

CURSO DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

FECHA	DURACION	TEMA	PROFESOR
Mar. 12	(3 HORAS)	<p data-bbox="510 162 747 191">INTRODUCCION</p> <p data-bbox="510 207 1365 462">Diseño estructural. Solicitaciones. Tipos de miembros de acero estructural. Especificaciones y reglamentos de edificios. Diseño por esfuerzos de trabajo y diseño - plástico. Factor de seguridad.</p>	M.en C. Enrique del Valle C.
Mar. 14	(3 HORAS)	<p data-bbox="510 503 1350 532">PROPIEDADES MECANICAS DEL ACERO ESTRUCTURAL</p> <p data-bbox="510 557 1365 987">Introducción Aceros al carbón. Aceros de alta resistencia y aleación baja. Aceros tratados al calor de baja aleación. Comportamiento esfuerzo-deformación. Tenacidad y capacidad de absorber energía. Rolado en frío y deformación de endurecimien<u>t</u> to. Falla frágil. Resistencia a la fatiga. Resistencia a la corrosión y a la intemperis<u>m</u> o.</p>	Ing. Felix Colinas.
Mar. 17, 19	(6 HORAS) (2 HRS. C/ DIA)	<p data-bbox="510 1031 653 1060">TORSION</p> <p data-bbox="510 1076 1365 1446">Torsión pura de secciones homogéneas. Esfuerzos de corte debidos a flexión de sec. ciones abiertas de pared delgada. Centro de corte. Esfuerzos de torsión en secciones I Analogía entre torsión y flexión plana. Presentaciones de cargas de torsión en la - practica. Diseño para flexión y torsión combinado de vigas lateralmente estables.</p>	Ing. Porfirio Ballesteros B.

FECHA	DURACION	TEMA	PROFESOR
		<p>Torsión de secciones de pared delgada cerradas.</p> <p>Torsión de secciones de pared delgada abiertas.</p> <p>Pandeo por torsión.</p> <p>Problemas.</p>	
Mar. 31	(3 HORAS:)	<p>MIEMBROS A TENSIÓN.</p> <p>Criterio de diseño</p> <p>Sección neta.</p> <p>Barras a tensión</p> <p>Efecto del espaciamiento de agujeros en la - sección neta.</p> <p>Criterio de diseño.</p> <p>Recomendaciones de diseño - AISC 1971.</p> <p>Problemas.</p>	Ing. José Luis Sánchez M.
Abr. 2, 4	(6 HRS.) 2 HRS. C/ DIA).	<p>COLUMNAS Y PLACAS.</p> <p>Carga crítica de Euler!</p> <p>Pandeo inelástico.</p> <p>Esfuerzos residuales.</p> <p>Gráficas de resistencia de columnas considerando esfuerzos residuales.</p> <p>Curva de resistencia.</p> <p>Ecuaciones de diseño del AISC.</p> <p>Longitud efectiva.</p> <p>Diseño de secciones WF bajo compresión axial</p> <p>Formulas de diseño.</p> <p>Efecto del esfuerzo cortante.</p> <p>Diseño de miembros en celosía.</p> <p>Introducción a la estabilidad de placas.</p> <p>Resistencia de placas bajo compresión axial.</p> <p>Recomendaciones elásticas de pandeo del AISC.</p> <p>Recomendaciones del pandeo inelástico del - - AISC.</p> <p>Recomendaciones del AISC para considerar el - comportamiento de placas antes y después del-</p>	M. en C. Oscar de Buen L. de H.



DURACION

TEMA

PROFESOR

pandeo.

Pandeo local de miembros a compresión.
Problemas.

Abr. 7,9

(6 HRS.)

VIGAS.

Flexión simple de secciones simétricas.
Criterio de diseño por resistencia.
Deflexiones.
Corte en vigas roladas.
Pandeo local del alma y placas de apoyo.
Agujeros en vigas.
Teoría general de flexión.
Flexión bi-axial de secciones simétricas.
Polígono del módulo de sección.
Secciones asimétricas.
Problemas.

Ing. José Luis Sanchez Mtz.

Abr. 11

(3 HRS.)

FLEXO COMPRESION.

Planteamiento teórico de la flexocompre--
sión en el plano.
Solución aproximada del problema anterior.
Recomendación del AISC - 1971 para diseño.
Problemas.

Ing. Felix Colinas.

Abr. 14,16

(6 HORAS)
(3 HRS./
C/DIA).

TRABES FORMADAS POR PLACAS.

Estabilidad de las placas del alma.
Estabilidad de los patines
Comportamiento del alma posterior al pandeo
Resistencia última a la flexión con comporta
miento del alma posterior al pandeo.
Resistencia última al corte con comportamien
to del alma posterior al pandeo.
Esfuerzos combinados de corte y tensión.
Recomendaciones del AISC para seleccionar --
alma, patín, atiezadores transversales inter
medios y de apoyo.
Dimensionamiento de secciones.

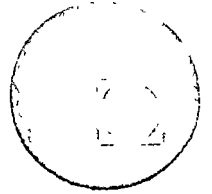
Ing. Felix Colinas.

FECHA	DURACION	TEMA	PROFESOR
		Procedimientos.	
13, 21, 23	(1 1/2 hrs)	CONEXIONES SOLDADAS Y ATORNILLADAS Procesos básicos. Soldabilidad del acero estructural. Tipos de juntas de soldadas Tipos de uniones soldadas entre placas Símbolos de soldadura. Factores que afectan la calidad de conexio- nes soldadas. Posibles defectos en uniones soldadas. Inspección y control. Aspectos económicos de miembros y conexio- nes soldadas. Juntas con pernos de alta resistencia.	Ing. Enrique Martínez Romo

Coordinador: Dr. Porfirio Ballesteros B.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

INTRODUCCION

ING. MARCO A. TAPIA L.
DR. PORFIRIO BALLESTEROS

INTRODUCTION

1.1 STRUCTURAL DESIGN

The process of designing a structure is often thought of as arranging elements or forms in such a way that the expected loads are carried safely. Whereas the ability to support load is perhaps the most important requirement in design, there are three over-all objectives to be met if a structural design is to be satisfactory. These objectives are:

1. To provide a structure to meet *functional requirements*
2. To select structural elements and frames to *support loads*
3. To satisfy *economical requirements*

These three concepts were stated in the following manner when the American Society of Civil Engineers prepared its *Commentary on Plastic Design*: "An engineering structure is satisfactorily designed if it can be built with needed economy and if, throughout its useful life, it carries its intended loads and otherwise performs its intended function."¹

In the process of meeting these design objectives, there are three principal technological aids to assist in arriving at a satisfactory solution. These "tools" are:

Knowledge of Material Properties. The yield point and modulus of elasticity are probably the most important of the material properties. These and others are described in Art. 2.2.

Analysis of Structural Strength. The two basic design techniques available are *allowable stress design* and *plastic design*.^{*} As will be seen

^{*} A Glossary is included at the end of the book as part of the Nomenclature.

later when these methods are defined, described, and illustrated, the former leads to a trial-and-error process of selecting trial member sizes, followed by the analysis of the structure to see if the allowable stresses are exceeded. In the plastic method, the design process is more direct.

Codes, Specifications, Standards. These classify building types, provide legal limits of loading, and govern zoning. Another of their functions is to assure safety. Specifications often serve as a guide to checking local details; they facilitate design through tables and charts and are frequently the source of standard forms and details that are known to the profession, thus contributing to economy of design and construction.

There are certain logical steps into which the design process falls. Although there are no hard-and-fast rules in this regard, these steps are usually as follows:

Performance Requirements. It is essential first to establish the purpose for which the structure will be used. This is especially true if the size, form, or use of the structure departs from the usual pattern that has seen service in the past. An example would be in the design of a large structure to house launching rockets where the requirement to operate doors under all circumstances places unusual deformation limits on the structure. Another aspect of the performance requirement is esthetics. Civil engineering works by their very nature are always in the public view and frequently tend towards the monumental; they always contribute to and sometimes dominate their surroundings. It is thus essential that the appearance of the structure be carefully considered; indeed, there are times when esthetics may constitute a major design criterion, as in the case of a bridge at a point of scenic interest.

Structure and Loading. Hand in hand with the functional requirement goes the development of the structural form to be used. The major forms of structures and structural elements are noted elsewhere in this chapter and are examined in detail in Chapters 3 and 4. The type of loads acting on the structure also is considered at this stage since the load and the structure are often mutually dependent. The loads that are to be considered for the different types of structures are given in Chapters 3 and 4. Along with the functional requirement and the development of structural form to support the loads goes the necessity of considering the cost of the structure. It is an essential aspect of structural design.

Loading Conditions. The selection of loading conditions follows the determination of the type and magnitude of the loads that act on the structure. It involves, in the main, a decision as to which loads act in

combination with the dead load. Some codes specify the loading conditions that must be considered, but basically it is part of the designer's responsibility to specify the loading conditions. Occasionally, the structural form has a very significant influence on the loading conditions that must be considered. Again, where the form is unusual, more attention must be given to this feature. Details concerning loading conditions are given in Arts. 3.3 and 4.5 and are illustrated in designs in Chapters 20, 21, and 22.

Preliminary Design. The initial selection of member sizes is called "preliminary design." As indicated earlier, it is a necessary step in allowable stress design, since the initial estimate of section size must be checked to see if the allowable stress is exceeded. In plastic design, this step frequently involves no more than a determination of the *ratios* of required plastic moment of each member.^{1,2} Preliminary design techniques for bridges are discussed in Art. 4.7.

Analysis. With the information obtained in the previous step, an analysis is made to determine points of critical stress and the required section modulus or plastic moment capacity of each member.

Selection of Section. This step consists of the final or revised selection of size and shape of members to be used in the design. The selection is based on an analysis of structural strength which leads to the required section property—which could be the section area, the section modulus, or the plastic modulus.

Secondary Design Items. Prior to completing a design, a most important final step is to check on such factors as shear, local buckling, bracing, column buckling; to design connections; and, where required, to examine deflections.

Some of the steps listed and described above may be bypassed, and frequently the step-by-step sequence will need to be modified. For example, in the interests of meeting an immediate objective which involves the national interest it may be necessary to give less attention to finding the most economical design and more attention to some other aspect. It is in a circumstance such as this that reliance must be placed upon judgment—a quality that is gained through experience, but which will have a better basis when founded on an understanding of structural behavior and systems. It is in part for this reason that such stress is laid in this book on the behavior of structures.

1.2 TYPES OF STRUCTURAL MEMBERS AND FRAMES

The various types of steel structures are listed and classified in the tabulation below. In some ways the table reflects a consideration of

the function of the structure since the form frequently is controlled or influenced by the intended use.

Frames	Plate Girders
Industrial buildings	Bridges
Multi-story buildings	Through
Bridges	Deck
Trusses	Building girders
Bridges	Plate-Type (Surface) Structures
Through	Orthotropic bridge decks
Deck	Shells
Pony	Folded plates
Buildings	Deck panels
Roof	Wall panels
Floor	Arches, Rings
Bracing	Towers
	Space Frames
	Suspension Structures
	Cable roofs
	Suspension bridges
	Cable-supported structures

According to a somewhat different classification system, there should be added to the above list two other groups: marine and harbor structures, and structures in space. One of the unusual design features of the latter is the influence of a gravity force different from the usual one.

Steel frames make up the principal load-carrying elements of many buildings and bridges; this is also true of trusses, though fewer of these are used as the main structural form in buildings. The Empire State Building, shown in Fig. 1.1, is the world's tallest building, the load-carrying structure being a steel frame. Although some plate girders are used in buildings, this form is found most frequently in bridges. Marine and harbor structures can include a number of the other types of structural members and frames, but their principal characteristic in this regard is the type of loading involved.

A plate-type structure that is being used more frequently in this country and abroad is the orthotropic plate, a form of construction in which floor beams, stringers, and traffic deck all form a single structural load-carrying unit. The term "orthotropic" is a contraction of "orthogonal" and "anisotropic," and thus conveys the concept of different properties in the longitudinal and transverse directions. Stiffened and unstiffened plates are often the main load-carrying elements in marine structures, ships, aircraft, tanks, tunnels, and casings. Shells and stiffened rings are essential features of these same forms at times, but

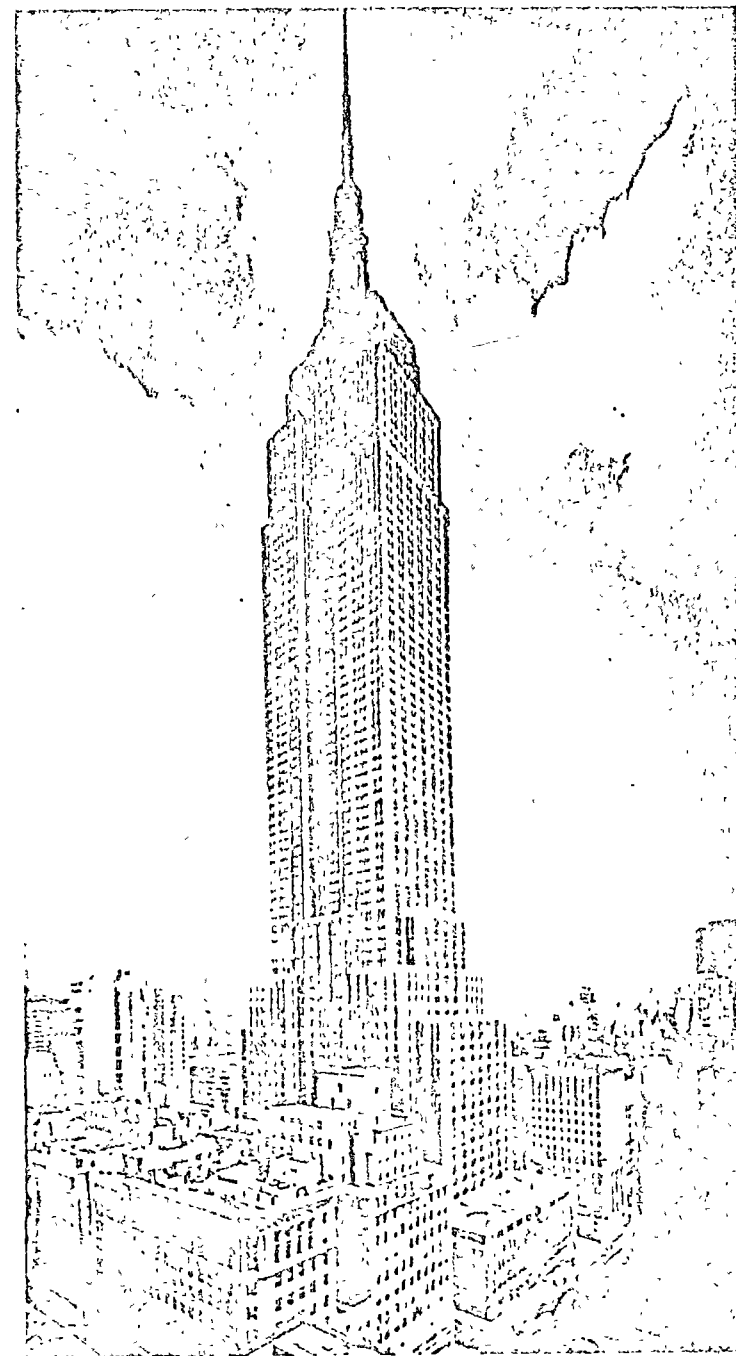


Fig. 1.1 Empire State Building

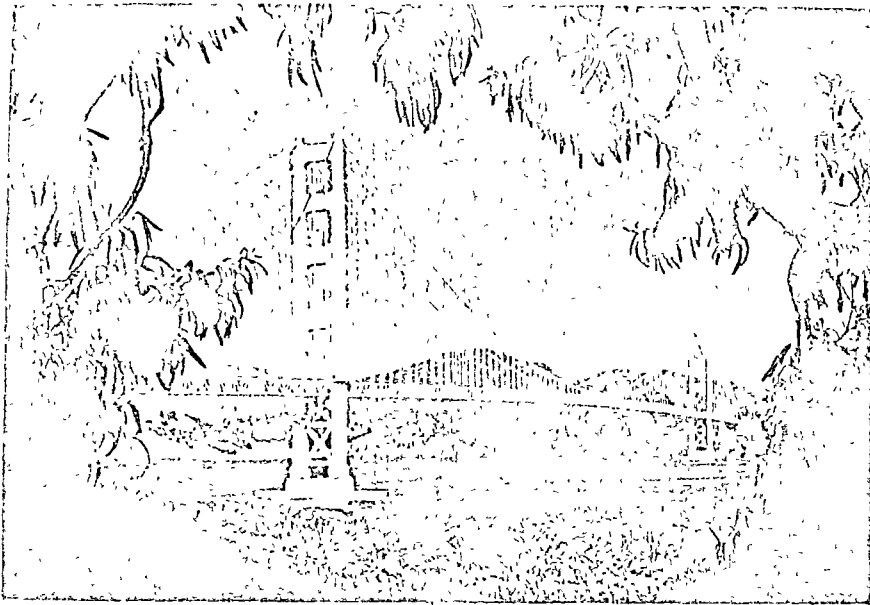


Fig. 1.2a Golden Gate Bridge (Courtesy of AISC)

shells are also commonly used in special building forms. Towers are usually vertical trusses. The term "space frame" covers those rigid and trussed structures whose analysis and design involve a consideration of the form as a three-dimensional structure. Suspended structures are found both in buildings and bridges; two examples of suspension bridges are shown in Figs. 1.2a and 1.2b.

The scope of this book is restricted to but a few of the types of structural members and frames tabulated above, namely, to buildings and bridges of the first three categories: frames, trusses, and plate girders. Chapters 3 and 4 give further discussion of the structures listed in the tabulation as well as details concerning the types of members and frames that make up buildings and bridges.

In the light of the foregoing restriction, it is next of value to examine in a general way the principal types of structural elements which are used in the most common buildings and bridges. Table 1.1 designates opposite the different principal structural elements (tension members, beams, compression members, connections) the type of structure in which the element would be found. To these the main listing adds certain governing failure modes (frame instability, local buckling, and fatigue) which enter into a consideration of various structures. Corresponding forms and common loading conditions are shown to the right in the table.

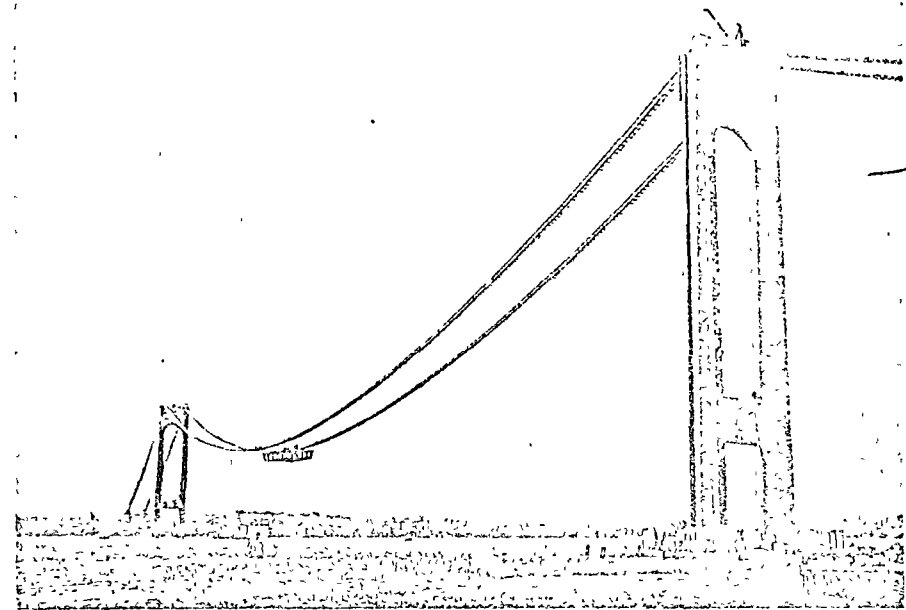


Fig. 1.2b Verrazano Narrows Bridge Under Construction (Courtesy of Triborough Bridge and Tunnel Authority)

1.3 HISTORICAL NOTES

An effort has been made in a number of the chapters of this book to include a brief historical account of developments of structural form and methods of design. In order to relate these to one another and to provide a broad perspective of the historical record of steel structures Table 1.2 is presented, the material being based in part on Refs. 1.3-1.9. This tabulation contains information in four principal categories: (1) the major fundamental concepts upon which design theory rests; (2) major developments in connection with materials and manufacturing or fabricating processes; (3) the development of specification information; and (4) highlights in structural applications.

Hooke's law and Euler's formula provided the basic concepts upon which much of the early work was based. It was not until many years later (and only fifty years ago) that any *conscious* attempt was made to utilize the ductile characteristics of steel. As has been true throughout history, many buildings and bridges were built before formal specifications were available, and this has been true even in recent years for some types of structures and materials. Engineers have been prompt to use new materials and techniques as soon as they have been developed

Table 1.1 Structural Elements

	Industrial frames	Multistory frames	Bridge frames	Trusses	Plate girders	Forms and loadings
Tension members	X	X	X	X		
Beams	X	X	X	X		 (shapes as above)
Compression members	X	X	X	X		 (shapes as above)
Bending and compression	X	X	X	X		 (shapes as above)
Frame stability	X	X	X			
Local buckling	Flanges, webs, stiffeners					
Fatigue	Elements under severe cyclic load					
Brittle fracture	Elements under adverse combination of temperature, material and design conditions.					Conditions in which tensile stresses predominate; tri axial tension
Bolted, riveted joints	X	X	X	X	X	
Welded connections	X	X	X	X	X	
Composite beams	X	X			X	

Table 1.2 Historical Outline of Developments in Steel Structures

1676	Hooke's law developed
1744	Buckling of bars (L. Euler)
1786	Tests by Paine of cast-iron arch bridge models ^{1, 6}
1820	Cast iron columns used in Philadelphia building
1823	Navier formulated differential equation for buckled plate
1828	Puddle steel bridge in Vienna, Austria
1840	First iron truss in U.S. (Baltimore and Ohio Railroad)
1843	Wrought iron lighthouse built on Block Island
1847	Squire Whipple presented stress analysis of truss systems
1853-58	First building with wrought iron frame (Cooper Union six-story frame)
1856	Steel first made in U.S.
1862	Bessemer steel bridge, Holland
1869-74	Cast alloy-steel double-deck railroad bridge, St. Louis
1873	First tabulated values of properties of rolled shapes ¹⁻⁹
1876	Eiffel Tower
1877	First specifications in U.S. (individual consulting engineers and railroad companies)
-1900	
1879	First all-steel (Bessemer) railroad bridge, Glasgow, Missouri
1881	Electric arc welding introduced
1884	First building with steel frame (Home Insurance Co. Building, Chicago, designed by W. Jenney)
1888	Riveted connections used in Tacoma Building in Chicago
1893	Formation of Office of Road Inquiry, Dept. Agriculture (forerunner of Bureau of Public Roads)
1907	Grey mill installed at Bethlehem, Pa., first W shapes rolled in 1908
1909	First building erected with W shape (American Optical Co., Worcester, Mass.)
1914	First tests to demonstrate "plastic hinges" conducted by Kazinezy in Hungary
1914	AASHTO first organized
1921	AISC first organized
1923	First AISC Specification for buildings issued (written by five practicing engineers; chairman, Prof. G. Swain of Harvard)
1926	First AASHTO Specification issued
1936	Studies of plastic design initiated at Bristol University by J. F. Baker, later (1944) at Cambridge University
1936	First revision in AISC Specification (minimum required yield stress for ASTM A7 steel raised from 30 to 33 ksi)
1945	Provision made in AISC Specification for welded connections, refinements for rivets and bolts, lateral buckling formula, "20% increase" provision
1946	Research on ultimate strength of structures and components, commenced at Lehigh University. Mathematical theories of plastic behavior of materials studied at Brown University
1946	First AISI Specification
1949	First specification for high-strength bolts
1957	First plastic design in North America (D. T. Wright)
	First plastic design in U.S. (W. A. Milek)
1961	Complete revision to AISC Specification
1963	Revision to AISC, AREA, AWS Specifications

of their virtue. Various consulting engineers had their own building specifications and the individual railroads had their own bridge specifications. Examples of the latter were the specifications for metallic bridges of the Atcheson, Topeka, and Santa Fe Railroad (1895) and the Canadian Pacific Railroad specifications (1901).^{1,4} In 1877 there was issued a general specification for a combined railway and highway bridge at Killbourn City, Wisconsin.^{1,5} Naturally, rapid acceptance and use is possible only as specifications and codes incorporate new provisions.

Perhaps the most striking feature of the events shown in Table 1.2 is the remarkable advance of steel construction over a relatively short period. It was only about one hundred years ago that steel was first made. Wide-flange (WF) shapes became available fifty years ago. Specification-writing groups have been in existence but a short while, the first of the major groups being AREA (1905) followed by AASHTO (1914) and AISC (1921).^{*} The first AISI Specification was issued in 1916. Intensive research into the maximum strength of steel structures began in this country only very recently and yet the results of much of that work now find application in even the most routine of designs. With such a background of recent rapid advance, it must be expected that there will be even greater developments in the future.

Not the least significant development is the relative frequency with which specifications are being changed to keep pace with new advances in theory and technology. The AISC Specification was first issued in 1921 and significant changes were made in 1936, 1945, 1961, and again in 1963. The AASHTO Specification, first available in 1926, was printed and revised in 1935, 1941, 1944, 1949, 1953, 1957 and in 1961.

Because specific provisions change rapidly, primary attention is given in this book to the behavior of structures (and especially to the theory predicting that behavior) rather than to the specific provisions of specifications that are susceptible to revision.

1.4 BEHAVIOR OF STEEL STRUCTURES

A brief, general review of the behavior of steel structures is given below. It will be seen that, except for such modes of failure as fatigue and fracture, there is remarkable similarity in the behavior of different elements and structural forms.

1. Material

The two main characteristics describing the behavior of a structural material are *strength* and *ductility*. Figure 1.3 shows the stress-strain

^{*} Specifications and specification-writing groups are referred to in abbreviated form; they are described more completely in Art. 1.7.

curve that is characteristic of most steels with structural applications. Such a curve is obtained from a tension coupon test. The figure notes the four typical ranges of behavior: the elastic range, the plastic range (during which the material flows at constant stress), the strain-hardening range, and the range of strain at and beyond the ultimate stress during which necking occurs in a tensile bar, this range terminating in fracture.

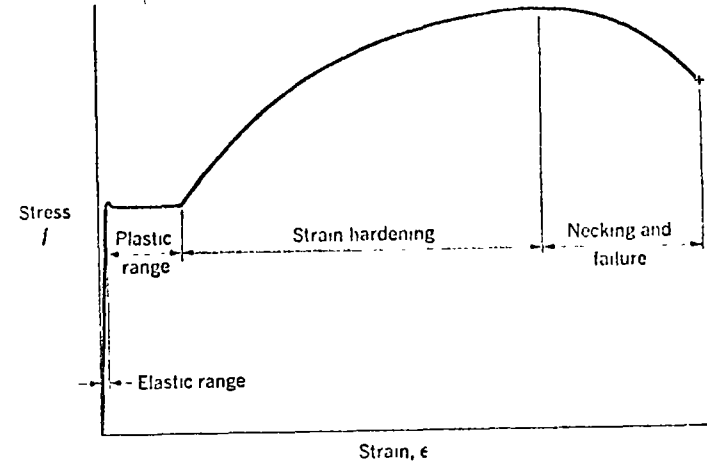


Fig. 1.3 Stress-Strain Curve for Structural Carbon Steel

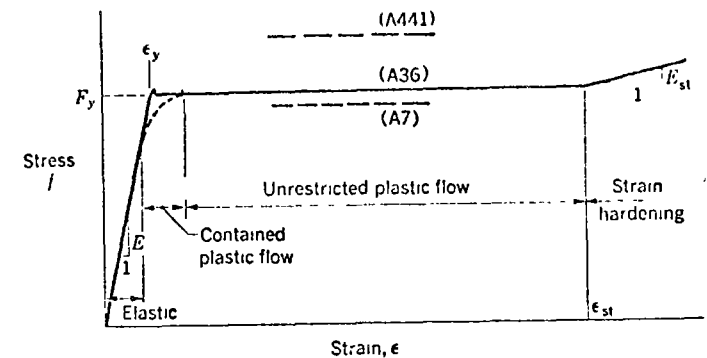


Fig. 1.4 Initial Portion of Stress-Strain Curve

Figure 1.4 shows the initial portion of Fig. 1.3 to an expanded scale and in somewhat idealized form. The curve is drawn for ASTM A36 steel with a yield stress level F_y of 36.0 ksi. The yield stress levels for ASTM A7 and for ASTM A41 are also shown. The following points are to be noted in Fig. 1.4:

1. After the initiation of yield there is a flat "plateau," and the stress at this level is termed the "yield stress level." It is one of the characteristic features of the structural steels, especially structural carbon steel.

2. The extent of the yield zone (or "plastic range") is considerable. The value of ϵ_t is about 10 times ϵ_y for structural carbon steel (A7 and A36), varying from a low of about 6 to a maximum of about 16.

3. At the end of the plateau strain-hardening begins, with consequent increase in strength. The magnitude of the strain-hardening modulus and its variation is expressed by $1/100 < E_{st}/E < 1/30$.

4. Some coupon tests do not show an upper yield point. The result is a gradual transition from the elastic to the plastic region, as shown by the dashed curve. This is also the condition most usually encountered in full-size members, although full-size shapes of structural carbon steel tested in tension or compression do show an upper yield point if annealed and centrally loaded.

The region designated as the plastic range in Fig. 1.3 is thus made up, in fact, of two regions. One of these is called "contained plastic flow"; although there is plastic flow in part of the cross section, the deformation is restricted or "contained" by the remaining elastic part. The other region is characterized by the term "unrestricted plastic flow"; as shown in Fig. 1.4, it is a region in which the strains increase markedly at a constant yield value up to the point of strain-hardening.

2. Behavior of Structural Elements

The characteristic behavior of structural elements (beams, columns, and connections) is similar to that of the idealized coupon test which was sketched in Fig. 1.4. Such elements also exhibit an initial elastic region followed by one of contained plastic flow and one of unrestricted plastic flow.

Tension. The behavior of a tension member is shown in Fig. 1.5 on a load-elongation basis. Two curves are shown: one is the complete curve to rupture, and the other is the initial part to expanded scale. The specimen is an 18-in. plate, 1 in. thick, loaded in tension. The average stress at which local yielding first started was about half the load at which unrestricted plastic flow developed.

Local plastic flow can and usually does commence at an average stress which is less than the yield value. The reason for this usually lies in the fact that perfect alignment of load seldom exists in practice, and fabrication operations may introduce a variation in cross-sectional characteristics. Unless a member is stress relieved, it will contain residual stresses—internal stresses that are introduced in the member during manufacture or fabrication; upon application of external load their combined effect will cause local yielding.* On further loading, the entire

*Residual stresses are of primary importance in buckling problems and are discussed in Art. 9 7.

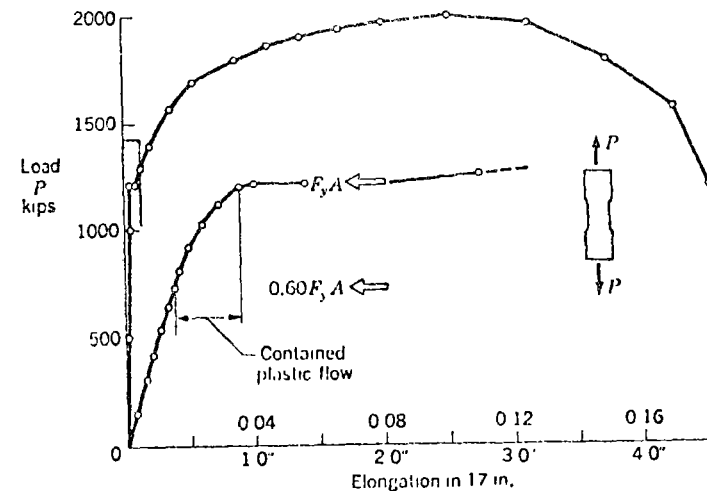


Fig. 1.5 Typical Behavior of Tension Member

cross section eventually yields at a load corresponding to the coupon yield value. The point of local yielding corresponds to the onset of "contained plastic flow" sketched in Fig. 1.5. It ends with the plastification of the entire cross section and is followed by unrestricted flow.

Similarly, a tension member that is slightly crooked will yield locally at one edge before the average yield stress is reached. Eventually, however, the entire section will yield at $P/A = F_y$.

A plate with a hole exhibits this same phenomenon and illustrates especially the region of contained flow. Due to stress concentrations, local yielding will commence at the edges of the hole (stage 1 of Fig. 1.6) and initiate flow. The corresponding point on the load-elongation curve

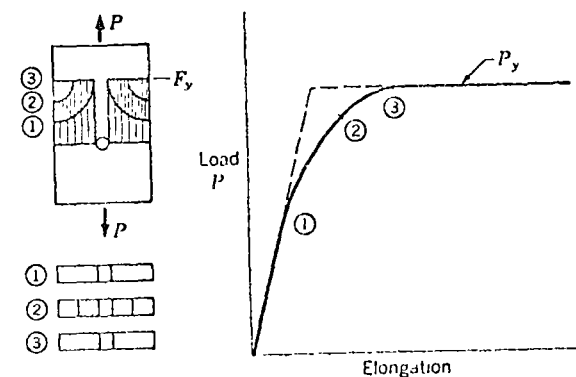


Fig. 1.6 Tensile Stresses and Deformation in Plate with a Hole

is shown in Fig. 1.6. On further loading, an intermediate condition is reached (stage 2) with additional fibers brought to yield; however, the elastic part of the member "contains" the deformation until further load is applied (see sketch of yielded cross section). Finally, at stage 3, each fiber has reached the yield value, and unrestricted plastic flow commences.

The point at which contained plastic flow commences could be termed the "proportional limit" of the member, and in light of the discussion above it is evident that there will be wide variation in its value. However, the load which terminates this region and marks the beginning of unrestricted plastic flow is one that is calculable and corresponds to a real limit of usefulness of the member, namely, a significant and relatively uncontrolled elongation. Thus, the allowable stress for a tension member (in the instance of the AISC Specification: $F_t = 0.6F_y$, as sketched in Fig. 1.5) is based not on the proportional limit (where contained plastic flow commences) but instead it is based upon $P/A = F_u$, which marks the point at which unrestricted plastic flow begins.

Bending. Figure 1.7 shows a typical moment-curvature relationship for a "compact" shape.^{1,10} (See Art. 7.7.) Here again is a region of contained plastic flow. In part it is the result of the early yielding caused by residual stresses and stress concentrations, and in part it is the result of the gradual plastification of the cross section as deformation is continued. M_y is the moment at first yield, M_p is the plastic moment, and ϕ_{st} is the curvature at which strain-hardening commences. A curve such as this is obtained if the member is bent under pure moment.

Following the plastification of the cross section, a region of unrestricted plastic flow ensues; this action characterizes the "plastic hinge," which is one of the fundamental concepts of plastic design.

As in the case of tension members, the "proportional limit" is subject

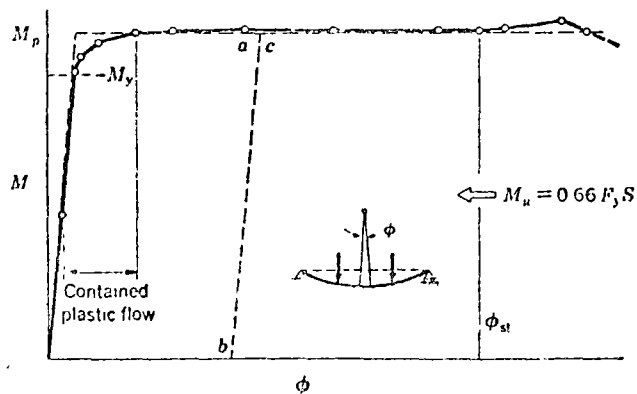


Fig. 1.7 Typical Behavior of Bending Member^{1,10}

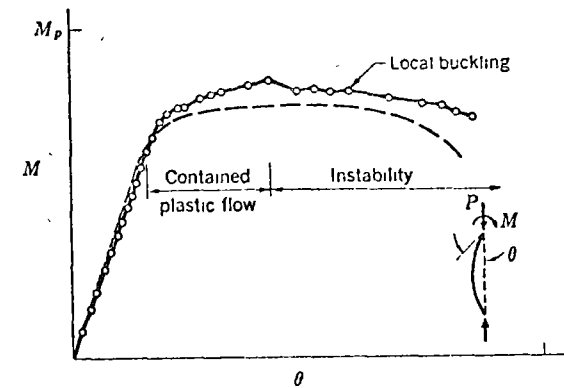


Fig. 1.8 Typical Behavior of Beam-Column^{1,11}

to wide variation and cannot, in fact, be defined sufficiently to constitute a design criterion. The plastic limit M_p , however, is not subject to such variation and does constitute a real limit of usefulness.^{1,2} The allowable or working moment M_w , according to the AISC Specification (and shown in Fig. 1.7 as $M_w = 0.66F_y S$), is thus based on the onset of unrestricted plastic flow, not on "first yield."

The dotted lines $a-b-c$ in Fig. 1.7 show the behavior to be expected if a member is unloaded after reaching the plastic region and then is reloaded. The relationship follows the original elastic slope, and the effect of the prior plastic deformation is obliterated insofar as subsequent reloading is concerned. The post-yielding behavior is thus elastic for subsequent loads less than the maximum value previously attained.

Beam-Columns. Figure 1.8 shows the typical behavior of a beam-column.^{1,11} Again the region of contained plastic flow is evident; its upper limit represents a suitable maximum to which a factor of safety may be applied for design. In this case the limit is defined by stability.

3. Behavior of Rigid Structural Frames

If the load-deformation behavior of an indeterminate structure is observed, it is found that the resulting curve is remarkably similar to the curves shown above for beams and beam-columns. This has been done in Fig. 1.9 for a single-span portal frame; the dashed line represents the theoretical calculation, and the connected points show the result of the test.^{1,12} It is a gabled frame of 40-ft span, loaded as shown in the inset with concentrated loads simulating uniformly distributed vertical and horizontal loading. The abscissa is the vertical deflection at the peak of the gable.

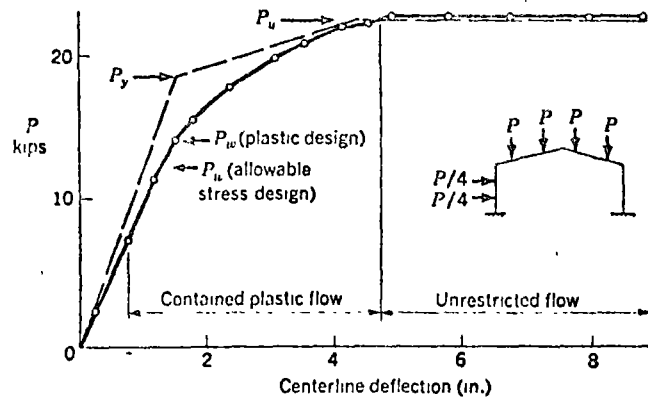


Fig. 1.9 Load-Deflection Curve of a Rigid Frame^{1,12}

Figure 1.9 illustrates the typical behavior of a rigid frame. There is an initial elastic region, but the inelastic region of contained plastic flow is the dominant one both on the load scale and on the deflection scale. Actual yielding begins at a load very much lower than the hypothetical yield load P_y ; on the other hand, the load at which unrestricted plastic flow commences is in remarkable agreement with theory. The working loads that would be permitted on this test structure according to allowable stress and to plastic design are also shown in this figure, the latter being based on the attainment of maximum plastic strength.

4. Fatigue and Fracture

Two modes of failure of steel structures are of quite a different nature from those discussed thus far. One is failure by fatigue as the result of application of many cycles of stress; the other is failure due to brittle behavior of the material as a result of adverse combinations of temperature, material, and design conditions. Although instances of such failures are rare, special measures are taken to avoid them because of the serious consequences that may be involved. In the case of fatigue, an adjustment in working stresses frequently is made; but when the condition is known to exist, the greatest attention is given to design and material conditions, especially in the loading region where failure would be expected. Similar attention is given when brittle behavior is a possibility.

The deformation of a structure that would be influenced by these two modes of failure is not affected at loads below the failure load; the behavior follows precisely the elastic and contained plastic regions previously described, except for the sudden failure.

5. Summary

In summary, Fig. 1.10 shows the typical behavior of a steel structure under load. The heavy solid line that reaches "maximum plastic strength" is the typical behavior of a structure not limited by fatigue, fracture, or instability, or subject to a prescribed maximum deflection limit (these limitations being shown by dashed excursions from the heavy line). Shown also are the three regions that are observed in the behavior of a structure under load. The elastic region is frequently very limited; it is followed by the region of contained plastic flow whose onset is subject to wide variation; and this latter region merges into the third one which is one of unrestricted plastic flow. The transition is gradual from one to the other, the exact point of departure has no real physical significance, and it is especially important to note that the "yield point" of a structural member or frame has only hypothetical significance.

1.5 DESIGN CONCEPTS

The review of the behavior of steel structures in the previous article shows that the design load may be controlled by one or more of several criteria. These may be termed "limits of structural usefulness." They are suggested diagrammatically in Fig. 1.10, and are listed as follows:

1. Hypothetical attainment of yield point
2. Attainment of maximum plastic strength (onset of unrestricted plastic flow)
3. Excessive deflections at service load, drift limits
4. Instability
5. Fatigue
6. Fracture

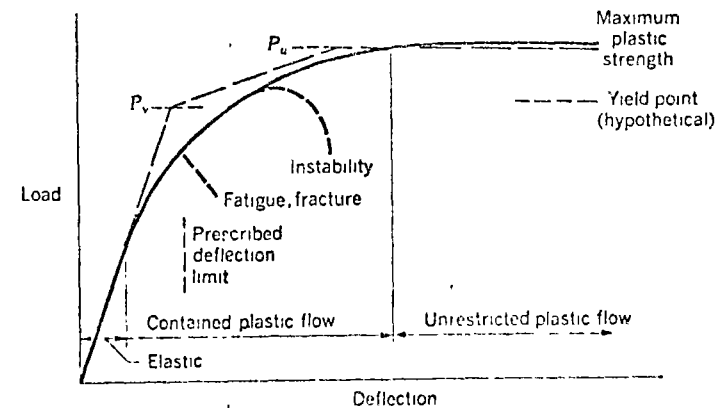


Fig. 1.10 Behavior of a Steel Structure Under Load—and Limits of Structural Usefulness

One or more of these must form the basis of any rational design, and their consideration enters into much of the material presented in Chapters 6 through 22. Strictly speaking, the term "limit design" could apply to any one of these six criteria, and as a consequence a certain confusion has resulted from its use in engineering literature. Therefore, the term will not be used in this book, and the particular limit will be defined in each case.

As a result of the various "limits," two major design methods have evolved in practice. "allowable stress design" and "plastic design." Allowable stress design embraces items 1, 4, 5, and frequently item 2. Plastic design is based mainly on item 2, but also embraces item 4. Design for stiffness is particularly concerned with deflection or flexibility limits (item 3) and occasionally with item 6; it can either be the major design criterion or it can enter as a secondary check in both allowable stress and plastic design. Most frequently, whenever items 3-6 are involved at all, they are involved as such secondary checks.

The allowable stress and the plastic design criteria will now be discussed briefly.

1. Allowable Stress Design

In allowable stress design, a member is so selected that under expected loads (called "service" or "working" loads) the stress will not exceed a certain permitted value. This stress incorporates a factor of safety against one of the previously described limits of usefulness. Allowable stress design is thus performed by specifying *working loads* and an *allowable stress*. The factor of safety is inherent, but usually is not stated. Also, the limit of usefulness is usually undesignated.

Figure 1.11 shows on a diagrammatic basis the load-deflection curve for a simply supported beam with a central concentrated load, the loading and moment diagrams being shown in the inset. In allowable stress design conscious attention is given only to the point at which the working load P_w is reached, which is at the end of the solid portion of the load-deflection curve and designated by the arrow. The margin of safety (in this case taken against ultimate) is inherent, but the selection of section modulus S is made on the basis of working loads (or moments) and working stresses.

The section modulus is computed in the given example from $S = M_{max}/F_w$, where F_w is the working stress permitted by the specification and $M_{max} = P_w L/4$. It is thus evident that consideration in the design process is entirely to working loads and moments. In the background, however, is consideration of the margin of safety. To anticipate Art. 7.8 (and as touched on previously), the allowable value is calculated by divid-

ing the ultimate load (which would be exhibited by the selected beam) by a safety factor.

Thus, even though the allowable value *appears* as the end product of a stress design, it is in fact a "limit" design.

2. Maximum Load Design

Variouly termed "limit," "ultimate," "collapse," or "plastic" design, in maximum load design the members are so selected that the structure will reach its maximum strength at the factored load—a load which is determined by multiplying the working load by a load factor. It is presently permitted only in plastic design in steel for building construction. It is a method which is based on the concept of *ultimate loads* (which are obtained by applying the appropriate load factor), and *ultimate* (or capacity) *moments*, which are the so-called "plastic hinge" moments.

In considering design concepts, there are some advantages in maximum load design as compared with other methods. First, the load factor is known because the expected loads are multiplied by it. Second, the limit of usefulness is known by the nature of the design. This is illustrated in Fig. 1.12 on a basis similar to Fig. 1.11 but for a beam fixed at one end. In plastic design, one first calculates the ultimate load which the required member should support if the entire range of safety margin were utilized. It is the *maximum load* to which attention is fixed in plastic design, a maximum determined by multiplying the expected loads P_w by the load factor to obtain $P_u = FP_w$. Attention is given essentially to ultimate loads, although the entire range occasionally may be of interest.

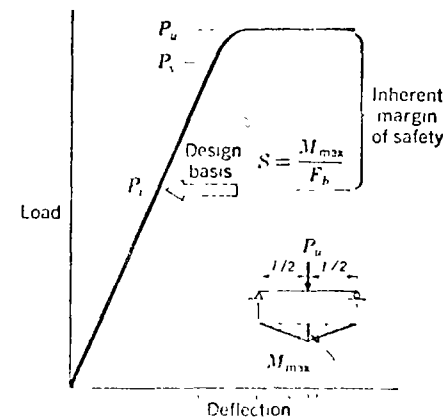


Fig. 1.11 Allowable Stress Design and the Inherent Margin of Safety

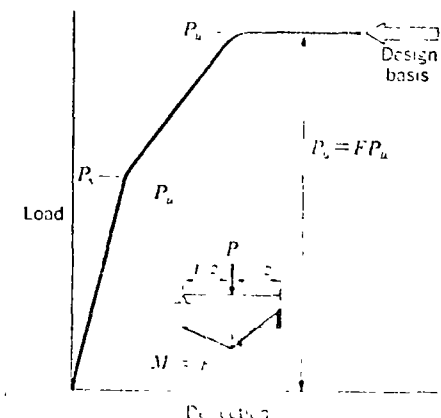


Fig. 1.12 The Load Factor and Basis for Design in the Plastic Method

As a simple illustration, for the problem in Fig. 112 the required plastic moment would be computed from

$$\frac{P_u L}{4} = M_p + \frac{M_p}{2} = \frac{1}{2} F_y Z \quad (11)$$

from which Z is obtained as $P_u L / 6F_y$. Thus, the entire solution to this problem, in contrast to the allowable stress solution, revolves about a consideration of the conditions at ultimate, concern with the behavior at working load would arise only if deflections were critical.

Column design has always been, in effect, "limit design." Column formulas have always been based on maximum column strength; the fact that these formulas have been altered in terms of allowable stress does not change the fact that it is a design based on ultimate. Many other examples may be given of the tacit assumption of ductile behavior in allowable stress design.^{1, 2}

Thus, much of allowable stress design may be interpreted as maximum load design in which the allowable values incorporate a load factor. Although presently the only example of maximum load design is plastic design in steel, in the future it is reasonable to expect that more and more of design will be on this basis. Insofar as buildings are concerned, the trend began with the 1916 revision to the AISC Specification to incorporate a 20-per cent increase of permitted stress at regions of negative moment in continuous beams. "For the first time, the Specification contained a provision that recognized the real strength of steel, insofar as main structural elements were concerned."^{1, 13}

More recent specification revisions continue this trend, and one finds more and more frequent reference to the factor of safety. As stated by T. R. Higgins, Director of Engineering and Research, AISC:

Plastic Design uses a long-ignored, but all-important property of structural steels—its ductility. Many of the other provisions of the new Specification are also based on a frank recognition that proven strength is the soundest engineering approach. Working stress provisions now contain more refinements based on improved knowledge of the actual behavior of structures.^{1, 13}

In view of the discussion thus far, it is apparent that the term "elastic design" is technically a misnomer. The load-deformation curve shown as the heavy solid line in Fig. 110 is typical of the behavior of most structures and structural members. The elastic region exists, but its upper limit cannot be specified because of such things as residual stresses, misalignment, support settlement, and stress concentrations.

It is true that elastic analysis is often used to calculate stresses in a structure, but the term "allowable stress design" is more appropriate than "elastic design." The designation "allowable stress" may incor-

porate the selection of a working stress by applying a factor of safety to any applicable limit of structural usefulness. This, in fact, is the way allowable stresses are determined, recognizing in turn a number of the limits listed earlier.

1.6 FACTOR OF SAFETY

The term "factor of safety" was scarcely mentioned in early editions of specifications except (in the case of buildings) for the load factor of plastic design. It is only in most recent years that reference to it is made in specifications. One reason for this is the increasing tendency among technical groups and specification writers to provide supplementary documents giving an indication of the background of the provisions. References 1.1, 1.14, and the commentary of Refs. 1.15-1.16 are such examples.

The factor of safety is not concerned alone with the possibility of overloading. Factors which influence the selection of an appropriate margin of safety are:^{1, 1}

1. Approximations and uncertainties in the method of analysis
2. Quality of workmanship
3. Presence of residual stresses and stress concentrations
4. Underrun in physical properties of material
5. Underrun of cross-sectional dimensions of members
6. Location and intended use of structure
7. Loading

It is clear then that the safety factor does not imply safety against overload alone, instead there are many factors involved.

A precise method of arriving at the proper value of the safety factor would require a statistical analysis of each item in the list since the possibility of variation must be considered. Progress is being made on this matter.^{1, 17} Another possibility in arriving at the ultimate load is to apply different factors to the different loads, depending on their nature. Thus, one might consider a lower load factor for dead load than for live load because the former is subject to fewer uncertainties. Such a consideration requires further study, and it is not part of present specifications for steel structures. This book considers the single load factor for a given loading condition.

Past and present practice is based largely on experience and judgment. In allowable stress design, the stress (or load) at failure is reduced by a factor of safety. In plastic design, service loads are multiplied by a load factor. In a design for stiffness, the performance is evaluated at service loads and the margin of safety may be uncertain.

Table 1.3 Factor of Safety for Selected Structural Elements*

Structural Element	Design Criterion	Limit Load, P_L	Allowable Load, P_w	Factor of Safety (Eq. 1.2)
Tension Members	Unrestricted plastic flow	$F_y A$	$0.6F_y A$	$\frac{F_y}{0.6F_y} = 1.67$
	Ultimate strength (tensile strength)	$F_u A$	$0.6F_y A$	For A7 steel: $\frac{F_u}{0.6F_y} = \frac{60}{20} = 3.00\dagger$
Beams	Hypothetical first yield (slender shapes)	$M_y = F_y S$	$M_w = 0.6F_y S$	$\frac{F_y}{0.6F_y} = 1.67$
	Unrestricted plastic flow (compact shapes)	$M_p = F_y Z$	$M_w = 0.66F_y S$	$\frac{F_y Z}{0.66F_y S} = \frac{1.12}{0.66} = 1.70$
Columns	Maximum load (instability)	CRC column formula	Depends on $\frac{L}{r}$	$\frac{L}{r} = 0$, F.S. = 1.67 $\frac{L}{r} = 130$, F.S. = 1.92
High-strength bolts (A325)	Shear failure on fastener (bearing-type joint)	Depends on joint length	$22.1b_n$	Maximum = 3.3 Minimum = 2.1
Rivets	Shear failure	Depends on joint length	$15.1b_n$	Maximum = 3.0 Minimum = 2.2
Plastic design (beams)	Unrestricted plastic flow	$1.70P_w$	P_w	1.70
Plastic design (frames)	Unrestricted plastic flow	$1.85P_w$	P_w	1.85
Plastic design (frames with wind)	Unrestricted plastic flow	$1.40P_w$	P_w	1.40

* Based on AISC Specification.

† The deformations at ultimate load of a tension member are such that a factor of safety computed on this basis may not be significant. Also there is considerable variation depending on the steel. Unrestricted plastic flow is the logical criterion for such members.

In general, the factor of safety F.S. is given by

$$\text{F.S.} = \frac{P_L}{P_w} \quad (1.2)$$

where P_L = limit load (which requires that the design criteria be specified)

P_w = working or allowable load (which is obtained from a specification or otherwise prescribed)

Using Eq. 1.2, Table 1.3 shows values obtained for the factor of safety based on the designated design criterion and in accordance with the AISC Specification.^{1,16} The table shows the major structural elements, the limit load P_L according to the selected limit of usefulness, the allowable load (or moment) according to the specification, and finally the computed factor of safety.

The comparison of the factors of safety for four of the structural elements listed shows a relatively consistent development. A factor of 1.67 for tension members, 1.67 for "short" columns, 1.92 for "long" columns, and 2.0 or more for rivets and bolts are values that reflect a reasonable pattern. Tension members and short compression members logically may have the same load factor, because their limit of usefulness is essentially the same (unrestricted plastic flow). A long column should have a greater margin of safety because of the consequences of a buckling failure. It is reasonable to require a higher factor of safety for groups of fasteners since this assures that the connections will not fail before the main members have reached their limit of usefulness.

Comparison within another group shows that the factor of safety for beams is consistent. It is 1.67 for slender beams, 1.70 for compact shapes, and 1.70 for plastically designed beams. The higher factor of safety for frames (1.85) reflects the fact that stability problems become more important in these structures.

It is evident that there is a logical background to the factor of safety that is "designed into" present-day structures—a logic that is increasing with increasing knowledge concerning the behavior of structures.

1.7 SPECIFICATIONS AND CODES

In words chosen from a statement by a specification writer

A specification is the backbone of construction. To the architect and engineer, it is a guide to safe and accepted design procedures, a convenience in selecting structural members and outlining construction methods. To the contractor and building code official, it is a document setting forth rules of safe construction that must be strictly followed. And to the owner, it is a guarantee of the contractor's

ing structure will comply with basic standards that ensure safety, utility, and economy.

The following are some important specifications for steel structures:

- AASHTO American Association of State Highway Officials^{1 15}
- AISC American Institute of Steel Construction^{1 16}
- AISI American Iron and Steel Institute^{1 19}
- AREA American Railway Engineering Association^{1 20}
- AWS American Welding Society^{1 21}
- AISE Association of Iron and Steel Engineers^{1 22}
- CISC Canadian Institute of Steel Construction^{1 23}

There are also the specifications of certain U.S. federal agencies, including the Corps of Engineers, Bureau of Yards and Docks; the General Services Administration, and the U.S. Department of Commerce, Bureau of Public Roads.

In addition to specifications, designs are frequently controlled by local, regional, or national codes. These codes sometimes incorporate specifications either by direct reference, by incorporation of all or part of the specification, or by rewriting and revision to suit their particular needs. Local and regional codes include city, county, and state codes. The major national codes concerned with building construction are those of the Building Officials Conference of America, the International Building Officials Congress, the National Board of Fire Underwriters, and the Southern Building Congress.

As already noted, the most recent specification changes, especially those of the AISC, mark a significant departure in many respects from past practice. It is a trend that will continue with new developments in materials, in material processes, in fabrication, and in new design concepts and approaches.

The effect of these revisions is manifold. They permit more attention to matters of economy through selection of materials with the most appropriate strength and other characteristics; there is choice among rivets, among bolts, and among welding materials to suit the conditions. A mixture of steels may be contemplated in design, as in the case of the second Carquinez Bridge crossing in California, which was the first sample of the use of constructional alloy steel in bridges. Although approximations for rapid design use remain, specifications are permitting more and more design refinements. In some instances these refinements necessarily involve more complex procedures, but developments in the use of computers are making such rapid strides that this is not the problem it once was. In the long run, the improved procedures lead to more efficient designs. As formulas appear for needed cases, revised concepts

will stimulate use of other shapes, such as box type members for frames. There is a narrowing of the supposed gap between allowable stress design and plastic design, primarily because of the recognition of plastic strength and post-buckling strength in the allowable stress method.

These changes, and the recognition that a specification is not static but dynamic and subject to change, are the result of what has been termed a "revolution in structural thought" that has been going on for a number of years. It represents the effort to take advantage of the results of research work and to be consistent with both theoretical and practical knowledge of steel structures.

2.

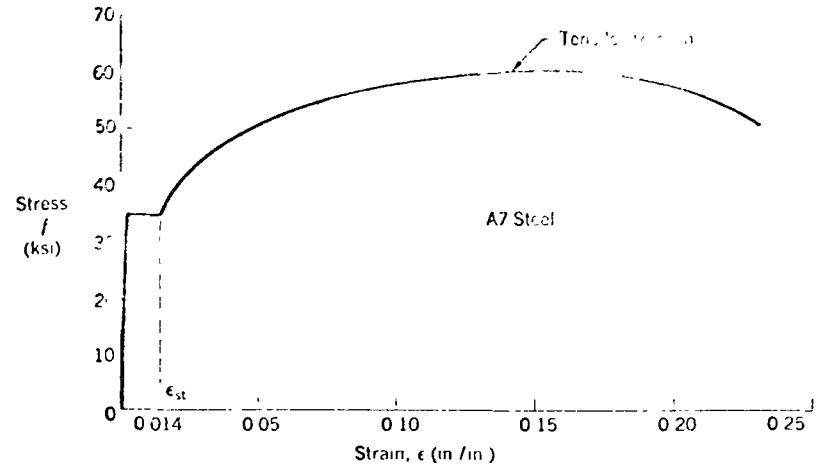


Fig. 2.1 Complete Tensile Stress-Strain Diagram for Structural Carbon Steel

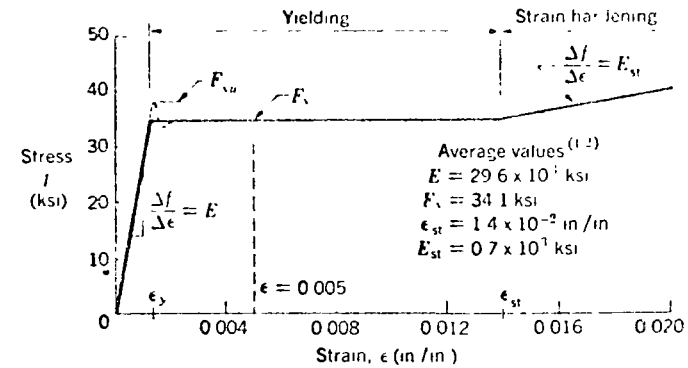


Fig. 2.2 Portion of Stress-Strain Diagram for A7 Steel

2.1 INTRODUCTION

The wide use of steel in our civilization today can be attributed to the remarkable properties of this metal, the abundance of the raw materials required for its manufacture, and its competitive market price. Steel can be produced with widely varying characteristics which can be controlled to satisfy the intended use. The final product may be anything from a stainless steel surgical instrument to a city skyscraper, a giant bridge or ocean liner, or innumerable other objects.

Several types of steel have been given standard designations by the American Society for Testing and Materials,^{2,1} hereafter referred to as ASTM. The purposes of this organization are the promotion of knowledge of the materials of engineering and the standardization of specifications and methods of testing.

This chapter discusses those mechanical properties of steel which are most important to the structural designer, together with the factors affecting these properties, and the methods by which they are determined. A comparison is made of some of the structural steels presently available.

2.2 PROPERTIES OF IMPORTANCE TO DESIGNER

As a basis for discussing mechanical behavior, a complete tensile stress-strain diagram for ASTM A7 steel is shown in Fig. 2.1, and a small portion of this diagram is drawn to a different scale in Fig. 2.2. Whereas the curves shown are for tension tests, the early part of the curve, as in Fig.

2.2, would be much the same for compression. The properties of steel of most importance in structural design are:

1. **Yield Point.** The yield point is defined as the first stress in a material, less than the maximum attainable stress, at which there is a marked increase in strain without increase in stress. This phenomenon is indicated by the horizontal portion of the solid curve in Fig. 2.2. Some test pieces of structural steel exhibit behavior indicated by the dotted portion of the curve, producing an upper yield point F_u followed by a lower yield point and a plateau. The appearance of an upper yield point is affected by the test technique (speed of testing, shape of the specimen, accuracy of alignment) and the condition of the test piece (especially the presence of residual stresses in a test on the full cross-

section. The lower yield point is the upper yield point. The consequence of plastic flow at the upper yield is a drop to the lower value, somewhat below the plateau. The plateau itself, on the other hand, is a more stable characteristic of the material.

2. Yield Strength. Not all materials exhibit a yield point, for those which do not, the yield strength is a useful measurement of behavior and is defined as the stress at which the material shows a specified limiting plastic strain, usually 0.1 or 0.2 per cent (0.001 or 0.002 in./in.). It is determined as indicated in Fig. 2.3. When quoting the value of the yield strength, the numerical value of the offset used should be stated.

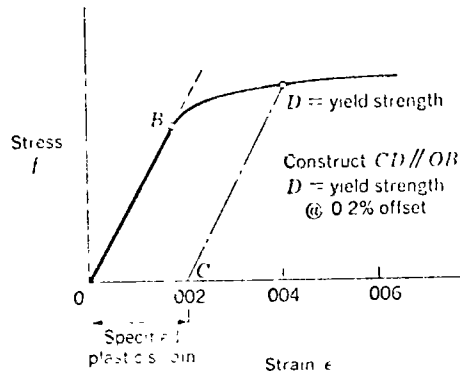


Fig. 2.3 Stress-Strain Diagram for Material Without Yield Point

3. Yield Stress Level. The yield stress level is the stress corresponding to a strain of 0.5 per cent (see Fig. 2.2). This stress will usually correspond to the constant stress at yielding when the stress-strain relationship exhibits such yielding.

4. Proportional Limit. The highest stress a material can withstand without deviation from a straight-line proportionality between stress and strain is called the proportional limit. Measured values of the proportional limit depend considerably on the sensitivity of the strain-measuring equipment used.

5. Tensile Strength. The tensile strength is the maximum axial load observed in a tension test (Fig. 2.1) divided by the original area. The margin between yield and tensile strength acts as reserve strength under certain loading conditions.

6. Ductility. Ductility is the ability of a material to undergo large plastic deformations without fracture. It is measured by reduction of area and elongation in a tension test. These usually are expressed as percentages. In the latter case the gage length should be stated. As will be seen in other chapters, it is the ductility of mild steel which "justifies" many incorrect assumptions made knowingly in allowable

stress design, it is the basis for plastic design. Under certain conditions, the ductility of steel can be inhibited, as is the case in brittle fracture and fatigue failures. (See Chapters 16 and 17.)

7. Modulus of Elasticity. The ratio of the normal stress to the normal strain in the direction of the applied load, or the slope of the stress-strain curve in the elastic range, is designated as the modulus of elasticity E . It defines the stiffness of the material, governs deflections, and influences buckling behavior. The modulus of elasticity of structural steel is practically constant, 29,600 ksi is the average value, and values of 29,000 to 30,000 ksi are used in design calculations. This stiffness, which is much higher than that of any other common structural material, is an important asset of steel.

8. Strain-Hardening Modulus. The strain-hardening modulus is the slope of the stress-strain curve in the strain-hardening range E_s , as shown in Fig. 2.2. Its value varies over a much greater range than the modulus of elasticity, and is usually about 700 ksi for structural carbon steels in the early part of the strain-hardening range.

9. Poisson's Ratio. The absolute value of the ratio of transverse strain to longitudinal strain under axial load is called Poisson's ratio μ . In the elastic range, commonly used values are 0.25 to 0.33.

10. Shearing Modulus of Elasticity. The shearing modulus of elasticity is the ratio of the shearing stress to the shearing strain within the elastic range and is designated as G . For structural steel, G is usually 11,500 to 12,000 ksi. From the theory of elasticity,

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

hence, experimental determination of any two of the quantities E , μ , and G enables calculation of the third one.

11. Weldability. Weldability is the capability of a material to withstand welding without seriously impairing its mechanical properties. Weldability varies considerably for different types of steels and different welding processes.

12. Machinability. The ease with which a material can be sawed, drilled, or otherwise shaped without seriously impairing its mechanical properties defines its machinability.

13. Formability. Formability is the ease with which a material can be bent or pressed to shape without fracture or other damage.

14. Durability and Corrosion Resistance. The ability to resist deterioration in a given environment defines the durability and corrosion resistance.

15. Fatigue Strength. Fatigue strength is the ability to withstand repeated applications of load or stress, and is usually expressed either as

an endurance limit or as the stress causing failure at a given number of cycles under a prescribed loading condition.

16. Toughness. Toughness is the capacity to absorb large amounts of energy. It is related to the area under the stress-strain curve, and hence is dependent on both strength and ductility. Figure 2.4 shows stress-strain curves for three materials, *A* and *C* exhibit about the same toughness with different strength and ductility, while *A* and *B* have equal ductility with different strength and toughness. *B* has greater toughness than either *A* or *C*.

17. Brittle Fracture Resistance. Brittle fracture resistance is the ability of a material to absorb energy and to perform in a ductile manner under adverse conditions, such as the presence of notches, high rates of loading, and low temperature.

18. Notch Sensitivity. Notch sensitivity is the tendency toward brittle fracture in the presence of notches or other stress concentrations.

19. Impact Strength. The ability to absorb energy at high rates of loading defines the impact strength.

20. Creep. Creep is a gradual flow or change in dimension under a sustained constant load. It is usually not important in steel structures except at elevated temperatures, relatively high stresses, or a combination of the two.

21. Relaxation. Relaxation is a decrease in load or stress under a sustained constant deformation. It is important under the same conditions noted above for creep.

Of the above properties, those of most general interest to the designer are strength and ductility. In Figs. 2.1 and 2.2, note the linear behavior of the first part of the curve and the sudden change from this behavior to yielding. For most steels, the extension at strain-hardening ϵ_s , varies from about 6 to 16 times the elastic strain at yielding ϵ_y . The plateau following initial yielding is often a desirable characteristic, for it permits

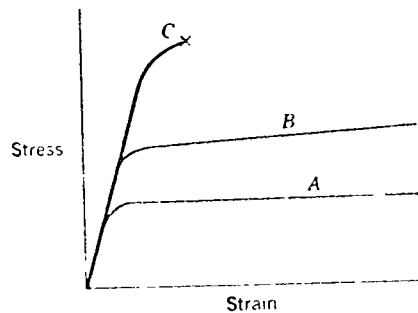


Fig. 2.4 Comparison of Toughness (Area Under Curves) for Three Different Materials

structures to absorb high local strains without harmful effects. For structural carbon steels, the elongation at fracture is over 20 per cent in 8 in. or approximately 15 times the elongation at the beginning of strain hardening, and 160 to 200 times the elongation at the beginning of yielding.

Because the initial part of the stress-strain curve of steel is much the same in tension and compression, steel can be equally effective in resisting normal stresses of both types. "Tensile strength" is usually not directly useful as a basis for design, due to the large deformations associated with it. As indicated earlier, however, the margin between yield and tensile strength acts as reserve strength under some loading conditions.

2.3 FACTORS AFFECTING MECHANICAL PROPERTIES

Factors affecting the measured values of the mechanical properties listed above include:

Chemical composition	Geometry
Heat treatment	Temperature
Strain history	Strain rate
	State of stress

The factors in the left column are largely dependent on the steel manufacturing process; those in the right column depend on the application, functional design, and detail design of the structure or structural element.

1. Chemical Composition

The most important single factor in determining the properties of a given heat of steel is the chemical composition. In carbon steels, the elements carbon and manganese have a controlling influence on strength, ductility, and weldability. Most structural carbon steels are over 98 per cent iron, roughly $\frac{1}{4}$ of 1 per cent carbon, and about 1 per cent manganese by weight. Carbon increases the hardness or tensile strength, but has adverse effects on ductility and weldability. Therefore, small quantities of various alloying elements are sometimes used to increase the "hardenability" of a steel to get the maximum effectiveness from a given low percentage of carbon content.

Phosphorus and sulfur have a harmful effect on steel, especially on its impact strength, hence the fractional percentages of these elements must be kept low. Small amounts of copper increase corrosion resistance, and fractional percentages of silicon are used mainly to eliminate unwanted gases from the molten metal. Nickel and vanadium also have a generally beneficial effect on steel behavior.

In general, some ductility must be sacrificed to obtain increased strength. This is tolerable as long as "surplus" ductility is available in the material. What is of prime importance is that adequate ductility be libited by the final structure as fabricated. This is a function of the material, the design (including design of details), and the fabrication procedure.

2. Heat Treatment and Strain History

Heat treatment and strain history can be interpreted broadly as including the rate of cooling, the finishing temperature, and the reduction of cross section that takes place in the normal rolling process. Faster cooling rates, lower finishing temperature, and greater reduction of cross section increase the final yield and tensile strength of hot-rolled steel. The effect of the amount of rolling is indicated in Fig. 2.5. Even though the chemical composition and original thickness are the same, the bar which is rolled more ($\frac{1}{4}$ in.) is stronger than the thicker bar.

Some steels are given prescribed heat treatments such as quenching and tempering. The rapid cooling caused by quenching increases strength and reduces ductility. Tempering then restores part of the ductility although giving up some of the strength gained by quenching. This process permits attainment of higher strengths while retaining relatively good ductility.

Other steels are purposely cold rolled to obtain higher strength levels. The cold-working strain hardens the material and may be thought of, in effect, as utilizing or exhausting the initial part of the stress-strain curve, as indicated in Fig. 2.6. The true situation is more complex than this, however. For example, work-hardening in tension can reduce the yield strength in compression. Light gage cold-formed sections may have their yield strength raised considerably in the forming process. (See Art. 12.1.)

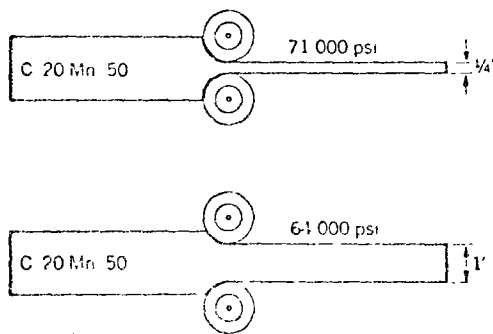


Fig. 2.5 Effect of Amount of Rolling on Tensile Strength

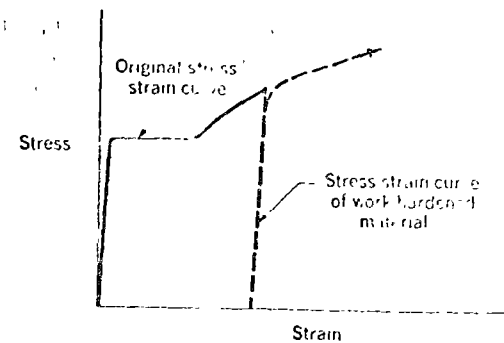


Fig. 2.6 Effect of Work-Hardening (Both Loadings in Same Direction)

Differential cooling rates and cold-working both produce residual stresses whose effect will be discussed in Art. 9.7.

The grain size of steel, which is affected by its composition and heat treatment, is frequently important. Steels of smaller grain size are usually less notch sensitive and more effective in resisting impact and brittle fracture.

"Accidental" heat treatments such as those which occur in welding or burning also affect mechanical properties and residual stress patterns, and must be considered as part of the total design problem.

3. Geometry, Temperature, Strain Rate

The size and shape of a structural element influence its stress distribution and structural behavior. In general, smaller elements tend to give higher unit strengths than large ones, especially in fatigue and brittle-fracture situations. Notches or other changes in section can greatly affect the stress distribution, stress gradient, and structural behavior. Surface finish is also sometimes important, as in the case of fatigue, with smoother surfaces giving higher strengths.

Low temperature and high strain rate tend to increase the observed yield strength and tensile strength of steel, but they may also reduce the ductility. Furthermore, both low temperature and high strain rate have a greater influence on the yield strength than on tensile strength, hence the usual margin between yield and tensile strength is reduced. The effect of very high strain rate (100 in./in./sec) in comparison with a more common "slow" strain rate is indicated in Fig. 2.7. Figure 2.8 shows the influence of strain rate on yield stress at much lower test speeds, including a "zero" strain rate. For instance, at a strain rate of 313 micro-in./in./sec, the yield stress is 35.4 ksi, whereas it is 36.4 ksi at 519 micro-in./in./sec.

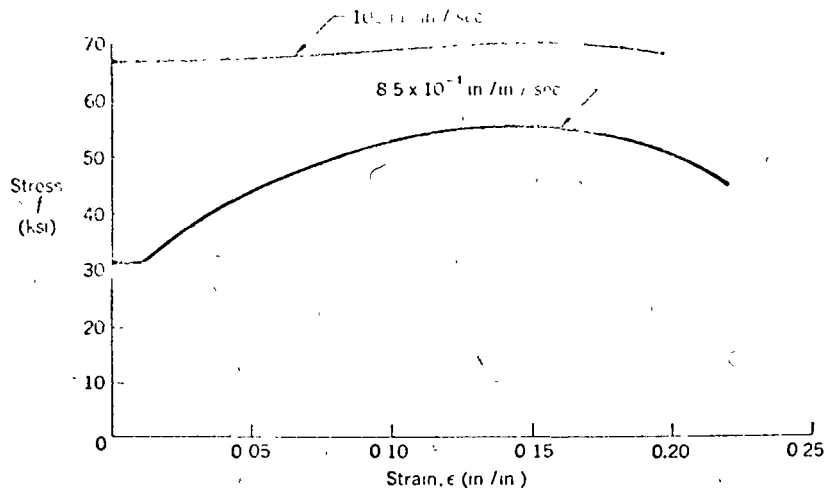


Fig. 2.7 Effect of High Strain Rate on Shape of Stress-Strain Diagram^{2,3}

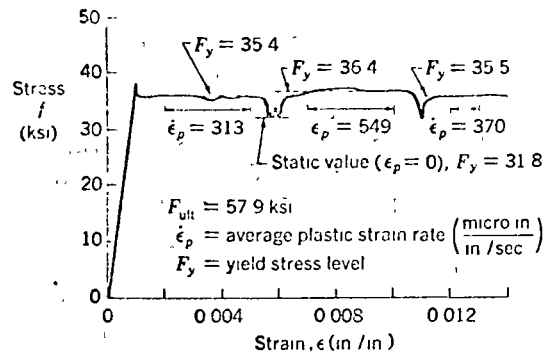


Fig. 2.8 Influence of Strain Rate on Yield Stress Level^{2,4}

4. State of Stress

The combination of stresses applied to a structural member greatly affects some measured properties. A normally brittle material can be induced to fail in a ductile manner if hydrostatic compressive stress is applied to the exterior of a tensile test bar. On the other hand, the application of equal triaxial tension stresses will cause a completely brittle fracture in a ductile material. Notches and stress gradients which tend to promote triaxial stress conditions also tend to promote brittle fracture. Problems 2.5 and 2.6 and Refs. 2.3 and 2.5 present a discussion of theories of failure under combined stresses. References 2.6, 2.7, and 2.8 treat the problem of brittle fracture (See also Chapter 15.)

2.4 DETERMINATION OF MECHANICAL PROPERTIES

Standard coupons and test procedures have been devised by ASTM to determine the various properties of steel. Because of the effects noted in Art. 2.3, these or other appropriate standards should be adhered to in order that results may be correlated with similar tests conducted by others. For example, the ratio of diameter to gage length should be fixed if comparable elongations are to be obtained in tension tests of round bars, and prescribed strain rates should be used in all tests. Even under normally controlled manufacturing procedures and carefully controlled test conditions, there is still some variation in observed mechanical properties of any material. Figure 2.9 shows the distribution curve of yield point values obtained in over 3900 mill tests on ASTM A7 steel.^{2,9} To ensure that practically all their steels meet the specified minimum yield point, steel mills must arrange their production so that the average yield stress is well above the specified minimum. Considerable research has been done on the statistical behavior of steel and other structural materials, and the relationship of this statistical behavior to structural safety.^{1,17}

As indicated above, the ordinary stress-strain curve is of major importance in determining several important properties, including the modulus of elasticity, yield point or yield strength, tensile strength, and ductility. Another diagram, a true stress-strain diagram, is obtained by plotting

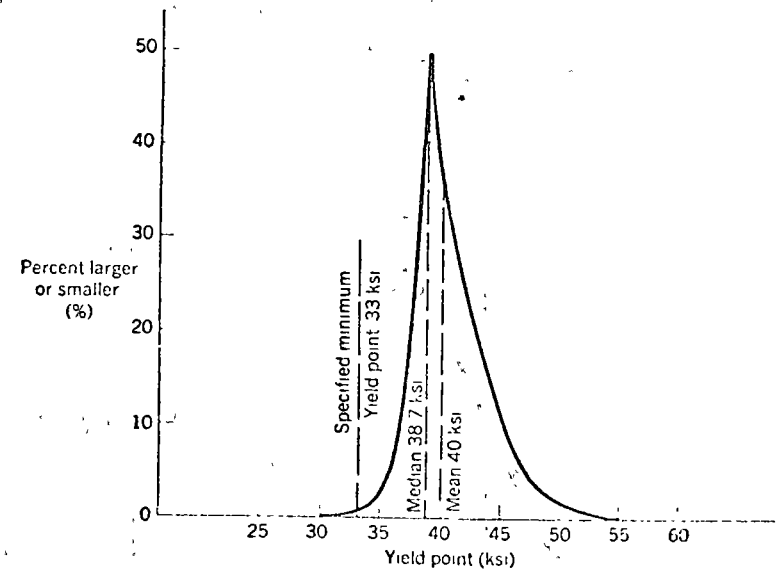


Fig. 2.9 Distribution of Yield Point Values, Mill Tests of ASTM A7 Steel^{2,9}

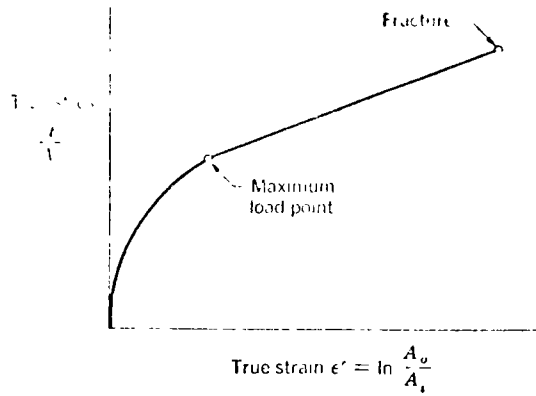


Fig. 2.10 True Stress-Strain Diagram

the true stress (axial load divided by the actual instantaneous area) as the ordinate, versus the true strain (change in length divided by instantaneous gage length) as the abscissa. It can be shown that the true strain can be expressed by $\ln \frac{A_0}{A_1}$, where A_0 and A_1 are the original and instantaneous area respectively.²² Using this expression, a true stress-strain diagram for the minimum section at the neck of a tensile test specimen can be obtained, as shown in Fig. 2.10. While of limited value in structural design, the true stress-strain curve tends to give a better picture of local behavior and has certain advantages in correlating tensile data with results from torsion tests, notched bar impact tests, and combined stress tests. The data also correlate better with observations of metal forming behavior.

Fatigue tests will be discussed in Chapter 16. Impact tests, in addition to indicating ability to absorb energy under high rates of loading, are also used with notched specimens at low temperature to indicate the brittle-fracture resistance of a material. The standard Charpy impact test uses a small, simply supported, notched beam subjected to an impact load by a swinging pendulum. A series of tests conducted at different temperatures produces the relationship of absorbed energy versus temperature indicated in Fig. 2.11, which shows the marked reduction in energy-absorbing capacity at the "transition temperature" for the particular material, specimen configuration, striking velocity, and other prevailing test conditions. (See Art. 15.4.) Standard procedures for these tests, as well as for creep and relaxation tests, are covered in appropriate ASTM publications.

The discussion above relates to small coupon tests to determine basic material properties under prescribed test conditions. Because geometry, state of stress, and initial residual stresses play an important part in

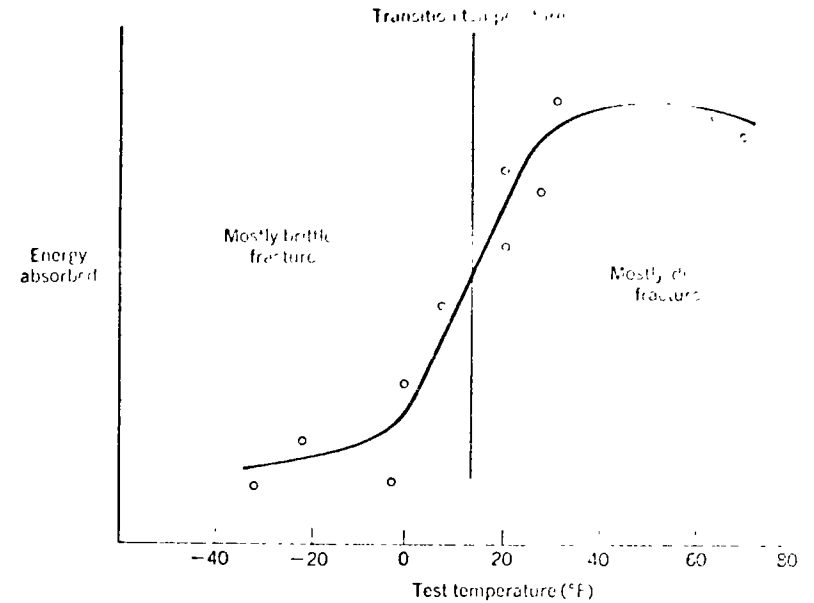


Fig. 2.11 Typical Graph of Charpy Impact Test Results

mechanical behavior, it is often desirable or necessary to test rather large pieces to determine behavior under simulated service conditions. As examples, compression tests of full cross sections of short columns (called "stub column tests"²³) are made in order that the effect of residual stresses may be included directly in the results, and tests of large eye bars or cables of suspension bridges are often made on full cross sections of the material so that the effect of size and geometry of the cross section are taken into account in appraising the material behavior.

2.5 STRUCTURAL STEELS AVAILABLE

It is convenient to group structural steels in the following general classifications:

Structural Carbon Steels: Those with a specified minimum yield point or yield strength of not more than 36 ksi.

High-Strength Steels: Those with a specified minimum yield point or yield strength above 36 ksi, but not including heat-treated alloy steels.

Constructional Alloy Steels: Heat-treated alloy steels, usually of about 100 ksi yield strength.

Steels with minimum yield strengths above 36 ksi, that is, those in either of the latter two groups, are often referred to as "higher-strength" steels.

1.5.2.1 Structural Carbon Steels

There are six grades of structural steel covered by the 1963 AISI Specification. Three are structural carbon steel: ASTM A7, A373, and A36; and three are high-strength steels: ASTM A242, A440, and A441. Plastic design methods are permitted for the structural carbon steels only; these are compared in Table 2.1.

Table 2.1 Structural Carbon Steels

Designation	Scope	Minimum Yield Point (ksi)	Tensile Strength (ksi)	Minimum Elongation in 8 In. (%)
ASTM A7	Construction of bridges and buildings for general structural purposes	33.0	60.0 to 75.0	21
ASTM A373	Not over 4 in. in thickness for general welded structural purposes	32.0	58.0 to 75.0	21
ASTM A36	Not over 8 in. in thickness for use in riveted, bolted or welded construction	36.0	60.0 to 80.0	20

ASTM S 27

2750 lbs/in²

The strengths quoted apply to mill tests at ASTM allowable strain rates. As shown in Fig. 2.9, mill test results usually exceed these values considerably, but they are based on coupons taken from the web of rolled shapes and record the upper yield point if one exists. Laboratory tests of coupons from the thicker flanges of similar shapes conducted at "zero" strain rate to determine "static" strength may give yield points from 5 to 30 per cent below the values indicated by mill tests.^{2,4,9}

A partial listing of the chemical requirements for structural carbon plates appears in Table 2.2. Chemical requirements of the A7 specification limit phosphorus and sulfur content only. A373 and A36 limit also

Table 2.2 Chemical Requirements for Structural Carbon Plates^{2,1}

Type	Thickness (in.)	C (max. %)	Mn (%)	Si (%)
A7	—	—	—	—
A36	3/4 and under	28	—	—
	Over 3/4 to 1 1/2	28	80-110	—
	Over 1 1/2 to 4	28	80-110	15-30
A373	3/4 and under	26	—	—
	Over 3/4 to 1	25	50-90	—
	Over 1 to 2	26	50-90	15-30
	Over 2 to 4	27	50-90	15-30

Fig. 2.9

1.5.2.2 High-Strength Steels

the carbon, manganese, and silicon content to ensure weldability. Higher percentages of these elements are required in the heavier sections to develop the required minimum yield point, which is the same for all thicknesses. Also, to develop the increased yield strength, A36 has somewhat higher carbon and manganese percentages than A73.

In 1961 two ASTM Specifications, A440 and A441, were added to a revised A242 specification, enabling adoption of standard design criteria for the high-strength steels. The scope clauses of these materials indicate the following:

A242, enhanced atmospheric corrosion resistance equal to or greater than twice that of structural carbon steel.

A440, riveted or bolted construction, atmospheric corrosion resistance approximately twice that of structural carbon steel.

A441, welded, riveted, or bolted construction, atmospheric corrosion resistance approximately twice that of structural steel.

Certain steels in the A242 group have corrosion resistance up to 6 times that of structural carbon steel; but if this property is desired, the designer should be specific in stating it.

Chemical requirements for the high-strength steels appear in Table 2.3.

Table 2.3 Chemical Requirements for High-Strength Steels^{2,1}

Element	A440 (%)	A441 (%)	A242 (%)
Carbon	28	22	22
Manganese	1.10-1.60	1.25	1.25
Phosphorus	.40	.01	—
Sulfur	.05	.05	.05
Silicon	.30	.30	—
Copper	.20	.20	—
Vanadium	—	.02	—

Table 2.4 shows that the minimum yield points for all three high-strength steels are the same, but the yield point decreases for thicker material, from 50,000 down to 42,000 psi. This approach differs from that used

Table 2.4 High-Strength Steels

A242, A440, A441 (in.)	Minimum Yield Point (ksi)	Minimum Tensile Strength (ksi)	Minimum Elongation in 8 In. (%)
3/4 and under	50.0	70.0	18
Over 3/4 to 1 1/2	46.0	67.0	19
Over 1 1/2 to 4	42.0	63.0	19

in the structural carbon steels where the yield point is held constant for all thicknesses by altering the chemistry. Note also that the ductility is somewhat lower than for structural carbon steels.

The flanges and webs of rolled structural shapes are of different thickness. Table 2.5 gives an interpretation of thickness of shapes which has been established for the high-strength steels.

Table 2.5 Interpretation of Thickness for High-Strength Steel Shapes

Group	Yield Point (ksi)	Shapes in Group (in.)
1	50.0	All shapes except those in Groups 2 and 3 below
2	46.0	All 36 by 16½ All 33 by 15½; 11 by 16, 211 lb through 112 lb; 12 by 12, 190 lb through 120 lb
3	42.0	14 by 16, 426 lb through 219 lb

2. AISI Specification

The 1962 *AISI Specification for the Design of Light Gage Cold-Formed Steel Structural Members* also provides for use of a number of different grades of steel, each based in turn on an ASTM standard. Basic allowable stresses for steels with minimum yield points of 25,000 to 50,000 psi are tabulated, but other strengths are permitted if they meet the ASTM requirements. In general, the basic allowable stress is the specified minimum yield point divided by 1.65, the factor of safety. The ASTM requirements are such that adequate ductility, formability, and weldability of the material are ensured.

3. AASHTO and AREA Specifications

The 1961 *AASHTO Standard Specifications for Highway Bridges* provides for use of structural carbon steels A7 and A373 (for welded structures), and high-strength low-alloy structural steels A242, A410, and A441. Additional steels are also covered by this specification. The bridge specifications of AREA are quite similar to those of AASHTO and also include ASTM A36. Again, the ASTM requirements assure adequate ductility and satisfactory general performance of the materials permitted.

4. Other Steels

In addition to the structural carbon and high-strength steels included in the specifications mentioned above, several steels in the 45.0-to-65.0-ksi yield point and 65.0-to-80.0-ksi tensile strength range are available.

Some are produced in the thinner sections only. These steels are hot-rolled and obtain their strength by carefully controlled chemistry, using additions of manganese, vanadium, and other elements.

Steels with yield strengths above the 65.0-ksi yield level usually require heat treatment to develop their strength. Materials in the 70.0- and 80.0-ksi range have been available for some time, and heat-treated constructional alloy steels in the 90.0 to 100.0-ksi yield strength range have been on the market since 1952. Although not included in the specifications mentioned, certain of these heat-treated constructional alloy steels are covered by military and ASME codes. These steels obtain their properties by controlled chemistry, plus quenching and tempering. They have slightly reduced ductility (in the order of 18 per cent in 2 in. compared with 18 per cent in 8 in. for the high-strength steels, and 20 per cent in 8 in. for the structural carbon steels), and have corrosion resistance 2 to 4 times that of carbon steel. Although additional research is required before these steels are standardized in structural building codes, they will no doubt find increased structural use in the future. Stress-strain curves for some of the materials mentioned appear in Fig. 2.12.

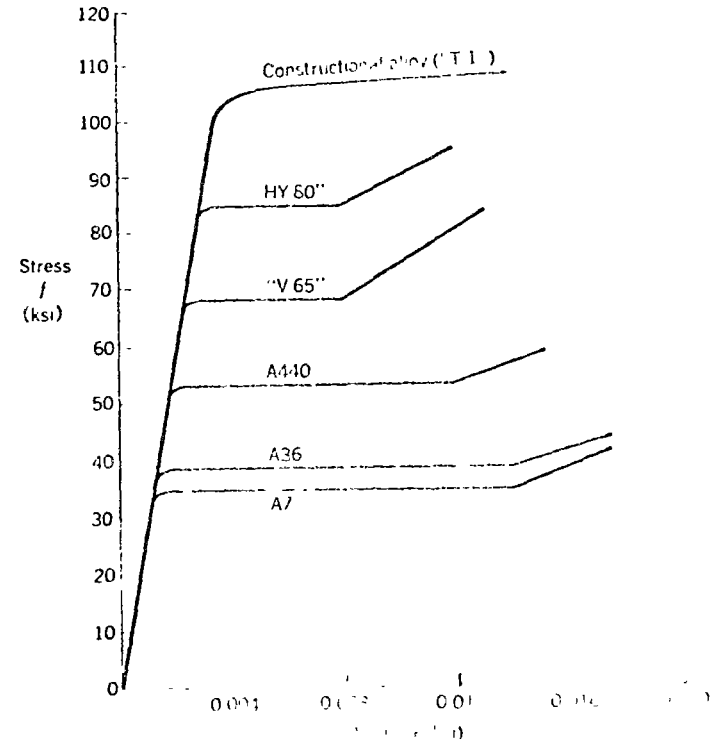


Fig. 2.12 Stress-Strain Curves for Various Steels

Materials with a yield strength of up to 210 ksi can be produced now, and development work on 300-ksi steels is under way.²⁻¹⁰ (The theoretical binding force between iron atoms is over 4000 ksi) Of course, as strength is increased, price is usually increased, and ductility is usually decreased. Furthermore, the modulus of elasticity, which governs deflections and elastic buckling, is relatively constant for all structural steel. Hence, because of greater deflection at higher stresses, these very high strength materials will have limited (but probably important) structural design application.

2.6 SIGNIFICANCE OF MATERIAL SELECTION

To meet the functional, economic, and safety requirements of a structure, there are a broad variety of steels from which to choose, with appropriate design guides available to ensure their proper use. One task, then, is to select the material most suitable for the particular needs. The selection will be based on the proposed service conditions, the mechanical properties of the materials, and economics. The question of economics includes the base price of the material, fabrication costs, weight, effect of dead weight of the structure on foundation costs, optimum space utilization, and other factors.

Of the three AISC structural carbon steels, A36 has the best strength-price ratio. Even though their base price is higher, the higher strength steels may still have considerable cost advantage if their full allowable stress is utilized, or if the other economic factors mentioned above are important.

A frequent use of the higher-strength steels is in hybrid construction, that is, using higher-strength steels for the more severely stressed elements of a structure, and lower-strength, lower-price steels elsewhere, permitting greatest over-all economy. This concept is illustrated in

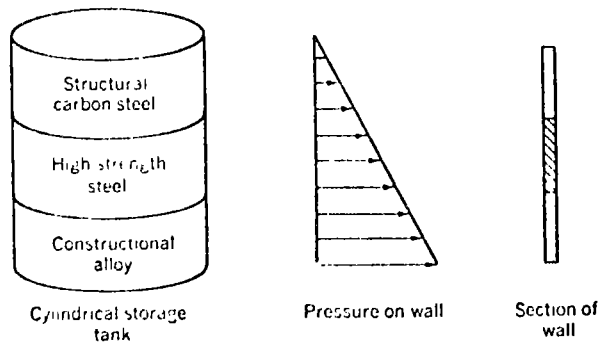


Fig. 2.13 Hybrid Construction of Cylindrical Storage Tank²⁻¹²

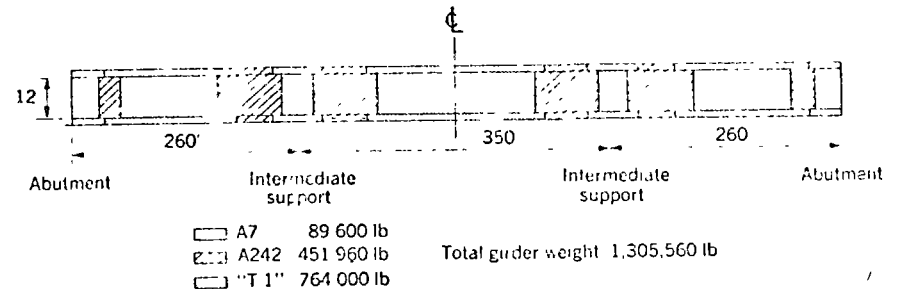
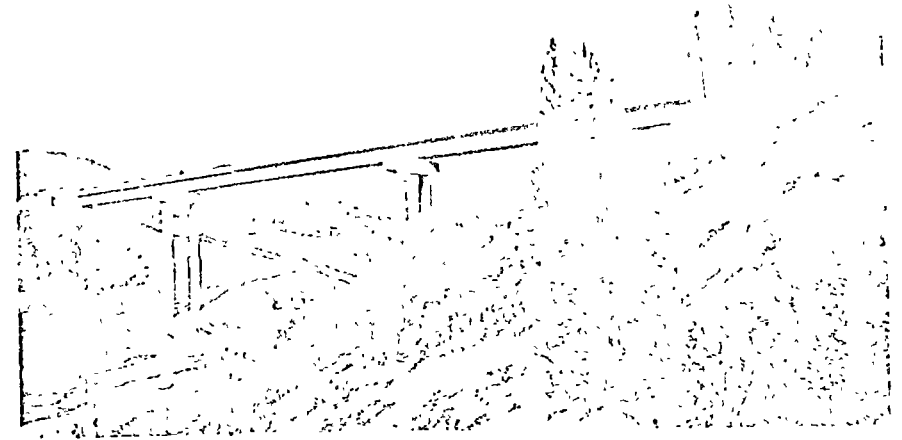


Fig. 2.14 Hybrid Steel Girder, Whiskey Creek Bridge, Shasta County, California (Courtesy of California Division of Highways)

Fig. 2.13, where the wall thickness of a storage tank is maintained constant by the use of higher-strength steel at the bottom, where the pressure is the greatest. Figure 2.14 shows a bridge in which the girder is fabricated from three different steels.

It is evident that proper selection of material is one of the essential steps in the design to ensure that the structure will meet its functional requirements with adequate safety and minimum cost.

PROBLEMS

2.1. An ASTM standard 1 50-by-0.375-in. tension coupon of structural carbon steel is to be tested. To obtain additional information, the standard 8-in. gage length is subdivided into 1-in. lengths. After testing, the gage lengths measure in inches as follows: 1.17, 1.19, 1.21, 1.32, 1.60 (the fracture occurred within this original 1-in. length), 1.26, 1.20, 1.17. The maximum load was 36,100 lb, the load at fracture was 31,000 lb, and the reduction of area was measured as 41.4%.

- (a) Compute the tensile strength.
- (b) Compute the true stress at fracture.
- (c) Compute the percent elongation in 8 in.
- (d) Compute the maximum percent elongation in 2 in. (Note, however, that the specimen does not have dimensions meeting ASTM requirements for standard 2 in. gage length specimens.)

2.2 A material is to be selected for the propeller shafts of an ocean liner. What properties of the material would be important in the selection, and why?

2.3 A new material has been suggested for use in a small steel bridge for a mining railroad in northern Canada.

- (a) In addition to cost, what considerations would you make in deciding whether the material is suitable?
- (b) What considerations would you make in deciding whether the bridge should be of welded, riveted, or bolted construction?

2.4 A full-size test bar, 6 in. wide, 1½ in. thick, and 20 ft long, is made from the same material which give the stress-strain curve shown in Fig. 2.4 for a standard coupon with an 8 in. gage length. Give a rough estimate of the percent elongation that would be measured over a 10-ft gage length of the full-size test bar.

2.5 Yielding in steel occurs along planes of maximum shear stress, and the shear stress theory of failure under combined stresses predicts yielding when the maximum shearing stress becomes equal to the maximum shearing stress at the yield point in a simple tension test. Draw Mohr's circle² for:

- (a) a simple tension test when $F_1 = 36$ ksi,
- (b) a biaxial stress condition when $F_1 = 15$ ksi, $F_2 = 15$ ksi;
- (c) a biaxial stress condition when $F_1 = 20$ ksi, $F_2 = -20$ ksi;
- (d) $F_x = 20$ ksi, $F_{xy} = 15$ ksi, where F_1 and F_2 are principal stresses, F_x is a normal stress, and F_{xy} is a shear stress on the same plane.

Comment on the results, assuming the material is ASTM A36 steel.

2.6 One of the theories of failure under combined stresses most applicable to the failure of steel by yielding is the maximum distortion energy theory, which states that yield failure will occur under combined stresses when

$$(F_1 - F_2)^2 + (F_2 - F_3)^2 + (F_3 - F_1)^2 = 2F_y^2$$

where F_1 , F_2 , and F_3 are the principal stresses, and F_y is the yield stress in simple tension. For $F_y = 36$ ksi, compute the predicted value of tensile stress F_1 to cause yielding if:

- (a) $F_2 = F_3 = 6$ ksi
- (b) $F_2 = \frac{1}{2}F_1$, and $F_3 = 0$
- (c) $F_2 = F_3 = \frac{1}{2}F_1$
- (d) $F_2 = \frac{1}{2}F_1$, and $F_3 = -\frac{1}{2}F_1$
- (e) $F_2 = -\frac{1}{2}F_1$, and $F_3 = -\frac{1}{2}F_1$
- (f) $F_1 = F_2 = F_3$

Comment on the results.

BUILDINGS

3.1 INTRODUCTION

A guide to building design is presented in this chapter by reducing the complex building structure into its basic systems: the roof system, the floor system, the walls and partitions, the steel frame and its bracing, and special provisions for operational facilities. Each system is presented by giving the various schemes commonly used for a particular type of building.

The design of a building involves both the satisfactory completion of its planning and its structural design. Planning includes both functional planning and the selection of a framing scheme. The steps in meeting the design objectives are outlined in general in Art. 1.1.

Functional planning is the development of the layout of the building to meet the service requirements in the most efficient manner. This involves the consideration of the purpose for which the building is designed, its general size and shape, its location, and other related features. The choice of a framing scheme is very much dependent on the layout. For this reason, the selection and arrangement of the structural members that make up a building frame is done usually in conjunction with the planning of the layout.

With the completion of the preliminary plans, the detailed design of the structure follows. This involves load analysis, structural analysis, and the structural design of the members. Load analysis is discussed in this chapter, and structural member design is presented in succeeding chapters.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE
ACERO

Dr. Porfirio Ballesteros B.

SECCIONES COMPUESTAS

1. Introducción

Las estructuras de acero esportadas
antes se consideraban reforzadas, antiguamente
se discutieron suponiendo que el concreto
actuaba independientemente de el acero
y resistir cargas. Sin embargo, se comprobó
debido al efecto compuesto de el
acero y concreto actuando juntos.
Simultáneo, con la aparición de la
soldadura, llegó a ser práctico. Desde
1925 en las construcciones de puentes se
inició el uso de secciones compuestas,
y en 1960 se consideró económico el
usarlas en edificios. Al final se
hizo una lista selecta de referencias
desde 1925 a 1960, en la cual se
pueden observar los antecedentes históricos.

2. Acción Compuesta.

Cuando el sistema de piso de
concreto y las vigas de acero son íntegramente
concretadas y se deforman como una misma
unidad la acción compuesta se desarrolla

Mar. / 1975.

P. Ballesteros

CEC UNAM

en los dos miembros estructurales. Ejemplos
Típicos de secciones compuestas se muestran
en la Fig. 2.1.

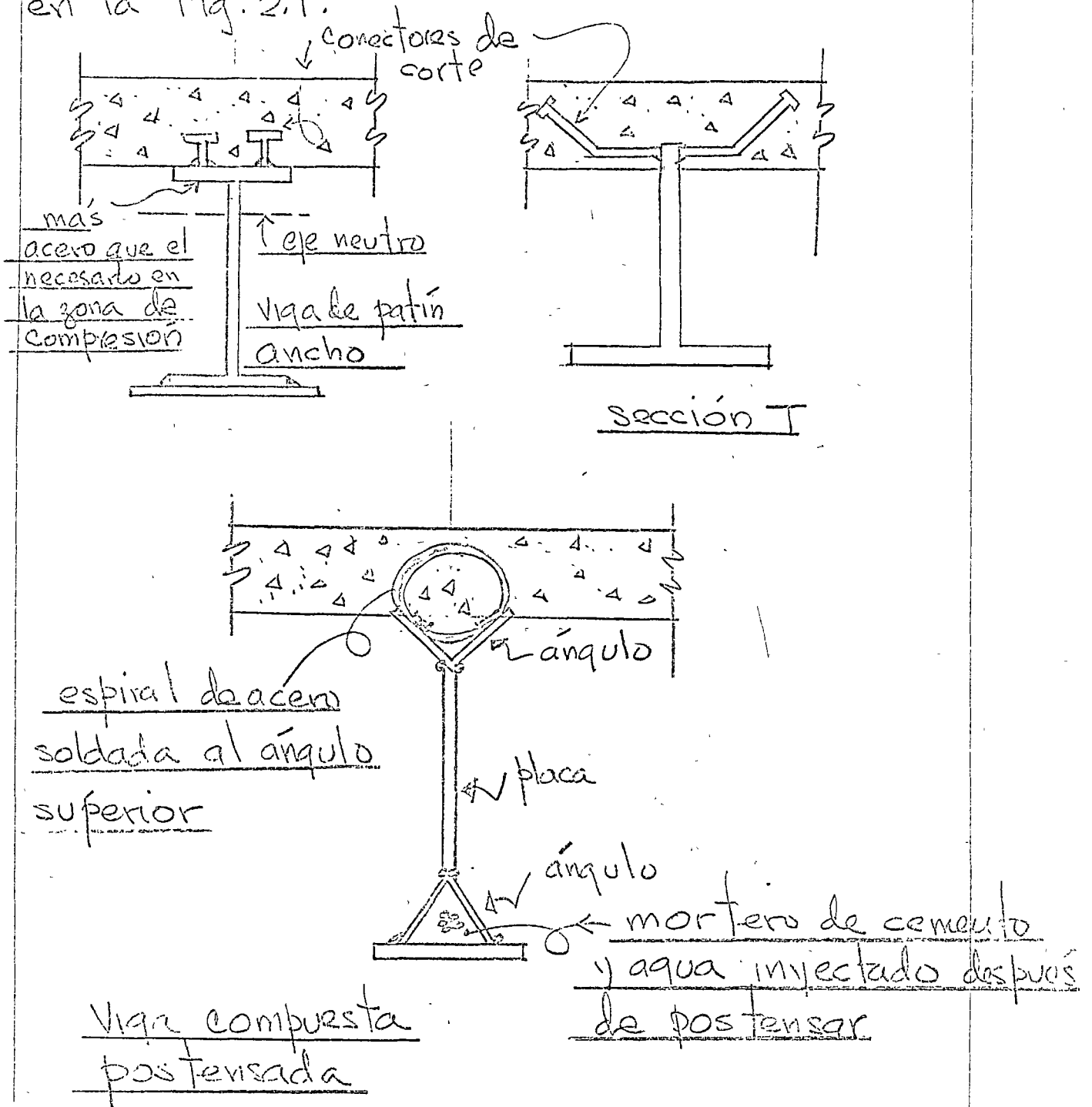


Fig. 2.1 Algunos tipos de secciones compuestas concreto-acero

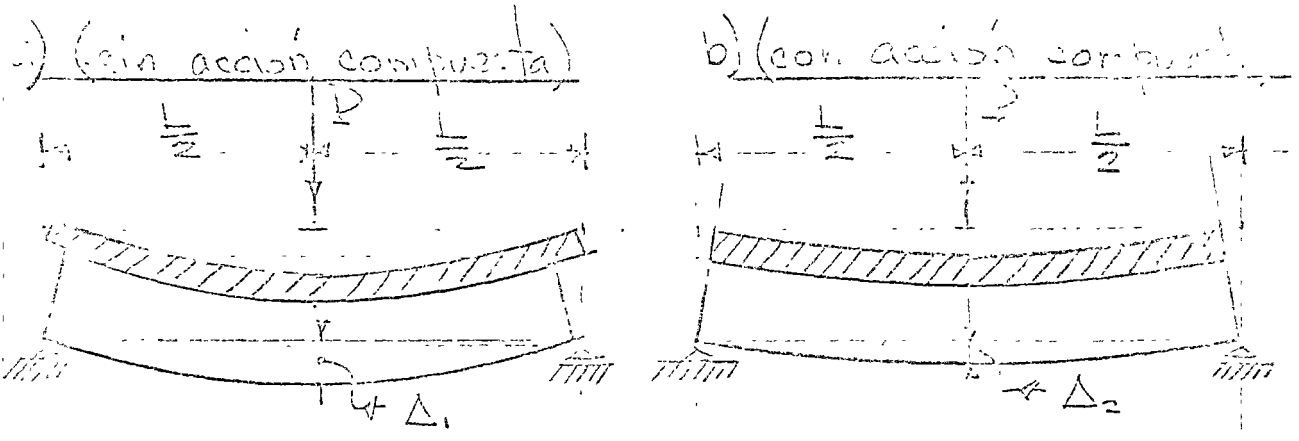


Fig. 2.2 Comparación de deflexión en vigas con y sin acción compuesta $\Delta_1 > \Delta_2$

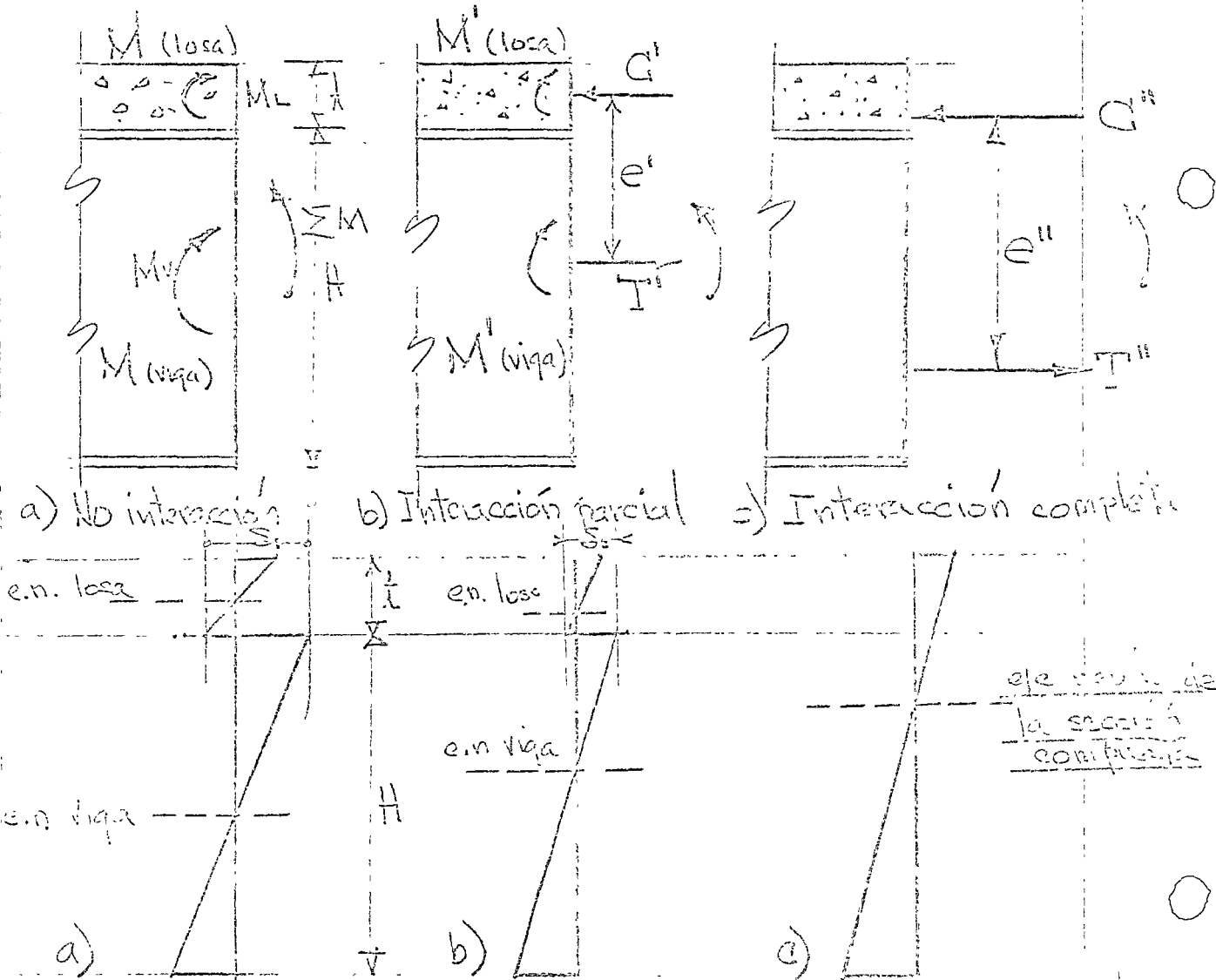


Fig. 2.3 Deformaciones unitarias en vigas compuestas

Mar. /1975

P. Ballesteros

CEU UNAM

4

Si deformación relativa entre losa y viga cuando el sistema actúa compuesto $\delta_1 = \delta_2 = 0$

De la Figura 2.3 a), se observa que el momento resistente es igual a

$$\sum M = M_L + M_V \quad (2.1)$$

Se observa que en este caso hay dos ejes neutros uno en el centro de la losa y otro en el centro de la viga y ocurre una deformación relativa losa-viga igual a δ_1 .

Considerando el siguiente caso Fig 2.3 b donde solo interacción parcial se presenta, se observa que los ejes neutros tienden a juntarse y la deformación relativa losa-viga δ_2 tiende a disminuir. Se desarrollan fuerzas parciales C' y T' . El momento resistente aumenta en las cantidades $T'e'$ o $C'e'$.

Cuando se desarrolla interacción completa viga-losa, $\delta = 0$ y el diagrama resultante de deformación se muestra en la Fig 2.3 c. Las fuerzas T'' y C'' son mayores que T' y C' y su brazo de palanca e'' es mayor que e' . El momento resistente es

$$\sum M = T''e'' \text{ o } C''e'' \quad (2.2)$$

3. Ventajas y Desventajas

Basicamente las ventajas resultantes son:

1. Reducción del peso de acero
2. Menor peralte en las vigas de acero
3. Aumenta la rigidez del sistema
4. Para un miembro dado se pueden lograr claros mayores.
5. Aumenta la última capacidad de carga del conjunto estructural.

La economía de acero oscila de 20 a 30%.

y la reducción de peraltes origina economía en otros materiales (muros, escaleras, etc...).

Se incrementa grandemente el momento de inercia del sistema del sistema de piso en dirección de las vigas de acero, consecuentemente se reducen las deflexiones. La última resistencia de la sección compuesta es MUCHO MAYOR que la suma de las resistencias de la losa y la viga consideradas separadamente.

Muros y columnas compuestas se usan también en la construcción de edificios

Las desventajas o limitaciones que deben ser consideradas son las siguientes:

1. Efecto de continuidad

2. Deflexiones a largo plazo

Actualmente (1972), solo la porción de la losa actuando en compresión se considera efectiva. En el caso de vigas continuas, la ventaja del comportamiento compuesto se reduce en el área de momentos negativos. En las columnas de edificios, no existe la posibilidad de colocar el acero suficiente para darle continuidad a la acción compuesta. En puentes si es posible hacerlo.

El problema de deformaciones a largo plazo puede ser importante si la sección compuesta está resistiendo una porción substancial de la carga muerta o si las cargas vivas son de larga duración, por lo cual es conveniente reducir el ancho efectivo o suponer una relación modular n incrementada.

4. Ancho efectivo

Con el objeto de calcular las propiedades de una sección compuesta es necesario utilizar el concepto de ancho —

efectivo. Refiriéndose a la Fig. 4.1 considerando la sección compuesta bajo esfuerzos en los cuales la losa es de ancho infinito. El esfuerzo σ_x será máximo sobre la viga de acero y disminuirá en forma no lineal como se indica en la Fig. 4.1.

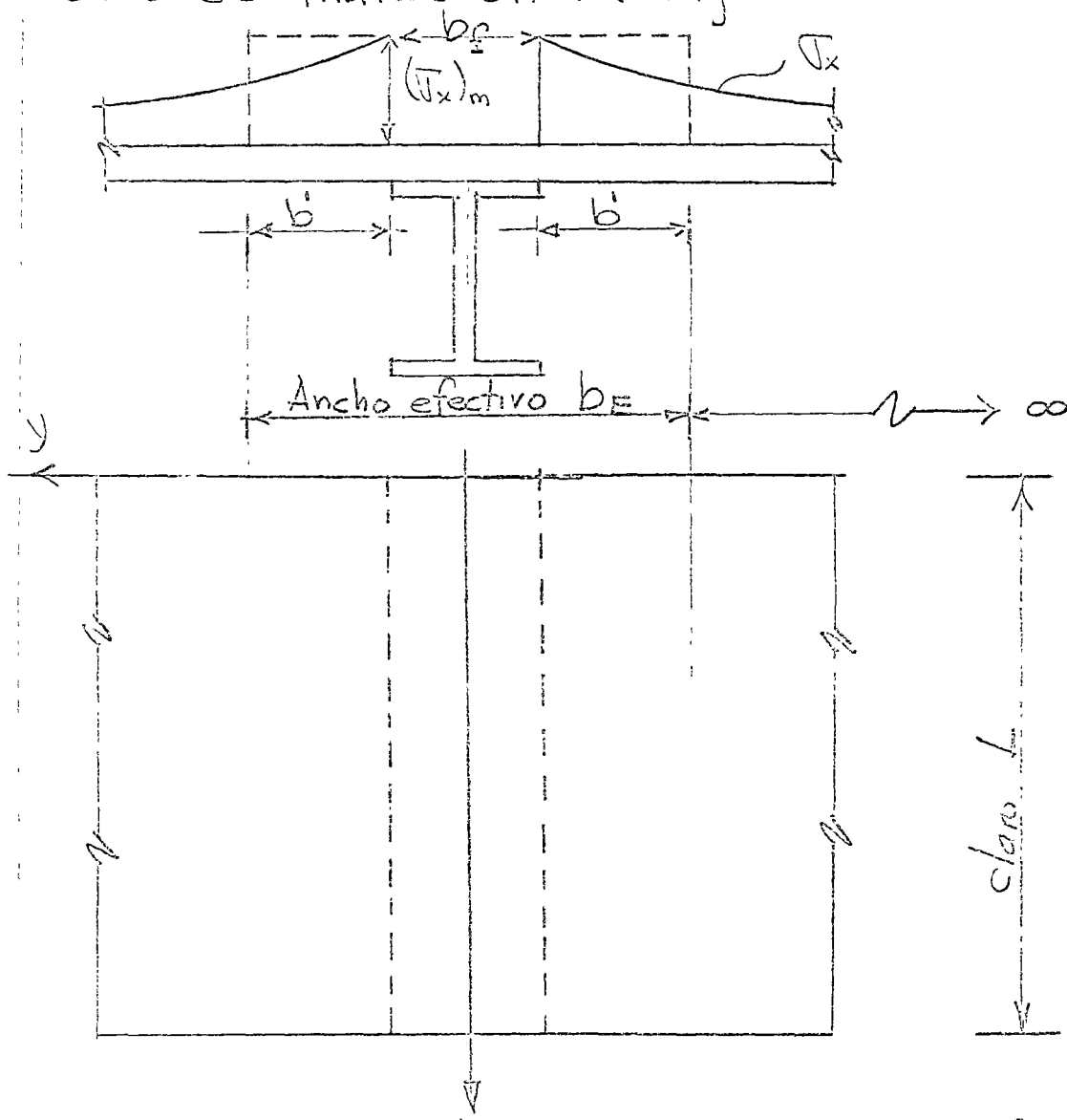


Fig. 4.1. Distribución no uniforme de esfuerzos de compresión σ_x , y ancho efectivo b_e

El ancho efectivo de un miembro compuesto se toma como

$$b_E = b_f + 2b' \quad (4.1)$$

donde $(2b')(\sigma_x)_{\max}$ es igual al área bajo las curvas de σ_x . Varios investigadores incluyendo Timoshenko¹² y von Kármán³ han derivado expresiones para el ancho efectivo de vigas homogéneas con patines anchos; y Johnson¹³ ha demostrado que las expresiones son también válidas para vigas en las cuales el patín y el alma son de diferentes materiales la expresión de Johnson es:

$$b_E = b_f + \frac{2L}{\pi(3 + 2\mu - \mu^2)} \quad (4.2)$$

Donde L = claro de la viga

b_f = ancho del patín de la viga de acero

μ = relación de Poisson de la placa

Suponiendo $\mu = 0.2$ para el concreto y substituyendo en (4.2) se obtiene

$$b_E = b_f + \frac{2L}{\pi[3 + 2(0.2) - (0.2)^2]} = b_f + 0.196L \quad (4.3)$$

Como simplificación para propósitos de diseño el AISI-1.11.1 ha adoptado el mismo método de calcular anchos efectivos que el ACI¹⁴ hace para vigas de concreto. Refiriéndose

a la Fig. 4.2, el máximo valor de el ancho efectivo b_E permitido deberá ser el menor valor calculado por las siguientes relaciones:

a) Para vigas interiores:

$$b_E \leq \frac{L}{4} \quad (4.4a)$$

$$b_E \leq b_o \quad (4.4b)$$

$$b_E \leq b_f + 16 t_s \quad (4.4c)$$

b) Para vigas exteriores:

$$b_E \leq L/2 + b_f \quad (4.5a)$$

$$b_E \leq \frac{1}{2}(b_o + b_f) \quad (4.5b)$$

$$b_E \leq b_f + 6 t_s \quad (4.5c)$$

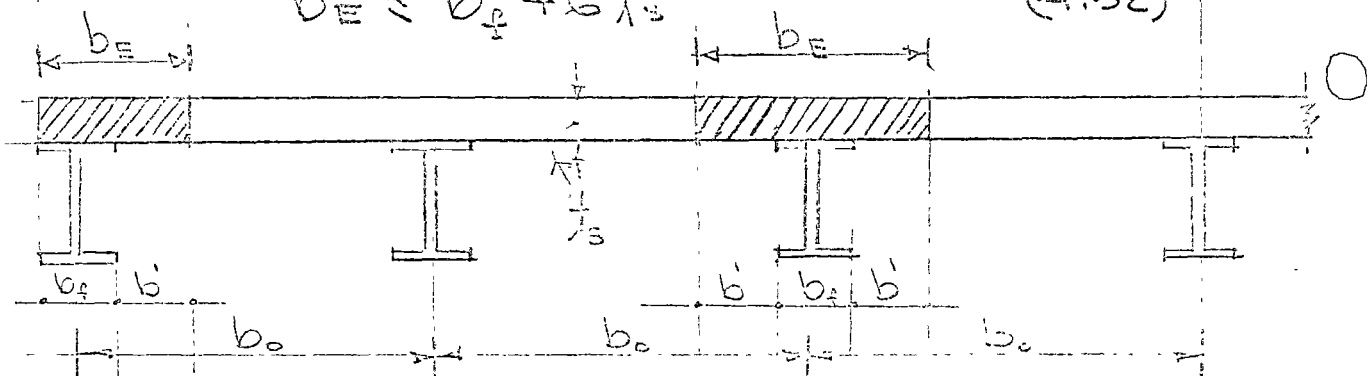


Fig. 4.2 Dimensiones que gobiernan el ancho efectivo b_E en secciones compuestas acero-concreto

(L = claro)

Similármte, para el diseño de puentes la AASHTO-1969-1.7.99¹⁵ recomienda lo mismo que AISC-ACI excepto Eq. 4.4c es substituida por

$$b_E \leq 12 t_s \quad (4.6)$$

y las Eq. 4.5a y c son reemplazadas por

$$b_E \leq L/2 \quad (4.7a)$$

$$b_E \leq 6 t_s \quad (4.7b)$$

5. Cálculo de las propiedades de la sección

Las propiedades de una sección compuesta pueden ser calculadas por el método del área transformada. En contraste con el diseño de concreto reforzado, donde el área de acero es transformada en una área de concreto equivalente, el concreto es transformado en una área equivalente de acero. Como resultado el área de concreto es reducida utilizando una losa de ancho bE/n donde n es la relación del módulo de elasticidad del acero, E_s , al módulo de elasticidad del concreto E_c .

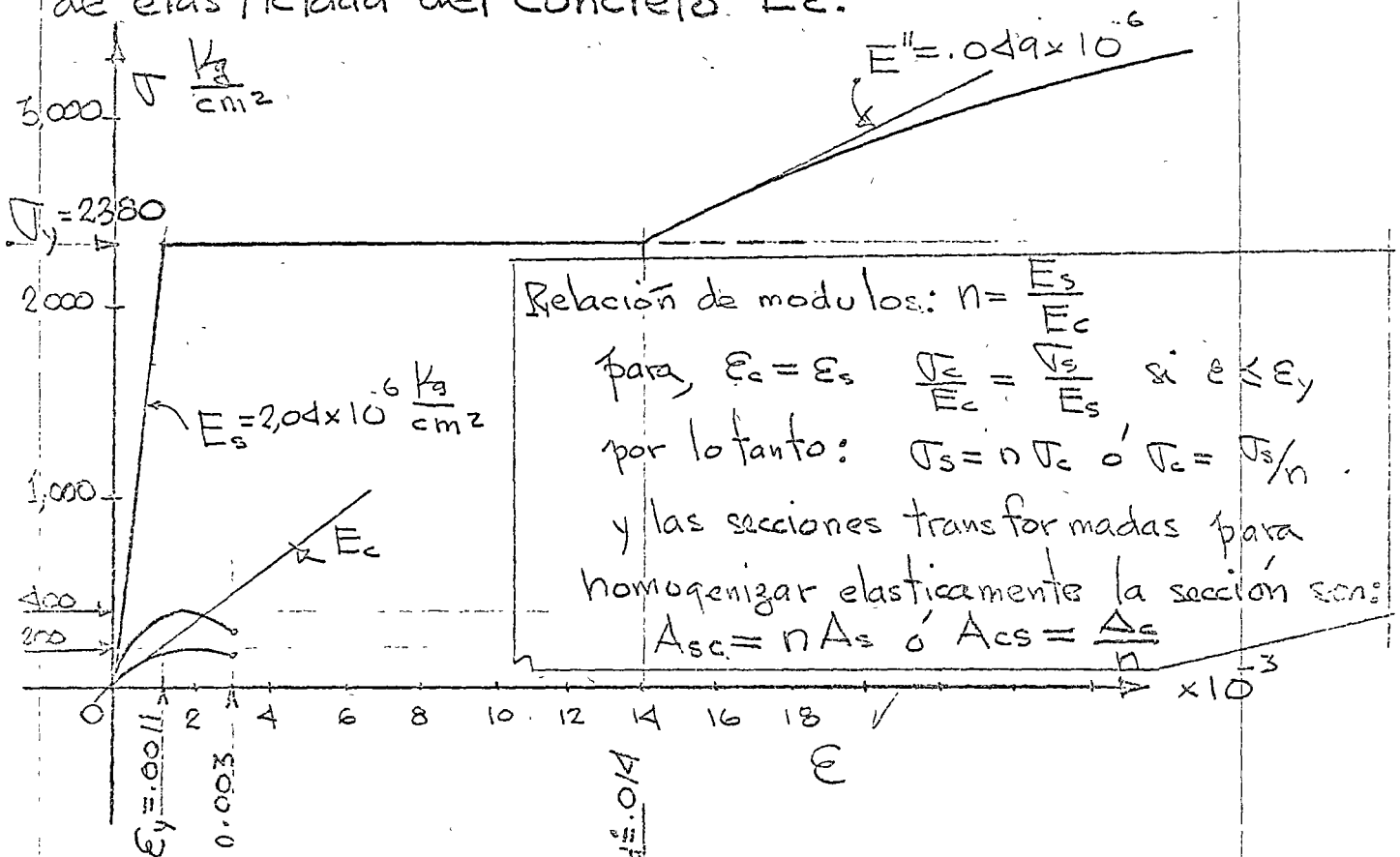


Fig. 4.2a Diagrama esfuerzo de formación acero A7 y concretos de $f'_c = 400$ y 200 kg/cm^2

Relación modular n. El módulo de elasticidad del concreto en lbs/pul^2 puede considerarse como ¹⁴

$$E_c = \gamma^{1.5} 33 \sqrt{f'_c} \quad (5.1)$$

donde γ es el peso volumétrico del concreto en libras/pie^3 y f'_c es considerado en libras/pul^2 . Para el peso ordinario del concreto de 145 lbs/pie^3 , su

$1 \text{ Kg/m}^3 = 16.0184 \text{ lbs/pie}^3$	(5.1a)
$1 \text{ Kg/cm}^2 = 14.2234 \text{ lbs/pul}^2$	
$1 \text{ cm} = .3937 \text{ pulg}$	
$1 \text{ m} = 3.28083 \text{ pies}$	

valor se considera como

$$E_c = 57,800 \sqrt{f'_c} \quad (5.2)$$

Ejemplo 5.1

Calcular la relación modular, n para un concreto de peso normal ($145 \text{ lbs/pie}^3 \approx 2300 \text{ Kg/m}^3$) con una resistencia a la compresión $f'_c = 3000 \text{ lbs/pul}^2 \approx 211 \text{ Kg/cm}^2$

Solución

De Eq. 5.1,

$$E_c = (145)^{1.5} (33) \sqrt{3000} = 57800 \sqrt{3000}$$

$$E_c = 3,170 \frac{\text{Kips}}{\text{pul}^2} \approx 2.23 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$$

lo cual da

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29,000}{3,170} = 9.15 \approx 9$$

El mínimo valor de n permitido por el reglamento del ACI y las especificaciones de la AASHTO es 6. Para propósitos prácticos de diseño, los valores de n indicados en la tabla 5.1 pueden ser usados.

TABLA 5.1 Valores de diseño para n

f'_c = Resistencia a los 28 días		Relación modular $n = E_s/E_c$
lbs/pul ²	Kg/cm ²	
3,000	211 (200)	9
3,500	246 (250)	8.5
4,000	281	8.0
4,500	316	7.5
5,000	351 (350)	7.0
6,000	422	6.5

6- Condiciones elásticas de la sección Transformada

Flexión pura.

Aceptando de formación plana y relación lineal es fuerza de formación de Fig. 6.1 se tiene, considerando el eje neutro coincidiendo con eje X.

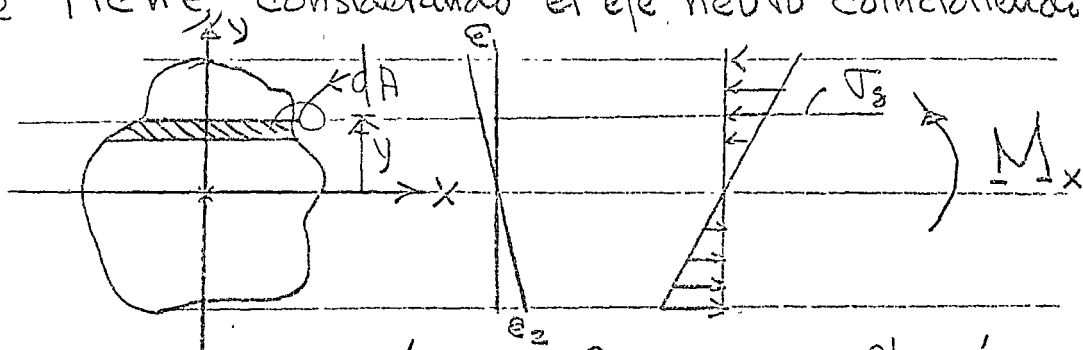


Fig. 6.1 Sección transformada - Pl. 11

Ley de Hooke y de deformación plana:

$$\sigma_3 = K_1 y \quad (6.1)$$

Equilibrio:

$$\text{de } \sum F_3 = 0 \quad \int_A \sigma_3 dA = K \int_A y dA = 0$$

$$\text{o sea } Q_x = \int_A y dA = 0 \quad (6.2)$$

(6.2) implica que el eje neutro coincide con el centroide de la sección transformada

de $\sum M_x = 0$ se obtiene

$$M_x = \int_A \sigma_3 y dA = K \int_A y^2 dA = K I_x \quad (6.3)$$

De (6.1) y (6.3) se obtiene:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad (6.4)$$

Ejemplo 6.1.

