CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

FECHA	DURACION	TEMA	PROFESOR
Agosto 17	18 a 20 h	OBJETIVOS DEL CONTROL ESTADISCO DE CALIDAD	ING. MANUEL MARIN GONZALEZ
	20 a 21 h	ESTADISTICA Y PROBABILIDADES	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
Agosto 19,24, 26 y 31	18 a 21 h c/día	ESTADISTICA Y PROBABILIDADES	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
Septiembre 2, 7 y 9	18 a 21 h c/día	MUESTREO E INSPECCION	M. EN C. ENRIQUE NOVELO BERR
Septiembre 14	18 a 19 h	MUESTREO E INSPECCION	M. EN C. ENRIQUE NOVELO BERR
	19 a 21 h	CONFIABILIDAD	
Septiembre 21, 23,28,30	18 a 21 h c/día	CARTAS DE CONTROL	M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA
Octubre 5	18 a 19:30 h	DETERMINACION FUNCIONAL DE LOS CRITERIOS DE NORMALIZACION	DR. ROBERTO MELI P.
	19:30 a 21 h	PENALIZACIONES Y CRITERIOS DE ACEPTACION DE MATERIALES	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
	21:00 h	CLAUSURA Y ENTREGA DE DIPLOMAS	

'pmc

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

TEMA	PROFESOR	FECHA Y HORA		
Objetivos del Control Estadístico de Calidad	Manuel Marín G.	Agosto	17	18 a 20 h
Estadística y Probabilidades	Octavio A. Rascón Ch.	Agosto	17	20 a 21 h
	" "	Agosto	19	18 a 21 h
	" "	Agosto	24	18 a 21 h
	" "	Agosto	26	18 a 21 h
	" "	Agosto	31	18 a 21 h
Muestreo de inspección	Enrique Novelo B.	Sept.	2	18 a 21 h
	" "	Sept.	7	18 a 21 h
	" "	Sept.	9	18 a 21 h
	" "	Sept.	14	18 a 19 h
Confiabilidad	Enrique Novelo B.	Sept.	14	19 a 21 h
Cartas de control	Augusto Villarreal A.	Sept.	21	18 a 21 h
	" "	Sept.	23	18 a 21 h
	" "	Sept.	28	18 a 21 h
	" "	Sept.	30	18 a 21 h
Determinación funcional de los criterios de normalización	Roberto Meli P.	Oct.	5	18 a 19:30 h
Penalizaciones y criterios de aceptación de materiales	Luis Esteva M.	Oct.	5	19:30 a 21 h
Clausura y entrega de diplomas		Oct.	5	21 h

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA

ESTADISTICA DESCRIPTIVA

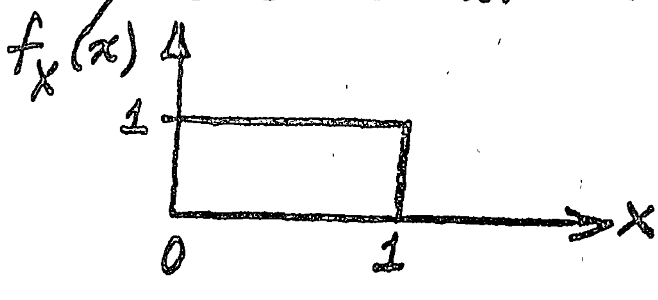
Dato y observación: Es el resultado de realizar un experimento.

Muestra: Es una colección de datos

Población: Total de datos que se pueden obtener al realizar una secuencia exhaustiva de experimentos

Muestra aleatoria: Es una muestra obtenida de tal manera que todos los ~~[illegible]~~ elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser observados y además la observación de un elemento no afecta la probabilidad de observar cualquier otro (si son independientes)

Tabla de números aleatorios: Es una tabla que contiene números que constituyen una muestra aleatoria obtenida de una distribución de probabilidades uniforme, que generalmente corresponde a una variable aleatoria que puede asumir valores entre 0 y 1.



Las tablas que se usen para obtener una muestra aleatoria deben contener números con mayor número de dígitos que los que tiene el total de elementos de la población que se va a muestrear. Por ejemplo, si se va a obtener una muestra aleatoria de un lote de refacciones que tiene 10,000 elementos, la tabla que se use deberá tener números aleatorios con 5 o más dígitos.

Método de muestreo

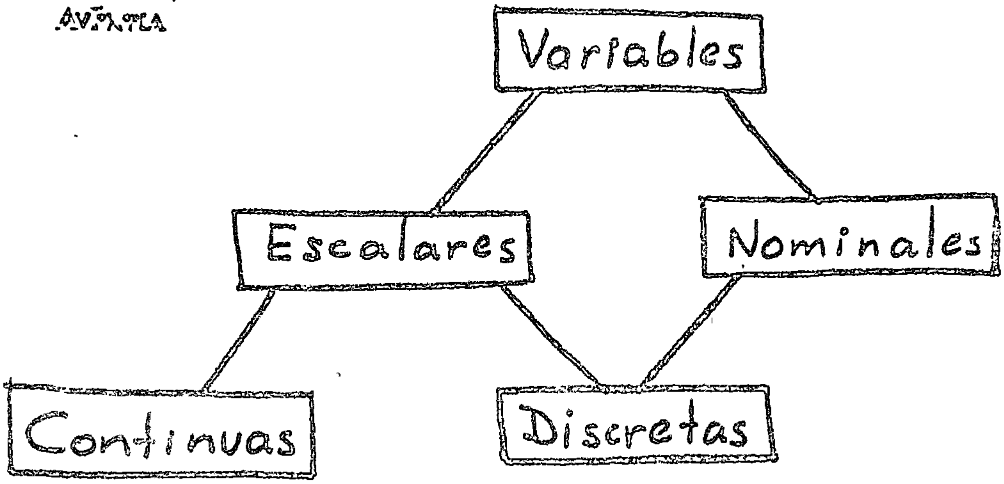
1.- Se numeran los elementos de la población

2.- Se fija el criterio de selección de los números aleatorios (por ejemplo, se define qué renglones y qué columnas se van a leer)

3.- Se indica qué dígitos se van a eliminar en caso de que los números de la tabla tengan más dígitos que los necesarios.

4.- Se leen los números, de acuerdo con lo fijado en los puntos 2 y 3, y se extraen del lote los elementos que tienen los números leídos. Estos constituyen la muestra física deseada, con la cual realizar los experimentos. Las observaciones constituirán la muestra deseada.

Variables
- Escalares.- Son las que asumen valores numéricos.
- Nominales.- No asumen valores numéricos, sino nombres o atributos.



Agrupamiento de datos

Con objeto de facilitar la interpretación de los datos que se tienen en una muestra, es conveniente agruparlos ya sea por valores o por intervalos. Para facilitar el agrupamiento, es útil ordenarlos en forma creciente (o decreciente) de valores, cuando se trata de datos de variables escalares, formando así una tabla de datos ordenados.

Frecuencia de un evento.- Es el número de veces que ocurre el evento al obtener una muestra de la población correspondiente.

Frecuencia relativa de un evento.- Es el cociente de la frecuencia entre el total de elementos (tamaño) de la muestra.

Frecuencia relativa acumulada.- Es la acumulación (suma) de las frecuencias relativas hasta un valor dado.

Ejemplo.- En una escuela secundaria se les aplicó a 30s profesores un examen sobre pedagogía. Las calificaciones (datos) que se obtuvieron fueron (ya están ordenados)

$\underbrace{57, 59}_{A}, \underbrace{65, 67, 67, 67, 69}_{B}, \underbrace{72, 73, 73, 77, 78, 78}_{C},$

$\underbrace{81, 81, 83, 83, 83, 84, 84, 87, 88, 89, 89}_{D}, \underbrace{91, 91, 93,}_{E}$

$\underbrace{95, 97, 99}_{E}$

Calificación	frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
57	1	1/30	1/30
59	1	1/30	2/30
65	1	1/30	3/30
67	3	3/30	6/30
69	1	1/30	7/30
72	1	1/30	8/30
73	2	2/30	10/30
77	1	1/30	11/30
78	2	2/30	13/30
81	2	2/30	15/30
83	3	3/30	18/30

(Continuación)

Calif.	Frec.	Frec. Rel.	Frec. Rel. Acum.
84	2	2/30	20/30
87	1	1/30	21/30
88	1	1/30	22/30
89	2	2/30	24/30
91	2	2/30	26/30
93	1	1/30	27/30 ←
95	1	1/30	28/30
97	1	1/30	29/30
99	1	1/30	30/30 = 1
	$\Sigma = 30$	$\Sigma = 30/30 = 1$	

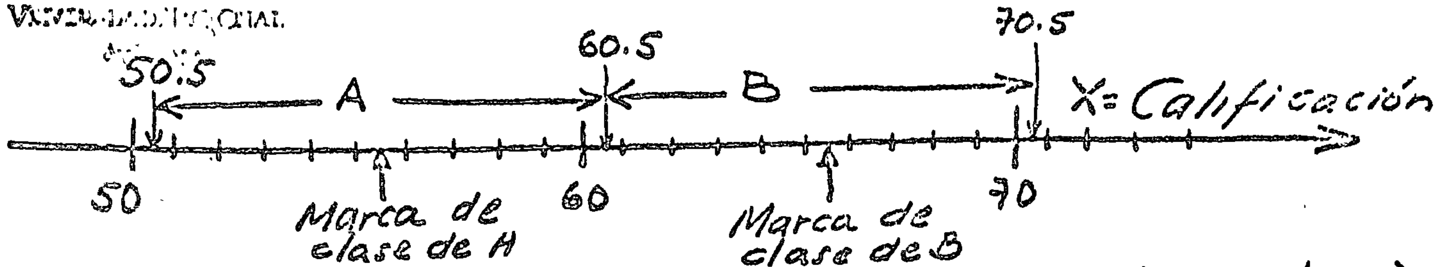
¿Cuál es la frecuencia de valores ≤ que 93?: 27/30

Con objeto de facilitar aún más la interpretación de los datos, es conveniente a menudo agruparlos por intervalos de valores.

Evento (intervalo de calificaciones)	Elementos observados	Frec.	Frec. Rel.
A: 51 - 60	57, 59	2	2/30
B: 61 - 70	65, 67, 67, 67, 69	5	5/30
C: 71 - 80	72, 73, 73, 77, 78, 78	6	6/30
D: 81 - 90	81, 81, 83, 83, 83, 84, 84, 87, 88, 89, 89	11	11/30
E: 91 - 100	91, 91, 93, 95, 97, 99	6	6/30
	$\Sigma =$	30	30/30 = 1

Límites inferiores de clase

Límites superiores de clase



En una escala continua (variable continua):

$$A = \{X : 50.5 < X \leq 60.5\}$$

$$B = \{X : 60.5 < X \leq 70.5\}$$

$$C = \{X : 70.5 < X \leq 80.5\}$$

$$D = \{X : 80.5 < X \leq 90.5\}$$

$$E = \{X : 90.5 < X \leq 100.5\}$$

Límites reales inferiores de clase

Límites reales superiores de clase

A mayor número de datos se requiere mayor número de intervalos, pero se recomienda que éste número esté entre 5 y 20, suponiendo que en promedio caigan unos 5 elementos en cada intervalo. Así, si se tienen 30 datos, se recomienda usar 30/5=6 intervalos. Los límites reales deben tener una cifra decimal más que los datos.

(7)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

Ejemplo

En un estudio antropológico se obtuvo una muestra de 30 estaturas de los varones residentes en una región. Los datos, ordenados en forma creciente de valores, fueron los siguientes:

160, 161, 163, 163, 163, 167, 167, 167, 167, 168, 168, 168, 169, 169, 170, 171, 171, 173, 174, 175, 175, 175, 178, 179, 181, 181, 183, 184, 187, 191 cm. Obtenga la tabla de frecuencias.

Solución

1.- Determinación del rango

rango = valor máximo − valor mínimo = 191 − 160 = 31 cm

2.- Determinación del número de intervalos

$$\text{núm. de intervalos} \doteq \frac{30}{5} = 6$$

(para continuar con el ejemplo tomaremos 5 intervalos)

3.- Determinación de los límites de clase

$$\text{Ancho de los intervalos} \doteq \frac{\text{rango}}{\text{número}} = \frac{31}{5} = 5.1 \Rightarrow 6$$

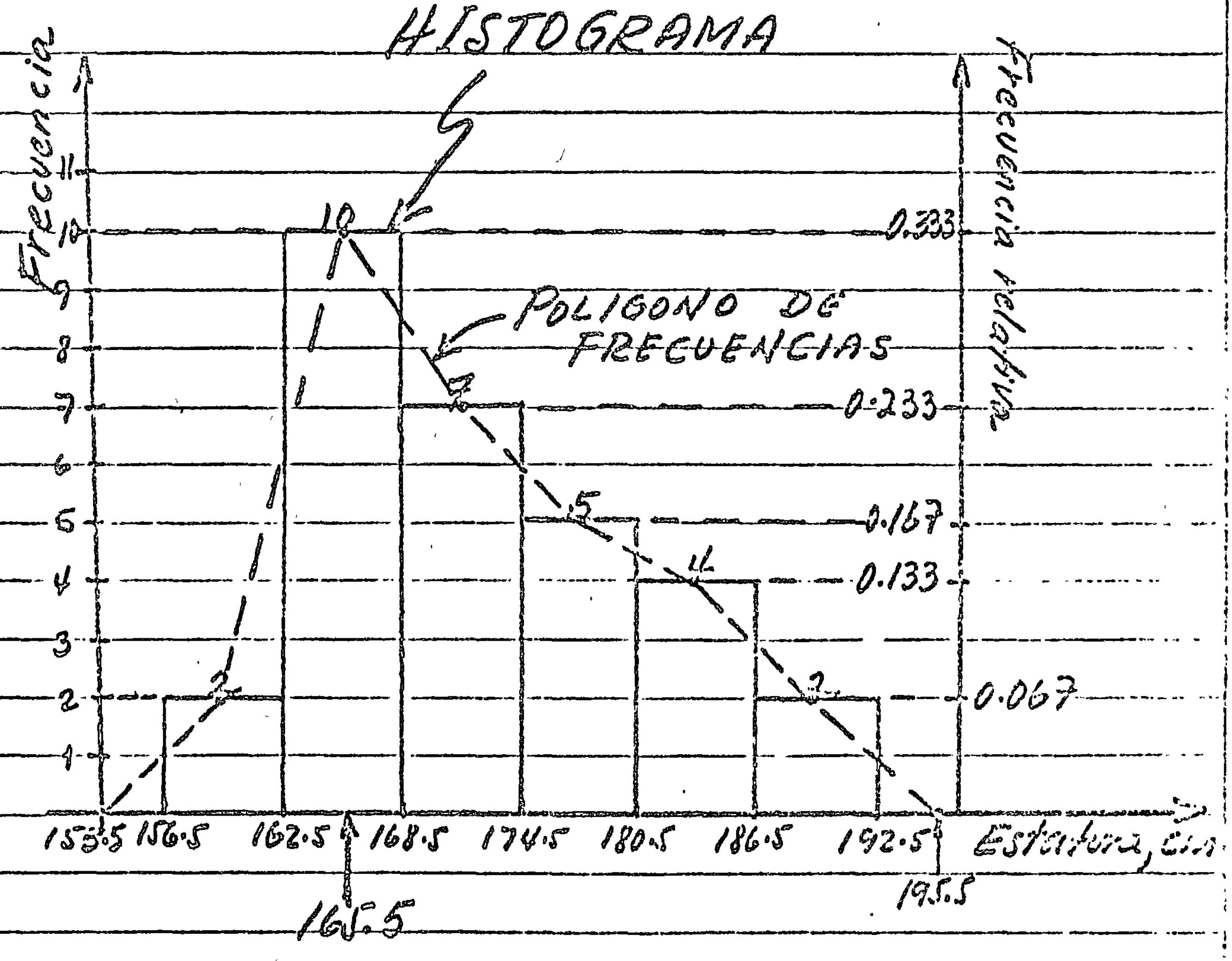
157 − 162, 163 − 168, 169 − 174, 175 − 180, 181 − 186, 187 − 192

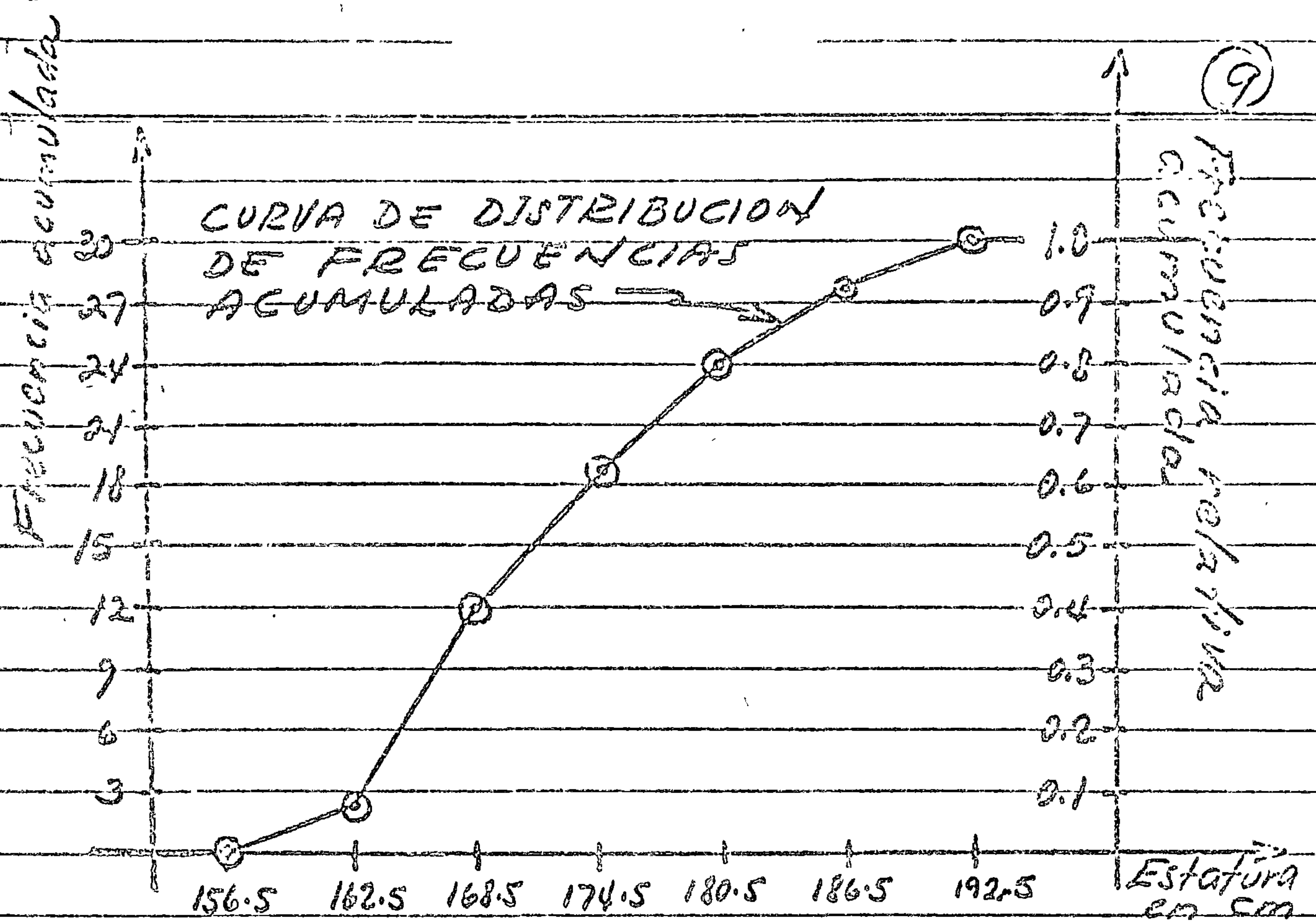
4.- Integración de la tabla:

Intervalo	Límites Reales Inf.	Límites Reales Sup.	Frec.	Frec. Rel.	Frec. Acum.	Frec. Rel. Acum.
157 - 162	156.5	162.5	2	$\frac{2}{30} = 0.067$	2	0.067
163 - 168	162.5	168.5	10	$\frac{10}{30} = 0.333$	12	0.400
169 - 174	168.5	174.5	7	$\frac{7}{30} = 0.233$	19	0.633
175 - 180	174.5	180.5	5	$\frac{5}{30} = 0.167$	24	0.800
181 - 186	180.5	186.5	4	$\frac{4}{30} = 0.133$	28	0.933
187 - 192	186.5	192.5	2	$\frac{2}{30} = 0.067$	30	1.000
$\Sigma =$			30	1.000		

Presentación gráfica de las distribuciones de frecuencias

HISTOGRAMA





Ya vimos que la frecuencia acumulada corresponde a los valores menores o iguales que algún valor dado de la variable. De igual manera la frecuencia acumulada complementaria corresponde a los valores mayores que ese valor dado. Así:

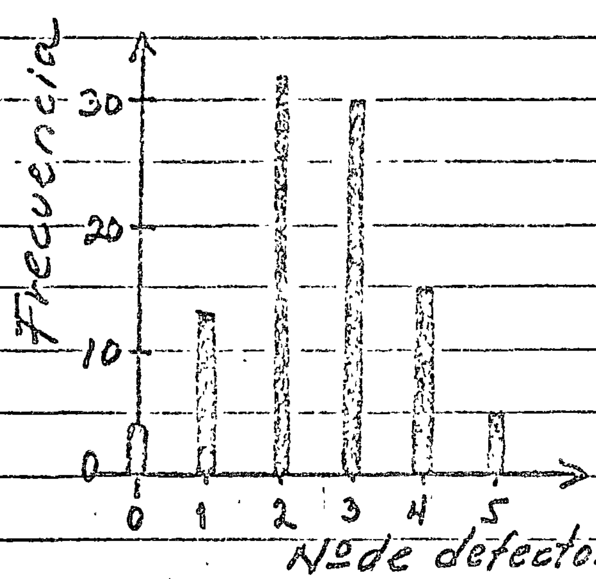
Frecuencia acumulada complementaria = número de datos − frecuencia acumulada

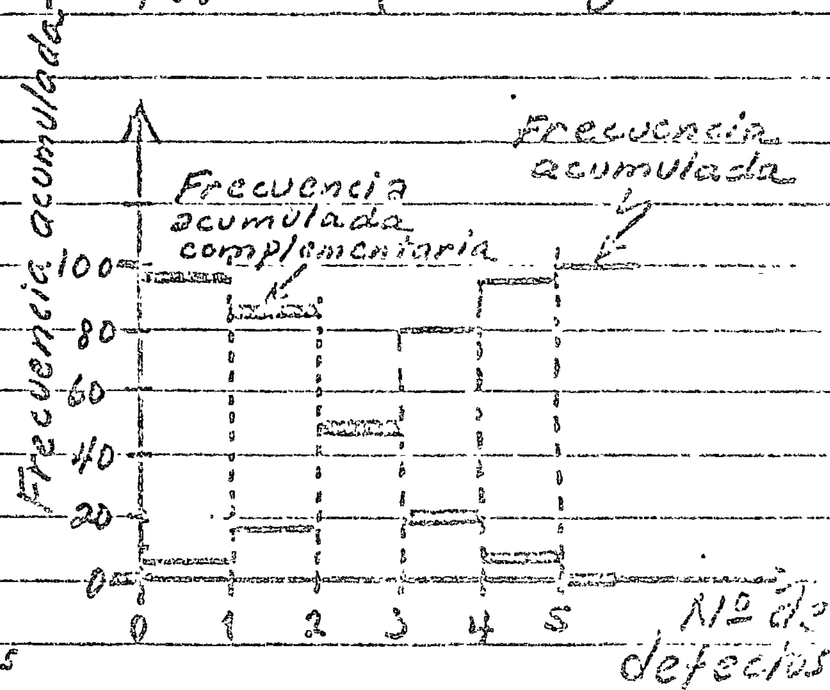
¿Cuál es la frecuencia de valores mayores que 180.5?: $30-24=6$

La frecuencia acumulada relativa complementaria es: $1-0.800=0.200$ (20 %)

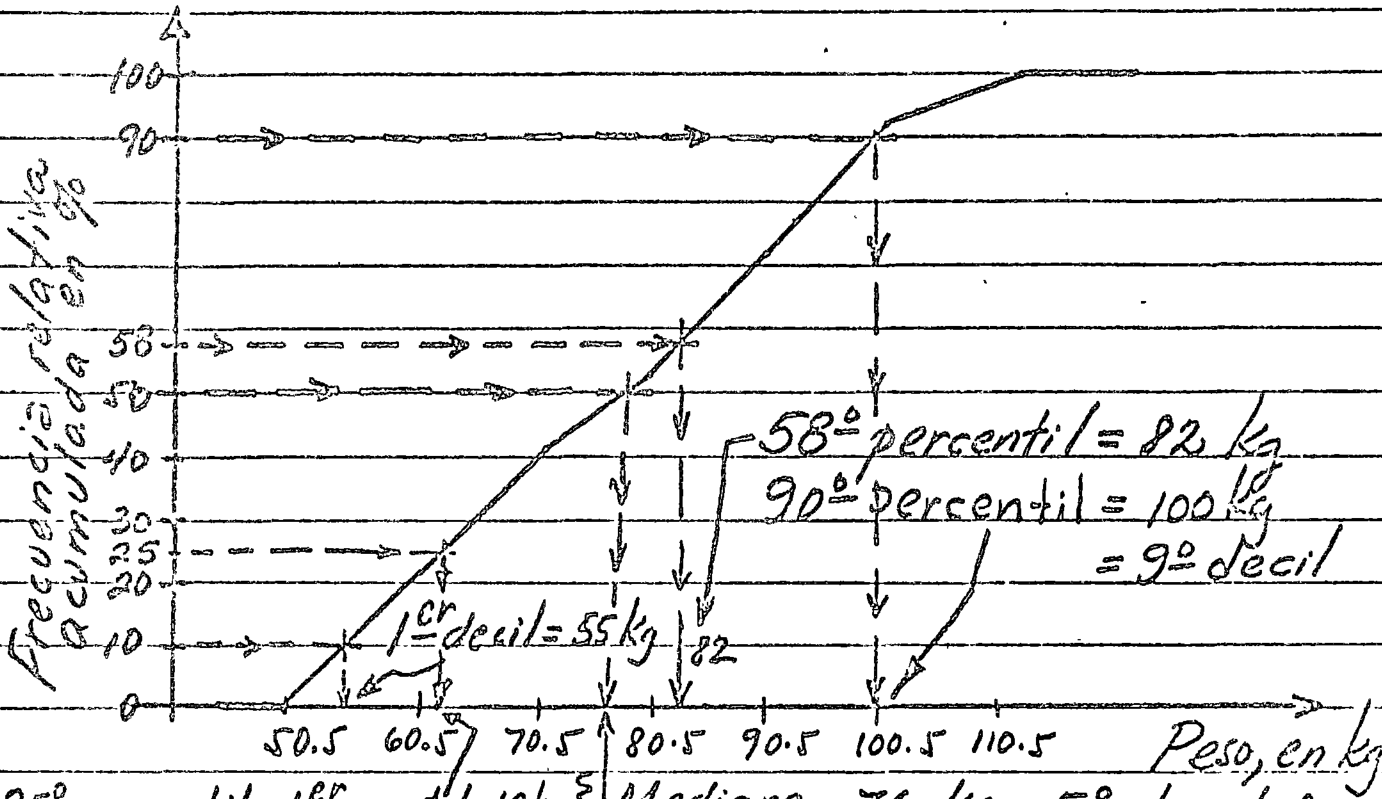
Ejemplo: En un estudio sobre la calidad de los monoblocks producidos por una fábrica, se obtuvo una muestra aleatoria de 100 elementos, a los cuales se les contó el número de defectos de fabricación. La tabla de frecuencias es la siguiente:

Número de defectos	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia acumulada complementaria
0	4	4	96
1	13	17	83
2	33	50	50
3	30	80	20
4	15	95	5
5	5	100	0
	100		





Percentiles.- Son los valores de la variable correspondientes a frecuencias relativas acúmuladas que son múltiplos de 1 por ciento.



Deciles.- Son los valores de la variable correspondientes a frecuencias relativas acumuladas que son múltiplos de 10 por ciento.

Cuartiles.- Son los valores de la variable correspondientes a frecuencias relativas acumuladas que son múltiplos de 25 por ciento.

Mediana.- Valor de la variable correspondiente a la frecuencia relativa acumulada de 50%.

Medidas representativas de los datos

Medidas de TENDENCIA CENTRAL

Valor medio o promedio aritmético

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

donde x_i son los valores de los datos y n es el tamaño de la muestra.
Si los datos están agrupados y f_j es la frecuencia del intervalo j-ésimo y x_j es la marca de clase correspondiente, entonces

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} f_j x_j}$$

Ejemplo.- Sea el ejemplo enunciado en la mica Nº 10 de los defectos en monoblocks. Se tenía:

j	Nº de defectos x	Frecuencia f	fx
1	0	4	$4 \times 0 = 0$
2	1	13	$13 \times 1 = 13$
3	2	33	$33 \times 2 = 66$
4	3	30	$30 \times 3 = 90$
5	4	15	$15 \times 4 = 60$
$K=6$	5	5	$5 \times 5 = 25$
		$\Sigma = 100$	$\sum_{j=1}^{6} = 254$

$\bar{x} = \frac{254}{100} =$

$\bar{x} = 2.54$ defectos por monoblock

Modo.- Es el valor de la variable que aparece con mayor frecuencia en una muestra. Si los datos están agrupados, el modo es la marca de clase del intervalo que tiene la mayor frecuencia.

Ejemplo.- En el problema de los monoblocks el modo es 2. En el problema de las estaturas el modo es 165.5 cm

Mediana.- Es el valor de la variable que corresponde al 50% de la frecuencia relativa acumulada.
Si los datos están agrupados por intervalos la mediana se puede calcular con la fórmula (además de gráficamente, como ya se vio)

$$\boxed{\text{Mediana} = M = L_M + \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M} d_M}$$

donde L_M = límite inferior real del intervalo que contiene a la mediana

f_M y d_M = respectivamente a la frecuencia y ancho del intervalo del intervalo que contiene a la mediana

F_M = frecuencia acumulada hasta el intervalo que contiene a la mediana exclusive

n = Tamaño de la muestra.

(14)

Ejemplo: En un estudio para determinar los tiempos en que una muestra aleatoria de individuos reaccionaba a ciertos estímulos psicológicos se obtuvo lo siguiente:

j	Marca de clase x, en seg	Frecuencia f	Frecuencia acumulada, F	fx, seg	Límites reales
1	0.10	2	2	0.20	0.075-0.125
2	0.15	7	9	1.05	0.125-0.175
3	0.20	14	23	2.80	0.175-0.225
4	0.25	4	27	1.00	0.225-0.275
$K=5$	0.30	3	30	0.90	0.275-0.325
		$\Sigma = 30$		$\sum_{j=1}^{5} f_j x_j = 5.95$	

$$\bar{x} = \frac{5.95}{30} = \underline{0.198} \text{ seg}$$

$$\text{Modo} = \underline{0.20} \text{ seg}$$

$$d_M = 0.05, \quad L_M = 0.20 - \frac{0.05}{2} = 0.175, \quad F_M = 9.$$

$$n/2 = 30/2 = 15, \quad f_M = 14$$

$$\text{Mediana} = M = 0.175 + \frac{15-9}{14} 0.05$$

$$M = 0.175 + \frac{0.30}{14} = 0.175 + 0.021 = \underline{0.196} \text{ seg}$$

BLOCK TEYCO

MEDIDAS DE DISPERSION

Rango = Máximo valor observado − Mínimo valor observado

Variancia: Si los datos no están agrupados:

$$\boxed{S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Si los datos están agrupados

$$\boxed{S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})^2}$$

donde las x_j son los valores de las marcas de clase de los intervalos.

Desviación estándar

$$\boxed{S_x = \sqrt{S_x^2}}$$

Coeficiente de variación

$$\boxed{v_x = S_x / \bar{x}}$$

Ejemplo- En un estudio sobre la temperatura máxima diaria en una ciudad se obtuvo lo siguiente para una primavera:

j	Intervalos de temperatura °F	Marca de clase, °F	Frecuencia f	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
1	55 – 63	59	2	118	-21.3	453.7	907.4
2	64 – 72	68	6	408	-12.3	151.3	907.8
3	73 – 81	77	7	539	-3.3	10.9	76.3
4	82 – 90	86	9	774	5.7	32.5	292.5
5	91 – 99	95	6	570	14.7	216.1	1296.6
			30	2409			3480.6

$$\bar{x} = \frac{2409}{30} = 80.3\ °F \ ; \quad S_x^2 = \frac{3480.6}{30} = 116\ °F^2$$

$$S_x = \sqrt{116} = 10.8\ °F, \quad V_x = \frac{10.8}{80.3} = 0.134$$

(13.4%)

Modo $= 86$

$d_M = 9, \ L_M = 72.5, \ f_M = 7, \ F_M = 8, \ \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$$\text{Mediana} = M = 72.5 + \frac{15-8}{7}9 =$$

$$= 72.5 + 9 = 81.5\ °F$$

BLOCK TEYCO

17

BIBLIOGRAFIA DE CONTROL DE CALIDAD

Clave de biblioteca de la DESFI

1. Engineering Statistics 519.9
   Bowker and Lieberman
   Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1959

2. Stastistics, a new approach 310 w 35
   Wallis and Roberts
   (The frees press, New York), 1956

3. Teoría de probabilidades y aplicaciones 519 c73
   Cramer
   Aguilar S.A. de Ediciones Madrid, 1963

4. Elements of mathemathical statistics 519.9 A.54
   Alexander
   John Wiley & Sons, Inc., 1961

5. Statistical processes and reliability engineering 519.93 c
   Dimitris N. Chorafas
   D. van Nostrand Company Inc. Princeton New Yersey, 1960

6. Experimental statistics, Handbook 91 519.9 n
   M.G. Natrella
   U.S. Department of Commerce (Superintendent of Documents
   U.S. Government printing office,
   Washington 25, D.C.)

7. Statistical Theory with Engineering Applications 519.9 H
   H. Hald
   John Wiley & Sons. Inc., 1952

8. Quality control, highway research record F-6428 H
   No. 184
   Ed. Highway Research Board, 1967

9. Statistics theory and problems HA.29 S65
Murray R. Spiegel
Schaum Publishing Company, 1961

10. Estadística aplicada HA29 081
Bernard Ostle
Editorial Limusa-Wiley, S.A., 1973

11. The design of sample surveys HA31.2 R33
DES RAJ
McGraw Hill Book Company, 1972

12. Mathemathical methods of statistical quality control TS156 S35
Sarkadi Vince
Academic Press, New York and London, 1974

13. Sensibilidad estadística de cartas de control de calidad FUH 7-17
Universidad de La Habana - Centro de Información Científica y Técnica, 1971

14. Curso sobre control de calidad TS15 M48
Centro de Educacion Continua
Editado por Centro de Educación Continua, 1973

15. Control de calidad, Seminario F-9158 S
Memoria del Instituto Mexicano del Petróleo
Publicación No. 69 JF/050
Ed. Instituto Mexicano del Petróleo, 1969

16. Scientific method in production management TS 155 G43
G.R. Gedye
Oxford University Press, 1969

17. Manual de la ingeniería de la producción industrial T56 M38
H.B. Maynard
Editorial Reverté, 1960

18. Control de calidad estadístico
E.L. Grant
Ed. CECSA, 1974

19. Control de calidad (Proper Quality Control)
Johnson, Sidney M.
Ed. ASCE Structural Engineering. Conference / Seattle Washington May (8-12) 1967

20. Control total de la calidad
A.V. Feigenbaum
Editado por C.E.C.S.A., 1975

21. Practical Quality Control
Simmons A. David
Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1970

22. Bulletin Congress de la Route
No. 176, 1965, Vol. 54

Table 13-2

CORRELATION TABLE FOR THE WEIGHTS AND HEIGHTS OF 285 BOSTON UNIVERSITY WOMEN STUDENTS (*Original data*)

Weights in Pounds

$x \rightarrow$ $y \downarrow$	85	95	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205	f_y	v_j	$f_y v$	$f_y v^2$	$v_j \sum_j u$
57										1				1	−7	−7	49	−35
58														0	−6	0	0	0
59	1		4	2										7	−5	−35	175	70
60		3	8	1				1						13	−4	−52	208	92
61	1	3	2	4	5	3								18	−3	−54	162	54
62		3	7	8	11	3	2							34	−2	−68	136	48
63			7	12	13	6	1	1				1		41	−1	−41	41	8
64			8	8	14	10	6	2			1			49	0	0	0	0
65			1	10	15	11	4			1				42	1	42	42	12
66		1	2	9	10	6	5	2		1				36	2	72	144	22
67				2	4	8	5	3		1			1	24	3	72	216	114
68				1	2	2	2	1	1					9	4	36	144	18
69						4	1	1	1					7	5	35	175	65
70										1				1	6	6	36	30
71					1						1			2	7	14	98	42
72						1								1	8	8	64	8
f_x	2	10	39	57	75	54	26	11	2	5	2	1	1	285		28	1690	578
u_i	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8					
$f_x u$	−8	−30	−78	−57	0	54	52	33	8	25	12	7	8	26				
$f_x u^2$	32	90	156	57	0	54	104	99	32	125	72	49	64	934				
$u_i \sum_i v$	32	75	148	16	0	62	74	51	36	25	42	−7	24	578				

Heights in Inches

(3) *Calculating machines.* Improvements in the modern computing machine now permit the simultaneous calculation of the quantities Σx, Σy, Σx^2, $2\,\Sigma xy$, and Σy^2 from ungrouped data. Such a procedure eliminates the necessity for making correlation tables and avoids errors due to grouping. (See, for example, P. S. Dwyer, "The Calculation of Correlation Coefficients from Ungrouped Data with Modern Calculating Machines," *Journal of the American Statistical Association*, December, 1940.)

Table 13-3

REDUCED CORRELATION TABLE FOR WEIGHTS AND HEIGHTS OF WOMEN STUDENTS (*Data of Table* 13-2)

Weights in Pounds

Heights in Inches	90	110	130	150	170	190	210
57					1		
60	8	21	8	1			
63	3	50	57	12		2	
66	1	24	54	19	3		1
69		1	8	5	3		
72			2			1	

There are other methods of measuring correlation which will be mentioned later. (See Sections 13.16, 13.17, and 15.8.) The choice of method depends largely on the value of the total frequency, N, the form of the data, and the objective of the particular statistical investigation.

13.14. The Correlation Surface

The graphical representation of a frequency distribution by means of a histogram or frequency polygon (Section 3.4) and the idealization of the latter into a frequency curve are already familiar. Similar processes are employed in the case of a *bivariate* distribution represented by a correlation table. Let each cell in the table be the base of a solid rectangular column whose height is proportional to the frequency of the cell. The aggregate of columns thus constructed forms a solid histogram, a sort of modernistic building (Figure 13-6). If the dimensions of each cell are k_x and k_y (the class intervals for x and y, respectively), and the total frequency is N, then the volume of this solid histogram will be Nk_xk_y. If the class intervals are reduced to unity, the volume becomes equal to N.

The concept of the solid histogram is not without its practical applications.

For example, a certain shoe store in Boston uses an effective form of it. The lengths of men's shoes from 4 to 12 and the widths from *AAA* to *E* constitute a double array of sizes. Upon each cell, for example, that for size 7½ *C*, is erected a vertical rod upon which uniform washers of constant thickness can be strung. For each pair of shoes sold, a washer is dropped upon the appropriate rod. The number of washers built up on each rod represents the frequency. After a period of time, say a week, the aggregate of cylindrical columns formed by the washers on the rods yields a form of solid histogram that records the distributions of shoe sales by lengths and widths. Orders for new stocks of shoes can be constructed accordingly.

Returning to the discussion of the first paragraph, if we assume the class intervals, k_x and k_y, each to approach zero while the total frequency, N, becomes infinite, in such a way that the product Nk_xk_y remains finite, the rectangular columns will become infinitely slender and infinitely numerous. We assume that their upper bases will approach, as a limiting form, a certain

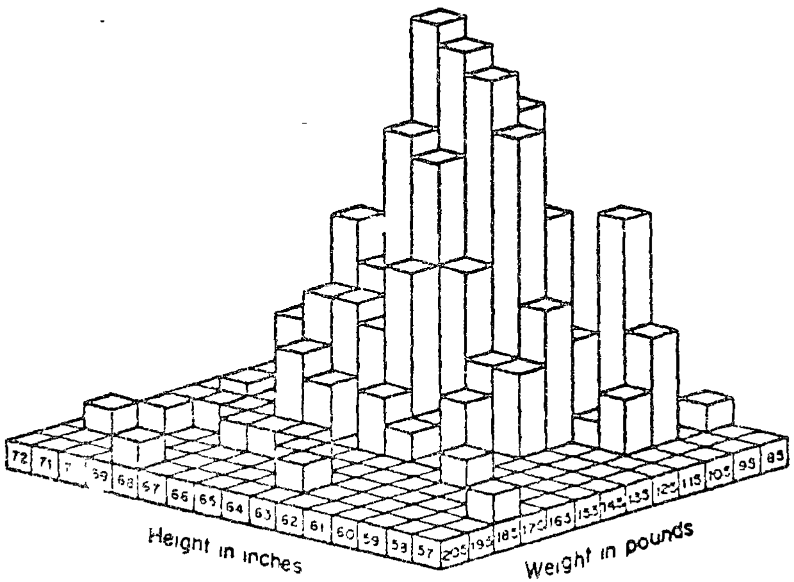


Fig. 13–6. Solid histogram for the Correlation Table 13–2, of heights and weights of 285 Boston University women students.

curved surface called a *frequency surface*. In the case of a so-called *normal bivariate distribution*, this surface will be bell-shaped (Figure 13–7). Any cross section parallel to the (x, y)-plane upon which the array of cells is situated will be an ellipse or circle. The centers of all such ellipses will lie upon the vertical line throughout the "mean point," (μ_x, μ_y); the axes of these ellipses will lie in two vertical planes perpendicular each to each. We shall call these the *axial planes* of the frequency surface. If ρ, the correlation

coefficient of the population, is numerically near 1, the ellipses will be slender ones, that is, the *major axis* will be much greater than the *minor axis*. If ρ is numerically near 0, the ellipses will be nearly circular, that is, the major and minor axes will be nearly equal. Any vertical cross section parallel to an axis or to any direction whatsoever will yield a normal curve. The surface will be asymptotic to the base, that is, it will approach infinitely near the base as it extends to infinity in all directions.

The equation of the surface corresponding to a normal bivariate population with means μ_x and μ_y, standard deviations, σ_x and σ_y, and correlation coefficient, ρ, can be shown to be

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}. \quad (13.25)$$

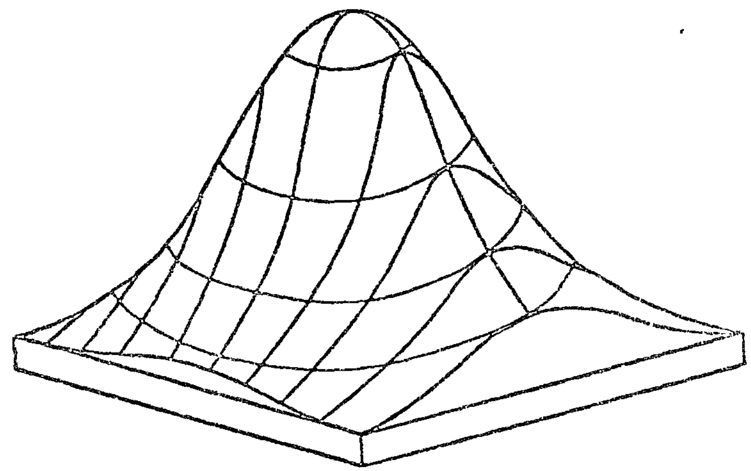


Fig. 13–7. A normal frequency surface.

The detailed study of the normal frequency surface defined by Equation (13.25) must be left to a more advanced course. At this point, however, we call attention to two important aspects of the correlation table and its associated surface. These are best explained by referring to correlation Table 13–2.

In the first place, we observe that the main body of this table may be enclosed in an ellipse whose longer axis slopes diagonally downward from the upper left-hand region of the table, and whose shorter axis slopes diagonally upward. The nearer we approach these axes, the greater, generally, do the frequencies become. These axes lie close to the axes associated with the ideal frequency surface. (Figure 13–7.)

An interesting application of this elliptical distribution is found in gunnery. If a gun is fired at a flat target, the distribution of the shots will

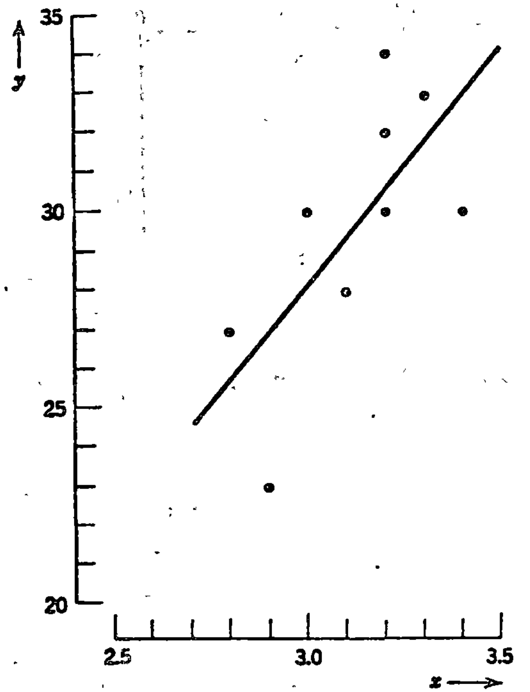


Fig. 17.2.1. Sample values and regression line in Ex. 1

Example 2. In the last example, let

$$x_j = 0.1x_j^* + 3.0, \qquad y_j = y_j^* + 30.$$

Then (cf. Table 17.2.2)

$$x_j^* = 10x_j - 30, \qquad y_j^* = y_j - 30.$$

Table 17.2.2. Coded Values in Example 2

x_j^*	y_j^*
−2	−3
−1	−7
0	0
1	−2
2	0
2	2
2	4
3	3
4	0
11	−3

From (5), Sec. 17.1, and the result above we now obtain the following final result.

All the points of a sample lie on the corresponding regression line (3), *Sec.* 17.1, *if and only if*

(5) $$s_{xy}^2 = s_x^2 s_y^2.$$

17.4 A Regression Model. Maximum Likelihood Estimates

In Secs. 17.1–17.3 it was not necessary to make specific assumptions about the distribution of the random variable Y. From now on we have to do so because we want to determine confidence intervals and test hypotheses. We make the following assumptions.

Assumptions.

(A1) *For each fixed x the random variable Y is normal with mean*

(1) $$\mu(x) = \alpha + \beta x$$

and variance σ^2 where the latter is independent of x (*cf. Fig.* 17.4.1).

(A2) *The n performances of the experiment by which we obtain a sample $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ are independent* (*cf. p.* 147).

Assumption (A2) is satisfied, for instance, in Ex. 1 of Sec. 17.2. It is not satisfied, for example, in an experiment where x is the time and Y is the height of a growing plant.

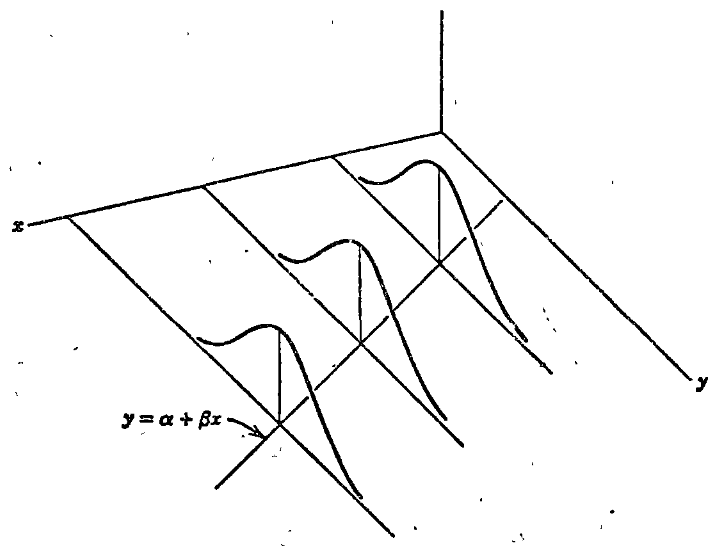


Fig. 17.4.1. Illustration of Assumption (A1)

Table 17.5.2. Deformation x (in Millimeters) and Brinell Hardness y (in kilograms/millimeter^2) of a Certain Type of Steel (Type 556-5) (K. Schimz, *Industr. Organisation*, 26, 1957, 107)

Deformation x_j (in millimeters)	Brinell Hardness y_j (in kilograms/millimeter^2)
6	68
9	67
11	65
13	53
22	44
26	40
28	37
33	34
35	32

Table 17.5.2 was taken. The corresponding graphical representation (Fig. 17.5.1) shows that we may regard the regression curve corresponding to the regression of the Brinell hardness Y on the deformation x as a straight line. (A corresponding test for linearity will be discussed later.) We suppose that in the present experiment Assumptions (A1) and (A2), Sec. 17.4, are satisfied, so that we may use the procedure in Table 17.5.1 for determining a confidence interval for the regression coefficient β.

