



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION
CONTINUA

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar el Segundo Día de Clases, en las oficinas del Centro, con la Señorita Baraza, de lo contrario no será posible. El control de asistencia se efectuará a través de la persona encargada de entregar notas, en la mesa de entrega de material, mediante listas especiales. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, es importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción con los datos que se les solicitan al iniciarse el curso.

ATENTAMENTE

ING. SALVADOR MEDINA RIVERO

COORDINADOR DE CURSOS. Tecuba 5, primer piso. México 1, D.



DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.

VICERRECTORIA
DE INGENIERIA

CURSOS DE MAESTRIA Y DOCTORADO

La División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, ofrece las siguientes Maestrías y Doctorados:

M a e s t r í a s

Control	Mecánica
Electrónica	Mecánica de Suelos
Estructuras	Petrolera
Hidráulica	Potencia
Investigación de Operaciones	Planeación Sanitaria
Mecánica teórica y Aplicada	

D o c t o r a d o s

Estructuras
Hidráulica
Mecánica de Suelos
Mecánica Teórica y Aplicada
Investigación de Operaciones

Programa de actividades para el segundo semestre de 1976

Exámenes de admisión: 10, 11 y 12 de mayo

Inscripciones: 31 de mayo al 4 de junio

Iniciación de clases: 7 de junio

Requisitos de admisión

a) Cumplir con una de las siguientes condiciones:

1. Poseer título profesional en Ingeniería o en alguna disciplina afín a las maestrías que se ofrecen en la División, otorgado por la UNAM o por cualquier institución nacional o extranjera.
2. Ser pasante de la Facultad de Ingeniería, UNAM

b) Aprobar los exámenes de admisión que se efectuarán en las fechas señaladas arriba.

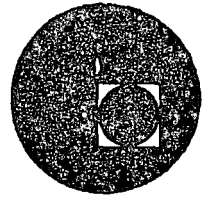
c) Presentar, dentro del período de inscripciones arriba mencionado, la documentación que se indica en el folleto de Actividades Académicas 1975 de la DESFI

Mayores informes: División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Apartado Postal 70-256, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. Tel.: 548-58-77

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, febrero 3. 1976

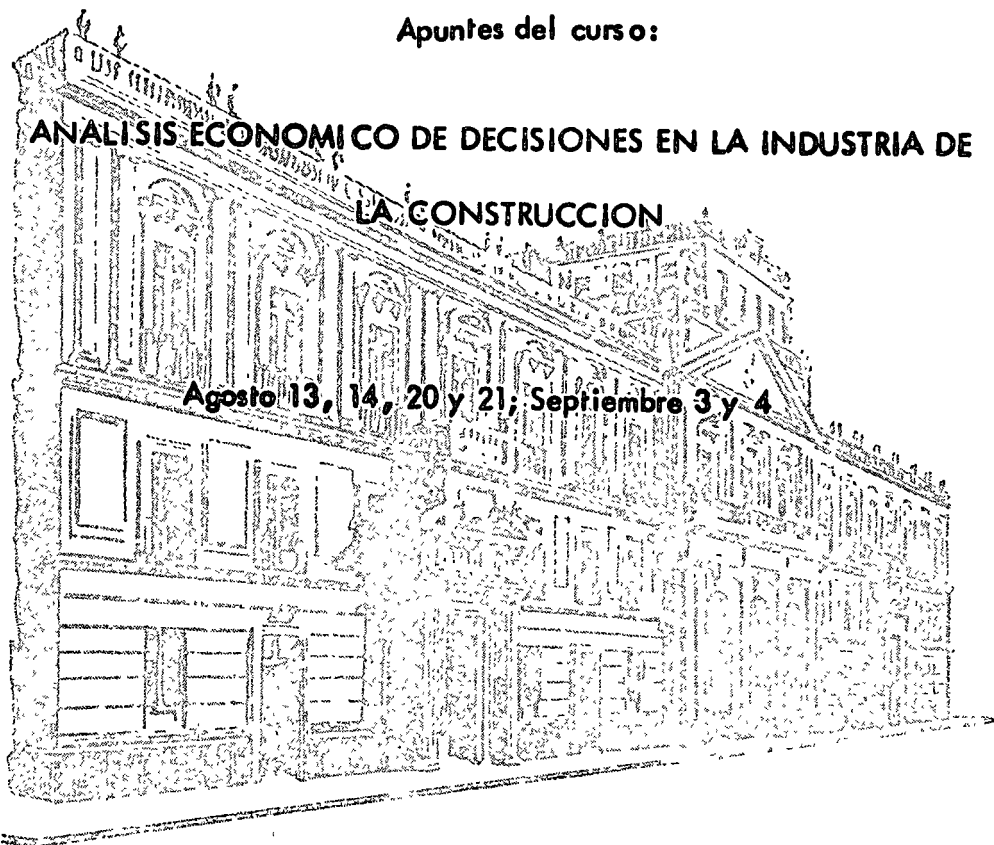


centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



Cámara Nacional de la Industria de la Construcción
Delegación Puebla

Apuntes del curso:



Profr. Jorge Terrazas y de Allende

Agosto de 1976.

Cámara Nacional de la Industria de la Construcción

Delegación Puebla

ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE
LA CONSTRUCCION

Agosto 13, 14, 20 y 21; Septiembre 3 y 4

Ing. Jorge Terrazas y de Allende

Agosto de 1976.

ANALISIS ECONOMICO DE

DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE LA CONSTRUCCION

T E M A I

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y
SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Contenido

Concepto y Naturaleza de las Decisiones Económicas:

Las Funciones de un Ejecutivo.
La Generación de Alternativas.
Responsabilidad por la toma de Decisiones Económicas.
Valores No Monetarios o No Cuantitativos.
Medida de la Eficiencia Económica.
Eficiencia Económica contra Eficiencia Mecánica.
Definición de Ingeniería Económica.
Naturaleza de las Decisiones.
Grados de Certeza.
Procedo de la Toma de Decisiones.

Definición del Problema y Recopilación de Datos.
Elaboración del Modelo.
Evaluación.

Notas Sobre Inversiones de Capital y su Programación.

Las Inversiones de Capital
El Incentivo de la Utilidad.
Fuentes de Capital
El Costo por el Uso del Capital
El Valor del Dinero en el Tiempo
Tasa mínima Interna de Recuperación.
Diferencias entre el Enfoque Contable y el
criterio de Análisis Económico.

TEMA I

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES
ECONOMICAS.LAS FUNCIONES DE UN EJECUTIVO.

En toda empresa, y en general, en cualquier organización, los elementos directivos de la misma, deben orientar todas sus actividades y enfocar su actitud a dos funciones primordiales.

Una primera función a la que el ejecutivo ve sujetas la mayoría de sus actividades normales y rutinarias, es la de alcanzar primero y sostener después. las normas y niveles pre-establecida de operación general de la organización, los cuadros básicos de funcionamiento en todos aquellos aspectos que afectan a la vida de la empresa; una primera función a la que genéricamente podemos referirnos como: "alcanzar y mantener las rormas " y que se reflejan en todo el cúmulo de labores rutinarias como son las de vigilar - que las actividades se desarrollen conforme a lo planeado, que los costos no excedan al costo " norma" prefijado, que la obra de mano ejecute el trabajo de acuerdo con el método standard predeterminado, que las materias primas y la obra de mano que se requieran, se encuentren disponibles en todo momento, que los materiales sean suministrados de acuerdo con el programa y en las cantidades requeridas, que se mantenga y no disminuya la calidad especificada del producto y así sucesi-

vamente. El "mantener las normas", es en muchas ocasiones la tarea calificada como la mas importante que deben llevar a cabo los ejecutivos, y por otro lado, nadie niega que esa función absorbe mucho tiempo y exige un gran esfuerzo.

Sin embargo, existe otra función del ejecutivo y que consiste en mejorar esas "normas" fijadas, de tal manera que la compañía pueda mejorar la calidad de sus productos, ampliar la gama de los mismos, abrirse nuevos mercados, incrementar la productividad de sus trabajadores y la eficiencia en general de sus métodos, etc...; y en cuanto a rendimientos económicos, aumentar o al menos mantener su nivel de utilidades, frente a las condiciones que plantea una competencia creciente.

En esta segunda función, el ejecutivo debe generar alternativas, lo cual logra sometiendo a prueba todas las rutinas, procedimientos y métodos implantados dentro de su esfera de responsabilidades y buscando otras posibles alternativas de acción y adaptándolas o nó, de acuerdo con criterios económicos.

Este segundo papel, es vital, ya que dentro de una industria competitiva, cualquier empresa que se contente solo con mantener sus "normas" pre-existentes, se encontrará en base tiempo, en decadencia a causa de la presión de la competencia.

La empresa que se limita a mantener con éxito su statu quo, mientras otras compañías mejoran su método y aumentan sus utilidades, descubrirá eventualmente que no puede igualar los precios establecidos por sus competidores progresistas.

Desgraciadamente, muchos ejecutivos no están preparados para desarrollar esta función tan importante, ya que con demasiada frecuencia, carecen totalmente de preparación para la toma de decisiones económicas, y lo que es aún peor, en muchas ocasiones subestiman y desprecian esta área de actuación, lo cual origina que no obstante lo intensamente que un ejecutivo trabaje en su papel de "mantener las normas", su empresa y él individualmente como administrador, pueden fracasar.

A un directivo le es normalmente difícil reconocer que la forma en que se están llevando a cabo las actividades, está mal o al menos es deficiente y susceptible de mejora. Es frecuente que los distintos niveles dentro de la empresa, ya sean los constituidos por gerentes administradores, supervisores, sobrestantes y obreros, sean renuentes a aceptar cambios que obliguen a encauzar su forma de actuar y de pensar, por senderos y rutinas diferentes a los seguidos anteriormente por un largo periodo. Que cierto es aquello de que: "el hombre es un animal de costumbres"...

Por otro lado, esta segunda función a que hacemos referencia, implica una actitud constante de estudio, análisis e investigación que redunde en una actualización continua de conocimientos en aspectos técnicos, administrativos, económicos, etc..., actitud que es poco frecuente encontrar en los profesionales que ya han salido de las aulas de los centros educativos, y que implica, un sacrificio constante, adicional al que ya de por sí originan las arduas labores y problemas de cada día.

En este curso, trataremos de establecer las funciones desde el punto de vista económico del ejecutivo y de presentar los principios y los procedimientos que deben normar lo que se ha dado en llamar una toma de decisiones económicas.

Analicemos esta segunda función de un ejecutivo como un proceso de dos fases consistentes en

- 1) Generar alternativas.
- 2) Evaluarlas y adoptarlas o nó, después de analizarlas ampliamente desde el punto de vista de los criterios económicos.

Solo si el ejecutivo tiene conciencia clara de estos criterios, podrá llevar a cabo una búsqueda inteligente de alternativas y después, tomar decisiones economicamente correctas.

LA GENERACION DE ALTERNATIVAS.

La segunda función del ejecutivo se desprende de la primera. Tanto si se tienen dificultades para mantener un standard establecido, como si no se les tiene, el standard mismo puede ser la base de investigación, para encontrar un medio más económico para efectuar una acción determinada. Así por ejemplo, en el caso de una obra en construcción, el director de la misma puede hacerse preguntas como las siguientes: ¿se seleccionó el equipo más adecuado en cuanto a número, tipo y capacidad de unidades?, ¿ puede acelerarse el

proceso de construcción mediante otra secuela de ataque de los diferentes frentes?, ¿el número de personal obrero y técnico ubicado en cada frente es el adecuado?, ¿debe incrementarse?, ¿debe disminuirse?. Luego de un análisis profundo y sistematizado, el director de la obra, podrá determinar, con plena conciencia en los criterios económicos, si los juicios presupuestos originalmente eran los adecuados o conviene seguir nuevas alternativas.

A partir de cada acto que se efectue de acuerdo con normas establecidas, un ejecutivo entrenado a pensar bajo esta línea de acción, podrá generar otras alternativas económicas.

La toma de decisiones económicas invade cualquier área de actividades de un ejecutivo, desde el aspecto ventas hasta el de producción y desde las finanzas hasta el aspecto técnico ingenieril.

Una función muy importante del ejecutivo es el estar propiciando continuamente mejoras y cambios, aunque bien es cierto que el mero cambio, por si mismo, no implica necesariamente una decisión económica.

Otro claro ejemplo en el medio de la construcción, lo constituye el problema de un proyectista y calculista quien debe decidir entre hacer una estructura de acero o de concreto o mixta, atendiendo a factores como pueden ser: distintos tipos de cimentaciones dependiendo del peso de la superestructura en cada una de las alternativas, costos de

conservación y mantenimiento dentro de un cierto horizonte económico, valor de recuperación de la estructura, disponibilidad de personal especializado en la localidad, etc...

"Cada peso que se gasta, se propone gastar o se propone no gastar, constituye la base de una decisión económica." Si un ejecutivo decide no hacer ningún cambio a una situación existente, está tomando una decisión económica, ya que la decisión de no hacer nada, implica la decisión de continuar haciendo las cosas de la misma manera, y de rechazar todas las posibles alternativas de acción, tanto las generadas por él mismo después de un análisis crítico, como de las que desconoce por no haberlas buscado.

Una decisión no puede decirse que constituye una auténtica decisión económica a menos que:

- 1) Todas las alternativas hayan sido examinadas.
- 2) Todos los elementos de costo y de beneficio hayan sido considerados.
- 3) Se hayan seguido técnicas y procedimientos correctos para su evaluación.

Así por ejemplo, en el caso particular de la posibilidad de reemplazar una máquina existente, la decisión económica puede ser aprobar el gasto de \$ 80,000.00 para la compra de una máquina nueva, o rechazar este gasto y conservar la existente, o gastar \$ 45,000.00 en una

diferente, o autorizar \$ 130,000.00 por una nueva de mayor capacidad, o invertir \$ 25,000.00 en la reparación y mejora de la máquina actual.

Analicemos más detenidamente el aspecto de la generación de alternativas de acción, como paso inicial del proceso de una toma de decisiones.

"Un análisis económico puede definirse como la comparación entre alternativas, en la cual las diferencias entre ellas, se expresan, hasta donde es factible, en términos monetarios".

Cuando en una comparación de este tipo entre alternativas, están involucrados de alguna forma, aspectos de índole técnica en general, se dice que se trata de un análisis de ingeniería económica.

"Las decisiones se toman entre alternativas" no hay propiamente una decisión, si no hay al menos dos cursos de acción posibles.

Antes de tomar una decisión es necesario dejar claramente definidos los beneficios, ventajas y desventajas de cada una de las alternativas posibles.

Al comparar alternativas, es muy conveniente expresar los efectos o consecuencias de cada alternativa, en forma tal que sean comensurables entre sí; es decir, los beneficios y costos, las ventajas y desventajas de cada alternativa, deben ser expresados numericamente, y estos números a su vez, expresados en las mismas unidades para

poder ser comparados. Para efecto de las decisiones económicas, las unidades normalmente empleadas, y de hecho las únicas que sirven para tal fin, son las unidades monetarias.

Para hacer commensurables y comparables las características de las diversas alternativas, pueden sugerirse dos pasos: primero, expresar cada una de las características en sus unidades físicas más apropiadas, y segundo, convertir mediante el establecimiento de una escala de valores, las unidades físicas, en unidades monetarias.

De no ser commensurables entre sí las diferencias entre las alternativas, puede correrse el peligro de que al compararlas, se de igual peso a diferencias triviales que a diferencias realmente importantes entre ellas.

"Debe reconocerse que solo las diferencias entre alternativas, son relevantes en su comparación."

Si por ejemplo, al comparar dos procedimientos constructivos, se estima que el factor obra de mano, será igual en ambas alternativas, o sea, que se estima tenga el mismo costo en una y en otra, deberá excluirse dicho factor para efectos de la comparación entre ellas, ya que es claro que dicho factor, al afectar igualmente a ambas alternativas, no aportará juicio alguno para la selección de una u otra.

Puede arguirse que en ocasiones el análisis económico de una situación para efectos de una toma de decisiones, es inútil, pues la alternativa a seguir es evidente. Aparentemente este sería el caso de un empresario que expresara: "Tengo una máquina que tiene más de 15 años de estar funcionando y a la que ya no es físicamente posible seguir reparando y manteniendo en operación, por lo que sin necesidad de ningún análisis ni de la aplicación de técnicas y fórmulas sofisticadas, concluyo que debo cambiarla por otra...". Sin embargo, podríamos hacer notar a este empresario, que de hecho sí tomó una decisión y que esta se inició hace varios años, pues pudiera suceder que un análisis revele que debería haber cambiado esa máquina hace más de 8 años por ejemplo, y que su decisión, (aún sin haber sido fruto de un razonamiento conciente), fué equivocada, al haber optado de hecho, por la alternativa de absorber los sobrecostos de un mantenimiento y reparaciones antieconómicas durante los últimos 8 años, y de haber rechazado los ahorros que la compra de una nueva máquina le hubieran originado, de haberse llevado a cabo el reemplazo, económicamente justificado, de la máquina actual.

De lo anterior, concluimos que la toma de decisiones económicas en un sentido integral, incluye tanto la generación como la evaluación

de las alternativas y que dado que la selección de una alternativa es siempre el objeto de una decisión, el proceso de la toma de una decisión económica, prosigue solo si las diversas alternativas a seguir, han sido establecidas.

La selección de la alternativa final nunca debe ser objeto de adivinanza ni dejada al "diseño de los dioses".

Ni la intuición ni las corazonadas, son del todo realistas ni confiables. Sin embargo, se puede arguir y debe aceptarse, el hecho de que mucha de la información de que se dispone para la toma de una decisión, está basada en meras estimaciones. A esto, puede responderse afirmando que esas estimaciones logradas por medio de un cuidadoso estudio de la información disponible, son de cualquier manera más confiables que meras adivinanzas o elucubraciones intuitivas. Lo anterior no quiere decir que la intuición, que se orienta al futuro, pero que de hecho involucra ciertos recuerdos y experiencias del pasado, no tenga en ocasiones cierto grado de validez.

RESPONSABILIDAD POR LA TOMA DE DECISIONES ECONOMICAS.

El que un ejecutivo no este ejerciendo la segunda función a que se ha aludido, se manifiesta principalmente en una decidida tendencia a no hacer cambios, es decir, a seguir haciendo lo mismo y de la misma manera, y en el hecho de que rara vez, una inversión o una erogación se justifiquen me-

diante un criterio económico adecuado.

Muchos ejecutivos no sienten verdadera responsabilidad por los costos que generan o por los costos que de hecho " protegen " al mantener el status quo. Consciente o inconscientemente, consideran el llevar a cabo erogaciones monetarias, como una consecuencia inherente e inevitable de su trabajo; como un privilegio obvio de la función ejecutiva; y cuando un ejecutivo se acostumbra a esta actitud, llega a considerar que estos costos son responsabilidad de la compañía. Si reflexionara en esto, se daría cuenta que estos costos son de su responsabilidad ya que se ubican dentro de su esfera administrativa, y es él, y no la compañía quien selecciona la alternativa a seguir de entre todas las demás posibles.

Ahora bien, las necesidades de capital en muchos proyectos alcanza cifras considerables. Obviamente, ese capital requerido se obtiene de diversas fuentes, internas o externas a la empresa, y es natural que tanto a los que aportan ese capital como a los encargados de controlar su gastos, les preocupe el que sea utilizado de la manera más efectiva, ya que el éxito de un proyecto ingenieril o de un negocio en general, se mide en términos de su eficiencia financiera.

Por lo anterior, el ingeniero debe combinar en cada proyecto, la técnica con los requerimientos y limitaciones financieras, sin olvidar además otros valo-

res involucrados como pueden ser los de caracter social humano, estético, político, etc...

El problema más serio que se deriva de aceptar o rechazar proposiciones o peticiones de adjudicación de fondos y recursos a determinados renglones (lo cual de hecho, representa alternativas de inversión), sobre la base de que tan urgentes son, radica en que el programa de utilización de recursos queda supeditado a un concurso de personalidades. Las partidas mas importantes se adjudican al departamento que ha sido más elocuente en la solicitud de fondos y más persistente en la presentación de sus requerimientos, y no al departamento que por haber realizado un estudio económico con que respaldar su petición, ha presentado esta, en forma tardía. En una organización, toda decisión de adjudicación e inversión de fondos, debería estar respaldada y justificada con un análisis económico.

El primer criterio que debe seguirse en la selección de alternativas de inversión, es el de dar el mejor uso posible a los recursos, normalmente limitados, con que cuenta una organización.

Estos recursos limitados con que contamos para realizar inversiones, pueden ser de varios tipos, como bienes raíces, espacio disponible, fuerza de trabajo, materiales, dinero efectivo, capacidad crediticia, etc..., pero dado que el ámbito comercial se acostumbra expresar el valor de la mayoría de los recursos, en términos monetarios, es necesario evaluar las disponibilidades y sus limitaciones en terminos de dinero.

Al evaluar una inversión propuesta, acostumbramos preguntar, si será suficientemente productiva. Este termino de "suficientemente productiva", se refiere, como veremos en forma detallada mas adelante, a la comparación entre la tasa de recuperación que esperamos obtener de dicha inversión con el costo total que dicha inversión implica y con la tasa de recuperación que pudiesemos obtener de otras inversiones.

Sin embargo, no todas las posibles consecuencias que representa el seguir una alternativa, pueden ser reducidas a términos monetarios, de donde se desprende que es necesario contemplar en segundo criterio en el análisis de selección de alternativas, que tome en consideración estos factores o aspectos a los que denominaremos: valores "no monetarios" o "no cuantitativos".

Cón los recientes adelantos de las matemáticas, estadística, técnicas de computación, etc..., que permiten el manejo de problemas económicos más complejos, el ingeniero tiene la oportunidad de jugar un papel aún más importante en el proceso de la toma de decisiones, ya que no solo cuenta con las bases matemáticas y científicas para comprender el uso de tales técnicas, sino que además tienen el criterio ingenieril que permite reconocer las limitaciones prácticas de estas técnicas y el efecto de la falta de información que comunmente existe en las situaciones reales, todo lo cual lo capacita para seleccionar la alternativa más adecuada y realista.

El privilegio u obligación de un ejecutivo de señalar y elegir una alternativa, no va desligada a la responsabilidad de demostrar que su sugestión es la más adecuada de entre otras. Desde el inicio debe estar consciente de todos los costos resultantes de su decisión.

"Las decisiones deben estar basadas en las consecuencias que se prevee implique la posible implantación de cada una de las alternativas". En muchas ocasiones, existe la deformación de considerar solo el valor inicial de una inversión, siendo que frecuentemente los costos futuros que se generan pueden ser con mucho, más importantes que el inicial. Así por ejemplo, la decisión de invertir \$100,000.00 en una máquina, debe haber estado ligada a la consideración de costos futuros como pueden ser: Obra de mano de operación, consumo de energía, desperdicio de material, necesidad de supervisión extra, mantenimiento y conservación necesarias, seguros, impuestos, etc... También deben considerarse beneficios o ingresos especiales, como el valor de rescate. Todo lo cual implica que el análisis completo de la alternativa, debe hacerse dentro de un cierto periodo que constituye el horizonte económico.

VALORES NO MONETARIOS O NO CUANTITATIVOS.

Pocas decisiones, de tipo personal o de negocios, son hechas sobre la base únicamente de consideraciones financieras. Aún más, las consideraciones sobre la eficiencia económica de un proyecto pueden verse influenciadas en gran parte por aspectos no monetarios.

"Las decisiones entre alternativas de inversión deben también considerar y dar peso, a todas aquéllas consecuencias esperadas y que se originan de la

implantación de cada uno de los posibles cursos de acción, y que por una u otra razones, no pueden reducirse o expresarse en términos monetarios."

A este tipo de factores, es frecuente referirse también con otros terminos como son: factores de juicio, impoderables, intangibles, etc...

La decisiones y recomendaciones relativas a la factibilidad de proyectos ingenieriles, deben tener en cuenta toda una serie de factores monetarios y no monetarios. Entre estos últimos podemos nombrar leyes y principios económicos, situación imperante de los negocios en un momento dado, valores sociales y humanos, objetivos personales y de grupo, gustos de consumidores, reglamentaciones gubernamentales, legislación de orden fiscal y económico, etc...

Las consideraciones sobre aspectos no monetarios adquieren especial importancia en el caso particular de las decisiones de tipo personal y en el terreno de los intereses particulares.

MEDIDA DE LA EFICIENCIA ECONOMICA:

La actividad ingenieril se desarrolla dentro de dos entornos, el físico y el económico. El éxito que se alcance manejando o alterando el entorno físico para producir bienes y servicios depende del conocimiento que se tenga de las leyes físicas. Sin embargo, el beneficio que reporten esos bienes y servicios, depende de la utilidad que proporcionen, medida esta en términos eco

nomicos. Se podrian enumerar muchos ejemplos de estructuras, maquinas, procesos, etc... que presenta un excelente diseno fisico y mecanico pero escaso o nulo sentido economico. Por esta razon, es esencial que los proyectos ingenieriles se evaluen en terminos de beneficio y de costo antes de ser aceptados.

"El prerequisite esencial para el exito de un proyecto ingenieril, es su factibilidad economica."

La funcion normal del ingeniero consiste en manejar los elementos de un entorno, el fisico, para crear utilidad en un segundo entorno, el economico.

El objetivo de todo proyecto ingenieril, es el de obtener el mayor resultado posible, por unidad de recurso empleado, lo cual se logra mediante la mas efectiva utilizacion de materiales, energia y en general, de cualquier tipo de recurso. El grado de eficiencia que se alcance en la utilizacion de los recursos se mide mediante la expresion de caracter general:

$$\text{eficiencia} = \frac{\text{resultado obtenido}}{\text{recurso empleado}} = \frac{\text{util. por}}{\text{recurso}}$$

Lo cual no es mas que el cociente entre los resultados obtenidos y los recursos empleados. Esta expresion mide el exito de la actividad ingenieril dentro del entorno fisico, en un primer nivel de eficiencia, que se conoce como "eficiencia -- mecanica". Dentro de este primer nivel, tanto el resultado obtenido como el insu

mo total requerido se expresan en unidades tales como kilowats, Btu, horas etc... Cuando este tipo de unidades físicas está involucrado, la eficiencia siempre será menor que la unidad o menor que el 100% .

Sin embargo, para un ingeniero también le es fundamental un segundo nivel de eficiencia, la "eficiencia económica" o "eficiencia financiera", la cual se determina con la misma fórmula general de la eficiencia, solo que traduciendo y expresando las unidades físicas tanto del input como del output a su equivalencia en valores monetarios, de acuerdo con alguna escala de valoración adecuada en cada caso, lo que convierte la expresión general a la forma:

$$\text{eficiencia económica} = \frac{\text{beneficio}}{\text{costo}}$$

Es bien sabido que la eficiencia física no puede alcanzar valores mayores de 100%. En cambio, la eficiencia económica sí puede exceder de dicho valor, y de hecho, solo será aceptable cuando eso suceda. Una alta eficiencia física no es garantía de una alta eficiencia económica. Una baja eficiencia física no es razón suficiente para dejar de considerar una alternativa, ya que pueden existir otras circunstancias económicas que compensen esa baja eficiencia física.

Consideremos el ejemplo de una planta de generación de energía, cuya eficiencia física sea tan solo de un 14%. Supongamos que la producción obtenida en forma de energía eléctrica y expresada en Btu, tiene un valor económico de 8 unidades monetarias por millón de unidades producidas y que el insumo necesario en la forma de gas natural y expresado en Btu,

tiene un valor económico de 0.70 unidades monetarias por millón de unidades de gas consumido. En estas condiciones:

$$\text{eficiencia mecánica} = 0.14$$

$$\text{eficiencia económica} = \frac{\text{Btu output} \times \text{valor de la energía eléctrica}}{\text{Btu input} \times \text{valor del gas natural}}$$

$$= 0.14 \times \frac{8 \text{ unidades monetarias}}{0.70 \text{ unidades monetarias}}$$

$$= 1.6$$

lo cual indica una eficiencia económica de un 160 %.

Si un inversionista decide expandir su negocio y adquirir un cierto número de camiones, podrá seleccionar el tipo de camión mediante su eficiencia mecánica, pero la factibilidad y conveniencia de la inversión general, deberá contemplarla a través de la eficiencia económica, en donde el output o beneficio, será la retribución económica que se obtenga por el servicio de los camiones, y el input o costo, debe incluir los costos de operación, la depreciación, los intereses del capital invertido, los impuestos y todos los demás gastos asociados.

La forma más comúnmente empleada para estimar la eficiencia financiera, es mediante la llamada "tasa de recuperación", sobre un capital invertido, expresado en porcentaje

$$\text{tasa de recuperación (anual)} = \frac{\text{utilidad neta (anual)}}{\text{capital invertido}}$$

Un ejemplo de determinación de la eficiencia mecánica instantánea, la constituyen los medidores eléctricos para determinar en un instante dado, el output de un motor.

Para la evaluación final de la mayoría de los proyectos, aún en aquellos en los cuales el aspecto técnico ingenieril juega un papel muy importante, la eficiencia-económica debe prevalecer sobre la eficiencia física. Esto es debido a que la función y meta de la ingeniería, es crear utilidad y obtener el máximo nivel de beneficio dentro del entorno económico por medio de la óptima utilización de los elementos del entorno físico, y dado que este objetivo se traduce en maximizar el servicio, y el nivel de servicio puede expresarse en términos monetarios, se concluye que el criterio económico es la base de una evaluación, y la meta, la maximización de beneficio.

EFICIENCIA ECONOMICA CONTRA EFICIENCIA MECANICA.

La meta de todo ingeniero y en general, de la actividad empresarial y gerencia es la de lograr una eficiencia económica dentro de rangos factibles y aceptables y no la simple búsqueda de eficiencia mecánica.

Ejemplo: Supongamos que para resolver una necesidad operativa y después de una investigación se nos presentan dos alternativas:

Alternativa "A": adquirir una máquina (A) con precio inicial de \$ 60,000.00, con costo anual de operación (incluyendo obra de mano, combustibles, mantenimiento, etc...) de \$ 70,000.00 (el cual suponemos uniforme por simplificación). Vida económica estimada de 5 años, y valor de recuperación de \$ 10,000.00 al término de ese periodo.

Alternativa "B" Adquirir una máquina (B) para el mismo trabajo, con precio de adquisición de \$ 90,000.00 , gastos de operación de \$50,000.00 anuales, Vida - económica estimada de 5 años y valor de recuperación de \$15,000.00.

Representamos las dos alternativas de la siguiente manera:

Alternativa A.

<i>\$60,000</i>		<i>1000</i>		<i>Val: 15,000</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>

<i>\$70,000</i>		<i>1000</i>		<i>Val: 15,000</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>	<i>100</i>

El monto total del desembolso neto durante los 5 años para la alternativa "A", es de \$ 400,000.00 y para la alternativa "B" de \$ 325,000.00

(Hacemos notar que no estamos considerando en estas sumas el factor tiempo, y por tanto la variación del valor del dinero con el tiempo y como demostraremos posteriormente, la simple suma de costos es insuficiente para comparar dos alternativas).

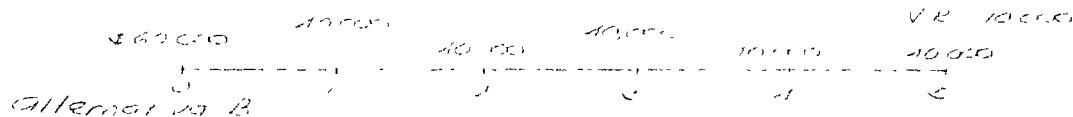
Observamos que "B" tiene mayor eficiencia mecánica, dado que hemos supuesto que en un mismo periodo ambas máquinas tienen el mismo rendimiento en cuanto a producción de servicio se refiere, pero el insumo de "B", medido por sus gastos de operación anual es de \$ 50,000.00, en tanto que el de "A" , es de \$ 70,000.00. Esto es explicable ya que el sobrecosto inicial de la máquina "B" con respecto a la "A" , sugiere ventajas en la construcción de "B" (quizas mayor nivel de automatización, menor requerimiento de obra de mano, más precisión, etc...), y por tanto una mayor eficiencia mecánica.

Conclusión: "B" realiza el mismo trabajo que "A" pero con menor cantidad total de pesos a lo largo de los 5 años considerados de comparación, luego "B" tiene mayor eficiencia económica.

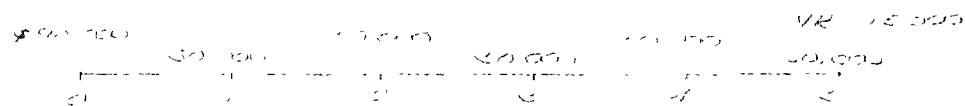
En este caso "B" tiene la mayor eficiencia económica y también la mayor eficiencia mecánica, pero esto es mera coincidencia. La búsqueda de alta eficiencia económica, no necesariamente coincide con la búsqueda de alta eficiencia ingenieril, ya que si esto fuera cierto, la elección de la alternativa más económica pudiera ser realizada en base solo a la eficiencia mecánica.

En efecto supongamos ahora que se propone el empleo de las dos máquinas anteriores "A" y "B" pero en condiciones de menor ritmo de trabajo, y en base a esta menor utilización, los costos de operación anuales se calculan en \$ 40,000.00 para "A" y en \$ 36,000.00 para "B". la nueva situación puede representarse:

Alternativa A



Alternativa B



El desarrollo total para "A" es ahora de \$ 250,000.00 y de \$ 255,000.00 para "B".

Observamos ahora que la máquina "B" aun la de mayor eficiencia mecánica, tiene ahora menor eficiencia económica que "A".

Lo anterior demuestra que no hay ninguna "receta" para la selección de la alternativa más económica; por lo que habrá que hacer un análisis para cada conjunto de circunstancias. La selección de la alternativa más económica, cambio de "B" ...

a "A", de la máquina con mayor eficiencia mecánica, a la de menor eficiencia -
mecánica,

La distinta selección fué originada en este caso por un cambio en el ritmo de uti
lización del equipo; pero también pudiera haber sido causada por diversos facto-
res como cambios en el costo horario de la obra de mano, en el costo unitario de
la energía en el valor de renta por metro cuadrado de piso, o cualquier otro fac -
tor de costo.

El efecto combinado de todos estos elementos de costo, debe ser evaluado, para -
cada situación, por el ejecutivo ecargado de tomar una decisión, así como la va -
riación de dicho efecto combinado debida a cambios en las condicionantes de la si
tuación decisional.

El ejemplo también ilustra el hecho de que la alternativa que se seleccione en de-
terminadas circunstancias, puede llegar a rechazarse si estas condiciones han va
riado.

El análisis de alternativas con baja eficiencia mecánica, es tan necesario como el
de alternativas de alta eficiencia mecánica

La afirmación de que el objetivo primordial de la ingeniería es lograr una eficien-
cia económica satisfactoria, no va en contradicción con otros objetivos de la inge-
niería, como son: la exactitud, la confiabilidad, la seguridad, etc..., ya que , es
tas cuestiones son decididas por consideraciones económicas, y pudiera suceder--
por ejemplo que en determinadas circunstancias, no sea económicamente factible -
o conveniente, diseñar un cierto mecanismo con un nivel de absoluta exactitud, --
ciento por ciento de confiabilidad, o perfecta seguridad, por implicar esto un alto-
costo y resultar antieconómico.

DEFINICION DE INGENIERIA ECONOMICA.

La ingeniería presenta dos enfoques: uno, concerniente al aprovechamiento de los recursos materiales y fuerzas de la naturaleza, y el otro, la búsqueda continua de la satisfacción de las necesidades humanas, y dado que los recursos con que -- normalmente contamos, son escasos respecto a las necesidades, de aquí se desprende la esencial relación de la Ingeniería con la Economía.

El término Ingeniería Económica puede definirse como:

"El conjunto de conocimientos, técnicas y prácticas de análisis y síntesis, incluyendo consideraciones sobre factores humanos, necesarios para la evaluación del beneficio que reportan productos y servicios generados por la actividad ingenieril, en relación a su costo".

La primera función de la Ingeniería Económica, es la evaluación cuantitativa de los -- proyectos ingenieriles, en términos de beneficio y costo, antes de que estos sean ejecutados. En este aspecto, la Ingeniería Económica es similar a la Ingeniería de diseño cuya función es la de "producir" materiales, dimensiones y combinación de -- elementos estructurales de un proyecto, antes de que este sea realizado.

Un estudio económico presenta dos etapas:

- a) recopilación de datos.
- b) procesamiento matemático de los datos.

Ninguno de estos dos pasos constituye un fin en sí mismo, sino medios de alcanzar el verdadero y último objetivo; la determinación de la bondad y factibilidad económica de una alternativa y su selección.

Ahondemos un poco más respecto a la importancia que guarda el aspecto: "economía" dentro de la Ingeniería.

Recopilando algunas definiciones que diversos autores dan de lo que es Ingeniería, tenemos que

"La Ingeniería, más que una ciencia, es la aplicación de varias ciencias, es un -- arte que requiere la habilidad e ingenio para adoptar y aprovechar los conocimientos humanos para el beneficio de la raza humana"

"La Ingeniería es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemá - ticas y naturales, adquirido por el estudio, la experiencia y la práctica, es apli -- cado con juicio al desarrollo de formas de emplear, económicamente, los recursos y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad".

Es de todos conocida la definición muy antigua, muy breve, pero muy rica en senti -- do , que nos dice que:

"Ingeniero es el que hace con un peso, lo que otro que no es Ingeniero, hace con - dos"...

A través de estas y muchas otras definiciones que pudiésemos buscar de Ingeniería, nos damos cuenta que si bien es cierto que la función básica de la Ingeniería es la - búsqueda de la satisfacción de las - necesidades humanas mediante la aplicación de conocimiento al mejor aprovechamiento de los recursos que brinda la naturaleza, - su actuación se sanciona, se califica y se aprecia definitivamente en base a su efi -- ciencia económica.

La actividad ingenieril, en cualquiera de sus ramas, aun en aquellas profundamente científicas o técnicas, si no se orienta en cuanto a su aplicación con un enfoque eco - nómico, no está cumpliendo con las metas inherentes a la Ingeniería.

Desde este punto de vista, refiriéndonos a cualquiera de las ramas y aspectos de la Ingeniería., podemos afirmar que:

" La Ingeniería que no es económica, deja de ser Ingeniería ...

Lo anterior es tan contundente, que ultimamente ha empezado a recharzarse el término " Ingeniería Económica " para designar a un área específica de conocimientos y técnicas enfocadas al análisis y toma de decisiones, ya que de hecho este término compete a la Ingeniería en general y no a una rama o enfoque particular o específico de la misma.

NATURALEZA DE LAS DECISIONES.

Las rachas de buena suerte o las noches de fortuna, atestiguan el hecho de que los jugadores y aventureros algunas veces ganan. Sin embargo, podemos también hablar de infinidad de ocasiones en las que un "volado" o la inspiración del momento", han fallado rotundamente en cuanto a lograr un beneficio.

Por lo anterior, debido a una sincera necesidad por parte de ingenieros, científicos y administradores en general, de contar con un sistemático y lógico proceso de análisis para la toma de decisiones, es por lo que se crearon diversos métodos analíticos que constituyen las herramientas de lo que constituye hoy en día, la administración científica.

Sin embargo, tanto la intuición como los "métodos analíticos" son reconocidos y tienen cada uno su lugar dentro del proceso de la toma de decisiones, en cuanto -- que la intuición, aunque se ubica en el presente, de manera inconsciente e informal,

involucra recuerdos y experiencias del pasado en los cuales se basa para hacer ciertas predicciones en el futuro.

El implantar un sistema analítico, cuesta esfuerzo y dinero, y algunas decisiones menores no justifican esa erogación, por lo que podemos afirmar que los métodos analíticos, serán empleados siempre que esto sea técnicamente factible y justificable económicamente. Fuera de estos límites, el buen juicio y la intuición, basados en la experiencia, son y serán siempre recursos necesarios y legítimos.

Al analizar una situación para efectos de una toma de decisiones habrá que determinar su "grado de sensibilidad", esto es, el que tan vulnerable y sensible es -- con pequeños cambios en los factores condicionantes de esa situación. La consecuencia inmediata de la "alta sensibilidad" de una situación dada, será la de tener que garantizar, mediante estudios minuciosos la validez de los datos que intervendrán en la toma de decisiones, y dado que los factores que pueden influir en una decisión pueden ser muy numerosos, habrá que dar primacía a aquellos a los que la situación es más sensible.

Por lo que respecta a los aspectos que se busca optimizar, cuando en una situación de decisión se presentan varios objetivos, es probable que, haya que reconocer, que no hay un curso de acción que optimice simultáneamente todos los objetivos. En esta circunstancia será necesario seleccionar la alternativa que equilibre de la mejor manera posible los objetivos en conflicto, es decir una alternativa que "suboptimice".

Respecto a la amplitud del período de estudio, podemos apuntar que los análisis basados en un horizonte económico muy corto, no necesariamente tendrán la misma eficiencia, que los que completan un horizonte mayor.

Un horizonte de comparación muy corto, puede distorsionar seriamente los valores. Un horizonte muy largo introduce incertidumbre. A medida que se alarga el horizonte de comparación las predicciones respecto al comportamiento futuro de los factores que afecten una decisión empezarán a debilitarse en cuanto a su credibilidad.

GRADOS DE CERTEZA.

Podemos clasificar las decisiones, dentro de tres categorías generales que caracterizan las condiciones de la situación decisional y que sugieren métodos de análisis específicos en cada caso. Estas categorías son:

- a) Decisiones suponiendo certeza,
- b) Decisiones que reconocen riesgo
- c) Decisiones que admiten incertidumbre.

En el primer caso, al suponer certeza se considera que todas las condiciones del problema se conocen con seguridad, estamos basando el análisis en un conjunto -- de suposiciones que suponemos tienen una alta esperanza de ocurrencia.

En el segundo caso, el análisis considera poder obtener buenas estimaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de las futuras condiciones y del efecto económico de dichas condiciones. Es frecuente que la determinación del valor de dichas probabilidades implique erogaciones originadas por investigaciones y experimentaciones.

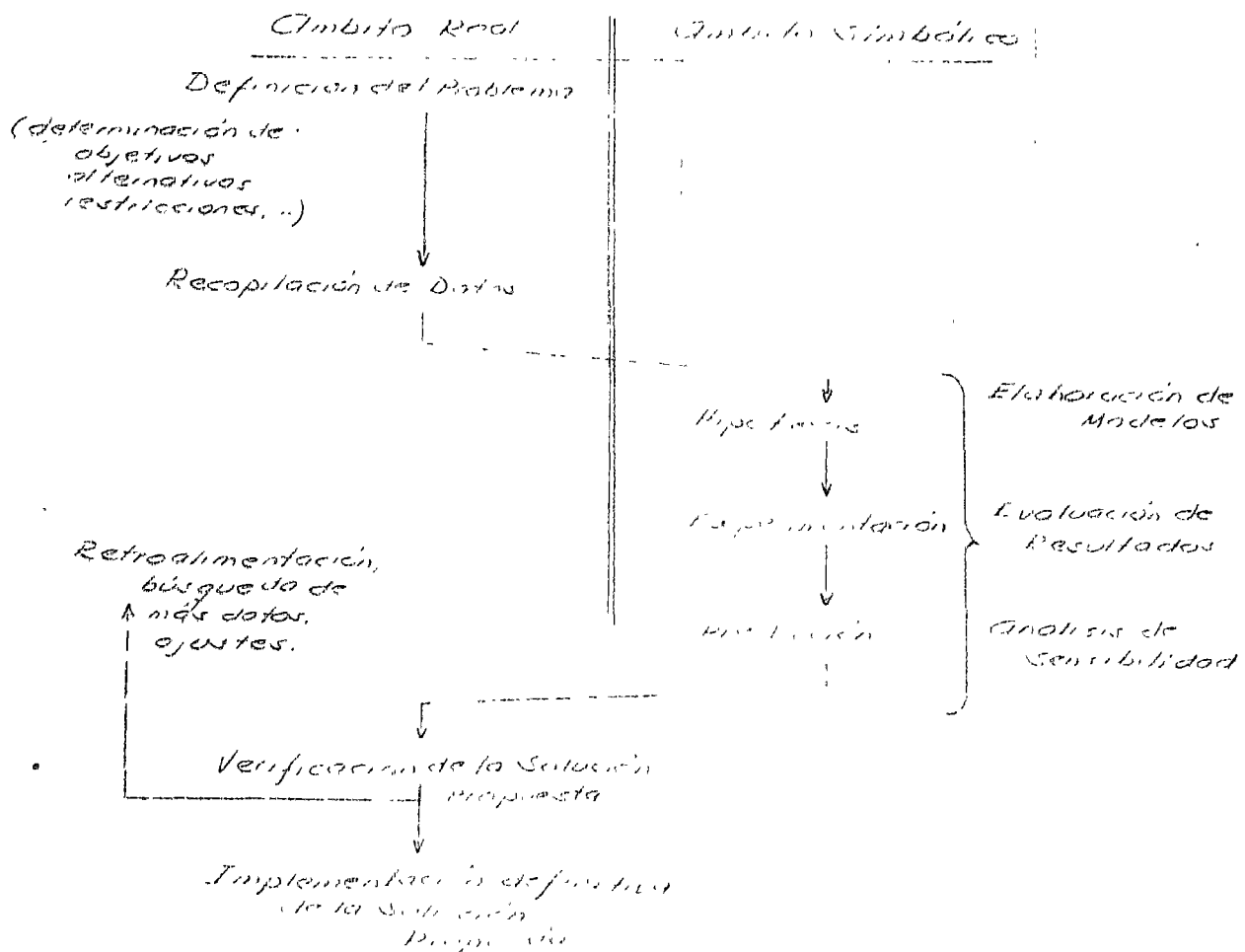
El considerar decisiones bajo condiciones de incertidumbre, implica que el análisis

ta considera prudente incluir los efectos de diferentes factores, pero le resulta imposible hacer estimaciones sobre las probabilidades de ocurrencia de esos -- factores y sobre el verdadero efecto de las mismas en la situación decisional.

