



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIFERENCIADOR DE GANANCIAS VARIABLES
APLICADO A UN MOTOR DE DC

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero Eléctrico y Electrónico

PRESENTA:

Carlos Arturo Martínez Fuentes

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman



2014

A mis padres, hermanos y amigos

Por ser quienes me han formado como persona.

A mis profesores por ser como mis padres, amigos y hermanos.

Al Dr. Fridman y mis compañeros en el laboratorio de Modos deslizantes

Por apoyarme en la elaboración de este trabajo.

Al proyecto PAPIIT IN113613

Por el apoyo financiero en la elaboración de este trabajo.

Carlos.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación y Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Objetivo	2
1.4. Metodología	3
1.4.1. Modelado de la planta	3
1.4.2. Selección y diseño del controlador	3
1.4.3. Implementación y análisis de resultados	3
1.5. Contribuciones	3
1.6. Estructura de la tesis	4
2. Diferenciadores de primer orden por Modos deslizantes	5
2.1. Diferenciador de Levant	5
2.2. Diferenciador VGSTA	6
2.3. Simulaciones	9
3. Modelado de la planta y esquema de control	11
3.1. Modelo del motor de corriente directa	11
3.1.1. Ecuaciones eléctricas	12
3.1.2. Ecuaciones Mecánicas	13
3.1.3. Modelo en variables de estado	13
3.1.4. Función de transferencia	14
3.2. Esquema de control	14
3.2.1. Controlabilidad	14
3.2.2. Controlador	15

3.2.3.	Acción de control proporcional	16
3.2.4.	Acción de control integral	17
3.2.5.	Diseño del controlador	18
4.	Resultados	21
4.1.	Simulaciones	21
4.1.1.	Sintonización del controlador	21
4.1.2.	Sintonización de los Diferenciadores	23
4.1.3.	Resultados	23
4.2.	Pruebas experimentales	28
4.2.1.	Descripción de la planta	28
4.2.2.	Sintonización	29
4.2.3.	Resultados	30
5.	Conclusiones	33
A.	Preliminares	35
A.1.	Introducción	35
A.1.1.	Conceptos básicos	35
A.2.	Modo deslizante asintótico	38
A.3.	Modos Deslizantes de Segundo Orden	39
A.3.1.	Algoritmo de Control Super-Twisting	40
A.3.2.	Algoritmo Super-Twisting Generalizado	41
B.	Equipo experimental	45
B.1.	Tarjeta DS1104	45
B.2.	Bloques de Simulink	47
B.3.	Inversor Trifásico de 3 [kW]	50
	Bibliografía	53

Introducción

1.1. Motivación y Estado del arte

Hasta hace algunos años, los motores de corriente directa presentaban una relación de par por unidad de volumen y peso muy pequeña, por lo que su uso se encontraba confinado a aplicaciones específicas. Actualmente, con el desarrollo de imanes de “tierras raras” se ha logrado aumentar considerablemente su rendimiento, además, con los avances logrados en conmutadores electrónicos y escobillas, los motores de corriente directa ya no requieren demasiado mantenimiento, desventaja que mostraban con respecto a los demás tipos de motores, lo que los convierte en una buena opción en algunas aplicaciones industriales. Es por ello que el estudio de técnicas para controlarlos es necesaria. Hasta ahora existen distintos trabajos relacionados al control de motores de corriente directa. En [10] se presenta un esquema de control para la velocidad del motor por medio de un controlador PI clásico y la estimación de la velocidad se realiza por medio de diferenciadores de alta ganancia, en [13] se implementa un esquema similar, sin embargo en ese trabajo se utiliza un filtro de Kalman para obtener la estimación de la velocidad. Por otro lado en [3], se muestra un esquema donde se realiza el control y el cálculo de la velocidad por medio de algoritmos de control por modos deslizantes de segundo orden.

Como se puede observar, es muy común que se necesite estimar la velocidad del motor y que esta pueda ser calculada en tiempo real para poder utilizarla como parte del lazo de control, sin embargo estimarla no es una tarea sencilla ya que una señal medida suele contener ruido y este hecho siempre dificulta el cálculo de la derivada, razón por la que existen muchos trabajos donde se trata de dar solución a este problema, sin embargo, aún no se puede asegurar una estimación perfecta de la derivada de una

señal. Es común que se realice la estimación por medio de filtros donde se toma como consideración que las componentes de alta frecuencia de la señal son producidas por ruido y se rechacen, esta idea se ilustra en [4], [12], [14]. Otra forma muy popular de calcular la derivada es por medio de diferenciadores de alta ganancia como los mostrados en [2], [9], pero estos tienen como desventaja que mientras más alta sea su ganancia, más aumentarán la magnitud del ruido en la estimación y por su estructura es necesaria una ganancia elevada para asegurar exactitud. Por último, tenemos los diferenciadores basados en algoritmos por modos deslizantes como en [7], [6], [5], los cuales son robustos y exactos sin embargo si las ganancias son constantes se puede producir *chattering* sobre la estimación de la derivada, que es un fenómeno oscilatorio de alta frecuencia y magnitud finita, el cual es indeseado. En este trabajo se explorará el uso de un algoritmo de ganancias variables, que conserve las características de robustez y exactitud, pero adaptando sus ganancias para obtener una estimación que se vea menos afectada por el *chattering*.

1.2. Planteamiento del problema

El problema principal se centra en la estimación de la velocidad angular de un motor de corriente directa, con base en la medición de la posición angular, ya que no se puede medir la velocidad real. El cálculo de las ganancias del diferenciador se realiza por medio de la medición del par, que permita conocer la aceleración angular (ver Capítulo 2). Tal estimación se implementa en un esquema de control para el motor. Dicho esquema se basa en un controlador lineal clásico.

1.3. Objetivo

Minimizar el error de estimación de la velocidad angular del motor de corriente directa por medio del uso de un algoritmo de diferenciación por modos deslizantes de segundo orden de ganancias variables con el fin de obtener señales de control continuas y menos afectadas por el *chattering*.

1.4. Metodología

1.4.1. Modelado de la planta

Como primer paso se realiza el modelado del motor en variables de estado, se encuentra la función de transferencia entre la velocidad angular del motor y el voltaje de excitación y se realiza un pequeño análisis de controlabilidad del sistema, además se harán algunas observaciones respecto a su estabilidad.

1.4.2. Selección y diseño del controlador

Se propone un controlador lineal clásico para realizar seguimiento de velocidad de una señal de referencia. Ya que se conocen de manera aproximada los parámetros del sistema, el controlador se diseña con el fin de lograr que los polos de lazo cerrado sean rápidos y que su parte imaginaria tenga una magnitud pequeña con el fin de reducir las oscilaciones en la respuesta, esto sin comprometer la estabilidad del sistema.

1.4.3. Implementación y análisis de resultados

Para lograr implementar el controlador, como se había mencionado, se utilizan diferenciadores, ya que sólo se puede obtener medición de la posición del motor. Se utilizan principalmente dos algoritmos de diferenciación por modos deslizantes de segundo orden y se comparan los resultados obtenidos para cada uno de ellos, además de hacer una comparación con otro método más común, siendo los aspectos más importantes a tomar en cuenta, la velocidad de convergencia a la derivada y el error de estimación.

1.5. Contribuciones

La propuesta de un esquema de control para la velocidad angular de un motor de corriente directa. La cual se basa en la estimación de la velocidad angular por medio de algoritmos por modos deslizantes de ganancia variable. Y la comparación de este último con otros métodos de diferenciación para obtener la velocidad.

1.6. Estructura de la tesis

Este trabajo se divide en 5 Capítulos. En el Capítulo 2 se muestra la estructura de los diferenciadores analizados. En el Capítulo 3 se introduce el modelado del motor y el esquema de control. En el Capítulo 4 se implementa el esquema y se compara el rendimiento de cada diferenciador cuando se utiliza para estimar la velocidad angular que será utilizada por el controlador. Por último en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales sobre el trabajo realizado.

Diferenciadores de primer orden por Modos deslizantes

2.1. Diferenciador de Levant

Tomando la señal de entrada $f_0(t)$, que esta definida en el intervalo $[0, \infty)$ con primera derivada que tiene una constante global Lipschitz $L > 0$.

Considerando el sistema auxiliar $\dot{z}_0 = v$, donde v es la entrada de control. Hacemos que la variable de deslizamiento sea $\sigma_0 = z_0 - f_0(t)$ y dejamos la tarea de mantener $\sigma_0 = 0$ en un modo deslizante de segundo orden. En este caso sucederá que $\sigma_0 = \dot{\sigma}_0 = 0$ cuando se alcance la superficie de deslizamiento, lo que significa que $z_0 = f_0(t)$ y $\dot{z}_0 = \dot{f}_0(t) = \dot{z}_0 = v$. El sistema puede ser reescrito como

$$\dot{\sigma}_0 = -\dot{f}_0(t) + v, \quad |\ddot{f}_0| \leq L.$$

La función \dot{f}_0 puede no ser suave, pero debe de ser Lipschitz y su derivada debe existir. Por lo que, siendo este el caso, se puede utilizar una modificación del controlador Super-Twisting

$$\dot{z}_0 = v = -\lambda_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + z$$

$$\dot{z} = -\lambda_2 \text{sign}(\sigma_0).$$

Quedando

$$\dot{z}_0 = v = -\lambda_1 |z_0 - f(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z$$

$$\dot{z} = -\lambda_2 \text{sign}(z_0 - f(t)),$$

de donde tanto v como z pueden ser usadas como salidas del diferenciador.

Teorema 2.1 [7] *En ausencia de ruido para cualquier $\lambda_2 > L$ y para todo λ_1 suficientemente grande, tanto v como z convergen en tiempo finito a $\dot{f}_0(t)$, mientras z_0 converge a $f_0(t)$.*

La prueba del teorema se puede encontrar en [7] de donde las condiciones de convergencia son

$$\lambda_2 > L, \quad \lambda_1^2 \geq 4L \frac{\lambda_2 + L}{\lambda_2 - L}.$$

2.2. Diferenciador VGSTA

Rescatando el estudio del capítulo anterior, consideramos un diferenciador basado en (A.16), considerando de nuevo $z_0 = v$ como entrada de control y $\sigma_0 = z_0 - f_0(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v = z - k_1(t)\phi_1(\sigma_0) \\ \dot{z} &= -k_2(t)\phi_2(\sigma_0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Con

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mu_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + \mu_2 \sigma_0 \\ \phi_2 &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\sigma_0) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + \mu_2^2 \sigma_0. \end{aligned}$$

Para comprobar que el algoritmo pueda ser utilizado como un diferenciador hacemos el análisis basado en funciones de Lyapunov, donde el sistema estará definido por la dinámica del error de diferenciación y el trabajo de que éste converja a cero bajo la presencia de ruido de medición en $f(t)$ se lo dejamos al algoritmo (2.1). Para lo cual, definimos el error como

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= z_0 - f_0(t) \\ \sigma_1 &= z - \dot{f}_0(t) \\ \sigma^T &= [\sigma_0 \quad \sigma_1]. \end{aligned}$$

Por lo que su comportamiento dinámico queda descrito por el sistema

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -k_1 \phi_1(\sigma_0) \\ \dot{\sigma}_1 = -k_2 \phi_2(\sigma_0) - \ddot{f}_0(t). \end{cases}$$

Ahora para conocer los valores de las ganancias del diferenciador que nos aseguren la obtención de la derivada de $f_0(t)$ y por lo tanto nos aseguren que la dinámica del error tienda a cero en tiempo finito proponemos la función candidata de Lyapunov [8].

$$V(\sigma) = \zeta^T P \zeta, \quad (2.2)$$

con

$$\begin{aligned} \zeta^T &= [\phi_1(\sigma_0) \quad \sigma_1], \\ P &= P^T > 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde de nuevo tendremos la derivada de V sobre las trayectorias del sistema con la forma

$$\dot{V}(\sigma) = \phi_1'(\sigma_0) \begin{bmatrix} \zeta \\ \hat{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \hat{\rho} \end{bmatrix},$$

con

$$\hat{\rho}_2(t, \zeta) = \frac{\ddot{f}_0(t)}{\phi_1'(\sigma_0)} = \frac{2\ddot{f}_0(t)}{\phi_2(\sigma_0)} \zeta_1.$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\hat{\rho}_2(t, \zeta)| &\leq \frac{2|\ddot{f}_0(t)|}{\mu_1^2} |\zeta_1| = L(t) |\zeta_1|, \\ \frac{2|\ddot{f}_0(t)|}{\mu_1^2} &= L(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por lo que podemos reducir el problema a la resolución de