From the given data we obtain

$$\sum x_j = 183 \qquad \text{and} \qquad \sum y_j = 440.$$

Since $n = 9$, it follows that

$$\bar{x} = \frac{183}{9} = 20.33 \qquad \text{and} \qquad \bar{y} = \frac{440}{9} = 48.89.$$

Furthermore,

$$\sum x_j^2 = 4665, \qquad \sum x_j y_j = 7701, \qquad \sum y_j^2 = 23{,}232.$$

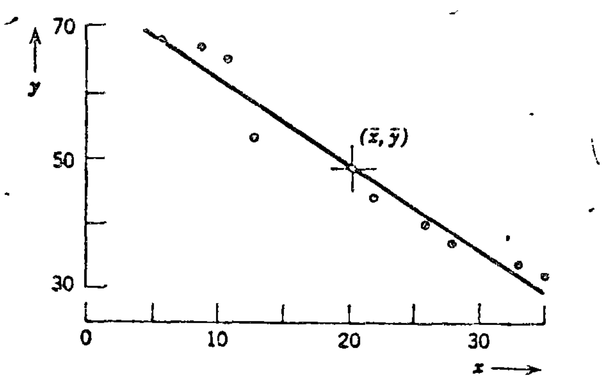


Fig. 17.5.1. Sample values and regression line in Ex. 1

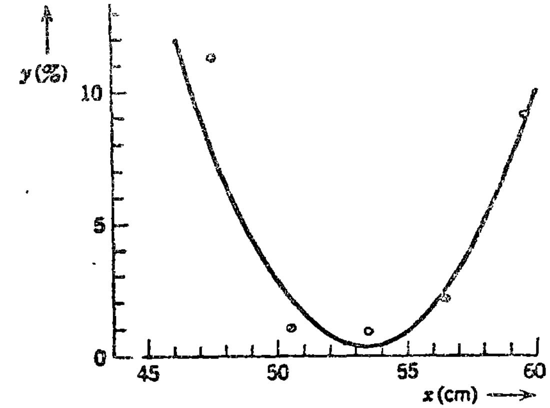


Fig. 17.11.1. The sample in Table 17.11.1 and the parabola (9)

because the sample consists of $n = 6144$ pairs of values and after grouping the value $x_1^* = -6$ appears 124 times, the value $x_2^* = -3$ appears 1255 times, $\cdots$, the value $x_5^* = 6$ appears 175 times. Similarly,

$$\begin{aligned}
\sum y_i &= 124 \cdot 11.29 + 1255 \cdot 1.04 + \cdots = 10{,}205.42 \\
\sum x_i^* y_i &= 124 \cdot (-6) \cdot 11.29 + 1255 \cdot (-3) \cdot 1.04 + \cdots = 6576.09 \\
\sum x_i^{*2} y_i &= 124 \cdot 36 \cdot 11.29 + 1255 \cdot 9 \cdot 1.04 + \cdots = 147{,}610.71.
\end{aligned}$$

Hence in the present case the normal equations are

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned}
&(a) \quad 6144 b_0 + 864 b_1 + 35{,}028 b_2 = 10{,}205.42 \\
&(b) \quad 864 b_0 + 35{,}028 b_1 + 16{,}038 b_2 = 6576.09 \\
&(c) \quad 35{,}028 b_0 + 16{,}038 b_1 + 605{,}880 b_2 = 147{,}610.71.
\end{aligned}$$

1st step. Elimination of b_0 from (6b) and (6c). To eliminate b_0 from (6b) we multiply (6a) by 864/6144, finding

$$864 b_0 + 121.500 b_1 + 4925.813 b_2 = 1435.137.$$

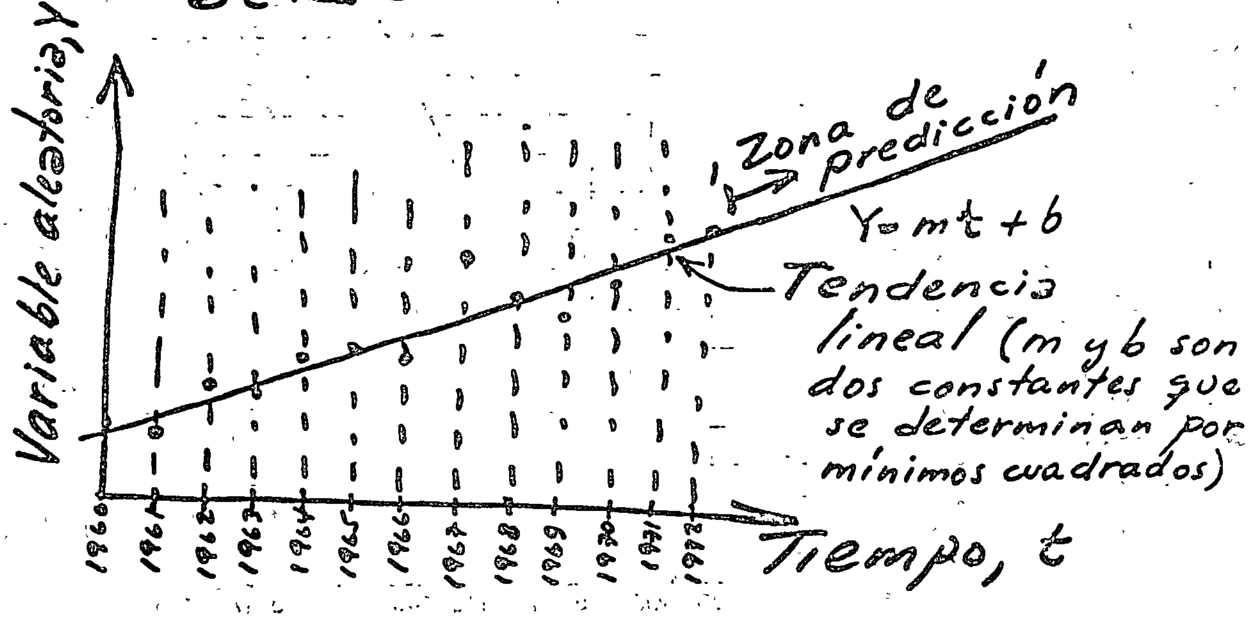
This equation we subtract from (6b). The result is

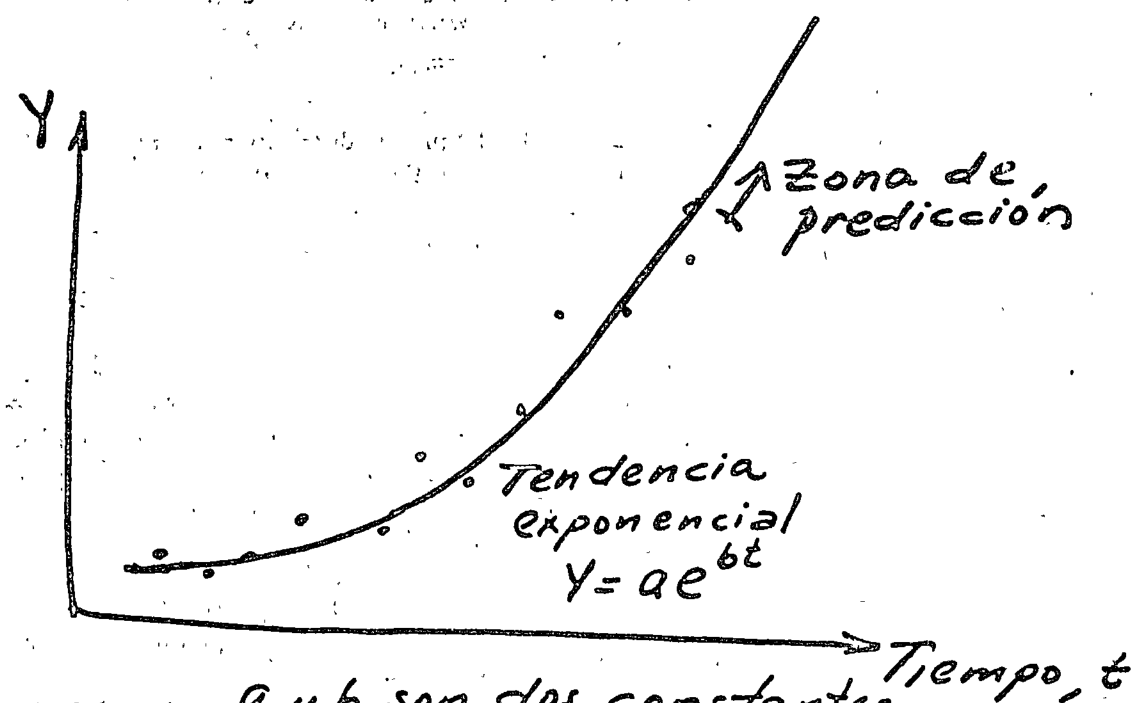
$$\text{(7a)} \qquad 34{,}906.500 b_1 + 11{,}112.187 b_2 = 5140.953.$$

Table 17.11.2. Computations in Example 1

$x_i^* = x_i - 53.5$	x_i^{*2}	x_i^{*3}	x_i^{*4}	Number	y_i	$x_i^* y_i$	[illegible]
−6	36	−216	1296	124	11.29	−67.74	[illegible]
−3	9	−27	81	1255	1.04	−3.1[illegible]	[illegible]
0	0	0	0	3149	0.89	0	0
3	9	27	81	1441	2.15	6.45	19.35
6	36	216	1296	175	9.14	54.84	[illegible]

SERIES CRONOLOGICAS O SERIES DE TIEMPO

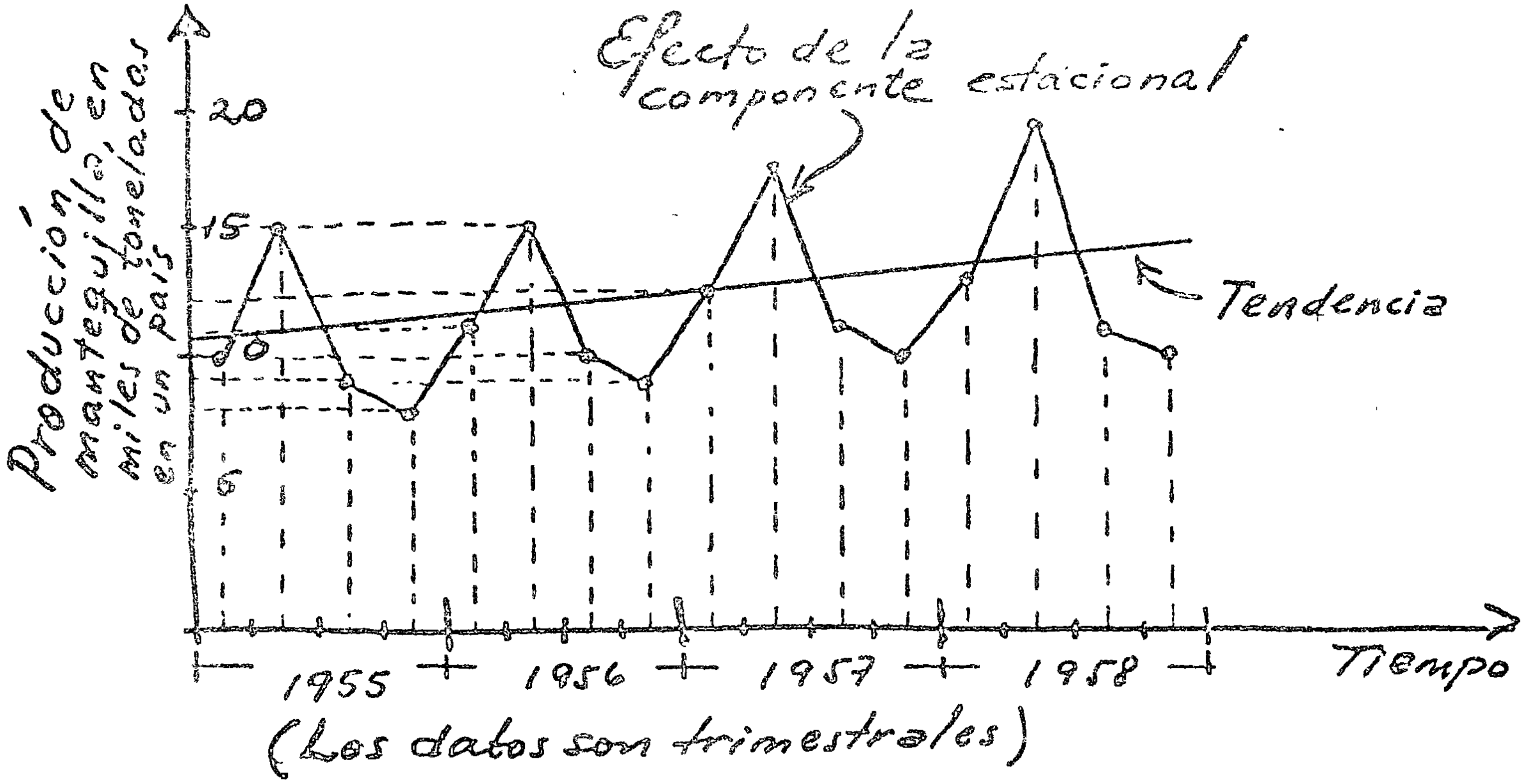


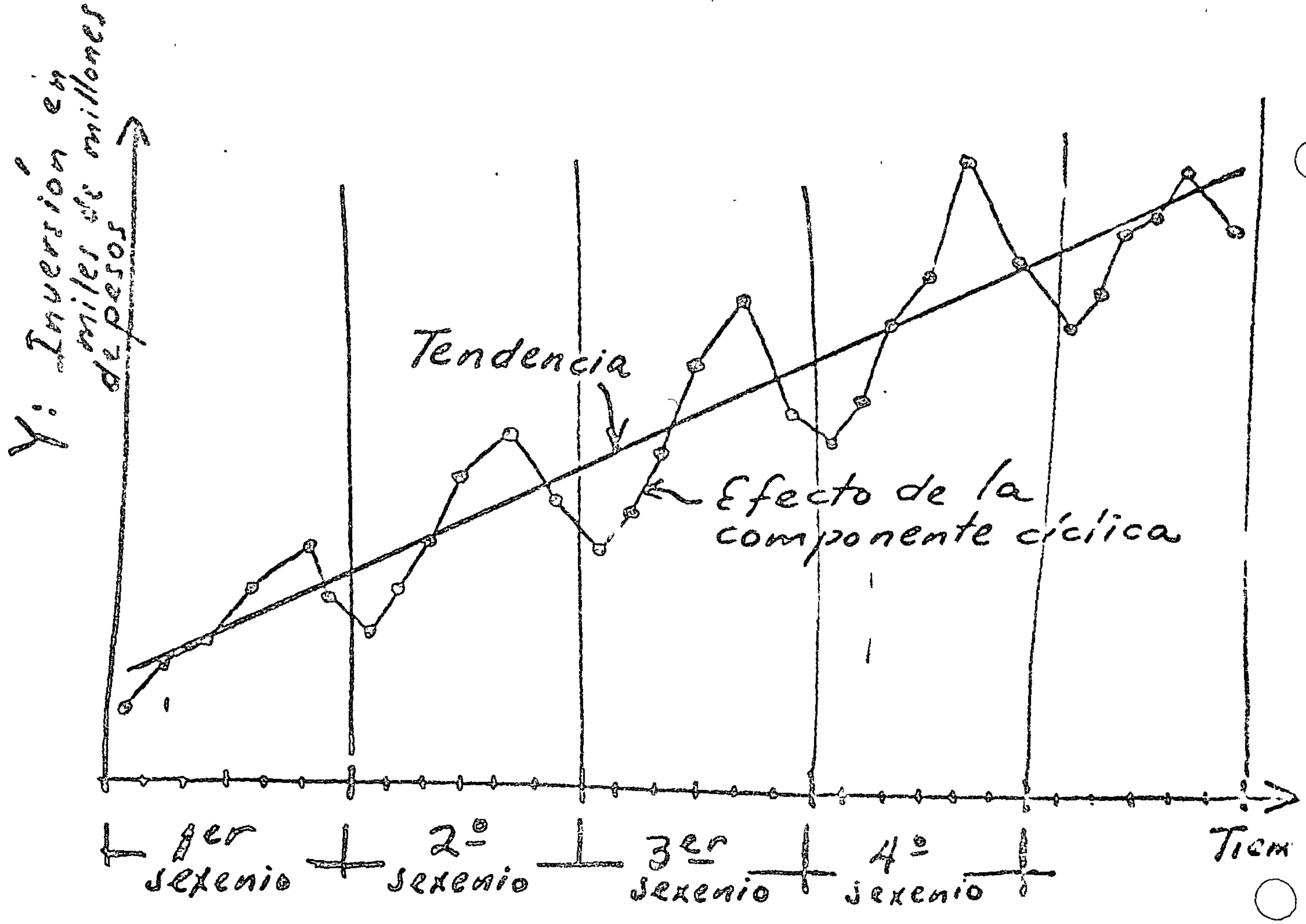


a y b son dos constantes que se determinan por el método de mínimos cuadrados.

Componentes de una serie cronológica:

- Tendencia general.- Indica hacia dónde tiende a ir la serie cronológica
- Comp. estacional.- Indica las variaciones que ocurren a corto plazo (en periodos menores a un año)
- Comp. cíclica.- Indica las variaciones que ocurren a largo plazo (en periodos mayores que un año)
- Comp. irregular.- Indica las variaciones que ocurren al azar


Efecto de la componente estacional
Producción de mantequilla, en miles de toneladas en un país
20
15
10
6
Tendencia
Tiempo
1955
1956
1957
1958
(Los datos son trimestrales)


Y: Inversión en miles de millones de pesos
Tendencia
Efecto de la componente cíclica
1er sexenio
2º sexenio
3er sexenio
4º sexenio
Tiem

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

NORMALIZACION BASICA

ING. MANUEL MARIN GONZALEZ

AGOSTO DE 1976.

CENTRO DE EDUCACION CONTINUA, F. DE I., UNAM

CURSO DE CONTROL ESTADISTICO DE LA CALIDAD

NORMALIZACION BASICA

Ing. Manuel Marín González
Jefe de la Unidad de Normalización
Básica, CONACYT.

Hemos dicho "la calidad se define, se controla, se desarrolla"; todo ello, también hemos dicho, se reduce a la medición, incluyéndonos así dentro una filosofía que dá a la medición el valor fundamental; la medición es el proceso y el único proceso por el que conocemos verdaderamente (Poincaré). Más aún, en ello radica el desarrollo. La normalización es la definición científica de la calidad; el control, la verificación de la calidad, el desarrollo, la superación de la calidad. En síntesis la normalización es el mecanismo del desarrollo. Lo es en tanto que, definición o medición de los niveles de calidad, es también descubrimiento o medición del subdesarrollo y, consecuentemente, impulso hacia la superación. En esta presentación introductoria del Curso de Control Estadístico de la Calidad 1976 en el CEC vamos a ocuparnos de algunos conceptos fundamentales. Empezaremos por el concepto de Calidad, la investigación que auxilia su definición y la medición que introduce el rigor de la misma. Continuaremos con el concepto de Metrología, la reducción de la calidad a la cantidad, tratando de ofrecer la comunicación suficiente. Finalmente ofreceremos el concepto de Desarrollo. Aún,como último punto presentaremos los avances más relevantes de la normalización para apreciar así la medida en la que nuestro país ya está incluido o no en la vanguardia de este proceso.

1. El concepto de calidad.- La calidad es el encuentro entre la objetividad de la naturaleza y la intencionalidad de nuestras necesidades. Poco más, poco menos, esta es la definición aristotélica, misma que se formulaba como categoría, vale decir, como uno de los elementos irreductibles, primarios, del conocimiento. Actualmente tal definición se sigue manteniendo, si bien en términos contemporáneos, la calidad es la medida en la que la producción alcanza las exigencias del uso. Tanto el usuario individual primitivo que requería satisfacer sus propias necesidades y buscaba en la objetividad de la naturaleza, precisamente con la intencionalidad de sus necesidades, como el flamante sistema ciencia-producción de la actualidad, en el encuentro de la satisfacción, encuentra a la vez la calidad de las cosas, el qué de las cosas. Este qué de las cosas, lo que preguntamos cuando decimos qué es esto y lo que contestamos, esto es tal cual, esto es la calidad. Lo que investigamos en la naturaleza, para la satisfacción de nuestras necesidades, es a la vez el desarrollo del conocimiento. Lo que "descubrimos", lo que va constituyendo el acervo del conocimiento del hombre, todo eso es la calidad. Por supuesto, el movimiento inicial milenario, es muy precario, el avance fue muy lento, pero después, cuando la investigación se hizo sistemática, el avance llegó a ser intenso. Sin embargo, se trata de lo mismo, buscamos el qué de las cosas, su "qualitas", la calidad: invariablemente seguimos diciendo esto es tal cual, en todos los casos las novedades las referimos a características pretendidamente más conocidas. Sobre la marcha nos damos cuenta que la calidad de las cosas no se

suelve en una sola cualidad (el español diferencia calidad de cualidad, en la sencilla fórmula de calidad igual a la suma de cualidades). Los objetos de la naturaleza tienen más de una cualidad y, en consecuencia, la calidad, el qué de ese objeto, lo define el conjunto de cualidades. Más aquí está bien ya plantear una primera cuestión fundamental: desde que para responder qué es algo, para formular la cualidad, contestamos esto es tal cual, y de esta manera referimos la objetividad a nuestra subjetividad, difícilmente podríamos decir que la calidad es la objetividad de las cosas, algo que existe con independencia de nuestra propia voluntad, más bien, como desde Aristóteles hasta la actualidad se sostiene, la calidad no es sino encuentro entre tal objetividad y nuestra propia intencionalidad. Es interesante acotar aquí un pensamiento de orden artístico (el arte, siguiendo a Heidegger, es la esencia de la técnica). Según Read, célebre crítico de arte, y esa calidad no es sino la peculiar animación que el artista plasma a la materia inerte. Esto también tiene su equivalente en el terreno de la tecnología, pues no otra cosa significa el concepto "estado del arte", la peculiar forma de transformación de los recursos naturales en el sentido de las necesidades del hombre, el estado actual de la tecnología. En fin, la calidad no corresponde totalmente a la objetividad sino más bien al encuentro dialéctico entre la objetividad de la naturaleza y la subjetividad del hombre. Podría decirse que el hombre imprime la calidad en tanto que él propone las referencias de la objetividad, si bien tal afirmación tiene una apariencia que puede conducir a equívocos. La creatividad del hombre no es propiamente la creación de la calidad, sino invariablemente el encuentro entre la objetividad y la intencionalidad. La investigación científica, la búsqueda sistemática del qué de las cosas, de su calidad, sobre la marcha va "encontrando" nuevas y nuevas características, e igualmente la tecnología va inventando otras, y de esta manera podemos hablar de avance, y lo es realmente porque en la medida en la que descubrimos nuevas características, o las inventamos, tenemos más y mejores satisfactores, lo que seguramente nos proporciona mayor comodidad y mayores disponibilidades a nuestro espíritu. Por supuesto esta referencia a la subjetividad conduce a equívocos y hasta a errores graves. Unos y otros se reducen con la medición. Los griegos hasta inventaron un término para distinguir el conocimiento verdadero, "MANTANEIN", cuando la referencia llegaba a la medición. Mantanein es así el conocimiento verdadero de las cosas y consiste en no quedarse en ser tal cual, sino en reducir esta cualidad a la medición. Euclides lo precisó: "conocemos conforme a los parámetros a los que referimos nuestro conocimiento". Y con esto las cualidades quedan reducidas a parámetros y la calidad a la cantidad. Obviamente la introducción de parámetros no objetiviza el conocimiento, la calidad, quizás más bien al contrario, pues es el investigador el que propone los parámetros y lo hace en la medida en la que en efecto tal cualidad es realmente medible.

2. El concepto de metrología.- La reducción de la calidad a la cantidad, proceso fundamental del conocimiento verdadero, plantea una nueva problemática que en cierto sentido hasta se diferencia de la investigación de la calidad. En la búsqueda de satisfactores, de mejores satisfactores, o del mejoramiento de los actuales, el investigador va encontrando nuevas cualidades.

Estas constituyen la materia prima del metrólogo. Este tiene que encontrar, primero parámetros, inventar modelos que relacionen eficazmente la calidad. Por ejemplo, cuando el investigador "descubre" la corriente eléctrica y quiere definirla como un fluido que recorre los materiales cuando el proceso se fuerza por una diferencia de potencial, está sugiriendo que los materiales tienen una cualidad que quizás, de inmediato, se le llame conductividad o no. El "descubrimiento", propiamente se realizará hasta que el metrólogo (quien puede ser el mismo investigador por supuesto), haga de esa cualidad parámetro. Lo que ocurre cuando propone un metro adecuado por ejemplo, la corriente por unidad de área del material; enseguida buscará las unidades de medida más adecuadas, por ejemplo, unidades de flujo eléctrico por unidad de superficie (coulomb/cm2); enseguida, el experimento, las condiciones más favorables y controlables del mismo; el equipo necesario, las probetas y en general el método de medición. Todavía en estas condiciones no se reduce la calidad a la cantidad. Ello ocurre hasta que la medición puede normalizarse. Si practicamos una sola medición, por perfectamente que el proceso sea conducido, es muy aventurado pensar que tenemos ya la medida, pues si efectuamos una segunda medición, en general resultará un tanto diferente; incluso si practicamos una tercera todavía es muy probable que no coincida con ninguna de las dos primeras; solo si seguimos efectuando más y más mediciones vamos a ir identificando paulatinamente una cierta tendencia de las mismas, tendencia que Gauss identifica con su curva "normal" de distribución. El resultado es la medida normal, la norma, en este caso de la conductividad eléctrica de un determinado material. Si analizamos todo este proceso nos convencemos de que en manera alguna la metrología es algo elemental o simple. Ya desde el trabajo científico básicao de encontrar parámetros, es una cosa bastante parecida a la sugerida por Read, el metrólogo tiene que ser un creador: ni los parámetros, ni los metros, son algo dado, algo que encontramos en la naturaleza; más bien es algo que nosotros mismos asignamos, si bien tenemos que verificar que los resultados de la experiencia corresponden a lo esperado, si no es el caso, tendremos que modificar nuestra idea paramétrica. De hecho la asignación de parámetros no ocurre sino simultáneamente con la asignación de metros, unidades, métodos de medición y hasta resultados normalizados. La metrología va a ocuparse pues de las mediciones, es la ciencia de la medición, si bien las tendencias especializadoras contemporáneas frecuentemente reducen la metrología al aseguramiento de las mediciones. Incluso, cuando no se aclare nada al respecto, el concepto de metrología siempre se referirá al aseguramiento de las mediciones. Sin embargo, en rigor, la metrología, inisitimos, es la ciencia de la medición, ciencia que incluye no solamente el aseguramiento de la medición, en cuanto a señalamiento de aparatos, etc., sino incluye también el universo completo de la medición. Este universo, según lo dicho arriba, es muy extenso. Desde luego lo primero es ir de la cualidad al parámetro, al metro, a las unidades, al diseño del experimento, a la realización del mismo, método de prueba y a su normalización (en la que, por cierto, el tratamiento estadístico de los resultado del experimento es de primordial importancia). En la práctica aún esto no pasa de ser la metrología básica, pues sobre la marcha usual de la ciencia, la tecnología y la producción, -

la medición ordinaria para asegurarse, ha de referirse invariablemente a sus fundamentos. Es lo que se denomina trazabilidad, la referencia secuencial en el sentido del aseguramiento de las mediciones.

3. El concepto de desarrollo.- Si la calidad es la medida en la que la producción alcanza las exigencias del uso, la definición formal de la calidad, en principio, radica en el acuerdo entre productores y usuarios, si bien este acuerdo es relativamente precario sino se auxilia de la investigación. La investigación de la calidad conforme lo hemos discutido en el primer punto descompone la calidad en cualidades que, enseguida, la metrología reduce a parámetros cuando encuentra metros, métodos de medición, etc. La medición sistemática de la calidad es de hecho el perfil del desarrollo, identifica los avances relativos de los diversos productos. Descubre entonces los niveles de subdesarrollo y, en consecuencia, orienta la investigación hacia la superación de las deficiencias. Esto que aparece tan obvio, sin embargo, no se realiza rigurosamente sino en los países desarrollados. En países como el nuestro, se piensa más bien que la normalización es simplemente algo formal, a veces hasta ociosa, que sirve solo para hacer referencia de calidades. Que esto no es así lo demuestra el hecho de que todo país desarrollado tiene su propio sistema de normalización que se asienta en su propia metrología básica. Si la norma fuera tan solo una referencia habría una sola norma en el mundo. Significa pues que realmente el sistema de normalización refleja con toda precisión el nivel de la calidad del país en cuestión, refleja el grado de desarrollo. Y una normalización rigurosamente efectuada es consecuentemente el mecanismo del desarrollo. Es-

tos conceptos coinciden plenamente con la teoría general del control. El control se define como la medición sistemática y permanente del valor actual de una variable, o el individual de una serie, y la acción consecuente para mantener dicho valor dentro de límites previamente establecidos, vale decir, dentro de la norma. Y la cibernética también define un sistema en desarrollo, justamente, como aquel en el que la norma de referencia, es una norma que se desarrolla. El mecanismo del desarrollo definido por la cibernética, es pues un mecanismo de normalización.

4. <u>Los avances de la normalización</u>.- La normalización es la definición científica de la calidad, y esta la medida en la que la producción alcanza las exigencias del uso. Consecuentemente la normalización se inicia en el acuerdo entre productores y usuarios. Este acuerdo es ineludible. Tanto esto es así que su no observancia es la tecnocracia o la arbitrariedad. En todas formas el sometimiento, aunque algunas veces oculto por la ingenuidad o la ignorancia. Todo mercado se define por sus peculiares consumidores y por los productos que concurren al mismo. Estos productos satisfacen en alguna medida las exigencias de los usuarios. Esta medida puede ser desde desconocida, cosa que ocurre en los países más atrasados, hasta rigurosamente acordada entre productores y usuarios, como ocurre en los países más avanzados (AQL). La ingenuidad radica en pensar que en los países atrasados no es necesario verificar esa medida y, más aún, en pensar que eso puede ser así porque la verificación ya se ha hecho en los países avanzados, "no hay para que volver a descubrir el hilo negro; las necesidades de los hombres son las mismas en todas partes y la forma de

satisfacerlas ya se ha definido en algún país avanzado". Basta pues elegir el "país avanzado" más idóneo en cada caso. Para ello, siguiendo el ejemplo de la vanguardia de la normalización se establecen comités de normalización, integrados por productores y usuarios. El trabajo de estos consiste en elegir la norma extranjera "más idónea" y en convenir en su traducción. Pero esa traducción carece de sentido. No es exactitud en los términos lo único que la norma requiere. La exactitud fundamental debe estar en la correspondencia con la realidad. Esto quiere decir, no que se tenga que descubrir nuevamente el "hilo negro" sino que se tiene que verificar que en el país es hilo negro precisamente el que se produce y que existen los elementos necesarios y suficientes para verificar esa existencia, vale decir, los equipos de laboratorio con la capacidad conveniente y también el personal que pueda manejarlos. Está precisión nos permite desglosar con detalle el contenido de una norma para advertir lo dicho. Toda norma incluye hasta nueve elementos: terminología o nomenclatura, dominio o alcance de la norma, clasificación de calidades incluidas en la norma, parámetros, metros, métodos de medición, especificaciones, planes de muestreo, preservación de la calidad. Resulta así evidente que el cuidado en el uso adecuado de los términos no corresponde sino solo al primero de los nueve elementos. Aceptados los términos a emplear en la norma, se tiene que tomar la decisión del dominio o alcance de la misma. Por supuesto que esto en manera alguna podría coincidir con el dominio o alcance del país de origen, es decir, lo más probable es que para utilizarse en este país alguna decisión haya de tomarse al respecto. Lo mismo puede decirse respecto de la clasificación, puede convenir usar una clasificación similar, suprimir alguna variedad, incluso agregar alguna. Cosas todas ellas que tienen una relación directa con nuestra situación propia. Vienen enseguida los parámetros. Estos, a más de participar de las observaciones anteriores, aún tiene que advertirse si todos ellos resultan los más convenientes para - nuestro medio. Alguna característica de calidad podría requerir un tratamiento especial, tanto en sentido positivo, agregar algún nuevo parámetro, como en el negativo, ser más recomendable la supresión de alguno de ellos. Incluso cierta característica de calidad podría reportarse más convenientemente con algún otro parámetro. Lo mismo podemos decir en relación con los metros. Por ejemplo, actualmente se considera que la pura traducción de unidades inglesas al sistema métrico decimal, fuera ya un uso adecuado de metros. Los métodos de medición tienen que ver con las disponibilidades de equipo en los laboratorios. Aceptar un método de - medición en una norma significaría por lo menos que en el país existen laboratorios y equipos disponibles para verificar adecuadamente esos métodos de medición. El problema mayor radica en las especificaciones. Estas definitivamente no se pueden traducir, sino que siempre se tienen que verificar. Una vez aceptados parámetros, metros y métodos de medición, se - debe practicar una rigurosa verificación con el objeto de advertir la normalidad de cada uno de los parámetros en nuestras propias condiciones. Solo sobre la base de esta normalidad es que se puede tomar las decisiones respecto de los valores centrales y de sus dispersiones aceptables. Los planes de muestreo que hayan de incluirse en las normas son concomitantes - con las calidades definidas y aceptadas en la misma. Finalmente la preservación de la calidad es algo que tiene que ver definitivamente con las condiciones locales. Obviamente la normalización, aún en países de poco desarrollo como es nuestro caso no puede prescindir de ser un asunto científico tecnológico. Si en los países desarrollados la normalización es el resultado de la investigación rigurosa y de vanguardia, en los países en vías de desarrollo la normalización debiera ser por lo menos resultado de la verificación igualmente rigurosa. En todos los casos se pueden distinguir los tres elementos de la normalización:

4.1 Acuerdo.- Productores y usuarios han de encontrar el equilibrio que define la calidad. Si de manera directa sus posibilidades se reducen al acervo de conocimientos directos, siempre pueden ampliar el contenido de sus decisiones con el auxilio de la investigación.

4.2 Auxilio de la investigación.- En los países avanzados se llega a la investigación como una necesidad concreta y directa de los propios productores o usuarios. Es la actividad productiva la que en un cierto momento tiene necesidad de afinar sus mecanismos de investigación para definir rigurosamente las calidades. En los países poco desarrollados esto difícilmente ocurre, si bien existe la posibilidad de recurrir a centros de investigación surgidos en forma independiente. Incluso la demanda de productores y usuarios significaría una razón justificatiba de los mismos.

4.3 La normalización básica.- La concurrencia de la investigación en auxilio a la actividad productiva para la definición rigurosa de la calidad pronto demanda la normalización básica. Diferentes productores y diferentes usua rios emplean diferentes mecanismos de investigación, más aún de medición. Pueden emplear diferentes parámetros, metros o métodos de medición para referirse a su propia calidad. En este momento es indispensable normalizar todos estos elementos, y esta es la tarea de la normalización básica. Incluso la trazabilidad, la referencia secuencial para asegurar las mediciones, es definitivamente indispensable, en la inteligencia de que si tal trazabilidad no se practica, las mediciones no están aseguradas.

5. Conclusiones.- La normalización es indispensable. No solamente es una tecnología o una ciencia. Se trata de una verdadera filosofía. En el mundo entero se acepta que a mayor desarrollo, tanto más éste depende de los avances de ciencia y tecnología. La obviedad de esta afirmación frecuentemente resulta, sin embargo, equívoca. No existe una correlación automática entre los avances de la ciencia y la tecnología de una parte y los del país por otra. Es indispensable establecer una vinculación objetiva entre ambos desarrollos. La normalización es ese vínculo. La normalización básica es la introducción del metro a la investigación para que esta alcance resultados rigurosos y transferibles, y es también la transferencia de esos resultados a la actividad productiva. Solo en la medida en la que un país tiene definida rigurosamente su normalización, existe en ese país el mecanismo correspondiente de enlace; y solo en la medida en la que este enlace existe la ciencia y la tecnología impulsan el desarrollo del país.

16/VIII/76
MMG'lmm

centro de educación continua

división de estudios superiores

facultad de ingeniería, unam

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

MUESTREO E INSPECCION

Ing. Enrique Novelo Berrón

Septiembre 1976.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D F. Tels: 521-40-23 521-73-35 5123-123

FLUJO REGULAR DE PRODUCCION.

Un concepto importante que puede utilizarse con bastante ventaja, en una correcta organización de muestreo de aceptación, es el concepto de contaminación con unidades defectuosas, cuando el flujo de producción es regular.

Por un flujo regular de producción se entiende el estado en que las especificaciones fundamentales de tecnología se cumplen.

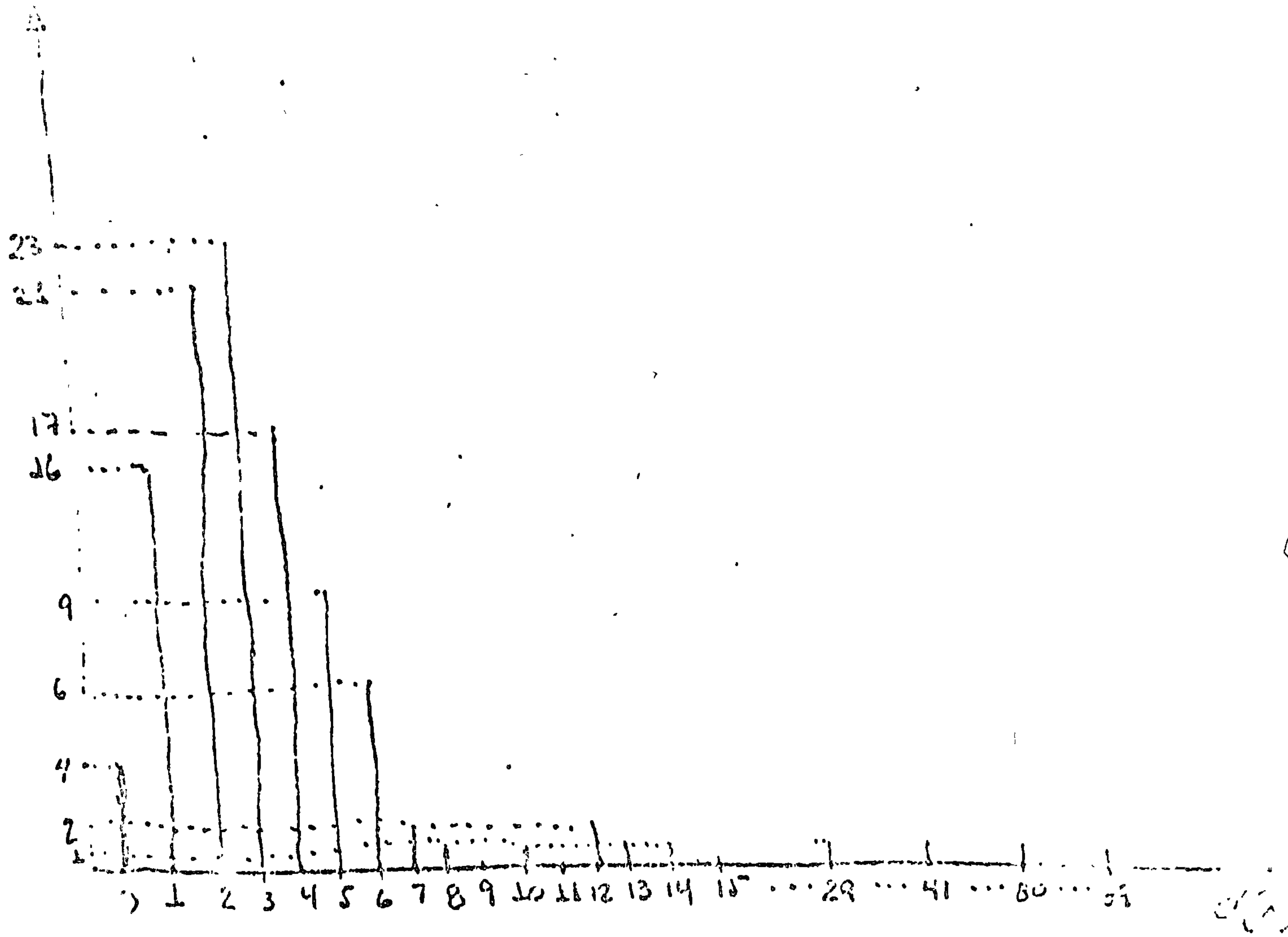
La contaminación por unidades defectuosas en un flujo regular de producción es pequeña, pero se incrementa rápidamente si hay violaciones considerables en la tecnología.

La siguiente figura muestra los resultados de un examen completo de IO8 lotes, cada uno de los cuales contiene IOOO unidades. El eje horizontal representa el número, d(N), de unidades defectuosas que se encontraron en un lote.

Para cada valor de d(N), el número de lotes está indicado por las columnas de guiones sobre los valores de d(N).

Así, la línea en la columna correspondiente a d(N)=0 significa que, de los IO8 lotes probados, solamente en cuatro no se descubrieron unidades defectuosas.

Supongamos que, para cada uno de los 108 lotes, sabemos si el lote se produjo en un flujo regular o si hubieron violaciones en la tecnología.



Resultados de un examen completo de 108 lotes, cada uno de los cuales contiene 1000 unidades.

Supongamos que resultó que los lotes que contenían hasta 8 unidades defectuosas fueron producidos en un flujo regular de producción, y que los lotes que contenían 10,12,13 o 14 unidades defectuosas se produjeron bajo violaciones insignificantes de las reglas tecnológicas; pero los lotes con $d(N)= 29$, 41,80 y 89 se produjeron bajo violaciones serias de las reglas tecnológicas. Es claro por la figura que, cuando el flujo de producción era regular, el número $d(N)$ de unidades defectuosas en un lote que contiene N unidades puede considerarse una v.a. con una distribución definida.

La forma de esta distribución

$F_n(D)=P\{d(N)<D\}$ puede determinarse después de realizar investigaciones especiales.

En un gran número de casos, podemos usar la distribución Binomial o la de Poisson como una primera aproximación.

La v.a. $d(N)$ tendrá una distribución binomial cuando la probabilidad de que cualquier unidad sea defectuosa es igual para todas las unidades.

La distribución $F_n(D)$ se conoce como la distribución a priori para el número de unidades defectuosas en un lote producido bajo un flujo regular de producción.

Es extremadamente dudoso si podemos determinar cualquier distribución fija $F_d(D)$ para el número de unidades defectuosas en un lote cuando hay aberraciones en la tecnología.

Por ahora, supongamos que la distribución $F_d(D)$ existe, que todas las condiciones básicas que determinan un flujo regular de producción se mantienen con probabilidad p, cercana a 1, y que una aberración puede ocurrir con probabilidad $q=1-p$.

En este caso, la distribución a priori $F(D)$ del número D de unidades defectuosas en un lote está dada por la fórmula

$$F(D) = pF_n(D) + q\,F_d(D)$$

o sea, tenemos una mezcla de dos distribuciones.

Si las funciones de distribución $F_n(D)$ y $F_d(D)$ son tales que $F_n(D) \cong 1$ cuando $F_d(D)$ es pequeña, entonces el problema de organizar el muestreo de aceptación consiste en lo siguiente: la inspección debe organizarse de manera que la mayoría de los lotes producidos bajo un flujo regular de producción será aceptada mientras la mayoría de lotes que se producen cuando hay una aberración en el flujo de producción se rechazarán.

Por brevedad, llamaremos a esta propiedead del proceso de producción la propiedead de separabilidad.

Al organizar un muestreo que posea la propiedad de separabilidad, uno puede comenzar con una forma específica de la distribución $F_n(D)$.

Sin embargo, esta propiedad de separabilidad debe retenerse para distintas distribuciones $F_d(D)$.

Las necesidades ~~Los requerimientos~~ de insensibilidad a la forma de $F_d(D)$ se explican por la fuerte dependencia de $F_d(D)$ en la naturaleza de la causa de la aberración.

La determinación de la distribución a priori $F(D)$ es a menudo el punto más debil en planes basados en consideraciones económicas.

La forma de distribución a priori influencia en todos los aspectos la efectividad de un ejemplo de un plan de muestreo.

Suponga que se establece una inspección por muestreo destructiva tal que se escogen un cierto número de unidades para prueba de cada lote. Si se encuentra una unidad en la muestra se rechaza el lote. De otra manera se acepta.

A primera vista, uno puede suponer que tal muestreo no puede disminuir la calidad de la producción aceptada.

Sin embargo, supongamos que la distribución a priori F(D) es tal que cada uno de los lotes sujetos a este muestreo tiene a lo más una unidad defectuosa. Con esa F(D), los lotes en cuyas muestras hay una unidad defectuosa posible son rechazados.

Obviamente, la calidad de la producción aceptada para uso del plan estadístico de muestreo sería peor que si no se hiciera el muestreo.

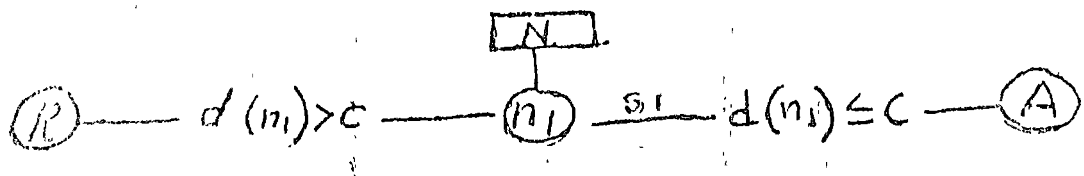
Sin embargo, con otras distribuciones a priori este mismo plan de muestreo podría ser altamente efectivo.

Para organizar una inspección de aceptación por muestreo necesitamos tener un sistema de reglas, el plan de inspección, en el que se muestre como debería uno seleccionar las unidades de prueba y saber después qué tan grande debemos hacer el número de unidades por probar para hacer la decisión de aceptar o rechazar lotes en su integridad o inspeccionarlos un poco más.

A continuación se presentan los tres tipos más conocidos de planes de muestreo de inspección con respecto a un principio cualitativo.

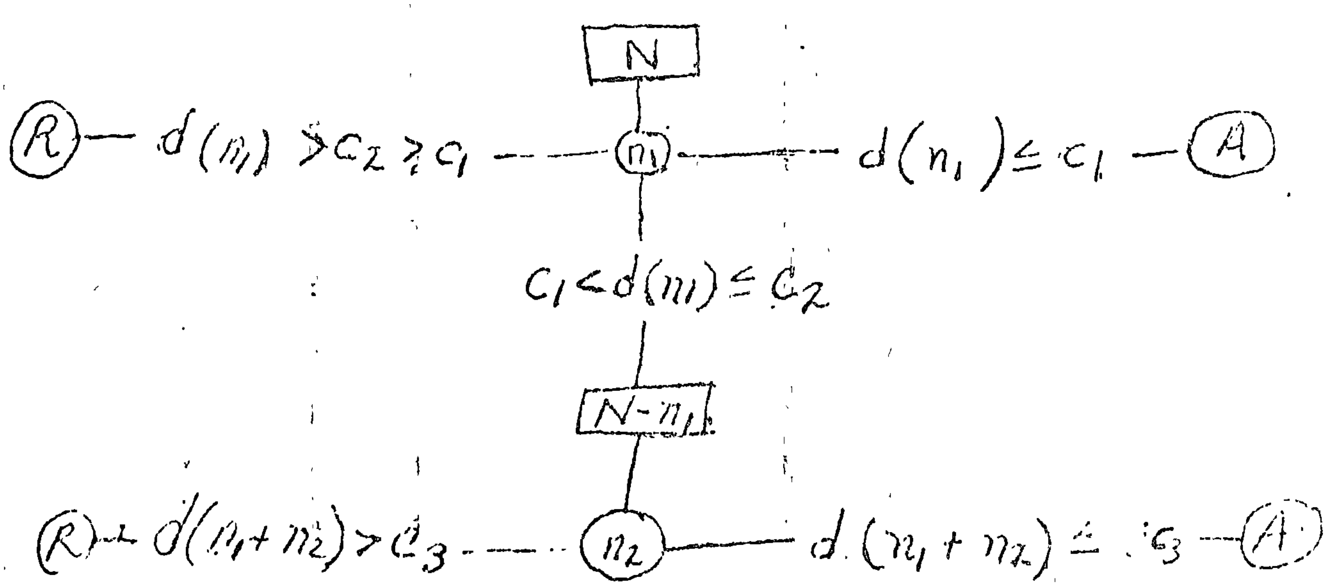
a) Planes de muestreo simple.

De un lote de N unidades se escogen aleatoriamente $n_1 \leq N$ y se someten a prueba. Si el número de unidades defectuosas entre las n_1 es $d(n_1) \leq c$, donde c es un entero conocido como el número de aceptación, entonces se acepta el lote



b) Planes de muestreo doble.

De un lote de N unidades se selecciona aleatoriamente n_1 unidades. Si el número de unidades defectuosas $d(n_1) \leq c_1$ se acepta el lote; si $d(n_1) > c_2 > c_1$ se rechaza; si $c_1 < d(n_1) \leq c_2$ se saca una segunda muestra de tamaño n_2. Si el número total de defectuosos $d(n_1+n_2)$ encontrados en las dos muestras no excede c_3, el lote se acepta; si $d(n_1 + n_2) > c_3$ se rechaza. Con frecuencia se usan planes truncados del tipo de muestreo doble con $c_2 = c_3$.



c) Planes de muestreo secuencial.

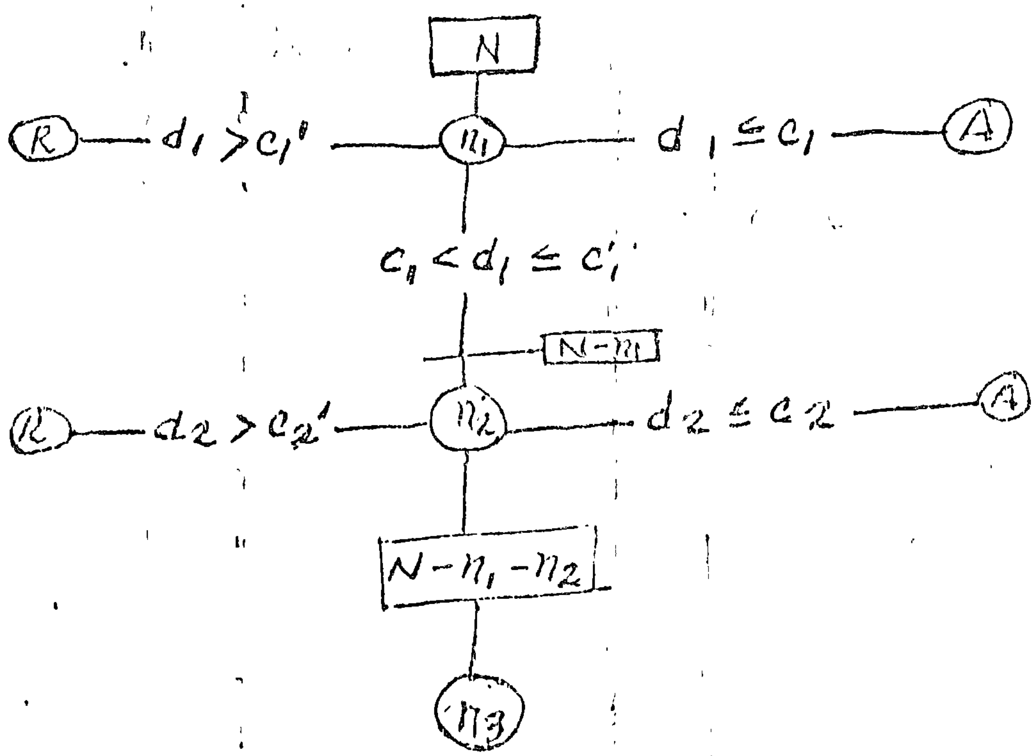
Sean n_i $i=1,2,\ldots$ los tamaños de las muestras sucesivas, donde $n_1 < N$

$n_1 + n_2 < N$

y los pares de enteros c_i y c_i' $i=1,2,\ldots$.

Sea $d_i = d(n_1 + \ldots + n_i)$ el número de unidades defectuosas encontradas en las primeras i muestras

Al principio del muestreo, tomamos una muestra de tamaño n_1. Si $d_1 \leq c_1$ se acepta el lote; si $d_1 > c_1'$ se rechaza; si c_1 d_1 c_1' tomamos una muestra de tamaño n_2, etc.



Cada uno de estos tipos tiene sus ventajas y desventajas.

Vemos que los planes de muestreo simple son considerablemente más sencillos que los otros desde un punto de vista organizacional.

Además, sabemos el tamaño de la muestra por adelantado.

En los planes de los otros tipos mencionados, podemos, con el mismo tamaño promedio de la muestra, ~~obtener~~ garantizar con un alto grado de ~~certeza~~ confianza que las decisiones tomadas corresponderán al estado actual de cosas.

Sin embargo, puede suceder que la cantidad de pruebas ~~será~~ sea extremadamente grande.

Una estimación de la calidad de la producción para los planes de los tipos b) y c) es considerablemente más complicada que para planes del tipo a).

CURVA CARACTERISTICA DE OPERACION

El uso de métodos de aceptación por muestreo está relacionado con el riesgo de rechazo innecesario de lotes satisfactorios y el riesgo de aceptar lotes con unidades defectuosas.

Con una muestra aleatoria de unidades podemos, con un número total pequeño de unidades defectuosas en un lote, seleccionar para prueba un número considerable de unidades defectuosas y esto nos lleva a rechazos erróneos de un buen lote (error de primera clase).

Por otra parte, puede pasasr también que la muestra contenga un número pequeño de unidades defectuosas ignorando el hecho de que el lote tiene un número considerable de unidades defectuosas. El resultado es que aceptamos un mal lote (error de segunda clase).

Las decisiones erróneas de esta clase están relacionadas inevitablemente con el uso de métodos de inspección por muestreo.

La cuestión de una correcta organización de la inspección por muestreo consiste, en particular, en permitir que ocurran decisiones erróneas de esta naturaleza solamente en raras ocasiones; o sea, haciéndolas eventos improbables.

Para hacerlo, necesitamos escoger correctamente los parámetros que determinan el plan de muestreo.

Una de las características probabilísticas más importantes de un plan de inspección por muestreo es la llamda curva característica de operación.

La curva característica de operación de un plan de función $\pi(q)$ que es igual a la probabilidad de aceptación de un lote, la proporción de unidades defectuosas en la cual $q=\frac{D}{N}$ si aceptar o rechazar se hace según el sistema de reglas definidas en el plan original de muestreo.

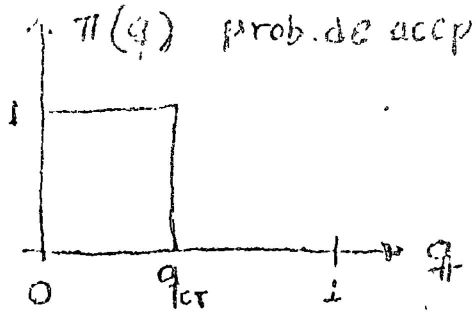
Cuando usamos el concepto de una curva característica de operación, podemos dar distintos índices numéricos para los planes.

Medimos la calidad de un lote en términos del porcentaje de unidades defectuosas $q=\frac{D}{N}$.

Puede probarse que los lotes para los que $q < q_{cr}$ pueden considerarse satisfactorios económicamente u otras consideraciones, de manera que debemos aceptarlos y que los lotes para los que $q > q_{cr}$, son insatisfactorios y deben rechazarse.

En tales casos, sería deseable usar un plan con una curva de característica de operación ideal que es igual a 1 para $q < q_{cr}$ y 0 para $q > q_{cr}$.

Ideal.

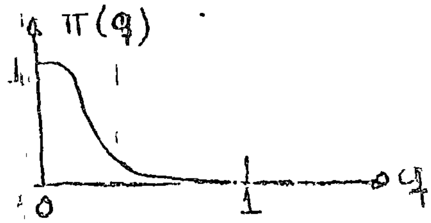


Sin embargo, no hay tales planes de inspección de muestreo con tamaño relativo de muestra $v=\frac{n}{N} < 1$, entre los tipos de muestreo simple.

Por esa razón, tampoco hay tales planes para los otros tipos.

La curva característica de operación de cada plan de muestreo es una función monótona decreciente.

La curva característica de operación típica es



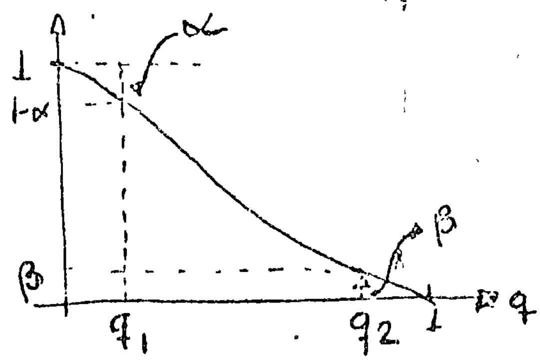
Para ver claramente esta situación, la curva característica de operación siempre se mostrará en forma de curvas continuas aunque formalmente estas curvas solo tienen sentido en los puntos correspondientes a los valores $q=\frac{D}{N}$

No siempre es posible dividir a lotes en lotes satisfactorios o insatisfactorios al usar un solo número q_{cr}.

Sin embargo, hay una zona indeterminada donde no podemos decir si esos lotes son insatisfactorios o no.

En tales casos, los lotes se consideran satisfactorios para $q < q_1$ e insatisfactorios para $q > q_2$ donde $q_2 > q_1$.

Ya que la curva característica de operación de un plan de inspección por muestreo es una función decreciente y como las decisiones erróneas de aceptar o rechazar son inevitables, es deseable hacer pequeñas las probabilidades de decisiones erróneas.



Requerimos que el plan sea tal que $\pi(q) \geq 1-\alpha$ para $q < q_1$
y $\pi(q) \leq \beta$ para $q > q_2$

La probabilidad $1-\pi(q_1)$; la probabilidad de rechazar un lote satisfactorio se llama error de la primera clase o riesgo del productor y la proporción q_1 se llama calidad límite aceptable.