PROCESO DE LA TOMA DE DECISIONES.

La toma de decisiones se desarrolla dentro de los ámbitos: el real, en el que tienen lugar los problemas del diario, y del simbólico, en el que se trata de representar a los problemas del ámbito real para su estudio y resolución.

Esquemáticamente el proceso puede representarse:



DEFINICION DEL PROBLEMA Y RECOPIACION DE DATOS

El problema se origina en el ámbito real, dentro de los diversos campos de la actividad humana.

Los datos son los que definen y clasifican a un problema

El conjunto de datos permite al analista elaborar un modelo que represente en el ámbito simbólico al problema del ámbito real.

El lenguaje simbólico permite traducir la información del ámbito real, a una forma utilizable en el ámbito simbólico

Se formulan hipótesis respecto al comportamiento del modelo y se someten a prueba experimentándolas para tratar de simular las reacciones del modelo.

De esta experimentación surge una predicción de comportamiento.

De esta experimentación surge una predicción de comportamiento.

Esta predicción se convierte al ámbito real y trata de verificarse.

Si la predicción resulta válida, el problema está resuelto. Si No, el ciclo se vuelve a repetir tratando de recopilar más información que amplíe la visión del problema.

Se dice que el proceso es sistemático en cuanto a que se procede paso a paso dentro de una secuencia lógica.

La definición del problema se inicia con el establecimiento preciso de los objetivos alternativos y restricciones a las que debe sujetarse la solución que se proponga y por la captación de información relativa al problema, debiendo ser esta información, tan abundante como sea factible y de la mejor calidad posible.

Será necesario analizar el grado de sensibilidad de las alternativas y considerar la posibilidad de suboptimización. A medida que las ramificaciones e implicaciones de un problema son más amplias, la definición de las metas es más compleja.

Una preliminar búsqueda de soluciones, implica el enlistar todos los posibles cursos de acción.

La cantidad y calidad de los datos recopilados es fundamental, ya que todos los demás pasos del proceso, descansan en dichos datos, y ninguno de los pasos puede compensar la falta de ellos.

Ya se había comentado el que en toda decisión intervienen factores que no pueden traducirse a pesos y centavos; estos son los factores no monetarios o intangibles. La distinción entre los factores tangibles y los intangibles, radican en la mayor o menor facilidad y exactitud con que pueden ser expresados cuantitivamente. Como ya hemos visto, ejemplos de intangibles pueden ser: consideraciones de seguridad, reputaciones, amistades, relaciones públicas, etc...

ELABORACION DEL MODELO.

Un modelo es la representación del ámbito real. Se inicia la formulación de un modelo desde el momento de fijar objetivos y alternativas.

Un modelo muestra la relación de causa a efecto entre objetivos y restricciones. Se maneja de tal manera que muestre el resultado final de seguir un determinado curso de acción.

Dado que las situaciones de decisión varían muy ampliamente, son necesarios varios tipos de modelos. Consideramos tres clases: físicos, esquemáticos y matemáticos. Especialmente nos interesan los modelos matemáticos. para su uso en estu -

dios económicos.

Los modelos físicos pueden ser de menor, mayor o de igual tamaño que el objeto que representan. Ejemplos de estos modelos en el campo de la ingeniería, los -- constituyen modelos de canales, rompeolas, cortinas, sistemas de tuberías, -- etc...

Los modelos esquemáticos son representaciones gráficas de diversas situaciones. Ejemplos de estos modelos, son Organigramas, que muestran la división y delegación de autoridades, gráficas de proceso de flujo de producción, redes económicas, redes de camino crítico, gráficas de punto de equilibrio, etc...

Los modelos matemáticos están constituidos por ecuaciones y fórmulas. Como -- ejemplos podemos nombrar a los modelos probabilísticos, a los modelos estadísticos, a los modelos de programación lineal, etc...

EVALUACION.

El mérito de un modelo radica en que tan eficazmente represente el comportamiento y reacciones de las situaciones que se ubican en el ámbito real. La prueba última y definitiva de un modelo, se presenta cuando las predicciones en cuanto al -- comportamiento del problema, se someten a la realidad.

Cada tipo de modelo se evalúa en forma diferente. Un buen modelo contribuye a -- completar el análisis de un problema en cuanto a que hace más fácil y objetivo observar y prever los resultados originados por los diversos factores que afectan a la situación en estudio .

Una vez que todo el proceso de la toma de decisiones ha sido seguido, a final de -- cuentas , quien debe tomar la decisión final en cuanto a la solución a implementar-

será aquella autoridad quién en última instancia deba asumir la responsabilidad de los resultados y efectos que dicha decisión pueda implicar en un futuro .

Pero debemos recordar una vez más que para que una decisión constituya auténticamente una "decisión económica," el analista deberá tomar en consideración - para la estructuración de su modelo, todos los factores de tipo monetario y todos los de tipo no-monetario o imponderables que afecten a beneficios o a costos en su situación decisional particular.

LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Las inversiones sólidas de capital son tan importantes para la economía de una empresa individual como para la economía nacional en conjunto. La expansión de las empresas y la introducción en ellas de adelantos tecnológicos, representan factores importantes para el desarrollo económico y contribuyen considerablemente a aumentar la productividad y a elevar el nivel de vida.

Los problemas implicados en la definición de las políticas de inversión de capital y en la selección de las posibilidades de inversión se cuentan entre los más difíciles que afrontan los ejecutivos en negocios. Las inversiones de capital no representan un área aislada en la toma de decisiones. Implican el conocimiento de las alternativas de producción, pronósticos del mercado, evaluación de los precios tanto de adquisición de materias primas como de venta de los productos en el mercado, posibilidades y costo de financiamientos, etc.

El proceso de la toma de decisiones se basa en estimaciones sobre el futuro. Las inversiones en propiedades inmuebles, generalmente no pueden recuperarse en períodos de tiempo cortos. Normalmente, una vez que una compañía ha asignado fondos para una determinada inversión, se ha comprometido a seguir un sendero futuro del cual no podrá desviarse fácilmente. Por consiguiente, los elementos

de incertidumbre y riesgo son particularmente grandes en las decisiones que se relacionan con la inversión de capital, y ésto, - - frecuentemente induce a los ejecutivos de negocios a confiar en corazonadas o en reglas generales. En vista de la importancia vital de las decisiones, esto es inadmisible. Un plan económicamente sólido para las inversiones de capital, establece un procedimiento, una mecánica, para detectar, recopilar, analizar y evaluar todos los datos sobre la realidad de las condiciones en las que se pretende invertir a fin de poder seleccionar las propuestas más convenientes.

Las empresas de éxito, generalmente tienen más proyectos de inversiones potenciales que fondos disponibles para realizarlos, por lo que, la escasez de fondos es un factor determinante en el procedimiento para aprobar los proyectos de inversión a los que se vayan a adjudicarse los limitados recursos con que cuenta la empresa, la cual, en estas condiciones, se ve obligada a establecer elementos de juicio, mecanismos y criterios para seleccionar entre las alternativas propuestas.

Se pueden distinguir diversos tipos de proyectos de inversión de capital: proyectos no lucrativos, proyectos de utilidades no conmensurables, proyectos de reposición de equipo, proyectos de inversión en activos, proyectos de expansión, proyectos para la reducción de costos de operación y/o de producción, proyectos para mejorar la

calidad de la producción, proyectos para lograr el mantenimiento de cierto nivel de ganancias, proyectos de investigación y desarrollo, etc...; y los elementos de juicio que se emplean para evaluar la conveniencia de una inversión de capital propuesta, dependen de la naturaleza de la misma inversión, así por ejemplo, los proyectos de inversión que llamamos "no lucrativos", implican gastos que se originan de requerimientos legislativos, de tipo contractual, etc., como pudiera ser el caso de una reglamentación que obligará a las empresas a la implantación de sistemas para el control de emanaciones, o a la construcción de tapales para garantizar la seguridad de los transeúntes, o a la obligación de invertir en cursos para la alfabetización o capacitación técnica de los trabajadores, etc. Puesto que gastos de éste tipo son obligatorios, una empresa no tiene necesidad de establecer criterios para evaluar la conveniencia de estas erogaciones.

Por otro lado, los proyectos de "utilidades no conmensurables", se refieren a inversiones cuyo objetivo es el de aumentar utilidades, pero cuyo monto no puede calcularse dentro de un grado razonable de exactitud. A éste tipo de inversiones pertenecen los gastos en publicidad, los de promoción, las erogaciones en cursos de actualización impartidas al personal técnico y administrativo, el costo de asesorías para la revisión de los sistemas operativos de una empresa, las inversiones para otorgar una nueva prestación a los empleados y

trabajadores a fin de manejar su estado de ánimo, etc... Puede suponerse que una compañía interesada en maximizar sus utilidades, no realizará inversiones de éste tipo, a menos que esté convencida de que en última instancia, estas rendirán una utilidad. Desafortunadamente en la mayoría de los casos, es virtualmente imposible medir exactamente el ingreso marginal derivada de tales gastos.

Con respecto a las inversiones de capital de ésta categoría, la empresa debe confiar primordialmente en el criterio de sus gerentes más bien que en datos cantitativos.

Sin embargo existen otro tipo de inversiones, los cuales no solo es factible, sino en cierto aspecto obligatorio, justificar plenamente mediante un análisis económico una estimación cuantitativa de las utilidades y del rendimiento que se esperan obtener de dicha inversión. La reposición de equipo, la inversión en activos etc... son ejemplo de este tipo de inversiones, si se demuestra que los ahorros en costo que se derivarán de la adquisición de una nueva maquinaria para la substitución de una existente, van a proporcionar un rendimiento satisfactorio sobre la inversión de capital correspondiente, entonces el reemplazo se vuelve económicamente conveniente.

Aunque en lo sucesivo, nos ocupemos principalmente del uso de los datos cuantitativos para determinar la conveniencia de los desembolsos de capital, es muy importante reconocer que en el análisis de factibilidad económica del último tipo de inversiones descitas, deben hacerse intervenir, el factor riesgo, que varía según la naturaleza de cada proyecto y los elementos no cuantitativos o no monetarios, sobre los cuales ya se hizo mención anteriormente, ya que ambos elementos pueden

ser determinantes en la decisión final. Por tanto, aspectos como las buenas relaciones con el personal de trabajo, el mantenimiento de una posición de prestigio dentro de una industria, el hacer frente a la competencia, y el cumplimiento de las leyes estatales y municipales, entre muchos otros que pudiésemos citar, - pueden ser los motivos que decidan una inversión, independientemente de las posibilidades de costo e ingresos. Serian ejemplo de tales erogaciones, las encaminadas a actividades tendientes a proporcionar servicios y prestaciones para los -- trabajos, a la introducción de maquinaria para poder hacer frente a la competen-- cia, a los desembolsos para investigaciones y desarrollo de nuevas técnicas y procedimientos de producción y control, a garantizar la salud y seguridad de los trabajadores, etc...

En los estudios de inversión deben incluirse todos los factores de costo que se estimen inherentes a los proyectos bajo consideración. Es así, que debe reflejarse - cualquier ahorro previsto en los costos de materiales o los que se deriven de la utilización del equipo o de la fuerza de trabajo. Igualmente deben prevverse hasta donde sea factible los cambios que pudiesen presentarse en los costos de la obra de -- mano directa, materiales, manejo de los mismos, utilización del equipo, rendimientos mantenimiento, reparaciones, etc... así como de los aumentos o disminuciones en costos indirectos específicos tales como impuestos , seguros, fianzas, administración de oficinas centrales y de campo, financiamiento , etc...

Deigual manera habrá que considerar todos los beneficios directos e indirectos que-- cada una de las alternativas de inversión ofrezca.

Ambos factores. de egresos e ingresos, de costo y de beneficios, deberán contem-

plearse dentro del horizonte económico que se considere adecuado en cada caso.

EL INCENTIVO DE LA UTILIDAD.

El incentivo que existe en cualquier decisión de invertir es el de obtener una utilidad. Cada erogación que encierre la esperanza de originar una utilidad, puede considerarse como "inversión", y de hecho este efecto es lo que define al concepto de inversión.

La utilidad es la motivación que induce a una persona a invertir, y en consecuencia a renunciar a satisfacer sus necesidades presentes, con la esperanza de poder satisfacer mayor número de necesidades en el futuro. Esta motivación es la que rige las inversiones de cualquier índole, personales, industriales, etc...

La utilidad puede también explicarse como el resultado de la productividad del capital.

FUENTES DE CAPITAL.

Los suministros de capital de una empresa, pueden provenir de varias "fuentes" y cada una de ellas puede tener diferente "costo" para la empresa.

En términos generales, podemos clasificar las llamadas "fuentes de capital" de una empresa en:

- a) Fuentes internas.
- b) Fuentes Externas

Las fuentes internas de capital están constituidas por:

- 1) El capital Constitutivo o Social de la empresa, integrado por las aportaciones directas de los socios o accionistas.
- 2) Las utilidades de ejercicios anteriores no distribuidas, o comunmente llamados "pendientes por aplicar" y que al no ser retira-

das por los socios, se dejan dentro de la empresa, para incrementar el capital de trabajo. Este capital de hecho constituye un préstamo de los socios a la empresa, para permitir las operaciones propias de la misma.

3) Los fondos de depreciación.

Las fuentes externas de capital quedan representadas por los préstamos otorgados a la empresa, por instituciones de crédito, inversionistas particulares, etc...

El capital Social es aquel que es propiedad de quienes lo usan y quienes esperan recibir en retribución una "utilidad".

La retribución correspondiente al capital prestado por las fuentes de financiamiento externas, se denomina "interes".

El prestamista solo recibe un "interes" que es prefijado en monto y plazo y no participa de ningún otro beneficio derivado de la inversión que se haga en el capital, pero por otra parte, tampoco está sujeto a riesgos ni contingencias, al menos en circunstancias normales.

Es de hacerse notar que dentro de las "utilidades" que percibe el dueño del capital podemos distinguir dos partes: un "interes", similar

al que percibe como remuneración el capital prestado, y que corresponde al "costo" propiamente dicho del capital empleado, y una segunda parte que representa una compensación adicional al dueño del capital por el riesgo en que ha incurrido al realizar la inversión con su propio dinero.

Esta subdivisión solo es válida desde el punto de vista de un análisis económico, ya que, como veremos más tarde, el punto de vista contable no acepta el impactar la "utilidad" (al menos para efectos de libros) de éste interés, o costo interno del dinero.

Cuando en una empresa, no es posible lograr el ingreso de nuevo capital social ni conseguir más préstamos externos, el capital disponible para nuevas inversiones quedará limitado a las fuentes internas de financiamiento y su incremento estará constituido solamente por la retención de las utilidades (si las hay) y por los fondos que en cada período se integran a las reservas de depreciación de los activos existentes.

Sin embargo, aun en aquellos casos en que para incrementar los recursos de la empresa, sea factible recurrir al aumento del capital social mediante el ingreso de nuevos accionistas, se encuentra normalmente, cierta resistencia a seguir esta alternativa, sobre todo en las empresas pequeñas y medianas, ya que el aceptar nuevos so-

cios implica, para el grupo actual de dueños, normalmente reducida, el sacrificar el control que tienen de la empresa.

Para calcular el "costo del capital" de la compañía, habrá que estimar primero el costo de cada fuente y analizar después la composición de la disponibilidad total.

El problema de determinar este costo del capital, la más conveniente composición de los fondos y el interefecto en los costos de cada una de las fuentes de capital, es sumamente compleja pero de gran importancia para la planeación financiera de una empresa.

Dichas complejidades provienen fundamentalmente de la dificultad de calcular el costo de cada fuente de financiamiento (que además de variable y sensible a muchos factores) y del hecho de que al realizar una inversión, los fondos empleados rara vez pueden identificarse con su fuente y más bien pueden considerarse emanados de algún tipo de crisol de capitales en el cual todos disponibles se funden y pierden su identidad.

EL COSTO POR EL USO DEL CAPITAL.

De acuerdo con el principio del incentivo de la utilidad, cada peso gastado debe satisfacer la esperanza de utilidad del dueño del ca-

pital. Por otro lado, vemos en el inciso anterior que las fuentes de financiamiento de una empresa pueden ser internas, constituidas por el capital que en forma general llamaremos "capital propio", y externos, constituidas por "capital prestado". A cada tipo de capital corresponde una remuneración distinta de acuerdo con sus características propias.

El término "interes", se emplea para designar el pago o renta correspondiente al uso del dinero y que representa el costo del mismo. (Recordemos que incluida dentro del concepto "utilidad," hemos distinguido una parte constituida por un "interes" por el uso mismo del capital). Esta renta que se paga por el uso del capital, en esencia es la misma que se paga o se impacta en los costos, por ejemplo, por el uso de maquinaria o equipo, ya sea éste propio o rentado.

Sin embargo, es evidente que una empresa se encuentra en situación distinta se opera con capital propio que si lo hace con la misma cantidad de dinero, solo que con capital prestado. Hay una clara e importante diferencia entre el uso de capital propio y el uso de capital prestado; y entre los conceptos de utilidad e interes.

El capital que proviene de un préstamo, normalmente presenta las siguientes características ha sido solicitado por tiempo determina-

do transcurrido el cual, se ha prometido reintegrarlo, el interés que por su uso se pagará, ha sido previamente fijado y no depende del resultado de la inversión a que el dinero se ha destinado, es decir, teóricamente al menos, no está sujeto al elemento riesgo. Por otro lado, tampoco será incrementado ni recibirá beneficio alguno adicional, si las utilidades que se obtengan de la inversión, resultan ser mayores que las previstas. Cuando el prestamista de un capital analiza y determina la tasa de interés que le es atractiva y a la cual está dispuesto a prestar su dinero, toma en cuenta: el riesgo en el que considera incurrir de que su dinero no le sea devuelto (el cual trata de reducir al mínimo mediante la exigencia de garantías colaterales; avales de terceros, etc...), sus gastos administrativos y el margen de utilidad que espera obtener.

A diferencia de lo anterior, la inversión del capital propio, tiene como esperanza de retribución, una utilidad, pero de hecho nada garantiza al inversionista que dicha utilidad será obtenida, ni el tiempo en el que se obtenga, y lo que es más, casi siempre existe el riesgo de que ni el capital inicial invertido pueda ser recuperado. Se desprende de aquí lo justo de la diferencia en monto que normalmente existe entre "utilidad" e "interés".

Otra muy importante diferencia entre utilidad e interés, es el tratamiento que la legislación fiscal dá a uno y a otro. Para el que percibe un interés, éste constituye en beneficio, una utilidad, la cual está gravada fiscalmente; en cambio, para el que paga dicho interés, ésta erogación representa un costo el cual es deducible fiscalmente. Las tasas de impuesto con las que el -

fisco grava los ingresos obtenidos en calidad de interés (como remuneración por dinero que ha sido prestado), y en calidad de utilidad (por una inversión realizada), son muy distintas. Es claro que el impacto financiero que representa el pago del impuesto correspondiente en cada caso, debe estimarse y considerarse previamente en el análisis de toda alternativa de inversión.

La obligación de compensar con un rédito ó de "pagar" por el uso de un capital a su propietario puede constituir una obligación legal, como es el caso de la obligación contractual originada por el préstamo de cierto capital a un interés y a un plazo predeterminado. O puede ser una obligación moral, como es la contraída por los dirigentes de una empresa con respecto a los accionistas cuyos fondos manejan y a quienes deben redituár unos "dividendos", Aun en el caso de capital propio, existe una obligación de sentido común de reconocer un costo de nuestro propio capital, derivado del hecho de que al invertir ese capital en esa alternativa, se están rechazando las utilidades o beneficios que hubiere proporcionado ese capital invertido en otra alternativa.

En forma genérica, a la tasa de interés que constituye la recompensa por el uso del capital en cualquier forma de inversión, se le denomina frecuentemente "tasa de recuperación del capital", ó simplemente "tasa de recuperación".

Aún en el caso de inversiones efectuadas por alguna dependencia gubernamental, debe considerarse, al hacer el análisis de factibilidad económica, un

costo correspondiente al capital por emplear y debe fijarse una tasa de recuperación al proyecto, ya que dicho capital por emplear, ha sido obtenido por medio de recaudación de impuestos, de los particulares, y habrá que reconocer que éstos hubiesen obtenido una cierta tasa de recuperación al invertir su dinero de no háberseles privado de este mediante el cobro de un impuesto.

De cualquier manera y sea cual sea la fuente de la cual provienen los fondos por emplear debemos reconocer que "usar dinero, cuesta dinero".

Hay varias razones que justifican el hecho de tener que considerar un costo al capital por emplear, y que se expresa mediante una "tasa de recuperación", cada vez que se analiza una inversión. Entre ellas podemos nombrar: 1o. la tasa de recuperación, remunera el dueño del capital por el hecho de no poder usarlo mientras aquel a quien se le ha confiado, lo está usando. 2o.- la tasa de recuperación compensa al dueño del capital por el riesgo que está corriendo al invertir su capital. 3o.- la tasa de recuperación, constituye un incentivo para que el dueño del capital invierta.

A menos que el impacto económico correspondiente al "costo del Capital" sea considerado de alguna manera en un análisis de inversión, el estudio resultante será inexacto, equivoco e inútil.

Aunque la inclusión del interés es indispensable en el estudio de inver-

siones, la determinación de un tipo de interés apropiado es una tarea que presenta algunas dificultades. A veces se considera erróneamente al interés como si fuese igual al rendimiento sobre la inversión. Queremos volver a insistir en que el rendimiento sobre la inversión consiste de dos elementos: interés y utilidad. El primero representa el costo del dinero empleado; el segundo una recompensa por el riesgo y la incertidumbre. El costo del interés constituye el elemento de criterio mínimo para la aceptación de proyectos de inversión de capital que se emprenden para obtener utilidades. Una empresa debe recuperar, por lo menos, el costo correspondiente al dinero empleado antes de que pueda considerar que ha obtenido una utilidad sobre su nueva inversión. Por otra parte, el elemento de criterio de aceptación mínimo, que puede considerarse como una recompensa por el riesgo y la incertidumbre, varía con la naturaleza del riesgo incurrido.

Al elegir entre las inversiones potenciales, una compañía sólo debería aceptar aquellas propuestas cuyo rendimiento esperado sobrepase, cuando menos, el costo del capital. Haciendo una comparación muy sencilla, sería antieconómico para una persona pedir dinero prestado con el propósito de realizar una inversión, si es que no va a poder invertir estos fondos en forma que le proporcionen un rendimiento mayor que los intereses que debe pagar. El costo del capital constituye el elemento de criterio mínimo de aceptación o la tasa mínima de rendimientos sobre la nueva inversión. Proyectos de capital que rindan ingresos inferior-

res a ésta tasa mínima aceptable, diluyen el capital de los accionistas y conducen a las empresas a un proceso de descapitalización.

Desafortunadamente, el determinar el costo del capital de una empresa es quizás el área más compleja y sujeta a controversias en el campo de las finanzas.

COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL.

Todo propietario de capital, tiene más de una alternativa para invertir su dinero. Cada vez que acepta una de esas alternativas, renuncia a la oportunidad de invertir en otras alternativas y por tanto, renuncia también al beneficio que esas otras alternativas le hubiesen reportado. Esta situación da lugar al concepto de "Costo de oportunidad". Ejemplificando el concepto anterior a un caso muy sencillo, supongamos que una persona tiene dos oportunidades para invertir sus ahorros: adquirir bonos financieros que le reportarán un 9% de intereses anual o invertir en una casa para habitarla con su familia. Si decide invertir sus ahorros en la compra de la casa, de hecho está rechazando la oportunidad de adquirir los bonos y por tanto rechazada también una utilidad del 9% sobre su capital, y debe reconocer entonces que esta tasa 9%, que deja de percibir, constituye el costo del capital con el que va a financiar la compra de la casa, aunque éste capital sea suyo. Por tanto, antes de decidirse deberá comparar ésta utilidad (que dejará de percibir) con la utilidad (en éste caso, satisfacción) que le proporcionará la posesión de una casa propia para él y su familia.

Lo anterior deja de manifiesto, que ni para el capital propio, puede evitar considerarse un costo "el costo de oportunidad", cuando se pretende aplicarlo a una inversión o al logro de un satisfactor. Desde el momento en que el propietario de un cierto capital decide invertir en determinada alternativa y partiendo de la base de que los recursos con que cuenta son limitados, está de hecho renunciando a la posibilidad de invertir en otras alternativas, aunque una de ellas pudiera ser, en el peor de los casos, simplemente dejar el dinero en el Banco ganando un cierto interés por bajo que este sea. Por otro lado debe analizar si la utilidad esperada, usualmente expresada en términos de una tasa de interés anual, es suficiente para justificar la inversión en la alternativa propuesta, y aunque estrictamente hablando, no existe costo del capital (ya que éste es propio), al invertirlo debe esperarse, como mínimo, recibir una utilidad al menos igual a la de las alternativas rechazadas, siendo esta utilidad rechazada y perdida, lo que constituye el costo de oportunidad del capital.

En orden a determinar si la tasa de recuperación esperada en una cierta inversión es suficiente, debe compararse esta tasa esperada con las tasas que pudieran obtenerse de usar el capital en otras alternativas.

En la industria, un empresario tiene básicamente dos alternativas de inversión de capital de la firma: una es invertir el dinero dentro de la

misma empresa (como capital de trabajo para las operaciones propias de la misma), y otra es invertirlo fuera de la empresa (en compra de bonos financieros, acciones de otras empresas, etc...).

Veámoslo de esta forma es cierto que no debería aprobarse la inversión del capital social de la empresa, (o la reinversión de las utilidades obtenidas, en su caso), dentro de la misma, si la tasa de recuperación que se espera obtener es inferior a los que se pudiese obtener con alguna inversión fuera de la empresa. Las oportunidades externas y sus tasas de recuperación, constituyen, desde este punto de vista, un criterio de límite inferior para la inversión interna. Sin embargo, la alternativa de invertir externamente a la empresa, es muy raro que pudiese representar una situación adecuada, ya que, por un lado, dentro del campo industrial, lo normal es que a una empresa se le presenten internamente una infinidad de alternativas y posibilidades de inversión de fondos para mejorar su situación económica, para incrementar su nivel de ingresos, reducir costos de producción u operación, inversiones en maquinaria de producción, equipo de transporte, equipo de oficina para la implementación de nuevos sistemas administrativos, inversiones en medidas para aumentar las prestaciones del personal, etc... y por otro lado, si en realidad las mejores alternativas de inversión se presentan en el exterior, no hay razón para continuar con ese negocio y en consecuencia la empresa debe liquidarse.

Solo en una situación particular en la que se tenga en un momento dado, un superavit de recursos monetarios, se podría justificar que ciertos fondos fuesen destinados a la compra de bonos o acciones aún de relativo bajo interes, cuando se prevea que, de no proceder así, dichos fondos permanecerán "inactivos" en una cuenta bancaria sin obtener ninguna recuperación.

Se sobre entiende que para que lo anterior pueda justificarse, la situación descrita es meramente temporal y circunstancial, ya que de no ser así lo mejor es que los administradores de la empresa, reintegren el capital a los accionistas de la misma, por resultar evidente que de seguir dicho capital invertido en la empresa, no podrá rendir a sus dueños una tasa de recuperación mínima esperada. Es claro que un administrador, actua incorrectamente cuando retiene ese capital sabiendo que no puede satisfacer esas mínimas esperanzas de utilidad de los inversionistas.

Resulta entonces claro, que el costo de oportunidad de la empresa está determinado por el costo de oportunidad de sus accionistas, ya que cada accionista, al momento de invertir en la empresa, mediante la compra de nuevas acciones o conservando las anteriormente adquiridas o prestando dinero para la operación de la empresa, está rechazando otras oportunidades de inversión y de hecho, las utilidades que estas

últimas le hubiesen podido proporcionar. Esas oportunidades y esas esperanzas, se convierten en consecuencia, en el costo de oportunidad del capital social de la empresa.

No podemos mencionar el costo de oportunidad sin dejar de observar que sugiere un medio de determinar el costo del capital.

Si el financiamiento se lleva a cabo con fondos ajenos, es decir, con capital prestado, la tasa de interés que se paga por el uso del dinero claramente establece el costo del capital.

EL VALOR DEL DINERO CON EL TIEMPO.

Hemos visto que el dinero debe estar "ganando" cuando menos, lo que hemos llamado el costo del capital y esto da origen al concepto del valor del dinero con el tiempo, el cual puede ilustrarse de la siguiente manera:

Supongamos un préstamo de \$ 1,000.00 que será usado durante los próximos cuatro años. Consideramos que el costo del capital es de 10% anual.

En estas condiciones, la cantidad adeudada al cabo del primer año -

está constituida por la cantidad original \$ 1,000.00 más \$ 100.00 correspondientes al costo del capital, o sea, \$ 1,100.00; al final del segundo año, serán \$ 1,100.00, más el costo del capital por ese año, \$ 110.00, lo que da un total de \$ 1,210.00, al final del tercer año la cantidad será de \$ 1,210.00 más \$ 121.00, o sea, \$ 1,331.00, y al final del cuarto año, serán \$ 1,331.00 más \$ 133.10, o sea, \$ 1,464.10.

Lo anterior constituye un proceso de interés compuesto, esto es, la acumulación de intereses sobre el capital original y sobre los intereses anteriormente generados.

Aplicando el concepto del valor del dinero con el tiempo en el ejemplo anterior, observamos que \$ 1,000.00 de hoy, tienen un valor de \$ 1,100.00 dentro de un año y de \$ 1,210.00 dentro de dos, de \$ 1,331.00 dentro de tres, y de \$ 1,464.10 dentro de cuatro. En forma inversa, también podemos decir que una cantidad de \$ 1,464.10 dentro de cuatro años, equivalen a \$ 1,000.00 hoy.

Claro que lo anterior es considerando una tasa de incremento del valor del dinero con el tiempo, de 10% anual, lo cual no siempre será cierto, ya que podrá ser mayor o menor de acuerdo con las condiciones de cada caso particular, pero al menos, lo que podemos asegurar, es que dicho

valor nunca es cero.

Como ejemplo de que lo anterior es cierto, preguntémosnos si alguien nos querrá prestar \$1,000.00 ofreciéndole nosotros reintegrarle los mismos \$1,000.00 al cabo de un año; aún dándole plenas garantías de que su dinero le será entregado sin falta y en fecha determinada. Si nadie acepta, la razón será que \$1,000.00 de hoy, no equivalen a \$1,000.00 dentro de un año. Si la mínima cantidad que alguien exige le sea pagada dentro de un año para otorgarnos el préstamo de ----- \$1,000.00 es de \$1,100.00, esto significa que el valor del dinero con el tiempo se valúa en 10% anual.

Lo anterior nos lleva además a otra consideración: supongamos que nos informan que las erogaciones que se llevarán a cabo en cierta inversión, será: \$1,000.00 el día de hoy, \$1,100.00 al terminar el primer año y \$1,210.00 al terminar el segundo año. No podemos decir, que el costo de la inversión está representado por la suma de las erogaciones: \$1,000.00 más \$1,100.00, más \$1,210.00 igual a \$3,310.00, ya que estaríamos sumando cantidades cuyo monto está expresado en distinto tiempo; es decir, si bien es cierto que el desembolso real si será de \$3,310.00, también lo es el hecho de que esta erogación no

será efectuada de un golpe en un momento dado, sino que parte al menos de la misma, será diferida una y dos años.

Lo correcto es, sumar las tres cantidades, pero una vez que han sido expresadas "en un mismo tiempo", así por ejemplo, si actualizamos los valores de cada año al momento actual y consideramos por otro lado que la tasa representativa del valor del dinero con el tiempo, es de un \$ 10%, tenemos:

Valor actual, de \$ 1,000.00 gastados hoy	\$ 1,000.00
Valor equivalente actual de \$ 1,100.00, que se gastarán dentro de un año	1,000.00
Valor equivalente actual de \$ 1,210.00 que se gastarán dentro de dos años.	1,000.00
	<hr/>
Suma actualizada de las erogaciones, al día de hoy.;	\$ 3,000.00

Podemos establecer, que en reconocimiento del concepto de valor de dinero con el tiempo, las cantidades de un cierto flujo de efectivo, deberán ser traducidas a un mismo punto del tiempo, antes de ser sumadas o comparadas entre sí, y es muy importante que quede claro que no pueden sumarse o compararse, cantidades expresadas en distintos puntos del tiempo.

Ahora bien, detengámonos un momento a pensar: ¿Cuál es la razón de fondo de que siempre que analizamos una alternativa de inversión, hay necesidad de considerar un incremento del valor del dinero con el tiempo?. La primera respuesta que se nos ocurre es que el tener que pagar un interés, constituye un hecho en el ámbito de los negocios y en general en el medio mercantil. Pero entonces surge a su vez, otra pregunta aún más compleja: ¿Cómo se explica y se justifica que en los negocios, el interés del dinero, sea un hecho?.

En Economía se explica lo anterior mediante un análisis de la situación de la oferta y de la demanda de fondos para inversión. Desde el punto de vista de la oferta, el interés es necesario como incentivo para invertir. Desde el punto de vista de la demanda, el interés es posible dado que el capital es productivo.

Desde el punto de vista de la oferta, si una persona presta dinero que ha ahorrado, se priva de poder satisfacer en ese momento ciertas necesidades. No puede emplear su dinero en la adquisición de bienes de consumo, si se lo ha prestado a alguien, o si lo ha invertido en la compra de maquinaria o equipo (esto es, en bienes de producción), o ha comprado acciones de una empresa, o lo ha pagado como impuestos al gobierno. En todos estos casos requiere la existencia de un incentivo que lo compense del diferimiento que estas inversiones implican, de la satisfacción inmediata de sus necesidades.

Por otro lado hay que reconocer que otro incentivo, como es el "sentimiento de seguridad", puede en un momento dado, ser más importante que el incentivo: interés. Es común que cierta cantidad de fondos se invierten a tasas menores de interés, pero en condiciones de menor riesgo, ya que la sensación de confianza y seguridad que una inversión de este tipo proporciona, compensa una tasa de recuperación baja relativamente a las que pudieran brindar otras alternativas de inversión pero que implicasen mayor riesgo. Sin embargo, en términos generales podemos afirmar que mientras mayor sea la tasa de interés, mayor es la motivación para diferir el consumo, e invertir con la esperanza de obtener un interés sobre nuestro dinero. Es razonable suponer que si desaparecieran las perspectivas de obtener un interés como remuneración a la inversión del dinero, también desaparecerían los estímulos para invertir..

Ahora, desde el punto de vista de la demanda, ¿cómo es posible pagar interés?, esto es, ¿cómo puede una empresa encontrar conveniente pedir dinero prestado y pagar el interés requerido por ello? ¿cómo puede una sociedad pagar dividendos a sus accionistas, lo cual no es más que una remuneración por la inversión de su dinero?. La respuesta es que los bienes de capital son productivos. El capital y los bienes de producción (maquinaria, equipo, estructuras, etc...), son productivos. Es por esto que una empresa puede pagar un interés sobre dinero prestado, o puede atraer capital de socios que invertirá en

bienes de producción, y pagarles posteriormente dividendos mayores que el interés que pudieran haber obtenido simplemente prestando su dinero.

Con lo anterior tenemos la doble explicación al interés: "El interés puede existir porque el capital es productivo, y es necesario que el interés exista para que haya un incentivo substancial para la inversión".

Pero quizás, más correcto que decir que los bienes de capital son productivos, sería afirmar que bajo circunstancias favorables, bienes de capital específicos son suficientemente productivos para generar una recuperación atractiva, y por otro lado, el problema de determinar ^{si los bienes son} las circunstancias, bienes de capital específicos serán lo suficientemente productivos para generar una recuperación atractiva, es un problema de Ingeniería Económica. Cada situación deberá ser examinada a la luz de los beneficios y costos que las circunstancias permitan estimar.

Las consideraciones de tipo técnico que un problema de este tipo implica, hacen necesaria la intervención de conceptos de Ingeniería Económica para su solución.

Un analista, conocedor de los principios y las técnicas de la Ingeniería Económica, está capacitado para hacer recomendaciones respecto a la conveniencia o no, de invertir en bienes de producción, ya que puede

determinar si dichos bienes, bajo las circunstancias específicas del caso, serán tan productivas como para generar una tasa de recuperación (interés) lo suficientemente atractiva para justificar la inversión en ellas.

TASA MINIMA INTERNA DE RECUPERACION.

Los estados financieros de un negocio, el Balance general y el Estado de Pérdidas y Ganancias principalmente, muestran la utilidad total general obtenida por medio de la inversión realizada, pero debemos notar que de ellos solo podemos determinar la productividad promedio de cada peso. Desgraciadamente el sistema contable no está diseñado para ser más específico al respecto.

Antes de aprobar una inversión debemos insistir en que cada peso; a) garantice una tasa de recuperación y b) que ésta no sea menor que una tasa mínima de recuperación prefijada.

La determinación de la tasa mínima de recuperación se deriva de la forma o criterio de la empresa para aplicar y distribuir sus fondos disponibles, normalmente limitados y cubrir una demanda casi siempre mayor de ellos.

Normalmente, cada año, una empresa podrá predecir con mayor o menor

aproximación la disponibilidad de fondos con que podrá contar en ese período para cubrir los gastos de las operaciones que sus inversiones demanden. El suministro de fondos podrá provenir como ya hemos visto, principalmente de reinversión de utilidades, de liquidación y fondos de depreciación de activos fijos, líneas de crédito, créditos externos diversos o de incrementos de capital social, etc., pero lo importante es que generalmente, el programa de suministros es escaso en comparación con la demanda de fondos y recursos monetarios que requieren las alternativas de inversión que se presentan.

Para ilustrar el problema supongamos que la demanda de fondos para el año siguiente se prevee sea de \$ 32,000,000.00 aproximadamente, pero se estima que las diversas fuentes de financiamiento proveerán solamente unos \$ 20,000,000.00. El objetivo del director de fianzas, será obviamente, invertir los \$ 20,000,000.00 disponibles, en aquellas alternativas de inversión que ofrezcan la mayor retribución y rechazar proposiciones por un monto de \$ 12,000,000.00 que prometen menor retribución.

Para lograr esto, partamos de la suposición de que el analista esté en posición de poder enumerar sus alternativas de inversión en orden decreciente de acuerdo con su retribución estimada.

Alternativas	Inversión Requerida para cada alternativa	Tasa probable de Recuperación.	Monto acumulado de Inversión.
A	2'400,000.00	35 % o más	2'400,000.00
B	1'000,000.00	30 % - 34 %	3'400,000.00
C	4'300,000.00	26 % - 29 %	7'700,000.00
D	6'700,000.00	22 % - 25 %	14'400,000.00
E	2'100,000.00	18 % - 21 %	16'800,000.00
F	3'200,000.00	16 % - 17 %	20'000,000.00

G	3'000,000.00	14 % - 15 %	23'000,000.00
H	3'600,000.00	12 % - 13 %	26'600,000.00
I	5'400,000.00	menos de 12 %	32'000,000.00

En estas condiciones, el fondo disponible de \$ 20,000,000.00 deberá ser aplicado solo a aquellos proyectos que prometen una tasa de recuperación de 16 % o más. Esto significa que la tasa interna mínima de recuperación aceptable para el próximo año y dadas las condiciones anteriores, es de 16 %, que es la tasa mínima de recuperación que esperamos obtener al invertir en el proyecto F, ya que bloquear recursos en alguna de las alternativas G, H, o I, que ofrecen tasa de recuperación máxima menor de 16 %, equivale a eliminar la posibilidad de invertir en una alternativa que brinde 16 % o más.

Esto quiere decir que cualquier inversión que ofrezca 16 % o más, debe ser aprobada y cualquier proyecto que ofrezca una tasa menor,

debe ser rechazada. También quiere decir que \$ 12'000,000.00 de inversiones que prometen tasas de recuperación hasta de un 15 % serán rechazadas. La tasa mínima de recuperación establece el límite inferior, abajo del cual no podemos invertir, es decir, establece la tasa interna mínima aceptable de recuperación.

Enfocado desde otro punto de vista, podemos decir que si en una serie de alternativas de inversión: la alternativa A es preferible a la alternativa B, la B es preferible a la C, etc..., M es la alternativa menos preferible aceptada y N es la alternativa más preferible no aceptada; el costo a considerar al capital, para cualquier alternativa B por ejemplo, de inversión, es la tasa de recuperación de N, ya que representa la utilidad que rechazamos automáticamente cuando aceptamos invertir en B. Así por ejemplo en el caso ilustrado, al agotarse los recursos disponibles con la alternativa F, se establece como costo de oportunidad, la tasa de 15%.

En la tabla anterior, las alternativas A, B, C, ..H, I, pueden interpretarse como alternativas de inversión de diversa índole que se le presentan a un inversionista en un momento dado. O pudieran ser diversos artículos producidos por una fábrica y cuyo volumen de producción individual no puede incrementar a voluntad por estar condicionado por

la demanda en el mercado, de no ser así, la empresa aplicaría la totalidad de sus recursos a producir los artículos A y B que mayor recuperación le proporcionan, aunque también por otro lado, desearía contar con los recursos económicos suficientes para, producir la mayor variedad posible de artículos, aún los que le reportan bajo margen de utilidad, con el fin de presentar al consumidor una gama más amplia de productos e incrementar así el área de su propio mercado. Dado que ni una ni otra alternativa son posibles, dada la limitación del mercado, por una parte, y lo limitado de sus recursos por otra, debe optar por aplicar los recursos de que dispone, para ir saturando cada uno de los renglones A, B, C, ... sucesivamente, hasta el agotamiento de dichos recursos, lo cual sucede en el ejemplo planteado, en la alternativa F. Para el caso de una empresa constructora, las alternativas pudieran significar obras o conjuntos de obras, que considera puede solicitar y obtener de diversas fuentes de trabajo durante el próximo año y con cada una de las cuales, en condiciones normales y por experiencias pasadas (dado que conoce el tipo de obra que ejecuta cada fuente, precios y condiciones de trabajo), espera poder obtener, al finalizar cada una de ellas, una tasa de recuperación dentro del rango expresado en la tabla.

Para efectos del ejemplo planteado, los porcentajes indicados en la tabla, como probables tasas de recuperación, se refieren a tasas de

utilidad neta contablemente hablando, es decir solo faltando deducir el costo del capital empleado, costo que, como veremos más adelante, y salvo el caso de que haya constituido una erogación efectiva, la Contabilidad no registra, reconociéndose solo como costo desde el punto de vista de análisis económico, para efectos de calcular la utilidad neta (económica), y determinar así la bondad económica de la inversión.

Al referirse, para efectos del grupo de alternativas I, de tasas probables de recuperación de "menos del 12 %", se sobre entiende que la tasa pueda ser menor del 12% pero mayor que el porcentaje indicativo del costo del capital, ya ni siquiera es aceptable una inversión cuya tasa de recuperación fuese igual al costo del capital, ya que en esas condiciones, el inversionista solo cubriría sus costos pero no tendría ningún margen adicional que le compensara de los riesgos en que incurre o de las desventajas u obligaciones que adquiere, como la de pagar en fecha prefijada el capital en el caso de que se trabaje con dinero prestado.