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \epsilon P + R & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.5)$$

debido a lo estudiado en el capítulo anterior. Para resolver (2.5), recordamos que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \epsilon P + R & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} = -Q, \quad (2.6)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -k_1(t) & 1 \\ -k_2(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} L(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

donde $Q = Q^T$ es una matriz positiva definida, por lo que el valor de los determinantes de sus menores principales debe ser mayor a cero, esto es:

$$q_1 = 2 \left\{ (k_1 - \frac{\epsilon}{2}) p_1 + k_2 p_2 \right\} - L(t)^2 > 0$$

$$q_2 = q_1 (-2p_2 - \epsilon p_3) - \{ (k_1 - \epsilon) p_2 + k_2 p_3 - p_1 \}^2 > 0$$

$$q_2 + 2p_2 p_3 \{ (k_1 - \epsilon) p_2 + k_2 p_3 - p_1 \} - p_3^2 q_1 - \{ (k_1 - \epsilon) p_2 + k_2 p_3 - p_1 \}^2 + 2p_2^3 + \epsilon p_3 > 0, \quad (2.8)$$

de donde hacemos que

$$\{(k_1 - \epsilon)p_2 + k_2p_3 - p_1\} = 0, \quad (2.9)$$

para reducir la dificultad del problema y obtenemos

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 \left\{ (k_1 - \frac{\epsilon}{2}) p_1 + k_2 p_2 \right\} - L(t)^2 > 0, \\ q_2 &= q_1 (-2p_2 - \epsilon p_3) > 0, \\ q_2 - p_3^2 q_1 + 2p_2^3 + \epsilon p_3 &> 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

luego, definiendo

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

con $\alpha, \beta > 0$ y resolviendo para k_1, k_2 , donde además éstas serán funciones del tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} k_1(t) &> \frac{1}{2\alpha} \left\{ L(t)^2 + \epsilon(\alpha - \beta^2) + 2\alpha\beta + \beta^3 + \frac{\beta^2(2\beta - \epsilon)}{2\beta - \epsilon - 1} \right\}, \\ k_2(t) &= \alpha + \beta(k_1(t) + \beta - \epsilon), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$2\beta > \epsilon.$$

Si seleccionamos $\epsilon = \beta$ con el fin de simplificar las ecuaciones, además de asegurar con esto que las ganancias $k_1(t), k_2(t)$ sean mayores a cero para cualquier valor de $\alpha, \beta > 0$, finalmente tenemos

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \eta + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{4|\dot{f}(t)|^2}{\mu_1^4} + 3\alpha\beta + \frac{\beta^3}{\beta+1} \right), \\ k_2(t) &= \alpha + \beta k_1(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\alpha, \beta, \eta > 0.$$

2.3. Simulaciones

Para comparar la velocidad de convergencia del algoritmo propuesto se realizaron algunas simulaciones. Para las simulaciones se utilizó un valor de L constante para el diferenciador de Levant y se calculó la cota para el otro diferenciador como se muestra en (2.4). En las siguientes tablas se muestran los valores de las ganancias del diferenciador de Levant y las constantes utilizadas en el diferenciador VGSTA.

Ganancia	Valor
λ_0	$1.5\sqrt{L}$
λ_1	$1.1L$

Tabla 2.1: Diferenciador de Levant

Ganancia	Valor
α	60
β	1
η	1
μ_1, μ_2	1

Tabla 2.2: Diferenciador GSTA

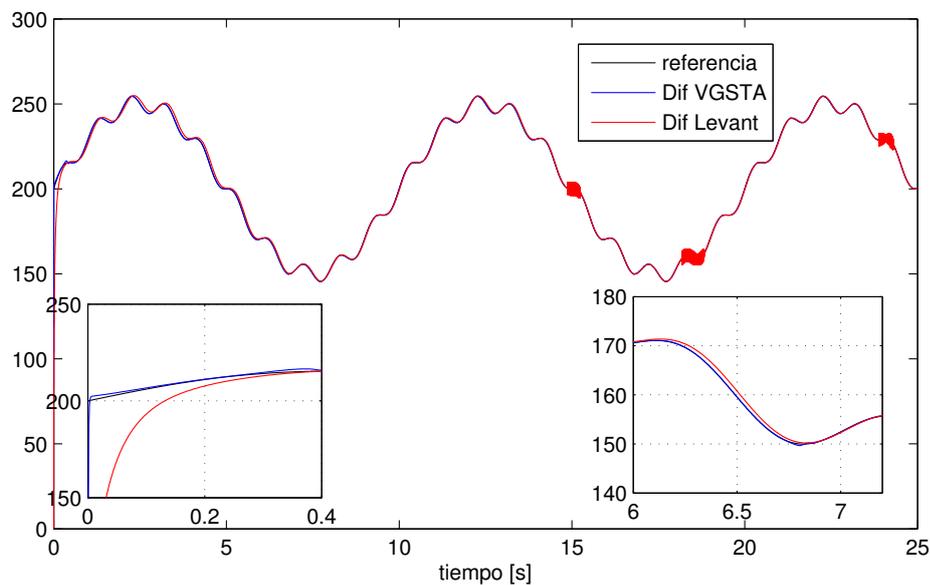


Figura 2.1: Diferenciadores (suma de senoidales)

En este caso es muy claro que el diferenciador VGSTA converge en menos tiempo a la derivada de la señal que el otro diferenciador, el primero alcanza a la función en menos de 0.2 segundos, mientras que el otro lo hace hasta cerca de seis segundos después, además se observa que la señal producida por el VGSTA es más suave.

Modelado de la planta y esquema de control

3.1. Modelo del motor de corriente directa

El motor utilizado puede ser representado por la Figura 3.1, que muestra un circuito equivalente de un motor de corriente directa acoplado a su parte mecánica con excitación independiente, es decir, que el circuito del estator y del rotor no se encuentran conectados eléctricamente.

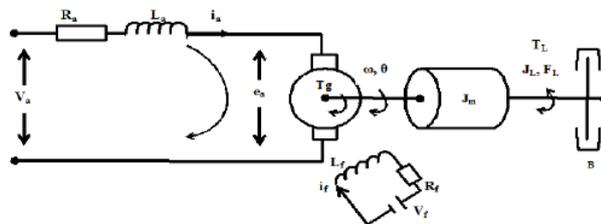


Figura 3.1: Motor DC

Podemos suponer que este es el caso de nuestro motor, considerando que el flujo magnético generado por la excitación es constante, ya que es producido por un imán permanente.

$$\phi(i_f) \equiv cte.$$

Y donde todas las demás variables mostradas en la Figura 3.1 se definen como se muestra en la Tabla 3.1.

Variable	Descripción
e_a	Fuerza electromotriz inducida
V_a	Voltaje de armadura
R_a	Resistencia de armadura
L_a	Inductancia de armadura
i_a	Corriente eléctrica de armadura
T_g	Par generado
θ	Posición angular
ω	Velocidad angular
J	Momento de inercia de los componentes referidos al eje del motor
b	Coefficiente de fricción viscosa del motor

Tabla 3.1: Variables y parámetros del motor

3.1.1. Ecuaciones eléctricas

Para obtener el modelo dinámico en variables de estado del sistema, primero se determina la ecuación que representa el comportamiento de la parte eléctrica, aplicando leyes de Kirchhoff tenemos

$$V_a = v_{ra} + v_{la} + e_a, \quad (3.1)$$

donde v_{ra} es la diferencia de potencial debida a la resistencia de armadura y v_{la} la que es producida por la inductancia de la armadura. Sabemos que las ecuaciones del comportamiento de los elementos eléctricos son

$$v_{ra} = R_a i_a, \quad v_{la} = L_a \frac{di_a}{dt},$$

y sustituyendo éstas en (3.1) tenemos

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a, \quad (3.2)$$

donde e_a , que se define como la fuerza contraelectromotriz, puede representarse como una diferencia de potencial que se añade a la producida por los elementos pasivos de la armadura del motor y es proporcional a la velocidad angular con la que gira el rotor y al flujo magnético producido por la excitación, de la forma

$$e_a = k\phi\omega.$$

Sabiendo que el flujo magnético es producido por el circuito de excitación y que puede considerarse constante, tenemos

$$e_a = k_e \omega. \quad (3.3)$$

3.1.2. Ecuaciones Mecánicas

Para conocer el comportamiento mecánico del sistema sabemos de la segunda ley de Newton que

$$T_m = T_J + T_b, \quad (3.4)$$

donde T_J es el par debido a la inercia del motor y que T_b el par producido por las fuerzas de fricción que se oponen al movimiento. Sabemos además que el comportamiento dinámico de éstos está descrito por las ecuaciones

$$T_J = J \frac{d\omega}{dt} \quad T_b = b\omega,$$

que sustituyendo en (3.4) obtenemos

$$T_m = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega. \quad (3.5)$$

Ahora para relacionar los subsistemas mecánico y eléctrico sabemos que el par mecánico debe ser igual al par generado por el motor, esto es:

$$T_m = T_g,$$

de donde el par desarrollado por el motor es directamente proporcional al flujo magnético en el campo y a la corriente de armadura, pero considerando que el flujo es constante, tenemos

$$T_g = k_t i_a. \quad (3.6)$$

3.1.3. Modelo en variables de estado

Definiendo el estado del sistema como

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix},$$

sustituyendo la ecuación (3.6) en (3.5) y despejando $\dot{\omega}$ tenemos:

$$\dot{\omega} = -\frac{b}{J}\omega + \frac{k_t}{J}i_a. \quad (3.7)$$

Ahora sustituyendo la ecuación (3.3) en (3.2) y despejando \dot{i}_a se obtiene:

$$\dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{k_e}{L_a}\omega + \frac{1}{L_a}V_a. \quad (3.8)$$

obtenemos la representación en variables de estado de la siguiente forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{k_t}{J} \\ -\frac{k_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_a \quad (3.9)$$

$$y = [1 \quad 0] x.$$

Nota El motor de corriente directa es un sistema estable si sólo se consideran la velocidad y la corriente como variables de estado, en caso de que se necesite controlar la posición se puede definir como otra variable de estado del sistema, en cuyo caso el sistema sera inestable en sentido BIBO si se considera la posición como salida, es decir, para algunos tipos de señal de entrada acotadas la posición no será acotada.

3.1.4. Función de transferencia

Para el diseño del controlador, es necesario conocer la función de transferencia del sistema, por lo que sabemos ésta se define como

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

con las matrices A , B , C como se muestran en (3.9), obteniendo

$$G(s) = -\frac{\frac{k_t}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a}\right)s + \frac{bR_a + k_e k_t}{JL_a}}. \quad (3.10)$$

3.2. Esquema de control

3.2.1. Controlabilidad

Para determinar si es posible o no realizar control sobre la velocidad del motor, es necesario hacer un análisis de controlabilidad del sistema [11].

Considerando el sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

diremos que el par (A, B) es controlable en un intervalo de tiempo $[0, T]$ si para cualquier estado inicial x_0 y estado final x_T , existe una entrada de control u tal que la solución del sistema dinámico satisface

$$x(T) = x_T.$$

Para establecer la controlabilidad del sistema se utiliza el criterio de la matriz de controlabilidad, el cual nos dice que un sistema lineal invariante en el tiempo sera controlable si y solo sí la matriz

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

es de rango completo. Aplicando el criterio anterior al motor, obtenemos la siguientes matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_t}{JL_a} \\ \frac{1}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a^2} \end{bmatrix},$$

de la que es fácil observar que tiene rango dos y por lo tanto el sistema es controlable.

3.2.2. Controlador

Debido a que se requiere que la velocidad angular del rotor siga a una señal de referencia, se aplica un control en función del error de seguimiento de velocidad, donde lo que se busca es mejorar la velocidad de respuesta del sistema, sin afectar la estabilidad, para lo cual utilizamos un controlador de la forma PI, ya que siempre que se pueda asegurar estabilidad del sistema en lazo cerrado, el controlador PI nos asegura disminuir de manera importante el error.

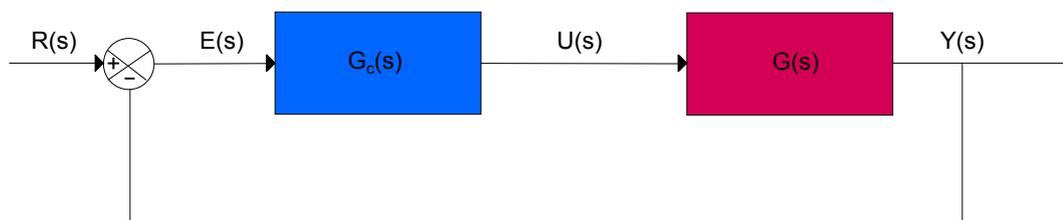


Figura 3.2: Diagrama de bloques del controlador

Del diagrama de bloques presentado en la Figura 3.2 se obtiene la función de transferencia del sistema con controlador, esto es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}, \quad (3.11)$$

la cual nos servirá para estudiar los efectos del controlador sobre el sistema y para la tarea de sintonización.

