

2 a

180  
P.S.

PART IV

—



centro de educación continua de la facultad de ingeniería, unam



S-3

ESTRUCTURAS DE ACERO

ING. OSCAR DE BUEN

Marzo 1, de 1972



Introducción

El objeto de este trabajo es presentar métodos para el análisis y diseño plástico de marcos rígidos de varios pisos, compuestos por perfiles de acero estructural y provistos de contraventeo. Estos métodos no están basados en la suposición clásica de que el material permanece siempre en el rango elástico, para cualquier sollicitación a que esté sometida la estructura, sino se tiene en cuenta su comportamiento mas allá de ese rango, lo que permite determinar la capacidad real de carga de las estructuras. Se obtienen así diseños mas racionales y económicos que los basados en los métodos elásticos convencionales.

El empleo de un coeficiente de seguridad adecuado, introducido en los cálculos en la forma de un factor de carga, permite obtener estructuras seguras y que, bajo cargas de trabajo, permanecen básicamente en el rango elástico.

Elementos estructurales que forman un marco rígido

Un marco rígido está compuesto siempre por vigas, columnas y conexiones entre ellas; además, pueden existir en él elementos de contraventeo, aunque éstos no son indispensables.

Las vigas son los miembros, generalmente horizontales, que soportan directamente las cargas verticales permanentes, vivas y muertas, que obran sobre la estructura, al mismo tiempo que mantienen a las columnas con la configuración necesaria para que sean capaces de resistir fuerzas horizontales ( en marcos no contraventeados) y contribuyen a la rigidez de conjunto de la estructura. Están sometidas, por consiguiente, a la acción de fuerzas transversales y de momentos en sus extremos, que ocasionan en ellas momentos flexionantes importantes, acompañados de fuerzas cortantes; las fuerzas normales suelen ser despreciables, excepto en algunos casos de marcos contraventeados. Se tratan básicamente como miembros en flexión, y son los elementos estructurales ideales para ser diseñados plásticamente, como lo demuestra un gran número de experiencias de laborato-

---

\* Miembro Vitalicio del Colegio de Ingenieros Civiles de México. Profesor de Estructuras en la Facultad de Ingeniería, UNAM. Ingeniero Consultor.

rio y su empleo con éxito, durante los últimos años, en muchas estructuras reales proporcionadas de acuerdo con ese procedimiento.

Las columnas de los marcos rígidos deben ser capaces de soportar las cargas axiales que les transmiten las vigas adyacentes y los tramos de columnas que se encuentran sobre ellas, llevándolas eventualmente a la cimentación, así como los momentos que reciben de las vigas, debidos a cargas verticales. Además, deben ayudar a resistir las fuerzas horizontales en marcos contraventeados y resistirlas en su totalidad en los que carecen de contraventeo, y contribuir a darle al marco la rigidez necesaria para evitar problemas de pandeo de conjunto. Trabajan fundamentalmente como elementos sometidos a compresión axial o a flexocompresión, ya que los efectos ocasionados por la fuerza cortante existente en ellas suelen ser despreciables.

Se designa aquí con el nombre genérico de "contraventeo" a todos los elementos verticales que no forman parte del marco rígido propiamente dicho pero que contribuyen a resistir las fuerzas horizontales que obran sobre él, a contrarrestar los momentos adicionales creados por el desplazamiento lineal relativo de los extremos de las columnas (efecto  $P\Delta$ ), a evitar el pandeo de conjunto del marco y a mejorar su rigidez lateral. En los marcos de varios pisos se utilizan básicamente dos tipos de elementos de contraventeo: muros de rigidez, de tabique o de concreto armado, empleados fundamentalmente en edificios urbanos, y contraventeos propiamente dichos, compuestos generalmente por ángulos de acero colocados en diagonal, en K, etc; los contraventeos del segundo tipo se utilizan también en edificios urbanos y, con mucha frecuencia, en construcciones industriales, en las que no suelen existir requisitos estéticos o funcionales que impidan su colocación.

Los marcos provistos de un contraventeo adecuado son mas rígidos y resistentes y, por consiguiente, mas económicos, que los no contraventeados, por lo que deben utilizarse siempre que sea posible. El comportamiento de los marcos contraventeados difiere de una manera tan notable del de los que no están provistos de contraventeo que es necesario estudiar los dos tipos por separado.

La condición ideal que se busca al diseñar un marco contraventado es la de que el marco en sí sea capaz de soportar todas las cargas verticales, sin tener en cuenta los momentos ocasionados por esas cargas al desplazarse horizontalmente los diversos niveles ni la posibilidad de inestabilidad de conjunto, mientras que el contraventeo se diseña para soportar la totalidad de las fuerzas horizontales. Es te ideal no puede alcanzarse nunca, puesto que la compatibilidad de las deformaciones del contraventeo y del marco propiamente dicho obliga a que ambos contribuyan a resistir las fuerzas exteriores; sin embargo, haciendo suposiciones conservadoras e introduciendo algunas simplificaciones es posible acercarse a él.

El objeto de las conexiones es transmitir los elementos mecánicos, momentos flexionantes y fuerzas cortantes y normales, de las ~~t~~ribas a las columnas y viceversa, así como las fuerzas existentes en las diagonales de contraventeo al marco propiamente dicho, obligando de esta manera a que todos los elementos estructurales trabajen en conjunto. En lo que sigue se considerará únicamente el caso en que los marcos estén provistos de juntas rígidas entre vigas y columnas, capaces de transmitir de unas a otras los elementos mecánicos íntegros existentes en ellas, sin que haya desplazamientos lineales o angulares relativos entre los extremos de las piezas que concurren en cada nudo. Las juntas de ese tipo se obtienen generalmente mediante el empleo de soldadura, aunque pueden utilizarse también pernos de alta resistencia (éstos son muy poco comunes en la actualidad en nuestro país, pero es de suponer que su empleo se generalizará en un futuro próximo).

Aunque en la mayor parte de la literatura los marcos rígidos se presentan como estructuras planas esto no es, en la mayoría de los casos, más que una simplificación de un problema mucho más complejo, ya que las estructuras de edificios son en realidad de tres dimensiones, formadas generalmente por dos grupos de marcos mutuamente perpendiculares entre sí. La separación de la estructura en marcos planos y el tratamiento aislado de éstos no suele introducir errores importantes, debido sobre todo a la poca rigidez torsional de los perfiles estructurales, pero debe recor

darso que cada una de las columnas forma parte casi siempre de dos marcos ortogona-  
les, por lo que queda sometida a flexión alrededor de los dos ejes principales de  
sus secciones transversales, lo que debe tenerse en cuenta en su diseño, en el que  
introduce dificultades considerables.

A veces pueden lograrse estructuraciones que ocasionan momentos muy reducidos  
alrededor de uno de los dos ejes principales de las columnas, lo que permite consi-  
derar que éstas se flexionan únicamente en el plano de una de las dos marcos de -  
los que forman parte; este tipo de sollicitación suele requerir columnas mas econó-  
micas que las que se necesitan cuando trabajan a flexión compuesta, por lo que en  
ocasiones puede ser conveniente buscarlo.

#### Marcos con y sin contraventeo

El comportamiento de un marco rígido varía notablemente según que esté provis-  
to de elementos auxiliares (contraventeos, muros de rigidez) que le ayuden a resis-  
tir las fuerzas horizontales y le den rigidez de conjunto o que carezca de esos ele-  
mentos, de tal manera que dependa exclusivamente de su propia resistencia y rigidez  
para su integridad estructural.

Hasta hace pocos años, las especificaciones de diseño indicaban que las colum-  
nas de los marcos rígidos se proporcionasen tomando como longitud efectiva su lon-  
gitud real, es decir, la distancia libre entre vigas de cada dos niveles consecuti-  
vos, aún en los casos en que los marcos se diseñasen para resistir las fuerzas hori-  
zontales que actuasen sobre el edificio; tampoco se hacía en ellas ninguna referen-  
cia al incremento de los momentos en las columnas ocasionado por los desplazamientos  
horizontales relativos de sus extremos, conocido como efecto  $P\Delta$ . Por consiguiente,  
se estaba aceptando implícitamente que los muros y demás elementos no estructurales  
existentes en el edificio tenían la rigidez lateral necesaria para impedir fenóme-  
nos de pandeo de conjunto y para limitar los desplazamientos horizontales  $\Delta$  a valo-  
res tales que los momentos adicionales ocasionados por ellos careciesen de importan-  
cia.

Sin embargo, en los últimos tiempos se ha construido un gran número de edificios



altos y esbeltos, carentes casi por completo de muros rígidos (que han sido sustituidos por grandes ventanales y por cancelos móviles) cuyo comportamiento depende exclusivamente, por consiguiente, de la resistencia y rigidez de la estructura; ésto ha hecho que se modifique el enfoque utilizado tradicionalmente en el diseño de marcos rígidos, basado en el dimensionamiento de miembros aislados, y que se le de una importancia cada vez mayor al comportamiento de conjunto, con objeto de determinar la condición crítica de diseño y obtener así el coeficiente de seguridad real de la estructura.

Desde luego, aún en la construcción moderna son frecuentes los casos en que es posible colocar muros de rigidez o contraventeos en diagonal en los marcos rígidos (muros de lindero y de escaleras y elevadores en edificios urbanos, ángulos cruzados de contraventeo en marcos industriales), los que deberán utilizarse siempre que sea posible ya que, como se verá mas adelante, dan lugar a diseños mas económicos, pero son también comunes las situaciones en que requisitos de funcionamiento o arquitectónicos obligan a prescindir totalmente de ellos.

Puesto que el comportamiento de un marco contraventeado difiere notablemente del de uno carente de contraventeo, las recomendaciones para su diseño deben darse por separado. A continuación se discutirán las dos formas de trabajo, para aclarar las diferencias fundamentales existentes entre ellas, tomando como base los cuatro marcos ilustrados en la figura 1.

Los cuatro marcos son geoméricamente idénticos, pero 1 y 3 están provistos de contraventeo, mientras que 2 y 4 dependen exclusivamente de su propia resistencia para soportar las cargas exteriores; sobre los dos primeros obran únicamente cargas verticales y en los otros dos existen, además, cargas horizontales concentradas en los niveles de las trabes.

Para cada uno de los marcos se han trazado varias gráficas carga-deformación, las que se discuten a continuación.

MARCO 1. Si las cargas estuviesen aplicadas en los nudos, la curva P- $\delta$  se-

ría la la, ya que el marco podría soportar cargas crecientes, sin deformarse lateralmente, hasta que alcanzasen el valor crítico  $P_{cr1a}$ , para el que se presentaría un fenómeno de pandeo, caracterizado por la aparición de deformaciones crecientes bajo carga constante; la forma de pandeo sería simétrica, debido a la existencia del contraventeo, que impide el desplazamiento lateral de los nudos.

Al aplicar las cargas verticales fuera de los nudos las deformaciones laterales empiezan a presentarse tan pronto como se inicia el proceso de carga, debido a que la flexión de las vigas es transmitida a las columnas a través de los nudos (curva lb); sin embargo, la influencia de ese fenómeno sobre la capacidad total de carga del marco es reducida, de manera que la carga  $P_{cr1b}$  para la que el equilibrio se vuelve inestable es muy cercana a  $P_{cr1a}$ ; obviamente, la forma de pandeo sigue siendo simétrica.

La recta horizontal lc representa el comportamiento del marco de acuerdo con la teoría plástica simple, de manera que la carga  $P_{ps}$  corresponde a la formación de mecanismos en las vigas; desde luego, las columnas que concurren en cada nudo deben ser capaces de proporcionar un momento resistente total mayor, o como mínimo igual, al momento plástico de las vigas.

ld corresponde al comportamiento de la estructura según la teoría plástica modificada para tener en cuenta la influencia de la fuerza normal en las columnas, la que hace que disminuya su capacidad para resistir momento, por lo que pueden fallar antes de que se alcance la carga necesaria para la formación de mecanismos en las vigas; la carga de colapso correspondiente se ha designado  $P_{pm}$ .

(La deflexión utilizada para el trazo de las dos primeras curvas es el desplazamiento lateral de un punto de las columnas, marcado  $\delta_c$  en la figura, mientras que para las otras dos se ha empleado el movimiento vertical  $\delta_v$  de un punto de la zona central de las vigas .)

Las cuatro curvas se han obtenido tomando como base la geometría original de la estructura, lo que en marcos contraventeados introduce errores que son, en general, de poca importancia.

Con la posible excepción de algunos marcos muy altos y esbeltos, la carga crítica de pandeo es siempre mucho mas grande que la máxima que puede soportar la estructura de acuerdo con la teoría plástica modificada, por lo que ésta puede considerarse como la carga real de colapso.

MARCO 2. Las curvas 2a y 2b corresponden a la 1a y 1b del primer marco; la influencia de la flexión en los miembros es tambien pequeña, por lo que los valores de  $P_{cr2a}$  y  $P_{cr2b}$  correspondientes, respectivamente, a cargas verticales aplicadas en los nudos y fuera de ellos, siguen siendo muy parecidos. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en el primer caso, el pandeo se presenta ahora acompañado de un desplazamiento lateral del marco en conjunto, con valores mucho mas pequeños de la carga  $P$ , ya que la carga crítica de pandeo de un marco en el que no están impedidos los desplazamientos laterales de los nudos es mucho menor que la correspondiente a ese mismo marco, cuando se impiden esos desplazamientos (ver, por ejemplo, la ref 2).

Los valores de las cargas de colapso predichos por la teoría plástica,  $P_{ps}$  y  $P_{pm}$  son los mismos que en el marco 1 pero, a diferencia de lo que sucede en ésta, es relativamente frecuente que  $P_{cr}$  sea menor que  $P_{pm}$  y que, por consiguiente, el diseño quede regido por el pandeo de conjunto del marco, posibilidad que será necesario explorar.

Evidentemente, tambien en este caso es posible basar los cálculos en la geometría original de la estructura, sin tener en cuenta el efecto  $P\Delta$ , ya que, en teoría, los desplazamientos laterales son nulos hasta que se alcanza la carga de colapso. De hecho, los marcos de este tipo se diseñan siguiendo procedimientos análogos a los utilizados para marcos contraventeados, y se comprueba después si la carga crítica de pandeo no es menor que la correspondiente a la formación del mecanismo.

MARCO 3. Debido a la existencia de fuerzas horizontales que obran sobre el marco al mismo tiempo que las verticales, los desplazamientos laterales se inician en el mismo instante en que se empiezan a aplicar las cargas sobre el marco; por el mismo motivo, aparecen momentos flexionantes en trabes y columnas desde un princi-

pio, lo que hace que la influencia de la posición de las cargas verticales (en los nudos, o fuera de ellos) sea aún menor que en los dos primeros casos, de manera que puede suponerse que las curvas correspondientes a las dos posiciones de la carga vertical (3a y 3b) se confunden. (Los momentos ocasionados por las fuerzas horizontales en las trabes y columnas son de poca importancia, ya que los contraventeos mantienen los desplazamientos horizontales dentro de límites muy reducidos).

En este caso no se presenta un fenómeno de pandeo propiamente dicho, caracterizado por la existencia, hasta que se alcanza la carga crítica, de una configuración indeformada de equilibrio, ya que las deformaciones laterales se inician desde el instante en que se empiezan a aplicar cargas sobre el marco, pero el contraventeo mantiene los desplazamientos horizontales de los nudos dentro de valores tan reducidos que su influencia en el comportamiento de la estructura es muy pequeña y puede ignorarse, para fines de diseño, sin introducir errores apreciables en el resultado. Por consiguiente, la condición crítica corresponde al pandeo simétrico del marco (ignorando los pequeños desplazamientos horizontales de los nudos) y la carga que la ocasiona es prácticamente igual a la carga crítica del marco contraventeado sometido a cargas verticales únicamente.

Las rectas 3c y 3d siguen representando, lo mismo que en los dos primeros casos, el comportamiento del marco de acuerdo con la teoría plástica simple y con la teoría modificada por efecto de la fuerza axial en las columnas, respectivamente, mientras que la 3e representa los resultados de incluir en la teoría plástica simple el efecto  $P\Delta$ , además de la fuerza normal en las columnas (es decir, se supone que el mecanismo de colapso se forma sin que se presenten desplazamientos laterales, pero éstos se toman en cuenta en las etapas sucesivas del proceso de carga); esta curva se separa muy poco de la 3d ya que, como se mencionó con anterioridad, el contraventeo mantiene los desplazamientos  $\Delta$  con valores muy reducidos.

Por último, la curva 3f describe el comportamiento real de la estructura siendo  $P_u$ , ordenada del punto más elevado, la carga máxima que puede soportar el marco; este valor se encuentra muy cerca de  $P_m$ , por lo que en marcos contraventeados --

pueden aceptarse los resultados de la teoría plástica simple modificada para tener en cuenta los efectos de las fuerzas normales en las columnas como una buena aproximación al comportamiento real de la estructura. Lo mismo que en el caso 1, la carga crítica de pandeo suele ser muy elevada, por lo que no rige en general el diseño, con la posible excepción de algunos casos de marcos muy esbeltos.

MARCO 4. Se trata de un marco no contraventeado, sometido a una combinación de cargas verticales y horizontales.

Tampoco en este caso es posible una falla por pandeo, puesto que el sistema de cargas ocasiona desde un principio desplazamientos horizontales de los nudos; el colapso se presenta por inestabilidad, caracterizada por deflexiones laterales crecientes, primero bajo cargas cada vez mayores y luego, después de que éstas alcanzan un valor máximo, bajo cargas decrecientes (véase la curva 4f que representa, en forma esquemática, el comportamiento real del marco).

Las curvas 4c, 4d y 4e describen, como en el marco 3, el comportamiento predicho por la teoría plástica simple, por la teoría plástica modificada por efecto de carga axial en las columnas y por esta misma teoría introduciendo en ella, además, el efecto  $P\Delta$ . La curva 4g es la obtenida estudiando la formación sucesiva de articulaciones plásticas en la estructura, con la suposición de que los miembros que la componen permanecen en estado elástico entre articulaciones plásticas, y teniendo en cuenta tanto las deformaciones de los miembros individuales como las de conjunto de la estructura, al plantear las ecuaciones de equilibrio; a partir del punto A, correspondiente a la formación del mecanismo de colapso, la curva coincide con la 4e (Ese punto A es, en general, una buena indicación del valor de la carga máxima que puede soportar la estructura,  $P_u$ ).

Como se observa en la figura, en marcos no contraventeados  $P_u$  es, con mucha frecuencia, menor que  $P_{pm}$ , por lo que la solución obtenida aplicando la teoría plástica simple, aún con efecto de fuerza normal en las columnas no es, en general, na de confianza (salvo, en ocasiones, en marcos de poca altura<sup>12</sup>).

## DISEÑO DE MARCOS CONTRAVENTEADOS

### Introducción

De acuerdo con la discusión anterior, los marcos de esta tipo pueden diseñarse utilizando la teoría plástica simple, basada en la geometría original de la estructura, modificada para tener en cuenta el efecto de las fuerzas normales existentes en las columnas. Siempre, desde luego, que se les proporcione un contraventeo adecuado, por medio de elementos de tensión cruzados o de muros de rigidez, capaz de resistir, simultáneamente, las fuerzas horizontales que obren sobre el marco y la tendencia de éste a pandearse lateralmente. En el caso de estructuras compuestas por varios marcos paralelos entre sí y ligados en los diferentes niveles por losas de concreto o por algún otro tipo de diafragma rígido no es necesario, desde luego, proveer a todos los marcos de contraventeo, ya que los que no lo posean se apoyarán en los contraventeados, a través de los diafragmas horizontales.

Como se verá más adelante, en ocasiones es necesario introducir otra modificación en la teoría plástica simple, para tener en cuenta las condiciones de compatibilidad de las deformaciones angulares de todas las barras, vigas y columnas, que concurren en cada nudo del marco.

### Alcance

En este trabajo se cubre el diseño de vigas, columnas y elementos de contraventeo de marcos rígidos de varios pisos, sujetos a las condiciones y suposiciones siguientes:

a) El material empleado es acero dulce ASTM A7 ó A36, o algún otro tipo que tenga una gráfica esfuerzo-deformación semejante a la de estos aceros, y las condiciones de trabajo son tales que aseguren un comportamiento dúctil del material.

b) Las conexiones entre vigas y columnas deben ser completamente rígidas, es decir, capaces de transmitir los elementos mecánicos íntegros existentes en ellas, sin que haya desplazamientos angulares o lineales relativos entre sus extremos.

c) No se toma en cuenta ninguna contribución a la resistencia de vigas y columnas debida a la losa de concreto que se apoya frecuentemente en las primeras o

al recubrimiento de las segundas.

d) Las fuerzas laterales son resistidas íntegramente por muros de rigidez o contraventeos, y puede despreciarse el efecto sobre la capacidad de carga de la estructura de los pequeños desplazamientos horizontales de los nudos.

#### Factores de carga

El diseño de los distintos elementos estructurales que componen el marco se hará de tal manera que sean capaces de soportar las cargas de trabajo multiplicadas por el factor de carga adecuado, tomando como base para el proporcionamiento de esos elementos el esfuerzo de fluencia del acero utilizado en ellos.

Se emplearán los dos factores de carga siguientes:

$\lambda_1 = 1.7$ , cuando sobre la estructura obren únicamente cargas permanentes, - vivas y muertas.

$\lambda_2 = 1.3$ , para la combinación de cargas permanentes y eventuales, estas últimas debidas a viento o sismo.

Estos factores de carga garantizan que bajo cargas de trabajo el comportamiento de la estructura será predominantemente elástico, sin que se presenten deformaciones permanentes que tengan una influencia desfavorable.

#### Conceptos básicos de diseño

Las vigas se diseñarán de tal manera que bajo la acción de las cargas permanentes de diseño (cargas de trabajo multiplicadas por  $\lambda_1$ ) se conviertan en mecanismos, por la formación de articulaciones plásticas en sus extremos y en la zona central, mientras que el diseño de las columnas se hará para que sean capaces de soportar los elementos mecánicos que les transmiten las vigas hasta la formación de los mecanismos de colapso en ellas. No se considerará flexión debida a fuerzas horizontales ni en vigas ni en columnas, ya que se supone que el contraventeo resiste esas fuerzas en su totalidad, y se diseñará para ello, pero sí se tomarán en cuenta las fuerzas normales que aparecen en las vigas y columnas de las crujeas contraventeadas al obrar las fuerzas horizontales sobre el marco, afectadas por el factor de carga  $\lambda_2$ .

En el diseño de todos los elementos estructurales se tomarán en cuenta fenómenos de pandeo local, lateral, etc., que puedan afectar desfavorablemente su capacidad de carga.

## DISEÑO PRELIMINAR

### Objeto

El diseño preliminar tiene por objeto la determinación de tamaños aproximados de vigas y columnas, los que se revisarán después, al hacer el diseño definitivo, para ver si cumplen todos los requisitos necesarios.

En esta primera parte del diseño las vigas y columnas se proporcionan para que resistan las cargas verticales de trabajo multiplicadas por  $\lambda_1$ .

### Diseño preliminar de vigas

En el caso frecuente de que la viga sea de sección constante y que sobre ella obra una carga uniformemente repartida que ocupe todo el claro, el momento plástico necesario se obtiene por medio de la ecuación

$$M_p = \frac{1}{16} \omega_u L^2 \quad (1)$$

en la que  $\omega_u$  es la carga total por unidad de longitud, multiplicada por  $\lambda_1$ , y  $L$  es el claro teórico de la viga, es decir, la distancia entre los ejes de las columnas en las que se apoya.

Si la viga no es de sección constante, o la carga que obra sobre ella no es uniforme, o no se cumple ninguna de las dos condiciones, los momentos plásticos de sus diversas secciones transversales se elegirán de manera que la viga se convierta en un mecanismo; los cálculos se basarán en el claro teórico de la viga.

### Diseño preliminar de columnas

Las columnas que concurren en cada uno de los nudos del marco se diseñarán de tal manera que la suma de sus momentos plásticos resistentes reducidos por la acción de la fuerza normal que obra sobre ellas,  $M_{pc}$ , sea igual o mayor que el momento de desequilibrio que las vigas transmiten al nudo, correspondiente a la formación de mecanismos en ellas.



En el diseño preliminar se supondrá que el momento de desequilibrio se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que concurren en cada nudo excepto, - evidentemente, en los nudos del último nivel, en los que la única columna existente deberá resistir el momento de desequilibrio íntegro.

Para secciones I o H flexionadas alrededor de su eje de mayor momento de inercia, el momento plástico resistente de la columna, reducido por carga axial,  $M_{px}$ , está dado, con aproximación suficiente, por las expresiones siguientes:

$$\text{Si } P/P_y \leq 0.15, \quad M_{px} = M_{px} \quad (2)$$

$$\text{Si } P/P_y > 0.15, \quad M_{px} = 1.18 \left(1 - P/P_y\right) M_{px} \leq M_{px} \quad (3)$$

Si la columna está flexionada alrededor de sus dos ejes principales la ecuación (2) se conserva, y la (3) se sustituye por:

$$\text{Si } P/P_y > 0.15, \quad M_{px} = \left(1 - P/P_y - M_y/M_{py}\right) M_{px} \leq M_{px} \quad (4)$$

En las expresiones anteriores P es la fuerza axial existente en la columna, correspondiente a cargas de trabajo multiplicadas por  $\lambda_1$ ,  $P_y$  la fuerza normal que ocasionaría la plastificación íntegra de la sección en ausencia de momento flexionante ( $P_y = A\sigma_y$ ),  $M_{px}$  el momento plástico resistente de la sección sometida a flexión pura alrededor de su eje de mayor momento de inercia ( $M_{px} = Z_x\sigma_y$ ),  $M_y$  el momento existente en la columna alrededor del eje y, correspondiente a cargas de trabajo multiplicadas por  $\lambda_1$  y  $M_{py}$  el momento plástico resistente de la sección sometida a flexión pura alrededor de su eje de menor momento de inercia ( $M_{py} = Z_y\sigma_y$ ).

El valor de  $M_{px}$ , obtenido con las ecuaciones (2), (3) ó (4), debe ser igual o mayor que el mas grande de los momentos existentes en los extremos de la columna en estudio.

#### Contraventeo

Las secciones de los contraventeos no se determinan en el diseño preliminar.

#### DISEÑO DEFINITIVO

Objeto

En el diseño definitivo se revisan los perfiles de vigas y columnas obtenidos en forma preliminar para determinar si satisfacen todos los requisitos referentes a capacidad para resistir cortante, deformaciones máximas admisibles, inestabilidad, etc., así como las condiciones impuestas por solicitaciones no consideradas en el diseño preliminar (carga viva en crujeas alternadas, viento o sismo, etc.).

Diseño definitivo de vigas

a) Los perfiles obtenidos en el diseño preliminar se revisarán utilizando el claro libre de las vigas, es decir, la distancia entre las caras exteriores de las columnas que las soportan. Por consiguiente, la ecuación (1) se sustituirá por:

$$M_p = \frac{1}{16} \omega_u L_v^2 \quad (5)$$

en la que  $\omega_u$  sigue siendo la carga total por unidad de longitud que soporta la viga, multiplicada por  $\lambda_1$ , y  $L_v$  es su claro libre.

Puesto que el diseño de las vigas se basa en la suposición de que sus extremos están empotrados, deberá revisarse la capacidad para resistir momento de los nudos en los que se apoyan, con objeto de asegurarse de que esa suposición es correcta. El momento máximo que puede transmitir una viga a una columna es igual a su momento plástico resistente incrementado en una cantidad igual al producto de la fuerza vertical que la viga transmite a la columna (reacción vertical en el extremo de la viga) multiplicada por la mitad del peralte de la columna (véase la figura (2), es decir,

$$M = M_{pv} + V \frac{d_c}{2} \quad (6)$$

siendo  $V$  la reacción vertical en el extremo de la viga y  $d_c$  el peralte de la columna.

Para que la suposición de "extremos empotrados" sea correcta es necesario que la suma de las capacidades para soportar momento de las dos columnas que concurren en cada uno de los nudos extremos de la viga en estudio (o la capacidad de la

única columna que llega al nudo, cuando éste es del último piso) sea mayor o igual que el momento de desequilibrio en el nudo, obtenido sumando algebraicamente los valores dados por la ecuación (6) para las dos vigas que concurren en él o igual, simplemente, al transmitido por la única viga que llega al nudo cuando se trata de columnas extremas (cuando se considere carga viva en claros alternados, en la determinación de la capacidad de los nudos para resistir momento debe tenerse en cuenta la contribución de la viga que permanece en estado elástico; este punto se trata en detalle mas adelante).

La condición anterior debe cumplirse siempre, en teoría, puesto que es la que sirve de base para el proporcionamiento de las columnas; sin embargo, hay algunos casos particulares, de los que es típico el constituido por una viga del último nivel que se apoya en una columna extrema, en los que puede ser conveniente, por razones de economía y facilidad de fabricación, proporcionar una columna ligera, incapaz de soportar el momento plástico de la viga; en ese caso la articulación se formará en el extremo superior de la columna, con un momento menor que el plástico de la trabe, lo que obligará a aumentar la escuadría de ésta, pero si se dimensiona la columna para resistir el momento íntegro transmitido por la viga se obtienen en muchas ocasiones perfiles mayores que los necesarios en los tramos inferiores, lo que no es deseable desde un punto de vista constructivo.

b) Vigas que forman parte de crujeas contraventeadas. Las vigas que forman parte de crujeas contraventeadas, diseñadas previamente para resistir cargas verticales únicamente, con un factor de carga  $\lambda_1$ , deben revisarse sometidas a la acción combinada de fuerzas axiales y transversales, empleando un factor de carga  $\lambda_2$ , utilizando para ello la ecuación (7)<sup>3,4</sup>, puesto que actúan como montantes comprimidos de las armaduras verticales que resisten las fuerzas horizontales y los momentos adicionales producidos por el desplazamiento lateral de las cargas verticales. (Véase Fig. 13)

$$\omega = \frac{1 - (P_v/P_e)}{1 - 0.18 (P_v/P_e)} \left(1 - \frac{P_v}{P_o}\right) \omega_p \quad (7)$$

$P_v$  es la fuerza axial existente en la viga,  $P_e$  la carga de pandeo elástico en el plano de la flexión,  $P_o$  la carga axial crítica calculada como si no existiese flexión, para pandeo en el plano del marco,  $\omega_p$  la carga uniformemente repartida que ocasiona el colapso plástico de la viga, en ausencia de fuerza axial, y  $\omega$  la capacidad de carga de la viga, reducida por el efecto de la fuerza axial  $P_v$ .

La viga elegida originalmente es adecuada si el valor de  $\omega$  dado por (7) es mayor o igual que la carga vertical total, uniformemente repartida, que obra sobre ella, afectada del factor  $\lambda_2$ , el que también se utiliza en el cálculo de la fuerza axial  $P_v$ .

La fuerza axial total que obra en todas las traveses del nivel  $i$ -ésimo que forman parte de crujeas contraventeadas puede calcularse conservadoramente con la ecuación<sup>3A</sup>

$$P_{vi} = \sum_n^i H_i + \frac{\Delta_i}{h_i} \sum_n^i W_i \quad (8)$$

en la que  $\sum_n^i H_i$  y  $\sum_n^i W_i$  son, respectivamente, las sumas de todas las fuerzas horizontales y de todas las fuerzas verticales que actúan sobre el edificio desde el nivel superior  $n$  hasta el  $i$ , incluyendo a éste, multiplicadas por el factor de carga  $\lambda_2$ ,  $\Delta_i$  es el desplazamiento horizontal relativo entre los niveles  $i$  e  $i-1$  y  $h_i$  la altura de las columnas entre ellos.

$\Delta_i$  puede estimarse de un conocimiento del alargamiento del contraventeo en el entrepiso en estudio, o puede tomarse  $\Delta_i/h_i = 0.004$ .

Si en una estructura existe una sola cujea contraventeadada en el nivel  $i$ , la trabe correspondiente deberá ser capaz de resistir la fuerza total calculada con la ecuación 8; en cambio, si las crujeas provistas de contraventeo son varias, esa fuerza se repartirá entre todas ellas. Desde luego, si la estructura está compuesta por varios marcos rígidos paralelos, ligados entre sí por medio de losas u otros

diafragmas rígidos existentes en los diferentes niveles, el cálculo de la fuerza  $P_v$  se hará para todo el edificio y se distribuirá entre todas las crujeas contravonteadas existentes en el nivel en estudio, aunque se encuentren en marcos diferentes.  $P_v$  se distribuirá en partes iguales cuando todas las crujeas contravonteadas tengan claros semejantes, pero cuando éstos difieran mucho de unas crujeas a otras será necesario tener en cuenta la inclinación de los contravientos.

c) Consideraciones adicionales en el diseño

Deberá revisarse que las vigas satisfagan los requisitos necesarios para que no se presenten fenómenos de pandeo local o lateral, y se proporcionarán los atiesadores o el contraventeo lateral que se requieran. Así mismo, se revisará que su resistencia al cortante sea adecuada.

d) Deflexiones

Puede considerarse que la flecha máxima en una viga sometida a cargas de trabajo totales, vivas y muertas, uniformemente repartidas, no excede  $1/360$  del claro si su relación  $L_v/D$  (distancia libre entre paños de columnas y peralte de la viga) no es mayor que el valor correspondiente indicado en la tabla I.<sup>5</sup>

Los valores de la tabla han sido deducidos para un acero con límite de fluencia de  $2520 \text{ kg/cm}^2$ , para un factor de carga de 1.7 y para perfiles cuyo factor de forma tenga un valor del orden de 1.14, correspondiente a secciones I o H laminadas o formadas por tres placas soldadas de proporciones usuales, flexionadas alrededor de su eje de mayor momento de inercia.

TABLA I

Valor mayor de k	0.5 ó mas	0.4	0.3	0.2	0.1	0 (Extremos empotrados)
$L_v/D$	16	19	22	25	33	40

k es el factor de rigidez de cada uno de los extremos de la trabe, igual al cociente de su rigidez entre la suma de las de todos los miembros que concurren en el nudo considerado, incluyendo la trabe misma; es decir,  $k = (I/L) \text{ trabe} / \sum (I/L)$ . En general se tendrán dos valores distintos de k, uno para cada extremo; en la tabla se utiliza el mayor de los dos.

### Diseño definitivo de columnas

a) El diseño definitivo de las columnas tiene por objeto comprobar si las secciones obtenidas en el diseño preliminar son capaces de soportar los elementos mecánicos reales que obran sobre ellas, teniendo en cuenta efectos de inestabilidad y de continuidad en los nudos, que no fueron considerados originalmente. Puesto que los efectos de inestabilidad hacen que disminuya, en general, la resistencia a la flexión de las columnas, con frecuencia habrá que aumentar las esquadrias obtenidas en un principio.

En el diseño de columnas puede ser necesario considerar las cuatro condiciones de carga que se mencionan a continuación:

1. Carga viva completa, aplicada sobre todas las vigas de la estructura.

2. Carga viva parcial, aplicada únicamente sobre determinadas vigas de la estructura, mientras que sobre las restantes obra la carga muerta exclusivamente.

(En estas dos condiciones se utilizará el factor de carga  $\lambda_1$ ).

3 y 4. Carga viva completa o parcial, combinada con fuerzas horizontales eventuales, debidas a viento o sismo, con factor de carga  $\lambda_2$ .

La primera condición de carga produce, evidentemente, las fuerzas axiales máximas posibles en las columnas, mientras que la segunda tiene por objeto estudiar las configuraciones de la carga viva que ocasionan los momentos flexionantes máximos en ellas; aunque las fuerzas axiales se reducen, esta segunda condición puede ser crítica, debido a la disminución en capacidad de carga que experimentan las columnas al crecer la magnitud de los momentos flexionantes que deben soportar simultáneamente (No es necesario estudiar distintas distribuciones de carga viva en todos los casos, siendo los códigos y el juicio del proyectista los que determinan, en función de la importancia relativa de los dos tipos de carga, muerta y viva, si las columnas de un edificio dado se diseñaran únicamente para carga viva completa o si se estudiarán otras distribuciones de esa carga).

Las condiciones 3 y 4 no son críticas en columnas de marcos contraventados, con la única posible excepción de las que limitan, a uno y otro lado, las crujeas en las

quo se ha colocado el contraventeo.

En la figura 3 se muestra una porción de un marco sobre el que obran, en todas las trabes, cargas muerta y viva completas, multiplicadas por el factor de carga  $\lambda_1$ ; en esas condiciones se supone que todas las trabes se han convertido en mecanismos, y cada una de ellas transmite a las columnas en las que se apoya un momento cuya magnitud está dada por la ecuación 6.

Supóngase que la carga total, por unidad de longitud de viga, es la misma en todo el marco, y que los claros AB y BC son iguales entre sí, mientras que el CD es mayor; en esas condiciones, los momentos de desequilibrio son nulos en los nudos del eje B y diferentes de cero en los otros tres ejes; en los extremos, A y D, porque reciben momentos de un solo lado, y en el interior, C, que recibe momentos de los dos lados, porque éstos son de magnitudes diferentes. Por consiguiente, las columnas del eje B permanecen rectas, mientras que las de los ejes restantes se flexionan en curvatura doble, al ser arrastrados sus extremos por los giros de los nudos.

En la figura 4 está representada la misma parte del marco mostrada en la 3, pero ahora no existe carga viva en todas las vigas, sino únicamente en claros alternados; por consiguiente, nada más se transforman en mecanismos las vigas que soportan la carga total, mientras que las demás se conservan en estado elástico.

Comparando las dos figuras se observan varios puntos interesantes:

1. Las columnas de los ejes laterales se flexionan en curvatura doble en los dos casos, con la única diferencia de que en el primero los momentos que obran sobre sus dos extremos son de intensidades prácticamente iguales, mientras que en el segundo disminuye la magnitud de uno de los dos momentos.

2. Las columnas del eje B, que en el primer caso permanecen rectas y, por tanto, trabajan exclusivamente a compresión axial, en el segundo se flexionan en curvatura simple.

3. Las columnas del eje C (intermedias, pero con vigas de diferentes longitudes a uno y otro lado) se flexionan en curvatura doble en el primer caso y en curvatura simple en el segundo.

La capacidad de carga de piezas flexocomprimidas sometidas a la acción de momentos extremos que las flexionan en curvatura simple es menor que la de piezas análogas sobre las que obran momentos de las mismas magnitudes pero que las flexionan en curvatura doble<sup>3,4,6</sup> (la disminución en resistencia puede ser importante en columnas de relación de esbeltez alta o cuando las fuerzas axiales existentes en ellas son elevadas y, más aún, cuando se juntan esos dos factores), pero lo que la segunda condición de carga (carga viva alternada) puede ser crítica en columnas intermedias, a pesar de que disminuye la fuerza axial, al suprimir las cargas vivas en algunas de las vigas (esta disminución es pequeña en columnas que soportan varios pisos, ya que para originar la curvatura más desfavorable en cada una de ellas basta con suprimir la carga viva en dos traveses, como se muestra en la Figura 5 para el tramo de columna AB). Esta condición de carga puede ser más crítica todavía en las columnas que bajo carga viva total quedan sometidas exclusivamente a compresión, como las del eje B de la figura 5.

Estudios teóricos y experimentales<sup>5,5,6,7</sup> han demostrado que el comportamiento de una columna que forme parte de un marco rígido no es el mismo que el de una pieza flexocomprimida aislada, ya que los extremos de la primera están unidos a nudos a los que llegan otras piezas, por lo que su respuesta ante las sollicitaciones exteriores se ve modificada por las características de esos elementos y, a la larga, por las de toda la estructura. Afortunadamente, sin embargo, es posible obtener una representación suficientemente precisa, para fines prácticos, del comportamiento de una columna, estudiando únicamente una porción de la estructura, convenientemente seleccionada, de la que forme parte esa columna.

Como una consecuencia de la continuidad de la estructura, las columnas de los marcos rígidos están sometidas a la acción simultánea de fuerzas axiales y de momentos en sus extremos.

Considérese el comportamiento de una columna bajo carga axial constante, cuando se aplican momentos de intensidad creciente en sus extremos; si la fuerza normal que obra sobre ella es menor que su carga crítica de pandeo, será capaz de resistir esos



momentos inicialmente, proporcionando al mismo tiempo una cierta rigidez contra la deformación, la que irá disminuyendo al ir cediendo plásticamente el miembro y al adquirir importancia los momentos de segundo orden debidos a la carga axial y a la deformación por flexión de la pieza.

En la figura 6 se muestra una curva típica momento extremo-rotación extrema de una pieza flexocomprimida, obtenida, como se mencionó en el párrafo anterior, aplicando momentos de intensidad creciente en los extremos de una barra sometida a la acción de una fuerza normal constante (existen técnicas que permiten obtener esas curvas para miembros reales; véanse las referencias 3,8,9 y 10).

El punto mas elevado de la curva, correspondiente al momento máximo que la columna es capaz de soportar, se presenta en o debajo del valor del momento plástico reducido por carga axial,  $M_{po}$ , en cuya obtención no se tienen en cuenta efectos de inestabilidad; despues, al ir aumentando las rotaciones la curva desciende, ya que disminuye la capacidad de la pieza para soportar momentos.

Las curvas momento-rotación del tipo de la dibujada en la figura 6 son una descripción muy útil del comportamiento estructural de una barra flexocomprimida, y permiten desarrollar métodos racionales de diseño para marcos que contienen miembros con esas características 3,4,11.

Considérese la columna AB del marco de la figura 5; su comportamiento se puede estudiar aislando el subconjunto compuesto por ella misma y por las piezas que concurren en sus dos extremos, figura 7, y sustituyendo la influencia del resto de la estructura por resortes colocados en los extremos exteriores de vigas y columnas.

En cada uno de los nudos, A y B, obren un momento de desequilibrio, cuya magnitud está dada por la expresión siguiente, para el nudo A;

$$(M_D)_A = \left[ (M_P)_{AC} + (V_T)_{AC} \frac{d_c}{2} \right] - \left[ \frac{(W_M)_{AB}^2}{12} + (V_M)_{AB} \cdot \frac{d_c}{2} \right] \quad \text{Ec 9}$$

En efecto, el momento de desequilibrio es igual al que ejerce sobre el nudo la viga de la izquierda, convertida en un mecanismo bajo la acción de las cargas muerta y viva completas, multiplicadas por  $\lambda$ ; , menos el debido a la viga de la derecha,

sobre la que obra la carga muerta únicamente (también multiplicada por  $\lambda_1$ ) y la que, por consiguiente, se encuentra en estado elástico; evidentemente, ese momento de desequilibrio puede ser resistido por la viga AD, en estado elástico, y las dos columnas que llegan al nudo, AE y AB (la viga de la izquierda, convertida en un mecanismo, no contribuye a equilibrarlo), y el perfil ensayado para la columna AB será adecuado si ésta, junto con los demás elementos resistentes, es capaz de soportar los momentos de desequilibrio existentes en los dos nudos en que conectan sus extremos.

Por consiguiente, la revisión del perfil obtenido en el diseño preliminar para la columna AB debe llevarse a cabo en dos partes, estudiando por separado el comportamiento de cada uno de los nudos que la limitan, utilizando para ello subconjuntos como el mostrado en la figura 3 y aplicándoles los principios estructurales básicos de equilibrio y compatibilidad.

Las dos columnas y la viga AD que concurren en el nudo serán adecuadas si la suma de sus momentos resistentes es igual o mayor que el momento que la viga AC, convertida en un mecanismo, transmite a la junta, teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad de deformaciones; es decir, el momento resistente total de la junta puede ser menor que la suma de los momentos resistentes máximos de las tres barras que concurren en ella, si esos momentos máximos corresponden a rotaciones diferentes, por lo que es necesario trazar las gráficas momento-curvatura de las tres barras y, por superposición, obtener la de la junta completa; si su ordenada máxima, que corresponde al momento resistente máximo de la junta, es mayor que el momento transmitido por la viga AC, los perfiles son adecuados; en caso contrario, será necesario aumentar alguno o algunos de ellos.

Desde luego, para tener la seguridad de que el perfil empleado en una columna cualquiera es adecuado, es necesario estudiar el comportamiento de las dos juntas de las que forma parte.

Considérese el comportamiento del subconjunto constituido por las cuatro barras que concurren en el nudo A cuando se aplican cargas verticales crecientes en las

dos vigas, primero en incrementos iguales en ambas, hasta completar la carga muerta, y después únicamente en la viga de la izquierda hasta que obre sobre ella la carga total, muerta y viva, mientras que en la de la derecha se conserva la carga muerta únicamente.

En la primera parte del proceso de carga (figura 9 a) el momento de desequilibrio es nulo (suponiendo, desde luego, que los claros de las dos vigas son iguales), ya que actúan sobre el nudo dos momentos de la misma magnitud y de sentidos contrarios; no hay, por consiguiente, flexión en las columnas.

En cuanto se empieza a aplicar la carga viva en la viga AC (figura 9 b) aparece un momento de desequilibrio que hace que el nudo gire; esta rotación es, por compatibilidad, común a todas las barras que concurren en él, de manera que el momento de desequilibrio se reparte proporcionalmente a las rigideces angulares de las barras, lo que ocasiona la aparición de un momento en el extremo de cada una de las columnas, al mismo tiempo que aumenta el de la viga AD (Por este motivo, las gráficas momento-curvatura de las columnas, figuras 9 e y f, empiezan en cero, puesto que no hay momento en ellas mientras el nudo no gira, y en cambio la de la viga AD, figura 9 d, se inicia en  $(\bar{M}_{AD})_M$ , momento de empotramiento correspondiente a la carga muerta únicamente, que existe ya en el extremo de la viga cuando el nudo empieza a girar).

La condición de colapso se alcanza cuando se termina de aplicar la carga viva en la viga de la izquierda y ésta se transforma en un mecanismo; puesto que las columnas deben ser capaces de soportar los elementos mecánicos que las transmiten las vigas hasta que éstas fallen por formación de mecanismos, deberán tener resistencia suficiente para soportar, con ayuda de la trabe que permanece en estado elástico, el momento de desequilibrio correspondiente a esa condición.

En un instante cualquiera de la segunda etapa del proceso de carga (es decir, durante la aplicación de la carga viva sobre la viga AC) el nudo se encuentra en las condiciones indicadas en la figura 10 y, por equilibrio, puede escribirse:

$$M_{AC} = (\bar{M}_{AD})_M + (M_{AD})_{\theta} + (M_{AE})_{\theta} + (M_{AB})_{\theta} = (\bar{M}_{AD})_M + (M_{AD} + M_{AE} + M_{AB})_{\theta} \quad \text{Ec 10}$$

En la expresión anterior  $M_{AC}$  es el momento transmitido al nudo por la viga AC, que alcanza su valor máximo cuando se forma en ella el mecanismo de colapso,  $(\bar{M}_{AD})_M$  es el que le transmite la barra AD, correspondiente a carga muerta únicamente, y los momentos restantes son los que aparecen en las dos columnas y en la viga AD como una consecuencia del giro del nudo. En el cálculo de  $M_{AC}$  y de  $(\bar{M}_{AD})_M$  debe incluirse el producto de la reacción vertical en el extremo de la viga por la mitad del peralte de la columna.

El segundo miembro de la ecuación 10 representa la capacidad total de la junta para resistir momento, correspondiente a una rotación cualquiera  $\theta$  del nudo; si se conocen las gráficas M- $\theta$  de las tres barras AD, AE Y AB, el valor de ese momento puede obtenerse sumando los momentos resistentes de todas ellas para el valor considerado del ángulo de rotación (véanse las figuras 9d, e, f y g), y la superposición de esas tres gráficas proporciona la curva M- $\theta$  de la junta completa (figura 9c); la ordenada del punto más alto de esta curva es el momento máximo que puede soportar la junta, el que debe ser igual o mayor que el momento  $M_{AC}$  correspondiente a la formación del mecanismo de colapso en la viga de la izquierda, dado por la ecuación 6.

La aplicación de la teoría plástica simple al subconjunto de la figura 9 indicaría que el momento resistente de la junta es igual a la suma de los momentos resistentes máximos de la viga de la derecha y de las dos columnas. El momento resistente máximo de la viga,  $M_{AD}''$  (figura 9d), vale:

$$M_{AD}'' = (M_P)_{AD} + \frac{\omega_m L_{AD}}{2} \frac{d_c}{2} \quad \text{Ec 11}$$

$(M_P)_{AD}$  es el momento plástico resistente de la viga,  $\omega_m$  la carga muerta total que obra sobre ella,  $L_{AD}$  su claro libre, entre paños exteriores de columnas, y  $d_c$  el

peralte de la columna (evidentemente, la viga no puede soportar un momento mayor que  $M_p$ , pero la aparición del término  $(\frac{M_p L_{AD}}{2}) (d_c/2)$  en la ecuación 11 se debe a que la ecuación de equilibrio se ha planteado en la intersección de los ejes de columnas y vigas, mientras que el momento plástico se desarrolla en el extremo de la viga, es decir, a una distancia  $d_c/2$  del nudo teórico.

Los momentos resistentes máximos de las columnas se calcularían utilizando las fórmulas de la referencia 12 o las tablas de la 13.

Ahora bien, en la teoría plástica simple no se tiene en cuenta la compatibilidad de las deformaciones lo que da lugar, en muchos casos, a una sobreestimación de la resistencia de la junta y, por consiguiente, a diseños no conservadores. Esto sucede siempre que la capacidad para resistir momento de alguna de las barras que concurren en la junta empieza a disminuir antes de que se alcance el momento máximo en las demás, ya que en ese caso los momentos resistentes máximos corresponden a distintas rotaciones y, por consiguiente, no se presentan simultáneamente (esta condición es común cuando las columnas se flexionan en curvatura simple, sobre todo si sobre ellas obran fuerzas axiales importantes, pues su capacidad de rotación, es decir, su capacidad para admitir giros crecientes bajo momento máximo, es reducida).

En otros casos, cuando la capacidad de rotación de las columnas es adecuada y los momentos máximos se presentan en las tres barras para un mismo valor del ángulo de giro, la teoría plástica simple proporciona resultados exactos, los que se obtienen en forma inmediata. Desgraciadamente no es fácil, en general, saber de antemano si un subconjunto dado se encuentra en una u otra de las dos condiciones anteriores.

Cuando la carga total, viva y muerta, actúa sobre todas las vigas de la estructura, hay también columnas que quedan sometidas a flexocompresión (véase la figura 3, ejes A, C y D); en esos casos, el momento de desequilibrio existente en cada nudo debe ser resistido exclusivamente por las dos columnas, puesto que las vigas que llegan al nudo (una sola, cuando se trata de un eje extremo) están transformadas en

mecanismos; sin embargo, como las columnas se flexionan en curvatura doble, que es una condición mas favorable que la curvatura simple estudiada hasta ahora, tienen en general una capacidad de rotación suficiente para que sea aplicable la teoría plástica simple (modificada, desde luego, para tener en cuenta los efectos de las fuerzas normales en las columnas), de manera que el momento resistente máximo del nudo puede tomarse igual a la suma de los momentos resistentes máximos de las dos columnas.

El problema de la determinación de la resistencia de un subconjunto está resuelto de manera que puede considerarse exacta, de acuerdo con los conocimientos actuales, para el caso en que las vigas y columnas que lo constituyen se flexionan únicamente alrededor de uno de sus ejes principales (todas las cargas se encuentran en el plano del marco), están provistas de un contraventeo suficiente para que no se presente ningún problema de pandeo lateral y, desde luego, tienen proporciones que aseguran que no habrá fallas prematuras por pandeo local, por medio de la gráfica momento-curvatura de la junta, obtenida por superposición de las curvas de las barras que concurren en ella<sup>3,4</sup>; existen, inclusive, tablas y gráficas que permiten reducir notablemente el trabajo numérico necesario para aplicar el método<sup>9,14</sup>.

Desgraciadamente, en la mayor parte de las estructuras reales no se cumplen las dos primeras condiciones (las columnas no están contraventeadas lateralmente en puntos intermedios y, como forman parte de dos marcos ortogonales quedan frecuentemente sometidas a flexión alrededor de sus dos ejes principales), por lo que es necesario modificar el método de diseño para extender su rango de aplicación a los casos en que debe considerarse flexión biaxial de las columnas y la posibilidad de pandeo lateral de las mismas. Puesto que en la actualidad no se cuenta con medios para trazar las gráficas momento-curvatura de piezas flexocomprimidas que puedan fallar por pandeo en vez de hacerlo por exceso de flexión en un plano, ni las de columnas flexionadas simultáneamente alrededor de sus dos ejes principales, los procedimientos de diseño que se discutirán en lo que sigue son menos precisos que los dados en las referencias 3 y 4, pero cubren un rango mayor de aplicaciones.

Los problemas que deben resolverse son dos: primero, obtener fórmulas que permitan determinar la resistencia máxima a la flexión de piezas flexocomprimidas no contraventeadas en puntos intermedios y flexionadas alrededor de uno o de sus dos ejes principales, por momentos aplicados en sus extremos y, segundo, determinar, aunque sea en forma aproximada, la manera en que el momento transmitido al nudo por las trabes se distribuye entre las dos columnas que concurren en él o entre esas dos columnas y la trabe que permanece en estado elástico.

b) Capacidad máxima de carga de columnas flexocomprimidas no contraventeadas lateralmente en puntos intermedios.

b1) Flexión alrededor de uno de sus ejes principales. En el caso de columnas libres entre sus extremos, susceptibles, por consiguiente, de pandearse por flexión y torsión, sujetas a la acción simultánea de fuerza axial y flexión en uno de sus planos principales, debida ésta a los momentos que les transmiten las vigas que se apoyan en ellas, el momento flexionante máximo que pueden soportar es el menor de los valores dados por las expresiones<sup>15,16</sup>

$$M_0 = 1.18 (1 - P/P_y) M_p \leq M_p \quad (12)$$

$$M_0 = \frac{1}{C_m} (1 - P/P_{cr}) (1 - P/P_e) M_{cr} \leq M_{cr} \quad (13)$$

(Si  $P/P_y \leq 0.15$ , no es necesario revisar la ecuación 12)

Los símbolos que aparecen en estas expresiones tienen los significados siguientes:

$M_0$ , momento máximo que puede soportar la columna, en cualquiera de sus extremos.

$P$ , fuerza axial existente en la columna (correspondiente a cargas de trabajo multiplicadas por  $\lambda_1$  o  $\lambda_2$ ).

$M_p$ , momento plástico resistente del perfil, en ausencia de la carga axial (igual a  $Z \sigma_y$ ).

$P_y$ , carga axial que produciría la plastificación completa de la sección, en

ausencia de momento flexionante (igual a  $A \sigma_y$ ).

$P_{cr}$ , carga crítica de pandeo de la columna sometida a fuerza axial exclusivamente (alrededor del eje de menor momento de inercia).

$P_e$ , carga crítica de pandeo elástico, en el plano en que obra el momento flexionante.

$M_{cr}$ , momento crítico de pandeo lateral por flexión, en ausencia de fuerza normal (para su cálculo, véase la ref. 15).

$C_m$ , coeficiente que depende de la ley de variación del momento flexionante a lo largo del eje de la columna. Cuando se conocen los momentos en los dos extremos de la columna, su valor puede calcularse por la expresión

$$C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2, \text{ pero no menor de } 0.4,$$

en la que  $M_1/M_2$  es el cociente de los dos momentos, siendo siempre  $M_1$  el menor de los dos ( $M_1/M_2$  es positivo cuando la pieza se flexiona en curvatura simple y negativo cuando lo hace en curvatura doble). Cuando se conoce únicamente el momento en un extremo de la columna, el valor de  $C_m$  puede obtenerse, conservadoramente, por medio de la figura 11, en la que  $L_{VM}$  y  $L_{VT}$  son, respectivamente, la longitud de la viga en la que actúa carga muerta únicamente y la de la viga sobre la que obra la carga total (la que se convierte en mecanismo), y  $W_M$  y  $W_T$  son las cargas muerta y total, por unidad de longitud.

b2) Flexión alrededor de los dos ejes principales. En el caso de columnas libres entre sus extremos, susceptibles, por consiguiente, de pandearse por flexión y torsión, sujetas a la acción simultánea de fuerza axial y flexión en sus dos planos principales, debida éste a los momentos que les transmiten las vigas que se apoyan en ellas, alojadas en dos planos mutuamente perpendiculares, el momento flexionante máximo que pueden soportar, alrededor de uno de sus ejes principales, es el menor de los valores dados por las expresiones siguientes:

$$M_{ox} = (1 - P/P_y - M_y/M_{py}) M_{px} \leq M_{px} \quad (14)$$



$$M_{0x} = \frac{1}{C_{m_x}} \left( 1 - \frac{P}{P_{cr}} - \frac{M_y}{M_{cr_y}} \frac{C_{m_y}}{1 - P/P_{cr_y}} \right) \left( 1 - \frac{P}{P_{cr_x}} \right) M_{cr_x} \leftarrow M_{cr_x} \quad (15)$$

Las literales tienen el mismo significado que en las ecuaciones 12 y 13, afectadas ahora por un índice x ó y, debido a que hay flexión alrededor de ambos ejes.

La deducción de las ecuaciones 12, 13, 14 y 15 puede verse en las referencias 15 y 16.

Cuando se analiza la estructura con carga viva completa los momentos en los dos extremos de cada una de las columnas pueden calcularse con bastante precisión, por lo que el valor del coeficiente  $C_m$  puede obtenerse con la expresión  $0.6 + 0.4 - M_1/M_2$ ; en cambio, cuando se estudian alternaciones de carga viva y la determinación del momento resistente se hace utilizando subconjuntos del tipo indicado en la Fig. 9 es necesario hacer alguna suposición referente al valor de  $C_m$ , para lo que puede utilizarse la Fig. 11; en efecto, es posible demostrar<sup>3</sup> que para cualquier combinación de valores de  $L_{VT}/L_{VT}$  y  $N_M/N_T$  que caiga arriba de la curva de esa figura la columna se flexionará en curvatura doble, por lo que  $M_1/M_2$  será negativo y  $C_m$  estará comprendido entre 0.4 y 0.6, por lo que será conservador suponer, en el diseño,  $C_m = 0.6$ , valor correspondiente a momento nulo en uno de los extremos, mientras que cuando la combinación de los dos valores corresponde a un punto situado debajo de la curva, la columna se flexiona en curvatura simple, de manera que  $C_m$  varía entre 0.6 y 1.0 y es conservador tomar este último valor.

o) Cálculo de los momentos que deben soportar las columnas en cada uno de sus extremos.

o1) Caso en que todas las vigas que llegan a un nudo se transforman en mecanismos (carga vertical total). En este caso, el momento de desequilibrio que obra sobre el nudo se reparte entre las columnas que concurren en él proporcionalmente a sus rigideces angulares elásticas.

o2) Una de las vigas se transforma en un mecanismo, mientras que la otra permanece en estado elástico. En la figura 12 se muestran las condiciones en que se encuentra el nudo al convertirse la viga de la izquierda,  $AO_2$ , en un mecanismo, bajo

la acción de las cargas muerta y viva combinadas, mientras que la de la derecha, AD, sobre la que obra carga muerta únicamente, permanece en estado elástico.

Observando la figura se advierte que el momento transmitido al nudo por la viga AC debe ser equilibrado por las otras tres barras que concurren en él, incluyendo el efecto de la carga muerta que obra sobre AD.

La ecuación de equilibrio de momentos en el nudo es

$$0 = -(M_P)_{AC} - V_{AC} \frac{dc}{2} + \bar{M}_{AD} + V_{AD} \frac{dc}{2} + (M_{AD})_{\theta} + (M_{AE})_{\theta} + (M_{AB})_{\theta}$$

$\bar{M}_{AD}$  vale  $(\omega_M L_{AD}^2)/12$  y  $V_{AC}$  y  $V_{AD}$  son iguales, respectivamente, a  $(\omega_T L_{AC})/2$  y  $(\omega_M L_{AD})/2$ . Llevando estos valores a la ecuación anterior, y despejando el momento total que transmite al nudo la barra AC, se obtiene:

$$(M_P)_{AC} + V_{AC} \frac{dc}{2} = \bar{M}_{AC} = \bar{M}_{AD} + \frac{\omega_M L_{AD}}{2} \frac{dc}{2} + (M_{AD})_{\theta} + (M_{AE})_{\theta} + (M_{AB})_{\theta}$$

La parte del momento que obra sobre el nudo,  $\bar{M}_{AC}$ , que es soportada por la viga AD, vale

$$M_{AD} = \bar{M}_{AD} + \frac{\omega_M L_{AD}}{2} \frac{dc}{2} + (M_{AD})_{\theta} = \frac{\omega_M L_{AD}^2}{12} + \frac{\omega_M L_{AD}}{2} \frac{dc}{2} + (M_{AD})_{\theta}$$

El momento restante debe ser resistido por las columnas, de manera que la suma de las capacidades de las dos debe ser igual o mayor que

$$(M_P)_{AC} + \frac{\omega_T L_{AC}}{2} \frac{dc}{2} - \left[ \frac{\omega_M L_{AD}^2}{12} + \frac{\omega_M L_{AD}}{2} \frac{dc}{2} + (M_{AD})_{\theta} \right]$$

Todas las cantidades incluidas en la expresión anterior son conocidas, con la única excepción del momento  $(M_{AD})_{\theta}$  que aparece en el extremo de la viga AD como una consecuencia del giro del nudo; para calcularlo, se distribuirá el momento de desequilibrio entre esa viga y las dos columnas, proporcionalmente a sus rigideces angulares elásticas, con la suposición de que la viga está empotrada y las columnas articuladas en sus extremos opuestos al nudo (esas condiciones de apoyo proporcionan resultados cercanos a los reales, aunque en apariencia se está sobroestimando ligeramente la rigidez de la trabe y subestimando las de las columnas, ya que no se está tomando en cuenta la pérdida de rigidez de éstas, debida a las fuerzas axiales

que existen en ellas).

Por consiguiente;

$$(M_{AD})_{\theta} = M_D \frac{\Gamma_{AD}}{\Sigma \Gamma} \quad \text{Ec 16}$$

En esta ecuación,  $M_D$  es el momento de desequilibrio en el nudo, dado por 9, y calculado teniendo en cuenta que la viga AC está soportando las cargas muerta y viva completas, mientras que sobre la AD actúa únicamente la carga muerta,  $\Gamma_{AD}$  es la rigidez angular de la barra AD (igual a  $4EI_{AD}/L_{AD}$ ) y  $\Sigma \Gamma$  es la suma de las rigideces angulares de esa viga y de las dos columnas, éstas últimas de valor igual a  $3EI/L$ .

Debe comprobarse que el momento total en el extremo de la viga AD correspondiente al nudo no sobrepase su momento plástico resistente, es decir, debe satisfacerse la condición

$$\bar{M}_{AD} + V_{AD} \frac{d_c}{2} + (M_{AD})_{\theta} = \frac{\omega_M L_{AD}^2}{12} + \frac{\omega_M L_{AD}}{2} \frac{d_c}{2} + (M_{AD})_{\theta} \leq (M_P)_{AD} + \frac{\omega_M L_{AD}}{2} \frac{d_c}{2}$$

(La aparición del término  $(\omega_M L_{AD}/2) (d_c/2)$  en el segundo miembro se debe a que la expresión anterior se ha planteado en el punto de intersección de los ejes de vigas y columnas),

Por consiguiente,

$$\frac{\omega_M L_{AD}^2}{12} + (M_{AD})_{\theta} \leq (M_P)_{AD} \quad \text{Ec 17}$$

El valor del momento  $(M_{AD})_{\theta}$  será el dado por la ecuación 16 siempre que se satisfaga la condición 17; en caso contrario, deberá disminuirse la magnitud del momento soportado por la viga, de manera que se cumpla 17.

El momento restante,  $M_D - (M_{AD})_{\theta}$ , debe ser resistido por las dos columnas que concurren en el nudo, de manera que debe satisfacerse la condición

$$\Sigma M_c \geq M_D - M_{V\theta} \quad \text{Ec 18}$$

donde  $\Sigma M_c$  es la suma de momentos resistentes de las columnas, calculados con las

ecuaciones 12, 13, 14 y 15,  $M_D$  es el momento de desequilibrio en el nudo y  $M_{ye}$  es la parte de ~~ese~~ momento resistido por la viga que permanece en estado elástico -- (Ec. 16)

En resumen, el procedimiento a seguir para determinar si las escuadrias obtenidas en el diseño preliminar para las columnas que concurren en un nudo son o no adecuadas es el que se menciona a continuación:

1. Se calcula el momento de desequilibrio en el nudo, el que podrá deberse a la acción de las dos vigas que se apoyan en él, con carga viva completa y convertidas, por consiguiente, en mecanismos, o a la de una viga con cargas viva y muerta y la otra, que permanece en estado elástico, con carga muerta únicamente (Al calcular el momento de desequilibrio no es necesario utilizar los momentos plásticos resistentes de los perfiles empleados en las vigas, sino basta con tomar los valores teóricos necesarios, iguales a  $W_p L^2 / 16$ , que serán, en general, menores).

2. Se calcula el momento total que debe ser resistido por las dos columnas, el que es igual a:

El momento de desequilibrio total, cuando las dos vigas que llegan al nudo se convierten en mecanismos.

La diferencia entre el momento de desequilibrio y el que resiste la viga que permanece en estado elástico, cuando solamente una se convierte en mecanismo.

3. Se determina la capacidad para resistir momento de cada una de las columnas, aplicando las ecuaciones 12 y 13 ó 14 y 15.

4. Se compara la suma de momentos resistentes de las dos columnas con el momento calculado en 2; si es igual o mayor, las escuadrias obtenidas en el diseño preliminar son correctas; si es menor, deberá aumentarse el perfil de una o de las dos columnas (el momento resistente de la junta puede incrementarse también aumentando la escuadría de la viga elástica, cuando ésta existe, procedimiento que en ocasiones puede ser el más adecuado).

Desde luego, en los casos en que las columnas estén flexionadas alrededor de uno solo de sus ejes principales y no haya posibilidad de pandeo lateral (por --

existir muros a uno y otro lado de las columnas, por ejemplo), se podrá hacer el diseño utilizando el procedimiento consistente en el trazo de la gráfica momento-curvatura de la junta (véanse las referencias 3, 4 y 14 para el estudio detallado de este método).

d) Columnas que forman parte de crujeas contraventeadas. Las columnas que forman parte de crujeas contraventeadas, diseñadas previamente para resistir cargas verticales únicamente, con un factor de carga  $\lambda_1$ , deben revisarse bajo la acción de los elementos mecánicos que aparecen en ellas cuando sobre el marco actúan simultáneamente fuerzas verticales y horizontales, con un factor de carga  $\lambda_2$ .

Las tensiones y compresiones ocasionadas en las columnas comprendidas entre los niveles  $i$  e  $i-1$  por las fuerzas horizontales que obran sobre el marco pueden calcularse conservadoramente con la ecuación siguiente:

$$F_{ci} = \frac{1}{L} \left\{ h_n \left[ H_n + \frac{\Delta_n}{h_n} W_n \right] + h_{n-1} \left[ (H_n + H_{n-1}) + \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}} (W_n + W_{n-1}) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + h_i \left[ \sum_n^i H_i + \frac{\Delta_i}{h_i} \sum_n^i W_i \right] \right\} \quad (19)$$

El significado de las literales que aparecen en esta ecuación es el explicado anteriormente, con referencia a la ecuación 8.

Cuando exista más de una crujía contraventeada en un nivel cualquiera del marco la fuerza total calculada con la ecuación 19 se repartirá entre todas las columnas que las limitan, teniendo en cuenta los signos de las fuerzas axiales que aparecen en ellas.

#### Diseño de los contravientos

Los contravientos de un marco rígido deben diseñarse para desempeñar las funciones siguientes, todas ellas importantes <sup>4</sup>:

1. Resistir las cargas laterales que obran sobre la estructura

2. Contrarrestar el momento de volteo (efecto  $P\Delta$ ) debido a las cargas verticales.

3. Evitar el pandeo del marco.

4. Mejorar el comportamiento de la estructura, reduciendo a valores admisibles los desplazamientos horizontales de sus distintos niveles.

Las funciones anteriores son desempeñadas generalmente en los edificios por elementos de dos tipos, muros de rigidez y contraventeos propiamente dichos; éstos, a su vez, pueden estar formados por piezas colocadas en diagonal, en K, etc. El tipo y la colocación del contraventeo están dictados, en la mayoría de los casos, por consideraciones no sólo estructurales, sino también arquitectónicas y funcionales.

Aunque las fórmulas de diseño que se presentan mas adelante se refieren exclusivamente a contraventeos en diagonal (véase Figura 13), los principios que llevaron a su obtención son también aplicables a otros tipos.

En la figura 13 se muestra un marco provisto de contraventeo diagonal, colocado en la cruzía de la derecha; en esa figura se ha supuesto que el contraventeo está colocado en la misma cruzía en todos los niveles, lo que no es obligatorio; pueden existir diagonales cruzadas en mas de una cruzía por piso, y no es necesario que su posición sea la misma en toda la altura; el marco se considera completamente contraventado siempre que existan diagonales cruzadas en cuando menos una cruzía de cada entrepiso. Cuando los efectos de fuerzas laterales son importantes puede ser inclusive conveniente distribuir los contraventeos en varias cruzías con objeto de evitar concentraciones indeseables de fuerzas axiales en algunas de las columnas y en la zona correspondiente de la cimentación.

Para diseñar el contraventeo es necesario hacer las siguientes suposiciones relativas al comportamiento del marco<sup>3</sup>:

1. El marco en sí no resiste fuerzas horizontales; esta suposición equivale a considerar que existiesen articulaciones en los dos extremos de cada columna, en todos los niveles.

2. Cada una de las columnas gira lateralmente un ángulo  $\rho$ , común a todas las columnas de un entrepiso.

3. Se desprecian las deformaciones axiales de vigas y columnas.

4. Las fuerzas verticales se conservan verticales al desplazarse lateralmente el entrepiso.

5. Las diagonales de contraventeo son suficientemente esbeltas para que pueda admitirse que la de compresión se pandea bajo la acción de una carga de magnitud - despreciable.

6. La fuerza horizontal total y el momento de volteo (efecto  $P\Delta$ ) son resistidos únicamente por la diagonal de contraventeo que trabaja a tensión.

Admitidas las suposiciones anteriores, el estudio del equilibrio de un entrepiso desplazado lateralmente permite obtener el valor de la fuerza que aparece en la diagonal de contraventeo, tanto para el caso en que sobre el marco obran únicamente cargas verticales como para cuando actúan también sobre él, simultáneamente, fuerzas horizontales; dividiendo esa fuerza entre  $\sigma_y$ , esfuerzo de fluencia del material utilizado en las diagonales de contraventeo, se obtiene el área necesaria de éstas, dada por las ecuaciones (20) y (21), para las dos condiciones de carga mencionadas arriba; desde luego, en cada caso particular se tomará el mayor de los dos valores, teniendo en cuenta que deben emplearse factores de carga diferentes para una y otra condición.

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis 5, se desprecia la pequeña contribución de la diagonal comprimida, el área calculada con 20 ó 21 debe proporcionarse con las diagonales que trabajen a tensión, exclusivamente, y las de compresión deben hacerse iguales a ellas, ya que tanto el desplazamiento lateral del marco, bajo cargas verticales, como las fuerzas horizontales, pueden presentarse en cualquier sentido.

Desde luego, en el caso de edificios reales formados por varios marcos paralelos entre sí, el diseño debe hacerse en conjunto, obteniendo las dimensiones de los contraventeos de cada entrepiso de manera que sean capaces de resistir las fuerzas horizontales totales y el efecto  $P\Delta$  completo correspondientes a ese nivel, y hacien

do las modificaciones que sean necesarias cuando varían mucho los claros de las distintas cruñas contraventeadas.

Algunas especificaciones recomiendan que los perfiles utilizados en los contraventeos se escojan de tal manera que su relación, de esbeltez no sobrepase un cierto valor, con objeto de evitar vibraciones indeseables; esa recomendación no suele ser obligatoria, ya que no es necesaria para que la estructura funcione correctamente.<sup>12</sup>

En resumen, la suma de las áreas de las secciones transversales de las diagonales de contraventeo colocadas inmediatamente debajo del nivel  $i$  de una estructura debe ser igual al mayor de los valores calculados con las ecuaciones 20 y 21.

$$A_{ci} = \frac{L_{ci}^3}{EL^2 h_i} \sum_n^i W_i \quad (20)$$

$$A_{ci} = \frac{L_{ci}}{\sigma_y L} \sum_n^i H_i + \frac{L_{ci}^3}{EL^2 h_i} \sum_n^i W_i \quad (21)$$

Las literales que aparecen en estas expresiones tienen los significados siguientes:

$A_{ci}$ , área de contraventeos necesaria

$L_{ci}$ , L, longitud del contraventeo y claro de la cruja contraventeadas, respectivamente

$h_i$ , altura de columnas en el entrepiso considerado

$\sigma_y$ , E, esfuerzo de fluencia y módulo de elasticidad, respectivamente, del material empleado en las diagonales de contraventeo

$\sum_n^i H_i$ , suma de todas las fuerzas horizontales aplicadas en los niveles comprendidos entre la azotea y el i, incluyendo a éste.

$\sum_n^i W_i$ , suma de todas las fuerzas verticales aplicadas en los niveles comprendidos entre la azotea y el i, incluyendo a éste.

Al utilizar la ecuación 20 las fuerzas verticales de trabajo deben multiplicarse por el factor de carga  $\lambda_1 = 1.7$ , mientras que cuando se emplee la 21 el factor



de carga será  $\lambda_2 = 1.3$ .

En la determinación del área de contraventeo disponible en cada entrepiso -- deben considerarse únicamente las diagonales que trabajen a tensión.

El presente trabajo ha sido desarrollado en parte en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, dentro de un programa de mayor amplitud, patrocinado por la Comisión Federal de Electricidad.

#### REFERENCIAS

1. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, 1949.
2. Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill, N. York, 1952.
3. Driscoll, G.C., y otros, "Plastic Design of Multi-Story Frames", Lecture Notes, Lehigh University, 1965.
4. Lu, Lo-Wu, "Design of Braced Multi-Story Frames by the Plastic Method", -- Engineering Journal, AISC, Vol. 4, n° 1, Enero 1967.
5. "Joint committee report on fully rigid multi-storey welded steel frames", The Institution of Structural Engineers, Londres, 1964.
6. Lay, M. G., y Galambos, T.V., "The Experimental Behavior of Restrained Columns", Welding Research Council Bulletin n° 110, Nueva York, Nov. 1965.
7. Lay, M.G., Aglietti, R.A., y Galambos, T. V., "Testing Techniques for Restrained Beam Columns", Experimental Mechanics, Vol. 6, n° 1, Enero 1966.
8. Ojalvo, M., "Restrained Columns", Proc. ASCE, 86 (EM5), Oct. 1960.
9. Ojalvo, M., y Fukumoto, Y., "Nomographs for the Solution of Beam-Column Problems", Welding Research Council Bulletin n° 78, Nueva York, Junio 1962.
10. Tall, L., Editor, "Structural Steel Design", Ronald Press, Nueva York, 1964.
11. Ojalvo, M., y Levi, V., "Columns in Planar Continuous Structures", Proc. -- ASCE, 89 (ST.1), Feb. 1963.
12. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", Manual of Steel Construction, 6ª Ed., AISC, Nueva York, 1963.
13. Galambos, T. V., y Prasad, J., "Ultimate Strength Tables for Beam-Columns", Welding Research Council Bull. n° 78, Nueva York, Junio 1962.
14. Patikh, B.P., Daniels, J.H., y Lu, L.W., "Design Aids Booklet", Suplemento de "Plastic Design of Multi-story Frames", Lecture Notes, Lehigh University, 1955 (Ref. 3).
15. de Buen, O., "Diseño de Piezas Flexocomprimidas de Acero Estructural", Ingeniería, Vol. XXXIV, n° 2, Abril de 1964.
16. Massonnet, Ch., y Save, M., "Calcul Plastique des Constructions", C.B.L.I. A., Bruselas, 1961.
17. Johnston, B.C., Editor, "The Column Research Council Guide to Design Criteria for Metal Compression Members", 2ª Ed., John Wiley, Nueva York, 1966.

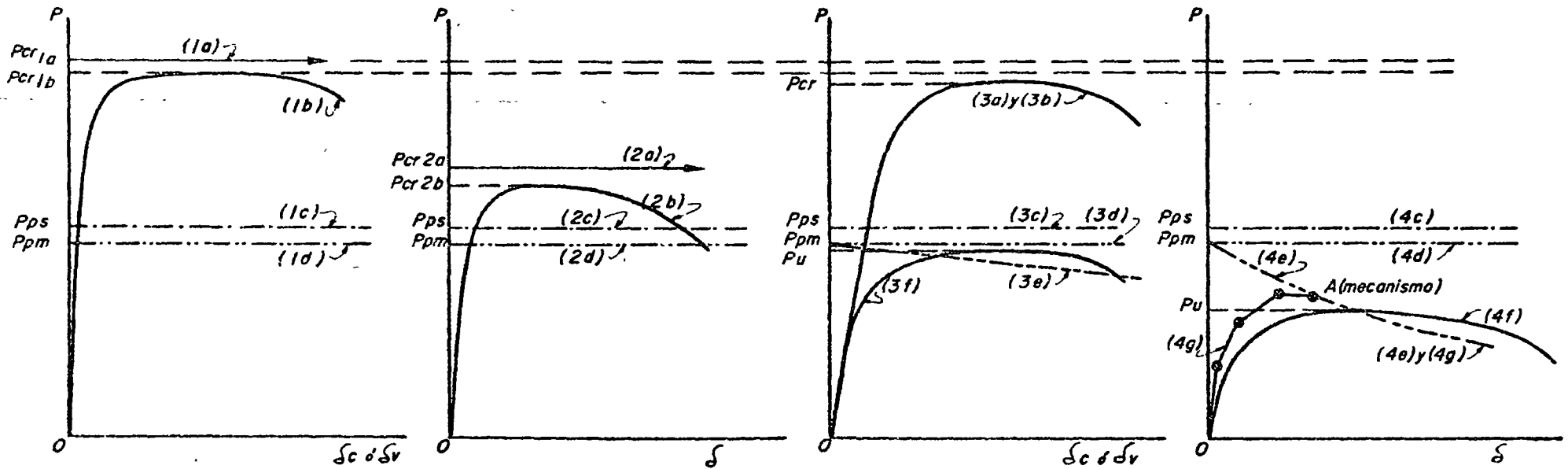
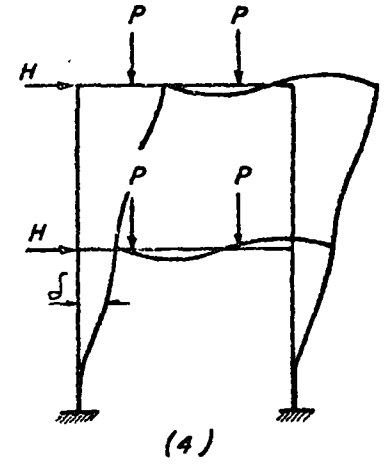
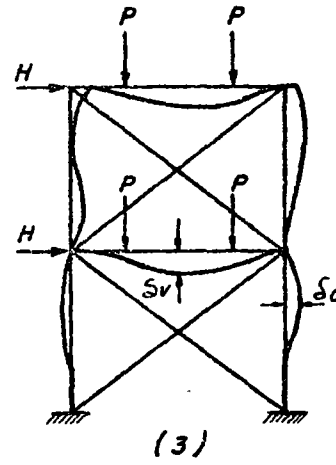
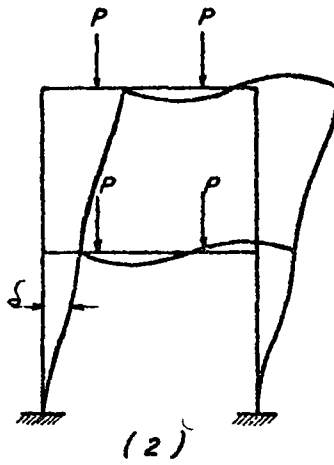
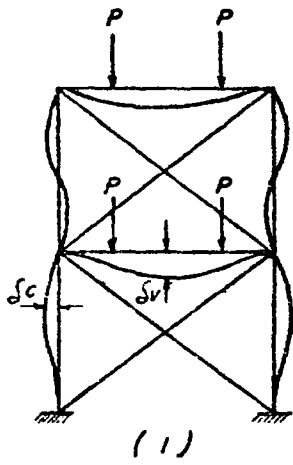


Fig. 1

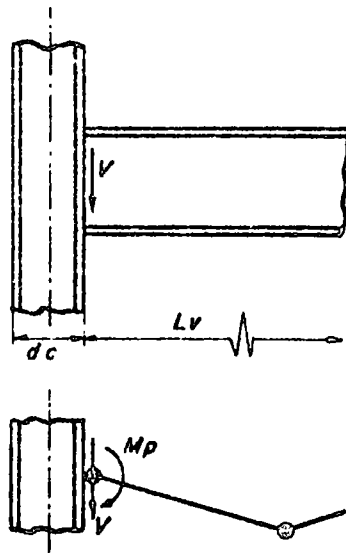


Fig. 2

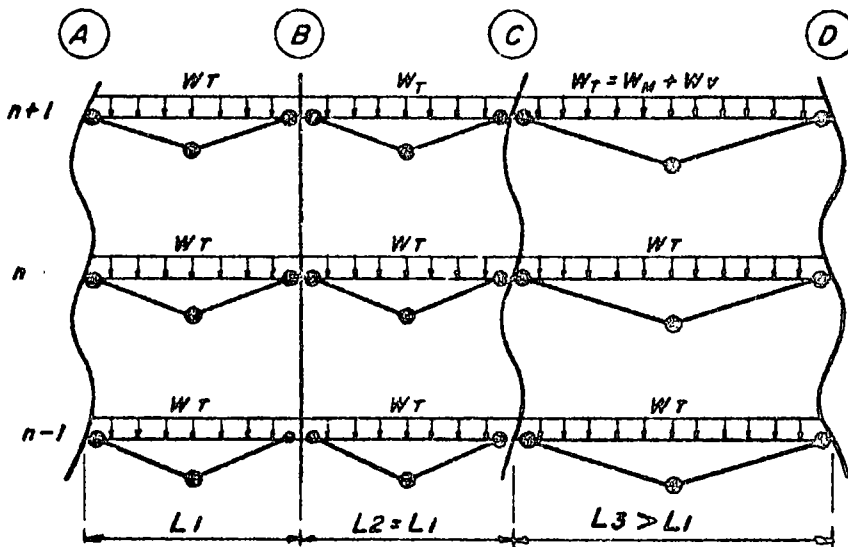


Fig. 3

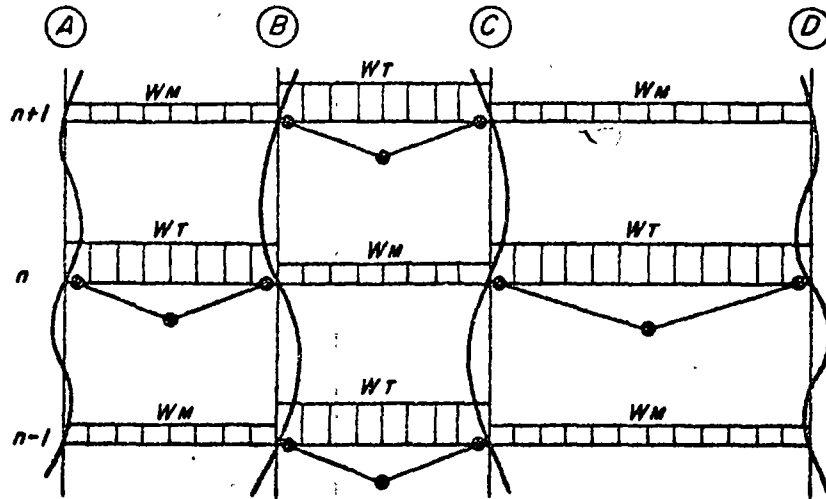


Fig. 4

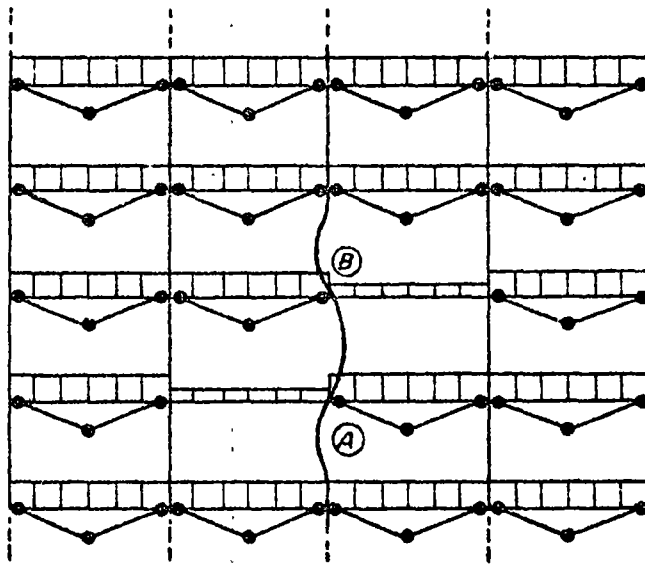


Fig. 5

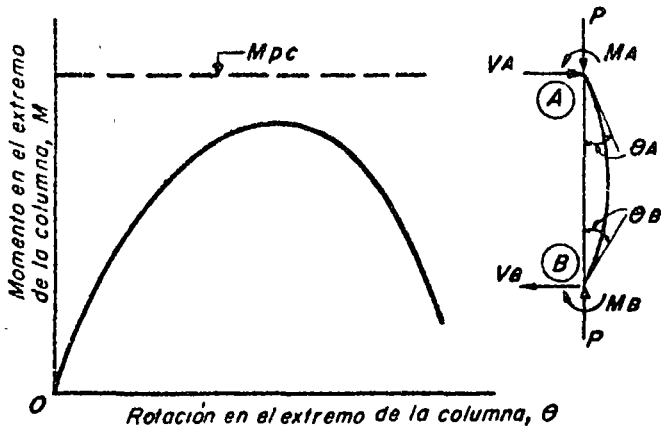


Fig. 6

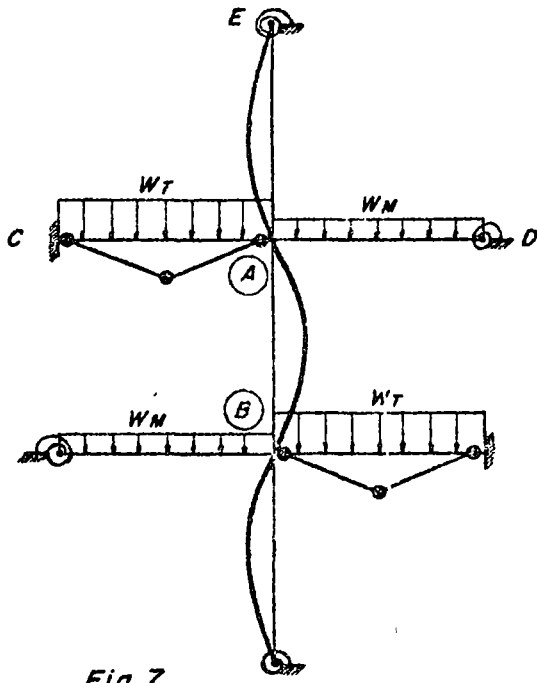


Fig. 7

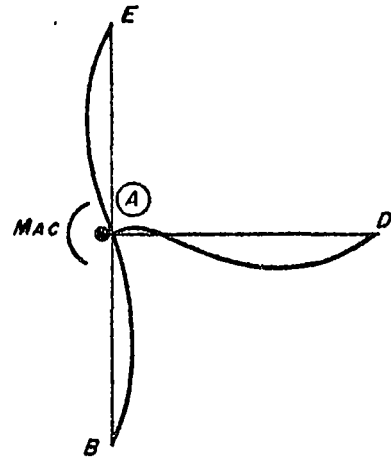


Fig. 8

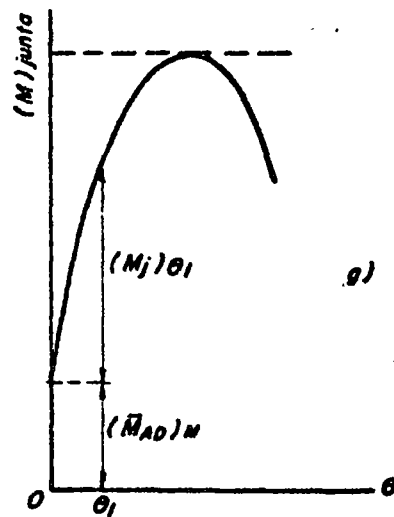
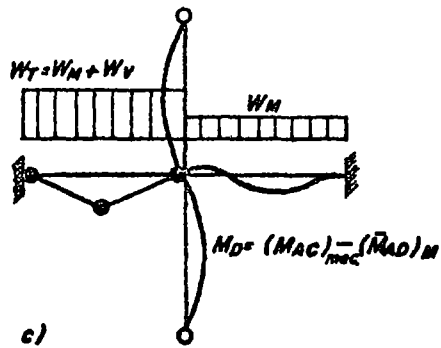
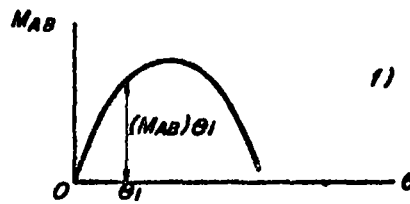
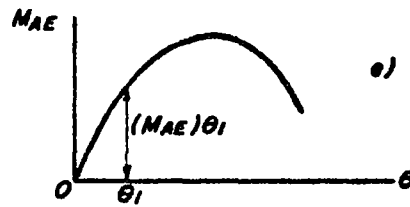
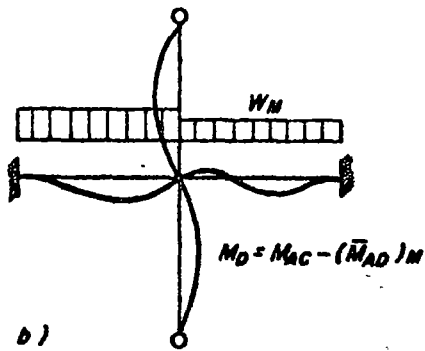
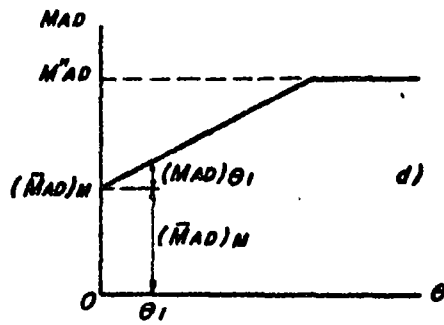
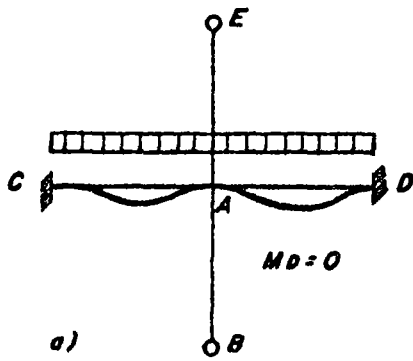


Fig. 9

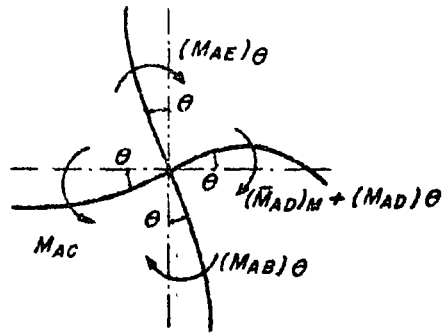


Fig. 10

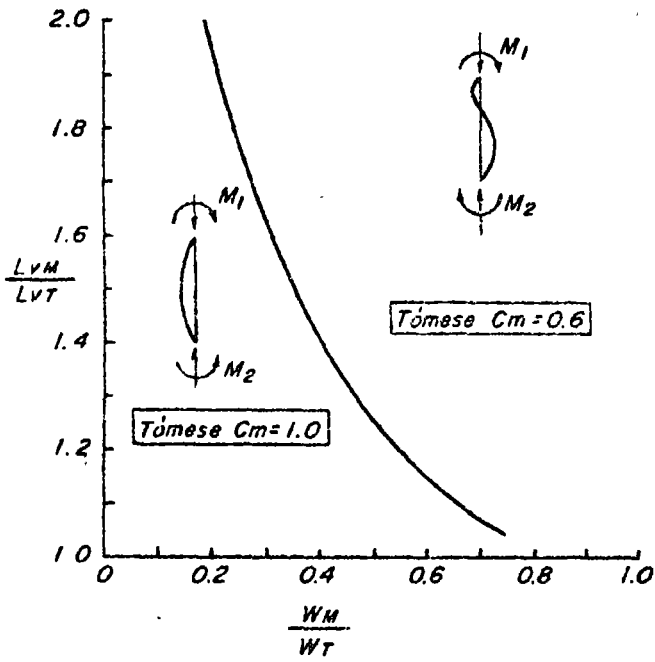


Fig. 11

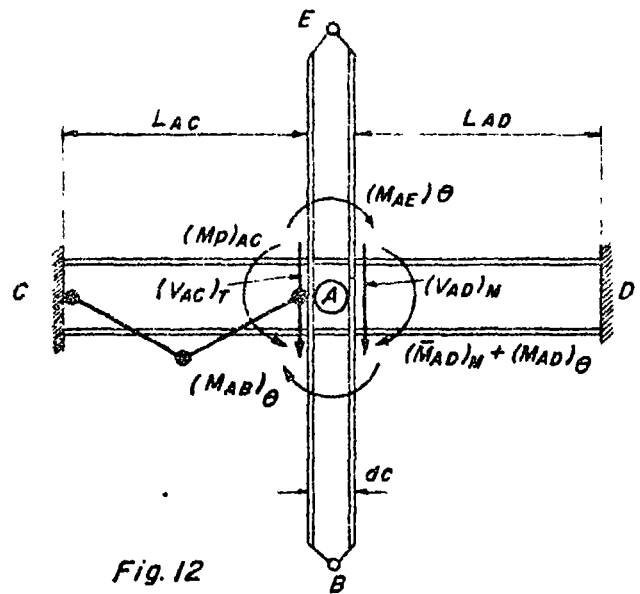


Fig. 12

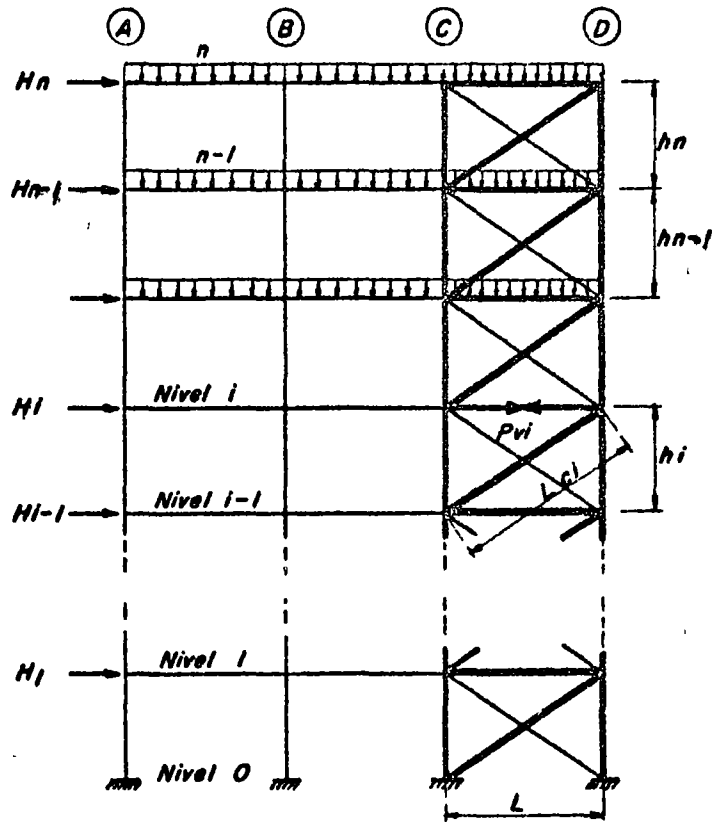


Fig. 13



## ALGUNAS IDEAS SOBRE EL DISEÑO PLÁSTICO DE MARCOS DE ACERO EN

### ZONAS SISMICAS.

El enorme crecimiento de la población, su tendencia a con centrarse en áreas urbanas, el continuo aumento en el precio de los terrenos y los complejos problemas del transporte en las cada vez - más extensas ciudades modernas, han hecho que los edificios altos - constituyan la solución más económica para alojar a ~~la gente,~~ <sup>las personas,</sup> tanto para vivir (edificios de departamentos) como para trabajar (oficinas). Esto ha originado que se construya un número cada vez mayor de edificios de altura creciente, tendencia que irá aumentando en el próximo futuro, por lo que los complejos problemas que intervienen en este tipo de estructuras se han vuelto de una importancia cada vez mayor.

Un edificio debe considerarse como un sistema, y la estruc tura que lo soporta no es más que una de sus partes; por consiguiente, el diseño estructural no es un problema aislado, y al realizarlo deben tenerse muy en cuenta ~~los~~ requisitos arquitectónicos y funcionales. ~~El diseñador debe.~~ Dentro de las restricciones ocasionadas por -- ellos, el ingeniero estructurista tiene que producir una estructura segura y económica, que resista las cargas verticales y horizontales que obren sobre ella con un coeficiente de seguridad adecuado y sin deformaciones o vibraciones excesivas, que afecten la operación de - otras partes componentes del ~~edificio~~ <sup>sistema</sup> o produzcan sensaciones desagradables en las personas que lo ocupan.

Puesto que no se pueden eliminar las cargas verticales, - muertas y vivas, que actúan sobre la estructura, el costo mínimo -

posible de ésta, en un edificio de cualquier número de pisos, es el que se obtendría si se diseñase exclusivamente para soportarlas; sin embargo, la importancia de las fuerzas horizontales accidentales, - sísmicas o eólicas, \_\_\_\_\_, crece con <sup>la altura,</sup> ~~el número de pisos,~~ y su influencia en el diseño puede ser decisiva en cuanto <sup>se tienen más</sup> ~~va más allá~~ de cuatro o cinco niveles.

Si se desea obtener diseños económicos es necesario, por consiguiente, utilizar sistemas estructurales que permitan resistir las fuerzas horizontales accidentales con un incremento mínimo en material y costo sobre el requerido para soportar las verticales permanentes, y se lograría la solución óptima, desde este punto de vista, si se obtuviesen estructuras ~~que~~ que, diseñadas por cargas verticales, fuesen capaces de resistir las solicitaciones adicionales producidas por las horizontales sin necesidad de ningún refuerzo, utilizando tan solo el incremento en resistencia correspondiente a la disminución del coeficiente de seguridad que permiten todos los códigos para la acción combinada de cargas permanentes y eventuales.

La estructura clásica para edificios de varios pisos ha sido, desde principios de siglo, la constituida por dos familias de marcos rígidos, generalmente ortogonales, compuestos por trabes y columnas de acero o de concreto reforzado, analizados y diseñados elásticamente.

El marco rígido ha sido durante algún tiempo una solución acertada del problema que nos ocupa; en las tres o cuatro primeras décadas de este siglo, los sistemas constructivos utilizados <sup>proporcionaban</sup> ~~proporcionaban~~ ~~a los edificios de~~ un número grande de muros bastante <sup>resistentes</sup> ~~rígidos~~ que, aunque no se tomaban en cuenta explícitamente en el análisis y diseño, <sup>daban</sup> ~~proporcionaban~~ a la estructura una rigidez lateral apreciable que impedía que se presentasen problemas de inestabilidad de conjunto y-

ayudaba a los marcos a soportar las fuerzas horizontales, con poco incremento en costo en respecto al necesario para resistir las verticales.

Durante ese tiempo pocos fueron los edificios verdaderamente altos que se construyeron en zonas sísmicas, y basta ~~que~~ recordarnos los efectos del temblor de Julio de 1957 para ~~que nos demos~~ <sup>darse</sup> cuenta del papel básico que jugaron los muros divisorios en el comportamiento de las construcciones de cierta altura. ~~estructuradas a base de marcos rígidos.~~

Desde la terminación de la segunda guerra mundial se han multiplicado los edificios altos, y, al mismo tiempo, han ido disminuyendo los elementos rigidizantes no estructurales, sobre todo en ~~edificios~~ <sup>inmuebles</sup> para oficinas, en los que la tendencia moderna es proporcionar áreas cada vez mayores, libres de muros y columnas, al mismo tiempo que en las fachadas se utilizan grandes cancelas de vidrio.

En estas condiciones el marco rígido, que depende exclusivamente de sus vigas y columnas para resistir las fuerzas horizontales y para evitar posibles fallas por inestabilidad, deja de ser económico en cuanto el número de pisos excede de 15 ó 20, o tal vez menos en zonas de sismicidad intensa, ya que el diseño final exige escuadrías considerablemente mayores que las requeridas por carga vertical, no solo para obtener la resistencia necesaria bajo fuerzas sísmicas combinadas con vivas y muertas, sino para reducir los desplazamientos laterales a límites admisibles.

Esto lleva a la necesidad de complementar los marcos ~~rígidos~~ <sup>afri</sup> con elementos estructurales adicionales capaces de resistir las sollicitaciones sísmicas con un costo bajo, lo que se ha logrado utilizando muros de rigidez o elementos inclinados de contraventeo alrededor de los cubos de elevadores y áreas de servicio, y en otras zonas en que el diseño arquitectónico permita colocarlos. Se logra

así utilizar los marcos rígidos en forma económica en edificios de altura mucho mayor, quizá del orden de 30 ó 40 pisos.

En construcciones más altas los marcos ~~rígidos~~ contraventeados son también antieconómicos, lo que ha obligado a buscar otras soluciones estructurales, que se han ~~utilizado~~ con éxito en <sup>diferentes</sup> ~~otras~~ partes del mundo, especialmente en los Estados Unidos.

En las ciudades más importantes de nuestro país nos encontramos en la actualidad en una etapa en la que se ~~está~~ <sup>están</sup> construyendo ~~un gran número de~~ <sup>bastante</sup> edificios que fluctúan entre los 15 ó 20 pisos, con excepciones ocasionales hasta los 30 ó 40 <sup>niveles</sup>; por consiguiente, se están empleando con frecuencia y buenos resultados los marcos provistos de contraventeos o de muros de rigidez, ya que si se pretende obtener la resistencia necesaria por medio de marcos rígidos exclusivamente es necesario reforzarlos considerablemente para que puedan soportar las fuerzas sísmicas y, aún teniendo capacidad adecuada de carga, suele ser necesario aumentar todavía más las esquadrias de vigas y columnas para reducir los desplazamientos laterales a niveles aceptables.

Este último punto, que es de importancia en estructuras de concreto, lo es todavía más en las de acero, en vista de que la mayor resistencia de este material lleva a elementos estructurales más esbeltos y, por consiguiente, más flexibles.

Desde hace unos 15 años, un número cada vez mayor de estructuras de acero se ha diseñado utilizando métodos plásticos, en vez de los elásticos tradicionales. Cuando se empezó a utilizar, el diseño plástico tenía dos ventajas notables sobre el elástico: permitía obtener estructuras más económicas y con un factor de seguridad -

más uniforme y, además, requería menos trabajo para llegar a una solución; en la actualidad la segunda ventaja se ~~ha~~ perdido en muchos casos, debido al empleo cada vez más extenso de las computadoras electrónicas en el análisis y diseño de estructuras.

Sin embargo, como los métodos plásticos son más racionales que los elásticos, pues ~~tienden más al~~ <sup>se acercan más al</sup> comportamiento real de las estructuras, y proporcionan en muchos casos diseños más económicos, su empleo se sigue extendiendo ~~cada vez más~~.

Ahora bien, las economías que se pueden obtener al utilizar el análisis plástico se pierden cuando se aplica a ~~marcos rígidos~~ <sup>edificios</sup> de alguna altura, ya que las vigas y columnas de menor escuadría ocasionan estructuras más deformables que las diseñadas elásticamente; el problema de los desplazamientos laterales se vuelve más agudo, lo que obliga a aumentar los tamaños de las piezas a valores semejantes a los requeridos elásticamente.

Por consiguiente, el ~~empleo~~ <sup>uso</sup> del diseño plástico en marcos rígidos convencionales no produce ninguna ventaja si el edificio tiene más de unos ocho o diez pisos, y para obtener estructuras económicas es necesario emplear muros o contraventeos, con los que se logra proporcionar la rigidez lateral adecuada conservando la mayor parte de las economías propias de este método de diseño.

El análisis y diseño plástico se ~~aplicó~~ <sup>aplicaron</sup> durante algún tiempo solamente a marcos de poca altura, no mayor de dos o tres pisos, pues existían dudas respecto al comportamiento de las columnas sometidas a flexión y fuerza axial combinadas cuando ésta última adquiere valores importantes, como ~~que~~ sucede en los primeros

niveles de edificios altos, así como sobre los problemas de inestabilidad de conjunto en el intervalo inelástico. Sin embargo, investigaciones teóricas y experimentales realizadas en los últimos años han permitido extender su uso a marcos de cualquier altura, con o sin contraventeo.

El diseño de marcos no contraventeados presenta todavía algunos puntos que requieren investigaciones adicionales, lo que no tiene mucha importancia práctica puesto que, como ya se ha mencionado, factores económicos obligan a emplear contraventeos o muros de rigidez en cuanto la altura del edificio excede de unos cuantos pisos.

El diseño plástico de edificios altos de estructura de acero se ha visto estimulado en los últimos años por cuatro acontecimientos importantes ocurridos en los Estados Unidos: La celebración, en el verano de 1965, de un curso en la Universidad de Lehigh en el que se puso al alcance de profesores universitarios e ingenieros estructuristas un gran volumen de información, obtenido a través de investigaciones realizadas principalmente en esa universidad, y la publicación de notas relativas al curso<sup>1</sup>, la aparición en 1968 de un manual publicado por el Instituto Americano del Hierro y del Acero (A.I.S.I.) que contiene información y ayudas de diseño para marcos rígidos contraventeados<sup>2</sup>, basada en el curso de Lehigh, la aceptación en las últimas especificaciones del Instituto Americano de la Construcción en Acero<sup>(A.I.S.C.)</sup>, en 1969, del diseño plástico para marcos contraventeados de cualquier altura<sup>3</sup> y, finalmente, la publicación por la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (A.S.C.E), en este año, de la segunda edición de su Manual sobre diseño plástico en-

acero<sup>4</sup>, en la que se extiende la aplicación de este método a marcos rígidos de cualquier altura.

Cabe señalar que el Reglamento de las Construcciones en el Distrito Federal, <sup>en</sup> permite el uso del diseño plástico ~~de~~ marcos-altos, <sup>(que se elaboró en 1962)</sup> ~~desde 1966~~, pero las publicaciones que se acaban de mencionar deben contribuir de manera importante a divulgar el método y a que su empleo se extienda cada vez más.

El procedimiento recomendado en las referencias 1, 2 y 4 (la 3 no señala el camino que debe seguirse) para el diseño de marcos contraventeados está basado en las notas del curso de Lehigh de 1965; su aspectos más importantes son los siguientes:

- 1° La estructura debe estar compuesta por marcos rígidos colocados en una sola dirección; las vigas transversales están apoyadas libremente en ellos, de manera que las columnas experimentan únicamente flexión alrededor de sus ejes de mayor momento de inercia. (\*)
- 2° Un cierto número de los marcos rígidos está provisto de contraventeos en todos <sup>los</sup> ~~los~~ niveles, aunque no necesariamente en el mismo entreeje vertical; se les llama "marcos contraventeados"; los restantes se apoyan en ellos a través de los diafragmas constituidos por los pisos, formados generalmente por vigas transversales de acero y losas de concreto; reciben el nombre de "marcos soportados".

(\*) Esta forma de estructuración es poco común entre nosotros; sin embargo, puede usarse con éxito en edificios de altura mediana, con poco frente y provistos de dos muros de lindero, que pueden utilizarse para darles rigidez en una dirección, de manera que los marcos rígidos son necesarios únicamente en la otra.

- 3° El edificio obtiene la estabilidad lateral necesaria en la dirección normal a los marcos por medio de contraventeos o muros de rigidez.
- 4° Los marcos soportados se diseñan para resistir exclusivamente-- cargas verticales, y se construyen con uniones rígidas entre vigas y columnas.
- 5° Los marcos contraventeados resisten la totalidad de las fuerzas horizontales; se diseñan como si fuesen dos sistemas diferentes, un marco rígido y una armadura vertical, con algunas vigas y columnas comunes a ambos. Todas las cargas laterales y los requisitos de estabilidad de la estructura se asignan al sistema de-contraventeo.
- 6° Se supone, conservadoramente, que todas las conexiones de los -marcos contraventeados son articulaciones; por consiguiente, el sistema de contraventeo vertical debe soportar por sí solo la -totalidad de las fuerzas horizontales y del efecto  $P\Delta$  , ocasionado por las cargas verticales al obrars sobre las columnas de--formadas lateralmente.

Las deflexiones horizontales bajo cargas combinadas constituyen un problema fundamental en el diseño de marcos ~~contraventeados~~ ~~de~~s altos y esbeltos; los reglamentos fijan desplazamientos relativos máximos entre niveles consecutivos del orden de 0.002 a 0.003 h, producidos por cargas de trabajo y calculados teniendo en cuenta exclusivamente los marcos, ~~des~~preciando la rigidez adicional -proporcionada por muros y otros elementos no estructurales.



En un marco no contraventeado el momento adicional total  $\Sigma P \cdot \Delta$  que se presenta en cada nivel debe ser equilibrado por flexión en las columnas, mientras que en uno contraventeado y con uniones ~~articuladas~~ articuladas todo ese efecto tiene~~d~~ que ser ~~resistido~~ resistido por fuerzas axiales en las diagonales; ~~con~~ <sup>en</sup> un marco rígido real las columnas resisten parte del momento de volteo, y el ~~resto~~ resto es soportado por el contraventeo.

Las hipótesis mencionadas ~~son~~ son excesivamente conservadoras y poco realistas, pues si bien es cierto que una cruzía contraventeada ~~es mucho más rígida~~ <sup>Tiene una rigidez mucho mayor</sup> que otra cualquiera, es probable que la rigidez total de los marcos ~~no contraventeados~~ sea en muchos casos del mismo orden, o aún mayor, que la de las cruzías contraventeadas, por lo que estas resultan sobrediseñadas al asignárseles la totalidad de las fuerzas horizontales que actúan sobre el edificio; en cambio, las columnas y trabes que no forman parte de ellas resultan menos resistentes de lo que deberían ser si se tomasen en cuenta los momentos ocasionados por las fuerzas horizontales.

Además, los procedimientos para el cálculo de los desplazamientos laterales de los entresijos resultan laboriosos y llevan a resultados exagerados, por las razones mencionadas.

Todo lo anterior ha hecho que ~~hayan~~ <sup>se haya</sup> desarrollado un método de análisis y diseño de marcos contraventeados que ha sido empleado en el diseño de un número regular de edificios reales y que se aplica a través de los pasos siguientes:

- 1° Se determina el momento plástico requerido en cada trabe por carga vertical, que es igual a la mitad del momento flexionante isostático producido por las cargas muertas y vivas factorizadas

(factor de carga  $\lambda_1 = 1.70$ ). Este primer paso puede basarse en las longitudes libres de las trabes.

- 2° Se calculan los momentos que deben soportar las columnas cuando las trabes que llegan a sus extremos se convierten en mecanismos. Para ello, el momento de desequilibrio existente en cada nudo se distribuye en partes iguales entre todas las columnas que concurren en él.
- 3° Se suponen desplazamientos  $\Delta$  correspondientes a condiciones de trabajo (por ejemplo, del orden de 0.002 h) y se obtienen fuerzas horizontales ficticias de magnitud  $P\Delta/h$  que producen efectos equivalentes;  $P$  es el peso total del edificio arriba del nivel considerado,  $\Delta$  es el desplazamiento supuesto y  $h$  la altura del entrepiso.
- 4° Las fuerzas horizontales totales, debidas a sismo más efecto  $P\Delta$ , se distribuyen entre todos los marcos, contraventeados o no, proporcionalmente a sus rigideces elásticas.
- 5° Se hace un análisis elástico de cada uno de los marcos, sometido a las fuerzas horizontales de trabajo que le corresponden de acuerdo con el punto 4; este análisis, que puede efectuarse ventajosamente con una computadora, proporciona elementos mecánicos y desplazamientos laterales producidos por cargas de trabajo.
- 6° Se obtienen los momentos totales de diseño de cada entrepiso; en ~~xxxx~~ marcos no contraventeados son iguales al cortante calculado en 4 multiplicado por la altura del entrepiso y por el factor de carga  $\lambda_2$  (1.3, o algún valor parecido), y en los contraventeados ~~el~~ el producto del cortante total menos el que resisten las diagonales, multiplicado por los mismos factores.

- 7° Se obtienen los momentos plásticos finales <sup>necesarios</sup> en vigas y columnas, utilizando el método de distribución plástica de momentos modificado<sup>5</sup>.
- 8° Se hace el diseño final de vigas, columnas y contraventeos. Las segundas se diseñan de manera que resistan los elementos mecánicos que les transmiten las primeras, momentos y fuerzas normales, hasta que se convierten en mecanismos; puede haber acción de marco rígido en las dos direcciones ortogonales.
- 9° Puede mejorarse el diseño de las columnas en algunas zonas utilizando subconjuntos. (Este estudio es indispensable cuando la carga viva es muy grande y hay que considerar varias distribuciones).
- 10° Si se desea, puede trazarse la curva fuerza horizontal-desplazamiento lateral de algunos entrepisos, utilizando el método de los subconjuntos y teniendo en cuenta el contraventeo, cuando lo haya. Este último paso no es necesario para la solución del problema, pero puede proporcionar valiosa información sobre el comportamiento de la estructura.

La hipótesis de distribución de las fuerzas horizontales ~~proporcionales~~ proporcionalmente a las rigideces elásticas de los diversos elementos que componen la estructura proporciona un conjunto de elementos mecánicos que satisfacen la condición de equilibrio, y que cumple también la de plasticidad, y aún la de mecanismo, si el diseño se hace adecuadamente. Esa hipótesis se va haciendo conservadora al formarse articulaciones plásticas en los marcos, pues su rigidez disminuye y los contraventeos toman fuerzas cortantes cada vez mayores, siempre que ellos no fluyan plásticamente.

1  
 2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 8  
 9  
 10  
 11  
 12  
 13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20  
 21  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26  
 27  
 28  
 29  
 30  
 31  
 32  
 33  
 34  
 35  
 36  
 37  
 38  
 39  
 40  
 41  
 42  
 43  
 44  
 45  
 46  
 47  
 48  
 49  
 50  
 51  
 52  
 53  
 54  
 55  
 56  
 57  
 58  
 59  
 60  
 61  
 62  
 63  
 64  
 65  
 66  
 67  
 68  
 69  
 70  
 71  
 72  
 73  
 74  
 75  
 76  
 77  
 78  
 79  
 80  
 81  
 82  
 83  
 84  
 85  
 86  
 87  
 88  
 89  
 90  
 91  
 92  
 93  
 94  
 95  
 96  
 97  
 98  
 99  
 100  
 101  
 102  
 103  
 104  
 105  
 106  
 107  
 108  
 109  
 110  
 111  
 112  
 113  
 114  
 115  
 116  
 117  
 118  
 119  
 120  
 121  
 122  
 123  
 124  
 125  
 126  
 127  
 128  
 129  
 130  
 131  
 132  
 133  
 134  
 135  
 136  
 137  
 138  
 139  
 140  
 141  
 142  
 143  
 144  
 145  
 146  
 147  
 148  
 149  
 150  
 151  
 152  
 153  
 154  
 155  
 156  
 157  
 158  
 159  
 160  
 161  
 162  
 163  
 164  
 165  
 166  
 167  
 168  
 169  
 170  
 171  
 172  
 173  
 174  
 175  
 176  
 177  
 178  
 179  
 180  
 181  
 182  
 183  
 184  
 185  
 186  
 187  
 188  
 189  
 190  
 191  
 192  
 193  
 194  
 195  
 196  
 197  
 198  
 199  
 200  
 201  
 202  
 203  
 204  
 205  
 206  
 207  
 208  
 209  
 210  
 211  
 212  
 213  
 214  
 215  
 216  
 217  
 218  
 219  
 220  
 221  
 222  
 223  
 224  
 225  
 226  
 227  
 228  
 229  
 230  
 231  
 232  
 233  
 234  
 235  
 236  
 237  
 238  
 239  
 240  
 241  
 242  
 243  
 244  
 245  
 246  
 247  
 248  
 249  
 250  
 251  
 252  
 253  
 254  
 255  
 256  
 257  
 258  
 259  
 260  
 261  
 262  
 263  
 264  
 265  
 266  
 267  
 268  
 269  
 270  
 271  
 272  
 273  
 274  
 275  
 276  
 277  
 278  
 279  
 280  
 281  
 282  
 283  
 284  
 285  
 286  
 287  
 288  
 289  
 290  
 291  
 292  
 293  
 294  
 295  
 296  
 297  
 298  
 299  
 300  
 301  
 302  
 303  
 304  
 305  
 306  
 307  
 308  
 309  
 310  
 311  
 312  
 313  
 314  
 315  
 316  
 317  
 318  
 319  
 320  
 321  
 322  
 323  
 324  
 325  
 326  
 327  
 328  
 329  
 330  
 331  
 332  
 333  
 334  
 335  
 336  
 337  
 338  
 339  
 340  
 341  
 342  
 343  
 344  
 345  
 346  
 347  
 348  
 349  
 350  
 351  
 352  
 353  
 354  
 355  
 356  
 357  
 358  
 359  
 360  
 361  
 362  
 363  
 364  
 365  
 366  
 367  
 368  
 369  
 370  
 371  
 372  
 373  
 374  
 375  
 376  
 377  
 378  
 379  
 380  
 381  
 382  
 383  
 384  
 385  
 386  
 387  
 388  
 389  
 390  
 391  
 392  
 393  
 394  
 395  
 396  
 397  
 398  
 399  
 400  
 401  
 402  
 403  
 404  
 405  
 406  
 407  
 408  
 409  
 410  
 411  
 412  
 413  
 414  
 415  
 416  
 417  
 418  
 419  
 420  
 421  
 422  
 423  
 424  
 425  
 426  
 427  
 428  
 429  
 430  
 431  
 432  
 433  
 434  
 435  
 436  
 437  
 438  
 439  
 440  
 441  
 442  
 443  
 444  
 445  
 446  
 447  
 448  
 449  
 450  
 451  
 452  
 453  
 454  
 455  
 456  
 457  
 458  
 459  
 460  
 461  
 462  
 463  
 464  
 465  
 466  
 467  
 468  
 469  
 470  
 471  
 472  
 473  
 474  
 475  
 476  
 477  
 478  
 479  
 480  
 481  
 482  
 483  
 484  
 485  
 486  
 487  
 488  
 489  
 490  
 491  
 492  
 493  
 494  
 495  
 496  
 497  
 498  
 499  
 500  
 501  
 502  
 503  
 504  
 505  
 506  
 507  
 508  
 509  
 510  
 511  
 512  
 513  
 514  
 515  
 516  
 517  
 518  
 519  
 520  
 521  
 522  
 523  
 524  
 525  
 526  
 527  
 528  
 529  
 530  
 531  
 532  
 533  
 534  
 535  
 536  
 537  
 538  
 539  
 540  
 541  
 542  
 543  
 544  
 545  
 546  
 547  
 548  
 549  
 550  
 551  
 552  
 553  
 554  
 555  
 556  
 557  
 558  
 559  
 560  
 561  
 562  
 563  
 564  
 565  
 566  
 567  
 568  
 569  
 570  
 571  
 572  
 573  
 574  
 575  
 576  
 577  
 578  
 579  
 580  
 581  
 582  
 583  
 584  
 585  
 586  
 587  
 588  
 589  
 590  
 591  
 592  
 593  
 594  
 595  
 596  
 597  
 598  
 599  
 600  
 601  
 602  
 603  
 604  
 605  
 606  
 607  
 608  
 609  
 610  
 611  
 612  
 613  
 614  
 615  
 616  
 617  
 618  
 619  
 620  
 621  
 622  
 623  
 624  
 625  
 626  
 627  
 628  
 629  
 630  
 631  
 632  
 633  
 634  
 635  
 636  
 637  
 638  
 639  
 640  
 641  
 642  
 643  
 644  
 645  
 646  
 647  
 648  
 649  
 650  
 651  
 652  
 653  
 654  
 655  
 656  
 657  
 658  
 659  
 660  
 661  
 662  
 663  
 664  
 665  
 666  
 667  
 668  
 669  
 670  
 671  
 672  
 673  
 674  
 675  
 676  
 677  
 678  
 679  
 680  
 681  
 682  
 683  
 684  
 685  
 686  
 687  
 688  
 689  
 690  
 691  
 692  
 693  
 694  
 695  
 696  
 697  
 698  
 699  
 700  
 701  
 702  
 703  
 704  
 705  
 706  
 707  
 708  
 709  
 710  
 711  
 712  
 713  
 714  
 715  
 716  
 717  
 718  
 719  
 720  
 721  
 722  
 723  
 724  
 725  
 726  
 727  
 728  
 729  
 730  
 731  
 732  
 733  
 734  
 735  
 736  
 737  
 738  
 739  
 740  
 741  
 742  
 743  
 744  
 745  
 746  
 747  
 748  
 749  
 750  
 751  
 752  
 753  
 754  
 755  
 756  
 757  
 758  
 759  
 760  
 761  
 762  
 763  
 764  
 765  
 766  
 767  
 768  
 769  
 770  
 771  
 772  
 773  
 774  
 775  
 776  
 777  
 778  
 779  
 780  
 781  
 782  
 783  
 784  
 785  
 786  
 787  
 788  
 789  
 790  
 791  
 792  
 793  
 794  
 795  
 796  
 797  
 798  
 799  
 800  
 801  
 802  
 803  
 804  
 805  
 806  
 807  
 808  
 809  
 810  
 811  
 812  
 813  
 814  
 815  
 816  
 817  
 818  
 819  
 820  
 821  
 822  
 823  
 824  
 825  
 826  
 827  
 828  
 829  
 830  
 831  
 832  
 833  
 834  
 835  
 836  
 837  
 838  
 839  
 840  
 841  
 842  
 843  
 844  
 845  
 846  
 847  
 848  
 849  
 850  
 851  
 852  
 853  
 854  
 855  
 856  
 857  
 858  
 859  
 860  
 861  
 862  
 863  
 864  
 865  
 866  
 867  
 868  
 869  
 870  
 871  
 872  
 873  
 874  
 875  
 876  
 877  
 878  
 879  
 880  
 881  
 882  
 883  
 884  
 885  
 886  
 887  
 888  
 889  
 890  
 891  
 892  
 893  
 894  
 895  
 896  
 897  
 898  
 899  
 900  
 901  
 902  
 903  
 904  
 905  
 906  
 907  
 908  
 909  
 910  
 911  
 912  
 913  
 914  
 915  
 916  
 917  
 918  
 919  
 920  
 921  
 922  
 923  
 924  
 925  
 926  
 927  
 928  
 929  
 930  
 931  
 932  
 933  
 934  
 935  
 936  
 937  
 938  
 939  
 940  
 941  
 942  
 943  
 944  
 945  
 946  
 947  
 948  
 949  
 950  
 951  
 952  
 953  
 954  
 955  
 956  
 957  
 958  
 959  
 960  
 961  
 962  
 963  
 964  
 965  
 966  
 967  
 968  
 969  
 970  
 971  
 972  
 973  
 974  
 975  
 976  
 977  
 978  
 979  
 980  
 981  
 982  
 983  
 984  
 985  
 986  
 987  
 988  
 989  
 990  
 991  
 992  
 993  
 994  
 995  
 996  
 997  
 998  
 999  
 1000  
 1001  
 1002  
 1003  
 1004  
 1005  
 1006  
 1007  
 1008  
 1009  
 1010  
 1011  
 1012  
 1013  
 1014  
 1015  
 1016  
 1017  
 1018  
 1019  
 1020  
 1021  
 1022  
 1023  
 1024  
 1025  
 1026  
 1027  
 1028  
 1029  
 1030  
 1031  
 1032  
 1033  
 1034  
 1035  
 1036  
 1037  
 1038  
 1039  
 1040  
 1041  
 1042  
 1043  
 1044  
 1045  
 1046  
 1047  
 1048  
 1049  
 1050  
 1051  
 1052  
 1053  
 1054  
 1055  
 1056  
 1057  
 1058  
 1059  
 1060  
 1061  
 1062  
 1063  
 1064  
 1065  
 1066  
 1067  
 1068  
 1069  
 1070  
 1071  
 1072  
 1073  
 1074  
 1075  
 1076  
 1077  
 1078  
 1079  
 1080  
 1081  
 1082  
 1083  
 1084  
 1085  
 1086  
 1087  
 1088  
 1089  
 1090  
 1091  
 1092  
 1093  
 1094  
 1095  
 1096  
 1097  
 1098  
 1099  
 1100  
 1101  
 1102  
 1103  
 1104  
 1105  
 1106  
 1107  
 1108  
 1109  
 1110  
 1111  
 1112  
 1113  
 1114  
 1115  
 1116  
 1117  
 1118  
 1119  
 1120  
 1121  
 1122  
 1123  
 1124  
 1125  
 1126  
 1127  
 1128  
 1129  
 1130  
 1131  
 1132  
 1133  
 1134  
 1135  
 1136  
 1137  
 1138  
 1139  
 1140  
 1141  
 1142  
 1143  
 1144  
 1145  
 1146  
 1147  
 1148  
 1149  
 1150  
 1151  
 1152  
 1153  
 1154  
 1155  
 1156  
 1157  
 1158  
 1159  
 1160  
 1161  
 1162  
 1163  
 1164  
 1165  
 1166  
 1167  
 1168  
 1169  
 1170  
 1171  
 1172  
 1173  
 1174  
 1175  
 1176  
 1177  
 1178  
 1179  
 1180  
 1181  
 1182  
 1183  
 1184  
 1185  
 1186  
 1187  
 1188  
 1189  
 1190  
 1191  
 1192  
 1193  
 1194  
 1195  
 1196  
 1197  
 1198  
 1199  
 1200  
 1201  
 1202  
 1203  
 1204  
 1205  
 1206  
 1207  
 1208  
 1209  
 1210  
 1211  
 1212  
 1213  
 1214  
 1215  
 1216  
 1217  
 1218  
 1219  
 1220  
 1221  
 1222  
 1223  
 1224  
 1225  
 1226  
 1227  
 1228  
 1229  
 1230  
 1231  
 1232  
 1233  
 1234  
 1235  
 1236  
 1237  
 1238  
 1239  
 1240  
 1241  
 1242  
 1243  
 1244  
 1245  
 1246  
 1247  
 1248  
 1249  
 1250  
 1251  
 1252  
 1253  
 1254  
 1255  
 1256  
 1257  
 1258  
 1259  
 1260  
 1261  
 1262  
 1263  
 1264  
 1265  
 1266  
 1267  
 1268  
 1269  
 1270  
 1271  
 1272  
 1273  
 1274  
 1275  
 1276  
 1277  
 1278  
 1279  
 1280  
 1281  
 1282  
 1283  
 1284  
 1285  
 1286  
 1287  
 1288  
 1289  
 1290  
 1291  
 1292  
 1293  
 1294  
 1295  
 1296  
 1297  
 1298  
 1299  
 1300  
 1301  
 1302  
 1303  
 1304  
 1305  
 1306  
 1307  
 1308  
 1309  
 1310  
 1311  
 1312  
 1313  
 1314  
 1315  
 1316  
 1317  
 1318  
 1319  
 1320  
 1321  
 1322  
 1323  
 1324  
 1325  
 1326  
 1327  
 1328  
 1329  
 1330  
 1331  
 1332  
 1333  
 1334  
 1335  
 1336  
 1337  
 1338  
 1339  
 1340  
 1341  
 1342  
 1343  
 1344  
 1345  
 1346  
 1347  
 1348  
 1349  
 1350  
 1351  
 1352  
 1353  
 1354  
 1355  
 1356  
 1357  
 1358  
 1359  
 1360  
 1361  
 1362  
 1363  
 1364  
 1365  
 1366  
 1367  
 1368  
 1369  
 1370  
 1371  
 1372  
 1373  
 1374  
 1375  
 1376  
 1377  
 1378  
 1379  
 1380  
 1381  
 1382  
 1383  
 1384  
 1385  
 1386  
 1387  
 1388  
 1389  
 1390  
 1391  
 1392  
 1393  
 1394  
 1395  
 1396  
 1397  
 1398  
 1399  
 1400  
 1401  
 1402  
 1403  
 1404  
 1405  
 1406  
 1407  
 1408  
 1409  
 1410  
 1411  
 1412  
 1413  
 1414  
 1415  
 1416  
 1417  
 1418  
 1419  
 1420  
 1421  
 1422  
 1423  
 1424  
 1425  
 1426  
 1427  
 1428  
 1429  
 1430  
 1431  
 1432  
 1433  
 1434  
 1435  
 1436  
 1437  
 1438  
 1439  
 1440  
 1441  
 1442  
 1443  
 1444  
 1445  
 1446  
 1447  
 1448  
 1449  
 1450  
 1451  
 1452  
 1453  
 1454  
 1455  
 1456  
 1457  
 1458  
 1459  
 1460  
 1461  
 1462  
 1463  
 1464  
 1465  
 1466  
 1467  
 1468  
 1469  
 1470  
 1471  
 1472  
 1473  
 1474  
 1475  
 1476  
 1477  
 1478  
 1479  
 1480  
 1481  
 1482  
 1483  
 1484  
 1485  
 1486  
 1487  
 1488  
 1489  
 1490  
 1491  
 1

TABLA 7.1

LONGITUD DE DESARROLLO (CM) DE VARILLAS CORRUGADAS DE  
LECHO INFERIOR\*

Varilla	$L_d$
No. 11 o menor	$0.06 a_s f_s / \sqrt{f'_c} \geq 0.0057 D f_s$
No. 14	$0.82 f_s / \sqrt{f'_c}$
No. 18	$1.06 f_s / \sqrt{f'_c}$
Alambres	$0.11 D f_s / \sqrt{f'_c}$

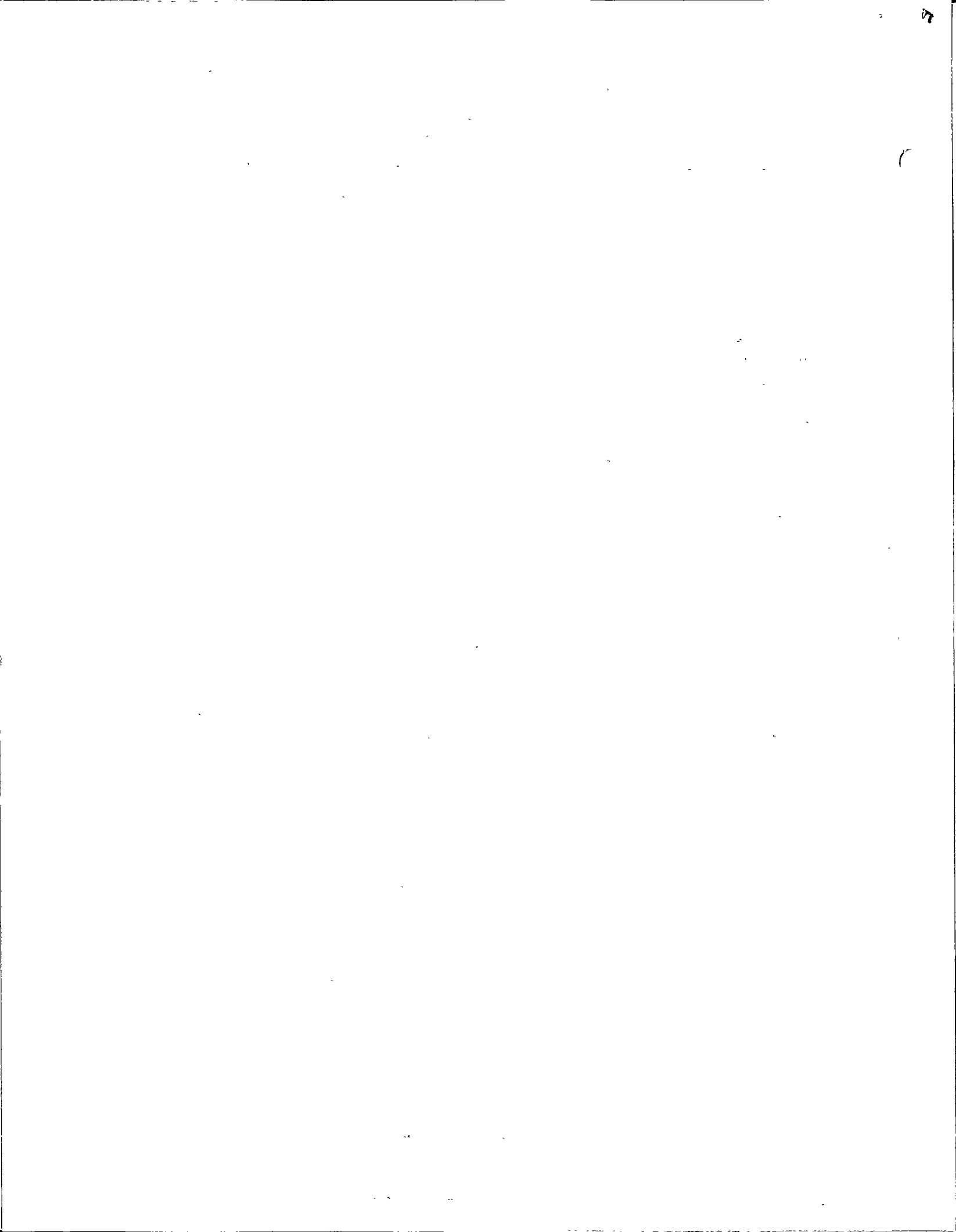
\* Se entiende por varillas de lecho inferior aquellas que tienen una capa de concreto con un espesor menor de 30 cm debajo de la varilla.

TABLA 7.2

FACTORES QUE MULTIPLICAN A LAS LONGITUDES DE DESARROLLO  
DE LA TABLA 7.1 PARA DIVERSAS CONDICIONES

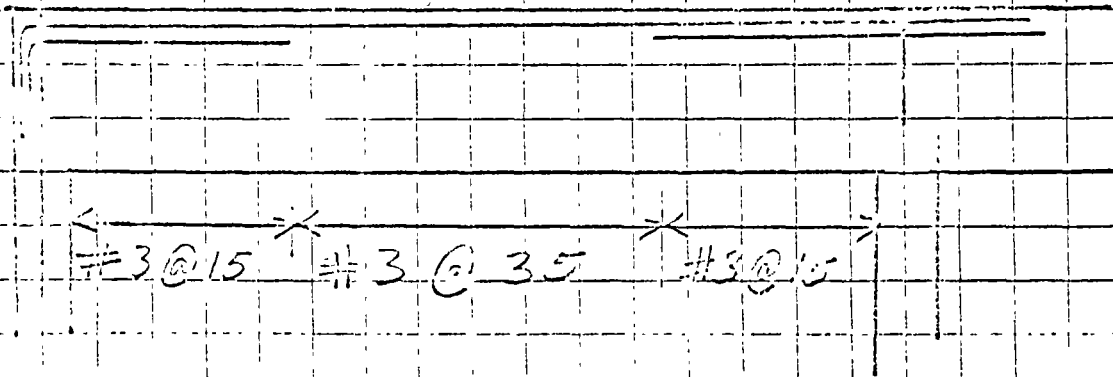
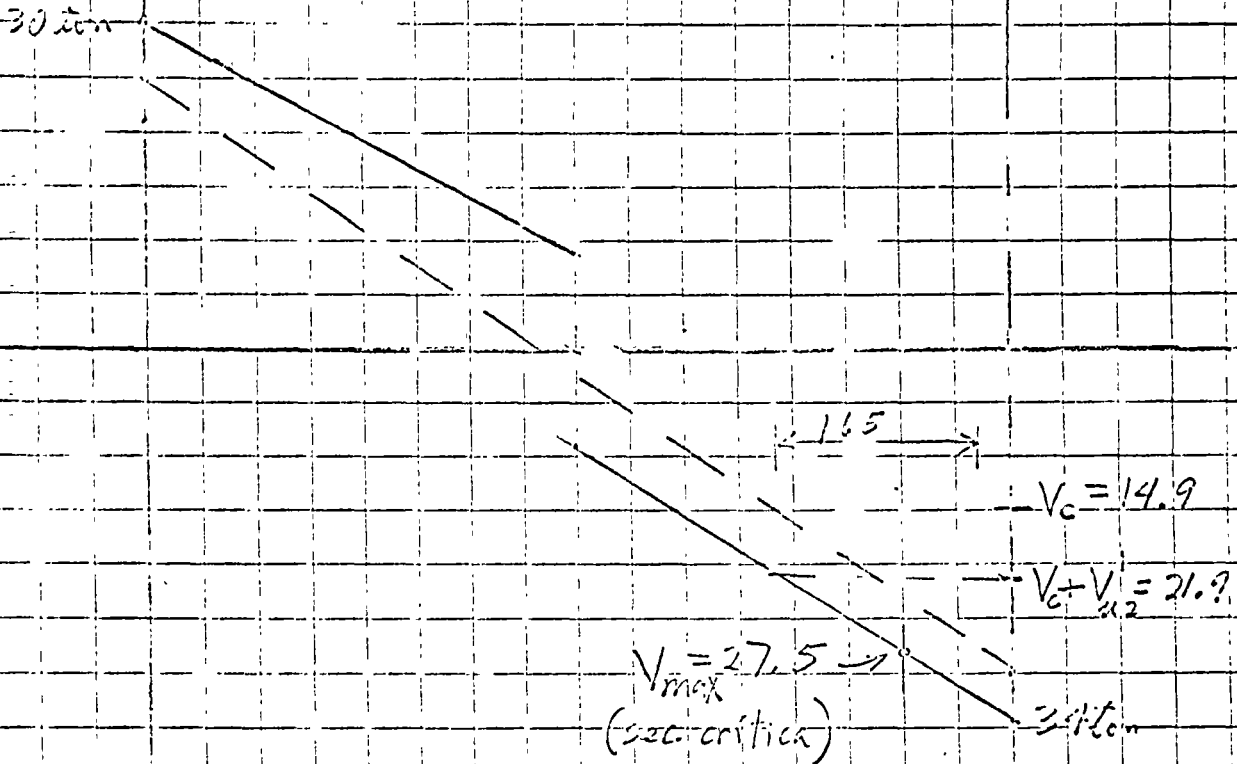
Condición	Factor
Varillas o alambres de lecho superior*	1.4
Varillas separadas entre sí menos de 15 cm o varillas que disten menos de 7.5 cm de una cara lateral del elemento	0.8
Varillas con $f_y > 4200 \text{ kg/cm}^2$	$(2 - 4200/f_s)$
Varillas confinadas con una hélice de área mínima de $0.32 \text{ cm}^2$ y paso libre no mayor de 10 cm	0.75

\* Se entiende por varillas de lecho superior aquellas que tienen una capa de concreto con un espesor de por lo menos 30 cm debajo de la varilla.



Example 13.6 - Constant

10'







cia decisiva sobre el comportamiento del acero estructural. Un descenso de la temperatura ocasiona un aumento en el esfuerzo de fluencia del acero y una disminucion de su ductilidad, efectos análogos a los producidos por un incremento en la velocidad de carga.

Por consiguiente, ambos fenómenos tienden a hacer que el comportamiento del acero deje de ser dúctil para convertirse en frágil. De hecho, muchas fracturas frágiles han sido iniciadas por cargas de impacto, y ese tipo de fallas se presentan, en la mayor parte de los casos, en estructuras sujetas a temperaturas muy bajas.

Los estados de esfuerzo triaxiales tambien afectan profundamente el comportamiento del acero; en efecto, cuando los tres esfuerzos principales tienden a igualarse, el esfuerzo cortante máximo tiende a cero, y puesto que el flujo plástico, característico del comportamiento dúctil, sólo puede ocurrir en presencia de esfuerzos cortantes, es evidente que no será posible cuando existan esfuerzos triaxiales iguales, de tensión o compresión; en ese caso, el acero se comportará en forma frágil, aún a temperaturas ordinarias.

En el diseño de estructuras de acero en general, y más aún cuando vayan a <sup>Fatiga</sup> construirse en zonas sísmicas, deben tenerse en cuenta esos factores, ya que, si se olvidan, pueden llegar a ocasionar, en circunstancias desfavorables, la pérdida de la ductilidad del acero y producir, por consiguiente, estructuras poco adecuadas para el trabajo a que van a estar destinadas.

En la referencia 1 se indica que las estructuras de concreto reforzado deben tener un coeficiente de ductilidad mínimo de 4, para poder resistir los temblores de mayor intensidad probables en la costa oeste de los Estados Unidos; puede verse que, de acuerdo con los datos de que se dispone, los marcos continuos de acero, soldados, sobrepasan ampliamente ese valor.

9.3.- Redistribución plástica de momentos.- Un factor que capacite a los marcos rígidos de acero <sup>para resistir</sup> cargas mucho mayores que las calculadas de acuerdo con la teoría elástica es la redistribución de momentos que se presenta cuando se alcanzan en dis

tintas secciones los valores de las sollicitaciones que ocasionan la formación de articulaciones plásticas en ellas; para incrementos adicionales de carga se presentan rotaciones bajo momento constante en las articulaciones plásticas, sobrecargándose los elementos de la estructura sometidos inicialmente a sollicitaciones menores, -- hasta que se produce el colapso de la estructura bajo cargas que, en marcos bien -- diseñados y de elevado grado de hiperestaticidad, pueden ser considerablemente mayores que las cargas elásticas de trabajo. La formación y rotación sucesiva de las -- articulaciones plásticas va acompañada, además, por una absorción considerable de -- energía.

La capacidad de los perfiles laminados de acero estructural de soportar rotaciones considerables bajo momento constante, así como la redistribución de momentos -- que, debido a ese fenómeno, se presenta en las estructuras hiperestáticas, capacitándolas para <sup>soportar</sup> cargas mucho mayores que las que <sup>resistencia</sup> si su comportamiento fuese elástico hasta el colapso, han sido demostradas ampliamente a través de un -- gran número de experiencias, de laboratorio, las que han arrojado resultados que -- <sup>concuerdan</sup> perfectamente con los obtenidos analíticamente, basados en la suposición de un comportamiento elasto-plástico perfecto del acero, de acuerdo con la gráfica esfuerzo-deformación idealizada de la Fig. 9.4.

continuaré discutiré algunos resultados experimentales, basándonos en datos presentados en la ref. 12.