Por lo anterior el límite mínimo que se marque para considerar aceptable la tasa de recuperación de una alternativa, será superior al costo del capital en el porcentaje que el inversionista considere que queda compensado su riesgo.

Debe tomarse en consideración, que para el caso de empresas constructoras, su costo de capital frecuentemente es bajo, ya que

si bien es cierto que normalmente debe recurrir a dinero prestado para operar, el cual es caro, u opera con capital social que también lo es, también es cierto que cuenta con el financiamiento de proveedores y subcontratistas, por el cual normalmente no paga y que puede representar en monto y en proporción a las otras fuentes de financiamiento, un renglón considerable. Cuando más, se podrá decir que el costo de dicho capital, está representado por el porcentaje de "descuentos por pronto pago", que deja de percibirse al no poder cubrir el importe de las compras oportunamente.

Cabe recordar que el costo del capital, es el promedio de los costos de capital de las diversas fuentes de financiamiento, ya que como se dijo anteriormente, los capitales se funden en un solo crisol para efectos de la operación de la empresa, lo cual hace muy difícil identificar, una cantidad de dinero empleado, con la fuente de financiamiento de la cual proviene.

Ahora bien, debemos reconocer, que las cosas no son en la realidad tan simples como se plantea en el ejemplo de la tabla. Por ejemplo, es probable que sea muy difícil preveer las oportunidades que se presentarán en el transcurso del próximo año o asegurar que no se presentarán otras que las supuestas. El límite del monto de capital proveniente de financiamiento externo, normalmente no es fijo, y más bien puede afirmarse que varía de acuerdo con las oportunidades

y perspectivas que se presentan a la empresa, los resultados que va obteniendo, su situación en cuanto a prestigio, solidez, etc... Otros factores pueden influir, además de la probable tasa de recuperación, en el grado de atractivo que presenten las diversas alternativas, como pueden ser, la duración del período en que se espera obtener los rendimientos de cada alternativa, o el grado de riesgo que se considere asociado a cada una de ellas; así por ejemplo, pudiera suceder que se decidiese invertir en la alternativa G en lugar de la F, por implicar ésta última un riesgo mucho mayor que la primera, no obstante la G, ofrezca menor tasa de recuperación.

Es indudable, que las diversas alternativas de inversión, normalmente implican diferente grado de riesgo y que el grado de riesgo influye considerablemente en la tasa mínima que resulta atractiva para invertir en cada alternativa.

Es un hecho reconocido en el ámbito real de los negocios, que una empresa con escaso capital propio, y por tanto con mayor necesidad de capital prestado, y que en general representa alto riesgo para quien le presta, consigue ese dinero prestado a una tasa de interés mucho más alto que el que se brinda a empresas más consolidadas y con mayor respaldo económico. Empresas en dificultades, difícilmente encuentran financiamiento externo, aún siendo caro. A empresas en auge, se les brinda diversas oportunidades de financiamiento, a tasas de interés bajas, por el hecho de que quienes invierten en ellas reconocen una garantía para su capital y muy bajas probabilidades para el elemento riesgo.

Frecuentemente el factor de riesgo es reconocido y evaluado por la gerencia de las empresas sin mayor formalismo de reglas y tomado en consideración para la toma de decisiones.

Sin embargo, no obstante las objeciones expresadas y las dificultades que puedan presentarse en cada caso particular, debe quedar claro el principio de que la tasa mínima interna de recuperación debe ser seleccionada teniendo como objetivo fundamental el lograr dentro de la situación y condiciones particulares de cada empresa, el mejor aprovechamiento posible de los recursos de que dispone.

Por todos los criterios expuestos, si a una empresa se le presentan en un momento dado, amplias oportunidades de inversión por un lado, con la posibilidad de obtener de ellas altas tasas de recuperación, y por otro lado, se encuentra con que los recursos de que dispone para llevar a cabo dichas inversiones, resultan escasos, en relación al monto de capital que las mismas requieren, su tasa mínima atractiva de recuperación será muy alta. Si por el contrario, durante cierto periodo, el mercado le ofrece reducidas alternativas de inversión, con bajas tasas probables de recuperación, y además dispone de capital para operar, su tasa mínima atractiva de recuperación disminuirá sensiblemente, al menos mientras dichas circunstancias prevalezcan.

Si en las condiciones del ejemplo planteado en la tabla, se llegará a determinar que en promedio, el costo de capital de los \$ 20'000,000.00 disponibles para operar, ya considerando la composición de dicho capital

y el costo individual de las diversas fuentes de financiamiento que lo integran, es de un 7 %, lo cual pudiese suceder si por ejemplo, el monto del capital que puede conseguir prestado la empresa de fuentes externas, es mucho mayor en porcentaje al capital, normalmente caro, proveniente de fuentes internas y además puede conseguirlo a tasas de interés muy bajas, la tasa mínima atractiva de recuperación seguiría siendo de 16 %, ya que prevalece el argumento de que: "invertir en una alternativa que ofrezca tasa de recuperación inferior a 16 %, equivale a eliminar la posibilidad de invertir en otra alternativa que ofrezca 16 %, o más, dado que los recursos son limitados". En estas circunstancias nos damos cuenta que para efectos de la determinación de la tasa mínima de recuperación, el dato de un 7%, para el costo del capital, resultó irrelevante, (al menos en éste ejemplo, y dada la diferencia entre el 7% y el 16%).

Lo que cabría pensar en este caso, es en la posibilidad de conseguir mayor capital para invertir, aún a una tasa de interés más alta, con el consiguiente incremento del costo promedio del costo del capital, ahora en un 7%, y aplicarlo a alternativas del grupo G, H, o I, solo teniendo cuidado de que la diferencia entre el costo promedio del capital empleado en las diversas inversiones (ya en estas condiciones, mayor de 7%), y la tasa mínima esperada de recuperación de dichas inversiones (ya menor del 16%), sea tal que compense, de acuerdo con

las consideraciones hechas anteriormente, los riesgos en que se incurre al invertir, al aceptar dinero prestado, etc...

Obviamente el objetivo que persigue un inversionista es el de obtener las tasas más altas de recuperación posibles "después" de impuestos y no "antes" de impuestos. Si fuese invariablemente cierto que un ordenamiento de proyectos de inversión según sus tasas de recuperación, fuese el mismo antes y después de impuestos, las conclusiones de los análisis económicos no dependerían del hecho de si los estudios fuesen hechos considerando las condiciones antes o después de impuestos. Bajo estas circunstancias la mayor simplicidad que implica el realizar los estudios económicos antes de impuestos, sería una base válida que justificara el realizarlos siempre antes de impuestos, y solo aumentar las tasas mínimas atractivas, o las tasas de interés consideradas, lo suficiente para observar los efectos del pago de impuestos.

Sin embargo, frecuentemente sucede que los mejores proyectos después de impuestos, no son los mismos que los mejores antes de impuestos. Esto se explica por el hecho de que para distintas circunstancias se presentan diferencias en cuanto a los factores que son deducibles en un caso y en otro, o al hecho de que distintos tipos de inversiones se rigen por diferente legislación fiscal y por tanto, por distintas tasas de impuestos. Por lo anterior, podemos concluir que es conveniente

y en ocasiones necesario, en las condiciones de industria competitiva realizar los análisis económicos "después de impuestos".

Es muy conveniente hacer notar que los criterios en cuanto a la tasa mínima interna de recuperación, una vez fijada ésta dentro de una empresa, sean observados en todos los niveles de la misma y no únicamente en los niveles generales. Es decir, que los efectos que la tasa mínima establecida debe tener en toda decisión de inversión dentro de la empresa, se contempla no solo en las decisiones que se tomen en las altas esferas de la Dirección, sino también en las que se tomen en los departamentos de operación, compras, etc... Es frecuente observar que en las decisiones que se toman en estratos inferiores, no se siguen las políticas de inversión dictadas por la gerencia y que normalmente se toman sin previo análisis económico por elemental que sea y en base a tradición, costumbre, inercia o mera intuición. Sería absurdo suponer que en una empresa constructora, se están recibiendo efectivamente los beneficios de una política de óptimo uso de los recursos, cuando a nivel gerencial se analiza ampliamente y con enfoque económico si la empresa deba encargarse o no de la ejecución de una Obra o si se invierte el capital propio de la misma en la adquisición de terrenos para la realización de un fraccionamiento, pero se descuida el hecho de que en el departamento de adquisición de equipo, se compre maquinaria cuantia sin justifi-

cación real económica en cuanto a la oportunidad del momento, tipo, capacidad, etc..., o no se reemplaza equipo que ya superado su período de vida económica y continúa en operación.

Finalmente, solo queremos recalcar que la selección de una tasa mínima atractiva de recuperación, tiene obviamente, una gran influencia en las decisiones que se tomen a todos los niveles. Proposiciones de inversiones que parecen ser atractivas con una tasa de 7 %, puede ser que se demuestre económicamente que deben ser vetadas aún con tasa de recuperación de un 15 %.

Hay que tener en mente que los elementos básicos en la determinación de la tasa mínima interna atractiva de recuperación son ordinariamente: la tasa de recuperación de la oportunidad en que rechazamos invertir, y el costo promedio del capital disponible, ambos factores considerados. No existe una cifra determinada como tasa mínima aceptable de recuperación, que sea apropiada bajo todas las circunstancias. Dicha tasa deberá ser analizada y establecida en cada caso y para cada situación.

DIFERENCIA ENTRE EL ENFOQUE CONTABLE Y EL CRITERIO
DE ANALISIS ECONOMICO

Un análisis económico tiene por objeto determinar si un cierto capital debe ser invertido o aplicado a otro fin distinto del actual. Un estudio económico tiene como elementos, cursos de acción que aún no se han realizado. Tiene que ver con "eventos futuros". ¿se debe seguir cierto curso de acción? ¿el procedimiento es más económico? El análisis económico proporciona bases para las decisiones.

Ahora bien, una vez que se ha tomado la decisión de invertir y el capital ha sido invertido, se desean conocer los resultados financieros, para lo cual se establecen mecanismos y procedimientos específicamente orientados para la determinación de los resultados financieros y el control de las operaciones todos los cuales constituyen la contabilidad general y la contabilidad de costos.

La contabilidad es en este sentido, la historia de un negocio, se refiere a eventos pasados. Actúa ya conociendo ingresos y egresos. Estima resultados y calcula cual fué la tasa de recuperación.

El análisis económico recomienda una cierta inversión. Si la decisión se toma basada en el estudio económico, la contabilidad comprobará posteriormente si el estudio económico y las recomendaciones fueron correctas.

La contabilidad tiene la ventaja de trabajar con hechos históricos, financieros ya acaecidos, el análisis económico solo cuenta con estimaciones sobre el futuro.

Posteriormente, las observaciones de la contabilidad pueden ser aprovechadas por el analista económico, pero deben saber ser interpretadas.

Como en un experimento, la contabilidad registra todos los eventos significativos financieramente hablando de una inversión y de estos hace posible determinar los resultados y preparar un reporte financiero.

Interpretando correctamente estos reportes se toman las decisiones en el campo económico por los dirigentes.

Se trata de dos funciones distintas pero conectadas.

El Contador nunca afecta las operaciones de un "costo de Capital", a menos que hayan sido efectuadas erogaciones, como pueden ser pagos de intereses bancarios, pago de hipotecas, etc..., mientras que el analista carga a cada peso, de la responsabilidad de cubrir el "costo del capital". Así por ejemplo, si la adquisición de activos o la operación de la empresa son financiados completamente por capital social, no hay que pagar físicamente un interés como se haría en el caso de que el dinero fuese prestado. En este caso, la Contabilidad

no impacta los costos con el importe de un interés correspondiente al capital empleado. Sin embargo, quien realice el análisis económico de la inversión, debe considerar un interés correspondiente al capital empleado y emanado del concepto del costo de oportunidad.

Muy frecuentemente surgen conflictos entre los Ingenieros y los Contadores debido a su distinto enfoque y punto de vista respecto a los costos. Estas controversias reflejan un mutuo desconocimiento de los objetivos de los procedimientos que cada uno de ellos aplica para propósitos distintos. Es necesario el reconocimiento por ambos de la diferencia en los objetivos de su actuación.

TEMA II

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS
PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION

TEMARIO.

- Nomenclatura.
- Interes Simple.
- Factor de un pago Unico con interes compuesto
- Factor de Actualizacion de un pago único.
- Factor de Interés Compuesto de una serie uniforme de pagos.
- Factor del Fondo de Amortizacion.
- Factor de Recuperación del Capital.
- Factor de Actualización de una Serie uniforme de pagos
- Relaciones entre los Modelos Anteriores.
- Series de Pagos con Gradiente de Incremento.
 - Gradiente de Incremento Aritmético.
 - Gradiente de Incremento Geométrico.
- Valores Limite de las Fórmulas.
- Interés Continuo.
- Interés Nominal e Interés efectivo
- Tasa de descuento.
- Interpolación.
- Significado de la Equivalencia entre alternativas.

TEMA II

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA ELCALCULO DE LA TASA DE RECUPERACIONNOMENCLATURA.

Para representar en forma objetiva el flujo de efectivo resultante de una inversión, resulta muy útil el empleo de una "escala de tiempo".

En esta escala, las unidades de tiempo son los periodos de interés, que no necesariamente constituyen meses o años. Cuando las erogaciones o los ingresos se llevan a cabo a lo largo de un periodo, en la escala de tiempo, se acostumbra representar el flujo de efectivo, concentrado al final de dicho periodo:



Para el desarrollo de formulas para el calculo de la tasa de recuperaci3n, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- P: representa la suma presente de dinero. En la escala de tiempo ocurre en el punto cero, es decir, al principio del período inicial.
- F: representa la suma de dinero a una fecha específica futura. En la escala de tiempo, ocurre en el punto (n), es decir, al terminar el último periodo. En mucha de la literatura técnica relativa, es frecuente se presente con (S).
- A: Representa el importe de cada pago, en una serie uniforme de pagos que se efectúan al final de cada periodo. En mucha de la

literatura técnica relativa, es frecuente se represente con (R).

i: Designa a la tasa de interés generada al final de cada período.

n: Representa el número de períodos de interés considerados.

El interés, (i), es la tasa de recuperación, o la recuperación en sí, correspondiente a una inversión. La reinversión de intereses, y el pago de intereses sobre esos intereses, origina el proceso de interés compuesto. Se observa que este proceso refleja el concepto inherente del "valor del dinero con el tiempo", es decir, el hecho de que cada peso "crece" con el tiempo.

Para la determinación del interés por período, es necesario interpretar correctamente lo siguiente

"10 % computado trimestralmente", indica el que se consideran cuatro períodos de interés, de 3 meses de duración cada uno y en ^{los} que se genera un 2.5 % de interés al final de cada uno de ellos.

"10 % de interés" (sin más indicaciones), indica un interés de 10 % anual.

En el primer caso, el interés de 10 % es un "interés nominal", ya que el hecho de que se pague parcialmente por adelantado, da lugar a que el "interés efectivo" sea mayor.

En el segundo caso, el interés nominal y el efectivo, coinciden.

Interés Simple.

El interés simple se calcula mediante la expresión:

$$I = Pni$$

por tanto $F = P + I = P + Pni = P(1 + ni)$

Ordinariamente la unidad de tiempo para el período de interés se considera de 1 año. Cuando es necesario calcular el interés correspondiente a una fracción de año, se considera por mera simplificación, constituido el año por 12 meses, de 30 días, con un total de 360 días. Estas consideraciones dan lugar al "interés simple ordinario." Si se calcula sobre la base de 365 se genera el "interés simple exacto."

En la práctica, el interés simple se emplea en préstamos a corto plazo y cuando el período se mide en días.

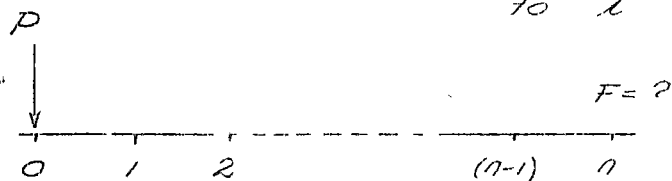
Ejemplo:

Calcular el interés simple que originan \$ 1,000. a una tasa de interés de 6 % anual, durante 60 días.

$$I = 1,000 \times \left(\frac{0.06}{365} \right) \times 60 = \$ 9.86$$

Factor de un pago único con interés compuesto

¿Qué monto final F origina un capital inicial P , invertido durante n periodos a una tasa de interés compuesto i ?



datos: P, n, i
 $F = ?$

El valor de P con el tiempo será:

$$\begin{aligned} \text{Al final del primer periodo} & P + Pi = P(1+i) \\ \text{Al final del segundo periodo} & P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2 \end{aligned}$$

Por inducción se puede concluir que al final de n periodos, la cantidad acumulada será:

$$F = P(1+i)^n$$

el factor: $(1+i)^n$ se le denominará: "factor de un pago único con interés compuesto."

y se representa:

- $(i-n \text{ spcaf})$ que significa: single-payment Compound-Amount factor.
- $(F/P, i, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar un pago único P , para encontrar la cantidad acumulada F al final de n periodos a una tasa de interés i .

Conclusión:

$$\begin{aligned} F &= P(1+i)^n \\ F &= P \cdot i-n \text{ spcaf} = P \cdot (F/P, i, n) \end{aligned}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la cantidad acumulada F por \$1,000, durante 10 años a una tasa de interés del 6% anual?

$$F = P \cdot i-n \text{ spcaf}$$

$$F = 1,000 \cdot 6-10 \text{ spcaf}$$

$$F = 1,000 (1+0.06)^{10} = 1,000 \cdot 1.7908$$

$$F = \$1,790.80$$

Ejemplo:

Consideremos el mismo problema con el que se ejemplificó el interés simple:

Calcular el monto de los intereses que originan \$1,000 invertidos a una tasa de interés de 6% anual durante 60 días, considerando interés compuesto

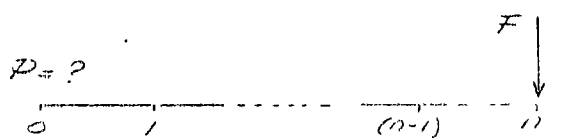
$$F = P \cdot (1 + i)^n = 1,000 \cdot \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{60} = \$1,009.91$$

$$\text{Interés} = F - P = 1,009.91 - 1,000 = \$9.91$$

que es solo 1/2% mayor que el resultado obtenido con interés simple; lo que podría justificar que para préstamos a corto plazo se emplease el criterio de interés simple

Factor de actualización de un pago único

¿Qué capital inicial P , origina un capital final F , después de haber sido invertido durante n periodos a una tasa i de interés compuesto?



datos: $F, n, i\%$
 $P = ?$

Mediante un proceso inverso al anterior, podemos concluir que:

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

al factor $\frac{1}{(1+i)^n}$ se le denomina: "factor de actualización de un pago único"

y se representa:

- ($1-n$ sppwf) que significa: single payment present worth factor.
- ($P/F, i\%, n$)

y es el factor por el cual se multiplica un valor futuro F , para obtener el valor presente P , que ha originado.

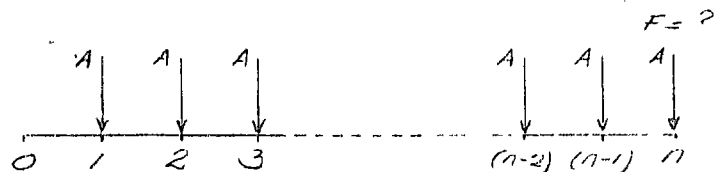
Conclusión

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$P = F \cdot (P/F, i\%, n)$$

Factor de interés compuesto de una serie uniforme de pagos

¿Qué capital final F , origina la inversión uniforme de una cantidad constante A , al final de cada uno de n periodos y a una tasa i de interés compuesto?



datos: $A, n, i, \%$
 $F = ?$

Cada pago A origina diferente interés compuesto, pues cada una de ellas tiene un periodo de inversión distinto: el primer A , tiene $(n-1)$ periodos, el segundo A , $(n-2)$ periodos, etc..., el último A , ocurre en el punto n y no origina interés. En estas condiciones, la suma F estará integrada:

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \dots + A(1+i)^2 + A(1+i) + A \quad (1)$$

multiplicando ambas miembros por $(1+i)$.

$$F(1+i) = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + A(1+i)^3 + A(1+i)^2 + A(1+i) \quad (2)$$

restando la ecuación (1) de la (2)

$$F(1+i) - F = A(1+i)^n - A$$

$$F(1+i-1) = A[(1+i)^n - 1]$$

$$\text{de donde } F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Al factor $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$ se le denomina "factor de interés compuesto de una serie uniforme de pagos" y se representa:

- (i, n) uscaf) que significa: Uniform series compound amount factor
- $(F/A, i, n)$

y es el factor por el cual se multiplica el valor A de cada pago uniforme, para obtener el importe acumulado F , después de n periodos y a una tasa de interés compuesto i .

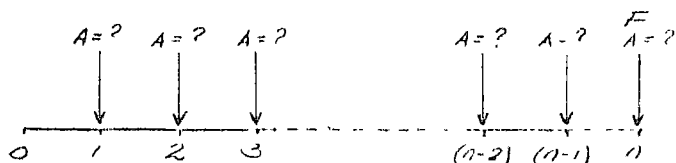
Conclusión:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$F = A \cdot (i, n) \text{ uscaf} = A (F/A, i, n)$$

Factor del fondo de amortización

¿Qué capital constante A hay que invertir periódicamente durante n periodos, con una tasa i de interés compuesto, para acumular un capital final F ?



datos: F, n, i
 $A = ?$

despejando A en la expresión anterior:

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

el factor: $\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina "factor del fondo de amortización" y se representa:

- $(s/f/d/f)$ que significa sinking fund deposit factor
- $(A/F, i, n)$

y es el factor por el que hay que multiplicar el monto final F , para encontrar el importe A de los pagos uniformes y constantes que lo originan durante n periodos y a una tasa i de interés compuesto.

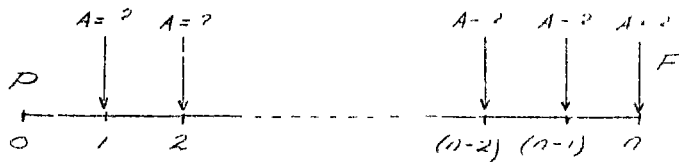
Conclusión:

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = F \cdot \underset{s/f/d/f}{\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]} = F \cdot (A/F, i, n)$$

Factor de Recuperación del Capital

¿Qué monto uniforme A se debe invertir a una tasa i de interés compuesto, al final de cada periodo, durante n periodos, para obtener el mismo monto final F que se obtendría si se invirtiera una cantidad inicial P durante el mismo tiempo y a la misma tasa de interés i ?



datos: $P, n, i\%$
 $A = ?$

Habíamos determinado que:

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

pero, por otra lado tenemos que

$$F = P (1+i)^n$$

substituyendo, resulta:

$$A = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Al factor $\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina "factor de recuperación del capital" y se representa:

- $(1+i)^n \text{ crf}$ que significa: capital recovery factor
- $(A/P, i\%, n)$

y es el factor por el cual se multiplica P para encontrar el valor de los pagos A que lo recuperan al final de n periodos a una tasa i de interés compuesto

Conclusión:

$$A = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = P \cdot (1+i)^n \text{ crf} = P \cdot (A/P, i\%, n)$$

Factor de actualización de una serie uniforme de pagos

¿Cuál es el capital inicial P que invertido durante n periodos a una tasa i de interés compuesto; produce el mismo capital final F , que una serie uniforme de pagos A al final de cada uno de los n periodos y a la misma tasa de interés i ?



datos A, i, n
 $P = ?$

Despejando el valor de P , en la última expresión:

$$P = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

al factor $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$ se le denomina "factor de actualización de una serie uniforme de pagos," y se representa:

- a) $(i-n \text{ uspwf})$ que significa uniform series present worth factor
b) $(P/A, i, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el valor del pago uniforme A , al final de cada uno de n periodos y a una tasa i de interés compuesto, para encontrar el valor P que se recuperan

Conclusión:

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \cdot i-n \text{ uspwf} = A \cdot (P/A, i, n)$$

Frecuentemente, en el planteamiento de algunos problemas de análisis económico, se conoce la suma que será solicitada como préstamo o invertida inicialmente, así como la corriente futura de pagos que su amortización o recuperación origine, y lo que se busca es calcular la tasa de recuperación de la inversión.

En estas condiciones y para el caso de "pago único", el problema se reduce a despejar (i) de la expresión:

$$F = P(1+i)^n$$

de donde

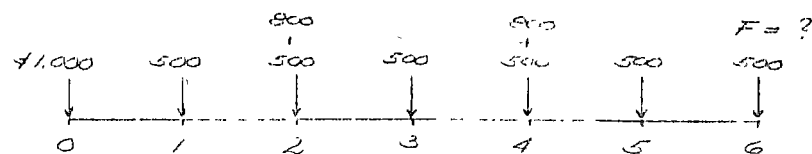
$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

que puede resolverse por logaritmos.

En los demás casos, el problema es más complejo como para ser resuelto directamente y el método más razonable en estas condiciones resulta ser el de interpolación.

Ejemplo:

Dada la siguiente serie de pagos:



calcular el importe de la cantidad final F acumulada al final de los 6 años, considerando una tasa de interes del 10%.

$$F = 1,000 \cdot (1+0.10)^6 + 500 (1+0.10)^5 + 500 (1+0.10)^4 + 500 (1+0.10)^3 + 500 (1+0.10)^2 + 500 (1+0.10)^1 + 500$$

que puede representarse:

$$F = 1,000 \cdot {}_{10-6} \text{spcaf} + 500 \cdot {}_{10-4} \text{spcaf} + 500 \cdot {}_{10-2} \text{spcaf} + 500 \cdot {}_{10-0} \text{uscaf}$$

o también:

$$F = 1,000 \cdot (F/P, 10\%, 6) + 500 (F/P, 10\%, 4) + 500 \cdot (F/P, 10\%, 2) + 500 \cdot (F/A, 10\%, 6)$$

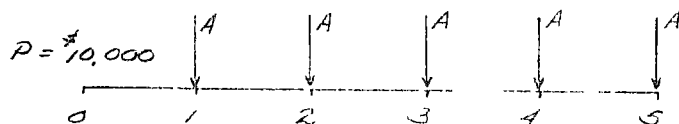
$$F = 1,000 \times 1.7716 + 500 \times 1.4641 + 500 \times 1.2100 + 500 \times 7.7156$$

$$F = \$ 1,771.60 + 732.05 + 605.00 + 3,857.80$$

$$F = \$ 7,766.45$$

Ejemplo:

Sigamos paso a paso, el proceso de recuperaci3n de un capital invertido a una tasa de interes i y durante n periodos. Ejemplifiquemos numericamente el proceso, suponiendo un capital inicial: $P = \$10,000$, invertido a una tasa: $i = 10\%$ durante: $n = 5$ años.



c3lculo de A :

$$A = P \cdot {}_{i-n} \text{crf}$$

$$A = 10,000 \cdot {}_{10-5} \text{crf}$$

$$A = \$10,000 \times 0.26380 = \$2,638$$

Año	Adeudo al principio del año	Intereses generados al final del año	Capital más intereses adeudados al final del año	Pago al final del año	Capital adeudado al final del año, después del pago anual	Capital ya Recuperado
1	\$10,000	\$1,000	\$11,000	\$2,638	\$8,362 ①	\$1,638 ②
2	8,362	836	9,198	2,638	6,560 ③	1,802 ④
3	6,560	656	7,216	2,638	4,578	1,982
4	4,578	458	5,036	2,638	2,398	2,180
5	2,398	240	2,638	2,638	0	2,398
						\$10,000

ejemplo del c3lculo de los elementos

① : \$11,000 - 2,638 = \$8,362

② : \$2,638 - 1,000 = \$1,638

③ : \$9,198 - 2,638 = \$6,560

④ : 1,638 - 836 = \$1,802

Algunas Relaciones entre las Formulas

De la deducción de las fórmulas, se desprende:

$$x^{-n} \text{spcaf} = \frac{1}{x^{-n} \text{sppwf}} \quad x^{-n} \text{uscaf} = \frac{1}{x^{-n} \text{sfd}} \quad x^{-n} \text{crf} = \frac{1}{x^{-n} \text{uspwf}}$$

Empleando la otra notación, las mismas relaciones adquieren la forma:

$$(F/P, i, n) = \frac{1}{(P/F, i, n)} \quad (F/A, i, n) = \frac{1}{(A/F, i, n)} \quad (A/P, i, n) = \frac{1}{(P/A, i, n)}$$

Puede demostrarse que

$$1 + x^{-1} \text{spcaf} + x^{-2} \text{spcaf} + \dots + x^{-(n-2)} \text{spcaf} + x^{-(n-1)} \text{spcaf} = x^{-n} \text{uscaf}$$

y también:

$$x^{-1} \text{sppwf} + x^{-2} \text{sppwf} + \dots + x^{-(n-1)} \text{sppwf} + x^{-n} \text{sppwf} = x^{-n} \text{uspwf}$$

$$\begin{aligned} x^{-n} \text{crf} - i &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i = \frac{x(1+x)^n - i[(1+x)^n - 1]}{(1+x)^n - 1} \\ &= \frac{x(1+i)^n - x(1+x)^n + x}{(1+i)^n - 1} \\ &= \frac{x}{(1+i)^n - 1} = x^{-n} \text{sfd} \end{aligned}$$

$$\therefore x^{-n} \text{crf} - i = x^{-n} \text{sfd}$$

Serie de Pagos con Gradiente de Incremento

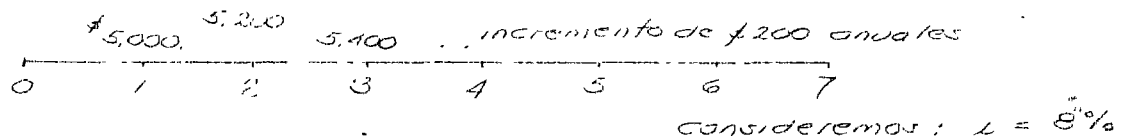
En algunos problemas de Ingeniería Económica, el flujo de efectivo puede mostrarse como una serie de ingresos o egresos que se incrementan o disminuyen en cada periodo. Esto puede ser el caso, por ejemplo, de los costos de mantenimiento de un equipo, los cuales, es normal que aumenten un porcentaje, año con año.

Si el incremento es el mismo en cada periodo, se hablara de una "serie de pagos con gradiente de incrementos aritmetico", si los incrementos varian cada periodo en funcion de un factor constante, se tendra una "serie de pagos con gradiente de incremento geometrico"

Cuando en el caso de que en una serie de pagos, estos varien en forma irregular, habria que estudiar la posibilidad de ajustar dicha serie a una de las series anteriores

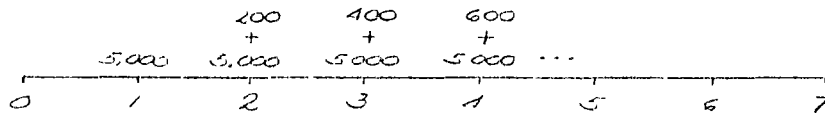
A). Gradiente de incremento aritmetico

Supongamos la siguiente serie de pagos:

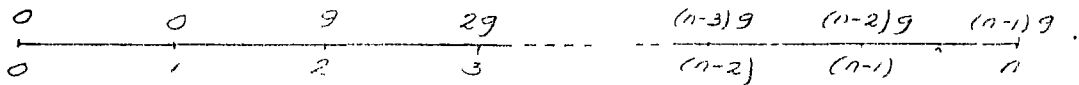


Calcular los valores de F o de P en una serie como la anterior, seria muy laborioso contando solo con las formulas anteriores.

La serie anterior puede representarse.



ya que los \$5,000 anuales constituyen una serie uniforme que puede ser tratada con las formulas establecidas anteriormente, fijemos nuestra atencion en la parte afectada por el gradiente anual, en este caso, de \$200. y al que vamos a representar con (g). La serie parcial, puede representarse, generalizando a un horizonte de n periodos:



Trataremos de traducir la serie anterior en:

UNA SERIE UNIFORME EQUIVALENTE, de la siguiente manera.

$$F = g \cdot \frac{1 - v^{n-2}}{d} + 2g \cdot \frac{1 - v^{n-3}}{d} + \dots + (n-2)g \cdot \frac{1 - v}{d} + (n-1)g \cdot v \quad (1)$$

↑
Número de periodos faltantes

Multiplicando la igualdad (1) por $(1, s_{pcaf})$:

$$F \cdot (1, s_{pcaf}) = g \cdot (1, s_{pcaf}) + 2g \cdot (1, s_{pcaf}) + \dots + (n-2)g \cdot (1, s_{pcaf}) + (n-1)g \cdot (1, s_{pcaf}) \quad (2)$$

se obtiene de:

$$\begin{aligned} (1, s_{pcaf}) \cdot (1, s_{pcaf}) &= (1+i)^{n-2} (1+i) \\ &= (1+i)^{n-1} \\ &= (1, s_{pcaf}) \end{aligned}$$

Restando (1) de (2).

$$F - F \cdot (1, s_{pcaf}) = -g \cdot (1, s_{pcaf}) - g \cdot (1, s_{pcaf}) - \dots - g \cdot (1, s_{pcaf}) - g \cdot (1, s_{pcaf}) + (n-1)g$$

Cambiando de signos en ambos miembros y sacando a (g) como factor común:

$$\begin{aligned} F \cdot (1, s_{pcaf}) - F &= g \left[(1, s_{pcaf}) + (1, s_{pcaf}) + \dots + (1, s_{pcaf}) + (1, s_{pcaf}) + 1 \right] - ng \\ &= F \cdot (1+i) - F \\ &= F + F \cdot i - F \\ &= F \cdot i \end{aligned}$$

$= {}_n u_{scaf}$ (ver pag. 85)

$$F \cdot i = g \cdot {}_n u_{scaf} - ng - i \quad (3)$$

Multiplicando por el factor ${}_n s_{fdf}$ (que es el recíproco de ${}_n u_{scaf}$):

$$F \cdot i \cdot {}_n s_{fdf} = g \cdot \underbrace{{}_n u_{scaf} \cdot {}_n s_{fdf}}_{=1} - ng \cdot {}_n s_{fdf}$$

dado que: $F \cdot {}_n s_{fdf} = A$

despejando la (i) se tiene:

$$A = \frac{g}{i} - \frac{ng}{i} \cdot {}_n s_{fdf}$$

$$A = g \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i} \cdot {}_n s_{fdf} \right]$$

$$A = g \cdot {}_{i-n} asf$$

el factor $\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i} \cdot {}_n s_{fdf} \right]$ es la denominadora factor de serie aritmética y se representa

a) ${}_{i-n} asf$ que significa "arithmetic series factor"

b) $(A/g, i, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el gradiente de una serie aritmética, para encontrar el valor A de una serie uniforme equivalente.

Así, para el ejemplo propuesto, el valor de los pagos A , de una serie uniforme equivalente, será:

$$A = 5,000 + 200 \cdot {}_8s_{\overline{8}|7} = 5,000 + 200 \cdot 2.6937$$

$$A = \$ 5,538.74$$

Por otro lado, de la ecuación (3), se puede obtener el valor de F

$$F = \frac{g}{i} [{}_n u s_{\overline{n}|i} - n]$$

También puede encontrarse el valor presente de la serie con gradiente aritmético:

$$P = A \cdot {}_n u s_{\overline{n}|i} = g \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i} {}_n s_{\overline{n}|i} \right] \cdot {}_n u s_{\overline{n}|i}$$

$$P = g \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = g \frac{1}{i} ({}_n u s_{\overline{n}|i} \cdot n \cdot {}_n s_{\overline{n}|i})$$

$$P = g \cdot {}_n g p w f$$

Al factor $\frac{1}{i} ({}_n u s_{\overline{n}|i} \cdot n \cdot {}_n s_{\overline{n}|i})$ se le denomina factor de actualización del gradiente de una serie aritmética, y se representa:

a) ${}_n g p w f$ que significa gradient present worth factor

b) $(P/g, i, n)$

Es claro que la relación entre los factores anteriores, será:

$${}_n g p w f = {}_n a s_{\overline{n}|i} \cdot {}_n u s_{\overline{n}|i}$$

que también puede representarse

$$(P/g, i, n) = (A/g, i, n) \cdot (P/A, i, n)$$

B) Gradiente de incremento Geométrico.

Consideremos una serie de pagos del tipo:

	D	aD	a^2D	...	$a^{n-2}D$	$a^{n-1}D$	$a^{n-1}D$
0	1	2	3	...	$(n-2)$	$(n-1)$	n

Calculamos el valor F acumulado al término de n periodos

$$F = D \cdot (1+i)^{n-1} + aD(1+i)^{n-2} + \dots + a^{n-3}D(1+i)^2 + a^{n-2}D(1+i) + a^{n-1}D \quad (1)$$

multiplicando ambos miembros por: $\frac{(1+i)}{a}$

$$F \frac{(1+i)}{a} = \frac{D}{a} (1+i)^n + D(1+i)^{n-1} + aD(1+i)^{n-2} + \dots + a^{n-3}D(1+i)^2 + a^{n-2}D(1+i) + a^{n-1}D \quad (2)$$

Restando la ecuación (2) de la (1)

$$F - F \frac{(1+i)}{a} = -\frac{D}{a} (1+i)^n + a^{n-1}D$$

$$F \left[\frac{a - (1+i)}{a} \right] = D \left[a^{n-1} - \frac{(1+i)^n}{a} \right]$$

$$F [a - (1+i)] = D [a^n - (1+i)^n]$$

por tanto:

$$F = D \left[\frac{a^n - (1+i)^n}{a - (1+i)} \right]$$

el factor $\left[\frac{a^n - (1+i)^n}{a - (1+i)} \right]$ se le denomina "factor de serie geométrica".

A partir del valor de F de la expresión anterior, se pueden calcular los valores de P y el de A , este último, correspondiente a una serie uniforme equivalente.

Valores límite de las fracciones

Si el número de periodos (n) tiende a valores muy grandes, es decir: $n \rightarrow \infty$

$$x \rightarrow \infty \text{ spcaf} = (1+i)^{\infty} = \infty$$

$$x \rightarrow \infty \text{ spcaf} = \frac{1}{(1+i)^{\infty}} = 0$$

$$x \rightarrow \infty \text{ uscaf} = \frac{(1+i)^{\infty} - 1}{i} = \infty$$

$$x \rightarrow \infty \text{ sfd} = \frac{c}{(1+i)^{\infty} - 1} = 0$$

$$x \rightarrow \infty \text{ cif} = \frac{x(1+i)^{\infty}}{(1+i)^{\infty} - 1}$$

en este caso caemos en una indeterminación, por lo que resulta más sencillo evaluar el límite, mediante la expresión:

$$x \rightarrow \infty \text{ cif} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sfd} + i = 0 + i = i$$

$$x \rightarrow \infty \text{ uspwf} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cif}} = \frac{1}{i}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ asf} = \frac{1}{i}$$

Si la tasa de interés (i), vale 0:

$$0 < n \text{ spcaf} = 1$$

$$0 < n \text{ sppwf} = 1$$

$$0 < n \text{ uscaf} = n$$

$$0 < n \text{ uspwf} = n$$

$$0 < n \text{ sfd} = \frac{1}{n}$$

$$0 < n \text{ cif} = \frac{1}{n}$$

$$0 < n \text{ asf} = \frac{n-1}{n}$$

INTERES CONTINUO.

Para el desarrollo de las fórmulas mostradas anteriormente, se aceptó inicialmente que todos los pagos ocurren en forma discreta, es decir, en cada período se consideran agrupados en un solo pago ocurriendo éste al final del período. Como consecuencia, a los intereses correspondientes se les aplican las mismas consideraciones. Surge la duda de si un sistema de pagos e intereses como el anterior refleja la realidad, y de no ser así, de cual es el grado de error que introducen las suposiciones hechas.

Por un lado, es cierto que ciertos pagos en realidad se concentran en un punto específico del tiempo, como es el caso del pago para la compra de un equipo o del ingreso que se obtiene por su venta, los cuales se ubican en la escala de tiempo, al inicio y al final del primero y último períodos respectivamente, lo cual sí refleja la realidad, pero otros efectivos de caja ocurren en forma más o menos continua en el transcurso de un período, como sucede por ejemplo, con erogaciones semanales para el pago de obra de mano, o mensuales o bimestrales, para cubrir los gastos por concepto de energía, materiales, impuestos, operación en general, etc..., y suponerlos todos ellos concentrados o representados al final de un período, digamos anual, es evidente que configura una situación muy diferente de la real. Quizás un modelo en que se considerasen todos estos pagos

fluyendo continuamente, como una corriente de agua, a lo largo del período, sería probablemente más apegado a la realidad que considerarlos concentrados al final del año. Además hay casos en que ni la inversión inicial, por ejemplo, es puntual, ya que ^{se} distribuye a lo largo de uno o varios períodos, como es el caso de la construcción de una obra en la que los pagos para sufragar los gastos de la misma, se distribuyen a todo lo largo del período que dura la construcción.

El criterio del "interés continuo" proviene de la suposición de que los costos y los beneficios se generan en cada día, en cada hora y en cada minuto de la operación.

La verdad es que uno y otro criterios, representan e implican un conjunto de suposiciones y consideraciones, ya que en general en el ámbito real, el flujo de efectivo ni obedece totalmente a un modelo discreto, ni se comporta como un líquido que fluye continuamente.

Ambos métodos proporcionan resultados aproximados y sin embargo los rangos de error que implican no son de tal magnitud que invaliden alguno de los criterios.

Sin embargo, la costumbre establecida, sobre todo en los campos de la industria y el comercio, propician el empleo del sistema discreto.

En general, el tratamiento que se da al dinero dentro de los sistemas

comunmente aceptados, de pagos, compras, inversiones en bonos y acciones, otorgamiento de préstamos, hipotecas, etc..., se ajusta al sistema discreto.

El criterio de interés continuo tiene aplicación en el desarrollo de ciertos modelos matemáticos para la toma de decisiones o en aquellos casos en que por la naturaleza misma del flujo de efectivo, se hace conveniente el empleo de dicho criterio.

INTERES NOMINAL E INTERES EFECTIVO.

Muchas transacciones comerciales, estipulan que el cálculo de intereses, así como su cargo o abono, se haga en períodos uniformes menores de un año; Sin embargo, aún en estos casos, es costumbre indicar la tasa de interés de esa inversión en base anual, aunque los períodos de pago o cálculo de los intereses sean menores de un año. Así por ejemplo, si una tasa de interés es de 3% cada 6 meses, se acostumbra referirse a ella como una tasa de 6% anual, solo que al interés calculado de esta manera se le designa como: "tasa nominal de interés" para diferenciarla de la tasa real o efectiva que es algo mayor que el 6%.

Así por ejemplo, el interés real anual o efectivo de un capital de \$ 100.00 invertido a una tasa de 6% computado semestralmente, se calcula:

Intereses generados en los primeros 6 meses

$$I = \$ 100 \times 0.03 = \$ 3.00$$

Capital total al iniciar el segundo semestre

$$P + P_1 = \$ 100.00 + \$ 3.00 = \$ 103.00$$

Interes sobre el capital anterior al final del segundo

Semestre. $I = \$ 103.00 \times 0.03 = \$ 3.09$

Interés total acumulado durante el año

$$\$ 3.00 + 3.09 = \$ 6.09$$

Tasa real en el año de interés

$$\frac{\$ 6.09}{\$ 100} = 0.0609 \quad 6.09 \%$$

A esta tasa real de interés, con base anual, se le denomina "tasa de interés efectiva". De aquí en adelante vamos a emplear la denominación "tasa real" para períodos menores de un año y "tasa efectiva" exclusivamente para indicar la tasa real correspondiente a un año.

Cuando se de como dato la tasa nominal, para poder aplicar las fórmulas, habrá que calcular primero la tasa real por período y trabajar con el número de períodos correspondientes a esa tasa real. Las tasas nominales, no sirven para base de comparación entre alternativas sino hasta que han sido convertidas a tasas efectivas.

La tasa efectiva de interés es el interés anual total percibido por unidad de capital empleado, considerando que este interés (cuando es computado en períodos menores de un año), es invertido por el resto

del año tan pronto como se genera, en los mismo términos y condiciones de inversión a que esta sujeto el capital principal.

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva de interés de un capital de \$ 100.00 invertido a una tasa de 6% computada cada 3 meses, durante 10 años.