3.2.3. Acción de control proporcional

La acción de control proporcional esta definida por

$$u = K_P e,$$

con transformada de Laplace

$$U(s) = K_P E(s), \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P. \quad (3.12)$$

Sabiendo que la función de transferencia de un sistema se define como el cociente de dos polinomios, y sustituyendo (3.12) en (3.11) tenemos

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s)K_P}{D(s) + N(s)K_P},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son el numerador y denominador de la función de transferencia de la planta respectivamente. Si el sistema es causal se cumple que $n \geq p$, donde n y p son los grados de los polinomios $D(s)$ y $N(s)$ respectivamente. Desarrollando tenemos

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_P(s^p + b_1s^{p-1} + b_2s^{p-2} + \dots + b_{p-2}s + b_{p-1})}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + (a_{n-p} + K_P)s^p + \dots + (a_{n-1} + K_Pb_{n-1})}.$$

De donde si el polinomio $s^n + a_1s^{n-1} + \dots + (a_{n-p} + K_P)s^p + \dots + (a_{n-1} + K_Pb_{n-1})$ es Hurwitz, se puede asegurar la estabilidad del sistema, es claro que el diseño de K_P puede asegurar estabilidad en algunos casos.

3.2.4. Acción de control integral

Del mismo modo la función de transferencia tiene la forma de (3.11) y definimos

$$u = K_I \int_0^t e d\tau,$$

con transformada de Laplace

$$U(s) = \frac{K_I}{s} E(s), \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}. \quad (3.13)$$

Y definiendo la función de transferencia del error como

$$E(s) = R(s) - Y(s),$$

suponiendo que existe una perturbación $\psi(t)$ que entra en el mismo canal que el controlador y sustituyendo (3.13) en (3.11) y descomponiendo de nuevo $G(s)$ tenemos

$$E(s) = s \frac{R(s)D(s) - N(s)\Psi(s)}{sD(s) + K_I N(s)}.$$

Donde, siempre que $\Psi(s)$ y $R(s)$ no contengan el término s^2 en su denominador y recordando el teorema del valor final, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0,$$

como se puede observar que el control integral reduce en un orden el error en estado estable del sistema original, lo que significa por ejemplo, que si el sistema original tiene una entrada constante o una perturbación también constante, éste será capaz de llevar el error a cero, sin embargo el costo de esto es aumentar el orden del sistema en lazo cerrado, hecho que podría comprometer la estabilidad.

Nota En el motor, hacer control PI sobre la velocidad es equivalente a realizar un control PD sobre la posición, lo cual es consistente con el hecho de que la posición es inestable y requiere de ese tipo de controlador para estabilizarla.

3.2.5. Diseño del controlador

A simple vista se puede notar que un controlador PI mejoraría el error en estado estable a costa de aumentar el orden del sistema en lazo cerrado lo que podría comprometer la estabilidad. Sin embargo, si la ubicación de los polos de lazo cerrado se selecciona adecuadamente, se pueden mejorar tanto el amortiguamiento como el error en estado estable además de poder asegurar la estabilidad del sistema.

Para realizar el diseño del controlador podemos escribir la función de transferencia del controlador como

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I(1 + (K_P/K_I)s)}{s},$$

que sustituyendo junto a (3.10) en la ecuación (3.11), nos da como resultado la función de transferencia en lazo cerrado de la forma

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{H(K_P s + K_I)}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) + H(K_I + K_P s)} \\ &= \frac{H(K_P s + K_I)}{s^3 - (\lambda_1 + \lambda_2)s^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + H K_P)s + H K_I}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$H = \frac{kt}{JL_a}$$

y λ_1, λ_2 son los polos del sistema en lazo abierto, sabemos además que $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$ debido a que λ_1 se rige en mayor parte por la dinámica de la parte eléctrica del sistema y λ_2 por la parte mecánica

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -\frac{R_a}{L_a}, \\ \lambda_2 &= -\frac{bL_a + R_a J - \sqrt{L_a^2 b^2 - 2JL_a(R_a b + 2k_t k_e) + R_a^4}}{2JL_a}. \end{aligned}$$

Definiendo T_I como el inverso de la llamada “velocidad de reajuste”, que es la cantidad de veces por segundo que se duplica la parte proporcional de la acción de control [11]. Si

además se define la constante de control integral como una función de K_P y el tiempo integral T_I tenemos

$$p(s) \approx s^3 + \frac{R_a}{L_a} s^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + H K_P) s + H K_P \left(\frac{1}{T_I} \right).$$

De donde los valores de los polos en lazo cerrado serán función de las ganancias del controlador, sin embargo existe un polo cuyo valor es más dependiente de la dinámica de la parte eléctrica del motor que de las ganancias del controlador, además es muy grande en magnitud, estable y varía poco respecto a las ganancias del controlador, por lo que éste no nos interesa para sintonizar las ganancias de lazo cerrado. En la Figura 3.3 se muestra la variación del polo mencionado para $T_I = 0.08$ y $K_P \in [0, 10]$

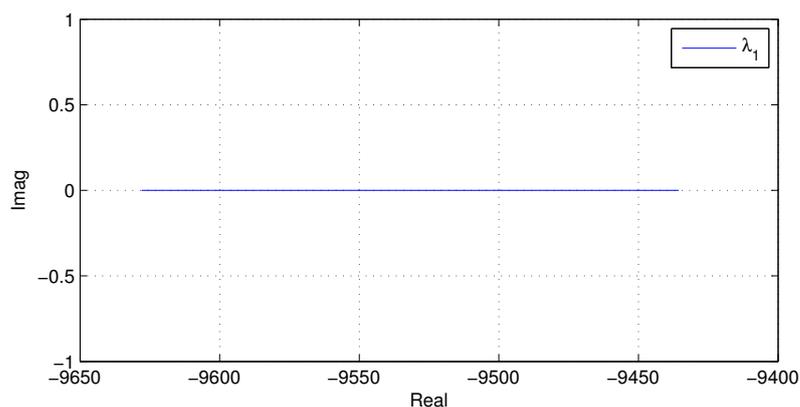


Figura 3.3: Lugar geométrico del polo rápido

Para la ubicación de los otros dos polos definimos una constante de tiempo integral T_I que nos permita aumentar la velocidad de los mismos, sin que los esfuerzos de control sean demasiado grandes, después podemos hacer un barrido sobre valores de K_P y ver el comportamiento de las raíces del polinomio característico.

3. MODELADO DE LA PLANTA Y ESQUEMA DE CONTROL

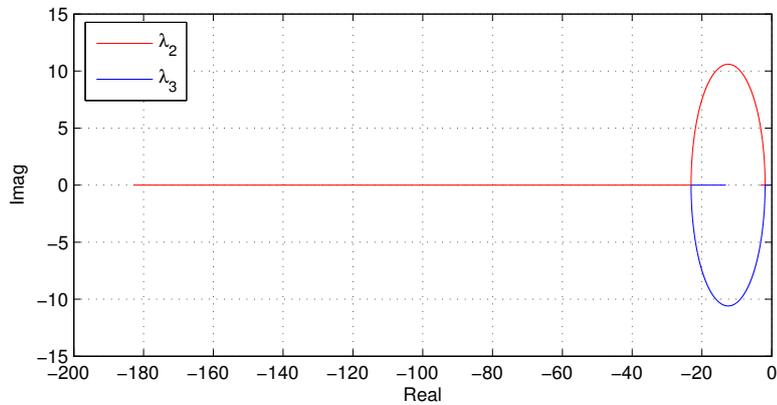


Figura 3.4: Lugar geométrico de las raíces lentas con un controlador PI

En la Figura 3.4 se muestra el comportamiento de dichos polos, el cual es muy similar para distintos valores de T_I , que sólo varia la amplitud de la elipse cuando los polos son complejos conjugados. Donde se observa que para valores grandes de K_P el polo en λ_3 tiende de nuevo a cero, por lo que conviene ubicar los polos de forma que este polo tenga su parte real lo más negativa posible.

Resultados

4.1. Simulaciones

Como paso previo a la implementación sobre la planta, probamos el lazo de control en simulaciones, donde utilizamos la representación en variables de estado del sistema de la forma (3.9). Cabe señalar que la mayor parte de los experimentos y simulaciones se realizan de modo que la señal obtenida por el diferenciador sea usada en el lazo de control aplicado a la planta. Para realizar las simulaciones y sintonizar los controladores se requieren los parámetros aproximados de la planta, los cuales se muestran en la Tabla 4.1.

Parámetro	Descripción	Valor
R_a	Resistencia de armadura	3.565[Ω]
L_a	Inductancia de armadura	37[μH]
I_n	Corriente nominal de armadura	2.5[A]
V_n	Voltaje nominal entre las terminales del motor	90[V]
J	Momento de inercia referido al eje del motor	0.011[$kg \cdot m^2$]
b	Coefficiente de fricción viscosa del motor	0.0005[$N \cdot m \cdot s$]
k_t	Contante de par	0.37 [$\frac{N \cdot m}{A}$]
k_e	Constante de velocidad	0.37 [$\frac{rad}{V \cdot s}$]

Tabla 4.1: Valor de los parámetros del motor

4.1.1. Sintonización del controlador

Para la sintonización del controlador, de la Figura 3.4 sabemos que la mejor sintonización posible, es aquella que nos permita tener los polos mas rápidos sin que ello

4. RESULTADOS

requiera de esfuerzos de control excesivos, por lo que para una T_I dada que no eleve la magnitud de la señal de control por encima de un límite de saturación establecido podemos hacer gráficas de la ubicación de las raíces en lazo cerrado con respecto a la ganancia K_P y con ello obtener las ganancias que se usaran para el control de la planta.

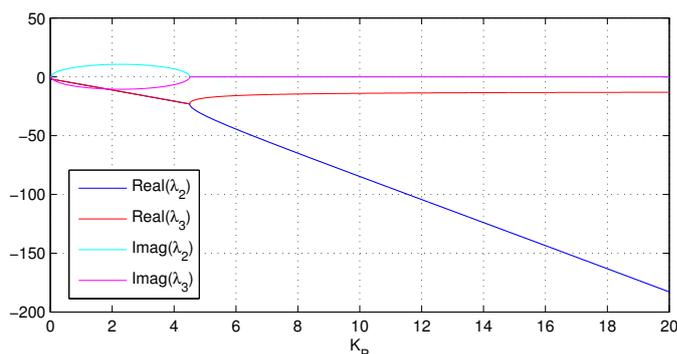


Figura 4.1: Polos lentos en lazo cerrado

De la Figura 4.1 se puede ver que los polos en lazo cerrado del sistema tienen su mejor valor cuando los dos más lentos dejan de ser conjugados, ya que es en este momento que su parte real tiene la mayor magnitud y dejan de tener parte imaginaria, el otro polo no se toma en cuenta, ya que como se había mencionado previamente, está dominado por la parte eléctrica del sistema, es estable y muy rápido, además de que no se ve tan afectado como éstos por las ganancias del controlador, hecho que se muestra en la Figura 4.2, cabe mencionar que la parte imaginaria de este tercer polo es cero para valores de K_P no muy grandes.

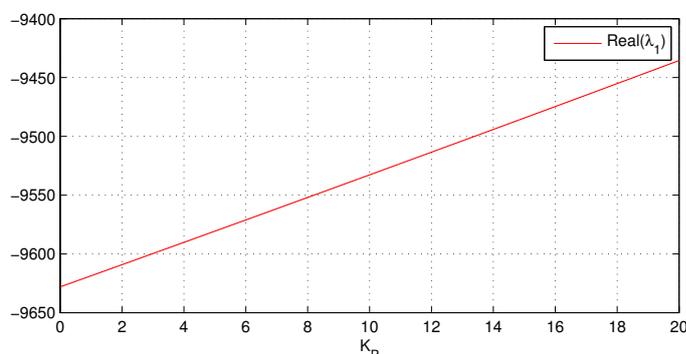


Figura 4.2: Polo rápido en lazo cerrado

De las gráficas se eligieron las ganancias para el controlador como se indica en la Tabla 4.2.

Ganancia	Valor
K_P	4.25
$\frac{1}{T_I}$	12

Tabla 4.2: Ganancias del controlador

4.1.2. Sintonización de los Diferenciadores

Ahora, para probar diferenciador VGSTA y compararlo con otros métodos, de las ecuaciones (2.13) se definen las constantes de forma que nos entreguen un buen resultado de diferenciación. Además de sintonizar el diferenciador de Levant de manera que entregue la estimación con el menor error posible y manteniendo las condiciones mostradas en [7].

Ganancia	Valor
λ_0	9
λ_1	70

Tabla 4.3: Diferenciador de Levant (simulaciones)

Ganancia	Valor
α	40
β	1
η	1
μ_1	1
μ_2	5

Tabla 4.4: Diferenciador VGSTA (simulaciones)

4.1.3. Resultados

Con el fin de observar el comportamiento de los diferenciadores cuando la cota de la segunda derivada de la posición tiene distintas magnitudes, se genera una señal de referencia que durante la mitad de su periodo realiza un ciclo completo de una función senoidal y la otra mitad permanece en cero, la velocidad estimada por el diferenciador seguirá la referencia y se observarán el error de estimación y la señal de control generada.