Calcule las propiedades de la sección compuesta mostrada en la figura 6.2 para $f_c' = 3000 \text{ lbs/in}^2$ y $n = 9$.

Solución

Primero, determinación del ancho efectivo:

$$b_E = 0.25 L = 0.25(30 \times 12) = 90''$$

$$b_E = b_o = 8 \times 12 = 96''$$

$$b_E = b_f + 16 \frac{t_s}{4} = 8.24 + 16 \times 4 = \underline{72.24''}$$

valor
considerado
por ser
menor

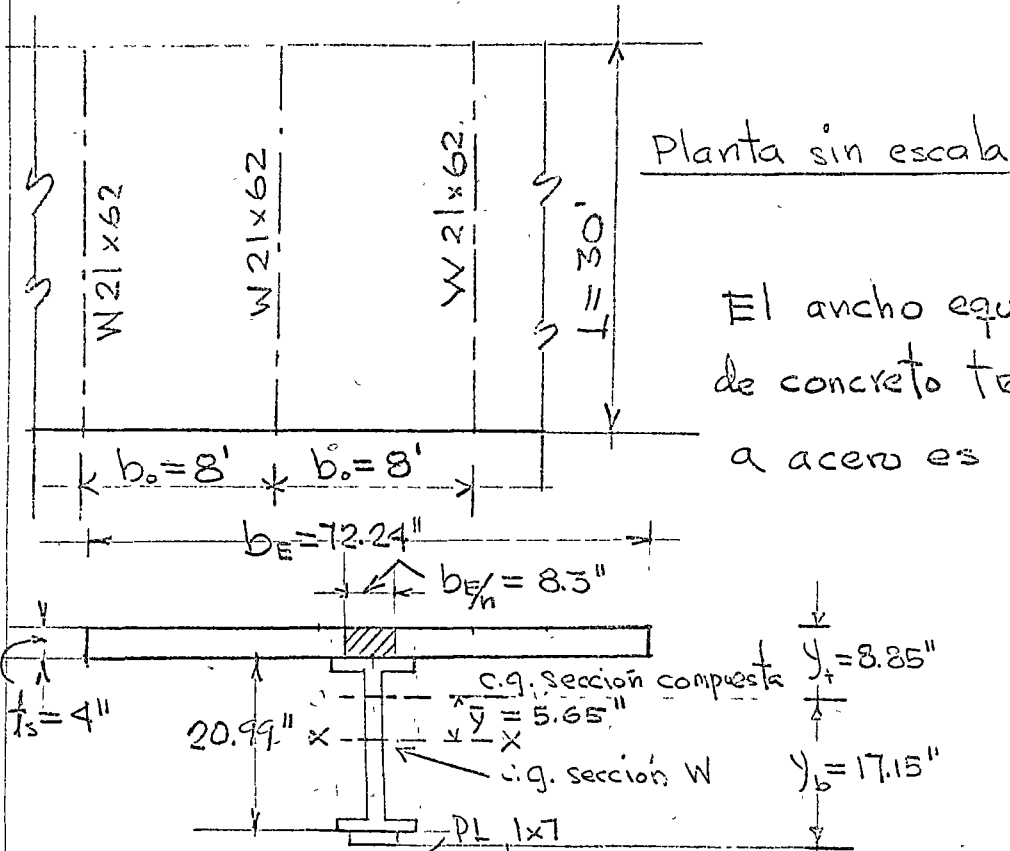


Fig. 6.2 Sección compuesta ejemplo 6.1

El cálculo del centroide y momento de inercia son mostrados en la Tabla 6.1.

TABLA 6.1

Elemento	Area Trans. o A (pul ²)	Brazo de c.g. W (pul)	A y pul ³	A y ² pul ⁴	I _o
Losa	32.12	12.495	+401.34	5016.8	42.8
W21x62	18.23	0	0	0	1326.8
Cubre placa	7.00	-10.995	-76.97	846.7	
Σ	57.35		+324.37	5863.5	1369.6

$$A y^2 + I_o = I_x = 5863.5 + 1369.6 = 7233.1 \text{ pul}^4$$

$$\bar{y} = \frac{324.37}{57.35} = 5.65''$$

$$I = I_x - A y^2 = 7233.1 - 57.35 (5.65)^2 = 5403 \text{ pul}^2$$

$$y_t = 10.5 - 5.65 + 4.0 = 8.85''$$

$$y_b = 10.5 + 5.65 + f = 17.15''$$

Ejemplo 6.2 (Torra)

Para la viga de acero WF21 x 62 con un cubre placa de 1" x 7" de la Fig. 6.2, determine

a) Los esfuerzos de servicio debidos al peso propio del concreto y de la viga suponiendo que la viga actua como obra falsa.

b) Los esfuerzos de carga viva y muerta superpuestos suponiendo que después de fraguado el concreto el momento total es incrementado por 560 Kips-pie.

7. ULTIMA CAPACIDAD DE CARGA DE SECCIONES COMPUESTAS

La última capacidad de carga de una sección compuesta depende del esfuerzo de fluencia de la viga de acero, la resistencia de la losa de concreto y la capacidad de interacción de los conectores de corte para conectar la losa a la viga.

Las recomendaciones de última resistencia fueron aplicados a la práctica según las recomendaciones del "ASCE-ACI Joint Committee" sobre construcción compuesta¹⁶ y tuvieron ciertas modificaciones después de

investigaciones efectuadas en la Universidad de Lehigh¹⁷.

La última resistencia en términos de la capacidad de momento último da un entendimiento más claro del comportamiento así como una medida más aproximada del factor de carga (Relación entre el momento último al momento aplicado).

El procedimiento para determinar la capacidad última de momento depende de que la posición del eje neutro quede dentro de la losa de concreto o en la viga de acero. Si el eje neutro cae dentro de la losa se dice que esta es adecuada. Si el eje neutro cae dentro de la viga de acero, la losa es considerada inadecuada, Fig. 7.1.

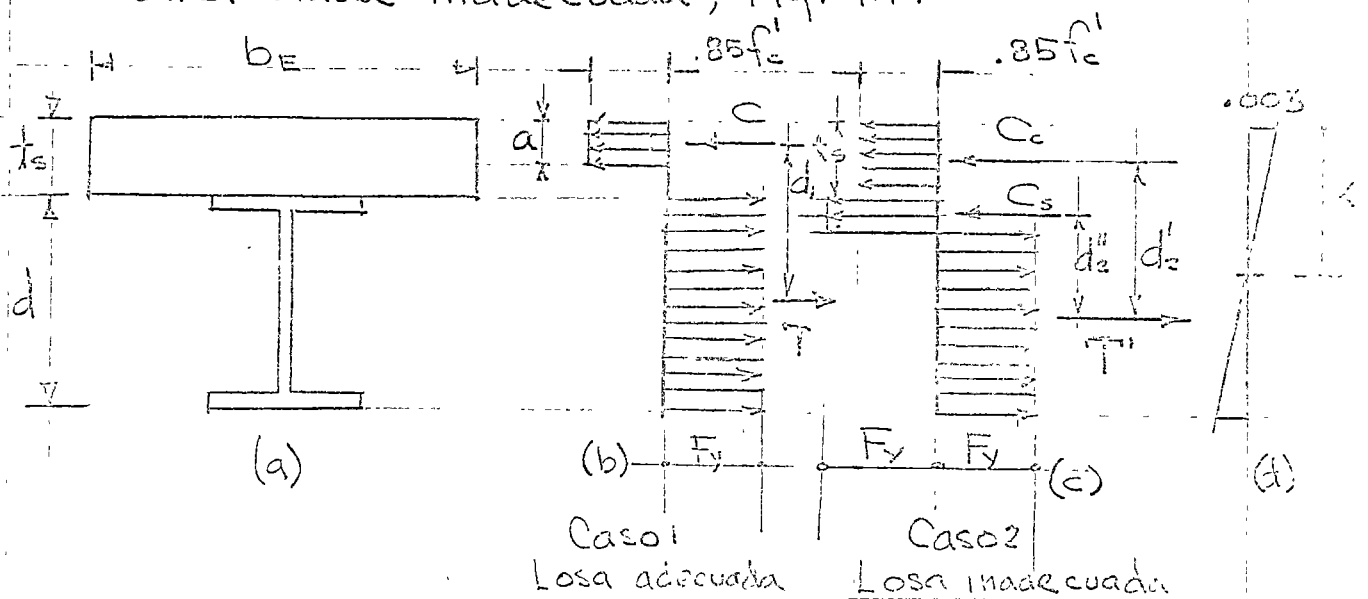


Fig. 7.1. Distribución de esfuerzos a última capacidad.

Caso 1 - Losa adecuado. Refiriéndose a la Fig 7.1 b y suponiendo el bloque rectangular de esfuerzos de Whitney se tiene, la última fuerza de compresión C es

$$C = 0.85 f'_c a b_E \quad (7.1)$$

y la última fuerza de tensión

$$T = A_s F_y \quad (7.2)$$

de $T=C$ se obtiene

$$a = \frac{A_s F_y}{0.85 f'_c b_E} \quad (7.3)$$

De acuerdo con la aproximación del bloque rectangular¹⁴ el eje neutro $x = a/0.85$ para $f'_c = 4000$ (28.5) lbs/pul². La última capacidad de momento M_u es

$$M_u = C d_1 = T d_1 \quad (7.4)$$

Puesto que la losa es adecuada, es capaz de desarrollar una fuerza compresiva igual a la capacidad total de fluencia de la viga. Expresando

M_u en términos de la fuerza en el acero da

$$M_u = A_s F_y \left(\frac{d}{2} + t_s - \frac{a}{2} \right) \quad (7.5)$$

Se determina a de (7.3) y si $a \leq t_s$, M_u se calcula de (7.5)

○) Caso 2 Losa inadecuada. Si a determinada de (7.3) se excede es mayor que t_s la distribución de esfuerzos será como se muestra en Fig. 7.1c. la última fuerza compresiva en la losa será

$$C_c = 0.85 f'_c b_E t_s \quad (7.6)$$

C_s será la fuerza de compresión última del acero arriba del eje neutro como se muestra en Fig. 7.1c.

La fuerza última de tensión T' es menor que $A_s F_y$ y es igual a

$$T' = C_c + C_s \quad (7.7)$$

$$\text{ó} \quad T' = A_s F_y - C_s \quad (7.8)$$

○ igualando (7.7) y (7.8) y despejando a C_s se obtiene

$$C_s = \frac{A_s F_y - C_c}{2}$$

$$\text{ó} \quad C_s = \frac{A_s F_y - 0.85 f'_c b_E t_s}{2} \quad (7.9)$$

y el momento último M_u es

$$M_u = C_c d_1' + C_s d_2'' \quad (7.10)$$

d_1' y d_2'' se muestran en Fig. 7.1c

○ Ejemplo 7.1:

Determine la última capacidad de momento de la sección compuesta mostrada en la Fig. 7.2 suponga acero A 36, $f'_c = 3000 \text{ lbs/peel}^2$ y $n = 9$

Verificación si la losa es adecuada! Caso 1.

$$a = \frac{A_s F_y}{0.85 f'_c b_E} = \frac{10.6(36)}{0.85(3)60} = 2.49" < \frac{t}{2} = 4" //$$

$$C = 0.85 f'_c a b_E = 0.85(3)(2.49)(60) = 381 \text{ Kips}$$

$$T = A_s F_y = 10.6(36) = 381 \text{ Kips}$$

(Se verifica que $T=C$)

el brazo $d_1 = \frac{d}{2} + t - \frac{a}{2} = 7.925 + 4.0 - 1.245 = 10.68"$

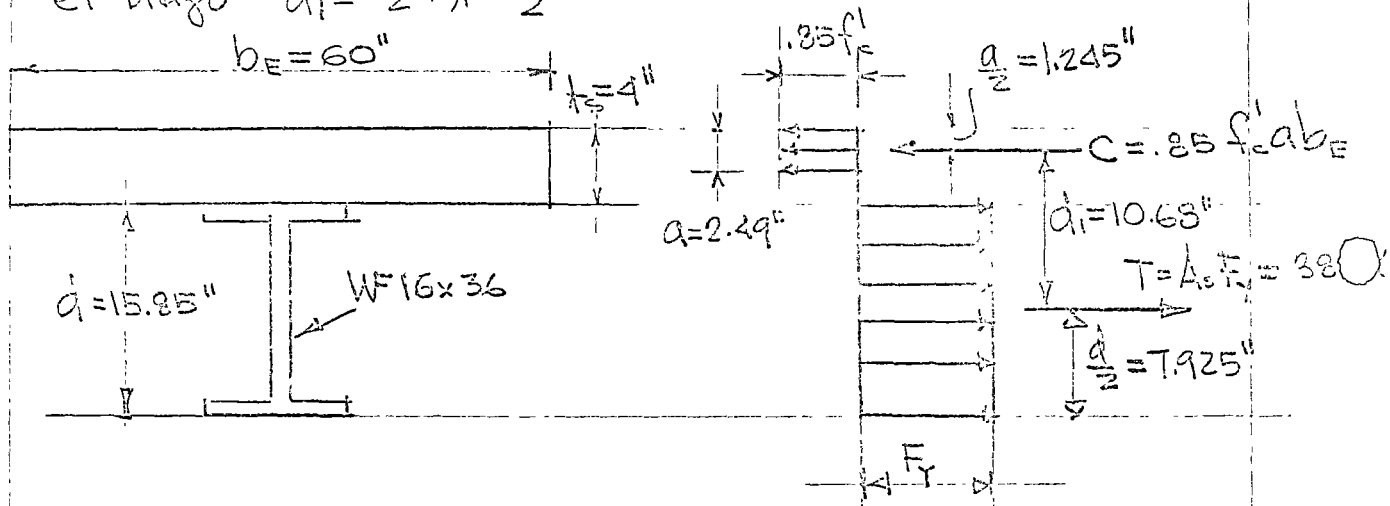


Fig. 7.2 Ejemplo 7.1

El momento último es

$$M_u = C d_1 = T d_1$$

$$= 381(10.68) / 2 = 340 \text{ Kips-pie}$$

Ejemplo 7.2

Determine la última capacidad de la sección compuesta mostrada en la Fig. 7.3. Suponga acero A36, $f'_c = 3000 \text{ lbs/pul}^2$, y $n = 9$.

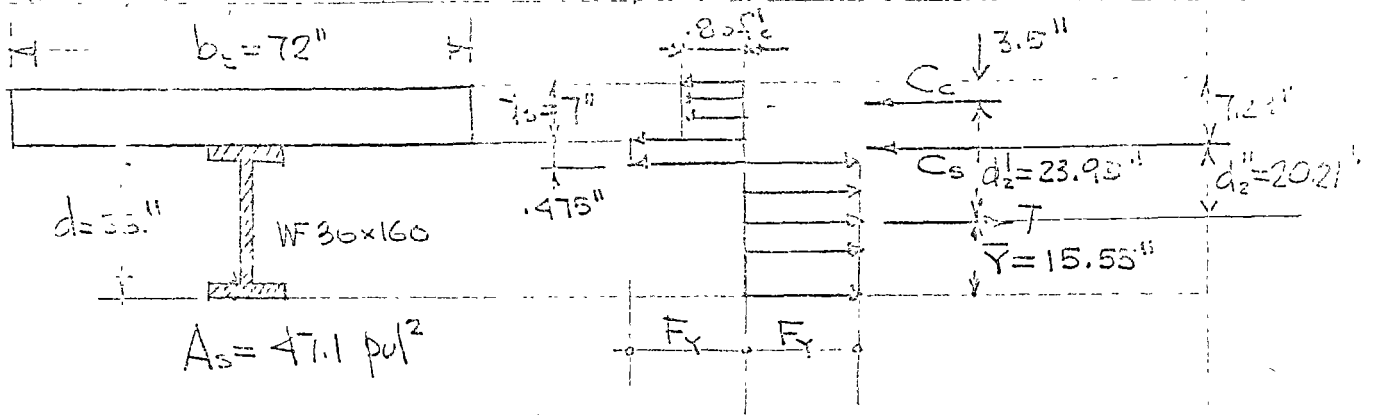


Fig. 7.3 Ejemplo 7.2

Solución: Verificación si la losa es adecuada

$$a = \frac{A_s F_y}{0.85 f'_c b_e} = \frac{(47.1)(36)}{0.85(3)(72)} = 9.22'' > t_s = 7''$$

La losa es inadecuada de tomar una $C \equiv A_s F_y$

De ecuación 7.6, $C_c = 0.85 f'_c b_e t_s = 0.85(3)(72)(7) = 1285 \text{ K}$

usando la ecuación 7.9

$$C_s = \frac{A_s F_y - 0.85 f'_c b_e t_s}{2} = \frac{47.1(36) - 1285}{2} = 205 \text{ Kips}$$

Suponiendo que solo el patin de la WF 36x160 ($b_f = 12''$) está en compresión $F_y b_f d_f = C_s$ de donde

$$d_f = \frac{C_s}{F_y b_f} = \frac{205}{36(12)} = 0.475'' < 1''$$

La localización del centroide de la porción de tensión es:

$$\bar{Y} = \frac{(47.1)(18) - 0.475(12)(35.76)}{47.1 - 0.475(12)} = 15.55 \text{ pulg}$$

De la Fig. 7.3 se observa que

$$M_{ui} = C_c d_1 + C_s d_2 = [1285 \times (23.95) + 205(20.21)] / 12 = 2,910 \text{ K-pulg}$$

8. CONECTORES DE CORTE.

El corte que se desarrolla entre la losa y la viga de acero durante la carga debe resistirse para que se desarrolle una sección compuesta monolítica, aunque la adherencia y la fricción sean significativamente altos nunca podrán desarrollar la interacción requerida.

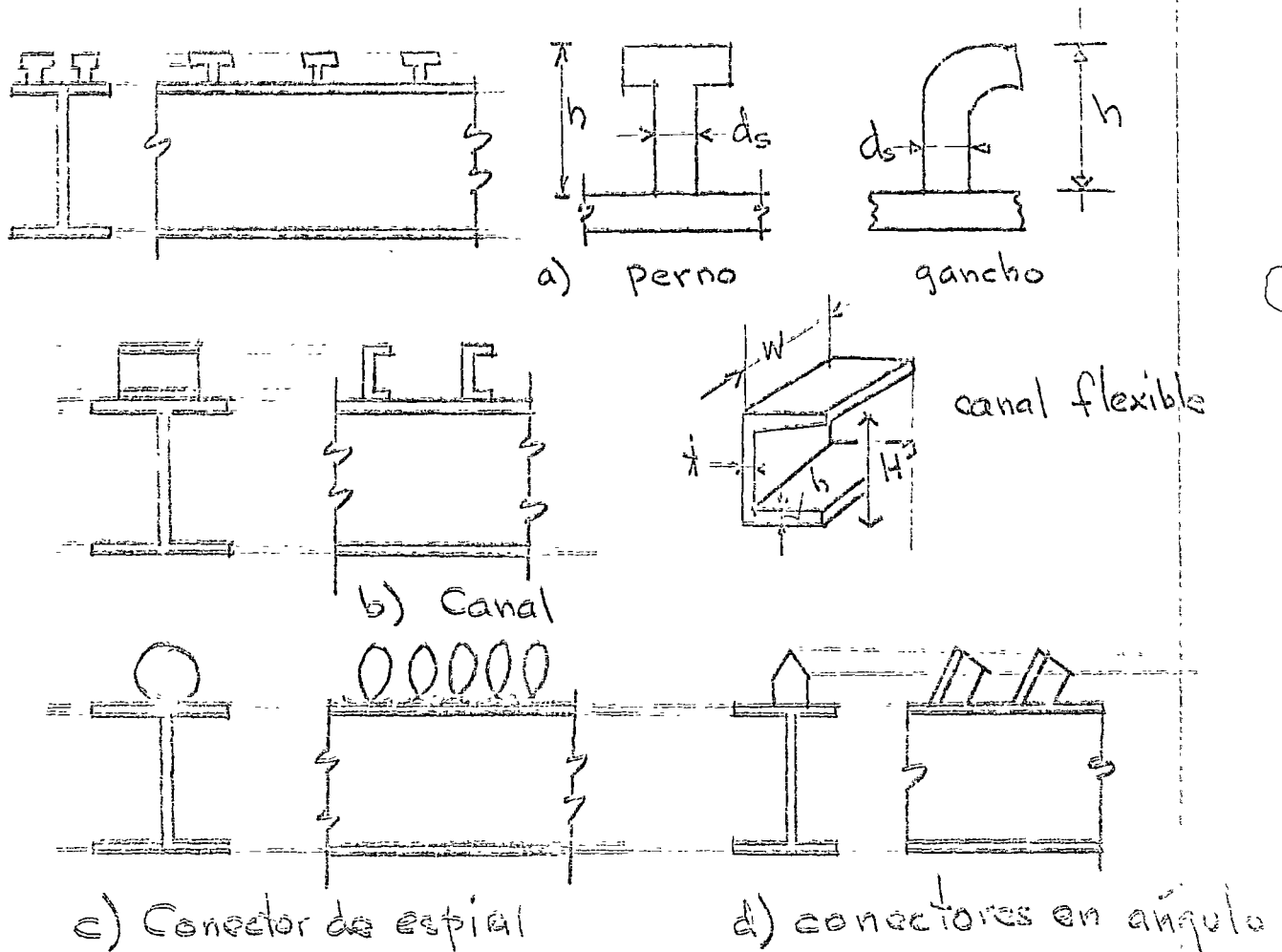
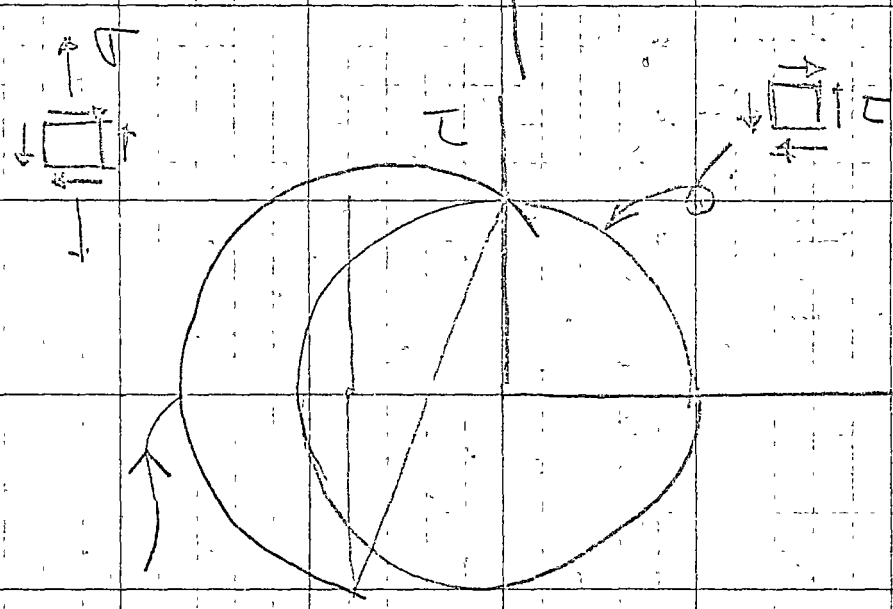
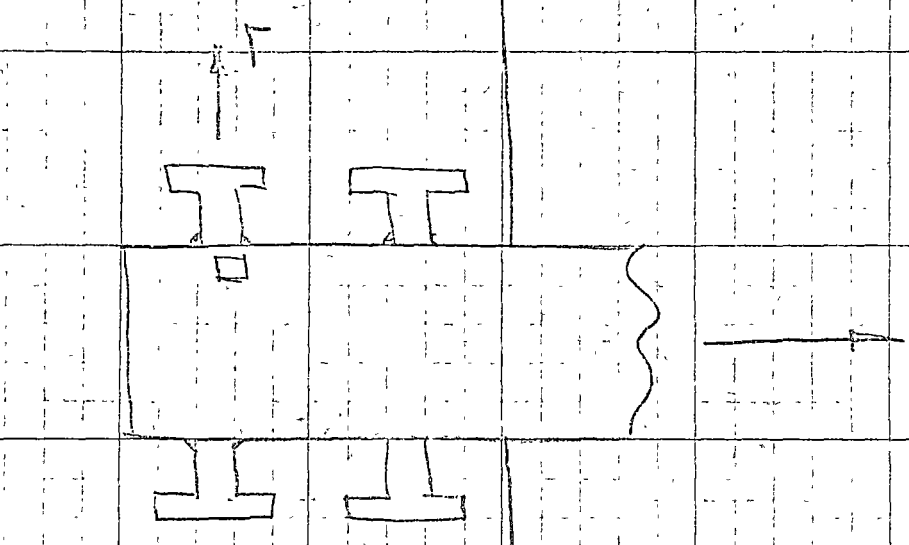


Fig. 8.1 Conectores de corte típicos



se incrementa la tensión diagonal

ESFUERZO CORTANTE EN CONDICIONES ELÁSTICAS

Ecuación general del corte considerando una sección homogénea, isotrópica, deformación plana y variación lineal $\sigma - \epsilon$,

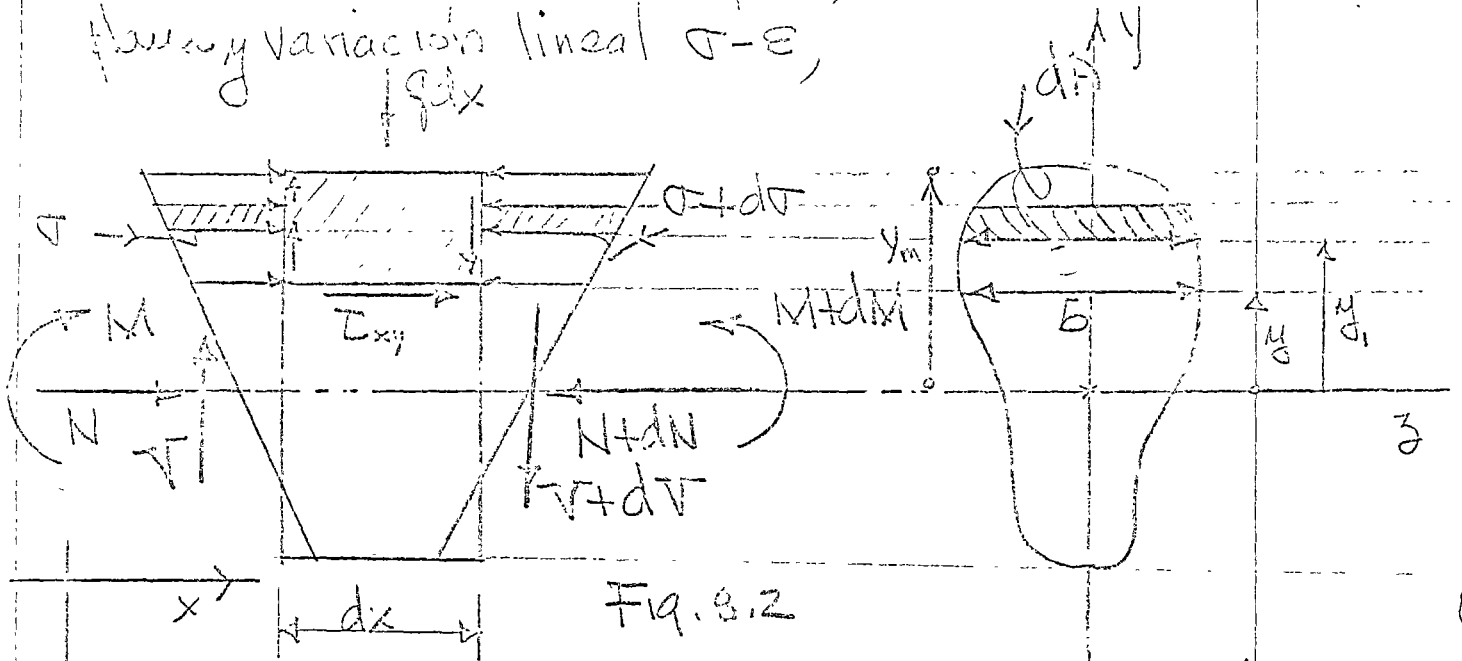


Fig. 8.2

Se tiene: $\sigma = \frac{M}{I_z} y_1 + \frac{N}{A}$, $d\sigma = \frac{dM}{I_z} y_1 + \frac{dN}{A}$ (8.1)

de $\sum F_x = 0$, $b \tau_{xy} dx = \int_y^{y_m} d\sigma dA$ (8.2)

Subst. (8.1) en (8.2) se obtiene

$$b \tau_{xy} = \int_y^{y_m} \left[\frac{dM/dx}{I_z} y_1 + \frac{dN/dx}{A} \right] dA = \frac{V}{I_z} \int_y^{y_m} y_1 dA + \frac{dN}{dx} \int_y^{y_m} dA$$

o sea $\tau_{xy} = \frac{V Q_y}{b I_z} + \frac{dN/dx}{b A} A_y$ (8.3)

(8.3) referida a ejes centroidales principales donde:

V = cortante en la sección en consideración.

$Q_y^{y_m}$ = momento estático de area de y a y_m (transformada)

b ancho de la sección a la altura y de la sección transformada.

I_z momento de inercia de la sección transformada respecto al eje centroidal z .

$\frac{dN}{dx}$ pendiente de la gráfica $N(x)$ en la sección en consideración x .

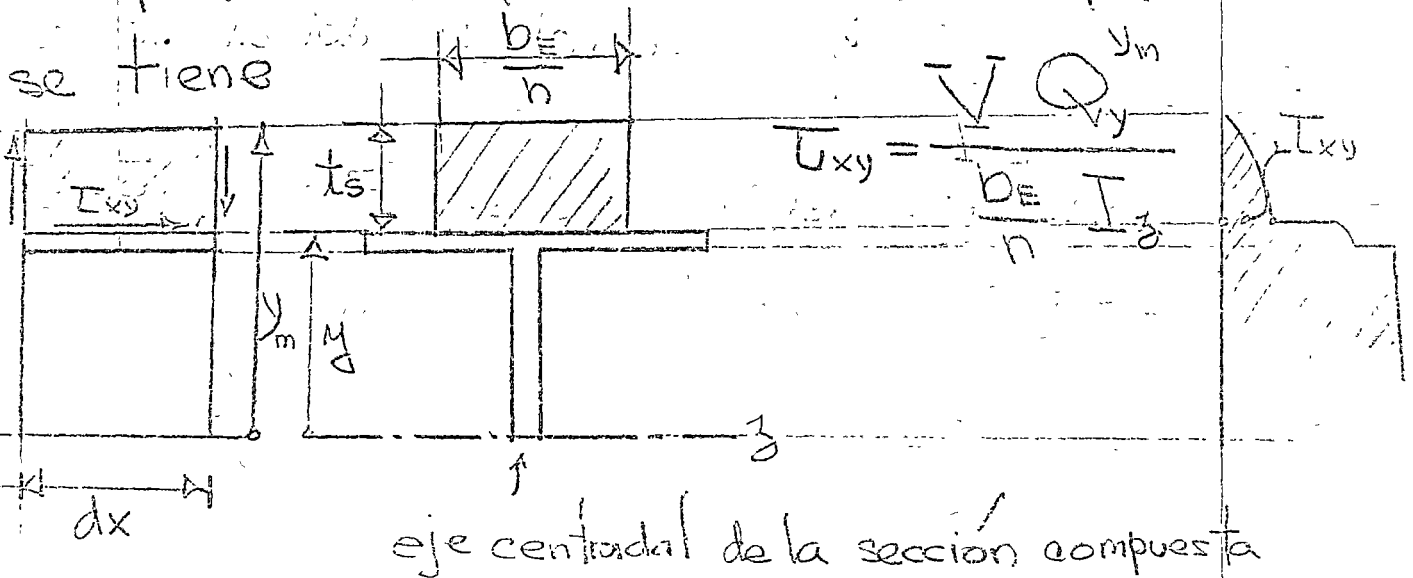
$A_j^{y_m}$ área de la sección de y a y_m .

A área total de la sección transformada.

en el caso de flexión o $N = \text{constante}$

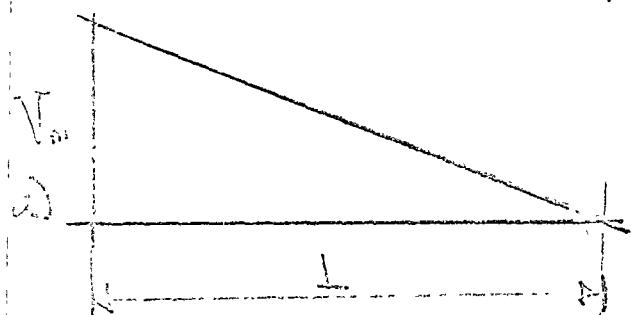
$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad t_{xy} = \frac{V Q_y^{y_m}}{b I_z} \quad (8.4)$$

Aplicando (8.4) a la sección compuesta



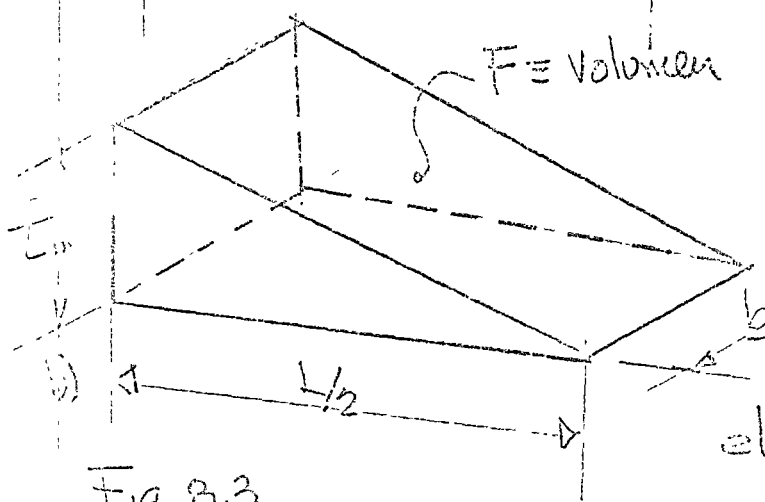
Si q = capacidad de corte permisible por conector.

en el caso de una viga libremente apoyada con carga uniforme de claro L la variación del corte es lineal y se tiene



$$V_m = \frac{qL}{2}$$

$$T_m = \frac{V_m Q_y}{\frac{b_E}{n} I_z} \quad (8.5)$$



La fuerza cortante total de interacción entre losa de concreto y viga metálica será

el volumen del diagrama

Fig. 8.3

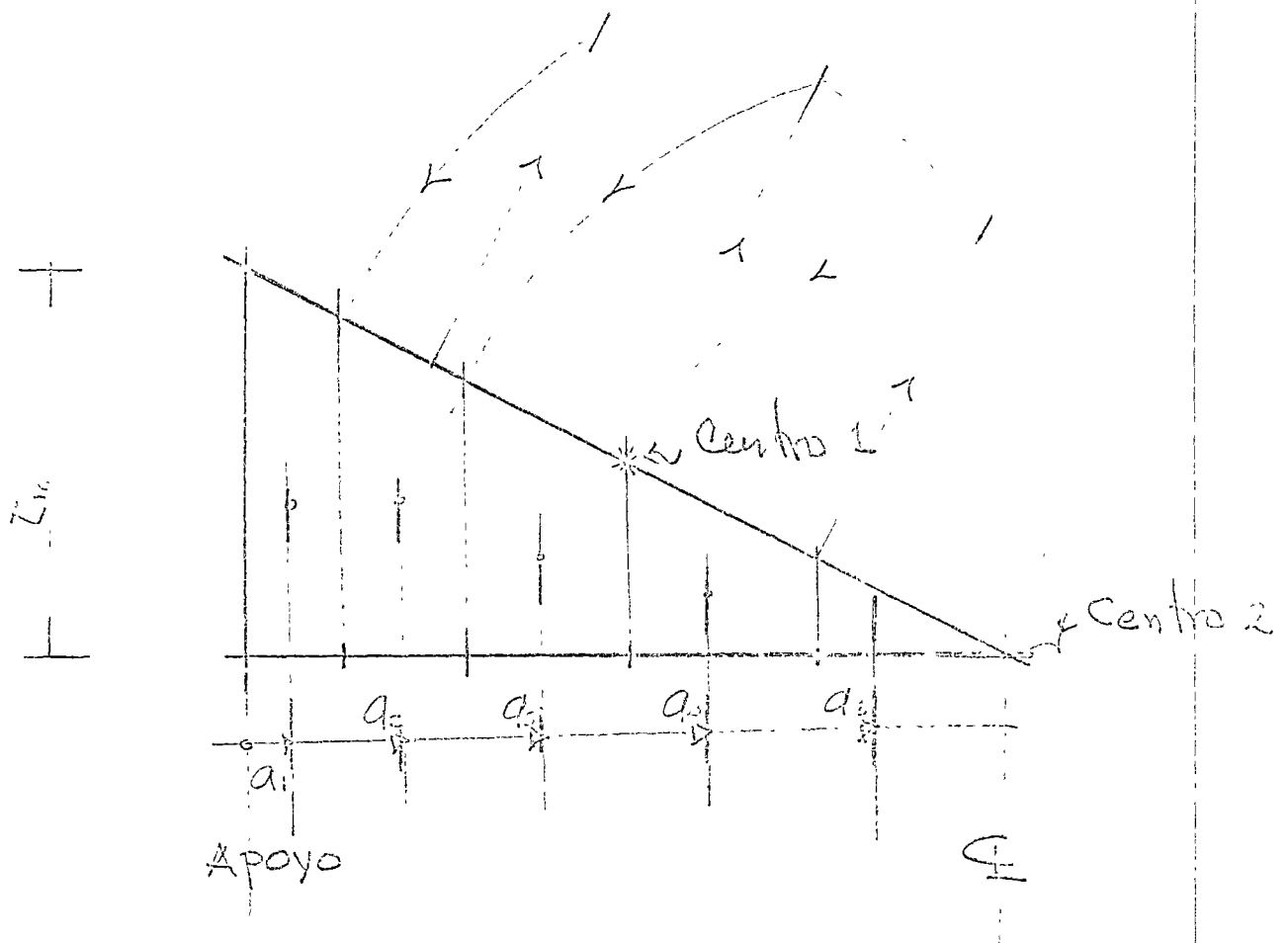
de corte mostrado en Fig. 8.3 b, $F = \frac{1}{2} \frac{b_E}{n} T_m \frac{L}{2}$

$$F = \frac{b_E L T_m}{4n} \quad \text{y el número de}$$

conectores en el semi claro $\frac{L}{2}$ será

$$N = \frac{F}{q} = \frac{b_E L T_m}{4n q} \quad (8.6)$$

○ Distribución de los conectores si la variación de corte es lineal. El problema análogo a la distribución de estribos en una viga de concreto consiste en dividir el volumen V en N volúmenes iguales.



○ Fig. 8.4 Método gráfico para seleccionar separación entre conectores, cuando el corte varía linealmente se ilustra para $N = 5$ conectores de corte

Condiciones de última resistencia en el cálculo de conectores de corte.

La fuerza última de compresión variará linealmente y será menor o igual a

$$C_m = 0.85 f_c b_e t_s \quad (8.7)$$

$$\text{o} \quad T_m = A_s f_y \quad (8.8)$$

Si un conector dado tiene una capacidad última q_{tu} , el número total de conectores entre los puntos de cero y máximo momento flector será

$$\left(\frac{N}{z} = \frac{C_m}{q_{tu}} = \frac{T_m}{q_{tu}} \right) \quad (8.9)$$

Es recomendable tomar el valor mayor determinado por (8.6) y (8.9) y distribuirlos linealmente, lo cual puede hacerse analíticamente o gráficamente como se indica en Fig. 8.4

El AISC recomienda que (8.2) o (8.3) se dividan entre 2, por la variación lineal del corte, que fue lo que se hizo en (8.4).

Los valores de q_u o q se consultan en los manuales.

DEFLEXIONES

Tomando el momento de inercia de la sección transformada deberá verificarse que la deflexión máxima permitida sea menor

que
$$\Delta_{max} \leq \frac{L}{360}$$

REFERENCIAS

1. H. M. Mac Kay, P. Gillespie, and C. Lelouau, "Report on the strength of steel I-Beams Haunched with Concrete (1929) Eng. Jour. - Canada
2. R. A. Caughey, "Composite Beams of Concrete and Structural Steel," Proceedings, 41st Annual Meeting Iowa Engineering Society, 1929.
3. Theodore von Kármán, "Die Mittlere Breite," Collected Works of Theodore von Kármán, Volume II part 4
4. Eric Reissner, "Über die Berechnung von Plattenbalken," Der Stahlbau, December 1933

Mar 1975

P. Bullentinos

CITEC UNAH

27

5. J.A. H. Lee, "Effective Widths of Tee-Beams," *Structural Engineer (London)*, January, 1962.
6. Ivan M. Viest, "Review of Research on Composite Steel-Concrete Beams," *J.S.D. ASCE* 1960
7. M. Ros, *Les constructions acier-béton, system Alpha*, "L'Osature Metallique (Bruxelle), Vol. 3, No 4 (1934), pp 195-203.
8. Ivan M. Viest, "Investigation: of Stud Shear Connectors for Composite Concrete and steel T-Beams," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 53 (April 1956), pp 875-891.
9. N.H. Newmark, C.P. Siess, and I.M. Viest, "Test and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction," *Proc. Soc. for Experimental Stress Analysis*, Vol 9, No. 1 (1951), pp 75-92.
10. Charles Culver and Robert Costen, "Tests of Composite Beams with Stud Shear Connectors," *J. Structural Div. ASCE*, Vol. 87 No. ST2 (February 1961), pp 1-17.
11. Bruno Thurliman, "Fatigue and Static Strength of Stud Shear Connectors," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 55 (June 1959) pp 1297-1302.

Mar /1975

P. Ballesteros

CEC UNAM

28

12. S. Timoshenko and J. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Co., 1959 Chap. 6
13. John E. Johnson and Albert D.M. Lewis, "Structural Behavior in a Gypsum Roof-Deck System," J. Structural Div. ASCE, Vol. ST2 (April 1966) pp. 283-296.
14. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," American Concrete Institute, Detroit, Mich. 1963
15. Standard Specifications for Highway Bridges, 10th Edition, American Association of State Highway Officials. Washington, D.C. 1969.
- 16.- Joint ASCE-ACI Committee on Composite Construction, "Tentative recommendations for the Design and Construction of Composite Beams and Girders for Buildings," J. Structural Div. ASCE, Vol. 86, No ST12 (April 1965), pp 71-99.
- 13.- I. M. Viest, R. S. Fountain and C.P. Siess, "Development of the New AASHTO specification for Composite Steel and Concrete Bridges" Highway Research Board Bulletin No 174 Washington, D.C., 1959.





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE
ACERO

Dr. Porfirio Ballesteros B.

TEORÍA PLÁSTICA DE ESTRUCTURAS

CONTENIDO

I FALLA PLÁSTICA

- 1.1 Introducción
- 1.2 Flexión de secciones simétricas
- 1.3 Cargas de falla de estructuras isostáticas
- 1.4 Cargas de falla de estructuras hiperestáticas
- 1.5 Derivación de cargas de falla por inspección
- 1.6 Teoremas de falla plástica.
- 1.7 Diagramas de interacción
- 1.8 Número de articulaciones plásticas
- 1.9 Factor de carga en diseño

Bibliografía

Problemas

II METODOS DE ANALISIS PLÁSTICO

- 2.1 Introducción
- 2.2 Marcos
- 2.3 Marcos múltiples
- 2.4 Método de mecanismos combinados
- 2.5 Momentos flectores en mecanismos de falla
- 2.6 Cargas distribuidas
- 2.7 Cálculo de cargas de falla con computadora

Bibliografía

Problemas

III EFEECTO DE LA CARGA NORMAL Y CORTE EN
LOS MOMENTOS PLÁSTICOS

- 3.1 Secciones con un eje de simetría
- 3.2 Efecto de la carga normal en el momento plástico
- 3.3 Efecto del corte en el momento plástico
- 3.4 Momentos plásticos bajo corte y carga axial

IV ESFUERZOS EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES
ANTES Y DESPUES DEL LIMITE ELÁSTICO

- 4.1 Introducción
- 4.2 Ecuación general de esfuerzos de flexión
- 4.3 Condiciones elásticas
- 4.4 Condiciones elástico plásticas y plásticas
- 4.5 Diagramas de diseño en flexión bi-axial
- 4.6 Diagramas de diseño de interacción bi-axial de columnas cortas
- 4.7 Determinación numérica de la última capacidad de carga de secciones de columnas cortas bajo flexo compresión bi-axial.

Biblioteca FIA

Problemas

V DISEÑO POR OPTIMIZACIÓN

- 5.1 Introducción
- 5.2 Ejemplos de diseño con el mínimo peso

- 5.3 Teoremas de diseño con mínimo peso
- 5.4 Derivación del mínimo peso de portales
- 5.5 Diseño de mínimo peso con computadora
- 5.6 Mínimo peso de armaduras continuas de sección variable

Bibliografía

Problemas

VI CARGAS VARIABLES REPETIDAS

- 6.1 Introducción
- 6.2 Comportamiento de una viga de dos claros
- 6.3 Teoremas de colapso
- 6.4 Métodos de análisis por colapso
- 6.5 Importancia de colapso en diseño

Bibliografía

Problemas

VII ESTABILIDAD

- 7.1 Introducción
- 7.2 Columnas cargadas excéntricamente
- 7.3 Portales
- 7.4 Estimación práctica de cargas de falla
- 7.8 Pandeo de placas
- 7.9 Pandeo local

Bibliografía

Problemas

CAPITULO I, FALLA PLASTICA

1.1 Introducción

Nuestro estudio concierne con el comportamiento de estructuras después del límite elástico, en particular sobre las cargas de falla, en las cuales su resistencia flexionante es de significado primario (vigas libremente apoyadas y armaduras continuas) Ejemplos de estas estructuras son mostradas en las Figs. 1.1(a), (b) y (c). En estructuras trianguladas cargadas solo en los nudos, las cargas son tomadas primariamente por fuerzas axiales, y estas estructuras no serán consideradas. En vigas también se presentan fuerzas cortantes, mientras que en estructuras reticulares corte y fuerzas axiales existen en algunos de los miembros. En estructuras reticulares, los mayores esfuerzos en el rango elástico son debidos a la flexión y es el factor más importante en determinar cargas de falla. El efecto del cortante y la carga axial serán considerados posteriormente en los capítulos III y IV

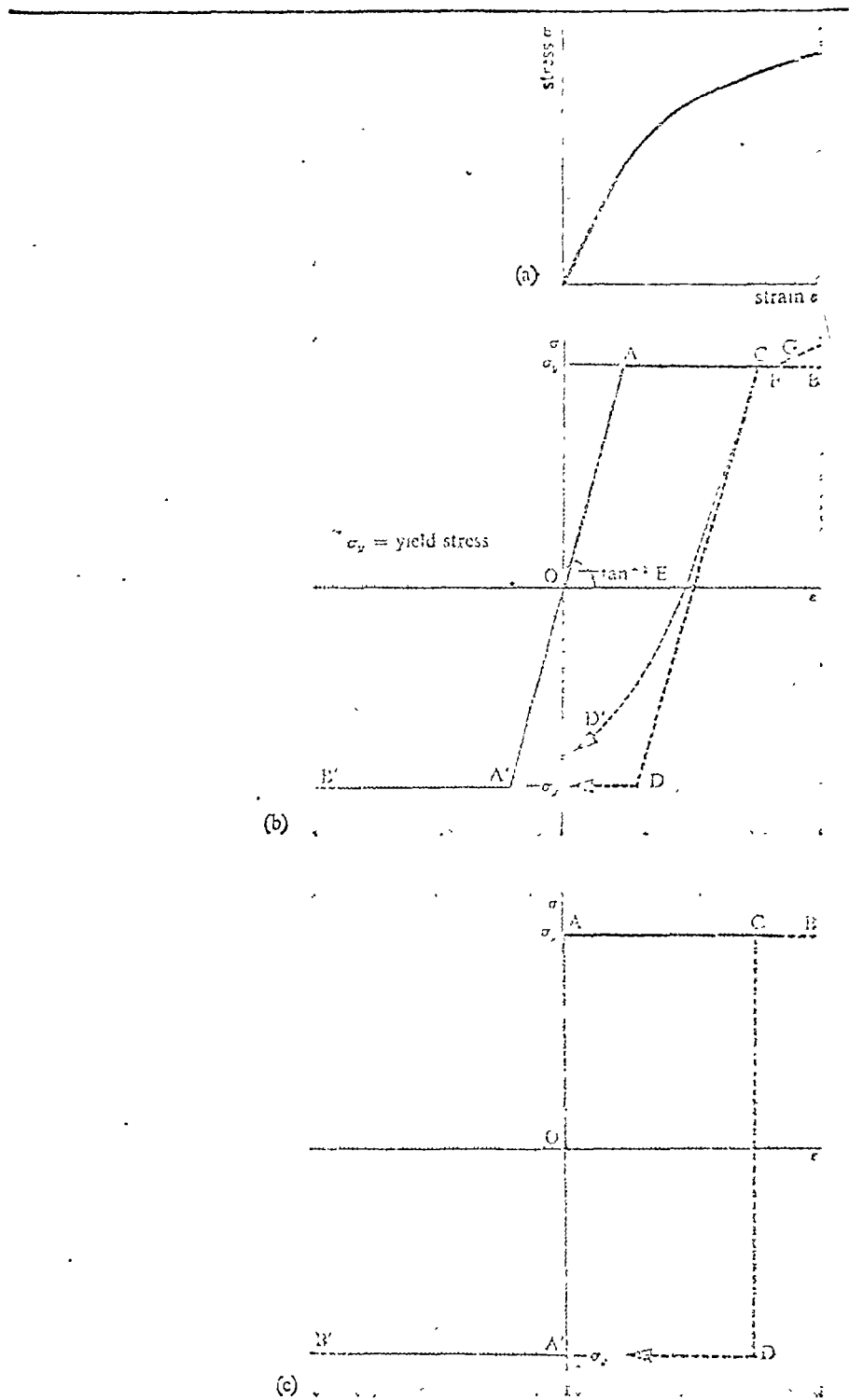


Figure 1.2 Stress-strain relationships

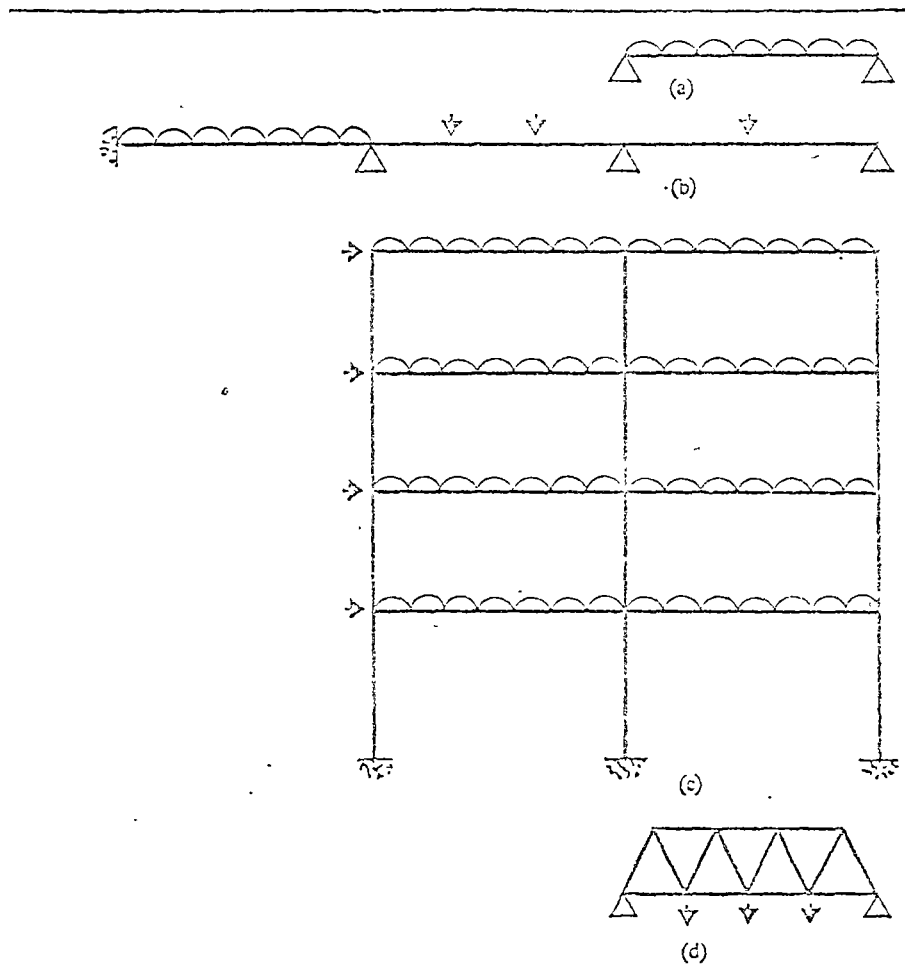


Figure 1.1 Types of structure

Es usual en la teoría elástica de estructuras el efecto de cambio de geometría en las ecuaciones de equilibrio'. La Teoría resultante es adecuada como una primera aproximación excepto para miembros flexibles en los cuales la estabilidad elástica llega a ser de primordial importancia^{2,3}. El incremento de deflexiones después del límite elástico podría significar que despreciar el cambio de geometría es menos justificable, pero se ha encontrado que cálculos útiles y significantes pueden hacerse adoptando la misma aproximación. Los efectos de cambio de geometría y de inestabilidad son discutidos brevemente en el capítulo

VII) El comportamiento de materiales después del límite elástico es altamente variable en las Figs. 1.2 (a), (b) y (c) se muestran 3 modelos matemáticos que son respectivamente el Frágil, elástico-plástico, y el rígido plástico. Los teoremas de plasticidad se aplican estrictamente a estructuras rígido-plásticas, y dan una gran aproximación a condiciones elástico-plásticas.

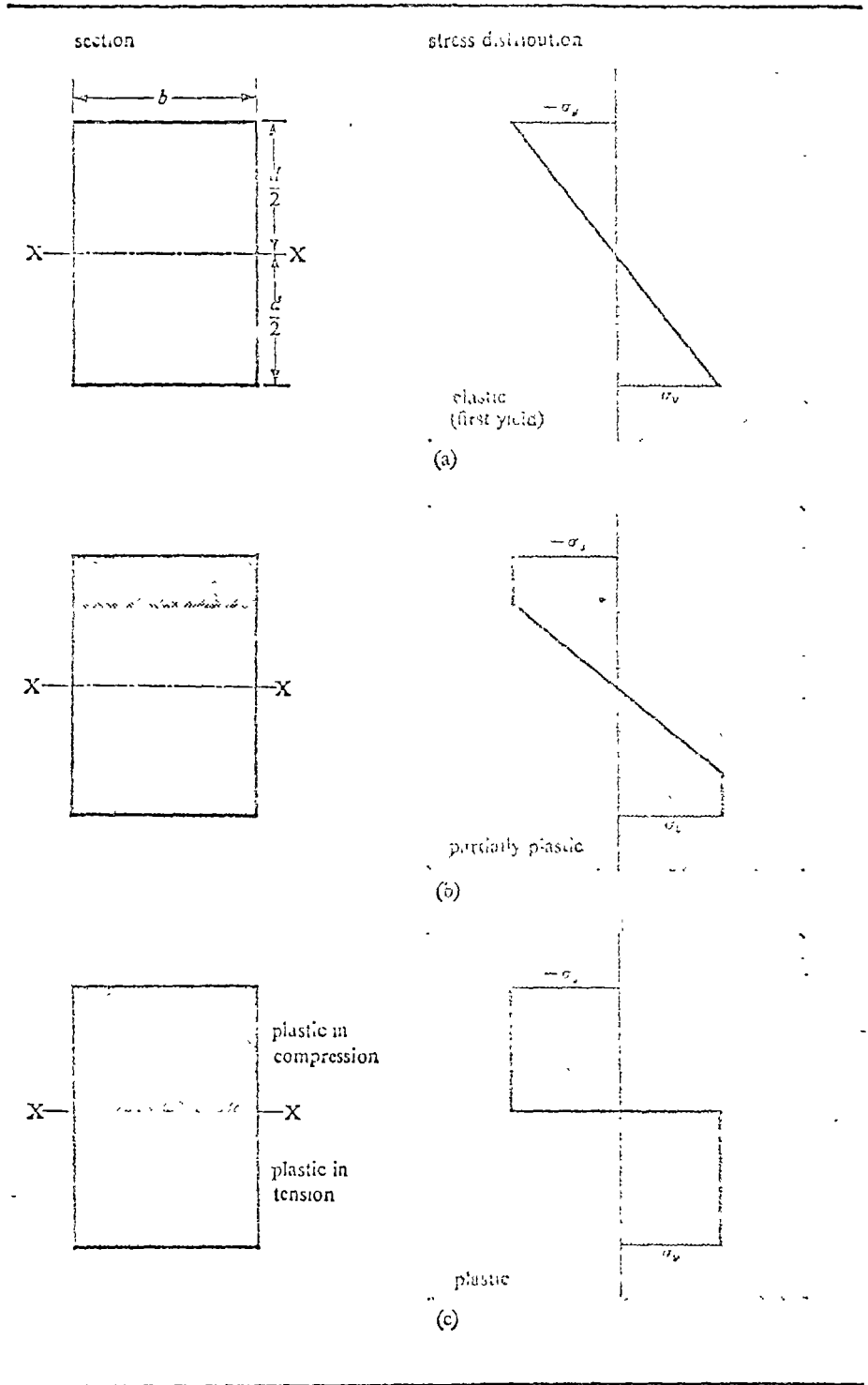


Figure 1.3 Bending into plastic range of beam of rectangular cross section

1.2 Flexión de secciones simétricas

Una viga de sección rectangular, de ancho b y peralte d alcanzará su límite de fluencia con un momento de magnitud $M_y = Z_e \sigma_y$, donde Z_e es el módulo elástico de sección, y tiene un valor $bd^2/6$. El esfuerzo longitudinal normal variará de $-\sigma_y$ en la fibra superior a σ_y en la inferior, linealmente. El momento M_y puede ser incrementado después de M_y causando zonas plásticas en tensión y compresión como se muestra en Fig. 1.3(b). La relación momento curvatura es lineal hasta M_y (Fig. 1.4), se observa un incremento en la razón de cambio de curvatura con respecto al cambio de momento hasta que se desarrolla completa plasticidad. Cuando la curvatura se aproxima a infinito la sección se plastifica totalmente (Fig. 1.3c) y el momento resistente tiende al momento plástico

$$M_P = \left\{ \left(\frac{bd}{2} \sigma_y \right) \frac{d}{4} \right\} \times 2 = \frac{bd^2}{4} \sigma_y = Z_P \sigma_y$$

la relación $Z_P/Z_e = f$ es conocida como factor de forma y en este caso es 1.5

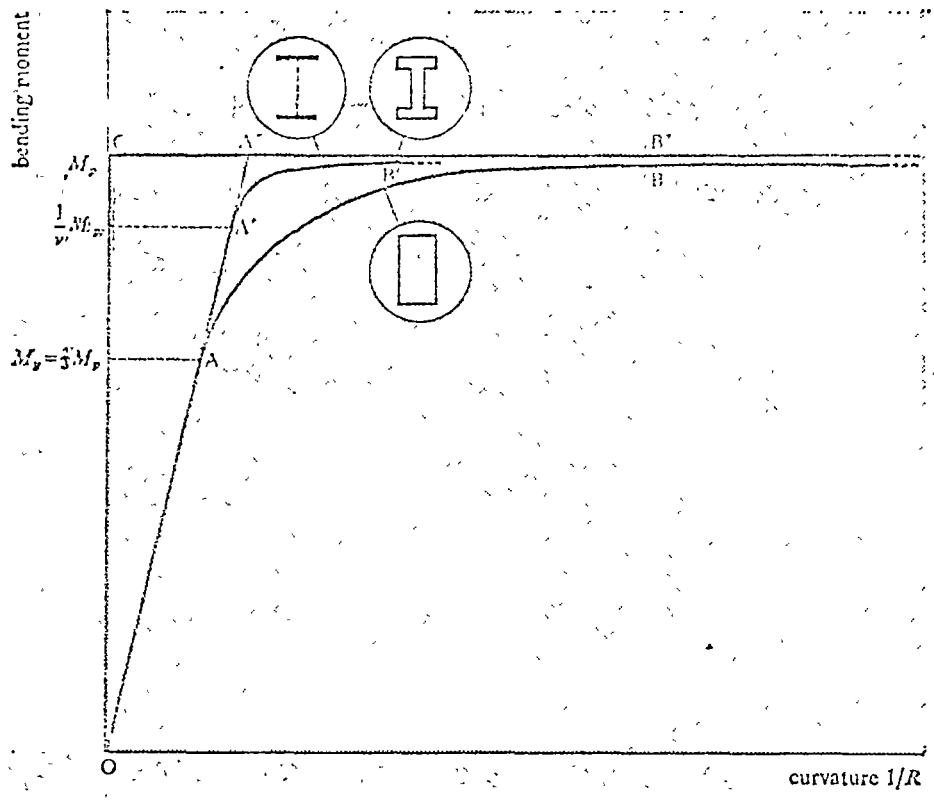


Figure 1.4 Moment-curvature relationships for beams bent into the plastic range

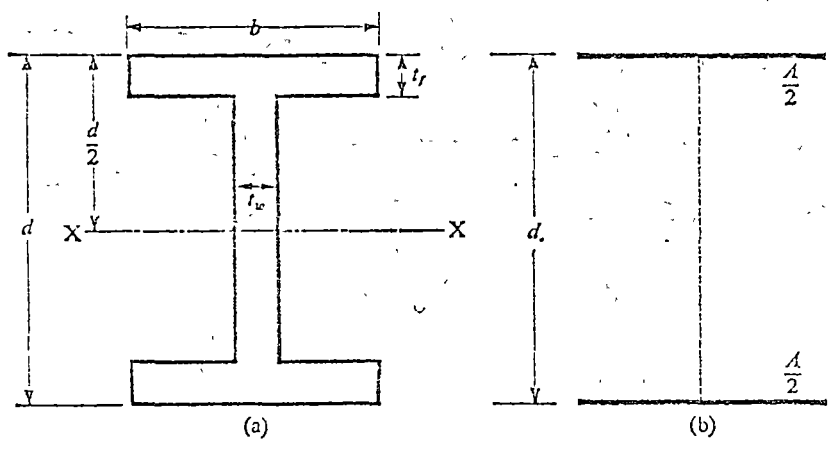


Figure 1.5 (a) Beam of I-section; (b) 'twin-plate' or unit shape factor section

En la Fig 1.5 a se muestra una sección que tiene un factor de forma de 1.15 menor que el de la sección rectangular, el módulo plástico se calcula tomando momentos de área respecto al eje central xx considerando el área en tensión negativa, dando

$$I_p = 2 \left[b t_f \left(\frac{d}{2} - \frac{t_f}{2} \right) + t_w \left(\frac{d}{2} - t_f \right) \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - t_f \right) \right]$$

$$I_p = b t_f \left(d - t_f \right) + \frac{1}{4} t_w \left(d - 2 t_f \right)^2 \quad (1.1)$$

La relación momento curvatura es la OA'B' de la Fig 1.4

Una sección idealizada que representa un modelo matemático de comportamiento elástico plástico (Fig 1.5 b), consiste de dos placas delgadas de cada una de área $\frac{A}{2}$ separadas una distancia d , sin área en el alma. Para esta sección $I_e = I_p = \frac{1}{2} A d^2$, es decir, su factor de forma es unitario, y la relación momento curvatura llega a ser OA''B'' en Fig. 1.4.

El modelo matemático para la relación momento curvatura en condiciones rígido plásticas es el mismo para los miembros de todas las secciones, siendo OC B'' en Fig 1.4

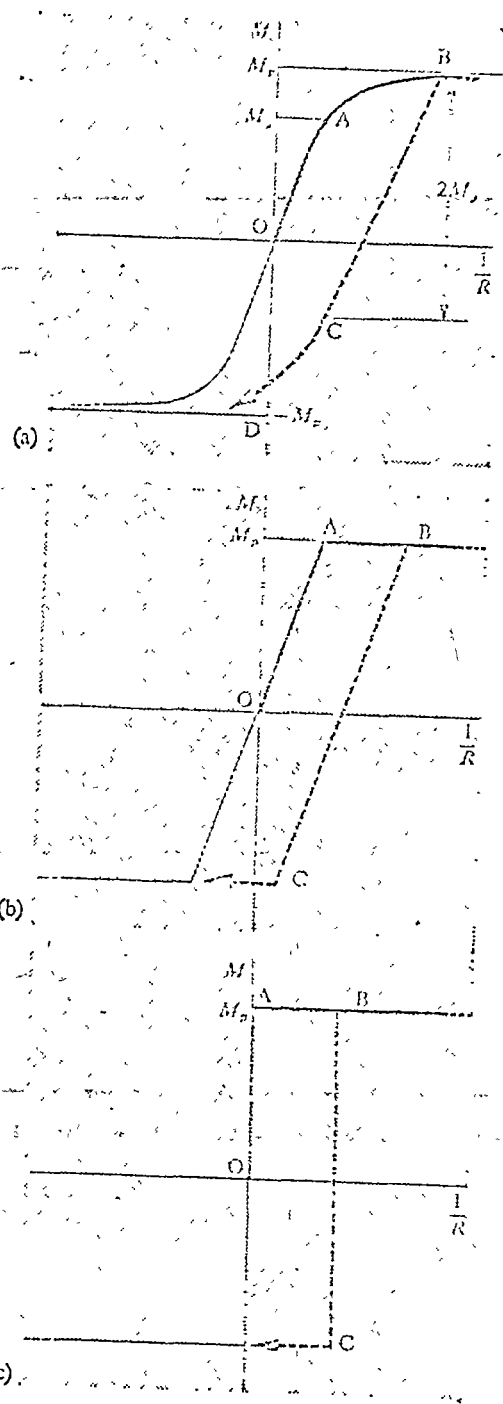


Figure 1.6 Moment-curvature relationships for reversed bending

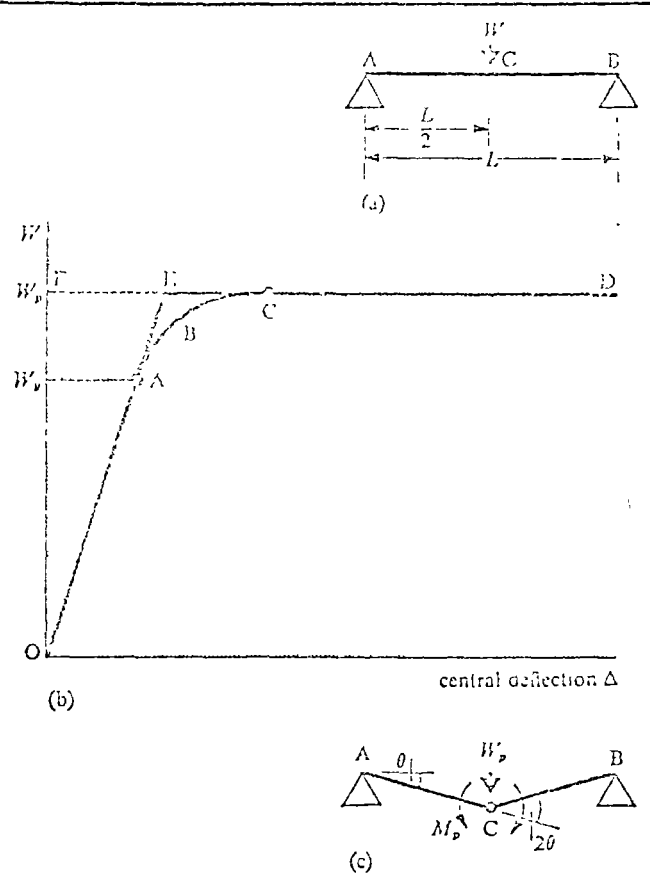


Figure 1.7 Elastic-plastic behaviour of simply supported beam

En la figura 1.6 se muestran los diagramas momento curvatura idealizados de descarga de vigas

1.3 CARGAS DE FALLA DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Fig. 1.7i viga simplemente apoyada

$$M_y = W_y \frac{L}{4} \quad \text{o} \quad W_y = \frac{4M_y}{L}$$

En 1.7c igualando el Trabajo externo al trabajo interno absorbido por la articulación plástica y suponiendo θ pequeño

$$W_p \left(\frac{L\theta}{2} \right) = M_p (2\theta) \quad (1.2)$$

dando $W_p = \frac{4M_p}{L}$, (1.2) puede considerarse real o ecuación de Trabajo Virtual.

El concepto de articulación plástica es obviamente una aproximación física, puesto que la curvatura infinita es imposible sin fractura completa de la viga. Se ha encontrado que el concepto de articulación plástica representa una gran aproximación para el acero estructural ^{3,5}

Si el factor de forma es supuesto la unidad la relación carga deflexión central Δ

llega a ser las dos rectas OED. Una viga de material rígido plástico tiene la relación OFD, y en este caso el mecanismo de la Fig. 1.7 c llega a ser una representación real del estado total deformado de la viga.

Las articulaciones plásticas tienden a ocurrir en los valores máximos de los momentos inducidos, transformando la estructura en un mecanismo. La estructura triarticulada de la Fig. 1.8 a, con cargas y dimensiones como se indican, tiene una distribución de momentos como se indica en Fig. 1.8 b. El momento máximo es 60λ en el punto D, suponiendo un momento plástico $M_p = 100$ unidades, la falla ocurrirá cuando $60\lambda = 100$, es decir cuando $\lambda = 1.667$. La ecuación de trabajo usa el mecanismo de colapso de Fig. 1.8 c en la cual I_{cs} es el centro instantáneo de rotación de CD, cae sobre AC y ED.

Suponiendo que en ese mecanismo, ABC gira un ángulo ϕ respecto a A, CD gira θ respecto a I_{cs} , y DE gira ψ con respecto a E. Considerando el movimiento vertical de C

$$30\phi = 20\theta \quad \text{o sea} \quad \phi = \theta$$

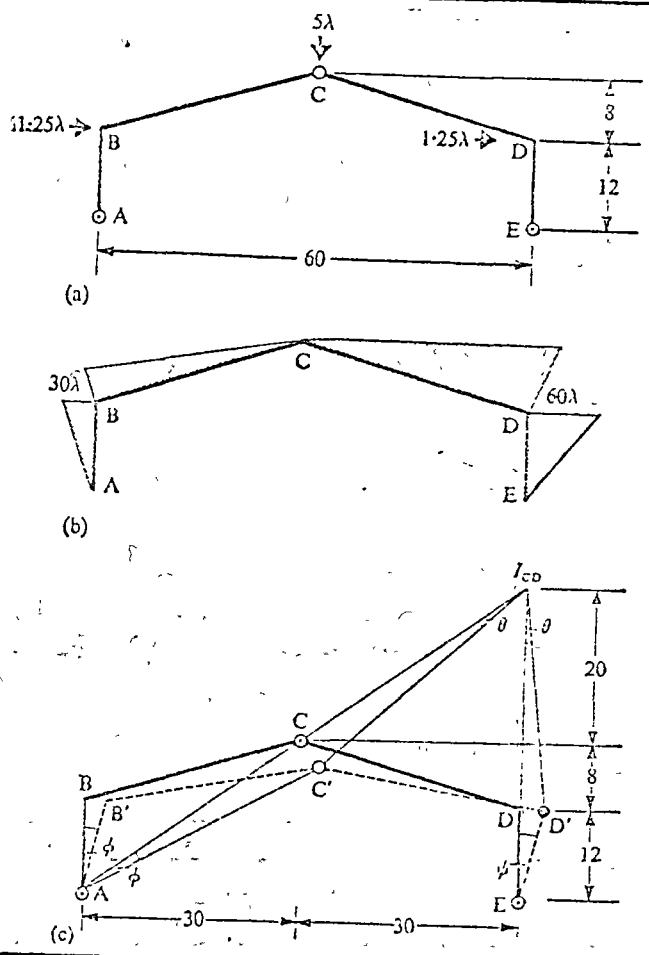


Figure 1.3 Plastic failure of three-pin pitched roof portal frame

Similarmente considerando el movimiento horizontal de D

$$2S \theta = 12 \psi$$

$$\text{de donde } \psi = \frac{1}{3} \theta$$

La igualdad del trabajo externo al interno donde el trabajo interno ocurre en D cuya rotación es $(\theta + \psi)$ se tiene

$$5\lambda (30\phi) + 1.25\lambda (12\phi) + 1.25\lambda (12\psi) = \underbrace{100}_{M_p} (\theta + \psi) \quad (1.3)$$

Substituyendo en (1.3) los valores de ϕ y ψ en función de θ se obtiene $\lambda = 1.667$ como en el caso de la solución estática de Fig. 1.8 b.

1.4 CARGAS DE FALLA DE ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS.

Para ilustrar el comportamiento elástico plástico de estructuras hiperestáticas hasta la falla, se considera el portico empotrado de la Fig. 1.9(a), con cargas verticales y horizontales permaneciendo proporcionales al factor de carga λ . El portal es de sección uniforme con un momento plástico $M_p = 2WL$, y la sección transversal se supone que tiene un factor de forma unitario.

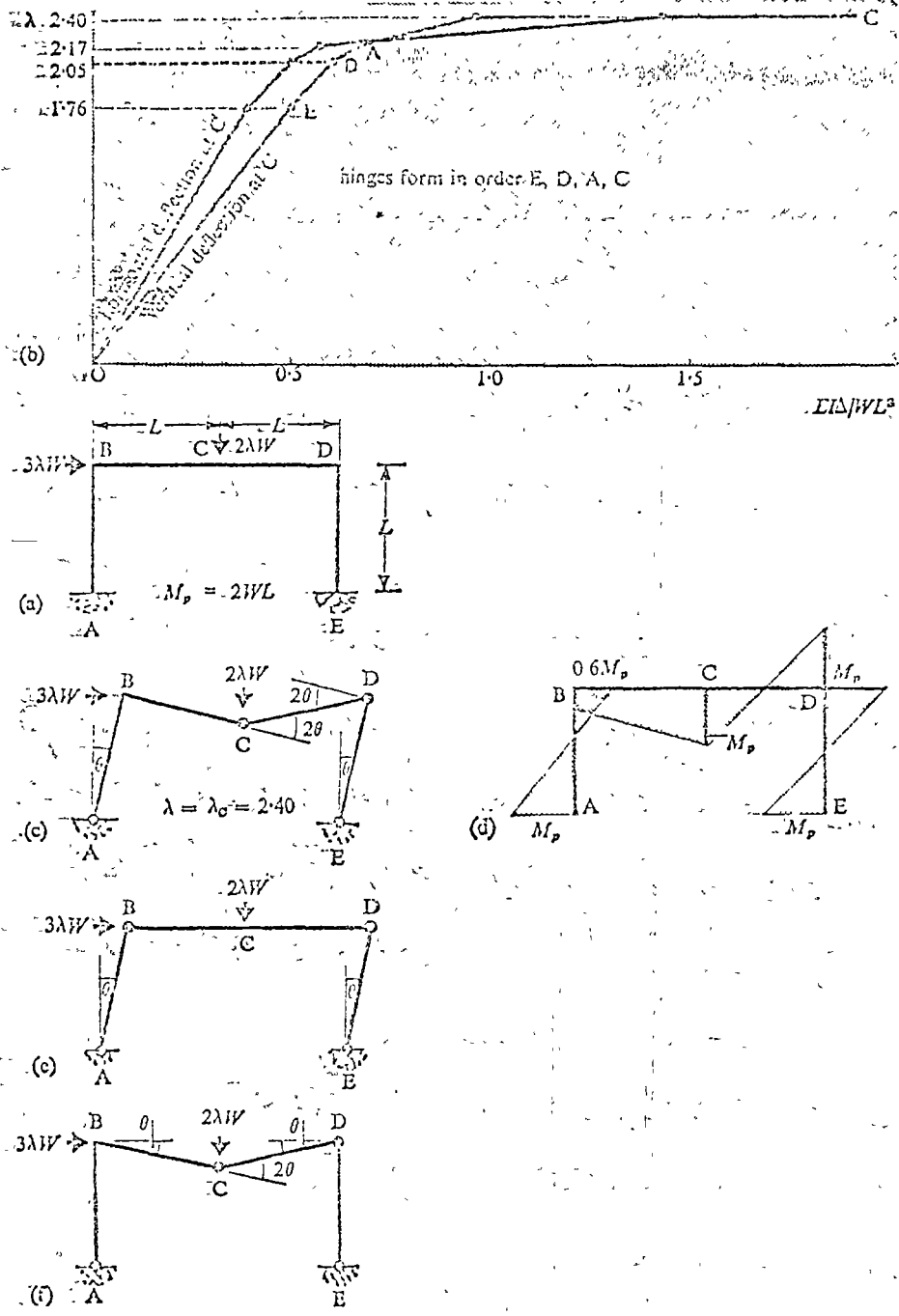


Figure 1.9 Elastic-plastic behaviour of fixed base rectangular portal frame

Las relaciones carga de formación hasta el colapso con respecto a las deformaciones verticales y horizontal en el centro del claro son mostradas en la Fig. 1.9 b

El final de la fase elástica ocurre a un factor de carga de 1.76 cuando se forma la articulación plástica en E, y después se forman sucesivamente en D, A, y C y la

estructura se convierte en un mecanismo (Fig. 1.9c), y deformaciones mayores a un factor de carga constante de 2.40.

El momento flector en condiciones de colapso es mostrado en Fig. 1.9 d).

Un análisis completo elástico-plástico no es necesario, siempre y cuando se conozca el mecanismo correcto de falla. Aplicando la ecuación de Trabajo al mecanismo de Fig. 1.9c da

$$3\lambda W(L\theta) + 2\lambda W(L\theta) = M_p(\theta + 2\theta + 2\theta + \theta)$$

$$\text{de donde } \lambda = 2.40 = \frac{1.20 M_p}{WL}$$

aplicando la ecuación de Trabajo a los mec. Fig. 1.9 e)

$$(1.9e) \quad 3\lambda W(L\theta) = M_p(\theta + \theta + \theta + \theta) \Rightarrow \lambda = 2.67$$

$$(1.9f) \quad 2\lambda W(L\theta) = M_p(\theta + 2\theta + \theta) \Rightarrow \lambda = 4.00$$

Los mecanismos de falla dan factores de carga

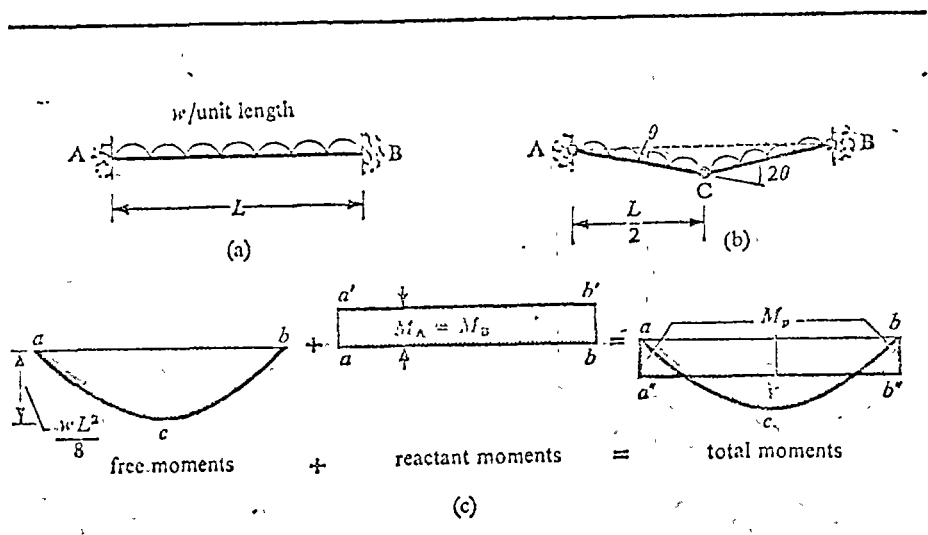


Figure 1:10 Plastic failure of fixed-ended beam with uniformly distributed load.

mejores que $\lambda = 2.40$, así que la carga de falla correcta podría derivarse considerando todos los posibles mecanismos y usando aquel que da el menor factor de carga, en otras palabras la ecuación del trabajo aplicada a un mecanismo arbitrario siempre da un valor mayor.

1.5 Derivación de cargas de falla por inspección

El mecanismo de falla de una viga empotrada con carga uniforme (Fig. 1.10a) es el mostrado en Fig. 1.10b, con articulaciones plásticas en el centro y en los extremos iguales al trabajo externo al interno

$$wL \left(\frac{1}{2} \theta \right) = M_p (\theta + 2\theta + \theta) \quad (1.7)$$

$$w = \frac{16 M_p}{L^2}$$

Un procedimiento alternado es observar la distribución de momentos para superponer momentos isotáticos con momentos reactivos de la Fig. 1.10c se tiene

$$2 M_p = \frac{wL^2}{8} \quad \text{lo sea}$$

$$w = \frac{16 M_p}{L^2}$$

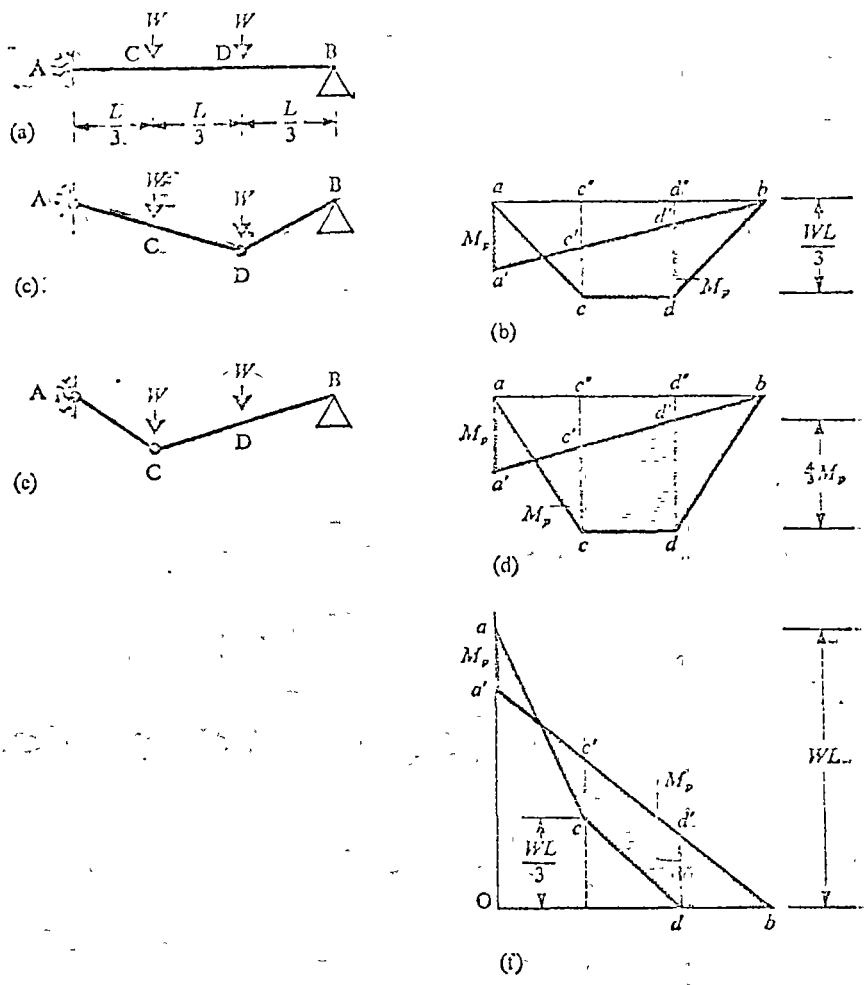


Figure 1.11 Plastic failure of propped cantilever

Para la viga en cantiliver mostrada en la Fig. 1.11 a, su preponiendo los diagramas isostáticos y los reactantes se tiene para el mecanismo de falla de la Fig. 1.11 c

$$W = \frac{4M_p}{L}$$

y para la Fig. 1.11 e

$$W = \frac{5M_p}{L}$$

El diagrama de momento evidentemente muestra que es incorrecto puesto que el momento en D es $\frac{4}{3} M_p$.

El diagrama isostático mencionado puede ser cualquiera en la figura 1.11 f se muestra el diagrama quitando el apoyo en B y da un valor igual a Fig. 1.11 a

$$W = \frac{4M_p}{L}$$

Con las ecuaciones de trabajo se obtienen los mismos resultados.

Observando los ejemplos anteriores se muestra que la distribución de momentos factores debe satisfacer en condiciones de colapso lo siguiente:

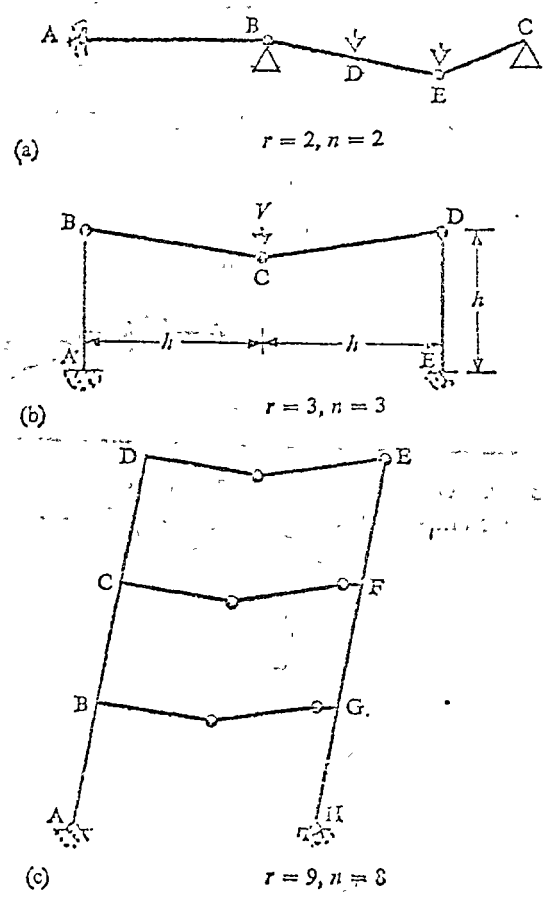


Figure 1.17 Examples of 'incomplete' collapse

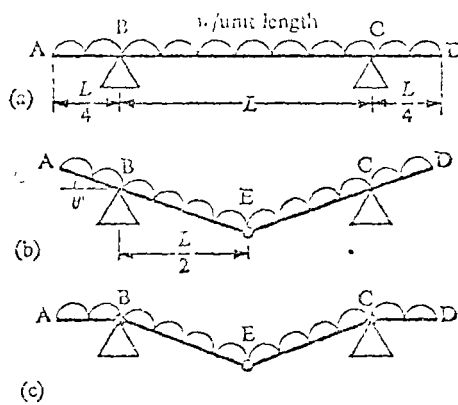


Figure 1.12 (a) Uniformly loaded beam; (b) actual failure mechanism; (c) postulated mechanism, not giving equilibrium state, but giving valid upper bound

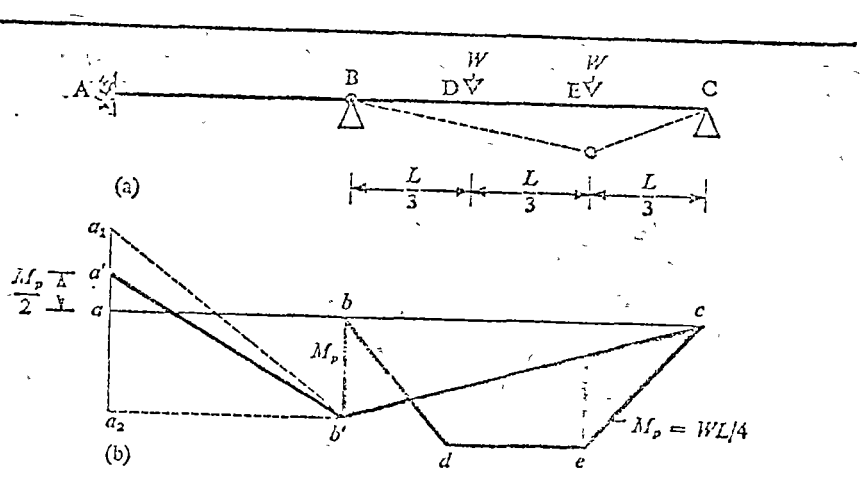


Figure 1.13 Failure of two-span beam with moments within span AB statically indeterminate at collapse

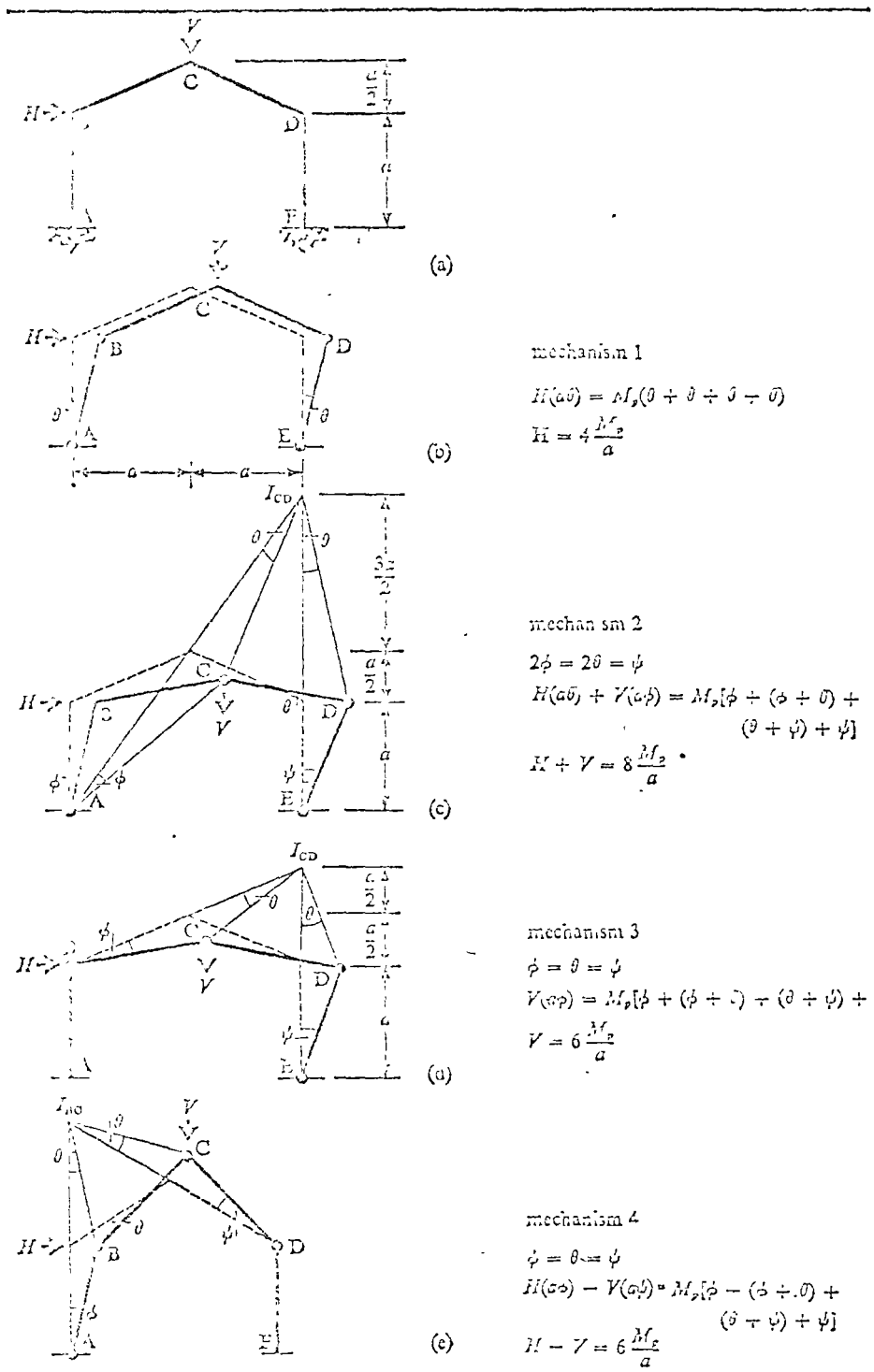


Figure 1.14 Plastic mechanisms for fixed-base, pitched-roof portal frame

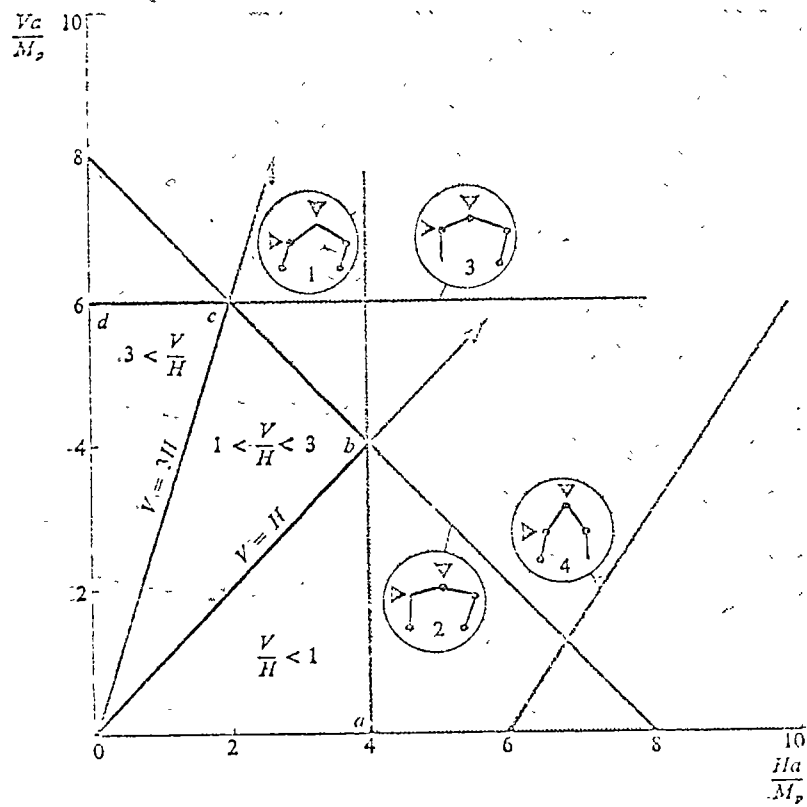


Figure 1.15 Interaction diagram for plastic failure of frame in Fig. 1.14(a)

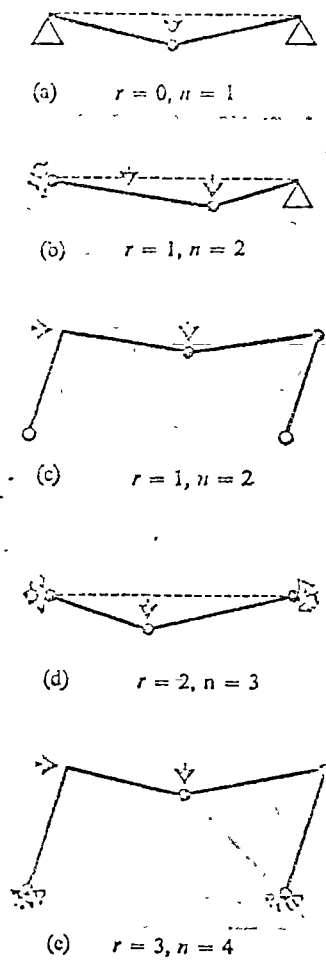


Figure 1.16 Examples of 'complete' collapse

a) Condición de equilibrio. Los momentos flectores deben representar un estado de equilibrio entre fuerzas internas y externas.

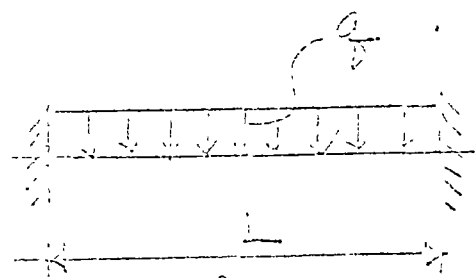
b) Condición de Mecanismo. El momento plástico resistente debe alcanzar un número suficiente de secciones, en el sentido apropiado para formar un mecanismo de falla.

c) Condición de Fluencia. Los momentos plásticos resistentes no deberán ser excedidos en ningún otro punto.

Se mostrará posteriormente que el factor de carga al cual se satisfacen las condiciones anteriores es UNICO.

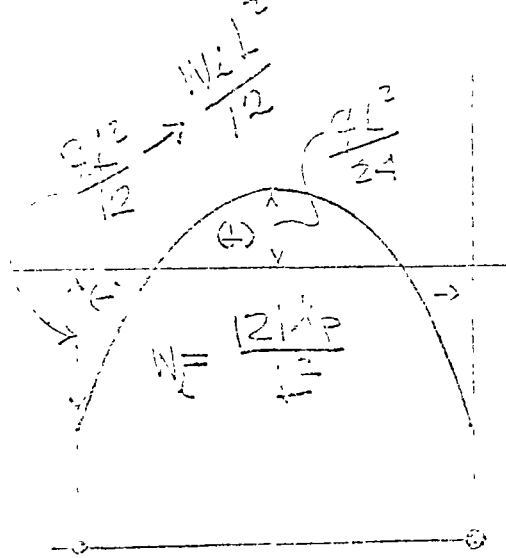
Ha sido observado, que el uso de la condición de mecanismo asociada con la ecuación de trabajo plástico origina un Límite superior en la carga de colapso. Similarmente, por inspección se observa que cualquier distribución de momento flector que satisface equilibrio y fluencia llega a un límite inferior de carga de colapso.

la viga soportada de Fig. 110 (a) en el rango elástico. Las condiciones de fluencia por las mismas que el rango elástico.

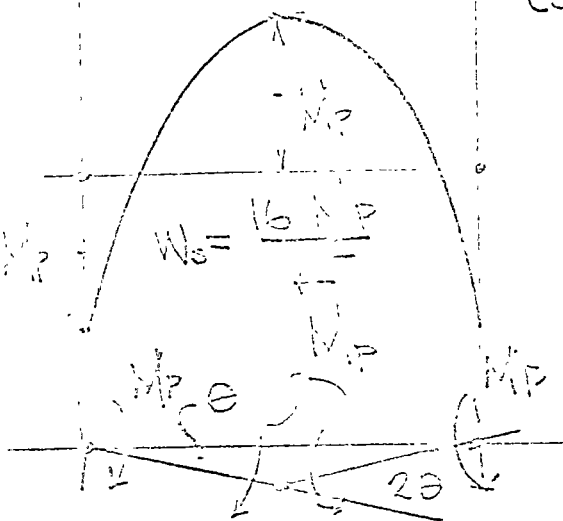


$$M_y = \frac{q L^2}{12} \text{ en apoyos}$$

$$M_c = \frac{q L^2}{24} = \frac{1}{2} M_y$$



Por lo tanto equilibrio y fluencia se satisfacen por una distribución de momentos similar al rango elástico si q es aumentado a la carga de falla $= \frac{1}{1}$



con solo articulaciones plásticas en los apoyos $\frac{W_c L^2}{12} = M_p$ de donde $W_c = \frac{12 M_p}{L^2}$ es un límite inferior de la carga de falla.

Si se satisface condición de Mecanismo asociado con la ecuación de trabajo plástico origina un límite superior de la carga de colapso $W_c = \frac{16 M_p}{L^2}$

Los TEOREMAS DE COLAPSO PLÁSTICO

Los principios que gobiernan la falla plástica los cuales han sido justificados intuitivamente, son relacionados como teoremas formales en sus pruebas^{7,8}.

En el resto de este artículo se considerarán algunas consecuencias de estos teoremas.

Los teoremas se refieren a estructuras con material rígido-plástico por lo cual tendrán cero desplazamiento hasta alcanzar la carga de colapso. Las deformaciones

de los mecanismos son supuestas infinitamente pequeñas así que las de flexiones no afectan las ecuaciones de equilibrio. Los Teoremas tienen aplicación a estructuras con materiales elástico-plástico con grado de aproximación variable, dependiendo de la influencia del cambio de geometría e inestabilidad elástica.

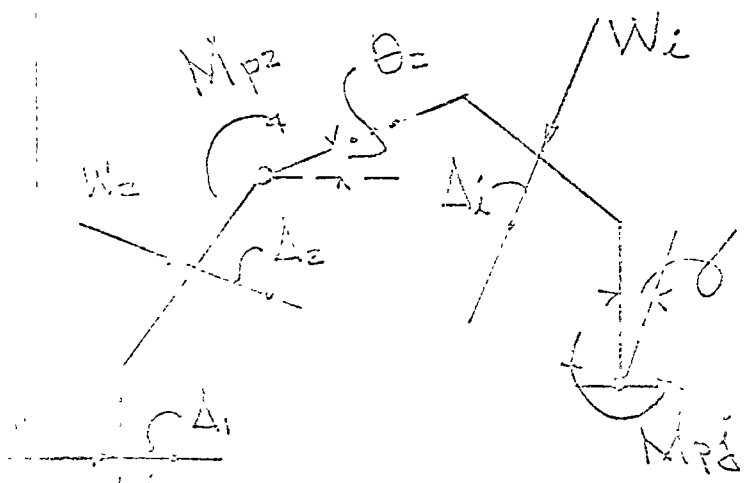
Se refieren a estructuras sujetas a cargas proporcionales, la intensidad de las cargas se define por el factor de carga λ , el cual es solo restringido a valores positivos.

TEOREMA ESTÁTICO O DEL LÍMITE INFERIOR

SÍ, con cualquier factor de carga λ , es posible determinar una distribución de momentos flexores en equilibrio con las cargas aplicadas y que satisface en todas partes la condición de fluencia, entonces λ es e igual o menor que el factor de carga de falla.

De allí que, cualquier factor de carga escrito en esta forma es un límite inferior al factor de carga de falla λ_p , es decir, el factor de carga de falla es el mayor factor de carga estático.

Demostración En la estructura generalizada mostrada en la Fig. a sean:



- $\lambda_p =$ factor de carga de falla
- $\lambda_p W_i =$ sistema de cargas del mecanismo de falla
- $\lambda W_i =$ sistema de cargas diferente al mecanismo de falla

Fig. a

Δ_i desplazamientos en dirección de W_i del Mec. de colapso

rotaciones debidas a los momentos M_{p_i} en el mecanismo de falla

Para cualquier combinación de signos, el signo del momento flector M_{pj} será idéntico al correspondiente signo de Θ_j . De la Fig. a se tiene

$$\lambda_p \sum_{i=1}^n W_i \Delta_i = \sum_{j=1}^m M_{pj} \Theta_j \quad (1.8)$$

puesto que λ_p y $\sum M_{pj} \Theta_j$ son positivos, entonces $\sum W_i \Delta_i$ es positivo.

Bajo cualquier factor de carga $\lambda \neq \lambda_p$, supongamos que la distribución de momentos encontrada satisface equilibrio y condiciones de fluencia, y sean los momentos en contrados en las posiciones j denotado por M_{pj} , por lo tanto debido a la condición de fluencia

$$-|M_{pe}| \leq M_{pj} \leq |M_{pe}| \quad (1.9)$$

Considerando ahora la ecuación del trabajo virtual asociado al sistema de carga λW_i asociada a los momentos internos M_{ij} con desplazamientos virtuales Δ_i y rotaciones internas Θ_j , se tiene

$$\lambda \sum_{i=1}^n W_i \Delta_i = \sum_{j=1}^m M_{ij} \Theta_j \quad (1.10)$$

De (1.10) y (1.9)

$$(\lambda_p - \lambda) \sum_{i=1}^n W_i \Delta_i = \sum_{j=1}^m (M_{pj} - M_{ij}) \Theta_j \quad (1.11)$$

Puede que cada término $M_{ij} \dot{\theta}_i$ es positivo y en vista de la Eq. (1.9), cada término en el lado derecho de la ecuación (1.11) es positivo o cero. Por lo tanto $\lambda \geq \lambda_c$.

TEOREMA CINEMATICO O DE LIMITE SUPERIOR

Si, para cualquier mecanismo plástico supuesto, el trabajo externo efectuado por las cargas con un factor de carga positivo λ es igual al trabajo interno de las articulaciones plásticas, entonces, λ es igual o mayor que el factor de carga de falla.

Es decir el factor de carga determinado en cualquier mecanismo arbitrario supuesto, es igual al trabajo externo al interno era el menor del conjunto de todos los posibles mecanismos.

Prueba.- Consideremos un mecanismo arbitrario con rotaciones plásticas θ_i , y con sus correspondientes momentos plásticos M_{ij} , y los desplazamientos correspondientes a las cargas W_i sean Δ_i y sea un factor de carga derivada de la ecuación
$$\lambda \sum_{i=1}^n W_i \Delta_i = \sum_{i=1}^n M_{ij} \dot{\theta}_i$$

cada término en $M_{Pj} \theta_j$ es positivo, y, puesto que λ es positivo, $\sum W_i \Delta_i$ es positivo

Supongamos que bajo el actual factor de falla λ_P de la estructura, sean los momentos en los puntos j M_j , donde los M_j necesariamente satisfacen la condición de fluencia

$$-|M_{Pj}| \leq M_j \leq |M_{Pj}| \quad (1.13)$$

Considerando ahora la ecuación del trabajo virtual obtenida asociando las cargas externas $\lambda_P W_i$ (en equilibrio con los momentos internos M_j en los puntos j), con los correspondientes desplazamientos Δ_i (correspondientes a las rotaciones internas θ_j en los puntos j). Entonces

$$\lambda_P \sum_{i=1}^n W_i \Delta_i = \sum_{j=1}^m M_j \theta_j \quad (1.14)$$

De Eqs. (1.12) y (1.14)

$$(\lambda - \lambda_P) \sum_{i=1}^n W_i \Delta_i = \sum_{j=1}^m (M_{Pj} - M_j) \theta_j \quad (1.15)$$

Puesto que cada término $M_{Pj} \theta_j$ es positivo, y en vista de Eq. (1.13), cada término en la derecha de (1.15) es positivo o cero. De allí que $\lambda \geq \lambda_P$.

En la Fig. 1.12 (a) el mecanismo correcto de falla de la viga mostrada con carga unitaria w , es como se muestra en Fig. 1.12 (b), a carga de colapso es $\frac{10.57}{L} w$. El mecanismo en Fig. 1.12 (c) da un límite superior válido de $16 \frac{w L}{L^2}$, pero es importante observar que los cantilivares de claro $\frac{L}{2}$ no están en equilibrio.

TEOREMA UNICO

Si, en cualquier factor de carga λ , se encuentra una distribución de momento que satisface las tres condiciones de equilibrio, mecanismo, y fluencia, entonces dicho factor de carga es el factor de carga de colapso λ_p .

PRUEBA. Puesto que la distribución de momento satisface las condiciones de equilibrio y fluencia, $\lambda \leq \lambda_p$ por el Teorema del límite inferior. Puesto que la distribución de momento flexionante satisface las condiciones de equilibrio y mecanismo, la ecuación de trabajo plástico obtenido usando el mecanismo da el factor de carga λ , donde $\lambda \geq \lambda_p$ de el Teorema de límite superior, De allí que $\lambda = \lambda_p$.

Corolario 1. El estado inicial de esfuerzos internos no tiene efecto en la carga de colapso.

Corolario 2. Si una estructura es sujeta a cualquier carga proporcional o no proporcional programada, el colapso ocurrirá a la primer combinación de cargas para las cuales su distribución de momento flexionante satisface las condiciones correspondientes de equilibrio, mecanismo, y fluencia.

Estos dos corolarios son consecuencia inmediata del Teorema Único, y son de gran importancia en la aplicación de la Teoría Plástica puesto que muestran que la carga de falla no es afectada por fabricación o historia de carga. El segundo corolario quita la restricción de cargas a cargas proporcionales, siempre y cuando todas las combinaciones de carga sean analizadas.

Los corolarios se aplican a estructuras elástico-plásticas siempre y cuando el cambio de geometría y inestabilidad no son importantes no consideran plasticidad alternada que se discutirá posteriormente.

Es importante observar que el mecanismo único no estabiere que la distribución de momentos flexionante en colapso es única. La viga continua en la Fig. 1.13 a, con un momento plástico uniforme M_p , tiene el mecanismo de colapso como se indica con articulaciones en B y E, el valor de w en D es $4M_p/L$ [similar a Fig. 1.11 b] La distribución de momento flexionante en el claro de colapso es estáticamente determinada [Fig. 1.13 (b)], pero la línea reactante en el claro AB puede caer en cualquier lugar entre los límites $a_1 b_1$ y $a_2 b_2$ donde $a_1 a_2 = a_1 b_2 = M_p$, si el factor de forma es unitario de condiciones estáticas, se establece que en A $M = M_p/2$ en colapso

1.7 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

Cuando dos sistemas de carga pueden actuar simultáneamente sobre una estructura en cualquier relación, es conveniente determinar las cargas de colapso por medio de diagramas de interacción.

La estructura mostrada en la Fig. 1.14 a

tiene un momento uniforme M_p , y, con cargas V y H como se indica, los mecanismos indicados en las Figuras 1.14 (b), (e) pueden ser considerados. En Fig. 1.14 (e). En Fig. 1.14 (c) donde I_{co} es el centro instantáneo de rotación de CD , el movimiento vertical de C da $a\phi = a\theta$, mientras que el movimiento horizontal da $2a\theta = a\psi$, por lo tanto $2\phi = 2\theta = \psi$.

Los otros mecanismos se analizan similarmente.

Las combinaciones de V y H causan colapso de acuerdo con los mecanismos mostrados en

Fig. 1.15. Puesto que cualquier línea radiando del origen representa carga proporcional,

las condiciones de falla son representadas por $abcd$. De $a = b$ ($V/H < 1$), falla es por mecanismo 1, de $b = c$ ($1 < V/H < 3$) falla es por mecanismo 2, y de $c = d$ ($V/H > 3$) falla es por mecanismo 3.

Mecanismo 4 no ocurre cuando V y H son positivas. Cualquier combinación de carga ocurriendo dentro de el área $abcd$ es tomada sin fallar, así que se llama región de seguridad. En el punto b ($H = V = \frac{4M_p}{a}$), falla puede ocurrir o por el mecanismo 1 o 2. Similarmente en el

punto c ($\Sigma H = 0 = 6H/4$), falla por el mecanismo 2 o 3, y la columna AB está bajo momento uniforme.

1.8 NUMERO DE ARTICULACIONES PLASTICAS

En cada mecanismo en Fig. i.16, el número de articulaciones plásticas n en colapso se excite en \pm el grado de redundancia de la estructura original. Esto es debido a que, en todos los casos, la distribución de momento factor llega a hacerse estáticamente determinado en falla. Las r incógnitas de momento y el valor del factor de carga en colapso requieren $r+1 = n$ momentos plásticos en las articulaciones para permitirles ser determinadas.

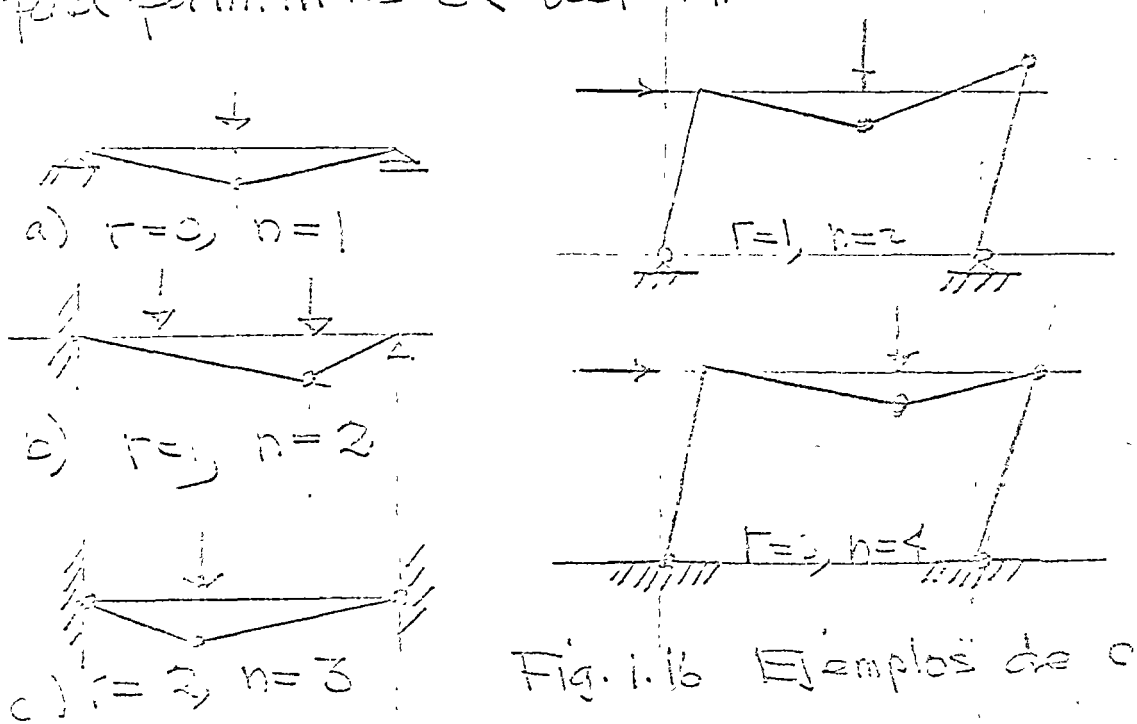


Fig. i.16 Ejemplos de colapso

En la Fig. 1.17 se muestran ejemplos de mecanismos incompletos?

Por ejemplo en la Fig. 1.14 en $\frac{V}{H} = 1.43$ sería un mecanismo sobre-completo.

1.9 Factores de carga de colapso en relación con diseño.

Un diseño estructural especificando que las lallas plásticas ocurran cuando las cargas se multipliquen por un factor de carga λ , tiene un margen de seguridad respecto a resistencia, siempre y cuando no se tengan condiciones de inestabilidad. Es conveniente considerar más de una posible combinación de cargas o el peligro de plasticidad alternada. Es necesario limitar las deflexiones de la estructura bajo las cargas de trabajo, condiciones que usualmente deben ser límites, y ello puede conducir a una modificación del diseño. Para la mayoría de las estructuras se observa que el criterio más importante es el de

La teoría de la resistencia de plásticos, especialmente en el hecho de que la carga de colapso elástica es muy fácil de determinar que los términos de análisis de plásticos es de gran importancia al uso de la teoría plástica como base de muchos procedimientos de diseño.

Bibliografía

- 1 American Institute of Steel Construction, "Plastic Design in Steel" Sep-1960, New York.
- 2 Breeck L.S. "Plastic Design of Steel Frames" John Wiley and Son, Inc., 1960
- 3 Horne, M.R. "Elastic-plastic failure loads of plane frames" Proc. R. Soc., 1965, 274 [A], 343.
- 4 Horne, M.R. and Merchant W.F., The stability of Frames, Pergamon Press, Oxford, 1965
- 5 Smith, J.O., and Sniebottom O.M., Inelastic Behavior of Load-Carrying Members, John Wiley, New York, 1965
- 6 Horne, M.R. The effect of strain-hardening on the equalisation of moments in the simple plastic theory. Welding Research, 1958, 5, 177

- 7 Hrennikoff, A. Importance of strain-hardening in plastic design.
J. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Engrs, 1965, 94 (ST4) 23.
- 8 Baker, J.F.; M.R. Horne, and J. Heyman, The Steel Skeleton, Vol II, Cambridge University Press, London, 1956.
- 9 Greenberg, H.J. The principle of limiting stress for structures, Second Symposium on Plasticity, Brown Univ, 1949
- 10 Horne, H.R. Fundamental propositions in the plastic theory of Structures. J. Instn. Civ. Engrs, 1950, 34, 174
- 11 Neal, B.G. The plastic Methods of Structural Analysis, Chapman and Hall, London, 1956

Problemas

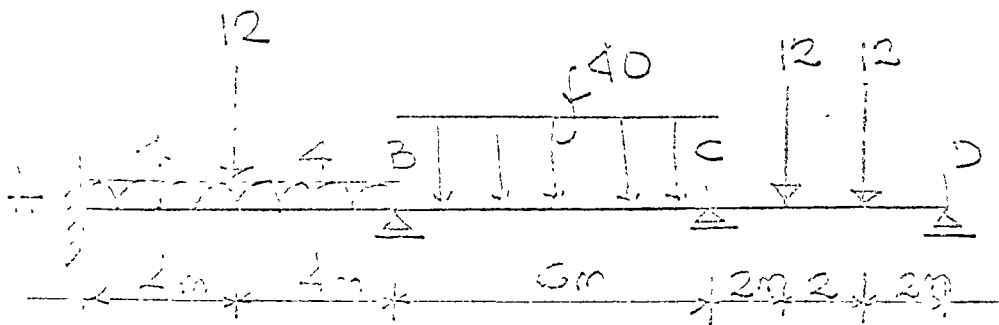
1.1 Determine el: modulo plástico y los factores de forma de las siguientes secciones transversales:

- a) Una sección I de peralte d y ancho de patín $0.5d$, con un espesor del patín y el alma de $0.1d$, con respecto al eje de mayor momento de inercia y con respecto al eje de menor momento de inercia.

- b) Para una barra circular de diámetro d
- c) Un tubo circular de diámetro d y espesor t
- d) Un tubo cuadrado de lado d y espesor t , con flexión respecto a un eje perpendicular a un lado y con flexión respecto a la diagonal.

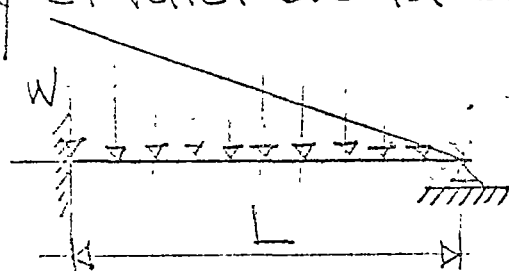
1.2 La viga continua mostrada ABCD en la figura, es de sección uniforme. Si el colapso plástico ocurre bajo el sistema de cargas mostrado, determine el valor del momento plástico;

- a) Considerando todos los posibles mecanismos
- b) Gráficamente

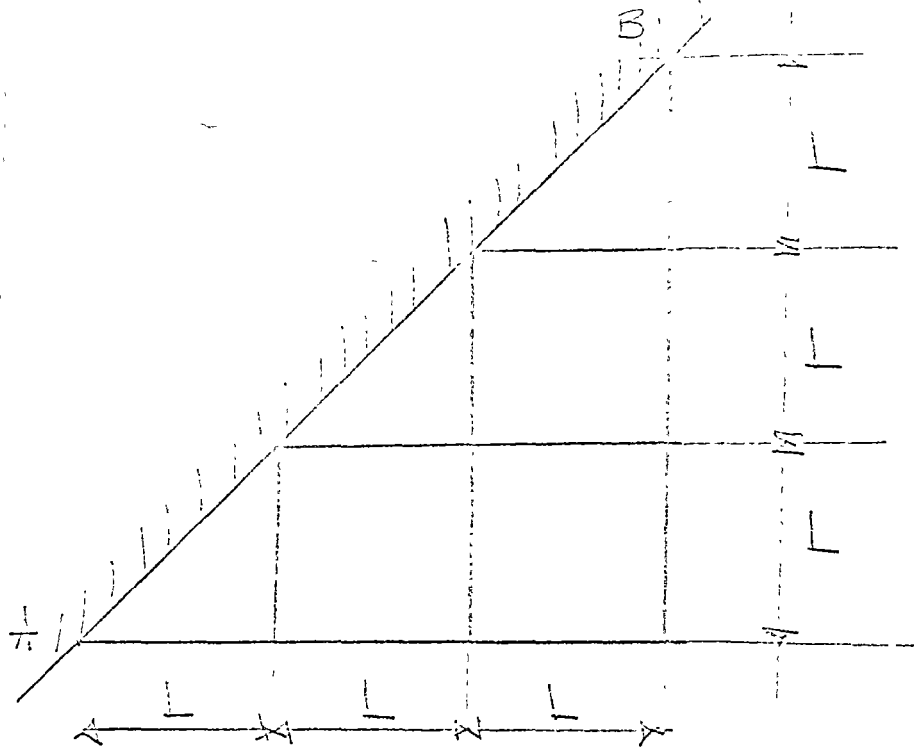


Cargas en miles de Newtons (kilo newton)
dimensiones en metros.

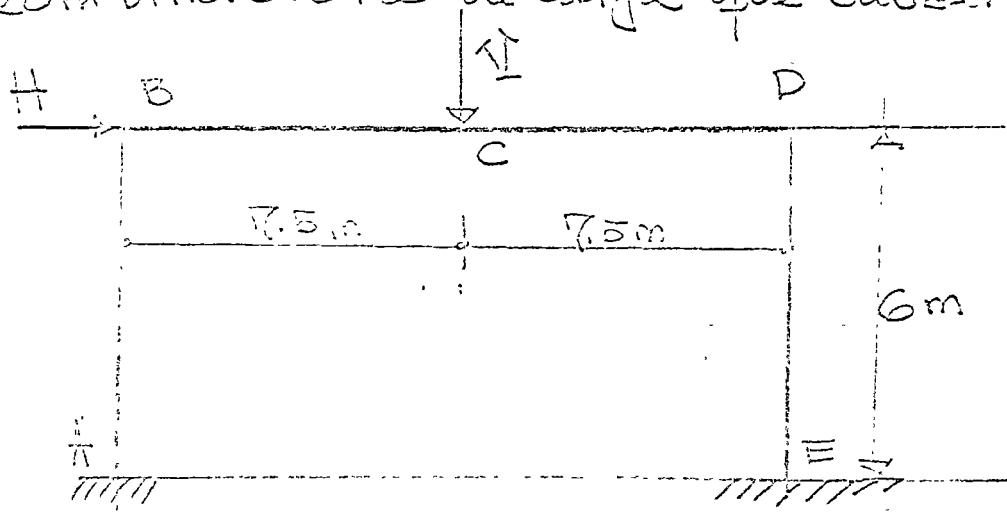
1.3 Una viga AB, con momento plástico uniforme M_p y de longitud L , empotrada en A y simplemente apoyada en B, con una variación lineal de carga como se indica en la figura, encuentre la posición de la articulación plástica y el valor de la carga de colapso W .



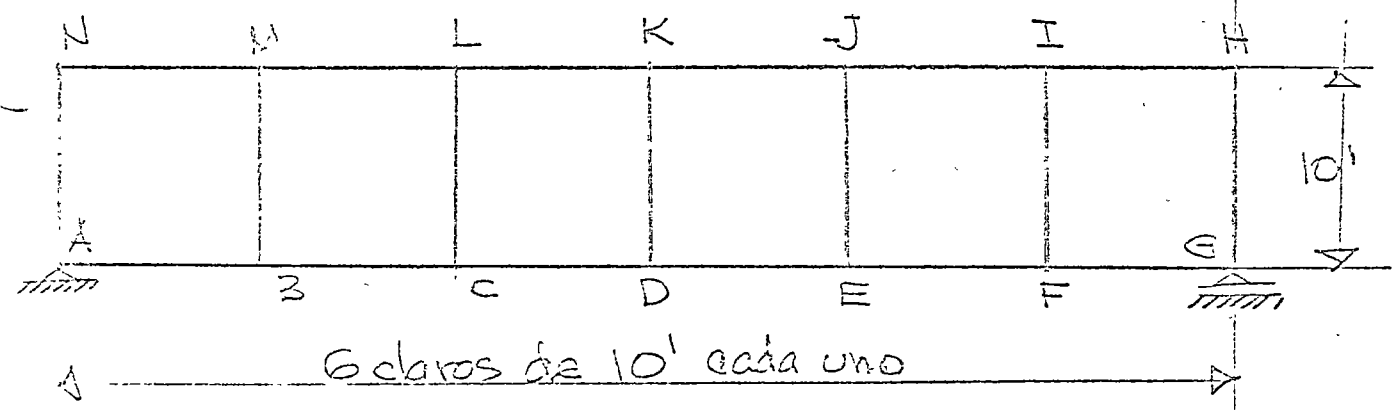
1.4 La escuina ABC en proyección horizontal de un sistema de piso como se muestra en la Fig. consiste de vigas continuas rigidamente conectadas, igualmente espaciadas y de igual sección transversal, rigidamente empotradas a lo largo de AB. Despreciando la resistencia a torsión de las vigas, calcule el valor de una carga vertical concentrada en C que cause el colapso si los momentos plásticos de las vigas con respecto a ejes horizontales es M_p .



1.5 El portal mostrado en la Fig. empotrado en A y E con cargas V y H como se indican. La viga tiene un momento plástico de $100 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y las columnas tienen momentos plásticos de $60 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Muestre mediante una gráfica V contra H las combinaciones de carga que causan colapso



La tala Vierendeel simplemente apoyada tiene el miembro superior e inferior con momentos plásticos de 150 Kip-pie y los miembros verticales con momentos plásticos de 90 Kip-pie. Determine los valores de cargas simples concentradas en D, E y F que causarían colapso. Ignore los efectos de carga axial.





DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

TORSION

DR. PORFIRIO BALLESTEROS
ING. MARCO ANTONIO TAPIA

- TORSION -

Ao1 - Introducción - Cuando una barra prismática recta está sujeta a momentos alrededor de su eje longitudinal, las secc. transv. de la barra giran alrededor de dicho eje, se desarrollan esfuerzos cortantes y en todo elemento mec. resultante, el momento torsionante se desarrolla en toda sección transversal. Si ninguna sección transversal está restringida a deformaciones laterales a esta carga, ningún esfz. normal aparece y resulta un ejemplo pero interesante de comportamiento estructural.

Ao2 - Barras Circulares - Hipotesis: (i) El mat. es homogéneo e isotrópico (ii) - Las secciones planas perpendiculares al eje de torsión, permanecen planas después de aplicadas las cargas (iii) - Para miembros prismáticos rectos, de sección circular, las deformaciones angulares varían linealmente de su centro hacia afuera. (iv) - Los esfz. cortantes corresponden a las deformaciones

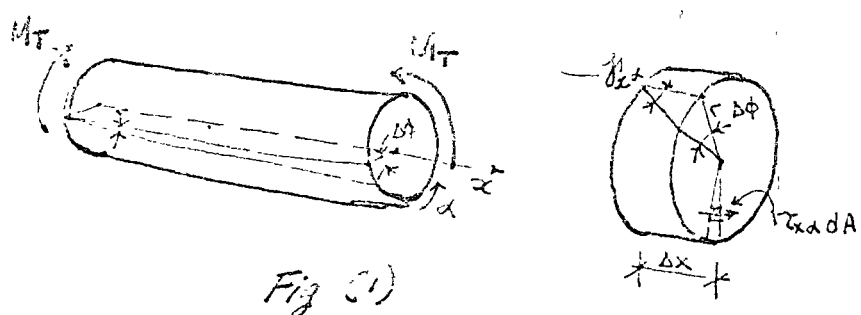


Fig (1)

de la fig (1) tenemos:

$$\tau_{\theta} \Delta x = T \Delta \phi$$

$$\tau_{\theta} = T \frac{d\phi}{dx} \dots (1)$$

Como se cumple la ley de Hooke $\tau_{\theta} = \tau_{\theta} / G \dots (2)$

$$\tau_{\theta} = G T \frac{d\phi}{dx} \dots (3)$$

tomando mom. en respecto a z e igualando a M_x .

$$M_x = \int_A \tau (\tau_{\theta} r) = \int_A \tau \cdot (G T \frac{d\phi}{dx}) r = G \frac{d\phi}{dx} \int_A r^2 dA$$

$$\text{Como } \frac{d\phi}{dx} = \theta = \theta r. \Rightarrow M_x = G I_p \theta \dots (4)$$

de (4) obtenemos θ y la sustituimos en (3) así obtenemos:

$$\theta = \frac{Mz}{G I_p} ; \tau_{zx} = \frac{Mz}{I_p} \dots \dots \dots (5)$$

Para obtener el ángulo de giro entre dos secciones de miembros circulares, basta con integrar la primera expresión de (5) así obtenemos:

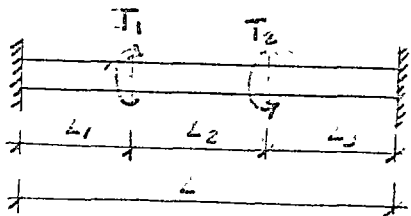
$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{Mz}{G I_p} \Rightarrow \phi = \int_0^x \frac{Mz}{G I_p} dx + C \dots \dots (6)$$

Ao 3.- Momento Torsionante y Diagrama de M.T. - M.T. = Es la suma de los momentos de los pares aplicados situados a un lado de la sección considerada.

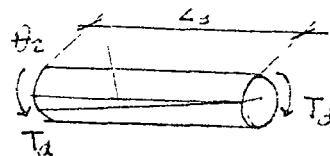
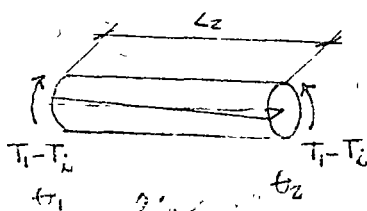
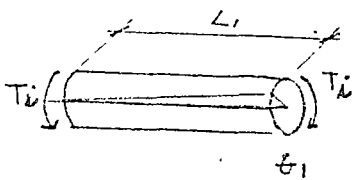
Sección crítica = Es la sección donde aparece el máximo M.T. torsionante.