Tasa real de interés en el trimestre $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$
Número de periodos trimestrales en los 10 años = 40
Cantidad acumulada al término de los 10 años:

$$F = P \cdot s_{pcaf} = \$100 \cdot (1 + 0.015)^{40}$$
$$F = \$100 \cdot 1.8110$$
$$F = \$181.10$$

Analizemos más detenidamente el proceso

El capital acumulado al cabo de un año, correspondiente a cada peso invertido, será:

$$F = \$1.00 \cdot s_{pcaf} = \$1.0614$$

En consecuencia, el importe de los intereses ganados /por año/por peso:

$$F - P = \$1.0614 - 1.00 = \$0.0614$$

lo que equivale a una tasa efectiva de interés del : 6.14%

Generalizando:

$$\text{tasa efectiva de interés} = \left[\frac{F - P}{P} \right] = \left[\frac{P \cdot s_{pcaf} - P}{P} \right]$$

$$\text{tasa efectiva de interés} = \left(\left(1 + \frac{r}{M} \right)^M - 1 \right)$$

donde (i') es la tasa real por periodo y (M) es el número de periodos que hay en un año, correspondientes a la tasa real (i')

Cuando se tiene como dato, la tasa nominal de interés anual (r), la expresión toma la forma:

$$\text{tasa efectiva de interés} = \left(1 + \frac{r}{M} \right)^M - 1$$

Para el caso, en el caso del interés continuo el número de periodos (M) en el que uno de los valores compuestos de interés, tiende a ser muy grande, es decir

$$M \rightarrow \infty$$

Y en estas condiciones se en la expresión $(1 + \frac{r}{M})^M$

llamamos $\frac{M}{r} = K$ es decir $M = K \cdot r$

substituyendo queda $(1 + \frac{1}{K})^{K \cdot r} = \left[(1 + \frac{1}{K})^K \right]^r$

al tender $M \rightarrow \infty$, también $K \rightarrow \infty$

y recordando que $\lim_{K \rightarrow \infty} \left\{ (1 + \frac{1}{K})^K \right\} = e$

entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} (1 + \frac{r}{M})^M = e^r$

en estas condiciones, para el caso del interés continuo se tiene

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interés} = e^r - 1}$$

Ejemplo:

¿Qué tasa es mayor:

- 3% computada mensualmente
- 3 1/2% computada semestralmente

a) 3% (nominal anual) computada mensualmente
 tasa real mensual $3/12 = 1/4\%$
 número de periodos en un año = 12

tasa efectiva de interés $(1 + \frac{0.03}{12})^{12} - 1 = 1.0304 - 1 = 0.0304 = 3.04\%$

b) 3 1/2% (nominal anual) computada semestralmente
 tasa real semestral $3.5/2 = 1.75\%$
 número de periodos en un año = 2

tasa efectiva de interés $(1 + \frac{0.035}{2})^2 - 1 = 1.0353 - 1 = 0.0353 = 3.53\%$

• es mayor la tasa de 3 1/2% computada semestralmente

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva de interes a que es invertido un capital de \$100.000 y la tasa anual (nominal) es de 12% y es computada en periodos: anual, semestral, trimestral, mensual, diario y continuo. Calcular la cantidad F acumulada en cada caso al cabo de 1 año

Periodo de computación	Número de periodos en 1 año	Tasa de interes real en el periodo	cálculo	Tasa efectiva de interes	Cantidad F acumulada en 1 año
anual	1	$12/1 = 12\%$	$1.12 - 1 = 0.12$	12%	$F = \$100(1+0.12)^1 = \112.00
semestral	2	$12/2 = 6\%$	$1.1236 - 1 = 0.1236$	12.36%	$= \$112.36$
trimestral	4	$12/4 = 3\%$	$1.1255 - 1 = 0.1255$	12.55%	$= \$112.55$
mensual	12	$12/12 = 1\%$	$1.1268 - 1 = 0.1268$	12.68%	$= \$112.68$
diario	360	$12/360 = 0.0333\%$	$1.1269 - 1 = 0.1269$ $0.0333 - 360$ $\log(1.000333)^{360} = 360 \log 1.000333$ $= 360 \times 0.0001442 = 0.051912$ $(1.000333)^{360} = \text{antilog } 0.051912 = 1.1269$ $(1+0.000333)^{360} - 1 = 0.1269$	12.69%	$= \$112.69$
continuo	$\rightarrow \infty$	$12/\infty \rightarrow 0$	$e^{0.12} - 1 =$ $\log e^{0.12} = 0.12 \log e$ $= 0.12 \times 0.4343$ $= 0.0521$ $e^{0.12} = \text{antilog } 0.0521 = 1.127$ $e^{0.12} - 1 = 1.127 - 1 = 0.127$	12.70%	$= \$112.70$

El ejemplo anterior ilustra la diferencia entre tasa nominal y tasa real y la necesidad de especificar cual tasa se conoce como dato al hacer el análisis de una alternativa.

Observamos que si en el sistema de interés continuo y en el de interés discreto, se trabaja con la misma tasa efectiva, la cantidad acumulada al final de un año es la misma, lo cual indica que la diferencia entre -- sus tasas nominales, es irrelevante y así por ejemplo, una tasa efectiva de interés de 12.7%, acumula en el ejemplo anterior una $F = \$ 112.70$ tanto por el sistema discreto como para el continuo.

Es claro que en el sistema de interés continuo, la tasa nominal anual -- siempre será distinta de la tasa efectiva, ya que la primera vale (r) y la segunda $(e^r - 1)$, razón por la cual, en las tablas de interés continuo siempre se indica la tasa efectiva con la cual se calculan a la cual corresponde. En cambio en el sistema de interés discreto, la tasa nominal será igual a la tasa efectiva, excepto cuando los intereses se computen en periodos menores de un año.

Vemos en el ejemplo, que los valores obtenidos para el interés continuo son muy similares a los correspondiente al interés discreto, con periodo de computación diario y aún a los de periodo de computación mensual.

TASA DE DESCUENTO.

En todos los casos que anteceden, hemos considerado que los intereses son computados y pagados al final de cada período de interés. Cuando el pago de los intereses se hace por adelantado, es decir, al inicio del período, se dice que este pago constituye un "descuento".

Si un capital (P) inicial, es invertido y acumula una cantidad (F) al final de un cierto período, entonces (F - P) representa los intereses:

sobre P, (si los intereses son pagados al final del período).

sobre F; (si los intereses son descontados al inicio del período).

en estas condiciones,

tasa de interés : $i = \frac{F - P}{P} = \frac{F}{P} - 1$

tasa de descuento: $d = \frac{F - P}{F} = 1 - \frac{P}{F}$

de las expresiones anteriores se deduce que:

$i = \frac{d}{1-d}$

También puede demostrarse que para el caso de la tasa de descuento:

$$\left[\begin{aligned} F &= P \frac{1}{(1-d)^n} = P (1-d)^{-n} \\ P &= F (1-d)^n \end{aligned} \right]$$

Ejercicio

Calcular el descuento correspondiente a un año de pagar los intereses de un préstamo de \$1000 a una tasa de interés del 4% compuesto anualmente.

Tasa de interés (nominal) = 4%
Tasa de descuento (real) = $4\% = 0.04$
Número de períodos de interés = 1 año = 1

La suma total P que se debe pagar al préstamo, a la vez de cancelar por parte del prestatario los intereses será:

$$P = (1 + i)^n \cdot \$1000 = (1 + 0.04)^{20} \cdot \$1000 = (1.04)^{20} \cdot 1000$$

$$\log(1.04)^{20} = 20 \log 1.04 = 20 \cdot 0.0170333$$
$$= 0.340666$$
$$= 0.340666$$
$$(1.04)^{20} = \text{antilog } 0.340666 = 1.094731$$

por tanto, el prestatario debe pagar $\$1094.731$ y el descuento será de $\$94.731$ de un préstamo de $\$1000$ a una tasa de interés del 4% compuesto anualmente.

INTERPOLACIÓN

Cuando se van haciendo cálculos, los valores requeridos para determinar $f(x)$ o $f(y)$, no se encuentran en los tablas, y a fin de no tener que hacer un cálculo complicado a partir de las fórmulas, se puede interpolar entre los valores más cercanos al número.

En un gráfico, se puede observar los puntos que el interpolante debe de satisfacer para ser una línea recta, y a fin de no tener que hacer un cálculo complicado a partir de las fórmulas, se puede interpolar entre los valores más cercanos al número.

En un gráfico, se puede observar los puntos que el interpolante debe de satisfacer para ser una línea recta, y a fin de no tener que hacer un cálculo complicado a partir de las fórmulas, se puede interpolar entre los valores más cercanos al número.

En el caso de un gráfico, se puede observar los puntos que el interpolante debe de satisfacer para ser una línea recta, y a fin de no tener que hacer un cálculo complicado a partir de las fórmulas, se puede interpolar entre los valores más cercanos al número.

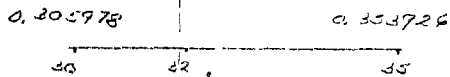
Ejemplo:

Calcular el valor de ${}_{32|}crf$

teniendo como datos los valores proporcionados por las tablas:

$${}_{30|}crf = 0.305978$$

$${}_{35|}crf = 0.353926$$



Procediendo por interpolación tendremos que:

$$\begin{aligned}
 {}_{32|}crf &= 0.305978 + (0.353926 - 0.305978) \times \frac{2}{5} \\
 &= 0.305978 + 0.019119 \\
 &= 0.325097
 \end{aligned}$$

Calculémoslo directamente a partir de la fórmula:

$${}_{32|}crf = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{0.32(110.32)^{15}}{(110.32)^{15} - 1}$$

cálculo de $(1.32)^{15}$

$$\begin{aligned}
 \log(1.32)^{15} &= 15 \log 1.32 \\
 &= 15 \times 0.120514 = 1.80861 \\
 \therefore (1.32)^{15} &= \text{antilog } 1.80861 = 64.35894
 \end{aligned}$$

$${}_{32|}crf = \frac{0.32 \times 64.35894}{64.35894 - 1} = 0.3250505$$

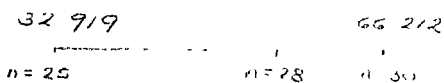
Vemos que en este caso, la diferencia entre los valores obtenidos por interpolación y directamente, es apenas de 0.03%

Ejemplo:

Calcular el valor de ${}_{12|}spcaf$

teniendo como datos los valores: ${}_{15|}spcaf = 32.919$

${}_{15|}spcaf = 66.212$



Procediendo por interpolación:

$$\begin{aligned}
 {}_{15-28} \text{spcaf} &= 32.919 \cdot (66.212 - 32.919)^{3/5} = \\
 &= 32.919 \cdot 19.976 \\
 &= 32.895
 \end{aligned}$$

Calculémoslo directamente

$$\begin{aligned}
 {}_{15-28} \text{spcaf} &= (115)^{28} \\
 \log (115)^{28} &= 28 \log 115 = 28 \cdot 0.060698 = 1.699544 \\
 (115)^{28} &= \text{antilog } 1.699544 = 50.066
 \end{aligned}$$

Vamos que en este caso el error debido a la interpolación es de 5.65%, que en un caso específico podría tener consecuencias apreciables

Otro procedimiento que en este caso podría seguirse sería:

$${}_{15-28} \text{spcaf} = (110.15)^{28} = (110.15)^{25} \cdot (110.15)^3$$

donde los valores de estos 2 factores sí están tabulados:

$$(110.15)^{28} = 32.919 \cdot 1.5209 = 50.066$$

método con el cual también se encuentra el valor exacto.

Ejemplo:

¿A qué tasa de interés, computada trimestralmente, se duplica un capital P invertido a 10 años? Calcular la tasa real trimestral, la tasa nominal anual y la tasa efectiva.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{P}{0} & \frac{2P}{40} & P \quad \text{spcaf} = 2P \\
 & & i=10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{spcaf} = 2 \\
 i=10
 \end{array}$$

En las tablas se pueden encontrar los siguientes valores:

$${}_{17\frac{1}{2}-40} \text{spcaf} = 1.814$$

$${}_{2-40} \text{spcaf} = 2.208$$

$$\begin{array}{ccc}
 1.814 & 2.000 & 2.208 \\
 \hline
 17\frac{1}{2} & & 21 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\
 & x &
 \end{array}$$

Interpolando se obtiene:

$$i = 17\frac{1}{2}\% + x = 17\frac{1}{2} + \left(\frac{2.000 - 1.814}{2.208 - 1.814} \right) \cdot \frac{1}{2} = 17\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.186}{0.394}$$

$$i = 17.5 + 0.236 = 17.736\% \quad (\text{tasa real trimestral})$$

La tasa nominal anual será $1.136\% \cdot 4 = 6.944\%$
 La tasa efectiva será

$$\frac{5.761 - 4}{1.761 - 4} = (1 + 0.01736)^4 - 1 = 0.07127 = 7.127\%$$

El problema también se puede resolver mediante la fórmula.

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[40]{\frac{2P}{P}} - 1 = \sqrt[40]{2} - 1$$

$$\log \sqrt[40]{2} = \frac{\log 2}{40} = \frac{0.30103}{40} = 0.007526$$

$$\sqrt[40]{2} = \text{antilog } 0.007526 = 1.0175$$

$$i = \sqrt[40]{2} - 1 = 1.0175 - 1 = 0.0175 = 1.75\% \text{ (tasa real trimestral)}$$

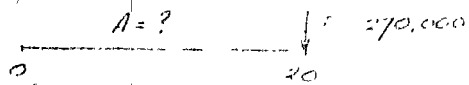
$$\text{tasa nominal anual} = 1.75 \cdot 4 = 7.0\%$$

$$\text{tasa efectiva} = \frac{5.761 - 4}{1.75 - 4} = 1.07186 - 1 = 0.07186 = 7.186\%$$

Ejemplo:

Una familia desea ahorrar durante los próximos 5 años, \$270,000.00 para la adquisición de una casa de campo. Si tiene oportunidad de invertir al 10% anual computado trimestralmente, ¿cuánto debe ahorrar anualmente?

Dado que tenemos como dato la tasa real trimestral que es de $10/4 = 2.5\%$, tendremos que trabajar en periodos trimestrales que en 5 años son $5 \cdot 4 = 20$ periodos.



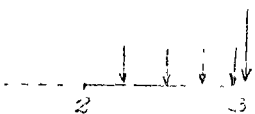
$$A \cdot i = (A/F, i\%, n)$$

$$A = 270,000 \cdot (A/F, 2.5\%, 20)$$

$$A = \$270,000 \cdot 0.039147$$

$$A = \$10,569.69 / \text{trimestrales}$$

Pero como el importe del ahorro que se busca es el anual.



$$F = A \cdot (F/A, i\%, n)$$

$$F = \$10,569.69 \cdot (F/A, 2.5\%, 4)$$

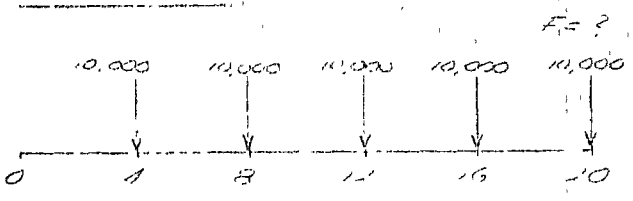
$$F = \$10,569.69 \cdot 4.1225 = \$43,890.64 / \text{anuales}$$

Ejemplo:

Una persona espera recibir un bono por \$10,000 al final de cada año y por los próximos 5 años. Cada bono le redituara un 12% anual computado trimestralmente. ¿cuando le dio acumulado al termino de los 5 años?

tasa real trimestral $i/A = 3\%$
numero de periodos trimestrales en bonos $5 \times 4 = 20$

1º metodo



$$F = 10,000 (F/P, 3\%, 16) + 10,000 (F/P, 3\%, 12) + 10,000 (F/P, 3\%, 8) + 10,000 (F/P, 3\%, 4) + 10,000$$

$$F = 70,000 \cdot (1.60171 + 1.42575 + 1.26677 + 1.12552 + 1)$$

$$F = 10,000 \cdot 6.42276 = \$64,227.60$$

2º metodo

$$F = 10,000 \cdot (A/F, 3\%, 4) \cdot (F/A, 3\%, 20)$$

$$F = 10,000 \cdot 0.23903 \cdot 26.870$$

$$F = \$64,227.60$$

3º metodo

$$F = 10,000 \cdot (A/P, 3\%, 4) \cdot (F/A, 3\%, 16) + 10,000$$

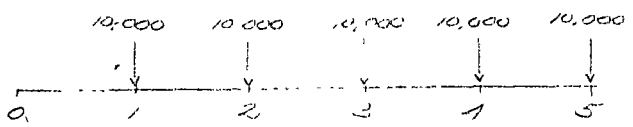
$$F = 10,000 \cdot 0.26903 \cdot 20.157 + 10,000$$

$$F = \$64,227.60$$

4º metodo:

Calculamos la tasa efectiva correspondiente a una tasa real trimestral de 3%

$$\text{tasa efectiva} = (F/P, 3\%, 4)^{-1} = 0.12551$$



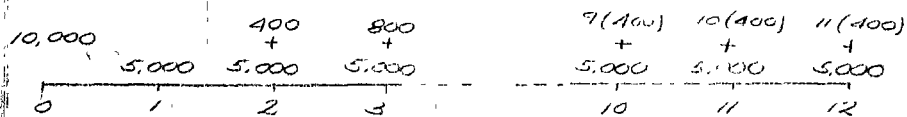
$$F = \$10,000 \cdot (F/A, 12.551\%, 5)$$

$$(F/A, 12.551\%, 5) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0.12551)^5 - 1}{0.12551} = \frac{1.8061251}{0.12551} = 6.42276$$

$$F = \$10,000 \cdot 6.42276 = \$64,227.60$$

Ejemplo.

Una máquina cuesta \$10,000 ya instalada. Se considera tendrá un costo de operación total, de \$5,000 durante el primer año y se supone se incrementarán en \$100 cada año. Si se fija para el capital una tasa de interés anual de 10%, ¿cuál será el costo total de la máquina después de 12 años de operación?



$$F = 10,000 + \text{spcaf}_{10-12} + \left[5,000 + 100 \cdot \text{osf}_{10-12} \right] \cdot \text{usca}_{10-12}$$

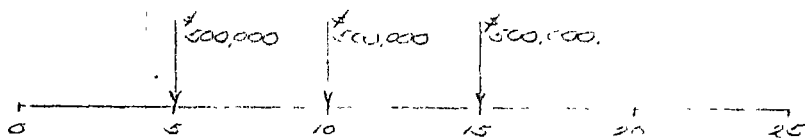
$$F = 10,000 + 3,138.4 + \left[5,000 + 100 \cdot 4.3884 \right] \cdot 21.384$$

$$F = 31,384 + \left[5,000 + 1,155.36 \right] \cdot 21.384$$

$$F = \$175,832.92$$

Ejemplo.

Como parte de un análisis económico de la factibilidad de invertir en un edificio, y únicamente por lo que se refiere al renglón de reparaciones mayores, se supone que las erogaciones necesarias, serán de \$500,000 al final de los años: 5, 10, 15. Se desea calcular la serie uniforme equivalente de pagos anuales durante 25 años correspondiente a este concepto. Se considera como tasa mínima aceptable de recuperación, la de 15%.



$$A = F \cdot (A/F, 15\%, 5) = 500,000 \cdot 0.14832 = \$74,160.00$$

$$P = A \cdot (P/A, 15\%, 15) = 74,160.00 \cdot 5.8171 = \$433,643.18$$

El valor P anterior es la cantidad total equivalente a la serie de pagos real, expresada en el momento 0. La serie de pagos anuales, equivalente al flujo de efectivo real y distribuido en los 25 años, será:

$$A = P \cdot (A/P, 15\%, 25) = 433,643.18 \cdot 0.1517 = \$67,084.60$$

Comprobamos que la serie de pagos (A) anterior es efectivamente equivalente a la serie de pagos (B).

$$F = A \cdot (F/A, 15\%, 20) = 6 / 0.15 \cdot 2.12795 = \$14,660$$

Por otro lado, proporcionalmente a los pagos (B) al término del año 20:

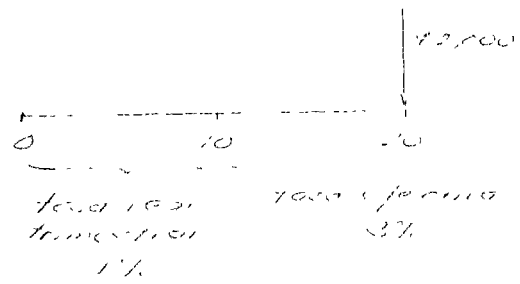
$$F = 500,000 \left[(F/A, 15\%, 20) + (F/A, 15\%, 15) + (F/A, 15\%, 10) \right]$$

$$F = 500,000 (15.3502 + 6.1311 + 1.0418)$$

$$F = \$4,514,150$$

Ejemplo

Encuentra el valor presente de \$2,000 pagadero al final de 20 años a una tasa de interés de 4% an en compuestos trimestrales durante los 10 primeros años y de 3% efectivo durante los 10 años posteriores



El valor de los \$2,000 en el 10, será

$$P_{(10 \text{ años})} = 2,000 \cdot \frac{1}{(1+0.03)^{10}} = 2,000 \cdot \frac{1}{(1.03)^{10}}$$

Esta cantidad se infla hasta el momento 0

$$P = P_{(10 \text{ años})} \cdot \frac{1}{(1+0.04)^{10}} = P_{(10 \text{ años})} \cdot \frac{1}{(1.04)^{10}}$$

por tanto

$$P = 2,000 \cdot \frac{1}{(1.03)^{10}} \cdot \frac{1}{(1.04)^{10}}$$

que también puede expresarse

$$P = 2,000 \cdot (1.03)^{-10} \cdot (1.04)^{-10}$$

$$P = 2,000 \cdot 0.74409 \cdot 0.67556 = \$999.54$$

Ejemplo:

En una obra, un Maestro presta a los trabajadores pequeñas cantidades de dinero cobrando un interés del 5% mensualmente pero por adelantado. Si después de un mes, la deuda no es cubierta, nuevamente cobra el 5%, y así, hasta que la cuenta sea liquidada, ¿Cuál es la tasa efectiva de interés que está cobrando?

De acuerdo con el enunciado, la tasa de interés real mensual es de un 5%.

$$d_{\text{real mensual}} = 5\%$$

entonces,

$$i_{\text{real mensual equiv.}} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.05}{1-0.05} = 0.05263$$

$$i_{\text{efectiva}} = 5.263\% \text{ por año} - 1 = (1 + 0.05263)^{12} - 1 = 1.85058 - 1 = 0.85058 = 85.058\%$$

Supongamos la misma situación pero solo que considerando ahora plazos de interés semanales.

La tasa de descuento será

$$d_{\text{real semanal}} = 5\%$$

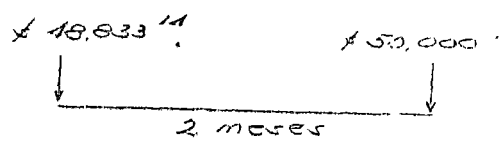
$$i_{\text{real semanal equivalente}} = 0.05263 = 5.263\%$$

$$i_{\text{efectiva}} = 5.263\% \text{ por año} - 52 = (1 + 0.05263)^{52} - 1 = 14.399 - 1 = 13.399 = 1339.9\%$$

Ejemplo.

Un individuo solicita en un Banco, un préstamo de \$50,000 a un plazo de 2 meses. Al ser otorgado, dicho préstamo se le hace entrega de \$18,833.14.

Desea saber, ¿cuál es la tasa efectiva de interés que el Banco le está cobrando?



$$d = \frac{F-P}{F} = \frac{50,000 - 18,833.14}{50,000} = \frac{31,166.86}{50,000} = 0.02333 = 2.333\%$$

esta es la tasa de descuento real bimestral

$$\% \text{ tasa de descuento nominal anual } 2.333 \times 6 = 14\%$$

la tasa de interés (i) equivalente, sea:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.02333}{1-0.02333} = 0.023895 / \text{bimestral}$$

$$\begin{aligned} \text{Defectivo} &= \text{SPCAF} - 1 = (1 + 0.023895)^6 - 1 \\ &= 0.1522 \\ &= 15.22\% \end{aligned}$$

Para calcular la cantidad que debería darse al cliente, el empleado del Banco planteó de la siguiente manera, sabiendo que la tasa de descuento efectuada por la institución es de 14% anual nominal:

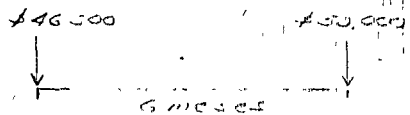
$$\text{tasa de descuento real bimestral} = 14/6 = 2.333\%$$

$$\begin{aligned} \text{descuento} &= \$30,000 \cdot 0.02333 = \$1,166.86 \\ \text{por tanto: cantidad a entregar} &= P = 30,000 - 1,166.86 \\ &= \$18,833.14 \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned} P &= F(1-d)^n = 30,000(1-0.02333)^6 \\ &= 30,000(0.976663) \\ &= \$18,833.14 \end{aligned}$$

En el mismo ejemplo anterior, si se hubiese solicitado el préstamo por 6 meses:



$$\text{tasa de descuento nominal anual} = 14\%$$

$$\text{tasa de descuento real semestral} = 7\%$$

descuento cobrado por anticipado:

$$\$30,000 \cdot 0.07 = \$3,500$$

$$\text{cantidad líquida a entregar} = 30,000 - 3,500 = \$16,500$$

$$i_{\text{real semestral}} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.07}{1-0.07} = \frac{0.07}{0.93} = 0.075269$$

o de otra manera:

$$i_{\text{real semestral}} = \frac{F-P}{P} = \frac{\$3,500}{\$16,500} = 0.075269$$

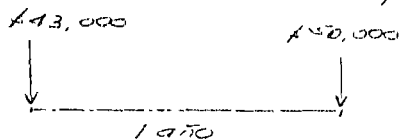
$$\begin{aligned} \text{Defectivo} &= \text{SPCAF} - 1 = (1 + 0.075269)^2 - 1 \\ &= 0.1562 \\ &= 15.62\% \end{aligned}$$

Si el préstamo se hubiese anticipado a un año:

tasa de descuento anual = 14%

descuento anticipado = $50,000 \times 0.14 = 7,000$

cantidad líquida a entregar = $50,000 - 7,000 = 43,000$



$$i_{\text{efectiva}} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.14}{1-0.14} = \frac{0.14}{0.86} = 0.16279$$

o también

$$i_{\text{efectiva}} = \frac{F - P}{P} = \frac{7,000}{43,000} = 0.16279$$

$$\text{o sea } i_{\text{efectiva}} = 16.279\%$$

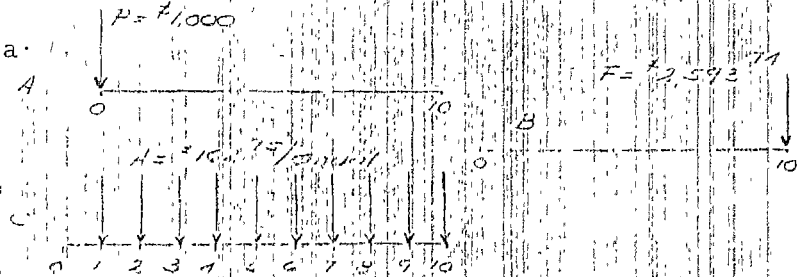
La traducción a una *i* efectiva equivalente, de la tasa de descuento (*d*) con que realmente se afecta la operación, es solo con el fin de poder comparar la alternativa con otras alternativas, cuyas tasas de recuperación se expresan normalmente en base anual. Esta (*i*) es solo equivalente a cada situación, y esta es la razón por la cual se obtienen diferentes tasas efectivas a partir del comportamiento de una tasa de descuento aplicado en la realidad a periodos bimestrales, semestrales y anuales.

SIGNIFICADO DEL CONCEPTO Equivalencia entre Alternativas.

Supongamos que en un momento dado se nos presentan las siguientes alternativas para el pago de una deuda:

- A) Pagar \$ 1,000.00 ahora.
- B) Pagar \$ 2,593.74 dentro de 10 años.
- C) Pagar \$ 162.75 al final de cada año; durante los próximos 10 años.

Estas alternativas se representarían en una escala de tiempos, de la siguiente manera:



Lo primero que se nos ocurriría para comparar las alternativas, sería expresar los diferentes flujos de efectivo en una sola cantidad equivalente ubicada en un mismo punto de la escala de tiempos, es decir, en un mismo momento físico, dado que ahora las cantidades que constituyen las distintas formas de pago, están expresadas en distintos puntos del tiempo y por tanto no son comparables debido al principio del "valor del dinero con el tiempo".

Supongamos que decidimos expresar los pagos de cada alternativa mediante una única cantidad equivalente, ubicada en el momento cero, o lo que es lo mismo, vamos a actualizar o a encontrar el Valor Presente del flujo de pagos de cada alternativa; y para lo cual

fijamos como la tasa de interés del dinero, nuestra tasa mínima atractiva de recuperación. Supongamos que en el momento actual en que debemos tomar la decisión, dicha tasa la estimamos en un 10%.

En estas condiciones, tenemos:

Valor Presente de la alternativa A:

$$VP_A = \$1,000.$$

Valor Presente de la alternativa B:

$$VP_B = \$2,593.74 \text{ (P/F, 10\%, 10)} = 2,593.74 \cdot 0.385543 = \$1,000.$$

Valor Presente de la alternativa C:

$$VP_C = \$162.75 \text{ (P/A, 10\%, 10)} = 162.75 \cdot 6.144567 = \$1,000.$$

Nos encontramos ahora, con que expresados en un mismo punto del tiempo, específicamente en el punto cero, las 3 alternativas equivalen a \$ 1,000.00 bajo la tasa mínima atractiva de recuperación.

En estas condiciones decimos que las 3 alternativas ^{son} "equivalentes", lo cual no significa evidentemente que las 3 alternativas sean - - iguales sino que solo sus valores en el tiempo son iguales, y esto, a una tasa de interés del 10%.

Nos preguntamos ahora, ¿cuál es en estas circunstancias el - - criterio para decidir entre una u otra de las alternativas? Sabemos que varios factores del tipo no monetario pudiesen ser determinantes para la selección de una alternativa; así por ejemplo, si no te-

nemos la liquidez suficiente para pagar \$1,000.00 ahora, esto es determinante al menos, para rechazar la alternativa A y aceptar alguna de las otras alternativas mediante las cuales se difiere el pago de la deuda. Otros argumentos de este tipo, pudiesen ser, riesgo, necesidad de emplear los fondos disponibles en otros fines; imagen ante el acreedor, situación general de los negocios, etc.... Pero haciendo abstracción por un momento de los argumentos de tipo monetario, (sin que esto implique ni negar su importancia, ni dejar de reconocer que en determinadas circunstancias pudiesen ser determinantes), nos preguntamos si ¿no hay otro argumento económico que nos ayude a decidir sobre una de las 3 alternativas?, ¿nos es indiferente cual de las alternativas se seleccione?

Analicemos más a fondo las diferencias entre las alternativas A y B.

Seleccionar A sobre B, significaría gastar \$1,000.00 ahora, con lo cual se evitaría (se ahorraría) gastar \$2,593.74 dentro de 10 años. Veámoslo de otra forma elegir A, equivale a invertir (pagar) ahora \$1,000.00 y recibir (no tener que pagar), \$2,593.74 dentro de 10 años.

¿Nos conviene esta inversión propuesta?, ¿cuál sería la tasa de recuperación de esta inversión?, calculémosla:

$$\$1,000 \dots (F/P, i\%, 10) = \$2,593.74$$

despejando. $(F/P, i\%, 10) = 2.59374$

entrando en las tablas, se obtiene que el valor de (i) necesario para que el factor (F/p) adquiriera el valor 2.59374 es:

$$i = 10\%$$

Ahora bien, dado que este valor es igual al de la tasa estipulada como mínima atractiva de recuperación, concluimos que la inversión propuesta, representada por la alternativa A, debe ser aceptada, por lo que podemos decir que la alternativa A es preferible a la alternativa B, lo cual se expresa:

$$A \succ B$$

Recordemos que por definición, la tasa mínima atractiva de recuperación es aquella tasa mínima ante la cual responderíamos "si" a cualquier propuesta de inversión que la asegurase. Por otro lado al definir el concepto de la tasa mínima atractiva de recuperación, dejamos establecido el que una vez fijada esta, cualquier alternativa que ofrezca una tasa igual o superior a ella, debe ser aceptada y cualquiera que brinde una tasa menor debe ser rechazada; y dado que, ~~es~~^{en} el ejemplo anterior ~~se~~^{se} supuso que la tasa mínima era del 10%, y al analizar la alternativa A (enfocada como inversión) sobre la alternativa B, se determinó que ofrecía una tasa de recuperación igual

a dicha tasa mínima del 10%, concluimos que debe aceptarse la inversión propuesta por A al ser comparada con la alternativa B.

De la misma manera, al comparar las alternativas B y C, observamos que:

Seleccionar C sobre B significa gastar \$ 162.75 al año, durante 10 años para evitar (ahorrar) pagar \$ 2,593.74 al final de esos mismos 10 años. Visto de otra forma equivale a invertir \$ 162.75 al final de cada año, y recibir (no tener que pagar) \$ 2,593.74 al final de los 10 años. Para calcular la tasa de recuperación que la alternativa C ofrece (enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación está representada por B), procedemos:

$$\begin{array}{l}
 \$ 162.75 \cdot (FIA, i\%, 10) = 2,593.74 \\
 \text{despejando :} \quad (FIA, i\%, 10) = 15,9274 \\
 \text{de donde resulta :} \quad i = 10\%
 \end{array}$$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación establecida, siguiendo un razonamiento similar al anterior, concluimos que la alternativa C es preferible a la B, lo que se expresa:

$$C > B$$

Por último, al hacer la comparación entre A y C observamos que: Seleccionar A sobre C significa gastar \$ 1,000.00 ahora y evitar (ahorrar) pagar \$ 162.75 durante los próximos años, lo cual visto en otra forma, equivale a invertir (pagar) ahora \$ 1,000.00 y recibir

(no tener que pagar) \$ 162.75 al final de cada año durante los --
próximos 10 años. La tasa de recuperación que la alternativa A
ofrece (enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación
está representada por C), sería:

$$\begin{array}{l}
 \$1,000 \cdot (A/P, 10\%, 10) = \$162.75 \\
 \text{despejando:} \quad (A/P, 10\%, 10) = 0.16275 \\
 \text{de donde resulta} \quad C = 10\%
 \end{array}$$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación esta-
blecida, mediante un razonamiento analogo al anterior, concluimos
que la alternativa A es preferible a la alternativa C, lo cual se
expresa:

Por las tres comparaciones sucesivas anteriores, concluimos fi-
nalmente que de entre las alternativas A, B y C propuestas, debe-
mos optar por la alternativa A.

Todo lo anterior demuestra que aún siendo equivalentes ciertas -
alternativas propuestas, no son en si, iguales, sino que solo estan
ligadas por su valor a través del tiempo y que el hecho de elegir
entre ellas, no cae al terreno de la indiferencia, sino que basados
en principios y conceptos básicos definidos anteriormente, y sin
tomar en consideración otros factores de tipo no monetario que pu-
diesen influir, podemos aun en estos casos establecer criterios
de juicio que nos permiten seleccionar económicamente alguna de
ellas.

Hay que hacer notar que las 3 alternativas anteriores se refieren a distintas formas de pagos, y el hecho de enfocar cada una de ellas, como inversiones cuya recuperación es "el no tener que pagar" en alguna de las otras formas, no constituye sino un mero artificio que en nada altera la concepción real del problema y que en cambio si nos auxilia en el análisis económico de la situación para efectos de seleccionar la alternativa que resulte más económica.

La situación de equivalencia entre las alternativas propuestas, se originó de haber establecido como tasa mínima de recuperación, la de 10%. Si esta tasa se altera, las alternativas ya no serán equivalentes y la selección entre ellas se llevará a cabo con un criterio distinto, como se muestra en el siguiente caso:

Supongamos ahora, que estimamos que nuestra tasa mínima atractiva de recuperación es de 15%. Al actualizar las corrientes de egresos y determinar el valor presente de cada alternativa se tiene:

Valor presente de la alternativa A

$$VP_A = \$1,000$$

Valor presente de la alternativa B

$$VP_B = \$12^{14} \cdot (1 + 0.15)^{-14} = 2,593.02473 = \$2,593.02$$

Valor presente de la alternativa C

$$VP_C = \$15^{14} \cdot (1 + 0.15)^{-14} = 3,119.131624$$

Observamos que la alternativa B tiene el menor costo equivalente,

por lo que ahora constituye la alternativa a seleccionar, y así por ejemplo, no seleccionamos A sobre B, puesto que esto significaría invertir (gastar) \$ 1,000.00 ahora y recibir (no tener que pagar) - \$ 2,593.74 dentro de 10 años, pero esta inversión no nos es atractiva, pues la tasa de recuperación que ofrece es tan solo de un 10 %, que resulta inferior al límite establecido por la tasa estimada como mínima atractiva de recuperación, que es de 15%, por lo que la alternativa A, debe ser rechazada. Un razonamiento similar podría aplicarse a la comparación de la alternativa C con respecto a la alternativa B.

El que la mejor alternativa sea en estas condiciones, la alternativa B, quiere decir que lo más conveniente económicamente es diferir el pago de la deuda por 10 años y pagar al final \$ 2,593.74; y el que nuestro acreedor solicitase que la deuda fuese pagada ahora, esto solo nos sería atractivo, si el mismo aceptase recibir \$ 641.17 ahora en lugar de \$ 1,000.00.

TEMA III

APLICACION DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION
ECONOMICA DE ALTERNATIVAS

Métodos de comparación de alternativas

Resolución de Problemas prácticos con aplicación de los modelos matemáticos, anteriores, a la comparación económica de alternativas con los criterios del:

Costo Anual, Valor Presente, y cálculo de la Tasa de Recuperación

Significado e interpretación de resultados de análisis de alternativas realizados con cada uno de los criterios anteriores.

Criterios para el análisis de alternativas con períodos de vida económica diferentes.

Criterio de comparación suponiendo futuros reemplazos.

Determinación del nivel más económico de inversión.

La inversión adicional.

Diferimiento de inversiones.

Significado relativo de la comparación de alternativas realizadas con los diversos -- criterios.

El método de Flujo de efectivo para el cálculo de la tasa de recuperación de un proyecto de inversión propuesto.

MÉTODOS DE COMPARACION ENTRE ALTERNATIVAS.

Vamos a aplicar todo lo anteriormente visto para el análisis de una alternativa, a la comparación entre 2 ó más alternativas.

Expondremos los 3 métodos más comunmente empleados en el campo industrial y mediante los cuales resulta muy práctico comparar alternativas de inversión que presenten distintas series de ingresos y egresos a lo largo del horizonte económico de comparación.

Los métodos a que se hace referencia son:

- 1) Método del costo anual equivalente, con tasa mínima atractiva de recuperación, establecida y aplicada como tasa de interés.
- 2) Método del valor presente, con tasa mínima atractiva de recuperación establecida y aplicada como tasa de interés.
- 3) Método de la tasa de recuperación, en donde se calcula la tasa de recuperación probable de cada una de las inversiones propuestas y se comparan con la tasa mínima atractiva de recuperación establecida.

Como demostraremos en el transcurso de este Tema, los diversos criterios y métodos para la comparación económica de alternativas de inversión, son "equivalentes", es decir, que aplicados cada uno de ellos al análisis de todas las posibles alternativas de acción en una situación decisional, conducen al mismo resultado en cuanto a la alternativa que finalmente deba seleccionarse. Sin embargo, la distinta estructura de los modelos matemáticos que cada criterio emplea, así como las características y diferencias substanciales de procedimiento que cada método sugiere, implican el tener que llevar a cabo en cada caso y para cada criterio una correcta y adecuada interpretación de los resultados me-

ramente numéricos que se obtengan.

Llegaremos también a la conclusión de que cada método presenta ventajas y desventajas al ser empleado como elemento de juicio en cada caso particular, debido a que en cada método se dá distinto peso a los diferentes factores de costo o ingreso, lo cual origina que para determinados tipos de problemas y circunstancias, los resultados numéricos que se obtengan aplicando un cierto método, resulten más objetivos y fáciles de interpretar que los que se pudiesen obtener al aplicar otro método.

Una de las principales diferencias que presentan los métodos de comparación de alternativas mencionadas, radica en el hecho de que por un lado, en los métodos del Costo Anual y del Valor Presente, para las transformaciones que de acuerdo a estos métodos deben hacerse del flujo de efectivo real que cada alternativa de inversión presente dentro de un cierto horizonte económico, se impacta ya, una cierta tasa de recuperación, (normalmente la tasa interna mínima atractiva de recuperación del analista, en el momento del análisis), lo cual implica que al interpretar los resultados numéricos que se obtengan, deberá tomarse en cuenta que dicha tasa ya ha sido incluida como costo propiamente dicho, del capital a emplear en la inversión propuesta. En cambio, en el método de la Tasa de Recuperación, para cada alternativa de inversión propuesta, se calcula directamente la tasa de recuperación que se espera obtener de la inversión, en función del flujo de ingresos y egresos que dicha alternativa presenta, comparándose dicha tasa esperada con la Tasa interna mínima atractiva de recuperación, procediéndose entonces a calificar la alternativa de inversión analizada como atractiva o no, sin olvidar tomar en cuenta también, el factor de riesgo que dicha alternativa implica.

Los criterios del Costo Anual, del Valor Presente y de la Tasa de Recuperación, así como las sistematizaciones derivadas de los mismos y que en este tema analizaremos, son especialmente adecuados para el análisis

y comparación económica de alternativas de inversión en el campo macroeconómico. Existen otros métodos de aplicación de estos criterios, especialmente diseñados para análisis de proyectos de inversión en el campo macroeconómico. Tal es el caso del llamado criterio de la Relación Beneficio / Costo (B/C).

Dado que al comparar alternativas lo que nos interesa son sus diferencias relativas y debido al hecho de que en muchos de los problemas que se nos presentan en el campo de la Ingeniería Económica, las diversas alternativas que tomamos en cuenta, son para un mismo fin, es decir, son para resolver un mismo problema, y si aceptamos someterlas a análisis y a comparación, es porque consideramos que en principio, cualquiera de ellas nos resolverán el problema

solo que pretendemos seleccionar la que nos resulte más económica, Es por esto que normalmente y en términos generales, todas las alternativas que intervienen en la comparación, representan para nosotros el mismo beneficio. Por lo anterior, casi siempre al establecer las diferencias entre ellas, lo hacemos en base a los costos ó egresos en general y en ocasiones, el único ingreso considerado, es el valor de resuperación al final de la vida económica.

Exéptuando el caso anterior, y cuando los ingresos o beneficios monetarios en general, difieran en las alternativas en estudio, en cuanto al momento de su ocurrencia, distribución de montos o en cuanto a su seriación, deben tomarse en cuenta junto con los egresos e incluirse en el flujo de efectivo total; de otra manera el análisis resultaría incompleto y erróneo.

En éstas condiciones, todo análisis económico se inicia con la estimación de los ingresos y egresos totales que cada alternativa implica, tanto en monto como en fecha de ocurrencia. La etapa anterior está íntimamente ligada a la determinación del periodo dentro del cual cada alternativa deba ser estudiada, es decir, su horizonte económico.

Una vez establecidos los elementos anteriores, puede suceder que a prime-

ra vista una de las alternativas se muestre obviamente como la más económica, lo cual haga innecesario cualquier análisis posterior.

Ahora bien, rara vez ocurre lo anterior. Normalmente las alternativas presentan flujos de caja tales que muestran costos iniciales relativamente bajos y erogaciones altas a lo largo del horizonte económico, o bien, erogaciones altas iniciales que originan beneficios futuros y reducción de costos futuros. El análisis en estos casos se reduce a investigar si éstos costos mayores iniciales se compensan con los beneficios que originan.

MÉTODO DEL COSTO O BENEFICIO ANUAL

Este método consiste fundamentalmente en traducir el flujo de efectivo de cada una de las alternativas por comparar, en una serie uniforme anual equivalente, lo que permitirá poder comparar ya homogeneizadas, alternativas que en la realidad presentan flujos de efectivo, totalmente diferentes entre sí.