4. RESULTADOS

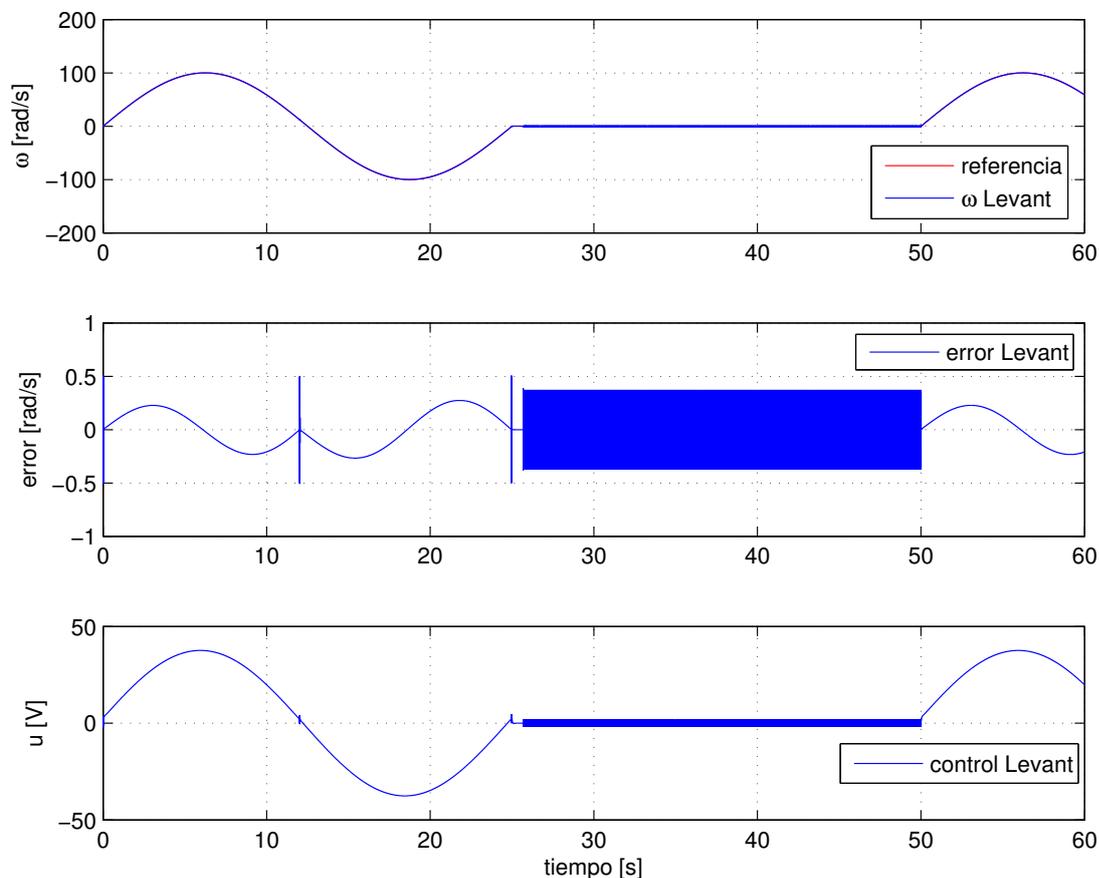


Figura 4.3: Simulaciones Levant

En la Figura 4.3 se puede observar que a pesar de que el diferenciador de Levant presenta una buena estimación de la derivada, que cuando la señal tiene un valor diferente de cero el error tiene una forma continua y magnitud pequeña, sin embargo para valores pequeños de la cota de la derivada de la velocidad, presenta *chattering*, que afecta de manera importante a la señal de control, que en los momentos en que debería de tener un valor cero se vuelve discontinua. Este comportamiento, dependiendo de su magnitud, podría ser un problema para sistemas que no toleren conmutaciones de alta frecuencia.

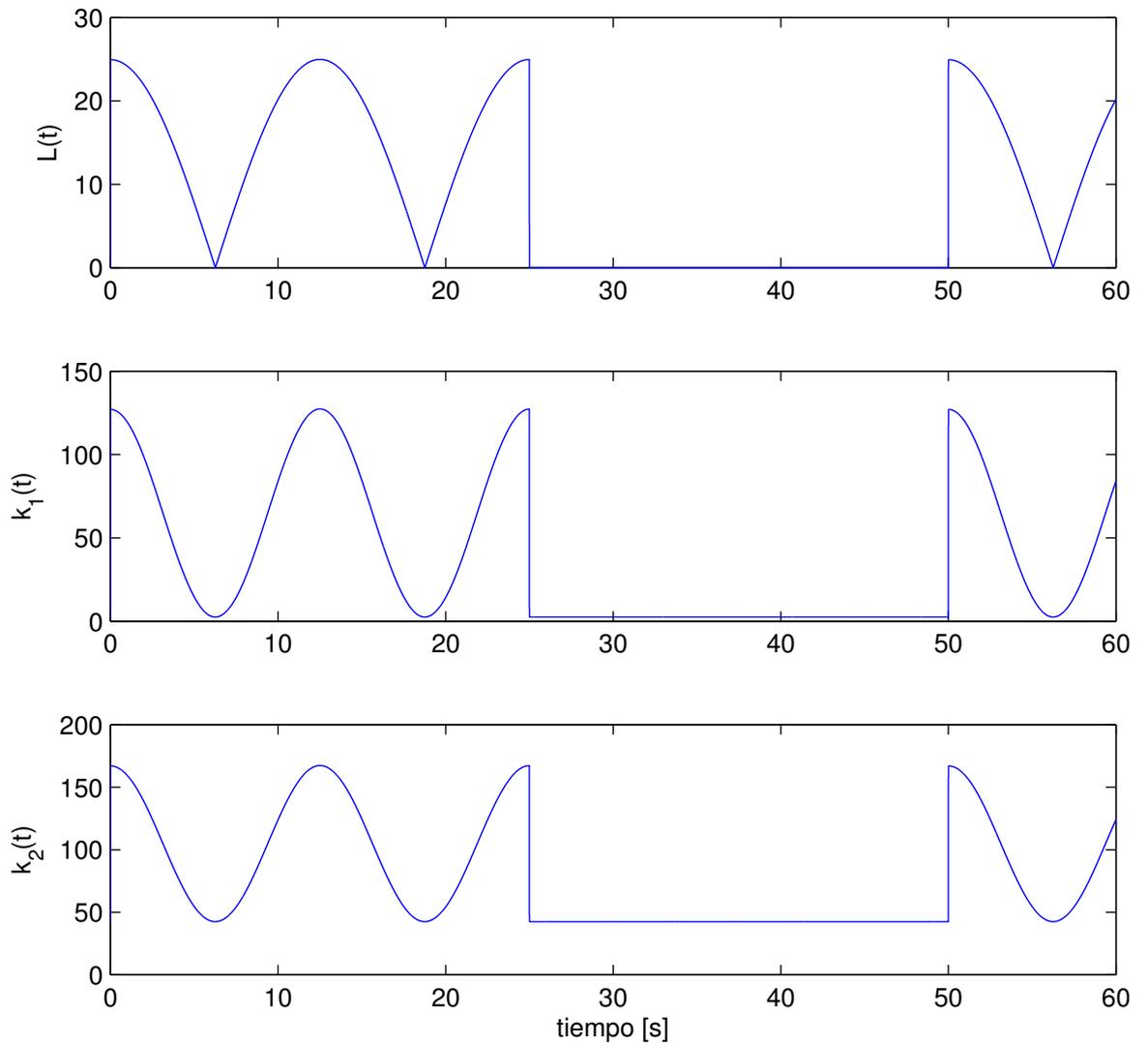


Figura 4.4: Cota de aceleración y Ganancias (simulaciones)

En la Figura 4.4 se muestra la cota de la aceleración angular del sistema simulado y las ganancias del diferenciador VGSTA que se obtienen para dicha señal, se puede observar que éstas tiene su valor mas pequeño cuando la velocidad angular permanece en cero, esto se debe a que son funciones de la aceleración y ésta no varia en ese momento, generando ganancias que nos permiten reducir los efectos de las discontinuidades.

4. RESULTADOS

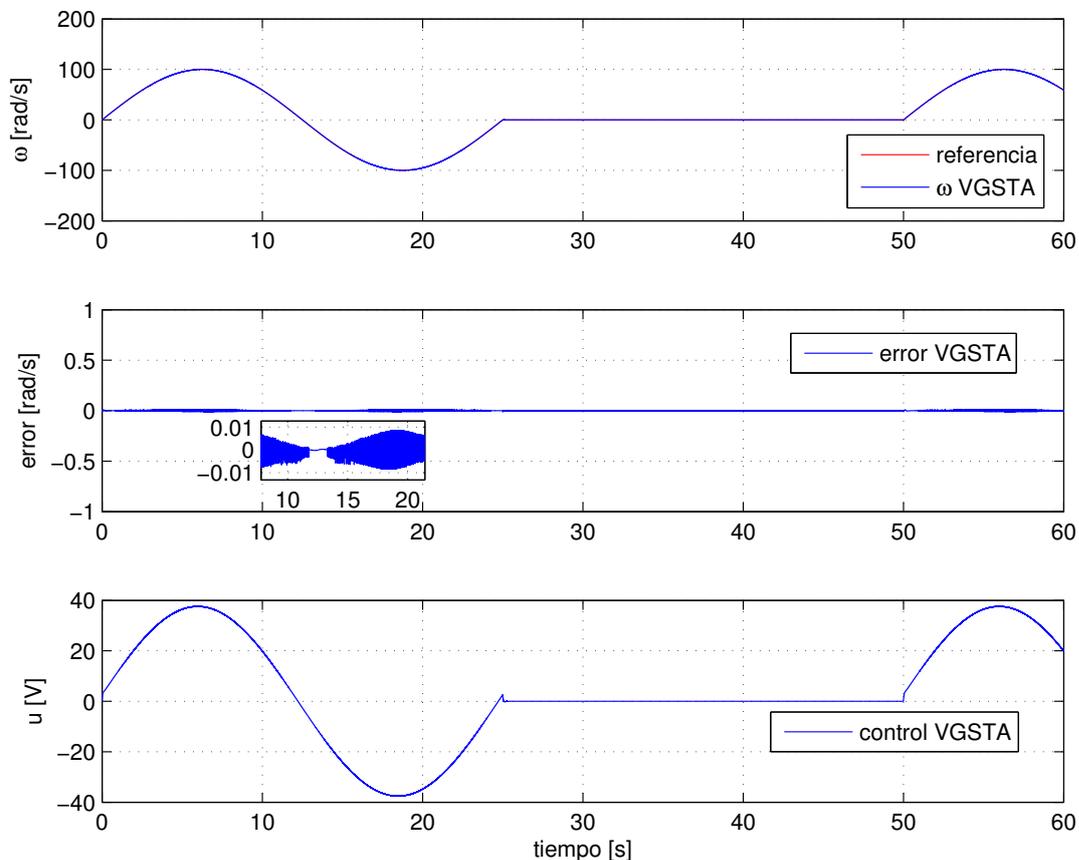


Figura 4.5: Simulaciones VGSTA

De la Figura 4.5 se observa que el error de la estimación del diferenciador VGSTA es mucho menor en todo momento (alrededor de 50 veces menor que en el caso anterior) y lo es sobre todo cuando la cota de la segunda derivada de la función es cero, como se observa en la Figura 4.4, por lo que no tiene un gran efecto sobre la señal de control, donde es fácil apreciar que permanece prácticamente continua y su valor es muy cercano a cero cuando el sistema se encuentra en reposo.

La siguiente simulación se realizó de manera distinta, se tomó como realimentación la propia velocidad angular del sistema simulado y se tomaron las estimaciones de ambos diferenciadores además de la derivada de *Matlab*, la cual es realizada por el siguiente algoritmo

$$\dot{u} \approx y(t) = \frac{1}{\Delta t}(u(t) - u(t - \Delta t)),$$

y finalmente se comparó su comportamiento de todos los diferenciadores cuando la señal a diferenciar está cuantizada.