Las Figs. 9.5 y 9.6 muestran las características propias de la formación de una articulación plástica. La primera de ellas es una curva  $M - \theta$  (momento - - curvatura) típica, obtenida de una viga cuya porción central está sometida a flexión pura, y muestra que el momento plástico se alcanza al plastificarse la sección transversal correspondiente. La línea punteada es la curva idealizada y la línea -- llena corresponde a los resultados obtenidos experimentalmente. Las distribuciones de esfuerzos teóricas (de acuerdo con la teoría plástica simple) correspondientes a diferentes etapas de la flexión se muestran en la Fig. 9.5 (b), y en la 9.5 (c) -- aparecen las distribuciones de esfuerzos determinadas experimentalmente. (Los núme-

ros indicados en distintos puntos de la curva experimental corresponden a las etapas en que se presentan las diversas distribuciones de esfuerzos). Como puede verse de la curva, la sección transversal efectivamente se plastifica, y el momento flexionante correspondiente a esa condición es el momento plástico, obtenido de la ecuación  $M_p = \sigma_y Z$ .

La Fig. 9.6 representa los resultados obtenidos para una condición de carga -- mas común, que produce un momento flexionante variable a lo largo de la viga. En este caso, y en todos en los que se presenta esa variación del momento, la deformación tiende a concentrarse en el punto de aplicación de la carga, que es el punto -- en el que el momento flexionante es máximo. Debido a que la deformación plástica es mas localizada, se alcanza la región de endurecimiento por deformación con deflexiones pequeñas, lo que da lugar a que la viga tienda a desarrollar un momento mayor que el plástico. En la figura se muestran dos curvas carga-deformación teóricas, con y sin incluir los efectos del endurecimiento por deformación, así como los resultados obtenidos experimentalmente (estos últimos, con líneas continuas). Como un resultado del endurecimiento por deformación, hay un aumento en la capacidad de carga de la viga, para deformaciones considerablemente mayores que las de fluencia. La disminución en la capacidad de carga que se presenta después de grandes rotaciones en la articulación plástica central se debe, en el ensayo que estamos describiendo, a pandeo local de los patines, seguido de un pandeo lateral de conjunto.

Por consiguiente, y aunque su efecto se desprecia en la teoría plástica simple, el endurecimiento por deformación mejora la capacidad de las vigas para <sup>resistir</sup> momento.

Las Figs. 9.7 y 9.8 muestran el efecto de la redistribución de momentos en la capacidad de carga de estructuras hiperestáticas.

En la 9.7 se muestran: a) las condiciones de carga, b) la elástica, c) el diagrama de momentos, d) la curva carga-deformación y e) y f), las curvas momento-curvatura para una sección cerca de los extremos y para la sección central, respectivamente.

Las cuatro etapas consideradas son las siguientes:

Etapas 1.- Se alcanza el límite elástico.

- 2.- Acaban de formarse las articulaciones plásticas en los extremos de la viga.
- 3.- Se alcanza la carga última teórica.
- 4.- La deformación ha continuado a través de un desplazamiento adicional arbitrario.

En el <sup>intervalo</sup> elástico (etapa 1) la viga se comporta tal como se supone en la teoría, y el momento en el centro es igual a la mitad de los momentos en los extremos (Figs 9.7 c, e y f). Al acercarse los momentos de los empotramientos al momento plástico, la curvatura  $\phi$  crece más rápidamente en esas secciones, iniciándose la formación de una articulación plástica (Fig. 9.7 e), lo que da lugar a que los momentos adicionales debidos a incrementos en las cargas se distribuyan entre los extremos y el centro de la viga en proporciones diferentes a las existentes durante el comportamiento elástico. Efectivamente, mientras que la viga es elástica el incremento de momento en el centro, debido a un aumento de la carga, es igual a la mitad <sup>de los</sup> incrementos en los extremos; en cambio, después de que se forman articulaciones plásticas en éstos, la casi totalidad del aumento de momento se presenta en el centro, mientras que el incremento en los extremos es muy pequeño (Figs. 9.7 e y f). Este es el proceso conocido como redistribución de momentos.

Al plastificarse sus extremos, la viga se vuelve más flexible de lo que era originalmente (Fig. 9.7 d), y cuando se alcanza la etapa 3 (carga última) su capacidad <sup>de carga</sup> está prácticamente agotada. De aquí en adelante, la viga simplemente se deforma como un mecanismo, con rotaciones en las articulaciones plásticas de los extremos y del centro, mientras que el diagrama de momentos flexionantes permanece inalterado.

Es evidente que la redistribución de momentos se presenta por la formación de articulaciones plásticas y permite a la estructura alcanzar y, en general, exceder, la carga última predicha por la teoría plástica simple.

Esta propiedad de los perfiles de acero de mantener un momento resistente --- constante en secciones en las que se presentan rotaciones importantes es la base de los métodos de análisis plástico, los que han alcanzado un desarrollo notable en estructuras de pocos pisos de altura, <sup>y se aplican también, desde hace algunos años,</sup> ~~pero que~~ edificios de cualquier número de niveles, <sup>provistos de contraventes o en cd.</sup> ~~cuando se tengan datos experimentales adicionales sobre el comportamiento de piezas flexo-comprimidas bajo cargas axiales intensas~~ ---  
~~Aún con los conocimientos actuales, puede ya hacerse un análisis elástico-plástico de marcos de cualquier altura, si se logra que las columnas se unan en el suelo hasta que los tramos fallen como mecanismos.~~

9.4.- Diseño. - Para que una estructura de acero, en conjunto, conserve la ductilidad propia del material de que está compuesta y, al mismo tiempo, sea capaz de admitir la formación y rotación de las articulaciones plásticas necesarias para que se presenten redistribuciones favorables de momentos, es necesario que al diseñarla se tomen en cuenta una serie de factores que, si no están bien resueltos, pueden ocasionar fallas de tipo no dúctil, con la pérdida de las ventajas que hemos mencionado con anterioridad; es decir, el diseño debe hacerse de manera que se garantice el cumplimiento de los puntos 9.2 y 9.3.

Para ello, deben tenerse en cuenta los factores siguientes, principalmente:

- 9.5) Evitar la posibilidad de fallas por pandeo, ya sea local o de conjunto.
- 9.6) Evitar fallas frágiles, ya sea en algún miembro o en la unión entre dos o más de ellos.
- 9.7) Diseñar las juntas de manera que tengan la resistencia necesaria y, al mismo tiempo, una capacidad de rotación adecuada.

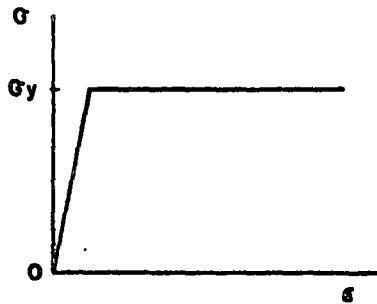
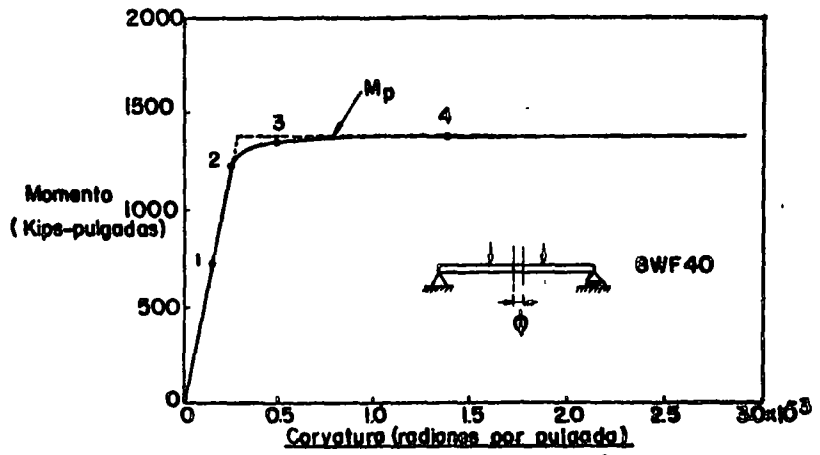


Fig. 9.4

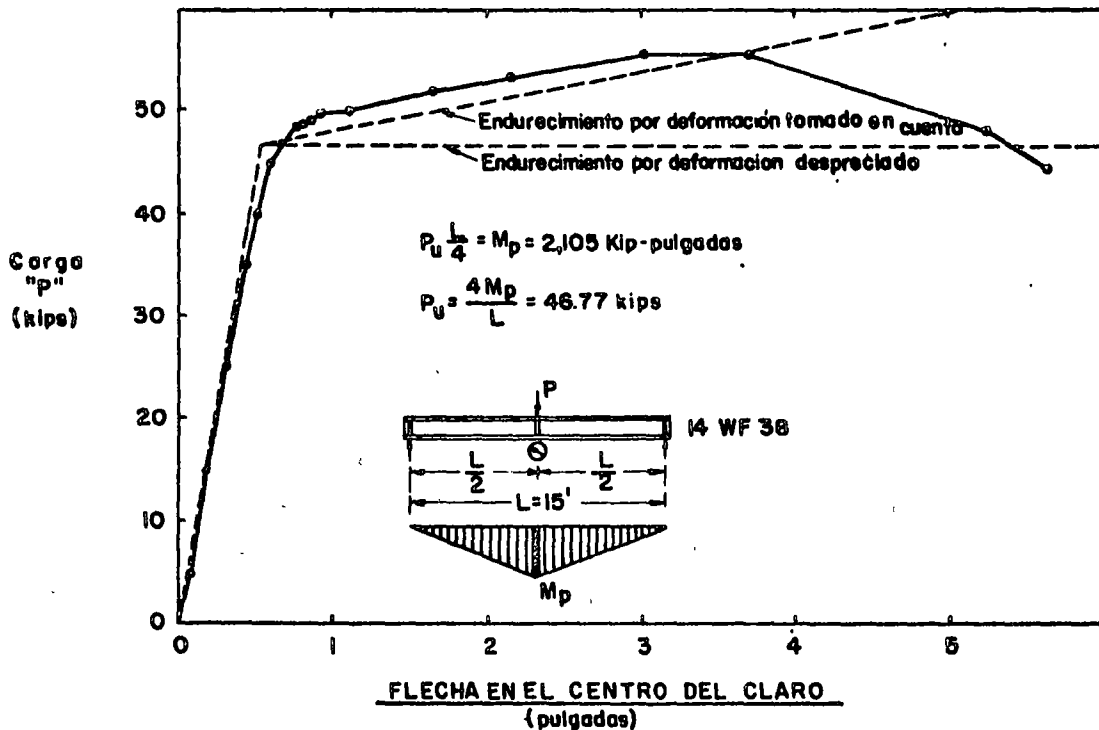


Distribución teórica de esfuerzos



Distribución de esfuerzos medida experimentalmente

Fig. 9.5



$$P_u \frac{L}{4} = M_p = 2,105 \text{ Kip-pulgadas}$$

$$P_y = \frac{4 M_p}{L} = 46.77 \text{ kips}$$

Fig. 9.6

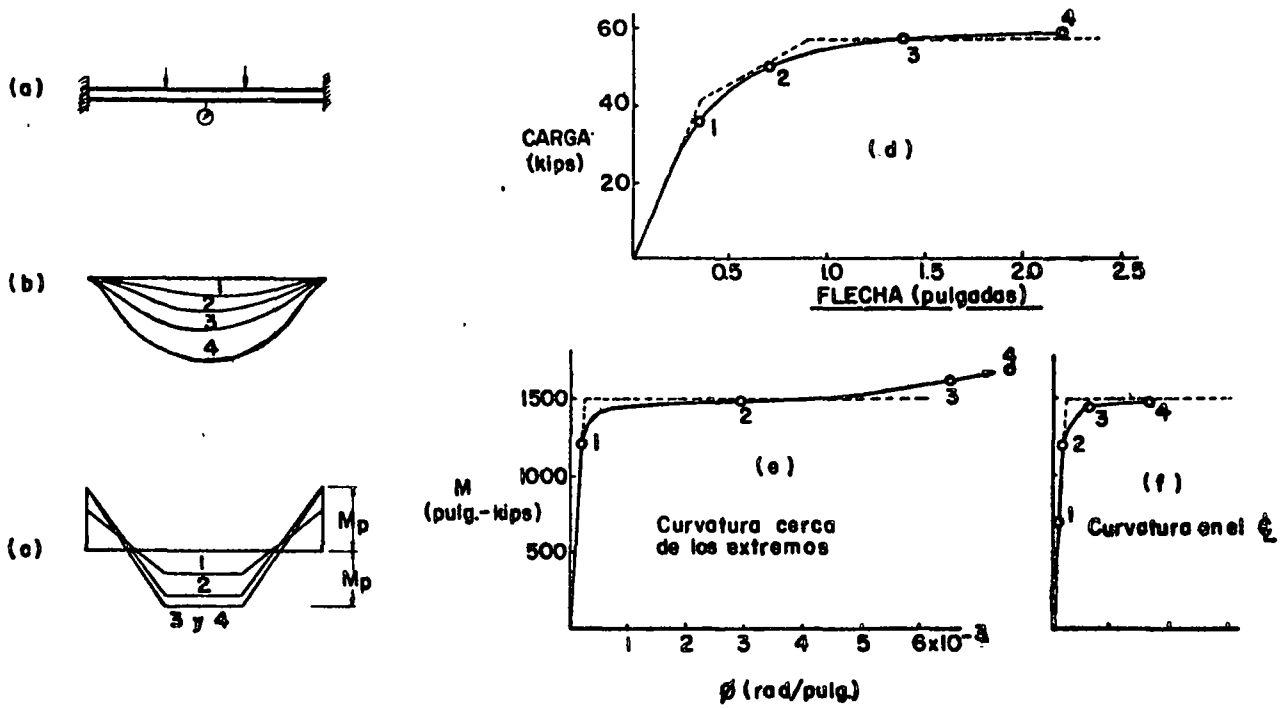


Fig. 9.7

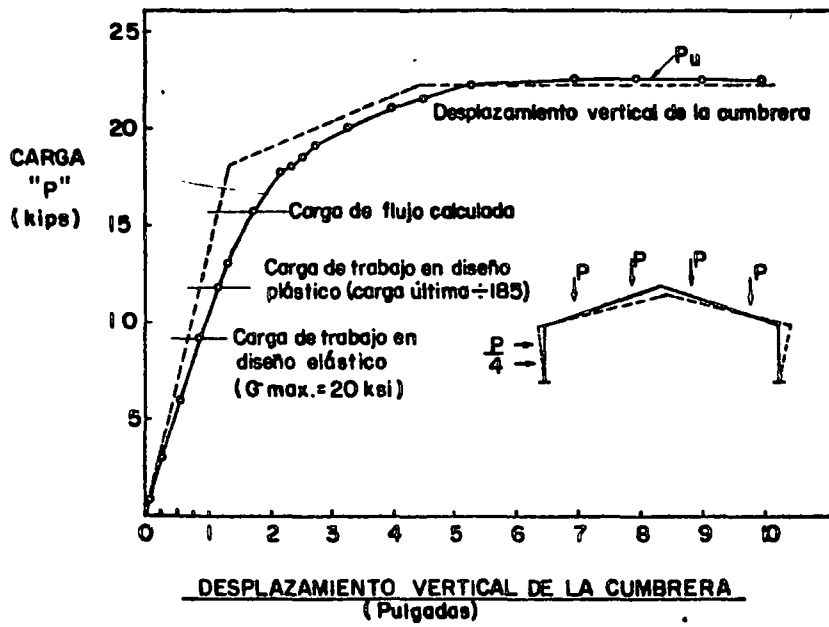


Fig. 9.8





## ESTRUCTURAS DE ACERO.

### INTRODUCCION.

El factor fundamental en el comportamiento de una estructura so-  
metida a la acción de fuerzas sísmicas no es su resistencia, sino su capacidad--  
para absorber energía.

El estudio de edificios reales sometidos a temblores intensos-  
ha mostrado que su comportamiento no puede explicarse desde un punto de vista me-  
cánicamente elástico, ya que su capacidad de absorción de energía en ese intervalo -  
es relativamente pequeña y linealmente proporcional a la magnitud de los elemen-  
tos mecánicos, los que tendrían que superar con creces la resistencia de la es-  
tructura. para absorber la energía transmitida por el temblor. En realidad, -  
las solicitaciones sísmicas ocasionan en muchos puntos deformaciones unitarias -  
que exceden las correspondientes al inicio del flujo plástico, de manera que la-  
respuesta depende de las propiedades de la estructura en el intervalo inelástico.

Un marco rígido que se comporte en forma dúctil, bajo cualquier  
condición de carga posee una gran capacidad de absorción de energía y, siendo -  
altamente hiperestático, es capaz de admitir deformaciones locales considerables  
y de redistribuir las solicitaciones haciendo que las porciones menos cargadas -  
acudan en ayuda de las demás en emergencias severas, de manera que su capacidad  
de carga no está limitada por la del elemento más débil, sino depende de la re-  
sistencia de la estructura en conjunto.

El acero estructural es un material sumamente dúctil, capaz de  
constituir estructuras hiperestáticas que llenen las condiciones mencionadas en-  
los párrafos anteriores; por consiguiente, es un material muy adecuado para la -  
construcción en zonas sísmicas, siempre que el diseño y ejecución se realicen en -  
forma correcta, ya que la ductilidad intrínseca del acero no garantiza que esa -  
propiedad se conserve en la estructura en conjunto.

PROPIEDADES MECANICAS DEL ACERO ESTRUCTURAL.

El acero es el metal más empleado en estructuras por que es si multáneamente muy resistente, tanto en tensión como en compresión, bastante rígi do (tiene un módulo de elasticidad elevado) y considerablemente dúctil; además, es fácil de fabricar y su precio es relativamente reducido.

En la figura N°. 1 se muestra la gráfica esfuerzo-deformación de un acero estructural A36, obtenida en una prueba de tensión simple realiza da lentamente y a temperatura normal; en la 2 se ha trazado, en forma ligera-- mente simplificada, la parte de la curva que tiene mayor importancia en el dise ño de estructuras (en compresión simple se obtienen resultados prácticamente - iguales).

La relación entre la deformación en el instante de la falla y la correspondiente al límite de fluencia, a la que se designa con el nombre de-- coeficiente de ductilidad, es del orden de 230, y las deformaciones en la ini-- ciación del endurecimienço por deformación son unas 10 ó 12 veces mayores que - las elásticas.

La capacidad del acero estructural para experimentar deforma-- ciones permanentes importantes, es decir, su ductilidad es, como ya se ha mencio nado, una propiedad de importancia fundamental. En contraste con un material - frágil, como el vidrio, que se fractura de una manera repentina y sin ningún -- aviso previo, el acero se deforma considerablemente antes de romperse. Además, - como la energía absorbida durante el proceso de deformación es proporcional al-- área bajo la curva esfuerzo-deformación, pueda absorber una cantidad incompara-- blemente mayor que un material frágil, que tiene un comportamiento elástico has ta la fractura.

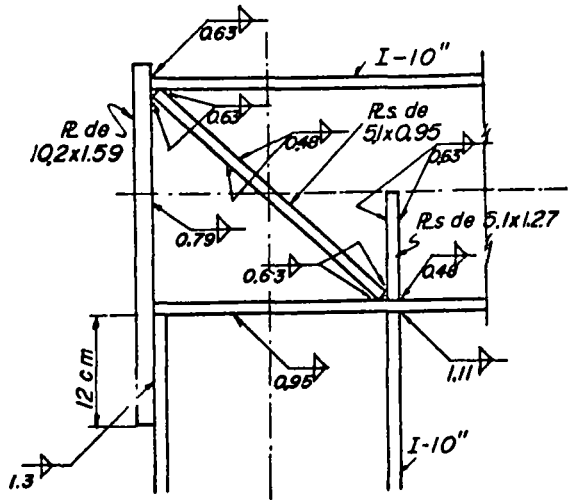
Ahora bien, tanto la velocidad de carga como la temperatura - tienen una gran influencia sobre el comportamiento del acero estructural: -

un descenso de la temperatura ocasiona un aumento en su esfuerzo de fluencia y una disminución de ductilidad, efectos análogos a los producidos por un incremento en la velocidad de aplicación de la carga, por lo que ambos fenómenos tienden a reducir la ductilidad y a producir, eventualmente, un comportamiento frágil. De hecho, muchas fracturas frágiles han sido iniciadas por cargas de impacto, y ese tipo de falla se presenta, en la mayor parte de los casos, en estructuras sometidas a bajas temperaturas.

Los estados de esfuerzo triaxiales también afectan profundamente el comportamiento del acero ya que cuando los tres esfuerzos principales tienden a igualarse el cortante máximo tiende a cero, lo que impide el flujo plástico del material, característico del comportamiento dúctil, que sólo puede ocurrir en presencia de esfuerzos cortantes; por consiguiente, si los tres esfuerzos principales son tensiones iguales entre sí, el acero, o cualquier otro material, falla de manera frágil, aún a temperaturas ordinarias.

En el diseño de estructuras de acero en general, y más aún cuando se vayan a construir en zonas sísmicas, deben tenerse en cuenta esos factores ya que, si se olvidan, pueden ocasionar pérdidas importantes de ductilidad y, en circunstancias desfavorables, producir estructuras poco adecuadas para el trabajo al que están destinadas.





Los tamaños de las soldaduras y de las placas están dados en cm.

FIGURA 73

compresión, es decir, han estado sujetas a cargas que tienden a cerrar el ángulo que forman viga y columna; este es el tipo de trabajo que se presenta con más frecuencia en la práctica. Sin embargo, en algunas ocasiones (sobre todo cuando las cargas horizontales son importantes) las sollicitaciones pueden ser tales que hagan que viga y columna trabajen a flexo-tensión y que la junta tienda a abrirse. Es, por consiguiente, necesario comprobar si los métodos de diseño estudiados hasta ahora proporcionan juntas capaces de trabajar correctamente bajo ese tipo de cargas.

Con ese objeto se han realizado varias series de experiencias,<sup>40</sup> semejantes a las descritas con anterioridad, pero en las que las juntas han estado sometidas a fuerzas aplicadas en sus extremos que tienden a abrirlas; los resultados obtenidos han sido satisfactorios, es decir, han permitido comprobar que las juntas diseñadas plásticamente con los criterios estudiados tienen resistencia, capacidad de rotación y rigidez adecuadas no solamente cuando están sujetas a cargas que tienden a cerrarlas sino también en el caso contrario, es decir, cuando los elementos mecánicos que obran sobre ellas tratan de abrirlas.

Desde luego, en una junta sometida a esas condiciones de carga las soldaduras entre el patín interior de la columna y el inferior de la trabe quedan en condiciones críticas de trabajo, por lo que debe ponerse especial cuidado en su ejecución.

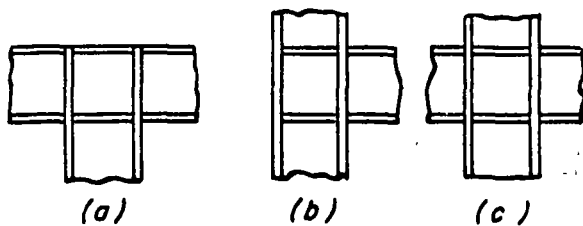


FIGURA 74

CONEXIONES VIGA - COLUMNA EN MARCOS RIGIDOS DE EDIFICIOS. En la fig. 74 se muestran tres tipos comunes de conexiones viga-columna empleados en marcos de edificios; la a) corresponde al nivel superior del marco, la b) a una columna lateral y la c) es una junta interior cualquiera.

En la mayor parte de las estructuras reales las conexiones reciben no sólo las vigas mostradas en la figura, sino una o dos más, que conectan en el alma de la columna, por los dos lados en los marcos intermedios y por uno en los extremos y que complican, evidentemente, el problema de diseño.

La columna de cualquiera de las conexiones de la fig. 74 debe ser capaz de soportar los elementos mecánicos que le transmiten las traves, momento flexionante y fuerza cortante, principalmente, sin deformarse en forma excesiva; en general, son más críticas las juntas en columnas laterales (fig. 74b), ya que los momentos debidos a carga vertical en las dos vigas que recibe una columna central suelen ser de signos contrarios. Además, sobre la conexión pueden obrar también momentos debidos a fuerzas horizontales, viento o sismo, los que deben tenerse en cuenta en el diseño, así como la carga axial existente en la columna.

Si se supone que la columna pasa corrida a través de la junta y en ella se apoyan las vigas (es la condición más común en marcos de edificios), el diseño de una conexión viga-columna consistirá fundamentalmente en:

a) Proyecto de las uniones entre las traves y la columna, las que deben ser capaces de transmitir a ésta el momento y la fuerza cortante existentes en la sección extrema de las traves; estas uniones pueden realizarse de muchas maneras distintas, empleando remaches, soldadura, pernos de alta resistencia, etc.; cuando la junta sea soldada la unión puede realizarse en forma directa, como se muestra esquemáticamente en la fig. 74, o por medio de placas soldadas a los patines, ángulos en el alma, etc.

b) Revisión de la columna para determinar si tiene resistencia adecuada para soportar los elementos mecánicos que le transmitan las vigas que se apoyan en ella y diseño, en su caso, de los refuerzos necesarios.

En ocasiones se emplean conexiones flexibles o semi-rígidas en marcos de edificio, pero no serán tratadas en este trabajo.

DISEÑO ELÁSTICO. El problema se resuelve siguiendo un camino análogo al utilizado para diseñar la junta trabe-columna de un marco rígido. Se supone que los patines toman la fuerza normal y el momento flexionante mientras que las almas toman la fuerza cortante; se hace el diagrama de cuerpo libre del tablero de alma de la junta, sustituyendo patines y atiesadores por las acciones que ejercen sobre él (fig. 75), y se investiga si el esfuerzo cortante existente en sus bordes es mayor o menor que el permisible; si es mayor, se refuerza el alma por medio de atiesadores o de placas adosadas a ella.

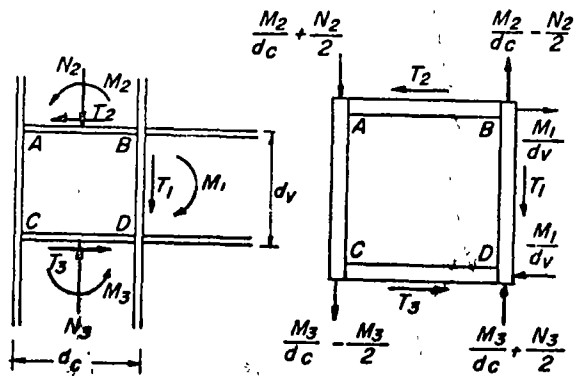


FIGURA 75

Suponiendo que las fuerzas cortantes están uniformemente distribuidas en los cuatro bordes del tablero ABCD, los esfuerzos en cada uno de ellos valen:

$$\tau_{AB} = \frac{1}{cd_c} \left( \frac{M_1}{d_v} - T_2 \right)$$

$$\tau_{CD} = \frac{1}{cd_c} \left( \frac{M_1}{d_v} - T_3 \right)$$

$$\tau_{AC} = \frac{1}{cd_v} \left( \frac{M_2}{d_c} + \frac{N_2}{2} + \frac{M_3}{d_c} - \frac{N_3}{2} \right)$$

$$\tau_{BD} = \frac{1}{cd_v} \left( \frac{M_2}{d_c} - \frac{N_2}{2} + \frac{M_3}{d_c} + \frac{N_3}{2} - T_1 \right)$$

En las ecuaciones anteriores se han obtenido las fuerzas normales en los patines debidas a los momentos flexionantes dividiendo éstos entre el peralte total del perfil con lo que se obtienen resultados que, aunque no son exactos, si son suficientemente aproximados para fines prácticos.

Comparando los esfuerzos cortantes calculados con los permisibles se ve si es o no necesario reforzar el alma de la junta.

Si la columna recibe vigas por los dos lados (junta interior) el problema se resuelve de manera análoga, haciendo intervenir en el análisis de la junta todos los momentos que obran sobre ella. Evidentemente, si las dos vigas son del mismo peralte y los momentos que ejercen sobre la columna son iguales y de signo contrario (caso que se presenta frecuentemente en estructuras sometidas a cargas verticales únicamente) el problema del cortante en el alma desaparece, bastando con colo-

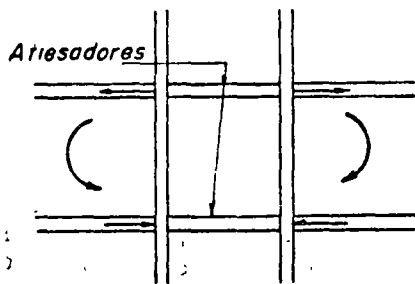


FIGURA 76

car atiesadores en la columna, a la altura de los patines de las vigas, para transmitir las fuerzas directamente a través de ellos (fig. 76).

No existen métodos elásticos que permitan determinar si esos atiesadores son o no necesarios y, en caso de serlo, cuáles deben ser las dimensiones de sus secciones transversales, por lo que se acostumbra hacerlos con las mismas dimensiones que los patines de las vigas.

El problema se complica cuando las dos vigas que llegan a los patines de la columna son de peraltes diferentes y cuando la columna recibe, además, vigas por alma, pero el procedimiento para el diseño de la junta sigue siendo el que se ha expuesto aunque variarán, naturalmente, los detalles constructivos.

**DISEÑO PLÁSTICO.** Se estudiarán en lo que sigue únicamente juntas rígidas, capaces de soportar y transmitir los elementos mecánicos íntegros de los miembros que concurren en ellas, determinados con la suposición de que en las conexiones no se presenta ninguna discontinuidad angular.

Las conexiones rígidas pueden lograrse ligando las barras que las forman por medio de remaches, soldadura o pernos de alta resistencia. Las conexiones remachadas, las más antiguas de los tres tipos, no se estudiarán, debido a que la mayor parte de los ensayos de juntas remachadas se efectuaron hace bastantes años y las cargas se llevaron poco más allá de los valores de trabajo, lo que no permitió conocer su comportamiento en el rango plástico.<sup>32</sup>

La soldadura se utiliza ampliamente para obtener juntas rígidas, las que constituyen el tipo que se estudiará en este trabajo. Por último, los pernos de alta resistencia se han estado empleando cada vez más en los últimos 15 ó 20 años, al grado que constituyen en la actualidad, en los Estados Unidos y en algunos países europeos, el medio de unión más utilizado en juntas de campo.

Una conexión viga-columna satisfactoria debe ser capaz de:

- Desarrollar el momento máximo resistente de las vigas (el momento plástico) mientras que sobre la columna obran las cargas axiales de trabajo.
- Permitir, al mismo tiempo que mantiene su capacidad de momento, una rotación suficiente para que se forme la articulación plástica en la zona central de la viga.

**JUNTAS SOLDADAS.** La exposición que sigue está basada fundamentalmente en la ref. 31, en la que se presenta una serie de investigaciones experimentales y analíticas sobre el comportamiento de conexiones viga-columna de distintos tipos, cuyo objeto fundamental es determinar en qué casos se necesitan atiesadores en la columna y en cuáles no, así como deducir procedimientos para su diseño cuando sean necesarios.

**PROGRAMA EXPERIMENTAL.** Se ensayaron dos tipos fundamentales de conexiones, unas formadas

por dos vigas soldadas a los patines de la columna y las otras compuestas de cuatro vigas y la columna, que recibe a aquellas en los patines y en los dos lados del alma.

En todos los casos las vigas se soldaron directamente a la columna, por las tres razones siguientes:

1. Las conexiones directas tienen ciertas ventajas económicas y funcionales, por lo que es probable que su empleo se extienda cada vez más.
2. Puesto que la parte más importante de la investigación consistió en la determinación de los esfuerzos y deformaciones en las zonas de la columna en que conectan las traveses, la eliminación de placas de asiento y de placas en los patines suprimió unas cuantas variables innecesarias.
3. La conexión directa, sin ángulos o placas de asiento, da lugar a la condición de carga más desfavorable en la columna en la zona de intersección con las traveses.

Sin embargo, las fórmulas desarrolladas en esta investigación pueden aplicarse también al caso en que los patines de las vigas se conecten a la columna a través de placas soldadas a tope con ésta, sustituyendo simplemente las dimensiones de los patines de las vigas por las de las placas.

**ENSAYES DE CONEXIONES CON DOS VIGAS.** El programa consistió en el diseño, preparación y ensayo de especímenes del tipo mostrado en la fig. 77, con objeto de determinar el comportamiento y la distribución de esfuerzos en la conexión y en los miembros que la componen. Se prestó principal atención al estudio del problema práctico más importante en el diseño de juntas de este tipo, consistente en la determinación de si es o no necesario colocar atiesadores en la columna, y en su diseño cuando son necesarios. Los tamaños de las vigas y las columnas y las condiciones de carga se esco-

gieron tratando de duplicar las condiciones existentes en edificios reales; así, se utilizaron tres tamaños básicos de columnas: la primera fue un perfil 8WF 31 cargado para simular las condiciones existentes en los niveles superiores de los marcos de edificios, en los que las fuerzas axiales son pequeñas comparadas con las que transmiten las vigas; en el segundo grupo se utilizaron columnas 8WF67, 12WF40 y 12WF65, con cargas del mismo orden de magnitud en vigas y columnas, y por último se ensayó un perfil 12WF99 bajo condiciones representativas de las que prevalecen en el tercio inferior de los edificios, donde las cargas axiales son grandes comparadas con las de las vigas. Las vigas empleadas en los especímenes fueron todas del mismo tamaño, para eliminar a éste como una variable en el problema; se escogió un perfil (16WF36) cuyas dimensiones aseguran el desarrollo del momento plástico resistente  $M_p$  sin que se presente pandeo local en alma o patines.

Se ensayaron conexiones sin y con atiesadores, éstos últimos de cuatro tipos diferentes (fig. 77).

En la fig. 78 se presenta un resumen de los resultados obtenidos, en la forma de curvas carga-deformación para todas las conexiones ensayadas.

Las curvas A corresponden a juntas no atiesadas, y los ensayos varían desde la columna 8WF31, muy ligera, con alma muy delgada, hasta el perfil más pesado de los utilizados, 12WF99. La conexión A1, hecha con el perfil 8WF31, falló por pandeo del alma de la columna para una carga ligeramente mayor que la de trabajo,  $1.12V_t$ ; en cambio, los especímenes A2 y A5, hechos con columnas robustas, se comportaron extraordinariamente bien: el pandeo local de los patines de las vigas se presentó para cargas de intensidad  $2.08V_t$  y  $2.26V_t$ , respectivamente ( $V_t$  es la carga de trabajo de las vigas), la pérdida de resistencia de las vigas fue muy gradual y soportaron rotaciones grandes antes de que se terminaran las pruebas, y aunque al final de éstas, antes de quitar las cargas en las vigas, se les aplicó a las columnas

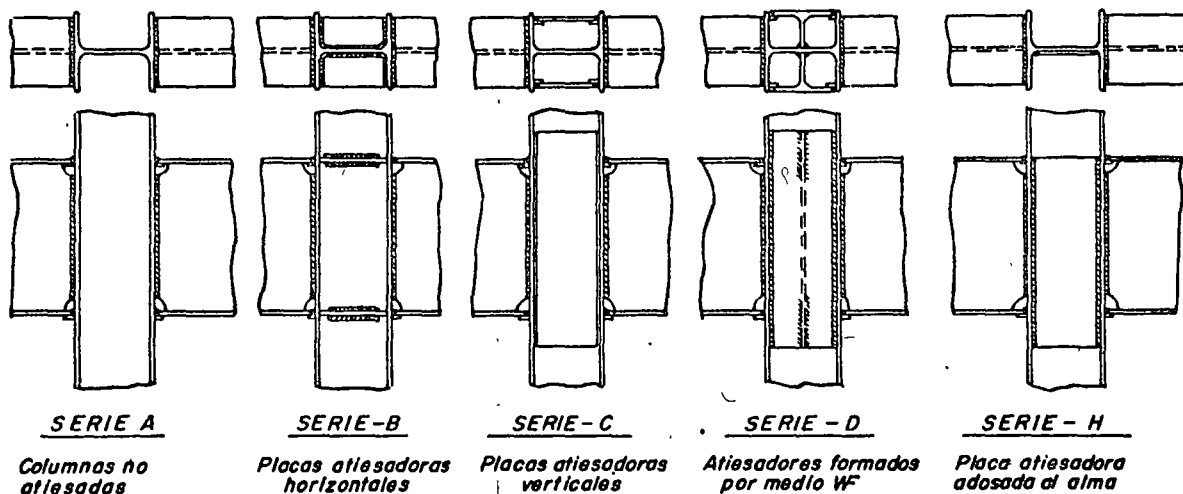


FIGURA 77

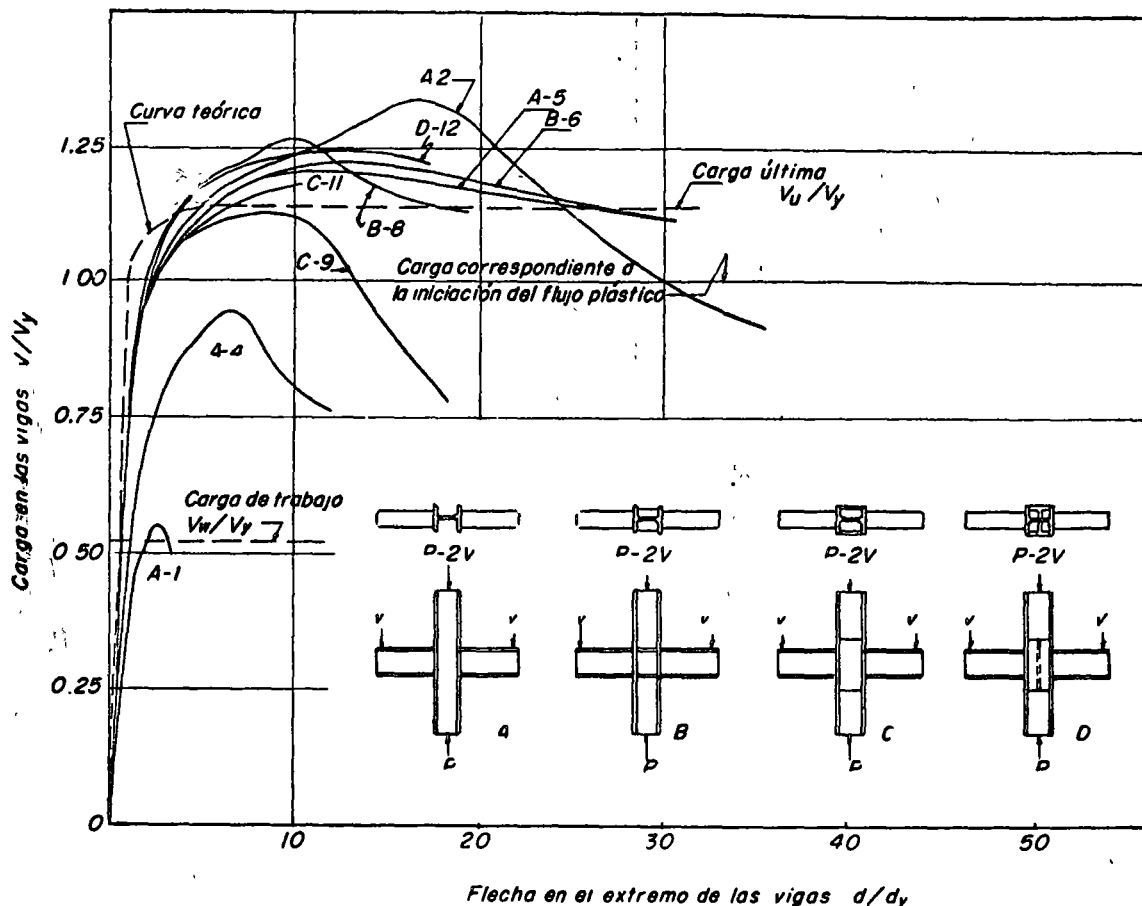


FIGURA 78

una sobrecarga igual al doble de la carga de trabajo, no se observó ningún indicio de que la falla fuese inminente. La junta A4, cuya alma tiene un grueso intermedio entre las de la A1 y la A2 y A5, falló por pandeo en el alma de la columna cuando la carga alcanzó un valor de  $1.82V_t$ , después de deformarse considerablemente, tanto por tensión como por compresión, en las zonas en que conectan los patines de las vigas.

En los especímenes de la serie B se colocaron atiesadores horizontales soldados al alma y a los patines de la columna, a la altura de los patines de las trabes, como se muestra en la fig. 77. Los atiesadores de B6 tienen el mismo grueso que los patines de las vigas, mientras que los de B8 son más delgados. Este tipo de conexión es sumamente resistente, y ambas pruebas exhibieron excelentes capacidades de carga y de rotación. Los dos especímenes sufrieron pandeo local del patín de compresión de las vigas al iniciarse el endurecimiento por deformación, y el aumento en capacidad de carga más allá de ese nivel fue reducido. La disminución de resistencia a partir de los valores máximos fue gradual y no se observó ningún efecto desfavorable en los atiesadores, fuera de la presencia de algunas líneas de flujo; las deformaciones principales se presentaron en las vigas.

Los especímenes de la serie C se atiesaron por medio de dos placas verticales colocadas cerca

de los extremos de los patines de la columna, como se ve en la fig. 77, cuyo espesor se tomó arbitrariamente igual al del alma de la columna. Ambas conexiones, C9 y C11, soportaron las cargas requeridas. En los dos casos hubo evidencia de un pandeo local ligero de los patines comprimidos de las vigas para cargas de  $2.16V_t$ , y en ambos se pandeó el alma de la columna en la zona comprimida entre los patines de compresión de las trabes, iniciándose este fenómeno en C11 cuando la carga valía  $1.97V_t$ . La conexión C11 falló por ruptura de la soldadura a tope en el patín de tensión, y la C9 por pandeo de una de las placas atiesadoras.

Solamente se ensayó una conexión tipo D, la D12. El atiesador en T, aunque ideado para ser empleado principalmente en juntas en que la columna recibe vigas por los cuatro lados, sirvió para eliminar el pandeo de las dos placas atiesadoras laterales y del alma; la conexión, sumamente rígida, falló principalmente por pandeo local de los patines comprimidos de las vigas, fenómeno que adquirió importancia para cargas arriba de  $2.22V_t$ . Aunque se presentaron deformaciones importantes en las vigas la conexión aparentemente permaneció elástica y se observaron deformaciones muy pequeñas en los patines de los atiesadores.

El grupo H consistió también en un solo espécimen, H1. Como la junta A1 fue más resistente en la región de tensión que en la de compresión,



TABLA - VI

Especimen Nº	COLUMA			VIGA			ATIESADORES	
	Perfil	Alma	Patines	Perfil	Alma	Patln	Tipo	Dimensiones
A1	8WF31	7.32	11.00	16W36	7.59	10.87	Ninguno	—
A2	8WF67	14.61	23.70	"	"	"	"	—
A4	12WF65	9.91	15.39	"	"	"	"	—
A5	12WF99	14.73	23.39	"	"	"	"	—
B6	8WF31	7.32	11.00	"	"	"	*	9.92 x 1.11 cm
B8	12WF40	7.47	13.11	"	"	"	*	9.92 x 0.63 cm
C9	8WF31	7.32	11.00	"	"	"	**	0.79 x 55.88 cm.
C11	12WF40	7.47	13.11	"	"	"	**	0.79 x 55.88 cm
D12	12WF40	7.47	13.11	"	"	"	Medio WF Placa adosa da al alma	6WF32.5 x 55.88 cm.
H1	8WF31	7.32	11.00	"	"	"		0.79 x 50.8 cm.

Los gruesos de almas y patines, dados en mm. están tomados del manual del AISC.

\* Atiesadores horizontales colocados al nivel de los patines de las vigas.

\*\* Atiesadores verticales colocados en los bordes de los patines de las columnas.

por medio de esta prueba se investigó el efecto de reforzar el alma de la columna añadiéndole una placa de 5/16" adosada a ella y soldada a la unión de alma y patines (véase fig. 77), de manera que esta conexión se hizo con el mismo perfil empleado en la columna de A1, reforzado como se indica. La falla se presentó en la soldadura de tensión de una de las vigas, en su parte central, cuando la carga alcanzó un valor de 2.05V<sub>t</sub>, justo abajo de la correspondiente al momento plástico de la viga. La rotación fue adecuada pero la capacidad de carga disminuyó rápidamente después de la falla de la soldadura.

En la Tabla VI se presentan las características de los perfiles y de los atiesadores utilizados en las juntas ensayadas.

Las columnas de las series A y H, no atiesadas en los patines, resultaron menos rígidas contra la rotación que las vigas 16WF36 que conectan en ellas; en cambio, en las conexiones B los atiesadores proporcionaron en las columnas el equivalente de los patines de las vigas, con lo que su rigidez se incrementó hasta igualar la de éstas. Lo mismo sucede en las conexiones C, en las que el alma de la columna soportó la mayor parte de la carga aplicada, aproximadamente de 2.5 a 3 veces más que las placas atiesadoras, bajo cargas de trabajo.

Los especímenes A mostraron grandes concentraciones de esfuerzos en la zona central de los patines de tensión de las vigas, mientras que en los patines comprimidos la distribución fue más uniforme; en los B, los esfuerzos de compresión

se repartieron bastante uniformemente mientras que en las áreas de tensión hubo pequeños incrementos en el centro; en la serie C los esfuerzos estuvieron uniformemente repartidos en ambos patines para cargas de trabajo, pero para 1.5V<sub>t</sub> se presentaron concentraciones importantes en la zona central de los patines a tensión; las distribuciones de esfuerzos en D12 fueron bastante uniformes, mientras que H1 tuvo un comportamiento semejante, desde este punto de vista, al de las juntas A.

CONEXIONES CON CUATRO VIGAS. Se ensayaron tres especímenes cuyas características se muestran en la fig. 79. El tipo AA es semejante al A4 del

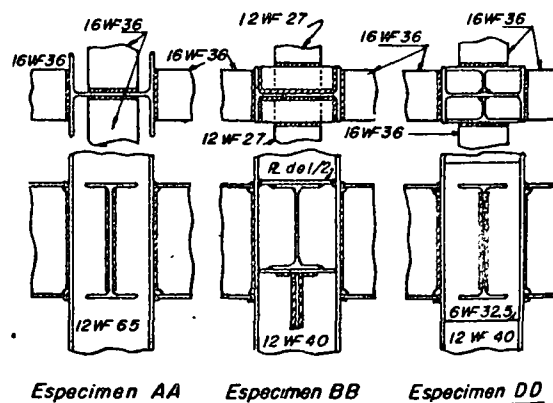


FIGURA 79

primer programa pero tiene dos vigas adicionales, también 16WF36, que conectan con el alma de la columna, a la que están soldadas directamente; análogamente, la junta *DD* es semejante a la *D12*. La conexión *BB*, de carácter exploratorio, no es semejante a ninguna de las descritas con anterioridad; las vigas que conectan en los patines de la columna son 16WF36, como antes, y están soldadas directamente, mientras que los patines de tensión del otro par de vigas, de perfil 12WF27, están soldados a placas atesadoras horizontales y los comprimidos descansan en asientos tipo *T*, que actúan también como atesadores de la columna aunque, debido a la diferencia en los peraltes de las vigas que llegan al alma y a los patines, están 4" fuera de su posición ideal.

La conexión *AA* falló por pandeo local de los patines comprimidos de las vigas, el que se presentó para una carga igual a  $2.28V_c$ , en las trabes que conectan en los patines de la columna y para una carga un poco mayor en las que llegan al alma. La disminución en la capacidad de carga de las vigas fue lenta. Cuando la carga en las vigas había bajado al 85% de la última se le aplicó a la columna una carga total doble de la de trabajo y aunque sufrió un flujo plástico considerable no hubo en ella ninguna otra evidencia de falla. Comparando estos resultados con los obtenidos con la junta *A4* se ve que la *AA* es mucho más resistente, lo que muestra en forma evidente que la acción atesadora proporcionada por las dos vigas que conectan en el alma de la columna refuerza la conexión más de lo que la debilitan los esfuerzos triaxiales que se desarrollan en ella.

En el espécimen *BB* la conexión formada por las dos vigas soldadas directamente a los patines de la columna fue más rígida que la constituida por las vigas que llegan al alma, pero ambas llenaron los requisitos establecidos para ser consideradas satisfactorias.

También en el espécimen *DD* fue más rígida la conexión formada por las vigas soldadas a los patines de la columna que la constituida por las que se apoyan en las medias viguetas atesadoras, debido a que el grueso del alma de éstas es menor que el de la columna. Las dos vigas conectadas a los atesadores tuvieron buena capacidad de carga y rotación, mientras que las otras dos mostraron una capacidad de rotación menor, debido a una falla en una de las soldaduras a tope que se inició cuando la carga alcanzó el valor  $2.18V_c$ . Los atesadores evitaron efectivamente todo tipo de pandeo en la junta, lo mismo que en la conexión semejante *D12*.

**PRUEBAS DE CONEXIONES SIMULADAS.** Después de examinar los resultados de los ensayos de juntas con vigas conectadas en los patines de las columnas se advirtió que era posible producir un estado de esfuerzo semejante al real en la columna utilizando procedimientos mucho más sencillos y rápidos. Esto dio lugar a pruebas de los tres tipos que se describen a continuación.

**ENSAYES PARA DETERMINAR EL CRITERIO PARA PANDEO DEL ALMA.** El objeto de estas pruebas fue reproducir la parte de la columna en la que conecta el patín comprimido de las vigas; consistieron en un tramo de columna comprimido en los patines entre dos barras de tamaño igual a la sección del patín de la viga simulada. Se efectuaron once ensayos con columnas de distintos tamaños, pero utilizando siempre placas iguales, de  $7" \times 1/2"$ , correspondientes al patín de las vigas 16WF36 utilizadas en los especímenes completos, (ver fig. 80).

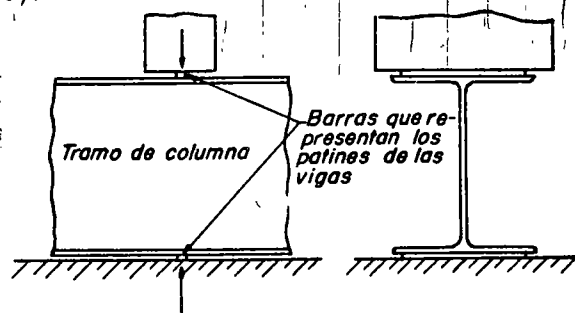


FIGURA 80

En todas las pruebas el pliegue plástico se inició en el alma de la columna, en la zona inmediata a las placas, y progresó posteriormente dentro del alma en forma de líneas radiales iniciadas en esos puntos y líneas semicirculares perpendiculares a ellas. El flujo plástico se propagó una cierta distancia dentro del alma hasta que ésta falló por pandeo. Cuando las cargas alcanzaron valores del 80% de las de colapso se advirtió una cierta flexión de los patines de la columna.

**ENSAYES PARA DETERMINAR EL CRITERIO PARA LA FALLA POR TENSIÓN.** Estas pruebas, proyectadas para reproducir la parte superior de la conexión en la que los patines de la viga están en tensión, se realizaron soldando dos placas iguales a los patines de la columna y sometiéndolas a tensiones creciente (fig. 81); se variaron las dimensiones de

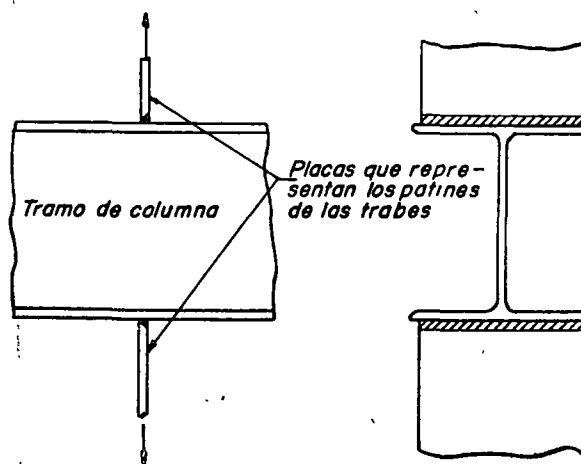


FIGURA 81

columnas y placas para estudiar sus influencias respectivas. En total se probaron once especímenes.

Las primeras líneas de flujo se observaron en la unión del alma y el patín de la columna, inmediatamente bajo la placa, para una carga de alrededor de 40% de la última. El flujo prosiguió a) en el alma de la columna, b) en la zona interior del patín, paralelo a la placa, y c) en el patín de la columna, empezando en el centro de la soldadura y extendiéndose en líneas paralelas al alma.

Siete de los once especímenes fallaron por aparición de una grieta en el centro de la soldadura a tope; la fractura se presentó después de que los patines se flexionaron considerablemente, y se debió a la deformación excesiva en una región cercana al alma de la columna, como un resultado de la flexión de los patines hacia fuera. De los cuatro restantes, dos se agrietaron en la unión de alma y patín de la columna y en los otros dos se separó la placa, empezando la separación en los extremos y propagándose hacia el centro, arrancando parte del material de la columna.

**ENSAYES DE ATIESADORES EXCÉNTRICOS.** Los atiesadores de columnas que reciben vigas por cuatro lados suelen estar constituidos por los patines o las placas de asiento de las trabes que conectan con el alma. En ocasiones, cuando las vigas que llegan a los patines y las que llegan al alma son de peraltes diferentes, unos de sus patines, generalmente los de compresión, quedan a alturas diferentes (véase espécimen BB, fig. 79) y el grado de atiesamiento que proporcionan es dudoso.

Para determinar la efectividad de ese tipo de atiesamiento se llevó a cabo una serie de ensayos con columnas de perfil 12WF40 y 14WF61, comprimidas entre dos barras y provistas de atiesadores con 0", 2", 4" y 6" de excentricidad (fig. 82).

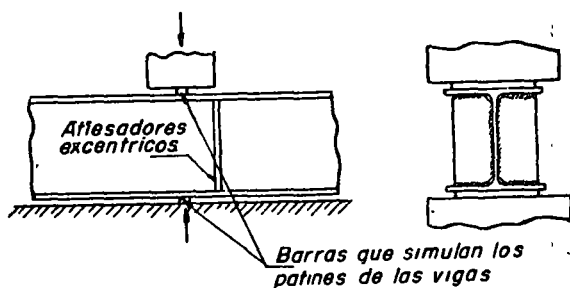


FIGURA 82

El estudio de los resultados de las dos series de pruebas, con los dos perfiles utilizados en las columnas, demostró que los atiesadores con 2" de excentricidad proporcionan alrededor del 65% de la acción atiesadora de los concéntricos, mientras que la eficiencia de los que tienen 4" de excentricidad es del orden del 20% de la de los concéntricos y los atiesadores con excentricidades mayores son prácticamente inefectivos.

Los ensayos efectuados cargando la columna a través de dos placas para reproducir las condiciones de las zonas donde conectan los patines en compresión y en tensión ayudaron considerablemente a determinar la resistencia real de la columna. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que esas pruebas ignoran el efecto de la carga axial existente en la columna, la interacción entre las zonas de tensión y compresión y el efecto sobre ambas de los esfuerzos transmitidos a través del alma de la trabe; afortunadamente, la influencia de esos factores parece ser muy pequeña.

**EFFECTO DE LA CARGA AXIAL EN LA COLUMNA.** La carga axial existente en la columna tuvo muy poca influencia sobre la resistencia y capacidad de rotación de la conexión, tanto en los casos en que solamente son dos las vigas que llegan a la columna como cuando son cuatro. Las columnas no mostraron ningún indicio particular de falla al estar sometidas a una carga de 1.65 veces la de trabajo ni tampoco cuando al final de cada prueba se aumentó ésta al doble de la de trabajo, conservando al mismo tiempo las cargas finales en las vigas. (Las cargas de trabajo correspondieron a un esfuerzo axial medio de alrededor de 1,000 kg/cm<sup>2</sup>.)

## ANÁLISIS Y DISEÑO DE LAS CONEXIONES

Como se ha visto con anterioridad, se considera que una conexión es satisfactoria cuando es capaz de desarrollar el momento resistente máximo teórico de las vigas mientras que sobre la columna obra la carga axial de trabajo y tiene, además, una capacidad de rotación adecuada.

Por consiguiente, el análisis debe permitir determinar los factores que son necesarios en la junta para asegurar el desarrollo del momento plástico en la conexión y para capacitar a ésta para que admita los giros necesarios bajo momento prácticamente constante, lo que obliga a investigar los puntos siguientes:

1. La resistencia de la región de la columna adyacente al patín de compresión de la viga cuando no se emplean atiesadores en la columna.
2. La resistencia de la región de la columna adyacente al patín de tensión de la viga cuando no se emplean atiesadores en la columna.
3. El aumento en la resistencia de la conexión debido a la presencia de atiesadores.
4. La posibilidad de falla de la columna ocasionada por una combinación de esfuerzos axiales y locales.
5. El efecto del par de vigas ligadas al alma de la columna sobre el comportamiento de la conexión constituida por la columna y las dos trabes que llegan a sus patines.

6. La rotación requerida de las conexiones y su capacidad de giro.

Los puntos 1, 2 y 3 se discutirán en lo que sigue. Los puntos 4 y 5 ya se han estudiado con anterioridad, determinando su importancia de la observación de los ensayos, de donde se dedujo que los efectos de la carga axial existente en la columna pueden despreciarse y que la acción atiesadora del segundo par de vigas refuerza la conexión más de lo que la debilita el estado triaxial de esfuerzos que se forma en el alma de la columna, por lo que se obtienen resultados conservadores si se analiza la conexión como si no existiesen las vigas por alma.

El punto 6 ha sido investigado analítica y experimentalmente, y aunque la magnitud de la rotación requerida varía con el peralte y el claro de la viga y las cargas que obran sobre ella, se ha logrado calcular un valor tipo de esa rotación, más grande que el necesario en la mayor parte de las conexiones; todas las juntas ensayadas fueron capaces de admitir rotaciones mayores que esa, bajo momento prácticamente constante. Más aún, si la conexión se hace más resistente, de manera que resulte mucho más rígida que la viga cuando sobre ésta obre el momento  $M_p$ , la rotación necesaria se presenta en el extremo de la viga.

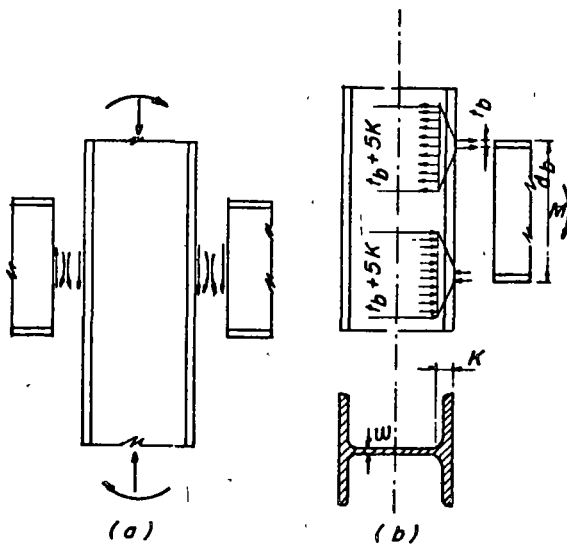


FIGURA 83

En la fig. 83a se muestran esquemáticamente los momentos y fuerzas existentes en una conexión interior viga-columna; en la fig. 83b se sustituye el efecto sobre la columna del momento que le transmite la viga por un par compuesto por las dos fuerzas existentes en los patines, despreciando las fuerzas que actúan en el alma por ser de importancia secundaria.

Las fuerzas en los patines de la viga pueden ocasionar efectos importantes en dos regiones de la columna. La primera es el alma, en la que el

flujo plástico puede presentarse acompañado por pandeo en la zona donde conecta el patín comprimido o por fractura ocasionada por la fuerza de tensión en el otro patín; la segunda región es el patín de la columna en la zona de tensión, ya que su flexión puede contribuir a la fractura de las soldaduras que lo conectan con el patín de la viga.

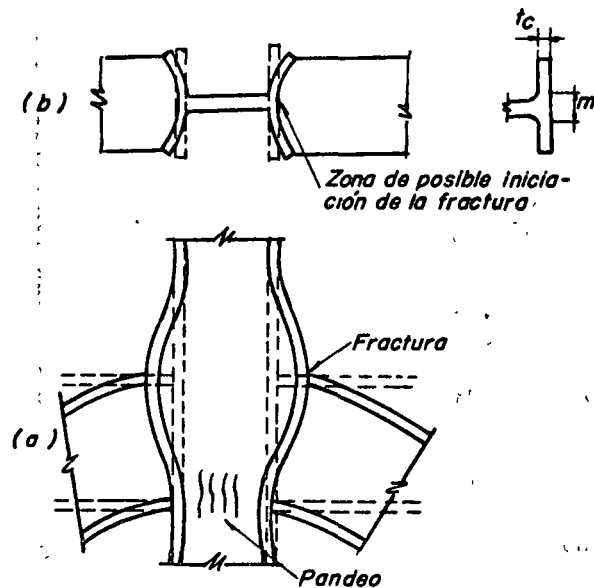


FIGURA 84

Las fuerzas existentes en los patines de las vigas tratan de deformar la columna como se muestra, en forma exagerada, en la fig. 84. En la zona de tensión la poca rigidez de los extremos de los patines de la columna permite que éstos se flexionen hacia afuera, pero en la zona central la deformación está restringida por el alma de la columna, y lo más probable es que ahí se inicie una falla de la soldadura.

Una columna no atiesada debe ser capaz de mantener el equilibrio estático tanto en las regiones de flujo plástico del alma como en las de flexión de los patines. La zona afectada por los esfuerzos ocasionados en la columna por las fuerzas concentradas aplicadas en el a través de los patines de la viga se va extendiendo al ir penetrando en la columna, de manera que la intensidad de los esfuerzos disminuye hacia el interior del alma. Si el ensanchamiento de la zona cargada es insuficiente para reducir la intensidad de los esfuerzos al valor  $\sigma_v$  en la base de la curva de transición entre patines y alma (es decir, a la distancia  $k$  del borde exterior del patín de la columna) el alma no será capaz de proporcionar la resistencia necesaria para equilibrar la fuerza en el patín; este efecto es más serio en la región frente al patín de compresión, aunque podría en algunos casos llegar a producir la falla en la zona de tensión (evidentemente, será necesario estudiarlo con todo cuidado cuando la columna no sea un perfil laminado, sino

esté formada por tres placas soldadas, ya que en ese caso es muy probable que la fuerza de tensión en el patín ocasione una falla en la soldadura de la columna; el problema se ve agravado porque en estos perfiles no hay curva de liga entre patín y alma, con lo que la distancia  $k$  se reduce a la suma del grueso del patín de la columna más el tamaño de la soldadura entre él y el alma.)

Es difícil determinar analíticamente la forma en que los esfuerzos ocasionados por los patines se distribuyen dentro de la columna, por lo que generalmente se supone una distribución lineal basada en investigaciones experimentales; se obtienen buenos resultados suponiendo una pendiente de 2.5:1 desde el punto de contacto hasta la línea  $k$  (ver fig. 83b). Evidentemente, esta suposición está en desacuerdo con la que se hace en diseño elástico, en el que se utiliza una pendiente de 1:1 (distribución de esfuerzos según rectas a  $45^\circ$  a partir del punto de aplicación de la carga); la discrepancia se debe, probablemente, a que ambas suposiciones están basadas en resultados experimentales, pero mientras que en diseño plástico se llevan las pruebas hasta el colapso de los especímenes en diseño elástico se suspenden cuando las cargas alcanzan valores poco mayores que los de trabajo. Como se muestra en la fig. 83b, la suposición anterior implica que la fuerza existente en cada uno de los patines de la viga es resistida por una porción de alma de la columna de longitud igual a  $t_v + 5k_c$  a la distancia  $k_c$  de la cara exterior del patín, siendo  $t_v$  el grueso del patín de la viga, en la que se supone que los esfuerzos están uniformemente distribuidos.

**ANÁLISIS DE LA ZONA COMPRIMIDA DE LA CONEXIÓN.** Se efectúa este análisis sustituyendo la viga por una placa de dimensiones iguales a las de uno de sus patines, la que aplica una fuerza de compresión sobre la columna (fig. 85).

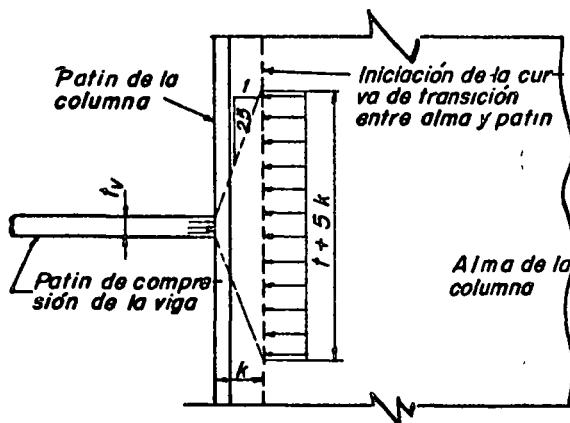


FIGURA 85

De acuerdo con la discusión anterior, se obtiene una estimación conservadora de la resistencia de la región comprimida de la columna suponiendo que ésta opone a la compresión que le transmite

el patín una fuerza de intensidad máxima igual a  $\sigma_y c (t_v + 5k_c)$ , siendo  $c$  el grueso del alma de la columna.

Por consiguiente, en una conexión sin atiesadores,

$$Q_c = \sigma_y c (t_v + 5k_c) \quad (66)$$

Ahora bien, la fuerza que ejerce el patín de la viga sobre la columna cuando en la viga obra el momento plástico  $M_p$  es  $A_p \sigma_y$ , siendo  $A_p$  el área del patín, luego el espesor mínimo necesario del alma de la columna está dada por

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k_c) \quad (67)$$

de donde

$$c = \frac{A_p}{t_v + 5k_c} \quad (68)$$

Si  $c > A_p / (t_v + 5k_c)$  no se necesitan atiesadores en la zona comprimida de la conexión. Cuando el grueso del alma es menor que el dado por (68) es necesario colocar atiesadores; en ese caso, la ec. 67 se modifica para incluir en ella la resistencia de dichos atiesadores.

Si se emplean placas horizontales colocadas exactamente a la altura de los patines comprimidos de las vigas los atiesadores son 100% eficientes y la ec. 67 se convierte en

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k_c) + \sigma_y A_{at}$$

de donde puede despejarse el área necesaria de atiesadores:

$$A_{at} = A_p - c (t_v + 5k_c) \quad (69)$$

Como una limitación adicional, para evitar fenómenos de pandeo local,  $(b/t)_{at} \leq 17$ .

Los ensayos C9, C11 y D12 indican que las placas atiesadoras verticales están sometidas a esfuerzos del orden de la mitad de los que obran en el alma de la columna; llevando esa suposición a la ec. 67 ésta se transforma, cuando se colocan atiesadores verticales de grueso  $t_{at}$ , en

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k) + \frac{\sigma_y}{2} 2 t_{at} (t_v + 5k)$$

de manera que

$$t_{at} = \frac{A_p}{t_v + 5k} - c \quad (70)$$

La capacidad de carga de los atiesadores verticales se ha determinado utilizando la misma expresión que para el alma de la columna, aunque en ellos no hay curva de transición; el procedimiento se justifica al utilizar el esfuerzo  $\sigma_y/2$ , que concuerda con los valores medidos experimentalmente en juntas reales.

Además, debe cumplirse la relación  $d_c/t_{at} \leq 30$ , donde  $d_c$  es la longitud del atiesador medida perpendicularmente al eje de la columna, que puede tomarse igual al peralte de ésta.

En los casos en que el patín de la columna es mucho más ancho que el de la viga la efectividad de los atiesadores verticales disminuye y no es recomendable confiar en ellos cuando el grueso del alma de la columna es mucho menor que el dado por (68).

Los atiesadores horizontales deben colocarse en pares situados simétricamente con respecto al alma de la columna, soldados tanto al alma como a los patines de la misma, con soldadura de penetración o de filete. Los verticales deben colocarse también en pares simétricos y su peralte debe ser suficiente para permitir que la fuerza existente en el patín de la viga se distribuya en ellos de la misma manera en que se supone que se reparte en el alma.

Puesto que las pruebas realizadas con atiesadores excéntricos fueron muy limitadas, no se pueden obtener de ellas observaciones definitivas referentes a su acción; sin embargo, si puede concluirse que se obtendrá un diseño conservador si se desprecia el efecto de atiesadores con más de 2" de excentricidad y se supone que los que tengan excentricidades menores de 2" tienen una efectividad del 50% de la de los atiesadores concéntricos. En este caso, la (67) se convierte en

$$A_p \sigma_y = \sigma_y c (t_v + 5k) + 0.6 A_{at} \sigma_y$$

de donde se obtiene

$$A_{at} = 1.7 [A_p - c(t_v + 5k)] \quad (71)$$

debiéndose cumplir de nuevo la condición

$$(b/t)_{at} \leq 17.$$

**ANÁLISIS DE LA ZONA DE LA CONEXIÓN SOMETIDA A TENSIÓN.** En este caso es también necesario comprobar si se cumple la ec. 68 ya que de no ser así una columna no atiesada fallaría en la zona de tensión por fractura del alma en su unión con el patín. Sin embargo, no es esa, en general, la condición más crítica en esa región de la columna, (excepto en el caso en que ésta sea un perfil formado por tres placas soldadas), ya que la falla suele presentarse de una manera diferente, que se describe a continuación: el patín de la columna actúa como dos placas, cada una de ellas empotrada en tres de sus bordes y libre a lo largo del otro, sometidas a la acción de la fuerza existente en el patín de tensión de la viga. La carga permanece más o menos uniformemente repartida hasta que las placas alcanzan su capacidad de carga última; en esa etapa, los bordes exteriores de los patines se curvan hacia afuera, causando una deformación excesiva en la porción central de la soldadura a tope, en el patín de la columna adyacente a la soldadura y en la unión del alma y el patín; por último, la falla se presenta por agrietamiento de alguna de esas regiones cuando se agota su capacidad de fluir plásticamente.

La fig. 86 ilustra la acción del patín de la columna en la región de la conexión cercana al patín

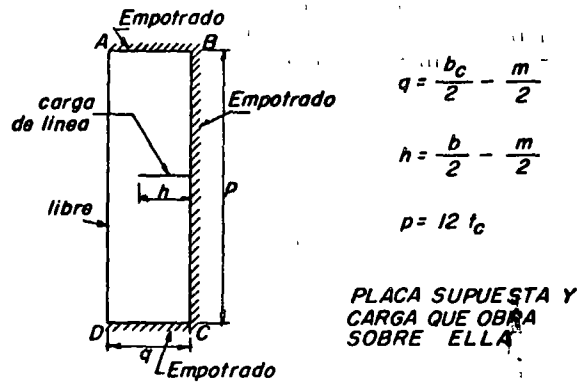
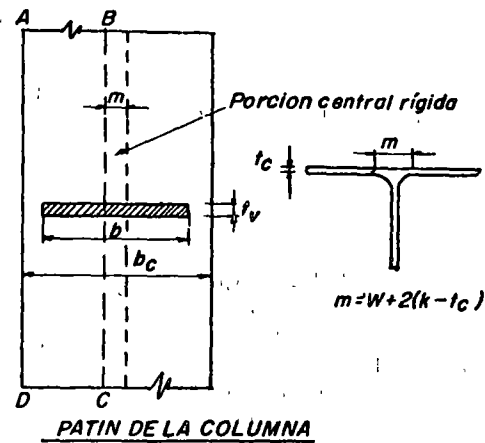


FIGURA 86

de tensión de la trabe. Se considera que el comportamiento del patín es el que tendrían dos placas del tipo ABCD, cuya longitud efectiva se supone igual a  $12t_c$ , empotradas en los extremos de esta longitud y en el alma de la columna, sometidas a la acción de una carga de línea, idealización de la tensión ejercida sobre ellas por el patín de la trabe. El análisis de esta placa por medio de la teoría de las líneas de flujo permite determinar su capacidad última de carga, que es

$$P_u = c_1 \sigma_y t_c^2 \quad (72)$$

donde

$$c_1 = (4/\beta + \beta/\eta) / (2 - \eta/\lambda)$$

y

$$\eta = \beta/4 [\sqrt{\beta^2 + 8\lambda} - \beta]$$

$$\beta = p/q, \quad \lambda = h/q \quad (\text{ver fig. 86}).$$

Para los perfiles WF utilizados en columnas y las vigas empleadas en juntas ordinarias se ha encontrado que  $c_1$  varía entre 3.5 y 5.0, de manera que un valor conservador de la capacidad de carga de cada una de las placas que forman el patín de la columna es  $3.5 \sigma_y t_c^2$ .

Puede considerarse que la parte central rígida de ancho  $m$  (ver fig. 86) adyacente al alma de la columna si es capaz de desarrollar esfuerzos de intensidad  $\sigma_y$ , de manera que puede soportar una

fuerza igual al producto de su área por el esfuerzo de fluencia. Por consiguiente

$$Q_t = \sigma_y t_v m + 2(3.5 \sigma_y t_c^2) \quad (73)$$

La fuerza en el patín de tensión de la viga correspondiente al desarrollo del momento  $M_p$  en sección extrema es  $A_p \sigma_y$ ; disminuyendo la capacidad de carga del patín en 20%, para obtener en esta zona una fórmula que sea aproximadamente igual de conservadora que la deducida para la región de compresión, se llega a

$$A_p \sigma_y = b_v t_v \sigma_y = 0.8[\sigma_y t_v m + 7\sigma_y t_c^2] \quad (74)$$

De esta expresión puede despejarse  $t_c^2$ , siendo  $t_c$  el grueso requerido del patín de la columna.

$$t_c^2 = \frac{b_v t_v}{7} \left[ 1.25 - \frac{m}{b_v} \right] \quad (75)$$

El valor de  $m/b_v$  para todas las conexiones en que la fórmula 75 es aproximadamente aplicable oscila entre 0.15 y 0.20, si las vigas y columnas son perfiles de los tabulados en el Manual del AISC. Tomando conservadoramente  $m/b_v = 0.15$ , (75) se reduce a

$$t_c = 0.4 \sqrt{b_v t_v} = 0.4 \sqrt{A_p} \quad (76)$$

En los casos en que  $t_c > 0.4 \sqrt{A_p}$  no se necesitan atiesadores en la zona de tensión de la conexión; si  $t_c < 0.4 \sqrt{A_p}$  es necesario colocar atiesadores, con lo que se obtienen configuraciones de equilibrio exactamente iguales a las existentes en la región de compresión, de manera que son aplicables las ecs. 69 y 70 para el diseño de los atiesadores.

En vista de las simplificaciones que han llevado a su obtención, la ec. 76 no es aplicable cuando la columna es un perfil *I* estándar o cuando está formado por tres placas soldadas; en cualquiera de esos casos es necesario calcular el valor de la constante  $c_1$  de la ec. 72 y sustituirlo en (73), en lugar del 3.5 que aparece en ella.

COMPARACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES Y LOS ANALÍTICOS. Los resultados obtenidos en la zona de compresión pueden resumirse como sigue:

1. Para el espécimen A1, la ec. 68 indica que el alma de la columna debe tener 1.68 cm de grueso; el espesor real fue 0.72 cm, y el alma de la columna falló para una carga ligeramente mayor que la de trabajo.
2. En el ensaye A2, la fórmula requiere un espesor de alma de 1.09 cm y, como era de esperarse, el grueso real de 1.49 cm demostró ser satisfactorio.

3. La conexión A4 requiere un alma de 1.19 cm; con un grueso real de 1.06 cm soportó más del 80% del momento teórico.
4. La fórmula muestra que A5 es completamente adecuada sin atiesadores y así lo fue en realidad.
5. H1 es ligeramente inadecuada de acuerdo con la ec. 68, pero fue, sin embargo, capaz de soportar el momento máximo alcanzado en la prueba, que fue el 95% del plástico.
6. De acuerdo con (68) AA es inadecuada pero se comportó satisfactoriamente, probablemente a causa de la acción atiesadora del segundo par de vigas, la que no se consideró en el análisis.
7. Los atiesadores que se colocaron en B6, B8 y BB fueron más gruesos que los requeridos por las fórmulas; durante los ensayos no hubo evidencia de que se sobrecargasen.
8. Las conexiones C, D y DD son teóricamente correctas, y así se comportaron; sin embargo, cuando las vigas fallaron los atiesadores verticales mostraron cierto pandeo.

El espécimen E1, consistente en una columna 12WF40 no atiesada, falló para una carga de 46.6 t, mientras que el EO, en el que la misma columna se reforzó con dos atiesadores horizontales de 1/4", soportó 78.3 t; la diferencia de 31.7 t, se compara favorablemente con las 28.7 t, calculadas con la fórmula teórica.

Una comparación similar entre los especímenes E9 y E20, hechos con columnas 14WF61, muestra una diferencia determinada experimentalmente de 65.7t, mientras que la teórica es de 52.4 t.

El único espécimen completo no atiesado en el que la causa primaria de falla se presentó en la zona de tensión fue el H1, que falló para una carga aproximadamente igual al 95% de la que ocasionaría la plastificación total de las vigas; el espesor real de los patines de la columna fue 1.10 cm mientras que la fórmula indica que se necesitan 1.75 cm. En este caso la ec. 76 es conservadora.

En todas las pruebas de conexiones simuladas, excepto una (diez en total), la ec. 73 da resultados conservadores.

LIMITACIONES DE LAS FÓRMULAS. La investigación descrita consideró una serie de conexiones con dos y cuatro vigas, las que en todos los casos se fueron cargando en forma gradual y uniforme hasta llegar a la falla, por lo que el comportamiento reportado puede variar algo en los casos siguientes:

- a) *Cargas repetidas.* Un número suficiente de ciclos de carga y descarga puede ocasionar una falla prematura, pero no es probable que esto suceda en edificios, en los que la carga muerta constituye un porcentaje importante de la total.
- b) *Momentos desiguales en las vigas opuestas.* En este caso aparecen fuerzas cortantes en el alma de la columna, lo que puede introducir algunas modificaciones en el diseño, sobre todo en el caso

limite en que la columna reciba viga en uno solo de sus patines. Esta condición se estudiará más adelante.

c) *Viento o sismo.* Cuando sobre la estructura obran fuerzas horizontales éstas tenderán a ocasionar momentos del mismo signo en las dos vigas, y por consiguiente aparecerán fuerzas cortantes importantes en el alma de la columna; de hecho, este caso es semejante al b).

**REFUERZO DEL ALMA POR CORTANTE.**<sup>20</sup> Cuando los momentos en las dos vigas de una conexión interior difieren considerablemente en intensidad ocasionan esfuerzos cortantes elevados en el alma de la columna, los que tienden a deformar a ésta de manera análoga a como sucede en una junta de esquina. En estos casos debe calcularse el cortante en el alma y, si es necesario, ésta se reforzará con atiesadores en diagonal o placas adosadas a ella.

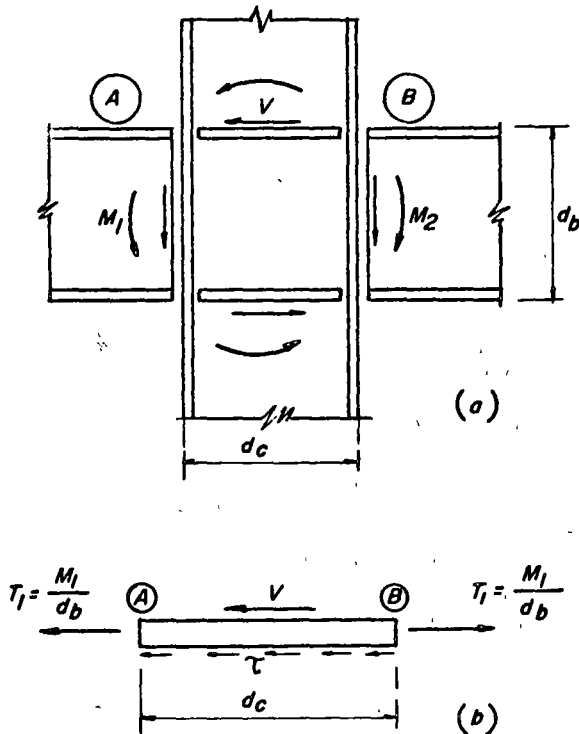


FIGURA 87

En la fig. 87a se muestran los momentos y fuerzas cortantes que obran sobre una conexión interior típica y en la 87b aparece un diagrama de cuerpo libre del atiesador superior. Las fuerzas que obran sobre él son  $V$ , fuerza cortante horizontal existente en la columna arriba de la conexión, y dos fuerzas de tensión,  $T_1$  y  $T_2$ , acciones de los patines de las dos vigas, las que son aproximadamente iguales al cociente de cada uno de los momentos entre el peralte de la viga respectiva. La resultante de esas fuerzas debe ser resistida por el esfuerzo cortante  $\tau$  en el área del alma de la columna,  $cd_c$ .

Por consiguiente,

$$\tau_v cd_c = M_2/d_v - M_1/d_v - V$$

Sustituyendo  $\tau_v$  por  $\sigma_v/\sqrt{3}$ , y despejando  $c$ , obtenemos el grueso del alma necesario para resistir los esfuerzos cortantes:

$$c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_v d_c} \left( \frac{M_2}{d_v} - \frac{M_1}{d_v} - V \right) \quad (77)$$

Si el espesor del alma de la columna es menor que el dado por (77), el exceso de fuerza cortante se tomará con placas adosadas al alma o con atiesadores en diagonal (éstos suelen ser muy incómodos cuando la columna recibe también vigas por alma).

Cuando la columna recibe viga de un sólo lado, uno de los dos momentos de la ec. 77 se anula, y se sumarán los dos cuando tengan el mismo signo, lo que sucede a veces cuando sobre la estructura obran fuerzas horizontales importantes.

**RESUMEN.**<sup>14,20,31</sup> No se requieren atiesadores adyacentes al patín de compresión de las vigas si

$$c \geq \frac{A_p}{t_v + 5k_c} \quad (68)$$

No se requieren atiesadores adyacentes al patín de tensión de las vigas si

$$t_c \geq 0.4 \sqrt{A_p} \quad (76)$$

(Esta fórmula se ha obtenido a través de simplificaciones válidas para columnas de sección  $WF$  por lo que si se utilizan otros perfiles será necesario recurrir a las expresiones no simplificadas; además, es necesario comprobar también si el alma de la columna está en condiciones adecuadas en la zona del patín de tensión, para lo cual se emplea, lo mismo que en la zona de compresión, la ec. 68.)

Si no se satisfacen las ecuaciones anteriores es necesario atiesar la columna; los tamaños mínimos de los atiesadores están dados por

*Atiesadores horizontales concéntricos*

$$A_{at} = A_p - c(t_v + 5k_c) \quad ;$$

además,

$$\left( \frac{b}{t} \right)_{at} \leq 17.$$

*Atiesadores horizontales con excentricidad de 2" o menos*

$$A_{at} = 1.7[A_p - c(t_v + 5k_c)] \quad ;$$

de nuevo,

$$\left( \frac{b}{t} \right)_{at} \leq 17.$$



Atiesadores verticales paralelos al alma de la columna y situados en los extremos de sus patines.

$$t_{at} = \frac{A_p}{t_v + 5 k_c} - c$$

además,

$$\frac{d_c}{t_{at}} \leq 30$$

(En las expresiones anteriores,  $c$  y  $t_c$  son el grueso del alma y del patín de la columna, respectivamente,  $A_p$  el área y  $t_v$  el grueso del patín de la viga,  $k_c$  la distancia del borde exterior del patín de la columna a la sección en que termina la curva de liga con el alma,  $A_{at}$  y  $t_{at}$  el área y el grueso del atiesador y  $d_c$  el peralte de la columna.)

Los extremos de los atiesadores deben soldarse a la cara interior del patín opuesta a la carga concentrada de tensión, y pueden ajustarse en el extremo correspondiente a la carga de compresión; deben soldarse también al alma de la columna. Cuando la columna recibe viga de un solo lado no es necesario que los atiesadores excedan la mitad de su peralte, pero deben ligarse al alma con soldadura suficiente para desarrollar la fuerza  $A_{at} \sigma_u$ .

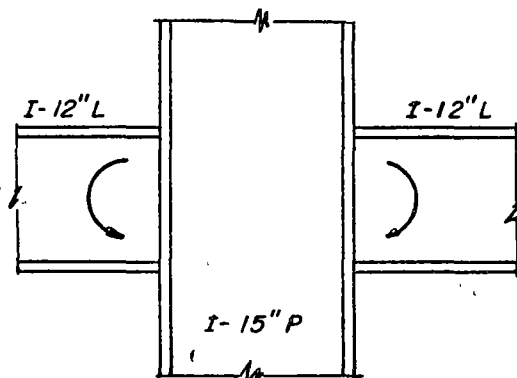


FIGURA 88

EJEMPLO 8. Revisese la conexión viga-columna de la fig. 88 y diseñense los atiesadores, en caso de que sean necesarios.

Características de los perfiles

- I-12 Liv.  $b = 12.7 \text{ cm}$ ,  
 $t_{medio} = 1.38 \text{ cm}$ ,  $A_p = 18.87 \text{ cm}^2$
- I-15 Pes.  $b = 15.2 \text{ cm}$ ,  
 $t_{medio} = 2.07 \text{ cm}$ ,  $c = 1.5 \text{ cm}$ ,  
 $k = 4.15 \text{ cm}$ .

Zona del patín de compresión

$$\frac{A_p}{t_v + 5 k_c} = \frac{18.87}{1.38 + 5 \times 4.15} = \frac{18.87}{22.13} = 0.85 \text{ cm} < 1.5$$

No se necesitan atiesadores

Zona del patín de tensión

Utilizando la fórmula deducida para perfiles WF:

$$0.4 \sqrt{A_p} = 0.4 \sqrt{18.87} = 1.74 \text{ cm} < 2.07$$

No se requieren atiesadores.

Evidentemente, la ecuación  $t_c \geq 0.4 \sqrt{A_p}$  es conservadora para perfiles I estándar (éstos tienen patines mucho más gruesos y cortos que los WF), luego no es necesaria ninguna comprobación adicional.

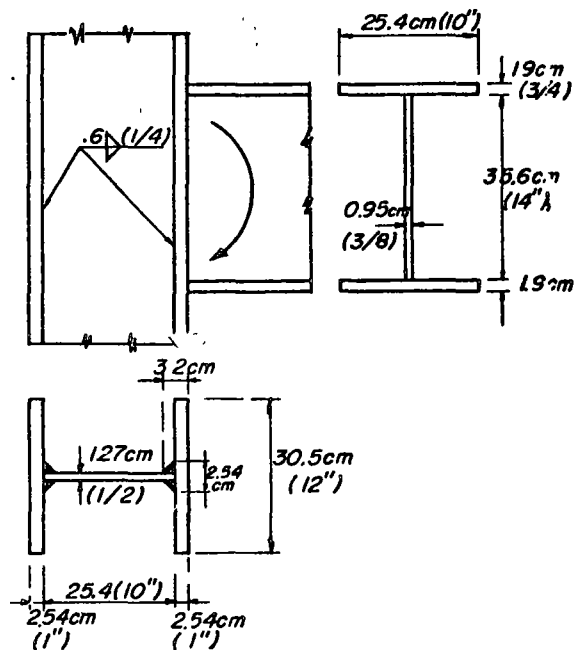


FIGURA 89

EJEMPLO 9. Revisar la conexión de la fig. 89 y diseñar los atiesadores que sean necesarios; la columna está formada por tres placas soldadas. El acero es A36.

Zona de compresión

$$\frac{A_p}{t_v + 5 k_c} = \frac{25.4 \times 1.9}{1.9 + 5 \times 3.2} = \frac{48.2}{17.9} = 2.7 \text{ cm} > 1.27$$

Se necesitan atiesadores.

Zona de tensión

Utilizando la fórmula para perfiles WF laminados:

$$0.4 \sqrt{A_p} = 0.4 \sqrt{48.2} = 2.78 \text{ cm} > 2.54$$

Como la ecuación anterior no es, en realidad, válida para la sección en estudio, aplicaremos las fórmulas no simplificadas.

Capacidad última de carga de cada mitad del patín  $P_u = c_1 \sigma_v t^2 c$

$$p = 12 t_c = 12 \times 2.54 = 30.5 \text{ cm} ;$$

$$h = 1/2(25.4 - 2.54) \doteq 11.4 \text{ cm} ;$$

$$q = 1/2(30.5 - 2.54) \doteq 14.0 \text{ cm} ;$$

$$\beta = \frac{30.5}{14.0} = 2.18 ;$$

$$\lambda = \frac{11.4}{14.0} = 0.815 ;$$

$$\eta = 2.18/4(\sqrt{2.18^2 + 8 \times 0.815} - 2.18) = \frac{2.18}{4.56} = 0.478$$

$$c_1 = \left( \frac{4}{2.18} + \frac{2.18}{0.478} \right) / \left( 2 - \frac{0.478}{0.815} \right) = \frac{1.83 + 4.56}{2 - 0.586} = \frac{6.39}{1.414} = 4.51$$

Capacidad de carga total del patín de la columna  $Q_t = \sigma_v t_v m + 2 \times 4.51 \sigma_v t^2 c$ .

$$A_p \sigma_y = b_v t_v \sigma_y = [\sigma_v t_v m + 9.02 \sigma_v t^2 c] 0.8$$

$$\begin{aligned} \therefore t^2 c &= \frac{A_p}{9.02} \left[ 1.25 - \frac{m}{b_v} \right] = \\ &= \frac{A_p}{9.02} \left( 1.25 - \frac{2.54}{25.4} \right) = \\ &= \frac{1.15}{9.02} A_p = 0.127 A_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore t_c &= 0.356 \sqrt{A_p} = 0.356 \sqrt{48.2} = \\ &= 2.47 \text{ cm} \doteq 2.54 \end{aligned}$$

En este caso particular se ha obtenido un resultado bastante parecido al que da la fórmula simplificada ( $0.356 \sqrt{A_p}$  en vez de  $0.40 \sqrt{A_p}$ ).

El patín de la columna puede soportar las fuerzas de tensión que recibe de la viga; sin embargo, son también necesarios atiesadores en esta zona para evitar la falla del alma.

Pueden emplearse dos placas adosadas al alma, ya que los patines no necesitan ser atiesados y en el alma hay esfuerzos cortantes elevados debido a que una sola viga conecta con la columna.

Se colocarán dos placas de 5/16" (0.79 cm), a uno y otro lado del alma, con lo que se obtiene un grueso total de 2.85 cm, mayor que los 2.7 cm requeridos.

Revisión del alma por cortante

$$c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_v d_c} \cdot \frac{M}{d_v} \doteq \frac{\sqrt{3}}{\sigma_v d_c} \cdot \sigma_v A_p = \frac{\sqrt{3} A_p}{30.5} = 2.74 \text{ cm} < 2.85$$

No se necesita ningún refuerzo extra.

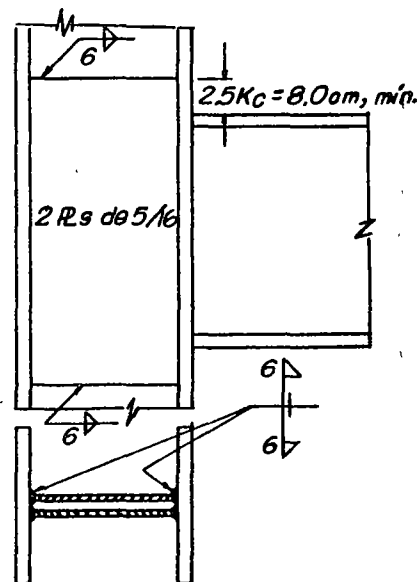


FIGURA 90

En la fig. 90 se muestra la junta reforzada. (En la práctica sería probablemente preferible utilizar una sola placa gruesa en la zona donde el alma necesita refuerzo, sobre todo si la columna recibe también vigas por alma.)

#### REFERENCIAS

1. Topractsoglou, A. A., Beedle, L. S. y Johnston, B. G., "Connections for Welded Continuous Portal Frames", Welding Journal, Julio y Agosto de 1951, Nov. de 1952.
2. Toprac, A. A., "An Investigation of Welded Rigid Connections for Portal Frames", Welding Journal, Enero 1954.
3. Ruzek, J. M., Knudsen, K. E., Johnston, E. R., y Beedle, L. S., "Welded Portal Frames Tested to Collapse", Welding Journal, Sept. 1954.
4. Toprac, A. A., y Beedle, L. S., "Further Studies of Welded Corner Connections", Welding Journal, Julio 1955.
5. Fisher, J. W., Driscoll, G. C., y Schutz, F. W., "Behavior of Welded Corner Connections", Welding Journal, Mayo 1958.
6. Fisher, J. W., y Driscoll, G. C., "Corner Connections Loaded in Tension", Welding Journal, Nov. 1959.
7. De Buen, O., "Pandeo de Placas Comprimidas", Ingeniería, Vol. XXXIV, N° 3, México, Julio de 1964.
8. Hendry, A. W., "An Investigation of the Stress Distribution in Steel Portal Frame Knees", The Structural Engineer, Marzo, Abril y Dic. de 1947. "An Investigation of the Strength of Welded Portal Frame Connections", The Structural Engineer, Oct. y Sept. 1951. "An Investigation of Certain Welded Portal Frames in Relation to the Plastic Method of Design", The Structural Engineer, Dic. 1950 y Sept. 1951.
9. Gray, C. S., Kent, L. E., Mitchell, W. A. y Godfrey, G. B., "Steel Designers' Manual", Crosby Lockwood and Son, Ltd. Londres, 1957.
10. Stang, A., Greenspan, M., y Osgood, W. R., "Strength of a Riveted Steel Rigid Frame having Straight Flanges", R. P. 1130, U. S. National Bureau of Standards, Journal of Research, Vol. XXI, 1938.
11. Rodríguez-Avial Azcúnaga, F., "Construcciones Metálicas", Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales, Madrid, 1953.

fundamentales del comportamiento de las barras flexionadas, por momentos de intensidad creciente pueden determinarse estudiando experimentamente vigas sobre las que obran cargas transversales oblicuas en su plano y simetría, cuya magnitud crece lentamente desde cero hasta el valor máximo que la barra puede soportar.

Las herramientas fundamentales para el estudio del comportamiento de las vigas son las curvas que relacionan las deflexiones en el plano de la carga, y en planos normales a él, con la magnitud de las fuerzas exteriores.

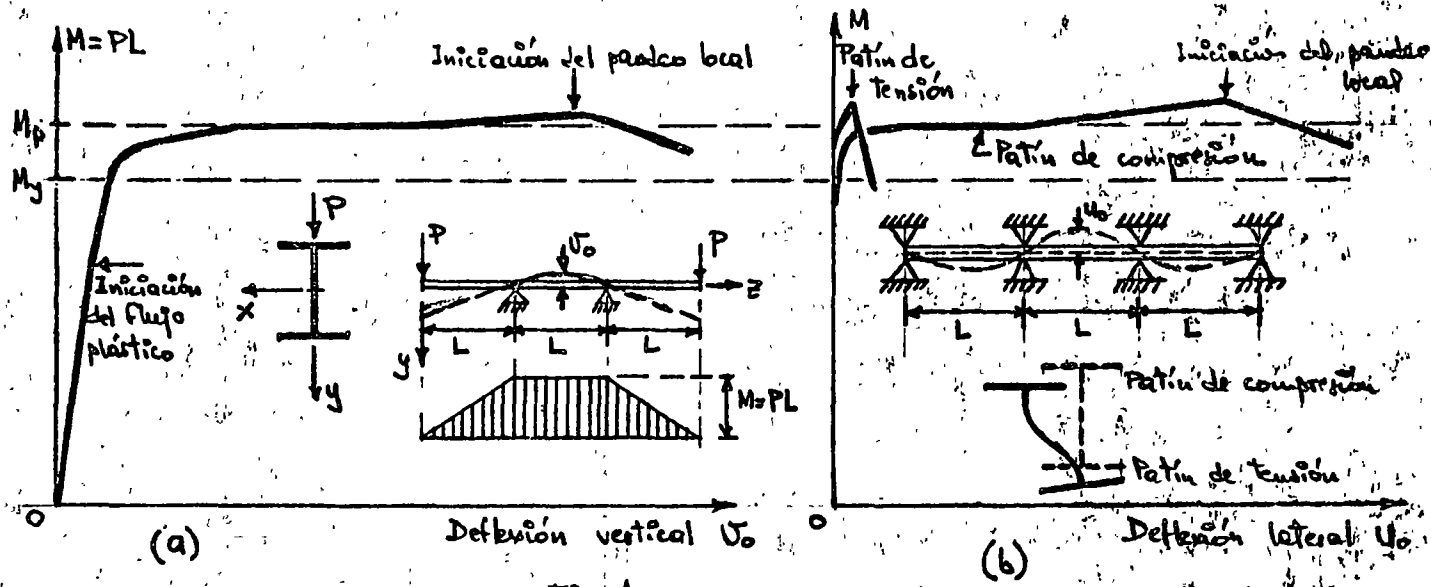


Fig. 1

En la Fig. 1 se ha dibujado, en forma esquemática, el conjunto de curvas obtenidas experimentalmente al cargar, hasta el colapso, la viga mostrada en (a), cuyo tercio central está sometido a flexión pura; los puntos de aplicación de la carga y los apoyos de la viga <sup>utilizada en la prueba</sup> estaban provistos de soportes ~~de apoyo~~ (Fig. 1b), que impidieron los desplazamientos laterales, en la dirección del eje  $x$ , de ambos patines, así como las rotaciones alrededor del eje longitudinal  $z$ .

En la Fig. 1a, en la que se ha trazado la curva momento máximo-deflexión vertical en el punto medio del claro central, se muestra el comportamiento de la viga en el plano de la flexión, mientras que en la 1b se ilustra el comportamiento fuera de ese plano, por medio de las curvas momento-deflexión lateral en el centro de la viga de los dos patines, de tensión y compresión.

El comportamiento inicial, ~~se manifiesta~~ bajo cargas de poca intensidad, es elástico, como lo demuestra el primer tramo, recto, de la curva  $M-U_v$ . Esta etapa termina al iniciarse el flujo plástico, lo que sucede cuando la suma de las esfuerzos normales máximos producidos por las cargas y los reacciones existentes en la viga alcanza, por primera vez, el valor  $\sigma_y$  (si no existieran esfuerzos residuales).

... el valor  $M_y = 50y$ , que representa la posición del eje neutro de flexión en los bordes de la sección).

Al fluir plásticamente una cantidad cada vez mayor del material de la parte superior de la viga que está sometida a flexión uniforme su capacidad para soportar incrementos adicionales de carga va disminuyendo, hasta desaparecer finalmente, esto sucede cuando el momento flexionante alcanza el valor del momento plástico existente de la sección,  $M_p$ , y a partir de ese instante la curva  $M-U_0$  se hace aproximadamente horizontal, ya que la deformación crece, sin un cambio apreciable en la carga, hasta llegar a ser varias veces mayor que la existente cuando se inicia el flujo plástico.

Tan pronto como el momento flexionante máximo alcanza el valor  $M_p$ , el patrón comprimido del tramo central se empieza a desplazar lateralmente, aumentando sus deflexiones en forma gradual, al mismo tiempo que crecen los desplazamientos verticales  $U_0$ ; al cambio, la deflexión lateral del patrón de tensión conserva valores muy reducidos (Fig. 1b). Durante esta etapa del proceso de carga, en la que la viga completa se mueve en la dirección  $y$  y el patrón comprimido se desplaza, al mismo tiempo, en la  $x$ , las secciones transversales pierden su forma inicial, se distorsionan como se muestra esquemáticamente en la Fig. 1b.

La capacidad de carga de la viga se agota finalmente, al producirse localmente el pandeo crítico de su patrón comprimido, en la región central.

Obsérvese que las curvas de la Fig. 1b son representativas de un fenómeno de pandeo, en el que las deflexiones son nulas hasta que las cargas alcanzan el valor crítico. De manera análoga a lo que sucede en las columnas, las imperfecciones inevitables existentes en las vigas reales, que no son matemáticamente rectas, y en la aplicación de las cargas, hacen que los desplazamientos laterales se inicien desde que empieza el proceso; sin embargo, en un caso, y también en forma semejante al fenómeno de pandeo de columnas, la carga crítica teórica puede considerarse como la terminación del estado de equilibrio estable, y el cálculo de la capacidad de carga de las barras flexibles puede basarse en ella.

Se acaba de describir el comportamiento típico de vigas provistas de un comportamiento lateral, y con relaciones ancho-grosor adecuados para postergar la falla por pandeo lateral o local hasta después de haberse producido deformaciones plásticas importantes, bajo la acción de un momento igual al plástico del perfil. Hay, sin embargo, una gran variedad de comportamientos posibles de los cuales se ilustran en la Fig. 2 por medio de sus curvas

... (Galambos p. 85)

La curva llena OAB corresponde al caso ideal, que rara vez se presenta en vigas de

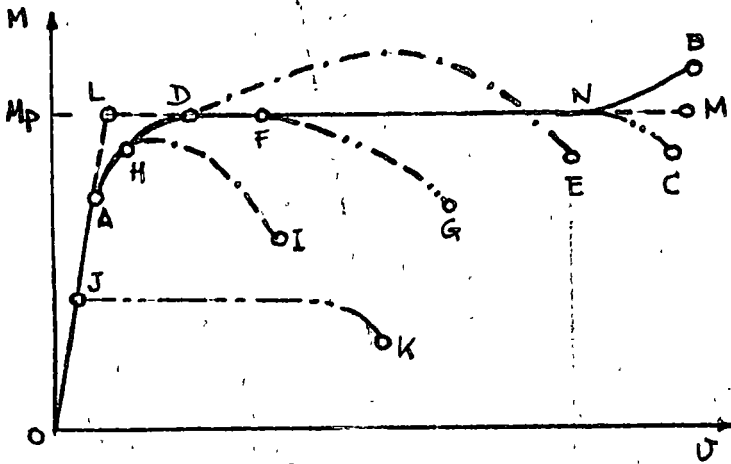


Fig. 2

OADE corresponde a una viga con momento flexionante variable (libremente apoyada y con una carga concentrada en el centro del claro, por ejemplo), a la que se presenta el endurecimiento por deformación en la zona de momento máximo, dando lugar a que éste suba por arriba de  $M_p$ ; posteriormente la curva descende, al perder capacidad la viga cuando se inician fenómenos de pandeo local y lateral.

Las curvas OAFG, OAHJ y OJK corresponden a vigas que fallan por pandeo lateral o local, o por una combinación de ambos, las dos primeras en el intervalo inelástico y la tercera en el elástico.

La curva OAB representa el mejor comportamiento posible de una viga, y OAC corresponde también a un comportamiento muy satisfactorio, siempre que la zona DN, durante la cual la viga experimenta deformaciones crecientes bajo momento  $M_p$  constante, sea suficientemente amplia para que la haya tiempo la ductilidad necesaria para que la estructura trabaje correctamente. Las curvas carga-deformación de estos tipos suelen representarse, en forma idealizada, por dos líneas rectas, una inclinada, OL, que corresponde al intervalo elástico, y una segunda horizontal, LM, de amplitud indeterminada, que representa la zona plástica, de deformaciones crecientes bajo momento constante.

A continuación se estudia el comportamiento de vigas cuya característica geométrica, el contraeje lateral de que están provistas, son tales que fallan por flexión en el plano de las capas al formarse, eventualmente, un mecanismo de colapso plástico; como se mencionó en la introducción, este es el comportamiento más deseable en teoría, ya que en estas condiciones las vigas pueden desarrollar su máxima capacidad de carga.

estructuras reales, en que no hay pandeo local ni lateral, de manera que, después de una deformación considerable, la viga entra en el intervalo de endurecimiento por deformación.

La situación, más común, descrita con base en la Fig. 1, corresponde a la curva OAC.

a lo largo de un eje

(4)

COMPORTAMIENTO DE COLUMNAS DE DIFERENTE

LONGITUDES. El comportamiento de las columnas puede describirse de manera conveniente tanto por las curvas carga axial-deformación longitudinal y carga axial-deflexión lateral de cada una de ellas. El comportamiento y, por consecuencia, (las que se muestran esquemáticamente en la Fig. 6), las curvas que lo describen, varía notablemente

según que la columna sea corta, de longitud intermedia, o larga. (A) Trazar las curvas de la Fig. 6 del tamaño que el pando se presente por flexión en uno de los ejes principales de la columna, tomando la longitud de flexión que corresponde a la Fig. 6(a) columna muy corta, en la que no hay pando, y cuya falla se produce por aplastamiento, cuando la carga alcanza el valor de fluencia  $P_y = A\sigma_y$ , donde  $A$  es el área de las secciones transversales, los desplazamientos laterales  $v$  de los puntos del eje de la pieza son nulos durante todo el proceso, y la curva  $P-w$  es la típica carga axial-deformación longitudinal de un perfil laminado compacto, en la que se refleja la influencia de los esfuerzos residuales y de la variación del esfuerzo de fluencia en los distintos puntos del perfil.

Las curvas de la Fig. 6(b) representan el comportamiento de una columna de longitud intermedia, que se pandea cuando los esfuerzos normales han sobrepasado el límite

de proporcionalidad  $P_p$ , pero antes de que lleguen al punto de fluencia, es decir, en el rango elástico. Como se verá más adelante, el pando se inicia cuando la carga alcanza el valor predicho por la Teoría del módulo tangente,  $P_t$ , y la columna, excepto

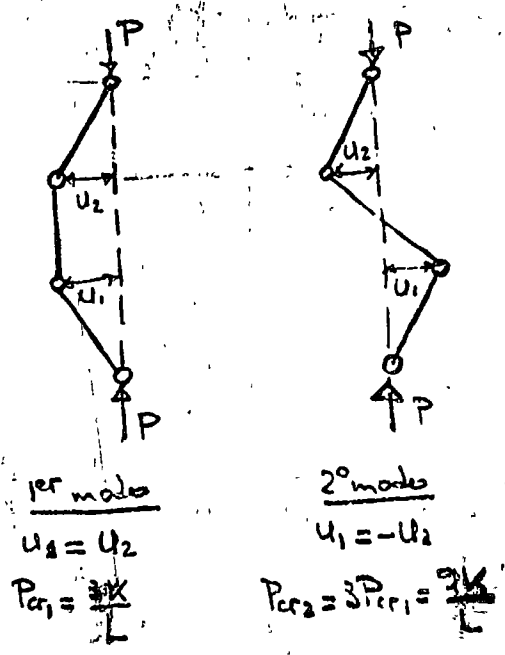


Fig. 5

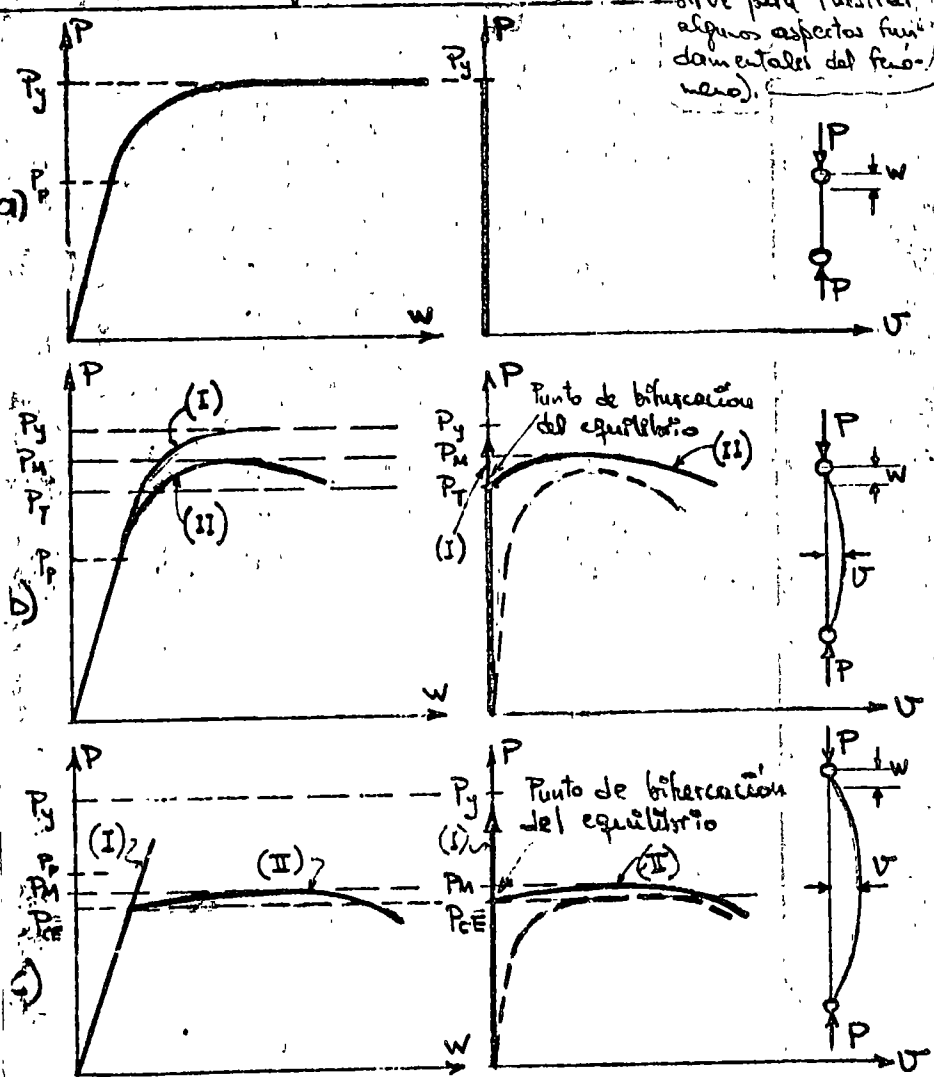


Fig. 6

de proporcionalidad  $P_p$ , pero antes de que lleguen al punto de fluencia, es decir, en el rango elástico. Como se verá más adelante, el pando se inicia cuando la carga alcanza el valor predicho por la Teoría del módulo tangente,  $P_t$ , y la columna, excepto

Por último, las columnas largas se pandean en el intervalo elástico; el fenómeno se presenta bajo esfuerzos menores que el correspondiente al límite de proporcionalidad, y la carga crítica,  $P_{cr}$ , es apreciablemente menor que  $P_y$ , Fig. 6(c). De ello, si la columna es suficientemente larga, la carga crítica de pandeo puede ser una fracción muy reducida de la fuerza que ocasionaría la plasticación total. Tanto en las columnas intermedias como en las largas, al llegar la carga al valor crítico la pieza puede permanecer recta o deformarse lateralmente; en el primer caso, los desplazamientos longitudinales  $w$  se deben exclusivamente al acortamiento de la barra y no hay deflexiones laterales (curva I, Fig. 6(b)), mientras que en el segundo (curva II) la columna se deforma lateralmente, lo que da lugar a un rápido aumento de los valores de  $w$ . La carga crítica es muy poco mayor que la de pandeo.

En las Figs. 6(b) y 6(c), que corresponden a columnas intermedias y largas, se ha dibujado, con línea punteada, las curvas carga-deflexión que se obtendrían si las mismas tuvieran alguna imperfección inicial (las curvas trazadas con línea llana corresponden a columnas perfectas); puede verse que en ese caso no hay un fenómeno de pandeo propiamente dicho sino las deformaciones laterales, que se presentan desde que se inicia el proceso de carga, acentuándose primero lentamente y después en forma rápida, hasta que produce la falla de la pieza.

FIGURA 6  
MODELO ELÁSTICO DE COLUMNAS

Considérese una columna esbelta de sección transversal constante, articulada en un extremo y con un apoyo fijo en el otro, que permite rotaciones y desplazamientos lineales a lo largo de su eje en el otro, sujeta a la acción de cargas axiales de compresión  $P$ . Supóngase, además, que la columna es perfectamente recta y el material de que está compuesta es homogéneo y elástico, y que en las articulaciones hay ninguna fricción (Fig. 7a).

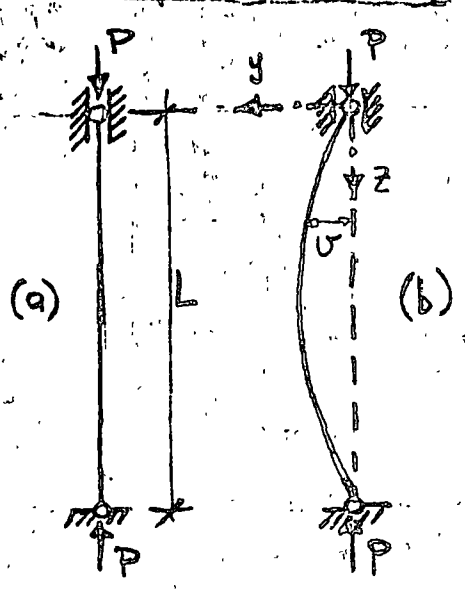


Fig. 9

En esas condiciones, la forma recta corresponde a un estado de equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores, puesto que en cualquier sección transversal existe un conjunto de fuerzas interiores, uniformemente distribuidas, cuya resultante tiene la misma intensidad y línea de acción que  $P$ .

Para averiguar si el equilibrio es estable, inestable o indiferente, se aplica en el centro de la columna una fuerza lateral infinitesimalmente pequeña, que la lleva a una posición ligeramente deformada, y se observa si al eliminarse posteriormente la columna recupera su forma recta, aumenta la deflexión lateral de su eje o se conserva la carga.

COMPORTAMIENTO DE BARRAS FLEXOCOMPRESIONADAS.

El comportamiento de una barra recta aislada sometida a la acción simultánea de fuerzas de compresión axial y pares aplicados en sus extremos puede representarse por medio de una curva momento-rotación en el extremo, obtenida aplicando primero a la pieza la fuerza de compresión y después momentos de intensidad creciente, en uno solo de los extremos o en ambos, mientras la compresión se mantiene constante (la magnitud de la fuerza axial se hace variar de un caso a otro, cuando se desea determinar su influencia en la respuesta de la pieza, pero se conserva fija, mientras se aplican los momentos, en cada caso particular).

Los parámetros principales que determinan el comportamiento de la pieza son su esbeltez, la magnitud de la fuerza de compresión y la manera en que están aplicados los momentos, en sus extremos, los que pueden hacer que la columna se flexione en curvatura simple o doble; además, el problema se complica cuando existe la posibilidad de que la pieza falle por pandeo lateral o cuando uno de sus extremos puede desplazarse linealmente respecto al otro.

En las figuras 8a a 8d se han trazado, en forma cualitativa, varias curvas  $M-\theta$ , tales correspondientes a columnas en las que no hay pandeo local ni lateral y cuyos extremos están fijos linealmente. Cada una de esas figuras ilustra la importancia de uno de los parámetros mencionados arriba.

La Fig. 8a corresponde a una columna muy corta, en la que no hay problema de inestabilidad ni ninguna clase, cuando la fuerza normal es nula, se obtiene la curva  $M-\theta$  característica de una pieza en flexión, capaz de soportar un momento de intensidad máxima igual a  $M_p$  y de mantenerse durante rotaciones importantes, y al crecer  $P$  gradualmente se van obteniendo curvas semejantes a la primera pero cuya rotación máxima no es  $M_p$  sino  $M_{pc}$ , momento plástico resistente reducido por efecto de la fuerza normal.

Las otras tres figuras corresponden a piezas largas. En la 8b se han trazado varias curvas, obtenidas para valores constantes de  $q$  y de  $L/r$  y para intensidades crecientes de la fuerza axial ( $q$  es ~~normalmente~~ el cociente del momento extremo <sup>dividido</sup> entre el valor de ellos); se advierte inmediatamente que al aumentar la compresión disminuyen tanto el momento máximo que la pieza puede soportar como su capacidad de rotación.

Cuando  $L/r$  varía, manteniéndose  $q$  y  $P$  constantes, o cuando la variable es  $q$ , mientras las otras dos cantidades se conservan fijas, el efecto sobre el comportamiento de la pieza es análogo: al aumentar la relación de esbeltez, o tender los momentos en los extremos hacia valores iguales que produzcan curvatura simple



en flexión pura, disminuyen tanto la resistencia como la capacidad de rotación de la barra. (Figs. Bc y Bd).

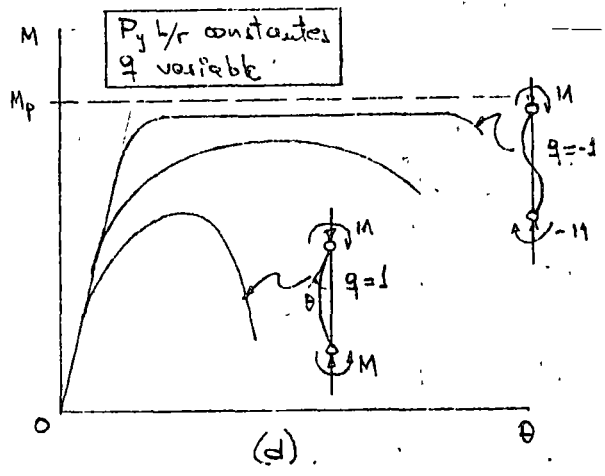
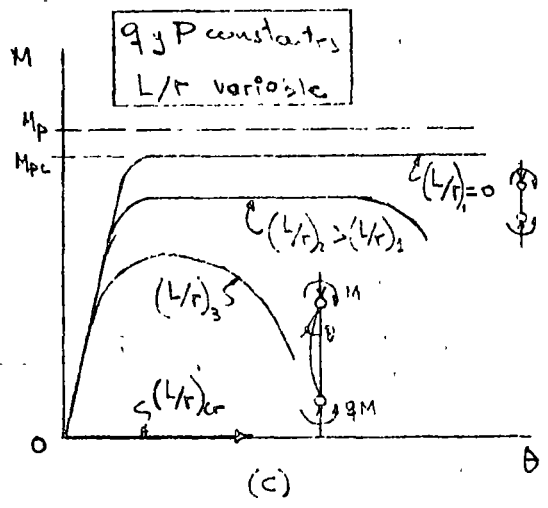
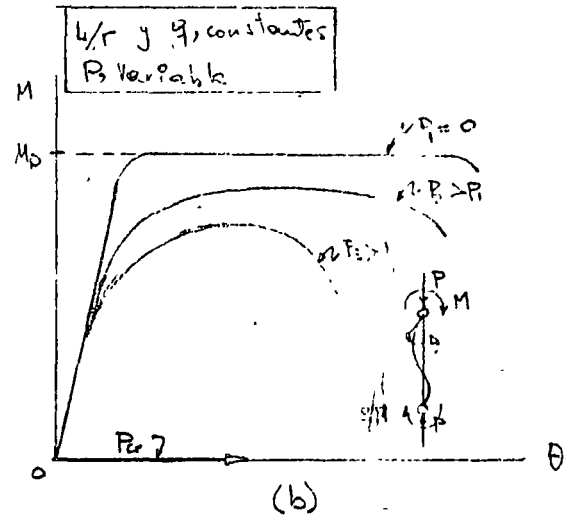
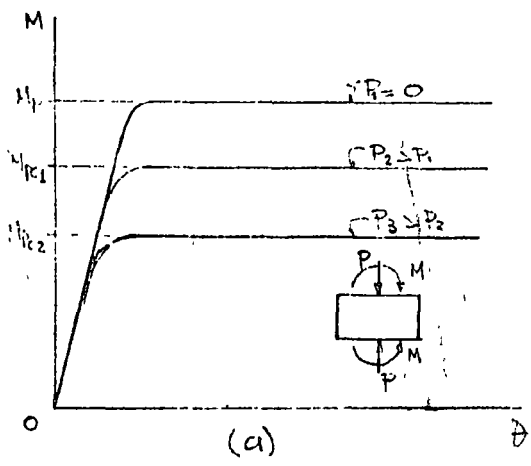
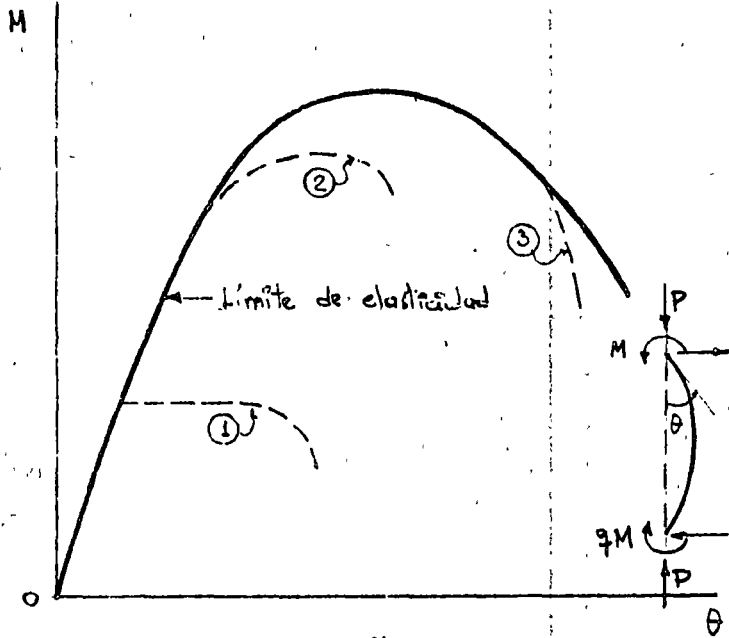


Fig. 8

Los curvas anteriores corresponden, como ya se ha mencionado, a columnas en las que no hay puntos laterales ni local; cualquiera de ellas, puede verse interrumpida prematuramente si se presenta alguno de los fenómenos cuya importancia varía también con los parámetros que caracterizan el problema (ver Fig. 9).

Aun una vez admitida la imposibilidad de que haya problemas de puntos ~~laterales~~ la capacidad de carga de las piezas flexocomprimidas largas queda limitada por un fenómeno de inestabilidad, como lo demuestra la forma de las curvas de las Figs. 8b, c y d, que tienen una rama ascendente (correspondiente a ~~esta zona es~~ configuraciones estables, puesto que <sup>es necesario</sup> incrementar la carga para que aumenten las deflexiones), seguida de un punto en el que la tangente a la curva es horizontal y el equilibrio indiferente (resistencia máxima), y de una rama descendente, característica de roturas de equilibrio inestable. La inestabilidad, que se presenta sin que la barra se salga del plano de la flexión, en el que se conserva durante todo el proceso de carga, y que no es, en este caso, un fenómeno de puntos



- ① Pandeo lateral por flexotorsión en el intervalo elástico;
- ② Pandeo lateral por flexotorsión en el intervalo inelástico.
- ③ Pandeo local.

Fig. 9

(y las deformaciones correspondientes.)

En diferentes secciones transversales, crecen también, y cuando  $P$  se mantiene constante los momentos totales crecen más rápidamente que los aplicados exteriormente, lo que hace que la relación  $M-\theta$  entre el momento que obra en un extremo y la rotación correspondiente no sea lineal y que, eventualmente, se produzca la falla de la columna cuando los elementos mecánicos aplicados exteriormente sobre ella son todavía menores que los que la soportaría si no hubiese amplificación de sus efectos por la interacción entre ambos.

Evidentemente, una barra flexocomprimida no puede soportar ni el momento máximo ni la carga axial que resistiría si estuviera sometida a flexión exclusiva o a compresión axial pura, ya que tiene que utilizar una parte de su capacidad de carga para soportar la otra sollicitación.

(No hay bifurcación del equilibrio, pues las rotaciones se inician en el instante en que se empiezan a aplicar los momentos externos), se debe a la interacción entre momentos y fuerza normal; ya que a causa de la deformación del eje de la pila que produce los primeros la fuerza  $P$  deja de obrar a lo largo del eje y ocasiona momentos adicionales, que a su vez actúan en los extremos, así, cuando los pares aplicados en los extremos son constantes y  $P$  crece paulatinamente, los momentos totales en las

~~El momento máximo que puede soportar una barra flexocomprimida es menor que el momento máximo que puede soportar una barra flexionada o una barra comprimida.~~

E60S or E70S electrodes used in the gas metal-arc process shall conform to the *Specification for Mild Steel Electrodes for Gas Metal-Arc Welding*, AWS A5.18, latest edition, or the provisions of Sect. 1.17.3; E60T or E70T electrodes used in the flux cored-arc process shall conform to the *Specification for Mild Steel Electrodes for Flux-Cored-Arc Welding*, AWS A5.20, latest edition, or the provisions of Sect. 1.17.3.

Manufacturer's certification shall constitute sufficient evidence of conformity with the specifications.

## SECTION 1.5 ALLOWABLE STRESSES\*

Except as provided in Sects. 1.6, 1.7, 1.10, 1.11 and in Part 2, all components of the structure shall be so proportioned that the stress, in kips per square inch, shall not exceed the following values, except as they are rounded off in Appendix A.

### 1.5.1 Structural Steel

#### 1.5.1.1 Tension

On the net section, except at pin holes:

$$F_t = 0.60F_y$$

but not more than 0.5 times the minimum tensile strength of the steel.

On the net section at pin holes in eyebars, pin-connected plates or built-up members:

$$F_t = 0.45F_y$$

For tension on threaded parts see Table 1.5.2.1.

#### 1.5.1.2 Shear

On the gross section:  $F_v = 0.40F_y$

(The gross section of rolled and fabricated shapes may be taken as the product of the overall depth and the thickness of the web. See Sect. 1.10 for reduction required for thin webs. For discussion of high shear stress within boundaries of rigid connections of members whose webs lie in a common plane, see Commentary Sect. 1.5.1.2.)

#### 1.5.1.3 Compression

1.5.1.3.1 On the gross section of axially loaded compression members when  $Kl/r$ , the largest effective slenderness ratio of any unbraced segment as defined in Sect. 1.8, is less than  $C_c$ :

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(Kl/r)^2}{2C_c^2}\right] F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3(Kl/r)}{8C_c} - \frac{(Kl/r)^2}{8C_c^2}} \quad (1.5-1)$$

where

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

\* See Appendix A for tables of numerical values for various grades of steel corresponding to provisions of this Section.

1.5.1.3.2 On the gross section of axially loaded compression members when  $Kl/r$  exceeds  $C_c$ :

$$F_a = \frac{12\pi^2 E}{23(Kl/r)^2} \quad (1.5-2)$$

1.5.1.3.3 On the gross section of axially loaded bracing and secondary members, when  $l/r$  exceeds 120\*:

$$F_{as} = \frac{F_a \text{ (by Formula (1.5-1) or (1.5-2))}}{1.6 - \frac{l}{200r}} \quad (1.5-3)$$

1.5.1.3.4 On the gross area of plate girder stiffeners:

$$F_a = 0.60F_y$$

1.5.1.3.5 On the web of rolled shapes at the toe of the fillet (crippling, see Sect. 1.10.10):

$$F_a = 0.75F_y$$

#### 1.5.1.4 Bending

1.5.1.4.1 Tension and compression on extreme fibers of compact hot-rolled or built-up members (except hybrid girders and members of A514 steel) symmetrical about, and loaded in, the plane of their minor axis and meeting the requirements of this section:

$$F_b = 0.66F_y$$

In order to qualify under this section a member must meet the following requirements:

- a. The flanges shall be continuously connected to the web or webs.
- b. The width-thickness ratio of unstiffened projecting elements of the compression flange, as defined in Sect. 1.9.1.1, shall not exceed  $52.2/\sqrt{F_y}$ .
- c. The width-thickness ratio of stiffened elements of the compression flange, as defined in Sect. 1.9.2.1, shall not exceed  $190/\sqrt{F_y}$ .
- d. The depth-thickness ratio of the web or webs shall not exceed the value

$$d/t = 412 \left( 1 - 2.33 \frac{f_a}{F_y} \right) / \sqrt{F_y} \quad (1.5-4)$$

except that it need not be less than  $257/\sqrt{F_y}$ .

- e. The compression flange shall be supported laterally at intervals not to exceed  $76.0b/\sqrt{F_y}$  nor  $\frac{20,000}{(d/A_f)F_y}$

Except for hybrid girders and members of A514 steel, beams and girders (including members designed on the basis of composite action) which meet the requirements of sub-paragraphs a, b, c, d and e above and are continuous over supports or are rigidly framed to columns by means of rivets,

\* For this case,  $K$  is taken as unity.

high strength bolts or welds, may be proportioned for  $\frac{9}{10}$  of the negative moments produced by gravity loading which are maximum at points of support, provided that, for such members, the maximum positive moment shall be increased by  $\frac{1}{10}$  of the average negative moments. This reduction shall not apply to moments produced by loading on cantilevers. If the negative moment is resisted by a column rigidly framed to the beam or girder, the  $\frac{1}{10}$  reduction may be used in proportioning the column for the combined axial and bending loading, provided that the stress,  $f_a$ , due to any concurrent axial load on the member, does not exceed  $0.15F_a$ .

**1.5.1.4.2** Members (except hybrid girders and members of A514 steel) which meet the requirements of Sect. 1.5.1.4.1 except that  $b_f/2t_f$  exceeds  $52.2/\sqrt{F_y}$  but is less than  $95.0/\sqrt{F_y}$ , may be designed on the basis of an allowable bending stress

$$F_b = F_y \left[ 0.733 - 0.0014 \left( \frac{b_f}{2t_f} \right) \sqrt{F_y} \right] \quad (1.5-5)$$

**1.5.1.4.3** Tension and compression on extreme fibers of doubly-symmetrical I- and H-shape members meeting the requirements of Sect. 1.5.1.4.1, subparagraphs a and b, and bent about their minor axis (except members of A514 steel); solid round and square bars; and solid rectangular sections bent about their weaker axis:

$$F_b = 0.75F_y$$

**1.5.1.4.4** Tension and compression on extreme fibers of box-type flexural members whose compression flange or web width-thickness ratio does not meet the requirements of Sect. 1.5.1.4.1 but does conform to the requirements of Sect. 1.9 and whose compression flange is braced laterally at intervals not exceeding  $2,500/F_y$  times the transverse distance out-to-out of the webs:

$$F_b = 0.60F_y$$

**1.5.1.4.5** Tension on extreme fibers of flexural members not covered in Sect. 1.5.1.4.1, 1.5.1.4.2, 1.5.1.4.3 or 1.5.1.4.4:

$$F_b = 0.60F_y$$

**1.5.1.4.6a** Compression on extreme fibers of flexural members included under Sect. 1.5.1.4.5, having an axis of symmetry in, and loaded in, the plane of their web, and compression on extreme fibers of channels\* bent about their major axis: the larger value computed by Formulas (1.5-6a) or (1.5-6b) and (1.5-7) as applicable (unless a higher value can be justified on the basis of a more precise analysis\*\*), but not more than  $0.60F_y$ .

When  $\sqrt{\frac{102 \times 10^3 C_b}{F_y}} \leq \frac{l}{r_T} \leq \sqrt{\frac{510 \times 10^3 C_b}{F_y}}$

$$F_b = \left[ \frac{2}{3} - \frac{F_y(l/r_T)^2}{1,530 \times 10^3 C_b} \right] F_y \quad (1.5-6a)$$

\* Only Formula (1.5-7) applicable to channels.

\*\* See Commentary Sects. 1.5.1.4.5 and 1.5.1.4.6, last two paragraphs.

When  $l/r_T \geq \sqrt{\frac{510 \times 10^3 C_b}{F_y}}$

$$F_b = \frac{170 \times 10^3 C_b}{(l/r_T)^2} \quad (1.5-6b)$$

Or, when the compression flange is solid and approximately rectangular in cross-section and its area is not less than that of the tension flange

$$F_b = \frac{12 \times 10^3 C_b}{ld/A_f} \quad (1.5-7)$$

In the foregoing,

$l$  = distance between cross-sections braced against twist or lateral displacement of the compression flange

$r_T$  = radius of gyration of a section comprising the compression flange plus one-third of the compression web area, taken about an axis in the plane of the web

$A_f$  = area of the compression flange

$C_b = 1.75 + 1.05 (M_1/M_2) + 0.3 (M_1/M_2)^2$ , but not more than 2.3\*, where  $M_1$  is the smaller and  $M_2$  the larger bending moment at the ends of the unbraced length, taken about the strong axis of the member, and where  $M_1/M_2$ , the ratio of end moments, is positive when  $M_1$  and  $M_2$  have the same sign (reverse curvature bending) and negative when they are of opposite signs, (single curvature bending). When the bending moment at any point within an unbraced length is larger than that at both ends of this length, the value of  $C_b$  shall be taken as unity.  $C_b$  shall also be taken as unity in computing the value of  $F_{bx}$  and  $F_{by}$  to be used in Formula (1.6-1a). See Sect. 1.10 for further limitation in plate girder flange stress.

For hybrid plate girders,  $F_y$  for Formulas (1.5-6a) and (1.5-6b) is the yield stress of the compression flange. Formula (1.5-7) shall not apply to hybrid girders.

1.5.1.4.6b Compression on extreme fibers of flexural members included under Sect. 1.5.1.4.5, but are not included in Sect. 1.5.1.4.6a:

$$F_b = 0.60F_y$$

provided that sections bent about their major axis are braced laterally in the region of compression stress at intervals not exceeding  $76.0b_f/\sqrt{F_y}$ .

#### 1.5.1.5 Bearing (on contact area)

1.5.1.5.1 Milled surfaces, including bearing stiffeners and pins in reamed, drilled, or bored holes:

$$F_p = 0.90F_y^{**}$$

\*  $C_b$  can be conservatively taken as unity. For smaller values see Appendix A, Fig. A1, p. 5-104.

\*\* When parts in contact have different yield stresses,  $F_p$  shall be the smaller value.

1.5.2.2 Allowable bearing stress on projected area of bolts in bearing-type connections and on rivets:

$$F_p = 1.35F_y$$

where  $F_y$  is the yield stress of the connected part. (Bearing stress is not restricted in friction-type connections assembled with A325, A449 or A490 bolts.)

### 1.5.3 Welds

Except as modified by the provisions of Sect. 1.7, welds shall be proportioned to meet the stress requirements given in Table 1.5.3.

### 1.5.4 Cast Steel and Steel Forgings

Allowable stresses same as those provided in Sect. 1.5.1, where applicable.

### 1.5.5 Masonry Bearing

In the absence of Code regulations the following stresses apply:

On sandstone and limestone . . . . .	$F_p = 0.40 k$
On brick in cement mortar . . . . .	$F_p = 0.25 k$
On the full area of a concrete support . . . . .	$F_p = 0.25f'_c$
On one-third of this area . . . . .	$F_p = 0.375f'_c$

where  $f'_c$  is the specified compression strength of the concrete.

### 1.5.6 Wind and Seismic Stresses

Allowable stresses may be increased one-third above the values provided in Sect. 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4 and 1.5.5 when produced by wind or seismic loading, acting alone or in combination with the design dead and live loads, provided the required section computed on this basis is not less than that required for the design dead and live load and impact (if any), computed without the one-third stress increase.

## SECTION 1.6 COMBINED STRESSES

### 1.6.1 Axial Compression and Bending

Members subjected to both axial compression and bending stresses shall be proportioned to satisfy the following requirements:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx}f_{bx}}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ex}}\right) F_{bx}} + \frac{C_{my}f_{by}}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ey}}\right) F_{by}} \leq 1.0 \quad (1.6-1a)$$

$$\frac{f_a}{0.60F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \quad (1.6-1b)$$

When  $\frac{f_a}{F_a} \leq 0.15$ , Formula (1.6-2) may be used in lieu of Formula (1.6-1a) and (1.6-1b)

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \quad (1.6-2)$$

In Formulas (1.6-1a), (1.6-1b), and (1.6-2) the subscripts  $x$  and  $y$ , combined with subscripts  $b$ ,  $m$  and  $e$ , indicate the axis of bending about which a particular stress or design property applies, and

$F_a$  = axial stress that would be permitted if axial force alone existed

$F_b$  = compressive bending stress that would be permitted if bending moment alone existed

$F'_e = \frac{12\pi^2 E}{23(Kl_b/r_b)^2}$  (In the expression for  $F'_e$ ,  $l_b$  is the actual unbraced length in the plane of bending and  $r_b$  is the corresponding radius of gyration.  $K$  is the effective length factor in the plane of bending. As in the case of  $F_a$ ,  $F_b$  and  $0.6 F_y$ ,  $F'_e$  may be increased one-third in accordance with Sect. 1.5.6.)

$f_a$  = computed axial stress

$f_b$  = computed compressive bending stress at the point under consideration

$C_m$  = a coefficient whose value shall be taken as follows:

1. For compression members in frames subject to joint translation (sidesway),  $C_m = 0.85$ .
2. For restrained compression members in frames braced against joint translation and not subject to transverse loading between their supports in the plane of bending,

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2}, \text{ but not less than } 0.4,$$

where  $M_1/M_2$  is the ratio of the smaller to larger moments at the ends of that portion of the member unbraced in the plane of bending under consideration.  $M_1/M_2$  is positive when the member is bent in reverse curvature and negative when it is bent in single curvature.

3. For compression members in frames braced against joint translation in the plane of loading and subjected to transverse loading between their supports, the value of  $C_m$  may be determined by rational analysis. However, in lieu of such analysis, the following values may be used: (a) for members whose ends are restrained,  $C_m = 0.85$ ; (b) for members whose ends are unrestrained,  $C_m = 1.0$ .

### 1.6.2 Axial Tension and Bending

Members subject to both axial tension and bending stresses shall be proportioned at all points along their length to satisfy the requirements of Formula (1.6-1b) where  $f_b$  is the computed bending tensile stress. However, the computed bending compressive stress, taken alone, shall not exceed the applicable value according to Sect. 1.5.1.4.

### 1.6.3 Shear and Tension

Rivets and bolts subject to combined shear and tension shall be so proportioned that the tension stress, in kips per square inch, produced by forces applied to the connected parts, shall not exceed the following:



For A502 Grade 1 rivets . . . . .	$F_t = 28.0 - 1.6f_o \leq 20.0$
For A502 Grade 2 rivets. . . . .	$F_t = 38.0 - 1.6f_o \leq 27.0$
For A307 bolts (applied to stress area)	$F_t = 28.0 - 1.6f_o \leq 20.0$
For A325 and A449 bolts in bearing- type joints . . . . .	$F_t = 50.0 - 1.6f_o \leq 40.0$
For A490 bolts in bearing-type joints .	$F_t = 70.0 - 1.6f_o \leq 54.0$

where  $f_o$ , the shear stress produced by the same forces, shall not exceed the value for shear given in Sect. 1.5.2.

For bolts used in friction-type joints, the shear stress allowed in Sect. 1.5.2 shall be reduced so that:

For A325 and A449 bolts . . . . .	$F_o \leq 15.0(1 - f_t A_b / T_b)$
For A490 bolts. . . . .	$F_o \leq 20.0(1 - f_t A_b / T_b)$

where  $f_t$  is the average tensile stress due to a direct load applied to all of the bolts in a connection and  $T_b$  is the specified pretension load of the bolt.

## SECTION 1.7 MEMBERS AND CONNECTIONS SUBJECT TO REPEATED VARIATION OF STRESS (FATIGUE)

### 1.7.1 General

Fatigue, as used in this Specification, is defined as the damage that may result in fracture after a sufficient number of fluctuations of stress. Stress range is defined as the magnitude of these fluctuations. In the case of a stress reversal, stress range shall be computed as the numerical sum of maximum repeated tensile and compressive stresses or the sum of maximum shearing stresses of opposite direction at a given point, resulting from differing arrangements of live load.

Few members or connections in conventional buildings need to be designed for fatigue, since most load changes in such structures occur only a small number of times or produce only minor stress fluctuations. The occurrence of full design wind or earthquake loads is too infrequent to warrant consideration in fatigue design. However, crane runways and supporting structures for machinery and equipment are often subject to fatigue loading conditions.

### 1.7.2 Design for Fatigue

Members and their connections, subject to fatigue loading as defined in Appendix B, shall be proportioned to satisfy the stress range limitations as provided therein.

## SECTION 1.8 STABILITY AND SLENDERNESS RATIOS

### 1.8.1 General

General stability shall be provided for the structure as a whole and for each compression element.

In determining the slenderness ratio of an axially loaded compression member, except as provided in Sect. 1.5.1.3.3, the length shall be taken as its effective length  $Kl$  and  $r$  as the corresponding radius of gyration.

### 1.8.2 Sidesway Prevented

In frames where lateral stability is provided by adequate attachment to diagonal bracing, shear walls, an adjacent structure having adequate lateral stability, or to floor slabs or roof decks secured horizontally by walls or bracing systems parallel to the plane of the frame, and in trusses, the effective length factor,  $K$ , for the compression members shall be taken as unity, unless analysis shows that a smaller value may be used.

### 1.8.3 Sidesway Not Prevented

In frames where lateral stability is dependent upon the bending stiffness of rigidly connected beams and columns, the effective length  $Kl$  of compression members, shall be determined by a rational method and shall not be less than the actual unbraced length.

### 1.8.4 Maximum Ratios

The slenderness ratio,  $Kl/r$ , of compression members shall not exceed 200.

The slenderness ratio,  $Kl/r$ , of tension members, other than rods, preferably should not exceed:

For main members . . . . .	240
For bracing and other secondary members . . . . .	300

## SECTION 1.9 WIDTH-THICKNESS RATIOS

### 1.9.1 Unstiffened Elements Under Compression

1.9.1.1 Unstiffened (projecting) compression elements are those having one free edge parallel to the direction of compression stress. The width of unstiffened plates shall be taken from the free edge to the first row of fasteners or welds; the width of legs of angles, channel and zee flanges, and stems of tees shall be taken as the full nominal dimension; the width of flanges of I-shape members and tees shall be taken as one-half the full nominal width. The thickness of a sloping flange shall be measured half-way between a free edge and the corresponding face of the web.

1.9.1.2 Unstiffened elements subject to axial compression or compression due to bending shall be considered as fully effective when the ratio of width to thickness is not greater than the following:

Single-angle struts; double-angle struts with separators . . . . .	76.0/ $\sqrt{F_y}$
Struts comprising double angles in contact; angles or plates projecting from girders, columns or other compression members; compression flanges of beams; stiffeners on plate girders . . . . .	95.0/ $\sqrt{F_y}$
Stems of tees . . . . .	127/ $\sqrt{F_y}$

When the actual width-to-thickness ratio exceeds these values, the design stress shall be governed by the provisions of Appendix C.

### 1.9.2 Stiffened Elements Under Compression

1.9.2.1 Stiffened compression elements are those having lateral support along both edges which are parallel to the direction of the compression stress. The width of such elements shall be taken as the distance between nearest lines of fasteners or welds, or between the roots of the flanges in the case of rolled sections.

1.9.2.2 Stiffened elements subject to axial compression, or to uniform compression due to bending as in the case of the flange of a flexural\* member, shall be considered as fully effective when the ratio of width to thickness is not greater than the following:

Flanges of square and rectangular sections of uniform thickness . . . . .	238/ $\sqrt{F_y}$
Unsupported width of cover plates perforated with a succession of access holes** . . . . .	317/ $\sqrt{F_y}$
All other uniformly compressed stiffened elements . . . . .	253/ $\sqrt{F_y}$

Except in the case of perforated cover plates, when the actual width-to-thickness ratio exceeds these values the design shall be governed by the provisions of Appendix C.