El "costo o beneficio anual" resultante, es simplemente un modelo de costo o beneficio, en base a una tasa mínima atractiva de recuperación, es sólo una representación de lo que en la realidad estimamos, el costo de seguir cada una de las alternativas propuestas, sólo que transformado en una serie uniforme anual equivalente.

El método puede emplearse para comparar las alternativas, en base al costo que implican o al beneficio que aportan, razón por la cual también se conoce como método del beneficio anual. La alternativa con el costo anual equivalente más bajo o con el beneficio anual equivalente más alto, según el caso, será la que deba seleccionarse.

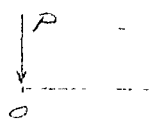
Adaptaremos la siguiente nomenclatura para la aplicación del método:

- P: monto de la inversión ^{igual} total; costo inicial total del equipo; costo ya instalado y funcionando.
- L: Valor de recuperación del activo al final de un periodo dado, momentáneamente, al final de su vida económica.
- n: horizonte económico del análisis; vida económica del activo. Es expresada normalmente en años.
- I: Serie ^{uniforme} de ingresos (en final de cada periodo)
- D: Serie ^{uniforme} de egresos (en final de cada periodo)
- CA: Costo Anual uniforme equivalente
- BA: Beneficio Anual uniforme equivalente

Para la aplicación del método usaremos dos criterios:

- a) el de la Recuperación del Capital
- b) el del Fondo de Amortización

a) Criterio del fondo para la recuperación del Capital



Distribuyendo P y L en anualidades de un rango de (n) periodos y a una tasa (i) igual a la tasa interna mínima de recuperación:

$$CA = P \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - L \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (1)$$

pero sabemos que $\sum_{k=1}^n \frac{C_{k-1}}{1+i} = \frac{C_{n-1}}{1+i}$

subst. teniendo en (1):

$$CA = P \cdot \frac{C_{n-1}}{1+i} - L \left(\frac{C_{n-1}}{1+i} - i \right)$$

por tanto:

$$CA = (P-L) \cdot \frac{C_{n-1}}{1+i} + L \cdot i$$

ó

$$CA = (P-L) \cdot (A/P, i\%, n) + L \cdot i$$

Los dos sumandos de la expresión anterior representan:

- 1) la recuperación de la fracción $(P-L)$ con sus intereses correspondientes, más
- 2) los intereses correspondientes a la porción faltante L , la cual será recuperada al final.

(Partimos de la base de que la cantidad total a recuperar, debe ser, por un lado, la cantidad total invertida (P) , y por otro, los intereses de esa cantidad (P) durante (n) periodos y a una tasa (i) , solo que, la cantidad a recuperar mediante los pagos anuales es solo $(P-L)$, ya que la cantidad (L) , se espera recuperarla al final de los (n) periodos).

La fórmula anterior es aplicable para valores de cero o negativos de (L) , con solo las consideraciones algebraicas correspondientes.

La fórmula (1) puede aplicarse directamente también para encontrar las anualidades sin fórmulas equivalentes, y de hecho, así se hace el sistema para encontrarlas.

b) Criterio del método de amortización

Partiendo de la fórmula (1), podemos substituir ahora el valor de C_{n-1} , sabiendo que:

$$\frac{C_{n-1}}{1+i} = \frac{C_{n-1}}{1+i} \cdot i$$

de donde: $CA = P \cdot \frac{C_{n-1}}{1+i} + P \cdot i - L \cdot \frac{C_{n-1}}{1+i}$

finalmente

$$CA = (P-L) \cdot \frac{C_{n-1}}{1+i} + P \cdot i$$

ó

$$CA = (P-L) \cdot (A/P, i\%, n) + P \cdot i$$

En donde los dos sumandos de la expresión se pueden interpretar como:

- o) el importe anual del fondo de amortización que reintegrará la pérdida (P-L) del capital sin incluir los intereses
- o) el interés anual de la inversión inicial total (P)

Ejemplo:

El costo de un equipo ya instalado y funcionando es de \$35,000 con un valor estimado de recuperación de \$5,000 al final de los 10 años de vida útil. La tasa mínima atractiva de recuperación, se estima en un 8% anual. Se desea calcular el costo anual equivalente de la inversión propuesta.

a) Con el costo de la inversión inicial del capital

$$CA = (35,000 - 5,000) \frac{0.08}{1 - 1.08^{-10}} + 35,000 (0.08)$$

$$CA = 30,000 \cdot 0.11905 + 2,800$$

$$CA = 4,170 + 2,800$$

$$CA = \$ 6,970$$

b) Con el costo del fondo de amortización

$$CA = (35,000 - 5,000) \frac{0.08}{1 - 1.08^{-10}} + 35,000 (0.08)$$

$$CA = 30,000 \cdot 0.06902 + 2,800$$

$$CA = 2,070 + 2,800$$

$$CA = \$ 4,870$$

Logicamente, en ambos casos el resultado es el mismo, ya que los dos fórmulas provienen de la misma expresión. Sin embargo, en cada caso, manifiesta un distinto concepto en el manejo de los elementos integrantes del costo de la inversión.

En el primer caso, el inversionista debe desembolsar una cantidad de \$35,000, para adquirir el equipo, cuando por concepto de la inversión únicamente se lo que se espera recuperar al final, \$5,000, e igualmente los intereses correspondientes, y otra cantidad de \$30,000 para cubrir solamente los intereses de la parte correspondiente al valor de recuperación. \$2,800, cantidad que por otra parte, se espera recuperar con la venta del equipo por ejemplo.

En el segundo caso, el inversionista paga una cantidad de \$4,870 por concepto de inversión, solamente el fondo (P-L)

sin intereses, más un segundo período, \$2,000, que cubre los intereses. cuando se ha de completar

Resolviendo directamente el problema, mediante la fórmula original (1), se tendría:

$$CA = 35,000 (A/P, 8\%, 10) - 5,000 (A/F, 8\%, 10)$$

$$CA = 35,000 \cdot 0.14903 - 5,000 \cdot 0.06903$$

$$CA = 5,216^{95} - 345^{15}$$

$$CA = \$4,870^{90}$$

Al haber un cuarto entero para resolver el problema consistente en encontrar el valor presente de la recuperación (L) multiplicándolo por el factor (P/F) la diferencia entre el costo inicial (P) y el valor presente de la recuperación (L), se multiplica por el factor de recuperación del capital (crf), para encontrar el valor de los pagos uniformes equivalentes anuales, a lo largo de los (n) períodos.

Lo anterior se expresa algebraicamente:

$$CA \left[P - L (P/F, i, n) \right] \cdot (A/P, i, n) \text{ crf}$$

$$CA = \left[P - L (P/F, i, n) \right] \cdot (A/P, i, n)$$

Aplicando a este criterio, los datos del problema:

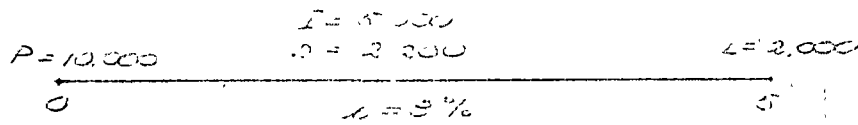
$$CA = \left[35,000 - 5,000 (P/F, 8\%, 10) \right] \cdot (A/P, 8\%, 10)$$

$$CA = \left[35,000 - 5,000 \cdot 0.14903 \right] \cdot 0.14903$$

$$CA = \$4,870^{90}$$

Ejemplo

Un activo representa una inversión inicial total de \$10,000. Se le suponen 5 años de vida económica y una recuperación final de \$2,000. Se considera una tasa de recuperación de $i = 8\%$. La inversión implica una corriente anual de ingresos de \$2,000 y de gastos de \$2,200 durante los 5 años. Se desea determinar si el proyecto de inversión se justifica, teniendo en cuenta que la tasa mínima de recuperación es de un 8%.



$$B.A. = -[(P-L) \cdot i + L] + I - D$$

$$B.A. = -[(10,000 - 2,000) \cdot 0.08 + 2,000] + 15,000 - 2,000$$

$$B.A. = -(2,000 + 1,600) + 15,000 - 2,000$$

$$B.A. = 630$$

Hagase notar que se está buscando el B.A., (Beneficio Anual) por lo que los gastos se consideran con signo negativo y los ingresos con signo positivo, y dado que el B.A., resulta ser mayor que 0, esto significa que de esta inversión se puede esperar un beneficio mayor al 8%. Específicamente puede decirse que la inversión, si se recupera con una tasa del 8% más una cantidad adicional de \$ 630.00 Anuales.

Observemos que en el método del Costo Anual, esta cantidad adicional al 8%, nos es expresada no en función de un porcentaje, sino de un monto anual uniforme, equivalente a ese porcentaje.

Entonces, mientras el resultado numérico del Beneficio Anual (B.A.) en el problema anterior se mantenga mayor que cero, esto indicará que la inversión nos brinda una tasa de recuperación mayor que el 8%, siendo este excedente tanto mayor como mayor sea el valor de dicho resultado numérico.

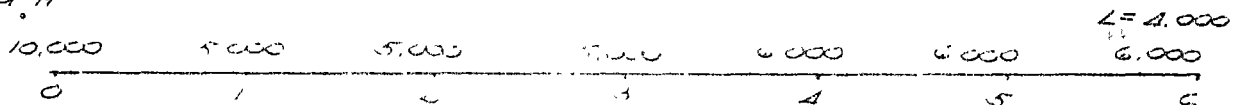
Pero más todavía, aún en el caso de que el valor del B.A., resultase igual a cero, la inversión propuesta deberá aceptarse, pues este resultado deberá interpretarse como que la inversión se recupera "exactamente" al 8%,^y siendo el 8%, el valor estimado de nuestra tasa interna mínima atractiva de recuperación, la alternativa es aceptable.

Ejemplo:

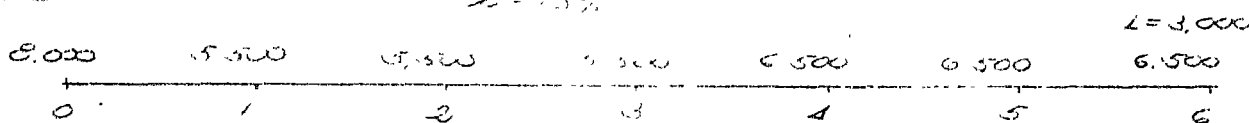
Una máquina A cuesta \$ 10,000 ya instalada con un valor de rescate de \$ 4,000 al término de 6 años; gastos de operación anual de \$ 5,000 durante los 3 primeros años y de \$ 6,000 durante los 3 últimos. La máquina B. cuesta \$ 8,000 con \$ 3,000 de recuperación al cabo de 6 años. Gastos de operación de \$ 5,500 durante los 3 primeros años, y de \$ 6,500 durante los últimos tres. Los incrementos en los costos de operación, se pueden entender como generados por el incremento en los costos de mantenimiento y reparaciones y por la pérdida de eficiencia motivada por la edad. La tasa mínima atrativa es de 15%

El problema se puede representar:

Alternativa A:



Alternativa B:



$$CA_A = (10,000 - 4,000) \cdot crf + 4,000 (0.15)^6 + [5,000 \cdot uspwf + 6,000 \cdot sppwf] \cdot crf$$

$$CA_A = 1,585 + 600 + 5,400 = \$ 7,585$$

$$CA_B = (8,000 - 3,000) \cdot crf + 3,000 (0.15)^6 + [5,500 \cdot uspwf + 6,500 \cdot sppwf] \cdot crf$$

$$CA_B = 1,321 + 450 + 5,897 = \$ 7,668$$

Al tratarse de costos, gana con la compra de la alternativa A

En el caso de que las alternativas por compararse, presenten corrientes anuales de flujo, irregulares, habrá que convertirlas en una corriente uniforme equivalente, lo cual puede lograrse actualizando la corriente a una fecha dada, y distribuir luego este costo a su costo anual equivalente.

SIGNIFICADO DE LA COMPARACION DE ALTERNATIVAS MEDIANTE EL CRITERIO DEL COSTO ANUAL

La comparación de dos alternativas mediante el criterio del costo anual, tiene más significado e interpretación que el solo hecho de concluir que la alternativa A tiene mayor o menor costo anual que la B. Otra mayor significación se refiere a la mayor inversión que implica una de las alternativas respecto a la otra.

Ejemplo

Una máquina A cuesta \$1,600. Se estima tendrá un costo anual de operación de \$500. durante los 5 años calculados de vida económica. La máquina B cuesta \$1,200 y tiene gastos de \$650. Para ambas máquinas el valor de rescate se considera nulo. Se fija una tasa mínima de recuperación de 8%.

A:	1,600	500	500	500	500	500
	0	1	2	3	4	5
B:	1,200	650	650	650	650	650
	0	1	2	3	4	5

Analizando el costo anual.

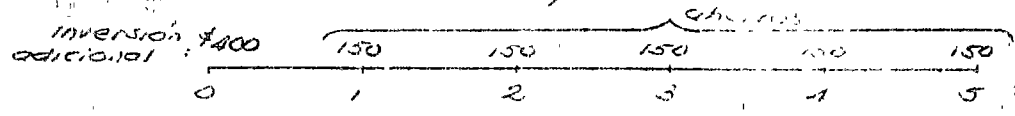
$$CA_A = (1,600 - 0)_{8-5}^{crf} + 500 = 400 + 500 = \underline{\$900}$$

$$CA_B = (1,200 - 0)_{8-5}^{crf} + 650 = 300 + 650 = \underline{\$950}$$

Diferencia a favor de A (pues se trata de costos) = \$50 anuales.

Observamos que las diferencias relevantes entre A y B, es el hecho de que A implica una inversión adicional de \$400. Inicialmente, con respecto a B; pero A representa también por otro lado un ahorro anual de \$150. respecto a B. De aquí surge la pregunta de que si: ¿la inversión adicional de \$400. se justifica teniendo en cuenta que se requiere una tasa del 8%? O dicho de otra manera: ¿Los \$400. de inversión inicial, se alcanzan a recuperar con una tasa de 8% de interés con los ahorros de \$150 anuales?

Esta situación se representa

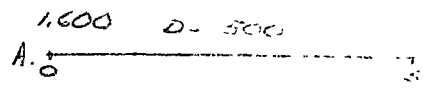


$$\text{Ahorros - Costo (anuales)} = 150 - 100_{8-5}^{crf} = 150 - 100 = \underline{\$50}$$

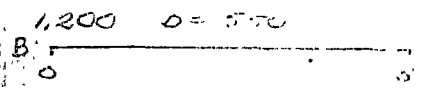
que es el mismo resultado obtenido anteriormente y que

significa que la inversión es económica en A, si se recupera con una tasa de interés del 8% más una suma adicional de \$50 anuales durante 5 años.

Supongamos ahora que los gastos anuales de A son de \$550 en lugar de \$500



$$CA_A = 1,600 \cdot 0.17 + 550 = 400 + 550 = 950$$

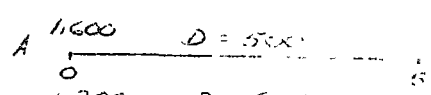


$$CB_B = 1,200 \cdot 0.17 + 570 = 300 + 570 = 870$$

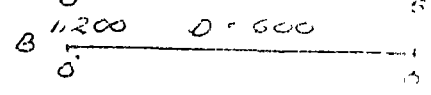
diferencia de B: \$ 80 año

Esto significa que la inversión adicional de \$400 en A no se alcanza a recuperar con el interés de \$50 anuales; hay un déficit de \$80 adicionales durante los 5 años, por lo que dicha sobre inversión no se justifica y, por tanto, la alternativa por seleccionar es la B.

Consideremos ahora que los gastos anuales de B son de \$600



$$CA_A = 1,600 \cdot 0.17 + 550 = 450 + 550 = 900$$



$$CB_B = 1,200 \cdot 0.17 + 600 = 300 + 600 = 900$$

diferencia 0

En este caso, la inversión extra de \$400 de A, se recupera exactamente a una tasa de 8% y, como hemos considerado que esta es la tasa mínima de recuperación fijada por el inversionista, la sobre inversión no se justifica y, por tanto, habrá que seguir la alternativa B.

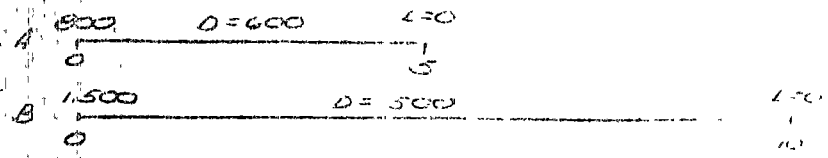
El hecho de que la selección entre dos alternativas se realice desde el punto de vista de la inversión inicial que una de ellas representa, no significa que se esté haciendo un análisis solo parcial del problema, ya que en última instancia, el fin último es determinar cual de las alternativas es la mejor.

COMPARACION DE ALTERNATIVAS CON DISTINTAS VIDAS ECONOMICAS

Hasta ahora nos hemos limitado a comparar alternativas con igual vida económica. ¿Cómo comparar alternativas que tengan distinta vida económica?

Ejemplo

Supongamos una máquina A con \$800 de costo inicial, 5 años de vida económica y gastos en el costo de operación de \$200. Otra máquina B cuesta \$1,000, tiene una vida económica de 10 años y \$200 de gastos anuales en operación. La tasa mínima de recuperación se considera de 8% y los valores de rescate, despreciables.



$$CA_A = 800_{0-5} \text{ cif} + 600 = 200 + 600 = 800$$

$$CA_B = 1,500_{0-10} \text{ cif} + 500 = 244 + 500 = 724$$

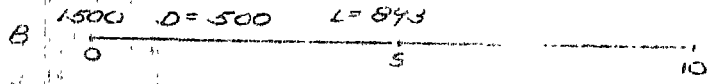
Si solo consideramos un horizonte de 5 años para ambas alternativas y hacemos caso omiso a la corriente de costos en la alternativa B a partir del 5º año en adelante, existe una diferencia a favor de B, de \$76 anuales.

Esto, en cierto aspecto, no es incorrecto, ya que se podría considerar que lo que ocurra en B después del 5º año, pertenece al análisis comparativo de alternativas que se vaya a hacer para dicho periodo, pero surge la duda de si la decisión actual no sería afectada por la decisión o curso de acción que se siguiese en la alternativa A a partir del 5º año. Analizaremos esto más adelante. Pero sigamos ahondando en el primer criterio de desprestigiar lo que ocurre en B a partir del 5º año.

Podría pensarse que de la corriente de costos que ocurren en B, la parte que no podemos ignorar, para efectos del análisis de los primeros 5 años, es la parte correspondiente a la amortización de la inversión inicial. Actualizando al año 5, la corriente de costos anuales correspondientes a este concepto se tendría:

$$1,500_{0-10} \text{ cif}_{5-5} \text{ uspuaf} = \$893$$

Esta cantidad, vendría a representar el valor teórico de rescate que la máquina B tendría al terminar el 5º año, y analizando el costo anual en estas condiciones, se tendría:



$$CA_B = (1,500 - 893)_{0-5} \text{ cif} + 893(0.08) + 100 = 152 + 72 + 500 = 724$$

que es el mismo valor para el costo anual obtenido anteriormente. Esto puede explicarse de la siguiente manera:

El hecho de tratar de estimar e introducir en el análisis, un valor de recuperación de la máquina B al final del 5º año, tiene como finalidad tratar de eliminar los problemas que presenta la existencia de diferentes vidas económicas en las alternativas. Sin embargo, el considerar un valor de rescate a la máquina al final del 5º año y por otro lado establecer que la vida económica de la máquina es de 10 años, es inconsistente, a menos que el valor de rescate que se suponga sea precisamente el de \$893. O sea bien, esto no es tan fácil de aceptar pues por un lado, si tomamos supuesta que el periodo de vida económica es de 10 años para la máquina B, los \$724 serían el costo anual mínimo (por definición de vida económica), por lo que sería lógico suponer que el análisis del costo anual en un periodo menor al de la vida económica, como lo es el de 5 años, fuese mayor al de \$724. Lo cual implicaría que el valor de rescate al final del año 5 fuese menor a \$893, y por otro lado, si el valor de rescate fuese mayor que \$893, esto estaría implicando que el

costo anual durante los primeros 5 años fuese menor de \$724 lo que destruiría la proposición de que la vida económica fuese de 10 años.

Todo lo anterior es por lo que respecta a la máquina B, pero, ¿cómo inquirir en la decisión lo que pueda ocurrir en la alternativa A a partir del 5º año?

Supongamos que el analista tiene elementos para prever que en la alternativa A, al terminar la vida económica de la 1ª máquina, se substituirá al final del 5º año, por una máquina ya mejorada tecnológicamente con un costo inicial de \$800, 5 años de vida económica, pero con \$350 de gastos anuales:

A	800	D = 600	800	D = 350	L = 0
	0		5		10
B	1,500		1,500		L = 0
	0				10

$$CA_A = [800 + 600_{B-5} \text{cif} + 800_{B-5} \text{cif} + 350_{B-5} \text{uspwf} + 350_{B-5} \text{uspwf}]_{B-10} \text{cif} = \$700$$

$$CA_B = 1500_{B-10} \text{cif} + 500 = 224 = 724$$

Vemos que al considerar una suposición sobre el reemplazo de la primera máquina de A, ha provocado que A sea ahora la alternativa óptima.

De todo lo anterior, se podría concluir que: el criterio de depreciar la corriente de gastos que se originan en la alternativa de mayor vida, a partir de la terminación de la vida económica de la alternativa más corta, solo es válido si:

- Se estime que en cada alternativa, si hay reemplazos futuros, estos plantearán condiciones totalmente similares a las condiciones del primer ciclo.
- El periodo total en el que sean necesarios los servicios de las alternativas A y B, se considere indefinido o represente un común múltiplo de las vidas económicas de las alternativas consideradas.

Sin embargo debe reconocerse que este criterio, normalmente se sigue "por defecto", es decir, porque no hay buenas bases para considerar que sucederá lo contrario a lo que establecen las condiciones (a) y (b). En todos aquellos casos en que se prevé que las condiciones van a cambiar en los siguientes ciclos, será necesario estimar la corriente de ingresos y egresos y tomarla en cuenta para el análisis de las alternativas.

Al respecto de la condición (b) podemos hacer notar que el último ejemplo ilustra el hecho de que una vez que se ha llegado, mediante la suposición de futuros reemplazos, a un horizonte económico común múltiplo para ambas alternativas, se puede proceder a la comparación económica, ya que las decisiones que se tomen de ese periodo en adelante en cualquiera o en ambas alternativas, serán irrelevantes a la decisión que se tome en el momento presente.

OBSERVACIONES FINALES:

Con todo lo anterior podemos concluir que para la comparación de alternativas con distinta vida económica, se puede proceder:

- 1º) Seleccionando un "período de estudio" o "período de análisis", igual para ambas alternativas y que consideremos representativa de una situación que suponemos será repetitiva en ciclos subsecuentes. Este período de análisis, normalmente se hará coincidir con el período de vida económica de la alternativa de menor horizonte económico.
- 2º) Suponer futuros reemplazos en una o en ambas alternativas con el fin de llegar a igualar los horizontes económicos de estudio.

Por lo que respecta a una variante al primer criterio, consistente en estimar un Valor de Recuperación para la alternativa de mayor duración, en una fecha ubicada a la terminación del período de análisis seleccionado, menor a su vida económica, solo se tendrán resultados distintos a los obtenidos con el criterio anterior de calcular el costo anual equivalente sobre su período completo de vida económica, si el Valor de Rescate que se considere, es diferente al que se obtenga de la actualización parcial de la corriente de anualidades correspondientes al período excedente al de análisis; pero claro está, que esto solo podrá hacerse, cuando se cuente con datos que efectivamente nos permitan suponer el que dicho Valor de Recuperación será distinto en esa fecha, basándonos en experiencias previas respecto a precios de mercado, condiciones de oferta y demanda, etc... Lo anterior querría decir que la depreciación de la inversión inicial en dicha alternativa no obedece a un modelo lineal.

Con respecto al segundo criterio, solo se obtendrán resultados diferentes a los obtenidos con el "período representativo de estudio" del primer criterio, si los reemplazos que se supongan, presentan condiciones distintas con respecto a las condiciones planteadas en la alternativa inicial a la cual reemplazar, en lo referente a monto de la inversión inicial, costos de operación y mantenimiento, eficiencia, valor de recuperación, etc..., de tal forma, que ya en el análisis de conjunto, las variantes introducidas por el o los reemplazos, puedan provocar que cambie el sentido de la decisión en cuanto a la alternativa a seleccionar, planteada por el primer criterio.

Vuelve a ser claro, que el proceder a suponer estos reemplazos, solo es justificable si realmente contamos con elementos de juicio que nos permitan suponer la estructura de dichos reemplazos y el futuro cambio de condiciones.

Ejemplo:

Se proponen dos compresoras:

Compresora I: costo inicial: \$3,000, vida económica: 6 años
 valor de rescate: \$500, Gastos anuales de operación: \$2,000

Compresora II: costo inicial: \$4,000, vida económica: 9 años
 valor de rescate: 0, gastos anuales de operación: \$1,600

Tasa mínima atractiva de recuperación: 15%

$$CA_I = (3,000 - 500)_{15-6} \text{ crf} + 500 (0,15) + 2000 = 2,735$$

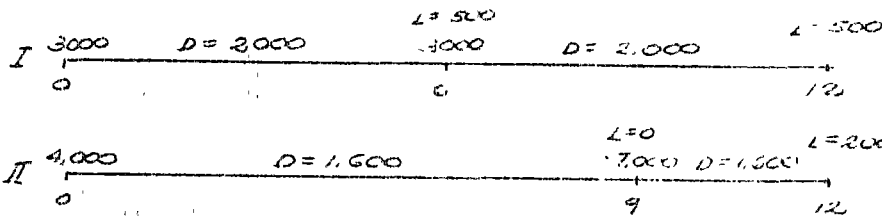
$$CA_{II} = (4,000)_{15-9} \text{ crf} + 1,600 = 2,440$$

$$\therefore CA_{II} < CA_I$$

Supongamos ahora que:

- 1° para la empresa en cuestión, la compresora solo se requerirá durante 12 años
- 2° se prevé que mientras para la compresora I se podrá hacer el reemplazo a partir del año 6 con una compresora similar, para la compresora II, se estima que el reemplazo se llevaría cabo al año 9 con otra cuyo costo se estima en \$7,000 y que tendrá valor de rescate después de 3 años de uso, de \$200.

La situación puede sintetizarse:



$$CA_I = \$2,735$$

$$CA_{II} = [4,000 + 7,000_{15-9} \text{ sppwf} - 200_{15-12} \text{ sppwf}]_{15-12} \text{ crf} + 1,600$$

$$CA_{II} = [4,000 + 7,000 (0,2843) - 200 (0,1269)] (0,1845) + 1,600$$

$$CA_{II} = \$2,650$$

$$\therefore CA_{II} < CA_I$$

Lo que significa que aun con el cambio de condiciones, la compresora II, sigue siendo la más conveniente.

DETERMINACION DEL NIVEL MAS ECONOMICO DE INVERSION.

Hay ocasiones en que se nos presentan alternativas simultaneas de inversión para resolver un mismo problema. Así por ejemplo, imaginemos el caso de que con diversos equipos pudiésemos en principio asegurar un cierto volumen de producción requerido, con calidad similar y dentro de un tiempo especificado, pero representando cada una de ellas, características y condiciones distintas, en cuanto aspectos como el monto de la inversión inicial y las condiciones de pago de dicha inversión, cantidad de obra de mano consumida por unidad producida, grado requerido de especialización para los operarios, costo de las refacciones y de las reparaciones, costo y periodicidad especificada para el mantenimiento adecuado, importe de las primas de seguros, período de utilización del equipo, valor de recuperación que se considera poder obtener al final de la vida útil, etc..., diferencias tales, que originan el que no obstante las diversas máquinas propuestas resuelvan el problema desde el punto de vista de producción, desde el punto de vista económico, presentan diferencias substanciales, razón por la cual, es necesario analizar las posibles alternativas con este enfoque, haciendo intervenir todas sus diferencias relativas tanto del tipo monetario como del no monetario; ya que sabemos que a fin de cuentas, el criterio económico será el determinante para la selección de una de las alternativas.

El panorama que se presenta en estas circunstancias, se resume en el hecho de que los diversos equipos pueden seleccionarse entre un amplio rango, que va desde aquel que implica alta inversión inicial pero bajos costos de operación, mantenimiento, etc, hasta aquel de bajo costo total inicial (incluyendo compra, derechos, transportes, instalación, puesta en marcha, pruebas iniciales, etc..), pero elevados costos anuales equivalentes durante su vida útil. La incógnita en

cuanto a la alternativa por adoptar, se refleja en preguntas tales como: ¿ cuál es el equipo óptimo desde el punto de vista económico?, ¿ hasta cuál de los niveles de inversión representado por los diversos equipos disponibles, debe alcanzarse?, habiendo ya determinada la conveniencia de invertir en uno de los equipos; ¿ se justifica la inversión adicional que implica un equipo más automatizado?

Problemas de este tipo, pueden resolverse mediante cualquiera de los métodos de comparación de alternativas, como son: el del Costo Anual, el del Valor Presente y el del cálculo de la Tasa de Recuperación.

Ejemplo:

Se desea analizar la posibilidad de recubrir una red de tuberías de vapor, con material aislante para evitar en lo posible las pérdidas por calor. A medida que se incrementa el espesor del material aislante, la inversión inicial será mayor, pero se lograrán menores pérdidas anuales por pérdida de calor.

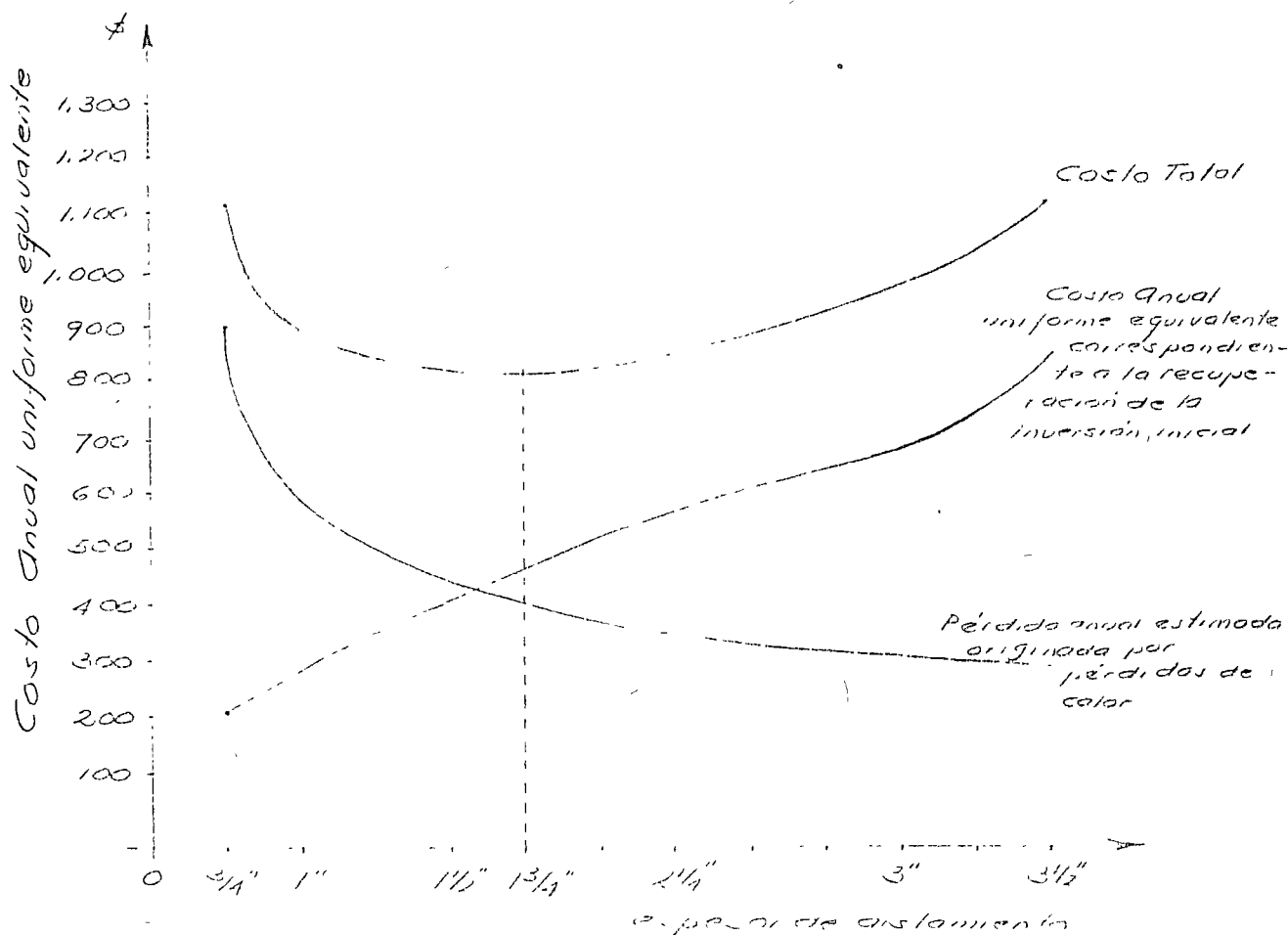
espesor del aislamiento	(dato)	(dato)	Costo Anual inf. equiv. de recupera. del eq. piloto	Costo Total anual equivalente
	importe de la inversión inicial	pérdida estimada anual por pérdida de calor		
0	0	\$ 1,800	0	\$ 1,800
3/4"	\$ 1,800	900	\$ 210	1,110
1"	2,545	575	247	887
1 1/2"	3,340	450	270	840
2 1/4"	4,360	360	509	869
3"	5,730	310	669	977
3 1/2"	7,450	285	851	1,136

La obtención del Costo Anual equivalente en la columna anterior, se logra tal como se ejemplifica para el costo del aislamiento de 3/4":

$$\begin{array}{r}
 1,800 \\
 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 D = 900 \\
 1.0 \\
 15 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 CA = 1,800 + \frac{1,700}{15} \\
 CA = 210 + 900 = 1,110
 \end{array}$$

Los valores estimados de los factores relativos a costos y ahorros, se muestran en el cuadro anterior. Se ha considerado que el recubrimiento tendrá una vida útil de 15 años. La tasa mínima atractiva de recuperación se considera de un 8%.

Vemos que el Costo Anual uniforme equivalente menor, es el que corresponde al recubrimiento de 1 1/2" de espesor. Observamos que a medida que se aumenta el espesor, (1a. columna), se incrementa el monto de la inversión inicial, (2a. columna), pero decrecen las pérdidas por fuga de calor, todo lo cual origina que los costos anuales (5a. columna) disminuya hasta un mínimo que corresponde precisamente a la alternativa de 1 1/2". Sin embargo, a partir de este



valor mínimo, el Costo Anual equivalente de los subsecuentes niveles de inversión, va aumentando.

El comportamiento de los factores de costo y ahorro anteriores, se muestra en la gráfica anterior.

La razón por la cual los Costos Anuales uniformes equivalentes a los espesores de $2 \frac{1}{4}$ " en adelante, van creciendo, se explica por el hecho de que la inversión total que cada uno de los niveles implica, va siendo cada vez menos atractiva dada la inversión inicial requerida y los beneficios que esta implica en cuanto a los ahorros originados por la menor pérdida de calor. Dicho de otra forma: la inversión adicional que cada uno de los diferentes espesores de aislamiento implica, comparativamente a la alternativa anterior, (esto, a partir del espesor de $1 \frac{1}{2}$ "), ya no se justifica, dados los ahorros adicionales que por una menor pérdida de calor origina; al menos, considerando una tasa mínima de recuperación de 8%.

Esto último queda de manifiesto, si la comparación entre las alternativas, se realiza no en base a la inversión total que cada una de ellas implica, sino comparativamente, es decir, analizando la inversión adicional o extra, que cada nivel representa con respecto al nivel anterior y comparando con el ahorro adicional por la disminución en la pérdida de calor, que esta inversión adicional origina.

Resolvamos el problema anterior con este criterio de análisis, tal como se muestra en el cuadro siguiente, y en el cual se observa que la inversión extra de \$795 que el espesor de $1 \frac{1}{2}$ " representa comparativamente respecto al de 1", origina ahorros de \$140 adicionales anuales por disminución en las

espesor del aislamiento	inversión inicial	Inversión adicional	Costo de recuperación del capital de la inversión adicional	Pérdida anual por color	Ahorro anual originado por la inversión adicional	Gancho neto después de recuperación de la inversión adicional
0	0	—	—	1,200	—	—
3/4"	1,800	1,800	210	900	900 (900-210 =	+ 690
1"	2,545	745	87	590	310 (310-87 =	+ 223
1 1/2"	3,340	795	93	450	140 (140-93 =	+ 47
2 1/4"	4,560	1,020	119	360	90 (90-119 =	- 29
3"	5,730	1,370	160	210	50 (50-160 =	- 110
3 1/2"	7,280	1,550	181	285	25 (25-181 =	- 156

pérdidas por calor. El resultado de \$ 47.00 positivos anuales, significa que esa inversión adicional no solo se recupera con una tasa de 8 % anual durante 15 años, con los ahorros adicionales que origina, sino que de hecho, su tasa de recuperación es mayor que el 8 % en una cantidad representada anualmente por un superhabit de \$ 47.00 anuales. En cambio, la inversión adicional por \$ 1,020.00 que el espesor de 2 1/4" implica comparativamente con el espesor de 1 1/2", no se alcanza a recuperar con los ahorros de \$ 90.00 anuales adicionales que origina, durante 15 años y con una tasa del 8 % anual, apareciendo un deficit anual de \$ 29.00 para que esto sucediese.

En el cuadro anterior, el primer renglón, correspondiente al espesor 0" (lo que equivale a no usar ningún aislamiento), no presenta valores, ya que se trata de un analisis comparativo, y no existe alternativa anterior a la alternativa de : " no usar aislamientos ".

Ahora bien ¿ porqué no optar por la alternativa de 3/4" de espesor que es la que mayor ahorro neto origina \$690.00 ?.

La respuesta a lo anterior, lo constituye el hecho de que buscamos invertir en todas las alternativas favorables, y todas aquellas que brinden tasas anuales de recuperación de 8 % o más, son atractivas, razón por la cual debemos invertir hasta en la alternativa de 1 1/2"; recordemos que la pregunta originalmente planteada *qué* ¿ hasta que nivel de inversión es conveniente invertir? ^{no invertir} en la alternativa de 1 1/2", equivale a rechazar una posibilidad de inversión que nos reedita inclusive más de 8 %. El que las inversiones adicionales que implican

los aislamientos de 3/4" y 1", se recuperan con una tasa aún mayor que la de la inversión adicional de la alternativa de 1 1/2", no implica que ésta última no deba aceptarse.

En este estado de cosas, si quisiéramos optimizar, deberíamos tratar de conseguir un espesor intermedio entre 1 1/2" y 2 1/4" tal que presentase el costo menor anual equivalente (de acuerdo con el primer criterio de análisis con base en la inversión total), y que coincidiese con el punto inferior de la curva de Costos Anuales uniformes equivalentes. Este espesor es el que se muestra en la grafica correspondiente y que corresponde a un espesor de 1 3/4". Si éste valor óptimo tratase de calcularse con el criterio de análisis de la inversión adicional, sería el correspondiente a aquel cuyo " ahorro neto después de recuperar la inversión adicional (a una tasa del 8 %) ", fuese de cero, lo cual significaría que la inversión adicional se recupera exactamente al 8 % que es el límite mínimo atractivo de inversión. Podría demostrarse que un aislamiento de 1 3/4" de espesor, con costo inicial de \$ 3,845.00 y pérdida anual por calor de \$ 391.00 y por tanto con inversión adicional de \$ 505.00 y ahorro adicional de \$ 109.00, con respecto a la alternativa de 1 1/2", cumpliría con lo anterior y representaría la maximización en cuanto a nivel de inversión se refiere.

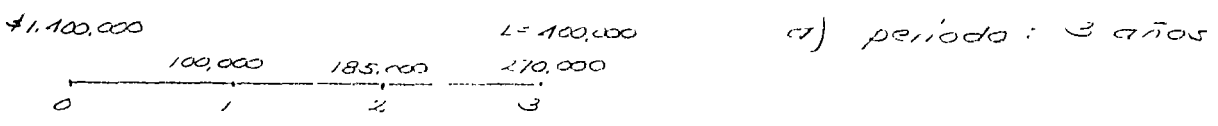
Hacemos notar que el metodo del Costo Anual, solo nos muestra cual es el nivel de inversión más economico, y nos indica si una inversión se recupera a una tasa del 8 % o mayor, pero sin decirnos especificamente los valores de dichas tasas. Este mismo problema puede resolverse con el método de la Tasa de Re-

cuperación que se aplica tal y como se mostrará más adelante y con el cual sí pudiesen calcularse las tasas de recuperación de cada alternativa de inversión total y las de las inversiones adicionales de cada nivel.

El método del Costo Anual también es sumamente útil para la determinación del periodo más económico de utilización de un activo depreciable, es decir, de su periodo de vida económica.

EJEMPLO:

Un tractor tiene un precio de adquisición de \$1,400,000.00 y dado el comportamiento y montos relativos de los costos de operación y mantenimiento que para un equipo de este tipo se presentan en la realidad durante el transcurso de los años de utilización, se considera poder ajustar (al menos para efectos de este ejemplo), la corriente de dichos costos, a un modelo de serie uniforme con gradiente de incremento aritmético. Supongamos por tanto, que los costos por este concepto son: \$100,000.00 el primer año y \$85,000.00 de incremento anual aritmético, se pide calcular los costos anuales uniformes equivalentes correspondientes a periodos de utilización de 3, 5 y 9 años, estimando los valores de recuperación al final de cada uno de ellos, en: \$400,000.00^{\$100,000} y \$50,000.00 respectivamente. Se considera una tasa mínima atractiva de recuperación de 15 %



$$CA_3 = (1,400,000 + 100,000)_{15-3} + 100,000(0.15) + 100,000 + 85,000_{15-3} =$$

$$CA_3 = 1,000,000 + 137,980 + 100,000(0.15) + 100,000 + 85,000(0.90713) =$$

$$CA_3 = 1,377,980 + 100,000 + 100,000 + 77,106 = \$1,675,086$$

b) periodo 5 años

1,400,000				1-100,000
	100,000	185,000	335,000	410,000
0	1	2	3	4

$$CA_5 = (1,400,000 - 100,000)_{15-5} \cdot C1 + 100,000 (0,15)^5 + 100,000 + 185,000_{15-5} \cdot C1$$

$$CA_5 = 387,816 + 115,000 + 100,000 + 116,138 = \$ 619,254$$

c) periodo 7 años

1,400,000		85,000		2-50,000
	100,000	100,000		
0	1	2	3	4

$$CA_7 = (1,400,000 - 50,000)_{15-7} \cdot C1 + 50,000 (0,15)^7 + 100,000 + 85,000_{15-7} \cdot C1$$

$$CA_7 = 282,920 + 7,500 + 100,000 + 262,837 = \$ 653,257$$

Se observa que el comportamiento de los costos anuales uniformes equivalentes y que involucran la inversión inicial, los costos de operación, conservación y mantenimiento y el valor del rescate, obedece a una curva con concavidad positiva y cuyo punto mínimo coincide precisamente con el llamado periodo de vida económica, y el cual en el caso presente se encuentra en el entorno correspondiente al punto que representa un periodo de utilización de 5 años para el equipo.

METODO DEL VALOR PRESENTE.

El método consiste fundamentalmente, en reducir diferencias futuras entre alternativas, a una sola cantidad equivalente expresada en el momento presente.

Lo más frecuente, es que las cantidades que constituyen un flujo de efectivo, se "lleven" al punto cero, o momento actual, sin embargo, en ocasiones pudiera ser más conveniente, por representatividad, por facilidad de comparación con otras alternativas, etc..., expresar la corriente de efectivo concentrada en otro punto cualquiera del tiempo distinto del punto cero.

Para indicar que una cantidad ó una serie de ingresos y/ o egresos, ha sido expresada en el punto cero, diremos que ha sido "actualizada".

Es frecuente escuchar que para indicar lo anterior, se emplee el término "descontar". Así, se dirá que una cantidad o una serie ha sido "descontada" al momento actual, sin embargo nosotros consideramos que el término "actualizar" es más correcto.

Veamos cual es la mecánica y el significado de la comparación de alternativas con el método del Valor Presente:

EJEMPLO.

Consideremos dos alternativas A y B, con los flujos de efectivo que se muestran en sus respectivas escalas de tiempo. Supongamos además, que

la tasa mínima atractiva de recuperación se fija en 12 %. ¿Cuál de las dos alternativas es más conveniente ?