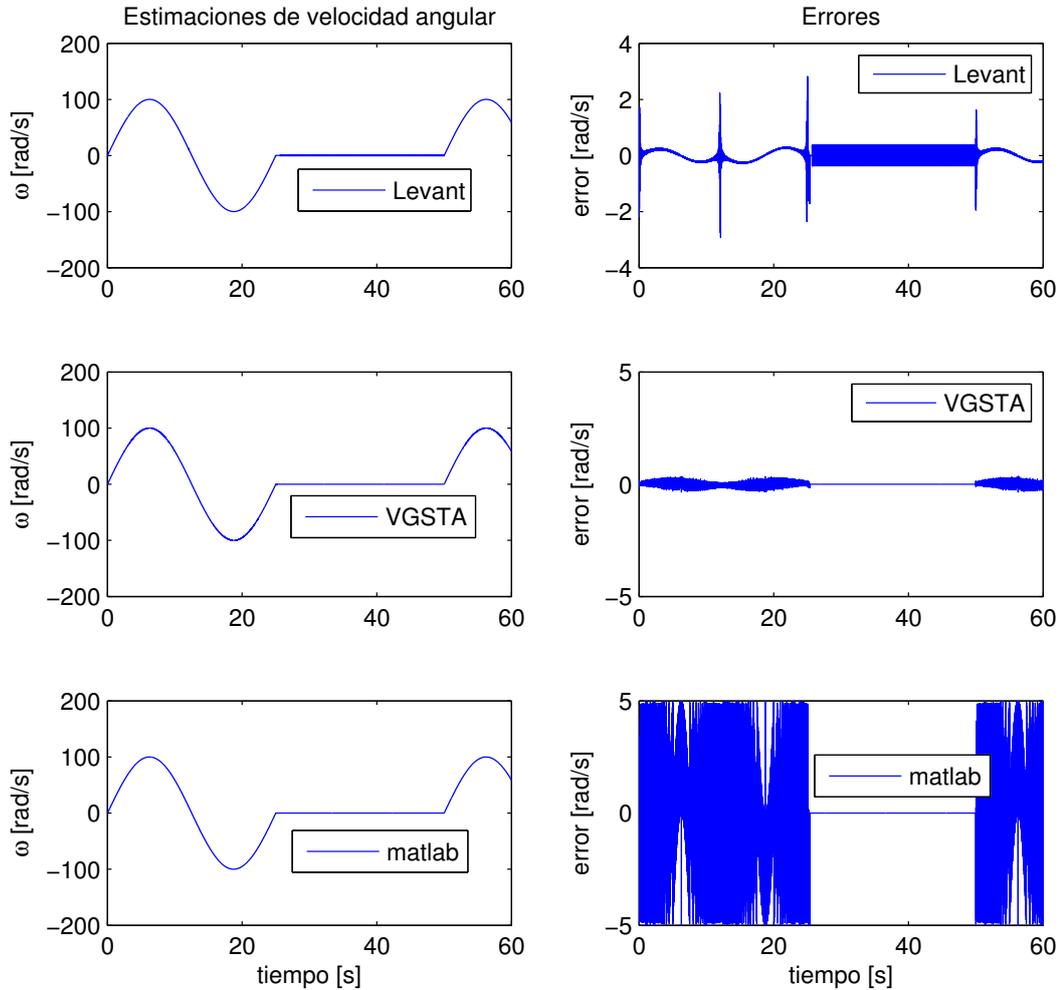


Figura 4.6: Estimaciones

En la Figura 4.6 se muestran los resultados arrojados por la simulación mencionada, se puede observar que a pesar de que todos los métodos parecen realizar una estimación aceptable de la velocidad angular al comparar los errores se puede notar que la derivada definida por *Matlab* tiene un error de mucho mayor amplitud y discontinuo cuando hay variación en la derivada, este efecto es producido por el ruido de cuantización, sin embargo es la única que llega a cero cuando la derivada no varía, por otro lado, los otros dos métodos presentan un comportamiento similar al mostrado en las Figuras 4.3

y 4.5, aumentado solo la magnitud de los errores, hecho esperable debido a que ahora la señal a diferenciar contiene ruido.

4.2. Pruebas experimentales

Experimentalmente se repiten las dos primeras pruebas realizadas en simulaciones y se vuelve a poner atención en el error de estimación y la señal de control producida.

4.2.1. Descripción de la planta

Para realizar los experimentos sobre el sistema físico, se debe acondicionar la planta y los instrumentos utilizados. Por un lado tenemos como salida del sistema la posición angular de la flecha del motor, la cual se mide por medio de un codificador incremental de cuadratura, esta señal será diferenciada para estimar la velocidad angular, variable sobre la cual se realizará el control. Por otro lado tenemos una señal analógica que nos entrega el medidor de par y que será utilizada para hacer una estimación en línea de la cota de la aceleración angular del sistema, que nos servirá para calcular las ganancias del diferenciador. Estas señales nos servirán para calcular el control, que será una señal *PWM* que controlará el voltaje que el inversor entrega al motor.

Todos los cálculos de este proceso, así como la recepción y envío de la señales, los llevará a cabo la tarjeta dSPACE 1104 (ver apéndice B). Por lo qué, como paso previo se debe generar el lazo de control sobre *Simulink*, después se debe compilar el diagrama generado, con lo que se genera el programa que se cargara sobre la tarjeta con ayuda del programa *ControlDesk*, mismo que nos permite capturar los datos y hacer sintonización en línea. En la Figura 4.7 se muestra el esquema descrito anteriormente.

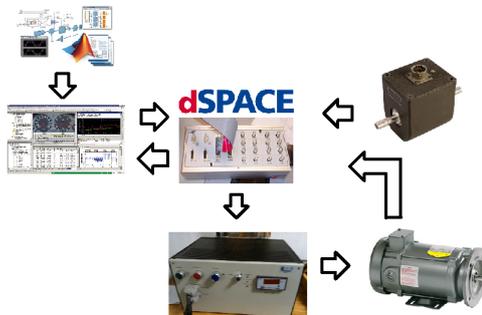


Figura 4.7: Esquema

En la Figura 4.8 se puede muestra la plataforma experimental, del lado izquierdo de la misma se puede observar el motor que sirve como planta, que se encuentra acoplado mecánicamente el medidor de par y a un segundo motor que ha sido utilizado como carga en otros trabajos. También se pueden observar en la parte inferior de la figura los dispositivos de protección de la plataforma.

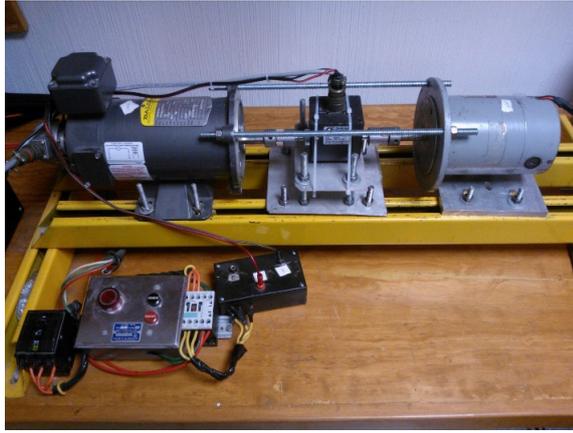


Figura 4.8: Plataforma Experimental

4.2.2. Sintonización

Para sintonizar los diferenciadores y el controlador que se implementarían sobre la plataforma física se utilizaron en primer lugar las ganancias obtenidas en las simulaciones, para después ajustarlas de forma que su comportamiento fuera el mejor. Además, la cota de la segunda derivada de la posición angular se estima utilizando la expresión:

$$L(t) = \frac{2|T|}{\mu_1^2 J}$$

Donde T es la medición en tiempo real del par.

Nota La estimación de la cota de la segunda derivada de la posición puede realizarse por medio de acelerómetros.

Y finalmente las ganancias utilizadas fueron las siguientes

Ganancia	Valor
K_P	3.5
$\frac{1}{T_I}$	16

Tabla 4.5: Ganancias del controlador

4. RESULTADOS

Ganancia	Valor
λ_0	7
λ_1	64

Tabla 4.6: Diferenciador de Levant (experimentos)

Ganancia	Valor
α	50
β	2
η	1
μ_1	1.5
μ_2	3

Tabla 4.7: Diferenciador VGSTA (experimentos)

4.2.3. Resultados

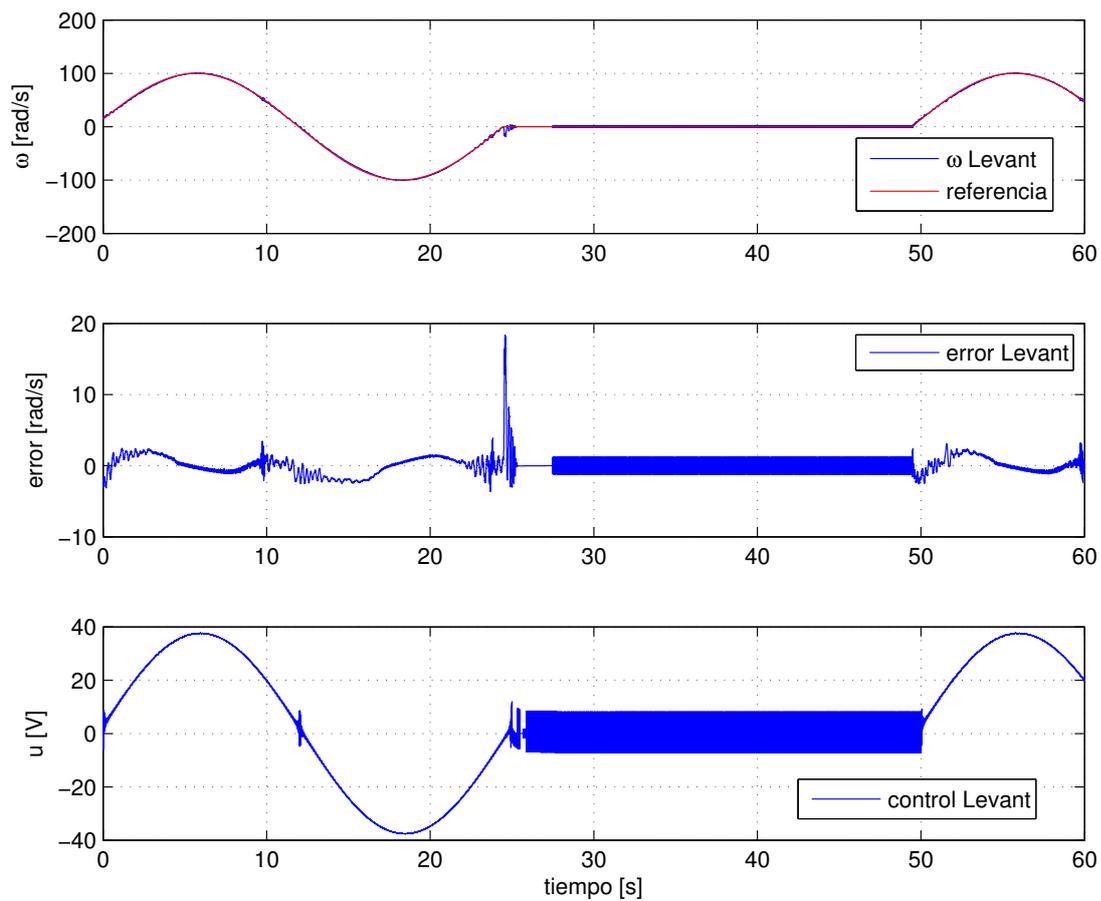


Figura 4.9: Levant

De la Figura 4.9 se puede notar que cuando la referencia permanece en cero y por lo tanto $L(t)$ es pequeña, como se observa en la Figura 4.10, el diferenciador presenta *chattering*, mismo que ya presentaba desde las simulaciones en 4.3, pero cuya magnitud se ha incrementado, razón por la cual también la señal de control se ve más afectada, sin embargo, cuando la señal tiene un valor diferente de cero realiza una buena estimación.

