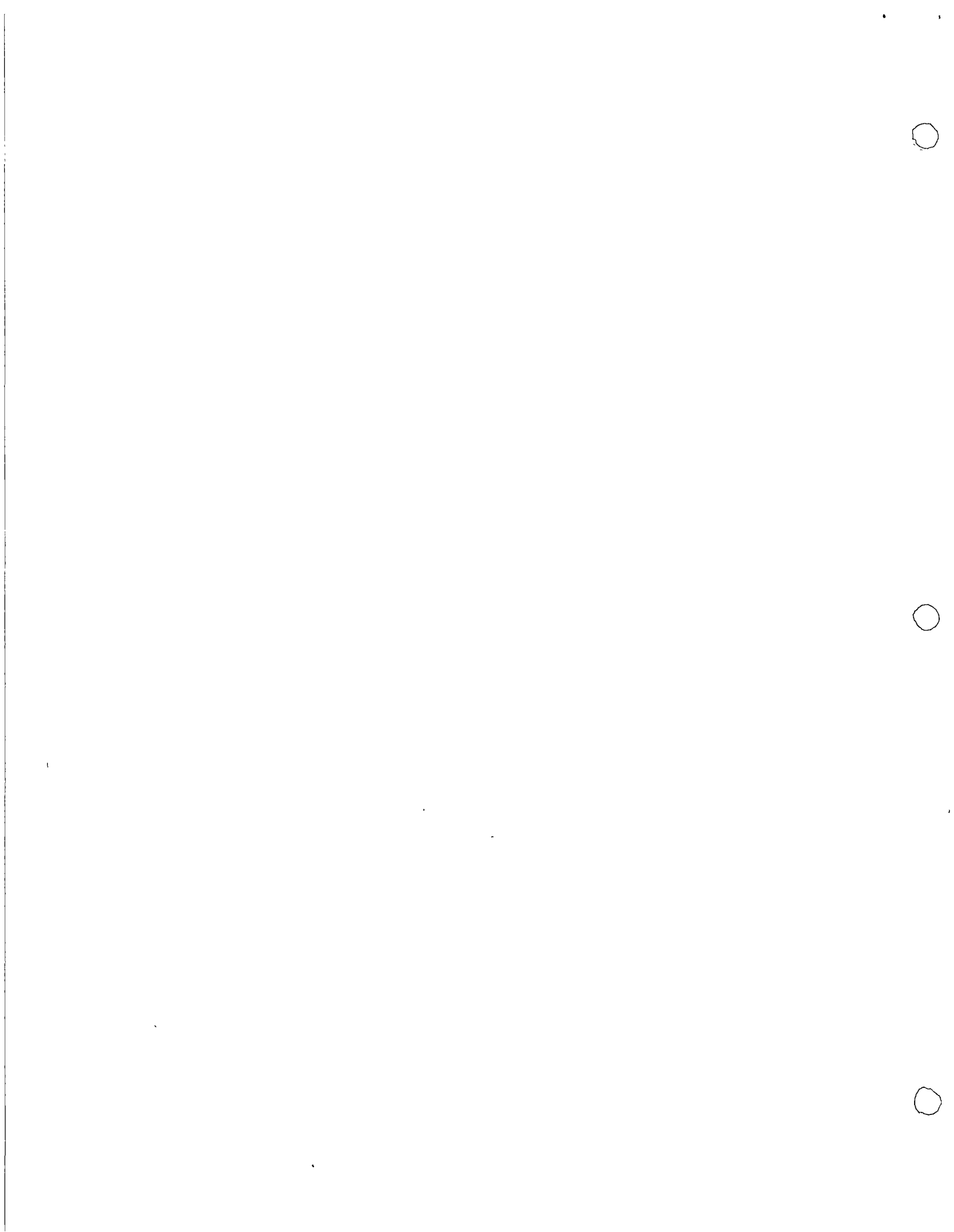
I.- EQUIPO	\$ 82.41/Hr.
II.- COMBUSTIBLES Y LUBRICANTES	4.68
III.- LLANTAS	2.12
IV.- OPERACION	19.40
COSTO HORA EFECTIVA	\$108.61/Hr.





ANALISIS DE COSTOS PARA RETROEXCAVADORAMODELO: YUMBO Mod. H 90MOTOR DIESEL 85 HP.

P.-	PRECIO DE LA COMPRA DE MAQUINA	\$ 666,000.00	
	CUCHARON TRAPEZOIDAL DE 500 LTS		
	CUCHARON FRONTAS DE 1.400 LTS.	58,100.00	
	SUMA:	\$ 724,100.00	
PLL.-	LLANTAS: 6 PIEZAS 7.50 x 18 (8 CAPAS)	7,421.00	
	PRECIO SIN LLANTAS	\$ 716,679.00	
HV.-	HORAS DE VIDA EFECTIVAS: 18,000		
HA.-	HORAS DE VIDA AL AÑO: 1,800.		
VR.-	VALOR DE RESCATE: 15%		
	DEPRECIACION $0.85 P = 0.85 \times \$ 716,679.00 =$		
	18,000		33.84/Hr
	INTERESES: $\frac{(A + 1)1}{2A} = 5.5\% \text{ Anual} =$		21.90
	TRANSPORTACION Y SEGUROS	1.6% Anual	6.37
	REFACCIONES		
	MANTENIMIENTO MAYOR Y MENOR	60% (DEPRECIACION)	20.30
	COSTO HORARIO POR EQUIPO		\$ 82.41/Hr
	<u>COMBUSTIBLE Y LUBRICANTES</u>		
	DIESEL	9.08 Lt/Hr. x \$ 0.35	3.18/Hr
	ACEITE DIESEL	0.14 Lt/Hr x \$ 4.46	0.62
	ACEITE TRANSMISION	0.01 Lt/Hr x \$ 4.45	0.04
	GRASA	0.01 Kg/Hr x \$ 5.568	0.06
	ESTOPA (FRANELA)	0.10 M/Hr x \$ 3.50	0.35
	FILTROS	0.02 Pza x \$ 21.30	0.43
	COSTO HORARIO COMBUSTIBLE LUBRICACION		\$ 4.68/hr.



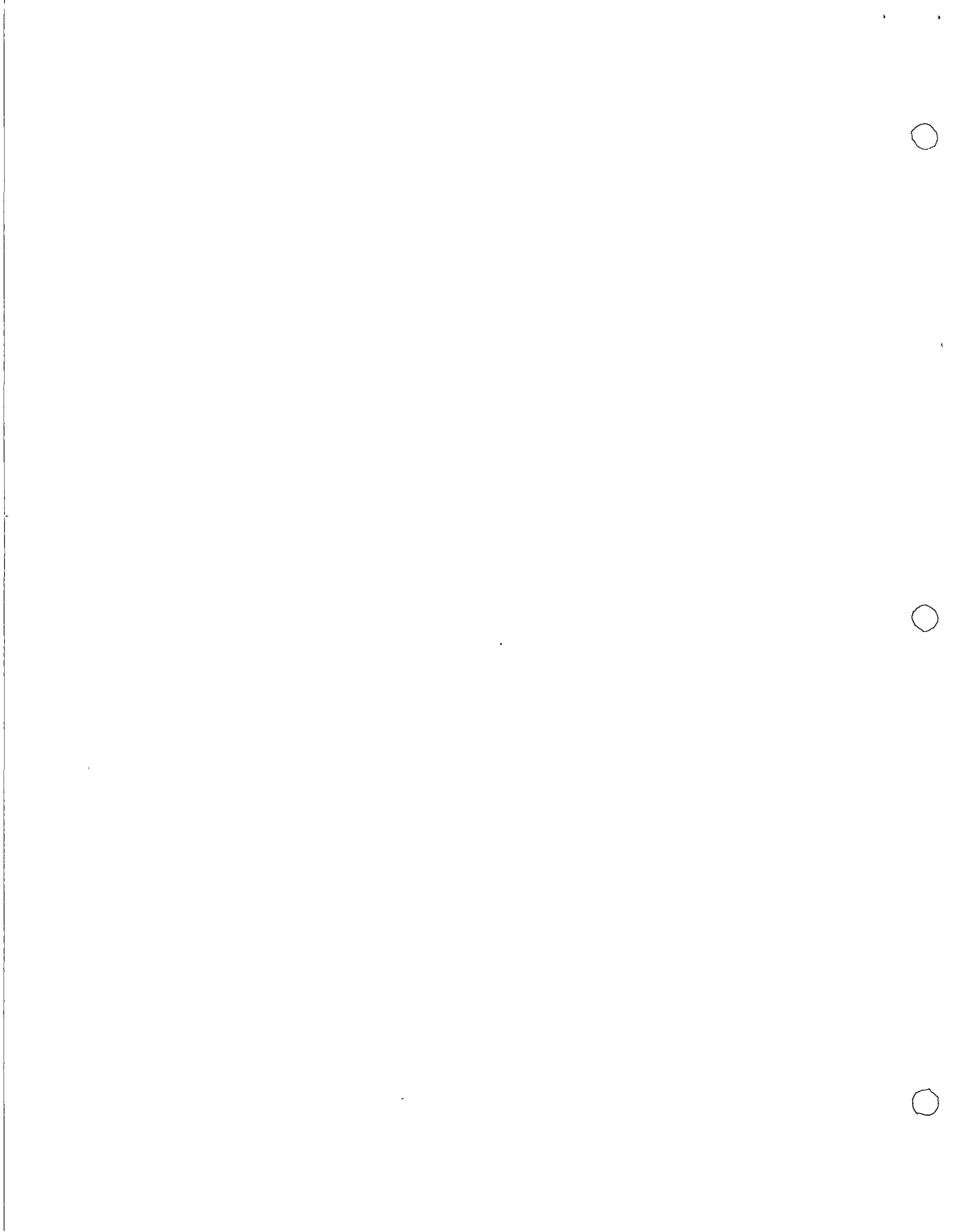
R E S U M E N

COSTOS DIRECTOS BASICOS DEL EQUIPO POR HORA

EQUIPO

COSTO HORARIO DIRECTO

Vibrador de inmersión . . . . .	\$ 12.03/hora
Mezcladora de concreto Worthington . . . . .	30.19
Malacate con pluma . . . . .	20.37
Camión Pipa Chevrolet Diesel . . . . .	39.03/H.efectiva
Camión Pipa Chevrolet Diesel . . . . .	24.75/H.ociosa
Camión de Volteo Chevrolet 4 M3 . . . . .	38.29/H. efectiva
Camión de Volteo Chevrolet 4 M3 . . . . .	24.01/H.ociosa
Retroexcavadora sobre neumáticos Mod. H 90 YUMBO . . . . .	108.61/hora
Rodillo vibratorio Liso Autopropulsado Mod. CG-10 DYNAPAC . . . . .	31.29/hora



B-IV-37.1 FIRME DE CONCRETO  $f'c = 150/\text{kg}/\text{cm}^2$  DE 10 cm DE ESPESOR CON AGREGADO MAXIMO DE 1 1/2", - INCLUYE NIVELADO Y MAESTRADO EN CUALQUIER NIVEL.

Concreto plantilla (Análisis Adj).  
0.10 x \$ 126.47

\$ 12.65/m<sup>3</sup>

Mano de obra:

$$MO = \frac{O + P}{15} = \frac{81.66}{15} \cong$$

5.44

Herramienta:

$$2\% (5.44) =$$

0.11

COSTO DIRECTO:

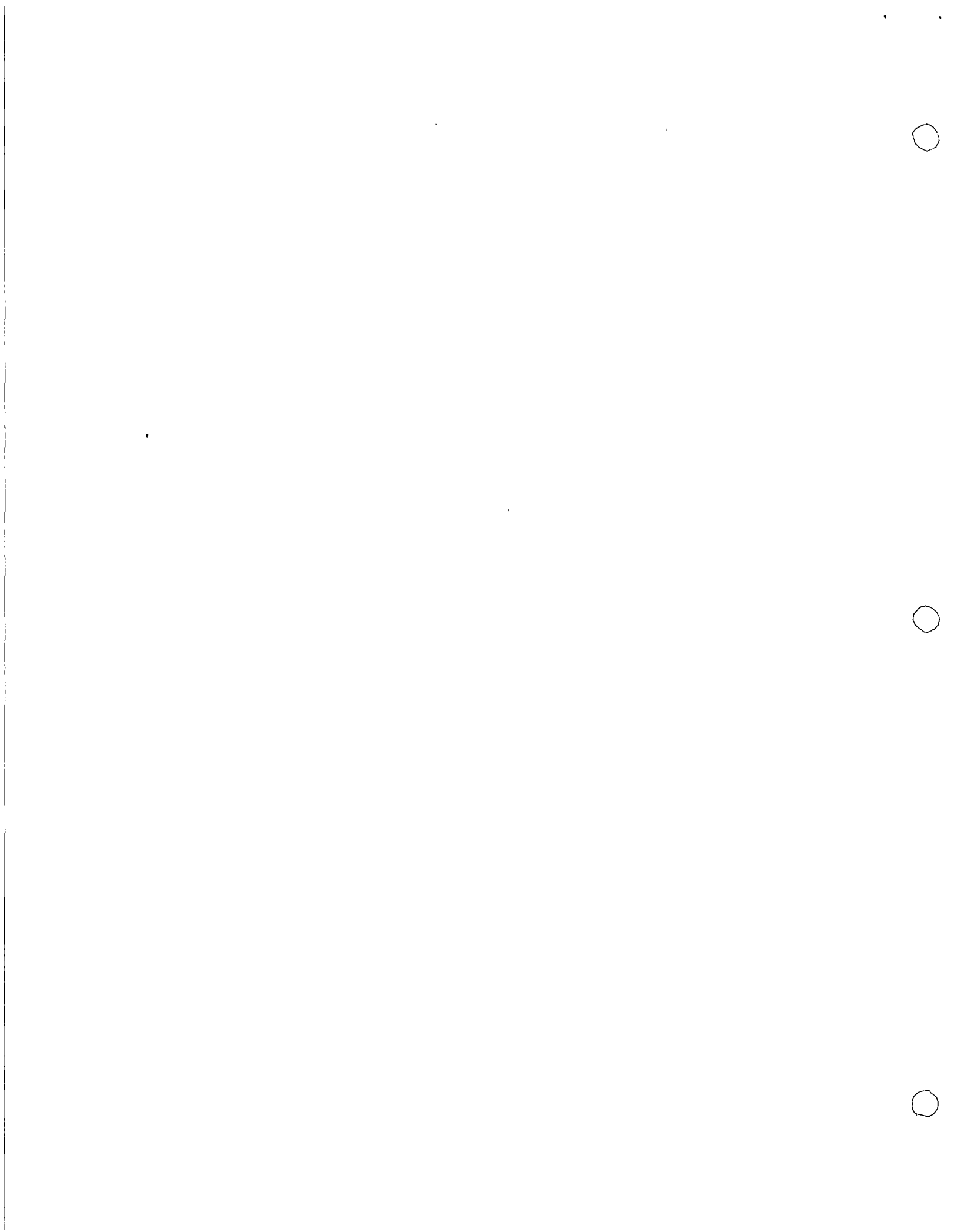
\$ 18.20

Indirectos y Utilidad 15%

2.73

PRECIO UNITARIO

\$ 20.93/m<sup>3</sup>



A-III-64.1 FIERRO ESTRUCTURAL DE PERFILES LAMINADOS (VIGUETAS, ANGULOS, PLACAS ETC.) INCLUYE SUMNISTRO, ENDEREZADO, CORTES, SOLDADURA ESMERILADO, MONTAJE, PINTURA ANTICORRO - SIVA Y ACARREOS.