	15,000	D = 2,000	L = 1,200
A	-----		
	0		6
B	11,500	D = 3,500	L = 1,800

			6

Llevando la corriente de gastos y el costo de recuperación al momento actual (0), se tiene

$$\begin{aligned}
 VP_A &= 15,000 - 2,000 (P/F, 12\%, 6) + 1,200 (P/F, 12\%, 6) \\
 &= 15,000 - 2,000 (0.5066) + 1,200 (0.5066) \\
 &= 15,000 - 1,013.2 + 607.92 = 13,984.72
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 VP_B &= 11,500 - 3,500 (P/F, 12\%, 6) + 1,800 (P/F, 12\%, 6) \\
 &= 11,500 - 3,500 (0.5066) + 1,800 (0.5066) \\
 &= 11,500 - 1,773.1 + 911.88 = 10,638.78
 \end{aligned}$$

(diferencia a favor de A \$ 2,059)

Ya que actualizamos considerando como positivos los gastos, el Valor Presente que nos es favorable es el de la alternativa A, por representar el costo actualizado equivalente menor.

El significado del resultado anterior es el hecho de que la sobre-inversión inicial de \$ 3,500.00 que la alternativa A implica sobre la B, se justifica plenamente, yá que no solo se recupera a una tasa de 12 % en el periodo de 6 años con los ahorros de \$ 1,500.00 anuales y con un mayor valor de recuperación, por \$ 1,200.00 al final del periodo de servicio analizado, sino que re-ditúa un 12 %, más un porcentaje adicional correspondiente a una cantidad total expresada en el momento actual, de \$ 2,059.00.

Si la diferencia hubiese sido cero, aun la alternativa más atractiva sería la A,

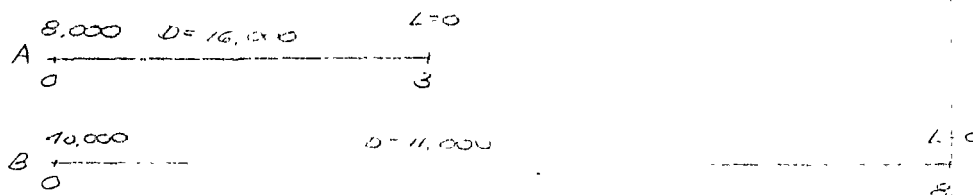
ya que dicho resultado se interpretaría como que la sobre-inversión de A, sobre B, se recupera exactamente con una tasa de intereses del 12%.

En el caso de que la diferencia hubiese sido negativa, esto significaría que la inversión adicional en A no se alcanzaría a recuperar con una tasa del 12%, y siendo esta la tasa mínima atractiva de recuperación, la alternativa A sería rechazada y aceptada la B.

El método del Valor Presente puede ser empleado también para la comparación entre alternativas con distintos periodos de vida económica.

EJEMPLO

Consideremos dos alternativas de selección de equipos cuyas características se indican en las escalas de tiempo correspondientes. Supongamos una tasa mínima atractiva de recuperación de 10 %.



Recordemos que en términos generales, el tratamiento de un problema de este tipo puede ser tratado con dos criterios

- Considerar como horizonte de comparación, el periodo correspondiente a la alternativa más corta, en este caso: 3 años. Dicho de otra forma, despreciar los futuros posibles eventos y sus consecuencias, más allá de los 3 años.

- b) Predecir los cursos de acción que pudiesen seguirse a partir del 3er año, a fin de buscar igualar los horizontes económicos en ambas alternativas A y B.

Apliquemos primero el criterio (a). Comparemos las alternativas con el método del Costo Anual y con el del Valor Presente

Con el Método del Costo Anual

$$\begin{aligned}
 CA_A &= 5,000 (A/P, 10\%, 3) + 16,000 & \# & 19,217 \\
 CA_B &= 10,000 (A/P, 10\%, 3) + 11,000 & = & 18,198 \\
 & \text{diferencia a favor de B} & \# & 1,019 \text{ / año}
 \end{aligned}$$

Con el Método del Valor Presente

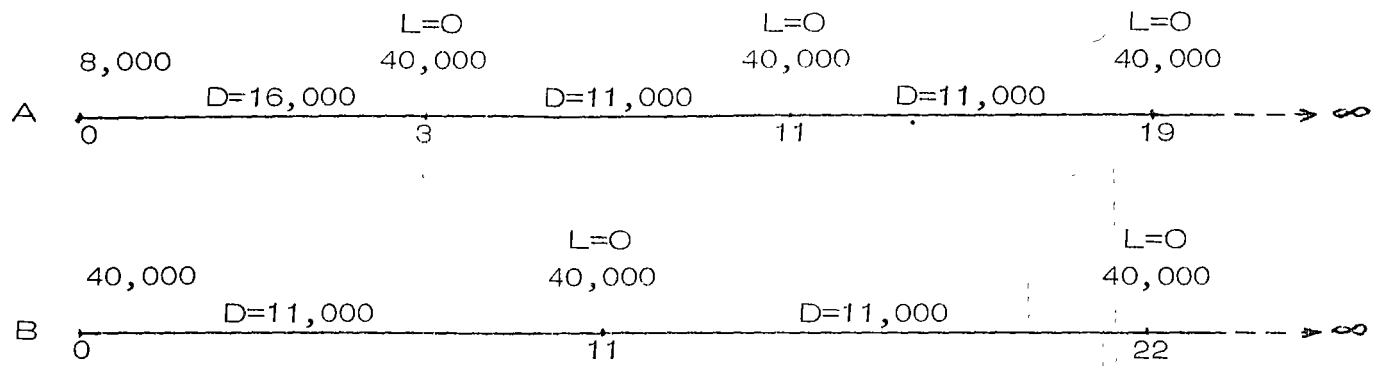
$$\begin{aligned}
 VP_A &= 5,000 + 16,000 (P/A, 10\%, 3) = & \# & 47,792 \\
 VP_B &= [10,000 (A/P, 10\%, 3) + 11,000] (P/A, 10\%, 3) = & 16,001 \\
 & \text{diferencia a favor de B} & \# & 1,788 \text{ (presente)}
 \end{aligned}$$

ambos resultados son equivalentes, ya que $1,788 = 1,019 (P/A, 10\%, 3)$

De lo anterior, se desprende que el equipo B es el más económico.

Apliquemos ahora el criterio (b). Recordamos que una primera postura en cuanto a la suposición sobre los reemplazos que pudiesen hacerse a continuación tanto de A como de B para igualar sus periodos de comparación, sería la de suponer reemplazos futuros idénticos a los originales en cada alternativa, hasta un común múltiplo que en este caso sería de 24 años. Pero ya vemos anteriormente que esta situación nos conduce al mismo resultado, aún numéricamente, que el obtenido al aplicar el criterio (a).

Consideremos entonces que los reemplazos en cada alternativa, se harán con equipos al menos tan eficientes económicamente, como el más económico disponible actualmente. Dado, que al menos en base al criterio (a), el equipo más económico, resultó ser el B, supongamos una corriente indefinida de reemplazos a partir de A y B, con equipos Tipo B:



Actualizando cada una de las corrientes de costos, se tiene:

$$\begin{aligned}
 VP_{CA} &= 8,000 + 16,000 (P/A, 10\%, 3) + \\
 &\quad + [40,000 (A/P, 10\%, 8) + 11,000] \cdot (P/A, 10\%, \infty) \cdot (P/F, 10\%, 3) \\
 VP_{CB} &= [40,000 (A/P, 10\%, 8) + 11,000] \cdot (P/A, 10\%, \infty) \\
 &\quad \text{Diferencia a favor de B:}
 \end{aligned}$$

= \$ 186,746.00
= 184,976.00
\$ 1,788.00

$$VP_{CB} < VP_{CA} \implies B \} A$$

Que es el mismo resultado obtenido con el criterio A, al analizar unicamente los 3 primeros años.

Este resultado pudo haberse previsto, ya que si observamos las corrientes de costos expresados en las escalas de tiempo, notaremos que al reemplazar en el año 3, a A, con una máquina tipo B, a partir del año 3 establece para ambas alternativas una situación idéntica, pudiendo entonces "simplificarse" en ambas alternativas dichos periodos a partir del año 3.

Por lo anterior, suponer reemplazos a partir del año 3, solo introducirá efectos en la comparación de alternativas, y provocará cambio en el resultado obtenido con el criterio (a), a medida que el equipo de reemplazo de A, a partir del año 3, sea más eficiente económicamente que equipo B. Así, un equipo un poco más económico que el B, igualará las alternativas; y un equipo de mayor economía aún, empleado, como reemplazo de A a par

tir del 3o. año dará supremacía a la alternativa A. Esto se explica, por el hecho de la más pronta utilización y aprovechamiento de mejores^a tecnológicas en A, a partir del 3o. año.

El método del Valor Presente muestra en determinadas circunstancias, ventajas y desventajas de las alternativas en estudio, en una forma no apreciable en el método del Costo Anual.

Así por ejemplo. en aquéllas situaciones en las que la inversión inicial es pre dominante sobre el efecto que pudieran tener los costos anuales, de operación por ejemplo, dentro del comportamiento general de un conjunto de alternativas, el método del Valor Presente pone de manifiesto, con todo su "Peso", el efecto de las diferencias en las inversiones iniciales. En otro caso, permitirá poder juzgar sobre la importancia, o no importancia, de dichos costos iniciales.

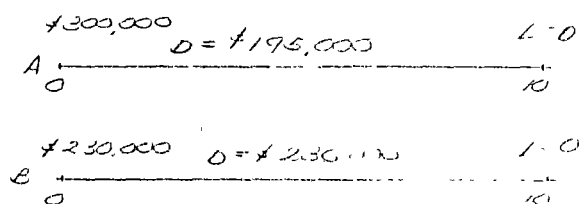
Las características fundamentales del método son: el que las cantidades ubicadas en el momento actual (o en el punto del tiempo en el cual se "utiliza" el flujo de efectivo), se muestran con su valor real, y el que las diferencias entre alternativas puedan expresarse y compararse a través de cantidades (sumas) únicas y expresadas en un solo punto y no por medio de una serie de sumas o cantidades anuales, tal como sucede en el método del Costo Anual, lo que en ocasiones pudiese distorsionar la visión de conjunto sobre una situación dada.

EJEMPLO:

Al Gerente de una planta de proceso le son presentadas dos cotizaciones A y

B para la implantación de un sistema que le permitirá elevar su volumen anual de producción. Después de realizar un análisis económico, avisa al agente de ventas del sistema B, que su proposición ha sido descartada, a lo cual este responde estar dispuesto a hacer una rebaja en el precio inicial del sistema que ofrece. ¿Cuál es el descuento que debe otorgar el agente de ventas de B, de forma tal que su sistema se convierta en la alternativa más económicamente atractiva para el Gerente ?

Las características de los sistemas A y B son las siguientes:



Se estima la tasa mínima de recuperación en 6%. Dado que lo que es factible de variarse es el precio inicial, conviene analizar el problema con el criterio del Valor Presente:

$$VP_A = 300,000 + 195,000 (P/A, 6\%, 10) = \$1,735,220$$

$$VP_B = 230,000 + 230,000 (P/A, 6\%, 10) = 1,766,984$$

$$\text{diferencia a favor de A} = 231,764$$

Lo cual quiere decir que la alternativa A no solo no es \$ 70,000.00 más cara (como podría juzgarse si solo se atendiese al monto de las inversiones iniciales) sino que es \$ 231,764.00 más barata (esta cifra, expresando la diferencial momento cero), por lo que, para que el sistema B se convierta en el más

atractivo, habrá que avisar al agente de ventas que lo debe implantar totalmente gratis y acompañar su regalo con un cheque por más de \$1,764.00, ya que aún con un cheque de \$1,764.00 exactamente, la alternativa A, seguirá siendo la más económica por el hecho que la sobre inversión que representa, con respecto a B, se recuperaría exactamente aún, al 6%, que es la tasa que ha sido fijada como tasa mínima atractiva de recuperación.

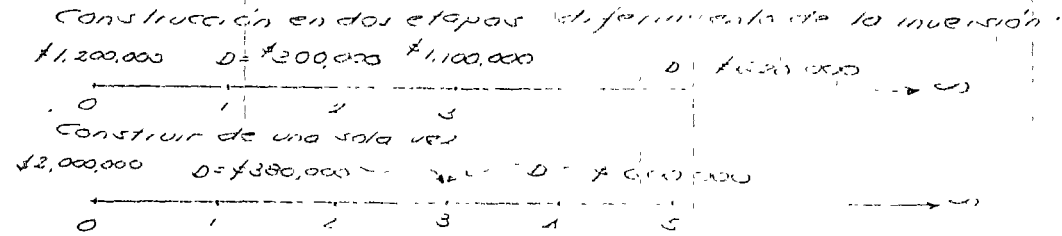
EJEMPLO:

Veamos el caso de una empresa en que se planea el crecimiento y la expansión de la misma, y para decidir sobre la construcción de una ampliación de la planta, se presentan dos alternativas: La primera es llevar a cabo la construcción en dos etapas con diferencia de 3 años entre ellas, y la Segunda consiste en construir desde el principio la ampliación completa ya con la capacidad que se espera necesitar dentro de 3 años. Ambas alternativas presentan ventajas y desventajas como son: El costo de la construcción de la planta en dos partes, es más costosa que la construcción en una sola etapa, lo cual es obvio por la duplicación de ciertos trabajos y actividades como supervisión y dirección de la obra, costos indirectos, el tener que efectuar trabajos que en la segunda etapa deban destruirse, etc..., por otro lado, sí la ampliación se construye desde el principio con la capacidad total, durante los primeros años funcionará a capacidad sobrada, siendo por tanto, muy ineficiente y por tanto más costosa su operación en esta etapa, pero también es muy probable que si se hace de una sola vez, quede mucho más integrada en su conjunto, de tal manera que su operación, ya en los años futuros, sea más eficiente y por tanto más económica que si se planea y construye en 2 partes.

Yá funcionando se supone continuará operando un número indefinido de años

Los resultados de los estudios para una y otra alternativa se le presentan a

la empresa de la siguiente manera, yá expresadas en la escala de tiempos:



Se considera una tasa mínima atractiva de recuperación de 15%

$$\begin{aligned}
 VP_{2 \text{ etapas}} &= 1,200,000 + 300,000 \cdot \frac{1}{1.15} + (1,100,000 + 620,000 \cdot \frac{1}{1.15}) \cdot \frac{1}{1.15^3} \\
 &= 1,200,000 + 300,000 \cdot 2.2832 + (1,100,000 + \frac{620,000}{0.15}) \cdot 0.65752 = \\
 &= 1,200,000 + 684,960 + 3,441,021 = \underline{\underline{\$ 5,325,981}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 VP_{1 \text{ etapa}} &= 2,000,000 + 380,000 \cdot \frac{1}{1.15} + (1,100,000 + 620,000 \cdot \frac{1}{1.15}) \cdot \frac{1}{1.15^3} \\
 &= 2,000,000 + 380,000 \cdot 2.2832 + \frac{620,000}{0.15} \cdot 0.65752 \\
 &= 2,000,000 + 867,616 + 2,640,070 = \underline{\underline{\$ 5,497,696}}
 \end{aligned}$$

diferencia a favor de la 1ª alternativa = 171,715

Lo anterior demuestra que la sobre-inversión actual de \$300,000.00 que implica el construir en una sola etapa la ampliación de la planta, no se justifica, con los ahorros que origina en cuanto a la construcción total y en cuanto a la operación en los años futuros; esto, al menos, considerando una tasa de interés mínima de 15%.

Compound Interest Tables

FORMULAS FOR CALCULATING COMPOUND INTEREST FACTORS

Single Payment—Compound Amount Factor ($F/P, i, n$)	$(1 + i)^n$
Single Payment—Present Worth Factor ($P/F, i, n$)	$\frac{1}{(1 + i)^n}$
Sinking Fund Factor ($A/F, i, n$)	$\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$
Capital Recovery Factor ($A/P, i, n$)	$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$
Uniform Series—Compound Amount Factor ($F/A, i, n$)	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$
Uniform Series—Present Worth Factor ($P/A, i, n$)	$\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

TABLE E-1
1% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0100	0.9901	1.00000	1.01000	1.000	0.990	1
2	1.0201	0.9803	0.49751	0.50751	2.010	1.970	2
3	1.0303	0.9706	0.33002	0.34002	3.030	2.941	3
4	1.0406	0.9610	0.24628	0.25628	4.060	3.902	4
5	1.0510	0.9515	0.19604	0.20604	5.101	4.853	5
6	1.0615	0.9420	0.16255	0.17255	6.152	5.795	6
7	1.0721	0.9327	0.13863	0.14863	7.214	6.728	7
8	1.0829	0.9235	0.12069	0.13069	8.286	7.652	8
9	1.0937	0.9143	0.10674	0.11674	9.369	8.566	9
10	1.1046	0.9053	0.09558	0.10558	10.462	9.471	10
11	1.1157	0.8963	0.08645	0.09645	11.567	10.368	11
12	1.1268	0.8874	0.07885	0.08885	12.683	11.255	12
13	1.1381	0.8787	0.07241	0.08241	13.809	12.134	13
14	1.1495	0.8700	0.06690	0.07690	14.947	13.004	14
15	1.1610	0.8613	0.06212	0.07212	16.097	13.865	15
16	1.1726	0.8528	0.05794	0.06794	17.258	14.718	16
17	1.1843	0.8444	0.05426	0.06426	18.430	15.562	17
18	1.1961	0.8360	0.05098	0.06098	19.615	16.398	18
19	1.2081	0.8277	0.04805	0.05805	20.811	17.226	19
20	1.2202	0.8195	0.04542	0.05542	22.019	18.046	20
21	1.2324	0.8114	0.04303	0.05303	23.239	18.857	21
22	1.2447	0.8034	0.04086	0.05086	24.472	19.660	22
23	1.2572	0.7954	0.03889	0.04889	25.716	20.456	23
24	1.2697	0.7876	0.03707	0.04707	26.973	21.243	24
25	1.2824	0.7798	0.03541	0.04541	28.243	22.023	25
26	1.2953	0.7720	0.03387	0.04387	29.526	22.795	26
27	1.3082	0.7644	0.03245	0.04245	30.821	23.560	27
28	1.3213	0.7568	0.03112	0.04112	32.129	24.316	28
29	1.3345	0.7495	0.02990	0.03990	33.450	25.066	29
30	1.3478	0.7419	0.02875	0.03875	34.785	25.808	30
31	1.3613	0.7346	0.02768	0.03768	36.133	26.542	31
32	1.3749	0.7273	0.02667	0.03667	37.494	27.270	32
33	1.3887	0.7201	0.02573	0.03573	38.869	27.990	33
34	1.4026	0.7130	0.02484	0.03484	40.258	28.703	34
35	1.4166	0.7059	0.02400	0.03400	41.660	29.409	35
40	1.4889	0.6717	0.02046	0.03046	48.886	32.835	40
45	1.5648	0.6391	0.01771	0.02771	56.481	26.095	45
50	1.6446	0.6080	0.01551	0.02551	64.463	39.196	50
55	1.7285	0.5785	0.01373	0.02373	72.852	42.147	55
60	1.8167	0.5504	0.01224	0.02224	81.670	44.955	60
65	1.9094	0.5237	0.01100	0.02100	90.937	47.627	65
70	2.0068	0.4983	0.00993	0.01993	100.676	50.169	70
75	2.1091	0.4741	0.00902	0.01902	110.913	52.587	75
80	2.2167	0.4511	0.00822	0.01822	121.672	54.888	80
85	2.3298	0.4292	0.00752	0.01752	132.979	57.078	85
90	2.4486	0.4084	0.00690	0.01690	144.863	59.161	90
95	2.5735	0.3886	0.00636	0.01636	157.354	61.143	95
100	2.7048	0.3697	0.00587	0.01587	170.481	63.029	100

TABLE E-2

1 1/4% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0125	0.9877	1.0000	1.0125	1.000	0.988	1
2	1.0252	0.9755	0.49689	0.50939	2.012	1.963	2
3	1.0380	0.9634	0.32920	0.34170	3.038	2.927	3
4	1.0509	0.9515	0.24536	0.25786	4.076	3.878	4
5	1.0641	0.9398	0.19506	0.20756	5.127	4.818	5
6	1.0774	0.9282	0.16153	0.17403	6.191	5.746	6
7	1.0909	0.9167	0.13759	0.15009	7.268	6.653	7
8	1.1045	0.9054	0.11963	0.13213	8.359	7.568	8
9	1.1183	0.8942	0.10567	0.11817	9.463	8.462	9
10	1.1323	0.8832	0.09456	0.10700	10.582	9.346	10
11	1.1464	0.8723	0.08537	0.09787	11.714	10.218	11
12	1.1608	0.8615	0.07776	0.09026	12.860	11.079	12
13	1.1753	0.8509	0.07132	0.08382	14.021	11.930	13
14	1.1900	0.8404	0.06581	0.07831	15.196	12.771	14
15	1.2048	0.8300	0.06103	0.07353	16.386	13.601	15
16	1.2199	0.8197	0.05685	0.06935	17.591	14.420	16
17	1.2351	0.8096	0.05316	0.06566	18.811	15.230	17
18	1.2506	0.7996	0.04988	0.06238	20.046	16.030	18
19	1.2662	0.7898	0.04696	0.05946	21.297	16.819	19
20	1.2820	0.7800	0.04432	0.05682	22.563	17.599	20
21	1.2981	0.7704	0.04194	0.05444	23.845	18.370	21
22	1.3143	0.7609	0.03977	0.05227	25.143	19.131	22
23	1.3307	0.7515	0.03780	0.05030	26.457	19.882	23
24	1.3474	0.7422	0.03599	0.04849	27.788	20.624	24
25	1.3642	0.7330	0.03432	0.04682	29.135	21.357	25
26	1.3812	0.7240	0.03272	0.04529	30.500	22.081	26
27	1.3985	0.7150	0.03137	0.04387	31.881	22.796	27
28	1.4160	0.7062	0.03005	0.04255	33.279	23.503	28
29	1.4337	0.6975	0.02882	0.04132	34.695	24.200	29
30	1.4516	0.6889	0.02768	0.04018	36.129	24.889	30
31	1.4698	0.6804	0.02661	0.03911	37.581	25.569	31
32	1.4881	0.6720	0.02561	0.03811	39.050	26.241	32
33	1.5067	0.6637	0.02467	0.03717	40.539	26.905	33
34	1.5256	0.6555	0.02378	0.03628	42.045	27.560	34
35	1.5446	0.6474	0.02295	0.03545	43.571	28.208	35
40	1.6436	0.6084	0.01942	0.03192	51.490	31.327	40
45	1.7489	0.5718	0.01669	0.02919	59.916	34.258	45
50	1.8610	0.5373	0.01452	0.02702	68.882	37.013	50
55	1.9803	0.5050	0.01275	0.02525	78.422	39.602	55
60	2.1072	0.4746	0.01129	0.02379	88.575	42.035	60
65	2.2422	0.4460	0.01006	0.02256	99.377	44.321	65
70	2.3859	0.4191	0.00902	0.02152	110.872	46.470	70
75	2.5388	0.3939	0.00812	0.02062	123.103	48.489	75
80	2.7015	0.3702	0.00735	0.01985	136.119	50.387	80
85	2.8746	0.3479	0.00667	0.01917	149.968	52.170	85
90	3.0588	0.3269	0.00607	0.01857	164.705	53.846	90
95	3.2548	0.3072	0.00554	0.01804	180.386	55.421	95
100	3.4634	0.2887	0.00507	0.01757	197.072	56.901	100

TABLE E-3

1 1/2% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0150	0.9852	1.0000	1.0150	1.000	0.985	1
2	1.0302	0.9707	0.49628	0.51128	2.015	1.956	2
3	1.0457	0.9563	0.32838	0.34338	3.045	2.912	3
4	1.0614	0.9422	0.24444	0.25944	4.091	3.854	4
5	1.0773	0.9283	0.19409	0.20909	5.152	4.783	5
6	1.0934	0.9145	0.16053	0.17553	6.230	5.697	6
7	1.1098	0.9010	0.13656	0.15156	7.323	6.598	7
8	1.1265	0.8877	0.11858	0.13358	8.433	7.486	8
9	1.1434	0.8746	0.10461	0.11961	9.559	8.361	9
10	1.1605	0.8617	0.09343	0.10843	10.703	9.222	10
11	1.1779	0.8489	0.08429	0.09929	11.863	10.071	11
12	1.1956	0.8364	0.07668	0.09168	13.041	10.908	12
13	1.2136	0.8240	0.07024	0.08524	14.237	11.732	13
14	1.2318	0.8118	0.06472	0.07972	15.450	12.543	14
15	1.2502	0.7999	0.05994	0.07494	16.682	13.343	15
16	1.2690	0.7880	0.05577	0.07077	17.932	14.131	16
17	1.2880	0.7764	0.05208	0.06708	19.201	14.908	17
18	1.3073	0.7649	0.04881	0.06381	20.489	15.673	18
19	1.3270	0.7536	0.04588	0.06088	21.797	16.426	19
20	1.3469	0.7425	0.04325	0.05825	23.124	17.169	20
21	1.3671	0.7315	0.04087	0.05587	24.471	17.900	21
22	1.3876	0.7207	0.03870	0.05370	25.838	18.621	22
23	1.4084	0.7103	0.03673	0.05173	27.225	19.331	23
24	1.4300	0.6995	0.03492	0.04992	28.634	20.030	24
25	1.4509	0.6892	0.03326	0.04826	30.063	20.720	25
26	1.4727	0.6790	0.03173	0.04673	31.514	21.399	26
27	1.4948	0.6690	0.03032	0.04532	32.987	22.068	27
28	1.5172	0.6591	0.02900	0.04400	34.481	22.727	28
29	1.5400	0.6494	0.02778	0.04278	35.999	23.376	29
30	1.5631	0.6398	0.02664	0.04164	37.539	24.016	30
31	1.5865	0.6303	0.02557	0.04057	39.102	24.646	31
32	1.6103	0.6210	0.02458	0.03958	40.688	25.267	32
33	1.6345	0.6118	0.02364	0.03864	42.299	25.879	33
34	1.6590	0.6028	0.02276	0.03776	43.933	26.482	34
35	1.6839	0.5939	0.02193	0.03693	45.592	27.076	35
40	1.8140	0.5513	0.01843	0.03313	54.268	29.916	40
45	1.9542	0.5117	0.01572	0.03072	63.614	32.552	45
50	2.1052	0.4750	0.01357	0.02857	73.663	35.006	50
55	2.2679	0.4409	0.01183	0.02683	84.530	37.271	55
60	2.4432	0.4093	0.01039	0.02539	96.215	39.380	60
65	2.6320	0.3799	0.00919	0.02419	108.803	41.338	65
70	2.8355	0.3527	0.00817	0.02317	122.364	43.155	70
75	3.0546	0.3274	0.00730	0.02230	136.973	44.842	75
80	3.2907	0.3039	0.00655	0.02155	152.711	46.407	80
85	3.5450	0.2821	0.00589	0.02089	169.665	47.861	85
90	3.8189	0.2619	0.00532	0.02032	187.930	49.210	90
95	4.1141	0.2431	0.00482	0.01982	207.606	50.462	95
100	4.4320	0.2256	0.00437	0.01937	228.803	51.625	100

TABLE E-4

1 3/4% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/T	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0175	0.9828	1.00000	1.01750	1.000	0.983	1
2	1.0353	0.9652	0.49566	0.51316	2.018	1.949	2
3	1.0534	0.9493	0.32757	0.34507	3.053	2.898	3
4	1.0719	0.9350	0.24353	0.26105	4.106	3.831	4
5	1.0906	0.9169	0.19312	0.21062	5.178	4.748	5
6	1.1097	0.9011	0.15552	0.17702	6.269	5.649	6
7	1.1291	0.8856	0.13553	0.15303	7.378	6.535	7
8	1.1489	0.8704	0.11754	0.13504	8.508	7.405	8
9	1.1690	0.8554	0.10356	0.12106	9.656	8.260	9
10	1.1894	0.8407	0.09258	0.10988	10.825	9.101	10
11	1.2103	0.8263	0.08323	0.10073	12.015	9.927	11
12	1.2314	0.8121	0.07561	0.09311	13.225	10.740	12
13	1.2530	0.7981	0.06917	0.08667	14.457	11.538	13
14	1.2749	0.7844	0.06366	0.08116	15.710	12.322	14
15	1.2972	0.7709	0.05888	0.07638	16.984	13.095	15
16	1.3199	0.7576	0.05470	0.07220	18.282	13.859	16
17	1.3430	0.7446	0.05102	0.06852	19.602	14.595	17
18	1.3665	0.7318	0.04774	0.06524	20.945	15.307	18
19	1.3904	0.7192	0.04482	0.06232	22.311	16.006	19
20	1.4148	0.7068	0.04219	0.05969	23.702	16.753	20
21	1.4395	0.6947	0.03981	0.05731	25.116	17.448	21
22	1.4647	0.6827	0.03766	0.05516	26.556	18.130	22
23	1.4904	0.6710	0.03569	0.05319	28.021	18.801	23
24	1.5164	0.6594	0.03389	0.05149	29.511	19.461	24
25	1.5430	0.6481	0.03223	0.04975	31.027	20.109	25
26	1.5700	0.6369	0.03070	0.04820	32.570	20.744	26
27	1.5975	0.6260	0.02929	0.04679	34.140	21.372	27
28	1.6254	0.6152	0.02798	0.04548	35.738	21.987	28
29	1.6539	0.6046	0.02676	0.04426	37.363	22.592	29
30	1.6828	0.5942	0.02563	0.04313	39.017	23.186	30
31	1.7122	0.5840	0.02457	0.04207	40.700	23.770	31
32	1.7422	0.5740	0.02358	0.04106	42.412	24.341	32
33	1.7727	0.5641	0.02265	0.04015	44.153	24.908	33
34	1.8037	0.5544	0.02177	0.03927	45.927	25.462	34
35	1.8353	0.5449	0.02095	0.03845	47.731	26.007	35
40	2.0016	0.4996	0.01747	0.03427	57.234	28.594	40
45	2.1850	0.4581	0.01479	0.03225	67.599	30.356	45
50	2.3908	0.4200	0.01267	0.03017	78.902	33.141	50
55	2.6265	0.3851	0.01096	0.02846	91.230	35.135	55
60	2.8318	0.3531	0.00955	0.02705	104.675	36.964	60
65	3.0884	0.3238	0.00838	0.02588	119.339	38.641	65
70	3.3683	0.2969	0.00739	0.02489	135.331	40.178	70
75	3.6735	0.2722	0.00655	0.02405	152.772	41.587	75
80	4.0064	0.2495	0.00582	0.02332	171.794	42.880	80
85	4.3694	0.2289	0.00519	0.02269	192.539	44.065	85
90	4.7654	0.2098	0.00465	0.02215	215.165	45.152	90
95	5.1972	0.1924	0.00417	0.02167	239.840	46.148	95
100	5.6682	0.1764	0.00375	0.02125	266.752	47.061	100

TABLE E-5

2% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/T	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0200	0.9804	1.00000	1.02000	1.000	0.980	1
2	1.0404	0.9612	0.49765	0.51505	2.020	1.942	2
3	1.0612	0.9423	0.32675	0.34675	3.060	2.884	3
4	1.0824	0.9238	0.24262	0.26262	4.122	3.808	4
5	1.1041	0.9057	0.19216	0.21216	5.204	4.713	5
6	1.1262	0.8880	0.15853	0.17853	6.308	5.601	6
7	1.1487	0.8706	0.13451	0.15451	7.434	6.472	7
8	1.1717	0.8535	0.11651	0.13651	8.583	7.325	8
9	1.1951	0.8368	0.10252	0.12252	9.755	8.162	9
10	1.2190	0.8202	0.09133	0.11133	10.950	8.983	10
11	1.2434	0.8043	0.08218	0.10218	12.169	9.787	11
12	1.2682	0.7885	0.07456	0.09456	13.412	10.575	12
13	1.2936	0.7720	0.06812	0.08812	14.680	11.348	13
14	1.3195	0.7579	0.06260	0.08260	15.974	12.106	14
15	1.3459	0.7430	0.05783	0.07783	17.293	12.849	15
16	1.3728	0.7284	0.05365	0.07365	18.639	13.578	16
17	1.4002	0.7142	0.04997	0.06997	20.012	14.292	17
18	1.4282	0.7002	0.04679	0.06679	21.412	14.992	18
19	1.4568	0.6864	0.04378	0.06378	22.841	15.678	19
20	1.4859	0.6730	0.04116	0.06116	24.297	16.351	20
21	1.5157	0.6598	0.03878	0.05878	25.783	17.011	21
22	1.5460	0.6468	0.03663	0.05663	27.299	17.658	22
23	1.5769	0.6342	0.03467	0.05467	28.845	18.292	23
24	1.6084	0.6217	0.03287	0.05287	30.422	18.914	24
25	1.6406	0.6095	0.03122	0.05122	32.030	19.523	25
26	1.6734	0.5976	0.02970	0.04970	33.671	20.121	26
27	1.7069	0.5859	0.02829	0.04829	35.344	20.707	27
28	1.7410	0.5744	0.02699	0.04699	37.051	21.281	28
29	1.7758	0.5631	0.02578	0.04578	38.792	21.844	29
30	1.8114	0.5521	0.02465	0.04465	40.568	22.396	30
31	1.8476	0.5412	0.02360	0.04360	42.379	22.938	31
32	1.8845	0.5306	0.02261	0.04261	44.227	23.468	32
33	1.9222	0.5202	0.02169	0.04169	46.112	23.989	33
34	1.9607	0.5100	0.02082	0.04082	48.034	24.499	34
35	1.9999	0.5000	0.02000	0.04000	49.994	24.999	35
40	2.2080	0.4529	0.01656	0.03656	60.402	27.355	40
45	2.4379	0.4102	0.01391	0.03391	71.893	29.490	45
50	2.6916	0.3715	0.01182	0.03182	84.579	31.424	50
55	2.9717	0.3365	0.01014	0.03014	98.587	33.175	55
60	3.2810	0.3048	0.00877	0.02877	114.052	34.761	60
65	3.6225	0.2761	0.00763	0.02763	131.126	36.197	65
70	3.9996	0.2500	0.00667	0.02667	149.978	37.499	70
75	4.4158	0.2265	0.00586	0.02586	170.792	38.677	75
80	4.8754	0.2051	0.00516	0.02516	193.772	39.745	80
85	5.3829	0.1858	0.00456	0.02456	219.144	40.711	85
90	5.9431	0.1683	0.00405	0.02405	247.157	41.587	90
95	6.5617	0.1524	0.00360	0.02360	278.085	42.380	95
100	7.2446	0.1380	0.00320	0.02320	312.232	43.098	100

2½% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/P	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0250	0.9756	1.00000	1.02500	1.000	0.976	1
2	1.0506	0.9518	0.49383	0.51883	2.025	1.927	2
3	1.0769	0.9286	0.32514	0.35314	3.076	2.856	3
4	1.1038	0.9060	0.24082	0.26582	4.153	3.762	4
5	1.1314	0.8839	0.19025	0.21525	5.256	4.646	5
6	1.1597	0.8623	0.15655	0.18155	6.388	5.508	6
7	1.1887	0.8413	0.13250	0.15750	7.547	6.349	7
8	1.2184	0.8207	0.11447	0.13947	8.736	7.170	8
9	1.2489	0.8007	0.10046	0.12546	9.955	7.971	9
10	1.2801	0.7812	0.08926	0.11426	11.203	8.752	10
11	1.3121	0.7621	0.08011	0.10511	12.483	9.514	11
12	1.3449	0.7436	0.07249	0.09719	13.796	10.258	12
13	1.3785	0.7254	0.06605	0.09105	15.140	10.983	13
14	1.4130	0.7077	0.06054	0.08534	16.519	11.691	14
15	1.4483	0.6905	0.05577	0.08077	17.932	12.381	15
16	1.4845	0.6736	0.05160	0.07660	19.380	13.055	16
17	1.5216	0.6572	0.04793	0.07293	20.865	13.712	17
18	1.5597	0.6412	0.04467	0.06967	22.386	14.353	18
19	1.5987	0.6255	0.04174	0.06676	23.946	14.979	19
20	1.6386	0.6103	0.03915	0.06415	25.545	15.589	20
21	1.6796	0.5954	0.03679	0.06179	27.183	16.185	21
22	1.7216	0.5809	0.03465	0.05965	28.863	16.765	22
23	1.7646	0.5667	0.03270	0.05770	30.584	17.332	23
24	1.8087	0.5529	0.03091	0.05591	32.349	17.885	24
25	1.8539	0.5394	0.02928	0.05428	34.158	18.424	25
26	1.9003	0.5262	0.02777	0.05277	36.012	18.951	26
27	1.9478	0.5134	0.02638	0.05138	37.912	19.466	27
28	1.9965	0.5009	0.02509	0.05009	39.860	19.968	28
29	2.0464	0.4887	0.02389	0.04889	41.856	20.459	29
30	2.0976	0.4767	0.02278	0.04778	43.903	20.939	30
31	2.1500	0.4651	0.02174	0.04674	46.000	21.405	31
32	2.2038	0.4538	0.02077	0.04577	48.150	21.849	32
33	2.2589	0.4427	0.01986	0.04486	50.354	22.272	33
34	2.3153	0.4319	0.01901	0.04401	52.613	22.724	34
35	2.3732	0.4214	0.01821	0.04321	54.928	23.145	35
40	2.6951	0.3724	0.01484	0.03984	67.403	25.103	40
45	3.0379	0.3292	0.01227	0.03727	81.516	26.833	45
50	3.4371	0.2909	0.01026	0.03526	97.484	28.362	50
55	3.8888	0.2572	0.00865	0.03365	115.551	29.711	55
60	4.3998	0.2273	0.00735	0.03235	135.992	30.909	60
65	4.9780	0.2009	0.00628	0.03128	159.118	31.965	65
70	5.6321	0.1776	0.00540	0.03040	185.284	32.898	70
75	6.3722	0.1569	0.00465	0.02965	214.888	33.723	75
80	7.2100	0.1387	0.00403	0.02903	248.383	34.452	80
85	8.1570	0.1226	0.00349	0.02849	286.279	35.096	85
90	9.2289	0.1084	0.00304	0.02804	329.154	35.666	90
95	10.4416	0.0958	0.00265	0.02765	377.664	36.169	95
100	11.8137	0.0846	0.00231	0.02731	432.549	36.614	100

3% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/P	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0300	0.9709	1.00000	1.03000	1.000	0.971	1
2	1.0609	0.9426	0.49261	0.52261	2.030	1.913	2
3	1.0927	0.9151	0.32353	0.35353	3.091	2.829	3
4	1.1255	0.8885	0.23903	0.26903	4.184	3.717	4
5	1.1593	0.8626	0.18835	0.21835	5.309	4.580	5
6	1.1941	0.8375	0.15460	0.18460	6.468	5.417	6
7	1.2299	0.8131	0.13051	0.16051	7.662	6.230	7
8	1.2668	0.7894	0.11246	0.14246	8.892	7.020	8
9	1.3048	0.7664	0.09843	0.12843	10.159	7.786	9
10	1.3439	0.7441	0.08723	0.11723	11.464	8.530	10
11	1.3842	0.7224	0.07808	0.10808	12.808	9.253	11
12	1.4258	0.7014	0.07046	0.10046	14.192	9.954	12
13	1.4685	0.6810	0.06403	0.09403	15.618	10.635	13
14	1.5126	0.6611	0.05853	0.08853	17.086	11.296	14
15	1.5580	0.6419	0.05377	0.08377	18.599	11.938	15
16	1.6047	0.6232	0.04961	0.07961	20.157	12.561	16
17	1.6528	0.6050	0.04595	0.07595	21.762	13.166	17
18	1.7024	0.5874	0.04271	0.07271	23.414	13.754	18
19	1.7535	0.5703	0.03981	0.06981	25.117	14.324	19
20	1.8061	0.5537	0.03722	0.06722	26.870	14.877	20
21	1.8603	0.5375	0.03487	0.06487	28.676	15.415	21
22	1.9161	0.5219	0.03275	0.06275	30.537	15.937	22
23	1.9736	0.5067	0.03081	0.06081	32.453	16.444	23
24	2.0328	0.4919	0.02905	0.05905	34.426	16.936	24
25	2.0938	0.4776	0.02743	0.05743	36.459	17.413	25
26	2.1566	0.4637	0.02594	0.05594	38.553	17.877	26
27	2.2213	0.4502	0.02456	0.05456	40.710	18.327	27
28	2.2879	0.4371	0.02329	0.05329	42.921	18.764	28
29	2.3566	0.4243	0.02211	0.05211	45.219	19.188	29
30	2.4273	0.4120	0.02102	0.05102	47.575	19.600	30
31	2.5001	0.4000	0.02000	0.05000	50.003	20.000	31
32	2.5751	0.3883	0.01905	0.04905	52.503	20.389	32
33	2.6523	0.3770	0.01816	0.04816	55.078	20.766	33
34	2.7319	0.3660	0.01732	0.04732	57.730	21.132	34
35	2.8139	0.3554	0.01654	0.04654	60.462	21.487	35
40	3.2620	0.3066	0.01326	0.04326	75.491	23.115	40
45	3.7816	0.2644	0.01079	0.04079	92.720	24.519	45
50	4.3839	0.2281	0.00887	0.03887	112.797	25.730	50
55	5.0821	0.1968	0.00735	0.03735	136.072	26.774	55
60	5.8916	0.1697	0.00613	0.03613	163.053	27.676	60
65	6.8300	0.1464	0.00515	0.03515	194.333	28.453	65
70	7.9178	0.1263	0.00434	0.03434	230.594	29.123	70
75	9.1789	0.1089	0.00367	0.03367	272.631	29.702	75
80	10.6409	0.0940	0.00311	0.03311	321.363	30.201	80
85	12.3357	0.0811	0.00265	0.03265	377.857	30.631	85
90	14.3005	0.0699	0.00226	0.03226	443.349	31.002	90
95	16.5782	0.0603	0.00193	0.03193	519.272	31.323	95
100	19.2186	0.0520	0.00165	0.03165	607.288	31.599	100

TABLE E-8
3½% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor F/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0350	0.9662	1.0000	1.0350	1.000	0.966	1
2	1.0712	0.9235	0.9914	0.9214	2.035	1.900	2
3	1.1087	0.8919	0.9213	0.8269	3.106	2.802	3
4	1.1475	0.8714	0.23725	0.27225	4.215	3.673	4
5	1.1877	0.8420	0.18048	0.22148	5.362	4.515	5
6	1.2293	0.8135	0.15267	0.18767	6.550	5.327	6
7	1.2723	0.7860	0.12854	0.16354	7.779	6.115	7
8	1.3168	0.7594	0.11048	0.14548	9.052	6.874	8
9	1.3629	0.7337	0.09645	0.13145	10.368	7.608	9
10	1.4106	0.7089	0.08524	0.12024	11.731	8.317	10
11	1.4600	0.6847	0.07609	0.11109	13.142	9.002	11
12	1.5111	0.6618	0.06848	0.10348	14.602	9.667	12
13	1.5640	0.6394	0.06206	0.09706	16.115	10.303	13
14	1.6187	0.6178	0.05677	0.09157	17.677	10.921	14
15	1.6753	0.5969	0.05183	0.08683	19.296	11.517	15
16	1.7340	0.5767	0.04768	0.08288	20.971	12.094	16
17	1.7947	0.5572	0.04404	0.07904	22.705	12.651	17
18	1.8575	0.5384	0.04082	0.07582	24.500	13.190	18
19	1.9225	0.5202	0.03794	0.07294	26.357	13.710	19
20	1.9898	0.5026	0.03536	0.07036	28.280	14.212	20
21	2.0594	0.4856	0.03304	0.66804	30.269	14.698	21
22	2.1315	0.4692	0.03093	0.06593	32.329	15.167	22
23	2.2061	0.4533	0.02902	0.06402	34.460	15.620	23
24	2.2833	0.4380	0.02727	0.06227	36.667	16.058	24
25	2.3632	0.4231	0.02567	0.06067	38.950	16.482	25
26	2.4460	0.4088	0.02421	0.05921	41.313	16.890	26
27	2.5316	0.3950	0.02285	0.05785	43.759	17.285	27
28	2.6202	0.3817	0.02150	0.05660	46.291	17.667	28
29	2.7119	0.3687	0.02025	0.05545	48.911	18.036	29
30	2.8068	0.3563	0.01913	0.05437	51.623	18.392	30
31	2.9050	0.3442	0.01817	0.05337	54.429	18.736	31
32	3.0067	0.3326	0.01734	0.05244	57.335	19.069	32
33	3.1119	0.3213	0.01657	0.05157	60.341	19.390	33
34	3.2209	0.3105	0.01586	0.05076	63.453	19.701	34
35	3.3336	0.3000	0.01520	0.05000	66.674	20.001	35
40	3.9593	0.2526	0.01183	0.04683	84.550	21.355	40
45	4.7024	0.2127	0.00945	0.04445	105.782	22.435	45
50	5.5849	0.1791	0.00763	0.04253	136.958	23.356	50
55	6.6231	0.1508	0.00621	0.04121	169.947	24.264	55
60	7.8781	0.1269	0.00509	0.04009	196.517	24.945	60
65	9.3567	0.1069	0.00419	0.03919	238.763	25.518	65
70	11.1128	0.0900	0.00346	0.03846	288.938	26.000	70
75	13.1986	0.0758	0.00287	0.03787	348.530	26.407	75
80	15.6757	0.0638	0.00238	0.03738	419.307	26.749	80
85	18.6179	0.0537	0.00199	0.03699	503.367	27.037	85
90	22.1122	0.0452	0.00166	0.03666	603.205	27.279	90
95	26.2623	0.0381	0.00139	0.03639	721.781	27.484	95
100	31.1914	0.0321	0.00116	0.03616	862.612	27.655	100