La probabilidad $\pi(q_2)$ de aceptar erroneamente un lote insatisfactorio se le llama error de la segunda clase o riesgo del consumidor y a la proporción q_2 se le llama calidad límite admisible, en el sentido que para $q_1 < q < q_2$, los lotes todavía se consideran admisibles.

Así los requisitos hechos en el plan pueden consistir en los requerimientos que las probabilidades de error (los riesgos del productor y del consumidor) no excedan α y β, respectivamente.

En tablas, se usan a menudo solamente ciertos conjuntos de valores de α y β, por ejemplo, 0.1, 0.05 y 0.01

Si usamos un plan de inspección por muestreo para los cuales los riesgos son

$$\alpha = 0.01$$
$$\beta = 0.05$$
$$\text{para} \quad q_1 = 0.01 \quad y \quad q_2 = 0.05$$

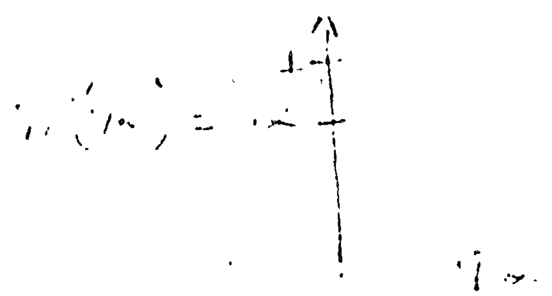
quiere decir que, en promedio, de cada 100 lotes en los cuales no más del 1 % son insatisfactorios, no más de un lote se rechazará y de 100 lotes que contengan más de 5% de unidades defectuosas, no más de 5 lotes serán aceptados, en promedio.

La selección del par de números q_2, β se hace según los requisitos del consumidor.

La selección de q_1, α se hace de manera que se garantice que no se rechazarán innecesariamente lotes satisfactorios.

Con frecuencia se toma el valor de q_1 un poco mayor que el valor promedio del porcentaje de unidades defectuosas en un flujo regular de producción y así se garantiza que casi todos los lotes que son producidos cuando se cumplen los requisitos tecnológicos básicos, serán aceptados.

Para cada α en $(0,1)$ sea q_α el número tal que la probabilidad de aceptar un lote con una proporción de unidades defectuosas igual a q_α es α



Al número $q_{1/2}$ se le llama calidad de indiferencia cuando se está usando un plan con una curva característica de operación $\pi(q)$.

Si se ha escogido el plan de muestreo y la proporción de unidades defectuosas coincide con la calidad de indiferencia entonces, en promedio, la mitad de tales lotes serán rechazados y la otra mitad serán aceptados.

Por ejemplo, para planes del tipo de muestreo simple, necesitamos saber el tamaño n de la muestra y el valor del número de aceptación c.

Insp. por atributos: [illegible]

* Porcentaje defectuoso de un producto.

$$P = d = 100 \frac{N_u}{N}$$

donde: d porcentaje defectuoso

N_u número de unidades defectuosas

N número de unidades inspeccionadas

[illegible] los procedimientos [illegible] para la inspección [illegible] Se dice que [illegible] defectuosa [illegible]

* Defectos por cien unidades

$$d = 100 \frac{N_d}{N}$$

donde d defectos por cien unidades

N_d número de defectos

también: d número de unidades defectuosas (o defectos)

Ejemplo: en la inspección de 15 piezas se encontraron

1 pieza con 3 defectos

3 " " 2 "

4 " " 1 defecto

porcentaje defectuoso $= \frac{8}{15} 100 = 53\ \%$

defectos por cien unidades $= \frac{13}{15} 100 = 76\ \%$

número de unidades defectuosas $= 8$

número de defectos $= 13$

Muestreo simple.

Para calcular, y de este modo establecer un muestreo por atributos, se necesita conocer, para el tamaño de muestra elegido y el número de defectos o unidades defectuosas tolerado, la probabilidad de aceptar lotes que sean presentados a la inspección y que contengan diferentes porcentajes de unidades defectuosas o número de defectos.

En otras palabras, conocer la probabilidad de aceptación de los lotes sometidos a la inspección, según sea la calidad, o más precisamente, cuál será el riesgo del comprador y el riesgo del vendedor.

Para calcular la probabilidad de aceptación en función de la fracción defectuosa, cuya forma de expresión gráfica es la curva característica, podemos usar una de las siguientes distribuciones.

* Hipergeométrica. Muestra pequeña y población pequeña.

$$P(d) = \frac{\binom{D}{d}\binom{G}{g}}{\binom{N}{n}}$$

donde	muestra	lote
número de elementos	n	N
número de unidades defectuosas	d	D
número de unidades	g	G

* Binomial. La muestra se extrae de una población grande

$$P(d) = \binom{n}{d} P^d Q^{n-d}$$

donde	muestra	lote
fracción defectuosa	p	P
fracción no defectuosa	q	Q

* Poisson

$$P(d) = \frac{(nP)^d e^{-nP}}{d!}$$

Recomendaciones

- La hipergeométrica es aplicable en todos los casos.
- La binomial cuando $\frac{n}{N} < 0.1$ (o mejor cuando $\frac{n}{N} < 0.05$)
- La Poisson cuando $n > 10$ y $P < 0.1$

La distribución hipergeométrica es la más exacta; sin embargo, la binomial y, en especial, la de Poisson son más sencillas para calcular.

En la curva característica:

eje horizontal: representa la calidad de las partidas, la cual se expresa como fracción defectuosa

eje vertical: probabilidad de aceptación como
$P(d) + P(d-1) + \dots + P(0)$, en la que la $P(\cdot)$ se calcula con alguna de las funciones descritas y en donde d es el número máximo de defectos tolerado en la muestra [illegible]

TABLA I   Distribución Binomial
Valores de F (d)

n	d	p 0,10	p 0,20	p 0,30
5	0	0,590	0,328	0,168
	1	0,918	0,737	0,528
	2	0,991	0,942	0,837
	3	1,000	0,993	0,969
10	0	0,349	0,107	0,028
	1	0,736	0,376	0,149
	2	0,930	0,678	0,383
	3	0,987	0,879	0,650
	4	0,998	0,967	0,850
	5	1,000	0,994	0,953
15	0	0,206	0,035	0,005
	1	0,549	0,167	0,035
	2	0,816	0,398	0,127
	3	0,944	0,648	0,297
	4	0,987	0,836	0,516
	5	0,998	0,939	0,722
	6	1,000	0,982	0,869
	7	—	0,996	0,950
20	0	0,122	0,012	0,001
	1	0,392	0,069	0,008
	2	0,677	0,206	0,036
	3	0,867	0,411	0,107
	4	0,957	0,630	0,238
	5	0,989	0,804	0,416
	6	0,998	0,913	0,608
	7	1,000	0,968	0,772
	8	—	0,990	0,887
	9	—	0,997	0,952
	10	—	0,999	0,983

n	d	p 0,10	p 0,20	p 0,20
25	0	0,072	0,004	0,000
	1	0,271	0,027	0,002
	2	0,537	0,098	0,009
	3	0,764	0,234	0,033
	4	0,902	0,421	0,090
	5	0,967	0,617	0,194
	6	0,990	0,780	0,341
	7	0,998	0,891	0,512
	8	1,000	0,953	0,677
	9	—	0,983	0,811
	10	—	0,994	0,902
	11	—	0,998	0,956
	12	—	1,000	0,982
30	0	0,042	0,001	0,000
	1	0,184	0,010	0,000
	2	0,411	0,044	0,002
	3	0,647	0,123	0,009
	4	0,824	0,255	0,030
	5	0,927	0,428	0,077
	6	0,974	0,607	0,160
	7	0,992	0,761	0,281
	8	0,998	0,871	0,432
	9	1,000	0,939	0,589
	10	—	0,974	0,730
	11	—	0,990	0,841
	12	—	0,997	0,916
	13	—	0,999	0,960
	14	—	1,000	0,983
	15	—	—	0,994

Tabla aplicable para el cálculo del muestreo por atributos si n/N 0,05, en que N: número de unidades de la partida.

p : fracción defectuosa de la partida

n : tamaño de la muestra

Por lo tanto debemos calcular

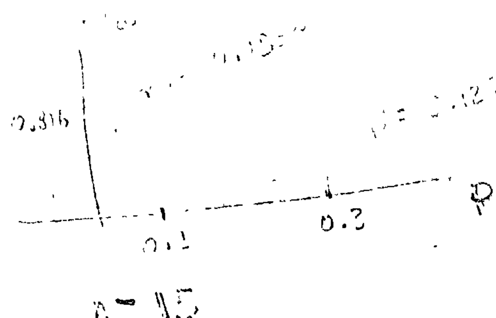
$F(d)$ = probabilidad de que se encuentren d o me[illegible] unidades defectuosas (o defectos) en una m[illegible] de tamaño n extraída de una partida o lote [illegible] fracción defectuosa P. (Ver tabla sig. página).

Ejemplo: especificar un plan de muestreo para la aceptación o rech[illegible] de partidas de un producto que cuando tiene una fracción defectuosa de 10% se estima de buena calidad y que cuando la fracción defectuosa es de 20% se estima de mala calidad.

Hay acuerdo en que los riesgos del comprador y del vendedor sean aproximadamente iguales y no superiores al 10%.

Entonces, se trata de determinar n, tamaño de la muestra y d, número de defectos (o unidades defectuosas) toleradas.

Planes	n	d	α	β
a	15	2	0.18	0.127
b	20	3	0.13	0.11
c	25	4	0.1	0.09
d	30	5	0.07	0.08



De la tabla se observa que:

c es el plan más conveniente.

a, b no cumplen con las protecciones acordadas

d las cumple en exceso pero a mayor costo que [illegible]

Muestreo secuencial.

Se usará la binomial. Válido si $\frac{n}{N} < 0.05$

$$PR = \frac{P_2^d (1-P_2)^{n-d}}{P_1^d (1-P_1)^{n-d}}$$ = # de unidades defectuosas

d número de defectos en la muestra

n tamaño de la muestra

P_1 nivel de calidad aceptable

P_2 nivel de calidad inaceptable

Definiremos $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\text{prob. de rechazar un lote si es malo}}{\text{" " " " " " bueno}}$

$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\text{prob. de acept. un lote si es malo}}{\text{" " " " " " bueno}}$

Se aceptará el lote si

$$PR \leq \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

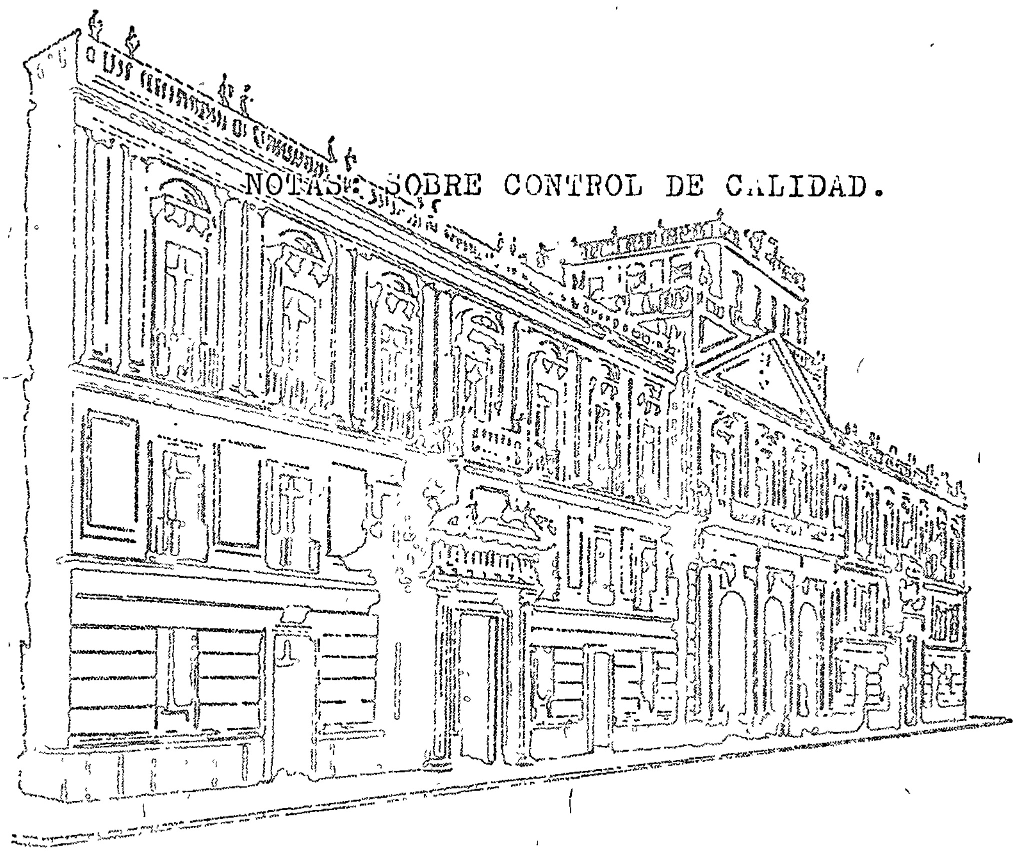
Se rechazará el lote si

$$PR \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Se continúa si $\frac{\beta_2}{\beta_1} < PR < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

NOTAS SOBRE CONTROL DE CALIDAD.



PROFESOR: ENRIQUE NOVELO BERRON.

Septiembre de 1976.

Palacio de Minería
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
Tels.: 521-40-23 521-73-35 5123-123

TERMINOLOGIA DE CONFIABILIDAD

Unidad: Un elemento, un sistema, una parte de un sistema o algo semejante.

Operación de una unidad: El conjunto de todas las fases de su existencia: transportación, mantenimiento, preparación para un uso especificado, servicio y reparación.

Calidad de una unidad: Es el conjunto de propiedades que definen el grado de utilidad de la unidad para un uso especificado.

Confiabilidad de la unidad: Es la habilidad de la unidad para mantener su calidad bajo condiciones especificadas de uso. Así, la confiabilidad es una propiedad que se extiende en el tiempo.

La confiabilidad está determinada por la calidad y las condiciones de la operación.

El concepto de confiabilidad está relacionado con aquellas propiedades que la unidad tuvo o debió haber tenido en el instante en que se manufacturó o en el instante en que se revisó antes de su uso.

El problema de incrementar la confiabilidad de las unidades es cada vez más importante y urgente debido a la complicada mecanización y automatización de procesos industriales en muchos campos de la industria, transportes, tecnología de las comunicaciones y otros. La importancia de este problema se demuestra por el hecho de que una confiabilidad insuficiente de las unidades produce grandes pérdidas en su servicio, detenciones parciales del equipo y que pueden haber accidentes con daños considerables al equipo y a seres humanos, en algunos casos. Los aparatos automáticos son menos eficaces que los no automáticos, principalmente por su falta de confiabilidad. La subestimación de los factores asociados con la confiabilidad causan gastos en el curso de los primeros años de uso, que exceden en forma considerable, los costos originales de las unidades. En la actualidad, las máquinas penetran en todas las esferas de las actividades humanas, incluyendo la esfera del control de producción y otros procesos de control. Los problemas que las máquinas resuelven, especialmente las máquinas de control, están siendo cada vez más complicados. La complicación creciente de los problemas que tienen que ser resueltos lleva a la complicación creciente de las máquinas usadas para resolverlos. Aquí tenemos una de las contradicciones básicas en el desarrollo de la tecnología actual: por una parte, la complicación siempre creciente de los sistemas lleva a una disminución en su confiabilidad y, por la otra, las necesidades de un comportamiento confiable de estos sistemas exige cada vez mayor exactitud. La teoría de confiabilidad sirve en la búsqueda de caminos para resolver esta contradicción. Dos enfoques bastante distintos son posibles. El primero consiste en aumentar la calidad y confiabilidad de los elementos individuales que componen a un sistema. El segundo consiste en desarrollar formas especiales para construir sistemas complicados confiables con elementos no confiables y también en desarrollar métodos para darle servicio a tales sistemas durante su uso. La siguiente definición se aplica a los problemas de la teoría de confiabilidad: "La teoría de Confiabilidad es la nueva disciplina científica que estudia la regularidad general que debe mantenerse en el diseño, experimentación, manufactura, aceptación y uso de las unidades para obtener la máxima efectividad de su uso."

Uno de los conceptos básicos en la Teoría de Confiabilidad es el de falla y el de operación libre de falla.

La operación libre de falla: Es la habilidad de la unidad para mantener su habilidad para funcionar (o sea, no tener fallas) durante un período especificado de tiempo bajo condiciones especificadas.

Una falla: Es la modificación o pérdida parcial o total de esas propiedades de las unidades en forma tal que su funcionamiento se ve seriamente impedido o completamente interrumpido En algunos casos el concepto de falla se define claramente; sin embargo, el concepto de falla es extremadamente relativo, ya que depende en forma significativa de las condiciones particulares bajo las cuales las unidades pueden usarse.

Sin importar toda esta relatividad, el concepto de falla es una característica útil de la confiabilidad ya que nos permite introducir varias características numéricas de la confiabilidad. De estos índices numéricos podemos comparar la confiabilidad de unidades de tipos distintos o unidades del mismo tipo que se hicieron en tiempos distintos, etc.

Como una primera aproximación pueden agruparse las fallas, de acuerdo con su naturaleza en catastróficas y fallas por desgaste.

Las fallas por desgaste: Surgen como resultado de un cambio gradual en los valores de los parámetros que determinan la calidad de la unidad (primeramente como consecuencia del envejecimiento o el uso) cuando estos parámetros se salen de los límites de admisibilidad establecidos. Uno de los problemas importantes de la Teoría de Confiabilidad es la investigación de la posibilidad de   de fallas por desgaste.

Las fallas catastróficas: Están determinadas por un cambio súbito en los parámetros que determinan la calidad de la unidad

Otro concepto importante en teoría de confiabilidad es el de vida. La vida de una unidad es su capacidad para su uso extensivo, bajo las necesidades tecnológicas, en los -- que puede incluirse varios tipos de reparaciones.

Al final del período que determina la vida, la unidad sufre procesos asociados con el uso o el envejecimiento cuya eliminación o es imposible o improcedente económicamente.

La longitud de vida: Se clasifica por el tiempo, o el número de ciclos, o por el volumen de trabajo realizado.

Para ciertas unidades los conceptos de vida y de operación libre de falla pueden coincidir pero, en general, -- son características de confiabilidad independientes. Para las unidades en las que la habilidad para funcionar se mantiene con la ayuda de operaciones especiales de renovación, conocidas como mantenimiento, un índice importante de confiabilidad es el de mantenibilidad.

La mantenibilidad de una unidad: Es su susceptibilidad para predecir, descubrir y eliminar las fallas. Está caracterizada por esfuerzo, tiempo y dinero invertido en mantenimiento.

Así, el concepto de confiabilidad se demuestra en mayor detalle por el conjunto de tres conceptos: operación libre de falla, vida y mantenibilidad. Las características de calidad y confiabilidad de las unidades están estrechamente conectadas por índices económicos (gastos para las unidades)

Un aumento en la confiabilidad de las unidades va -- usualmente acompañado por un incremento en el costo de producción hasta el tiempo de su aceptación y entrega al consumidor. En este sentido no hay razón para distinguir entre unidades confiables más caras y menos confiables pero más - baratas. Sin embargo, las conclusiones de qué unidades son mejores deben basarse en otras consideraciones aparte de -- los gastos en que se incurre en la manufactura. La efectividad económica del uso y el valor de unidades más confiables puede cubrir el aumento de los costos de producción.

El desarrollo de métodos para calcular la confiabilidad y los factores de gasto es, en nuestra opinión, uno de los problemas más importantes en la Economía.

El problema de la Teoría de Confiabilidad puede formularse más precisamente con lo siguiente: La teoría de confiabilidad establece y estudia características cuantitativas (criterios) de confiabilidad e investiga la conexión entre los índices de economía, eficiencia y confiabilidad; desarrolla métodos para pruebas de confiabilidad y métodos de procesamiento y estimación de los resultados de estos experimentos; desarrolla métodos para el control de la confiabilidad, métodos de reglas óptimas de mantenimiento preventivo en el uso de las unidades y métodos para el establecimiento de normas para una gran cantidad de partes.

En Teoría de Confiabilidad se desarrollan métodos para el establecimiento de reglas y selección de características que garanticen confiabilidad óptima, métodos de selección de diseños óptimos y procedimientos que garanticen una confiabilidad dada, métodos óptimos para encontrar fallas en aparatos complicados.

Al resolver los problemas de la Teoría de Confiabilidad, usamos los resultados de estudios de los procesos químicos que son las bases de los fenómenos asociados con pérdidas de calidad.

En el presente, la producción de partes (especialmente de partes electrónicas) se realiza siguiendo procesos tecnológicos complicados que involucran docenas o cientos de operaciones diferentes.

Muchos factores afectan la calidad y confiabilidad de las unidades terminadas. Sería imposible listar todos esos factores.

Es más, dos unidades terminadas que salen de la línea de producción, una después de otra, pueden diferir bastante entre sí, en sus propiedades, aunque todas las reglas tecnológicas básicas se hayan cumplido.

Si además se cometieran violaciones serias en el flujo regular del proceso, por ejemplo, interferencia en la producción por incumplimiento del personal, crecerían rápidamente el número de unidades con baja calidad. La aparición de este tipo de unidades involucra pérdidas de dos clases.

Primera: el esfuerzo y los materiales usados en la producción de esas unidades se desperdician.

Segundo: el uso de un objeto inadecuado puede causar pérdidas debido a accidentes o a la reparación del mismo.

¿ Porqué algunos productos inadecuados, de baja calidad, son entregados por una planta, para después ser usados por el consumidor?.

Primero, muchas de las propiedades de una unidad que constituyen su calidad son, o muy difíciles de verificar en la fábrica, o son imposibles de comprobar, por la naturaleza destructiva de las pruebas.

Segundo, la baja calidad puede consistir en que los parámetros que caracterizan la operación de las unidades son inestables.

Durante el período de prueba, los valores de los parámetros pueden satisfacer completamente al consumidor, pero después de almacenarse o usarse un tiempo corto, cambian los valores de tal forma que resultan inaceptables.

El realizar la operación de inspección para determinar el grado de calidad de la materia prima, productos semiterminados o terminados, es a menudo un problema serio. Se necesitan estudios especiales preliminares del procedimiento de prueba y la construcción de aparatos especiales de prueba.

Imaginemos un proceso tecnológico como una cadena de operaciones tecnológicas elementales sucesivas por las que pasa un producto semiterminado antes de ser un producto terminado.

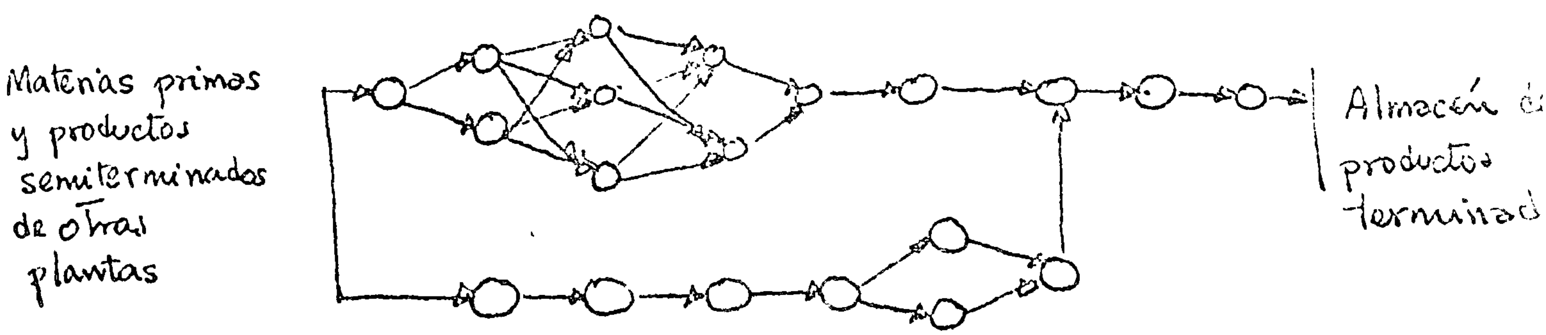


Diagrama de un proceso tecnológico.

O operación tecnológica.

La Oficina de Control Tecnológico (OCT) debe decidir dónde procede la instalación de puestos de inspección, para probar la calidad de la producción y los parámetros que necesitan ser medidos.

Como regla, los puestos de inspección se instalan al inicio de un proceso tecnológico, para verificar la calidad de la materia prima original (control de insumos), y también al final del proceso, para probar la calidad y confiabilidad de los productos terminados (muestreo de aceptación).

Los puestos de inspección también se instalan después de aquellas operaciones tecnológicas que son más importantes, o que son las más difíciles de sujetar a reglamentaciones.

Lo estricto de la inspección, en un puesto, se determina, en última instancia, con un sólo propósito: los productos terminados deben serle útiles al consumidor.

La introducción de inspección nos lleva a un incremento y a la vez a un decremento en los costos de producción. Esto último, porque los gastos en que se incurren al producir unidades de baja calidad se disminuyen.

La influencia de la introducción de la inspección en el incremento en el gasto puede observarse, comparativamente, de la siguiente manera.

Como resulta difícil calcular la ganancia resultante de la in troducción de inspección, esta ganancia deberá cubrir los gastos debidos a la inspección, y se justifica únicamente cuando se siguen bases científicas para la inspección.

Las necesidades de inspección por parte del fabricante y las del consumidor son antagónicas.

Para el fabricante, la inspección es un motivo adicional de gastos, aparte de los gastos regulares de producción y, por lo tanto, piensa que deben existir el menor número de puestos de inspección posibles y que la cantidad de trabajo en ellos debe ser también mínima.

Por el contrario, el consumidor está interesado en obtener una calidad en los productos tan alta como sea posible y, por lo tanto, en que se realice inspección estricta (especialmente, por supuesto, durante el muestreo de aceptación).

Algunas veces el consumidor, no satisfecho con los datos de la OCT, les hará prueba a los productos terminados.

Por lo tanto, lo estricto y la cantidad de inspección es, en última instancia, resultado de un conflicto en la calidad admisible de las unidades producidas.

En los puestos de inspección se determina cuáles parámetros de las unidades (de productos semiterminados o terminados) deben medirse.

El grado de calidad de los productos para uso futuro puede determinarse en varias formas.

Es posible especificar valores numéricos precisos de los parámetros (inspección según un criterio cuantitativo), o también anotar únicamente las categorías o clases a las que pertenece la unidad bajo prueba.

Finalmente, uno puede hacer una de dos decisiones: la unidad es apropiada para su futuro uso o no lo es. Si la unidad no es apropiada es defectuosa. A esa inspección se le llama muestreo por atributos.

Veremos este caso: el concepto de unidad defectuosa depende de la forma y las condiciones bajo las que probablemente se use.

Frecuentemente se clasifica una unidad como defectuosa, si al menos uno de los parámetros de prueba cae afuera de los límites admisibles.

En la práctica, también se encuentran casos en que una unidad, en mediciones sucesivas, es considerada primero adecuada y después defectuosa.

La inspección basada en un criterio cualitativo tiene numerosas ventajas sobre la inspección basada en criterios cuantitativos. La primera resulta más sencilla en el número de cálculos y en los métodos de prueba.

Es posible diseñar aparatos automáticos de medición que separen a las unidades defectuosas de las no defectuosas, o simplemente, puestos de observación.

Los procedimientos basados en inspección cualitativa son inde pendientes de la forma de la distribución de los parámetros por medir y, por lo tanto, son más generales.

Por contraste, en la mayoría de los casos de inspección según un criterio cuantitativo, suponemos que los parámetros por medir tienen una función de distribución normal.

Sin embargo, debe notarse que, en el caso de inspección basada en un criterio cualitativo, usamos únicamente una proporción pequeña de la información provenientes de las observaciones y esto hace necesario llevar a cabo un gran número de mediciones.

Además, la operación de inspección puede ser de una doble naturaleza.

En algunos casos, la operación de inspección puede no dañar a las unidades. Por ejemplo, una unidad considerada satisfactoria durante la inspección, permanece satisfactoria después de ella.

En otros casos, la operación de prueba cambia la calidad de la unidad y, algunas veces, hasta destruye las unidades probadas.

Las pruebas de durabilidad y confiabilidad son usualmente de naturaleza destructiva.

Entonces, como primera aproximación, la inspección puede ser destructiva o no destructiva.

Ya que la prueba de estabilidad de los parámetros bajo diferentes condiciones ambientales es de gran importancia en la teoría de confiabilidad, la inspección es usualmente destructiva o cambia la calidad de las unidades.

Entonces, es de particular importancia desarrollar métodos de inspección con base en criterios oblícuos que, sin destruir las unidades, permitan usar los resultados de la calidad para estimar los parámetros de su inspección destructiva.

Las pruebas para verificar varios parámetros pueden diferir grandemente entre sí. En ocasiones se realizan pruebas siguiendo un programa ambicioso, que incluya condiciones climáticas, vibraciones, golpes repentinos, etc. A este tipo de pruebas se les llama periódicas.

Como resultado de efectuar la operación de inspección debemos estar en posibilidad de decidir si la unidad bajo prueba es satisfactoria o defectuosa.

Algunas veces se encuentran casos en los cuales podemos determinar los defectos de una unidad bajo prueba con cierta probabilidad.

Veremos únicamente aquellos casos donde la separación de las unidades satisfactorias y defectuosas puede realizarse sin error.

Si la operación de inspección es no destructiva y si su costo es reducido, se usa a menudo la inspección continua, en la que todas las unidades se prueban.

Con mayor frecuencia se presenta la situación en que los gastos totales asociados con la inspección son altos o la inspección es de naturaleza destructiva. En estos casos, se selecciona una parte del total de unidades y esa parte se sujeta a inspección. A esta inspección se le llama inspección por muestreo.

Es necesario apuntar que algunos puestos de inspección pueden realizar un muestreo continuo y otros, muestreo aleatorio.

Si el propósito global de la inspección es reducir el porcentaje de unidades defectuosas en la producción final, se hacen diferentes decisiones con base en los resultados de la inspección.

El muestreo de aceptación se organiza en los puestos de inspección de insumos y productos. En ellos, necesitamos hacer decisiones acerca de lotes de producción.

Si hay muchas unidades defectuosas en un lote, este debe ser sujeto a un análisis continuo o rechazarlo por completo.

Esto último se hace cuando una comprobación continua es demasiado cara o cuando la inspección es de naturaleza destructiva.

Para encontrar qué porcentaje del lote es defectuoso, no es necesario hacer una comprobación continua de todas las unidades. Necesitamos probar solamente una parte de un lote y decidir, con base en los resultados de esta prueba parcial, qué hacer con las unidades restantes.

De acuerdo con sus propósitos, la inspección puede ser correctiva o de precaución. Esta distinción es algo convencional.

Una inspección correctiva se hace cuando es de naturaleza no destructiva y cuando hay comparativamente muchos lotes con un al to porcentaje de unidades defectuosas.

El rechazo de un lote, con base en los resultados de una inspección por muestreo, significa que se hace una comprobación de la porción restante del lote, retirando todas las unidades defectuosas y su reemplazo subsecuente por unidades satisfactorias.

Con una inspección correctiva, un alto porcentaje de todas las unidades producidas son comprobadas.

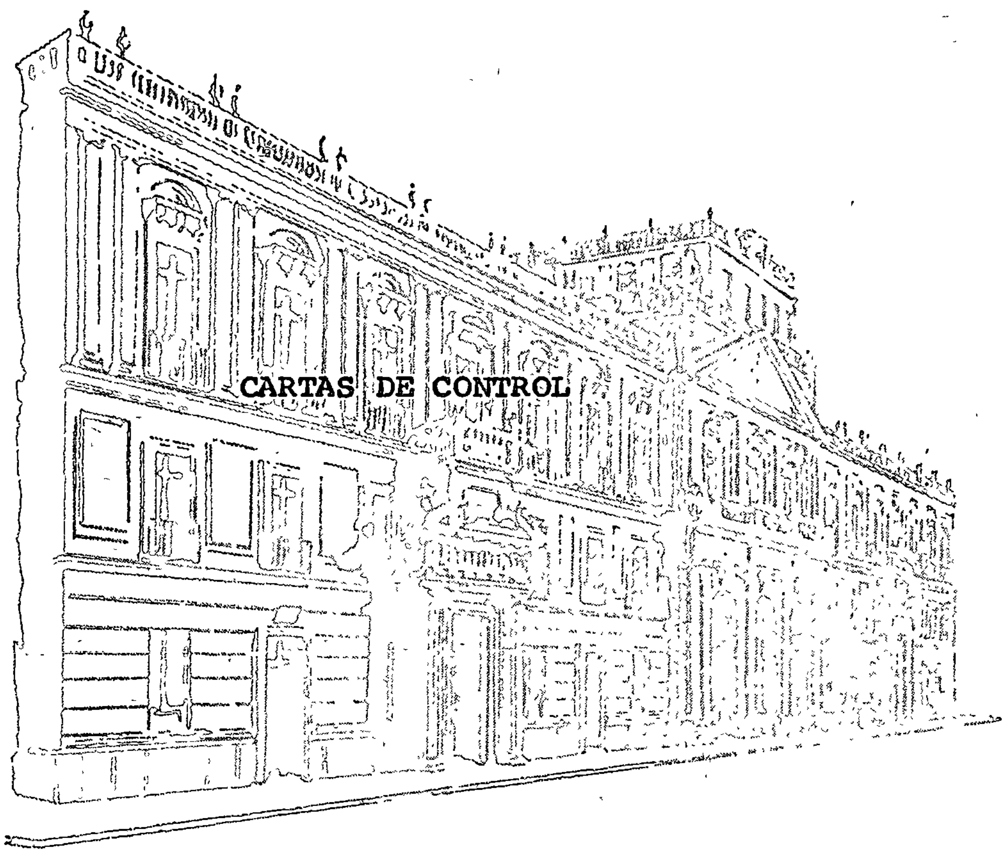
Por otra parte, si se efectúa bien la corrida de producción y casi todos los lotes tienen un porcentaje reducido de unidades defectuosas, de manera que el consumidor esté completamente satisfecho, entonces el muestreo de aceptación debe ser de naturaleza precautoria.

Si el muestreo de aceptación es destructivo solo puede ser de naturaleza precautoria. Esto es verdad porque, para el caso de muestreo destructivo, no podemos reducir el porcentaje promedio de unidades defectuosas en un lote. El solo hecho de determinar si una unidad es satisfactoria o no, la destruye.

Sin embargo, probando solamente una proporción de un lote, en el caso de una inspección por muestreo bien organizado decimos, con un alto grado de seguridad, si el porcentaje de unidades defectuosas en un lote dado es grande o pequeño.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD



CARTAS DE CONTROL

M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA

SEPTIEMBRE DE 1976.

CARTAS DE CONTROL

Por: M en I Augusto Villarreal A. *

INTRODUCCION

Aunque existe la tendencia generalizada a pensar que el Control de Calidad es de desarrollo reciente, realmente no existe nada nuevo en la idea básica de elaborar un producto caracterizado por un alto grado de uniformidad.

Durante siglos, hábiles artesanos han procurado elaborar productos que se distingan por su superior calidad, y una vez que han logrado obtener un cierto estándar de calidad óptimo, eliminar dentro de lo posible la variación entre productos que nominalmente deben resultar iguales.

La idea de que la Estadística puede resultar un instrumento muy útil para asegurar un estándar adecuado de calidad para los productos manufacturados, se remonta no más allá del advenimiento de la producción masiva, y el uso extendido de los métodos estadísticos para resolver problemas de control de calidad es aún más reciente.

Muchos problemas que aparecen durante la elaboración de un producto son susceptibles de ser resueltos empleando tratamientos estadísticos, por lo que al hablar de control estadístico de calidad, nos estaremos refiriendo esencialmente a las dos técnicas especiales que se discutirán en esta parte del curso: uso de las Cartas de Control y muestreo de aceptación.

* Profesor Investigador, División de Estudios Superiores e Instituto de Ingeniería, UNAM

Conviene mencionar que la palabra calidad, al ser empleada de - aquí en adelante, se referirá a alguna propiedad medible o contable de algún producto, tal como el diámetro de un balín de acero, la resistencia de una viga de concreto, el número de defectos en una pieza de tela, la eficacia de cierta droga, etc.

IDEAS SOBRE CARTAS DE CONTROL

A muchos individuos les puede sorprender el hecho de que dos artículos aparentemente idénticos, elaborados bajo condiciones cuidadosamente controladas, de las mismas materias primas, y por una - misma máquina con diferencia de pocos segundos, puedan, sin embargo, diferir en muchos aspectos.

En efecto, cualquier proceso de manufactura, aun siendo muy bueno, se encuentra caracterizado por una cierta cantidad de variación - que es de naturaleza aleatoria, y que no puede ser eliminada en - forma completa.

Cuando la variabilidad presente en un proceso de producción se limita a variación aleatoria se dice que el proceso se encuentra en un estado de control estadístico.

Tal estado se puede alcanzar cuando se eliminan aquellos problemas causados por otro tipo de variación, llamada variación sistemática, que es de naturaleza más bien determinística, y que se - - puede achacar, por ejemplo, a operadores mal entrenados, materia prima de baja calidad, máquinas en mal estado, etc.

Ya que los procesos de manufactura se encuentran rara vez libres de estos problemas, conviene contar con algún método sistemático para detectar desviaciones serias de un estado de control estadístico cuando ocurren, o inclusive antes de que ocurran, tales desviaciones.

Ese método sistemático de detección se puede tener mediante el empleo de las llamadas Cartas de Control.

TIPOS DE CARTAS DE CONTROL

En lo que sigue distinguiremos entre las cartas de control para mediciones o variables ($\bar{X}$, R, σ) y las cartas de control para atributos (p, c), dependiendo de que las observaciones que estemos analizando sean mediciones o datos contados o calculados, respectivamente.

Un ejemplo del primer caso sería la longitud de las varillas de acero de una muestra. Como ejemplo del segundo caso tendríamos el número de focos defectuosos en una muestra de tamaño dado.

CONFIGURACION DE LAS CARTAS DE CONTROL

En cualquiera de los casos mencionados, una carta de control consiste de una Línea Central, correspondiente a la calidad promedio a la que el proceso debe funcionar, y dos líneas que corresponden al Límite Superior de Control (LSC), y al Límite Inferior de Control (LIC), respectivamente, tal como se muestra en la Fig 1.

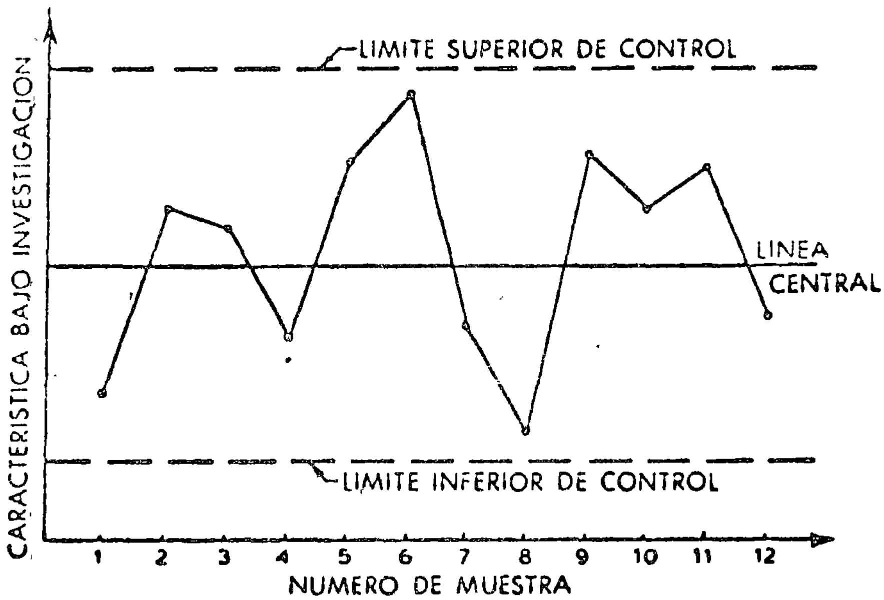


Fig 1. Aspecto general de una carta de control

Estos límites se escogen en forma tal que los valores que se encuentren dentro de ellos se puedan atribuir al azar, en tanto que los valores que caigan fuera de ellos se puedan considerar como indicaciones de falta de control.

No obstante la idea anterior, conviene mencionar que en la Fig 2 que se presenta a continuación se pueden considerar otras posibles situaciones de "falta de control" que ameritan investigarse:

1. Cuando dos de tres puntos sucesivos caen en la zona A.
2. Cuando cuatro de cinco puntos sucesivos caen en la zona B o más allá.
3. Cuando ocho puntos sucesivos caen en la zona C o más allá.

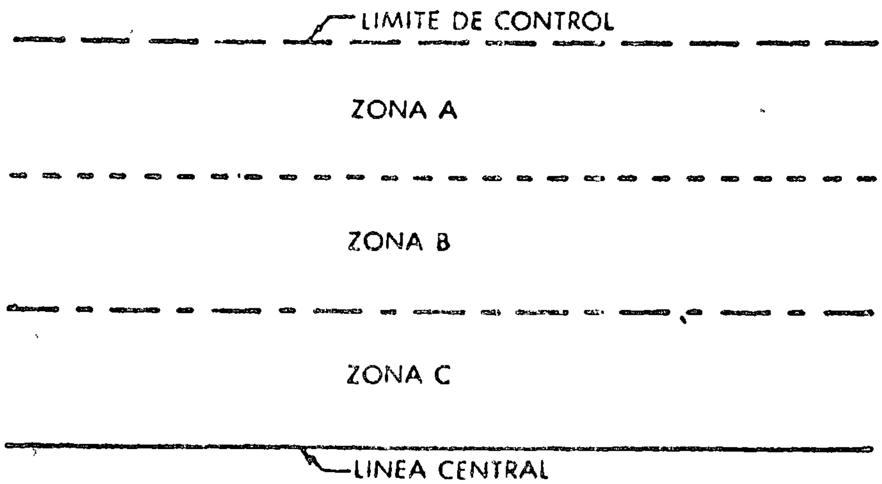


Fig 2 Diagrama que define las zonas A, B y C usadas en el análisis de Cartas de Control.

Debe hacerse notar que cada una de las zonas A, B y C constituye la tercera parte del área entre la línea central y un límite de control, y que las pruebas mencionadas se aplican a ambas mitades de la carta de control, pero se aplican <u>separadamente para cada mitad</u>, y nunca a las dos mitades en combinación.

EXPLICACION DEL EMPLEO DE LAS CARTAS DE CONTROL

Si se grafican en una carta los resultados obtenidos a partir de muestras tomadas periódicamente a intervalos frecuentes, es posible verificar por medio de ella si el proceso se encuentra bajo control, o si se encuentra presente en el proceso la variación sistemática del tipo descrito anteriormente.

Cuando un punto graficado cae fuera de los límites de control, es necesario encontrar el problema que causó tal evento dentro del proceso. Pero aun si los puntos caen dentro de los límites mencionados, alguna tendencia, o cierto patrón de los mismos, puede indicar que se debe llevar a cabo alguna acción para prevenir y así evitar algún problema serio.

La habilidad para "leer" las cartas de control y para determinar a partir de ellas cuál acción correctiva debe llevarse a cabo, - se obtiene a partir de la experiencia y del juicio altamente desarrollado. Un practicante del control estadístico de la calidad debe no sólo comprender los fundamentos estadísticos de la - materia, sino también encontrarse identificado plenamente con los procesos que desea controlar.

CARTAS DE CONTROL PARA MEDICIONES (VARIABLES)

Cuando se requiere establecer control estadístico de la calidad de algún producto en términos de mediciones o variables, es costumbre ejercer tal control sobre la calidad media del proceso, - al igual que sobre su variabilidad.

La primera meta se logra al graficar los promedios de muestras - extraídas periódicamente en la llamada carta de control para los promedios, o simplemente carta $\bar{X}$. La variabilidad se puede controlar de igual forma si se grafican los rangos o las desviaciones estándar de las muestras en las llamadas cartas R o cartas σ, respectivamente, dependiendo de cuál estadística se emplee para estimar la desviación estándar de la población.

Si se conocen la media μ y la desviación estándar σ de la población (proceso) y es razonable suponer las mediciones obtenidas - como muestras extraídas de una población normal, se puede asegurar que con probabilidad $1 - \alpha$ el promedio aritmético de una - - muestra aleatoria de tamaño n se encontrará entre

$$\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ó

$$\mu - z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}} \quad \text{y} \quad \mu + z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}$$

puesto que $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para el caso de la distribución muestral del promedio aritmético, cuando se muestrea de una población infinita. La suposición de que la extracción de muestras aleatorias se hace de una población infinita es válida en el caso presente, puesto que, por ejemplo, la producción de cierto producto en una fábrica tiende a infinito conforme pasa el tiempo.

Los dos límites anteriores $(\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}})$ proporcionan entonces límites inferiores y superiores de control y, bajo las suposiciones - anteriores, permiten al practicante del control de calidad determinar si se debe o no llevar a cabo algún ajuste en el proceso, - al graficar los promedios aritméticos obtenidos de muestras de tamaño n en una carta como la que se muestra en la Fig 1.

Conviene establecer en este momento que al emplear una carta de control para los promedios, lo que se hace realmente es probar hipótesis nulas de que a un cierto nivel de confianza $1-\alpha$ el valor de la media de la distribución muestral de los promedios sea igual al valor de la calidad nominal del proceso, o al de la calidad media calculada para el mismo, μ_o. Para estas pruebas secuenciales de hipótesis, se emplean como estadísticas de prueba los valores de los promedios aritméticos obtenidos de muestras aleatorias extraídas de la población (o proceso). Es decir, se realizan pruebas de hipótesis para las cuales

$$H_0 \quad : \quad \mu = \mu_o$$

(Prueba de dos colas; cada prueba se realiza con el valor $\bar{X}_i$ de la muestra i)

$$H_1 \quad : \quad \mu \neq \mu_o$$

en donde μ es la media de la distribución muestral del promedio aritmético, μ_o la calidad nominal o calidad media calculada del proceso, y $\bar{X}_i$ $(i=1,2,3,...)$ el valor del promedio aritmético obtenido de la iésima muestra aleatoria. La forma secuencial de estas pruebas de hipótesis se muestra en la Fig 3 que se presenta a continuación.

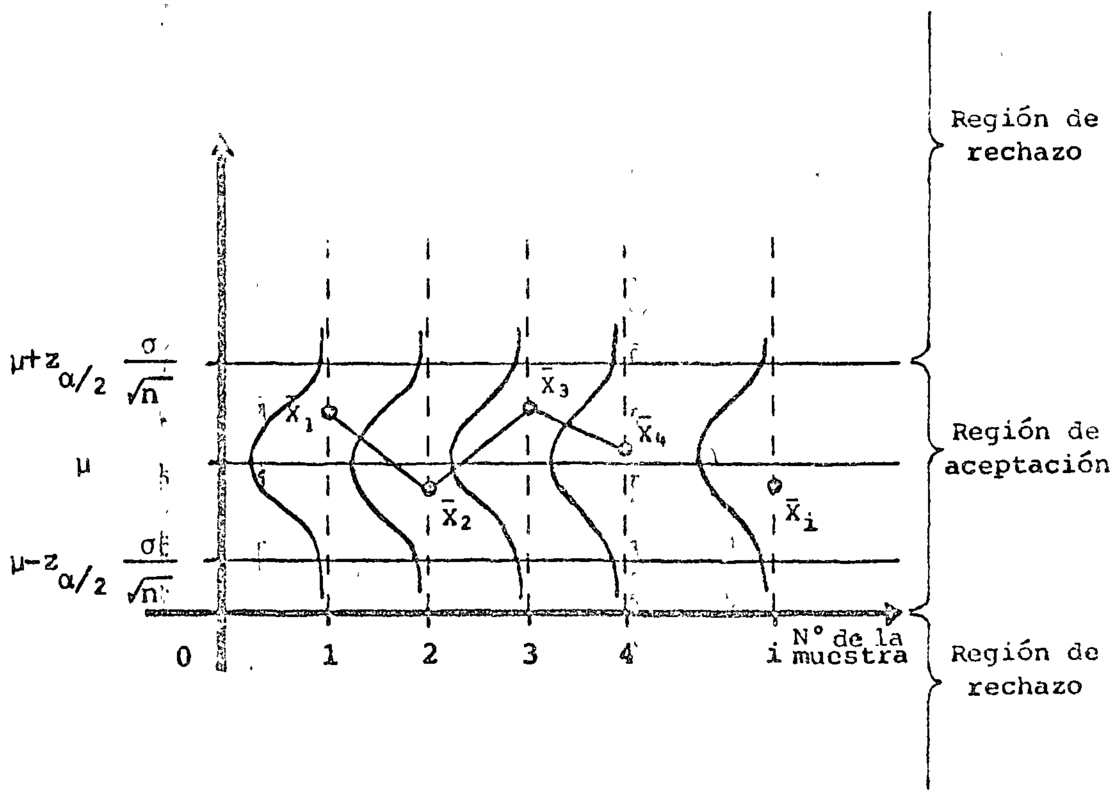


Fig 3 Pruebas de hipótesis que se realizan al emplear una carta de control para los promedios

Si se consideran problemas prácticos, los valores de μ y σ del proceso se desconocen, y es entonces conveniente estimar sus valores a partir de muestras tomadas mientras el proceso se encuentre "bajo control", tal como se explica más adelante. En la práctica es entonces difícil llegar a establecer límites de control del tipo $\mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ al desconocerse μ y σ, independientemente de que en muchos casos es demasiado arriesgado considerar a las mediciones como muestras aleatorias extraídas de una población normal.

En lugar de lo anterior, en el control de calidad industrial se emplean comúnmente los límites de control de "tres desviaciones estándar" o de "tres sigmas", que se obtienen al sustituir a $z_{\alpha/2}$ por un 3 al calcular los límites de control.

Conforme a lo anterior, con los límites de control

$$\mu \pm 3\sigma_{\bar{X}} \qquad \text{ó} \qquad \mu \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se puede confiar en que en el 99.73% de los casos el proceso no será declarado "fuera de control", cuando de hecho se encuentra "bajo control".

En otras palabras, estos límites de control permiten considerar que la probabilidad máxima de rechazar la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_o$$

cuando debería de ser aceptada (probabilidad de cometer un error de tipo I) es de 0.27%, siendo θ_o un valor de calidad fijo del proceso, y θ el del parámetro correspondiente de la distribución muestral de la estadística bajo consideración.

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL PARA LOS PROMEDIOS ($\bar{X}$)

a. Caso en que se conocen la media μ y la desviación estándar σ de la población.

Línea central ———— μ

Límites de control ———— $\mu \pm 3\sigma_{\bar{x}}$ ó $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ó $\mu \pm A\sigma$, siendo $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

en donde los valores de A se obtienen de la tabla I, en función de n, el tamaño de la muestra.

<u>Ejemplo</u>: Sea el proceso de elaboración de varillas de acero para las cuales se sabe que el diámetro medio es de 2.5 cm, con una desviación estándar de 0.01 cm. Se desea efectuar control del diámetro de las mismas, para lo cual se extraen periódicamente muestras de cinco varillas. Se pide establecer la línea central y los límites de control para una carta $\bar{X}$.

<u>Solución</u>. Siendo $\mu = 2.5$ cm, $\sigma = 0.01$ y $n = 5$, se tiene que:

Línea central = μ=2.5

Límites de control:

$$2.5 \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.5 \pm \frac{3(0.01)}{\sqrt{5}} = 2.5 \pm 0.0134 \Longrightarrow 2.5134, \quad 2.4866$$

o, de la tabla I

$$2.5 \pm A\sigma = 2.5 \pm 1.342(0.01) = 2.5 \pm 0.01342 \Longrightarrow 2.51342, \quad 2.48658$$

b. Caso en que se desconocen μ y σ

Para este caso, que es el más común, es necesario estimar, como se dijo anteriormente, tales parámetros con base en muestras preliminares. Para el caso, normalmente se acostumbra emplear un mínimo de 20 a 25 muestras de 4 ó 5 elementos, obtenidas consecutivamente cuando el proceso está "bajo control".

Sin embargo, como veremos más adelante, se pueden emplear procedimientos estadísticos más formales para determinar el número de muestras (y de elementos en las mismas) más adecuado para las cartas $\bar{X}$.

Entonces, si se utilizan κ muestras preliminares, cada una de tamaño n, se puede estimar con adecuada precisión el valor de μ mediante

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{\kappa}\sum_{i=1}^{\kappa} \bar{X}_i$$

siendo $\bar{\bar{X}}$ un estimador insesgado y consistente de μ, donde $\bar{X}_i$ denota al promedio aritmético de la iésima muestra, y $\bar{\bar{X}}$ es el promedio de los promedios de las muestras.

El valor de σ de la población puede ser estimado a partir de las desviaciones estándar o de los rangos de las muestras. Si el tamaño de las mismas es pequeño, usualmente el rango proporciona un estimador eficiente de σ, además de que el proceso de cálculo del mismo es bastante más simple que el de la desviación estándar para las muestras.

Sin embargo, es conveniente, cuando se requiere bastante precisión en el cálculo de los límites de control, estimar a σ mediante las desviaciones estándar de las muestras. Tal es el caso, por ejemplo, de muestras de productos que son caros, y que deben destruirse al momento de tomar las mediciones.

b.1 Estimando a σ mediante los rangos de las muestras

Hay que obtener primero el valor $\bar{R}$, que es el rango promedio de los rangos de las κ muestras, es decir,

$$\bar{R} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{k} R_i$$

Puesto que la estadística $\bar{R}$ siempre estima por encima de su valor real a la desviación estándar de la población, se obtiene un estimador sesgado. Debido a ello, es indispensable afectar el valor de $\bar{R}$ en forma tal de obtener un estimador insesgado de σ, para lo cual se hace

$$\text{Estimador insesgado de } \sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

El factor d_2 en la expresión anterior se obtiene experimentalmente al identificar el valor de la media en las distribuciones muestrales del cociente R/σ para distintos valores de n, considerando una población en la cual el valor de σ es conocido. Por ejemplo, para muestras de tamaño cinco (n=5), se ha obtenido experimentalmente el valor d_2=2.326, tal como se muestra en la Fig 4.