## SECTION 1.10 PLATE GIRDERS AND ROLLED BEAMS

### 1.10.1 Proportions

Riveted and welded plate girders, cover-plated beams and rolled beams shall in general be proportioned by the moment of inertia of the gross section. No deduction shall be made for shop or field rivet or bolt holes in either flange, except that in cases where the reduction of the area of either flange by such holes, calculated in accordance with the provisions of Sect. 1.14.3, exceeds 15 percent of the gross flange area, the excess shall be deducted.

Hybrid girders may be proportioned by the moment of inertia of their gross section,† subject to the applicable provisions in Sect. 1.10, provided that they are not required to resist an axial force greater than  $0.15F_y$  times the area of the gross section, where  $F_y$  is the yield stress of the flange material. To qualify as hybrid girders the flanges at any given section shall have the same cross-sectional area and be made of the same grade of steel.

### 1.10.2 Web

The clear distance between flanges, in inches, shall not exceed

$$\frac{14,000}{\sqrt{F_y}(F_y + 16.5)}$$

times the web thickness, where  $F_y$  is the yield stress of the compression flange, except that it need not be less than  $2,000/\sqrt{F_y}$  when transverse stiffeners are provided, spaced not more than  $1\frac{1}{2}$  times the girder depth.

\* Webs of flexural members are covered by the provisions of Sects. 1.10.2 and 1.10.6 and are not subject to the provisions of this section.

\*\* Assumes net area of plate at widest hole as basis for computing compression stress.

† No limit is placed on the web stresses produced by the applied bending moment for which a hybrid girder is designed, except as provided in Sect. 1.7 and Appendix B.



## PART 2

### SECTION 2.1 SCOPE

Subject to the limitations contained herein, simple or continuous beams, one and two-story rigid frames, braced multi-story rigid frames, and similar portions of structures rigidly constructed so as to be continuous over at least one interior support,\* may be proportioned on the basis of plastic design, i.e., on the basis of their maximum strength. This strength, as determined by rational analysis, shall not be less than that required to support a factored load equal to 1.7 times the given live load and dead load or 1.3 times these loads acting in conjunction with 1.3 times any specified wind or earthquake forces.

Rigid frames shall satisfy the requirements for Type 1 construction in the plane of the frame as provided in Sect. 1.2. Type 2 construction is permitted for members between rigid frames. Connections joining a portion of a structure designed on the basis of plastic behavior with a portion not so designed need be no more rigid than ordinary seat-and-cap angle or standard web connections.

Where plastic design is used as the basis for proportioning continuous beams and structural frames, the provisions relating to allowable working stress, contained in Part 1, are waived. Except as modified by these rules, however, all other pertinent provisions of Part 1 shall govern.

It is not recommended that crane runways be designed continuous over interior vertical supports on the basis of maximum strength. However, rigid frame bents supporting crane runways may be considered as coming within the scope of the rules.

### SECTION 2.2 STRUCTURAL STEEL

Structural steel shall conform to one of the following specifications, latest edition:

*Structural Steel, ASTM A36*

*High-Strength Low-Alloy Structural Steel, ASTM A242*

*High-Strength Low-Alloy Structural Manganese Vanadium Steel, ASTM A441*

*Structural Steel with 42,000 psi Minimum Yield Point, ASTM, A529*

*High-Strength Low-Alloy Columbium-Vanadium Steels of Structural Quality, ASTM A572*

*High-Strength Low-Alloy Structural Steel with 50,000 psi Minimum Yield Point to 4 in. Thick, ASTM A588*

---

\* As used here, "interior support" may be taken to include a rigid frame knee formed by the junction of a column and a sloping or horizontal beam or girder.

### SECTION 2.3 VERTICAL BRACING SYSTEM

The vertical bracing system for a plastically designed braced multi-story frame shall be adequate, as determined by a rational analysis, to:

1. Prevent buckling of the structure under factored gravity loads
2. Maintain the lateral stability of the structure, including the overturning effects of drift, under factored gravity plus factored horizontal loads.

The vertical bracing system may be considered to function together with in-plane shear-resisting exterior and interior walls, floor slabs, and roof decks, if these walls, slabs, and decks are secured to the structural frames. The columns, girders, beams, and diagonal members, when used as the vertical bracing system, may be considered to comprise a vertical-cantilever, simply-connected truss in the analyses for frame buckling and lateral stability. Axial deformation of all members in the vertical bracing system shall be included in the lateral stability analysis. The axial force in these members, caused by factored gravity plus factored horizontal loads, shall not exceed  $0.85P_v$ , where  $P_v$  is the product of yield stress times area of the member.

Girders and beams included in the vertical bracing system of a braced multi-story frame shall be proportioned for axial force and moment caused by the concurrent factored horizontal and gravity loads, in accordance with Formula (2.4-2), with  $P_{cr}$  taken as the maximum axial strength of the beam, based on the actual slenderness ratio between braced points in the plane of bending.

### SECTION 2.4 COLUMNS

In the plane of bending of columns which would develop a plastic hinge at ultimate loading, the slenderness ratio  $l/r$  shall not exceed  $C_c$ , defined in Sect. 1.5.1.3.

The maximum strength of an axially loaded compression member shall be taken as

$$P_{cr} = 1.7AF_a \quad (2.4-1)$$

where  $A$  is the gross area of the member and  $F_a$ , as defined by Formula (1.5-1), is based upon the applicable slenderness ratio.\*

Members subject to combined axial load and bending moment shall be proportioned so as to satisfy the following interaction formulas:

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{\left(1 - \frac{P}{P_c}\right) M_m} \leq 1.0 \quad (2.4-2)$$

$$\frac{P}{P_v} + \frac{M}{1.18M_p} \leq 1.0; \quad M \leq M_p \quad (2.4-3)$$

\* See Commentary p. 5-162.

in which

- $M$  = maximum applied moment  
 $P$  = applied axial load  
 $P_e = (23/12) AF'_e$ , where  $F'_e$  is as defined in Sect. 1.6.1  
 $C_m$  = coefficient defined in Sect. 1.6.1  
 $M_m$  = maximum moment that can be resisted by the member in the absence of axial load

For columns braced in the weak direction:

$$M_m = M_p$$

For columns unbraced in the weak direction:

$$M_m = \left[ 1.07 - \frac{(l/r_y)\sqrt{F_y}}{3,160} \right] M_p \leq M_p \quad (2.4-4)$$

### SECTION 2.5 SHEAR

Unless reinforced by diagonal stiffeners or a doubler plate, the webs of columns, beams, and girders, including areas within the boundaries of the connections, shall be so proportioned that

$$V_u \leq 0.55F_y t d \quad (2.5-1)$$

where  $V_u$  is the shear, in kips, that would be produced by the required factored loading,  $d$  is the depth of the member, and  $t$  is its web thickness.

### SECTION 2.6 WEB CRIPPLING

Web stiffeners are required on a member at a point of load application where a plastic hinge would form.

At points on a member where the concentrated load delivered by the flanges of a member framing into it would produce web crippling opposite the compression flange or high tensile stress in the connection of the tension flange, web stiffeners are required in accordance with the provisions of Sect. 1.15.5.

### SECTION 2.7 MINIMUM THICKNESS (WIDTH-THICKNESS RATIOS)

The width-thickness ratio for flanges of rolled I or W shapes and similar built-up single-web shapes that would be subjected to compression involving hinge rotation under ultimate loading shall not exceed the following values:

$F_y$	$b_f/2t_f$
36	8.5
42	8.0
45	7.4
50	7.0
55	6.6
60	6.3
65	6.0

The thickness of sloping flanges may be taken as their average thickness.

The width-thickness ratio of similarly compressed flange plates in box sections and cover-plates shall not exceed  $190/\sqrt{F_v}$ . For this purpose the width of a cover-plate shall be taken as the distance between longitudinal lines of connecting rivets, high strength bolts or welds.

The depth-thickness ratio of webs of members subjected to plastic bending shall not exceed the value given by Formula (2.7-1a) or (2.7-1b), as applicable.

$$\frac{d}{t} = \frac{412}{\sqrt{F_v}} \left( 1 - 1.4 \frac{P}{P_v} \right) \quad \text{when } \frac{P}{P_v} \leq 0.27 \quad (2.7-1a)$$

$$\frac{d}{t} = \frac{257}{\sqrt{F_v}} \quad \text{when } \frac{P}{P_v} > 0.27 \quad (2.7-1b)$$

## SECTION 2.8 CONNECTIONS

All connections, the rigidity of which is essential to the continuity assumed as the basis of the analysis, shall be capable of resisting the moments, shears and axial loads to which they would be subjected by the full factored loading, or any probable partial distribution thereof.

Corner connections (haunches), tapered or curved for architectural reasons, shall be so proportioned that the full plastic bending strength of the section adjacent to the connection can be developed, if required.

Stiffeners shall be used, as required, to preserve the flange continuity of interrupted members at their junction with other members in a continuous frame. Such stiffeners shall be placed in pairs on opposite sides of the web of the member which extends continuously through the joint.

High strength bolts, A307 bolts, rivets, and welds shall be proportioned to resist the forces produced at factored load, using stresses equal to 1.7 times those given in Part 1. In general, groove welds are preferable to fillet welds, but their use is not mandatory.

High strength bolts may be used in joints having painted contact surfaces when these joints are of such size that the slip required to produce bearing would not interfere with the formation, at factored loading, of the plastic hinges assumed in the design.

## SECTION 2.9 LATERAL BRACING

Members shall be adequately braced to resist lateral and torsional displacements at the plastic hinge locations associated with the failure mechanism. The laterally unsupported distance,  $l_{cr}$ , from such braced hinge locations to similarly braced adjacent points on the member or frame shall not exceed the value determined from Formula (2.9-1a) or (2.9-1b), as applicable.

$$\frac{l_{cr}}{r_v} = \frac{1,375}{F_v} + 25 \quad \text{when } +1.0 > \frac{M}{M_p} > -0.5 \quad (2.9-1a)$$

$$\frac{l_{cr}}{r_v} = \frac{1,375}{F_v} \quad \text{when } -0.5 > \frac{M}{M_p} > -1.0 \quad (2.9-1b)$$

where

- $r_v$  = the radius of gyration of the member about its weak axis  
 $M$  = the lesser of the moments at the ends of the unbraced segment  
 $M/M_p$  = the end moment ratio, is positive when the segment is bent in reverse curvature and negative when bent in single curvature.

The foregoing provisions need not apply in the region of the last hinge to form in the failure mechanism assumed as the basis for proportioning a given member, nor in members oriented with their weak axis normal to the plane of bending. However, in the region of the last hinge to form, and in regions not adjacent to a plastic hinge, the maximum distance between points of lateral support shall be such as to satisfy the requirements of Formulas (1.5-6a), (1.5-6b) or (1.5-7) as well as Formulas (1.6-1a) and (1.6-1b) in Part 1 of this Specification. For this case the value of  $f_a$  and  $f_b$  shall be computed from the moment and axial force at factored loading, divided by the applicable load factor.

Members built into a masonry wall and having their web perpendicular to this wall can be assumed to be laterally supported with respect to their weak axis of bending.

## SECTION 2.10 FABRICATION

The provisions of Part 1 with respect to workmanship shall govern the fabrication of structures, or portions of structures, designed on the basis of maximum strength, subject to the following limitations:

The use of sheared edges shall be avoided in locations subject to plastic hinge rotation at factored loading. If used they shall be finished smooth by grinding, chipping or planing.

In locations subject to plastic hinge rotation at factored loading, holes for rivets or bolts in the tension area shall be sub-punched and reamed or drilled full size.



---

---

Journal of the  
STRUCTURAL DIVISION  
Proceedings of the American Society of Civil Engineers

---

---

INTERACTION OF SHEAR WALLS AND FRAMES

By Fazlur R. Khan,<sup>1</sup> and John A. Sbarounis,<sup>2</sup> Members, ASCE

---

SYNOPSIS

The distribution of lateral forces and their effects on the resisting elements of buildings braced with shear walls is obtained by a method directly applicable to design. The method can also be applied to frame torsion resulting from eccentric loads or dissymmetry, to base rotation and plastic rotation of the shear wall at any point, axial deformation of columns, and to walls that are terminated at intermediate levels. Tentative recommendations are proposed concerning the part of the slab width that can be used as the beam element in flat slab-column frames. Influence curves are included to assist designers in the analysis.

---

**Note.**—Discussion open until November 1, 1964. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, No. ST3, June, 1964.

<sup>1</sup> Senior Structural Designer, Skidmore, Owings and Merrill, Chicago, Ill.

<sup>2</sup> Structural Engr., Structural Bur., Portland Cement Association, Chicago, Ill.



## INTRODUCTION

A number of excellent articles have been published on the subject of interaction of shear walls with frames in multistory structures.<sup>3,4,5,6,7,8</sup> The analyses presented in the aforementioned papers are, of course, applicable to design, but require methods of solution that may not always be readily adaptable to office practice. Nevertheless, the cited analyses represent the foundation of any attempt to generalize the solution for application to structures with members that vary from bay to bay and from story to story, or structures for which common assumptions on the location of beam and column inflection points are not consistent with their actual behavior. The numerical solution presented herein requires no simplifying assumptions of the structural behavior or configuration that are not checked during some stage of the analysis. It can be solved on a sliderule or a small computer. A method of converging approximations, such as the one proposed subsequently, provides a solution that can be carried to any degree of refinement by increasing the number of cycles until the desired result is attained.

The material presented is applicable to analyses for lateral forces due to either wind or earthquake. Normally, shear walls are designed to resist all lateral forces while the frame is assumed to carry only vertical loads. The distribution of forces between the frames and walls should result in more economical structures because, in most practical cases, the results of an exact analysis will indicate a reduction of reinforcement in the shear walls. On the other hand, the one-third increase in allowable wind or earthquake stresses will generally permit accommodation of the additional stresses in the frame with no increase in the reinforcement over the major part of most tall structures.

Recent building regulations are influenced by the concept that structures designed for earthquake regions must serve two functions: (1) For frequent small shocks, they must be capable of controlling damage to nonstructural elements in a building (partitions, skin, ducts, water and soil lines, etc., which, incidentally, many amount to more than 70% of the cost of the building), and (2) for severe earthquakes, they must have adequate ductility to accommodate large lateral deflections with little, if any, loss in capacity. It is hoped that the design information presented herein will help engineers to establish more precise and economical reinforcing requirements. A better understanding of the stress distribution in structures that are braced with shear walls

<sup>3</sup> Rosenblueth, Emilio, and Holtz, Ignacio, "Elastic Analysis of Shear Walls in Tall Buildings," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 31, June, 1960, pp. 1209-1222.

<sup>4</sup> Cardan, Bernard, "Concrete Shear Walls Combined with Rigid Frames in Multistory Buildings Subject to Lateral Loads," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 58, No. 3, September, 1961, pp. 299-316.

<sup>5</sup> Sevton, H. J., discussion of "Concrete Shear Walls Combined with Rigid Frames in Multistory Buildings Subject to Lateral Loads," by Bernard Cardan, *Journal of the American Concrete Institute*, Part 2, Vol. 58, March, 1962, pp. 825-827.

<sup>6</sup> Muto, Kiyoshi, "Seismic Analysis of Reinforced Concrete Buildings," *Proceedings, World Conf. on Earthquake Engrg.*, 1956.

<sup>7</sup> Green, Norman B., "Bracing Walls for Multistory Buildings," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 24, November, 1952, pp. 233-248.

<sup>8</sup> Frischmann, W. W., Prabhu, S. S., and Toppler, J. F., "Multistory Frames and Interconnected Shear-Walls Subjected to Lateral Loads—1," *Concrete and Construction Engineering*, June, 1963, pp. 227-233.

together with well-documented design and detailing procedures<sup>9,10</sup> should result in structures that will accomplish both functions (1) and (2) outlined previously, with greater economy.

Shear wall structures are often built with a flat slab floor system. For this reason, tentative data are included for the effective slab width that can be considered as a beam element in determining the contribution of the slab-column system to the over-all structural capacity and stiffness.

Influence curves included herein are intended to illustrate the interaction between the two resisting systems as well as for design purposes. Small differences in stiffness between various parts of the structure do not affect the over-all behavior; hence, the application of the influence curves to design will produce sufficiently accurate results for a large number of practical cases.

*Notation.*—The symbols adopted for use in this paper are defined where they first appear and are listed alphabetically in the text.

## ANALYSIS

The interaction of a shear wall and a frame is a special case of indeterminacy in which two basically different components are tied together to produce one structure. If the frame alone is considered to take the full lateral load, it would develop moments in columns and beams to resist the total shear at each story while the effects of overturning would normally be considered secondary and, in most cases, negligible. In resisting all lateral loads, a frame would deflect as in Fig. 1(a). The floors would remain essentially level even though the joints would rotate. If a shear wall, on the other hand, is considered to resist all the lateral loads, it would develop moments at each floor equal to the overturning moment at that level and the deflected shape, Fig. 1(b), would be that of a cantilever.

If a shear wall and a frame exist in a building, each one will try to obstruct the other from taking its natural free deflected shape, and as a result a redistribution of forces between the two would be expected. As shown in Fig. 1(c), the frame will restrain or pull the shear wall back in the upper stories, while in the lower regions the opposite will occur.

The conflicting physical characteristics of the two systems can be considered if the structure is first divided into two parts, a frame, and a shear wall, and then the two parts are brought together so that all structural laws are fully satisfied. The following is a detailed description of this method.

*Concept and Method of Analysis.*—The analysis is performed in two stages. In the first stage of analysis of a structure, shown in plan in Fig. 2(a), it is necessary to determine the deflected shape and the amount of lateral load distributed to the walls and frame, respectively, at each story. For this purpose, the structure is separated into two distinct systems, [Fig. 2(b)] as follows:

<sup>9</sup> "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," Amer. Concrete Inst., Detroit, Mich., ACI 318-63, 1963.

<sup>10</sup> Blume, John A., Newmark, Nathan M., and Corning, Leo H., "Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions," Portland Cement Assn., Chicago, Ill., 1961.

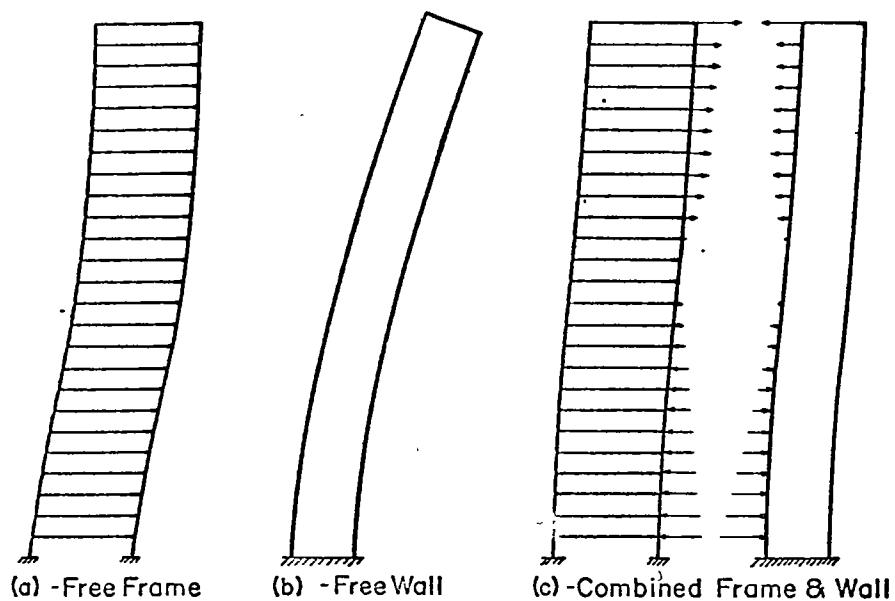


FIG. 1.—TYPICAL DEFLECTED SHAPES

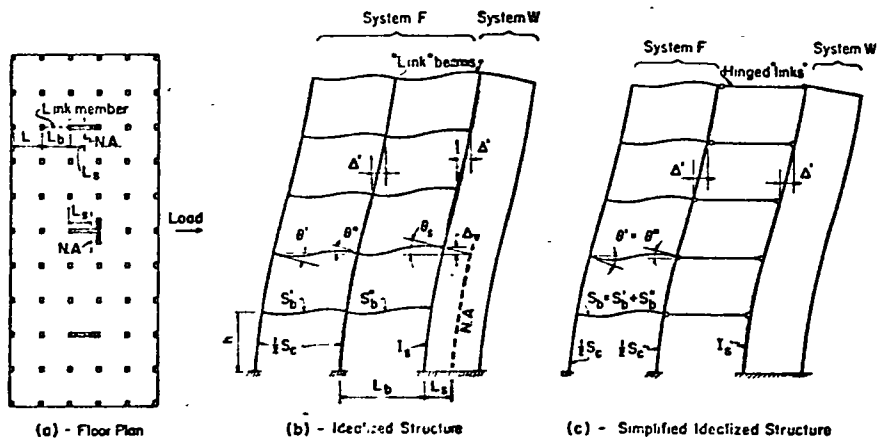


FIG. 2.—TYPICAL IDEALIZED STRUCTURE

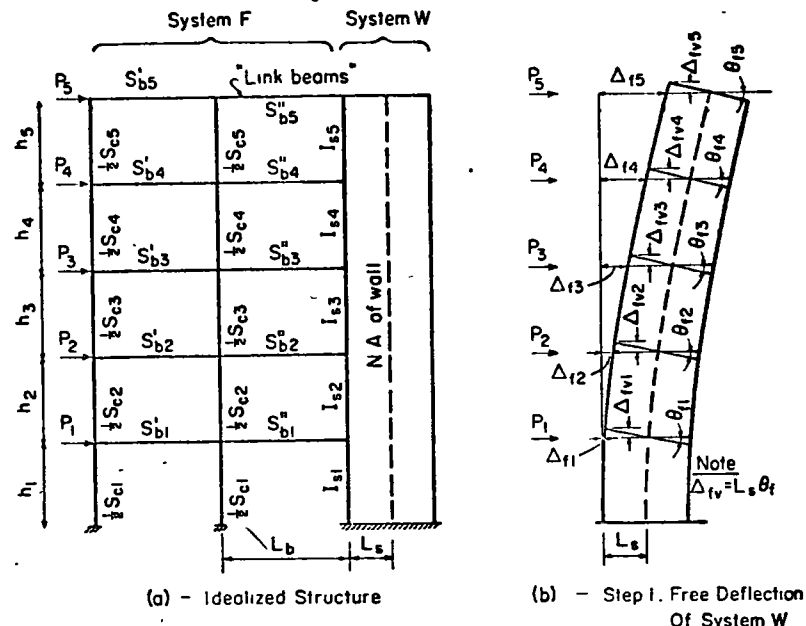


FIG. 3

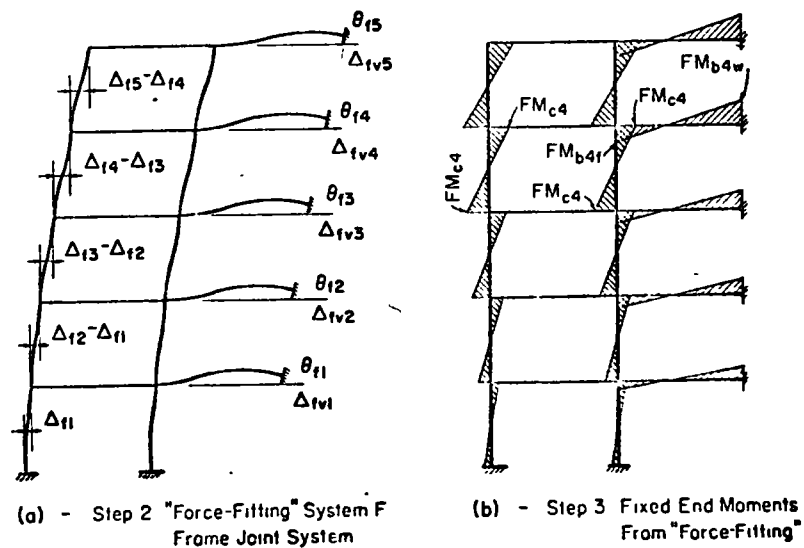


FIG. 4

System "W".—Shear wall or combination of shear walls. This system can have any configuration. Some or all the walls may extend over the entire height of the structure. The moment of inertia of this system at any story equals the sum of the moments of inertia of all the shear walls regardless of their shape and size. Shape and size should be considered in computing an average  $L_s$ , the distance from the neutral axis of System W to its extreme fiber. Coupled shear walls can often be represented in high multistory buildings as a single wall with an equivalent stiffness.<sup>11</sup>

System "F".—All other framing outside of System W. This includes all columns, beams, spandrels, and slabs contributing to the lateral stiffness: Members linking the frames with the shear walls ("link" beams) are also included in System F. The stiffnesses of the columns, beams, and "link" beams ( $S_c$ ,  $S_b'$  and  $S_b''$ ) are simply the sum of the stiffnesses of all such members in the structure. The "link" beam span of System F,  $L_b$ , is an average of the "link" beam spans of the structure when these spans are within the same range of magnitude.

At first glance, this procedure may appear as an oversimplification because it obscures localized differences in stiffness between the various resisting frame elements. However, in the first stage of analysis, average values of  $\theta'$ ,  $\theta''$ , and  $\Delta_v$  will yield acceptable values of the distribution of lateral forces between the two systems. The computed deflection at each story will similarly be quite satisfactory. It should be noted that the two computed quantities, distribution of lateral forces and deflection, serve different purposes. The distribution of lateral forces will inform the designer of the effectiveness of the shear walls in resisting the lateral forces. The designer may then adjust the size or stiffness of the shear walls to obtain a more economical structure. Conversely, the deflected shape is needed in the second stage of the computations, as will be described subsequently.

In most cases, a further, but equally valid, simplification can be made [Fig. 2(c)] by adding the stiffness of the "link" beams to the stiffness of the other flexural members,

$$S_b = S_b' + S_b'' \dots \dots \dots (1)$$

The two systems are then tied together with members that can transmit only lateral force. The quantities  $L_b$  and  $L_s$  are obviously no longer needed. Experience with several structures indicates that values computed by either of the idealized structures shown in Figs. 2(b) and 2(c) are, from a designer's view point, essentially the same. The following derivations treat the general case [Fig. 2(b)]. The solution of the simplified idealized structure [Fig. 2(c)] that was recommended for office practice can be easily obtained from the general case.

The analysis of a system shown in Figs. 2(b) or 2(c) is performed by the iterative solution presented subsequently. At the completion of the iterative solution, the deflections of the combined systems comprising the structure are known. It is then possible to analyze each column line as in isolated resisting system. The resisting elements at any column line may form a rigid frame

or a combination of rigid frame and shear wall. The second stage of analysis may be performed by subjecting these isolated bents to the deflection pattern that was derived for the entire structure from the iterative solution. Fixed end moments imposed on the columns and connecting links by this known set of deflections can be balanced rapidly by a moment distribution solution. In this manner, local effects on moments and shears resulting from localized stiffness variations are fully accounted for.

*First Stage of Analysis: Solution by Iteration.*—The equilibrium of the total structure requires that the following conditions be satisfied:

- a) Deflection in System W and System F must be the same at corresponding levels.
- b) "Link" members connecting System F to System W must undergo the same rotations and vertical translations as those of System W at their points of connection.
- c) Horizontal shear,  $V_w$ , developed in System W plus the horizontal shear,  $V_f$ , developed in System F must be equal to the total external shear,  $V_t$ , at every story.

The foregoing three requirements of compatibility and equilibrium can be achieved by the following steps of analysis:

1. Total computed external loads (wind or seismic) on the idealized structure [Fig. 3(a)] are applied to System W at each floor level. By any numerical method or by direct moment area method (conjugate beam), the slopes and deflections of System W at each floor level are determined [Fig. 3(b)]. The vertical movements of the connecting points with System W are computed by multiplying the slope at each level by the distance from the neutral axis of the wall to the connecting point or

$$\Delta_{fv} = L_s \theta_f \dots \dots \dots (2)$$

It should be pointed out that base rotation can easily be included by increasing the rotation at all stories by the amount of base rotation and increasing horizontal deflection at all stories by the product of base rotation and the distance from the base to each story. The free horizontal deflection, rotation, and vertical deflection at any floor,  $i$ , are denoted as  $\Delta_{fi}$ ,  $\theta_{fi}$ , and  $\Delta_{fvi}$ , respectively. The deflections one floor above and below are  $\Delta_{f(i+1)}$  and  $\Delta_{f(i-1)}$ . Where the proportions of the shear wall warrant it, deflections should also include the contribution to deflection from shear stresses in System W.

2. This is the first cycle of iteration. For quick convergence, a final deflected shape could be assumed or approximated from Figs. 32 through 38. In the absence of a good guess, however, the final deflected shape is assumed to be the same as the free deflected shape of System W, which would mean that, in the first cycle, initial deflection and rotation at the  $i$ th floor would be

$$\Delta_{ii(1)} = \Delta_{fi} \dots \dots \dots (3a)$$

and

<sup>11</sup> Beck, Hubert, "Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 59, August, 1962, pp. 1055-1070.

$$\theta_{ii(1)} = \theta_{fi} \dots \dots \dots (3b)$$

System F is forced to undergo the assumed deflections at each floor [ Fig. 4(a) ]. This also requires that the connecting members at each floor must have the same rotations and vertical translations as System W at their points of connection with System W. However, if there is a deliberate hinge at these points, only the vertical translation must be considered. If the connecting "link" beam is simplified to a bar with both ends hinged,  $\theta_{fi}$  and  $\Delta_{fvi}$  obviously have no effect.

3. Moments induced by "force-fitting" can be determined directly by using moment distribution. The forced-fitted frame shown in Fig. 4(a) has no external forces but only known story deflections and rotations at the connecting points; hence, for uniform columns and beam sections, the fixed-end moments at the beginning of moment distribution [ Fig. 4(b) ] would be for columns at the  $i^{th}$  story

$$F M_{ci} = \left( \frac{6 EI_{ci}}{h_i^2} \right) (\Delta_i - \Delta_{i-1}) \dots \dots \dots (4)$$

at the  $i^{th}$  floor, for "link" beams at their shear wall end

$$F M_{biw} = \left( \frac{4 EI_{bi}}{L_b} \right) \theta_i + \left( \frac{6 EI_{bi}}{L_b^2} \right) \Delta_{vi} \dots \dots \dots (5)$$

and for "link" beams at their frame end

$$F M_{bif} = \left( \frac{2 EI_{bi}}{L_b} \right) \theta_i + \left( \frac{6 EI_{bi}}{L_b^2} \right) \Delta_{vi} \dots \dots \dots (6)$$

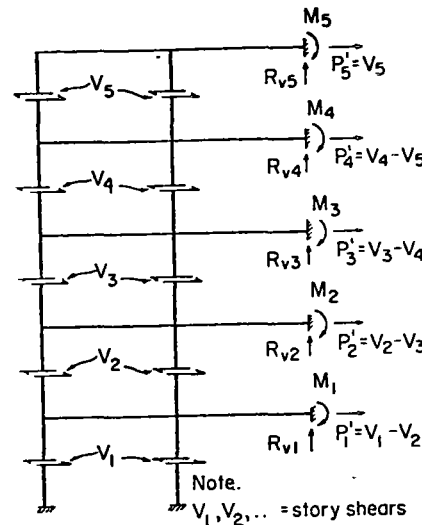
Substituting  $\Delta_{vi} = L_s \theta_i$  in Eqs. 5 and 6, results in

$$F M_{biw} = \left( \frac{2 EI_{bi}}{L_b} \right) \left[ 2 + 3 \left( \frac{L_s}{L_b} \right) \right] \theta_i \dots \dots \dots (7)$$

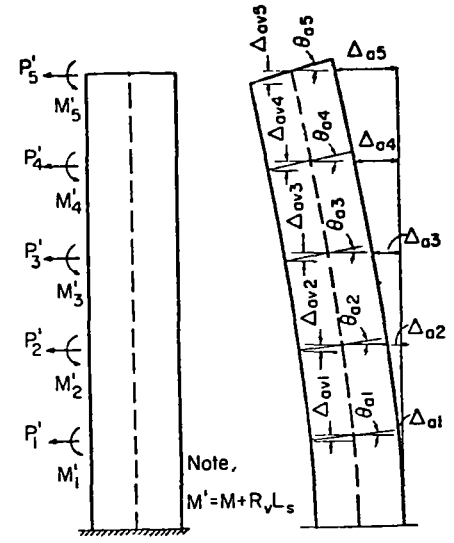
$$F M_{bif} = \left( \frac{2 EI_{bi}}{L_b} \right) \left[ 1 + 3 \left( \frac{L_s}{L_b} \right) \right] \theta_i \dots \dots \dots (8)$$

When a known, fixed sidesway is imposed on a structure, as in this case, the cumbersome sidesway correction to the moment distribution is not needed, and the solution will converge rapidly. A more generalized solution by slope-deflection for frames having variable sections is presented subsequently.

4. After force-fitting System F to System W, the total shears in each story of System F as well as moments and reactions applied on System W by the



(a) - Step 4. Forces & Moments in System F After Moment Distribution



(b) - Step 5 Forces & Moments From System F Applied To System W

FIG. 5

connecting links are computed [ Fig. 5(a) ]. The shears generated by force-fitting can be used directly in the next step. The resulting horizontal forces  $P'$  are shown in Fig. 5 only for illustration purposes. These interaction forces may be either positive or negative at different floors.

5. All shears, forces, and moments generated by force-fitting System F are applied to the isolated free System W [ Fig. 5(b) ]. At each story,  $M$  and  $R_v$  should be replaced by a moment

$$M' = M + R_v L_s \dots \dots \dots (9)$$

Negative deflections and rotations of System W,  $\Delta_{ai}$ , and  $\theta_{ai}$ , respectively, are then calculated. The net deflection with respect to the original unloaded shape (vertical line) of System W would therefore be the algebraic sum of  $\Delta_{fi}$  and  $\Delta_{ai}$ . That is, the deflections and rotations of System W at the  $i^{th}$  floor, at the end of the first cycle, would be expressed as

$$\Delta_{ei(1)} = \Delta_{fi} - \Delta_{ai(1)} \dots \dots \dots (10)$$

and

$$\theta_{ei(1)} = \theta_{fi} - \theta_{ai(1)} \dots \dots \dots (11)$$

or in general, at the end of the  $n^{th}$  cycle,

$$\Delta_{ei(n)} = \Delta_{ii(n)} - \Delta_{ai(n)} \dots \dots \dots (12)$$

and

$$\theta_{ei(n)} = \theta_{ii(n)} - \theta_{ai(n)} \dots \dots \dots (13)$$

This is the end of one cycle of iteration. For the stable condition the assumed initial deflections at any floor "i" at the beginning of the  $n^{th}$  cycle,  $\Delta_{ii(n)}$ , must be the same as the end deflections,  $\Delta_{ei(n)}$ , at the completion of the  $n^{th}$  cycle. However, in many cases in the first cycle,  $\Delta_{ei}$  is negative, indicating that the iteration is divergent. The generalization of this method of solution therefore depends on the use of a proper "forced-convergence-correction" to be applied to the initial deformations of the  $n^{th}$  cycle,  $\Delta_{ii(n)}$  and  $\theta_{ii(n)}$ , to obtain the initial trial deformations of the  $(n + 1)^{th}$  cycle,  $\Delta_{ii(n+1)}$  and  $\theta_{ii(n+1)}$ .

6. The convergence correction is derived from the hypothesis that in each cycle the movement of System W at each floor with respect to its free deflected shape is linearly proportional to the movement of System F with respect to the vertical line. Therefore, it can be shown that if at the  $n^{th}$  cycle the initial trial values at the  $i^{th}$  floor were  $\Delta_{ii(n)}$  and  $\theta_{ii(n)}$  and the end values were  $\Delta_{ei(n)}$  and  $\theta_{ei(n)}$ , the initial trial values at the  $(n + 1)^{th}$  cycle should be

$$\Delta_{ii(n+1)} = \Delta_{ii(n)} + \frac{\Delta_{ei(n)} - \Delta_{ii(n)}}{1 + \left[ \frac{(\Delta_{fi} - \Delta_{ei(n)})}{\Delta_{ii(n)}} \right]} \dots \dots \dots (14)$$

and

$$\theta_{ii(n+1)} = \theta_{ii(n)} + \frac{\theta_{ei(n)} - \theta_{ii(n)}}{1 + \left[ \frac{(\theta_{fi} - \theta_{ei(n)})}{\theta_{ii(n)}} \right]} \dots \dots \dots (15)$$

7. Values of  $\Delta$  and  $\theta$  obtained by Eqs. 14 and 15 are used as initial values for the next cycle, and the procedure is repeated beginning with the second step outlined previously. (In Fig. 4(a),  $\Delta_f$ ,  $\theta_f$ , and  $\Delta_{fv}$  will be replaced by  $\Delta_i$ ,  $\theta_i$ , and  $\Delta_{vi}$ ).

8. At the end of each cycle,  $\Delta_{ei}$  and  $\Delta_{ii}$  should be checked until the convergence is within a specific tolerance, for example, 5% to 10%, based on the designer's judgment. The question of convergence will be examined subsequently.

*Alternate Solution- Modified Slope Deflection Method.*—An iterative method similar to the classical Goldberg Method<sup>12,13</sup> for wind analysis of frames

<sup>12</sup> Goldberg, John E., "Wind Stresses by Slope Deflection and Converging Approximations," *Transactions*, ASCE, Vol. 99, 1934, p. 962.

<sup>13</sup> Goldberg, John E., "Lateral Load Analysis of Two-Column Bents," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 84, No. ST3, Proc. Paper 1638, May, 1958.

may be used to advantage in place of steps 2 and 3 outlined previously. Fig. 6 represents the beginning of any iteration cycle for a frame simplified to a two-column bent connected to a shear wall by beams.

At any joint (i, 1), rotation,  $\theta_{i,1}$ , is dependent on the known quantities  $\psi_i$  and  $\psi_{i+1}$  (Eqs. 44 and 45) as well as the unknown quantities  $\theta_{i+1,1}$ ,  $\theta_{i-1,1}$  and  $\theta_{i,2}$ . Similarly,  $\theta_{i,2}$  is dependent on known values of  $\psi_i$ ,  $\psi_{i+1}$ ,  $\theta_{i,3}$ , and the unknowns,  $\theta_{i+1,2}$ ,  $\theta_{i-1,2}$ , and  $\theta_{i,1}$ . The usual relaxation procedure can be used to obtain a solution for these rotations. Experience with different first trial values for  $\theta$  indicates that the fastest convergence in the computation will occur if the following sequence of operations is used:

1. Rotations at all column joints are assumed equal to zero.
2. Computation of  $\theta$  of joints on a column adjacent to the shear wall for floors 1,3,5,7,9, etc., using Eq. 49.

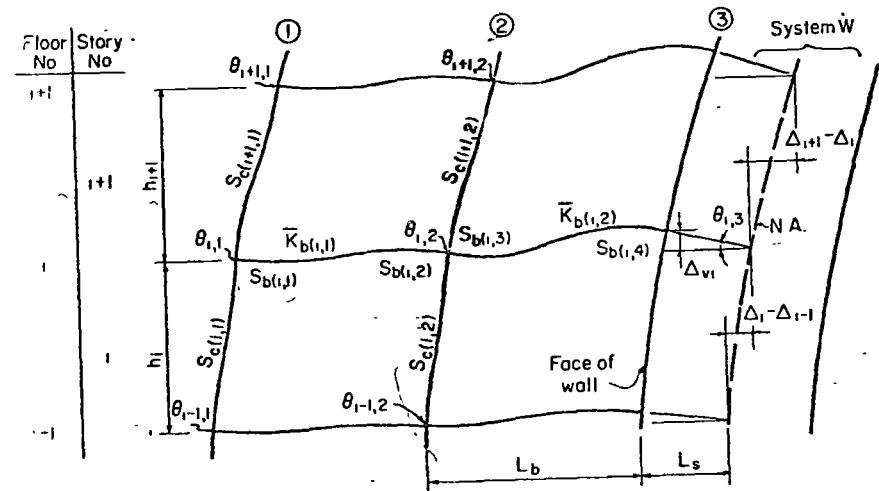


FIG. 6.—SLOPE DEFLECTION COEFFICIENTS

3. Computation of  $\theta$  of joints on column adjacent to the shear wall for floors 2,4,6,8,10, etc., using Eq. 49.
4. Computation of  $\theta$  of joints on the exterior column for floors 1, 3, 5, 7, 9, etc., using Eq. 47.
5. Computation of  $\theta$  of joints on the same column for floors 2, 4, 6, 8, 10, etc., using Eq. 47

If more than two columns exist in the bent, the procedure is followed column by column moving away from the wall. When all columns are completed, Steps 2 through 5 are repeated until successive computed values of  $\theta$  at each joint converge. Convergence within an error of 1% will usually occur in three cycles of iteration. After the rotations of joints and moments are computed, the

story shear is obtained from the sum of moments. Moments and shears in the "link" must also be computed. If the simplified two-column structure of Fig. 2(c) is used, the foregoing sequence of relaxation of joints offers no advantage, but the symmetry could be considered.

*Examination of Convergence.*—The forced-convergence of the iterative solution presented herein varies from the general concept of iteration in that it

TABLE 1.—CONVERGENCE OF STRUCTURE WITH STIFF WALL,  
 $S_s/S_c = 30$  AND  $S_c/S_b = 5$

Cycle	$\Delta_i$	$\Delta_e$	$\frac{1}{2}(\Delta_e + \Delta_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)
1	4.792 <sup>a</sup>	-8.48	-6.64
2	1.271	1.403	1.337
3	1.307	1.392	1.350
4	1.331	1.378	1.355
5	1.344	1.368	1.356
10	1.357	1.357	1.357

<sup>a</sup> Free deflection of wall,  $\Delta_f$

TABLE 2.—CONVERGENCE OF STRUCTURE WITH SLENDER WALL,  
 $S_s/S_c = 5$  AND  $S_c/S_b = 1$

Cycle	$\Delta_i$	$\Delta_e$	$\frac{1}{2}(\Delta_e + \Delta_i)$	Eq.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	9.585 <sup>a</sup>	0.450	-0.230	--
2	0.196	0.651	0.424	--
3	0.206	0.677	0.442	--
4	0.216	0.672	0.444	--
5	0.227	0.633	0.430	0.327
6	0.237	0.567	0.402	0.286
7	0.245	0.491	0.368	0.268
8	0.252	0.420	0.336	0.267
9	0.256	0.363	0.310	0.263
10	0.259	0.324	0.292	0.263
11	0.261	0.298	0.280	0.263
12	0.262	0.282	0.272	0.263
20	0.263	0.263	0.263	--

<sup>a</sup> Free deflection of wall,  $\Delta_f$

does not use values from successive cycles to obtain a solution. Instead, the initial and final rotations and deflections at the end of any cycle are used in conjunction with the free deflections of the wall in order to obtain the initial deflections for the succeeding cycle by Eqs. 14 and 15. In this way, convergence is tied directly to the physical reality that the deflections of the entire

structure must lie between zero and the free deflection of the shear wall. This method will converge for any combination of structural stiffnesses although at different rates.

Examples of the variation in the rate of convergence of deflections at the top story are described in Tables 1 and 2. In Table 1, the solution of a structure with stiff shear walls is seen to converge within three cycles and the average values of initial and final deflection is within 1% of the correct value. In the case of a structure with slender shear walls, convergence may be rather slow. The average value of initial and final deflections is within 5% of the true deflection at the end of the twelfth cycle. Such a slow rate of convergence may be undesirable in a practical design application unless a computer is available.

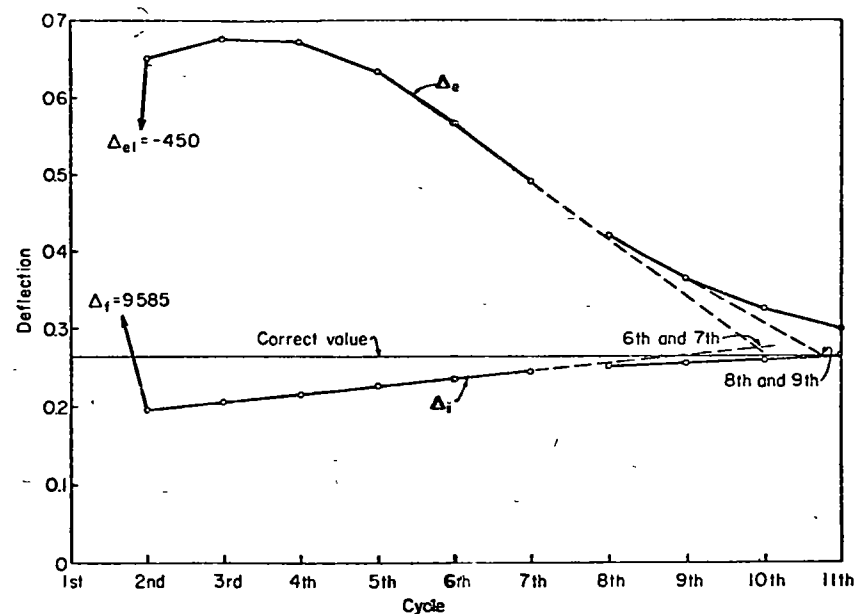


FIG. 7

A slow rate of convergence indicates that the wall is not effective in resisting the applied lateral loads. The designer should therefore consider the possibility of stiffening the walls to improve the efficiency of the structure, or treat the shear wall as a column and to solve the system as a rigid frame by the usual methods.<sup>12</sup> In slowly converging systems, it is still possible to obtain reasonable results by extrapolating the top-story initial and final deflections of each cycle as shown in Fig. 7. If lines joining initial and final deflections of successive cycles are extended, their intersection lies close to the correct final value, as indicated by the intersections of the dashed lines in Fig. 7. The estimate of final deflection,  $\Delta^*$ , obtained by the intersection of these lines can be expressed as



$$\Delta' = \Delta_{in} + \frac{(\Delta_{in} - \Delta_{im})(\Delta_{en} - \Delta_{in})}{(\Delta_{in} - \Delta_{im}) + (\Delta_{em} - \Delta_{en})} \dots\dots (16)$$

in which the subscripts m and n denote successive cycles. The results for a specific case are shown in Col. 5 of Table 2. Once a close estimate of the final value of deflection at the top floor is obtained, the deflected shape of the structure can be approximated by means of Figs. 32 through 38. This deflected shape can then be used in the second stage of analysis, which is described subsequently.

*Second Stage of Analysis.*—After convergence of the iteration solution has been achieved, the final deflected shape of the structure is used to distribute moments and shears to every member in each bent of the structure.

At a column line that contains no shear walls, a set of fixed end column moments obtained from the difference in story deflection can be apportioned to all the members by moment distribution. No sideways correction is needed because the bent is in its final deflected shape.

If a shear wall is contained in a bent, it can be treated separately from the frame segment. With a known deflected shape and EI, the moment at any floor, i, can be obtained from

$$M_i = \left( \frac{EI_{si}}{h_i} \right) (\Delta_{i+1} - 2\Delta_i + \Delta_{i-1}) \dots\dots (17)$$

in which  $M_i$  denotes the moment at floor, i;  $I_{si}$  refers to the moment of inertia of wall at floor, i;  $h_i$  represents the story height;  $\Delta_i$  is the deflection at floor, i;  $\Delta_{i+1}$  describes the deflection at floor, i + 1; and  $\Delta_{i-1}$  is the deflection at floor, i - 1.

If the story height above or below floor, i, is other than  $h_i$ , it is necessary to obtain the deflection at a distance equal to  $h_i$ . Story shears are then easily computed. The frame segments of such a bent can be analyzed by imposing the deflected shape in the manner described in Figs. 4(a) and 4(b). Obviously, the number of columns need not be the same as shown in Figs. 4. Furthermore, the actual values of  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $L_b$ , and  $L_s$  should be used. This procedure would also apply to colinear shear walls coupled with flexural members that in turn are supported by one or more intermediate columns. For coupled shear walls with no intermediate columns, the moments in the connecting beams at each floor are computed directly from the rotations and vertical movements at the two ends.

In case there are doubts as to the appropriateness of the assumptions used in idealizing the structure into both Systems F and W, it is now possible to perform a final check. The sum of all the column shears at any story can be compared with the story shear of System F obtained from the iterative solution. If these two quantities are equal, the assumptions used to obtain column and beam stiffnesses for System F were valid. Similarly, the sum of the shear wall shears should equal the shear computed for System W. Most important of all, the sum of the column and wall shears should equal the applied story shear. Minor discrepancies can be readily adjusted by proportioning. If the discrepancies are considerable, the designer's judgment must serve as a guide

in readjusting the relative stiffnesses of Systems F and W, based on the results. It will then be necessary to repeat the iterative solution. The deflected shape of the building should serve as an excellent starting point for the new iterative solution.

Except for buildings with extremely irregular stiffness distribution, the results of the first solution will be satisfactory. This in itself is proof that no unreasonable assumptions have been made and that the conditions of equilibrium listed previously have been satisfied.

FURTHER DESIGN CONDITIONS

*Frame Torsion.*—At the completion of the second stage of analysis, the total shear and deflection at every column line on every story will be known. Consequently, the stiffness at each column line can be calculated directly. These stiffnesses can be used to compute the torsional stiffness of the structure, the shear center or center of resistance and all the parameters needed in the investigation of frame torsion that may result from eccentric lateral loads.

*Base Rotation.*—The question of base rotation was touched on briefly in the previous analysis. The iterative solution can be used directly if the stiffness of a hypothetical substructure at the base of the building is adjusted to reflect foundation conditions. The columns of System F of the ten-story building shown in Fig. 8, for example, can be assumed to be connected at their base with a hypothetical member with stiffness  $S'_b$  computed in accordance with the moment-rotation relationship of the subsoil on which the footings rest.

An equivalent moment of inertia  $I'_s$  at the base of the hypothetical segment  $h'$  of the shear wall, shown shaded below Level 0, can also be selected to represent the load deformation characteristics of the subsoil or the stiffness of the supporting substructure. For example, assuming a wall footing with a moment of inertia,  $I_f$ , subjected to an overturning moment,  $M_b$ ,

$$\text{maximum stress in soil} = \frac{M_b c}{I_f} \dots\dots (18)$$

and

$$\text{maximum strain in soil} = \frac{M_b c}{I_f k} \dots\dots (19)$$

in which k is the soil modulus in pounds per square inch per inch of deformation. These relationships can be used to compute the base rotation,  $\theta_b$ , as the ratio of the maximum strain in the soil and distance.,

$$\theta_b = \frac{M_b}{I_f k} \dots\dots (20)$$

and



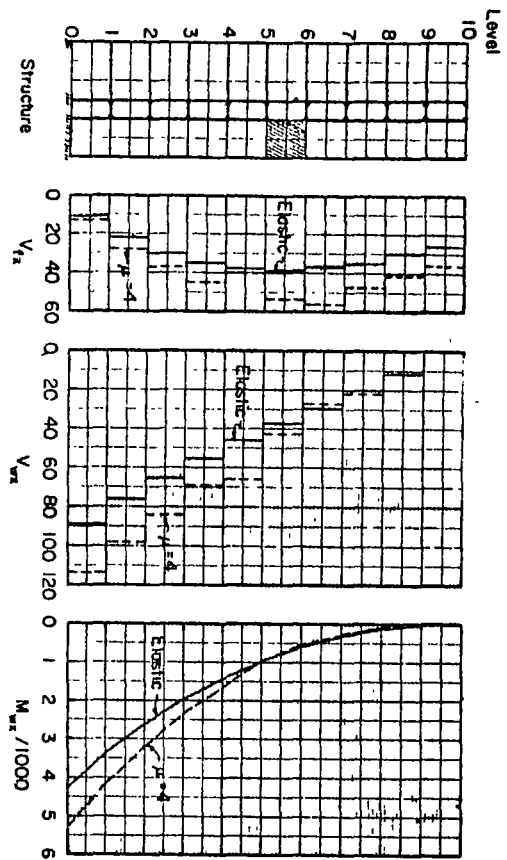


FIG. 9

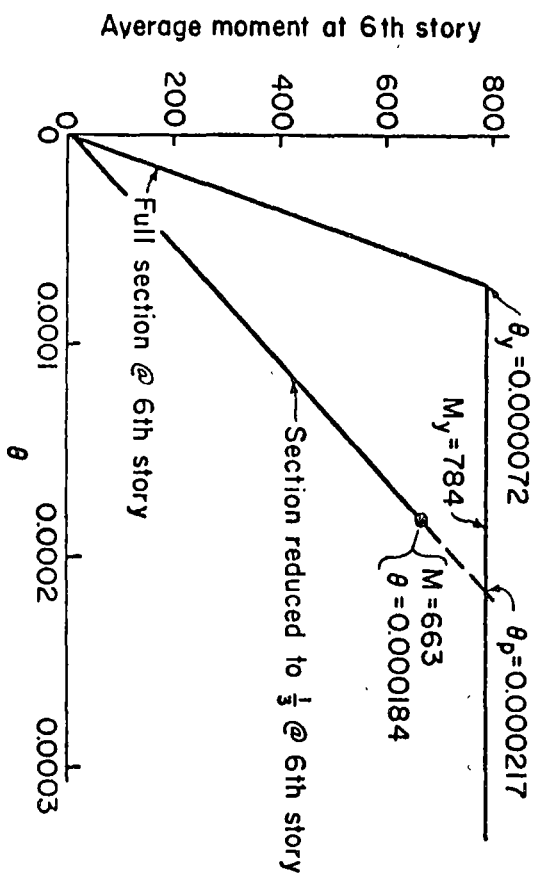


FIG. 10

TABLE 3

FLOOR	STORY	Total Story Shear $V_{fx}$	Basic Structure					Modified Shear Wall—Sixth Story I Reduced to (1/3)					Shears, Moments, etc., caused by plastic rotation of sixth story			
			$V_{fx}$	$V_{wx}$	$M_{wx}$	$\theta_{wx}$	$\Delta_x$	$V_{fx}$	$V_{wx}$	$M_{wx}$	$\theta_{wx}$	$\Delta_x$	$\frac{V_{fx}}{V_{96\% \cdot 0}} \frac{(1-\mu)}{1-\mu}$	$\frac{M_{wx}}{M_{96\% \cdot 0}} \frac{(1-\mu)}{1-\mu}$	$\frac{M'_{wx}}{M_{96\% \cdot 0}} \frac{(1-\mu)}{1-\mu}$	$\frac{V'_{wx}}{V_{96\% \cdot 0}} \frac{(1-\mu)}{1-\mu}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14) <sup>a</sup>	(15) <sup>a</sup>	(16) <sup>a</sup>	(17) <sup>a</sup>
10	10	26.4	26.2	0.2	0	0.952	0.827	27.9	-1.6	0	1.014	0.856	3.36	-0.98		0.0915
9	9	41.1	29.6	11.5	2	0.952	0.712	31.6	9.6	-15	1.015	0.734	3.85	-0.14	-9.7	0.0770
8	8	54.2	34.5	19.7	117	0.943	0.598	36.6	17.6	80	1.011	0.612	4.34	0.55	-10.6	0.0624
7	7	65.7	37.2	28.5	314	0.917	0.486	42.2	23.6	256	0.990	0.492	6.33	-0.34	-5.5	0.0470
6	6	75.5	38.5	37.0	599 (784) 969	0.869 (0.072) 0.797	0.379	41.1	34.4	491 (663) 835	0.951 (0.184) 0.767	0.375	5.00	1.83	-8.9 (0) +8.9	0.0322
5	5	83.7	38.0	45.7	1426	0.697	0.189	33.3	50.4	1340	0.676	0.184	0.69	6.80	78.7	0.0143
4	4	90.2	35.4	54.8	1973	0.570	0.112	35.3	54.9	1888	0.655	0.110	3.17	4.95	127.0	0.0089
3	3	95.1	30.2	64.9	2622	0.412	0.0525	29.4	65.7	2546	0.403	0.0515	2.26	6.31	196.0	0.0042
2	2	98.4	22.3	76.1	3364	0.223	0.0139	21.9	76.5	3310	0.219	0.0136	1.76	7.19	266.0	0.0012
1	1	100.0	19.6	89.6	4276	0	0	10.5	89.5	4206	0	0	0.80	8.11	347.0	0.0

<sup>a</sup> The quantities  $V'_{fx}$ ,  $V'_{wx}$ ,  $M'_{wx}$  and  $\Delta'_x$  are computed by multiplying values in Cols. (9), (10), (11) and (13) by the ratio 784/883 and then subtracting Cols. (4), (5), (6) and (8).

$$\frac{M_b}{\theta_b} = I_f k \dots \dots \dots (21)$$

The rotation of the hypothetical shear wall at Level 0 can be expressed as

$$\frac{M_w}{\theta_w} = \frac{4 E I'_s}{h'} \dots \dots \dots (22)$$

Equating  $M_b/\theta_b$  and  $M_w/\theta_w$ , the equivalent moment of inertia of the hypothetical shear wall is

$$I'_s = \left(\frac{k}{4 E}\right) I_f h' \dots \dots \dots (23)$$

Translation of the wall at Level 0 is prevented in every step of the computations. Thus, only the appropriate rotation at the base of the wall will be permitted. The design loads can be applied to this system, and the iterative analysis should give the desired results. A similar equivalent structure can be used in the second stage of analysis to apportion moments and shears to each member in a structure.

*Plastic Rotation of the Wall at Any Story.*—Multistory buildings braced with shear walls have, in general, performed quite satisfactorily when subjected to earthquakes.<sup>14,15</sup> Observations of structures after the Chilean earthquake of May, 1960 (a series of shocks that "was more than the equivalent of all the famous destructive earthquakes in California during the past sixty years"<sup>16</sup>) serve as further substantiation of the effectiveness of properly designed and constructed shear walls in resisting earthquake forces.<sup>17</sup> Furthermore, shear wall construction has the advantage of reducing nonstructural damage appreciably.<sup>14</sup>

The effects on a structure which result from the yielding of a shear wall have never been investigated to any great extent. The analytical procedure presented herein can be used for this purpose. Shear walls in multistory buildings behave essentially as cantilever beams. Design and detailing requirements for flexural members presented elsewhere<sup>9,10</sup> are equally applicable to walls. The results are available of investigations<sup>18</sup> that have developed data which describe the behavior of dowels at joints. The reinforcement that

<sup>14</sup> Steinbrugge, Karl V., and Bush, Vincent R., "Earthquake Experience in North America, 1950-1959," *Proceedings, World Conf. on Earthquake Engrg., Japan, Vol. 1, 1960*, pp. 381-396.

<sup>15</sup> Muto, Kiyoshi, and Osawa, Yutaka, discussion of "Elastic Analysis of Shear Walls in Tall Buildings," by Emilio Rosenblueth and Ignacio Holtz, *Journal of the American Concrete Institute, Part 2, Vol. 32, No. 6, December, 1960*, pp. 1559-1562.

<sup>16</sup> Housner, George W., "An Engineering Report on the Chilean Earthquakes of May 1960: Preface," *Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 53, No. 2, February, 1963*, pp. 219-223.

<sup>17</sup> Steinbrugge, Karl V., and Flores, A., Rodrigo, "The Chilean Earthquakes of May 1960 A Structural Engineering Viewpoint," *Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 53, No. 2, February, 1963*, pp. 225-307.

<sup>18</sup> Hanson, Norman W., "Precast-Prestressed Concrete Bridges 2: Horizontal Shear Connections," *Journal, Research and Development Labs., Portland Cement Assn., Chicago, Ill., Vol. 2, No. 2, May, 1960*, pp. 38-58.

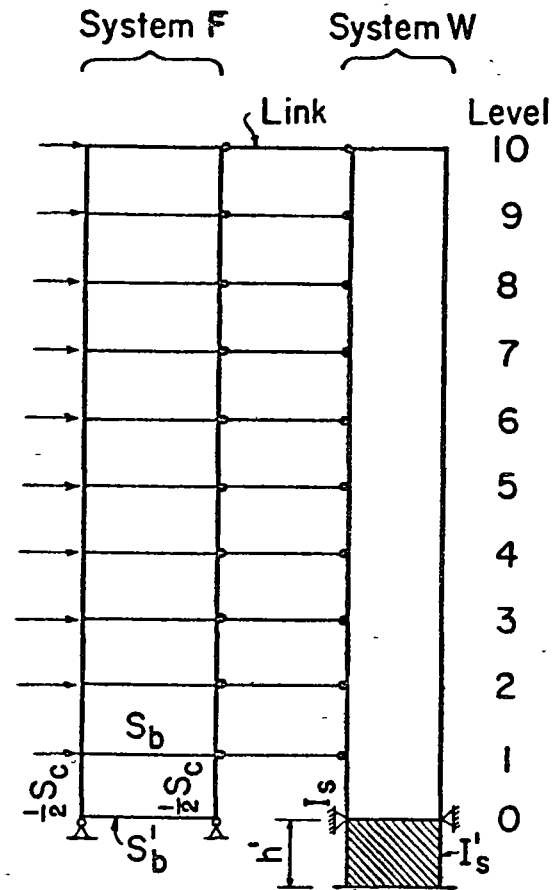


FIG. 8.—EQUIVALENT SYSTEM FOR BASE ROTATION ANALYSIS

is required to transfer lateral forces through construction joints can be deduced from the investigations. Thus, the strength, behavior, and ductility of a shear wall can be estimated from previously established principles. From a designer's view, the question of plastic rotation is academic because it need not be investigated in the design of structures. It is presented herein only as a special case of the general subject of the paper.

The effect of a plastic hinge at any level can be simulated by a device similar to that used to investigate base rotation. The description of the procedure will best be accomplished by referring to a specific example such as the ten-story structure shown in Fig. 9. The structure is first analyzed to obtain the elastic moments, shears and distortions for an assumed loading condition (see Table 3) just below that required to produce yielding in the wall at some selected level, say the sixth story shown shaded in Fig. 9.

$$I_{fsi} = \sum A_{ci} r^2 \dots\dots\dots (24)$$

in which  $A_{ci}$  is the area of each individual column and  $r$  denotes the distance of the column area from the neutral axis of all the column areas in the story. System F can then be separated into two parts: System F1, representing the shear stiffness of the frame; and System F2, representing the flexural stiffness of the frame and defined by  $I_{fsi}$  at each story. Both these systems must be force-fitted to the deflected shape of the shear wall. In Step 3A, System F1 is force-fitted as described previously and the story shears, noted as  $V_{fi1}$ , are computed. In Step 3B, System F2 is force-fitted to the same deflected shape and the story shears, noted as  $V_{fi2}$ , can be computed by first calculating the moments with Eq. 17 or by direct moment distribution. The story shears of Systems F1 and F2 can then be combined using the principle of flexibility by

$$V_1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{V_{fi1}}\right) + \left(\frac{1}{V_{fi2}}\right)} \dots\dots\dots (25)$$

in which  $V_1$  is the story shear to be applied to the wall in Step 4. The remaining steps of the iterative procedure are not changed. The foregoing procedure is based on certain assumptions that are commonly accepted but do not fully represent the interrelationship between shear deflection and cantilever deflection of the frame. Specifically, an iterative solution based on Systems F1 and F2 represents the upper boundary of flexibility, while a solution based on System F defines the lowest boundary of flexibility.

As may be seen in Figs. 17 through 30, the story shears in the frame are almost constant throughout the height of the structure for most practical cases. Therefore, the effect of axial deformation of the columns can be considered without separating System F into two parts. If the shear deflection,  $\Delta_{f1}$ , and flexural deflection,  $\Delta_{f2}$ , at the top of the frame are calculated separately for a unit load and

$$\lambda_1 = \frac{1}{\Delta_{f1}} \dots\dots\dots (26)$$

and

$$\lambda_2 = \frac{1}{\Delta_{f2}} \dots\dots\dots (27)$$

the combined stiffness is

$$\lambda = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)} = \lambda_1 \frac{1}{(1 + K')} \dots\dots\dots (28)$$

in which  $K' = \lambda_1/\lambda_2$ . If the moment of inertia of the shear wall is increased by  $(1 + K')$  the iterative solution will result in correct shear distributions between frame and shear wall. However, to determine true final deflection, the final shears should be applied to the original shear wall without the  $(1 + K')$  modification.

*Shear Walls Terminated at Intermediate Height.*—In many cases, shear walls in a building are terminated at some level below the roof. The analysis may be made separately on the two structural parts above and below the termination level. The structural section above this level should be analyzed as a bent assuming fixity at the column bases. The structure below this level is then analyzed by the iterative method. The shear from the part above the termination level should, of course, be included as a concentrated load on the structure below.

After the analysis, the two separate structural sections are joined together by distributing the "base moments" of the upper structure to the upper story columns of the lower structure. This final distribution of moments will not, in most cases, affect the load distribution between the wall and the frame except at the story below the termination level. The moments in frame members at and immediately above and below the termination level may change considerably; hence, these local effects should be included in the design.

SLAB-COLUMN SYSTEMS

In analyzing flat plate buildings for lateral forces, many designers intuitively assume that only a part of the slab width will act as a beam element with the columns to resist these forces by frame action. A study was undertaken to obtain a closer approximation of the equivalent effective width that can be used for this purpose.

The study was performed on an idealized slab-column element shown in Fig. 11, a part of a flat slab floor bound by lines of inflection perpendicular to the direction of the moment and by the centerlines of the bays parallel to the direction of the moment. The idealized element was assumed simply supported along the lines of inflection. The other two parallel sides were assumed unsupported with a distributed variable moment sufficient to produce zero slope at these boundaries.

For the first computations, the idealized slab-column element was subdivided into two sets of six intersecting beams with a depth equal to the thickness of the plate,  $t$ , and widths equal to  $L/6$  and  $l/6$ , as shown in Fig. 12(a). The moments of inertia of the beams are  $(bt^3/12)$ , in which  $b$  is  $L/6$  or  $l/6$ , and their torsional stiffness was calculated by the expression  $(bt^3/3)$  and a modulus of rigidity  $G = 0.4 E$ . Simultaneous equations for deflection and slope at all points of intersection due to a centrally applied moment,  $M_0$ , were derived. The equations took into account the flexural as well as torsional stiffness of the intersecting beams. The resulting rotation,  $\theta_0$ , at the point of application of  $M_0$  (Fig. 11) was then compared with the rotation of a beam with the same moment of inertia as the plate,  $I = lt^3/12$ . In the case of a beam with a moment applied at the center (Fig. 13), the moment rotation relationship is

A second analysis is then made using a reduced moment of inertia at the desired story. In this case, the moment of inertia was reduced to one-third. The results of the two analyses are shown in Table 3. Because a finite stiffness was assumed at the sixth story in the second analysis, moments at the fifth and sixth floors of 835 and 491 will result, with corresponding slopes of 0.000767 and 0.000951. The average moment of 663 and the total angle change in the story of 0.000184 are indicated in parentheses in Table 3. Similarly, the assumed average yield moment  $M_y = 784$  and the total angle change at the time of formation of the plastic hinge  $\theta_y = 0.000072$  for the first analysis are also shown.

In order to produce a zero average moment in the sixth story, all results of the second analysis are multiplied by the ratio  $784/663 = 1.182$ , and the results of the first analysis are subtracted from the product. A graphical representation of this procedure is shown in Fig. 10, in which the moment- $\theta$  curve for the full section for a total rotation  $\theta_p = 0.000217$  is simulated by the elastic moment- $\theta$  curve for the reduced section. Applying this procedure the shears in the top story in the frame from the first and second analysis are 26.2 and 27.9, thus,

$$V_{fx}^* = 1.182(27.9) - 26.2 = 33.0 - 26.2 = 6.8$$

At the sixth story, the angle change in the shear wall is

$$\theta_p = 1.182(0.000184) - 0.000072 = 0.000217$$

It should be pointed out that because the frame is still elastic, an additional load of 0.182 times the yield load is required to produce an angle change,  $\theta_p$ , in the wall at the sixth story after the plastic hinge is formed. The effects on other parts of the structure from plastic yielding in the wall can now be investigated by introducing a factor,  $\mu$ , to denote total angle change in the wall as a multiple of the angle change at the beginning of yield. In other words,  $\mu$  is an indicator of a specified amount of angle change in the plastic range. The factor

$$\frac{\theta_y(\mu - 1)}{\theta_p - \theta_y} = \frac{0.000072(\mu - 1)}{0.000217 - 0.000072} = 0.496(\mu - 1)$$

is used to multiply all values, such as  $V_{fx}^*$ , obtained previously, to find the additional shears, moments, etc., for a total angle change of  $\mu\theta_y$ . These products are listed in Table 3. The result for the top story of the frame is

$$(V_{fx}^*) 0.496(\mu - 1) = 6.8(0.496)(\mu - 1) = 3.36(\mu - 1)$$

It should be noted that for each increment of  $\theta_y$ , an additional load of  $0.496(0.182) = 0.09$ , or 9%, is required to rotate the plastic hinge. The final values of shear and moment in the structure are obtained by adding the values arising from the added load needed to rotate the plastic hinge to the values of the first solution. Assuming  $\mu = 4$ , the shear in the top story of the frame is

$$26.2 + 3.36(4 - 1) = 26.2 + 10.1 = 36.3$$

Shears and moments in the component parts of the structure for conditions at yield (solid lines) and conditions after plastic rotation in the wall at the sixth story (dash lines) for  $\mu = 4$  are shown in Fig. 9. At first glance, it may appear that a large increase in the values has occurred. However, this angle change in the hinge required an increase in load of  $(\mu - 1) 9\%$ , or a total of 27% above the load required to produce yielding at the 6th floor. If the results from the first analysis, represented by the solid lines, are increased by 27%, they would coincide with the dashed lines except for wall shear in the fifth story, which increased 47%, and the frame shears in all the stories above the sixth floor. The maximum increase in shear in the frame occurs at the seventh story, 51%, while the increase in the sixth, eighth, ninth, and tenth stories is approximately 30%.

The foregoing presentation is, of course, valid for static loads but would represent the effects of dynamic conditions if the specified envelopes of maximum shear and maximum overturning moment correspond to each other. The moment in the wall is the cantilever moment based on an envelope of maximum shears rather than the overturning moment. The frame is assumed to remain elastic throughout, despite the additional moments resulting from shear redistribution in the upper stories. Only a dynamic analysis can describe the entire picture. Nevertheless, the static analysis may be of some value. It shows that if shear walls are reinforced adequately to assure that their ultimate strength is governed by flexure rather than shear, the redistribution of forces caused by ductile yielding in the wall is not likely to produce large stress concentrations in localized parts of the frame.

*Secondary Deflections.*—The iterative method presented herein can be extended to include the effects of the shear deformation of the wall and the axial deformation of the columns.

A small number of studies were made to assess the influence of shear deformation of the walls. Over the major part of the structure, flexural deflections predominate, and shear deflections produce no discernible difference in the results. In the lowest two stories, the shear apportioned to the frame showed an increase of approximately 10% when shear deformation of the wall was included in the first and fifth steps of the iterative solution. The results can be rationalized if the sum of shear and flexural deflection of a free cantilever is compared with its flexural deflection at various points. From such a comparison, it will be evident that the differences are significant only near the fixed support.

In certain extreme cases, such as slender two-column frames or structures with unusual proportions,<sup>19</sup> axial deformations of columns can have a pronounced influence on deflections and stresses in a frame. In multicolumn frames it is negligible. The material that follows, therefore, is presented mainly for the sake of completeness.

In order to include axial deformation of the columns, it is necessary to subdivide Step 3 of the iterative procedure into two parts, A and B. In other words, the shear deflection of the frame will be treated separately from its cantilever deflection. The moment of inertia of the areas of columns at any story,  $i$ , is

<sup>19</sup> Bandel, HANNSKAP, Discussion of Journal ACI, Vol. 32, No. 6, Part 2, December, 1960, pp. 1559-1562.

$$\left(\frac{M_o}{\theta_o}\right) = 12\left(\frac{EI}{L}\right) = \left(\frac{EIt^3}{L}\right) \dots\dots\dots (29)$$

For the plate a similar expression was obtained

$$\left(\frac{M_o}{\theta_o}\right) = K\left(\frac{EI}{L}\right) = \left(\frac{K}{12}\right)\left(\frac{EIt^3}{L}\right) \dots\dots\dots (30)$$

in which K varied depending on the width to span ratio l/L, as shown in Table 4. The last line in Table 4, K/12, if multiplied by the width l, represents the equivalent width, l<sub>e</sub>, that could be used as the beam element for frame computations.

Although it would have been desirable to check these results with a solution on a mesh of beams finer than 6 by 6, it was not possible because the resulting number of simultaneous equations could not be accommodated on the computers that were available to the writers. For this reason, an alternate approach was selected. Values such as those indicated in Table 4 were obtained for coarser meshes of intersecting beams, 4 by 4 and 2 by 2 shown in Figs. 12(b) and 12(c), and the results extrapolated by means of a method proposed by L. F. Richardson<sup>20</sup> and applied by others previously to various problems.<sup>21,22,23</sup> The extrapolated results will be considered subsequently.

The variable investigated by the extrapolated computations was the width-to-span ratio, l/L, and its effects on the equivalent width of plate. Another important variable is the size of the column as compared with the span. This variable could have been investigated by the same procedure of extrapolation of results but it was decided to use a small model instead. The model investigation was intended both as a check of the analytical values and as a means of deriving values relating the ratio of column size to span d/L, with the width to span ratio, l/L, and stiffness.

The model (Fig. 14) consisted of a rectangular plate simply supported on lines perpendicular to the applied moment (inflection points) and free along the two sides parallel to the applied moment. It is evident the true boundary conditions were not reproduced on the edges parallel to the applied moment because the distributed variable moments along these boundaries needed to produce zero slope could not be applied. The distance between the simple supports, L, was varied to obtain values for different l/L ratios. A known moment was applied at the center of the plate by applying known loads, P<sub>1</sub> and P<sub>2</sub>. Three sizes of washers simulating a column were used in different tests to stiffen the plate at the points of application of the moment. The rotation at

20 Richardson, L. F., "The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam." *Philosophical Transactions*, Royal Soc. of London, 210A, 1910.

21 Parme, Alfred, "Solution of Difficult Structural Problems by Finite Differences," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 47, November, 1950, pp. 237-256

22 Salvadori, Mario G., "Numerical Computation of Buckling Loads by Finite Differences," *Transactions*, ASCE, Vol. 116, 1951, pp. 590-629.

23 Badir, Mounir, "Bending of Rectangular Plates," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 87, No. ST6, Proc. Paper 2908, August, 1961, pp. 105-134.

TABLE 5.—COMPARISON OF COMPUTED AND MODEL VALUES

l/L	Values Extrapolated from Computations	Values from Model	Ratio $\frac{\text{Model}}{\text{Extrap.}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
0.5	0.60	0.51	0.85
0.75	0.47	0.41	0.87
1.0	0.38	0.32	0.84
1.25	0.31	0.27	0.87
1.33	0.30	0.25	0.83
1.5	0.27	0.23	0.85

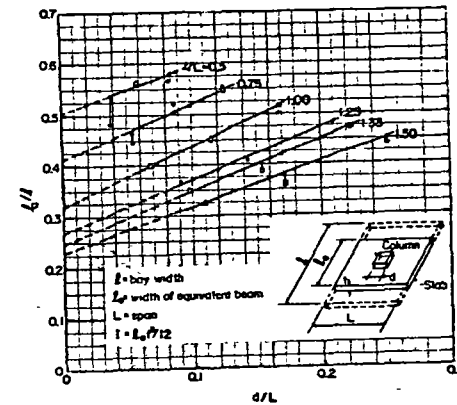


FIG. 15

the center of the plate was calculated from measurements obtained on the bar used to support load P<sub>1</sub> and P<sub>2</sub>. The three sizes of washers provided a large enough range of d/L ratios to prepare a graph for design use. The open circles and points in Fig. 15 represent average values for two different runs with different degrees of tightness in the bolt through the center of the plate. The two runs were intended as a check of the effect of the rigidity of the connection on the readings. This effect appears to have been eliminated from the results except in a few instances in which some points deviate considerably from the straight lines drawn through the plotted data. The lines were extended (dashed) to intersect with the vertical axis (d/L = 0) in order to compare model values with computed values. The comparison is indicated in Table 5. Model results are approximately 15% less than the computed values. This may be caused by the different boundary conditions along the edges parallel to applied moment, the difference in Poisson's ratio, the method of testing or the extrapolation of computed values from the 2 by 2, 4 by 4 and 6 by 6 meshes of interconnecting beams. Regardless of the cause, the values of equivalent width obtained from Fig. 15 are adequate for design purposes. Several tests were run with the moment applied near the edge of the plate simulating an exterior column but no discernible difference was observed when the values were

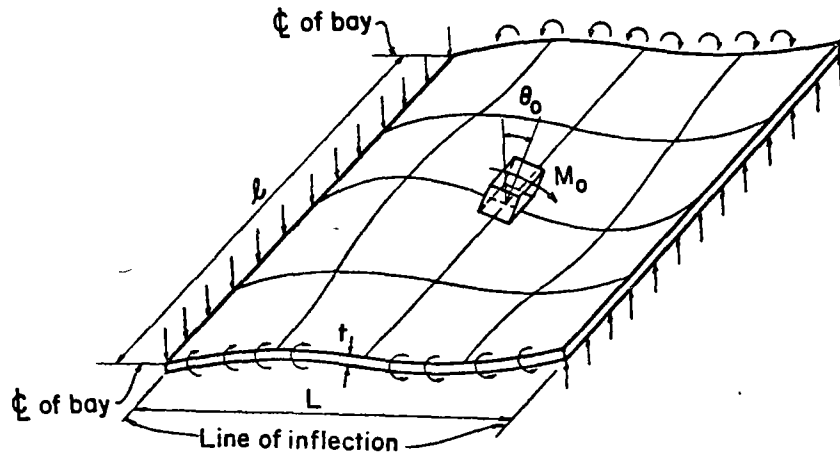


FIG. 11.—IDEALIZED SLAB-COLUMN ELEMENT

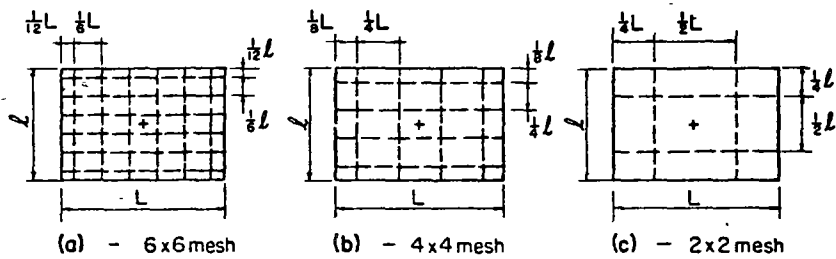


FIG. 12

TABLE 4

I/L	0	0.5	1.0	1.5
K	12	7.87	5.26	3.92
K/12	1.00	0.656	0.438	0.326

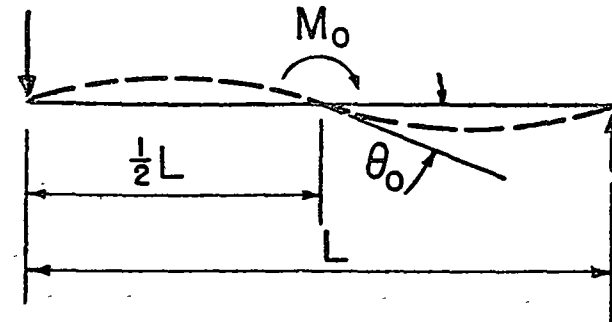


FIG. 13

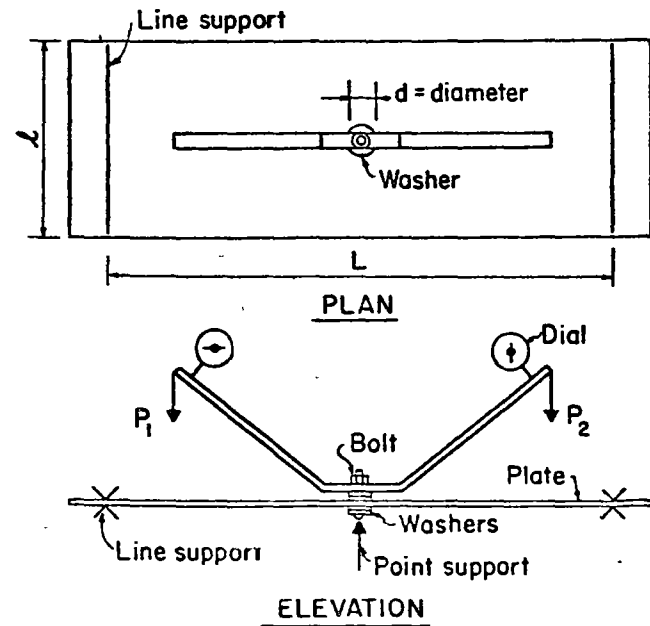


FIG. 14.—SKETCH OF MODEL



( $S = 10^5$ ) and two columns with a low stiffness ( $S = 10^{-2}$ ). The moment of inertia of the shear wall below Level 0 was assumed the same as in the first story. A large lateral load  $P$  applied at Level 0 produces the distortion shown in Fig. 16(b). System  $F$  translates laterally with no rotation of the columns at the base. The entire load  $P$  is resisted by the wall but as the wall deflects it will interact with the frame and will generate forces in the "link" members that can be computed by the iterative solution. Moment,  $M_{wb}$ , and rotation,  $\theta_{wb}$ , as well as the moments on the wall at all levels are obtained from the iterative solution.

**Explanation of Charts.**—Figs. 17(a), 18(a), 19(a), 20(a), 21(a), 22(a), and 23(a) show the results of the uniform load. The stiffnesses of the various elements composing the structure are indicated in the foregoing figures as well as the column-beam and wall-column stiffness ratios,  $S_c/S_b$  and  $S_s/S_c$ , respectively. Figs. 17(a), 18(a), and 19(a) contain the results for uniform structures and Figs. 20(a), 21(a), 22(a), and 23(a) show results for structures with variable stiffness. The results on the frame and shear wall are expressed in somewhat different terms. At the left side of Figs. 20 to 23, the total shear in the frame,  $V_{fx}$ , is shown as a fraction of the total base shear,  $V_b$ . On the right side of Figs. 20 to 23, the shear in the wall at any level,  $V_{wx}$ , is expressed as a fraction of the total shear at that level,  $V_{tx}$ . The representation on the left indicates at a glance the total load in the frame at any point above ground level, while on the right side the effectiveness of the wall at any distance from the ground is made obvious by the proportion of story shear that it resists.

For example, given a stiff frame,  $S_c/S_b = 1$ , combined with a slender wall,  $S_s/S_c = 5$ , the shear carried by the wall at 0.2 H above ground is only approximately 15% of the total shear at that point. The case of such a slender wall is included only for illustration. Its behavior in the frame would be similar to that of a large column. An equally good solution could be obtained by the usual methods of frame analysis. This is made quite clear if the shear carried by the frame part is compared with the shear in a uniformly load cantilever, the dash line in Fig. 17(a). The shear in the frame above height 0.3 H is approximately the same as that of the cantilever and the shear decreases only near the base. In fact, in the upper stories, the shear in the frame is greater than in the cantilever. This phenomenon has already been described previously in Fig. 1.

In the upper stories, the high shears in the frame are the result of the tendency of the frame to restrict the free deflection of the wall. As the wall-column stiffness increases, the shear in the frame is reduced and becomes nearly constant at any height. This effect is more pronounced in Fig. 19(a). With a column-beam stiffness ratio  $S_c/S_b = 10$  and a wall-column stiffness ratio  $S_s/S_c = 30$ , or greater, the frame carries approximately a constant shear above 0.2 H. As the ratio  $S_c/S_b$  increases, the relative importance of the shear wall is also increased in that it resists a greater and greater proportion of the load.

The foregoing remarks apply equally well to structures subjected to a triangular load, Figs. 17(b), 18(b), 19(b), 20(b), 21(b), 22(b), and 23(b). For comparison, the shear in a cantilever with a triangular load is shown by dash lines in Figs. 17(b) and 19(b).

Results on the same frames with a concentrated load at the top exhibit a similar trend, Figs. 24(a), 25(a), 26(a), 27(a), 28(a), 29(a) and 30(a). The

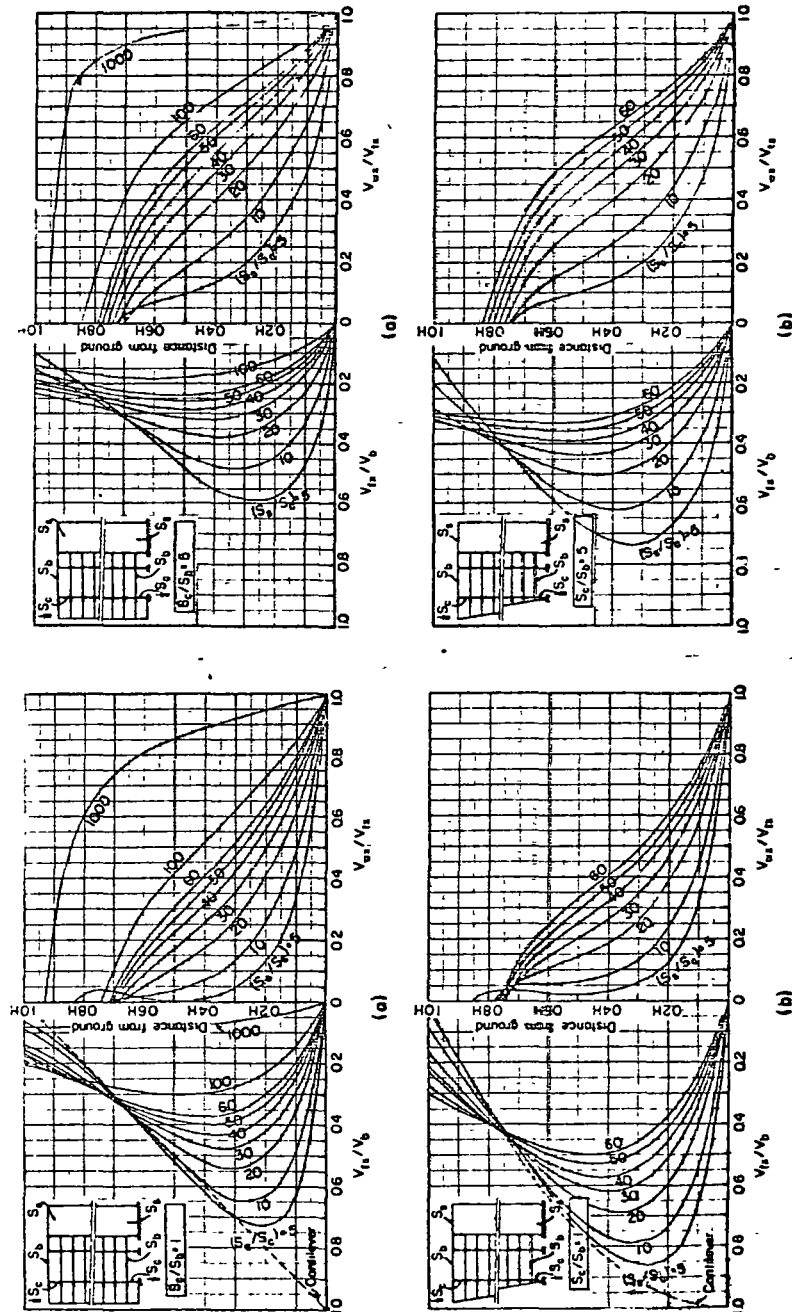


FIG. 18

FIG. 17

compared with the results of the previous tests. Hence, the equivalent widths obtained from Fig. 15 appear to be applicable to exterior bays. (Further analytical and experimental investigations are in progress at the PCA Laboratories. Tests of reinforced concrete specimens and Plexiglas models are being used in detailed studies of moment transfer from slab to column, moment-rotation characteristics, effective slab widths, and carry-over factors.

The coefficients for equivalent widths shown in Fig. 15 can be used to obtain the stiffness of the floor system. Carry-over factors were not investigated, but the usual value of 1/2 will serve this purpose. As shown in Appendix I, a stiffness of 100 combined with a carry-over other than 1/2, e.g., 1/4, can be replaced with an equivalent stiffness of  $K_e = 83.3$  and a carry-over of 1/2. To assess the effect of different carry-over factors on the distribution of lateral load to the wall and frame the same structure was analyzed three times with three different carry-over factors, i.e., 1/2, 1/4, and 1/8. A comparison of the results showed that the maximum reduction in shear apportioned to the frame was approximately 5% and 10% for carry-over factors of 1/4 and 1/8, respectively. It can be concluded that in the realistic range of carry-over factors, 1/2 to 1/4, the loss of accuracy is insignificant. The use of Fig. 15 is illustrated in the example problem.

### INFLUENCE CURVES

The term "influence curves" is used as an extension of the classical definition because in this instance it denotes curves that describe the influence of any of the four types of loading on both interacting System F and System W. The curves describe approximately 150 separate combinations of the four loading conditions with structures of various stiffnesses. The inclusion of such a large number of charts has two primary purposes; first, to describe the relationship of all these parameters in graphic form and thus provide the engineer with a visual representation of their effects and, second, to supply a means of evaluation of structures during the preliminary design stages by presenting data with a large enough range in stiffness values and loads. The effectiveness of the shear walls selected can be assessed and the necessary adjustment can be made prior to undertaking an iterative solution. The stiffness of most structures will be within the range of the charts; hence, the data can be used directly for the final design in many practical cases.

*Definition of Structural Parameters.*—The basic structures used in the analyses were separated into the two resisting Systems F and W, and interconnected as recommended in Fig. 2(c). The symbol,  $S_s$ , is used to denote the sum of the stiffnesses of the shear walls. Similarly,  $S_c$  represents the sum of the stiffnesses of the columns and  $S_b$  refers to the sum of the stiffnesses of the beams.

The quantities  $S_s/S_c$ , the wall-column stiffness ratio, and  $S_c/S_b$ , the column-beam stiffness ratio, refer to conditions at the first story of the structure. These parameters are used to classify the relationship between the stiffnesses of Systems F and W. For example, a column-beam stiffness ratio  $S_c/S_b = 1$  represents an extremely stiff frame. For any given column stiffness, the stiffness of the assumed frame is reduced as this ratio increases. Conversely, the wall-column stiffness ratio  $S_s/S_c = 5$  describes a slender

shear wall. Larger ratios  $S_s/S_c$  indicate walls that became increasingly stiffer.

Three categories of variations of stiffness with height are included in the charts. The structures in the first category have uniform stiffnesses  $S_s$ ,  $S_c$ , and  $S_b$  throughout their height. In the second category, the wall and column stiffnesses are reduced linearly to (1/3)  $S_s$  and (1/10)  $S_c$  at the top, while  $S_b$  is kept constant. In the third category, the proportions at the walls and columns are the same as in the second category, but the beam stiffness is reduced linearly to (1/2)  $S_b$  at the top.

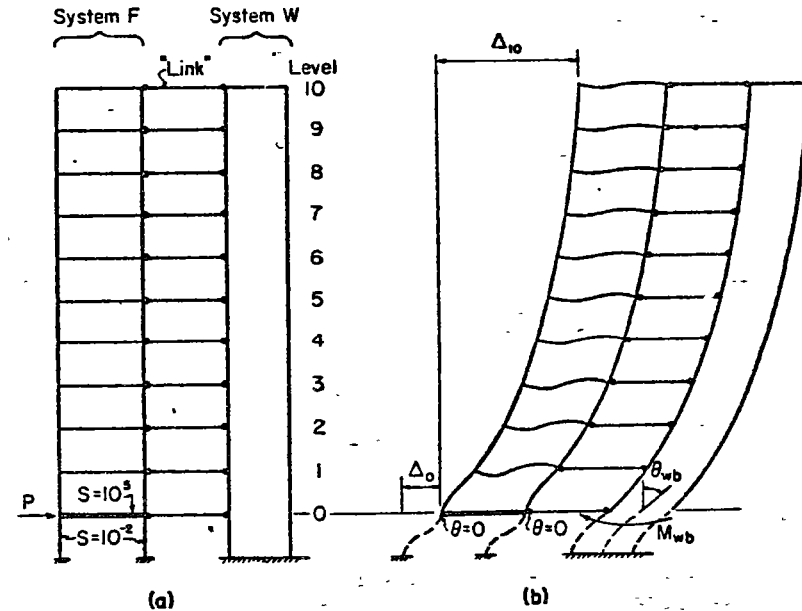


FIG. 16

*Description of Loads.*—The four loading conditions selected in this investigation include the majority of design conditions. A uniform load is specified for wind in many codes. In certain regions, the specified wind load is increased in the upper parts of the structure. Hence, the specified load could be converted to an equivalent triangular load contained in the charts or to a combination of uniform and triangular loads. The triangular load combined with a concentrated load at the top can be used for earthquake loads specified in recent codes. The fourth loading condition, base moment, is included in an attempt to describe the effects of base rotation.

The curves for the first three loads were obtained by applying the loads directly on the assumed structures; the fourth loading condition was simulated with the aid of a hypothetical substructure shown in Fig. 16(a). At level 0, the frame was assumed to be connected to a girder with a high stiffness

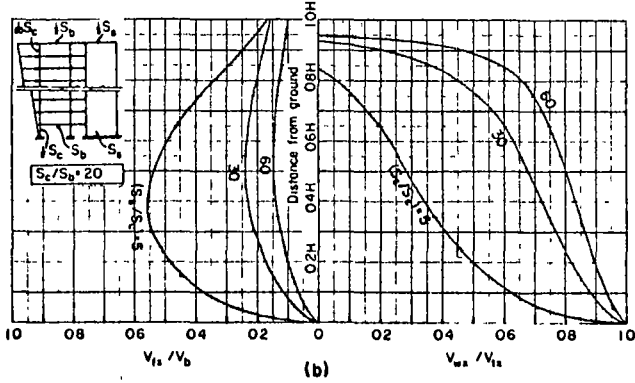
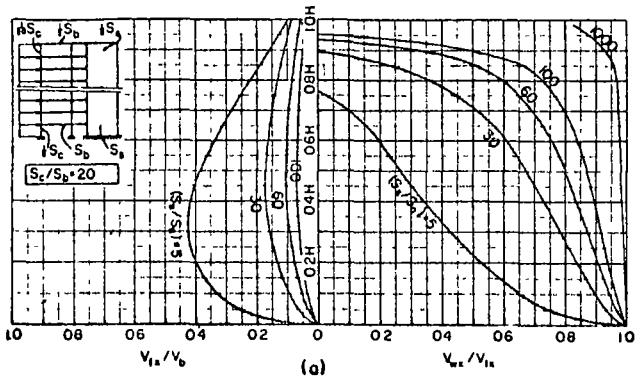


FIG. 23

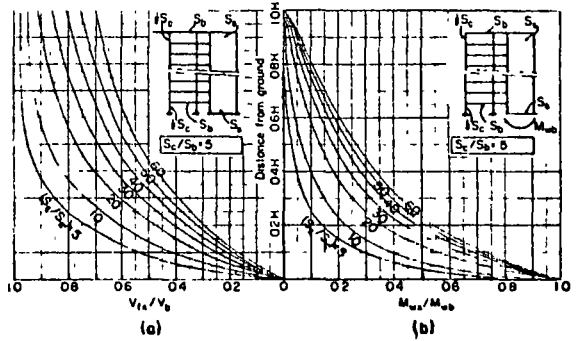
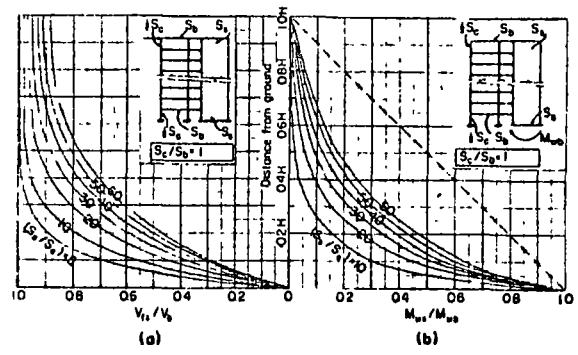


FIG. 24

FIG. 25

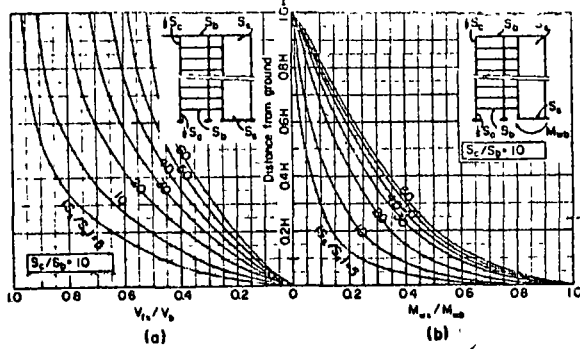


FIG. 26

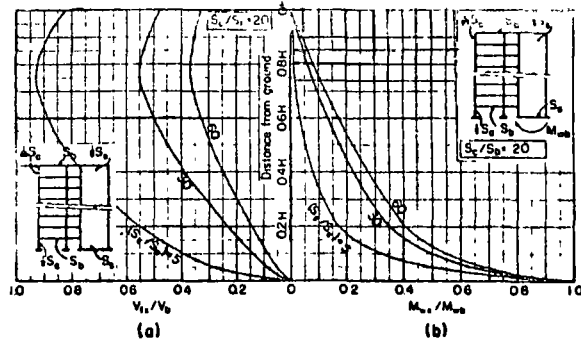


FIG. 28

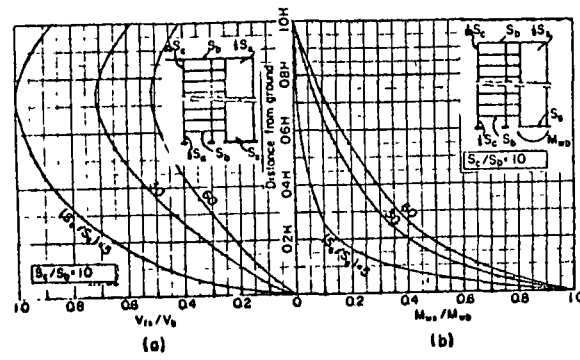


FIG. 27

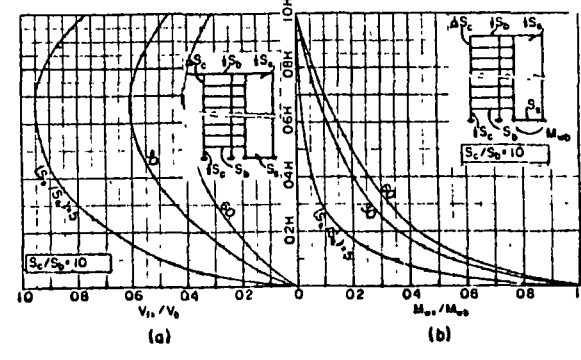


FIG. 29

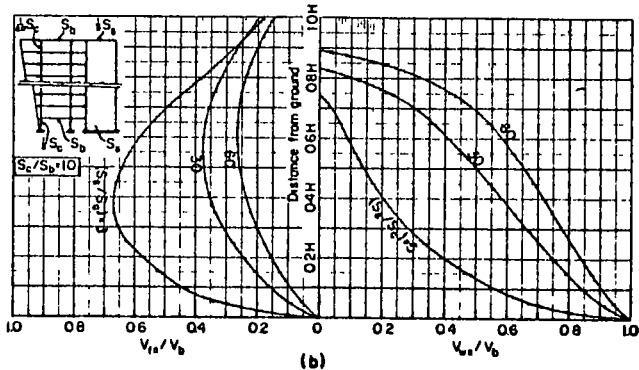
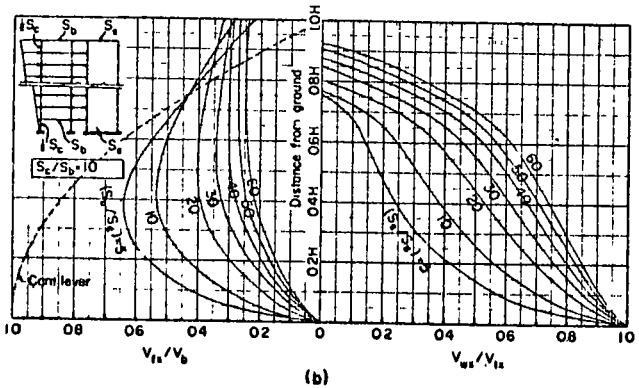
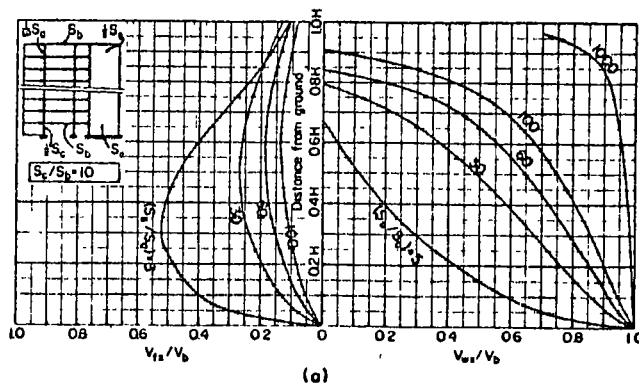
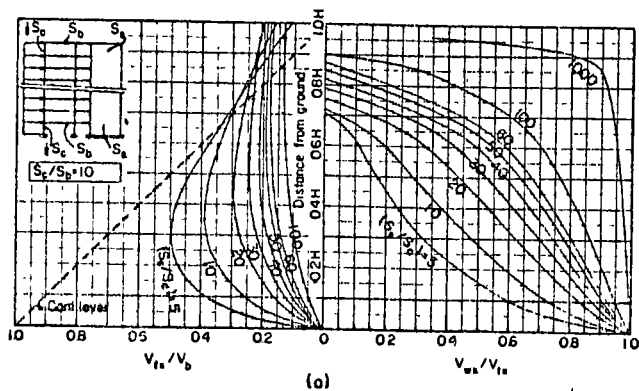


FIG. 18

FIG. 20

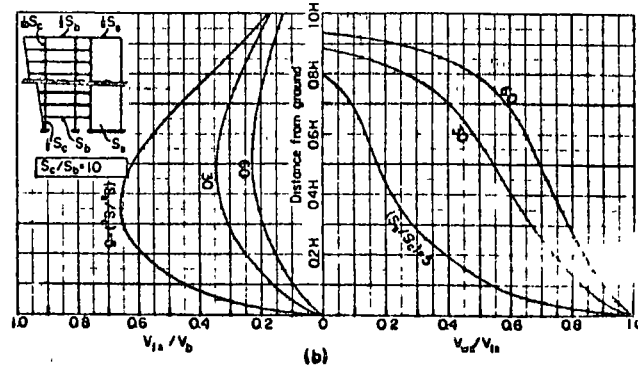
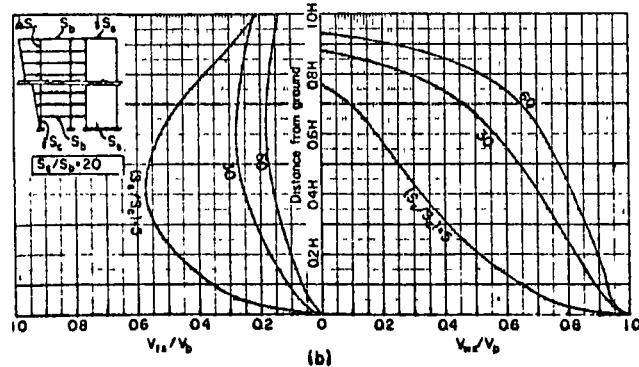
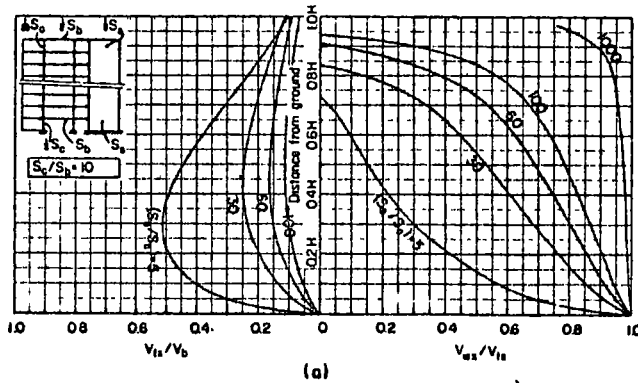
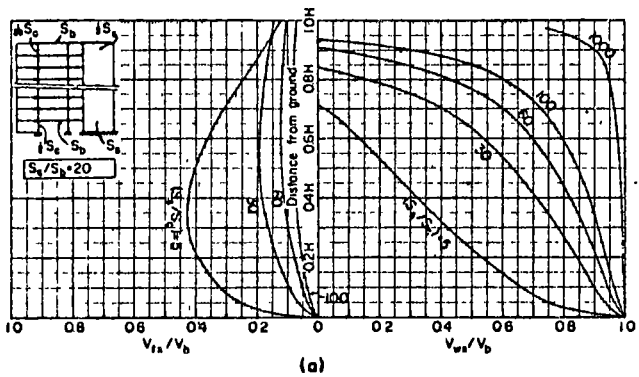
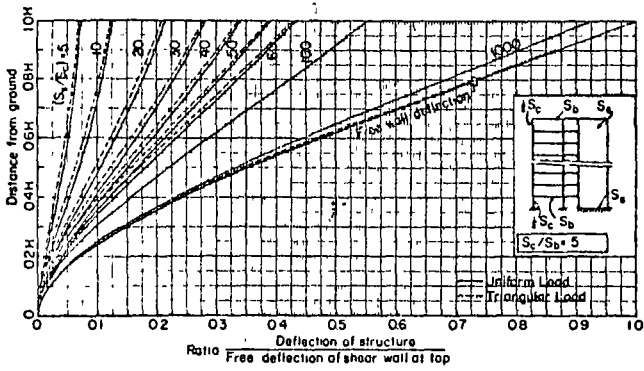
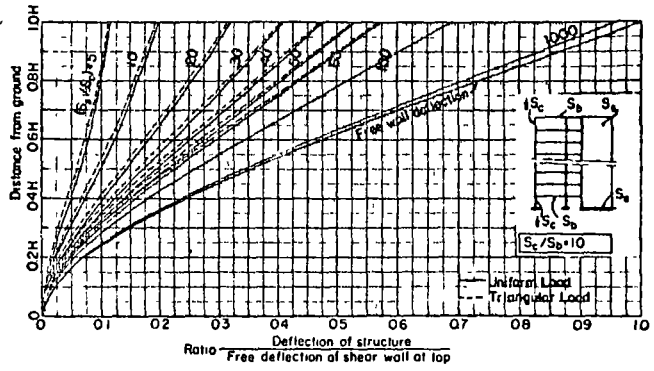


FIG. 21

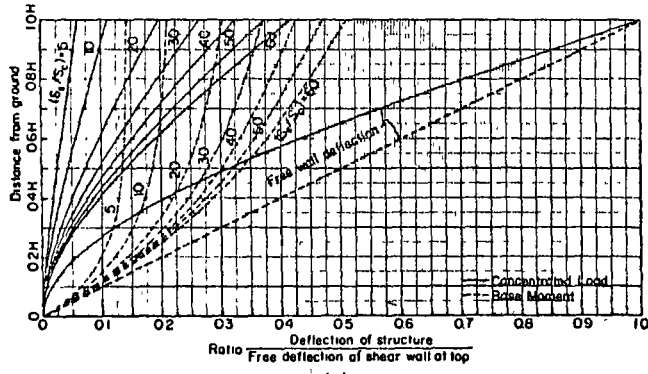
FIG. 22



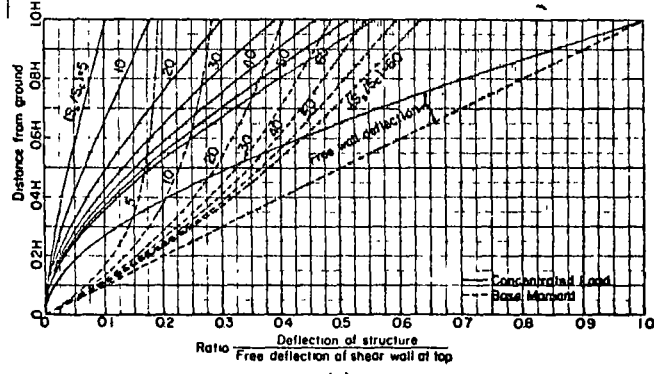
(a)



(a)



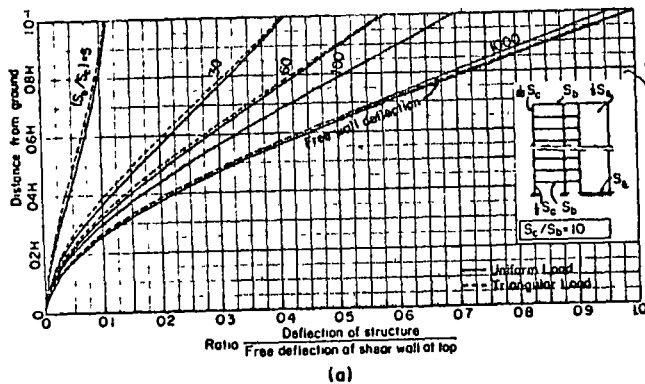
(b)



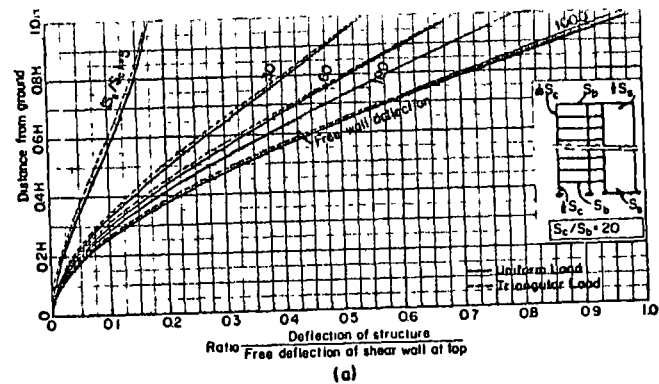
(b)

FIG. 33

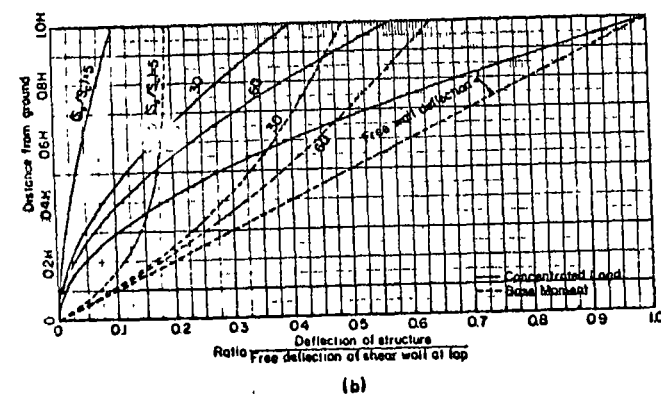
FIG. 34



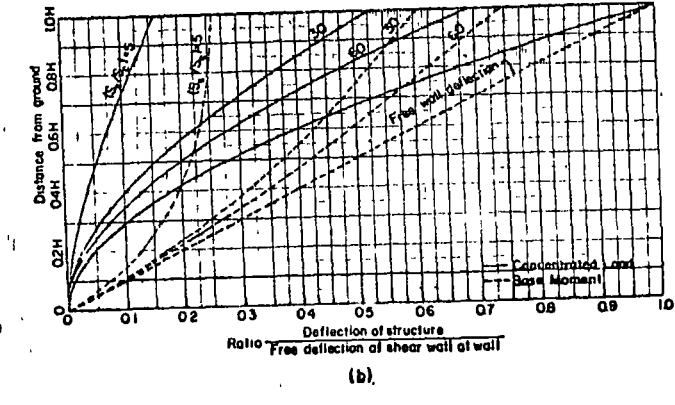
(a)



(a)



(b)



(b)

FIG. 35

FIG. 36

shear diagram for the total structure with a concentrated load is, of course, a vertical line at  $V_{fx}/V_b = 1$ . With a single concentrated load and a constant shear throughout the height of the structure, the proportion of the shear in the frame and wall, respectively, can be obtained from the same chart because  $V_b = V_{fx}$ . For example, in Fig. 26(a), the frame of a structure with  $S_s/S_c = 60$  will resist  $0.47 V_b$  at a height  $0.4 H$  while the shear wall will share the remaining 53%.

Figs. 24(b), 25(b), 26(b), 27(b), 28(b), 29(b), and 30(b) describe the effects of base moment and base rotation. A moment applied at the base reduces quite rapidly with height and becomes insignificant above a certain distance from the ground depending on the  $S_s/S_c$  ratio. For comparison, the moment diagram resulting from an end moment on a simply supported beam is shown by the dashed straight line in Fig. 24(b). In order to use these charts for design, it is first necessary to refer to Fig. 31 to obtain  $M_{wb}$  from the rotation at the base. Given a moment at the base of the wall computed from the shears in Figs. 17 through 30 the rotation,  $\theta_{wb}$ , is obtained from the moment of inertia of the wall footing and the soil modulus, or, in the case, of piles and caissons from the elastic properties of the substructure. The relaxation of moment at the base of the wall due to rotation is

$$M_{wb} = m \left( \frac{EI}{H} \right) \theta_{wb} \dots \dots \dots (31)$$

in which  $I$  refers to the moment of inertia of the wall in the first story;  $H$  is the height of the structure; and  $m$  refers to the coefficient from Fig. 31.

The moments at every floor resulting from  $M_{wb}$  are obtained from Figs. 24(b) through 30(b). The shears in the wall can be readily calculated from the moments. The story shears in the frame are equal and opposite to the wall shears.

The relative deflections of the same structures are shown in Figs. 32 through 38 for the four loading conditions. They are plotted in terms of distance from the ground and the ratio of deflection of the structure at any point above grade divided by the free deflection of the shear wall at the top. The free deflection of the shear wall must be computed separately before entering the charts to obtain the deflected shape of the structure.

Figs. 17 through 31 can be used directly in design if the shape and stiffness distribution of a structure are not too irregular. The quickest procedure would be to estimate the story shears in the frame from chart coefficients and the loads on the wall resulting from interaction by subtracting the estimated frame shears from the total shears. The loads can be used to calculate the deflected shape of the wall. Calculated deflections can be compared with deflections estimated independently from Figs. 32 through 38. If the results are not satisfactory, suitable adjustments can be made. The final evaluation of moments and shears in every member of the structure can be made by the method outlined previously in the section on "Second Stage of Analysis." It should be noted that because the curves were derived by making Systems F and W compatible at ten points, the wall-column stiffness ratio used to enter the charts should be computed by

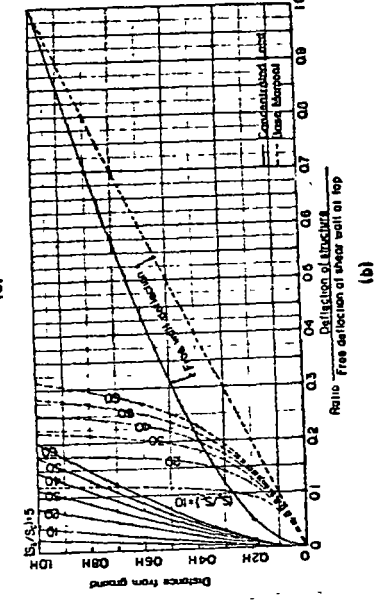
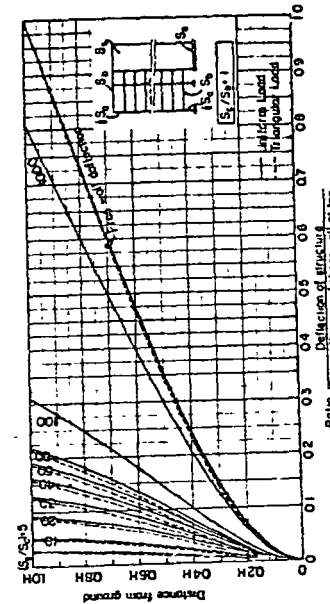


FIG. 30

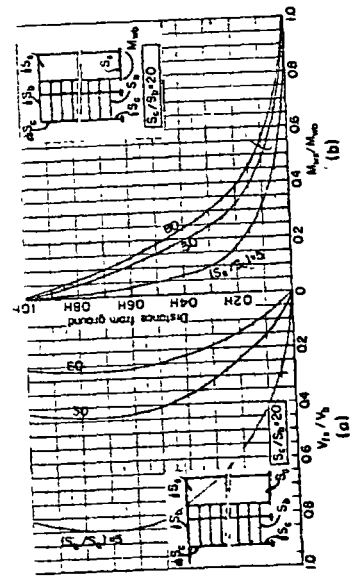


FIG. 31

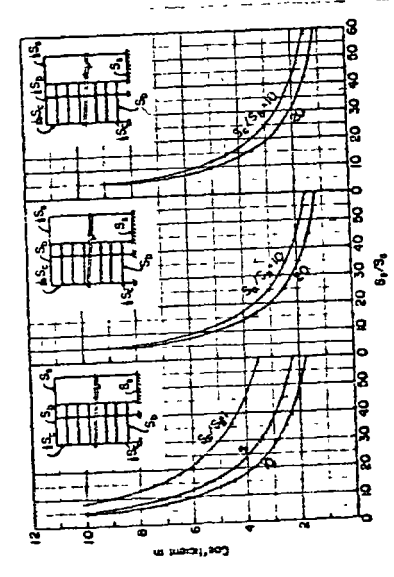


FIG. 31

72

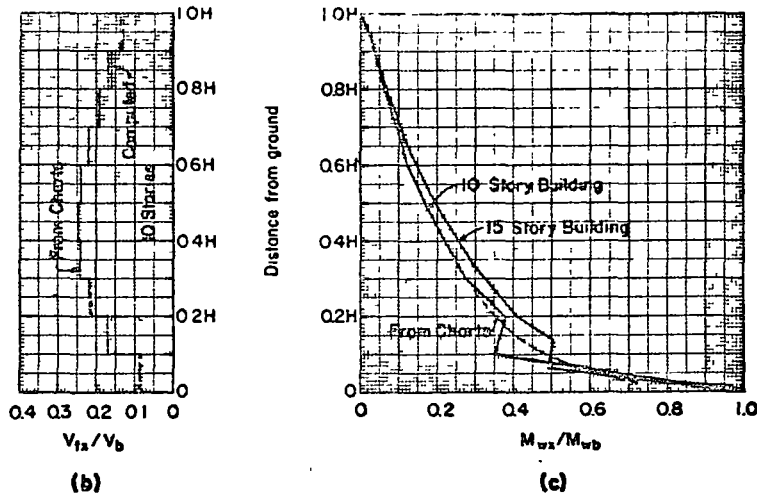
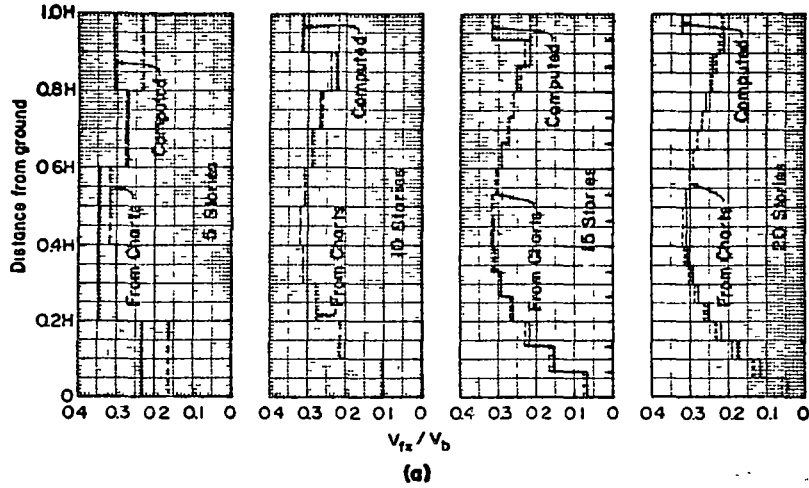


FIG. 39

direction was selected for this example. The first story height is 13 ft-0 in. The height of the other thirteen stories is 8 ft-8 in. The structure is supported on 72 columns and six shear walls. The average size of the columns is 14 in. by 22 in. in the first story, 14 in. by 17 in. in the second story, and 14 in. by 14 in. in the fourteenth story. The sums of the column moments of inertia in the first, second, and fourteenth stories are 45.8 ft.<sup>4</sup>, 28.8 ft.<sup>4</sup> and 11.1 ft.<sup>4</sup> and their respective stiffnesses are 3.52, 3.32, and 1.28. The shear walls have constant sections throughout the height of the structure. The sum of their moments of inertia is 2,420 ft.<sup>4</sup>. The slabs at all levels are 8 in. thick. In each

TABLE 6.—EXAMPLE PROBLEM

Distance from ground	S <sub>c</sub>	S <sub>b</sub>	S <sub>c</sub> /S <sub>b</sub>	S <sub>s</sub> /S <sub>c</sub>	Interpolated V <sub>tx</sub> /V <sub>b</sub>	Story	V <sub>tx</sub> /V <sub>b</sub>	
							from charts	computed
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1.0 H						14	0.19	0.25
0.9 H	1.33	0.520	2.6	107	0.19	13	0.21	0.20
0.8 H	1.58	0.525	3.0	90	0.22	12	0.22	0.22
0.7 H	1.82	0.529	3.4	78	0.23	11	0.24	0.23
0.6 H	2.07	0.534	3.9	69	0.25	10	0.25	0.25
0.5 H	2.31	0.539	4.3	62	0.26	9	0.26	0.26
0.4 H	2.55	0.544	4.7	56	0.26	8	0.26	0.26
0.3 H	2.80	0.548	5.1	51	0.26	7	0.26	0.27
0.2 H	3.05	0.553	5.5	47	0.26	6	0.26	0.26
0.1 H	3.25	0.558	5.9	43	0.26	5	0.24	0.25
0	3.52	0.563	6.3	27	0.26	4	0.23	0.24
						3	0.21	0.20
						2	0.17	0.17
						1	0.10	0.07

floor, there are 49 spans of 20 ft, four "link" spans of 12 ft, and four "link" spans of 6 ft.

At the first floor, the width to span and column size to span ratios parallel to the short side of the building are

$$\frac{l}{L} = \frac{11.5}{20} = 0.575$$

and

$$\frac{d}{L} = \frac{22}{(12)20} = 0.092$$

From Fig. 15, the width of the slab to be used as an equivalent beam and its moment of inertia are

$$l_e = 0.57 l = (0.57) 11.5 = 6.6$$

and

$$I_b = \frac{6.6 \left(\frac{8}{12}\right)^3}{12} = 0.163 \text{ ft}^4$$

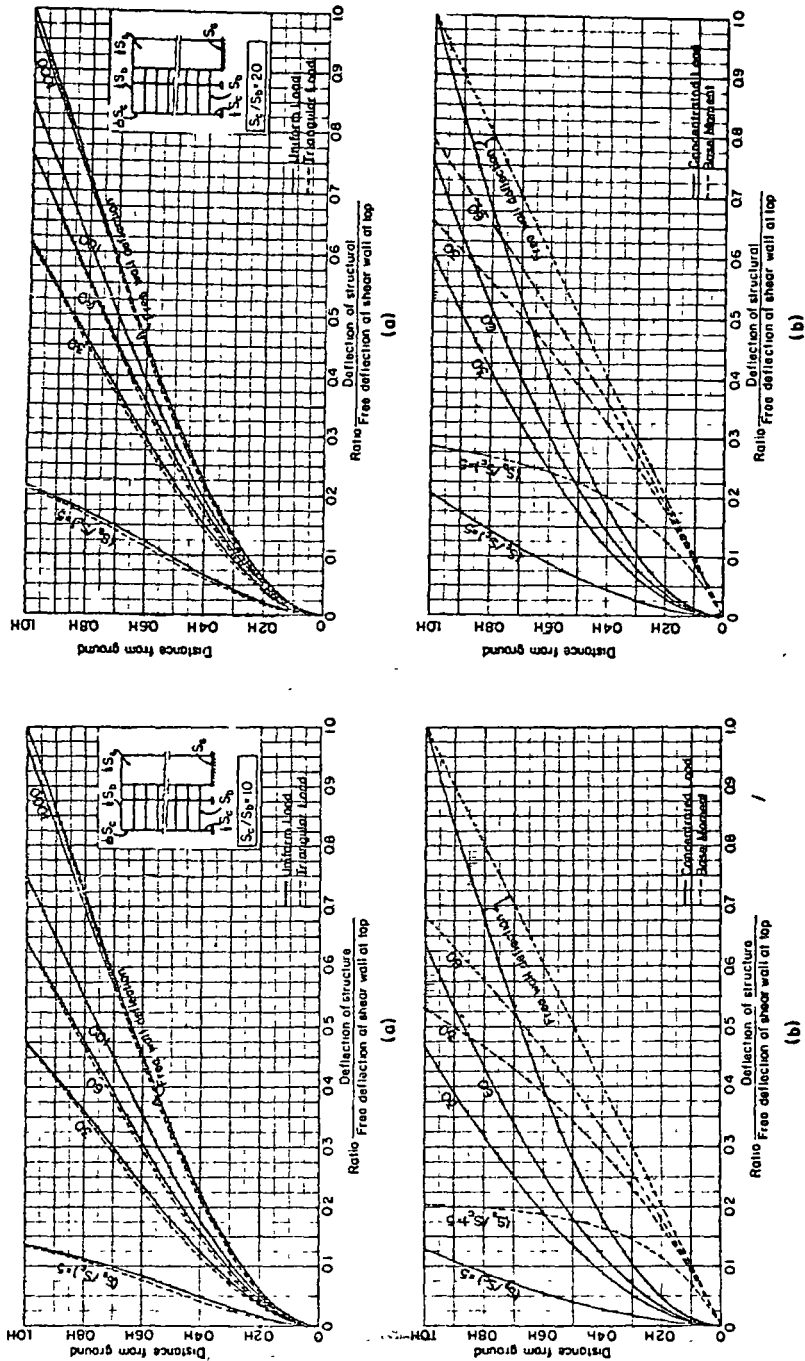


FIG. 38

FIG. 37

$$\frac{S_s}{S_c} = \frac{\sum (EI)_s}{\sum (EI)_c} \left(\frac{10}{N}\right)^2 \dots \dots \dots (32)$$

in which N is the number of stories in the structure. In order to obtain the ratio  $S_c/S_b$ , the quantities  $S_c$  and  $S_b$  should be taken simply as the sum of the stiffness of the columns and beams.

*Applicability of the Charts.*—The reliability of the curves may perhaps be indicated by examining the irregularities observed. Figs. 17 through 30 were computed for compatibility of Systems F and W at ten points. The results on buildings with constant stiffness throughout their height indicate a sudden rise in shear in the top story of System F. A number of five, fifteen, and twenty-story buildings (compatibility at five, fifteen, and twenty points) were also analyzed to investigate this phenomenon further. Similar results were again obtained for the top story. The deflections, on the other hand, were almost identical. Curves in Figs. 17 through 30 do not show this sudden increase in shear. Results from the fifteen and twenty-story buildings were used as a guide in drawing the lines smooth to generalize the charts for buildings of any height.

In Fig. 39(a), results of exact computations are compared with results derived from Fig. 18(a). The ratios  $S_s/S_c = 30$  and  $S_c/S_b = 5$  were used as the parameters of buildings with five, ten, fifteen, and twenty stories. The exact values are shown in solid lines, and the values obtained from the charts are shown dashed. The total shears in the frame agree quite well over the greatest part of the ten, fifteen, and twenty-story buildings. The sudden increase in shear of approximately 50% is clearly evident at the top. For the five-story building, the results from the two methods are not in as close agreement but could be considered satisfactory for design.

Buildings with variable stiffness did not show the same sudden increase in shear in the top story. Computed results for such a ten-story building are compared in Fig. 39(b) with values derived from the charts. Because the major application of shear walls is found in tall structures in which the cross sections of the members usually vary with height, it is evident that the reliability of the charts is quite good for most practical cases.

A similar irregularity was observed in the results for base moment. Fig. 39(c) shows the results of a fifteen-story building and a ten-story building (solid lines) with results obtained from the charts (dash lines). The results obtained from the charts appear to be unreliable in the second story because the charts were drawn smooth in this region. The sudden change in the moment curve was not observed in the computations for buildings with a stiff frame ( $S_c/S_b = 1$ ) but became more and more pronounced as the stiffness of the frame reduced. In other words, while the curves are reliable for the greater part of the structure they will not be as accurate at the second story as the ratio  $S_c/S_b$  increases. Therefore, in practical design the curves may, in some cases, not yield acceptable values at the second story of buildings that rest on soft soils. In firm soils added stresses in the frame caused by base rotation will be relatively small. Hence, the computed values of total story shear that include both load effects as well as base rotation should be reliable.

*Example*—A 14-story flat plate structure, rectangular in plan, with nineteen bays at 11 ft-6 in. in the long direction and three bays at 20 ft 0 in. in the short



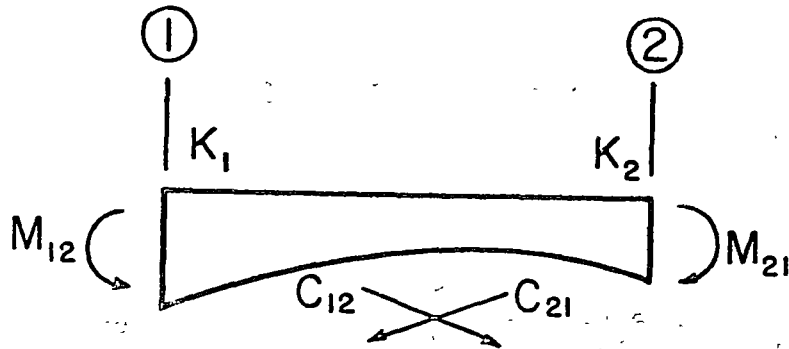


FIG. 40

or any other arithmetical method. If the equivalent stiffness  $S_1 = K_1/4$  and  $S_2 = K_2/4$  is used instead of the true stiffness, then the moment equations for the two ends will be

$$M_{12} = 4 S_1 \theta_1 + 4 C_{21} S_2 \theta_2 \dots (34)$$

and

$$M_{21} = 4 S_2 \theta_2 + 4 C_{12} S_1 \theta_1 \dots (35)$$

It can be shown with the help of an analogous column that

$$2 C_{21} S_2 = 2 C_{12} S_1 = \bar{K} \dots (36)$$

which will simplify Eqs. 34 and 35 to

$$M_{12} = 4 S_1 \theta_1 + 2 \bar{K} \theta_2 \dots (37)$$

$$M_{21} = 4 S_2 \theta_2 + 2 \bar{K} \theta_1 \dots (38)$$

These have the same form as the normal slope deflection equations.

In the case of beams, linking the frame and shear wall, beam ends undergo a relative vertical movement and Eqs. 37 and 38 can be written as

$$M_{12} = 4 S_1 \theta_1 + 2 \bar{K} \theta_2 + (4 S_1 + 2 \bar{K}) \left( \frac{\Delta_v}{L_b} \right) \dots (39)$$

and

$$M_{21} = 4 S_2 \theta_2 + 2 \bar{K} \theta_1 + (4 S_2 + 2 \bar{K}) \left( \frac{\Delta_v}{L_b} \right) \dots (40)$$

*Conversion of Variable Beam Section to an Equivalent Uniform Section.*— If the connecting link is assumed to have zero stiffness, a further simplification may be made to account for symmetrical beams of variable section in the two-column bent of System F. A symmetrical beam with variable section in a two-column bent subjected to lateral loads will have equal rotations,  $\theta$ , at the two ends. The moment at either end will be

$$M = 4 S \theta + 2 \bar{K} \theta \dots (41)$$

The moment in a substitute beam of constant section with an equivalent stiffness  $K_e$  that will produce the same end rotations is given by

$$M = 4 K_e \theta + 2 K_e \theta = 6 K_e \theta \dots (42)$$

By equating Eqs. 41 and 42, the equivalent stiffness is

$$K_e = \frac{(4 S + 2 \bar{K})}{6} \dots (43)$$

For example, a symmetrical beam with variable section has stiffness  $S = 100$  cu in. and  $C = 0.25$ . Therefore,

$$\bar{K} = 2 C S = 50 \text{ cu in.}$$

and

$$K_e = \frac{[4(100) + 2(50)]}{6} = 83.33 \text{ cu in.}$$

*Frame Analysis.*— In Fig. 6 which shows three successive stories of a frame with shear wall, each beam is assumed to have a variable cross section and each column a constant cross section in any one story. For a given horizontal displacement, rotation, and vertical deflection at the shear wall, only the condition of equilibrium of each joint need be satisfied. If column and beam stiffnesses are as denoted in Fig. 6 and

$$\psi_i = \frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{h_i} \dots (44)$$

and

$$\psi_{i+1} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{h_{i+1}} \dots (45)$$

The column and beam moments at joint (i, 1) are, as follows:

Beam 1, 2:

Similarly, the computed moment of inertia at the roof is 0.151 ft.<sup>4</sup>

In most tall structures, both the walls and frame members will vary with height and a direct interpolation can be made from the charts. In this example, the structure, an actual building, is relatively short with uniform shear walls and frame members that vary from story to story; hence, it does not fall within the stiffness categories shown in the charts. It was, in fact, selected purposely to show that it is still possible to obtain a solution from the charts if the interpolation is modified by considering the stiffnesses at several intermediate levels.

In order to facilitate the use of the charts, the structure is subdivided into ten parts. This is not necessary, but the selection of values directly from the curves can be troublesome for structures with a number of stories that is not a multiple of 10. Stiffnesses  $S_c$  at the fourteenth and first stories are 1.28 and 3.52. These stiffnesses were used to obtain values of  $S_c$ , shown in Col. 2 of Table 6, at ten points by direct proportion. At the first floor, the sum of the beam and "link" beam stiffnesses is

$$S_b = 0.163 \left( \frac{49}{20} + \frac{4}{12} + \frac{4}{6} \right) = 0.563$$

and at the roof  $S_b = 0.520$ . Values shown in Col. 3 of Table 6 were obtained by proportion at ten points. Ratios  $S_c/S_b$ , shown in Col. 4 are calculated from Cols. 2 and 3. Stiffness  $S_s$  is  $2420/8.67 = 279$  over the entire structure except at the first story where its value decreases to  $2420/13 = 186$ . From Eq. 32, the stiffness ratios  $S_s/S_c$  at all stories except the first is

$$\frac{S_s}{S_c} = \left( \frac{279}{S_c} \right) \left( \frac{10}{14} \right)^2 = \frac{142}{S_c}$$

and at the first story,

$$\frac{S_s}{S_c} = \left( \frac{186}{S_c} \right) \left( \frac{10}{14} \right)^2 = \frac{95}{S_c}$$

Ratios  $S_s/S_c$  are shown in Col. 5 of Table 6. The values tabulated in Cols. 4 and 5 are then used to obtain coefficients of  $V_{fx}/V_b$  by interpolating from the appropriate figures, in this case Figs. 17(a) through 19(a), for uniform load and constant shear wall. For example, between levels 0.6 H and 0.7 H,  $S_s/S_c = 69$  and  $S_c/S_b = 3.9$ . From Figs. 17(a) and 18(a), (ratios  $S_c/S_b$  of 1 and 5, respectively,) the coefficients of  $V_{fx}/V_b$  (read at a level 0.65 H) are 0.31 and 0.22 for  $S_s/S_c = 69$ . Hence, for  $S_c/S_b = 3.9$ , the interpolated value of  $V_{fx}/V_b$  is 0.25, as shown in Col. 6. If the ten values in Col. 6 are plotted midway between the subdivisions 0, 0.1 H, 0.2 H, etc., a curve can be drawn through the ten points. The curve is then subdivided into fourteen segments proportional to the story heights of the structures, and the shears in the actual frame are read from the graph at the midheights of the stories. The shear in each of the fourteen stories is shown in Col. 3 of Table 6. The computed values from a complete analysis of the structure are listed in Col. 3. The results agree

well over the entire structure except at the top story where a sudden increase in frame shear occurs. This should have been anticipated as stated previously in connection with Fig. 39(a). In fact, the top story shear obtained from the charts should always be increased by some amount to 50% if the wall has a constant section throughout the height. In this instance, the increase over the interpolated results is approximately 30%. The analysis can now be completed by first computing the deflection of the wall for story shears equal to

$$V_{wx} = V_{tx} - V_{fx} \dots \dots \dots (33)$$

The final moments and shears in all the members in the frame are calculated by the procedures outlined in the section on "Second Stage of Analysis."

SUMMARY

A practical method of analysis for structures braced with shear walls has been proposed. The method does not require simplifying assumptions that are not ultimately checked and yet gives the designer freedom to use his judgment.

The method of analysis has also been adapted to secondary design conditions such as base rotation, plastic deformation of the shear wall, frame torsion, axial deformation of columns, and walls that are terminated at a level below the roof.

The common design assumption that all horizontal loads are carried by the shear walls is not strictly correct over the entire height of the structure. Furthermore, the distribution of lateral shear between the frame and the shear wall depends not only on their relative stiffness but on the number of stories as well.

Tentative recommendations are presented on slab participation in flat slab-column systems subject to lateral loads.

In order to facilitate design, a number of Influence Curves are included to provide data on the distribution of story shears between the shear walls and frame members for a wide range of structural proportions and loads.

The material presented is easily applicable to the design of shear wall buildings of any height for maximum economy with adequate control over the required strength and ductility of all structural elements.

APPENDIX I

*Slope Deflection Equations for Variable Section.*—For any beam (Fig. 40) the true stiffness  $K_1$  at (1) and  $K_2$  at (2) and the carry over factors  $C_{12}$  and  $C_{21}$  can be determined from published tables<sup>24,25</sup> and charts, column-analogy,

<sup>24</sup> Handbook of Frame Constants, Portland Cement Assn., Chicago, Ill.  
<sup>25</sup> Beam Factors and Moment Coefficients for Members with Prismatic Haunches, Portland Cement Assn., Chicago, Ill.

26

- $M_i$  = moment applied on the shear wall by the connecting link at floor,  $i$ ;  
 $M_b$  = moment at the base of shear wall;  
 $M_{wb}$  = moment applied at the base of the shear wall;  
 $M_i^r$  = total moment applied on the shear wall by the connecting link at floor,  $i = M_i + R_{vi} L_s$ ;  
 $N$  = number of stories;  
 $R_{vi}$  = vertical reaction of the link beam at the shear wall at floor,  $i$ ;  
 $S_1, S_2$  = stiffnesses of a beam at two ends;  
 $S_b$  = sum of stiffnesses of all beams in the simplified frame =  $S_b^r + S_b^s$ ;  
 $S_b^r$  = sum of stiffnesses of all beams;  
 $S_b^s$  = sum of stiffnesses of all "link" beams;  
 $S_c$  = sum of stiffnesses of all columns;  
 $S_s$  = sum of stiffnesses of all shear walls;  
 $S_c/S_b$  = column-beam stiffness ratio at first story;  
 $S_s/S_c$  = wall-column stiffness ratio at first story;  
 $t$  = thickness of slab;  
 $V_b$  = total shear at the base of a structure;  
 $V_f$  = shear in frame;  
 $V_{fx}$  = shear in frame at height,  $\frac{x}{H}$ ;  
 $V_t$  = total applied shear;  
 $V_{tx}$  = total applied shear at height,  $\frac{x}{H}$ ;  
 $V_{wx}$  = shear in wall at a height,  $\frac{x}{H}$ ;  
 $\Delta_{fi}$  = free deflection of wall at floor,  $i$ ;  
 $\Delta_i$  = deflection at  $i^{\text{th}}$  floor;  
 $\Delta_{ei(n)}$  = net deflection at  $i^{\text{th}}$  floor at end of  $n^{\text{th}}$  cycle of iteration;  
 $\Delta_{ii(n)}$  = deflection at  $i^{\text{th}}$  floor at beginning of  $n^{\text{th}}$  cycle of iteration;

- $\Delta_{vi}$  = vertical movement of the shear wall at floor,  $i$ ;  
 $\theta_{ei(n)}$  = rotation in shear wall at  $i^{\text{th}}$  floor at the end of  $n^{\text{th}}$  cycle;  
 $\theta_{ii(n)}$  = rotation in shear wall at  $i^{\text{th}}$  floor at the beginning of  $n^{\text{th}}$  cycle;  
 $\theta_{i,n}$  = joint rotation in frame at  $i^{\text{th}}$  floor at  $n^{\text{th}}$  column line;  
 $\theta_p$  = total elasto-plastic angle change at any point in the wall;  
 $\theta_y$  = total angle change at any point in the wall at the beginning of yielding;  
 $\lambda_1$  = shear deflection of a frame due to a unit applied shear;  
 $\lambda_2$  = deflection due to axial deformation of columns in a frame due to a unit applied shear;  
 $u$  = ratio of total specified elasto-plastic angle change to angle change at yielding; and  
 $\psi$  = ratio of story deflection to story height =  $(\Delta_{i+1} - \Delta_i)/h_i$ .

Subscript "i" denotes story or floor number.

$$M_b = 4 S_{b(i,1)} \theta_{i,1} + 2 \bar{K}_{b(i,1)} \theta_{i,2} \dots \dots \dots (46a)$$

Col. above:

$$M_{ct} = 4 S_{c(i+1,1)} \theta_{i,1} + 2 S_{c(i+1,1)} \theta_{i+1,1} - 6 S_{c(i+1,1)} \psi_{i+1} \dots \dots (46b)$$

Col. Below:

$$M_{cb} = 4 S_{c(i,1)} \theta_{i,1} + 2 S_{c(i,1)} \theta_{i-1,1} - 6 S_{c(i,1)} \psi_i \dots \dots \dots (46c)$$

For joint equilibrium the sum of these moments is zero, therefore,

$$\theta_{i,1} = \frac{\left\{ S_{c(i,1)} [2 \theta_{i-1,1} - 6 \psi_i] + S_{c(i+1,1)} \right\} \left\{ [2 \theta_{i+1,1} - 6 \psi_{i+1}] + 2 \bar{K}_{b(i,1)} \theta_{i,2} \right\}}{4 [S_{b(i,1)} + S_{c(i+1,1)} + S_{c(i,1)}]} \dots \dots (47)$$

Similarly, for joint (i, 2), the column and beam moments are as follows:

Beam 2, 1:

$$M_b = 4 S_{b(i,2)} \theta_{i,2} + 2 \bar{K}_{b(i,1)} \theta_{i,1} \dots \dots \dots (48a)$$

Beam 2, 3:

$$M_{br} = 4 S_{b(i,3)} \theta_{i,2} + 2 \bar{K}_{b(i,2)} \theta_{i,3} + [4 S_{b(i,3)} + 2 \bar{K}_{b(i,2)}] \frac{\Delta_{vi}}{L_b} \dots \dots (48b)$$

Col. above:

$$M_{ct} = 4 S_{c(i+1,2)} \theta_{i,2} + 2 S_{c(i+1,2)} \theta_{(i+1,2)} - 6 S_{c(i+1,2)} \psi_{i+1} \dots \dots (48c)$$

Col. below:

$$M_{cb} = 4 S_{c(i,2)} \theta_{i,2} + 2 S_{c(i,2)} \theta_{(i-1,2)} - 6 S_{c(i,2)} \psi_i \dots \dots \dots (48d)$$

For joint equilibrium the sum of the moments is zero, hence,

$$\theta_{i,2} = \frac{\left[ \begin{array}{l} S_{c(i,2)} \{ 2 \theta_{i-1,2} - 6 \psi_i \} + S_{c(i+1,2)} \\ \{ 2 \theta_{i+1,2} - 6 \psi_{i+1} \} + 2 \theta_{i,1} \bar{K}_{b(i,1)} + \theta_{i,3} \\ \{ 2 \bar{K}_{b(i,2)} + (4 S_{b(i,3)} + 2 \bar{K}_{b(i,2)}) \} \frac{L_s}{L_b} \end{array} \right]}{4 S_{b(i,2)} + S_{b(i,3)} + S_{c(i,2)} + S_{c(i+1,2)}} \dots \dots (49)$$

Eq. 49, the vertical deflection at the wall  $\Delta_{vi}$  has been included by simplifying

$$\frac{\Delta_{vi}}{L_b} = \frac{\theta_{i,3} L_s}{L_b} \dots \dots \dots (50)$$

If all members have constant cross sections throughout their length, the foregoing equations can be simplified considerably. The "link" beam is included in the foregoing derivations because this method can be used to obtain the final moments in the members of each individual column line, as described previously. In the iteration solution, the simplified idealized structure shown in Fig. 2(c) should be used in which case the terms for the "link" beam are dropped and the equations for joint (i,2) become similar to those of joint (i,1).