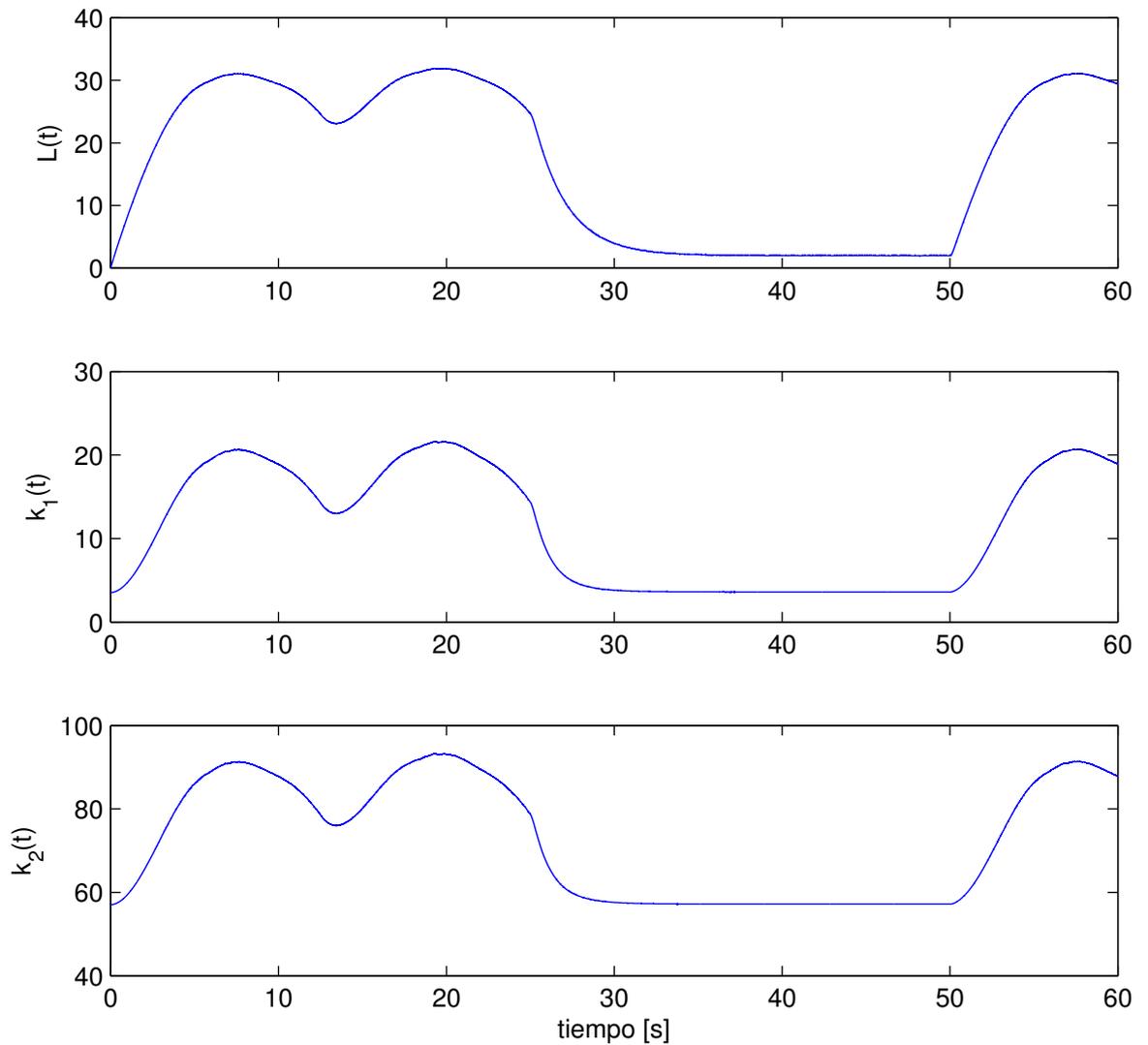


Figura 4.10: Cota y Ganancias (experimentos)

De nuevo, se puede observar en la Figura 4.10 que cuando el sistema permanece estático, la cota de la aceleración tiene una magnitud pequeña y eso se ve reflejado en

4. RESULTADOS

las ganancias que se calculan para el diferenciador VGSTA, cabe señalar que la forma de la cota en 4.10 difiere un poco de 4.4, esto puede deberse a dinámicas no modeladas como la fricción seca.

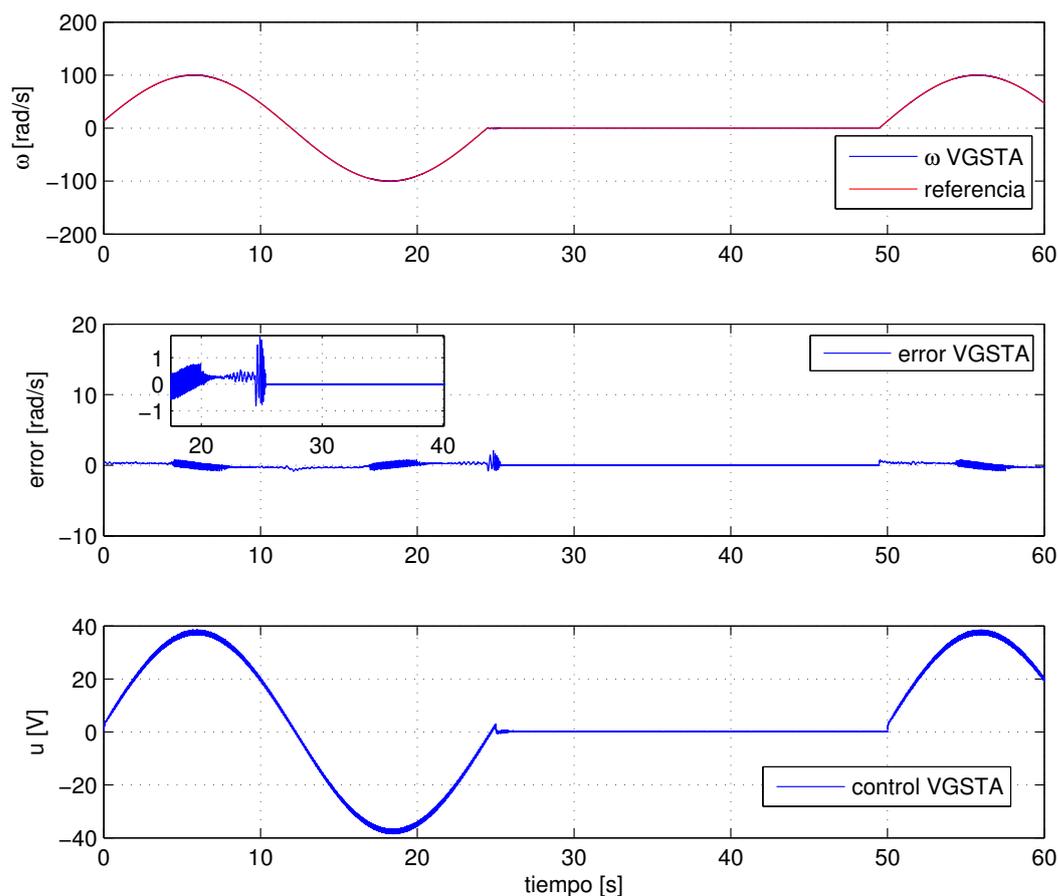


Figura 4.11: VGSTA

En este caso se puede observar que cuando $L(t)$ es pequeña, lo que significa que el diferenciador también llega a un valor mínimo en sus ganancias, esto no afecta la señal de control, que se ve más afectada cuando $L(t)$ es grande, donde la estimación presenta *chattering* de mayor magnitud, pero incluso en esos momentos, el efecto sobre la señal de control es pequeño.

Conclusiones

En este trabajo se presentó un esquema de control sobre la velocidad para un motor de corriente directa basado en un controlador lineal PI y un diferenciador por modos deslizantes de segundo orden de ganancias variables. Se mostró que el diferenciador de ganancias variables entrega una mejor estimación de la velocidad que la obtenida por uno de ganancias constantes, ya que se reduce notablemente el *chattering* cuando la cota de la segunda derivada de la señal es pequeña, además de que conserva la robustez y exactitud propia de los modos deslizantes, efecto que se nota cuando la señal a diferenciar contiene ruido, ya que se mostró que los diferenciadores por modos deslizantes son menos sensibles ante este problema. Además se comprobó que una estimación que contenga menos *chattering* genera señales de control mas suaves si se utiliza el controlador implementado en este trabajo, lo cual es siempre mejor en aplicaciones prácticas, siendo en algunos casos un requerimiento indispensable.

Con esto se prueba las ventajas que presenta este algoritmo siempre que se pueda conocer la cota de la segunda derivada de la señal a diferenciar, lo cual puede ser sencillo en sistemas mecánicos gracias sensores de aceleración.

Preliminares

A.1. Introducción

Como se había mencionado anteriormente, uno de los intereses de la ingeniería en control es el desarrollo de teorías que aseguren robustez ante perturbaciones o incertidumbres paramétricas, una de ellas es la *teoría de control por modos deslizantes* [15]. Introduciendo ésta por medio de un ejemplo, suponemos un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + f(x, t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Donde $f(x, t)$ puede contener términos no lineales, todas aquellas incertidumbres paramétricas y perturbaciones desconocidas pero que se encuentran acotadas por $|f(x, t)| \leq L > 0$. El problema es diseñar una ley de control $u(x)$ que nos permita llevar el estado de manera asintótica a cero. Ésto podría ser logrado de una manera simple si el término $f(x, t)$ es igual a cero con una ley de control lineal por realimentación de estados de la forma

$$u = -kx, \quad k = [k_1 \quad k_2], \quad k_1, k_2 > 0,$$

sin embargo, en caso de que $f(x, t) \neq 0$ esta ley de control sólo garantiza la convergencia a una región acotada $\Omega(k, L)$ para $|f(x, t)| \leq L > 0$.

A.1.1. Conceptos básicos

Definiendo una dinámica deseada para el sistema (A.1). Siendo una buena opción la ecuación diferencial homogénea lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x}_1 = -cx_1, \quad c > 0, \quad (\text{A.2})$$

cuya solución general converge a cero de forma asintótica, además sabemos que $x_2 = \dot{x}_1$, por lo que el comportamiento del sistema bajo la condición propuesta en la ecuación (A.2) tendrá la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-ct} \\ x_2(t) &= \dot{x}_1 = -cx_1(0)e^{-ct}. \end{aligned}$$

Para alcanzar este comportamiento se diseña una variable que sea función de los estados del sistema y que contenga dicha dinámica deseada para el sistema:

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1. \quad (\text{A.3})$$

De este modo se define (A.3) como la variable de deslizamiento, la cuál debe converger a cero en tiempo finito y una vez logrado esto se asegura que los estados lo hagan de manera asintótica. Para ello se diseña la ley de control u , haciendo uso de técnicas basadas en funciones de Lyapunov.

Definimos para la dinámica de σ una función candidata de Lyapunov de la forma

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (\text{A.4})$$

con intención de proveer al sistema de la estabilidad asintótica de la ecuación (A.2) sobre el punto de equilibrio, además de asegurar la convergencia en tiempo finito de la variable de deslizamiento, se debe satisfacer:

- 1.- $\dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha > 0$
- 2.- $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$

La segunda condición se cumple obviamente por V en la ecuación (A.4). Para la primera condición, si integramos la desigualdad sobre el intervalo $0 \leq \tau \leq t$, obtenemos

$$V^{\frac{1}{2}}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{\frac{1}{2}}(0), \quad (\text{A.5})$$

consecuentemente, $V(t)$ alcanza el valor cero en tiempo finito t_r que está acotado por

$$t_r \leq \frac{2V^{\frac{1}{2}}(0)}{\alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Después, se diseña una ley de control que satisfaga la ecuación (A.5) y lleve la variable de deslizamiento σ a cero en tiempo finito, para esto nos apoyamos en la siguiente ecuación:

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma(cx_2 + f(x, t) + u), \quad (\text{A.7})$$

asumiendo $u = -cx_2 + v$ y sustituyéndolo dentro de la ecuación (A.7), tenemos

$$\dot{V} = \sigma(f(x, t) + v) = \sigma f(x, t) + \sigma v \leq |\sigma|L + \sigma v. \quad (\text{A.8})$$

Seleccionando $v = -\rho \text{sign}(\sigma)$ donde

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ -1 & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

y

$$\text{sign}(0) \in [-1, 1]$$

con $\rho > 0$ y sustituyendo en la ecuación (A.8) obtenemos

$$\dot{V} \leq |\sigma|L - |\sigma|\rho = -|\sigma|(\rho - L). \quad (\text{A.10})$$

Recordando la primera condición que debía de cumplir la función (A.4) y reescribiéndola tenemos

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|, \quad \alpha > 0, \quad (\text{A.11})$$

de donde si se igualan el lado derecho de ambas desigualdades (A.10) y (A.11), obtenemos

$$\dot{V} \leq -|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|$$

Finalmente la ganancia del controlador ρ , se puede calcular como

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Por lo que la ley de control

$$u = -cx_2 - \rho \text{sign}(\sigma) \quad (\text{A.12})$$

asegura convergencia en tiempo finito $t \leq t_r$ a la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ y por lo tanto, convergencia asintótica de los estado. De los términos de la ganancia del controlador ρ , se puede concluir que para $L \geq |f(x, t)|$ se obtiene un total rechazo a perturbaciones y el término α tiene que ver con la rapidez de convergencia a la superficie, a mayor valor de α el tiempo de convergencia t_r sera menor como se muestra en la ecuación (A.6). Además es importante destacar que se requiere que la variable $\dot{\sigma}$ sea una función explicita del control u , lo que significa que el grado relativo de la superficie respecto al control sea igual a uno.

Debido a que la función (A.9) implementada en la ley de control es discontinua y cuando se alcanza la superficie $\sigma = 0$, ésta se encuentra definida dentro de un intervalo $[-1, 1]$, la ley de control se vuelve una señal conmutada, en caso ideal, la frecuencia de conmutación es cercana al infinito y esto no tiene efectos sobre la respuesta del sistema. Sin embargo la frecuencia de conmutación en aplicaciones reales es finita y es inversamente proporcional al tiempo de muestreo, por lo que en los estados y en la superficie se produce un zigzagado de alta frecuencia y amplitud finita. A dicho zigzagado se le conoce como castaño (*chattering* en ingles).