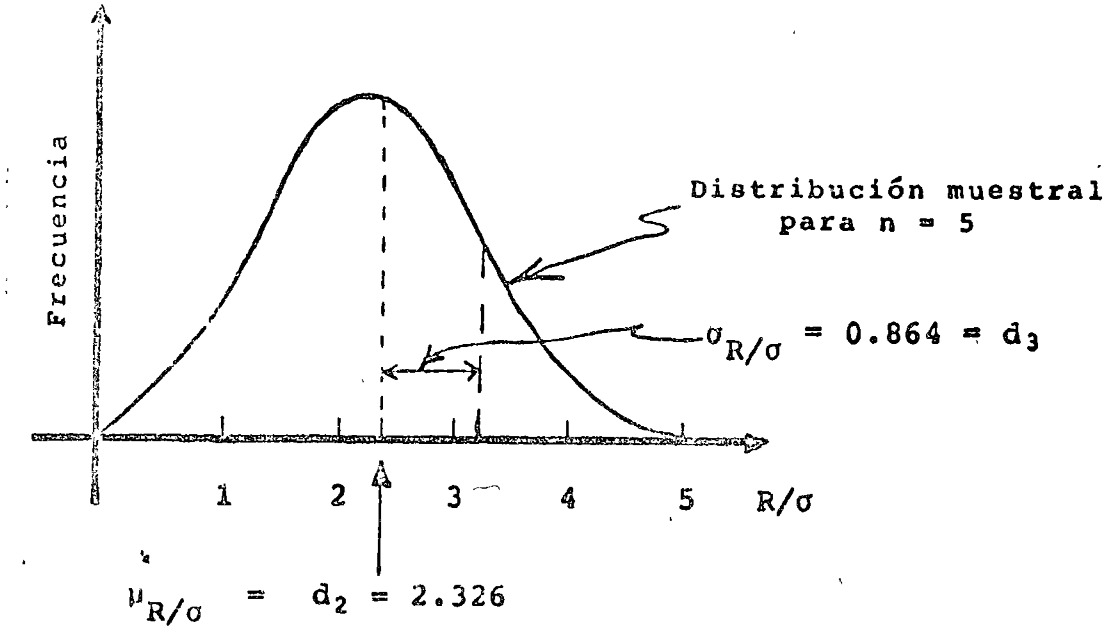


Fig 4. Distribución muestral de R/σ para $n=5$, suponiendo σ conocida.

En la tabla I se presentan los valores del factor d_2 para distintos tamaños de muestra, observándose que conforme se incrementa el valor de n aumenta el de ese factor, lo cual permite concluir que el rango estima mejor a la desviación estándar cuando las muestras son pequeñas.

De acuerdo con lo anterior, se pueden emplear las siguientes expresiones en la elaboración de la carta de control para los promedios:

Línea Central —— $\bar{\bar{X}}$

Límites de Control —— $\bar{\bar{X}} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$

Para abreviar el cálculo de los límites de control a partir de los rangos de las muestras, se ofrece en la tabla I el factor

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

cuyo empleo permite establecer los límites de control como

$$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$$

b.2 Estimando a σ mediante las desviaciones estándar de las muestras

Se debe obtener primero el valor de $\bar{\sigma}$, que es el promedio de las desviaciones estándar de las muestras, es decir

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{k} S_i$$

En donde S_i denota la desviación estándar de la iésima muestra. No siendo tampoco $\bar{\sigma}$ un estimador insesgado de la desviación estándar de la población, ya que siempre la estima por abajo de su valor real, hay que afectar dicho valor por un cierto factor para hacerlo insesgado, es decir

$$\text{Estimador insesgado de } \sigma = \frac{\bar{\sigma}}{c_2}$$

Los valores de c_2 se reportan en la tabla I en función del tamaño de la muestra, y se obtienen mediante un procedimiento similar al explicado para el factor d_2.

Con base en lo anterior, los parámetros de la carta de control para los promedios son los siguientes:

Línea Central —— $\bar{\bar{X}}$

Límites de Control —— $\bar{\bar{X}} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3\bar{\sigma}}{c_2\sqrt{n}}$

De nuevo, para abreviar el cálculo de los límites de control para la carta $\bar{X}$, obtenidos ahora a partir de las desviaciones estándar de las muestras, se puede emplear el factor dado en la tabla I

$$A_1 = \frac{3}{c_2\sqrt{n}}$$

con el cual los límites de control quedan como

$$\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{\sigma}$$

NUMERO MINIMO DE MUESTRAS REQUERIDO PARA LA ELABORACION DE CARTAS $\bar{X}$

En este momento conviene establecer el número mínimo de muestras preliminares, m, así como el tamaño de las mismas, n, que es necesario considerar para estimar adecuadamente los parámetros de una carta de control para los promedios.

El asegurar que un mínimo de 20 0 25 muestras con 4 o 5 elementos cada una son necesarias para obtener los valores de $\bar{\bar{X}}$, $\bar{R}$ o $\bar{\sigma}$, frecuentemente choca con el argumento de que por razones de costo, tiempo, etc., se debe emplear un número menor de ellas. Por ello, se han preparado tablas como las II y IIIque se presentan al final, que permiten obtener una solución cuantitativa para este problema.

Cuando se emplea el rango $\bar{R}$ como estimador de σ para la elaboración de una carta $\bar{X}$, y como se verá más adelante, para una carta R, la tabla II permite determinar el número mínimo, m, de muestras de tamaño n que se deben emplear para tener poco más de un 98% de nivel de confianza de que los promedios aritméticos obtenidos de las muestras se encuentren dentro de los límites de control que se calculen para la carta $\bar{X}$, suponiendo únicamente la presencia de variación aleatoria.

De la misma manera, se establecen en la tabla III los valores óptimos de m y n, cuando se emplean las desviaciones estándar de las muestras para obtener el estimador $\bar{\sigma}$ de la desviación estándar de la población.

Ejemplo: Sea una fábrica que produce varillas de acero, en la cual se desea ejercer control sobre el peso de las mismas. Para ello, se seleccionan veinte muestras aleatorias de cinco varillas cada una, obteniéndose los valores que se reportan en la tabla siguiente:

Número de la muestra	Valores individuales del peso, Kg					Promedio Aritmético $\bar{X}$	Rango R	Desviación estándar S_x
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5			
1	11.1	9.4	11.2	10.4	10.1	10.44	1.8	0.6651
2	9.6	10.8	10.1	10.8	11.0	10.46	1.4	0.5276
3	9.7	10.0	10.0	9.8	10.4	9.98	0.7	0.2400
4	10.1	8.4	10.2	9.4	11.0	9.82	2.6	0.8727
5	12.4	10.0	10.7	10.1	11.3	10.90	2.4	0.8832
6	10.1	10.2	10.2	11.2	10.1	10.36	1.1	0.4224
7	11.0	11.5	11.8	11.0	11.3	11.32	0.8	0.3059
8	11.2	10.0	10.9	11.2	11.0	10.86	1.2	0.4454
9	10.6	10.4	10.5	10.5	10.9	10.58	0.5	0.1720
10	8.3	10.2	9.8	9.5	9.8	9.52	1.9	0.6493
11	10.6	9.9	10.7	10.2	11.4	10.56	1.5	0.5083
12	10.8	10.2	10.5	8.4	9.9	9.96	2.4	0.8357
13	10.7	10.7	10.8	8.6	11.4	10.44	2.8	0.9562
14	11.3	11.4	10.4	10.6	11.1	10.96	1.0	0.3929
15	11.4	11.2	11.4	10.1	11.6	11.14	1.5	0.5352
16	10.1	10.1	9.7	9.8	10.5	10.04	0.8	0.2800
17	10.7	12.8	11.2	11.2	11.3	11.44	2.1	0.7116
18	11.9	11.9	11.6	12.4	11.4	11.84	1.0	0.3382
19	10.8	12.1	11.8	9.4	11.6	11.14	2.7	0.9708
20	12.4	11.1	10.8	11.0	11.9	11.44	1.6	0.6086
SUMA						213.20	31.80	11.3211

<u>Solución</u>: Puesto que se desconoce la media del proceso, esta se puede estimar en forma insesgada mediante

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \bar{X}_i$$

Los valores de los promedios aritméticos $\bar{X}_i$ (i=1,2,...20) de las muestras se reportan en la tabla anterior, por lo cual la línea central es

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{20} (213.20) = 10.66$$

Se obtendrán ahora los límites inferior y superior de control estimando primero a σ mediante los rangos de las muestras, y después mediante las desviaciones estándar correspondientes.

a. Estimando a σ mediante los rangos de las muestras

El valor de $\bar{R}$ es

$$\bar{R} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} R_i$$

Los valores R_i para i=1,2,...,20 se encuentran en la tabla inicial, por lo que

$$\bar{R} = \frac{1}{20} (31.80) \doteq 1.59$$

Los límites de control para la carta de los promedios son

$$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$$

Y, de la tabla I, para n=5, se obtiene $A_2 = 0.577$, quedando

$$10.66 \pm \underbrace{0.577\ (1.59)}_{0.92}$$

O sea

Línea Central —— 10.66

Límites de Control —— 10.66±0.92 ⇒ 11.58, 9.74

b. Estimando a σ mediante las desviaciones estándar de las muestras

El valor de $\bar{\sigma}$ es

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{20}\ (11.3211) = 0.57$$

Los límites de control son ahora

$$\bar{\bar{X}} \pm A_1\ \bar{\sigma}$$

De la tabla I, para n=5, se obtiene

A_1 = 1.596, quedando

$$10.66 \pm \underbrace{1.596\,(0.57)}_{0.91}$$

O sea

Línea Central —— 10.66

Límites de Control —— 10.66±0.91 ⇒ 11.57, 9.75

En la Fig 5 que se presenta a continuación se muestra la carta de control obtenida empleando ambos procedimientos.

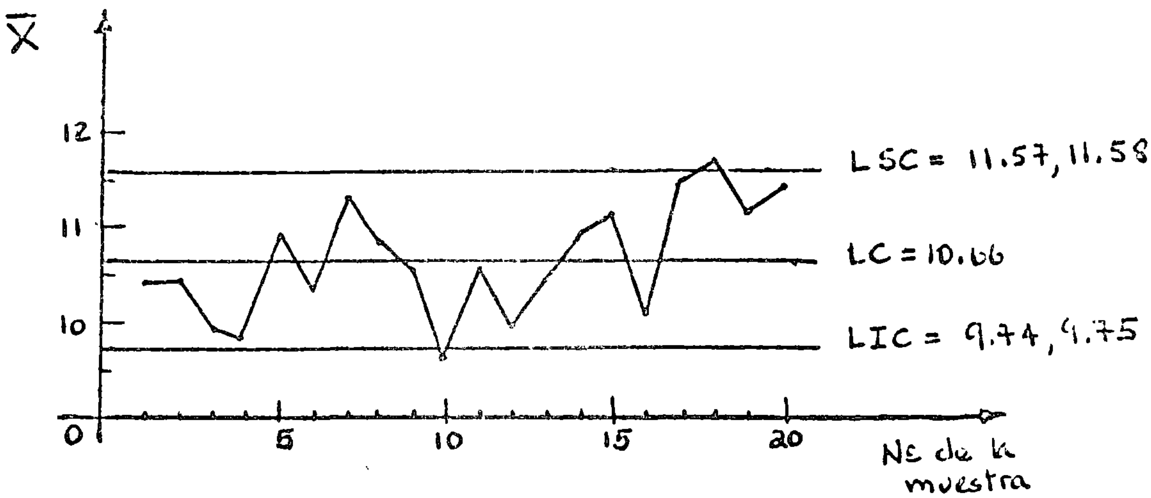


Fig 5 Carta de control $\bar{X}$ obtenida para el ejemplo de las varillas de acero

CARTAS PARA CONTROLAR LA VARIABLILIDAD DE UN PROCESO

Al controlar estadísticamente un proceso puede no ser suficiente - fijar la atención en su "calidad media", sino también en la variabilidad del mismo. Aun cuando es razonable suponer que un incremento en las fluctuaciones de los valores de los promedios aritméticos - graficados en una carta $\bar{X}$ se relaciona con un incremento en la variabilidad del proceso, es posible determinar con mayor objetividad y precisión los cambios que experimenta ésta mediante el empleo de las llamadas cartas R y σ, que se elaboran a partir de los rangos y las desviaciones estándar de las muestras, respectivamente.

Conviene mencionar que aun cuando cualquiera de las dos cartas mencionadas permite ejercer control estadístico sobre la variabilidad de un proceso, usualmente se prefiere la carta para los rangos, R, ya que su elaboración es más sencilla que la de σ, que corresponde a las desviaciones estándar. Por otra parte, la carta R conduce a resultados altamente confiables, a la vez que muestra con claridad ciertas tendencias de los valores de las muestras que deben investigarse.

IMPORTANCIA DEL CONTROL DE LA VARIABILIDAD DE UN PROCESO

La importancia del control sobre la variabilidad de un proceso mediante el empleo de las cartas para los rangos o las desviaciones estándar, se hace evidente al considerar que un cambio brusco en aquella característica es de consecuencias más serias que un cambio similar en la "calidad media". Si el proceso experimenta un cambio en ésta última, normalmente se puede regresar al punto de partida efectuando ajustes simples en los dispositivos de producción (por ejemplo, recalibración de herramientas de corte, dosificadoras, etc).

Sin embargo, si el proceso sufre un cambio brusco en su variabilidad, para regresar al punto de partida son necesarios ajustes más costosos y tardados, tales como reparaciones mayores en los dispositivos de producción, o inclusive la compra de un nuevo dispositivo de procesamiento.

Los cambios efectivos en la variabilidad de un proceso afectan necesariamente el desempeño de una carta $\bar{X}$, ya que, como se recordará, los límites de control para la carta de los promedios se establecen a partir de los valores $\bar{R}$ o $\bar{\sigma}$, que se suponen, después de ser afectados por los factores de corrección correspondientes, como buenos estimadores de la desviación estándar del proceso. Si los valores del rango y la desviación estándar de las muestras aumentan, se hace evidente que la carta $\bar{X}$ no operará correctamente.

En contraste con lo anterior, los cambios significativos que se verifican en la carta $\bar{X}$ no necesariamente provocan efectos similares en las cartas R y σ, ya que en la elaboración de ellas no intervienen los promedios aritméticos de las muestras, tal como se verá a continuación.

Por lo anteriormente expuesto, es conveniente ejercer, cuando así sea posible, control simultáneo sobre la "calidad media" y la variabilidad de un proceso.

ELABORACION DE LAS CARTA DE CONTROL PARA LOS RANGOS (CARTA R)

Al igual que para la carta $\bar{X}$, se pueden considerar dos casos distintos en la elaboración de la carta para los rangos: cuando se conoce la desviación estándar σ del proceso y cuando ésto no sucede. En cualquiera de los casos anteriores, se debe observar siempre que el procedimiento de obtención de la línea central y de los límites de control para la carta R, se basa en la distribución muestral de los rangos de muestras aleatorias de tamaño n, extraídas de una población normal.

a. Caso en el que se conoce la desviación estándar σ de la Población

De acuerdo con lo anterior, es fácil comprender que los parámetros de la carta de control para los rangos son

Línea Central —— μ_R

Límites de Control —— $\mu_R \pm 3\sigma_R$

Sin embargo, normalmente no conocen los valores de la media y la desviación estándar de la distribución muestral de los rangos. En esta situación, la lógica indica que para estimar el valor de μ_R se debe emplear el de $\bar{R}$, el promedio de los rangos de muestras preliminares. Sin embargo, si se recuerda que

$$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

entonces

$$\bar{R} = d_2 \sigma$$

Y, puesto que se conoce el valor de σ, se puede escribir

Línea Central —— $\bar{R}$ o $d_2\sigma$

quedando finalmente

Línea Central —— $d_2\sigma$

en donde los valores de d_2 se presentan en la tabla I.

Por lo que respecta a σ_R, si se observa nuevamente la Fig 4 se puede ver que la desviación estándar de la distribución muestral de la estadística R/σ, para el caso de muestras de tamaño 5 es, en forma experimental

$$\sigma_{R/\sigma} = d_3 = 0.864$$

Lo anterior permite considerar que si σ es conocida (y por tanto constante) es válido escribir

$$\sigma_{R/\sigma} = \frac{\sigma_R}{\sigma} = d_3$$

o sea

$$\sigma_R = \sigma_{R/\sigma}\ \sigma = d_3\sigma = 0.864\ \sigma$$

En el caso en que n sea diferente de cinco, los valores del factor d_3 se pueden obtener de la tabla I.

Empleando el valor de σ_R así obtenido, los límites de control son, en general, los siguientes

$$d_2\sigma \pm 3d_3\sigma$$

o sea

$$d_2\sigma - 3d_3\sigma \Rightarrow (d_2 - 3d_3)\sigma \Rightarrow D_1\ \sigma$$

$$d_2\sigma \quad 3d_3\sigma \Rightarrow (d_2 + 3d_3)\sigma \Rightarrow D_2\ \sigma$$

en donde

$$D_1 = d_2 - 3d_3 \quad y \quad D_2 = d_2 + 3d_3$$

Los valores de D_1 y D_2 se reportan también en la tabla I en función de n, el tamaño de la muestra.

Conforme a lo anterior, los parámetros de la carta de control para los rangos, cuando σ es conocida, son

Línea Central —— $d_2\ \sigma$

Límite Inferior de Control —— $D_1\ \sigma$

Límite Superior de Control —— $D_2\ \sigma$

b. Caso en el que se desconoce la desviación estándar σ de la población

En este caso es necesario estimar a μ_R de la distribución muestral de los rangos mediante $\bar{R}$, empleando un número adecuado de muestras preliminares, normalmente el mismo que se emplea para la elaboración de una carta $\bar{X}$. Al respecto, conviene recordar que la carta R (o la σ) generalmente se construye <u>después</u> de la carta $\bar{X}$, y que, por lo tanto, se emplean para su elaboración las mismas muestras aleatorias. De acuerdo con ésto, la línea central resulta ser

$$\text{Línea Central} \text{ --- } \bar{R}$$

En este caso se requieren límites de control del tipo

$$\bar{R} \pm 3\sigma_R$$

Puesto que ahora se desconocen σ_R y σ, se pueden hacer, para el límite inferior de control

$$\bar{R} - 3\sigma_R = \bar{R} - \frac{3\,\bar{R}\,\sigma_R}{\bar{R}} = \left(1 - 3\,\frac{\sigma_R}{\bar{R}}\right)\bar{R}$$

$$= \left(1 - 3\,\frac{\frac{\sigma_R}{\sigma}}{\frac{\bar{R}}{\sigma}}\right)\bar{R} = \left(1 - 3\,\frac{d_3}{d_2}\right)\bar{R}$$

$$= \left(\frac{d_2 - 3d_3}{d_2}\right)\bar{R} = \left(\frac{D_1}{d_2}\right)\bar{R}$$

Para el límite superior de control se obtiene

$$\bar{R} + 3\sigma_R = \bar{R}\left(\frac{D_2}{d_2}\right)$$

En la tabla I se presentan los valores de

$$D_3 = \frac{D_1}{d_2} \qquad y \qquad D_4 = \frac{D_2}{d_2}$$

en función de n .

Finalmente, los parámetros de la carta R cuando se desconoce el valor de σ de la población son los siguientes:

Línea Central —— $\bar{R}$

Límite Inferior de Control —— $D_3\bar{R}$

Límite Superior de Control —— $D_4\bar{R}$

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL PARA LAS DESVIACIONES ESTANDAR (CARTA σ)

En la elaboración de la carta para las desviaciones estándar también se deben considerar los dos casos posibles: cuando se conoce la - desviación estándar de la población y cuando ésto no es así. De - igual manera, el procedimiento para obtener los parámetros de la carta se fundamenta en la distribución muestral de las desviaciones estándar de muestras aleatrias de tamaño n, extraídas de una población normal.

a. Caso en el que se conoce la desviación estándar σ de la población

Con base en la distribución muestral de las desviaciones están dar de las muestras, se pueden establecer los parámetros de la carta σ, a saber

Línea Central —— μ_{s_x}

Límites de Control —— $\mu_{s_x} \pm 3\sigma_{s_x}$

Al desconocerse, como ocurre normalmente, los valores de - - μ_{s_x} y σ_{s_x} de la distribución muestral, se debe estimar primero μ_{s_x} a partir de $\bar{\sigma}$, el promedio de las desviaciones estándar de las muestras preliminares. Sin embargo, no es necesario realizar en este caso ese cálculo si se recuerda que

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{c_2}$$

o sea

$$\bar{\sigma} = c_2 \, \sigma$$

Y, en virtud de que el valor de σ es conocido, se llega a

Línea Central —— $\bar{\sigma}$ o $c_2\sigma$

quedando finalmente

Línea Central —— $c_2\sigma$

en donde los valores de c_2 se pueden obtener de la tabla I.

Bajo la suposición de que la población de la cual se extraen las muestras aleatorias se encuentra distribuida en forma normal (o aproximadamente normal), se puede demostrar que la desviación estándar de la distribución muestral de las desviaciones estándar es

$$\sigma_{s_x} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

en donde n denota al tamaño de las muestras. Empleando el va lor de σ_{s_X} anterior, los límites de control se pueden establecer como

$$\mu_{s_X} \pm 3\sigma_{s_X} = c_2\sigma \pm 3\,\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

o sea

$$c_2\sigma - 3\,\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \left(c_2 - \frac{3}{\sqrt{2n}} \right) \sigma = B_1\sigma$$

$$c_2\sigma + 3\,\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \left(c_2 + \frac{3}{\sqrt{2n}} \right) \sigma = B_2\sigma$$

en donde

$$B_1 = c_2 - \frac{3}{\sqrt{2n}}$$

$$B_2 = c_2 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$$

Los valores de B_1 y B_2 se proporcionan en la tabla I, en función del valor de n. Entonces, los parámetros de la carta σ son, finalmente

Línea Central —— $c_2\sigma$

Límite Inferior de Control —— $B_1\sigma$

Límite Superior de Control —— $B_2\sigma$

b. Caso en el que se desconoce la desviación estándar σ de la población

En este caso es necesario estimar a μ_{s_X} mediante $\bar{\sigma}$, empleando un número suficiente de muestras aleatorias preliminares.

De acuerdo con lo anterior, la línea central de la carta σ es

Línea Central —— $\bar{\sigma}$

Los límites de control serán entonces del tipo

$$\bar{\sigma} \pm 3\sigma_{s_x}$$

Puesto que ahora se desconoce el valor de σ, pero se sabe que

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{c_2}$$

el límite inferior de control resulta ser

$$\bar{\sigma} - 3\sigma_{s_x} = \bar{\sigma} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \bar{\sigma} - 3\frac{\bar{\sigma}}{c_2\sqrt{2n}}$$

$$= (1 - \frac{3}{c_2\sqrt{2n}})\ \bar{\sigma}$$

Para el límite superior de control se obtiene

$$\bar{\sigma} + 3\sigma_{s_x} = (1 + \frac{3}{c_2\sqrt{2n}})\ \bar{\sigma}$$

En la tabla I se presentan los valores de

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_2\sqrt{2n}} \quad \text{y} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_2\sqrt{2n}}$$

en función del valor de n.

Finalmente, los parámetros de la carta σ, cuando no se conoce la desviación estándar de la población, quedan como

Línea Central —— $\bar{\sigma}$

Límite Inferior de Control —— $B_3\bar{\sigma}$

Límite Superior de Control —— $B_4\bar{\sigma}$

Ejemplo: Sea el proceso de elaboración de varillas de acero mencionado en la página 10 de estos apuntes. En él se informa que el diámetro medio de las varillas es igual a 2.5 cm, con desviación estándar de 0.01 cm. En este caso se pide establecer los parámetros de las cartas de control R y σ, considerando que se extraen periódicamente muestras de cinco varillas.

Solución:

a. Carta R

Puesto que se conoce el valor de la desviación estándar de la población, y en virtud de que n=5, se obtiene, empleando la tabla I

$$LC \text{ —— } d_2\sigma = 2.326(0.01) = 0.02326$$

$$LIC \text{ —— } D_1\sigma = 0(0.01) = 0.0000$$

$$LSC \text{ —— } D_2\sigma = 4.918(0.01) = 0.04918$$

b. Carta σ

En este caso, puesto que σ=0.01 y n=5, se obtiene, con el uso de la tabla I

$$LC \text{ —— } c_2\sigma = 0.8407(0.01) = 0.008407$$

$$LIC \text{ —— } B_1\sigma = 0(0.01) = 0.00000$$

$$LSC \text{ —— } B_2\sigma = 1.756(0.01) = 0.01756$$

Ejemplo: Con el fin de investigar la variabilidad en el proceso de producción de varillas de acero mencionado en la página - 16, se desea elaborar las cartas de control R y σ correspondientes, considerando la información contenida en la tabla de la misma página.

Solución:

En este caso se desconoce la desviación estándar de la población, por lo cual es indispensable emplear los valores de $\bar{R}$ y $\bar{\sigma}$, considerando que el tamaño de la muestra es 5.

a. Carta R

El valor de $\bar{R}$, obtenido durante el proceso de elaboración de la carta $\bar{X}$ correspondiente, es $\bar{R} = 1.59$. - Considerando este valor, y empleando la tabla I, los parámetros de la carta de control R resultan

$$LC \text{ —— } \bar{R} = 1.590$$

$$LIC \text{ —— } D_3\bar{R} = 0(1.59) = 0.000$$

$$LSC \text{ —— } D_4\bar{R} = 2.115(1.59) = 3.363$$

En la Fig 6 se presenta la carta R para este problema.

b. Carta σ

Considerando que al calcular para este problema los parámetros de la carta $\bar{X}$ se obtuvo $\bar{\sigma} = 0.57$, la carta σ queda definida con

$$LC \text{ —— } \bar{\sigma} = 0.57$$

$$LIC \text{ —— } B_3\bar{\sigma} = 0(0.57) = 0.00$$

$$LSC \text{ —— } B_4\bar{\sigma} = 2.089(0.57) = 1.19$$

En la Fig 7 se muestra la carta de control σ correspondiente.

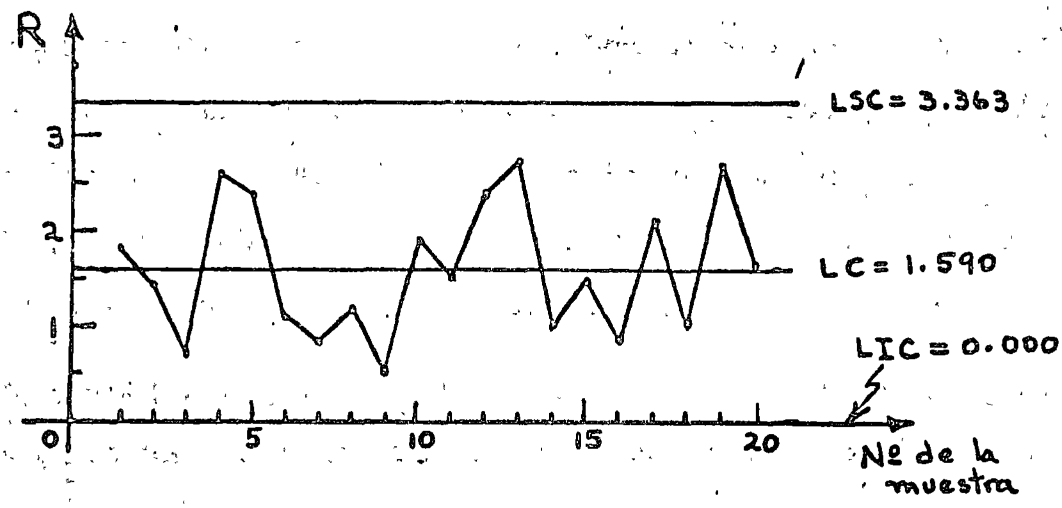


Fig 6 Carta de control R obtenida para el ejemplo de las varillas de acero

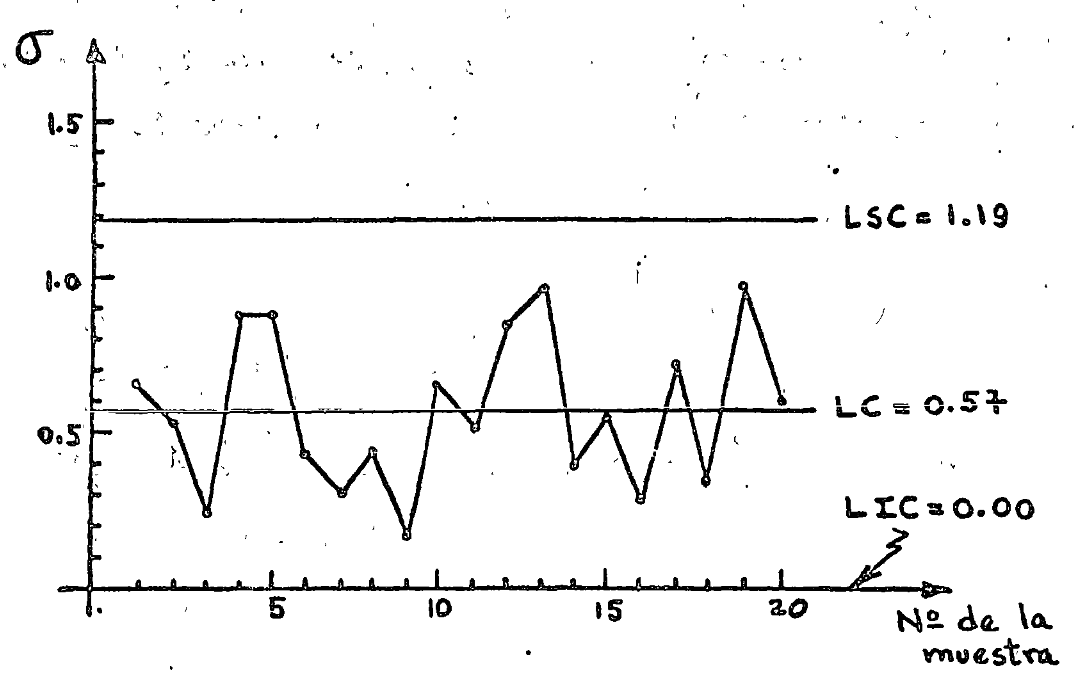


Fig 7 Carta de control σ obtenida para el ejemplo de las varillas de acero

CARTAS DE CONTROL PARA MEDICIONES (ELEMENTOS INDIVIDUALES)

Se han establecido las cartas $\bar{X}$, R y σ considerando que existe la posibilidad de conocer la media μ y/o la desviación estándar σ de la población (proceso), o bien, cuando estos parámetros se desconocen, que es posible obtener un número adecuado de muestras aleatorias de ella, cuyos tamaños sean cuando menos igual a dos, con el fin de estimar con buena precisión los valores de dichos parámetros.

Sin embargo, en muchas ocasiones no se conocen los parámetros del proceso, y únicamente es posible contar con muestras de tamaño uno, es decir, muestras con un solo elemento. Cuando ésto sucede, la técnica para calcular los límites de control en las cartas para mediciones se fundamenta en el empleo de los llamados rangos móviles, que se explican a continuación.

Si, por ejemplo, se cuenta con el conjunto de datos X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ registrados en orden, se definen los rangos móviles de orden dos como

$$\left|X_i - X_{i+1}\right| \qquad ; \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

es decir

$$\left|X_1 - X_2\right| , \left|X_2 - X_3\right| , \ldots , \left|X_{n-1} - X_n\right|$$

Si se trata de rangos móviles de orden tres, éstos se definen como

$$\left|X_i - X_{i+2}\right| \qquad ; \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

es decir

$$\left|X_1 - X_3\right| , \left|X_2 - X_4\right| , \ldots , \left|X_{n-2} - X_n\right|$$

TABLA I

Número de observaciones en la muestra n	Carta para promedios			Carta para desviaciones estándar						Carta para rangos							Carta X
	Factores para límites de control			Factores para línea central		Factores para límites de control				Factores para línea central		Factores para límites de control					Factor para límites de control
	A	A_1	A_2	c_2	$1/c_2$	B_1	B_2	B_3	B_4	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4	E_2
2....	2.121	3.760	1.880	0.5642	1.7725	0	1.843	0	3.267	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267	2.660
3....	1.732	2.394	1.023	0.7236	1.3820	0	1.858	0	2.568	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575	1.772
4....	1.500	1.880	0.729	0.7979	1.2533	0	1.808	0	2.266	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282	1.457
5....	1.342	1.596	0.577	0.8407	1.1894	0	1.756	0	2.089	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115	1.290
6....	1.225	1.410	0.483	0.8686	1.1512	0.026	1.711	0.030	1.970	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004	1.184
7....	1.134	1.277	0.419	0.8882	1.1259	0.105	1.672	0.118	1.882	2.704	0.3698	0.833	0.205	5.203	0.076	1.924	1.109
8....	1.061	1.175	0.373	0.9027	1.1078	0.167	1.638	0.185	1.815	2.847	0.3512	0.820	0.387	5.307	0.136	1.864	1.054
9....	1.000	1.094	0.337	0.9139	1.0942	0.219	1.609	0.239	1.761	2.970	0.3367	0.808	0.546	5.394	0.184	1.816	1.010
10....	0.949	1.028	0.308	0.9227	1.0837	0.262	1.584	0.284	1.716	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777	0.975
11....	0.905	0.973	0.285	0.9300	1.0753	0.299	1.561	0.321	1.679	3.173	0.3152	0.787	0.812	5.534	0.256	1.744	0.946
12....	0.866	0.925	0.266	0.9359	1.0684	0.331	1.541	0.354	1.646	3.258	0.3069	0.778	0.924	5.592	0.284	1.716	0.921
13....	0.832	0.884	0.249	0.9410	1.0627	0.359	1.523	0.382	1.618	3.336	0.2998	0.770	1.026	5.646	0.308	1.692	0.899
14....	0.802	0.848	0.235	0.9453	1.0579	0.384	1.507	0.406	1.594	3.407	0.2935	0.762	1.121	5.693	0.329	1.671	0.881
15....	0.775	0.816	0.223	0.9490	1.0537	0.406	1.492	0.428	1.572	3.472	0.2880	0.755	1.207	5.737	0.348	1.652	0.864
16....	0.750	0.788	0.212	0.9523	1.0501	0.427	1.478	0.448	1.552	3.532	0.2831	0.749	1.285	5.779	0.364	1.636	0.849
17....	0.728	0.762	0.203	0.9551	1.0470	0.445	1.465	0.466	1.534	3.588	0.2787	0.743	1.359	5.817	0.379	1.621	0.836
18....	0.707	0.738	0.194	0.9576	1.0442	0.461	1.454	0.482	1.518	3.640	0.2747	0.738	1.426	5.854	0.392	1.608	0.824
19....	0.688	0.717	0.187	0.9599	1.0418	0.477	1.443	0.497	1.503	3.689	0.2711	0.733	1.490	5.888	0.404	1.596	0.813
20....	0.671	0.697	0.180	0.9619	1.0396	0.491	1.433	0.510	1.490	3.735	0.2677	0.729	1.548	5.922	0.414	1.586	0.803
21....	0.655	0.679	0.173	0.9638	1.0376	0.504	1.424	0.523	1.477	3.778	0.2647	0.724	1.606	5.950	0.425	1.575	0.794
22....	0.640	0.662	0.167	0.9655	1.0358	0.516	1.415	0.534	1.466	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566	0.785
23....	0.626	0.647	0.162	0.9670	1.0342	0.527	1.407	0.545	1.455	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557	0.778
24....	0.612	0.632	0.157	0.9684	1.0327	0.538	1.399	0.555	1.445	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.452	1.548	0.770
25....	0.600	0.619	0.153	0.9696	1.0313	0.548	1.392	0.565	1.435	3.931	0.2544	0.709	1.804	6.058	0.459	1.541	0.763
Más de 25....	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	......	......	......	*	**	*	**	......	......	......	......	......	......	......	$\frac{3}{d_2}$

* $1 - \frac{3}{\sqrt{2n}}$ ** $1 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$

TABLA II

Número mínimo m de muestras de tamaño n requerido para elaborar una carta $\bar{X}$ con una confianza de 98%, cuando se emplean los rangos.

n	m
2	15
3	9
4	7
5	6
6	5
7	5
8	4
9	4
10	4
12	4
14	4
16	3
18	3
20	3

TABLA III

Número mínimo m de muestras de tamaño n requerido para elaborar una carta $\bar{X}$ con una confianza de 98%, cuando se emplean las desviaciones estándar.

n	m
2	16
3	9
4	7
5	6
6	5
7	5
8	4
9	4
10	4
12	4
14	3
16	3
18	3
20	3

La obtención de los rangos móviles de orden superior al tres se - hace siguiendo las ideas anteriores.

En forma numérica, si se tienen los datos registrados en orden - - 4, 6, 4, 3 y 7, los rangos móviles de orden dos son

$$|4-6| = 2 \ , \ |6-4| = 2 \ , \ |4-3| = 1 \ , \ |3-7| = 4$$

y los de orden tres son

$$|4-4| = 0 \ , \ |6-3| = 3 \ , \ |4-7| = 3$$

El empleo de los rangos móviles para la obtención de los límites de control es importante en este caso, debido a que, si se trata de rangos móviles de orden dos, se puede considerar que el valor de cualquiera de ellos debe obtenerse a partir de los valores de dos elementos individuales registrados en orden. Dicho de otra manera, un rango móvil de orden dos debe provenir de una muestra "ficticia" de tamaño dos. En la misma forma, un rango móvil de orden tres tiene que obtenerse a partir de tres elementos individuales, lo cual permite - "crear" muestras de tamaño tres.

De acuerdo con lo anterior, es factible establecer los límites de control para las cartas de control, en el caso de elementos individuales, empleando los factores de la tabla I, que se encuentran tabulados a partir de muestras de tamaño dos.

a. Elaboración de la carta X (elementos individuales)

En este caso, la línea central está dada por

$$\bar{X} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} X_i$$

en donde X_i $(i=1,2,\ldots,K)$ denota a los valores de los datos -

individuales.

Los límites de control requeridos son

$$\bar{\bar{X}} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Puesto que el tamaño real de la muestra es uno, la expresión anterior se puede escribir

$$\bar{X} \pm 3\,\frac{\sigma}{\sqrt{1}} = \bar{X} \pm 3\sigma$$

Debido a que el valor de σ se desconoce, pero es posible obtener el de $\bar{R}$ (promedio de los rangos móviles), la última expresión puede transformarse algebraicamente de la siguiente manera:

$$\bar{X} \pm 3\sigma = \bar{X} \pm \frac{3\sigma\ \bar{R}}{\bar{R}} = \bar{X} \pm \frac{3\bar{R}}{\frac{\bar{R}}{\sigma}}$$

$$= \bar{X} \pm \frac{3\ \bar{R}}{d_2} = \bar{X} \pm E_2\bar{R}$$

en donde

$$E_2 = \frac{3}{d_2}$$

Los valores de E_2 se pueden obtener de la tabla I en función de n, que representa ahora el tamaño "ficticio" de la muestra, o el orden de los rangos móviles.

De acuerdo con lo anterior, los parámetros de la carta de control X para elementos individuales son

Línea Central —— $\bar{X}$

Límite Inferior de Control —— $\bar{X} - E_2\bar{R}$

Límite Superior de Control —— $\bar{X} + E_2\bar{R}$

b. Elaboración de la carta R* (rangos móviles).

En este caso, la línea central está dada por el valor del promedio de los rangos móviles, es decir

$$\bar{R} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} R_i$$

En donde R_i $(i=1,2,\ldots,K)$ denota a los valores de los rangos móviles, obtenidos a partir de los datos individuales registrados en orden.

Los límites de control se obtienen considerando que se desconoce el valor de la desviación estándar de la población, en la forma ya explicada para la carta R.

De acuerdo con lo anterior, los parámetros de la carta de control R* para los rangos móviles son

Línea Central —— $\bar{R}$

Límite Inferior de Control —— $D_3\bar{R}$

Límite Superior de Control —— $D_4\bar{R}$

en donde los valores de D_3 y D_4 se obtienen de la tabla I en función de n, el tamaño "ficticio" de la muestra, u orden de los rangos móviles.

Ejemplo: Considérese un proceso de destilación y mezclado de alcohol, para el cual se desea ejercer control sobre el porcentaje de metanol existente. Se extraen 26 lotes sucesivos de alcohol, y se obtiene el porcentaje de metanol correspondiente para cada uno de ellos. Los valores se presentan en la tabla siguiente, y se pide construir cartas X y R* considerando rangos móviles de orden dos.

Lote	Porcentaje de metanol, X	Rango móvil, R	Lote	Porcentaje de metanol, X	Rango móvil, R
1	4.6	---	14	5.5	0.1
2	4.7	0.1	15	5.2	0.3
3	4.3	0.4	16	4.6	0.6
4	4.7	0.4	17	5.5	0.9
5	4.7	0	18	5.6	0.1
6	4.6	0.1	19	5.2	0.4
7	4.8	0.2	20	4.9	0.3
8	4.8	0	21	4.9	0
9	5.2	0.4	22	5.3	0.4
10	5.0	0.2	23	5.0	0.3
11	5.2	0.2	24	4.3	0.7
12	5.0	0.2	25	4.5	0.2
13	5.6	0.6	26	4.4	0.1
			SUMA	128.1	7.2

<u>Solución</u>: El valor del promedio de los rangos móviles de orden dos es .

$$\bar{R} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} R_i = \frac{1}{25} (7.2) = 0.288$$

a. Carta X

La línea central de esta carta es $\bar{X}$, cuyo valor es

$$\bar{X} = \frac{1}{26} \sum_{i=1}^{26} X_i = \frac{1}{26} (128.1) = 4.927$$

De la tabla I se obtiene $E_2 = 2.66$ para n=2, - siendo los límites de control

$$\bar{\bar{X}} \pm E_2\bar{R} = 4.927 \pm 2.66(0.288)$$

$$= 4.927 \pm 0.7661$$

Finalmente, los parámetros de la carta X quedan como

LC —— 4.927

LIC—— 4.927 - 0.7661 = 4.161

LSC—— 4.927 + 0.7661 = 5.693

En la Fig 8 se presenta la gráfica correspondiente.

b. Carta R*

La línea central para esta carta es $\bar{R} = 0.288$, y los límites de control se obtienen empleando la tabla I considerando que n=2. De ahí que

LC —— 0.288

LIC—— $D_3\bar{R} = 0(0.288) = 0.000$

LSC—— $D_4\bar{R} = 3.267(0.288) = 0.941$

La Fig 9 muestra la carta R* para este problema.

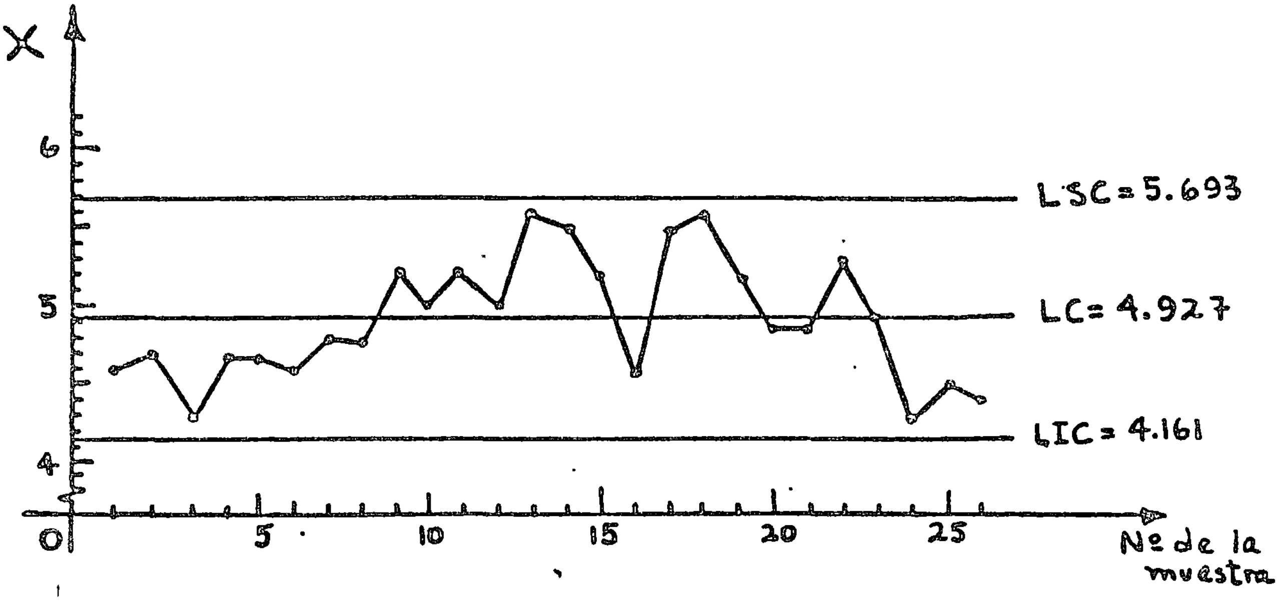


Fig 8 Carta de control X obtenida para el ejemplo de los lotes de alcohol

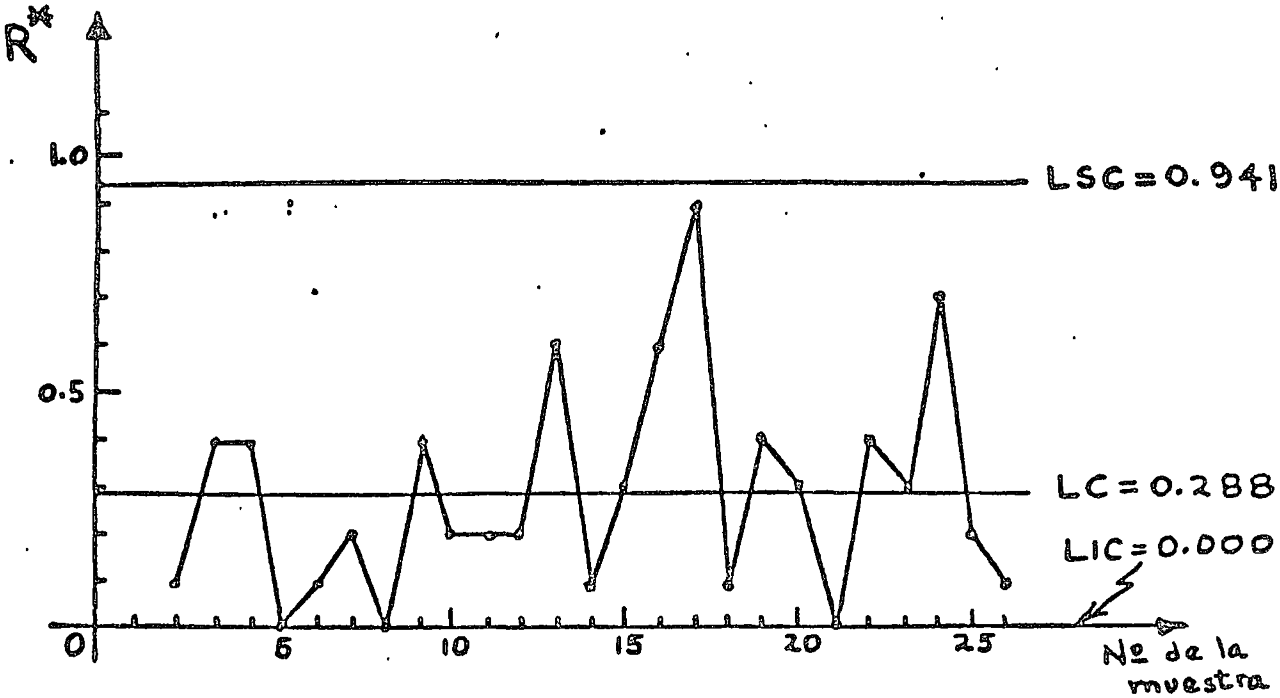


Fig 9 Carta de ccntrol R* obtenida para el ejemplo de los lotes de alcohol

CARTAS DE CONTROL PARA ATRIBUTOS

El término <u>atributo</u>, tal como se emplea en el control de calidad, indica la propiedad que tiene un producto de ser bueno o malo, es decir, permite reconocer si la característica de calidad del mismo se encuentra dentro de ciertos requerimientos específicos o no.

Aunque generalmente se puede obtener información más completa de las mediciones hechas a productos terminados, a menudo consume menos tiempo y dinero el comparar la calidad de un producto en contra de ciertas especificaciones mínimas, sobre la base, por ejemplo, de considerar que sirve o no, o que es bueno o malo.

Por ejemplo, al ejercer control sobre el diámetro de un balín de acero, es más simple y rápido el determinar si éste pasa por un agujero hecho en una placa de acero templado con el diámetro adecuado, que realizar la medición del diámetro con un micrómetro.

Se establecerán ahora los dos tipos fundamentales de cartas de control que se utilizan en conexión con el muestreo por atributos: la carta para la proporción de elementos defectuosos, o carta p, y la carta para el número de defectos, o carta c.

Considérese por ejemplo una muestra de 50 fusibles en la cual se encontró, después de probar todos ellos, que contiene dos elementos defectuosos. En este caso, la proporción de fusibles <u>defectuosos</u> en la muestra es de 2/50 = 0.04.

Por otra parte, debe observarse que si se prueba una sola unidad producida, esta puede tener varios <u>defectos</u> pero, sin embargo, puede o no ser una unidad defectuosa. Tal es el caso, por ejemplo, de rollos (unidades) de tela de determinada longitud, que pueden tener cierto número de imperfecciones pero no necesariamente ser considerados como defectuosos. No obtante, en muchas aplicaciones prácticas una unidad producida se considera defectuosa si tiene cuando menos un defecto.

La distribución de la proporción y del número de elementos defectuosos en un proceso es obviamente binomial, en tanto que la del número de defectos es de Poisson. Sin embargo, para la elaboración de la carta p se aprovecha la propiedad que tiene la distribución muestral de las proporciones de ser aproximada mediante una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es grande, y la proporción de elementos defectuosos no se acerca a cero o a uno.

ELABORACION DE LAS CARTAS DE CONTROL p Y np PARA LA PROPORCION DE DEFECTUOSOS Y EL NUMERO DE DEFECTUOSOS

Los límites de control que se requieren en este caso son

$$\mu_p \pm 3\sigma_p$$

en donde μ_p es la media de la distribución muestral de las proporciones, y σ_p la desviación estándar correspondiente. Como μ_p de esta distribución es igual al parámetro P de la población, la estadística p de la muestra estima en forma insesgada a este último.

Si no se conoce el valor de P de la población, lo cual en la práctica es frecuente, se debe disponer de K muestras de tamaño n constante para obtener el valor del estimador insesgado

$$\bar{p} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} p_i$$

en donde p_i $(i=1,2,\ldots,K)$ denota el valor de la proporción en la - muestra i. Empleando el valor así obtenido, la línea central es

$$\text{Línea Central} \longrightarrow \bar{p}$$

En textos de estadística se demuestra que la desviación estándar de la distribución muestral de las proporciones es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P\ (1-P)}{n}}$$

por lo cual los límites de control son

$$\bar{p} \pm 3\sigma_p = \bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Finalmente , los parámetros de la carta de control p quedan como

$$\text{Línea Central} \longrightarrow \bar{p}$$

$$\text{Límite Inferior de Control} \longrightarrow \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\text{Límite Superior de Control} \longrightarrow \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

A partir de los parámetros anteriores se pueden derivar los de la - llamada carta np, o sea, para el número de defectuosos. Para ello, es necesario multiplicar dichos parámetros por n para así obtener, en el caso de los límites de control

$$n\left(\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right) = n\bar{p} \pm 3n\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$= n\bar{\bar{p}} \pm 3\sqrt{\frac{n^2 p\ (1-p)}{n}}$$

$$= n\bar{\bar{p}} \pm \sqrt{3\ n\ \bar{p}\ (1-\bar{p})}$$

y los parámetros resultan ahora

Línea Central —— $n\bar{\bar{p}}$

Límite Inferior de Control —— $n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$

Límite Superior de Control —— $n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$

<u>Ejemplo</u>: Para un proceso de elaboración de fusibles se desea ejercer control sobre la proporción de elementos defectuosos, así como sobre el número de ellos. Para ello, se seleccionan 40 muestras aleatorias de 50 fusibles cada una, y se obtienen los valores reportados en la tabla siguiente. Se desea construir las cartas p y np correspondientes.