Fierros estructural:

$$1.1 \text{ Kg} \times 3.50 = \$ 3.85/\text{kg}$$

Soldadura, esmeril, etc.:

$$0.1 \text{ Kg} \times \$ 11.55 = 1.16$$

Mano de Obra habilitado:

$$\text{MO} = \frac{0}{100} + \frac{4P}{\text{Kg}} = \frac{175.86}{100 \text{ Kg}} = 1.76$$

Mano de obra montaje:

$$\text{MO} = \frac{0}{200} + \frac{P}{\text{Kg}} = \frac{81.66}{200 \text{ Kg}} = 0.41$$

Equipo y Herramienta:

$$50\% (1.76 + 0.41) = 1.09$$

COSTO DIRECTO: \$ 8.27/Kg

Indirectos y Utilidad 15 %: 1.24

PRECIO UNITARIO: \$ 9.51/Kg





A-III-56.2 CONCRETO f'c=250Kg/cm2 EN PRETILES EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19mm (3/4") FABRICADO, COLADO, VIBRADO, CURADO Y PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj)

\$ 172.42/m3

Colado (Mano de Obra)

$$MO = \frac{0 + 4P}{3.5 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{3.5}$$

50.25

Vibrado (Análisis Adj)

$$\frac{12.03/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr}}{18 \text{ m}^3}$$

4.34

Elevado (Análisis Adj)

$$\frac{20.37/\text{Hr} \times 6.5\text{Hr}}{10}$$

13.24

Curado:

$$\frac{P}{10 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{10} =$$

3.14

Herramienta:

$$2\% (50.25 + 3.14)$$

1.07

COSTO DIRECTO:

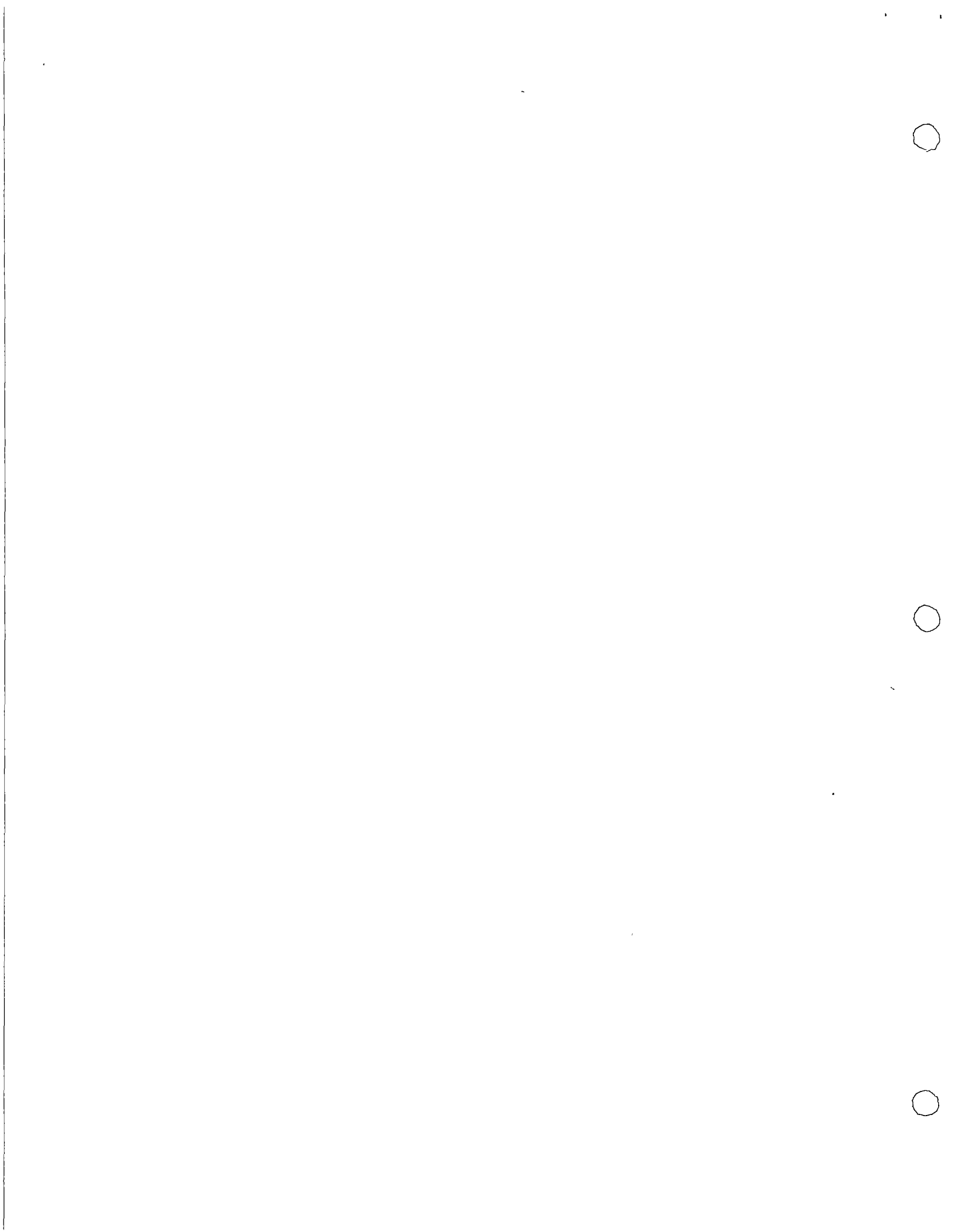
\$ 244.46

INDIRECTO Y UTILIDAD 15%:

36.67

PRECIO UNITARIO :

\$ 281.13



A-III-56-1 CONCRETO f'c=200Kg/cm2 EN PRETILES EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19mm (3/4") FABRICADO, COLADO, PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj) . 157.23/m3

Colado (Mano de Obra)

$$MO = \frac{0 + 4P}{3.5 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{3.5}$$

50.25

Vibrado (Análisis Adj)

$$\frac{12.03/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr}}{18 \text{ m}^3}$$

4.34

Elevado (Análisis Adj)

$$\frac{20.37/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr}}{10}$$

13.24

Curado:

$$\frac{P}{10 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{10}$$

3.14

Herramienta:

$$2\% (50.25 + 3.14) =$$

1.07

COSTO DIRECTO:

\$ 229.27

INDIRECTOS Y UTILIDAD 15% :

34.39

PRECIO UNITARIO:

\$ 263.66/m3



A-III-53-1 CONCRETO f'c=250Kg/cm2 EN ESCALONES, RAMPAS Y ALFARDAS DE ESCALERA EN CUALQUIER NIVEL CON - AGREGADO MAXIMO DE 38mm (1 1/2") FABRICADO, - COLADO, VIBRADO, CURADO Y PERFILADO, INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj) 157.23/m3

Mano de Obra Colado:

$$MO = \frac{0 + 4P}{3.5 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{3.5} = 50.24$$

Vibrado (Análisis Adj)

$$\frac{\$ 12.03/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr.}}{18 \text{ m}^3} = 4.34$$

Elevado (Análisis Adj)

$$\frac{\$ 19.37/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr.}}{10 \text{ m}^3} = 13.24$$

Curado:

$$\frac{P}{12 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{12} = 2.62$$

Herramienta:

$$2\% (50.24 + 2.62) = 1.06$$

COSTO DIRECTO: \$ 228.72

Indirectos y Utilidad 15%: 34.31

PRECIO UNITARIO: \$ 263.03/m3



A-III-46.1 CONCRETO f'c-250Kg/cm2 EN FALDONES EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19 mm (3/4") FA - BRICADO, COLADO, VIBRADO, CURADO, RECORRIDO, Y PERFILADO, INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL DE MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj.) 172.42/m3

Colado: (Mano de Obra)

$$MO = \frac{O + 4P}{3.5 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{3.5 \text{ m}^3}$$

50.25

Vibrado (Análisis Adj.)

$$\frac{12.03/h \times 6.5 \text{ h}}{18 \text{ m}^3} =$$

4.34

Elevado (Análisis Adj.)

$$\frac{20.37/h \times 6.5 \text{ h}}{10} =$$

13.24

Herramienta:

2% (50.25)

1.01

COSTO DIRECTO: \$ 241.24

Indirectos y Utilidad 15%: 36.19

PRECIO UNITARIO: \$ 277.43/m3





A-III-46.- CONCRETO f'c= 200 Kg/cm<sup>2</sup> EN FALDONES EN CUAL-  
QUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19 mm (3/4")  
FABRICADO, COLADO, VIBRADO, CURADO, RECORRIDO  
Y PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL  
PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj) \$ 157.23/m<sup>3</sup>

Colado (Mano de Obra)

$$MO = \frac{0 + 4P}{3.5 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{3.5 \text{ m}^3}$$

50.24

Vibrado (Análisis Adj)

$$\frac{12.03/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr}}{18 \text{ m}^3}$$

4.34

Elevado (Análisis Adj)

$$\frac{20.37/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr}}{10}$$

13.24

Herramienta:

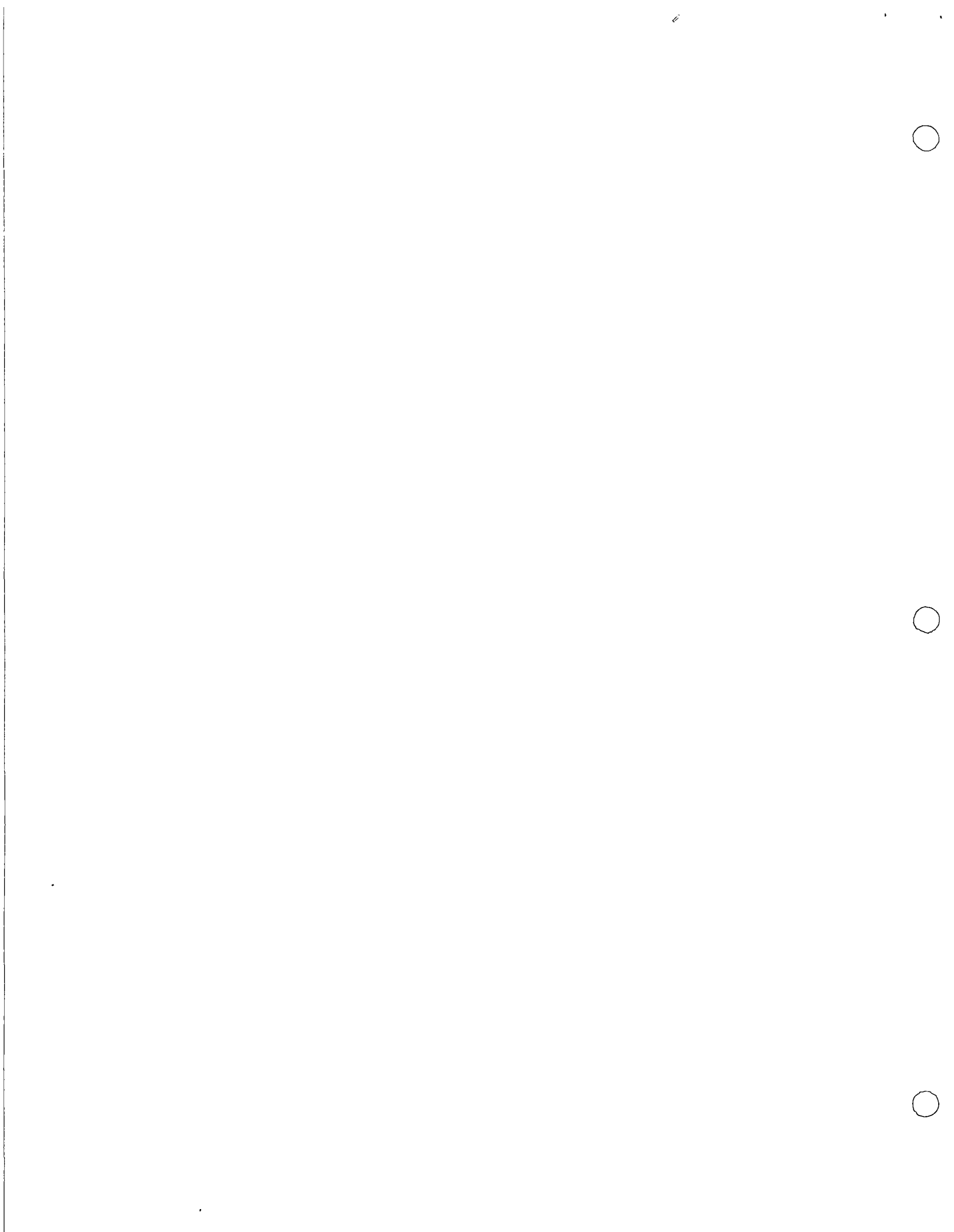
$$2\% (50.24) =$$

1.00

COSTO DIRECTO: \$ 226.05

Indirectos y Utilidad 15% : 33.91

PRECIO UNITARIO \$ 259.96/m<sup>3</sup>



A-III-42-1 CONCRETO f'c=250Kg/cm2 EN LOSAS Y TRABES EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19mm (3/4") FABRICADO, COLADO, VIBRADO - CURADO Y PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj.)

172.42/m3

Mano de obra colado:

MO =  $\frac{0 + 7P}{10 \text{ m}^3} = \frac{270.06}{10 \text{ m}^3} =$

27.01

Vibrado (Análisis Adj.)

$\frac{12.03/h \times 6.5 h}{20 \text{ m}^3} =$

3.91

Elevado (Análisis Adj.)

$\frac{20.37/h \times 6.5 h}{20 \text{ m}^3} =$

6.62

Curado:

$\frac{P}{20} = \frac{31.40}{20 \text{ m}^3} =$

1.57

Herramienta:

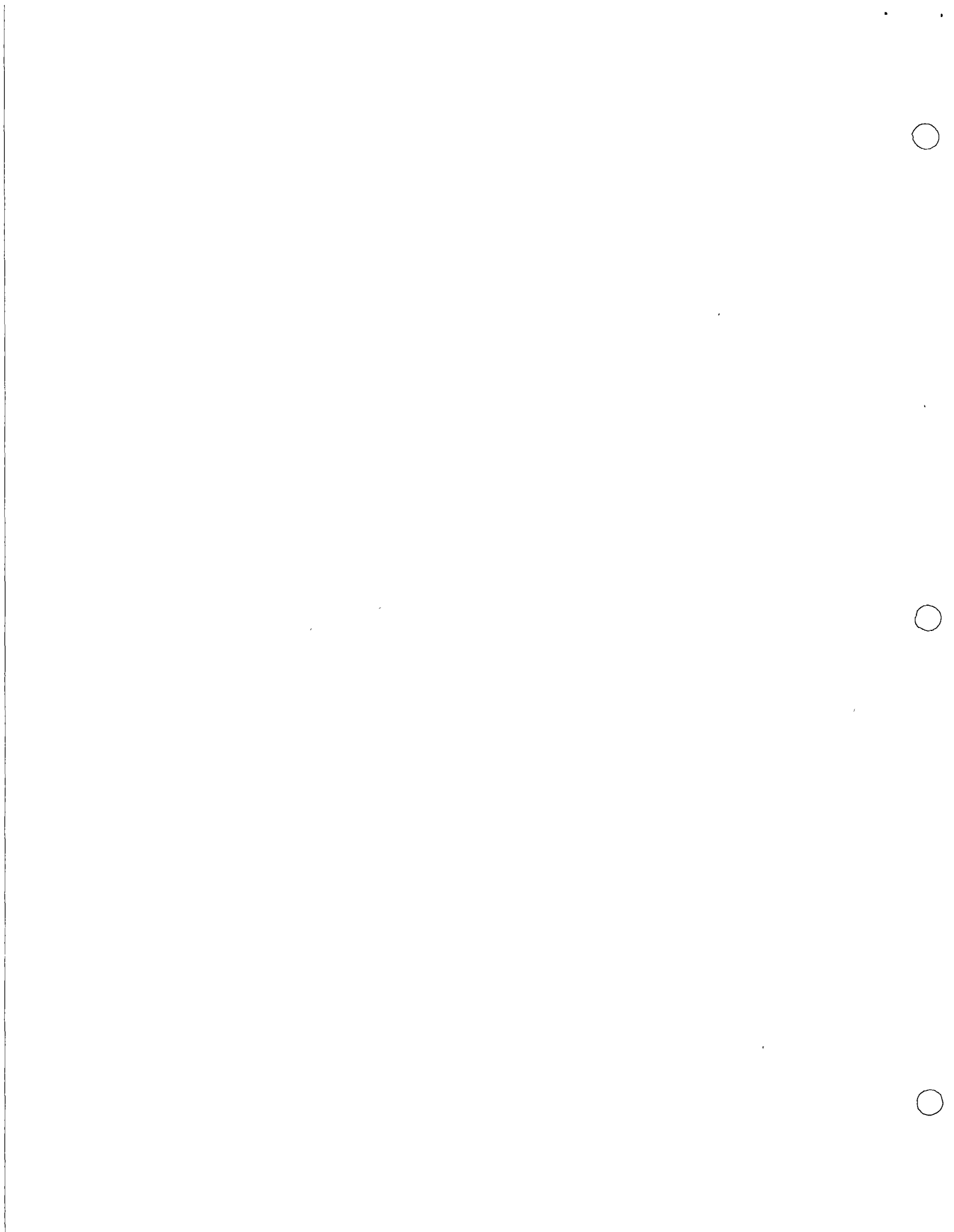
2% (27.01 + 1.57)