APPENDIX II - NOTATION

The following symbols have been adopted for use in this paper:

- $C_{12,21}$  = carry-over factors;
- $E$  = modulus of elasticity;
- $G$  = shear modulus;
- $A$  = total height of a structure;
- $h_i$  = height of  $i^{th}$  story;
- $h'$  = height of hypothetical wall to simulate elastic foundation;
- $I_{si}$  = moment of inertia of shear wall at  $i^{th}$  story;
- $K_1, K_2$  = true stiffness at ends 1 and 2 of a beam;
- $K_e$  = effective stiffness of a variable beam;
- $\bar{K}$  = 2 times stiffness times carry-over factor;
- $k$  = spring constant for foundation soil;
- $L$  = span of slab;
- $L_t$  = span of link beam;
- $L_s$  = distance from the neutral axis to the extreme fibers of a shear wall;
- $l$  = bay-width;
- $l_e$  = effective width of slab;



## Efectos de esbeltez en edificios\*

Emilio ROSENBLUETH\*\*

### RESUMEN

En el presente trabajo se desarrollan métodos de análisis para marcos sujetos a cargas verticales y laterales y para el cálculo de cargas de pandeo. Se generalizan estos métodos haciéndolos aplicables a marcos espaciales, a marcos de comportamiento no lineal y a ciertos problemas aplicables a estructuras para edificios de varios pisos aun cuando estas no constituyen marcos propiamente dichos.

Se sostiene aquí la tesis de que las restricciones usuales contra desplazamiento lateral difícilmente permiten ignorar las deflexiones laterales en problemas de pandeo. Se demuestra que el suponer desplazamientos independientes de los extremos de las columnas puede introducir errores excesivos.

### INTRODUCCION

Existen dos clases de problemas que involucran efectos de esbeltez en edificios: la valorización de las respuestas a la acción combinada de fuerzas laterales y verticales, y el cálculo de cargas de pandeo. En marcos elásticos ambos tipos de problemas pueden plantearse en forma matricial y obtenerse una solución exacta, si bien el orden de las matrices que deben resolverse es generalmente muy elevado.

Los aspectos más importantes de estos problemas son susceptibles de resolverse mediante métodos aproximados de análisis, con la ventaja sobre los métodos exactos de que los efectos más notorios de las variables significativas se pueden observar claramente. La mayor parte de este trabajo concierne métodos aproximados de análisis que presentan dichas características. Los efectos de esbeltez

son generalmente pequeños en estructuras elásticas pero con frecuencia se convierten en el factor dominante en el diseño y comportamiento de las estructuras inelásticas. Por consiguiente, la sección final describe una extensión de estos métodos a marcos inelásticos de edificios.

Diversas publicaciones e informes tratan los problemas de esbeltez en forma aproximada<sup>1-3</sup>, la influencia de esos estudios se refleja en los reglamentos de construcción<sup>4-5</sup>. No obstante por diversas consideraciones es deseable reexaminar estos problemas:

1. Son pocos los marcos para edificios en la práctica que se encuentran restringidos contra desplazamientos laterales al grado de que este fenómeno pueda ignorarse.
2. Los métodos aproximados de análisis que suponen desplazamientos independientes de los extremos de las columnas pueden dar origen a resultados seriamente erróneos en marcos irregulares. (Esta hipótesis concerniente a la ubicación de los puntos de inflexión se adopta en el presente trabajo como una primera aproximación en algunos de los métodos iterativos que aquí se proponen, pero se mejora en ciclos sucesivos.)
3. El pandeo combinado en desplazamiento lateral y torsión ha recibido atención escasa.
4. La extrapolación directa del comportamiento lineal al comportamiento no lineal puede dar origen a errores de importancia.

### NOTACION

Los símbolos que se emplean en este trabajo se definen donde aparecen por primera vez. Se encuentran agrupados alfabéticamente en el Apéndice.

\* Trabajo presentado ante el II Simposio Panamericano de Estructuras, Lima, Perú (enero 1964) y sometido para su publicación en Proceedings ASCE.

\*\* Director, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F.

MARCOS PLANOS CARGADOS  
LATERALMENTE

En el análisis convencional de un marco sujeto a carga lateral, las deflexiones se calculan despreciando los efectos de las cargas verticales. Sea  $x_v$  la deflexión relativa entre el piso superior y el inferior que corresponden a un entrepiso\* dado ante la acción de cargas laterales únicamente. Entonces  $K = V/x_v$  puede definirse como la correspondiente rigidez de entrepiso, donde  $V$  es la fuerza cortante de entrepiso.

Al aplicar las cargas verticales, la deflexión relativa aumentará en una cierta cantidad, llamémosla  $x_w$ . Denotemos la deflexión total relativa,  $x_v + x_w$ , por  $x$ . El momento total de entrepiso (suma de los momentos extremos superior e inferior de las columnas) será

$$M = Vh + Wx \quad (1)$$

donde  $h$  es altura de entrepiso y  $W$  es la suma de las cargas verticales acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso considerado.

Supóngase provisionalmente que los diagramas de los momentos en las columnas, debidos a la acción de las cargas verticales, son proporcionales a los que producen las cargas laterales. En estas condiciones los momentos de entrepiso serán iguales a  $hKx$ . Sustitúyase este valor en la ec. 1, despéjese  $x$  y sustitúyase nuevamente en la ec. 1:

$$x = \frac{V}{K - W/h} \quad (2)$$

$$M = Vh \left( 1 + \frac{W/h}{K - W/h} \right) \quad (3)$$

De conformidad con la hipótesis que concierne la distribución de los momentos flexionantes en las columnas, por consiguiente, los efectos de esbeltez pueden tomarse en cuenta introduciendo este factor de amplificación que multiplica al momento de entrepiso nominal  $Vh$  en la ec. 3. Todos los esfuerzos y deformaciones debidos a la acción sola de las cargas laterales deben multiplicarse por el mismo factor. Esta solución ha sido propuesta por M. S. Ketchum<sup>6</sup>.

En el desarrollo que antecede se ha supuesto tácitamente que el marco no se desplazaría lateralmente ante la acción de las cargas verticales de por sí, en ausencia de cargas laterales. Si como consecuencia de asimetría estas cargas producen desplazamiento lateral, el marco sujeto a cargas verticales debe analizarse como si tuviera soportes late-

rales ficticios, y las cargas necesarias para equilibrar las reacciones resultantes deben sumarse a las cargas laterales aplicadas. El tratamiento presentado arriba puede aplicarse entonces a las fuerzas resultantes.

La proporcionalidad aproximada entre los diagramas de momentos flexionantes en las columnas, debidos a cargas laterales y verticales, requiere que las columnas de todos los entrepisos se deformen casi como líneas rectas y que  $x_w$  sea casi proporcional a  $x_v$  en todos los entrepisos, de tal manera que las rigideces de entrepiso ante fuerza cortante permanezcan prácticamente constantes.

Los marcos que poseen vigas flexibles (en comparación con las columnas) y restricciones pequeñas contra rotación de las bases de columnas satisfacen la primera condición. Si el cociente de las rigideces de vigas a rigideces de columnas tiende a cero, las columnas tienden a flexionarse como líneas rectas.

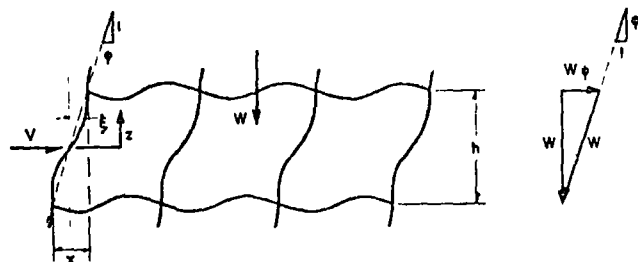


Fig. 1. Entrepiso deformado sólo por flexión de los miembros estructurales

Estos conceptos pueden comprenderse mejor con referencia a la fig. 1. Si despreciamos deformaciones axiales y términos de orden superior, todos los nudos de un mismo plano permanecerán en un mismo plano al deformarse el marco. Una recta que una los extremos de cualquier columna formará un ángulo  $\psi = x/h$  respecto a la vertical, y este ángulo será el mismo para todas las columnas de un entrepiso dado. La carga  $W$  puede sustituirse por sus componentes horizontal e inclinada. La primera de estas es igual a  $W\psi$ ; la segunda actúa paralelamente a las rectas que unen los extremos de las columnas en el entrepiso que se considere y es igual a  $W$ . Puede efectuarse la misma descomposición por lo que respecta a la carga que obra en cada una de las columnas del entrepiso. Por consiguiente la acción combinada de las cargas verticales y de una fuerza cortante  $V$ , en el marco deformado equivale a la acción de las cargas axiales originales de las columnas en combinación con una fuerza cortante incrementada de entrepiso,  $V + W\psi$ . De aquí la ec. 1. Pero las cargas axiales son en verdad prácticamente axiales en todas las secciones sólo si las columnas deformadas se alejan poco de mantenerse rectas.

Si las vigas son rígidas en comparación con las columnas, estas últimas se deformarán

\* Entenderemos por *entrepiso* el espacio comprendido entre dos niveles, losas o pisos consecutivos

adoptando una forma que diferirá apreciablemente de la línea recta. Considérese el caso extremo en que las vigas fueran infinitamente rígidas. Las flechas de una columna, ante la sola fuerza cortante de entrepiso, están dadas por

$$\xi = \frac{Vz}{24EI} (3h^2 - 4z^2)$$

donde  $\xi$  y  $z$  están referidas a ejes vertical y horizontal que pasan por el punto de inflexión de la columna (véase la fig. 1), y  $E$  e  $I$  son el módulo elástico y el momento de inercia de la columna. Ante una carga axial  $P$  sumamente pequeña, los momentos flexionantes aumentan en la cantidad  $P\xi$ . De aquí se concluye que el desplazamiento relativo entre los extremos será  $Ph^2/10EI$  por el valor correspondiente de  $\xi$ . Por tanto,

$$x_w = (x_v + x_w) \frac{Ph^2}{10EI} \quad (4)$$

Pero  $K = 12 \Sigma EI/h^3$  y  $W = \Sigma P$ , donde las sumas cubren la totalidad de las columnas del entrepiso que se considera. Por ende la ec. 4 puede escribirse en la forma

$$x_w = \left( \frac{V}{K} + x_w \right) \frac{1.2W}{Kh}$$

Despejando a  $x_w$  se encuentra que

$$x_w = \frac{V}{K - 1.2W/h}$$

y

$$M = Vh \left( 1 + \frac{W/h}{K - 1.2W/h} \right)$$

Si todas las cargas axiales de las columnas se aproximan a sus valores críticos,  $P_{cr} = \pi^2 EI/h^2$ , la elástica de las columnas se aproximará a una senoide independientemente de la magnitud de  $V$ . El factor 1.2 en el denominador de la expresión que antecede se convierte entonces en  $12/\pi^2 = 1.22$ .

A valores intermedios de  $P$  corresponderán valores intermedios de este coeficiente. Por tanto, las ecs. 2 y 3 deben sustituirse con

$$x = \frac{V}{K - \alpha W/h} \quad (5)$$

$$M = Vh \left( 1 + \frac{W/h}{K - \alpha W/h} \right) \quad (6)$$

Donde  $\alpha$  está comprendida entre 1.20 y 1.22 para marcos que poseen vigas infinitamente rígidas. La misma conclusión es aplicable al primer entrepiso de marcos cuyas columnas se encuentran empotradas en sus bases y cuyos puntos de inflexión están en el extremo superior de ese entrepiso.

Para todo marco plano el coeficiente  $\alpha$  será intermedio entre la unidad y 1.22. Bajo prácticamente todas las condiciones será conservador tomar  $\alpha = 1.1$ , y raras veces se requerirá una aproximación mayor que esta. En caso de que así se requiera, puede tomarse  $\alpha = 1.2 - 0.2\phi/\psi$ , donde  $\psi$  es la menor de las rotaciones de los extremos superior e inferior para el entrepiso que se considera. Esta fórmula se deduce de la consideración de que  $\alpha$  debe variar en forma casi lineal con el coeficiente  $\phi/\psi$  cuando las rotaciones de los nudos superior e inferior son iguales entre sí.

Los límites aplicables al coeficiente  $\alpha$  no están restringidos a entrepisos en los que las rotaciones de nudo sean iguales en los extremos superior e inferior. Por ejemplo, si las columnas de un entrepiso estuvieran empotradas en un extremo y articuladas en el otro,  $\alpha$  se encontraría nuevamente comprendido entre 1.2 y 1.22.

O.G. Julian ha publicado un nomograma que permite el cálculo rápido del momento flexionante máximo en una columna elástica como función de sus momentos extremos, de su relación de esbeltez y de su carga axial<sup>7,8</sup>. Una vez que se ha analizado un marco de conformidad con los principios expuestos, el nomograma puede emplearse para el diseño de cada columna.

Obtenemos una forma equivalente a la ec. 5 si dividimos numerador y denominador entre  $K$  y tomamos  $c = V/W$ :

$$x = \frac{x_v}{1 - \frac{\alpha x_v}{ch}}$$

de tal manera que

$$x = x_v (1 + \alpha\psi/c)$$

La ec. 6 puede ponerse en la forma

$$M = Vh (1 + \psi/c)$$

Estas formas son útiles en vista de que en muchos casos  $\psi$  se encuentra limitado por un reglamento o por el diseño contra daño no estructural. El desplazamiento máximo permisible entre pisos consecutivos puede sustituirse en estas expresiones y, si el incremento en esfuerzo debido a los efectos de esbeltez no resulta excesivo, el diseño puede basarse en estas deformaciones y esfuerzos.

Por ejemplo, sea  $\alpha = 1.1$ ,  $\psi = 0.002$  y  $c = 0.1$  (estos valores son representativos). En este caso  $x = 1.022 x_v$  y  $M = 1.02 Vh$ . Desde luego que en este ejemplo no se justificaría refinar los cálculos más allá del incremento en 2 por ciento en fuerza cortante efectiva y 2.2 por ciento en desplazamiento relativo.

La deducción que antecede no es aplicable cuando una o más columnas se encuentran a

punto de su fin pando individualmente. Este concepto se discutirá subsecuentemente.

Hasta este punto hemos despreciado las deformaciones axiales de las vigas y de las columnas. Las primeras son en efecto despreciables en las aplicaciones prácticas y no se discuten en el presente trabajo. Las segundas son importantes en muchos marcos esbeltos.

A los efectos del acortamiento y alargamiento de las columnas deben agregarse los que corresponden a rotación de la cimentación. Ambos efectos tienden a inclinar la estructura. La fig. 2 muestra la elástica de un entrepiso

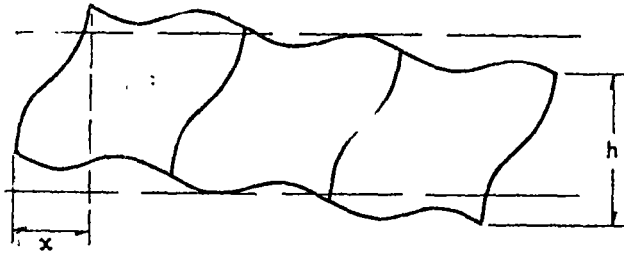


FIG. 2. Entrepiso deformado por flexión de los miembros estructurales, rotación de la cimentación y deformaciones axiales de las columnas

sujeto a estas condiciones. Consideraciones elementales sobre el equilibrio del entrepiso nos llevan a la conclusión de que las ecs. 1-6 no necesitan modificarse para tomar en cuenta los cambios en longitudes de columnas ni las rotaciones de la cimentación siempre que  $x$  se defina como la proyección horizontal del desplazamiento relativo de entrepiso. Los efectos de las deformaciones axiales de las columnas se pueden introducir fácilmente en los procedimientos de análisis que aquí se describen; los omitiremos, no obstante, por razones de brevedad en la presentación.

Las deformaciones del marco hacen que el centro de gravedad de las cargas que se encuentran arriba de un entrepiso dado se desplacen en la dirección en que actúan las fuerzas laterales. El desplazamiento produce un pequeño incremento en el momento de volteo pero no modifica directamente los desplazamientos relativos de entrepiso.

La segunda condición para que la distribución de los momentos flexionantes debidos al momento de entrepiso  $Wx$  sea aproximadamente proporcional a los que provienen de  $Vh$  es que  $x_w$  sea aproximadamente proporcional a  $x_v$ . En la mayor parte de los edificios el cociente  $x_w/x_v$  puede variar considerablemente de un entrepiso al siguiente sin que  $x$  deje de ser aproximadamente proporcional al momento de entrepiso, lo cual constituye la hipótesis que hicimos al deducir las ecs. 2 y 3. En otras palabras, los edificios reales se comportan de manera muy próxima a edificios de cortante en un extenso rango de distribuciones de mo-

mento de entrepiso; esta es la base del éxito de fórmulas aproximadas como las de Wilbur<sup>9</sup> y las del método del factor<sup>10</sup>.

Excepcionalmente puede suceder que la precisión alcanzada mediante esta hipótesis se juzgue insuficiente. No es difícil entonces suponer provisionalmente la validez de la ec. 6 y analizar la estructura ante la acción de fuerzas cortantes equivalentes iguales a  $M/h$  empleando para ello cualquier método de análisis que se hubiera considerado adecuado para tomar en cuenta los efectos de las fuerzas cortantes debidas a las cargas laterales solamente. Si las cargas axiales en una o más de las columnas, incluyendo los efectos del momento de volteo, no son suficientemente pequeñas comparadas con las fuerzas de pandeo individuales, las constantes de distribución de momentos en dichos miembros deberán modificarse de conformidad con la magnitud de las cargas que obran en las columnas. Existen tablas para este propósito<sup>11</sup>. Deberá entonces obtenerse un nuevo conjunto de fuerzas cortantes de entrepiso entrando a la ec. 1 con los desplazamientos laterales calculados. La repetición del procedimiento da origen a un proceso iterativo que es una variante del debido a Stodola y Vianello y que ha sistematizado Newmark<sup>12</sup> para el cálculo de flechas en vigas ante la acción combinada de cargas axiales y laterales. El procedimiento necesariamente converge a la respuesta correcta si tan sólo las cargas que obran en el marco no son tan elevadas que causen pandeo del mismo.

Para la mayor parte de los marcos que se encuentran en la práctica, se obtiene una precisión admisible aplicando una adaptación de un método que se ha propuesto para el cálculo de vibraciones de marcos en estado estacionario. En su forma propuesta<sup>13</sup> el método constituye una extensión del de Holzer. Toma en cuenta solamente las deformaciones por flexión de los miembros estructurales y supone que las rotaciones de todos los nudos que se hallan en un mismo piso sean iguales entre sí. Al adaptar el método al problema de efectos de esbeltez en marcos sujetos a la combinación de fuerzas laterales y verticales, las fuerzas de inercia que modifican a los desplazamientos laterales en un problema de vibraciones deben sustituirse por las fuerzas verticales que, al multiplicarse por las componentes horizontales de los desplazamientos relativos entre pisos consecutivos, modifican los momentos totales de entrepiso, y éstos a su vez modifican a los desplazamientos laterales. A continuación se describe la adaptación del método.

Las relaciones que siguen<sup>13</sup> pueden deducirse de las ecuaciones de pendiente-deformación; se han corregido en su presente versión por lo que concierne a la incorporación del coeficiente  $\alpha$ .



$$-\Sigma K'_{n+1}\phi_{n+1} + (12\Sigma K^c_n + \Sigma K'_{n+1} + \Sigma K'_{n-1})\phi_n - \Sigma K^c_{n+1}\phi_{n+1} = (M_n + M_{n+1})/2 \quad (7)$$

$$\psi_n = \frac{V_n h_n + \alpha_n W_n x_n}{12 \Sigma K^c_n} + \frac{\phi_n + \phi_{n-1}}{2} \quad (8)$$

en las cuales el índice  $n$  se refiere al enésimo entrepiso o enésimo piso (extremo superior del enésimo entrepiso),  $M$  es el momento total de entrepiso,  $\Sigma K^c_n$  es la suma de rigideces de todas las columnas del enésimo entrepiso,  $\Sigma K^e_n$  es la suma de rigideces de todas las vigas del enésimo piso y  $K = EI/L$ .\*

De conformidad con la ec. 1,

$$M_n = (V_n + \psi_n W_n)h_n \quad (9)$$

donde  $V_n$  es la fuerza cortante debida a fuerzas laterales, en el enésimo entrepiso, y  $W_n$  es la suma de cargas verticales de arriba hacia abajo hasta dicho entrepiso. La combinación de las ecs. 7-9 suministra las expresiones

$$\begin{aligned} (1 + 3A_n)\Sigma K^c_n \phi_{n-1} = & \\ = [12\Sigma K^e_n + (1 - 3A_n)\Sigma K^c_n + \Sigma K^c_{n+1}]\phi_n - & \\ - \Sigma K^c_{n+1}\phi_{n+1} - & \\ - \frac{1}{2} [(1 + A_n)V_n h_n + (V_{n+1} + \psi_{n+1}W_{n+1})h_{n+1}] & \end{aligned} \quad (10)$$

$$\psi_n = \frac{V_n h_n + 6\Sigma K^c_n(\phi_n + \phi_{n-1})}{12 \Sigma K^c_n - \alpha_n W_n h_n} \quad (11)$$

En la ec. 10,

$$A_n = \frac{W_n h_n}{12 \Sigma K^c_n - \alpha_n W_n h_n}$$

Para el último entrepiso (el más alto), los términos de índice  $n + 1$  no existen. Por tanto la ec. 10 permite expresar  $\phi$  en el penúltimo piso como una constante más un coeficiente por  $\phi_n$ , donde  $t$  se refiere al último nivel (o azotea). Sustituyendo  $\phi_{t-1}$  en la ec. 11 nos da  $\psi_t$  en la misma forma, esto es, una constante más un término proporcional a  $\phi_t$ . La misma forma resultará para  $\phi_{t-2}$  cuando lo obtengamos de sustituir  $\phi_t$ ,  $\phi_{t-1}$  y  $\psi_t$  en la ec. 10, y la misma para  $\psi_{t-1}$  de la ec. 11, y también para todos los valores subsecuentes de las rotaciones de nudo y desplazamientos hasta llegar a las bases de las columnas en cimentación. Podemos entonces calcular el valor de  $\phi_t$  de tal manera que se satisfaga la condición que estipulemos a ese

\* La hipótesis fundamental que permite simplificar grandemente los cálculos de marcos de edificios que constan de numerosos pisos, sin introducir en general errores excesivos, consiste en suponer rotaciones iguales en todos los nudos de un mismo piso. Se debe aparentemente a J. E. Goldberg<sup>14</sup>, quien ha desarrollado extensamente sus posibles aplicaciones<sup>13-15</sup>, como también lo han hecho varios otros investigadores.

nivel (sea que se trate de bases articuladas, empotradas o provistas de restricción elástica). Al sustituir este valor de  $\phi_t$  en todas las expresiones, en que interviene estamos en posibilidad de calcular  $\psi$  y  $\phi$  en todos los entrepisos y en todos niveles.

Los momentos flexionantes que calculemos en los extremos de las vigas y columnas a partir de las rotaciones de nudo y desplazamientos relativos calculados son, en rigor, momentos de empotramiento. En general no satisfacen las condiciones de equilibrio de los nudos individuales dado que, en general las rotaciones de los nudos de un mismo nivel difieren entre sí. Los momentos flexionantes finales pueden obtenerse por el método de Cross de distribución de momentos o por cualquier método equivalente, de preferencia uno que lidie explícitamente con las rotaciones y desplazamientos, como lo es el método de Kani.

Si el método de análisis emplea distribución de momentos, por ejemplo, el último paso dará origen a momentos que no satisfacen la condición de equilibrio que manifiesta la ec. 9. La diferencia en este concepto no será por lo general de consecuencia o bien podrán ajustarse los momentos de los extremos de las columnas en proporción a sus rigideces de tal manera que se satisfaga el equilibrio de momentos en cada nudo. Cuando esta operación no suministra suficiente precisión, los momentos de entrepiso desequilibrados pueden tratarse como momentos correctivos  $Vh$  y repetirse el método de análisis empezado con esos incrementos en los momentos de entrepisos.

En ciertos casos se justifica tomar en cuenta, al efectuar el ajuste que requiere distribución de momentos, los cambios en las constantes de distribución de las columnas, debido a las cargas axiales que en ellas obran.

El método descrito es relativamente rápido, y puede adaptarse a los casos en que tengan importancia las deformaciones axiales de las columnas y la rotación de la cimentación.

Las ecs. 7 y 8 permiten establecer un método iterativo que presenta ventajas en su empleo con calculadora de escritorio al compararlo con el método que acaba de describirse. El método iterativo comprende los siguientes pasos para el cálculo de  $\phi_n$  y  $\psi_n$ ; los ajustes y adaptaciones finales coinciden con los correspondientes a la extensión que antecede del método de Holzer.

1. Elijase un conjunto  $\psi$  de desplazamientos relativos divididos entre las alturas de entrepiso, y calcúlense los correspondientes momentos de entrepiso utilizando la ec. 9.
2. Pártase cada momento de entrepiso en dos, una parte correspondiente a la suma de momentos del extremo superior de las columnas del entrepiso en cuestión,  $M_{n, n-1}$

y la otra a la suma de momentos del extremo opuesto de las mismas columnas,  $M_{n-1, n}$ , de tal manera que  $M_{n, n-1} + M_{n-1, n} = M_n$ . (Para la mayor parte de los entrepisos es razonable suponer  $M_{n, n-1} = M_{n-1, n} = M_n/2$ . Para los entrepisos primero y último pueden aprovecharse gráficas existentes<sup>16</sup>, que desprecian los efectos de esbeltez pero suministran una idea de la proporción en que es razonable partir  $M_n$ . Estas elecciones en particular sólo acortarán el procedimiento, el cual converge cualquiera que sea la proporción de partición de los momentos de entrepiso. Después de varios ciclos puede estimarse la posición de los puntos de inflexión en forma precisa y asignar los momentos flexionantes de conformidad con ella.)

3. Cálculense las rotaciones de nudo a partir de la expresión

$$\phi_n = \frac{M_{n, n+1} + M_{n, n-1}}{12 \sum K_n^e}$$

4. Aplíquese la ec. 8 para obtener nuevos valores de  $\psi$ , a los que designaremos  $\psi_n'$ . Si los valores iniciales de los desplazamientos relativos y rotaciones de nudos fueron los correctos, encontraremos  $\psi_n'$  igual a  $\psi_n$  en todos los entrepisos. Cuando así no sucede (dentro de cierto margen de tolerancia), el procedimiento debe repetirse. El conjunto de valores  $\psi_n'$  será una mejor aproximación a la respuesta que  $\psi_n$ .
5. Despéjese  $\phi_n$  en la ec. 7 y alternense ciclos en los que se refinan los valores de las rotaciones de nudo, mediante esta ecuación, con ciclos que comprenden los pasos 1-4.

Según que los desplazamientos relativos o las rotaciones de nudo se encuentren más próximos a la respuesta, podrá convenir la aplicación sucesiva de varios ciclos que comprendan los pasos 1-4 seguidos de aplicaciones ocasionales del paso 5, o la aplicación de este paso varias veces seguidas o bien el empleo sistemático de los pasos 1-5. El procedimiento puede combinarse eficientemente con otros métodos iterativos que tratan rotaciones de nudo como incógnitas.

La convergencia del método está asegurada por el hecho de que los pasos 1-4 coinciden con el método de Stodola-Vianello y el paso 5 siempre converge gracias a la dominancia del término diagonal en la ec. 7.

Tanto en la extensión del método de Holzer como en este procedimiento iterativo conviene dividir los valores de  $K$  y multiplicar los de  $\phi$  y  $\psi$  por un factor común, tal como algún valor de  $E$  o  $10^5$ , para hacer las cantidades en cuestión más cómodas de manejar numéricamente.

## MARCOS ESPACIALES SUJETOS A CARGA LATERAL.

Consideremos un marco tridimensional ortogonal cuyos sistemas de pisos sean diafragmas horizontales totalmente rígidos en sus planos. Como una generalización de las hipótesis que adoptamos en relación con los marcos planos, admitiremos que, dentro del intervalo de interés, el movimiento relativo entre pisos consecutivos es función solamente de las fuerzas cortantes de entrepiso y del momento torsionante que actúa en el entrepiso que interesa.

Con referencia a la fig. 3, supondremos que se somete el entrepiso en cuestión a un despla-

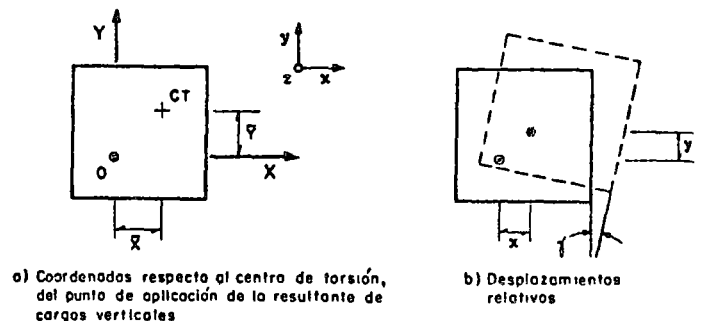


FIG. 3. Planta de estructura espacial

zamiento relativo unitario en la dirección  $x$ . Llamaremos a la cortante,  $K_x$ , que se requiera para mantener esta deformación *rigidez de entrepiso en cortante* en la dirección  $x$ . Esta cortante es igual a la suma de todas las rigideces de los marcos planos paralelos al plano  $xz$ :

$$K_x = \sum_i K_{xi}$$

En forma análoga, para un desplazamiento relativo unitario en la dirección  $y$ , tendremos

$$K_y = \sum_k K_{yk}$$

Las cortantes  $K_x$  y  $K_y$  se intersectan en un punto llamado *centro de torsión* del entrepiso que consideramos (CT en la figura).

Si impedimos el movimiento de la línea de acción de las fuerzas verticales (punto  $O$  en la figura), se requerirá un momento torsionante  $K_t$  para imponer una rotación relativa unitaria respecto a  $O$ . Este momento torsionante, que llamaremos la *rigidez torsional de entrepiso*, está dado por

$$K_t = \sum_i K_{xi} Y_i^2 + \sum_k K_{yk} X_k^2$$

donde  $X_k$  y  $Y_i$  son las distancias desde  $O$  hasta el  $k$ -ésimo marco paralelo al plano  $yz$  y hasta el  $i$ -ésimo marco paralelo a  $xz$  respectivamente.

Consideremos la estructura ante un sistema de fuerzas verticales y laterales. Sean  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  las

coordenadas del centro de torsión respecto a  $O$ ; y sean  $x, y$  las componentes del desplazamiento relativo del punto  $O$  en el piso superior con respecto al punto  $O$  del piso inferior del entrepiso que consideramos. Las generalizaciones obvias de la ec. 1 son

$$\begin{aligned} M_x &= V_x h + Wx \\ M_y &= V_y h + Wy \\ T &= T_v + \gamma jW/h \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $M_x$  y  $M_y$  son los momentos con respecto a los ejes  $y$  y  $x$  respectivamente;  $T$  es el momento torsionante con respecto al punto  $O$ ;  $V_x$ ,  $V_y$  y  $T_v$  corresponden a las fuerzas laterales actuantes;  $\gamma$  es la rotación del piso superior con respecto al inferior, y definimos  $j$  mediante la relación

$$jW = \sum_m P_m (X^2 + Y^2) = \sum_i W_i Y_i^2 + \sum_k W_k X_k^2$$

en la cual la suma abarca la totalidad de las cargas  $P$  que obran en columnas del entrepiso en cuestión.

Procediendo como en el caso de un marco plano e introduciendo los factores  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_t$  que hacen las veces de  $\alpha$  en las ecs. 5 y 6, deducimos fácilmente las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} K_x(x + \gamma \bar{Y}) &= V_x + \alpha_x \frac{W}{h} x \\ K_y(y - \gamma X) &= V_y + \alpha_y \frac{W}{h} y \end{aligned} \quad (13)$$

$$K_t \gamma + K_x \bar{Y} x - K_y \bar{X} y = T_v + \alpha_t \frac{W}{h} j \gamma$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} a_x x + b_x \gamma &= V_x \\ a_y y + b_y \gamma &= V_y \\ b_x x + b_y y + a \gamma &= T_v \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_x &= K_x - \alpha_x W/h, & a_t &= K_t - \alpha_t W/h, \\ a_y &= K_y - \alpha_y W/h, \\ b_x &= -K_x \bar{Y}, & b_y &= -K_y \bar{X} \end{aligned}$$

La solución del sistema da por resultado

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{a_x a_y T_v - a_x b_y V_y - a_y b_x V_x}{a_x a_y a_t - a_x b_y^2 - a_y b_x^2} \\ x &= \frac{V_x - b_x \gamma}{a_x} \\ y &= \frac{V_y - b_y \gamma}{a_y} \end{aligned} \quad (14)$$

de donde podemos calcular sin dificultad los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $T$  sustituyendo  $x$ ,  $y$  y  $\gamma$  en

las ecs. 12. De allí procedemos directamente al cálculo de los momentos de entrepiso y otros elementos mecánicos pertinentes en cada marco plano. O bien podemos calcular los desplazamientos relativos de cada marco a partir de  $x$ ,  $y$  y  $\gamma$  y de allí encontrar los momentos de entrepiso correspondientes.

Los comentarios expresados en relación con la influencia de cambios en longitud de columnas, rotación de la cimentación y sobre la posibilidad de plantear un método iterativo para marcos planos se aplican igualmente a los marcos espaciales introduciendo las generalizaciones apropiadas.

En algunos marcos tridimensionales los diafragmas horizontales no son lo suficientemente rígidos en su propio plano como para considerarlos como infinitamente rígidos, ni suficientemente flexibles como para que podamos suponer que la acción de los diversos marcos paralelos son independientes entre sí. Los efectos de esbeltez en estos marcos espaciales pueden acotarse haciendo ambas hipótesis respecto a la rigidez de los diafragmas horizontales. Si los límites que así se obtienen no se encuentran suficientemente cercanos uno del otro, se requiere usar el método iterativo, que se describió para marcos planos, el cual es aplicable a todo sistema de comportamiento lineal.

Los marcos esviados pueden analizarse por los mismos métodos que los marcos ortogonales, simplemente proyectando las rigideces al corte de los diversos marcos en dos planos verticales ortogonales.

El pasar de marcos espaciales a edificios, cuyas rigideces ante fuerzas laterales puede provenir de la acción combinada de marcos, muros de cortante, contravientos, muros divisorios, rampas y alfaridas de escalera y elementos *no estructurales*, no requiere modificar los métodos de análisis. Pueden encontrarse serias dificultades al cuantificar la contribución de estos elementos, pero las dificultades son inherentes al análisis por fuerzas laterales y no exclusivamente propias del análisis de los efectos de esbeltez.

La extensión del método de Holzer y del procedimiento iterativo que se describieron para marcos planos con base en las ecs. 7 y 8 pueden generalizarse a marcos espaciales. Sólo describiremos a continuación el método iterativo generalizado.

Primeramente debe elegirse un eje vertical de referencia. Si las resultantes de las cargas verticales son colineales, conviene hacer que el eje de referencia coincida con la línea de acción de dichas resultantes. Para simplificar el tratamiento supondremos que las rotaciones de los nudos, en los planos verticales de marcos planos paralelos, que se hallan en un mismo piso, son iguales entre sí cuando le imponemos al marco espacial un conjunto de

desplazamientos de traslación en la dirección  $x$  o  $y$ . Supondremos también que dichas rotaciones de nudo son proporcionales a la distancia del marco en cuestión medida desde el eje de referencia cuando las deformaciones que imponemos consisten en una serie de rotaciones de piso con respecto a dicho eje. Si estas hipótesis fueran correctas para un marco plano aislado lo serían también si las rigideces de los miembros estructurales de los diversos marcos fueran proporcionales entre sí.

Con estas hipótesis simplificadoras, el primer paso para los marcos planos se generaliza suponiendo un conjunto de desplazamientos relativos, divididos entre las correspondientes alturas de entrepiso, en las direcciones  $x$  y  $y$ , es decir, un conjunto de valores  $\psi_{nx}$  y  $\psi_{ny}$ , y uno de rotaciones relativas,  $\gamma_n$  entre pisos consecutivos con respecto al eje de referencia. La ec. 8 generalizada se convierte en

$$\begin{aligned}\psi_{nx} &= \frac{V_{nx}h_n + \alpha_{nx}W_n x}{12 \Sigma K_{nx}^c} + \frac{\phi_{nx} + \phi_{(n-1)x}}{2} \\ \psi_{ny} &= \frac{V_{ny}h_n + \alpha_{ny}W_n y}{12 \Sigma K_{ny}^c} + \frac{\phi_{ny} + \phi_{(n-1)y}}{2} \quad (8') \\ \gamma_n/h_n &= \frac{T_{ny}h_y + \alpha_{ny}T_{ny}h_n}{12 \Sigma (X^2 K_{ny}^c + Y^2 K_{nx}^c)} + \frac{\theta_n + \theta_{n-1}}{2}\end{aligned}$$

donde  $X$  y  $Y$  son las coordenadas respecto al eje de rotación;  $\Sigma K_{nx}^c$  y  $\Sigma K_{ny}^c$  abarcan las rigideces de todas las columnas (de todos los marcos planos) en los planos  $xz$  y  $yz$  respectivamente;  $T_{ny}$  y  $T_{nx}$  son los momentos torsionantes, debidos a fuerzas laterales y verticales respectivamente, con respecto al eje de rotación, y  $\theta_n$  es una cantidad (en unidades del recíproco de longitud) tal que la rotación en el plano  $xz$  de un nudo del enésimo piso y a una distancia  $Y$  del eje de referencia, vale  $Y\theta_n$ ; la rotación en el plano  $yz$  de un nudo que diste  $X$  del mismo eje vale  $X\theta_n$ .

La ecuación del paso 3 se generaliza como sigue,

$$\begin{aligned}\phi_{nx} &= \frac{M_{(n, n+1)x} + M_{(n, n-1)x}}{12 \Sigma K_{nx}^c} \\ \phi_{ny} &= \frac{M_{(n, n+1)y} + M_{(n, n-1)y}}{12 \Sigma K_{ny}^c} \\ \theta_n &= \frac{(T_{n, n+1} + T_{n, n-1})h_n}{12 \Sigma (X^2 K_{ny}^c + Y^2 K_{nx}^c)}\end{aligned}$$

donde  $T_n = T_{nx} + T_{ny}$ ; y la relación entre desplazamiento relativo y cortante de entrepiso (ec. 9) se convierte en

$$\begin{aligned}M_{nx} &= V_{nx} h_{nx} + W_n (h_n \psi_{nx} + \bar{Y}_n \gamma_n) \\ M_{ny} &= V_{ny} h_{ny} + W_n (h_n \psi_{ny} - \bar{X}_n \gamma_n) \quad (9') \\ T_n &= T_{nx} + W_n (Y_n \psi_{nx} - \bar{X}_n \psi_{ny} + j_n \gamma_n/h_n)\end{aligned}$$

donde  $\bar{X}_n$ ,  $\bar{Y}_n$  son las coordenadas de la línea de acción de la resultante de fuerzas verticales en el enésimo entrepiso con respecto al eje de referencia, y  $j_n$  se define mediante la relación

$$j_n W_n = \Sigma P_{nm} (X_m^2 + Y_m^2)$$

donde  $P_{nm}$  es la carga que obra en la enésima columna del enésimo entrepiso.

Los pasos 1-5 del método que se propuso para marcos planos incorporan ahora tres grados de libertad por entrepiso y tres por piso.

### PANDEO DE MARCOS RESTRINGIDOS LATERALMENTE

En la práctica es difícil encontrar un marco restringido lateralmente en grado tal que se justifique despreocupar en él los desplazamientos laterales. En tales marcos los períodos naturales de vibración deben ser prácticamente iguales a cero. Mas se sabe que los períodos naturales de los edificios usuales, cuando estos se han diseñado adecuadamente, no se ven afectados de manera radical por su estructuración.

Los marcos ideales, provistos de restricción lateral absoluta, han recibido atención en la literatura técnica y se les menciona explícitamente en algunos reglamentos de construcción. Por esta razón vale la pena dedicarles atención, así como por estudiar modos de pandeo que combinan el pandeo de columnas aisladas con el de todo un entrepiso. Es más, en edificios que poseen múltiples crujeas y que no están expuestos a cargas laterales de importancia, el pandeo inelástico de columnas individuales puede constituir un problema de verdadero interés práctico.

Despreciando las deformaciones por corte y carga axial, podemos obtener soluciones exactas al problema de pandeo de marcos con restricción lateral. Una posibilidad en este sentido consiste en la aplicación del criterio de Lundquist<sup>17</sup>, el cual se basa en el hecho de que el método de distribución de momentos converge para todo marco estable y diverge para los inestables. El método aprovecha tablas existentes<sup>11</sup> que suministran valores de las constantes de rigidez y de distribución como funciones de la carga axial. En marcos para edificios tal procedimiento es impráctico ya que exige un ciclo completo de distribución de momentos, que abarque la totalidad del marco, para cada carga de pandeo tentativa, y la aplicación de un procedimiento de tanteos que se inicia en cada ciclo con la elección de una nueva carga tentativa.

Bolton<sup>18</sup> es autor de una versión simplificada de este procedimiento. En ella sólo se necesita considerar un número reducido de miembros estructurales a la vez. Aún así, la necesidad de emplear tablas de constantes de

rigidez y de distribución, aunada al hecho de que el pandeo de las columnas individuales raras veces gobierna el diseño de un marco, hace deseable adoptar métodos todavía más simples, que rápidamente acoten el factor de carga requerido para provocar el pandeo, y acudir a métodos más precisos sólo cuando así se justifique.

La consideración más simple consiste en notar que el factor de carga no es menor que el que se requeriría para pandear al menos una columna suponiendo que todas las columnas están articuladas en todos los niveles de piso. Esto nos da un límite inferior. Obtenemos un límite superior suponiendo que todas las columnas están empotradas en todos los niveles de piso. Así, si las cargas especificadas en las columnas son  $\{P\}$ , el factor de carga,  $F$ , por lo que respecta a pandeo está dentro de los límites que marca la expresión

$$\min \left( \frac{\pi^2 EI}{Ph^2} \right) < F < \min \left( \frac{4\pi^2 EI}{Ph^2} \right)$$

la cual es aplicable a todos los entresijos, salvo que, para la planta baja, si las bases de las columnas se suponen empotradas, debemos escribir

$$\min \left( \frac{20.2 EI}{Ph^2} \right) < F < \min \left( \frac{4\pi^2 EI}{Ph^2} \right)$$

En ocasiones bastará para el diseño con la información que suministran estos límites. Puede estrecharse el intervalo acotado al tomar en cuenta las rigideces de los miembros que se unen en los extremos de cada columna. Alcanzaremos un límite inferior al suponer que todas las columnas se pandean simultáneamente, de tal manera que obtendremos la contribución de cualquier viga a la rigidez de un elemento elástico ficticio que se hallara en el extremo de una columna, con la que la viga tenga un nudo en común, suponiendo que la viga tiene condiciones simétricas de apoyo. Tratándose de vigas que pertenecen a niveles intermedios del edificio, esta rigidez ha de dividirse en dos, ya que la viga debe contribuir a restringir las columnas de dos entresijos consecutivos. Alcanzaremos un límite superior al tomar en cuenta la restricción que suministran las demás columnas sin reducir su rigidez por efecto de carga axial y suponiendo condición de empotramiento en los extremos alejados de todos los miembros estructurales que inciden en los extremos de la columna que se analiza.

Para la columna  $AB$  del marco que muestra la fig. 4a, ambos límites corresponden a una columna como la que esquematiza la fig. 4b, restringida elásticamente contra rotación de sus extremos mediante resortes espirales equivalentes. Para el límite inferior la rigidez del resorte que se halla en  $B$  será

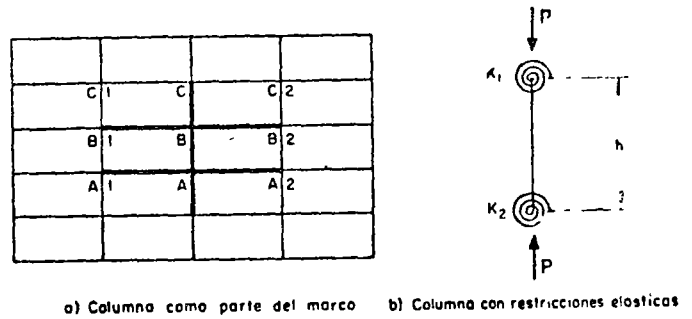


FIG. 4. Pandeo de una columna individual

$$k_B = \left( \frac{EI}{L} \right)_{B-B1} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{B-B2}$$

y para el límite superior

$$k_B = 4 \left( \frac{EI}{L} \right)_{B-B1} + 4 \left( \frac{EI}{h} \right)_{B-C} + 4 \left( \frac{EI}{L} \right)_{B-B2} \quad (15)$$

Si con un factor de carga tentativo encontramos que las columnas  $A1-B1$ ,  $B1-C1$ ,  $B-C$ ,  $A2-B2$  y  $B2-C2$  no se pandean al asignarles una longitud efectiva igual a su altura de entresijo, podemos mejorar el límite inferior de  $k_B$  multiplicándolo por 3, lo que equivale a suponer articulaciones en los extremos opuestos de las vigas. El factor de carga tentativo no debe ser menor que el límite inferior así determinado para la columna  $AB$ . Para el límite superior pueden introducirse a veces mejoras análogas a esta.

A menos que sean muy semejantes entre sí los factores de carga, en lo que toca a los valores calculados para columnas cercanas, se obtendrán valores suficientemente precisos suponiendo que todos los extremos opuestos de las vigas están articulados. Ello nos da un valor de  $k_B$  igual a  $\frac{3}{4}$  del que suministra la ec. 15.

Una vez que hemos elegido las rigideces de los resortes espirales, podemos calcular con buena precisión la carga de pandeo de una columna como la de la fig. 4b utilizando la expresión<sup>19</sup>

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 + 4n_1}{\pi^2 + 2n_1} \frac{\pi^2 + 4n_2}{\pi^2 + 2n_2} \frac{\pi^2 EI}{h^2} \quad (16)$$

$$= [1 + 0.2(n_1 + n_2)] \pi^2 EI/h^2 \quad \text{para } n_1 + n_2 < 1$$

donde  $n_{1,2} = k_{1,2}h/EI$  y  $k_{1,2}$  son las rigideces de los resortes. La ec. 16 introduce errores no mayores que 4 por ciento en la totalidad del intervalo de interés.

Solamente en el caso en que los límites del factor de carga que determinemos de esta manera resulten excesivamente diferentes entre sí valdrá la pena acudir a uno de los métodos más refinados de análisis.

En edificios de varios pisos, el pandeo de las columnas de los primeros entresijos se halla restringido en cierto grado por las rigideces de todas las vigas que se apoyen en ellas, ya que el pandeo va acompañado de un acortamiento de la columna en cuestión. Este factor ha recibido menos atención de la que merece.

#### PANDEO DE MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Sucede con frecuencia que las cargas críticas que corresponden al pandeo de columnas individuales son tanto mayores que las que producen el pandeo de la totalidad del marco, por crecimiento incontrolable de los desplazamientos relativos, que la influencia de aquel fenómeno puede desprejiciarse. Supondremos primeramente que este es el caso. El problema consiste entonces en resolver las ecs. 5 o 6 con fuerzas laterales para los desplazamientos laterales.

De acuerdo con la ec. 5,  $\alpha W/h$  debe ser igual a  $K$  si  $x$  ha de diferir de cero cuando  $K = 0$ . Por tanto la carga crítica para el entresijo que se considera vale

$$W_{cr} = Kh/\alpha$$

y el factor crítico es

$$F = \frac{Kh}{\alpha W} \quad (17)$$

En la ecuación que antecede se utiliza una rigidez de entresijo al corte,  $K$ , calculada según cualquier método apropiado. Si los factores de carga que resultan de la ec. 17 difieren excesivamente de un entresijo a otro, puede acudir a un método iterativo, en el cual se estima la forma del modo natural de pandeo. Eligiendo valores positivos para todas las  $V$ , se calculan cortantes equivalentes de entresijo,  $W\psi$ , y se mejora la forma del modo en ciclos sucesivos. Este procedimiento converge siempre.

(Interesa notar que la ec. 5 puede ponerse en la forma

$$x = \frac{x_v}{1 - W/W_{cr}} = \frac{x_v}{1 - 1/F}$$

lo que pudimos haber escrito de inmediato.)

En ciudades donde no se acostumbra analizar cuidadosamente las estructuras por carga lateral, puede lograrse una cuantificación tosca de  $F$  estimando gruesamente los valores de  $K$  (mediante las fórmulas de Wilbur o un método equivalente) y aplicando la ec. 17. Por simplicidad y para errar en todo caso conservadoramente, es aconsejable asignar entonces a  $\alpha$  el valor 1.2.

La extensión del método de Holzer que propone la ref. 13 para calcular vibraciones de

marcos planos en estado estacionario se usa también en ese trabajo para el cálculo de modos y frecuencias naturales de vibración. Análogamente, el procedimiento de tanteos que se describió en párrafos previos para el análisis de marcos sujetos a la combinación de fuerzas laterales y verticales puede adaptarse al cálculo de factores críticos de carga en marcos sujetos a la sola acción de fuerzas verticales.

Si hacemos  $V = 0$  y sustituimos  $W$  por  $FW$  en las ecs. 8-11, éstas se convierten en

$$\psi_n = \frac{\alpha_n M_n}{12 \Sigma K_n^c} + \frac{\phi_n + \phi_{n-1}}{2} \quad (18)$$

$$M_n = FW_n \psi_n h_n \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (1 + 3A_n) \Sigma K_n^c \phi_{n-1} &= \\ &= [12 \Sigma K_n^c + (1 - 3A_n) \Sigma K_n^c + \Sigma K_{n-1}^c] \phi_n - \\ &- \Sigma K_{n+1}^c \phi_{n+1} - FW_{n-1} \psi_{n-1} h_{n+1}/2 \quad (20) \end{aligned}$$

$$\psi_n = \frac{6 \Sigma K_n^c (\phi_n + \phi_{n-1})}{12 \Sigma K_n^c - \alpha_n W_n h_n} \quad (21)$$

Después de elegir un valor tentativo de  $F$ , asignamos a la rotación de nudo  $\phi$  un valor arbitrario en la azotea. Entonces la ec. 20 nos permite calcular  $\phi_{n-1}$  (en el penúltimo nivel de piso), siendo  $\phi_n$  la rotación de nudo en la azotea y siendo nulos todos los términos de índice  $n + 1$ . La ec. 21 nos suministra  $\psi$  en el último entresijo. Si ahora tomamos  $n + 1$  como referente a la azotea, las cantidades  $\phi_n$ ,  $\phi_{n+1}$  y  $\psi_{n+1}$  serán conocidas, de manera que la ec. 20 nos permitirá calcular  $\phi_{n-1}$  y la ec. 21 nos dará  $\psi_n$ .

A la elevación cero debemos cumplir con la condición de frontera:  $\phi_0 = 0$  si suponemos empotradas las bases de las columnas, o bien momentos flexionantes nulos si las suponemos articuladas. Correspondiendo a esta segunda condición, la cantidad

$$M_1 - \Sigma K_1^c (\phi_0 - \phi_1)$$

que suministra el doble de los momentos en las bases de las columnas, debe anularse. Normalmente no cumpliremos la condición de frontera en el primer ensayo, de manera que debemos repetir los cálculos empezando con un nuevo factor de carga tentativo. Procediendo por tanteos podremos acotar la solución o aproximarnos a ella tanto como deseemos.

La carga crítica que buscamos es la menor que podemos obtener por este método. Debemos verificar por tanto que no ocurran cambios de signo en los desplazamientos relativos al pasar de un entresijo a otro.

Si lo deseamos, podemos refinar el cálculo de los factores críticos de carga acudiendo a los mismos procedimientos que los expuestos para

el análisis de marcos sujetos a la combinación de fuerzas laterales y verticales.

El método iterativo que parte de las ecs. 7 y 8 puede también adaptarse al cálculo del factor crítico de carga:

1. Elijase un conjunto arbitrario de desplazamientos relativos de entrepiso y calcúlense los momentos de entrepiso correspondientes según la ec. 19. Estos estarán expresados como un coeficiente que multiplica al factor de carga crítico, aún desconocido,  $F$ .
2. Partase  $M_n$  en  $M_{n,n-1}$  y  $M_{n-1,n}$  como en el análisis de marcos sujetos a cargas laterales y verticales.
3. Calcúlense las rotaciones de nudo como en marcos cargados lateralmente.
4. Aplíquese la ec. 18 para obtener nuevos valores de  $\psi$ , que llamaremos  $\psi'_n$ . Dado que  $M_n$ ,  $\phi_n$  y  $\phi_{n-1}$  están expresados en términos de  $F$ , también lo estará  $\psi'_n$ .
5. En cada entrepiso despéjese  $F$  a partir de la igualdad  $\psi'_n = \psi_n$ . Si habíamos elegido los desplazamientos relativos y rotaciones de nudo correctamente desde un principio, encontraremos que  $F$  es el mismo en todos los entrepisos. De lo contrario (salvo por un margen de tolerancia), deberemos repetir el proceso. El conjunto de desplazamientos relativos (divididos entre  $h_n$ )  $\psi'_n$ , o un conjunto proporcional a estos valores, constituirá una mejor aproximación al modo de pandeo que  $\psi_n$ .
6. Despéjese  $\phi_n$  de la ec. 7 y alternense ciclos como en el paso 5 del método para el análisis de marcos sujetos a carga lateral.

La convergencia del método se deduce directamente de las mismas consideraciones que en el análisis de los marcos cargados lateralmente.

En los procedimientos de análisis aproximado más simples pueden incorporarse los efectos de la disminución en la rigidez de las columnas, ante cargas axiales de consideración, aplicando el método de Southwell-Dunkerley, que se ha empleado extensamente en problemas de vibración<sup>20</sup>. Para problemas de pandeo podemos expresar de la siguiente manera el principio en que se basa dicho método. Consideremos  $n$  sistemas, cada uno de ellos idéntico a la estructura que estamos analizando salvo que cada sistema tiene sólo un grupo del total de grados de libertad que tiene la estructura original, de tal manera que los  $n$  sistemas cubren la totalidad de los grados de libertad originales. Sea  $F$  el factor crítico en el sistema original y  $F_i$  el factor de carga crítica en el  $i$ -ésimo sistema. Entonces

$$F \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n (1/F_i)} \quad (22)$$

En un marco plano conviene elegir dos sistemas. En uno de los sistemas los entrepisos pueden sufrir desplazamiento relativo pero a las columnas les impedimos el pandeo individual. En el segundo, inhibimos el desplazamiento lateral de los niveles de piso y permitimos el pandeo individual de las columnas. Generalmente el factor crítico de carga del segundo sistema,  $F_2$ , será mucho mayor que el factor del primer sistema,  $F_1$ , de manera que según la ec. 22,  $F \cong F_1$ , y será adecuado cualquier método de análisis que nos permita estimar  $F_2$  del lado de la seguridad. Podremos refinar este valor de  $F_2$  si la aplicación de la ec. 22 nos indica que se justifica tal refinamiento.

En marcos sujetos a la combinación de cargas laterales y verticales, el pandeo de columnas individuales se ve favorecido por la acción del momento de volteo. Esta es la única manifestación directa de las cargas laterales; por tanto solamente  $F_2$  se verá afectado por tales cargas.

En algunos problemas se supone que las cargas actuantes laterales y verticales crecen proporcionalmente. Ambas tienen entonces el mismo factor de carga. Así se justifica proceder cuando las cargas obedecen principalmente a fenómenos de la misma naturaleza o cuando la incertidumbre en resistencia excede en mucho a la incertidumbre en carga. El empleo de la ec. 22 en la forma descrita no requiere modificación en estas condiciones.

En otros casos se especifica que los factores de carga para fuerzas verticales y laterales guarden entre sí una relación constante. Esta especificación es razonable cuando, por ejemplo, las cargas laterales se deben a un fenómeno que implica una mayor incertidumbre que la correspondiente a las fuerzas gravitacionales. En ese caso las fuerzas laterales han de multiplicarse por la relación mencionada y deberemos aplicar la ec. 22 sin otra modificación. El factor de carga crítica que así calculemos será aplicable a las fuerzas verticales; el que corresponde a las fuerzas laterales será igual al calculado multiplicado por la relación que hayamos empleado.

También sucede a veces que las cargas verticales no requieren factor de carga en lo absoluto y se desea hallar el factor crítico que, al multiplicar a las cargas laterales solamente, produzca el pandeo del marco. Este es un enfoque aceptable para estructuras cuya resistencia se conozca con buena precisión, cuyas cargas verticales obedezcan íntegramente a la acción de la gravedad y estén por tanto especificadas de una manera casi determinística, y cuyas fuerzas laterales tengan toda la incertidumbre que corresponde a efectos sísmicos, por ejemplo. Sea  $P_c$  la carga axial crítica en la primera columna que se pandeara de estar impedido el desplazamiento de los pisos,  $P$ , la carga axial que obra en esa columna como

consecuencia de la acción de las cargas laterales y  $P_w$  la debida a las cargas verticales. Si impidiéramos el desplazamiento lateral de los pisos, sería válida la relación  $P_{cr} = F_2 P_v + P_w$ . Por tanto,

$$F_2 = \frac{P_{cr} - P_w}{P_v}$$

$F_1$  se determina como si solo actuaran las cargas verticales. La aplicación de la ec. 22 con estos valores de  $F_1$  y  $F_2$  nos suministrará nuevamente resultados conservadores.

### PANDEO DE MARCOS ESPACIALES CON DESPLAZAMIENTOS LATERALES

Procediendo como con los marcos planos necesitamos resolver el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} (hK_x/\alpha_x - W_{cr})x & & & - (hY/\alpha_x) \gamma = 0 \\ & (hK_x/\alpha_y - W_{cr})y & & - (hX/\alpha_y) \gamma = 0 \\ (hK_y/j\alpha_x)x & - (hK_yX/j\alpha_x)y + (hK_t/j\alpha_x - W_{cr}) \gamma = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

que proviene de las ecs. 13. Este sistema da origen a una ecuación característica que resulta de igualar a cero el determinante de los coeficientes. Puede resolverse la ecuación por cualquiera de los métodos que se aplican a las ecuaciones algebraicas de tercer grado o a problemas de valores característicos en general. Solamente nos interesa la más pequeña de las raíces de la ecuación.

Si existe excentricidad en sólo una dirección, la ecuación característica es de segundo grado y resulta ventajoso escribir su solución. Sea  $\bar{Y} = 0$ . Entonces,

$$\begin{vmatrix} hK_x/\alpha_x - W_{cr} & -h\bar{X}/\alpha_y \\ -hK_y\bar{X}/j\alpha_x & hK_t/j\alpha_x - W_{cr} \end{vmatrix} = 0$$

de donde,

$$\frac{W_{cr}}{h} = k - \sqrt{k^2 - \frac{K_y}{j\alpha_x} (K_t - X^2)}$$

donde

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{K_y}{\alpha_y} + \frac{K_t}{j\alpha_x} \right)$$

Este problema es análogo al de las vibraciones libres de una estructura excéntrica de un solo piso<sup>21</sup>.)

Nuevamente, si los factores críticos de carga,  $F = W_{cr}/W$ , difieren excesivamente entre sí en los diversos entrepisos, podemos acudir a un procedimiento iterativo e incluso tomar en cuenta cambios en la rigidez de las columnas como consecuencia de sus cargas axiales. Y también nuevamente podemos tomar en consideración los efectos combinados del pandeo

individual de columnas y del pandeo de entrepiso en los métodos aproximados de análisis acudiendo a la ec. 22.

La extensión del método de Hozler que presentamos en relación con el pandeo de marcos planos puede generalizarse a los marcos espaciales, si bien tal generalización resulta complicada. El método iterativo asociado a aquel puede generalizarse fácilmente como se hizo para el análisis de marcos tridimensionales cargados lateralmente.

Frecuentemente en los marcos espaciales bastará con tratar cada grupo de grados de libertad —desplazamientos de traslación en las direcciones  $x$  y  $y$  y rotaciones con respecto al eje de referencia— en forma independiente. La ec. 22 puede aplicarse entonces para calcular un límite inferior del factor crítico de carga

El pandeo de edificios cuya estructura incluye otros elementos, además de los marcos espaciales, puede analizarse mediante las ecs. 23.

Los comentarios hechos con respecto a diafragmas horizontales flexibles, en edificios sujetos a la combinación de cargas verticales y laterales, son también aplicables al análisis de la inestabilidad de estos edificios.

### PROBLEMAS DE VIBRACION

El análisis dinámico de marcos puede tender al cálculo de sus modos naturales de vibración o al de sus respuestas en estado estacionario o transitorio ante movimientos del terreno o fuerzas externas. Es práctica establecida despreciar los efectos de la gravedad en estos análisis. Los efectos tienen importancia en muchas estructuras esbeltas. Las fuerzas gravitacionales tienden a alargar los períodos naturales y pueden ya sea aumentar o disminuir la amplitud de las respuestas a las perturbaciones.

En el cálculo de los modos y frecuencias naturales de estructuras planas, podemos idealizar la estructura como una viga de cortante, cuyas rigideces al corte se calculen por procedimientos aproximados o se refinen por aproximaciones sucesivas. Es sencillo incorporar los efectos de las fuerzas gravitacionales en tales cálculos; según la ec. 4 basta con reducir la rigidez efectiva de entrepiso  $K$ , sustituyéndola por  $K - \alpha W/h$ .

Este procedimiento para incorporar los efectos de esbeltez desprecia el cambio en rigideces de columnas, como resultado de cambios



en carga axial originados por momentos de volteo. Con anterioridad se describió en este trabajo un método aproximado para calcular un límite inferior de la carga de pandeo tomando en cuenta dicho fenómeno. En problemas que requieren el cálculo de modos naturales permanecen constantes mientras las cargas laterales se multiplican por el factor crítico de carga,  $F$ , que corresponde al pandeo. Para el comportamiento idealizado que se supone, en el cual cada entrepiso se toma desacoplado del resto de la estructura, el efecto del momento de volteo en un entrepiso dado consiste en reducir su rigidez, afectándola del factor

$$1 - \frac{\text{momento de volteo actuante}}{\text{momento de volteo crítico}} = 1 - \frac{1}{F}$$

La rigidez reducida por ambos conceptos --efectos de cargas axiales y del momento de volteo-- será por tanto  $K' = (K - \alpha W/h)$  ( $1 - 1/F$ ). Esta es la rigidez efectiva que corresponde a un cambio infinitesimal en la constante de entrepiso. En otras palabras, la acción del momento de volteo trae como consecuencia un comportamiento no lineal, en el cual la rigidez tangente es  $K'$  (véase la fig. 5). Para vibraciones pequeñas los efectos del momento de volteo en la rigidez son nulos.

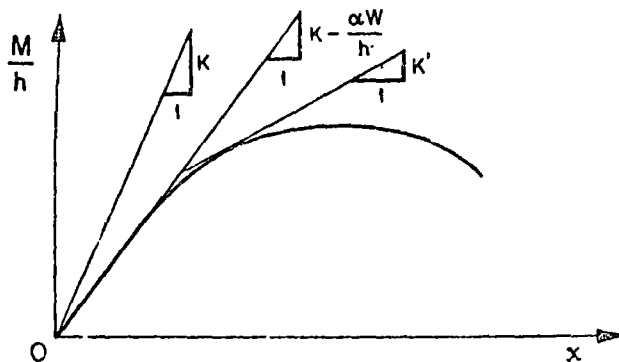


Fig. 5. Rigidez de entrepiso ante fuerzas verticales y laterales combinadas

En la adaptación debida a Goldberg et al.<sup>13</sup> del método de Hozler para calcular modos y frecuencias naturales de vibración y vibraciones en estado estacionario de marcos, también es sencilla la inclusión de los efectos de fuerzas gravitacionales. Estas fuerzas afectan a los momentos de entrepiso, los cuales se modifican de  $M = Vh$  a  $M = Vh + Wx$ . El factor correctivo  $\alpha$  interviene como en la ec. 8.

Una modificación semejante es aplicable a una generalización<sup>22</sup> de este método para calcular las vibraciones libres y en estado estacionario de marcos espaciales.

Los métodos que tratan directamente con las respuestas estructurales a perturbaciones transitorias (tales como los métodos que proponen las refs. 23 y 24) pueden adaptarse en for-

ma semejante modificando las rigideces efectivas al corte a manera de incluir los efectos de las fuerzas gravitacionales. Debe notarse que un sistema que sea inestable ante un conjunto de fuerzas aplicadas estáticamente puede ser estable cuando el mismo conjunto se aplica dinámicamente, ya sea que las cargas alternen o que se retiren rápidamente, como ante la acción de sismos o de fenómenos explosivos. La estabilidad se logra entonces merced a las fuerzas restitutivas de inercia y amortiguamiento. En tales casos las rigideces efectivas pueden volverse negativas temporalmente, como sucede con parte de la curva que muestra la fig. 5.

## ESTRUCTURAS INELASTICAS

En la mayoría de los problemas estructurales que poseen interés práctico, los materiales se ven solicitados mucho más allá del rango de comportamiento lineal. Se ha logrado bastante progreso en el cálculo de relaciones momento-curvatura. Partiendo de estas relaciones, se ha logrado construir curvas que muestran las relaciones entre los momentos en los extremos y las rotaciones de miembros prismáticos de acero de grado estructural ante una diversidad de cargas axiales<sup>23</sup>. Al menos en principio es posible hacer lo propio con miembros estructurales de concreto reforzado y con miembros de cualesquiera materiales. Por ende supondremos que puede construirse una familia de curvas que muestren la relación entre el momento total de entrepiso ( $M = Vh + \alpha Wx$ ) y el desplazamiento relativo ( $x$ ) para diversos valores de  $W$  (véase la fig. 6).

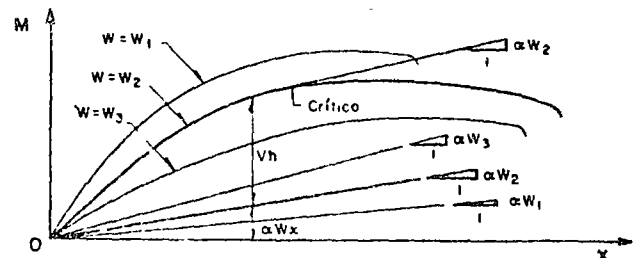


Fig. 6. Curvas  $M(x)$  para estructuras no lineales

De hecho estas curvas dependen de la distribución de cortantes a lo alto de todo el edificio. No obstante, en grado aún mayor que para marcos elásticos, las curvas se ven poco afectadas por dicha distribución dentro de márgenes amplios de configuraciones de distribución de las fuerzas laterales.

En la misma gráfica podemos trazar líneas que muestren  $\alpha Wx$  en función de  $x$ . Estas son rectas que pasan por el origen si convenimos en tomar  $\alpha$  como una constante. La simplificación que consiste en suponer que  $\alpha$  no depende de  $x$  se justifica por el hecho de que este coeficiente se encuentra mucho más cerca de la

unidad en las estructuras ordinarias de comportamiento no lineal que en los marcos elásticos, ya que en aquellas se ven fuertemente concentradas las curvaturas. De hecho  $\alpha$  es igual a la unidad en un sistema rígido-plástico.

En el análisis de cargas verticales y laterales combinadas debe seleccionarse la curva aproximada  $M(x)$  en un diagrama como el de la fig. 6. La diferencia  $M - \alpha Wx$  nos suministra el momento ( $Vh$ ) disponible para resistir la cortante ( $V$ ) debida a fuerzas laterales.

Bajo la acción de cargas estáticas, la inestabilidad ocurre tan luego la pendiente del diagrama  $x - M$  se vuelve igual a la de la línea  $Vh + \alpha Wx$ , es decir, cuando esta pendiente adquiere en valor  $\alpha W$ . En ese instante el sistema es incapaz de portar fuerzas laterales adicionales. Si dibujamos las curvas como en la fig. 6 tenemos libertad de elegir los factores de carga para fuerzas verticales y laterales.

El tipo de diagrama que muestra la fig. 6 se relaciona estrechamente con la técnica de la energía de reserva debida a J. A. Blume<sup>14</sup> para diseño sísmico. La técnica de la energía de reserva utiliza diagramas de la cortante de entrepiso (debida a las cargas laterales aplicadas) en función del desplazamiento relativo de entrepiso. Generalmente, los cálculos suministran la fuerza cortante total de entrepiso (incluyendo los efectos de las cargas verticales) en función del desplazamiento relativo. Por consiguiente el término  $\alpha Wx/h$  debe restarse de las ordenadas calculadas. Un diagrama como el de la fig. 7a se convierte entonces en uno como el que muestra la fig. 7b, cuyas ordenadas suministran la cortante neta de entrepiso disponible para resistir fuerza lateral.

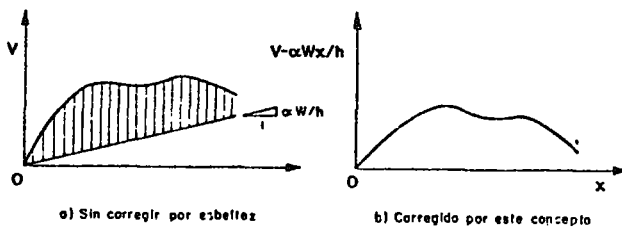


FIG. 7. Diagramas de fuerza cortante contra desplazamiento en la técnica de la energía de reserva

Los momentos de volteo modifican el tratamiento descrito en cuanto a que las relaciones momento-rotación dependen de las cargas axiales que obran en las columnas, y estas cargas varían en función del momento de volteo. El fenómeno es semejante al cambio en las constantes de distribución que toma lugar en las columnas de marcos elásticos en función de las cargas actuantes, e incluye el comportamiento elástico como un caso particular. Es fácil tomar en cuenta este fenómeno cuando podemos

suponer que los momentos de volteo crecen proporcionalmente a la cortante del entrepiso en cuestión. En este caso debemos elegir una nueva curva momento-rotación para cada columna en cada etapa de carga.

El cálculo de curvas precisas de  $M(x)$  en estructuras no lineales es generalmente complicado. Podemos abreviar en alto grado esta labor si la reducimos al cálculo de las coordenadas de unos cuantos puntos en cada curva. Si la curva es convexa, la unión de estos puntos mediante rectas nos dará una línea poligonal que se hallará totalmente comprendida dentro de la curva original y no podrá por tanto, originar una cuantificación de las deformaciones, fuerzas y factores críticos que yerre del lado de la inseguridad en estructuras cargadas estáticamente. Si la curva  $M(x)$  tiene concavidad, una elección atinada de los vértices de la poligonal preservará esta condición.

Los efectos de esbeltez en estructuras sujetas a carga estática que poseen curvas  $M(x)$  convexas puede acortarse rápidamente por medio del procedimiento que sigue (véase la fig. 8). Primeramente debemos establecer una deflexión relativa máxima permisible. Esta será la menor de las siguientes cantidades.

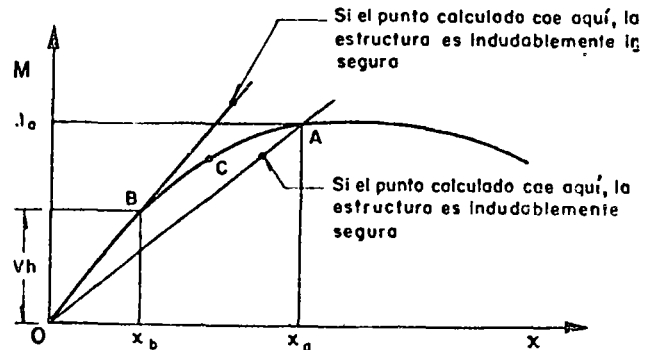


FIG. 8. Características de la estructura elástica equivalente

1. El desplazamiento relativo asociado al momento máximo de entrepiso. Al llegar a esta deflexión relativa la curva  $M(x)$  tiene pendiente nula por consiguiente la estructura se vuelve inestable ante carga estática, y no puede excederse el desplazamiento relativo correspondiente sin causar el colapso de la estructura.
2. El desplazamiento relativo que produce daños estructurales excesivos, tales como la formación de grietas inadmisiblemente grandes, rotura del refuerzo o desprendimiento objetable del recubrimiento en concreto reforzado; falla de las conexiones o pandeo local objetable en estructuras metálicas; agrietamiento indeseable en estructuras de madera, etc.
3. El desplazamiento relativo máximo que marca un reglamento de construcción o

que quien diseña estima que ocasionará daños no estructurales excesivos.

Sea  $A(x_a, M_a)$  el punto de la curva  $M(x)$  que corresponde al desplazamiento relativo permisible. A continuación analícese la estructura como si fuera elástica y tuviera como rigidez de entrepiso lo que define la pendiente de  $OA$ . Si el desplazamiento relativo que calculamos en esta forma es menor que  $x_a$ , la estructura estará segura ante el sistema de cargas que se haya especificado. Si encontramos que no se cumple esta condición, deberemos analizar la estructura como si fuera elástica, pero ahora con la rigidez de entrepiso que define la pendiente de  $OB$ , siendo  $B(x_b, M_b)$  el punto que corresponde al momento de entrepiso aplicado ( $Vh$ ) que se debe exclusivamente a las cargas laterales. Si el momento de entrepiso así calculado excede  $M_a$ , la estructura será insegura.

Finalmente, si con la pendiente de  $OA$  encontramos que  $M$  excede  $M_a$  y con la pendiente de  $OB$  resulta  $M$  menor que  $M_b$ , concluimos que el momento real de entrepiso se halla entre los dos valores que hayamos calculado. Con el fin de determinar si el diseño de la estructura es admisible, deberemos calcular las coordenadas de un tercer punto,  $C(x_c, M_c)$ ;  $M_c$  debe ser intermedio entre  $M_a$  y el menor de los momentos de entrepiso calculados. Si lo deseamos, podemos mejorar aún más la respuesta eligiendo un cuarto punto, y así sucesivamente.

El artificio que esquematiza la fig. 9 permite una convergencia mucho más rápida. Aquí se idealiza la curva  $M(x)$  como dos rectas, la primera de las cuales va del origen al punto  $B$ , que corresponde al momento aplicado de entrepiso ( $Vh$ ). La segunda recta va de  $B$  al punto  $A$ , que se define como en la fig. 8. Los efectos de esbeltez se toman a lo largo de esta línea, esto es, como si se tratara de una estructura elástica cuya rigidez estuviera definida por la pendiente de  $BA$ . Como en la fig. 8, si el momento total calculado ( $Vh + Wx$ ), no excede  $M_a$ , el diseño de la estructura es admisible. Si dicho momento sobrepasa a  $M_a$ , debemos elegir una segunda recta, cuya pendiente puede ser igual a la de  $OB$  o estar comprendida entre este valor y la pendiente de  $BA$ . Y así sucesivamente.

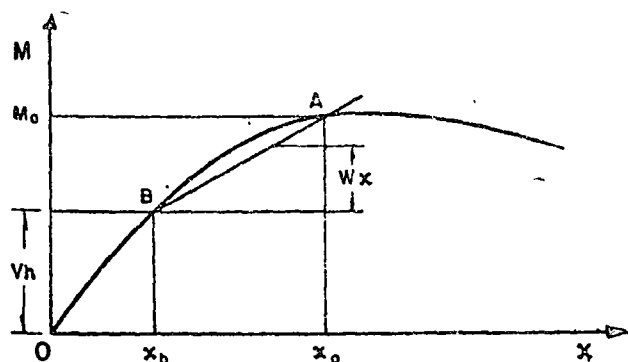


FIG. 9. Características de la estructura bilineal equivalente

El cálculo de los efectos de esbeltez en marcos espaciales de comportamiento lineal y en otras estructuras cuyos desplazamientos involucran tanto rotación como translación se complica por el hecho de que la curva  $M_c(x)$  depende de  $M$ , y de  $T$  y, análogamente, los desplazamientos en la dirección  $y$  y las rotaciones dependen de  $M_c$ ,  $M$ , y  $T$  simultáneamente. Podemos resolver el problema sin necesidad de calcular familias enteras de curvas de momento-desplazamiento y torsión-rotación si primeramente estimamos la combinación de valores  $M_c$ ,  $M$ ,  $T$ , no mayor que la combinación de valores que originaría desplazamientos inadmisibles ante la acción combinada de las fuerzas verticales y laterales. Una vez calculados los desplazamientos y rotaciones que corresponden a los momentos supuestos, definimos un sistema elástico, tal como se sugirió en el caso de las estructuras planas y tomamos en cuenta los efectos de esbeltez. Si todos los momentos de entrepiso y los momentos torsionantes resultan menores que los valores estimados, el diseño de la estructura yerra del lado de la seguridad. De lo contrario, necesitaremos efectuar tanteos adicionales como para las estructuras planas.

Los momentos flexionantes en secciones intermedias de las columnas de estructuras de comportamiento no lineal son menores que los que predice el nomograma de Julian para marcos elásticos si entramos en dicho nomograma con los momentos finales de entrepiso, pues las curvaturas máximas se hallan concentradas en tramos más cortos de los miembros de las estructuras inelásticas. El error que se introduce al omitir esta consideración es pequeño y probablemente no sea objetable en ningún caso.

El pandeo de las estructuras inelásticas, ante la acción de las cargas verticales exclusivamente, puede estudiarse de conformidad con los mismos métodos que el pandeo de los sistemas elásticos. Las rigideces deben ahora ser las "rigideces tangentes" de la estructura (en el sentido que implica el término *módulo tangente*) bajo el sistema de cargas verticales de que se trata. Las rigideces a emplear en el análisis son generalmente una función decreciente de las cargas verticales actuantes, y este hecho debe mantenerse en mente al calcular los factores de carga críticos. Por consiguiente no existe, en apariencia, un método más adecuado para tratar con el problema que un procedimiento de tanteos: suponemos un factor crítico de carga,  $F_1$ ; calculamos la rigidez de entrepiso correspondiente,  $K$ , y la comparamos con  $\alpha F_1 W$ ; si  $K > \alpha F_1 W$ , el factor crítico de carga será mayor que  $F_1$ ; y así sucesivamente.

El tratamiento que se propone para el análisis de marcos inelásticos yerra, muy probablemente, del lado de la seguridad debido a la introducción de las rigideces tangentes. Así, en un edificio simétrico de varias plantas, cargado

simétricamente y sujeto a carga viva en claros alternos, pueden flexionarse considerablemente las columnas según una configuración simétrica, antes de que se presente la tendencia a que ocurran desplazamientos relativos de entrepiso por pandeo incipiente. El pandeo de entrepisos puede entonces exigir un cambio súbito de curvatura en la mitad de las columnas de un entrepiso, y es concebible que la resistencia a que ocurra este fenómeno incremente en grado sensible el factor crítico correspondiente. De hecho, en estas condiciones el pandeo individual de las columnas se convierte en un factor decisivo, contrastando con lo que ocurre en estructuras de comportamiento lineal.

### COMENTARIOS ADICIONALES SOBRE EL TRATAMIENTO INDIVIDUAL DE LAS COLUMNAS

Consideremos el entrepiso que muestra la fig. 10. Evidentemente la longitud efectiva de pandeo de la columna C será  $h$  mientras que para las columnas A, B, D y E será mayor que este valor. Sin embargo el tratamiento de las columnas como elementos individuales para tomar en cuenta los efectos de esbeltez como lo proponen algunos reglamentos, tomando en consideración solamente la rigidez de las vigas adyacentes a la columna en cuestión, asignaría a C una longitud efectiva infinita. Es más, dado que la columna C no ofrece restricción contra el desplazamiento lateral, los momentos de diseño de las otras cuatro columnas deberían sin duda ser una función creciente de la carga axial que porta C. Sin embargo, el tratamiento individual de las columnas nos llevaría a concluir que el diseño de A, B, D y E no se ve afectado por la carga que obra en C.

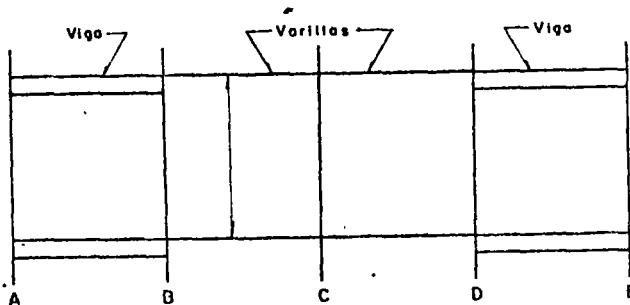


FIG. 10 Marco para el cual resulta inaplicable el tratamiento individual de las columnas

Una valoración crítica del tratamiento individual de las columnas trae consigo las conclusiones siguientes.

1. El método yerra del lado de la inseguridad en cuanto a que no da origen a un aumento en los momentos de diseño de las vigas al tomar en cuenta los efectos de esbeltez en marcos.

2. En marcos no contraventeados lleva generalmente al sobre-diseño de algunas columnas y a errores del lado de la inseguridad. Tratándose de marcos de acero el diseño del conjunto resulta ser conservador (siempre que las vigas posean suficiente capacidad), pero puede resultar excesivamente conservador, como sucede en el ejemplo de la fig. 10. En marcos irregulares de concreto reforzado la cuantificación errónea de los requisitos de diseño para las diversas columnas no necesariamente implica un aumento en el factor de seguridad global, ya que la redistribución que así se exige puede involucrar rotaciones plásticas excesivas en algunas secciones.
3. El método no es adecuado para analizar marcos en que se impiden los desplazamientos laterales.

### EJEMPLOS

*Ejemplo 1.* Emplee el método de solución por pasos sucesivos para calcular los desplazamientos relativos y rotaciones de nudo en el marco simétrico que muestra la fig. 11.

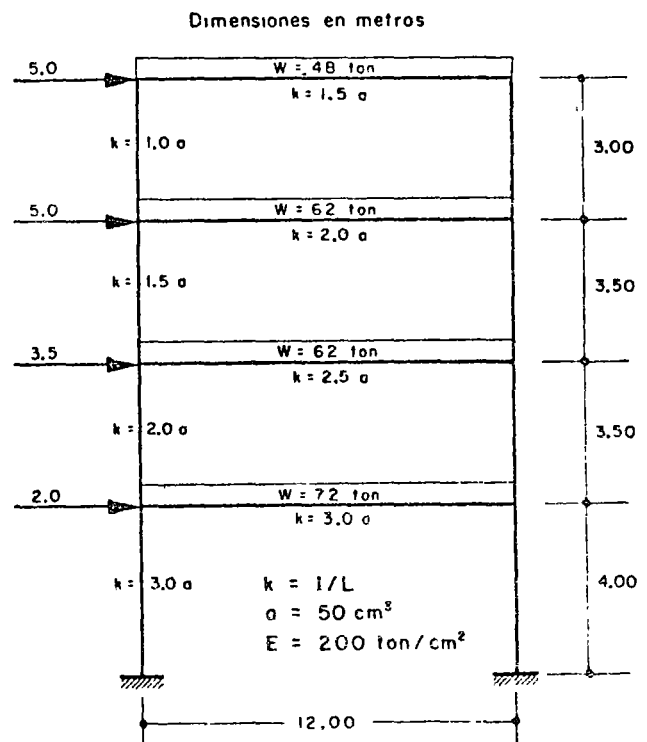


FIG. 11. Marco plano, simétrico de los Ejemplos 1, 2 u 4

*Solución.* Para aplicar la ec. 10 calculamos

$$A_1 = \frac{48 \times 300}{12 \times 2 \times 10^3 - 1.1 \times 48 \times 300}$$

$$= \frac{1}{24 \times 10^4 - 1.1 \times 48 \times 300} = 0.0642$$

De manera análoga,  $A_3 = 0.1212$ ,  $A_2 = 0.1455$ ,  $A_1 = 0.1593$ . Según la ec. 10,

$$(1 + 0.1926) 2 \times 10^4 \phi_3 = [18 \times 10^4 + (1 - 0.1926) 2 \times 10^4] \phi_4 - (1/2) 1.0642 \times 5.00 \times 300$$

de donde,

$$\phi_3 = 8.2235 \phi_4 - 0.03335$$

De la ec. 11,

$$\psi_1 = \frac{1500 + 6 \times 10^4 \times 2 (\phi_4 + 8.19 \phi_4 - 0.03335)}{24 \times 10^4 - 1.1 \times 48 \times 300} = 4.9376 \phi_4 - 0.0112$$

En forma semejante,

$$\phi_2 = 6.83 \phi_3 - 1.36 \phi_4 - 0.075 = 54.5746 \phi_4 - 0.2929$$

$$\psi_3 = 0.011 + 0.567 (\phi_2 + \phi_3) = 35.5877 \phi_4 - 0.1740$$

$$\phi_1 = 318.622 \phi_1 - 1.7988$$

$$\psi_2 = 216.461 \phi_4 - 1.2018$$

$$\psi_1 = 187.286 \phi_4 - 1.0469$$

En las bases empotradas de las columnas debemos tener

$$0 = (36 \times 10^4 + 0.5221 \times 6 \times 10^4 + 4 \times 10^4) \phi_1 - 4 \times 10^4 \phi_2 - (1/2) \{1.1593 \times 15.5 \times 400 + [13.5 + (216.461 - 1.2018) 172] 350\}$$

$$0 = 43.1326 \phi_1 - 4 \phi_2 - 651.55 \phi_4 + 2.8467 = 12873.1 \phi_4 - 73.5686$$

Por tanto,  $\phi_4 = 5.71 \times 10^{-3}$ . Al sustituir hallamos

$$\psi_1 = 0.0225, \quad \psi_2 = 0.0342,$$

$$\psi_3 = 0.0292, \quad \psi_4 = 0.0170,$$

$$\phi_1 = 0.0205, \quad \phi_2 = 0.0244, \quad \phi_3 = 0.0135$$

Notamos que se ha perdido bastante precisión al calcular diferencias pequeñas entre cantidades grandes. Este comentario no se aplica al método iterativo.

**Ejemplo 2.** Calcule los momentos en los extremos de los miembros del mismo marco empleando el método iterativo.

**Solución.** Sean  $\psi^* = E\psi$  y  $\phi^* = E\phi$ . Todos los momentos se darán en ton cm. Si impidiéramos la rotación de las columnas en todos los pisos encontraríamos los valores de  $\psi^*$  que lista la segunda columna de la siguiente tabla. Para el primer ciclo suponemos los valores de  $\psi^*$  de la tercera columna y calculamos los correspondientes de  $\psi^*$  y  $x$ .

Entrepiso	$\psi^*$ empotr.	$\psi^*$ supuesto	100 $\psi^*$	$x$ cm
4	1.25	3.0	1.50	4.50
3	1.94	4.0	2.00	7.00
2	1.96	4.4	2.20	7.70
1	1.72	3.5	1.75	7.00

Los momentos de entrepiso resultan ser

$$M_4 = (5.00 + 48 \times 1.5 \times 10^{-2}) 300 = 1716 \text{ ton cm}$$

$$M_3 = (10.00 + 110 \times 2.0 \times 10^{-2}) 350 = 4275 \text{ ton cm}$$

$$M_2 = (13.50 + 172 \times 2.2 \times 10^{-2}) 350 = 6055 \text{ ton cm}$$

$$M_1 = (15.50 + 244 \times 1.75 \times 10^{-2}) 400 = 7930 \text{ ton cm}$$

A continuación suponemos que los puntos de inflexión se hallan al centro de las columnas en los entrepisos 2, 3 y 4, y a 2/3 de la altura del primer entrepiso, medida desde la planta baja. Los momentos flexionantes y rotaciones de nudo calculados al finalizar el tercer paso del procedimiento se consignan en la fig. 12.

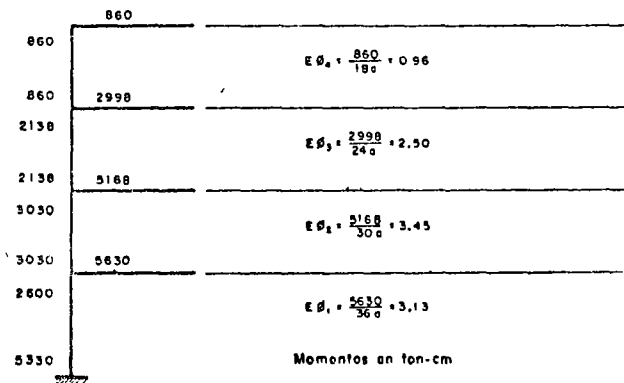


FIG. 12. Momentos flectores y rotaciones de nudo, tercer paso del primer ciclo, Ejemplo 2

El cuarto paso nos suministra

$$\psi^*_{4'} = \frac{5 \times 300 + 1.1 \times 48 \times 4.5}{12 \times 2a} + \frac{0.96 + 2.50}{2} = 3.18$$

$$\psi^*_{3'} = \frac{10 \times 350 + 1.1 \times 110 \times 7.0}{36a} + \frac{2.50 + 3.45}{2} = 5.33$$

$$\psi^*_{2'} = \frac{13.5 \times 350 + 1.1 \times 172 \times 7.7}{48a} + \frac{3.45 + 3.13}{2} = 6.06$$

$$\psi^*_1 = \frac{15.5 \times 400 + 1.1 \times 244 \times 7.0}{72a} + \frac{3.13}{2} = 3.81$$

Para el segundo ciclo elegimos desplazamientos parecidos a los obtenidos en el primer ciclo. Por consiguiente, en ton/cm<sup>2</sup>,  $\psi^*_4 = -3.18$ ,  $\psi^*_3 = 5.60$ ,  $\psi^*_2 = 6.10$ ,  $\psi^*_1 = 3.90$ , y en centímetros,  $x_4 = 4.77$ ,  $x_3 = 9.80$ ,  $x_2 = 10.70$ ,  $x_1 = 7.80$ . De aquí los momentos totales de entrepiso resultan ser  $M_4 = 1735$ ,  $M_3 = 4575$ ,  $M_2 = 6570$ ,  $M_1 = 8125$  ton cm, y también,  $\phi^*_4 = 0.965$ ,  $\phi^*_3 = 2.59$ ,  $\phi^*_2 = 3.69$ ,  $\phi^*_1 = 3.32$ .

El cuarto paso da los desplazamientos relativos, entre las correspondientes alturas de entrepiso,  $\psi^*_4 = 3.24$ ,  $\psi^*_3 = 5.75$ ,  $\psi^*_2 = 6.31$ ,  $\psi^*_1 = 3.94$ .

En este ciclo se aplicó el paso 5, que dio por resultados

$$\phi^*_4 = \frac{1735/2 + 2 \times 50 \times 2.50}{1000} = 1.12$$

$$\phi^*_3 = \frac{(1735 + 4575)/2 + 2 \times 50 \times 1.12 + 3 \times 50 \times 3.69}{29 \times 50} = 2.64$$

$$\phi^*_2 = \frac{(4575 + 6570)/2 + 3 \times 50 \times 2.64 + 4 \times 50 \times 3.32}{37 \times 50} = 3.58$$

$$\phi^*_1 = \frac{(6570 + 8125)/2 + 4 \times 50 \times 3.58}{46 \times 50} = 3.50$$

La aplicación de las ecuaciones de pendiente-deformación, partiendo de estas rotaciones de nudo, suministra los momentos que se muestran en la fig. 13. Notamos que éstos satisfacen las condiciones de equilibrio con una aproximación razonable.

Se llevó a cabo un tercer ciclo, comenzando con los valores de  $\psi$  arriba calculados. Se obtuvo  $M_4 = 1735$  ton cm,  $M_3 = 4600$ ,  $M_2 = 6625$ ,  $M_1 = 8120$ . Las rotaciones de nudo deducidas de los momentos extremos\* fueron  $\phi^*_4 = 1.13$ ,  $\phi^*_3 = 2.63$ ,  $\phi^*_2 = 3.63$ ,  $\phi^*_1 = 3.52$ .

En seguida se calculó  $\alpha$  en cada entrepiso empleando la relación  $\alpha = 1.2 - 0.2 \phi/\psi$ , donde  $\phi$  es el menor de los giros extremos en el entrepiso que se consideraba. Sin embargo, para el primer entrepiso se retuvo  $\alpha = 1.10$ :

$$\alpha_4 = 1.20 - 0.2(1.12/3.24) = 1.13, \\ \alpha_3 = 1.11, \quad \alpha_2 = 1.09, \quad \alpha_1 = 1.10$$

De aquí,  $\psi^*_4 = 3.35$ ,  $\psi^*_3 = 5.75$ ,  $\psi^*_2 = 6.38$ ,  $\psi^*_1 = 4.07$ . Los momentos de entrepiso correspondientes son

$$M_4 = 1745 \text{ ton cm (1500)} \\ M_3 = 4620 \text{ ton cm (3500)}$$

\* Los puntos de inflexión se supusieron de conformidad con el cálculo previo de momentos flectores.

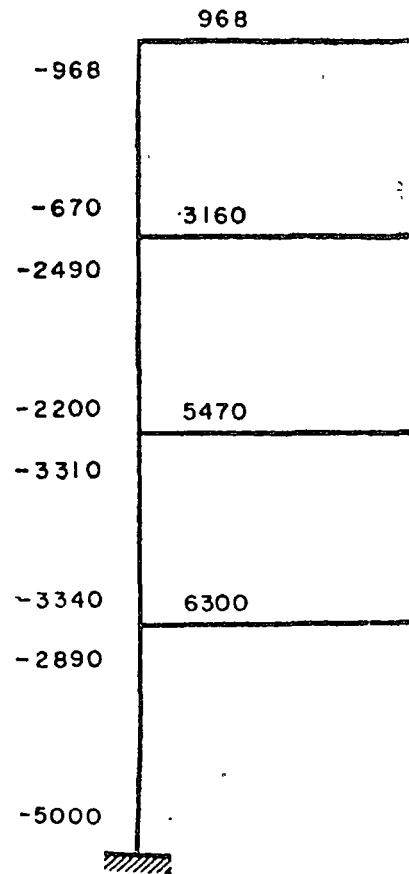


FIG. 13. Momentos al finalizar el segundo ciclo. Ejemplo 2

$$M_2 = 6650 \text{ ton cm (4725)} \\ M_1 = 8190 \text{ ton cm (6200)}$$

Las cifras entre paréntesis representan los momentos de entrepiso que se obtienen al despreciar los efectos de esbeltez. La fig. 14 suministra los momentos extremos calculados a partir de las ecuaciones de pendiente-deformación.

**Ejemplo 3.** Halle los momentos en los extremos de los miembros del marco asimétrico que se describe en la fig. 15. Las cargas son iguales a las de los ejemplos 1 y 2.

**Solución.** Bajo la hipótesis de rotaciones iguales en los nudos de un mismo piso, los valores de  $\phi$  y  $\psi$  para este marco serían idénticos a los que calculamos en el ejemplo anterior. De aquí obtenemos, en ton cm,  $M_4/3 = 583$ ,  $M_3/3 = 1540$ ,  $M_2/3 = 2220$ ,  $M_1/3 = 2730$ . La fig. 16 muestra los cálculos que se llevan a cabo con base en estos valores según el método de Gaspar Kani. La convergencia es rápida gracias a que los desplazamientos relativos de partida se hallan cercanos a los desplazamientos finales.

Los momentos de entrepiso pueden mejorarse para tener en cuenta las pequeñas variaciones que se encuentran en desplazamientos relativos. Dado que los cambios son pequeños bastará con suponer una variación proporcional. Los nuevos valores serán

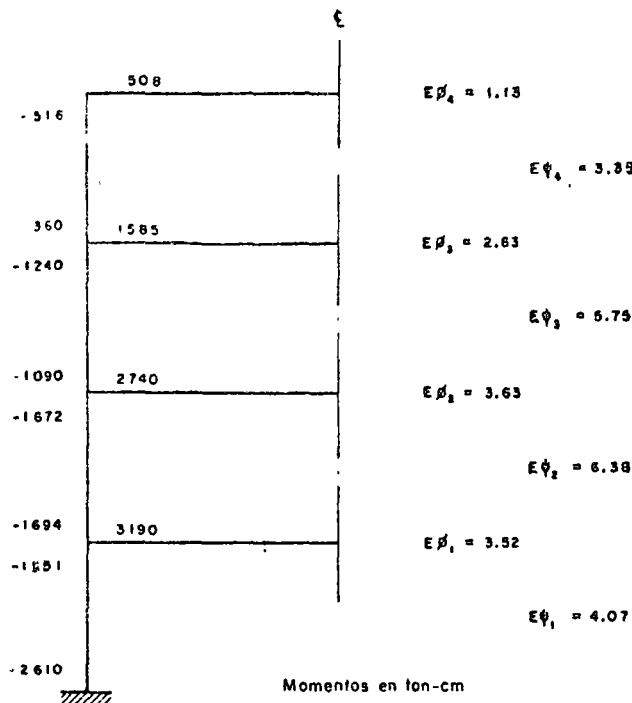


FIG. 14. Momentos finales. Ejemplo 2

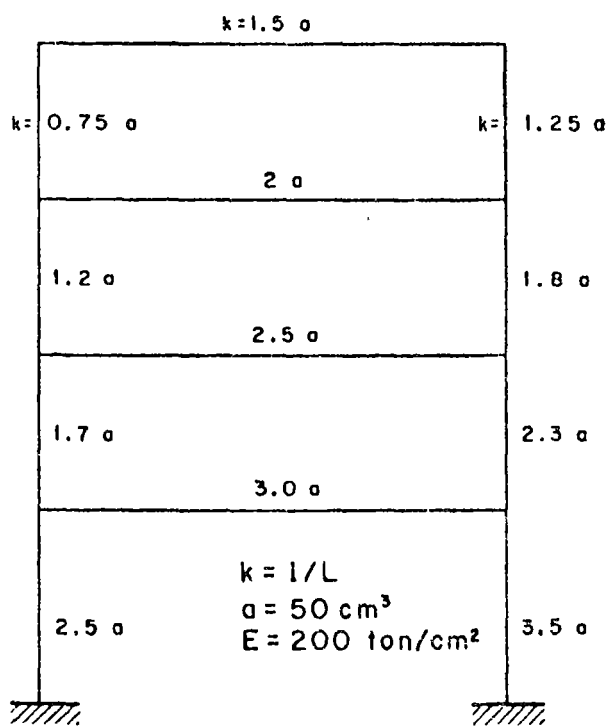


FIG. 15. Marco plano asimétrico del Ejemplo 3

$$M_4/3 = (1/3)[1500 + 300(0.805 \times 1300/1260)] = 583.5 \text{ ton cm}$$

Análogamente,  $M_1/3 = 1542$ ,  $M_2/3 = 2226$ ,  
 $M_3/3 = 2730 \text{ ton cm}$

Los momentos finales se muestran en la fig. 17.

Ejemplo 4. Calcule el factor de seguridad contra pandeo elástico del marco simétrico que aparece en la fig. 11 bajo la acción sola de cargas verticales. Emplee el método iterativo.

Solución. PRIMER PASO. Suponemos  $\psi^*_4 = 1.00$ ,  $\psi^*_3 = 1.72$ ,  $\psi^*_2 = 1.86$ ,  $\psi^*_1 = 1.20$ . Una serie de ciclos sucesivos demostró que la hipótesis inicial estaba seriamente errada. Al final del séptimo ciclo resultó  $\psi^*_4 = 1.00$ ,  $\psi^*_3 = 4.14$ ,  $\psi^*_2 = 7.00$ ,  $\psi^*_1 = 4.04$ . (De hecho la técnica de extrapolación de la delta cuadrada, aplicada a los primeros tres ciclos, suministró resultados muy próximos a los del séptimo ciclo.)

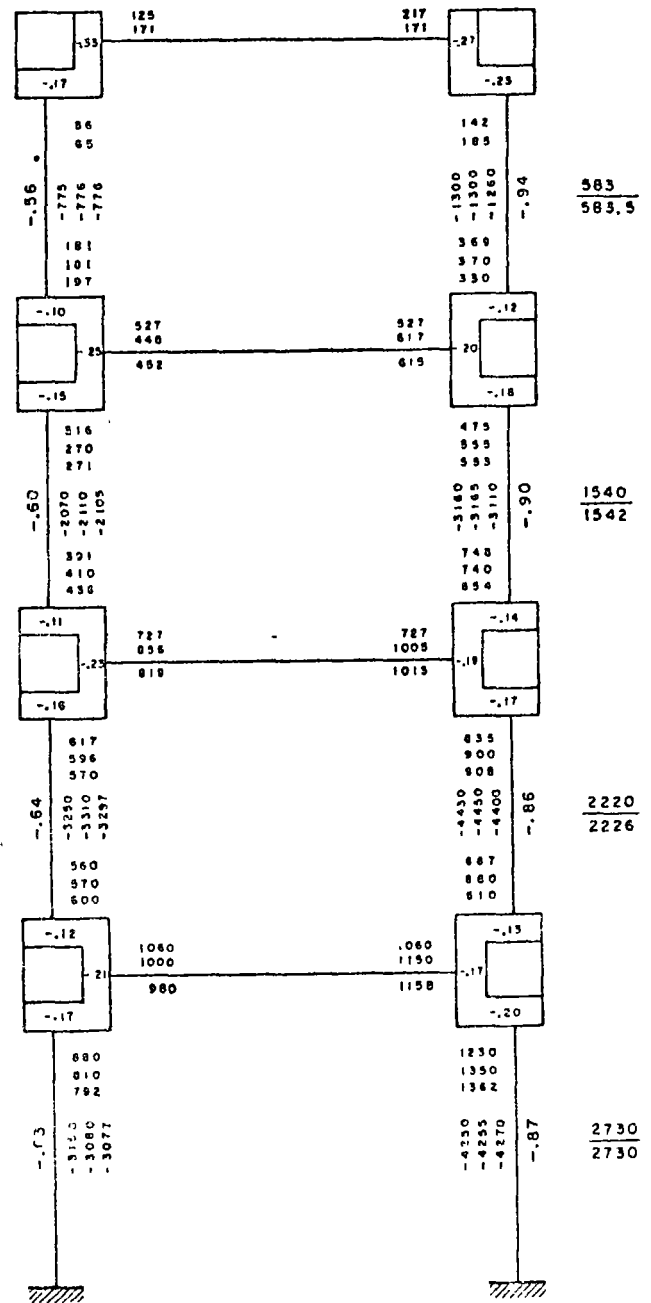


FIG. 16. Aplicación del método de Kani en el Ejemplo 3

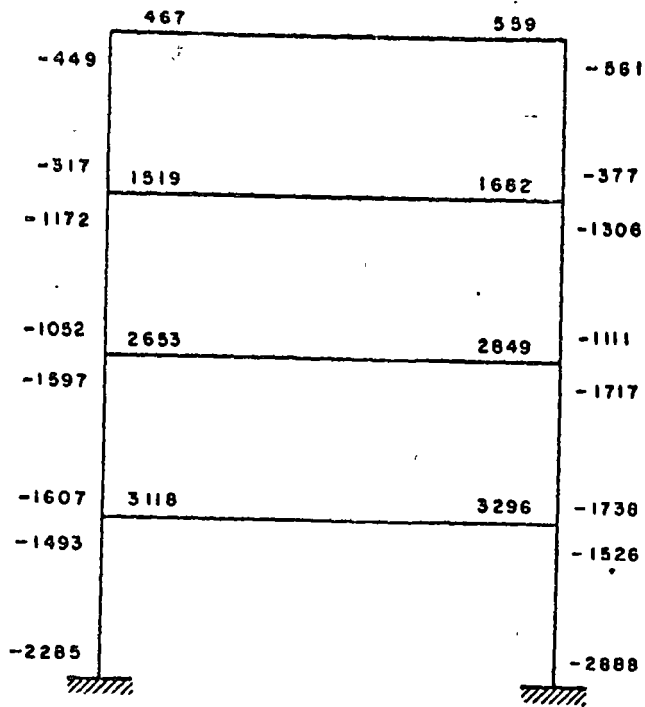


FIG. 17. Momentos finales, Ejemplo 3

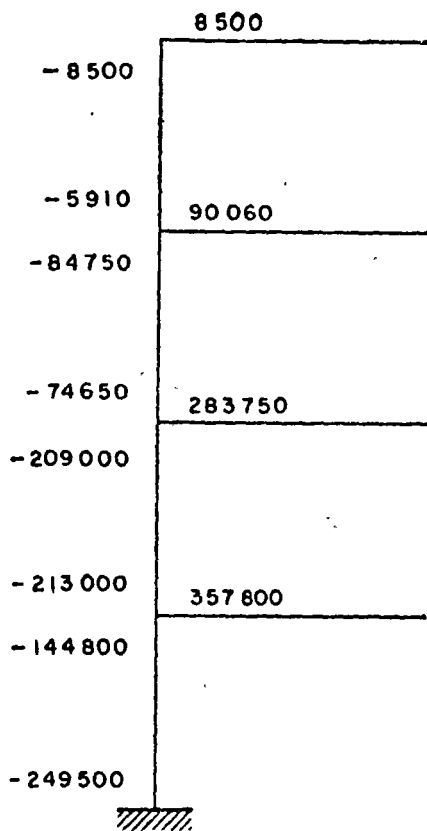
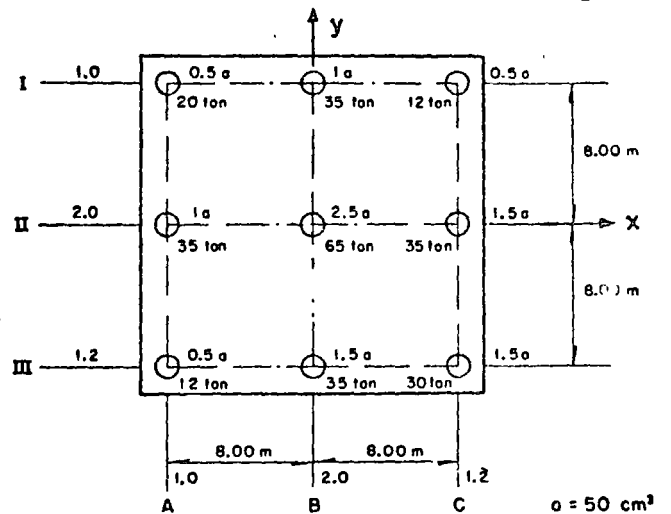


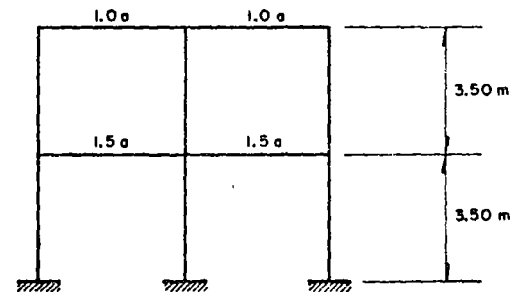
FIG. 18. Momentos al finalizar el segundo paso, Ejemplo 4

Los momentos de entrepiso correspondientes, en ton cm, son  $M_4 = 14,400 F$ ,  $M_3 = 159,400 F$ ,  $M_2 = 422,000 F$ ,  $M_1 = 394,000 F$ , donde  $F$  es el factor de seguridad que se desea conocer.

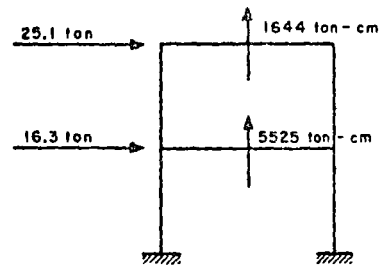
SEGUNDO PASO. Suponemos los puntos de inflexión en los mismos sitios que ante carga lateral. Hallamos así los momentos de la fig. 18.



a) Planta, losa de azotea



b) Rigideces de vigas, Marco A



c) Fuerzas laterales y momentos torsionantes

FIG. 19. Marco espacial de dos pisos, Ejemplo 5

TERCER PASO. De los momentos extremos calculamos

$$a\phi_4^* = 472 F, \quad a\phi_3^* = 3,750 F, \\ a\phi_2^* = 9,470 F, \quad a\phi_1^* = 9,935 F.$$

CUARTO PASO. Los desplazamientos relativos están dados por

$$aE\psi_4'/F = \frac{1.1 \times 14,400}{24} + 2111 = 2,771$$

$$aE\psi_3'/F = \frac{1.1 \times 159,400}{36} + 6,610 = 11,490$$



$$aE\psi_2'/F = \frac{1.1 \times 422,000}{48} + 9,645 = 19,335$$

$$bE\psi_1'/F = \frac{1.1 \times 394,000}{72} + 4,967 = 10,987$$

QUINTO PASO. Igualando los desplazamientos supuestos y los calculados obtenemos los factores de seguridad:

$$\psi_4 = \psi_4' : F = 3.61$$

$$\psi_3 = \psi_3' : F = 3.60$$

$$\psi_2 = \psi_2' : F = 3.62$$

$$\psi_1 = \psi_1' : F = 3.68$$

Por tanto,  $3.60 < F < 3.68$ . Un ciclo adicional da  $F = 3.63$ .

El resultado se comparó con el que suministra el método exacto de Merchant, el cual hace uso de las tablas de Livesley y Chandler<sup>24</sup> y consiste en estudiar la convergencia de un proceso de distribución de momentos ante una serie de factores de seguridad tentativos. El método de Merchant lleva a la conclusión de que  $3.60 < F < 3.66$ . Por consiguiente el método que propone el presente trabajo da resultados suficientemente precisos para la mayoría de las aplicaciones; es considerablemente más rápido y no requiere tablas especiales.

*Ejemplo 5.* La fig. 19a muestra una planta de un edificio de dos pisos soportado por marcos en ambas direcciones. En la figura se consignan las cargas axiales que obran en las columnas del entrepiso superior y las rigideces de dichos miembros estructurales en ese entrepiso. Las cargas que obran en el primer entrepiso son iguales a 2.46 veces los valores consignados. Las alturas de entrepiso y las rigideces de vigas para el marco A se muestran en la fig. 19b. Las rigideces de las vigas para los demás marcos son iguales a las que corresponden al marco A multiplicadas por los factores que aparecen en los ejes de la fig. 19a. Las rigideces de las columnas en el primer entrepiso valen 1.5 por las que muestra la fig. 19a. Calcule las rotaciones de nudo y los desplazamientos bajo el sistema de cargas verti-

cales que especifica la fig. 19a más las fuerzas laterales y momentos torsionantes de la figura 19c.

*Solución.* Las fórmulas de Wilbur suministran las siguientes rigideces para los marcos planos considerados individualmente, en ton/cm.

Marco.	Primer entrepiso	Segundo entrepiso
A y I	2.01	1.26
B y II	4.69	2.90
C y III	3.12	1.91

De aquí las siguientes rigideces de entrepiso para la estructura,

Segundo entrepiso,  $K_x = K_y = 6.07$  ton/cm

Primer entrepiso,  $K_x = K_y = 9.82$  ton/cm

Si tomamos los momentos estáticos de las cargas con respecto a los ejes que pasan por los marcos II y B encontramos que la resultante de las cargas verticales está en ambos entrepisos 29 cm hacia abajo del marco II y 29 cm a la derecha del marco B.

A partir de los momentos estáticos de las rigideces de los marcos planos encontramos el centro de torsión en el primer entrepiso a 91 cm hacia abajo y a la derecha de los marcos II y B respectivamente; en el segundo entrepiso estas distancias valen 86 cm en los mismos sentidos.

Los parámetros que intervienen en fórmulas valen:

Primer entrepiso

$$12 \Sigma (X^2 K_{1y}^e + Y^2 K_{1x}^e) = 12 \times 2 \times 10^8 \times (3 \times 68.5 + 6 \times 0.084 + 3.6 \times 59.5) = 1.01 \times 10^{12}$$

Segundo entrepiso

$$12 \Sigma (X^2 K_{2y}^e + Y^2 K_{2x}^e) = 24 \times 10^8 \times (137.0 + 0.4 + 143.0) = 6.72 \times 10^{11}$$

En resumen:

Parámetro	Primer entrepiso	Segundo entrepiso
$K_x$	$6.468 \times 10^6$ ton cm	$4.011 \times 10^6$ ton cm
$jW$	$4.526 \times 10^8$ ton cm <sup>2</sup>	$1.84 \times 10^9$ ton cm <sup>2</sup>
$\bar{X}$	62 cm	57 cm
$\bar{Y}$	- 62 cm	- 57 cm
$a_x = a_y$	7.66 ton/cm	5.19 ton/cm
$a_y$	$5.013 \times 10^6$ ton cm	$3.420 \times 10^6$ ton cm
$b_x = b_y$	- 609 ton	- 345 ton
$12 \Sigma K_{nx}^c = 12 \Sigma K_{ny}^c$	$189 \times 10^4$ ton cm	$126 \times 10^4$ ton cm
$12 \Sigma (X^2 K_{ny}^c + Y^2 K_{nx}^c)$	$1.247 \times 10^{12}$ ton cm <sup>3</sup>	$8.3 \times 10^{11}$ ton cm <sup>3</sup>
$12 \Sigma K_{nx}^e = 12 \Sigma K_{ny}^e$	$151 \times 10^4$ ton cm	$101 \times 10^4$ ton cm
$12 \Sigma (X^2 K_{ny}^e + Y^2 K_{nx}^e)$	$1.01 \times 10^{12}$ ton cm <sup>3</sup>	$6.72 \times 10^{11}$ ton cm <sup>3</sup>
$T_n$	7169 ton cm	1644 ton cm
$V_n$	41.4 ton	25.1 ton

Para el primer ciclo suponemos  $\psi_{1x} = 0.016$ ,  $x_2 = 5.6$  cm,  $\gamma_2 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\psi_{1x} = 0.016$ ,  $x_1 = 5.6$  cm,  $\gamma_1 = 8.5 \times 10^{-4}$ .  
PRIMER PASO (cálculo de momentos utilizando las ecs. 9'):

$$M_{1x} = 41.4 \times 350 + 688 (350 \times 0.016 - 62 \times 8.5 \times 10^{-4}) = 14500 + 3820 = 18320 \text{ ton cm}$$

$$M_{1y} = 0$$

$$T_1 = 7169 + 688 (-62 \times 0.016 - 62 \times 0) + \frac{4.526 \times 10^8 \times 8.5 \times 10^{-4}}{350} = 7169 - 680 + 1100 = 7589 \text{ ton cm}$$

$$M_{2x} = 25.1 \times 350 + 279 (350 \times 0.016 - 57 \times 5.0 \times 10^{-4}) = 8760 + 1550 = 10310 \text{ ton cm}$$

$$M_{2y} = 0$$

$$T_2 = 1644 + 279 (-57 \times 0.016 - 57 \times 0) + \frac{1.84 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-4}}{350} = 1644 - 255 + 263 = 1652 \text{ ton cm}$$

SEGUNDO PASO (cálculo de los giros utilizando las ecs. 8''):

Suponiendo los puntos de inflexión a  $0.6h$  para el primer entrepiso y a  $0.55h$  para el segundo entrepiso tendremos

$$\phi_{1x} = \frac{0.4 \times 18320 + 0.45 \times 10310}{1.51 \times 10^6} = \frac{7320 + 4630}{1.51 \times 10^6} = 7.88 \times 10^{-3}$$

$$\theta_1 = \frac{350 (0.4 \times 7589 + 0.45 \times 1652)}{1.01 \times 10^{12}} = \frac{350 (3030 + 742)}{1.01 \times 10^{12}} = 1.305 \times 10^{-6}$$

$$\phi_{2x} = \frac{0.55 \times 10310}{101 \times 10^4} = 5.61 \times 10^{-3}$$

$$\theta_2 = \frac{350 \times 0.55 \times 1652}{6.72 \times 10^{11}} = 4.71 \times 10^{-7}$$

TERCER PASO (cálculo de  $\psi$  y  $\gamma$  con las ecs. 8'):

Suponiendo  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_t = 1.1$  tendremos

$$\psi_{1x} = \frac{14500 + 1.1 \times 688 \times 5.6}{1.89 \times 10^6} + \frac{7.88 \times 10^{-3}}{2} = (9.88 + 3.94) \times 10^{-3} = 1.38 \times 10^{-2}$$

$$\gamma_1 = 350 \left[ \frac{7169 \times 350 + 1.1 \times 420 \times 350}{1.247 \times 10^{12}} + \frac{1.305 \times 10^{-6}}{2} \right] = 350 \times 10^{-6} (2.13 + 0.653) = 9.75 \times 10^{-4}$$

$$\psi_{2x} = \frac{8760 + 1.1 \times 279 \times 5.6}{1.26 \times 10^6} + \frac{(5.61 + 7.88) \times 10^{-3}}{2} = 10^{-2} (0.832 + 0.674) = 1.506 \times 10^{-2}$$

$$\gamma_2 = 350 \left[ \frac{1644 \times 350 + 1.1 \times 8 \times 350}{8.3 \times 10^{11}} + \frac{(1.305 + 0.471) \times 10^{-6}}{2} \right] = 350 \times 10^{-7} (6.95 + 8.88) = 5.52 \times 10^{-4}$$

Por tanto

$$x_1 = 1.38 \times 10^{-2} \times 350 = 4.82 \text{ cm};$$

$$x_2 = 1.506 \times 10^{-2} \times 350 = 5.26 \text{ cm}$$

En el segundo ciclo, primer paso, se obtiene

$$M_{1x} = 17860 \text{ ton cm}; \quad T_1 = 7836 \text{ ton cm}$$

$$M_{2x} = 10215 \text{ ton cm}; \quad T_2 = 1696 \text{ ton cm}$$

Haciendo un cálculo aproximado de la distribución de los momentos, se encontró que los puntos de inflexión se encuentran a  $0.55$  y a  $0.50$  de  $h$  para el primero y segundo entrepisos respectivamente, medidos a partir de su parte inferior. Por tanto en el segundo paso se llega a

$$\phi_{1x} = 8.65 \times 10^{-3}; \quad \theta_1 = 1.52 \times 10^{-6}$$

$$\phi_{2x} = 5.13 \times 10^{-3}; \quad \theta_2 = 4.33 \times 10^{-7}$$

En el tercer paso obtenemos

$$\psi_{1x} = 1.390 \times 10^{-2}; \quad x_1 = 4.87 \text{ cm};$$

$$\gamma_1 = 1.045 \times 10^{-3}$$

$$\psi_{2x} = 1.51 \times 10^{-2}; \quad x_2 = 5.29;$$

$$\gamma_2 = 5.92 \times 10^{-4}$$

En el tercer ciclo se llega a

$$M_{1x} = 17890 \text{ ton cm}; \quad T_1 = 7923 \text{ ton cm}$$

$$M_{2x} = 10243 \text{ ton cm}; \quad T_2 = 1715 \text{ ton cm}$$

$$\phi_{1x} = 8.72 \times 10^{-3}; \quad \theta_1 = 1.525 \times 10^{-6}$$

$$\phi_{2x} = 5.08 \times 10^{-3}; \quad \theta_2 = 4.47 \times 10^{-7}$$

$$\psi_{1x} = 1.395 \times 10^{-2}; \quad x_1 = 4.87 \text{ cm};$$

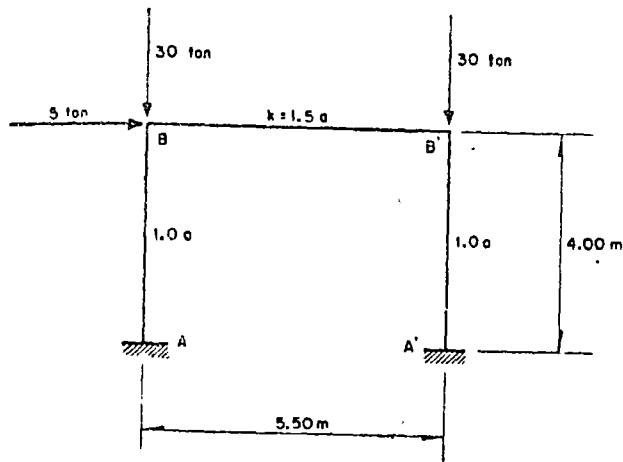
$$\psi_{2x} = 1.519 \times 10^{-2}; \quad x_2 = 5.31 \text{ cm};$$

$$\gamma_1 = 1.045 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_2 = 5.99 \times 10^{-4}$$

Debido a que los resultados de este ciclo se aproximan bastante a los del ciclo anterior, podemos dar por terminado el cálculo.

*Ejemplo 6.* El análisis elástico del marco que describe la fig. 20 suministró una rigidez lineal  $k_3 = 1.15$  ton/cm. El desplazamiento debido solamente a la carga lateral fue 4.32 cm, que se vio incrementado a 4.98 cm por acción de las cargas verticales. El momento de entrepiso se convirtió entonces en 2300 ton cm, y los momentos finales de nudo fueron



$$aE = 10^4 \text{ ton-cm}$$

FIG. 20. Marco plano del Ejemplo 6

$M_A = M_{A'} = 630 \text{ ton cm}$  y  $M_B = M_{B'} = 520 \text{ ton cm}$ . La relación II que aparece en la fig. 21 es una curva de tercer grado con pendiente inicial igual a  $k_0$ . Para esta relación se desea calcular el desplazamiento lateral del marco de la fig. 21.

**Solución.** El desplazamiento que se obtiene haciendo caso omiso de las cargas verticales vale 4.32 cm. Supongamos como primer tanteo  $x_w = 1.8 \text{ cm}$  o sea  $x = 1.80 + 4.32 = 6.12 \text{ cm}$ . De la curva II de la fig. 21 obtenemos  $V = 5.96 \text{ ton}$ , por lo cual,  $V_w = 5.96 - 5.00 = 0.96 \text{ ton}$ . Por tanto  $k_w = 0.96/1.8 = 0.532 \text{ ton/cm}$  y la fuerza cortante por carga vertical vale

$$V_w = \frac{1.1 \times 60}{350} 6.12 = 0.189 \times 6.12 = 1.16 \text{ ton}$$

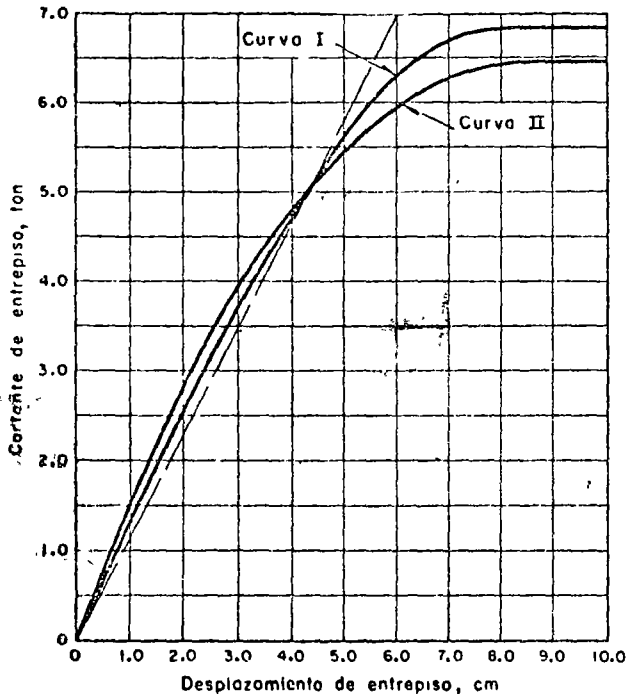


FIG. 21. Curvas cortante-desplazamiento, Ejemplos 6 y 7

Por tanto  $x_w = 1.16/0.532 = 2.17 \text{ cm} \neq 1.80$

El segundo ciclo lo comenzamos suponiendo  $x_w = 2.15 \text{ cm}$  por lo cual  $x = 6.47 \text{ cm}$ ,  $V_w = 1.15 \text{ ton}$ ,  $k_w = 1.15/2.0 = 0.575 \text{ ton/cm}$ ,  $V = 0.189 \times 6.47 = 1.22 \text{ ton}$  y  $x_w = 1.22/0.575 = 2.13 \approx 2.15$ . Por tanto  $x = 6.47 \text{ cm}$ .

**Ejemplo 7.** Las curvas I y II de la fig. 21 definen el comportamiento no lineal de los entrepisos primero y segundo, respectivamente, del marco que se muestra en la fig. 22. Calcule los desplazamientos relativos.

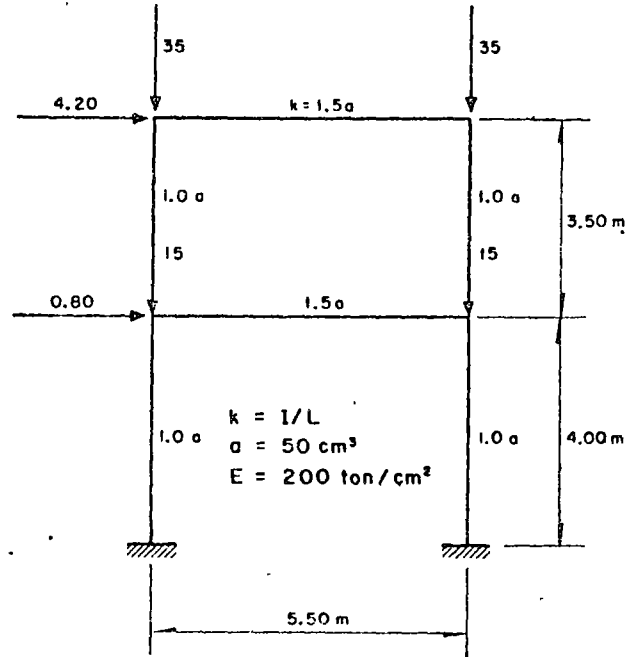


FIG. 22. Marco plano del Ejemplo 7

**Solución.** Utilizando las curvas I y II y despreciando inicialmente el efecto de las cargas verticales encontramos  $x_{v1} = 4.23 \text{ cm}$  y  $x_{v2} = 3.37 \text{ cm}$ .

Suponiendo para el segundo entrepiso  $x_{v2} = 1.40 \text{ cm}$  tendremos que  $x_2 = 1.40 + 3.37 = 4.77 \text{ cm}$  y por tanto, de la gráfica II se obtiene  $V_2 = 5.30 \text{ ton}$  o sea  $V_w = 5.30 - 4.20 = 1.10 \text{ ton}$  y  $k = 1.10/1.40 = 0.783$ . Por otra parte

$$V'_{v2} = \frac{V_2}{l_2} x_2 = \frac{1.1 \times 70}{350} 4.77 = 0.22 \times 4.77 = 1.05 \text{ ton}$$

$$\text{y } x_w = 1.05/0.783 = 1.34 \text{ cm} \neq 1.40$$

Suponiendo ahora  $x_{v2} = 1.25 \text{ cm}$  y procediendo análogamente se encuentra  $x = 4.62 \text{ cm}$ ,  $V_2 = 5.20 \text{ ton}$ ,  $V_{w2} = 1.0 \text{ ton}$ ,  $V'_{w2} = 1.01 \text{ ton} = V_{w2}$ . Por lo anterior, se tiene finalmente que  $x_2 = 4.62 \text{ cm}$ .

Para el primer entrepiso consideramos que

$$V'_{w1} > \frac{\alpha W_1 x_{pl}}{h_1} = \frac{1.1 \times 100}{350} 4.23 =$$

$= 0.314 \times 4.23 = 1.33$  ton, o sea  $V_1 > 1.33 + 5.00 = 6.33$ . En la gráfica I, para ese valor de  $V_1$  se debe tener  $x_1 = 6.30$  cm. Para este valor  $V'_{w1} = 0.314 \times 6.30 = 1.98$  y por tanto  $V_1 = 6.98 > 6.80 =$  cortante de fluencia del primer entrepiso. Por tanto la estructura es inestable.

## CONCLUSIONES

Se desarrollan en este trabajo métodos para el análisis de los efectos de esbeltez en estructuras elásticas. Se sostiene que sólo en raras ocasiones puede considerarse que existe una restricción efectiva contra desplazamientos laterales. Por ende, el análisis de marcos en los que se supone que no ocurre tal desplazamiento es principalmente sólo complementario del análisis de los efectos de esbeltez cuando se toma en cuenta el desplazamiento lateral.

Podemos clasificar los métodos desarrollados de acuerdo con su precisión y grado de refinamiento. El más sencillo de los métodos supone que las rigideces de entrepiso al corte son independientes de la distribución de fuerzas cortantes a lo alto del edificio. En este método los efectos de esbeltez equivalen a una reducción en la rigidez de entrepiso al corte de  $K$  a  $K - \alpha Wh$ , donde  $\alpha$  es un coeficiente que por lo general yace entre 1.0 y 1.1 y que nunca sobrepasa el valor 1.22;  $W$  es la carga vertical que obra desde la azotea hasta el entrepiso en cuestión, y  $h$  es la altura de entrepiso. Se concluye que la estructura se pandea ante cargas verticales cuando el factor de carga adquiere un cierto valor crítico, igual a  $Kh/\alpha W$ . Pueden incorporarse en este método los efectos de rotación de la cimentación y de cambios en las longitudes de las columnas adoptando una definición apropiada de la rigidez al corte.

Le siguen en refinamiento los métodos que se basan en la hipótesis de que todos los nudos de un mismo piso giran el mismo ángulo. Estos métodos constituyen adaptaciones del propuesto por Goldberg, Bogdanoff y Moh para el cálculo de modos naturales de vibración de marcos y de sus respuestas a vibraciones forzadas en estado estacionario. Se presentan aquí dos versiones de la adaptación. Una de ellas emplea un procedimiento de pasos sucesivos que constituye una extensión del método de Holzer. El otro procedimiento es de aproximaciones sucesivas y en ciertas fases del mismo puede verse como una forma del método de Stodola-Vianello-Newmark. Los métodos de este segundo grupo están limitados a marcos que constan sólo de vigas y columnas.

El tercer grupo de métodos combinan cualquiera de los anteriores con el procedimiento iterativo de Stodola-Vianello-Newmark y puede llevarse a cualquier grado de precisión que se desee.

En todos los casos los métodos desarrollados son apropiados para el cálculo de los efectos de esbeltez en estructuras sujetas a carga lateral y el cálculo de cargas de pandeo.

Posteriormente se generalizan los métodos a estructuras espaciales en las que puede presentarse acoplamiento de los desplazamientos en traslación y en rotación.

Se proponen métodos aproximados para el análisis de estructuras en las que puede haber interacción de la tendencia a pandeo individual de columnas y pandeo en entrepiso.

Pueden tratarse los problemas de vibración de conformidad con los mismos métodos, tanto cuando se desea calcular los modos naturales de vibración como cuando se analizan las respuestas a perturbaciones transitorias.

Se generaliza el primero de los métodos a estructuras de comportamiento no lineal. Puede entonces combinarse con la técnica de la energía de reserva para incluir en esta los efectos de esbeltez en el diseño sísmico de edificios.

Pueden introducirse simplificaciones en el análisis de estructuras inelásticas para obviar el cálculo de curvas completas de momento-desplazamiento, o de familias de estas relaciones en estructuras tridimensionales.

Bajo ciertas condiciones, el requisito de un cambio súbito en el signo de la curva de varias columnas de un mismo entrepiso puede llevar a que el pandeo individual de las columnas sea un factor dominante en el comportamiento de estructuras inelásticas.

## RECONOCIMIENTO

El autor agradece a L. Esteva y A. Martínez Márquez, investigadores del Instituto de Ingeniería, la lectura crítica del manuscrito de este trabajo, y a J.E. Goldberg y a P.M. Ferguson sus valiosas sugerencias. La solución de los ejemplos numéricos se debe a A. Martínez Márquez y a O. A. Rascón. El trabajo se preparó en parte como una contribución a los Comités ASCE-ACI 428 (Diseño Límite) y ACI 442 (Fuerzas Laterales en Edificios Altos) fue subvencionado por el Banco Nacional Hipotecario Urbano y de Obras Públicas.

## APENDICE-NOTACION

$$A_n = \frac{W_n h_n}{12 \sum K_n - \alpha_n W_n h_n}$$

$a_{x,n}, b_{x,n}$  = coeficientes en la ec. 14

$c$  =  $V/W$  (adimensional)

$E$  = módulo de elasticidad ( $kg/cm^2$ )

$F$  = factor crítico de carga (adimensional)  
 $h$  = altura de entrepiso (cm)  
 $I$  = momento de inercia de la sección transversal (cm<sup>4</sup>)  
 $j = \frac{1}{W} (\Sigma W_i Y_i^2 + \Sigma W_i \bar{Y}_i^2)$  (cm<sup>2</sup>)  
 $K$  = rigidez de entrepiso al corte (kg/cm) o  $EI/L$   
 $k = \frac{1}{2} \left( \frac{K_y}{\alpha_y} + \frac{K_x}{j\alpha_x} \right)$  (kg/cm)  
 $L$  = claro (cm)  
 $M$  = momento total de entrepiso (kg cm)  
 $P$  = carga en una columna (kg)  
 $T$  = momento torsionante de entrepiso (kg cm)  
 $V$  = cortante de entrepiso (kg)  
 $W$  = resultante de cargas verticales (kg)  
 $\bar{X}, \bar{Y}$  = coordenadas referidas a la línea de acción de las cargas verticales (cm)  
 $X, Y$  = coordenadas del centro de torsión (cm)  
 $x, y$  = proyecciones horizontales del desplazamiento relativo entre pisos consecutivos (cm)  
 $z$  = eje vertical (cm)  
 $\alpha$  = coeficiente que tome en cuenta la forma de los diagramas de momentos flexionantes en las columnas (adimensional)  
 $\gamma$  = rotación relativa entre pisos consecutivos (rad)  
 $\theta$  = cantidad proporcional a las rotaciones de nudo debidas a torsión de entrepiso (rad/cm)  
 $\xi$  = deflexión de una columna respecto al eje que liga sus extremos (cm)  
 $\phi$  = rotación de nudo (rad)  
 $\psi = x/h$  (adimensional)

Los índices  $v$  y  $w$  se refieren respectivamente a los factores de cargas laterales y verticales.

## REFERENCIAS

1. Merchant, W., "Critical loads of tall building frames", *Journ. Inst. of Struc. Engrs.*, (mar. 1955).
2. Ferguson, P. M. y Breene, J. R., "The Investigation of the Long Concrete Column as a Part of a Rectangular Frame", presentado ante la 59a. Convención Anual del ACI, Atlanta, Ga. (4-7 de mar. 1963).
3. Parme, A. L., Discusión de "Proposed Revision of Building Code Requirements for Reinforced Concrete

- (ACI 318-56)", *Proc ACI*, 59, 11 (nov. 1962), 1727-1736.
4. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", American Institute of Steel Construction (New York, adoptado el 30 de nov. 1961).
5. *ACI Standard Building Code Requirements for Reinforced Concrete* (ACI 318-63, jun. 1962), 43-44.
6. Ketchum, M. S., "The Design of Steel Mill Buildings", 5a. ed., McGraw-Hill Book Company, Inc. (1932), 91, 118.
7. Julian, O. G., Discusión de "Compression Members in Trusses and Frames" por G. Winter, The Philosophy of Column Design, *Proc. of the Fourth Tech. Session, CRC* (mayo 1954), p. 64.
8. Austin W. J., "Strength and Design of Metal Beam-Columns", *Proc. ASCE, Structural Div.*, 87 (abr 1961), p. 1.
9. Wilbur, J. B., "Distribution of Wind Loads to the Bents of a Building", *Journal of the Boston Society of Civil Engineers*, 22 (1955) p. 253.
10. Wilbur, J. B., y Norris, C. H., "Elementary Structural Analysis", 2a. ed., McGraw-Hill Book Company 1961.
11. Niles, A. S. y Newell, J. S., "Airplane Structures", 3a. ed. Vol. 2, John Wiley and Sons, Inc. (New York, 1955).
12. Newmark, N. M., "Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments and Buckling Loads", *Trans ASCE*, 108 (1943), 1161-1234.
13. Goldberg, J. E., Bogdanoff, J. L. y Moh, Z. L., "Forced Vibration and Natural Frequencies of Tall Building Frames", *Bull. SSA*, 49 (ene. 1959), 33-47.
14. Goldberg, J. E., "Wind Stresses by Slope Deflection and Converging Approximations", Trabajo No. 1878, *Trans. ASCE*, 99 (1934), p. 962.
15. Goldberg, J. E., "Natural Period of Vibration of Building Frames", Trabajo No. 6, *Proc. ASCE*, 36 (1939), p. 81.
16. Blume, J. A., Newmark, N. M. y Corning, L. H., "Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions", Portland Cement Association (Chicago 1961).
17. Lundquist, E. E., "Principles of Moment Distribution Applied to Stability of Structural Members", *Proc. Fifth Int. Cong. for App. Mech.*, Cambridge, Mass. (1938), p. 145.
18. Bolton, A., "A New Approach to the Elastic Analysis of Two-Dimensional Rigid Frames", *The Structural Engineer*, 30, 1 (ene. 1952).
19. Newmark, N. M., "A Simple Approximate Formula for Effective End Fixity", *Journ. Aeron. Sciences*
20. Jacobsen, L. S. y Ayie, R. S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill Book Company (1959).
21. Housner, G. W. y Outinen, H., "The Effect of Torsional Oscillations on Earthquake Stresses", *Bull. SSA*, 48 (1958), 221-229.
22. Esteve, L., Discusión a "Análisis de marcos mediante distribución de deformaciones", *Bol. Soc. Mex. de Ing. Sism.* 1, 2 (oct. 1963), 83-87.
23. Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", *Trans. ASCE*, 127, parte I (1962), 1406-1435.
24. Livesley, R. K. y Chandler, D. B., "Stability Functions for Structural Frameworks", Manchester University Press (1961).
25. Ketter, R. L., "Further studies of the strength of beam-columns", *Trans ASCE*, 1962, 127, parte II 244-266



# DISEÑO SÍSMICO. COMPORTAMIENTO NO LINEAL

Por Emilio Rosenblueth\*

## Introducción

Toda estructura se comporta de manera no lineal. Su tratamiento como sistema de comportamiento lineal es una mera idealización aproximada que en ciertas ocasiones y para ciertos fines puede resultar satisfactoria, mientras que otras idealizaciones lo serán más en circunstancias diferentes.

Las principales causas del comportamiento no lineal de estructuras sujetas a sismo son:

1. Criterios de falla
2. No linealidad geométrica
3. Relaciones esfuerzo-deformación
4. Deslizamientos en las conexiones

La primera causa equivale a no linealidad en las condiciones de frontera mientras las otras tres se reflejan en la vigencia de ecuaciones diferenciales no lineales. En cualquier caso el comportamiento no lineal invalida el análisis modal, que permite simplificar grandemente el análisis de los sistemas lineales. Pero en todos los casos, si está completamente especificado un movimiento sísmico y están totalmente especificadas las propiedades estructurales, es posible analizar las respuestas de esta con el grado de precisión que se desee empleando un método numérico adecuado, como puede serlo el beta de Newmark. La operación puede repetirse en computadoras para una familia suficientemente numerosa de temblores, analizarse estadísticamente los resultados y de allí calcularse la probabilidad de que falle la estructura. El proceso puede ser excesivamente engorroso, máxime que puede requerirse el análisis de diversas alternativas de diseño a fin de elegir la óptima. El propósito de los párrafos que siguen es dar soluciones aproximadas para los casos más frecuentes con objeto de evitar tal laboriosidad.

## Criterios de falla no lineales

La no linealidad en los criterios de falla se manifiesta de la manera más sencilla en una estructura con un grado de libertad, cuya relación fuerza-deformación es lineal pero cuya falla ocurre para deformaciones distintas, dependiendo del sentido de la deformación (fig 1). Tal puede ser el caso de la columna con ménsula que muestra la fig 2, cuando obran aceleraciones horizontales del terreno, o el de un voladizo sujeto a movimientos verticales del terreno, a menos que se refuerce estos elementos estructurales asimétricamente, justamente de manera que se contrarreste la asimetría que produce la aceleración de la gravedad. Independientemente de la forma que tenga la relación fuerza-deformación, la asimetría en cuanto al criterio de falla generalmente necesita tenerse en cuenta en el análisis de gran número de estructuras, tales como terraplanes, muros de contención y presas.

Cuando la relación fuerza-deformación es lineal y la única no linealidad radica en los criterios de falla se comete poco error tomando ambas deformaciones de falla iguales a la menor de ellas. Aun en el caso extremo de que una de estas sea infinita (lo que equivale a decir que la estructura sólo puede fallar en un sentido),

---

\* Instituto de Ingeniería, UNAM.

el error apenas sobrepasa un diez por ciento en promedio.

Otra manifestación de no linealidad debida a condiciones de falla puede estribar en que el modo de falla dependa de la combinación de modos naturales de vibración que cause la falla. En principio esta forma de no linealidad está presente en toda estructura que tenga más de un grado de libertad. Por ejemplo, un marco de dos pisos puede fallar ya sea en las columnas de planta baja o en las de planta alta. En general esta razón de no linealidad puede ignorarse por ser un modo de falla mucho más probable que cualquiera de los demás, bastando entonces con diseñar para el primero. Pero en casos extremos no sucede así. Puede haber, por ejemplo, una gama continua de modos de falla. Tal ocurre en una presa en arco cuya falla puede iniciarse en cualquier punto de una zona y como resultado de una combinación crítica de esfuerzos principales, estando tanto la ubicación precisa del punto donde se origina la falla como las direcciones de dichos esfuerzos condicionadas por las proporciones en que intervienen los diversos modos naturales de vibración. En tales casos puede aún emplearse el análisis modal si se lo combina con un artificio que acote la probabilidad de falla de la estructura, o bien acudirse a un procedimiento de simulación en que se analicen estadísticamente las respuestas estructurales a un gran número de sismos potenciales.

### No linealidad geométrica

El análisis elemental de las estructuras se basa en la premisa de que las deformaciones que estas sufren son suficientemente pequeñas como para que no se introduzcan errores excesivos suponiendo que las deformaciones no modifican la geometría inicial de las estructuras. En otras palabras, los esfuerzos y fuerzas generalizados se calculan como si las estructuras fuesen infinitamente rígidas.