TABLE E-9
4% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor F/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0400	0.9615	1.0000	1.0400	1.000	0.962	1
2	1.0816	0.9246	0.9920	0.9502	2.040	1.887	2
3	1.1219	0.8890	0.92035	0.86035	3.122	2.775	3
4	1.1609	0.8548	0.23549	0.27549	4.246	3.630	4
5	1.2167	0.8219	0.18463	0.22463	5.416	4.452	5
6	1.2853	0.7903	0.15076	0.19076	6.633	5.242	6
7	1.3159	0.7599	0.12661	0.16661	7.898	6.002	7
8	1.3586	0.7307	0.10853	0.14853	9.210	6.733	8
9	1.4233	0.7026	0.09449	0.13449	10.585	7.435	9
10	1.4802	0.6756	0.08329	0.12329	12.036	8.111	10
11	1.5395	0.6496	0.07415	0.11415	13.486	8.760	11
12	1.6010	0.6246	0.06655	0.10655	15.026	9.385	12
13	1.6651	0.6006	0.06014	0.10014	16.627	9.986	13
14	1.7317	0.5775	0.05467	0.09467	18.292	10.563	14
15	1.8009	0.5553	0.04994	0.08994	20.021	11.118	15
16	1.8730	0.5339	0.04582	0.08582	21.825	11.652	16
17	1.9479	0.5131	0.04220	0.08220	23.698	12.166	17
18	2.0258	0.4935	0.03899	0.07899	25.645	12.659	18
19	2.1068	0.4746	0.03614	0.07614	27.671	13.134	19
20	2.1911	0.4564	0.03358	0.07358	29.778	13.590	20
21	2.2788	0.4388	0.03128	0.07128	31.969	14.029	21
22	2.3699	0.4220	0.02920	0.06920	34.248	14.451	22
23	2.4647	0.4057	0.02731	0.06731	36.618	14.857	23
24	2.5633	0.3900	0.02559	0.06559	39.083	15.247	24
25	2.6658	0.3751	0.02401	0.06401	41.646	15.622	25
26	2.7725	0.3607	0.02257	0.06257	44.312	15.983	26
27	2.8833	0.3468	0.02124	0.06124	47.084	16.330	27
28	2.9987	0.3335	0.02001	0.06001	49.968	16.663	28
29	3.1187	0.3207	0.01888	0.05888	52.966	16.984	29
30	3.2434	0.3083	0.01787	0.05783	56.085	17.292	30
31	3.3731	0.2965	0.01686	0.05686	59.328	17.588	31
32	3.5081	0.2851	0.01595	0.05595	62.701	17.873	32
33	3.6484	0.2741	0.01510	0.05510	66.210	18.148	33
34	3.7943	0.2636	0.01431	0.05431	69.858	18.411	34
35	3.9461	0.2534	0.01358	0.05358	73.652	18.665	35
40	4.8010	0.2083	0.01052	0.05072	95.026	19.793	40
45	5.8412	0.1712	0.00826	0.04826	121.029	20.770	45
50	7.1067	0.1467	0.00655	0.04655	152.767	21.472	50
55	8.6164	0.1157	0.00523	0.04523	191.159	22.109	55
60	10.5196	0.0951	0.00420	0.04420	237.991	22.623	60
65	12.7987	0.0781	0.00339	0.04339	294.968	23.047	65
70	15.5716	0.0642	0.00275	0.04275	364.290	23.395	70
75	18.9453	0.0528	0.00223	0.04223	448.631	23.680	75
80	23.0500	0.0434	0.00181	0.04181	551.245	23.915	80
85	28.0436	0.0357	0.00148	0.04148	676.090	24.109	85
90	34.1193	0.0293	0.00121	0.04121	827.983	24.267	90
95	41.5114	0.0241	0.00099	0.04099	1012.785	24.398	95
100	50.5049	0.0198	0.00081	0.04081	1237.624	24.505	100

TABLE E-10
4½% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0450	0.9569	1.0000	1.0450	1.000	0.957	1
2	1.0920	0.9157	0.4890	0.5310	2.045	1.873	2
3	1.1412	0.8763	0.3187	0.3637	3.137	2.749	3
4	1.1925	0.8386	0.2337	0.2787	4.278	3.588	4
5	1.2462	0.8025	0.1827	0.2277	5.471	4.390	5
6	1.3023	0.7679	0.1488	0.1938	6.717	5.158	6
7	1.3609	0.7348	0.1247	0.1697	8.019	5.893	7
8	1.4221	0.7032	0.1066	0.1516	9.380	6.596	8
9	1.4861	0.6729	0.0925	0.1375	10.802	7.269	9
10	1.5520	0.6439	0.0813	0.1263	12.288	7.913	10
11	1.6229	0.6162	0.0722	0.1172	13.841	8.529	11
12	1.6959	0.5897	0.0647	0.1096	15.464	9.119	12
13	1.7722	0.5643	0.0582	0.1032	17.160	9.683	13
14	1.8519	0.5400	0.0528	0.0978	18.932	10.223	14
15	1.9353	0.5167	0.0481	0.0931	20.784	10.740	15
16	2.0224	0.4945	0.0440	0.0890	22.719	11.234	16
17	2.1134	0.4732	0.0404	0.0854	24.742	11.707	17
18	2.2085	0.4528	0.0372	0.0822	26.855	12.160	18
19	2.3079	0.4333	0.0344	0.0794	29.064	12.595	19
20	2.4117	0.4146	0.0318	0.0768	31.371	13.008	20
21	2.5202	0.3968	0.0296	0.0744	33.783	13.405	21
22	2.6337	0.3797	0.0275	0.0722	36.303	13.784	22
23	2.7522	0.3634	0.0256	0.0701	38.937	14.148	23
24	2.8760	0.3477	0.0239	0.0681	41.689	14.498	24
25	3.0054	0.3327	0.0224	0.0662	44.565	14.838	25
26	3.1407	0.3184	0.0210	0.0645	47.571	15.167	26
27	3.2820	0.3047	0.0197	0.0629	50.711	15.484	27
28	3.4397	0.2916	0.0185	0.0615	53.993	15.791	28
29	3.6040	0.2790	0.0174	0.0602	57.423	16.089	29
30	3.7753	0.2670	0.0163	0.0590	61.007	16.380	30
31	3.9539	0.2555	0.0153	0.0579	64.752	16.664	31
32	4.1400	0.2445	0.0145	0.0569	68.666	16.941	32
33	4.3340	0.2340	0.0137	0.0560	72.756	17.212	33
34	4.5364	0.2239	0.0130	0.0552	77.030	17.477	34
35	4.7477	0.2143	0.0123	0.0545	81.497	17.737	35
40	5.8164	0.1719	0.0093	0.0534	107.030	18.402	40
45	7.2482	0.1380	0.0072	0.0523	138.850	19.156	45
50	9.0220	0.1107	0.0056	0.0512	178.503	19.762	50
55	11.2563	0.0888	0.0043	0.0501	227.918	20.248	55
60	14.0274	0.0713	0.0034	0.0490	289.498	20.638	60
65	17.4807	0.0572	0.0027	0.0479	366.238	20.951	65
70	21.7841	0.0459	0.0021	0.0467	461.870	21.202	70
75	27.1470	0.0368	0.0016	0.0456	581.044	21.404	75
80	33.8301	0.0296	0.0012	0.0445	729.558	21.565	80
85	42.1585	0.0237	0.0009	0.0434	914.632	21.695	85
90	52.5371	0.0190	0.0007	0.0423	1145.269	21.799	90
95	65.4708	0.0153	0.0005	0.0412	1432.684	21.883	95
100	81.5885	0.0123	0.0004	0.0401	1790.856	21.950	100

TABLE E-11
5% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0500	0.9524	1.0000	1.0500	1.000	0.952	1
2	1.1025	0.9070	0.4878	0.5378	2.050	1.859	2
3	1.1576	0.8638	0.3172	0.3672	3.153	2.723	3
4	1.2155	0.8227	0.2320	0.2820	4.310	3.546	4
5	1.2763	0.7835	0.1809	0.2309	5.526	4.329	5
6	1.3401	0.7462	0.1470	0.1970	6.802	5.076	6
7	1.4071	0.7107	0.1228	0.1728	8.142	5.786	7
8	1.4775	0.6768	0.1047	0.1547	9.549	6.463	8
9	1.5513	0.6446	0.0906	0.1406	11.027	7.108	9
10	1.6289	0.6139	0.0795	0.1295	12.578	7.722	10
11	1.7103	0.5847	0.0709	0.1209	14.207	8.306	11
12	1.7959	0.5568	0.0628	0.1128	15.917	8.863	12
13	1.8856	0.5303	0.0564	0.1064	17.713	9.394	13
14	1.9790	0.5051	0.0510	0.1010	19.599	9.899	14
15	2.0759	0.4810	0.0463	0.0963	21.579	10.380	15
16	2.1829	0.4581	0.0422	0.0922	23.657	10.838	16
17	2.2920	0.4363	0.0387	0.0887	25.840	11.274	17
18	2.4066	0.4155	0.0355	0.0855	28.132	11.690	18
19	2.5270	0.3957	0.0327	0.0827	30.539	12.085	19
20	2.6533	0.3769	0.0302	0.0802	33.066	12.462	20
21	2.7860	0.3589	0.0280	0.0780	35.719	12.821	21
22	2.9253	0.3418	0.0259	0.0759	38.505	13.163	22
23	3.0715	0.3256	0.0241	0.0741	41.430	13.489	23
24	3.2251	0.3101	0.0224	0.0724	44.502	13.799	24
25	3.3864	0.2953	0.0209	0.0709	47.727	14.094	25
26	3.5557	0.2812	0.0195	0.0695	51.113	14.375	26
27	3.7335	0.2678	0.0182	0.0682	54.669	14.643	27
28	3.9201	0.2551	0.0171	0.0671	58.403	14.898	28
29	4.1161	0.2429	0.0160	0.0660	62.323	15.141	29
30	4.3219	0.2314	0.0150	0.0650	66.439	15.372	30
31	4.5380	0.2204	0.0141	0.0641	70.761	15.593	31
32	4.7649	0.2099	0.0132	0.0632	75.299	15.803	32
33	5.0032	0.1999	0.0124	0.0624	80.064	16.003	33
34	5.2533	0.1904	0.0117	0.0617	85.067	16.193	34
35	5.5160	0.1813	0.0110	0.0610	90.320	16.374	35
40	7.0400	0.1420	0.0082	0.0582	120.800	17.159	40
45	8.9850	0.1113	0.0062	0.0562	159.709	17.774	45
50	11.4674	0.0872	0.0047	0.0547	209.348	18.256	50
55	14.6356	0.0683	0.0036	0.0536	272.713	18.633	55
60	18.6792	0.0535	0.0028	0.0528	353.584	18.929	60
65	23.8399	0.0419	0.0021	0.0519	456.798	19.161	65
70	30.4264	0.0329	0.0016	0.0516	588.529	19.343	70
75	38.8327	0.0258	0.0012	0.0512	756.654	19.485	75
80	49.5614	0.0202	0.0009	0.0510	971.229	19.596	80
85	63.2544	0.0158	0.0007	0.0508	1245.087	19.684	85
90	80.7304	0.0124	0.0005	0.0506	1594.607	19.752	90
95	103.0357	0.0097	0.0004	0.0504	2040.694	19.806	95
100	131.5013	0.0076	0.0003	0.0503	2610.025	19.848	100

TABLE E-12
5½% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/P	Sinking Fund Factor A/I	Capital Recovery Factor V/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0550	0.9479	1.00000	1.05500	1.000	0.948	1
2	1.1130	0.8985	0.48662	0.54162	2.055	1.8-6	2
3	1.1742	0.8516	0.31565	0.37065	3.168	2.698	3
4	1.2388	0.8072	0.23029	0.28529	4.342	3.505	4
5	1.3070	0.7651	0.17918	0.23418	5.581	4.270	5
6	1.3788	0.7252	0.14518	0.20018	6.888	4.996	6
7	1.4547	0.6874	0.12096	0.17596	8.267	5.683	7
8	1.5347	0.6516	0.10286	0.15786	9.722	6.335	8
9	1.6191	0.6176	0.08884	0.14384	11.256	6.952	9
10	1.7084	0.5854	0.07767	0.13267	12.875	7.538	10
11	1.8021	0.5549	0.06857	0.12357	14.583	8.093	11
12	1.9012	0.5260	0.06103	0.11603	16.386	8.619	12
13	2.0058	0.4986	0.05468	0.10968	18.287	9.117	13
14	2.1161	0.4726	0.04928	0.10428	20.293	9.590	14
15	2.2325	0.4479	0.04463	0.09963	22.409	10.038	15
16	2.3553	0.4246	0.04058	0.09558	24.641	10.462	16
17	2.4848	0.4024	0.03704	0.09204	26.996	10.865	17
18	2.6215	0.3815	0.03392	0.08892	29.471	11.246	18
19	2.7656	0.3616	0.03115	0.08615	32.103	11.608	19
20	2.9178	0.3427	0.02868	0.08368	34.868	11.950	20
21	3.0782	0.3249	0.02646	0.08146	37.786	12.275	21
22	3.2475	0.3079	0.02447	0.07947	40.864	12.583	22
23	3.4262	0.2919	0.02267	0.07767	44.112	12.875	23
24	3.6146	0.2767	0.02104	0.07604	47.538	13.152	24
25	3.8134	0.2622	0.01955	0.07455	51.153	13.414	25
26	4.0231	0.2486	0.01819	0.07319	54.966	13.662	26
27	4.2444	0.2356	0.01695	0.07195	58.989	13.896	27
28	4.4778	0.2233	0.01581	0.07081	63.234	14.121	28
29	4.7241	0.2117	0.01477	0.06977	67.711	14.333	29
30	4.9840	0.2006	0.01381	0.06881	72.435	14.534	30
31	5.2581	0.1902	0.01292	0.06792	77.419	14.724	31
32	5.5473	0.1803	0.01210	0.06710	82.677	14.904	32
33	5.8524	0.1709	0.01133	0.06633	88.225	15.075	33
34	6.1742	0.1620	0.01063	0.06563	94.077	15.237	34
35	6.5138	0.1535	0.00997	0.06497	100.251	15.391	35
40	8.5133	0.1175	0.00732	0.06232	136.006	16.046	40
45	11.1266	0.0899	0.00543	0.06043	184.119	16.513	45
50	14.5820	0.0688	0.00406	0.05906	246.217	16.932	50
55	19.0058	0.0526	0.00295	0.05805	327.377	17.225	55
60	24.8598	0.0403	0.00231	0.05731	433.450	17.450	60
65	32.4646	0.0308	0.00175	0.05675	572.083	17.622	65
70	42.1299	0.0236	0.00133	0.05633	753.271	17.753	70
75	55.4542	0.0180	0.00101	0.05601	990.076	17.854	75
80	72.4764	0.0138	0.00077	0.05577	1299.571	17.931	80
85	94.7238	0.0106	0.00059	0.05559	1704.069	17.990	85
90	123.8002	0.0081	0.00045	0.05545	2232.731	18.035	90
95	161.8019	0.0062	0.00034	0.05534	2923.671	18.069	95
100	211.4686	0.0047	0.00026	0.05526	3826.702	18.096	100

TABLE E-13
6% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/P	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor V/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0600	0.9434	1.00000	1.06000	1.000	0.943	1
2	1.1236	0.8900	0.48544	0.54544	2.060	1.832	2
3	1.1910	0.8396	0.31411	0.37411	3.184	2.673	3
4	1.2625	0.7921	0.22859	0.28859	4.375	3.465	4
5	1.3382	0.7473	0.17740	0.23740	5.637	4.212	5
6	1.4185	0.7050	0.14336	0.20336	6.975	4.917	6
7	1.5036	0.6651	0.11914	0.17914	8.394	5.582	7
8	1.5938	0.6274	0.10104	0.16104	9.897	6.210	8
9	1.6895	0.5919	0.08702	0.14702	11.491	6.802	9
10	1.7908	0.5584	0.07587	0.13587	13.181	7.360	10
11	1.8983	0.5268	0.06679	0.12679	14.972	7.887	11
12	2.0122	0.4970	0.05928	0.11928	16.870	8.384	12
13	2.1329	0.4688	0.05296	0.11296	18.882	8.853	13
14	2.2609	0.4423	0.04758	0.10758	21.015	9.295	14
15	2.3966	0.4175	0.04296	0.10296	23.276	9.712	15
16	2.5404	0.3936	0.03895	0.09895	25.673	10.106	16
17	2.6928	0.3714	0.03544	0.09544	28.213	10.477	17
18	2.8543	0.3507	0.03236	0.09236	30.906	10.828	18
19	3.0256	0.3305	0.02962	0.08962	33.760	11.158	19
20	3.2071	0.3118	0.02718	0.08718	36.786	11.470	20
21	3.3996	0.2942	0.02500	0.08500	39.993	11.764	21
22	3.6035	0.2775	0.02305	0.08305	43.392	12.042	22
23	3.8197	0.2618	0.02128	0.08128	46.996	12.303	23
24	4.0489	0.2470	0.01968	0.07968	50.816	12.550	24
25	4.2919	0.2330	0.01823	0.07823	54.865	12.783	25
26	4.5494	0.2198	0.01690	0.07690	59.156	13.003	26
27	4.8223	0.2074	0.01570	0.07570	63.706	13.211	27
28	5.1117	0.1956	0.01459	0.07459	68.528	13.406	28
29	5.4184	0.1846	0.01358	0.07358	73.640	13.591	29
30	5.7435	0.1741	0.01265	0.07265	79.058	13.765	30
31	6.0881	0.1643	0.01179	0.07179	84.802	13.929	31
32	6.4534	0.1550	0.01100	0.07100	90.890	14.084	32
33	6.8406	0.1462	0.01027	0.07027	97.343	14.230	33
34	7.2510	0.1379	0.00960	0.06960	104.184	14.368	34
35	7.6861	0.1301	0.00897	0.06897	111.435	14.498	35
40	10.2857	0.0972	0.00646	0.06646	151.762	15.046	40
45	13.7646	0.0727	0.00470	0.06470	212.744	15.456	45
50	18.1202	0.0543	0.00344	0.06344	290.336	15.762	50
55	24.0507	0.0406	0.00254	0.06254	394.172	15.991	55
60	32.9877	0.0303	0.00188	0.06188	533.128	16.161	60
65	44.1450	0.0227	0.00139	0.06139	719.083	16.289	65
70	59.0759	0.0169	0.00103	0.06103	967.932	16.385	70
75	79.0569	0.0126	0.00077	0.06077	1300.949	16.456	75
80	105.7960	0.0095	0.00057	0.06057	1746.600	16.509	80
85	141.5789	0.0071	0.00043	0.06043	2342.982	16.549	85
90	189.4645	0.0053	0.00032	0.06032	3141.075	16.579	90
95	253.5463	0.0039	0.00024	0.06024	4209.104	16.601	95
100	339.3021	0.0029	0.00018	0.06018	5638.368	16.618	100

TABLE E-14
7% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor U/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0700	0.9346	1.00000	1.07000	1.000	0.935	1
2	1.1449	0.8734	0.45309	0.55709	2.170	1.808	2
3	1.2250	0.8164	0.31105	0.38105	3.215	2.624	3
4	1.3108	0.7629	0.22523	0.29523	4.440	3.387	4
5	1.4026	0.7130	0.17389	0.24389	5.751	4.100	5
6	1.5007	0.6663	0.13980	0.20980	7.153	4.767	6
7	1.6058	0.6227	0.11555	0.18555	8.654	5.389	7
8	1.7182	0.5820	0.09747	0.16747	10.260	5.971	8
9	1.8385	0.5439	0.08349	0.15349	11.976	6.515	9
10	1.9672	0.5083	0.07238	0.14238	13.816	7.021	10
11	2.1049	0.4751	0.06336	0.13336	15.784	7.499	11
12	2.2522	0.4440	0.05590	0.12590	17.888	7.943	12
13	2.4099	0.4150	0.04965	0.11965	20.141	8.358	13
14	2.5785	0.3878	0.04434	0.11434	22.550	8.745	14
15	2.7590	0.3624	0.03979	0.10979	25.129	9.108	15
16	2.9522	0.3387	0.03586	0.10586	27.888	9.447	16
17	3.1588	0.3166	0.03243	0.10243	30.840	9.763	17
18	3.3795	0.2959	0.02941	0.09941	33.999	10.059	18
19	3.6165	0.2765	0.02675	0.09675	37.379	10.336	19
20	3.8697	0.2584	0.02439	0.09439	40.995	10.594	20
21	4.1406	0.2415	0.02229	0.09229	44.865	10.836	21
22	4.4304	0.2257	0.02041	0.09041	49.006	11.061	22
23	4.7405	0.2109	0.01871	0.08871	53.436	11.272	23
24	5.0724	0.1971	0.01719	0.08719	58.177	11.469	24
25	5.4274	0.1842	0.01581	0.08581	63.249	11.654	25
26	5.8074	0.1722	0.01456	0.08456	68.676	11.827	26
27	6.2139	0.1609	0.01343	0.08343	74.481	11.987	27
28	6.6488	0.1504	0.01239	0.08239	80.698	12.137	28
29	7.1143	0.1406	0.01145	0.08145	87.347	12.278	29
30	7.6123	0.1314	0.01059	0.08059	94.461	12.409	30
31	8.1451	0.1228	0.00980	0.07980	102.073	12.532	31
32	8.7153	0.1147	0.00907	0.07907	110.218	12.647	32
33	9.3253	0.1072	0.00841	0.07841	118.933	12.754	33
34	9.9781	0.1002	0.00780	0.07780	128.259	12.854	34
35	10.6766	0.0937	0.00723	0.07723	138.237	12.948	35
40	14.9745	0.0668	0.00501	0.07501	199.635	13.352	40
45	21.0025	0.0476	0.00350	0.07350	285.749	13.606	45
50	29.4570	0.0339	0.00246	0.07246	406.529	13.891	50
55	41.3150	0.0242	0.00174	0.07174	575.929	13.940	55
60	57.9464	0.0173	0.00123	0.07123	813.520	14.039	60
65	81.2729	0.0123	0.00087	0.07087	1,146.755	14.110	65
70	113.9894	0.0088	0.00062	0.07062	1,614.134	14.160	70
75	159.8760	0.0063	0.00044	0.07044	2,269.657	14.196	75
80	224.2344	0.0045	0.00031	0.07031	3,189.063	14.222	80
85	314.5003	0.0032	0.00022	0.07022	4,478.576	14.240	85
90	441.1030	0.0023	0.00016	0.07016	6,287.185	14.253	90
95	618.6697	0.0016	0.00011	0.07011	8,823.854	14.263	95
100	867.7163	0.0012	0.00008	0.07008	12,381.662	14.269	100

TABLE E-15
8% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor U/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0800	0.9259	1.00000	1.08000	1.000	0.926	1
2	1.1664	0.8573	0.48077	0.56077	2.080	1.783	2
3	1.2597	0.7938	0.30803	0.38803	3.246	2.577	3
4	1.3605	0.7350	0.22192	0.30192	4.506	3.312	4
5	1.4693	0.6806	0.17046	0.25046	5.867	3.993	5
6	1.5869	0.6302	0.13632	0.21632	7.336	4.623	6
7	1.7138	0.5835	0.11207	0.19207	8.923	5.206	7
8	1.8509	0.5403	0.09401	0.17401	10.637	5.747	8
9	1.9990	0.5002	0.08008	0.16008	12.488	6.247	9
10	2.1589	0.4632	0.06903	0.14903	14.487	6.710	10
11	2.3316	0.4289	0.06008	0.14008	16.645	7.139	11
12	2.5182	0.3971	0.05270	0.13270	18.977	7.536	12
13	2.7196	0.3677	0.04652	0.12652	21.495	7.901	13
14	2.9372	0.3405	0.04130	0.12130	24.215	8.244	14
15	3.1722	0.3152	0.03683	0.11683	27.152	8.559	15
16	3.4259	0.2919	0.03298	0.11298	30.324	8.851	16
17	3.7000	0.2703	0.02963	0.10963	33.750	9.122	17
18	3.9960	0.2502	0.02670	0.10670	37.450	9.372	18
19	4.3157	0.2317	0.02413	0.10413	41.446	9.604	19
20	4.6610	0.2145	0.02185	0.10185	45.762	9.818	20
21	5.0338	0.1987	0.01983	0.09983	50.423	10.017	21
22	5.4365	0.1839	0.01803	0.09803	55.457	10.201	22
23	5.8715	0.1703	0.01642	0.09642	60.893	10.371	23
24	6.3412	0.1577	0.01498	0.09498	66.765	10.529	24
25	6.8485	0.1460	0.01368	0.09368	73.106	10.675	25
26	7.3964	0.1352	0.01251	0.09251	79.954	10.810	26
27	7.9881	0.1252	0.01145	0.09145	87.351	10.935	27
28	8.6271	0.1159	0.01049	0.09049	95.339	11.051	28
29	9.3173	0.1073	0.00952	0.08962	103.966	11.158	29
30	10.0627	0.0994	0.00883	0.08883	113.283	11.258	30
31	10.8677	0.0920	0.00811	0.08811	123.346	11.350	31
32	11.7371	0.0852	0.00745	0.08745	134.214	11.435	32
33	12.6760	0.0789	0.00685	0.08685	145.951	11.514	33
34	13.6901	0.0730	0.00630	0.08630	158.627	11.587	34
35	14.7853	0.0676	0.00580	0.08580	172.317	11.655	35
40	21.7245	0.0460	0.00386	0.08386	259.057	11.925	40
45	31.9204	0.0312	0.00259	0.08259	386.506	12.108	45
50	46.9016	0.0213	0.00174	0.08174	573.770	12.233	50
55	68.9139	0.0145	0.00118	0.08118	848.923	12.319	55
60	101.2571	0.0099	0.00080	0.08080	1,253.213	12.377	60
65	148.7798	0.0067	0.00054	0.08054	1,847.248	12.416	65
70	218.6064	0.0046	0.00037	0.08037	2,720.080	12.443	70
75	321.2045	0.0031	0.00025	0.08025	4,002.557	12.461	75
80	471.9548	0.0021	0.00017	0.08017	5,886.935	12.474	80
85	693.4565	0.0014	0.00012	0.08012	8,655.706	12.482	85
90	1,018.9151	0.0010	0.00008	0.08008	12,723.939	12.488	90
95	1,497.1205	0.0007	0.00005	0.08005	18,701.507	12.492	95
100	2,199.7613	0.0005	0.00004	0.08004	27,484.516	12.494	100

TABLE E-16

10% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series			
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A
1	1.0000	0.9091	1.0000	1.10100	1.000	0.909
2	1.2100	0.8264	0.5712	0.57312	2.100	1.730
3	1.2310	0.7512	0.30211	0.40211	3.310	2.487
4	1.4641	0.6830	0.21547	0.31547	4.641	3.170
5	1.6105	0.6209	0.16380	0.26380	6.105	3.791
6	1.7716	0.5645	0.12961	0.22961	7.777	4.355
7	1.9487	0.5132	0.10541	0.20541	9.487	4.868
8	2.1436	0.4665	0.08741	0.18744	11.336	5.335
9	2.3579	0.4241	0.07364	0.17364	13.329	5.759
10	2.5937	0.3855	0.06275	0.16275	15.457	6.144
11	2.8531	0.3505	0.05396	0.15396	17.731	6.495
12	3.1284	0.3186	0.04676	0.14676	21.184	6.814
13	3.4223	0.2897	0.04078	0.14078	24.833	7.103
14	3.7355	0.2633	0.03575	0.13575	28.697	7.369
15	4.0692	0.2394	0.03147	0.13147	32.797	7.606
16	4.4250	0.2176	0.02782	0.12782	37.150	7.814
17	4.8045	0.1978	0.02466	0.12466	41.773	8.002
18	5.2089	0.1799	0.02193	0.12193	47.693	8.170
19	5.6400	0.1635	0.01955	0.11955	53.937	8.319
20	6.0995	0.1486	0.01746	0.11746	60.525	8.451
21	6.5882	0.1351	0.01567	0.11567	67.477	8.567
22	7.1077	0.1228	0.01401	0.11401	74.813	8.668
23	7.6600	0.1117	0.01257	0.11257	82.553	8.755
24	8.2467	0.1015	0.01130	0.11130	90.717	8.829
25	8.8700	0.0923	0.01017	0.11017	99.325	8.891
26	9.5325	0.0839	0.00916	0.10916	108.397	8.941
27	10.2370	0.0762	0.00826	0.10826	117.953	8.980
28	10.9859	0.0693	0.00745	0.10745	128.013	9.017
29	11.7819	0.0630	0.00673	0.10673	138.606	9.052
30	12.6280	0.0573	0.00608	0.10608	149.753	9.085
31	13.5271	0.0521	0.00550	0.10550	161.475	9.117
32	14.4820	0.0474	0.00497	0.10497	173.793	9.147
33	15.4955	0.0431	0.00450	0.10450	186.737	9.176
34	16.5700	0.0391	0.00407	0.10407	200.327	9.203
35	17.7090	0.0356	0.00369	0.10369	214.583	9.229
40	45.2593	0.0221	0.00226	0.10226	442.593	9.772
45	72.8905	0.0137	0.00139	0.10139	718.905	9.873
50	117.3909	0.0085	0.00086	0.10086	1163.909	9.915
55	189.0591	0.0053	0.00053	0.10053	1880.591	9.947
60	304.4816	0.0033	0.00033	0.10033	3034.816	9.967
65	490.3707	0.0020	0.00020	0.10020	4893.707	9.980
70	789.7470	0.0013	0.00013	0.10013	7887.470	9.987
75	1271.8952	0.0008	0.00008	0.10008	12708.954	9.992
80	2048.4002	0.0005	0.00005	0.10005	20474.002	9.995
85	3298.9690	0.0003	0.00003	0.10003	32979.690	9.997
90	5313.0226	0.0002	0.00002	0.10002	53120.226	9.998
95	8556.6760	0.0001	0.00001	0.10001	85556.760	9.999
100	13780.6123	0.0001	0.00001	0.10001	137796.123	9.999

TABLE E-17

12% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series			
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A
1	1.1200	0.8929	1.0000	1.12000	1.000	0.893
2	1.2544	0.7972	0.47170	0.59170	2.120	1.690
3	1.4049	0.7118	0.29635	0.41635	3.374	2.402
4	1.5735	0.6355	0.20923	0.32923	4.779	3.037
5	1.7623	0.5674	0.15741	0.27741	6.353	3.605
6	1.9738	0.5066	0.12323	0.24323	8.115	4.111
7	2.2107	0.4523	0.09912	0.21912	10.089	4.564
8	2.4760	0.4039	0.08130	0.20139	12.300	4.968
9	2.7731	0.3606	0.06768	0.18768	14.776	5.328
10	3.1058	0.3220	0.05698	0.17698	17.549	5.650
11	3.4785	0.2875	0.04842	0.16842	20.655	5.938
12	3.8960	0.2567	0.04144	0.16144	24.133	6.194
13	4.3635	0.2292	0.03568	0.15568	28.029	6.424
14	4.8871	0.2046	0.03087	0.15087	32.393	6.628
15	5.4736	0.1827	0.02682	0.14682	37.280	6.811
16	6.1304	0.1631	0.02329	0.14339	42.753	6.974
17	6.8660	0.1456	0.02046	0.14046	48.884	7.120
18	7.6900	0.1300	0.01794	0.13794	55.750	7.250
19	8.6128	0.1161	0.01576	0.13576	63.440	7.366
20	9.6463	0.1037	0.01388	0.13388	72.052	7.469
21	10.8058	0.0926	0.01224	0.13224	81.699	7.562
22	12.1003	0.0826	0.01081	0.13081	92.503	7.645
23	13.5522	0.0738	0.00956	0.12956	104.602	7.718
24	15.1786	0.0659	0.00846	0.12846	118.055	7.784
25	17.0001	0.0588	0.00750	0.12750	132.934	7.843
26	19.0401	0.0525	0.00665	0.12665	150.334	7.896
27	21.3249	0.0469	0.00590	0.12590	169.374	7.945
28	23.8839	0.0419	0.00524	0.12524	190.169	7.984
29	26.7499	0.0374	0.00466	0.12466	214.583	8.022
30	29.9599	0.0334	0.00414	0.12414	241.333	8.055
31	33.5551	0.0298	0.00369	0.12369	271.292	8.085
32	37.5817	0.0266	0.00328	0.12328	304.847	8.112
33	42.0915	0.0238	0.00292	0.12292	342.429	8.135
34	47.1425	0.0212	0.00260	0.12260	384.520	8.157
35	52.7996	0.0189	0.00232	0.12232	431.663	8.176
40	93.0510	0.0107	0.00130	0.12130	767.091	8.244
45	163.9876	0.0061	0.00074	0.12074	1358.230	8.283
50	289.0022	0.0035	0.00042	0.12042	2400.018	8.305
∞				0.12000		8.333

TABLE E-18
15% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1500	0.8696	1.0000	1.1500	1.000	0.870	1
2	1.3225	0.7561	0.46512	0.61512	2.150	1.626	2
3	1.5209	0.6575	0.28798	0.43798	3.472	2.283	3
4	1.7490	0.5718	0.20026	0.35027	4.993	2.855	4
5	2.0114	0.4972	0.14832	0.29832	6.742	3.352	5
6	2.3131	0.4323	0.11424	0.26124	8.754	3.784	6
7	2.6600	0.3759	0.09036	0.24036	11.067	4.160	7
8	3.0590	0.3269	0.07285	0.22285	13.727	4.487	8
9	3.5179	0.2843	0.05957	0.20957	16.786	4.772	9
10	4.0456	0.2472	0.04925	0.19925	20.304	5.019	10
11	4.6524	0.2149	0.04107	0.19107	24.349	5.234	11
12	5.3503	0.1869	0.03448	0.18448	29.002	5.421	12
13	6.1528	0.1625	0.02911	0.17911	34.352	5.583	13
14	7.0757	0.1413	0.02469	0.17469	40.505	5.724	14
15	8.1371	0.1229	0.02102	0.17102	47.580	5.847	15
16	9.3576	0.1069	0.01795	0.16795	55.717	5.951	16
17	10.7613	0.0929	0.01537	0.16537	65.075	6.047	17
18	12.3755	0.0808	0.01319	0.16319	75.836	6.128	18
19	14.2318	0.0703	0.01134	0.16134	88.212	6.198	19
20	16.3665	0.0611	0.00976	0.15976	102.444	6.259	20
21	18.8215	0.0531	0.00842	0.15842	118.810	6.312	21
22	21.6447	0.0462	0.00727	0.15727	137.632	6.359	22
23	24.8915	0.0402	0.00628	0.15628	159.276	6.399	23
24	28.6252	0.0349	0.00543	0.15543	184.168	6.434	24
25	32.9190	0.0304	0.00470	0.15470	212.793	6.464	25
26	37.8568	0.0264	0.00407	0.15407	245.712	6.491	26
27	43.5353	0.0230	0.00353	0.15353	283.569	6.514	27
28	50.0656	0.0200	0.00306	0.15306	327.104	6.534	28
29	57.5755	0.0174	0.00265	0.15265	377.170	6.551	29
30	66.2118	0.0151	0.00230	0.15230	434.745	6.566	30
31	76.1435	0.0131	0.00200	0.15200	500.957	6.579	31
32	87.5651	0.0114	0.00173	0.15173	577.100	6.591	32
33	100.6998	0.0099	0.00150	0.15150	664.666	6.600	33
34	115.8048	0.0086	0.00131	0.15131	765.365	6.609	34
35	133.1755	0.0075	0.00113	0.15113	881.170	6.617	35
40	267.8635	0.0037	0.00056	0.15056	1779.090	6.642	40
45	538.7693	0.0019	0.00028	0.15028	3585.128	6.654	45
50	1083.6574	0.0009	0.00014	0.15014	7217.716	6.661	50
∞				0.15000		6.667	∞

TABLE E-19
20% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.2000	0.8333	1.0000	1.2000	1.000	0.833	1
2	1.4400	0.6944	0.45455	0.65455	2.200	1.528	2
3	1.7280	0.5787	0.27473	0.47473	3.640	2.106	3
4	2.0736	0.4823	0.18629	0.38629	5.368	2.589	4
5	2.4883	0.4019	0.13438	0.33438	7.442	2.991	5
6	2.9860	0.3349	0.10071	0.30071	9.930	3.326	6
7	3.5832	0.2791	0.07742	0.27742	12.916	3.605	7
8	4.2998	0.2326	0.06061	0.26061	16.499	3.837	8
9	5.1598	0.1938	0.04808	0.24808	20.799	4.031	9
10	6.1917	0.1615	0.03852	0.23852	25.939	4.192	10
11	7.4201	0.1346	0.03110	0.23110	32.150	4.327	11
12	8.9161	0.1122	0.02526	0.22526	39.581	4.439	12
13	10.6993	0.0935	0.02062	0.22062	48.497	4.533	13
14	12.8392	0.0779	0.01689	0.21689	59.196	4.611	14
15	15.4070	0.0649	0.01388	0.21388	72.035	4.675	15
16	18.4884	0.0541	0.01144	0.21144	87.442	4.730	16
17	22.1861	0.0451	0.00944	0.20944	105.931	4.775	17
18	26.6233	0.0376	0.00781	0.20781	128.117	4.812	18
19	31.9480	0.0313	0.00646	0.20646	154.740	4.844	19
20	38.3376	0.0261	0.00536	0.20536	186.688	4.870	20
21	46.0051	0.0217	0.00444	0.20444	225.026	4.891	21
22	55.2061	0.0181	0.00369	0.20369	271.031	4.909	22
23	66.2474	0.0151	0.00307	0.20307	326.227	4.925	23
24	79.4968	0.0126	0.00255	0.20255	392.484	4.937	24
25	95.3962	0.0105	0.00212	0.20212	471.981	4.948	25
26	114.4755	0.0087	0.00176	0.20176	567.377	4.956	26
27	137.3705	0.0073	0.00147	0.20147	681.853	4.964	27
28	164.8447	0.0061	0.00122	0.20122	819.223	4.970	28
29	197.8136	0.0051	0.00102	0.20102	984.068	4.975	29
30	237.3763	0.0042	0.00085	0.20085	1181.882	4.979	30
31	284.8516	0.0035	0.00070	0.20070	1419.258	4.982	31
32	341.8219	0.0029	0.00059	0.20059	1704.109	4.985	32
33	410.1863	0.0024	0.00049	0.20049	2045.931	4.988	33
34	492.2235	0.0020	0.00041	0.20041	2456.118	4.990	34
35	590.6682	0.0017	0.00034	0.20034	2948.341	4.992	35
40	1469.7716	0.0007	0.00014	0.20014	7343.858	4.997	40
45	3657.2620	0.0003	0.00005	0.20005	18281.310	4.999	45
50	9100.4382	0.0001	0.00002	0.20002	45497.191	4.999	50
∞				0.20000		5.000	∞

TABLE E-20

25% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.2500	0.8000	1.00000	1.25000	1.000	0.800	1
2	1.5625	0.6400	0.44444	0.69444	2.250	1.440	2
3	1.9531	0.5120	0.26230	0.51230	3.813	1.952	3
4	2.4414	0.4096	0.17344	0.42344	5.766	2.362	4
5	3.0518	0.3277	0.12185	0.37185	8.207	2.689	5
6	3.8147	0.2621	0.08882	0.33882	11.259	2.951	6
7	4.7684	0.2097	0.06634	0.31634	15.073	3.161	7
8	5.9605	0.1678	0.05040	0.30040	19.842	3.329	8
9	7.4506	0.1342	0.03876	0.28876	25.802	3.463	9
10	9.3132	0.1074	0.03007	0.28007	33.253	3.571	10
11	11.6415	0.0859	0.02349	0.27249	42.566	3.656	11
12	14.5519	0.0687	0.01845	0.26845	54.208	3.725	12
13	18.1899	0.0550	0.01454	0.26454	68.766	3.780	13
14	22.7374	0.0440	0.01150	0.26150	86.949	3.824	14
15	28.4217	0.0352	0.00912	0.25912	109.687	3.859	15
16	35.5271	0.0281	0.00724	0.25724	138.109	3.887	16
17	44.4089	0.0225	0.00576	0.25576	173.636	3.910	17
18	55.5112	0.0180	0.00459	0.25459	218.045	3.928	18
19	69.3889	0.0144	0.00366	0.25366	273.556	3.942	19
20	86.7362	0.0115	0.00292	0.25292	342.945	3.954	20
21	108.4202	0.0092	0.00233	0.25233	429.681	3.963	21
22	135.5253	0.0074	0.00186	0.25186	538.101	3.970	22
23	169.4065	0.0059	0.00148	0.25148	673.626	3.976	23
24	211.7582	0.0047	0.00119	0.25119	843.935	3.981	24
25	264.6973	0.0038	0.00095	0.25095	1054.791	3.985	25
26	330.8722	0.0030	0.00076	0.25076	1319.489	3.988	26
27	413.5903	0.0024	0.00061	0.25061	1650.361	3.990	27
28	516.9870	0.0019	0.00048	0.25048	2063.952	3.992	28
29	646.2349	0.0015	0.00039	0.25039	2580.959	3.994	29
30	807.7926	0.0012	0.00031	0.25031	3227.174	3.995	30
31	1009.7420	0.0010	0.00025	0.25025	4034.968	3.996	31
32	1262.1774	0.0008	0.00020	0.25020	5044.710	3.997	32
33	1577.7218	0.0006	0.00016	0.25016	6306.887	3.997	33
34	1972.1523	0.0005	0.00013	0.25013	7884.602	3.998	34
35	2465.1903	0.0004	0.00010	0.25010	9856.761	3.998	35
40	7523.1638	0.0001	0.00003	0.25003	30088.655	3.999	40
45	22958.8740	0.0001	0.00001	0.25001	91831.496	4.000	45
50	70064.9232	0.0000	0.00000	0.25000	280255.693	4.000	50
∞				0.25000		4.000	∞