Número de la muestra	Número de fusibles defectuosos	Proporción de defectuosos, p	Número de la muestra	Número de fusibles defectuosos	Proporción de defectuosos, p
1	2	0.04	21	1	0.02
2	1	0.02	22	1	0.02
3	2	0.04	23	4	0.08
4	0	0.00	24	2	0.04
5	2	0.04	25	2	0.04
6	3	0.06	26	4	0.08
7	4	0.08	27	1	0.02
8	2	0.04	28	3	0.06
9	0	0.00	29	3	0.06
10	3	0.06	30	2	0.04
11	0	0.00	31	3	0.06
12	1	0.02	32	6	0.12
13	2	0.04	33	2	0.04
14	2	0.04	34	3	0.06
15	3	0.06	35	2	0.04
16	5	0.10	36	3	0.06
17	1	0.02	37	1	0.02
18	2	0.04	38	0	0.00
19	3	0.06	30	2	0.04
20	1	0.02	40	0	0.00
			S U M A		1.68

Solución: El valor de $\overline{p}$ es

$$\overline{p} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} p_i = \frac{1}{40} (1.68) = 0.042$$

a. Carta p

Los límites de control son, para n=50

$$0.042 \pm 3\sqrt{\frac{(0.042)\ (1-0.042)}{50}} = 0.042 \pm 0.0851$$

por lo cual

$$\text{LC} \text{———} 0.0420$$

$$\text{LIC} \text{———} 0.042 - 0.0851 = -0.0431 \Rightarrow 0.0000$$

$$\text{LSC} \text{———} 0.042 + 0.0851 = 0.1271$$

En este caso, y como se verá a continuación para la carta np, la expresión para el cálculo del límite inferior de control conduce a un valor negativo del mismo. Puesto que no tiene sentido físico hablar de una proporción menor de cero o de un número de defectuosos negativo, en forma arbitraria se asigna a ese límite el valor cero.

En la Fig 10 se presenta la carta de control p correspondiente.

b. Carta np

Puesto que $n\overline{p} = 50(0.042) = 2.1$, los límites de control son ahora

$$2.1 \pm 3\sqrt{50(0.042)\ (1-0.042)} = 2.1 \pm 4.255$$

o sea

LC —— 2.1

LIC —— 2.1-4.255 = -2.155 ⇛ 0.000

LSC —— 2.1+4.255 = 6.355

En la Fig 10 se presenta la carta np para este problema.

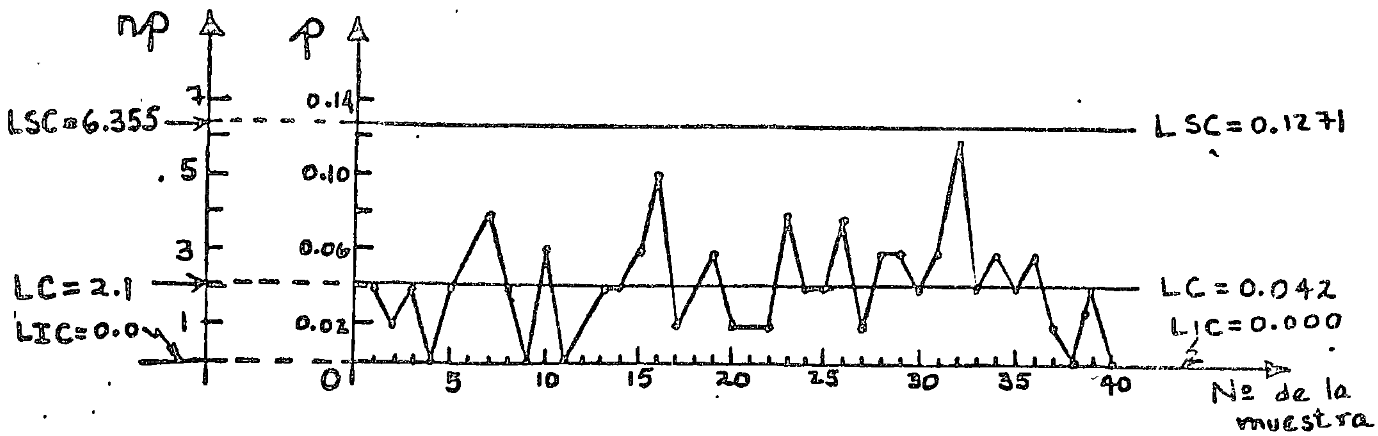


Fig 10 Cartas de control p y np obtenidas para el ejemplo de los fusibles

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL c PARA EL NUMERO DE DEFECTOS

Existen ocasiones en las que es necesario controlar el número de defectos por unidad en un proceso. Por ejemplo, en la producción de alfombras es importante controlar el número de defectos por metro cuadrado; en la elaboración de papel se requiere controlar el número de defectos por rollo, etc. En estos casos, la variable aleatoria c asociada al número de defectos por unidad tiene una distribución de Poisson.

De lo anterior se desprende que la línea central de la carta de con trol para el número de defectos es el parámetro λ de la distribución de Poisson correspondiente, cuyo valor usualmente se desconoce. En tal situación, se acostumbra estimar en forma insesgada el valor de λ a partir de un mínimo de 20 valores de c, observados previamente en igual número de unidades producidas. De acuerdo con ésto, el valor de

$$\bar{c} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} c_i$$

en donde c_i $(i=1,2,\ldots,K)$ representa el número de defectos observados en la unidad i, se puede emplear como estimador de λ.

Los límites de control requeridos ahora son del tipo

$$\bar{c} \pm 3\sigma_c$$

Puesto que en este caso se observa el número de defectos por unidad, se puede suponer que el tamaño de la muestra es unitario. Por tal motivo, se puede considerar que la desviación estándar de la distribución muestral del número de defectos c es igual a la desviación estándar de la distribución de Poisson y, puesto que $\bar{c}$ estima el valor de λ

$$\sigma_c = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\bar{c}}$$

De acuerdo con lo anterior, los parámetros de la carta de control c son

Línea Central —— $\bar{c}$

Límite Inferior de Control —— $\bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$

Límite Superior de Control —— $\bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$

Ejemplo: Considérese el proceso de soldadura de dos placas de acero en una fábrica. Diariamente se alcanzan a soldar 8 juntas, y en cada una de ellas se observa el número de defectos existente. Con la información correspondiente a tres días de labor que se presenta en la tabla siguiente, se desea elaborar una carta de control para el número de defectos por junta soldada

Número de la junta soldada	Fecha	Número de defectos
1	Julio 18	2
2		4
3		7
4		3
5		1
6		4
7		8
8		9
9	Julio 19	5
10		3
11		7
12		11
13		6
14		4
15		9
16		9
17	Julio 20	6
18		4
19		3
20		9
21		7
22		4
23		7
24		12
SUMA................		144

<u>Solución</u>: Empleando los valores reportados en la tabla anterior, el valor de $\bar{c}$ resulta

$$\bar{c} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} c_i = \frac{1}{24}(144) = 6$$

Siendo $\bar{c} = 6$, los límites de control quedan como

$$6 \pm 3\sqrt{6} = 6 \pm 7.35$$

Finalmente, los parámetros de la carta c son

LC —— 6

LIC —— $6 - 7.35 = -1.35 \Rightarrow 0.00$

LSC —— $6 + 7.35 = 13.35$

Puesto que el número de defectos no puede ser negativo, se fija el valor del límite inferior de control igual a cero.

En la Fig 11 se presenta la carta de control c que corresponde al ejemplo.

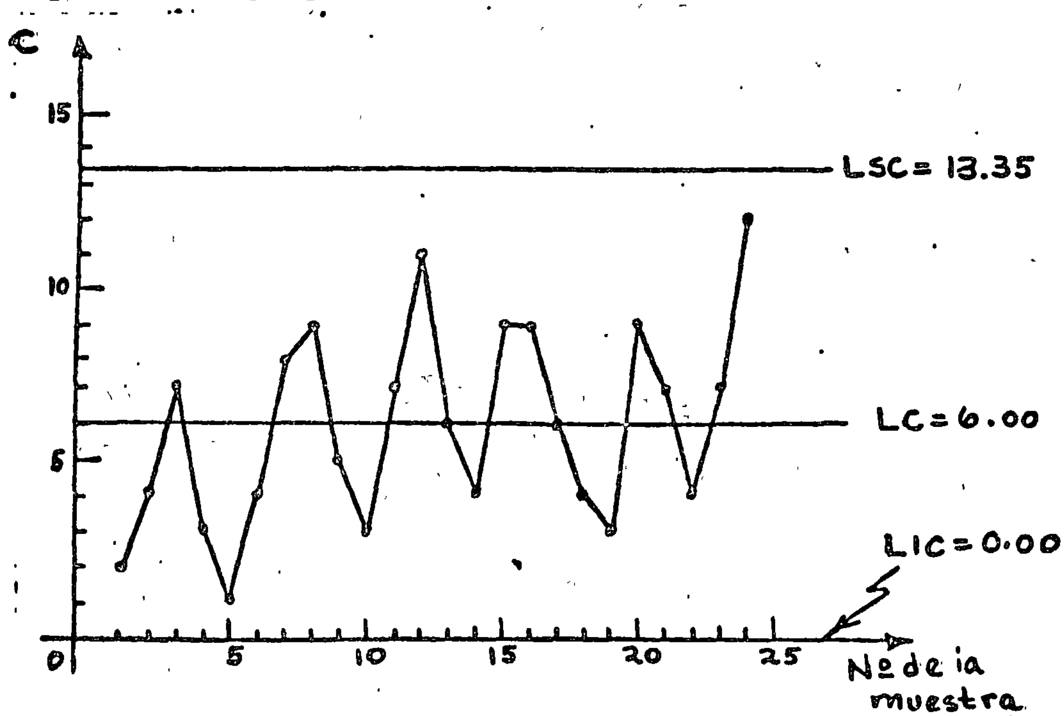


Fig 11 Carta de control c obtenida para el ejemplo de las juntas soldadas

B I B L I O G R A F I A

1. Hansen, B., "Quality Control: Theory and Applications", Prentice Hall, Inc. (1964)

2. Grant, E.L., "Statistical Quality Control", Mc Graw-Hill Book Co. (1971)

3. Ostle, B. "Estadística aplicada", Limusa-Wiley (1973)

4. Miller, I. y Freund, J., "Probability and Statistics - for Engineers", Prentice Hall, Inc. (1965)

Comentarios al uso de la norma.

Usos: lotes de partes, componentes y productos terminados

La inspección puede realizarse en el lugar de la demanda o producción de los artículos. Además, en las distintas etapas de manufactura o al final del proceso tecnológico.

El AQL es la expresión para la calidad estándar.

Def. AQL es un valor nominal, expresado en porcentaje de defectuosos o defectos por cien unidades, especificado para un grupo dado de defectos o para defectos individuales.

Antes de definir el AQL es necesario determinar las características por inspeccionar.

Después, se especifican las distintas características asociadas a sus correspondientes puestos de inspección.

En cada puesto de inspección se agrupan las características de acuerdo con las siguientes clases:

- defectos críticos
- defectos mayores
- defectos menores
- otros.

Se especifican las expresiones de la no conformidad de un producto por su porcentaje defectuoso o por el porcentaje de defectos por cien unidades, para cada

Se especifican los diferentes AQL considerando:

- un análisis de costos por inspección vs. costo por rechazo
- requerimientos del diseño
- calidad promedio del productor
- demanda para el producto
- quejas de los consumidores
- otros factores.

Sin embargo, deben hacerse revisiones periódicas de los valores AQL para comprobar que son consistentes con las necesidades de calidad.

En las tablas, los valores de AQL presentados, valores preferidos, comienzan en 0.01 y crecen en proporción geométrica hasta 1000.

Si AQL ≤ 10, puede expresarse en porcentaje defectuoso o defectos por cien unidades

Si AQL > 10, se expresa únicamente en defectos por cien unidades.

La técnica del control de calidad demuestra que en lotes que contienen un porcentaje de defectos igual al NAC, existe al menos un 95 % de probabilidad de ser aceptados por los planes de muestreo.

Un ejemplo de valores de AQL para unidades en las que se exige muy buena calidad

defecto	AQL
críticos	0 %
mayores	1
menores	4

En la siguiente tabla se presentan los AQL preferidos para los distintos valores calculados de AQL

Calculados				Preferidos
0	a	0.012	—	0.01
0.013	a	0.018	—	0.015
0.019	a	0.028	—	0.025
0.029	a	0.044	—	0.04
0.046	a	0.069	—	0.065
0.070	a	0.109	—	0.1
0.11	"	0.164	—	0.15
0.165		0.279	—	0.25
0.280		0.439	—	0.4
0.44		0.699	—	0.65
0.7		1.09	—	1.0
1.1		1.64	—	1.5
1.65		2.79	—	2.5
2.8		4.39	—	4.0
4.4		6.69	—	6.5
7.0		10.9	—	10.0
11.0		16.4	—	15
16.5		27.9	—	25
28.0		43.9	—	40
44.0		69.9	—	65
70.0		109	—	100
110		164	—	150
165		279	—	250
280		439	—	400
400		699	—	650
700		1000	—	1000

El factor más importante del muestreo es el tamaño absoluto de la muestra.

El nivel de inspección es el término usado para indicar la cantidad relativa de la inspección por efectuar

Los diferentes niveles de inspección proporcionan aproximadamente la misma protección para el productor cuando éste entrega unidades de calidad aceptable, pero proporcionan diferentes protecciones al consumidor.

Considérese el nivel de inspección ordinaria II como punto de comparación:

Nivel de inspección	Cantidad relativa de inspección
I	$x/2$
II	x (usual)
III	$2x$

La calidad promedio del producto aceptado será mejor si los lotes por inspeccionar se forman sin mezclar productos de diferente calidad.

En la práctica esto se logra formando lotes racionales. Estos ~~consisten~~ constan de productos del mismo origen (por ejemplo, en los que se usó la misma materia prima, componentes, etc., de la misma línea de producción (en la que se utilizaron los mismos moldes, patrones, etc.), del mismo día, mes, etc.

Buscar la homogeneidad de los lotes debe ser la regla en la formación de los lotes.

Los lotes grandes exigen muestras grandes y la representación de la calidad es mejor y proporcionan un riesgo menor al consumidor.

Además, la posibilidad de rechazo de un lote grande obliga al productor a mandar lotes de buena calidad.

Para mejorar la inspección de grandes lotes, en los cuales no es posible lograr homogeneidad en los productos, puede procurarse la formación de sublotes que contengan productos de calidad y ~~[illegible]~~ tengan características similares.

Suponga que existen tres líneas de producción.

De la línea 1 salen el 50% de los artículos $\frac{n}{2}$
De " " 2 " " 25% ... ... $\frac{n}{4}$
De " " 3 " " 25% ... ... $\frac{n}{4}$

El tamaño de la muestra (n) debe ~~ser~~ asignarse proporcionalmente a las tres subpoblaciones.

Tipos de muestreo: simple, doble y múltiple

Para un tamaño de lote y un AQL se tienen aproximadamente los mismos riesgos pero existen diferencias en el método de selección de las muestras y en la interpretación de resultados.

Por ejemplo. AQL = 1.0 Inspección normal

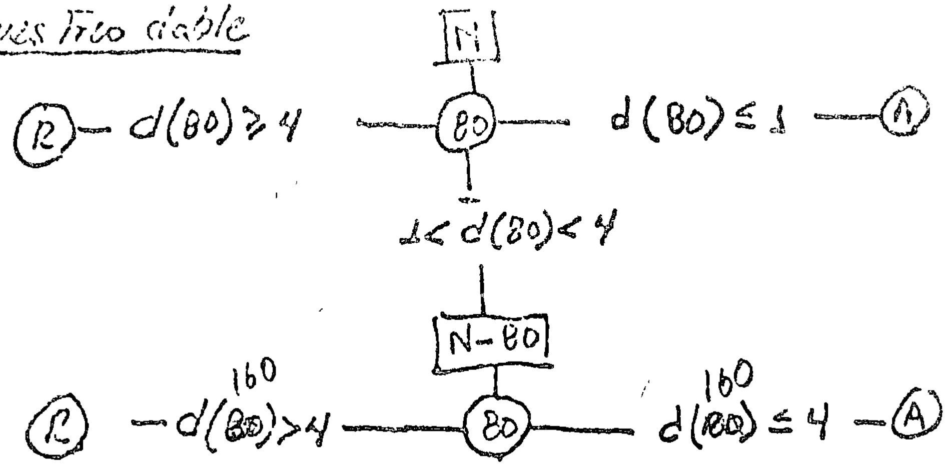
<u>Muestreo simple</u>

Letra código K

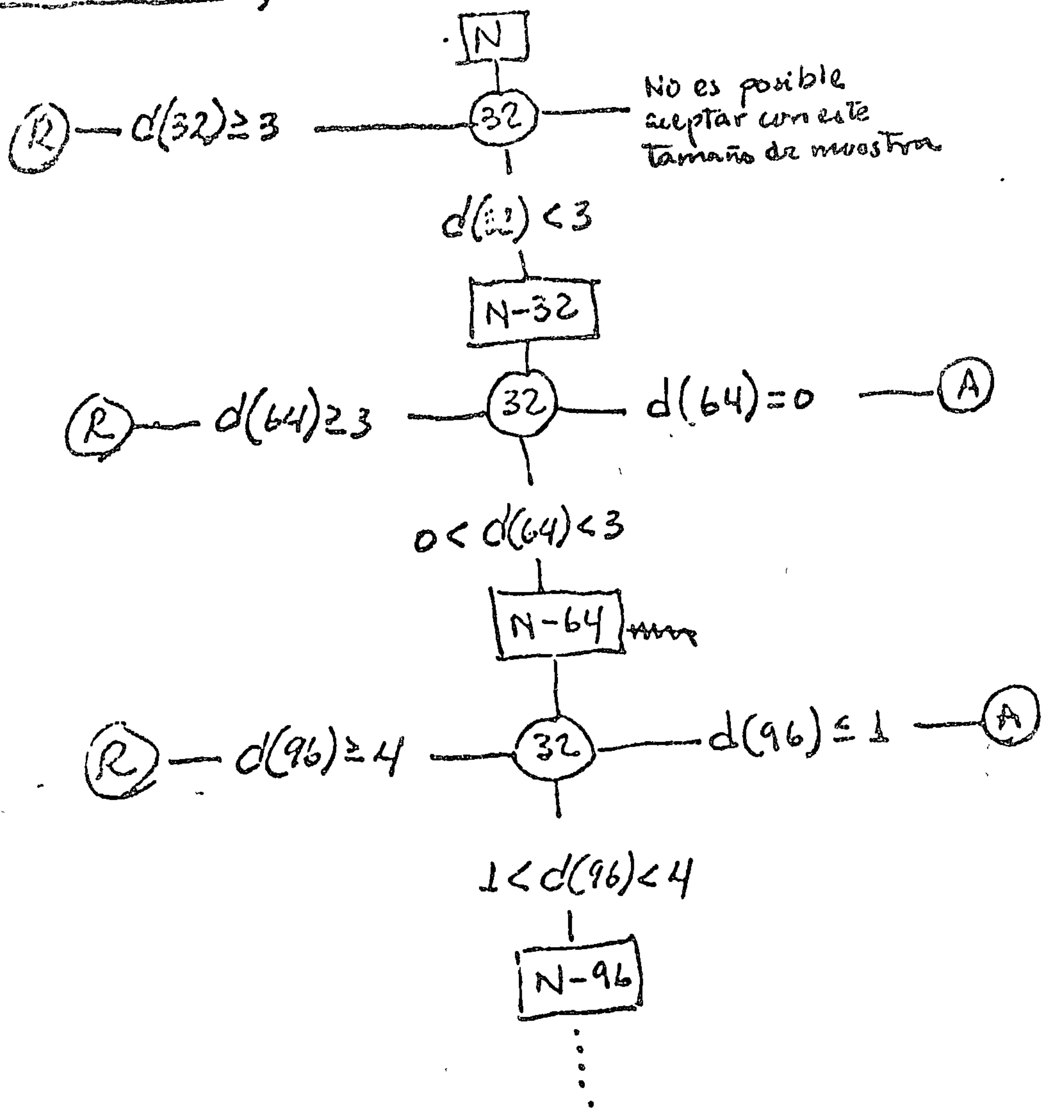
$\boxed{\text{N I}}$

$\boxed{R}$ — $d(125) > 3$ — (125) — $d(125) \leq 3$ — (A)

Muestreo doble



Muestreo múltiple



Se tiene que llegar a una conclusión (decisión) del proceso antes de tomar la octava muestra.

El muestreo múltiple es una versión truncada del muestreo secuencial. En este último es teóricamente posible inspeccionar todas las unidades antes de concluir el procedimiento. 33

La tabla X-K muestra las curvas características para lotes en que los planes de muestreo tienen una letra código K.

En la Tabla aparece una curva para cada AQL, ya que los riesgos son aproximadamente iguales para cada tipo de plan.

Sobre cada curva aparece el AQL que representa. Estas curvas suponen inspección normal.

La curva representa gráficamente los riesgos del productor y del consumidor en la aplicación de inspección normal para los planes con letra código K, para un AQL dado.

Ejemplo: puede esperarse que el 95% de los lotes que contengan el 1% de unidades defectuosas serán aceptados.

Con frecuencia se encontrará que, para valores pequeños o grandes de AQL se ordenará la selección de una letra código diferente y, por lo tanto, un plan de muestreo diferente.

Explicación de la tabla IX

Si el costo de inspección es grande, los ahorros en costos por inspección con muestreo doble o múltiple pueden excluir el uso de muestreo simple.

Sin embargo, para costos de inspección bajos, los ahorros por muestras más pequeñas pueden ser inferiores a lo que cuesta instalar el sistema administrativo para implantar muestreo doble o múltiple.

Los grados de inspección al iniciar un contrato pueden ser: normal, riguroso y reducido.

Lo usual es comenzar con inspección normal, sin embargo, se puede solicitar inspección

- rigurosa cuando
  - a. El vendedor haya tenido dificultades en contratos anteriores del mismo artículo, o artículos similares, para proporcionar el AQL pedido.
  - b. El vendedor no tenga experiencia anterior en la manufactura del artículo o artículos similares.
  - c. Experiencia anterior demuestra que aún con productores confiables es necesario usar inspección rigurosa, debido a las ~~diferencias~~ dificultades iniciales de fabricación del producto.
- reducida cuando
  - a. El vendedor haya cumplido recientemente el contrato siguiendo planes de inspección reducida
  - b. Ha estado produciendo el artículo satisfactoriamente durante algún tiempo.

Cuando se rechace un lote se deben reponer todas las unidades encontradas defectuosas, después de efectuar una inspección 100%.

Ejemplo:

Como resultado del análisis de los planos de diseño de un producto, se distinguieron 18 características que deban someterse a control de calidad.

Estas se clasificaron de acuerdo con el tipo de defectos a los que pudieran dar origen y según distintos puestos de inspección, de manera que cada operario en ellos no controlara 5 o más características. El resultado de lo anterior se muestra en la sig. tabla

o podría establecerse como defectos por inspección

Puesto	Características por comprobar	Clase de defectos	AQL indiv.	AQL clase	AQL pref.	instrumentos de inspección
1	1 2 3 4	sec.	6	24	25	
2	5 6	may.	1	2	2.5	
3	7 8	crítico	0	0	0	
4	9 10	may.	0.5	1	1	
5	11 12 13 14	men.	4	16	15	
6	15	crítico	0	0	0	
7	16	sec.	10	10	10	
8	17	may.	1	1	1	
9	18	may.	0.5	0.5	0.65	

Se acordó emplear un nivel de inspección II y formar lotes de 500 unidades e iniciar el proceso con inspección normal y planes de muestreo simple.

Como resultado de lo anterior se tienen los siguientes planes de muestreo, correspondientes a la letra código H:

Puesto 1

$\boxed{500}$ — (50)

(R) — $d(50) \geq 22$ — (50) — $d(50) \leq 21$ — (A)

Puesto 2

$\boxed{500}$ — (50)

(R) — $d(50) \geq 4$ — (50) — $d(50) \leq 3$ — (A)

Puesto 3

$\boxed{500}$ — (500) — reemplazar las unidades defectuosas

Puesto 4

$\boxed{500}$ — (50)

(R) — $d(50) \geq 2$ — (50) — $d(50) \leq 1$ — (A)

Puesto 5

$\boxed{500}$ — (50)

(R) — $d(50) \geq 15$ — (50) — $d(50) \leq 14$ — (A)

Puesto 6

$\boxed{500}$ — (500) — reemplazar las unidades defectuosas

Puesto 7

$\boxed{500}$ — (50)

(R) — $d(50) \geq 11$ — (50) — $d(50) \leq 10$ — (A)

Puesto 8

$\boxed{500}$ — (50)

(R) — $d(50) \geq 2$ — (50) — $d(50) \leq 1$ — (A)

Puesto 9 Letra código J

$\boxed{500}$ — (80)

(R) — $d(80) \geq 2$ — (80) — $d(80) \leq 1$ — (A)

Resultados de la inspección

tamaño del lote	nivel de inspección	tipo de inspecc.	número de unidades defectuosas 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Resultado	Consideraciones
500	II	N	32x	2	3x	1	16	0	19x	1	0	R	
500	II	N	20	1	0	1	11	0	10	1	0	A	
500	II	N	18	1	0	0	9	0	8	1	0	A	
500	II	N	19	0	0	1	10	1+	9	1	0	R	
500	II	N	15	1	0	0	3	1+	10	0	0	R	
500	II	RI	13	0	0	0	10	0	6	0	0	A	
500	II	RI	13	1	0	0	8	0	3	0	0	A	
500	II	RI	12	0	0	1	9	0	4	1	0	A	
500	II	RI	8	2	0	0	7	0	1	0	0	A	
500	II	RI	6	0	0	1	3	0	0	0	0	A	
500	II	N	7	0	0	0	6	0	5	0	0	A	
500	II	N	9	1	0	0	2	0	3	0	0	A	
500	II	N	8	1	0	1	8	0	6	1	0	A	
500	II	N	5	0	0	0	1	0	7	1	0	A	
500	II	N	6	1	0	1	3	0	1	1	0	A	
500	II	N	3	0	0	1	2	0	4	1	0	A	
500	II	N	9	1	0	0	2	0	4	0	0	A	
500	II	N	10	0	0	0	4	0	5	0	0	A	
500	II	N	8	0	0	1	5	0	2	1	0	A	
500	II	N	7	0	0	0	6	0	6	1	0	A	
500	II	RE	10	1	0	0	7	0	4	0	0	A	
500	II	RE	3	0	0	0	3	0	5	0	0	A	
[illegible]	[illegible]	RE	[illegible]	[illegible]	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

Niv. II para inspección rigurosa

Puesto 1

$R \text{ — } d(50) \geq 19 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{50} \text{ — } d(50) \leq 18 \text{ — } A$

Puesto 2

$R \text{ — } d(50) \geq 3 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{50} \text{ — } d(50) \leq 2 \text{ — } A$

Puesto 3

inspección 100 %

Puesto 4 Letra código J

$R \text{ — } d(80) \geq 2 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{80} \text{ — } d(80) \leq 1 \text{ — } A$

Puesto 5

$R \text{ — } d(50) \geq 13 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{50} \text{ — } d(50) \leq 12 \text{ — } A$

Puesto 6

inspección 100 %

Puesto 7

$R \text{ — } d(50) \geq 8 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{50} \text{ — } d(50) \leq 8 \text{ — } A$

Puesto 8. Letra código J

$R \text{ — } d(80) \geq 2 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{80} \text{ — } d(80) \leq 1 \text{ — } A$

Puesto 9 Letra código K

$R \text{ — } d(125) \geq 2 \text{ — } \overset{\boxed{500}}{125} \text{ — } d(125) \leq 1 \text{ — } A$

Plano para inspección reducida

Puesto 1

$\boxed{500}$

R — $d(20) \geq 13$ — 20 — $d(20) \leq 10$ — A

Puesto 2

$\boxed{500}$

R — $d(20) \geq 4$ — 20 — $d(20) \leq 1$ — A

Puesto 3 inspección 100%

Puesto 4

$\boxed{500}$

R — $d(20) \geq 2$ — 20 — $d(20) = 0$ — A

Puesto 5

$\boxed{500}$

R — $d(20) \geq 10$ — 20 — $d(20) \leq 7$ — A

Puesto 6 inspección 100%

Puesto 7

$\boxed{500}$

R — $d(20) \geq 8$ — 20 — $d(20) \leq 5$ — A

Puesto 8

$\boxed{500}$

R — $d(20) \geq 2$ — 20 — $d(20) = 0$ — A

Puesto 9 letra código J

$\boxed{500}$

R — $d(32) \geq 2$ — 32 — $d(32) = 0$ — A

TABLA I – LETRA CLAVE DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA.

TAMAÑO DEL LOTE			Niveles de inspección especiales				Niveles de inspección generales		
			S-1	S-2	S-3	S-4	I	II	III
2	a	8	A	A	A	A	A	A	B
9		15	A	A	A	A	A	B	C
16		25	A	A	B	B	B	C	D
26		50	A	B	B	C	C	D	E
[illegible]		[illegible]	B	B	C	C	C	E	F
91		150	B	B	C	D	D	F	G
151		280	B	C	D	E	E	G	H
281		500	B	C	D	E	F	H	J
[illegible]		1200	C	C	E	F	G	J	K
1201		3200	C	D	E	G	H	K	L
3201		10000	C	D	F	G	J	L	M
10001		35000	C	D	F	H	K	M	N
[illegible]		150000	D	E	G	J	L	N	P
[illegible]		500000	D	E	G	J	M	P	Q
		-delante	D	E	H	K	N	Q	R

TABLA IIA.—TABLA PATRON PARA INSPECCION NORMAL
(MUESTREO SIMPLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles aceptables de calidad (Inspección normal).																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	125	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1250	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2000	↑	↑	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

↓ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

↑ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

TABLA II-B — TABLA PATRON PARA INSPECCION RIGUROSA (MUESTREO SIMPLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles aceptables de calidad (Inspección rigurosa)																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	125	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1250	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2000	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
S	3150			1 2																							

↓ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

↑ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

47

TABLA II-C.—TABLA PATRON PARA INSPECCION REDUCIDA

(MUESTREO SIMPLE)

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles aceptables de calidad (Inspección reducida)†																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
B	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	2 4	3 5	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
C	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	14 17	21 24	↑
D	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	14 17	21 24	↑	↑
E	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	14 17	21 24	↑	↑	↑
F	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	50	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	80	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	125	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	200	↓	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	315	↓	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	500	0 1	↑	↓	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	800	↑	↑	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

⇩ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

⇧ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

† Si se ha sobrepasado el número de aceptación, sin alcanzar el de rechazo, aceptar el lote, pero restablecer la inspección normal (ver 3.7.4)

TABLA II-A. TABLA PATRON PARA INSPECCION NORMAL

TABLA III-A TABLA PATRON PARA INSPECCION NORMAL

(MUESTREO DOBLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección normal)																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	*	*	*	*	*	*	*	*	*
B	Prim	2	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	17 22	25 31
	Seg	2	4																	1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27	37 38	56 57
C	Prim	3	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	17 22	25 31	↑
	Seg	3	6																1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27	37 38	56 57	
D	Prim	5	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	17 22	25 31	↑	↑
	Seg	5	10															1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27	37 38	56 57		
E	Prim	8	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	17 22	25 31	↑	↑	↑
	Seg	8	16														1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27	37 38	56 57			
F	Prim	13	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	13	26													1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27						
G	Prim	20	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	20	40												1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27							
H	Prim	32	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	32	64											1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27								
J	Prim	50	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	50	100										1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27									
K	Prim	80	80	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	80	160									1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27										
L	Prim	125	125	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	125	250								1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27											
M	Prim	200	200	↓	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	200	400							1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27												
N	Prim	315	315	↓	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	315	630						1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27													
P	Prim	500	500	↓	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	500	1000					1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27														
Q	Prim	800	800	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	800	1600				1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27															
R	Prim	1250	1250	↑	↑	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	5 9	7 11	11 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	1250	2500			1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	12 13	18 19	26 27																

Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha

↓ = Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

↑ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

* = Utilizar el plan de muestreo simple correspondiente (o, si es posible, utilizar el plan de muestreo doble siguiente)

TABLA IIIB — TABLA PATRON PARA INSPECCION RIGUROSA (MUESTREO DOBLE)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección rigurosa)																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	*		*	*	*	*	*
B	Prim	2	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29
	Seg	2	4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53
C	Prim	3	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29	↑
	Seg	3	6	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53	↑
D	Prim	5	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29	↑	↑
	Seg	5	10	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53	↑	↑
E	Prim	8	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29	↑	↑	↑
	Seg	8	16	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53	↑	↑	↑
F	Prim	13	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	13	26	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	Prim	20	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	20	40	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	Prim	32	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	32	64	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	Prim	50	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	50	100	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	Prim	80	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	80	160	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	Prim	125	125	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	125	250	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	Prim	200	200	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	200	400	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	Prim	315	315	↓	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	315	630	↓	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	Prim	500	500	↓	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	500	1000	↓	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	Prim	800	800	↓	*	↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	800	1600	↓		↓	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	Prim	1250	1250	*	↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	1250	2500		↑	↓	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
S	Prim	2000	2000			0 2																							
	Seg	2000	4000			1 2																							

⇩ Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

⇧ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

* = Utilizar el plan de muestreo simple correspondiente [illegible]

TABLA III-C—TABLA PATRON PARA INSPECCION REDUCIDA

(MUESTREO DOBLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (inspección reducida) †																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↓	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
C				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	↑
D	Prim.	2	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	7 12	11 17	↑	↑
	Seg.	2	4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	18 22	26 30	↑	↑
E	Prim.	3	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	7 12	11 17	↑	↑	↑
	Seg.	3	6	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	18 22	26 30	↑	↑	↑
F	Prim.	5	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	5	10	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	Prim.	8	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	8	16	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	Prim.	13	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	13	26	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	Prim.	20	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	20	40	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	Prim.	32	32	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	32	64	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	Prim.	50	50	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	50	100	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	Prim.	80	80	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	80	160	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	Prim.	125	125	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	125	250	↓	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	Prim.	200	200	↓	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	200	400	↓	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	Prim.	315	315	•	↑	↓	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	315	630	•	↑	↓	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	Prim.	500	500	↑	↑	0 2	0 3	0 4	0 4	1 5	2 7	3 8	5 10	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg.	500	1000	↑	↑	0 2	0 4	1 5	3 6	4 7	6 9	8 12	12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

⇩ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.
⇧ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha.
Ac = Número de aceptación
Re = Número de rechazo.
• = Utilizar el plan de muestreo sencillo correspondiente, (o, si es posible, utilizar el plan de muestreo doble siguiente)
† = Si después de la segunda muestra se ha sobrepasado el número de aceptación, sin alcanzar el de rechazo, aceptar el lote, pero restablecer la inspección normal (ver [illegible]).

TABLA IV A TABLA PATRON PARA INSPECCION NORMAL

Niveles aceptables de calidad (Inspección normal)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño acumulado	0.65 Ac Re	1.0 Ac Re	1.5 Ac Re	2.5 Ac Re	4.0 Ac Re	6.5 Ac Re	10 Ac Re	15 Ac Re	25 Ac Re	40 Ac Re	65 Ac Re	100 Ac Re	150 Ac Re	250 Ac Re	400 Ac Re	650 Ac Re	1000 Ac Re
A B C																				
D	Prim	[illegible]	[illegible]						• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 5	1 7	2 9	6 12	6 6		
	Seg	[illegible]	[illegible]						• 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14	11 19	[illegible]		
	Terc	[illegible]	[illegible]						0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19	19 27	29 39		
	Cuar	[illegible]	[illegible]						0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25	27 34	40 49		
	Quin	[illegible]	[illegible]						1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29	36 40	51 58		
	Sext	[illegible]	12						1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33	45 47	65 68		
	Sept	[illegible]	14						2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38	51 54	77 78		
E	Prim	[illegible]	[illegible]					• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 5	1 7	2 9	4 12	6 11			
	Seg	[illegible]	6					• 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14	11 19	17 27			
	Terc	[illegible]	[illegible]					0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19	19 27	29 39			
	Cuar	[illegible]	12					0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25	27 34	40 49			
	Quin	[illegible]	15					1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29	36 40	51 58			
	Sext	[illegible]	[illegible]					1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33	45 47	65 68			
	Sept	[illegible]	18					2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38	51 54	77 78			
F	[illegible]	[illegible]	[illegible]				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]						
	Sext	[illegible]	[illegible]				1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33						
	Sept	[illegible]	[illegible]				2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38						
G	Prim	8	8			• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 5	1 7	2 9							
	Seg	8	16			• 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14							
	Terc	8	[illegible]			0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19							
	Cuar	8	[illegible]			0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25							
	Quin	8	[illegible]			1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29							
	Sext	[illegible]	[illegible]			1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33							
	Sept	[illegible]	[illegible]			2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38							
H	Prim	13	[illegible]		• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 5	1 7	2 9								
	Seg	[illegible]	[illegible]		• 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14								
	Terc	13	[illegible]		0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19								
	Cuar	[illegible]	[illegible]		0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25								
	Quin	[illegible]	[illegible]		1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29								
	Sext	13	[illegible]		1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33								
	Sept	13	[illegible]		2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38								
J	Prim	20	[illegible]	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 5	1 7	2 9									
	Seg	[illegible]	[illegible]	• 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14									
	Terc	[illegible]	[illegible]	0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19									
	Cuar	[illegible]	[illegible]	0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25									
	Quin	[illegible]	[illegible]	1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29									
	Sext	[illegible]	[illegible]	1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33									
	Sept	20	140	2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38									

= Usar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

= Usar el primer plan de muestreo que haya arriba de la flecha.

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

* = Usar el plan de muestreo simple correspondiente (o como alternativa, utilizar el plan de muestreo múltiple siguiente)

++ = Utilizar el plan de muestreo doble correspondiente (o como alternativa, utilizar el plan de muestreo múltiple siguiente)

\# = Para este tamaño de la muestra no hay números de aceptación

TABLA IV-A.—TABLA PATRON PARA INSPECCION NORMAL (MUESTREO MULTIPLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (inspección normal)																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
K	Prim	32	32	↓	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	32	64									# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14										
	Terc	32	96									0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19										
	Cuar	32	128									0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25										
	Quin	32	160									1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29										
	Sext	32	192									1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33										
	Sépt	32	224									2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38										
L	Prim	50	50	↓	↓	↓	↓	*	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	50	100								# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14											
	Terc	50	150								0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19											
	Cuar	50	200								0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25											
	Quin	50	250								1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29											
	Sext	50	300								1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33											
	Sépt	50	350								2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38											
M	Prim	80	80	↓	↓	↓	*	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	80	160							# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14												
	Terc	80	240							0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19												
	Cuar	80	320							0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25												
	Quin	80	400							1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29												
	Sext	80	480							1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33												
	Sépt	80	560							2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38												
N	Prim	125	125	↓	↓	*	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	125	250						# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14													
	Terc	125	375						0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19													
	Cuar	125	500						0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25													
	Quin	125	625						1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29													
	Sext	125	750						1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33													
	Sépt	125	875						2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38													
P	Prim	200	200	↓	*	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	200	400					# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14														
	Terc	200	600					0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19														
	Cuar	200	800					0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25														
	Quin	200	1000					1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29														
	Sext	200	1200					1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33														
	Sépt	200	1400					2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38														
Q	Prim	315	315	*	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	315	630				# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14															
	Terc	315	945				0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19															
	Cuar	315	1260				0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25															
	Quin	315	1575				1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29															
	Sext	315	1890				1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33															
	Sépt	315	2205				2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38															
R	Prim	500	500	↑	↑	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	500	1000			# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14																
	Terc	500	1500			0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19																
	Cuar	500	2000			0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25																
	Quin	500	2500			1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29																
	Sext	500	3000			1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33																
	Sépt	500	3500			2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38																

⇩ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

⇧ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

* = Utilizar el plan de muestreo simple correspondiente (o, si es posible, utilizar el plan de muestreo doble siguiente).

\# = Para este tamaño de la muestra no existe número de aceptación.

TABLA IV-B TABLA PATRON PARA INSPECCION RIGUROSA (MUESTREO MULTIPLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección rigurosa)																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
[illegible]				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓ *	⇩ *	↓	↓ —	⇩ — —	* — —	* — —	* — —	* — —	* — —	* — —	* — —	* — ↑
[illegible]	Prim	[illegible]	[illegible]	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	* 2	* 2	* 3	* 4	0 4	0 6	1 8	3 10	5 15	↑	↑
	Seg	[illegible]	[illegible]																* 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	10 17	16 25		
	Terc	[illegible]	[illegible]																0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	17 24	26 36		
	Cuar	[illegible]	[illegible]																0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	24 31	37 46		
	Quin	[illegible]	[illegible]																1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	32 37	49 55		
	Sext	[illegible]	[illegible]																1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	40 43	61 64		
	Sept	[illegible]	[illegible]																2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	48 49	72 73		
[illegible]	Prim	[illegible]	[illegible]	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	* 2	* 2	* 3	* 4	0 4	0 6	1 8	3 10	5 15	↑	↑	↑
	Seg	[illegible]	[illegible]															* 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	10 17	16 25			
	Terc	[illegible]	[illegible]															0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	17 24	26 36			
	Cuar	[illegible]	[illegible]															0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	24 31	37 46			
	Quin	[illegible]	[illegible]															1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	32 37	49 55			
	Sext	[illegible]	[illegible]															1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	40 43	61 64			
	Sept	[illegible]	[illegible]															2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	48 49	72 73			
F	Prim	[illegible]	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	* 2	* 2	* 3	* 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	[illegible]	10														* 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12						
	Terc	[illegible]	15														0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17						
	Cuar	[illegible]	20														0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22						
	Quin	[illegible]	25														1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25						
	Sext	[illegible]	30														1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29						
	Sept	[illegible]	35														2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33						
G	Prim	[illegible]	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	* 2	* 2	* 3	* 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	[illegible]	16													* 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12							
	Terc	[illegible]	24													0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17							
	Cuar	[illegible]	32													0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22							
	Quin	[illegible]	40													1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25							
	Sext	[illegible]	48													1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29							
	Sept	[illegible]	56													2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33							
H	Prim	13	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	* 2	* 2	* 3	* 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	13	[illegible]												* 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12								
	Terc	13	[illegible]												0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17								
	Cuar	13	[illegible]												0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22								
	Quin	13	65												1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25								
	Sext	13	78												1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29								
	Sept	13	91												2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33								
J	Prim	20	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	*	↓	↓	* 2	* 2	* 3	* 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	20	40											* 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12									
	Terc	20	60											0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17									
	Cuar	20	80											0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22									
	Quin	20	100											1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25									
	Sext	20	120											1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29									
	Sept	20	140											2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33									

8

↓ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha.

⇩ = Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

↑ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

* = Utilizar el plan de muestreo simple correspondiente, (o si es posible, utilizar el plan de muestreo múltiple siguiente)

— = Utilizar el plan de muestreo [illegible] correspondiente (o, si es posible, utilizar el plan de muestreo múltiple siguiente)

57

TABLA IV-C.--TABLA PATRON PARA INSPECCION REDUCIDA (MUESTREO MULTIPLE)

Letra código de tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección reducida) †																			
				0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A				↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
B				↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
C				↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
D				↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
E				↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
F	Prim	2	2	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		•	
	Seg	2	4																				
	Terc	2	6																				
	Cuar	2	8																				
	Quin	2	10																				
	Sext	2	12																				
	Sept	2	14																				
G	Prim	3	3	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		•		↑	
	Seg	3	6																				
	Terc	3	9																				
	Cuar	3	12																				
	Quin	3	15																				
	Sext	3	18																				
	Sept	3	21																				
H	Prim	5	5	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		•		↑		↓	
	Seg	5	10																				
	Terc	5	15																				
	Cuar	5	20																				
	Quin	5	25																				
	Sext	5	30																				
	Sept	5	35																				
J	Prim	8	8	↓		↓		↓		↓		↓		↓		•		↑		↓		•	2
	Seg	8	16																			•	2
	Terc	8	24																			0	2
	Cuar	8	32																			0	3
	Quin	8	40																			0	3
	Sext	8	48																			0	3
	Sept	8	56																			1	3
K	Prim	13	13	↓		↓		↓		↓		↓		•		↑		↓		•	2	•	2
	Seg	13	26																	•	2	•	3
	Terc	13	39																	0	2	0	3
	Cuar	13	52																	0	3	0	4
	Quin	13	65																	0	3	0	4
	Sext	13	78																	0	3	1	5
	Sept	13	91																	1	3	1	5

Letra código de tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección reducida) †											
				1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A				↓		↓		↓		↓		•		↓	
B				↓		↓		↓		•		↑		↓	
C				↓		↓		•		↑		↓		•	
D				↓		•		↑		↓		–		–	
E				•		↑		↓		–		–		–	
F	Prim	2	2	↑		↓		•	2	•	2	•	3	•	3
	Seg	2	4					•	2	•	3	•	3	0	4
	Terc	2	6					0	2	0	3	0	4	0	5
	Cuar	2	8					0	3	0	4	0	5	1	6
	Quin	2	10					0	3	0	4	1	6	2	7
	Sext	2	12					0	3	1	5	1	6	3	7
	Sept	2	14					1	3	1	5	2	7	4	8
G	Prim	3	3	↓		•	2	•	2	•	3	•	3	•	4
	Seg	3	6			•	2	•	3	•	3	0	4	0	5
	Terc	3	9			0	2	0	3	0	4	0	5	1	6
	Cuar	3	12			0	3	0	4	0	5	1	6	2	7
	Quin	3	15			0	3	0	4	1	6	2	7	3	8
	Sext	3	18			0	3	1	5	1	6	3	7	4	9
	Sept	3	21			1	3	1	5	2	7	4	8	6	10
H	Prim	5	5	•	2	•	2	•	3	•	3	•	4	•	4
	Seg	5	10	•	2	•	3	•	3	0	4	0	5	1	6
	Terc	5	15	0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8
	Cuar	5	20	0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10
	Quin	5	25	0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11
	Sext	5	30	0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12
	Sept	5	35	1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14
J	Prim	8	8	•	2	•	3	•	3	•	4	•	4	0	5
	Seg	8	16	•	3	•	3	0	4	0	5	1	6	1	7
	Terc	8	24	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9
	Cuar	8	32	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12
	Quin	8	40	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13
	Sext	8	48	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15
	Sept	8	56	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17
K	Prim	13	13	•	3	•	3	•	4	•	4	0	5	0	6
	Seg	13	26	•	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9
	Terc	13	39	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12
	Cuar	13	52	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15
	Quin	13	65	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17
	Sext	13	78	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20
	Sept	13	91	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22

Letra código de tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección reducida) †																			
				15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A				↓		•		•		•		•		•		•		•		•		•	
B				•		•		•		•		•		•		•		•		•		•	
C				•		•		•		•		•		•		•		•		•		↑	
D				–		–		–		–		–		–		–		–		↑			
E				–		–		–		–		–		–		–		↑					
F	Prim	2	2	•	4	•	4	0	5	0	6	↑		↑		↑							
	Seg	2	4	0	5	1	6	1	7	3	9												
	Terc	2	6	1	6	2	8	3	9	6	12												
	Cuar	2	8	2	7	3	10	5	12	8	15												
	Quin	2	10	3	8	5	11	7	13	11	17												
	Sext	2	12	4	9	7	12	10	15	14	20												
	Sept	2	14	6	10	9	14	13	17	18	22												
G	Prim	3	3	•	4	0	5	0	6	↑													
	Seg	3	6	1	6	1	7	3	9														
	Terc	3	9	2	8	3	9	6	12														
	Cuar	3	12	3	10	5	12	8	15														
	Quin	3	15	5	11	7	13	11	17														
	Sext	3	18	7	12	10	15	14	20														
	Sept	3	21	9	14	13	17	18	22														
H	Prim	5	5	0	5	0	6	↑															
	Seg	5	10	1	7	3	9																
	Terc	5	15	3	9	6	12																
	Cuar	5	20	5	12	8	15																
	Quin	5	25	7	13	11	17																
	Sext	5	30	10	15	14	20																
	Sept	5	35	13	17	18	22																
J	Prim	8	8	0	6	↑																	
	Seg	8	16	3	9																		
	Terc	8	24	6	12																		
	Cuar	8	32	8	15																		
	Quin	8	40	11	17																		
	Sext	8	48	14	20																		
	Sept	8	56	18	22																		
K	Prim	13	13	↑																			
	Seg	13	26																				
	Terc	13	39																				
	Cuar	13	52																				
	Quin	13	65																				
	Sext	13	78																				
	Sept	13	91																				

Utilizar el primer plan de muestreo que haya debajo de la flecha

⇩ = Si el tamaño de la muestra iguala o excede al tamaño del lote, realizar una inspección 100 %.

⇧ = Utilizar el primer plan de muestreo que haya encima de la flecha

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

• = Utilizar el plan de muestreo simple correspondiente, (o si es posible utilizar el plan de muestreo doble siguiente)

• = Para este tamaño de la muestra no existe número de aceptación

† = Si después de la última muestra se ha sobrepasado el número de aceptación, sin alcanzar el de rechazo, aceptar el lote, pero restablecer la inspección normal (ver 3.7.4).

TABLA IV-B—TABLA PATRON PARA INSPECCION RIGUROSA (MUESTREO MULTIPLE)

Letra código del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles aceptables de calidad (Inspección rigurosa)																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
K	Prim	32	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↓	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	32	64	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	32	96	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	32	128	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	32	160	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	32	192	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	32	224	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	Prim	50	50	↓	↓	↓	↓	↓	•	↓	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	50	100	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	50	150	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	50	200	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	50	250	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	50	300	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	50	350	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	Prim	80	80	↓	↓	↓	↓	•	↓	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	80	160	↓	↓	↓	↓		↓	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	80	240	↓	↓	↓	↓		↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	80	320	↓	↓	↓	↓		↓	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	80	400	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	80	480	↓	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	80	560	↓	↓	↓	↓		↓	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	Prim	125	125	↓	↓	↓	•	↓	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	125	250	↓	↓	↓		↓	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	125	375	↓	↓	↓		↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	125	500	↓	↓	↓		↓	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	125	625	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	125	750	↓	↓	↓		↓	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	125	875	↓	↓	↓		↓	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	Prim	200	200	↓	↓	•	↓	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	200	400	↓	↓		↓	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	200	600	↓	↓		↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	200	800	↓	↓		↓	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	200	1000	↓	↓		↓	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	200	1200	↓	↓		↓	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	200	1400	↓	↓		↓	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	Prim	315	315	↓	•	↓	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	315	630	↓		↓	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	315	945	↓		↓	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	315	1260	↓		↓	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	315	1575	↓		↓	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	315	1890	↓		↓	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	315	2205	↓		↓	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	Prim	500	500	•	↑	↓	• 2	• 2	• 3	• 4	0 4	0 6	1 8	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Seg	500	1000		↑	↓	• 2	0 3	0 3	1 5	2 7	3 9	6 12	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Terc	500	1500		↑	↓	0 2	0 3	1 4	2 6	4 9	7 12	11 17	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Cuar	500	2000		↑	↓	0 3	1 4	2 5	3 7	6 11	10 15	16 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Quin	500	2500		↑	↓	1 3	2 4	3 6	5 8	9 12	14 17	22 25	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sext	500	3000		↑	↓	1 3	3 5	4 6	7 9	12 14	18 20	27 29	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Sept	500	3500		↑	↓	2 3	4 5	6 7	9 10	14 15	21 22	32 33	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
S	Prim	800	800			• 2																							
	Seg	800	1600			• 2																							
	Terc	800	2400			0 2																							
	Cuar	800	3200			0 3																							
	Quin	800	4000			1 3																							
	Sext	800	4800			1 3																							
	Sept	800	5600			2 3																							

La teoría de confiabilidad trata con la determinación de la probabilidad de que un sistema, posiblemente formado por muchos componentes, funcione.

Veremos los aspectos probabilísticos de la teoría de confiabilidad, así como las nuevas clases de distribuciones de vida de sistemas que resultan de los modelos de confiabilidad. Se considerará cierta dependencia en los componentes de un sistema. El texto trata únicamente el caso de independencia.

Consideremos la relación estructural entre un sistema y sus componentes; o sea, una relación que es determinística.

Después consideraremos los aspectos básicos de la confiabilidad de los sistemas, los que son por naturaleza probabilísticos.

Consideremos un sistema en un momento fijo del tiempo (digamos el presente)

Se supone que el estado presente del sistema depende únicamente de los estados presentes de los componentes.

Se usarán los términos sistema o estructura en forma intercambiable.

SISTEMA DE COMPONENTES.

Los estados $\begin{cases} \text{funcionamiento} \\ \text{falla.} \end{cases}$

Esta dicotomía se aplica tanto al sistema como a cada componente. Para indicar el estado del i-ésimo componente usaremos una variable binaria x_i del componente i.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente } i \text{ funciona} \\ 0 & \text{" " " falló} \end{cases}$$

para $i=1,2,\dots,n$, donde n es el número de componentes del sistema.

De igual manera la variable binaria Φ indica el estado del sistema

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema está funcionando} \\ 0 & \text{si el sistema está en estado de falla.} \end{cases}$$

Notación: variable binaria → variable que toma dos valores 0 y 1.
función binaria → función " " " " "

Como el estado del sistema está determinado completamente por los estados de los componentes podemos escribir

$$\Phi = \Phi(X) \quad \text{donde } X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ vector de estado}$$

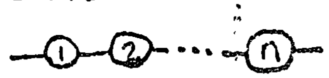
La función $\Phi(X)$ se le llama función de estructura del sistema.

Ya que el conocimiento de la función de estructura es equivalente al conocimiento de la estructura, usaremos "estructura Φ" en lugar de estructura que tiene una función de la estructura Φ.

El número de componentes, n, en el sistema se llama el orden del sistema.

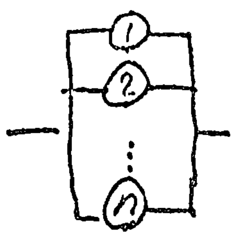
IC-4

Estructura en serie.


funciona si y solo si cada componente funciona.

La función de estructura es $\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, \dots, x_n)$

Estructura en paralelo


funciona si al menos uno de los componentes funciona

La función de estructura es $\Phi(X) = \coprod_{i=1}^{n} x_i = \max(x_1, \dots, x_n)$

Notación $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$

$$x_1 \amalg x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

Note que $\coprod$ y $\amalg$ juegan la misma relación que Σ y $+$.

$\amalg$ y $+$ operan en pares, mientras que $\coprod$ y Σ operan sobre conjuntos de índices.