A.2. Modo deslizante asintótico

Con el fin de reducir el *chattering*, el camino más obvio es hacer que la señal de control se vuelva continua . Por lo tanto, si consideramos que la función que define al control es la integral de la función conmutada puede lograrse la continuidad de ésta. Procedemos a reescribir el sistema (A.1), añadiendo este término y obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + f(x, t) \\ \dot{u} = v \end{cases} .$$

Además sabemos que la variable de deslizamiento es llevada a cero en tiempo finito $t = t_r$, luego las variables de estado convergen de manera asintótica siempre que $t \geq t_r$. Se añade la variable de deslizamiento auxiliar

$$s = \dot{\sigma} + \bar{c}\sigma$$

Si se diseña una ley de control v que provee de convergencia en tiempo finito de la variable s , un modo deslizante ideal ocurrirá en

$$s = \dot{\sigma} + \bar{c}\sigma = 0$$

y tanto σ , $\dot{\sigma}$ como las variables de estado del sistema (A.1) convergen a cero de manera asintótica en presencia de perturbaciones acotadas $f(x, t)$. Por otro lado, no se logra un modo deslizante ideal, pero si un modo deslizante asintótico, ya que la variable de deslizamiento original σ converge a cero asintoticamente. Utilizando la ecuación (A.4) para diseñar el controlador en términos de v , tenemos

$$s\dot{s} = s(v + c\bar{c}x_2 + (c + \bar{c})(u + f(x, t)) + \dot{f}(x, t)).$$

Seleccionando $v = -c\bar{c}x_2 - (c + \bar{c})u + v_1$ y suponiendo que existe una cota $\bar{L} \geq \dot{f}(x, t)$ obtenemos

$$s\dot{s} = s(v_1 + (c + \bar{c})f(x, t) + \dot{f}(x, t)) \leq sv_1 + |s|(\bar{L} + (c + \bar{c})L),$$

seleccionando $v_1 = -\rho \text{sign}(s)$ con $\rho > 0$ y sustituyendo quedara

$$s\dot{s} \leq |s|(-\rho + \bar{L} + (c + \bar{c})L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|s|.$$

Finalmente, podemos calcular la ganancia del controlador como

$$\rho = \bar{L} + (c + \bar{c})L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

por lo que la ley de control que lleva a cero la variable s en tiempo finito, y con ello genera un modo deslizante asintótico es

$$v = -c\bar{c}x_2 - (c + \bar{c})u - \rho \text{sign}(s).$$

Nota Este algoritmo hace converger a cero la variable de deslizamiento σ y su derivada $\dot{\sigma}$, esta propiedad es rescatada en algunos algoritmos de orden superior, en específico los estudiados en este trabajo.

A.3. Modos Deslizantes de Segundo Orden

Sabemos que el control por modos deslizantes clásico asegura robustez para una gran cantidad de sistemas, sin embargo tiene la restricción de que necesita que el grado relativo de la superficie de deslizamiento respecto a la señal de control sea uno, lo que significa que el control debe estar expresado explícitamente en la primera derivada temporal de la superficie, además de que es una ley de control discontinua, lo cual puede ser inaceptable en la práctica. Para compensar estas carencias, nacieron los modos deslizantes de orden superior.

Considerando el sistema dinámico de la forma

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad \sigma = \sigma(t, x) \tag{A.13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, σ es la única salida medida, y las funciones suaves a , b , σ son conocidas y se asume que tienen todas las derivadas necesarias. La derivada total respecto al tiempo de σ se define como

$$\dot{\sigma} = \sigma'_t + \sigma'_x a + \sigma'_x b u,$$

entonces el grado relativo es uno y es posible aplicar un controlador por modos deslizantes clásico.

Suponemos que $\sigma'_x b \equiv 0$. Lo que significa que el grado relativo es mayor a uno, luego calculando la segunda derivada total

$$\ddot{\sigma} = \sigma''_{tt} + 2\sigma''_{tx}a + \sigma'_x a'_t + [\sigma''_{xx}(a + bu)]a + \sigma'_x [a'_x(a + bu)]$$

$$\ddot{\sigma} = h(t, x) + g(t, x)u, \quad g(t, x) = (\sigma''_{xx})a + \sigma'_x(a'_x b)$$

donde h es otra función explícita del tiempo y del estado apropiadamente definida. Es claro que si se cumple $\sigma'_x b \equiv 0$ el control aparece hasta la segunda derivada temporal de la superficie y entonces un controlador por modos deslizantes de segundo orden es necesario.

A.3.1. Algoritmo de Control Super-Twisting

Consideramos una vez mas el sistema dinámico (A.13) con grado relativo 1 y suponemos que

$$\dot{\sigma} = h(t, x) + g(t, x)u.$$

Además asumimos que existen algunas constantes positivas C, K_M, K_m, U_M, q tal que

$$|\dot{h}| + U_M |\dot{g}| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq g(t, x) \leq K_M$$

$$|h/g| < qU_M, \quad 0 < q < 1$$

después definimos

$$u = -\lambda |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + u_1$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M \\ -\alpha \text{sign}(\sigma), & |u| \leq U_M \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Luego, se puede afirmar.

Teorema A.1 [15] *Con $K_M \alpha > C$ y λ suficientemente grande, el algoritmo (A.14) garantiza la aparición de un modo deslizante de segundo orden $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ en el sistema (A.13), que atrae las trayectorias en tiempo finito. El control u entra en tiempo finito en el segmento $[-U_M, U_m]$ y permanece en el.*

Nota Se puede observar que el algoritmo Super- Twisting (STA por sus siglas en inglés) no requiere del conocimiento de $\dot{\sigma}$, cualidad que será explotada en tareas de diferenciación.

Una condición suficiente para la validación del teorema es

$$\lambda > \sqrt{\frac{2}{K_m \alpha - C}} \frac{(K_m \alpha) K_M (1 + q)}{K_m^2 (1 - q)} \quad (\text{A.15})$$

La prueba al teorema se puede encontrar en [15].

A.3.2. Algoritmo Super-Twisting Generalizado

El STA es una ley de control absolutamente continua diseñada para compensar perturbaciones Lipschitz con derivada acotada y asegura convergencia en tiempo finito a la superficie de deslizamiento, por lo que puede ser buena opción para substituir controladores discontinuos, además de ser un buen diferenciador y observador aun en presencia de entradas desconocidas. Basado en el STA, se propone en [8] un nuevo algoritmo de la forma

$$\begin{aligned} u = \dot{x}_1 &= -k_1 \phi_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \phi_2(x_1) \end{aligned}, \quad (\text{A.16})$$

donde x_1, x_2 son variables de estado, k_1, k_2 son ganancias de diseño positivas y

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1) &= \mu_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + \mu_2 x_1 \\ \phi_2(x_1) &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(x_1) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + \mu_2^2 x_1 \end{aligned} \quad \mu_1, \mu_2 > 0.$$

Es importante decir que la estructura del controlador es similar al STA estándar pero añadiendo en ambas funciones términos de corrección lineales que permiten un mayor rechazo de las perturbaciones. En el artículo [8] se propone una función de Lyapunov para analizar la estabilidad del algoritmo y su convergencia en tiempo finito, definiendo la función candidata como la forma cuadrática:

$$\begin{aligned} V(x) &= \zeta^T P \zeta \\ P &= P^T > 0 \end{aligned}, \quad (\text{A.17})$$

donde ζ se define como $\zeta^T = [\phi_1(x_1) \quad x_2]$, considerando que el sistema no se encuentra perturbado, la derivada de la función sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(x) = \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta P \dot{\zeta}^T,$$

donde

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(x_1) A \zeta, \quad \phi_1'(x_1) = \frac{\mu_1}{2} |x_1|^{-\frac{1}{2}} + \mu_2.$$

Finalmente la derivada de la función candidata tendrá la forma

$$\dot{V}(x) = \phi_1'(x_1) \zeta^T (A^T P + P A) \zeta.$$

Lo que lleva a resolver la ecuación algebraica de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A.18)$$

donde $k_1, k_2 > 0$, con lo cual la matriz A es Hurwitz. Se garantiza la convergencia del algoritmo para toda matriz simétrica y positiva definida $Q = Q^T > 0$, y la función V sera una función de Lyapunov global para el algoritmo super-twisting generalizado (GSTA por sus siglas en inglés). En caso de que el sistema esté perturbado o considerando variaciones paramétricas respecto al tiempo, reescribimos el sistema como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 \phi_1(x_1) + x_2 + b_1 \rho_1(t, x) \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \phi_2(x_1) + b_2 \rho_2(t, x) \end{aligned} \quad (A.19)$$

Donde, usando el vector ζ nos es posible escribir

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(x_1) (A \zeta + B \hat{\rho})$$

con

$$\phi_1'(x_1) = \frac{\mu_1}{2} |x_1|^{-\frac{1}{2}} + \mu_2$$

$$\hat{\rho}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \rho_1(t, x) \\ \frac{\rho_2(t, x)}{\phi_1'(x_1)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

Que nos permite escribir la función \dot{V} de forma matricial

$$\dot{V} = \phi_1'(x_1) \begin{bmatrix} \zeta \\ \hat{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \hat{\rho} \end{bmatrix}$$

Donde la función $\phi_1'(x_1)$ es positiva definida. Sabemos además, que existe una función vectorial $L_i(\zeta, t)$, que cumple con $|\hat{\rho}_i(t, \zeta)| < L_i(\zeta, t)^T \zeta$, por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \omega_i(\hat{\rho}_i, \zeta) &= [\hat{\rho}_i(t, \zeta) + L_i^T \zeta] [-\hat{\rho}_i(t, \zeta) + L_i^T \zeta] \geq 0 & (\text{A.20}) \\ &= -\hat{\rho}_i^2 + \zeta^T L_i L_i^T \zeta \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\rho}_i \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & \bar{0}^T \\ \bar{0} & L_i L_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_i \\ \zeta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que el paso siguiente, es extenderlo para ambas perturbaciones

$$\begin{aligned} \omega(\hat{\rho}, \zeta) &= \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Theta & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \zeta \end{bmatrix} \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad \theta_1, \theta_2 > 0 \\ R &= \theta_1 L_1 L_1^T + \theta_2 L_2 L_2^T \end{aligned}$$

Es posible asegurar la convergencia en tiempo finito del algoritmo (A.16) cuando se satisface lo siguiente .

Teorema A.2 [8] *Suponiendo que existe una matriz simétrica y positiva definida $P = P^T > 0$, constantes positivas $\theta_1, \theta_2 > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que la desigualdad matricial*

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + \epsilon P + R & P B \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} \leq 0$$

tenga solución. En este caso todas las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen para todas las perturbaciones que satisfacen $\omega(\hat{\rho}, \zeta) \geq 0$. Además todas las trayectorias alcanzan el origen en un tiempo

$$T \leq \frac{2}{\mu_2 \epsilon} \ln \left(\frac{2\mu_2}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}[P]} V^{\frac{1}{2}}(x_0) + 1 \right),$$

donde x_0 es el estado inicial.

La prueba al teorema se puede encontrar en [8]

Equipo experimental

B.1. Tarjeta DS1104

Esta tarjeta de la empresa dSPACE es un sistema de adquisición y generación de datos útil para el desarrollo de esquemas de control que consta de un procesador Power PC MPC8240 de 64 bits a 250 MHz, un DSP esclavo TMS320F240 de 16 bits y una memoria RAM de 32 MB.

- 4 canales de conversión analógica-digital (ADC) para la entrada de señales, con rango de $\pm 10[V]$, con un tiempo de conversión de $800[ns]$.
- 8 canales de conversión digital-analógica (DAC) para la salida de señales, con rango de $\pm 10[V]$ y corriente de salida máxima de $\pm 5[A]$, con un tiempo de conversión de $10[\mu s]$.
- Puerto digital de 20 bits en paralelo con la posibilidad de configurar cada bit para ser usado bidireccionalmente.
- Salidas de señales con modulación de ancho de pulso (PWM) que pueden ser moduladas en un intervalo de frecuencias de $20[Hz]$ a $100[kHz]$.
- Interfaz entre Simulink de MATLAB al software de la tarjeta de fácil utilización.
- “dSPACE Control Desktop”, software que permite monitorear los procesos de la tarjeta, facilita la depuración del proceso, la medición de señales, así como el manejo de los parámetros del sistema de control y observación y la posterior adquisición de datos.

- Manejo de múltiples usuarios para una misma tarjeta por medio de una red de área local (LAN).



Figura B.1: Tarjeta dSPACE 1104

Configuración

Para probar el sistema de control y observación fue necesario generar el código ejecutable sobre el procesador de la tarjeta de control (dSPACE 1104). El código se genera de forma automática a partir de un modelo en Simulink, que al ser RTW(Real Time Workshop), reproduce en tiempo real el comportamiento diseñado en el modelo. Como paso intermedio se genera de manera automática un archivo en lenguaje de programación C. La generación del ejecutable requiere de archivos de configuración del hardware que tiene como destino, un compilador de lenguaje C que genere el código, además de algunas librerías que contengan la funciones que realizara la tarjeta.