Diagrama de M.T. = Es la grafica Mz vs x . Para construir dicha grafica se utiliza el metodo de las secciones, pero en este caso solo nos proporciona una ec. de eq. $\sum Mz = 0$, por lo tanto la mayoría son problemas estaticamente indeterminados, por lo tanto para resolverlos utilizamos condiciones cinemáticas:

Ejemplo: Encuentre el diagrama de momentos torsionantes para la siguiente liga.



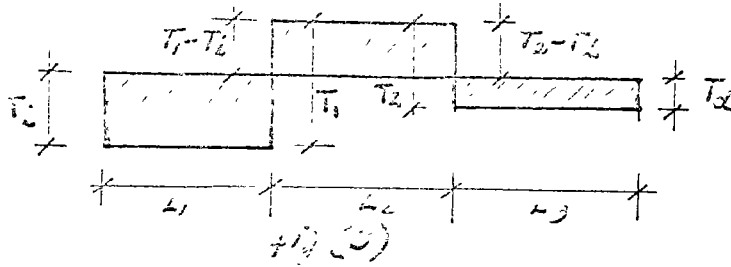
$$\sum Mx = T_i - T_1 + T_2 - T_d = 0 \dots \dots (3.1)$$



Fig(2)

El diagrama de M.T. puede representarse en la sig. forma.

de la fig. anterior



$$\theta_1 = \frac{T_1 L_1}{G I_p} \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 L_3}{G I_p} \dots \dots \dots (3.3)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{(T_1 - T_2) L_2}{G I_p} \dots \dots \dots (3.4)$$

Subst. (3.3) y (3.2) en (3.4) obtenemos:

$$\frac{T_1 L_1}{G I_p} + \frac{T_2 L_3}{G I_p} = \frac{(T_1 - T_2) L_2}{G I_p} \quad \text{o} \quad (L_1 + L_3) T_1 + L_3 T_2 + T_1 L_2 = 0 \dots (3.5)$$

Alit. por \$L_3\$ (3.1) y sumando a (3.5) nos da:

$$(L_1 + L_3) T_1 - L_3 T_2 + L_3 T_2 - T_1 L_2 = 0$$

$$T_1 = T_1 \frac{L_2 + L_3}{L} - T_2 \frac{L_3}{L} \quad \text{o} \quad T_1 = -T_1 \frac{L_1}{L} + T_2 \frac{L_1 + L_2}{L}$$

Not.- Diseño de miembros circulares en torsión: - Para el caso permisionable se tiene de la ec. (5) que:

$$\frac{T}{r} = \frac{M T}{I_p} \dots \dots (4.1)$$

Donde \$M.T\$ no puede seleccionarse la sección adecuada.

Si sustituimos para una sección plana el \$I_p\$ obtenemos:

$$\frac{T}{r} = \frac{M T}{I_p} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2 M T}{\pi \tau_{max}}}$$

Ao5.- Esfijos. y deformaciones en barras circulares en el rango inelástico. -

La suposición de variación lineal de def. permanece aplicable pero las propiedades del material afectan la solución.

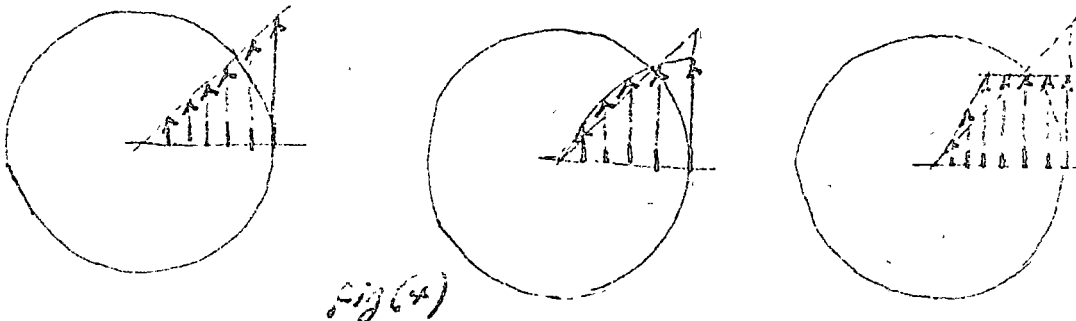
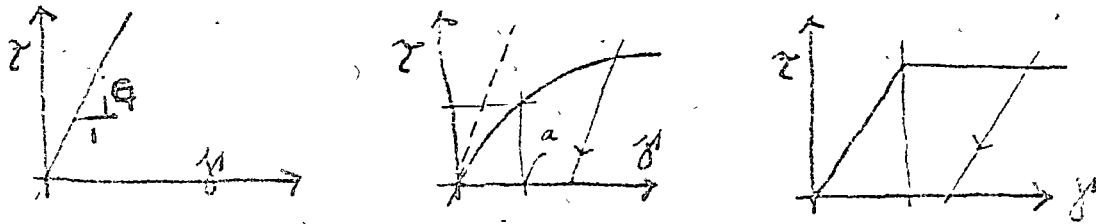


Fig (4)

$$T = \int_A [(dA)r] \rho. \quad (\text{equilibrio}) \quad (\text{volumen de esfuerzos})$$

Ao6.- Comportamiento torsional en barras no circulares -

No es valido que las secciones planas permanezcan planas

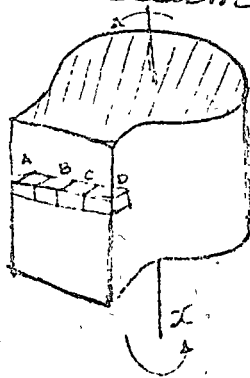
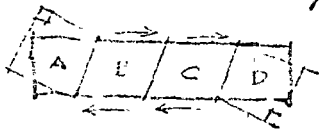


Fig (5)

A los desplazamientos fuera del plano de los flanges - desplazamientos de warping

Supondremos que no existen restricciones al movimiento por lo cual, no existiran esfuerzos normales debidos al warping.

normales debidos al warping.

Como no existen mom. flectores ni fuerzas externas, por consiguiente las unicas componentes de esfuerzos, necesarias para -

prever el equilibrio son los esfuerzos cortantes, así pues la componente τ_{yz} es como ya que no existen mom. flectores.

Así en p.e.: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \dots \dots \dots (6.1)$

Como no hay f.f. de esp., las ecu. de equilibrio no quedan

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma)}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma)}{\partial z} = 0 \dots \dots (6.2)$$

Tenemos una sola ecu. de equilibrio, por lo cual el problema es estáticamente indeterminado. (incog. τ_{xy}, τ_{xz}).

Como el material es: elástico lineal, homogéneo e isotrópico tenemos que:

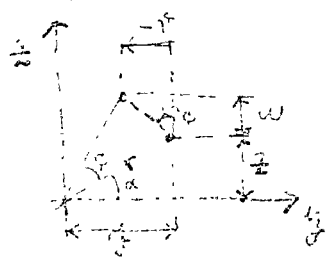
$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (6.3)$$

lo cual significa que:

$$u = f(z, z); \quad v = g(z, z); \quad w = h(z, y) \dots \dots \dots (6.4)$$

Además como $\gamma_{yz} = 0$ esto quiere decir que el desplazamiento entre dos líneas de una sección transversal, no se altera durante la deformación de la barra.

Consideraremos que el centro de torsión coincide con el c.e. u. C.T. es el punto sobre el cual se puede considerar que gira al deformarse todos los puntos de la sección transversal.



$$v = -\beta z; \quad w = \phi y \dots \dots \dots (6.5)$$

Además tenemos que:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \dots (6.6)$$

de (6)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \dots \dots \dots (6.6a)$$

de (6.6) y (6.6a).

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -G\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + G \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = C = \text{constante} \quad \therefore \quad \phi = Cx \dots \dots (6.7)$$

Así de sost. (6.7) en (6.5) obtenemos

$$\underline{u = f(y, z) ; v = -4xz ; w = 4xy} \dots\dots\dots (6.8)$$

De los desplazamientos podemos obtener los esfuerzos.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - 4z \right) \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 4y \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.9)$$

Sust. estos valores en la ecuación de equilibrio (6.2):

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$G \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} (4z) \right\} + G \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} (4y) \right\} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (7.0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación de Laplace} \\ \text{para función de tres} \\ \text{variables} \\ \text{(función armónica)}. \end{array} \right.$$

El problema de torsión se reduce a encontrar las cuatro cantidades τ_{xy} , τ_{xz} , u , y , θ . Para resolverlo tenemos tres relaciones (6.2) ec. de eq., (6.9) cond. cinemáticas. Así la ec. (7.0) no es independiente pues se obtuvo de (6.2) y de (6.9).

La cuarta relación necesaria se puede obtener de la condición simple de estática, que la suma de los τ_{xy} , τ_{xz} debe de dar un momento torsionante de magnitud M_x en cada sección.

A.7.- Función de Esfzss. de Saint-Venant. - El problema de torsión se reduce a uno de una sola incógnita, si suponemos una $f(y, z)$ función continua y derivable tres veces:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial f}{\partial z} ; \tau_{xz} = - \frac{\partial f}{\partial y} \dots\dots\dots (7.1)$$

La cond. anteriormente satisface la ec. de eq.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{OK.} \quad \bigcirc$$

Pero ademas de satisfacer el eq. debe de existir compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos, así const. (1.9) en (0.9) y ademas derivamos la primera con respecto a z y la segunda con respecto a y .

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta \right) \quad ; \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \theta \right)$$

Restan de eliminar ecuaciones anteriores :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = -2G\theta \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad \dots \dots \dots (7.1)$$

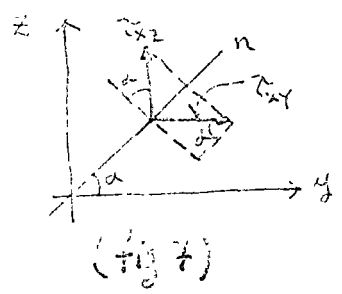
Esta es la ec. de compatibilidad para el problema de torsión en barras prismáticas. Describiendo función continua ϕ que satisfaga la ec. (7.1) donde no proporcione eq. y compatibilidades. ϕ es de tipo de ec. dif. de 2da orden. ECUACION DE POISSON.

La pendiente de ϕ en la dirección n es:

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dn} \quad \dots \dots \dots (7.2)$$

como $dy/dn = \cos \alpha$; $dz/dn = \sin \alpha$

$$\frac{d\phi}{dn} = -\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{zy} \sin \alpha \quad \dots \dots \dots (7.3)$$



La pendiente de la superficie ϕ en cualquier dirección, es igual al torque unitario en la dirección perpendicular.

Como en la frontera de la sección no deben de existir componentes de esfuerzos tangenciales a ella, la pendiente de ϕ perpendicular a dicha frontera debe de ser cero. O sea ϕ debe de ser constante a lo largo de la frontera. La ley interna de dicho constante es arbitraria pues los esfuerzos en la

definidos en función de las pendientes de $\bar{\Phi}$ en lugar que $\bar{\Phi}$. Así pues podemos suponer que $\bar{\Phi} = 0$ en toda la frontera y no perdemos generalidad.

Con lo anterior en (7.2) satisfacemos equilibrio y compatibilidad, para asegurarnos que existe compatibilidad con las cargas exteriores obtendremos el M_x .

$$\begin{aligned}
 M_x = M_z &= \iint_A (-\sigma_{xy} z + \tau_{xz} y) dx dy = - \iint_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \right) dx dy = \\
 &= - \int_c^D \left[\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial z} z dx \right] dy - \int_A \left[\int_c^D \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dy \right] dz \quad \text{integrando por partes} \\
 &= - \int_c^D [\Phi_B z_B - \Phi_A z_A - \int \Phi dz] dy - \int [\Phi_B y_B - \Phi_A y_A - \int \Phi dy] dz =
 \end{aligned}$$

por ser frontera $\Phi_A = \Phi_B = \Phi_C = \Phi_D = 0$

$$M_x = M_z = + \iint \Phi dz dy + \iint \Phi dy dz = 2 \iint \Phi dy dz \dots \dots \dots (7.5)$$

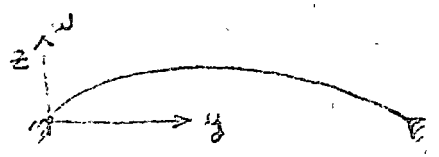
El momento torsionante en cualquier sección transversal es el doble de el volumen bajo la superficie $\bar{\Phi}$.

Para cada sección transversal existe una constante J tal que

$$M_x = G \theta J \quad \text{donde} \quad J = \frac{2}{G \theta} \iint \Phi dx dy \dots \dots \dots (7.6)$$

J = Constante torsional de la barra ; $G \theta$ = rigidez torsional

8.8.- ANALOGIA DE LA MEMBRANA (PRANDTL)



$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{p}{T} \quad w \text{ es analogo a } \bar{\Phi}$$

* El esfzo. cortante en cualquier punto es proporcional a la pendiente de la membrana en dicho punto.

* La dirección de un esfzo. cortante particular en un punto, forma un ángulo recto con la pendiente a la membrana en el mismo punto.

El doble de el volumen encerrado por la membrana es proporcional, a el par resistente de la sección.

Exo 7. - Barras de sección sólida. - Para analizar el comportamiento torsional de las barras de forma general, es necesario obtener una solución exacta de la ec. (7.2).

Ejemplo: Sección elíptica de ec.

La ec. (7.2) obtenemos $\phi = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$ derivando ambas partes

La sust. en (7.4) obtenemos: $c \left(\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \right) = -2G\theta \Rightarrow c = -\frac{2G\theta \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}{2x/a^2 + 2y/b^2}$

con el valor de c obtenemos ϕ el cual sust. en (7.5) y obtenemos.

$$M_t = 2 \int \int \phi \, dx \, dy = 59 \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (E.1)$$

de (E.1) podemos concluir que:

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} ; c = -\frac{M_t}{\pi a b} \dots \dots \dots (E.2)$$

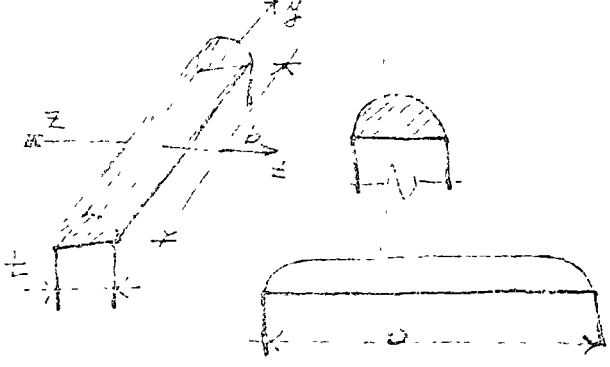
de la ecuación (7.1) obtenemos T_{xy} , T_{xz} y sust. dichos valores en (6.9) obtenemos el τ de TAREA hacerlo detallado.

Como valor aproximado para J de cualquier sección torsional

$$J = \frac{0.825 A^4}{I_p} \dots \dots \dots (7.7)$$

La ecuación (7.7) nos da valores aproximados para secciones que no sean alargadas.

Exo 10 - Secciones abiertas de pared delgada.



Analizaremos un rectángulo alargado.

ϕ varía con la z y permanece constante con y por lo cual.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta \dots \dots \dots (10.1)$$

integrando:

$$\phi = -G\theta z^2 + C_1 z + C_2 \dots \dots \dots (10.2)$$

Como $\phi = 0$ en $z = \pm t/2 \Rightarrow C_1 = 0 ; C_2 = 3\theta t^2/4$

o sea que: $\bar{\phi} = -3\theta \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \dots \dots \dots (10.3)$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 ; \tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -25\theta z \dots \dots (10.4)$$

$$J = \frac{2}{3\theta} \iint \phi dy dz = -\frac{2}{3\theta} \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-b/2}^{t/2} -\left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) 3\theta dy dz = \frac{bt^3}{3} \dots \dots (10.5)$$

de (10.5) obtenemos: $M_x = 3\theta bt^3/3 \dots \dots \dots (10.6)$

$$\tau_{xy} = -2\theta \left(\frac{3Mt}{3bt^3} \right) z = -\frac{2Mt}{J} z \dots \dots \dots (10.7)$$

$$(\tau_{xy})_{max} = \mp \frac{Mt}{J} \text{ en } z = \pm t/2 \dots \dots \dots (10.8)$$

El alabeo se obtiene de las siguientes ec.

$$\tau_{xy} = \theta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) ; \tau_{xz} = \theta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{\theta} + \theta z ; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{\theta} - \theta y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2Mt}{J\theta} z + \frac{Mt}{J\theta} z \quad u = -\theta y z + h(z) \dots \dots (i)$$

$$= -\frac{Mt}{J\theta} z = -\theta z$$

$u = -\theta y z + h(z)$ de las ecs. (i) y (ii) obtenemos que

el valor de u es:

$$u = -\theta y z = -\frac{Mt}{J\theta} y z \dots \dots \dots (10.9)$$

En el caso de que una sección sea de pared delgada y abierta (a propósito por varios rectángulos) tenemos que:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 ; \tau_{max} = \frac{Mt \tau_{max}}{J} \dots \dots \dots (10.10)$$

Fórmula empírica para el coef. en coquina.

$$\tau_y = \tau_{max} (1.77) \left(\frac{t}{r} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (10.11)$$

As III Tercer caso de pared delgada de una esfera.

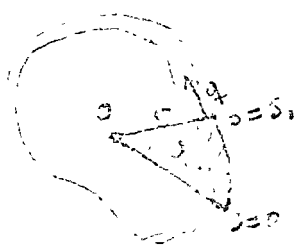
En el caso de tuerca irrotacional se la puede aproximar como una constante de esfuerzo cortante. Se puede demostrar que en un elemento diferencial de una tuerca de pared delgada se cumple la siguiente forma que:

$$\tau_1 t_1 dx = \tau_2 t_2 dx \Rightarrow \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \dots \dots (11.1)$$

El producto de la fuerza cortante por el espesor en un punto es una constante y de la misma forma flujo de cortante de la tuerca. Este producto nos representa una fuerza por unidad de longitud de arco (f). Para calcular el mom. tors. llamaremos r a la dist. \perp de la t_1 al punto O .

$$M_t = \int r f ds = f \int r ds \dots \dots (11.2)$$

si llamamos $\omega_1 = 2\omega_1 = (\text{área vectorial}) \omega$



$\omega_1 = \omega$ es el área barrido por el radio al moverse

$$ds = r d\alpha \quad \omega = \int_0^\alpha r d\alpha = r\alpha$$

Si llamamos $\Omega = \text{área total barrida}$

$$M_t = 2 \Omega f \dots \dots (11.3)$$

Los esfuerzos en cualquier punto se determinan con (11.3) deponiendo f .

$$f = \frac{M_t}{2\Omega} \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2\Omega t} \dots \dots (11.4)$$

es la anterior expresión se ve que el esfuerzo varía en valor máximo cuando t es mínimo.

La deformación se expresará en función de θ con ayuda

$$\text{rotación } \theta, \tau = \gamma = r \theta = r \frac{d\theta}{ds} \dots \dots (11.5)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial r} + r \theta = \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial r} - r \theta \dots \dots (11.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\theta \dots \dots (11.7)$$

$$\text{de (11.4) sustituyendo } f; \tau = \frac{M_t}{2\Omega t} \dots \dots (11.8)$$

Subst. en (11.2) las ec. (11.3) y (11.4) obtenemos.

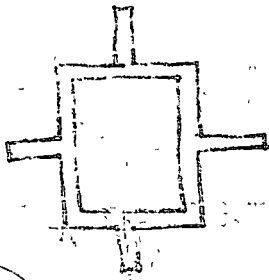
$$\theta = \frac{M t}{4 \Omega^2 J} \int \frac{ds}{t} \text{ de donde } J = \frac{4 \Omega^2}{\int \frac{ds}{t}} \dots \dots \dots (11.9)$$

En el caso de que $t = \text{constante}$

$$\theta = \frac{M t s}{4 \Omega^2 J t} ; J = \frac{4 \Omega^2 t}{5} \dots \dots \dots (11.10)$$

Cuando la sección es compuesta :

$$J = \frac{4 \Omega^2}{3} \int \frac{ds}{t} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \dots \dots \dots (11.11)$$



Sección Compuesta.

#1.- Muestra que en los problemas de torsión, los esfuerzos τ_{xy} y τ_{xz} son armónicas funciones armónicas.

Una función armónica es aquella que cumple con $\nabla^2 \phi = 0$ (nabla cuadrado igual a cero) en este caso sería con respecto a y y z , o sea que:

$$\nabla^2 \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{como } \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) \right] = G \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + G \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

como $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ Ecuación de Laplace (3oiz) entonces tendremos:

$$\nabla^2 \tau_{xy} = G \frac{\partial}{\partial y} (0) = 0 \quad \text{OK } \tau_{xy} \text{ es una función armónica}$$

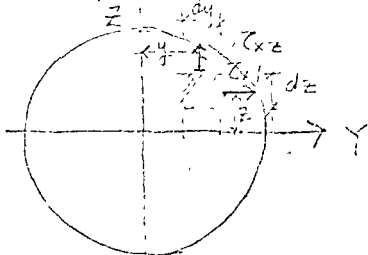
$$\nabla^2 \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{como tenemos } \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = G \left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} + 0 \right] + G \left[\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 0 \right] = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) =$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = G \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0 \quad \text{OK } \tau_{xz} \text{ es una función armónica}$$

#2.- Verificar las formulas elementales $\tau_{xz} = \frac{M_t \cdot r}{J_p}$ y $\theta = M_t / G J_p$ para una sección circular de radio a , examinando $\nabla^2 \phi$ la función $\phi = c(y^2 + z^2 - a^2)$ donde c es una constante.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2c\theta \Rightarrow 2c + 2c = -2c\theta \Rightarrow c = -6\theta/2$$



$$M_t = \iint (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA =$$

$$\phi = -\frac{6\theta}{2} (y^2 + z^2 - a^2)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{6\theta}{2} (2y) ; \tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{6\theta}{2} (2z)$$

$$\tau_{xz} = 6\theta y ; \tau_{xy} = -6\theta z$$

$$M_t = \iint_A [(6\theta y) \cdot y - (-6\theta z) \cdot z] dA = \iint_A 6\theta (y^2 + z^2) dA =$$

$$M_t = \iint_A 6\theta r^2 dA = 6\theta \iint_A r^2 dA = 6\theta J_p \Rightarrow$$

de donde $\Rightarrow J = \frac{M_t}{G \theta} \quad \tau_{cd} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \left[6\theta \sqrt{y^2 + z^2} \right] = 6\theta r = G \left(\frac{M_t}{G J_p} \right) r$

#3.- Muestre que si:

$$\phi = C [\sqrt{3}a(y^2+z^2) - 2yz + 6yz^2 + A]$$

de μ , C , y a , son constantes, es una función esfuerzo permisible de Saint-Venant, y calcule C en función de G y θ .

po: que sea una función permisible debe de cumplir que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \text{CONSTANTE} = -2G\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C [2\sqrt{3}ay - 6yz + 6z^2] \therefore \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = C [2\sqrt{3}a - 12y]$$

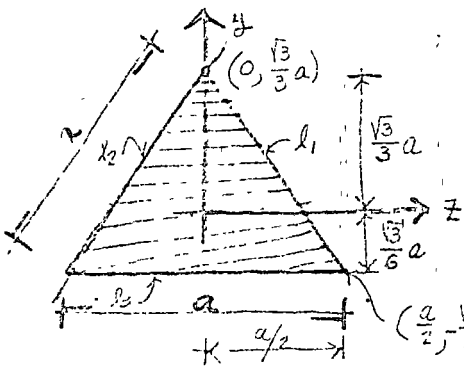
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = C [2\sqrt{3}az + 12yz] \therefore \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = C [2\sqrt{3}a + 12y]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = C [2\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}a] = 4\sqrt{3}aC = \text{CONST.}$$

COMO ES CONST. CUMPLE CON LA CONDICION Y SI PUEDE SER FUNCION ESFUZO DE SAINT-VEENANT

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\sqrt{3}aC = -2G\theta \therefore C = \frac{-2G\theta}{4\sqrt{3}a}$$

#4.- Muestre que ϕ del problema 3.3 es la función esfuerzo para un triángulo equilateral como se muestra en la figura. Encuentre A de tal forma que satisfaga las condiciones de equilibrio.



$$m_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}a}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}a}{\frac{a}{3} - 0} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}a}{6}}{\frac{a}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$l_1 \left\{ \begin{aligned} y - \frac{\sqrt{3}}{3}a &= -\sqrt{3}(x-0) \\ \therefore y &= -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{aligned} \right. l_1$$

$$m_2 = \sqrt{3} \therefore y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}a \} l_2$$

$$m_3 = 0 \therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{6}a \} l_3$$

Demostremos que en las fronteras l_1 , l_2 y l_3 se satisface que:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0 \quad \text{--- I}$$

para la recta $l_1 \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{dz}{ds} = -\frac{1}{2}$

$l_2 \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}$

$l_3 \Rightarrow \frac{dy}{ds} = 0 ; \frac{dz}{ds} = 1$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C(2\sqrt{3}ay - 6y^2 + 6z^2), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = C(2\sqrt{3}az + 12yz)$$

RECTA L1 $\left\{ \begin{aligned} u &= -\sqrt{3}z + \frac{\sqrt{3}}{3}a \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$ subst. estos valores tenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C \left[2\sqrt{3}a \left(-\sqrt{3}z + \frac{\sqrt{3}}{3}a \right) - 6 \left(-\sqrt{3}z + \frac{\sqrt{3}}{3}a \right)^2 + 6z^2 \right] = C(-12z^2 + 6az) = -6C \cdot z(2z - a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = C \left[2\sqrt{3}az + 12 \left(-\sqrt{3}z + \frac{\sqrt{3}}{3}a \right) z \right] = -6\sqrt{3}C(2z - a)$$

Substituyendo los valores de los parciales en la ecuación (I) de frontera:

$$\left(\frac{d\phi}{ds} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = -\frac{6\sqrt{3}}{2}C(2z - a) + \frac{6\sqrt{3}}{2}C(2z - a) = 0 \quad \therefore \quad \underline{\frac{d\phi}{ds} = 0}$$

RECTA L2 Por ser simétrica a L1, se intuye que también cumple

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -6C \cdot z(2z + a) \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 6\sqrt{3}Cz(2z + a) \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \left[-6Cz(2z + a) \right] \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3}Cz(2z + a) \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \underline{\frac{d\phi}{ds} = 0}$$

RECTA L3

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = C \left[2\sqrt{3}az + 12 \left(-\frac{a\sqrt{3}}{3} \right) z \right] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = 0 \quad ; \quad \frac{dz}{ds} = 1$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(0) + (0)(1) = 0 \quad \underline{O'K}$$

(ver el cálculo de la constante al reverso)

#5.- Usando los resultados de los problemas 3o y 4o, calcule los esfuerzos y la constante de torsión J para un triángulo equilátero.

Problema No. 4.- Cálculo de A.- Como $\phi = 0$ en las rectas 1, 2 y 3.

$$\phi = c [\sqrt{3}a(y^2 + z^2) - 2y^3 + 6yz^2 + A]$$

RECTA L1:

$$(\phi)_{L_1} = c \left[\sqrt{3}a \left(3z^2 - 2az + \frac{a^3}{3} + z^2 \right) - 2 \left(-3\sqrt{3}z^3 + 3\sqrt{3}az^2 - \sqrt{3}a^2z + \frac{a^3\sqrt{3}}{9} \right) + 6 \left(-\sqrt{3}z + \frac{a}{3}\sqrt{3} \right) z^2 + A \right] = 0$$

de donde desamogando nos da $A = -\frac{\sqrt{3}}{9} a^3$

Para la recta L2 y L3 nos da la misma A.-

Objetivo - Compare las constantes de torsión calculadas usando $J = 0.005 A^4 / I_p$ con los valores que corresponden a una sección rectangular $J = C_1 b t^3$

$$\text{Aprox } J = \frac{\frac{1}{40} A^4}{I_p} = \frac{\frac{1}{40} (bt)^4}{\frac{1}{12} (bt^3 + tb^3)} = \frac{12 b^3 t^3}{40 (t^2 + b^2)} = 0.3 \frac{1}{\left(\frac{t}{b}\right)^2 + 1} (bt^3) = C_1' bt^3$$

donde como se puede observar:

$$C_1' = \frac{0.3}{\left(\frac{t}{b}\right)^2 + 1}$$

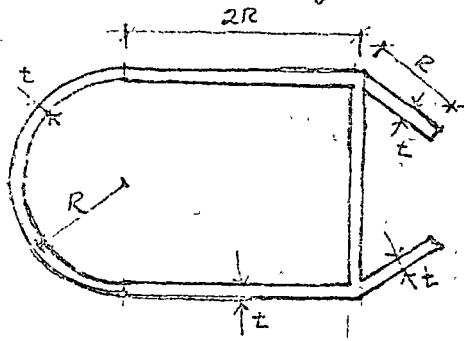
b/t	∞	10	5	3	2.5	2.0	1.5	1.2	1.0
C_1	0.333	0.312	0.291	0.263	0.249	0.229	0.196	0.166	0.141
C_1'	0.200	0.176	0.289	0.269	0.258	0.240	0.208	0.178	0.150
C_1'/C_1	0.9	0.95	0.99	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.06

Como se puede ver cuando $b/t = 3$ es cuando más se aproxima, y conforme se va incrementando el valor va aumentando el error hasta llegar a un máximo de el 10%. En cambio si se disminuye aumenta el valor del error a un 7% teniendo como error promedio (considerando que en la mayoría de los casos $b/t = 2$)

$e \approx 5\%$

Junio - 12 de 1973

Ing. Marco Tapia

30. - Calcule J y τ_{max} para la sección mostrada. -

$$J = \frac{4R^2}{8} \frac{ds}{t} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3$$

Cuando $t = cte$

$$J = \frac{4R^2 t}{8} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3$$

$$A = \frac{1}{2} \pi R^2 + 4R^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) R^2$$

$$s = \pi R + 2R + 4R = (6 + \pi) R$$

$$J = \frac{4 \left(\frac{\pi}{2} + 4\right)^2 R^4 t}{(6 + \pi) R} + \frac{2}{3} R t^3 = \frac{(\pi + 8)^2}{\pi + 6} R^3 t + \frac{2}{3} R t^3$$

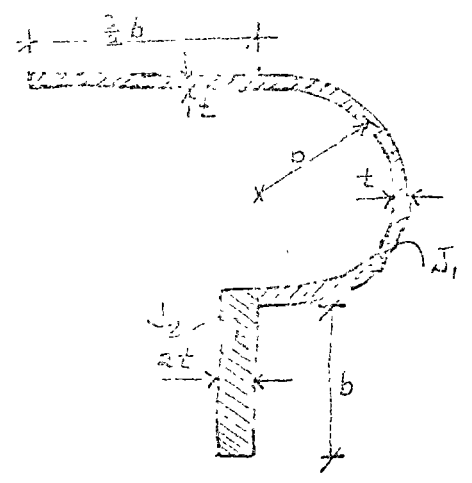
$$M t_1 = \frac{M t}{J} \cdot J_1 = \frac{M t}{J} \cdot \frac{2}{3} R t^3; \quad M t_2 = \frac{M t}{J} \cdot J_2 = \frac{M t}{J} \frac{(\pi + 8)^2}{\pi + 6} R^3 t$$

$$\tau_1 = \frac{M t_1}{J_1} t_1 = \frac{\frac{M t}{J} \cdot \frac{2}{3} R t^3}{\frac{2}{3} R t^3} t = \frac{M t}{J} \cdot t$$

$$\tau_2 = \frac{M t_2}{2 \sqrt{6} t_2} = \frac{\frac{M t}{J} \frac{(\pi + 8)^2}{\pi + 6} R^3 t}{2 \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) R^2 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{M t}{J} \frac{\pi + 8}{\pi + 6} R \approx 1.22 \frac{M t}{J} R$$

$$\tau_{max} = \frac{\pi + 8}{\pi + 6} \frac{M t}{J} R$$

307.- Calcule J y τ_{max} para la sección mostrada.-



$$J_1 = \frac{S_1 t^3}{3}$$

$$S_1 = \frac{3}{2} b + \pi b = (\frac{3}{2} + \pi) b$$

$$J_1 = \frac{(\frac{3}{2} + \pi) b t^3}{3}$$

$$J_1 = (\frac{2\pi + 3}{6}) b t^3$$

$$J_2 = \frac{b (2t)^3}{3} = \frac{8}{3} b t^3$$

$$\tau_1 = \frac{V Q_1}{J}$$

$$J = (\frac{2\pi + 3}{6} + \frac{8}{3}) b t^3 = (\frac{2\pi + 19}{6}) b t^3$$

$$\tau_{c1} = \frac{V t}{J} J_1 = \frac{V t}{J} (\frac{2\pi + 3}{6}) b t^3$$

$$\tau_{c2} = \frac{V t}{J} J_2 = \frac{V t}{J} \cdot \frac{8}{3} b t^3$$

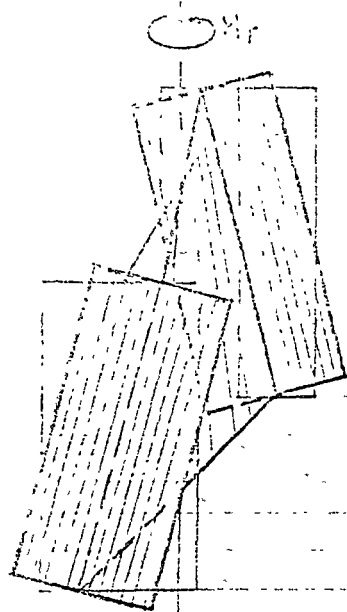
$$\tau_1 = \frac{\frac{V t (2\pi + 3)}{6} b t^3}{\frac{8}{3} b t^3} \cdot t = \frac{V t}{J} \cdot t$$

$$\tau_2 = \frac{\frac{V t (\frac{8}{3} b t^3)}{3} \cdot 2t}{\frac{8}{3} b t^3} = 2 \frac{V t}{J} t$$

$$\tau_{max} = \tau_2 = 2 \frac{V t}{J} t$$

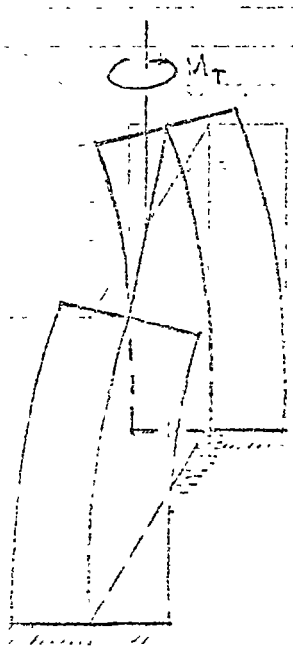
TORSIÓN NO UNIFORME DE BARRAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL

LIBRE Y DE BARRAS EMPOTRADA



No hay ningún factor externo que quite o restrinja las deformaciones. Todas las secciones transversales se alabeen lo mismo, no cambian las longitudes de las fibras longitudinales y no hay esfuerzos normales, los únicos esfuerzos son tangenciales correspondientes a torsión de St. Venant.

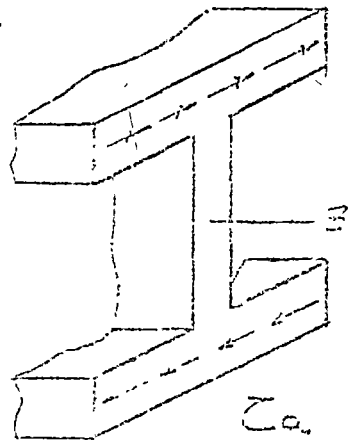
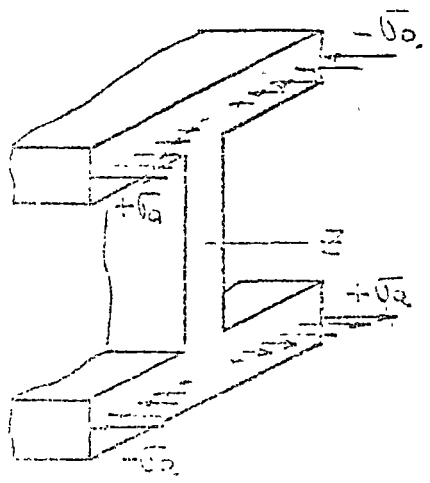
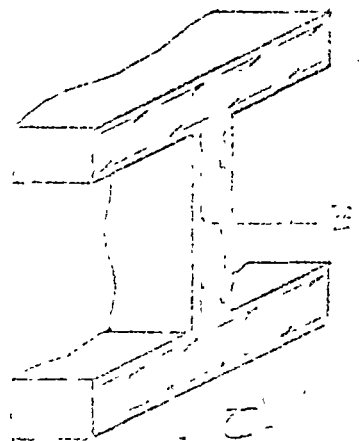
M_T

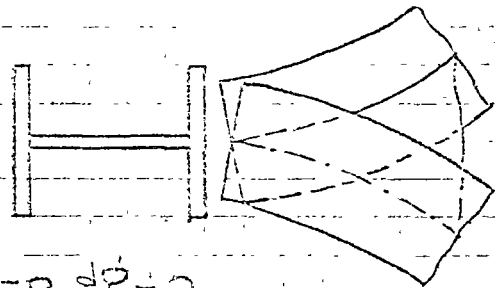
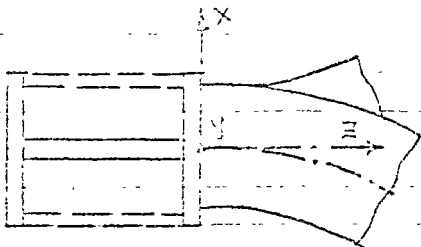
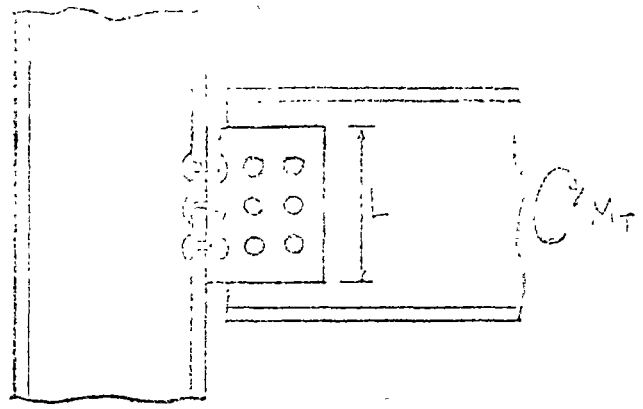
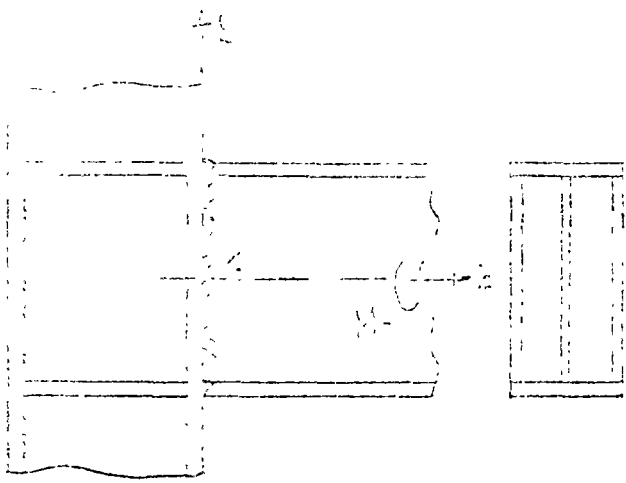


Si se empotra un extremo, esa sección permanece plana mientras las demás se alabean; hay cambio de longitud de las fibras longitudinales y aparecen esfuerzos normales acompañados de cortantes, además de los producidos por la torsión de St. Venant.

M_T

Este fenómeno se previene aunque no se evita totalmente el alabeo de una sección, basta con que no pueda producirse libremente.





$$\phi = 0, \frac{d\phi}{dz} = 0, \frac{d^2\phi}{dz^2} \neq 0, \frac{d^3\phi}{dz^3} \neq 0; \quad \phi = 0, \frac{d\phi}{dz} \neq 0, \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0, \frac{d^3\phi}{dz^3} = 0$$

$$M_{Tc} = GJ \frac{d\phi}{dz} = 0$$

$$M_{Tb} = -EJ \frac{d^3\phi}{dz^3} \neq 0 = M_T$$

$$M_{Ts} \neq 0 = M_T, \quad M_{Tq} = 0$$

3. EL DE SOSTENIMIENTO

La velocidad w_p es el desplazamiento de la sección en el tiempo t .

$$w_p = \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

$$w_p = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

$$w_p = \frac{dz}{dt} \quad (3)$$

La velocidad w_p es el desplazamiento de la sección en el tiempo t . La velocidad w_p es el desplazamiento de la sección en el tiempo t . La velocidad w_p es el desplazamiento de la sección en el tiempo t .

$$w_p = \pm 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

En términos de torsión = uniforme que
se produce a consecuencia de la rotación simple, torsión por giro
y flexión lateral en los perfiles. Los momentos correspondientes son

$$M_{Tz} = G \cdot K_T \left(\frac{d\phi}{dz} \right)$$

$$M_{Tz} = -E C_w \left(\frac{d^3 \phi}{dz^3} \right) \quad (13)$$

$$M_B = E C_w \left(\frac{d^3 \phi}{dz^3} \right) \quad (14)$$

Más ocasiona esfuerzos cortantes "simples" o "de S. Venant", C_s ,
 M_{Tz} esfuerzos cortantes "de alabeo", C_a , y M_B esfuerzos normales longi-
tudinales en los perfiles, C_z , sus valores máximos son

$$(C_s)_{max} = \frac{M_{Tz} t}{K_T}$$

$$(C_a)_{max} = \frac{h^2 h_1}{16 C_a} M_{Tz} \quad (25)$$

$$(C_z)_{max} = \frac{M_B}{S_z} \quad (26)$$

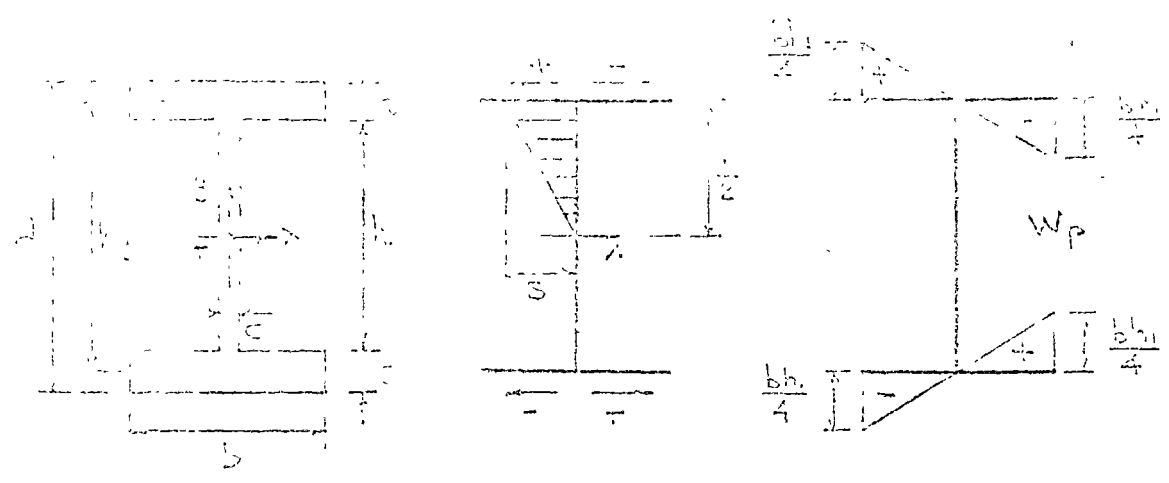
La solución numérica de un problema dado puede ser laboriosa,
pero se han publicado fórmulas y ecuaciones que simplifican la
obtención de la mayoría de los casos de interés práctico.

Ejemplo 2 Calcular los esfuerzos tangenciales y normales máximos de
la viga de la figura.

Propiedades de la I 35 L IV (no tabuladas en el manual Monterrey) a
 $K_T = 2850 \text{ cm}^4$, $C_w = 135265 \text{ cm}^6$, $S_z = 1520.29 \text{ cm}^3$, $\lambda = 0.01101 \text{ cm}^{-1}$
Elongación = 4.35 cm, $\lambda L = 0.01101 \times 450 = 4.95$

1. El esfuerzo tangencial debido a la flexión (máximo en los
bordes superior e inferior de la sección media).

$$(C_s)_{max} = \frac{M_{Tz} t}{K_T} = \frac{M}{450} = \frac{450T}{12000} = 0.116 T$$



$(v_s)_{max} = \pm \frac{b}{2} \frac{v}{2} = \pm \frac{bh}{4}$ h_1 es la distancia entre centros de gravedad de las partes.

De (21): $C_a = 4 \int_0^{b/2} \left(\frac{sh}{2}\right)^2 t ds = h_1^2 \int_0^{b/2} s^2 t ds$

Si t es constante, $C_a = h_1^2 t \int_0^{b/2} s^2 ds = h_1^2 t \frac{h^3}{24} = \frac{t b^3}{12} \frac{h_1^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{b^3}{4}$

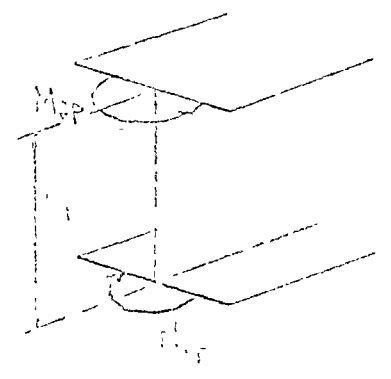
De (22): $(\sigma_s)_{max} = \pm \frac{bh}{4} \frac{d^2 \phi}{dz^2}$ (25)

Por otro lado, $(\sigma_s)_{max} = \pm \frac{M_{fp}}{S_p} = \pm \frac{M_{fp} bh^2}{4C_a}$, pues $S_p = \frac{b_0}{h/2} = \frac{2C_a}{h^2} \frac{2}{b}$

M_{fp} es el momento de flexión originado en cada parte por la acción de torsión.

Entonces igualamos ambas M_{fp} en:

$(\sigma_s)_{max} = \pm \frac{M_{fp} bh}{4C_a} = \pm \frac{M_{fp}}{\frac{4C_a}{bh}} = \pm \frac{M_{fp}}{S_a}$ (26)



Equivalencia de los momentos de (25) y (26) y

despejamos M_{fp} : $M_{fp} = \pm C_a \frac{d^2 \phi}{dz^2}$ (27)

Con esto se puede hallar la ecuación de torsión, el momento torsional en cada una de las partes, en la relación con el ángulo ϕ etc.

$C = \frac{b^3 t}{12} \frac{M}{C_a}$ (28)

En la figura anterior se indican los esfuerzos tangenciales y la torsión no uniforme (con alabeo restringido). Tanto los esfuerzos como los momentos a la izquierda de la sección I.

$$M_T = M_{Ts} + M_{Ta} \quad (14)$$

M_T , momento resistente total (igual al exterior).
 M_{Ts} , momento resistente correspondiente a la torsión pura (esfuerzos τ_s)
 M_{Ta} , momento resistente correspondiente a la restricción al alabeo (τ_a)

CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS Y DEL MOMENTO RESISTENTE

PRODUCIDOS POR LA OPOSICIÓN AL ALABEO

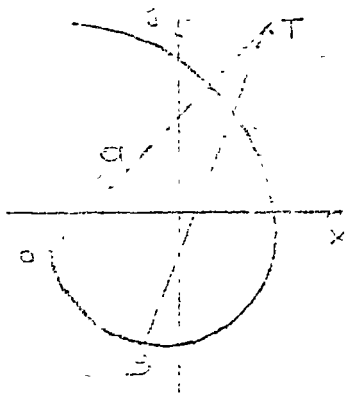
Del estudio de la deformación de una barra de eje recto y sección transversal abierta de paredes delgadas, sometida a torsión no uniforme, se llega a los resultados siguientes:

$$\epsilon_z = (\bar{w}_s - w_s) \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (15)$$

$$\bar{w}_s = \bar{\epsilon} \bar{\epsilon}_z = F (\bar{w}_s - w_s) \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (16)$$

$$M_{Ta} = - \bar{\epsilon} \frac{d^3 \phi}{dz^3} \int_0^s t (\bar{w}_s - w_s) ds \quad (17)$$

t es el grueso de la pared de la sección, que puede ser variable.
 w_s es el doble del área del sector corrido por el "radio" a al moverse a lo largo de la línea media de la sección desde O hasta el punto m donde se desean determinar los esfuerzos tangenciales.



"radio" a al moverse a lo largo de la línea media de la sección desde O hasta el punto m donde se desean determinar los esfuerzos tangenciales.

$$\bar{w}_s = \frac{1}{m} \int_0^m w_s ds \quad m \text{ es la longitud total de la línea media.}$$

Tercero de torsión.

M_{Ta} es la suma de momentos, alrededor del centro de torsión, de la fuerza τ_a que circula a lo largo de toda la línea media.

$$M_{Tz} = -E \int_A \frac{d^3 \phi}{dz^3} (y^2 + z^2) dz$$

Integrando en la relación $\int_A (\bar{u}_s - u_s)^2 \bar{t} ds = C_0$, la ecuación anterior toma la forma

$$M_{Tz} = -E C_0 \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (18)$$

Se recibe el nombre de "constante de alabeo" y $E C_0$ es la "rigidez por alabeo".

Del estudio de la torsión de Saint Venant:

$$M_{Tz} = G K_T \theta = G K_T \frac{d\phi}{dz}$$

Finalmente,

$$M_T = G K_T \frac{d\phi}{dz} - E C_0 \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (19)$$

Introduciendo en (19) una nueva constante de torsión, $\lambda = \sqrt{\frac{G K_T}{E C_0}}$, y haciendo algunas manipulaciones algebraicas, toma la forma

$$\frac{d^3 \phi}{dz^3} - \lambda^2 \frac{d\phi}{dz} = -\frac{M_T}{E C_0} \quad (20)$$

cuya solución es

$$\phi = C_1 - C_2 \cosh \lambda z + C_3 \sinh \lambda z + \frac{M_T z}{\lambda^2 E C_0} \quad (21)$$

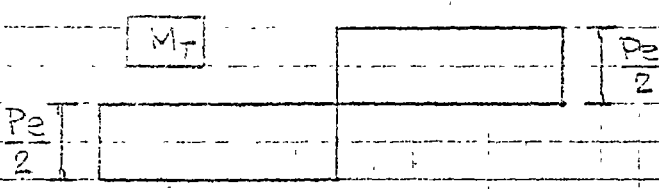
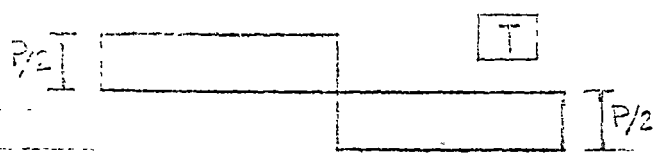
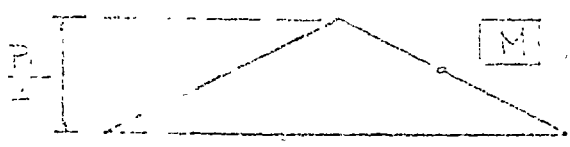
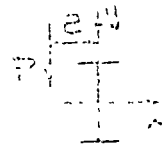
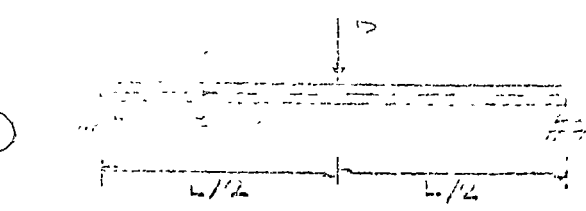
C_1, C_2, C_3 son a lo largo de integración, que se determinan de las condiciones de borde de la pila, que deberán cumplir estas relaciones de derivadas:

$\phi = 0$, que al estar de z impedido,

$d\phi/dz = 0$, la sección extrema no puede alabearse

$\phi = 0$, cuando $z = 0$

$d^2 \phi / dz^2 = 0$, el cortante debido al alabeo es nulo.



2. Esfuerzos normales:
 $\sigma = \frac{M}{I} y$

Son iguales en todas las secciones transversales.

$$\sigma_F = \frac{P/2}{A_x} = \frac{P}{2 \times 31.7 \times 10^4} = 0.0150 P$$

3. Esfuerzos cortantes:

Saint Venant

Máximos en las secciones extremas, en las que $M_{ts} = 0.4155 P_e$.

$$(\tau_s)_{max} = \frac{(M_{ts})_{max} t}{K_t} = 0.0064 P_e t$$

En los patines, $t = 1.33 \text{ cm}$,

$$(\tau_s)_{max} = 0.0101 P_e$$

En el alma, $t = 1.04 \text{ cm}$,

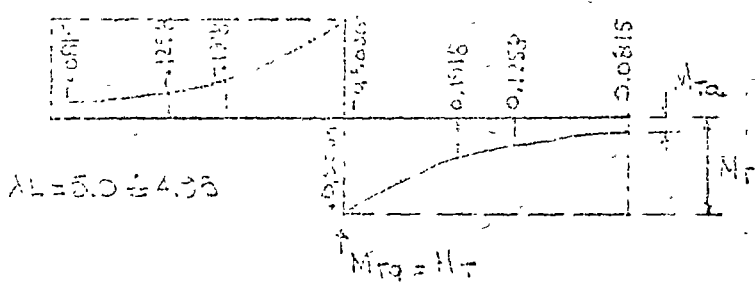
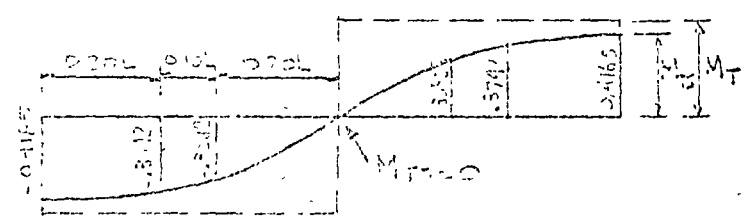
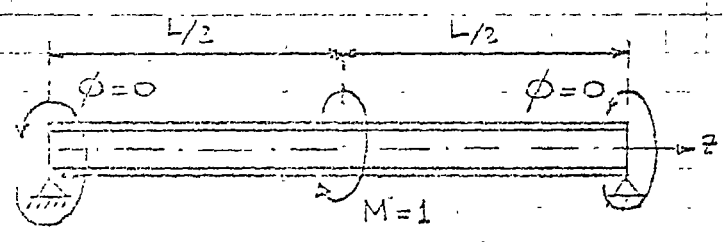
$$(\tau_s)_{max} = 0.0067 P_e$$

4. Esfuerzos cortantes:

debidos a la resistencia al giro.

Máximos, en la sección media, en la que $M_{ta} = 0.500 P_e$.

$$(\tau_a)_{max} = \frac{b^2 a}{16 C_a} (M_{ta})_{max} = 0.0012 P_e$$



$$A_L = 5.0 \pm 4.33$$

$$\sigma = 0.0101 P_e$$

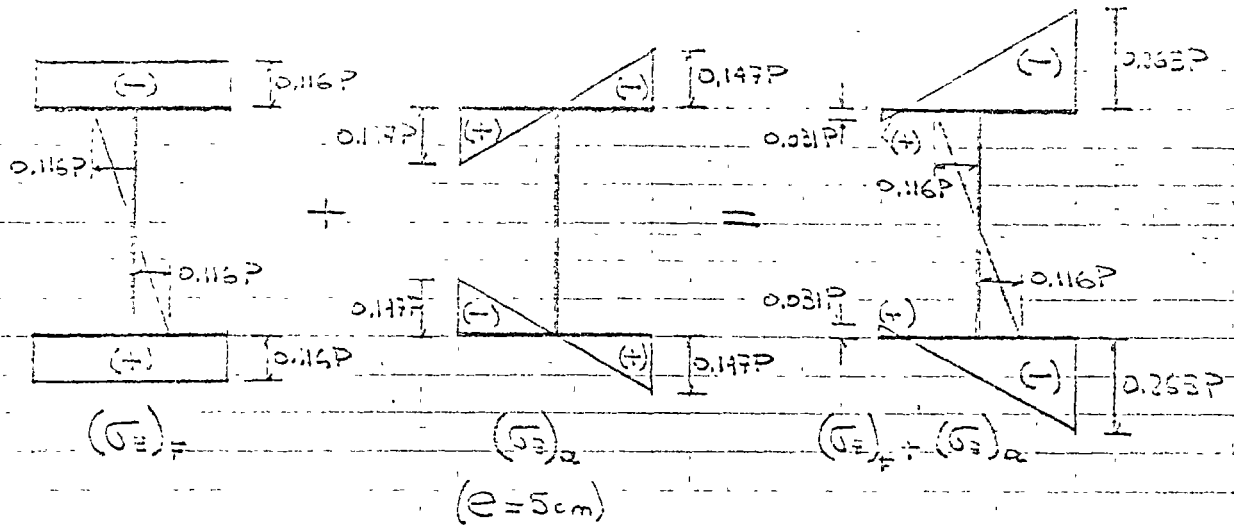
El esfuerzo por un lado de la fibra se obtiene al aplicar el momento en la fibra de la fibra de la fibra.

En la grafica, para $a/L=0.15$ y $\lambda=7.612$, $w=0.172$

$(\sigma_{\pm})_{max} = \Sigma \sigma_{\pm} = 2.116 \text{ P}$, $(\sigma_{\pm})_{min} = \frac{(1.16) \text{ P}}{S_0} = 0.02332 \text{ P}$

El momento normal longitudinal en la sección media de la

$\frac{P_0}{2}$



A pesar de que la excentricidad es pequeña, $(\sigma_{\pm})_a = 1.26(\sigma_{\pm})_F$.
 Los esfuerzos cortantes también se incrementan considerablemente por acción.

PROBLEMA PARA CASA.

El eje que se muestra, pero con la carga aplicada a 30 cm de un extremo. $e=10 \text{ cm}$, $L=5.00 \text{ m}$. Resolver el problema. Comparar los resultados con el presentado en clase.

three

TORSION OF PRISMATIC BARS

27. Show that the maximum and minimum shearing strain developed at a point in a body which is in a state of plane strain in the xy plane is given

$$\gamma_{\max, \min} = \pm \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

28. Compute the maximum shearing stress at a point in the elastic body described in Prob. 2.27 (see Prob. 2.26).

29. Determine the principal strains and the associated principal directions for the following states of strain:

- (a) $\epsilon_x = 0.0008$, $\epsilon_y = 0.0004$, $\gamma_{xy} = 0.0002$, $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
- (b) $\gamma_{xz} = 0.0005$, $\gamma_{yz} = 0.0004$, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$
- (c) $\epsilon_x = -0.0012$, $\epsilon_y = 0.0008$, $\gamma_{xy} = 0.0010$, $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
- (d) $\gamma_{xy} = 0.0024$, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

30. Starting with the definitions of E and ν , derive Eqs. (2.27).

3.1 General. When a straight prismatic bar is subjected solely to moments about its longitudinal axis, it twists about that axis, shearing stresses are developed, and a single stress resultant, the twisting moment M_x , is developed on each transverse cross section. If no cross sections are restrained from deforming under this loading, no normal stresses are developed and the result is a special but interesting example of structural behavior.

3.2 Circular bars. The straight prismatic bar of circular cross section is the most common structural element subjected primarily to torsion. Such bars are used as shafts in most engines and, in fact, serve as the basic test specimens for determining the shearing-stress-shearing strain relations for most metals.

Developing relationships between the angle of twist, the shearing stresses, and the twisting moment on a circular section is quite simple because of the perfect symmetry of both the structure and the loading. Because of symmetry, we may argue that plane cross sections normal to the axis of the bar remain plane during deformation and that these sections remain

undeformed in their own plane. From the observations it follows that a radial line on the cross section oriented any angle α with respect to some reference remains a straight line during deformation. Consequently, the shearing strain γ_{zx} varies linearly with r , the radial distance from the undeformed axis of the shaft (see Fig. 3.1). With this relatively simple condition of deformation, the analysis of a circular shaft in torsion reduces to a statically determinate problem.

Consider, for example, the typical segment of the circular bar in pure torsion shown in Fig. 3.1. From the geometry of the deformed element (indicated by dashed lines), we find

$$\gamma_{zx} \Delta x = \frac{\tau_{zx}}{G} \Delta x = r \Delta \phi$$

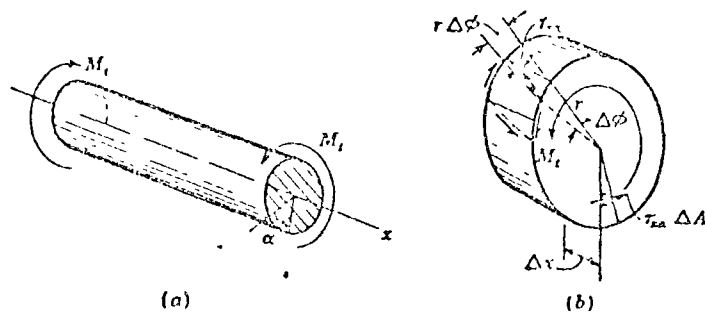


FIGURE 3.1 (a) A circular shaft in pure torsion; (b) a typical transverse element of the shaft.

where $\Delta \phi$ is an increment in ϕ , the total angle of twist of any radial line on the section. It follows that

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} G r \frac{\Delta \phi}{\Delta x} = G r \frac{d\phi}{dx}$$

Here the rate of change of twist $d\phi/dx$ is a constant.

The twisting moment resulting from τ_{zx} is

$$M_x = \iint_A r(\tau_{zx} dA) = G \frac{d\phi}{dx} \iint_A r^2 dA = G \frac{d\phi}{dx} I_p$$

in which A is the area and I_p is the polar moment of inertia of the cross section. From simple statics, we see that M_x is equal in magnitude to the end moment M_t .

By rearranging terms and introducing the notation

$$\theta = \frac{d\phi}{dx}$$

into the above relationships, we arrive at the equations of the elementary

theory of torsion:

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{I_p} r \quad (3.1)$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_p} \quad (3.2)$$

3.3 Torsional behavior of noncircular bars. In the case of torsion of prismatic bars not circular in cross section, we lose the arguments of symmetry and, along with them, the simplicity of the elementary theory. The argument that plane cross sections remain plane during deformation, for example, is now no longer valid.

To prove this, we need only examine the behavior of a number of elements of the prismatic bar shown in Fig. 3.2a. For simplicity, elements A and D are shown located on right-angled corners so that no shearing stress can possibly exist on these elements; any component of shearing stress on element A , for example, would require stresses to be developed on the outside surfaces of the bar which, of course, are impossible. Consequently, these elements undergo no shearing strain, which means that their corners remain right angles after deformation. Elements B and C , however, can develop shearing stresses so long as they are parallel to the boundary line \overline{ad} . Again, this is because shearing stresses directed normal to any boundary lead to impossible stresses on the outside surface of the bar (Fig. 3.2b). It follows that when the sides of elements B and C acquire a shearing strain γ elements A and D must undergo rigid-body rotations of the same amount for the sake of continuity of the material. Hence, the outside corners of elements A and B are displaced out of the plane of the cross section, as indicated in Fig. 3.2c. Finally, if we increase the number of elements indefinitely and allow their dimensions to approach zero, the deformed configuration of the boundary line \overline{ad} becomes a smooth curve, the shearing stress at the boundaries is directed parallel to the boundary curve and is zero at points a and d .

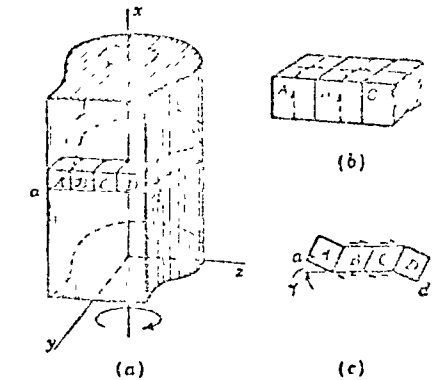


FIGURE 3.2 (a) A noncircular prismatic bar in pure torsion; (b) elements of the bar with impossible (dashed line) and possible (solid line) shearing stresses; (c) deformation of bar elements.

Out-of-plane displacements such as those discussed above are called *warping displacements*. We assume that no external constraints exist

where τ_{xy} is the average shear stress for $x > 0, y > 0$. There is no shear stress in the xy direction.

One of the most important characteristics of the bar's behavior is the absence of normal stresses. No external forces or bending moments are present, and no end constraints exist; therefore, the only stress components needed to provide three equilibria of any transverse segment are shearing stresses in the cross-sectional planes. Furthermore, of the three components of shearing stress, only τ_{xz} and τ_{yz} can result in a twisting moment. The component τ_{xy} is zero, which we may also verify by examining plane areas parallel to the bar's axis, such as those shown in Fig. 3.3.

If any shearing stresses were developed on these planes, they would result in forces and moments which not only offer no aid in resisting M_t but which also, in general, cannot be in equilibrium. Thus, we conclude that for the noncircular prism in torsion

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad (3.3)$$

Referring now to Eqs. (2.4) and noting that no body forces are present, we arrive at the differential equations of equilibrium:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{and} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

Equations (3.5) show that the shearing stresses do not vary with x and, hence, have the same distribution on each cross section. Only Eq.

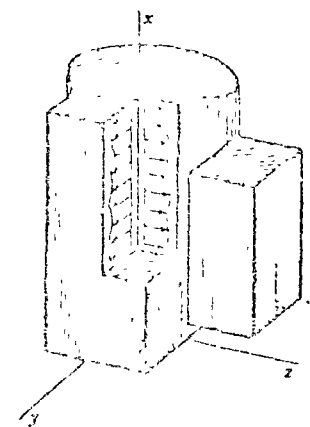


FIGURE 3.3 No-existent shearing stresses τ_{xy} .

(3.4) is useful as an equilibrium condition for stresses on the cross-sectional planes, and it involves two unknowns. Thus, we have a statically indeterminate problem, and we are forced to turn to considerations of strains and displacements for additional information.

Since the material is assumed to be homogeneous, isotropic, and linearly elastic, we may introduce Eqs. (3.3) into Eqs. (2.27) to obtain the components of strain. We find

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.6)$$

Therefore, according to Eqs. (2.17),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

which means that

$$u = f(x, z) \quad v = g(x, z) \quad w = h(x, y) \quad (3.7)$$

where $f, g,$ and h are continuous functions yet to be determined.

The fact that γ_{xz} and γ_{yz} are linearly important in our development. From this observation we conclude that cross sections do not distort in their own planes. In other words, the angle between any two lines on a cross section is not changed during the deformation of the bar. This means that deformations of elements, such as that indicated in Fig. 3.4a, do not exist and that during deformation a point in the yz plane merely rotates about a *center of twist*,¹ which we take as coincident with the x axis. This makes it possible for us to define the in-plane displacements of any point on the cross section in terms of the angle of twist ϕ of a straight line on the section drawn from the x axis to the point, as shown in Fig. 3.4b.

Upon examining the geometry of Fig. 3.4b, we find

$$v = -\phi z \quad \text{and} \quad w = \phi y \quad (3.8)$$

We will now show that $d\phi/dx$ is constant. Referring to Eqs. (2.27) and (3.5), we find

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

or, by virtue of Eqs. (3.8),

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - z \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

The first term in this equation is zero owing to Eqs. (3.6). Thus

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

and

$$\frac{d\phi}{dx} = \theta = \text{constant} \quad (3.9)$$

It follows that the twist relative to the section $x = 0$ is θx and that Eqs. (3.8) may be expressed in terms of $\theta, x, y,$ and z . In summary, we express the components of displacement in the form

$$\begin{aligned} u &= f(x, z) \\ v &= -\theta x z \\ w &= \theta x y \end{aligned} \quad (3.10)$$

¹ A more detailed discussion of the center of twist of thin-walled sections under general loading is given in Art. 7.4.

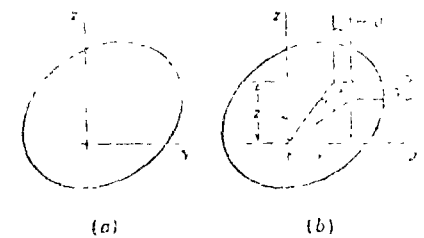


FIGURE 3.4 Geometry of deformation. Distortions such as that shown in (a) do not exist since γ_{xz} is zero. Hence, bars rotate as shown in (b).

Thus, once G and $f(y,z)$ are known, the complete displacement pattern can be evaluated.

Finally, from Eqs. (2.17) and (2.28), we relate the shearing stresses and strains to the displacements by

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

or, introducing Eqs. (3.10),

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z\right) \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y\right)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Differentiating the first of these equations with respect to y and the second with respect to z and substituting the result into Eq. (3.4) yields

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.12)$$

which is the governing partial differential equation for the warping displacement. This relationship is called *Laplace's² equation for the warping function*, and any solution to Laplace's equation is called a *harmonic function*. Thus, u is a harmonic function.

The torsion problem now reduces to one of determining the four unknowns τ_{xy} , τ_{xz} , u , and θ . To solve this problem we have three relationships--Eq. (3.4), the equilibrium condition, and the two kinematic conditions in Eqs. (3.11)--which we have written in terms of the stresses. Equation (3.12) is not independent since it was obtained from Eqs. (3.4) and (3.11). The fourth relationship necessary to solve the problem is the simple static condition that τ_{xy} and τ_{xz} must result in a twisting moment of magnitude M_t on each cross section.

3.4 Saint-Venant's stress function. The torsion problem may be reduced to one of determining a single unknown by using a scheme first presented by Saint-Venant in 1855. He assumed the existence of a continuously differentiable function $\Phi(y,z)$, now called *Saint-Venant's stress function*, which has the property

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.13)$$

and

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

When we introduce these definitions into Eq. (3.4) we obtain

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0$$

which is satisfied by any function continuous through its second derivatives. Thus, any such continuous function will automatically satisfy Eq. (3.4) and, therefore, lead to shearing stresses which are in equilibrium. The correct solution to the torsion problem, however, must be a state of stress providing not only equilibrium but also compatible strains and displacements. Thus, out of the infinite number of functions Φ which satisfy Eq. (3.4) we must choose those which also satisfy a condition of compatibility.

To arrive at this condition, we introduce Eqs. (3.13) to Eqs. (3.11) and differentiate the first with respect to z and the second with respect to y :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = G \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = G \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y\right)$$

Recalling that u is also continuously differentiable, we subtract the second equation from the first and find

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad (3.14)$$

This is the *equation of compatibility* for the problem of torsion of prismatic bars. Any function Φ continuous through its second derivatives which satisfies Eq. (3.14) now automatically provides both equilibrium and compatibility. Any partial differential equation of this form is also called *Poisson's equation*.*

We may visualize Φ as being a curved surface spread over the cross section of the bar. According to its definition in Eqs. (3.13), the slope of the surface in the z direction is the stress in the y direction, and its slope in the y direction is the negative of the stress in the z direction. In fact, if n is any direction oriented α with respect to the y axis, as shown in Fig. 3.5, the stress directed normal to n is clearly

$$-\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha$$

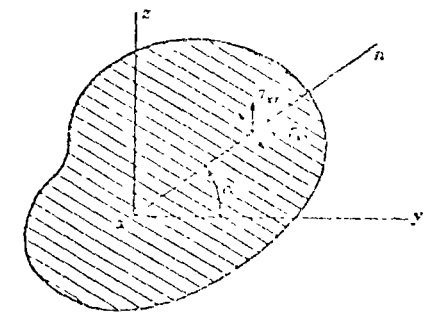


FIGURE 3.5 An arbitrary direction n on the cross section.

* Named after the great French mathematician Pierre Simon Laplace (1749-1827).

* Named after Siméon-Denis Poisson (1781-1842), who also discovered Poisson's ratio.

The slope of Φ in the z direction is, by definition,

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dn}$$

or, since $dy/dn = \cos \alpha$ and $dz/dn = \sin \alpha$,

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \sin \alpha \quad (3.15)$$

Hence, the slope of the Φ surface in any direction is equal to the shearing stress in the perpendicular direction.

Furthermore, since we proved earlier that no shearing-stress components can act normal to the boundary of the cross section, the slope of Φ parallel to the boundary must be zero. This is possible *only if* Φ is a constant along the boundary. We may also verify that this is true by noting that the slope of Φ parallel to the boundary curve s is

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = -\tau_{xz}(-n) + \tau_{yz}m$$

where m and n are the direction cosines of a normal to the curve. Since no surface forces are present, the right side of this equation is zero by virtue of the first condition in Eqs. (2.6). Thus, Φ must satisfy the boundary condition

$$\frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad (3.16)$$

The magnitude of this constant height of the Φ surface along the boundary is arbitrary because the stresses are defined in terms of derivatives of Φ rather than Φ itself. Therefore, without loss in generality, we assume that Φ is zero everywhere along the boundary of the cross section.

Any solution to Eq. (3.16) provides both equilibrium and compatibility for cross sections of any shape. To ensure that it also leads to stresses which satisfy static boundary conditions at the ends of the bar (or on any cross section due to the nature of the loading) we must also relate Φ to the twisting moment developed on each section. This is a matter of simple statics. The moment developed by the shearing stresses about the x axis must be

$$M_x = M_t = \iint_A (-\tau_{xz}z + \tau_{yz}y) dy dz$$

where the integration is carried out over the entire area of the cross section. Introducing Φ , this equation becomes

$$M_t = - \iint_A \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} z + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y \right) dy dz$$

We now write the integral in the form

$$- \int_C \left(\int_C^D \frac{\partial\Phi}{\partial z} z dz \right) dy - \int_C \left(\int_C^D \frac{\partial\Phi}{\partial y} y dy \right) dz$$

where the lines d and l stand for $z = 0$ and $z = z_0$ along $dy = \text{constant}$, and C and D stand for boundary points along some line $z = \text{constant}$. Integrating by parts, we find

$$M_t = - \int_C (\Phi_D z_D - \Phi_C z_C - \int_C^D \Phi dz) dy - \int_C (\Phi_D y_D - \Phi_C y_C - \int_C^D \Phi dy) dz$$

Now Φ_A , Φ_B , Φ_C , and Φ_D denote values of Φ at the boundary points which, according to our earlier discussion, are zero. Hence, the terms within the parentheses vanish and we have

$$M_t = 2 \iint_A \Phi dy dz \quad (3.17)$$

This final result states that the total twisting moment on any section is equal to twice the volume under the surface Φ .

We would now like to obtain the twisting moment in terms of three independent quantities as we did for the circular bar G , the modulus of rigidity, which depends upon the material; θ , the angle of twist per unit length; and a constant J , which depends upon the geometry of the cross section. In other words, for every cross section there exists a constant J such that

$$M_t = GJ\theta = I_T \theta \quad (3.18)$$

J is called the torsional constant of the bar. The product GJ is called the torsional stiffness of the bar. The formula for J follows directly from Eqs. (3.17) and (3.18).

$$J = \frac{2}{G\theta} \iint_A \Phi dy dz \quad (3.19)$$

Comparing Eq. (3.18) with Eq. (3.2), we see that for the very special case of circular cross section, J is the polar moment of inertia of the cross section.

3.5 The membrane analogy. It is of interest to note that Eq. (3.16), which is the governing equation in our theory of torsion, closely resembles the equilibrium equation for any small element of a flat membrane subjected to an internal pressure p . If w is the deflection of the membrane and T is the constant tension per unit length in the membrane, it is easily shown that an element is in equilibrium provided

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{T} \quad (3.20)$$

Comparing this with Eq. (3.14), we see that \bar{u} is analogous to Φ and that $T\bar{p}$ is analogous to $2G\theta$. Furthermore, owing to Eq. (3.17), the volume under the membrane is proportional to the twisting moment developed on a bar in torsion of the same shape of the membrane.

This analogy was first discovered by Ludwig Prandtl in 1903 and is known as *Prandtl's membrane analogy*. Prandtl took full advantage of the analogy and devised clever experiments with membranes. By measuring the volumes under membranes formed by a soap film subjected to a known pressure, he was able to evaluate torsional constants. By obtaining the contour lines of the membranes he determined stress distributions. A number of other analogies to the torsion problem have also been proposed.⁴

For our present purposes, the chief advantage of the membrane analogy is as an aid to the visualization of the Φ surface. Contour lines on a surface, such as those on a map of mountainous terrain, indicate the intensity of the slope of the surface, which, in turn, indicates the intensity of the shearing stress. Thus, at points on the Φ surface where contour lines are grouped closely together, we expect high concentrations of stress.

3.6 Bars of solid section. In general, to analyze the torsional behavior of bars of any shape, it is necessary to obtain an exact solution to Eq. (3.14).

This often requires a knowledge of partial differential equations, and we shall not attempt to solve such problems here. The correct stress function for a number of simple shapes (the circle, the ellipse, the equilateral triangle, etc.), however, can be obtained by examining the equations for the boundary curves.

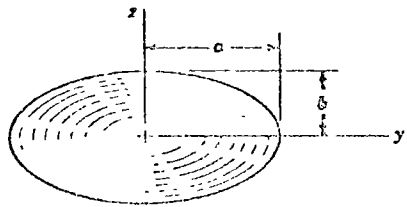


FIGURE 3.6 Bar of elliptical cross section.

To demonstrate this procedure, let us examine the stress function for the bar of elliptical cross section shown in Fig. 3.6. By assuming a solution to Eq. (3.14) of the form

$$\Phi = C \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (a)$$

where C is some constant, we automatically satisfy the conditions that Φ be zero along the boundary and that its slopes parallel to the boundary be zero. This is because the fraction inside the parentheses is the equation

⁴See, for example, Ref. 27, pp. 70-72, 227.

of the elliptical boundary curve. We now need to check to see if the form of Φ satisfies Eq. (3.14). Substituting the function into (3.14) gives

$$C \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2G\theta$$

Thus, Eq. (a) is the correct solution if we set

$$C = - \frac{a^2 b^2 G \theta}{a^2 + b^2} \quad (b)$$

Introducing Φ into Eq. (3.17), we find

$$M_t = - \frac{2a^2 b^2 G \theta}{a^2 + b^2} \int_{-b}^b \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dy dz$$

or, after integrating,

$$M_t = G\theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (c)$$

Thus, from Eq. (3.18),

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (3.21)$$

and

$$C = - \frac{a^2 b^2 M_t}{J(a^2 + b^2)} = - \frac{M_t}{\pi a b^3}$$

Finally, we evaluate the shearing stresses by direct application of Eqs. (3.13):

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{2C}{b^2} z = - \frac{2M_t z}{\pi a b^3} \quad (3.22)$$

$$\tau_{xz} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{2C}{a^2} y = \frac{2M_t y}{\pi a^3 b}$$

If $b < a$, the maximum stress is τ_{xy} at $z = \pm b$.

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2} \quad (3.23)$$

Noting that the resultant force on a unit area at any point on the cross section is

$$(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2} = \frac{2M_t}{\pi a b} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right)^{1/2}$$

we see that the contour lines of constant stress on the Φ surface form a family of ellipses, as indicated by the dashed lines in Fig. 3.6.

We may now determine the warping displacement u by introducing the above results into either of Eqs. (3.11).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G} + \theta z = \frac{M_t}{G} \left(\frac{-2}{\pi ab^3} + \frac{1}{J} \right) z$$

Integrating and simplifying the result, we find

$$u = \frac{M_t}{\pi ab^3} (b^2 - a^2) yz + g(y)$$

where $g(y)$ is some function of y . By using the second relation in Eqs. (3.11), we find

$$u = \frac{M_t}{\pi ab^3} (b^2 - a^2) yz + h(z)$$

which can be equal to the first result only if $g(y)$ and $h(z)$ are zero. Thus,

$$u = \frac{M_t}{\pi ab^3} (b^2 - a^2) yz \quad (3.24)$$

This displacement pattern is in the form of a hyperbolic paraboloid. The lines of $y = 0$ and $z = 0$ do not displace and the deformed shape is antisymmetrical with respect to the y and z axes.

The procedure illustrated above can be applied to a number of solid sections with relatively simple cross-sectional shapes. In such cases, a stress function in the form of a polynomial is assumed and the coefficients of each term are adjusted so that the function satisfies Eq. (3.14) as well as the boundary conditions. If this proves to be impossible, it is necessary, as mentioned earlier, to attack Eq. (3.14) directly and obtain an exact solution or to use some approximate or empirical method. In this regard, it is worthy to note that Saint-Venant also presented an approximate expression for the torsional constant of any solid section:

$$J \approx \frac{0.025A^4}{I_p} \quad (3.25)$$

where A is the cross-sectional area and I_p is the polar moment of inertia. This equation yields accurate values of J except for elongated sections, that is, for sections having one dimension which is much larger than the rest. We investigate the torsional behavior of such narrow thin-walled sections in the following article.

3.7 Thin-walled open sections. A thin-walled section is said to be *open* when the locus of points defining the center line of the walls is not a closed curve. Channels, angles, I beams, and wide-flange sections are among

many common structural shapes characterized by combinations of thin-walled rectangular elements. A variety of different thin-walled curved sections are used in aircraft and missile structures. The basic characteristic of these sections is that the thicknesses of the component elements are small compared with the overall dimensions.

The key to the torsional analysis of this type of structure lies in the study of the simplest thin-walled open section, the narrow rectangle. The surface Φ for such a shape is of the form indicated in Fig. 3.7. Obviously, it must be symmetrical with respect to both the y and z axes, and it is very flat. Contour lines are grouped closely together at the boundaries parallel to the y axis, but Φ is essentially constant in the y direction. We may assume, therefore, that Φ is solely a function of z and does not vary with y . Then Eq. (3.14) reduces to the ordinary differential equation

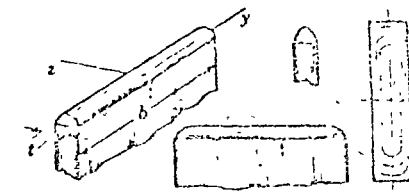


FIGURE 3.7 The surface Φ for a narrow rectangular section

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = -2G\theta$$

which, on integrating twice, gives

$$\Phi = -G\theta z^2 + C_1 z + C_2$$

where C_1 and C_2 are constants of integration.

Since Φ is zero at $z = \pm t/2$, we find that C_1 is zero and C_2 is $G\theta t^2/4$. Hence,

$$\Phi = -G\theta \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right)$$

From Eqs. (3.13),

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad (3.26)$$

and

$$\tau_{xy} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -2G\theta z \quad (3.27)$$

Thus, the shearing stress varies linearly over the thickness and is zero along the center line of the rectangle.

Introducing Φ into Eq. (3.19), we find

$$J = -\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} \left(2z^2 - \frac{t^2}{2} \right) dy dz$$

or

$$J = \frac{bt^3}{3} \quad (3.28)$$

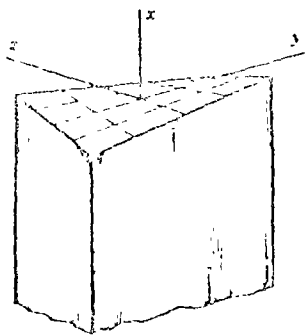


FIGURE 3.8 Warping of a narrow rectangular section.

Referring to Eq. (3.13), we see that Eq. (3.27) can also be written

$$\tau_{xy} = -\frac{2M_t}{J}z \quad (3.29)$$

The maximum stress occurs at $z = \pm t/2$:

$$\tau_{\max} = \mp \frac{M_t t}{J} = \mp \frac{3M_t}{bt^2} \quad (3.30)$$

The warping u is now easily obtained from Eqs. (3.11):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\theta y$$

$$u = -\theta yz + h(z)$$

Comparing this with the result obtained using the first of Eqs. (3.11) shows that $h(z)$ is zero. Thus, replacing θ with M_t/GJ , we have

$$u = -\frac{M_t}{GJ}yz \quad (3.31)$$

which is the hyperbolic-paraboloid surface shown in Fig. 3.8.

The above formulas are applicable only if t is much smaller than b . When this is not the case, it may be shown that³

$$J \approx \frac{bt^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5 b} \tanh \frac{\pi b}{2t} \right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t}{J} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sech}(2n+1)\pi b/t}{(2n+1)^2} \right] \quad (3.32)$$

These more general equations can be written in the simplified form

$$J = c_1 bt^3 \quad \tau_{\max} = \frac{c_2 M_t}{bt^2} \quad (3.33)$$

where c_1 and c_2 are the constants recorded in Table 3.1. The maximum stress occurs at points closest to the center of the section. We see that the simplified formulas give reasonably accurate results for $b/t > 10$.

Table 3.1 Torsional constants c_1 and c_2 for a rectangle

b/t	∞	10	5	3	2.5	2.0	1.5	1.2	1.0
c_1	0.333	0.312	0.271	0.263	0.259	0.229	0.196	0.166	0.141
c_2	3.00	3.20	3.44	3.74	3.88	4.06	4.33	4.57	4.80

³See Ref. 64, p. 273.

Torsional constants and maximum shearing stress can now be found for many, more complex, thin-walled open sections by using the formulas obtained for the narrow rectangle. This is possible because M_t and J are directly proportional to the volume under the Φ surface. This volume, for a section composed of several thin narrow elements, is clearly equal to the sum of the volumes of each element (neglecting a small error at corners or points of intersection of the elements). Thus, we may obtain the torsional constant J for such sections by simply adding the J 's for each element calculated by using Eq. (3.28). For example, the torsional constant for the section shown in Fig. 3.9a is

$$J = \frac{b_1 t_1^3}{3} + \frac{b_2 t_2^3}{3} + \frac{b_3 t_3^3}{3} + \frac{b_4 t_4^3}{3}$$

Torsional constants for some other thin-walled open sections are also given in Fig. 3.9. Note that a smooth curvature of an element does not

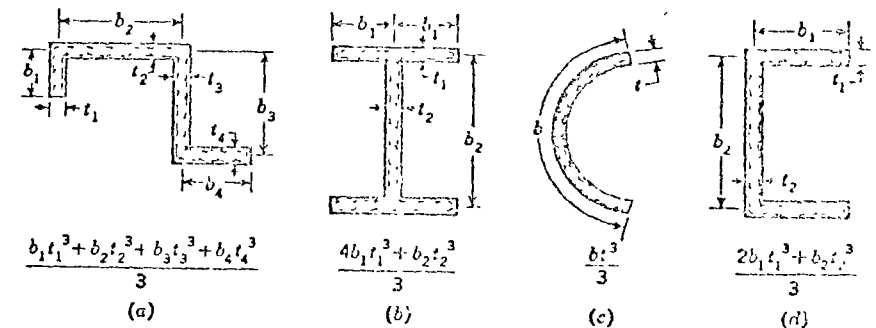


FIGURE 3.9 Typical thin-walled open sections and their corresponding torsional constant, J .

alter the results. In the general case of a section with n elements,

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad (3.34)$$

The maximum shearing stress on any element i is still given by Eq. (3.30), except that the percentage of the twisting moment developed on this element is $J_i M_t / J$. Thus, for element i ,

$$(\tau_{\max})_i = \frac{M_t (J_i / J) (t_i)_{\max}}{J_i} = \frac{M_t (t_i)_{\max}}{J} \quad (3.35)$$

The maximum stress in the entire section is

$$\tau_{max} = \frac{M_t t_{max}}{J} \quad (3.36)$$

where t_{max} is the maximum thickness and J is given by Eq. (3.34). As before, the stress varies linearly over the thickness.

An inspection of the contours of the Φ surface at reentrant corners, such as that shown in Fig. 3.10, indicates that high stress concentrations occur which are not accounted for by the above approximate formulas. Because of this, such corners are rounded by *fillets*, in practice, to allow a smooth "flow" of stress from one element to another. To evaluate the maximum stress at the fillet τ_f we use the empirical formula presented by Trefitz in 1922:

$$\tau_f = \tau_{max} 1.74 \left(\frac{t}{r}\right)^{1/2} \quad (3.37)$$

where r is the radius of the fillet, t is the thickness of the element, and τ_{max} is given by Eq. (3.36). If $t/r = 1$, for example, Eq. (3.37) yields a value for τ_f which is 74 percent greater than that given by

Eq. (3.36). These concentrations become less severe when the angle of intersection of the elements is greater than a right angle.

3.8 Thin-walled single-cell tubes. Bars with thin-walled closed sections are called *tubes*, and the area enclosed by a tube wall is called a *cell*. The boundary of *single-cell* tubes encloses only one cell and that of a *multicell* tube, more than one.

The formulas that we developed earlier for the analysis of open sections cannot be used when the sections are closed. This is fundamentally due to the way that the member must develop shearing stresses to resist applied torques. For example, on the open circular segment shown in Fig. 3.11a, there is developed a linear stress distribution which results in a "loop" of forces, as is indicated. The hollow circular shaft shown in Fig. 3.11b is definitely not a thin-walled section, but it is obvious that the twisting moment is resisted in an entirely different manner. According to Eq. (3.1), the stress is still linear; but, in this case, it varies linearly with the radius. If we keep the outside diameter of the circular shaft constant and increase the inside diameter until the wall thickness is very small compared with other dimensions (Fig. 3.11c), the

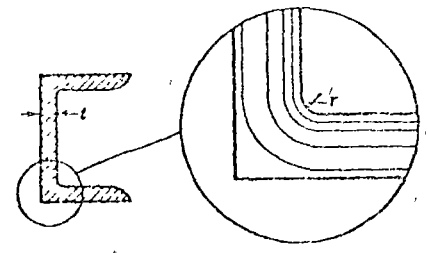


FIGURE 3.10 Contours of the Φ surface indicate high stress concentrations at reentrant corners.

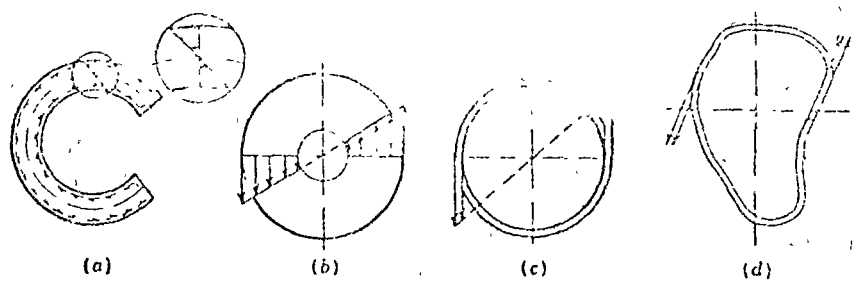


FIGURE 3.11 Distribution of torsional shearing stresses in open (a) and closed (b-d) sections.

exact shearing stress is still given by Eq. (3.1); but we note one important consequence: the stress has "no room to vary" and is practically uniform across the thickness. We have, of course, examined the very special case of the circular section, but an inspection of the shape of the stress function surface for other sections implies that the stress is as shown in Fig. 3.11d. This important observation considerably simplifies our analysis of such structures.

Let us now examine the segment of a single-cell tube shown in Fig. 3.12 and, in particular, a portion of the tube wall between points 1 and 2. The shearing stress is uniform over the thickness of the wall and is directed tangent to the boundary curve s describing the center line of the wall. Stresses normal to s are negligible because of the small wall thickness. ?

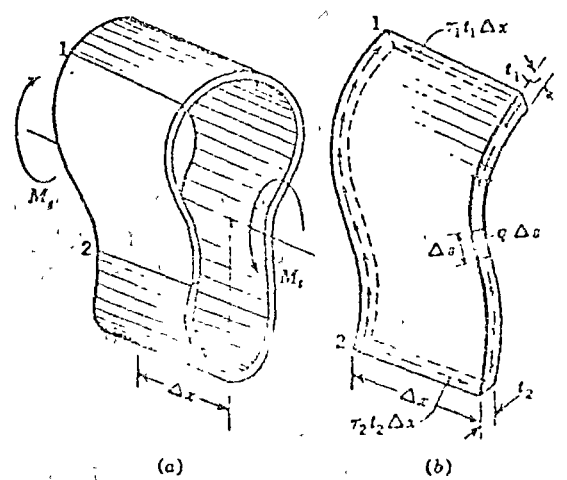


FIGURE 3.12 (a) Segment of a single-cell tube; (b) a slice taken from the segment.

If τ_1, t_1 and τ_2, t_2 denote the stresses and thicknesses at points 1 and 2, we see from the figure that longitudinal forces are developed at these points of magnitude $\tau_1 t_1 \Delta x$ and $\tau_2 t_2 \Delta x$. Summing forces in the x direction, we get

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

Hence, regardless of the variation in thickness, the product of the shearing stress and the thickness at every point is a constant. This product represents

a force per unit length of arc of the curve s , and, physically, its distribution resembles the flow of some substance along the tube wall. For this reason, we refer to this product as the *shear flow* on the section. Thus, if q is the shear flow, the shearing stress at point i is simply q/t_i and the force developed on an infinitesimal element of arc ds is $q ds$.

To evaluate the total moment developed by the shear flow, we denote by r the perpendicular distance from some point O on the cross-sectional plane to a tangent drawn to any point on the boundary curve (Fig. 3.13a). The moment of the force $q ds$ about O is simply $rq ds$ and the total moment is

$$M_t = \oint rq ds = q \oint r ds \quad (3.38)$$

where the integration is taken counterclockwise completely around the closed curve. Owing to the definition of r ,

$$\int_0^{s_1} r ds = 2\omega(s_1) \quad (3.39)$$

where $\omega(s_1)$ is the plane area swept by r in moving from the point $s = 0$ to some other point s_1 . $\omega(s)$ is called the *sectorial area*,⁶ it is the shaded area in Fig. 3.13a. Thus, if we denote by Ω the total area enclosed by the center line of the tube wall, Eq. (3.38) becomes

$$M_t = 2\Omega q \quad (3.40)$$

⁶ We use the symbol ω rather than A to distinguish between the sectorial area and the cross-sectional area $A = \oint t ds$.

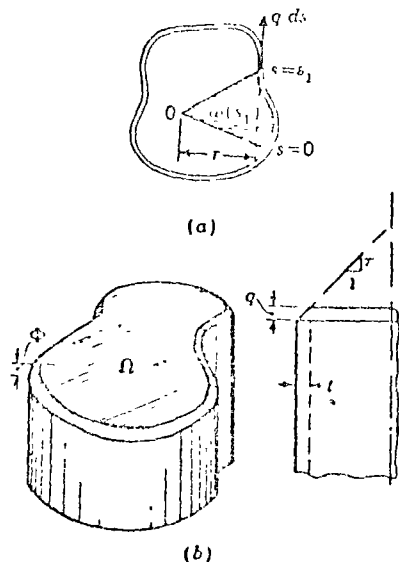


FIGURE 3.13 (a) Geometry of a closed tube, (b) Φ surface for the tube.

The stress at any point is clearly

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega t} \quad (3.41)$$

which, in contrast with the thin-walled open section, acquires a maximum value at the point of smallest thickness.

We obtain this same result by examining the Φ surface for the tube shown in Fig. 3.13b. Its slope must be zero everywhere except over the wall thickness, where it is a constant. Its height is $\tau t = q$ at every point, so that the volume under the surface is simply Ωq for t very small. Twice this quantity, according to Eq. (3.17), is M_t .

We now proceed to the evaluation of the rate of twist of the tube. Owing to the relatively small wall thickness and the fact that τ is uniform over t , we are able to describe the deformation of the thin-walled tubes in terms of only two components of displacement, the warping u in the x direction and a tangential component η in the s direction. The projections of η on the y and z axes are v and w , respectively. Since we deduced earlier that cross sections do not distort in their own planes, points on the tube wall rotate θx about some point in the yz plane, as shown in Fig. 3.14; from the geometry of this figure, we see that

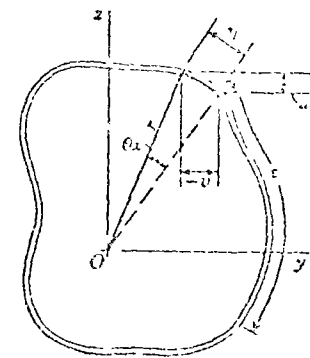


FIGURE 3.14 In-plane displacements of a point due to twisting of the section

$$\eta = r\theta x \quad (3.42)$$

Now, according to the strain-displacement relations in Eqs. (2.17), an element of tube wall undergoes a shearing strain given by

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.43)$$

since u and η are orthogonal. Introducing Eq. (3.42) into this relation, we find

$$\gamma_{xs} = \frac{\tau_{xs}}{G} = \frac{\partial u}{\partial s} + r\theta$$

which can also be written

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau_{xs}}{G} - r\theta \quad (3.44)$$

Recalling that $\partial u / \partial x$ is zero, we multiply both sides of Eq. (3.44) by ds and integrate around the total periphery S of the tube.

$$\oint du = \frac{q}{G} \oint \frac{ds}{t} - \theta \oint r ds$$

The integral on the left side of this equation is clearly zero because it equals the difference in u at $s = S$ and $s = 0$, which, since the tube is closed, are identical. Furthermore, from our previous discussion we recognize that the last integral on the right side of the equation is 2Ω . Therefore, the rate of twist of the section is given by

$$\theta = \frac{q}{2\Omega G} \oint \frac{ds}{t} \quad (3.45)$$

or, in terms of the twisting moment,

$$\theta = \frac{M_t}{4\Omega^2 G} \oint \frac{ds}{t} \quad (3.46)$$

Comparing this result with Eq. (3.18), we see that

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint ds/t} \quad (3.47)$$

or, if t is constant,

$$J = \frac{4\Omega^2 t}{S} \quad (3.48)$$

For hybrid sections composed of a closed cell plus open "fin" elements, such as that shown in Fig. 3.15, Eqs. (3.29) and (3.41) are still applicable; stresses in the fins are given by Eq. (3.29), and those in the closed tube are given by Eq. (3.41). In the case of n fins,

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint ds/t} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad (3.49)$$

The above formulas are applicable so long as t is small compared with the other cross-sectional dimensions. We obtain some indication of the range of validity of Eqs. (3.47) and (3.48) by comparing them

$$J = I_p = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4)$$

where R_o and R_i are the outside and inside radii, respectively. In this case $t = R_o - R_i$, $S = 2\pi(R_o + R_i)/2$, and $\Omega = \pi[(R_o + R_i)/2]^2$, so that Eq. (3.48) gives

$$J = 2\pi t \left(\frac{R_o + R_i}{2} \right)^2$$

Hence,

$$\frac{J}{I_p} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2R_i}{R_o + R_i} \right) \quad (3.50)$$

where

$$\lambda = \frac{R_o}{R_i}$$

Similar calculations show that

$$\frac{\tau_t}{\tau_o} = \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda} \quad (3.51)$$

where τ_t and τ_o denote the maximum shearing stresses in the tube and the hollow shaft, respectively.

Graphs of Eqs. (3.50) and (3.51) are shown in Fig. 3.16. We see that in the limiting case of the solid section, Eq. (3.48) gives only half of the exact value. As t becomes smaller, however, this error rapidly decreases and we find that Eq. (3.48) is in error only 10 percent for values of t/R_o as high as 0.5. We are again reminded that J is equal to the polar moment of inertia only for the special case of a circular cross section. Equation (3.41), on the other hand, is in error no more than 20 percent for all values of λ ; but it yields values less than 10 percent in error only for $t/R_o < 0.76$ (or for $t/R_o > 0.875$).

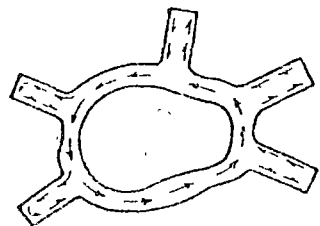


FIGURE 3.15 Closed tube with fins.

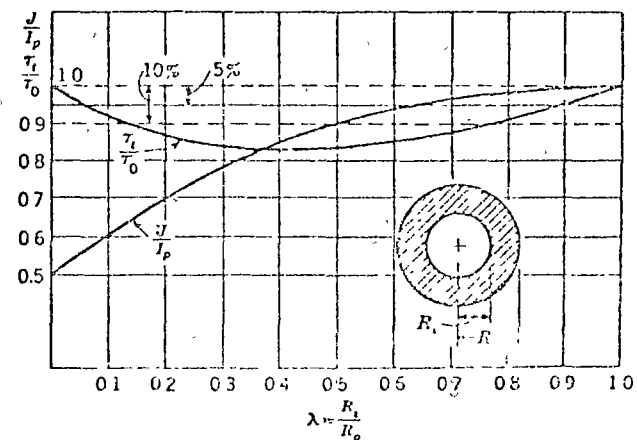


FIGURE 3.16 Comparison of the exact and approximate torsional constants and maximum stresses for a hollow shaft.

3.9 Warping of thin-walled sections. We now evaluate the warping displacement u of a thin-walled member in pure torsion. To accomplish this, we refer to Eq. (3.44), multiply both sides by ds , and integrate from the origin $s = 0$ to some other point s on the tube wall. We get

$$u - u_0 = \frac{1}{G} \int \tau_{xz} ds = \theta \int r ds$$

where u_0 is the displacement of the point $s = 0$ in the x direction. Comparing the second integral on the right side of this equation with Eq. (3.29), we see that it is equal to twice $\omega(s)$, the sectorial area. Thus,

$$u = \frac{1}{G} \int \tau_{xz} ds = 2\theta\omega(s) + u_0 \quad (3.52)$$

As before, the radius r in the integral expression for $2\omega(s)$ is measured from some point O on the cross section to a tangent to the center line of the tube wall at any point s . It is interesting to examine the consequences of choosing a center of rotation other than O . Suppose, for example, the radius r is measured from O' rather than O , as is indicated in Fig. (3.17). The new radius r' sweeps through a different sectorial area ω' , and u and u_0 change to u' and u'_0 , respectively. The integral in Eq. (3.52), of course, is unchanged if we measure s from the same origin in each case. It follows that

$$u' = u + (u'_0 - u_0) + 2\theta(\omega - \omega')$$

Since u_0 and u'_0 are constants for a given section, $u'_0 - u_0$ is simply a rigid-body translation of the point $s = 0$ in the x direction. Similarly, the term $2\theta(\omega - \omega')$ is merely a longitudinal displacement due to a rigid-body rotation of the cross-sectional plane. Therefore, u' differs from u only by rigid-body displacements which can result in no change in stress. We conclude that in the case of pure torsion with no restraints against warping, the choice of the axis of rotation is completely arbitrary; any longitudinal axis parallel to the centroidal axis of the tube can be used.

With this observation in mind, we introduce a relative warping displacement defined by

$$\bar{u} = u - u_0$$

and thereby refer warping displacements to the plane containing the origin of the x coordinate. Hence, the displacement of any point relative to this origin is

$$\bar{u} = \frac{1}{G} \int \tau_{xz} ds = 2\theta\omega \quad (3.53)$$

The development of Eq. (3.53) is based on the general strain-displacement relation given in Eq. (3.43). Thus, Eq. (3.53) is applicable to both closed and open sections. However, in the case of an open section it is necessary to pay closer attention to the definition of \bar{u} . The shearing stress τ_{xz} in the open section varies linearly throughout the wall thickness and is zero at the center line of the wall. This means that s cannot be measured along the center line, else the integral is zero. If, on the other hand, we use the maximum value of the stress at a point for τ_{xz} , and let s be measured along paths on the outside and then the inside periphery to two points on opposite sides of the wall, the integral would represent the difference between the warping displacements of these two points—a very small quantity for thin-walled sections. It appears that for open sections the integral in Eq. (3.53) is negligible in comparison with the term $2\theta\omega$. Physically, it is easy to see that this is true by noting that the open section is many times more flexible than the closed section. In fact, the torsional stiffness of a closed section is often several thousand times greater than that of an open section of the same dimensions. Thus, the shearing strain γ_{xz} in Eq. (3.43) is negligible, and the warping displacements \bar{u} are due almost exclusively to the twist of the section. It follows that Eq. (3.53) becomes for the open section

$$\bar{u} = -2\theta\omega \quad (3.54)$$

In the case of closed sections, γ_{xz} is no longer negligible, $\tau_{xz} = q/t$, and Eq. (3.53) becomes

$$\bar{u} = \frac{q}{G} \int \frac{ds}{t} - 2\theta\omega \quad (3.55)$$

or, in terms of the twisting moment,

$$\bar{u} = \frac{M_t}{G} \left(\frac{1}{2\Omega} \int \frac{ds}{t} - \frac{2}{J} \omega \right) \quad (3.56)$$

Note that \bar{u} is a function of s and is zero when the integration is taken completely around the closed curve.

3.10 Multicell thin-walled tubes. Torsion of a single-cell tube free to warp is a statically determinate problem—the shear flow and, hence, the shear stress are independent of the elastic properties of the material. If an additional cell is introduced, however, there exists an additional, independent shear flow associated with this cell, which cannot be determined

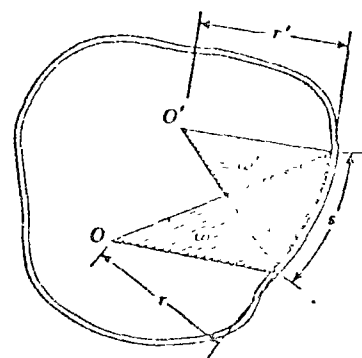


FIGURE 3.17 Thin-walled tube in pure torsion.

to the x axis at the free end of the section at the free end. In this case $A_x = P$, $A_y = 0$, and

$$M_x = -\frac{P}{2}(h_x - h_c) = -\frac{P}{2}h_0\beta x \quad (h)$$

Thus,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{bh_0(1+\beta^2)} - \frac{6P\beta x}{bh_0^2(1+\beta^2)^2} [2\zeta - h_0(1+\beta\lambda)] \\ \tau_{xy} &= \frac{\zeta P\beta(2\beta x - 1)}{bh_0^2(1+\beta^2)^2} [2h_0(1+\beta x) - 3\zeta] \\ \sigma_y &= \frac{\zeta^2 P\beta^2}{bh_0^3(1+\beta^2)^2} [6\zeta h_0(1-\beta\lambda) + h_0^2(4\beta^2 x^2 - \beta x - 5)] \end{aligned} \quad (i)$$

Plots of the distributions of τ_{xy} and σ_y at the fixed end of the beam are given in Fig. 5.9b and c, respectively, for the case in which $\mu = 2$.

5.5 The shear center. In the previous developments we assumed that the stress resultants on each section were such that no twisting moments were developed. For such a situation to exist, we cannot apply the external loads at random. In fact, the resultant force parallel to a section must pass through a specific point so that it is collinear with the force resulting from the shearing stresses on the section.

This point in the cross-sectional plane through which the plane of the resultant loads must pass to prevent the development of twisting moments on the section is called the *shear center*.

The process by which we locate the shear center may be illustrated by considering the thin-walled open section of general shape shown in Fig. 5.10. As before, we locate the origin of an orthogonal coordinate system at O , the centroid of the section, V_y and V_z act at E , the shear center, which has coordinates e_y and e_z , as shown. The force developed by the shear flow on any element Δs of the wall is

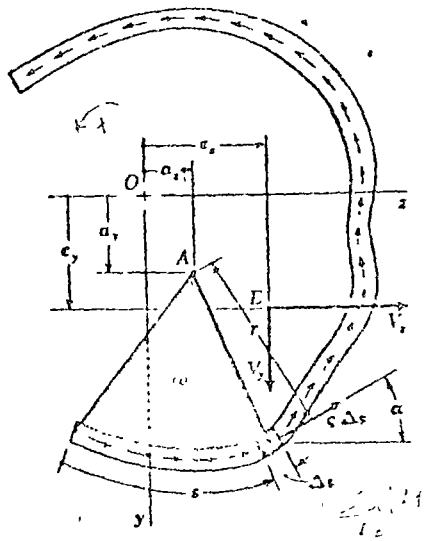


FIGURE 5.10 Geometry of a thin-walled open section of general shape.

The force developed by the shear flow on any element Δs of the wall is

$q \Delta s$ and A is an arbitrary point in the cross-sectional plane. From the above definition of the shear center, the total moment about A must vanish. Thus,

$$V_y(e_z - a_z) - V_z(e_y - a_y) - \int_0^s qr \Delta s = 0 \quad (5.38)$$

in which a_y and a_z are the coordinates of A , S is the total length of the tube wall, and r is the perpendicular distance from A to the line of action of $q \Delta s$ (which is tangent to the tube wall).

The shear flow q is the product of t , the wall thickness, and shearing stress given by Eq. (5.20). Referring to Eq. (3.39), we recall that $r ds$ is equal to $2 d\omega$, where ω is the sectorial area (shaded in Fig. 5.10). It follows that

$$\int_0^s qr \Delta s = 2 \frac{I_y I_{\omega z} - I_{yz} I_{\omega y}}{I_y I_x - I_{yz}^2} V_y + 2 \frac{I_z I_{\omega y} - I_{yz} I_{\omega z}}{I_y I_x - I_{yz}^2} V_z \quad (5.39)$$

in which $I_{\omega y}$ and $I_{\omega z}$ are the *sectorial products of inertia* of the section about A defined by

$$\begin{aligned} I_{\omega y} &= \int_0^s \Omega_y d\omega \\ I_{\omega z} &= \int_0^s \Omega_z d\omega \end{aligned} \quad (5.40)$$

Introducing Eq. (5.39) into Eq. (5.38) and equating the coefficients of V_y and V_z to zero, we find

$$\begin{aligned} e_y &= a_y - 2 \frac{I_z I_{\omega y} - I_{yz} I_{\omega z}}{I_y I_x - I_{yz}^2} \\ e_z &= a_z + 2 \frac{I_y I_{\omega z} - I_{yz} I_{\omega y}}{I_y I_x - I_{yz}^2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Let us now move the pole A to O , the centroid. In this case a_y and a_z are zero and

$$r ds = y \cos \alpha ds + z \sin \alpha ds = r ds (\cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha)$$

where α is the angle between the z axis and a tangent to the tube wall at s (Fig. 5.10). Noting that $\cos \alpha = dz/ds$ and $\sin \alpha = -dy/ds$, we have

$$r ds = y dz - z dy = 2 d\omega \quad (5.42)$$

Therefore, Eqs. (5.41) become

$$\begin{aligned} e_y &= -2 \frac{I_z I_{\omega y} - I_{yz} I_{\omega z}}{I_y I_x - I_{yz}^2} \\ e_z &= +2 \frac{I_y I_{\omega z} - I_{yz} I_{\omega y}}{I_y I_x - I_{yz}^2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

54
x

where, in this case,

$$I_{ov} = \int Q_v(y) dz = z dy \quad (5.44)$$

$$I_{oz} = \int Q_z(y) dz = z dy$$

Though quite general, the above equations are used to locate the shear center only in special cases involving complicated geometry. In such instances I_{ov} and I_{oz} are often evaluated by some numerical integration technique. More often, we can locate the shear center much more easily by using simple statics.

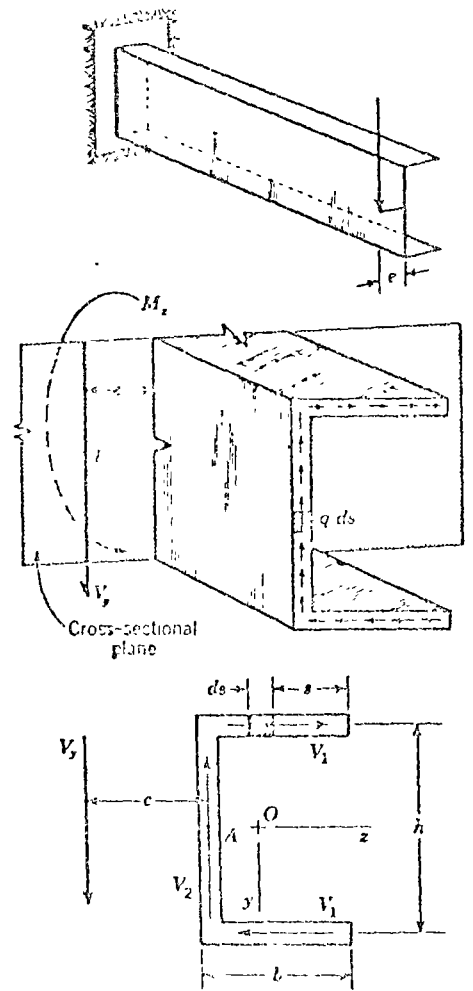


FIGURE 5.11 A channel loaded so that no twisting occurs. The resultant shear force passes through the shear center of the section.

The shear center of the channel shown in Fig. 5.11, for example, is easily found by taking moments about A.

$$eV_y = V_y h = h \int q ds = \frac{hV_y}{I_x} \int Q_z ds =$$

Since $Q_z = tsh/2$, the above equation reduces to

$$e = \frac{th^2t^2}{4I_x} \quad (5.45)$$

Similar calculations for a number of common sections lead us to three useful observations:

1. The shear center for sections with two intersecting rectangular flanges is the point of intersection of the axes of the flanges.
2. The shear center of sections with one axis of symmetry lies on that axis.
3. The shear center of sections with two axes of symmetry is at the centroid of the section.

Examples of these cases are shown in Fig. 5.12.

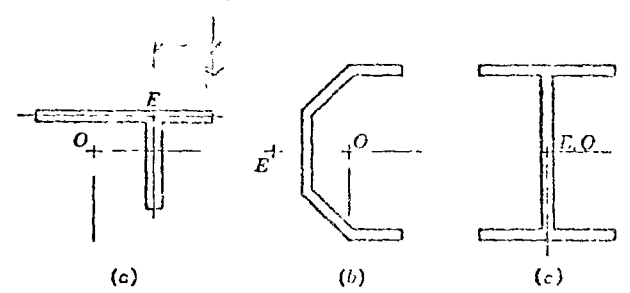
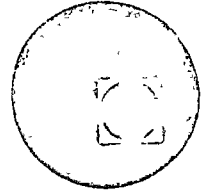


FIGURE 5.12 Location of the shear center for some typical sections. Points E and O indicate the shear center and the centroid of the section, respectively.

5.6 Thin-walled sections with longitudinal stringers. The location of the shear center of thin-walled open sections with "eccentric" flanges deserves special consideration. Such sections are often used in aircraft and missile structures and are characterized by thin metal "skins" connected to longitudinal flange elements called *stringers*. The stringers are assumed to develop the normal forces on the section needed for equilibrium and the thin skin carries the shear flow from one flange to another. Since the thin skin develops no significant normal stresses, the shear flow is constant between the stringers.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

Piezas sometidas a carga Axial

Ing. José Luis Sánchez M.

PIEZAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

1975

José L. Sánchez M.

Antes de estudiar métodos para el diseño de elementos es tructurales de cualquier material es necesario conocer el comportamiento mecánico de ese material, para ello se recurre a menudo a gráficas esfuerzo-deformación que permiten conocer algunas de las más importantes características de ese comportamiento.

En el caso del acero estructural es muy conocida la gráfica σ - ϵ correspondiente a una probeta libre de esfuerzos residuales sometida a tensión (Ver figura N°. 1).

Menos conocida que la gráfica anterior pero quizá más importante por ser más real, es la gráfica que se obtiene cuando la probeta que se utiliza es un tramo de un perfil estructural real, por ejemplo una vigueta o una sección formada por varias placas soldadas (Ver. figura N°. 2).

Puede notarse que en el segundo caso, a diferencia del primero, el material no se conserva elástico hasta llegar al esfuerzo σ_y sino que para un valor del esfuerzo de aproximadamente $\frac{\sigma_y}{2}$ la gráfica deja de ser recta y se convierte en una curva que se prolonga hasta σ_y valor a partir del cual la gráfica es una línea recta horizontal.

La diferencia entre las dos gráficas puede explicarse por el hecho de que en el segundo caso la probeta está sometida, antes de que cargas exteriores actúen sobre ella, a un estado de es fuerzos en equilibrio.

Dichos esfuerzos reciben el nombre de esfuerzos residuales y se pueden deber a varias causas, la más importante se encuentra en el proceso de fabricación del perfil.

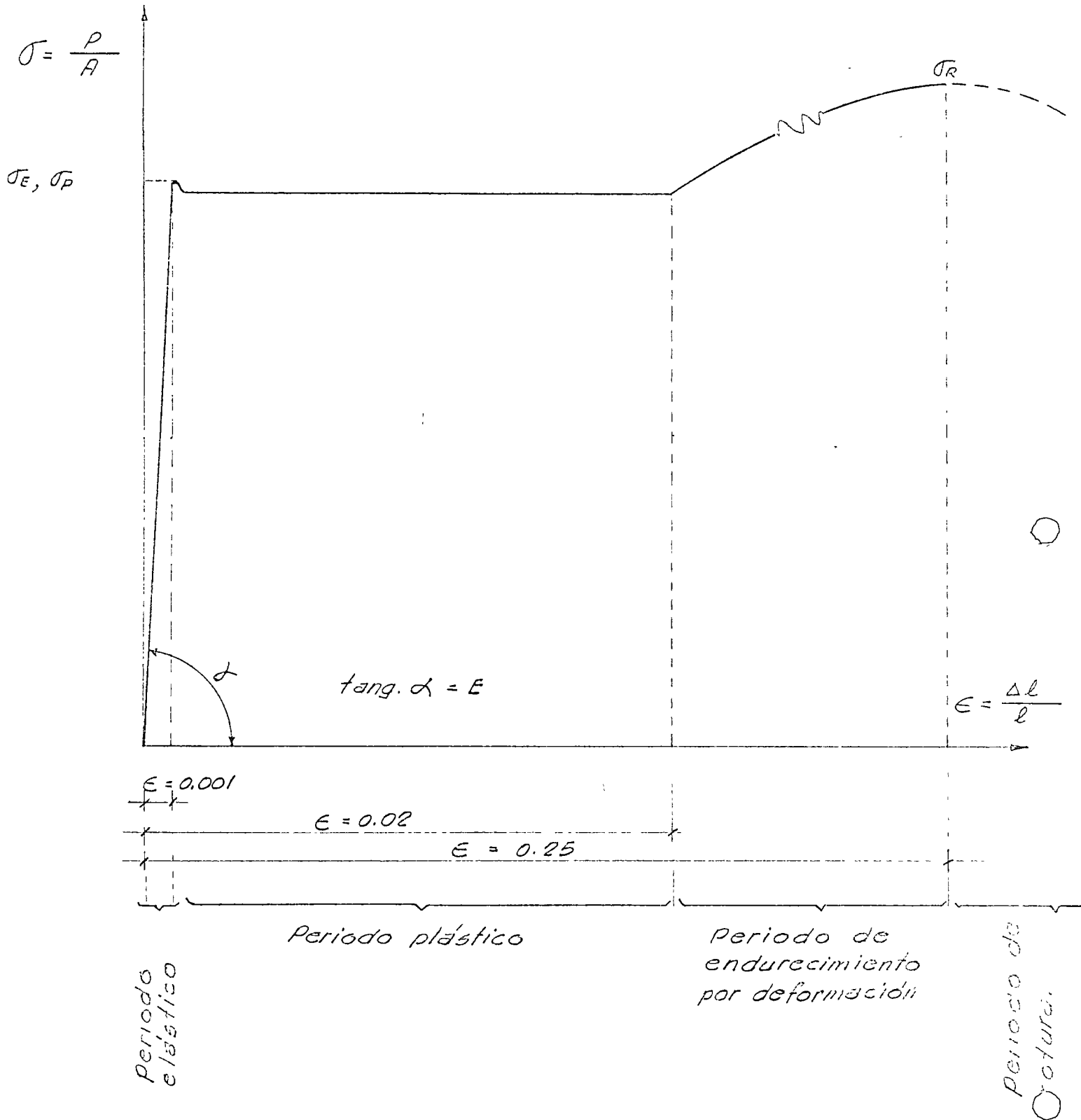
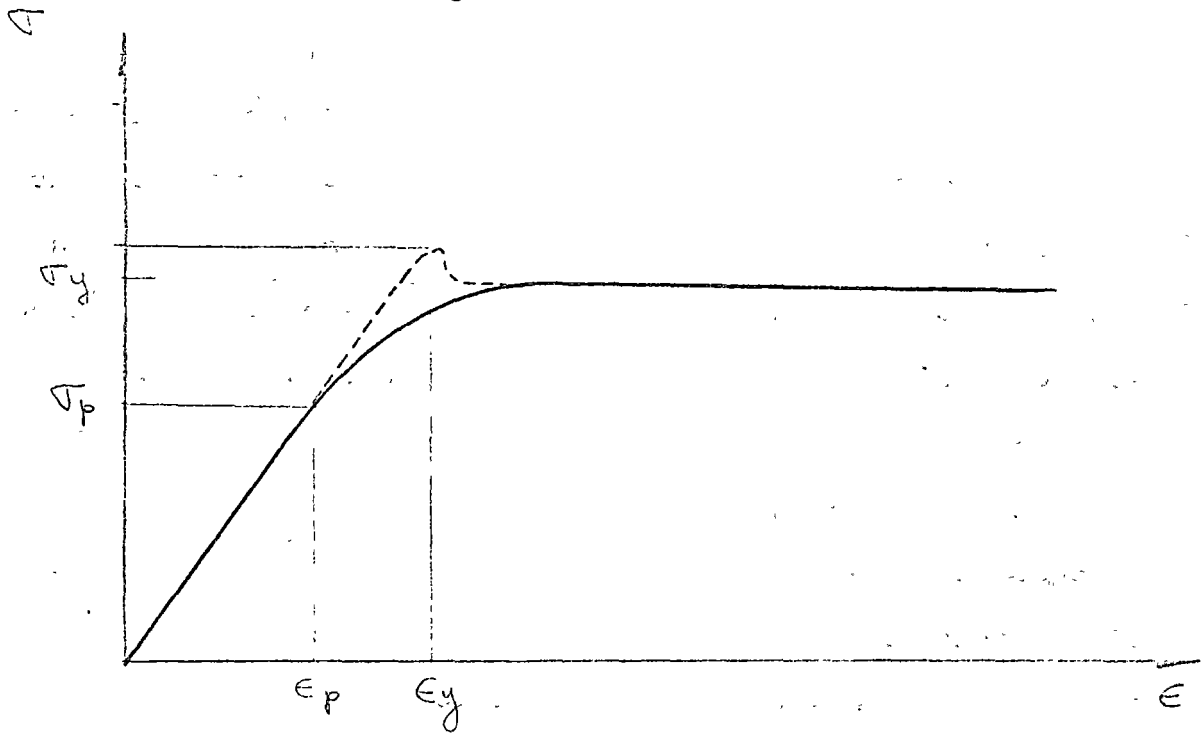
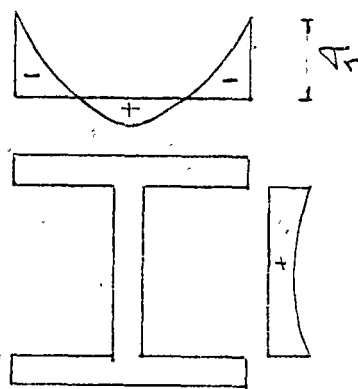


FIGURA 1



GRAFICA TÍPICA ESFUERZO-DEFORMACIÓN
PARA UN PERFIL DE ACERO ESTRUCTURAL



ESFUERZOS RESIDUALES TÍPICOS EN
UN PERFIL LAMINADO

FIGURA 2

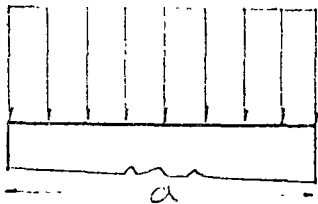
Es bien sabido que para fabricar un perfil el acero que lo ha de formar se funde, se le da la forma requerida y luego se deja enfriar; al producirse este enfriamiento las partículas de acero se contraen, si esa contracción se efectuara libremente no se produciría ningún esfuerzo, sin embargo las distintas partes del perfil no se enfrían simultáneamente, en una vigueta por ejemplo, se enfrían primero los extremos de los patines y al hacerlos se contraen arrastrando al material adyacente aún en estado plástico, después se enfrían la parte central de los patines y el alma que tratan también de contraerse, pero esa contracción se ve parcialmente evitada por las partes ya endurecidas, esto da lugar a que las fibras de estas zonas queden con una longitud algo mayor que la que hubieran tenido de haberse enfriado libremente y por ello quedan sometidas a un esfuerzo inicial de tensión.

Una distribución de esfuerzos residuales típica para una vigueta se muestra en la figura N°. 2.

Es fácil mostrar por qué el efecto de estos esfuerzos residuales consiste en reducir el valor del esfuerzo en el límite de proporcionalidad del material.

En las figuras números 3 y 4 se hace esto para un caso simplificado.

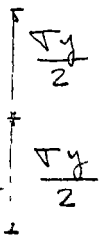
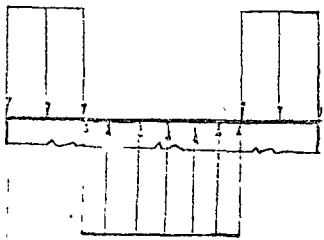
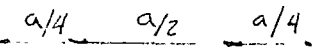
FIGURA 3



$\sigma = \frac{P}{A}$ Esfuerzos debidos a las cargas.

+

+



Distribucion. de esfuerzos residuales.

El perfil se comporta elasticamente hasta que:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_y}{2}$$

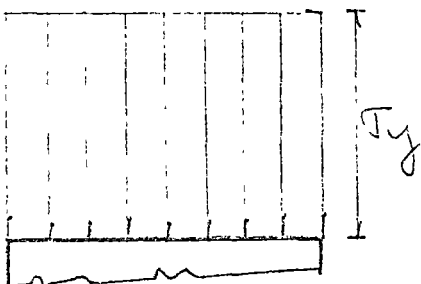
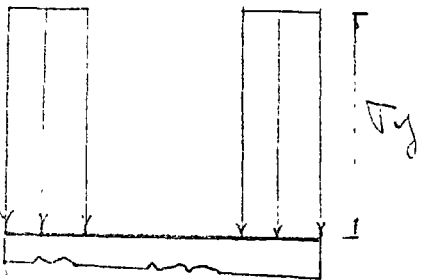
Entonces:

$$\epsilon = \frac{P}{AE} = \frac{\frac{A}{2} \sigma_y}{AE}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_y}{2E} = \frac{\epsilon_y}{2}$$

Si se aumenta la carga se llega finalmente a σ_y en toda la seccion:

$$\Delta \epsilon = \frac{\frac{\Delta P}{A}}{\frac{A}{2} E} = \frac{\frac{A}{2} \sigma_y}{\frac{A}{2} E} = \frac{\sigma_y}{E} = \epsilon_y$$





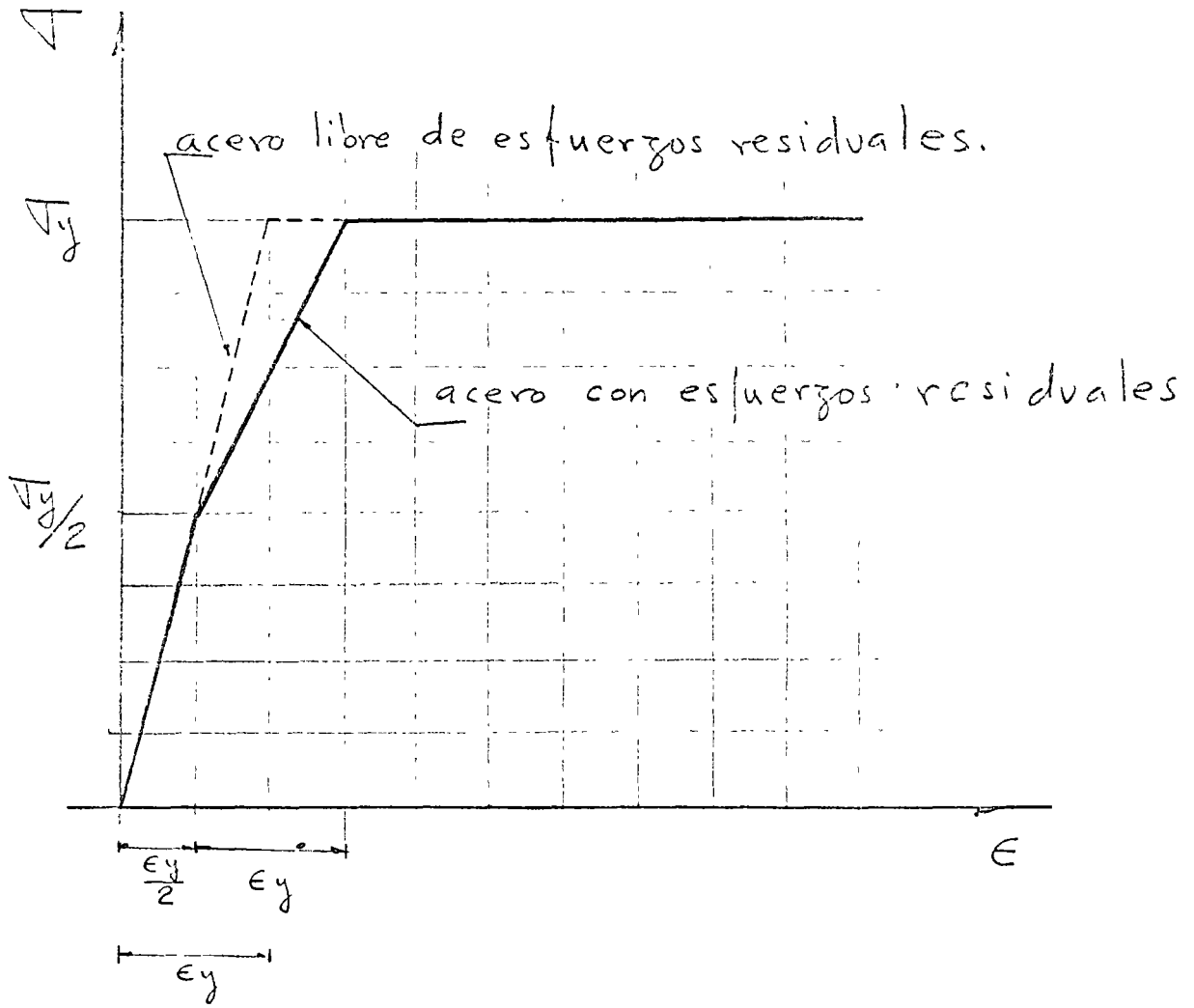


FIGURA 4

Piezas de eje recto cargadas axialmente.-

Tesis

Los esfuerzos de tensión o compresión sobre la sección recta de la pieza son uniformes.

a) De las condiciones de equilibrio se deduce que para que los esfuerzos sean uniformes se requiere que la línea de acción de la carga coincida con el eje centroidal de la pieza. (Ver fig. 5)

b) Hipótesis necesarias para que los esfuerzos sean uniformes

1.- Las secciones planas antes de la deformación se conservan planas después de ella.