Estructura k de n. Funciona si al menos k de los n componentes funciona.

La función de la estructura es

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

$$\Phi(X) = (x_1 \cdots x_k) \amalg (x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1}) \amalg \cdots \amalg (x_{n-k+1} \cdots x_n)$$

$$= \text{máx}\left[(x_1 \cdots x_k), (x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1}), \ldots, (x_{n-k+1} \cdots x_n)\right]$$

para $1 \leq k \leq n$, donde cada selección de k de n aparece una sola vez.

Note que una estructura en serie es una estructura n de n y una estructura en paralelo es una estructura 1 de n.

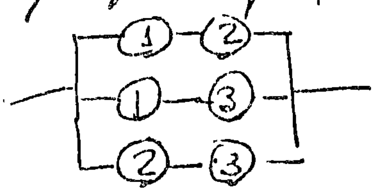
Por ej. Una estructura 2 de 3 tiene como función de estructura

$$\Phi(X) = x_1 x_2 \amalg x_1 x_3 \amalg x_2 x_3$$

$$= 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3 + (1-x_1) x_2 x_3 + x_1 (1-x_2) x_3 + x_1 x_2 (1-x_3)$$

Ej. de esto es un avión que puede funcionar con 2 de las 3 turbinas.

Estructura 2 de 3



Estructura de 4 componentes. El sistema funciona si y sólo si los componentes 1 y 2 funcionan y al menos uno de los comp. 3 y 4

Su función de estructura es $\Phi(X) = x_1 x_2 \max(x_3, x_4) = x_1 x_2 \left[1 - (1-x_3)(1-x_4)\right]$

$$= x_1 x_2 (x_3 + x_4 - x_3 x_4)$$

Cada componente de un sistema físico sirve de alguna forma a desarrollar una función útil. IC-.

Def. El i-ésimo componente es irrelevante a la estructura Φ si Φ es constante en x_i; o sea $\Phi(1_i, X) = \Phi(0_i, X)$ para toda $(\cdot_i, X)$

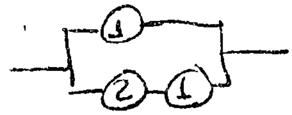
De otra forma el i-ésimo componente es relevante a la estructura.

Notación $(1_i, X) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$(0_i, X) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$(\cdot_i, X) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Ej. de componente irrelevante (el 2)



La descomposición pivotal de la función de estructura será una herramienta fundamental para pruebas inductivas.

Lema. La siguiente identidad se cumple para cualquier función de estructura Φ de orden n. IC-

$$\Phi(X) = x_i \Phi(1_i, X) + (1 - x_i)\Phi(0_i, X) \quad \forall X \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Note que este lema nos permite expresar una función de estructura de orden n en términos de funciones de estructura de orden $n-1$.

Al lema, reiteradamente, se obtiene

$$\Phi(X) = \sum_{y} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1 - y_j} \Phi(y)$$

$\forall$ vectores binarios y de orden n y $0^0 = 1$

Ejemplo. $\Phi(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$= x_1 (1 - x_1)^0 x_2 (1 - x_2)^0 \cdot 1 + x_1 (1 - x_1)^0 x_2^0 (1 - x_2) \cdot 0$$

$$x_1^0 (1 - x_1) x_2 (1 - x_2)^0 0 + x_1^0 (1 - x_1) x_2^0 (1 - x_2) \cdot 0 = x_1 x_2$$

Def. Dada una estructura Φ, definimos su dual Φ^D por

$$\Phi^D(X) = 1 - \Phi(1-X) \quad \text{donde } 1-X = (1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n)$$

Será de utilidad para analizar sistemas de componentes sujetos a dos clases de falla.

Ej. El dual de un sistema en serie de n componentes es un sistema en paralelo de n componentes.

Más general, el dual de un sistema k de n componentes es un sistema $(n-k+1)$ de n componentes.

ESTRUCTURAS COHERENTES.

Un sistema físico sería raro (o quizá mal diseñado) si al mejorar el comportamiento de un componente (reemplazar un componente fallado por uno funcionando) cause el deterioro del sistema (cambie del estado de funcionamiento al de fallo.

Nos limitaremos a funciones de estructura que son monotónicamente crecientes en cada argumento (creciente por no decreciente, decreciente por no creciente). Diremos que $f(x_1,\dots,x_n)$ es creciente si f es creciente en cada argumento.

Def. Un sistema de componentes es coherente si

a. su f. de e. es creciente

b. cada componente es relevante.

Note que una f. de e. creciente Φ en cada argumento tiene al menos un componente relevante si y sólo si $\Phi(0)=0$ y $\Phi(1)=1$

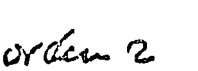
En la mayoría de las discusiones, el único aspecto pertinente del sistema C2-2 coherente es su estructura; en tales casos decimos "un sistema coherente Φ".

En algunos casos necesitamos considerar el conjunto C de componentes que forman el sistema coherente; en tales casos decimos el sist. coherente (C,Φ)

El conjunto C es un conjunto de enteros que designan a los componentes.

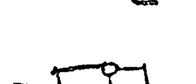
Estructuras coherentes

de orden 1



$\Phi(x)=x_1$

de orden 2

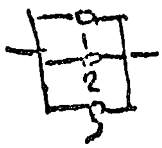


$\Phi(x)=x_1 x_2$

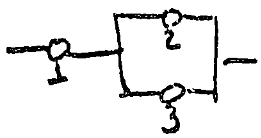
$\Phi(x)=x_1 \amalg x_2$

de orden 3

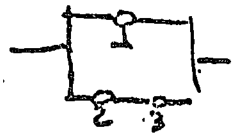
$\Phi(x) = x_1 x_2 x_3$



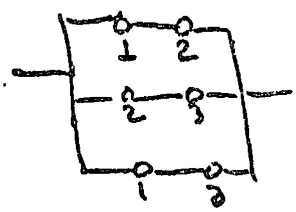
$\Phi(x) = x_1 \amalg x_2 \amalg x_3$



$\Phi(x) = x_1 (x_2 \amalg x_3)$



$\Phi(x) = x_1 \amalg (x_2 x_3) = x_1 \amalg x_2 x_3$



$\Phi(x) = x_1 x_2 \amalg x_2 x_3 \amalg x_1 x_3$

Teo. Sea Φ una estructura coherente de n componentes, entonces C2-4

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \Phi(x) \le \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

Prueba $\prod_{i=1}^{n} x_i \le \Phi(x)$

suponga $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ y $\Phi(x) = 1$

$\Phi(x) \le \coprod_{i=1}^{n} x_i$

suponga $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ pero $\Phi(x) = 0$

Este Teorema nos dice que el comportamiento de un sistema coherente está acotado por abajo por el comportamiento de un sistema en serie y por arriba por el comportamiento de un sistema en paralelo.

Notación $X \amalg Y = (x_1 \amalg y_1, x_2 \amalg y_2, \ldots, x_n \amalg y_n)$

$X \cdot Y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$

INSTITUTO DE INGENIERIA

BONIFICACION Y PENALIZACION EN CRITERIOS DE ACEPTACION DE CONCRETO

EMILIO ROSENBLUETH
LUIS ESTEVA
JULIO E. DAMY

OCTUBRE 1974 345

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Bonificación y penalización en criterios de aceptación de concreto

E Rosenblueth, L Esteva y J E Damy *

ABSTRACT

Criteria are laid down to decide on the price that should be paid per cubic yard of concrete, including bonuses or penalties, as a function of the strength supplied and of the specified strength, as well as when a concrete element should be strengthened or demolished and replaced. The criteria are such as to make the owner's utility independent of the strength of the concrete supplied by the contractor. Initial cost and present value of the consequences of failure are taken into account.
Three possibilities of structural failure are analyzed: on application of permanent loads, a Poisson process, and combinations of these two conditions. The first possibility idealizes behavior under gravity loads while the second corresponds to earthquake-and wind-like loading.
A cursory analysis is included of the effects of differences in stength between control cylinders and concrete cores.

RESUMEN

Se desarrolla un criterio para fijar el precio del metro cúbico de concreto en función de las resistencias suministrada y especificada, considerando a la vez la bonificación y penalización, así como las condiciones en que un elemento de concreto se debe reforzar o demoler y remplazar.
El criterio que se propone va encaminado a que la utilidad del propietario sea independiente de la resistencia del concreto que suministra el contratista, para lo cual se consideran el costo inicial y la esperanza del valor presente de las pérdidas por falla.
Se analizan tres posibilidades de falla estructural: bajo cargas permanentes, un proceso de Poisson, y la combinación de ambas. La primera idealiza el comportamiento ante cargas gravitacionales; la segunda corresponde a solicitaciones debidas a sismo o viento.
Se incluye un análisis aproximado de los efectos de diferencias en resistencia entre cilindros de control y corazones.

1. INTRODUCCION

Las tendencias modernas en diseño estructural tienden a la formulación de especificaciones de seguridad de acuerdo con criterios que permiten la asignación de confiabilidades congruentes a diferentes miembros y sistemas estructurales (refs 3, 7 y 8). Las confiabilidades de diseño deben obtenerse de los estudios costo-beneficio que toman en cuenta costos iniciales (que crecen con el nivel de seguridad), pérdidas esperadas debidas a fallas (que decrecen con el nivel de seguridad) y beneficios debidos al funcionamiento de la construcción (ref 8). Tales criterios costo-beneficio se han aplicado también a la determinación del tamaño óptimo de la muestra en la estimación de propiedades de materiales para el diseño de estructuras y cimentaciones (ref 6). Parece adecuado que los criterios de aceptación y rechazo y las medidas suplementarias para materiales de construcción se basen en análisis costo-beneficio, de las cuales se presenta en este trabajo una posible formulación.

* Instituto de Ingeniería, UNAM

Las especificaciones de construcción tradicionalmente requieren que los elementos de concreto reforzado se demuelan o refuercen adicionalmente cuando no satisfacen ciertas normas relativas a resistencia. Tal práctica suele causar pérdidas considerables tanto a propietarios como a contratistas. A fin de protegerlos, con frecuencia se prueban corazones de concreto cuando la resistencia de cilindros[1] de control es ligeramente deficiente, y la demolición se limita entonces a los casos en que la resistencia de corazones confirma tal deficiencia; antes de extraer corazones se permite curado adicional.

Aun esta práctica es objetable: si la resistencia es baja como para conducir a la destrucción y reconstrucción de los elementos de concreto, de nuevo el propietario y el constructor sufren pérdidas excesivas; si la resistencia excede de este límite pero es menor que la de diseño, ocurre una pérdida para el dueño, pues recibe una estructura de menor calidad que la descrita en el contrato; además, el contratista no se beneficia por suministrar concreto mejor que el requerido.
Para corregir parcialmente esta situación, en ocasiones se penaliza el precio del concreto cuando su resistencia no satisface una norma específica pero no es tan baja como para justificar demolición o refuerzo. Tal práctica ha sido adoptada por una firma consultora en México. Berissi describe una propuesta francesa ref 2 y Kühn presenta un criterio comparable para control de relleno aplicado en Sud-Africa (ref 9). Sin embargo, hay necesidad de una base racional para tales penalizaciones, así como un criterio que permita decidir cuándo demoler los elementos en cuestión y qué bonificación se pagará al contratista por resistencias mayores que la de diseño. El presente trabajo intenta establecer tales bases. Se refiere a la cantidad que el dueño debe pagar por metro cúbico de concreto y a las condiciones en que debe pedir la reposición o el refuerzo del elemento estructural. El criterio es que las decisiones no modifiquen la utilidad que el dueño hubiera recibido de haberse surtido el concreto de acuerdo con las especificaciones.
Aunque este trabajo está orientado a la resistencia del concreto, la mayor parte de sus conclusiones se aplican igualmente a otros materiales y a las características geométricas de elementos estructurales.

2. PLANTEAMIENTO GENERAL

La suma $C + D$ se tomará como la función de objetivo a minimizar en diseño, donde C es el costo inicial y D las consecuencias de daño o falla. Ambas cantidades son valores presentes esperados referidos a la unidad de volumen de concreto. La adopción de esta función de objetivo implica que los beneficios que se derivan de la existencia de la estructura, en tanto esta no falla, son independientes del parámetro de diseño que interesa. Tal hipótesis es razonable en aplicaciones prácticas cuando el parámetro es la resistencia del concreto.

Inicialmente, la resistencia de concreto colado en un elemento estructural se tratará como una cantidad determinística cuyo valor se deriva de pruebas de control. El Apéndice 1 discute las implicaciones de la incertidumbre con respecto a las resistencias *in situ*.
Sea x la resistencia del concreto en el elemento estructural en cuestión. C y D son funciones de x, como se muestra en la fig. 1. Admitiendo que la estructura está "bien diseñada", la resistencia de diseño, digamos x_0, es óptima, es decir, minimiza a $C + D$. Sean C_0 y D_0 los valores de C y D asociadas a x_0. Si x difiere de x_0, C diferirá de C_0: será el precio comercial de un concreto con resistencia x; D diferirá también de D_0. Se desea calcular el precio C' que el dueño debe pagar al contratista de tal manera que la suma $C_0 + D_0$ no se afecte por la diferencia entre x y x_0. (Por brevedad no se tratarán las relaciones entre el contratista y el proveedor del concreto.) De lo anterior se deduce que $C' + D$ debe ser igual a $C_0 + D_0$, y por tanto el dueño debe pagar una bonificación

$$C' - C_0 = D_0 - D \tag{1}$$

por unidad de volumen, en adición al precio contractual del concreto. Si $C' - C_0 < 0$, la diferencia es una penalización.
Se requiere calcular también el valor de x por debajo del cual se necesita refuerzo o reposición. Sea C_1 lo que cuesta al contratista el refuerzo o la demolición y reparación de la parte de la obra con resistencia deficiente y sea C_2 la pérdida que esta operación cuesta al dueño. Cuando se decide reforzar o demoler y remplazar el elemento, el dueño debe pagar al contratista $C_0 - C_2$ por unidad de volumen de concreto a fin de que su utilidad concuerde con las condiciones del contrato (excepto por posibles ajustes posteriores que se hagan si la obra de refuerzo o reposición no cumple con las hipótesis de diseño). Descontando el costo de esta nueva labor el contratista recibirá $C_0 - C_1 - C_2$ por metro cúbico. Por otro lado, si se deja el elemento tal como se coló, el contratista recibe C' por metro cúbico. Por tanto, se decidirá reforzar o reponer cuando

$$C' < C_0 - C_1 - C_2 \tag{2}$$

En la obtención de la ec 2 se supone que D_0 no se modifica por el desarrollo de los nuevos trabajos. Sin embargo, la información que haya conducido a efectuar los nuevos trabajos puede cambiar la situación. Por ejemplo, puede considerarse que la calidad de ejecución que puede esperarse del contratista hace la resistencia probable de los elementos reconstruidos menor que la especificada originalmente, en cuyo caso D excede a D_0. Las dificultades intrínsecas de la obra (calidad deficiente de materiales disponibles, condiciones difíciles de colado, etc) imprevistas en la etapa de diseño pueden tener efectos semejantes. Además, puede resultar impráctico tratar de reforzar de manera que se obtenga precisamente la capacidad estructural original de diseño; por tal razón la estructura reforzada casi seguramente poseerá una resistencia mucho mayor o mucho menor. Todas estas circunstancias deben considerarse explícitamente modificando C_1.

La decisión entre reforzar y remplazar el elemento estructural se hará comparando los valores correspondientes del segundo miembro de la ec 2.

En algunos casos el dueño puede decidir participar en la pérdida del contratista para lograr una solución que al menos en apariencia sea justa. No es raro que proceda como si C_2 fuera nula y que pague al contratista C_0 por metro cúbico cuando se necesita refuerzo y reposición. En tales casos la ec 2 se modifica como sigue:

$$C' < C_0 - C_1 \qquad (3)$$

Si además el costo de demoler y construir es aproximadamente igual al costo original, es aconsejable proceder de esta manera cuando

$$C' < 0 \qquad (4)$$

Bajo condiciones más generales C_2 debe estimarse calcularse explícitamente. En caso de demolición y reposición la pérdida del dueño obedece usualmente al retraso de la terminación de la obra. En general cabe suponer que los costos de la obra se deducen de una inversión a una tasa constante de interés y que el producto de esta tasa por el costo total de la obra es menor que los beneficios que se derivan de la existencia de la obra terminada. La pérdida en que incurre el dueño es igual a la diferencia entre el interés que la inversión proporciona y los beneficios esperados de la obra terminada. Si se especifica una multa por cada unidad de tiempo que se retrase la construcción y dicha multa se fija de tal manera de compensar esta pérdida, bastará con aplicar dicha cláusula y no será necesario calcular C_2 por separado.

Si se decide reforzar a fin de compensar la deficiencia en resistencia, C_2 puede incluir una reducción en rentabilidad o los costos de molestias debidas a los cambios arquitectónicos impuestos por el refuerzo adicional.

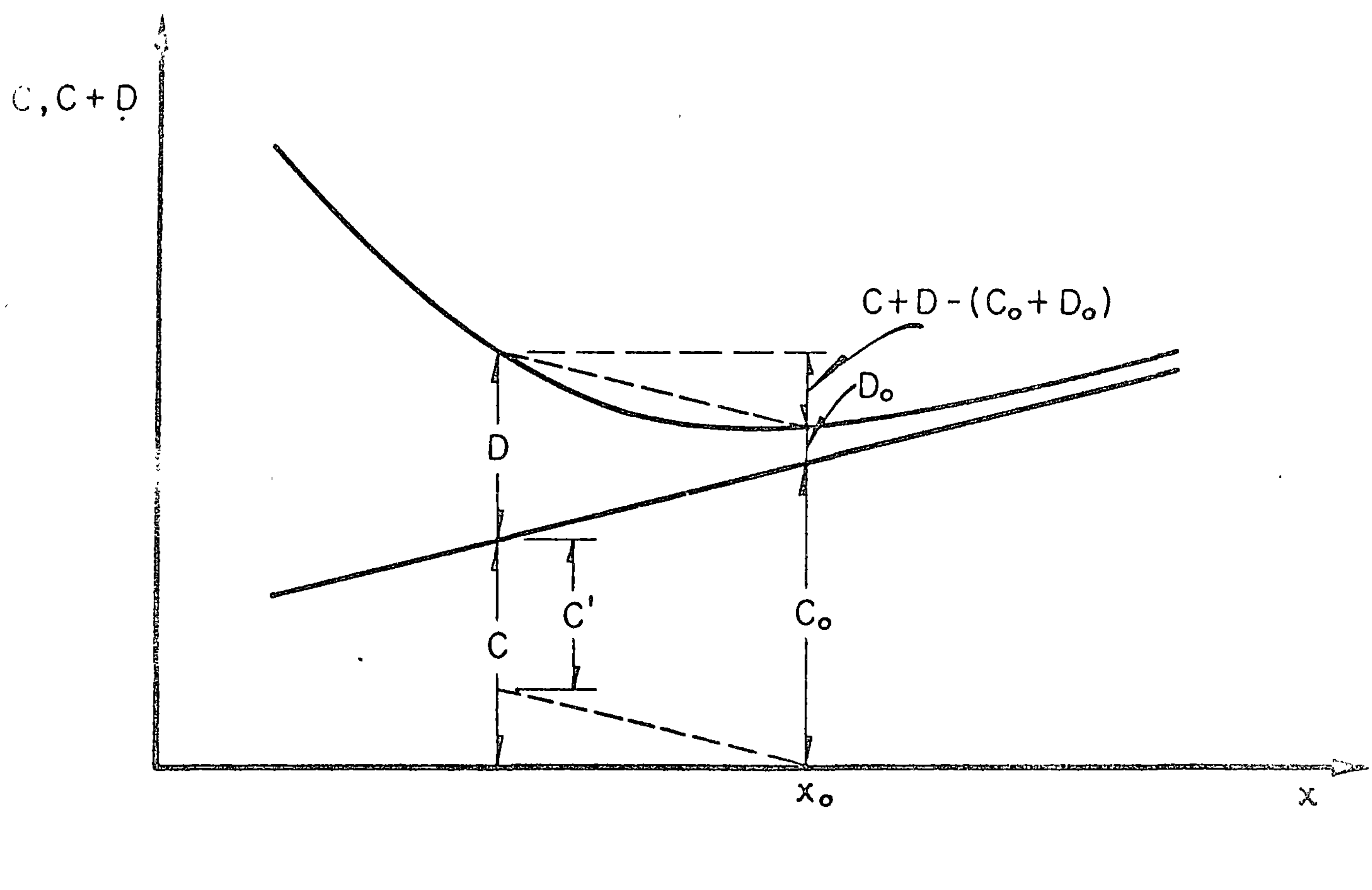


Fig 1

3. CON RESPECTO A D

La estructura puede sufrir varios modos de falla o daño (puede desarrollar grietas visibles o deflexiones excesivas, sufrir colapso parcial o total, etc). Sea $F_i(t)$ la probabilidad de que el i-ésimo de dichos modos ocurra antes del instante t y sea $f_i = dF_i/dt$. Se supondrá que el valor presente de una cantidad ganada o gastada en el instante t equivale a exp $(-\gamma t)$ por dicha cantidad, donde γ es una constante. (Esta hipótesis equivale a la del manejo del dinero a una tasa constante de interés continuo.) Así,

$$D = \sum_i \int_0^\infty f_i(t)\, D_i(t)\, e^{-\gamma t}\, dt \qquad (5)$$

en donde $D_i(t)$ es el costo esperado que corresponde al i-ésimo modo de daño o falla si dicho modo ocurre en el instante t, referido al metro cúbico de concreto.

Si la estructura pertenece a una nación las cantidades involucradas son suficientemente pequeñas de modo que puede suponerse relación lineal entre daño y utilidad. Lo mismo es generalmente cierto de las variaciones que puede sufrir el costo inicial del concreto en relación con C_0 aun cuando el dueño sea un individuo. En cambio, las pérdidas D_i debidas a colapso pueden ser tan grandes comparadas con las pertenencias y el ingreso del propietario que en la evaluación de estas cantidades sea necesario reconocer una relación no lineal con el dinero. Este problema no se tratará en el presente artículo.

Se supone inicialmente que una estructura que ha fallado no se reconstruye y que una que no ha sufrido daño no se repara. En consecuencia D_i debe incluir los beneficios que no se reciben a causa de falla o daños; en caso de colapso estos son todos los beneficios asociados a la existencia de la estructura, y en caso de daño, tal como la aparición de un defecto o agrietamiento objetables, la pérdida de beneficios puede incluir una reducción en rentabilidad y prestigio. En caso de colapso, el valor de recuperación de la construcción puede restarse de D_i.

A continuación se analiza la política según la cual una estructura que ha sufrido daño o colapso se repara o se reconstruye respectivamente.

Con frecuencia es satisfactorio suponer que las D_i son independientes del tiempo. Entonces la ec 5 se convierte en

$$D = \sum_i D_i P_i \qquad (6)$$

donde

$$P_i = \int_0^\infty f_i(t)\, e^{-\gamma t}\, dt \qquad (7)$$

La ec 6 es directamente aplicable en estructuras que pueden fallar bajo cargas accidentales distribuidas en el tiempo, así como a estructuras en que predominan los efectos de cargas permanentes y para las que, por consiguiente, la falla es poco probable salvo en el día de su inauguración. Para el primer tipo de estructuras las P_i están dadas por la ec 7. Para el segundo tipo P_i es la probabilidad de falla en el i-ésimo modo.

Si una estructura se repara o reconstruye sistemáticamente después de su daño o falla, la distribución de probabilidades de su resistencia cambia en general tras cada uno de tales eventos. Entre otras razones, esto se debe a que la información obtenida de las fallas mismas conduce con frecuencia a un rediseño. Aun así es pequeño el error que proviene de la hipótesis de que esta distribución no cambia.*

Si a esta hipótesis se añade la de independencia estocástica de los eventos que producen fallas sucesivas en un modo dado, se encuentra que la ec 6 debe sustituirse por

$$D = \sum_i \sum_{k=1}^{\infty} D_i P_i^k \qquad (8)$$

$$= \sum_i \frac{D_i P_i}{1 - P_i} \qquad (9)$$

Aquí D_i debe incluir las pérdidas debidas a los beneficios que no se reciben durante la reparación o reconstrucción.

La hipótesis de independencia estadística de los procesos de falla en un solo modo es razonable cuando la falla puede ocurrir únicamente al completarse la obra. Si no puede ignorarse la dependencia de las perturbaciones con respecto al tiempo, dicha hipótesis sigue siendo aplicable cuando las perturbaciones pueden suponerse representadas por un proceso de Poisson. Esta aproximación es admisible para la mayoría de los problemas de diseño que involucran falla por sismo y viento. Las D_i se reducen algo bajo la política de reconstrucción o reparación sistemática, ya que sólo se pierde una pequeña parte de los beneficios que se derivan de la existencia de la estructura. Si las consecuencias directas de la falla o del daño exceden por mucho a los beneficios que habrían sido producidos por la estructura, las P_i óptimas son mucho menores que la unidad, así que los resultados obtenidos según las dos políticas citadas difieren poco entre sí. Tal no es el caso usual para daños menores, para los que las P_i pueden ser relativamente grandes.

* En la realidad se supone que los fallos sucesivos en un modo dado constituyen un proceso de renovación; esto es, que los tiempos de espera entre dichos eventos son variables aleatorias independientes, todas con igual distribución de probabilidades.

4. CON RESPECTO A x

La variable x se definió como la resistencia del concreto después de colado. En realidad la resistencia en compresión varía dentro de cada elemento estructural. Además, es función del tiempo y su valor depende de la procedencia del material, es decir, de que se trate de cilindros de control o muestras de material colado. Si no se prueban cilindros ni se efectúan pruebas no destructivas, la bonificación y penalización del precio del concreto debe depender solo de los resultados de pruebas en cilindros de control y de lo que se especifica en relación con ellas. El Apéndice I contiene un análisis de la situación que se presenta cuando se efectúan pruebas en concreto colado y de la influencia que en este problema tienen la distribución de probabilidades de los resultados de pruebas de cilindros y la redacción de las especificaciones.

El presente tratamiento se basa en la hipótesis de que las únicas consecuencias de resistencia excesiva o deficiente del concreto son, respectivamente, una disminución o un aumento en las probabilidades de falla. La hipótesis es adecuada para muchos elementos estructurales de una amplia gama de estructuras bajo gran diversidad de condiciones de carga. Sin embargo, hay casos en que el incremento de la resistencia en parte de una estructura es indeseable y eleva el valor de D como resultado del correspondiente incremento de módulo de elasticidad y la consecuente aparición de excentricidad ante carga lateral y otros fenómenos semejantes. Este trabajo no cubre tales casos.

5. ESTRUCTURAS QUE PUEDEN FALLAR SOLO A SU TERMINACION

Si x_0 es óptima, $C + D$ no puede ser menor que $C_0 + D_0$. Es decir

$$C - C_0 \geq D_0 - D \tag{10}$$

De acuerdo con las ecs 1 y 10, $C' \leqslant C$. En otras palabras, el precio bonificado o penalizado del concreto que tiene la resistencia suministrada no debe exceder a su valor comercial. En ocasiones no se cumple esta condición porque la resistencia de diseño no es estrictamente óptima.

Considérese inicialmente que la resistencia de diseño es en efecto óptima. Cornell (ref 3) ha demostrado que una amplia clase de funciones de distribución de probabilidades puede aproximarse en el rango de x muy grande mediante funciones de la forma α exp $(-\beta x)$ (véase por ejemplo la fig 2 *). Aquí α y β son parámetros y x es la variable aleatoria en cuestión. Admitiendo que las P_i en la ec 6 pueden aproximarse, en el rango de probabilidades de falla pequeñas, mediante funciones de este tipo, cada una con diferente α pero todas con la misma β, la ec 6 se torna

$$D = Ae^{-\beta x} \tag{11}$$

donde $A = \Sigma\, \alpha_i D_i$ no varía con x. Esta expresión es congruente con la política en que las fallas o daños no son seguidos por reconstrucción o reparación.

De las ecs 1 y 11 se deduce

$$C' - C_0 = D_0\,(1 - e^{-\beta(x - x_0)}) \tag{12}$$

donde el factor que multiplica a D_0 es $1 - D/D_0$. Puede demostrarse que, para toda x, $C - C_0$ debe exceder al segundo miembro de la ec 12 si x_0 es óptima. Esto es cierto ya sea que C se idealice como función continua de x o que se reconozca que x es variable discreta y C una función escalonada. Sin embargo, no siempre puede satisfacerse tal relación para una x_0 dada: a menudo la resistencia de diseño no es estrictamente óptima. Las consecuencias suelen ser poco importantes para fines de diseño, puesto que la utilidad global es casi constante en un amplio rango de resistencias (véase la fig 1). El presente tratamiento puede adoptarse cuando x_0 no es óptima usando funciones $C(x)$ ligeramente modificadas para las que x_0 sea realmente óptima. (Este no es necesariamente el caso cuando la suboptimización obedece a un diseño inadecuado o proviene de un requisito de uniformidad o simplicidad.)

Supóngase ahora que $C(x)$ se aproxima mediante una función que en $x = x_0$ es continua y tiene primera derivada y sea

$$a = \left.\frac{dC}{dx}\right|_{x = x_0} \tag{13}$$

De la condición de optimalidad se sigue que

$$\left.\frac{d(C + D)}{dx}\right|_{x = x_0} = 0 \tag{14}$$

Sustituyendo las ecs 11 y 13 en la 14 se obtiene

$$a - \beta D_0 = 0 \tag{15}$$

de donde

$$D_0 = a/\beta \tag{16}$$

Sustituyendo la ec 16 en la 12 se encuentra

$$C' - C_0 = (a/\beta)\,(1 - e^{-\beta(x - x_0)}) \tag{17}$$

que puede escribirse como

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{a}{B}\,(1 - e^{B\frac{x_0 - x}{x_0}}) \tag{18}$$

donde $B = \beta x_0$.

* La probabilidad de falla en la fig 2 se muestra, como función de n, el factor central de seguridad en vez de la resistencia x. Puesto que ambas variables están relacionadas linealmente, el valor de β que debe usarse en la ec 11 se obtiene fácilmente, como se describe en el Apéndice 1.

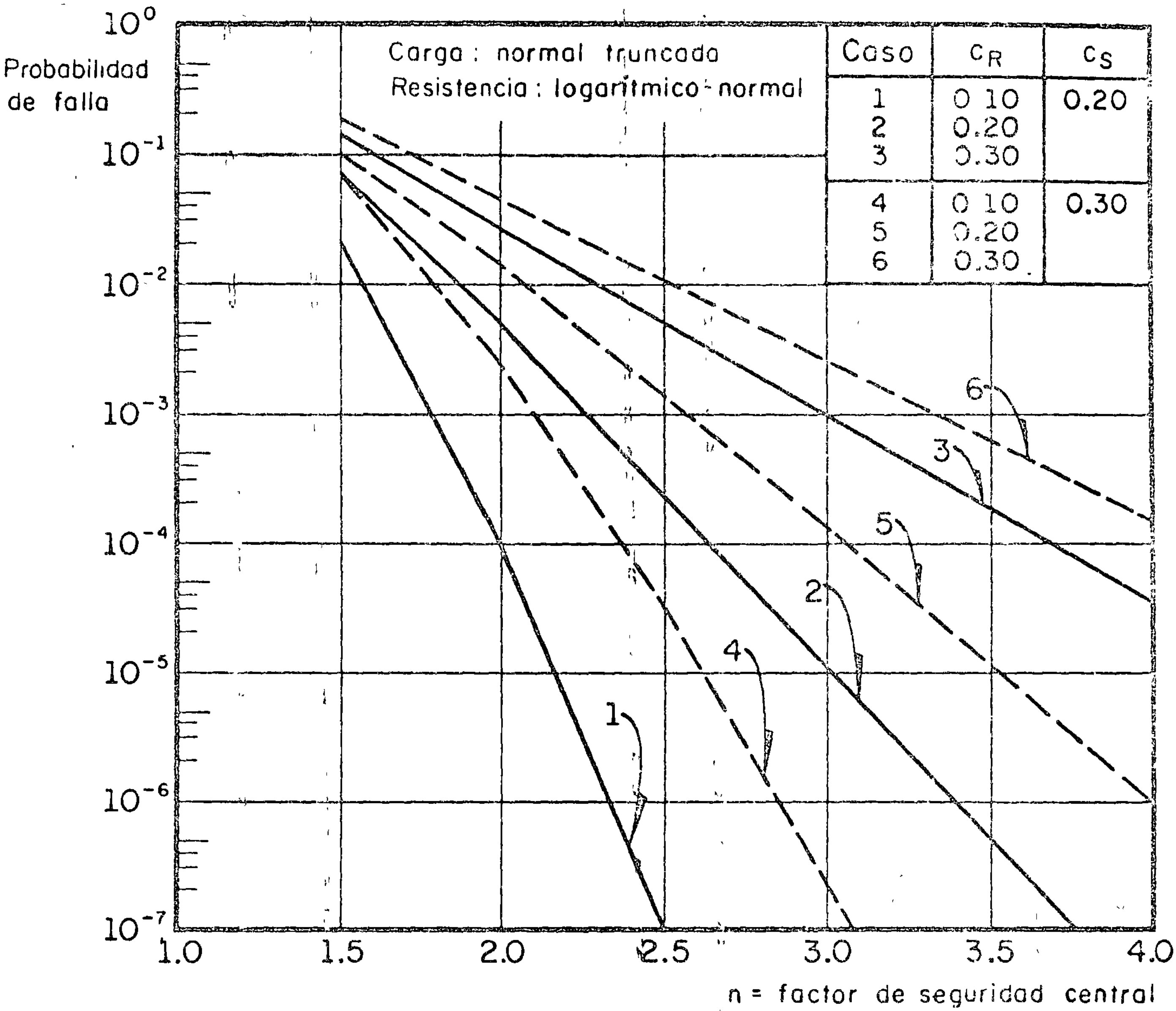


Fig 2

La fig 3 muestra curvas de la bonificación y penalización en función de x_0 para varios valores representativos de los parámetros a y B.
Como ejemplo supóngase $a = 0.2$ \$/m³ (kg/cm²), $B = 10$, $x_0 = 200$ kg/cm². Si la resistencia del concreto resulta 15 por ciento menor que el valor de diseño, la ec 18 y la fig 3 dan $(C' - C_0)/x_0$ igual a -0.07 \$/(kg/cm²); es decir, el metro cúbico de concreto debe penalizarse en $0.07 \times 200 = \$14.0$.

Estos resultados reflejan el criterio de que la utilidad del dueño no debe cambiar como consecuencia de las diferencias entre la resistencia suministrada y la de diseño cuando dicha utilidad se toma como función únicamente del costo inicial y del comportamiento estructural. Entre los factores que pueden conducir a una política diferente se cuentan los siguientes:

— El deseo de simplificar la contabilidad. Como consecuencia puede decidirse no bonificar o penalizar cuando tales acciones pueden involucrar cambios menores que, digamos, \$5.00 por metro cúbico. Para el ejemplo analizado, $(C' - C_0)/x_0$ es igual a $-5/200 = -0.025$ \$/m³ (kg/cm²). De acuerdo con la fig 3, $(x - x_0)x_0$ es -0.07. De lo anterior, esta decisión implicará pagar C_0 por metro cúbico de concreto con resistencia no menor que $(1 - 0.07)$ $200 = 186$ (kg/cm²). Pueden incluso sustituirse las curvas de la fig 3 por líneas escalonadas que simplifiquen los calculos. La conveniencia de esta decisión puede analizarse cuantitativamente si se evalúan los ahorros originados por la simplificación de la contabilidad.

— El deseo del arquitecto de impresionar favorablemente al propietario. No es probable que el dueño acepte voluntariamente un edificio con resistencias de concreto excepcionalmente bajas a pesar de la compensación económica que recibiría por una penalización del precio. En consecuencia, el arquitecto puede decidir que los elementos de concreto que tengan resistencia por debajo, digamos, de 70% del valor de diseño o aquellos que impliquen una penalización por encima de \$75.0 por metro cúbico deben reforzarse o demolerse y reponerse.

— El deseo de mantener relaciones amistosas con el contratista o bien de hacerle sentir la inflexibilidad del arquitecto. En ambos casos pueden modificarse las curvas de la fig 3. De cualquier manera, estas curvas proporcionan una guía racional para fijar el precio que ha de pagarse por el concreto.

Puede aplicarse el mismo criterio cuando la política es reconstruir o reparar sistemáticamente. Entonces debe emplearse la ec 9 en vez de la 6. La expresión que sustituye a la ec 18 es, sin embargo, algo más complicada.

El tratamiento no se limita a la hipótesis que condujo a la ec 18. Usando los mismos argumentos puede atacarse el problema sin necesidad de acudir a las funciones de probabilidad de falla supuestas. En cualquier caso la condición de que x_0 es óptima permite eliminar uno de los parámetros que relacionan D y x.

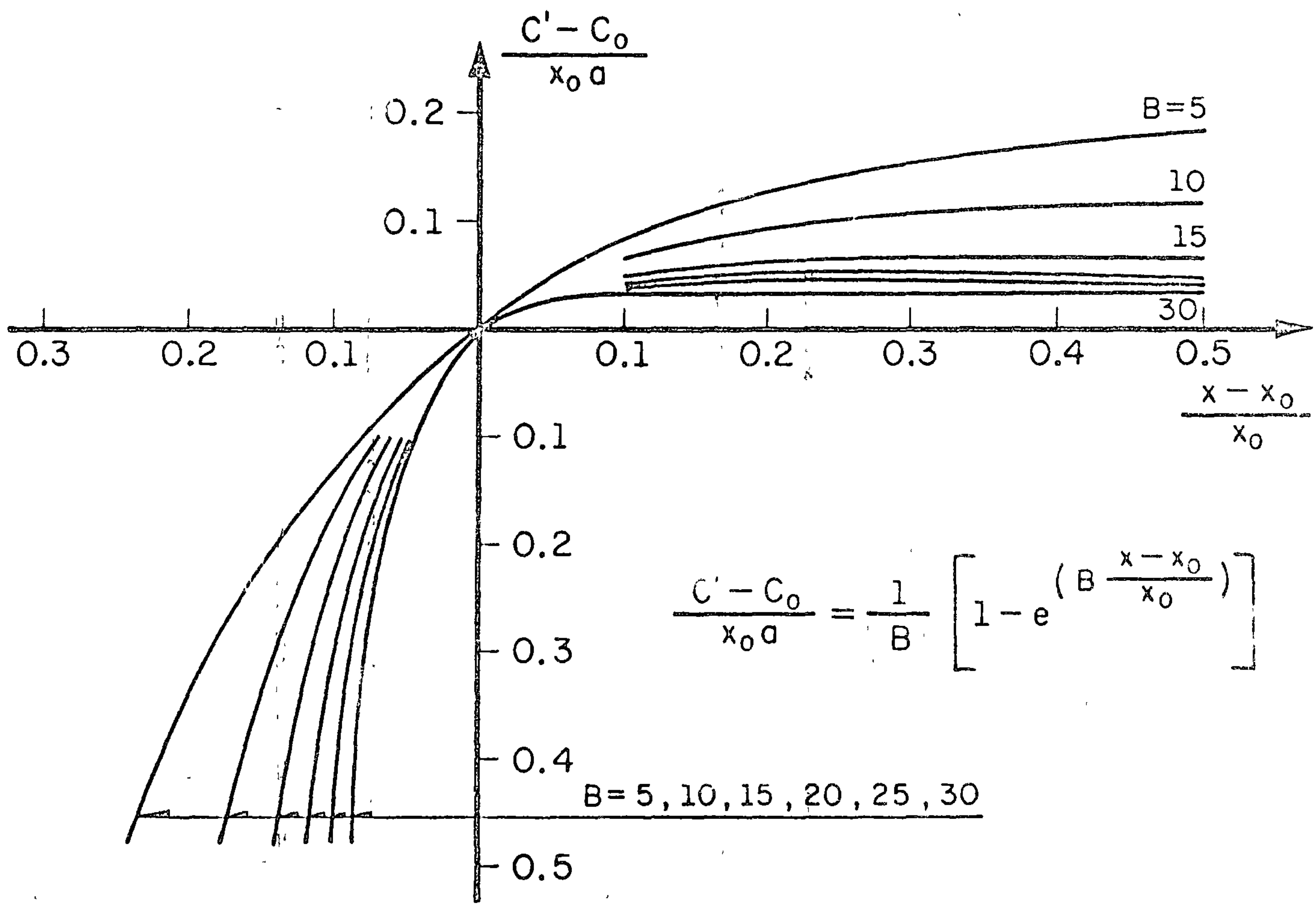


Fig 3

6 ESTRUCTURAS QUE PUEDEN FALLAR SOLO ANTE SISMO

Se supondrá que las perturbaciones que pueden dañar a la estructura o hacerla fallar constituyen un proceso generalizado de Poisson. Bajo esta condición las funciones f_i en la ec 7 tienen la forma $\lambda_i \exp(-\lambda_i t)$, donde λ_i es la tasa media de ocurrencia de daño o falla; es decir, λ_i^{-1} es el periodo de recurrencia de este fenómeno. Generalmente λ_i es función de x.

Se obtiene entonces de la ec 7 que

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \gamma} \tag{19}$$

Bajo la hipótesis de que solo hay un modo significativo de falla, o sea que $i = 1$, la ec 6 se convierte en

$$D = \frac{D_1 \lambda_1}{\lambda_1 + \gamma} \tag{20}$$

Se ha demostrado que, con precisión razonable en una amplia gama de propiedades estructurales e intensidades de temblores, λ_i puede tomarse proporcional a una potencia de la fuerza cortante basal que la estructura puede soportar sin sufrir daño o falla (ref 4). Esta fuerza es a su vez aproximadamente proporcional a x si está regida por falla de compresión, o a $x^{1/2}$ si por agrietamiento en tensión o tensión diagonal o por falla de adherencia y anclaje. Por otro lado, las deformaciones de una estructura moderadamente flexible que descansa en terreno firme varían casi inversamente con la raíz cuadrada del módulo de elasticidad del concreto. Para la mayor parte de los concretos ordinarios este módulo es aproximadamente proporcional a $x^{1/2}$. Así, las deformaciones estructurales varían toscamente como $x^{1/4}$. En terreno blando la existencia de periodos dominantes largos conduce a una dependencia más pronunciada de las deformaciones con respecto a x.
En las aplicaciones prácticas el agrietamiento por tensión diagonal es a menudo el factor dominante y puesto que está asociado con una cortante basal aproximadamente proporcional a $x^{1/2}$ y el exponente ½ es intermedio entre los que corresponden a otros tipos de fallas y daño, en muchos casos prácticos se puede proceder como si la capacidad estructural fuera proporcional a $x^{1/2}$.

Bajo esta hipótesis se encuentra que λ es proporcional a x^{-r}, donde r es un parámetro del orden de 1.2 a 1.4[4]. La ec 20 toma la forma

$$D = \frac{D_1}{1 + (x/x_0)^r \gamma/\lambda_0} \tag{21}$$

donde $\lambda_0 = \lambda_1(x_0)$ es la tasa de falla supuesta en diseño.

La condición de optimidad conduce de nuevo a ec 14. Sustituyendo las ecs 13 y 21 se obtiene

$$D = \frac{(1 + \gamma\lambda_0)^r a x_0}{r\gamma/\lambda_0} \tag{22}$$

Sustituyendo las ecs 21 y 22 en la 1,

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{(1 + \lambda_0/\gamma)a}{r}\left[1 - \frac{1 + \gamma/\lambda_0}{1 + (x/x_0)^r \gamma/\lambda_0}\right] \tag{23}$$

La fig 4 contiene curvas que dan la bonificación o penalización en función de la resistencia de diseño para varios valores de los parámetros a, r y λ_0/γ. Las curvas designadas $\lambda_0/\gamma = 0$ son aplicables en el caso en que la estructura se reconstruye o se repara sistemáticamente, cualquiera que sea λ_0/γ. En efecto, cuando se adopta esta política, la ec 9 remplaza a la 6, de modo que en vez de la ec 20 debe escribirse

$$D = \frac{1}{\gamma}\sum_i D_i \lambda_i \tag{24}$$

que es aplicable aun cuando se reconoce la posible ocurrencia de varios modos de falla. Si todas las λ_i pueden tomarse proporcionales a x^{-r}, la ec 24 puede escribirse

$$D = A'x^{-r} \tag{25}$$

donde A' no es función de r. Sustituyendo las ecs 13 y 25 en la 14 se obtiene

$$D_0 = ax_0/r \tag{26}$$

y a partir de la 25,

$$D/D_0 = (x_0/x)^r \tag{27}$$

Finalmente, sustituyendo las ecs 26 y 27 en la 1 se obtiene

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{a}{r}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^r\right] \tag{28}$$

Esta expresión coincide con la ec 23 cuando λ_0/γ es igual a 0.
Los resultados que se obtienen con valores finitos de λ_0/γ asociados con las dos políticas consideradas están de hecho más próximos entre sí que lo que podría deducirse de las curvas de la fig 4 dado que las D_i son menores para la segunda que para la primera política, y así deberá ser x_0 si no hay otros cambios en el diseño. En la práctica debe elegirse la política que conduzca al menor valor de $C_0 = D_0$.
Nuevamente tomemos como ejemplo $a = 0.2$ \$/m³ (kg/cm²) y $x_0 = 200$ kg/cm². Si la resistencia del concreto resulta 15 por ciento por debajo de la de diseño y $r = 1.3$, se encuentra que $(C' - C_0)/x_0$ es igual a -0.0347, es decir, una penalización de \$6.94 por metro cúbico si $\lambda_0/\gamma = 0.2$, y $(C' - C_0)/x_0$ igual a -0.0358 o una penalización de \$7.15 por metro cúbico si $\lambda_0/\gamma = 0$ o se sigue la segunda política.

Estos resultados son bastante menos severos que en el primer caso, al grado que intuitivamente parecen inaceptables. Sin embargo, debe tenerse en mente que se ha considerado imposible la falla bajo carga estática. La única consecuencia de una reducción en la resistencia es un incremento relativamente pequeño en las tasas de daño y falla por temblor.

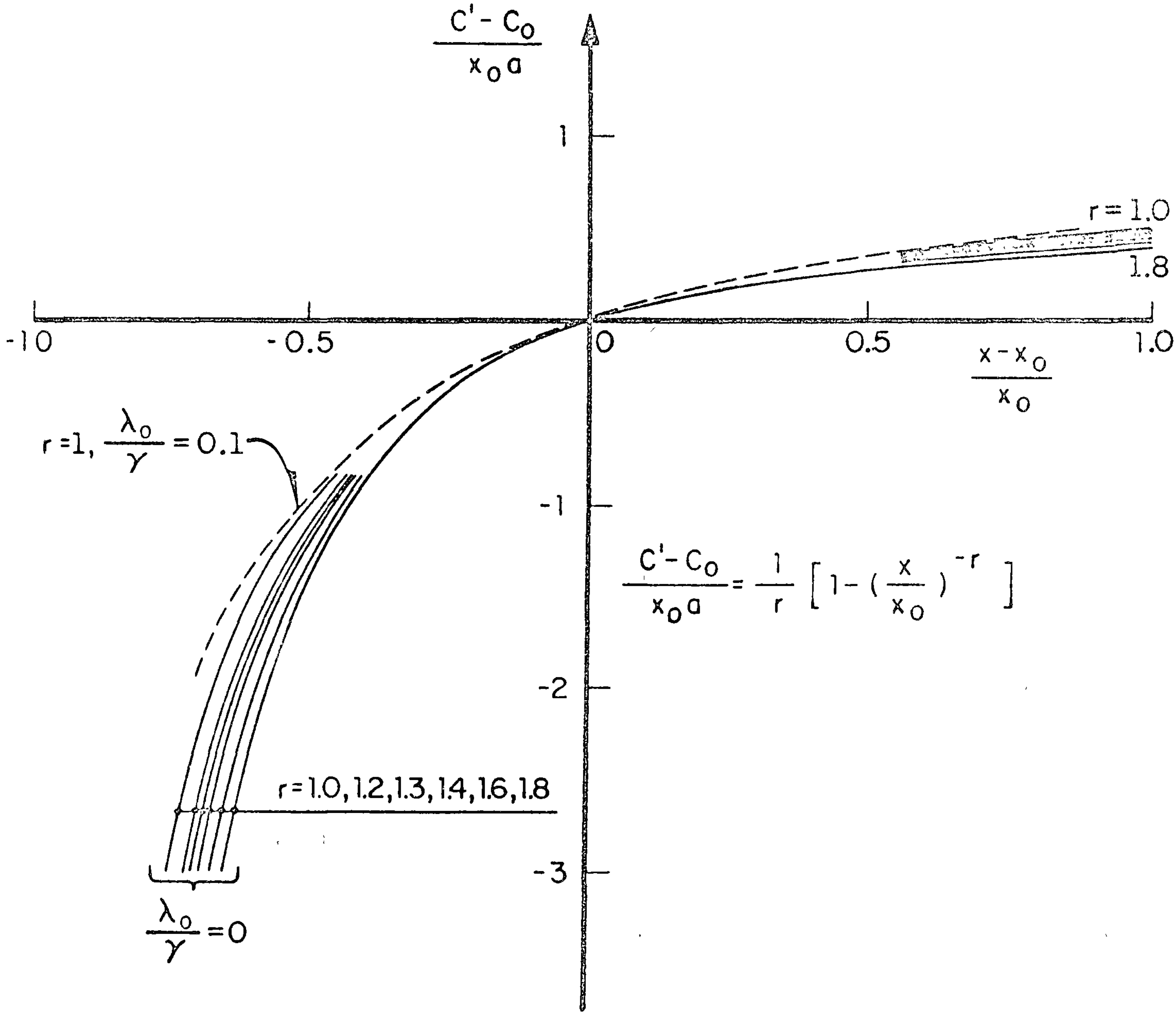


Fig 4

7. ESTRUCTURAS QUE PUEDEN FALLAR ANTE AMBOS TIPOS DE PERTURBACION

Consideremos ahora una estructura cuya falla puede tener lugar al terminarse la obra o ante sismos. Se harán las mismas simplificaciones que en el primer caso. Se supondrá que la estructura falla cuando una sección crítica alcanza su capacidad y que la sección crítica para cargas gravitacionales es la misma que para cargas sísmicas. Por simplicidad se supondrá que solo hay un modo significativo de daño o falla.

Sean x la resistencia (determinística) del concreto en la sección crítica, y S y Y, respectivamente, los esfuerzos (aleatorios) debidos a cargas permanentes o a temblor. La condición de falla es $S + Y \geq x$. Al terminarse la estructura, ésta falla ante carga permanente si $S \geq x$. Sea $f_S(.)$ la función de densidad de probabilidad de S. La probabilidad inicial de falla es

$$P = \int_x^{\infty} f_s(s)\,ds \qquad (29)$$

Se supondrá que la estructura no se reconstruye en caso de falla.

Para un valor dado de s, el valor presente de la pérdida esperada debida a temblor, dado que la estructura no falló al completarse, está dado por

$$D = \frac{D_1 \lambda_1(y)}{+ \lambda_1(y)} \qquad (30)$$

donde $y = x - s$. En consecuencia, el valor presente total de la pérdida esperada es

$$D = D_1 \int_x^{\infty} f_S(s)\,ds + D_1 \int_0^x \frac{\lambda_1(y) f_S(s)}{\gamma + \lambda_1(y)}\,ds \qquad (31)$$

Sea ahora

$$\lambda_1(y) = (y_0/y)^r \lambda_0 \qquad (32)$$

donde y_0 es $x_0 - s_0$, λ_0 es $\lambda_1(Y_0)$ y S_0 el valor de diseño de S. Usando las ecs 13, 14, 31 y 32, se obtiene

$$a = \frac{D_1 r \gamma/\lambda_0}{y_0^r} \int_0^x \frac{y^{r-1} f_S(s)}{[1 + (y/y_0)^r \gamma/\lambda_0]^2}\,ds \qquad (33)$$

de donde puede obtenerse D_1 como función de a, r, x_0, s_0 y γ/λ_0 para cualquier f_S. Sustituyendo D_1 en la ec 30 y usando la ec 1, se obtiene finalmente $(C' - C_0)/x_0$.

En la fig 5 se muestran resultados típicos para varias distribuciones de S y diversos valores de los parámetros.

Las condiciones extremas $\lambda_0 = 0$ y $f_S(a) = 0$ para $s > x$ corresponden respectivamente a los dos casos previamente estudiados, en que la falla puede ocurrir solo a la terminación de la obra o únicamente según un proceso de Poisson.