A veces las deformaciones mencionadas son demasiado importantes como para despreciar sus efectos. Estos pueden asumir distintas formas, la más importante de las cuales consiste en desplazamientos de la estructura o deformaciones de sus miembros perpendicularmente a las líneas de acción de las fuerzas longitudinales. Suele hablarse entonces de "efectos de esbeltez" o "efectos  $P\Delta$ ". Estos se manifiestan en un alargamiento de los periodos naturales de vibración y en la aparición de momentos flectores secundarios. Los efectos de esbeltez se tratan en capítulo separado.

### Relaciones esfuerzo -deformación

La causa más frecuente del comportamiento no lineal de las estructuras radica en las relaciones no lineales entre esfuerzos y deformaciones de los materiales estructurales. Su importancia puede apreciarse por el hecho de que ordinariamente una estructura no sufre colapso sin que antes los materiales que la constituyen hayan excursionado en el rango de deformaciones no lineales, que suelen ser de dos a veinte veces mayores que las lineales, y porque esta forma de no linealidad puede traer consigo reducciones muy drásticas, hasta de orden de magnitud, en los esfuerzos debidos a sismo. Tan es así que la elección de materiales constructivos está regida en buena parte por su capacidad de deformarse fuera del rango lineal.

En muchos casos una aproximación satisfactoria a la relación esfuerzo-deformación que operará durante un sismo se obtiene llevando a cabo una prueba estática. Los efectos puramente dinámicos son significativos solo en contadas ocasiones y frecuentemente los incrementos en rigidez y resistencia atribuibles a velocidad de deformación se ven contrarrestados por el deterioro que originan la repetición de sollicitaciones que imponen los sismos.



## Deslizamientos en las conexiones

Este fenómeno se manifiesta de manera semejante a la no linealidad de las relaciones esfuerzo-deformación de los materiales desde el punto de vista de comportamiento estructural.

## Sistemas simétricos con un grado de libertad

Cualquiera que sea la causa de no linealidad comenzaremos por estudiar estructuras provistas de un solo grado de libertad y cuya relación fuerza-deformación es simétrica con respecto al origen tanto en primera aplicación de carga como en ciclos subsecuentes de carga y descarga (fig 3). Para estas estructuras puede estimarse un límite superior aproximado a su respuesta sísmica si se conoce el espectro de respuestas lineales correspondiente al temblor que interesa. Este límite es la mínima de las siguientes deformaciones:

1. La máxima deformación espectral
2. La deformación requerida para que el área bajo la curva fuerza-deformación correspondiente a primera aplicación de carga sea igual a  $(1/2)MV_{max}^2$ , donde  $M$  es la masa de la estructura y  $V_{max}$  es la máxima ordenada en el espectro de pseudovelocidades
3. La deformación requerida para que en la curva correspondiente a primera aplicación de carga la fuerza alcance el valor  $A_{max}M$ , donde  $A_{max}$  es la máxima ordenada del espectro de aceleraciones o de pseudoaceleraciones

Con referencia a la fig 4, que representa la curva fuerza-deformación correspondiente a primera aplicación de carga en alguna estructura, la máxima ordenada del espectro de deformaciones podría ser igual a  $y_1$ ; la deformación requerida para que el área bajo la curva fuese igual a  $(1/2)MV_{max}^2$  podría ser  $y_2$ , y la deformación asociada a la fuerza  $A_{max}M$  podría ser  $y_3$ . En este caso  $y_2$  sería la mínima de las tres deformaciones. Podríamos asegurar que la máxima deformación que sufriría esta estructura al actuar el temblor en cuestión no sería mucho mayor que  $y_2$  y muy probablemente sería menor que este límite aproximado.

Hasta aquí no se ha hecho mención del amortiguamiento dependiente de la velocidad de deformación que pudiese tener la estructura. Cualquiera que este sea, el límite aproximado que se ha descrito es válido si se toma como base de comparación el espectro lineal de respuestas correspondiente a amortiguamiento nulo. Si la estructura que interesa puede idealizarse como en la fig 5, en la que el amortiguamiento dependiente de la velocidad de deformación es lineal, y si la rigidez tangente es siempre igual o menor que la rigidez que corresponde a deformaciones pequeñas (como sucede en las figs 3 y 4 por ejemplo), puede afinarse el límite superior acudiendo al espectro lineal para el porcentaje de amortiguamiento que tendría una estructura de comportamiento lineal con rigidez igual a la rigidez tangente inicial de la estructura en cuestión y un amortiguador igual al de esta estructura.

Consideremos ahora una familia de estructuras cuya relación fuerza-deformación en primera aplicación de carga es de la forma

$$y = \alpha Y(\beta F) \quad (1)$$

donde

y = deformación

Y = Y(βF) = función de βF

α, β = constantes para cada estructura

Si variamos el producto αβ cambiamos las rigideces de la estructura. Al hacer αβ tender a cero dichas rigideces tienden a infinito. Cualquiera que sea la función Y, la aceleración absoluta máxima que desarrolla entonces la estructura como respuesta a un temblor tiende a la aceleración máxima que experimenta el terreno durante ese sismo, llamémosla a, siempre que la forma de Y y el valor de β sean tales que la estructura es capaz de resistir la fuerza αM. Por ejemplo, si empezamos con la relación 1, bilineal con endurecimiento a la deformación, que muestra la fig 6, y disminuimos α conservando β constante, generamos la relación 1'. La estructura correspondiente es capaz de resistir la fuerza αM mostrada en la figura; por tanto la aceleración máxima que desarrollará tenderá a αM al hacer α tender a cero. En cambio la relación elastoplástica (2) y la bilineal con ablandamiento a la deformación (3) no alcanzan sino una fuerza máxima α'M < αM; por consiguiente al disminuir α y generar las relaciones 2' y 3' tenderemos a estructuras que serán capaces de desarrollar una aceleración máxima a', y la estructura con ablandamiento a la deformación fallará ante la acción del sismo de que se trata. Si ahora disminuimos el valor de β de manera que todas las estructuras puedan resistir fuerzas superiores a αM (relaciones 1", 2" y 3"), todas responderán con una aceleración máxima igual a a.

En forma análoga, si hacemos αβ tender a infinito producimos estructuras cada vez más flexibles. Su deformación máxima en valor absoluto, como respuesta a un temblor, tiende al desplazamiento máximo que experimenta el terreno durante ese movimiento siempre que la función Y y el parámetro α sean tales que la estructura sea capaz de desarrollar dicha deformación.

Las aproximaciones asintóticas descritas son aplicables a estructuras excepcionalmente rígidas o excepcionalmente flexibles. En el rango intermedio, más usual de rigideces vale una aproximación sumamente burda. Esta consiste en igualar la deformación máxima con que la estructura responde a un temblor con (1/2)M $\bar{V}$ <sup>2</sup>, donde  $\bar{V}$  es el valor medio de las pseudovelocidades espectrales, para estructuras de comportamiento lineal, en el intervalo de periodos naturales comprendido entre T<sub>av</sub> y T<sub>vd</sub>. Aquí,

$$T_{av} = 2\pi v/a \tag{2}$$

$$T_{vd} = 2\pi d/v \tag{3}$$

donde a, v y d son respectivamente la aceleración, velocidad y desplazamiento máximos del terreno; es decir, en la representación logarítmica usual T<sub>av</sub> es el periodo que corresponde a la intersección de las rectas que representan a y v mientras T<sub>vd</sub> lo es de las rectas que representan v y d (fig 7). Como se explicó a propósito del límite superior (1/2)M $\bar{V}$ <sup>2</sup><sub>max</sub>, para ciertas estructuras no lineales procede usar el espectro lineal que corresponde al porcentaje de amortiguamiento que tiene la estructura dada en el rango de deformaciones pequeñas.

La aproximación citada es en general muy poco precisa debido a que prácticamente no hemos impuesto limitación a las relaciones fuerza-deformación de la estructura. Al tipificar dichas relaciones hallaremos criterios aproximados más satisfactorios.

## Estructuras histeréticas

Se dice que una estructura es del tipo histerético cuando su relación fuerza-deformación en ciclos sucesivos de carga y descarga es estable y encierra un área finita, llamada histerética (fig 8). Si una estructura de este tipo está sujeta a una perturbación armónica estacionaria puede estimarse la amplitud de su respuesta con relativamente buena aproximación haciendo uso de una estructura "equivalente" de comportamiento lineal. Esta segunda estructura es equivalente en el sentido de que la amplitud de su respuesta ante las perturbaciones que se consideran será sensiblemente igual a la de la estructura no lineal dada. Sin embargo el desfaseamiento con respecto a la perturbación será distinto en las dos estructuras. El presente método es aplicable ya sea que la perturbación consista en una fuerza periódica impuesta o en una oscilación de la base de la estructura.

El sistema equivalente se puede caracterizar por su masa, rigidez y grado de amortiguamiento. Como masa tomaremos la que tiene la estructura no lineal. Como rigidez la rigidez secante de esta, correspondiente a la amplitud de su respuesta, como se muestra en la fig 8, por lo que el presente método requerirá de tanteos o aproximaciones sucesivas. El amortiguamiento equivalente se elegirá de modo que la energía disipada por amortiguamiento viscoso en cada ciclo, en resonancia, sea igual a la que por histéresis disipa la estructura no lineal. De esta manera se encuentra el grado de amortiguamiento equivalente

$$\zeta = \frac{H}{2\pi Ky^2} \quad (4)$$

donde H es el área histerética, K la rigidez secante y  $y$  la amplitud de oscilación;  $Ky^2/2$  es la llamada energía de deformación.

El valor máximo que puede asumir  $\zeta$  en la ec 4 corresponde a un ciclo rectangular de histéresis. Para este,  $H = 4Ky^2$ , así que  $\zeta = 2/\pi = 63.7$  por ciento.

Si el sistema no lineal tiene un amortiguador lineal en paralelo con sus elementos flexibles (los que dan origen a las curvas de la fig 8), puede calcularse el grado de amortiguamiento que corresponde a la rigidez K, y este debe adicionarse al que suministra la ec 4.

Tratándose de perturbaciones transitorias, H, K y  $\zeta$  varían de un ciclo a otro, así que tanto la rigidez como el amortiguamiento equivalentes han de obtenerse promediando en el intervalo de valores de  $y$  comprendidos entre cero y la respuesta máxima, calculándose ésta nuevamente por tanteos o iterativamente y teniendo en cuenta que el periodo natural equivalente resulta asimismo depender de  $y$ . Una manera expedita de proceder se ilustra en la tabla 1. Consiste en asignar a  $y$  una serie de valores uniformemente crecientes (col 1); calcular la rigidez (col 2) y el amortiguamiento (col 3) equivalentes; promediar los valores calculados de K (col 4); calcular los correspondientes del periodo natural (5); promediar los amortiguamientos equivalentes (col 6), y obtener las ordenadas espectrales correspondientes, es decir, la deformación espectral que corresponde al periodo natural de la col 5 y amortiguamiento de la 6 (col 7); el cálculo se interrumpe cuando esta deformación resulta menor que  $y$ . Para el ejemplo de la tabla 1 la respuesta aproximada de la estructura histerética es 1.18 cm. En este ejemplo se supuso que no existe amortiguamiento dependiente de la velocidad de deformación.

### Estructuras elásticas no lineales

Un tipo particular, degenerado, de estructuras histeréticas, es la estructura elástica. En ella el área histerético es nula y las curvas de carga y descarga coinciden en una sola. Para un análisis aproximado es aplicable el método descrito en los párrafos que anteceden. La ec 4 arroja el resultado  $\xi = 0$ , así que el único amortiguamiento que halla es el dependiente de la velocidad de deformación.

Para estructuras con ablandamiento a la deformación este procedimiento tiende a dar errores del lado de la inseguridad. Para estructuras con endurecimiento a la deformación tiende, por el contrario, a errar del lado de la seguridad. Ello se debe a que las frecuencias dominantes de los temblores se desplazan generalmente hacia valores más pequeños a lo largo de los mismos a la vez que tiende a crecer la amplitud de las respuestas estructurales y a variar acordemente su periodo natural equivalente.

Las estructuras de este tipo, con ablandamiento a la deformación, aproximan el comportamiento de aquellas estructuras de concreto presforzado cuya no linealidad obedece primordialmente a la aparición de grietas por flexión, las cuales se cierran al cesar los momentos que las originaron. Los efectos de no linealidad geométrica también se manifiestan en elasticidad no lineal cuando van acompañados de deformaciones dentro del rango lineal de los materiales.

### Estructuras tipo Masing con esqueleto Ramberg-Osgood

Otra forma particular de comportamiento histerético la constituye la llamada del tipo Masing. Se dice que una estructura exhibe este tipo de comportamiento cuando las curvas de descarga y reaplicación de carga obedecen a expresiones de la forma

$$\frac{|y-y_1|}{2} = y_0 \left( \frac{|F-F_1|}{2} \right) \quad (5)$$

dato que la curva correspondiente a primera aplicación de carga -- llamada esqueleto -- es

$$y = y_0(F) \quad (6)$$

En otras palabras, la descarga y reaplicación de carga obedecen a la misma relación que la primera aplicación de carga salvo que las escalas de fuerzas y de deformaciones han de duplicarse.

Consideremos en particular aquellas estructuras de tipo Masing cuyo esqueleto es del tipo propuesto por Ramberg y Osgood:

$$\left| \frac{y}{y_y} \right| = \left| \frac{y_0}{y_y} \right| = \left| \frac{F}{F_y} \right| + \alpha \left| \frac{F}{F_y} \right|^r \quad (7)$$

donde  $y_y$ ,  $F_y$ ,  $\alpha$  y  $r$  son constantes positivas; las primeras dos pueden verse como las coordenadas de un punto convencional de fluencia (fig 9).

Si  $\alpha = 0$  o  $r = 1$ , la ec 7 degenera en la de una estructura elástica lineal. Si  $r = \infty$ , la ec 7 se convierte en una relación fuerza-deformación elastoplástica.

Las relaciones examinadas suministran buenas aproximaciones para el comporta-

miento de una extensa gama de estructuras de interés práctico. Esto es cierto en mayor grado para la idealización de Masing cuando no se la restringe a esqueletos del tipo Ramberg-Osgood. Desde luego el método general que presentamos para estructuras histeréticas es aplicable a las de tipo Masing. Pero cuando además el esqueleto es del tipo Ramberg-Osgood cabe un método aun más sencillo, si bien su aproximación es poco menos buena que la del método más general, sobre todo cuando se trata de sistemas sumamente rígidos o excepcionalmente flexibles. Este segundo procedimiento consiste en adoptar como sistema lineal equivalente uno que posee el mismo periodo natural y grado de amortiguamiento que la estructura no lineal en cuestión para deformaciones infinitesimales. En otras palabras la masa del sistema lineal equivalente es igual a la de la estructura que interesa; su rigidez es igual a la rigidez tangente inicial de esta, y no se tiene en cuenta el amortiguamiento histerético.

En el rango intermedio de periodos naturales de la estructura equivalente ( $T_{av} \leq T \leq T_{vd}$ ) esta aproximación tiende a errar del lado de la seguridad cuando  $\zeta$  es muy pequeño o nulo. La aproximación mejora para valores mayores de  $\zeta$ , digamos del orden de diez por ciento.

El mismo criterio aproximado es aplicable a estructuras del tipo Masing con esqueleto bilineal cuya segunda rigidez es positiva y menor que la primera (fig 10).

Sea  $\mu$  el factor de ductilidad, es decir, la deformación máxima que desarrolla una estructura en respuesta a un temblor dividida entre la deformación de fluencia. Si bien en varios de los modelos matemáticos que hemos venido manejando no hay un límite superior a la deformación que son capaces de desarrollar las estructuras sin fallar o cambiar drásticamente su comportamiento, en la práctica existe tal deformación límite. Una manera aproximada de incorporar esta limitación sin complicar en exceso los modelos consiste en caracterizar cada estructura de interés por un factor de ductilidad máximo que puede desarrollar. El tratamiento es aproximado ya que el factor de ductilidad límite depende del número de ciclos de carga alternante y, antes de que falle una estructura, su relación fuerza-deformación suele diferir apreciablemente de los modelos sencillos que hemos considerado. Mas la información disponible permite en muchos casos hacer estimaciones realistas, ligeramente conservadoras, de la  $\mu$  máxima que conduce a una buena aproximación de la probabilidad de que la estructura en cuestión sobreviva una perturbación dada.

Según el criterio aproximado que describimos, una estructura elastoplástica desarrolla una aceleración máxima igual a la requerida para hacerla fluir y una deformación máxima igual a  $\mu$  veces la de fluencia (fig 11). De aquí que la aceleración máxima que pueda desarrollar sea igual a  $1/\mu$  veces la que desarrolla la estructura lineal equivalente. Si la estructura se diseña con aceleraciones reducidas como si su comportamiento fuese el de la estructura lineal -- como implican los reglamentos de construcción --, las deformaciones que se calculan han de multiplicarse por  $\mu$ . Este hecho es importante cuando han de calcularse holguras entre elementos estructurales y no estructurales para evitar daños a estos y para evitar la aparición de torsiones y otros efectos indeseables prevenientes de la participación de elementos rígidos que no forman parte de la estructura analizada, así como cuando se calcula la separación que ha de dejarse entre estructuras contiguas para evitar que choquen una contra otra.

Tratándose de estructuras elastoplásticas sumamente rígidas vale la aproximación consistente en asimilarlas a estructuras rigidoplásticas, es decir con relación

fuerza-deformación como la que se muestra en la fig 12. Para estas, si se iguala su energía de deformación a la de una estructura lineal equivalente según el criterio general que presentamos con anterioridad, se encuentra que la deformación máxima en valor absoluto, como respuesta a un sismo con aceleración y velocidad máximas del terreno iguales respectivamente a  $a$  y  $v$ , vale aproximadamente

$$D = \begin{cases} 0.24 \frac{v^2}{a_0} & \text{si } a > a_0 \\ 0 & \text{si } a \leq a_0 \end{cases} \quad (8)$$

donde  $a_0$  es la aceleración requerida para hacer fluir la estructura. Sin embargo,  $D$  no es apreciablemente mayor que el desplazamiento máximo del terreno. Para valores elevados de  $a/v$  la ec 8 yerra del lado de la seguridad y ha de sustituirse por

$$D = \begin{cases} \frac{v^2}{2a_0} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) & \text{si } a \geq a_0 \\ 0 & \text{si } a \leq a_0 \end{cases} \quad (9)$$

### Estructuras contraventadas con elementos esbeltos o ancladas con pernos

Consideremos un marco articulado contraventado mediante cruces de San Andrés (fig 13) cuyos elementos diagonales sean tan esbeltos que solo puedan tomar tensión. Si dichos elementos se comportan elastoplásticamente la relación fuerza-deformación de la estructura será como se esquematiza en la fig 14. Estas estructuras disipan menos energía por deformación inelástica que las estructuras elastoplásticas con igual esqueleto. Por tanto sus respuestas son en general mayores que las de estas. De manera aproximada se pueden estimar igualando la energía de deformación a la que desarrolla la estructura lineal equivalente. Esta energía vale  $KD_e^2/2$ , donde  $K$  es la rigidez inicial y  $D_e$  es la deformación espectral de la estructura lineal equivalente. Para la estructura de interés la energía de deformación vale  $F_y D - F_y y_y/2 = K_y (D - y_y/2)$ . Pero  $y_y = D/\mu$ . Por tanto,

$$\frac{D_e^2}{2} = \frac{D^2}{2\mu} \left(2 - \frac{1}{\mu}\right)$$

De aquí,

$$\frac{D}{D_e} = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} \quad (10)$$

Este cociente es mayor que uno si  $\mu > 1$ . Por ejemplo, vale 1.67 para  $\mu = 5$ .

Al mismo resultado se llega para una torre del tipo de una chimenea si su resistencia al volteo está regida exclusivamente por pernos de anclaje de comportamiento elastoplástico.

Cuando existen otras fuerzas restitutivas en adición a los contravientos o a los pernos, la ec 10 puede errar del lado de la seguridad pero su aplicación suministra una guía para estimar el valor de  $D$ .

### Estructuras asimétricas con un grado de libertad

De las estructuras de este tipo vamos a confinar nuestra atención a las rigido-

plásticas. Estas no necesitan ser muy asimétricas para que su respuesta sísmica sea, en sentido estadístico, casi la misma que la de una estructura que solo pueda fluir en un sentido (fig 15). Bajo estas circunstancias un análisis semiempírico arroja el siguiente resultado aproximado.

$$D = \begin{cases} \frac{2v^2}{a_0} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)^2 & \text{si } a \geq a_0 \\ 0 & \text{si } a \leq a_0 \end{cases} \quad (11)$$

### Estructuras con varios grados de libertad

Tratándose de estructuras "bien diseñadas", en el sentido de que desarrollen sensiblemente el mismo factor de ductilidad en un número extenso de grados de libertad cuando actúa el sismo de interés, son aplicables en forma toscamente aproximada las conclusiones que presentamos para las estructuras que tienen un solo grado de libertad. Sin embargo, es difícil lograr esta condición en la práctica. Incluso una estructura puede satisfacer esta condición para un temblor de diseño y no para otro. Cuando no se satisface la limitación mencionada, sea porque una porción pequeña de la estructura está subdiseñada o porque el resto está sobrediseñado o por ambas causas, la mayor parte de la energía que haya de disiparse por deformación inelástica necesitará corresponder a deformaciones inelásticas de la porción subdiseñada (o no sobrediseñada) y en general demandará factores de ductilidad locales sumamente elevados.

Es tanto más probable que se presente esta situación desfavorable cuanto mayor es el número de grados de libertad de la estructura. De aquí que se encuentren reglamentos de construcción en que las aceleraciones espectrales de diseño descieran con el periodo natural más gradualmente que lo que indican los espectros lineales disponibles. Así el Uniform Building Code especifica coeficientes de cortantes baseles inversamente proporcionales a la raíz cúbica del periodo fundamental, siendo que los espectros de aceleración en terreno firme descanden en proporción inversa a la primera potencia de dicho periodo. De esta manera se introducen errores conscientes del lado de la seguridad, respecto a los resultados de análisis dinámicos lineales afectados por  $1/\mu$ , tanto mayores cuanto más largo es el periodo fundamental, y esto tiende a tener en cuenta el número de pisos del edificio de interés, pues en términos generales el periodo fundamental aumenta con el número de pisos.

Actualmente la única manera fidedigna para analizar estructuras no lineales con varios grados de libertad, sin caer en procedimientos tan burdos como el descrito, consiste en someter en computadora a la estructura a un gran número de temblores reales o simulados y analizar estadísticamente los resultados.

A pesar de esta observación, valen las aproximaciones presentadas para estructuras con un grado de libertad cuando su rigidez o su flexibilidad tiende a infinito.

### Referencia

N.M. Newmark y E. Rosenblueth, Fundamentals of earthquake engineering, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J, 1971, cap 11.

Febrero 1972

Tabla 1. Respuesta aproximada de estructura histerética

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$y, \text{ cm}$	$K, \text{ ton/cm}$	$\zeta, \%$	$\bar{K}, \text{ ton/cm}$	$\bar{T}, \text{ seg}$	$\bar{\zeta}, \%$	$D, \text{ cm}$
0.2	10.0	1.0	10.0	0.500	1.0	1.03
0.4	10.0	1.0	10.0	0.500	1.0	1.03
0.6	9.7	1.2	9.9	0.505	1.1	1.07
0.8	8.6	2.0	9.3	0.518	1.3	1.14
1.0	6.0	4.0	8.6	0.535	1.8	1.09
1.2	3.8	8.0	7.8	0.555	2.8	1.18



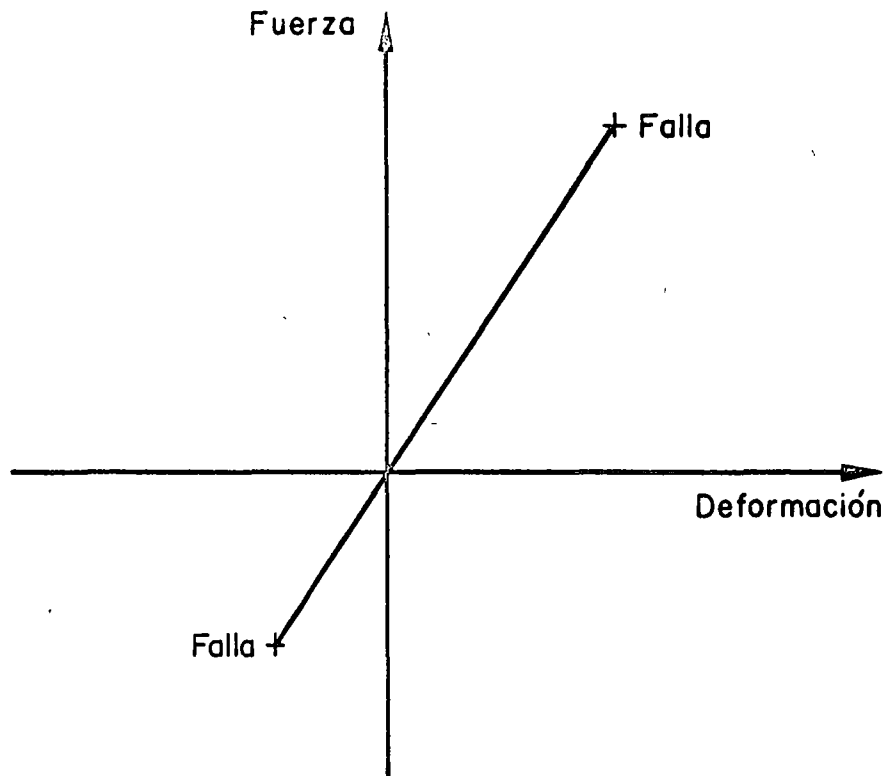


Fig 1 No linealidad por asimetría en las condiciones de falla

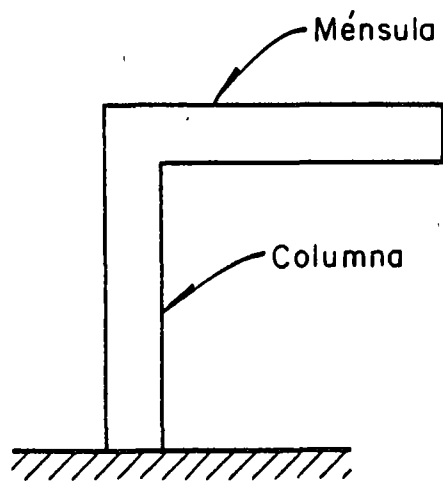


Fig 2 Estructura asimétrica

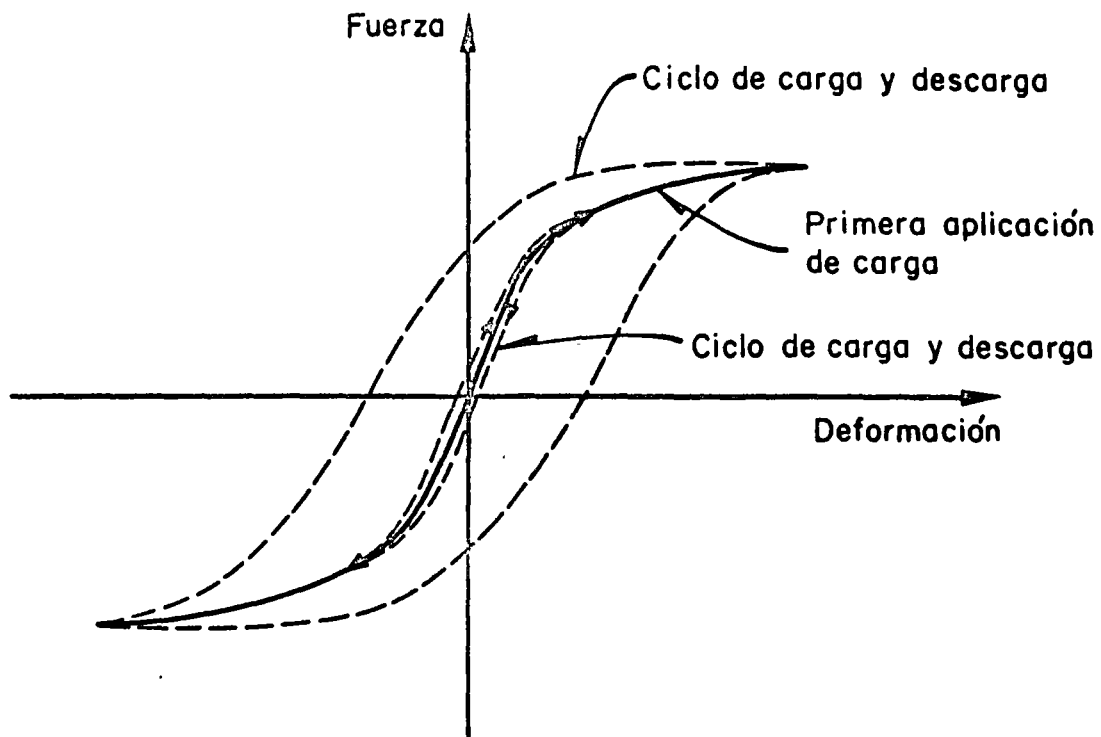


Fig 3 Relación simétrica fuerza – deformación

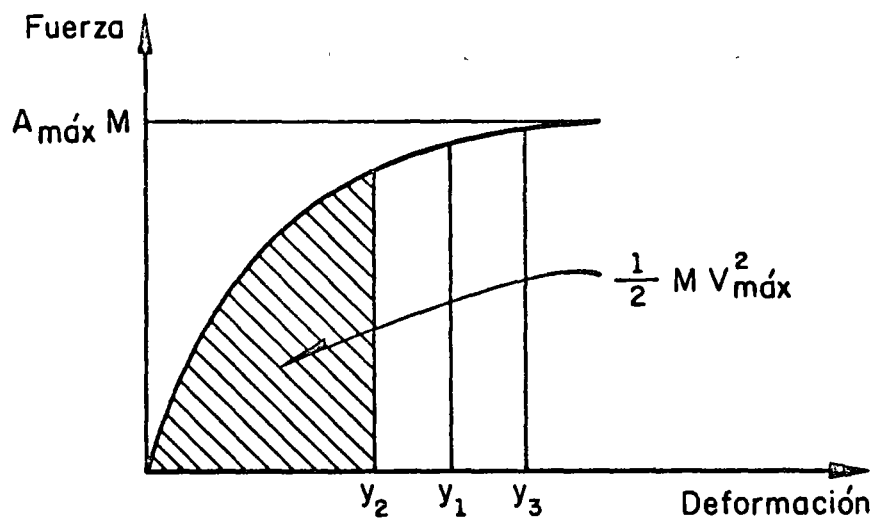


Fig 4 Acotamiento aproximado de la respuesta sísmica

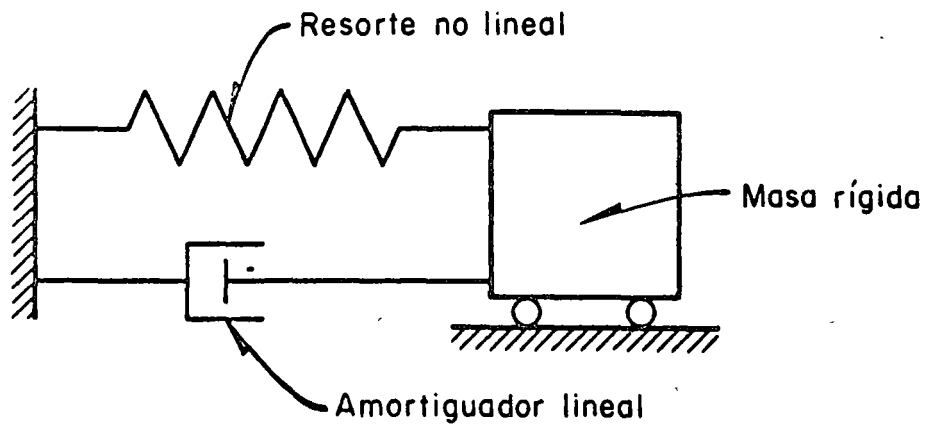


Fig 5 Estructura no lineal

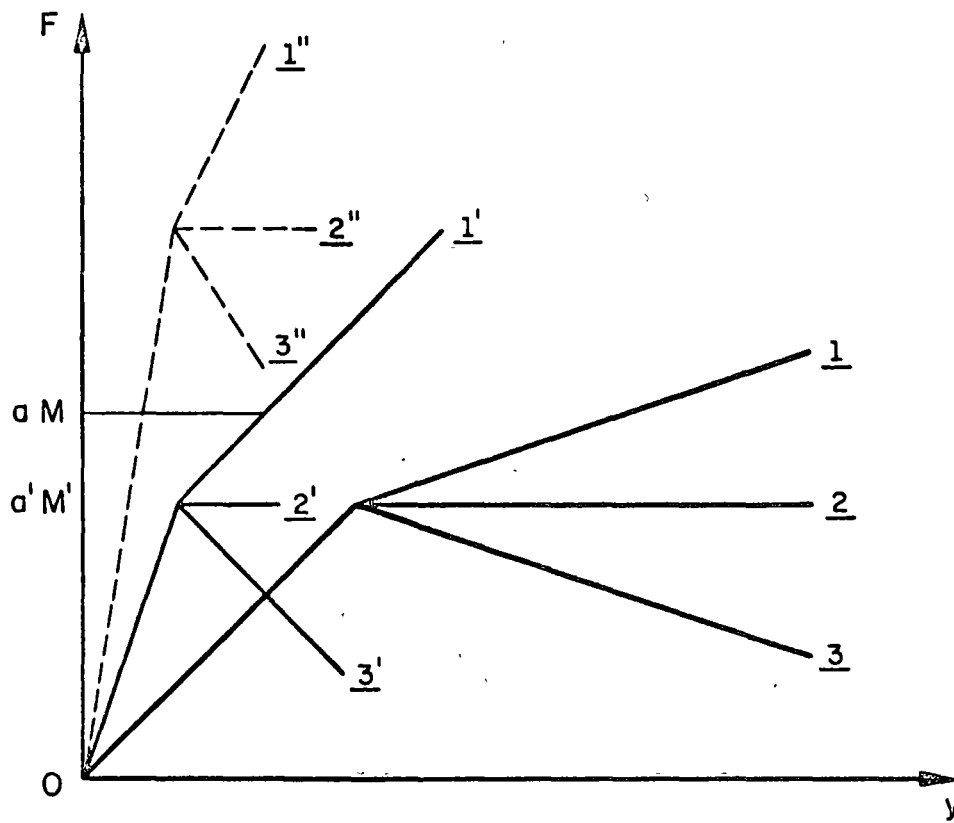


Fig 6 Familias de relaciones fuerza - deformación

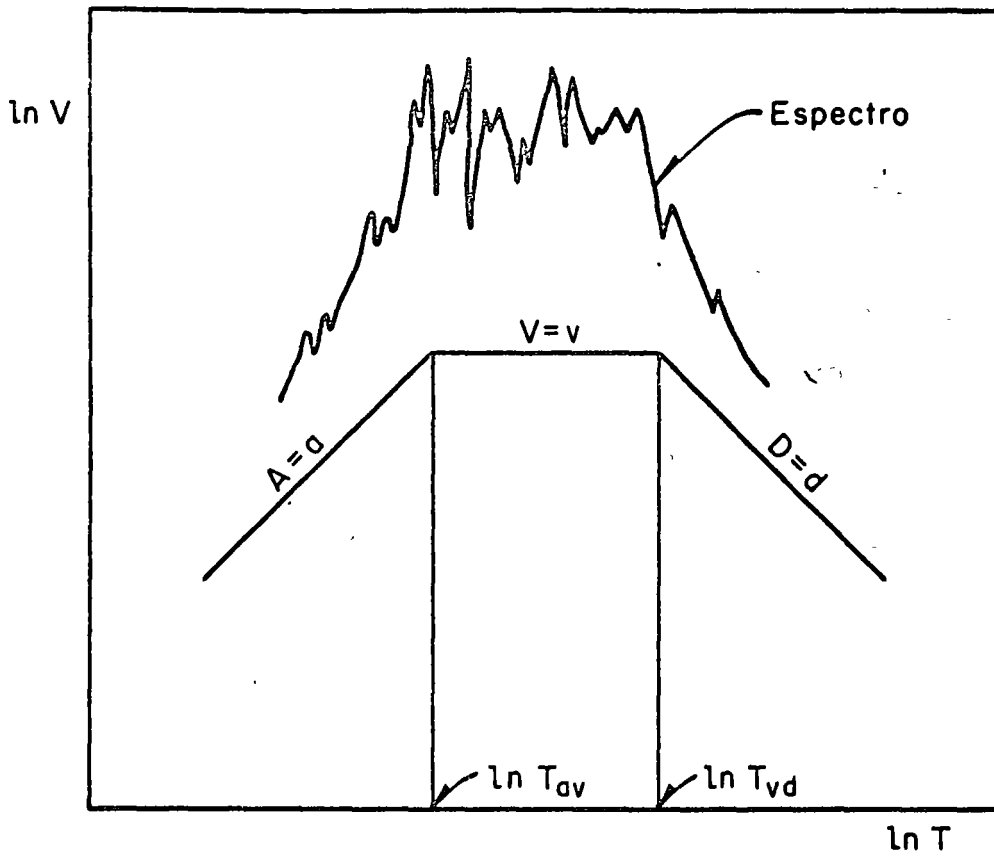


Fig 7 Los periodos  $T_{av}$  y  $T_{vd}$

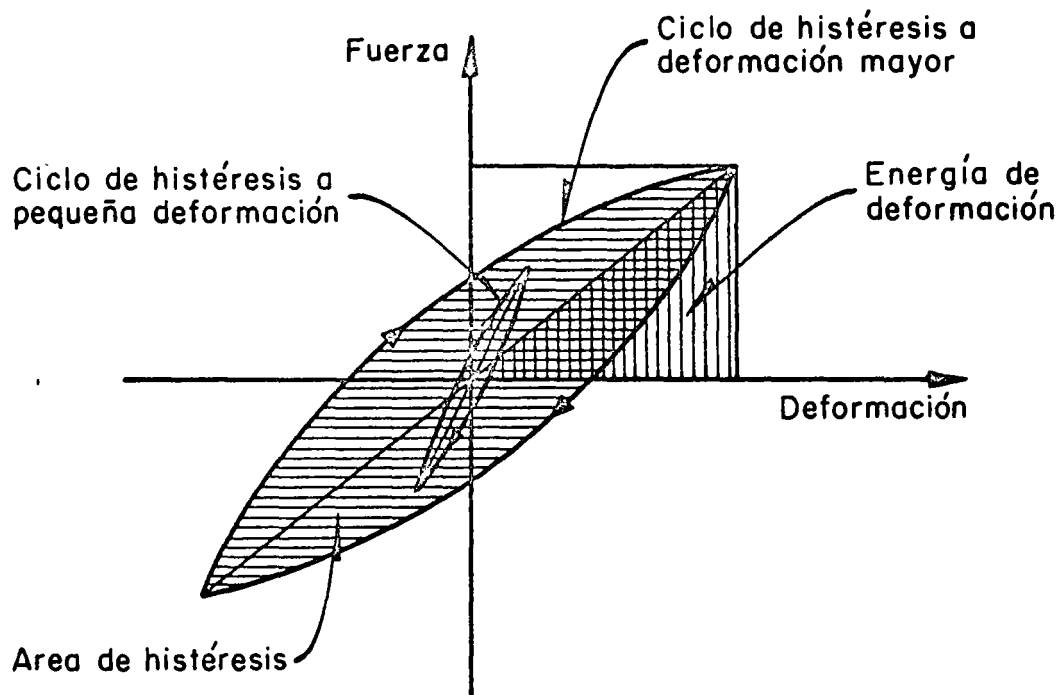


Fig 8 Comportamiento histerético

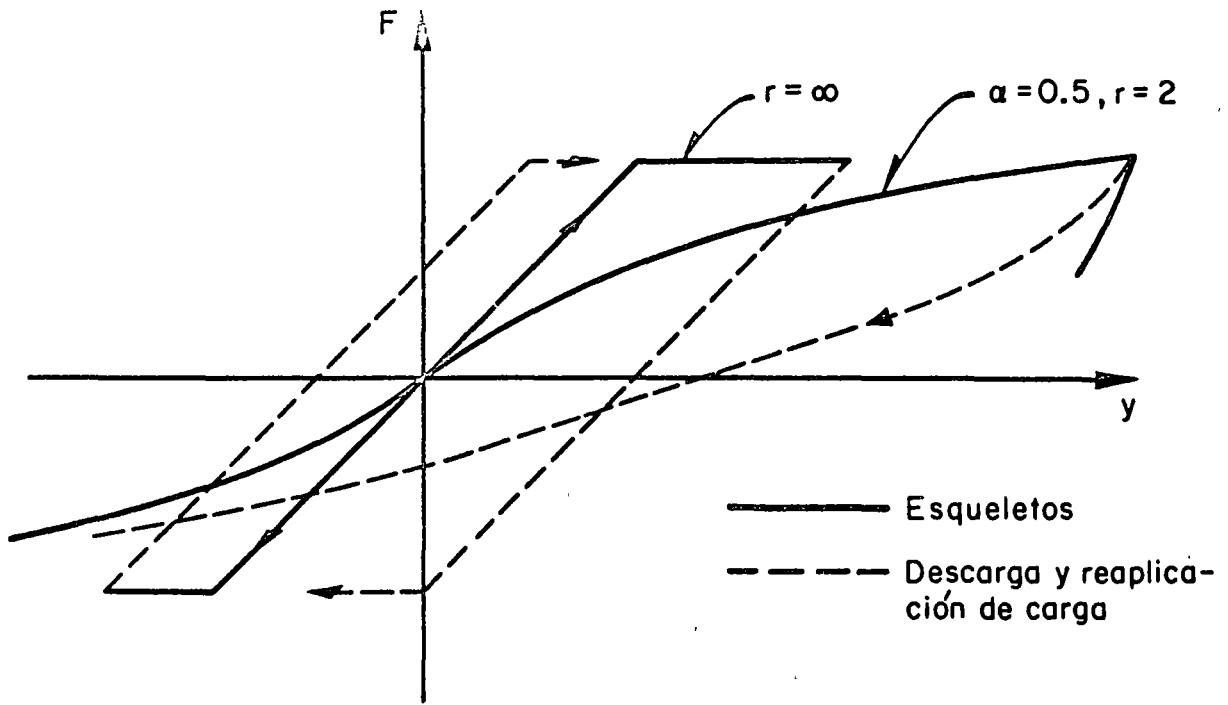


Fig 9 Comportamiento tipo Masing con esqueleto Ramberg - Osgood

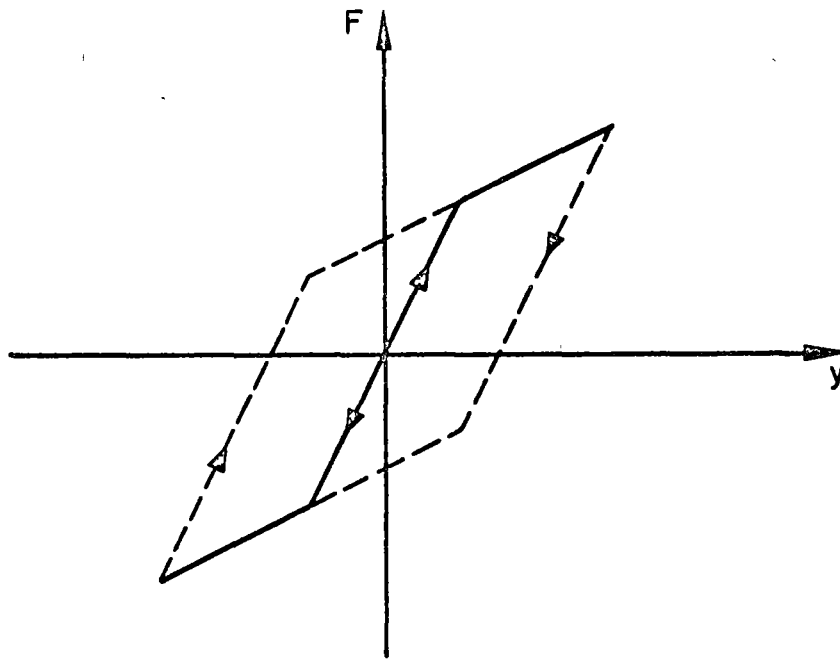


Fig 10 Comportamiento tipo Masing con esqueleto bilineal

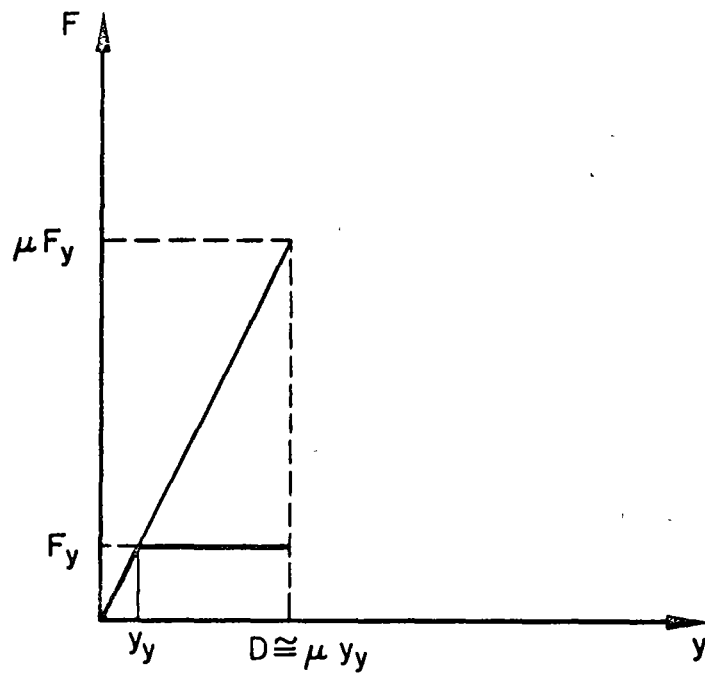


Fig 11 Respuestas aproximadas de estructura elastoplástica y de la estructura lineal equivalente

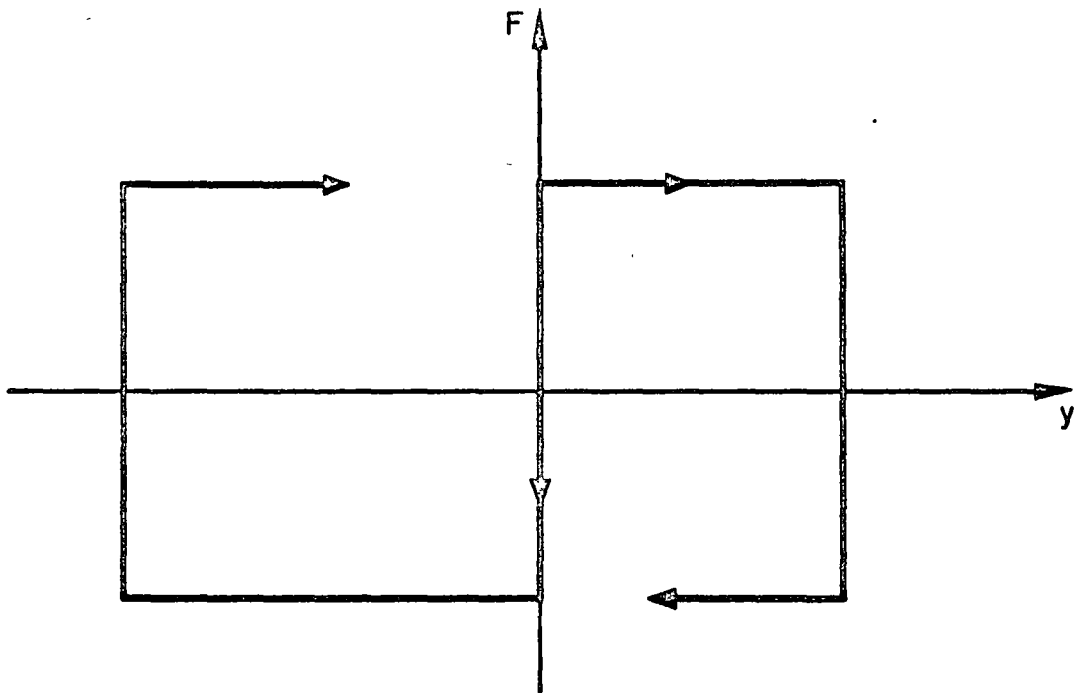


Fig 12 Comportamiento rigidoplástico

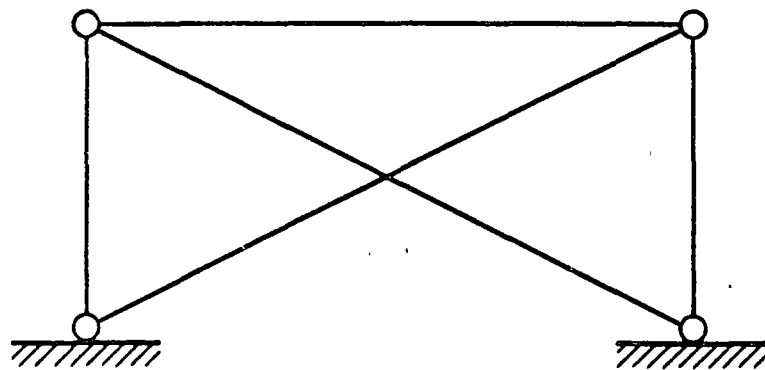


Fig 13 Marco articulado y contraventeado

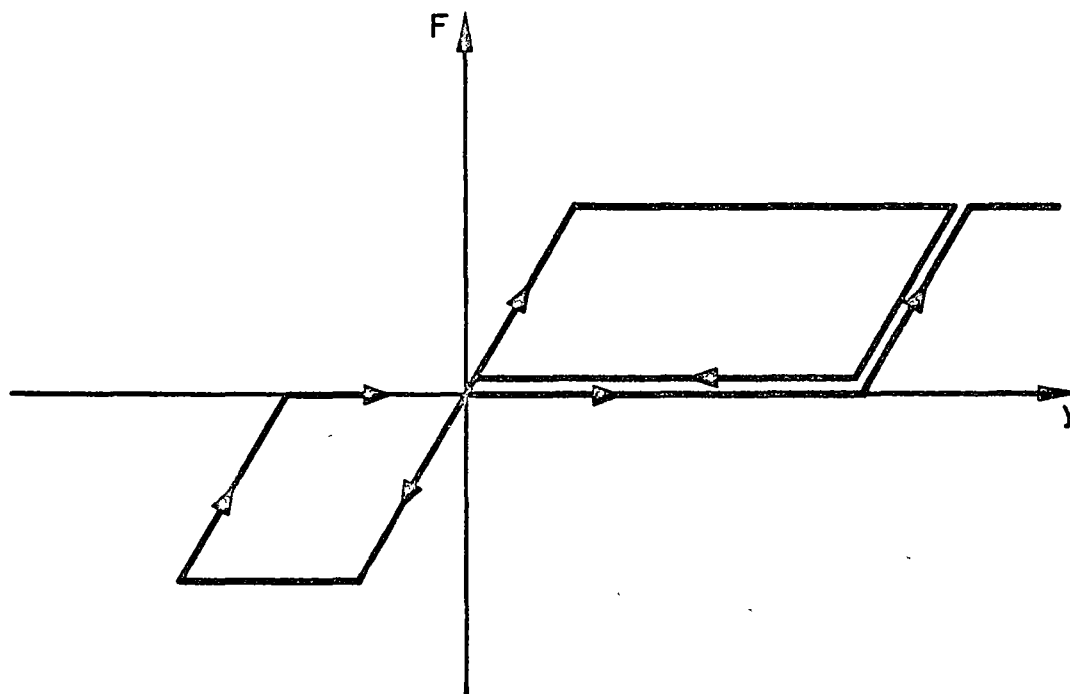


Fig 14 Comportamiento de la estructura de la fig 13

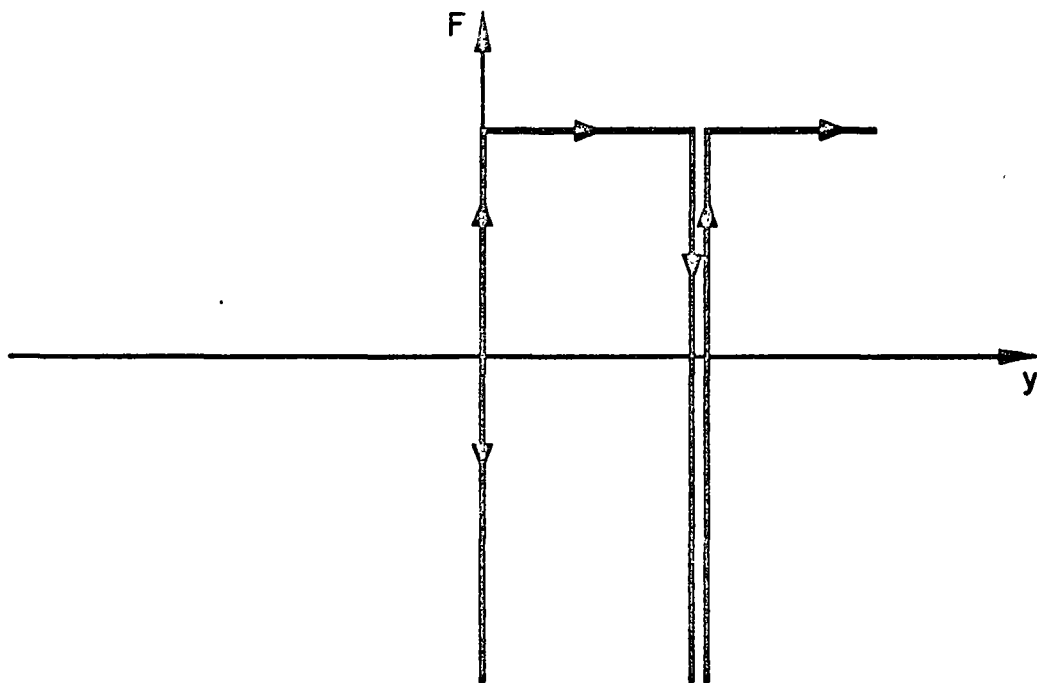
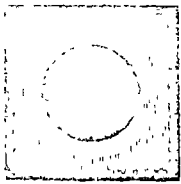


Fig 15 Comportamiento asimétrico de estructura rigidoplástica





centro de educación continua de la facultad de ingeniería, unam



S-14

INTERACCION SUELO-ESTRUCTURAS

ING. JACOBO BIELAK

Marzo 13 de 1972



# III CONGRESO NACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

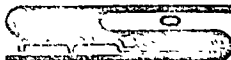
**Respuesta sísmica de sistemas  
suelo-estructuras**

*por*

**J. Bielak**

*Tema:*

**Interacción suelo-estructura**



**SOCIEDAD MEXICANA DE INGENIERIA  
SISMICA, A. C.**

## RESPUESTA SISMICA DE SISTEMAS SUELO-ESTRUCTURA

Jacobo Bielak

### INTRODUCCION

Dos aspectos del problema de interacción dinámica entre estructura y subsuelo tienen una gran importancia para la ingeniería sísmica: (1) el comportamiento sísmico de una estructura puede ser afectado por las propiedades del subsuelo y (2) el movimiento registrado en la base y en la vecindad de una estructura durante un terremoto no será el mismo que el que se obtendría si la estructura no estuviera presente. En términos de las propiedades dinámicas del sistema, este acoplamiento dinámico, o interacción entre la estructura y el subsuelo generalmente producirá (1) una reducción en la frecuencia fundamental del sistema con respecto a la frecuencia de la estructura apoyada sobre un suelo rígido, (2) disipación de una parte de la energía vibracional del edificio debida a la radiación de ondas dentro del subsuelo (también habrá pérdidas de energía producidas por la fricción interna del suelo) y (3) una modificación del movimiento de la base de la estructura con respecto al movimiento libre del terreno. Aunque todos estos efectos se manifiestan hasta cierto grado en toda estructura, desde el punto de vista ingenieril es importante determinar las condiciones bajo las cuales la interacción estructura-subsuelo afectará en forma notable el comportamiento dinámico de la estructura. Para esto es necesario desarrollar métodos de análisis y diseño que consideren el fenómeno de interacción.

Dadas las propiedades físicas del suelo, la geometría del sistema y la naturaleza de la excitación sísmica, es sumamente difícil analizar el sistema estructura-subsuelo sin antes hacer un número de suposiciones que simplifiquen el problema. Es común representar el suelo ya sea como un semi-espacio elástico, homogéneo e isótropo ó como un medio discreto constituido por resortes lineales y amortiguadores viscosos. La estructura, también generalmente elástica, descansa sobre la superficie del terreno.

Una lista parcial de publicaciones recientes sobre interacción dinámica estructura-subsuelo está dada en la referencia [1]. Otras descripciones de soluciones diversas están contenidas en los trabajos de Scavuzzo y Raftopoulos [2] y Sarrazin [3]. En este trabajo se estudia la respuesta sísmica de un edificio elástico de varios pisos que descansa sobre la superficie del semi-espacio elástico. Suponiendo que el sistema posee frecuencias de resonancia se demuestra que la respuesta del sistema estructura-subsuelo está dada como la suma de las respuestas de osciladores simples de un grado de libertad, sujetos a excitaciones modificadas de sus bases. Este resultado es válido aún para sistemas lineales que no poseen modos de vibración clásicos. Esta representación tiene la ventaja de dar una percepción clara del problema de interacción así como hacer los cálculos equivalentes a los de un oscilador simple.

En la segunda parte de este estudio se presentan las respuestas oscilatorias y sísmicas de varias estructuras de uno y varios pisos que se apoyan sobre terrenos flexibles. Para el caso de edificios de un piso se dan además expresiones aproximadas para la frecuencia natural de vibración y para el amortiguamiento crítico del oscilador simple equivalente en términos de las propiedades del sistema original.

## I. ANALISIS DEL SISTEMA

El sistema estructura-subsuelo bajo estudio se muestra en la Fig. 1. Consiste de una estructura de  $n$  pisos de comportamiento lineal y amortiguamiento viscoso con un grado de libertad por piso, que se apoya sobre la superficie de un semi-espacio elástico de densidad  $\rho$ , velocidad de onda al cortante,  $V_s$ , y relación de Poisson,  $\sigma$ . La estructura define las matrices de rigidez,  $K$ , de masa,  $M$ , y de amortiguamiento,  $C$ . Se supone que la base consta de una placa circular rígida de radio  $a$  y espesor despreciable y no se permite que la base se deslice con respecto al suelo. El sistema descrito tendrá entonces  $n+2$  grados de libertad, translación horizontal de cada piso y de la base y rotación del sistema en el plano de desplazamiento.

El sistema, originalmente en reposo, está sujeto a un movimiento

sísmico representado por ondas planas horizontales que se propagan en la dirección vertical. El movimiento libre del terreno es igual al doble de la amplitud de la onda incidente y el movimiento dentro del medio elástico se obtiene como la suma de las ondas incidentes mas las reflejadas.

El modelo ilustrado en la Fig. 1 también ha sido utilizado, entre otros, por Tajimi [4] y por Parmelee y otros [5].

Suponiendo desplazamientos pequeños, las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema mostrado en la Fig. 1 son

$$M \ddot{\underline{y}} + C \dot{\underline{y}} + K \underline{y} = 0 \quad (1a)$$

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{v}_j^t + m_0 (\ddot{v}_0 + \ddot{v}_g) + P(t) = 0 \quad (1b)$$

$$\sum_{j=1}^n m_j h_j \ddot{v}_j^t + I_t \ddot{\varphi} + Q(t) = 0 \quad (1c)$$

En estas ecuaciones,  $\underline{y} = \{v_j\}$ , un vector de columna;  $v_j$  = desplazamiento horizontal del piso  $j$  con respecto a la base, sin incluir rotación;  $v_g$  = desplazamiento libre de la superficie producido por el movimiento sísmico incidente y su reflexión total;  $v_0$  = translación de la base con respecto al movimiento libre de la superficie;  $\varphi$  = rotación de la base;  $h_j$  = altura del piso  $j$  medida a partir de la base;  $v_j^t$  = desplazamiento total horizontal del piso  $j$  con respecto a un eje vertical fijo, es decir,  $v_j^t = v_g + v_0 + h_j \varphi + v_j$ ;  $m_j$  = masa del piso  $j$ ;  $m_0$  = masa de la base;  $I_t$  = suma de los momentos centroidales de inercia de las masas  $m_j$  y  $m_0$ ;  $P(t)$  y  $Q(t)$  representan, respectivamente, la fuerza y el momento de interacción entre la base y el suelo.

Las fuerzas  $P(t)$  y  $Q(t)$  son funciones de los desplazamientos de la base  $v_0(t)$  y  $\varphi(t)$ . Para obtener las relaciones necesarias debe resolverse un problema de elasticidad dinámica con condiciones mixtas de frontera, es decir, las oscilaciones de un disco rígido soldado a la superficie del semi-espacio elástico. Se obtiene [1].

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}(s) \\ \mu a^2 \\ \bar{Q}(s) \\ \mu a^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{hh}(s_0, \sigma) & K_{hm}(s_0, \sigma) \\ K_{mh}(s_0, \sigma) & K_{mm}(s_0, \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_0(s) \\ \bar{\varphi}(s) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

en donde una barra sobre una función denota la transformada de Laplace de dicha función y  $s$  es el parámetro de la transformación, una variable compleja.  $K_{hh}, K_{hm}, K_{mh}$  y  $K_{mm}$  son las funciones adimensionales de impedancia del problema.  $\mu$  es el módulo de rigidez al cortante del medio elástico y  $s_0 = sa/v_s$ .

Considerando temporalmente a los desplazamientos  $v_0$  y  $\varphi$  como funciones conocidas, es posible, en general, desacoplar la ecuación (1a), ya sea en  $n$  dimensiones si la superestructura posee modos de vibración clásicos ó en  $2n$  dimensiones si no los posee, y expresar las transformadas de los desplazamientos  $v_j$  como combinaciones lineales de las funciones  $\bar{v}_0$ ,  $\bar{\varphi}$  y  $\bar{v}_g$ . Substituyendo estas expresiones junto con (2) en la versión transformada de (1b) y (1c) se obtiene un par de ecuaciones lineales algebraicas en  $\bar{v}_0$  y  $\bar{\varphi}$  que puede ser resuelto en forma explícita en función de  $\bar{v}_g$ . Reemplazando  $\bar{v}_0$  y  $\bar{\varphi}$  en la expresión para  $\bar{v}_j$  se obtiene entonces la solución completa del problema en el plano transformado en términos de  $\bar{v}_g(s)$ , las propiedades físicas del sistema estructura-subsuelo y las funciones de impedancia  $K_{hh}, K_{hm}, K_{mh}$  y  $K_{mm}$ . Simbólicamente esta solución se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= \bar{v}_g \frac{\Delta_0}{\Delta} \\ \bar{\varphi} &= \bar{v}_g \frac{\Delta_\varphi}{\Delta} \\ \bar{v}_j &= \bar{v}_g \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Los desplazamientos  $v_0(t)$ ,  $\varphi(t)$  y  $v_j(t)$  se obtienen invirtiendo las transformadas correspondientes, es decir,

$$\begin{Bmatrix} v_0(t) \\ \varphi(t) \\ v_j(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{v}_g(s)}{\Delta(s)} \begin{Bmatrix} \Delta_0(s) \\ \Delta_\varphi(s) \\ \Delta_j(s) \end{Bmatrix} e^{st} ds \quad (4)$$

donde  $C$  es el contorno de integración de Bromwich.

Aplicando el teorema de convolución para las transformadas de Laplace, (4) puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} v_0(t) \\ \varphi(t) \\ v_j(t) \end{Bmatrix} = \int_0^t \begin{Bmatrix} h_0(t-\tau) \\ h_\varphi(t-\tau) \\ h_j(t-\tau) \end{Bmatrix} \bar{v}_g(\tau) d\tau \quad (5a)$$

en donde

$$h_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta_k(s)}{\Delta(s)} e^{st} ds; \quad k=0, \varphi, j \quad (5b)$$

son las funciones de impulso del sistema. Las integrales en (5b) pueden evaluarse explícitamente por medio de una integración de contorno [1], obteniéndose

$$h_k(t) = \sum_{\lambda=1}^{n+2} e^{-\sigma_\lambda t} (a_{\lambda k} \cos \beta_\lambda t - b_{\lambda k} \sin \beta_\lambda t). \quad (6a)$$

Las constantes  $a_{\lambda k}$ ,  $b_{\lambda k}$ ,  $\sigma_\lambda$  y  $\beta_\lambda$  están dadas por



$$a_{jk} + ib_{jk} = 2 \frac{\Delta_k(s_j)}{\Delta'(s_j)} \quad (6b)$$

$$-\sigma_j + i\beta_j = s_j \quad (6c)$$

en donde  $s_j$  es una raíz de  $\Delta(s)$  y  $\Delta'(s_j)$  es la primera derivada de  $\Delta(s)$  con respecto a  $s$  evaluada en  $s_j$ .

Substituyendo (6a) en (5a) se obtienen entonces expresiones para los desplazamientos  $v_o$ ,  $\varphi$  y  $v_j$  en terminos de la aceleración libre del tren,  $\ddot{v}_g$ , de funciones elementales y de constantes que pueden ser evaluadas en forma explícita. Después de introducir las constantes  $\tilde{\omega}_j$  y  $\tilde{\eta}_j$ , definidas por

$$\tilde{\omega}_j = (\sigma_j^2 + \beta_j^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7a)$$

$$\tilde{\eta}_j = \sigma_j / (\sigma_j^2 + \beta_j^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7b)$$

y las aceleraciones

$$\begin{Bmatrix} \ddot{v}_{jo}^e(t) \\ \ddot{v}_{j\varphi}^e(t) \\ \ddot{v}_{jj}^e(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{jo} \\ a_{j\varphi} \\ a_{jj} \end{Bmatrix} [\tilde{\omega}_j^2 \ddot{v}_g(t) + \tilde{\eta}_j \tilde{\omega}_j \ddot{v}_g(t)] + \begin{Bmatrix} b_{jo} \\ b_{j\varphi} \\ b_{jj} \end{Bmatrix} \tilde{\omega}_j \sqrt{1 - \tilde{\eta}_j^2} \ddot{v}_g(t) \quad (7c)$$

e integrar por partes algunos de los términos en las expresiones para los desplazamientos  $v_o$ ,  $\varphi$  y  $v_j$ , se obtiene finalmente

$$\begin{Bmatrix} v_o(t) \\ \varphi(t) \\ v_j(t) \end{Bmatrix} = - \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{\tilde{\omega}_j \sqrt{1 - \tilde{\eta}_j^2}} \int_0^t e^{-\tilde{\eta}_j \tilde{\omega}_j (t-\tau)} \sin \tilde{\omega}_j \sqrt{1 - \tilde{\eta}_j^2} (t-\tau) \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{jo}^e(\tau) \\ \ddot{v}_{j\varphi}^e(\tau) \\ \ddot{v}_{jj}^e(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \quad (7d)$$

Interpretación física de la solución. Las expresiones para los desplazamientos  $v_0(t)$ ,  $\varphi(t)$  y  $v_j(t)$  en (7d) muestran que la respuesta sísmica del sistema estructura-subsuelo puede obtenerse como una combinación lineal de las respuestas de  $n+2$  osciladores simples de un grado de libertad apoyados sobre un suelo rígido. Cada oscilador, definido por su frecuencia natural de vibración  $\tilde{\omega}_k$  y fracción de amortiguamiento crítico  $\tilde{\zeta}_k$ , está sujeto a una aceleración de su base,  $\ddot{v}_k^e$ . El subíndice  $k$  toma los valores 0,  $\varphi$  y  $j$ , correspondientes a los desplazamientos  $v_0(t)$ ,  $\varphi(t)$  y  $v_j(t)$ . Este resultado es válido, independientemente de la existencia de modos clásicos de vibración.

## II. APLICACIONES

Con el objeto de ilustrar el efecto que la interacción estructura-subsuelo puede tener en la respuesta del sistema, en esta sección se estudia la respuesta de algunas estructuras de uno y varios pisos a una excitación armónica permanente ó sísmica.

Coefficientes dinámicos del suelo. Para hacer uso del método de análisis desarrollado en la sección anterior es necesario conocer las funciones de impedancia  $K_{hh}$ ,  $K_{hm}$ ,  $K_{mh}$  y  $K_{mm}$  (2). Soluciones numéricas aproximadas para estas funciones han sido obtenidas por Bycroft [6], Veletsos y Wei [7] y Luco y Westmann [8], entre otros, para el caso de oscilaciones armónicas. Se ha observado que los valores de  $K_{hm}$  y  $K_{mh}$  son generalmente pequeños comparados con los de  $K_{hh}$  y  $K_{mm}$  y pueden por tanto despreciarse sin afectar notablemente la respuesta del sistema [1]. Las impedancias  $K_{hh}$  y  $K_{mm}$ , funciones complejas de la variable  $a_0 = \omega a/V_g$ , en donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación, pueden expresarse

$$K_{hh}(ia_0) = k_{hh}(a_0) + ia_0 c_{hh}(a_0) \quad (8a)$$

$$K_{mm}(ia_0) = k_{mm}(a_0) + ia_0 c_{mm}(a_0) \quad (8b)$$

en donde las funciones  $k_{hh}$ ,  $c_{hh}$ ,  $k_{mm}$  y  $c_{mm}$  son funciones reales. Las impedancias  $K_{hh}$  y  $K_{mm}$ , y en consecuencia las funciones reales en (8),

son además funciones de la relación de Poisson,  $\sigma$ . Se puede dar una interpretación física simple a las funciones  $k_{hh}$ ,  $k_{mm}$ ,  $c_{hh}$  y  $c_{mm}$ . Hsieh [9] ha demostrado que las funciones  $k_{hh}$  y  $k_{mm}$  están relacionadas a las rigideces de resortes lineales que varían con la frecuencia de oscilación, mientras que  $c_{hh}$  y  $c_{mm}$  están asociados con amortiguadores viscosos cuyos coeficientes de amortiguamiento también varían con la frecuencia de excitación.

Las funciones reales en (8) pueden expresarse como:

$$k_{hh}(a_0, \sigma) = \frac{\beta}{2 - \sigma} \beta_h(a_0, \sigma) = \sigma_h \beta_h(a_0, \sigma) \quad (9a)$$

$$c_{hh}(a_0, \sigma) = \zeta_h(a_0, \sigma) k_{hh}(a_0, \sigma) \quad (9b)$$

$$k_{mm}(a_0, \sigma) = \frac{\beta}{3(1 - \sigma)} \beta_m(a_0, \sigma) = \sigma_m \beta_m(a_0, \sigma) \quad (9c)$$

$$c_{mm}(a_0, \sigma) = \zeta_m(a_0, \sigma) k_{mm}(a_0, \sigma) . \quad (9d)$$

Las constantes  $\sigma_h$  y  $\sigma_m$  son los valores estáticos de los coeficientes de rigidez  $k_{hh}$  y  $k_{mm}$ , respectivamente, mientras que las funciones  $\beta_h$  y  $\beta_m$  miden la variación de éstos para el caso dinámico.  $\zeta_h$  y  $\zeta_m$  están relacionados con la energía perdida por radiación en el semi-espacio elástico, a causa de la translación horizontal y el volteamiento de la base, respectivamente. Estas funciones no representan fracciones de amortiguamiento crítico.

Las funciones  $\beta_h$ ,  $\beta_m$ ,  $\zeta_h$  y  $\zeta_m$ , calculadas a partir de los resultados obtenidos por Luco y Westmann [8], se muestran en la Fig. 2 para valores de la frecuencia adimensional,  $a_0$ , de 0 a 2 y para varios valores de la relación de Poisson. Estos valores son suficientes para la mayor parte de las aplicaciones. Para valores de  $a_0$  entre 2 y 10, estas funciones pueden calcularse con los resultados presentados en [8].

Para obtener la respuesta transitoria del sistema es necesario determinar las funciones de impedancia en términos del parámetro  $s_0$ , un número complejo, en vez de  $a_0$ . En forma aproximada, las funciones  $K_{hh}$  y  $K_{mm}$  se pueden representar como [1] :

$$K_{hh}(s_0) = k_{hh}(\text{Im } s_0) + s_0 c_{hh}(\text{Im } s_0) \quad (10a)$$

$$K_{mm}(s_0) = k_{mm}(\text{Im } s_0) + s_0 c_{mm}(\text{Im } s_0). \quad (10b)$$

De esta manera  $K_{hh}(s_0)$  y  $K_{mm}(s_0)$  se pueden evaluar haciendo uso de (9) y la Fig. 2.

#### Edificios de un piso

En las Figuras 4 y 5 se muestra la respuesta del sistema estructura-subsuelo indicado en la Fig. 3, sujeto a una excitación sinusoidal con frecuencia  $\omega$  y amplitud  $\bar{v}_g$  para varios valores de los parámetros adimensionales que definen al sistema. Estos están dados por

$$a_1 = \frac{\omega_1 a}{V_s} \quad (11a)$$

$$\alpha_1 = \frac{h_1}{a} \quad (11c)$$

$$\eta_1 = \frac{c_1}{2m_1 \omega_1} \quad (11e)$$

$$b_1 = \frac{m_1}{\rho a^3} \quad (11b)$$

$$b_h = \frac{m_0}{\rho a^3} \quad (11d)$$

$$b_m = \frac{I_t}{\rho a^5} \quad (11f)$$

$\omega_1$  es la frecuencia de vibración no amortiguada de la estructura sobre un suelo rígido y  $\eta_1$  la fracción de amortiguamiento crítico de la misma. Los símbolos  $|\bar{v}_1|$ ,  $|\bar{\varphi}_h|$  y  $|\bar{y}_0|$  se refieren a las amplitudes del desplazamiento relativo de la masa superior,  $v_1$ , el desplazamiento de la misma debido a la rotación del sistema,  $\varphi_h$ , y el desplazamiento total de la base,  $y_0$ , respectivamente. Para un suelo rígido,  $|\bar{y}_0|/\bar{v}_g = 1$ . De (11) se observa que la rigidez del suelo sólo afecta al parámetro  $a_1$  (a través de  $V_s$ , la velocidad de propagación de onda al cortante). Como  $a_1$  mide la rigidez relativa entre la estructura y el terreno se ve que la interacción no depende de la rigidez del suelo en sí, sino de esta rigidez relativa.

En los ejemplos indicados en las Figs. 4 y 5 se ha impuesto la condición  $\eta_1 = 0$ . Se nota sin embargo que las amplitudes de los desplazamientos son finitas; debiéndose ésto a que una parte de la energía se disipa por radiación al medio elástico.

Para el cálculo de la Fig. 4 se ha considerado que la masa de la base, así como el momento de inercia centroidal de la masa superior son despreciables, es decir, que  $b_h$  y  $b_m$  son nulos; de ahí que cada curva determine una sola frecuencia de resonancia.

La Fig. 4 indica que la respuesta del sistema es sensible a los valores de  $a_1$  y en especial que  $v_1$  disminuye rápidamente conforme  $a_1$  aumenta. También la frecuencia de resonancia del sistema,  $\tilde{\omega}_1$ , se reduce para valores crecientes de la rigidez relativa,  $a_1$ .

La Fig. 5 sirve para ilustrar el efecto del momento de inercia de la base en la respuesta de una estructura. Para valores de  $b_m$  distintos de cero cada curva presenta dos frecuencias de resonancia; la primera es una modificación de la frecuencia natural de la estructura debida a la flexibilidad del terreno y la segunda corresponde esencialmente a una rotación de cuerpo rígido del sistema; una tercera frecuencia permanece en el infinito ya que  $b_h$  es nulo. Se observa, sin embargo, que los valores máximos de la respuesta correspondientes a la segunda frecuencia son pequeños comparados con los de la primera, indicando una mayor pérdida de energía. El efecto de  $b_m$  en la respuesta del sistema, en la vecindad de la frecuencia fundamental se vuelve importante únicamente para valores de  $b_m$  mayores de 4, aproximadamente. Este valor corresponde a un momento de inercia centroidal de la base igual al de la masa superior alrededor de un eje que pasa por la base.

Respuesta sísmica. Para valores dados de los parámetros (11) la respuesta sísmica del sistema mostrado en la Fig. 3 puede obtenerse mediante las ecuaciones (7). No es práctico, en general, determinar explícitamente las constantes  $\tilde{\omega}_l$ ,  $\tilde{\eta}_l$ ,  $a_{lk}$  y  $b_{lk}$  en términos de los parámetros mismos dada la dificultad en extraer las raíces de la función  $\Delta(s)$ . Es sin embargo posible obtener una aproximación para los desplazamientos  $v_0(t)$ ,  $\varphi(t)$  y  $v_j(t)$  si se desprecia la contribución de las dos frecuencias superiores, que en general estarán asociadas con valores altos del amortiguamiento. Omitiendo asimismo el efecto de la masa de la base de la estructura en la respuesta del sistema ( $b_m = b_h = 0$ ), se llega a

$$\begin{Bmatrix} v_0(t) \\ \varphi(t) \\ v_j(t) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\tilde{\omega}_1} \begin{Bmatrix} \frac{a_1^2 b_1}{\beta_1 \sigma_h} \\ \frac{a_1^2 b_1 \alpha_1^2}{\beta_m \sigma_m} \\ 1 \end{Bmatrix} \int_0^t e^{-\tilde{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 (t-\tau)} \sin \tilde{\omega}_1 (t-\tau) \ddot{v}_j^e(\tau) d\tau. \quad (12a)$$

La frecuencia fundamental del sistema,  $\tilde{\omega}_1$ , y la fracción del amortiguamiento crítico correspondiente,  $\tilde{\eta}_1$ , están dados por

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\left[1 + a_1^2 b_1 \left(\frac{1}{\beta_h \sigma_h} + \frac{\alpha_1^2}{\beta_m \sigma_m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (12b)$$

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{\eta_1 + \frac{a_1^2 b_1}{2} \left(\frac{\zeta_h}{\beta_h \sigma_h} + \frac{\zeta_m \alpha_1^2}{\beta_m \sigma_m}\right)}{\left[1 + a_1^2 b_1 \left(\frac{1}{\beta_h \sigma_h} + \frac{\alpha_1^2}{\beta_m \sigma_m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (12c)$$

mientras que la aceleración efectiva del sistema

$$\ddot{v}_g^e(t) = \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1}\right)^2 \ddot{v}_g(t). \quad (12d)$$

La ecuación (12a) muestra que la respuesta sísmica del sistema mostrado en la Fig. 3 es aproximadamente equivalente a la respuesta de un oscilador simple de un grado de libertad apoyado sobre un suelo rígido. Este oscilador equivalente, definido por la frecuencia natural de vibración  $\tilde{\omega}_1$  (12b) y la fracción del amortiguamiento crítico  $\tilde{\eta}_1$  (12c) está sujeto a una aceleración de su base  $\ddot{v}_g^e(t)$ , idéntica a  $\ddot{v}_g(t)$  en el tiempo pero su amplitud multiplicada por  $(\tilde{\omega}_1/\omega_1)^2$ . Bajo estas condiciones, la deformación del resorte del oscilador equivalente será igual al desplazamiento relativo  $v_1(t)$  del sistema original, mientras que los desplazamientos  $v_0(t)$  y  $h_1 \psi(t)$  estarán dados por

$$v_0(t) = \frac{a_1^2 b_1}{\beta_h \sigma_h} v_1(t) \quad (13a)$$

$$h_1 \psi(t) = \frac{a_1^2 b_1 \alpha_1^2}{\beta_m \sigma_m} v_1(t). \quad (13b)$$

Este resultado implica que el espectro de respuestas a un terremoto de una estructura de un piso que descansa sobre un suelo flexible puede obtenerse a partir de los espectros correspondientes a un oscilador simple sujeto a una excitación de su base. Usando un espectro

promedio aproximado de respuestas debido a Housner y Jennings [10] y las ecuaciones (12), se ha encontrado que para un gran número de estructuras, la flexibilidad del suelo resulta en una reducción en la respuesta del sistema y que para una rigidez determinada del terreno, mayor es la reducción mientras menor es el período natural de la estructura.

#### Estructura de dos pisos

En esta sección se estudia la respuesta sísmica del sistema mostrado en la Fig. 6. Los valores de los parámetros indicados en la figura se han escogido de tal suerte que el sistema se asemeje a la estructura de concreto de una planta de energía nuclear [11].

En la Tabla 1 se presentan las frecuencias naturales (7a) y los correspondientes valores del amortiguamiento crítico (7b), calculados para distintos valores de la flexibilidad del terreno.

Usando la aceleración indicada en la Fig. 7, la respuesta sísmica de la estructura se ha obtenido por medio de las ecuaciones (7). En la Fig. 8 se muestra la respuesta del sistema para un suelo flexible ( $V_B = 1500$  pies/seg), mientras que la Fig. 9 presenta la respuesta de la estructura sobre un suelo rígido. La Fig. 8 indica que la estructura vibra primordialmente con una frecuencia  $\tilde{\omega}_1$ , la frecuencia fundamental de resonancia del sistema estructura-subsuelo, y también que el desplazamiento del primer piso debido a la rotación del sistema es aproximadamente igual al doble del desplazamiento relativo  $v_1$ , producido por la deformación de las columnas del primer piso.

Al comparar los desplazamientos relativos  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  de la estructura sobre el terreno flexible con los desplazamientos correspondientes obtenidos para un suelo rígido (Fig. 9) se ve que el efecto principal de la fundación es el de reducir la frecuencia dominante de vibración así como los desplazamientos relativos  $v_1$  y  $v_2$ . Los desplazamientos  $v_0(t)$  y  $\varphi(t)$  son distintos de cero para la cimentación flexible pero obviamente son nulos cuando el suelo es rígido.

### Edificios de varios pisos

Estudiando las frecuencias naturales de un edificio idealizado de diez pisos así como las de edificios cuyos modos fundamentales están dados por una línea recta, se ha encontrado [1] que el efecto de una cimentación elástica, medido a través del cambio de las frecuencias de vibración del mismo, es despreciable en los modos superiores al primero para un gran número de estructuras. Se ha observado que únicamente la frecuencia fundamental de la estructura se reduce de una manera notable conforme la cimentación se hace más blanda, y que excepto en edificios bajos, la reducción en la frecuencia fundamental se debe principalmente a la rotación del sistema y en menor grado a la translación horizontal de la base.

### CONCLUSIONES

Se presenta un método para analizar la respuesta sísmica de estructuras lineales apoyadas sobre un suelo flexible. Se muestra que la respuesta del sistema puede obtenerse como la suma de las respuestas de osciladores simples de un grado de libertad sujetos a excitaciones modificadas de sus bases. Este resultado es válido aún para edificios que no poseen modos de vibración clásicos. Varios ejemplos numéricos indican que el efecto de interacción entre la estructura y el subsuelo puede ser importante y debe tomarse en consideración en el diseño de algunos tipos de estructuras.

### RECONOCIMIENTO

El material que aquí se presenta está basado en una parte de la tesis doctoral del autor presentada al Instituto Tecnológico de California [1]. El autor agradece a Paul C. Jennings por su valiosa guía y constante estímulo y a George W. Housner por su estímulo y valiosos comentarios durante el desarrollo de dicha tesis.



REFERENCIAS

1. Bielak, J., "Earthquake response of building-foundation systems". Earthquake Engineering Research Laboratory Report EERL 71-04, California Institute of Technology, 1971.
2. Scavuzzo, R. J. y Raftopoulos, D., "Literature Review of Structure-Foundation Interaction", Technical Report No. 1, Univ. of Toledo, The Research Foundation, AEC Contract No. AT-(60-1)-3822, Oct. 1962.
3. Sarrazin, M. A., "Soil-structure interaction in earthquake resistant design", MIT Department of Civil Engineering Report R70-59, Sept. 1970.
4. Tajimi, H., "Discussion: Building-foundation interaction effects, Proc. Paper 5200", Jour. of the Eng. Mech. Div., ASCE, V. 93, No. EM6, 1967, pp. 294-298.
5. Parmelee, R. A., Perelman, D. S., and Lee, S. L., "Seismic response of multiple-story structures on flexible foundations", Bull. Seism. Soc. of Amer., Vol. 59, No. 3, 1969, pp. 1061-1070.
6. Bycroft, G. N., "Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic half-space and on elastic stratum", Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 248, 1956, pp. 327-368.
7. Veletsos, A. S. y Wei, Y. T., "Lateral and rocking vibration of footings", Jour. of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, V. 97, No. SM9, 1971, pp. 1227-1248.
8. Luco, J. E. y Westmann, R. A., "Dynamic response of circular footings", Jour. of the Eng. Mech. Div., ASCE, V. 97, No. EM5, 1971, pp. 1381-1395.
9. Hsieh, T. K., "Foundation vibrations", Proceedings, Institution of Civil Engineers, V. 22, 1962, pp. 211-225.
10. Housner, G. W. y Jennings, P. C., "Generation of artificial earthquakes", Jour. of the Eng. Mech. Div., ASCE, V. 90, No. EM1, 1964, pp. 113-150.
11. Scavuzzo, R. J., Bailey, J. L. y Raftopoulos, D. D., "Lateral structure interaction with seismic waves", Journal of Applied Mechanics, V. 38, 1971, pp. 125-134.

TABLA 1

Frecuencias de resonancia y fracciones de amortiguamiento crítico del sistema de dos pisos

$V_s$ (ft/sec)	$\tilde{\omega}_g$ (rad/sec)				$\tilde{\eta}_g$ (%)			
	1 (2)	2 (3)	3 (4)	4 (5)	1 (6)	2 (7)	3 (8)	4 (9)
800	8.87	54.84	23.86	87.73	4.26	.88	58.69	16.14
1000	10.76	54.85	29.85	89.25	3.77	.99	58.70	19.86
1200	12.47	54.86	35.86	90.79	3.27	1.05	58.74	23.55
1500	14.70	54.86	44.93	93.66	2.57	1.06	58.86	27.61
2000	17.54	54.82	60.14	101.6	1.65	.90	59.27	31.53
2700	20.12	54.86	81.29	117.3	.87	.53	59.93	34.47
3500	21.83	54.97	105.2	138.4	.44	.27	60.43	36.03
5000	23.39	55.12	149.8	182.8	.16	.09	60.92	37.22
8000	24.43	55.22	238.8	279.5	.04	.02	61.25	37.24
10000	24.68	55.25	298.2	345.4	.02	.01	61.33	37.37
15000	24.94	55.28	446.7	512.0	.006	.003	61.41	37.53
$\infty$	25.15	55.30	$\infty$	$\infty$	0	0	—	—

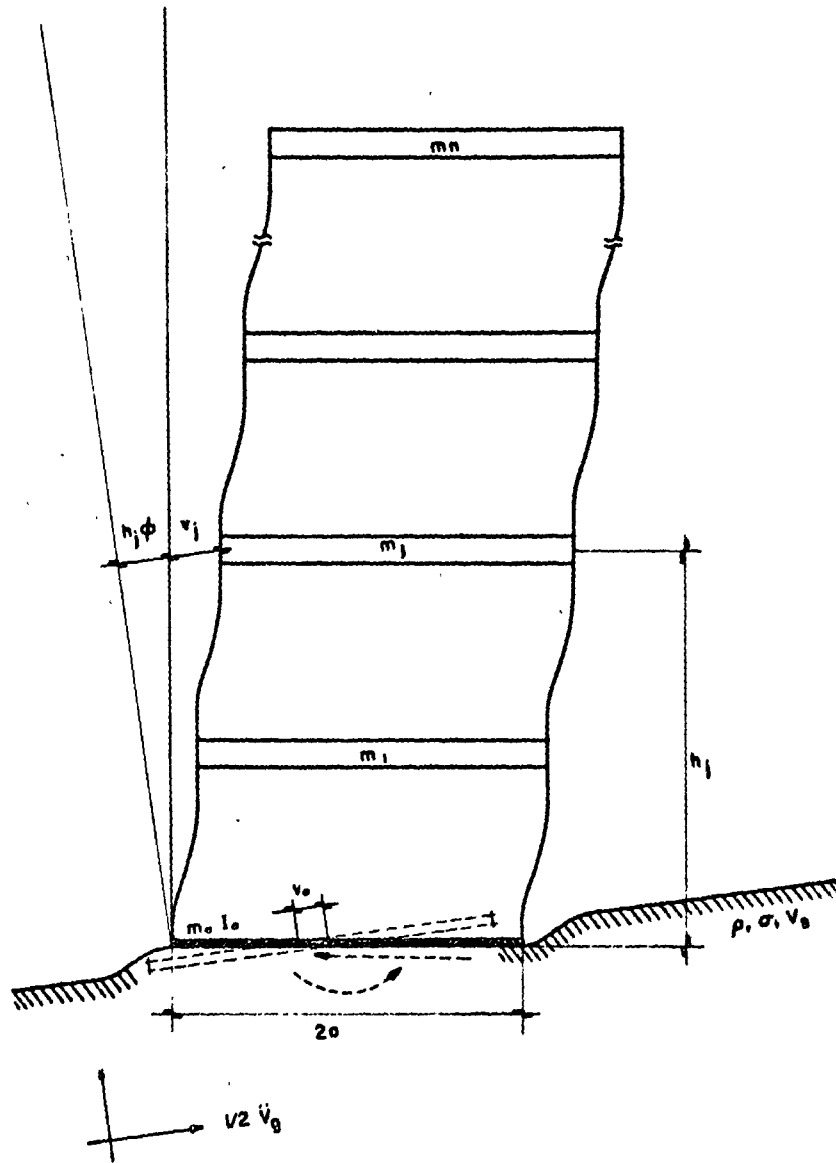


Fig. 1. Modelo del sistema estructura-subsuelo

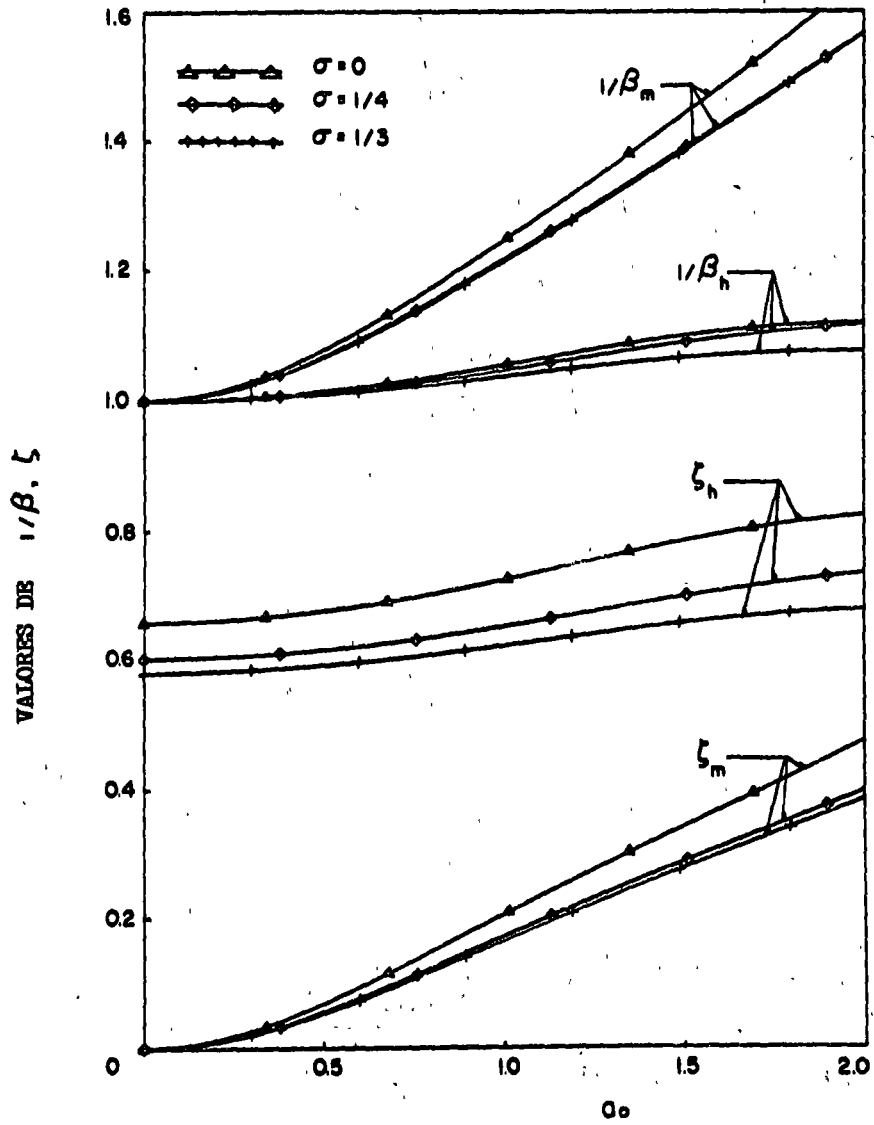


Fig. 2. Coeficientes dinámicos del suelo

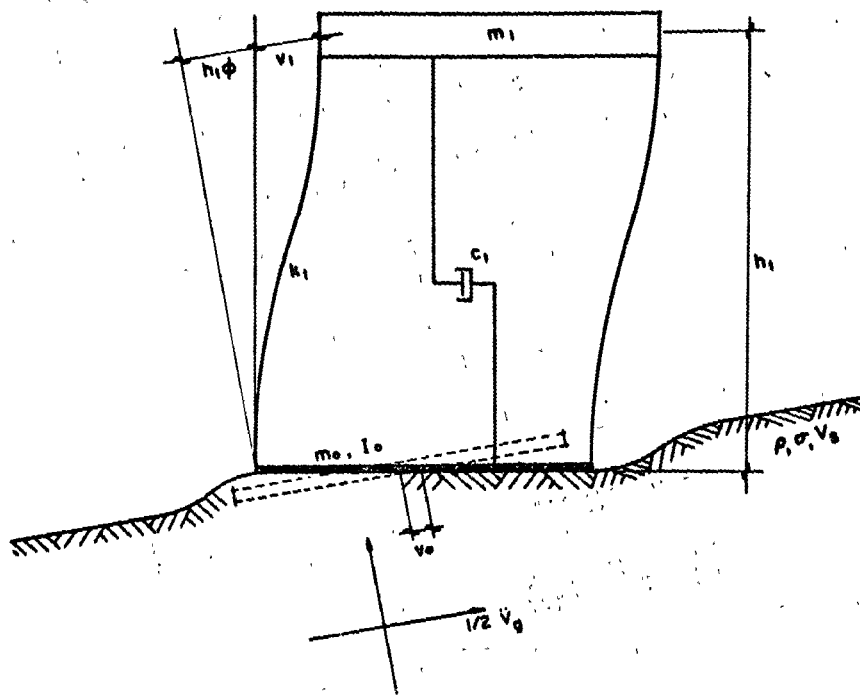
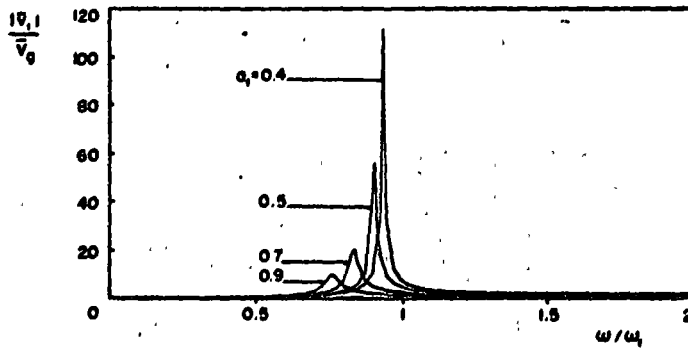
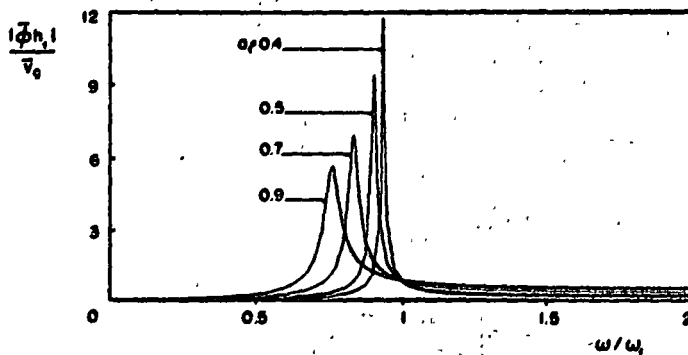


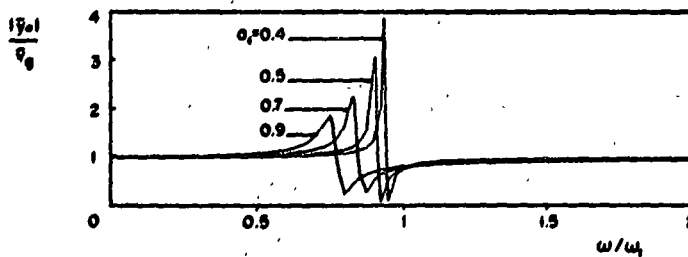
Fig. 3. Sistema estructura-subsuelo de un piso



(a) DESPLAZAMIENTO RELATIVO DE LA MASA SUPERIOR

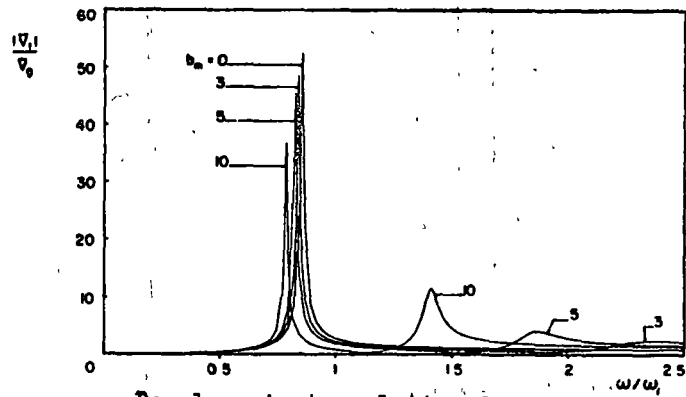


(b) DESPLAZAMIENTO RELATIVO DE LA MASA SUPERIOR DEBIDO A ROTACION

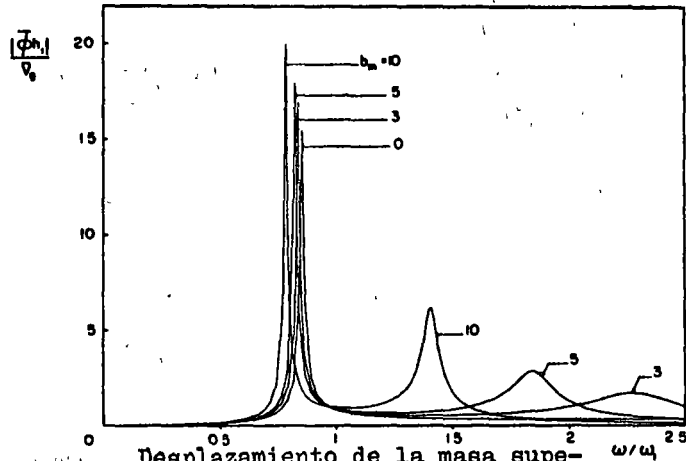


(c) DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE LA BASE

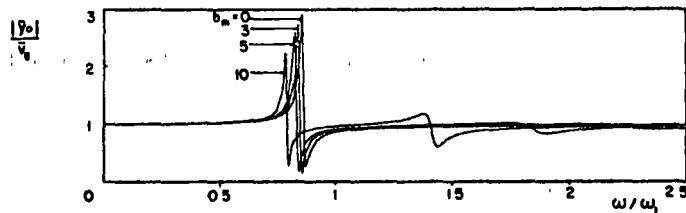
Fig. 4. Respuesta armónica del sistema estructura-subsuelo de un piso  
 $(\alpha_1 = 1.5, b_1 = 1, \sigma = 1/4; b_n = b_m = \eta_1 = 0)$



(a) Desplazamiento relativo de la masa superior

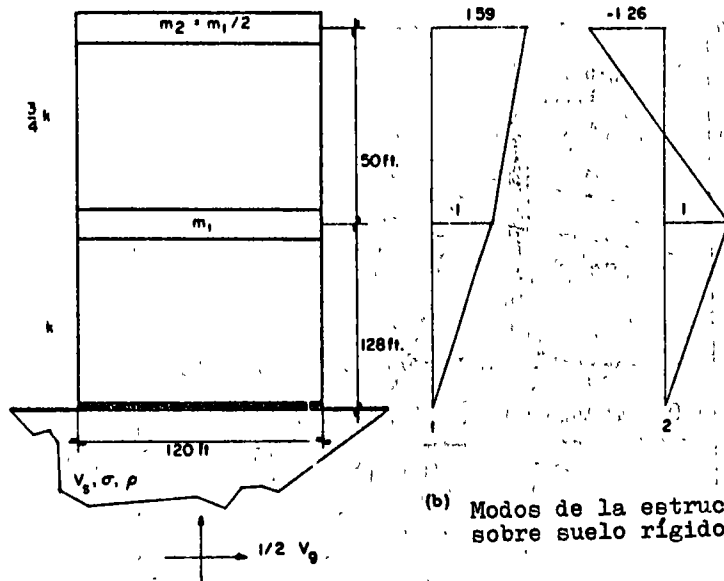


(b) Desplazamiento de la masa superior debido a rotación



(c) Desplazamiento horizontal de la base

Fig. 5. Respuesta armónica del sistema estructura-subsuelo de un piso ( $a_1 = 0.5$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\sigma = 1/4$ ,  $b_n = \eta_1 = 0$ )



(a) Modelo

(b) Modos de la estructura sobre suelo rígido

$\omega_1 = 25.15 \text{ rad/sec}$  ( $T_1 = 0.25 \text{ sec}$ )       $I_t = 16.48 \times 10^8 \text{ lb-sec}^2/\text{ft}$   
 $\omega_2 = 55.30 \text{ rad/sec}$        $r = 60 \text{ ft.}$   
 $m_1 = .475 \times 10^6 \text{ lb-sec}^2/\text{ft}$        $\rho = 3.73 \text{ lb-sec}^2/\text{ft}^4$  ( $\gamma_0 = 120 \text{ lb/ft}^3$ )  
 $m_2 = .2375 \times 10^6 \text{ lb-sec}^2/\text{ft}$        $\sigma = 1/4$   
 $m_0 = 1.07 \times 10^6 \text{ lb-sec}^2/\text{ft}$       Amortiguamiento nulo de la estructura

(c) Valores de los parámetros

Fig. 6. Sistema estructura-subsuelo de dos pisos



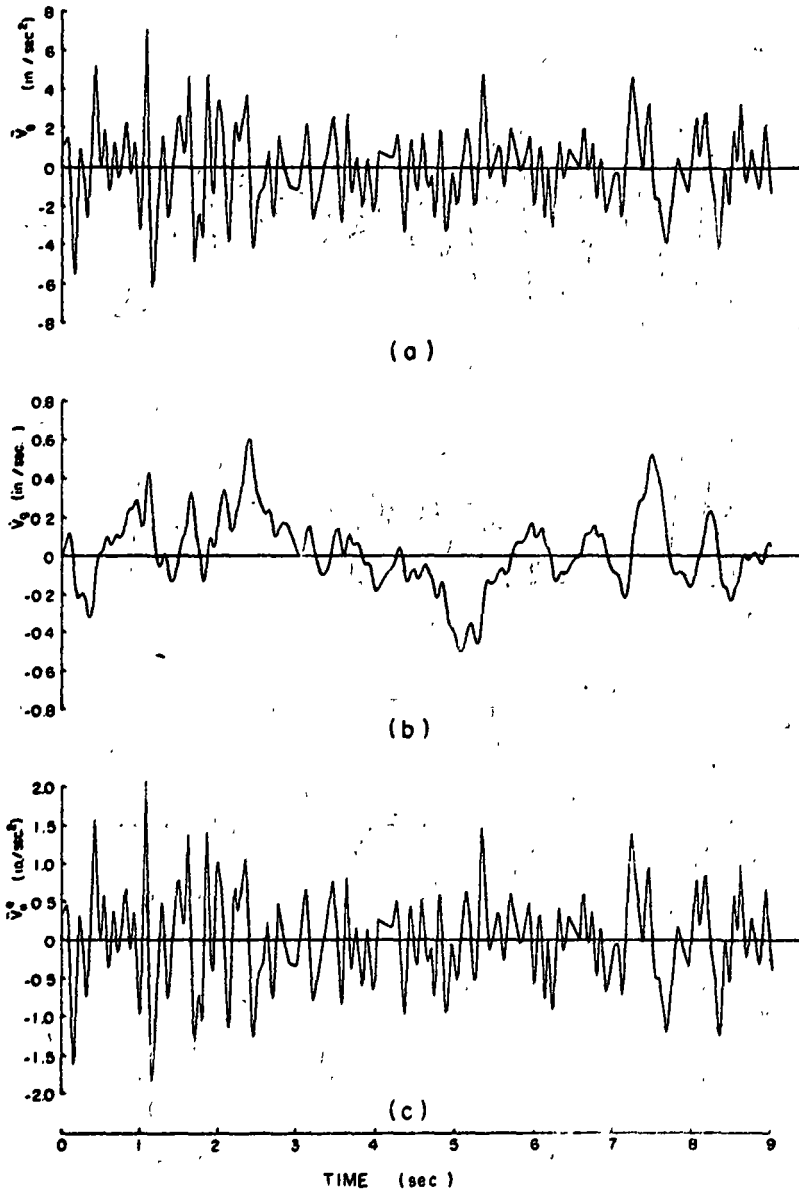


Fig. 7. Excitación para el sistema estructura-subsuelo de dos pisos

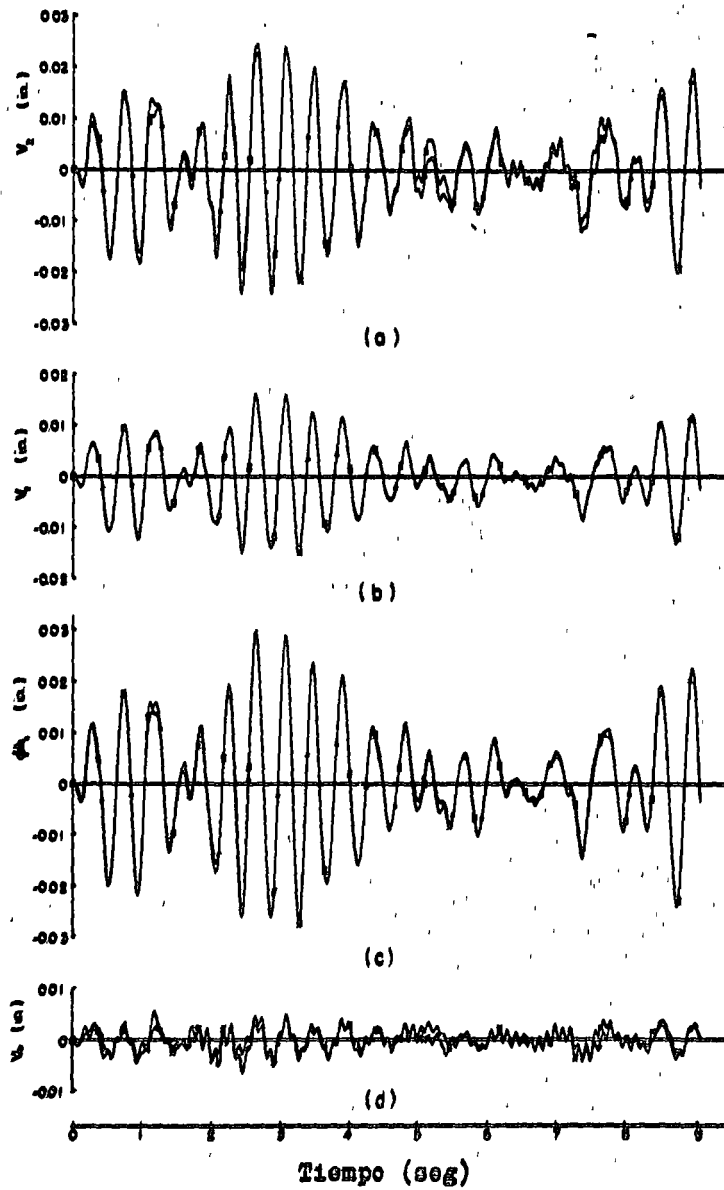


Fig. 8. Respuesta sísmica de la estructura de dos pisos sobre el semi-espacio elástico

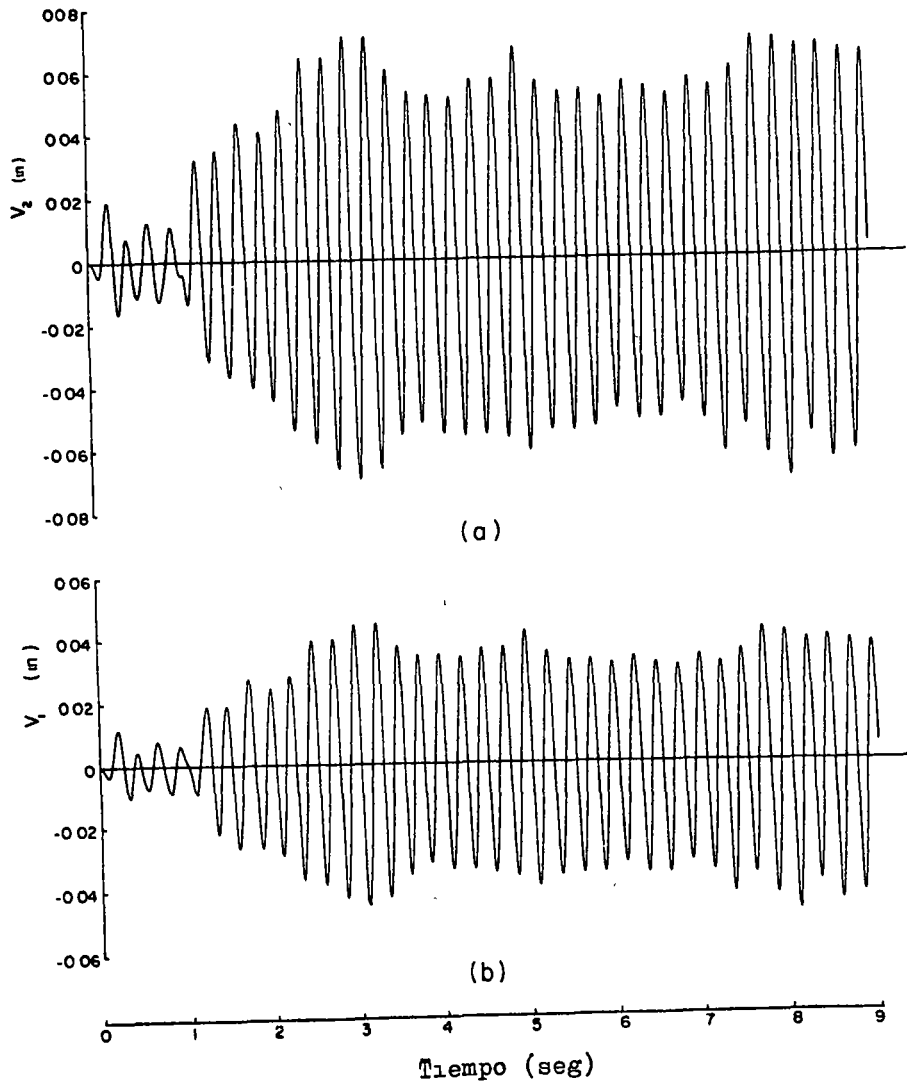


Fig. 9. Respuesta sísmica de la estructura de dos pisos sobre suelo rígido



## INTERACCION DINAMICA ESTRUCTURA-SUBSUELO

### REFERENCIAS

1. Kanai, K. (1939). Model Experiments for Confirming the Dissipation Phenomena in the Seismic Vibration of a Structure, Bulletin Earthquake Research Institute of Tokyo University, Vol. 17.
2. Housner, G. W. (1957). Interaction of Building and Ground During an Earthquake, Bulletin Seismological Society of America. Vol. 47. No. 3, pp. 179-186.
3. Sato, Y. y R. Yamaguchi (1960). Vibration of a Building Upon and Elastic Foundation, Bulletin Earthquake Research Institute of Tokyo University, Vol. 38, pp. 369-383.
4. Sandi, H. (1960). A Theoretical Investigation of the Interaction Between Ground and Structure During Earthquake, Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering, Japan, pp. 1327-1347.
5. Fleming, J. F., F. N. Screwvala y R. L. Kondner. (1965). Foundation Superstructure Interaction under Earthquake Motion, Proceedings of the Third World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand, pp. 122-130.
6. Nieto, J. A., E. Rosenblueth y O. A. Rascón (1965). Modelo matemático para representar la interacción dinámica de suelo y cimentación. Boletín Soc. Mex. de Ing. Sísmica, Vol. 111 No. 2.

7. J. A. Nieto y D. Reséndiz (1965). Interacción dinámica entre Subsuelo y Estructura: una revisión del problema; Boletín Soc. Mex. de Ing. Sísmica, Vol. 111, No. 2.
8. Y. Ohsaki, (1969). Effects of Local Soil Conditions upon Earthquake Damage, Proceedings of Specialty Session 2, Soil Dynamics, Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México, pp. 3-32.
9. Seed, H. B. (1969). The Influence of Local Soil Conditions Upon Earthquake Damage, Proceedings of Specialty Session 2, Soil Dynamics, Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México, pp. 33-66.
10. Duke, C. M., J. E. Luco, A.R. Carriveau, P.S. Hradilek, R. Lastrico y D. Ostrom (1970). Strong Earthquake Motions and Site Conditions. Hollywood, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 60, No. 4, pp. 1271-1289.
11. Hradilek, P.J. y J.E. Luco (1970). Dynamic Soil-Structure Interaction, IDIEM. Informe Técnico No. 14, Chile.
12. Liu S.C. y L.W. Fagel (1971). Earthquake Interaction by Fast Fourier Transform, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM4, pp. 1223-1237.
13. Bielak, J. (1971). Respuesta Sísmica de Sistemas Suelo-Estructura, Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Acapulco, Gro.

# THE INFLUENCE OF LOCAL SOIL CONDITIONS ON EARTHQUAKE DAMAGE

H. Bolton Seed

H. Bolton Seed is Professor of Civil Engineering and Chairman of the Department of Civil Engineering of the University of California at Berkeley.

He received his B.Sc. and Ph.D. degrees at Kings College, London University, and his S.M. degree at Harvard University.

He is a consultant to many engineering companies and government agencies. Most recently he has served as a consultant on design aspects of nuclear power plants and major earth dam projects.

He has served on executive committees of the ASCE Soil Mechanics and Foundations Division and the Highway Research Board Department of Soils, Geology and Foundations. He is an active member of ASCE committees and author of some 85 papers on soil mechanics. His awards include the Norman Medal of the ASCE; in 1967 he gave the Fourth Terzaghi Lecture at the ASCE Structural Engineering Conference in Seattle.



H. Bolton Seed

## I. INTRODUCTION

The damage resulting from earthquakes may be influenced in a number of ways by the characteristics of the soils in the affected area. Where the damage is related to a gross instability of the soil, resulting in large permanent movements of the ground surface, association of the damage with the local soil conditions is readily apparent. Thus for example deposits of loose granular soils may be compacted by the ground vibrations induced by the earthquake resulting in large settlements and differential settlements of the ground surface. Typical examples of damage due to this cause are shown in Figs. 1 and 2. Fig. 1 shows an island near Valdivia, Chile which was partially submerged as a result of the combined effects of tectonic land movements and ground settlement due to compaction in the Chilean earthquake of 1960. Fig. 2 shows differential settlement of the backfill of a bridge in the Niigata earthquake of 1964.

In cases where the soil conditions consist of loose granular materials, the tendency to compact may result in the development of excess hydrostatic pressures of sufficient magnitude to cause liquefaction of the soil, resulting in settlements and tilting of structures as illustrated in Fig. 3. Liquefaction of loose saturated sand deposits resulted in major damage to thousands of buildings in Niigata, Japan in the Niigata earthquake of 1964 (Ohsaki, 1966).

Again, the combination of dynamic stresses and induced pore water pressures in deposits of soft clay and sands may result in major landslides such as that which developed in the Turnagain Heights area of Anchorage, Alaska in the earthquake of March 27, 1964 (Seed and Wilson, 1967). An aerial view of the slide area is shown in Fig. 4. The coastline in this area was marked by bluffs some 70 ft high sloping at about 1 on 1-1/2 down to the bay. The slide induced by the earthquake extended almost 2 miles along the coast and extended inland an average distance of about 900 ft. The total area within the slide zone was thus about 130 acres. Within the slide area the original ground surface was completely devastated by displacements which broke up the ground into a complex system of ridges and depressions. In the depressed areas the ground dropped an average of 35 ft during the sliding. Houses in the area, some of which moved laterally as much as five or six hundred feet as the slide progressed, were completely destroyed. Major landslides of this type have been responsible for much damage and loss of life during earthquakes.

A somewhat less obvious effect of soil conditions on building damage is the influence they exert on the intensity of ground shaking and thereby on the structural damage which may develop even though the soils underlying a building may remain perfectly stable during an earthquake. A recent example of this effect is provided by the building damage in Caracas, Venezuela in the Caracas earthquake of 1967. In the east end of the city where the soils extended to depths

ranging from 300 to 700 ft, four multi-story apartment buildings collapsed and the structural damage intensity for buildings with more than 9 stories was about 15 percent. However in the west end of the city, which was slightly nearer the epicenter of the earthquake and where the soil had generally similar characteristics but only about 60 to 280 ft deep, there were no collapses of multi-story buildings and the structural damage intensity for buildings with more than 9 stories was relatively low. The potential influence of local soil conditions on shaking and damage intensity in this way is one

of their most far-reaching influences on earthquake damage and merits the most careful attention of soil engineers and geologists.

The following pages present a brief review of the current state-of-the-art concerning the engineering evaluation of the influence of local soil conditions on:

- (1) ground response and shaking intensity
- (2) soil settlement
- (3) soil liquefaction
- and (4) slope instability during earthquakes.



Fig. 1. Partially Submerged Island Near Valdivia, Chile (1960)

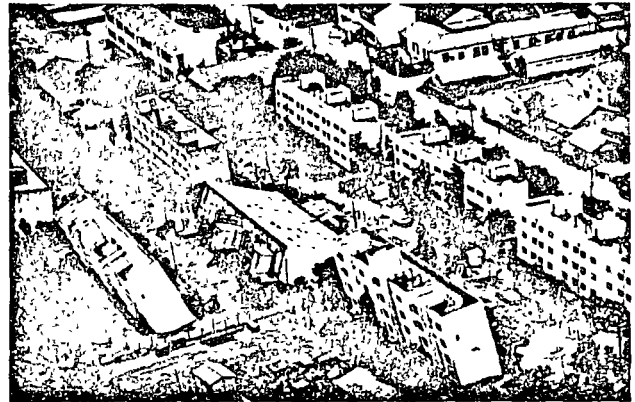


Fig. 3. Tilting of Apartment Buildings, Niigata (1964)

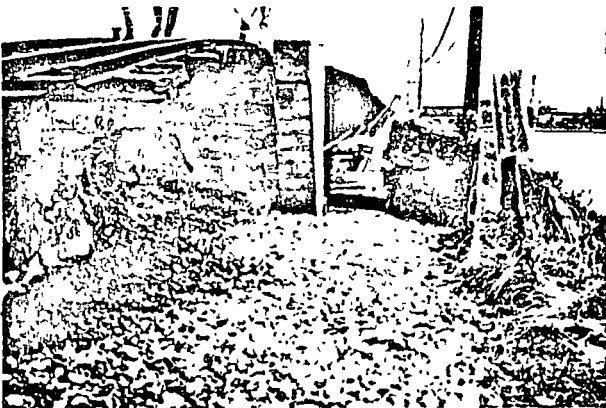


Fig. 2. Differential Settlement Between Bridge Abutment and Backfill, Niigata (1964)



Fig. 4. Turnagain Heights Landslide, Anchorage, Alaska (1964)



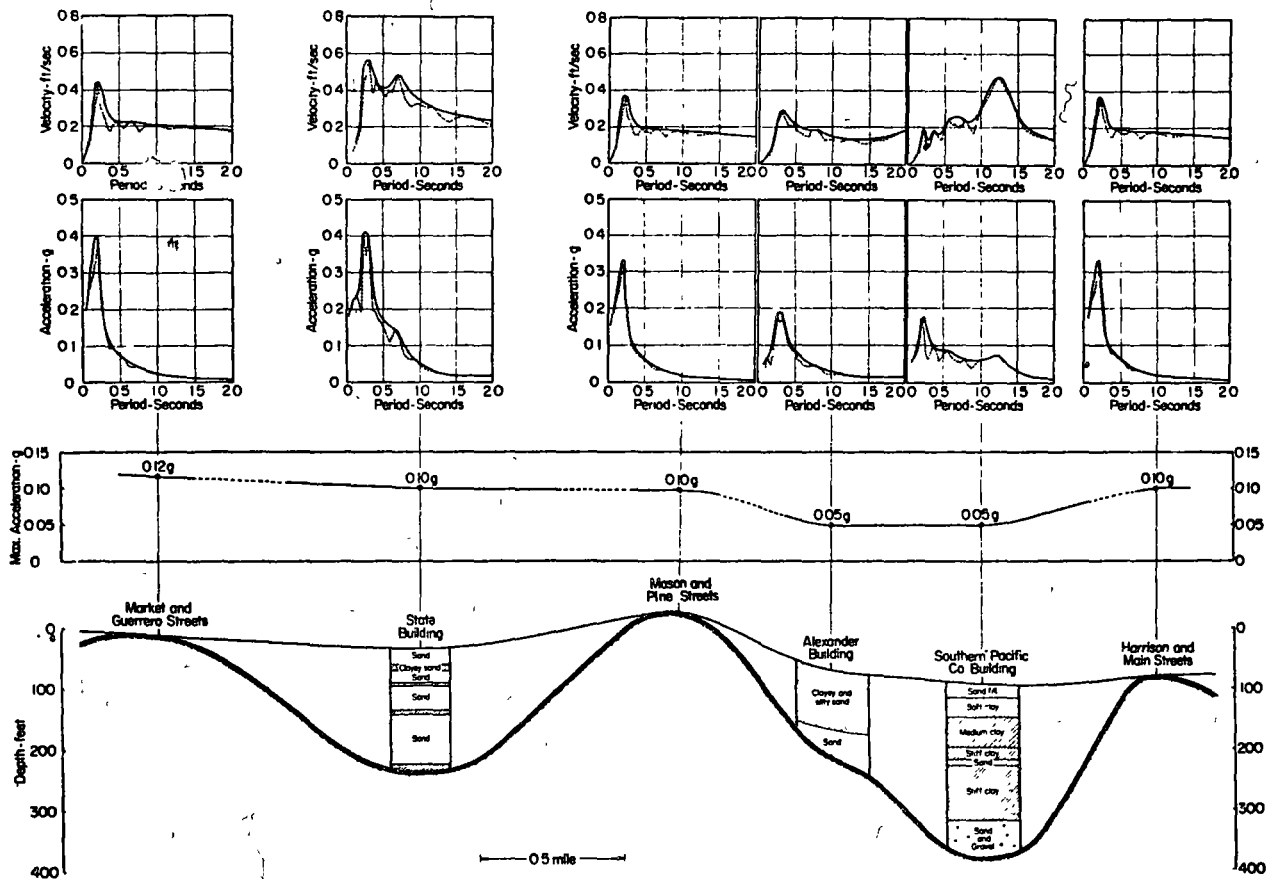


Fig. 5. Soil Conditions and Characteristics of Recorded Ground Motions - San Francisco Earthquake, 1957

## II. INFLUENCE OF SOIL CONDITIONS ON SHAKING INTENSITY AND ASSOCIATED STRUCTURAL DAMAGE

### 1. Ground Motions and Response Spectra

While the concept that the intensity of shaking and the incidence of damage during earthquakes are related in a general way to the local soil conditions has prevailed for many years, it seems likely that the first definitive study of the subject was that made by Wood (1908) following the 1906 San Francisco earthquake. From an investigation of damage locations and local geology Wood concluded:

"The investigation has clearly demonstrated that the amount of damage produced by the earthquake of April 18 in different parts of the city and county of San Francisco depended chiefly on the geological character of the ground."

Subsequent studies have shown different correlations between damage to houses and local soil conditions, but it is in comparatively recent years that instrumental data and analytical studies have provided the basis for an improved understanding of these effects.

Wood's concept of the variations in intensity of shaking at different locations in San Francisco, for example, were confirmed by recordings made at a number of locations during the 1957 San Francisco earthquake. The variations in maximum ground accelerations in relation to soil conditions are shown in Fig. 5. It is apparent that although all the sites shown in Fig. 5 were approximately the same distances from the zone of energy release, the ground accelerations at adjacent locations varied in some cases by as much as 100%, presumably as a result of the different soil conditions underlying the recording stations. Similar differences at adjacent sites have also been recorded in Osaka, Japan (Hisada et al, 1965). Variations in acceleration levels of this order of magnitude will inevitably lead to differences in structural damage intensity.

Important as the maximum ground acceleration at a building site may be, however, it does not alone determine the intensity of the shaking effects of a ground motion; these depend also on the frequency characteristics of the ground motion and its duration. For example, a very high acceleration developed for a very short period of time will cause little damage to many types of structures. A good example of this is provided by the ground motion recorded near

Parkfield, California, in the earthquake of June 27, 1966. The maximum ground acceleration reached a value of 0.5g but probably because of its high frequency and the short duration of ground shaking, no significant damage to buildings was reported (Cloud, 1967). On the other hand, a motion with a relatively small amplitude which continues with a reasonably uniform frequency for a number of seconds can build up large accelerations and accompanying damage in certain types of structures. A good example of this effect is the damage to structures in Mexico City during the earthquake of July 28, 1957. The maximum acceleration in the central part of the city was estimated to be only about 0.05 to 0.1g (Merino y Coronado, 1957) but the frequency characteristics and duration were sufficient to cause the complete collapse of multi-story structures (Rosenblueth, 1960).

The combined influence of the amplitude of ground accelerations, their frequency components and, to some extent, the duration of the ground shaking on different structures is conveniently represented by means of a response spectrum (e. g. Housner, 1952; Hudson, 1956); that is, a plot showing the maximum response induced by the ground motion in single degree of freedom oscillators of different fundamental periods, but having the same degree of internal damping. For example, the ground accelerations recorded in the El Centro earthquake of May 1940 are shown in the middle part of Fig. 6. If the three simple structures shown in the upper part of Fig. 6, having fundamental periods of 0.3, 0.5 and 1.0 seconds and damping factors of 0.05 were subjected to this motion, the maximum accelerations developed in them would be 0.75g, 1.02g and 0.48g respectively. It is apparent that the maximum acceleration induced in simple structures of this type varies with the fundamental periods of the structures. A graph showing the maximum accelerations induced in the entire range of such structures, with fundamental periods ranging from 0 to several seconds, is called an acceleration response spectrum. Such a graph for structures subjected to the ground motions recorded at El Centro is shown on the lower part of Fig. 6. The maximum accelerations for the structures shown in the upper part of Fig. 6, together with similar computations for structures with other fundamental periods, provide the means for plotting this response spectrum.

Clearly similar computations could be made for structures with a similar range of fundamental periods but having different degrees of internal damping. Thus it is customary to draw acceleration response spectra for a given ground motion for structures with several different degrees of internal damping, as shown in Fig. 7.

Similarly, the computations could be made to determine not the maximum accelerations but either the maximum induced velocities or the maximum displacements. A plot showing the relationship between the maximum velocity induced by a given base motion in single degree of freedom structures having a given degree of damping and the fundamental periods of the structures is termed a velocity response spectrum; such a spectrum for the El Centro ground motions is shown in Fig. 8.

For any given ground motion, values of the spectral velocity,  $S_v$ , and the spectral acceleration,  $S_a$ , for a single degree of freedom structure having a period,  $T$ , are related approximately by the equation

$$S_v \approx \frac{T}{2\pi} \cdot S_a$$

and it is therefore a simple matter to convert a velocity spectrum to an acceleration spectrum or vice-versa.

It may be seen from the above discussion that the time-history of the ground motions at a site is characterized by the corresponding response spectrum. Thus differences in the time histories of motions at different sites may be conveniently evaluated by a comparison of their response spectra. More importantly, however, a response spectrum provides a convenient means of evalu-

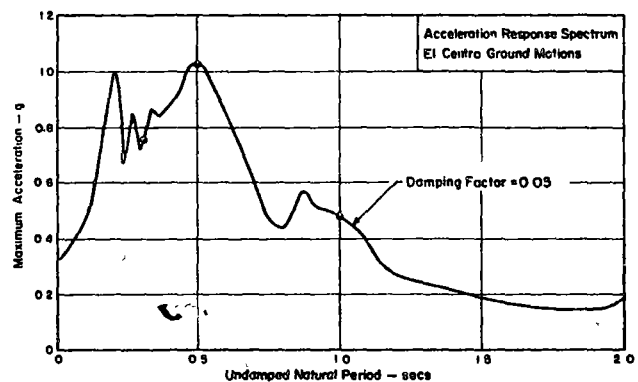
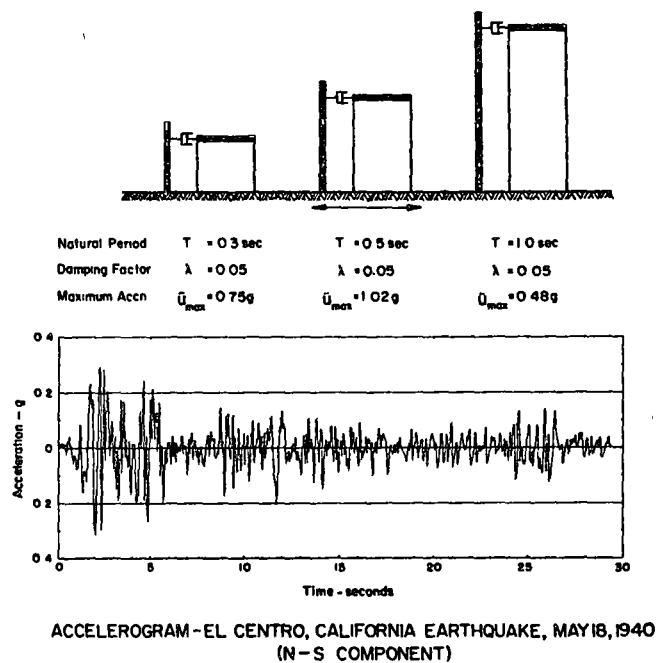


Fig. 6. Evaluation of Acceleration Response Spectrum

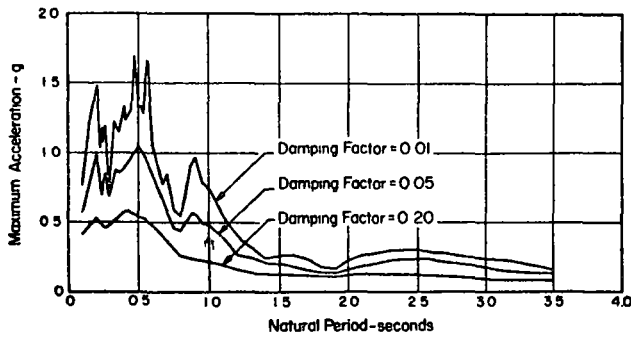


Fig. 7. Acceleration Response Spectra for El Centro (1940) Earthquake

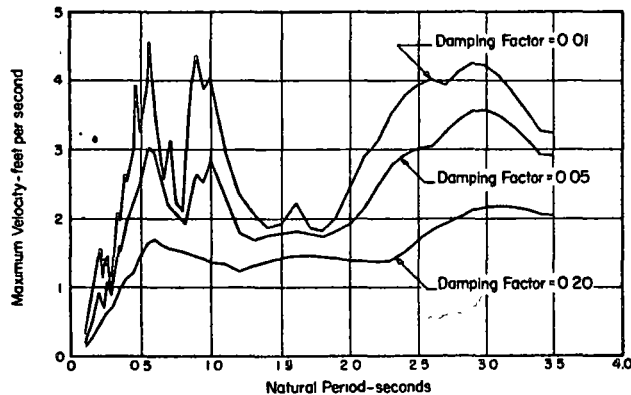


Fig. 8. Velocity Response Spectra for El Centro (1940) Earthquake

ating the maximum lateral forces developed in structures subjected to a given base motion. If the structure behaves as a single degree-of-freedom system, the maximum acceleration and thus the maximum inertia force may be determined directly from the acceleration response spectrum from a knowledge of the fundamental period of the structure. If the structure behaves as a multi-degree-of-freedom system, the maximum responses can be determined for a number of modes and the overall maximum evaluated by some appropriate combination of the different modal effects. Normally the first mode has the greatest influence on the maximum response and thus the fundamental period, even for a multi-degree-of-freedom structure, has a dominant influence on the induced lateral forces.

Thus the form of the response spectrum for a given ground motion is a major factor in determining the lateral forces induced on engineering structures. Of particular importance in the acceleration response spectrum for example, is the maximum ordinate and the fundamental period at which it occurs. This is readily illustrated by the data presented in Fig. 9. In the lower part of the figure are shown two ground motion records, one for a site in San Francisco in the San Francisco earthquake of 1957 and one recorded in Pasadena during the Kern County, California, earthquake of 1952. Both records show about the

same maximum ground acceleration. The response spectra for these ground motions are shown in the upper part of the figure. It is readily apparent from the spectra that responses of structures to the two ground motions will be radically different. For example, the maximum acceleration induced by the San Francisco ground motion in a one degree of freedom structure having a fundamental period of about 0.9 second would be only 0.04g; the maximum acceleration induced by the Pasadena ground motion on the same structure is seen to be 0.2g, an increase of about 400 percent. From the point of view of determining the maximum accelerations and lateral forces developed on structures during earthquakes, the establishment of the correct form of the response spectrum is clearly of primary importance.

It may be noted in Fig. 9, that the ground motions compared were recorded at quite different epicentral distances. Studies by Housner (1959) have shown that the frequency characteristics of the motions induced by any given earthquake change with increasing distance from the epicenter or zone of energy release. As the motions travel through the ground the short period motions tend to be filtered out, with the result that the maximum ordinate of the response spectrum tends to develop at progressively higher values of the fundamental period.

However, it should also be recognized that even for sites in the same general area, the frequency characteristics of the ground motions, and thus the form of the response spectrum, may be profoundly influenced by the nature of the soil conditions underlying the sites. This is clearly shown by the spectra for ground motions at different locations in the 1957 San Francisco earthquake shown in Fig. 5. For the sites shown in the figure, the highest values of spectral velocity for periods greater than about 0.5 second were developed in the areas where ground accelerations had their lowest values.

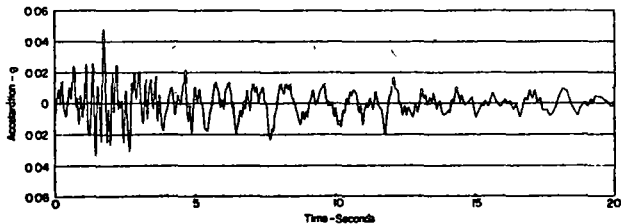
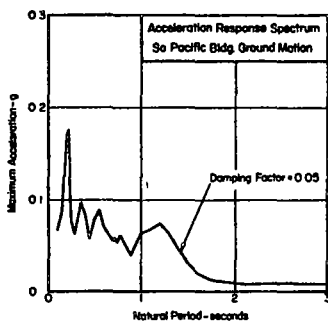
The influence of soil conditions on the forms of response spectra is also illustrated by the series of six response spectra shown in Fig. 10, (Seed and Idriss, 1969a) four of which were obtained from motions recorded in the same city in the same earthquake (Hisada, et. al, 1965) and all of which represent motions recorded at very considerable distances from the epicentral regions of earthquakes of similar magnitudes. Also shown in the figure are the soil conditions at the sites where the ground motions represented by the spectra were recorded. The spectra are arranged in sequence from A to F, corresponding to increasing degrees of 'softness' of the soil conditions underlying the recording stations. To eliminate the influence of different amplitudes of surface accelerations, the ordinates of the spectra have been normalized by dividing the spectral accelerations by the maximum ground acceleration at each site. Thus the different forms of the normalized spectra reflect primarily the different frequency characteristics of the motions from which they were obtained.

It may be seen that for the recording made on very dense sand at Site A, the peak ordinate of the response spectrum is developed at a period of about 0.3 seconds, indicating a predominantly high frequency in the ground motion. However for the still stiff (note high values of standard penetration resistance) but slightly

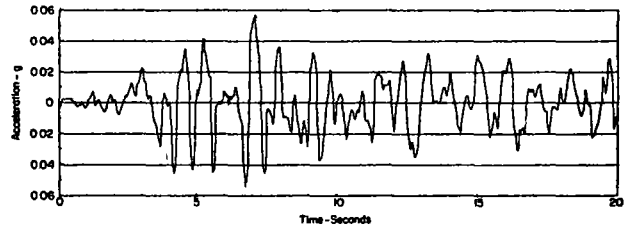
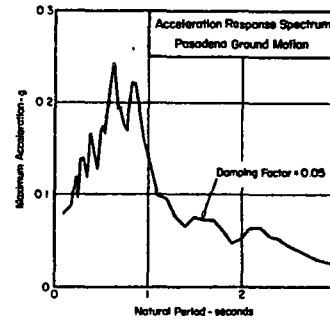
softer soil deposit at Site B, the peak ordinate of the spectrum occurs at 0.5 seconds and as the ground conditions become progressively softer, as evidenced by the presence of increasingly greater depths of soft and medium stiff clays and silts, the periods at which the peak spectral accelerations are developed change as follows:

Sites (arranged in increasing order of softness of soil conditions)	Period at which maximum spectral accn. is developed
A	≈0.3 seconds
B	≈0.5
C	≈0.6
D	≈0.8
E	≈1.3
F	≈2.5

It is thus apparent that the frequency components of the motions at the different sites and the form of the response spectra change in a reasonably consistent fashion depending on the 'softness' or 'hardness' of the soil conditions. For the sites underlain by deposits of stiff soils, the peak ordinates of the acceleration response spectra tend to occur at a low value of the fundamental period, say 0.4 or 0.5 seconds (see Fig. 10) indicating that at these locations the maximum accelerations would be induced in relatively stiff structures 5 or 6 stories in height. On the other hand, for the sites underlain by deep deposits of softer soils, the peak ordinates of the acceleration response spectra tend to occur at a rather high value of the fundamental period, say 1.5 to 2.5 seconds (see Fig. 10) indicating that at these sites, the maximum accelerations would be induced in multi-story structures, 20 to 30 stories in height. Thus lateral forces on structures and related building damage in the same general area may develop selectively; multi-story structures may be severely affected where they rest on relatively soft soil deposits but adjacent stiffer structures on the same deposits may be hardly



Accelerogram - Southern Pacific Building, San Francisco Earthquake, March 22, 1957



Accelerogram - Pasadena, Kern County, California Earthquake, July 21, 1952

Fig. 9. Accelerograms and Acceleration Response Spectra for Two Ground Motions with Comparable Maximum Accelerations

affected at all; conversely, multi-story buildings on shallow, stiff soil deposits may be only slightly affected while adjacent stiff structures are subjected to large lateral forces.

## 2. Seismic Forces and Damage Potential

From the point of view of safety against building damage, the significant effects of earthquakes are the forces they induce on structures of all types and the effects of these forces on structural performance. If it is considered that the response of a structure to a given base motion is dominated by the influence of the first mode, then the maximum lateral forces would have the approximate distribution shown in Fig. 11, decreasing from a maximum at the top of the structure to zero at the base. At the top of the structure the maximum acceleration would be equal to the spectral acceleration corresponding to the fundamental period and since the participation factor for the first mode response is normally greater than 1, the maximum dynamic lateral force would be approximately equal to  $W/g \cdot S_a$  where  $W$  is the weight of the structure. For a multi-story building other modes besides the first will clearly influence the response but the response in the first mode provides a good approximation of the induced forces for preliminary analysis purposes. This force may be expressed as the product of the weight of the building and a maximum dynamic lateral force coefficient  $S_a/g$ .

Since the spectral acceleration value varies with the period of the structure for any one site and the forms of the spectra vary for different sites depending on the underlying soil conditions, it is apparent that buildings with different periods in different locations will be subjected to forces expressed by different maximum dynamic lateral force coefficients, the distribution depending on the variation of the quantity  $S_a/g$

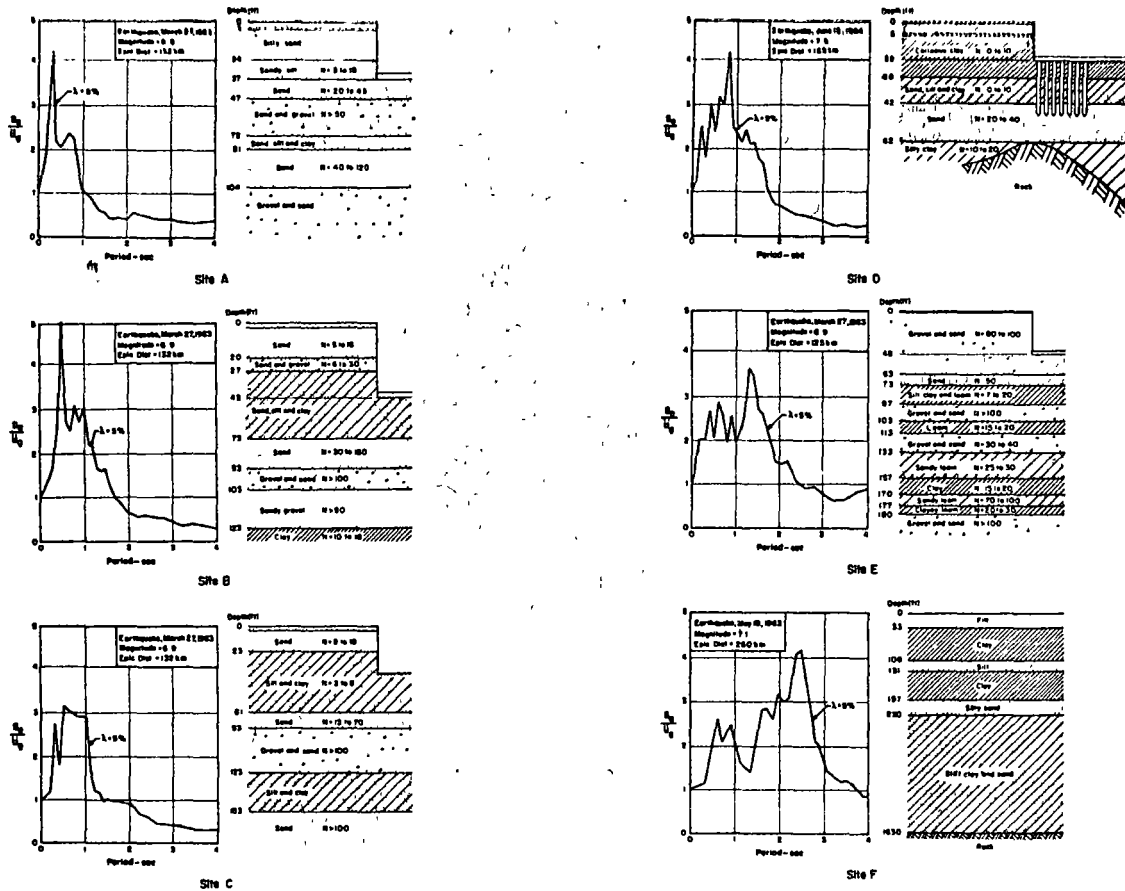


Fig. 10. Effect of Soil Conditions on Form of Response Spectra

in any given area. The variation of  $S_a/g$  along the section AB through San Francisco for the ground motions recorded in the 1957 earthquake, determined by reading off values from the acceleration spectra shown in Fig. 5, is plotted in Fig. 13. Ranges are shown for building periods,  $T$ , in the ranges:

$$\begin{aligned} T &= 0.3 \text{ to } 0.4 \text{ sec} \\ T &= 0.6 \text{ to } 1.0 \text{ sec} \\ T &= 1.2 \text{ to } 1.5 \text{ sec} \end{aligned}$$

These periods are approximately related to the heights of different structures by the expression:

$$T = \frac{N}{10}$$

where  $N$  is the number of stories.