2.- Al deformarse las secciones se conservan paralelas a si mismas.

Solo asi : $\epsilon = cte \therefore \tau = cte.$

Condición de equilibrio.-

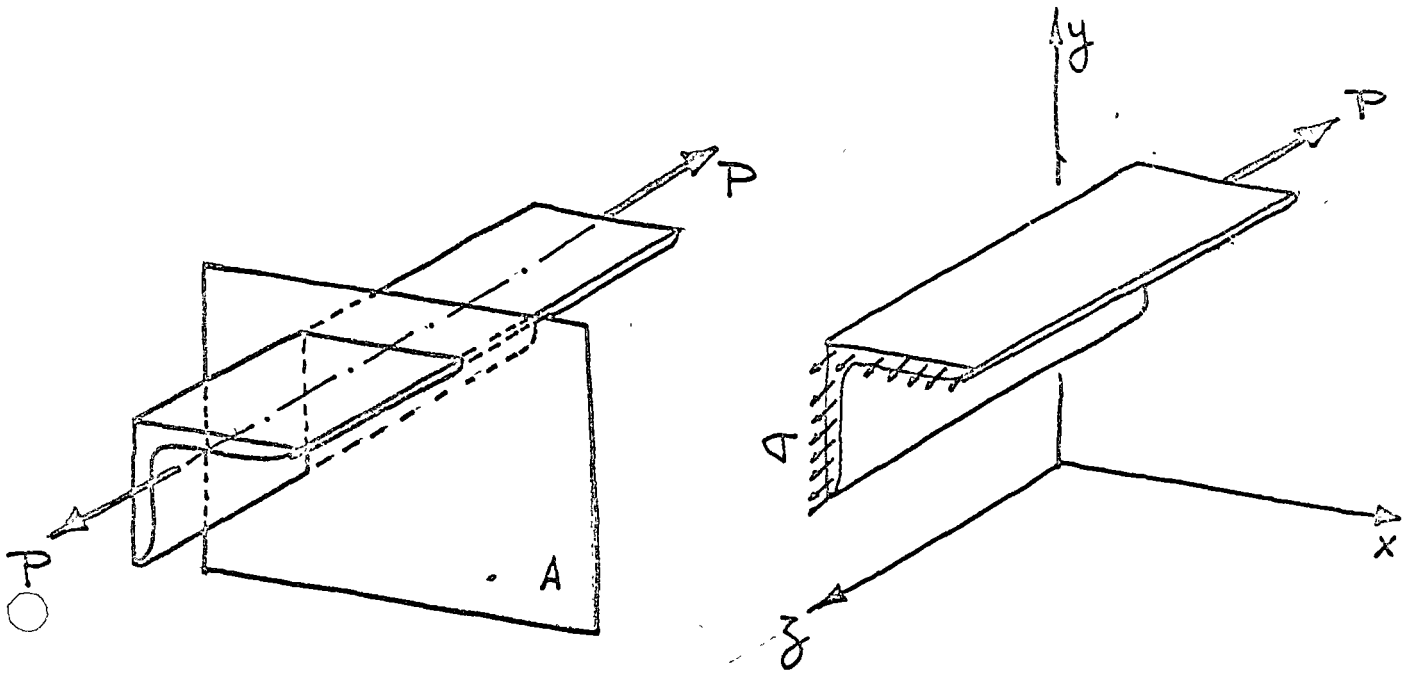


Fig. 5

$$\sum M_x = 0$$

$$P \bar{y} = \sum \Delta y \Delta A ; \quad P = \Delta A$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y \Delta A}{A} = \text{ordenada del centro de gravedad del area}$$

$$\sum M_y = 0$$

\bar{x} = abscisa del centro de gravedad del area

... ..



... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

TENSION AXIAL.

El problema de diseño de piezas de acero a tensión se reduce a seleccionar una sección con área suficiente para soportar la carga de diseño sin exceder el esfuerzo permisible a tensión.

El esfuerzo permisible se obtiene dividiendo el esfuerzo en el límite de fluencia entre un coeficiente de seguridad que frecuentemente se fija de 1.65 para estructuras para edificios pero que varía de acuerdo con las condiciones del problema.

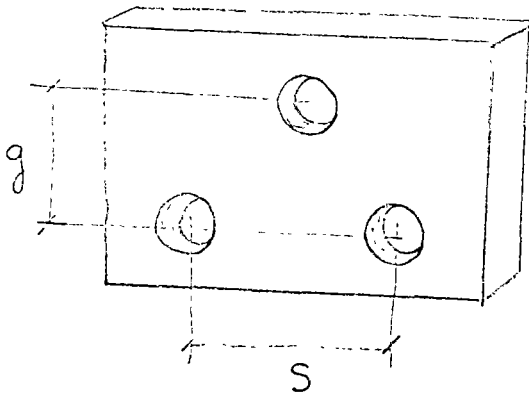
Los miembros metálicos a tensión más comunes son varillas, cables o perfiles laminados, de estos el elemento más usado es el ángulo.

Cuando la unión del elemento a tensión con otras piezas es soldada, se puede considerar el área completa de la pieza para el cálculo de esfuerzos; cuando la conexión es remachada o atornillada el área necesaria debe ser mayor que la obtenida con la fórmula: $\sigma = \frac{P}{A}$, el área adicional es necesaria para compensar la presencia de los agujeros para los remaches o tornillos.

Cuando los agujeros están en una serie de líneas normales a la fuerza exterior es fácil determinar la sección que fallará y por tanto el área de huecos que deberá descontarse.

Sin embargo, para distribuciones de agujeros distintas no es tan simple determinar el área de falla que servirá de base para los cálculos de capacidad de carga y de determinación de esfuerzos.

El caso típico es el siguiente:



En este caso la reducción en área que se debe hacer puede ser mayor a la que corresponde a un solo hueco pero menor que la que correspondería a dos. Muchos investigadores han presentado ecuaciones para calcular el ancho neto, la más usada es la siguiente:

$$B_n = B - \sum \phi + \sum_{n=1}^3 \frac{S_n^2}{4g_n^2}$$

$$A_n = B_n \cdot t$$

La línea crítica es la que de menor ancho neto.

Cuando se trate de ángulos, estos se desdoblarán idealmente para trabajarlos como con placas. (Ver. Figura N°. 6).

La presencia de agujeros en una pieza a tensión es causa de la aparición en los puntos vecinos a ellos, de concentraciones de esfuerzos, es decir, de esfuerzos notablemente mayores al esfuerzo promedio = $\frac{P}{A}$.

La determinación analítica de la distribución elástica de tales esfuerzos es un problema complicado de la teoría de la elasticidad, por ello para determinarlos se han utilizado métodos experimentales que han permitido comprobar los resultados teóricos en los casos en que se cuenta con ellos, y obtenerlos en las ocasiones en que teóricamente no se han logrado obtener.

En general:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{prom}} \times K$$

K = factor de concentración de esfuerzos.

Este factor para un hueco circular en una placa infinitamente larga es 3, si la placa es más estrecha el factor disminuye.

A pesar de lo anterior y en el caso del acero, el procedimiento de diseño común desprecia estas concentraciones de esfuerzos; la justificación de esto es que este material tiene un rango de comportamiento plástico muy amplio y por ello admite grandes deformaciones cuando se alcanza el esfuerzo en el límite de fluencia; por esto, cuando se llega al esfuerzo σ_y en los puntos más esforzados aumenta la deformación de toda la pieza, manteniéndose el esfuerzo σ_y en estos puntos y aumentando en todos los demás; cuando la falla sobreviene toda la sección está esforzada a σ_y .

De lo anterior puede concluirse que la resistencia máxima a tensión o resistencia última a tensión de una pieza de acero es simplemente el producto del área neta por el esfuerzo en el límite de fluencia del material.

Lo anterior es, sin embargo, solamente cierto para el caso en que la carga no fluctúa un gran número de veces entre límites muy diferentes como suele ocurrir en estructuras para puentes, en grúas o en torres, en estos casos la falla puede producirse por fatiga y la presencia de agujeros u otras causas de concen

tracción de esfuerzos reduce notablemente la capacidad de la pieza. Lo mismo puede decirse en casos en que la estructura trabaja a temperaturas muy bajas o el acero tiene una composición química desfavorable, ya que entonces el acero puede perder en parte su ductilidad y presentar la falla conocida como frágil. Bajo estas circunstancias las concentraciones de esfuerzos son también causa de pérdida de resistencia del miembro.

Puede concluirse por lo tanto que en cualquier caso una buena práctica de diseño es limitar en lo posible las concentraciones de esfuerzos.

Las especificaciones A.I.S.C. recomiendan como esfuerzo permisible en el área neta de piezas a tensión.:

$$F_t = 0.6 \sigma_y.$$

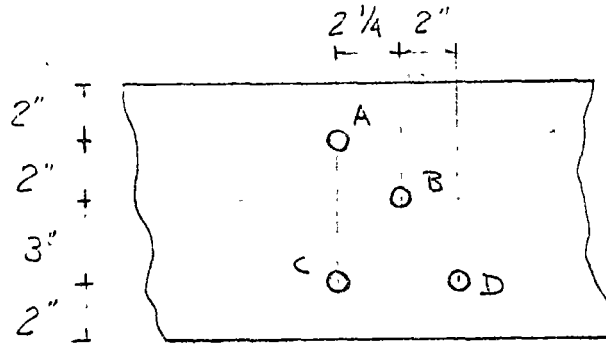
Debido al advenimiento de aceros de gran resistencia a la tensión en que esta es, en ocasiones, muy semejante a F_y , se indica en las últimas especificaciones como precaución adicional, no tomar un esfuerzo permisible mayor que la mitad del correspondiente a la resistencia a la tensión.

Del resultado de un gran número de investigaciones se ha concluido que el esfuerzo en secciones netas de agujeros para pasadores no debe ser mayor de $0.45 F_y$.

Se especifica también, de estudios de eficiencia de secciones netas, que esta no se tome nunca mayor de 85% del área de la sección total.

FIGURA 6:

(tomado de
Beedle pg 170/
Ronald Press 1964



$$B_n = B - \sum \phi + \sum_{n=1}^n \frac{S_n^2}{4gn}$$

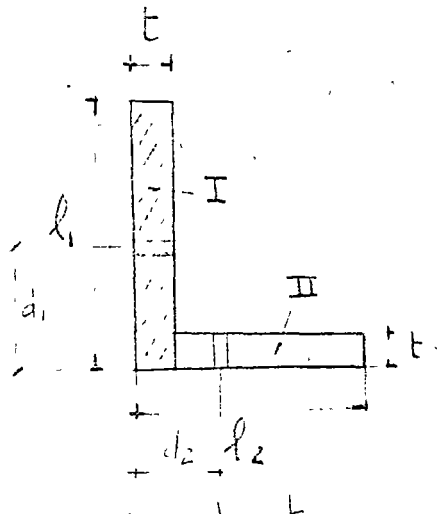
$$A_n = B_n \cdot t$$

A-C; $B_n = 9 - 2(1) + 0 = 7''$

A-B-C; $B_n = 9 - 3(1) + \frac{2.25^2}{4(2)} + \frac{2.25^2}{4(3)} = 7.06''$

A-B-D; $B_n = 9 - 3(1) + \frac{2.25^2}{4(2)} + \frac{2^2}{4(3)} = 6.97''$

La sección crítica es ABD



Area de I = $l_1 \cdot t$

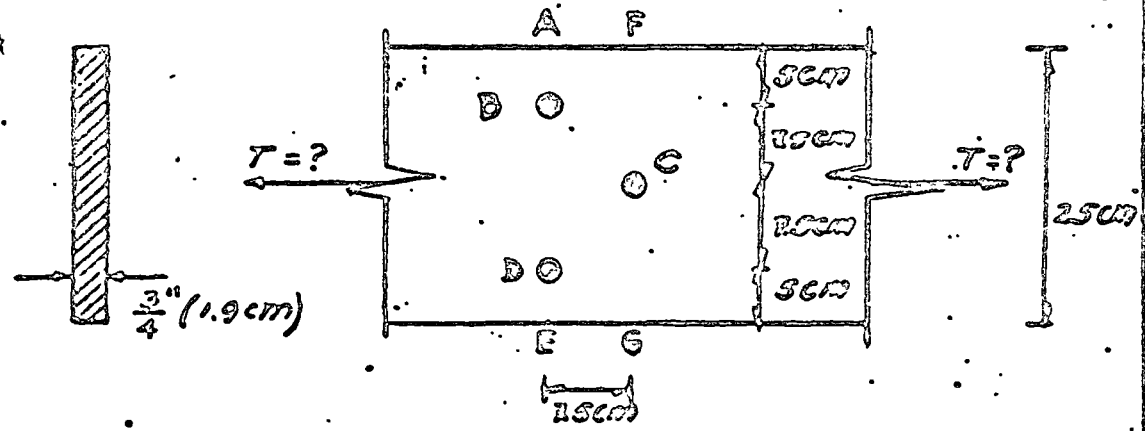
Area de II = $(l_2 - t) \cdot t$

$$B = (l_1 + l_2 - t)$$

$$B = \frac{A}{t}$$

EJEMPLO 3.1. DETERMINACION DE LA CAPACIDAD A TENSION DE UNA PLACA.	CALCULO: F.G.V.	1 1 2
	REVISO: J.S.L.V.	
	FECHA: SEPT. 70	

DATOS



Acero A-36 ($f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$)
 ϕ remache = 2.2 cm
 ϕ agujero = 2.2 + 0.3 = 2.5 cm

Cálculo de anchos netos

Sección	w (cm)	$\Sigma \phi_{ag.}$ (cm)	$\Sigma \frac{s^2}{4g}$ (cm)	Ancho neto (cm)
FCG	25	2.5	-	22.5
ABDE	25	2.5 + 2.5 = 5	-	20.0
ABCDE	25	2.5 + 2.5 + 2.5 = 7.5	$\frac{15^2}{4 \cdot 15} + \frac{15^2}{4 \cdot 15} = 3.75$	21.25
ABCG	25	2.5 + 2.5 = 5	$\frac{15^2}{4 \cdot 15} = 1.87$	21.07
FCDE	25	2.5 + 2.5 = 5	$\frac{15^2}{4 \cdot 15} = 1.87$	21.07

ϕ Ancho neto = $w - \Sigma \phi_{ag.} + \Sigma \frac{s^2}{4g}$

Ancho mínimo = 20 cm.

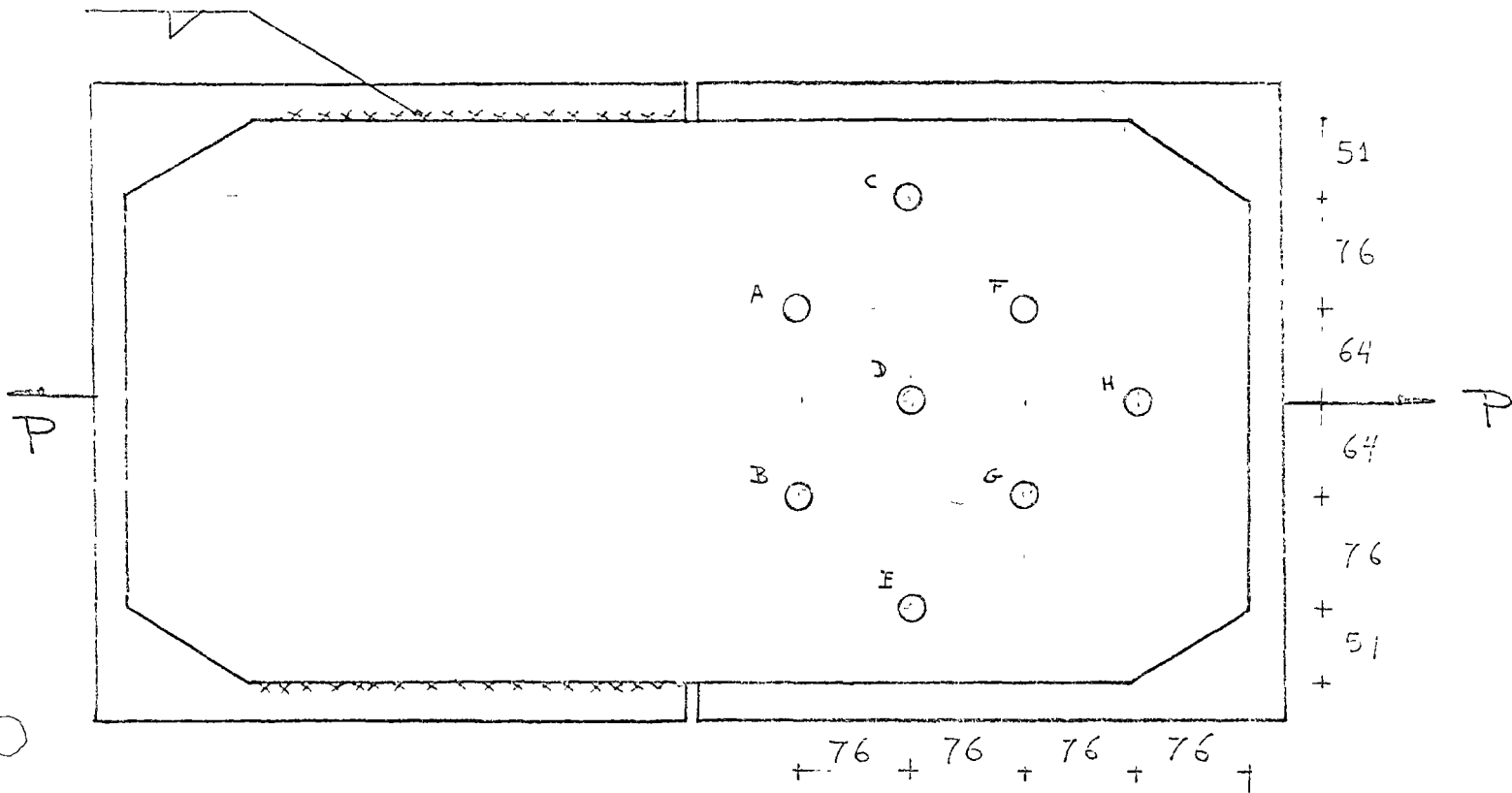
85% ancho Total = 0.85 * 25 = 21.2 cm > 20 cm

\therefore Area mínima = 20 * 1.9 = 38 cm²

$f_t = 0.6 f_y = 0.6 * 2530 = 1520 \text{ Kg/cm}^2$

$T = A \cdot f_t = 38 * 1520 = 57760 \text{ Kg} = 58 \text{ ton}$

Ejercicio.- Calcular el área neta de la placa de conexión de la figura. tornillos de 3/4", agujeros de 7/8" para cálculo del área neta.



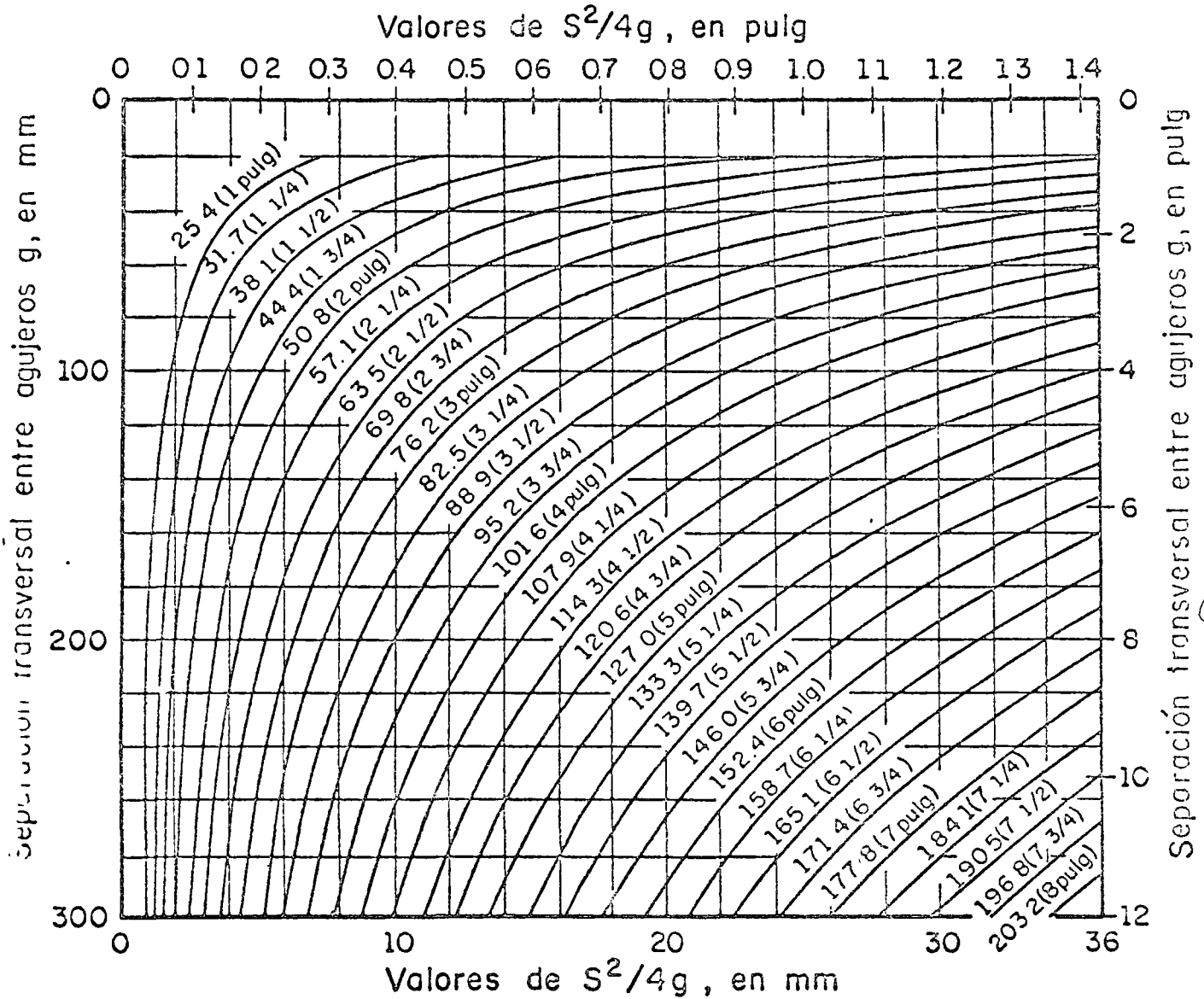
Sección	w	$\Sigma \phi$	$\Sigma \frac{s^2}{4g}$	B_n	Carga	
A-B	316	4.4	—	33.8	P	
C-A-B	"	6.6	$\frac{76^2}{4 \times 76} = 1.9$	33.5		
C-A-D-E	"	8.8	3.8	33.2		
C-A-D-B-E	"	12.0	$2 \times 1.9 + \frac{76^2}{4 \times 64} = 8.3$	34.5		
C-A-D-E-F	"	8.8	$1.9 + 2.25 = 4.15$	33.5		7/8 P
C-D-E	"	6.6	—	31.6		6/8 P

$$T_1 = \frac{P}{33.2F}$$

$$T_2 = \frac{5P}{8 \times 31.6F} = \frac{P}{42.16F}$$

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{42.16F} \rightarrow \text{Rige}; A_n = 32.5F$$

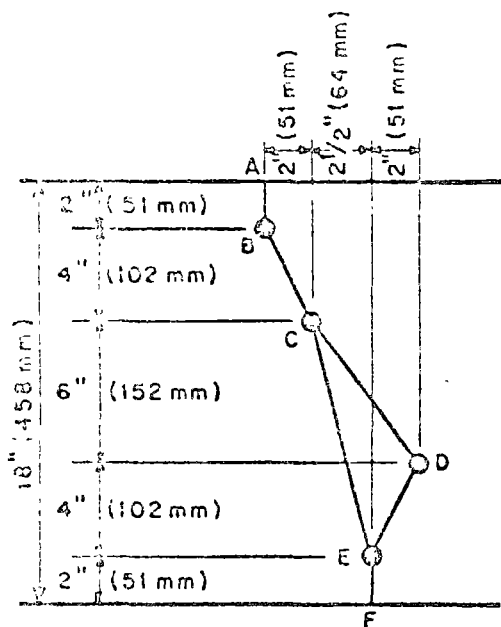
Sección neta de miembros en tensión



Las curvas son los valores de la separación longitudinal entre agujeros S , en mm y pulg

Este nomograma simplifica la aplicación de la regla dada en 1.5.a para la determinación del ancho neto. Para utilizarlo se traza una línea recta horizontal a la altura correspondiente a la separación transversal "g" entre los dos agujeros considerados, y en el punto en que se cruza con la curva correspondiente a la separación longitudinal "s" entre esos dos agujeros se traza una recta vertical que proporciona, en el borde superior o inferior de la gráfica, el valor de $S^2/4g$ buscado.

El paso 1 del ejemplo que sigue ilustra la aplicación de la regla y el uso del nomograma; el paso 2 se refiere a la limitación del área neta al 85% de la total.



Remaches de 3/4"

Paso 1:

Cadena ABCEF

$$\begin{aligned} \text{Descontar 3 agujeros: } 3(19 + 3) &= -66 \text{ mm} \\ \text{BC, } g = 4", S = 2". \text{ Añadir } S^2/4g &= + 6 \text{ mm} \\ \text{CE, } g = 10", S = 2\frac{1}{2}". \text{ Añadir } S^2/4g &= + 4 \text{ mm} \\ \text{Deducción total} &= -56 \text{ mm} \end{aligned}$$

Cadena ABCDEF

$$\begin{aligned} \text{Descontar 4 agujeros: } 4(19 + 3) &= -88 \text{ mm} \\ \text{BC, igual que arriba. Añadir} &= + 6 \text{ mm} \\ \text{CD, } g = 6", S = 4\frac{1}{2}". \text{ Añadir } S^2/4g &= + 22 \text{ mm} \\ \text{DE, } g = 4", S = 2". \text{ Añadir } S^2/4g &= + 6 \text{ mm} \\ \text{Deducción total} &= -54 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\text{Ancho neto} = 458 - 56 = 402 \text{ mm}$$

$$\text{Paso 2: Ancho neto} = 458 \times 0.85 = 389 \text{ mm} < 402$$

El ancho neto que rige en este ejemplo es el determinado en el Paso 2 (389 mm).

Comparando la cadena de agujeros CDE con la CE se advierte que si la suma de los dos valores de $S^2/4g$ para CD y DE excede el valor de $S^2/4g$ para CE en una cantidad mayor que la que debe descontarse por un agujero, la trayectoria CDE no es crítica en comparación con la CE.

Evidentemente, si el valor de $S^2/4g$ para un tramo CD de la trayectoria CDE es mayor que la deducción correspondiente a un agujero, la cadena CDE no puede ser crítica en comparación con la CE. Las líneas verticales punteadas que aparecen en el nomograma sirven para indicar, para los diámetros de remaches anotados en su extremo superior, que cualquier valor de $S^2/4g$ situado a su derecha se ha obtenido de una cadena de agujeros que no es crítica y que, por consiguiente, no necesita tomarse en cuenta.

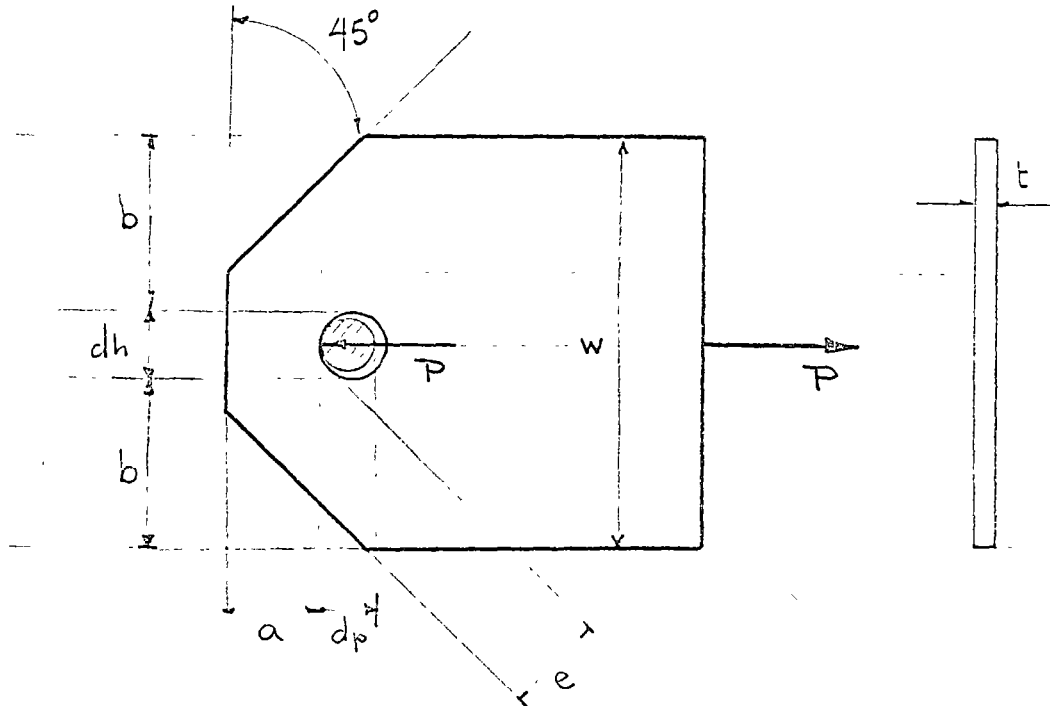
Problemas especiales relativos a tensión axial.-

1.- Placas conectadas por pasadores.-

En ocasiones en que se considera importante apegarse a la condición teórica correspondiente a una articulación, suelen utilizarse pasadores cilíndricos.

Las placas conectadas por los pasadores presentan problemas especiales que han dado lugar a las especificaciones que controlan su diseño.

En la siguiente figura se resumen algunas reglas que proporcionan las normas del A.I.S.C.



1.- $\frac{P}{wt} \leq 0.6 \sigma_y$	1.5.1.1	valor típico para tensión
2.- $\frac{P}{2bt} \leq 0.45 \sigma_y$	1.5.1.1	valor conservador por concentraciones de esfuerzo
3.- $a \geq 4b/3$	1.14.6	para prever falla longitudinal detrás del pasador
4.- $e \geq a$	"	"
5.- $b \leq 4t$	"	para evitar pandeo local
6.- Si $\sigma_y > 4200 \text{ Kg/cm}^2$; $dh < 5t$	"	de la placa.
7.- $dh - d_p \leq 1/32$		

8.- $d_p \leq 1.25(\text{la menor de } a \text{ e } b)$

2.- Partes roscadas y tornillos sometidos a tensión.-

Los tirantes de varilla roscada en sus extremos y las anclas también roscadas son elementos a tensión utilizados muy comúnmente. Para diseñarlos se requiere tener presente la reducción de área que implica la presencia de la zona roscada.

Las últimas especificaciones del AISC, al contrario que las anteriores, recomiendan esfuerzos permisibles que deben compararse con los calculados en base al área efectiva de la pieza y no a la nominal. El área efectiva tiene en cuenta la presencia de la rosca y es un área promedio entre la nominal y

la mínima que se ha establecido por medio de la realización de un gran número de pruebas y está dada por la expresión:

$$A_e = 0.7854 \left(D - \frac{0.9743}{n} \right)^2$$

(ver tabla 4-3)

D = diámetro nominal en in.

n = n° de hilos por in.

A_e = Área efectiva en in.²

El esfuerzo permisible especificado es de:

$$0.6 F_y$$

En tornillos a tensión de acero A307 se sigue el mismo criterio y se fija un esfuerzo permisible de:

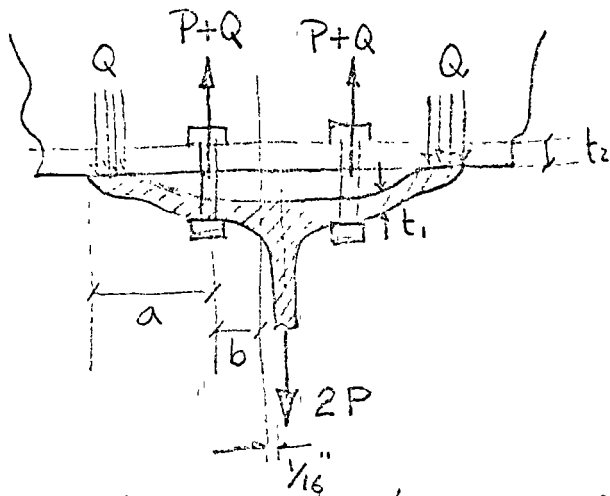
$$1400 \text{ Kg/cm}^2$$

En el caso de tornillos de alta resistencia A325, por el contrario, los cálculos se basan en el área nominal del tornillo, el esfuerzo permisible en este caso es de:

$$2800 \text{ Kg/cm}^2$$

valor bastante alto pero plenamente justificado por evidencia experimental.

En el dimensionamiento de tornillos a tensión es importante tener en cuenta la carga adicional a la fuerza exterior aplicada y que es debida a la flexibilidad de las piezas que transmiten la carga a los tornillos. En la siguiente figura se puede observar la naturaleza de la fuerza adicional mencionada



Q = Fuerza adicional debida a la flexibilidad de la junta

El valor de la fuerza Q puede estimarse usando la siguiente fórmula semiempírica:

$$Q = \left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{wt^4}{30ab^2Ab}}{\frac{3a}{4b} \left(\frac{a}{4b} + 1 \right) + \frac{wt^4}{30ab^2Ab}} \right] P$$

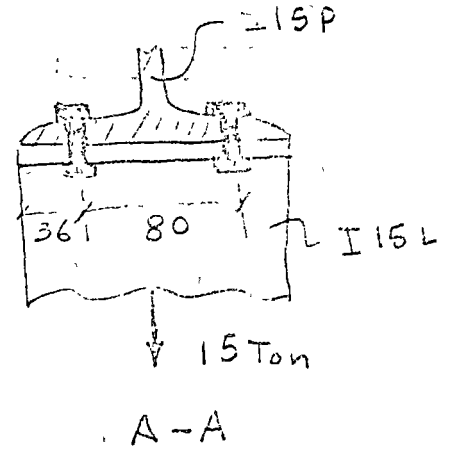
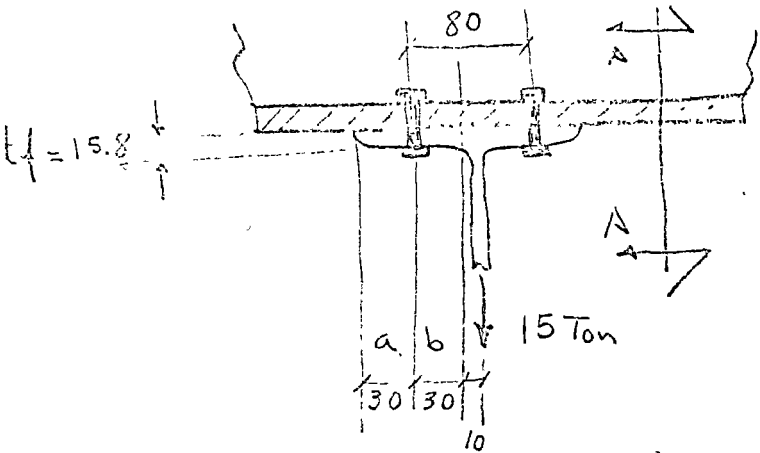
w = dimensión tributaria al tornillo (normal al eje de la junta)

Ab = área nominal del tornillo.

t = espesor del elemento más delgado.

Ejemplo. -

Diseñar la unión de la figura :



Si se usan tornillos de alta resistencia A325 se recomienda la expresión siguiente⁽¹⁾ para el cálculo de Q en vez de la presentada antes :

$$Q = P \left[\frac{100 b (db)^2 - 18 w (tf)^2}{70 a (db)^2 + 21 w (tf)^2} \right]$$

Suponiendo tornillos de 3/4" ; $db = 1.9 \text{ cm}$; $db^2 = 3.61$
 $b = 3.0$; $a = 3.0 < 2tf$
 $w = 7.6 \text{ cm}$; $tf = 1.58 \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned} 100 b (db)^2 &= 1083.0 \\ - 18 w (tf)^2 &= \frac{341.5}{741.5} \\ 70 a (db)^2 &= 758.1 \\ + 21 w (tf)^2 &= \frac{398.4}{1156.5} \end{aligned}$$

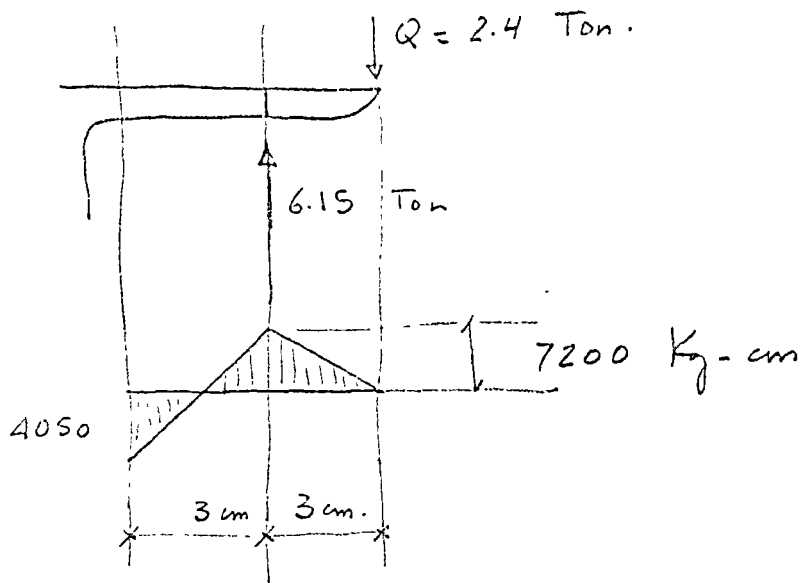
$$Q = 3.75 \times 0.64 = 2.4 \text{ Ton}$$

Tensión en cada tornillo = $3.75 + 2.4 = 6.15 \text{ Ton}$.

Capacidad del tornillo = $2.84 \times 2800 = \underline{7.95 \text{ Ton}}$

(1) Behavior of Bolts in Tee Connections

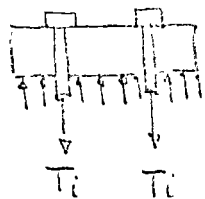
Revisión del patin .-



$$f_1 = \frac{7200 \times 6}{1.58^2 \times 15.2} = 1138.5 \text{ Kg/cm}^2 < 1900 \text{ Kg/cm}^2$$

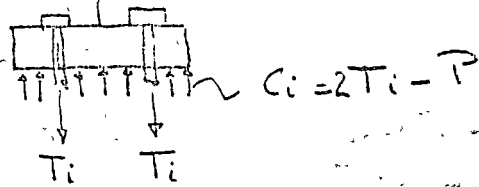
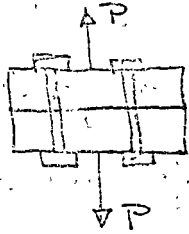
Los tornillos de alta resistencia se someten a una tensión inicial considerable al colocarse. Conviene hacer notar que la mencionada tensión no tiene influencia práctica notable en la resistencia de la junta; esto puede ilustrarse con las figuras que siguen en que se muestran, la tensión inicial y diversos valores de la carga exterior:

a) Tensión inicial y carga 0:

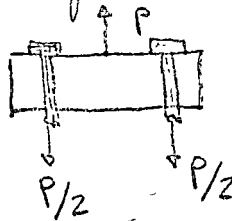
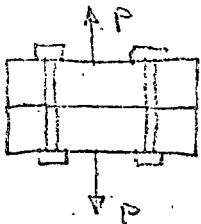


$$C_i = 2T_i$$

b) Tensión inicial y carga menor que ella:

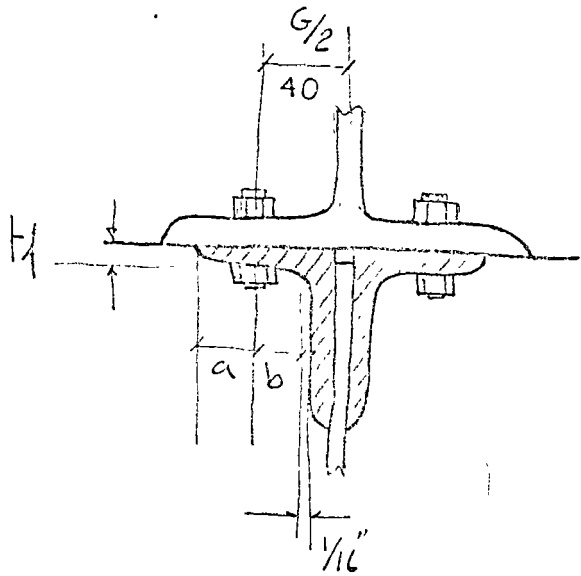


c) Tensión inicial y carga mayor que ella:



Luego los tornillos trabajarán con una carga igual a la tensión inicial o a la carga que se le transmite al trabajar la junta (la mayor de las dos).

Ejercicio.

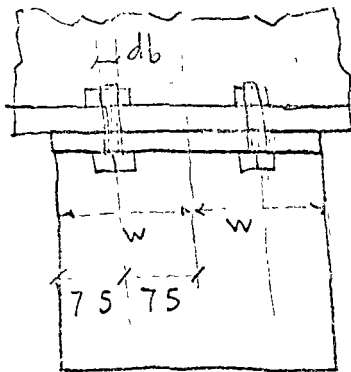


Del patin inferior de una viga I 15P se colgarán dos ángulos de $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ para transmitirle una carga de 10 Ton.

Diseñar los cuatro tornillos de alta resistencia A325 que se utilizan en la conexión.

Se utilizará la siguiente expresión empírica

$$Q = F \left[\frac{100b (d_b)^2 - 18w (t_f)^2}{70a (d_b)^2 + 21w (t_f)^2} \right]$$



$$F = 10 \text{ Ton}$$

$$b = (35 - 10 - 1.5) = 23 \text{ mm.} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Manual} \\ \text{pág. 200} \end{array} \right.$$

$$a = (64 - 35) = 29 \text{ mm.} \quad \left| \begin{array}{l} \text{"} \\ \text{"} \end{array} \right.$$

$$d_b = 19 \text{ mm.} \quad (\text{supuesto})$$

$$t_f = 10 \text{ mm.}$$

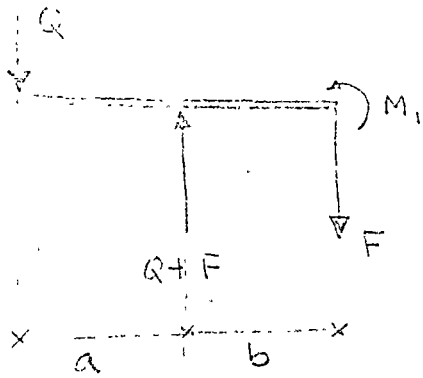
$$w = 150 \text{ mm.}$$

$$Q = 2.5 \left[\frac{100 \times 2.3 \times 1.9^2 - 18 \times 15 \times 1^2}{70 \times 2.9 \times 1.9^2 + 21 \times 15 \times 1^2} \right] = 1.3 \text{ Ton}$$

Capacidad de 4 tornillos de $\frac{3}{4}$ "

18.4 cm²

Revisión del ángulo:



$$Q = 1.3 \text{ Ton.}$$

$$F = 2.5 \text{ Ton.}$$

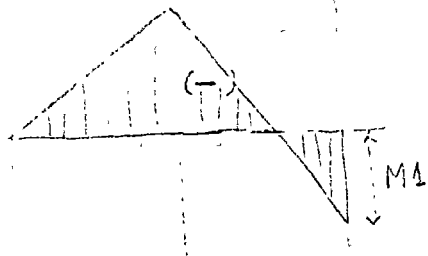
$$a = 2.9 \text{ cm}$$

$$b = 2.3 \text{ cm}$$

Cálculo de momentos:

$$M_2 = Q a = -1.3 \times 2.9 = -3.8 \text{ T-cm.}$$

$$M_1 = (Q+F)b - Q(a+b) = 3.8 \times 2.3 - 1.3 \times 5.2 = +1.98 \text{ T-cm.}$$



Revisión de esfuerzos:

$$\tau = \frac{3800 \times 0.5}{\frac{1}{2} \times 15 \times 1^3} = 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

$$< 0.75 F_y = 1877.5 \text{ Kg/cm}^2$$

✓

RIVETS AND THREADED FASTENERS

Tension

Allowable loads in kips

Unfinished Bolts and Threaded Parts										
Tension on tensile stress area										
ASTM Designation or Yield Stress		Allowable Tensile Stress F_t ksi	Nominal Diameter, in.							
			$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
			Tensile Stress Area, sq. in.							
			0.2260	0.3345	0.4617	0.6057	0.7633	0.9691	1.1549	1.4053
A307 Bolts		20.0	4.52	6.69	9.23	12.11	15.27	19.38	23.10	28.11
Threaded Parts F_y , ksi	36	22.0	4.97	7.36	10.16	13.33	16.79	21.32	25.41	30.92
	42	25.2	5.70	8.41	11.64	15.27	19.23	24.42	29.23	35.53
	45	27.0	6.10	9.03	12.47	16.35	20.61	26.17	31.18	37.94
	50	30.0	6.78	10.04	13.85	18.17	22.90	29.07	34.65	42.16
	55	33.0	7.46	11.04	15.24	19.99	25.19	31.98	38.11	46.37
	60	36.0	8.14	12.04	16.62	21.81	—	—	—	—
<p>The definition of tensile stress area is given in the AISC Specification, Section 1.5.2.1. Values are based on UNC thread dimensions.</p> <p>Nuts must meet specifications compatible with threaded parts.</p> <p>For Upset Rods see AISC Specification, Section 1.5.2.1.</p>										
Rivets and High Strength Bolts										
Tension on gross (nominal) area										
ASTM Designation		Allowable Tensile Stress F_t ksi	Nominal Diameter, in.							
			$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
			Gross (Nominal) Area, sq. in.							
			0.3068	0.4418	0.6013	0.7854	0.9940	1.2272	1.4849	1.7671
Rivets	A502-1	20.0	6.14	8.84	12.03	15.71	19.88	24.54	29.70	35.34
	A502-2	27.0	8.28	11.93	16.24	21.21	26.84	33.13	40.09	47.71
Bolts	A325	40.0	12.27	17.67	24.05	31.42	39.76	49.09	59.40	70.68
	A490	54.0 ^a	16.57 ^a	23.86 ^a	32.47 ^a	42.41 ^a	53.68 ^a	66.27 ^a	80.18 ^a	95.42 ^a
<p>^a For static loading only.</p>										
<p>For allowable combined shear and tension loads, see AISC Specification, Section 1.6.3.</p>										

3.- El ángulo simple a tensión -

Es uno de los perfiles más utilizados, sobre todo en estructuras ligeras. Debido al tipo de conexión que se requiere para unirlo a los elementos que les transmiten la carga, esta llega al ángulo siempre en forma excéntrica. El efecto que esta excentricidad tenga en la resistencia del ángulo es un punto que se ha discutido ampliamente desde hace tiempo.

Las especificaciones del AASHO y del AREA establecen que el área efectiva de un ángulo a tensión debe ser el área neta del ala del ángulo a la que directamente se transmite la carga más la mitad del otra ala.

Las especificaciones del AISC no establecen este requisito y explícitamente indican que la excentricidad entre el eje centroidal del miembro y los elementos de conexión en los extremos del mismo puede disminuirse. (1.15.3)

La posición del AISC se justifica por dos motivos, por una parte la deformación que experimenta el ángulo y que hace disminuir la excentricidad y por otra la redistribución plástica de esfuerzos que puede observarse en la gráfica de la pag. siguiente y que permite, en aceros estructurales dúctiles, llegar a la carga última o a valores muy cercanos a ella en la mayoría de los casos.

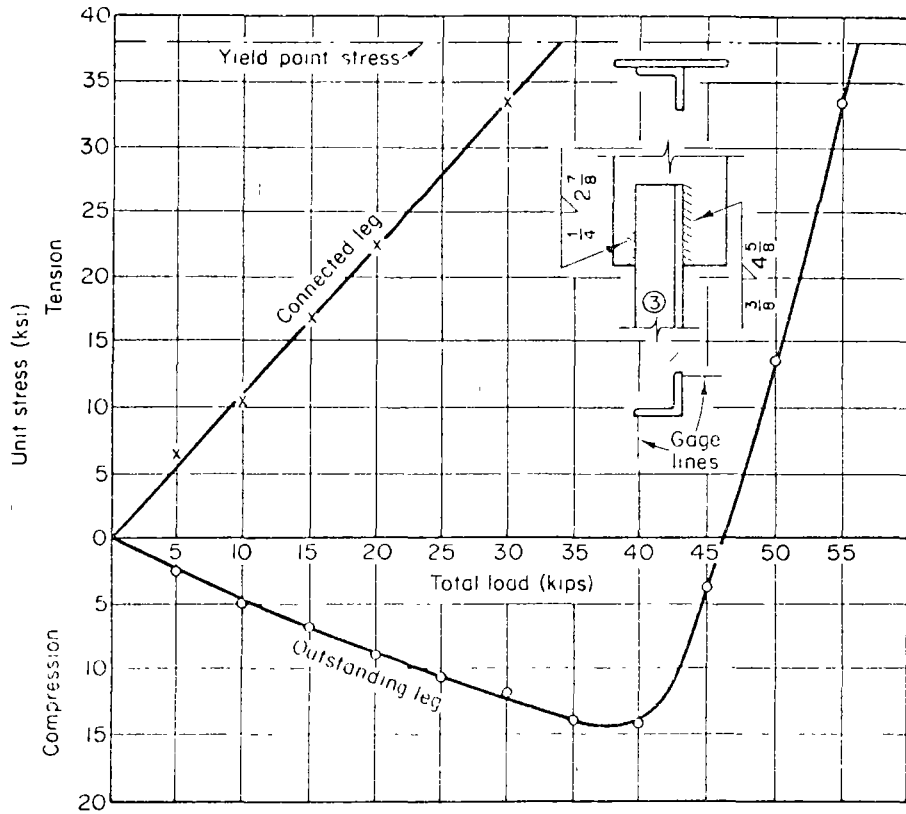
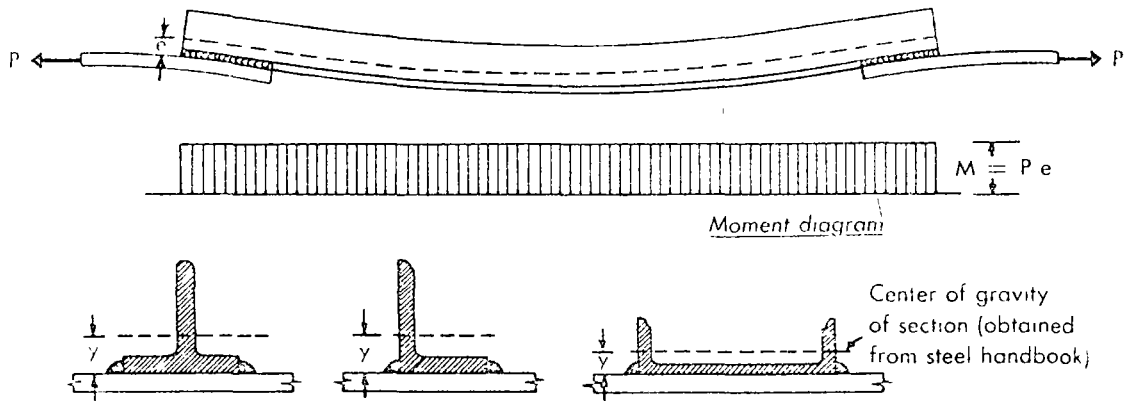


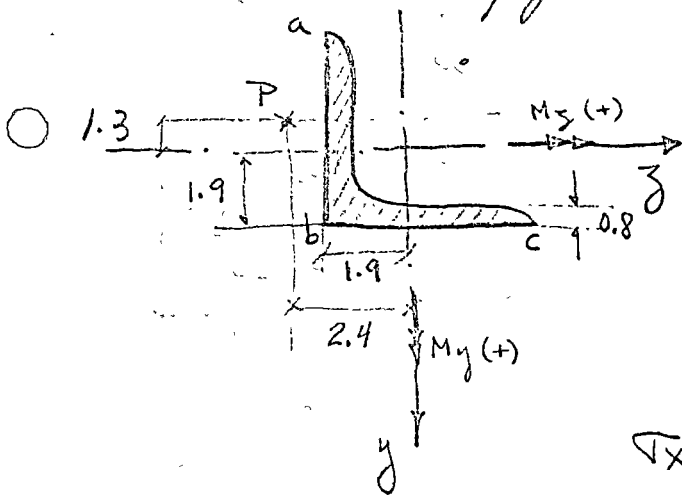
Fig. 5.19. Stress in single angle in tension

Design of Trusses



Aunque es una situación poco común, podría, en circunstancias especiales, desearse limitar los esfuerzos en un ángulo a determinados valores inferiores al límite elástico del material (en el caso de aceros frágiles por ejemplo), se requeriría entonces calcular dichos esfuerzos una vez definida la posición de la carga con respecto al eje longitudinal centroidal del ángulo.

Consideremos un ángulo de $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{5}{16}$ " como se indica en la figura siguiente:



Una fórmula generalizada para el cálculo de esfuerzos normales debidos a flexión y referida a ejes no principales es (1):

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$A = 9.48 \text{ cm}^2$; $I_z = I_y = 35.38 \text{ cm}^4$; $I_{yz} = 6.4 \times 0.8 \times (-1.5)(-1.3) + 5.6 \times 0.8 \times 1.5 \times 1.7 = 21.4 \text{ cm}^4$

$P/A = 0.1 P$

$M_y = -2.4 P$; $M_z = 1.3 P$; $M_y I_z = -84.9 P$; $M_z I_y = 46 P$; $M_z I_{yz} = 27.8 P$; $M_y I_{yz} = -51.4 P$

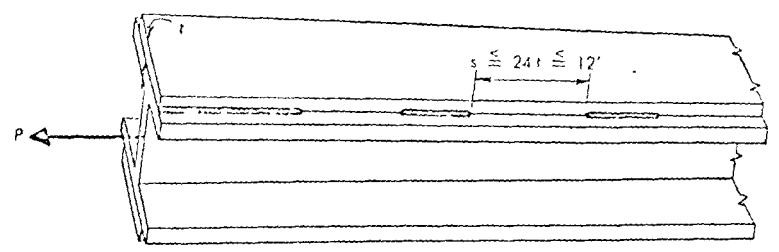
$M_z I_y = 46 P$; $M_y I_{yz} = -51.4 P$

punto	z	y	$(M_y I_z + M_z I_{yz})z$	$(M_z I_y + M_y I_{yz})y$	σ_x
a	-1.9	-4.5	108.5 P	24.3 P	0.21 P
b	-1.9	1.9	108.5 P	-10.3 P	0.25 P
c	4.5	1.9	-257 P	-10.3 P	-0.21 P

J. WELDING OF BUILT-UP TENSION MEMBERS

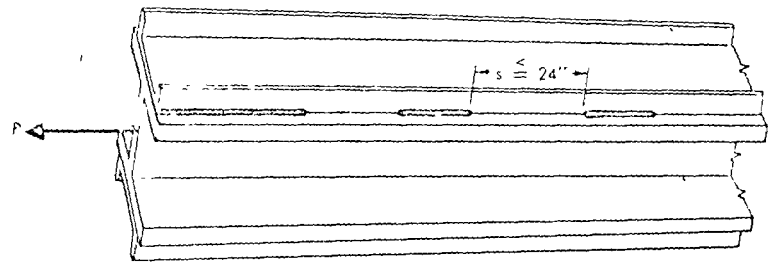
AISC Section 1.18.3 has established the requirements illustrated in Figure 2.

Plate to a rolled shape or 2 plate, in contact with each other

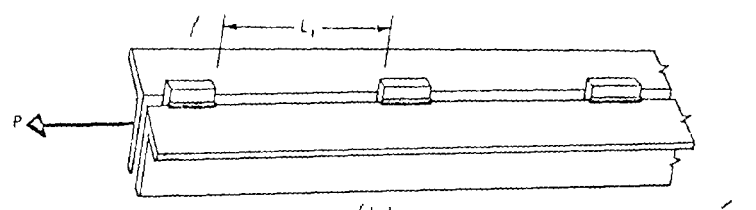


$t =$ thickness of thinner element

2 or more shapes in contact with each other

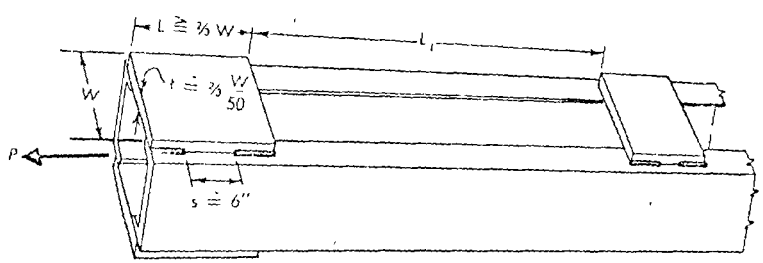


2 or more shapes or plates separated by intermittent fillers



The plates used on open sides of built up tension members

$\left(\frac{L_1}{r}\right)$ of either element ≤ 240



$\left(\frac{L_1}{r}\right)$ of element ≤ 240

Plates with access holes may be used in built up tension members

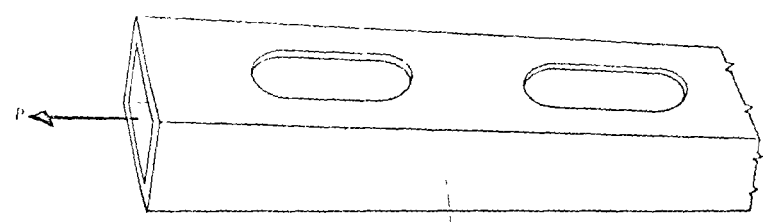


FIGURE 2—Welding of Built-Up Tension Members

Miembros Compuestos a Tensión

(tomado del Blodgett pg 2.3.2)

Especificaciones relativas a tensión.

Esfuerzo permisible:

$$\sigma \leq 0.6 \sigma_y$$

$$\sigma \leq 0.5 \sigma_T$$

A.I.S.C

C.F.E.

1.5.1.1

1.5.1.1

En zonas de pasadores

$$\sigma \leq 0.45 \sigma_y$$

1.5.1.1

Area neta:

$$A_n \leq 0.85 A$$

1.14.3

1.5 a

Diametro de agujeros para diseño

$$\phi_d = \phi + 3 \text{ mm.}$$

1.14.5

1.5 a

Relación de esbeltez
(recomendación)

miembros principales $\frac{L}{r} \leq 240$

1.8.4

1.4

miembros secundarios $\frac{L}{r} \leq 300$

1.8.4

1.4

FIGURA 6

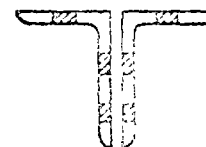
REDUCCION DE AREAS POR AGUJEROS PARA REMACHES Y TORNILLOS (cm²)

Area en cm² = diámetro del agujero por grueso del metal, (para fines de cálculo el diámetro de los agujeros se toma igual al diámetro nominal del remache o tornillo más 1/8").

GRUESO DEL METAL		DIAMETRO DEL REMACHE O TORNILLO, pulg y mm											
pulg	mm	5/8	15.9	3/4	19	7/8	22.2	1	25.4	1 1/8	28.6	1 1/2	31.7
3/16	4.8	0.91		1.06		1.21		1.36		1.51		1.66	
1/4	6.3	1.21		1.41		1.62		1.81		2.01		2.22	
5/16	7.9	1.51		1.76		2.02		2.27		2.52		2.77	
3/8	9.5	1.81		2.12		2.42		2.72		3.02		3.33	
7/16	11.1	2.12		2.47		2.83		3.19		3.53		3.88	
1/2	12.7	2.42		2.82		3.23		3.63		4.03		4.44	
9/16	14.3	2.72		3.18		3.63		4.08		4.53		4.99	
5/8	15.9	3.03		3.53		4.03		4.54		5.04		5.55	
11/16	17.5	3.33		3.88		4.44		4.99		5.54		6.10	
3/4	19.0	3.63		4.23		4.84		5.44		6.05		6.66	
13/16	20.6	3.93		4.59		5.24		5.90		6.55		7.21	
7/8	22.2	4.24		4.94		5.65		6.35		7.05		7.76	
15/16	23.8	4.54		5.29		6.05		6.80		7.56		8.32	
1	25.4	4.84		5.65		6.45		7.26		8.06		8.87	
1/16	27.0	5.14		6.00		6.86		7.71		8.57		9.43	
1/8	28.6	5.45		6.35		7.26		8.17		9.07		9.98	
3/16	30.2	5.75		6.70		7.66		8.62		9.58		10.54	
1/4	31.7	6.05		7.06		8.07		9.07		10.08		11.09	
5/16	33.3	6.35		7.41		8.47		9.53		10.58		11.65	
3/8	34.9	6.66		7.76		8.87		9.98		11.09		12.20	
7/16	36.5	6.96		8.12		9.28		10.44		11.59		12.76	
1/2	38.1	7.26		8.47		9.68		10.89		12.09		13.31	
9/16	39.7	7.56		8.82		10.08		11.34		12.60		13.86	
5/8	41.3	7.87		9.18		10.49		11.80		13.10		14.42	
11/16	42.9	8.17		9.53		10.89		12.25		13.61		14.97	
3/4	44.4	8.47		9.88		11.29		12.70		14.11		15.53	
13/16	46.0	...		10.23		11.69		13.16		14.61		16.08	
7/8	47.6	...		10.59		12.10		13.61		15.12		16.64	
15/16	49.2	...		10.94		12.50		14.07		15.62		17.19	
2	50.8	...		11.29		12.90		14.52		16.13		17.73	
1/16	52.4	...		11.65		13.31		14.97		16.63		18.30	
1/8	54.0	...		12.00		13.71		15.43		17.14		18.85	
3/16	55.6	...		12.35		14.11		15.88		17.64		19.41	
1/4	57.1	...		12.70		14.52		16.33		18.14		19.96	
5/16	58.7	...		13.06		14.92		16.79		18.65		20.52	
3/8	60.3	...		13.41		15.32		17.24		19.15		21.07	
7/16	61.9	...		13.76		15.73		17.69		19.65		21.63	
1/2	63.5	...		14.12		16.13		18.15		20.16		22.18	
5/8	65.1	...		14.47		16.54		18.66		20.67		22.73	
3/4	66.7	...		14.82		16.94		19.06		21.17		23.29	
7/8	68.3	...		15.17		17.35		19.57		21.68		23.84	
1	69.9	...		15.53		17.74		19.96		22.18		24.40	
1 1/8	71.5	...		15.88		18.15		20.37		22.69		24.95	
1 1/4	73.0	...		16.23		18.55		20.87		23.19		25.51	
1 3/8	74.6	...		16.58		18.96		21.38		23.70		26.06	
1 1/2	76.2	...		16.94		19.35		21.78		24.19		26.62	

AREA NETA DE DOS ANGULOS EN cm²

Los agujeros deducidos son 3.2 mm mayores que el diámetro nominal de los remaches



DOS ANGULOS		DEDUCIENDO 2 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 4 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 6 AGUJEROS DE			
DIMENSIONES													
Lados	Espe- sor	DEDUCIENDO 2 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 4 AGUJEROS DE				DEDUCIENDO 6 AGUJEROS DE			
mm	mm	19.0	22.2	25.4	28.6	19.0	22.2	25.4	28.6	19.0	22.2	25.4	28.6
152.4 x 152.4	9.5	55.63	55.02	54.42	53.81	52.00	50.79	49.58	48.37	48.37	46.55	44.74	42.92
	12.7	69.35	68.55	67.75	66.94	64.52	62.91	61.30	59.68	59.69	57.26	54.85	52.43
	15.9	85.69	84.68	83.67	82.66	79.64	77.62	75.61	73.59	73.59	70.56	67.54	64.51
	19.0	101.64	100.43	99.22	98.01	94.38	91.95	89.55	87.12	87.12	83.50	79.87	76.24
	22.2	117.07	115.66	114.25	112.83	108.60	105.78	102.96	100.13	100.14	95.89	91.66	87.42
	25.4	132.25	130.65	129.04	127.42	122.59	119.35	116.14	112.90	112.91	108.06	103.23	98.39
152.4 x 1.6	9.5	42.95	42.34	41.74	41.13	39.32	38.11	36.90	35.69	35.69	33.87	32.06	30.24
	12.7	56.46	55.65	54.85	54.04	51.62	50.01	48.40	46.78	46.79	44.36	41.95	39.53
	15.9	69.57	68.56	67.55	66.54	63.52	61.50	59.49	57.47	57.47	54.44	51.42	48.39
	19.0	82.28	81.07	79.86	78.65	75.02	72.60	70.19	67.76	67.76	64.14	60.51	56.88
	22.2	94.49	93.08	91.67	90.25	86.02	83.20	80.38	77.55	77.55	73.31	69.08	64.84
127.0 x 127.0	9.5	42.95	42.34	41.74	41.13	39.32	38.11	36.90	35.69				
	12.7	56.46	55.65	54.85	54.04	51.62	50.01	48.40	46.78				
	15.9	69.57	68.56	67.55	66.54	63.52	61.50	59.49	57.47				
	19.0	82.28	81.07	79.86	78.65	75.02	72.60	70.19	67.76				
101.6 x 101.6	6.3	22.62	22.22	21.82	21.41	20.20	19.40	18.59	17.78				
	7.9	27.94	27.43	26.93	26.42	24.91	23.90	22.90	21.88				
	9.5	33.27	32.66	32.06	31.45	29.64	28.43	27.22	26.01				
	12.7	43.54	42.73	41.93	41.12	38.70	37.09	35.48	33.86				
	15.9	53.43	52.42	51.41	50.40	47.38	45.35	43.35	41.33				
	19.0	62.94	61.73	60.52	59.31	55.68	53.26	50.85	48.42				
101.6 x 76.3	6.3	19.38	18.98	18.58	18.17	16.95	16.15	15.35	14.54				
	7.9	23.94	23.43	22.93	22.42	20.91	19.90	18.90	17.88				
	9.5	28.37	27.76	27.16	26.55	24.74	23.53	22.32	21.11				
	12.7	37.08	36.27	35.47	34.66	32.24	30.63	29.02	27.40				
	15.9	45.29	44.28	43.27	42.26	39.24	37.22	35.21	33.19				
	19.0	53.25	52.05	50.84	49.63	45.00	43.58	41.17	38.74				
76.3 x 76.3	6.3	16.16	15.75	15.35	14.95	13.74	12.94	12.13	11.32				
	7.9	19.94	19.43	18.93	18.42	16.91	15.90	14.90	13.88				
	9.5	23.59	22.98	22.38	21.77	19.95	18.75	17.54	16.33				
	12.7	30.64	29.83	29.03	28.22	25.80	24.19	22.58	20.96				
	15.9	37.01	35.90	34.79	33.68	30.86	28.84	27.23	25.21				

LONGITUDES DE SOLDADURA DE FILETE NECESARIAS PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE CARGA AXIAL DE ANGULOS EN TENSION

ANGULO		TAMAÑO DEL FILETE		LONGITUD, cm		
				Electrodos E60XX y E70XX o grados SAW-1 y SAW-2 y metal base A-7 ó A373	Electrodos E60XX ó grado SAW-1 y metal base A-36	Electrodos E70XX ó grado SAW-2 y metal base A-36
mm	Pulg	mm	Pulg			
152.4x101.6x22.2	6x4x7/8	20.6	13/16	39.1	42.5	36.3
" " 19.0	" " 3/4	17.5	11/16	40.0	43.3	37.2
" " 15.9	" " 5/8	14.3	9/16	41.0	44.7	38.5
" " 12.7	" " 1/2	11.1	7/16	42.8	46.8	40.3
" " 11.1	" " 7/16	9.5	3/8	44.2	48.0	41.3
" " 9.5	" " 3/8	7.9	5/16	46.0	50.1	43.1
" " 7.9	" " 5/16	6.3	1/4	48.0	52.4	45.0
101.6x76.2x19.0	4x3x3/4	17.5	11/16	26.9	29.3	25.1
" " 15.9	" " 5/8	14.3	9/16	28.0	30.5	26.1
" " 12.7	" " 1/2	11.1	7/16	29.3	31.9	27.5
" " 11.1	" " 7/16	9.5	3/8	30.4	33.1	28.4
" " 9.5	" " 3/8	7.9	5/16	31.5	34.4	29.6
" " 7.9	" " 5/16	6.3	1/4	33.4	36.4	31.1
" " 6.3	" " 1/4	6.3	1/4	27.4	29.4	25.3
152.4 x 25.4	6 x 1	23.8	15/16	46.4	50.3	43.3
" 22.2	" 7/8	20.6	13/16	47.5	51.8	44.4
" 19.0	" 3/4	17.5	11/16	48.6	52.9	45.4
" 15.9	" 5/8	14.3	9/16	50.0	54.1	46.6
" 14.3	" 9/16	12.7	1/2	50.4	55.0	47.5
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	51.9	56.7	48.7
" 11.1	" 7/16	9.5	3/8	53.6	58.5	50.1
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	55.6	60.6	52.0
127.0 x 19.0	5 x 3/4	17.5	11/16	39.9	43.5	37.2
" 15.9	" 5/8	14.3	9/16	41.2	44.8	38.5
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	42.9	46.7	40.1
" 11.1	" 7/16	9.5	3/8	44.2	48.0	41.3
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	46.0	50.2	43.0
101.6 x 19.0	4 x 3/4	17.5	11/16	31.1	34.2	29.2
" 15.9	" 5/8	14.3	9/16	32.5	35.2	30.4
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	33.9	36.7	31.6

ANGULO		TAMANO DEL FILETE		LONGITUD, cm		
				Electrodos E60XX y E70XX o grados SAW-1 y SAW-2 y metal base A-7 ó A373	Electrodos E60XX ó grado SAW-1 y metal base A-36	Electrodos E70XX ó grado SAW-2 y metal base A-36
mm	Pulg.	mm	Pulg.			
101.6 x 11.1	4 x 7/16	9.5	3/8	35.0	38.2	32.8
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	36.5	39.7	34.1
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	38.3	41.8	35.8
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	30.8	33.7	29.0
76.2 x 15.9	3 x 5/8	14.3	9/16	23.6	25.8	22.1
" 12.7	" 1/2	11.1	7/16	24.8	27.0	23.2
" 11.1	" 7/16	9.5	3/8	25.7	28.1	24.1
" 9.5	" 3/8	7.9	5/16	26.8	29.3	25.2
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	28.4	31.0	26.6
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	23.0	25.0	21.5
63.5 x 9.5	2 1/2 x 3/8	7.9	5/16	21.8	24.0	21.4
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	23.4	25.5	22.0
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	19.0	20.6	17.8
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	18.9	20.6	17.7
50.8 x 9.5	2 x 3/8	7.9	5/16	17.4	18.8	16.2
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	18.4	20.0	17.2
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	15.0	16.3	14.0
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	15.0	16.3	14.0
" 3.2	" 1/8	3.2	1/8	15.0	16.4	14.1
44.4 x 7.9	1 3/4 x 5/16	6.3	1/4	15.8	17.2	14.8
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	12.8	14.0	12.0
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	13.1	14.3	12.3
" 3.2	" 1/8	3.2	1/8	13.3	14.6	12.5
36.1 x 9.5	1 1/2 x 3/8	7.9	5/16	12.55	13.7	11.7
" 7.9	" 5/16	6.3	1/4	13.40	14.6	12.5
" 6.3	" 1/4	6.3	1/4	10.90	11.8	10.2
" 4.8	" 3/16	4.8	3/16	11.20	12.1	10.4
" 3.2	" 1/8	3.2	1/8	11.40	12.4	10.7

Se han considerado soldaduras de filete de tamaño igual al grueso del ángulo cuando éste es de 6.3 mm (1/4") o menos, y de tamaño igual al grueso del ángulo menos 1.5 mm (1/16") cuando éste es de más de 6.3 mm (7.6.1.c.2)

(Ver 1.2)

CAPACIDAD DE CARGA AXIAL DE ANGULOS EN TENSION
 (Igual a $A \cdot \sigma_y$, de acuerdo con 1.2.a) ACEROS A7 y A36

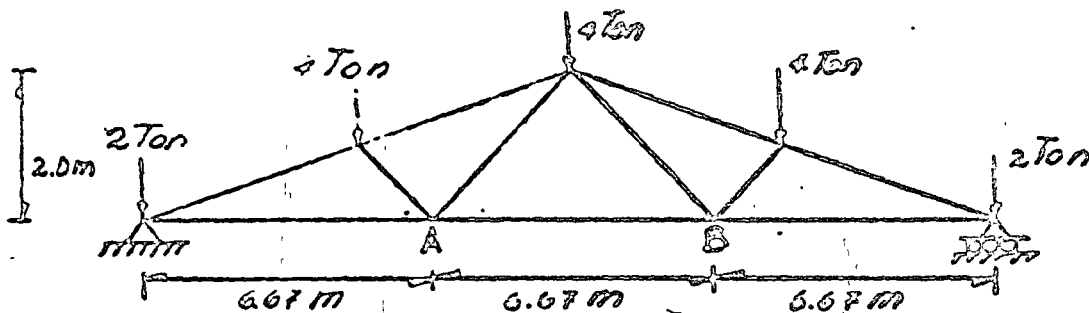
A N G U L O		AREA	CAPACIDAD DE CARGA TON	
mm	PULG	cm ²	A7	A36
152.4 x 101.6 x 22.2	6 x 4 x 7/8	51.48	119.9	130.0
152.4 x 101.6 x 19.0	6 x 4 x 3/4	44.77	104.0	113.0
152.4 x 101.6 x 15.9	6 x 4 x 5/8	37.81	87.8	95.6
152.4 x 101.6 x 12.7	6 x 4 x 1/2	30.65	71.1	77.8
152.4 x 101.6 x 11.1	6 x 4 x 7/16	26.97	62.5	68.0
152.4 x 101.6 x 9.5	6 x 4 x 3/8	23.29	54.1	59.0
152.4 x 101.6 x 7.9	6 x 4 x 5/16	19.44	45.1	49.3
101.6 x 76.2 x 19.0	4 x 3 x 3/4	30.26	70.2	76.5
101.6 x 76.2 x 15.9	4 x 3 x 5/8	25.67	59.7	65.0
101.6 x 76.2 x 12.7	4 x 3 x 1/2	20.96	48.6	53.0
101.6 x 76.2 x 11.1	4 x 3 x 7/16	18.51	43.0	46.8
101.6 x 76.2 x 9.5	4 x 3 x 3/8	16.00	37.1	40.5
101.6 x 76.2 x 7.9	4 x 3 x 5/16	13.48	31.3	34.1
101.6 x 76.2 x 6.3	4 x 3 x 1/4	10.90	25.3	27.6
152.4 x 25.4	6 x 1	70.97	164.3	179.0
152.4 x 22.2	6 x 7/8	62.77	145.6	159.2
152.4 x 19.0	6 x 3/4	54.45	126.5	138.0
152.4 x 15.9	6 x 5/8	45.87	106.3	115.8
152.4 x 14.3	6 x 9/16	41.48	96.0	104.6
152.4 x 12.7	6 x 1/2	37.10	86.1	94.0
152.4 x 11.1	6 x 7/16	32.65	75.9	82.8
152.4 x 9.5	6 x 3/8	28.13	65.2	71.2
127.0 x 19.0	5 x 3/4	44.77	104.0	113.5
127.0 x 15.9	5 x 5/8	37.81	87.8	95.7
127.0 x 12.7	5 x 1/2	30.65	71.1	77.5
127.0 x 11.1	5 x 7/16	26.97	62.5	68.0
127.0 x 9.5	5 x 3/8	23.29	54.0	59.0

A N G U L O		AREA cm ²	CAPACIDAD DE CARGA TON	
mm	PULG		A7	A35
101.6 x 19.0	4 x 3/4	35.10	81.3	89.0
101.6 x 15.9	4 x 5/8	29.74	69.1	75.2
101.6 x 12.7	4 x 1/2	24.19	56.2	61.0
101.6 x 11.1	4 x 7/16	21.35	49.5	54.0
101.6 x 9.5	4 x 3/8	18.45	42.9	46.7
101.6 x 7.9	4 x 5/16	15.48	36.0	39.2
101.6 x 6.3	4 x 1/4	12.52	29.0	31.6
76.2 x 15.9	3 x 5/8	21.68	50.2	55.0
76.2 x 12.7	3 x 1/2	17.74	41.1	44.8
76.2 x 11.1	3 x 7/16	15.68	36.4	39.7
76.2 x 9.5	3 x 3/8	13.61	31.6	34.5
76.2 x 7.9	3 x 5/16	11.48	26.6	29.1
76.2 x 6.3	3 x 1/4	9.29	21.6	23.5
63.5 x 9.5	2 1/2 x 3/8	11.16	25.9	28.3
63.5 x 7.9	2 1/2 x 5/16	9.48	22.0	24.0
63.5 x 6.3	2 1/2 x 1/4	7.68	17.8	19.4
63.5 x 4.8	2 1/2 x 3/16	5.81	13.5	14.7
50.8 x 9.5	2 x 3/8	8.77	20.4	22.1
50.8 x 7.9	2 x 5/16	7.42	17.2	18.8
50.8 x 6.3	2 x 1/4	6.06	14.0	15.3
50.8 x 4.8	2 x 3/16	4.61	10.7	11.6
50.8 x 3.2	2 x 1/8	3.10	7.2	7.8
44.4 x 7.9	1 3/4 x 5/16	6.39	14.8	16.1
44.4 x 6.3	1 3/4 x 1/4	5.20	12.1	13.2
44.4 x 4.8	1 3/4 x 3/16	4.03	9.3	10.2
44.4 x 3.2	1 3/4 x 1/8	2.74	6.4	6.9
38.1 x 9.5	1 1/2 x 3/8	6.34	14.8	16.0
38.1 x 7.9	1 1/2 x 5/16	5.40	12.5	13.6
38.1 x 6.3	1 1/2 x 1/4	4.40	10.2	11.1
38.1 x 4.8	1 1/2 x 3/16	3.43	8.0	8.7
38.1 x 3.2	1 1/2 x 1/8	2.34	5.4	5.9

EJEMPLO 3.2. DIMENSIONAMIENTO DE UN ELEMENTO SUJETO A TENSION AXIAL	CALCULO: F.G.V.	1 1
	REVISO: S.L.V.	
	FECHA: OCT. 70	

DATOS

Diseñar el miembro AB de la armadura mostrada en la figura.



SOLUCION

Resolviendo la armadura por un método conocido, encontramos que el miembro AB trabaja con una fuerza de tensión de 20000.

Si la unión es soldada y usamos un ángulo de acero A-36 ($f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$), tenemos:

Esfuerzo permisible

$$f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 2530 = 1520 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo del área necesaria

$$A = \frac{T}{f_s} ; A = \frac{20000}{1520} = \underline{\underline{13.20 \text{ cm}^2}}$$

Ec 3.1

Del Manual Monterrey ...

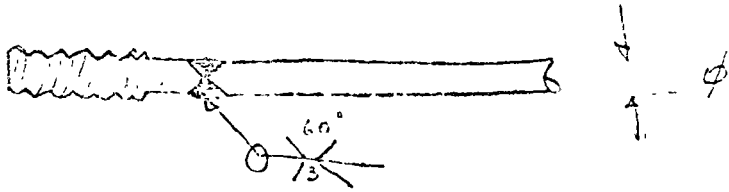
L 4" x 5/16" tiene un área de 15.90 cm² y un radio de giro, $r = 3.15$.

Revisión por esbeltez

$$\frac{l}{r} = \frac{6.67}{3.15} = \underline{\underline{2.11}} < 250$$

Ref 3.1

Una solución al mismo problema es mediante un tirante de acero A36 roscado en sus extremos para permitir la conexión



a) zona no roscada

$$A_{req} = \frac{20000}{1530} = 13.2 \text{ cm}^2$$

usar $2 \phi 1\frac{1}{4}$ " ($A = 7.91 \times 2 = 15.82 \text{ cm}^2$)

Ver tabla
4-3
AISC

b) zona roscada

usar $2 \phi 1\frac{3}{8}$ " ($A_e = 7.45 \times 2 = 14.90 \text{ cm}^2$)





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

Ing. Oscar de Buen



LA COLUMNA AISLADA

Una columna es una pieza recta sobre la que actúa una fuerza axial de compresión.

Las columnas aisladas comprimidas axialmente no se presentan casi nunca en estructuras reales; sin embargo, su estudio constituye un antecedente necesario para la solución del problema de la columna como parte de una estructura reticular.

El diseño de columnas es un problema de investigación del estado de equilibrio entre las cargas exteriores y las interiores; a diferencia de muchos otros casos, la magnitud de las cargas no es fundamental.

INVESTIGACIONES QUE HAN CONTRIBUIDO A LA SOLUCIÓN DEL

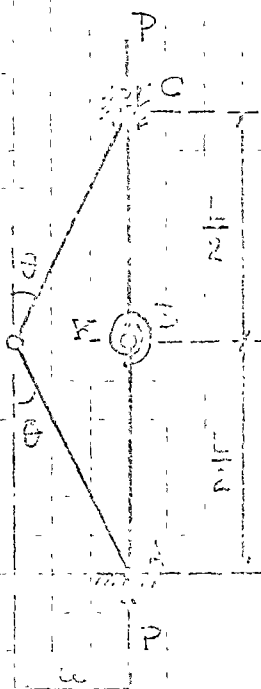
PROBLEMA. Euler, 1744; Lamark, 1845; Engesser, Considère y von Karman, últimos años del siglo XIX y primeros del XX; Shanley, 1947.

NOCIONES DE INESTABILIDAD

Consideremos un modelo formado por dos barras rígidas de ejes rectos colineales, unidas entre sí por una articulación y un resorte de rigidez K .

Nos interesa saber si, bajo una fuerza P cualquiera, el equilibrio del sistema es

estable, inestable o indiferente, para lo que lo sacamos de su posición por medio de un agente externo y vemos su paso al siguiente



Ecuación de equilibrio de la columna ligeramente de-
mada:

$$\underbrace{Pu}_{\text{Mom. ext.}} = \underbrace{2k\theta}_{\text{Mom. int. (en el resorte)}}, \text{ ó } Pu - 2k\theta = 0 \quad (1)$$

Si $Pu < 2k\theta$, el equilibrio es estable.

Si $Pu > 2k\theta$, el equilibrio es inestable.

Si $Pu = 2k\theta$, es indiferente.

La ec. (1) se satisface únicamente si el equilibrio es indif-
rente, pues solamente entonces puede existir una configuración
deformada en equilibrio, una vez eliminado el agente exterior.

DESPLAZAMIENTOS PEQUEÑOS

Si "u" es pequeño, $u \approx \theta L/2$, y la ec. (1) se convierte en

$$P\theta \frac{L}{2} - 2k\theta = 0, \text{ ó } \theta \left(\frac{PL}{2} - 2k \right) = 0 \quad (2)$$

Hay dos posibles soluciones:

1. $\theta = 0 \therefore u = 0 \rightarrow$ La columna puede permanecer recta,
para cualquier valor de P.

$$2. \frac{PL}{2} - 2k = 0 \therefore P = \frac{4k}{L} = P_{cr} \quad (3)$$

Cuando P alcanza un valor determinado, $4k/L$, puede presen-
tarse, además de la recta, un número infinito de configuraciones
en equilibrio, ligeramente deformadas: BIFURCACIÓN DEL EQUI-

LIBRIO (el estado de equilibrio es indiferente; la carga que
lo ocasiona es la crítica, P_{cr}).

El desplazamiento "u" es indeterminado puesto que la
ecuación (2) se satisface para cualquier valor de θ , y u es
función de θ .

DESPLAZAMIENTOS GRANDES. La ec. (2) describe el fenómeno

en el instante en que se inicia el pandeo, pero no es aplicable cuando los ángulos θ adquieren valores grandes.

En esta nueva etapa, $u = (L/2) \sin \theta$, y la ec. de equilibrio es
$$P \frac{L}{2} \sin \theta - 2K\theta = 0 \quad (4)$$

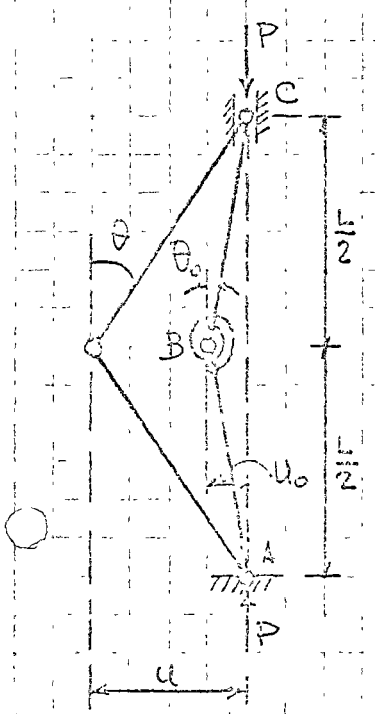
Esta ecuación se satisface si $\theta = 0$ o si

$$P = \frac{4K\theta}{L \sin \theta} = P_{cr} \frac{\theta}{\sin \theta} \quad (5)$$

Cuando se inicia el pandeo θ es muy pequeño, $\theta \approx \sin \theta$ y $P = 4K/L = P_{cr}$. Para ángulos θ crecientes $\sin \theta$ es menor que θ , $\theta / \sin \theta > 1$ y la carga adquiere valores mayores que P_{cr} , pero el aumento en resistencia por encima de P_{cr} es muy pequeño (por ejemplo, para $\theta = 30^\circ$, $P = 1.04 P_{cr}$).

Los desplazamientos no son indeterminados (con (5) puede calcularse θ para distintas relaciones P/P_{cr}).

IMPERFECCIONES INICIALES. la columna no es recta inicialmente.



Ec. de equilibrio: $Pu - K \cdot 2(\theta - \theta_0) = 0 \quad (6)$

Si los desplazamientos son pequeños ($u = \theta L/2$):

$$\frac{P\theta L}{2} - 2K\theta + 2K\theta_0 = 0 \quad \therefore \theta \left(\frac{PL}{2} - 2K \right) + 2K\theta_0 = 0 \quad (7)$$

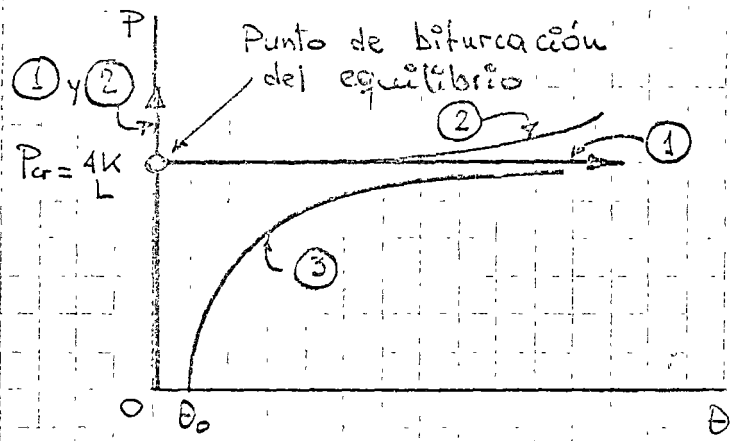
$\theta = 0$ no es una solución de la ecuación de equilibrio; la única solución es

$$P = \frac{4(K\theta - K\theta_0)}{L} = \frac{4K}{L} \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta} \right) = P_{cr} \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta} \right) \quad (8)$$

De (8), $\theta = \theta_0 \frac{1}{1 - P/P_{cr}} \quad (9)$

No hay bifurcación de equilibrio, pues los ángulos θ y los desplazamientos u empiezan a crecer en cuanto se empieza a aplicar la carga; no hay puntos, por consiguiente, pero sí INESTABILIDAD, pues al crecer P , tendiendo a P_c , θ tiende a infinito.

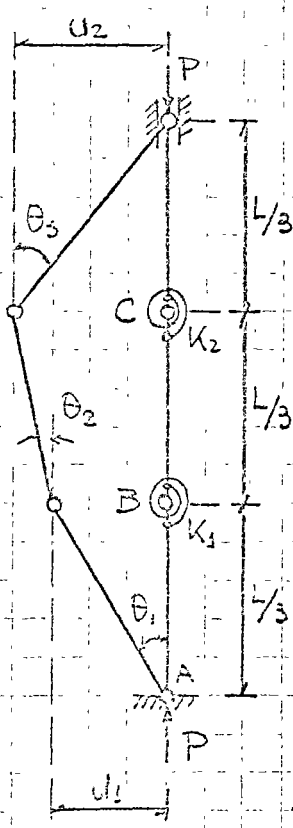
CURVAS CARGA-ROTACIÓN DE LOS TRES CASOS



- ① Desplazamientos pequeños, columna perfecta.
- ② Desplazamientos grandes, columna perfecta.
- ③ Desplazamientos pequeños, columna imperfecta.

MODELO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD (se necesitan dos

parámetros para definir su configuración deformada).



Ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada:

$$\left. \begin{aligned} Pu_2 - K_2(\theta_3 + \theta_2) &= 0 \\ Pu_1 - K_1(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Suponiendo desplazamientos pequeños:

$$\begin{aligned} u_1 &= \theta_1 \frac{L}{3}, & \theta_1 &= \frac{3u_1}{L} \\ u_2 &= \theta_3 \frac{L}{3}, & \theta_3 &= \frac{3u_2}{L} \\ u_2 - u_1 &= \theta_2 \frac{L}{3}, & \theta_2 &= \frac{3}{L}(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

Llevando estos valores a (10), se obtiene

$$\begin{aligned} Pu_2 - K_2 \left(\frac{6u_2}{L} - \frac{3u_1}{L} \right) &= 0 \\ Pu_1 - K_1 \left(\frac{6u_1}{L} - \frac{3u_2}{L} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones de equilibrio toman la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{3K_2}{L} u_1 + \left(P - \frac{6K_2}{L} \right) u_2 &= 0 \\ \left(P - \frac{6K_1}{L} \right) u_1 + \frac{3K_1}{L} u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

El sistema se satisface si $u_1 = u_2 = 0$, luego es posible una configuración recta en equilibrio, con cualquier valor de P .

Para que haya soluciones no triviales el determinante de los coeficientes de u_1 y u_2 (DETERMINANTE CARACTERÍSTICO)

Tiene que ser nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{3K_2}{L} & P - \frac{6K_2}{L} \\ P - \frac{6K_1}{L} & \frac{3K_1}{L} \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación característica:

$$P^2 - \frac{6}{L} (K_1 + K_2) P + \frac{27 K_1 K_2}{L^2} = 0 \quad (12)$$

Si los rigideces de los dos resortes son iguales y se hace $K_1 = K_2 = K$, la ecuación anterior se reduce a

$$P^2 - \frac{12K}{L} P + \frac{27K^2}{L^2} = 0$$

cuyas raíces son $P_1 = 3K/L$ y $P_2 = 9K/L$

Es decir, el sistema puede estar en equilibrio conservando la configuración recta inicial, cualquiera que sea el valor de P (solución trivial), o con una configuración ligeramente deformada cuando la carga alcanza alguno de los VALORES CARACTERÍSTICOS, P_1 ó P_2 .

Hay dos cargas críticas:

$$P_{c1} = 3K/L, \quad P_{c2} = 9K/L \quad (13)$$

Si $k_1 = k_2 = k$, las ecuaciones de equilibrio se convierten en

$$\left. \begin{aligned} \frac{3k}{L} u_1 + \left(P - \frac{6k}{L}\right) u_2 &= 0 \\ \left(P - \frac{6k}{L}\right) u_1 + \frac{3k}{L} u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Sustituyendo primero P por P_{cr1} y luego por P_{cr2} las ecuaciones (14) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} \frac{3k}{L} u_1 - \frac{3k}{L} u_2 &= 0 \\ -\frac{3k}{L} u_1 + \frac{3k}{L} u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

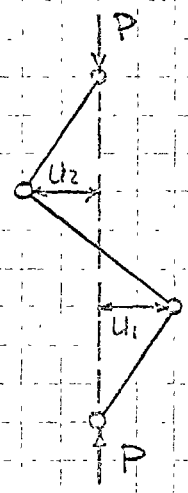
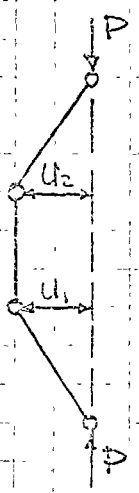
$$\left. \begin{aligned} \frac{3k}{L} u_1 + \frac{3k}{L} u_2 &= 0 \\ \frac{3k}{L} u_1 + \frac{3k}{L} u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Al llevar cada valor crítico a las ecuaciones de pandeo se transforman en dos ecuaciones linealmente dependientes de las que pueden obtenerse los valores relativos de los desplazamientos u_1 y u_2 , pero no los absolutos. Se conocen las configuraciones de los dos MODOS DE PANDEO, pero las magnitudes de los desplazamientos son indeterminadas.

De las eqs. (15), $u_1 = u_2$; de las (16), $u_1 = -u_2$.

MODOS DE PANDEO

El 2º modo no se presenta nunca, a menos que el sistema se impulse por medio de un agente externo.



1º Modo: $u_1 = u_2, P_{cr1} = \frac{3k}{L}$

2º Modo: $u_1 = -u_2, P_{cr2} = 3P_{cr1} = \frac{9k}{L}$

PROBLEMA PARA CASA.

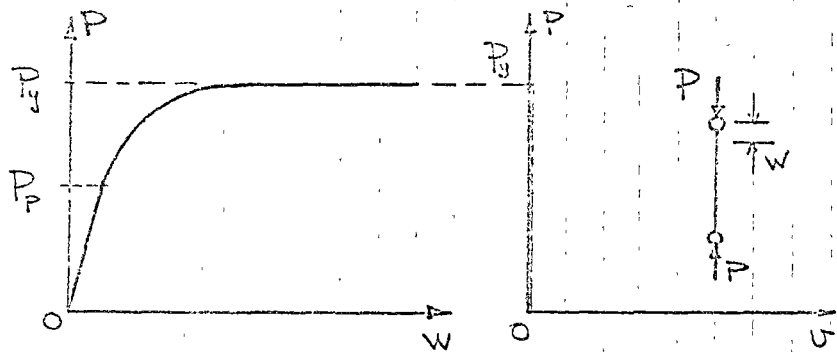
Resolver un ejemplo semejante a este último, con un modelo con tres grados de libertad (cuatro tramos de longitud $L/4$ ligados por medio de resortes de rigidez k)

COMPORTAMIENTO DE COLUMNAS DE DIFERENTES LONGITUDES

Se describe convenientemente por medio de sus curvas carga axial-deformación longitudinal y carga axial-deflexión lateral.

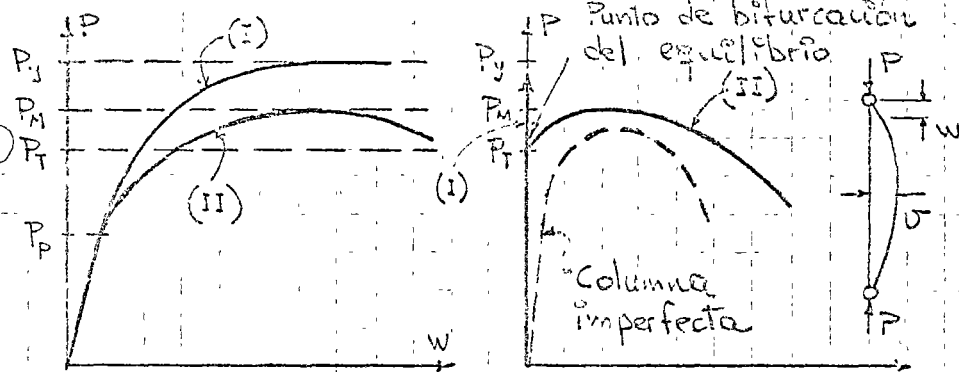
COLUMNAS CORTAS

No hay pandeo; la falla es por aplastamiento, cuando $F_y = A\sigma_y$.



Los desplazamientos laterales U son nulos y la gráfica $P-U$ es la curva carga axial-deformación de un perfil completo.

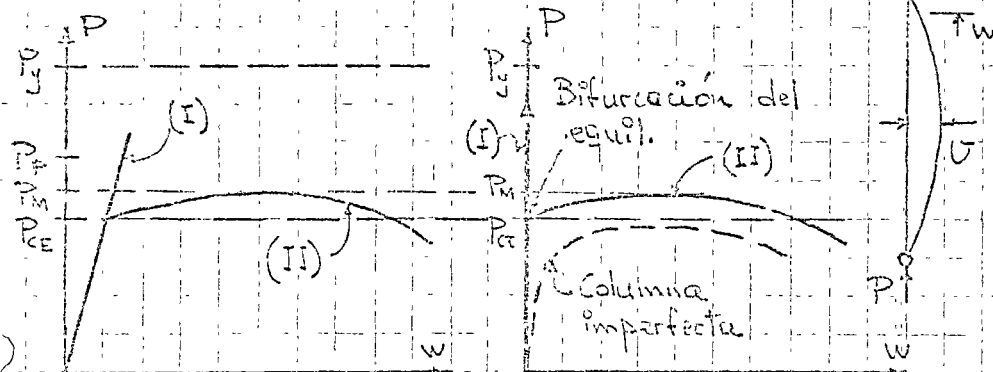
COLUMNAS INTERMEDIAS



El pandeo se inicia en el intervalo inelástico, cuando los esfuerzos normales han sobrepasado el límite de proporcionalidad

pero antes de que alcancen el de fluencia.

COLUMNAS LARGAS

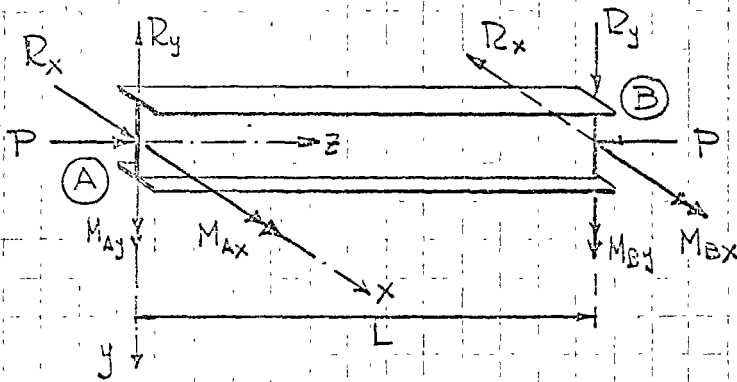


El pandeo se inicia en el intervalo elástico. Si la columna es muy larga, P_{ce} puede ser mucho menor que F_y , y aún que P_p .

BARRA RECTA Y DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Estas ecuaciones se deducen tomando como base la configuración deformada del eje de la barra. Su objeto fundamental es utilizarlas en el estudio de problemas de inestabilidad.

Nos limitaremos al estudio de la barra recta, de sección transversal constante abierta, de paredes delgadas y con dos ejes de simetría. Sus extremos pueden girar y moverse libremente a lo largo del eje de la pieza, pero no normalmente a él. Las condiciones de carga son las mostradas en la figura.

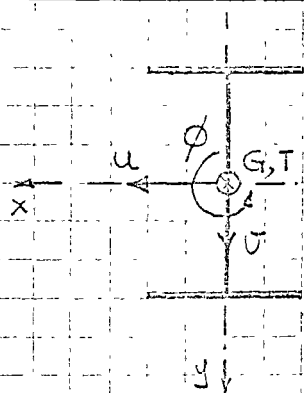


El material de la barra sigue la ley de Hooke, los desplazamientos son pequeños, las direcciones de las fuerzas y momentos no cambian al

deformarse la pieza y las secciones transversales conservan su forma.

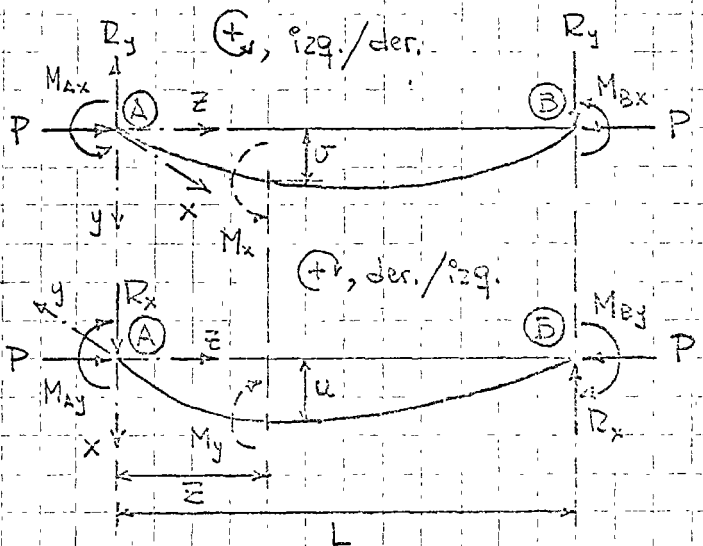
Desplazamientos de las

secciones transversales



Momentos flexionantes M_x y M_y en

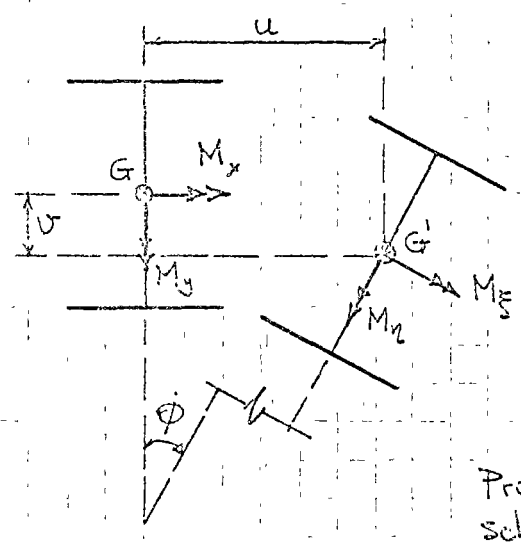
una sección cualquiera



$$M_x = M_{Ax} - R_y z - P v' = M_{Ax} - \frac{w}{L} (M_{Ax} + M_{Bx}) - P v \quad (17)$$

$$M_y = M_{Ay} - R_x z + P u = M_{Ay} - \frac{w}{L} (M_{Ay} + M_{By}) + P u \quad (18)$$

Al deformarse la barra sus secciones transversales se salen del plano xy original, los ejes principales pasan a ser ξ y η y el normal a la sección, ζ . Cada momento M_x y M_y , que se conserva en su plano original, tiene componentes alrededor de los tres ejes del nuevo sistema, y produce flexiones M_ξ y M_η y torsión M_ζ .



Haciendo $\sin \phi = \phi$, $\cos \phi = 1$:

$$M_\xi = M_x + \phi M_y \quad (19)$$

$$M_\eta = M_y - \phi M_x \quad (20)$$

Por otro lado:

$$M_\zeta = M_x \frac{dv}{dz} + M_y \frac{du}{dz} +$$

Proyecciones de M_x y M_y sobre el eje ζ

$$\bar{K} = \int_A \sigma_z \alpha^2 dA$$

$$+ \frac{v}{L} (M_{Ay} + M_{By}) + \frac{u}{L} (M_{Ax} + M_{Bx}) + \bar{K} \frac{d\phi}{dz} \quad (21)$$

Efecto de las reacciones

Efecto del alabeo de las secciones transversales

Al alabearse las secciones transversales los esfuerzos σ_z dejan de ser paralelos al eje ζ .

MOMENTOS RESIDENTES EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL CUALQUIERA

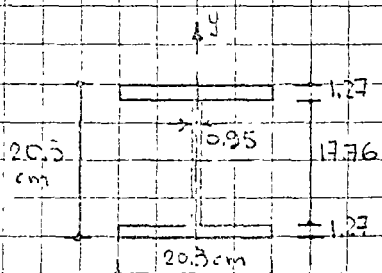
QUIERA S

$$M_\xi = E I_\xi \frac{d^2 v}{dz^2} = B_x v'' \quad (22)$$

$$M_\eta = -E I_\eta \frac{d^2 u}{dz^2} = -B_y u'' \quad (23)$$

$$M_\zeta = -G K \frac{d\phi}{dz} + E C_\alpha \frac{d^3 \phi}{dz^3} = -D_\zeta \phi' + 2\alpha \phi''' \quad (24)$$

EJEMPLO 4.4. Determinar la capacidad de carga de los miembros de las columnas de la Fig. 4.47, utilizando las especificaciones AISC de 1969. Todas son de acero A36, tienen la misma sección transversal y carecen de soportes laterales intermedios.



$A = 65.73 \text{ cm}^2$

$r_x = 8.37 \text{ cm}; r_y = 5.20 \text{ cm}$

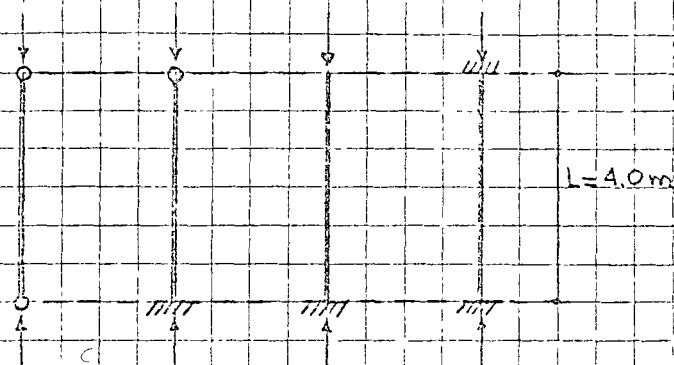


Fig. 4.47. SECCIÓN TRANSVERSAL Y CONDICIONES DE APoyo DE LAS COLUMNAS DEL EJEMPLO 4.4.

CASO	1	2	3	4
$K_{TEOR.}$	1.0	0.7	2.0	0.5
$K_{RECOM.}$	1.0	0.8	2.1	0.65
KL/r_y	77	62	162	50

Puesto que $r_y < r_x$ y la longitud libre es la misma en las dos direcciones, el pandeo se presenta siempre alrededor del eje y.

En la figura se han calculado los coeficientes de longitud efectiva K teóricos y recomendados para diseño, tomados de la Fig. 4.12, y las relaciones de esbeltez críticas, calculadas con los coeficientes K recomendados.

La relación de esbeltez que separa el pandeo elástico del inelástico, ec. 4.75, es $C_c = \sqrt{2\pi^2 E / s_y} = \sqrt{2 \times 207000 \times 207000 / 2535} = 126$. Por consiguiente, únicamente la columna en voladizo del caso 4 se pandea en el intervalo elástico.

- CASO 1. De la ec. 4.47, $CS = \frac{5}{3} + \frac{2(KL/r)^2}{3C_c} - \frac{(KL/r)^2}{3C_c^2} = 1.367$

De la ec. (4.47), para pandeo inelástico,

ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE 2º ORDEN

Se obtienen igualando los momentos producidos por las cargas exteriores con los momentos resistentes de la barra. Despreciando los términos que contienen el producto de dos o más desplazamientos, lo que puede hacerse por ser pequeños, y reordenando términos, se llega a

$$B_x v'' + Pv - \phi \left[M_{Ay} - \frac{z}{L} (M_{Ay} + M_{By}) \right] = M_{Ax} - \frac{z}{L} (M_{Ax} + M_{Bx}) \quad (25)$$

$$B_y u'' + Pu - \phi \left[M_{Ax} - \frac{z}{L} (M_{Ax} + M_{Bx}) \right] = -M_{Ay} + \frac{z}{L} (M_{Ay} + M_{By}) \quad (26)$$

$$R_a \phi''' - (R_s + \bar{K}) \phi' - u' \left[M_{Ax} - \frac{z}{L} (M_{Ax} + M_{Bx}) \right] - v' \left[M_{Ay} - \frac{z}{L} (M_{Ay} + M_{By}) \right] - \frac{v}{L} (M_{Ay} + M_{By}) - \frac{u}{L} (M_{Ax} + M_{Bx}) = 0 \quad (27)$$

PANDEO ELÁSTICO DE COLUMNAS

ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE 2º ORDEN

Se obtienen llevando a las ecuaciones (25) a (27) las condiciones $M_{Ax} = M_{Ay} = M_{Bx} = M_{By} = 0$, $P \neq 0$, con lo que se reducen a

$$B_x v'' + Pv = 0, \quad B_y u'' + Pu = 0, \quad R_a \phi''' - (R_s + \bar{K}) \phi' = 0$$

Se demuestra que $\bar{K} = -P\bar{r}_0^2$, donde $\bar{r}_0 = \sqrt{(I_x + I_y)/A}$ es el radio polar de giro de la sección.

Derivando dos veces cada una de las dos primeras ecuaciones y una vez la tercera, siempre con respecto a z , surti-

Ótengase B_x, B_y, R_a y R_s por sus valores y efectuando algunas manipulaciones, las ecuaciones de equilibrio toman la forma

$$\bar{\sigma}_p = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2Cc^2} \right] \sigma_y}{CS} = \frac{\left(1 - \frac{77^2}{2 \times 176^2} \right) 2530}{1.867} = 1102 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{En la tabla 4.2.})$$

para $L/r = 77$ se lee directamente $\bar{\sigma}_p = 1103 \text{ kg/cm}^2$

La capacidad de carga de trabajo de la columna es

$$P_T = A \bar{\sigma}_p = 65.33 \times 1.103 = 72.5 \text{ Ton}$$

Caso 2. Utilizando las mismas ecuaciones que en el caso 1 se obtiene: $CS = 1.837$, $\bar{\sigma}_p = 1211 \text{ kg/cm}^2$, $P_T = 79.6 \text{ Ton}$.

Caso 3. De la ec. 4.78 para pandeo elástico:

$$\bar{\sigma}_p = 10476000 / 162^2 = 399 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{En la tabla 4.2 se obtiene } \bar{\sigma}_p = 400 \text{ kg/cm}^2)$$

Capacidad de carga de trabajo $P_T = 65.33 \times 0.399 = 26.2 \text{ Ton}$.

Caso 4. Se utilizan las mismas ecuaciones que en los casos 1 y 2 y se llega a los resultados siguientes:

$$CS = 1.808, \quad \bar{\sigma}_p = 1238 \text{ kg/cm}^2, \quad P_T = 81.4 \text{ Ton}.$$

La columna empotrada en ambos extremos, caso 4, resiste 3.23 veces más que la pieza en voladizo, caso 3 (si las dos columnas se pandearan en el intervalo elástico y se consideraran los coeficientes K teóricos, la primera tendría una capacidad de carga 16 veces mayor que la segunda, para el comportamiento inelástico reduce su esfuerzo crítico de 13606 kg/cm^2 , valor dado por la fórmula de Euler, a 2323 kg/cm^2 , esfuerzo crítico real).

$$v^{iv} + \frac{P}{EI_x} v'' = 0 \quad (28)$$

$$u^{iv} + \frac{P}{EI_y} u'' = 0 \quad (29)$$

$$\phi^{iv} + \frac{P r_0^2 - GK}{EC_a} \phi'' = 0 \quad (30)$$

40

A diferencia de las ecuaciones (25) a (27), de las que provienen, estas ecuaciones son independientes entre sí, lo que indica que una barra comprimida doblemente simétrica puede mantenerse en equilibrio en la configuración deformada descrita por cualquiera de ellas. Hay, por consiguiente, tres formas de pandeo independientes entre sí (por flexión alrededor de uno cualquiera de los ejes principales y por torsión), y tres cargas críticas.

Si las secciones transversales de la columna no tienen ningún eje de simetría las ecuaciones de equilibrio no son independientes; en cada una de las dos primeras aparecen u ó v y ϕ , y en la tercera los tres desplazamientos; este tipo de columnas no se pandea por flexión o torsión puras, sino por una combinación de ambas.

Si las secciones tienen un eje de simetría una solución corresponde a pandeo por flexión pura y las otras dos a pandeo por flexo-torsión.

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES (28) A (30)

Como las tres tienen la misma forma, sus soluciones son semejantes.

La de (28) es

$$v = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI_x}} z + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI_x}} z + C_3 z + C_4 \quad (31)$$

$$v = C_1 \sin \lambda_x z + C_2 \cos \lambda_x z + C_3 z + C_4 \quad (32)$$

EJEMPLO 4.6 Una nave industrial está formada por marcos rígidos con las características indicadas en la fig. 4.49. Escoger un perfil IPE de acero A36 para las columnas, ref. 4.46, suponiendo que trabajen en compresión axial exclusivamente y que deban resistir una carga de 35 Tm. Utilicando las especificaciones AISC 1969.

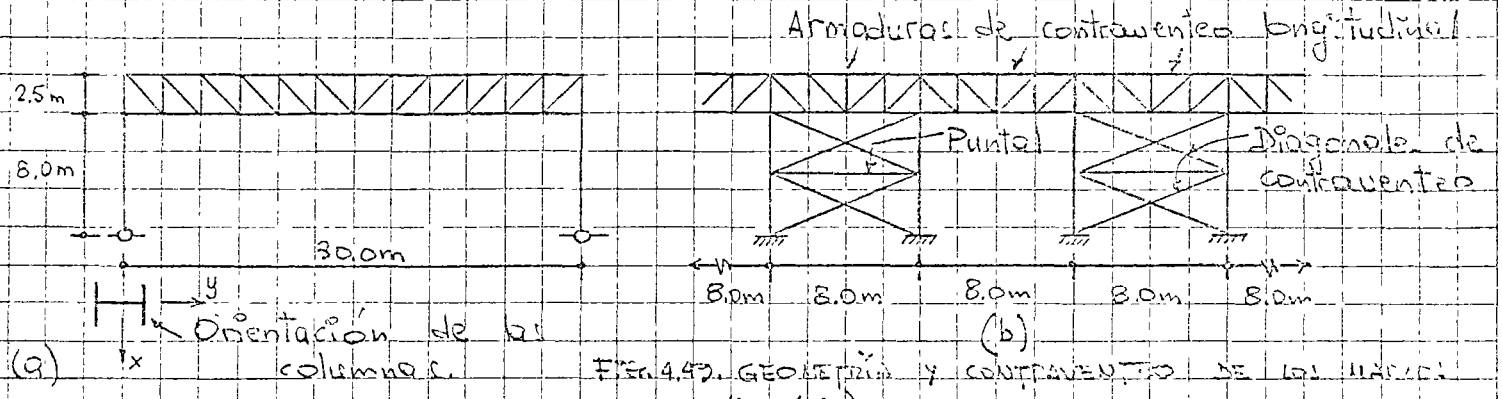
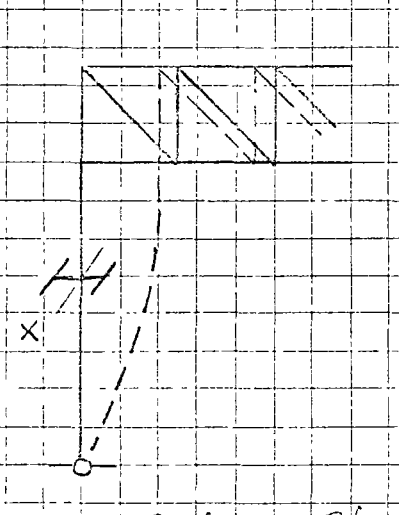


FIG. 4.49. GEOMETRÍA Y CONTRAVIENTO DE LOS MARCOS (Ej. 4.6)

1. PANDEO ALREDEDOR DEL EJE X



La columna está articulada en la base y ligada en el extremo superior a una armadura de rígidos varias veces mayor que la suya propia, de manera que se encuentra en el caso c) de la Fig. 4.12, para el que se recomienda: $K=1.2$.

Se revisará una sección IPE 25.4x14.6cm (10"x5 7/8")
 $\times 31.2 \text{ kg/m}$ ($A = 39.93 \text{ cm}^2$, $r_x = 10.52 \text{ cm}$).

Configuración inicial.
 Configuración después del pandeo.

$Kl/r_x = 1.2 \times 800 / 10.52 = 91 \therefore \sigma_p = 0.91 \text{ kg/cm}^2$ (Tabla 4.2)

Capacidad de carga de trabajo de la columna:

$P_f = 39.93 \times 0.931 = 37.1 \text{ Tm} > 35.0$

FIG. 4.50. PANDEO ALREDEDOR DEL EJE X.

2. PANDEO ALREDEDOR DEL EJE Y (Tabla 4.5). La longitud libre de

pandeo se reduce a 4.0m, pues la sección media de la columna está fija lateralmente. El tramo inferior puede considerarse empotrado

donde $\lambda_x^2 = P/EI_x$.

○ Sustituyendo cuatro condiciones de borde en (22) se obtienen cuatro ecuaciones lineales y homogéneas simultáneas en las que las únicas incógnitas son C_1 a C_4 . Si los extremos de la barra pueden abalanzarse y girar sin restricciones alrededor de x y y , pero no pueden girar alrededor de z ni desplazarse linealmente en las direcciones x y y , las condiciones de borde son

$$u = v = \phi = u'' = v'' = \phi'' = 0, \text{ para } z = 0, z = L.$$

Aplicando a (22) las condiciones $u(0) = v(0) = u(L) = v(L) = 0$, se

obtiene

$$u(0) = 0 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) + C_3(0) + C_4$$

$$u''(0) = 0 = -C_1 \lambda_x^2 \sin(0) - C_2 \lambda_x^2 \cos(0)$$

$$u(L) = 0 = C_1 \sin \lambda_x L + C_2 \cos \lambda_x L + C_3 L + C_4$$

$$u''(L) = 0 = -C_1 \lambda_x^2 \sin \lambda_x L - C_2 \lambda_x^2 \cos \lambda_x L$$

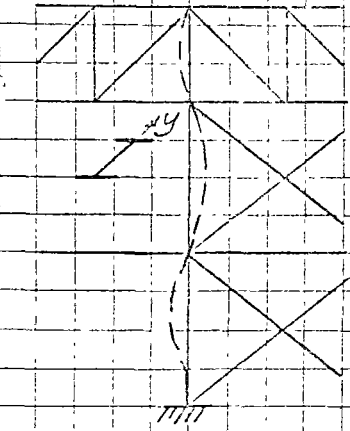
Este sistema de ecuaciones se satisface si $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, lo que indica que es posible una configuración recta en equilibrio para cualquier valor de P , o si se anula el determinante de los coeficientes de las constantes.

0	1	0	1	$= -L \lambda_x^4 \sin \lambda_x L = 0 \quad (33)$ Ec. característica
0	$-\lambda_x^2$	0	0	
$\sin \lambda_x L$	$\cos \lambda_x L$	L	1	
$-\lambda_x^2 \sin \lambda_x L$	$-\lambda_x^2 \cos \lambda_x L$	0	0	

— Determinante característico —

○ Como $L \lambda_x^4 \neq 0$, la condición de pandeo es

$$\sin \lambda_x L = 0 \quad (34)$$



en la base y articulado en su otro extremo, y el superior biarticulado. (véase la configuración deformada de la columna en la fig. 4.51). En esas condiciones el tramo crítico es el superior, en el que $K=1.0$. (Los desplazamientos lineales están impedidos por los contraventados colocados en las paredes de la nave, Fig. 4.49 b).

— Configuración inicial.
 --- Configuración después del pandeo

El radio de giro alrededor de y del perfil ensayado en 1 es $r_y = 3.17$ cm, luego $KL/r_y = 10 \times 400 / 3.17 = 126$, $\sigma_p = 663$ kg/cm², $P_f = 26.4$ Ton < 35.0

Fig. 4.51. PANDEO ALREDEDOR DEL EJE y

Si quiere emplearse la IPE 25.4 x 14.6 x 31.3 determinada en 1 debe aumentarse a dos el número de puntos soportados lateralmente.

Si esto no es factible o conveniente, se usará un perfil mayor, por ejemplo una IPE 25.4 x 14.6 x 37.3 kg/m ($A = 47.42$ cm², $r_y = 3.32$ cm).

$KL/r_y = 10 \times 400 / 3.32 = 120$, $\sigma_p = 723$ kg/cm², $P_f = 34.3$ Ton ≈ 35.0

PROBLEMAS.

PROBLEMA 4.1. Diseñese una columna de 6m de longitud empotrada en un extremo, articulada en el otro y sin ningún soporte lateral intermedio, utilizando perfiles IPE de acero A36 ref. 4.46, y aplicando las especificaciones AISI de 1962, ^{para perfiles con una sola línea de simetría} ^{de 50 Ton} con las fórmulas empíricas del inciso 4.12, y comentando los resultados.

PROBLEMA 4.2. Determinar el perfil que debe emplearse en la cuarta sección de la columna del ejemplo 4.5 para su tramo una resistencia $P_c = 10$ Ton. Se obtiene en su ejemplo, utilizando un DCS simple de carbono de una T. En ambos casos debe usarse acero A36 y tomar los perfiles de la ref. 4.46.

PROBLEMA 4.3. Escójase el perfil IPE más ligero de los listados en la ref. 4.46 que pueda utilizarse en las columnas del ejemplo 4.6, si la fuerza axial es de 90 Ton.

y el estado de bifurcación del equilibrio se presenta cuando

$$\lambda_x L = \sqrt{\frac{P}{EI_x}} L = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (35)$$

o sea cuando P adquiere alguno de los valores característicos dados por

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{L^2} \quad (36)$$

La carga crítica menor es la que suele tener interés práctico:

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \quad (37)$$

P_{crx} es la carga crítica de Euler para pandeo por flexión alrededor del eje x .

Las cargas críticas correspondientes a las otras dos formas de pandeo son

$$P_{cry} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (38); \quad P_{crz} = \frac{1}{\Gamma_0^2} \left(GK + \frac{\pi^2 EC_w}{L^2} \right) \quad (39)$$

La carga crítica menor define la capacidad de carga de la columna. En secciones de acero laminadas en caliente o formadas por placas soldadas, I ó \square , P_{crx} ó P_{cry} es siempre menor que P_{crz} (ó, en el peor de los casos, muy cercana a ella), y su resistencia a la compresión se determina con la teoría de Euler. No sucede siempre lo mismo, sin embargo, en secciones de aluminio o de lámina delgada de acero doblada en frío, y en algunas secciones especiales como T , en las que puede ser necesario calcular P_{crz} y compararlo con la menor de las cargas críticas de Euler.

EJEMPLO. Columna prismática, doblemente simétrica, sus extremos:

pueden girar libremente alrededor del eje de mayor momento de inercia y están empotrados respecto al otro eje principal; el extremo superior puede abalarse libremente y el inferior no; ninguno de ellos puede girar alrededor de Z ni desplazarse linealmente en las direcciones X y Y.

Solución:

En forma adimensional:

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$$

$$\frac{P_{crx} GJ}{\pi^2 P_y E} = \frac{1}{(L/r_y)^2}$$

$$P_{cry} = \frac{4\pi^2 EI_y}{L^2}$$

$$\frac{P_{cry} GJ}{\pi^2 P_x E} = \frac{4(r_y/r_x)^2}{(L/r_x)^2}$$

$$P_{crz} = \frac{GK + 20.19 EC_a / L^2}{\bar{I}_0^2}$$

$$\frac{P_{crz} GJ}{\pi^2 P_y E} = \left[\frac{GK}{\pi^2 E (I_x + I_y)} \right] \left[1 + \frac{\pi^2 EC_a}{GK r_x^2 (0.699 L / r_x)^2} \right]$$

Las ecuaciones del segundo grupo se obtienen dividiendo los dos miembros de cada una de las del primero entre $P_y = AG_y$ y teniendo en cuenta que $I_x = Ar_x^2$, $I_y = Ar_y^2$, $\bar{I}_0^2 = (I_x + I_y) / A$.

Comparando gráficamente los resultados se ve que el diseño queda regido por la menor de las cargas críticas de Euler, excepto en el tercer perfil, que de todos modos no se usará nunca como columna.

EJEMPLO. Columna de sección transversal en forma de cruz, los

extremos pueden abalarse y girar libremente alrededor de X y Y pero no alrededor de Z, ni desplazarse según X ó Y.

$$\frac{P_{crx} GJ}{\pi^2 P_y E} = \frac{1}{(L/r_y)^2}$$

P_{crz} es independiente de la longitud de la columna.

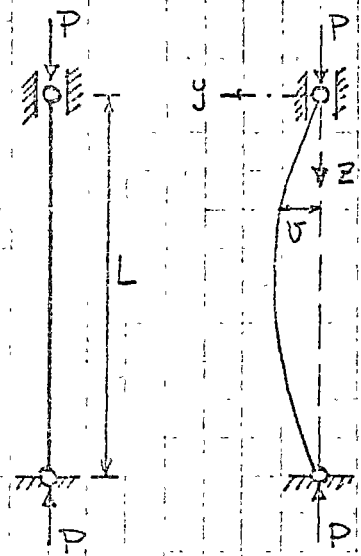
$$\frac{P_{cry} GJ}{\pi^2 P_x E} = \frac{4}{(L/r_x)^2}$$

En este caso sí es crítico el pandeo por torsión para columnas de relaciones de esbitez de entre 10 y 15. Sin embargo, este fenómeno es de menor importancia que lo que parece, pues los resultados deben corregirse en muchos casos por inestabilidad.

$$\frac{P_{crz} GJ}{\pi^2 P_y E} = \frac{GK}{\pi^2 E (I_x + I_y)}$$

PANDEO POR FLEXIÓN

PANDEO ELÁSTICO



La columna es esbelta, de sección transversal constante y con dos ejes de simetría perfectamente recta, y está hecha con un material homogéneo y que sigue la ley de Hooke.

Al sacarla de su configuración recta las fuerzas exteriores ocasionan momentos Pv , que tienden a aumentar la curvatura del eje de la columna, y en sus

secciones transversales aparecen momentos interiores EI/R , que tratan de hacerla volver a la forma recta original.

Puede presentarse cualquiera de los tres casos siguientes, dependiendo de la magnitud de la fuerza P .

Si P es pequeña,

$$Pv < EI/R \quad \text{Eq. Estable}$$

Si P es grande,

$$Pv > EI/R \quad \text{Eq. Inestable}$$

Para un valor intermedio de P ,

$$Pv = EI/R \quad \text{Eq. Indiferente}$$

Pv es función de la geometría del eje deformado y de la fuerza P , mientras que el momento resistente interior depende únicamente de la geometría del eje deformado, para una columna con rigidez EI dada.

Pandeo e inestabilidad.

DETERMINACIÓN DE LA CARGA CRÍTICA

Por la geometría de sus secciones transversales, o por la existencia de restricciones exteriores, la columna se pandea conservándose en uno de sus planos de simetría.

Ecuación de equilibrio:

$\underbrace{-P\delta}_{\text{Mext.}} = \underbrace{EI_x \delta}_{\text{Mint.}}$ Si los desplazamientos son pequeños, $\frac{1}{2} \delta \approx \frac{d^2\delta}{dz^2} = \delta''$, y la ecuación es

$$EI_x \delta'' + P\delta = 0 \quad (1)$$

Es la primera ecuación del caso general. Su solución es la carga que puede mantener a la columna en equilibrio en una configuración ligeramente deformada, es decir, la CARGA CRÍTICA DE PANDEO ELÁSTICO o CARGA CRÍTICA DE EULER:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$$

En forma más general,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2)$$

donde I es el momento de inercia mínimo de la sección transversal constante de la columna.

La ecuación del eje deformado es

$$\delta = C_1 \sin \frac{\pi z}{L}$$

donde C_1 es una constante arbitraria, se conoce la forma del eje, pero no la amplitud de los desplazamientos.

DESPLAZAMIENTOS LATERALES GRANDES

Ecuación de equilibrio en el instante en que se produce el pandeo:

$$EI \frac{d^2\delta/dz^2}{\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} + P\delta = 0 \quad (3)$$

Resolviéndola se obtiene la deflexión máxima, que depende de P es determinada.

$$U_{max} = \frac{2L}{\pi} \sqrt{\frac{P_c}{P} \left(\sqrt{\frac{P}{P_c}} - 1 \right)} \quad (4)$$

P_c es la carga crítica de Euler y P la fuerza axial en un instante dado.

Si $P < P_c$, U_{max} es imaginario: la columna permanece recta. Cuando $P = P_c$, $U_{max} = 0$, y para $P > P_c$ se presentan desplazamientos laterales de magnitud definida y la columna es aún estable, pues se requieren incrementos en P para que crezcan los desplazamientos. Sin embargo, incrementos muy pequeños de la carga por encima de P_c ocasionan aumentos muy grandes en los esfuerzos, que pronto se salen del intervalo elástico, con lo que la teoría deja de ser aplicable.