0.57

COSTO DIRECTO: \$ 212.09

Indirecto y Utilidad 15%: 31.81

PRECIO UNITARIO: \$ 243.90/m3



42  
A-III- CONCRETO  $f'c=200\text{Kg/cm}^2$  EN LOSAS Y TRABES EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19mm (3/4) FABRICADO, COLADO, VIBRADO, CURADO Y - PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj.) 157.23/m<sup>3</sup>

Mano de Obra colado:

$$MO = \frac{0 + 7P}{10 \text{ m}^3} = \frac{270.06}{10 \text{ m}^3} =$$

27.01

Vibrado (Análisis Adj. )

$$\frac{12.03/h \times 6.5 \text{ h}}{20 \text{ m}^3} =$$

3.91

Elevado (Análisis Adj.)

$$\frac{20.37/h \times 6.5 \text{ h}}{20 \text{ m}^3} =$$

6.62

Curado:

$$\frac{P}{20} = \frac{31.40}{20 \text{ m}^3} =$$

1.57

Herramienta:

$$2\% (27.01 + 1.57)$$

0.57

COSTO DIRECTO: \$ 196.90

Indirecto y Utilidad 15%: 29.54

PRECIO UNITARIO : \$ 226.44/m<sup>3</sup>



0.0022

A-III-40-1 CONCRETO f'c = 250Kg/cm2 EN COLUMNAS EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19 mm (3/4") FABRICADO, COLADO, VIBRADO, CURADO, PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj) \$ 172.42

Colado:

$$MO = \frac{0 + 4P}{3 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{3 \text{ m}^3} = 58.62$$

Vibrado: (Análisis Adj)

$$\frac{\$ 12.03/h \times 6.5 \text{ h}}{17 \text{ m}^3} = 4.60$$

Elevado (Análisis Adj)

$$\frac{\$ 20.37/h \times 6.5}{10 \text{ m}^3} = 13.24$$

Curado:

$$MO = \frac{P}{10 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{10 \text{ m}^3} = 3.14$$

Herramienta:

$$2\% (58.62 + 31.4) = 1.24$$

COSTO DIRECTO: \$ 253.26

Indirectos y Utilidad 15% : 37.99

PRECIO UNITARIO: \$ 291.25/m3





A-III-40 CONCRETO f'c = 200Kg/cm2 EN CLOUMNAS EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19mm (3/4") FABRICADO, COLADO, VIBRADO, CURADO Y PERFILADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj) \$ 157.23

Mano de Obra Colado =

$$MO = \frac{0 + 4P}{3} = \frac{175.86}{3} =$$

58.62

Vibrado: (Análisis Adj)

$$\frac{12.03/Hr \times 6.5 Hr}{17 M3}$$

4.60

Elevado (Análisis Adj)

$$\frac{20.37/Hr \times 6.5 Hr}{10 M3}$$

13.24

Curado:

$$\frac{P}{10 M3} = \frac{31.40}{10}$$

3.14

Herramienta:

$$2\% (61.76 + 3.14)$$

1.24

COSTO DIRECTO \$238.07

Indirectos y Utilidad 15% 35.71

PRECIO UNITARIO: \$273.78/Ton



A-III-40 CONCRETO f'c = 200 Kg/cm2 EN COLUMNAS EN CUALQUIER NIVEL CON AGREGADO MAXIMO DE 19mm (3/4") FABRICADO COLADO, VIBRADO, CURADO Y PERFILADO INCLUYENDO DES- PERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO:

Concreto (Análisis Adj) \$ 157.23

Mano de Obra Colado:

MO =  $\frac{0}{3} + \frac{4P}{3} = \frac{175.86}{3}$  58.62

Vibrado: (Análisis Adj)

$\frac{12.03/Hr \times 6.5 Hr}{17 m3} =$  4.60

Elevado (Análisis Adj)

$\frac{20.37/Hr \times 6.5 Hr}{10 m3} =$  13.24

Curado:

$\frac{P}{10 m3} = \frac{31.40}{10} =$  3.14

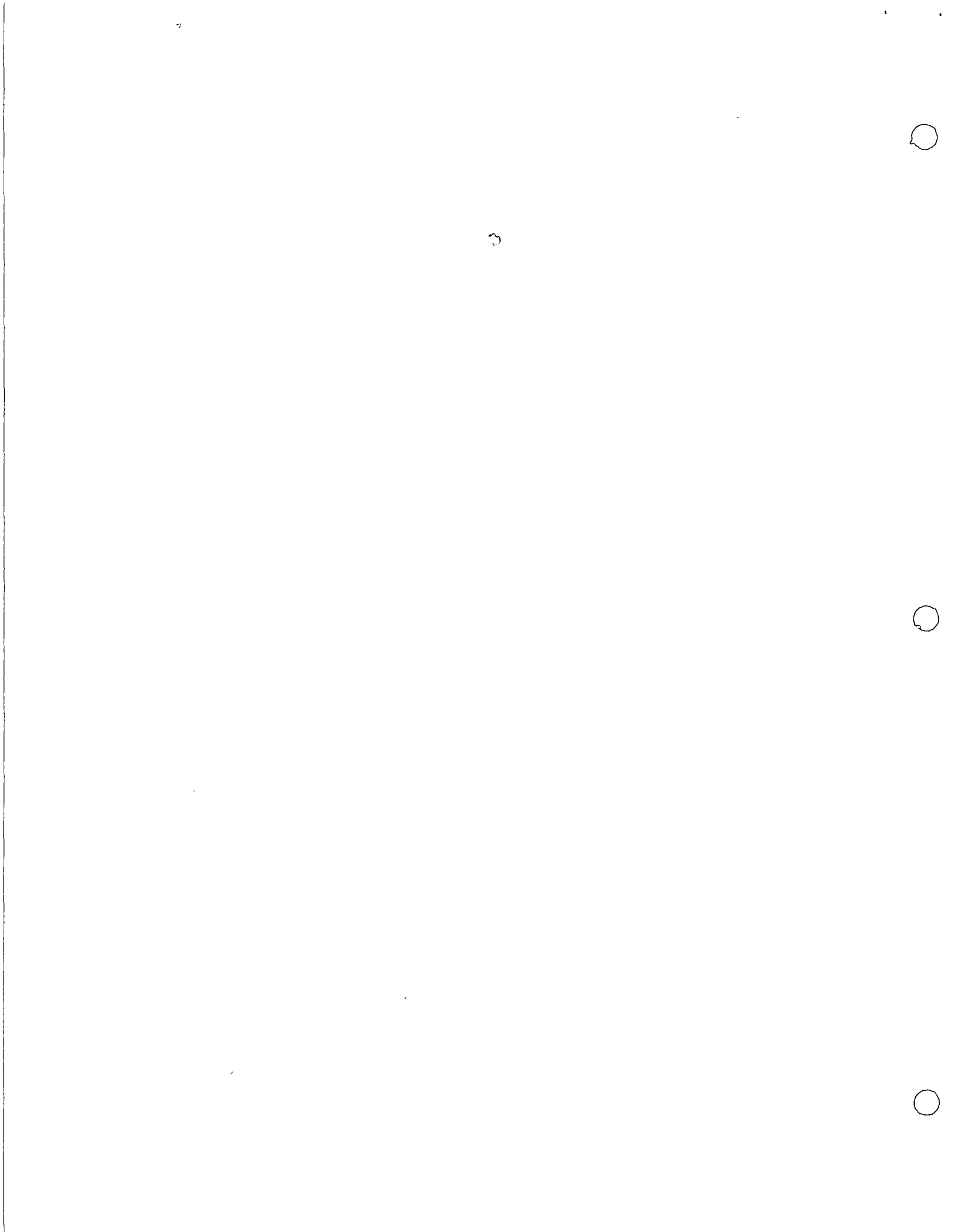
Herramienta:

2% ( 58.62 + 3.14) 1.24

COSTO DIRECTO: \$ 238.07/m<sup>3</sup>

Indirectos y Utilidad 15% 35.71

PRECIO UNITARIO: \$ 273.78/m<sup>3</sup>



A-III-34 ACERO DE REFUERZO f's 2000 Kg/Cm<sup>2</sup> DE LOS NUMEROS 6.7,8,10 Y 12 (3/4, 7/8, 1 1/2") HABILITADO Y ARMADO EN SUPERESTRUCTURA, INCLUYENDO GANCHOS, ALAMBRE, TRASLAPES, SILLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MÀNO Y ACARREOS.

Acero:

$$1.07 \times \$ 2.100.00/\text{Ton} = \$ 2,247.00/\text{Ton}$$

Alambre #18

$$10 \text{ Kg/Ton} \times \$ 2.95/\text{Kg} = 29.50$$

Mano de Obra (habilitado y Armado)

$$\text{MO} = \frac{0 + a}{0.200} = \$ \frac{89.57}{0.200} = 447.85$$

Mano de obra (elevado)

$$1 \quad \text{MO} = \frac{2 \text{ P}}{2.4} = \$ \frac{62.80}{2.4} = 26.16$$

Herramienta:

$$2\% (447.85 + 26.16) = 9.48$$

COSTO DIRECTO: \$ 2,759.99/Ton

Indirectos y Utilidad 15% 414.00

PRECIO UNITARIO: \$ 3,173.99/Ton



A-III-33 ACERO DE REFUERZO f's = 2000Kg/cm<sup>2</sup> DEL No. 5  
(5/8") HABILITADO Y ARMADO EN SUPERESTRUCTURA.  
INCLUYEN DO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SI -  
LLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y  
ACARREOS.

Acero:

1.07 X \$ 2.120.00/Ton

\$ 2,268.40/Ton

Alambre # 18.

10 Kg/Ton X \$ 2.95 /Kg

29.50

Mano de obra (habilitado)

$$MO = \frac{O + A}{0.170} = \frac{89.57}{1.170}$$

555.42

Mano de obra (Elevado)

$$MO = \frac{2P}{2.2} = \frac{62.80}{2.2}$$

28.54

Herramienta:

2% (555.42 + 28.54)

11.11

COSTO DIRECTO: \$ 2,892.97/Ton

Indirectos y Utilidad 15% 429.66

PRECIO UNITARIO: \$ 3,322.63/Ton





A-III-32 ACERO DE REFUERZO f's = 2000Kg/cm<sup>2</sup> DEL No. 4  
(1/2") HABILITADO Y ARMADO EN SUPERESTRUCTURA  
INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLE-  
TAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y A -  
CARREOS.

Acero:

1.07 X \$ 2.140. 00/Ton \$ 2,289.80/Ton

Alambre No. 18

10 Kg/Ton X \$ 2.95 /Kg1 29.50

Mano de Obra (habilitado)

MO =  $\frac{0}{0.170} + A = \$ \frac{89.57}{0.170} =$  526.88

Mano de obra (Elevado)

MO =  $\frac{2 P}{2} = \$ \frac{62.80}{2} =$  31.40

Herramienta:

2% ( 526.88 + 31.40) 11.16

COSTOS DIRECTO:

\$ 2,88.74/Ton

Indirectos y Utilidad 15%

433.31

PRECIO UNITARIO

\$ 3,322.05/Ton



A-III-31 ACERO DE REFUERZO f's - 2000Kg/cm2 DEL No. 3 (3/8") HABILITADO Y ARMADO EN SUPERESTRUCTURA INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y A - CARREO.

Acero:

1.07 X \$ 2,160.00/Ton \$ 2,311.20/Ton

Alambre #18

10 Kg X \$ 2.95/kg 29.50

Mano de obra (habilitado y armado)

MO =  $\frac{O + A}{0.170} = \frac{89.57}{0.170}$  526.88

Mano de obra (Elevado)

MO =  $\frac{2P}{2} = \frac{62.80}{2}$  31.40

Herramienta:

2% ( 526.88 + 31.40) 11.16

COSTO DIRECTO: \$ 2,910.14/Ton

Indirectos y Utilidad 15% 436.52

PRECIO UNITARIO \$ 3,346.66/Ton



A-III-30 ACERO DE REFUERZO f's =200 Kg/cm<sup>2</sup> DEL No. 2.5  
 HABILITADO Y ARMADO EN SUPERESTRUCTURAL, IN -  
 CLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS  
 DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y ACARREOS.

Acero:

1.07 X \$ 2.260.00/Ton \$ 2,418.20/Ton

Alambre # 18

10Jg/Ton X \$ 2.95/kg 29.50

Mano de obra (habilitado y armado)

MO =  $\frac{O + A}{.150} = \frac{89.57}{0.150}$  597.13

Mano de obra (elevado)

MO =  $\frac{2P}{2} = \frac{62.80}{2} =$  31.40

Herramienta:

2% (597.13 + 31.40) 12.57

COSTO DIRECTO: \$ 3,088.80/Ton

Indirectos y Utilidad 15% 463.32

PRECIO UNITARIO: \$ 3,552.12/Ton



A-III-29 ACERO DE REFUERZO f's = 1,265 Kg/cm<sup>2</sup> DE No. 2 (1/4") HABILITADO Y ARMADO EN SUPERESTRUCTURA INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y ACARRREOS.

Acero de 1/4" (Alambrón)

1.07 X \$ 2,100.00 = \$ 2,247.00/Ton

Alambre #18

10 Kg/Ton X \$ 2.956kg 29.50

Mano de obra

MO =  $\frac{O}{0.150} + \frac{A}{0.150} = \frac{89.57}{0.150} = 597.13$

Herramienta

2% (597.13) 11.94

COSTO DIRECTO: \$ 2,885.57/Ton

Indirectos y Utilidad 15% 432.83

PRECIO UNITARIO: \$ 3,318.40/Ton





A-III-27 CIMBRA COMUN DE CONTACTO Y DESCIMBRA EN ESCALERAS INCLUYENDO CHAFLANES.

Madera: 8.5/Pt/m2 X \$ 2.00/PT \$ 17.00/m2

Clavo: 0.52 Kg/m2 X \$ 3.60/kg = 1.87

Alambre # 18 0.06 Kg/m2 X \$ 2.95/kg 0.18

Manode obra MO =  $\frac{0}{9} + \frac{2A}{9} = \frac{128.88}{9} = 14.32$

Chaflanes: 0.5 m/m2 X \$ 1.60/m 0.80

Herramienta 2% (14.32) 0.29

COSTO DIRECTO: \$ 34.46/m2

Indirectos y Utilidad 15% 5.17

PRECIO UNITARIO: \$ 39.63/m2



A-III-26.1 CIMBRA APARENTE DE CONTACTO Y DESCIMBRA EN PRETILES INCLUYENDO CHAFLANES, BISELES, GOTEROS Y ENTRECALES EN CUALQUIER NIVEL.