It is readily apparent from the distribution of  $S_a/g$  shown in Fig. 13, that for this earthquake, the lateral force expressed as a proportion of the weight of any building, varied widely for different structures throughout a small section of the city. Maximum values were attained for buildings with periods ranging from 0.3 to 0.5 seconds in the area of the State Building site and relatively smaller values developed for the same type of buildings in other areas. For very tall buildings, the maximum lateral forces were everywhere much less in proportion to the weights

of the buildings, than for buildings in the 3 to 5 story range.

While spectral acceleration values provide a good index of the maximum lateral forces induced on buildings by any given ground motion, they do not necessarily provide the best index of the effects of these forces on a building. A large lateral force acting for a very short instant of time has little effect on a building. On the other hand a somewhat smaller force acting for a substantially longer period of time may cause severe deformations. Thus the potential damaging effect of a base motion might be considered to be approximately proportional to the product of the force developed and the period for which it sets; that is

$$\text{Potential damaging effect} \propto W \cdot S_a \cdot T$$

$$\text{or} \quad \propto W \cdot S_v$$

$$\text{since } S_v = \frac{T}{2\pi} \cdot S_a$$

Thus the spectral velocity,  $S_v$ , is probably a somewhat better measure of the potential damaging effect of a base motion than the spectral acceleration,  $S_a$ .

The variations in  $S_v$  along the section AB are also shown in Fig. 13. Again wide variations in the potential deforming effects of the motions are apparent; at any one site, the potential

deforming effect of the earthquake, expressed by the spectral velocity,  $S_v$ , varies widely depending on the period of the building and for any one kind of building in a given period range, the value of  $S_v$  varies from site to site. For the 1957 earthquake, the potential deforming effects of the ground motion were apparently highest for buildings in the period range 0.3 to 0.4 seconds located near the State Building and lowest for buildings in the period range 1.2 to 1.5 seconds in the vicinity of the Alexander Building. However in general, the variations in deformation potential expressed by the spectral velocity,  $S_v$ , across the profile are considerably less than the variations in the maximum dynamic lateral force coefficient expressed by the spectral acceleration,  $S_a/g$ .

In the previous paragraphs, the spectral acceleration and the spectral velocity have been shown to provide simple indices of the dynamic lateral forces developed on buildings and the damaging potential for buildings due to the

ground motions produced by any given earthquake. If all buildings were designed to be equally resistant to earthquake effects these indices would also provide a convenient means of expressing the damage potential of different buildings for any given earthquake. However while most building codes used for earthquake-resistant design require that buildings of a given type be designed to withstand a static lateral force having a magnitude commensurate with the anticipated earthquake motions, and expressed as a lateral force coefficient,  $k$ , times the weight of the building, the magnitude of the coefficient usually varies with the fundamental period of the building, or the number of stories in the building. In general the lateral force coefficient decreases with increasing values of the fundamental period or increasing numbers of stories as illustrated in Fig. 12. Thus buildings are not generally designed to be equally resistant to the same induced forces.

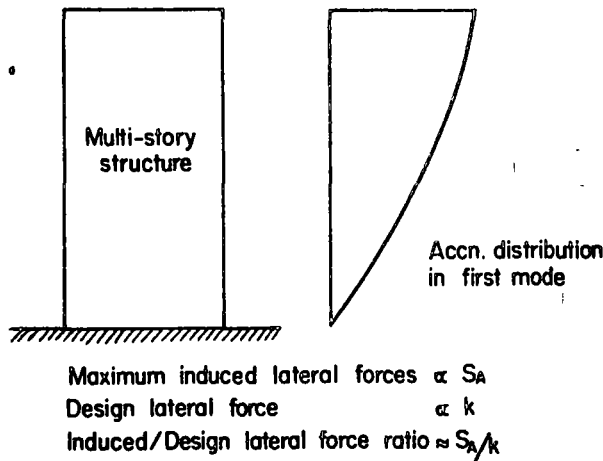


Fig. 11. Schematic Representation of First Mode Forces on Building

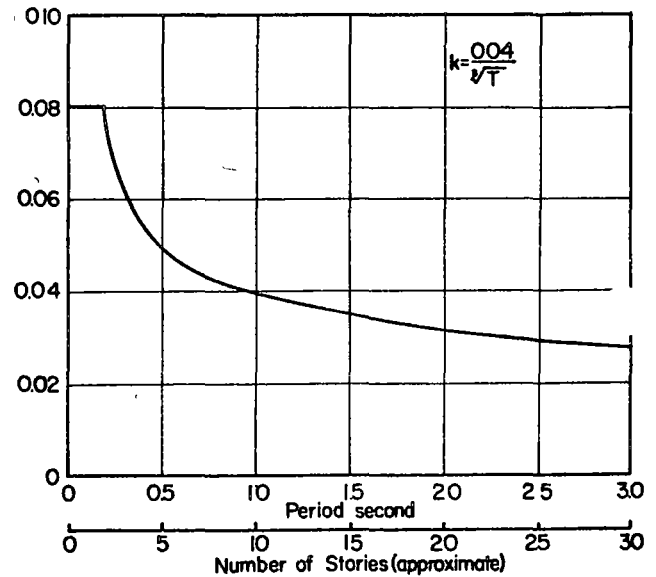


Fig. 12. Relationship Between Seismic Coefficient and Building Period (SEAOC Code)

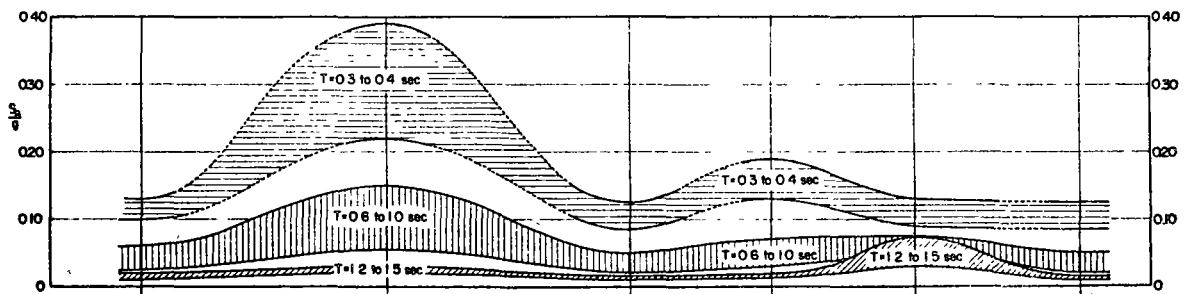


Fig. 13. Continued on next page.

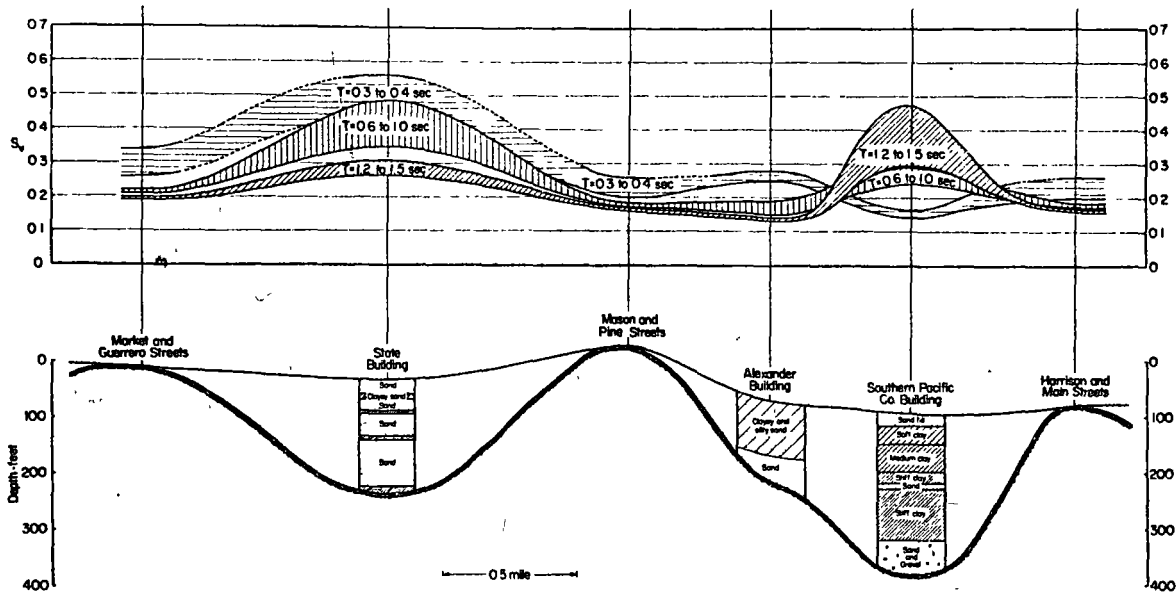


Fig. 13. Distribution of Spectral Accelerations and Spectral Velocities for Recorded Motions - San Francisco Earthquake, 1957

The variations in design lateral forces should be taken into account in assessing the damage potential of any given earthquake for buildings designed in accordance with code requirements. In many cases, of course, buildings will be designed to withstand larger forces than the minimum values required by the codes, but in a general way it might be expected that the lateral force which a given type of building is designed to withstand would be proportional to the lateral force coefficient required by the local building code for that type of structure. In effect, then, the induced dynamic lateral force is approximately represented by  $W \cdot S_a / g$  and the static lateral force an average building is designed to resist is equal to  $kW$  where  $W$  is the weight of the building. Thus the ratio

$$F_r = \frac{\text{Maximum induced dynamic lateral force}}{\text{Static design lateral force}} = \frac{S_a}{k g}$$

would provide a relative measure of the ability of different structures to withstand the destructive effects of an earthquake.

Alternatively since the spectral velocity provides a better index of the damaging effects of a base motion, the relative abilities of different types of buildings to withstand different spectral velocities will be indicated by the ratio

$$D_r = \frac{\text{Potential damaging effect of base motion}}{\text{Design resistance}} = \frac{S_v}{k}$$

Damage potential indices such as  $F_r$  and  $D_r$  (and possibly others such as  $S_v^2/k$ ) provide a convenient, simple, and rational means of assessing, in a general way, the potential damaging effect of earthquake motions on different structures. In particular the index  $D_r$  has been found to provide an extremely satisfactory basis for

analyzing the damage resulting from the 1967 Caracas earthquake and might be expected to serve a similar purpose for other areas. However their use in preventing damage depends on the ability of the engineer to predict the response spectra for the ground motions produced by earthquakes which may be expected to occur in any given area. Determination of the effects of local soil and foundation conditions on the characteristics of earthquake ground motions is therefore an essential part of damage prevention and analysis.

### 3. Methods of Determining the Effect of Soil Conditions on Ground Motion Characteristics

There are three methods by which the effect of soil conditions on ground motions might be predicted:

a. By Accumulation of Strong Motion Records. By accumulation of sufficient data on the ground response at a large number of sites with a wide range of soil conditions, due to different magnitudes of earthquakes at different epicentral distances, it would ultimately be possible to predict the probable motions at a new site by direct comparison of the appropriate conditions with previous data. While existing ground motion records provide a useful general guide for this purpose, there are insufficient records of strong ground motions and the associated soil conditions available to provide a basis for detailed analyses of specific sites.

b. By Use of Microtremor Data. The influence of soil conditions on ground motion characteristics at any site could readily be determined if use could be made of small earthquakes and micro-tremors to provide a basis for evaluating site effects. In this event mobile installations could be used to record the effects

directly since the frequency of occurrence of small earthquakes and micro-tremors would permit recordings to be made at frequent intervals. Unfortunately, because of the non-linear stress-strain characteristics of soils, the behavior at small strain levels during very small earthquakes cannot be used as a direct basis for evaluating behavior at high strain levels during major earthquakes without the aid of an appropriate analytical procedure for extrapolating micro-tremor effects to strong motion conditions. Thus while micro-tremor effects can serve an extremely useful purpose in establishing one bound on the range of possible behavior patterns and in checking the applicability of a proposed analytical procedure, they do not appear to provide, in themselves, a full predictive capability for engineering purposes.

Layer No. 1		$G_1, \lambda_1, \gamma_1$
2		$G_2, \lambda_2, \gamma_2$
3		$G_3, \lambda_3, \gamma_3$
4		$G_4, \lambda_4, \gamma_4$
n		$G_n, \lambda_n, \gamma_n$

Fig. 14. Semi-infinite Soil Deposit

c. By Use of Analytical Procedures. In many cases the ground motions developed near the surface of a soil deposit during an earthquake may be attributed primarily to the upward propagation of waves from an underlying rock formation and analytical procedures have been developed in recent years for determining ground response under these conditions. The methods of analysis depend on the configuration of the soil deposit.

(1) Deposits with Essentially Horizontal Boundaries. For cases where all boundaries of a stratified or homogeneous deposit are essentially horizontal the soil may be treated as a series of semi-infinite layers as shown in Fig. 14 and the analysis reduces to a one-dimensional problem. Two methods of approach have been used to analyze ground response under these conditions:

(a) An analysis based on the use of the wave equation (Kanai, 1950; Kanai, 1951; Zeevaert, 1963; Matthiesen et al, 1964; Herrera and Rosenblueth, 1965; Kobayashi and Kagami, 1966; Donovan and Matthiesen, 1968). In this approach the soil comprising each layer is considered to have uniform viscoelastic properties and the motion in the underlying bedrock to consist of a series of sinusoidal motions of different frequencies. The response at the surface of the deposit is then computed for a range of base rock frequencies providing a response amplification spectrum. The surface motions at a site resulting from a given base motion can then be evaluated by multiplying the Fourier spectrum of the base motion by the amplification spectrum, and inverting the resulting Fourier spectrum to determine the motions at the ground surface.

(b) An analysis in which the soil deposit is represented by a series of lumped masses connected by shear springs whose characteristics are determined by the stress-strain relationships of the soils in the various layers.

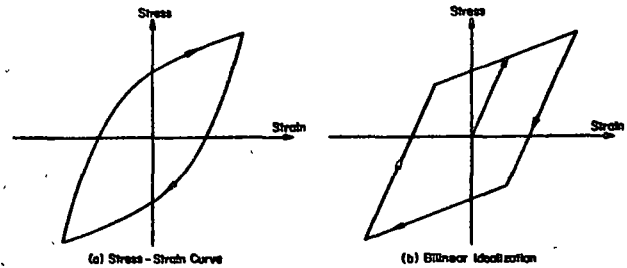


Fig. 15. Hysteretic and Equivalent Bi-linear Stress Strain Relationships for Soil

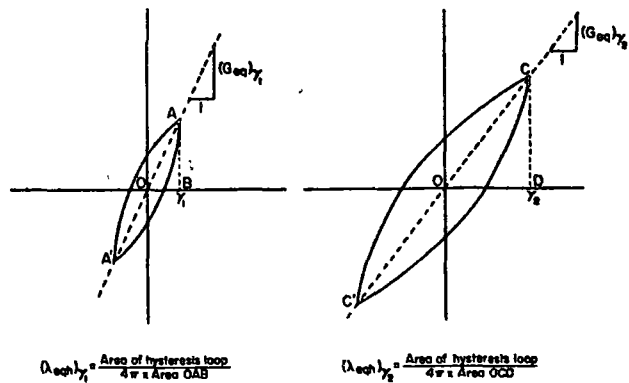


Fig. 16. Determination of Equivalent Linear Parameters for Soil with Non-linear Hysteretic Characteristics



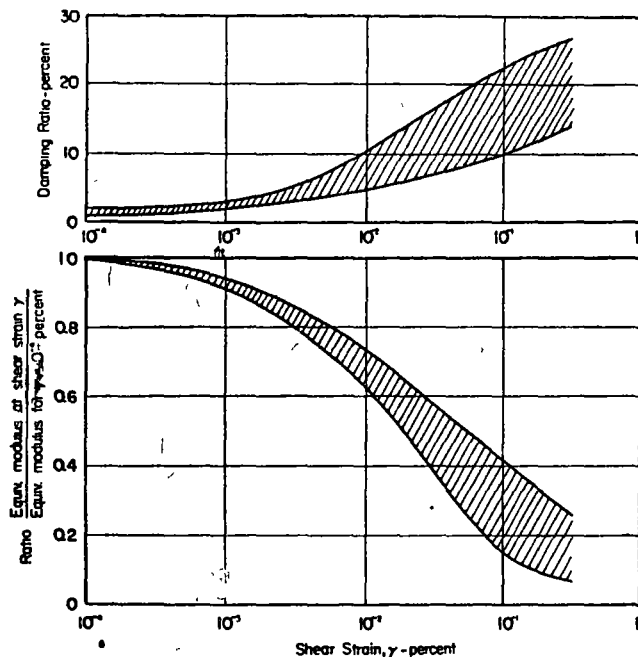


Fig. 17. Influence of Shear Strain on Equivalent Modulus and Damping Ratios

Similarly the damping characteristics of the system are determined by the soil properties. The response of the system to a motion generated at the base can then be made by conventional dynamic analysis procedures (Penzien et al, 1964; Idriss and Seed, 1968a, 1969).

Whether the analysis is made by the wave propagation or the lumped mass approach, meaningful results can only be obtained if the soil characteristics are correctly represented in the analytical procedure. In this respect it is important to recognize that soils have non-linear stress-strain characteristics as shown in Fig. 15a, which for analysis purposes may be represented by bi-linear relationships as shown in Fig. 15b (Penzien et al, 1964) or multi-linear relationships (Valera, 1968). However it has been found that essentially similar results can be obtained using an equivalent linear visco-elastic analysis in which the soil moduli and damping characteristics are selected to be compatible with the strains developed in the deposit as shown in Fig. 16 (Idriss and Seed, 1968a). Thus the equivalent shear moduli and damping characteristics of the soils are treated as strain-dependent properties and their values for high intensity motions are significantly different from those applicable to low intensity motions. Typical ranges for the variation of shear moduli and damping ratios with strain suggested by different investigators are shown in Fig. 17. It should be emphasized that the results shown in this figure are of a general nature and are simply intended to illustrate the large variations in characteristics applicable for different strain amplitudes.

Analyses of simple soil profiles using the same soil characteristics have shown that wave propagation and lumped mass analyses give the same results (Whitman, 1969). Furthermore both

methods have been applied to soil profiles at locations for which records of the ground motions developed during earthquakes are available and shown to give results in reasonable agreement with the recorded values (Seed et al, 1968; Donovan and Matthiesen, 1968; Idriss and Seed, 1968b, Seed and Idriss, 1969a; Seed and Idriss, 1969b; Kiefer et al, 1969; Esteva et al, 1969). Apart from the use of strain-dependent soil characteristics, techniques for incorporating the non-linear properties of soils in the wave propagation analysis procedures have not yet been developed but since the use of equivalent linear techniques seem to be adequate for this purpose, meaningful results can be obtained by both methods of approach.

In making response analyses, it is of course important that the characteristics of the base rock motions be determined with reasonable accuracy, both with regard to amplitude and frequency characteristics. In this connection there is some question whether the motions developed in the rock at the base of a soil layer will be the same as those developed in an adjacent rock outcrop. However such differences are likely to be small, and because of the self-compensating characteristics of a soil deposit subjected to a base excitation, substantial variations in amplitude of the estimated base motion will have only minor effects on the amplitude of the computed surface motions. Some typical examples for a number of different sites are shown in Table I. It may be seen that significant variations in base motions of the order of  $\pm 50\%$  lead to deviations varying between 5 and 25% from the mean value of the computed surface motions. Thus while it is important to make reasonable assessments of base rock motions, extreme accuracy is often not required, especially in dealing with strong motions which are of major interest to the engineer, in order to make reasonably accurate assessments of surface motions. Similarly variations in depth of a deposit, in excess of about two to three hundred feet, often have little influence on the characteristics of surface motions. On the other hand, good evaluations of soil properties in the upper two hundred feet or so of a deposit are often essential for good response evaluations, and it is to this end that the main efforts should be directed in studies of ground response. If the soil characteristics are correctly evaluated, and reasonably accurate assessments of

TABLE I  
EFFECT OF AMPLITUDE OF ROCK MOTIONS ON GROUND RESPONSE

Location	Range of Max. Rock Accns. - g	Computed Max. Ground Surface Accn. - g	Recorded Max. Ground Surface Accn. - g
State Bldg., San Francisco	0.18 to 0.32	0.15 $\pm$ 10%	No record
Southern Pacific Bldg., San Francisco	0.18 to 0.32	0.21 $\pm$ 5%	No record
San Francisco Bay, California	0.17 to 0.44	0.16 $\pm$ 25%	No record
Niigata, Japan	0.10 to 0.25	0.14 $\pm$ 25%	0.135
Caraballeda, Venezuela	0.03 to 0.07	0.10 $\pm$ 12%	$\approx$ 0.12*
Palos Grandes, Caracas	0.03 to 0.07	0.085 $\pm$ 20%	$\approx$ 0.07*
West Caracas, Venezuela	0.03 to 0.07	0.10 $\pm$ 25%	No record

\*Computed from structural damage observations.

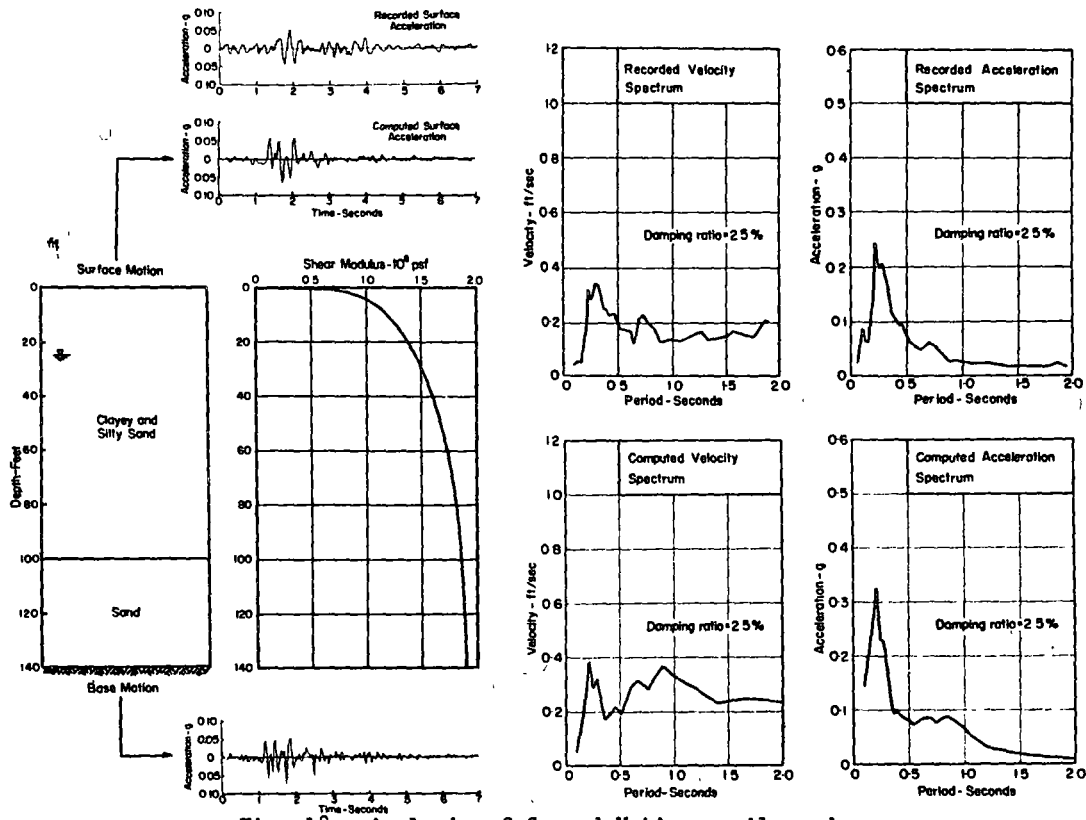


Fig. 18. Analysis of Ground Motions - Alexander Building, San Francisco

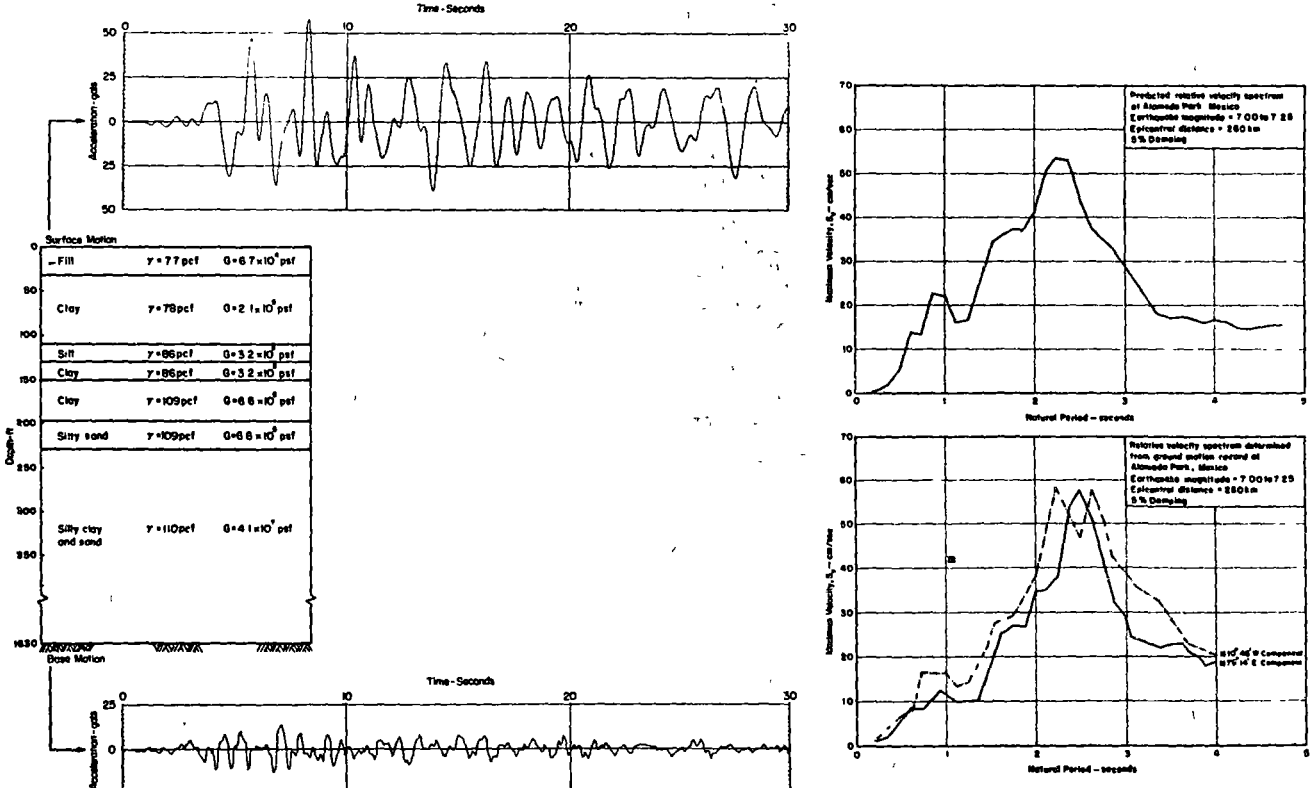


Fig. 19. Analysis of Soil Response at Site in Alameda Park, Mexico City

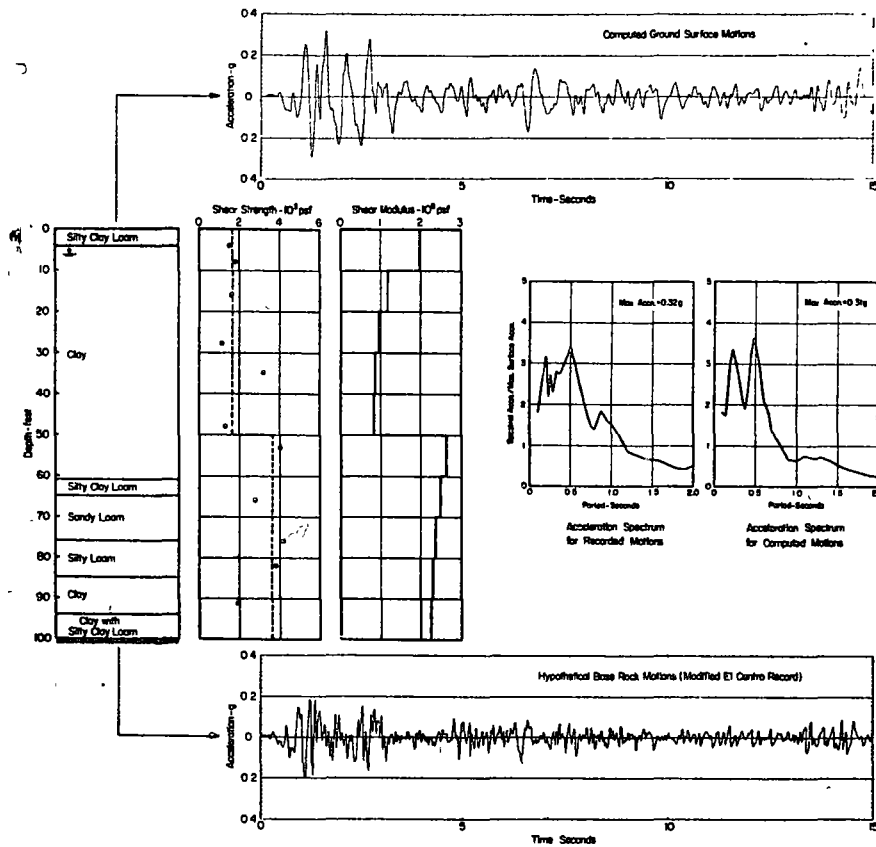


Fig. 20. Analysis of Ground Response at El Centro (1940)



Fig. 21. Finite Element Idealization of Earth Bank

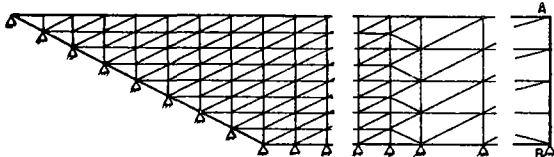


Fig. 22. Finite Element Idealization of a Soil Deposit Underlain by an Inclined Rock Slope

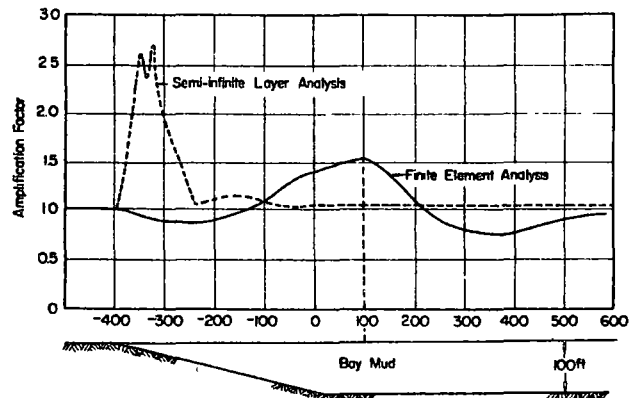


Fig. 23. Computed Ground Motions Adjacent to Sloping Rock Surface

base motions can be made, it should be possible to make reasonably good evaluations of the characteristics of ground surface motions using either of the two analysis procedures described above.

Several examples of comparisons between ground motion characteristics expressed in terms of response spectra, predicted by lumped-mass

analyses, and those recorded at various sites during earthquakes are shown in Figs. 18, 19 and 20. The degree of agreement is certainly indicative of the potential usefulness of these approaches for anticipating ground response for design purposes and for damage analysis studies. Their use for this latter purpose is discussed in a later section of this report.

(2) Deposits with Irregular or Sloping Boundaries. If a deposit has irregular or sloping boundaries, it can no longer be treated as a semi-infinite layer and more complex analytical procedures, which take into account the two-dimensional aspects of the problem, are required. For this purpose the finite element method of analysis, which is in effect the two-dimensional equivalent of the lumped mass approach for semi-infinite layers, provides an appropriate method for response determination. The finite element approach was first used to study the dynamic response of embankments by Clough and Chopra (1966); it has subsequently been applied to evaluate the response of earth banks and soil deposits underlain by sloping rock surfaces.

In this method a continuous medium is idealized as an assemblage of finite elements in appropriate sizes and shapes, connected at a finite number of nodal points as shown in Figs. 21 and 22. The material properties of the prototype may be retained in the individual elements so that varying properties and geometric configurations can readily be handled.

The behavior of the idealized system is described by assigning an appropriate displacement field within each element. The force equilibrium of the system may then be expressed by a set of ordinary differential equations. These equations may be solved to determine the vibration mode shapes and frequencies of the system and the overall number of modes. Alternatively the solution may be obtained by the step-by-step method, which involves the direct integration of the equations of motion at discrete time intervals; this method is particularly well-suited for the solution of non-linear problems (Wilson, 1968; Valera, 1968) for which the appropriate material characteristics may be introduced at each successive step of integration.

In applying the finite element method of analysis to any given field problem, it is again necessary to take into account the non-linear stress-deformation and damping characteristics of the soils comprising the deposit. This may be done either by using multi-linear representations of the actual stress-strain properties of the soil or by utilizing strain-dependent material characteristics in an equivalent linear analysis procedure.

The method has been used to investigate the response of embankments (Clough and Chopra, 1966), earth banks (Idriss and Seed, 1967; Idriss, 1968; Finn, 1968) and soil deposits underlain by sloping rock surfaces (Idriss et al, 1969; Dezfulian and Seed, 1969); solutions have been developed for linear visco-elastic materials (Clough and Chopra, 1966), nonlinear materials (Valera, 1968; Dibaj and Penzien, 1969b) and non-linear materials which may be represented by strain-compatible equivalent linear materials (Idriss, et al, 1969); in addition studies have been conducted for rigid base motions with horizontal and vertical components and for traveling wave base motions (Dibaj and Penzien, 1969a; Dezfulian and Seed, 1969).

Typical examples of the results obtained are shown in Figs. 23, 24 and 25. The variations in amplitude of ground surface accelerations which may occur in a soil deposit underlain by a sloping rock surface, as determined by a finite element analysis for motions normal to the crest of the slope and by semi-infinite layer analyses for motions parallel to the crest of the slope are shown in Fig. 23. It appears that sloping rock surfaces underlying soil deposits tend to reduce the motions below those developed in a similar deposit underlain by a horizontal rock surface in most cases.

Fig. 24 shows the maximum ground surface accelerations developed in the vicinity of an earth bank 50 ft high composed of clay and subjected to motions in the underlying rock having a maximum acceleration of about 0.3g. It may be seen that the maximum accelerations developed just behind the crest of the slope are somewhat higher than those at locations well behind the crest of the slope, a result characteristic of a number of cases investigated and in accord with the higher intensities of damage which have sometimes been observed in these locations in Japan (Ohsaki, 1969) and in Anchorage, Alaska as a result of the 1964 Alaska earthquake. Fig. 25 shows an example of the marked changes in form of the response spectra which may occur in the vicinity of an earth bank.

Unfortunately there has been no opportunity to date to compare the response of soil deposits computed by the finite element approach with those observed in the field. However comparisons with the observed performance of small scale embankments subjected to base motions on

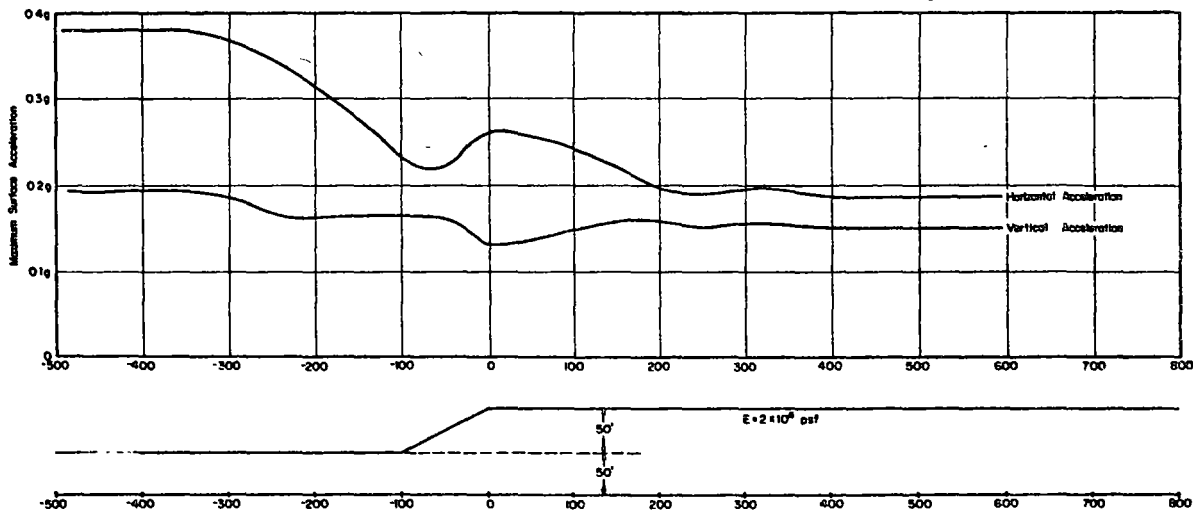


Fig. 24. Maximum Ground Surface Accelerations in Vicinity of Earth Bank

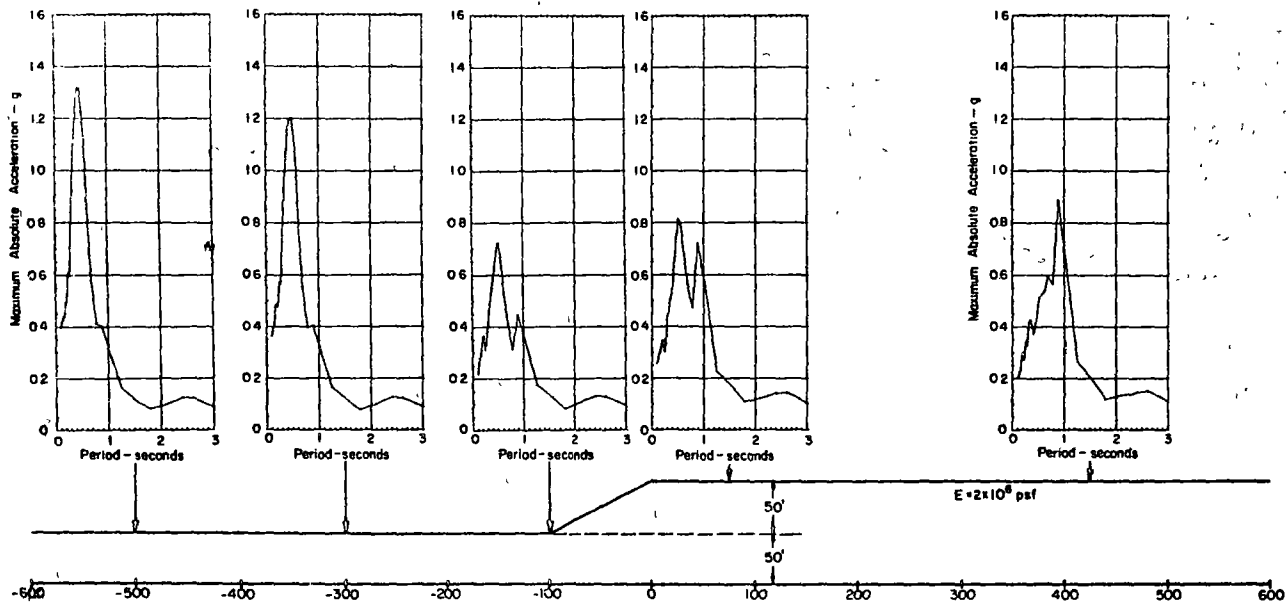


Fig. 25. Acceleration Response Spectra for Ground Surface Motions Developed at Various Points in Vicinity of Earth Bank

shaking tables show good agreement between computed and measured response (Kovacs et al, 1969). Furthermore, the method gives results in excellent accord with those computed by semi-infinite layer theories for deposits with horizontal boundaries and these have been shown to be in reasonably good agreement with observed ground motions. Thus it seems likely that finite element analyses can provide reasonably good determinations of two dimensional problems of ground response.

#### 4. Relationships Between Soil Conditions, Ground Motions and Building Damage

It has long been recognized that the ground accelerations developed on the surface of soil deposits during earthquakes are usually greater than those recorded on adjacent rock outcrops. Inferential evidence that the soil conditions underlying a site can cause a substantial increase in the intensity of the ground surface motions was presented by Wood (1908) in his study of the distribution of damage and apparent intensity of shaking in the San Francisco Bay area during the earthquake of 1906, and by Duke (1958). In recent years a number of investigators, for example Gutenberg (1957) in the United States and Kanai, et. al (1954, 1959) in Japan have obtained instrumental data showing that during small earthquakes and microtremors, the ground accelerations on soil deposits are usually considerably higher than those occurring on adjacent rock exposures. Wiggins (1964) and Blume (1965) drew a similar conclusion from studies of strong motion records, and the amplifying effects of soil deposits in transmitting underlying rock motions have been shown by analytical studies (see, for example, Figs. 19 and 20). Because of these observations, the ratio of the maximum ground surface acceleration on soil to that developed in adjacent rock

has been termed the ground acceleration amplification factor. Measured values for this factor range from values between 1 and 2 for strong motions to values in excess of 10 for microtremors and it has often been suggested that amplification factors are higher for soft deposits than in firm deposits.

It is important to recognize however that soil deposits can also attenuate rock motions; that is, values of the amplification factor may sometimes be less than 1. For example, Fig. 26 shows the ground accelerations recorded at 3 sites in San Francisco during the earthquake of 1957 (Magnitude 5.7). It is apparent that the amplification factors for the two sites underlain by soil deposits were about 0.5 and 1.0 in this case. Furthermore the accelerations recorded on soft soil deposits may sometimes be substantially less than those on firm deposits. Housner (1954) describes an example of this effect during the Seattle, Washington earthquake of April 13, 1949:

"This shock was recorded at both Seattle and at Olympia, and both cities were approximately the same distance from the epicenter, so that it would be expected that the record of the ground motion would be of approximately the same intensity at both places. This however was not the case....The Seattle record shows motion much less intense and with most of the high frequency components missing. This is attributed to the fact that the instrument was located on relatively soft, filled ground adjacent to a sea wall....etc."

The maximum ground acceleration recorded at Seattle was only 0.08g compared with a value of

about 0.3g at Olympia.

Whether or not a given soil deposit or a soil layer within a deposit will amplify or attenuate the motions in the underlying material, and the magnitude of these effects, seems to depend on the thickness and dynamic characteristics of the soil and the amplitude and frequency characteristics of the base motions. This is illustrated by recordings made at three levels in a soil deposit in Union Bay, Seattle (Seed and Idriss, 1969). The soil conditions at the site consist of about 60 ft of peat, 40 ft of clay, with an underlying layer of glacial till. Accelerometers are located 10 ft below the ground surface in the peat layer, at the top of the clay layer and at the top of the glacial till layer. The maximum accelerations recorded at these locations during two shocks, one a small local earthquake and the other an event occurring several hundred miles away are shown in Fig. 27. During both events, the motions at the surface of the glacial till were amplified in the clay layer; however while the peat deposit also amplified the motions from the distant seismic shock it attenuated very considerably the stronger motions induced by the nearby earthquake. This was probably due in large measure to the higher damping characteristics of the peat under the larger strain amplitudes.

The influence of the amplitude of the base motions on the computed amplification factor for the soil deposits underlying the Alexander Building in San Francisco (see Fig. 5) is shown in Fig. 28 (Idriss and Seed, 1968b). There is a marked reduction in amplification factor with increasing levels of base acceleration, a result also shown by field observations of soil response.

It is for this reason that amplification factors measured during small earthquakes cannot be applied directly to predict performance during larger earthquakes.

Finally the influence of the frequency characteristics of the base motion on the computed response of a soil deposit is shown in Fig. 29. The figure shows the relationship between the maximum surface acceleration, computed by a lumped mass analysis, and the depth of a sand deposit for base motions having the same maximum acceleration (0.06g) but different predominant periods. It may be seen that the amplifying effects of different thicknesses of sand vary considerably as the predominant period of the base motion is changed from about 0.3 second (corresponding to an earthquake of magnitude 6-1/2 at an epicentral distance of about 25 miles) to about 0.7 seconds (corresponding to the motions produced by a very strong distant earthquake).

It is also important to note that in general, the amplifying effects of a soil deposit on ground accelerations are greatest when the fundamental period of the deposit is close to the predominant period of the base motions. In Fig. 29, the maximum surface acceleration is developed for a deposit having a thickness of 12 meters and a fundamental period of about 0.3 second when the predominant period of the base motion is 0.3 second. However the maximum surface acceleration is developed for a deposit having a thickness of about 30 meters and a fundamental period of about 0.75 second when the predominant period of the base motion is 0.7 second. Thus the fundamental period of a soil deposit is an extremely important factor in assessing its probable response.

San Francisco Earthquake of March 22, 1957  
Magnitude = 5.4  
Epicentral Distance = 93 mi

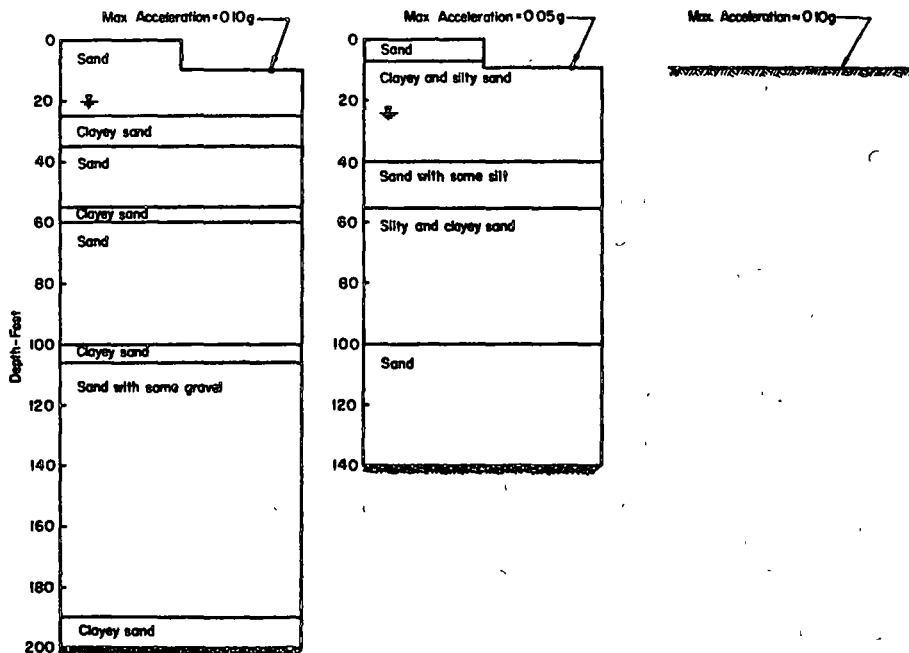


Fig. 26. Effects of Soil Conditions on Maximum Ground Surface Accelerations

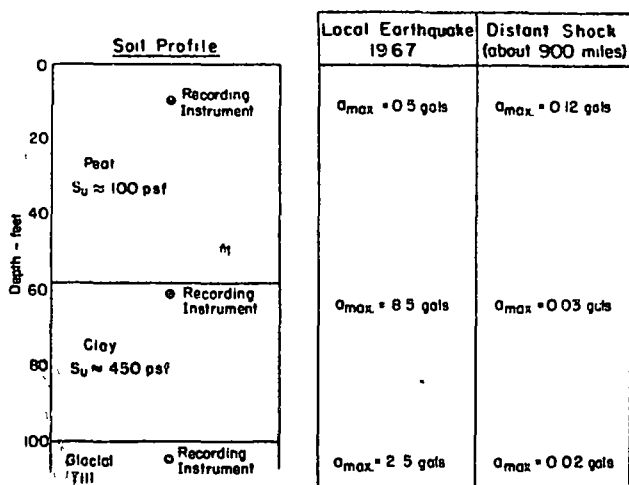


Fig. 27. Maximum Ground Accelerations Recorded in Union Bay, Seattle

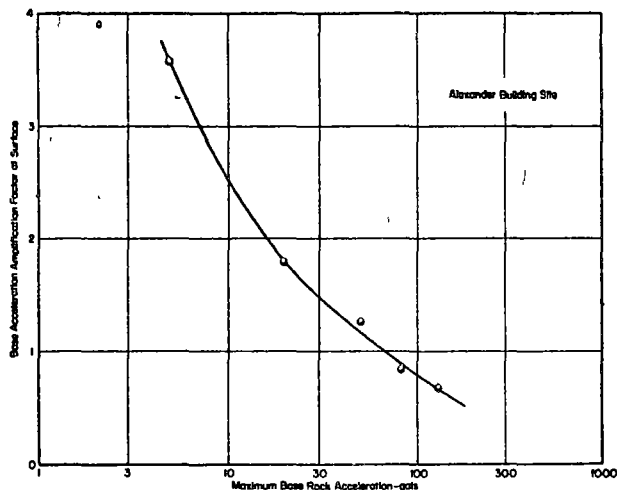


Fig. 28. Variations of Amplification Factors with Maximum Base Rock Accelerations

However it should be noted in the lower part of Fig. 29 that the period of a given deposit will vary with the characteristics of the base motions (both frequency and amplitude) due to the non-linear characteristics of the soils comprising it. Such variations have been observed in the field and in the laboratory (Seed and Idriss, 1969a).

Of particular importance from a soil engineering point of view are the potential damaging effects of the ground motions. As discussed previously these depend on the characteristics of the structure in addition to the various factors discussed above. For example, damage to wooden buildings of limited story heights might be expected to depend primarily on the maximum ground surface acceleration or velocity induced by the earthquake and to vary in any local area with the changes in surface acceleration or velocity levels resulting from different soil conditions. Thus variations in potential damage

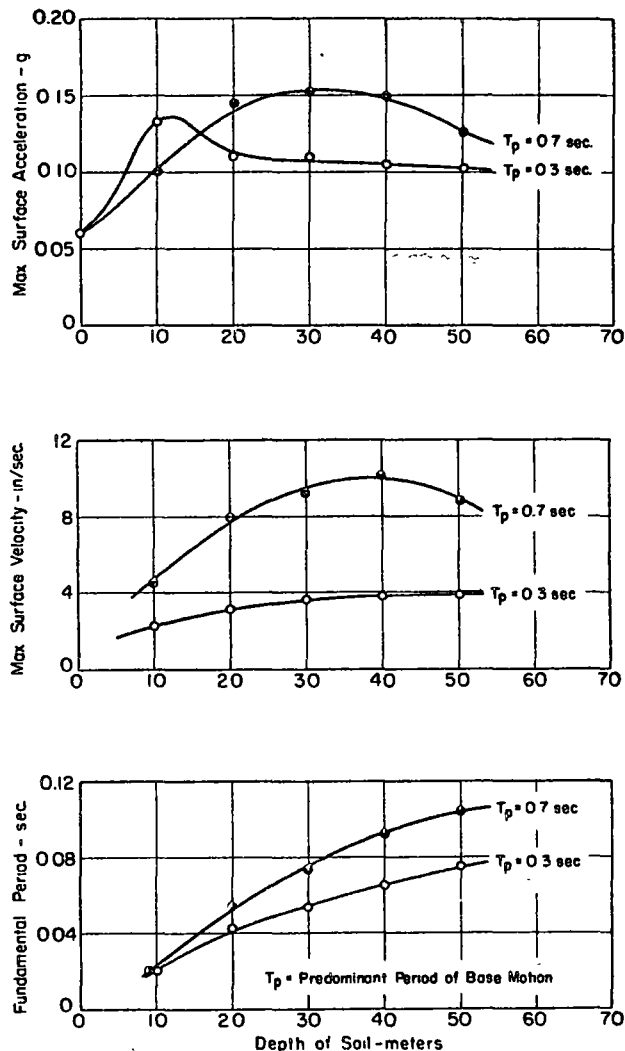


Fig. 29. Influence of Depth of Sand on Response to Base Motion with Maximum Acceleration of 0.06 g.

patterns can readily be investigated. Suppose an area of alluvial sandy deposits of varying depths is shaken by a magnitude 8-1/4 earthquake, the zone of energy release being at a distance of about 125 km. The resulting motions in bedrock might be expected to have a maximum acceleration of about 0.06g and a predominant period of about 0.7 sec. The maximum ground surface accelerations and velocities developed at the surfaces of different depths of sandy alluvium due to such a base motion, computed by the lumped mass method of analysis, are shown in Fig. 30. The maximum ground surface motions increase with increasing depths of soil up to about 35 to 45 meters and then decrease to some extent. It is interesting to compare these results with the damage to wooden buildings at Nagoya and along the River Kiku resulting from the Tonankai earthquake in Japan in 1944 (Omote and Miyamura, 1951; Tada et al, 1951). The magnitude and epicentral distances were similar to those used to obtain the response data in Fig. 30. Observed damage intensities at Nagoya

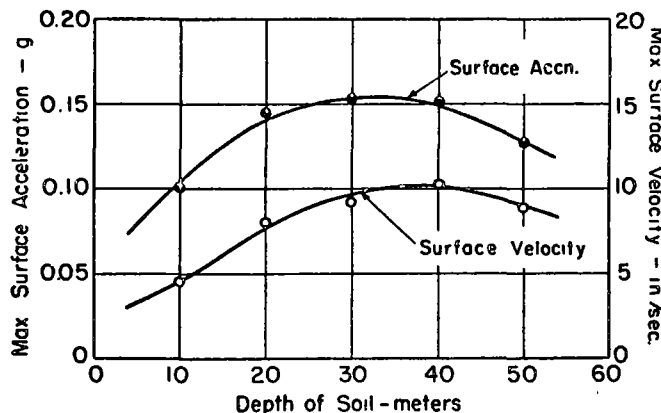
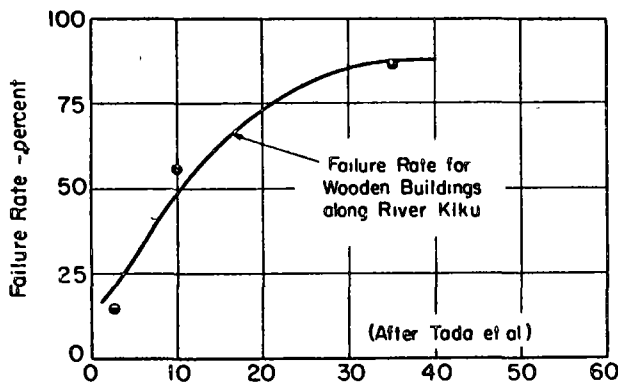
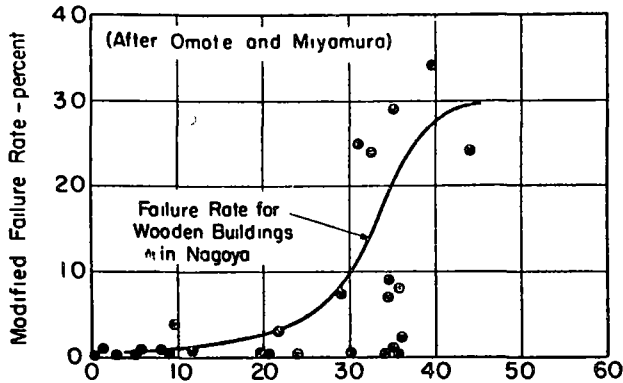


Fig. 30. Comparison of Computed Response of Sand Deposits with Failure Rates of Wooden Buildings in Tonankai Earthquake (1944)

and along the River Kiku, for different depths of soil, are also shown in Fig. 30. The similarity in the form of the observed damage intensity relationships and the anticipated ground velocities is readily apparent.

For buildings with more than one or two stories designed in accordance with building code requirements for earthquake-resistant design, the damage intensities are more likely to be related to variations in a damage potential index such as  $D_v = S_v/k$  as previously described. An example of the damage patterns that might be anticipated for such buildings is shown in Figs. 31 and 32, for a firm deposit of sand and gravel with depths varying up to 150 meters and subjected to base accelerations in the underlying rock having a maximum amplitude of 0.05g and a predominant period of about 0.35 sec. Values of the maximum ground surface acceleration for motions normal to the plane of the cross section shown in the figure, together with the associated acceleration and velocity response spectra, (for 5% structural damping), computed by the lumped mass analysis procedure, are shown in Fig. 31. Also shown are spectra of  $S_v/k$ , determined from the spectral velocities indicated by the velocity response spectra and values of the seismic coefficient  $k$  required by the Uniform Building Code (U.S.A.) for structures in seismic zone 2.

With the aid of this information it is a simple matter to read off values of  $S_v/k$  at different locations in the profile, for buildings with any given fundamental period. The distributions of  $S_v/k$ , determined from the values shown in Fig. 31, for structures with fundamental periods of 0.2 second, 0.4 second and 1.0 second are plotted in relation to soil depth in Fig. 32. It may be seen that the damage potential coefficient varies considerably with building characteristics and soil depths. For two or three story structures with a period of about 0.2 second the damage intensity would appear to be essentially the same regardless of soil depth and everywhere substantially less than for structures with longer periods.

For four or five story structures with a period of about 0.4 second, the maximum damage intensity might be expected to develop where the depth of soil is about 20 to 50 meters for this particular earthquake and soil type, and to be somewhat lower for greater or shallower depths. For ten to twelve story structures with a period of about 1 second, the damage intensity would be expected to increase with soil depths up to 150 meters or so, and where the soil reaches these depths to be considerably higher than that developed anywhere in the section for 2 to 5 story structures. Finally, for very high structures of 15 to 25 stories, the damage intensity would be expected to be even greater for soil depths up to 80 meters or so. It may be noted that low intensities of damage are indicated for all types of structures on rock.

Results of this type may well serve to explain in a general way the damage patterns observed in several recent earthquakes. In Mexico City (1957), Anchorage, Alaska (1964) and Caracas (1967) for example, there was a notably higher incidence of damage for multi-story buildings where soil depths ranged from 100 to 400 meters than for similar structures on rock or shallow depths of soil. However damage to lower structures was much less intense and essentially independent of soil depth. While details of damage patterns will of course depend on the particular soil characteristics in the area involved as well as the magnitude and location of the earthquake inducing the motions, damage analyses techniques seem to provide the basis for an improved understanding of these effects.



It is important to recognize that observed relationships between building damage and soil characteristics may be influenced by other factors besides ground shaking intensity. Excluding cases of major soil instability, these might include:

a. Variations in the quality of structural design; potential variations from this factor may well outweigh the effects of variations in soil conditions except where severe permanent soil movements are induced by the earthquake.

b. The effects of minor ground settlements and differential settlements resulting from the earthquake ground motions; these effects are likely to increase in a general way with increasing depths of soil.

c. The effects of previous settlements on the stresses existing in building structures before an earthquake; this is likely to be particularly important for buildings on soft ground and the effect will also increase with increasing depth of soil.

In view of these factors, as well as those affecting shaking intensity and structural behavior, analysis of the effects of soil conditions on damage due primarily to the effects of ground shaking require an understanding of the complex inter-relationships between the effects of soil types, soil depths, the amplitudes of ground motions, the frequency characteristics of ground motions and the structural characteristics of buildings in order to analyze damage resulting from past earthquakes or prevent damage in future earthquakes.

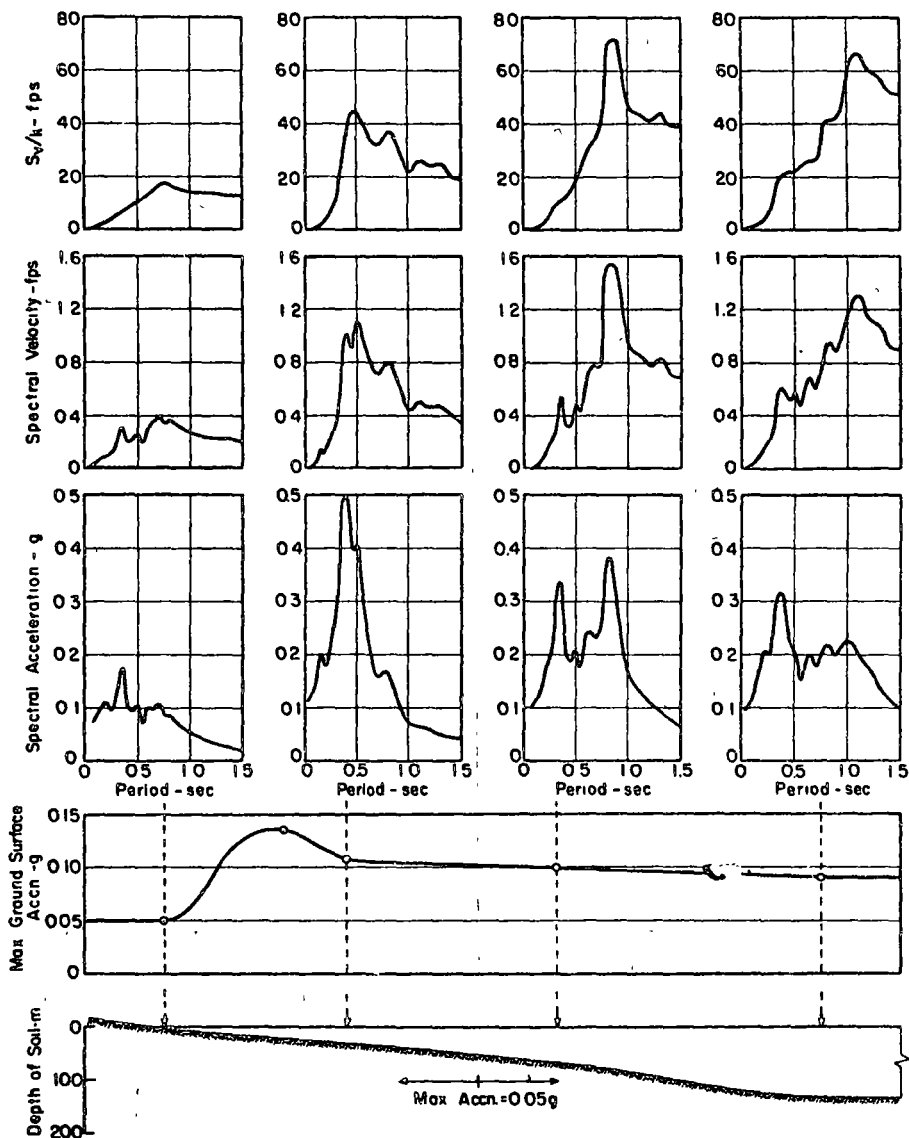


Fig. 31. Computed Response Spectra for Sand and Gravel Deposit (Max. rock accn. = 0.05 g; predom. period of rock motions = 0.35 sec)

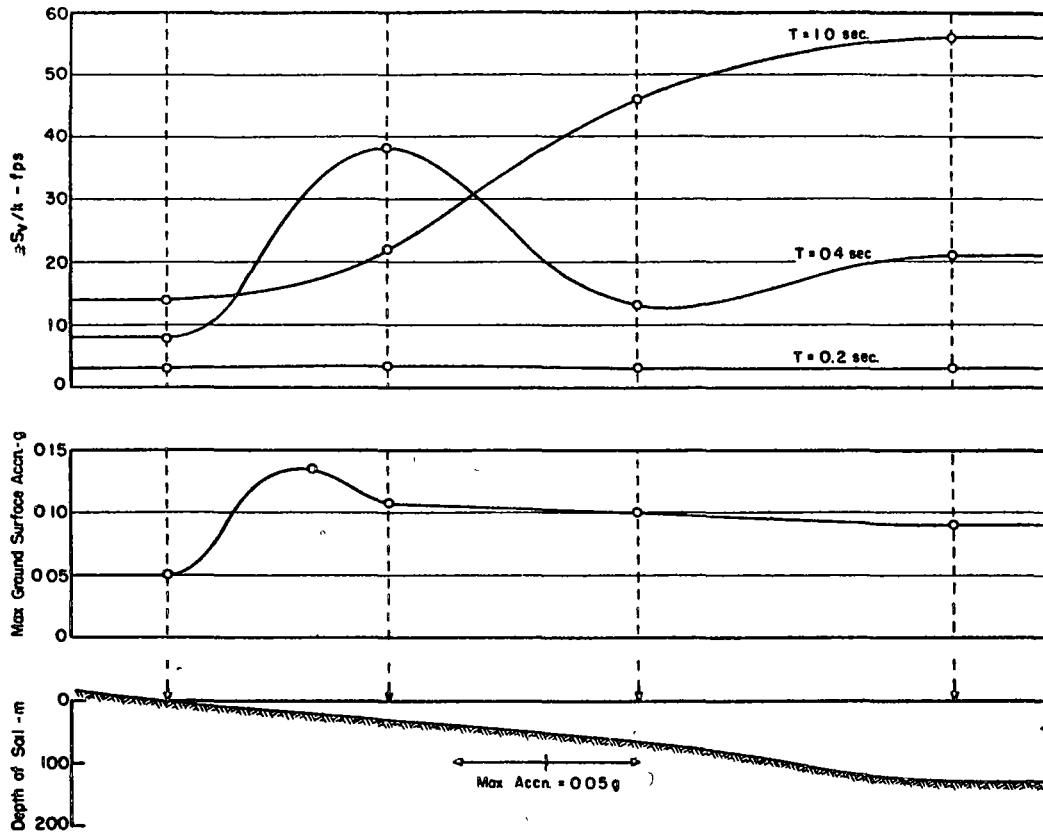


Fig. 32. Computed Distribution of Damage Potential Index  $S_v/k$  for Sand and Gravel Deposit (Max. rock accn. = 0.05 g; predom. period of rock motions = 0.35 sec)

### III. INFLUENCE OF SOIL CONDITIONS ON GROUND SETTLEMENT

Since vibration has long been recognized as an effective method of compacting cohesionless soils, it is not surprising that the ground vibrations caused by earthquakes often lead to compaction of cohesionless soil deposits and associated settlement of the ground surface.

A quantitative measure of ground settlement of this type was provided by the behavior of a well casing at Homer during the Alaska earthquake of 1964 (Grantz et al, 1964). The casing had been installed to firm rock before the earthquake and projected about 1 ft above the ground surface. Following the earthquake the casing projected some 3-1/2 ft above the ground surface, indicating a decrease in thickness of the soil layer of about 2.5 ft. As shown in Fig. 33 tectonic movements caused the rock surface to be lowered by 2 ft and this, together with the 2.5 ft of settlement caused by soil compaction, resulted in a total settlement of the ground surface of 4.5 ft.

A similar combination of effects in the Portage area of Alaska (1964) led to the town being inaccessible during periods of high tide. Here

the combination of about 4 ft settlement of the rock due to compaction of the overlying soil, led to a ground surface settlement of about 8 ft (Grantz et al, 1964). As a result of the general flooding in this area during high tide periods, the township had to move to a new location.

Similar problems of flooding and inundation of land due to settlement of soil by compaction or a combination of compaction and tectonic movements also occurred in the Chilean earthquake of 1960 (Retamal and Kausel, 1969) and the Niigata, Japan earthquake of 1964. In Valdivia subsidence due to tectonic movements was about 6 ft and additional settlements due to soil compaction varied from 0 to about 3 ft.

Ground settlements due to compaction often lead to differential settlements of engineering structures--a phenomenon which is particularly well illustrated by the performance of bridge abutments. Often an abutment is supported on firm materials or on a pile foundation and undergoes relatively small settlements compared with the backfill material for the abutment, which rests directly on the ground surface and settles due to compaction of the soil on which it rests. Fig. 2 shows a differential movement of several feet between a railroad bridge abut-

ment and its backfill as a result of the Niigata earthquake of 1964.

In addition to the damage resulting from changes in elevation, differential settlements due to soil compaction and the resulting stresses induced in buildings may well have contributed significantly to the structural damage resulting from earthquakes in some locations. Tests on dry sands have shown that vertical accelerations in excess of  $1g$  are required to cause any significant densification (Whitman and de Pablo, 1969). On the other hand, relatively small cyclic shear strains have been found to cause appreciable densification of loose sands under simple shear conditions. Thus it seems likely that it is the horizontal motions induced by earthquakes which are primarily responsible for the settlements observed. Predictions of settlements based on this concept, using stresses computed by ground response analyses and settlement data obtained from cyclic simple shear tests have been found to be in reasonable agreement with the observed settlements of small sand layers in shaking table tests and seem to offer a reasonable basis for estimating potential settlements of sand deposits during earthquakes (Silver, 1969).

#### IV. INFLUENCE OF SOIL CONDITIONS ON LIQUEFACTION POTENTIAL

One of the most dramatic cases of damage to engineering structures during earthquakes has been the development of liquefaction in saturated sand deposits, manifested either by the formation of boils and mud-spouts at the ground surface, seepage of water through ground cracks and in some cases, by the development of quicksand-like conditions over substantial areas. Where the latter phenomenon occurs, buildings may sink substantially into the ground or light-weight buried structures may float upwards to the ground surface.

Nowhere has the phenomenon of liquefaction been more dramatically illustrated in recent years than in Niigata, Japan during the earthquake of June 16, 1964. The epicenter of the earthquake (Magnitude about 7.5) was located about 35 miles from Niigata but never-the-less the earthquake induced extensive liquefaction of the sand deposits in the low-lying areas of the town. Water began to flow out of cracks and boils during and immediately following the earthquake, as shown in Fig. 34, causing liquefaction of the deposits and widespread damage. Many structures settled more than 3 ft in the liquefied soil and the settlement was often accompanied by severe tilting as shown in Fig. 3. Thousands of buildings collapsed or suffered major damage as a result of those effects (Ohsaki, 1966).

Liquefaction has been reported in numerous other earthquakes (Seed, 1968; Ambraseys and Sarma, 1969), in some cases the upward flow of water from the ground continuing for as much as 30 minutes after the ground motions stopped.

The cause of liquefaction of sands has been

understood, in a qualitative way, for many years. If a saturated sand is subjected to ground vibrations, it tends to compact and decrease in volume; if drainage is unable to occur, the tendency to decrease in volume results in an increase in pore-water pressure, and if the pore-water pressure builds up to the point at which it is equal to the overburden pressure, the effective stress becomes zero, the sand loses its strength completely, and it develops a liquefied state.

Liquefaction of a sand in this way may develop in any zone of a deposit where the necessary combination of in-situ conditions and vibratory deformations may occur. Such a zone may be at the surface or at some depth below the ground surface, depending only on the state of the sand and the induced motions.

However, liquefaction of the upper layers of a deposit may also occur, not as a direct result of the ground motions to which they are subjected, but because of the development of liquefaction in an underlying zone of the deposit. Once liquefaction develops at some depth in a mass of sand, the excess hydrostatic pressures in the liquefied zone will dissipate by flow of water in an upward direction. If the hydraulic gradient becomes sufficiently large, the upward flow of water will induce a 'quick' or liquefied condition in the surface layers of the deposit. Liquefaction of this type will depend on the extent to which the necessary hydraulic gradient can be developed and maintained; this, in turn, will be determined by the compaction characteristics of the sand, the nature of ground deformations, the permeability of the sand, the boundary drainage conditions, the geometry of the particular situation, and the duration of the induced vibrations.

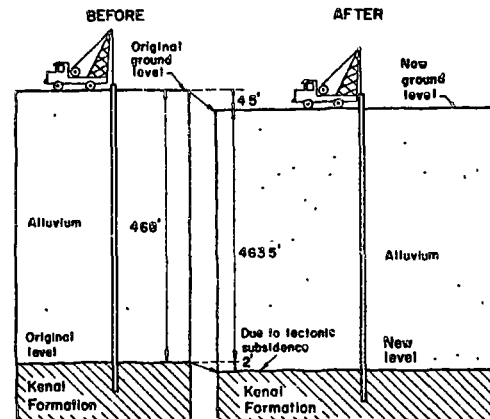


Fig. 33. Ground Settlement Around Well Casing at Homer During Alaska Earthquake (1964) (After Grantz et al)



Fig. 34. Initial Stages of Water Flow From Ground, Niigata (1964)

While most investigators have been concerned with the conditions inducing liquefaction, studies of the pore pressure distributions in sands during and following liquefaction have been presented by Maslov (1957), Housner (1958), Florin and Ivanov (1961) and Ambraseys and Sarma (1969). In accordance with observed effects, these studies have shown that the resulting water movements can cause a considerable reduction in effective stresses in the upper layers and under extreme conditions, to a total loss of strength of the layer. Furthermore even where liquefaction does not occur, the upward flow of water can lead to a marked reduction in bearing capacity of the upper layer.

1. Soil Conditions in Areas Where Liquefaction Has Occurred

In spite of the large number of cases in which liquefaction has been reported to have occurred during earthquakes, there are relatively few details of the soil conditions in the affected areas. Several cases where detailed studies have been made are described below:

a. Niigata Earthquake. In the Niigata earthquake the sand in the zone of liquefaction had a 10 percent size ranging from about 0.07 to 0.25 mm and a uniformity coefficient of about 10. Following the earthquake an extensive survey of the distribution of damaged structures was made. It was found that structures in the coastal dune area (designated zone A) suffered practically no damage. The major damage and evidence of liquefaction were concentrated in the lowland area, but even here two zones could be clearly recognized - one in which damage and liquefaction were extensive (designated zone C)

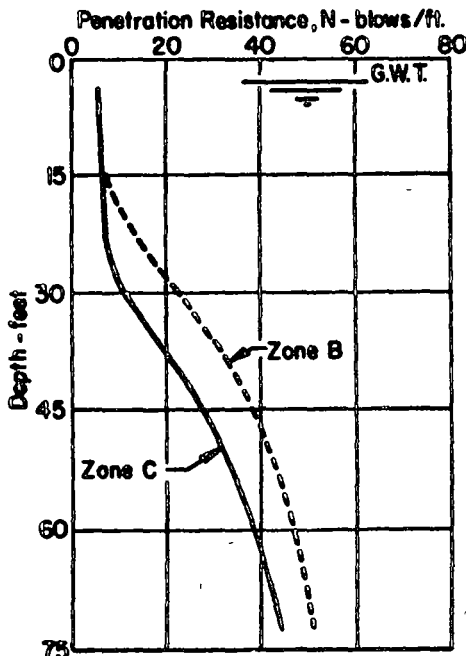


Fig. 35. Comparison of Soil Conditions in Zone B (light damage) and Zone C (heavy damage)

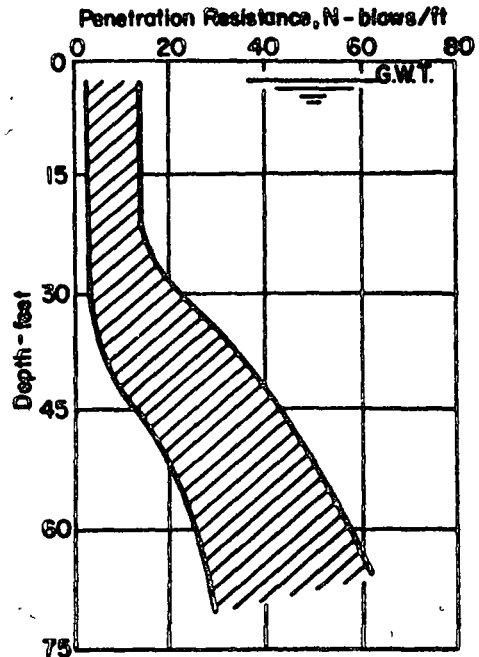


Fig. 36. Range of Penetration Resistance Values in Heavy Damage Zone

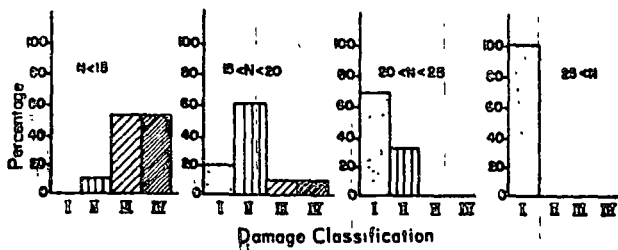


Fig. 37. Relationship Between Penetration Resistance at Base of Foundation and Extent of Damage.

and one in which damage was relatively light (zone B). Because all zones contained similar types of structures, the differences in extent of damage could be attributed to differences in the subsoil and foundation behavior. Studies were conducted by a number of Japanese engineers to determine the differences in soil conditions in the various zones.

The difference in behavior in zone A from that in zones B and C could readily be attributed to two major differences in soil characteristics. Although all zones were underlain by sandy soils to a depth of approximately 100 ft, in zone A the underlying sands were considerably denser than those in zones B and C, and, furthermore, the water table was at a much greater depth below the ground surface. In zones B and C, however, the general topography and depth of water table were essentially the same. It was therefore concluded that the difference in extent of damage in these two zones must be related in the characteristics of the underlying sands. Accordingly, considerable effort was made to determine any significant differences in the general soil conditions in these zones.

Because the soils involved are sands, efforts were concentrated on the determination of the relative density of the sands by means of standard penetration tests. Koizumi (1966) has presented the results of a number of borings made in zones B and C to show the variation of penetration resistance with depth in the two zones. There is a considerable scatter of the results in any one zone, but averaging the values obtained leads to the comparative values shown in Fig. 35.

It may be seen that in zones B and C, the average penetration resistance of the sands is essentially the same in the top 15 ft. Below this the sands in zone B are somewhat denser than those in zone C. Below about 45 ft, the sands in both zones are relatively dense and are unlikely to be involved in liquefaction. It seems reasonable to conclude that the relatively small differences in penetration resistance of the sands in the depth range from 15 ft to 45 ft is responsible for the major difference in foundation and liquefaction behavior in the two zones.

In addition to comparing the soil conditions in the different damage zones, Japanese engineers have made a detailed study of the relationship between soil and foundation conditions and building performance in zone C. Here the variation of penetration resistance with depth falls

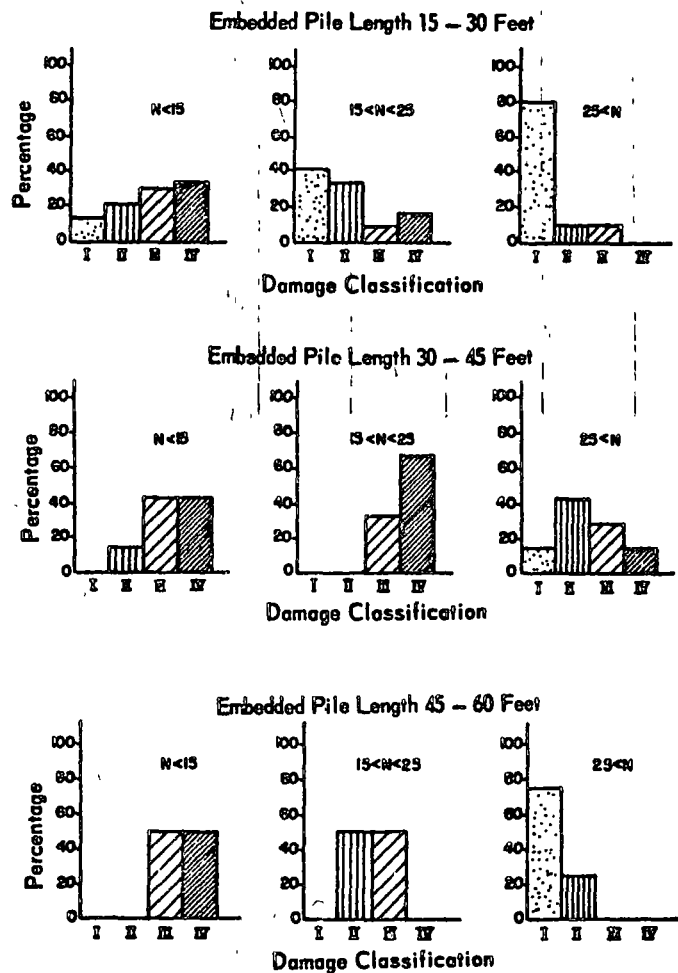


Fig. 38. Influence of Penetration Resistance at Tip of Piles on Extent of Damage

within the shaded area shown in Fig. 36, the standard penetration resistance in the top 25 ft generally being less than 15, but sometimes falling as low as 5. For each building in this zone the extent of damage caused by foundation failure was classified into one of four categories ranging from the no-damage category I (buildings that settled up to 8 in. or tilted up to 20 minutes of angle) to the heavy damage category IV (buildings settling more than 3 ft or tilting more than 2.3°).

A study was made of the influence of foundation type on the settlement and tilting of reinforced concrete buildings in zone C (Kishida, 1966). Some of these buildings had shallow spread footing foundations; other were supported on short piles, typically extending to a depth of about 25 ft. For each foundation type, the proportion of buildings falling in light damage categories I and II was compared with the proportion in the heavy damage categories III and IV. The results of this comparison are shown

in Table 2, from which it may be seen that the provision of short pile foundations had apparently little effect in reducing the damage caused by the earthquake ground motion.

TABLE 2.-- INFLUENCE OF TYPE OF FOUNDATION ON EXTENT OF DAMAGE

Type of Foundation	No Damage and Slight Damage	Intermediate and Heavy Damage
Shallow (63 bldgs.)	36%	64%
Pile (122 bldgs.)	45%	55%

For buildings with spread footing foundations, a study was made to determine the relationship between the penetration resistance of the sand at the base of the foundations and the extent of damage. The results of this study are shown in Fig. 37. When the sand underlying the footings had a penetration resistance of less than 15, the buildings usually suffered heavy damage (categories III and IV). However, when the penetration resistance was between 20 and 25, the structures suffered only light damage, or none. Thus it appears that a penetration resistance of slightly more than 20 would be adequate to prevent foundation settlements exceeding about 6 in. in this earthquake.

The results of a similar study to determine the relationship between depth of piles, penetration resistance of the sand at the pile tip, and the extent of damage for pile-supported structures, are shown in Fig. 38. From these data it may be seen that for pile lengths varying from 15 to 60 ft, generally heavy damage (large settlements and tilting, or both) occurred when the penetration resistance of the sand at the pile tip was less than 15. However, for the same range of pile lengths, settlements and tilting were generally small when the penetration resistance of the sand at the pile tip exceeded 25. Thus the penetration resistance values providing satisfactory performance for pile performance for pile foundations are quite similar to those providing satisfactory performance for footing foundations.

Finally, for a wide range of buildings in the heavy damage zone, a study of the relationship between depth of foundation, penetration resistance, and extent of damage showed that (1) for foundations in the depth range 0 to 15 ft, a penetration resistance of  $N = 14$  at the base of the foundation was apparently adequate to prevent major damage caused by settlement and tilting; (2) for foundations in the depth range 15 ft to 25 ft, a penetration resistance of the sand between 14 and 28 at the base of the foundation was required to prevent major damage; and (3) for foundations in the depth range 25 ft to 50 ft, a penetration resistance of  $N = 28$  at the base of the foundation was required to prevent major damage.

These results provide a valuable guide in assessing the liquefaction of other sand deposits subjected to ground motions similar to those at Niigata.

b. Mino-Owari, Tohnankai and Fukui Earthquakes. Kishida (1969) has made a detailed study of the soil conditions at places where sand volcanoes and eruption of water and soil were observed during the Mino-Owari (1891) Tohnankai (1944), Fukui (1948) earthquakes in Japan. At six sites investigated, the 10% size of the soil particles ranged from 0.05 to 0.25 mm and the uniformity coefficient was less than 5. Values of the standard penetration resistance in the upper 30 ft were typically less than 20 and often less than 10.

c. Jaltipan Earthquake. In the Jaltipan (Mexico) earthquake of August 26, 1959, sudden settlements of about 1 meter occurred in the foundations for the Naval shipyard at Coatzacoalcos as well as relative horizontal displacements of sections of an adjacent quay. Studies by Marsal (1961) led to the conclusion that these failures were due to partial liquefaction of a sandy silt and silty sand deposit for which  $D_{10}$  ranged from 0.01 to 0.1 mm, with uniformity coefficients of the order of 2 to 10.

d. Alaska Earthquake. The 1964 Alaska earthquake (Magnitude = 8.3) caused extensive damage to a wide variety of bridge foundations located at distances of 50 to 80 miles from the zone of major energy release (Ross, Seed and Migliaccio, 1969). Damage included horizontal movement of abutment foundations toward stream channels, spreading and settlement of abutment fills, horizontal displacements and tilting of piers and several differential settlement of abutments and piers.

The greatest concentrations of severe damage occurred in regions characterized by thick deposits of saturated cohesionless soils. Ample evidence exists of liquefaction of these materials during the earthquake and this phenomenon probably played a major role in the development of foundation displacements and bridge damage. Typical foundation conditions in these areas consisted of piles driven through saturated sands and silts of low to medium relative density (standard penetration resistance less than about 20 to 25); of approximately 60 samples investigated from the heavy damage area, two thirds of the samples had a 10 percent size ranging from about 0.01 to 0.1 mm and a uniformity coefficient of 2 to 4. On the other hand, bridges supported on gravels and gravelly sands regardless of their penetration resistance values, generally showed small or no displacements indicating no significant liquefaction of these materials under comparable conditions.

In the four case studies described above it appears that liquefaction has usually occurred in relatively uniform cohesionless soils for which the 10% size is between 0.01 and 0.25 mm and the uniformity coefficient between 2 and 10. Laboratory tests conducted to determine the susceptibility of soils to liquefaction under cyclic loading conditions also indicate that uniformly graded soils for which the 50% size lies in the range 0.02 to 0.4 mm are considerably more vulnerable to liquefaction than coarser or finer materials (Lee and Fitton, 1968). The liquefied soils in the cases discussed typically had standard penetration resistances less than 25 blows per foot but the available data are insufficient to permit general conclusions to be drawn for the range of ground motions likely to be encountered in practice.

## 2. Laboratory Investigations of Soil Liquefaction.

A number of studies have been conducted to investigate the liquefaction characteristics of soils under laboratory test conditions. Several investigators (eg. Maslov, 1957; Prakash and Mathur, 1965; Nunnally, 1966; Yoshimi, 1967) have attempted to establish the conditions producing liquefaction in terms of the acceleration at which the phenomenon can be observed to develop. Usually this is done by placing saturated sand in a box on a shaking table and observing the table accelerations at which liquefaction occurs. However such results are inevitably influenced by the duration and frequency of the table motions to which the sand is subjected and possibly also by the geometry and deformation characteristics of the container in which the saturated sand is placed. Thus it is difficult to extrapolate the results to field conditions. Furthermore Ambraseys and Sarma (1969) point out that the incidence of liquefaction in a deposit is more likely to be determined by the ground velocity rather than the ground accelerations, as observed by Puchkov (1962) in the field.

The difficulties in this type of approach have led other investigators to study the liquefaction characteristics of saturated sands under undrained cyclic loading conditions, in an attempt to simulate as closely as possible the stress conditions induced under field conditions (Seed and Lee, 1967; Lee and Seed, 1968; Peacock and Seed, 1968). Cyclic loading triaxial compression tests and simple shear tests have been used for this purpose. It has been shown that under these conditions liquefaction can readily be induced in loose to medium dense sands and its development is determined by (1) the magnitude of the cyclic shear stress or strain; (2) the number of stress or strain cycles; (3) the initial density; (4) the confining pressure; and (5) the initial shear stresses acting on the sand.

Fig. 39 shows a typical relationship between the magnitude of the cyclic stress and the number of stress cycles required to induce failure for samples of saturated sand subjected to a confining pressure of 1 kg per sq cm. The larger the magnitude of the applied cyclic stresses, the fewer is the number of cycles required to induce liquefaction. However the magnitude of the cyclic stresses required to induce liquefaction of a saturated sand increases rapidly with increase in the density of the sand.

Other factors being equal, the higher the confining pressure on a sand the greater is the cyclic shear stress required to induce liquefaction; thus the presence of a surcharge will reduce the tendency of a deposit to liquefy. A similar conclusion has been drawn by Maslov (1957) and Ambraseys and Sarma (1969), based on other types of tests and analytical considerations.

Finally laboratory tests show that magnitude of the cyclic stress required to cause liquefaction is significantly influenced by the initial stress conditions in the test specimen, a factor which would markedly change the liquefaction potential of the same sand under level ground or sloping ground conditions.

While these tests have thrown considerable light on the factors affecting liquefaction it is

necessary to use considerable judgment in applying the test data to analyze field problems. The cyclic load triaxial test procedure suffers from the limitations that:

a. The initial ambient stress conditions are different from those on a sand element in situ.

b. The principal stress directions cannot rotate during the test as they do in the ground (only a 90° rotation of principal stress direction is possible in a triaxial compression test).

c. Under some conditions, and particularly for medium dense sands or dense sands, there is a possibility of water migration in the test specimen affecting the results.

and d. It is difficult to interpret the test data if necking occurs in the test specimen.

Although the cyclic simple shear test eliminates these deficiencies, it has the following limitations:

a. It is difficult to prepare saturated samples of sand for testing under cyclic simple shear conditions.

b. Stress concentrations in the sample are likely to lead to premature failure of the test specimen.

c. Since the shear strain amplitude is normally limited to about 20% it is not possible to determine whether the test specimen would dilate and stabilize at higher strain levels, in which case the mobility of the test specimens would not be indicative of the flow characteristics normally associated with liquefied soils.

These limitations in test procedures have led to the suggestion (Peacock and Seed, 1968) that the cyclic stresses causing failure under field conditions are likely to be about 40 to 50% lower than those causing failure in cyclic loading triaxial compression tests conducted under comparable conditions or about 50 to 60% higher than those causing failure in comparable simple shear tests. However there is considerable need for refinement of these estimates, either by the development of new test procedures, an improved understanding of the significance of the limitations in current test procedures, or comparison of laboratory test data with conditions known to have caused failure in the field.

An alternative approach now under study, is based on the concept that a soil cannot liquefy unless it can deform continuously without tending to dilate and thereby stabilize itself, and involves studies of the conditions under which dilatant and compressive volume change tendencies are observed in undrained laboratory triaxial compression tests. The potential uses of this approach are likely to be presented in the near future.

## 3. Prediction of the Effects of Soil Conditions on Liquefaction Potential

From a practical point of view, the evaluation of the liquefaction potential of soil deposits at proposed construction sites, is one of the most challenging problems facing the soil engineer working in seismically active regions of

the world. Procedures used for making such evaluations are as follows:

a. Use of Past Experience. Past experience of the conditions under which liquefaction has occurred in previous earthquakes will always be one of the most useful guides to the probable performance of other soil deposits. However the limited extent of this experience at the present time and the limited number of well defined case studies, makes it extremely desirable to supplement this experience by appropriate analyses and test procedures whenever possible.

Guide lines for this purpose have recently been proposed by Kishida (1969) based on the criteria that soils vulnerable to liquefaction will have the following characteristics:

- (1) Relative density less than 75 percent.
- (2) Effective overburden pressure less than 2 kg per sq cm.
- (3) Uniformity coefficient less than 10.
- (4)  $0.074 \text{ mm} < D_{50} < 2.0 \text{ mm}$ .

However it does not necessarily follow that soils having the above characteristics will liquefy in any particular earthquake.

b. Use of Standard Blasting Tests. A procedure used in the U.S.S.R. (Florin and Ivanov, 1961) involves the use of a standard blasting test to evaluate the liquefaction potential of sands in the field. For a sand deposit 25 to 35 ft thick, a charge of 5 kg of ammonite is exploded in the ground at a depth of 4.5 meters and the resulting settlements of the ground surface are determined within a radius of 5 meters from the explosion. Where the average settlement in this zone is less than 8 to 10 cms and the ratio of settlements from successive shots is less than about 0.6, it is considered that there is no need to provide measures against liquefaction of the soil.

c. Use of Ground Response Analyses and Laboratory Test Procedures. A procedure which has been applied with some success to analyze the liquefaction of soils in the Niigata earthquake (Seed and Idriss, 1967) and the failure of the Sheffield Dam in the Santa Barbara earthquake of 1925 (Seed, Lee and Idriss, 1969), involves the use of ground response analyses to determine the stresses induced in a soil deposit during any given earthquake and the comparison of these stresses with those observed to cause failure in laboratory cyclic load tests. Such an approach involves the following steps:

(1) Assess the magnitude of the ground motions likely to be developed in the base rock at the site under investigation; this assessment should involve the entire time-history of the base motion throughout the period of the earthquake.

(2) Determine the response of the overlying soils to the base motion, assuming that the deformations of the soils are caused primarily by the vertical propagation of shear waves as a result of the base motions. Such an analysis would permit the computation of the shear stresses, and their variation with time,

at different depths in the soil deposits.

(3) Idealize the shear stress history at the various depths to determine the significant number of stress cycles,  $N$ , and the equivalent uniform cyclic shear stress developed,  $\tau_{dN}$ , at each level.

(4) Determine, by means of cyclic load tests on representative samples of sand from the site, the cyclic shear stress,  $\tau_{dN}$ , required to cause liquefaction of the sand in the significant number of stress cycles.

(5) Compare the magnitude of equivalent cyclic stress developed at any depth,  $\tau_{dN}$ , with the cyclic stress causing liquefaction,  $\tau_{dN}$ , for the conditions existing at that depth to determine whether or not liquefaction will occur.

It is of course necessary to make appropriate corrections to the laboratory test data before using it in step (5) of the analyses.

This procedure provides a means for considering the effects of the amplitude and time history of the earthquake ground motions, the in-situ characteristics of the soils, the variation of overburden pressure with depth and the position of the water table. Different ground response analyses or laboratory test data may readily be incorporated in the procedure depending on the judgment and experience of the soil engineer involved.

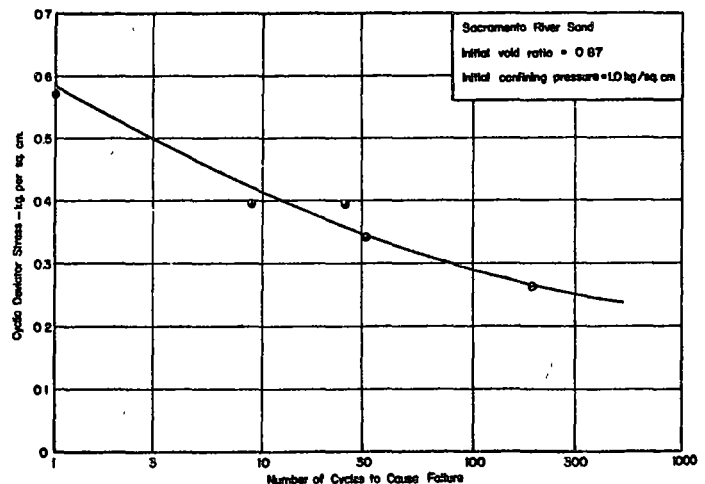


Fig. 39. Relationship Between Cyclic Stress and Number of Cycles Required to Cause Failure



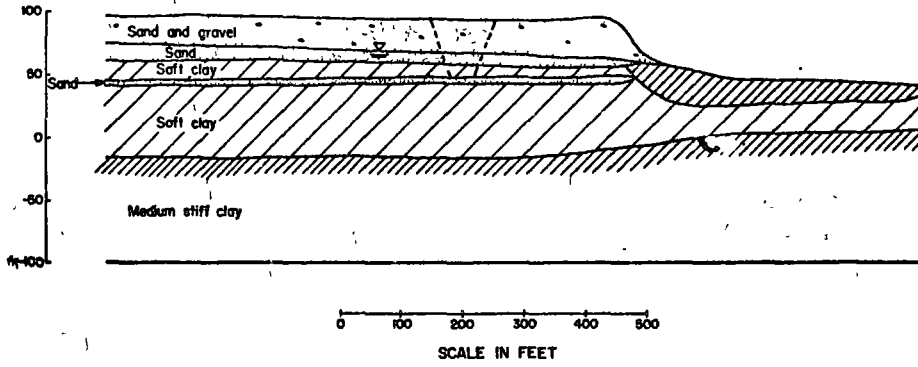


Fig. 40. Cross-Section Through South End of L-Street Slide Area, Anchorage, Alaska (after Shannon and Wilson)

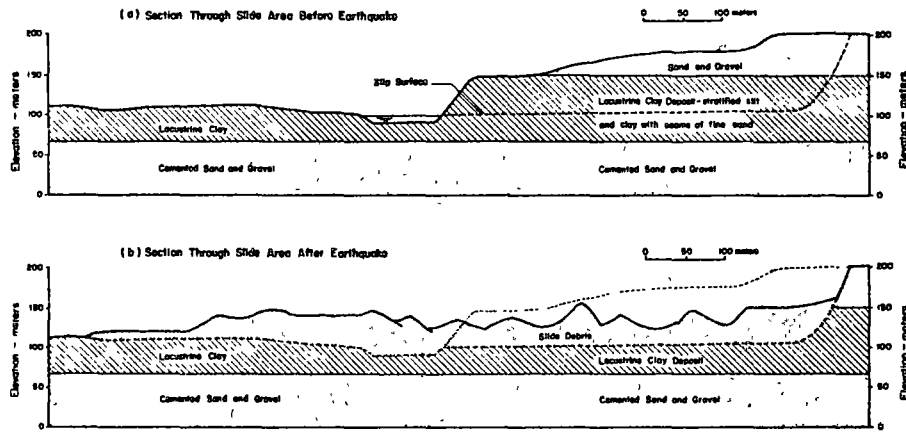


Fig. 41. Approximate Sections Through Large Slide Area Near Lake Rinihue, Chile (1960) (After Davis and Karzulovic)

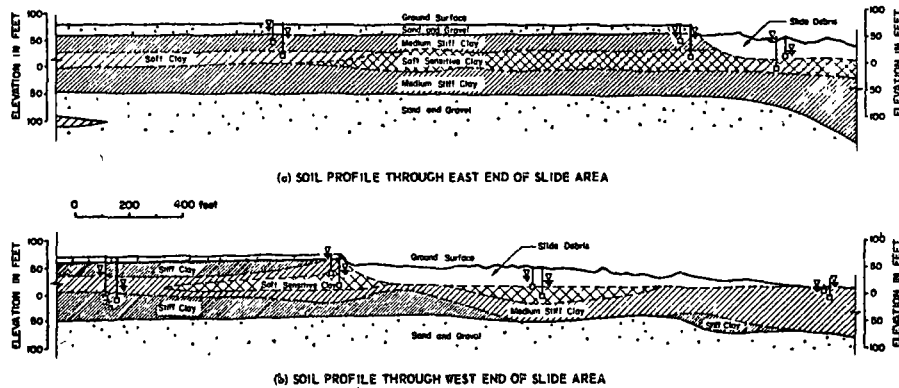


Fig. 42. Cross-Sections Through Turnagain Heights Slide Area, Anchorage, Alaska (1964)

V. INFLUENCE OF SOIL CONDITIONS  
ON LANDSLIDES

Earthquakes have been responsible for some of the largest landslides in recorded history and these in turn, have caused enormous losses both of property and lives. Possibly the earliest known landslide caused by an earthquake was the flow-slide which carried the town of Helice into the sea during an earthquake in 373 BC in ancient Greece, with the complete loss of the town and all its inhabitants (Marinatos, 1960; Seed, 1968). Similar slides due to soil liquefaction or to the inducement of some degree of mobility in soil deposits as a result of the ground vibrations have been reported in many earthquakes since that time. A list of a number of such events is presented in Table 3 (Seed, 1968).

One of the most dramatic series of flow slides was that which occurred during the Kansu earthquake of December 16, 1920. Close and McCormick (1923) describe the events in the following terms:

"Of that most remarkable series of seismic disturbances which occurred throughout the world in November and December, 1920, the most phenomenal was undoubtedly the great Kansu earthquake of the late evening of December 16....Landslides that eddied like waterfalls, crevasses that swallowed houses and camel trains, and villages that were swept away under a rising sea of loose earth, were a few of the subsidiary occurrences that made the earthquake in Kansu one of the most appalling catastrophes in history."

"The area of greatest destruction, 100 miles by 300 miles in extent, contains ten large cities besides numerous villages. In it is the heart of the loess country...where the loose earth cascaded down the valleys and buried every object in its path."

"It is in the loess area that the immense slides out of the terraced hills occurred, burying or carrying away villages...damming stream-beds and turning valleys into lakes, and accomplishing those hardly believable freaks which the natives name the 'footsteps of the gods.' The loss of nearly two hundred thousand lives and the total destruction of hundreds of towns and cities calls for reconstruction work on a staggering scale."

Similar slides in loess deposits have been reported as a result of earthquakes in the U.S.S.R. (Gubin, 1960).

Space does not permit an extensive review of the various types of slides caused by earthquakes, the damage they have caused, and methods of analyzing slope stability during earthquakes. Such reviews have been presented elsewhere in the past two years (Seed, 1967; Seed, 1968). However it is pertinent to note that almost all of the slides listed in Table 3 have been associated with the liquefaction or mobilization of cohesionless soils and they can be grouped in the following categories:

a. Flow slides caused by liquefaction of cohesionless soils usually involving sands, gravely sands with sand seams, silty sands or

TABLE 3. LANDSLIDES DURING EARTHQUAKES DUE TO SOIL LIQUEFACTION

Date	Earthquake	Magnitude	Location of Slide	Epicentral Distance -miles	Type of Structure	Soil Type	Reference
383 BC	Helice	-	Helice	-	Coastal delta	-	Marinatos
1755	Lisbon	≈8.7	Fer	≈430	-	-	Lyell, Richter
1783	Calabrian	-	Soriano	35	River banks	Fluvial sediments, clays with sand seams; Volcanic sediments	Lyell
			Laureau	-	Hillsides		
			Terranuova	5	River banks River banks		
1811	New Madrid	-	Mississippi River Valley, Mo., Ark., Tenn., Ky., Ill., Ind. Vicknburg, Miss.	major slides 30 minor slides 140 290	River valley banks and islands. Island	Fluvial sediments, sands to muds Fluvial sediments, sands to muds	Fuller
1869	Cacher	-	Barak River at Silchar	40 to 80	River banks	Fluvial - sand to clay	Oldham, Oldham & Mallet
1886	Charleston	-	25 miles SW of Ashley River Ashley River at Greggs	5 to 20 5 to 10	Railway fill River bank	Fluvial and deltaic sands and silts	Dutton
1897	Indian (Assam)	≈8.7	Shillong and Tutra regions	0 to 100	Canal banks Road embankments	Founded on alluvial plains	Oldham, Richter
1899	Alaska (Yakutat)	-	Valdes	-	Submarine deposit	Deltaic and marine sediments-mainly silty sand and gravel	Coulter & Migliaccio
1902	St. Vincent	-	St. Vincent	-	Coastal delta	-	Bovey
1906	San Francisco	8.2	San Francisco area	10 to 30	Hillsides	-	Lawson
1907	Karstog	-	-	-	Loess slopes	Loess	Gubin
1907	Chuyenchinsk	-	-	-	Loess slopes	Loess	Gubin
1908	Alaska	-	Valdes	25	Submarine deposit	Deltaic and marine sediments-mainly silty sand and gravel	Coulter & Migliaccio
1911	Alaska	6.9	Valdes	40	Submarine deposit	Deltaic and marine sediments-mainly silty sand and gravel	Tarr & Martin
1912	Alaska	7.25	Valdes	-	Submarine deposit	Deltaic and marine sediments-mainly silty sand and gravel	Coulter & Migliaccio
1920	Kansu Province	-	Kansu Province	-	Loess slopes	Loess	Close & McCormick

TABLE 3. Continued

Date	Earthquake	Magnitude	Location of Slide	Epicentral Distance -miles	Type of Structure	Soil Type	Reference
1923	Kwanto (Tokyo)	8.2	Yokohama area Tokyo area	40 60	Coastal hillsides Coastal hillsides	- -	Wakimizu, Rodgson
1923	Santa Barbara	6.3	Santa Barbara	7	Earth dam	Silty sand	
1928	Chile	8.3	El Teniente	100	Tailings dam	Mining waste	Dobry, Lomnitz
1933	Long Beach	6.3	Long Beach Newport Beach	20 3	Highway fills Highway fills	Fills over marshland on shore roads.	Wood, Richter, Rodgson
1934	Bihar Nepal	8.4	Sitamarhi to Purnea Motihari	0 to 80 70	Road and railway fills Lake banks	Fluvial sediments, including sands Alluvium--sand lenses	Roy, Richter
1935	India (now West Pakistan)	7.6	Quetta	20 to 40	River banks	Alluvium--uncertain gradation	West, Richter
1940	El Centro	7.0	All-American Canal	6	Canal banks	Levees and foundations of deltaic sands.	Ross (personal communication)
			Alamo Canal	7 to 25	Canal banks	Levees and foundations of deltaic sands.	
			Solfatara Canal	25 to 30	Canal banks	Levees and foundations of deltaic sands.	
			Brawley	20	Road and railway fills	Deltaic and fluvial sands.	
1941	Garm	-	-	-	Loess slopes	Loess	Gubin
1943	Faisalabad	-	-	-	Loess slopes	Loess	Gubin
1948	Fukui	7.2	Fukui plain	0 to 15	Levees, river banks, road and railway fills.	Aeolian sands, beach sands, fluvial sands and silts.	Tsuya, Collins & Foster, Butler et al.
1949	Chait	7.5	Burchob & Yamam River valleys	5 to 25	Loess slopes	Loess	Gubin
1950	Imperial Valley	5.4	Calipatria area	1 to 3	Canal banks	Deltaic and aeolian sands.	Wood & Heck
1954	Anchorage	6.7	Rabbit Creek	20 to 40	Embankment	Fill on sand	Bensen
1957	San Francisco	5.3	Lake Merced	8	Lake banks	Aeolian and beach sands.	Chan
1959	Jaltipan	6.5	Coatsacoalcos Minatitlan - Coatsacoalcos highway	20 20 to 30	River banks, waterfront fill Road and bridge approach fills	Fine sandy silt, uniform and loose. Fill over marshland	Diaz de Cosio, Maral
			Rinihue	140	River banks Highway and railway fills	Fluvial and glacial sands Foundations of fluvial and glacial gravels, sands, silts.	
1960	Chile	8.4	Puerto Montt	240	Coastal terraces Sea walls and quay walls	Glacio-fluvial deposits. Fill mainly sands to silty sands, loess, Fluvial Sediments.	Duke and Leeds, Lee (personal communication)
			Valdivia	125	River banks		
1964	Alaska	8.3	Anchorage	70	Coastal bluffs	Sand layers and lenses in clay deposit.	Shannon & Wilson Coulter & Nigliccio
			Valdez	40	Coastal delta	Silty sands and gravel, (N = 15)	
			Bevard	90	Coastal delta		
			Kenai Lake	80	Lake deltas	Deltaic sandy gravels, some sand lenses.	
1964	Hiigata	7.5	Hiigata area	35	Earth banks	Fluvial sand (N < 15)	Yamada, Yokoyama, Kawakami & Asada
1965	Chile	7.2	El Cobre	=25	Tailings dam	Mining waste	Dobry
			La Patagona	= 9	Tailings dam	Mining waste	
			Bierro Viejo	=16	Tailings dam	Mining waste	
			Los Maquis	= 8	Tailings dam	Mining waste	
			El Cerrado	=18	Tailings dam	Mining waste	
			Capitol Lake Blvd., Olympia	38	Road causeway	Sand/gravel fill over lake and tidal sediments.	
1965	Seattle	6.7	Duon Pacific at Tumwater	38	Railway on benched slope	Cut/fill slope in outwash sands.	Ross (personal communication)
			Suquamish	26	Coastal bluff	Fill over fine sand and silt strata.	
			Port Orchard	18	Waterfront fill	Sand over beach sand and bay mud.	
			E. Mercer Way, Mercer Island	10	Roadways on benched slopes	Sand on till and outwash sands.	
			Edmonds	29	Dumped fill on slope	Sandy till and refuse on fill slope.	
			Poster golf course, Duwamish Victor	20 24	River terrace Highway fill	Fluvial sands and silts. Sand fill at toe of coastal bluff.	
1966	Parkfield	5.5	Cholame Creek north of Cholame	17	Stream banks	Fluvial sediments, sand strata or lenses.	Ross (personal communication)

loess. Typical examples are the slides in Kansu Province (1920), Chait (1949), Valdez, Alaska (1964) and Seward, Alaska (1964).

b. Slides caused by liquefaction or water content re-distribution in relatively thin seams or layers of sand, such as the 4th Avenue, L-Street and Government Hill slides in Anchorage, Alaska in 1964 and the slides near Lake Rinihue in the Chilean earthquake of 1960. A cross-section showing the soil conditions in the L-Street slide area in Anchorage where a block of soil 5000 ft long and 1200 ft wide moved laterally 14 ft, are shown in Fig. 40.

The sliding surface was located near the surface of the thin sand layer at about elevation 45. Block slides of this type have caused extensive damage to structures located in the grabens which form at the back end of the slides. However structures located on the sliding block itself may be undamaged by the movements.

The soil conditions in another large landslide, extending over about 130 acres, which occurred near Lake Rinihue in the Chilean earthquake of 1960 are shown in Fig. 41, together with cross-sections through the slide area before and after sliding. In this case some parts of the slide mass moved laterally about 1200 ft. The soil conditions consisted of a surface deposit of sand and gravel varying from zero to about 150 ft thick, underlain by a 250 ft thick deposit of lacustrine clay and a deeper bed of cemented sand and gravel. Field studies indicated that the surface of sliding was probably essentially horizontal and at a depth of about 150 ft in the lacustrine clay deposit, which was highly stratified, with alternating layers of silt and clay and frequent seams of fine sand. The failure was attributed to liquefaction of the silt and fine sand seams within the clay deposit (Davis and Karzulovich, 1961).

c. Slides in clay deposits facilitated by liquefaction or water content redistribution in sand lenses. A good example of this type of slide is that which occurred at Turnagain Heights, Anchorage (Seed and Wilson, 1967; Seed, 1968) during the Alaska earthquake of 1964 (see Fig. 4). A cross-section through the slide area is shown in Fig. 42. In general the area is covered by a surface layer of sand and gravel varying in thickness between 5 and 20 ft, below which is a deep bed of clay, about 100 to 150 ft thick. This soil is a sensitive marine deposit of silty clay, with a shear strength decreasing from about 1 ton per sq ft at its surface to about 0.45 tons per sq ft at El. 0 and then increasing to about 0.6 ton per sq ft at El. -30; its sensitivity varies between about 5 and 30. The clay deposit contains numerous lenses of silt and fine sand particularly near the surface on which sliding occurred. These lenses varied in thickness from a fraction of an inch to several feet. Below the sliding surface, sand lenses were very thin

and were only occasionally encountered. It is believed that liquefaction of the sand lenses or the formation of water films along the tops of the lenses in the vicinity of the slide surface played a major role in the development of this extensive slide.

d. Slumping and collapse of fills due to liquefaction or failure of loose saturated silt and sand foundation soils. Typical examples are provided by embankment failures in Alaska (1964), Chile (1960), and Niigata (1964).

The slides listed in Table 3 were caused by earthquakes varying in magnitude from about 5-1/2 to 8-1/2 and they occurred at epicentral distances varying from several miles to hundreds of miles.

However there are very few reported cases of slides developing in relatively homogeneous clay soils during earthquakes and there is a great need for information concerning this possibility.

## VI. CONCLUSION

It has not been possible in the course of this brief to cover all of the types of problems in which soil conditions may affect the damage resulting from earthquakes. Omitted, for example, are discussions of the effects of soil conditions on the stability of slopes in relatively dry cohesionless soils and fills, the stability of retaining walls and water-front bulkheads or the deformations of bridge abutments. Each of these has been responsible for major damage to engineered structures during earthquakes, with the characteristics of the soils involved being a determining factor in their performance. However damage due to these causes has usually been on a much smaller scale than that due to ground shaking, ground settlement, liquefaction and slope stability, and concentration on these latter causes of earthquake damage was considered desirable for this reason. Even so, it has not been possible to mention all of the significant contributions on these subjects and some important studies may regrettably have gone unmentioned because they have not come to the attention of the author. Never-the-less it is hoped that the preceding review, which has attempted to emphasize techniques for developing a better understanding of the relationship between soil conditions and damage during earthquakes, will provide a useful guide to the current state of knowledge concerning these important aspects of soil behavior.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Grateful acknowledgement should be expressed to many colleagues especially I. M. Idriss, R. V. Whitman, R. W. Clough, K. L. Lee, H. Dezfilian, W. H. Peacock and G. A. Ross, whose helpful suggestions and cooperation have contributed enormously to the preparation of this report.

REFERENCES

- Ambraseys, N. and Sarma, S. (1969). "Liquefaction of Soils Induced by Earthquakes," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 59, No. 2, April, pp. 651-664.
- Blume, J.A. (1965). "Earthquake Ground Motion and Engineering Procedures for Important Installations Near Active Faults," Proceedings, 3rd World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand, Vol. III.
- Butler, D. W., Muto, K. and Minami, K. (1949). "Engineering Report on the Fukui Earthquake," Office of the Engineer, General Headquarters, Far East Command, Tokyo.
- Close, U. and McCormick, E. (1922). "Where the Mountains Walked," The National Geographic Magazine, May, Vol. XLI, No. 5.
- Cloud, W. K. (1967). "Intensity Map and Structural Damage, Parkfield, California, Earthquake of June 27, 1966," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 57, No. 6, December, pp. 1161-1179.
- Clough, R. W. and Chopra, A. A. (1966). "Earthquake Stress Analysis in Earth Dams," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 92, No. EM2, Proc. Paper 4793, April, pp. 197-212.
- Collins, J. J. and Foster, H. L. (1949). "The Fukui Earthquake, Hokuriku Region, Japan, 28 June 1948," Geology, Vol. 1, Office of the Engineer, General Headquarters, Far East Command, February.
- Coulter, H. W. and Migliaccio, R. R. (1966). "Effects of the Earthquake of March 27, 1964 at Valdez, Alaska," Geological Survey Professional Paper 542-C, U. S. Department of the Interior.
- Davis, S. and Karzulovich, J. K. (1961). "Deslizamientos en el valle del rio San Pedro Provincia de Valdivia Chiles," Publication No. 20, Anales de la Facultad de Ciencias Fisical y Matematicas, University of Chile, Institute of Geology, Santiago.
- de Cossio, R. D. (1960). "Foundation Failures During the Coatzacoalcos (Mexico) Earthquake of 26 August, 1959," Proceedings, Second World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, Japan.
- Dezfulian, Houshang and Seed, H. Bolton (1969). "Response of Non-Uniform Soil Deposits to Travelling Seismic Waves," Research Report, Geotechnical Engineering, University of California, Berkeley.
- Dezfulian, Houshang and Seed, H. Bolton (1969). "Seismic Response of Soil Deposits Underlain by Sloping Rock Boundaries," Research Report, Geotechnical Engineering, University of California, Berkeley, June.
- Dibaj, Mostafa, and Penzien, Joseph (1969a). "Responses of Earth Dams to Traveling Seismic Waves," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 95, No. SM2, Proc. Paper 6453, March, pp. 541-560.
- Dibaj, Mostafa, and Penzien, Joseph (1969b). "Nonlinear Seismic Response of Earth Structure," Report No. EERC 69-2, University of California, Berkeley.
- Dobry, R. and Alvarez, L. (1967). "Seismic Failures of Chilean Tailings Dams," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM6, Proc. Paper 5582, November, pp. 237-260.
- Donovan, Neville C. and Matthiesen, R. B. (1968). "Effects of Site Conditions on Ground Motions During Earthquakes," State of the Art Symposium, EERI, San Francisco, California, February.
- Duke, C. M. (1958). "Effects of Ground on Destructiveness of Large Earthquakes," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 84, No. SM3, August.
- Duke, C. M. and Leeds, D. J. (1963). "Response of Soils, Foundations, and Earth Structures to the Chilean Earthquakes of 1960," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 53, No. 2, February.
- Dutton, C. E. (1889). "The Charleston Earthquake of August 31, 1886," Ninth Annual Report of the U. S. Geological Survey, 1887-88, Washington.
- Esteva, L., Rascon, O. A., Gutierrez, A. (1969). "Lessons from Some Recent Earthquakes in Latin America," Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, January.
- Finn, W. D. Liam (1966). "Static and Seismic Analysis of Slopes," Rock Mechanics and Engineering Geology, Journal Int. Soc. of Rock Mechanics, 1967.
- Florin, V. A. and Ivanov, P. L. (1961). "Liquefaction of Saturated Sandy Soils," Proceedings, 5th International Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engrg., Paris, France.
- Fuller, M. L. (1912). "The New Madrid Earthquake," Bulletin 494, U. S. Geological Survey, Department of the Interior, Washington, D. C.
- Grantz, A., Plafker, G. and Kachadoorian, R. (1964). "Alaska's Good Friday Earthquake, March 27, 1964," Geol. Survey, U. S. Dept. of the Interior, Circular 491, Washington, D. C.
- Gubin, I. E. (1960). "Regime of Seismicity on the Territory of Tadzhikistan," Academy of Sciences Press, U.S.S.R.
- Gutenberg, B. (1957). "The Effects of Ground on Earthquake Motion," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 47, No. 3, July, pp. 221-251.
- Hansen, W. R. (1965). "Effects of Earthquake of March 27, 1964 at Anchorage, Alaska," Geological Survey Professional Paper 542-A, U. S. Department of the Interior, Washington, D. C.
- Herrera, I. and Rosenblueth, E. (1965). "Response Spectra on Stratified Soil," Proceedings, 3rd World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand.
- Hisada, T., Nakagawa, K. and Izumi, M. (1965).

"Normalized Acceleration Spectra for Earthquakes Recorded by Strong Motions Accelerographs and their Characteristics related with Subsoil Conditions," BRI Occasional Report No. 23, Building Research Institute, Ministry of Construction, Tokyo, Japan.

Housner, G. W. (1952). "Spectrum Intensities of Strong-Motion Earthquakes," Proceedings, Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, Earthquake Engineering Research Institute, June, pp. 20-36.

Housner, G. W. (1954). "Geotechnical Problems of Destructive Earthquakes," Geotechnique, December.

Housner, G. W. (1958). "The Mechanism of Sand Blows," Bulletin, Seismological Soc. of America, Vol. 48, No. 2, April, pp. 155-161.

Housner, G. W. (1959). "Behavior of Structures During Earthquakes," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 85, No. EM4, October.

Hovey, E. O. (1902). "Martinique and St. Vincent, a Preliminary Report upon the Eruptions of 1902," American Museum of Natural History Bulletin, Vol. 16, p. 340.

Hudson, D. E. (1956). "Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology," Proceedings, First World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California.

Idriss, I. M. (1968). "Finite Element Analysis for the Seismic Response of Earth Dams," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, No. SM3, Proc. Paper 5929, May, pp. 617-636.

Idriss, I. M., Dezfulian, H. and Seed, H. Bolton (1969). "Computer Programs for Evaluating the Seismic Response of Soil Deposits with Non-Linear Characteristics Using Equivalent Linear Procedures," Research Report, Geotechnical Engineering, University of California, Berkeley.

Idriss, I. M. and Seed, H. B. (1967). "Response of Earth Banks During Earthquakes," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM3, May, pp. 61-82.

Idriss, I. M. and Seed, H. Bolton (1968a). "Seismic Response of Horizontal Soil Layers," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, No. SM4, July, pp. 1003-1031.

Idriss, I. M. and Seed, H. Bolton (1968b). "An Analysis of Ground Motions During the 1957 San Francisco Earthquake," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 58, No. 6, pp. 2013-2032, December.

Idriss, I. M. and Seed, H. Bolton (1970). "Seismic Response of Soil Deposits," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 96, No. SM2, Proc. Paper 7175, March, pp. 631-638.

Idriss, I. M., Seed, H. Bolton and Dezfulian, H. (1969). "Influence of Geometry and Material Properties on the Seismic Response of Soil Deposits," Proceedings, 4th World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile.

International Institute of Seismology and Earthquake Engrg. (1965). "The Niigata Earthquake of 16 June 1964, and Resulting Damage to Reinforced Concrete Buildings," Report No. 1, IISEE, Tokyo, Japan, Feb.

Japan Natl. Committee on Earthquake Engrg., (1965). "Niigata Earthquake of 1964," Proceedings, 3rd World Conf. on Earthquake Engrg., Auckland, New Zealand, January.

Kanai, K. (1950). "The Effect of Solid Viscosity of Surface Layer on the Earthquake Movements," Bull. Earthq. Res. Inst., 28, 31.

Kanai, K. (1951). "Relation Between the Nature of Surface Layer and the Amplitudes of Earthquake Motions," Bull. Earthq. Res. Inst.

Kanai, K., Tanaka, T. and Osada, K. (1964). "Measurement of the Micro-Tremor, I," Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 32, Part 2, July, pp. 199-209.

Kanai, K., Tanaka, T. and Yoshizawa, S. (1959). "Comparative Studies of Earthquake Motions on the Ground and Underground (Multiple Reflection Problem)," Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 37, Part 1, March, pp. 53-88.

Kawakami, F. and Asada, A. (1966). "Damage to the Ground and Earth Structures by the Niigata Earthquake of June 16, 1964," Soil and Foundation, Vol. VI, No. 1, January.

Kishida, H. (1965). "Damage of Reinforced Concrete Buildings in Niigata City with Special Reference to Foundation Engineering," Soil and Foundation Engineering, Tokyo, Japan, Vol. 6, No. 1.

Kishida, Hideaki (1969). "Characteristics of Liquefied Sands During Mino-Owari, Tohankai and Fukui Earthquakes," Soils and Foundations, Vol. IX, No. 1.

Kobayashi, H. and Kagami, H. (1966). "A Numerical Analysis of the Propagation of Shear Waves in Multi-Layered Ground," Proceedings, Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, Japan, October, pp. 15-20.

Koizumi, Yasunori, (1966). "Changes in Density of Sand Subsoil Caused by the Niigata Earthquake," Soil and Foundation, Vol. VI, No. 2, March, pp. 38-44.

Kovacs, William D., Seed, H. Bolton and Idriss, I. M., (1969). "An Experimental Study of the Response of Clay Banks," Research Report, Geotechnical Engineering, University of California, Berkeley.

Lawson, A. C., et al (1908). "The California Earthquake of April 18, 1906," Publication 87, Carnegie Institute of Washington, Washington.

Lee, Kenneth L. and Fitton, John A. (1968). "Factors Affecting the Dynamic Strength of Soil," A Symposium presented at the 71st Annual Meeting, ASTM, Vibration Effects of Earthquakes on Soils and Foundations, STP 450, San Francisco, June 23-28, 1968.

Lee, Kenneth L. and Seed, H. Bolton (1967). "Cyclic Stress Conditions Causing Liquefaction of Sand," Journal of the Soil Mechanics and

Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM1, Proc. Paper 5058, January, pp. 47-70.

Lyell, C. (1822). "Principles of Geology," Vol. 2, London.

Lyell, Charles (1849). "A Second Visit to the United States of North America," Vol. 2, London, pp. 228-229.

Mariantos, S. N. (1960). "Helice Submerged Town of Classical Greece," Archaeology, Vol. 13, No. 3, Autumn.

Marsal, R. J. (1961). "Behavior of a Sandy Uniform Soil During the Jalisco Earthquake, Mexico," Proceedings, Fifth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris, France, 1961.

Maslov, N. N. (1957). "Questions of Seismic Stability of Submerged Sandy Foundations and Structures," Proceedings, 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, England.

Matthiesen, R. B., Duke, C. M., Leeds, D. J. and Fraser, J. C. (1964). "Site Characteristics of Southern California Strong-Motion Earthquake Stations, Part Two," Report No. 64-15, Dept. of Engineering, University of California, Los Angeles, August.

McCulloch, D. S. (1966). "Slide Induced Waves, Seiching and Ground Fracturing Caused by the Earthquake of March 27, 1964, at Kenai Lake, Alaska," Geological Survey Professional Paper 543-A.

Merino y Coronado, J. (1957). "El temblor del 28 de julio de 1957," Anales Inst. de Geofis, University of Mexico, 3, 1957.

Nunally, S. W. (1966). "Development of a Liquefaction Index for Cohesionless Soils," Ph.D. Thesis, Northwestern University, June.

Ohgaki, Yorihiro (1966). "Niigata Earthquakes, 1904 Building Damage and Soil Condition," Soil and Foundation, Vol. VI, No. 2, March, pp. 14-37.

Ohgaki, Y. (1969). "The Effects of Local Soil Conditions Upon Earthquake Damage," Proceedings, Soil Dynamics Specialty Session, Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico City, August.

Oldham, T. (1882). "The Cachar Earthquake of 10th January, 1869," Memoirs of the Geological Survey of India, Vol. 19.

Oldham, R. D. (1899). "Report of the Great Earthquake of 12 June 1897," Memoirs of the Geological Survey of India, Vol. 29.

Oldham, T. and Mallett, R. (1872). "Secondary Effects of the Earthquake of 10th January 1869 in Cachar," Geologic Survey (London) Quarterly Journal, Vol. 28.

Peacock, W. H. and Seed, H. Bolton (1968). "Sand Liquefaction Under Cyclic Loading Simple Shear Conditions," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, No. SM3, Proc. Paper 5957, May, pp. 689-708.

Penzien, J., Scheffey, C. F. and Parmelee, R. (1964). "Seismic Analysis of Bridges on Long Piles," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM3, June, pp. 223-254.

Prakash, S. and Mathur, J. N. (1965). "Liquefaction of Fine Sand Under Dynamic Loads," Proceedings, 5th Symposium of the Civ. and Hydraulic Engrg. Dept., Indian Inst. of Science, Bangalore, India.

Puchkov, S. (1962). "Correlation Between the Velocity of Seismic Oscillations of Particles and the Liquefaction Phenomenon of Water Saturated Sand," Prob. Inz. Seism., Trudi No. 21, Inst. Fiziki Semli, Moscow (also Problems in Engineering Seismology, translated by Consultants Bureau, N. Y., p. 92).

Retamal, Engenio and Kausel, Edgar (1969). "Vibratory Compaction of the Soil and Tectonic Subsidence During the 1960 Earthquake in Valdivia, Chile," Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, January.

Richter, C. F. (1958). Elementary Seismology, W. H. Freeman and Co., San Francisco.

Rosenbluth, E. (1960). "The Earthquake of 28 July 1957 in Mexico City," Proceedings, 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Japan, Vol. I.

Ross, Grant A., Seed, H. Bolton and Migliaccio, Ralph R. (1969). "Bridge Foundation Behavior in Alaska Earthquake," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, No. SM4, Proc. Paper 6664, July, pp. 1007-1036.

Roy, S. C. (1939). "The Bihar-Nepal Earthquake of 1934: Seismometric Study," Memoirs of the Geological Survey of India, Vol. 73, 1939.

Seed, H. Bolton (1967). "Slope Stability During Earthquakes," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM4, Proc. Paper 5319, July, pp. 299-323.

Seed, H. Bolton (1968). "Landslides During Earthquakes Due to Liquefaction," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, No. SM5, Proc. Paper 6110, September, pp. 1053-1122.

Seed, H. Bolton, Idriss, I. M. (1967). "Analysis of Soil Liquefaction: Niigata Earthquake," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM3, May, pp. 83-108.

Seed, H. Bolton and Idriss, I. M. (1969a). "Influence of Soil Conditions on Ground Motions during Earthquakes," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 95, No. SM1, pp. 99-137, January.

Seed, H. Bolton, and Idriss, I. M. (1969b). "Analyses of Ground Motions at Union Bay, Seattle During Earthquakes and Distant Nuclear Blasts," (in press).

Seed, H. Bolton, Idriss, I. M. and Kiefer, F. W. (1968). "Characteristics of Rock Motions During Earthquakes," EERC 68-5, University of California, Berkeley, September.

- Seed, H. Bolton and Lee, Kenneth L. (1966). "Liquefaction of Saturated Sand During Cyclic Loading," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 92, No. SM6, Proc. Paper 4972, November, pp. 105-134.
- Seed, H. Bolton, Lee, K. L. and Idriss, I. M. (1968). "An Analysis of the Sheffield Dam Failure," Report No. TE 68-2 to State of California Department of Water Resources, University of California, Berkeley, April.
- Seed, H. Bolton and Wilson, Stanley D. (1967). "The Turnagain Heights Landslide, Anchorage, Alaska," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM4, Paper 5320, July, pp. 325-353.
- Shannon and Wilson (1964). "Report on Anchorage Area Soil Studies, Alaska," Report to the U. S. Army Engineer District, Anchorage, Alaska, August 28.
- Silver, Marshall L. (1969). "The Behavior of Sands Under Seismic Loading Conditions," Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, September.
- Tarr, R. S. and Martin, L. (1912). "The Earthquakes at Yakutat Bay, Alaska, in September, 1899," Geologic Survey Professional Paper 69, U. S. Department of the Interior, Washington, D. C.
- Tsuya, H. (1950). "The Fukui Earthquake of June 28, 1948," Report of the Special Committee for the Study of the Fukui Earthquake, Tokyo.
- Valera, Julio E. (1968). "Seismic Interaction of Granular Soils and Rigid Retaining Structures," Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- Wakimizu, T. (1924). "Kwaguku-Tisiki, (Scientific Knowledge)," Vol. IV, Tokyo, April, (in Japanese).
- West, W. D. (1936). "Geological Account of the Quetta Earthquake," Transaction of the Mining Geology Institute of India, Vol. 30.
- Whitman, Robert V. (1969). "The Current Status of Soil Dynamics," Applied Mechanics Review, pp. 1-8.
- Whitman, R. V. and de Pablo, P. O. (1969). "Densification of Sand by Vertical Vibrations," Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, January.
- Wiggins, J. H. (1964). "Effects of Site Conditions on Earthquake Intensity," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 90, No. ST2, April, pp. 279-313.
- Wilson, E. L. (1968). "A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures," Report No. 68-1, Struct. Eng. Lab., University of California, Berkeley, January.
- Wood, H. O. (1908). "Distribution of Apparent Intensity in San Francisco," in "The California Earthquake of April 18, 1906," Report of the State Earthquake Investigation Commission, Carnegie Institution of Washington, Washington, D. C. pp. 220-245.
- Wood, H. O. (1933). "Preliminary Report on the Long Beach Earthquake," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 23.
- Wood, H. O. and Heck, N. H. (1966). "Earthquake History of the United States," U. S. Department of Commerce, Washington, D. C.
- Yamada, G. (1966). "Damage to Earth Structures and Foundations by the Niigata Earthquake, June 16, 1964," Soil and Foundations, Vol. VI, No. 1, January.
- Yokomura, S. (1966). "The Damage to River Dykes and Related Structures Caused by the Niigata Earthquake," Soil and Foundation, Vol. VI, No. 1, January.
- Yoshimi, Yoshiaki (1967). "An Experimental Study of Liquefaction of Saturated Sands," Soil and Foundation, Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 7, No. 2, March.
- Zeevaert, L. (1963). "The Effect of Earthquakes in Soft Subsoil Conditions," Proceedings, 30th Annual Convention, Structural Engineers Assoc. of California, October, pp. 74-82.



# THE EFFECTS OF LOCAL SOIL CONDITIONS UPON EARTHQUAKE DAMAGE

Y. Ohsaki

Yorihiko Ohsaki is Head of the Structures Division of the Building Research Institute in Tokyo.

A graduate of the University of Tokyo, he received his M.S. degree at Northwestern University and in 1958 was granted the degree of Doctor of Engineering at the University of Tokyo.

Presently he lectures on foundation engineering at the University of Tokyo and is on the Committee for Examination of Nuclear Reactor Safety of the Science and Technology Agency of the Japanese Government.

He has published in the areas of building codes, structural standards, soil dynamics, foundation engineering, earthquake response, and engineering-geologic mapping.



Y. Ohsaki

## SYNOPSIS

In this state-of-the-art paper on the effects of local soil conditions upon earthquake damage, experiences and theories relevant to the subject, interpretations of the experiences from theoretical viewpoints, and some design proposals have been outlined. Several factors of major importance may be pointed out in connection with earthquake damage; namely, (1) amplification of earthquake motion by soil layers, (2) resonance of soils and structures, (3) dissipation of vibrational energy, (4) progressive failure, and (5) differential settlement. In accordance with soil conditions, some of these factors exercise advantageous effects and the others do inversely, suggesting that the combined effect will be quite complicated. To solve such complicated but urgent problems, and to reach the final comprehensive solution, a pertinent soil-foundation-structure system must be established and analyzed.

## I. FOREWORD

Since every structure is supported on soils and earthquake waves are delivered to the structure from soils, it is quite natural that earthquake damage to structures should be affected by soil conditions.

From ancient times Japan has very often been attacked by large earthquakes and it seems that, since a fairly old time, one has become aware of the dependency of earthquake damage on local soil conditions. To the knowledge of the writer, the first documental record describing such an interrelation appeared as early as the beginning of the 18th century. However, it may be at the time of the Kanto earthquake of 1923, which destroyed the city of Tokyo and its vicinity, that the correlation between earthquake damage and soil conditions was noticed for the first time from the viewpoint of modern structural engineering.

After the Kanto earthquake, destructive earthquakes have continued to attack Japan, damaging structures on one hand and supplying invaluable data on the other. In this state-of-the-art paper, it is attempted to summarize information on the effects of local soil conditions upon earthquake damage from empirical and theoretical viewpoints. Matters concerning design practice will also be referred to.

In Table 1.1, major earthquakes in the last forty-five years are listed, which will be cited in this paper.

TABLE 1.1.--LIST OF MAJOR EARTHQUAKES  
IN JAPAN 1923-1968

Designation	Year of Occurrence	Magnitude (Richter-Gutenberg)	Number of Collapsed Buildings
Kanto Earthquake	1923	7.9	128,266
Sanriku-Okii Earthquake	1933	8.5	17,907
Tottori Earthquake	1943	7.3	7,485
Tonankai Earthquake	1944	8.3	26,130
Nankaido Earthquake	1946	8.1	11,591
Fukui Earthquake	1948	7.2	35,420
Niigata Earthquake	1964	7.5	1,960
Matsushiro Earthquake	1966	5.1	-
Ebino Earthquake	1968	6.1	398
Tokachi-Okii Earthquake	1968	7.8	676
Higashi-Matsuyama Earthquake	1968	6.4	-

## II. LOCAL DIFFERENCE OF EARTHQUAKE DAMAGE

Traditionally, the intensity of an earthquake at a locality is evaluated by human feelings or by observing its effects on objects including building structures, and is expressed by means of a so-called intensity scale. There are several kinds of intensity scales now being used such as Rossi-Forel's, Mercalli's, Modified Mercalli's, Medvedev-Sponheuer-Karnik's, or Japan Meteorological Agency's intensity scale. It is a matter of course that both the sense of shock and the extent of damage to buildings become smaller with increasing distance from the epicenter. It is also quite natural that, when the magnitude of earthquake is greater, the seismic intensity is larger at a given epicentral distance.

Based on experience of past earthquakes an equation has been suggested (Kawasumi, 1951) to express approximately the relationship between the seismic intensity, the epicentral distance and the magnitude of an earthquake:

$$I = 2M - (0.00183R + 2\log_e R) - 0.307 \quad (2.1)$$

where: I : seismic intensity in terms of Japan Meteorological Agency's intensity scale  
M : magnitude  
R : epicentral distance in kilometers

Fig. 2.1 shows the relationship between the seismic intensity and the epicentral distance for several recent earthquakes in Japan. Now let us take, for example, the Niigata earthquake of 1964 of M = 7.5 and apply Eq. 2.1 to this case. Then, as a matter of course, zones of equal intensity exhibit a pattern of concentric circles having the epicenter as their geometrical center as shown in Fig. 2.2(a).

However, the distribution of actually observed intensities for the earthquake was as shown in Fig. 2.2(b), and it will be noticed that the intensity contours deviate considerably from the concentric pattern, developing local irregularities at several places. Such irregularities in the observed seismic intensity pattern may be attributed to tectonical anisotropy along the path of the earthquake waves and the mechanism of the earthquake at the hypocenter.

Another example, in which the affected area is more limited than in the case of Fig. 2.2 but which represents local differences in earthquake damage more clearly, is the distribution of damage rates of wooden buildings (Minakami, 1945) caused by the Tonankai earthquake of 1944, as shown in Fig. 2.3. It is of interest to note that the damage rates do not necessarily decrease with the distance from the epicenter. The tectonic anisotropy and the seismic mechanism at the hypocenter may be pointed out as well; it is conceivable, however, that local differences in soil conditions played a more important role in this case. In fact, with few exceptions, damage took place where deep alluvial deposits were encountered.

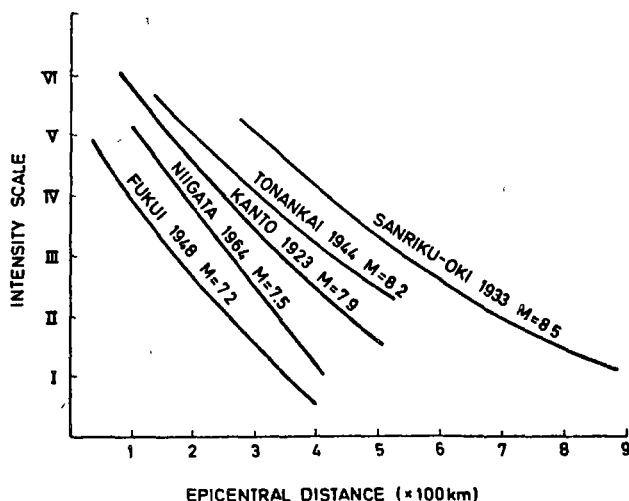


Fig. 2.1. Seismic Intensity and Epicentral Distance

It has been reported quite frequently that, within a small area, marked differences in earthquake damage were observed. Some representative examples will be cited in the following. Since, in these examples, affected

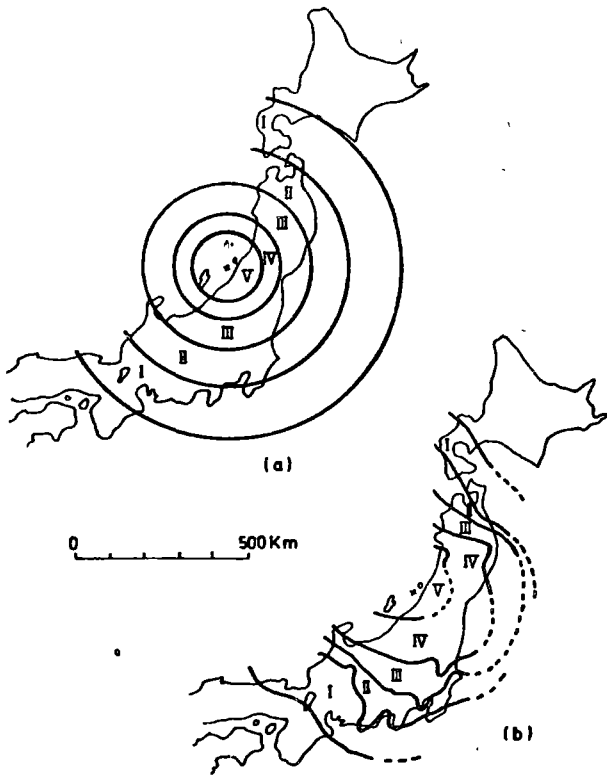


Fig. 2.2. (a) Computed Intensity and  
(b) Actually Observed Intensity

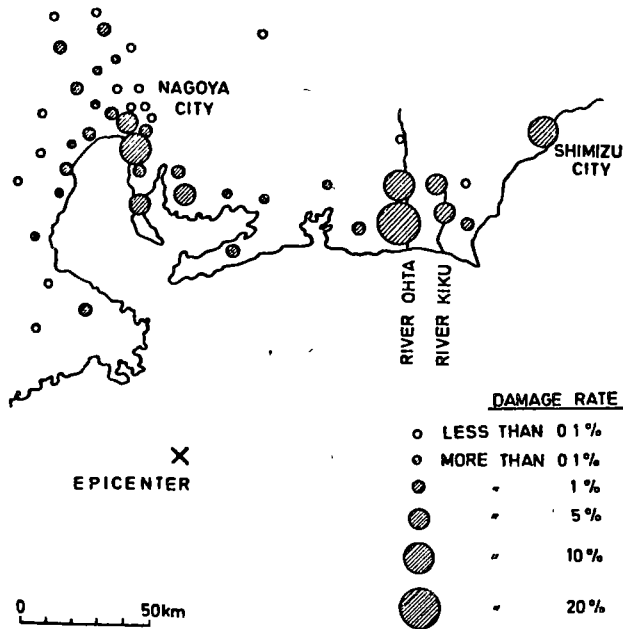


Fig. 2.3. Damage Distribution of Wooden Buildings, Tonankai Earthquake 1944 (Minakami, 1945)

areas are extremely limited in size in comparison with the epicentral distance, effects of path and origin may be of little importance. Fig. 2.4 shows a distribution of damage to wooden buildings in a town attacked by the Nankaido earthquake of 1946, demonstrating a clear boundary between heavily and slightly damaged areas (Shimizu and Suehiro, 1947). Fig. 2.5 illustrates a distribution of damage in Shimizu City which has already been referred to in Fig. 2.3. It may be seen in Fig. 2.5 that most of the damaged buildings are concentrated around the estuary of a river (Miyamura, 1945 and 1946), where probably soft soils are deeply deposited. A concentration of heavy damage may also be noticed in Fig. 2.6, in which a distribution of damage to godowns in a town is plotted. (A godown is a storehouse of Japanese traditional style, constructed with rigid wooden frames and extremely thick exterior walls made of mud plaster.)

In this town, such concentration of damaged structures had clearly been observed in the past during severe earthquakes; the zone of frequent damage in this town is now called "a path of earthquake" by the natives. A more recent example is given in Fig. 2.7, which shows a distribution of wooden buildings damaged during the Ebino earthquake of 1968 (Ohsaki, 1968). The pattern of distribution of collapsed buildings is complicated; nevertheless, it is not completely at random, suggesting that a delicate difference in surface soil conditions might have exercised a certain influence.