Esfuerzo máximo en la sección media de la columna pandeada:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{P U_{max}}{I} C = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{C}{r^2} U_{max} \right)$$

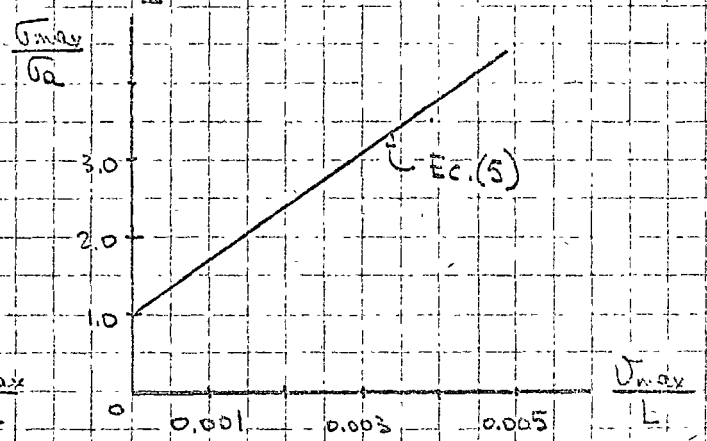
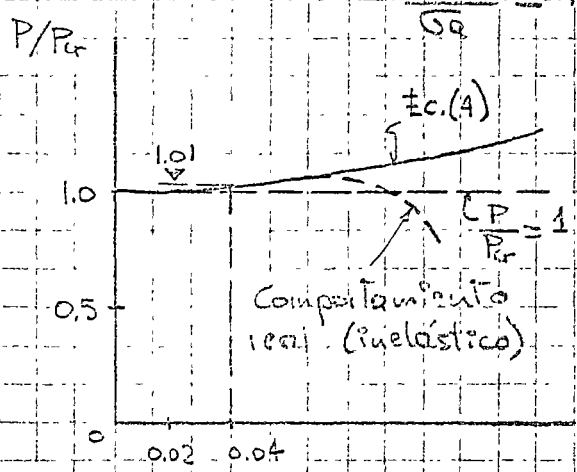
$\frac{P}{A} = \sigma_a$, luego $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_a} = 1 + \frac{C}{r^2} U_{max}$

Si la columna tiene una relación de esbeltez de 100, por ejemplo,

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_a} = 1 + \frac{10000 C}{L} \frac{U_{max}}{L}$$

En una I 15" L.V. ($r_y = 2.75$ cm, $L = 100 r = 275$ cm, $C = 38.1/2 = 19.05$ cm),

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_a} = 1 + 693 \frac{U_{max}}{L} \quad (5)$$



Incrementos muy pequeños de la carga por encima de la crítica ocasionan deformaciones laterales muy grandes y esfuerzos normales inadmisibles (por ejemplo, en la I⁵ Liv con $L/r=100$, una carga 1.01 P ocasiona un desplazamiento máximo igual a 0.10 L, y un esfuerzo normal máximo teórico igual a 28.72 veces el medido).

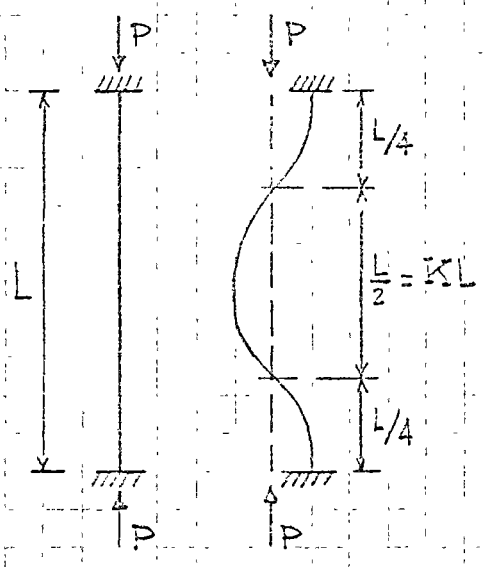
ESFUERZO CRÍTICO

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}; \quad \frac{P_{cr}}{A} = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \frac{I}{A r^2}}{L^2} \therefore \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (6)$$

L/r es la RELACIÓN DE ESBELTEZ de la columna.

LONGITUD EFECTIVA.

La fórmula de Euler debe modificarse para aplicarla a columnas que no estén articuladas en ambos extremos.



Por ejemplo, si los extremos están empotrados aparecen en ellos momentos reactivos que impiden su rotación y que, junto con las fuerzas axiales, son equivalentes a cargas P excéntricas. El tramo central de la columna, de longitud $L/2$, se encuentra en las mismas condiciones que si estuviera doblemente articulada,

y puede escribirse

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

utilizando esa longitud en la fórmula de Euler

En general, la fórmula de Euler es aplicable a columnas con cualquier condición de apoyo, sustituyendo en ella L por la

longitud del tramo de columna que está en condiciones análogas a la doblemente articulada, y puede escribirse

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (7)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (8)$$

KL es la LONGITUD EFECTIVA de la columna. K vale 1.0 para extremos articulados y 1/2 para extremos empotrados, y tiene valores intermedios para restricciones elásticas comprendidas entre esos límites. Si un extremo de la columna puede desplazarse linealmente respecto al otro, K es mayor que 1.0.

A la columna doblemente articulada se le da el nombre de CASO FUNDAMENTAL.

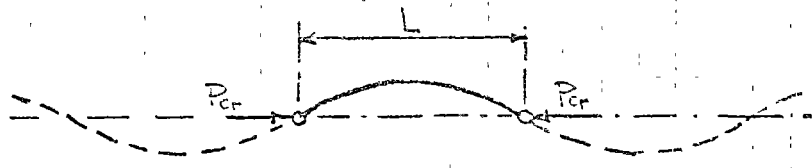
COLUMNAS CON OTRAS CONDICIONES DE APOYO

12

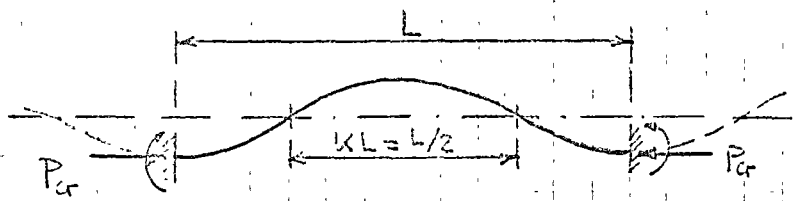
Fig. C8(b)

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
La forma de la columna flexionada, marcada - con línea punteada						
Valor teórico de "K"	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valor de diseño recomendado cuando se aprox. - a las condiciones ideales	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
Condiciones de apoyo						
	Rotación y translación fija Rotación libre y translación fija Rotación fija y translación libre Rotación libre y translación libre.					

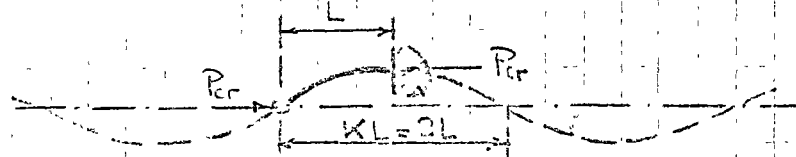
Todas las configuraciones de la figura anterior, y otras que no aparecen en ella, quedan representadas por parte de la ecuación $v = C \sin(n\pi/L)z$. Utilizándola, y haciendo uso del concepto de longitud efectiva, pueden calcularse los valores críticos correspondientes.



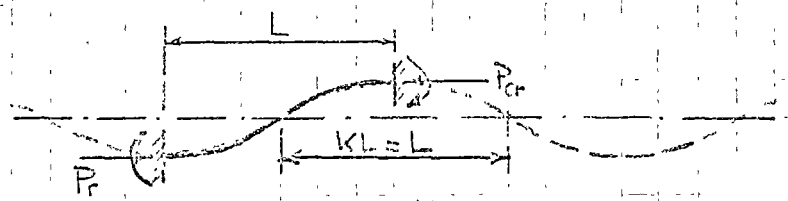
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



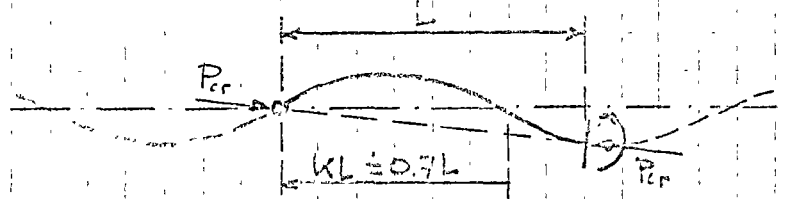
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} = \frac{2.05\pi^2 EI}{L^2}$$

PANDEO INELÁSTICO

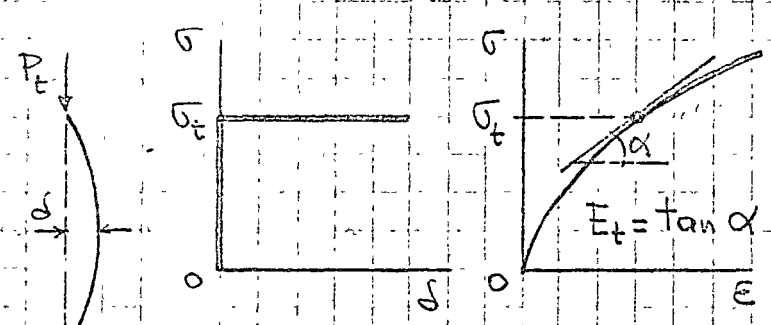
La fórmula de Euler es válida únicamente para relaciones de esbeltez o las que corresponden a tensiones críticas menores que σ_{cr} . Su límite de aplicación es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{E}{(\lambda/r)^2} = \sigma_{cr}^0, \quad \lambda/r \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}^0}} \quad (9)$$

Para relaciones de esbeltez menores que las dadas por (9) el pandeo se produce en el intervalo inelástico.

TEORÍA DEL MÓDULO TANGENTE (Engesser, 1889).

Si el esfuerzo crítico de pandeo $\sigma_c = P_c/A$ es mayor que σ_{LP} , es posible una configuración deformada en equilibrio indifferente controlada por el módulo tangente E_t .



Ecuación diferencial de la elástica:

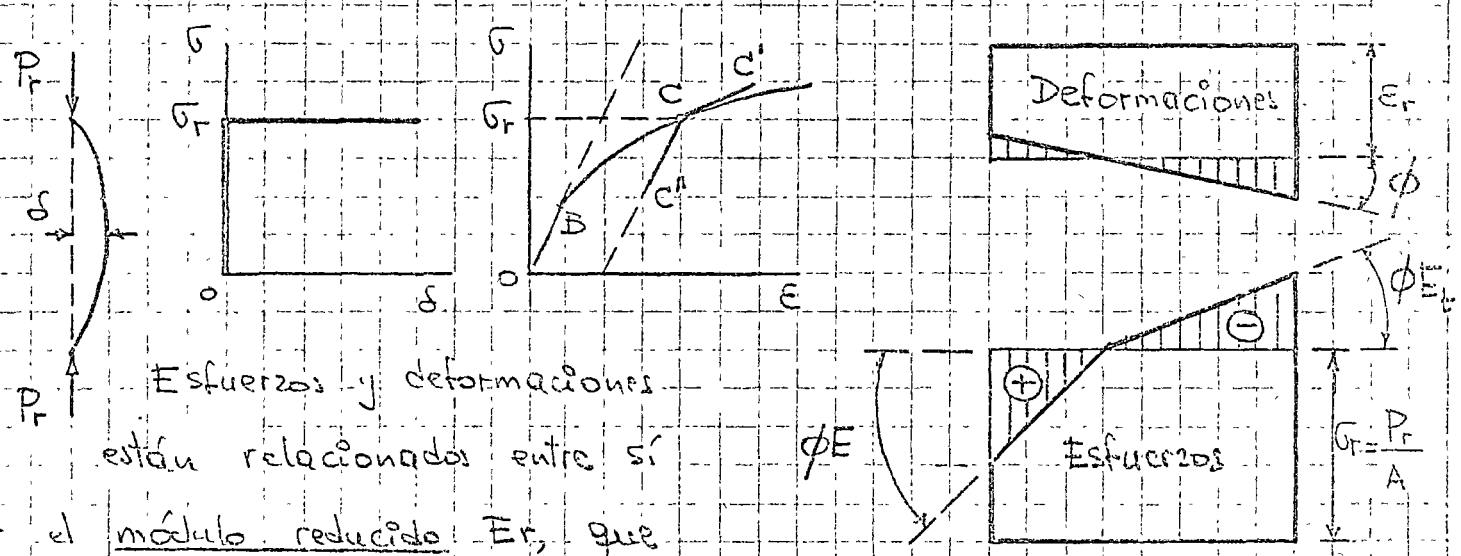
$$v'' + \frac{P_t}{E_t I} v = 0$$
 Carga y esfuerzo.

críticos, caso fundamental:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (10); \quad \sigma_c = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \quad (11)$$

TEORÍA DEL MÓDULO REDUCIDO (Considère, 1889; Jasinsky, 1895; Engesser, 1895).

Al deformarse la columna cuando se inicia el pandeo, aumentan los esfuerzos de compresión en el lado cóncavo y disminuyen en el convexo; la relación entre esfuerzos y deformaciones está regida por el módulo tangente en el lado cóncavo y por el de elasticidad ordinaria en el convexo.



Esfuerzos y deformaciones están relacionados entre sí por el módulo reducido E_r , que es función de E , E_t y la geometría de la sección.

Diagram showing the relationship between deformation ϕE and stress $\sigma = \frac{P_r}{A}$.

Si se supone que la columna permanece recta hasta que $\sigma = \sigma_r$, la ecuación diferencial del eje deformado es

$$v'' + \frac{P_r}{E_r I} v = 0$$

$$y \quad P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (12), \quad \sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \quad (13)$$

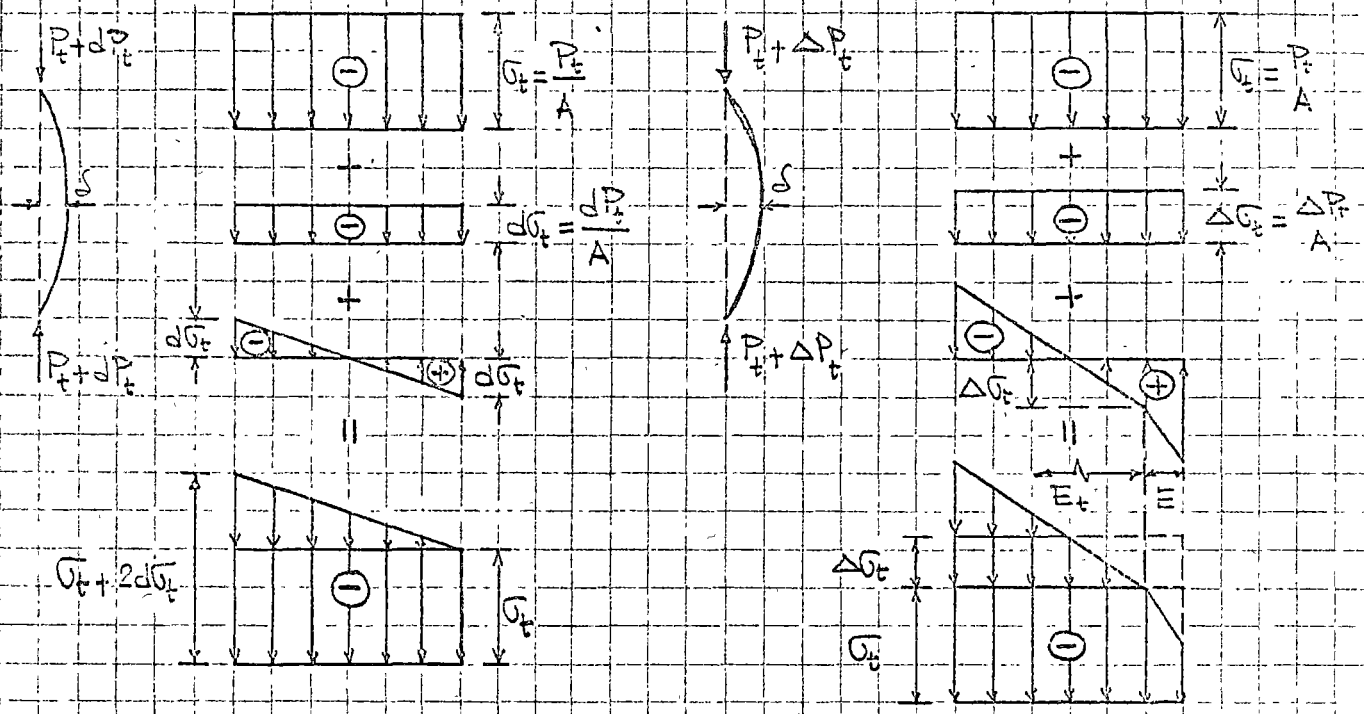
E_r es mayor que E_t , luego $P_r > P_t$.

La teoría del módulo reducido es, aparentemente, más precisa que la del módulo tangente; sin embargo, los resultados experimentales están más cerca de los predichos por ésta que por aquella.

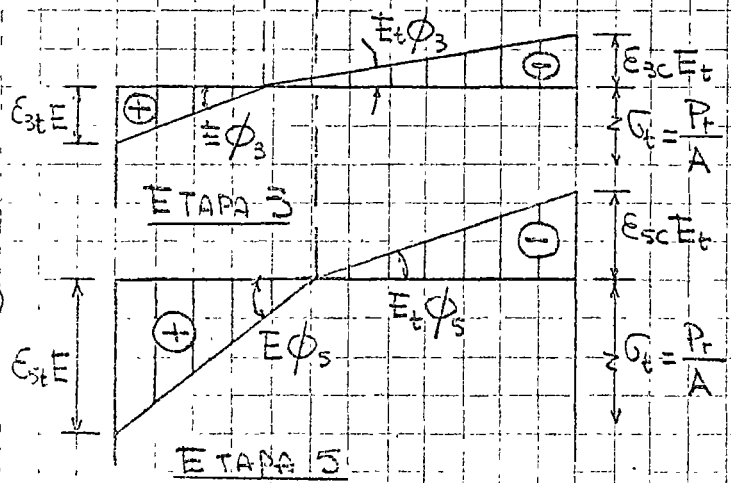
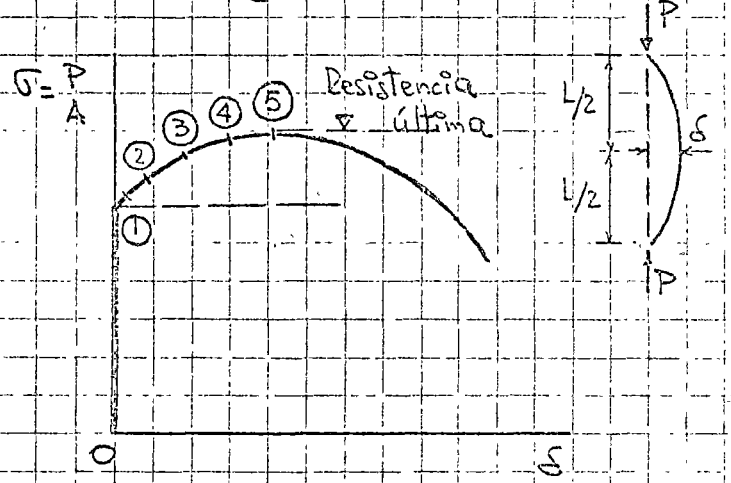
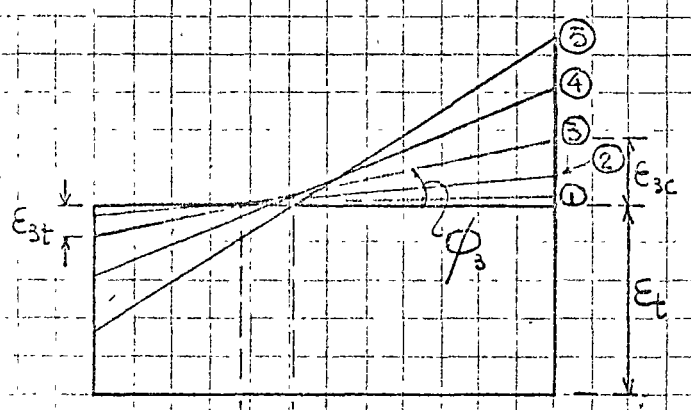
LA CONTRIBUCIÓN DE SPANLEY. (1947)

Al utilizar la teoría del módulo tangente se está suponiendo que cuando la columna pasa de la forma recta a la configuración deformada adyacente no disminuyen los esfuerzos en los puntos situados en su lado convexo, lo que no es posible más que si los desplazamientos se presentan acompañados por un incremento de la carga axial, que compensa la tendencia a que disminuyan los esfuerzos en la zona convexa. Por consiguiente, P_t no es la carga máxima que puede soportar la columna, pero sí la más grande que puede resistir una columna inicialmente recta sin deformarse lateralmente.

La columna empieza a deformarse, sin que haya disminución de esfuerzos en ningún punto, en cuanto la carga sobrepasa en una cantidad infinitamente pequeña el valor P_t . Sin embargo, esto es una fase instantánea, ya que inmediatamente después de la iniciación de la flexión lateral empieza a disminuir los esfuerzos en el lado convexo.



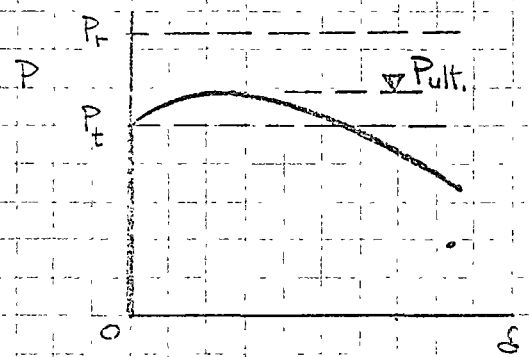
En estas figuras se representan los esfuerzos en la columna recta, las compresiones adicionales debidas al incremento de la fuerza axial y a la flexión, y los esfuerzos finales, para un incremento infinitamente pequeño no arriba de P_t y para otro un poco mayor.



El equilibrio se hace indifere-
 rente cuando se igualan los
 volúmenes de esfuerzos de tensión
 y compresión posteriores a la
 iniciación del pandeo (RESISTEN-
 CIA ÚLTIMA). A partir de ese

instante el equilibrio solo es posible si disminuye la fuerza axial.

Shanley demostró que la carga correspondiente al módulo tangente es un límite inferior de la resistencia máxima de las columnas, y la máxima que puede soportar una columna sin desplazarse lateralmente. La carga predicha por la teoría del módulo reducido es un límite superior, que no se alcanza nunca.



Los resultados obtenidos en pruebas de laboratorio están, en general, mucho mas cerca de P_t que de P_r , por lo que la carga crítica predicha por la teoría del módulo tangente suele considerarse,

para fines prácticos de diseño, como la resistencia última de las columnas.

OBTENCIÓN DE CURVAS PARA EL DISEÑO DE COLUMNAS

CARGAS AXIALMENTE

El comportamiento de una columna cargada axialmente queda descrito por las dos ecuaciones siguientes:

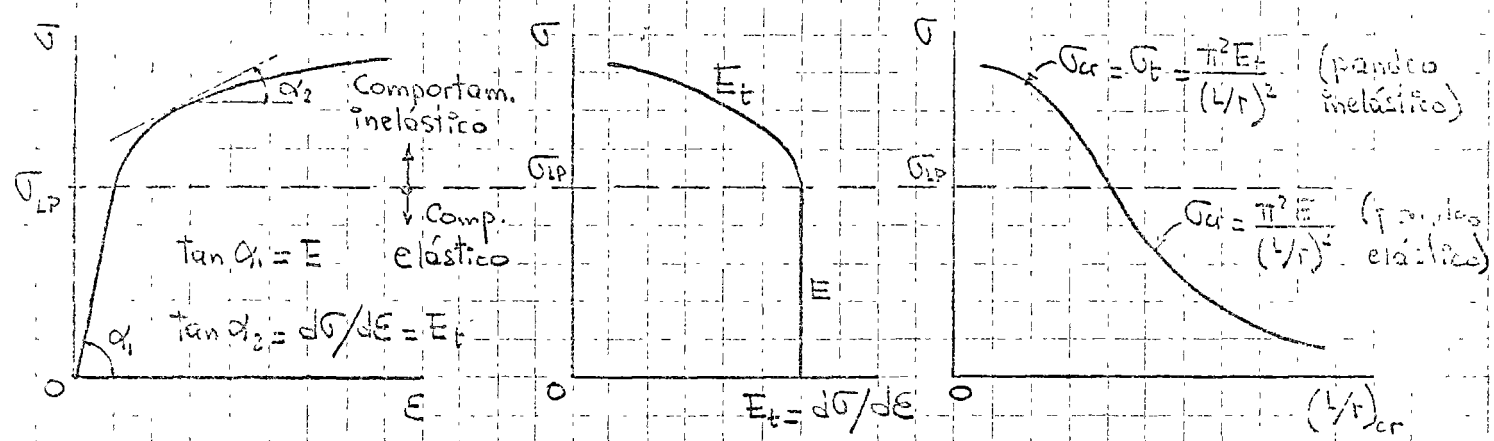
PAÑDEO ELÁSTICO: $\sigma_c = \pi^2 E / (L/r)^2$ (6)

PAÑDEO INELÁSTICO: $\sigma_c = \pi^2 E_t / (L/r)^2$ (11)

E_t es la pendiente $d\sigma/d\epsilon$ de la curva esfuerzo-deformación en el punto correspondiente al esfuerzo crítico σ_c .

La eq. (6) proporciona directamente los esfuerzos críticos de pandeo elástico de columnas con diferentes relaciones de esbeltez; no así (11), pues como E_t es función de σ_c , para calcular el esfuerzo crítico hay que proceder por tanteos.

El problema puede resolverse trazando los puntos trazando una curva que relacione los esfuerzos críticos con las relaciones de esbeltez, lo que se obtiene partiendo del diagrama $\sigma-\epsilon$ del material de la columna, determinado experimentalmente, y utilizando la ec. (11) (la curva $\sigma-\epsilon$ correspondiente a esfuerzos de compresión)



Las pendientes en los distintos puntos de la primera curva proporcionan la información necesaria para trazar la segunda.

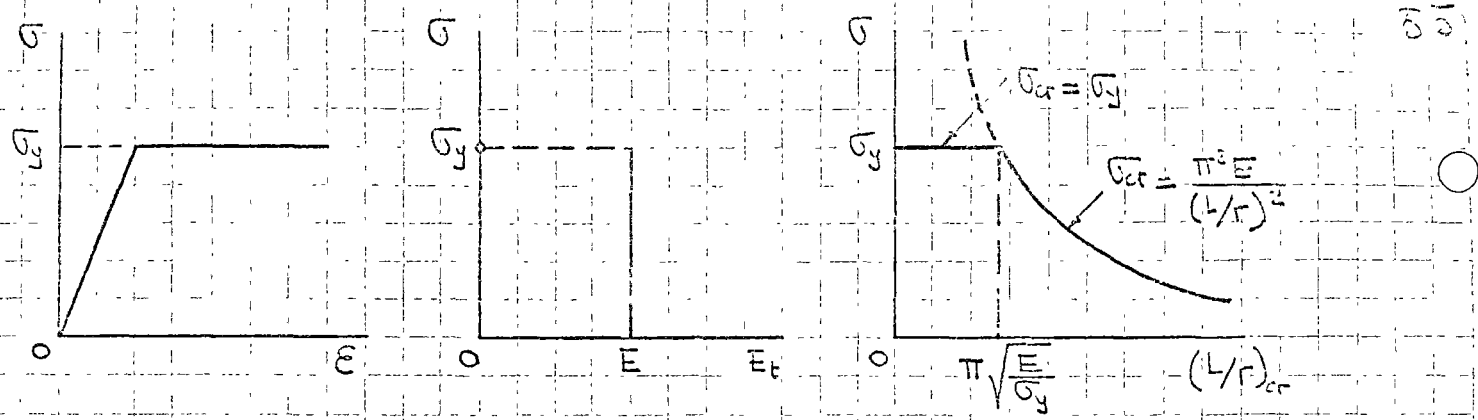
Despejando L/r de (11) se obtiene

$$\left(\frac{L}{r}\right)_{cr} = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_T}} \quad (12)$$

Llevarlo a esta ecuación pares de valores de E_t y σ_T obtenidos de la segunda curva se obtiene la información necesaria para trazar la tercera, que es la relación $\sigma_{cr} - (L/r)_{cr}$ buscada.

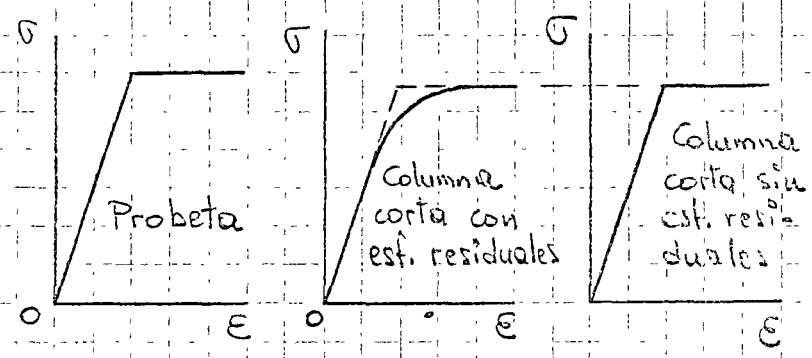
Curvas de este tipo se han utilizado desde hace años para el diseño de piezas comprimidas de aluminio, pero el empleo directo de las teorías de Euler y del módulo tangente a columnas de acero estructural, partiendo de la curva $\sigma-\epsilon$ obtenida por medio de

un espécimen pequeño, lleva a resultados incorrectos, que no concuerdan con los obtenidos experimentalmente.



$L/r = \pi\sqrt{E/\sigma_y}$ es la relación de esbeltez que separa el pandeo elástico del inelástico; si L/r es mayor que ese límite, es válida la fórmula de Euler, y si es menor, la columna se comporta elásticamente hasta que $\sigma = \sigma_y$; en ese instante E_t se reduce a cero, σ_{cr} se anula y la pieza se pandea.

La resistencia real de columnas intermedias es menor que la predicha por la curva que se acaba de obtener; esto, que se achaca a imperfecciones en las columnas y excentricidades en las cargas, se debe principalmente a la existencia de esfuerzos residuales en los perfiles laminados de acero estructural.

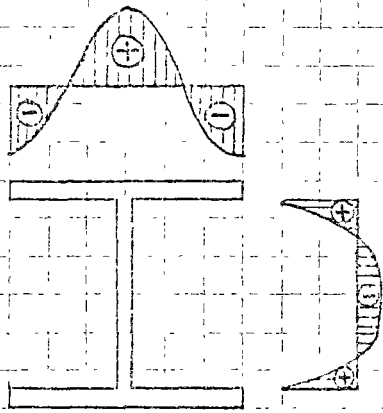


Sin embargo, aún utilizando la curva σ - ϵ para una columna corta con esfuerzos residuales, la teoría del módulo tangente

no es aplicable directamente al acero estructural, ya que éste se comporta como un material no uniforme al dejar de trabajar las zonas que entran en la zona plástica cuando se superponen los esfuerzos ocasionados por la carga exterior con los residuales.

CAPACIDAD DE CARGA AXIAL DE LAS COLUMNAS DE ACERO ESTRUCTURAL.

Los esfuerzos residuales se forman en los miembros de acero estructural como un resultado de deformaciones plásticas, ocasionadas por el enfriamiento no uniforme desde la temperatura de laminación hasta la ambiente. También se forman como un resultado de operaciones efectuadas durante la fabricación, como el enderezado de los perfiles, en frío o en caliente, y la soldadura.

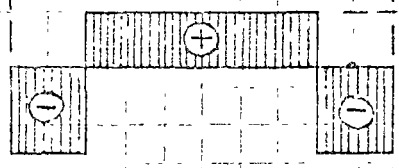
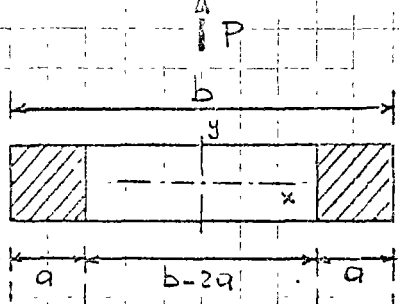
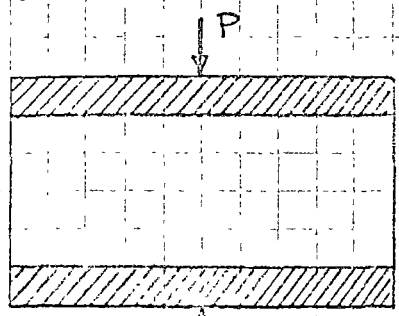


Las partes que se enfrían antes quedan, en general, sometidas a tensión, y las que se enfrían al final, a compresión.

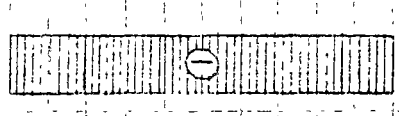
Las compresiones en los extremos de los patines de perfiles laminados tienen un valor medio de unos 900 kg/cm^2 , y son prácticamente independientes del esfuerzo de fluencia del acero. En perfiles formados por placas soldadas son, en general, más elevados.

El efecto principal de los esfuerzos residuales sobre la relación esfuerzo de compresión-deformación del acero consiste en bajar su límite de proporcionalidad. Este efecto se ilustra estudiando el comportamiento de una columna corta de sección transversal rectangular, en la que existen los esfuerzos mostrados en la figura, sobre la que se aplica una fuerza axial P de intensidad creciente,

que ocasiona esfuerzos uniformemente distribuidos. Suponemos que cada fibra longitudinal tiene la gráfica $\sigma-\epsilon$ idealizada del acero estructural sin esfuerzos residuales.

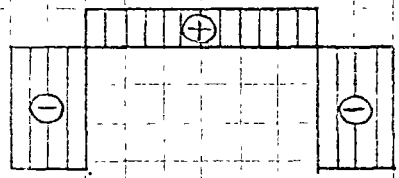


Est. residuales supuestos



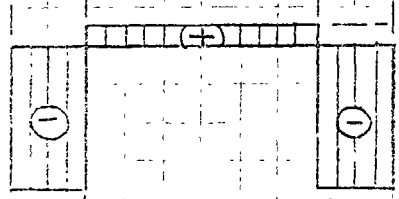
Est. producidos por P

(1)



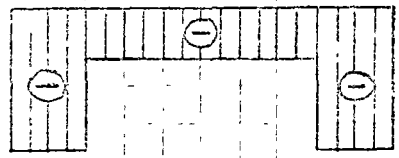
$$\sigma_{rc} < \sigma_y$$

(2)



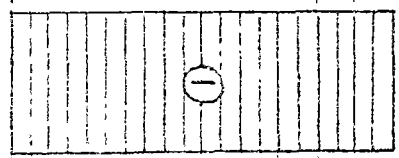
$$\sigma_r + \sigma_{rc} - \sigma_y$$

(3)



$$\sigma_y$$

(4)



$$\sigma_y$$

Como el sistema de fuerzas interiores producidas por los esfuerzos residuales está en equilibrio,

$$\sigma_{rc} \cdot 2ah = \sigma_r (b-2a)h$$

$$\therefore \sigma_r = \sigma_{rc} \frac{2a}{b-2a}$$

Al superponerse los esfuerzos producidos por la carga exterior con los residuales, disminuyen los totales en la porción central, y aumentan en las laterales. La columna se comporta elásticamente hasta que el esfuerzo producido por la carga exterior, sumado con el residual de compresión, alcanza el valor σ_y en las zonas laterales; a partir de ese instante, las cargas adicionales son resistidas por la porción central exclusivamente, pues las laterales se deforman plásticamente sin incremento de fuerza.

La carga exterior puede seguir aumentando hasta que se plastifica también la porción central.

La fuerza exterior que ocasiona los esfuerzos de la etapa (2) es

$$P_2 = A(\sigma_y - \sigma_{rc})$$

La carga adicional para llegar a la etapa (4) (trabaja sólo la porción central) es

$$\Delta P = (b-2a)h(\sigma_y + \sigma_{rt} + \sigma_{rc} - \sigma_y) = (b-2a)h(\sigma_{rt} + \sigma_{rc})$$

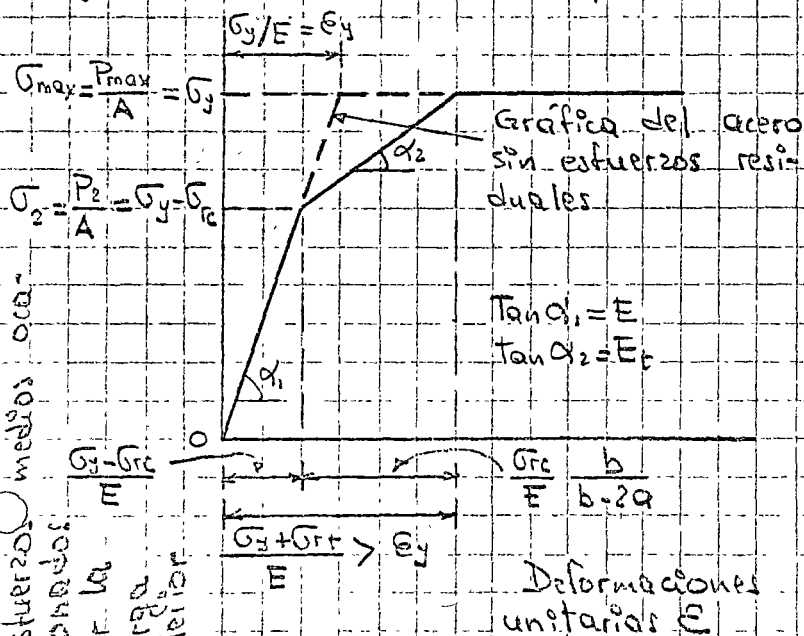
La fuerza axial que ocasiona la plastificación total de la sección es

$$P_{max} = P_2 + \Delta P = A(\sigma_y - \sigma_{rc}) + (b-2a)h(\sigma_{rt} + \sigma_{rc})$$

Manipulando algebraicamente esta expresión, y teniendo en cuenta que $\sigma_{rt} = \sigma_{rc} \cdot 2a/(b-2a)$ se llega a

$$P_{max} = A \cdot \sigma_y$$

Lo que demuestra que los esfuerzos residuales no hacen disminuir la resistencia total de una columna corte comprimida axialmente, pues corresponden a un sistema de fuerzas interiores en equilibrio. Si ocasionan, en cambio, un descenso en el límite de proporcionalidad de la columna en conjunto, que modifica su curva σ - ϵ y produce una disminución en la resistencia de piezas comprimidas sujetas a fenómenos de pandeo.



Deformación unitaria de la columna correspondiente a la

Etapa (2):

$$\epsilon_2 = \frac{P_2}{AE} = \frac{\sigma_y - \sigma_{rc}}{E}$$

Incremento al pasar de

(2) a (4):

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &= \frac{\Delta P}{E(b-2a)h} = \frac{\sigma_{rt} + \sigma_{rc}}{E} \\ &= \frac{\sigma_{rc}}{E} \frac{b}{b-2a} \end{aligned}$$

Esforzos medios ocasionados por la carga exterior

Deformación total

$$\epsilon_T = \frac{1}{E} (\sigma_y - \sigma_{rc} + \sigma_{rc} + \sigma_{rc}) = \frac{\sigma_y + \sigma_{rc}}{E}$$

La ley de Hooke es aplicable durante todo el proceso, pero teniendo en cuenta que en cada etapa trabaja únicamente la porción de la columna que permanece en estado elástico.

Con los resultados que se acabaron de obtener se traza la gráfica esfuerzo medio producido por las cargas exteriores - deformación, dibujada en la hoja anterior.

El comportamiento inelástico de columnas de acero con esfuerzos residuales no queda regido por el módulo tangente E_t obtenido con una probeta, pero sí por el correspondiente a la sección completa.

Puesto que cada fibra deja de contribuir a la rigidez de la columna cuando aparece en ella el esfuerzo σ_y , la carga crítica puede calcularse con la fórmula de Euler pero teniendo en cuenta, al aplicarla, únicamente la porción de las secciones transversales que permanece en estado elástico al iniciarse el pandeo, cuyo momento de inercia alrededor del eje de flexión es I_e .

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{L^2} \quad (13) \quad ; \quad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_e}{A L^2} = \frac{\pi^2 E I_e}{(1/r^2) L^2} = \frac{\pi^2 E (I_e/I)}{(L/r)^2} \quad (14)$$

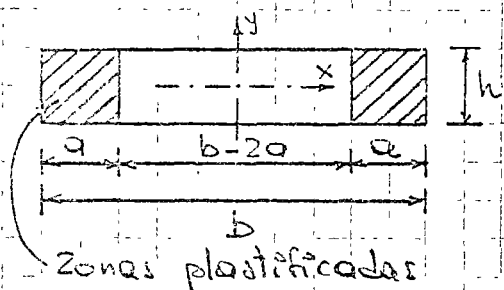
El esfuerzo crítico se obtiene sustituyendo el módulo tangente E_t por el producto $E (I_e/I)$.

Para llegar a estas expresiones se han utilizado las ideas de Shanley, pues se ha supuesto que la flexión lateral se inicia en que disminuyan los esfuerzos en ninguna fibra, pero en caso

contrario se reactivarían algunas zonas ya plastificadas.

La forma en que están distribuidos los esfuerzos residuales, así como el eje de flexión, son fundamentales para la magnitud de $\bar{\sigma}_c$, puesto que se depende de ambos factores.

SECCIÓN RECTANGULAR:



Flexión alrededor de x:

$$\frac{I_{ex}}{I_x} = \frac{(b-2a)h^3/12}{bh^3/12} = \frac{b-2a}{b} = \frac{A_c}{A}$$

$$\therefore \bar{\sigma}_{c_x} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_x)^2} \frac{b-2a}{b}$$

Flexión alrededor de y:

$$\frac{I_{ey}}{I_y} = \frac{(b-2a)^3 h/12}{hb^3/12} = \left(\frac{b-2a}{b}\right)^3 = \left(\frac{A_c}{A}\right)^3, \quad \bar{\sigma}_{c_y} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_y)^2} \left(\frac{b-2a}{b}\right)^3$$

Utilizando la gráfica de la hoja 5B puede obtenerse el módulo tangente de la sección compuesta, con los esfuerzos residuales supuestos:

$$E_t = \frac{\bar{\sigma}_c - (\bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_{c_x})}{\frac{b}{E} \frac{b-2a}{b}} = \frac{b-2a}{b} E = \frac{A_c}{A} E \quad \therefore \frac{E_t}{E} = \eta = \frac{b-2a}{b} = \frac{A_c}{A} = \frac{I_{ex}}{I_x}$$

Por consiguiente,

$$\bar{\sigma}_{c_x} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_x)^2} \eta \quad (15); \quad \bar{\sigma}_{c_y} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_y)^2} \eta^3 \quad (16)$$

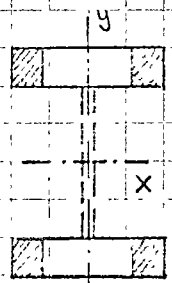
Puede demostrarse que estas expresiones son válidas para secciones rectangulares con cualquier distribución simétrica de esfuerzos residuales.

$\bar{\sigma}_{c_x}$ se calcula aplicando directamente la teoría del módulo tangente, pero no sucede lo mismo con $\bar{\sigma}_{c_y}$, que depende de una función del cociente E_t/E .

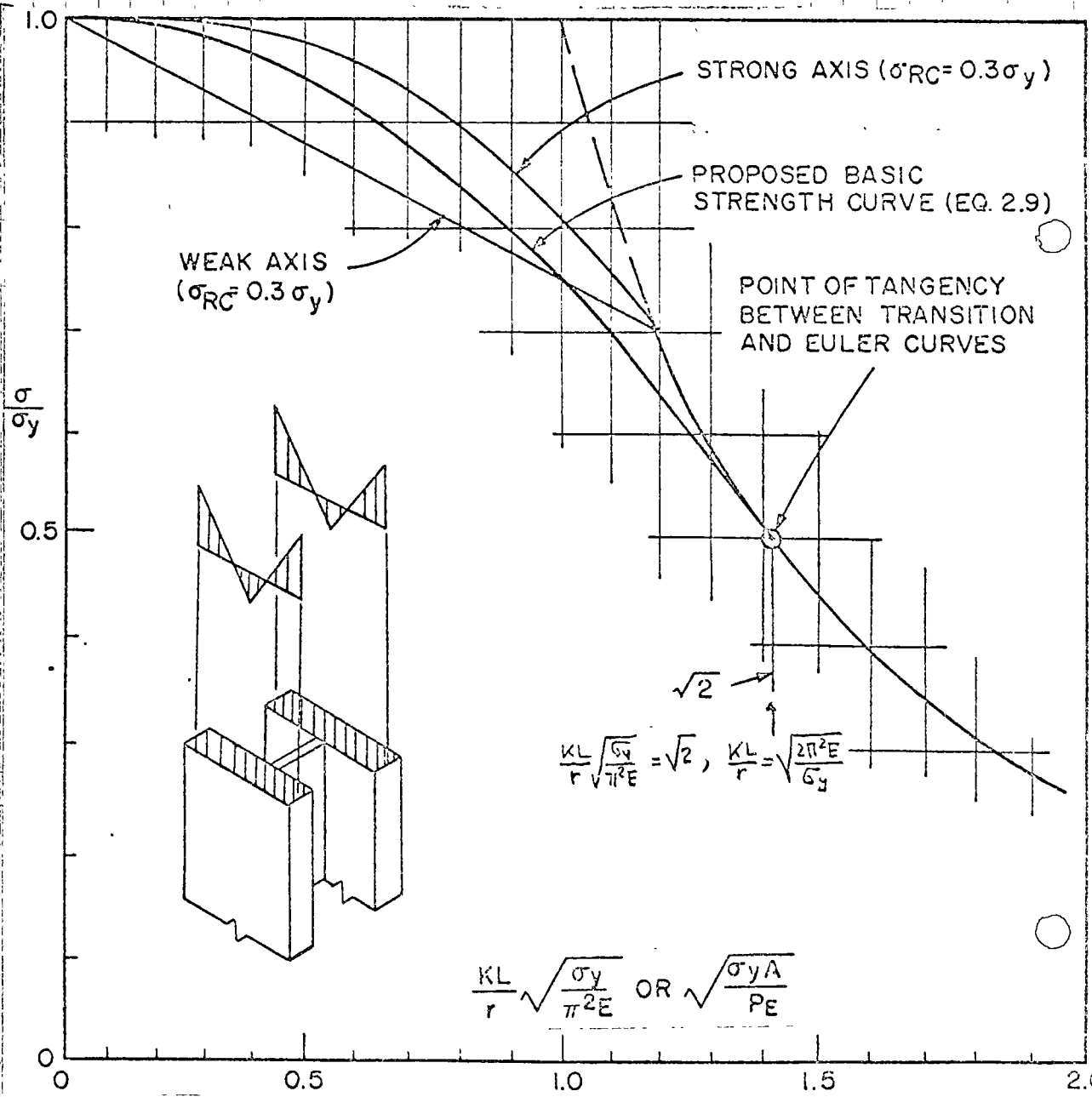
Et, módulo tangente de la sección completa, se calcula analíticamente, conocida la ley de distribución de los esfuerzos residuales, o se obtiene experimentalmente ensayando en compresión perfiles completos cortos. I_{ex} e I_{ey} disminuyen continuamente al crecer la carga exterior e irse plastificando zonas cada vez más amplias, de manera que γ disminuye también continuamente.

Las ecs. (15) y (16) son aplicables también a secciones H ó I idealizadas; corresponden, respectivamente, a pandeo por flexión alrededor de los ejes x y y, lo mismo que en el rectángulo aislado.

CENTRALLY LOADED COLUMNS



En la fig. se han trazado las curvas esfuerzo medio - relación de esbeltez que se obtienen aplicando (15) y (16) a una sección H.



Column Curves for Idealized Wide Flange Shape Containing Residual Stress

Para diseño es conveniente sustituir las dos curvas por una sola, aplicable a pandeo alrededor de cualquiera de los ejes principales.

Bleich propuso la curva parabólica dada por la ecuación

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_{LP}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{LP}) \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (17)$$

para calcular el esfuerzo crítico de pandeo inelástico.

Como la gráfica σ - E de una columna completa dejó de ser una línea recta cuando el esfuerzo total (residual más el debido a la carga exterior) alcanza el valor σ_y en algún punto, el esfuerzo σ_{LP} debe ser sustituido por

$$\sigma_{LP} = \sigma_y - \sigma_{rc} \quad (18)$$

con lo que la ec. (17) se transforma en

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_{rc}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{rc}) \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (19)$$

Si se toma arbitrariamente $\sigma_{rc} = \sigma_y/2$, valor cercano al máximo observado generalmente en perfiles H laminados, la ec. (19) se convierte en la (20), que proporciona resultados aceptables para pandeo por flexión alrededor de cualquiera de los ejes principales.

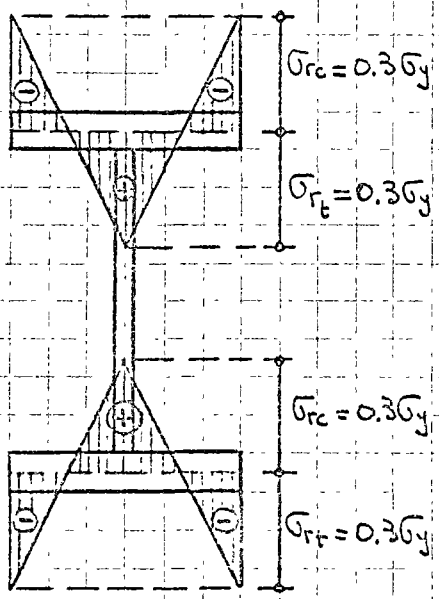
$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (20)$$

Al suponer que $\sigma_{rc} = \sigma_y/2$ se obtiene $\sigma_{LP} = \sigma_y/2$, de manera que (20) es aplicable a columnas con relaciones de esbeltez para las que $\sigma_{cr} > \sigma_y/2$; en caso contrario se usa la fórmula de Euler.

La representación gráfica de la ec. (20) es la llamada curva básica para diseño de columnas del CRC. Es la base de las especificaciones del AISC ("CRC Guide to Design Criteria for Metal Compression Members", 2ª Ed. Editada por B.G. Johnston, J. Uelen, 1966)

PROBLEMA PARA CASA. Trazar las curvas esfuerzo crítico -

relación de esbeltez para un perfil I que se pandea por flexión a) alrededor del eje x, b) alrededor del y, suponiendo que existan en él los esfuerzos residuales mostrados en la figura y despreciando la contribución del alma a la rigidez de la columna. Con fines comparativos, trázese en la misma figura la curva correspondiente a la ec. (20).



Las ecuaciones básicas para la solución del problema son

$$\sigma_{crx} = \frac{\pi^2 E I}{(L/r_x)^2} \eta, \quad \sigma_{cry} = \frac{\pi^2 E I}{(L/r_y)^2} \eta^3$$

de las que se obtiene

$$(L/r_x)_{cr} = \sqrt{(\pi^2 E / \sigma_{crx}) \eta} \quad (a)$$

$$(L/r_y)_{cr} = \sqrt{(\pi^2 E / \sigma_{cry}) \eta^3} \quad (b)$$

Aplicando la carga exterior en incrementos sucesivos y superponiendo los esfuerzos producidos por cada uno de ellos sobre los residuales se conocen los esfuerzos totales en la sección en cada instante del proceso de carga, se determinan las zonas plásticas y las elásticas y se calculan A_e , η y η^3 para cada intensidad de la carga exterior; con (a) y (b) se determinan las L/r correspondientes.

Desde que se inicia hasta que termina la plastificación aplíquense 10 incrementos de carga que produzcan aumentos iguales de los esfuerzos, de valor $0.06\sigma_y$, y supóngase que la magnitud de las zonas elástica y plástica se mantiene sin cambio durante la aplicación de cada uno de los incrementos de carga, igual a la existente en el punto medio del intervalo.

COLUMNAS HECHAS CON PLACAS SOLDADAS. Se emplean extensa-

mente, por la imposibilidad de obtener perfiles laminados cuadrados para un problema dado, o para utilizar secciones mas eficientes.

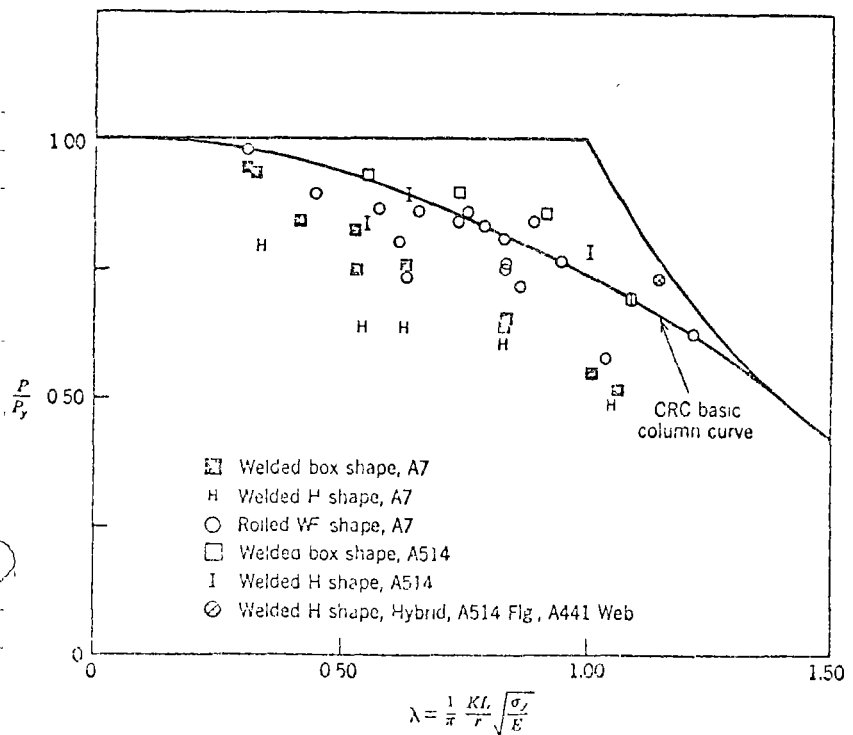
Las secciones mas usuales son H y \square .

La distribución de esfuerzos residuales es mas favorable en secciones \square que H, ya que en éstas se plastifican primero las zonas que contribuyen mas al momento de inercia, mientras que en aquellas sucede lo contrario, y la resistencia al pandeo es función del momento de inercia I_e de la porción que permanece en estado elástico en el momento en que se inicia el pandeo.

Los esfuerzos residuales muy elevados hacen que el límite de proporcionalidad de secciones completas soldadas descienda a niveles sumamente bajos, por lo que el pandeo se inicia con cargas exteriores muy reducidas, cuando todavía le queda a la columna una reserva de resistencia importante. El cálculo de la resistencia máxima constituye un problema complicado pero

necesario para este estudio, conocer el comportamiento teórico de columnas soldadas, no se requiere en la práctica, pues se resistencia última puede determinarse directamente, en forma experimental.

Los resultados experimentales que se muestran

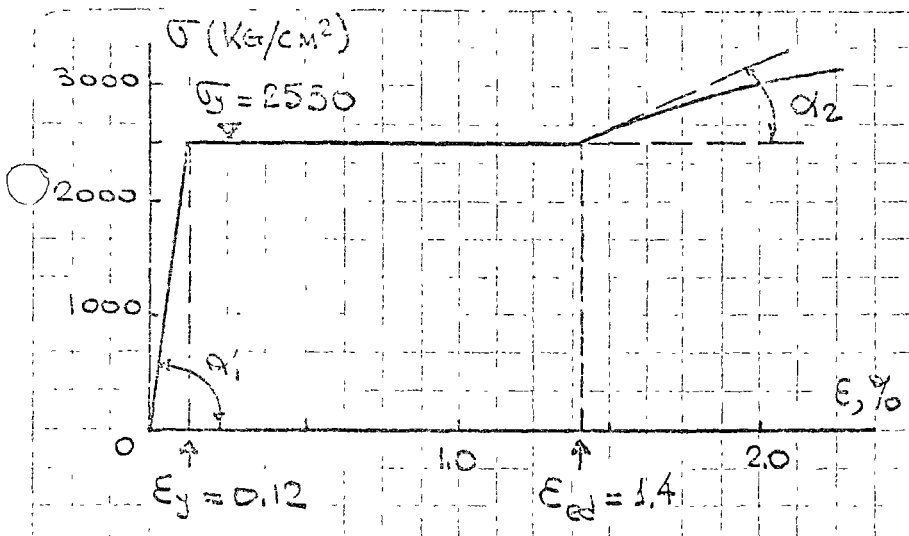


Welded columns and the CRC column curve

65
en la figura comprueban la importancia de los esfuerzos residuales sobre la capacidad de carga de las columnas, tanto desde el punto de vista de su magnitud como de la manera en que están distribuidos en la sección.

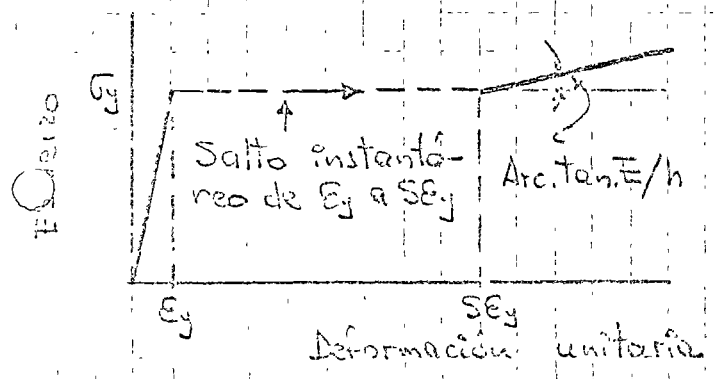
PANDEO EN EL INTERVALO DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN. En la mayor parte de la literatura sobre pandeo inelástico de columnas de acero estructural comprimidas axialmente se acepta que se pandean, invariablemente, cuando el esfuerzo llega al límite de fluencia, pues en ese instante el módulo de elasticidad tangente se reduce a cero. Aparentemente, es imposible llevar las deformaciones unitarias a valores mayores que el que corresponde a la iniciación del flujo plástico, ϵ_y , sin que la pieza comprimida se pandee.

Sin embargo, las conclusiones anteriores están en desacuerdo con los resultados de múltiples experiencias de laboratorio y con el comportamiento de las estructuras reales, pues se ha demostrado que piezas pequeñas y robustas de acero, comprimidas axialmente, pueden aceptar sin pandearse deformaciones mayores que ϵ_y y que, incluso, si su relación de esbeltez es inferior a un cierto límite, el pandeo puede posponerse hasta que todo el material esté endurecido por deformación, y se prescanta bajo esfuerzos mayores que el de fluencia. Las teorías clásicas describen correctamente el fenómeno del pandeo en el intervalo elástico y en el inelástico entre el límite de proporcionalidad y el esfuerzo de fluencia, pero son inaplicables más allá de ese punto.



$\tan \alpha_1 = E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$
 $\tan \alpha_2 = E_{ed} = 63000 \checkmark$
 $E_{ed} = E/h \therefore h = 33$
 $E_{ed} = S\sigma_y \therefore S = 11.7$

En la figura se muestra, en forma ligeramente simplificada, la curva esfuerzo-deformación que se obtiene al someter una probeta de acero A36 a tensión o compresión. Sin embargo, el módulo tangente E_t no es nunca igual a cero, como parece al observar la figura, porque ϵ es una deformación unitaria media, obtenida midiendo el alargamiento o acortamiento total de una cierta longitud de la probeta y, en realidad, dentro de ella no existe ningún material cuya deformación unitaria esté comprendida entre ϵ_y y ϵ_{ed} , pues el flujo plástico se presenta de una manera discontinua, en pequeñas fajas incluídas, orientadas según los planos de cortante máximo, en las que la deformación local pasa instantáneamente de ϵ_y a ϵ_{ed} . Por consiguiente, cuando parte del material está aún en el intervalo elástico el resto ha pasado ya al de endurecimiento por deformación.



Experimentalmente se ha encontrado que piezas de acero A7 con $L/r \leq 20$ se plastifican por completo sin pandearse previamente (el A36 tiene propiedades análogas).

FÓRMULAS DE DISEÑO. De acuerdo con la teoría de Euler para

pandeo elástico y con la del módulo tangente modificada para tener en cuenta los esfuerzos residuales, para pandeo inelástico, el esfuerzo crítico de una columna cargada axialmente está dado por

- a) Pandeo elástico, $\sigma_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2$
- b) Pandeo inelástico, $\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_{cr}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{cr}) \left(\frac{L}{r}\right)^2$

En perfiles I o H laminados, con esfuerzos residuales de laminación, se obtienen buenos resultados sustituyendo en la segunda ecuación a σ_{cr} por $\sigma_y/2$, con lo que se llega a la fórmula básica del CRC para pandeo inelástico:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (20)$$

La ec. (20) es aplicable siempre que:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \geq \sigma_{cr}, \quad \frac{L}{r} \leq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}}}$$

Aro se ha supuesto que $\sigma_{cr} = \sigma_y/2$, luego $\sigma_{cr} = \sigma_y - \sigma_{cr} = \sigma_y/2$, de manera que la fórmula de Euler es aplicable a columnas de relación de esbeltez mayor que

$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = C_c \quad (21)$$

La ec. (20) puede escribirse

$$\sigma_y = \sigma_y \left[1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \right] = \sigma_y \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2 \cdot \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \right] = \sigma_y \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2C_c^2} \right] \quad (22)$$

Resumiendo,

Para $\frac{L}{r} \geq C_c$ (pandeo elástico): $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$

Para $\frac{L}{r} \leq C_c$ (pandeo inelástico): $\sigma_{cr} = \sigma_y \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2C_c^2} \right]$

Los esfuerzos de trabajo se obtienen dividiendo los segundos miembros de las ecuaciones anteriores entre un coeficiente de seguridad adecuada.

El AISC recomienda la expresión siguiente para calcular el coeficiente de seguridad:

$$CS = \frac{16}{25} + \frac{3(L/r)}{8C_c} - \frac{(L/r)^2}{8C_c^2}$$

Cuando sea necesario, L/r se sustituye por KL/r .

Vale 1.67 para $L/r=0$ (igual que para piezas en tensión), 1.92 para $L/r \geq C_c$ (pandeo elástico), y tiene valores intermedios para $0 < L/r < C_c$.

Las expresiones finales para el cálculo de esfuerzos de trabajo en piezas sometidas a cargas axiales son:

Para $KL/r \geq C_c$ (pandeo elástico):

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{1.92 (KL/r)^2} = \frac{10\,476\,000}{(KL/r)^2}, \text{ kg/cm}^2 \quad (23)$$

Para $KL/r \leq C_c$ (pandeo inelástico):

$$\sigma_p = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right] \sigma_y}{C.S.} \quad (24)$$

Estas fórmulas se han tabulado para aceros con distintos límites de fluencia, de manera que conocida la relación de esbeltez se lee el esfuerzo permisible.

La ec. (24) se ha obtenido tomando como base los ensayos realizados en perfiles I y H laminados, por lo que proporciona resultados más conservadores cuando se aplica a perfiles tubulares laminados, con esfuerzos residuales de menor magnitud, y sucede lo contrario cuando se emplea para columnas hechas con placas soldadas. Es probable que cuando se cuenta con mayor información, principalmente experimental, se utilicen factores correctivos para adaptar la ec. (24) a perfiles de diversos tipos.

CURVA EUROPEA - La Comisión Europea de la Construcción Metálica ha propuesto como norma de diseño una curva $C_{70} - L/r$ (véase figura 1.10).

mentadamente, sin ecuación determinada.

También propone realizar estudios adicionales para determinar si esa curva debe modificarse para aplicarla a perfiles tubulares laminados, perfiles huecos con placas soldadas, etc.

FÓRMULAS EMPÍRICAS. La falta de una teoría que explicase satisfactoriamente el comportamiento de las columnas que fallan por pandeo inelástico hizo que durante mucho tiempo se diseñasen utilizando fórmulas basadas en resultados experimentales. Las fórmulas empíricas más frecuentes (algunas de ellas se encuentran todavía en vigor en distintos reglamentos) son:

FÓRMULA DE RANKINE-GORDON

$$\sigma_p = \frac{a}{1 + b(L/r)^2}$$

"a" es un esfuerzo y "b" un factor numérico sin dimensiones.

En AISC 49, los esfuerzos permisibles de miembros secundarios comprimidos, con $121 \leq L/r \leq 200$, se calculaban con

$$\sigma_p = \frac{1265}{1 + L^2/18000 r^2} \text{ , } \text{kg/cm}^2$$

El intervalo cubierto por esta fórmula en AISC 49 corresponde fundamentalmente a pandeo elástico.

FÓRMULA DE LA LÍNEA RECTA (O DE TETMAJER)

$$\sigma_p = a - b \frac{L}{r}$$

"a" y "b" son constantes que dependen de las propiedades del material y del factor de seguridad.

En las normas suizas, para $10 \leq L/r \leq 110$,

$$\sigma_p = 1.48 - 0.0075 \frac{L}{r} \text{ , } \text{Ton/cm}^2$$

FÓRMULA DE LA PARÁBOLA (PARÁBOLA DE JOHNSON)

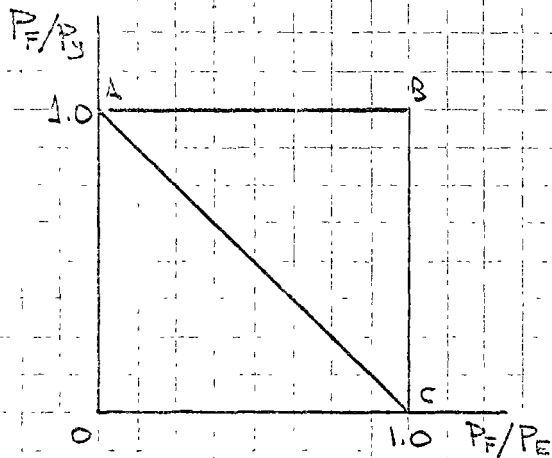
70

$$\sigma_p = a - b (L/r)^2$$

Aparecía también en las especificaciones AISC de 1949, de acuerdo con ellas los esfuerzos permisibles en miembros comprimidos de acero A7 ($\sigma_y = 2320 \text{ kg/cm}^2$) con $0 \leq L/r \leq 120$ se calculaban con la expresión:

$$\sigma_p = 1195 - 0.0341 (L/r)^2, \text{ kg/cm}^2$$

FÓRMULA DE MERCHANT. La carga que ocasiona la falla de una columna, P_F , es siempre menor o igual que la crítica de Euler, P_E , y que la carga de plastificación, $P_y = A\sigma_y$. Por consiguiente, puede escribirse $P_F/P_E \leq 1.0$, $P_F/P_y \leq 1.0$. Esto indica que la solución de cualquier columna real se encuentra dentro del área OABC de la figura.



A y C son los extremos del lugar geométrico de los puntos que representan las condiciones de falla, entre ellos puede trazarse una curva cualquiera, pero la más útil es la línea recta AC, de ecuación $P_F/P_y = -P_F/P_E + 1$, que puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_E} + \frac{1}{P_y}$$

Esta es la FÓRMULA DE MERCHANT, que relaciona la carga de falla, P_F , con

la de Euler, P_E , y la de plastificación, P_y .

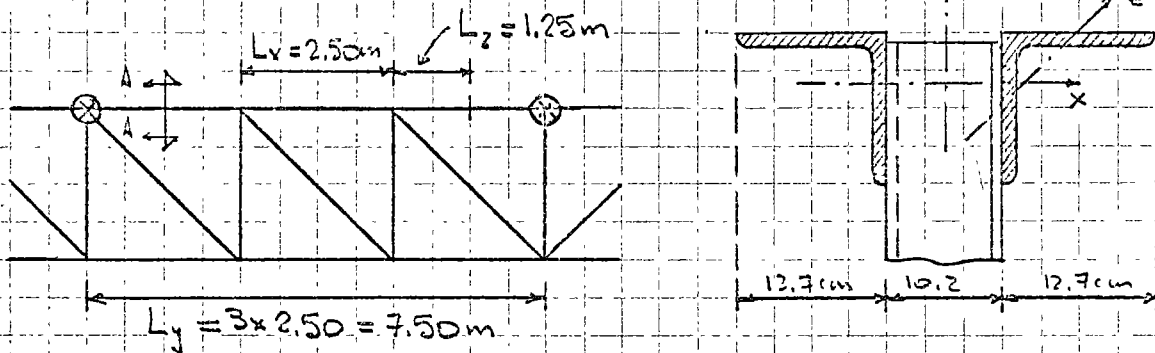
Sustituyendo P_E por $\pi^2 EA / (L/r)^2$ y P_y por $A\sigma_y$, se llega a

$$\sigma_F = \frac{P_F}{A} = \frac{\sigma_y}{1 + \frac{\sigma_y}{\pi^2 E} \left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

Esta ecuación, como particular de la de Rankine-Gordon, se puede

con aproximaciones razonables de la resistencia máxima de columnas articuladas, tanto en el intervalo elástico como en el inelástico.

PROBLEMA. Determinar el esfuerzo permisible en la cuerda superior de la armadura de la figura, utilizando las especificaciones AISC de 1969. El acero es A36. Los nudos marcados \odot están soportados lateralmente, y los dos ángulos que forman la cuerda están unidos entre sí en el punto medio de cada tablero.



La cuerda está formada por dos ángulos de $12.7 \times 0.95 \text{ cm}$ ($5 \times 3/8$).

$$r_x = 3.96 \text{ cm}, \quad r_y = 0.95 \text{ cm}, \quad r_z = 2.51 \text{ cm}$$

r_x y r_y corresponden a los dos ángulos, y r_z a uno solo.

Suponiendo que $K=1.00$ en todos los casos, lo que es aceptable en armaduras;

$$\left(\frac{L}{r}\right)_x = \frac{250}{3.96} = 63, \quad \left(\frac{L}{r}\right)_y = \frac{750}{0.95} = 79, \quad \left(\frac{L}{r}\right)_z = \frac{125}{2.51} = 50.$$

La relación de esbeltez crítica es $\left(\frac{L}{r}\right)_y = 79$.

$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 126 > 79$ ∴ El pandeo se inicia en el intervalo inelástico.

$$C_s = \frac{5}{3} + \frac{2(L/r)^2}{8C_c} - \frac{(L/r)^3}{8C_c^3} = 1.67 + 0.235 - 0.021 = 1.874$$

$$\sigma_a = \left[1 - \frac{(L/r)^2}{2C_c^2}\right] \sigma_y = \left(1 - \frac{79^2}{2 \times 126^2}\right) 2530 = 0.203 \times 2530 = 2040 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma_p = 2040 / 1.874 = 1088 \text{ kg/cm}^2$. En la tabla se obtiene este mismo valor.

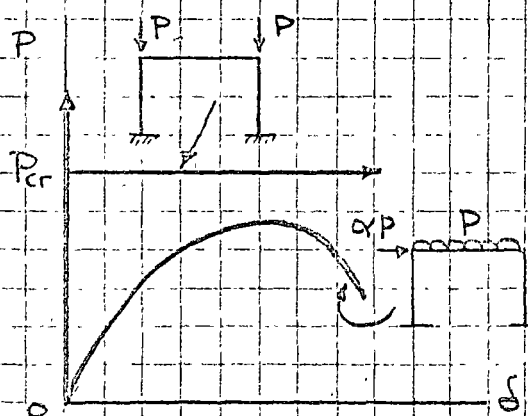
INESTABILIDAD DE MARCOS

En las estructuras reales no suele haber barras comprimidas aisladas, articuladas o empotradas en sus extremos, sino forman parte de estructuras reticulares en las que están ligadas con otras piezas que restringen los desplazamientos lineales y angulares de sus extremos.

Por consiguiente, no se conocen con precisión las condiciones de apoyo de las columnas, pues dependen de las restricciones impuestas por los elementos restantes, las que son función de sus rigideces en flexión y de las fuerzas axiales que obran sobre ellas, y para obtener la condición real de pandeo de una estructura reticular, o para estudiar el comportamiento de uno o varios de sus elementos comprimidos, hay que considerar la estabilidad del conjunto.

INESTABILIDAD ELÁSTICA DE MARCOS RÍGIDOS. Aunque la mayor parte de los marcos rígidos fallan por inestabilidad en el intervalo inelástico, la carga crítica de pandeo elástico constituye un factor de gran importancia en el estudio de su comportamiento.

Como en las columnas aisladas, puede haber fallos por pandeo (bifurcación del equilibrio), o en forma gradual, por inestabilidad pero sin pandeo.



MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE

LAS CARGAS CRÍTICAS. La carga crítica de pandeo elástico de una estructura reticular se puede calcular con cualquiera de los métodos que se emplean para el análisis de estructuras hiper-

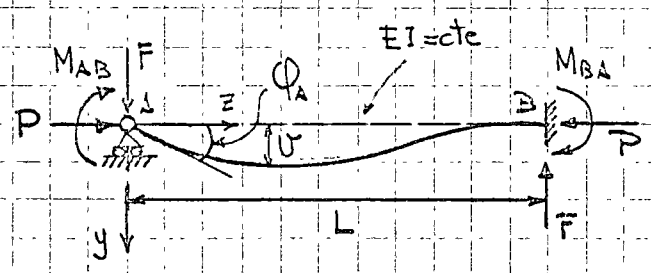
estáticas teniendo en cuenta, al aplicarlos, los cambios en rigideces angulares y lineales y en los factores de transporte de las barras ocasionados por las fuerzas axiales que obran sobre ellas.

Así, son aplicables los métodos de flexibilidades y rigideces, y la condición de pandeo y la ecuación característica correspondiente se obtienen igualando a cero el determinante de la matriz de flexibilidades o rigideces.

Pueden utilizarse también métodos numéricos de aproximaciones sucesivas, como el de Cross, y métodos energéticos.

CÁLCULO DE CARGAS CRÍTICAS POR EL MÉTODO DE LAS RIGIDECES.

Para estudiar el pandeo de marcos formados por un conjunto de miembros debe analizarse primero el comportamiento de columnas aisladas sujetas a momentos en los extremos.



AB es una barra elástica, inicialmente recta, de momento de inercia I constante, sobre la que actúan simultáneamente una fuerza normal P y un par M_{AB} aplicado en el extremo izquierdo, que está libremente apoyado; el derecho, B, está empotrado. Como una consecuencia de M_{AB} el extremo A gira un ángulo ϕ_A y en B aparece un momento M_{BA} .

Si se supone que P es nula,

$$M_{AB} = 4 \frac{EI}{L} \phi_A, \quad M_{BA} = \frac{1}{2} M_{AB}$$

Por definición, $M_{AB}/\phi_A = 4EI/L$ es la RIGIDEZ ANGULAR de la barra AB en el extremo A, y $M_{BA}/M_{AB} = 1/2$ es el FACTOR DE TRANSPORTE ANGULAR de A a B.

Análogamente, si se intercambian las condiciones de apoyo de A y B,

se obtiene $M_{BA} = 4 \frac{EI}{L} \theta_B$, $M_{AB} = \frac{1}{2} M_{BA}$

y pueden definirse la rigidez angular en B y el factor de transporte de B a A.

Otros efectos necesarios para el

análisis son los ocasionados por movimientos lineales relativos de los apoyos y por las cargas exteriores.

Si la viga está empotrada en sus dos extremos y $P=0$, los momentos

producidos por un desplazamiento lineal Δ valen

$$M_{AB} = M_{BA} = -6 \frac{EI}{L} \frac{\Delta}{L}$$

y las reacciones correspondientes son

$$F = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} = 12 \frac{EI}{L^2} \Delta$$

La rigidez del miembro respecto a la traslación es $12EI/L^3$.

Los momentos de empotramiento perfecto \bar{M}_{AB} y \bar{M}_{BA} se calculan con la teoría ordinaria de las vigas.

La introducción de una fuerza axial P modifica rigideces, factores de transporte y momentos de empotramiento perfecto en un grado que es función de su magnitud.

Si U es el desplazamiento normal al eje z , y se acepta que las deformaciones son pequeñas, de manera que puede utilizarse la expresión simplificada de la curvatura, la ecuación diferencial de la elástica es (ver

figura en hoja #3):
$$-EI \frac{d^2 U}{dz^2} = PU + M_{AB} - Fz \tag{1}$$

Integrando esta ecuación se obtiene una expresión con la que se puede calcular la flecha U en un punto cualquiera del eje de la barra, y así...

zanda, es fácil obtener el ángulo de giro en A y, con él, la rigidez y el factor de transporte de la barra.

Las expresiones de la rigidez y el factor de transporte de barras flexocomprimidas son bastante complejas, pero pueden escribirse en función de coeficientes que dependen de la intensidad de la fuerza axial, los que han sido tabulados por varios autores. Se conocen con el nombre de **FUNCIONES DE ESTABILIDAD**.

Los momentos en los extremos de la barra con carga axial, expresados por medio de las funciones de estabilidad, valen

$$M_{AB} = S \frac{EI}{L} \varphi_A, \quad M_{BA} = SC \frac{EI}{L} \varphi_A$$

Por definición,

$$\text{Rigidez angular en A} = \Gamma_{AB} = \frac{M_{AB}}{\varphi_A} = S \frac{EI}{L} \quad (2)$$

$$\text{Factor de transporte angular de A a B, } t_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = C \quad (3)$$

S y C son función del cociente P/P_E .

Los momentos debidos a desplazamientos lineales de los extremos están dados por

$$M_{AB} = M_{BA} = -S(1+C) \frac{EI}{L} \frac{\Delta}{L}$$

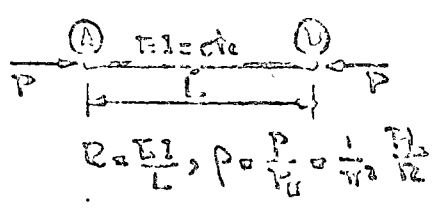
En la figura se presenta un resumen de resultados correspondientes a barras rectas y de momento de inercia constante (ver hoja 76).

EJEMPLO. Determinar la carga crítica de una columna recta articulada en sus dos extremos.

Considérese la barra sometida a la acción simultánea de una fuerza P y un momento M_{AB} aplicado en un extremo que vale, de acuerdo con b),

$$M_{AB} = S^* R \varphi_A$$

Por definición, la rigidez angular en el extremo A es

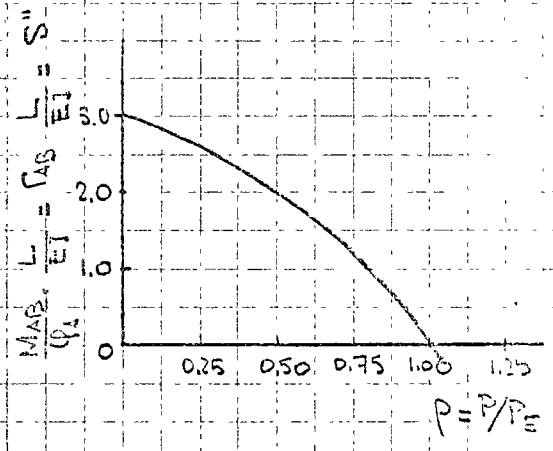


$$\Gamma_{AB} = \frac{M_{AB}}{\varphi_A} = S''R = S'' \frac{EI}{L}$$

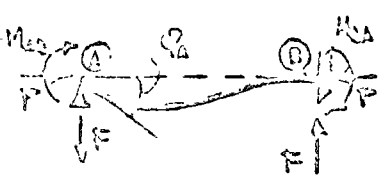
Dividiendo los dos miembros entre EI/L .

$$\Gamma_{AB} \frac{L}{EI} = S''$$

Utilizando los valores tabulados de S'' se hace la curva rigidez - fuerza axial:



a) ROTACION EN A; EXTREMO B EMPOTRADO

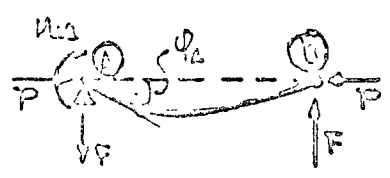


$$M_{AB} = SR \varphi_A$$

$$M_{BA} = SCR \varphi_A = CM_{AB}$$

$$F = -S(1+C) \frac{R}{L} \varphi_A$$

b) ROTACION EN A; EXTREMO B ARTICULADO

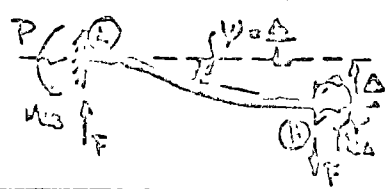


$$M_{AB} = S(1-c^2) R \varphi_A = S^4 R \varphi_A$$

$$F = -S(1-c) \frac{R}{L} \varphi_A = -S^4 \frac{R}{L} \varphi_A$$

$$\varphi_B = -C \varphi_A$$

c) DESPLAZAMIENTO LINEAL; AMBOS EXTREMOS FIJOS SUBJUGAMENTE

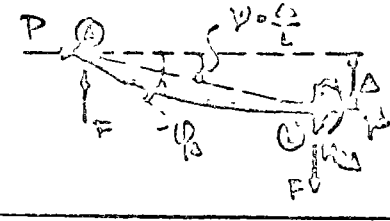


$$M_{AB} = M_{BA} = -S(1+c) R \psi$$

$$= -m \frac{FL}{2}$$

$$F = \frac{2S(1+c)}{m} \frac{R}{L} \psi$$

d) DESPLAZAMIENTO LINEAL; UN EXTREMO ARTICULADO



$$M_{BA} = -S^2 R \psi$$

$$= -\frac{S^4}{S^2 \pi^2} FL$$

$$F = (S^2 - \pi^2) \frac{R}{L} \psi$$

$$\varphi_B = (1+C) \psi$$

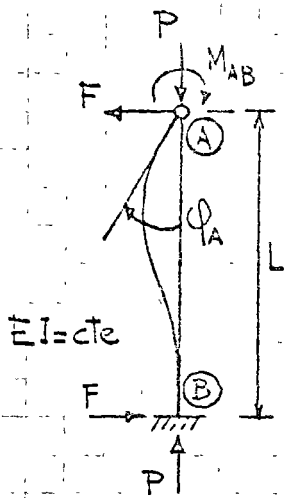
Para $0 \leq P \leq P_c$ la rigidez es positiva, y se hace negativa cuando $P > P_c$.

Cuando $P = P_c$ la rigidez se anula, y la columna está en equilibrio

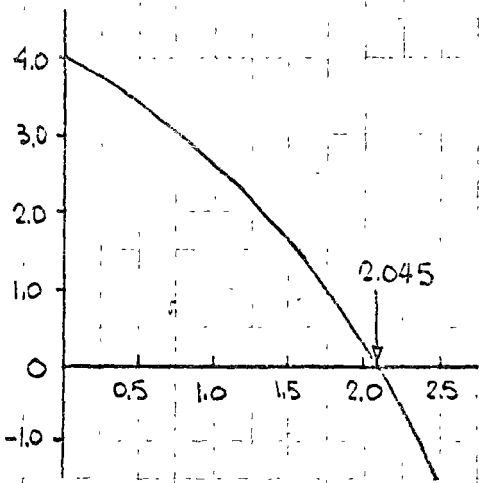
indiferente, pues pueden producirse rotaciones con momentos nulos, por consiguiente, $P_{cr} = P_c = \pi^2 EI/L^2$, resultado ya conocido.

La carga crítica puede obtenerse también directamente, igualando a cero la rigidez: $\Gamma_{AB} = S'' \frac{EI}{L} = 0 \Rightarrow S'' = 0$

De las tablas de funciones de estabilidad, para $S'' = 0, P/P_c = 1.0, P = P_{cr} = P_c$



$$\frac{M_{AB}}{\phi_A} \cdot \frac{L}{EI} = \frac{L}{EI} = S$$



$$P = P/P_E$$

$$M_{AB} = S \cdot 2 \phi_A, \quad \Gamma_{AB} = \frac{M_{AB}}{\phi_A} = S \frac{EI}{L}, \quad \Gamma_{AB} \frac{L}{EI} = S$$

La curva de la figura se obtiene utilizando la última ecuación y los valores tabulados de S.

$S = 0$ para $p = 2.045$, y $\Gamma_{AB} L/EI = 0$, $\Gamma_{AB} = 0$, es decir, la rigidez se anula cuando $p = P_{cr}/P_E = 2.045$, $P_{cr} = 2.045 P_E = 2.045 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{20.2 EI}{L^2}$

La longitud efectiva de la columna es

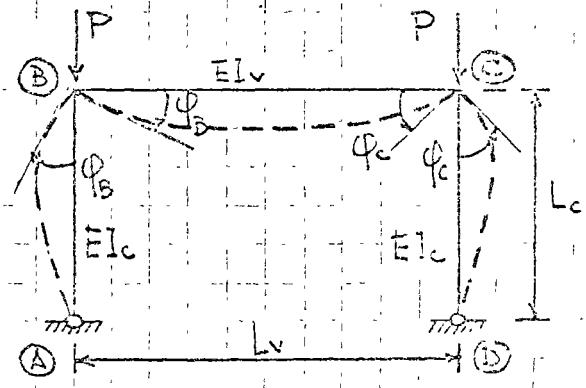
$$P_{cr} = 2.045 P_E = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{1}{K^2} = P_E \frac{1}{K^2} \therefore 2.045 = 1/K^2$$

$$K = \sqrt{\frac{P_E}{P_{cr}}} \quad K = \sqrt{1/2.045} = 0.7$$

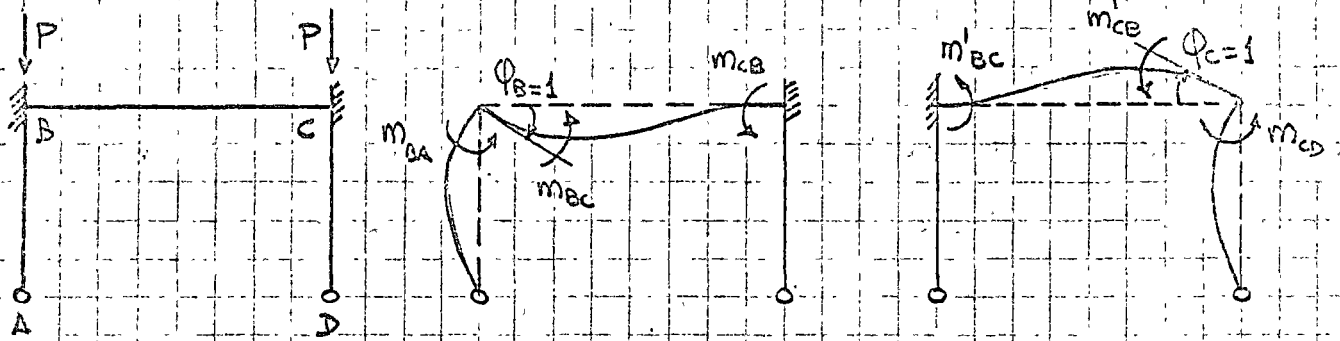
MARCO RÍGIDO. Se aplica el método de las rigideces para calcular la carga crítica del marco de la figura. Se supone por ahora que los extremos superiores de las columnas no pueden desplazarse. El pandeo es simétrico.

Con línea punteada se muestra la configuración del modo de pandeo.

Por las condiciones de simetría del problema, $\phi_c = -\phi_B$.



La superposición de los tres estados que se estudian a continuación lleva a la configuración deformada real del marco.



Los momentos producidos por los giros unitarios son, por definición, las rigideces angulares.

$$m_{BA} = S'' \frac{EI_c}{L_c}, \quad m_{CB} = S'' \frac{EI_c}{L_c}$$

La fuerza axial en el cabezal es pequeña, y puede escribirse

$$m_{BC} = m'_{CB} = \frac{4EI_v}{L_v}, \quad m_{CB} = m'_{BC} = \frac{2EI_v}{L_v}$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$-m_{BA} \varphi_B - m_{BC} \varphi_B - m'_{BC} \varphi_C = 0$$

$$-m_{CB} \varphi_B - m'_{CB} \varphi_C - m_{CD} \varphi_C = 0$$

Como $\varphi_C = -\varphi_B$, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$-m_{BA} \varphi_B - m_{BC} \varphi_B + m'_{BC} \varphi_B = 0$$

$$-m_{CB} \varphi_B + m'_{CB} \varphi_B + m_{CD} \varphi_B = 0$$

$$-S'' \frac{EI_c}{L_c} \varphi_B - \frac{4EI_v}{L_v} \varphi_B + \frac{2EI_v}{L_v} \varphi_B = 0$$

$$-\frac{2EI_v}{L_v} \varphi_B + \frac{4EI_v}{L_v} \varphi_B + S'' \frac{EI_c}{L_c} \varphi_B = 0$$

Las dos ecuaciones son iguales, y como las incógnitas se han reducido a una, basta con resolver cualquiera de ellas.

$$\left(-S'' \frac{EI_c}{L_c} - \frac{4EI_v}{L_v} + \frac{2EI_v}{L_v}\right) \varphi_B = 0$$

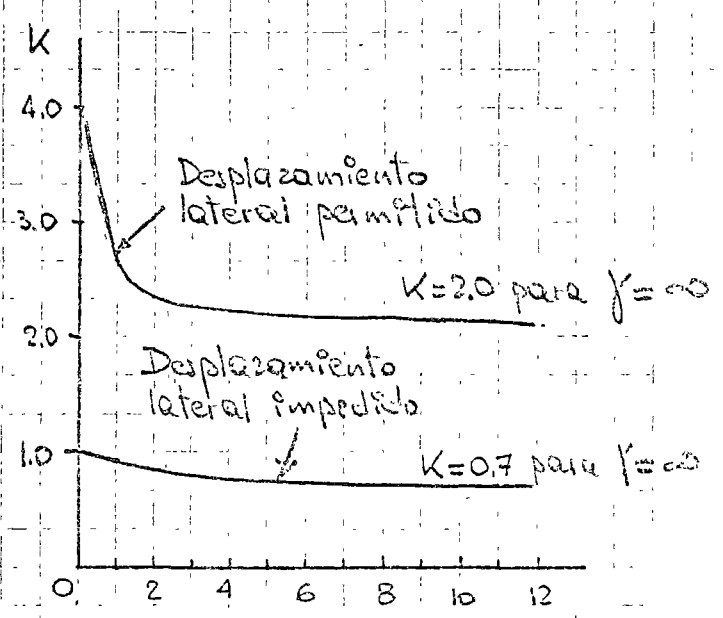
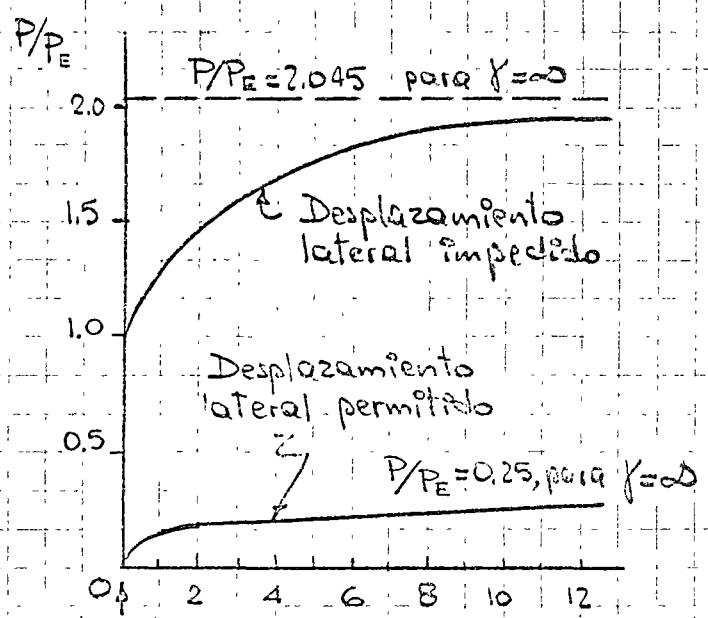
Para que esta ecuación tenga soluciones distintas de la trivial y puedan existir diferentes configuraciones deformadas en equilibrio, correspondientes a rotaciones φ_B de magnitud indeterminada, debe anularse la cantidad que está dentro del paréntesis.

$$-S'' \frac{EI_c}{L_c} - \frac{4EI_v}{L_v} + \frac{2EI_v}{L_v} = 0$$

Multip. por $\frac{L_c}{EI_c}$: $-S'' - 4 \frac{I_v L_c}{L_v I_c} + 2 \frac{I_v L_c}{L_v I_c} = 0$, $S'' - 2 \frac{I_v L_c}{L_v I_c} = 0$

Finalmente, $S'' + 2\gamma = 0$, donde $\gamma = \frac{I_v L_c}{L_v I_c} = \frac{(I/L)_v}{(I/L)_c}$

Esta ecuación representa la condición de estabilidad. Para resolverla se suponen valores de P/P_E , se leen en las tablas los coeficientes S'' correspondientes y se calculan los γ . Los resultados obtenidos se muestran en las dos figuras siguientes.



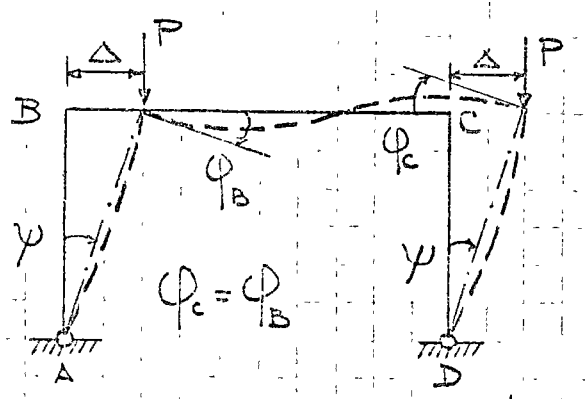
$$\gamma = (I/L)_v / (I/L)_c$$

$$\gamma = (I/L)_v / (I/L)_c$$

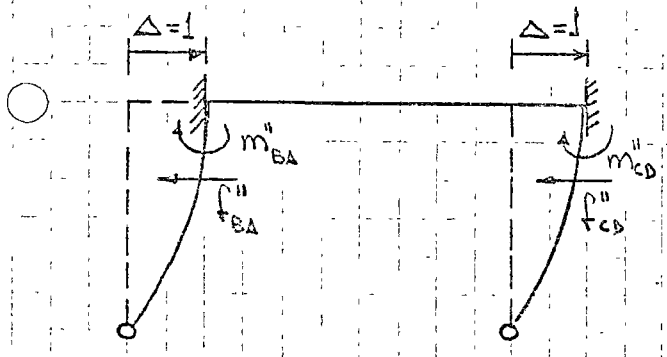
La carga crítica aumenta con γ , es decir, al aumentar la rigidez relativa del cabezal, y K disminuye con γ .

La carga crítica y el coeficiente K correspondientes a los dos casos extremos, son $\pi^2 EI/L^2$ y 1.0 , para $\gamma=0$ (cabezal de rigidez nula) y $2.045 \pi^2 EI/L^2$ y 0.7 para $\gamma=\infty$ (cabezal infinitamente rígido).

Si se quitan los elementos que impiden el desplazamiento lineal del cabezal cambia radicalmente el comportamiento del marco, la forma de pandeo deja de ser simétrica.



La carga crítica se determina siguiendo un camino análogo al anterior, pero ahora se desconocen tres desplazamientos, ϕ_B , ϕ_c y Δ , de manera que para obtener la configuración deformada del marco debe superponerse un cuarto estado, en el que se le da un desplazamiento lineal al cabezal.



Las tres ecuaciones de equilibrio, dos de momentos en los nudos y una de cortantes en el cabezal, se reducen a dos, por ser $\phi_c = \phi_B$:

$$-\left(S'' \frac{EI_c}{L_c} + \frac{GEL_v}{L_v}\right) \phi + S'' \frac{EI_c}{L_c^2} \Delta = 0$$

$$2S'' \frac{EI_c}{L_c^2} \phi - 2(S'' - \pi^2 \rho) \frac{EI_c}{L_c^2} \Delta = 0$$

Multiplicando todos los términos por L_c/EI_c e introduciendo el parámetro γ , las ecuaciones anteriores se convierten en

$$\begin{bmatrix} -(S'' + 6\gamma) & S'' \\ \frac{2S''}{L_c} & -\frac{2}{L_c} (S'' - \pi^2 \rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = 0$$

ψ es Δ/L_c .

La ecuación característica se obtiene desarrollando el determinante e igualándolo a cero:

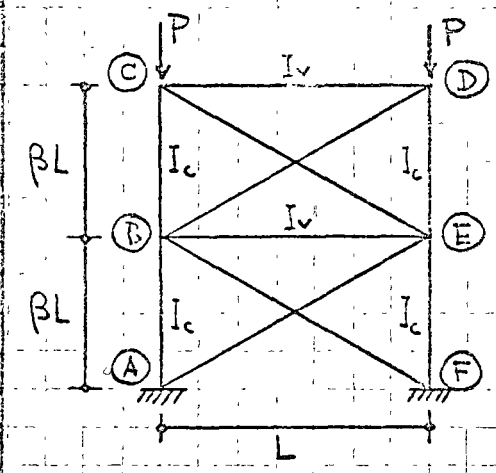
$$\frac{2}{L_c} (S'' + 6\gamma)(S'' - \pi^2 \rho) - \frac{2(S'')^2}{L_c} = 0$$

y, efectuando simplificaciones,

$$S'' (6\gamma - \pi^2 \rho) - 6\gamma \pi^2 \rho = 0$$

En las figuras de la hoja 79 se han trazado también las curvas $P/P_E - \gamma$ y $K - \gamma$ correspondientes a este caso; la resistencia al pandeo se reduce drásticamente al permitir desplazamientos lineales del cabezal. (Por γ y K son 0 e ∞ , cuando $\gamma = 0$, y $\pi^2 EI / 4L^2$ y 2.0, cuando $\gamma = \infty$).

PROBLEMA PARA CASA. Determinar la carga crítica de pandeo elástico del marco contraventeado de la figura, utilizando el método



de las rigideces. Supóngase que las funciones de estabilidad tienen los mismos valores en todas las columnas, y que la fuerza axial no influye en las rigideces y factores de transporte de los trabes. Debe obtenerse la ecuación característica en forma general, y utilizarla para determinar la carga crítica de un marco con las propiedades siguientes:

$$L = 10 \text{ m}, \quad BL = 5 \text{ m}, \quad I_v = 18400 \text{ cm}^4, \quad I_c = 32200 \text{ cm}^4$$

$$\gamma = \frac{I_v I_c}{L_v I_c} = 0.25$$

Los métodos generales permiten determinar la carga crítica de cualquier estructura reticular, por compleja que sea, pero resultan de aplicación difícil cuando la estructura está compuesta por un número más o menos elevado de miembros, por lo que en esos casos suele recurrirse a simplificaciones.

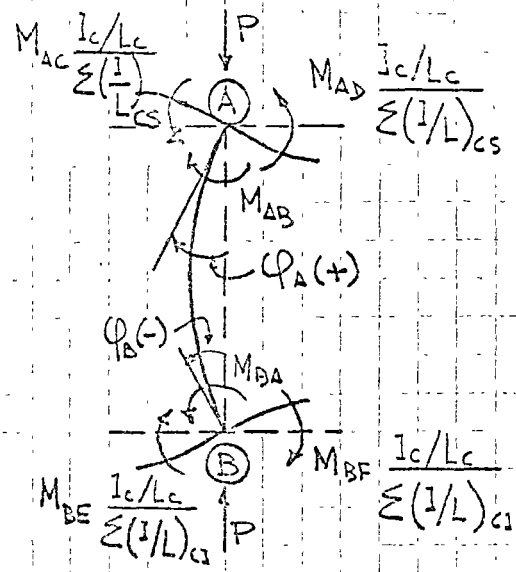
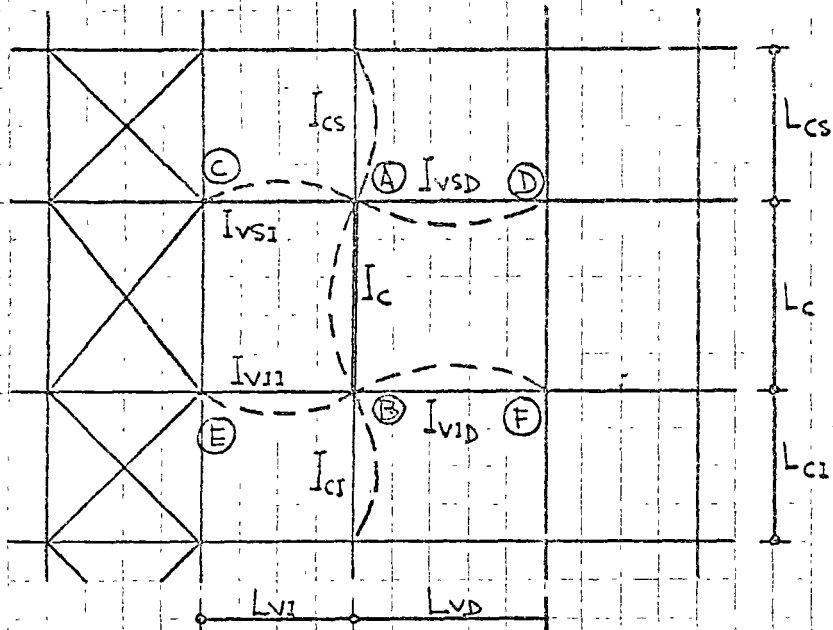
MARCOS CONTRAVENTADOS. Se quiere calcular la carga crítica de un marco de varios pisos, geoméricamente regular, provisto de contravientos adecuado, de manera que pueda suponerse que sus nudos no se desplazan linealmente. Para simplificar el problema, la carga crítica de cada columna se determina utilizando un subconjunto formado por ella y las dos vigas que conectan en cada uno de sus extremos, y se hacen las suposiciones siguientes:

a) Todas las columnas de la estructura alcanzan sus cargas críticas simultáneamente, de manera que ninguna de ellas proporciona restricciones a los giros en los extremos de las demás.

b) Las rotaciones en los extremos lejanos de las vigas que conectan con una columna cualquiera son iguales en magnitud y de sentido contrario a las de los nudos correspondientes a dicha columna.

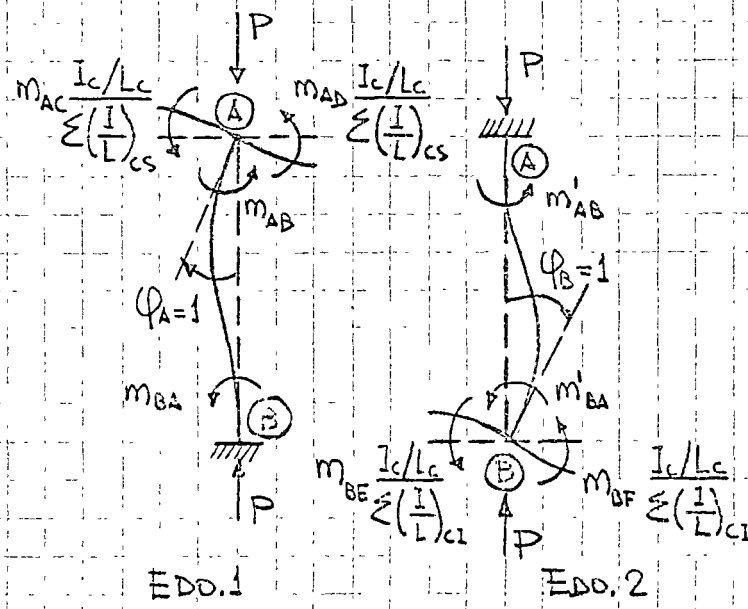
c) Los momentos restrictivos proporcionados por las vigas se reparten entre las dos columnas que concurren en cada nudo proporcionalmente a sus rigideces I/L .

Admitidas estas hipótesis puede aplicarse el método de las rigideces para calcular la carga crítica de una columna cualquiera AB.



$\Sigma(1/L)_{cs}$ y $\Sigma(1/L)_{c1}$ son las sumas de cocientes I/L de las dos columnas que llegan a cada uno de los nudos A y B.

Ecuaciones de equilibrio:



$$-m_{AC} \frac{I_c/L_c}{\Sigma(1/L)_{cs}} \phi_A - m_{AD} \frac{I_c/L_c}{\Sigma(1/L)_{cs}} \phi_A - m_{AB} \phi_A + m'_{AB} \phi_B = 0$$

$$-m_{BA} \phi_A + m_{BE} \frac{I_c/L_c}{\Sigma(1/L)_{c1}} \phi_B + m_{BF} \frac{I_c/L_c}{\Sigma(1/L)_{c1}} \phi_B + m'_{BA} \phi_B = 0$$

A los momentos del estado 2 se les ha cambiado signo, por que se sabe que el giro ϕ_B es negativo.

Sustituyendo los momentos "m" por las rigideces, y ordenando:

$$-\frac{I_c/L_c}{\Sigma(1/L)_{cs}} \left(\frac{2EI_{vs1}}{L_{v1}} + \frac{2EI_{vs2}}{L_{v2}} \right) \phi_A - \frac{5EI_c}{L_c} \phi_A + 5C \frac{EI_c}{L_c} \phi_B = 0$$

$$-5C \frac{EI_c}{L_c} \phi_A + 5 \frac{EI_c}{L_c} \phi_B + \frac{I_c/L_c}{\Sigma(1/L)_{c1}} \left(\frac{2EI_{v1}}{L_{v1}} + \frac{2EI_{v2}}{L_{v2}} \right) \phi_B = 0$$

La condición de estabilidad se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones de equilibrio; dividiéndolos todos entre EI_c/L_c y reacomodándolos, se obtiene

$$\begin{vmatrix} -S - \frac{2}{\sum(I/L)_{cs}} & SC \\ \frac{I_{vs1}}{L_{v1}} + \frac{I_{vs2}}{L_{v2}} & -SC \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(S + \frac{2}{G_s}) & SC \\ -SC & S + \frac{2}{G_1} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -SC & S + \frac{2}{\sum(I/L)_{cs}} \\ \frac{I_{vi1}}{L_{v1}} + \frac{I_{vi2}}{L_{v2}} & -SC \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene la ecuación característica:

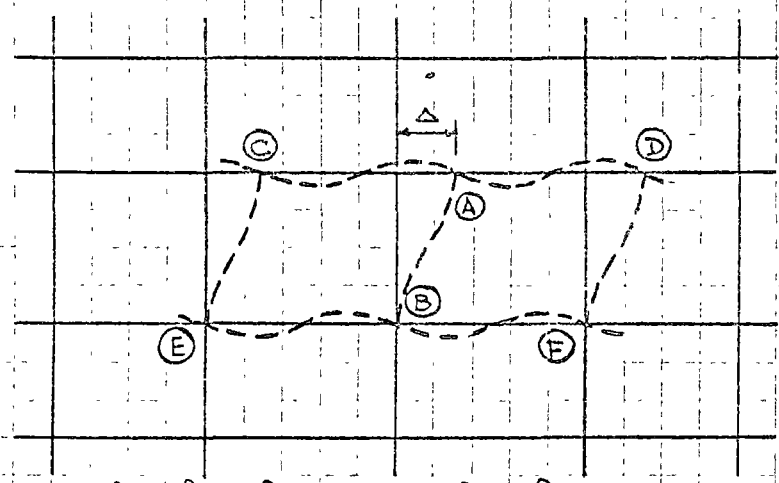
$$S^2(C^2 - 1) - 2S \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_s} \right) - \frac{4}{G_1 G_s} = 0 \quad (a)$$

En ella, $G_s = \frac{\sum(I/L)_{cs}}{\frac{I_{vs1}}{L_{v1}} + \frac{I_{vs2}}{L_{v2}}}$, $G_1 = \frac{\sum(I/L)_{ci}}{\sum(I/L)_{vi}}$

G_s es el cociente de la suma de rigideces I/L de todas las columnas que concurren en el extremo superior de la pieza en estudio (ella misma y la inmediata superior), dividida entre la suma de las rigideces I/L de todas las trabes que llegan a ese extremo; G_1 tiene el mismo significado, referido al extremo inferior.

Con la ec. (a) se obtienen la carga crítica y la longitud efectiva de una columna cualquiera de un marco rígido, siempre que las suposiciones hechas para deducirla sean razonablemente correctas. Se

resuelve por tanteos, suponiendo valores de ρ , buscando en los tablas los coeficientes S y C correspondientes, y repitiendo el proceso hasta lograr que se satisfaga la igualdad.



$$\varphi_C = \varphi_A = \varphi_D ; \varphi_E = \varphi_B = \varphi_F$$

do que los giros en los extremos de las vigas son iguales en magnitud y sentido.

Los dos casos, pandos de marcos contraventados y sin contra-ventear, se resuelven por medio de nomogramas que son la solución gráfica de la ec. (a) y de la equivalente para marcos no contraventados.

Como ya se ha visto, $G = \Sigma (I/L)_c / \Sigma (I/L)_v$, y los índices A y B corresponden a cada uno de los extremos de la columna.

A extremos de columnas articulados les corresponde, teóricamente, $G = \infty$, pero en diseños prácticos puede tomarse $G = 10$, a menos que el apoyo esté realmente diseñado como una articulación sin fricción; en extremos empotrados G es teóricamente nulo, pero conviene suponerlo igual a 1.0 en columnas ligadas rigidamente a zapatas diseñadas para resistir momento.

La intersección con la escala central del nomograma de una línea recta que pase por G_A y G_B proporciona el coeficiente K buscado.

La carga crítica de las columnas de marcos no contraventados puede determinarse aproximadamente siguiendo un camino análogo, teniendo en cuenta los desplazamientos lineales relativos de los niveles y suponiendo

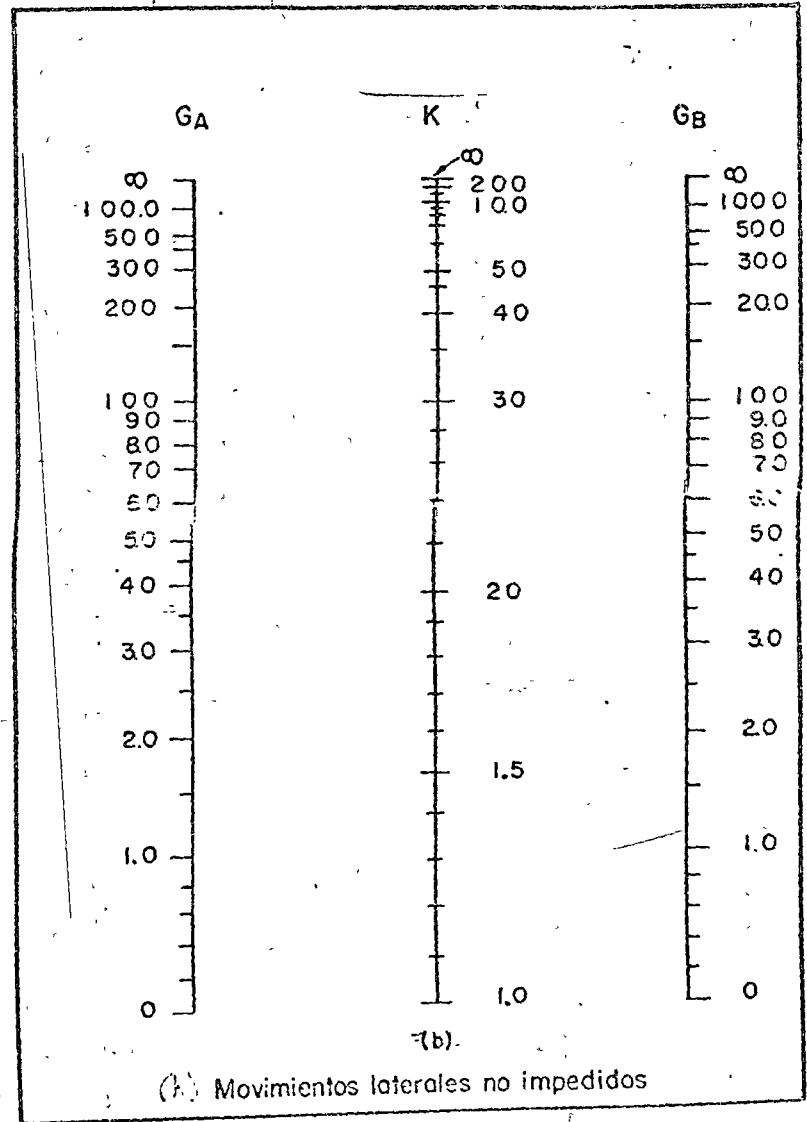
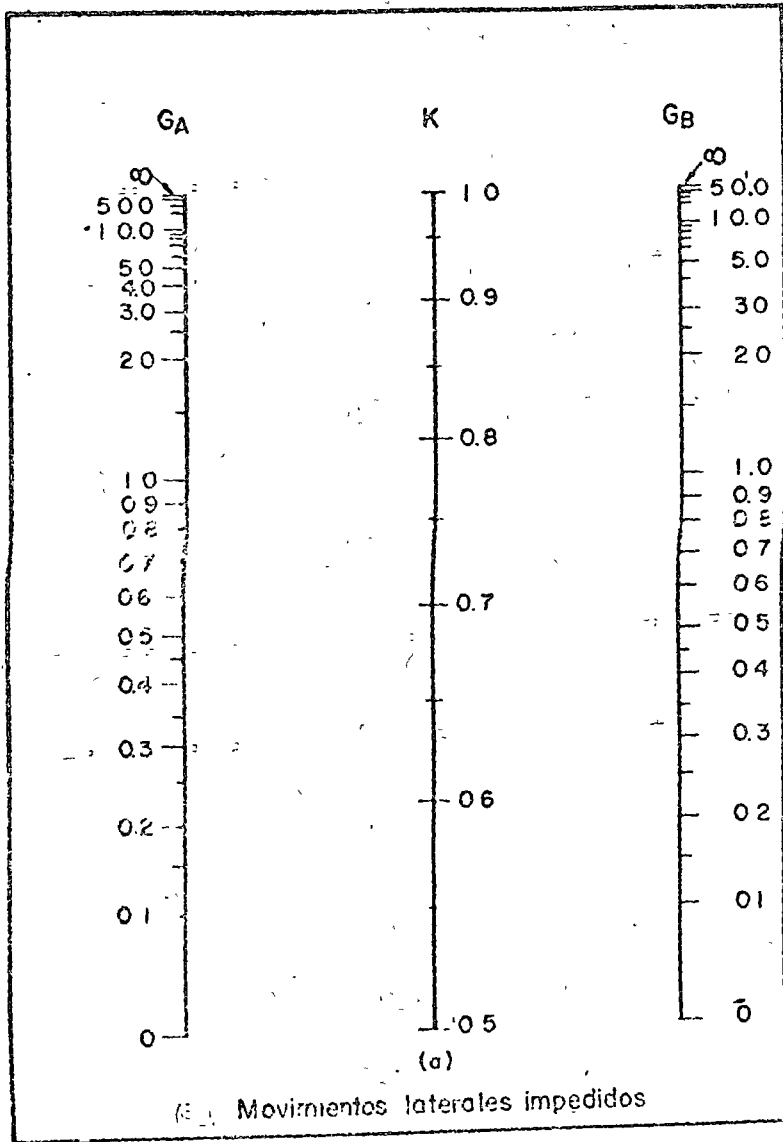
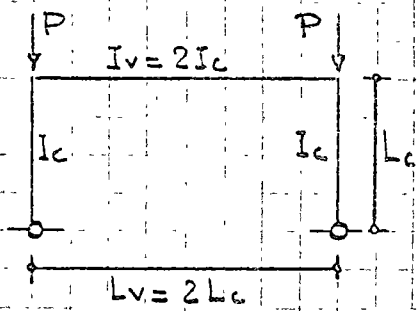


FIG. 28

Entre las 10:00 y 11:00



$$G_s = \frac{(1/L)c}{(1/L)v} = \frac{I_c/L}{2I_c/2L_c} = 1.0; \quad G_1 = \infty \text{ (valor Teórico)}$$

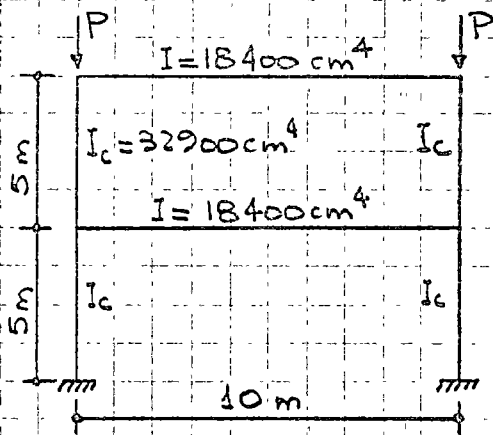
a) Desplazamiento horizontal del cabezal impedido.

Para $G_A = 1.0, G_B = \infty, K = 0.875$

$$P_{cr} = \frac{P_E}{K^2} = 1.306 P_E = 12.89 \frac{EI}{L^2}$$

b) Desplazamiento del cabezal permitido:

$$K = 2.30, \quad P_{cr} = 0.189 P_E = 1.86 \frac{EI}{L^2}$$



$$G = \frac{65.8}{18.4} = 3.58$$

$$G = \frac{2 \times 65.8}{18.4} = 7.16$$

$$G = 0$$

	DESPL. LINEALES IMPEDIDOS	DESPL. LINEALES NO IMPEDIDOS	
K	0.92	2.22	2º TRAMO
P/P_E	1.18	0.203	
K	0.68	1.66	1º TRAMO
P/P_E	2.16	0.36	
P_{cr}	$1.18 P_E$	$0.203 P_E$	

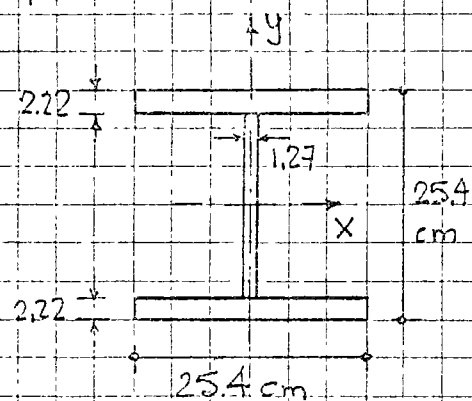
La carga crítica del marco queda definida por la columna que falla primero, que es la que tiene una K mas grande, pues todas son iguales en longitud y momento de inercia. Las columnas críticas son las del segundo tramo, por que tienen restricciones angulares en los extremos menores que las del primero.

Los valores "exactos" de P_{cr} son.

Despl. lineales impedidos: $P_{cr} = 1.44 P_E$

Despl. lineales no impedidos: $P_{cr} = 0.263 P_E$

PROBLEMA. El perfil I de la figura trabaja como columna comprimida axialmente en una longitud de 5 m. Determinar la carga que puede soportar en condiciones de trabajo, de acuerdo con las especificaciones AISC G9, en los dos casos siguientes: a) La columna, empotrada en la base, forma parte de un marco de un solo piso que tiene el cabezal muy rígido. Sus extremos pueden desplazarse linealmente uno con respecto al otro en el plano de los ejes Y (flexión alrededor de los ejes de mayor momento de inercia), mientras que en el otro plano el extremo superior está articulado y no hay posibilidad de movimiento lineal; la sección media está fija lateralmente (no puede desplazarse paralelamente al eje X). b) La columna es parte de un marco rígido de varios pisos; las vigas que se apoyan en sus extremos tienen las propiedades mostradas en la figura, y las columnas situadas arriba y abajo de ella tienen su misma rigidez. Los extremos están fijos linealmente en la dirección normal al eje Y , pero pueden desplazarse a lo largo de él. El acero es A36.



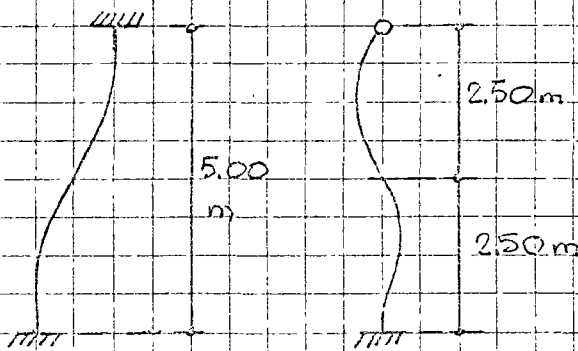
$$A = 139.51 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 16.123 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 6074 \text{ cm}^4$$

$$r_x = 10.77 \text{ cm}; r_y = 6.60 \text{ cm}$$

a) Las dos formas de pandeo, alrededor de los ejes X y Y , se muestran en ese orden en la figura.



Utilizando los valores de K recomendados para diseño se tiene:

$$L_x = 500 \text{ cm}, K_x = 1.2, K_x L_x / r_x = 500 \times 1.2 / 10.77 = 56$$

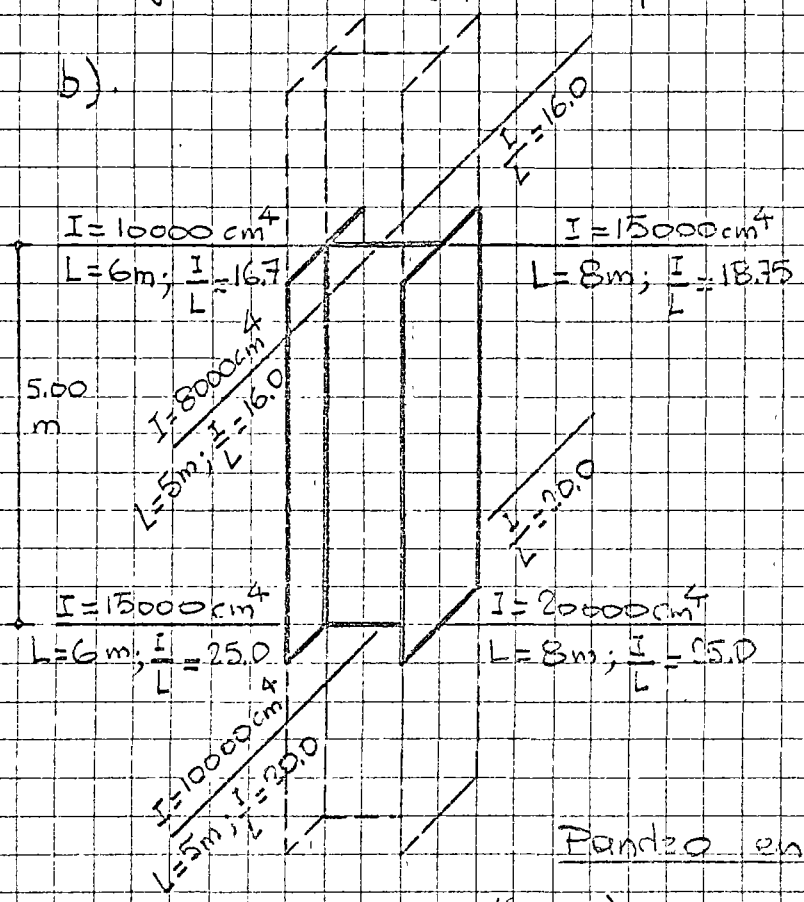
$$L_y = 250 \text{ cm}, K_y = 1.0, K_y L_y / r_y = 250 \times 1.0 / 6.60 = 38$$

La relación de esbeltez alrededor de y es conservadora, pues se ha considerado el tramo superior articulado en los dos extremos, sin tener en cuenta la restricción parcial producida por el tramo inferior; sin embargo, como de todos modos es crítica el pandeo alrededor de x no se justifica ningún refinamiento adicional.

De la tabla, para $KL/r = 56$, $\sigma_p = 1252 \text{ kg/cm}^2$

$$\therefore \text{Carga de trabajo } P_T = A G_p = 139.51 \times 1.252 = 174.7 \text{ Ton}$$

b).



Pandeo en el plano de mayor momento de inercia

$$\left(\frac{I}{L}\right)_{col} = 16182 / 500 = 32.4$$

$$G_s = \frac{\sum (I/L)_{col}}{\sum (I/L)_{vs}} = \frac{32.4 \times 2}{16.7 + 18.75} = 1.83$$

$$G_p = \frac{\sum (I/L)_{col}}{\sum (I/L)_{vs}} = \frac{32.4 \times 2}{25.0 \times 2} = 1.30$$

Los extremos de la columna pueden desplazarse linealmente $\therefore K_x = 1.49$

Pandeo en el plano de menor I

$$G_s = 12.1 \times 2 / (6.0 \times 2) = 0.96; G_p = 12.1 \times 2 / (20.0 \times 2) = 0.61$$

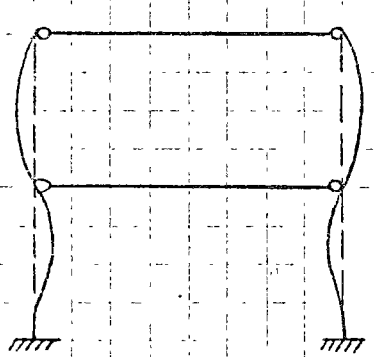
Los extremos están fijos linealmente $\therefore K_y = 0.72$

$$K_x L_x / r_x = 1.49 \times 500 / 10.77 = 69, K_y L_y / r_y = 0.72 \times 500 / 6.60 = 55$$

Es crítica el pandeo alrededor de x, para $KL/r = 69, G_p = 1162 \text{ kg/cm}^2, P_c = 162.1 \text{ T}$

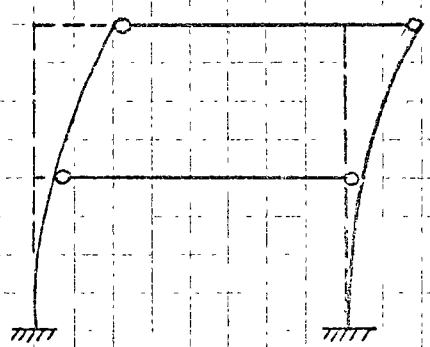
Los resultados obtenidos con los nomogramas son conservadores en los dos casos, por que al aplicarlos no se tiene en cuenta que las columnas inferiores restringen los giros de las superiores y aumentan su capacidad de carga. Eventualmente, la falla se produce cuando se igualan las cargas críticas de los dos tramos de columna, bajo sollicitaciones intermedias a las calculadas para el caso de cada una de ellas, considerada aislada.

Si la rigidez de las vigas es muy pequeña en comparación con la de las columnas, de manera que pueda tomarse $G = \infty$ en ambos niveles, utilizando los nomogramas se obtiene



$G = \infty$
 $K = 1.0$
 $G = \infty$
 $K = 0.7$
 $G = 0$

DESPL. LINEALES IMPEDIDOS

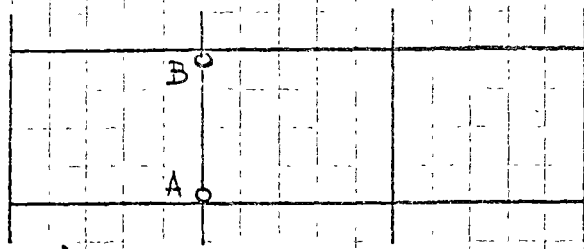


$G = \infty$
 $K = \infty$
 $G = \infty$
 $K = 2.0$
 $G = 0$

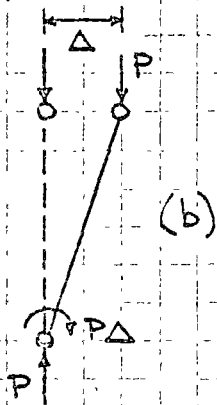
DESPL. LINEALES NO IMPEDIDOS

Estos resultados son evidentemente falsos, pues las columnas del segundo nivel se han tratado como si estuviesen articuladas en ambos extremos, llegándose al resultado absurdo de que el marco de la derecha no resiste ninguna carga axial.

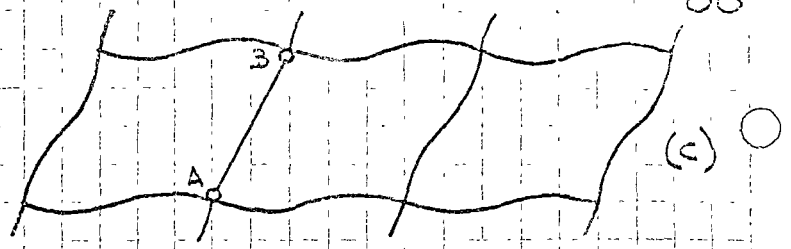
El empleo de los nomogramas para determinar por separado el factor K y la carga crítica de cada columna lleva al resultado total (en casos muy particulares únicamente) o a uno conservador, pero que puede estar excesivamente del lado de la seguridad. En la hoja siguiente se ilustra un caso extremo.



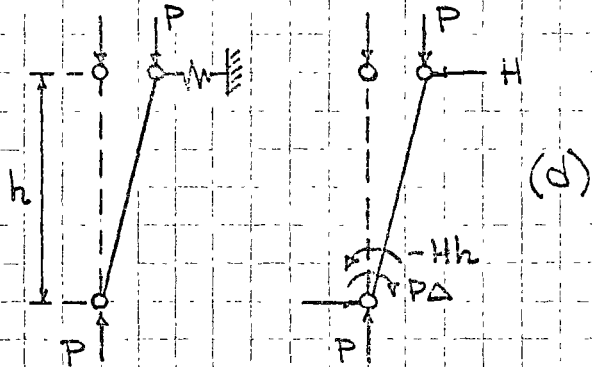
(a)



(b)



(c)



(d)

Un entrepiso de un edificio está formado por varias columnas consecutivas rigidamente con las vigas y una, la AB, ligada a ellas por medio de articulaciones. Si se aplica el nomograma a esta columna se encuentra $k = \infty$, pues $G_s = G_i = \infty$, de manera que de acuerdo con el su resistencia es nula.