Forro: Madera de triplay de 16 mm para acabado aparente (24 usos)  
1/24 X \$ 43.00/m2 = 1.79/m2

Molducreto:  
1.8 Lt/M2 X \$ 1.50/Lt 2.70

Madera en cachetes, atiezadores, etc.  
7.12PT/M2 X \$ 2.00 P.T. 14.24

Clavo  
0.04 Kg/M2 X \$ 3.60/Kg 0.14

Alambre # 18  
0.03 Kg/M2 X \$ 2.95/Kg 0.09

Chaflán  
1.0 M/M2 X \$ 1.60/M 1.60

Bisel  
1.0 M/M2 X \$ 1.60/M 1.60

Gotero  
1.0 M/M2 X \$ 1.60/M 1.60

Mano de obra  
MO =  $\frac{0 + 2A}{7} = \frac{128.88}{7}$  18.41

Herramienta  
2% (18.41) 0.37

COSTO DIRECTO: \$ 42.54/M2  
Indirectos y Utilidad 15%: 6.38  
PRECIO UNITARIO \$ 48.92



A-III-23 CIMBRA APARENTE DE CONTACTO Y DESCIMBRA EN FALDONES HASTA UNA ALTURA DE 4.80m INCLUYENDO CHAFLANES, BI=SELES, GOTEROS Y ENTRECALLE EN CUALQUIER NIVEL.

Forro: Madera triplay de 16mm para acabado aparente (24 usos) \$ 1.79/m2

Molducreto:

1.8 lto/m2 X \$ 1.50/lto 2.70

Madera en cachetes, atiezadores, etc.

7.12/PTm2 X \$ 2.00 14.24

Clavo

0.04kg/m2 X \$ 3.60/kg 0.14

Alambre # 18

0.03 Kg/m2 X \$ 2.95/kg 0.09

Chaflán:

1.0m/m2 X \$ 1.60/m 1.60

Bisel

1.0m/m2 X 1.60/m 1.60

Gotero

1.0 m/m2 X 1.60/m 1.60

Mano de obra

$MO = \frac{0 + 2A}{7} = \frac{128.88}{7} = 18.41$

Herramienta

2% (18.41) 0.37

COSTO DIRECTO: \$ 42.54

Indirectos y Utilidad 15%: 6.38

PRECIO UNITARIO: \$ 48.92/m2



A-III-11 ACERO DE REFUERZO f's = 2,000Kg/cm<sup>2</sup> DEL No. 4 (1/2") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y ACARREOS.

Acero:

1.07 X \$ 2,140.00/ton.      \$ 2,289.80/ton

Alambre # 18

10 Kg/ton X \$ 2.95/kg      29.50

Mano de Obra:

MO =  $\frac{O + A}{0.170} = \frac{89.57}{0.170} =$       526.88

Herramienta:

2% (526.88) =      10.54

COSTO DIRECTO      \$ 2,856.72/ton

Indirectos y Utilidad 15%      428.51

PRECIO UNITARIO      \$ 3,285.23/ton





A-III-9 CIMBRA COMUN DE CONTACTO Y DESCIMBRA DE LOSAS CON  
ALTURA MAXIMA DE ENTREPISO DE 4.80m EN CUALQUIER  
NIVEL INCLUYENDO CHAFLANES Y GOEROS

Forro de triplay (16mm) 1.79/m2  
1/24 X \$ 43.00/m2

Madera 7.54  
3.75 PT/m2 X \$ 2.00/PT

Clavo 1.44  
0.40Kg/m2 X \$ 3.60/kg

Mano de Obra 12.89  
MO =  $\frac{0 + 2A}{10} = \$ \frac{128.88}{10}$

Chaflanes 0.19  
0.12M/M2 X \$ 1.60/m

Goteros 0.19  
0.12M/M2 X \$ 1.60/M

Herramienta 0.26  
2% (12.89)

COSTO DIRECTO: \$ 24.26  
Indirectos y Utilidad 15%: 3.63  
PRECIO UNITARIO: \$ 27.90/m2



A-III-5 CIMBRA COMUN DE CONTACTO Y DESCIMBRA DE TRABES CON ALTURA MAXIMA DE ENTREPISO DE 4.80m EN CUALQUIER NIVEL, INCLUYE CHAFLANES

Madera  
7.1 PT/M2 X \$ 2.00/PT ... \$ 14.20/M2

Clavo  
0.2kg/M2 X \$ 3.60/kg 0.72

Chaflanes  
1 m/M2 X \$ 1.60/M 1.60

Mano de Obra  
 $MO = \frac{0}{8} + \frac{2A}{8} = \$ \frac{128.88}{8}$  16.11

Herramienta  
2% (16.11) 0.32

COSTO DIRECTO: \$ 32.95/m2  
Indirectos y Utilidad 15%: 4.94  
PRECIO UNITARIO: \$ 37.89/m2



A-III-1 CIMBRA COMUN. DE CONTACTO Y DESCIMBRA EN COLUMNAS CON UNA ALTURA MAXIMA DE ENTREPISO DE 4.80 m EN CUALQUIER NIVEL. INCLUYE CHAFLANES

Madera	5.43 PT/m2 X \$ 2.00/PT	\$ 10.86/m2
Clavo	0.06Kg/m2 X \$ 3.60/Kg	0.22
Alambre #18	0.02Kg/m2 X \$ 2.95/kg	0.09
Chaflanes	2.5m/m2 X \$ 1.60m	4.00
Mano de Obra	MO = $\frac{0}{8.5} + \frac{2A}{8.5} = \frac{128.88}{8.5}$	15.16
Herramienta	2% (15.16)	0.30
	COSTO DIRECTO	\$ 30.63/m2
	Indirectos y Utilidad 15%	4.59
	PRECIO UNITARIO	\$ 35.22/m2



A-II-21.2 CONCRETO  $f'c = 250\text{Kg/cm}^2$  EN MUROS DE CONTENCIÓN CON AGREGADO MÁXIMO DE 38mm (1 1/2") FABRICADO, COLADO VIBRADO Y CURADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj)

\$ 172.42

Mano de Obra Colado =

$$M) = \frac{0. + 7P}{6.72 \text{ m}^3} = \frac{\$ 270.06}{6.72}$$

40.19

Vibrado

$$\frac{\$ 12.03/\text{Hr} \times 6.5 \text{ Hr.}}{23.4 \text{ m}^3} =$$

3.34

Curado

$$MO = \frac{P}{15} = \$ \frac{31.403}{15}$$

2.09

Herramienta

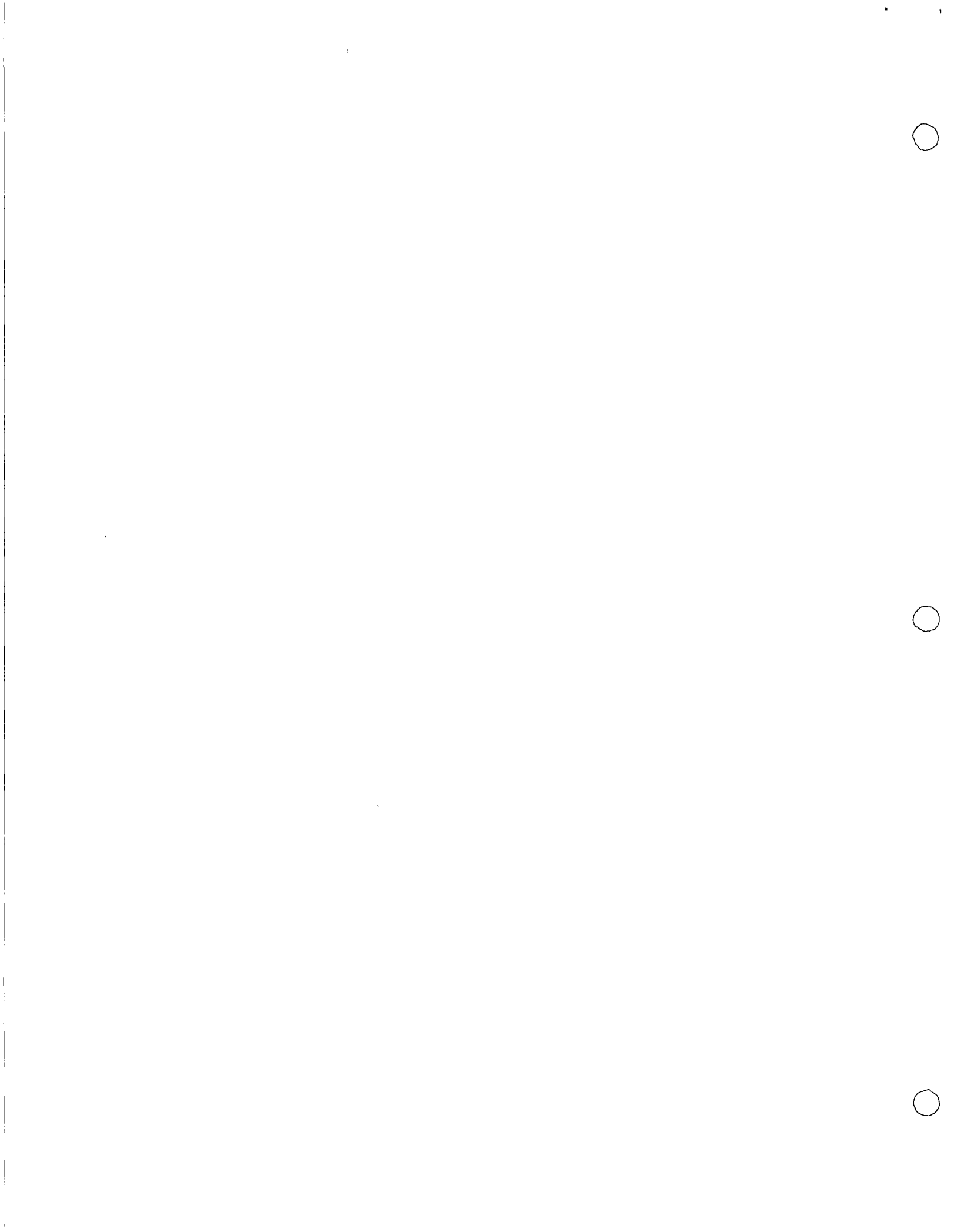
$$2\% (40.19 + 2.09)$$

0.85

COSTO DIRECTO: \$ 218.88/m<sup>3</sup>

Indirectos y Utilidad 15%: 32.83

PRECIO UNITARIO: \$ 251.71/m<sup>3</sup>





A-II-21.1 CONCRETO f'c = 250Kg/cm<sup>2</sup> EN CIMENTACION (LOSAS, ZAPATAS, CONTRATRABES, DADOS Y TRABES DE LIGA) CON AGREGADO MAXIMO DE 38mm (1 1/2") FABRICADO COLADO, VIBRADO Y CURADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto (Análisis Adj) \$ 172.42/m<sup>3</sup>

Colado

$$\frac{0 + 4P}{7 \text{ m}^3} = \frac{175.85}{7 \text{ m}^3}$$

25.12

Vibrado

$$\frac{\$ 12.03/h \times 6.5 \text{ h}}{23.4 \text{ m}^3} =$$

3.34

Curado

$$\frac{P}{15} = \frac{31.40}{15} =$$

2.09

Herramienta

$$2\% ( 25.12 + 2.09 )$$

.54

COSTO DIRECTO:

\$ 203.51/m<sup>3</sup>

Indirectos y Utilidad 15%

30.53

PRECIO UNITARIO:

\$ 234.04/m<sup>3</sup>



000000

A-II-20 CIMBRA APARENTE DE CONTACTO Y DESCIMBRA EN MUROS DE CONTENCION CON ALTURA MAXIMA DE 4.60 m.

Forro: Madera de Triplay de 16 mm. para acabado aparente (24 usos) 1,79/m2

Molducreto: 1.8 litro/m2 X \$ 1.50/litro 2.70

Madera en cãchetes, atiezadores, etc. 7.12 PT/m2 X \$ 2.00/PT 14.24

Clavo 0.04Kg/m2 X \$ 3.60Kg 0.14

Alambre # 18 0.03 Kg/m2 X \$ 2.95/Kg 0.09

Chaflán 1.0m/m2 X \$ 1.60 m 1.60

Bisel 1.0 m/m2 X \$ 1.60/m 1.60

Gotero 1.0 m/m2 X \$ 1.60/m 1.60

Mano de Obra m MO=  $\frac{0 + 2A}{7} = \frac{128.88}{7} =$  18.41

Herramienta 2% (18.41) 0.37

COSTO DIRECTO: \$ 42.54/m2

Indirectos y Utilidad 15%: 6.38

PRECIO UNITARIO: \$ 48.92/m2



A-II-21 CONCRETO f'c-210Kg/cm2 EN CIMENTACION (LOSAS, ZAPATAS, CONTRATRABES, DADOS Y TRABES DE LIGA) CON AGREGADO MAXIMO DE 38mm (1 1/2") FABRICADO COLADO VIBRADO Y CURADO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concreto f'c - 210Kg/cm2 (Análisis Adj) \$ 157.23

Mano de Obra colado

MO -  $\frac{0}{7 \text{ m}^3} + \frac{4P}{7} = \frac{175.86}{7} = 25.12$

Vibrado

\$  $\frac{1.203 \times 6.5 \text{ Hr}}{23.4} = 3.34$

Curado

$\frac{P}{15} = \frac{31.40}{15} = 2.09$

Herramienta

2% (25.12 + 2.09) = 0.54

COSTO DIRECTO: \$ 188.32

Indirectos y Utilidad 15% : 28.25

PRECIO UNITARIO \$ 216.57/m3



A-II-18 CIMBRA COMUN DE CONTACTO Y DESCIMBRA EN ZAPATAS  
CONTRATRABES, DADOS Y TRABES DE LIGA

Madera

$$5.20 \text{ P.T./M2} \quad \$ 2.00/\text{P.T.} = \quad \$ 10.40/\text{m2}$$

Clavo

$$0.120\text{Kg/M2} \quad \times \quad \$ 3.60/\text{Kg} = \quad 0.43/$$

Alambre # 18

$$0.025 \text{ Kg/M2} \quad \times \quad \$ 2.95/\text{Kg} = \quad 0.07$$

Mano de Obra

$$\text{MO} = \frac{0 + A}{9.5 \text{ M2}} = \$ \frac{89.57}{9.5} = \quad 9.42$$

Herramienta

$$2\% (9.43) \quad \quad \quad 0.19$$

COSTO DIRECTO:  $\$ 20.51/\text{M2}$

Indirectos y Utilidad 15%;  $3.08$

PRECIO UNITARIO:  $\$ 23.59/\text{M2}$





A-II-13 ACERO DE REFUERZO f's 2000Kg/cm2 DE LOS NUMEROS 6,7,8,10 y 12 (3/4", 7/8", 1", 1 1/4", y 1 1/2") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION, INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y ACARREOS.

Acero

1.07 X \$ 2.100.00 \$ 2,247.00/Ton

Alambre # 18

10Kg/Ton X \$ 2.95/Kg. 29.50

Mano de Obra

MO =  $\frac{0 + A}{0.170} = \frac{89.57}{0.170} = 526.88$

Herramienta

2% (526.88) 10.54

COSTO DIRECTO: \$ 2,813.92/Ton

Indirectos y Utilidad 15%: 422.09

PRECIO UNITARIO: \$ 3,236.01/Ton



A-II-12 ACERO DE REFUERZO f's = 2000Kg/cm<sup>2</sup> DEL/No. 5  
(5/8") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION  
INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SI-  
LLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y  
ACARREOS.