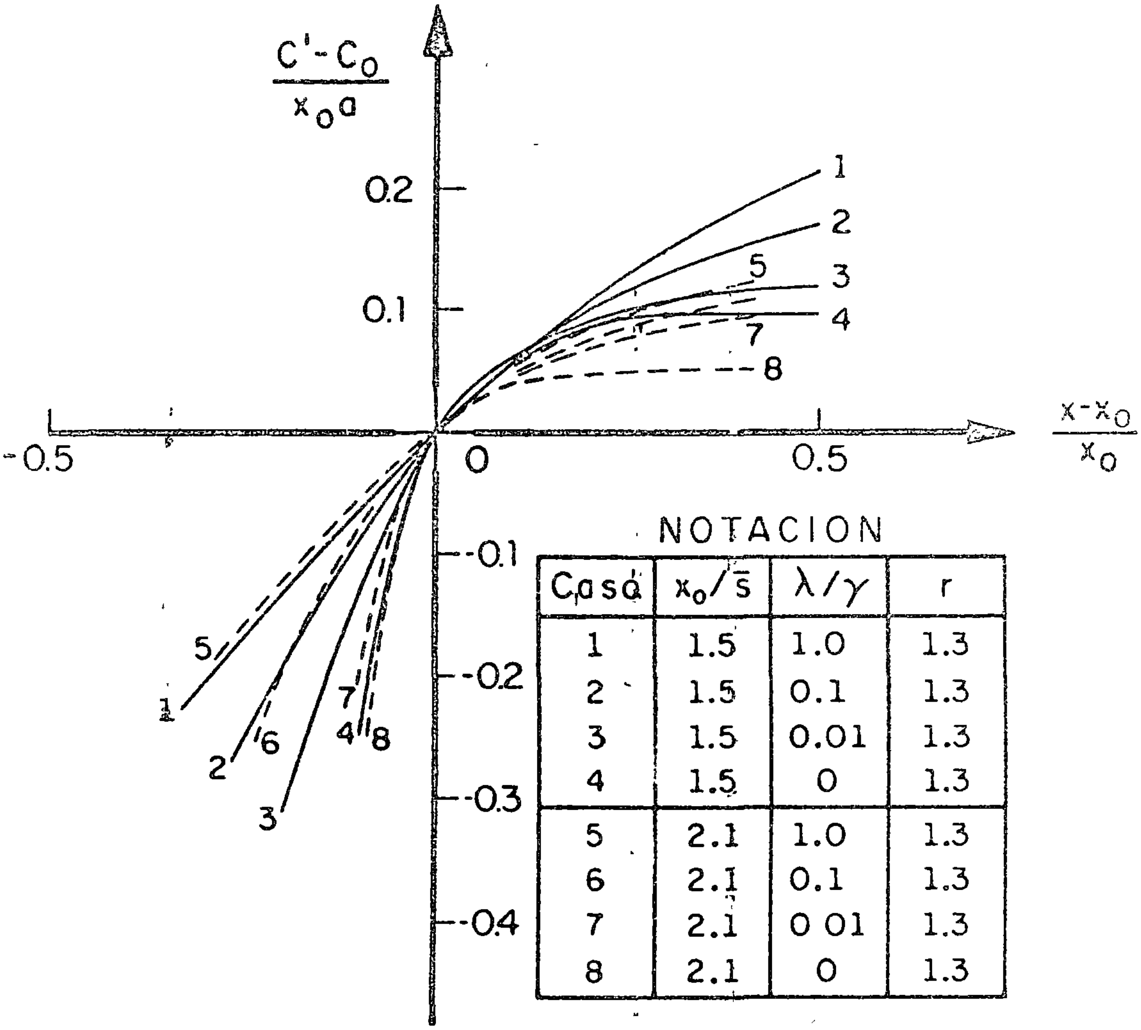
8. CONCLUSIONES

Se han formulado bases racionales para establecer bonificaciones y penalizaciones al precio del concreto. Estas formulaciones se basan en la premisa de que la resistencia de diseño es óptima de acuerdo con el criterio de que la utilidad para el dueño debe ser máxima y no deben afectarla cambios en la resistencia del concreto suministrado.

La hipótesis de optimidad implica una cierta esperanza de pérdida por falla. A veces las relaciones entre resistencia de diseño y pérdida por falla no satisfacen esta condición. Tal situación puede en general atacarse usando una relación ligeramente modificada entre resistencia y costo inicial, relación que convierte la resistencia de diseño en estrictamente óptima.

La bonificación o penalización que debe aplicarse al concreto que no satisface exactamente las especificaciones depende de las causas de falla que controlan al diseño. Así, en los ejemplos analizados se obtuvieron penalizaciones mucho menores para estructuras que pueden fallar solo bajo la acción de sismo que para aquellas que pueden fallar en el día de su inauguración.

Este trabajo se refiere a los casos en que la resistencia del concreto se toma igual a la dada directamente por los resultados de pruebas de cilindros de control. En el Apéndice I se ve que la utilidad esperada es función no solo de la resistencia media o de la nominal sino también del coeficiente de variación. Puesto que este último no se especifica en la práctica usual, se introduce una hipótesis adicional, que consiste en tomar el coeficiente de variación de la resistencia igual al de los resultados de pruebas de cilindros de control a la vez que se mantiene la hipótesis de que la resistencia de diseño es óptima.



Caso	$x_0/\bar{s}$	λ/γ	r
1	1.5	1.0	1.3
2	1.5	0.1	1.3
3	1.5	0.01	1.3
4	1.5	0	1.3
5	2.1	1.0	1.3
6	2.1	0.1	1.3
7	2.1	0 01	1.3
8	2.1	0	1.3

Fig 5

9. RECONOCIMIENTO

Los autores expresan su gratitud a J L Trigos y D Gutiérrez, quienes colaboraron en la solución de las expresiones numéricas y en la preparación del material gráfico.

APENDICE 1. LA RESISTENCIA COMO VARIABLE ALEATORIA

El tratamiento que sigue se limita a estructuras que pueden fallar solo al terminarse. La probabilidad de falla se tomará de acuerdo con la siguiente relación aproximada

$$P = \alpha e^{-\beta' n} \qquad (34)$$

Aquí β' es proporcional a β y, como en la fig 2, n es el factor central de seguridad.

De acuerdo con las especificaciones usuales de construcción, x_0 debe excederse cuando menos en cierta fracción del número de especímenes de control probados. Dado un conjunto de especificaciones puede establecerse una correspondencia entre la resistencia nominal y la distribución de esta variable en la muestra. La correspondencia dependerá del coeficiente de variación de la resistencia de los especímenes. Así, si se usan las Normas *ACI*, se obtiene la relación mostrada en la fig 6 entre la resistencia media (f_c o x_0) y su valor nominal (f'_c o x_0).[1]

De acuerdo con la ec 34 la probabilidad de falla es función de n, y por tanto también lo es la bonificación y penalización. Para un valor nominal dado x_0 de la resistencia óptima, la n óptima depende implícitamente del coeficiente de variación de los resultados de pruebas de cilindros de control. En lo que sigue el coeficiente de variación se tomará como conocido de antemano al encontrar la relación entre resistencia nominal y costo de falla. Esto nos permitirá tomar n_0 como fijo.

Al calcular las probabilidades de falla a partir de la ec 34 o de la fig 2 deben suponerse valores para ese coeficiente de variación de la resistencia y para el de las acciones en las secciones críticas. El primero debe reflejar la incertidumbre en los especímenes de control (representada por el coeficiente de variación de la fig 6), la incertidumbre en las relaciones entre esta resistencia y la resistencia del material en las secciones críticas, la incertidumbre en las dimensiones de las secciones trasversales, y las imprecisiones en las fórmulas empleadas para predecir la capacidad estructural. El coeficiente de variación de las acciones sobre la estructura debe reflejar la incertidumbre en las intensidades de las cargas y en las relaciones entre las cargas y sus efectos en las secciones críticas (ref 3).

Sea

$$R = \prod_i X_i^{\delta_i} \qquad (35)$$

donde R significa capacidad estructural; las X_i son propiedades de una sección crítica, tales como dimensiones y resistencia del material; y las δ_i son cantidades determinísticas. Las X_i tomarán como variables aleatorias independientes. Entonces,

$$\bar{R} \cong \prod_i \bar{X}_i^{\delta_i} (1 + c_i^2)^{\delta_i(\delta_i - 1)/2} \qquad (36)$$

$$c_R^2 = \prod_i (1 + c_i^2)^{\delta_i^2} - 1 \qquad (37)$$

donde la testa significa esperanza, y c_R y c_i son los coeficientes de variacion de R y X_i respectivamente. Como ilustración considérese una viga cuyo modo crítico de falla es compresión por flexión. Su capacidad en flexión es

$$M = \phi_c x b d^2 \qquad (38)$$

Aquí ϕ_c es una variable aleatoria que toma en cuenta la incertidumbre en las fórmulas de predicción y en la relación de la resistencia del concreto *in situ* a la de los especímenes de control, b es el ancho de la viga y d su peralte efectivo. Usando procedimientos especiales de construcción la incertidumbre en las dimensiones b y d puede hacerse despreciable. En tal caso, si el coeficiente de variación de ϕ_c es 0.15 y el de X es 0 25, las ecs 36 y 37 conducen a

$$\bar{M} = \bar{\phi}_c \bar{x} b d^2 \qquad (39)$$

$$c_M^2 = (1 + 0.15^2)(1 + 0.25^2) - 1 = 0.888 \qquad (40)$$

donde c_M es el coeficiente de variación de M.

La capacidad del concreto en tensión diagonal se tomará como

$$V = \phi_V \sqrt{x} bd \qquad (41)$$

y el coeficiente de variación de ϕ_V se tomará igual a 0.25. Entonces,

$$\bar{V} = \phi_V \sqrt{\bar{x}} bd (1 + 0.25^2)^{-1/8} = 0.99\, \phi_V \sqrt{\bar{x}} bd \qquad (42)$$

$$C_V^2 = (1 + 0.25^2)(1 + 0.25^2)^{1/4} - 1 = 0.079 \qquad (43)$$

El coeficiente de variación de los efectos combinados de carga muerta y viva en una sección crítica es función de la razón de sus valores medios. Este coeficiente de variación se tomará como 0.3, que refleja incertidumbres en las cargas y en sus coeficientes de influencia.

Los números anteriores combinados con un factor de carga 1.6, especificado en el Reglamento *ACI* para una relación de 0.5 entre carga viva y muerta, conducen a $n_0 = 4.0$ cuando el coeficiente de variación de la resistencia de cilindros es 0.25. El factor central de seguridad varía en proporción a $\bar{f}_c/f'_c$ en la fig 6.

Supongamos que C está dado por 200 + 0.3x, donde C se expresa en pesos y x en kg/cm², $c_x = 0.25$ y $n_0 = 4.0$, y tomemos los coeficientes de variación de resistencia y de efectos de carga iguales respectivamente a 0 28 y 0 30. Entonces, de la fig 2, $\beta' = 3.0$, y puesto que $\beta' n_0 = \beta x_0 = B$, la ec 18 da

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{0.3}{12}\left(1 - e^{12\frac{x_0 - x}{x_0}}\right) \qquad (44)$$

Supóngase ahora que los resultados de pruebas en especímenes de control proporcionan un coeficiente de variación de 0.15. De acuerdo con la fig 6

$$n_0 = \frac{4.0 \times 1.24}{1.4} = 3.36 \qquad (45)$$

El coeficiente de variación de la resistencia en la sección crítica es

$$[(1 + 0.15^2)(1 + 0.15^2) - 1]^{1/2} = 0.21 \qquad (46)$$

(en vez de 0.3). Así, de la fig 2, $\beta' = 4.88$ y

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{0.3}{19.5}\left(1 - e^{-19.5\frac{x_0 - x}{x_0}}\right) \qquad (47)$$

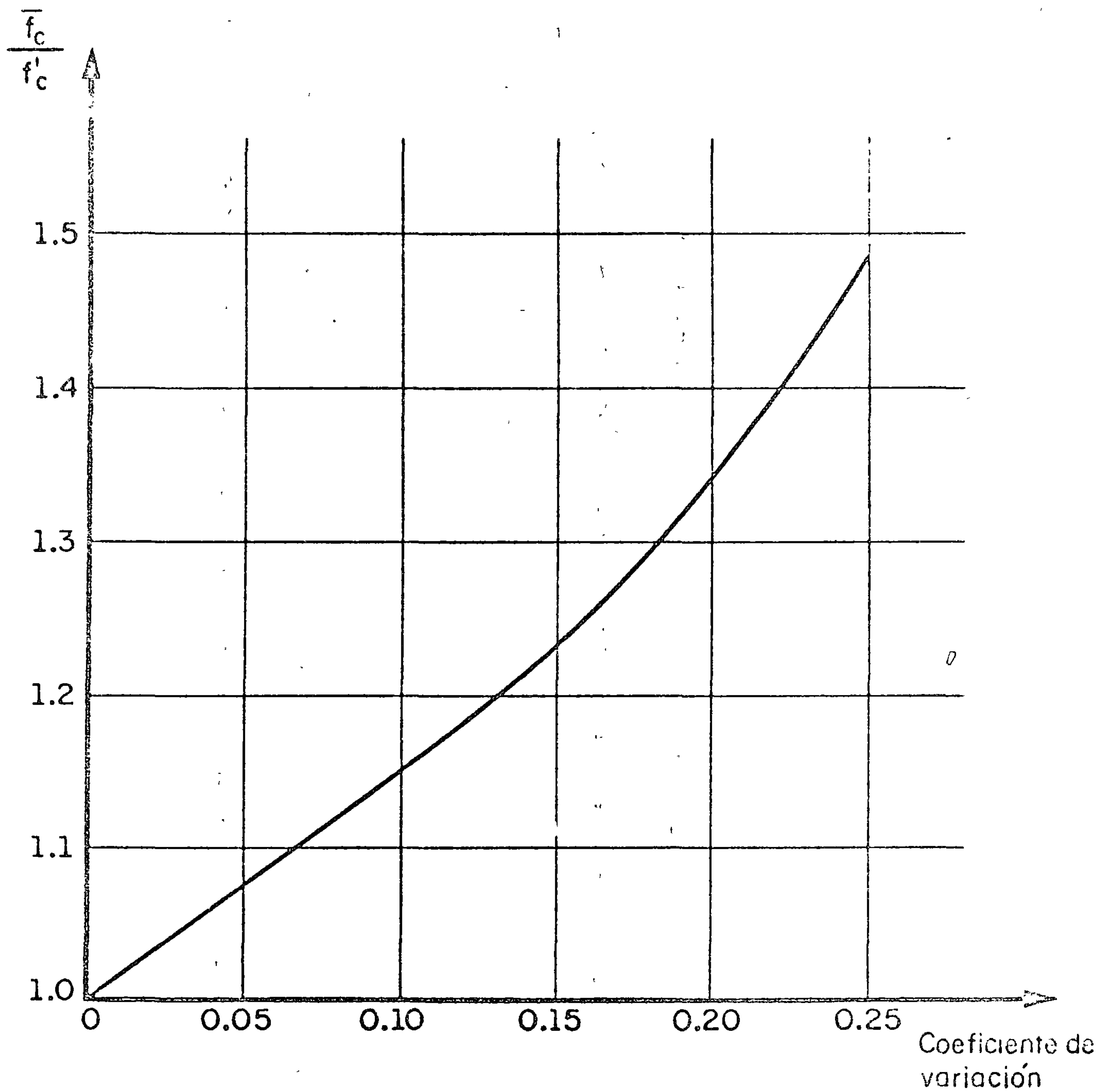


Fig 6

Cuando la resistencia de los cilindros es mucho menor que la especificada suelen extraerse y probarse corazones. En lo que sigue se estudiarán dos casos, según se suponga que los resultados de pruebas de corazones bastan o no para definir la función de densidad de probabilidad de la resistencia *in situ*. En el primero el coeficiente de variación de f'_c no refleja ninguna incertidumbre en la relación entre las resistencias de cilindros en *in situ*. En consecuencia, se le asignará un valor de 0.11, en comparación con 0.15. En función de la nueva distribución estadística, la probabilidad de falla es ahora $\alpha'' \exp(-\beta'' n)$ donde α'' y β'' denotan los valores apropiados de α y β. De las ecs 1, 16 y 34, se obtiene la relación

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{a}{B}\left(1 - \frac{\alpha''}{\alpha} e^{\beta' n_0 - \beta'' n}\right) \qquad (48)$$

Para fines de ilustración considérese el caso tratado en el ejemplo anterior, con $x_0 = 200$ y $n_0 = 4.0$, con una resistencia de corazón con media de 278 kg/cm² y coeficiente de variación de 0.20. La capacidad en flexión, supuesta regida por falla de compresión, tiene coeficiente de variación de

$$[(1 + 0.11^2)(1 + 0.20^2) - 1]^{1/2} = 0.23 \qquad (49)$$

y media de $278\ \bar{\phi}_r bd^2$. De la fig 6, esta media es

$$\frac{278}{200 \times 1.48} = 0.95 \qquad (50)$$

veces la supuesta en diseño con $c_r = 0.25$.
De la fig 2, $\alpha = 11$, $\alpha'' = 85$, $\beta' = 2.3$ y $\beta'' = 4.17$. Con estos valores y $n = 0.95\, n_0$, o $n = 3.8$, se obtiene

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{0.3}{12}\left(1 - \frac{85}{11} e^{3.0 \times 4 - 4.17 \times 3.8}\right)$$
$$= 0.0252\ \$/\text{m}^3\ (\text{kg/cm}^2) \qquad (51)$$

Usualmente el número de corazones es insuficiente para una estimación adecuada de los parametros de la distribución de la resistencia *in situ*. La información que de ahí se derive debe usarse para complementar, mas no para sustituir, los resultados de pruebas en cilindros. Ambos grupos de datos se combinan usando la estadística bayesiana (ref 5).
Supóngase que la distribución de la resistencia *in situ* es logarítmico-normal; que se conoce su coeficiente de variación y que su media, antes de probar corazones, está definida por la distribución inicial de probabilidades. Sean X la resistencia en discusión, c su coeficiente de variación y $Z = \ln X$, y sean μ y σ, respectivamente, la media y dispersión de Z. Sea la distribución inicial de μ normal con media m_1 y dispersión σ_1. Si se prueban ν corazones y si la media de la muestra del logaritmo de la resistencia se denomina $\bar{Z}$, la aplicación del teorema de Bayes (ref 6) conduce a una distribución posterior normal de μ con media y dispersión dadas respectivamente por

$$m_2 = \frac{\theta m_1 + \nu \bar{z}}{\theta + \nu} \qquad (52)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\theta + \nu}} \qquad (53)$$

donde $\theta = \sigma^2/\sigma_1^2$.

La distribución marginal de Z, incluyendo la incertidumbre en μ, es también normal, con media m_2 y variancia $\sigma_2 + \sigma_2^2$. Por tanto, después de las pruebas en corazones, debe asignarse una distribución logarítmico-normal a la resistencia *in situ* con los siguientes media y coeficiente de variación, donde la doble prima identifica parámetros de la distribución marginal posterior de probabilidad de X:

$$E''(X) = \exp\left[m_2 + \frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma_2^2)\right] \qquad (54)$$

$$c''^2(x) = \exp(\sigma^2 + \sigma_2^2) - 1 \qquad (55)$$

Los parámetros de la distribución inicial de la media, μ, de la resistencia *in situ*, X, se derivan de la resistencia de control correspondiente, X_c, usando la hipótesis hecha con respecto a la distribución de la relación entre X y X_c. Sean

$$\mu_c = E(\ln X_c) \qquad (56)$$

$$X = \psi X_c \qquad (57)$$

donde ψ y X_c son estadísticamente independientes. Asignemos a m_ψ distribución normal con media m_ψ y dispersión σ_ψ; y supongamos que la distribución inicial de μ_c tiene media m_c y dispersión σ_c. Entonces

$$m_1 = m_c + m_\psi \qquad (58)$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_c^2 + \sigma_\psi^2 \qquad (59)$$

En la estimación de m_c y σ_c deben tomarse en cuenta la informacion previa y los resultados de cilindros. Si se ignora el primer grupo de datos, m_c es igual a la media de la muestra de logaritmo natural de la resistencia de cilindros y σ_c es igual a $\sigma/\sqrt{n_c}$, donde n_c es el número de resultados de pruebas de control y σ se obtiene de los resultados de la muestra.
Como ilustración supóngase de nuevo que se especifica que $f'_c = 200$ kg/cm² y los resultados de cinco pruebas de cilindros conducen a una resistencia media de 200 kg/cm² y un coeficiente de variación de 0.15. Se concluye que la media y la dispersión del logaritmo natural de la resistencia son iguales a 5.39 y 0.149 respectivamente.

Puesto que los requisitos de control no se satisfacen se efectuan pruebas de corazones. Se asigna a la media del logaritmo de la resistencia de cilindros una distribución normal con media $m_c = 5.39$ (la de la muestra) y dispersión $\sigma_c = \sigma/\sqrt{5}$, o 0.0668. Bajo la hipótesis de que $E(\psi) = 1$ y $c_\psi = 0.11$ (y, por tanto $m_\psi = -0.006$ y $\sigma_\psi = 0.11$), la distribución inicial del logaritmo de la resistencia *in situ* tiene media

$$m_1 = 5.39 - 0.006 = 5.384 \qquad (60)$$

y varıancia

$$\sigma_1^2 = 0.0045 + 0.012 = 0.165 \qquad (61)$$

Además,

$$\theta = \sigma^2/\sigma_1^2 = 1.36 \qquad (62)$$

Supóngase ahora que se prueban dos corazones, para los que la media del logaritmo de la resistencia es 5.64. Entonces, de acuerdo con las ecs 52 y 53, $m_2 = 5.52$ y $\sigma_2 = 0.81$ son los parámetros de la distribución posterior del logaritmo medio de la resistencia *in situ*. De acuerdo con las ecs 54 y 55, la distribución marginal de dicha resistencia tiene media

$$E''(X) = exp\left[5.52 + \frac{1}{2}(0.0223 + 0.00656)\right] = 255 \text{ kg/cm}^2 \qquad (63)$$

y coeficiente de variación

$$c''(X) = exp\left[(0.0223 + 0.00656) - 1\right]^{½} = 0.171 \qquad (64)$$

Si un factor de seguridad 4.0 implica un coeficiente de variación de la resistencia de cilindros igual a 0.25, se encuentra, en proporción, para las condiciones descritas,

$$n = \frac{4.0 \times 255}{200 \times 1.48} = 3.48 \qquad (65)$$

Por otro lado, para $f'_c = 200$ kg/cm² y $c_x = 0.15$, la n óptima es igual a

$$n_0 = \frac{4.0 \times 1.24}{1.48} = 3.36 \qquad (66)$$

(véase fig 6). El coeficiente de variación de la capacidad en flexión en la sección crítica es

$$c_M = \left[(1 + 0.11^2)(1 + 0.171^2) - 1\right]^{½} = 0.203 \qquad (67)$$

Suponiendo $c_S = 0.3$, la fig 2 conduce a $\alpha = 135$, $\alpha'' = 290$, $\beta' = 4.5$, y $\beta'' = 4.88$. Sustituyendo estas en la ec 67 se obtiene finalmente

$$\frac{C' - C_0}{x_0} = \frac{0.3}{3.36 \times 4.5}\left(1 - \frac{290}{135} e^{4.5 \times 3.36 - 4.88 \times 3.48}\right) = 1.28 \times 10^{-2} \text{ \$/m}^3 \text{(kg/cm}^2) \qquad (68)$$

APENDICE 2.

REFERENCIAS

1. ACI Committee 318, *Commentary on building code requirements for reinforced concrete*, Capítulo 5 (1963)
2. Berissi, R, "Une methode statistique appliquée aux controles de bétonnage". *Laboratoires Routieres*, 22 (nov 1966), pp 2.3-2.13
3. Cornell, C A, "A probability based structural code", Proceedings of the *American Concrete Institute*, 66, 12 (dic 1969), pp. 974-85
4. Esteva, L, "Consideraciones prácticas en la estimación bayesiana de riesgo sísmico", *Instituto de Ingeniería*, Universidad Nacional Autónoma de México, Reporte 248 (1970)
5. Raiffa, H y Schlaifer, R, *Applied statistical decision theory*, MIT Press, Cambridge, Mass 1968
6. Turkstra, C J, "Bayesian decision theory in structural design", *Seminar on structural reliability and codified design*, Universidad de Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada (oct 1969)
7. Benjamin, J R y Lind, N C, "A probabilistic basis for a deterministic code", *Journal of the American Concrete Institute*, 66, 11 (nov 1969), pp 857-65
8. Rosenblueth, E y Esteva, L, "Reliability basis for some mexican codes", *Probabilistic design of reinforced concrete buildings*, ACI SP-31, Detroit, Mich (1972)
9. Kuhn, S R, "Quality control in highway construction", *Proc First World Conf on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engrg*, Hong Kong (sep 1971)

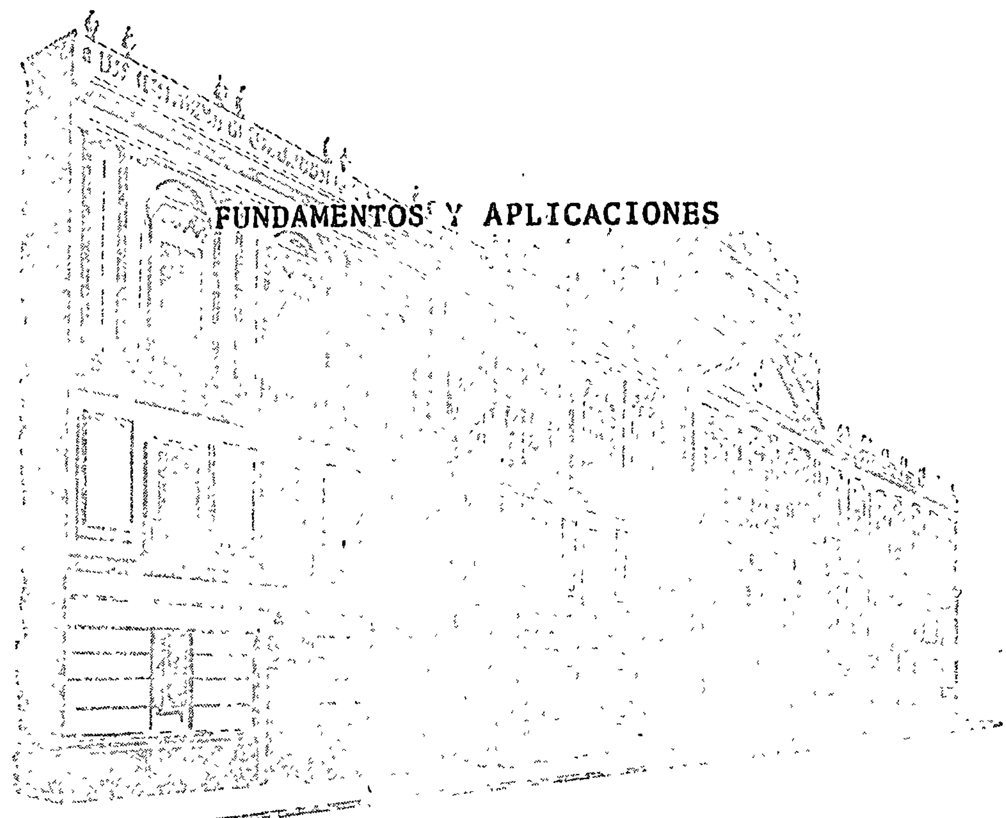
APENDICE 3

NOTACION

A'	=	constante usada en la ec 25
a	=	derivada del costo del volumen unitario de concreto con respecto a la resistencia
B	=	βx_0
b	=	ancho de la sección trasversal
C	=	costo inicial por unidad de volumen de concreto
C_0	=	valor de C asociado a x_0
C'	=	precio del concreto incluyendo bonificación y penalización
C_1	=	costo para el contratista de reforzar o demoler y reponer un elemento colado con concreto deficiente
C_2	=	costo de las operaciones anteriores para el propietario
c_I, c_M, c_R, c_V, c_Y	=	coeficientes de variación
c''	=	coeficiente de variación posterior
D	=	valor presente esperado de las consecuencias de daños, por volumen unitario de concreto
D_0	=	valor de D asociado a x_0
$D_i(t)$	=	costo esperado de falla en el i-ésimo modo, por volumen unitario de concreto
d	=	peralte efectivo de la sección trasversal
E	=	esperanza
E''	=	esperanza posterior
$F_i(t)$	=	función de distribución de probabilidades del tiempo a la falla
f_i	=	dF_i/dt
$f_S(s)$	=	densidad de probabilidad de S
f_c	=	valor medio de la resistencia de un cilindro de concreto
f'_c	=	valor nominal de la resistencia de cilindros de concreto
M	=	resistencia de una viga en flexión
$\bar{M}$	=	valor medio de M
m_1	=	valor medio inicial de μ
m_2	=	valor medio posterior de μ
m_c	=	valor medio inicial de μ_c
m_ψ	=	valor medio de ψ
n	=	factor de seguridad central
n_c	=	número de resultados de pruebas de control
n_0	=	valor óptimo de n
P_i	=	cantidad que se define en la ec 7
R	=	capacidad estructural
$\bar{R}$	=	valor medio de R
r	=	parámetro del orden de 1.2 a 1.4
S	=	esfuerzo causado por carga permanente
V	=	resistencia del concreto a tensión diagonal en una viga
$\bar{V}$	=	valor medio de V
X	=	resistencia del concreto (aleatoria)
x_c	=	resistencia nominal de los especímenes de control
x'	=	resistencia determínistica del concreto o valor nominal de su resistencia aleatoria
x_0	=	valor óptimo de x
$\bar{x}_0$	=	valor medio de x_0
Y	=	esfuerzo producido por carga sísmica
Z	=	$\ln X$
$\bar{z}$	=	valor medio de una muestra de Z
α', α''	=	parámetros de la expresión aproximada para probabilidades de falla
β, β', β''	=	parámetros de la expresión aproximada para probabilidades de falla
γ	=	tasa de interés
δ_i	=	exponentes usados en la ec 35
λ_i	=	tasa de falla en el i-ésimo modo
μ	=	valor medio de Z
μ_c	=	valor medio de $\ln x_c$
ν	=	número de corazones probados
σ	=	desviación estándar de Z
σ_1	=	desviación estándar inicial de Z
σ_2	=	desviación estándar posterior de μ
σ_c	=	desviación estándar inicial de μ_c
σ_ψ	=	desviación estándar de ψ
ϕ_c	=	relación de la resistencia a flexión verdadera a la calculada
$\bar{\phi}_c$	=	valor medio de ϕ_c
ϕ_V	=	relación de la resistencia a tensión diagonal verdadera a la calculada
$\bar{\phi}_V$	=	valor medio de ϕ_V
ψ	=	relación de la resistencia *in situ* a la resistencia de control

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA



FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

DR. OCTAVIO RASCON CH.

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

- Feb-17-76 -

PROBABILIDAD: Es una medida de la incertidumbre que se asocia a la ocurrencia de un evento cual quiera.

ESTADISTICA: Es la rama de las matemáticas que se encarga de enseñar las reglas para colectar, presentar y procesar los datos obtenidos al repetir varias veces un experimento asociado a un fenómeno de interés. Proporciona, además, los métodos para el diseño de experimentos y para tomar decisiones cuando aparecen situaciones de incertidumbre.

ESTADISTICA
- Descriptiva.- Trata lo concerniente a la obtención, organización, procesamiento y presentación de los datos.
- Inferencial.- Trata lo concerniente a los métodos para inferir conclusiones acerca de la población de la cual provienen los datos.

Teoría de conjuntos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos

Ejemplos: El conjunto de números anotados en un dado es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El conjunto de los números enteros menores que 5 es

$$S = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

o $S = \{x : x \text{ es entero y } x \leq 4\}$

El conjunto de los números enteros positivos menores que 5 es

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

El conjunto de los continentes es

$$C = \{\text{Asia, Europa, América, Africa, Oceanía}\}$$

El conjunto de marcas que tiene una moneda es

$$M = \{\text{cara, cruz}\}$$

Conjuntos:
- Finitos.- Cuando tienen un número finito de elementos
- Infinitos.- Cuando tienen un número infinito de elementos

Símbolos:

$<$ menor que

$\leq$ menor o igual que

$>$ mayor que

$\geq$ mayor o igual que

Ejemplo: ¿Cómo se puede denotar el conjunto de números mayores de 5 pero menores o iguales que 10?

$$S_1 = \{x : 5 < x \leq 10\}$$

Para expresar que un elemento pertenece a un conjunto se usa el símbolo $\in$. Para expresar que no pertenece se usa el símbolo $\notin$

Ejemplo: En relación al conjunto S_1:

$3 \notin S_1$; $5 \notin S_1$; $8 \in S_1$; $10 \in S_1$

Para expresar que un conjunto está contenido en otro se usa el símbolo $\subset$; si no lo está se usa el símbolo $\not\subset$.

Ejemplo: Sean $E = \{3, 5\}$; $F = \{3, 8\}$; $G = \{8, 9\}$

$E \not\subset S_1$; $F \not\subset S_1$; $G \subset S_1$

(Para que un conjunto esté contenido en otro se requiere que todos sus elementos lo estén; es decir, que todos sus elementos pertenezcan a ambos conjuntos)

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA
CIUDAD UNIVERSITARIA MEXICO 20, D. F.
APDO. POSTAL 70 256

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

Si un conjunto, B, está contenido en otro, S, se dice que B es SUBCONJUNTO de S.

Ejemplo.- Sean $A = \{x: 8 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x: 3 \leq x \leq 8\}$ y $S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$

En este caso:

$A \subset S_1 \Rightarrow$ A es subconjunto de S_1

$B \not\subset S_1 \Rightarrow$ B no es subconjunto de S_1

Se dice que dos conjuntos son iguales cuando contienen los mismos elementos (no importa el orden en que estos se escriban)

Ejemplo.- $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{7, 5, 1, 3\}$, $C = \{7, 5, 1\}$

$A = B$; $A \neq B$

De la misma manera que existe el cero en los números, en la teoría de conjuntos existe el conjunto VACIO, el cual es tal que no tiene elementos. Usualmente

Ejemplo.- ¿Cuál es el conjunto de elementos, x, tales que $2x = 7$ y x es entero?

Solución.- El conjunto vacío ϕ.

A ϕ se le considera como subconjunto de cualquier conjunto. Así por ejem., todos los subconjuntos del conjunto $S = \{2, 5, 10\}$ son: $\{2\}$; $\{5\}$; $\{10\}$; $\{2, 5\}$; $\{2, 10\}$; $\{5, 10\}$; $\{2, 5, 10\}$ y ϕ.

Experimento.- Para fines de este curso, se entenderá por experimento a todo proceso de observación. Por ejemplo, el lanzar una moneda o un dado y observar la cara que queda hacia arriba, es un experimento.

Asociado a un experimento siempre hay un conjunto de resultados posibles; a dicho conjunto se le llama ESPACIO DE EVENTOS

Ejemplos.- El espacio de eventos asociado al experimento de lanzar un dado y anotar la cara que queda hacia arriba es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El espacio de eventos correspondiente al experimento de lanzar dos dados y anotar los números que quedan hacia arriba es

$$S = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4) & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ (4,1) & & & & & \\ (5,1) & & & & & \\ (6,1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (6,6) \end{array} \right\}$$

Si en este experimento la observación de interés fuese la suma de los dos números observados, entonces el espacio de eventos sería

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Al resultado de un experimento se le llama <u>dato</u> u <u>observación</u>, a un conjunto de datos se le llama <u>muestra</u>.

A todo subconjunto de un espacio de eventos se le llama EVENTO. A los eventos que tienen un solo elemento del espacio se le llama EVENTO SIMPLE.

Si al realizar un experimento se observa un elemento del evento A, entonces se dice que ocurrió o se verificó el evento A. Por ejemplo, si $A = \{2, 4\}$ y al lanzar un dado se observa 2 o 4, se dice que ocurrió el evento A; si se observa cualquier otro número, entonces se dice que no ocurrió A.

Espacios de Eventos
- Discretos.- Si sus elementos pueden numerarse o contarse. Tienen un número finito o infinito numerable de elementos.
- Continuos.- Si sus elementos no pueden enumerarse. Tienen un número infinito no numerable de elementos.

Ejemplos.- Los espacios de eventos $S = \{cara, cruz\}$; $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $S = \{verde, rojo\}$ son discretos. Los espacios de eventos $S = \{x : -\infty < x \leq 0\}$; $S = \{x : x \geq 3\}$; $S = \{y : 3 \leq y \leq 5\}$ son continuos.

Ejemplos.- ¿Qué tipos de espacios de eventos corresponden a los siguientes experimentos?

a) Conteo del número de granos de una mazorca de maíz.- <u>Discreto</u> <u>e</u> <u>infinito</u>: $S=\{0, 1, 2, 3, \ldots, m\}$

b) Medición de la longitud de una espiga de trigo.- Continuo e infinito: $S=\{x: 0 < x < \infty\}$, x en cm

c) Medición del efecto de una vacuna, en términos de "éxito" o "fracaso".- Discreto y finito: $S=\{$éxito, fracaso$\}$

d) Medición del número de miligramos de un antibiótico contenido en una cápsula.- Continuo e infinito $S=\{y: 0 \leq y < \infty\}$, x en mg.

El <u>complemento</u> de un evento A es otro evento que contiene <u>todos</u> los elementos del espacio de eventos correspondiente que no están en A. Usualmente se denota con una tilde sobre el símbolo que corresponde al evento que complementa, es decir, $\bar{A}$.

Ejemplo: $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A=\{1, 3, 5\} \Rightarrow \bar{A}=\{2, 4, 6\}$

Si $S=\{x: 0\le x\le 58\}$ y

$A=\{x: 3< x\le 17\}$, entonces

$\bar{A}=\{x: 0\le x\le 3,\ 17< x\le 58\}$

Cuando dos o más eventos no pueden ocurrir simultáneamente al realizar una sola vez un experimento, se dice que éstos son <u>MUTUAMENTE</u> <u>EXCLUSIVOS</u>.

Es decir, dos eventos son mutuamente exclusivos cuando <u>no</u> tienen ni un solo elemento en común.

<u>Ejemplos</u>:- Cualquier evento y su complemento son mutuamente exclusivos.

¿Son $E=\{y: 0\le y\le 25\}$ y $A=\{2, 50, 100\}$ mutuamente exclusivos? <u>NO</u>, porque tienen el elemento <u>2</u> en común.

La <u>UNION</u> de dos eventos es otro evento cuyos elementos son todos los de ambos. La operación de

Ejemplos: Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 6, 12\}$, entonces

$C = A \cup B = \{1, 4, 6, 12, 2\}$

¿Son A y B mutuamente exclusivos? NO porque tienen el 6 en común.

Si $D = \{y : 0 \leq y \leq 13\}$ y $E = \{y : 20 \leq y \leq 50\}$

$D \cup E = \{y : 0 \leq y \leq 13 \ , \ 20 \leq y \leq 50\}$

Si $F = \{y : 8 \leq y \leq 20\}$, entonces

$D \cup F = \{y : 0 \leq y \leq 20\}$.

Si $G = \{y : 3 \leq y \leq 10\}$, entonces

$D \cup G = \{y : 3 \leq y \leq 10\} = G$; obsérvese que en este caso $G \subset D$. En general, si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$

En general, la UNION de varios eventos es otro evento cuyos elementos son todos los de los eventos que aparecen en la unión.

Ejemplo: $A \cup B \cup F = K = \{1, 2, 4, 6, y : 8 \leq y \leq 20\}$

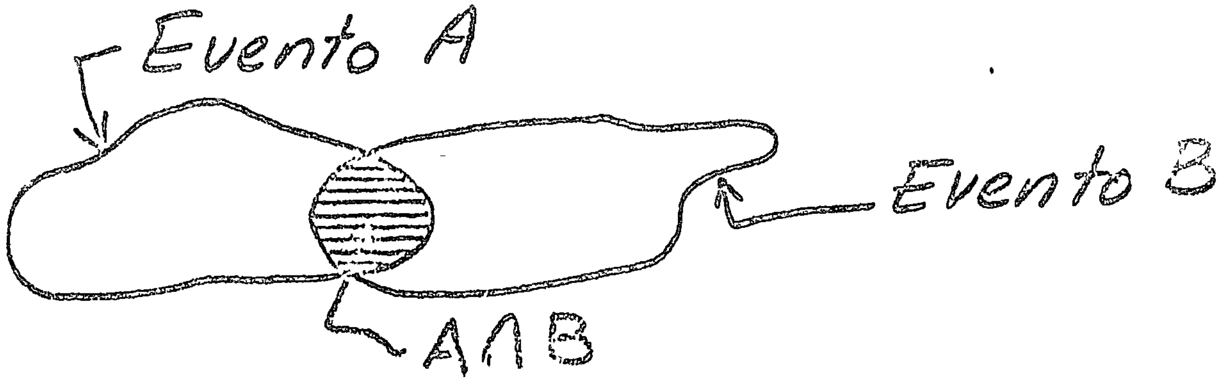
La INTERSECCION de dos ...
eventos es el conjunto de
elementos que pertenecen
simultáneamente a ambos.

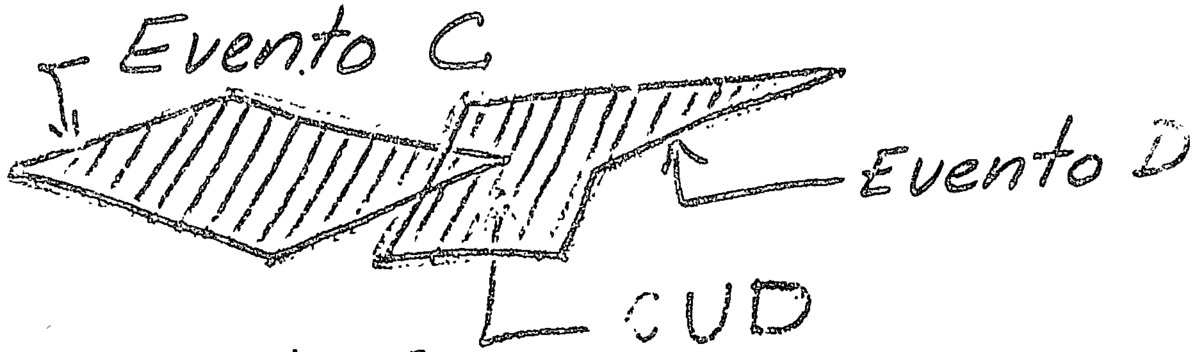
<u>Ejemplos</u>:- Si $A=\{2,3,6\}$ y $B=\{2,6,10\}$,
entonces $A\cap B=C=\{2,6\}$ (para
denotar la operación de inter-
sección se usa el símbolo $\cap$)
Si $D=\{y:\ 4\leq y\leq 5\}$, $A\cap D=\phi$ (es
el conjunto vacío). Obsérvese que
A y D son mutuamente exclusivos
ya que <u>no</u> tienen ningún elemento
en común; cuando dos eventos
son mutuamente exclusivos, su
intersección es el conjunto vacío.
En general, la <u>INTERSECCION</u> de
varios eventos es el conjunto de
elementos que todos ellos tienen
en común.

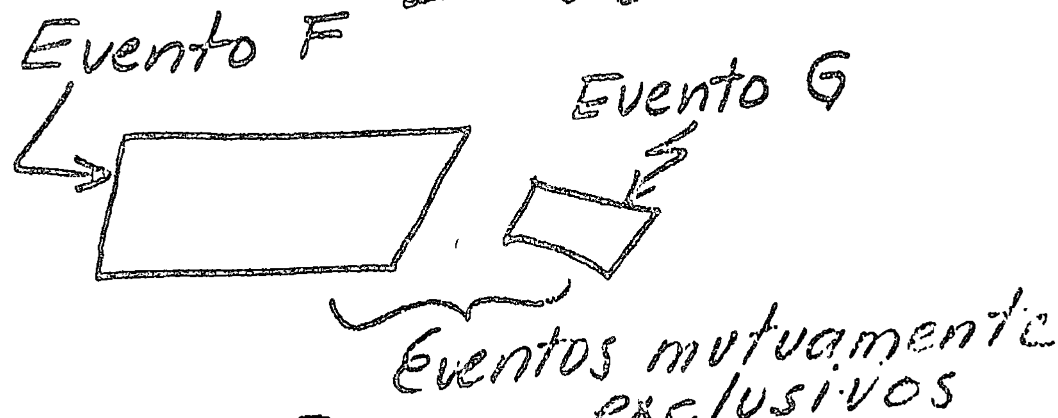
<u>Ejemplo</u>: Si $A=\{2,3,6,8\}$; $B=\{2,3,10,100\}$;
$C=\{y:\ 0\leq y\leq 5\}$; $D=\{y:\ 2\leq y\leq 4\}$, enton-
ces $A\cap B\cap C\cap D=E=\{2,3\}$

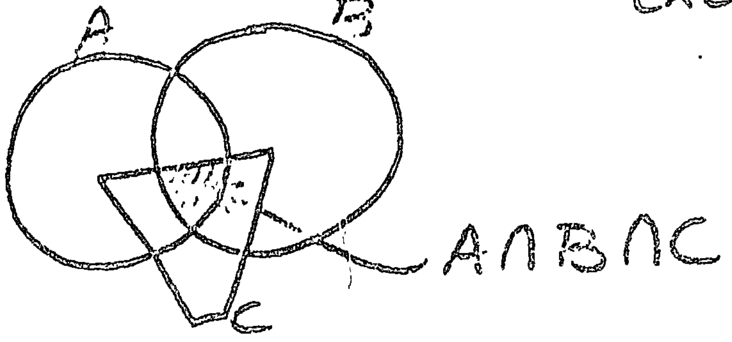
DIAGRAMAS DE VENN

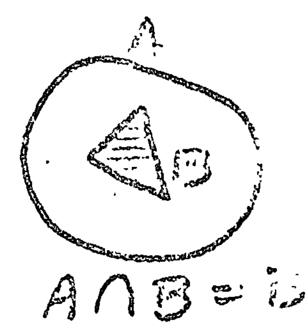
Una manera de ilustrar gráficamente las operaciones con conjuntos es mediante los diagramas de VENN. En estos, cada conjunto se representa por una curva cerrada que encierra los elementos que le corresponden.



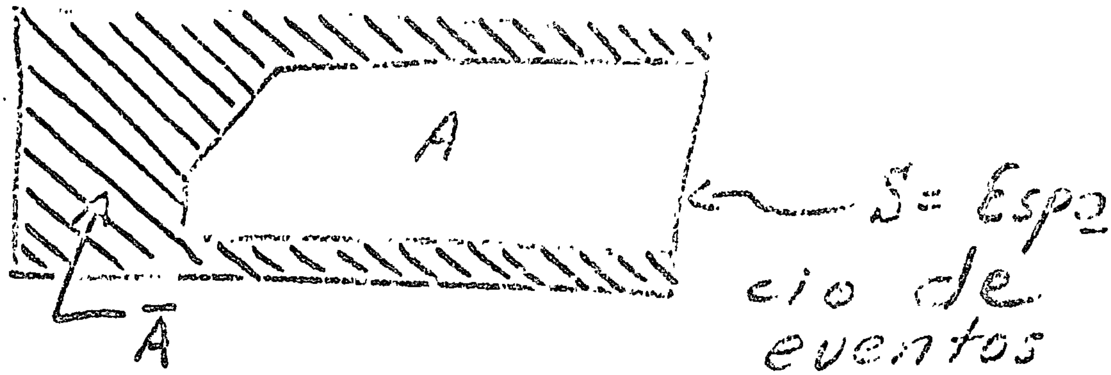








UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA



TEORIA DE PROBABILIDADES

Al lanzar una moneda no podemos predecir con certeza cuál cara quedará hacia arriba. Lo único que se puede asegurar, si la moneda no está cargada, es que ambas caras tienen la misma oportunidad de salir, es decir, que los eventos simples {cara} y {cruz} tienen la misma <u>probabilidad</u> de ocurrir. En general, "la probabilidad de que ocurra un evento es una medida del grado de confianza que se tiene de que éste ocurra al realizar una vez el experimento correspondiente

Existen por lo menos tres maneras de asignar una probabilidad a un evento:

1.- En términos de los resultados de repetir varias veces un experimento (método frecuencial).

2.- Aplicando la definición clásica de probabilidades.

3.- Con base en un modelo matemático (probabilístico) del fenómeno de que se trate.

- El <u>método</u> <u>frecuencial</u> se basa en que, si $n(A)$ es el número de veces que se observa el evento A al realizar n veces un experimento, la <u>frecuencia</u> <u>relativa</u> de A, $\frac{n(A)}{n}$, se considera como estimación de la probabilidad de A, que sería

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{N}}$$

Ejemplo.- De una urna que contiene bolas rojas, blancas y negras, se sacó una bola, se anotó su color y se regresó a la urna. Si este experimento se repite 20 veces y los resultados son:
(R={Roja}, B={Blanca}, N={negra}):

B, B, N, R, R, R, N, B, R, N, B, B, N, R, B, R, R, N, R, N

¿qué probabilidades le asignaría a los eventos B, N y R, de acuerdo con el método frecuencial?

$$n(B)=6,\ n(N)=6,\ n(R)=8,\ n=20$$

$$P(B)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10};\ P(N)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10};\ P(R)=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

(Nótese que los eventos B, N y R son mutuamente exclusivos y que
$$P(B)+P(N)+P(R)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=1)$$

- La definición clásica de probabilidades dice que si $n(A)$ es el número de maneras igualmente probables en que puede ocurrir el evento A y n es el número total correspondiente, entonces la probabilidad de A es

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n}}$$

Ejemplos.- Si en una urna se tienen 5 bolas blancas y 15 negras, y se va a seleccionar una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja ($A=\{roja\}$)?:

$n=5+15=20$; $n(A)=5 \Rightarrow P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Si se lanzan dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de que

a.- la suma sea 7 (evento A)

b.- salga un 2 y un 5 (evento B)?

Para el inciso b el espacio de eventos es:

$$S=\left\{\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array}\right\}$$

cada pareja de números es igualmente probable, si el dado no está cargado. En tal caso $n=36$ y $n(B)=2$ (si aparece $(2,5)$ o $(5,2)$) $\Rightarrow P(B)=2/36=1/18$.

Para el inciso ... el espacio de eventos es

$$S_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

pero no todos los elementos (eventos simples) son igualmente probables, ya que, por ejemplo, el 2 sólo aparecerá si se observa la pareja (1,1), en cambio el 3 aparecerá si ocurren las parejas (1,2) o (2,1), es decir, el 3 tiene el doble de probabilidad que el 2. Por esto, para calcular la probabilidad de que la suma sea 7 es necesario trabajar con el espacio S y contar las posibilidades de que la suma sea 7, lo cual ocurre si se observa cualquiera de las parejas (6,1); (5,2); (4,3); (3,4); (2,5) o (1,6), es decir, hay 6 maneras igualmente probables de que ocurra el evento A. Por lo tanto

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Procediendo de esta manera se pueden calcular las probabilidades

des de que la suma sea 2, 3, 4, etc. Los resultados son:

$P(\{2\}) = \frac{1}{36}$; $P(\{3\}) = \frac{2}{36}$; $P(\{4\}) = \frac{3}{36}$;

$P(\{5\}) = \frac{4}{36}$; $P(\{6\}) = \frac{5}{36}$; $P(\{7\}) = \frac{6}{36}$;

$P(\{8\}) = \frac{5}{36}$; $P(\{9\}) = \frac{4}{36}$; $P(\{10\}) = \frac{3}{36}$;

$P(\{11\}) = \frac{2}{36}$ y $P(\{12\}) = \frac{1}{36}$

(Obsérvese que $\sum_{i=2}^{12} P(\{i\}) = 1$)

- Con base en un modelo probabilístico, las probabilidades se asignan a partir de un modelo matemático que involucre todos los factores posibles que intervienen en la aleatoriedad del fenómeno.

AXIOMAS

Las probabilidades que se asignan a los diferentes eventos relacionados con un fenómeno aleatorio deben cumplir con los siguientes <u>tres</u> axiomas:

AXIOMA 1: La probabilidad de ocurrencia de un evento A es un número, P(A), que se le asigna a dicho evento, cuyo valor queda en el intervalo

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

AXIOMA 2: Si S es un espacio de eventos, entonces

$$\boxed{P(S) = 1}$$

AXIOMA 3: La probabilidad, P(C), de la unión, C, de dos eventos mutuamente exclusivos, A y B, es igual a la suma de probabilidades de éstos, es decir,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)}$$

Ejemplos.- En el problema del lanzamiento de un dado, si $A = \{2, 4\}$ y $B = \{5, 6\}$, y suponiendo que el dado no está cargado, se puede asignar a cada número una probabilidad de 1/6. En tal caso, pa...

evento [illegible]
mente exclusivo con cual
quier otro, aplicando el
Axioma 3 se obtienen:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Si $C = A \cup B$, y dado que A y B son
eventos mutuamente exclusivos:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Además, obsérvese que se cumple
con los axiomas 1 y 2 ya que

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Ejemplo: En el problema del lanzamiento de dos dados, ¿cuál es la probabilidad que al realizar una vez el experimento la suma de los dos números que queden hacia arriba sea 7 u 11?