TABLE E-21

30% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3000	0.7692	1.00000	1.30000	1.000	0.769	1
2	1.6900	0.5917	0.43478	0.73478	2.300	1.361	2
3	2.1970	0.4552	0.25063	0.55063	3.990	1.816	3
4	2.8561	0.3501	0.16163	0.46163	6.187	2.166	4
5	3.7129	0.2693	0.11058	0.41058	9.043	2.436	5
6	4.8268	0.2072	0.07839	0.37839	12.756	2.643	6
7	6.2749	0.1594	0.05687	0.35687	17.583	2.802	7
8	8.1573	0.1226	0.04192	0.34192	23.858	2.925	8
9	10.6045	0.0943	0.03124	0.33124	32.015	3.019	9
10	13.7858	0.0725	0.02346	0.32346	42.619	3.092	10
11	17.9216	0.0558	0.01773	0.31773	56.405	3.147	11
12	23.2981	0.0429	0.01345	0.31345	74.327	3.190	12
13	30.2875	0.0330	0.01024	0.31024	97.625	3.223	13
14	39.3738	0.0254	0.00782	0.30782	127.913	3.249	14
15	51.1859	0.0195	0.00598	0.30598	167.286	3.268	15
16	66.5417	0.0150	0.00458	0.30458	218.472	3.283	16
17	86.5042	0.0116	0.00351	0.30351	285.014	3.295	17
18	112.4554	0.0089	0.00269	0.30269	371.518	3.304	18
19	146.1920	0.0068	0.00207	0.30207	483.973	3.311	19
20	190.0496	0.0053	0.00159	0.30159	630.165	3.316	20
21	247.0645	0.0040	0.00122	0.30122	820.215	3.320	21
22	321.1839	0.0031	0.00094	0.30094	1067.280	3.323	22
23	417.5391	0.0024	0.00072	0.30072	1388.464	3.325	23
24	542.8008	0.0018	0.00055	0.30055	1806.003	3.327	24
25	705.6410	0.0014	0.00043	0.30043	2348.805	3.329	25
26	917.3333	0.0011	0.00033	0.30033	3054.444	3.330	26
27	1192.5333	0.0008	0.00025	0.30025	3971.778	3.331	27
28	1550.2933	0.0006	0.00019	0.30019	5164.311	3.331	28
29	2015.3813	0.0005	0.00015	0.30015	6714.604	3.332	29
30	2619.9956	0.0004	0.00011	0.30011	8729.985	3.332	30
31	3405.9943	0.0003	0.00009	0.30009	11349.981	3.332	31
32	4427.7926	0.0002	0.00007	0.30007	14755.975	3.333	32
33	5756.1304	0.0002	0.00005	0.30005	19183.768	3.333	33
34	7482.9696	0.0001	0.00004	0.30004	24939.899	3.333	34
35	9727.8604	0.0001	0.00003	0.30003	32422.868	3.333	35
∞				0.30000		3.333	∞

TABLE E-22

35% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3500	0.7407	1.0000	1.3500	1.000	0.741	1
2	1.8225	0.5487	0.4255	0.7755	2.350	1.289	2
3	2.4604	0.4064	0.2396	0.5896	4.172	1.696	3
4	3.3215	0.3011	0.1507	0.5007	6.633	1.997	4
5	4.4840	0.2230	0.1004	0.4504	9.954	2.220	5
6	6.0534	0.1652	0.0692	0.4192	14.438	2.385	6
7	8.1722	0.1234	0.0488	0.3988	20.492	2.507	7
8	11.0324	0.0906	0.0349	0.3849	28.664	2.598	8
9	14.8937	0.0671	0.0251	0.3751	39.696	2.665	9
10	20.1066	0.0497	0.0183	0.3683	54.590	2.715	10
11	27.1439	0.0368	0.0133	0.3633	74.697	2.752	11
12	36.6442	0.0273	0.0098	0.3598	101.841	2.779	12
13	49.4697	0.0202	0.0072	0.3572	138.485	2.799	13
14	66.7841	0.0150	0.0053	0.3553	187.954	2.814	14
15	90.1585	0.0111	0.0039	0.3539	254.738	2.825	15
16	121.7439	0.0082	0.0029	0.3529	344.897	2.834	16
17	164.3138	0.0061	0.0021	0.3521	466.611	2.840	17
18	221.8236	0.0045	0.0015	0.3515	630.925	2.844	18
19	299.4619	0.0033	0.0011	0.3511	852.748	2.848	19
20	404.2736	0.0025	0.0008	0.3508	1152.210	2.850	20
21	545.7693	0.0018	0.0006	0.3506	1556.484	2.852	21
22	736.7886	0.0014	0.0004	0.3504	2102.253	2.853	22
23	994.5646	0.0010	0.0003	0.3503	2839.012	2.854	23
24	1342.7973	0.0007	0.0002	0.3502	3833.706	2.855	24
25	1812.7763	0.0006	0.0001	0.3501	5176.504	2.856	25
26	2447.2480	0.0004	0.0001	0.3501	6989.280	2.856	26
27	3303.7848	0.0003	0.0001	0.3501	9436.528	2.856	27
28	4460.1095	0.0002	0.0000	0.3500	12740.313	2.857	28
29	6021.1478	0.0002	0.0000	0.3500	17200.422	2.857	29
30	8128.5495	0.0001	0.0000	0.3500	23221.570	2.857	30
31	10973.5418	0.0001	0.0000	0.3500	31350.120	2.857	31
32	14814.2815	0.0001	0.0000	0.3500	42322.661	2.857	32
33	19999.2800	0.0001	0.0000	0.3500	57137.943	2.857	33
34	26999.0280	0.0000	0.0000	0.3500	77137.223	2.857	34
35	36448.6878		0.0000	0.3500	104136.251	2.857	35
∞				0.3500		2.857	∞

TABLE E-23

40% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.4000	0.7143	1.0000	1.4000	1.000	0.714	1
2	1.9600	0.5102	0.4166	0.8166	2.400	1.224	2
3	2.7440	0.3644	0.2293	0.6293	4.360	1.589	3
4	3.8416	0.2603	0.1407	0.5407	7.104	1.849	4
5	5.3782	0.1859	0.0913	0.4913	10.946	2.035	5
6	7.5295	0.1328	0.0612	0.4612	16.324	2.168	6
7	10.5414	0.0949	0.0419	0.4419	23.853	2.263	7
8	14.7579	0.0678	0.0290	0.4290	34.395	2.331	8
9	20.6610	0.0484	0.0203	0.4203	49.153	2.379	9
10	28.9255	0.0346	0.0143	0.4143	69.814	2.414	10
11	40.4957	0.0247	0.0101	0.4101	98.739	2.438	11
12	56.6939	0.0176	0.0071	0.4071	139.235	2.456	12
13	79.3715	0.0126	0.0051	0.4051	195.929	2.469	13
14	111.1201	0.0090	0.0036	0.4036	275.300	2.478	14
15	155.5681	0.0064	0.0025	0.4025	386.420	2.484	15
16	217.7953	0.0046	0.0018	0.4018	541.988	2.489	16
17	304.9135	0.0033	0.0013	0.4013	759.784	2.492	17
18	426.8789	0.0023	0.0009	0.4009	1064.697	2.494	18
19	597.6304	0.0017	0.0006	0.4006	1491.576	2.496	19
20	836.6826	0.0012	0.0004	0.4004	2089.206	2.497	20
21	1171.5554	0.0009	0.0003	0.4003	2925.889	2.498	21
22	1639.8276	0.0006	0.0002	0.4002	4097.245	2.498	22
23	2295.8569	0.0004	0.0001	0.4001	5737.142	2.499	23
24	3214.1997	0.0003	0.0001	0.4001	8052.999	2.499	24
25	4499.8796	0.0002	0.0000	0.4000	11247.199	2.499	25
26	6299.8314	0.0002	0.0000	0.4000	15747.079	2.500	26
27	8819.7640	0.0001	0.0000	0.4000	22046.910	2.500	27
28	12347.6696	0.0001	0.0000	0.4000	30866.674	2.500	28
29	17286.7374	0.0001	0.0000	0.4000	43214.343	2.500	29
30	24201.4324	0.0000	0.0000	0.4000	60501.081	2.500	30
31	33882.0053		0.0000	0.4000	84702.513	2.500	31
32	47434.8074		0.0000	0.4000	118584.519	2.500	32
33	66408.7304		0.0000	0.4000	166019.326	2.500	33
34	92972.2225		0.0000	0.4000	232428.056	2.500	34
35	130161.1116		0.0000	0.4000	325400.279	2.500	35
∞				0.4000		2.500	∞

TABLE E-24

45% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/T	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.4500	0.6897	1.00000	1.45000	1.000	0.699	1
2	2.1025	0.4756	0.40816	0.85816	2.450	1.165	2
3	3.0486	0.3280	0.21966	0.66966	4.552	1.493	3
4	4.4205	0.2262	0.13156	0.58156	7.601	1.720	4
5	6.4097	0.1560	0.08318	0.53318	12.022	1.876	5
6	9.2941	0.1076	0.05426	0.50426	18.431	1.983	6
7	13.4765	0.0742	0.03607	0.48607	27.725	2.057	7
8	19.5409	0.0512	0.02427	0.47427	41.202	2.109	8
9	28.5543	0.0353	0.01646	0.46646	60.743	2.144	9
10	41.0847	0.0243	0.01123	0.46123	89.077	2.168	10
11	59.5728	0.0168	0.00768	0.45768	130.162	2.185	11
12	86.3806	0.0116	0.00527	0.45527	189.735	2.196	12
13	125.2518	0.0080	0.00362	0.45362	276.115	2.204	13
14	181.6151	0.0055	0.00249	0.45249	401.367	2.210	14
15	263.3419	0.0038	0.00172	0.45172	582.982	2.214	15
16	381.6458	0.0026	0.00118	0.45118	846.524	2.216	16
17	553.6764	0.0018	0.00081	0.45081	1228.170	2.218	17
18	802.8308	0.0012	0.00056	0.45056	1781.846	2.219	18
19	1164.1047	0.0009	0.00039	0.45039	2584.677	2.220	19
20	1687.9516	0.0006	0.00027	0.45027	3748.782	2.221	20
21	2447.5301	0.0004	0.00018	0.45018	5436.734	2.221	21
22	3548.2187	0.0003	0.00013	0.45013	7884.264	2.222	22
23	5145.9321	0.0002	0.00009	0.45009	11433.182	2.222	23
24	7461.6015	0.0001	0.00006	0.45006	16579.115	2.222	24
25	10819.3222	0.0001	0.00004	0.45004	24040.716	2.222	25
26	15688.0173	0.0001	0.00003	0.45003	34860.038	2.222	26
27	22747.6250	0.0000	0.00002	0.45002	50548.056	2.222	27
28	32984.0563		0.00001	0.45001	73295.681	2.222	28
29	47826.8816		0.00001	0.45001	106279.737	2.222	29
30	69348.9783		0.00001	0.45001	154106.618	2.222	30
∞				0.45000		2.222	∞

TABLE E-25

50% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.5000	0.6667	1.00000	1.50000	1.000	0.667	1
2	2.2500	0.4444	0.40000	0.90000	2.500	1.111	2
3	3.3750	0.2963	0.21053	0.71053	4.750	1.407	3
4	5.0625	0.1975	0.12308	0.62308	8.125	1.605	4
5	7.5938	0.1317	0.07583	0.57583	13.188	1.737	5
6	11.3906	0.0878	0.04812	0.54812	20.781	1.824	6
7	17.0859	0.0585	0.03108	0.53108	32.172	1.883	7
8	25.6289	0.0390	0.02030	0.52030	49.258	1.922	8
9	38.4454	0.0260	0.01335	0.51335	74.887	1.948	9
10	57.6650	0.0173	0.00882	0.50882	113.330	1.965	10
11	86.4976	0.0116	0.00585	0.50585	170.995	1.977	11
12	129.7463	0.0077	0.00388	0.50388	257.493	1.985	12
13	194.6195	0.0051	0.00258	0.50258	387.239	1.990	13
14	291.9293	0.0034	0.00172	0.50172	581.859	1.993	14
15	437.8939	0.0023	0.00114	0.50114	873.788	1.995	15
16	656.8408	0.0015	0.00076	0.50076	1311.682	1.997	16
17	985.2613	0.0010	0.00051	0.50051	1968.523	1.998	17
18	1477.8919	0.0007	0.00034	0.50034	2953.784	1.999	18
19	2216.8378	0.0005	0.00023	0.50023	4431.676	1.999	19
20	3325.2567	0.0003	0.00015	0.50015	6648.513	1.999	20
21	4987.8851	0.0002	0.00010	0.50010	9973.770	2.000	21
22	7481.8276	0.0001	0.00007	0.50007	14961.655	2.000	22
23	11222.7415	0.0001	0.00004	0.50004	22443.485	2.000	23
24	16834.1122	0.0001	0.00003	0.50003	33666.224	2.000	24
25	25251.1683	0.0000	0.00002	0.50002	50500.337	2.000	25
∞				0.50000		2.000	∞

TABLE E-26

Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$ to an equivalent uniform annual series for n years.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%	n
2	0.50	0.50	0.49	0.49	0.49	0.49	0.48	0.48	0.48	2
3	0.99	0.99	0.98	0.97	0.97	0.96	0.95	0.95	0.94	3
4	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.38	4
5	1.98	1.96	1.94	1.92	1.90	1.88	1.86	1.85	1.81	5
6	2.47	2.44	2.41	2.39	2.36	2.33	2.30	2.28	2.22	6
7	2.96	2.92	2.88	2.84	2.81	2.77	2.73	2.69	2.62	7
8	3.45	3.40	3.34	3.29	3.24	3.20	3.15	3.10	3.00	8
9	3.93	3.87	3.80	3.74	3.68	3.61	3.55	3.49	3.37	9
10	4.42	4.34	4.26	4.18	4.10	4.02	3.95	3.87	3.73	10
11	4.90	4.80	4.70	4.61	4.51	4.42	4.33	4.24	4.06	11
12	5.38	5.26	5.15	5.03	4.92	4.81	4.70	4.60	4.39	12
13	5.86	5.72	5.59	5.45	5.32	5.19	5.06	4.94	4.70	13
14	6.34	6.18	6.02	5.87	5.71	5.56	5.42	5.27	5.00	14
15	6.81	6.63	6.45	6.27	6.10	5.93	5.76	5.59	5.28	15
16	7.29	7.08	6.87	6.67	6.47	6.28	6.09	5.90	5.55	16
17	7.76	7.52	7.29	7.07	6.84	6.62	6.41	6.20	5.81	17
18	8.23	7.97	7.71	7.45	7.20	6.96	6.72	6.49	6.05	18
19	8.70	8.41	8.12	7.83	7.56	7.29	7.02	6.77	6.29	19
20	9.17	8.84	8.52	8.21	7.90	7.61	7.32	7.04	6.51	20
21	9.63	9.28	8.92	8.58	8.24	7.92	7.60	7.29	6.72	21
22	10.10	9.70	9.32	8.94	8.57	8.22	7.87	7.54	6.92	22
23	10.56	10.13	9.71	9.30	8.90	8.51	8.14	7.78	7.11	23
24	11.02	10.55	10.10	9.65	9.21	8.80	8.39	8.01	7.29	24
25	11.48	10.97	10.48	10.00	9.52	9.07	8.64	8.23	7.46	25
26	11.94	11.39	10.85	10.33	9.83	9.34	8.88	8.44	7.62	26
27	12.39	11.80	11.23	10.66	10.12	9.60	9.11	8.64	7.77	27
28	12.85	12.21	11.59	10.99	10.41	9.86	9.33	8.83	7.91	28
29	13.30	12.62	11.96	11.31	10.69	10.10	9.54	9.01	8.05	29
30	13.75	13.02	12.31	11.63	10.97	10.34	9.75	9.19	8.18	30
31	14.20	13.42	12.67	11.94	11.24	10.57	9.95	9.36	8.30	31
32	14.65	13.82	13.02	12.24	11.50	10.80	10.14	9.52	8.41	32
33	15.10	14.22	13.36	12.54	11.76	11.02	10.32	9.67	8.52	33
34	15.54	14.61	13.70	12.83	12.01	11.23	10.50	9.82	8.61	34
35	15.98	15.00	14.04	13.12	12.25	11.43	10.67	9.96	8.71	35
40	18.18	16.89	15.65	14.48	13.38	12.36	11.42	10.57	9.10	40
45	20.33	18.70	17.16	15.70	14.36	13.14	12.04	11.04	9.37	45
50	22.44	20.44	18.56	16.81	15.22	13.80	12.53	11.41	9.57	50
60	26.53	23.70	21.07	18.70	16.61	14.79	13.23	11.90	9.80	60
70	30.47	26.66	23.21	20.20	17.62	15.46	13.67	12.18	9.91	70
80	34.25	29.36	25.04	21.37	18.35	15.90	13.93	12.33	9.96	80
90	37.87	31.79	26.57	22.28	18.87	16.19	14.08	12.41	9.98	90
100	41.34	33.99	27.84	22.98	19.23	16.37	14.17	12.45	9.99	100

TABLE E-26—Continued

Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$ to an equivalent uniform annual series for n years.

n	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	n
2	0.47	0.47	0.45	0.44	0.43	0.43	0.42	0.41	0.40	2
3	0.92	0.91	0.88	0.85	0.83	0.80	0.78	0.76	0.74	3
4	1.36	1.33	1.27	1.22	1.18	1.13	1.09	1.05	1.02	4
5	1.77	1.72	1.64	1.56	1.49	1.42	1.36	1.30	1.24	5
6	2.17	2.10	1.98	1.87	1.77	1.67	1.58	1.50	1.42	6
7	2.55	2.45	2.29	2.14	2.01	1.88	1.77	1.66	1.56	7
8	2.91	2.78	2.58	2.39	2.22	2.06	1.92	1.79	1.68	8
9	3.26	3.09	2.84	2.60	2.40	2.21	2.04	1.89	1.76	9
10	3.58	3.38	3.07	2.80	2.55	2.33	2.14	1.97	1.82	10
11	3.90	3.65	3.29	2.97	2.68	2.44	2.22	2.03	1.87	11
12	4.19	3.91	3.48	3.11	2.80	2.52	2.28	2.08	1.91	12
13	4.47	4.14	3.66	3.24	2.89	2.59	2.33	2.12	1.93	13
14	4.73	4.36	3.82	3.36	2.97	2.64	2.37	2.14	1.95	14
15	4.98	4.56	3.96	3.45	3.03	2.69	2.40	2.17	1.97	15
16	5.21	4.75	4.09	3.54	3.09	2.72	2.43	2.18	1.98	16
17	5.44	4.93	4.20	3.61	3.13	2.75	2.44	2.19	1.98	17
18	5.64	5.08	4.30	3.67	3.17	2.78	2.46	2.20	1.99	18
19	5.84	5.23	4.39	3.72	3.20	2.79	2.47	2.21	1.99	19
20	6.02	5.37	4.46	3.77	3.23	2.81	2.48	2.21	1.99	20
21	6.19	5.49	4.53	3.80	3.25	2.82	2.48	2.21	2.00	21
22	6.35	5.60	4.59	3.84	3.26	2.83	2.49	2.22	2.00	22
23	6.50	5.70	4.65	3.86	3.28	2.83	2.49	2.22	2.00	23
24	6.64	5.80	4.69	3.89	3.29	2.84	2.49	2.22	2.00	24
25	6.77	5.88	4.74	3.91	3.30	2.84	2.49	2.22	2.00	25
26	6.89	5.96	4.77	3.92	3.30	2.85	2.50	2.22	2.00	26
27	7.00	6.03	4.80	3.94	3.31	2.85	2.50	2.22	2.00	27
28	7.11	6.10	4.83	3.95	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	28
29	7.21	6.15	4.85	3.96	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	29
30	7.30	6.21	4.87	3.96	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	30
31	7.38	6.25	4.89	3.97	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	31
32	7.46	6.30	4.91	3.97	3.33	2.85	2.50	2.22	2.00	32
33	7.53	6.34	4.92	3.98	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	33
34	7.60	6.37	4.93	3.98	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	34
35	7.66	6.40	4.94	3.99	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	35
40	7.90	6.52	4.97	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	40
45	8.06	6.58	4.99	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	45
50	8.16	6.62	4.99	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	50
60	8.27	6.65	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	60
70	8.31	6.66	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	70
80	8.32	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	80
90	8.33	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	90
100	8.33	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	100

TABLE E-27

**Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50%**

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	2
3	2.9215	2.8458	2.7729	2.7025	2.6347	2.5692	3
4	5.8044	5.6173	5.4583	5.2670	5.1028	4.9455	4
5	9.6103	9.2403	8.8888	8.5547	8.2369	7.9345	5
6	14.3205	13.6801	13.0762	12.5062	11.9680	11.4594	6
7	19.9168	18.9035	17.9547	17.0657	16.2321	15.4497	7
8	26.3812	24.8779	23.4806	22.1806	20.9700	19.8416	8
9	33.6959	31.5720	29.6119	27.8013	26.1268	24.5768	9
10	41.8435	38.9551	36.3088	33.8814	31.6520	29.6023	10
11	50.8067	46.9977	43.5330	40.3772	37.4988	34.8702	11
12	60.5687	55.6712	51.2482	47.2477	43.6241	40.3369	12
13	71.1126	64.9475	59.4196	54.4546	49.9879	45.9629	13
14	82.4221	74.7999	68.0741	61.9618	56.5538	51.7128	14
15	94.4810	85.2021	77.0002	69.7355	63.2880	57.5546	15
16	107.2734	96.1288	86.3477	77.7441	70.1597	63.4592	16
17	120.7834	107.5554	96.0280	85.9581	77.1105	69.4011	17
18	134.9957	119.4581	106.0137	94.5498	84.2043	75.3569	18
19	149.8950	131.8139	116.2788	102.8933	91.3275	81.3062	19
20	165.4664	144.6003	126.7987	111.5647	98.4884	87.2304	20
21	181.6950	157.7959	137.5496	120.3414	105.6673	93.1136	21
22	198.5663	171.3795	148.5094	129.2024	112.8461	98.9412	22
23	216.0660	185.3309	159.6566	138.1284	120.0087	104.7007	23
24	234.1800	199.6305	170.9711	147.1012	127.1402	110.3812	24
25	252.8945	214.2592	182.4336	156.1040	134.2275	115.9732	25
30	355.0621	291.7164	241.3613	201.6618	168.6226	142.3588	30
35	470.1583	374.8826	301.6267	244.8768	200.5807	165.7427	35
40	596.8561	461.7231	361.7500	286.5303	229.5452	185.9568	40
45	733.7038	551.5652	420.6325	325.4028	255.3146	203.1097	45
50	879.4177	642.3606	477.4804	361.1659	277.9148	217.4574	50
n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.8734	0.8573	0.8264	0.7972	0.7561	0.6944	2
3	2.5060	2.4450	2.3291	2.2208	2.0712	1.8519	3
4	4.7947	4.6501	4.3781	4.1273	3.7864	3.2986	4
5	7.6167	7.3724	6.8618	6.3970	5.7751	4.9061	5
6	10.9784	10.5233	9.6842	8.9302	7.9368	6.5806	6
7	14.7149	14.0242	12.7631	11.6443	10.1924	8.2551	7
8	18.7889	17.8061	16.0287	14.4715	12.4807	9.8831	8
9	23.1404	21.8081	19.4215	17.3563	14.7548	11.4335	9
10	27.7156	25.9768	22.8913	20.2541	16.9795	12.8871	10
11	32.4665	30.2657	26.3963	23.1289	19.1289	14.2330	11
12	37.3506	34.6339	29.9012	25.9523	21.1849	15.4667	12
13	42.3302	39.0463	33.3772	28.7024	23.1352	16.5883	13
14	47.3718	43.4723	36.8005	31.3624	24.9725	17.6008	14
15	52.4461	47.8857	40.1520	33.9202	26.6930	18.5095	15

TABLE E-27—Continued

**Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50%**

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$.

n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
16	57.5271	52.2640	47.4164	46.7670	28.2960	19.3268	16
17	62.5923	56.5883	46.5820	38.6973	29.7828	20.0419	17
18	67.6220	60.8426	49.6396	40.9680	31.1565	20.6805	18
19	72.5991	65.0134	52.5827	42.9979	32.4213	21.2439	19
20	77.5091	69.0898	55.4069	44.9676	33.5822	21.7395	20
21	82.3393	73.0629	58.1095	46.8188	34.6448	22.1742	21
22	87.0795	76.9257	60.6893	48.5543	35.6150	22.5546	22
23	91.7201	80.6726	63.1462	50.1776	36.4988	22.8867	23
24	96.2545	84.2997	65.4813	51.6929	37.3022	23.1760	24
25	100.6765	87.8041	67.6964	53.1047	38.0314	23.4276	25
30	120.9718	103.4558	77.0706	58.7821	40.7526	24.2628	30
35	138.1353	116.0920	83.9872	62.6052	42.3587	24.6614	35
40	152.2928	126.0422	88.9526	65.1159	43.2830	24.8469	40
45	163.7559	133.7331	92.4545	66.7343	43.8051	24.9316	45
50	172.9051	139.5928	94.5889	67.7625	44.0958	24.9698	50
n	25%	30%	35%	40%	45%	50%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.6400	0.5917	0.5487	0.5102	0.4756	0.4444	2
3	1.6640	1.5020	1.3616	1.2391	1.1317	1.0370	3
4	2.8928	2.5524	2.2648	2.0200	1.8103	1.6296	4
5	4.2035	3.6297	3.1568	2.7637	2.4344	2.1564	5
6	5.5142	4.6656	3.9828	3.4278	2.9723	2.5953	6
7	6.7725	5.6218	4.7170	3.9970	3.4176	2.9465	7
8	7.9469	6.4800	5.2515	4.4713	3.7758	3.2126	8
9	9.0207	7.2444	5.8887	4.8585	4.0581	3.4277	9
10	9.9870	7.8872	6.3363	5.1695	4.2772	3.5838	10
11	10.8460	8.4452	6.7047	5.4166	4.4450	3.6994	11
12	11.6020	8.9173	7.0049	5.6106	4.5724	3.7842	12
13	12.2617	9.3135	7.2745	5.7618	4.6682	3.8459	13
14	12.8334	9.6437	7.4421	5.8788	4.7398	3.8904	14
15	13.3260	9.9172	7.5974	5.9688	4.7929	3.9224	15
16	13.7482	10.1426	7.7206	6.0376	4.8322	3.9452	16
17	14.1085	10.3276	7.8180	6.0901	4.8611	3.9614	17
18	14.4147	10.4788	7.8946	6.1299	4.8823	3.9729	18
19	14.6741	10.6019	7.9547	6.1601	4.8978	3.9811	19
20	14.8932	10.7019	8.0017	6.1828	4.9090	3.9863	20
21	15.0777	10.7828	8.0384	6.1998	4.9172	3.9908	21
22	15.2326	10.8482	8.0669	6.2127	4.9231	3.9936	22
23	15.3625	10.9009	8.0890	6.2222	4.9274	3.9955	23
24	15.4711	10.9433	8.1061	6.2294	4.9305	3.9969	24
25	15.5618	10.9773	8.1194	6.2347	4.9327	3.9979	25
30	15.8316	11.0687	8.1517	6.2466	4.9372	3.9997	30
35	15.9367	11.0980	8.1603	6.2493	4.9381	3.9999	35
40	15.9766	11.1071	8.1625	6.2498			40
45	15.9915	11.1099	8.1631				45
50	15.9969	11.1108					50

TABLE E-28

Present Worth at Zero Date of \$1 Flowing Uniformly Throughout One-Year Periods

This table assumes continuous compounding of interest at various stated effective rates per annum

Period	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%
0 to 1	0.9950	0.9902	0.9854	0.9806	0.9760	0.9714	0.9669	0.9625	0.9583
1 to 2	0.9952	0.9707	0.9567	0.9429	0.9295	0.9164	0.9037	0.8912	0.8671
2 to 3	0.9754	0.9517	0.9288	0.9067	0.8853	0.8646	0.8445	0.8252	0.7883
3 to 4	0.9658	0.9331	0.9017	0.8718	0.8431	0.8156	0.7893	0.7641	0.7166
4 to 5	0.9562	0.9148	0.8755	0.8383	0.8030	0.7695	0.7377	0.7075	0.6515
5 to 6	0.9477	0.8968	0.8500	0.8060	0.7647	0.7259	0.6894	0.6551	0.5922
6 to 7	0.9374	0.8792	0.8252	0.7750	0.7283	0.6848	0.6443	0.6065	0.5384
7 to 8	0.9251	0.8620	0.8012	0.7452	0.6936	0.6461	0.6021	0.5616	0.4895
8 to 9	0.9189	0.8451	0.7779	0.7165	0.6606	0.6095	0.5628	0.5200	0.4450
9 to 10	0.9098	0.8285	0.7552	0.6890	0.6291	0.5750	0.5259	0.4815	0.4045
10 to 11	0.9008	0.8123	0.7332	0.6625	0.5992	0.5424	0.4915	0.4458	0.3677
11 to 12	0.8919	0.7962	0.7118	0.6370	0.5706	0.5117	0.4594	0.4128	0.3343
12 to 13	0.8830	0.7807	0.6911	0.6125	0.5435	0.4828	0.4293	0.3822	0.3039
13 to 14	0.8743	0.7654	0.6710	0.5869	0.5176	0.4554	0.4012	0.3539	0.2763
14 to 15	0.8656	0.7504	0.6514	0.5663	0.4929	0.4297	0.3750	0.3277	0.2512
15 to 16	0.8571	0.7357	0.6325	0.5445	0.4695	0.4053	0.3505	0.3034	0.2283
16 to 17	0.8486	0.7213	0.6140	0.5236	0.4471	0.3824	0.3275	0.2809	0.2076
17 to 18	0.8402	0.7077	0.5962	0.5034	0.4258	0.3608	0.3061	0.2601	0.1887
18 to 19	0.8319	0.6933	0.5788	0.4841	0.4055	0.3403	0.2861	0.2409	0.1716
19 to 20	0.8236	0.6797	0.5619	0.4655	0.3862	0.3211	0.2674	0.2239	0.1560
20 to 21	0.8155	0.6664	0.5456	0.4476	0.3678	0.3029	0.2499	0.2065	0.1418
21 to 22	0.8074	0.6533	0.5297	0.4303	0.3503	0.2857	0.2335	0.1912	0.1289
22 to 23	0.7994	0.6405	0.5143	0.4138	0.3336	0.2696	0.2182	0.1770	0.1172
23 to 24	0.7915	0.6279	0.4993	0.3979	0.3178	0.2543	0.2040	0.1639	0.1065
24 to 25	0.7837	0.6156	0.4847	0.3826	0.3026	0.2399	0.1906	0.1518	0.0968
25 to 26	0.7759	0.6033	0.4756	0.3679	0.2882	0.2263	0.1782	0.1405	0.0888
26 to 27	0.7682	0.5917	0.4669	0.3537	0.2745	0.2135	0.1665	0.1301	0.0800
27 to 28	0.7606	0.5801	0.4536	0.3401	0.2614	0.2014	0.1556	0.1205	0.0728
28 to 29	0.7531	0.5687	0.4407	0.3270	0.2490	0.1900	0.1454	0.1116	0.0661
29 to 30	0.7456	0.5576	0.4281	0.3144	0.2371	0.1793	0.1359	0.1033	0.0601
30 to 31	0.7382	0.5466	0.4160	0.3024	0.2258	0.1691	0.1270	0.0956	0.0547
31 to 32	0.7309	0.5359	0.3941	0.2907	0.2151	0.1596	0.1187	0.0886	0.0497
32 to 33	0.7237	0.5254	0.3827	0.2795	0.2048	0.1505	0.1109	0.0820	0.0452
33 to 34	0.7165	0.5151	0.3715	0.2688	0.1951	0.1420	0.1037	0.0759	0.0411
34 to 35	0.7094	0.5050	0.3607	0.2585	0.1858	0.1340	0.0969	0.0703	0.0373
35 to 36	0.7024	0.4951	0.3502	0.2485	0.1769	0.1264	0.0906	0.0651	0.0339
36 to 37	0.6955	0.4854	0.3400	0.2390	0.1685	0.1192	0.0846	0.0603	0.0309
37 to 38	0.6886	0.4759	0.3301	0.2298	0.1605	0.1125	0.0791	0.0558	0.0281
38 to 39	0.6818	0.4666	0.3205	0.2209	0.1528	0.1061	0.0739	0.0517	0.0255
39 to 40	0.6750	0.4574	0.3111	0.2124	0.1456	0.1001	0.0691	0.0478	0.0232
40 to 41	0.6683	0.4484	0.3021	0.2043	0.1386	0.0944	0.0646	0.0443	0.0211
41 to 42	0.6617	0.4396	0.2933	0.1964	0.1320	0.0891	0.0603	0.0410	0.0192
42 to 43	0.6552	0.4310	0.2847	0.1888	0.1257	0.0841	0.0564	0.0380	0.0174
43 to 44	0.6487	0.4226	0.2764	0.1816	0.1198	0.0793	0.0527	0.0352	0.0158
44 to 45	0.6422	0.4143	0.2684	0.1746	0.1141	0.0748	0.0493	0.0326	0.0144
45 to 46	0.6359	0.4062	0.2606	0.1679	0.1086	0.0706	0.0460	0.0302	0.0131
46 to 47	0.6296	0.3982	0.2530	0.1614	0.1035	0.0666	0.0430	0.0279	0.0119
47 to 48	0.6234	0.3904	0.2456	0.1552	0.0985	0.0628	0.0402	0.0259	0.0108
48 to 49	0.6172	0.3827	0.2385	0.1492	0.0938	0.0593	0.0376	0.0239	0.0098
49 to 50	0.6111	0.3752	0.2315	0.1435	0.0894	0.0559	0.0351	0.0222	0.0089

TABLE E-28—Continued

Present Worth at Zero Date of \$1 Flowing Uniformly Throughout One-Year Periods

This table assumes continuous compounding of interest at various stated effective rates per annum

Period	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
0 to 1	0.9254	0.9333	0.9141	0.8963	0.8776	0.8659	0.8491	0.8352	0.8221
1 to 2	0.8441	0.8115	0.7618	0.7170	0.6766	0.6393	0.6065	0.5760	0.5481
2 to 3	0.7537	0.7037	0.6348	0.5736	0.5205	0.4740	0.4332	0.3973	0.3654
3 to 4	0.6729	0.6136	0.5290	0.4589	0.4004	0.3511	0.3095	0.2740	0.2436
4 to 5	0.6008	0.5336	0.4408	0.3671	0.3080	0.2601	0.2210	0.1889	0.1624
5 to 6	0.5365	0.4640	0.3674	0.2937	0.2369	0.1927	0.1579	0.1303	0.1083
6 to 7	0.4790	0.4035	0.3061	0.2350	0.1822	0.1427	0.1128	0.0899	0.0722
7 to 8	0.4277	0.3508	0.2551	0.1880	0.1402	0.1057	0.0806	0.0620	0.0481
8 to 9	0.3818	0.3051	0.2126	0.1504	0.1078	0.0783	0.0575	0.0427	0.0321
9 to 10	0.3409	0.2652	0.1772	0.1203	0.0829	0.0580	0.0411	0.0295	0.0214
10 to 11	0.3044	0.2307	0.1476	0.0962	0.0638	0.0430	0.0294	0.0203	0.0143
11 to 12	0.2718	0.2006	0.1235	0.0770	0.0491	0.0318	0.0210	0.0140	0.0095
12 to 13	0.2427	0.1744	0.1025	0.0616	0.0378	0.0236	0.0150	0.0097	0.0063
13 to 14	0.2167	0.1517	0.0854	0.0493	0.0290	0.0175	0.0107	0.0067	0.0042
14 to 15	0.1935	0.1319	0.0712	0.0394	0.0223	0.0129	0.0076	0.0046	0.0028
15 to 16	0.1727	0.1147	0.0593	0.0315	0.0172	0.0096	0.0055	0.0032	0.0019
16 to 17	0.1542	0.0997	0.0494	0.0252	0.0132	0.0071	0.0039	0.0022	0.0013
17 to 18	0.1377	0.0867	0.0412	0.0202	0.0102	0.0053	0.0028	0.0015	0.0008
18 to 19	0.1229	0.0754	0.0343	0.0161	0.0078	0.0039	0.0020	0.0010	0.0006
19 to 20	0.1098	0.0656	0.0286	0.0129	0.0060	0.0029	0.0014	0.0007	0.0004
20 to 21	0.0980	0.0570	0.0278	0.0103	0.0046	0.0021	0.0010	0.0005	0.0002
21 to 22	0.0875	0.0496	0.0199	0.0083	0.0036	0.0016	0.0007	0.0003	0.0002
22 to 23	0.0781	0.0431	0.0166	0.0066	0.0027	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001
23 to 24	0.0698	0.0375	0.0138	0.0053	0.0021	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
24 to 25	0.0623	0.0326	0.0115	0.0042	0.0016	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001
25 to 26	0.0556	0.0281	0.0096	0.0034	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
26 to 27	0.0497	0.0247	0.0080	0.0027	0.0010	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001
27 to 28	0.0443	0.0214	0.0067	0.0022	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001
28 to 29	0.0396	0.0186	0.0055	0.0017	0.0006	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
29 to 30	0.0353	0.0162	0.0046	0.0014	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
30 to 31	0.0316	0.0141	0.0039	0.0011	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
31 to 32	0.0282	0.0123	0.0032	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
32 to 33	0.0252	0.0107	0.0027	0.0007	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
33 to 34	0.0225	0.0093	0.0022	0.0006	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
34 to 35	0.0201	0.0081	0.0019	0.0005	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
35 to 36	0.0179	0.0070	0.0015	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
36 to 37	0.0160	0.0061	0.0013	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
37 to 38	0.0143	0.0053	0.0011	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
38 to 39	0.0127	0.0046	0.0009	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
39 to 40	0.0114	0.0040	0.0007	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
40 to 41	0.0102	0.0035	0.0006	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
41 to 42	0.0091	0.0030	0.0005	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
42 to 43	0.0081	0.0026	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
43 to 44	0.0072	0.0023	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
44 to 45	0.0065	0.0020	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
45 to 46	0.0058	0.0017	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
46 to 47	0.0051	0.0015	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
47 to 48	0.0046	0.0013	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
48 to 49	0.0041	0.0011	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
49 to 50	0.0037	0.0010	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

TABLE E-27

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50%

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n-year end-of-year series 0, G, 2G, .. (n - 1)G.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.9802	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	2
3	2.9215	2.8458	2.7729	2.7025	2.6347	2.5692	3
4	5.8044	5.6173	5.4383	5.2670	5.1028	4.9455	4
5	9.6103	9.2403	8.8888	8.5547	8.2369	7.9345	5
6	14.3205	13.6801	13.0762	12.5062	11.9680	11.4594	6
7	19.9168	18.9035	17.9547	17.0657	16.2321	15.4497	7
8	26.3812	24.8779	23.4806	22.1806	20.9700	19.8416	8
9	33.6959	31.5720	29.6119	27.8013	26.1268	24.5768	9
10	41.8435	38.9551	36.3088	33.8814	31.6520	29.6023	10
11	50.8067	46.9977	43.5330	40.3772	37.4988	34.8702	11
12	60.5687	55.6712	51.2482	47.2477	43.6241	40.3369	12
13	71.1126	64.9475	59.4196	54.4546	49.9579	45.9629	13
14	82.4221	74.7999	68.0111	61.9618	56.5538	51.7128	14
15	94.4810	85.2021	77.0002	69.7355	63.2880	57.5546	15
16	107.2734	96.1288	86.3477	77.7441	70.1597	63.4592	16
17	120.7834	107.5554	96.0280	85.9581	77.1405	69.4011	17
18	134.9957	119.4581	106.0137	94.3498	84.2043	75.3569	18
19	149.8950	131.8139	116.2788	102.8933	91.3275	81.3062	19
20	165.4654	144.6003	126.7987	111.5647	98.4884	87.2304	20
21	181.6950	157.7959	137.5496	120.3414	105.6673	93.1136	21
22	198.5663	171.3795	148.5094	129.2024	112.8461	98.9412	22
23	216.0660	185.3309	159.6566	138.1284	120.0087	104.7007	23
24	234.1800	199.6305	170.9711	147.1012	127.1492	110.3812	24
25	252.8945	214.2592	182.4336	156.1040	134.2275	115.9732	25
30	355.0021	291.7154	241.3613	201.0618	168.6226	142.3588	30
35	470.1523	374.8826	301.6267	244.8768	200.5807	165.7427	35
40	596.8561	461.9931	361.7500	286.5503	229.5452	185.9568	40
45	733.7028	551.5652	420.6325	325.4028	255.3146	203.1097	45
50	879.4177	642.3605	477.4804	361.1639	277.9148	217.4574	50
n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.8734	0.8573	0.8264	0.7972	0.7561	0.6944	2
3	2.5060	2.4450	2.3291	2.2208	2.0712	1.8519	3
4	4.7947	4.6501	4.3781	4.1273	3.7864	3.2986	4
5	7.6467	7.3724	6.8618	6.3970	5.7751	4.9061	5
6	10.9784	10.5233	9.6842	8.9362	7.9368	6.5806	6
7	14.7149	14.0242	12.7631	11.6443	10.1924	8.2551	7
8	18.7889	17.8061	16.0287	14.4715	12.4807	9.8831	8
9	23.1404	21.8081	19.4215	17.3563	14.7548	11.4335	9
10	27.7156	25.9768	22.8913	20.2541	16.9795	12.8871	10
11	32.4665	30.2657	26.3963	23.1289	19.1289	14.2330	11
12	37.3506	34.6339	29.9012	25.9523	21.1849	15.4667	12
13	42.3302	39.0463	33.3772	28.7024	23.1352	16.5883	13
14	47.3718	43.4723	36.8005	31.3624	24.9725	17.6008	14
15	52.4461	47.8857	40.1520	33.9202	26.6930	18.5095	15

TABLE E-27—Continued

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50%

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n-year end-of-year series 0, G, 2G, .. (n - 1)G.

n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
16	57.5271	52.2640	43.4164	36.7670	28.2960	19.3208	16
17	62.5923	56.5883	46.5820	38.6973	29.7828	20.0419	17
18	67.6220	60.8426	49.6396	40.9080	31.1565	20.6805	18
19	72.5991	65.0134	52.5827	42.9979	32.4213	21.2439	19
20	77.5091	69.0898	55.4069	44.9676	33.5822	21.7395	20
21	82.3393	73.0629	58.1095	46.8188	34.6448	22.1742	21
22	87.0793	76.9257	60.6893	48.5543	35.6150	22.5546	22
23	91.7201	80.6726	63.1462	50.1776	36.4988	22.8867	23
24	96.2545	84.2997	65.4813	51.6929	37.3023	23.1760	24
25	100.6765	87.8041	67.6964	53.1047	38.0314	23.4276	25
30	120.9718	103.4558	77.0766	58.7821	40.7526	24.3628	30
35	138.1353	116.0920	83.9872	62.6052	42.3587	24.6614	35
40	152.2928	126.0422	88.9526	65.1159	43.2830	24.8469	40
45	163.7559	133.7331	92.4545	66.7343	43.8051	24.9316	45
50	172.9051	139.5928	94.8889	67.7625	44.0958	24.9698	50
n	25%	30%	35%	40%	45%	50%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.6400	0.5917	0.5487	0.5102	0.4756	0.4444	2
3	1.6640	1.5020	1.3616	1.2391	1.1317	1.0370	3
4	2.8928	2.5524	2.2648	2.0200	1.8103	1.6296	4
5	4.2035	3.6297	3.1568	2.7637	2.4344	2.1564	5
6	5.5142	4.6656	3.9828	3.4278	2.9723	2.5953	6
7	6.7725	5.6218	4.7170	3.9970	3.4176	2.9465	7
8	7.9469	6.4800	5.3515	4.4713	3.7758	3.2196	8
9	9.0207	7.2344	5.8887	4.8585	4.0581	3.4277	9
10	9.9870	7.8872	6.3763	5.1696	4.2772	3.5838	10
11	10.8460	8.4452	6.7047	5.4166	4.4450	3.6994	11
12	11.6020	8.9173	7.0049	5.6106	4.5724	3.7842	12
13	12.2617	9.3135	7.2474	5.7618	4.6682	3.8459	13
14	12.8334	9.6437	7.4421	5.8788	4.7398	3.8904	14
15	13.3260	9.9172	7.5974	5.9688	4.7929	3.9224	15
16	13.7482	10.1126	7.7206	6.0376	4.8322	3.9452	16
17	14.1085	10.2276	7.8180	6.0901	4.8611	3.9614	17
18	14.4147	10.2788	7.8946	6.1299	4.8823	3.9729	18
19	14.6741	10.3019	7.9547	6.1601	4.8978	3.9811	19
20	14.8932	10.3019	8.0017	6.1828	4.9099	3.9868	20
21	15.0777	10.27828	8.0384	6.1998	4.9172	3.9908	21
22	15.2326	10.8482	8.0669	6.2127	4.9231	3.9936	22
23	15.3625	10.9009	8.0890	6.2222	4.9274	3.9955	23
24	15.4711	10.9433	8.1061	6.2294	4.9305	3.9969	24
25	15.5618	10.9773	8.1194	6.2347	4.9327	3.9979	25
30	15.8316	11.0687	8.1517	6.2466	4.9372	3.9997	30
35	15.9367	11.0980	8.1603	6.2493	4.9381		35
40	15.9766	11.1071	8.1625	6.2498			40
45	15.9915	11.1099	8.1631				45
50	15.9969	11.1108					50