Acero

1.07 X \$ 2.120.00/Ton \$ 2,268.40/Ton

Alambre No. 18

10 Kg/Ton X \$ 2.95/Kg 29.50

Mano de Obra

MO =  $\frac{O + A}{0.170} = \$ \frac{89.57}{0.170} = 526.88$

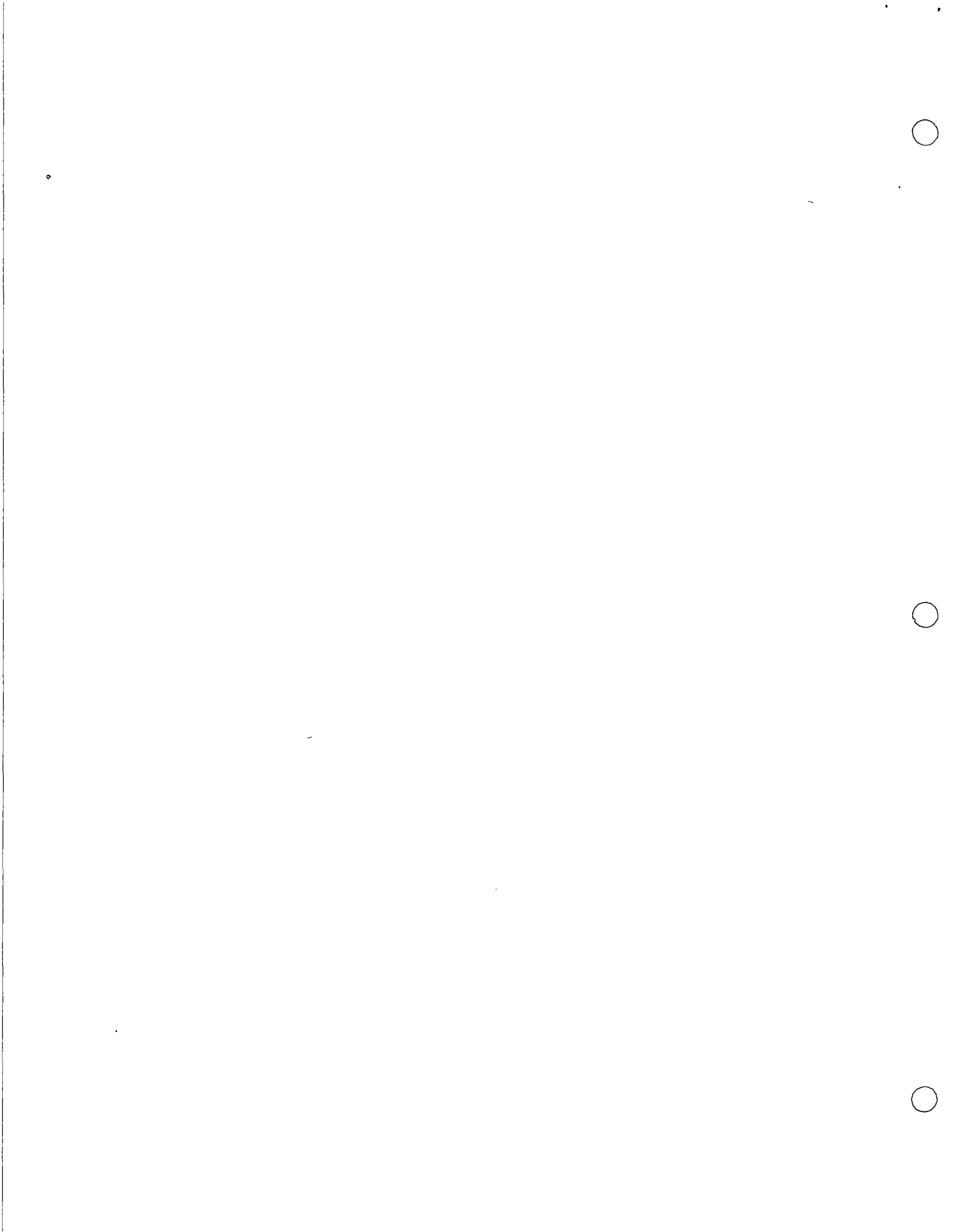
Herramienta

2% (526.88) = 10.54

COSTO DIRECTO: \$ 2,835.32/Ton

Indirectos y Utilidad 15%: 425.30

PRECIO UNITARIO: \$ 3,260.62/Ton



A-II-12 ACERO DE REFUERZO f's = 2000Kg/cm<sup>2</sup> DEL No.5  
(5/8") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION -  
INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SI-  
LLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO  
Y ACARREOS.

Acero

1.07 X \$ 2,120.00/Ton \$ 2,268.40/Ton

Alambre No. 18

10 Kg/Ton X \$ 2.95/kg. 29.50

Mano de Obra

MO =  $\frac{O}{0.170} + \frac{A}{0.170} = \$ \frac{89.57}{0.170}$  526.88

Herramienta

2% (526.88) =

10.54

COSTO DIRECTO

\$ 2,835.32/Ton

Indirectos y Utilidad 15%:

) 425.30

PRECIO UNITARI:

\$ 3,260.62/Ton



030036

A-11-10 ACERO DE REFUERZO f's= 2000Kg/cm2 DEL No. 3  
 (3/8") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION  
 INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SI-  
 LLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO  
 Y ACARREOS.

Acero

1.07 X \$ 2,160.00/Ton \$ 2,311.20/Ton

Alambre # 18

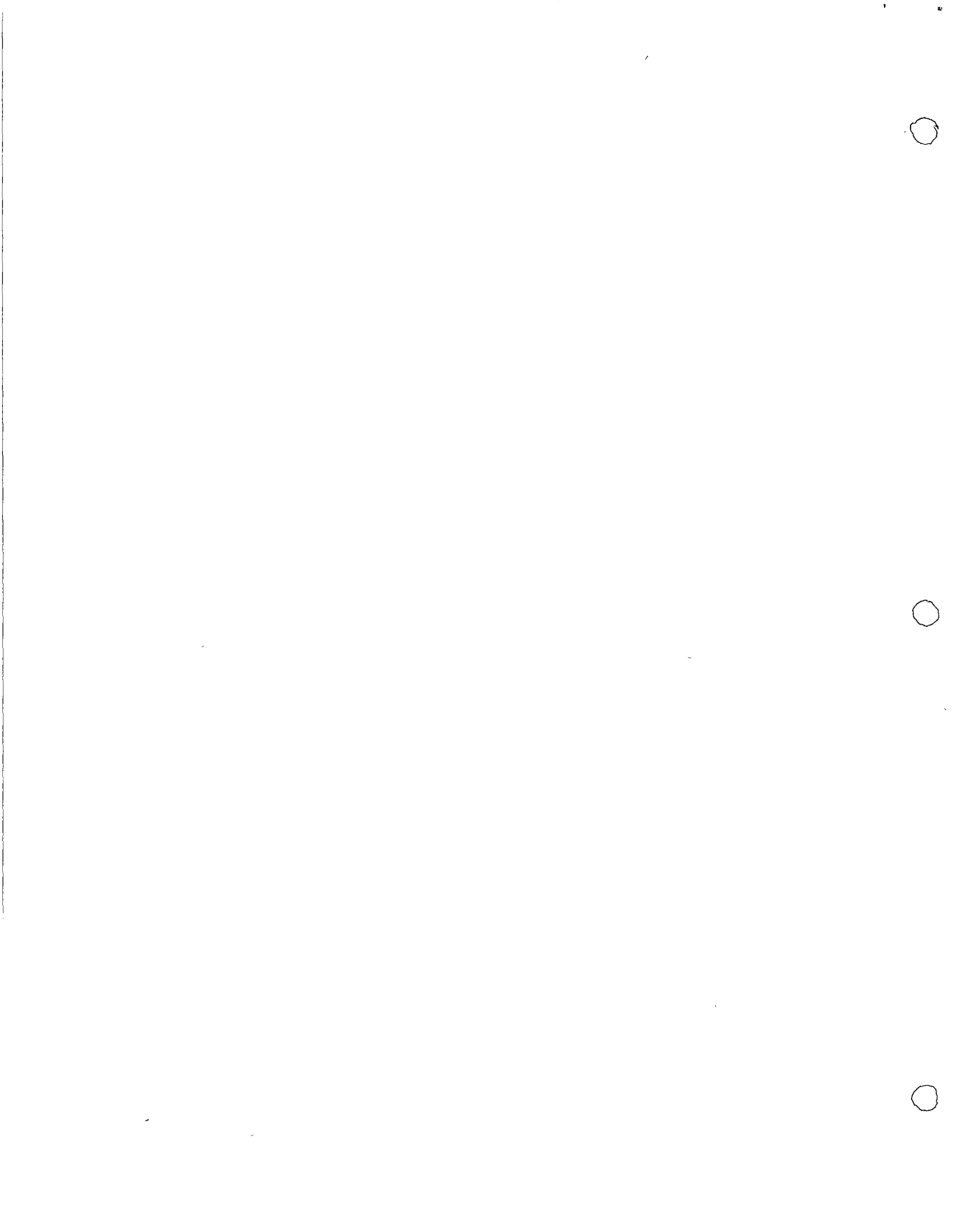
10Kg/Ton X \$ 2.95/kg 29.50

Mano de Obra

MO =  $\frac{O}{0.170} + A$  = \$  $\frac{89.57}{0.170}$  = 526.88

Herramienta

2% (525.88) =	<u>10.54</u>
COSTO DIRECTO	2,878.12/Ton
INDIRECTOS Y UTILIDAD 15%	<u>\$ 431.72</u>
PRECIO UNITARIO	<u>\$ 3,309.84/Ton</u>





000037

A-II-9 ACERO DE REFUERZO f's = 2000Kg/cm2 DEL No.2.5 (5/16") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION, INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS, DESPERDICIOS, FLETES OBRA DE MANO Y ACARRREOS.

Acero

1.07 X \$ 2,260.00/Ton \$ 2,418.20/Ton

Alambre # 18

10 Kg/Ton X \$ 2.95 Kg 29.50

Mano de Obra

MO =  $\frac{0 + A}{0.150} = \frac{89.57}{0.150} = 597.13$

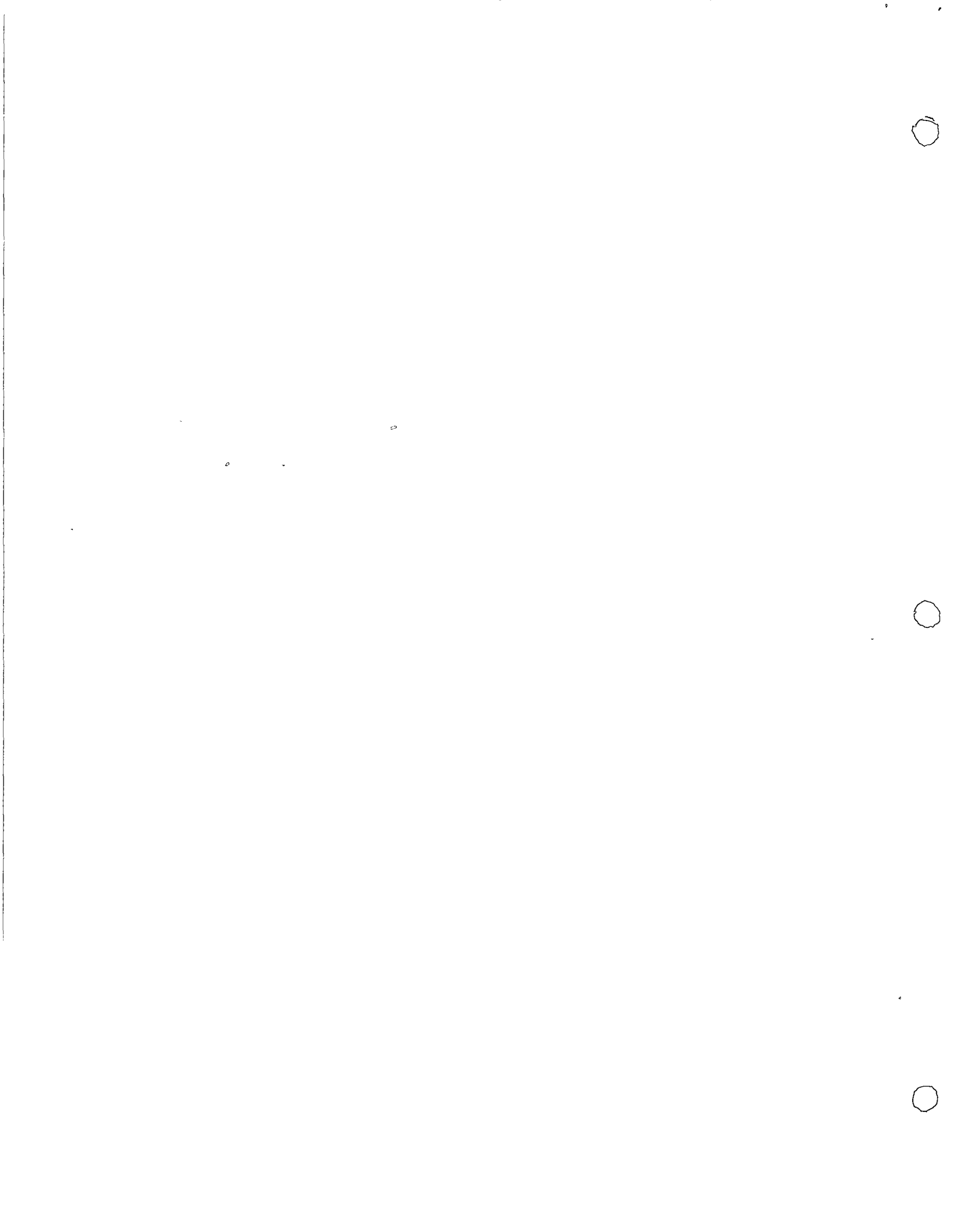
Herramientas

2% ( 597.13) 11.94

COSTO DIRECTO: \$ 3,056.77/Ton

Indirectos y Utilidad 15%: 458.52

PRECIO UNITARIO: \$ 3,515.29/Ton



020003

A-II-9 ACERO DE REFUERZO f's = 2000Kg/cm2 DEL No.2.5 (5/16") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION, INCLUYENDO ALAMBRE, GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS, DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y ACARRREOS.