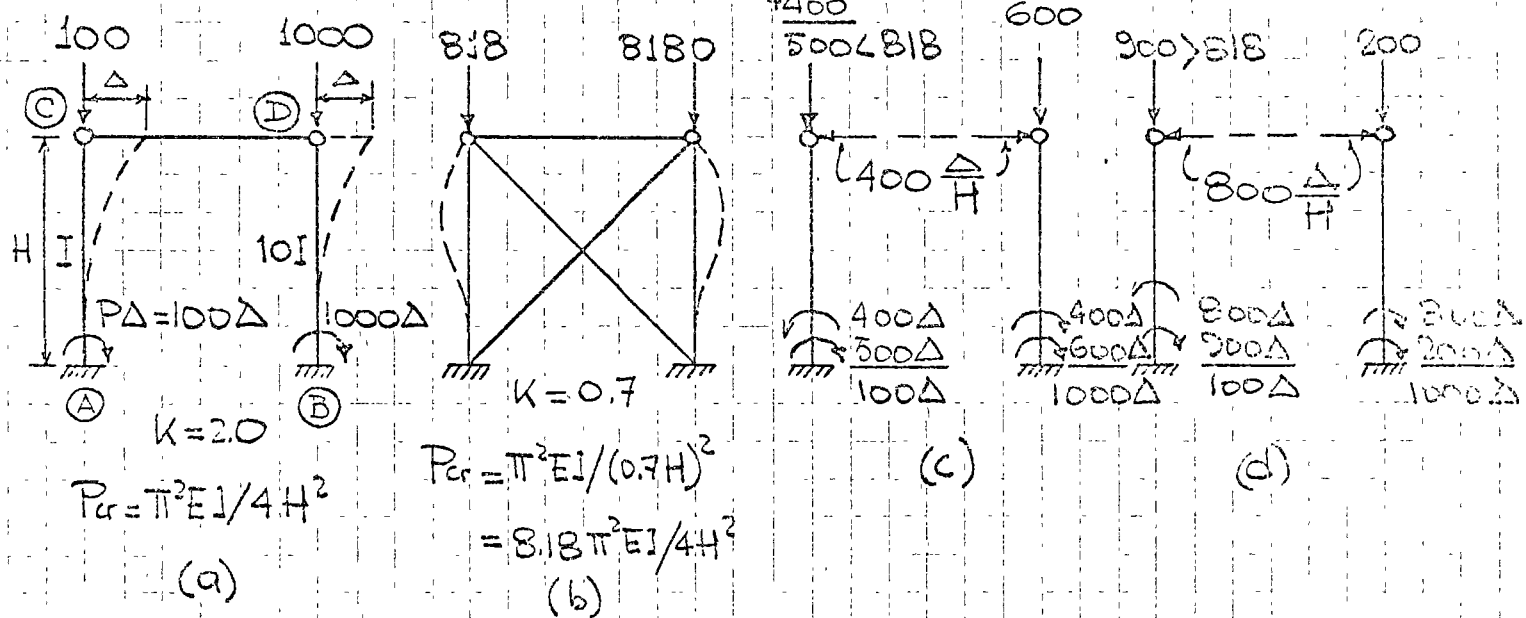
Este resultado sería correcto si AB estuviese aislada, pues en esas condiciones estaría en equilibrio inestable para cualquier fuerza axial P , pues el momento $P\Delta$ en su extremo inferior, fig. b, no podría ser equilibrado.

Como la columna no está aislada, las demás columnas del entrepiso, que sí tienen rigidez lateral, restringen sus desplazamientos, colocándola en la situación mostrada esquemáticamente en d; el equilibrio es estable mientras Hh se conserva igual a $P\Delta$.

El comportamiento de AB no es el que indica la aplicación directa del nomograma, ya que las columnas restantes proporcionarían estabilidad lateral hasta que todo el entrepiso falla en conjunto o hasta que AB alcanza su carga crítica de Euler, correspondiente a $k = \infty$.

Esto se debe a que la falla por inestabilidad lateral de una estructura en la que hay varias columnas, o de un entrecapito de un marco de varios niveles, es un fenómeno de conjunto. (También hay interacción con las columnas situadas arriba y abajo del nivel considerado pero este factor es, en general, de menor importancia). En cambio, el punto con extremos fijos linealmente sí puede considerarse un fenómeno razonablemente individual.

A continuación se describe el comportamiento de un marco sencillo no contraventado:



Las cargas que obran en el marco (a) son las críticas de las columnas aisladas; éstas fallan simultáneamente. La carga crítica del marco es 1100.

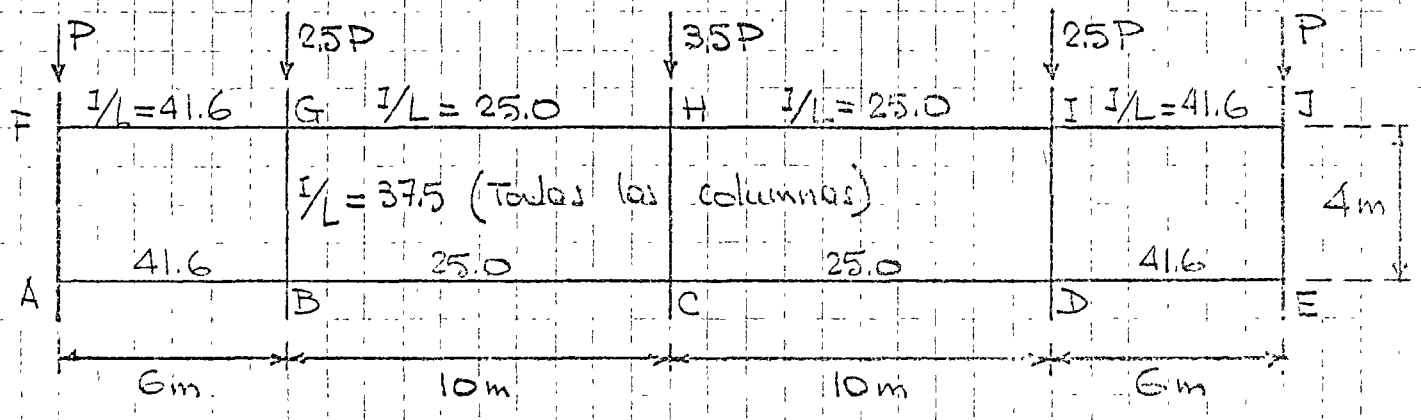
Si el marco se contraventea, (b), su carga crítica aumenta 8.18 veces.

En (c) el marco está otra vez sin contraventeo, con la misma carga total que en (a), pero distribuida de otra manera, puede resistirla por el soporte lateral que la columna derecha proporciona a la izquierda (ver momentos en las bases).

En las condiciones mostradas en (d) la columna de la derecha vuelve a proporcionar a la de la izquierda la restricción necesaria para que trabaje, como si su extremo superior estuviese fijo linealmente; sin embargo, la carga que obra sobre ella es mayor que la crítica, 818, de manera que esa condición de carga no es posible.

En general, la carga vertical total que produce el pandeo lateral de un marco de un nivel, o de un entrepiso de uno de varios niveles, puede distribuirse entre las columnas que lo componen de una manera cualquiera, y el pandeo lateral no se presenta hasta que la carga total en el piso iguale la suma de las capacidades de carga de las columnas individuales en el marco no contraventado. Hay una limitación: la fuerza máxima que puede soportar una columna individual es su carga crítica en el marco supuesto contraventado.

EJEMPLO. Calcular la carga crítica elástica del entrepiso no contraventado de la figura. Todas las columnas, incluyendo las que están arriba y abajo del entrepiso, tienen $I_c = 15000 \text{ cm}^4$, y todas las vigas, $I_v = 25000 \text{ cm}^4$.



SOLUCIÓN A: Empleando directamente el 2º nomograma.

Columnas AF y EJ. $G_s = G_e = 1.8$, $K = 1.54$, $P_{cr} = 794 \text{ Ton} = P$

Columnas BG y DI. $G_s = G_e = 1.13$, $K = 1.4$, $P_{cr} = 960 \text{ Ton} = 2.5P$, $P = 384 \text{ T}$

Columna CH. $G_s = G_e = 1.5$, $K = 1.47$, $P_{cr} = 870 \text{ Ton} = 3.5P$, $P = 248.5 \text{ T}$

La columna que falla primero es la central, cuando $P = 248.5 \text{ T}$; la carga crítica del entrepiso es $248.5 \times 10.5 = 2610 \text{ Ton}$. En ese momento, $P_{AF} = P_{EJ} = 248.5 \text{ T} < 794$, $P_{BG} = P_{DI} = 621 \text{ Ton} < 960$; solo falla CH, y las otras columnas tienen una resistencia adicional importante.

SOLUCIÓN B: Teniendo en cuenta el trabajo de conjunto.

La carga crítica del entrepiso es $794 \times 2 + 960 \times 2 + 870 = 4378 \text{ Ton}$, a menos que alguna columna, considerada como parte de un marco contraventeado, falle antes.

Las cargas en las columnas son

$$P_{AF} = P_{EJ} = \frac{4378}{10.5} = 417 \text{ Ton}, P_{BG} = P_{DI} = 417 \times 2.5 = 1042 \text{ Ton}, P_{CH} = 417 \times 3.5 = 1460 \text{ Ton}$$

Las cargas críticas de las columnas sin desplazamientos lineales de los nudos se determinan utilizando el 1º nomograma.

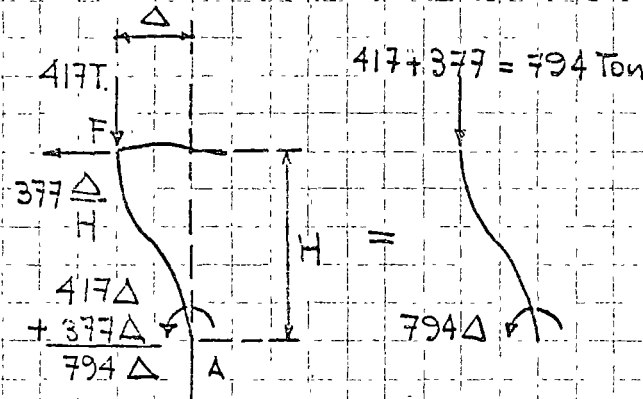
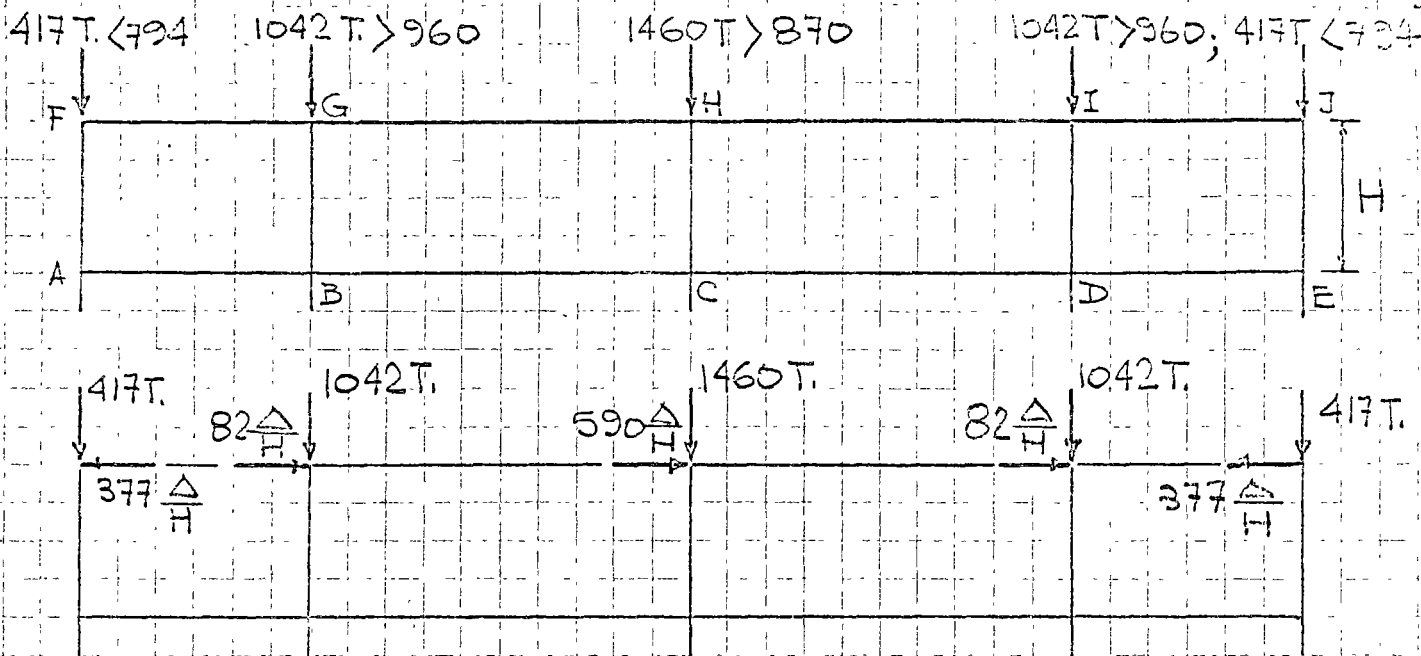
Columnas AF y EJ. $K = 0.84$, $P_{cr} = 2670 \text{ Ton} > 417$

Columnas BG y DI. $K = 0.79$, $P_{cr} = 3025 \text{ Ton} > 1042$

Columna CH. $K = 0.82$, $P_{cr} = 2800 \text{ Ton} > 1460$

Ninguna columna falla prematuramente, luego la carga crítica del entrepiso es 4378 Ton , 1.68 veces mayor que la obtenida en la solución A.

En la figura siguiente se muestran las cargas que actúan en el entrepiso en el instante del colapso.



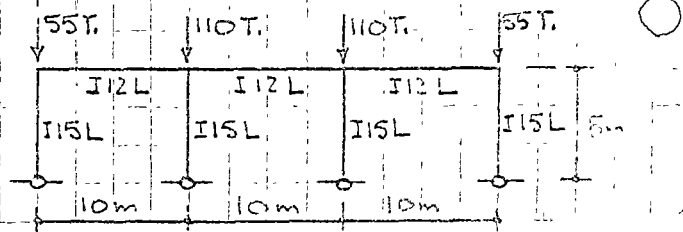
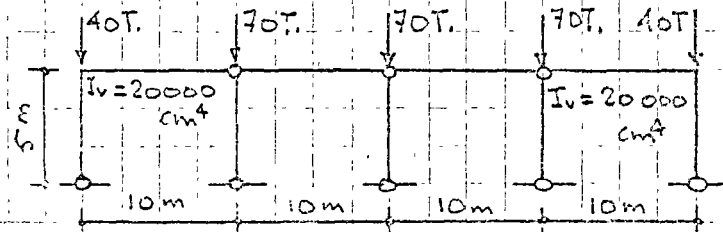
Para no fallar prematuramente, BG y DI necesitan fuerzas horizontales de sustentación de $82 \Delta/H$, y CH, $590 \Delta/H$, que son proporcionados por las columnas laterales;

cada una de ellas llega a la falla bajo su carga vertical de 417 Ton y la mitad de las fuerzas de sustentación, $377 \Delta/H$, que equivalen a 794 Ton verticales, carga crítica de las columnas laterales en el marco no contraventado.

PROBLEMAS PARA CASA

1º Diseñar las columnas de la estructura de la figura, usando secciones de la pag. 241, M. Houterray, ed. 1965. Las columnas están soportadas lateralmente, fuera del plano del papel, en sus dos extremos. Acero A36.

2º Determinar si las columnas de la figura son o no capaces de soportar las cargas indicadas: a) Consideradas por separadas; b) Teniendo en cuenta el comportamiento de conjunto. Los extremos superiores de las columnas pueden desplazarse en el plano del marco; normalmente a él están fijos, lo mismo que los puntos medios de las columnas.



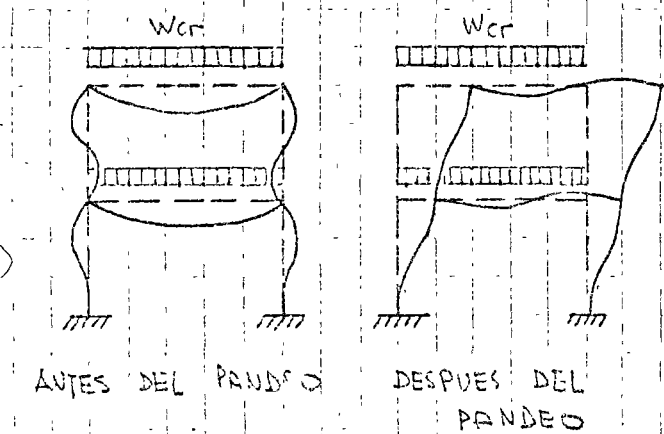
PANDEO INELÁSTICO DE MARCOS.

El pandeo de marcos de proporciones usuales no se inicia en el intervalo elástico, sino después de que los elementos que los componen, principalmente las columnas, han fluído plásticamente, cuando menos en zonas localizadas (basta recordar que la relación de esbeltez que separa el comportamiento elástico del inelástico en columnas, en acero A36 cargadas axialmente es 126.1, mientras que las columnas usuales en marcos de edificios tienen esbelteces del orden de 40 ó 50).

SOLUCIONES ANALÍTICAS. Hasta la fecha se han efectuado estudios teóricos limitados a determinar la carga crítica de pandeo inelástico de marcos de un solo piso. En esos estudios se ha utilizado alguna o no de los dos métodos numéricos que se describen a continuación, que son aplicables también a marcos rígidos de varios pisos. A continuación se describen brevemente, en la forma en que se aplican a marcos en los que no estuviesen impedidos los desplazamientos laterales.

MÉTODO BASADO EN LA DETERMINACIÓN DE LA CARGA DE BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO,

se trata de determinar la carga bajo la



que el marco puede permanecer vertical o pandearse lateralmente. El problema se resuelve a través de los pasos siguientes:

1. Se escoge una carga mayor que la que ocasiona la aparición del esfuerzo de fluencia por primera vez en el marco.

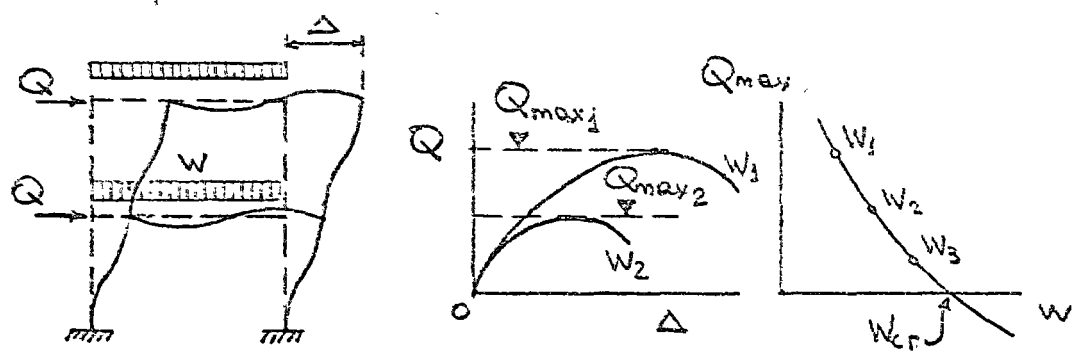
2. Se determinan los elementos mecánicos en el marco producidos por esa carga.

3. Se encuentran las rigideces de todos los miembros, incluyendo los efectos de la fuerza axial y del flujo plástico parcial.

4. Se emplean esas rigideces para comprobar si el marco es estable bajo la carga seleccionada en 1, utilizando cualquiera de los métodos para determinar la carga crítica de pandeo elástico.

5. Si el paso 4 muestra que la estructura es estable, se repite el proceso con una carga mas elevada.

MÉTODO BASADO EN LA DETERMINACIÓN DE CURVAS Q-Δ.



Como primer paso se escogen varios valores de las cargas verticales W_1, W_2 , etc.

Para cada carga vertical se determina la respuesta del marco ante la acción de fuerzas laterales Q , aplicadas en todos los niveles, de intensidad creciente, y se traza la curva $Q-\Delta$ correspondiente: su ordenada máxima representa la fuerza horizontal Q_{max} que puede soportar el marco. Q_{max} disminuye al crecer la carga vertical W , y puede trazarse una curva que relaciona las dos cantidades: la carga crítica se alcanza cuando esta curva intersecta el eje de las W , lo que indica que cuando la carga crítica obra sobre el marco no se requiere ninguna fuerza horizontal para producir desplazamientos laterales.

DETERMINACIÓN APROXIMADA DEL COEFICIENTE K EN

COLUMNAS INELÁSTICAS. La carga crítica de pandeo elástico de una columna se calcula con la expresión $P_{ce} = \pi^2 EI^2 / (KL)^2$, mientras que la de pandeo inelástico está dada por $P_{ci} = \pi^2 I_e / (KL)^2$.

Al obtener los nomogramas para determinar la longitud efectiva de columnas en marcos se encontró que está relacionada con el cociente $G = \Sigma \text{rigideces de columnas} / \Sigma \text{rigideces de vigas} = \Sigma (EI/L)_{col} / \Sigma (EI/L)_{vig}$. En el intervalo elástico las E se anulan, y se obtiene la expresión $G = \Sigma (I/L)_{col} / \Sigma (I/L)_{vig}$.

La rigidez de columnas en el intervalo inelástico es EI_e/L , menor que la elástica, de manera que una viga elástica les proporciona una restricción mayor, y el factor G puede definirse como

$$G_{inelástico} = \frac{\Sigma (EI_e/L)_{col}}{\Sigma (EI/L)_{vig}} = \frac{\Sigma (I_e/L)_c}{\Sigma (I/L)_v} = \frac{\Sigma \left(\frac{I_e}{L} \frac{I}{I} \right)_c}{\Sigma (I/L)_v} = \frac{I_e}{I} G_{elástica}$$

La longitud efectiva de columnas en el intervalo inelástico puede determinarse con los nomogramas usuales, empleando el factor reducido $G_{inelástico}$.

El factor de reducción I_e/I se calcula como sigue:

$$\frac{P_{ce}}{P_{ci}} = \frac{\pi^2 EI/L^2}{\pi^2 EI_e/L^2} = \frac{I}{I_e} \therefore \frac{I_e}{I} = \frac{P_{ci}}{P_{ce}}$$

Utilizando las expresiones recomendadas por el CRC,

$$\frac{I_e}{I} = \frac{\gamma_y [1 - (1/r)^2 / 2C_c^2] A}{\pi^2 E / (L/r)^2 A} = \frac{F_a}{F_e}$$

La última igualdad no es rigurosamente cierta, pues en el cálculo de F_a y F_e se usan coeficientes de seguridad diferentes, pero esto se ignora como un factor de pequeña importancia. F_a y F_e están tabulados en

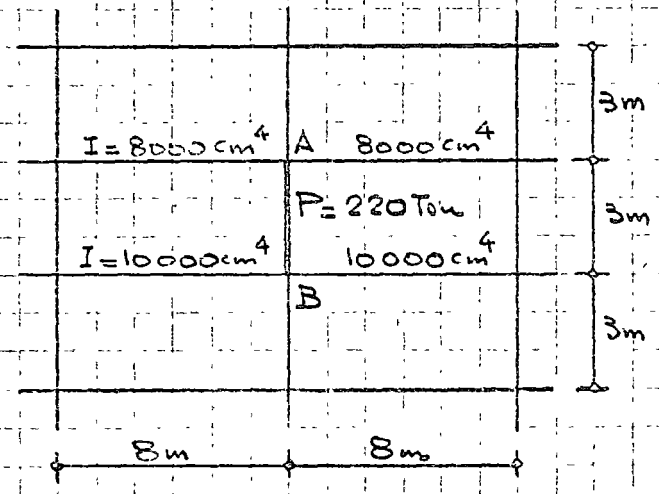
las especificaciones AISC y en el Manual de Monterrey.

Finalmente, se obtiene

$$G_{inelástico} = \frac{F_u}{F_e} G_{elástico}$$

En el intervalo elástico, $F_u = F_e$.

EJEMPLO. Diseñar la columna AB del marco no contraentramado de la figura, considerando comportamiento en el plano únicamente. Las columnas situadas arriba y abajo de AB son iguales a ella. Acero A36. Secciones de la pag. 241, M. de Monterrey.



SOLUCIÓN ELÁSTICA

Ensayaremos 1 H. 12" x 12" x 153 Kg/m.
 $I_x = 32470 \text{ cm}^4, r_x = 12.9 \text{ cm}, A = 195.16 \text{ cm}^2$
 $G_s = \frac{2(32470/300)}{2(8000/800)} = \frac{108}{10} = 10.8$
 $G_i = \frac{2(32470/300)}{2(10000/800)} = \frac{108}{12.5} = 8.6$ } $K = 2.9$
 $\frac{KL}{r_x} = \frac{2.9 \times 300}{12.9} = 67, F_a = 1177 \text{ Kg/cm}^2$
 $P_a = 195.16 \times 1177 = 230 \text{ Ton} > 220 \text{ ok}$

SOLUCIÓN INELÁSTICA.

1H. 12" x 12" x 132 Kg/m. : $I_x = 28969 \text{ cm}^4, r_x = 13.11 \text{ cm}, A = 168.55 \text{ cm}^2$
 $G_s = 9.6, G_i = 7.7, K_{el} = 2.8. \frac{KL}{r} = \frac{2.8 \times 300}{13.11} = 64 < C_c \therefore \text{Comp. Inelástico}$
 Para $KL/r = 64, F_a = 1198 \text{ Kg/cm}^2, F_c' = 2560 \text{ Kg/cm}^2$
 $G_s = 9.6 \times 1198 / 2560 = 9.6 \times 0.467 = 4.5, G_i = 7.7 \times 0.467 = 3.6 \therefore K = 2.0$
 $KL/r_x = 2.0 \times 300 / 13.11 = 46, F_a = 168.55 \times 1.315 = 222 \text{ Ton} \approx 220$
 El valor de K se reduce a través de nuevos ciclos de cálculo.
2º Ciclo. $KL/r = 2.0 \times 300 / 13.11 = 46 \therefore F_u = 1315 \text{ Kg/cm}^2, F_e = 4255 \text{ Kg/cm}^2$
 $G_s = 9.6 \times 1315 / 4255 = 9.6 \times 0.265 = 2.55, G_i = 7.7 \times 0.265 = 2.05, K = 1.65 \text{ ETC}$

ESTABILIDAD DE PLACAS

La mayor parte de los miembros que constituyen una estructura metálica, ya sean perfiles laminados en caliente, secciones compuestas por varias placas remachadas o soldadas, o perfiles hechos con lámina delgada doblada en frío, están formados por un conjunto de elementos planos ligados entre sí y la carga de sus bordes los somete, cuando trabajan a compresión, pueden alcanzar un estado de equilibrio inestable y pandearse localmente antes de que la pieza falle en forma plástica, originando un colapso prematuro de la pieza, caracterizado por una distorsión de sus secciones transversales. Por consiguiente, debe estudiarse la estabilidad de esas placas planas para asegurarse de que no fallasen antes que la pieza en conjunto o, en caso contrario, para determinar el coeficiente de seguridad contra el pandeo local.

La posibilidad de que una placa se pandee existe siempre que esta sometida a sollicitaciones que ocasionan esfuerzos de compresión, uniformes o no, en alguna región o dirección determinada (placas en compresión, en flexión o en curvatura pura, o bajo una combinación de estas sollicitaciones; el curvado puro ocasiona un esfuerzo principal de compresión).

El problema básico se ilustra en la Fig. 1, en la que se muestra una

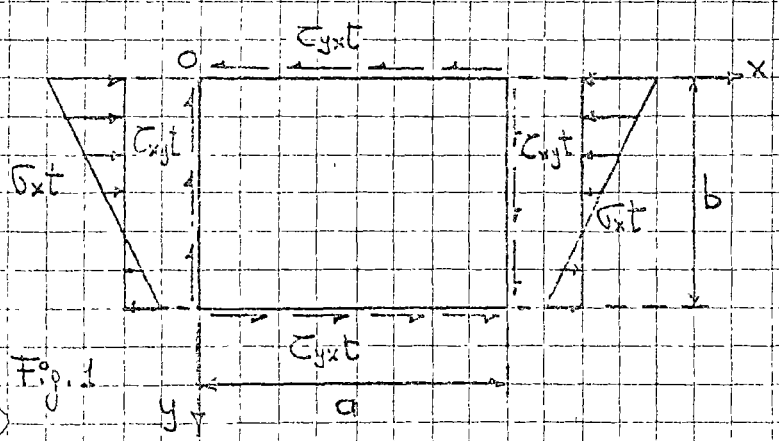


Fig. 1

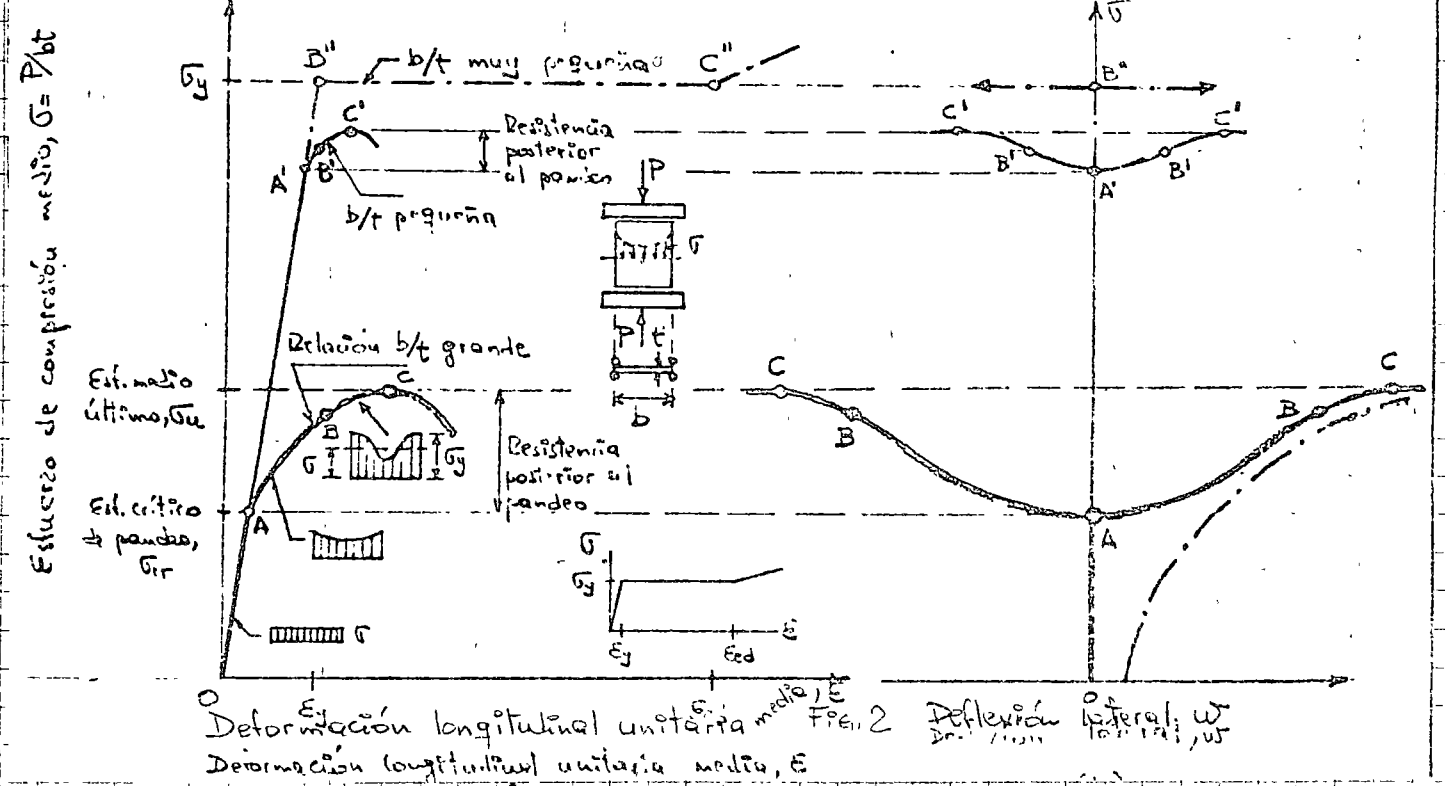
placa rectangular de longitud a , ancho b y espesor t , soportada en los cuatro bordes y sometida a la acción de fuerzas constantes C_{yxt} y C_{xyt} distribuidas uniformemente y de fuerzas normales C_{xyt} , que actúan

principalmente, en los bordes $x=0$ y $x=a$. Esta condición de carga es la más general; las restantes son casos particulares de ella.

Aunque la condición de carga de la Fig. 1 es una idealización de lo real, permite obtener resultados suficientemente cercanos a los correctos, si el estudio se basa en valores promedio de las fuerzas cortantes y normales.

En forma análoga a lo que sucede en las columnas, el pandeo de placas puede iniciarse en el intervalo elástico (placas esbeltas) o en el inelástico. Además, las placas muy esbeltas pueden tener una capacidad de resistencia importante después que se inicia el pandeo, lo que debe tomarse en cuenta en muchos problemas de diseño.

COMPORTAMIENTO DE PLACAS COMPRESIDAS. En la Fig. 2 se muestran las gráficas esfuerzo normal-deformación longitudinal y esfuerzo normal-deflexión lateral de placas rectangulares, perfectamente planas y con relaciones ancho/guiso de distintos valores, sometidas a compresiones crecientes aplicadas en una dirección. Los bordes horizontales se mantienen rectos durante todo el proceso, los bordes verticales se mantienen rectos durante todo el



proceso, y los verticales están apoyados libremente. El ancho de la placa es b y su grueso t .

Las gráficas ABC muestran el comportamiento típico de una placa con

relación b/t elevada. En ellas pueden observarse varias regiones diferentes: al principio las deformaciones ϵ crecen linealmente con el esfuerzo σ , que es constante en todo el ancho de la pieza, y no hay deflexiones laterales, hasta que σ alcanza un cierto valor crítico, σ_{cr} (puntos A), a partir del cual la placa empieza a deformarse lateralmente, es decir, se pandea, pero a diferencia de lo que sucede en columnas, en las que la carga crítica es generalmente casi igual a la de colapso, puede soportar cargas adicionales importantes debido a que las deformaciones laterales están restringidas por la resistencia a la flexión entre las bordes verticales.

Cuando la carga es mayor que la de pandeo los esfuerzos crecen más rápidamente en los bordes de la placa que en la zona central, hasta que llegan en ellos al valor de fluencia (puntos B), y las regiones plásticas se extienden rápidamente hasta que se alcanza la resistencia máxima de la placa, puntos C, el esfuerzo medio correspondiente es σ_m . En placas con relaciones b/t altas, el incremento de esfuerzo arriba del crítico de pandeo puede ser muy importante.

(La placa perfectamente plana se conserva así hasta que los esfuerzos alcanzan el valor crítico, y a partir de entonces se deforma lateralmente, siguiendo cualquiera de las ramas ABC de la Fig. 2b, al llegar a C, las deflexiones siguen creciendo sin incremento de carga. Las placas reales, en cambio, no son perfectamente planas, y su curva $\sigma-w$ es del tipo de la dibujada con línea interrumpida, cuando las deformaciones son grandes esta curva tiende hacia la ideal, lo que indica que pequeñas imperfecciones iniciales influyen muy poco en la resistencia total).

En placas con relaciones anchura/groesor menores σ_{cr} está cerca de σ_y y el flujo plástico se inicia casi inmediatamente después de que comienza

el pandeo, la resistencia última es poco mayor que la carga crítica ($0.25C^2$).

Si b/t es menor que cierto valor específico el esfuerzo medio puede llegar al valor de fluencia sin que la placa se pandee, y las deformaciones crecen bajo esfuerzo constante de acuerdo con la línea CEC'' . Eventualmente la placa se pandea y falla, ya sea cuando la deformación no llega todavía al punto C'' o cuando es mayor que la correspondiente a él, pues si b/t es suficientemente pequeña una placa puede ceder en el intervalo de endurecimiento por deformación sin pandeo previo.

El comportamiento de placas con otras condiciones de apoyo y carga es constitutivamente semejante al descrito aunque, desde luego, tanto la magnitud del esfuerzo crítico como la importancia de la resistencia posterior al pandeo varía de unos casos a otros.

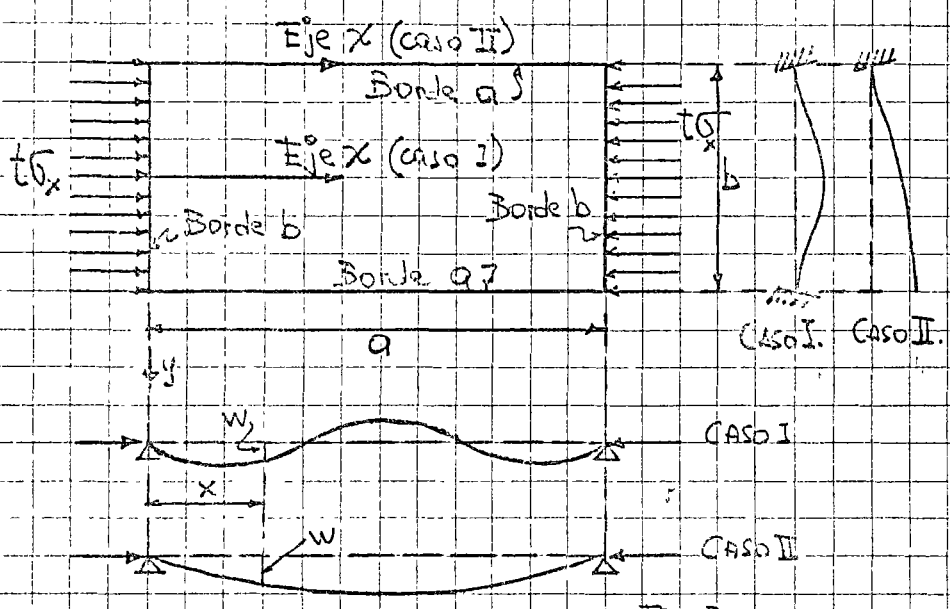
PLACAS COMPRESAS EN UNA SOLA DIRECCIÓN Las placas rectangulares comprimidas en una dirección por una carga uniformemente repartida en su plano medio constituyen elementos de importancia básica en el diseño de estructuras de acero, porque forman parte de muchos de los miembros utilizados en ellas (por ejemplo, el alma y los patines de una columna). La carga axialmente se encuentran en esas condiciones, y el patín comprimido de una viga está también en condiciones parecidas).

Como en todos los problemas de inestabilidad, los valores críticos de las cargas que actúan en el plano medio de una placa pueden determinarse suponiendo que ésta se sale ligeramente de su configuración plana inicial y calculando las magnitudes que deben tener las fuerzas para mantenerla en equilibrio en esa posición deformada, infinitamente cercana a la original.

PANDEO ELÁSTICO. Las hipótesis fundamentales son:

1. El material de la placa es perfectamente elástico y homogéneo.
2. La placa es originalmente perfectamente plana.
3. Las cargas de compresión están aplicadas en el plano de su superficie media.

En la Fig. 3 se muestra la placa en estudio, rectangular, de dimensiones



$a \times b$ y grueso t , en los dos bordes b , que están libremente apoyados, actúan fuerzas de compresión $t\sigma_x$ uniformemente repartidas (las condiciones de apoyo en los bordes cargados influyen muy poco en la carga crítica de las placas comprimidas

Fig. 3

largas, del tipo de las que forman las columnas o vigas; en cambio, es decisiva la manera en que están apoyados los bordes paralelos a la dirección de la carga).

Los bordes paralelos a la carga (bordes a) pueden estar apoyados de varias maneras diferentes:

Caso I. La placa está apoyada elásticamente en los dos bordes a ; en el límite, esos bordes pueden estar libremente apoyados o empotrados.

Caso II. Un borde está apoyado elásticamente y el otro no tiene ningún apoyo. También se incluyen las dos condiciones límite de que el giro del primer borde sea completamente libre o esté impedido.

Las placas soportadas en los dos bordes (Caso I) se pandean en una o más medias ondas, dependiendo de la relación a/b ; las que se encuentran en el Caso II se pandean en una sola media onda cuando pueden girar

libremente en el borde superior y en una o más de las guías está restringido o totalmente impedido.

La ecuación fundamental para resolver el problema del pandeo elástico de una placa plana cargada en su plano medio es la ecuación de equilibrio de la placa en una configuración ligeramente deformada, la que, escrita en términos de los desplazamientos laterales w , es

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1)$$

$D = Et^3/12(1-\mu^2) = EI/(1-\mu^2)$ es la rigidez a la flexión de la placa, por unidad de ancho, y desempeña un papel semejante al del producto EI en vigas; μ es el módulo de Poisson, que para el acero puede tomarse igual a 0.3, e $I = t^3/12$ es el momento de inercia de una faja de placa de ancho unitario.

En el caso en estudio, Fig. 3, σ_x es constante y σ_y y C_{xy} nulos, con lo que la ec. (1) se reduce a

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2)$$

Esta ecuación diferencial homogénea desempeña en la teoría de la inestabilidad de placas comprimidas el mismo papel que la ecuación $E(\partial^4 w/\partial x^4) + Pw = 0$, también diferencial y homogénea, juega en la de columnas.

De manera análoga a lo que sucede en la teoría de las columnas, solamente existen soluciones w de la ec. (2) para ciertos valores característicos σ_x del parámetro σ_x ; cada una de esas soluciones describe una configuración deformada de la placa en equilibrio inestable, asociada con el valor característico σ_x correspondiente. Si σ_x es diferente de los valores característicos la ec. (2) es satisfecha únicamente por la solución trivial $w=0$.

Si $\bar{\sigma}_x$ crece gradualmente desde cero hasta su valor característico más pequeño se llega a una condición en la que, además de la forma plana de equilibrio, $w=0$, es también posible una configuración deformada en equilibrio inestable. La bifurcación del equilibrio indica que se ha alcanzado el valor crítico de $\bar{\sigma}_x$, es decir, la carga de colapso. Desde un punto de vista matemático, el cálculo de $\bar{\sigma}_c$ consiste en determinar los valores característicos de $\bar{\sigma}_x$ en la ec. (2).

En los dos casos I y II, los valores característicos del parámetro $\bar{\sigma}_x$ que rescriben la ecuación diferencial (2) están dados por

$$\bar{\sigma}_c = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k \quad (3)$$

$\bar{\sigma}_c$ es el esfuerzo crítico de pandeo, E y μ los módulos de Young y de Poisson, t y b el grueso y el ancho de la placa y k un coeficiente adimensional que depende de las condiciones de apoyo en los bordes no cargados y de la RELACIÓN DE ASPECTO $\alpha = a/b$.

CASOS PARTICULARES. a) PLACAS APOYADAS LIBREMENTE EN LOS DOS BORDES DESCARGADOS. En placas comprimidas en una dirección, apoyadas libremente tanto en los bordes cargados como en los descargados, k vale

$$k = \left(\frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha}{n}\right)^2 \quad (4)$$

n es el número de semiondas que se forman en la dirección x al pandearse la placa; es un entero cualquiera.

PLACAS LARGAS. El número de semiondas que minimiza a k y, por consiguiente, a $\bar{\sigma}_c$, depende de la relación de aspecto α ; si la placa es suficientemente larga, de manera que pueda desprejiciarse el carácter entero de n , el valor mínimo de k se obtiene derivando (4) respecto a α e igualando el resultado a cero, con lo que se llega a $b = \frac{a}{n}$. (5).

De acuerdo con este resultado, la carga crítica mínima de una placa larga, libremente apoyada en sus bordes descargados, corresponde a la formación, en el sentido longitudinal, de n semiondas cuadradas de dimensiones b que se desplazan alternativamente a uno y otro lado del plano original, Fig. 4, que se desplazan alternativamente a uno y otro lado del plano original, Fig. 4.

en la Fig. 9.

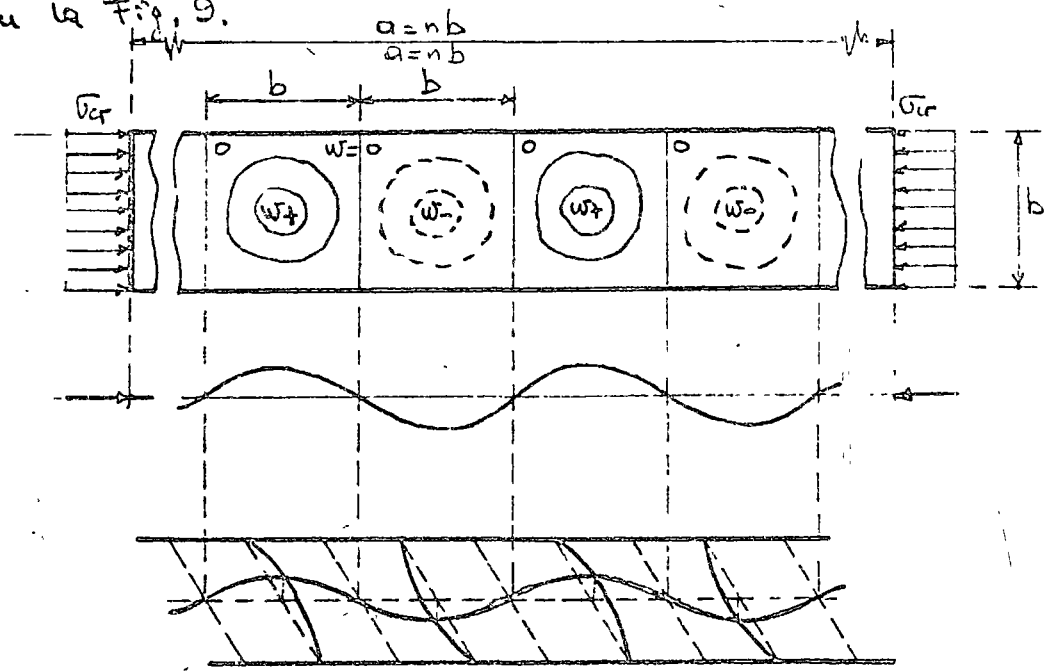


Fig. 4

Substituyendo (5) en (4) se obtiene el factor de placa k_2 mínima:

$$k_{min} = \left(\frac{n}{a} + \frac{a}{n} \right)_{b=a/n}^2 = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{b} \right)_{b=a/n}^2 = \left(\frac{n}{a} \frac{a}{n} + \frac{a}{n} \frac{n}{a} \right)^2 = 4.0$$

Y el esfuerzo crítico mínimo de pandeo de una placa larga libremente apoyada y comprimida longitudinalmente es

$$(\sigma_{cr})_{min} = \frac{4.0 \pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (6)$$

PLACAS CORTAS

Si las placas tienen una relación de aspecto reducida debe tenerse en cuenta el carácter entero del coeficiente n de la ec. (4); por consiguiente, debe sustituirse n por 1, 2, 3, ... en esa ecuación, y estudiar como varía k_2 en función de α , en cada caso particular.

Substituyendo en ella α por a/b , la ec. (4) toma la forma $k_2 = \left[\left(\frac{nb}{a} \right) + \left(\frac{a}{nb} \right) \right]^2$

y haciendo $n=1$ se convierte en

$$k = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2$$

El valor mínimo de k , obtenido por tanteos, es 4.0, y corresponde a $a/b=1.0$; a uno y otro lado de esa relación de aspecto, para a/b menor o mayor que 1.0, k aumenta, como se ve en la Fig. 5 (por ejemplo, si $a/b=0.5$, $k=6.25$, y si $a/b=1.5$, $k=4.72$).

De manera semejante,

para $n=2$ se obtiene

$$k = \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b}\right)^2$$

cuyo valor mínimo es

también 4.0, al igual para

$a/b=2$; la curva correspondiente

sube a uno y otro lado de esa

relación de aspecto.

En resumen, en todos los

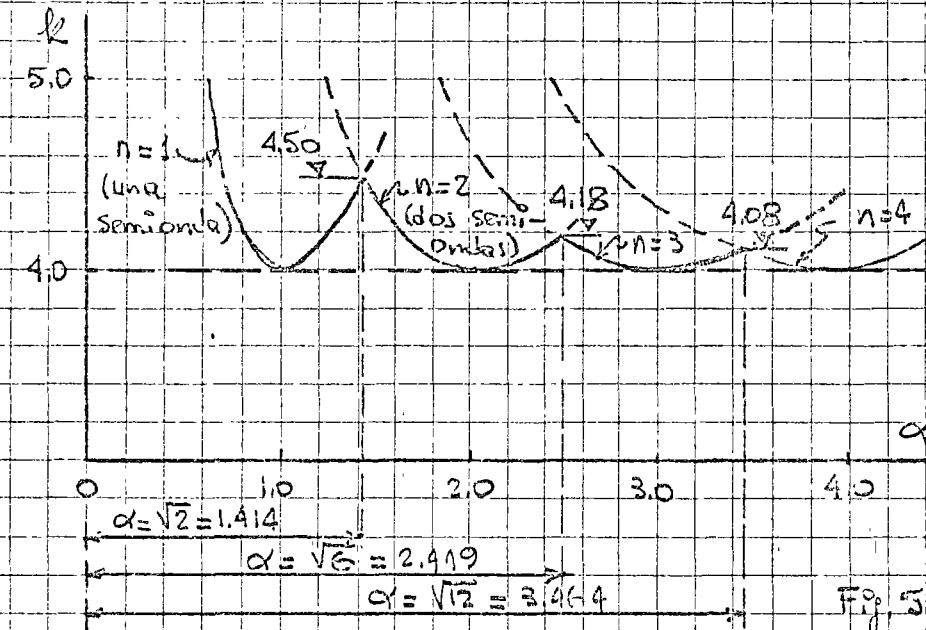


Fig. 5

casos en que n es un número entera el valor mínimo de k es 4.0, y corresponde al punto de la placa en semiondas cuadradas (cuando $n=1$, k es mínimo para $a=b$, placa cuadrada; $n=2$, k mín. corresponde a $a=2.0$, $a=2b$, y la placa se puede en dos semiondas cuadradas de dimensiones $b \times b$, etc).

Si la relación de aspecto no es un número entera, k es siempre mayor que 4.0.

Estudiando las curvas de la Fig. 5 se observa que la diferencia entre los valores máximo y mínimo de k disminuye al reducirse la longitud a , y como en la mayor parte de los miembros estructurales son de interés únicamente las placas, las pautas y angulos, el diseño puede basarse en el

valor mas pequeño de k , que es igual para todas las relaciones de aspecto. k aumenta considerablemente por encima de k_{min} únicamente para valores muy pequeños de a , de manera que si se quisiera aumentar la resistencia al pandeo de una placa comprimida largo, libremente apoyada, por medio de alfileres transversales, que la obligaran a pandearse en secciones de longitud determinada, sería necesario colocarlos muy juntos. Los alfileres longitudinales son, en cambio, mucho mas eficientes, pues reducen la relación t/b .

b) PLACAS CON OTRAS CONDICIONES DE APOYO. En las Figs. 6, 7 y 8 se muestran los resultados que se obtienen cuando los dos bordes descargados están empotrados y cuando la placa está empotrada o libremente apoyada en un borde y totalmente libre en el otro.

En el último caso los curvas no se cortan, sino la correspondiente a $n=1$ se encuentra por debajo de todas las demás, para todo valor de a/b , lo que indica que la placa se pandea siempre en una semionda, cualquiera que sea la relación de aspecto, y las curvas tienden asintóticamente a $k_{min} = 0.425$ cuando a/b tiende hacia infinito.

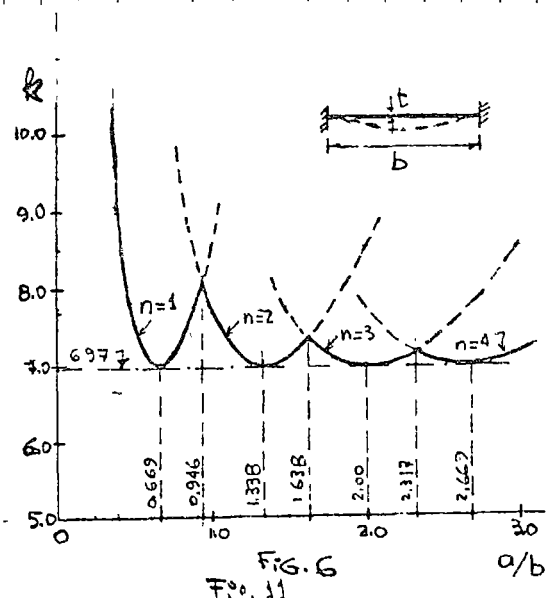


FIG. 6
Fig. 11

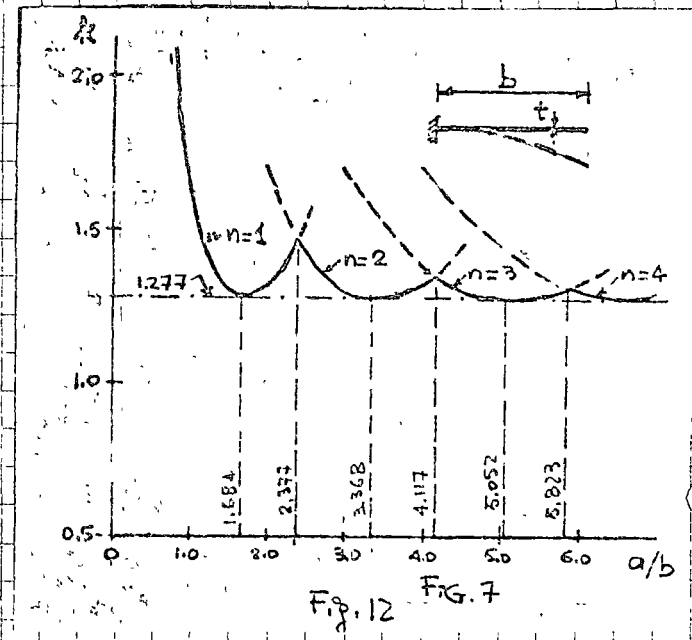
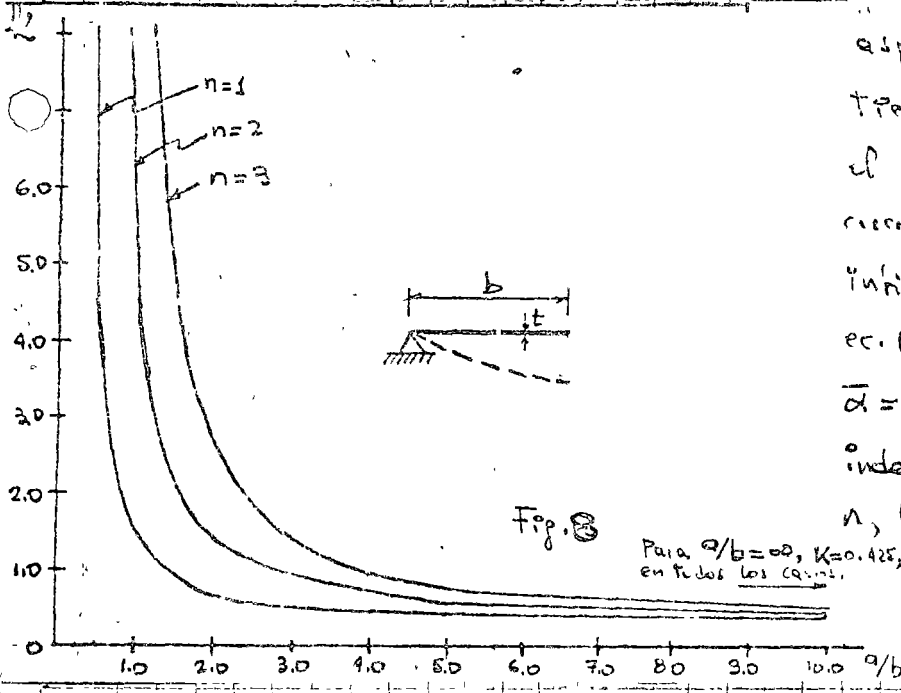


FIG. 7
Fig. 12

ESFUERZOS CRÍTICOS

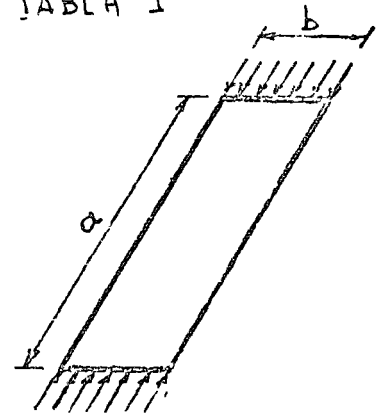


MINIMOS Y LONGITUDES DE LAS SEMIONDAS DE PUNDO EN PLACAS LARGAS COMPRIMIDAS.

En la Tabla I se indican los valores mínimos de los factores de placa k y los coeficientes β necesarios para calcular el esfuerzo crítico más pequeño y la longitud λ de las semiondas de pandeo.

CASO	Tipo de apoyo en los bordes descargados (los bordes cargados están libremente apoyados)	k_{\min}	β
1	Los dos bordes libremente apoyados	4.00	1.000
2	Un borde libremente apoyado, el otro empotrado.	5.42	0.800
3	Los dos bordes empotrados	6.97	0.669
4	Un borde libremente apoyado, el otro libre	0.425	*
5	Un borde empotrado, el otro libre.	1.277	1.684

TABLA I



* λ es siempre igual a la longitud a de la placa

correspondientes a placas largas comprimidas en una sola dirección, con diferentes condiciones de apoyo.

$(\sigma_{cr})_{\min}$ y λ están dadas por las eqs. (7) y (8).

$$(\sigma_{cr})_{\min} = \frac{\pi^2 E t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 k_{\min} = 1.841 \pi \pi \left(\frac{t}{b}\right)^2 k_{\min} \quad (7); \quad \lambda = \beta b \quad (8)$$

INTERACCIÓN ENTRE LOS ELEMENTOS PLANOS QUE FORMAN

UNA SECCIÓN. Los miembros que componen las estructuras de acero están formados siempre por un conjunto de elementos planos, y es evidente que la carga crítica de pandeo de cada elemento no depende únicamente de sus características propias sino también, y de manera muy importante, de las propiedades de los restantes, ya que el comportamiento de conjunto y la interacción entre todas las placas son los que fijan el grado de restricción existente en los bordes longitudinales de cada una de ellas y, por consiguiente, el valor de su factor k .

El pandeo local tiende a presentarse primero en la placa menos rígida, pero su iniciación se retrasa a causa de las restricciones que imponen las demás sobre las rotaciones de sus bordes, por lo que en general no se padece una sola placa, sino todo el conjunto se vuelve eventualmente inestable, excepto en casos extremos en que las placas que lo componen tienen rigideces muy diferentes unas de otras.

Escribiendo la ec. (5) en la forma $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{k}{(b/t)^2} \right]$ se observa que el esfuerzo crítico es función exclusivamente del parámetro $k/(b/t)^2$, pues el primer paréntesis es constante para un material dado.

b/t depende de la geometría de cada placa, pero k es función de las restricciones que las demás producen en sus bordes, de manera que una simple inspección de la sección transversal de una barra no permite determinar cuál placa tiene el factor de rigidez $k/(b/t)^2$ mínimo.

Si se supone que cada uno de los elementos planos que forman la sección está libremente apoyado a lo largo de su borde o bordes ligados con otras placas, y se toma como esfuerzo crítico de pandeo local del conjunto el correspondiente al elemento que tenga, en esas condiciones,

coeficiente de rigidez menor, se obtiene un valor que suele ser conservador, ya que el factor de rigidez real de la placa menos resistente es mayor que el calculado pues las restantes restringen, en mayor o menor grado, las rotaciones de sus bordes longitudinales (la única excepción se presenta cuando todas las placas que forman el perfil se pandean simultáneamente, pues en ese caso ninguna restringe a las otras, y el esfuerzo crítico calculado es el real).

Por consiguiente, si en una sección H , por ejemplo, se supone que el alma está libremente apoyada en sus dos bordes y que cada patín está formado por dos placas, libremente apoyadas en el borde en contacto con el alma y sin ningún apoyo en el otro, se calculan sus esfuerzos críticos con la ec (5), haciendo en ella $k=4.0$ para el alma y $k=0.425$ para los patines, como si fueran placas largas aisladas, y se toma como esfuerzo crítico de pandeo local del conjunto el menor de los dos, el resultado es conservador.

Sin embargo, si se desean calcular los esfuerzos críticos con mayor exactitud, debe tenerse en cuenta la interacción entre las diversas placas que forman cada perfil, para obtener sus valores reales de k .

El fenómeno de la interacción de los elementos planos que constituyen una pieza comprimida puede ilustrarse estudiando el comportamiento de una columna de sección transversal cuadrada hueca, formada por cuatro placas, sometida a esfuerzos de compresión que hacen que se pandee localmente.

Fig. 2.

Si las cuatro placas tienen el mismo grueso, las secciones transversales de la columna se deforman como de muestra en la Fig. 2 a: como tales tienen la misma rigidez, ninguna se opone al pandeo de las demás, y todos los

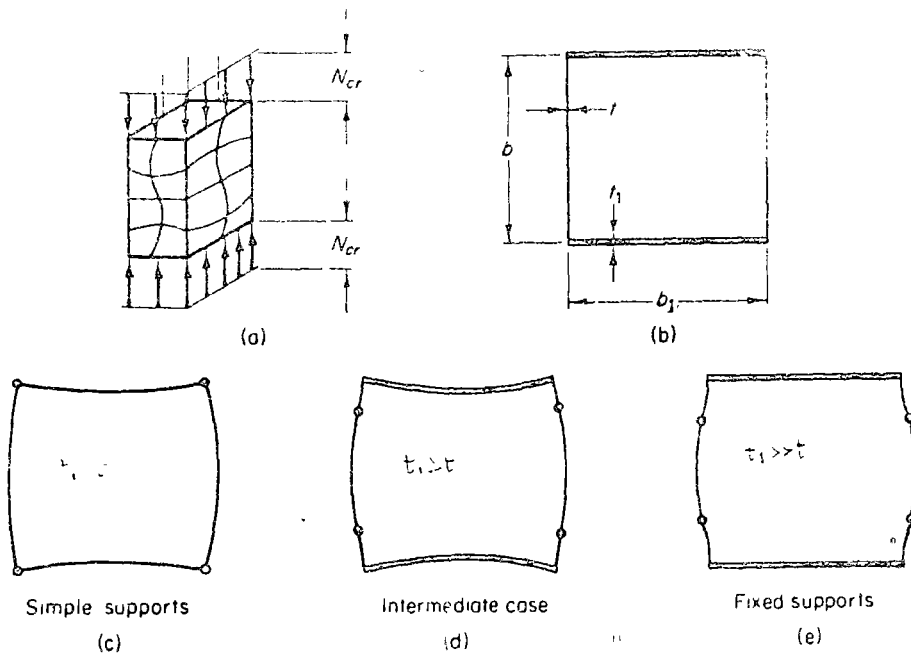


Fig. 9

bordes giran libremente alrededor de ejes longitudinales que pasan por las esquinas de la sección; cada placa actúa como si estuviera libremente apoyada en los dos bordes longitudinales, y k vale realmente 4.00 para cada una.

En el segundo caso, ilustrado en la Fig. 9c, el grueso t_1 de las placas horizontales es mayor que el de las laterales, t . Suponiendo que están libremente apoyadas en los bordes, k vale 4.0 para todas, pero $(b/t)^2$ es mayor en las laterales que en las horizontales de manera que éstas son más rígidas y el pandeo tiende a iniciarse en aquellas. Las placas superior e inferior tratan de impedir el giro de los bordes de las laterales, lo que ocasiona la aparición de momentos a lo largo de las aristas de la sección que restringen la rotación de los elementos planos menos rígidos y producen en ellos una condición intermedia entre el apoyo libre y el empotrado, al mismo tiempo que tratan de hacer girar a los elementos más rígidos. Como un resultado de todo esto, crece el factor k de las placas laterales, arriba de 4.0, y disminuye el de las horizontales, los coeficientes $k/(b/t)^2$ tienden a igualarse.

y la sección alcanza un estado de equilibrio inestable cuando los dos pares de placas se pandean simultáneamente.

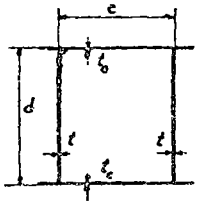
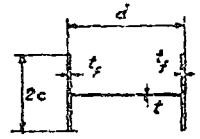
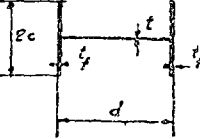
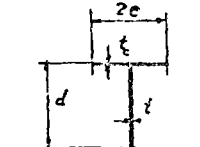
El fenómeno que se acaba de describir se presenta únicamente cuando los coeficientes de rigidez de todas las placas son del mismo orden de magnitud; si unas son mucho más rígidas que otras, Fig. 9e, se pandean únicamente las más esbeltas, que tienen un comportamiento cercano al de placas empotradas en los bordes, pues su carga crítica se alcanza antes de que se igualen los coeficientes de rigidez.

En resumen, cuando el pandeo local se presenta antes que el de conjunto del miembro, la placa en que se inicia el fenómeno necesita las restricciones que le proporcionan las contiguas para seguir siendo capaz de soportar incrementos de carga; el conjunto es estable hasta que se igualan los coeficientes de rigidez de todas las placas que lo componen, en cuyo caso todas ellas se pandean simultáneamente, o hasta que se alcanza un estado de equilibrio inestable en la placa o placas más flexibles, a pesar de las restricciones impuestas por las demás.

El fenómeno se complica cuando los esfuerzos normales no son iguales en todas las placas, pues su rigidez disminuye al aumentar la magnitud de esos esfuerzos.

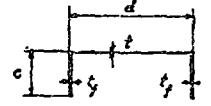
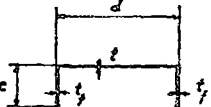
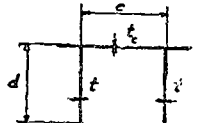
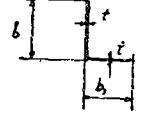
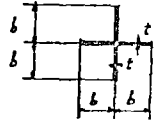
Se han efectuado estudios teóricos que han permitido determinar los coeficientes k de las placas que forman las columnas metálicas más usuales, teniendo en cuenta la interacción entre ellas. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla II, y los nomogramas de las Figs. 10, 11 y 12 son soluciones gráficas de la mayor parte de los casos tabulados en ella.

II
TABLE 27. Design Formulas for the Required Plate Thickness of Elements of Columns
[For coefficient C see Eqs (673a) and (673b)]

Type of cross section	Coefficient of restraint ζ	\sqrt{k}	Required plate thickness
Web plates of box section 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0.38}{1 - \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2}}$ valid for $\frac{tc}{ld} \leq 1$	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$	$d/t \leq C \sqrt{k}$
Web plate in I-section 	$\zeta = \frac{t^3}{t_f^3} \frac{0.16 + 0.0056(d/c)^2}{1 - 9.4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2}}$ valid for $9.4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2} \leq 1$	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$	$d/t \leq C \sqrt{k}$
Flanges of I-section 	$\zeta = 2 \frac{t_f^3 d}{t_c^3} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t_f^2 d^2}{t_c^2 c^2}}$ valid for $9.4 \frac{t_c^2}{t_f^2 d^2} \geq 1$	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$c/t_f \leq C \sqrt{k}$
Web plate of T-section 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2}}$ valid for $0.106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2} \leq 1$	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$d/t \leq C \sqrt{k}$

LOCAL BUCKLING OF PLATE ELEMENTS

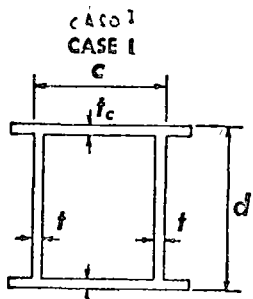
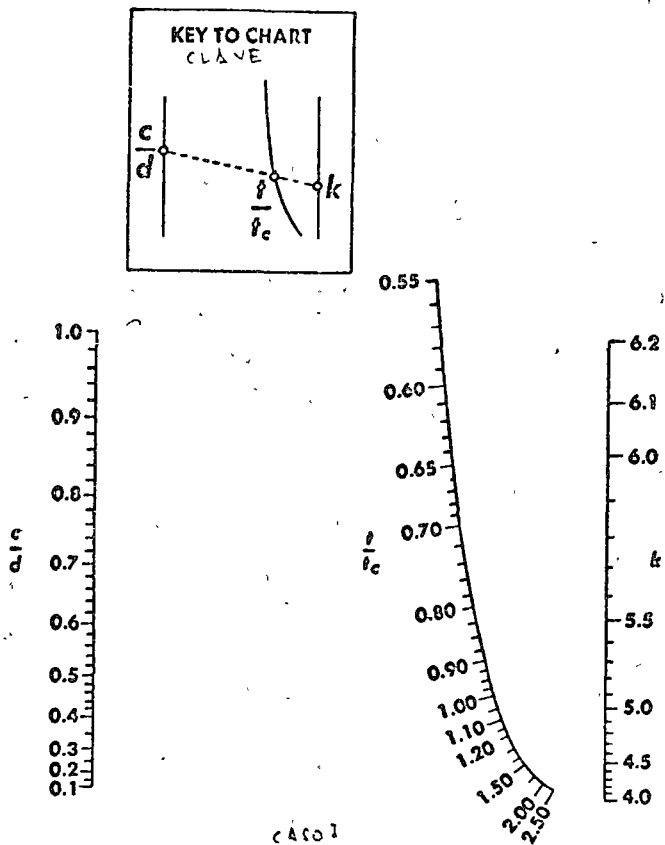
II
TABLE 29. Design Formulas for the Required Plate Thickness of Elements of Columns
(Continued)

Type of cross section	Coefficient of restraint ζ	\sqrt{k}	Required plate thickness
Web plate in channel-section 	$\zeta = 2 \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0.16 + 0.0056(d/c)^2}{1 - 9.4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2}}$ valid for $9.4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2} \leq 1$	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$	$d/t \leq C \sqrt{k}$
Flanges of channel-section 	$\zeta = \frac{t_f^3 d}{t_c^3} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t_f^2 d^2}{t_c^2 c^2}}$ valid for $9.4 \frac{t_c^2}{t_f^2 d^2} \geq 1$	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$c/t_f \leq C \sqrt{k}$
Web plates of U-section* 	$\zeta = \frac{t^3 c}{t_c^3 d} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2}}$ valid for $9.4 \frac{t_c^2 d^2}{t^2 c^2} \geq 1$	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$d/t \leq C \sqrt{k}$
Angle-sections 			$b_1/b = 1: b/t \leq 0.652C$ $b_1/b = 3/4: b/t \leq 0.711C$ $b_1/b = 1/2: b/t \leq 0.754C$
Cruciform-section 			$b/t \leq 0.652C$

* The formula given does not apply if the lower edges of the webs are connected by lacing bars

COEFFICIENTE DE PLACA - k
 PLATE COEFFICIENT - k

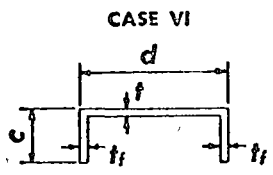
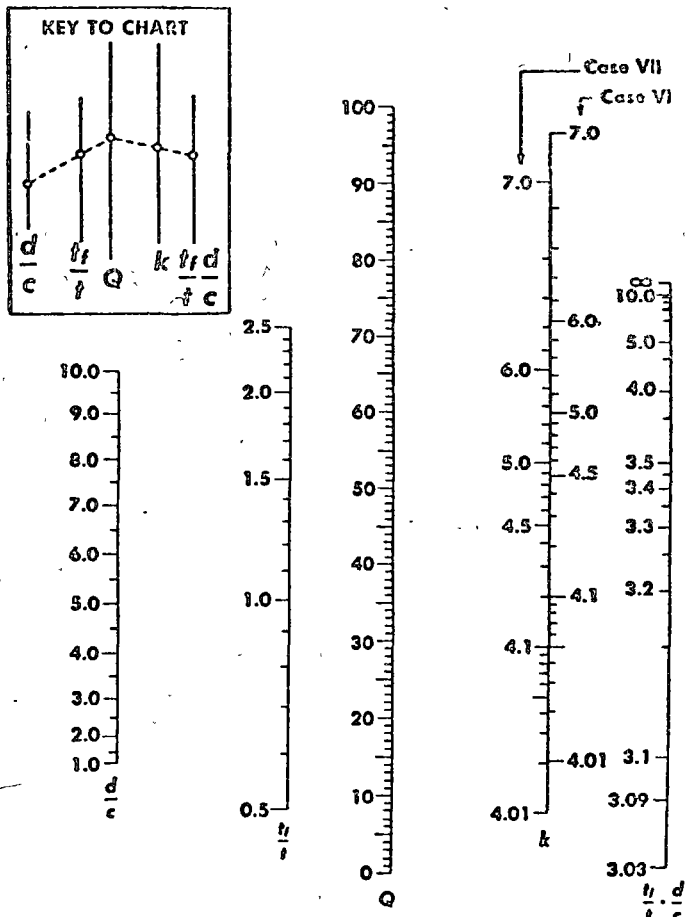
no. 15



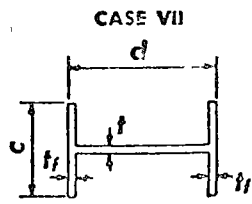
CASO I
 CASE I
 WEBS OF BOX SECTIONS EN CASION

$$\frac{t}{f_c} \cdot \frac{c}{d} \approx Q$$

no. 17
 PLATE COEFFICIENT - k



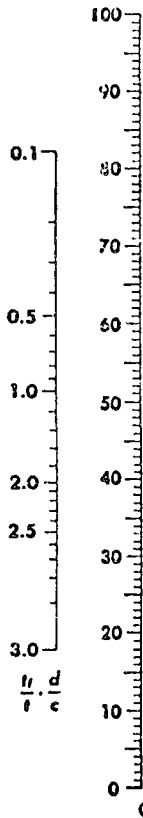
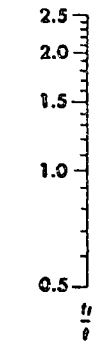
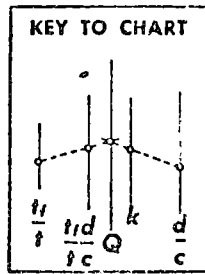
CASE VI
 WEB OF CHANNEL SECTION
 ALA DE CANAL



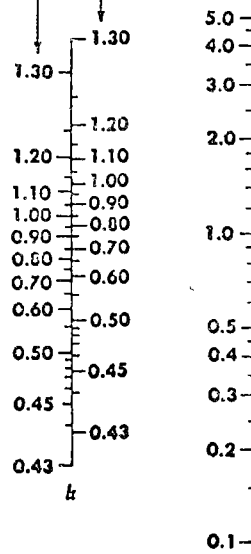
CASE VII
 WEB OF I SECTION
 ALA DE SECCION I

FIG. 16

PLATE COEFFICIENT— k



Cases II, III and V
Case IV



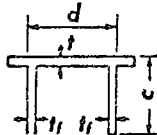
$\frac{d}{c}$ (Cases II-III-IV)
 $(\frac{d}{c})^2$ (Case V)

CASE II



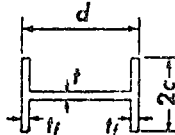
FLANGES OF CHANNEL SECTION
PATINES DE CANALES

CASE III



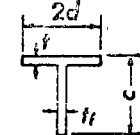
WEBS OF U SECTION
ALAS DE SECCIONES U

CASE IV



FLANGES OF I SECTION
PATINES DE SECCIONES I

CASE V



WEB OF T SECTION
ALAS DE SECCIONES T

*Chart does not apply if lower edges of webs are connected by lacing bars.

No es aplicable si los bordes inferiores de las alas están ligados por una celosía.

PANDEO INELÁSTICO. El esfuerzo crítico de pandeo de las placas comprimidas puede sobrepasar el límite de proporcionalidad del material con el que están hechas, lo que sucede cuando su relación ancho/groso es menor que un cierto límite que depende del esfuerzo de fluencia del material, de la magnitud de los esfuerzos residuales existentes en él y de las condiciones de apoyo de la placa.

En ese caso dejan de ser aplicables las fórmulas vistas hasta ahora, puesto que están basadas en la validez de la ley de Hooke en el instante en que se inicia el pandeo, y deben ser reemplazadas por expresiones que tengan en cuenta las modificaciones ocasionadas por el comportamiento inelástico del material.

En vista de que la teoría del pandeo inelástico de placas es muy compleja y lleva a resultados de aplicación práctica limitada, se emplean métodos simplificados para extender la ec. (5) a ese intervalo. Para ello, Bleich propone modificarla tomando como base la suposición de que cuando el esfuerzo normal longitudinal σ_x excede el límite de proporcionalidad las relaciones entre esfuerzos y deformaciones quedan regidas, en esa dirección, por el módulo tangente E_t , mientras que en la dirección transversal sigue siendo efectivo el módulo de elasticidad E ; la placa tiene, de acuerdo con esta hipótesis, un comportamiento elástico anisotrópico.

El módulo efectivo neto debe encontrarse entre E y E_t , y Bleich propone que se tome igual a $E\sqrt{E_t/E} = E\sqrt{\eta}$, con lo que la ec. (5) se convierte en

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\eta}}{12(1-\eta^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k \quad (9)$$

Se ha comprobado experimentalmente que la ec. (9) proporciona resultados suficientemente precisos para ser utilizados con fines prácticos de diseño.

En el intervalo elástico la ec. (5), o la (9), con $\eta=1$, se aplica directamente pero en el inelástico η depende de σ_{cr} y éste, a su vez, de η , por lo que la ecuación debe resolverse por tanteos. Pueden eliminarse, sin embargo, escribiendo la ec. (9) en la forma:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (10)$$

Con (10) se obtiene el cociente $\sigma_{cr}/\sqrt{\eta}$, y posteriormente se calcula el esfuerzo crítico por medio de una ecuación que relacione ambas cantidades.

El punto de partida para obtener esa relación son dos ecuaciones deducidas para columnas comprimidas axialmente, ecs. (11) y (12):

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{G_{LP}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{LP}) \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (11); \quad \sigma_c = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_c}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E \eta}{(L/r)^2} \quad (12)$$

Despejando $(L/r)^2$ de cada una de estas ecuaciones, e igualando los resultados, se llega a

$$\frac{\sigma_y - \sigma_{cr}}{\frac{G_{LP}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{LP})} = \frac{\pi^2 E \eta}{\sigma_{cr}} \quad \therefore \quad \eta = \frac{(\sigma_y - \sigma_{cr}) \sigma_{cr}}{(\sigma_y - \sigma_{LP}) G_{LP}}, \quad \frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}} = \frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\frac{(\sigma_y - \sigma_{cr}) \sigma_{cr}}{(\sigma_y - \sigma_{LP}) G_{LP}}}} \quad (13)$$

Si se supone que en la placa hay esfuerzos residuales máximos de compresión de magnitud $\sigma_y/2$ (esto puede parecer conservador a primera vista, porque los esfuerzos residuales de laminación medidos en placas aisladas son mucho menores, pero debe recordarse que las placas que estamos estudiando forman parte de perfiles laminados o soldados, I, H, L, etc.), G_{LP} se convierte en $\sigma_y/2$, y (13) se reduce a $\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}} = \frac{\sigma_{cr} \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_y - \sigma_{cr}) \sigma_{cr}}}$, de donde se despeja σ_{cr} :

$$\sigma_{cr} = \frac{\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}}\right)^2 \sigma_y}{\frac{\sigma_y^2}{4} + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}}\right)^2} \quad (14)$$

Sustituyendo en (14) el valor de $\sigma_{cr}/\sqrt{\eta}$ calculado con (10) se obtiene el esfuerzo crítico de pandeo inelástico, y el problema queda resuelto.

Para acero A36, con $\sigma_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$, la ec. (14) toma la forma

$$\sigma_{cr} = \frac{2530 \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}} \right)^2}{1.600.275 + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\eta}} \right)^2} \quad (15)$$

Un segundo procedimiento para el cálculo aproximado del esfuerzo crítico de pandeo inelástico de placas comprimidas consiste en suponer, como se hizo al estudiar el pandeo lateral de vigas, que la relación entre los esfuerzos críticos en los intervalos elástico e inelástico es la misma que en columnas cargadas axialmente, de manera que el esfuerzo crítico inelástico puede determinarse suponiendo un comportamiento elástico ilimitado y corrigiendo los resultados con una fórmula o curva que describa el comportamiento inelástico de las columnas, así, el esfuerzo crítico inelástico puede calcularse con la ec. (16):

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left(1 - \frac{\sigma_y}{4\sigma_e} \right) \quad (16)$$

Si el pandeo se presenta en el intervalo elástico, lo que sucede cuando σ_{cr} dado por (5) es menor o igual que $\sigma_y/2$, el esfuerzo crítico calculado con esa ecuación es el correcto; en caso contrario, la ec. (5) proporciona un esfuerzo crítico elástico hipotético σ_e , que se introduce en la ec. (16) para obtener un valor aproximado del esfuerzo real.

En resumen, el esfuerzo crítico de pandeo de placas comprimidas se calcula como sigue:

1. Se aplica la ec. (5), $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 f_2$
2. Si el esfuerzo obtenido en 1. es menor o igual que $\sigma_y/2$, el pandeo se presenta en el intervalo elástico, y ese esfuerzo es el crítico.
3. Si el esfuerzo obtenido en 1. es mayor que $\sigma_y/2$, el resultado debe corregirse por inelasticidad, empleando cualquiera de los métodos siguientes:

a) El esfuerzo calculado con (5), que es igual a $\bar{\sigma}_c/\sqrt{\eta}$, de acuerdo con (10), se corrige con la ec. (14), si el acero es A36, esta ec. se convierte en la (15).

b) Se introduce el esfuerzo calculado en 1 en la ec. (16), en la que se ha designado $\bar{\sigma}_c$, y se obtiene directamente un valor aproximado del esfuerzo crítico corregido.

PROBLEMA 1. Determinar el esfuerzo crítico de pandeo de una placa larga de acero A36, comprimida uniformemente. Su sección transversal es de 60×1.27 cm, y está libremente apoyada en los bordes longitudinales.

De la Tabla I, para las condiciones de apoyo supuestas, $l_2 = 4.0$.

$$\text{De la ec. (5): } \bar{\sigma}_c = \frac{(3.14)^2 2039000}{12(1-0.3^2)} \left(\frac{1.27}{60}\right)^2 \cdot 4.0 = 3300 \text{ kg/cm}^2 > \bar{\sigma}_c/2$$

El pandeo se presenta en el intervalo inelástico, y debe corregirse el resultado anterior.

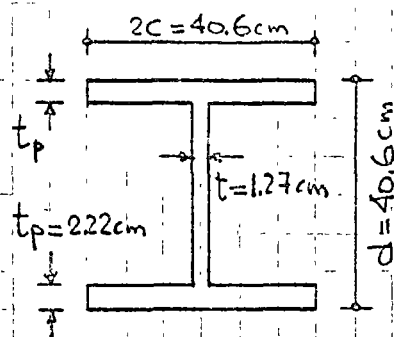
$$\text{a) } \bar{\sigma}_c/\sqrt{\eta} = 3300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{De la ec. (15), } \bar{\sigma}_c = \frac{2530(3300)^2}{1600225 + (3300)^2} = \frac{2530 \times 1089 \times 10^4}{12490225} \approx 2200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{b) De la ec. (16), } \bar{\sigma}_c = 2530 \left(1 - \frac{2530}{4 \times 3300}\right) = 2530 \times 0.808 = 2044 \text{ kg/cm}^2$$

La diferencia entre los dos resultados es 7%.

PROBLEMA 2. Calcular la carga axial que ocasionaría el pandeo local de una columna de acero A36, cuya sección transversal se muestra en la figura; el pandeo de conjunto está evitado por elementos exteriores de contraentes. Debe tenerse en cuenta la interacción entre las placas que forman el perfil.



De la Tabla II:

$$0.94 \left(\frac{t_c}{t_{pd}}\right)^2 = 0.94 \left(\frac{1.27 \times 20.3}{2.22 \times 40.6}\right)^2 = 0.77 < 1.00 \therefore \text{El alma es crítica}$$

La placa que se pandea localmente en este caso es el alma, a pesar de las restricciones que las patillas

imponen en los ejes x e y los bordes, cuando el parámetro g (t_c/t_p) es mayor que 1.0, los patines son críticos, y si es igual a la unidad, alma y patines se pandean simultáneamente, cuando se igualan sus factores de rigidez.

$$\frac{I_x}{I_p} = \frac{0.16 + 0.0056 (d/c)^2}{1 - 0.4 (t_c/t_p)^2} = \frac{(1.27)^3}{(2.22)^3} \frac{0.16 + 0.0056 (40.6/20.3)^2}{1 - 0.77} = 0.149$$

$$\sqrt{k} = 2 + \frac{2}{10\sqrt{g} + 3} = 2 + \frac{2}{4.49} = 2.447, \quad k = 5.98$$

(Del nomograma, para $d/c = 40.6/20.3 = 2$, $t_p/t_c = 2.22/1.27 = 1.75$, y $(t_p/t_c)(d/c) = 3.50$, se obtiene $k = 6.00$).

Obsérvese que k está comprendido entre 4.0 y 6.97, valores que corresponden a bordes libremente apoyados y empotrados.

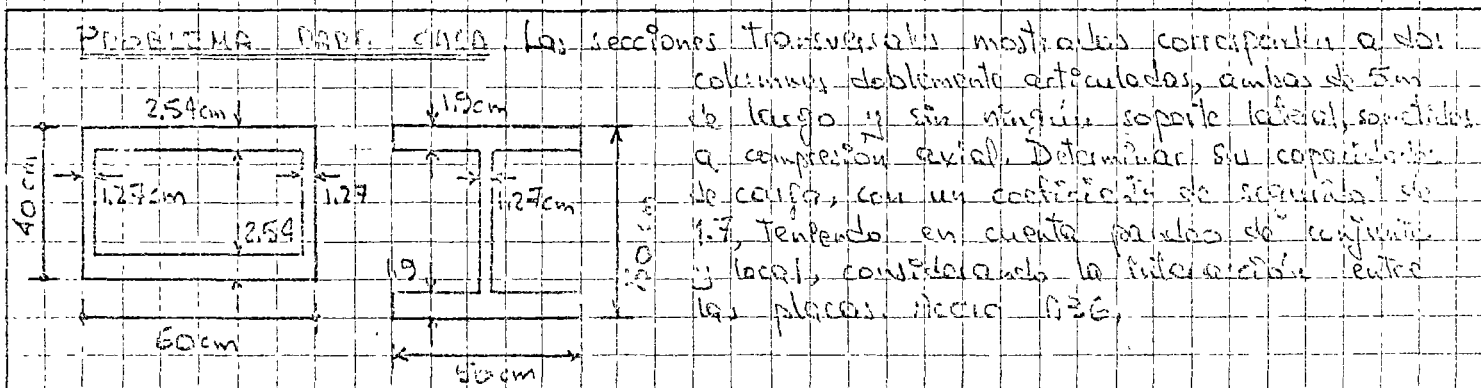
$$\text{De (7): } \bar{\sigma}_x = 1.841.000 \left(\frac{t}{b}\right)^2 (5.98) = \frac{1.841.000 \times 5.98}{\frac{(40.6 - 2 \times 2.22)^2}{1.27}} = 13500 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_y/2$$

$$\text{a) } \bar{\sigma}_x / \sqrt{17} = 13500 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{De (15), } (\bar{\sigma}_x)_{\text{real}} = \frac{2530 (13500)^2}{(600.225 + (13500)^2)} = \frac{2530 \times 18225 \times 10^4}{183.850.225} = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{b) } (\bar{\sigma}_x)_{\text{real}} = 2530 \left(1 - \frac{2530}{4 \times 13500}\right) = 2530 \times 0.953 = 2410 \text{ kg/cm}^2$$

El alma de la columna se pandea localmente cuando el esfuerzo de compresión llega a 2520 kg/cm^2 , según el primer método, o a 2410 kg/cm^2 , de acuerdo con el segundo.

La carga correspondiente es $P_{cr} = A \bar{\sigma}_x = 226.2 \times 2.41 = 549 \text{ ton}$.



RESISTENCIA POSTERIOR AL PANDEO. Las columnas idealmente

rectas y las barras o soportadas lateralmente simétricas a flexión no poseen ninguna reserva apreciable de resistencia por encima de la carga crítica, para la que empiezan a presentarse deflexiones laterales, pues incrementos adicionales de carga muy pequeños ocasionan deformaciones de gran magnitud que producen su falla.

El pandeo de una placa plana apoyada en los bordes constituye un fenómeno fundamentalmente diferente por que las deflexiones no pueden crecer indefinidamente; la placa empieza a salirse de su plano original tan pronto como las cargas alcanzan el valor crítico, pero al crecer las solicitaciones después de la iniciación del pandeo las deflexiones laterales se incrementan con menor rapidez que las cargas exteriores por que los bordes apoyados ocasionan la aparición de fuerzas de membrana estabilizadoras, que capacitan a la placa para recuperar su estabilidad en una configuración deformada lateralmente.

Después de que se inicia el pandeo de una placa delgada originalmente plana las deformaciones laterales aumentan con bastante rapidez al crecer las cargas y pronto son del mismo orden de magnitud que el grueso, de manera que el estudio del comportamiento posterior al pandeo debe basarse en la investigación de placas deformadas en las que las deflexiones laterales son comparables con el grueso, pero siguen siendo pequeñas en comparación con las otras dimensiones.

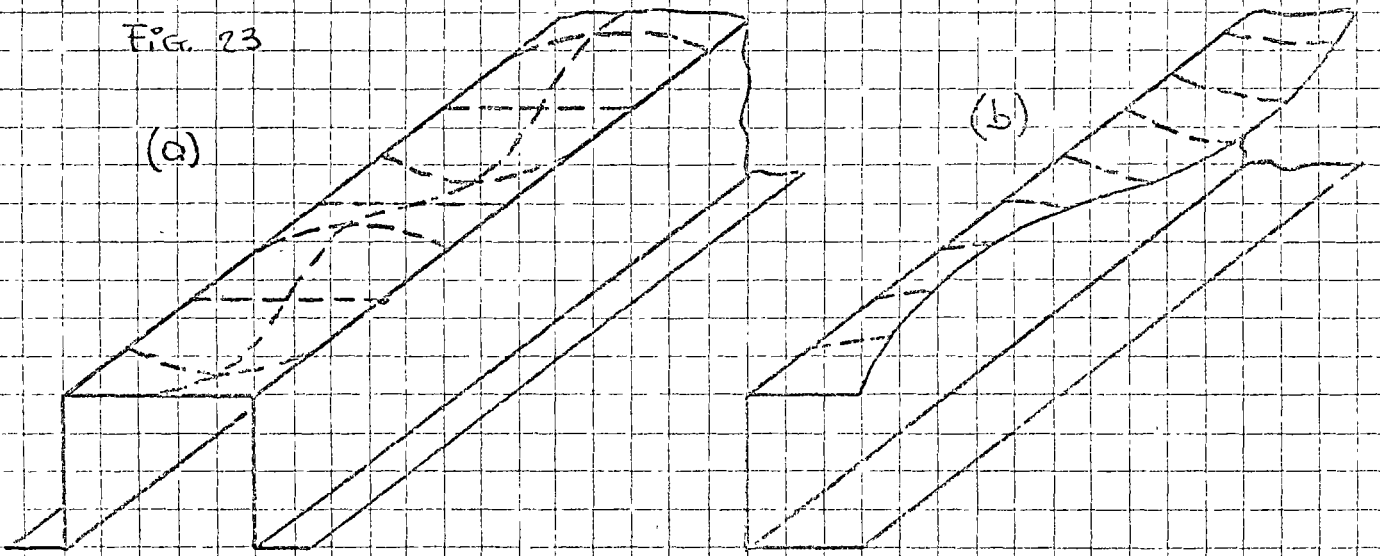
Los estudios sobre pandeo de placas que se han presentados hasta ahora han estado basados en una ecuación diferencial

deducida con la hipótesis fundamental de que las deflexiones son pequeñas en comparación con el grueso; por consiguiente, son solo útiles para describir el estado de pandeo incipiente, en el que se suponen distorsiones sumamente pequeñas, y proporcionan el modo de la carga crítica para la que el equilibrio se vuelve inestable. El comportamiento de placas en el intervalo posterior al pandeo constituye un problema no lineal, pues las desplazamientos iniciales grandes ocasionan una interacción entre los esfuerzos de membrana y la curvatura que hace que aparezcan términos no lineales en las ecuaciones de equilibrio.

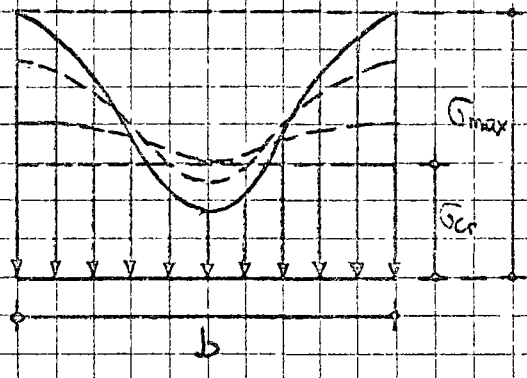
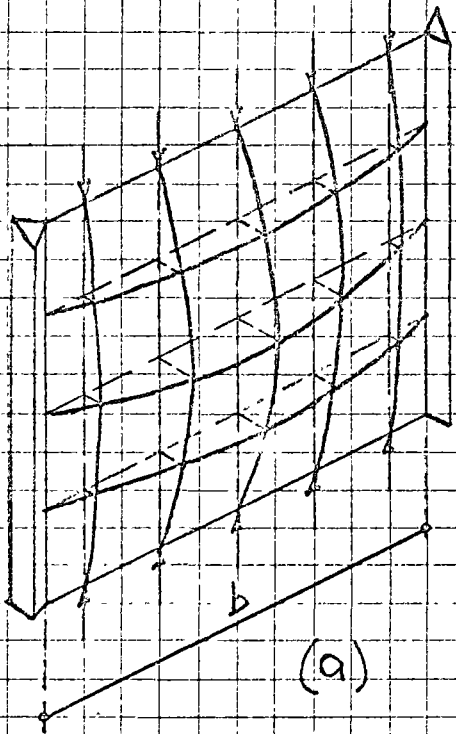
Los resultados teóricos que se han obtenido hasta ahora son de poco interés práctico, debido a que la solución de las ecuaciones mencionadas arriba es sumamente complicada, lo que hace que el problema de la determinación de la resistencia posterior al pandeo de placas inicialmente planas tenga que ser investigado principalmente por métodos experimentales.

PLACAS COMPRIMIDAS. La naturaleza física del problema se entiende fácilmente. Considérese, por ejemplo, el péñon comprimido de

Fig. 23



la sección de paredes delgadas mostrada en la Fig. 23. Al llegar el esfuerzo de compresión a un valor del orden del dado por la ec. (3) se pandea en ondas poco pronunciadas, casi lo aproximadamente. Si se desea por simplicidad una semionda se sustituye la placa por un modelo formado por una retícula ortogonal de barras se obtiene la estructura de la Fig. 24 a, en la que los guíes rígidos colocados en los bordes verticales representan la acción de las almas que mantienen rectos los bordes del patín.



Al alcanzarse la carga de pandeo de las barras comprimidas la retícula empieza a deformarse.

Fig. 24

si cada barra actuase independientemente de

las restantes todas caerían bajo el mismo esfuerzo, y el colapso se presentaría.

inmediatamente después de la iniciación del pandeo, sin embargo, una placa es un elemento estructural de dos dimensiones, y las barras horizontales de la retícula representan, aproximadamente, su forma de trabajo en sentido perpendicular a la compresión: al iniciarse la deformación lateral de las barras verticales comprimidas aparecen esfuerzos de tensión y flexión en las horizontales, que se oponen a cualquier aumento de las deflexiones, y hacen que la capacidad de carga de los puntales crezca mas arriba de la que tendrían.

Trabajasen como columnas ordinarias, aisladas unas de otras.

La influencia de las barras horizontales es mayor en los elementos verticales cercanos a los bordes atados que en los que están lejos de ellos y, como una consecuencia, al aumentar la carga por encima de la crítica de pandeo la faja central de la placa se deforma lateralmente con más rapidez que las dos fajas cercanas a los bordes y los esfuerzos de compresión, que originalmente estaban uniformemente distribuidos en todo el ancho b , adoptan otra distribución, que varía al crecer la carga: la faja central no puede aceptar esfuerzos adicionales, y aún es posible que transfiera parte de los que soportaba a las zonas laterales. Las distribuciones de esfuerzos posteriores a la iniciación del pandeo dejan de ser uniformes (Fig. 24 b).

La resistencia máxima se alcanza cuando el esfuerzo σ_{max} (en los bordes atados) llega a un valor para el que la placa completa se deforma rápidamente, con poco o ningún aumento de carga. Si forma parte de una columna muy corta el esfuerzo máximo puede ser el de fluencia, pero si la columna es esbelta ese esfuerzo es el crítico de pandeo en compresión del atizador de borde, que puede ser mucho menor que el de fluencia.

La diferencia entre la carga para la que se inicia el pandeo y la resistencia última aumenta al disminuir el esfuerzo crítico, y tiende a cero cuando éste se acerca al de fluencia. En placas comprimidas con relaciones b/t muy altas, como las que se usan en algunas partes de las estructuras para aviones, la resistencia última puede llegar a ser hasta 30 veces mayor que la que

257
corresponde a la iniciación del pandeo; en estructuras de edificios y puentes no se emplean nunca placas tan esbeltas, pero aún así el incremento en resistencia puede ser importante.

La situación es considerablemente diferente cuando la placa comprimida está soportada en uno solo de sus bordes longitudinales, como sucede en el patín superior de la canal de la Fig. 23b. La eficiencia de las barras transversales disminuye considerablemente de manera que los esfuerzos de membrana en el intervalo posterior al pandeo son mucho menores, la resistencia final aumenta poco con respecto a la correspondiente a la crítica, y esa pequeña resistencia posterior al pandeo se presenta acompañada por distorsiones grandes.

PLACAS EN CORTANTE PURO. La resistencia posterior al pandeo no es un fenómeno exclusivo de las placas comprimidas, sino se presenta también cuando están sometidas a solicitaciones de otros tipos si en sus bordes hay elementos capaces de soportar las nuevas fuerzas que aparecen una vez iniciado el fenómeno.

Los tableros de alma de traves armadas transversalmente se encuentran en esas condiciones en las zonas en que predomina el esfuerzo cortante. Su resistencia no se agota cuando se alcanza el esfuerzo crítico, ya que después de iniciado el pandeo tiende a presentarse una redistribución de esfuerzos gracias a la cual el material colocado a lo largo de una de las diagonales del tablero trabaja a tensión y equilibra incrementos de la carga exterior más allá de la de pandeo; a su vez, las fuerzas que aparecen en la diagonal de tensión son resistidas por los patines y estribos que enmarcan el tablero.

Investigaciones teóricas y experimentales sobre el comportamiento de trabes armadas muestran que existe una diferencia notable entre la carga que ocasiona el comienzo del pandeo del alma por cortante y la última, para la que se presenta la falla. Después de la iniciación del pandeo una parte de la carga sigue siendo equilibrada por fuerzas cortantes y el resto es soportado por tensión diagonal en el alma y compresión en los atiesadores: se presenta una especie de trabajo de armadura que ocasiona un incremento importante en la capacidad de carga real del alma de la trabe. Esta acción continúa hasta que el esfuerzo en las zonas de tensión alcanza el valor de fluencia o hasta que falla alguno de los elementos que rodean el tablero y proporcionan el anclaje necesario a las fuerzas de tensión diagonal.

El alma de una trabe armada formada por una placa delgada reforzada con atiesadores transversales, sometida a esfuerzos cortantes, no falla cuando se pandea entre atiesadores, pues aunque se forman en ella ondulaciones en diagonal producidas por los esfuerzos de compresión sigue trabajando como si estuviese compuesta por una serie de diagonales en tensión colocadas entre los atiesadores, los que actúan como montantes comprimidos.

Antes de que se inicie el pandeo la fuerza cortante exterior es equilibrada íntegramente por las fuerzas tangenciales que aparecen en el alma, y las tensiones y compresiones principales son iguales. Si, después del pandeo disminuye la rigidez de la placa en la dirección de los esfuerzos de compresión y las fuerzas principales no son soportadas por cortante pura, sino por una combinación de éste

y de acción de armadura; como una consecuencia, los esfuerzos principales de compresión permanecen más o menos constantes mientras que los de tensión crecen rápidamente. Estos, llamados generalmente esfuerzos de membrana, imponen cargas axiales y laterales sobre los patines y los atesadores transversales, los que deben diseñarse para resistirlas.

El fenómeno puede describirse cualitativamente considerando la armadura de la Fig. 25a, formada por tres barras absolutamente rígidas (ab , bc y cd) y dos diagonales flexibles, de secciones transversales iguales. En a , b , c y d hay articulaciones y las diagonales no están unidas entre sí en el punto medio.

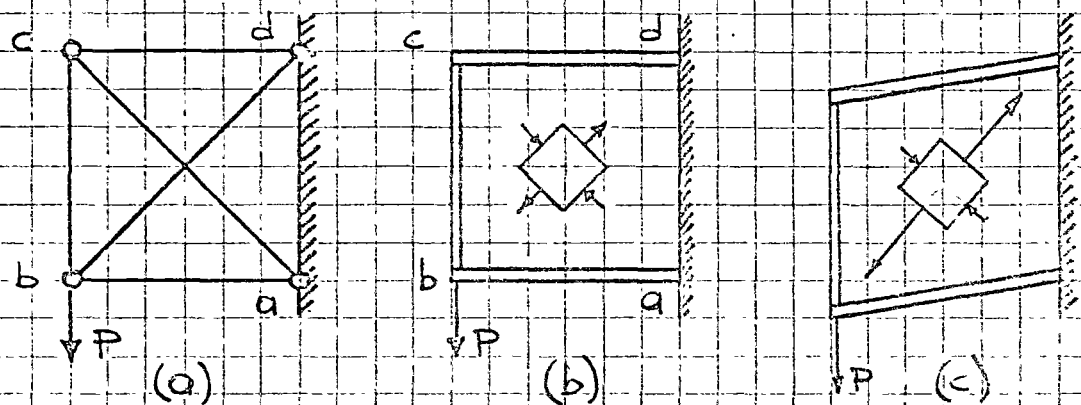


Fig. 25

Cuando la carga P es muy pequeña la fuerza cortante se divide en partes iguales entre las dos diagonales; pero al ir creciendo llega un instante en que la que trabaja en compresión se pandea y las cortantes producidas por incrementos adicionales de carga son resistidas casi exclusivamente por la diagonal en tensión.

Considérese ahora el mismo conjunto de barras ab , bc y cd , y sustitúyanse las diagonales por una lámina maciza muy delgada; mientras no se pandee, la fuerza cortante produce en ella tensiones y compresiones iguales, inclinadas $\pm 45^\circ$ con respecto a la horizontal.

(Fig. 25b), pero si P crece llega un momento en que los esfuerzos de compresión producen un arrugamiento de la lámina normal a su línea de acción, de manera que incrementos adicionales de carga ocasionan, principalmente, aumentos en los esfuerzos de tensión, Fig. 25c. Si fuese posible incrementar la carga indefinidamente sin que la lámina se rompiera se alcanzaría un estado en el que las compresiones serían despreciables comparadas con las tensiones; el límite al que tendería esa condición si la lámina fuese cada vez más delgada, disminuyendo su resistencia a la compresión, sería el llamado "estado de tensión diagonal pura", en el que la fuerza cortante exterior sería resistida íntegramente por fuerzas de tensión que obrarían a lo largo de una de las diagonales del tablero.

Las teorías basadas en la tensión diagonal pura son excesivamente conservadoras, pues en ellas se desprecia íntegramente la resistencia del alma al esfuerzo cortante y en estructuras reales, aún cuando el alma es muy delgada, la resistencia de la zona que trabaja en compresión no es despreciable y no desaparece cuando se inicia el pandeo. Esto puede ilustrarse por medio de otra analogía con una armadura, que ahora es hiperestática, con diagonales cruzadas unidas entre sí, Fig. 26; las diagonales comprimidas tienden a pandearse pronto pero están atiesadas por las que trabajan en tensión, de manera que su capacidad de carga es del orden de cuatro veces mayor que la que tendrían si estuvieran aisladas.

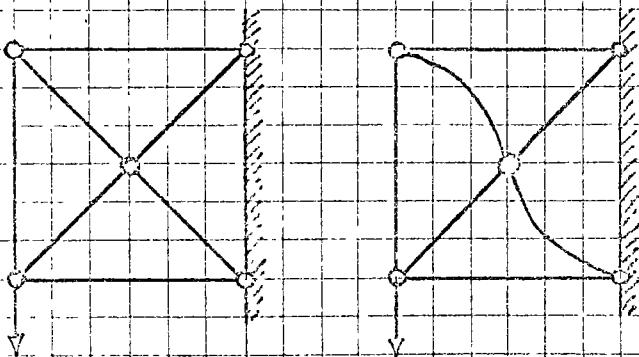


Fig. 26

pero están atiesadas por las que trabajan en tensión, de manera que su capacidad de carga es del orden de cuatro veces mayor que la que tendrían si estuvieran aisladas.

El comportamiento de un tablero de alma es semejante pero más complejo, pues no solamente se retrasa la iniciación del pandeo por la liga que hay entre las fibras comprimidas y las que están en tensión sino, además, la resistencia posterior al pandeo aumenta por la restricción que oponen las fibras en tensión a los desplazamientos fuera del plano original. Después de la iniciación del pandeo la fuerza cortante total en una sección transversal cualquiera de la viga es resistida por una combinación de las componentes verticales de las fuerzas de tensión diagonal y de las de compresión a 90° ; este tipo de acción compuesta recibe el nombre de "campo incompleto de tensión".

La tensión diagonal pura es un caso límite del estado de esfuerzo en el alma de traves, correspondiente a placas muy delgadas, mientras que el cortante puro, estado que se estudia en la teoría elemental de vigas, es la otra condición límite, que se presenta únicamente en almas gruesas; la mayor parte de las almas de las traves armadas reales están entre los dos límites, de manera que en ellos se desarrolla una tensión diagonal incompleta y parte de la fuerza exterior es resistida por cortante.

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA POSTERIOR AL PANDEO

PLACAS COMPRESIDAS APOYADAS EN LOS DOS BORDES LONGITUDINALES.

Fig. 24 b representa varias distribuciones de esfuerzos sucesivas en una placa apoyada en los dos bordes longitudinales sometida a compresiones de intensidad creciente, antes y después de la iniciación del pandeo; si los apoyos no cedan prematuramente, la falla se inicia cuando los esfuerzos máximos en los bordes llegan al valor

de fluencia, y el colapso total se presenta inmediatamente después.

Para determinar la resistencia máxima de una placa deben conocerse los esfuerzos que hay en ella cuando se llega a la condición de colapso; en problemas prácticos de diseño resultaría incómodo trabajar con los esfuerzos reales no uniformes, pero esta dificultad se elimina utilizando el concepto de "ancho efectivo de diseño" (von Kármán, 1932).

La fuerza total de compresión que actúa sobre la placa, igual al área bajo la curva que representa los esfuerzos no uniformes multiplicada por el grueso t , Fig. 27 (a), se obtiene también despreciando el efecto de la porción media, en la que los esfuerzos son de poca intensidad, y considerando cada una de las dos tajos laterales como una placa larga, libremente apoyada,

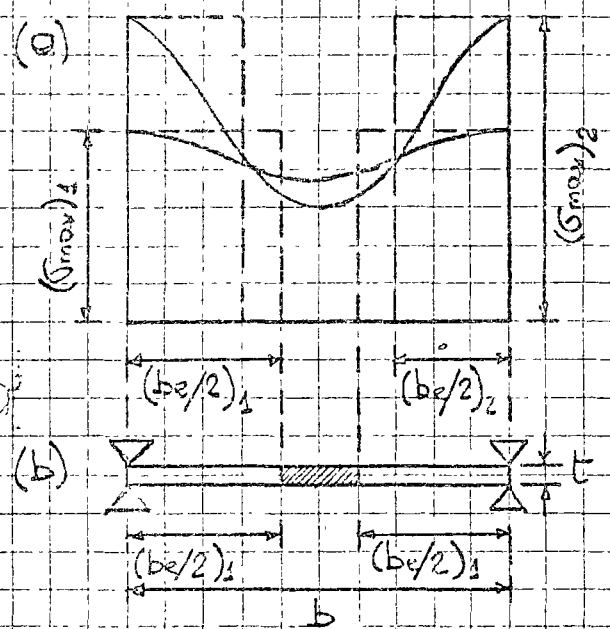


FIG. 27

sujeta a un esfuerzo de compresión uniforme de magnitud igual al esfuerzo real en el borde, σ_{max} , cuyo ancho $b_e/2$ se escoge de manera que la suma de las áreas de los dos rectángulos de base $b_e/2$ y altura σ_{max} sea igual al área bajo la curva que corresponde a los esfuerzos reales. Se supone, por consiguiente, que se suprime la porción central de la placa y que el elemento plano de ancho real b se sustituye por dos de ancho $b_e/2$ cuya suma, b_e , se denomina "ancho efectivo", Fig. 27 b. (El ancho efectivo

disminuye al aumentar el esfuerzo en los bordes, σ_{max} , en la Fig. 27 b se ha dibujado la sección neta correspondiente a $(\sigma_{max})_2$).

Una vez que se ha determinado de la resistencia de la placa ²⁶³ se calcula de la manera usual, pero utilizando el ancho efectivo en vez del real.

Considerando $k=4.0$, que corresponde a placas comprimidas libremente apoyadas, y suponiendo comportamiento elástico hasta que el esfuerzo máximo llega al límite de fluencia, von Kármán obtuvo una expresión para determinar el ancho efectivo en el instante en que se alcanza la resistencia última:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{4.0 \pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b_e}\right)^2 = 3.6 E \left(\frac{t}{b_e}\right)^2 \therefore b_e = 1.9 t \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \quad (43)$$

La relación b_e/t dada por (43) sería la máxima para la que se podría llegar al esfuerzo de fluencia sin que la placa se pandease, si efectivamente el comportamiento del material fuese elástico hasta entonces.

Experiencias realizadas para comprobar la validez de la ec. (43) han demostrado que su forma general es correcta, pero que la constante 1.9 debe sustituirse por un coeficiente variable C que depende del parámetro $\sqrt{E/\sigma_y} (t/b)$; C se acerca a 1.9 únicamente para valores muy pequeños de ese parámetro, es decir, para placas extremadamente anchas y delgadas.

En sus últimas especificaciones para el diseño de miembros estructurales hechos con lámina delgada doblada, publicadas en 1963, el Instituto Americano del Hierro y el Acero (AISI) recomienda la fórmula siguiente para el cálculo del ancho efectivo de elementos planos comprimidos atresalados en los dos bordes longitudinales:

$$b_e = 1.9 t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \left(1 - 0.415 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}}\right) \quad (44)$$

Esta ecuación ha sido deducida teniendo en cuenta los resultados de un gran número de experiencias de laboratorio realizadas con vigas de lámina delgada doblada en frío, de secciones transversales de diversas formas y hechas con distintos tipos de acero; permite obtener los anchos efectivos tanto bajo cargas de colapso como cuando las sollicitaciones son de menor intensidad.

Si se impone en la ec. (44) la condición de que el ancho efectivo b_e sea igual al real b y se despeja b/t se determina la relación ancho/grueso máxima para la que las placas comprimidas libremente apoyadas en los bordes longitudinales son completamente efectivas:

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 1.29 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \quad (45)$$

Si $b/t \leq (b/t)_{lim}$ los esfuerzos de compresión están distribuidos uniformemente en todo el ancho de la placa, b_e es igual a b , y todos los cálculos se efectúan en la forma usual, con el área total; en cambio, si $b/t \geq (b/t)_{lim}$ debe utilizarse un ancho efectivo (y un área de trabajo) menor que el real, el que se determina con la ec. (44).

En la ec. (44) b_e es el ancho efectivo de la placa, b el real, t el grueso y σ_{max} el esfuerzo máximo de compresión que se presenta en los bordes y es numéricamente igual al cociente de la fuerza total entre el área efectiva $b_e t$. El empleo de (44) para determinar los anchos efectivos de las placas obliga a proceder por aproximaciones sucesivas, puesto que σ_{max} y b_e dependen mutuamente uno del otro.

PROBLEMA. (Está en las hojas 265 y 266)

PLACAS EN COMPRESIÓN PURA. Estudiar "Diseño de Traves Atracadas".

O. de Buen, Ingeniería, Enero 1966, desde "Resistencia al Estado Límite", p. 160, hasta "Diseño de Atresaduras", que termina en la pag. 83.

La b/t menor es $(b/t)_{lim}$ y el porcentaje del ancho total que puede considerarse efectivo disminuye después - cada vez más rápidamente, si uno quiere la relación de la fuerza.

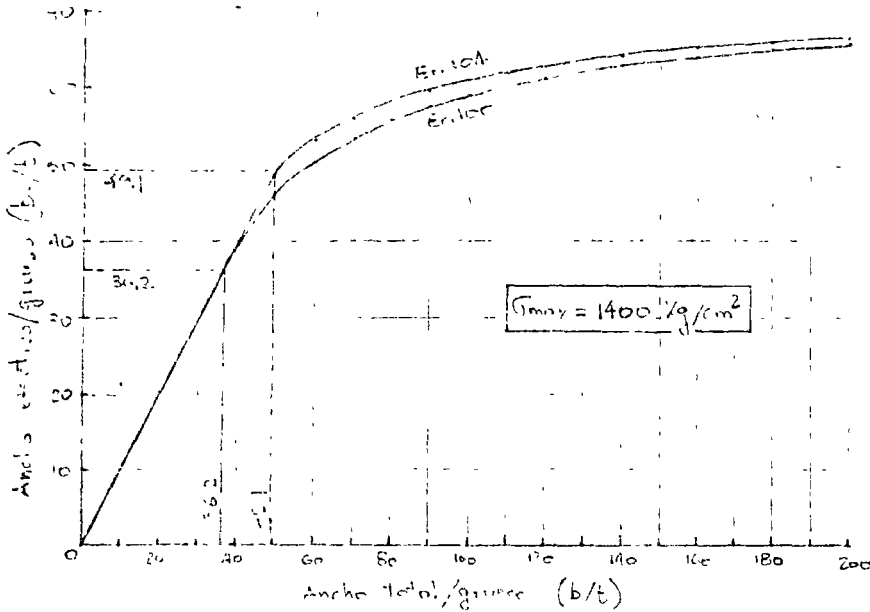
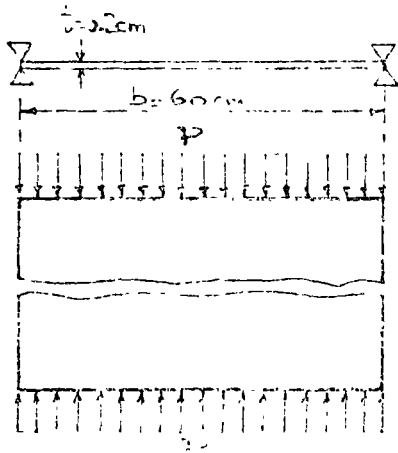


Fig. 59

El valor de $(b/t)_{lim}$ correspondiente a la σ_{max} (104) es bastante mayor que el que corresponde a (100), 49.1 contra 36.2, pero una diferencia entre las curvas obtenidas (proporcionadas por los dos ecuaciones son relativamente pequeñas.

Problema. Determinar la capacidad máxima de carga, en el intervalo posterior al punto de la placa de acero A36 mostrada en la figura utilizando la ec. (104).



No se puede calcular el ancho efectivo en forma inmediata, puesto que depende del esfuerzo máximo existente en la placa, el que no se conoce de antemano; el primer paso en la solución del problema consiste, entonces, en determinar ese esfuerzo máximo.

Sustituyendo E por su valor 2039000 kg/cm^2 , la ec. (104) toma la forma

$$b_e = \frac{2713t}{\sqrt{\sigma_{max}}} \left[1 - \frac{592.6}{(b/t)\sqrt{\sigma_{max}}} \right] \dots \quad (104a)$$

Reemplazando la multiplicación anterior por el porcentaje y teniendo en cuenta que, en este caso particular, $b/t = 300$, se obtiene

$$b_e = \frac{2713t}{\sqrt{\sigma_{max}}} - \frac{5353t}{\sigma_{max}}$$

A cada valor de σ_{max} le corresponde un cierto ancho efectivo, y la fuerza total P que obra sobre la placa es

$$P = b_e t \sigma_{max} = 2713t^2 \sqrt{\sigma_{max}} - 5353t^2$$

Como $t = 0.2$ cm, $P = 109.5 \sqrt{\sigma_{max}} - 214.4$

PLA. 1-24

El diseño de un elemento estructural de acero se debe hacer de modo que con su uso se mantenga con la capacidad máxima de carga es la que corresponde al material.

Para el caso de $f_{ty} = 214.4 \approx 5260 \text{ kg/cm}^2$

El caso de un elemento de acero, consiste en determinar la f_{ty} (1490) y a continuación obtener P_{max} :

De (1040), $\left(\frac{f_c}{f_c} + \frac{f_t}{f_t}\right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{592.6}{30000}\right) = 52 \cdot \left(\frac{b_0}{b_0}\right) = 52 \cdot 1.2 = 10.4 \text{ cm}$

$P_{max} = b \cdot t \cdot f_{ty} = 10.4 \times 2.53 = 5.76 \text{ Ton.}$

El esfuerzo unitario en puntos de la placa es:

$$S_x = \frac{4.0 \cdot 10^3}{12(1-11^2)} \left(\frac{t}{b}\right) = \frac{7.41 \cdot 10^3}{3(1-11^2)(300)^2} = 81 \text{ kg/cm}^2 \ll 14 \text{ kg/cm}^2$$

La carga unitaria vale, por configuración,

$P_c = 2 \cdot b \cdot t = 50 \times 2.53 = 976 \text{ kg/cm}^2$

La resistencia de un elemento de acero es 8.4 veces mayor que la carga unitaria.

PLACAS EN VOLANTE PURO.

Aunque es físicamente imposible tener en un tramo de una placa únicamente fuerza constante, puesto que ésta (siempre se produce) una variación por momentos. Sin embargo, se estudia ahora el caso teórico de un tablero de acero en cortante puro, condición cercana a la existente en las zonas de las vigas en las que la fuerza tangencial es igual a un momento fluctuante rápidamente y que constituye la constitución más crítica para tableros de alma, desde el punto de vista de su resistencia al esfuerzo y deflexión. Se muestra en la base una trabe formada por dos tipos de constructo, sección, formada por alma y patines relativamente delgados y pegada a una serie de alfileres, alfileres y espárragos, Fig. 60.

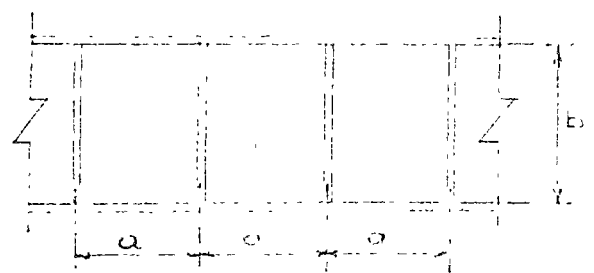


Fig. 60

En los ref. 5 y 16 se estudia este problema utilizando la teoría de la tensión de punto puro, para averiguar en qué medida que también parte de experimentos se ha demostrado que a resultados excesivamente conservadores, un

último se debe tener en cuenta que los placs conservan su capacidad para soportar, cuando están unidos de forma en ellos el campo de tensión

La resistencia máxima que puede soportar un tablero es

APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL PANDEO DE PLACAS AL DISEÑO

DE MIEMBROS ESTRUCTURALES

DISEÑO BASADO EN ESFUERZOS PERMISIBLES

COLUMNAS CARGADAS AXIALMENTE. En general conviene evitar que las columnas fallen por pandeo local, lo que se logra dimensionando los elementos planos que las componen de manera que la suma de sus resistencias sea igual o mayor que la carga crítica de la columna (teóricamente puede permitirse que las placas fallen bajo una carga menor que la crítica de pandeo de la columna, siempre que el diseño se base en la resistencia de las placas; sin embargo, esa forma de diseño es poco usual).

Cuando las placas tienen una resistencia posterior al pandeo importante puede ser necesario permitir fenómenos de pandeo local antes de que se presente la falla del miembro, si se desea obtener diseños económicos.

DISEÑO BASADO EN LA INICIACIÓN DEL PANDEO LOCAL.

En perfiles laminados y soldados hechos con placas de proporciones semejantes a las de los primeros se acostumbra dimensionar los elementos planos de manera que el pandeo local no se presente antes que el de conjunto. El esfuerzo crítico de las placas debe ser igual o mayor que el de la columna, lo que se logra manteniendo sus relaciones ancho/grueso por debajo de límites adecuados.

RELACIONES ANCHO/GRUESO.

La condición que se acaba de enunciar se expresa por medio de las ecuaciones (46) y (47) que son aplicables, respectivamente, a columnas cuyo pandeo se inicia en el intervalo elástico y en el inelástico:

$$\frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \leq \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k_c \quad (46)$$

$$\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_2^2} \right] \bar{\sigma}_y \leq \bar{\sigma}_y \left[1 - \frac{\bar{\sigma}_y}{\frac{4\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k_c} \right] \quad (47)$$

Los primeros miembros son los esfuerzos críticos de las columnas y los segundos los de las placas que las componen, ambas corregidos por inelasticidad en la ec. (47).

Efectuando simplificaciones, haciendo $\mu = 0.3$ y despejando b/t se obtiene, de las dos ecuaciones,

$$\frac{b}{t} = 0.303 \frac{KL}{r} \sqrt{k_c} \quad (48)$$

La ec. (48) proporciona la relación b/t de los elementos planos para la que el pandeo local se inicia, teóricamente, al mismo tiempo que el de conjunto; es válida para pandeo elástico o inelástico y para cualquier tipo de acero.

KL/r es la relación de esbeltez efectiva máxima de la columna y k_c el factor de pandeo de la placa crítica; conservadoramente puede tomarse igual a 0.425 y a 400 para placas apoyadas en un borde o en los dos, respectivamente o, si se desea mayor precisión, pueden utilizarse los resultados obtenidos al estudiar la interacción entre los elementos planos que componen el perfil.

ESPECIFICACIONES DE DISEÑO. En la actualidad se emplean dos criterios diferentes para evitar el pandeo local en columnas comprimidas axialmente. En el primero, que se utiliza generalmente en Europa, se impone que se inicie ese fenómeno dimensionando las secciones transversales de las columnas de manera que el esfuerzo crítico de pandeo

local sea igual o mayor que el que ocasiona la falla de conjunto de la columna. De acuerdo con este criterio, que es el utilizado para deducir la ec. (48), las relaciones b/t admisibles son función de la esbeltez de la columna, y aumentan cuando ésta crece.

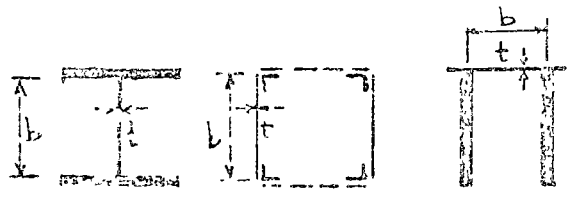
En el segundo criterio, empleado en los E.U., las placas se diseñan de manera que nunca se inicien fallas por pandeo local bajo esfuerzos menores que el de fluencia; las relaciones b/t que se obtienen así son fijas e independientes de la esbeltez de la columna.

NORMAS ALEMANAS. Las especificaciones alemanas relativas al pandeo local son típicas de la práctica europea. Las secciones utilitarias en columnas se dividen en cinco categorías, de acuerdo con las restricciones que haya en los bordes del elemento plano más esbelta, Fig. 23. (Las líneas continuas delgadas representan las placas críticas, de dimensiones b y t, las gruesas las que tienen relaciones ancho/grueso menores, b_1/t_1 , y las punteadas placas interrumpidas o celosía).

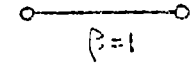
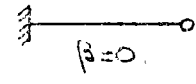
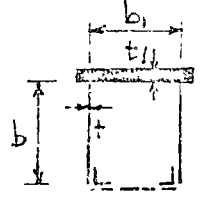
Los elementos planos más robustos de la categoría I están libres a lo largo de los dos bordes; la única restricción rotacional que ofrecen es la debida a su rigidez torsional, que es siempre muy pequeña, y las placas críticas pueden tratarse como si estuviesen libremente apoyadas en los dos bordes. En la Fig. 23 se muestran las condiciones de apoyo extremas de todas las categorías restantes, correspondientes a $\beta = (b_1/t_1)/(b/t)$ igual a cero y a uno (normalmente $\beta = 0$ indica que b/t es, en teoría, infinitamente mayor que b_1/t_1 , es decir, que la esbeltez de las placas críticas es mucho más grande que la de las áreas, de manera que pueden considerarse

Entre hojas 269 y 270

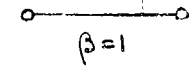
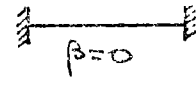
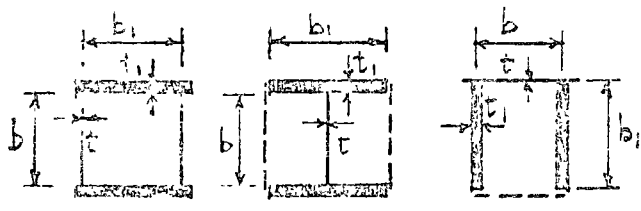
(I)



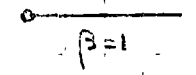
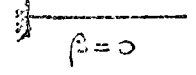
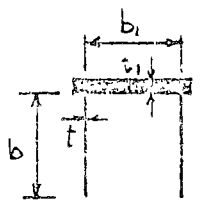
(II)



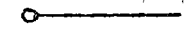
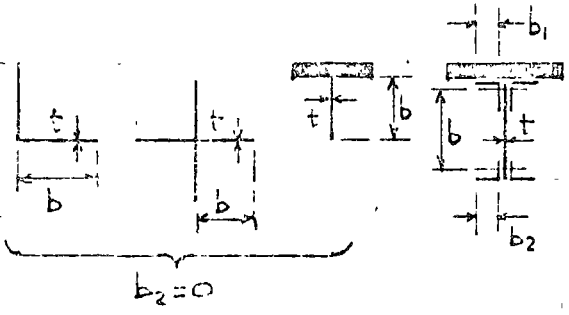
(III)



(IV)



(V)



CONDICIONES EXTREMAS DE APOYO

$$\beta = \frac{b_1/t_1}{b/t}$$

CATEGORIAS

SECCIONES

empotrados en ellas; en cambio, si $\beta=1$ los dos tipos de placas tienen rigideces iguales y el pandeo se inicia en todas simultáneamente, sin que ninguna restrinja a las demás; cada placa puede considerarse articulada en su unión con la otra).

Si $(b_1/t_1)/(b/t)$ resulta mayor que 1.0, lo que indica que las placas que se han dibujado como mas esbeltas proporcionan en realidad restricciones a las demás, se toma $\beta=1.0$.

Para evitar las complicaciones de la teoría del pandeo inelástico de placas sin dejar de tener en cuenta, cuando menos en forma aproximada, que la inestabilidad de la columna completa y de las placas que la componen puede presentarse en el intervalo elástico o fuera de él, las columnas se dividen en dos grupos, según que su relación de esbeltez sea menor o mayor que 75, y los del primer grupo se tratan inelásticamente, suponiendo que se pandea cuando el esfuerzo llega al límite de fluencia, mientras que los del segundo se estudian clásticamente; se obtienen así dos conjuntos de fórmulas para la determinación de la relación ancho/grupo de las placas.

1. En placas que forman parte de columnas con $h_1/r \leq 75$ la relación b/t máxima admisible es la que hace que su esfuerzo crítico sea igual a σ_y :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k_2 = \sigma_y \therefore \frac{b}{t} \leq \sqrt{\frac{\pi^2 k_2 E}{12(1-\mu^2) \sigma_y}} \quad (49)$$

Para $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$ y $\sigma_y = 3600$, que es el esfuerzo de fluencia mas alto incluido en la especificación, se obtiene

$$\frac{b}{t} \leq \sqrt{529 k_2} = 23 \sqrt{k_2} \quad (50)$$

Multiplicando el segundo miembro por $(KL/r)/\pi$ se llega a

$$\frac{b}{t} \leq 0.306 \frac{KL}{r} \sqrt{2}, \text{ que es casi igual a la ec. (48).}$$

En placas que forman parte de columnas con $KL/r = 75$ la relación b/t se limita a valores para los que el esfuerzo crítico es mayor o igual que el de conjunto de la columna, lo que lleva a la ec. (48):
$$\frac{b}{t} \leq 0.303 \frac{KL}{r} \sqrt{2} \quad (48)$$

En la Tabla anexa se indican los resultados obtenidos al aplicar las ecuaciones (50) y (48) a placas con condiciones de apoyo extremas en los bordes longitudinales, es decir, empotradas o articuladas en ellos; en las especificaciones se incluyen fórmulas que utilizan esos resultados, ligeramente redondeadas, y que contienen además términos función de β principalmente, con los que se toman en cuenta de manera aproximada las restricciones parciales en los bordes de las placas.

NORMAS AMERICANAS (AISC G9). Ver hoja anexa.

Los valores anteriores se han obtenido partiendo de la condición que el pandeo local no se presente nunca bajo esfuerzos menores que el de fluencia; por consiguiente, son válidos para todos los casos de placas comprimidas uniformemente, lo mismo si forman parte de columnas con carga axial que de elementos en flexión o flexocompresión (patines comprimidos de vigas, por ejemplo), y son independientes del esfuerzo crítico de pandeo del miembro; para obtenerlos se ha supuesto que el acero se comporta elásticamente hasta el límite de fluencia y que las placas que forman los patines están libremente apoyadas a lo largo de su borde o bordes en contacto con otras placas, ignorando las restricciones producidas por éstas.

se llega a

$$\frac{b}{t} \leq 0.305 \sqrt{\frac{E}{F_c}} \sqrt{K}$$

que es casi igual a la eq. (146).