It is true in general that a movement or failure of a structure is essentially governed by the ground motion and characteristics of the structure. But, as foregoing examples have suggested, it is also affected macroscopically by properties of the earth's crust and microscopically by soil conditions, resulting in a local difference in earthquake damage. These relations may be expressed by an equation of the following form (Otsuki and Kanai, 1961):

$$f_s(t) = F_s (E(t), G_1(t), G_2(t), S(t)) \quad (2.2)$$

- where:
- $f_s(t)$  : movement of structure during earthquake
  - $F_s$  : functional
  - $E(t)$  : function representing the movement of the ground
  - $G_1(t)$  : function representing properties of the earth's crust
  - $G_2(t)$  : function representing soil conditions
  - $S(t)$  : function representing characteristics of structure

In this equation, none of the functions  $E(t)$ ,  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  and  $S(t)$  is independent, and they interact with each other. In this paper, discussions will primarily be focused on the problems of function  $G_2(t)$ ; in addition, effects of interaction between  $G_2(t)$  and  $S(t)$  will be referred to.

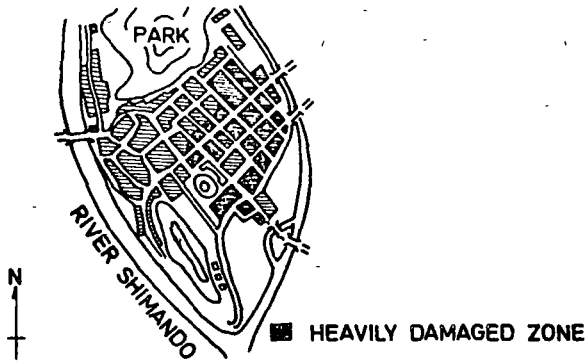


Fig. 2.4. Damage Distribution at Nakamura, Kochi Pref., Nankaido Earthquake 1946 (Shimizu & Suehiro, 1947)

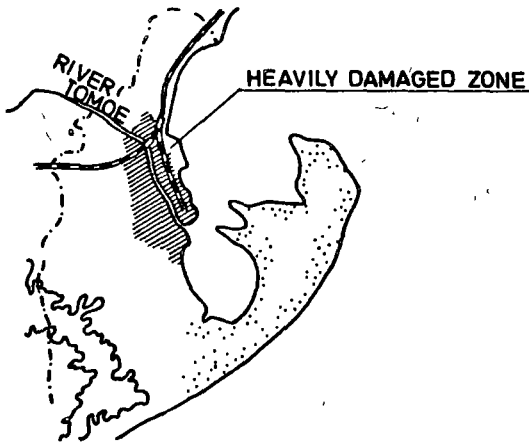


Fig. 2.5. Damage Distribution in Shimizu City, Tonankai Earthquake 1944 (Miyamura, 1945 & 1946)

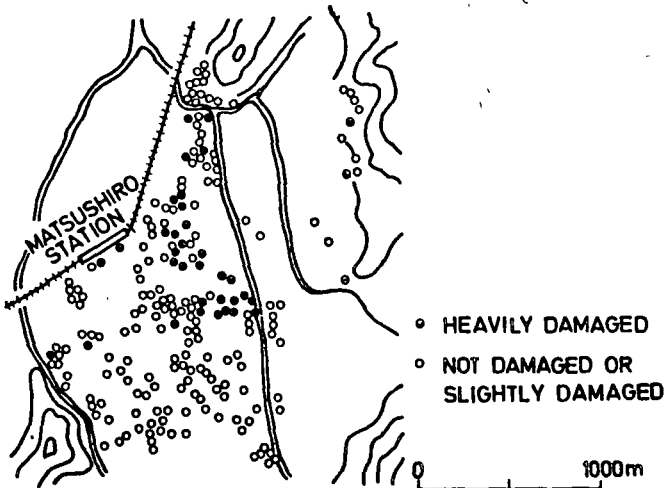


Fig. 2.6. Damage to Godowns in Matsushiro, Matsushiro Earthquake 1966 (Kishida et al, 1967)

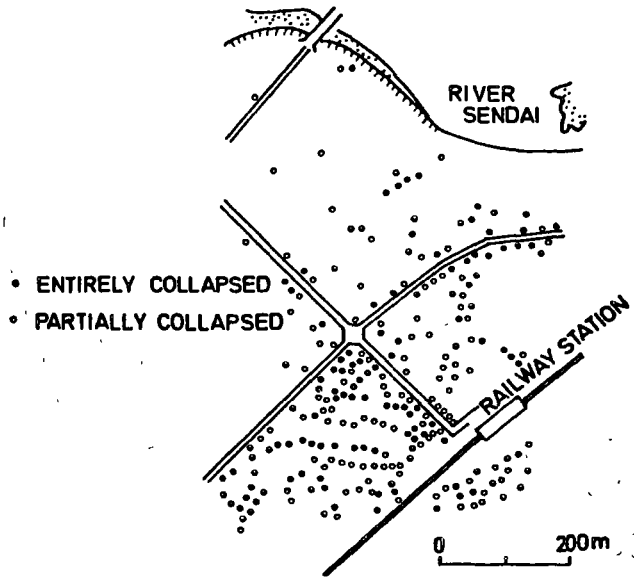


Fig. 2.7. Damage Distribution at Ebino, Ebino Earthquake 1968

### III. SOIL CONDITIONS AND EARTHQUAKE DAMAGE

Whenever destructive earthquakes occurred in the past, it has been reported that effects of soil conditions on damage to wooden buildings were clearly observed, or that damage in the area of soft soils was far greater than in the area of hard ground. In fact, nearly everyone in Japan is now familiar with this phenomenon.

In spite of extensive experience, however, quantitative information on this matter is far from being sufficient. Furthermore, information on damage to buildings other than conventional wooden construction, for instance, reinforced concrete buildings, is extremely lacking. Nevertheless, it is intended in this chapter to collect as much as possible quantitative data concerning the relationship between soil conditions and earthquake damage, although some of those data have already been published elsewhere in more simplified forms (Duke, 1958).

Unfortunately, a parameter to express statistically the extent of earthquake damage has not yet been established. For convenience's sake, however, the following definitions will be employed in this paper for statistical expression of the extent of damage:

$$\begin{aligned} \text{Collapse rate} &= \frac{D}{M} \times 100(\%) \\ \text{Failure rate} &= \frac{D + H}{M} \times 100(\%) \\ \text{Modified failure rate} &= \frac{D + H/2}{M} \times 100(\%) \\ \text{Damage rate} &= \frac{D + H + S}{M} \times 100(\%) \end{aligned}$$

where: D : number of collapsed buildings  
H : number of partially or half-collapsed buildings

S : number of slightly damaged buildings  
M : total number of buildings in the area concerned.

Between collapse rate,  $y$ , and seismic coefficient,  $K$  (i.e., the ratio of maximum horizontal acceleration of earthquake to the acceleration of gravity), an equation

$$y = \frac{100}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^K \exp \left[ -\frac{(K - K_0)^2}{2\sigma^2} \right] dK \quad (3.1)$$

can be derived based on theories of statistics, and it is known empirically that for wooden buildings  $K_0$  and  $\sigma$  take the following values (Kawasumi, 1952):

$$K_0 = 0.4$$

$$\sigma = 0.071$$

Sometimes, a term "vulnerability ratio" of the ground (Omote, 1946) is used to characterize the effects of soil conditions, eliminating the influence of epicentral distance. For instance, if damage rates,  $y$  in per cent, of all villages in and around the plain of Fukui at the time of the Fukui earthquake of 1948 are plotted against the epicentral distance,  $R$  in kilometers, irrespective of their soil conditions, then Fig. 3.1 is obtained (Ohsaki, 1951). If, assuming an equation

$$Y = \alpha R^{-\beta} \quad (3.2)$$

to express the relation between  $y$  and  $R$ , and one determines  $\alpha$  and  $\beta$  by the least square method, then

$$y_c = 1800R^{-2.26} \quad (3.3)$$

will be obtained, which is also represented by a curve in Fig. 3.1. This curve or  $y_c$  in Eq. 3.3 may be interpreted to represent the average damage rate at a given epicentral distance. Therefore, if a ratio of actual damage rate,  $y$ , of a village to the average damage rate,  $y_c$ , at the same epicentral distance, i.e.,

$$S = \frac{y}{y_c}$$

is evaluated, this ratio represents only the effects of ground conditions in the village independent of the epicentral distance. This ratio has been defined as the vulnerability rate of the ground.

#### 1. Topographical and Geological Aspects

The northeast part of Nagoya City is located on a diluvial highland, whereas its southern and western parts are on a flat, alluvial lowland.

During every severe earthquake in the past, more buildings were damaged or destroyed in the lowland. Fig. 3.2 shows failure rates of wooden buildings at different locations in Nagoya City for the Tonankai earthquake of 1944 plotted against average elevations above sea level (Omote and Miyamura, 1951). The difference in failure rates is outstanding;

however, if the fact is taken into account that the highland consists of firm diluvial soils and the lowland soft alluvial deposits, the problem may be deemed rather geological than topographical.

The drainage basin of the River Kiku was seriously damaged by the Tonankai earthquake of 1944 as previously shown in Fig. 2.3. Within this damaged area, a topographical classification of the ground had been made and the failure rate of wooden buildings in each topographical class was investigated (Tada, Oba and Otani, 1951). The result is shown in Fig. 3.3, indicating that the damage in lower alluvial flats is extremely great. If the class of sandy ground is subdivided from the viewpoint of microtopography into sand dune on base rock, sand spit, sand dune on alluvial stratum and sandy back-marsh, their failure rates were confirmed to increase in that order.

On the basis of statistics of damage for the Fukui earthquake of 1948 and applying Eq. 3.1, seismic coefficients have been evaluated in Table 3.1 with respect to geology of the ground (Takahashi, 1951).

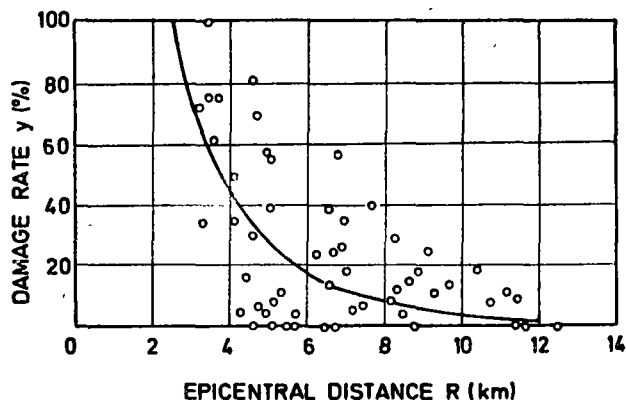


Fig. 3.1. Damage Rate and Epicentral Distance, Fukui Earthquake 1948 (Ohsaki, 1951)

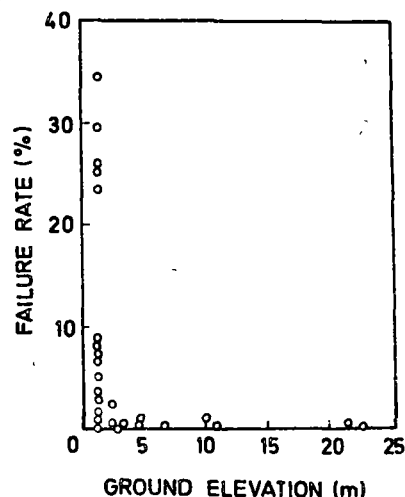


Fig. 3.2. Ground Elevation and Damage to Wooden Buildings in Nagoya, Tonankai Earthquake 1944 (Omote & Miyamura, 1951)

TABLE 3.1.--GEOLOGY AND SEISMIC COEFFICIENTS (TAKAHASHI, 1951)

	Marshy Land	Alluvium	Diluvium	Tertiary
Ratio of Seismic Coefficient	1.5	1.0	0.7	0.4

Also for the Fukui earthquake of 1948, villages in the Fukui plain and surrounding mountainous areas were classified into four groups:

- I .... entirely on alluvial plain
- II .... on the verge of the plain, covering both alluvium and rock
- III .... entirely on rock
- IV .... on sand dune,

and the vulnerability rate in each village was determined and plotted in Fig. 3.4, indicating that wooden buildings on the alluvial plain are far more vulnerable to earthquake damage than those on rock (Ohsaki, 1951). The rates for group II, i.e., villages straddling over alluvium and rock, are intermediate between groups I and III. In general, however, past experience of earthquakes has shown with considerable clearness that buildings on the verge of alluvial flat or in the valley are apt to be damaged, probably due to disturbance and amplification of earthquake waves at such places. Amplification of waves takes place, as well, near the crest of a slope (Idriss and Seed, 1967), and this fact has been observed at several places at the time of the Tokachi-Oki earthquake of 1968.

For the Kanto earthquake of 1923, failure rates of wooden buildings in uptown and downtown Tokyo were as tabulated in Table 3.2. Namely, the downtown on alluvial lowlands showed far larger rate of damage than the uptown on diluvial highlands (Ohsaki, 1962).

TABLE 3.2.--FAILURE RATE OF WOODEN BUILDINGS IN TOKYO, KANTO EARTHQUAKE 1923 (OHSAKI, 1962)

	Uptown	Downtown
Failure Rate (%)	2.0	11.0

2. Firmness of Soils

In the preceding paragraphs, it has been described that the geological problem is probably more essential than the topographical. However, if the fact is considered that, needless to say with respect to rock, diluvial soils are in general far firmer than alluvial deposits, the most essential point may be the firmness of soils in discussing the relation with earthquake damage.

Immediately after the Kanto earthquake of 1923, five hundred percussion borings were carried out in Tokyo City, and in eighty bore holes the number of falls of the churning bit was

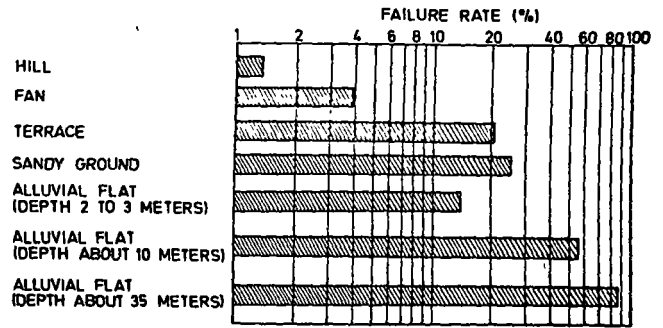


Fig. 3.3. Microtopography and Damage to Wooden Buildings Along the River Kiku, Tonankai Earthquake 1944 (Tada, Oba and Otani, 1951)

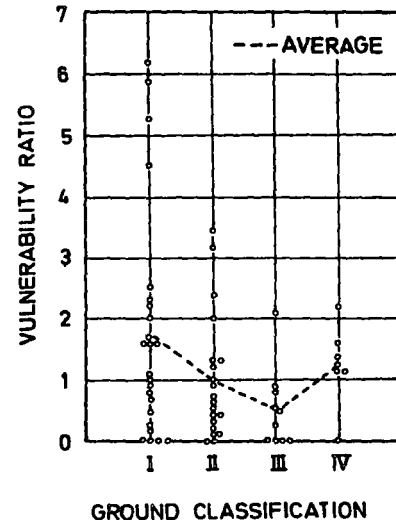


Fig. 3.4. Ground Classification and Vulnerability Ratio, Fukui Earthquake 1948 (Ohsaki, 1951)

recorded. Based on these records, average penetration per fall down to the depth of 40 meters was determined at each bore hole, and their relation to collapse rate of wooden buildings within a certain area around each bore hole was investigated (Kitazawa, 1950). The result is shown in Fig. 3.5, indicating fairly good correlation.

The contour lines in Fig. 3.6 (Yokoo et al., 1965) indicate what percentage of the top 10 meters consists of extremely soft soils ( $N < 2$  for cohesive material and  $N < 4$  for cohesionless material,  $N$  being the number of blows per foot in the standard penetration test). Shaded areas in the figure show the zones in which the damage rate exceeded 20% in the south part of Nagoya City for the Tonankai earthquake of 1944. It is readily apparent that the pattern of the contours and that of the actual damage distribution coincide fairly well.

Another parameter representing firmness of soils is the velocity of wave propagation, which can be measured by means of seismic exploration. According to the results of

extensive seismic explorations carried out in Nagoya City, the alluvial plain in the city is almost entirely covered by a top layer of several meters' thickness, in which the velocity of longitudinal wave is as low as 500 m/sec. In Fig. 3.7, the relation of the thickness of this top layer at each location to the failure rate of wooden buildings is represented for the Tonankai earthquake of 1944 (Omote and Miyamura, 1951). A trend that the failure rate increases with an increase in the thickness of the soft, low-velocity layer may be noted; however, on the other hand, the thickness of this top layer is in an approximately linear relationship with the total thickness of alluvial deposits as shown in Fig. 3.8. Therefore, whether the failure rate was primarily governed by the thickness of the top layer or by that of the whole alluvium is subject to question.

In Fig. 3.9 (Tanabashi and Ishizaki, 1953), the notation  $H_1$  in abscissa represents the depth of soft soil having the velocity of longitudinal wave less than 1500 m/sec, and  $V_L$  denotes the measured velocity of surface wave. Then, failure rates of wooden buildings for several large earthquakes are plotted against the ratio  $H_1/V_L$ . A considerably definite, linear correlation can be observed with respect to each earthquake; however, the slopes of the lines are different for different earthquakes, probably because of differences in factors other than the wave velocities. It has further been verified by the same authors that the ratio  $H_1/V_L$  is related to the amplification of surface waves in the vicinity of the ground surface.

It is a matter of fact that artificially filled soils are solidified due to natural compaction and consolidation with the lapse of years. Fig. 3.10 is an illustration of this fact, showing that the failure rate of wooden buildings on reclaimed ground tends to decrease in course of many years after reclamation (Omote and Miyamura, 1951).

### 3. Thickness of Alluvial Deposits

As far as earthquake damage to wooden buildings is concerned, soft or loose soils are more disadvantageous than firm or dense soils. Geologically, alluvial deposits have been most responsible for serious earthquake damage. Furthermore, it has been frequently experienced that the depth of alluvial deposits has an important effect upon the extent of damage.

Fig. 3.11 (Kawasumi, 1952), Fig. 3.12 (Ohsaki, 1962), Fig. 3.13 (Omote, 1949), and Fig. 3.14 (Omote and Miyamura, 1951) represent correlations between the rate of damage to wooden buildings and the thickness of alluvial deposits in Tokyo, Yokohama and Nagoya cities for the Kanto earthquake of 1923 and the Tonankai earthquake of 1944, all showing a definite tendency that damage increases with an increase in thickness.

Also indicated in Fig. 3.11 are the seismic coefficients which have been evaluated by Eq. 3.1. Fig. 3.12 shows a range within which 95 per cent of plots fall for the Kanto earthquake of 1923, and on an average an equation

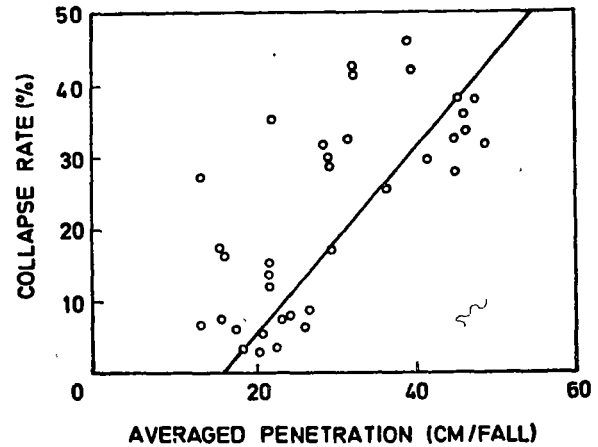


Fig. 3.5. Firmness of Ground and Collapse Rate in Tokyo, Kanto Earthquake 1923 (Kitazawa, 1950)

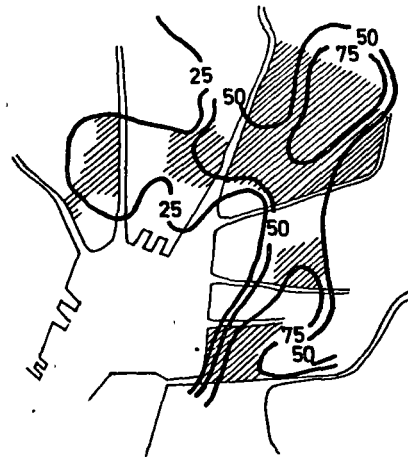


Fig. 3.6. Soft Top Soils and Damage Rate in South Nagoya, Tonankai Earthquake 1944 (Yokoo et al, 1965)

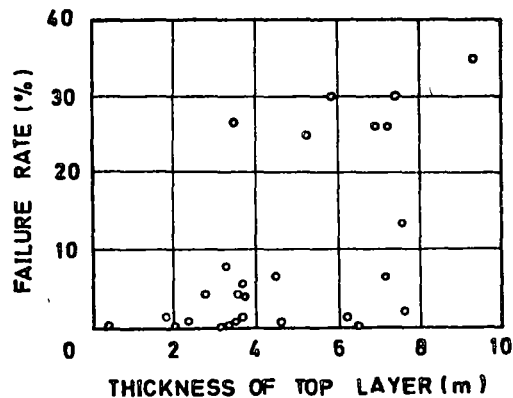


Fig. 3.7. Thickness of Top Layer and Damage to Wooden Buildings in Nagoya, Tonankai Earthquake 1944 (Omote & Miyamura, 1951)

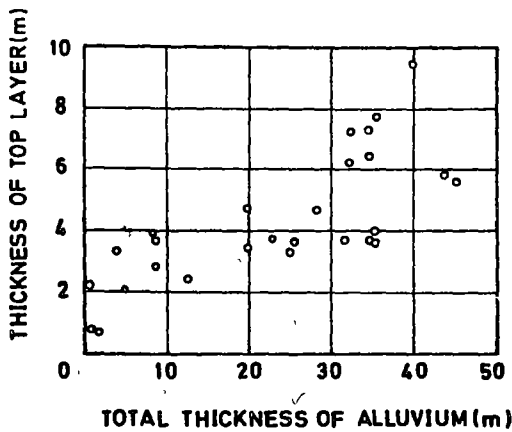


Fig. 3.8. Thickness of Top Layer and Total Thickness of Alluvial Deposits in Nagoya (Omote & Miyamura, 1951)

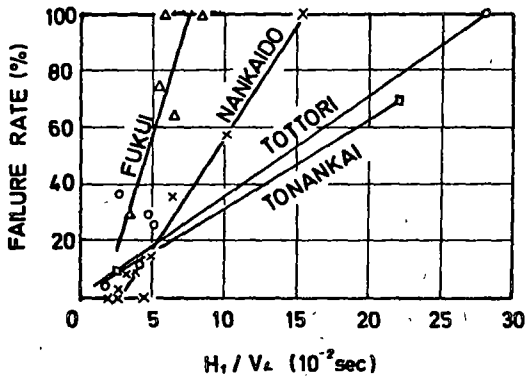


Fig. 3.9.  $H_1/V_L$  and Damage to Wooden Buildings (Tanabashi & Ishizaki, 1953)

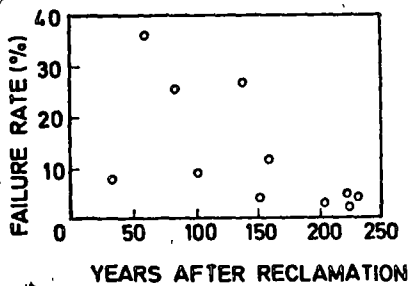


Fig. 3.10. Years after Reclamation and Damage to Wooden Buildings in Nagoya, Tonankai Earthquake 1944 (Omote & Miyamura, 1951)

$$y = 0.982 (1.086)^z - 0.26$$

where:  $y$  : failure rate of wooden buildings in per cent;  
 $z$  : thickness of alluvial deposits in meters

can be derived to express the correlation analytically (Ohsaki, 1962).

To present information on soil mechanical characteristics of alluvial deposits in Japan, unconfined compression strength of clayey and silty materials in downtown Tokyo is shown in Fig. 3.15, and the relation between the unconfined compression strength  $q_u$  in kg/sq cm and the depth  $D$  in meters may be expressed on an average by

$$q_u = 0.2 + 0.04D$$

Strength characteristics of alluvial deposits in other places may be considered as almost identical.

On the reclaimed ground, damage to wooden buildings tends to increase with increasing depth of filled soils as illustrated in Fig. 3.16 for the Kanto earthquake of 1923 (Omote, 1949).

#### 4. Predominant Period of the Ground

A parameter which represents well the dynamic characteristics of the ground and furnishes useful information related to earthquake damage, is the predominant period of the ground. In Fig. 3.17 and Fig. 3.18, the relation between failure rate of wooden buildings and predominant period is shown with respect to areas along the River Kiku, the River Ota, and the River Tenryu for the Tonankai earthquake of 1944, areas around Fukui City for the Fukui earthquake of 1948, and Sakata and Tsuruoka Cities for the Niigata earthquake of 1964 (Kanai, 1968). It may be noted consistently that the failure rate is largest where the predominant period is approximately equal to 0.4 sec. This fact suggests that a resonance of structures and soils may be a major cause of damage, considering that the natural periods of wooden buildings in these areas are in the vicinity of 0.4 sec (Suzuki, 1961).

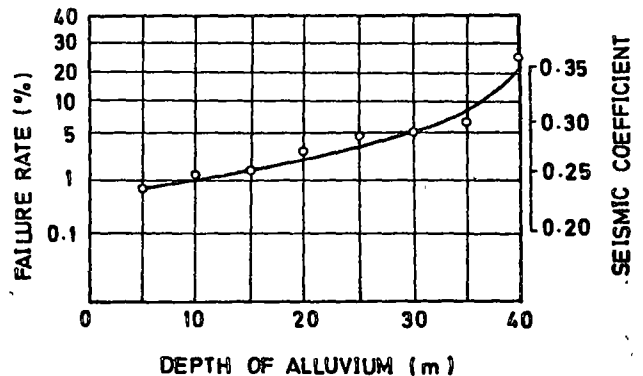


Fig. 3.11. Depth of Alluvial Deposits, Damage to Wooden Buildings and Seismic Coefficient in Tokyo, Kanto Earthquake 1923 (Kawasumi, 1952)



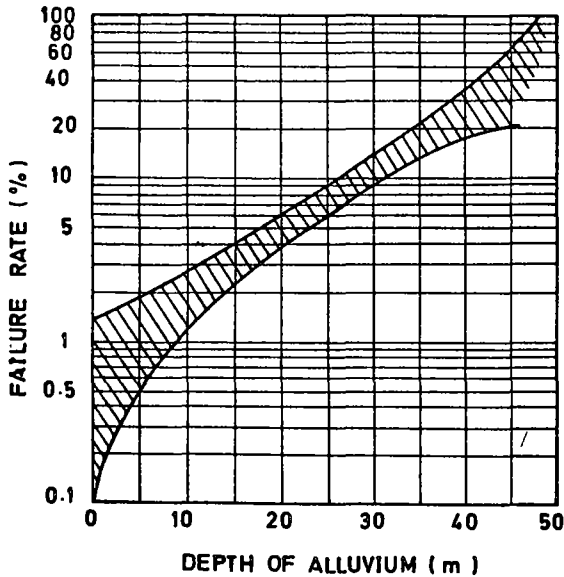


Fig. 3.12. Depth of Alluvial Deposits and Damage to Wooden Buildings in Tokyo, Kanto Earthquake 1923 (Ohsaki, 1962)

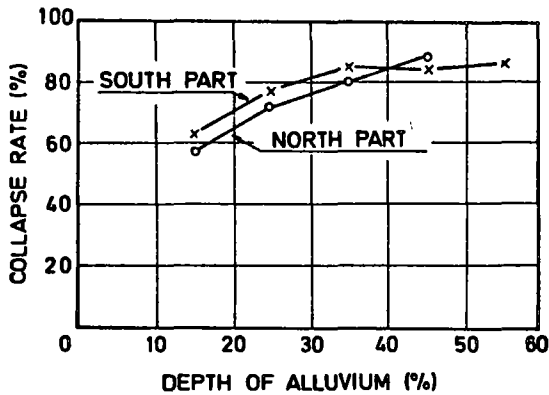


Fig. 3.13. Depth of Alluvial Deposits and Damage to Wooden Buildings in Yokohama, Kanto Earthquake 1923 (Omote, 1949)

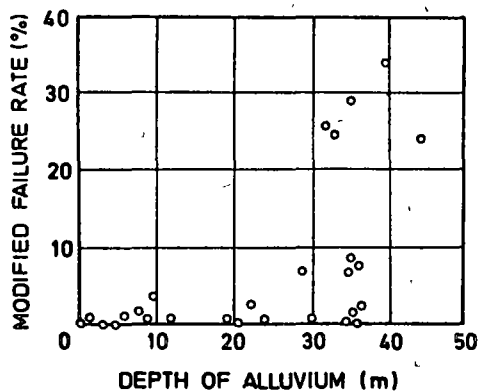


Fig. 3.14. Depth of Alluvial Deposits and Damage to Wooden Buildings in Nagoya, Tonankai Earthquake 1944 (Omote & Miyamura, 1951)

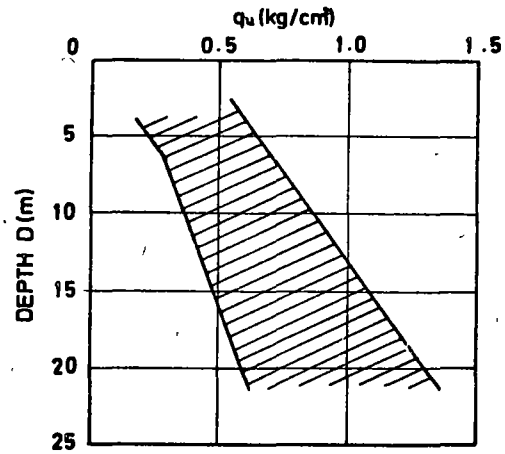


Fig. 3.15. Unconfined Compression Strength of Alluvial Deposits in Tokyo

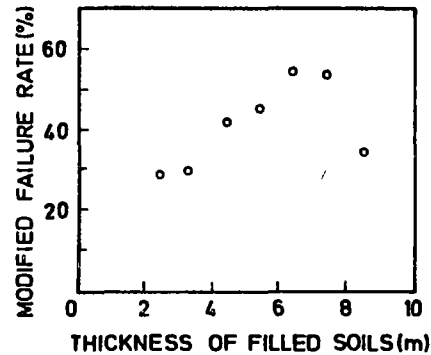


Fig. 3.16. Thickness of Filled Soils and Damage to Wooden Buildings in Yokohama, Kanto Earthquake 1923 (Omote, 1949)

The predominant period of the ground is usually determined on the basis of records of actual, minor earthquakes or of microtremors.

#### 5. Effects of Structural Rigidity

In the preceding paragraphs, earthquake damage mostly to wooden buildings has been discussed, which are in general the most flexible structures. Modern reinforced concrete structures usually possess much higher rigidity than wooden ones, and godowns may be considered to be of intermediate rigidity between wooden buildings and reinforced concrete structures. The difference in rigidities between brick construction and reinforced concrete construction may not readily be determined. In general, however, the rigidity of brick construction may probably be higher than that of godowns and far greater than the rigidity of usual wooden buildings. In this section, the

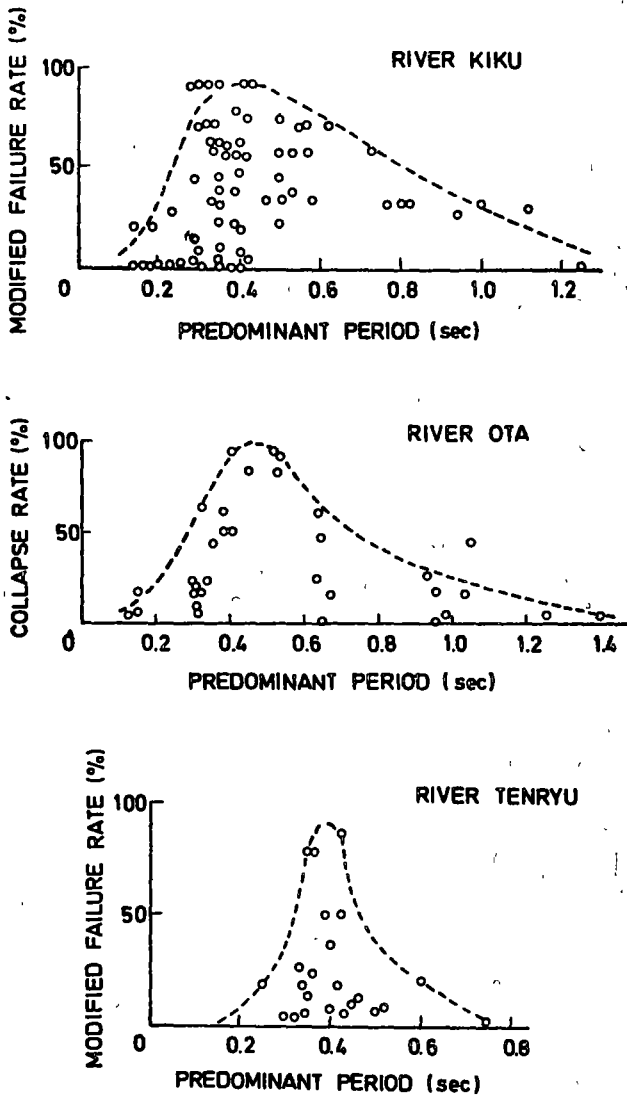


Fig. 3.17. Predominant Period of Ground and Damage to Wooden Buildings -1 (Kanai, 1968)

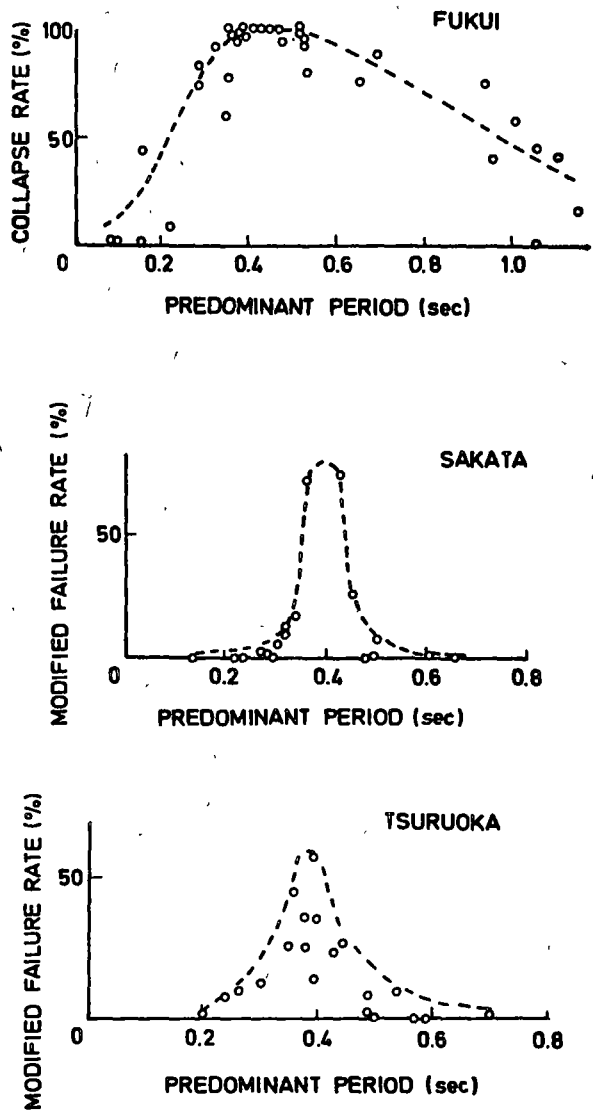


Fig. 3.18. Predominant Period of Ground and Damage to Wooden Buildings -2 (Kanai, 1968)

effects of soil conditions will be discussed with respect to several types of structures having different rigidities.

a. Godowns and Brick Buildings. As mentioned before, Japanese godowns are constructed with rigid wooden frames and extremely thick exterior walls made of mud plaster, being usually two-storied and possessing considerably higher structural rigidity than conventional wooden dwelling houses.

In Fig. 3.19, the damage rate for the Kanto earthquake of 1923 of godowns in each ward of Tokyo City is evaluated and compared with that of two-storied wooden buildings (Saita, 1935). Fourteen wards in Tokyo at that time are divided into two groups; namely the wards in down-

town consisting of soft soils and those in up-town of firm soils. It is quite interesting to note a completely opposite trend: godowns were more damaged than wooden houses in firm soils and less on soft soils.

Recently, however, this concept has been upset by the experience during the Matsushiro earthquake of 1967 (Kishida et al., 1967). The distribution of damage to godowns in Matsushiro has previously been shown in Fig. 2.6, and contour lines showing the thickness of soft alluvial deposits are represented in Fig. 3.20. A comparison of Fig. 2.6 and Fig. 3.20 yields a conclusion that godowns were more damaged on soft soils than on firm soils, similar to the case of wooden buildings. This tendency is contrary to the conclusion from Fig. 3.19.

At the time of the Kanto earthquake of 1923, there were 774 brick buildings in Tokyo City, the highest of which was three-storied (Kanai, 1949). With respect to three different soil conditions, the relationship between the damage ratio of those brick buildings and their number of stories is represented in Fig. 3.21 (Kanai and Yoshizawa, 1951), which indicates that the height of building has little effect upon damage to brick buildings, whereas the effect of soil conditions is overwhelming. Evidently, more buildings were damaged on firm soils and less on soft soils.

b. Reinforced Concrete Buildings. As to the effects of soil conditions on earthquake damage to reinforced concrete buildings, the only example which may be dealt with statistically was the damage by the Kanto earthquake

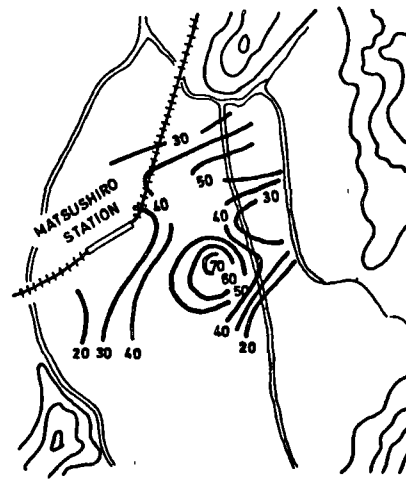


Fig. 3.20. Depth of Soft Alluvial Deposits in Matsushiro Town (Kishida et al, 1967)

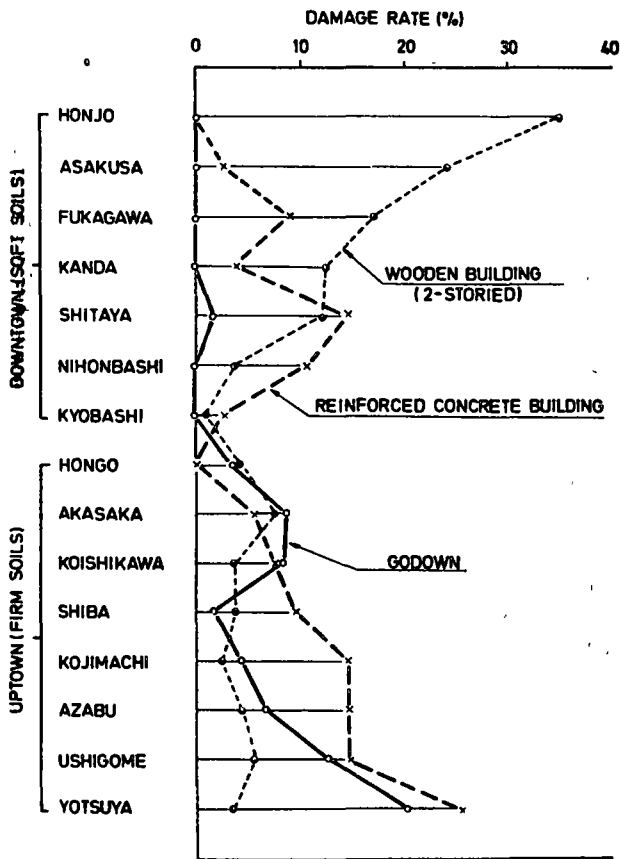


Fig. 3.19. Damage to Two-Storeyed Wooden Buildings, Godowns and Reinforced Concrete Buildings, Kanto Earthquake 1923 (Saita, 1935; Ohsaki & Kuniyasu, 1968)

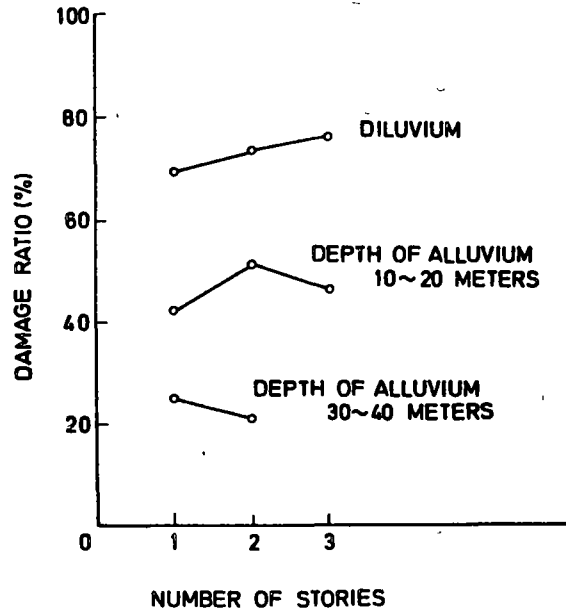


Fig. 3.21. Damage Ratio of Brick Buildings in Tokyo, Kanto Earthquake 1923 (Kanai & Yoshizawa, 1951)

of 1923. Until recently, however, two contradictory results of analysis have been presented based on the same records: (1) damage decreased with increasing thickness of alluvial deposits, similar to the case of brick buildings but at a lesser rate (Kanai, 1949); and (2) damage increased with increasing ground softness (Kitazawa, 1950).

Quite recently the data of the Kanto earthquake and the soil conditions in Tokyo City have

been restudied in greater detail, and the finding (1) has been proved to be more correct (Ohsaki and Kuniyasu, 1968). Namely, with respect to a total of 691 reinforced concrete buildings in Tokyo at that time, damage rates and modified failure rates in uptown and downtown were as shown in Table 3.3, indicating no

TABLE 3.3.--DAMAGE TO REINFORCED CONCRETE BUILDINGS IN TOKYO, KANTO EARTHQUAKE 1923 (OHSAKI AND KUNIYASU, 1968)

	Uptown	Downtown
Damage Rate (%)	32.8	32.4
Modified Failure Rates (%)	6.8	3.0

significant difference in damage rates. The table indicates an opposite trend in failure rates when compared to damage to wooden buildings shown in Table 3.2. The relationship between the damage rate and the depth of alluvial deposits is represented in Fig. 3.22, wherein coefficient of correlation is negative although the damage rate and the depth are not well correlated. Damage rate in each ward of the city is plotted in Fig. 3.19, which has been cited previously; apparently, the trend is opposite to the case of wooden buildings and rather similar to the case of godowns. Fig. 3.23 shows a relationship between damage rates of reinforced concrete buildings and their number of stories. The damage rate increases, in general, with the number of stories. However, it is of interest to note that damage to one-storied buildings is larger than those of two- and three-storied ones and no difference may be recognized between uptown and downtown areas.

Let us now consider earthquake damage to high-rise buildings. In 1957, Mexico City was hit by an earthquake with maximum ground acceleration of 50 to 100 gals. Mexico City is underlain by alluvial lacustrine deposits more than 1000 m thick consisting of alternating sand and clay layers. The predominant period of the ground is estimated to be approximately 2.5 sec. In Table 3.4, the number of undamaged and damaged high-rise buildings are listed, classified according to the number of stories (Thornley and Albin, 1957).

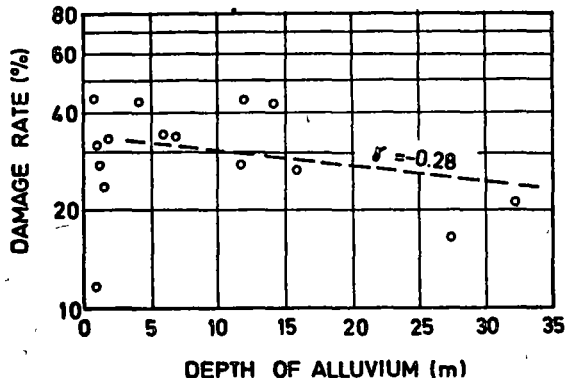


Fig. 3.22. Depth of Alluvial Deposits and Damage to Reinforced Concrete Buildings in Tokyo, Kanto Earthquake 1923 (Ohsaki & Kuniyasu, 1968)

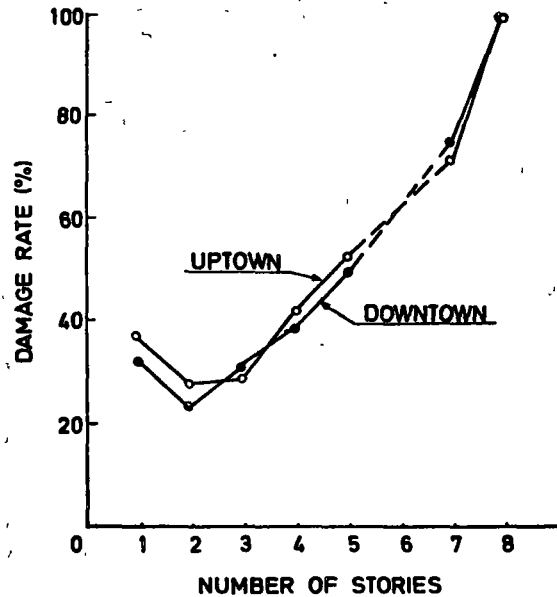


Fig. 3.23. Number of Stories and Damage to Reinforced Concrete Buildings in Tokyo, Kanto Earthquake 1923 (Ohsaki & Kuniyasu, 1968)

TABLE 3.4.--DAMAGE TO HIGH-RISE BUILDINGS IN MEXICO CITY, 1957 (THORNLEY AND ALBIN, 1957)

Number of Stories	Number of Buildings		
	Undamaged	Damaged	Total
9	3	2	5
10	2	2	4
11	0	3	3
12	1	3	4
13	0	5	5
14	0	2	2
15	0	1	1
16	0	2	2
18	1	1	2
23	1	0	1
43	1	0	1

It may be seen from Table 3.4 that, in general, the damage rate seems comparatively high for the buildings of 13 to 16 stories.

Contrary to soil conditions in Mexico City, the ground of Skopje City, Yugoslavia, is exceedingly firm. It consists of a sandy gravel layer less than 10 m thick, deposited over bedrock. During an earthquake in 1963 of intensity more than 200 gals, most brick buildings of less than four stories were seriously damaged. Nevertheless, 13 to 14-storied apart-

ment buildings and office buildings of reinforced concrete construction survived except for minor structural damage to some of the buildings.

#### IV. RELEVANT THEORIES AND OBSERVATIONS

##### 1. Simple Model of Structure

To simulate most simply the dynamic behavior of a structure, a mechanical system shown in Fig. 4.1 is frequently employed which consists of a single concentrated mass,  $m$ , a linear spring of spring constant,  $k$ , and a viscous damping element having a damping force proportional to the relative velocity through the constant  $c$ . It is also assumed that motions are possible only in the horizontal direction, so that the system has but one degree of freedom.

The displacement of the mass,  $m$ , relative to the ground and the absolute displacement of the ground will be denoted by  $x$  and  $y$ , respectively. Then the equation of motion of this system is

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \quad (4.1)$$

Or, if the damping in the system is described in terms of fraction of critical damping,  $h$ , and if the undamped natural period,  $T$ , is introduced, it may be written as

$$\ddot{x} + 2h\left(\frac{2\pi}{T}\right)\dot{x} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = -\ddot{y} \quad (4.2)$$

where

$$h = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

##### 2. Forced Vibration by Simple Harmonic Ground Motion

To obtain a simple solution to Eq. 4.2, suppose the system is excited by simple harmonic ground acceleration such as

$$\ddot{y} = a \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{T_G} t\right) \quad (4.3)$$

wherein  $T_G$  may be interpreted as the predominant period of the ground. Then Eq. 4.2 may be written in the form

$$\ddot{x} + 2h\left(\frac{2\pi}{T}\right)\dot{x} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = -a \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{T_G} t\right) \quad (4.4)$$

and, mathematically, a particular solution to this ordinary differential equation represents the forced vibration of the system.

The particular solution may be obtained by assuming that  $x$  will take a form

$$x = A \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{T_G} t\right) \quad (4.5)$$

and by substituting expression 4.5 in Eq. 4.4

and finally, by solving the equation thus developed for the unknown constant  $A$ . Then,

$$A = -\frac{a}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{T_G}\right)^2 + 2h\left(\frac{T}{T_G}\right)i}$$

or, considering a relation in complex expression

$$\frac{1}{p + iq} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} e^{-i\phi}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{q}{p}$$

$$A = -\frac{a}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T}{T_G}\right)^2\right]^2 + 4h^2\left(\frac{T}{T_G}\right)^2}} \cdot e^{-i\phi}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2h\left(\frac{T}{T_G}\right)}{1 - \left(\frac{T}{T_G}\right)^2}$$

Hence, the solution is

$$x = -\frac{a}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T}{T_G}\right)^2\right]^2 + 4h^2\left(\frac{T}{T_G}\right)^2}} \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{T_G} t - \phi\right) \quad (4.6)$$

From Eq. 4.2, the absolute acceleration acting upon the mass,  $m$ , may be written as

$$\ddot{x} + \ddot{y} = -2h\left(\frac{2\pi}{T}\right)\dot{x} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$$

and, if Eq. 4.6 is substituted in this equation, the following expression may be obtained:

$$\left| \frac{\ddot{x} + \ddot{y}}{\ddot{y}} \right| = \sqrt{\frac{1 + 4h^2\left(\frac{T}{T_G}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{T}{T_G}\right)^2\right]^2 + 4h^2\left(\frac{T}{T_G}\right)^2}} \quad (4.7)$$

which may be interpreted to represent amplification of acceleration. In Fig. 4.2, the amplification factor is represented with the damping factor,  $h$ , as a parameter. It is seen in Fig. 4.2 that the acceleration of the mass increases when the natural period of the structure,  $T$ , approaches the predominant period of the ground,  $T_G$ , and reaches its maximum at

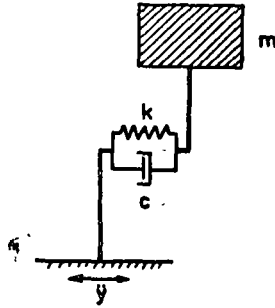


Fig. 4.1. Simple Model of Structure

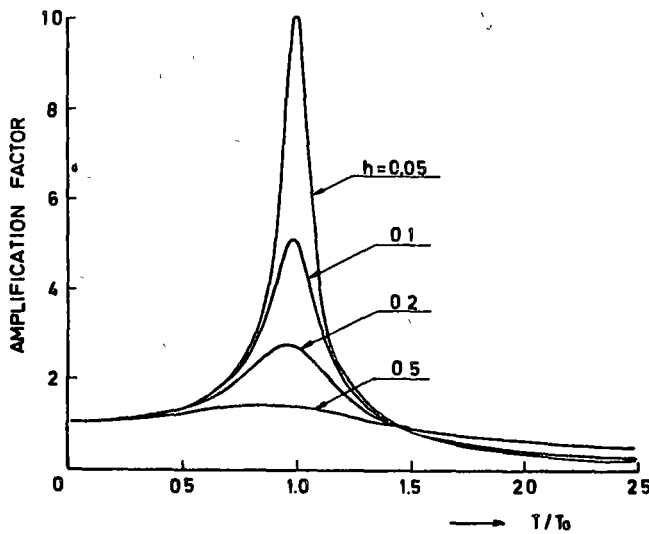


Fig. 4.2. Amplification of Ground Acceleration

$T = T_0$ . As is well known, this phenomenon is referred to as resonance.

### 3. Vibration due to Actual Earthquake - Concept of Response Spectrum

More generally, let us now discuss the complete solution to Eq. 4.2 when the ground acceleration,  $\ddot{y}$ , in the right-hand side is given as  $\ddot{y}(t)$ , i.e., as an arbitrary function of time,  $t$ . The homogeneous equation associated with Eq. 4.2 is

$$\ddot{x} + 2h\left(\frac{2\pi}{T}\right) \dot{x} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = 0 \quad (4.8)$$

and two roots of the characteristic equation associated with Eq. 4.8, i.e.,

$$\lambda^2 + 2h\left(\frac{2\pi}{T}\right) \lambda + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0$$

are

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{2\pi}{T} \left( -h \pm i \sqrt{1 - h^2} \right)$$

Therefore, the solution to the original, non-homogeneous Eq. 4.2 may be written in a form

$$x = C_1(t) e^{\lambda_1 t} + C_2(t) e^{\lambda_2 t}$$

In order that  $C_1(t)$  and  $C_2(t)$  satisfy Eq. 4.2, they must be

$$C_1(t) = - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau$$

Hence, the relative displacement, the relative velocity, and the absolute acceleration of the mass,  $m$ , may be expressed, respectively, as follows:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{T}{2\pi} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \cdot \exp \left[ -\frac{2\pi h}{T}(t-\tau) \right] \sin \frac{2\pi}{T}(t-\tau) d\tau \\ \dot{x} &= \int_0^t \ddot{y}(\tau) \cdot \exp \left[ -\frac{2\pi h}{T}(t-\tau) \right] \sin \frac{2\pi}{T}(t-\tau) d\tau \\ \ddot{x} + \ddot{y} &= \frac{2\pi}{T} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \cdot \exp \left[ -\frac{2\pi h}{T}(t-\tau) \right] \sin \frac{2\pi}{T}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

where  $\tau$  is a time parameter which disappears in the course of integration and

$$\sqrt{1 - h^2} = 1$$

is assumed as  $h$  is usually a small value in comparison with unity.

In Eqs. 4.9,  $x$ ,  $\dot{x}$  and  $\ddot{x} + \ddot{y}$  are functions of  $t$ ,  $h$  and  $T$ , and if natural period  $T$  and damping factor  $h$  are given, their values will change with time,  $t$ . However, for engineering purposes, their maximum values are usually of most concern. Noting that the same integral expression occurs in all of the above relationships, maximum values may be written as

$$\left. \begin{aligned} x_{\max} &= \frac{T}{2\pi} S_V \\ \dot{x}_{\max} &= S_V \\ (\ddot{x} + \ddot{y})_{\max} &= \frac{2\pi}{T} S_V \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

in which

$$S_V = \left[ \int_0^t \ddot{y}(\tau) \exp \left\{ -\frac{2\pi h}{T}(t-\tau) \right\} \sin \frac{2\pi}{T}(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (4.11)$$

The quantity  $S_V$  is a function of  $T$  and  $h$ , and possesses physical dimensions of velocity.

In discussing earthquake damage to a structure, forces acting upon the structure or stresses in the structure are frequently of our direct concern. If the maximum value of forces acting on the structure is denoted by  $Q_{\max}$ , it may be written as

$$Q_{\max} = k \cdot x_{\max} = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 x_{\max} \quad (4.12)$$

On the other hand, the maximum force to act upon a perfectly rigid body of the same mass  $m$  is  $m \cdot \ddot{y}_{\max}$ . Now, if a non-dimensional symbol  $\bar{q}$  is used to represent the ratio  $Q_{\max}/m\ddot{y}_{\max}$ , it becomes

$$\bar{q}(T, h) = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{x_{\max}}{\ddot{y}_{\max}} \quad (4.13)$$

The quantity  $\bar{q}(T, h)$  is a function of  $T$  and  $h$ , and it is obvious that  $\bar{q}(0, h) = 1$ . Furthermore, another expression for  $\bar{q}$ ,

$$\bar{q} = \frac{(\ddot{x} + \ddot{y})_{\max}}{\ddot{y}_{\max}} \quad (4.14)$$

will be derived from Eqs. 4.10.

If the quantity  $\bar{q}$  is plotted against natural

period  $T$  for several values of damping factor  $h$ , a family of curves as shown in Fig. 4.3 will be produced. As will be understood from Eq. 4.14,  $\bar{q}$  is essentially an expression of absolute acceleration acting upon the system.

Therefore, the set of curves in Fig. 4.3 is usually referred to as normalized maximum acceleration response spectrum of the system, or for brevity, normalized acceleration spectrum. In the normalizing process, the maximum absolute acceleration of the system is divided by the maximum acceleration of the ground, and it is implied that all spectrum curves start from the point of unity on the ordinate axis as shown in Fig. 4.3.

It may be evident that there are many other possible definitions for the response spectrum, which could be expressed in terms of velocities or displacements. Whatever definition may be employed, the use of a response spectrum has enormous advantages in that it may enable one to draw some general conclusions about characteristics and effects on structures of a particular earthquake from an examination of the shape of its spectrum curves, which would be almost impossible from an inspection of the original accelerogram alone.

There are several ways to determine the response spectrum when the input to the system is given in the form of accelerogram. Essentially, they involve an evaluation of the integral of Eqs. 4.9 for a series of values of the parameters  $T$  and  $h$ . In recent years, the determination has mostly been carried out by means of digital computer.

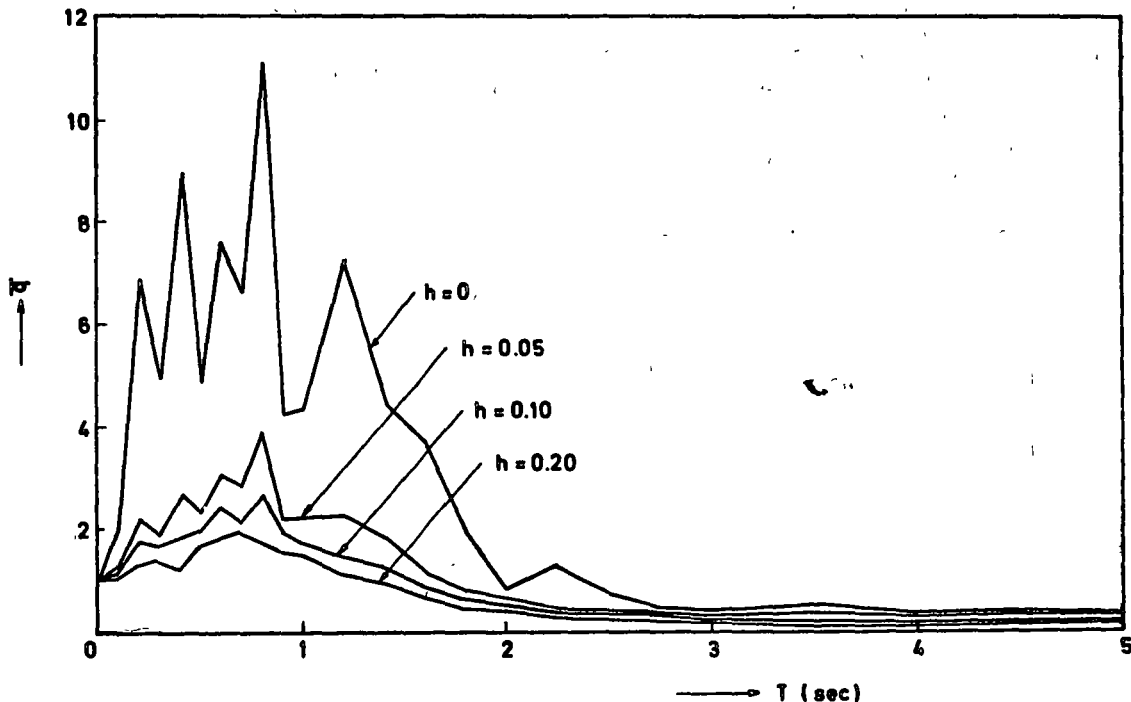


Fig. 4.3. Normalized Acceleration Spectrum

4. Response Spectra for Different Soil Conditions

In the preceding paragraphs, the concept of response spectrum has been outlined. In this section, how the shape of response spectrum differs, that is to say, how characteristics of earthquake waves differ for different soil conditions, will be discussed (Hisada et al., 1965).

In Japan, more than 300 strong motion accelerographs have been installed throughout the country up to the present time, and a considerable number of accelerograms have already been obtained, including those for two destructive earthquakes, i.e. the Niigata earthquake of 1964 and the Tokachi-Oki earthquake of 1968.

From these accelerograms, those recorded at the basements of buildings having spread foundations on rock, dense sand and other hard soils have been selected, and their normalized acceleration spectra are shown en bloc in Fig. 4.4. It may be seen in Fig. 4.4 that the spectra have their peaks at the period around 0.2 to 0.3 sec and  $\bar{q}$ 's decrease sharply with an increase in the period. A "critical" period,  $T_{cr}$ , beyond which  $\bar{q}$  becomes less than unity, is less than 1 sec in all of these spectra.

On the other hand, response spectra for accelerograms which were recorded on raft foundations underlain by multi-layered soft soils, are as shown in Fig. 4.5. In general, a spectrum under this category possesses numbers of peaks in a wide range of periods from 0.3 to 1.3 sec, and critical periods are longer than 1 sec without exception, some of them being as long as 2.5 sec. This fact implies that the range of periods at which a large earthquake force acts upon the structure is very wide.

A similar example experienced outside Japan is

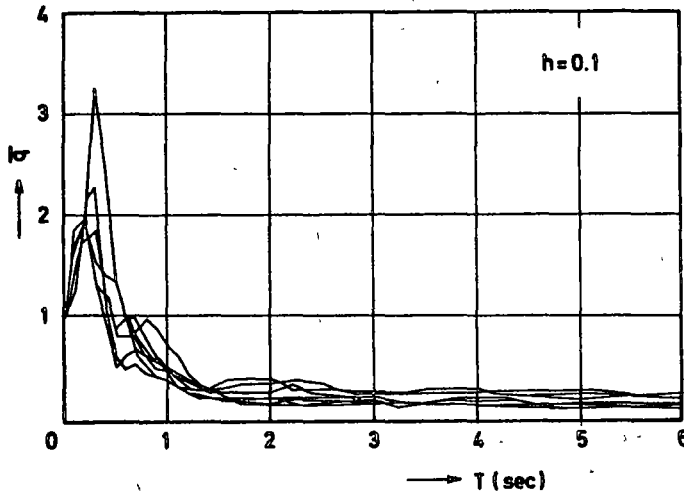


Fig. 4.4. Normalized Acceleration Spectra for Rock and Hard Soils

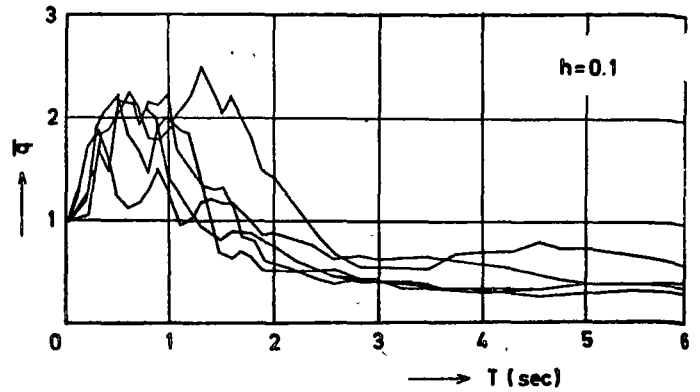


Fig. 4.5. Normalized Acceleration Spectra for Soft Multi-Layered Soils

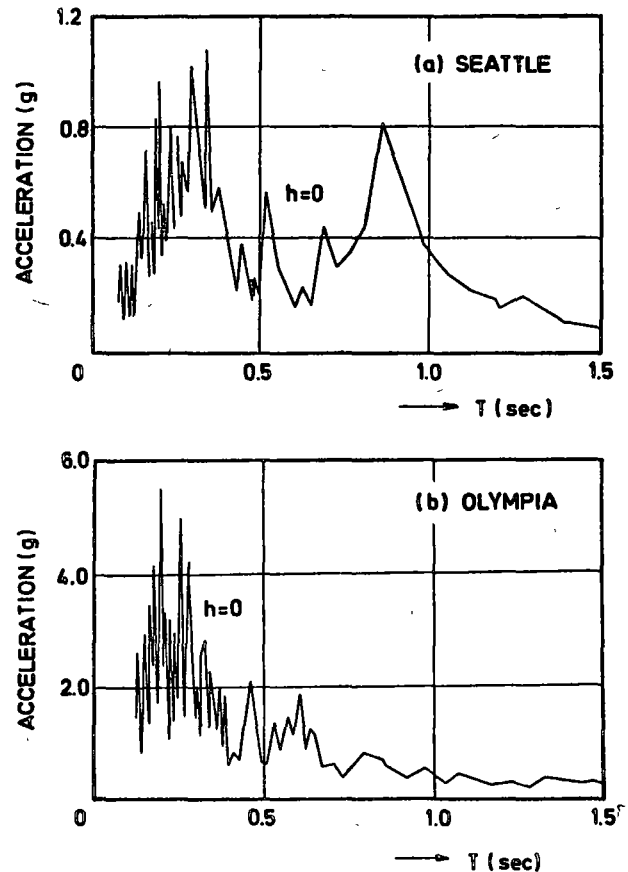


Fig. 4.6. Acceleration Response Spectra for Same Earthquake and Different Soil Conditions (Alford et al., 1951; Duke, 1958)

shown in Fig. 4.6 (Alford et al., 1951; Duke, 1958). Fig. 4.6(a) and (b) are the response spectra for the same earthquake in 1949 but observed at Seattle and Olympia, respectively. In spite of almost equal epicentral distances, the shapes of the spectra differ distinctly,



and the magnitude of earthquake force at Olympia on firm soils is far greater than that at Seattle, which is located on soft reclaimed ground.

#### 5. Response Spectra for Different Foundations

Some strong motion accelerographs have been installed in buildings supported on piles driven into soft, and deep alluvial deposits. The piles are of reinforced concrete and their diameters are in the range from 35 cm to 50 cm.

Therefore, the foundations may not be considered so rigid under the actions of horizontal seismic forces and earth pressures. Response spectra for such accelerograms are shown in Fig. 4.7 (Hisada et al., 1965). Most of the peaks appear in the range of periods less than 1 sec and the critical periods are within 2 sec, but, as a rule, the characteristics can not be considered to differ so distinctly from the cases of shallow foundation in Fig. 4.5.

On the other hand, response spectra for pier foundations are also available, which are shown in Fig. 4.8. The piers are of higher horizontal rigidity than slender piles, having large diameters of 1.4 m to 3.2 m. They are cast through soft alluvial deposits down to hardpan. But, as shown in Fig. 4.8, the shape of their response spectra appears to resemble that of firm soils shown in Fig. 4.4.

#### 6. Propagation of Earthquake Waves

Assume a simple case in which, as shown in Fig. 4.9(a), shear waves travel one-dimensionally along the downward axis  $z$  in a homogeneous mass of soil. If an infinitesimal element of unit cross-sectional area is assumed along the  $z$ -axis as shown in Fig. 4.9(b), then the equation of motion for the element is

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (4.15)$$

where:  $\rho$  : density  
 $u$  : transverse displacement  
 $\tau$  : shearing stress

Since shearing stress  $\tau$  is related to displacement  $u$  by

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial z}$$

Eq. 4.15 may be written as

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.16)$$

where  $G$  is the modulus of rigidity of the mass of soil. As is well known, the solution to

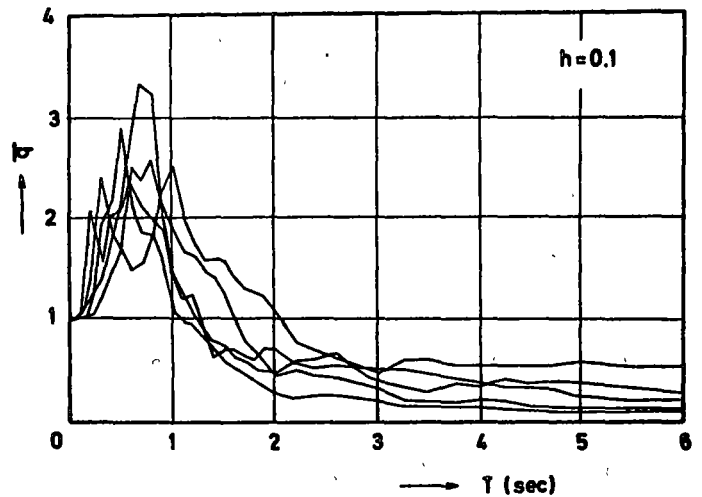


Fig. 4.7. Normalized Acceleration Spectra for Pile Foundations in Soft Soils

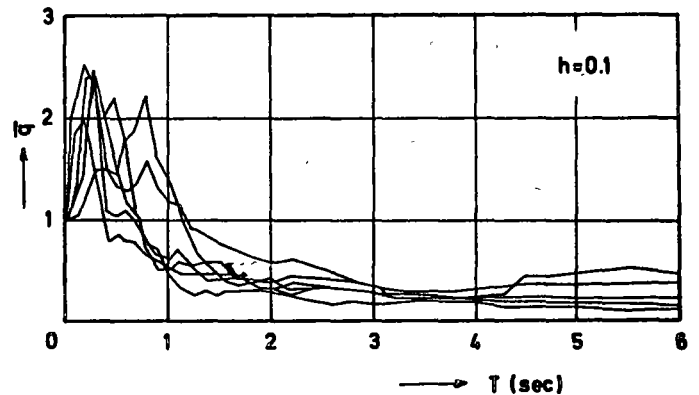


Fig. 4.8. Normalized Acceleration Spectra for Rigid Pier Foundations in Soft Soils

partial differential Eq. 4.16 is

$$u = f_1\left(t - \frac{z}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{V}\right) \quad (4.17)$$

$$V = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

where  $f_1$  and  $f_2$  are arbitrary functions and  $V$  is the velocity of propagation of shear waves.

In Eq. 4.17,  $f_1(t - z/V)$  and  $f_2(t + z/V)$  are referred to as progressive wave and retrogressive wave, respectively. If the ground surface is free from shearing stresses, then

$$\begin{aligned} G \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} &= G \left. \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \right|_{z=0} \\ &= \frac{G}{V} \left[ - \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt} \right] = 0 \end{aligned}$$

therefore,

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{df_2}{dt} \quad \text{or} \quad f_1 = f_2$$

is obtained. Hence one may write

$$u = f\left(t - \frac{z}{V}\right) + f\left(t + \frac{z}{V}\right)$$

Furthermore, considering that the displacement at the ground surface,  $u_s$ , is

$$u_s = |u|_{z=0} = 2f(t)$$

the displacement at any point within the soil mass may be expressed by means of  $u_s(t)$ , i.e., wave record observed at the ground surface in a form

$$u(t, z) = \frac{1}{2} \left[ u_s\left(t - \frac{z}{V}\right) + u_s\left(t + \frac{z}{V}\right) \right] \quad (4.18)$$

One of the important features of shear waves traveling through a mass of soil is that reflection and transmission take place at the boundary plane of two soil layers with different properties. Assume that, as shown in Fig. 4.10, two soil layers are bounded by a plane at  $z = 0$ , and subscripts 1 and 2 denote the lower and upper layers, respectively. It will also be assumed that the shear wave in the upper layer is expressed by

$$u_2(t, z) = f_1\left(t - \frac{z}{V_2}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{V_2}\right), \quad V_2 = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}$$

and in the lower layer by

$$u_1(t, z) = g_1\left(t - \frac{z}{V_1}\right), \quad V_1 = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}$$

where  $f_2\left(t + \frac{z}{V_2}\right)$  is the reflected wave in the upper layer and  $g_1\left(t - \frac{z}{V_1}\right)$  is the transmitted wave in the lower layer.

At the boundary  $z = 0$ , the displacements and shearing stresses in both layers must be equal, that is,

$$u_2(t, 0) = u_1(t, 0) \quad (4.19)$$

and

$$G_2 \frac{\partial}{\partial z} u_2(t, 0) = G_1 \frac{\partial}{\partial z} u_1(t, 0) \quad (4.20)$$

From the condition 4.19,

$$f_1(t) + f_2(t) = g_1(t) \quad (4.21)$$

and, from the condition 4.20,

$$\frac{G_2}{V_2} \left[ -\frac{d}{dt} f_1(t) + \frac{d}{dt} f_2(t) \right] = -\frac{G_1}{V_1} \cdot \frac{d}{dt} g_1(t)$$

or, by integration,

$$\alpha \left[ -f_1(t) + f_2(t) \right] = -g_1(t) \quad (4.22)$$

where

$$\alpha = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}$$

Therefore, one may write from Eqs. 4.21 and 4.22

$$g_1(t) = \frac{2\alpha}{1+\alpha} f_1(t), \quad f_2(t) = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} f_1(t)$$

or

$$\left. \begin{aligned} \text{transmitted wave} \quad g_1\left(t - \frac{z}{V_1}\right) &= \\ &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} f_1\left(t - \frac{z}{V_2}\right) \\ \text{reflected wave} \quad f_2\left(t + \frac{z}{V_2}\right) &= \\ &= -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} f_1\left(t - \frac{z}{V_2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

It should be noted here that more transmission takes place from the upper layer to the lower if  $\alpha$  becomes larger, in other words, if the lower layer is of softer material.

Let us next consider a case in which an upper layer of depth,  $H$ , is underlain by a lower layer of different characteristics as shown in Fig. 4.11; in the following, again, subscripts 1 and 2 denote the lower and upper layers, respectively. According to Eq. 4.18, the displacement in the upper layer may be expressed by

$$u_2(t, z) = \frac{1}{2} \left[ u_s\left(t - \frac{z}{V_2}\right) + u_s\left(t + \frac{z}{V_2}\right) \right], \quad 0 \leq z \leq H$$

and, in the lower layer, the displacement is assumed to have a functional form

$$u_1(t, z) = g_1\left(t - \frac{z-H}{V_1}\right) + g_2\left(t + \frac{z-H}{V_1}\right), \quad H \leq z$$

At the boundary between the two layers,  $z = H$ , both displacements and shearing stresses must be continuous, namely,

$$u_2(t, H) = u_1(t, H) \quad (4.24)$$

and

$$G_2 \frac{\partial}{\partial z} u_2(t, H) = G_1 \frac{\partial}{\partial z} u_1(t, H) \quad (4.25)$$

From the condition 4.24,

$$\frac{1}{2} \left[ u_2\left(t - \frac{H}{V_2}\right) + u_2\left(t + \frac{H}{V_2}\right) \right] = g_1(t) + g_2(t)$$

and, from the condition 4.25,

$$\frac{1}{2} \rho_2 V_2 \frac{d}{dt} \left[ -u_s\left(t - \frac{H}{V_2}\right) + u_s\left(t + \frac{H}{V_2}\right) \right] =$$

$$\rho_1 V_1 \frac{d}{dt} \left[ -g_1(t) + g_2(t) \right]$$

therefore,

$$g_2(t) = \frac{1}{4} \left[ (1-\alpha)u_s \left( t - \frac{H}{V_2} \right) + (1+\alpha)u_s \left( t + \frac{H}{V_2} \right) \right] \quad (4.26)$$

It should be noted that this retrogressive wave  $g_2(t)$  in Eq. 4.26 represents the incident wave toward the upper layer from the lower one.

Now it will be assumed that surface wave and incident wave are represented by

$$u_s(t) = A_s \exp\left(i \frac{2\pi t}{T}\right)$$

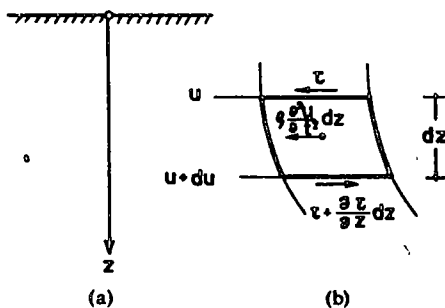


Fig. 4.9. Equilibrium of Infinitesimal Element for Shear Wave

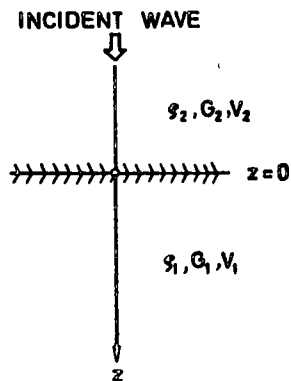


Fig. 4.10. Boundary of Two Soil Layers

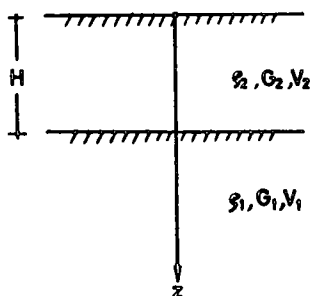


Fig. 4.11. Two-Layered System

and

$$g_2(t) = a \cdot \exp\left(i \frac{2\pi t}{T}\right)$$

respectively. Substitution of these expressions in Eq. 4.26 yields

$$a = \frac{A_s}{4} \left[ (1-\alpha) \exp\left(-i \frac{2\pi H}{TV_2}\right) + (1+\alpha) \exp\left(i \frac{2\pi H}{TV_2}\right) \right]$$

Considering the relationships of complex variables

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta, \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \sin \theta$$

the following expressions are obtained:

$$a = \frac{A_s}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi H}{TV_2}\right) + i\alpha \sin\left(\frac{2\pi H}{TV_2}\right) \right]$$

or

$$\left| \frac{A_s}{a} \right| = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{2\pi H}{TV_2}\right) + \alpha^2 \sin^2\left(\frac{2\pi H}{TV_2}\right)}} \quad (4.27)$$

It may be noted that Eq. 4.27 represents a ratio of the amplitude of surface wave to that of incident wave. The ratio may be referred to as surface amplification or, more precisely, amplification of vibrational amplitude by the presence of the surface layer in the two-layered system. In Fig. 4.12, the amplification is plotted against the values of  $H/TV_2$  for several values of parameter  $\alpha = \rho_2 V_2 / \rho_1 V_1$ . It is apparent in Fig. 4.12 that the amplitude is most amplified at the free ground surface when the period of ground vibration becomes equal to  $4H/V_2$ . This fact may be interpreted as a resonance of the upper layer, whose predominant period is  $4H/V_2$ . It may also be noted that the predominant period elongates in proportion to the thickness of the upper layer and that the surface amplification becomes more pronounced when the value of the parameter  $\alpha$  is smaller; in other words, if the upper layer is of softer material.

#### V. FACTORS AFFECTING EARTHQUAKE DAMAGE

In Chapter III, empirical facts concerning relationships between earthquake damage and local soil conditions have been outlined as quantitatively as possible, and certain trends in those relationships have been pointed out case by case; some of the trends have been consistent but others contradictory. How to interpret such empirical facts and how to verify them theoretically have long been discussed from various viewpoints; some discussions have appeared to be convincing, whereas others are still not quite persuasive. In the writer's opinion, what is most useful at the present situation is to break the effects of soil conditions into a number of elemental factors, aiming at the establishment of a

final, comprehensive solution.

In this sense, several factors which seem to be of major importance in connection with earthquake damage will be pointed out and illustrated in the following.

1. Amplification of Earthquake Motion by Soil Layers

As has been shown in Fig. 4.12, incident waves to the surface layer are extremely amplified at the ground surface when the period of vibration of the incident wave is equal to  $4H/V_2$ , where H is the depth of surface layer and  $V_2$  is the velocity of shear wave through the layer. The term  $4H/V_2$  represents the natural period of the surface layer itself and is usually referred to as predominant period of the ground. Thus, the amplification may be interpreted as a resonance of the surface layer excited by incoming wave of a particular period.

It may also be seen in Fig. 4.12 that the amplitude at the resonance point increases with a decrease in the parameter,  $\alpha = \rho_2 V_2 / \rho_1 V_1$ , which has a small value when the surface layer is of soft material.

These matters verify the popular concept that, where soft soils are deeply deposited, earthquake damage was always heavy as long as flexible, wooden buildings were concerned. Fig. 4.12 has been obtained by assuming simple harmonic incident wave, whereas actual earthquake motion consists of numerous waves of different periods. Nevertheless, the above discussions may still be justified since constituent waves having a resonating period will be selected by the surface layer during the continuous vibration.

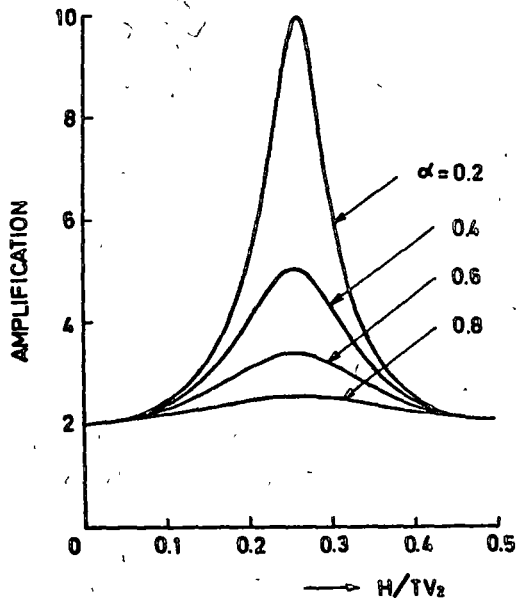


Fig. 4.12. Surface Amplification of Incident Wave

In Figs. 5.1 through 5.4, some results of measurement are shown to illustrate the amplification of earthquake motion. In Fig. 5.1, ratios of maximum accelerations at the ground surface and at the depth of 9 m or 20 m are plotted for eight earthquakes observed at Marunouchi, Tokyo, where silty and clayey surface layer 20 m thick is underlain by a hard, gravelly stratum (Saita and Suzuki, 1934). Fig. 5.2(b) represents the ratio of amplitudes at the ground surface to those at the depth of 21.1 m for each period of constituent waves (Kanai, 1961). The soil condition at the location of measurement is as shown in Fig. 5.2(a). It has been proved that the large amplification at the period of approximately 0.3 sec resulted from the vibration of the uppermost layer of moist sand down to the ground water level at the depth of 4.25 m. Fig. 5.3 shows amplitude spectra observed on the ground surface and at the bottom of a 36 m x 42 m excavation when the depth reached 6 m and 13 m, respectively (Toriumi, 1968).

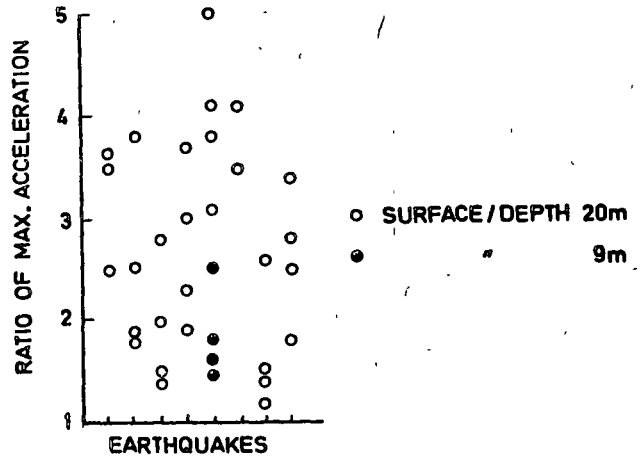


Fig. 5.1. Ratio of Maximum Accelerations Observed on and within Surface Layer (Saita & Suzuki, 1934)

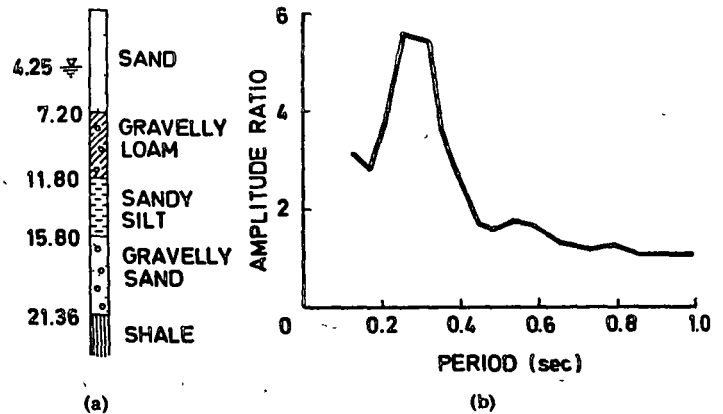


Fig. 5.2. Amplification of Amplitude by Surface Layers (Kanai, 1961)

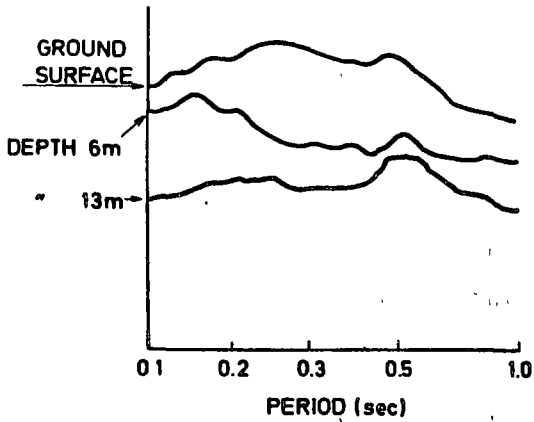


Fig. 5.3. Amplitude Spectra Observed on Ground Surface and at Bottom of Excavation (Toriumi, 1968)

The Higashi-Matsuyama earthquake of 1968 provided an opportunity to obtain a number of simultaneous records of strong motion accelerographs in Tokyo City which had been installed on the ground surface, on the top floor or the basement floor of various buildings. In Fig. 5.4, the values of maximum acceleration at various locations are indicated for the central part of Tokyo. In spite of considerable scattering of measured values, a general trend may be recognized in which the incident acceleration of 21 to 26 gals at Tokyo Gravel Layer is amplified up to 2 to 5 times at the level of shallow basement and at the ground surface.

In the aforementioned discussions relating to Fig. 4.12, it may be noted that the term,  $V_2$ , i.e., the velocity of shear wave through the surface layer plays an important role. While numerous field measurements of shear wave velocities are available, only a few examples are excerpted here; Fig. 5.5 shows the relationship between the velocities and N-values of the standard penetration test (Kanai, 1961), and Fig. 5.6 gives the results of measurements in the laboratory (Hardin and Richart, 1963).

## 2. Resonance of Soils and Structures

In the preceding paragraphs, resonance of surface soil layers has been discussed. Similarly, resonance between soils and structures

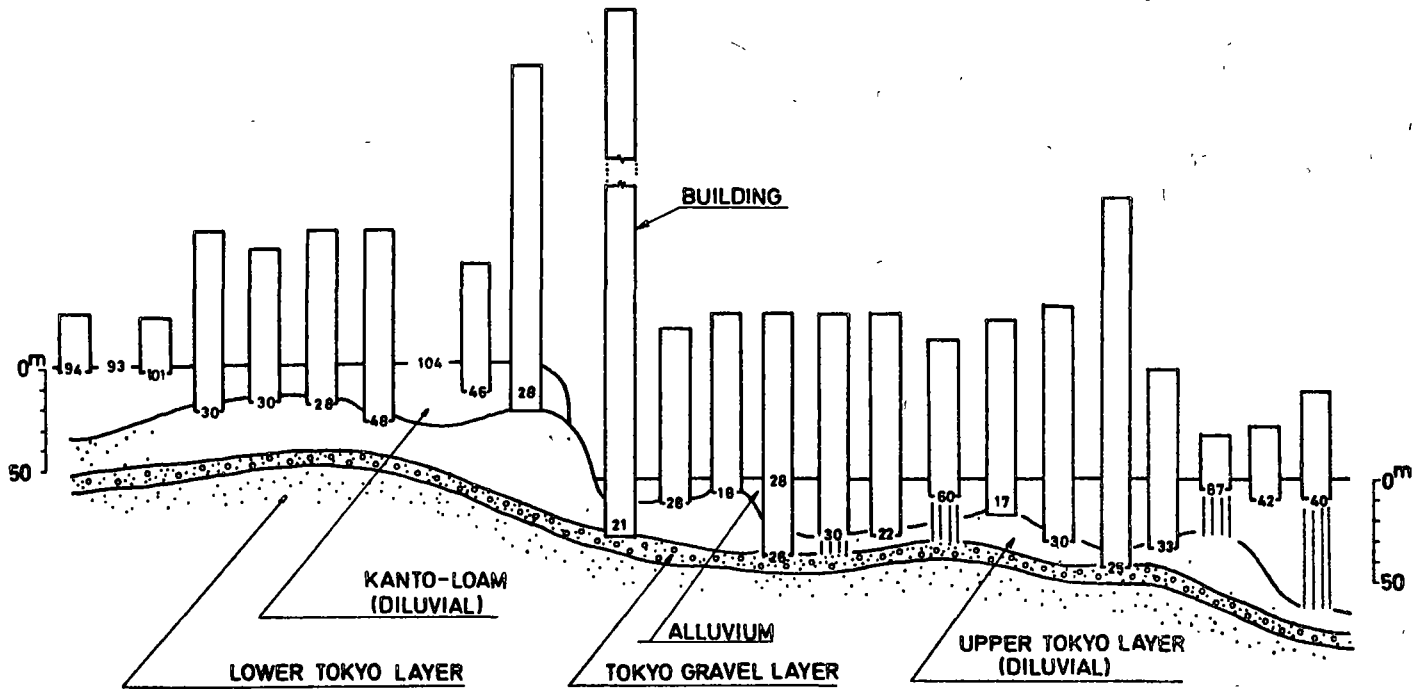


Fig. 5.4. Maximum Accelerations in gals Recorded at Various Locations, Higashi-Matsuyama Earthquake 1968

is possible and actually has taken place frequently, resulting in damage to buildings. As has been analytically shown in Fig. 4.2, acceleration acting upon a vibrating system increases excessively if the natural period of the system coincides with the period of exciting ground motion. In actual earthquakes, such a case probably occurs when the natural period of a building is coincident with or in the vicinity of predominant period of the ground.

The fact that, as has been shown in Fig. 3.19, damage rates of reinforced concrete buildings and godowns were higher in the uptown area on firm soils may be interpreted from this viewpoint; namely, those structures, which were of rather high rigidity and, consequently, of short natural periods, encountered more chances to develop resonance in the uptown area of shorter predominant periods than in the downtown area on soft soil deposits. It can also be demonstrated consistently that wooden buildings of low rigidity have suffered higher damage rates in downtown Tokyo and other places of deep alluvial deposits.

It should be recalled, however, that the curves in Fig. 4.2 have been derived by assuming steady state vibration, whereas actual earthquake motion is not steady but a succession of rather random waves. Therefore, the amplification ratio of about 5, for instance, for damping factor  $h = 0.1$  in Fig. 4.2 is not realistic, and one has seen in Fig. 4.4 or Fig. 4.7 that actual ratios are, at the largest, in the vicinity of 3 for the same damping factor. It is well known that, strictly speaking, the latter case should be referred to as quasi-resonance. Nevertheless, it is still the case in which a structure will be subjected to large, amplified acceleration if its natural period lies around the peak of the response spectrum.

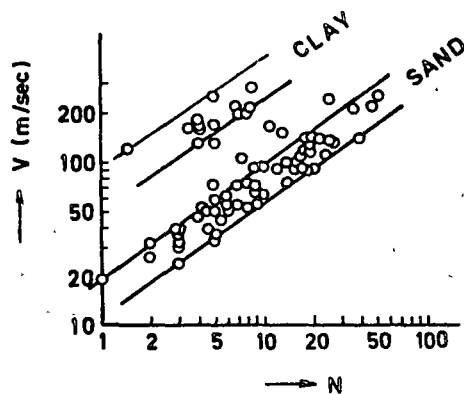


Fig. 5.5. Shear Wave Velocity and N-Value of Standard Penetration Test (Kanai, 1961)

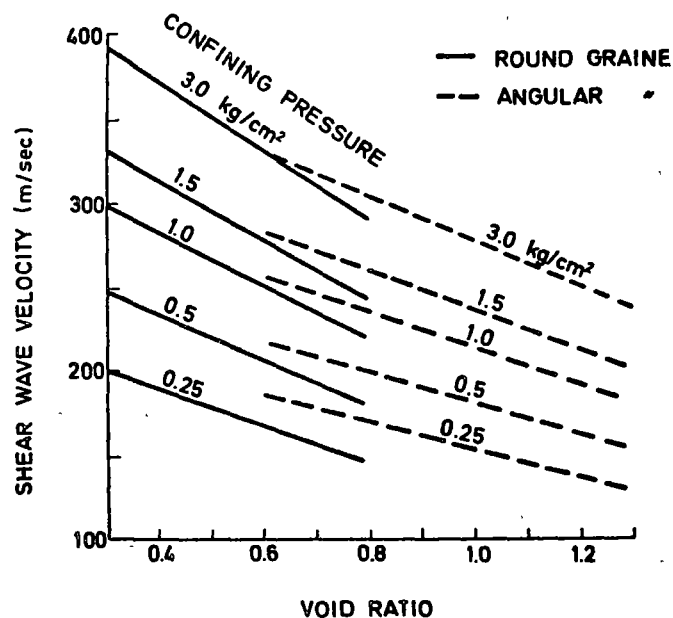


Fig. 5.6. Variation of Shear Wave Velocity with Void Ratio and Confining Pressure for Dry Round and Angular Grained Sands (Hardin & Richart, 1963)

### 3. Dissipation of Vibrational Energy

Earthquake waves, which have been transmitted into a structure, travel upwards through it and, upon arrival at the top of the structure, they reflect there and turn downwards. When they have reached the bottom of the structure, a part of the wave energy is transmitted into the ground, never going upwards again. This fact may be well understood if one regards the upper layer in Fig. 4.10 as a structure which rests on the lower layer. Thus, vibrational energy in the structure dissipates into the ground and, as a consequence, vibration of the structure decays gradually. Therefore, the effect of energy dissipation is identical with the increase of internal damping.

This fact may be explained in another way. Namely, if one assumes that horizontal movement  $u = u(t)$  be given to the ground at the base of a structure having the area  $A$ , then progressive shear wave

$$u = u\left(t - \frac{z}{V_s}\right)$$

is produced in the ground, where  $V_s$  is the propagation velocity of the shear wave and is equal to  $\sqrt{G/\rho}$ . The shearing force,  $Q$ , which is applied at the base of the structure is

$$Q = -GA \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Considering the relation

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{V_s} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Q may be written as

$$Q = \frac{GA}{V_s} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (5.1)$$

Eq. 5.1 represents that the resisting force Q is proportional to the velocity at the surface,  $(\partial u / \partial t)_{z=0}$ , implying an increase in the damping term  $\alpha$  in the previously discussed equation of motion (4.1).

It is of interest to note that more energy is dissipated from the structure with a decrease in the rigidity of the ground, resulting in an increase in damping effect. This fact may readily be understood if one recalls that, for larger value of  $\alpha$ , more of shear waves in the upper layer are transmitted into the lower layer as has previously been pointed out in Eq. 4.23. This trend can be expressed analytically (Tajimi, 1965) by an equation

$$\frac{h}{h_{k=\infty}} = \sqrt{\frac{k/k_G}{1 + (k/k_G)}} \quad (5.2)$$

where: h : apparent damping factor  
 $h_{k=\infty}$  : damping factor for completely rigid body  
 k : rigidity of structure  
 $k_G$  : rigidity of the ground.

The relation of Eq. 5.2 is represented by the curve in Fig. 5.7.

It is evident that the ratio of the rigidity of reinforced concrete building to that of the ground is larger in downtown Tokyo than in the uptown area on firm soils and therefore, a larger damping effect can be expected. It may not be impossible to interpret from this viewpoint the fact that a smaller failure rate was observed in downtown as has been compared in Table 3.3. Particularly, for earthquake damage to brick buildings in Fig. 3.21, the effect of energy dissipation seems far more significant than that of resonance.

#### 4. Progressive Failure

It has been learned previously from the analyses of strong motion accelerograms that normalized acceleration spectra for hard and soft soils could be represented schematically by curves ABCD and AEFG, respectively, in Fig. 5.8. Namely, the response spectrum for hard soils has a pointed peak at a considerably short period, whereas that for soft soils exhibits flat peak extending over a wide range of periods up to a fairly long period.

Let us now assume that a building, whose natural period lies around  $T_1$ , in Fig. 5.8, has been attacked by an earthquake. Input to the building would be large irrespective of firmness of soils as represented by either point B or point E, probably causing cracking or local failure in the building. It is well known that, if cracking or local failure has once occurred, natural period of the building changes from  $T_1$  to a longer period, say  $T_2$ .

Then, if the building rests on hard soils, the input becomes considerably small as represented by point C because of a steep, downward slope of the response curve, while for soft soils the input remains almost the same or, in certain

cases, even increases as shown by point F. Therefore, in the latter case, the cracking or the local failure continues to develop, obviously involving greater possibility for overall failure of the building than in the former case. Such a feature of earthquake damage is referred to as progressive failure.

It should also be considered here that, together with the elongation of natural period, damping increases when cracking or local failure has taken place in the structure; as a result, the response curve tends to be lowered with the growth of failure as indicated by dashed lines in Fig. 5.8. Therefore, the input to the structure will probably trace a certain curve such as FG' instead of the curve FG.

#### 5. Differential Settlement

For past large earthquakes, it has been pointed out frequently that forced displacements due to differential settlement formed an important cause for damage to wooden buildings (Kanai,

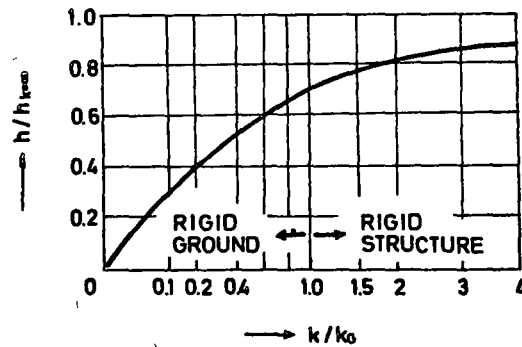


Fig. 5.7. Damping by Energy Dissipation and Rigidity Ratio of Structure and Ground

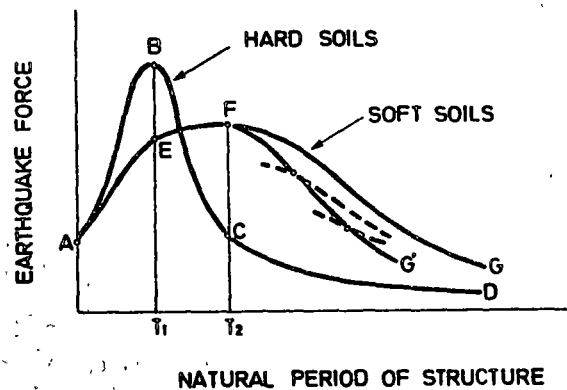


Fig. 5.8. Illustration of Progressive Failure

1947; Otsuki and Kanai, 1961). Another possibility which has been suggested for reinforced concrete buildings is that additional stresses induced in the superstructure by differential settlement during earthquake are combined with vibrational stresses, inflicting large damage to the structure (Takeyama and Ohsaki, 1955).

Differential settlement is more liable to occur on soft soils than on firm soils, but it can be pointed out by a simple computation in the following that the effects of differential settlement should not be overlooked even if bearing capacity of the ground is apparently sufficient.

Suppose a reinforced concrete building of an ordinary type as shown in Fig. 5.9(a) and underlying soil having allowable bearing capacity of 20 t/m<sup>2</sup>. It may not be out of order to assume that the coefficient of sub-grade reaction for this soil is equal to, say, 7.5 kg/cm<sup>3</sup>. Then, the base area, A, of each individual footing may be determined by

$$A = \frac{P}{20}$$

where, P denotes the load on each footing. Thus, contact pressure for every footing being uniform, there will be almost no trouble of differential settlement in static state.

Now suppose that this building has been acted upon at each floor level by horizontal loads equal to 20 per cent of dead loads plus live loads, which represent earthquake forces in a conventional design. Then, under these loadings, changes in contact pressure take place and differential settlement is caused, which in turn induce additional stresses in the structural elements of the building. In Fig. 5.9(b), diagram of bending moments in the girders is shown, in which black areas represent additional bending moments due to the differential settlement, while the hatched areas are those computed without taking its effects into account.

Such additional stresses are not allowed for in conventional design procedure; nevertheless, they are of considerable magnitude and may, in certain situations, cause earthquake damage as pointed out previously.

If there are irregularities in soil conditions beneath a building, differential settlement occurs far more readily and its effects would be more serious than in the above example. At the time of the Fukui earthquake of 1948, a department store building of six-storied reinforced concrete construction was heavily damaged as shown in Fig. 5.10. The damage has been attributed to differential settlement amounting to about 65 cm at the central part of the building, where the ground locally consisted of filled soils covering an ancient moat (Housner, 1954).

## 6. Summary

In this Chapter, several factors have been pointed out and discussed as being of major importance in connection to earthquake damage to building structures; namely,

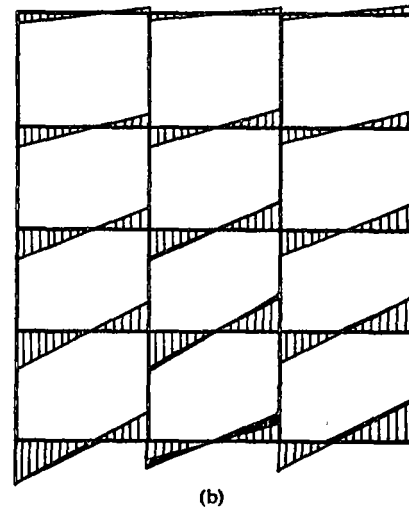
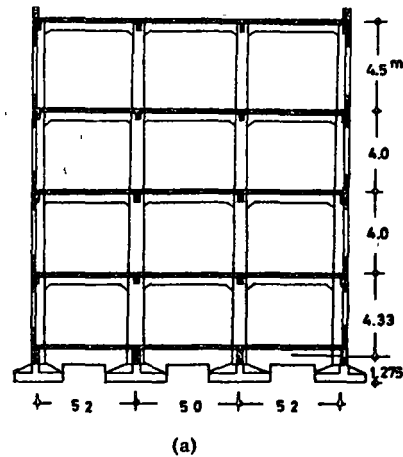


Fig. 5.9. Additional Bending Moments Induced by Differential Settlements

- (1) Amplification of earthquake motion by soil layers
- (2) Resonance of soils and structures
- (3) Dissipation of vibrational energy
- (4) Progressive failure
- (5) Differential settlement

Related to soil conditions, some of these factors exercise beneficial effects while the others detrimental, suggesting that the combined effect will be quite complicated. In Fig. 5.11, the trend of each factor is schematically indicated in relation to the firmness of soils.



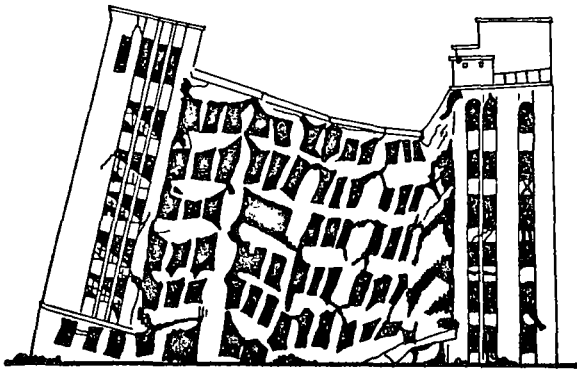


Fig. 5.10. Failure of DAIWA Department Store Building, Fukui Earthquake 1948

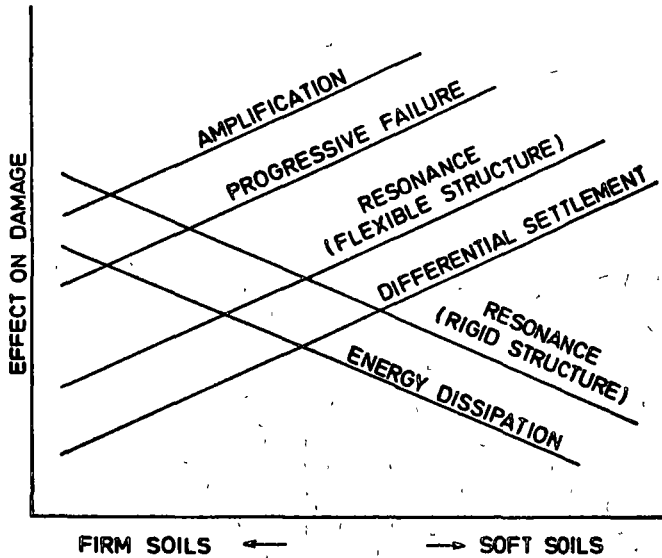


Fig. 5.11. Effects on Earthquake Damage and Firmness of Soils

## VI. EARTHQUAKE RESISTANT DESIGN

As described from various viewpoints in the preceding chapters, local soil conditions have important effects on earthquake damage to buildings. Nevertheless, the problem of how to take the effects into practical design is still in a stage of trial with insufficient information, rendering no definite conclusion. In this chapter, therefore, it is intended only to offer an outline of current practices related to this problem and to suggest the need for further research.

### 1. Design Regulations Relating to Soil Conditions

In some countries, modified seismic coefficient methods are stipulated in which soil conditions are taken into account in determining the design seismic coefficient, as listed in Table 6.1. (Because of insufficient information and language difficulties, the content of the table may in part be incorrect; correction would be appreciated.) It is of interest to note in the

Table 6.1 Soil Conditions and Design Seismic Coefficients in Building Regulations

Country	Soil Conditions and Seismic Coefficients Ratio						Remarks	
Argentina	Hard	0.75						
	Medium	1.00						
	Soft	1.25						
	Very Soft	1.50						
Canada	General	1.0						
	Soft	1.5						
Chile	Rock	Rigid Structure T < 0.4			Semi-Rigid Structure 0.4 < T < 0.75		T Natural Period (sec) ( ) For Raft Foundation	
		0.8			0.5			
	Hard	1.2			1.0			
	Sand & Fill	1.2 (1.0)			1.5 (1.2)			
France	Rock General Saturated & Loose	Continuous Foundation	Individual Foundation	Caisson	Bearing Pile	Friction Pile	Raft Foundation	
		1.00	0.90	0.80	1.00	1.00	0.90	
		1.15	1.15	1.00	1.00	1.00	1.00	
		1.25	1.25	1.15	1.15	1.30	1.00	
Greece	Good	1.0					Only for Particular Zone	
	Bad	1.5						
	Very Bad	2.0						
India	Zone	I	II	III	IV	V	VI	
		Hard	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
		Average	0.0	0.3	0.5	0.6	0.8	1.0
		Soft	0.0	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
Japan	Structure	Wood	Reinforced Concrete					
		0.8	0.6	0.8				
		Disturbal	0.8	0.8	0.8			
		Alluvial	1.0	1.0	1.0			
Mexico	Soft	Framed Structure		Rigid Structure				
		0.50		1.00				
		0.75		1.00				
Portugal	General	Type A	Type B			Type A Structure with Secondary Resisting Elements Type B Structures without Secondary Resisting Elements		
		1.0	1.5					
Romania	Soft	1.5						
		2.0						
Turkey	Zone	I	II					
		Rock	1.0					
		Stiff Clay	1.5					
West Germany	Hard	0.50					Only for Particular Zone	
		0.75						
		1.00						
Yugoslavia	Hard	1.00						
		1.25						
		1.50						

table that, in some countries, not only the firmness of soils but the type of superstructure is also taken into consideration; probably reflecting both the experience of earthquake damage and the consciousness of the effects of structural rigidity. In six countries, which are not listed in Table 6.1, terms relating to soil conditions are not involved in their earthquake resistant design regulations.

## 2. Some Proposals for Design Practice

In order to take the effects of soil conditions into earthquake resistant design of a particular structure, several methods have been proposed and utilized up to the present time, as will be outlined in the following.

a. Coefficient of Subgrade Reaction. It is well known that, if one assumes a proportionality between contact pressure,  $p$ , and settlement,  $w$ , and writes

$$p = kw$$

then the constant  $k$  is referred to as the coefficient of subgrade reaction (Terzaghi, 1955), which corresponds to the spring constant of fictitious springs beneath a structure, as shown in Fig. 6.1(a), representing characteristics of soil support during an earthquake. There are several other coefficients of subgrade reaction as shown in Fig. 6.1(b), (c) or (d), which are assumed to correspond to rocking, swaying, and rocking plus swaying, respectively, of the structure.

The use of coefficients of subgrade reaction enables an analytical treatment of the effects of soil conditions in earthquake resistant design, if their values could be estimated appropriately corresponding to actual behaviors of underlying soils. As an example of employing the concept of coefficient of subgrade reaction, a result of analysis is shown in Fig. 6.2, which indicates how the earthquake input to a structure varies with a change in rigidity ratio of soil to structure (Merritt and Housner, 1954). In the analysis, a spring

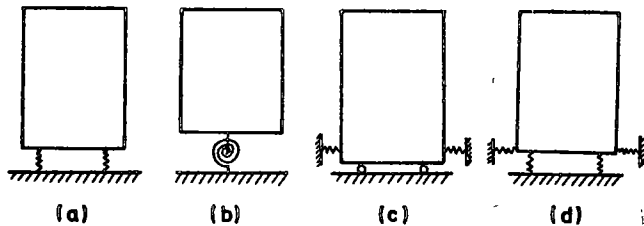


Fig. 6.1. Coefficient of Subgrade Reaction.

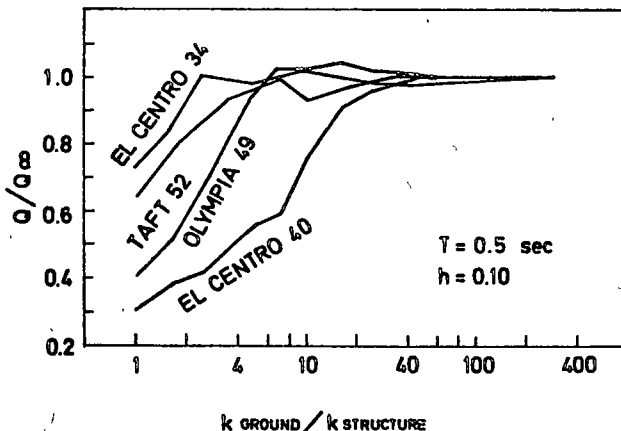


Fig. 6.2. Rigidity Ratio of Ground to Structure and Base-Shear (Merritt & Housner, 1954)

of the type shown in Fig. 6.1(b) has been assumed, and  $Q/Q_0$  in Fig. 6.2 denotes the ratio of maximum base-shear to that for the perfectly rigid ground. It may be seen in Fig. 6.2 that the input is small for soft soils by virtue of large rocking motion.

As to the dissipation of energy from a vibrating structure to underlying soils, discussions have already been made in Chapter V. The effects of energy dissipation may be involved in the models shown in Fig. 6.1 either by connecting a dashpot to the spring or by increasing the viscous damping in the structure. It is also possible to attach a virtual mass, if necessary, to the spring to include the effects of soils which vibrate together under the action of a vibrating structure.

Coefficients of subgrade reaction during vibration can be determined by means of vibration tests of real or model structures (Hisada et al., 1953; Nakagawa, 1961). In Fig. 6.3, some of test results of vertical coefficient  $k_v$  and horizontal coefficient  $k_h$  are summarized. It has also been attempted to compute analytically the coefficient of subgrade reaction by assuming the ground to be an elastic, semi-infinite body (Sung, 1953; Tajimi, 1959; Kobori, 1962).

b. Design Spectrum and Artificial Earthquake Wave. The importance and usefulness of response spectrum have already been mentioned, and it is the worldwide tendency in recent years that the method of earthquake resistant design is turning toward the use of the concept of response spectrum away from the conventional idea of fixed, design coefficient of seismic force. On the other hand, it has also been pointed out that characteristics of response spectrum are influenced to a considerable degree by soil conditions.

Therefore, if design spectra for various soil conditions could be developed, it would be the most ideal criterion for earthquake resistant design of building structures or, at least, would be an epochal progress in design procedure. Along these lines, proposals are being advanced recently. In Fig. 6.4, design velocities are specified in accordance with the types of ground and the ratio of the natural period of a structure,  $T_S$ , to the predominant period of the ground,  $T_G$  (Otsuki and Kanai, 1961). Design acceleration can readily be determined if the velocity is multiplied by  $2\pi/T_S$  as shown in Eq. 4.10. Fig. 6.5 has been proposed as a design base-shear curve for steel structures (Muto, 1963), so that maximum base-shear coefficient is assigned and period axis is adjusted both in accordance with the types of ground.

Another, and probably more reasonable, way of dynamic design is to determine the response of each structure concerned by using more elaborate and realistic model of the structure than the kind represented in Fig. 4.1. In this procedure, however, the results of response analysis would be rather misleading unless the input accelerograms are such as to conform to the soil conditions in the site. Unfortunately, the number of accelerograms recorded up to the present time is not sufficient to place at structural designer's disposal whatever he requires. Furthermore, at least, two or three accelerograms should be employed for design of

a structure to avoid the influence of incidental factors involved in each accelerogram.

Under these circumstances, what is most expected is the development of artificial earth-

quake waves which are produced by means of a digital computer conforming to the soil conditions in the site as well as to the seismicity in the district concerned. Some proposals have already been presented along this line (Housner and Jennings, 1964; Goto et al., 1968); it seems however, consideration of the effects of soil conditions is not necessarily satisfactory as yet.

c. Soil-Foundation-Structure System. The factors affecting earthquake damage, which have been described in Chapter V, may be comprehensively dealt with as the so-called soil-structure interaction problem. The concept of coefficient of subgrade reaction affords the means of solving this problem to a certain extent as long as shallow foundations are concerned as shown in Fig. 6.6(a). Also for pile foundations shown in Fig. 6.6(b), it is possible to apply the concept of coefficient of subgrade reaction effectively to examine the response of the superstructure, provided that the piles can be replaced by an imaginary spring at the base of the structure so that it appropriately represents dynamic behaviors of the pile foundation (Hayashi et al., 1966). However, this method is evidently invalid for determining the stresses in piles during an earthquake which are frequently an important subject of earthquake resistant design. Furthermore, in case of a structure with a deep basement as shown in Fig. 6.6(c), situations are too complex to be dealt with by the concept of coefficient of subgrade reaction, since the soils and the structure interact not only at the base of the foundation but on the surface of the basement walls.

To solve such complicated and urgent problems, one should recognize the necessity that a soil-foundation-structure system must be used and analyzed. It is the writer's belief that the solution by means of this comprehensive system is most orthodox and ultimate. It is admitted, however, that the ways of approach may be manifold according to the differences in soil models such as discrete mass system (Parmelee et al., 1964), multilayer system (Kanai, 1964) or finite element system (Muto, 1966).

## VII. CLOSURE

In this state-of-the-art paper on the effects of local soil conditions upon earthquake damage, experiences and theories relevant to the subject, interpretations of the experiences from theoretical viewpoints, and some design proposals have been outlined.

Considering the fact that this paper is being presented at the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, it is somewhat embarrassing to notice that terms familiar to the soils engineer, such as effective stress, pore water pressure, dilatancy and so forth, are missing in this paper. In the writer's opinion, this fact means the lack of co-operation in aiming at the solution of seismic problems from the side of soil mechanics and foundation engineering. The necessity of approach from this field of engineering can never be overemphasized.

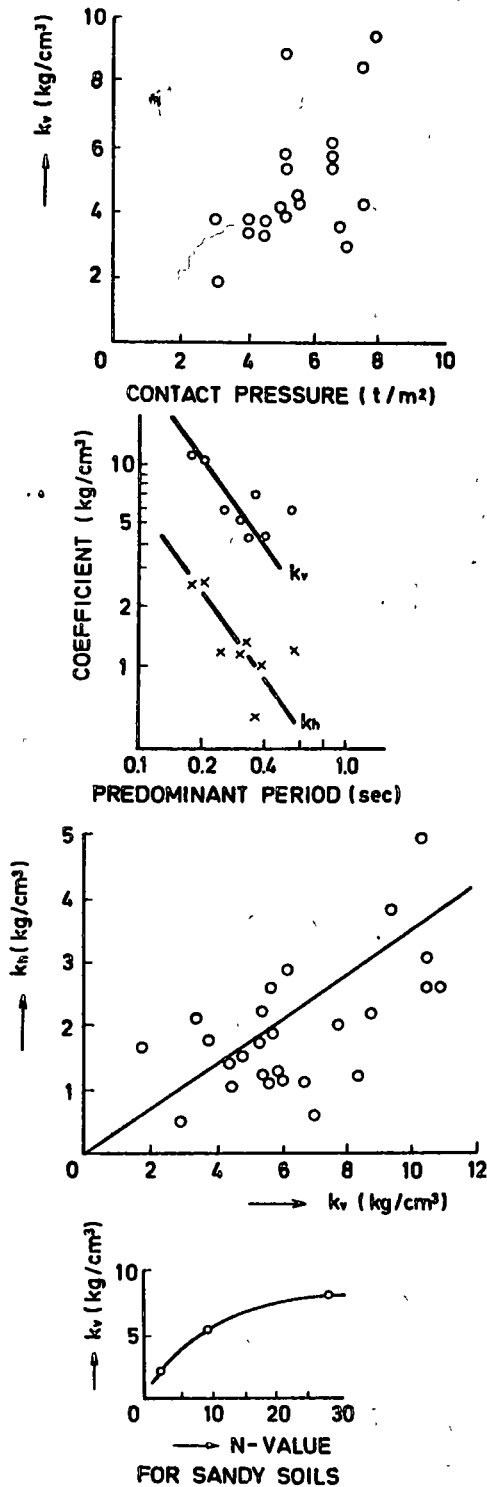


Fig. 6.3. Measured Values of Coefficient of Subgrade Reaction

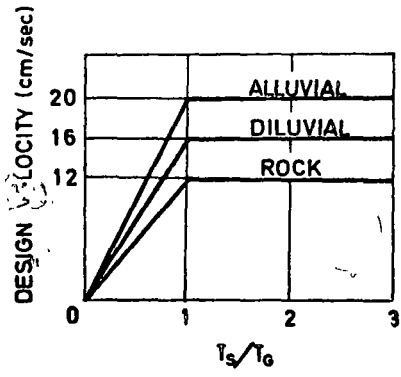


Fig. 6.4. Design Velocity

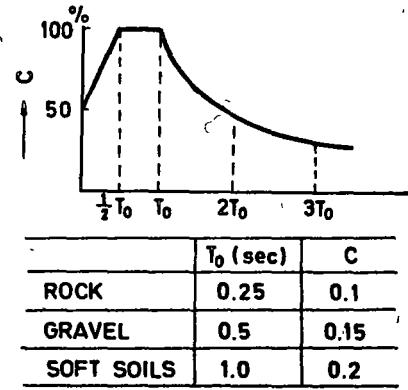


Fig. 6.5. Design Base-Shear Coefficient

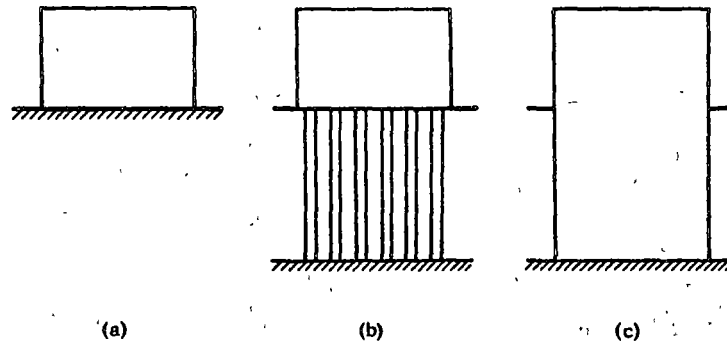


Fig. 6.6. Types of Foundation

REFERENCES

- Alford, J. L., Housner, G. W., and Martel, R. R. (1951). "Spectrum Analyses of Strong-Motion Earthquakes," Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, August.
- Duke, C. M. (1958). "Effects of Ground on Destructiveness of Large Earthquakes," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 84, August.
- Goto, H., Toki, K. and Akiyoshi, T. (1966). "Generation of Artificial Earthquakes on Digital Computer for Aseismic Design of Structures," Proceedings, Japan National Symposium on Earthquake Engineering (Japanese).
- Hardin, B. O. and Richart, F. E., Jr. (1963). "Elastic Wave Velocities in Granular Soils," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 89, February.
- Hayashi, S., Yamashita, I., and Ogura, K. (1966). "Dynamic Response of Steel Piles to Lateral Excitation," Proceedings, Japan National Symposium on Earthquake Engineering.
- Hisada, T., Nakagawa, K., and Izumi, M. (1965). "Normalized Acceleration Spectra for Earthquakes Recorded by Strong Motions Accelerographs and their Characteristics Related with Subsoil Conditions," BRI Occasional Report No. 23, Building Research Institute, Ministry of Construction, Tokyo, Japan.
- Hisada, T., Nakagawa, K., and Kimura, E. (1953). "Studies of Dynamic Characteristics of the Ground," Transactions, Architectural Institute of Japan, Vol. 22 (Japanese).
- Housner, G. W. (1954). "Geotechnical Problems of Destructive Earthquake," Geotechnique, December.
- Housner, G. W. and Jennings, P. C. (1962). "Generation of Artificial Earthquakes," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, February.
- Idriss, I. M. and Seed, H. B. (1967). "Response of Earth Banks during Earthquakes," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, May.
- Kanai, K. (1947). "On the Damages to Buildings due to Earthquakes," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, Vol. 25.
- Kanai, K. (1949). "Relation between the Earthquake Damage of Non-Wooden Buildings and the Nature of the Ground," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, Vol. 27, November.
- Kanai, K. and Yoshizawa, S. (1951). "Relation between the Earthquake Damage of Non-Wooden Buildings and the Nature of the Ground, II," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, Vol. 29.
- Kanai, K. (1964). "Some New Problems of Seismic Vibrations of a Structure, Part 3, Application to Design," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, Vol. 42.
- Kanai, K. (1968). "Earthquake Motion and Ground Vibration," Earthquake Engineering, Shokokusha Publishing Co., November (Japanese).
- Kawasumi, H. (1951). "Measures of Earthquake Danger and Expectancy of Maximum Intensity Throughout Japan as Inferred from the Seismic Activity in Historical Times," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, Vol. 26, Part 3.
- Kawasumi, H. (1952). "Distribution of Earthquake Damage and Subsoils in Cities of Tokyo and Osaka," Natural Resources Association (Japanese).
- Kishida, H., Koyama, K., Sakamoto, I., Ueno, C., Yashiro, T., Hara, A., and Tanaka, S. (1967). "On Soil Conditions and Earthquake Damage to Godowns in Matsushiro Town," 38th Research Meeting, Kanto Branch, Architectural Institute of Japan (Japanese).
- Kitazawa, G. (1950). "On the Ground of Tokyo," Transactions, Architectural Institute of Japan, No. 40, February (Japanese).
- Kitazawa, G. (1950). "Distribution of Seismic Intensity in Downtown Tokyo," Journal of Seismic Society of Japan, Vol. 3, No. 1 (Japanese).
- Kobori, T. (1962). "Dynamical Response of Rectangular Foundations on an Elastic Space," Proceedings, Japan National Symposium on Earthquake Engineering.
- Merritt, R. G. and Housner, G. W. (1954). "Effect of Foundation Compliance on Earthquake Stresses in Multistory Buildings," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 44, No. 4, October.
- Minakami, T. (1945). "Distribution of Damage by Tonankai Earthquake," Interim Report on Nankaido Earthquake, Central Meteorological Observatory, May (Japanese).
- Miyamura, S. (1945). "Report of Earthquake Damage in Tokai District on December 7, 1944," Interim Report of the Earthquake Research Institute, Tokyo Imperial University, No. 4, January (Japanese).
- Miyamura, S. (1946). "Problems on Earthquake Damage and Ground Conditions," Science, Vol. 16, No. 6, Iwanami Publishing Co., October (Japanese).
- Muto, K. (1963). "An Opinion Concerning Earthquake Resistant Design Regulations for High-Rise Buildings," December (Japanese).
- Muto Institute (1966). "Effects of the Ground on Vibration of Buildings - An Approach to Seismic Response Analyses," September (Japanese).
- Nakagawa, K. (1961). "Coefficients of Subgrade Reaction Determined by Vibration Tests of Buildings and Model Footings," Transactions, Architectural Institute of Japan, No. 67, October (Japanese).
- Ohsaki, Y. (1951). "Ground Conditions and Damage Rates of Wooden Buildings," Report of Earthquake Damage by Fukui Earthquake (Japanese).

Ohsaki, Y. (1962). "Earthquake Damage of Wooden Buildings and Depth of Alluvial Deposits," Transactions, Architectural Institute of Japan, No. 72, May.

Ohsaki, Y. and Kuniyasu, K. (1968). "Earthquake Damage to Reinforced Concrete Buildings and Subsoil Conditions," Transactions, Architectural Institute of Japan, No. 148, June (Japanese).

Ohsaki, Y. (1968). "Report of Earthquake Damage by Ebino Earthquake," Building Research Institute, April (Japanese).

Omote, S. (1946). "Comparison of the Vulnerability Rates of the Ground Revealed in Tonankai and Mikawa Earthquakes," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, No. 19-7, March (Japanese).

Omote, S. (1949). "The Relation between the Earthquake Damages and the Structure of Ground in Yokohama," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, XXVII, November.

Omote, S. and Miyamura, S. (1951). "Relations between the Earthquake Damage and the Structure of Ground in Nagoya City," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, XXIX.

Otsuki, Y. and Kanai, K. (1961). "Earthquake Resistant Design, Building Structures Series," Vol. 12, Corona Publishing Co., March (Japanese).

Parmelee, R. A., Penzien, J., Scheffey, C. F., Seed, H. B., and Thiers, G. R. (1964). "Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending Through Deep Sensitive Clays," SESM 64-2, Institute of Engineering Research, University of California, August.

Saita, T. (1935). "Earthquake and Wind Resistant Buildings, Disaster Prevention Science," Iwanami Publishing Co., Vol. 2, April (Japanese).

Saita, T. and Suzuki, M. (1934). "On the Upper Surface and Underground Seismic Disturbances in Downtown Tokyo," Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, Vol. 12, No. 3, September.

Shimizu, R. and Suehiro, S. (1947). "Report of Survey in Nakamura Town," Interim Report on Nankaido Earthquake, Central Meteorological Observatory, May (Japanese).

Sung, T. Y. (1953). "Vibration in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Load-

ing," Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication, No. 156, July.

Suzuki, M. (1961). "Study on Earthquake Resistant Characteristics of Wooden Structures," February (Japanese).

Toda, F. Oba, S., and Otani, S. (1951). "The Relation between the Percentage of Houses Destroyed by the Tokai Earthquake in Each Village Section and the Small Configuration of the Ground," Miscellaneous Reports of the Research Institute for Natural Resources, Nos. 19-21 (Japanese).

Tajimi, H. (1959). "Basic Theories on Aseismic Design of Structures," Report of the Institute of Industrial Science, Tokyo University, Vol. 8, No. 4, March (Japanese).

Tajimi, H. (1965). "Theories of Vibration of Buildings," Building Structures Series, Vol. 17, Corona Publishing Co., May (Japanese).

Tajimi, H. (1968). "Interaction of Building and Ground," Earthquake Engineering, Shokokusha Publishing Co., November (Japanese).

Takahashi, R. (1951). "General Report of Fukui Earthquake," Report of Earthquake Damage by Fukui Earthquake (Japanese).

Takeyama, K. and Ohsaki, Y. (1955). "A Few Problems Relating to Design Computations and Safety of Building Structures," Transactions, Architectural Institute of Japan, No. 31, May (Japanese).

Tanabashi, R. and Ishizaki, H. (1953). "Earthquake Damages and Elastic Properties of the Ground," Bulletin of Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, No. 4, May.

Thornley, J. H. and Albin, Pedro, Jr. (1957). "Earthquake Resistant Construction in Mexico City," Civil Engineering, November.

Terzaghi, K. (1955). "Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction," Geotechnique, Vol. 5, No. 4, December.

Toriumi, I. (1966). "Vibration Character of the Ground near the Foundation," Proceedings, Japan National Symposium on Earthquake Engineering, October (Japanese).

Yokoo, Y., Kuwabara, T., and Horiuchi, T. (1965). "Studies of Soil Conditions and Earthquake Damage in Nagoya, Part 2," Proceedings, Architectural Institute of Japan, September (Japanese).



centro de educación continua de la facultad de ingeniería, unam



INGENIERIA SÍSMICA

DR. LUIS ESTEVÁ MARABOTO

Marzo 17 de 1972





## 5. ANALISIS ESTÁTICO DE EDIFICIOS

Por: Luis Esteva Maraboto

### 5.0 Introducción

Al estudiar el problema del análisis sísmico estático de edificios deben considerarse dos aspectos principales. El primero se refiere a la proposición de las fuerzas laterales estáticas que se supone van a equivaler al sismo. El segundo se refiere a los procedimientos para determinar los elementos mecánicos causados por dichas fuerzas laterales.

Los movimientos sísmicos del terreno producen deformaciones de los edificios que sobre él se desplantan. Estas deformaciones son función de la historia tiempo-desplazamiento del terreno y de las características de la estructura, distribución de masas y rigideces, amortiguamiento y relaciones carga-deformación de los miembros estructurales. Para un sismo dado cuyo acelerograma se conozca y una estructura dada es posible efectuar análisis dinámicos que tomen en cuenta los factores citados y conocer la ley de variación de los desplazamientos que definen la configuración deformada de la estructura con respecto al tiempo. Para decidir sobre lo adecuado de la estructura en su comportamiento ante un sismo específico deberá verificarse que en ningún piso el desplazamiento relativo entre los niveles que lo limitan exceda el valor que corresponde a un nivel prescrito de daños. Dicho nivel de daños puede ser, por ejemplo, que no se agrieten elementos no estructurales o acabados de mayor o menor importancia, o que no se produzcan fluencia ni deformaciones inelásticas en ninguna sección de ningún miembro estructural. El nivel prescrito de daños puede especificarse indirectamente de acuerdo con el tipo de estructura y de los materiales no estructurales y de acabados en función de desplazamientos relativos máximos permitidos. Lo estricto que sea al especificar el nivel permitido de daños depende de la importancia de la estructura y de consideraciones económicas que tomen en cuenta la frecuencia con que pueden ocurrir en el lugar sismos de intensidad semejante a la de diseño. En efecto, se considera razonable diseñar estructuras para que puedan soportar prácticamente

sin daños, aún en acabados, sismos moderados que puedan presentarse con frecuencias relativamente altas, por ejemplo, uno en cinco años y que resistan con daños moderados no estructurales y daños estructurales leves, sismos de intensidades excepcionales y con frecuencias relativamente bajas. Para que una estructura responda a un sismo en forma adecuada debe ser capaz de almacenar como energía de deformación y después disipar las aportaciones de energía cinética que recibe del terreno. Esta capacidad de almacenar energía es función creciente de la resistencia lateral de la estructura y de los desplazamientos laterales permisibles. Por tanto, a mayor desplazamiento lateral permisible será menor la resistencia lateral de que es necesario dotar a la estructura y viceversa, Un buen diseño sísmico, por tanto, debe basarse en un estudio de la interacción entre las dos variables citadas.

Consideraciones como las descritas permiten aprovechar ciertas propiedades de los materiales, tales como su ductilidad o capacidad para soportar, sin sufrir daños de importancia, deformaciones inelásticas varias veces superiores a su límite de fluencia. Esto conduce, según se verá en detalle en los temas 7 y 8 (Análisis dinámico, tratamiento inelástico), a conclusiones tales como la de que análisis dinámicos de edificios ante algunos temblores reales intensos muestren que para que no se exceda su límite elástico deben tener resistencias laterales del orden del peso del edificio, mientras que los mismos edificios, dotados de resistencias varias veces menores, pero con una ductilidad adecuada, pueden responder con desplazamientos del mismo orden que los primeros a pesar de que el comportamiento de los segundos haya incluido varias incursiones al intervalo inelástico.

Un criterio como el descrito no puede aplicarse sistemáticamente para el diseño de estructuras de poca importancia, dadas las complicaciones que implica. En su lugar, se efectúan simplificaciones que conducen a los criterios estáticos y dinámicos convencionales de diseño.

El criterio estático parte de comparar las resistencias late-

rales requeridas por edificios de diversas estructuraciones y materiales para que su comportamiento sea adecuado con las limitaciones impuestas al nivel de daños y para sismos de intensidades y frecuencias diversas. Esta determinación de resistencias laterales requeridas se ha hecho hasta el presente en muy pocos casos por el procedimiento teórico descrito y en la mayor parte observando el comportamiento de estructuras reales de características conocidas ante sismos también conocidos. De tales estudios puede proponerse una distribución de fuerzas laterales tal que su efecto en cada piso sea aproximadamente equivalente a la resistencia lateral requerida para que su comportamiento dinámico sea adecuado.

La proposición de las fuerzas laterales "equivalentes", es un tema que debería acaparar la atención del ingeniero que vaya a efectuar el análisis estático de un edificio. En efecto, debe tenerse en cuenta que dichas fuerzas laterales no tienen en general relación directa con el comportamiento real de la estructura ante un temblor dado. Lo único que puede asegurarse cuando se aplica un método estático para análisis sísmico es que las fuerzas laterales especificadas tienen la función de proporcionar al edificio una resistencia lateral tal que este pueda sufrir ciertas aceleraciones horizontales sin producir daños estructurales importantes ni deformaciones excesivas que causen pérdidas económicas de consideración por daños de elementos no estructurales. Si se trata de edificios usuales, es posible efectuar casi a ciegas el diseño considerando que este es correcto si el edificio en cuestión es capaz de resistir las fuerzas laterales especificadas por un reglamento adecuado. Aún en estas condiciones y puesto que el sistema de fuerzas laterales podría en todo caso ser adecuado estadística pero no determinísticamente, no debe pensarse que el proceder en esta forma es una garantía del comportamiento del edificio y de la ausencia de daños estructurales o no estructurales. Pero si el edificio se sale de las características para las que se han obtenido las fuerzas estáticas especificadas, entonces es fundamental el recordar el origen de estas fuerzas estáticas.

El aplicar un criterio estático convencional como el especificado

cado en la mayor parte de los reglamentos modernos de diseño sísmico da lugar generalmente a diseños conservadores para edificios regulares, sin discontinuidades importantes en sus miembros resistentes lateralmente, ni variaciones bruscas en su distribución de masas o de rigideces, ya que la sobresimplificación de un problema introduce incertidumbres de las que es necesario protegerse con normas que cubran las condiciones más desventajosas que puedan presentarse en los casos a los que por especificación sean aplicables. Pero sería inseguro pensar que este siempre es el caso. Las normas no son tan generales que puedan cubrir todas las peculiaridades que es posible encontrar en la práctica, ni sería económico que trataran de hacerlo, ya que esto implicaría elevar aún más el factor de seguridad de los edificios usuales. De ahí la importancia de determinar, antes de iniciar un diseño, la confianza que nos permita y los detalles que deberán revisarse por encima del hecho de que la estructura propuesta sea o no estable ante un sistema de fuerzas laterales especificado en un reglamento.

Citaremos algunos ejemplos para fijar las ideas expresadas en los párrafos anteriores. Es frecuente el caso de edificios asimétricos cuyas rigideces laterales en uno o varios entrepisos se deben a elementos de distinta naturaleza, por ejemplo, marcos de concreto reforzado de un lado y muros de tabique del otro. Ante sismos de intensidad elevada es posible que las rigideces de cada tipo de elementos varíen al sobrepasar su límite proporcional; pero estas variaciones no tienen lugar de manera que se conserve la relación entre rigideces y el centro de torsión puede desplazarse en formas importantes (ver inciso 5.3.2), lo que puede acarrear vibraciones de torsión por excentricidades superiores a las calculadas a partir de las fuerzas sísmicas especificadas. Si el reglamento toma en cuenta este hecho y otros que conducen al mismo efecto, pedirá que se tomen algunas providencias, como utilizar una excentricidad mayor que la nominal. Tal es el caso del reglamento del D.F. que propone que al calcular el momento torsionante en un entrepiso la excentricidad se tome igual a  $1.5c + 0.05b$ , donde  $c$  es la excentricidad calculada y  $b$  es la máxima dimensión en planta del edifi-

cio en la dirección normal a aquella en la que se supone que actúa el sismo (ver Cap. 5.1). Aún esta consideración será segura únicamente entre los límites para los que se ha revisado su aplicabilidad.

Un problema semejante se presenta en edificios que tienen en su extremo superior estructuras ligeras que significan una reducción brusca de rigidez y masa con respecto a los niveles inferiores inmediatos. Para casos en que el período natural de la estructura superior tomada aisladamente sea aproximadamente igual al del resto de la estructura, las vibraciones de la parte superior pueden amplificarse considerablemente. Para tomar en cuenta este efecto, el reglamento propuesto para el D. F. ~~Empilpor ejemplo~~, especifica que "la estabilidad de tanques que se hallen sobre los edificios, así como la de todo otro elemento cuya estructuración difiera radicalmente de la del resto de la construcción, se verificará suponiendo que puedan estar sometidos a una aceleración no menor que el doble de la que resulte de aplicar la especificación anterior ni menor que 0.15 veces la gravedad" (fig. 5.1). La amplificación dinámica calculada elásticamente que se cita puede ser varias veces superior a 2, que es el factor que se supone en el reglamento. Para limitarla a 2 es necesario con frecuencia aprovechar la capacidad inelástica de absorción de energía de los miembros estructurales. Esto implica la necesidad de asegurarse no sólo de que se satisficce el requisito de resistencia lateral, sino de que se podrá confiar en el comportamiento dúctil de la estructura.

La distribución lineal de coeficientes sísmicos prevista por reglamentos tales como el de la Asociación de Ingenieros en Estructas de California (SEAOC) o el propuesto para el D. F. da lugar a una envolvente adecuada de fuerzas cortantes en edificios en los que la contribución del modo fundamental de vibración representa un porcentaje elevado de la respuesta máxima en todos los entresijos. Para ciertos edificios flexibles en terreno firme o aún para edificios de períodos muy largos en terreno compresible puede suceder que la influencia del modo fundamental sea relativamente pequeña y que en los últimos pisos predomine el efecto de modos superiores. El reglamento de la SEAOC toma en cuenta dicha situación -

para fines de diseño estático permitiendo una reducción del coeficiente sísmico en función del período fundamental y pidiendo que el 10 % de la fuerza lateral especificada sobre el edificio una vez efectuada la reducción se considere concentrada en la punta. El reglamento del D. F., por el contrario, no permite la reducción para períodos largos y esto a su vez origina que no sea necesaria la aplicación de la carga concentrada que se menciona.

En cuanto al problema de valuar los elementos mecánicos causados por un sistema de fuerzas laterales, es conveniente aclarar que nos encontramos en una etapa de transición en la que debemos pasar de los procedimientos adecuados para el trabajo con calculadoras de escritorio a los que deberían utilizarse aprovechando las ventajas de las calculadoras electrónicas. Reconociendo que con el tiempo éstos últimos procedimientos serán los de mayor utilidad, nos referimos en este trabajo principalmente a los que están más al alcance de los ingenieros estructuristas en nuestro medio. Procedemos en esta forma porque en todo el mundo, en la mayor parte de las oficinas de consultores de ingeniería civil, los métodos de análisis que usan calculadoras de escritorio y trabajo manual tienen todavía un lugar importante. Por algunos años las calculadoras digitales serán aún muy escasas en la mayor parte de los países como para encargarse de la mayor parte del trabajo analítico de ingeniería civil. Presentaremos una clasificación de los métodos más importantes para el análisis de marcos elásticos sujetos a cargas laterales aplicadas estáticamente. Haremos una discusión somera de dos de ellos y describiremos en la última parte los procedimientos o criterios de análisis aplicables al análisis de marcos cuya resistencia ante cargas laterales depende no solamente de sus miembros trabajando a flexión sino también de elementos cuyas deformaciones son producidas principalmente por fuerzas tangenciales y por fuerzas axiales, tales como diafragmas de tabique o de concreto, elementos diagonales de contraventeo, etc.

### 5.1 Análisis estático de edificios de acuerdo con el reglamento de diseño sísmico propuesto para el Distrito Federal

Este reglamento contiene disposiciones relativas a esfuerzos

admisibles, análisis estático y dinámico, así como precauciones -- constructivas en elementos estructurales y no estructurales. En el resto de este inciso se transcriben los capítulos de coeficientes: sísmico, análisis estático y limitación de desplazamientos horizontales y se comentan brevemente ciertos puntos de interés. El texto íntegro del reglamento de diseño sísmico junto con su discusión y justificación detallada pueden encontrarse en la ref. 5.1

5. Coeficiente para diseño sísmico. Se entiende por coeficiente para diseño sísmico  $C$ , el cociente de la fuerza cortante horizontal  $V$  en la base del edificio y el peso  $W$  del mismo -- sobre dicho nivel. Para el cálculo  $W$  se tomarán las cargas -- vivas que se tabulan en el capítulo 3.2 del reglamento.

Para el análisis estático de los edificios clasificados según su destino en el grupo (B) se emplearán como mínimos -- los siguientes valores del coeficiente  $C$ .

Tipo de estructuración	Zona de alta compresibilidad	Zona de baja compresibilidad
1	0.06	0.04
2	0.08	0.08
3	0.15	0.10

Tratándose de las construcciones clasificadas en el grupo -- (A), estos valores se multiplicarán por 1.3. Las clasifica-- das en el grupo (C) no requieren diseño sísmico.

El coeficiente 0.06 se dedujo a partir de la fuerza cortan-- te que en 1957 se registró en la base de la Torre Latino Americana de 43 pisos (entre 0.03 y 0.04 de su peso), <sup>5.2</sup> incrementándolo pa-- ra tomar en cuenta la gran longitud de los períodos naturales de -- esta estructura, así como para dejar un margen para sismos más in-- tensos que el de 1957.

El coeficiente 0.15 obedece al hecho de que los dos casos de resonancia confirmada en 1957 indicaron haber sufrido aceleraciones superiores a 0.10 y correspondieron a estructuras del tipo 3.<sup>5.3</sup>

El coeficiente de cortante en la base igual a 0.10 para estructuras de tipo 3 cimentadas en terreno de baja compresibilidad se funda en la experiencia de California y otros lugares intensamente sísmicos, en los cuales ha dado resultados satisfactorios. Para la Ciudad de México se justificaría reducirlo por la menor sismicidad de esta zona. Ello se ve compensado por el empleo de esfuerzos admisibles mayores.

Los demás valores que consigna la tabla se interpolaron entre los ya mencionados.

8. Análisis estático. Para calcular las fuerzas cortantes de diseño a diferentes niveles de un edificio, se supondrá una distribución lineal de aceleraciones horizontales con valor nulo en la base de la estructura (es decir, en el nivel a partir del cual las deformaciones de ésta pueden ser apreciables) y máximo en el extremo superior de la misma, de modo que la relación  $V/W$  en la base sea igual al valor  $C$  tabulado en el Art. 5 (tabla 5.1). De acuerdo con este párrafo, la fuerza horizontal que obra en el piso  $i$  se obtiene de la fórmula

$$F_i = CW \frac{W_i H_i}{W_1 H_1 + W_2 H_2 + \dots + W_n H_n}$$

en la cual

$H_i$  = elevación del piso  $i$  medida desde la base de la estructura (es decir, desde el nivel a partir del cual las deformaciones de ésta pueden ser apreciables);

$W_i$  = peso del piso  $i$  ;

$n$  = número de pisos.