Acero

1.07 X \$ 2,260.00/Ton \$ 2,418.20/Ton

Alambre # 18

10 Kg/Ton X \$ 2,95/Kg 29.50

Mano de Obra

$$MO = \frac{O + A}{0.150} = \frac{89.57}{0.150} = 597.13$$

Herramientas

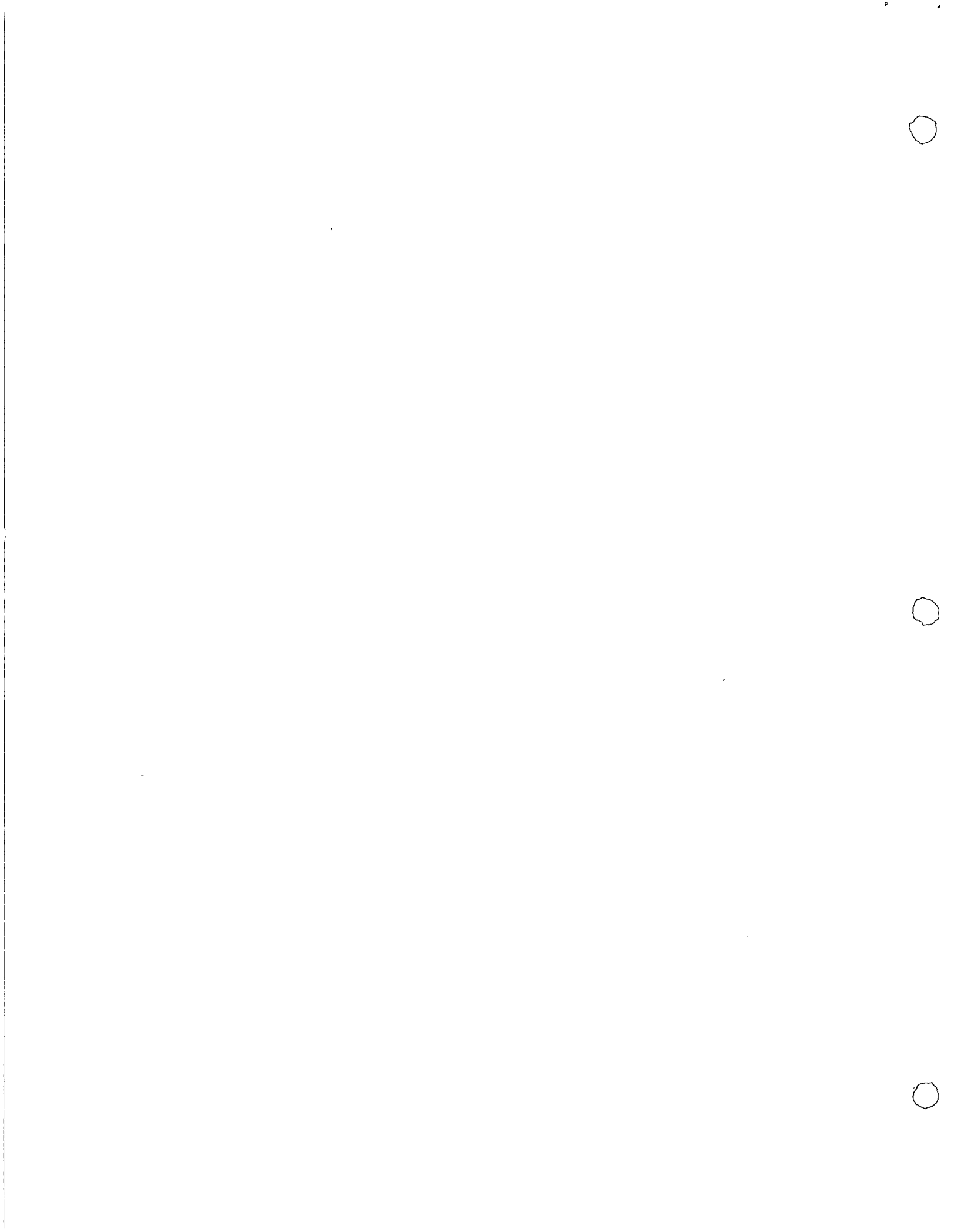
2% (597.13)

11.94

COSTO DIRECTO: \$ 3,056.77/Ton

Indirectos y Utilidad 15% 458.52

PRECIO UNITARIO: \$ 3,515.29/Ton



000039

A-II-8 ACERO DE REFUERZ O f's = 1 265Kg/cm<sup>2</sup> DEL No. 2  
(1/4") HABILITADO Y ARMADO EN CIMENTACION IN -  
CLUYENDO ALAMBRE GANCHOS, TRASLAPES, SILLETAS  
DESPERDICIOS, FLETES, OBRA DE MANO Y ACARREOS.

Acero 1/4" (Alambrón)

1.07 X \$ 2 100.00/Ton \$ 2,247.00/Ton

Alambre # 18

10 Kg/Ton X \$ 2.95/kg 29.50

Mano de obra

MO =  $\frac{O + A}{0.150} = \frac{89.57}{0.150} =$  597.13

Herramienta

2% (597.13)

11,94

COSTO DIRECTO:

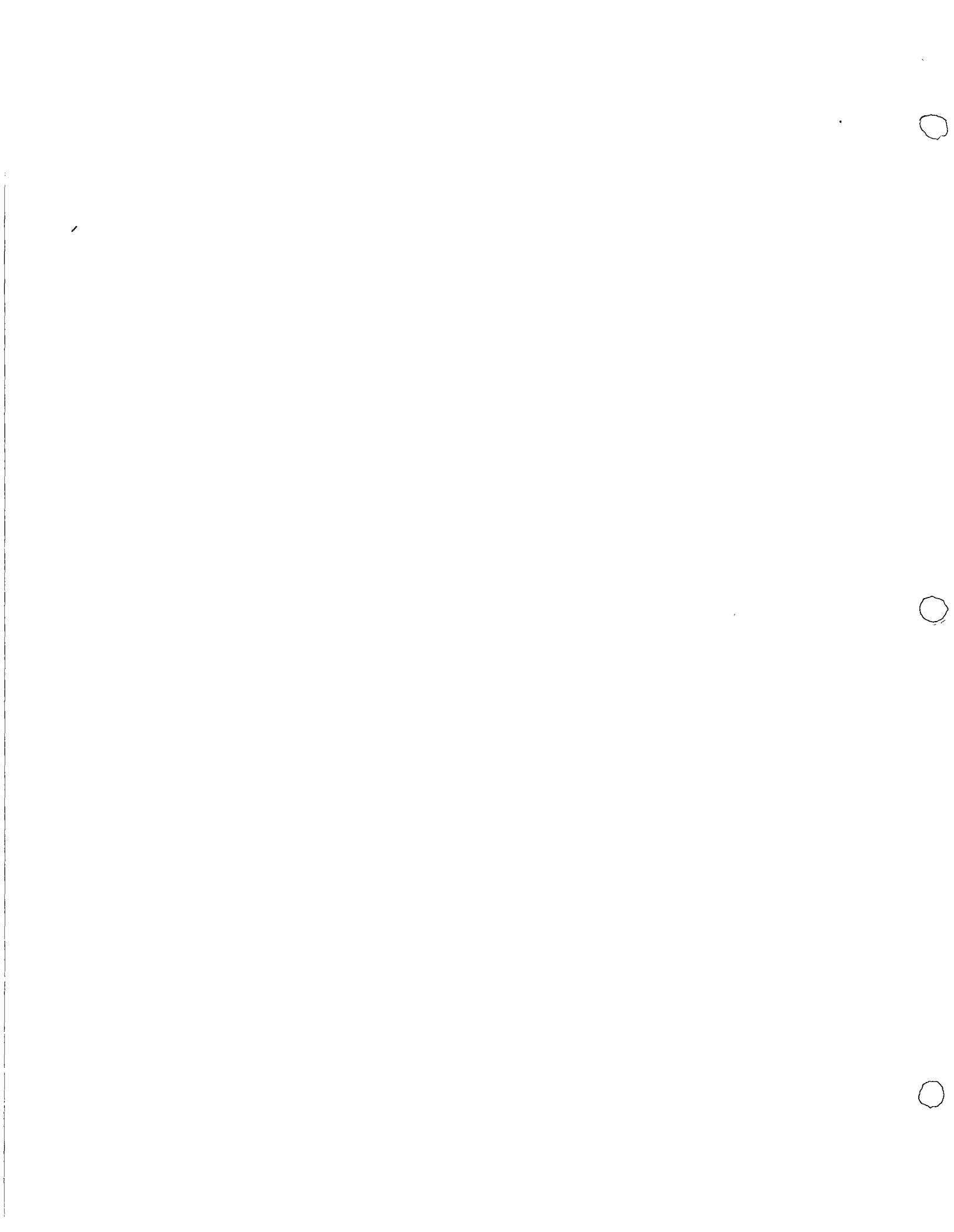
\$ 2,885.57/Ton

Indirectos y Utilidad 15%:

432.84

PRECIO UN ITARIO:

\$ 3,318.41/Ton



A-II-7.- MAMPOSTERIA DE PIEDRA DE LA REGION, ASENTADA CON MORTERO DE CEMENTO ARENA 1:5 INCLUYENDO MATERIALES Y MANO DE OBRA.

Piedra de la Región:

1.5 M3/M3 X \$ 18.00 = \$ 27.00/m3

Mortero Cemento: Arena 1:5

0.33 M3/M3 X \$ 126.24 = 41.66

Mano de obra:

MO =  $\frac{O + P}{2} = \frac{81.66}{2} = 40.83$

Herramienta:

2% (40.83) =

0.82

COSTO DIRECTO: \$ 110.31/M3

Indirecto y Utilidades 15% 16.55

PRECIO UNITARIO \$ 126.86/M3





A-II-4.1 PLANTILLA DE 7cm DE ESPESOR DE CONCRETO  
f'c - 100 Kg/cm<sup>2</sup> Y AGREGADO MAXIMO DE  
1".

Concreto en Plantilla (Análisis Adj) 10.12  
0.08 X \$ 126.47/m<sup>3</sup>

Mano de Obra:

$$\frac{0 + P}{25 \text{ m}^2} = \frac{81.66}{25}$$

3.22

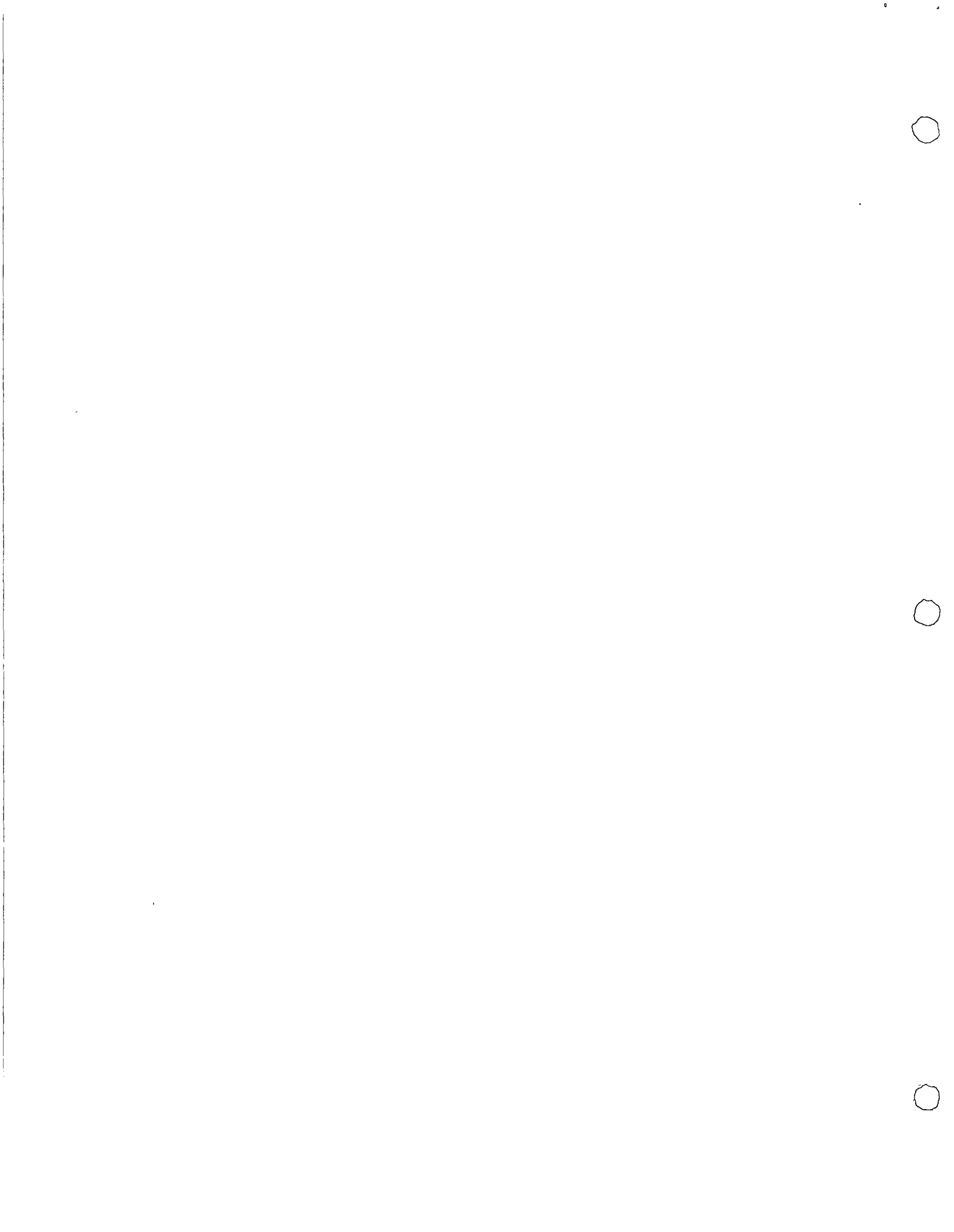
Herramienta:

2% (3.27) 0.06

COSTO DIRECTO: \$ 13.40

Indirectos y Utilidad 15% 2.01

PRECIO UNITARIO \$ 15.41/m<sup>2</sup>



A-II-4.1.- PLANTILLA DE 7 cm DE ESPESOR DE CONCRETO f'c - 100 Kg/cm2. Y AGREGADO MAXIMO DE - 1".

Concreto en Plantilla (Análisis Adj). \$ 10.12/M2

Mano de Obra:

$$\frac{O + P}{25 \text{ m}^2} = \frac{81.66}{25} =$$

3.22

Herramienta:

2% (3.27)

0.06

COSTO DIRECTO:

\$ 13.40/m2

Indirectos y Utilidad del 15%

2.01

PRECIO UNITARIO

\$ 15.41/m2



A-I-46 DREN PERIMETRAL FORMADO POR:

b) Relleno de Grava de 19mm (3/4")

Suministro de la grava \$ 40.00/m3

Formación del relleno:

$$\frac{P}{6 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{6 \text{ m}^3} = 5.23$$

Herramienta:

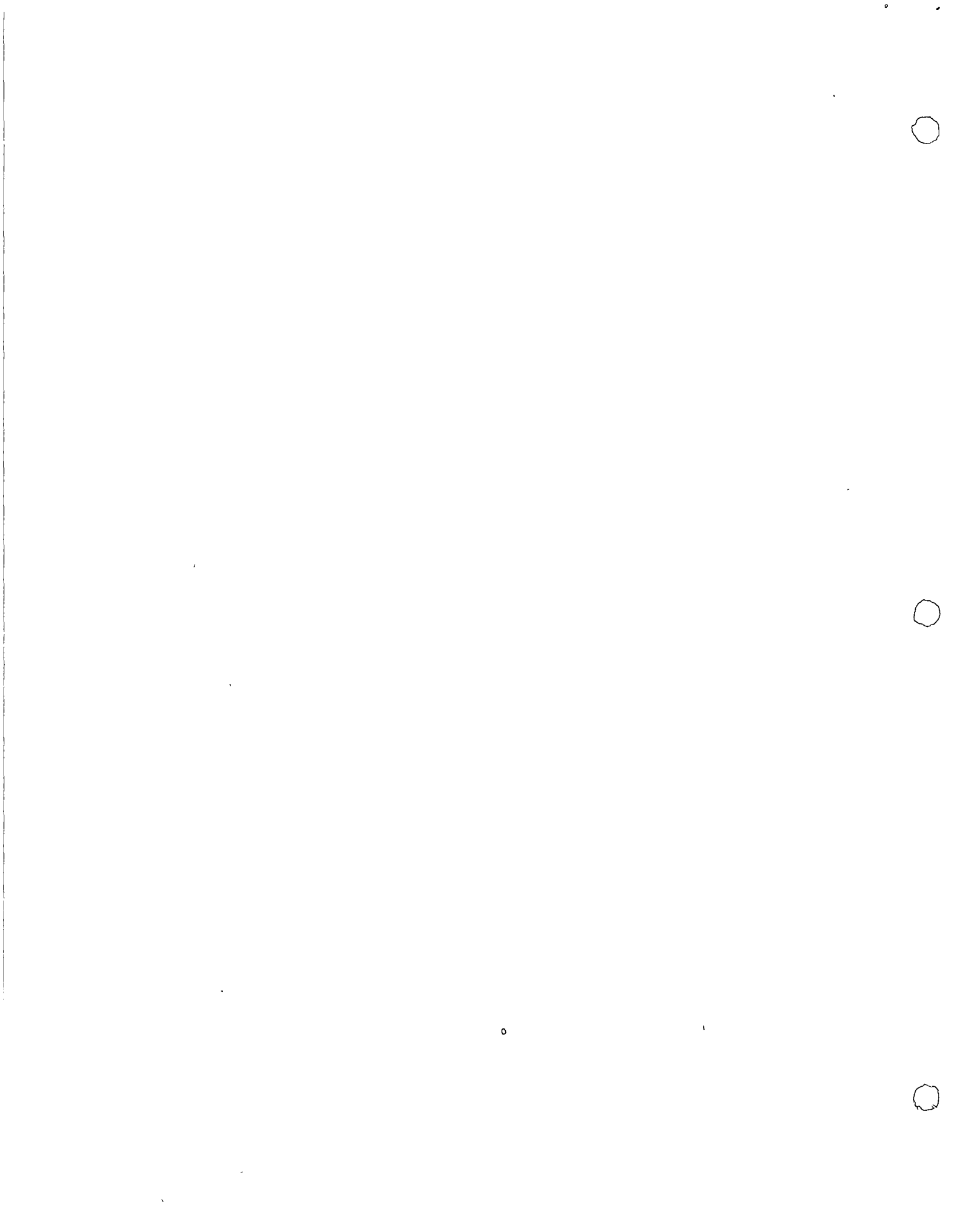
2% (5.23)

0.10

COSTO DIRECTO \$ 45.33/m3

Indirectos y Utilidad 15% 6.80

PRECIO UNITARIO \$ 52.13/m3



030071

A-I-46 DREN PERIMETRAL FORMADO POR:

a) Tubo de Concreto Ranurado de 20 cm. de Diámetro.