2. En placas que forman parte de columnas con $EI_c/r^2 \geq 75$ la relación b/t se limita a valores para los que el esfuerzo crítico, calculado con (25), es mayor o igual que el de pandeo de conjunto de la columna, lo que lleva ~~resultando~~ a la eq. (146):

$$\frac{b}{t} \leq 0.305 \sqrt{\frac{E}{F_c}} \sqrt{K} \quad (146)$$

En la Tabla XII se indican los resultados obtenidos al aplicar las eqs. (145) y (146) a placas con condiciones de apoyo extremas en los bordes longitudinales, es decir, empotrados o atronados en ellos; en las especificaciones de inclusiones fórmulas que utilizan esos resultados, ~~ellos~~ ligeramente redondeados, y que contienen además términos adicionales, función principalmente de β , con los que ~~ellos~~ se toman en cuenta en forma aproximada, las ~~adecuadas~~ restricciones parciales en los bordes de las placas.

TABLA XII
Citas en págs. 108

NORMAS AMERICANAS (AISC 69), Las especificaciones de 1969 del Instituto Americano de la Construcción en Acero dividen las placas que forman parte de miembros estructurales en dos grupos: elementos no atronados, ~~miembros~~ que tienen un borde paralelo a la dirección del esfuerzo totalmente libre, y elementos atronados, con ~~apoyo~~ soporte lateral a lo largo de los dos bordes longitudinales.

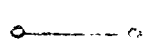
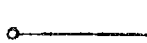

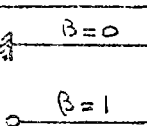

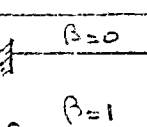

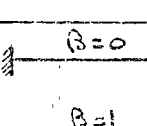

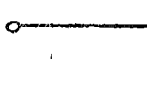
Las placas sujetas a compresión axial, o a compresión uniforme debida a flexión, se consideran totalmente elásticas cuando sus relaciones ancho/groeso no excedan los límites siguientes:

Elementos no atronados (sección 1.9.1.2 de las Especificaciones AISC)	AISC
Placas atronadas por un solo ángulo, o por dos ángulos con separación	$634/\sqrt{F_y}$ 12.7
Placas atronadas por dos ángulos en conjunto; ángulos o placas que sobresalen de traveses, columnas u otros miembros comprimidos; patines comprimidos de vigas; atronadores de traveses atronados	$796/\sqrt{F_y}$ 15.8
Almas de tejas	$1064/\sqrt{F_y}$ 21.2
Elementos atronados (sección 1.9.2.2)	
Placas de secciones en forma rectangular, o cuadradas, de grueso uniforme	$1994/\sqrt{F_y}$ 29.7
Ancho no superior a 12 veces el espesor; perforadas con una sucesión de agujeros de acceso	$2656/\sqrt{F_y}$ 32.0
Todos los elementos atronados comprimidos uniformemente que no estén incluidas en las dos categorías anteriores	$2120/\sqrt{F_y}$ 32.7

F_y debe tomarse en kg/cm²

~~Las especificaciones AISC permiten el empleo de placas con relaciones b/t mayores que~~

TABLA A.2. RELACIONES b/t NECESARIAS PARA EVITAR EL PUNDO LOCAL DE PLACAS EN MIEMBROS COMPRESIDOS. NORMAS ALEMANAS (DIN 4114)

VALORES TÉCNICOS				ESPECIFICACIONES			
TIPO DE APOYO EN LOS BORDES CONSIDERADOS	λ (mm)	(b/t) MÁXIMO		CASO	TIPOS EXTREMOS DE APOYO EN LOS BORDES	(b/t) MÁXIMO	
		$\frac{KL}{r} \leq 75$ (EC. 148)	$\frac{KL}{r} > 75$ (EC. 146)			$\frac{KL}{r} \leq 75$	$\frac{KL}{r} > 75$ *
	4.00	46.0	$0.606 \frac{KL}{r}$	I		45	$0.6 \frac{KL}{r}$
	5.42	53.5	$0.705 \frac{KL}{r}$	II		$52.5 - 7.5 \beta^2$	$(0.7 - 0.1 \beta^2) \frac{KL}{r}$
	6.97	60.7	$0.800 \frac{KL}{r}$	III		$60 - 15 \beta^2$	$(0.8 - 0.2 \beta^2) \frac{KL}{r}$
	1.277	26.0	$0.343 \frac{KL}{r}$	IV		$25.5 - (10.5 - \frac{15}{\alpha}) \beta^2$	$[0.34 - (0.14 - \frac{0.2}{\alpha}) \beta^2] \frac{KL}{r}$
	0.425	15.0	$0.108 \frac{KL}{r}$	V		$15 + 30 \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$	$(0.2 + 0.4 \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}) \frac{KL}{r}$

* Las expresiones para $\frac{KL}{r} > 75$ son iguales a las correspondientes para $\frac{KL}{r} = 75$ multiplicadas por $(\frac{KL}{r})/75$.

$\alpha = a/b_1$. Para el significado de los términos restantes véase la Fig. 22

La ecuación básica para determinar las relaciones b/t especificadas por el AISC es la (49) que, para $E = 2100.000 \text{ Kg/cm}^2$ y $\mu = 0.3$ se reduce a

$$\frac{b}{t} \leq 1375 \sqrt{k/\sigma_y} \quad (51)$$

En la tabla de la hoja siguiente se han anotado las relaciones b/t obtenidas al aplicar la ec. (51) a placas comprimidas con condiciones idealizadas de apoyo, y los límites dados por el AISC para elementos planos reales mas o menos equivalentes a los idealizados. La base de las normas son las relaciones b/t teóricas, pero se especifican valores menores para obtener un margen de seguridad respecto al pandeo local mayor que respecto al de conjunto, y la mayor o menor restricción que el resto del perfil proporciona al elemento plano considerado se toma en cuenta, aproximadamente, especificando un porcentaje mas o menos elevado de esas relaciones.

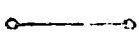


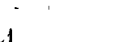
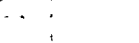
En el Reglamento de las Construcciones para el D.F. se fijan como límites de la relación ancho/grueso de elementos planos comprimidos $2100/\sqrt{\sigma_y}$ para placas apoyadas en los dos bordes y $800/\sqrt{\sigma_y}$ para las que están soportadas en uno solo, pero se permiten valores mayores si se efectúan estudios teóricos que los justifiquen.

PROBLEMA Está en las dos hojas siguientes.

DISEÑO BASADO EN LA RESISTENCIA POSTERIOR AL PANDEO. Tanto las normas del AISI (Instituto Americano del Hierro y el Acero), que se refieren al diseño de elementos estructurales hechos con lámina delgada como en frío, como las del AISC (Instituto Americano de la Construcción en Acero), que cubren las estructuras formadas por perfiles laminados o soldados compuestos por placas relativamente gruesas, contienen normas para la determinación de la resistencia posterior al pandeo de los elementos planos.

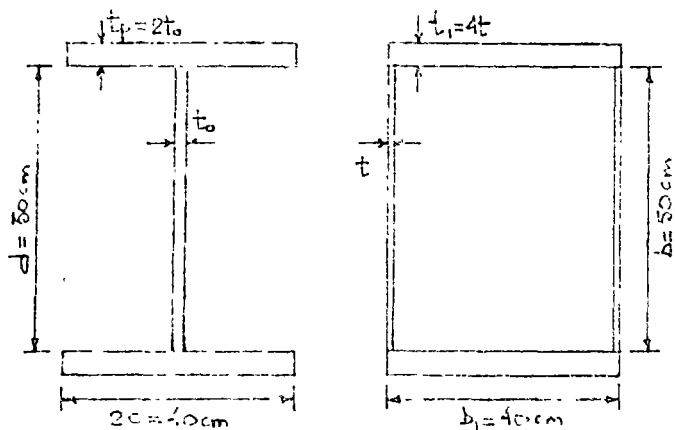
Entre hojas 272 y 273

TABLA XIII. RELACIONES b/t NECESARIAS PARA EVITAR EL PANDEO LOCAL DE PLACAS EN MIEMBROS COMPRESIDOS. NORMAS AMERICANAS (AISC-69)

VALORES TÍPICOS			ESPECIFICACIONES			
TIPO DE ARROJO EN LOS BORDES LONGITUDINALES	k (MÍN)	(b/t) MÁXIMO (Ec. 149)	TIPO DE ELEMENTO COMPRESIDO	(b/t) MÁXIMO GENERAL	(b/t) MÁXIMO ASB	%
	4.00	2750/√fy	Pantales de secciones en cajón, rectangulares o cuadradas, de grueso uniforme	1994/√fy	397	72
			Todos los elementos alíneados comprimidos uniformemente no incluidos en las categorías anteriores	2120/√fy	422	77
	5.42	3200/√fy				
	6.97	3630/√fy				
	1.277	1520/√fy	Almas de T's	1064/√fy	21.2	70
	0.425	890/√fy	Pantales formados por un solo ángulo, o por dos ángulos con separadores	634/√fy	12.7	71
			Pantales formados por dos ángulos en contacto; pantales comprimidos de vigas, arces, etc	796/√fy	15.8	89

matemáticas si se obtiene solución que los justifique, y siempre que los esfuerzos críticos de pandeo de las pletinas no resulten menores que el del miembro en conjunto; o, por lo contrario en este último caso, las pletinas deberán de las pletinas pandeo determinarse aplicando la metodología descrita en este capítulo y, en especial, la ec. (146).

PROBLEMA. Trazar las curvas $t_{min} - KL/r$ para las pletinas críticas de las dos columnas con λ_{max} se muestra, la carga es axial y el acero A36. Deben utilizarse los tres procedimientos aplicables: a) la ec. (146), b) las especificaciones AISC 69, c) las normas alemanas DIN.



SECCIÓN I,

a) Ec. 146

$$\frac{b}{t} = 0.303 \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{E}{F_c}} \quad (146)$$

De la Tabla IV:

$$9.4 \left(\frac{t_a c}{t_p d} \right)^2 = 9.4 \left(\frac{t_a \cdot 20}{2 t_a \cdot 50} \right)^2 = 0.376 < 1.0$$

El alma es la pletina crítica.

$$\xi = \left(\frac{t_a}{t_p} \right)^2 \frac{0.16 + 0.0056 (d/c)^2}{1 - 9.4 \left(\frac{t_a c}{t_p d} \right)^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{0.16 + 0.0056 (50/20)^2}{1 - 0.376} = 0.039$$

$$\sqrt{\lambda_c} = 2 + \frac{\xi}{10\xi + 3} = 2 + \frac{0.039}{3.39} = 2.59, \quad \lambda_c = 6.71$$

Este coeficiente es considerablemente mayor que 4.00, que ~~corresponde~~ corresponde a una placa larga libremente apoyada en los dos bordes; el incremento en λ_c es una consecuencia de las restricciones que imponen los pletinas sobre las rotaciones de los bordes del alma.

De la ec. (146):

$$\frac{d}{t} = 0.303 \frac{KL}{r} \times 2.59 = 0.785 \frac{KL}{r}$$

Este resultado es válido para todas las ~~relaciones~~ relaciones de esbeltez de la columna, puesto que la ec. (146) es aplicable a pandeo elástico e inelástico.

$$t_{min} = \frac{d}{0.785 (KL/r)} = \frac{50}{0.785 (KL/r)} = \frac{63.7}{KL/r}$$

~~Resumen~~ En este problema se está usando la nomenclatura empleada en la Tabla IV.

b) ESPECIFICACIONES AISC 69.

$$\frac{d}{t_a} = 42.2, \quad t_{min} = \frac{50}{42.2} = 1.18 \text{ cm, constante e independiente de la}$$

relación de esbeltez.

c) NORMAS DIN

El alma está en el caso I, Fig. 72.

Para $\frac{KL}{r} \leq 75$, $\frac{d}{t} = 45$, $t_{\min} = \frac{50}{45} = 1.11 \text{ cm}$

Para $\frac{KL}{r} > 75$, $\frac{d}{t} = 0.6 \frac{KL}{r}$, $t_{\min} = \frac{50}{0.6 KL/r} = \frac{83.3}{KL/r}$

Las expresiones aplicables a cada uno de los intervalos de relaciones de esbeltez se hallan tomados de la Tabla XII.

SECCIÓN II.

a) Ec. 146

De la Tabla IV, $\frac{t_{b1}}{t_b} = \frac{t \cdot 40}{4t \cdot 50} = 0.20 \leq 1.0 \therefore$ Las almas son críticas,

$$\bar{r} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^3 \frac{0.39}{1 - \left(\frac{t_{b1}}{t_b}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{0.39}{1 - (0.20)^2} = 0.0062$$

$$\sqrt{R} = 2 + \frac{2}{10\bar{r} + 3} = 2 + \frac{2}{3.062} = 2.65, \quad R = 7.02$$

Se advierte de nuevo el efecto de las restricciones que imponen los patines sobre las almas, que es un poco mayor que en la sección I.

$$\frac{b}{t} = 0.303 \frac{KL}{r} \times 2.65 = 0.803 \frac{KL}{r} \therefore t_{\min} = \frac{62.3}{KL/r}$$

b) ESPECIFICACIONES AISC 69. $\frac{b}{t_a} = 42.2$, $t_{\min} = \frac{50}{42.2} = 1.18 \text{ cm}$

c) NORMAS DIN

Las almas están en el caso III.

$$\beta = \frac{40/4t}{50/t} = \frac{10}{50} = 0.2, \quad \beta^2 = 0.04$$

Para $\frac{KL}{r} \leq 75$, $\frac{b}{t} = 60 - 15\beta^2 = 59.4$, $t_{\min} = \frac{50}{59.4} = 0.84 \text{ cm}$

Para $\frac{KL}{r} > 75$, $\frac{b}{t} = (60 - 0.2\beta^2) \frac{KL}{r} = 0.792 \frac{KL}{r}$, $t_{\min} = \frac{63.1}{KL/r}$

Fig. 73
Efecto de la
pág. 112

En la Fig. 73 se han trazado las curvas $t_{\min} - KL/r$ correspondientes a los almas de las secciones; ~~comparativamente~~ ~~indistintamente~~ ~~que~~ ~~los~~ ~~reglas~~ ~~AISC~~ ~~son~~ ~~mucho~~ ~~más~~ ~~conservadoras~~, que (la DIN), sobre todo para relaciones de esbeltez altas, y ~~que~~ ~~estas~~ ~~últimas~~ ~~conclusiones~~ ~~aplicadas~~, en general, con la ec. (146); con los datos numéricos de este problema, las curvas para ambos métodos de la sección en cuestión son prácticamente iguales.

~~Por~~ ~~lo~~ ~~que~~ ~~las~~ ~~restricciones~~ b/t de las especificaciones AISC constituyen, en tales los casos, un límite superior en la aplicación de la ec. (146); puesto que las placas que las satisficieren pueden llegar al esfuerzo de fluencia sin pandeo, no tiene ningún sentido imponer elementos más robustos todavía.

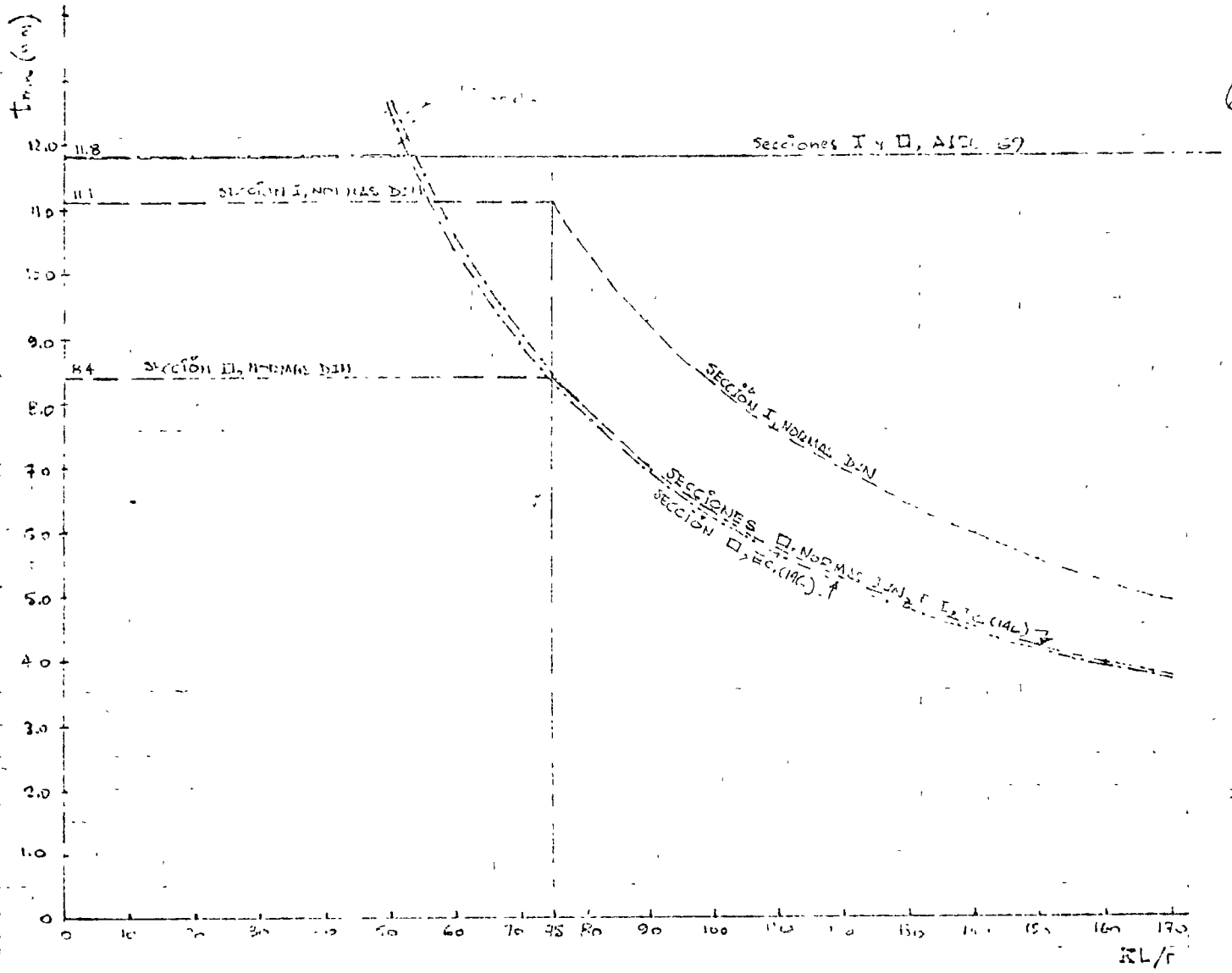


Fig. 73

Como el comportamiento de las placas apoyadas en los dos bordes longitudinales (atésadas) difiere sustancialmente del de las que están libres en uno de ellos (no atésadas) las dos especificaciones proporcionan métodos diferentes para el cálculo de la resistencia en uno u otro caso.

Las recomendaciones de los dos institutos tienen el mismo origen pero están presentadas de distintas maneras, y los valores de los coeficientes que aparecen en las fórmulas no son necesariamente iguales.

Las recomendaciones son aplicables a elementos planos comprimidos uniformemente, sin que importe la sollicitación que ocasiona esa compresión.

ELEMENTOS ATÉSADAS La determinación de la resistencia por flexión al pandeo de placas comprimidas apoyadas en los dos bordes longitudinales está basada en el concepto de ancho efectivo introducido por von Kármán y modificado por Winter; las ecuaciones básicas son la (44) y la (45), que se reproducen aquí:

$$b_e = 1.9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \left(1 - 0.415 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \right) \quad (44); \quad \left(\frac{b}{t} \right)_{lim} = 1.9 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \quad (45)$$

Sustituyendo E por su valor numérico (el AISI recomienda que se tomen 29500 ksi, o sea 2074000 kg/cm²) se llega a los resultados siguientes:

Las placas son totalmente efectivas ($b_e = b$) cuando

$$\left(\frac{b}{t} \right)_{lim} = 1858 / \sqrt{\sigma_{max}} \quad (52)$$

Para relaciones b/t mayores que $(b/t)_{lim}$ el ancho efectivo es

$$b_e = \frac{2736t}{\sqrt{\sigma_{max}}} \left[1 - \frac{598}{(b/t)\sqrt{\sigma_{max}}} \right] \quad (53)$$

Si se quiere diseñar una estructura con un coeficiente de seguridad

determinado respecto a la carga máxima que puede soportar, el cálculo de las propiedades geométricas de los elementos que la forman debe hacerse utilizando los anchos efectivos correspondientes a las solicitaciones de colapso, pues si se emplean los que corresponden a las de trabajo se sobreestima su resistencia, ya que ese ancho es mayor que el que estaría trabajando inmediatamente antes de la falla; en cambio, las deformaciones que interesa conocer suelen ser las producidas por las cargas de trabajo, y en su cálculo se emplean las propiedades geométricas determinadas con los anchos efectivos correspondientes a ellas.

Por consiguiente, los anchos efectivos deben obtenerse con dos grupos diferentes de fórmulas.

Si se toma como esfuerzo básico de diseño el 60% del de fluencia, para utilizar las ecs. (52) y (53) en el cálculo de resistencias debe sustituirse en ellas σ_{max} por $\sigma/0.6 = 1.67 \sigma$, donde σ es el esfuerzo normal producido por las cargas de trabajo, calculado con el área efectiva de la placa (para obtener σ puede ser necesario proceder por aproximaciones sucesivas); se llega así a

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = \frac{1440}{\sqrt{\sigma}} \quad (54); \quad \frac{b_e}{t} = \frac{2120}{\sqrt{\sigma}} \left[1 - \frac{464}{(b/t)\sqrt{\sigma}} \right] \quad (55)$$

Sustituyendo σ_{max} por σ , las ecs. (52) y (53) son aplicables en forma directa al cálculo de deformaciones bajo cargas de trabajo. En todas estas expresiones, los esfuerzos σ o σ_{max} deben estar en kg/cm^2 .

El AISI y el AISI proporcionan las fórmulas siguientes para la determinación de los anchos efectivos:

a) PARA CÁLCULOS DE RESISTENCIA

AISI.

Las placas son completamente efectivas ($b_e = b$) hasta $(b/t)_{lim} = 434/\sqrt{F}$

Si b/t es mayor que $(b/t)_{lim}$, (54a)

$$\frac{b_e}{t} = \frac{2121}{\sqrt{F}} \left[1 - \frac{464}{(b/t)\sqrt{F}} \right] \quad (55a)$$

Excepción: Las placas que forman parte de secciones en cajón, cuadradas o rectangulares, son completamente efectivas hasta

$$(b/t)_{lim} = 1543/\sqrt{F} \quad (54b)$$

$$\text{Si } b/t > (b/t)_{lim}, \quad \frac{b_e}{t} = \frac{2121}{\sqrt{F}} \left[1 - \frac{422}{(b/t)\sqrt{F}} \right] \quad (55b)$$

AISC. La relación $(b/t)_{lim}$ es la obtenida en el diseño basado en la iniciación del pandeo.

En placas que formen parte de secciones en cajón cuadradas o

rectangulares, de grueso uniforme,

$$b_e = \frac{2121t}{\sqrt{F}} \left[1 - \frac{422}{(b/t)\sqrt{F}} \right] \leq \frac{1994}{\sqrt{F}} \quad (55c)$$

En todos los elementos uniformemente comprimidos resistentes,

$$b_e = \frac{2121t}{\sqrt{F}} \left[1 - \frac{371}{(b/t)\sqrt{F}} \right] \leq \frac{2120}{\sqrt{F}} \quad (55d)$$

b) PARA CÁLCULO DE DEFORMACIONES

AISI.

Las placas son completamente efectivas hasta $(b/t)_{lim} = 1853/\sqrt{F}$ (52a)

$$\text{Si } b/t > (b/t)_{lim}, \quad \frac{b_e}{t} = \frac{2734}{\sqrt{F}} \left[1 - \frac{508}{(b/t)\sqrt{F}} \right] \quad (53a)$$

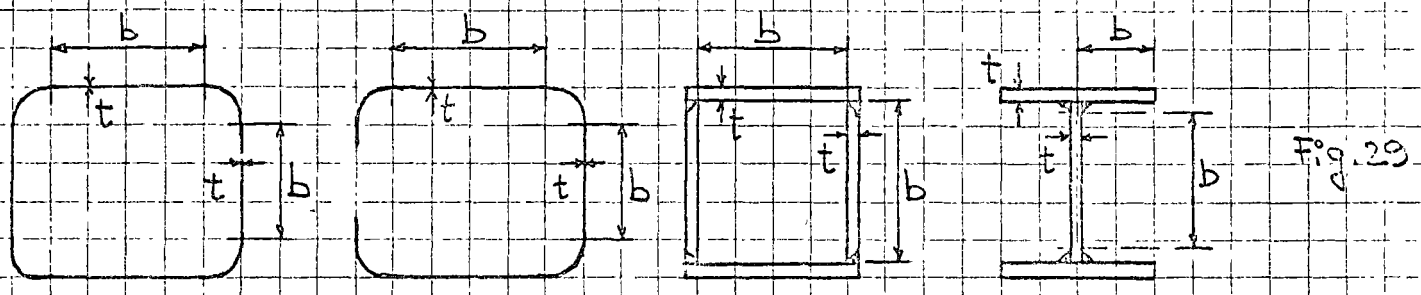
Excepción: En secciones en cajón, $(b/t)_{lim} = 1987/\sqrt{F}$ (52b)

$$\text{Si } b/t > (b/t)_{lim}, \quad \frac{b_e}{t} = \frac{2734}{\sqrt{F}} \left[1 - \frac{544}{(b/t)\sqrt{F}} \right] \quad (53b)$$

AISC. No proporciona fórmula para este caso.

En todas las expresiones anteriores b , b_e y t son el ancho real, el ancho efectivo y el grueso de la placa. σ es el esfuerzo normal producido por las cargas de trabajo, calculado con el área efectiva de la sección, en kg/cm^2 , y σ_y es el esfuerzo de fluencia del material, en las mismas unidades.

En la Fig. 29 se indica cómo deben medirse los anchos b ;



Secciones de lámina delgada.

Sec. laminadas o soldadas.

ELEMENTOS NO ATIESADOS. La resistencia posterior al pandeo

tiene mucha menos importancia en elementos planos no atiesados que en los atiesados, por lo que el cálculo de esfuerzos permisibles está basado en la iniciación de la inestabilidad, y la resistencia posterior al pandeo se tiene en cuenta únicamente como un margen de seguridad contra el colapso en placas de relación b/t muy alta.

Las ecuaciones contenidas en las especificaciones para determinar los esfuerzos permisibles en elementos planos no atiesados son:

AISI. Para $b/t \leq 531/\sqrt{\sigma_y}$ (10.5 para acero A36), $\sigma_p = 0.60 \sigma_y$

Para $531/\sqrt{\sigma_y} < b/t \leq 1207/\sqrt{\sigma_y}$ ($10.5 < b/t \leq 24$, acero A36),

$$\sigma_p = \sigma_y \left[0.767 - 0.000315 \left(\frac{b}{t} \right) \sqrt{\sigma_y} \right] \quad (56)$$

Para $1207/\sqrt{\sigma_y} \leq b/t \leq 25$, $\sigma_p = 562500 / (b/t)^2$ (57)

Para $25 < b/t \leq 60$, Angulba: $\sigma_p = 562500 / (b/t)^2$ (58)

Todas las secciones restantes: $\sigma_p = 1292 - 39.7 (b/t)$ (59)

Los elementos planos comprimidos con relaciones b/t mayores de 50 pueden mostrar distorsiones visibles en los bordes libres bajo esfuerzos de trabajo, sin detrimento de la capacidad de carga del miembro del que forman parte. Si b/t excede de 60 es probable que la distorsión de los patines sea tan pronunciada que la sección se vuelva estructuralmente indeseable a menos que cargas y esfuerzos se reduzcan mucho, con lo que resulta antieconómica.

AISC. El AISC no da fórmulas para calcular directamente los esfuerzos permisibles sino para determinar un factor Q_s que es igual al esfuerzo crítico de pandeo dividido entre el de fluencia, $Q_s = \sigma_{cr} / \sigma_y$. Por consiguiente, $\sigma_a = Q_s \sigma_y$ y $\sigma_p = 0.6 Q_s \sigma_y$. Multiplicando esas ecuaciones por 0.60 σ_y se obtienen expresiones para calcular esfuerzos permisibles en placas con relaciones b/t mayores que las requeridas para alcanzar el esfuerzo de fluencia sin pandeo local prematuro.

Ángulos aislados:

Si $637 / \sqrt{\sigma_y} < b/t < 1298 / \sqrt{\sigma_y}$ ($12.7 \leq b/t \leq 25.8$ para $\sigma_y = 436$),

$$\sigma_p = [0.804 - 0.000320 (b/t) \sqrt{\sigma_y}] \sigma_y \quad (60)$$

Si $b/t \geq 1298 / \sqrt{\sigma_y}$, $\sigma_p = 653800 / (b/t)^2$ (61)

Ángulos o placas que sobresalen de columnas y otros miembros en compresión, y patines comprimidos de traveses:

Si $796 / \sqrt{\sigma_y} < b/t < 1475 / \sqrt{\sigma_y}$ (AISC A36: $15.8 \leq b/t \leq 29.3$),

$$\sigma_p = [0.849 - 0.000313 (b/t) \sqrt{\sigma_y}] \sigma_y \quad (62)$$

Si $b/t \geq 1475 / \sqrt{\sigma_y}$, $\sigma_p = 843600 / (b/t)^2$ (63)

En todas las expresiones anteriores σ_y debe tomarse en kg/cm^2 y los resultados se obtienen en esas mismas unidades.

COLUMNAS DE PAREDES DELGADAS COMPRIMIDAS AXIALMENTE. Cuando

una columna está formada por elementos planos de relación ancho/grueso elevada resulta antieconómico basar su diseño en la iniciación del pandeo local, pues éste se presenta en general bajo cargas mucho menores que la crítica de la columna y la de colapso de las placas.

Las ecuaciones básicas siguen siendo las de pandeo elástico e inelástico de columnas cargadas axialmente:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (64), \quad \sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{KL}{r}\right)^2 \quad (65)$$

De acuerdo con la ec. (65) el esfuerzo crítico de conjunto tiende hacia σ_y cuando KL/r tiende a cero, y para $KL/r=0$ se obtiene $\sigma_{cr} = \sigma_y$. Sin embargo, una columna muy corta compuesta por placas delgadas falla bajo un esfuerzo medio menor que σ_y , a causa del pandeo local, y su esfuerzo medio crítico correspondiente a una relación de esbeltez nula puede expresarse como $Q\sigma_y$, donde Q es un coeficiente menor que 1.0 que representa el efecto desfavorable de ese fenómeno, que depende del esfuerzo de fluencia del material, de las relaciones b/t de las placas y de sus condiciones de apoyo, si se supone que el pandeo inelástico sigue una curva de transición parabólica que se inicia en $\sigma_{cr} = Q\sigma_y$ para $L/r=0$ y se hace tangente a la hipérbola de Euler en el punto que tiene como ordenada la mitad de ese esfuerzo, la ec. (65) se transforma en

$$\sigma_{cr} = Q\sigma_y - \frac{(Q\sigma_y)^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{KL}{r}\right)^2 \quad (66)$$

y la abscisa del punto de tangencia con la curva de pandeo elástico se obtiene haciendo σ_{cr} igual a $Q\sigma_y/2$ y despejando la relación de esbeltez correspondiente,

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{21\pi^2 E}{Q \sigma_y}} = \frac{C_c}{\sqrt{Q}} \quad (67)$$

C_c tiene el mismo significado que en las ecuaciones ordinarias de pandeo de columnas.

La ec. (64) no se modifica por pandeo local, pues es aplicable únicamente a columnas de relación de esbeltez elevada, que se pandean en el intervalo elástico bajo esfuerzos tan pequeños que no ocasionan inestabilidad local antes de que la columna falle en conjunto, aún en miembros hechos con lámina delgada.

En la Fig. 30 se muestran esquemáticamente las curvas $\sigma_{cr} - L/r$ correspondientes a columnas ordinarias, formadas por perfiles laminados o soldadas compuestas por elementos con relaciones b/t bajas, ec. (64) y (65), y a columnas hechas con lámina o con placas muy delgadas, ec. (64) y (66).

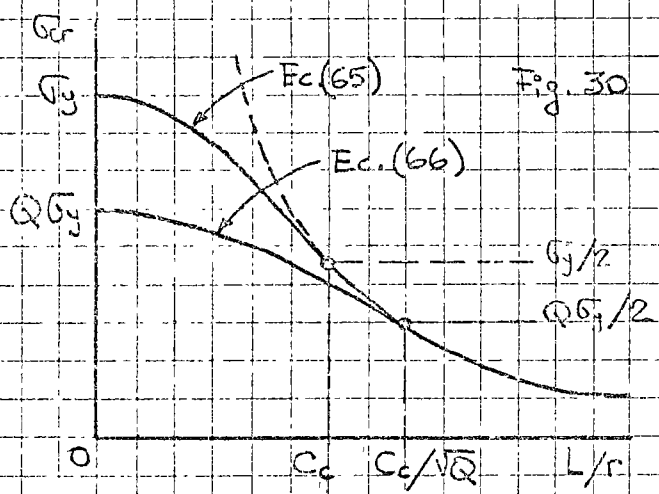


Fig. 30

Los esfuerzos críticos dados por las ecuaciones anteriores se dividen entre un coeficiente de seguridad adecuado para obtener esfuerzos de trabajo. A diferencia del AISI, que utiliza un coeficiente variable con la relación de esbeltez, el AISI emplea un factor

de seguridad constante igual a $23/12 = 1.92$, ya que las columnas cortas de lámina delgada se ven más afectadas por las imperfecciones inevitables en geometría y en la aplicación de la carga que las compuestas por placas gruesas, por lo que no se justifica tomar en ellas un coeficiente de seguridad menor que en las largas.

Dividiendo los segundos miembros de las ec. (64) y (65) entre $23/12$

se llega a las ecs. (68) y (69), que son las recomendadas por el AISI para la determinación de esfuerzos permisibles en miembros comprimidos hechos con placas de grueso no mayor de 1/2", dobladas en frío y no sujetas a pandeo por torsión. Para ese caso las especificaciones mencionadas contienen las cláusulas siguientes:

a) El esfuerzo axial medio P/A en barras comprimidas cilíndricas, en caño o con secciones transversales que tengan dos ejes de simetría, y en cualquier otro tipo de elementos en los que se demuestre que no se puede presentar pandeo por torsión, así como en miembros contraentratados de manera que se evite esa forma de pandeo, no debe exceder los valores siguientes de σ_p , excepto en los casos en que se cumplan las condiciones del párrafo (b):

Para KL/r menor que C_c/\sqrt{Q} (pandeo inelástico):

$$\sigma_p = \frac{12}{23} Q \sigma_y - \frac{3(Q\sigma_y)^2}{23\pi^2 E} \left(\frac{KL}{r}\right)^2 = 0.522 Q \sigma_y - \left(\frac{Q\sigma_y KL/r}{12530}\right)^2 \quad (68)$$

Para KL/r igual o mayor que C_c/\sqrt{Q} (pandeo elástico):

$$\sigma_p = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} = \frac{1067000}{(KL/r)^2} \quad (69)$$

En las expresiones anteriores se ha tomado $E = 2071000 \text{ kg/cm}^2$, y el área A utilizada para calcular el esfuerzo axial medio, P/A , es el área total de la sección transversal, aún cuando no toda sea efectiva y Q valga menos que uno. Análogamente, r es también el radio de giro de la sección completa.

b) Cuando Q es igual a 1.0, el grueso del acero $0.25"$ (2.53mm) o mayor, y KL/r menor que C_c ,

$$\sigma_p = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right] \sigma_y}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{KL/r}{C_c} - \frac{(KL/r)^3}{2C_c^3}} \quad (70)$$

llega al punto de fluencia, σ_y , ~~por lo que se considera~~ su capacidad máxima de carga es:

$$P_{max} = A \sigma_y$$

En cambio, una columna ~~resistente~~ corta para de presión delgada puede fallar por pandeo local bajo esfuerzos menores que el de fluencia, ~~por lo que se considera~~ "introduciendo" el factor Q , su capacidad máxima de carga puede expresarse como:

$$P_{max} = Q A \sigma_y \quad (168)$$

Por otro lado, la carga de colapso de una placa atornillada ~~está~~ es igual al producto del esfuerzo de fluencia por el área efectiva correspondiente a ese esfuerzo, de manera que la carga total que puede soportar una columna corta formada ~~en su totalidad~~ por diversos planos atornillados es:

$$P_{max} = A_{ef} \cdot \sigma_y \quad (169)$$

donde A_{ef} es la suma de las áreas efectivas de todas las placas que componen la sección.

Iguando los segundos miembros de (168) y (169) se obtiene:

$$Q A \sigma_y = A_{ef} \cdot \sigma_y \therefore Q = Q_a = A_{ef} / A \quad (170)$$

La forma de determinar Q indicada en el párrafo 1 de la página anterior es la expresión con precisión de este resultado (~~introduciendo~~ de acuerdo con 1 se calcula el área efectiva correspondiente al esfuerzo local de diseño, $0.85 \sigma_y$, mientras que en la ec. (169) se ha considerado la que corresponde al esfuerzo de fluencia, sin embargo, esta contradicción es únicamente aparente, puesto que ~~considerando~~ las ecs. (168) y (169), ~~recomendados~~ por el AISI para la determinación de áreas efectivas, se hace deducido de manera que al introducir en ellas el esfuerzo local de diseño ~~proporcionalmente~~ directamente los anchos correspondientes a σ_y .

Q_a depende de las características geométricas de la sección de perfiles soldados, por lo que recibe el nombre de "factor de forma".

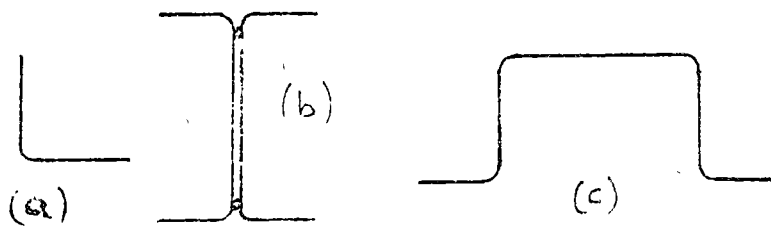


Fig. 77

- Columnas compuestas exclusivamente por elementos no atornillados. La falla por pandeo local de columnas cortas formadas únicamente por elementos planos no atornillados (por ejemplo, de sección transversal en ángulo,

Fig. 77a) e ~~probada~~ bajo una carga axial de compresión:

$$P_{max} = \sigma_{cr} A$$

donde σ_{cr} es el esfuerzo de pandeo del elemento no atornillado que tenga la relación ancho/grosor más elevada.

Reemplazando y dividiendo por $0.60 \sigma_y$ el segundo miembro de la ecuación

antes de obtener

$$T_{max} = A_s \sigma_s = A \frac{0.605 \sigma_u}{0.605 \sigma_y} = A \frac{0.605 \sigma_u}{0.605 \sigma_y} G_j = A \frac{\sigma_u}{\sigma_y} G_j$$

σ_u es el esfuerzo permisible en la placa crítica, igual a $0.605 \sigma_u$ si bit no es mayor que $55.3/10^3$, o calculado con alguna de las ecuaciones (154) y (155), en caso contrario.

Igualando el momento unitario de la última ecuación con el de (158), se llega a

$$A \frac{\sigma_u}{\sigma_y} G_j = Q A \sigma_y \quad \therefore Q = Q_s = \frac{\sigma_u}{0.605 \sigma_y} \quad (171)$$

Columnas: Formadas por elementos planos de las dos clases, ortogonales y sin aberturas la capacidad máxima de carga de un miembro de este tipo compuesto alrededor (un ejemplo en la fig. 47, a y c) se alcanza cuando se produce la placa más débil, lo que sucede bajo un esfuerzo $\sigma_{cr} = 0.71 \sigma_u$ (el esfuerzo permisible σ_p es como en el caso anterior, igual a $0.605 \sigma_u$ cuando $b/t \leq 55.3/10^3$, y se calcula en caso de las ecuaciones (154) y (155) si la placa es más débil); en ese momento el área efectiva A_e es aproximadamente la suma de las áreas totales de las los elementos más débiles más las áreas efectivas (reducidas) de los restantes, considerando con el resto de puntos de la placa un miembro más débil, es decir, en σ_{cr} (o σ_p si se utilizan las ecuaciones 153 a y b), y en caso σ_y , como se hace en el primer caso.

Por consiguiente, la carga máxima que puede soportar las columnas de este tipo es $T_{max} = \sigma_{cr} A_e$

Dividiendo sus dos miembros entre el área total A y multiplicando y simplificando el segundo por $0.605 \sigma_y$, la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{T_{max}}{A} = \frac{A_e}{A} \sigma_{cr} \frac{0.605 \sigma_u}{0.605 \sigma_y} = \frac{A_e}{A} \frac{\sigma_u}{\sigma_y} G_j$$

Introduciendo Q_u y Q_s dados por (170) y (171) se obtiene, finalmente,

$$T_{max} = Q_u Q_s A \sigma_y = Q A \sigma_y$$

$$A_e = Q_u Q_s A \quad (172)$$

Las ecuaciones (171) y (172) corresponden a la ecuación y proceso de diseño de las columnas de este tipo.

Para la parte esencial en un cuadro de especificaciones. Cuando se consideran los casos críticos máximos permisibles en las tres direcciones de la placa crítica, articuladas en ambos extremos, que se verifican a veces en las placas empalmadas, ellas mismas tienen un límite de fluencia de $55.3/10^3$. Utilícense las especificaciones AISI de 1963.

El AISI propone la ecuación siguiente, para determinar el esfuerzo permisible en los miembros axialmente formados por elementos planos articulados o empalmados:

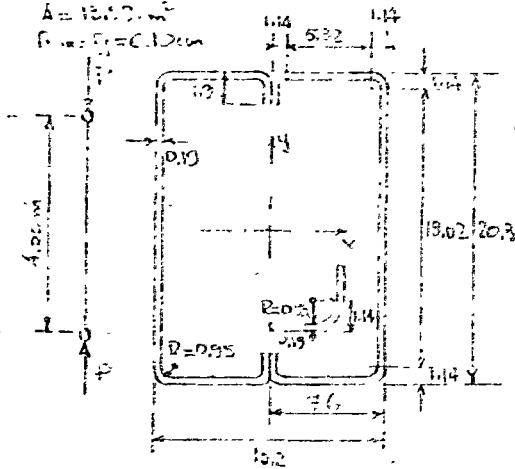
$$\sigma_p = \frac{Q_u Q_s \left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2 C_c^2} \right] \sigma_y}{\frac{5}{16} + \frac{(kl/r)^2}{8 C_c^2}}$$

donde $C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{\sigma_y}}$

es aplicable a miembros de los que $kl/r < C_c$.
 En la única dirección de sus tres un control de unidades variable, esta ecuación es aplicable a la placa crítica Q_u o Q_s si se hacen iguales a la unidad, si se usa esta fórmula exclusivamente por elementos articulados o empalmados.

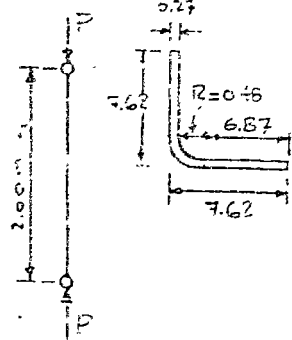
CASO I.

$A = 18.57 \text{ cm}^2$
 $f_c = f_t = C.12 \text{ cm}$



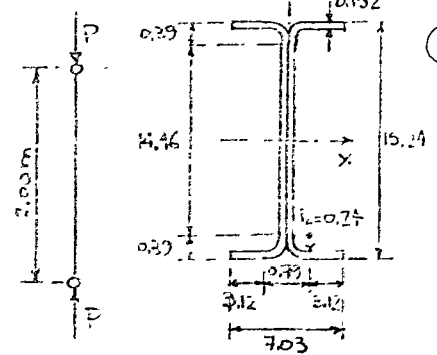
CASO II.

$A = 3.36 \text{ cm}^2$
 $f_c = 153 \text{ cm}$



CASO III.

$A = 6.87 \text{ cm}^2$
 $f_c = 153 \text{ cm}$



Armaduras en cru (exceptuando las longitudes de las columnas)

CASO 2. Elementos planos reforzados.

El esfuerzo permisible en la columna se determina con la ecuación (16a) ó (16b), pero su aplicación requiere calcular primero el valor del factor de forma Q . Puesto que la columna está formada íntegramente por elementos reforzados, $Q = h^2/k$ es (170).

Calculo del área efectiva: Como la sección ~~está~~ es en su capón, ~~de manera que~~ la ~~parte~~ ~~es~~ completamente efectiva ($b_e = b$) hasta

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{cr} = \frac{1543}{\sqrt{f_c}} = \frac{1543}{\sqrt{0.677}} = \frac{1543}{\sqrt{2100}} = 33.8$$

Se ve relación b/t de algunos de los elementos planos es mayor que 33.8, su ancho efectivo se calcula con la eq. (153b), que para el caso en estudio se reduce a

$$\frac{b_e}{t} = \frac{2121}{\sqrt{0.677}} \left[1 - \frac{472}{(b/t)\sqrt{0.677}} \right] = \frac{2121}{\sqrt{2100}} \left[1 - \frac{472}{(b/t)\sqrt{2100}} \right] = 46.3 \left[1 - \frac{3.2}{(b/t)} \right]$$

Patines: De la figura, $b = 5.32 \text{ cm}$ (~~dimensión~~ b es el ancho de la porción plana de cada patín, ~~distancia~~ ~~de~~ ~~distancia~~ a la dimensión exterior, el grueso de la lámina y el radio del canto, en cada extremo).

$$\frac{b}{t} = \frac{5.32}{0.19} = 28 < 33.8 \therefore \text{los patines son completamente efectivos.}$$

Almas: $b = 18.02 \text{ cm}$, $\frac{b}{t} = \frac{18.02}{0.19} = 95 > 33.8$

$$\therefore \frac{b_e}{t} = 46.3 \left(1 - \frac{3.2}{95} \right) = 46.3 (1 - 0.034) = 41.6$$

Ancho efectivo $b_e = 41.6t = 41.6 \times 0.19 = 7.91 \text{ cm}$

Área que debe descontarse = $(18.02 - 7.91) \times 0.19 = 2.24 \text{ cm}^2$

Área efectiva = $18.39 - 2.24 = 16.15 \text{ cm}^2$ ($A = 13.99 \text{ cm}^2$ es el área total de la sección).

De acuerdo con A , el factor Q vale

$$Q = \frac{A_{st}}{A} = \frac{10.15}{13.15} = 0.777$$

Estudio preliminar en la columna

Ratío de giro mínimo de la sección total $r_{min} = r_y = 6.10 \text{ cm}$.

$$\frac{KL}{r} = \frac{12.500}{6.10} = 2049 ; \quad C_c = \sqrt{\frac{20^2 E}{G_y}} = 107, \quad \frac{C_c}{\sqrt{1.0}} = \frac{107}{\sqrt{0.777}} = 126$$

Como se ve que 126, ~~superiormente~~ la columna se comporta en el intervalo elástico, y el esfuerzo permisible se calcula con la ec. (165):

$$\sigma_p = 0.522 (Q G_y) - \left(\frac{126^2 KL/r}{1250} \right)^2 = 0.522 \times 0.777 \times 3515 - \left(\frac{0.777 \times 2049 \times 6.10}{1250} \right)^2 = 1290 - 132 = 1158 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Carga máxima admisible:

$$P_{max} = A_{st} \sigma_p = 13.15 \times 1158 = 15200 \text{ kg}$$

Caso II. Elementos planos no alineados.

Estudio preliminar de pandeo local. Los dos elementos planos que componen la sección son iguales y simétricos y maximamente se pandean simultáneamente.

$$\frac{b}{t} = \frac{6.81}{0.27} = 25.4$$

Como b/t está comprendida entre 25 y 60, el estudio buscando el pandeo con la ec. (165):

$$\sigma_p = 562500 / (b/t)^2 = 562500 / (25.4)^2 = 878 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

En este caso,

$$Q = \frac{\sigma_p}{G_y} = \frac{878}{1000} = 0.878$$

Estudio preliminar en la columna

Ratío de giro mínimo de la sección total $r_{min} = 1.53 \text{ cm}$

$$C_c / \sqrt{Q} = 107 / \sqrt{0.878} = 107 / 0.937 = 114 \quad (\text{C}_c \text{ es igual independientemente que en el}$$

caso anterior porque depende exclusivamente del estudio de flexión del acero, que no ha cambiado).

$\frac{KL}{r} = \frac{12.500}{1.53} = 8172.149$ \therefore El estudio permisible se calcula con la ec. (165).

$$\sigma_p = 0.522 \times 0.878 \times 3515 - \left(\frac{0.878 \times 8172 \times 1.53}{1250} \right)^2 = 768 - 235 = 533 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Carga máxima admisible:

$$P_{max} = A_{st} \sigma_p = 3.95 \times 533 = 2100 \text{ kg}$$

Caso III. Algunos elementos planos alineados y otros no.

Puesto que la sección está compuesta por placas alineadas (almos) y no alineadas (patines), $Q = Q_1 \cdot Q_2$

Esfuerzo permisible por pandeo local.

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{pl} = \frac{215}{0.15} = 1433$$

$$\frac{1207}{\sqrt{0.15}} = \frac{1207}{0.387} = 3118$$

Como b/t está comprendido entre 204 y 255, el esfuerzo permisible se calcula con la ec. (15):

$$\sigma_p = \frac{355000}{\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \frac{355000}{(204)^2} = 840 \text{ kg/cm}^2$$

Por consiguiente, se vale

$$Q_0 = \frac{1390}{2603118} = 0.535$$

Cálculo del área efectiva.

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{efectiva}} = \frac{14.96}{0.152} = 98 > \left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lim}} \quad \left(\text{La relación ancho/grosor límite es "qual" que en el caso 2, puesto que el acero es el mismo.}\right)$$

Los perfiles de lámina delgado como el que se está estudiando se hacen ligeros a fin de dar un mayor espesor en la raíz; ~~hacia~~ la unión se efectúa en puntos aislados, por lo que al estudiar problemas de pandeo local las dos alas deben considerarse por separado.

$$\frac{b_e}{t} = \frac{2121}{\sqrt{1340}} \left(1 - \frac{472}{95 \sqrt{1340}}\right) = 58(1 - 0.122) = 51$$

Observando la relación b_e/t es mayor que en el primer caso porque al haber aumentado el ancho también correspondiente al esfuerzo de pandeo de las patas, que es proporcionalmente menor que el límite (840 kg/cm² en vez de 2100).

$$b_e = 51 \times 0.152 = 7.75 \text{ cm}$$

$$\text{Área de las alas} = 2(14.96 - 7.75) \times 0.152 = 2.04 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área efectiva} = 7.75 - 2.04 = 4.59 \text{ cm}^2$$

$$Q_0 = 4.59 / 6.15 = 0.745$$

Finalmente, ~~MINIMUM~~

$$Q = Q_0 \cdot Q_1 = 0.675 \times 0.69 = 0.465$$

Esfuerzo permisible de la columna.

Punto de giro mínimo = la sección total $I_{x1} = I_y = 1.15 \text{ cm}^4$

$$\frac{KL}{r} = \frac{100 \times 200}{1.15} = 174; \quad \frac{C_c}{\sqrt{A_g}} = \frac{107}{\sqrt{16.139}} = 16.2$$

$\frac{KL}{r} > C_c/\sqrt{A_g}$, ~~MINIMUM~~ el punto de giro se produce en el extremo libre, por lo que el esfuerzo permisible se calcula con (18):

$$\sigma_p = \frac{10(670000)}{(KL/r)^2} = \frac{10(670000)}{(174)^2} = 222 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Carga máxima admisible: } P_{max} = A_{ef} \cdot \sigma_p = 0.58 \times 222 = 128.76 \text{ kg}$$







centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO.

EXPOSICION DEL ING. JOSE LUIS SANCHEZ M.

ESFUERZOS DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES
DESPUES DEL LIMITE ELASTICO

por

Perfirio Ballosteros*

SUMARIO

Aceptando las hipótesis de deformación plana de secciones, diagrama idealizado esfuerzo-deformación, e isocronía. Se determina la ecuación general del esfuerzo normal a una sección transversal de un elemento estructural, en condiciones semi-plásticas, concluyéndose como casos particulares, las condiciones plásticas y elásticas. Se estudian diferentes posiciones de los ejes coordenados con el propósito de simplificar las operaciones numéricas. Se estudian condiciones de última capacidad de carga de columnas cortas a flexo-compresión no simétrica, y vigas bajo flexión bi-axial y se determinan diversos gráficos de interacción bi-axial para el diseño de secciones de acero estructural indicadas en los manuales de México y Estados Unidos.

Y se presenta el programa general para una sección cualquiera en lenguaje computacional FORTRAN IV.

NOTACION

A_e área elástica

A_p área plástica

d longitud del eje neutro a través de la sección

* Profesor de la División de Estudios Experimentales de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Hojas de las paginas : 3, 4, 5, 7, 14, 15, 19

- e_x, e_y excentricidades de la carga normal con respecto a los ejes coordenados.
- x_c abscisa al origen del eje neutro
- y_c ordenada al origen del eje neutro
- $n = \frac{A_p}{A_p + A_e}$ grado de plastificación
- y_0 distancia del eje neutro a la traza de plastificación.
- I_x, I_y, I_{xy} momentos y productos de inercia del área elástica
- M momento flector resultante en la sección
- M_x, M_y componentes de M respecto a los ejes coordenados
- M_u valor límite o último de M
- N carga excéntrica
- N_u valor límite o último de N
- Q_x, Q_y momentos estáticos del área elástica respecto a los ejes coordenados
- q_x, q_y momentos estáticos del área plástica respecto a los ejes coordenados
- σ_z esfuerzo en un punto (x, y) paralelo al eje z
- σ_c esfuerzo de cedencia del material
- $a, b, c.$ constantes

INTRODUCCION

Aceptando las hipótesis de deformación plana¹, relación entre esfuerzo y deformación idealizada, Fig. 1 y un material iso-

¹ Navier, "Résumé des leçons sur l'application de la mécanique" 3d ed., Paris 1864, edited by Saint-Venant.

trópico y homogéneo. Para deformaciones menores que la deformación unitaria de fluencia ϵ_y , regirá la Ley de Hooke, y para deformaciones mayores a la de fluencia, el esfuerzo para cualquier deformación será igual al esfuerzo de fluencia o cedencia σ_y .

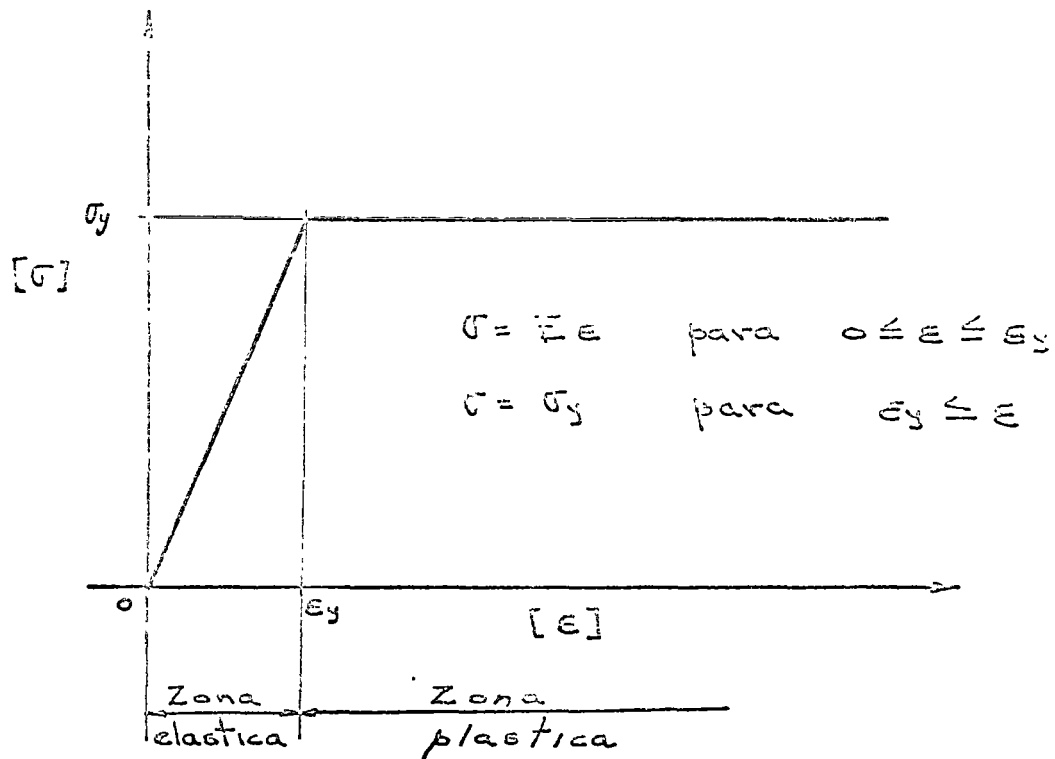


Fig. 1 Diagrama esfuerzo-deformación idealizado.

Considerando una sección intermedia cualquiera $m-m$ del elemento estructural en equilibrio mostrado en la Fig. 2. Estudiarémos los esfuerzos reactivos de la porción A, debidos a la componente normal de la acción de la porción B.

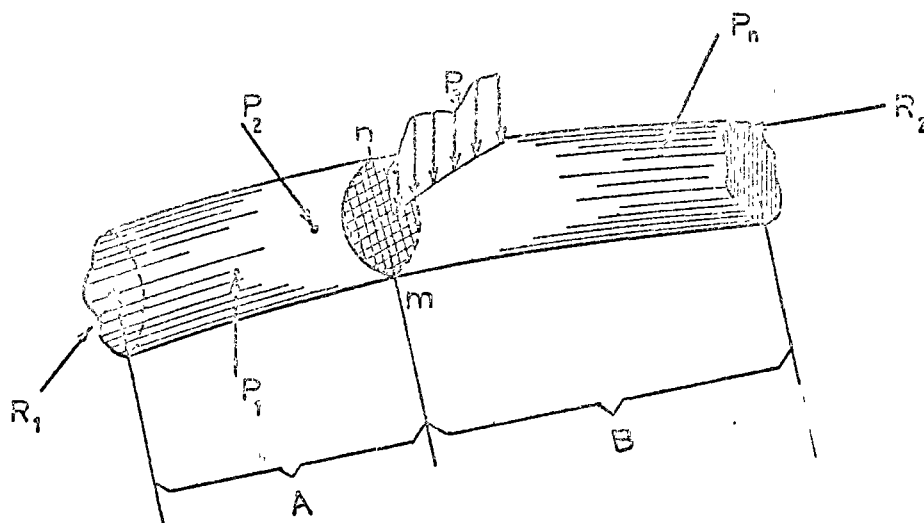


Fig. 2 Elemento estructural en equilibrio.

ECCACION GENERAL DE ESFUERZOS DE FLEXION.

En la Fig. 3 la sección $m-m$ se encuentra contenida en el plano (x,y) . N es la componente normal de la acción de la porción B sobre la porción A, y R_x, R_y sus excentricidades referi-

das a un sistema coordenado cualquiera. Las áreas (1, 2, 3) y (4, 5, 6) se encuentran plastificadas es decir a esfuerzos mayores que el de cedencia del material, y el área (1, 3, 4, 6) se encuentra bajo la acción de esfuerzos menores al de cedencia y rige la Ley de Hooke. El eje (1-3) es el eje neutro, recta de deformaciones y esfuerzos nulos. Las rectas (1-3) y (6-4) son paralelas al eje neutro, se encuentran a la misma distancia de éste y se denominarán trazas de plastificación.

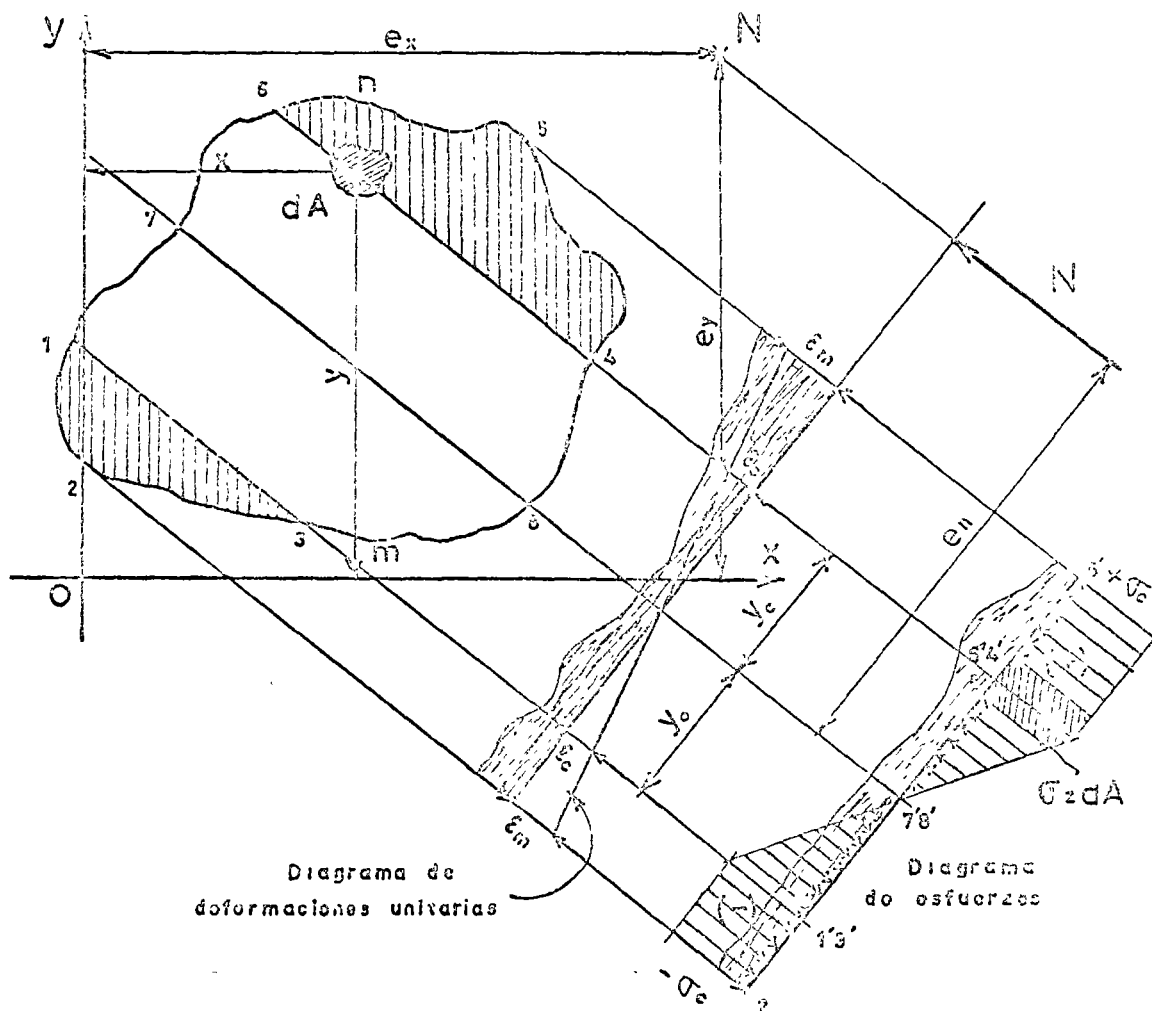


Fig. 3 Distribución de esfuerzos a flexo-compresión en condiciones elasto-plásticas.

Según Navier la superficie $m-n$ permanecerá plana después de la deformación. Por lo tanto la ecuación de la deformación $z(x,y)$ será la ecuación general del plano referida al sistema coordenado (x,y,z) , y aceptando la proporcionalidad entre es - fuerzo y deformación tendremos como ecuación del esfuerzo en la región (1, 3, 8, 4, 6, 7), zona elástica:

$$\sigma_z = \sigma_0 = Kz = ax + by + c. \quad (1)$$

Y en las regiones (1, 2, 3) y (3, 4, 5) zona plástica, será:

$$\sigma_z = \sigma_p = \pm \sigma_c. \quad (2)$$

De las condiciones de estática se tienen:

$$\left. \begin{aligned} \int_A \sigma_z dA &= N \\ \int_A \sigma_z y dA &= M_x = Ne_y \\ \int_A \sigma_z x dA &= M_y = Ne_x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Substituyendo (1) y (2) en (3) se obtienen:

$$\left. \begin{aligned} \int_{A_0} (ax + by + c) dA + \int_{A_p} \sigma_c dA &= N \\ \int_{A_0} (ax + by + c) y dA + \int_{A_p} \sigma_c y dA &= M_x \\ \int_{A_0} (ax + by + c) x dA + \int_{A_p} \sigma_c x dA &= M_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

utilizando la notación expuesta previamente (4) se transforma

$$\left. \begin{aligned} a \\ b \\ c \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} Q_y & Q_x & A_0 \\ I_{xy} & I_x & Q_x \\ I_y & I_{xy} & Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N - \sigma_c A_p \\ M_x - \sigma_c Q_x \\ M_y - \sigma_c Q_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

(5) es un sistema de 3 ecuaciones simultáneas con 3 incógnitas,

a, b y c. Definiendo a:

$$\left. \begin{aligned} \Delta = \begin{bmatrix} Q_y & Q_x & A_0 \\ I_{xy} & I_x & Q_x \\ I_y & I_{xy} & Q_y \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_x = \begin{bmatrix} (N - \sigma_c A_p) & Q_x & A_0 \\ (M_x - \sigma_c Q_x) & I_x & Q_x \\ (M_y - \sigma_c Q_y) & I_{xy} & Q_y \end{bmatrix} \\ \Delta_b = \begin{bmatrix} Q_y (N - \sigma_c A_p) & A_0 \\ I_{xy} (M_x - \sigma_c Q_x) & Q_x \\ I_y (M_y - \sigma_c Q_y) & Q_y \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_c = \begin{bmatrix} Q_y & Q_x & (N - \sigma_c A_p) \\ I_{xy} & I_x & (M_x - \sigma_c Q_x) \\ I_y & I_{xy} & (M_y - \sigma_c Q_y) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1 Para ser consistentes con el signo de σ_c definido por ecuación (2), y poder sacar a σ_c fuera del signo integral es necesario establecer para Q_x , Q_y y A_p la convención de: áreas plásticas, en tensión negativas, y en compresión positivas.

la solución del sistema (5) viene dada por

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad , \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} \quad , \quad c = \frac{\Delta_c}{\Delta} \quad (7)$$

substituyendo (7) en (1) se obtiene

$$\sigma_c = \frac{1}{\Delta} (\Delta_a x + \Delta_b y + \Delta_c) \quad (8)$$

La ecuación (8) es la expresión general para determinar el esfuerzo normal en el área elástica.

La ecuación del eje neutro se obtiene de (8) para $\sigma_c = 0$.

$$\Delta_a x + \Delta_b y + \Delta_c = 0 \quad (9)$$

La abscisa y ordenada al origen del sistema coordinado del eje neutro se obtienen de (9) para $y = 0$ y $x = 0$

$$x_c = -\frac{\Delta_c}{\Delta_a} \quad , \quad y_c = -\frac{\Delta_c}{\Delta_b} \quad (10)$$

CASOS ELÁSTICOS

Los esfuerzos en la sección serán menores que el de elasticidad y se tiene que

$$A_p = 0, \quad n=1, \quad A=A_0, \quad q_x = q_y = 0$$

Ejes centroidales.— Por definición de centroide de una sección es un punto tal que los momentos estáticos son nulos y en este caso tendremos que $Q_x = Q_y = 0$, $I_x \neq 0$, $I_y \neq 0$, $I_{xy} \neq 0$, $M_x \neq 0$, $M_y \neq 0$ y los determinantes (6) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= A (I_{xy}^2 - I_x I_y) \\ \Delta_a &= A (I_{xy} M_x - I_x M_y) \\ \Delta_b &= A (I_{xy} M_y - I_y M_x) \\ \Delta_c &= N (I_{xy}^2 - I_x I_y) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

y las ecuaciones (8) (9) y (10) se transforman a

$$\sigma_z = \frac{I_{xy} M_x - I_x M_y}{I_{xy}^2 - I_x I_y} x + \frac{I_{xy} M_y - I_y M_x}{I_{xy}^2 - I_x I_y} y + \frac{N}{A} \quad (12)$$

$$(I_{xy} M_x - I_x M_y) x + (I_{xy} M_y - I_y M_x) y + \frac{N}{A} (I_{xy}^2 - I_x I_y) = 0 \quad (13)$$

$$x_c = - \frac{I_{xy} - I_x I_y}{I_{xy} M_x - I_x M_y} x \frac{N}{A}, \quad y_c = - \frac{I_{xy} - I_x I_y}{I_{xy} M_y - I_y M_x} x \frac{N}{A} \quad (14)$$

Ejes centroidales principales.— Corresponden a girar los ejes centroidales a un ángulo α tal que el producto de inercia se anule, por lo tanto los determinantes (11) se reducen nuevamente a

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= -I_x I_y A \\ \Delta_a &= -I_x A M_y \\ \Delta_b &= -I_y A M_x \\ \Delta_c &= -I_x I_y N \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

y las ecuaciones (8) (9) y (10) se transforman en

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{A} \quad (16)$$

$$\frac{e_x}{I_y} x + \frac{e_y}{I_x} y + \frac{l}{A} = 0 \quad (17)$$

La forma de efectuar el giro por medio del círculo de Mohr viene expuesto en la mayoría de los textos de Estática y Resistencia de Materiales.

$$x_c = -\frac{I_y}{e_x A} = -\frac{r_y^2}{e_x}, \quad y_c = -\frac{I_x}{e_y A} = -\frac{r_x^2}{e_y} \quad (13)$$

$$\text{donde } r_x^2 = \frac{I_x}{A}, \quad r_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Ecuaciones de esfuerzos y posición del eje neutro en ejes centroidales y centroidales principales son derivadas en la mayoría de los textos de Resistencia de Materiales no las omitimos por su importancia.

Ejes con origen de coordenadas en la fuerza N.- En este caso se

tiene que $M_x = M_y = 0$, $Q_x \neq 0$, $Q_y \neq 0$
 $I_x \neq 0$, $I_y \neq 0$, $I_{xy} \neq 0$ y los determinantes (6) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= Q_y (I_x Q_y - I_{xy} Q_x) - Q_x (I_{xy} Q_y - I_y Q_x) + A (I_{xy}^2 - I_x I_y) \\ \Delta_a &= N (I_x Q_y - I_y Q_x) \\ \Delta_b &= N (I_{xy} Q_y - I_y Q_x) \\ \Delta_c &= N (I_{xy}^2 - I_x I_y) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

y las ecuaciones (8) (9) y (10) se transforman a

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta} (\Delta_a x + \Delta_b y + \Delta_c) \quad (20)$$

$$(I_x^2 Q_y - I_{xy} Q_x) x + (I_{xy} Q_y - I_y Q_x) y + (I_{xy}^2 - I_x I_y) = 0 \quad (21)$$

$$x_c = - \frac{I_{xy}^2 - I_x I_y}{I_x Q_y - I_{xy} Q_x} \quad , \quad y_c = - \frac{I_{xy}^2 - I_x I_y}{I_{xy} Q_y - I_y Q_x} \quad (22)$$

CASOS ELASTICO-PLASTICOS Y PLASTICOS

Cierta zona de la sección empezará a plastificarse y en esa área los esfuerzos serán igual al de cedencia σ_c .

Ejes centroidales principales respecto al área elástica.-

En este caso se tiene que $Q_x = Q_y = I_{xy} = 0$ y el resto de los parámetros será diferente de cero y los determinantes (11) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= - I_x I_y A_o \\ \Delta_2 &= - I_x A_o (M_y - \sigma_c q_y) \\ \Delta_3 &= - I_y A_o (M_x - \sigma_c q_x) \\ \Delta_4 &= - I_x I_y (N - \sigma_c A_p) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

y las ecuaciones (8) (9) y (10) se transforman a

$$\sigma_o = \frac{M_x - \sigma_c q_x y}{I_x} + \frac{M_y - \sigma_c q_y x}{I_y} + \frac{N - \sigma_c A_p}{A_o} \quad (24)$$

$$\frac{M_y - \sigma_c q_y x}{I_y} x + \frac{M_x - \sigma_c q_x y}{I_x} y + \frac{N - \sigma_c A_p}{A_o} = 0 \quad (25)$$

$$x_c = -\frac{I_y}{A_o} \frac{N - \sigma_c A_p}{M_y - \sigma_c q_y} \quad , \quad y_c = -\frac{I_x}{A_o} \frac{N - \sigma_c A_p}{M_x - \sigma_c q_x} \quad (26)$$

Ejemplo.- Considerando una sección rectangular Fig. 4 a flexión simple en una dirección, la ecuación (24) se reduce a

$$\sigma_o = \frac{M_x - \sigma_c q_x y}{I_x} - \frac{\sigma_c A_p}{A_o} \quad (27)$$

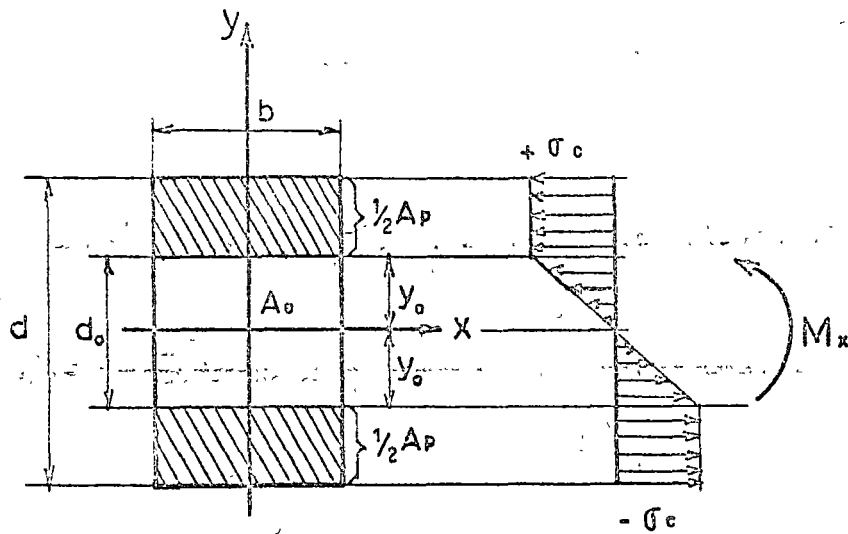


Fig. 4 Sección rectangular a flexo-compresión.

donde: $I_x = \frac{1}{12} b d_0^3$, $q_x = \int_{A_p} y dA = \frac{b}{4} (d^2 - d_0^2)$

$A_p = \int_{A_p} dA = 0$ Substituyendo estos valores en (27) para $(\bar{U}_0)_{y=\frac{d_0}{2}} = \bar{U}_c$
 y despejando a $M_y = M$ se obtiene

$$M = \frac{b d_0^2}{6} \bar{U}_0 + \left(\frac{b d^2}{4} - \frac{b d_0^2}{4} \right) \bar{U}_c = \bar{U}_c S_0 + \bar{U}_c (Z - Z_0) \quad (28)$$

(28) es la expresión conocida para el momento flector de secciones rectangulares en estado elástico plástico.

Ejes en los cuales el eje de las x coincide con el eje neutro.-

* Por la convención de que áreas plásticas en tensión son negativas, y en compresión positivas.

Considerando la sección mostrada en la Fig. 5, y tomando el eje neutro como el eje de las x , y el eje y en cualquier posición conveniente. En este caso la distribución de esfuerzos (1) y

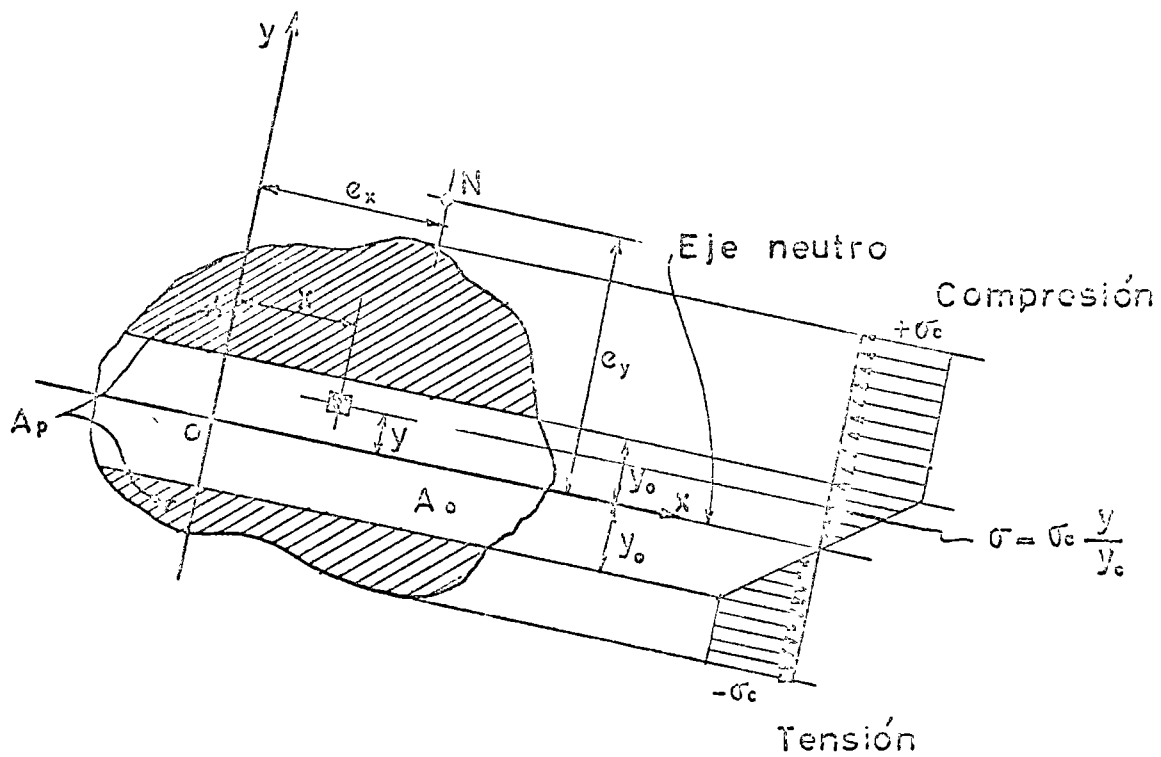


Fig. 5 Eje neutro coincidiendo con el eje x , en Flexo-compresión

(2) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\sigma_c}{y_0} y & \text{para } -y_0 \leq y \leq y_0 \\ \sigma_z &= \sigma_c & \text{para } y \geq y_0 \\ \sigma_z &= -\sigma_c & \text{para } y \leq -y_0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

donde σ_c es el esfuerzo de cedencia y y_0 la distancia del eje neutro a la traza de plasticidad. Las condiciones de equilibrio (3) y (4) se reducen a

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_{A_0} \sigma_z dA + \int_{A_p} \sigma_z dA & (a) \\ Ne_y &= \int_{A_0} \sigma_z y dA + \int_{A_p} \sigma_z y dA & (b) \\ Ne_x &= \int_{A_0} \sigma_z x dA + \int_{A_p} \sigma_z x dA & (c) \end{aligned} \right\} (30)$$

donde N es la carga excéntrica, e_x y e_y las distancias de N a los ejes coordenados, A_0 y A_p denota respectivamente las áreas elásticas y plásticas.

Substituyendo (29) en (30) y despejando a e_x y e_y se llega a

$$e_x = \frac{I_{xy} + y_0 q_y}{Q_x + y_0 A_p} \quad (31)$$

$$e_y = \frac{I_x + y_0 q_x}{Q_x + y_0 A_p}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_p &= \int_{A_p} dA \\
 q_x &= \int_{A_p} y dA \\
 q_y &= \int_{A_p} x dA \\
 Q_x &= \int_{A_0} y dA \\
 I_x &= \int_{A_0} y^2 dA \\
 I_{xy} &= \int_{A_0} xy dA
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

El valor de la carga excéntrica definido por (30a), puede convenientemente expresarse en la forma

$$N = \bar{C}_e \left(\frac{Q_x}{y_0} + A_p \right)
 \tag{33}$$

Para la convención de signo adoptada, N es una carga de compresión si es positiva.

Para el caso plástico, (31) llega a

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\frac{I_{xy} + y_0 q_y}{Q_x + y_0 A_p} \right) = \frac{q_y}{A_p} \\ e_y &= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\frac{I_x + y_0 q_x}{Q_x + y_0 A_p} \right) = \frac{q_x}{A_p} \end{aligned} \right\} (34)$$

y la carga N dada por (33) tiende a la última capacidad de carga de la sección N_u y es definida por

$$N_u = \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left[\bar{\sigma}_c \left(\frac{Q_x}{y_0} + A_p \right) \right] = \bar{\sigma}_c A_p \quad (35)$$

Flexión pura.— En el caso de Flexión pura Fig. 6, de nuevo considerando como eje neutro el eje de las x , y el eje y en cualquier posición conveniente las condiciones de equilibrio son

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \int_{A_0} \sigma_z dA + \int_{A_p} \sigma_z dA = \bar{\sigma}_c \left(\frac{Q_x}{y_0} + A_p \right). \\ M_x &= \int_{A_0} \sigma_z y dA + \int_{A_p} \sigma_z y dA = \bar{\sigma}_c \left(\frac{I_x}{y_0} + q_x \right). \\ M_y &= \int_{A_0} \sigma_z x dA + \int_{A_p} \sigma_z x dA = \bar{\sigma}_c \left(\frac{I_{xy}}{y_0} + q_y \right). \end{aligned} \right\} (36)$$

donde M_x y M_y son las componentes de M respecto a los ejes coordenados.

El momento flector es dado por

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sigma_c \sqrt{\left(\frac{I_{xx} + Q_x}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{I_{yy} + Q_y}{y_0}\right)^2} \quad (37)$$

El ángulo de inclinación de M es dado por

$$\tan. \theta = \frac{M_y}{M_x} = \frac{I_{xy} + y_0 Q_y}{I_{xx} + y_0 Q_x} \quad (35)$$

Consistente con el signo de σ_c definido por (29), θ es positivo cuando se mide en dirección de las manecillas del reloj, con respecto al eje x , y M , M_x y M_y son positivos en la dirección indicada en la Fig. 6.

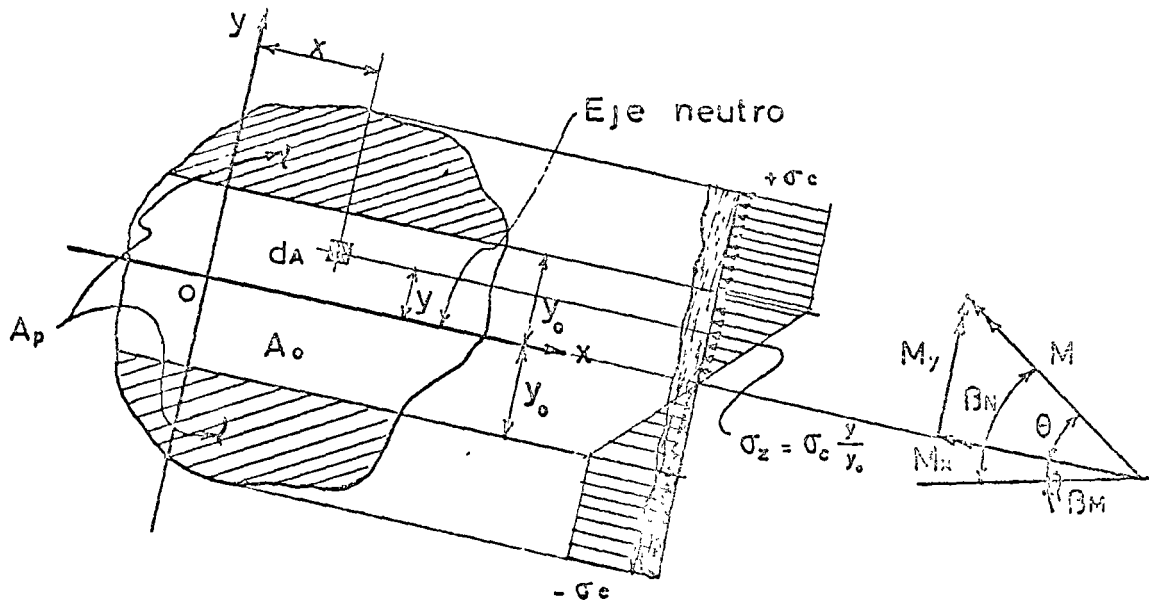


Fig. 6 Eje neutro coincidiendo con eje x, en Flexión bi-axial.

Para la sección totalmente plastificada M tiende a M_u y

(37) y (38) se transforman en

$$M_u = \lim_{y_o \rightarrow 0} \left[\sigma_c \sqrt{\left(\frac{I_x}{y_o} + q_x\right)^2 + \left(\frac{I_{xy}}{y_o} + q_y\right)^2} \right] = \sigma_c \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad (39)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\lim_{y_o \rightarrow 0} \left(\frac{I_{xy} + y_o q_y}{I_x + y_o q_x} \right) \right] = \tan^{-1} \frac{q_y}{q_x} \quad (40)$$

(39) y (40) nos definen el momento último o límite de una sección cualquiera bajo la acción de flexión bi-axial.

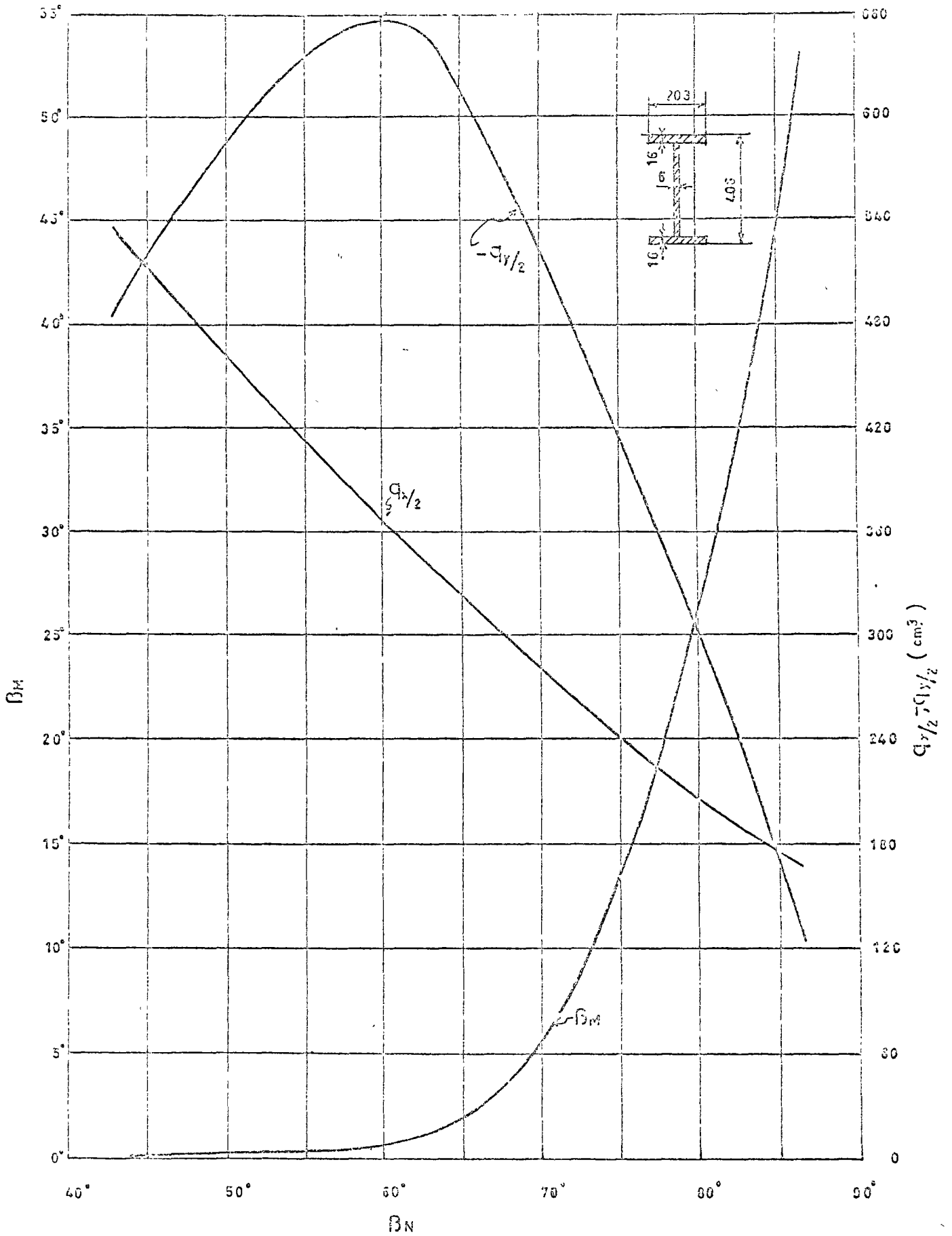
CONCLUSIONES

Utilizando las fórmulas (34), (35), (39) y (40), provenientes de las condiciones de equilibrio, cuando el eje neutro coincide con el eje de las x . Se han preparado gráficos de diseño límite para columnas y vigas bajo las condiciones de Flexo-compresión y flexión bi-axial. Es importante mencionar que en el caso de columnas tendremos el valor último M_u de la carga normal de la columna corta. En ambos casos se deberá trabajar el eje -

mento estructural con el factor de carga apropiado dependiendo este de la relación de carga muerta a carga viva, y la reducción adecuada por esbeltez.

R E F E R E N C I A S

1. Aghabian, M. S. and Popov, E. P. "Unsymmetrical Bending of Rectangular Beams Beyond the Elastic Limit". Proceedings of the First National Congress of Applied Mechanics, 1961.
2. Baedle, L. S. Thurlimann, B. and Ketter, R. L., "Plastic Design in Structural Steel" Fritz Engineering Laboratory Report No. 205. 32. Lehigh University, Bethlehem Pennsylvania, 1955, p. 9. 1.
3. P. Ballesteros, S. L. Lee. "Ultimate Strength of Short Struts" Journal Structural Division, Proceedings of the ASCE, paper 1358, September, 1957.
4. P. Ballesteros, J. E. Arriaga. "Economía de Acero debido al Diseño Plástico". Primer Symposium Panamericano de Estructuras, Instituto Politécnico Nacional, 1961, México, D. F.



1.2.4 Flexión en vigas de materiales no lineales

Supóngase que en el ensayo a flexión de un elemento como el mostrado en la fig 1.1 se miden en un instante dado la carga aplicada, P , la deformación unitaria en la fibra superior, ϵ_c , y la deformación unitaria en la fibra inferior, ϵ_t . (Existen instrumentos de laboratorio, tanto mecánicos como eléctricos, diseñados especialmente para medir deformaciones unitarias.) A partir de estos datos pueden calcularse el momento flexionante aplicado al elemento en la zona central, $M = Pa$ (fig 1.1) y la curvatura de una sección transversal situada en dicha zona, $\rho = (\epsilon_c + \epsilon_t)/h$ - (fig 1.3). Si se repite el procedimiento para otros valores de la carga aplicada, se obtienen varios valores de M y ρ , los cuales definen una gráfica como la mostrada en la fig 1.7, que recibe el nombre de diagrama momento-curvatura. Cada punto del diagrama corresponde a distintos valores de las deformaciones ϵ_c y ϵ_t , lo cual se ha indicado con los diagramas de deformaciones unitarias mostrados en la figura.

Los diagramas momento-curvatura son importantes porque sirven para obtener diagramas momento-rotación y carga-deflexión, los cuales se utilizan en el diseño de elementos, como se mencionó en la sección 1.2.1 -. Además, un diagrama de este tipo indica cuál es el momento máximo que puede resistir la sección transver-

sal de un elemento, como se ve en la fig 1.7. A continuación se presentan métodos para obtener diagramas momento-curvatura cuando se conocen los diagramas esfuerzo-deformación del material obtenidos en ensayos de tensión o compresión axial.

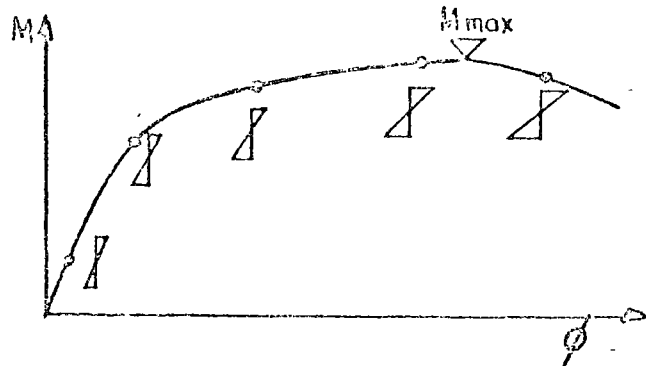


Fig 1.7 Diagrama momento-curvatura

Supóngase, para fines de ilustración, que se trata de obtener el diagrama momento-curvatura de un elemento de sección rectangular, de 10 cm de ancho y 20 cm de altura, fabricado con un material cuya gráfica esfuerzo-deformación se muestra en la fig 1.8. Un procedimiento para obtener el diagrama $M-\phi$ es el siguiente.

- Supóngase un valor de la deformación unitaria en la fibra superior, ϵ_{c1} , (fig 1.3-d) que esté comprendido en el rango de valores de la fig 1.8. Para fines de ilustración, supóngase que se eligió el valor $\epsilon_{c1} = 0.003$ mostrado en la fig 1.9-a.
- Supóngase un valor de la profundidad del eje neutro, c_1 . En este ejemplo se eligió $c_1 = 7.5$ cm, como se muestra en la fig 1.9-a.
- Calcúlese, por triángulos semejantes o gráficamente, el valor de la deformación unitaria al nivel medio de cada una de las franjas en que se ha dividido la sección transversal (fig 1.9-a). Esto puede hacerse a partir de los valores de ϵ_{c1} y c_1 , y de la distancia desde el centroide de la franja a la cara superior de la viga. Por ejemplo, el valor de la deformación unitaria al nivel medio de la franja inferior es:

$$\epsilon_c = \epsilon_{c1} \frac{12.5 - 0.5 \times 12.5}{7.5} = \frac{0.003 \times 11.9}{7.5} = 0.00476$$

valor mostrado en la fig. 1.9-a.

Generalmente, es suficiente dividir en cinco o seis franjas la zona de compresión, y en otro tanto, la zona de tensión.

- Para cada valor de las deformaciones unitarias de la fig 1.9-a, determínese el esfuerzo correspondiente en el diagrama esfuerzo-deformación del material mostrado en la fig 1.8. Los esfuerzos correspondientes se muestran en la fig 1.9-c. Por ejemplo, a la deformación de 0.00476 calculada en el inciso anterior, corresponde un esfuerzo de 310 kg/cm^2 en la gráfica de la fig 1.8. Como puede verse, determinan un diagrama de esfuerzos cuya forma es semejante a la del diagrama de la fig 1.8
- Calcúlense las fuerzas de compresión mostradas en la fig 1.9-d. Cada una de estas fuerzas es igual al esfuerzo promedio en la franja multiplicado por el peralte de la franja y por el ancho de la sección transversal de la viga. Por ejemplo, la fuerza correspondiente a la tercera franja de la fig 1.9-d se calculó de la siguiente manera:

$$\frac{320 \times 12.5 \times 10}{1000} = 4.0 \text{ ton}$$

- Calcúlense las fuerzas C y T, fig 1.9-d, que son las resultantes de las fuerzas de compresión y tensión de todas las franjas.
- Compárense entre sí las fuerzas C y T. Si son iguales, la sección transversal de la viga está en equilibrio de fuerzas horizontales, y se pasa a calcular el momento flexionante como se describe en el párrafo (h). Si no son iguales, como en el caso de la fig. 1.9, la sección transversal no es

tá en equilibrio. Debe suponerse un nuevo valor de la profundidad del eje neutro, c_1 , y repetir el procedimiento desde el párrafo (b) cuantas veces sea necesario hasta que las fuerzas C y T sean iguales o, más correctamente, hasta que la diferencia entre las fuerzas C y T sea muy pequeña (menor - del 5% del valor de la menor de las fuerzas, aproximadamente). En la fig 1.10 se muestra otro tanteo del mismo problema en el cual la diferencia entre las fuerzas C y T es suficientemente pequeña.

- h) Cuando la sección transversal esté en equilibrio, se calcula el momento flexionante, multiplicando cada una de las fuerzas de compresión y tensión en las franjas de la fig 1.10-d por su distancia al eje geométrico de la viga. Este cálculo se muestra en las figs 1.10-e y 1.10-f.
- i) Una vez que se haya encontrado la profundidad del eje neutro para la cual está en equilibrio la sección transversal de la viga, calcúlese la curvatura de la sección, ϕ , dividiendo la deformación unitaria, ϵ_c , supuesta en el párrafo (a), entre la profundidad del eje neutro correspondiente al equilibrio, c_1 . Por ejemplo, para el caso de la fig 1.10, la curvatura de la sección transversal es.

$$\phi = \frac{0.003}{9.5} = 0.000315 \text{ cm}^{-1}$$

El momento obtenido en la etapa (h) y la curvatura obtenida en la etapa (i) definen un punto del diagrama momento-curvatura de la fig 1.7. Pueden obtenerse otros puntos suponiendo otros valores de ϵ_c en la etapa (a) del procedimiento descrito anteriormente, hasta tener un número suficiente para definir la forma del diagrama $M - \phi$.

En la fig 1.11 se muestra el diagrama momento curvatura obtenido de la manera anterior para la sección de 10 x 20 cm y el material con la gráfica esfuerzo - deformación de la fig 1.8. Se muestran también los estados de defonnaciones para los puntos con los que se definió el diagrama. El momento flexionante resistente de

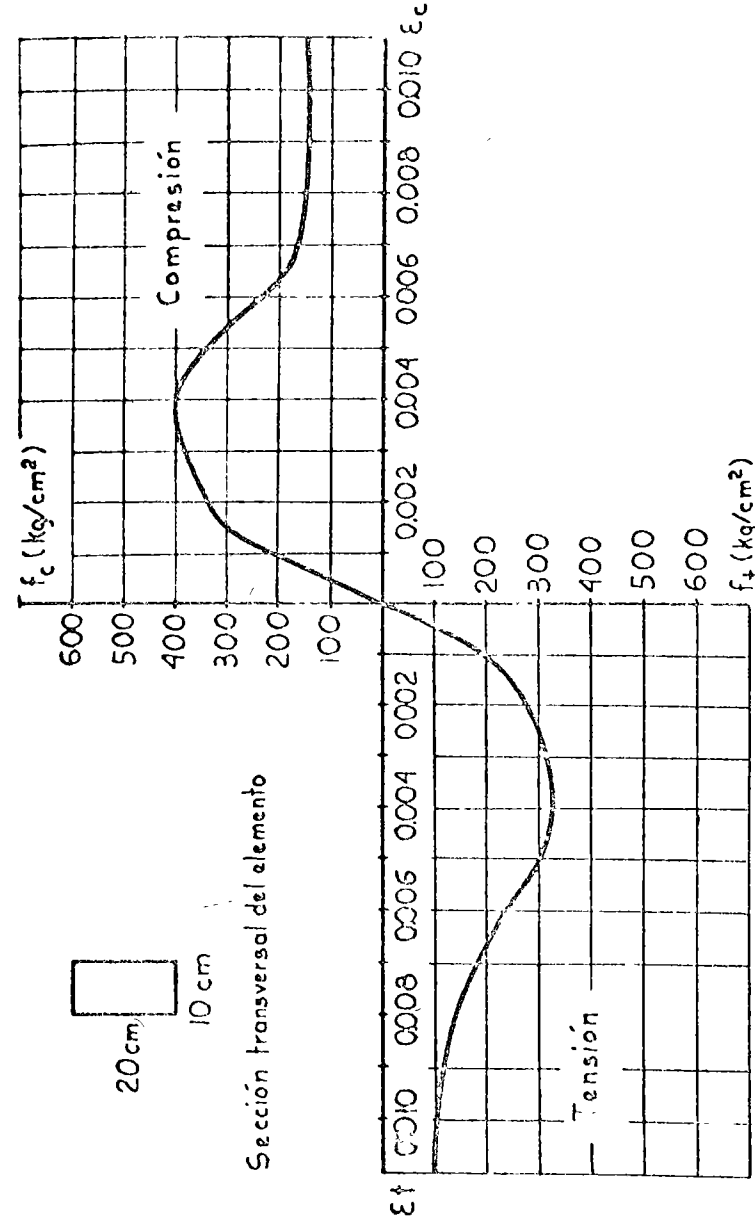


Fig. 1.8 Curva esfuerzo - deformación supuesta en el ejemplo

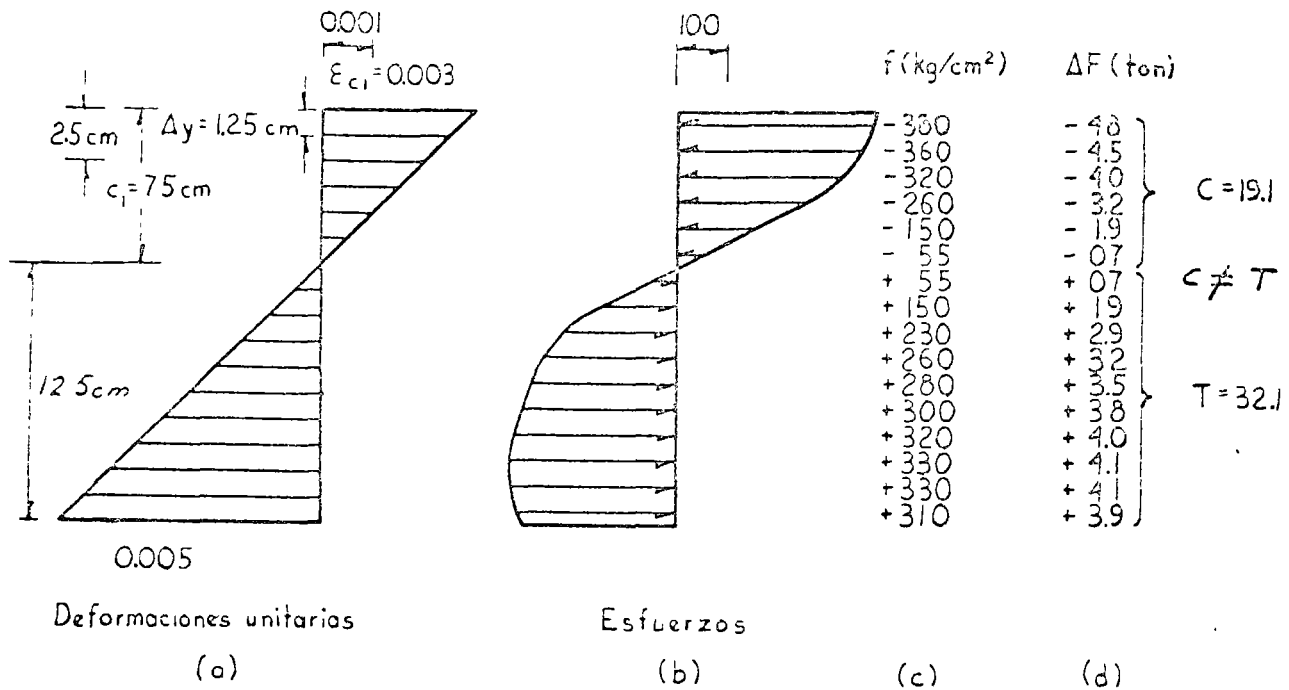
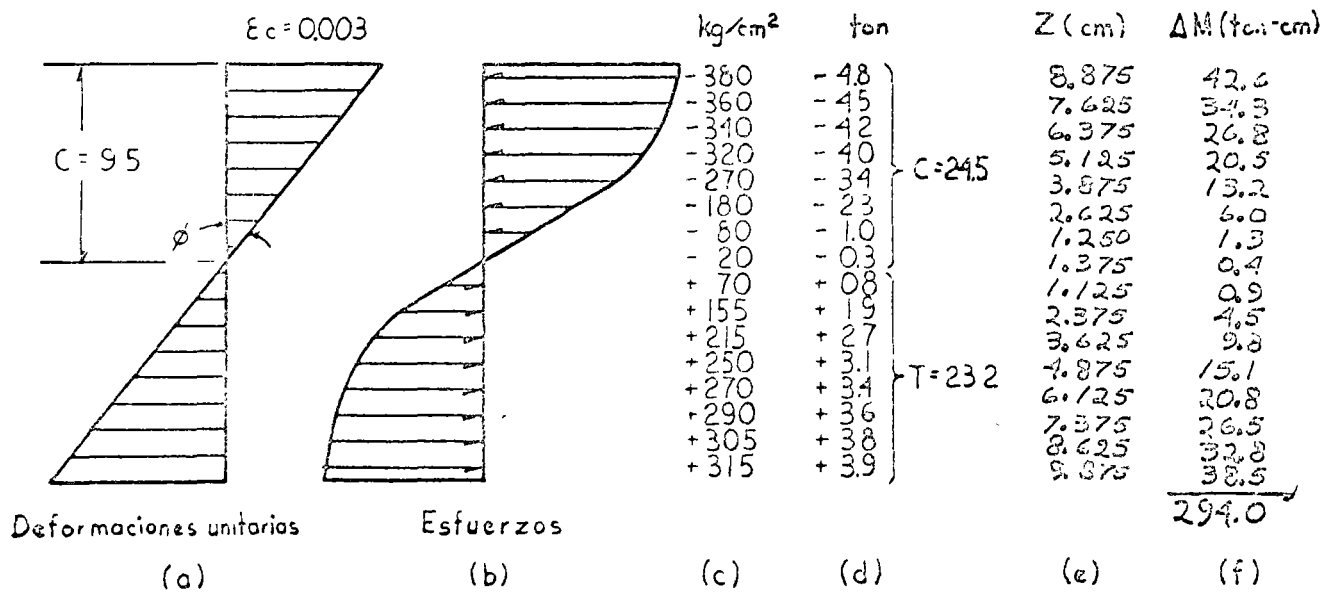


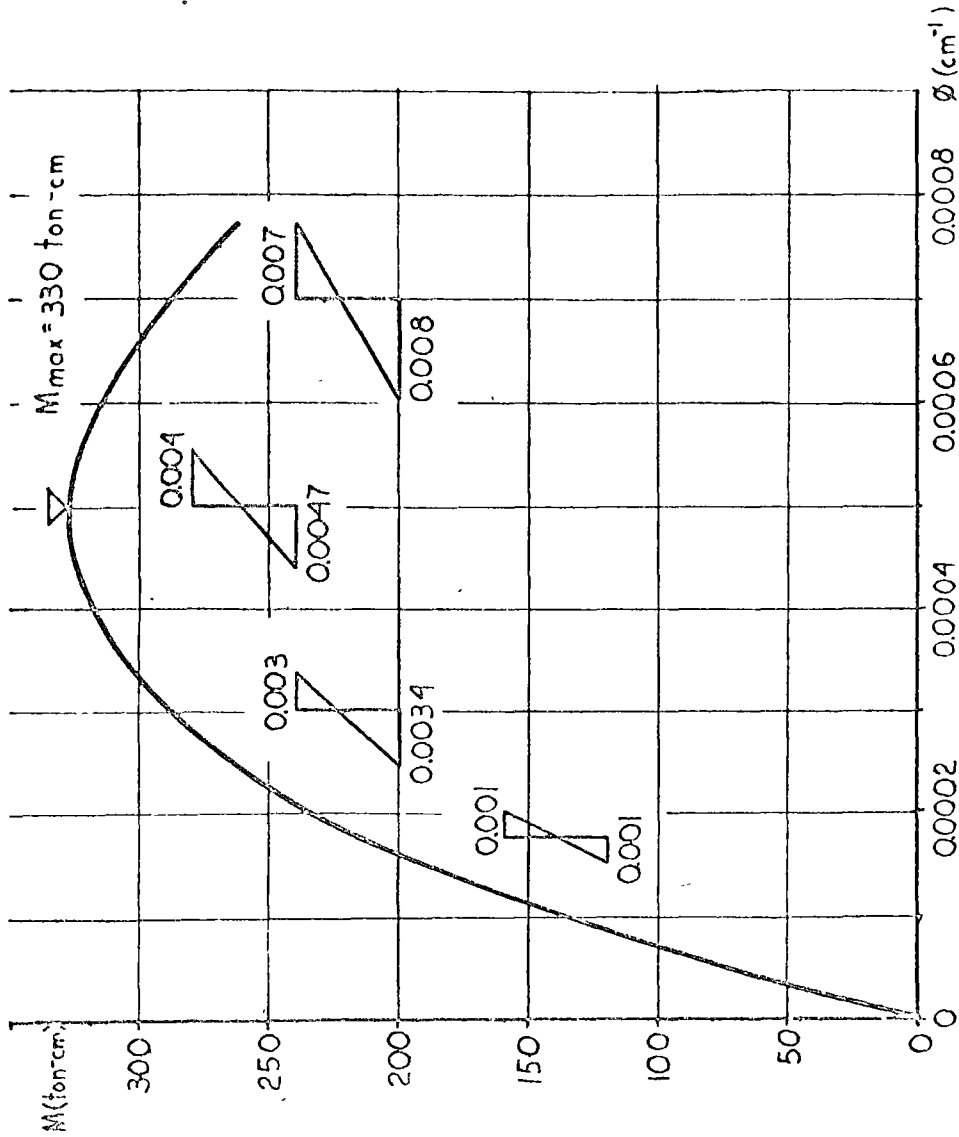
Fig 1.9 Obtención de las fuerzas de compresión y tensión a partir de un diagrama de deformación unitarias



$M = 294.0 \text{ ton-cm}$

$\phi = \frac{0.003}{9.5} = 0.000315 \text{ cm}^{-1}$

Fig 1.10 Obtención del momento y la curvatura a partir de un diagrama de deformaciones unitarias

Fig 1.11 Diagrama M - ϕ

la sección transversal es de 3.3 ton-m

Pueden presentarse los tres siguientes casos de diagramas momento-curvatura:

- El diagrama momento-curvatura presenta una rama descendente y un punto de momento máximo al iniciarse esta rama. Este es el caso de la fig 1.11 y se presenta esquemáticamente en la fig 1.12-a.
- Se alcanza la deformación unitaria máxima en compresión del material sin que se presente una rama descendente y sin que se alcance la deformación máxima en tensión del material. En este caso, el diagrama momento-curvatura y la distribución de deformaciones unitarias al alcanzarse la resistencia son como los mostrados en la fig 1.12-b.
- Se alcanza la deformación unitaria máxima en tensión sin que se presente la rama descendente del diagrama $M - \phi$ y sin que se alcance la deformación unitaria máxima en compresión. Este caso se ilustra en la fig 1.12-c.

El procedimiento numérico descrito en esta sección resulta sumamente laborioso para efectuarlo sin ayuda de computadora, ya que cada punto del diagrama requiere una serie de tanteos hasta lograr el equilibrio de la sección transversal. Sin embargo es relativamente sencillo escribir un programa de computadora para desarrollar los cálculos, y el procedimiento tiene la ventaja de ser completamente general y aplicable cualquiera que sea la gráfica esfuerzo-deformación del material. También puede generalizarse fácilmente a secciones no rectangulares. En este caso, cada una de las fuerzas parciales de compresión y tensión se obtiene multiplicando el esfuerzo promedio en la franja por el peralte de la franja y por el ancho de la sección transversal al nivel del centroide de la franja considerada.

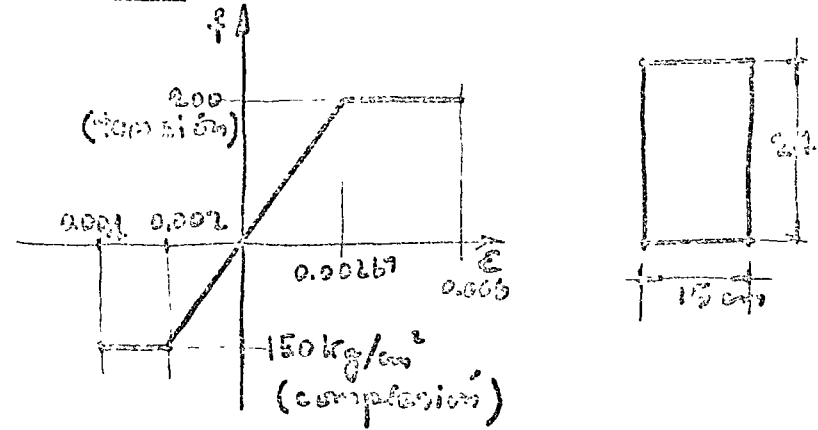
Cuando la gráfica esfuerzo-deformación se pueda definir por medio de una

ecuación sencilla, es posible seguir un procedimiento analítico para determinar el momento que puede soportar una sección. Este fue lo que se hizo en el inciso anterior con el caso particular de materiales de comportamiento lineal y elástico. Se dedujo en esta sección la fórmula de la ecuadría, que relaciona el momento que actúa en una sección con sus características geométricas y los esfuerzos generados en ella por el momento dado. En el ejemplo 1.5 se presenta otro caso particular, el de un material elasto-plástico.

Ejemplo 1.5.- El material dado exhibe un comportamiento elasto-plástico tanto en compresión como en tensión. Sin embargo el esfuerzo y la deformación unitaria correspondientes a la rotura con distintos. Evidentemente rige la compresión. Dada la simetría de la sección y dado que los módulos de elasticidad en compresión y en tensión son iguales, el eje neutro queda a la mitad del peralte de la sección. El diagrama de deformaciones unitarias será, entonces, el mostrado en el croquis y de él y del diagrama de esfuerzo-deformación se deduce la distribución de esfuerzos indicada. El momento se obtiene por estática y la curvatura, a partir de la ecuación (1.6).

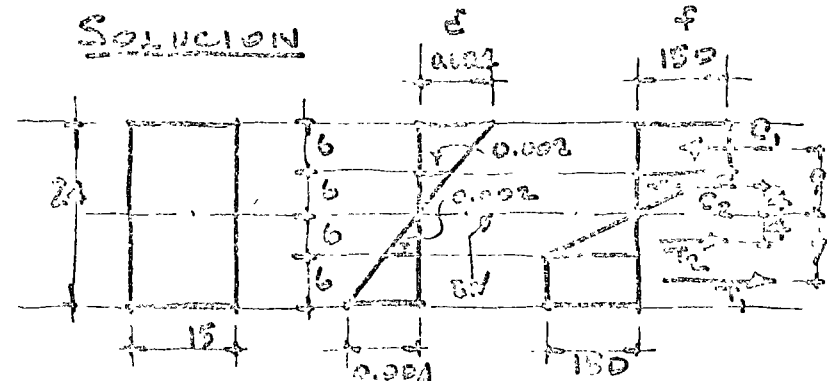
EJEMPLO 1.5) MOMENTO RESISTENTE Y CURVATURA DE UN MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO

DATOS



Se pide: Determinar el momento resistente y la curvatura correspondiente de la sección mostrada.

SOLUCION



EJEMPLO (1.5) (Continuación)

2

Fuerzas internas

$$C_1 = T_1 = 150 \times 15 \times 6 = 13\,500 \text{ kg}$$

$$C_2 = T_2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 15 \times 6 = 6\,750 \text{ kg}$$

Momento

$$M = 2 \times 9 \times 13\,500 + 2 \times 6 \times 6\,750$$

$$M = \underline{\underline{297\,000 \text{ kg-cm}}}$$

Curvatura

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{c_c} = \frac{0.004}{12 \text{ cm}} = \underline{\underline{0.00033 \text{ cm}^{-1}}}$$

1.2.5. Diagramas momento-rotación y carga-deflexión

En esta sección se presenta el uso de diagramas momento-curvatura, cuya obtención se describió en la sección anterior, para calcular analíticamente diagramas momento-rotación y carga-deflexión.

Supóngase, para fines de ilustración, que se trata de determinar el diagrama momento-rotación de una viga libremente apoyada como la mostrada en la fig 1.13. La sección transversal de la viga es constante en todo el claro, por lo que el diagrama momento-curvatura es el mismo para cualquier sección transversal.

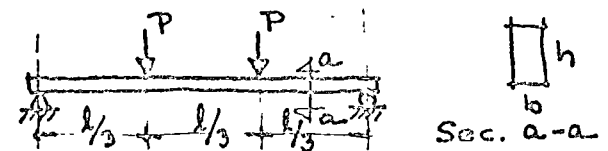


Fig. 1.13 Viga rectangular libremente apoyada, con dos cargas concentradas

Más adelante se indica cómo puede generalizarse el procedimiento para vigas cuya sección transversal varía a lo largo del claro. En la fig 1.14 se muestra el diagrama

ma momento-curvatura que se usará para calcular los diagramas $M-\theta$ y $P-\Delta$.

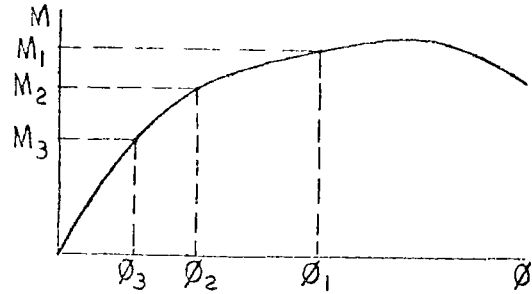


Fig. 1.14 Diagrama momento-curvatura de la viga de la fig. 1.13

Considérese ahora que el valor de la carga P es tal que el momento flexionante en la zona central tiene un valor M_1 , como se muestra en la fig. 1.15b. En el diagrama $M-\theta$ de la fig. 1.14 se ve que la curvatura correspondiente a este momento es θ_1 . Por lo tanto, si se traza un diagrama que muestre la distribución de curvaturas a lo largo de la viga, se tendrá una curvatura constante en esta zona (fig. 1.15-c).

Para obtener el diagrama de distribución de curvaturas en secciones situadas fuera de la zona central de la viga, se puede proceder de la siguiente manera. Se determina el momento en varias secciones de la viga. (Por ejemplo, en la sección 2-2 (fig. 1.15-b), se tendrá un momento M_2 .) Después se encuentra la curvatura correspondiente a este momento en el diagrama momento-curvatura de la fig. 1.14, la cual se traza como ordenada del diagrama de distribución de curvaturas de la fig. 1.15-c. Repitiendo el procedimiento para otras secciones, por ejemplo la sección 3-3 de la fig. 1.15-b, se obtiene un número suficiente de puntos para definir

el diagrama de la fig. 1.15-c. Una vez determinado el diagrama de distribución de curvaturas a lo largo de la viga, el siguiente problema es determinar las rotaciones y deflexiones. Este problema puede resolverse por integración o por medio de los teoremas conocidos con el nombre de teoremas área-momento. En las secciones siguientes se describen estos métodos.

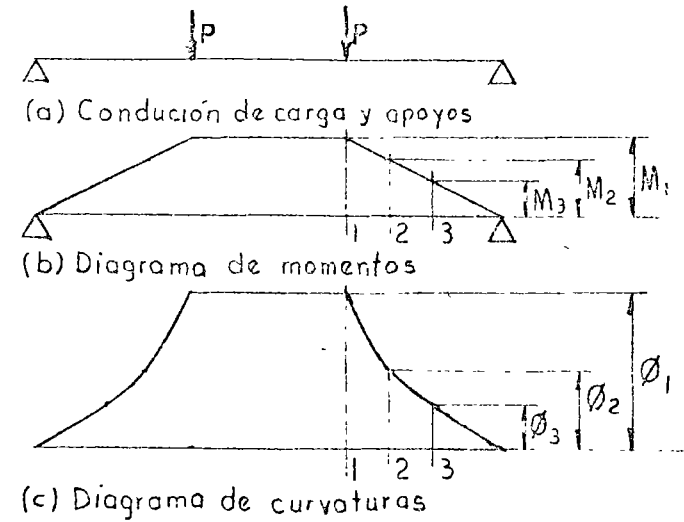


Fig. 1.15 Determinación del diagrama de curvatura a lo largo de una viga

1.2.5.1 Cálculo de pendientes y deflexiones por integración. Ecuación de la elástica y relaciones fundamentales de la teoría de flexión

En los textos elementales de cálculo diferencial se demuestra que el recíproco de la curvatura, que se conoce con el nombre de radio de curvatura, ρ , de una curva cualquiera, se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{1}{\phi} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (1.15)$$

El término dy/dx en la ecuación anterior es la pendiente de la curva. Debido a que en el caso de vigas las pendientes son pequeñas, el valor de $(dy/dx)^2$ es despreciable, y el numerador de la ecuación anterior se puede considerar igual a la unidad. Por lo tanto,

$$\phi = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.16)$$

A partir de esta ecuación se pueden obtener las pendientes de la viga deformada, dy/dx , y las deflexiones, y , por integración. Integrando una vez se obtiene las pendientes

$$\frac{dy}{dx} = \int \phi dx + C_3 \quad (1.17)$$

e integrando dos veces se obtienen las deflexiones

$$y = \iint \phi dx^2 + C_3x + C_4 \quad (1.18)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración que se determinan de las condiciones de borde de la viga como se muestra en los ejemplos.

Una vez conocidos las pendientes dy/dx , puede calcularse la rotación entre dos secciones cualesquiera como la diferencia de pendientes entre dichas secciones. Por ejemplo, la rotación total entre los dos extremos de una viga (fig 1.1) es la diferencia de las pendientes en los extremos. En adelante, la rotación entre dos secciones cualesquiera a y b se denominará $\Delta\Theta_{ab}$, y la rotación entre una sección cualquiera a y una sección que permanece en un plano vertical se denominará Θ_a . El valor de Θ_a será, por consiguiente, igual a la pendiente en la sección a . El procedimiento de determinación de rotaciones y de flexiones descrito es práctico únicamente cuando la curvatura ϕ se puede expresar matemáticamente por medio de una ecuación sencilla, como en el caso de materiales elásticos en los que $\phi = |M/EI|$ (ec 1.14). Sustituyendo este valor de ϕ en la ecuación 1.16 se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left| \frac{M}{EI} \right| \quad (1.19)$$

La ecuación 1.14 se obtuvo en la sección 1.2.3 en términos del valor absoluto de la curvatura ya que no se hizo ninguna consideración sobre el signo de la curvatura. Es conveniente definir ahora dicho signo. De acuerdo con la convención de ejes adoptada, o sea, el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia abajo, una

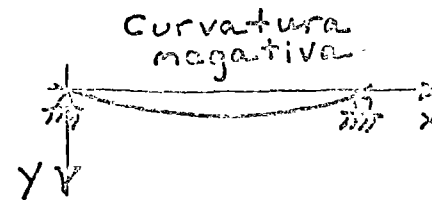


Fig 1.16 Convención de signos para curvatura

viga deformada como en la fig 1.16 con la concavidad hacia arriba tiene curvatura negativa ya que la pendiente de la curva disminuye al avanzar en la dirección positiva del eje X. Ahora bien, el momento flexionante asociado a una deformación como la mostrada en la fig 1.16 es positivo, ya que produce acortamientos en las fibras superiores y alargamientos en las fibras inferiores (fig 1.5). Por lo tanto, a un momento positivo corresponde una curvatura negativa y las ecs 1.14 y 1.19 quedan en la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \phi = - \frac{M}{EI} \quad (1.20)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de la elástica, ya que la forma de la viga deformada recibe el nombre de elástica cuando el material es elástico y lineal.

Sustituyendo el valor de $\phi = -M/EI$ en las ecuaciones 1.17 y 1.18 se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \int \frac{M}{EI} dx + C_3 \quad (1.21)$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = - \iint \frac{M}{EI} dx^2 + C_3 x + C_4 \quad (1.22)$$

Las ecuaciones 1.21 y 1.22 indican que las pendientes y las deflexiones pueden obtenerse mediante un proceso de integración a partir de los momentos. Los momentos, a su vez, pueden obtenerse, también por integración, a partir de las cargas. En efecto, según se estudia en los cursos de *Mecánica Analítica*, existen las siguientes relaciones entre carga aplicada, w , fuerza cortante, V , y momento flexionante, M :

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (1.23)$$

$$w = - \frac{dV}{dx} \quad (1.24)$$

La convención de signos para fuerza cortante que se utiliza aquí consiste en considerar que en las vigas la fuerza cortante es positiva cuando las fuerzas cortantes que actúan en los extremos de un tramo producen un giro en el sentido de las manecillas del reloj (Apéndice B). Por lo tanto la ecuación 1.24 tiene signo negativo, porque, de acuerdo con la convención de signos para cortantes, para una carga hacia abajo, que es positiva, la fuerza cortante disminuye al aumentar x .

Derivando la ecuación 1.23 y sustituyendo en la 1.24 resulta

$$w = - \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (1.25)$$

Según estas ecuaciones, la fuerza cortante y el momento flexionante se pueden obtener por integración de las ecuaciones 1.24 y 1.25 de la siguiente manera:

$$V = - \int w dx + C_1 \quad (1.26)$$

$$M = - \iint w dx^2 + C_1 x + C_2 \quad (1.27)$$

Las constantes C_1 y C_2 son diferentes de las constantes C_3 y C_4 , y se obtienen también de las condiciones de borde como se muestra en los ejemplos.

En la fig 1.17 se resumen las ecuaciones obtenidas en esta sección, rela

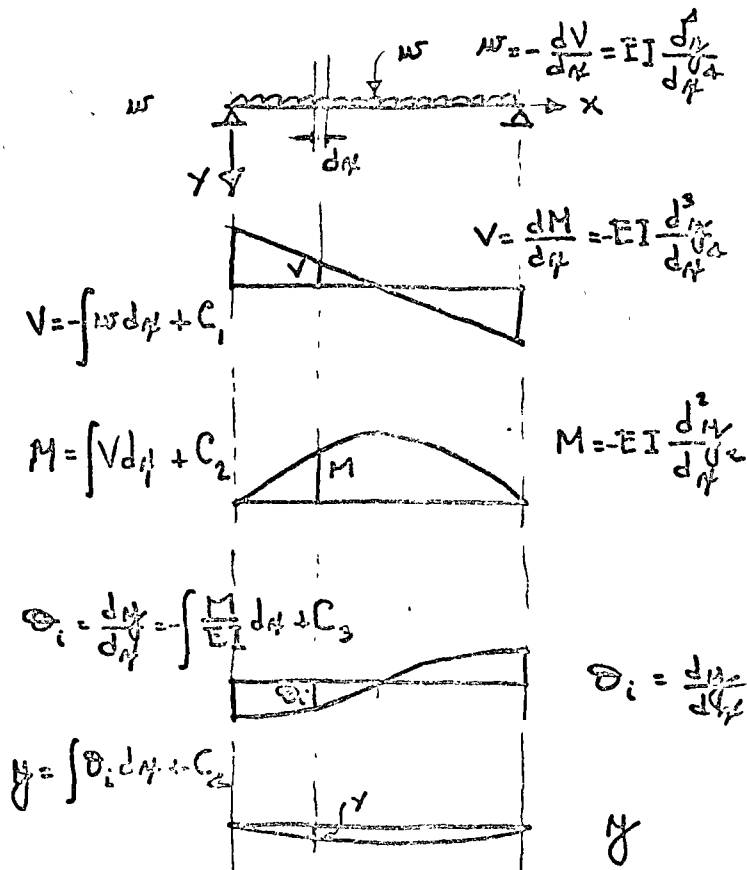


Fig 1.17 Relaciones entre carga, fuerza cortante, momento flexionante, pendiente y deflexión para una viga de material homogéneo y elástico.

cionándolas con una viga homogénea y elástica libremente apoyada. En el lado izquierdo de la figura se muestra la forma en que puede obtenerse la fuerza cortante, V , por integración de la carga, w (ec 1.26); el momento, M , por integración de la fuerza cortante, V ; la pendiente dy/dx , que según la notación adoptada puede expresarse como θ_i , por integración de las curvaturas M/EI ; y la deflexión, y , por integración de las pendientes. En el lado derecho de la figura se muestra, de abajo hacia arriba, la forma de obtener la pendiente, θ_i , el momento, M , la fuerza cortante, V , y la carga, W , por derivación sucesiva. Las relaciones del lado derecho se obtienen por derivación de las relaciones del lado izquierdo.

En el Ejemplo 1.6 se muestra la obtención de las pendientes y de las deflexiones de una viga por integración. En este ejemplo, el momento M se calculó de la manera convencional, pero pudo obtenerse también por integración usando las ecuaciones 1.26 y 1.27. Esto se ilustra en el ejemplo 1.7.

1.2.5.2 Cálculo de pendientes y deflexiones mediante el principio de la viga conjugada

Si se comparan las ecuaciones 1.21 y 1.22 con las ecuaciones 1.26 y 1.27 se puede establecer una similitud entre el cálculo de pendientes y el cálculo de fuerzas cortantes, y entre el cálculo de deflexiones y el cálculo de momentos flexionantes. En efecto, si la carga w se sustituye por el valor de M/EI , o por el valor ^{absoluto} de las curvaturas ϕ para el caso general de vigas de comportamiento no lineal, y las condiciones de borde de la viga se transforman para que las constantes C_1 y C_2 resulten iguales a las constantes C_3 y C_4 , el cálculo de pendientes y deflexiones se transforma en un cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Esta transformación se conoce con el nombre de principio de la viga conjugada y se puede expresar de la siguiente manera:

"Si se obtiene el diagrama de curvaturas, o de valores ^{absolutos} de M/EI para vigas de comportamiento lineal, y se considera que las curvaturas son cargas, las fuerzas cortantes obtenidas son en realidad las pendientes de la viga, y los momen-

Ejemplo 1.12.- La placa que se desea dimensionar está colocada sobre un agujero de diámetro ligeramente mayor ^(que el) de la pieza cilíndrica a través de la cual se aplica la carga P . La pieza cilíndrica tenderá a perforar la placa originando esfuerzos cortantes directos en ésta. La superficie en que actúan éstos esfuerzos será igual al espesor de la placa por la circunferencia de la pieza cilíndrica.