Desde la ventana de Simulink es necesario configurar algunos parámetros como el tiempo de muestreo y los métodos numéricos que utilizara, luego se configura y se añaden los bloques que permiten la recepción y envío de señales. Después de lo cual se carga el ejecutable en la tarjeta y se ejecuta el programa que funciona como interfaz.

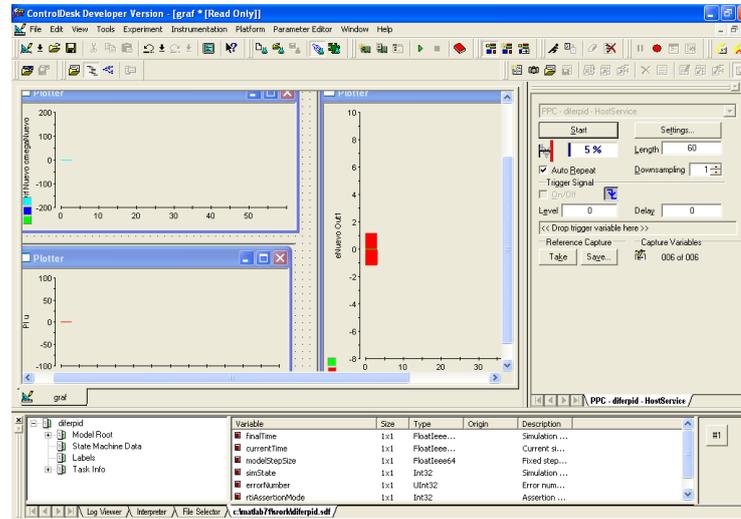


Figura B.2: Controldesk

B.2. Bloques de Simulink

Como se menciona anteriormente, el esquema de control utilizado se genera en bloques de Simulink, los cuales se describen como sigue:

Bloque PWM: Este bloque es capaz de generar tres señales PWM independientes a partir de tres señales de entrada que deben tener un valor dentro del intervalo $[0,1]$ y que representan el ciclo de trabajo de cada una de las fases, en este bloque además se puede configurar otros parámetros de las señales PWM, como son sus valores en alto y bajo y la frecuencia a la que se genera el PWM.

Bloque ADC: Este bloque permite la conversión de una señal analógica a digital, con un rango de lectura de $[-10,10][V]$.

Bloque Encoder: Permite el acceso al número de cuentas generado en la tarjeta a partir de pulsos desfasados por un codificador incremental. Este valor después debe ser acondicionado a radianes mediante la siguiente relación.

$$ang = \frac{2\pi}{1024} \quad (\text{B.1})$$

Donde 1024 es la resolución del codificador utilizado.

B. EQUIPO EXPERIMENTAL

En las figuras (B.3 - B.9) se muestran los bloques utilizados para el acondicionamiento de las señales y los procesos del lazo de control.

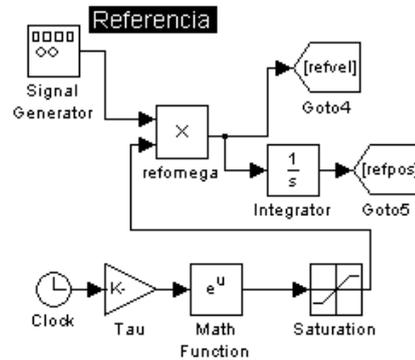


Figura B.3: Bloques que generan la señal de referencia

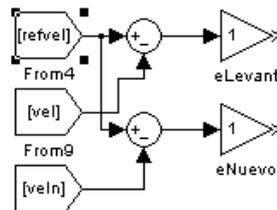


Figura B.4: Bloques que generan señal de error

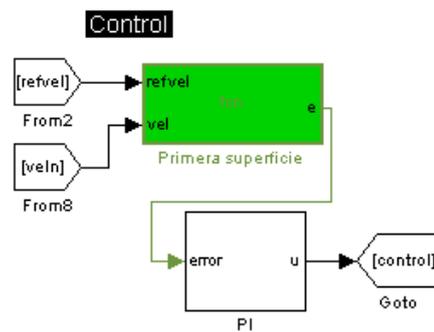


Figura B.5: Bloques que generan la señal de control

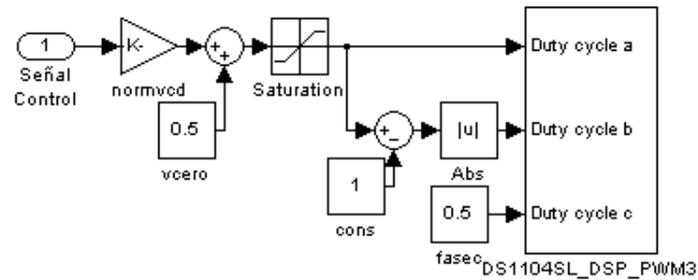


Figura B.6: Bloques que acondicionan la señal de control

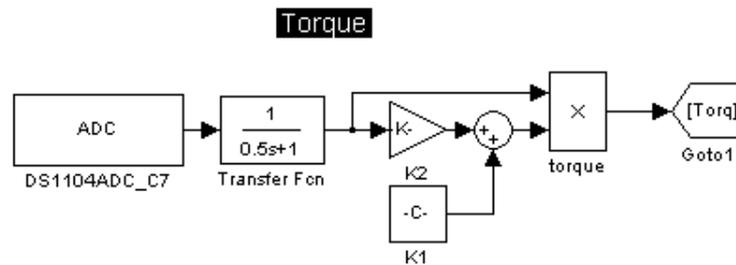


Figura B.7: Bloques que acondicionan la señal de torque

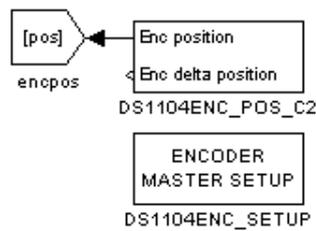


Figura B.8: Bloques que recuperan la posición

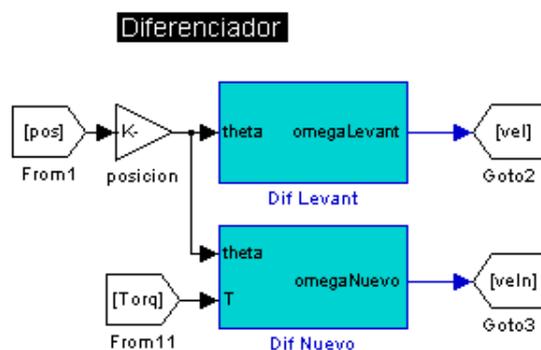


Figura B.9: Bloques diferenciadores

B.3. Inversor Trifásico de 3 [kW]

Un inversor, es un dispositivo convertidor AC-AC, esto significa que funciona como un bipuerto que tiene como entrada una señal de corriente alterna y como salida una señal también de corriente alterna pero de distintas características a la señal de entrada.

El inversor basa su operación en un puente rectificador operado por SCR con disparo por cruce por cero que sirve como fuente para un puente de corriente directa que con base en dispositivos semiconductores de tecnología IGBT se pueda generar una señal PWM, este aparato cuenta con las siguientes características.

- Tensión de alimentación trifásica de $220[V]$ a $60[Hz]$.
- Corriente de pico máxima de $50[A]$.
- Corriente nominal de $11[A_{rms}]$ y $16[A_{pico}]$.
- Tensión de Bus de corriente directa controlable de 35 a $300[V_{cd}]$.
- Tensión PWM que depende de la tensión del Bus de corriente directa.
- Potencia nominal de salida $3[kW]$ / $4[kVA]$.
- Frecuencia máxima de conmutación de $15[kHz]$.
- Tiempo muerto de $1[\mu s]$, generado de manera interna por el sistema de instrumentación del equipo.

- Medición de corriente de salida para las tres fases de $\pm 50[A]$, con 200 [mA/V] con rango completo de medición de $\pm 10[V]$.

El equipo se puede emplear como un convertidor a DC para el control de motores de corriente directa. Se debe garantizar que las señales de PWM son generadas de manera adecuada. Se puede utilizar indistintamente cualquier combinación de dos de las tres fases para éste propósito siempre que se garantice que la tercera queda en estado fijo de operación.



Figura B.10: Inversor

Como se menciona anteriormente el inversor cuenta con dos etapas de conversión que se ilustran en la imagen junto con las etapas de instrumentación.

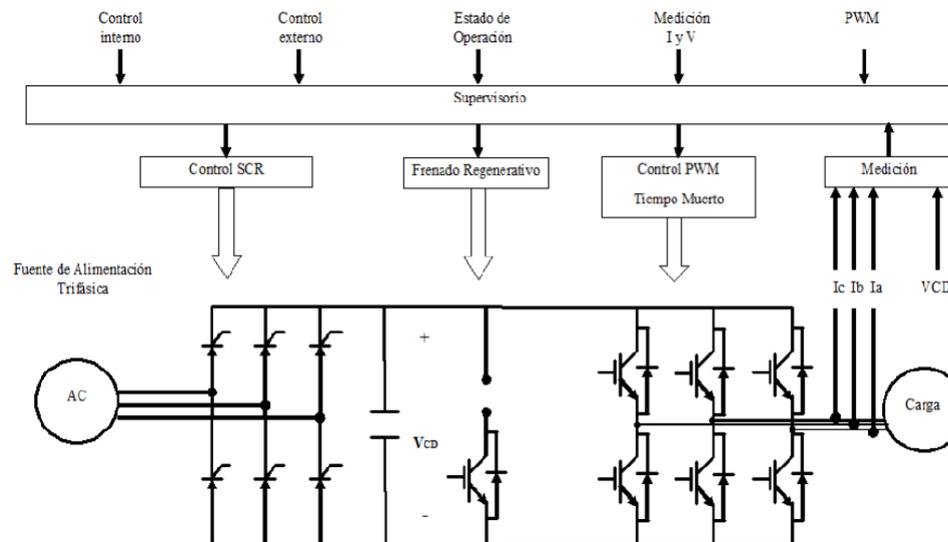


Figura B.11: Estructura

Bibliografía

- [1] Real-time interface(rti and rti-mp), implementation guide. *dSPACE*, 2004.
- [2] AHMED DABROOM AND HASSAN K KHALIL. Numerical differentiation using high-gain observers. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, **5**, pages 4790–4795. **IEEE, 1997.** 2
- [3] A. DAMIANO, G.L. GATTO, I. MARONGIU, AND A. PISANO. **Second-order sliding-mode control of dc drives.** *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, **51(2):364–373**, 2004. 1
- [4] B KUMAR AND SC DUTTA ROY. **Design of digital differentiators for low frequencies.** 1988. 2
- [5] A. LEVANT. **High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control.** *International Journal of Control*, **76(9-10):924–941**, 2003. 2
- [6] A. LEVANT. **Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives.** In *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control*, pages 5585 – 5590, San Diego, CA, USA, 2006. 2
- [7] ARIE LEVANT. **Robust exact differentiation via sliding mode technique.** *Automatica*, **34(3):379–384**, 1998. 2, 6, 23
- [8] JAIME A MORENO. **A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm.** In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference on*, pages 1–6. **IEEE, 2009.** 7, 41, 43
- [9] S NICOSIA, A TORNAMBE, AND P VALIGI. **A solution to the generalized problem of nonlinear map inversion.** *Systems & control letters*, **17(5):383–394**, 1991. 2
- [10] SA NYABUNDI, G QI, Y HAMAM, AND J MUNDA. **Dc motor control via high order differential feedback control.** In *AFRICON, 2009. AFRICON'09.*, pages 1–5. **IEEE, 2009.** 1

BIBLIOGRAFÍA

- [11] KATSUHIKO OGATA. **Ingenieria de control moderna.** *Prentice Hall, Mexico, 2003.* 14, 18
- [12] SOO-CHANG PEI AND JONG-JY SHYU. **Eigenfilter design of higher-order digital differentiators.** *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, 37(4):505–511, 1989.* 2
- [13] S PRAESOMBOON, S ATHAPHAISAL, S YIMMAN, R BOONTAWAN, AND K DEJHAN. **Sensorless speed control of dc servo motor using kalman filter.** In *Information, Communications and Signal Processing, 2009. ICICS 2009. 7th International Conference on*, pages 1–5. IEEE, 2009. 1
- [14] L RABINER AND K STEIGLITZ. **The design of wide-band recursive and nonrecursive digital differentiators.** *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on, 18(2):204–209, 1970.* 2
- [15] Y. SHITESSEL, C. EDWARDS, L. FRIDMAN, AND A. LEVANT. *Sliding Mode Control and Observation.* Springer, New York, 2013. 35, 40, 41