La estabilidad de tanques que se hallen sobre los edificios así como la de todo otro elemento cuya estructuración difiera radicalmente de la del resto de la construcción, se verificará suponiendo que pueden estar sometidos a una aceleración no menor que el doble de la que resulte de aplicar la especificación anterior ni menor que 0.15 veces la gravedad (fig. 5.1). Se incluyen en este requisito los parapetos, --pretilles, anuncios, ornamentos, ventanales, muros, revestimientos y su anclaje, etc. Se incluyen asimismo los elementos sujetos a esfuerzos que dependan principalmente de su propia aceleración (no de la fuerza cortante ni del momento de volteo) como las losas que transmiten fuerzas de inercia de las masas que soportan.

Para fines de diseño se permitirá reducir el momento de volteo calculado para cada marco y grupo de elementos resistentes, pero en ningún nivel se tomará menor que el producto de la fuerza cortante que allí obra por su distancia al centro de gravedad de las masas correspondientes ubicadas --arriba del nivel que se analiza.

La excentricidad torsional calculada en cada nivel se tomará como la distancia entre el centro de torsión del nivel correspondiente y la fuerza cortante en dicho nivel. La excentricidad de diseño se tomará igual a 1.5 veces el valor calculado más o menos 0.05 veces la máxima dimensión del piso que se analiza (excentricidad accidental), medida en dirección normal a la fuerza cortante (fig. 5.2); para cada miembro estructural se elegirá el signo de la excentricidad que suministre la condición más desfavorable.

Sobre la distribución lineal se han hecho algunos comentarios en la introducción. Debe recordarse que el procedimiento estático --es intrínsecamente aproximado. Por ello resulta difícil especificar con toda precisión algunos detalles de su aplicación. Sólo cabe, en caso de duda, optar por la alternativa más conservadora. Así, el nivel a partir del cual se supone que obran las aceleraciones horizontales estará generalmente bien definido, pero se dan casos (como --

edificios sobre terrenos con fuerte desnivel o bien ciertos cuerpos que integran un edificio y cuyos sótanos no estén totalmente rodeados por muros de contención y por consiguiente admitan deformaciones de orden cercano a las de superestructura) en los que el nivel de aceleración nula no está definido inequívocamente; en ellos será aconsejable tomar dicho nivel lo más bajo que sea concebible.

Las fuerzas horizontales que se especifican tienen por objeto proporcionar una envolvente aproximada de las fuerzas cortantes en todos los entresijos. Una objeción a la variación lineal del coeficiente sísmico se discutió en la introducción en relación con el problema de la influencia de modos superiores. Por otra parte, las fuerzas cortantes máximas no se presentan simultáneamente en todos los entresijos. De aquí que los momentos de volteo, respuestas de la cimentación e incrementos en fuerzas normales de columnas y pilotes estimados en función de las fuerzas laterales especificadas --- sean excesivas. A mayor abundamiento debe tenerse presente que una falla de cimentación o una falla de una columna en tensión por momento de volteo relaja los esfuerzos correspondientes y, en general reviste caracteres menos serios que las fallas de otros tipos. Estos dos argumentos entre otros fundamentan la proposición de reducir el momento de volteo. Ciertos reglamentos americanos permiten reducciones aún mayores que no se consideraron adecuadas en el Distrito Federal, dada la preponderancia de períodos largos en los movimientos del terreno. .

Sobre el requisito relativo a la excentricidad adicional por torsión se habló también en la introducción. Debe añadirse que en los marcos en que los esfuerzos de torsión sean de signo distinto de los de cortante directo, puede ser más desfavorable tomar como 1 en vez de 1.5 el factor que multiplica la excentricidad calculada.

10. Limitación de desplazamientos horizontales. El desplazamiento relativo máximo entre pisos consecutivos no excederá 0.002 veces la diferencia de elevaciones correspondientes, salvo donde los elementos que no forman parte integrante de la estructura están ligados a ella en tal forma que no sufran daños por las deformaciones de ésta, en cu-

yo caso el valor 0.002 se modificará como sigue 0.003 en la zona de alta compresibilidad y 0.004 en la baja; en el caso de pisos o cubiertas que normalmente no soportan carga viva, no se impone limitación

En el cálculo de los desplazamientos horizontales se tomará en cuenta todo elemento que forme parte integrante de la estructura.

## 5.2. Análisis de marcos sujetos a fuerzas laterales

5.2.1 Métodos de análisis. Los métodos aplicables al análisis de marcos sujetos a fuerzas laterales pueden clasificarse como sigue. 5.1

### 1. Métodos aproximados

a) Métodos que desprecian las rigideces relativas:

Método del portal

Método del voladizo

b) Métodos que consideran las rigideces relativas en forma aproximada:

Método de Bowman

Método del factor de Wilbur y Norris

Fórmulas de Wilbur

Fórmulas de los coeficientes de juntas

### 2. Métodos de aproximaciones sucesivas:

a) Métodos iterativos

Kani

Maney-Goldberg

b) Métodos de correcciones sucesivas

Morris

Distribución en voladizo

c) Métodos de relajaciones

d) Métodos energéticos

### 3. Solución directa de las ecuaciones de equilibrio y deformación:

a) Solución directa de las ecuaciones de pendiente - deformación (slope-deflection)

b) Métodos matriciales

Existen además innumerables métodos que combinan características de éstos, tales como la distribución directa de deformaciones, (Kloucek), numerosos procedimientos para el tratamiento de casos especiales, tales como interacción entre marcos y muros de cortante, y muchas variaciones adecuadas para analizar los efectos de tipos

específicos de deformación tal como los debidos a cambios en las longitudes de columnas causados por variaciones de las cargas axiales.

Los métodos que desprecian las rigideces relativas se basan en hacer hipótesis simplificatorias sobre la posición de los puntos de inflexión y sobre la distribución de fuerzas cortantes de entrepiso entre los diversos elementos resistentes. Los resultados que se obtienen con tal tipo de análisis pueden presentar errores considerables. Por ello su aplicación debe restringirse al análisis preliminar de estructuras. En cuanto a los métodos que consideran las rigideces su aplicabilidad puede extenderse en estructuras poco importantes a casos comparables a aquellos para los que se han deducido, es decir, edificios regulares sin discontinuidades en sus miembros ni variaciones bruscas en rigideces.

Con la excepción de los métodos aproximados, los que se enuncian arriba son casos especiales de métodos más generales aplicables a la solución de ecuaciones lineales simultáneas. Por ejemplo los métodos energéticos son un caso especial de los métodos variacionales.

Los métodos de correcciones sucesivas y los métodos iterativos requieren efectuar, esencialmente, los mismos cálculos. Sólo los números que se registran cambian de un grupo de métodos a otro. Esto es notorio cuando se compara el método de Kani con el de distribución de momentos en marcos sin desplazamientos laterales y con el de Morris y el de Mancy-Golberg en marcos bajo carga lateral.

Al elegir un método de análisis conviene tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. La base principal para escoger un método sobre otro de precisión comparable es la familiaridad de la persona que debe aplicarlo. La disponibilidad de calculadoras juega también un papel importante.
2. De los métodos aproximados aquellos que pueden incorporar-

e como un primer paso de un procedimiento iterativo son preferibles a aquellos que pueden llamarse terminales. -- Así, las fórmulas de Wilbur pueden considerarse como una primera aproximación del método de Maney-Goldberg. En estos procedimientos aproximados un segundo ciclo de iteración permite decidir si se ha obtenido precisión suficiente o si se requieren refinamientos adicionales.

3. Los métodos que proporcionan casi simultáneamente rigideces de piso o momentos de diseño son preferibles a aquellos que proporcionan únicamente uno de estos conjuntos de valores. Así, el método del factor proporciona momentos flexionantes de diseño y con muy poco trabajo adicional, proporciona una aproximación de la rigidez de piso.
4. Entre los métodos de aproximaciones sucesivas, los métodos iterativos son preferibles sobre los de correcciones sucesivas. En los primeros los errores no son acumulativos y el análisis completo puede verificarse teniendo en cuenta sólo el último ciclo.

De los métodos descritos, el de Maney-Goldberg presenta especial interés por varias razones. El primer paso para establecerlo consiste en plantear el sistema completo de ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos. Dicho sistema puede resolverse directamente si se cuenta con calculadoras electrónicas. En caso contrario el procedimiento citado permite aproximarse a la solución mediante ciclos de iteración que son autocomprobantes. Los resultados obtenidos en el desarrollo del primer ciclo pueden servir como una primera aproximación para los elementos mecánicos o los desplazamientos. El procedimiento proporciona casi simultáneamente elementos mecánicos y desplazamientos, por lo que se ha utilizado para establecer fórmulas aproximadas para la rigidez de entropiso (ver inciso 5.2.4). Una variante en cuanto a los datos que se registran más que en la forma general del procedimiento es la del método Kani, cuya sistematización es un poco más simple. Sin embargo, el contacto entre el análisis y el concepto físico de la estructura es menos evidente en este último. Por las razones ante-

teriores se considera de interés presentar en este trabajo una descripción con cierto detalle de estos dos métodos.

5.2.2 Método de Maney-Goldberg. Se considerarán en este artículo marcos regulares de edificios en los que no existan discontinuidades de columnas ni trabes. Se supondrá asimismo que las piezas son de sección constante y que las deformaciones debidas a fuerza axial y cortante son despreciables en comparación con las debidas a momento flexionante. La fig. 5.3 muestra la nomenclatura empleada, que a su vez se resume a continuación. Todos los desplazamientos angulares y momentos son positivos si su sentido concuerda con el de las manecillas del reloj.

- $I$  = momento de inercia de la sección transversal de un miembro ( $\text{cm}^4$ )  
 $E$  = módulo de elasticidad ( $\text{Kg/cm}^2$ )  
 $K$  =  $I/L$  ( $\text{cm}^3$ )  
 $\theta$  = desplazamiento angular de un nudo (sin unidades)  
 $\psi_n$  = desplazamiento relativo entre los niveles que definen el entrepiso  $n$  dividido entre la altura del entrepiso (sin unidades)  
 $V_n$  = fuerza cortante en el entrepiso  $n$ , es decir, suma algebraica de fuerzas horizontales aplicadas desde el nivel  $n$  hasta el extremo superior del edificio ( $\text{Kg}$ )  
 $h_n$  = altura entre ejes del entrepiso  $n$  ( $\text{cm}$ )  
 $M_n$  =  $V_n h_n$   
 $M_{ij}^c$  = momento flexionante en el extremo  $i$  de la columna  $ij$ .

Los índices superiores  $c$  o  $t$  indican si se trata de una columna o de una trabe. La rigidez ( $I/L$ ) de la columna del entrepiso  $M_n$  alojada sobre el eje  $x$  se designa como  $K_{nx}^c$  y el momento flexionante en el extremo que corresponde al nivel  $n$  de la misma columna como  $M_{nm}^c$ . La rigidez de la trabe del nivel  $n$  en el tramo  $xy$  se designa  $K_{n,xy}^t$ . Por simplicidad se designará como  $\sum K_n^c$  a la suma de rigideces de todas las columnas del entrepiso  $n$  y como  $\sum K_n^t$  a la suma de rigideces de todas las trabes del nivel.

El momento ejercido por su apoyo en el extremo de una barra - de eje recto y de sección constante puede expresarse en función de los desplazamientos de sus extremos como:

$$M_{ij} = 2FK_{ij} (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) \quad (5.1)$$

Esta ecuación se designa como ecuación de deformación.

Del equilibrio de las columnas del entrepiso  $n$  con la fuerza cortante  $V_n$  se deduce:

$$V_n h_n + \sum 2EK_{nx}^c (3\theta_{nx} + 3\theta_{mx} - 6\psi_n) = 0. \quad (5.2)$$

de donde,

$$\psi_n = \frac{V_n h_n}{12 \sum K_n^c} + \frac{6 \sum E\theta_{nx} K_{nx}^c + 6 \sum E\theta_{mx} K_{nx}^c}{12 \sum K_n^c} \quad (5.3)$$

De manera semejante, puede establecerse la ecuación de equilibrio del nudo  $nx$ ,

$$4\bar{K}_{nx} E\theta_{nx} + 2 \sum E\theta_i K_i - 6F\psi_n K_{nx}^c - 6F\psi_o K_{ox}^c = 0 \quad (5.4)$$

En esta expresión,  $\bar{K}_{nx}$  es la suma de rigideces de las barras que concurren al nudo  $nx$ ;  $\theta_i$ ,  $K_i$ , designan respectivamente los giros y rigideces en los extremos lejanos de las barras que concurren al nudo  $nx$ . Por simplicidad, los dos últimos términos de la ec. 5.4 se designarán por la notación  $6 \sum K_{nx}^c F\psi$ . Teniendo en cuenta esta notación se obtiene

$$E\theta_{nx} = \frac{3 \sum K_{nx}^c F\psi - \sum K_i E\theta_i}{2\bar{K}_{nx}} \quad (5.5)$$

Pueden plantearse ecuaciones como la (5.2) para todos los entrepisos y como la (5.4) para todos los nudos. Se obtiene un sistema de ecuaciones lineales simultáneas igual en número a la suma de nudos y de entrepisos cuyos desplazamientos se desconocen. La solución puede efectuarse directamente o procediendo por iteración, de acuerdo con las ecs. 5.3 y 5.5. Esto constituye la base del procedimiento de Maney-Goldberg.



A fin de reducir el número de ciclos de iteración es conveniente partir de valores aproximados de las incógnitas. Esto puede lograrse si se introducen, en una primera aproximación, algunas hipótesis simplificatorias. Supóngase que los giros de todos los nudos de un mismo nivel son iguales y designense por  $\theta'$ . Entonces -- puede escribirse

$$E\psi_n = \frac{M_n}{12 \sum K_n^c} \cdot \frac{E\theta_n^1 + F\theta_m^1}{2} \quad (5.6)$$

Si se suman los momentos en los extremos inferiores de las columnas del entrepiso o se obtiene

$$\sum M_{no}^c = 4E\theta_n^1 \sum K_n^c + 2E\theta_o^1 \sum K_o^c - 6E\psi_o \sum K_o^c \quad (5.7)$$

De manera semejante, la suma de los momentos en los extremos superiores de las columnas del entrepiso  $n$  es igual a

$$\sum M_{nm}^c = 4E\theta_n^1 \sum K_n^c + 2E\theta_m^1 \sum K_n^c - 6E\psi_n \sum K_n^c \quad (5.8)$$

y la suma de los momentos en los extremos de todas las trabes del nivel  $n$  es igual a

$$\sum M_n^t = 12E\theta_n^1 \sum K_n^t \quad (5.9)$$

Puesto que todos los nudos están en equilibrio, la suma de (5.7) - (5.8) y (5.9) debe ser nula. Igualando la suma de sus segundos miembros a cero y sustituyendo el valor de  $E\psi_n$  dado por 5.6, se obtiene

$$E\theta_n^1 \left[ \sum K_n^c + \sum K_o^c + 12 \sum K_n^t \right] - E\theta_m^1 \sum K_n^c - E\theta_o^1 \sum K_o^c = \frac{M_n + M_o}{2} \quad (5.10)$$

La ecuación 5.10 es rigurosa si se satisface la hipótesis de que los giros de los nudos de un mismo nivel son iguales. Esto es cierto en marcos que pueden descomponerse de acuerdo con el principio de los múltiples (5.1). En marcos usuales cuyos miembros no varíen bruscamente en rigidez la ecuación 5.10 proporciona valores suficientemente aproximados para fines prácticos.  $E\theta_n^1$  puede estimar-

se en primera aproximación, si se supone en la ec. 5.10 que  $\theta_n^1 = \theta_m^1 = \theta_o^1$ . Esta hipótesis conduce a la ec. 5.11.

$$E\theta_n^1 = \frac{M_n + M_o}{24 \sum K_n^t} \quad (5.11)$$

Para calcular  $\theta_1^1$  debe tenerse en cuenta la condición de frontera - en el desplante. Si se suponen las columnas empotradas en la cimentación, se obtiene, haciendo  $\theta_1^1 = \theta_2^1$  en 5.10 y  $\theta_o^1 = 0$

$$E\theta_1^1 = \frac{M_1 + M_2}{2 \left[ \sum K_1^c + 12 \sum K_1^t \right]} \quad (5.12)$$

Teniendo en cuenta 5.11 y 5.12 en 5.6 se obtiene

$$E\psi_1 = \frac{M_1}{12 \sum K_1^c} + \frac{M_1 + M_2}{4 \left[ \sum K_1^c + 12 \sum K_1^t \right]} \quad (5.13)$$

$$E\psi_2 = \frac{M_2}{12 \sum K_2^c} + \frac{M_1 + M_2}{4 \left[ \sum K_1^c + 12 \sum K_1^t \right]} + \frac{M_2 + M_3}{48 \sum K_2^t} \quad (5.14)$$

$$E\psi_n = \frac{M_n}{12 \sum K_n^c} + \frac{M_n + M_o}{48 \sum K_n^t} + \frac{M_n + M_m}{48 \sum K_m^t} \quad (5.15)$$

Una primera estimación, nudo por nudo, del valor de  $\theta_{nx}$  puede efectuarse utilizando la ec. 5.5, sustituyendo en ella los valores de  $E\psi_n$  calculados por medio de las ecs. 5.13 - 5.15 y suponiendo que  $\theta_{nx}^1 = \theta_x^1$ . Al valor así calculado se le designará por  $\theta_{nx}^1$  y es igual en niveles superiores, al dado por 5.16.

$$E\theta_{nx}^1 = \frac{\sum K_{nx}^c \cdot E\psi}{\bar{K}_{nx}} \quad (5.16)$$

En el nivel 1, suponiendo las columnas empotradas en la base,

$$E\theta_{1x}^1 = \frac{\sum K_{1x}^c \cdot F\psi}{\bar{K}_{1x} - \frac{1}{3} k_{1x}^c} \quad (5.17)$$

El procedimiento iterativo a que se hizo mención puede sistematizarse en la siguiente forma.

1. Aplicando las ecs. 5.13 -5.15 determínese una primera aproximación a los valores de  $E\psi_n$  en todos los entrepisos.
2. Clasifíquense los nudos de la estructura en dos grupos tales -- que ninguna barra tenga en sus extremos nudos del mismo grupo. Dichos grupos se identifican en la fig. 5.4 por medio de los índices 1 ó 2 a continuación de la letra que designa el nudo. Aplicando las ecs. 5.16 y 5.17 calcúlese la primera aproximación a los giros de todos los nudos que pertenecen a un mismo grupo. - Utilizando estos últimos valores en la ec. 5.5, calcúlense los giros de los nudos del otro grupo.
3. Con los valores de los giros determinados en el paso 2, calcúlen se nuevos valores de  $E\psi_n$  aplicando la ec. 5.3
4. Aplíquese sucesivamente la ec. 5.5. a los nudos de los dos grupos, con los valores mejorados de  $E\psi_n$ , para determinar nuevos valores de los giros  $\theta_{nx}$ .
5. Repítanse los pasos 3 y 4 en tantos ciclos como sean necesarios para obtener que en dos ciclos consecutivos la diferencia entre los valores de las incógnitas sea igual o menor que la prescrita de acuerdo con la precisión requerida.

La fig. 5.4 muestra un ejemplo donde se aplica el método. Las columnas 1-4 de la tabla a la derecha no ameritan explicación. El primer paso consistió en determinar valores aproximados del giro medio de los nudos de cada nivel mediante las ecs. 5.11 y 5.12 y en tabularlos en la columna 5.

A continuación se calcularon los valores en primera aproximación de  $E\psi_n$  por medio de las ecs. 5.13-5.15 y en seguida se obtuvieron los valores de  $E\theta_{nx}^1$  para todos los nudos aplicando las ecs 5.16 y 5.17. Estos valores se consignan en el primer renglón, bajo el encabezado  $F\theta$  junto a cada nudo en el dibujo esquemático del marco. Inmediatamente se inició el proceso de iteración aplicando las ecuaciones exactas 5.3 y 5.5.

Se aplicó la ec. 5.5. a los nudos del grupo 1, utilizando para

$\theta_i$  los valores aproximados calculados con las ecs. 5.16 y 5.17 - del paso anterior y en seguida se aplicó la ec. 5.5 a los nudos - del grupo 2, utilizando para  $\theta_i$  los valores de los giros de los - nudos del grupo 1 que se acababan de calcular con la ec. 5.5. A - continuación se aplica la ec. 5.3 para calcular nuevos valores de  $E\psi_n$ .

Los números que se indican junto a los extremos de cada miembro son los valores de  $EK\theta$  calculados en cada ciclo. Los números - junto a las columnas son los valores sucesivos de  $EK\psi$ . La figura - muestra también el cálculo del momento en el extremo H del miembro  $HM$  aplicando las ecuaciones de deformación.

5.2.3. Método de Kani. La ec. 5.1 puede expresarse en la siguiente forma.

$$M_{ni} = 2m_{ni} + m_{in} + m_{ni}^1 \quad (5.18)$$

En la ec. 5.18,

$m_{ni} = 2EK_{ni}\theta_n$  se designa contribución angular del extremo -- cercano de la barra ni.

$m_{in} = 2FK_{ni}\theta_i$  es la contribución angular del extremo lejano - de la barra ni

$m_{ni}^1 = -6EK_{ni}\psi_{ni}$  es la contribución lineal de la barra ni.

Introduciendo esta notación en las ecs. 5.3 y 5.5 se obtienen respectivamente 5.19 y 5.20

$$\sum_{\text{entrepiso}} m^1 = -\frac{3}{2} \left[ \frac{Vh}{3} + \sum_{\text{entrepiso}} m \right] \quad (5.19)$$

$$\sum_{\text{nudo}} m_{ni} = -\frac{1}{2} \sum_{\text{nudo}} (m_{in} + m_{ni}^1) \quad (5.20)$$

Las sumas que aparecen en la ec. 5.19 incluyen respectivamente las contribuciones lineales de todas las columnas y las angulares de todos los extremos de columnas en el entrepiso en el que se analiza - el equilibrio. En la ec. 5.20 las sumas incluyen todas las barras

que concurren a un nudo.

Puesto que todas las columnas de un entrepiso sufren el mismo desplazamiento angular,  $\psi$ , la suma de las contribuciones lineales - puede distribuirse entre todas en proporción a su rigidez  $K$ , es decir,

$$m_j^1 = - \frac{3}{2} \frac{K_j}{\sum_{\text{entrepiso}} K_j} \left[ \frac{V_h}{3} + \sum_{\text{entrepiso}} m \right] \quad (5.21)$$

Al factor que antecede al paréntesis se le llamará factor de distribución lineal y se designará por  $f_j^1$ . De manera semejante,

$$m_s = f_s \sum_{\text{nudo}} (m_{in} + m_{ni}^I), \quad f_s = - \frac{1}{2} \frac{K_s}{\sum_{\text{nudo}} K_s} \quad (5.22)$$

Las ecs. 5.21 y 5.22 constituyen la base del procedimiento iterativo que a continuación se describe.

1. Calcúlense los factores de distribución angular y lineal -- para todos los nudos y entrepisos respectivamente.
2. Supónganse un valor arbitrario para las contribuciones angulares y lineales de todas las barras.  
Si los valores supuestos son correctos, se satisfarán las -- ecs. 5.21 y 5.22.
3. Si los valores supuestos no son correctos, se aplicarán las -- ecs. 5.21 y 5.22 para obtener valores aproximados de las -- contribuciones. Estas se refinarán en ciclos sucesivos, hasta lograr que en dos ciclos consecutivos las obtenidas sean sensiblemente las mismas.

La sistematización del proceso se explica a continuación con -- referencia a la fig. 5.5. Los números en los extremos de las barras son los factores de distribución angular en cada nudo, y los números al centro de cada columna son los factores de distribución lineal en el entrepiso correspondiente. La figura muestra las operaciones efectuadas. Se supuso un primer sistema de contribuciones --

angulares (renglón 1), correspondientes a cada extremo de una barra. A partir de ellas se calculó la primera aproximación a los valores de las contribuciones lineales de las columnas en todos los entrepisos, por medio de la ec. 5.22. Los valores así calculados se con- signan en el renglón 1 de cada columna.

Tómese como un ejemplo el cálculo de la primera aproximación a las contribuciones lineales de las columnas del segundo entrepi-  
so:

$$\begin{aligned} \sum m_j &= 6.85 + 8.77 + 11.60 + 5.83 + 3.75 + \\ &\quad + 9.20 + 10.95 + 14.40 + \\ &\quad + 7.75 + 5.80 = 84.90, \end{aligned}$$

$$V_h/3 = 24.0$$

El valor del paréntesis en la ec. 5.21 es  $24.0 + 84.90 = 108.90$ , que multiplicado por el factor de distribución lineal  $\delta$  de cada columna da lugar a las cantidades que aparecen en el renglón 1 de la tabla de contribuciones lineales de las columnas. En efecto,

$$\begin{aligned} 108.9 \cdot (-0.265) &= -28.9 \\ 108.9 \cdot (-0.353) &= -38.5, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ahora pueden obtenerse valores mejorados para las contribu-  
ciones angulares en cada nudo, usando la ec. 5.21. Tómese como --  
ejemplo el nudo H:

$$\begin{aligned} (m_i + m_i') &= 2.65 + 2.14 + 9.20 - \\ &\quad - 14.05 - 28.90 = -28.96. \end{aligned}$$

Al multiplicar  $-28.96$  por los factores de distribución angu-  
lar se obtienen las cantidades que aparecen en el renglón 2 de la  
tabla de cálculo de contribuciones angulares de cada barra, Así

$$\begin{aligned} -28.96 \times 0.25 &= +7.22 \\ -28.96 \times 0.085 &= +2.45, \text{ etc.} \end{aligned}$$

El procedimiento descrito se repite cuantas veces sea necesari-  
o de acuerdo con el grado de precisión deseado.

A partir de las contribuciones angulares y lineales calculadas pueden obtenerse los momentos aplicando la ec. 5.18. Por ejemplo, en la columna inferior del nudo H,

$$M = 2 \times 7.22 + 9.35 - 29.40 = 5.61$$

Al igual que el procedimiento de Maney-Goldberg, la convergencia rápida de este método puede lograrse si se parte de valores -- próximos a los reales. Por ellos es conveniente estimar los valores iniciales de las contribuciones angulares aplicando por ejemplo las ecs. 5.11 y 5.12. Pueden llevarse a cabo razonamientos semejantes a los efectuados en relación con las expresiones que permiten aproximaciones más refinadas por el procedimiento de Maney-Goldberg. Esto es especialmente útil en marcos cuyas trabes sean -- rflexibles en comparación con las columnas, ya que entonces la convergencia del método de Kani partiendo de valores arbitrarios es -- muy lenta.

5.2.4. Rigidez de entrepisos de marcos. Para analizar un edificio -- bajo la acción de un sistema de fuerzas laterales es necesario distribuir, en cada entrepiso, la fuerza cortante sísmica total entre los elementos que resisten fuerzas laterales. Para llevar a cabo -- tal distribución es necesario calcular la rigidez, en cualquier entrepiso, de todos los marcos o muros en que puede descomponerse el edificio.

La rigidez de entrepiso es la relación entre la fuerza cortante resistida por un marco, muro o contraviento en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles consecutivos. La rigidez así definida no es independiente del sistema de fuerzas laterales. Por tanto, para calcularla con rigor debe conocerse tal sistema con anterioridad, lo cual en general no es posible.

En marcos ordinarios de edificios el empleo de sistemas de cargas que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis introduce errores de poca importancia, y usualmente las rigideces calculadas a partir de hipótesis simplicatorias sobre la forma del sistema de fuerzas laterales son satisfactorias. En muros, contravientos y ciertos marcos es indispensable tener en cuenta la variación de la carga lateral. Estos problemas se discuten en el cá-

pítulo 5.4.

A partir de las ecs. 5.13 - 5.15 pueden deducirse fórmulas -- aproximadas para calcular la rigidez de entrepiso de marcos. Por definición, dicha rigidez, en el entrepiso n, es igual a  $R_n = V_n / \psi_n h_n$ . De 5.15.

$$\psi_n \frac{V_n}{h_n} = \frac{48E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{\sum K_n^c} + \frac{h_n + \frac{V_o}{V_n} h_o}{\sum K_n^t} + \frac{h_n + \frac{V_m}{V_n} h_m}{\sum K_m^t} \right]} \quad (5.23)$$

En edificios usuales, sujetos a fuerzas laterales de igual signo, el segundo miembro de 5.23 no se altera mucho si se hace  $\frac{V_o}{V_n} = \frac{V_m}{V_n} = 1$ , con lo que llega a una fórmula de rigidez de entrepiso que es independiente del sistema de cargas:

$$R_n = \frac{48E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{\sum K_n^c} + \frac{h_m + h_n}{\sum K_m^t} + \frac{h_n + h_o}{\sum K_n^t} \right]} \quad (5.24)$$

Con las mismas hipótesis, ahora a partir de 5.13 y 5.14 se obtiene

$$R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\sum K_1^c} + \frac{h_1 + h_2}{\sum K_1^t + \frac{\sum K_1^c}{12}} \right]} \quad (5.25)$$

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{K_2^c} + \frac{h_1 + h_2}{\sum K_1^t + \frac{\sum K_1^c}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\sum K_2^t} \right]} \quad (5.26)$$

Pueden obtenerse ecuaciones semejantes para las rigideces de los --



primeros entrepisos en el caso en que las columnas estén articuladas en la cimentación.

### 5.3 Análisis estático de edificios

Este capítulo se refiere a la valuación de las fuerzas sísmicas, de acuerdo con el reglamento propuesto para el Distrito Federal, así como a la distribución de sus efectos entre los elementos resistentes en cada entrepiso. Es prácticamente una transcripción del capítulo 3 de la ref. 5.1.

5.3.1. Hipótesis. Se admitirán las siguientes hipótesis:

1. Es posible considerar que la fuerza cortante sísmica en cualquier entrepiso actúa paralelamente a un sistema de elementos que resisten empujes laterales en una sola dirección, paralela a su plano. Debe suponerse además que en todos los entrepisos existen dos sistemas ortogonales de elementos resistentes que trabajan independientemente. En tal caso siempre será posible descomponer la fuerza cortante sísmica en un entrepiso en dos componentes que satisfagan la condición impuesta al principio de este inciso. La fig. 5.6 muestra en planta un entrepiso de un edificio en el cual se identifican con subíndices  $x$ ,  $y$ , los elementos que resisten fuerzas paralelas a la dirección  $x$ ,  $y$ , respectivamente. La rigidez de entrepiso de cada elemento se designa con  $R_{ix}$  o  $R_{iy}$ .
2. La rigidez de entrepiso de cada marco o muro es conocida. En general es posible usar valores aproximados para fines de una distribución preliminar y refinarlos teniendo en cuenta el sistema de fuerzas laterales obtenido en cada elemento mediante la primera estimación de rigideces.
3. Las losas de piso son indeformables<sup>+</sup>
4. Se supondrá que el efecto del temblor equivale al de un sistema de fuerzas horizontales que actúa en dirección pa

En algunos edificios esta hipótesis es inadmisibles. Tal es el caso de edificios cuya longitud en planta sea varias veces su ancho, y cuya rigidez ante cargas laterales no está distribuida de una manera sensiblemente uniforme en todo su largo. También lo son el de edificios de losas precoladas, y aquellos que poseen elementos verticales resistentes a cargas laterales cuya rigidez sea comparable a la de las losas.

ralela a uno de los sistemas de elementos resistentes y obran en el centro de gravedad de cada nivel.

5.3.2 Descripción. El método de análisis se describe a continuación.

1. La fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del nivel  $i$  se calcula usando la fórmula

$$F_i = \frac{W_i h_i}{\sum W_i h_i} C \sum W_i \quad (5.27)$$

en la cual

$F_i$  = fuerza sísmica aplicada en el nivel  $i$ .

$W_i$  = peso del nivel  $i$

$h_i$  = altura del nivel  $i$  sobre el desplante.

$C$  = coeficiente para diseño sísmico, especificado en el reglamento.

2. Obténgase, por estática, la línea de acción de la cortante sísmica en cada entrepiso para las dos direcciones principales (paralelas a los elementos resistentes) en que se efectuará el análisis. Para ello conviene ordenar las operaciones como en la tabla 5.2 del ejemplo (ver fig. 5.7).
3. Calcúlense las rigideces de piso de los elementos resistentes en ambas direcciones y en todos los entrepisos.
4. Determínese la posición del centro de torsión en cada entrepiso. El centro de torsión es el punto por el que debe pasar la línea de acción de la fuerza cortante sísmica para que el movimiento relativo de los dos niveles consecutivos que limitan el entrepiso sea exclusivamente de traslación. En caso contrario existe torsión o rotación relativa entre dos niveles consecutivos.

Las expresiones para calcular las coordenadas del centro de torsión con respecto a un sistema cualquiera de referencia son

$$x_t = \frac{\sum R_{iy} x_i}{\sum R_{iy}} \quad (5.28)$$

$$y_t = \frac{\sum R_{ix} y_i}{\sum R_{ix}} \quad (5.29)$$

5. La fuerza cortante que debe ser resistida por un marco -- cualquiera en un piso es igual a la suma de dos efectos: -- el debido a la fuerza cortante del piso, supuesta actuando en el centro de rigideces, y el debido al momento torsionante del piso. Si la direcci3n analizada del sismo es la paralela al eje x, se obtienen las siguientes cortantes. En los marcos x, por efecto de la fuerza cortante aplicada en el centro de rigideces:

$$V \frac{R_{ix}}{\sum R_{ix}} \quad (5.30)$$

En los marcos x, por efecto de la torsi3n:

$$\frac{M_t R_{ix} y_{it}}{(\sum R_{ix} y_{it}^2 + \sum R_{iy} x_{it}^2)} \quad (5.31)$$

En los marcos y, por efecto de la torsi3n:

$$\frac{M_t R_{iy} x_{it}}{(\sum R_{ix} y_{it}^2 + \sum R_{iy} x_{it}^2)} \quad (5.32)$$

En las expresiones anteriores,

$V$  = fuerza cortante s3smica en el entrepiso considerado  
 $x_{it}, y_{it}$  = coordenadas de los elementos resistentes con respecto al centro de torsi3n del entrepiso en cuesti3n.

$M_t$  = momento torsionante en el entrepiso considerado, que es igual al producto de la fuerza cortante en el piso por la siguiente excentricidad:

$$1.5e \pm 0.05 L$$

donde  $e$  es la excentricidad calculada como la distancia entre la línea de acción del cortante y el centro de torsión y  $L$  es la mayor dimensión de la planta considerada del edificio medida perpendicularmente a la dirección del sismo. El signo deberá tomarse en cada marco en tal forma que dé lugar a los máximos esfuerzos.

6. Conocido el sistema de cargas que actúa en cada marco se analiza de acuerdo con los métodos presentados en el capítulo 5.2.

5.3.3. Ejemplo. La tabla 5.3 sistematiza convenientemente las operaciones para distribuir la cortante sísmica y el momento torsionante. En ella puede observarse el criterio que se siguió para calcular el momento torsionante de diseño a partir del nominal. Por ejemplo, para el caso en que la fuerza cortante sea paralela a la dirección  $x$  se calcularon dos valores del momento torsionante:

$$(M_{Tx})_1 = 25.75 (1.5 \times 1.34 + 0.05 \times 11.00) = 65.92$$

$$(M_{Tx})_2 = 25.75 (1.5 \times 1.34 - 0.05 \times 11.00) = 37.60$$

Para los marcos 1x y 2x, en los cuales el efecto de la torsión se suma al de traslación, se usó  $(M_{Tx})_1$ ; en cambio, al obtener las cortantes de diseño para los marcos 3x y 4x, en que ambos efectos son opuestos, se usó  $(M_{Tx})_2$ . Este mismo criterio se expresa gráficamente en la fig. 5.12.

El ejemplo sirve además para ilustrar los siguientes conceptos.

1. El coeficiente sísmico es diferente en cada una de las direcciones  $x$ ,  $y$ , por tratarse de una estructura cuya resistencia a fuerzas laterales en la dirección  $x$  se debe esencialmente a flexión de los elementos estructurales (estructura

turación tipo 1) y en la dirección y a esfuerzos cortantes en los muros de mampostería (estructuración tipo 2).

2. Para que la hipótesis de análisis se cumpla, es necesario que la losa sea capaz de resistir como diafragma las fuerzas que sobre ella actúan como consecuencia de su participación transmitiendo la fuerza sísmica a los elementos resistentes. En el marco 1<sub>y</sub>, por ejemplo, las fuerzas cortantes en los entrepisos 3 y 4 son respectivamente 31.13- y 24.88 ton. La fuerza que la losa transmite al marco en el nivel 3 es, por tanto,  $31.13 - 2.188 = 9.26$  ton, que da lugar al siguiente esfuerzo cortante medio (suponiendo un espesor de 10 cm. para la losa).

$$\frac{9260}{1100 \times 10} = 0.84 \text{ Kg/cm}^2$$

5.3.4 Método simplificado de análisis. De acuerdo con el Art. 7 del capítulo de diseño sísmico del reglamento del Distrito Federal es aceptable efectuar un análisis simplificado de estructuras que satisfagan ciertas limitaciones que allí se imponen. La fig. 5.8 muestra esquemáticamente una estructura que, para fuerzas laterales actuando paralelamente al eje y, cumple con las limitaciones del artículo citado.

Para la dirección citada, el análisis simplificado de la planta baja, se efectuó en la forma que a continuación se describe.

1. Determinación del coeficiente para diseño sísmico. Considerando que la estructura se localiza en la zona de alta-compresibilidad, que su estructuración es del tipo 2 y que se trata de una construcción tipo B, el coeficiente para diseño sísmico propuesto por el reglamento es 0.0.

## 2. Cálculo de las fuerzas y cortantes sísmicas.

Nivel	Entrepiso	$W_i$ ton	$H_i$ m	$V_i H_i$ ton m	$F_i$ ton	V ton
2		60	7	420	6.30	
	2					6.30
1		72	4	288	10.62	
	1					16.92
Sumas		132		708		

3. La longitud total de muros paralelos a la dirección y es 27 m. de los cuales 24 m corresponden a muros con relaciones  $h/L < 1.33$ , por lo cual su capacidad puede estimarse considerando un esfuerzo de trabajo igual a  $1.5 \text{ kg/cm}^2$  - (ver fig. 5.8). Los esfuerzos permisibles en los tramos A y B se obtienen como sigue,

En el tramo A,  $h/L = 4.00/2.00 = 2.0 > 1.33$ , de donde el esfuerzo permisible vale  $1.5 \times (1.33 \times 1/2)^2 = 0.66 \text{ Kg/cm}^2$ .

En el B,  $h/L = 4.00/1.00 = 4.00 > 1.33$ , de donde el esfuerzo permisible es  $1.5 \times (1.33 \times 1/4)^2 = 0.17 \text{ Kg/cm}^2$ .

La capacidad de la planta baja es, por tanto,

$24.00 \times 14 \times 1.5 + 200 \times 14 \times 0.66 + 100 \times 14 \times 0.17 = 53.0$ -ton.

Esta capacidad es mayor que la necesaria según el cálculo arriba realizado.

5.4 Edificios con elementos rigidizantes

Dentro de este concepto se incluyen elementos tales como diagonales de contraventeo, tableros de tabique confinados por los marcos o ligados de alguna manera adecuada a la estructura, mu--

ros continuos de concreto, etc.

En muros o sistemas triangulados de pequeña altura en relación con su longitud (digamos relaciones de altura a base iguales a  $1/3$ ), y cuya base se halle aproximadamente empotrada, las deformaciones debidas a esfuerzo cortante puro constituye el 85 a 90 por ciento o aún más, del total, dependiendo de las condiciones en los otros tres bordes. Si esta aproximación se juzga razonable, puede aceptarse la hipótesis de que la rigidez de entrepiso es independiente del sistema de fuerzas laterales y puede calcularse tomando en cuenta únicamente las deformaciones debidas a cortante. Para los casos que se muestran en las figs. 5.9 a-c, es fácil demostrar que las rigideces de entrepiso están dadas por las ecs. 5.33, 5.34 y 5.35, respectivamente.

$$R = eGL/h \quad (5.33)$$

$$R = (K_c + K_t) \cos^2 \alpha \quad (5.34)$$

$$R = \frac{\frac{\sin^2 (\alpha + \beta)}{\frac{\sin^2 \alpha}{K_c} + \frac{\sin^2 \beta}{K_t}}}{\quad} \quad (5.35)$$

En las ecuaciones que anteceden,

$e$  = espesor del muro, cm

$G$  =  $E/2(1 + \nu)$ , Kg/cm<sup>2</sup>

$L$  = longitud, cm

$h$  = altura, cm

$K_c$ ,  $K_t$  = rigideces de las diagonales de tensión y de compresión expresadas como el cociente de la fuerza axial entre la deformación correspondiente.

$K_c = C/\Delta D_c$ ,  $K_t = T/\Delta D_t$ , en Kg/cm.  $D_c$  y  $D_t$  son las longitudes de las diagonales de compresión y de tensión, respectivamente. Al evaluar  $K_c$  y  $K_t$  deberá tenerse en cuenta el área efectiva de cada diagonal (ver ref. 5.1, p. 39-41).

Si la relación de altura a base es grande, las deformaciones producidas por esfuerzos normales longitudinales que resultan en el voladizo vertical al cual se puede asimilar la crujía rigidizada, dan lugar a desplazamientos laterales del mismo orden o ma

yores que los causados por las fuerzas cortantes en cada entrepiso. A diferencia de estos últimos, las pendientes debidas a deformaciones de flexión son acumulativas a partir del desplante (fig. 5.9). Esto ocasiona que la rigidez de entrepiso de tales elementos dependa de la distribución de fuerzas laterales. Además, la interacción con los marcos de la estructura altera la rigidez, principalmente en los entrepisos superiores.

Para analizar un edificio de acuerdo con el criterio señalado en el Art. 5.3, es necesario conocer la rigidez antes de obtener la distribución de las fuerzas horizontales, pero aquella es a su vez función de ésta última. Por consiguiente, en general será necesario proceder por iteración. Pueden ordenarse las operaciones en la siguiente forma.

Supóngase una distribución arbitraria de cargas horizontales y de las fuerzas y momentos de interacción con el resto de la estructura. Con esta base obténganse rigideces aproximadas. Estas se usarán para distribuir en cada piso la cortante sísmica entre los elementos resistentes. A partir de los elementos mecánicos que resultan de esta distribución, puede hallarse la configuración deformada del muro y calcularse las fuerzas y momentos de su interacción con la estructura en una primera aproximación. El proceso descrito deberá repetirse hasta que los valores al principio y al final de un ciclo coincidan.

A fin de acelerar la convergencia conviene partir de una configuración que se aproxime a la definitiva. Para ello, en edificios de estructuración regular se recomienda acudir a procedimientos semejantes a los que se describen en las ref. 5.4 a 5.6.



Dichos métodos se basan en idealizar ~~el sistema~~ como un muro unido a un sistema continuo que representa la rigidez de entropi so de los marcos y la rigidez angular de las trabes que concu--- rren al muro. El sistema de cargas se idealiza también como con--- tinuo. En esta forma las ecuaciones de equilibrio y deformación--- se convierten en una ecuación diferencial no homogenea, cuya so--- lución proporciona una primera aproximación a la configuración--- deformada del muro. Esta puede utilizarse para estimación de la--- rigidez de entrepiso. Para ciertos casos particulares de distri--- bución de fuerzas laterales y de rigideces, las refs. 5.4 - 5.6 presentan gráficas que permiten establecer la primera aproxima--- ción a la rigidez.

Se han propuesto además métodos de relajaciones para resol--- ver el problema en cuestión 5.7; 5.8. Tales métodos se basan en considerar al muro como columna de gran rigidez y pueden tener - en cuenta las deformaciones debidas a flexión y a fuerzas cortan--- tes,. Sin embargo, su utilidad es pequeña si no se introducen al--- gunos artificios para acelerar su convergencia 5.8.

A continuación se presenta una solución que ofrece ventajas - prácticas y que se basa en las ecuaciones de equilibrio desarro--- lladas al describir el método de Maney-Goldberg.

Considérese un edificio simétrico que tiene un muro continuo--- de concreto en su marco central (ver fig. 5.10). Bajo la acción del sistema de fuerzas horizontales, los entrepisos se desplazan lateralmente y todos los nudos giran. De esto resulta que parte--- de la fuerza cortante  $V_n$  será resistida por los marcos y el res--- to por el muro.

$$V_n = V'_n + V''_n \quad (5.36)$$

donde  $V'_n$  y  $V''_n$  son las fuerzas cortantes en el entrepiso n resis--- tidas por el marco y el muro, respectivamente,

Si  $\psi_n$  es el desplazamiento lateral del entrepiso n y se acepta -

que la suma de rigideces de los entrepisos de todos los marcos paralelos al muro en cuestión,  $R_n$  se puede calcular por medio de las fórmulas de Wilbur o alguna otra que la considere independiente de la distribución de fuerzas laterales, la fuerza cortante resistida por los marcos es igual a

$$V_n' = \sum R_n \psi_n h_n \quad (5.37)$$

Además, al girar los nudos del muro en los extremos de todas las trabes que concurren a él, ya sea en su plano o perpendiculares al mismo, se presentarán momentos flexionantes y fuerzas cortantes. A la suma de momentos de todos estos elementos mecánicos -- con respecto a un eje normal al plano del muro que lo corte en la intersección del eje del muro con el plano horizontal del nivel  $n$  se le designará  $M_n^t$ , y está relacionado con el giro  $\theta_n$  -- del muro mediante la siguiente ecuación.

$$K_n^t = M_n^t / \theta_n \quad (5.38)$$

A  $K_n^t$  se le llamará rigidez de trabe. Su valor no es independiente de la deformación de la estructura, pero puede calcularse de manera aproximada suponiendo que los puntos de inflexión en las columnas siguientes al muro y en las trabes siguientes al claro adyacente al muro, están en su punto medio 5.4, 5.5 (ver fig. -- 5.11).

Se tendrá en cuenta, además, que el desplazamiento lateral  $\psi_n$  del muro está constituido por la parte que se debe a deformaciones de flexión  $\psi_n'$  y la debida a deformaciones de cortante,  $\psi_n''$  tales que

$$\psi_n = \psi_n' + \psi_n'' \quad (5.39)$$

La ec. (5.37) puede escribirse

$$V_n' h_n = \sum R_n h_n^2 \psi_n = r_n' \psi_n \quad (5.40)$$

Por equilibrio del muro comprendido entre los niveles  $m$  y  $n$  se --

tendrá

$$V_n'' h_n + \sum M_n'' = V_n h_n - V_n' h_n + \sum M_n'' = 0 \quad (5.41)$$

Combinando esta ecuación con las ecs. 5.36, 5.39 y 5.40, se obtiene

$$\psi_n' = \frac{V_n h_n}{r_n'} + \frac{1 + r_n'/r_n''}{r_n'} \sum M_n'' \quad (5.42)$$

$$\text{donde } r_n'' = \frac{V_n h_n}{\psi_n''} = eGLh_n \quad (\text{ver ec. 5.33}) \quad (5.43)$$

La ec. 5.42 puede expresarse

$$\psi_n' = a_n M_n + b_n (\theta_n + \theta_m),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{(1 + 12\alpha_n EK_n^m) r_n'}, \quad b_n = \frac{6\alpha_n EK_n^m}{1 + 12\alpha_n EK_n^m} \quad (5.44)$$

$$\alpha_n = \frac{r_n' + r_n''}{r_n' r_n''}$$

Si se establece la ecuación de equilibrio del nudo  $n$  del muro, teniendo en cuenta (5.1) se obtiene la siguiente ecuación, que es la correspondiente a la 5.10.

$$\begin{aligned} \theta_n \left[ 2K_n^m (2-3b_n) + 2K_o^m (2-3b_o) + k_n^t \right] + \\ + 2K_n^m (1-3b_n)\theta_m + 2K_o^m (1-3b_o)\theta_o \\ = 6K_n^m a_n M_n + 6K_o^m a_o M_o \end{aligned} \quad (5.45)$$

Las ecs. 5.44 y 5.45 sirven de base para el procedimiento que a continuación se describe 5:9.

Supóngase que la configuración real del marco sujeto a las -- fuerzas laterales se descompone en dos configuraciones, A y B -- fig. 5.12. La configuración A corresponde al mismo marco sobre -- el que actúa el sistema dado de fuerzas horizontales y al que se impone la condición de que el giro de los nudos del nivel supe-- rior,  $\theta_{sA}$ , sea nulo.

Cálculase ahora  $F\theta_r$  con la ec. 5.45 y procédase hacia abajo -- aplicando sucesivamente la misma ecuación. Al llegar al nivel de desplante no se satisfará en general la condición de frontera. -- Por ejemplo, si las columnas están empotradas en la cimentación -- la condición correcta de frontera será  $\theta_o = 0$ , mientras que el -- resultado del análisis propuesto serán en general  $\theta_{oA} \neq 0$ . Es -- simple obtener la configuración correctiva que debe superponerse a la anterior. En efecto, supóngase ahora el mismo marco, sin -- las fuerzas laterales, es decir,  $V_n = 0$  para cualquier entrepiso. Pártase de un valor arbitrario de  $\theta_{sB}$ , por ejemplo  $\theta_{sB} = 1$ , y de-- términese sucesivamente todos los giros hasta llegar a  $\theta_{oB}$ , em-- pleando la ec. 5.45 con los términos de carga iguales a cero. La configuración correctiva que debe introducirse es igual a la con-- figuración B multiplicada por un factor b tal que  $\theta_{oA} + b\theta_{oB} = 0$ , y en general  $\theta_n = \theta_{nA} + b\theta_{nB}$ . Una vez conocidos todos los  $\theta_n$  pue-- den calcularse los desplazamientos de entrepiso,  $(\psi)_n$  mediante la ec. 5.44.

tendrá

$$V_n'' h_n + \sum M_n'' = V_n h_n - V_n' h_n + \sum M_n'' = 0 \quad (5.41)$$

Combinando esta ecuación con las ecs. 5.36, 5.39 y 5.40, se obtiene

$$\psi_n' = \frac{V_n h_n}{r_n'} + \frac{1 + r_n'/r_n''}{r_n'} \sum M_n'' \quad (5.42)$$

$$\text{donde } r_n'' = \frac{V_n'' h_n}{\psi_n''} = eGLh_n \quad (\text{ver ec. 5.33}) \quad (5.43)$$

La ec. 5.42 puede expresarse

$$\psi_n' = a_n M_n + b_n (\theta_n + \theta_m),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{(1 + 12\alpha_n EK_n^m) r_n'}, \quad b_n = \frac{6\alpha_n EK_n^m}{1 + 12\alpha_n EK_n^m} \quad (5.44)$$

$$\alpha_n = \frac{r_n' + r_n''}{r_n' r_n''}$$

Si se establece la ecuación de equilibrio del nudo  $n$  del muro, teniendo en cuenta (5.1) se obtiene la siguiente ecuación, que es la correspondiente a la 5.10.

$$\begin{aligned} \theta_n \left[ 2K_n^m (2-3b_n) + 2K_o^m (2-3b_o) + k_n^t \right] + \\ + 2K_n^m (1-3b_n)\theta_m + 2K_o^m (1-3b_o)\theta_o \\ = 6K_n^m a_n M_n + 6K_o^m a_o M_o \end{aligned} \quad (5.45)$$

Las ecs. 5.44 y 5.45 sirven de base para el procedimiento que a continuación se describe 5.9.

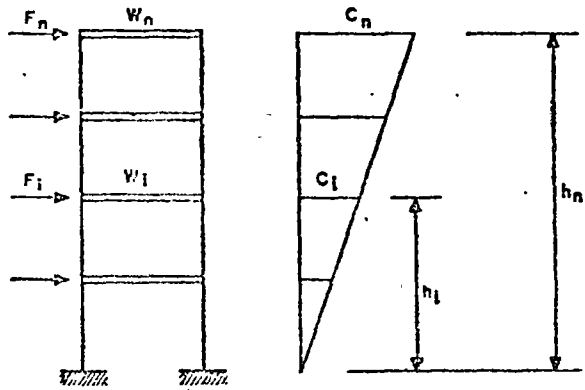
Supóngase que la configuración real del marco sujeto a las -- fuerzas laterales se descompone en dos configuraciones, A y B -- fig. 5.12. La configuración A corresponde al mismo marco sobre -- el que actúa el sistema dado de fuerzas horizontales y al que se impone la condición de que el giro de los nudos del nivel supe-- rior,  $\theta_{sA}$ , sea nulo.

Cálculase ahora  $F\theta_r$  con la ec. 5.45 y procédase hacia abajo -- aplicando sucesivamente la misma ecuación. Al llegar al nivel de desplante no se satisfará en general la condición de frontera. -- Por ejemplo, si las columnas están empotradas en la cimentación -- la condición correcta de frontera será  $\theta_o = 0$ , mientras que el -- resultado del análisis propuesto serán en general  $\theta_{oA} \neq 0$ . Es -- simple obtener la configuración correctiva que debe superponerse a la anterior. En efecto, supóngase ahora el mismo marco, sin -- las fuerzas laterales, es decir,  $V_n = 0$  para cualquier entrepiso. Pártase de un valor arbitrario de  $\theta_{sB}$ , por ejemplo  $\theta_{sB} = 1$ , y de-- términese sucesivamente todos los giros hasta llegar a  $\theta_{oB}$ , em-- pleando la ec. 5.45 con los términos de carga iguales a cero. La configuración correctiva que debe introducirse es igual a la con-- figuración B multiplicada por un factor b tal que  $\theta_{oA} + b\theta_{oB} = 0$ , y en general  $\theta_n = \theta_{nA} + b\theta_{nB}$ . Una vez conocidos todos los  $\theta_n$  puc-- den calcularse los desplazamientos de entrepiso,  $(\psi)_n$  mediante la ec. 5.44.

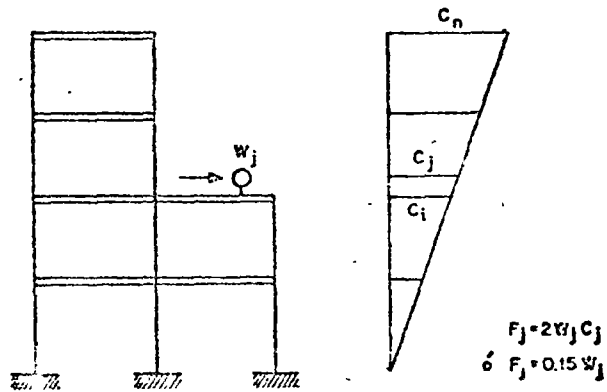
Referencias

- 5.1 Rosenblueth, F. y Esteva, L., "Diseño sísmico de edificios" Ediciones Ingeniería, México (1962)
- 5.2 Merritt, F.S., "No damage occurred to tallest buildings", - Engineering News-Record, Vol. 157 No. 7, (agosto 1957).
- 5.3 Rosenblueth, F., "The Earthquake of 28 July 1957 in Mexico City", Segundo Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Tokio (1960).
- 5.4 Rosenblueth, F. y Holtz, I., "Elastic analysis of shear - walls in tall buildings", Proc. ACI, 31, No. 12 (1960).
- 5.5 Cardan, B., "Concrete shear walls combined with rigid frames in multistory buildings subject to lateral load," Proc. ACI. Vol. 58, No. 3 (1961).
- 5.6 Bock, H., "Contribution to the analysis of coupled shear walls", Proc. ACI, Vol. 59, No. 8 (1962).
- 5.7 Lee, S.L. y Wiesinger, S.P., "Elastic analysis of building frames with shear walls," Memoria del 1er. simposio Panamericano de Estructuras, Instituto Politécnico Nacional, México, (1961).
- 5.8 Esteva, L., "Análisis elástico de edificios altos con muros esbeltos", trabajo presentado en las Primeras Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica. Se publicará en la revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería - Sísmica. Vol. 1, No. 2
- 5.9 Esteva, L., Discusión al artículo "Análisis de marcos mediante distribución de deformaciones", por Alejandro Martínez Márquez, Boletín de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, Vol. 1 No. 1 (junio, 1963).

a) Distribución lineal de aceleraciones

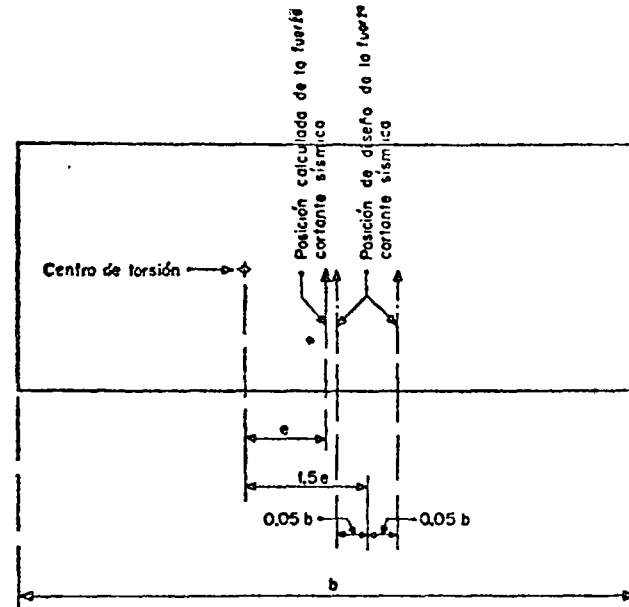


b) Aceleración para efectos locales



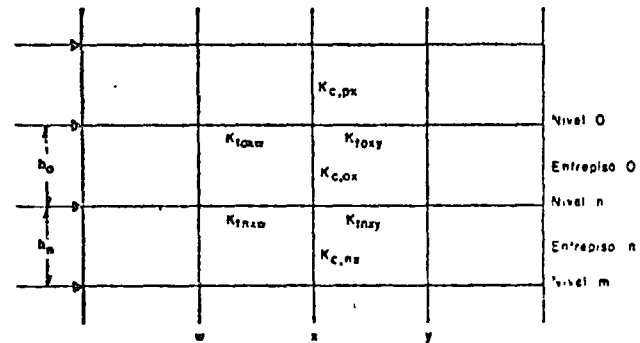
ACELERACIONES PARA ANALISIS ESTÁTICO

FIG. 5.1



TORSION USANDO EL ANALISIS ESTÁTICO

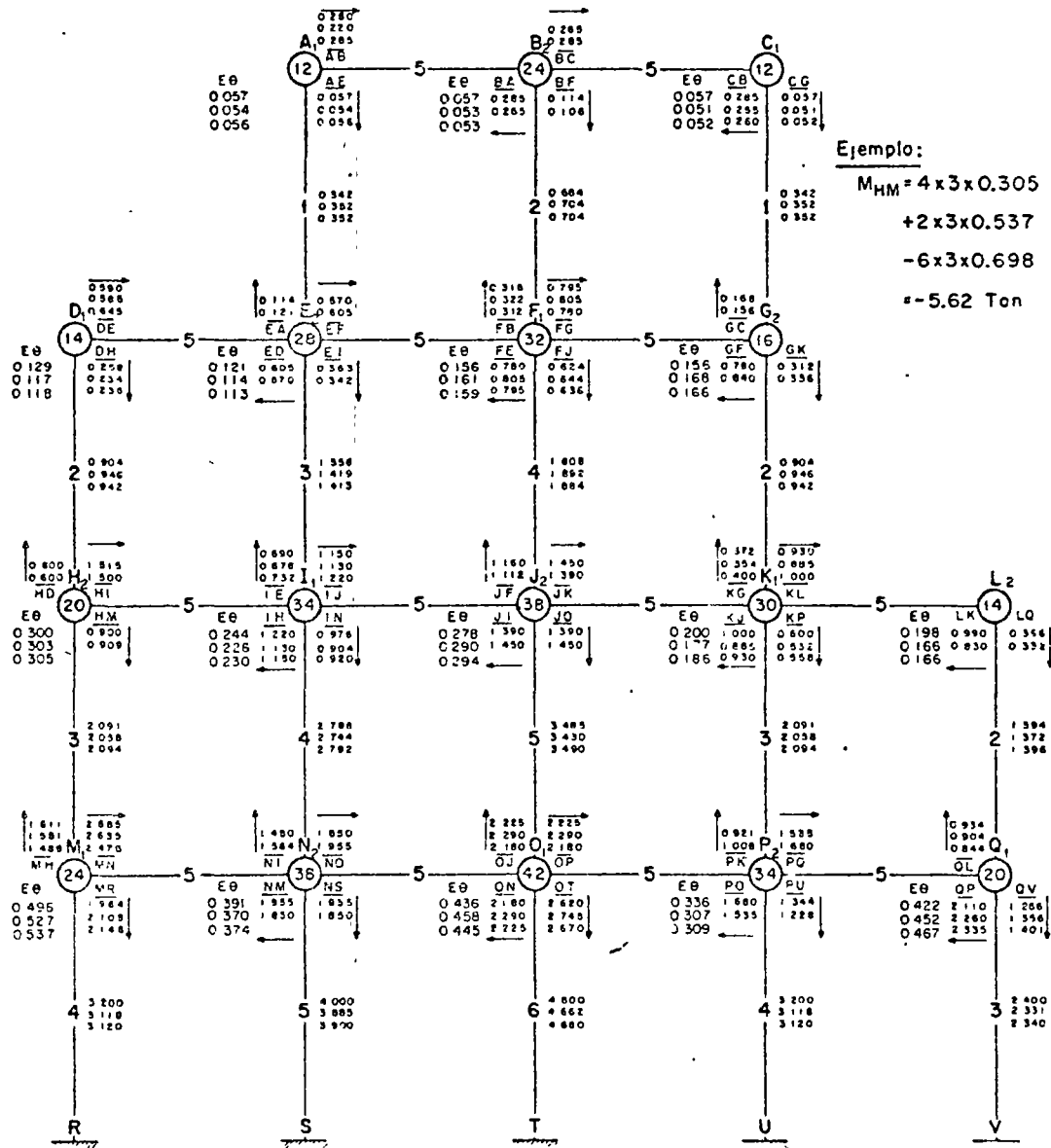
FIG. 5.2



CONVENCIÓN UTILIZADA EN EL METODO DE MANEY-GOLDBERG

FIG. 5.3

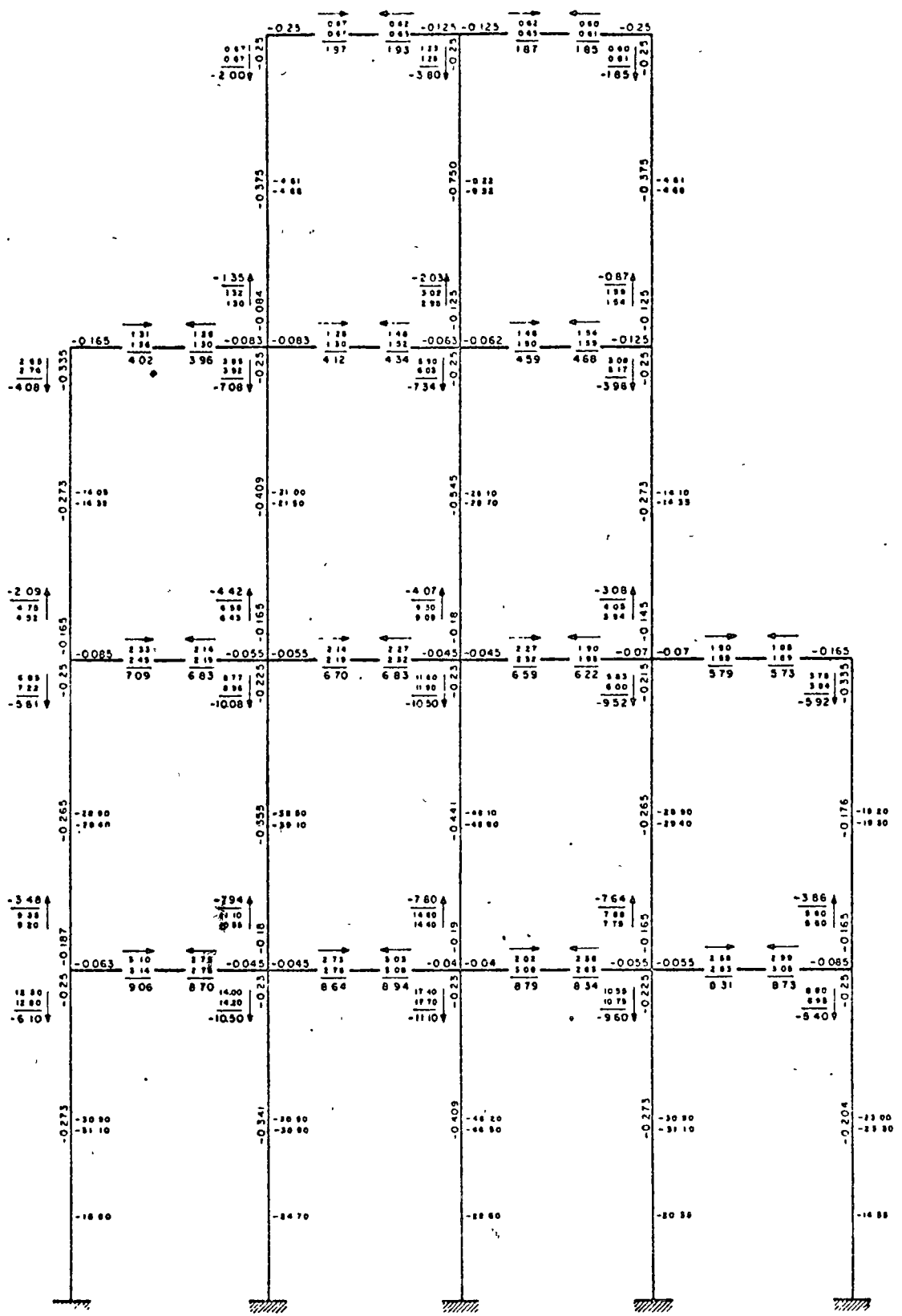




$\Sigma K_c$	$24 \Sigma K_f$	$M_n$	$\frac{M_n}{12 \Sigma K_{cn}}$	$E\theta^{(1)}$	$\Sigma K_{cn}(E\theta^{(1)} + E\theta_{mx})$	$\frac{M_n}{2 \Sigma K_{cn}}$	$E \psi$
	240			0.05			
4		12	0.250		0.817 0.815	0.102 0.107	0.342 0.352
	360			0.133			
11		36	0.273		4.409 4.354	0.200 0.198	0.452 0.471
	480			0.225			
17		72	0.353		11.346 11.703	0.333 0.345	0.697 0.698
	480			0.463			
22		150	0.569		9.169 9.290	0.208 0.211	0.600 0.777 0.780

METODO DE MANEY-GOLDBERG

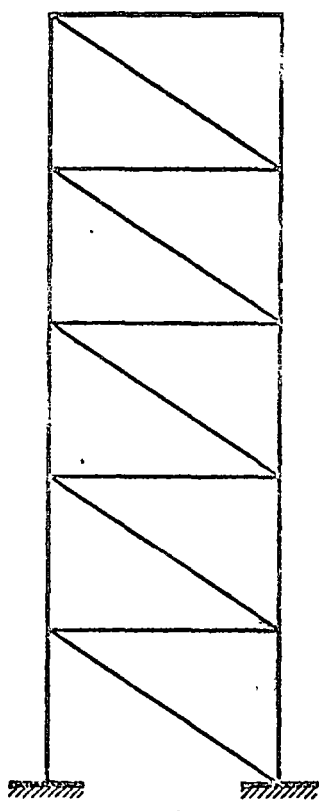
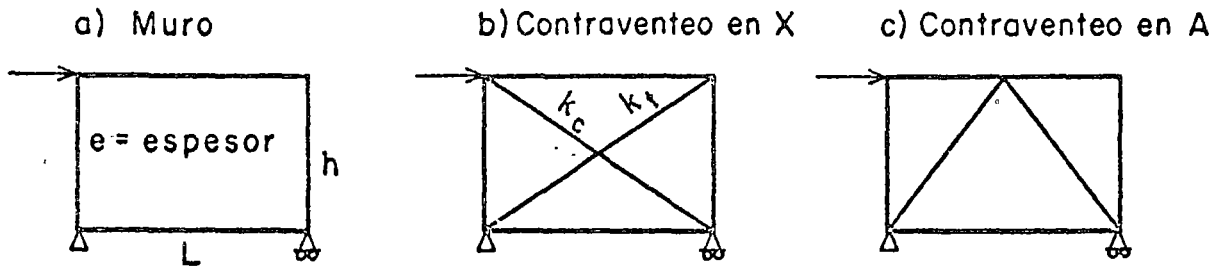
FIG. 5.4



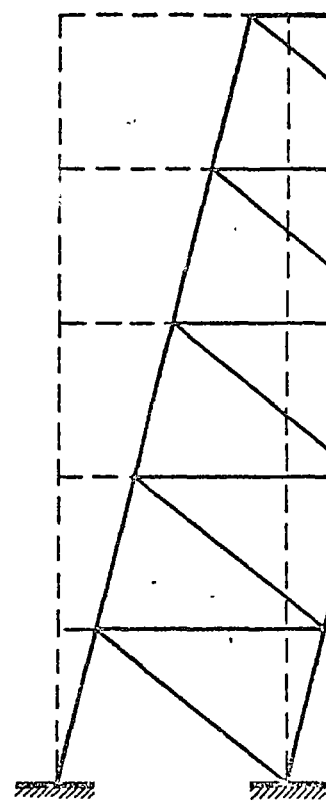
METODO DE KANI

FIG. 5.5

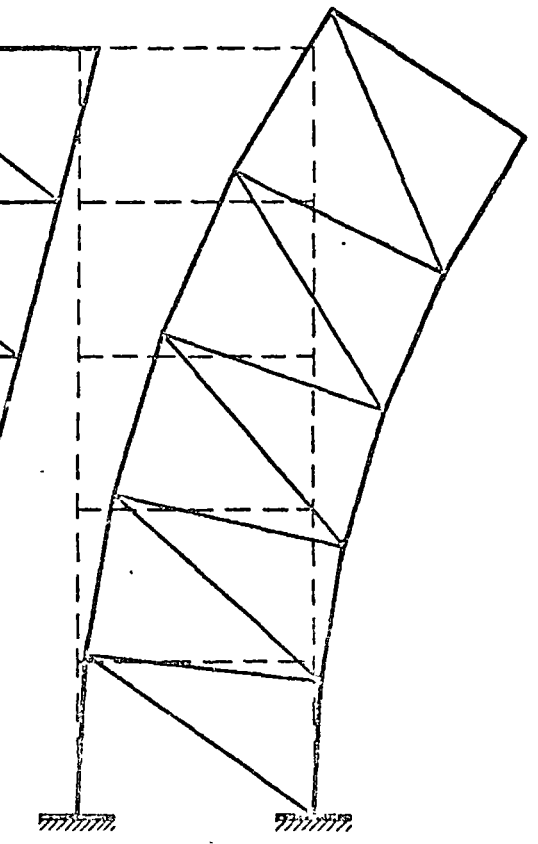




d) Marco contraventeo



e) Deformación de cortante



f) Deformación de flexión

### ELEMENTOS RIGIDIZANTES

FIG.5.9

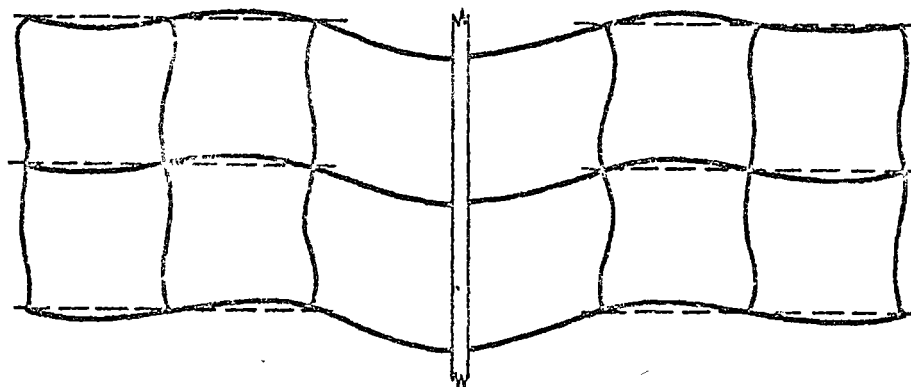
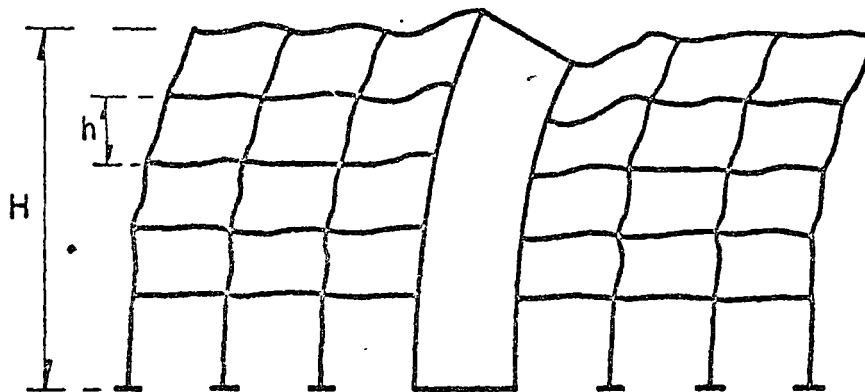
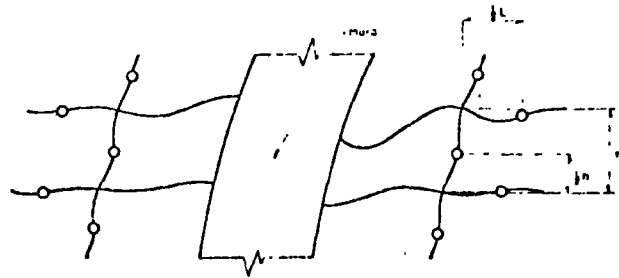
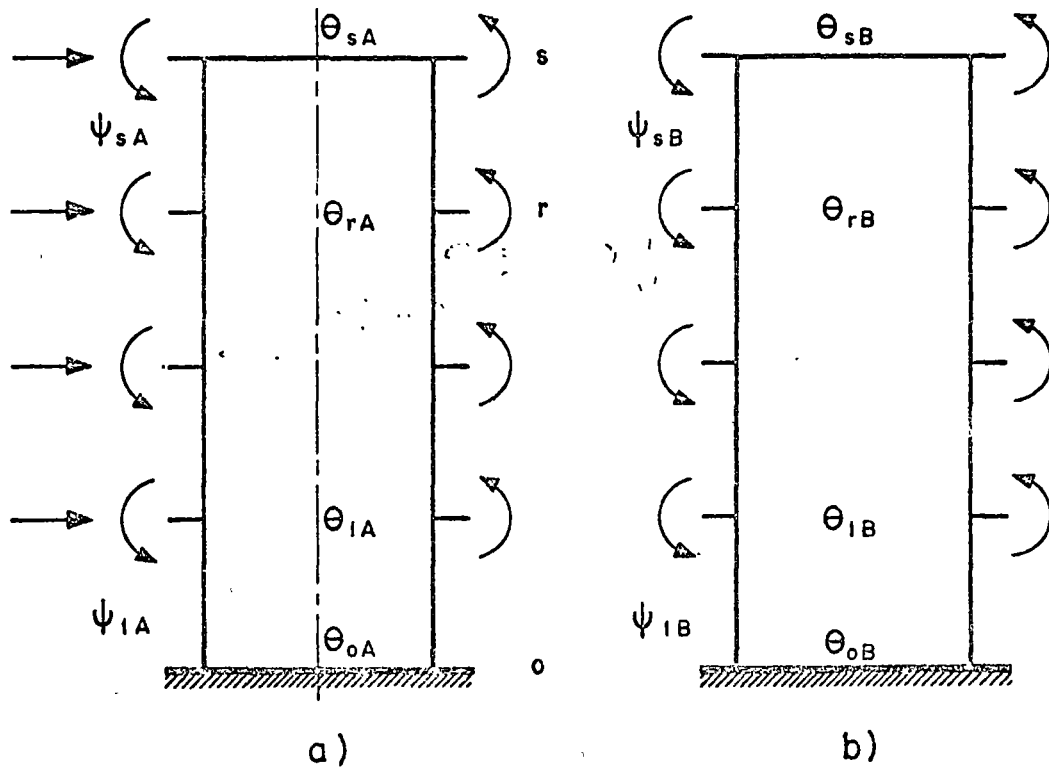


FIG. 5.10



PUNTOS DE INFLEXION PARA CALCULAR RIGIDECE EN TRABES  
 FIG. 6.11



ANALISIS DE ELEMENTOS RIGIDIZANTES  
 ESBELTOS

FIG. 5.12

FUERZAS SISMICAS, CORTANTE, POSICION DEL CORTANTE EN CADA PISO

NIVEL	ENTRE PISO	W <sub>i</sub>	h <sub>i</sub>	W <sub>i</sub> h <sub>i</sub>	F <sub>ix</sub>	F <sub>iy</sub>	CORTANTES		C de G		F <sub>ix</sub> $\bar{y}$	F <sub>iy</sub> $\bar{x}$	$\Sigma F_{ix}\bar{y}$	$\Sigma F_{iy}\bar{x}$	POSICION DE CORTANTE	
							V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>	$\bar{y}$	$\bar{x}$					$y = \Sigma F_{ix}\bar{y} / V_x$	$x = \Sigma F_{iy}\bar{x} / V_y$
5		90	16	1440	12.36	16.42			3.75	6.75	46.35	110.84	46.35	110.84		
	5						12.36	16.42							3.75	6.75
4		120	13	1560	13.39	17.78			5.50	9.20	73.65	163.58	120.00	274.42		
	4						25.75	34.20							4.66	8.02
3		150	10	1500	12.87	17.10			5.50	9.20	70.79	157.32	190.79	431.74		
	3						38.62	51.30							4.94	8.42
2		150	7	1050	10.06	11.97			5.50	9.20	55.33	110.12	246.12	541.86		
	2						48.68	63.27							5.06	8.56
1		180	4	720	6.18	8.21			6.30	8.50	38.93	69.79	285.05	611.65		
	1						54.86	71.48							5.20	8.56

$\Sigma=690$      $\Sigma=6270$

$C_x = 1.3 \times 0.06 = 0.078$   
 $C_y = 1.3 \times 0.08 = 0.104$

$F_i = \frac{W_i h_i}{\Sigma W_i h_i} C \Sigma W_i$

TABLA 5.1

DISTRIBUCION DE CORTANTES ENTRE LOS ELEMENTOS RESISTENTES EN CADA PISO

a) Entrepiso 4:  $V_x = 25.75; y_v = 4.66; M_{1x} = 25.75(1.5 \times 1.34 \pm 0.05 \times 11.00); M_{1x1} = 65.92; M_{1x2} = 37.60$

$V_y = 34.20; x_v = 8.02; M_{1y} = 34.20(1.5 \times 0.91 \pm 0.05 \times 20.00); M_{1y1} = 81.05; M_{1y2} = 12.65$

$\Sigma k_{ix} y_{it}^2 + \Sigma k_{iy} x_{it}^2 = 19536.04$

EJE	$k_{ix}$	$y_i$	$k_{ix} y_i$	$y_{it}$	$k_{ix} y_{it}$	$k_{ix} y_{it}^2$	EFECTO DE $V_x$			EFECTO DE $V_y$
							DIRECTO	TORSION	TOTAL	TORSION
1 x	3	0.00	0.00	-6.00	-18.00	108.00	7.02	0.06	7.08	0.07
2 x	2	3.50	7.00	-2.50	-5.00	12.50	4.68	0.02	4.70	0.02
3 x	2	7.50	15.00	1.50	3.00	4.50	4.68	-0.01	4.67	0.01
4 x	4	11.00	44.00	5.00	20.00	100.00	9.36	-0.04	9.32	0.08
SUMAS	11		66.00			225.00	$y_1 = \frac{66.00}{11} = 6.00$			

EJE	$k_{iy}$	$x_i$	$k_{iy} x_i$	$x_{it}$	$k_{iy} x_{it}$	$k_{iy} x_{it}^2$	EFECTO DE $V_y$			EFECTO DE $V_x$
							DIRECTO	TORSION	TOTAL	TORSION
1 y	108	0.00	0.00	-8.93	-964.44	8611.92	17.93	3.95	21.88	2.89
2 y	6	6.50	39.00	-2.43	-14.58	35.40	1.00	0.06	1.06	0.04
3 y	6	13.50	81.00	4.57	27.42	125.28	1.00	-0.02	0.98	0.08
4 y	86	20.00	1720.00	11.07	952.02	10538.44	14.28	-0.62	13.66	2.85
SUMAS	206		1840.00			19311.04	$x_1 = \frac{1840.00}{206} = 8.93$			

b) Entrepiso 3:  $V_x = 38.62; y = 4.94; M_{1x} = 38.62(1.5 \times 0.88 \pm 0.05 \times 11.00); M_{1x1} = 72.22; M_{1x2} = 29.74$

$V_y = 51.30; x_v = 8.42; M_{1y} = 51.30(1.5 \times 0.22 \pm 0.05 \times 20.00); M_{1y1} = 68.23; M_{1y2} = -34.37$

$\Sigma k_{ix} y_{it}^2 + \Sigma k_{iy} x_{it}^2 = 22467.99$

EJE	$k_{ix}$	$y_i$	$k_{ix} y_i$	$y_{it}$	$k_{ix} y_{it}$	$k_{ix} y_{it}^2$	EFECTO DE $V_x$			EFECTO DE $V_y$
							DIRECTO	TORSION	TOTAL	TORSION
1 x	5	0.00	0.00	-5.82	-29.10	169.36	11.36	0.09	11.45	0.09
2 x	3	3.50	10.50	-2.32	-6.96	16.15	6.82	0.02	6.84	0.02
3 x	3	7.50	22.50	1.68	5.04	8.47	6.82	-0.01	6.81	0.02
4 x	6	11.00	66.00	5.18	31.08	160.99	13.63	-0.04	13.59	0.09
SUMAS	17		99.00			354.88	$y_1 = \frac{99.00}{17} = 5.82$			

EJE	$k_{iy}$	$x_i$	$k_{iy} x_i$	$x_{it}$	$k_{iy} x_{it}$	$k_{iy} x_{it}^2$	EFECTO DE $V_y$			EFECTO DE $V_x$
							DIRECTO	TORSION	TOTAL	TORSION
1 y	128	0.00	0.00	-8.64	-1105.92	9555.15	27.78	3.36	31.14	3.31
2 y	6	6.50	39.00	-2.14	-12.84	27.48	1.30	0.04	1.34	0.04
3 y	6	13.50	81.00	4.86	29.16	141.72	1.30	0.04	1.34	0.09
4 y	96	20.00	1920.00	11.36	1090.56	12398.76	20.83	1.67	22.50	3.27
SUMAS	236		2040.00			22113.11				

$x_1 = \frac{2040}{236} = 8.64$

\* Nótese que  $M_{1y2}$  resultó negativo. Esto quiere decir que la parte más importante de la excentricidad está dada por  $0.05 \times 20.00$ . El efecto de torsión debida a  $V_y$  es aditivo en todos los marcos y.

TABLA 5.2



# CRITERIOS PARA LA CONSTRUCCION DE ESPECTROS DE DISEÑO SISMICO

Luis Esteva M.\*

\*Profesor Investigador, Facultad de Ingeniería, UNAM

RESUMEN

1.	INTRODUCCION	1
2.	RELACION ENTRE LAS ORDENADAS DE ESPECTROS ELASTICOS Y LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO DEL TERRENO	3
3.	RELACION ENTRE MAGNITUD, DISTANCIA FOCAL Y MOVIMIENTO DEL TERRENO EN UNA ESTACION	6
4.	SISMICIDAD LOCAL	8
5.	DISTRIBUCION DE LOS PARAMETROS DE DISEÑO SISMICO	10
6.	APLICACIONES	13
7.	OPTIMIZACION DEL DISEÑO SISMICO	14
8.	COMENTARIOS FINALES	17
8.1	<u>Sismicidad local</u>	18
8.2	<u>Distribución de las respuestas a temblores</u>	18
8.3	<u>Efecto del suelo</u>	18
8.4	<u>Propiedades de la estructura</u>	19
8.5	<u>Espectros inelásticos</u>	19
9.	RECONOCIMIENTO	19
10.	REFERENCIAS	19
	APENDICE	25
	FIGURAS	27

## RESUMEN

Se presentan las investigaciones encaminadas a correlacionar las magnitudes de temblores y sus distancias focales con los movimientos del terreno en una estación y con los espectros medios de respuesta. Se formula un modelo probabilístico para predecir las intensidades sísmicas y se presentan las bases de los criterios de optimización del diseño necesarias para la selección del espectro de diseño. Se señalan los puntos que requieren llevar a cabo estudios amplios.

ABSTRACT

A summary is presented of previous research leading to correlate earthquake magnitude and focal distance with ground motion at a station and with average ordinates of response spectra. A probabilistic model is formulated for predicting seismic intensities, and the bases are presented of optimization criteria needed for selection of the design spectra. A review is made of points requiring further study.

## 1. INTRODUCCION

Para fines de diseño sísmico, es necesario predecir estadísticamente la forma de los espectros correspondientes a distintos grados de amortiguamiento. Para un sitio dado, dicha predicción debe basarse en el conocimiento de las características de los temblores que pueden afectar el lugar, y de la probabilidad de que ocurran. Solo en ocasiones excepcionales se cuenta con datos instrumentales suficientes que describan cuantitativamente el movimiento del terreno para los temblores ocurridos en el lugar de interés. Por ello resulta imposible basar la predicción estadística de la forma de los espectros exclusivamente en el análisis de espectros calculados a partir de registros locales de temblores. En la mayor parte de los casos, ni siquiera se tiene información estadística sobre datos relativamente burdos, tales como las intensidades o las máximas aceleraciones del terreno durante los temblores ocurridos en intervalos de cuando menos varias décadas. En el mejor de los casos se cuenta con datos de magnitudes de temblores ocurridos en la vecindad del lugar para el cual se desean proponer espectros de diseño.

En este trabajo se aprovecharán las correlaciones que se han establecido entre las ordenadas espectrales y los máximos valores absolutos de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento del terreno, y entre estos y la magnitud y distancia focal del temblor<sup>1-5</sup>.

Puesto que las observaciones a que se ha acudido se ven afectadas por una multitud de variables, tales como el terreno local, las formaciones geológicas que deben atravesar las ondas sísmicas, el mecanismo del movimiento y muchas otras, las correlaciones mencionadas se caracterizan por una gran dispersión. En particular, se ha controlado parcialmente la variabilidad debida a la naturaleza del terreno local, restringiendo el alcance de los estudios a lugares con terreno de dureza media, del orden de la de conglomerados compactos.

De mayor significación que la que se acaba de describir, es la incertidumbre asociada a la magnitud y localización de los temblores que pueden provocar respuestas elevadas de las estructuras construidas en un lugar dado. A tal grado es importante esta última incertidumbre, que en comparación con ella, la que proviene de la propagación de las ondas sísmicas puede ignorarse en muchos problemas prácticos de diseño.<sup>6-7</sup> Tal es el criterio que se adoptará en el presente estudio.

Este trabajo presenta las relaciones entre las ordenadas espectrales y la amplitud del movimiento del terreno, y entre esta y la magnitud y distancia focal del temblor. Posteriormente formula un modelo probabilístico para describir el proceso de ocurrencia de temblores de diversas magnitudes en la vecindad de una estación dada. A partir de este modelo y de las correlaciones anteriores, se deduce otro que incluye la distribución probabilística de las sollicitaciones significativas en diseño sísmico en la estación, para un intervalo especificado de tiempo, y se

hace depender el diseño de las solicitaciones que corresponden a un tiempo de recurrencia dado. La última parte describe someramente los criterios de optimización en que se funda la elección del periodo de recurrencia de la solicitud de diseño.

## 2. RELACION ENTRE LAS ORDENADAS DE ESPECTROS ELASTICOS Y LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO DEL TERRENO

Se han propuesto diversos criterios para predecir las ordenadas espectrales cuando se conocen los valores máximos absolutos de la aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno durante un temblor.<sup>1,2,5,8</sup> Algunos<sup>8</sup> se refieren a diversos tipos de temblores, de acuerdo con la regularidad y duración del movimiento en la estación. En este trabajo limitaremos nuestra atención a los temblores de duración moderada (varias decenas de segundos), registrados sobre terreno de dureza media, a distancias epicentrales menores de 1.000 km. Los acelerogramas de dichos movimientos son más o menos caóticos, y justifican el empleo de resultados teóricos que provienen de idealizar los temblores como procesos estocásticos.<sup>1</sup>

En los casos que nos interesan, presenta ventajas representar los espectros en el trazo logarítmico en cuatro direcciones que muestra la fig 1. Gracias a la relación entre los espectros de aceleraciones ( $A(T)$ ,  $T$  = periodo natural), seudo-velocidades ( $V(T) = A(T)/p$ ,  $p = 2\pi/T$ ) y seudodesplazamientos ( $D(T) = A(T)/p^2$ ), es posible leer las ordenadas de cualquiera de ellos en la misma figura, empleando las líneas de referencia que corresponden al espectro de interés. En la fig 1 se trazaron tres líneas, paralelas a las referencias correspondientes, que representan los máximos valores absolutos de la aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno. Al conjunto de estas tres líneas lo designaremos envolvente del movimiento del terreno. De acuerdo con la ref 3, es posible acotar las

ordenadas del espectro medio sin amortiguamiento mediante tres líneas, paralelas a las que se acaban de describir, y tales que la máxima aceleración espectral resulte igual a 4 veces la aceleración máxima del terreno; la máxima velocidad espectral igual a 3 veces la máxima velocidad del terreno; y el máximo desplazamiento espectral igual a 2 veces el máximo desplazamiento del terreno. Para amortiguamientos del orden de 0.05 a 0.10 del crítico, los factores anteriores se vuelven 2, 1.5 y 1, y para amortiguamientos de 0.20 a 0.25 del crítico, resultan prácticamente iguales a la unidad.

Del análisis de algunos espectros de temblores registrados en la costa occidental de los Estados Unidos de Norteamérica, la ref 2 concluye que la esperanza de  $D(T, \zeta)$ , ordenada del espectro de desplazamientos para el periodo natural  $T$  y amortiguamiento  $\zeta$  expresado como fracción del crítico, es proporcional a  $\zeta^{-0.4}$ , siempre que  $\zeta \geq 0.02$ . Esta ley, obtenida en forma casi empírica, concuerda de manera muy satisfactoria con la que se deduce teóricamente de un análisis probabilístico de las respuestas a movimientos estocásticos de intensidad uniforme por unidad de tiempo (ruido blanco uniforme). La ec 1 es una aproximación a la relación teórica que se menciona.

$$\frac{D(T, \zeta)}{D(T, 0)} = (1 + 0.6 h s)^{-0.45} \quad (1)$$

En esta ecuación,  $D(T, 0)$  es la esperanza del espectro sin amortiguar,  $h = 2\pi\zeta/T$ , y  $s$  es la duración del movimiento uniforme. Comparando con los espectros de temblores registrados en la costa occidental de Estados Unidos, se encuentra una coincidencia sumamente satisfactoria si se toma una duración de movimiento uniforme, equivalente a los sismos reales, igual a 12.5 seg, que es del orden de la mitad de la fase sensible de di-



chos temblores.

Las relaciones mencionadas se han propuesto para la esperanza o valor medio de las respuestas. Las envolventes de los espectros de desplazamiento son más sensibles al grado de amortiguamiento que lo que indica la ec 2. Las relaciones en estudio son también válidas con referencia a las ordenadas de los espectros de aceleraciones para diversos amortiguamientos, salvo en el intervalo de periodos muy breves, ya que la aceleración espectral para cualquier valor de  $\zeta$  tiende a la máxima aceleración del terreno cuando  $T$  tiende a cero.

La validez de la ec 1, y por tanto de la proporcionalidad inversa entre la respuesta y la potencia 0.4 del grado de amortiguamiento, está limitada a movimientos sísmicos de naturaleza caótica, tales como los que se registran en terreno duro a distancias focales no mayores de unos cuantos cientos de kilómetros. Esto define el rango de aplicabilidad de las recomendaciones de este trabajo.

Basándose en los conceptos anteriores, la ref 5 propone el procedimiento que a continuación se describe. Supóngase en la fig 1 que la envolvente del movimiento del terreno representa el espectro de aceleraciones para  $\zeta = 0.25$ . Para periodos mayores que  $T_1 = 2\pi v/a$ , donde  $v$  y  $a$  son respectivamente máxima velocidad y aceleración del terreno, las aceleraciones espectrales para diversos grados de amortiguamiento pueden tomarse iguales a las pseudoaceleraciones  $p^2 D(T, \zeta)$ , siendo  $p = 2\pi/T$ . En este rango,  $D(T, \zeta)$  puede obtenerse a partir de la ec 1, aprovechando la proporcionalidad inversa entre los desplazamientos espectrales y la potencia 0.4 del grado de amortiguamiento. El periodo  $T_1$  es el definido por la intersección de las líneas que representan la máxima aceleración y velocidad del terreno. A la izquierda de este valor, la diferencia entre los

espectros de aceleración y pseudoaceleración invalida la ec 1. Un análisis aproximado de los espectros disponibles lleva a la conclusión de que, cualquiera que sea el valor de  $\zeta$ , el espectro de aceleraciones puede aproximarse en papel aritmético mediante una parábola de segundo grado en el intervalo  $0 \leq T \leq T_1$ , con vértice en  $T_1$ .

En la fig 1 se comparan los espectros medios, calculados con este criterio, y sus envolventes, de acuerdo con el criterio de la ref 3, con los espectros correspondientes para el temblor de El Centro, California (1940). Para la comparación, se supuso  $s = 20$  seg, ya que el temblor en cuestión tuvo una duración apreciablemente mayor que el promedio de los que se analizaron con  $s = 12.5$  seg.

### 3. RELACION ENTRE MAGNITUD, DISTANCIA FOCAL Y MOVIMIENTO DEL TERRENO EN UNA ESTACION

La construcción de espectros, según el criterio que se propone, requiere el planteamiento de expresiones para el cálculo de la aceleración, velocidad y desplazamiento máximos del terreno en función de la magnitud y la distancia focal, que son las variables que se tomarán como significativas. Dichas expresiones, tomadas de la ref 5, son las siguientes:

$$a = 2000 e^{0.8M} R^{-2} \quad (2)$$

$$v = 16 e^M R^{-1.7} \quad (3)$$

$$d = 7 e^{1.2M} R^{-1.6} \quad (4)$$

En estas ecuaciones

- a máxima aceleración del terreno en la estación de interés ( $\text{cm}/\text{seg}^2$ )
- d máximo desplazamiento del terreno (cm)
- h profundidad focal (km)
- M magnitud del temblor<sup>9</sup>

R  $(x^2 + h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$  = distancia focal corregida

r constante empírica, que en este estudio se tomará igual a 20 km

v máxima velocidad del terreno (cm/seg)

x distancia epicentral (km)

Las ecs 2 a 4 se dedujeron a partir de los siguientes grupos de datos:

a) Una serie de temblores en la costa occidental de Estados Unidos registrados por estaciones del "United States Coast and Geodetic Survey" empleando acelerómetros estándar de torsión con periodos naturales de alrededor de 0.05 seg. Las aceleraciones máximas se obtuvieron directamente de la ref 12. Las velocidades máximas se estimaron a partir de los datos de intensidades en grados de la escala de Mercalli modificada (MM) ahí consignados. Se aceptó para ello la relación entre la velocidad máxima del terreno y la intensidad MM que a continuación se propone, con base en las conclusiones de la ref 10.

$$I = 3.84 + 3.32 \log_{10} v \quad (5)$$

o, aproximadamente,

$$I = \frac{\log 14 v}{\log 2} \quad (6)$$

b) Un grupo de temblores en la costa occidental de Estados Unidos, registrados por estaciones del laboratorio sísmológico del Instituto Tecnológico de California con acelerómetros estándar USCGS. Las aceleraciones máximas del terreno se obtuvieron directamente de la ref 11. Las velocidades máximas se dedujeron a partir de las intensidades espectrales con amortiguamiento igual a 0.2 del crítico consignadas en la misma publicación, suponiendo que entre los periodos 0.1 y 2.5 seg, la velocidad media del espectro con el amortiguamiento citado es igual a la velocidad máxima del terreno.

c) Datos sobre intensidades MM de temblores mexicanos<sup>13</sup>. A partir de ellos se estimaron las velocidades máximas del terreno, empleando la ec 5.

#### 4. SISMICIDAD LOCAL

Como se ha mencionado, la descripción de los valores máximos que pueden adquirir en el lugar de interés los parámetros significativos para diseño sísmico, se basará en su correlación con las magnitudes y coordenadas focales de los temblores que puedan originarse en las cercanías. Dada la gran incertidumbre asociada a cualquier intento de predicción de las características de temblores futuros, es necesario describir la sismicidad de una zona como proceso estocástico. Describiremos la sismicidad local de una zona mediante un modelo probabilístico que represente las posibles magnitudes y localizaciones de los temblores que puedan originarse en la zona.

Supóngase en la fig 2 que el punto A representa la estación o lugar en el cual se piensa construir una estructura, y que la parte sombreada B representa una zona donde pueden generarse temblores que afecten las estructuras construidas en A. Estableceremos el modelo probabilístico de la generación de temblores en la zona B. Posteriormente se deducirá el modelo que represente lo que ocurre en el punto A, considerando el efecto de todas las zonas semejantes a B que se encuentren en la proximidad de A.

Supóngase que B tiene área unitaria. Designaremos con  $N_M(t)$  la variable aleatoria que representa el número de temblores de magnitud por lo menos igual a M generados en la zona B durante el tiempo t. Aceptaremos además que si  $t_1$  y  $t_2$  son dos intervalos de tiempo que no se traslapan,  $N_M(t_1)$  y  $N_M(t_2)$  son estocásticamente independientes, o sea que las probabilidades de temblores futuros no se alteran por lo que haya

ocurrido hasta el presente. La hipótesis anterior implica que  $N_M(t)$  tiene distribución de Poisson, es decir, la probabilidad de que  $N_M(t)$  adquiera el valor  $n$  puede escribirse<sup>14</sup>.

$$P [N_M(t) = n] = \frac{e^{-\lambda_M t} (\lambda_M t)^n}{n!} \quad (7)$$

donde  $\lambda_M$  es el número medio anual de temblores por unidad de área cuya magnitud excede a  $M$ .

Se han obtenido expresiones que permiten calcular  $\lambda_M$  para áreas unitarias localizadas en distintas zonas del mundo. Con la salvedad del intervalo de magnitudes excepcionales, mayores de 8.5, tales expresiones son de la forma

$$\lambda_M = \alpha e^{-\beta M} \quad (8)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros empíricos. La tabla 1 muestra sus valores para algunas zonas de Norteamérica, indicadas en la fig 3. Para zonas relativamente amplias, los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  pueden obtenerse mediante ajustes a los datos de observaciones, por mínimos cuadrados. En algunas zonas de dimensiones reducidas, digamos de 600 a 800 km de diámetro, que es el orden de la dimensión de la zona cuya sismicidad puede afectar apreciablemente las construcciones localizadas en su centro, los datos estadísticos quizá son insuficientes para calcular  $\alpha$  y  $\beta$ . Esto puede ser particularmente cierto en zonas de baja sismicidad relativa, para las que la observación de que en los últimos 50 a 100 años no ha ocurrido ningún temblor lleva frecuentemente a la conclusión errónea de que en dicha zona no es necesario diseñar para sismo. La determinación de  $\alpha$  y  $\beta$  en estos casos debe hacerse tomando en consideración, además de los datos estadísticos, si los hay, aspectos tales como las características geotectónicas de la zona,

y su similaridad con otras regiones mejor estudiadas. La Estadística Bayesiana, fundamental en la moderna Teoría de Decisiones, engloba el mecanismo formal para asimilar la información que proviene de las diversas fuentes mencionadas<sup>15,16</sup>. En lo que sigue, supondremos  $\alpha$  y  $\beta$  conocidos.

Si en la ec 7 hacemos  $n = 0$ , obtenemos

$$P [N_M(t) = 0] = e^{-\lambda_M t} \quad (9)$$

es decir, la probabilidad de que en el área unitaria en cuestión no ocurra ningún temblor cuya magnitud exceda a  $M$  durante el intervalo  $t$ . Visto de otra manera, si  $T$  es el intervalo (variable aleatoria) que transcurre entre dos temblores consecutivos cuya magnitud excede a  $M$ , la probabilidad dada por la ec 9 es la de que  $T \geq t$ . A la esperanza de  $T$  se le designa periodo de recurrencia de la magnitud  $M$  y puede demostrarse que vale  $1/\lambda_M$ <sup>14</sup>.

Es importante observar que las ecs 7 a 9 implican que, cualquiera que sea el valor de  $M$ , siempre encontraremos una probabilidad no nula de que ocurra cuando menos un temblor, cuya magnitud exceda a  $M$  durante cualquier intervalo  $t$  diferente de cero. Es decir, desde el punto de vista práctico, no existe una cota a la magnitud máxima que pueda ocurrir en una cierta zona. Ello justifica que al elegir el temblor de diseño no pensemos en el máximo posible, sino en el asociado a un cierto periodo de recurrencia.

## 5. DISTRIBUCION DE LOS PARAMETROS DE DISEÑO SISMICO

Volviendo nuestra atención a lo que ocurre en el punto A, supongamos que  $Y$  es el valor de una cualquiera de las variables aleatorias significativas para diseño (aceleraciones del terreno, ordenadas espectrales para un cierto periodo de vibración, intensidades MM). El diseño se basará en el valor  $y$  de  $Y$  cuyo periodo de recurrencia es el especificado.

A Y se le designará en lo que sigue intensidad, y puede medir cualquier pa rámetro significativo para diseño.

Si se supone que todos los temblores que se originan en la zona B tienen la misma profundidad focal, y B es suficientemente pequeña en planta, puede calcularse el valor de  $R_B$ , distancia efectiva entre A y el foco de cualquier temblor originado en B. Si  $M(y, R)$  es una magnitud tal que a la distancia efectiva R la intensidad es mayor que  $y$ , y si  $N_y(t)$  es el número de temblores cuya intensidad excede de  $y$  durante el tiempo t, se concluye que  $P[N_y(t) = n] = P[N_{M(y, R_B)}(t) = n]$ , es decir, que  $N_y(t)$  es un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda_y$  dado por la ecuación

$$\lambda_y = \alpha_B e^{-\beta_B M(y, R_B)} \quad (10)$$

donde  $\alpha_B$  y  $\beta_B$  son los valores que adquieren los parámetros que definen la sismicidad local de la zona B (ec 8).

Si en la cercanía del punto A existen diversas zonas sísmicas, con distancias efectivas  $R_i$ , áreas  $A_i$  y parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , y si existe independencia entre los temblores que se originan en cada una de las zonas, se demuestra<sup>14</sup> que  $N_y(t)$  tiene distribución de Poisson con

$$\lambda_y = \sum_i \alpha_i e^{-\beta_i M(y, R_i)} \quad (11)$$

Supongamos que  $y$  puede expresarse, de acuerdo con las ecs 2 a 4 para  $a$ ,  $v$  y  $d$ , de la manera siguiente:

$$y = c e^{kM} R^{-q} \quad (12)$$

La ec 11 se convierte en

$$\lambda_y = \sum_i \alpha_i \left[ \frac{y}{c} \right]^{-\beta/k} R^{-q\beta/k} \quad (13)$$

En muchos casos resulta razonable estimar  $\lambda_y$ , de acuerdo con la ec 13, a partir de alguna de las siguientes hipótesis o de una combinación de ellas<sup>17</sup>:

- a) Sismicidad uniforme alrededor de la estación.
- b) Sismicidad uniforme a lo largo de una recta que dista  $x$  de la estación

En el primer caso, la ec 13 se convierte en la siguiente:

$$\lambda_y = \int \lambda_{M(y,R)} dA = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} a\left(\frac{y}{c}\right)^{-\beta/k} R^{-q\beta/k} x d\theta dx \quad (14)$$

Después de integrar, se obtiene

$$\lambda_y = \frac{\pi a(y/c)^{-\beta/k}}{\frac{q\beta}{2k} - 1} (h^2 + r^2)^{(1-q\beta/2k)} \quad (15)$$

En relación con el caso b), supóngase la sismicidad distribuida uniformemente a lo largo de una falla recta de longitud  $L$ , situada de tal manera con respecto a la estación que la normal que va de esta a la falla la interseque en su extremo. Otros casos pueden resolverse por superposición.

Si ahora  $\lambda_M$  designa el número medio anual, por unidad de longitud, de temblores cuya magnitud excede de  $M$ , y suponemos que todos ocurren a la profundidad  $h$ , se obtiene

$$\lambda_y = a(y/c)^{-\beta/k} L^{(1-q\beta/k)} \int_0^1 (\gamma^2 + u^2)^{-q\beta/2k} du \quad (16)$$

donde  $\gamma^2 = \frac{x^2 + h^2 + r^2}{L^2}$

$x$  = distancia de la estación a la falla, medida normalmente a esta.



La integral que aparece en la ec 16 no puede efectuarse en forma cerrada. Por ello se integró numéricamente para diversos valores de los parámetros  $\gamma$  y  $q\beta/2k$ . Los resultados se muestran en la fig 4.

## 6. APLICACIONES

1. Determinar las envolventes de los espectros medios que corresponden a intensidades con periodo de recurrencia de 100 años, en el lugar de desplante de una estructura que se encuentra en una zona de sismicidad uniforme, de acuerdo con la ec 8, y los siguientes datos:

$$h = 20 \text{ km}$$

$$r = 20 \text{ km}$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 2.4$$

De acuerdo con las ecs 2 a 4

$$c_a = 2000$$

$$k_a = 0.8$$

$$q_a = 2$$

$$c_d = 7$$

$$k_d = 1.2$$

$$q_d = 1.6$$

$$c_v = 16$$

$$k_v = 1.0$$

$$q_v = 1.7$$

La condición de diseño, es decir, el periodo de recurrencia de 100 años, implica  $\lambda_y = 0.01$ . Despejando  $y$  de la ec 15 y sustituyendo los valores de  $c_a$ ,  $k_a$  y  $q_a$ , se obtiene

$$a = 180 \text{ cm/seg}^2$$

y en forma semejante

$$d = 37 \text{ cm}$$

$$v = 12.5 \text{ cm/seg}$$

Estos tres valores se emplearon para trazar la envolvente del movimiento del terreno en la fig 5a. La envolvente del espectro medio elástico, sin amortiguamiento, consta de tres rectas paralelas a las que representan los valores de  $\underline{a}$ ,  $\underline{v}$  y  $\underline{d}$ , y se obtuvo multiplicando estos últi

mas por 4, 3 y 2, respectivamente.

2. Resolver el problema anterior, suponiendo que los temblores se originan a lo largo de una falla de 2.000 km de longitud, distante 45 km de la estación y dispuesta simétricamente con respecto a la normal a la falla, trazada desde la estación. Supóngase además  $h = 18$  km,  $\alpha = 1.18$ ,  $\beta = 1.5$ . El problema equivale a considerar el efecto de la mitad de la falla y multiplicarlo por 2. Alternativamente, puede tomarse  $L = 1.000$  km y definir la intensidad de diseño como aquella para la que  $\lambda_y = 0.005$ . Procediendo de esta manera, se obtiene

$$\gamma^2 = \frac{18^2 + 45^2 + 20^2}{1000^2} = 0.00274, \quad \gamma = 0.053$$

De la fig 4, con este valor de  $\gamma$  se obtiene, sucesivamente, para la integral de la ec 16

para aceleraciones,  $q \beta / 2k = 1.88, \quad I = 2380$

para velocidades,  $q \beta / 2k = 1.28, \quad I = 102$

para desplazamientos,  $q \beta / 2k = 1.00, \quad I = 26.9$

Despejando  $\gamma$  en la ec 16 y trabajando sucesivamente con aceleraciones, velocidades y desplazamientos, resulta

$$a = 95 \text{ cm/seg}^2, \quad v = 10.6 \text{ cm/seg}, \quad d = 30.7 \text{ cm}$$

Estos valores se representaron en la fig 5b, al igual que los de las envolventes del espectro medio elástico sin amortiguar, obtenidos como en el primer ejemplo.

## 7. OPTIMIZACION DEL DISEÑO SISMICO

En vista de que es imposible acotar la intensidad máxima que puede ocurrir en una estación dada, la elección del temblor de diseño debe considerar explícitamente una probabilidad de falla. Dicha probabilidad debe proponerse a partir de una comparación entre los costos de estruc

turas diseñadas con distintos factores de seguridad, las esperanzas de los costos actualizados debidos a las posibles fallas y los beneficios actualizados que se obtengan durante el tiempo en que la estructura esté en servicio.

Se supondrá, para simplificar, que se conoce en forma determinística la resistencia de la estructura, es decir, se aceptará que existe para cada estructura una intensidad  $\gamma$  debajo de la cual la estructura no sufre daños, pero falla arriba de ella. Entonces diremos que  $\bar{y}$  es la resistencia de la estructura. Dicho criterio se justifica en muchas situaciones prácticas, en vista de que la incertidumbre asociada a las propiedades de la estructura es de poca cuantía en comparación con la de las características de temblores futuros. Se ignorará también la posibilidad de falla en diversos modos o de diversos grados de daño. La ref 15 presenta un tratamiento refinado que incluye los conceptos mencionados.

De lo anterior se deduce que la probabilidad de falla por sismo de una estructura de resistencia  $\bar{y}$  durante el intervalo  $t$  es igual a la probabilidad de que durante dicho intervalo ocurra cuando menos un temblor de intensidad  $Y \geq \bar{y}$ , es decir,  $1 - e^{-\lambda \bar{y} t}$ , y la probabilidad de supervivencia será  $e^{-\lambda \bar{y} t}$ . Nuestro problema es obtener el valor óptimo de  $\bar{y}$ . A este corresponderá una  $\lambda \bar{y}$ , y por lo tanto un periodo de recurrencia.

El objeto del diseño estructural es la optimización de las utilidades actualizadas que se derivan de la construcción y funcionamiento de las estructuras. Las utilidades se componen de la suma de términos positivos (beneficios) y negativos (pérdidas, costos), y deben medirse empleando una unidad adecuada. En ciertas circunstancias, los posibles comportamientos estructurales implican únicamente utilidades que pueden me-

dirse objetivamente en unidades monetarias. Entonces decimos que el problema es lineal en dinero<sup>16, 18</sup>. Muchos casos de interés para ingenieros civiles quedan fuera de esta condición. Las posibles respuestas estructurales pueden incluir beneficios y pérdidas no cuantificables objetivamente en dinero. Tales son la pérdida de vidas humanas u obras de arte, la significación social de una obra o el desprestigio para el constructor o el gobierno. En tal caso, el encargado de establecer la decisión de diseño debe definir una escala que refleje su preferencia, asignando una unidad común para medir las utilidades ligadas a cada evento.<sup>19</sup> La escala de utilidades es subjetiva: la solución óptima para el dueño no necesariamente lo es para el diseñador o para la sociedad.

Una vez establecida la escala de utilidades, el problema de optimización consiste en maximizar la cantidad

$$E(U) = E(B) - E(C) - E(D) \quad (17)$$

donde  $E(X)$  significa esperanza de  $X$ ;  $U$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son los valores actualizados de utilidad, beneficios, costo de construcción y costo de falla.

Si la actualización se supone proveniente de una tasa constante de interés compuesto continuo, puede escribirse

$$E(B) = \int_0^{\infty} E[b(t)] e^{-\nu t} L(t) dt \quad (18)$$

donde  $b(t)$  representa los beneficios por unidad de tiempo,  $\nu$  es la tasa de interés y  $L(t)$  es la confiabilidad o probabilidad de que la estructura esté en servicio en el instante  $t$ . De igual manera

$$E(C) = \int_0^{\infty} E[c(t)] e^{-\nu t} L(t) dt \quad (19)$$

donde  $c$  es el costo de construcción (incluyendo el de diseño y supervisión) por unidad de tiempo; y

$$E(D) = \int_0^{\infty} E[d(t)] p(t) e^{-\nu t} dt \quad (20)$$

donde  $d(t)$  es el costo de la falla si ocurre en el instante  $t$ , y  $p(t)$  la probabilidad de que ocurra en el intervalo  $(t, t + dt)$ .

Con frecuencia, la ec 19 puede remplazarse por una estimación determinística de  $C$ , en la que la actualización cubre un periodo tan corto que no es significativa.

De acuerdo con el modelo adoptado,  $L(t)$ , la probabilidad de que la estructura subsista después del instante  $t$  vale

$$L(t) = P[T \geq t] = e^{-\lambda \bar{y} t} \quad (21)$$

donde  $T$  es el tiempo transcurrido hasta la falla.

El valor de  $p(t)$  resulta

$$p(t) = \frac{d}{dt} [1 - L(t)] = \lambda \bar{y} e^{-\lambda \bar{y} t} \quad (22)$$

El problema de optimización consistirá entonces en expresar las esperanzas de  $C$ ,  $B$  y  $D$  en función de  $\bar{y}$ , la resistencia de la estructura, sustituir en la ec 17, y obtener el valor de  $\bar{y}$  que maximiza a  $E(V)$ . Esta será la intensidad de diseño.<sup>18,20</sup> Las refs 15, 20 y 21 plantean el problema de optimización para situaciones más generales que incluyen diversas alternativas de inversión y actualización, así como diversas clases posibles de daño.

## 8. COMENTARIOS FINALES

Se han descrito los fundamentos para elegir los parámetros de diseño sísmico a partir de la información sismológica disponible. A pesar de la utilidad inmediata que el criterio puede representar, conviene citar aspectos que ameritan amplios estudios.

### 8.1 Sismicidad local

Se hizo notar que es frecuente la escasez de datos estadísticos suficientes para estimar la sismicidad de distintas zonas y se llamó la atención hacia la necesidad de asimilar la información proveniente del conocimiento de las características geotectónicas de la zona y de su relación con la sismicidad, tal como la hemos definido. Desgraciadamente, dicho conocimiento, así como su interpretación en los términos que nos interesan, están muy lejos de llevar a conclusiones congruentes: tiene aún excesiva importancia el factor subjetivo. Los estudios que se hacen en algunos lugares sobre predicción de temblores deben arrojar luz sobre este aspecto.

### 8.2 Distribución de las respuestas a temblores

Los criterios propuestos permiten estimar la esperanza de las respuestas estructurales a temblores definidos por ciertos parámetros sencillos, tales como la intensidad MM, o la envolvente del movimiento del terreno. Es razonable basar el diseño en dicha esperanza en la mayor parte de los casos prácticos, ya que la variancia de la relación entre la respuesta estructural máxima y su esperanza durante un temblor es en general despreciable comparada con la de la intensidad máxima durante un periodo especificado.<sup>6,7</sup>

### 8.3 Efecto del suelo

Se hizo notar la dispersión en las correlaciones entre magnitud y movimiento del terreno en la estación y se señaló la influencia que, entre otros factores, pueden tener el terreno local y el comprendido entre la estación y el foco. A pesar de la selección que se ha hecho en este trabajo y en la ref 5, la variedad de las propiedades de los suelos es excesiva. La única manera de salvar este obstáculo es aumentar el acervo de da-

tos instrumentales, principalmente de temblores intensos sobre distintos tipos de terreno, y estudiar su correlación con diversas propiedades intrínsecas del material.<sup>22</sup>

#### 8.4 Propiedades de la estructura

Se simplificó el problema al suponer conocidas las propiedades de la estructura. Al emplear para diseño el criterio establecido, debe considerarse la influencia de posibles variaciones en la capacidad, amortiguamiento, periodo natural y otras propiedades significativas de la estructura, con respecto a las supuestas en diseño.

#### 8.5 Espectros inelásticos

Los espectros cuyas envolventes se estiman en este trabajo pueden reducirse de acuerdo con la ductilidad de la estructura, según se propone en la ref. 4.

### 9. RECONOCIMIENTO

El autor agradece las valiosas sugerencias de E. Rosenblueth en el curso de diversas investigaciones, cuyos resultados se han tratado de concentrar en este trabajo, orientados hacia las aplicaciones prácticas. También agradece a J. Sandoval y F. Téllez su ayuda en la parte numérica.

### 10. REFERENCIAS

1. E. Rosenblueth y J. I. Bustamante, "Distribution of structural response to earthquakes", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 88, EM3 (1962), 75-106.
2. A. Arias y R. Husid, "Influencia del amortiguamiento sobre la respuesta de estructuras sometidas a temblor", Revista del IDIEM, Universidad de Chile, 1, 3 (1962), 219-228.

3. J. A. Blume, N. M. Newmark y L. H. Corning, "Design of multistory reinforced concrete buildings for earthquake motions", Portland Cement Association, Chicago (1961).
4. N. M. Newmark, "Current trends in the seismic analysis and design of high rise structures", Symposium on Earthquake Engineering. The University of British Columbia, Vancouver (1965).
5. L. Esteva y E. Rosenblueth, "Espectros de temblores a distancias moderadas y grandes", Boletín, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, 2, 1, México, D. F. (mar 1964).
6. E. Rosenblueth, "Probabilistic design to resist earthquakes", Proceedings American Society of Civil Engineering, 90, EMS (oct 1964).
7. J. F. Borges, "Statistical estimate of seismic loading", Preliminary publication, V Congress of the Association for Bridge and Structural Engineering, Lisboa (1966).
8. N. M. Newmark y E. Rosenblueth, "Earthquake Engineering", libro que será publicado por Prentice Hall.
9. C. F. Richter, "Elementary Seismology", W. H. Freeman and Co., San Francisco (1958).
10. F. Neumann, "A broad formula for estimating earthquake forces on oscillators", Memorias del Segundo Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Tokio (1960).
11. G. W. Housner, "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", Ingeniería 32, 3, México (1962).
12. B. Gutenberg y C. F. Richter, "Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration", Bulletin, Seismological Society of America, 46, 2 (1956).



13. J. Figueroa, "Recopilación de datos de intensidades de temblores mexicanos", manuscrito inédito.
14. E. Parzen, "Stochastic Processes", Holden-Day, Inc., San Francisco (1964).
15. E. Rosenblueth y L. Esteva, "On Seismicity", Seminario sobre las aplicaciones de la Estadística en la mecánica estructural, Universidad de Pennsylvania (1966).
16. H. Raiffa y R. Schlaifer, "Applied Statistical Decision Theory", Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston (1961).
17. D. F. Lacer, "A simulation of earthquake amplification spectra for Southern California sites", III Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Nueva Zelandia (1965).
18. C. J. Turkstra, "A formulation of structural design decisions", tesis doctoral, University of Waterloo, Waterloo, Ontario (1962).
19. J. von Neumann y A. Morgenstern, "Theory of games and economical behavior", Princeton University Press (1943).
20. A. I. Johnson, "Strength, safety and economical dimensions of structures", The Royal Institute of Technology, Estocolmo (1953).
21. E. Rosenblueth, "Safety and structural design", Cap. 19, "Reinforced Concrete Engineering", editado por B. Bresler (será publicado por Mc Graw-Hill Book Co.).
22. J. H. Wiggins, "Effect of site conditions on earthquake intensity", ASCE, 90, ST2 (abr 1964).

Tabla 1  
PARAMETROS DE LA SISMICIDAD LOCAL

Región	$\alpha$	$\beta$
1	20.7	2.82
2	1.95	2.34
3	9.23	2.72
4,5,7,8,9	0.25	2.81
6	14.0	2.98
10	1.10	2.78

## APENDICE

## Ejemplo de optimización

Supóngase que en la estación del ejemplo 1 de la página 13 se construirá una estructura de acuerdo con las siguientes condiciones:

a) El periodo fundamental de la estructura se encuentra comprendido entre  $T_1$  y  $T_2$  (fig 5). Por lo tanto, el parámetro significativo para diseño será la máxima velocidad espectral. De ahí que tomemos

$\bar{y}$  = máxima velocidad del terreno para la que se diseñará la estructura.

$$c = 16, \quad k = 1, \quad q = 1.7, \quad \lambda_{\bar{y}} = (16/\bar{y})^{2.4} \times 0.00575.$$

b) El costo de la estructura se liga con la intensidad de diseño de acuerdo con la relación

$$C = C_0 (1 + g \bar{y})$$

c)  $b, d$  son constantes por unidad de tiempo

d) Se tomarán los siguientes valores numéricos:

$$C_0/b = 10$$

$$d/b = 20$$

$$g = 0.05$$

$$\nu = 0.04$$

Efectuando las integrales de las ecs 18 a 20, sustituyendo en la ec 17 y ordenándola, se obtiene, sucesivamente

$$E(B) = \frac{b}{\nu + \lambda}, \quad E(D) = \frac{d\lambda}{\nu + \lambda}$$

$$\frac{E(U) + C_0}{b} = \frac{1 - \frac{d}{b} \lambda \bar{y}}{\nu + \lambda \bar{y}} - \frac{C_0 g}{b} \bar{y} \quad (23)$$

Los valores del primer miembro de la ecuación se calcularon

para diversos valores de  $\bar{y}$ . Estos se muestran en la tabla A1. De ahí se deduce que la estructura debe diseñarse para  $v = 20$  cm/seg.

Tabla A1  
UTILIDADES ASOCIADAS A DIFERENTES  
VALORES DE LA INTENSIDAD DE DISEÑO

$\bar{y}$	$\lambda \bar{y}$	$(E'(U) + C_0)/b$
10	$1.78 \times 10^{-2}$	6.1
12	$1.14 \times 10^{-2}$	9.0
13	$9.45 \times 10^{-3}$	9.9
16	$5.75 \times 10^{-3}$	11.2
20	$3.36 \times 10^{-3}$	11.6
25	$1.97 \times 10^{-3}$	10.3
30	$1.25 \times 10^{-3}$	9.0
40	$6.3 \times 10^{-4}$	4.5
50	$3.75 \times 10^{-4}$	0.4

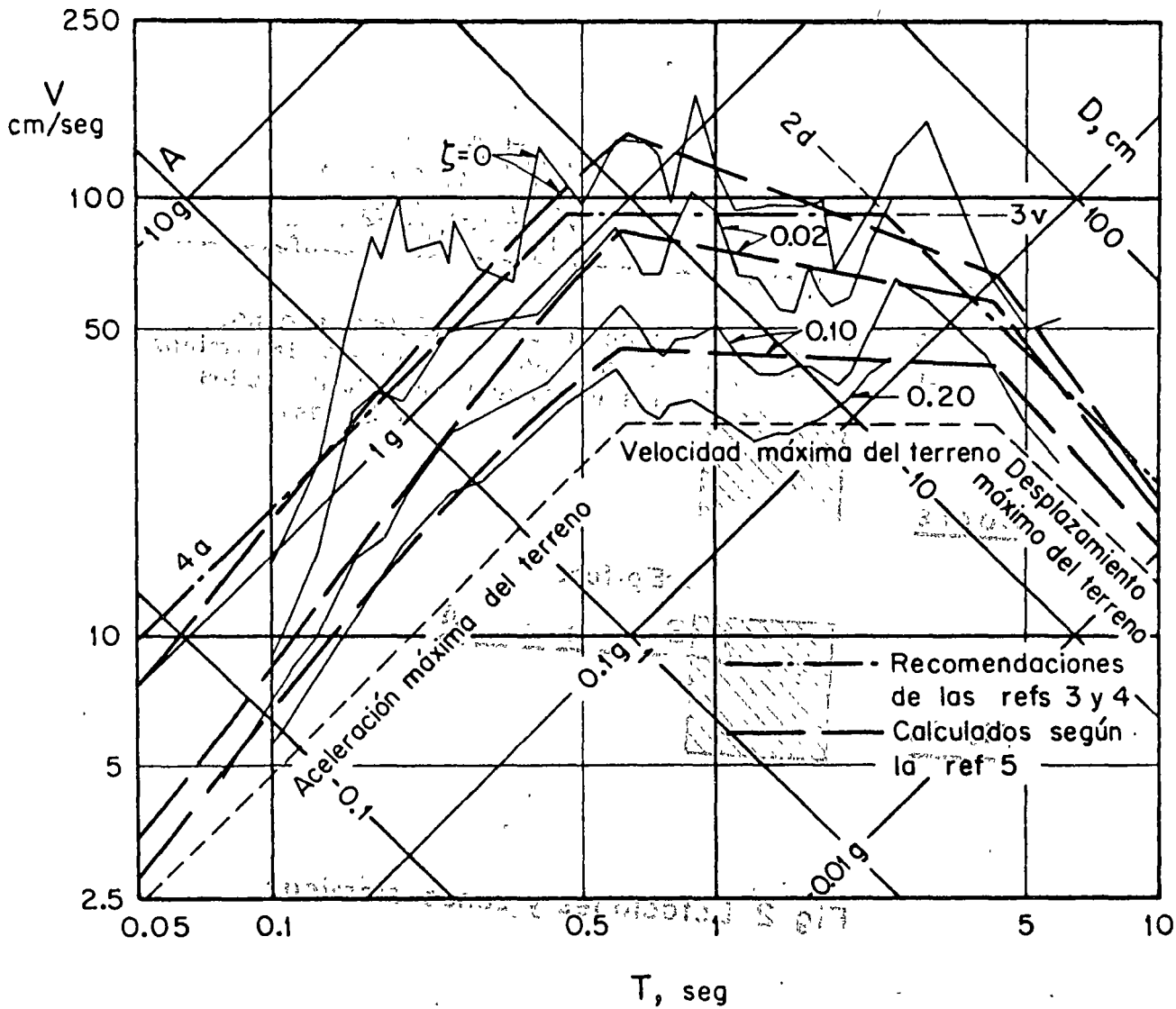


Fig 1 Relación entre movimiento del terreno y ordenadas espectrales

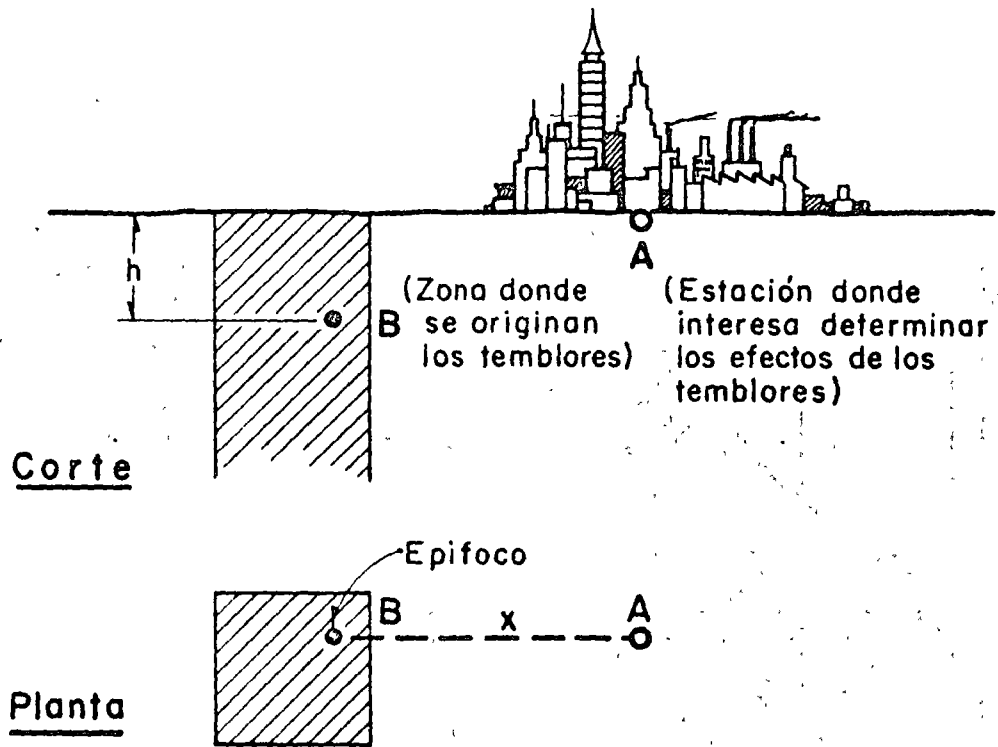


Fig 2 Estaciones y zonas sísmicas

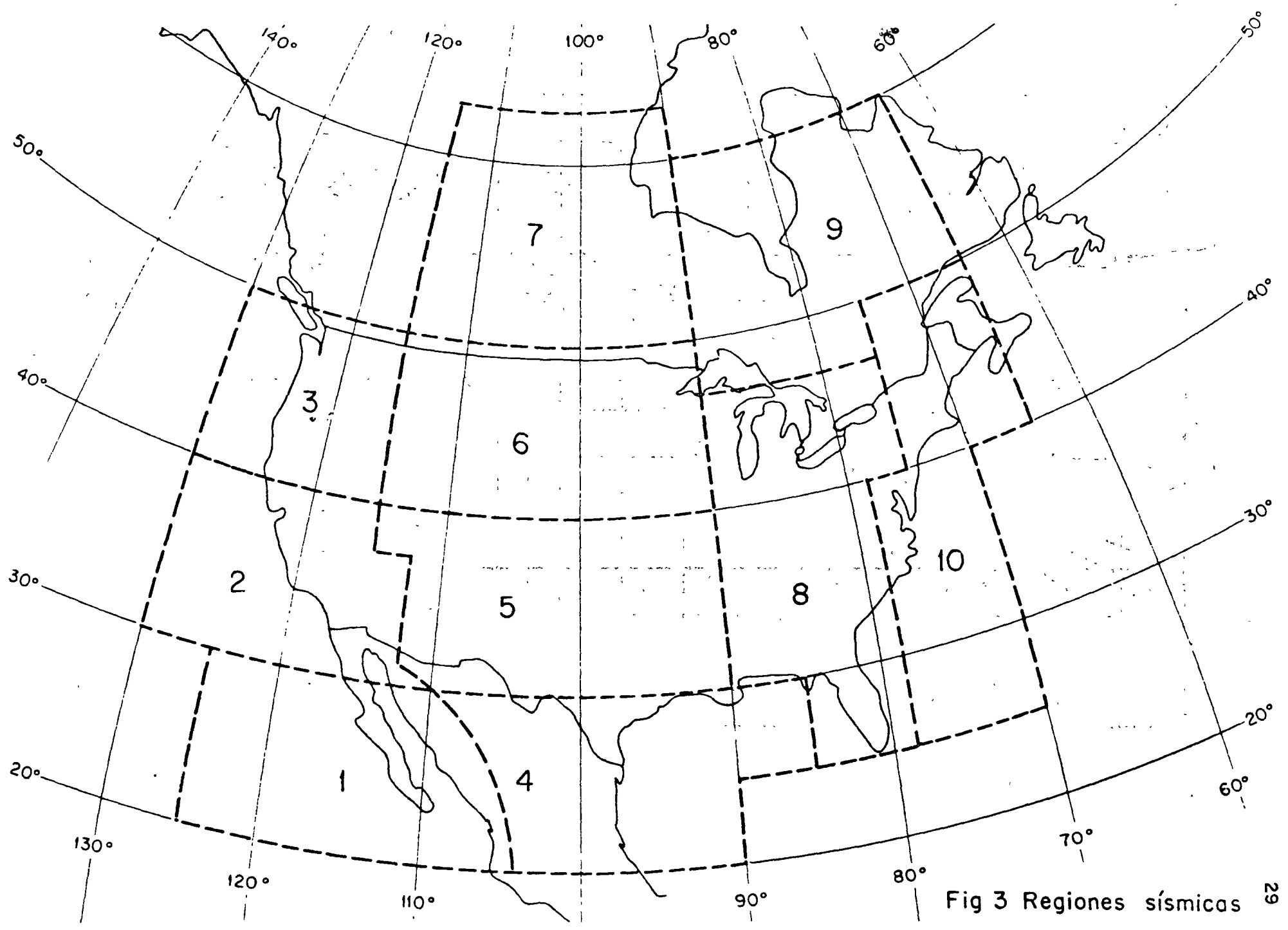


Fig 3 Regiones sísmicas 29

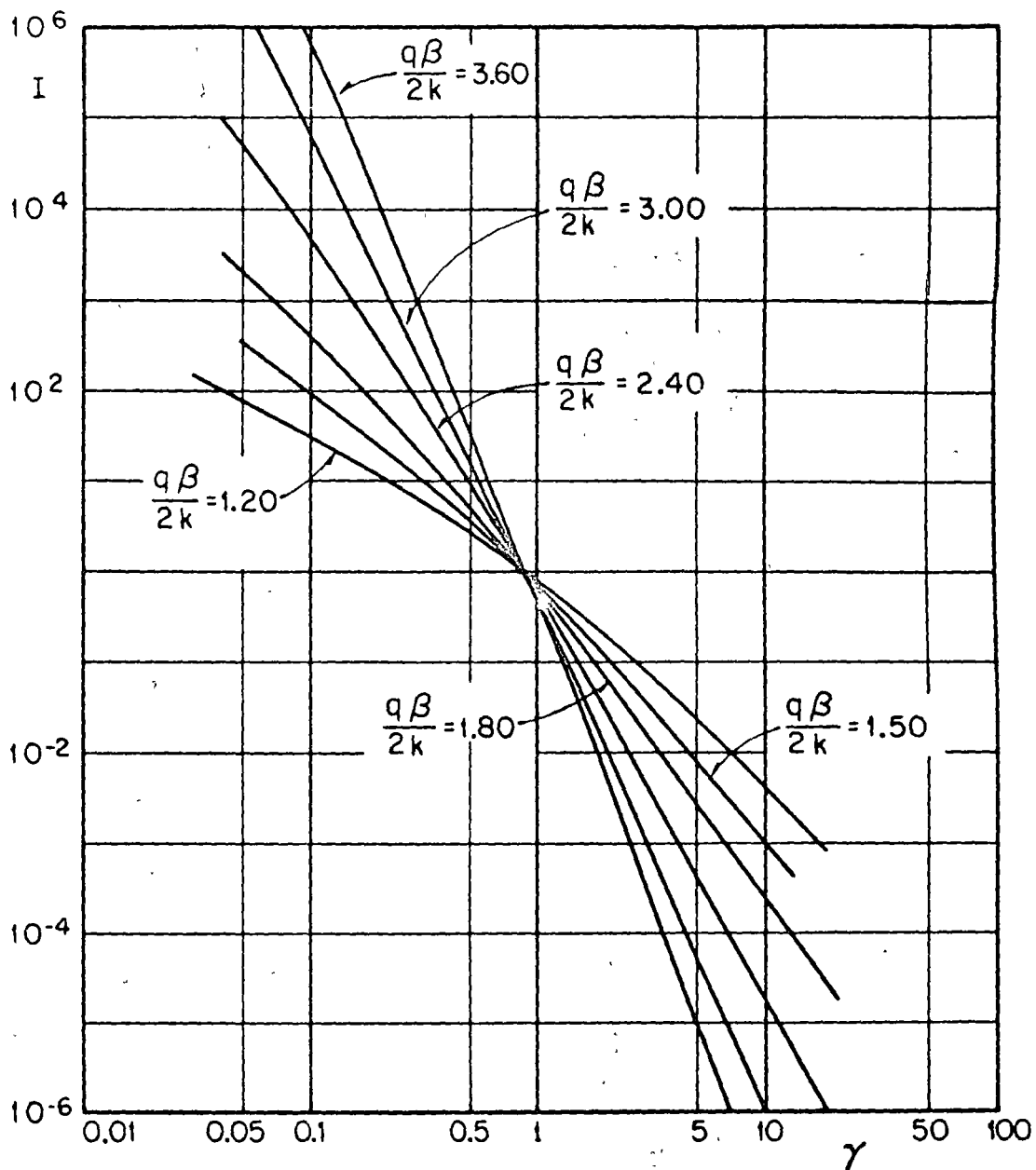
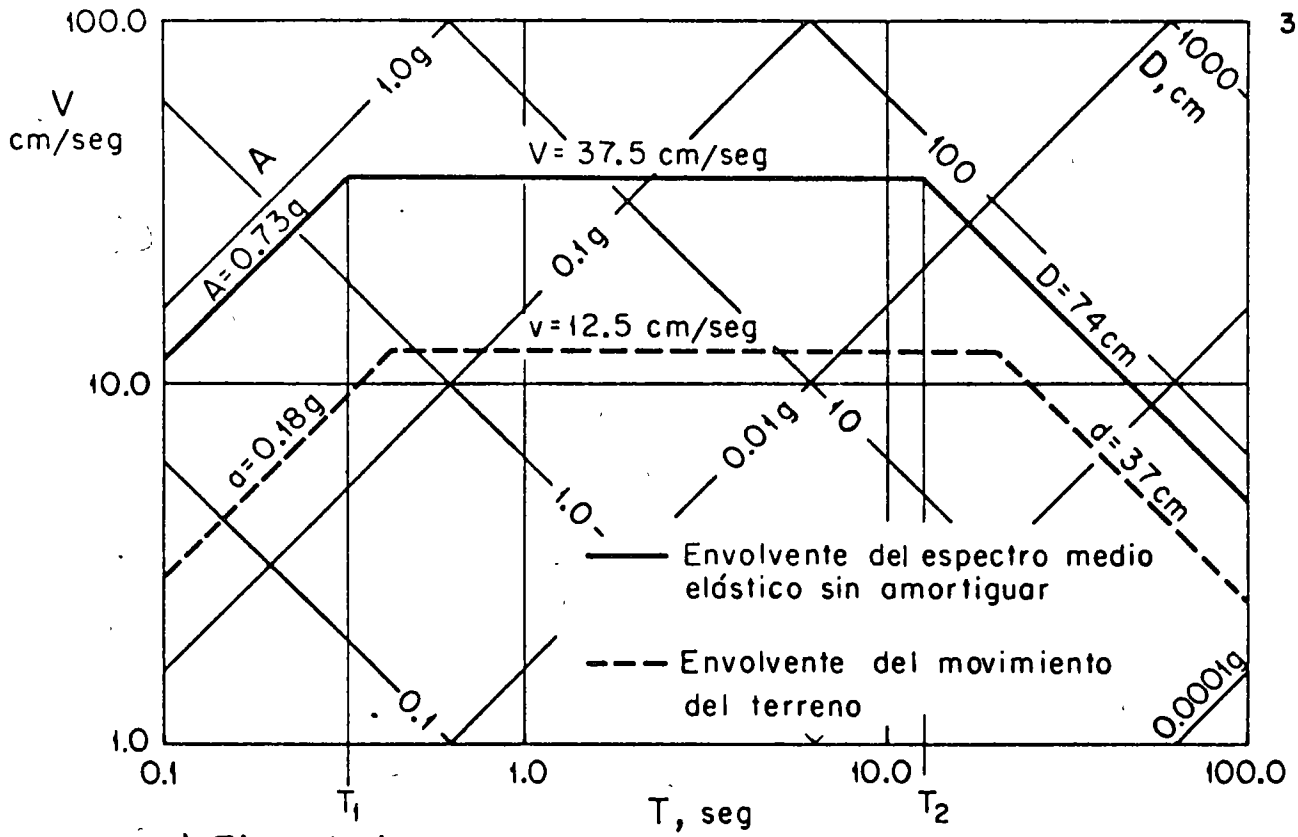
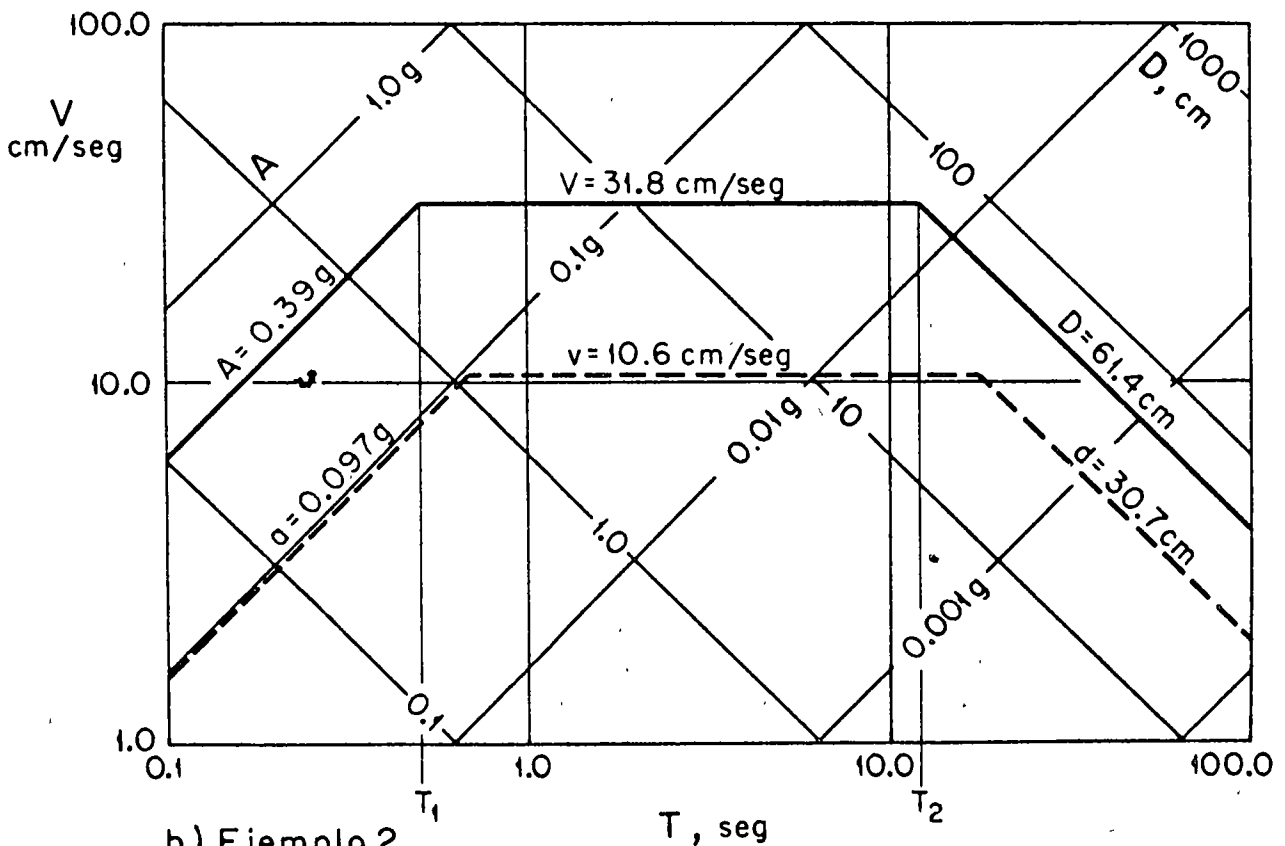


Fig 4 Valores de  $I = \int_0^1 (\gamma^2 + u^2)^{\frac{q\beta}{2k}} du$





a) Ejemplo 1



b) Ejemplo 2

Fig 5 Espectros de diseño. Periodo de recurrencia = 100 años