Esto es equivalente a preguntar por la
probabilidad de que ocurra el evento
$C = \{7\} \cup \{11\}$. Puesto que $\{7\}$ y $\{11\}$
son eventos mutuamente exclusivos:

$$P(C) = P(\{7\}) + P(\{11\}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Ejemplo.- En un laboratorio se probaron 40 vigas de concreto reforzado nominalmente idénticas y se anotaron las cargas con las cuales falló cada uno.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

De esta sucesión de experimentos se asignaron, en términos de las frecuencias correspondientes, las siguientes probabilidades:

$A = \{x: 0 \leq x \leq 20 \text{ ton}\}$; $P(A) = 0.17$

$B = \{x: 20 < x \leq 40 \text{ ton}\}$; $P(B) = 0.24$

$C = \{x: 40 < x \leq 60 \text{ ton}\}$; $P(C) = 0.27$

$D = \{x: 60 < x \leq 80\}$; $P(D) = 0.13$

$E = \{x: 80 < x \leq 100\}$; $P(E) = 0.11$

$F = \{x: 100 < x\}$; $P(F) = \underline{0.08}$

$\sum P(\circ) = 1.00$

Si se realiza una vez más el experimento, calculemos las siguientes probabilidades:

a- Que la resistencia sea menor o igual que 80 ton:

$G = A \cup B \cup C \cup D \Rightarrow P(G) = P(A) + P(B) P(C) + P(D)$

$P(G) = 0.17 + 0.24 + 0.27 + 0.13 = 0.81$

b.- La probabilidad que resista más de 60 ton:

$H = D \cup E \cup F \Rightarrow P(H) = P(D) + P(E) + P(F)$

$P(D) = 0.13 + 0.11 + 0.08 = 0.32$

c.- La probabilidad que resista más de 40 ton pero a lo cuando mucho 100 ton:

$I = C \cup D \cup E \Rightarrow P(I) = P(C) + P(D) + P(E)$

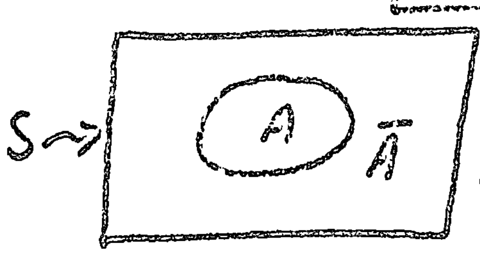
$P(I) = 0.27 + 0.13 + 0.11 = 0.51$

TEOREMAS

Dos teoremas importantes que se deducen a partir de los axiomas son:

Teorema 1.-

Si A es un evento del espacio S, entonces $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$



Demostración.- Puesto que A y $\bar{A}$ son mutuamente exclusivos y además $A \cup \bar{A} = S$, entonces, $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

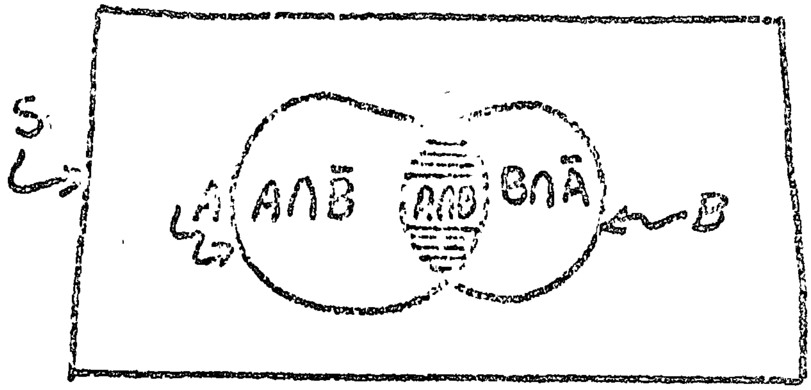
caso particular: $\bar{S} = \phi \Rightarrow P(\bar{S}) = 1 - P(S)$

$P(\phi) = 0$

Teorema 25 Si A y B son dos eventos cualquiera de S, entonces

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Demostración: Sea el diagrama de Venn:



$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

Puesto que $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ y $B \cap \bar{A}$ son mutuamente exclusivos se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$$

Sumando y restando $P(A \cap B)$ y agrupando términos se obtiene

$$P(A \cup B) = \left[P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})\right] + \left[P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})\right] - P(A \cap B)$$

Pero $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$

y $B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) = P(B)$, por lo que

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

Ejemplo: En una urna se tienen 28 tiras de papel y en cada una se encuentra anotada una letra distinta del alfabeto. Calcule la probabilidad de que al extraer al azar una tira:

a.- Se obtenga una vocal

b.- Se obtenga a o z

c.- Ocurran C y D, donde $C=\{x,y,z\}$ y $D=\{b,c,y,z\}$

d.- Ocurra C o D

a.- $A=\{a,e,i,o,u\} \Rightarrow P(A)=\frac{5}{28}$

b.- $B=\{a,z\} \Rightarrow P(B)=\frac{2}{28}$

c.- $F=C\cap D=\{y,z\} \Rightarrow P(F)=\frac{2}{28}$

d.- $E=C\cup D=\{b,c,x,y,z\} \Rightarrow P(E)=\frac{5}{28}$

o $P(E)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$

$P(C\cap D)=P(F)=\frac{2}{28} \Rightarrow P(E)=\frac{3}{28}+\frac{4}{28}-\frac{2}{28}=\frac{5}{28}$

<u>NOTA</u>: La ocurrencia de un evento y otro implica la ocurrencia de ambos a la vez, es decir que se verifique la <u>intersección</u>. La ocurrencia de un evento o algún otro, implica la ocurrencia de cualquiera de ellos, es decir de la <u>unión</u>.

Al asignar probabilidades a los eventos aplicando la teoría clásica es necesario calcular $n(A)$ y n para aplicar la fórmula $P(A)=n(A)/n$.

Sean, por ejemplo, los eventos $A=\{b,c\}$ y $B=\{a,e,i,o,u\}$ con los cuales se forman palabras de dos letras, la primera de A y la segunda de B. El evento que se forma así es

$$C=\{xy : x\in A;\ y\in B\}$$

Si enumeramos los elementos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{con la } b\text{: } ba, be, bi, bo, bu\\ \text{con la } c\text{: } ca, ce, ci, co, cu\end{array}\right\} 10 \text{ elementos}$$

sin embargo, la solución se puede obtener rápidamente sin necesidad de enumerar todas las posibilidades, observando que la primera letra sólo puede ser de <u>dos</u> tipos <u>b</u> o <u>c</u>, mientras que la segunda, de <u>cinco</u> tipos <u>a</u>, <u>e</u>, <u>i</u>, <u>o</u> o <u>u</u>, por lo que el total de elementos es $2\times 5=10$ es decir, el evento C puede ocurrir de 10 maneras distintas e igualmente probables.

En general, si dos eventos, A y B, pueden ocurrir de $n(A)$ y $n(B)$ maneras distintas, respectivamente, entonces el total de maneras en que ambos pueden ocurrir en el orden indicado es $\boxed{n(A) \times n(B)}$. Esta regla se puede generalizar a más de dos eventos.

Ejemplo.- ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar utilizando los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9, sin que se use el mismo dígito en las decenas y las centenas?

Solución.- Sean los eventos

$A = \{x : x \text{ está en las centenas}\}$

$B = \{y : y \text{ está en las decenas}\}$

$C = \{z : z \text{ está en las unidades y es par}\}$

$D = \{xyz : x \in A;\ y \in B;\ z \in C\}$

Puesto que no se permite repetición de dígitos, $n(A) = 5$ y $n(B) = 4$. Además, puesto que el número debe ser par, $n(C) = 2$. Por lo tanto

$$N(D) = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

Si el último dígito no tuviese que ser par: $S = \{xyz : x \in A;\ y \in B;\ z \in F\}$

donde $F = \{z : z$ está en las unidades$\}$

entonces $n(F) = 5$ y

$N(S) = 5 \times 4 \times 5 = 100.$

Con esto, calculemos la probabilidad de que si el espacio de eventos es S y se anotan todos los números del mismo en una tira de papel, al sacar uno al azar de una urna el número sea par:

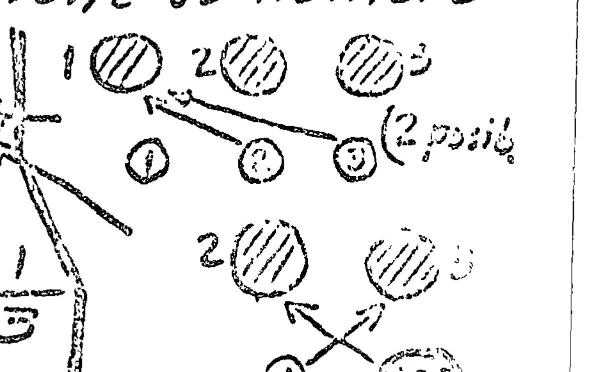
$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$= 40\ \%$$

<u>Ejemplo</u>.- En una caja se tienen tres perforaciones numeradas del uno al tres. Si se hechan en ella tres bolas también numeradas del 1 al 3 y se agita la caja, calcular la probabilidad de que ninguna bola caiga en la perforación que tiene su número (evento A)

$$n(A) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$
$$n = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



Se dispone de tres banderas: una blanca, una negra y una verde.

1.- Si cada pareja de banderas de distinto color constituye una señal, ¿Cuántas señales se pueden hacer si el orden de colocación de las banderas es importante (evento A)?

$n(A) = 3 \times 2 = 6$

2.- Si tres banderas también constituyen una señal cuando todas son de diferente color ¿cuántas señales podemos hacer con las 3 banderas a la vez (evento B)?

$n(B) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

3.- ¿Cuántas señales se pueden hacer con dos o tres banderas en las condiciones anteriores (evento C)?

$C = A \cup B$

$n(C) = n(A) + n(B) = 6 + 6 = 12$

4.- Si cada señal del evento C se dibuja en una tira de papel y luego se colocan en una urna, ¿Cuál es la probabilidad de que si se toma una al azar

a.- Salga una señal específica (evento F).

$P(F) = n(F)/n(C) = 1/12$

b.- Una señal con dos banderas por lo menos (evento G).

$G = C \Rightarrow n(G) = 12 \Rightarrow P(G) = \frac{12}{12} = 1$

c.- Una señal con dos banderas, una de ellas verde (evento H):

$n(H) = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4 \Rightarrow P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d.- Una señal con tres banderas, una de ellas verde (evento I):

$n(I) = 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 = 6$

$P(I) = 6/12 = 1/2 = 50\%$

e.- Una señal con dos o tres banderas enque se use una verde (evento J)

$J = H \cup I \Rightarrow n(J) = n(H) + n(I) = 4 + 6 = 10$

$P(J) = 10/12 = 5/6$

PERMUTACION.- El arreglo de N objetos en cierto orden se denomina Permutación.

Por ejemplo, todas las permutaciones que pueden hacerse con las letras a, b, c son: abc, acb, bac, bca, cab, cba. El total, es $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutaciones ($N=3$).

En general, el número de permutaciones es $N(N-1)(N-2)(N-3) \times \cdots \times 1 = N!$

Ejemplo.- ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer con 5 objetos?

Sol. $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

colocaran al azar ... libros ...
Calculemos ...
que el de historia y el de geografía queden juntos (evento A).

$$P(A) = n(A)/n$$

$$n = 7! = 7\times(6\times5\times4\times3\times2\times1) = 7\times6!$$

$$n(A) = 2!\times6! \Rightarrow P(A) = \frac{2!\times6!}{7!} = \frac{2!\times6!}{7\times6!} = \frac{2}{7}$$

Ejemplo.- En una urna se tienen 6 esferas tres blancas y tres negras. Si las seis se extraen al azar, una tras otra, la probabilidad de que las 3 blancas salgan en forma consecutiva (evento F) es: $n(F) = 3!\times4!$; $n = 6!$

$$\Rightarrow P(F) = n(F)/n = \frac{3!\times4!}{6!} = \frac{3!\times4!}{6\times5\times4!} =$$

$$P(F) = \frac{3\times2\times1}{6\times5} = \frac{1}{5}$$

Ejemplo.- En una urna se tienen 7 sobres idénticos y cada uno contiene un billete de diferente denominación (1, 5, 10, 20, 50, 100 y 500 pesos). ¿Cuál es la probabilidad de 1, 5, 50 y 500 pesos salgan consecutivamente en cualquier orden, si se sacan los siete al azar, uno tras otro (evento A)?

$n(A) = 4!\times4!$, $n = 7!$

$$P(A) = \frac{4!\times4!}{7!} = \frac{4!\times4!}{7\times6\times5\times4!} = \frac{4\times3\times2\times1}{7\times6\times5} = \frac{4}{35}$$

El número de maneras en que se pueden ordenar N objetos tomando de r en r es:

$$\boxed{{}_{N}P_{r} = \frac{N!}{(N-r)!}}$$

Esto es equivalente a decir que ${}_{n}P_{r}$ es el número de diferentes maneras en que r objetos pueden ser seleccionados de N objetos $(r \leq N)$ sin reemplazar ninguno de ellos al lote antes de sacar el siguiente.

Obsérvese que si $r = N$:

$${}_{N}P_{N} = \frac{n!}{(N-N)!} = \frac{N!}{0!} = N!$$

Ejemplo.- Si se tienen las letras a, b, c, d, el número de maneras en que se pueden ordenar tomando de 2 en 2 es

$${}_{N}P_{2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

El conjunto ~~[illegible]~~ de estas posibilidades es:

$S = \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$

Obsérvese que cuando el orden es importante, ac no es lo mismo que ca, etc.

Cuando el orden no es importante, es

dicho, si el agrupamiento ca es el mismo que el ac, a los agrupamientos se les denomina COMBINACIONES. Por ejemplo si se formará una comisión de dos individuos de un grupo de 8 tomando sus nombres al azar de una urna, y deseamos saber cuántos comités de 2 miembros podrían formarse como resultado del proceso, entonces los resultados Pedro, José y José, Pedro constituirían el mismo comité, es decir, no importaría en qué orden se sacaran sus nombres de la urna.

Así, se puede demostrar que el número de combinaciones posibles de formar de N objetos tomando de r en r es:

$$\boxed{{}_{N}C_{r} = \binom{N}{r} = \frac{N!}{(N-r)!\,r!}}$$

Esto equivale a decir que ${}_{N}C_{r}$ es el número de maneras distintas en que r objetos pueden seleccionarse de N ($r \leq N$) sin reemplazo y sin importar el orden de aparición.

Cuando ...
... un problema que implica
la repetición de una acción,
es necesario determinar si
hay o no reemplazo de las
observaciones. Por ejemplo, el
repetir el lanzamiento de un
dado y observar cada vez el
número que queda hacia arriba
lleva implícito que hay reemplazo.

Ejemplo:- Una caja contiene 10 focos,
de los cuales 3 son defectuosos. Si
seleccionamos 4 al azar sin
remplazo

a.- ¿Cuántos son los resultados posibles,
es decir, cuantos elementos tiene el
espacio de eventos?

$$n(S) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

b.- ¿Cuántos elementos de S tienen como
primer resultado un foco ~~bueno y~~ defectuoso
y tres focos buenos en los otros tres?

$$n(A) = {}_3P_1 \times {}_7P_3 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{4!}$$

$$n(A) = 3 \times (7 \times 6 \times 5) = 630$$

... 630/5040 ... 63/504

c.- ¿Cuántos elementos de S tienen un foco defectuoso y 3 buenos?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

$$n(B) = 4 \times {}_3P_1 \times {}_7P_3 = 4 \times 630 = 2520$$

$$\Longrightarrow P(B) = \frac{2520}{5040} = \frac{1}{2}$$

PERMUTACIONES DE GRUPOS DE OBJETOS

"El número de permutaciones posibles de N objetos de los cuales se tienen n_1 iguales entre sí en el primer grupo, n_2 iguales entre sí en el segundo grupo, etc, hasta n_k iguales en el kaésimo grupo (los grupos son distinguibles entre sí), de manera que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ queda dado por la fórmula:

$$\boxed{{}_N P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}}$$

Caso particular.— Si se tienen dos grupos solamente, entonces, si $n_1 = r$, se tiene que $r + n_2 = N$ o $n_2 = N - r$, por lo que

$$_N P_{r, N-r} = \frac{N!}{r! \times (N-r)!} = {}_N C_r$$

<u>Ejemplo</u>: Una caja contiene 25 piezas de las cuales 3 son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, si se extraen 5 al azar sin reemplazo,

a.- se obtengan las 3 defectuosas

b.- se obtengan sólo 2 defectuosas

c.- se obtenga sólo 1 defectuosa

d.- no se obtenga ninguna defectuosa?

<u>Solución</u>

a.- $n(S) = {}_{25}P_5 = \dfrac{25!}{(25-5)!} = \dfrac{25!}{20!}$

d = defectuosa

b = buena

$$\underbrace{d\ d\ d}_{{}_3P_3}\ \underbrace{b\ b}_{{}_{22}P_2}$$

$${}_5P_{3,2}$$

$$n(A) = {}_3P_3 \times {}_{22}P_2 \times {}_5P_{3,2} = 3!\,\frac{22!}{(22-2)!}\,\frac{5}{3!\,(5-3)!}$$

$$n(A) = 60\,\frac{22!}{20!}$$

$$P(A) = \frac{60\,\frac{22!}{20!}}{\frac{25!}{20!}} = 60\,\frac{22!}{25!} = \frac{60}{13\,800}$$

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA

$$\underbrace{d\ d}_{{}_3P_2}\ \underbrace{6\ 6\ 6}_{{}_{22}P_3} \longrightarrow {}_5P_{2,3}$$

$$n(B) = {}_3P_2 \times {}_{22}P_3 \times {}_5P_{2,3} = \frac{3!}{(3-2)!}\ \frac{22!}{(22-3)!}\ \frac{5!}{2!\times 3!}$$

$$n(B) = 3!\ \frac{22!}{19!}\ \frac{5\times 4}{2} = 60\ \frac{22!}{19!}$$

$$P(B) = \frac{60\ \frac{22!}{19!}}{\frac{25!}{20!}} = 60\ \frac{22!}{25!}\ \frac{20\times 19!}{19!} = \frac{1200}{13800}$$

c.- $\underbrace{d}_{3}\ \underbrace{6\ 6\ 6\ 6}_{{}_{22}P_4} \longrightarrow {}_5P_{1,4}$

$$n(C) = 3 \times {}_{22}P_4 \times {}_5P_{1,4}$$

$$n(C) = 3\ \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{5!}{1!\times 4!}$$

$$n(C) = 3\ \frac{22!}{18!}\ \frac{5\times 4!}{1\times 4!} = 15\ \frac{22!}{18!}$$

$$P(C) = \frac{15\ \frac{22!}{18!}}{\frac{25!}{20!}} = \frac{15\times 20\times 19\times 18!}{\frac{25!}{22!}\times 18!} = \frac{5700}{13800}$$

d.- $\underbrace{6\ 6\ 6\ 6\ 6}_{{}_{22}P_5}$

$$n(D) = {}_{22}P_5 = \frac{22!}{(22-5)!} = \frac{22!}{17!}$$

$$P(D) = \frac{22!/17!}{\frac{25!}{20!}} = \frac{20\times 19\times 18\times 17!}{\frac{25!}{20!}\times 17!}$$

$$P(D) = 6840/13800$$

Obsérvese que en este ejemplo hemos calculado las probabilidades de todos los elementos del espacio de eventos correspondiente al "número de defectuosos que se pueden observar en una selección al azar de 5 elementos", en la cual sólo se pueden tener 0, 1, 2 o 3 defectuosos, es decir,

$$H = \{0, 1, 2, 3\}$$

Verifiquemos que, en efecto, $P(H) = 1$:

$$P(H) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= \frac{6840}{13800} + \frac{5700}{13800} + \frac{1200}{13800} + \frac{60}{13800}$$

$$= \frac{13800}{13800} = \underline{1} \quad \underline{\text{O.K.}}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad condicional, $P(A|B)$ del evento A, dado que el B ha ocurrido se calcula con la fórmula

$$(A) \text{---} \quad \boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \; ; P(B) > 0$$

Si dos eventos, A y B, son independientes, la probabilidad de A no se altera si ocurre el evento B; es decir, dos eventos son <u>independientes</u> si

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

En tal caso, de la ecuación (A):

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

En general, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son independientes si, y sólo si,

$$\boxed{P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \times P(A_{k_2}) \times \cdots \times P(A_{k_r})}$$

para cualquier grupo de enteros $k_1, k_2, \ldots, k_r$, con $k_r \leq m$.

Por ejemplo, si $m = 3$, A_1, A_2 y A_3 son independientes si, y sólo si,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Si $m = 4$, para que sean independientes se requiere que se cumpla que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

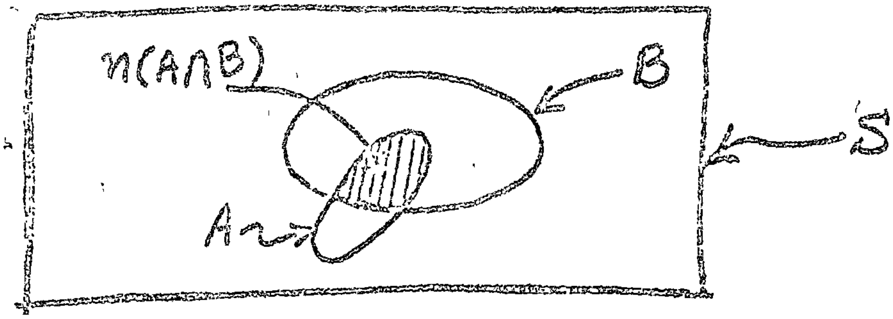
todas las combinaciones de 3 elementos

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ \vdots \end{array} \right.$$

Puesto que $P(A \cap B) = n(A \cap B)/n(S)$ y $P(B) = n(B)/n(S)$ la ecuación A se puede escribir como

$$(B)\cdots \quad \boxed{P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$



El trabajar con la ecuación B equivale a emplear un espacio de eventos reducido de S a B.

Ejemplo.- En una urna hay 10 transistores buenos y 10 defectuosos (malos). ¿Cuál es la probabilidad de sacar uno bueno y uno malo (en cualquier orden) al realizar dos extracciones al azar, si hay reemplazo del primer transistor observado?

Hay varias formas de resolver el problema:

1.- $S = \{(d,d), (d,b), (b,b), (b,d)\}$

$A = \{(d,b), (b,d)\}$; $n(S) = 4$, $n(A) = 2$

$\therefore P(A) = 2/4 = 1/2$ (son igualmente probables los eventos simples porque el número de defectuosos es igual al de buenos.)

2.- $n(A) = (10 \times 10) \times 2 = 200$

$n(S) = 20 \times 20 = 400$

$P(A) = 200/400 = 1/2$

3.- B = {sale primero el bueno y luego el malo}

C = {sale primero el malo y luego el bueno}

$B = D \cap E$ donde

D = {sale primero el bueno}

E = {sale segundo el malo} y $F = O \cap R$,

donde O = {sale primero el malo}

R = {sale segundo el bueno}

Luego $A = \{$sale uno bueno y uno malo$\}$

$$= B \cup F$$

Por lo que $P(A) = P(B) + P(F)$

$$P(B) = P(D \cap E) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(F) = P(O \cap R) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

De esto se puede concluir que el formar un evento combinado por los resultados de repeticiones sucesivas de un experimento, al decir (y) equivale a intersección; al decir (o) equivale a unión:

$$y = \cap$$
$$o = \cup$$

Resolvamos ahora este problema si NO hay reemplazo:

$$P(D \cap E) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{10}{38} \; ; \; P(O \cap R) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{10}{38}$$

$$\therefore \; P(A) = \frac{10}{38} + \frac{10}{38} = \frac{10}{19}$$

En un estudio sociológico se interrogaron 1200 personas de una colonia residencial, y se obtuvieron los siguientes datos:

Gusto por la música clásica	Título Universitario		Sin título universitario		
	Varones	Damas	Varones	Damas	
Alto	100	50	200	250	600
Bajo	150	100	150	200	600
	250	150	350	450	

Si $A = \{\text{varón}\}$, $B = \{\text{con título}\}$

$C = \{\text{Gusto alto}\}$

¿Cuál es la probabilidad de que si se selecciona un ciudadano al azar (de la misma colonia) éste sea varón, tenga título y gusto alto por la música?

Por el método frecuencial:

$P(A) = 600/1200 = 1/2$; $P(B) = 400/1200 = \frac{25}{120}$

$P(C) = 600/1200 = 1/2$

$D = A \cap B \cap C \Rightarrow P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{40}{120} \times \frac{1}{2} = \frac{40}{480} = \frac{1}{12}$

Si se supone que A, B y C son independientes:

De la ecuación (A):

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$$

Esta ecuación se puede generalizar a más de dos eventos así:

$$(C) \ldots \boxed{P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_1)\,P(E_2|E_1) \cdots P(E_k|E_1, E_2, \ldots E_{k-1})}$$

Ley general de multiplicación

Por ejemplo, si $k = 4$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)\,P(E_2|E_1)\,P(E_3|E_1 \cap E_2) \times$$
$$\times\, P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

<u>Ejemplo</u> – ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer sin reemplazo cuatro cartas al azar de un paquete de 52, las dos primeras sean diamantes y las 2 últimas sean corazones (evento E)?

$A = \{$la 1^a es diamante$\}$, $B = \{$la 2^a es diamante$\}$

$C = \{$la 3^a es corazón$\}$, $D = \{$la 4^a es corazón$\}$

$$E = A \cap B \cap C \cap D$$

$P(A) = 13/52$, $P(B|A) = 12/51$, $P(C|A,B) = 13/50$

$P(D|A,B,C) = 12/49 \Rightarrow P(E) = \frac{13}{52}\,\frac{12}{51}\,\frac{13}{50}\,\frac{12}{49} = \frac{78}{208}$[illegible]

Si los eventos E_i que aparecen en la ecuación (C) son independientes, entonces

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_1) \times P(E_2) \times \cdots \times P(E_k)}$$

El axioma 3 también se generaliza a:

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)}$$

Si todos los eventos E_i son mutuamente exclusivos entre sí.

2.4.1 Teorema de Bayes

Se dice que un grupo de eventos es *colectivamente exhaustivo* si la unión de todos ellos es el espacio de eventos correspondiente.

De la ec 2.4, que define las probabilidades condicionales, se puede obtener un resultado importante: En un grupo de eventos colectivamente exhaustivos y mutuamente exclusivos, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, si A es un evento cualquiera definido en el mismo espacio (fig 8), entonces, aplicando el axioma 3, resulta

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots + P[A \cap B_n] = \sum_{i=1}^{i=n} P[A \cap B_i]$$

ya que los eventos $A \cap B_i$ son mutuamente exclusivos.

Tomando en cuenta que $P[A \cap B_i] = P[B_i]\, P[A \mid B_i]$, se obtiene finalmente la ecuación

$$\boxed{P[A] = \sum_{i=1}^{i=n} P[B_i]\, P[A \mid B_i]}$$

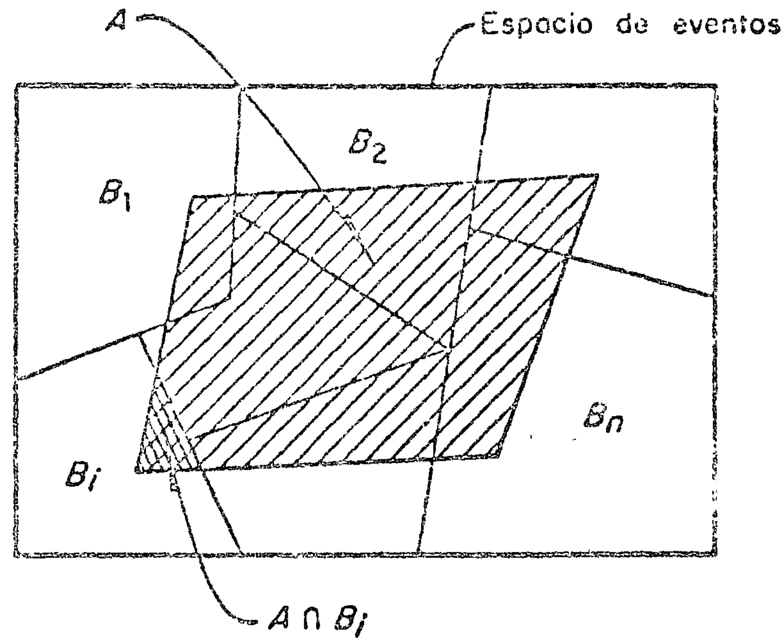


Fig 8. Eventos colectivamente exhaustivos

con la cual se define el llamado teorema de la probabilidad total.

Considerando que $P[B_i \cap A] = P[A \cap B_i]$, se tiene que

$$P[B_j \mid A] = \frac{P[B_j \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}$$

de donde

$$\boxed{P[B_j \mid A] = \frac{P[B_j]\, P[A \mid B_j]}{\sum_{i=1}^{i=n} P[B_i]\, P[A \mid B_i]}}$$

Este resultado se conoce como teorema de Bayes. A las probabilidades $P[B_j]$ que se asignan a los eventos B_j antes de observar el evento A, se les denomina a priori o previas; a las probabilidades $P[B_j|A]$ que se obtienen después de observar el evento A, se les llama a posteriori o posteriores.

Ejemplos: En una fábrica se reciben reguladores de voltaje de dos proveedores, B_1 y B_2, en proporción de 3 a 1; es decir, la probabilidad de que un regulador tomado al azar provenga del proveedor B_1 es $P(B_1)=\frac{3}{4}$, y del B_2 es $P(B_2)=\frac{1}{4}$.

Supongamos además que el control de calidad del proveedor B_1 es mejor que el de B_2, de manera que el 95% de los reguladores de B_1 trabajan bien, y sólo el 80% de los de B_2 funcionan correctamente. Calculemos la probabilidad de que un regulador tomado al azar funcione bien (evento A).

$$P(A|B_1)=0.95 \; ; \; P(A|B_2)=0.80$$

Del teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(A|B_1)\,P(B_1)+P(A|B_2)\,P(B_2)$$

$$=0.95\times\frac{3}{4}+0.80\times\frac{1}{4}=0.9125$$

Supongamos ahora que la pregunta del problema se cambia a: ¿cuál es la probabilidad de que un regulador tomado al azar provenga del proveedor B_1 si se hizo una prueba del regulador y se observó que funciona correctamente?

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 0.95}{\frac{3}{4} \times 0.95 + \frac{1}{4} \times 0.80} = \frac{2.85}{3.65} = 0.78$$

Además:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)\,P(A|B_2)}{\frac{3.65}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \times 0.80}{\frac{3.65}{4}} = 0.22$$

Obsérvese que

$$P(B_1|A) + P(B_2|A) = 0.78 + 0.22 = \underline{\underline{1.00}}$$

Ejemplo.- Supóngase que una prueba para detectar diabetes tiene una eficiencia del 95%, es decir, sólo en el 95% de los casos detecta la diabetes en una persona que la padece. Supongase también que el 2% de las pruebas que resultan positivas son de gente sana, y que el 3% de la población de una región de México padece esta enfermedad.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar pueda ser declarada diabética por la prueba?

b.- Si la prueba dice que sí es diabética, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?

$B_1 = \{\text{tiene diabetes}\}$; $B_2 = \{\text{no tiene diabetes}\}$

$E = \{\text{la prueba detecta diabetes}\}$

$P(B_1) = 0.03, \quad P(B_2) = 0.97$

$P(E|B_1) = 0.95, \quad P(E|B_2) = 0.02$

a.- $P(E) = P(E|B_1)P(B_1) + P(E/B_2)P(B_2)$

$= 0.95 \times 0.03 + 0.02 \times 0.97 = 0.0479$

b.- $$P(B_1|E) = \frac{P(B_1)P(E|B_1)}{P(B_1)P(E|B_1) + P(B_2)P(E|B_2)}$$

$$= \frac{0.03 \times 0.95}{0.03 \times 0.95 + 0.97 \times 0.02} = 0.59$$

DISTRIBUCION GEOMETRICA

Sea p la probabilidad de éxito en un experimento. Si se repite el experimento sucesivamente hasta que se observa un éxito se tendrá la variable aleatoria X= número de repeticiones del experimento hasta que se observa el primer éxito. Obtengamos la densidad de probabilidades de X.

El 1er éxito ocurrirá en el experimento número x sí, y sólo sí, en los $x-1$ anteriores hubo puros fracasos. La probabilidad de este evento, dado que los experimentos son independientes, es

$$\boxed{f_X(x) = (1-p)^{x-1}\, p}$$

← distribución geométrica

Se puede demostrar que la distribución de probabilidades acumuladas es

$$\boxed{F_X(x) = 1-(1-p)^{x}}$$

y que $\boxed{E[X] = 1/p}$ y $\boxed{\sigma_X^2 = \dfrac{1-p}{p^2}}$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p \qquad \sigma_X^2 = \sum_{x=0}^{\infty}\left(x-\frac{1}{p}\right)^2 (1-p)^{x-1} p$$

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

Cuando se tiene una variable aleatoria discreta cuyo espacio de eventos tiene sólo 2 elementos, digamos $S = \{$éxito, fracaso$\}$, y se realiza un muestreo <u>sin</u> <u>reemplazo</u>, entonces los resultados de cada experimento <u>no</u> <u>son</u> <u>independientes</u> <u>ni</u> <u>la</u> <u>probabilidad de éxito permanece constante</u>, como en la distribución binomial, por lo que ésta última no es aplicable.

En este caso, si $\underline{x}$ es el número de "éxitos" observados de un lote que tiene $\underline{N}$ objetos de los cuales M son "éxitos", la probabilidad de observar $\underline{x}$ en $\underline{n}$ repeticiones del experimento es:

$$\overbrace{\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{\substack{M \\ \text{"éxitos"}}}\ \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{\substack{N-M \\ \text{"fracasos"}}}}^{N} \Rightarrow n(S) = \binom{N}{n} = {}_N C_n$$

$$\text{"éxitos"} \downarrow \; {}_M C_x = \binom{M}{x} \qquad \text{"fracasos"} \downarrow \; {}_{N-M} C_{n-x} = \binom{N-M}{n-x}$$

Si $A = \{X = x\}$

$$n(A) = \binom{M}{x} \times \binom{N-M}{n-x}$$

$$\boxed{P(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, M}$$

$$\boxed{E(x) = nM/N}$$

$$\boxed{\sigma^2(x) = \frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}}$$

Ejemplo.- En un problema de control estadístico de calidad, se tiene un lote de 100 transformadores de corriente eléctrica, de los cuales 40 son defectuosos (no cumplen las normas de fabricación). ¿Cuál es la probabilidad de obtener un defectuoso de tres seleccionados al azar sin reemplazo?

$$P[X=3] = \frac{\binom{40}{1}\binom{100-40}{3-1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\binom{40}{1}\binom{60}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{\dfrac{40!}{39! \times 1!} \times \dfrac{60!}{58! \times 2!}}{\dfrac{100!}{97! \times 3!}} = 0.438$$

Cuando N es grande y n pequeño, la distribución binomial se puede usar como aproximación de la hipergeométrica, cuando los cálculos con esta distribución resultan tediosos.

2.7.2 Distribución de Poisson

Una distribución de probabilidades para una variable aleatoria discreta, X, de la forma

$$\boxed{f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots} \qquad (2.32)$$

se llama *distribución de Poisson*; en la ec 2.32, λ es una constante Se puede demostrar que la media y la variancia para esta distribución quedan dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} E[X] &= \lambda \\ \mathrm{Var}[X] &= \lambda \end{aligned}} \qquad (2.33)$$

Ejemplo

Si la probabilidad de que falle una varilla de acero al aplicarle una determi-nada fuerza de tensión es de 0.001, ¿cuál es la probabilidad de que de 2 000 varillas probadas fallen a) tres, b) más de dos, si se supone que la ~~resistencia~~ falla de las varillas tiene una distribución de Poisson con λ = 2000x0.001=2?

a) $$P[X = 3] = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P[X = 3] = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$$

b) $$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - F_X(2) = 1 - \Big\{P[X = 0] +$$

$$+ P[X = 1] + P[X = 2]\Big\} = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

Es posible demostrar que la distribución de Poisson puede emplearse como una aproximación de la de Bernoulli cuando n es grande y p pequeña, pero de tal manera que $npq >> 1$, tomando $\lambda = np$. Al respecto, si $n = 20$ y $p = 0.05$, entonces npq vale 0.95, y aun cuando no cumple con la última condición, el error que se tiene al usar dicha aproximación es menor de 3 por ciento para valores de X menores de 3, aun cuando npq es casi uno; para $X = 4$ y $X = 5$ los errores respectivos son 15 y 41 por

Ejemplo.- Una compañía aseguradora después de muchos años de experiencia ha estimado que el 0.004% de la población fallece por un tipo específico de accidente. Si esta compañía tiene 40,000 asegurados, ¿cuál es la probabilidad de que 2 de ellos muera en un año por tal tipo de accidente?

Sea x el número de personas que entre los asegurados mueren anualmente por accidente. La media de X es

$$E[X] = 0.00004 \times 40{,}000 = 1.6 = \lambda$$

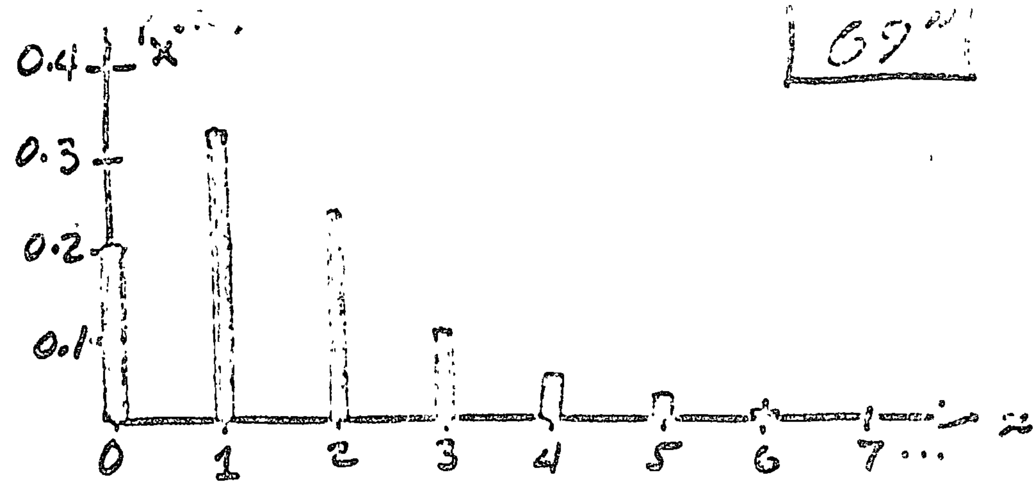
$$P[X=x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1.6)^x e^{-1.6}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\therefore P[X=2] = \frac{(1.6)^2 e^{-1.6}}{2!} = \frac{0.2019 \times 2.56}{2} = 0.26$$

Para este problema la distribución es:

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$f_X(x)$	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.0[illegible]	...

La gráfica de esta distribución es:



Ejemplo.- En el carril para dar vuelta a la izquierda en una avenida, sólo hay capacidad para 3 autos como máximo esperando la flecha luminosa del semáforo. En un estudio estadístico del tránsito en ese lugar se encontró que en cada ciclo del semáforo hay en promedio 6 autos que van a dar vuelta. ¿Cuál es la probabilidad de que en un ciclo del semáforo tomado al azar se congestione el tránsito por excederse la capacidad del carril? $P[X>3]=?$

Si $A=\{X>3\}$, $\bar{A}=\{X\leq 3\}$

$$P(\bar{A}) = 1-P(A) \therefore P(A)=1-P(\bar{A}); \; \lambda=6$$

$$P(\bar{A})=P[X\leq 3]=\sum_{x=0}^{x=3} f_X(x)=\sum_{x=0}^{x=3}\frac{e^{-6}6^{x}}{x!}$$

$$P(\bar{A})=e^{-6}\left(1+6+\frac{6^2}{2}+\frac{6^3}{6}\right)=61e^{-6}=0.152$$

$$P[A]=P[X>3]=1-0.152=\underline{0.848}$$

PROCESO DE POISSON

Con base en la distribución de Poisson se puede deducir que la distribución de probabilidades del número de ocurrencias de un evento durante un periodo t queda dada por

$$f_X(x) = P[X = x \text{ en un lapso } t]$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}} \quad ; x = 0, 1, 2, \dots$$

donde λ = número medio de ocurrencias por unidad de tiempo. Para que esta distribución se aplique se requiere que el evento cada vez ocurra de manera independiente de las ocurrencias previas y que λ sea constante.

<u>Ejemplo</u>.- En una central de comunicaciones se tiene una demanda media del servicio de 8 cada minuto. Calcular la probabilidad de que en 2 minutos no se solicite el servicio.

$$\lambda = 8, \; t = 2, \; f_X(0) = P[X=0] = \frac{(\lambda t)^0 e^{-8\times 2}}{0!} = e^{-16}$$

$$= \underline{0.00004}$$

Además:

$$f_X(1) = \frac{16^1 e^{-16}}{1!} = 0.00064 \; ; \; P[X>1] = 1 - (0.00004 + 0.00064)$$

$$= \underline{0.99932}$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

Criterios para la Elaboración de Normas y Especificaciones

Dr. Roberto Meli Piralla

Octubre, 1976.

R. Meli

CRITERIOS PARA LA ELABORACION DE NORMAS Y ESPECIFICACIONES

El control de calidad tiene como finalidad asegurar que un producto cumple con ciertos requisitos de calidad especificados generalmente a través de una norma. La norma suele describir con precisión cuáles son las características del producto que deben examinarse, qué mediciones deben efectuarse y mediante qué procedimientos, cómo deben interpretarse los resultados de las mediciones y cuáles deben ser los resultados para que el producto pueda considerarse aceptable.

El objeto de esta plática es hacer una breve presentación de los criterios en que puede basarse la elaboración de normas, haciendo énfasis en algunas tendencias modernas en este campo y tomando como ejemplo particular para ilustrar los criterios el de la elaboración de normas en el campo de vivienda.

La finalidad de un producto es satisfacer ciertas necesidades de los usuarios. Por ejemplo la finalidad de la vivienda es permitir el desarrollo de diversas actividades humanas en condiciones adecuadas de bienestar. Por lo tanto el objetivo de unas especificaciones será fijar los requisitos que deben cumplirse para asegurar que las necesidades en cuestión sean cubiertas satisfactoriamente.

Las especificaciones (normas) planteadas en estos términos se conocen como <u>especificaciones funcionales o de desempeño</u> (performance specifications) y establecen en términos precisos las características que el usuario requiere del producto sin tomar en cuenta los medios a través de las cuales se obtiene el resultado, o sea, no fijan dimensiones, propiedades de materiales, tratamientos o métodos de fabricación.

Esto último es lo que se hace en las especificaciones tradicionales que se conocen como especificaciones prescriptivas. La diferencia entre los dos tipos de especificaciones es que la prescriptiva sirve para un producto específico, mientras que la funcional sirve para un elemento con un uso específico.

La razón por la que es preferible, por ejemplo, que unas normas para vivienda sean de tipo funcional se encuentra en la gran variedad de soluciones que pueden presentarse para un uso específico, especialmente pensando en la proliferación de sistemas constructivos industrializados o semi-industrializados que se está presentando actualmente.

El criterio prescriptivo requiere que para cada nuevo producto se elabore una norma particular con el fin de que cumpla con los requisitos deseados. La especificación funcional cubre cualquier producto mientras que la función no cambie.

Como ejemplo, una especificación funcional para un recubrimiento para pisos de áulas escolares exigiría que este tuviese determinada resistencia al desgaste y al impacto, ciertas propiedades acústicas y térmicas, etc.; todas estas propiedades deberían determinarse mediante procedimientos experimentales claramente definidos. Una especificación prescriptiva no podría referirse a recubrimientos para pisos de cualquier tipo dependiendo únicamente de la función que estos deban desempeñar, sino que sería aplicable a un material particular, por ejemplo loseta asfáltica, para el cual especificaría el espesor, cierta composición química y cierta textura y acabado.

Para la elaboración de normas funcionales, el primer paso es la identificación de los componentes básicos del conjunto para los cuales se darán normas. Es evidente que, de acuerdo con el planteamiento expuesto, sólo deberían darse normas para el producto completo, por ejemplo la vivienda en su conjunto, ya que la medida en que se cumplan las necesidades de los usuarios dependerá de la vivienda como un todo y es difícil inferir la influencia de los distintos elementos que la componen. Sin embargo, sería poco práctico dar normas para el producto como un todo, entre otras cosas porque sus partes son muchas veces proporcionadas por distintos productores y contratistas. Es posible identificar algunas componentes básicas según la función que deben desempeñar y dar especificaciones para ellas.

En una propuesta de especificaciones funcionales para vivienda se han considerado las siguientes componentes:

Estructura portante

Elementos interiores de separación (muros)

Elementos de piso

Elementos de techo

Cubierta exterior

Instalaciones

La segunda etapa para la elaboración de las especificaciones es la de fijar los atributos específicos que deben evaluarse para los componentes dependiendo de las funciones que deben cumplir. Puede hacerse una larga lista de tales atributos; sin embargo es importante identificar aquellos que influyen en forma significativa en el desempeño del conjunto y solo dar especificaciones para ellos.

En el caso de vivienda los atributos significativos se pueden agrupar en las siguientes categorías:

Seguridad estructural

Seguridad contra incendio

Condiciones estructurales de servicio

Aislamiento acústico

Aislamiento atmosférico

Iluminación

Higiene

Distribución espacial

Requisitos estéticos

Durabilidad

La tercera etapa consiste en la definición de la forma en que deben calificarse tales atributos, o sea en fijar los ensayos que deben llevarse a cabo, las propiedades que deben medirse y la forma de calificar el resultado o sea de encontrar un valor numérico que represente una medida del atributo.

Aquí estriba una de las dificultades mayores, ya que hay que encontrar un procedimiento experimental que proporcione un índice representativo del atributo que se quiere medir, o sea que lo medido en laboratorio pueda predecir el comportamiento que tendrá el producto en las condiciones en que va a ser empleado en la práctica. Para una gran cantidad de productos y atributos existen pruebas estándar sancionadas por organismos de prestigio internacional (ASTM, DIN, NBS, etc.)

Finalmente debe llevarse a cabo la evaluación del componente en función de los valores medidos para los distintos atributos. Para estos pueden adoptarse distintos métodos: desde requisitos mínimos, o sea para cada atributo deben pasarse ciertos valores, en caso contrario se rechaza el elemento. Otro procedimiento es por medio de tolerancias y otro a través de una calificación ponderada para cada atributo hasta tener una calificación total del elemento que permite compararlo con otros.

Como ejemplo, para la determinación de la resistencia al fuego de una componente se ha propuesto medir los siguientes atributos:

Resistencia al fuego	Tiempo necesario para perder su capacidad estructural (en horas); prueba ASTM E119
Combustibilidad	Cantidad de calor con la que puede contribuir a un incendio, en BTU/kg de peso del material;

Propagación de la flama	Se mide la velocidad de propagación de la flama; ASTM E84
Generación del humo	Densidad óptica específica de humo; Prueba ASTM STP422
Trayectoria de humo y flama	Inspección

Con respecto al punto anterior la decisión más importantes es la de fijar los niveles deseables para los distintos atributos: ¿Cuál es el aislamiento acústico que hay que especificar para una pared que divide dos habitaciones? ¿Cuántas horas debe resistir al fuego un elemento estructural? El fijar requisitos muy estrictos implica costos mayores y lo contrario implica incomodidad o falta de seguridad para los usuarios. La decisión deberá basarse en el estudio de las actitutes de los usuarios, de la probabilidad de falla y en un análisis económico (de optimización) del problema.

Algunas ventajas de las especificaciones funcionales sobre las prescriptivas ya han sido mencionadas. Una ventaja adicional muy importante es que especificaciones de este tipo fomentan la búsqueda de nuevas soluciones, ya que no ponen otras restricciones al producto fuera de las meramente funcionales.

También conviene mencionar sus desventajas. Cabe mencionar que no es fácil encontrar una prueba que sea perfectamente representativa del requisito funcional que se quiere estudiar y que no es fácil dar un criterio de calificación.

La más importante desventaja es que especificaciones de este tipo no son prácticas para la verificación rutinaria de la calidad, porque los métodos de prueba son usualmente costosos y complejos; por lo anterior en mi opinión estas especificaciones son esenciales para la evaluación general de una solución y para tomar decisiones en la etapa de proyecto, sin embargo para la verificación de calidad de lotes particulares hay que contar con normas prescriptivas las cuales deben deducirse para cada material a partir de las especificaciones funcionales.

Un caso que ilustra claramente la diferencia entre especificaciones funcionales y prescriptivas es el de especificación de la calidad del concreto, por ejemplo para un vertedor de demasías de una presa de grandes dimensiones. Los atributos que nos interesan para el producto son, por ejemplo, su resistencia a la tensión, a la abrasión y al ataque de los sulfatos, así como su estabilidad volumétrica. En una especificación funcional deberíamos fijar límites o intervalos para esas propiedades así como el método para su determinación. La mayoría de las pruebas para determinar dichas propiedades son laboriosas; sin embargo sabemos que si se emplean agregados de peso volumétrico normal, de granulometría aceptable y libres de impurezas, así como un cemento Portland Tipo II o IV, los atributos anteriores se relacionen directamente con la resistencia en compresión del concreto, f'_c, determinada por el ensaye de cilindros estándar. Por tanto la especificación del concreto puede subdividirse en especificaciones particulares para cada uno de los materiales componentes, cemento, grava, arena y agua y una especificación global para el producto terminado. Las primeras serán de tipo prescriptivo, fijando por ejemplo los límites de la composición química del cemento, la última puede ser de tipo funcional, $f'_c \geq 250$ kg/cm^2 por ejemplo. No se especifica en este caso la dosificación del concreto, la cual se deja al fabricante, sino un atributo únicamente, la resistencia en compresión, el cual es en este caso bastante fácil de determinar y es la base de la verificación de la calidad del producto por parte del contratante.

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

Dr. Luis Esteva Maraboto
Subdirector
Instituto de Ingeniería, UNAM
Tel.: 548.97.94

Ing. Manuel Marín González
Jefe de la Unidad de Normalización Básica
C O N A C Y T
Insurgentes Sur 1677-4°
Tel.: 534.64.67

Dr. Roberto Meli Piralla
Coordinador de Estructuras,
Instituto de Ingeniería, UNAM
Tel.: 548.97.94

M. en C. Enrique Novelo Berrón
Profesor
División de Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería, UNAM
Tel.: 548.09.50

Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Jefe de la División de Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería, UNAM
Tel.: 548.09.50

M. en I. Augusto Villarreal Aranda
Secretario Académico
División de Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería, UNAM
Tel.: 548.09.50

'edcs.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD
(DEL 17 DE AGOSTO AL 5 DE OCTUBRE DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1. ROSA M. AMAYA DIAZ Calz. Canal 1222 Depto. 107 Col. Merced Balbuena México 8, D. F. Tel: 7680580	SUBSECRETARIA DE MEJORAMIENTO DEL AMBIENTE, S. A. Consejo Técnico México, D. F.
2. QUIM. CARITINA E. ARRONIZ S. Florines No. 68-1 Col. Simón Bolívar México 9, D. F. Tel: 5515024	INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO Av. de los Cien Metros No. 152 México, D. F.
3. ING. IGNACIO E. AVILA G. Andador 23 Ovplex 36-1 Acueducto Guadalupe México 14, D. F. Tel: 5690488	DISTRIBUIDORA SHELL DE MEXICO, S.A. Zinc 52 Xalostoc, Edo. de México
4. MA. SILVIA CABRERA SALINAS Av. Presidentes 2 Bis Col. Banjidal México 13, D. F. Tel: 5320876	COMISION NACIONAL DEL CACAO Tlaxcala 208 y / o Etla 19, Col. Condesa México 11, D. F.
5. JOSE CRUZ GAMBOA Cerrada 5 de febrero No. 22 Int. 1 Col. Sta. Apolonia México 16, D. F.	ELECTRO OPTICA, S.A. Cumbres de Acultzingo No. 202 Fracc. Los Pirules México, D. F.
6. ING. RENE DOMINGUEZ PEÑA Jesús Terán No. 38-20 México 1, D. F. Tel: 5353751	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola y Av. Universidad México, D. F.
7. CARMEN ESTRADA OLGUIN Insurgentes Sur 1763 Col. Guadalupe Inn. México 20, D. F. Tel:5249489	LABORATORIOS VALDECASAS Insurgentes Sur 4058 México 20, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD
(DEL 17 DE AGOSTO AL 5 DE OCTUBRE DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
8. ING. RUBEN A. GARCIA FONS Texcoco No. 243 Col. Clavería México 16, D. F. Tel: 5275050	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola y Av. Universidad México, D. F.
9. ROGELIO GRADOS MARTINEZ México, D. F.	
10. QUIM. LUIS JARA VILLAGOMEZ Cerrada de Torreón No. 14 Col. Roma Sur México 7, D. F. Tel: 5641362	GENERAL FOODS DE MEXICO, S. A. Poniente 116 No. 553 Col. Industrial Vallejo México 15, D. F. Tel: 5671100
11. ENRIQUE LOPEZ VELARDE L. Petrel No. 59 Vergel de Arboledas Atizapan, Edo. de México Tel:5660739	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 69-8o.Piso México, D. F.
12. ING. JESUS EDUARDO NAVAR GAMBOA E. Rebsamen No. 1141-9 Col. del Valle México 12, D. F. Tel:5751761	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 México 17, D. F.
13. ING. MANUEL MENA FERRER México, D. F.	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 México, D. F.
14. ING. FRANCISCO J. PEÑA ROBLES sur 73-A No. 306 Col. Sinatel México 13, D. F. Tel: 5399746	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola y Av. Universidad México, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD
(DEL 17 DE AGOSTO AL 5 DE OCTUBRE DE 1976)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
15. ING. ARMANDO PEREZ SANCHEZ Invernadero 226 Dpto. Ext. Col. Nueva Santa María México 16, D. F.	ESIME-IPN Unidad Profesional Zacatenco México, D. F.
16. ING. JESUS RAMIREZ BOENISS Mecanógrafos No. 43 Col. Sifón México 8, D. F. Tel: 5811854	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 69-7o.Piso México, D. F.
17. ING. PRIMO SANCHEZ PAZARAN Andador "T" No. 25-04 Col. IS.S.S.T.E. Coapa México 21, D. F. Tel: 7623371	FONDO NACIONAL DE FOMENTO EJIDAL Av. Alvaro Obregón No. 223 México 7, D. F.
18. ING. JAVIER E. TELLEZ NAVARRO Chiapas No. 41 Fracc. Jacarandas Tlalnepantla, Edo. de México Tel: 3-979066	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 69-7o.Piso México, D. F.
19. ING. FRANCISCO J. TOVAR CARRASCOSA Heriberto Frias 573-3 Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5232891	SECRETARIA DEL PATRIMONIO NACIONAL Insurgentes Sur 552-8o. Piso México, D. F.
20. DAVID ZUÑIGA DE LEON Camelia No. 123 Col. Florida México 20, D. F. Tel: 5249393	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola y Av. Universidad México, D. F.