Suministro del tubo \$ 11.73/m

Colocación:

$$\frac{0}{15 \text{ m}} + \frac{P}{15 \text{ m}} = \frac{81.66}{15 \text{ m}} = 5.44$$

Mortero: (Análisis Adj).

0.01 m3/m \$ 116.41 1.16

Herramienta:

2% (5.44) 0.11

COSTO DIRECTO: \$ 18.44/m

Indirectos y Utilidad 15% 2.77=

PRECIO UNITARIO \$ 21.21/m





A-I-42.2 RELLENO DE CONCRETO SIMPLE  $f'c = 100 \text{ Kg/cm}^2$  EN CIMENTACION (LOSAS, ZAPATAS, CONTRABES DADOS Y TRABES DE LIGA CON A - GREGADO MAXIMO DE 38 mm (1 1/2") FABRICADO COLOCADO A VOLTEO INCLUYENDO DESPERDICIOS Y MATERIAL PARA MUESTREO.

Concrero: (análisis Adj) \$ 126.47

Colado:

$$\frac{0 + 4P}{7 \text{ m}^3} = \frac{175.86}{7 \text{ m}^3} =$$

25.12

Herramienta:

2% (25.12)

0.50

COSTO DIREC. \$152.09/m<sup>3</sup>

Indirectos y Utilidad 15%

22.81

PRECIO UNITARIO

\$174.90/m<sup>3</sup>



A-I-42-1 RELLENO EN CIMENTACION CON ARENA LIMPIA

Suministro arena \$ 30.00/m3

Formación del relleno:

$\frac{P}{10 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{10 \text{ m}^3}$

3.14

Herramienta:

2% (3.14)

0.06

COSTO DIRECTO:

\$ 33.20/m3

Indirectos y Utilidad 15%:

4.98

PRECIO UNITARIO

\$ 38.18/m3



A-1-42 RELLENO Y COMPACTADO EN COMPENSACIONES O MESETAS CON MATERIAL TRAI DO DE FUERA DE LA OBRA, TENDIDO, REGADO Y COMPACTADO EN CAPAS DE 0.20m INCLUYENDO MATERIAL Y A - CARREOS, MEDIDO COMPACTADO.

Adquisición de material: \$ 8.00/m3

Formación del relleno:

MO =  $\frac{P}{10} = \frac{31.40}{10} = 3.14$

Compactación con rodillo vibratorio liso, autopropulsado "DINAPAC" Mod. C-G 10 (Análisis Adj0)

$\frac{31.33 \text{ \$/h}}{15 \text{ m3/h}} = 2.09$

Agua para compactación:

0.2m3/m3 X \$ 1.00/m3 = 0.20

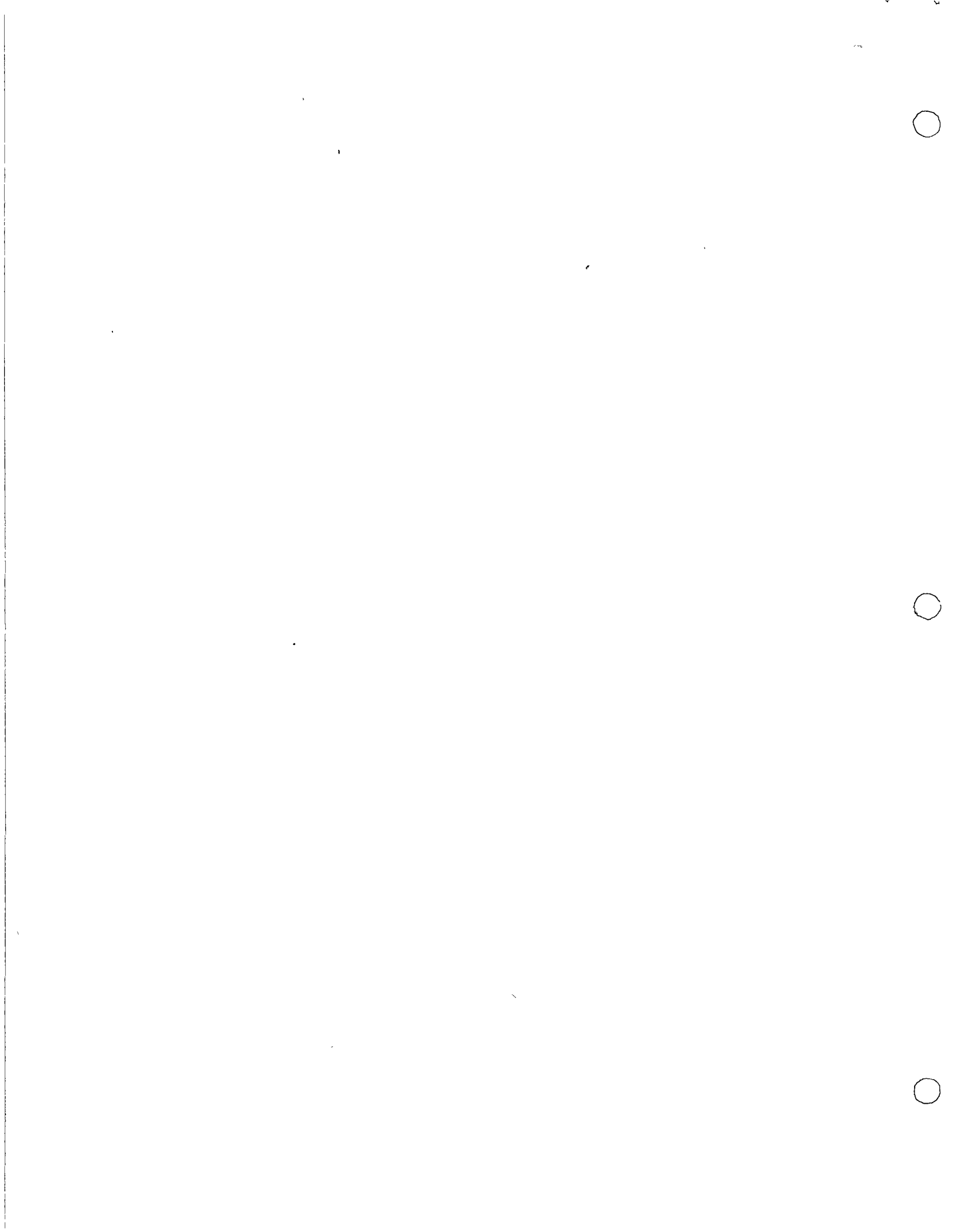
Herramienta:

2% (3.14) = 0.06

COSTO DIRECTO: \$ 13.49/m3

Indirectos y Utilidad 15% 2.02

PRECIO UNITARIO: \$ 15.51/m3



A-I-40

RELLENO Y COMPACTADO DE CEPAS CON MATERIAL INERTE TRAI DO DE FUERA DE LA OBRA, TENDIEN DO EL MATERIAL EN CAPAS DE 0.20m REGANDO Y PISONANDO, INCLUYENDO MATERIAL, ACARREO, MEDIDO COMPACTADO.

Adquisición del material \$ 8.00/m3

Formación del relleno:

$$\frac{P}{10 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{10 \text{ m}^3}$$

3.14

Apisonado:

$$\frac{P}{4.5 \text{ m}^3} = \frac{31.40}{4.5 \text{ m}^3}$$

6.98

Agua para compactación:

$$0.2 \text{ m}^3/\text{m}^3 \times \$ 1.00 =$$

0.20

Herramienta:

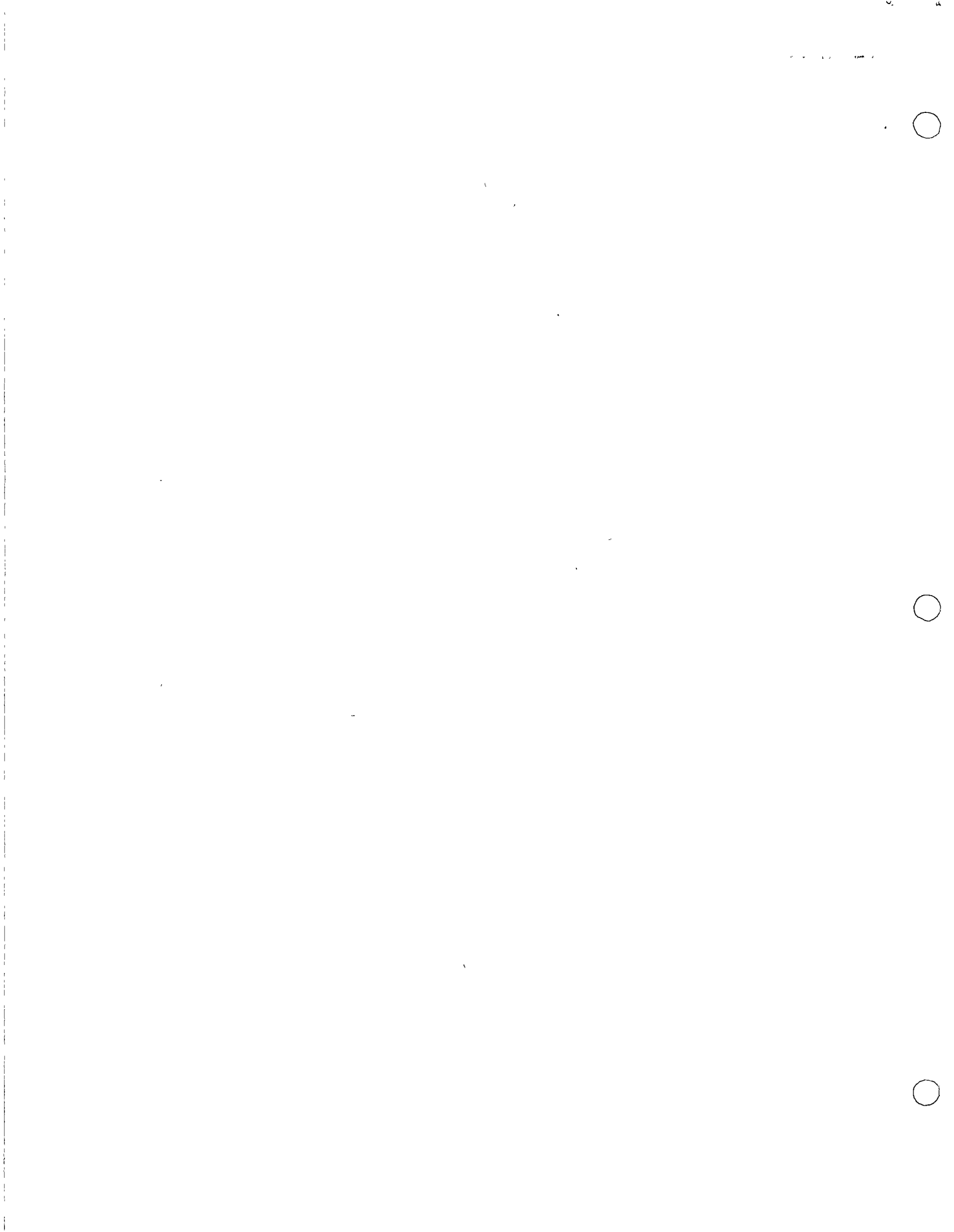
$$2\% (3.14 + 6.98)$$

0.20

COSTO DIRECTO: \$18.52/m3

Indirectos y Utilidad 15% 2.78

PRECIO UNITARIO \$21.30/m3





A-I-40 RELLENO Y COMPACTADO DE CEPAS CON MATERIAL INERTE TRAI DO DE FUERA DE LA OBRA, TENDIENDO EL MATERIAL EN CAPAS 0.20m REGANDO Y PISO - NANDO, INCLUYENDO MATERIAL; ACARREO, MEDIDO COMPACTADO.

Adquisición del material \$ 8.00/m3

Formación del relleno:

$\frac{P}{10m3} = \frac{31.40}{10 m3} = 3.14$

Apisonado:

$\frac{P}{4.5 m3} = \frac{31.40}{4.5 m3} = 6.98$

Agua para compactación:

$0.2 m3/m3 \times \$ 1.00 = 0.20$

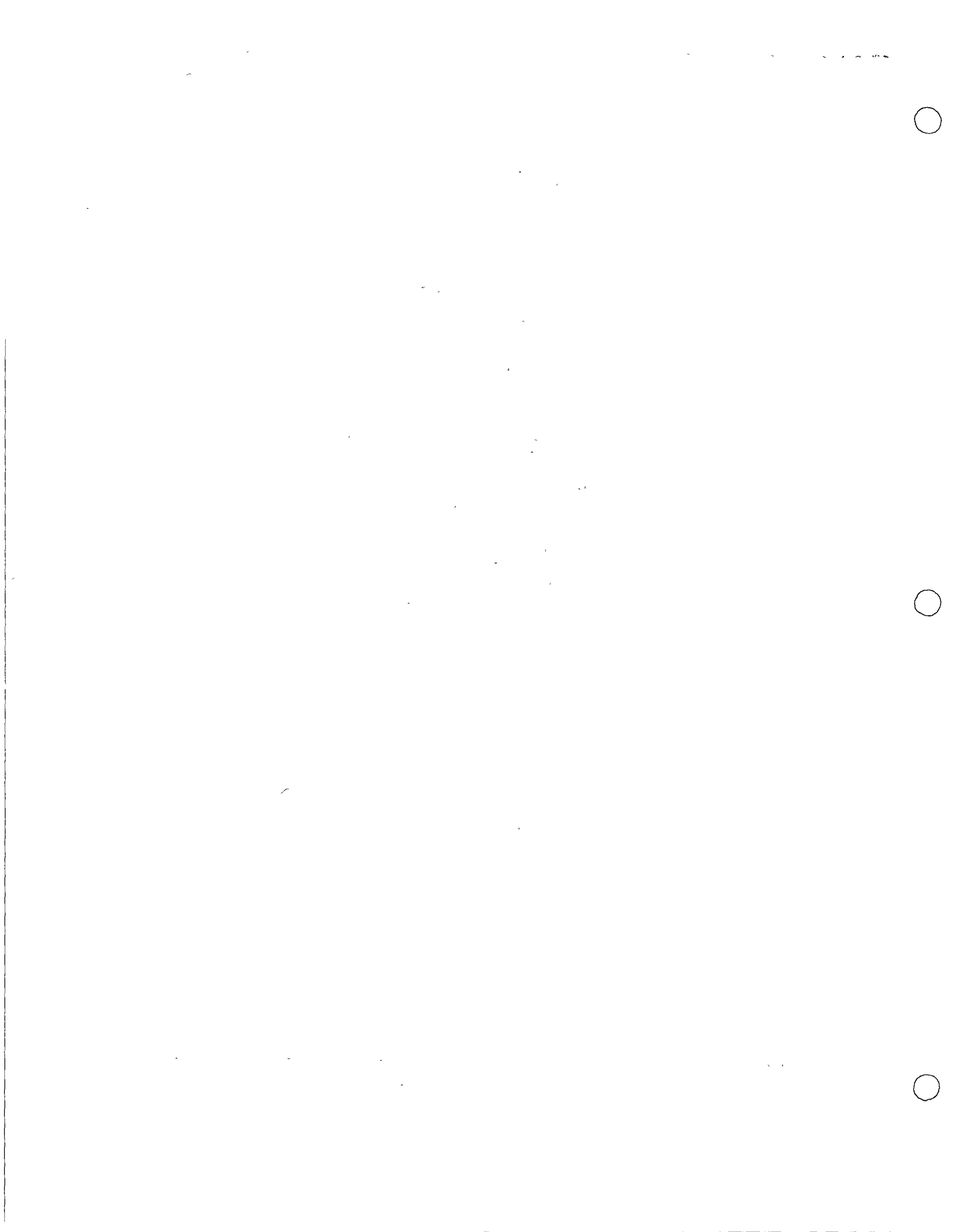
Herramienta:

$2\% (3.14 + 6.98) = 0.20$

COSTO DIRECTO \$18.52/m3

Indirectos y Utilidad 15% : 2.78

PRECIO UNITARIO: \$21.30/m3



A-I-32.- (Continuación)

La hora máquina de la retroexcavadora "YUMBRO" Mod. H90 (Análisis Adj) es de: \$108.61/Hr

Cargo por retroexcavadora:

$\frac{108.61/Hr}{24 M3/Hr.} = 4.51/Hr$

AFINADO A MANO (TALUDES, PLANTILLA, BERMAS)

El afine a mano se hace en un espesor de 0.04 M.

El volumen excavado por metro lineal de canal, incluido plantilla, taludes, bermas, es de: 0.02 M3

Como el rendimiento de un Peón es de 3.2 M3 turno, corresponderá a un tramo de:

$\frac{3.2 M3}{0.2} = 16 M$

que tiene un volumen de:

$16 \times 1.35 = 21.60 M3$

MANO DE OBRA EXCAVACION PARA AFINAR PLANTILLAS, TALUDES, BERMAS, ETC.

Un Peón \$ 31.40/J  
1/20 Cabo (\$39.31) 1.97  
\$ 33.37/J

Cargo por mano de Obra:

$\$ 33.37/J = 1.06/M3$

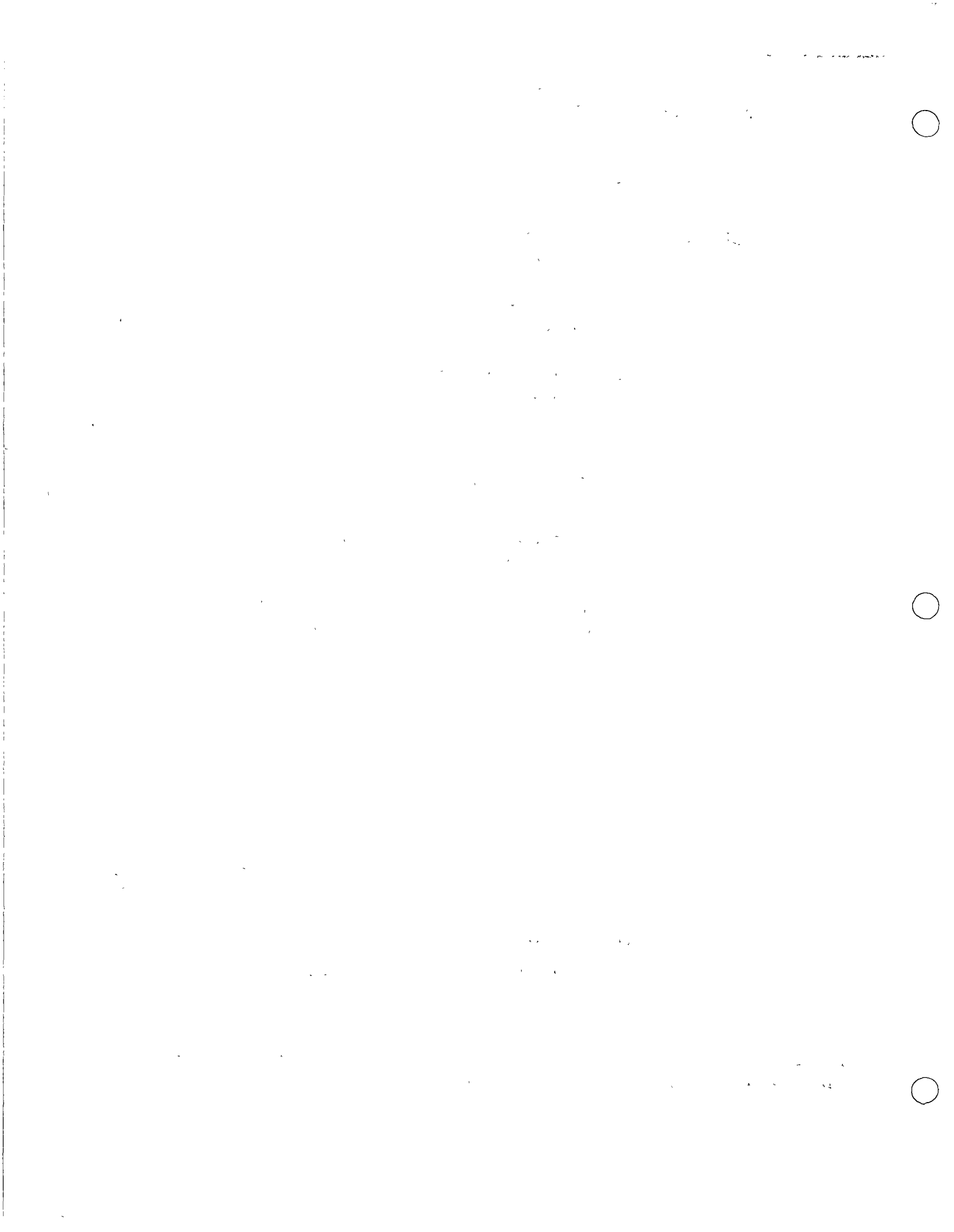
HERRAMIENTA:

2% (1.54)  $\frac{0.03}{m3}$

COSTO DIRECTO: \$ 5.58/M3

Indirecto y Utilidad 15% 0.91

PRECIO UNITARIO \$ 6.42/M3



038651

A-I-32.- EXCAVACION A CIELO ABIERTO EN MATERIAL "A"  
DE 0 A 6.00 M. INCLUYENDO ADEMÁS, AFINADO,  
DE TALUEDES, FONDO DE EXCAVACION Y ACARREO  
DE MATERIAL AL PIE DEL CAMION, MEDIDO EN -  
BANCO.

EQUIPO: Retroexcavadora sobre llantas neumáticas -  
"YUMBO" H90 con cucharón de 0.500 m<sup>3</sup>, de -  
capacidad rasa.

El tramo excavado, antes de su nueva posición  
de ataque, es de .5.5 m de acuerdo con la -  
gráfica de la máquina.

El área aproximada por excavar de la cubeta  
es de 1.35 M<sup>2</sup>.

Volúmen excavado por tramo:

$$5.50 \text{ M} \times 1.35 \text{ m}^2 = 7.43/\text{m}^3$$

Factor de llenado arcilla compacta:

$$= 1.00$$

Para un abudamiento de 25% el coeficiente  
de carga es de:

$$= 0.80$$

La cantidad de cucharones requerido para  
excavar el tramo de 5.5 m es de:

$$12$$

$$\frac{7.43 \text{ m}^3}{0.750 \text{ M}^3 \times 0.80 \times 1.00}$$

Tiempo del ciclo de la Retroexcavadora A -  
taque, llenado, giro a 90° y vaciado: 60 min

Tiempo requerido para la excavación de  
un tramo

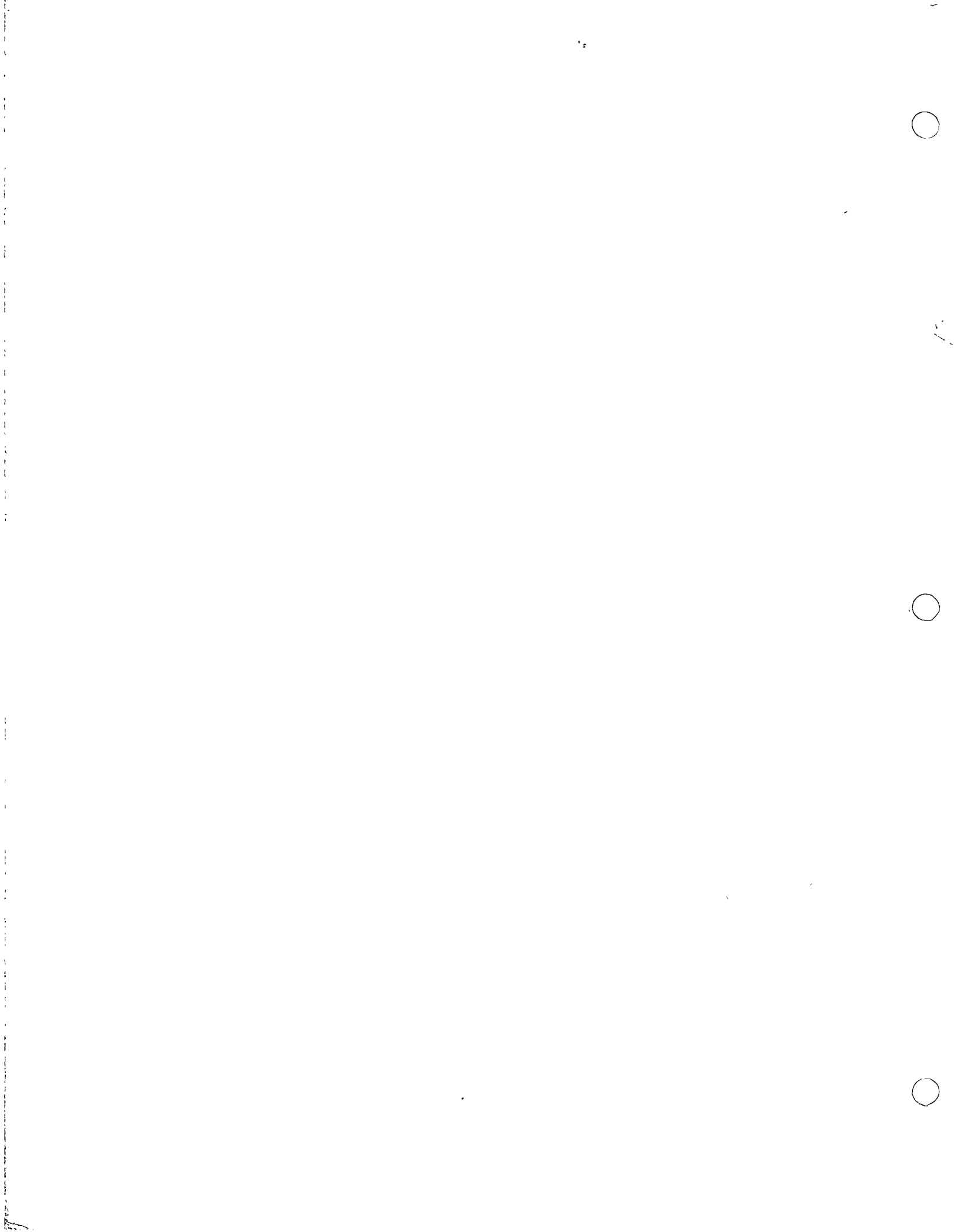
$$19 \text{ cucharones} \times 0.6 \text{ min.} = 11.4 \text{ min}$$

Tiempo en mover la retroexcavadora  
a su posición de ataque:

$$= \frac{2.4 \text{ min}}{13.8 \text{ min}}$$

Con 8.75 de eficiencia, el rendimien-  
to por hora es de:

$$\frac{60 \text{ min} \times 0.75 \times 7.43 \text{ M}^3}{13.8 \text{ min.}} = 24 \text{ M}^3/\text{hr.}$$



DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS  
INDUSTRIALES ( DEL 17 DE AGOSTO AL 23 DE SEPTIEMBRE DE 1976 )

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

1. ING. EDUARDO BRAVO GONZALEZ  
Sur 69-A No. 3131  
Col. Viaducto Piedad  
México 13, D. F.  
Tel:5304441  
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO,S.A.  
Tláloc No.90-4o. Piso  
México 17, D. F.
2. HUMBERTO CAFAGGI FELIX  
Sur 71A No. 329  
Col. Justo Sierra  
México 13, D. F.  
Tel:6726835  
BUFETE DE INGENIERIA DELTA, A.P.  
Ejército Nacional No. 519-1er.Piso  
Col. Granada  
México, D. F.
3. ING. MARIO A. CERVANTES ELIAS  
Norte 89-A No. 476  
Col. Electricistas  
México 16, D. F.  
Tel:5613625  
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO,S.A  
Tláloc No, 90-4o. Piso  
México 17, D. F.
4. RODOLFO T. CONTRERAS  
Covarrubias No. 85  
Col. Tacubaya  
México 17, D. F.  
Tel:5155771
5. JOSE ALBERTO DOMINGUEZ T.  
M. López de Legazpi No. 49  
Circ. Navegantes  
Cd. Satélite  
Edo. de México  
Tel:5722752  
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO,S.A  
Tláloc No. 90-1er. Piso
6. ING. FERNANDO E. ESCAMILLA C.  
Río Tamésis No. 4  
Col. Cuauhtémoc  
México 5, D. F.  
T.H. METALICOS, S. A.  
Río Guadalquivir No. 82  
México, D. F.
7. ING. JOAQUIN GONZALEZ ZENTENO  
Punta Azul No. 22  
Secc. Balcones, Lomas de Valle Dorado  
Tlalnepantla, Edo. de México  
INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SO-  
CIAL  
Durango 291-3er. Piso  
México 7, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE DIMENSIONAMIENTO DE CUBIERTAS  
INDUSTRIALES ( DEL 17 DE AGOSTO AL 23 DE SEPTIEMBRE DE 1976 )

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
8. ING. ANDRES MARTINEZ FRESAN Progreso 11-302 Col. Florida México 20, D. F. Tel:5347577	ALCAN ALUMINIO, S.A. Km. 18 Carretera México-Laredo Tulpetlac, Edo. de México
9. ING. AUGUSTO SANCHEZ TOLEDO México, D. F.	INDUSTRIA METALICA INTEGRADA, S.A. México, D. F.
10. ING. JORGE SANDOVAL GARCIA Héroes del 47 No. 109-A Col. Churubusco México 21, D. F.	INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SO- CIAL Durango 291-3er. Piso Col. Roma México 7, D. F.
11. ING. HUGO SOLORZANO GONZALEZ Multifamiliar IMSS 28-F Col. Narvarte México 12, D. F. Tel:5903069	FLUOROCARBONS WORKS, S.A. Av. Abel No. 15 México, D. F.
12. MARCO A. TAPIA LIZARRAGA Coyoacán No. 312-7 Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5234973	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO Ciudad Universitaria México 20, D. F.
13. ING. JUAN DANIEL VALLEJO GONZALEZ Fco. Covarrubias No. 61-12 Col. San Rafael México 4, D. F.	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A. Tláloc No. 90-1 Col. Tlaxpana México 17, D. F.