El espesor requerido se determina considerando el equilibrio del cuerpo libre mostrado en la hoja de cálculo del ejemplo.

Ejemplo 1.13.- El ejemplo se refiere a un detalle de unión de placas típico en estructuras de acero.

La fuerza P se transmite de la placa de la derecha a las de la izquierda a través de un perno. La placa de la derecha ejercerá una acción cortante o de cizalleo sobre le perno en secciones a los lados de la placa. Se trata de determinar el diámetro que debe tener el perno para que no se exceda el esfuerzo cortante directo permisible v . Esto puede hacerse estudiando el equilibrio del tramo de perno mostrado en la hoja de cálculo.

1.3.3 Efectos de la fuerza cortante en vigas

Cuando una viga se flexiona debido a la acción de cargas externas, existen en la sección transversal de la viga tanto momentos flexionantes, M , como fuerza cortante, V , excepto en situaciones especiales como la mostrada en la fig 1.1. - Cuando existe fuerza cortante, la diferencia entre los momentos flexionantes correspondiente a -----

dos secciones adyacentes, separadas una distancia dx , será igual a Vdx , por lo que si no existe cortante en las secciones estudiadas no habrá ningún cambio en el momento flexionante.

Para comprender mejor la relación antes mencionada, en la fig 1.26 se presentan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes a una viga simplemente apoyada con dos cargas concentradas iguales y equidistantes de los apoyos. En dos secciones contiguas como la A y la B donde no existe fuerza cortante, el momento flexionante permanece constante, en tanto que en las secciones C y D cercanas al apoyo, en las cuales sí existe fuerza cortante, se observa un cambio en el momento flexionante.

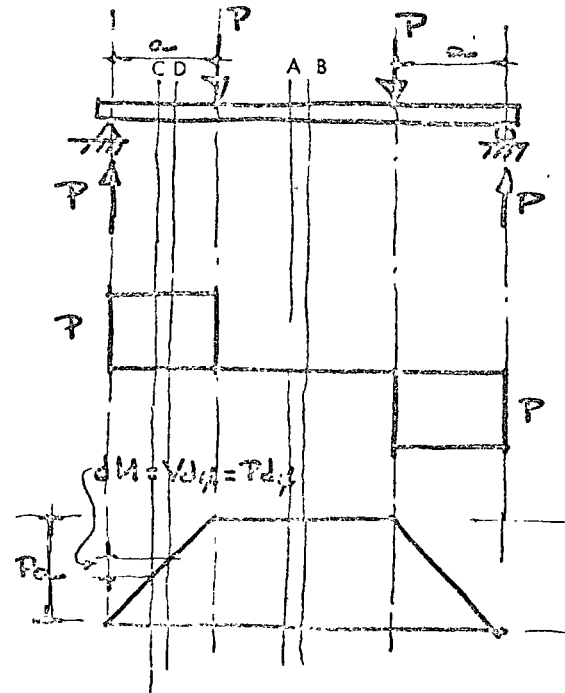


Fig 1.26 Relación entre fuerza cortante y momento flexionante para la condición de carga mostrada

Para ilustrar el efecto de la fuerza cortante, en donde el momento flexionante cambia de una sección a otra, considérese un segmento de viga de sección rectangular (fig 1.27). En los extremos de esta sección se han dibujado bloques que representan la distribución de esfuerzos originados por el momento flexionante. Considerando que el esfuerzo máximo de la sección de la derecha es superior al de la izquierda y que las dos secciones transversales son iguales, el momento de la derecha debe ser superior al de la izquierda.

Si el segmento de viga antes mencionado está en equilibrio, cualquier parte de él, también lo estará. Por consiguiente, si se separa la porción ^{situada} encima del eje neutro de la de abajo, las ecuaciones de equilibrio deben satisfacerse en cualquiera de las dos partes.

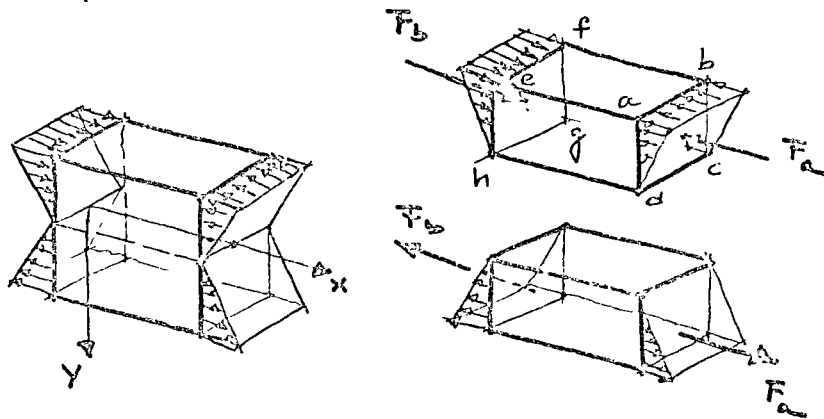


Fig 1.27 Fuerza cortante en planos horizontales

En cuanto a las fuerzas cortantes verticales, V , que no se ilustran en el bloque de esfuerzos, se observa que resultan iguales para dos secciones adyacentes, como la C y D (fig 1.26), por lo que la condición de $\sum F_y = 0$, se cumple.

Si se considera la condición $\sum F_x = 0$, se observa lo siguiente. La resultante de los esfuerzos de compresión que actúan en el área abcd es la fuerza F_a , y la de los esfuerzos que actúan en el área efgh, es F_b . Como los esfuerzos de la derecha se han supuesto mayores que los de la izquierda $F_a > F_b$, para que cualquier parte de la sección de la viga esté en equilibrio, es necesario que la diferencia de fuerzas, $F_a - F_b$, sea tomada por algún elemento resistente. Si se considera que la parte superior está unida a la inferior por medio de un perno, la fuerza resultante la tomará este perno, y el esfuerzo originado estará distribuido en la sección transversal del mismo. Si se considera que la sección completa está formada originalmente por una sola pieza, la fuerza resultante la estará tomando la sección edgh de unión entre las dos porciones.

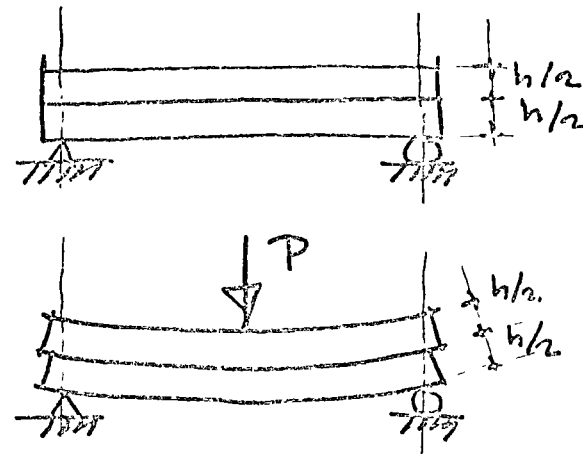


Fig 1.28 Flexión de dos vigas solapadas

La presencia de las fuerzas cortantes horizontales en una viga puede demostrarse fácilmente por medio del siguiente experimento. Se toman dos piezas iguales de sección rectangular, de peralte igual a $h/2$ y se colocan una encima de la otra, sobre unos apoyos que reproduzcan la condición de una viga simplemente apoyada, como se muestra en la fig 1.28. Se aplica entonces una carga concentrada P . Si no hay fricción entre las dos piezas, la flexión de las dos ocurre independientemente. Cada una de ellas tendrá esfuerzos de compresión en la parte superior y de tensión en la parte inferior, y las fibras longitudinales inferiores de la pieza superior deslizarse respecto a las fibras superiores de la pieza inferior.

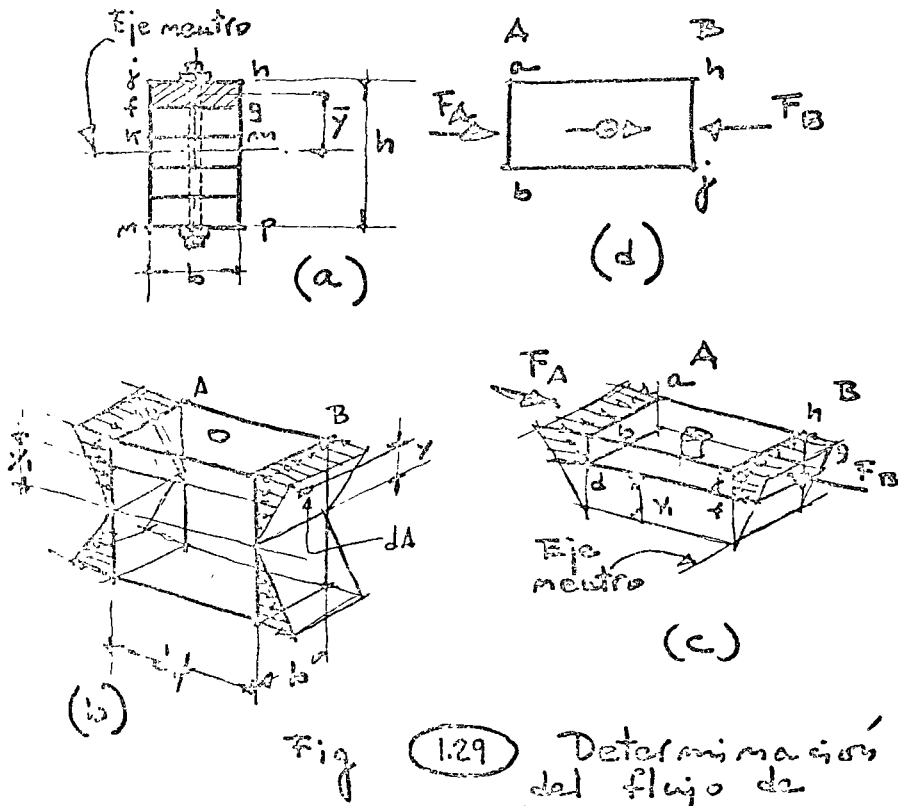


Fig. 1.29 Determinación del flujo de cortante q en una viga.

Si en lugar de las dos piezas se tiene una sola de peralte h , habrá una fuerza cortante a lo largo del plano neutro de tal magnitud que restrinja el deslizamiento de una parte respecto a la otra. Debido a esta restricción al deslizamiento, la pieza de peralte h será más rígida y más resistente que la formada por dos piezas de peralte igual a $h/2$.

1.3.4. Flujo de cortante

Considérese una viga fabricada de varias placas como se muestra en la fig 1.29-a. Para hacer que estas placas trabajen como una sola viga, se unen por medio de pernos, separados a una distancia conveniente. Un elemento de esta viga, aislado por medio de dos secciones paralelas perpendiculares al eje de la misma (fig 1.29-b), está sujeto a momentos flexionantes M_A en A y M_B en B. Debido a estos momentos, se desarrollan esfuerzos longitudinales en dichas secciones, los cuales actúan normales a la sección.

Estos esfuerzos varían linealmente desde cero en el eje neutro y en cualquier punto situado a una distancia y del eje neutro tendrán un valor de $\frac{M_B}{I}y$ en B y de $\frac{M_A}{I}y$ en A.

Si se toma la placa superior de la sección de la viga antes mencionada, cuya fibra más cercana al eje neutro está a una distancia y_1 , se pueden determinar las fuerzas perpendiculares que están actuando en los extremos A y B de este elemento, multiplicando los esfuerzos por el área en que actúan. En el extremo B, la fuerza que actúa en un área diferencial dA situada a una distancia y del eje neutro, será igual a $(\frac{M_B}{I}y) dA$ y la fuerza total que actúa sobre el área $fgjh$ es la integral de la fuerza elemental sobre esta área. Se tiene, entonces

$$F_B = \int_{\text{área}} \frac{M_B}{I} y dA = \frac{M_B}{I} \int_{\text{área}} y dA = \frac{M_B}{I} Q$$

donde $Q = \int_{\text{área}} y dA = A_{fgjh} \cdot \bar{y}$, M_B e I son constantes en toda la sección, y \bar{y} es la distancia del eje neutro al centroide del área. La integral que define Q es el momento de primer orden o estático del área $fgjh$ respecto al eje neutro,

que, por definición, es igual al área por la distancia del centroide de esta área al eje neutro.

Siguiendo un razonamiento semejante, se obtiene que la fuerza que actúa en el extremo A del elemento es

$$F_A = \frac{M_A}{I} \int_{\text{área abde}} y dA = \frac{M_A Q}{I}$$

Si los momentos en A y B fueran iguales, la fuerza F_A sería igual a la F_B y los pernos que mantienen unidas las placas no desempeñarían ninguna función ya que la fuerza cortante resultante sería nula. Pero, si M_A es diferente de M_B , lo que sucede cuando existen fuerzas cortantes en dos secciones adyacentes, entonces F_A es diferente de F_B y la fuerza resultante R tiene que ser tomada por los pernos que mantienen unidas las placas.

Si M_A es diferente de M_B y la sección A está a una distancia dx de la sección B, los momentos flexionantes en dos secciones adyacentes difieren por una cantidad infinitesimal. Así, si el momento flexionante en A es M_A , el momento en B será $M_B = M_A + dM$, y las fuerzas F_A y F_B diferirán por una cantidad diferencial:

$$dF = F_B - F_A = \left(\frac{M_A + dM}{I} \right) Q - \left(\frac{M_A Q}{I} \right) = \frac{dM Q}{I} \quad (1.36)$$

En lugar de trabajar con una fuerza en una longitud dx , es más significativo encontrar el valor de dicha fuerza en una longitud unitaria. Esto se puede lograr dividiendo dF entre dx . La cantidad $\frac{dF}{dx}$ se designa con la letra q y se llama flujo de cortante. Es igual a la fuerza cortante que se presenta por unidad de longitud y se puede calcular de la siguiente forma

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} = \frac{VQ}{I} \quad (1.37)$$

ya que $dM/dx = V$. La ecuación $dM/dx = V$ se había presentado en la sección 1.2.5.1.

En la expresión (1.37) I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro de la misma, V es la fuerza cortante que actúa en la sección investigada y Q es el momento de primer orden de la parte de la sección transversal situado encima del nivel considerado con respecto al eje neutro de la viga. Se puede demostrar que se obtiene el mismo valor de Q si se calcula el momento de primer orden de la parte de la sección transversal debajo del nivel considerado.

Ya que la fuerza cortante, V , está dada en kg, el momento de primer orden, Q , en cm^3 y el momento de inercia, I , en cm^4 , el flujo de cortante, q , estará dado en kg/cm , o sea, como se estableció anteriormente, será igual a una fuerza por unidad de longitud.

Ejemplo 1.14.- Flujo de cortante

En este ejemplo se ilustra el efecto de la fuerza cortante (flujo de cortante) que se presenta en los planos de unión de los elementos de una viga que tienden a deslizarse entre sí. También se ilustra la forma de calcular la distancia a que se deben de colocar los clavos en la zona de fuerza cortante máxima a lo largo del eje de la viga, para evitar este deslizamiento y hacer que toda la sección trabaje como una unidad.

Para determinar la separación a que se requiere colocar los clavos en la zona de fuerza cortante máxima es necesario conocer el valor del flujo de cortante $q = \frac{VQ}{I}$ en el plano de unión de las secciones consideradas.

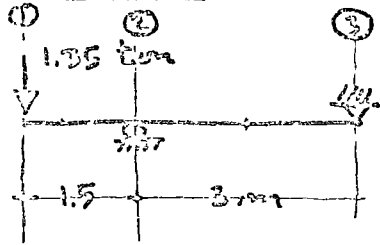
Para determinar el valor de la fuerza cortante máxima es necesario determinar primero el valor de las reacciones y después construir el diagrama de fuerza cortante. En el ejemplo, la fuerza cortante máxima resultó de 1 350 kg, y se presenta en el tramo 1-2 de la viga. El momento de inercia I será el de toda la sección respecto al eje neutro, el cual, por simetría, se encuentra a la mitad de la altura de la sección.

El valor del momento de primer orden, Q , depende del nivel al cual se desee determinar el valor de flujo de cortante, q . Para la unión de la sección A con las secciones B y C, Q es el valor del momento de primer orden de la zona A situada arriba del plano de unión de esta zona con las secciones B y C (plano a-b), respecto al eje neutro ^{cy resulta de} $1 875 \text{cm}^3$.

El valor del flujo de cortante al nivel ab es por lo tanto igual a 34.3 kg/cm , y esta es

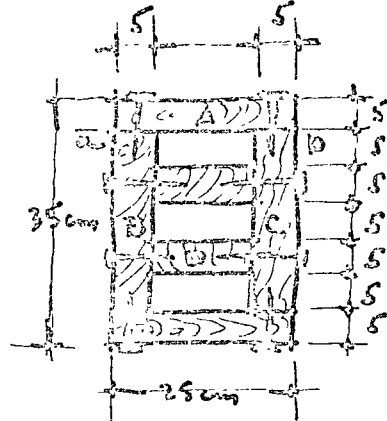
EJEMPLO (110) FLUJO DE CORTANTE.

DATOS



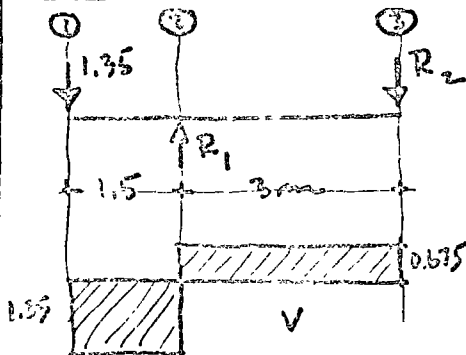
Resistencia de los clavos a fuerza cortante: 40 kg

Se pide la separación a que deben colocarse los clavos.



SOLUCION

Determinación fuerza cortante máxima



$$\sum M_2 = 0$$

$$1.5 \times 1.35 = 3 \times R_2$$

$$R_2 = 0.675 \text{ tm}$$

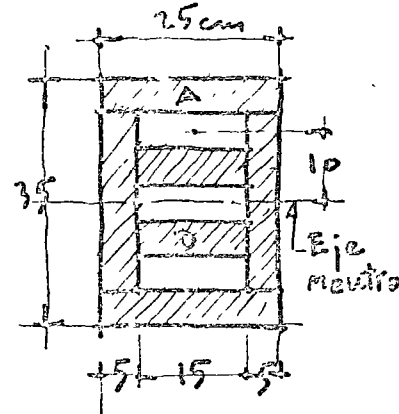
$$\sum M_3 = 0$$

$$4.5 \times 1.35 = 3 \times R_1$$

$$R_1 = 2.025 \text{ tm}$$

EJEMPLO (111) (Continuación)

Determinación del momento de inercia y del momento de primer orden (momento estático)



$$I = \frac{1}{12} \times 25 \times 35^3 - 2 \left(\frac{1}{12} \times 15 \times 5^3 + 5 \times 15 \times 10 \right) - \frac{1}{12} \times 15 \times 5^3$$

$$\approx \underline{\underline{73800 \text{ cm}^4}}$$

$$Q_A = 5 \times 25 \times 15 = \underline{\underline{1875 \text{ cm}^3}}$$

$$Q_D = 5 \times 15 \times 5 = \underline{\underline{375 \text{ cm}^3}}$$

Flujo de cortante

$$q_A = \frac{V_{\text{máx}} Q_A}{I} = \frac{1350 \times 1875}{73800} = \underline{\underline{32.3 \text{ kg/cm}}}$$

$$q_D = \frac{V_{\text{máx}} Q_D}{I} = \frac{1350 \times 375}{73800} = \underline{\underline{6.96 \text{ kg/cm}}}$$

EJEMPLO (1.14) (Continuación) 3

Separación de clavos

$$S_A = \frac{40 \times 2}{q_A} = \frac{40 \times 2}{31.3} = \underline{\underline{2.3 \text{ cm}}}$$

$$S_D = \frac{40 \times 2}{q_D} = \frac{40 \times 2}{6.86} = \underline{\underline{11.6 \text{ cm}}}$$

la fuerza que se presenta por unidad de longitud. La separación a la que se debe colocar los clavos depende de su resistencia y del número que se coloque. Siendo en este caso 40 kg la resistencia a cortante de los clavos y dos los clavos que se colocan en cada sección, la separación de estos resulta igual a 2.3 cm

En los planos verticales de unión de la pieza D con la B y la C, se presenta una fuerza cortante por unidad de longitud, q , cuyo valor depende del momento de primer orden de la zona D, el cual es igual a 375 cm^3 . El valor de q en estas caras verticales resulta de 6.86 kg/cm. Ya que la resistencia al cortante de cada clavo, es de 40 kg y ya que están colocados por parejas, se tiene una resistencia al cortante de 80 Kg por lo que la separación de cada par de clavos es de 11.6 cm.

Las otras piezas, por simetría, requieren las mismas separaciones. En el tramo 2-3 de la viga, donde el valor de la fuerza cortante, V , es la mitad del valor para el tramo 1-2, la separación de los clavos es el doble de la encontrada para el tramo 1-2.

1.3.5 Esfuerzos cortantes

Al determinar el valor del flujo de cortante, q , se estableció que cuando el momento flexionante varía entre dos secciones transversales adyacentes separadas una distancia

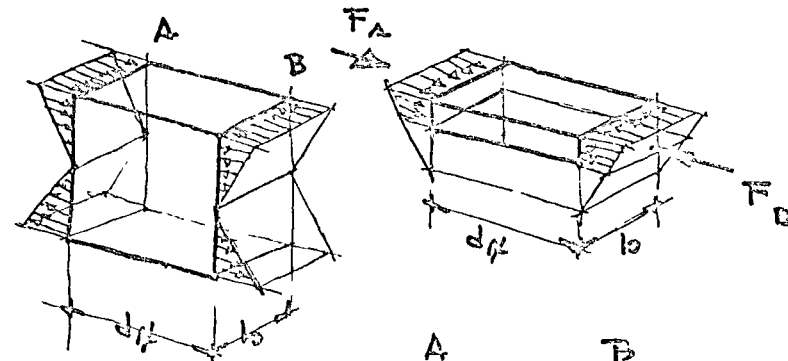


Fig 1.30
Esfuerzos
cortantes
en vigas

dx (fig 1.30) en un corte paralelo al plano se presenta una fuerza cortante dF cuyo valor se puede determinar como

$$dF = F_B - F_A = dM \frac{Q}{I} \quad (1.36)$$

Se analiza a continuación la obtención de esfuerzos cortantes en una sección rectangular de ancho b. Si se divide el valor de la fuerza dF entre el área en que se encuentra aplicada, bdy, se obtendrá el valor del esfuerzo cortante en el plano horizontal,

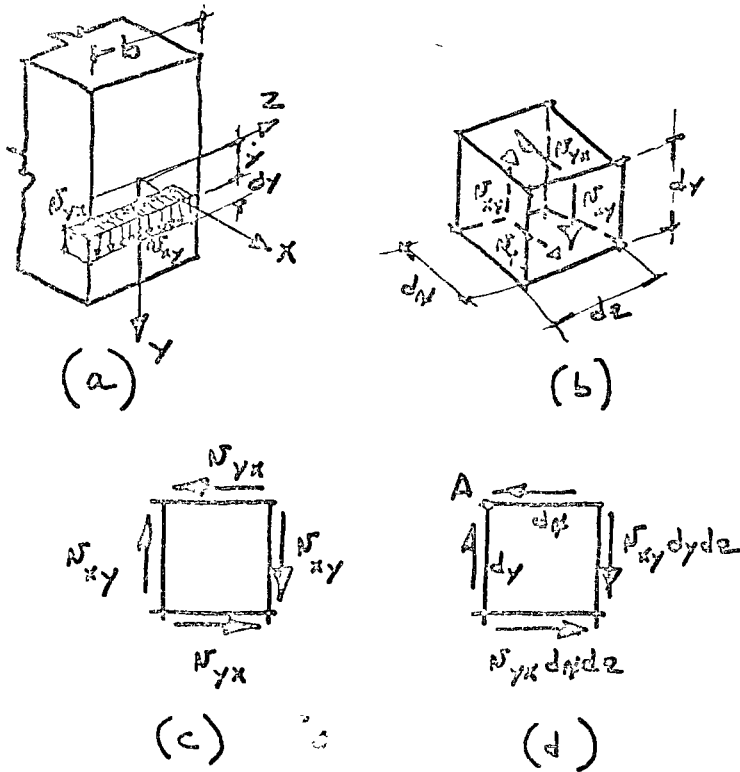


Fig 1.31 Equivalencia de los esfuerzos N_{yx} y N_{xy}

siendo este valor igual a

$$\tau_{yx} = \frac{dF}{bdy} = \frac{dM}{dy} \frac{Q}{Ib} = \frac{VQ}{Ib} \quad (1.38)$$

en la que V, es la fuerza cortante que actúa en la sección transversal, Q el momento situado de primer orden (estático) del área, encima del nivel considerado, I el momento de inercia de toda la sección transversal y b el ancho de la sección transversal. El valor del esfuerzo cortante también puede expresarse como

$$\tau_{yx} = \frac{VQ}{I} \times \frac{1}{b} = \frac{q}{b} \quad (1.39)$$

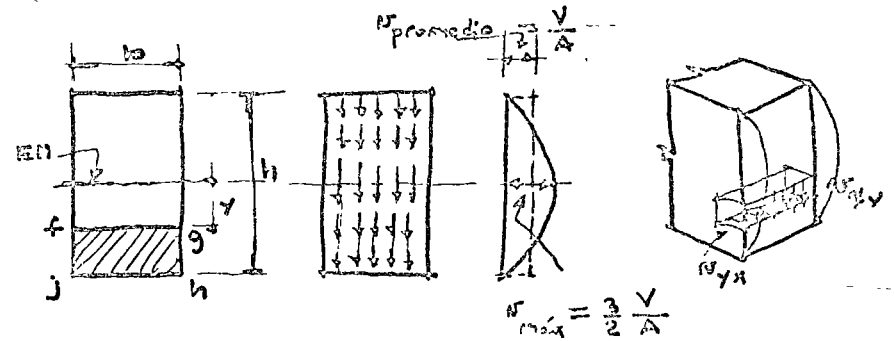


Fig 1.32 Variación de los esfuerzos cortantes en el perfil de una viga de sección rectangular

siendo q el flujo de cortante.

Se puede demostrar que los esfuerzos en planos horizontales τ_{yx} van siempre acompañados de esfuerzos en planos verticales τ_{xy} y que en cualquier punto ambos esfuerzos son de la misma magnitud.

Para demostrar la igualdad en valor absoluto de τ_{yx} y τ_{xy} considérense sus efectos sobre un elemento diferencial cualquiera que se separe de una viga (fig 1.31). En la fig 1.31-b se presenta una perspectiva de este elemento y en la fig 1.31-c un corte del mismo.

Para el equilibrio horizontal del elemento, el esfuerzo cortante τ_{yx} en la

— cara inferior requiere otro igual y de sentido contrario en la cara superior y las fuerzas τ que dan lugar estos esfuerzos (fig 1.31-d) forman un par que necesita otro igual pero de sentido contrario para conseguir el equilibrio de momentos. Las fuerzas de este par equilibrante dan origen al esfuerzo cortante τ_{xy} en las caras verticales del elemento, como se observa en la fig 1.31-c. Tomando momentos respecto a un eje que pasa por A se obtiene

$$(\tau_{yx} dy dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0$$

Dividiendo entre $dx dy dz$ resulta $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Observando los signos de τ_{yx} y τ_{xy} en la fig 1.31 se ve que son de signo contrario, por lo que en rigor, $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$. Siendo iguales los esfuerzos cortantes en ambos planos, los subíndices se vuelven innecesarios, pudiéndose representar estos esfuerzos simplemente por τ .

La variación de los esfuerzos, τ , en el peralte de la viga, calculados con la ecuación (1.38), es parabólica según se demuestra a continuación. El momento de primer orden Q del área $fgjh$ de la fig 1.32 con respecto al eje neutro es:

$$\begin{aligned} Q &= b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{h}{2} - y \right) \\ Q &= b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) \frac{1}{2} \\ Q &= \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

Sustituyendo este valor de Q en la ecuación 1.38 y eliminando los subíndices del esfuerzo τ :

$$\tau = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]}}{2I} \quad (1.41)$$

Esta ecuación indica que, para un valor dado de V y de I , el valor del esfuerzo en un plano situado a una distancia y del eje neutro es función de y^2 , por lo que en la altura del peralte la distribución es parabólica como se muestra en la fig 1.32.

El valor máximo del esfuerzo cortante se obtiene cuando y es igual a cero en la ecuación 1.41. Dicho valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2} \right)^2}}{2I} \quad (1.42)$$

Ya que I es igual a $bh^3/12$, el valor de $\tau_{\text{máx}}$ es:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} \quad (1.43)$$

y ya que bh es el área de la sección transversal,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (1.44)$$

o sea, que el esfuerzo máximo es una y media veces el esfuerzo promedio.

La ecuación 1.38 es válida únicamente en forma rigurosa para secciones rectangulares. En secciones I , T y circulares, tiene limitaciones. Sin embargo, permite calcular los esfuerzos cortantes máximos, por lo que suele aplicarse también a dichas secciones. (Véase. S. P. Timoshenko y J. M. Gere, "Mechanics of Materials", secciones 5.3 y 5.4).

Ejemplo 1.15 En este ejemplo se ilustra la determinación de los esfuerzos cortantes a lo largo del eje en varios niveles de la sección de la viga mostrada en la figura, la cual es de sección T.

El valor del esfuerzo cortante se puede determinar con la expresión para los esfuerzos cortantes $\tau = \frac{VQ}{Tb}$ (ecuación 1.38).

En esta expresión el valor de V es el de la fuerza cortante que actúa en la sección A-A de la viga, la cual se puede encontrar con el diagrama de fuerzas cortantes, resultando $V = 25000 \text{ kg}$.

El momento de inercia de toda la sección con respecto al eje neutro resultó de $10\,300 \text{ cm}^4$.

El momento de primer orden, Q , depende del nivel considerada. Para los diferentes niveles elegidos se tendrán los valores indicados en la figura.

En las secciones consideradas el ancho b varía teniendo los siguientes valores:

$$b_{1-1} = 18 \text{ cm}$$

$$b_{2-2} = 18 \text{ cm}$$

$$b_{2-2} = 2 \text{ cm}$$

$$b_{3-3} = 2 \text{ cm}$$

$$b_{4-4} = 2 \text{ cm}$$

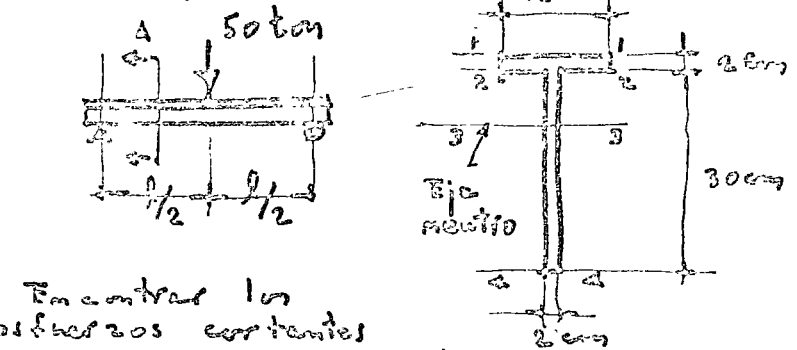
Como se puede observar, en el nivel 2-2 existen dos valores de b diferentes. 18 cm para un nivel ligeramente arriba del plano de unión del patín con el alma, y 2 cm para otro ligeramente abajo. Siendo el valor de $q = \frac{VQ}{T}$ el mismo para ambos casos, el valor de $\tau = \frac{q}{b}$ será mayor donde b sea menor, presentándose en esta sección un cambio brusco en el valor del esfuerzo cortante. Los esfuerzos cortantes calculados con la ecuación 1.38 en este nivel no son rigurosamente correctos, ya ^{que} dichos esfuerzos son nulos en el borde inferior del patín por ser un borde libre.

Para los diferentes niveles considerados se tienen los valores de τ indicados en la figura.

EjemPlo (1.15)

ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

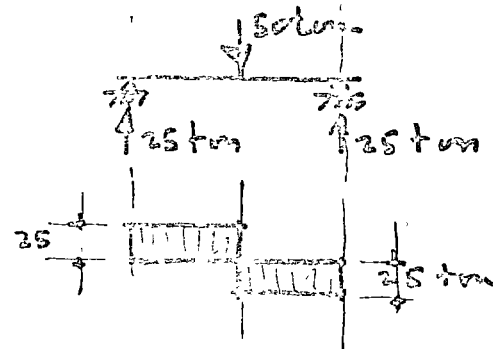
DATOS



Encuentra los esfuerzos cortantes en los niveles indicados. Determina la variación de esfuerzos cortantes en el patín.

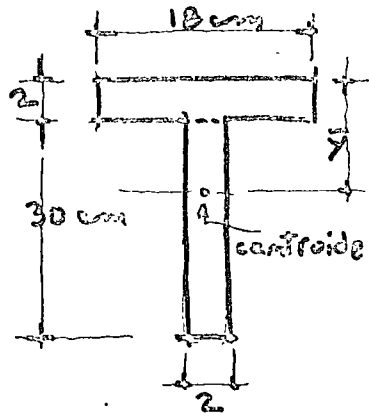
SOLUCION

Fuerza cortante en la viga



EJEMPLO (1.17) (Continuación) 2

Centroide y momento de inercia centroidal



Tomando momentos con respecto al eje superior del perfil:

$$\bar{y} = \frac{18 \times 2 \times 1 + 30 \times 2 \times 17}{18 \times 2 + 30 \times 2}$$

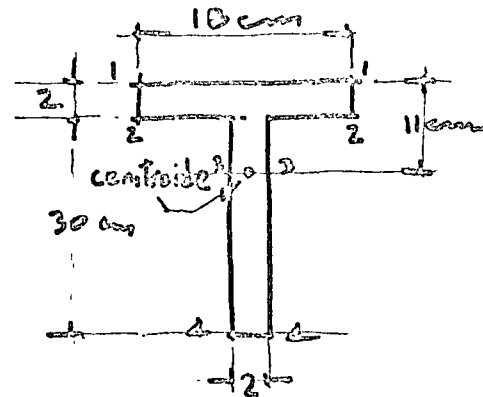
$$= \underline{11 \text{ cm}}$$

$$I = \frac{1}{12} 18 \times 2^3 + 18 \times 2 \times 10^2 + \frac{1}{12} 2 \times 30^3 + 30 \times 2 \times 6^2 = \underline{10300 \text{ cm}^4}$$

Momentos de primer orden (Q)
(En la hoja siguiente.)

EJEMPLO (1.17) (Continuación) 3

Momentos de primer orden (Q)



$$Q_{1-1} = 0$$

$$Q_{2-2} = 18 \times 2 \times 10 = \underline{360 \text{ cm}^3}$$

$$Q_{3-3} = 18 \times 2 \times 10 + 9 \times 2 \times 4.5 = \underline{441 \text{ cm}^3}$$

$$Q_{4-4} = 0$$

Esfuerzos cortantes en el alma:
(Ver hoja siguiente)

EJEMPLO (IV) (Continuación) 4

Esfuerzos cortantes en el alma

$$\tau_{1-1} = \frac{V Q_{1-1}}{I b_{1-1}} = 0$$

$$\tau_{2-2} = \frac{V Q_{2-2}}{I b_{2-2}} = \frac{25000 \times 360}{10300 \times 18} = \underline{48.5 \text{ kg/cm}^2}$$

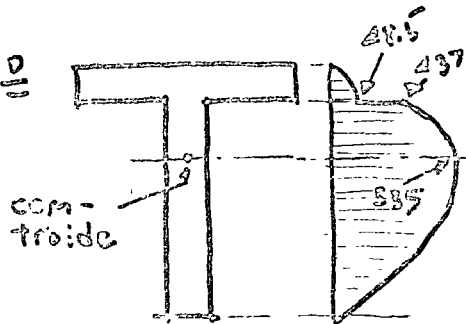
(a un nivel ligeramente arriba del plano de nudo)

$$\tau_{2-2} = \frac{V Q_{2-2}}{I b_{2-2}} = \frac{25000 \times 360}{10300 \times 2} = \underline{437 \text{ kg/cm}^2}$$

(a un nivel ligeramente abajo del plano de nudo)

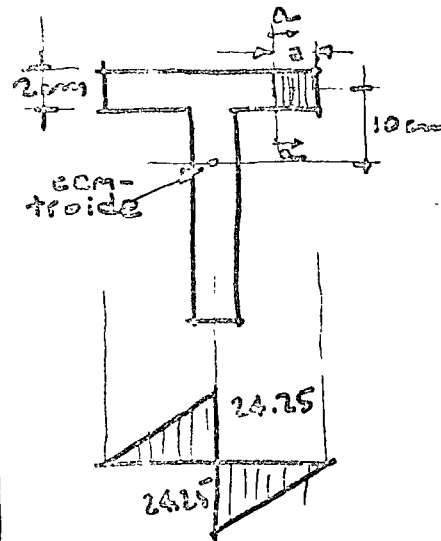
$$\tau_{3-3} = \frac{V Q_{3-3}}{I b_{3-3}} = \frac{25000 \times 441}{10300 \times 2} = \underline{535 \text{ kg/cm}^2}$$

$$\tau_{4-4} = \frac{V Q_{4-4}}{I b_{4-4}} = 0$$



EJEMPLO (IV) (Continuación) 5

Esfuerzos cortantes en el patín



$$Q = 22 \cdot 10 = 220 \text{ cm}^3$$

$$Q_{\text{max}} = 229 \cdot 10 = 2290 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{25000}{10300} \cdot \frac{2290}{2} = \underline{24.25 \text{ kg/cm}^2}$$

El esfuerzo cortante en una sección rectangular tiene una distribución parabólica. Por lo tanto al variar v de un valor cero en el nivel 1-1, a un valor de 48.5 kg/cm^2 en el nivel 2-2, el esfuerzo cortante ^{también} tendrá una distribución parabólica. Lo mismo sucederá al variar el esfuerzo cortante del nivel 2-2 al 3-3 y de éste al 4-4.

La distribución del esfuerzo cortante a lo largo del eje vertical de la sección se rá por lo tanto la indicada en la figura.

Si se analiza la fórmula para determinar el esfuerzo cortante

$$v = \frac{VQ}{Ib} \quad (1.38)$$

se observa que para una sección dada de la viga los valores v e I son constantes, en tanto que los valores de Q y b variarán de acuerdo con el nivel considerado. El valor máximo de v se presenta en el nivel donde la relación Q/b sea máxima.

El valor de Q es máximo al nivel del eje neutro, pero el valor de b puede no ser mínimo a ese mismo nivel por lo que el valor de $v_{\text{máx}}$ no necesariamente se presenta al nivel del eje neutro.

La distribución del esfuerzo cortante a lo largo del patín se puede determinar en forma semejante, haciendo cortes verticales a lo largo del mismo, como el corte a-a indicado en la figura. En la fórmula del esfuerzo cortante tanto v como I y b son constantes por lo que el valor del esfuerzo cortante variará conforme varíe el valor de $Q = A$ y (respecto al eje neutro). En este caso la distancia y permanece constante a lo largo de todo el patín e igual a 10 cm .

El área, A , por su parte varía únicamente con la distancia del extremo del patín a la sección considerada, por lo que Q varía linealmente del extremo del patín al eje vertical de la sección. En la otra mitad del patín se tiene una variación similar pero los esfuerzos son de sentido contrario.

El esfuerzo cortante máximo en el patín es por lo tanto de 24.25 kg/cm^2 . En este cálculo se despreció el espesor del alma.

1.3.6 Centro de cortante

En cualquier sección de una viga, como se dijo anteriormente, siempre que se tenga un momento flexionante variable, existirá esfuerzo cortante.

Estos esfuerzos, al actuar sobre sus respectivas áreas, dan lugar a una fuerza cortante interna o resistente cuya resultante deberá ser igual, opuesta y colineal con la fuerza cortante exterior. Si esto no ocurre, la fuerza cortante interna y la fuerza externa producen un momento torsionante en la viga.

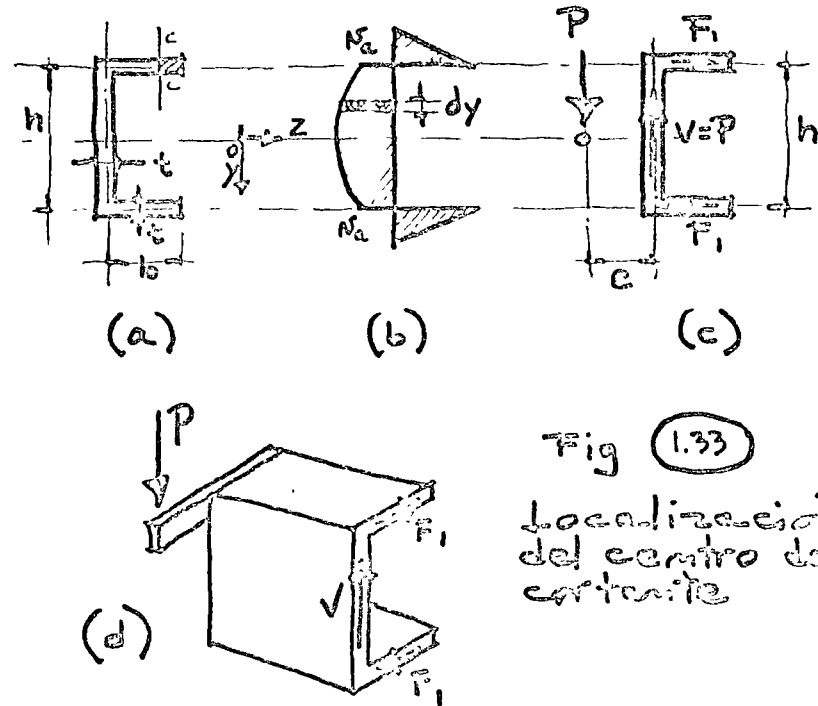


Fig 1.33
Localización
del centro de
cortante

Para que no exista momento torsionante se requiere que la resultante de las fuerzas cortantes exteriores pase por el llamado centro de cortante o también centro de torsión. El centro de cortante es un punto de la sección transversal por el que debe de pasar el plano que contiene las fuerzas exteriores que producen la flexión, para que la viga se flexione sin torsión.

Para ilustrar la determinación de la posición del centro de cortante, considérese una viga de sección canal (fig 1.33). Se supone que las paredes de esta sección canal son lo suficientemente delgadas para que todos los cálculos puedan basarse en la hipótesis de que el área está concentrada en la línea media del espesor. La flexión de esta canal se presenta alrededor de su eje horizontal y aunque esta sección transversal no tiene un eje vertical de simetría, se supone que los esfuerzos de flexión pueden calcularse con la fórmula de la escuadría. Suponiendo además que en esta canal actúa una fuerza cortante vertical, el momento flexionante variará de una sección a otra a lo largo de la viga. Haciendo un corte arbitrario cc , los valores de q y V pueden encontrarse en la forma usual. A lo largo de los patines horizontales de esta canal, estas cantidades variarán linealmente desde un valor cero en el extremo libre del patín. A lo largo del alma, la variación de q y V es parabólica.

La variación de estas cantidades se muestra en la fig 1.33-b dibujadas a lo largo de la línea central de la sección. El esfuerzo cortante promedio $\tau_a/2$ multiplicado por el área del patín da una fuerza $F_1 = (\tau_a/2) bt$ y la suma de los esfuerzos cortantes verticales sobre el área del alma es la fuerza cortante

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau t \, dy$$

Estas fuerzas están representadas en la sección transversal de la fig 1.33-c y dan lugar a una fuerza vertical V y a un par $F_1 \cdot h$. El par tenderá a torcer la sección alrededor de su eje longitudinal.

Para evitar el giro y así conservar válida la distribución de los esfuerzos de flexión supuesta inicialmente, es necesario aplicar una fuerza externa, P , de forma tal que equilibre el par interno $F_1 \cdot h$. Para mantener esta fuerza en equilibrio, una fuerza igual y opuesta se debe desarrollar en el alma.

Suponiendo que el plano en el cual se debe aplicar la fuerza P para eliminar la torsión de la canal, se encuentra a una distancia e del eje del alma, para equilibrar la torsión de la canal es necesario que

$$F_1 h = P e \quad (1.45)$$

y por lo tanto

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{\frac{1}{2} \tau_a b t h}{P} = \frac{b t h}{2 P} \frac{V Q}{I C} = \frac{b t h}{2 P} \frac{V b t (\frac{1}{2} a)}{I C} \quad (1.46)$$

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4 I}$$

Nótese que la distancia e es una propiedad de la geometría de la sección y es independiente de la magnitud de la fuerza aplicada P , así como de su localización a lo largo de la viga.

Una investigación similar puede efectuarse para localizar el plano en el cual deben aplicarse las fuerzas horizontales para equilibrar la torsión de la canal. En virtud de la simetría puede verse que este plano coincide con el plano neutro del primer caso. La intersección de estos dos planos mutuamente perpendiculares con el plano de la sección transversal, define un punto llamado centro de cortante.

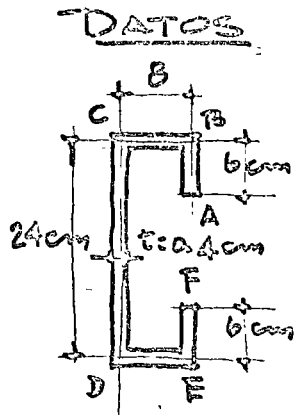
Para cualquier sección transversal con un eje de simetría, el centro de cortante estará localizado sobre dicho eje. Si tiene dos ejes de simetría, el centro de cortante coincidirá con el centroide de la sección.

Para secciones asimétricas de paredes gruesas, la localización exacta del centro de cortante es difícil de obtener. Si el espesor de la pared es pequeño, como se ha supuesto para la sección analizada anteriormente, el procedimiento es relativamente sencillo.

El método usual consiste en determinar las fuerzas cortantes, tales como la F_1 y V antes mencionadas, y luego encontrar la localización de la fuerza externa necesaria para mantener esas fuerzas un equilibrio.

Ejemplo 1.9. - En este ejemplo se presenta la forma de calcular la posición de cortante de una sec-

EJEMPLO (1.16) CENTRO DE CORTANTE



$$V = 2560 \text{ kg}$$

Localizar el
centro de
cortante

Solucion

Momento de inercia y mo-
mentos de primer orden

$$I = 2 \left(\frac{1}{2} \times 0.4 \times 6^3 + 0.4 \times 6 \times 9^2 \right) + \\ + 2 \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 0.4^3 + 8 \times 0.4 \times 12^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} \times 0.4 \times 24^3 = \underline{\underline{1786 \text{ cm}^4}}$$

$$Q_A = \underline{\underline{0}}$$

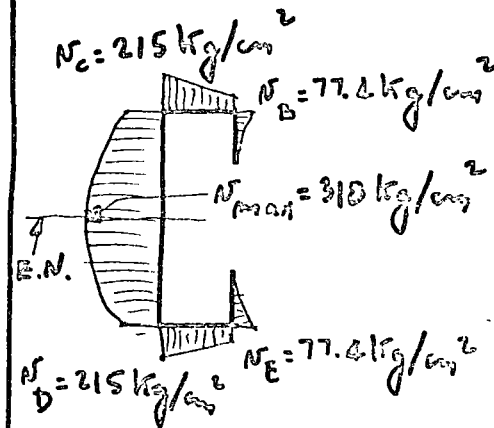
$$Q_B = 0.4 \times 6 \times 9 = \underline{\underline{21.6 \text{ cm}^3}}$$

EJEMPLO (1.16) (Continuación) 2

$$Q_c = 21.6 + 8 \times 0.4 \times 12 = \underline{\underline{60 \text{ cm}^3}}$$

$$Q_{\text{eje neutro}} = 60 + 12 \times 0.4 \times 6 = \underline{\underline{88.8 \text{ cm}^3}}$$

Esfuerzos cortantes



$$N = \frac{VQ}{It}$$

$$N = \frac{2560 Q}{1786 \times 0.4} = 3.58 Q$$

$$N_A = \underline{\underline{0}}$$

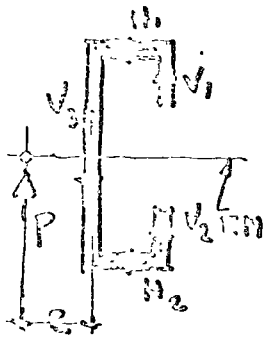
$$N_B = 3.58 \times 21.6 = \underline{\underline{77.4 \text{ kg/cm}^2}}$$

$$N_c = 3.58 \times 60 = \underline{\underline{215 \text{ kg/cm}^2}}$$

$$N_{\text{eje neutro}} = 3.58 \times 88.8 = \underline{\underline{315 \text{ kg/cm}^2}}$$

PROBLEMA (15) (Continuación) 3

Determinación de los esfuerzos y centro de gravedad.



$$V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \times 26 \times 72 \times 20 \times 2$$

$$= \underline{62.15 \text{ kg}}$$

$$V_3 = 26 \times 20 \times 2 \times 215 +$$

$$+ \frac{1}{3} \times (318 - 215) \times 22 \times 20 \times 2 =$$

$$= \underline{2722 \text{ kg}}$$

$$H_1 = H_2 = \left(\frac{215 \times 72 \times 2}{2} \right) \times 0.4 \times 8$$

$$= \underline{467.8 \text{ kg}}$$

$$P = V_3 - V_1 - V_2 = 2722 - 62 - 62$$

$$= \underline{2600 \text{ kg}} = 2560$$

$$P_c = H_1 \times 26 + (V_1 \times \frac{b_1}{2}) \times 2 =$$

$$= 467.8 \times 26 + 124 \times 8 = 12177 \text{ kg-cm}$$

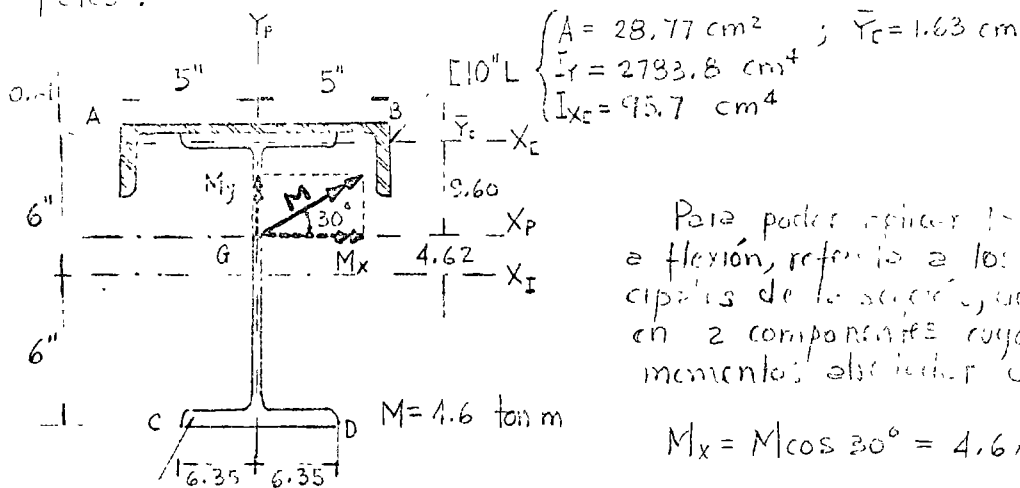
$$e = \frac{12177}{2600} = 4.7 \text{ cm}$$

Problemas

José Luis Sánchez M.

dos de las Soluciones P7 Problema 11.13

Determinar los esfuerzos máximos de flexión producidos por un momento, cuyo vector representa no coincide con los ejes principales. La figura muestra una sección, formada por una canal y una viga de acero, que soporta una carga transversal contenida en un plano a 30° de uno de los ejes principales.



$$\text{II2L} \begin{cases} A = 59.74 \text{ cm}^2 \\ I_{x_I} = 8982.9 \text{ cm}^4 \\ I_{y_I} = 395.4 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Para poder aplicar los fórmulas de la ecuación de flexión, referida a los ejes centroidales y principales de la sección, debemos resolver M en 2 componentes cuyos vectores representen momentos absolutos de los 2 ejes principales.

$$M_x = M \cos 30^\circ = 4.6 \times 0.866 = 3.98 \text{ ton-m}$$

$$M_y = M \sin 30^\circ = 4.6 \times 0.500 = 2.3 \text{ ton-m}$$

$$\text{Entonces: } \sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \quad (1)$$

En donde únicamente nos falta determinar a I_x e I_y de toda la sección. Para esto necesitamos primeramente a calcular la posición del C.G.

$$Q_{x_c} = (15.55 - 1.63) 28.77 = 14.22 \times 28.77 = 408 \text{ cm}^3$$

$$\bar{y} = \frac{Q_{x_c}}{A_f} = \frac{408}{28.77 + 59.74} = \frac{408}{88.51} = 4.62 \text{ cm}$$

$$I_x = I_{x_p} = \begin{cases} I_{x_I} = & = 8983 \\ A_f (4.62)^2 = 59.74 (4.62)^2 = & = 1280 \\ I_{x_c} = & = 96 \\ A_c (9.60)^2 = 28.77 (9.60)^2 = & = 2660 \\ \hline & = 13019 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$I_y = I_{y_p} = I_{y_{II2L}} + I_{y_c} = 395.4 + 2783.8 = 3179.2 \text{ cm}^4$$

Sustituendo en (1):

$$\sigma = \pm \frac{3.98 \times 10^5}{13019} y \pm \frac{2.3 \times 10^5}{3179.2} x = \pm 30.5 y \pm 72.3 x$$

Aplicando la regla del tornillo de tuerca derecha para los momentos M_x y M_y , vemos que M_x origina tensión en todos los puntos arriba de X_p y compresión en todos los puntos abajo de X_p , mientras que M_y tensión para todos aquéllos a la izquierda de Y_p y compresión para los de la derecha. De aquí que:

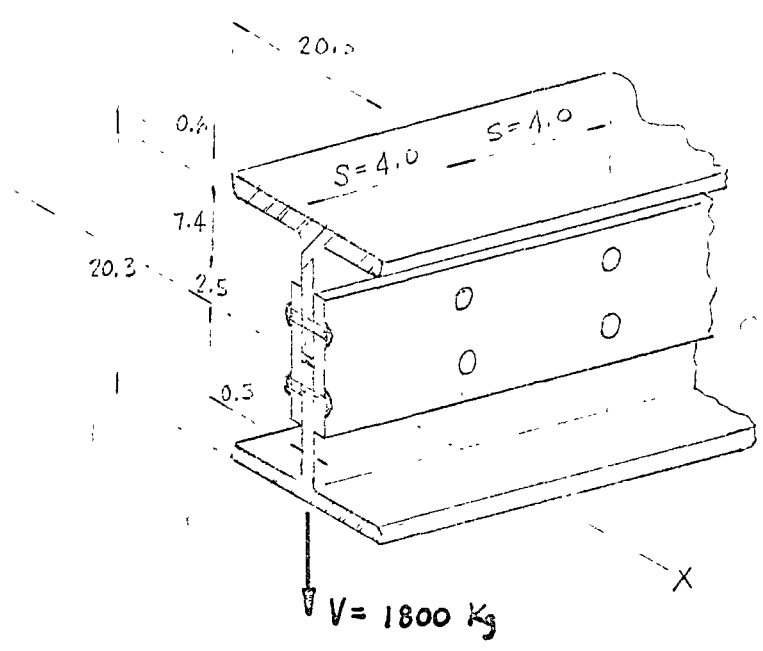
$$\sigma_{\text{max tensión}} = \sigma_A = +30.5 \times 15.85 + 72.3 \times 12.7 = +483 + 918 = +1401 \quad \text{Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{max compresión}} = \sigma_D = -30.5 \times 19.86 - 72.3 \times 6.35 = -606 - 459 = -1065 \quad \checkmark$$

$$\sigma_B = \sigma_{\text{compresión}} = +30.5 \times 15.85 - 72.3 \times 12.7 = +483 - 918 = -435 \quad \checkmark$$

$$\sigma_C = \sigma_{\text{compresión}} = -30.5 \times 19.86 + 72.3 \times 6.35 = -606 + 459 = -147 \quad \checkmark$$

Un viga I está formada por 2 Tees unidas por un par de placas. El espesor de los remaches es de 0.6 cm y están colocados con separaciones de 2.0 cm a toda lo largo de la viga. Determinar la fuerza cortante k y las espesores cortantes en cada remache en una sección donde la fuerza cortante transversal $V = 1800 \text{ Kg}$



Puesto que el área cercana al eje neutro contribuye muy poco en el valor total de I_x , es válido calcular éste considerando al miembro como un viga I sólido, después de lo que sigue.

$$I_x = \begin{cases} 2A_f (1.1)^2 = 2 \times 20.3 \times 0.6 (9.9)^2 = 2380 \\ I_{web} = \frac{0.5 (7.4)^3}{12} = \frac{290}{2670} \text{ cm}^4 \end{cases}$$

El momento estático del área arriba del eje de los remaches superiores vale:

$$Q_x = 20.3 \times 0.6 \times 9.9 + 0.5 \times 7.4 (7.4/2) = 121 + 13.7 = 138.7 \text{ cm}^2$$

$$q = \frac{VQ_x}{I_x} = \frac{1800 \times 138.7}{2670} = 94 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}}$$

La fuerza que resiste cada remache es igual a la fuerza cortante distribuida su longitud tributaria, es decir, en la distancia que los separa.

$$P_{remache} = q \cdot s = 94 \times 4.0 = \underline{\underline{376 \text{ Kg}}}$$

Puesto que los remaches están trabjando a cortante doble

$$\tau = \frac{P}{2A} = \frac{376}{2 \times \pi (0.6)^2} = \frac{198}{0.72} = \underline{\underline{675 \text{ Kg/cm}^2}}$$

4

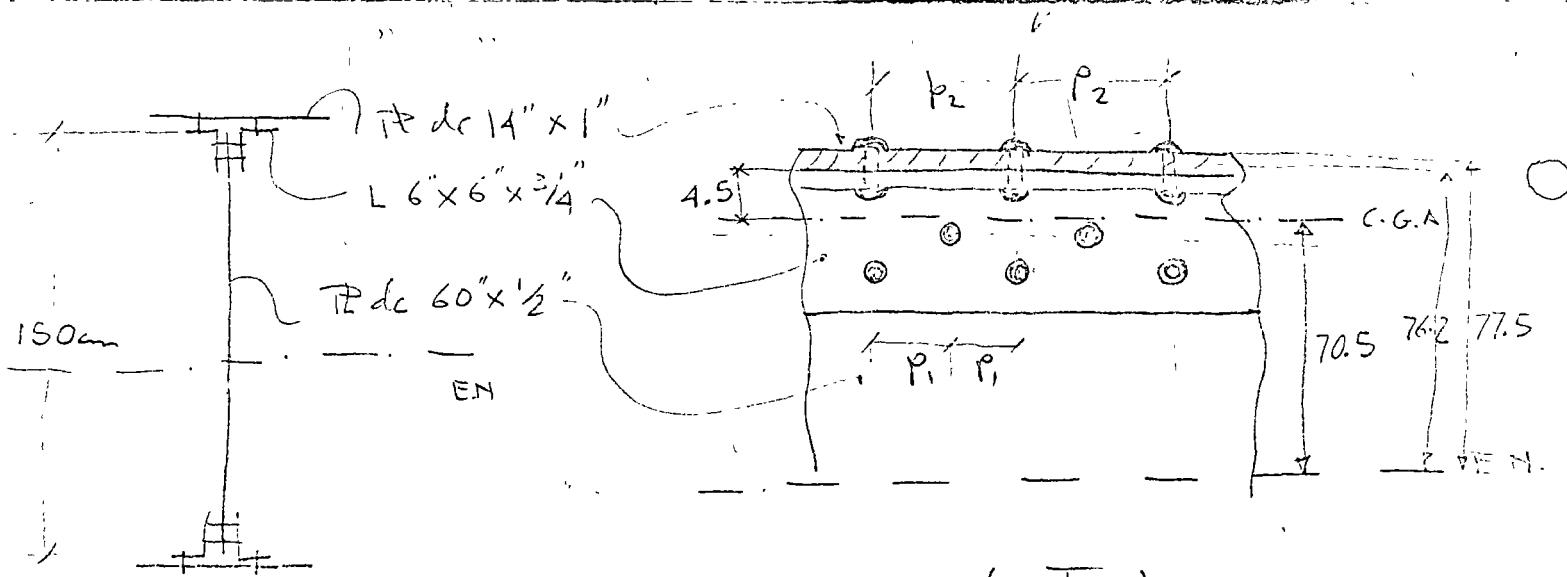
PROBLEMA N°. 5

Una viga de acero está compuesta en la forma indicada en la figura.
 Calcúlese la separación entre remaches si su diámetro es de 7/8".

Acero (A-36) con $fLE = 2530 \text{ Kg/cm}^2$.

Acero de remaches A502

con esfuerzo permisible a cortante = $1,050 \text{ Kg/cm}^2$.



Propiedades de la Trabe

	Area=A cm ²	y cm	A y ²	I ₀	I _t
Para de alma 152 x 1.3	196	—	—	380000	380000
4 L ^s de 6 x 6 x 3/4	217.80	70.5	1080000	4688	1054688
2 Placas de 60 x 1/2 35.6 x 2.54	181	76.2	1052000	—	1052000
Sumas	594.8				2516000

Remaches que ligan el patin al alma

$$Q = \frac{1}{2} (151 \times 76.2 + 217.8 \times 70.5) = 14550 \text{ cm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{14550 \times 188000}{2516000} = 1090 \text{ Kg/cm}$$

$$p_1 = \frac{8000}{1090} = \underline{\underline{7.35 \text{ cm}}}$$

Remaches que ligan cubreplicas con los ganchos.

$$Q = \frac{1}{2} (181 \times 76.2) = 6900 \text{ cm}^3$$

$$q = \frac{188000 \times 6900}{2516000} = 516 \text{ Kg/cm}$$

$$p_2 = \frac{2 \times 4000}{516} = \underline{\underline{15.5 \text{ cm}}}$$

• Fuerza permisible por remache.

a) Aplastamiento en placas de $\frac{1}{2}$ "

$$\text{Esfuerzo permisible} = 1.35 F_y = 1.35 \times 2530 = 3420 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_p = 2.2 \times 1.3 \times 3420 = \underline{9770 \text{ Kg.}}$$

b) Cortante doble

$$\text{Area del remache} = 3.8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo permisible} = 1050 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_p = 2 \times 3.8 \times 1050 = 8000 \text{ Kg. (rige para el alma)}$$

c) Cortante simple

$$F_p = 3.8 \times 1050 = 4000 \text{ Kg.}$$

Remaches que ligan el patin al alma.

$$Q = \frac{1}{2} (181 \times 76.2 + 217.8 \times 70.5) = 14550 \text{ cm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{14550 \times 188000}{2516000} = 1090 \text{ Kg/cm}$$

$$p_1 = \frac{8000}{1090} = \underline{7.35 \text{ cm.}}$$

Remaches que ligan cubreplacas con angulos.

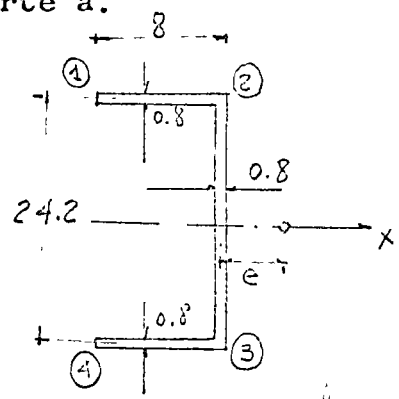
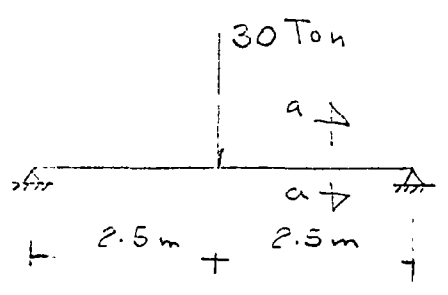
$$Q = \frac{1}{2} (181 \times 76.2) = 6900 \text{ cm}^3$$

$$q = \frac{188000 \times 6900}{2516000} = 516 \text{ Kg/cm.}$$

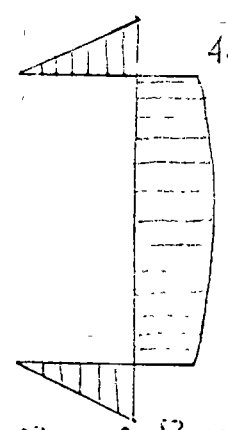
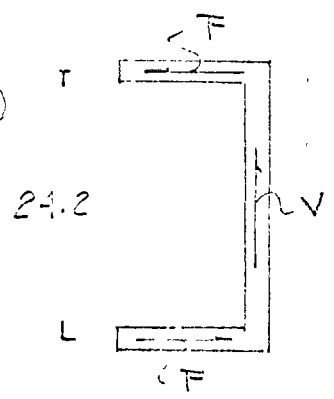
$$p_2 = \frac{2 \times 4000}{516} = \underline{15.5 \text{ cm.}}$$

PROBLEMA N°. 4

Determinese la distribución de esfuerzos cortantes y la posición del centro de cortantes para la viga de la figura. La sección recta de la viga es la mostrada en el corte a.



Propiedades de la sección



$$A = 25 \times 0.8 + 2 \times 0.8 \times 7.2 = 135.2 \text{ cm}^2$$

$$I_x = \frac{8 \times 25^3}{12} - \frac{7.2 \times 23.4^3}{12} = 2700 \text{ cm}^4$$

$$q_2 = \frac{15000 \times 8 \times 0.8 \times 12.1}{2700} = 430 \text{ Kg-cm.}$$

$$F = \frac{8}{2} \times 430 = 1720 \text{ Kg}$$

$$Ve = 1720 \times 24.2$$

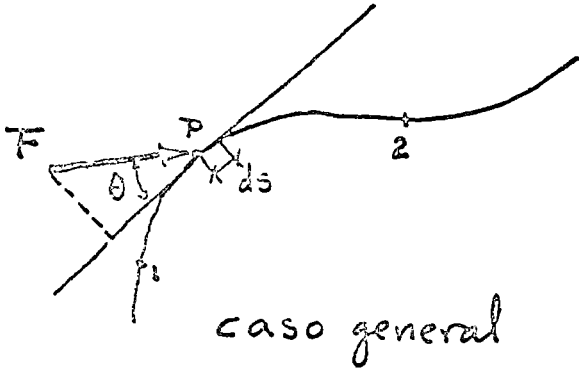
$$e = \frac{1720 \times 24.2}{15000} = \underline{\underline{2.78 \text{ cm.}}}$$

DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO.

EL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL PARA EL CALCULO DE
DESPLAZAMIENTO EN ESTRUCTURAS ELASTICAS.

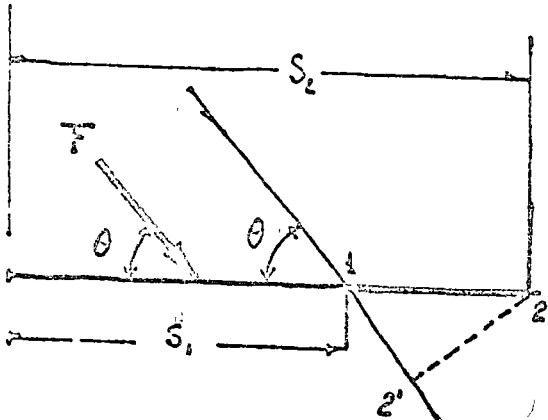
ING. JOSE LUIS SANCHEZ M.

Trabajo



$$d\bar{C} = F \cos \theta ds$$

$$\bar{C}_1^2 = \int_1^2 F \cos \theta ds$$



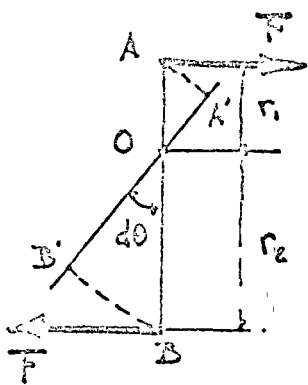
trayectoria recta ;

$F = cte ;$
 $\theta = cte ;$

$$\bar{C}_1^2 = F \cos \theta (s_2 - s_1)$$

$$\bar{C}_1^2 = F l_2'$$

$$\bar{C} = F s_2$$



$$d\bar{C}_1 = F r_1 d\theta$$

$$d\bar{C}_2 = F r_2 d\theta$$

$$d\bar{C} = F d\theta (r_1 + r_2)$$

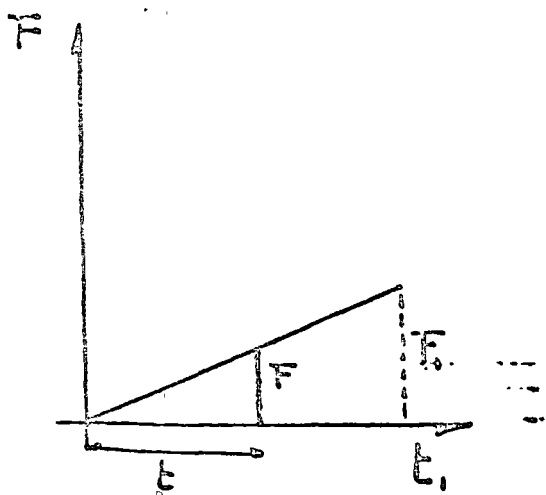
$$d\bar{C} = F d d\theta$$

$$d\bar{C} = M d\theta$$

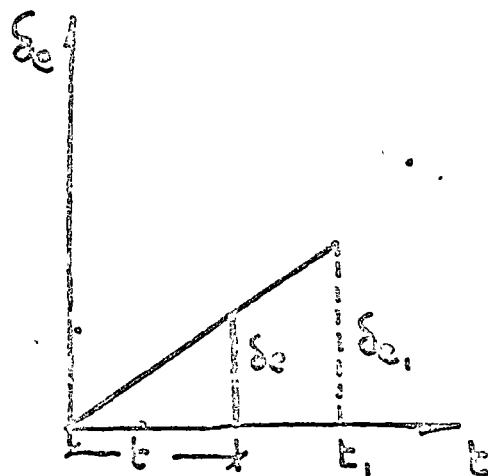
Trabajo de F en A
" " F " B

$$\bar{C} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = M (\theta_2 - \theta_1)$$

Trabajo de las fuerzas exteriores actuando sobre un cuerpo de elasticidad lineal.



$$F = \frac{F_1}{t_1} t$$



$$\delta_e = \frac{\delta_{e_1}}{t_1} t$$

$$d\delta_e = \frac{\delta_{e_1}}{t_1} dt$$

$$F d\delta_e = \frac{F_1}{t_1} t \frac{\delta_{e_1}}{t_1} dt$$

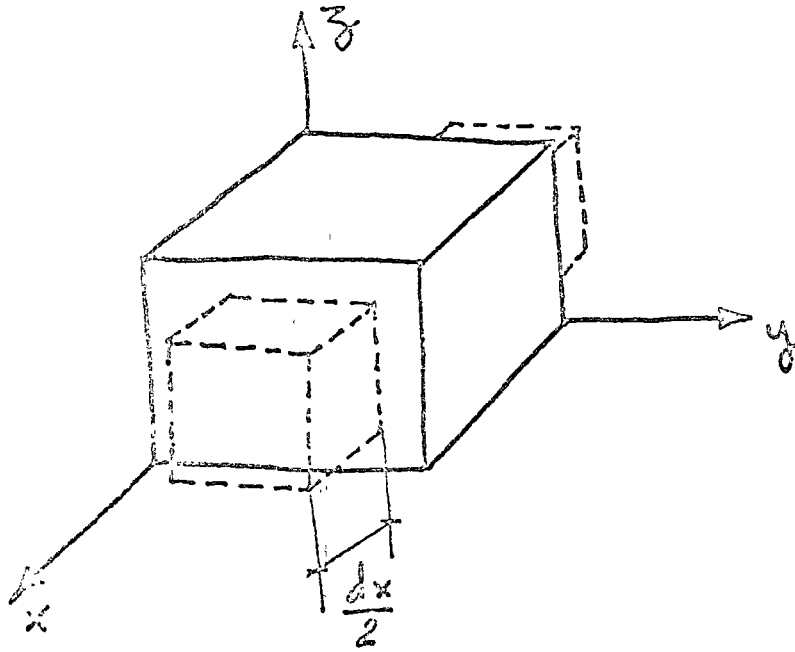
$$\int_0^{t_1} F d\delta_e = \frac{F_1 \delta_{e_1}}{t_1^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{t_1} = \frac{F_1 \delta_{e_1}}{2}$$

y en general

$$W_e = \frac{F_1 \delta_{e_1}}{2} + \frac{F_2 \delta_{e_2}}{2} + \dots + \frac{F_n \delta_{e_n}}{2}$$

Teorema de Clapeyron: El trabajo efectuado por las fuerzas exteriores que obran sobre un cuerpo de elasticidad lineal y en el que es válido el principio de superposición de causas y efectos es igual a la semisuma de los productos de los valores finales de las fuerzas por los desplazamientos efectivos finales correspondientes.

Trabajo de las fuerzas interiores en un cuerpo de elasticidad lineal.



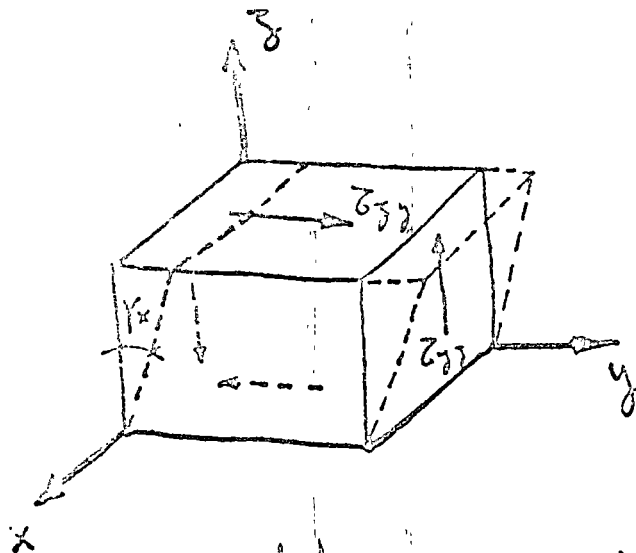
$$F_x = \sigma_x dy dz$$

$$\delta_x = \epsilon_x dx$$

$$[dU]_{\sigma_x} = \frac{F_x \delta_x}{2} = \frac{\epsilon_x \sigma_x dy dz dx}{2}$$

$$[dU]_{\sigma_x} = \frac{\sigma_x \epsilon_x dV}{2}$$

del mismo modo



del mismo modo

$$[dU]_{\sigma_y} = \frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} dV$$

$$[dU]_{\sigma_z} = \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2} dV$$

$$[dU]_{\tau_{yz}} = \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} dV$$

$$[dU]_{\tau_{zy}} = \frac{\tau_{zy} \gamma_{zy}}{2} dV$$

$$[dU]_{\tau_{xz}} = \frac{\tau_{xz} \gamma_{xz}}{2} dV$$

$$[dU]_{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} dV$$

El trabajo total:

$$dU = \left[\frac{\epsilon_x \sigma_x}{2} + \frac{\epsilon_y \sigma_y}{2} + \frac{\epsilon_z \sigma_z}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{zy} \gamma_{zy}}{2} + \frac{\tau_{xz} \gamma_{xz}}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} \right] dV$$

Trabajo interno en función de los elementos del estado de esfuerzo

$$E \epsilon_x = \sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z$$

$$E \epsilon_y = \sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z$$

$$E \epsilon_z = \sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y$$

$$G \gamma_x = \tau_{yz}$$

$$G \gamma_y = \tau_{xz}$$

$$G \gamma_z = \tau_{xy}$$

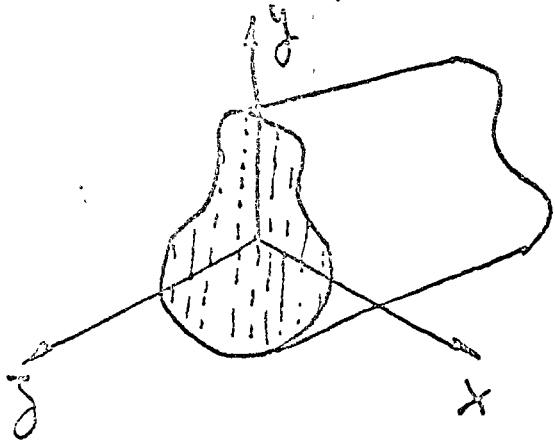
Reemplazando en la expresión para dU

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_x (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z)}{E} + \frac{\sigma_y (\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z)}{E} + \frac{\sigma_z (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y)}{E} + \frac{\tau_{yz}^2}{G} + \frac{\tau_{xz}^2}{G} + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right]$$

\therefore

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \right] + \frac{1}{2G} \left[\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 \right]$$

Trabajo interno para la barra plana con cargas en su plano.



$$\sigma_z \neq 0 ; \sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\tau_{zy} \neq 0 ; \tau_{zx} \neq 0 ; \tau_{xy} = 0$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{1}{2G} \tau_{zy}^2$$

$$\sigma_z = \frac{P}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\tau_{zy} = \frac{V Q_y}{I_x b}$$

$$\frac{dU}{dz} = \left(\frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{1}{2G} \tau_{zy}^2 \right) dA$$

$$\int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA = \frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{P^2}{A^2} + \frac{2P}{A} \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_x^2}{I_x^2} y^2 \right) b dy$$

$$= \frac{1}{2E} \left[\frac{P^2}{A^2} A + \frac{2P}{A} \frac{M_x}{I_x} \underbrace{\int_A y dA}_0 + \frac{M_x^2}{I_x^2} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} \right]$$

$$\int_A \frac{\tau_{zy}^2}{2G} dA = \frac{1}{2G} \int_A \frac{V^2 Q^2}{I_x^2 b^2} b dy$$

$$= \frac{V^2}{2G I_x^2} \int_A \frac{Q^2}{b} dy = \frac{V^2}{2GA} \underbrace{\int_A \frac{Q^2}{A r_x^2 b} dy}_c$$

$$\frac{dU}{dz} = \frac{P^2}{2AE} + \frac{M_x^2}{2E I_x} + \frac{V^2}{2GA} c$$

$$U = \int_z \frac{P^2}{2EA} dz + \int_z \frac{M_x^2}{2E I_x} dz + c \int_z \frac{V^2}{2GA} dz$$

Principio del trabajo virtual.-

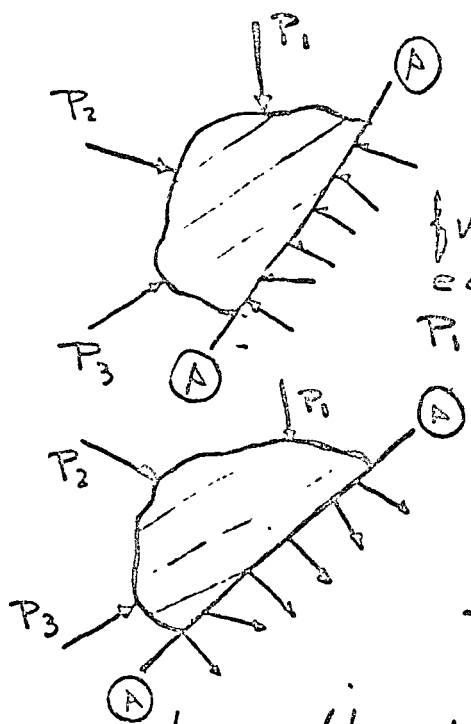
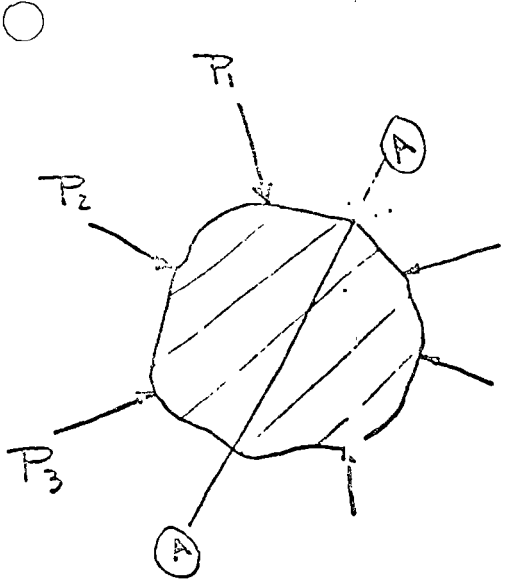
"Una condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo deformable es que sea nula la suma de los trabajos realizados por todas las fuerzas exteriores e interiores equilibrantes que obran sobre él para cualquier conjunto de desplazamientos pequeños y compatibles con las restricciones internas y externas del cuerpo."

$$\sum \tau_e + \sum \tau_i = 0$$

ó $\sum \tau_e = -\sum \tau_i = \sum (-\tau_i) =$ suma de los trabajos de las fuerzas equivalentes a las exteriores.

Y el principio se puede enunciar también:

"La suma de los trabajos de las fuerzas exteriores al obrar sobre los desplazamientos provocados por el sistema real de fuerzas es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas interiores equivalentes producidas por el primer sistema al obrar sobre los desplazamientos debidos al segundo."

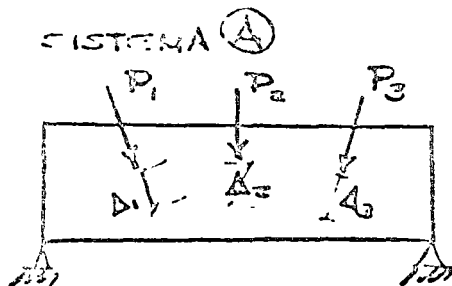


fuerzas interiores equilibrantes de P_1, P_2 y P_3

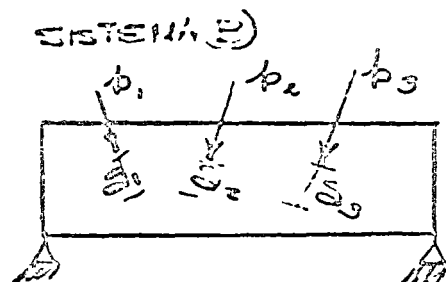
fuerzas interiores equivalentes a P_1, P_2 y P_3

Nótese que momentos flexionantes, fuerzas normales y cortantes son por definición fuerzas equivalentes a las exteriores.

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL A BARRAS PLANAS DE ELASTICIDAD LINEAL



las fuerzas P_i^0 producen P, M, V



las fuerzas p_i^0 producen p, m, v

PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL:

"La suma de los trabajos de las fuerzas (p_i^0) exteriores del sistema B al obrar sobre los desplazamientos (Δ_i^0) provocados por las fuerzas (P_i^0) del sistema A, es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas interiores equivalentes (p, m, v) producidas por el sistema B al obrar sobre los desplazamientos (Δ_i^0) provocados por las fuerzas (P_i^0) del sistema A".

TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES EQUIVALENTES:

El trabajo total efectuado por las fuerzas interiores producidas por B sobre los desplazamientos de A:

$$dU = \left[\epsilon_x \bar{V}_x + \epsilon_z \bar{V}_z + \epsilon_y \bar{V}_y + \int \bar{\sigma}_{xx} dx + \int \bar{\sigma}_{yy} dy + \int \bar{\sigma}_{zz} dz \right] dV - U_0$$

(Considerando que las las fuerzas actúan con su valor final)

donde $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_{zx}, \bar{\sigma}_{zy}$ son los esfuerzos producidos por p, m, v actuando sobre los desplazamientos $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \delta_z, \delta_y, \delta_x$ provocados por el sistema de fuerzas P_i^0 ; estos desplazamientos pueden expresarse en términos de los elementos del estado de esfuerzos $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_{zx}, \bar{\sigma}_{zy}$ debido al sistema de fuerzas P_i^0 como:

$$E \epsilon_x = \bar{\sigma}_x - \mu \bar{\sigma}_y - \mu \bar{\sigma}_z$$

$$E \epsilon_y = \bar{\sigma}_y - \mu \bar{\sigma}_x - \mu \bar{\sigma}_z$$

$$E \epsilon_z = \bar{\sigma}_z - \mu \bar{\sigma}_x - \mu \bar{\sigma}_y$$

$$G \delta_y = \bar{\sigma}_{yz}$$

$$G \delta_z = \bar{\sigma}_{xz}$$

$$G \delta_x = \bar{\sigma}_{xy}$$

sustituyendo en la expresión (I):

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\bar{\sigma}_x' (\bar{\sigma}_x - \mu \bar{\sigma}_y - \mu \bar{\sigma}_z)}{E} + \frac{\bar{\sigma}_y' (\bar{\sigma}_y - \mu \bar{\sigma}_x - \mu \bar{\sigma}_z)}{E} + \frac{\bar{\sigma}_z' (\bar{\sigma}_z - \mu \bar{\sigma}_x - \mu \bar{\sigma}_y)}{E} + \left[\frac{\bar{\sigma}_{yz}' \bar{\sigma}_{yz}}{G} + \frac{\bar{\sigma}_{xz}' \bar{\sigma}_{xz}}{G} + \frac{\bar{\sigma}_{xy}' \bar{\sigma}_{xy}}{G} \right] \quad \text{--- (I)}$$

PARA EL CASO DE LA BARRA PLANA CON CARGAS EN

$$\text{SU PLANO: } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_z \neq 0 \quad \bar{\sigma}_z' \neq 0, \quad \bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_x' = \bar{\sigma}_y' = 0 \\ \bar{\sigma}_{yz} \neq 0 \quad \bar{\sigma}_{yz}' \neq 0, \quad \bar{\sigma}_{zx} = \bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{zx}' = \bar{\sigma}_{xy}' = 0 \end{array} \right.$$

la expresión II queda:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\bar{\sigma}_z' \bar{\sigma}_z}{E} + \frac{\bar{\sigma}_{yz}' \bar{\sigma}_{yz}}{G}$$

$$\text{pero: } \begin{cases} \bar{v}_z = \frac{P}{A} + \frac{M}{I_x} y & \bar{v}'_z = \frac{p}{A} + \frac{m}{I_x} y \\ \bar{v}_{zy} = \frac{VQ}{Ib} & \bar{v}'_{zy} = \frac{vQ}{Ib} \end{cases}$$

$$\iint \frac{\bar{v}_z \bar{v}'_z}{E} dA = \frac{1}{E} \iint \left(\frac{Pp}{A^2} + 2 \frac{Pm}{AI_x} y + \frac{Mm}{I_x^2} y^2 \right) dA$$

$$= \frac{1}{E} \frac{Pp}{A^2} \iint dA + \underbrace{\frac{Pm}{AI_x} \iint y dA}_{\text{mom. está.} = 0} + \frac{Mm}{EI_x^2} \iint y^2 dA$$

$$= \frac{Pp}{EA} + \frac{Mm}{EI_x}$$

$$\iint \frac{\bar{v}_{zy} \bar{v}'_{zy}}{G} = \frac{1}{G} \iint \frac{vQ^2}{Ib^2} dA = \frac{vQ}{GA} \underbrace{\iint \frac{Q^2 A}{b^2} dA}_c$$

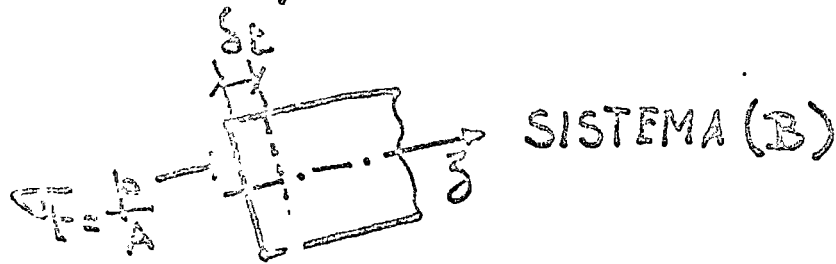
entonces:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{Pp}{AE} + \frac{Mm}{I} + c \frac{vQ}{GA}$$

de donde:

$$U = \int \frac{Pp}{AE} dz + \int \frac{Mm}{EI} dz + c \int \frac{vQ}{GA}$$

Término adicional para tener en cuenta cambios de temperatura en la deformación de una barra.



$dF_z = \frac{p}{A} dA$; $\delta_t =$ desplazamiento debido a un cambio de temperatura

$$\delta_t = \alpha \Delta t dz$$

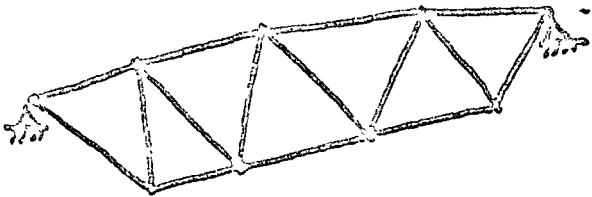
$$dU_t = \delta_t dF_z = \frac{p}{A} dA \alpha \Delta t dz$$

$$(dU_t)_A = \frac{p \alpha \Delta t dz}{A} \int_A dA = p \alpha \Delta t dz$$

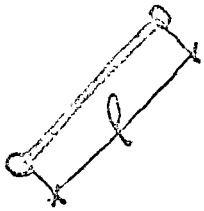
$$U_t = \int_L p \alpha \Delta t dz$$

Término que se añadirá al segundo miembro de la expresión general para U .

Caso particular para armaduras trianguladas.



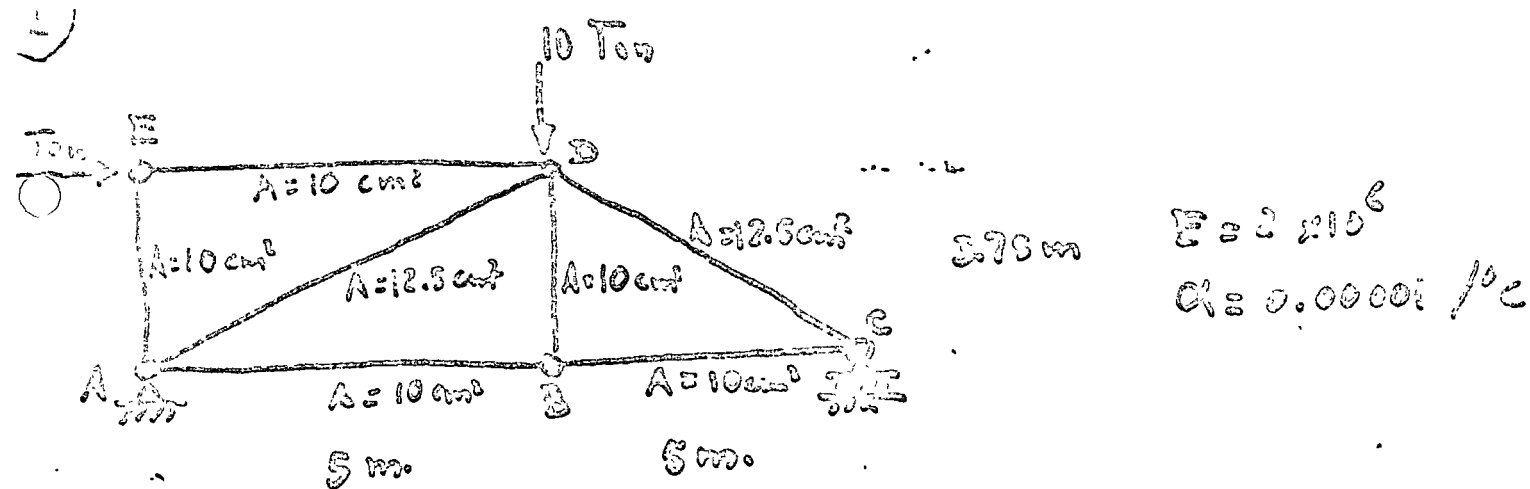
para cada barra.



$$U = \int_0^l \frac{P_p}{EA} dz = \frac{P_p}{AE} l$$

Para toda la estructura:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{P_i l_i}{E_i A_i}$$



Calcular el desplazamiento horizontal de C y el vertical de D; es la acción de las cargas indicadas y de un aumento de temperatura de 20°C en los miembros ED y DC

1) Efecto de las cargas:

Miembro	Longitud (cm)	Área (cm²)	$\frac{l}{EA}$	P (Ton)	P.	$\frac{Pl}{EA}$	P _v	$\frac{P_v l}{EA}$
AB	500	10	25×10^{-6}	11.7	-1	-0.292	0.67	0.196
BC	500	10	25×10^{-6}	11.7	-1	-0.292	0.67	0.196
AE	375	10	17×10^{-6}	0	0	0	0	0
ED	375	10	17×10^{-6}	0	0	0	0	0
EO	500	10	25×10^{-6}	-10	0	0	0	0
DC	625	12.5	25×10^{-6}	-14.3	0	0	0.89	0.307
AD	625	12.5	25×10^{-6}	-2.1	0	0	0.89	0.044
					Σ	-0.584 cm		0.743

2) Efecto del cambio de temperatura.

$$\Delta_{ED} = 1 \times 10^{-5} \times 20 \times 500 = 0.1 \text{ cm}$$

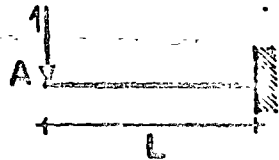
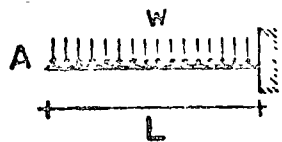
$$\Delta_{DC} = 1 \times 10^{-5} \times 20 \times 625 = 0.125 \text{ cm}$$

$$\text{Desp. horizontal de C} = 0 \times 0.1 + 0 \times 0.125 = 0$$

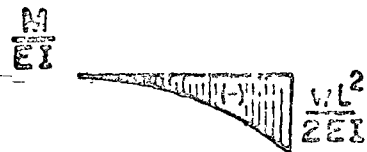
$$\text{Desp. vertical de D} = 0 \times 0.1 - 0.89 \times 0.125 = -0.115 \text{ cm}$$

$$\text{Desp. total horizontal de C} = -0.584$$

CALCULAR η_A y ϕ_A DE LA SIGUIENTE ESTRUCTURA POR TRABAJO VIRTUAL USANDO LAS TABLAS DE INTEGRALES.



CALCULO DE η_A



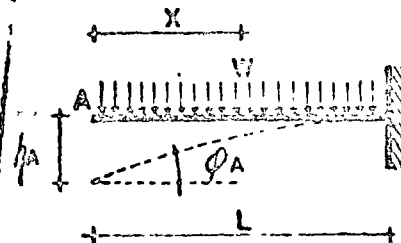
INTERSECTAR EN TABLAS :

°REGLON 2 con °COLUMNA 6

°REGLON 8 con °COLUMNA 2

$$\eta_A = \frac{1}{4} \text{ sik} = \frac{1}{4} (L)(-L) \left(\frac{-wL^2}{2EI} \right) = \frac{wL^4}{8EI}$$

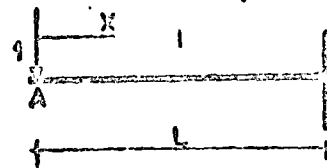
CALCULAR η_A y ϕ_A , DE LA SIGUIENTE ESTRUCTURA, USANDO EL METODO DE TRABAJO VIRTUAL.



ECUACION DEL MOMENTO FLEXIONANTE

$$M = -\frac{w x^2}{2}$$

OBTENCION de η_A



ECUACION DEL MOMENTO FLEXIONANTE, APLICANDO UNA FUERZA UNITARIA EN EL PUNTO A y EN DIRECCION DEL DESPLAZAMIENTO.

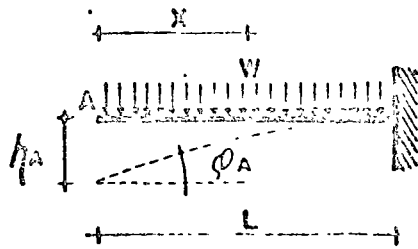
$$m = -x$$

AHORA:

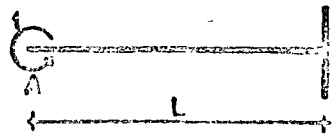
$$\eta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-wx^2)(-x)}{2EI} dx = \int_0^L \frac{wx^3}{2EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \left[\frac{wx^4}{4} \right]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$

CALCULAR η_A y ϕ_A , DE LA SIGUIENTE ESTRUCTURA, USANDO EL METODO DE TRABAJO VIRTUAL.



OBTENCION de ϕ_A



ECUACION DEL MOMENTO FLEXIONANTE

$$M = -\frac{w x^2}{2}$$

ECUACION DEL MOMENTO FLEXIONANTE, APLICANDO UN MOMENTO UNITARIO EN EL PUNTO A y EN DIRECCION DEL CERO.

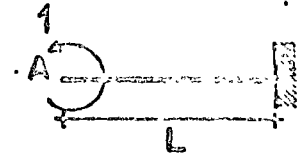
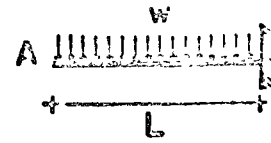
$$m = -1$$

ANOTA:

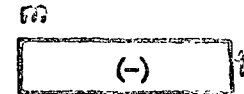
$$\phi_A = \int_0^L \frac{M m}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-w x^2)(-1)}{2EI} dx = \int_0^L \frac{w x^2}{2EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \left[\frac{w x^3}{3} \right]_0^L = \frac{w L^3}{6EI}$$

CALCULAR η_A y ϕ_A DE LA SIGUIENTE ESTRUCTURA POR TRABAJO VIRTUAL USANDO LAS TABLAS DE INTEGRALES.



CALCULO DE ϕ_A



INTERSECTAR EN TABLAS :

°RENGLON 1 con °COLUMNA 6

°RENGLON 6 con °COLUMNA 1

$$\phi_A = \frac{1}{3} m L = \frac{1}{3} (1)(L) \left(\frac{1}{2EI} \right) = \frac{w L^3}{6EI}$$

Tabla 6. Valores

	ak	$\frac{1}{2}ak^2$	$\frac{1}{2}a_1(k_1+k_2)$
	$\frac{1}{2}akl$	$\frac{1}{3}ak^2$	$\frac{1}{6}a_1(l_1+2l_2)$
	$\frac{1}{2}akl$	$\frac{1}{6}akl$	$\frac{1}{6}a_1(2l_1+l_2)$
	$\frac{1}{2}a(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}a(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}a \cdot \left\{ \begin{matrix} 2i_1k_1+i_2k_2 \\ +i_1k_1+2i_2k_2 \end{matrix} \right\}$
	$\frac{2}{3}ak_m k$	$\frac{1}{3}ak_m k$	$\frac{1}{3}ak_m(k_1+k_2)$
	$\frac{2}{5}akl$	$\frac{6}{12}akl$	$\frac{1}{12}a(5k_1+5k_2)$
	$\frac{2}{5}akl$	$\frac{1}{4}akl$	$\frac{1}{12}a(6k_1+3k_2)$
	$\frac{1}{3}akl$	$\frac{1}{4}akl$	$\frac{1}{12}a(k_1+3k_2)$
	$\frac{1}{5}akl$	$\frac{1}{12}akl$	$\frac{1}{12}a(2k_1+k_2)$
	$\frac{1}{5}akl$	$\frac{1}{6}a(1+\alpha)kl$	$\frac{1}{6}a \left\{ \begin{matrix} (1+\beta)k_1 \\ + (1+\alpha)k_2 \end{matrix} \right\}$
$\int l^2 dx$	ak^3	$\frac{1}{8}ak^3$	$\frac{1}{3}a \left\{ \begin{matrix} k_1^3 + k_2^3 \\ + k_1k_2 \end{matrix} \right\}$

Tabla 7. Valores

	$\frac{2}{3}ak_m k$	$\frac{2}{5}akl$	$\frac{1}{4}akl$	$\frac{1}{2}akl$
	$\frac{1}{3}ak_m k$	$\frac{5}{12}akl$	$\frac{1}{4}akl$	$\frac{1}{6}a(1+\alpha)kl$
	$\frac{1}{3}ak_m k$	$\frac{1}{4}akl$	$\frac{1}{12}akl$	$\frac{1}{6}a(1+\beta)kl$
	$\frac{1}{3}a(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}a(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}a(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}ak \left\{ \begin{matrix} (1+\beta)i_1 \\ + (1+\alpha)i_2 \end{matrix} \right\}$
	$\frac{8}{15}ak_m k_m$	$\frac{7}{15}ak_m k$	$\frac{1}{5}ak_m k$	$\frac{1}{3}a(1+\alpha\beta)k_m k$
	$\frac{7}{15}akl k_m$	$\frac{8}{15}akl k$	$\frac{3}{10}akl k$	$\frac{1}{12}a(5-\beta-\beta^2)kl$
	$\frac{7}{15}akl k_m$	$\frac{11}{30}akl k$	$\frac{2}{15}akl k$	$\frac{1}{12}a(5-\alpha-\alpha^2)kl$
	$\frac{1}{6}akl k_m$	$\frac{3}{10}akl k$	$\frac{1}{6}akl k$	$\frac{1}{12}a(1+\alpha+\alpha^2)kl$
	$\frac{1}{6}ak_m k_m$	$\frac{2}{15}akl k$	$\frac{1}{30}akl k$	$\frac{1}{12}a(1+\beta+\beta^2)kl$
	$\frac{1}{3}a(1+\alpha\beta)kl k_m$	$\frac{1}{12}a(5-\beta-\beta^2)kl$	$\frac{1}{12}a(1+\alpha+\alpha^2)kl$	$\frac{1}{3}akl k$
$\int l^2 dx$	$\frac{8}{15}ak_m^3$	$\frac{6}{15}ak^3$	$\frac{1}{6}ak^3$	$\frac{1}{8}ak^3$

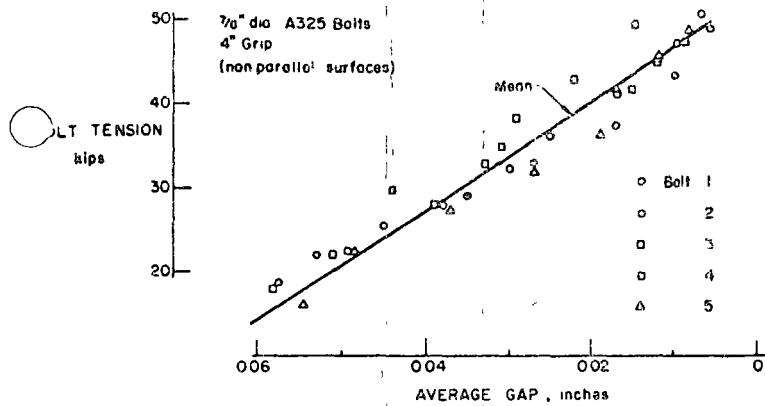


Fig. 10. Calibration of load indicators for $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts with non-parallel surfaces

condition. For example, $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts had bolt tensions which varied from 39.5 kips to 47.5 kips at 0.015 in. average gap

Measuring the gap with tapered surfaces was difficult to do. Also judging the gap by eye was not easy. An alternate method of closing the gap on one edge provided average bolt tensions that were nearly identical to the average gap closure. The $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts varied from 36.5 kips to 47.5 kips at point of closure and yielded an average value of 41 kips (specified minimum = 39 kips). The $1\frac{1}{8}$ -in. A325 bolts varied from 50 kips to 72.5 kips, with an average value of 59 kips vs. the specified minimum of 56 kips. Directly comparable results were obtained for other bolt diameters and the A490 bolts.

For non-parallel surfaces, closure of the gap somewhere around the bolt head seems to be a more practical requirement for field practice, rather than prescribing the average gap closure.

Bolts Installed in Simulated Joints—The $\frac{7}{8}$ -in. A325 and A490 bolts were installed in a simulated 12-bolt joint as shown in Table 1. Bolts were first snug tightened with a hand wrench to compact the connected plies. Subsequently each bolt was tightened sequentially to a gap closure of 0.015 in. or less. The bolt elongation and gap closure were measured after each bolt was tightened to determine the effect of the tightening on adjacent fasteners. In this test the point to stop impacting was judged by visual observation of the gap closure, followed by a check with the feeler gage. This would reproduce likely site procedures.

All bolt clamping forces, as determined by gap and bolt elongation, exceeded the specified minimum tension. In general the measured gap after installation was less than 0.015 in. The average value was about 0.011 in. and yielded a bolt force of about 45 kips for the $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts. The test with $\frac{7}{8}$ -in. A490 bolts yielded an average bolt force of 58 kips.

Only very minor relaxation in bolt force was observed in adjacent bolts after tightening a bolt. The change in bolt tension as determined by a change in bolt elongation was directly comparable to changes observed with the turn-of-nut procedure.⁵ A change in the gap could not be detected.

SUMMARY

This examination of *Coronet* load indicators has indicated that, when calibrated in a hydraulic bolt calibrator, the average load reached at a gap of 0.015 in. was always equal to or greater than the specified minimum bolt tension.

Bolts installed in plates with parallel surfaces resulted in an average gap closure of about 0.011 in. This corresponded to a bolt clamping force 10 to 15 percent greater than the specified minimum tension. It would appear that by requiring that the gap be no more than 0.015 in., field installations will always result in bolt tensions, which exceed the minimum required bolt tension.

Since the gap closure is independent of grip length, the use of the load indicator should overcome problems related to over-tightening which are encountered at times with short grip fasteners.

Bolts installed in plates or shapes with out-of-parallel surfaces can utilize the average gap closure as an indication of the bolt tension. However, an equally reliable method appears to result when the gap is completely closed at some point around the load indicator.

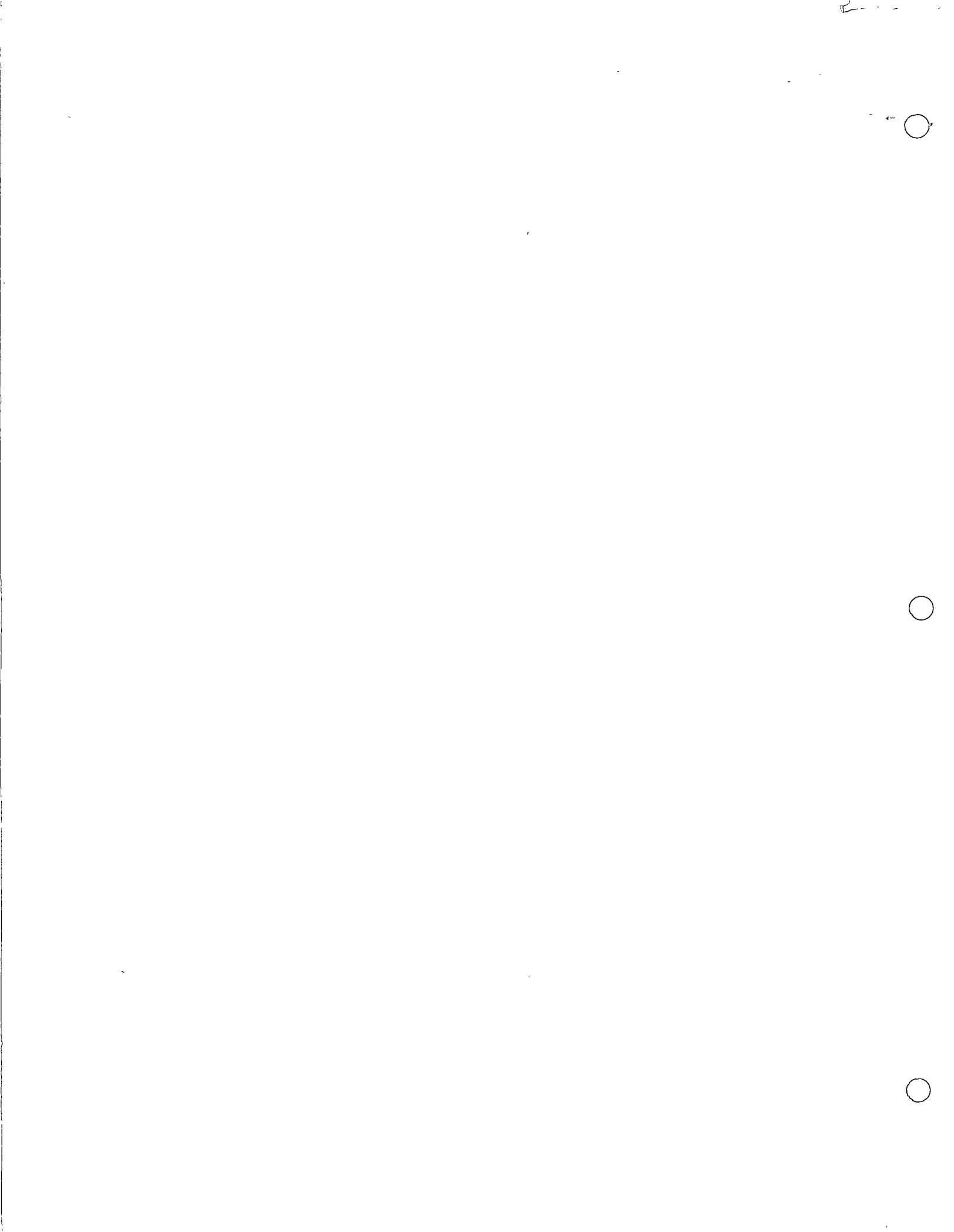
Care should be taken to avoid complete closure of the gap at all points around the washer. This will prevent the possibility of over-tightening the bolt to an extent causing damage; it will also prevent satisfactory inspection of the bolt, since it is not possible to determine what bolt tension exists in the closure condition.

ACKNOWLEDGMENTS

This study was carried out at Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania. The investigation was sponsored by Cooper and Turner, Ltd.

REFERENCES

1. Research Council on Riveted and Bolted Structural Joints Specifications for Assembly of Structural Joints Using ASTM A325 or A490 Bolts, April 18, 1972.
2. Rumpf, J. L. and Fisher, J. W. Calibration of A325 Bolts. *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 89, ST6, December 1963.
3. Sterling, G. H., E. W. J. Troup, E. Chesson, and J. W. Fisher. Calibration Tests of A490 High Strength Bolts. *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 91, ST 5, October 1965.
4. Cullimore, M. S. G. and Boston, R. M. The Performance of High Strength Friction Grip Bolts with Countersunk Heads. *Civil Engineering Department, University of Bristol, England*, 1971.
5. Chesson, E. and Munse, W. H. Studies of the Behavior of High-Strength Bolts and Bolted Joints. *Engineering Experiment Bulletin 469, University of Illinois, Urbana*, 1965.





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO.

Pandeo Lateral de Vigas de Acero

ING. JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ

Flaqueo Lateral de vigas.-

Dado que parte de la sección de una pieza trabajando a flexión está sometida a esfuerzos de compresión, son de esperarse en ella problemas de flaqueo.

En efecto, si el momento que actúa sobre una viga se aumenta paulatinamente a partir de un valor pequeño, los esfuerzos normales irán aumentando también hasta que, para un valor determinado del momento la pieza falla. Con frecuencia, en piezas de longitud considerable y poco espesor, el esfuerzo que corresponde a la falla es menor que el que se requeriría para agotar la resistencia del material. Esto nos indica que, en este caso, como en el de columnas esbeltas, la falla se ha producido debido a un problema de inestabilidad.

El flaqueo en vigas es un problema más complejo que el de columnas sometidas a carga axial por el efecto estabilizador que proporciona la parte de la pieza sometida a tensión.

La forma de falla se muestra en la fig. 4, para una pieza sometida a flexión pura mediante momentos $M_x = F \cdot a$ en sus extremos, y sufre de tal modo que solo los giros alrededor de los ejes x y y pueden presentarse.

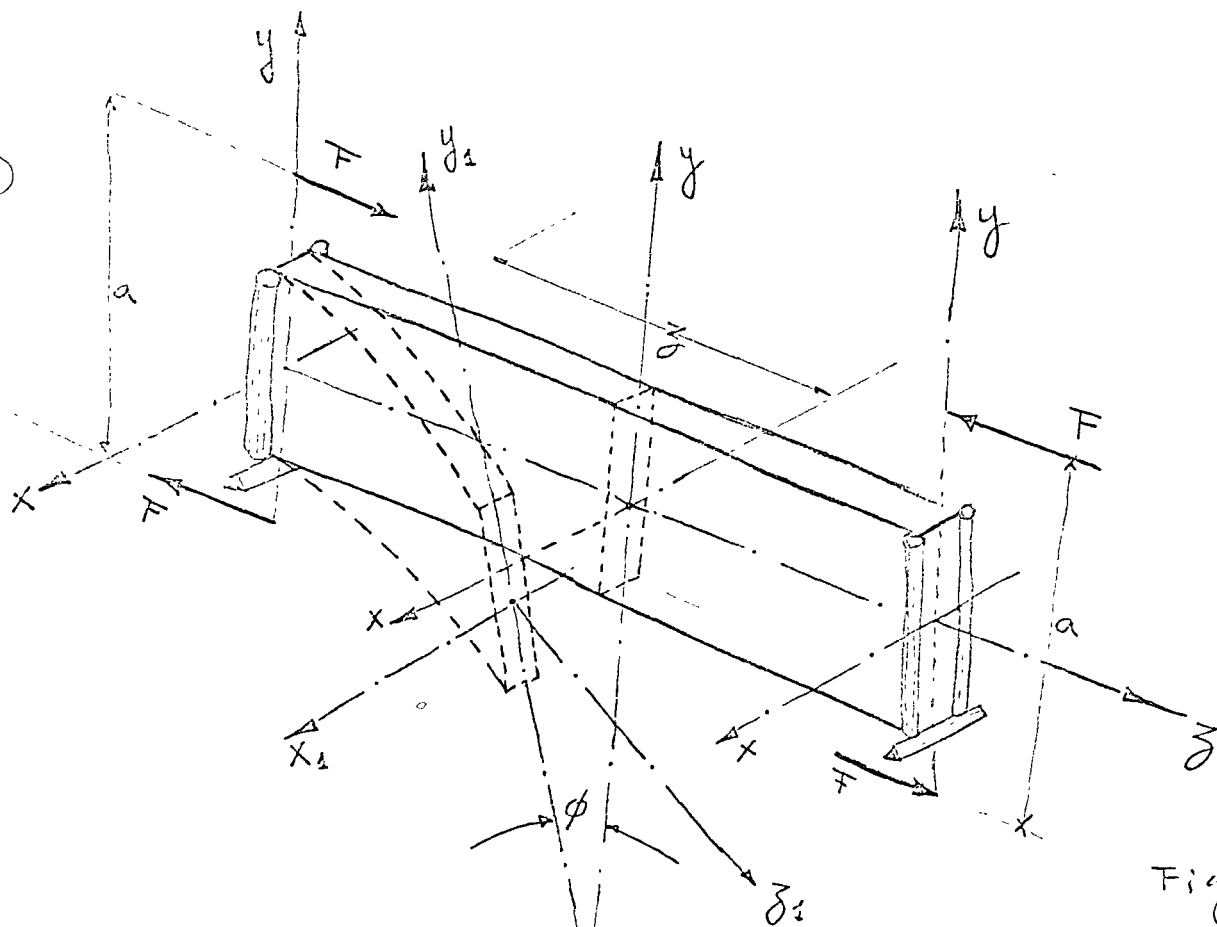
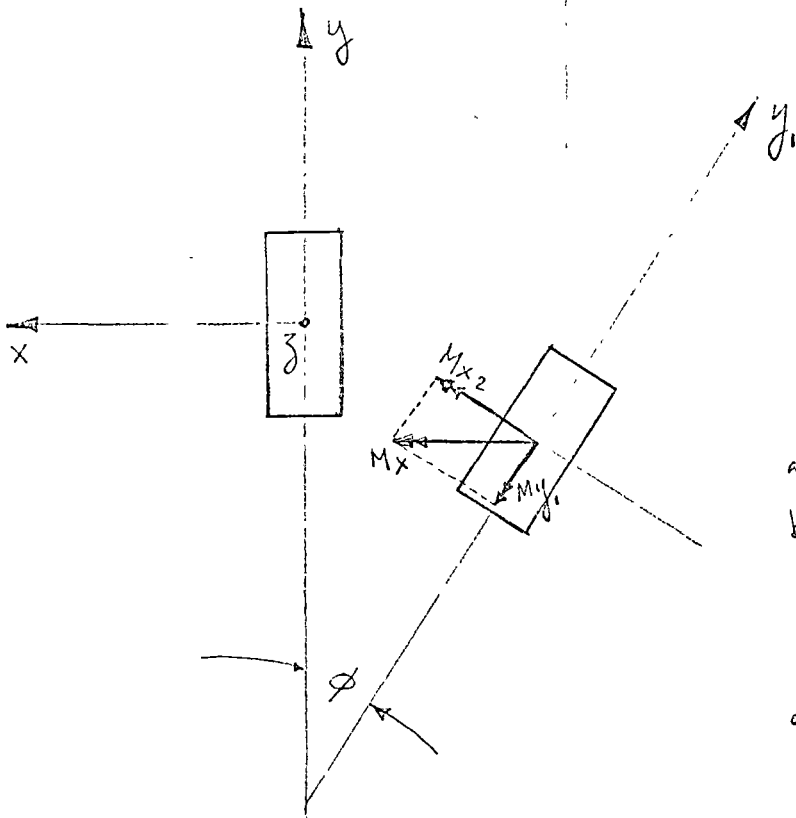
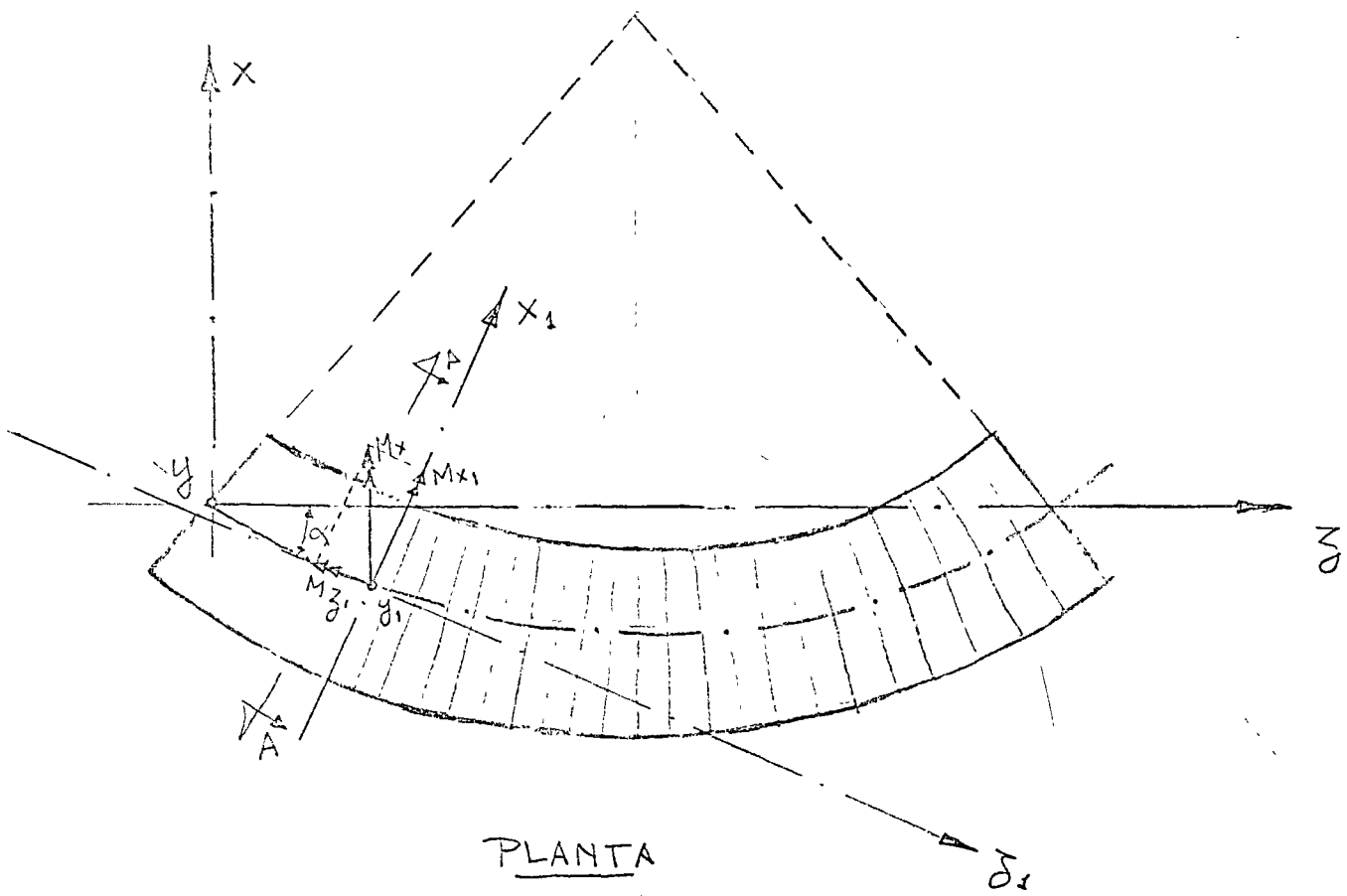


Figura 1

El momento correspondiente a la falla por pandeo lateral recibe el nombre de momento crítico y cuando se llega a él son posibles dos configuraciones de equilibrio (en forma similar a lo que ocurre cuando se llega a la carga crítica en piezas cargadas axialmente). La primera de ellas es una flexión solo alrededor del eje x , es decir, en el plano $y-z$, y la segunda una configuración ligeramente deformada como se muestra en la fig 1 que implica la aparición de momentos alrededor de los ejes x_1, y_1, z_1 que pueden valorarse en función del momento exterior advante M_x que los produjo.

En efecto, si se observa la fig. 2 en que se presenta en planta y corte la pieza ligeramente deformada se nota que el momento flexio-



- a) $M_{x_1} = M_x$
- b) $M_{z_1} = - \frac{dx}{dz} M_x$
- c) $M_{x_2} = M_x$
- d) $M_{y_1} = M_x \phi$

Figura 2

ante actuante M_x puede descomponerse en los momentos M_{x_1} y M_{z_1} alrededor de los ejes x_1 y z_1 .

Dado que el ángulo α es muy pequeño podemos suponer que $\cos \alpha = 1$ y por tanto que $M_x = M_{x_1}$ y también que $M_{z_1} = -\alpha M_x = -dx/dz M_x$

Si se tiene en cuenta ahora el giro φ , también muy pequeño, vemos que el momento M_x tiene también una componente según el eje y con valor $M_{y_1} = M_x \cdot \varphi$

Se pueden establecer entonces las siguientes ecuaciones:

$$1. \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{E I_x}$$

$$2. \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{M_{y_1}}{E I_y}$$

$$3. \frac{d\varphi}{dz} GJ - C_w E \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = M_{z_1}$$

Las expresiones 1 y 2 son las ecuaciones diferenciales de la elástica que relacionan las curvaturas con los momentos con respecto a los ejes x_1 y y_1 que necesariamente las acompañan.

La expresión 3 relaciona la deformación por torsión con el momento que la produce, el primer término del segundo miembro representa el momento torsionante requerido para hacer girar a la sección alrededor de su eje longitudinal venciendo la rigidez torsional GJ de la pieza. El segundo término aparece debido al hecho de que,

excepto en ciertos casos especiales (piezas de sección recta circular por ejemplo), al producirse la torsión, las secciones rectas planas antes de la deformación no continúan siéndolo después de ella si no que se alabean y, en los casos en que este alabeo no puede producirse libremente, se requiere la aplicación de un momento de torsión que si bien en ciertas secciones es pequeño comparado con el requerido para vencer la rigidez torsional de la pieza, en otros casos (viguetas por ejemplo) tiene una gran importancia.

C_w llamada constante de alabeo es un coeficiente que depende de la forma de la sección recta de la pieza y define la importancia relativa de este efecto del alabeo.

Si sustituimos en las expresiones 2 y 3, M_y y M_z por sus valores en función de M_x , se tiene:

$$4. \quad EI_y \frac{d^2 x}{dz^2} - M_x \phi = 0$$

$$5. \quad \frac{d\phi}{dz} GJ - C_w E \frac{d^3 \phi}{dz^3} + \frac{dx}{dz} M_x = 0$$

Diferenciando esta última ecuación con respecto a z

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} GJ - C_w E \frac{d^4 \phi}{dz^4} + \frac{d^2 x}{dz^2} M_x = 0$$

pero de 4 :

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_y} \phi$$

luego:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} - C_w E \frac{d^4 \phi}{dz^4} + \frac{M_x^2}{EI_y} \phi = 0$$

esto es:

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - 2\alpha \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \beta \phi = 0$$

donde:

$$\alpha = \frac{GJ}{2EC_w} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{M_x^2}{EI_y C_w}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial y determinando las constantes de integración a partir de la condición de que, en sus extremos, está evitada la rotación de la pieza alrededor del eje z, ($\phi = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$ para $z=0$ y $z=l$) se llega a

obtener el valor del momento crítico:

$$6.- \quad M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w}{GJ} \frac{\pi^2}{l^2} \right)}$$

La expresión anterior tiene una serie de limitaciones con las que las piezas que se utilizan en la práctica como piezas a flexión en general no cumplen.

Es por ello que se afecta con ciertos coeficientes que la hacen más general.

En primer término consideraremos la limitación consistente en que la expresión es solo aplicable en el rango de comportamiento elástico del material, esto es, para esfuerzos menores que la mitad del esfuerzo en el límite de fluencia. Se puede, como en el caso de columnas con carga axial, subsanar esta limitación, si se sustituye el módulo de elasticidad E por el módulo tangente E_t y G por G_t .

Se supone por ello, que la relación entre el esfuerzo crítico en el rango elástico y en el plástico es la misma en traveses que en columnas y que el esfuerzo crítico en el rango de comportamiento inelástico se puede calcular, en función del que resultaría de aplicar la expresión que lo da en el rango elástico, con la siguiente fórmula

$$7.- \quad \bar{\sigma}_{cr} = \sigma_y \left(1 - 0.25 \frac{\sigma_y}{\sigma_e} \right) = \frac{M_{crp}}{S}$$

$$\sigma_e = \frac{M_{cr}}{S}$$

El valor del momento crítico corregido por inestabilidad puede obtenerse de las expresiones anteriores en función de M_{cr} y esto se ha graficado en la Fig. 8.

- Otras limitaciones que deben tenerse en cuenta son las que se refieren a la variación del momento flexionante a lo largo de la viga (ya que la expresión deducida corresponde a un momento flexionante constante) y las que se refieren a la forma de aplicación de la carga sobre la viga (solo momentos en los extremos en la fórmula deducida).

Con objeto de subsanar también estas limitaciones se afecta la ecuación 6 de un factor C_4 que depende tanto de la forma del diagrama de momentos como del modo en que la carga se aplica. En las figuras 4, 5, 6 y 7 se tienen valores de C_4 para distintos casos.

- Conviene ahora examinar la forma en que, a partir de la expresión general, puede llegarse a las fórmulas que recomiendan las especificaciones del AISI para calcular los esfuerzos permisibles de viguetas I sujetas a pandeo lateral.

Se presenta, por una parte, la fórmula siguiente para calcular el esfuerzo permisible en piezas a flexión en que el pandeo lateral es posible:

$$F_b = \frac{12 \times 10^3 C_b}{L_d / r_T} \quad \text{en sistema inglés} \quad \text{A.S.-7}$$

$$F_b = \frac{843700 C_b}{L_d / r_T} \quad \text{en sistema métrico.}$$

- Esta expresión se obtiene de la ecuación general utilizando, para simplificarla, características geométricas promedio que corresponden, en forma aproximada, a todos

Las viguetas y perfiles H laminados que se encuentran en la práctica. Así, se supone que:

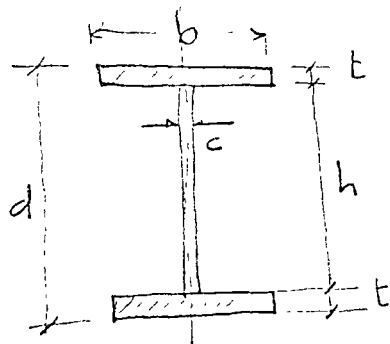
$$S_x = 1.1 btd$$

$$I_y = bt^3/6$$

$$J = 0.9bt^3$$

$$h = 0.95d$$

$$C_w = I_y h^2/4$$



Sustituidos estos valores en la expresión general se obtiene:

$$\sigma_{cr} = \frac{M_{cr}}{S_x} = \frac{0.69 E}{ld/bt} \sqrt{1 + A}$$

$A = 1.07 \frac{d/t}{l/b}$ y representa la contribución que a la resistencia a pandeo lateral proporciona la rigidez a la flexión de los patines.

Si A se desprecia se obtiene:

$$\sigma_{cr} = \frac{0.69 E}{ld/bt}$$

que, afectada de un coeficiente de seguridad adecuado y del término correctivo C_b que tiene en cuenta la variación del momento flexionante a lo largo del dano de la pieza, nos lleva a la fórmula 1.5-7 de las especificaciones y que sería válida, en rigor, solo en el rango de comportamiento elástico del material.

$$F_b = \frac{12 \times 10^3 C b}{l d / A t} \quad (\text{sistema inglés}) \quad 4.5-7$$

$$F_b = \frac{843700 C b}{l d / A t} \quad (\text{sistema métrico})$$

Las simplificaciones anteriores, aplicadas a traveses armados conducen a resultados excesivamente conservadores, es por ello que para este caso se establecen los siguientes valores:

$$I_y = 2 \frac{t b^3}{12}$$

$$J = \frac{1}{3} (t^3 b + c^3 h + t^3 b)$$

$$C_w = \frac{I_y h^2}{4}$$

$$G = E / 2(1 + \mu)$$

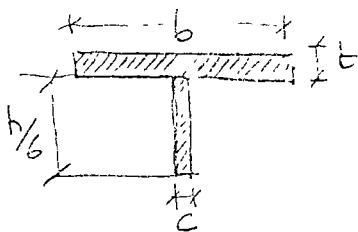
$$I_x = 2 b t \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{c h^3}{12}$$

$$S_x = \frac{2 I_x}{h}$$

Que llevados a la expresión general conducen a:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\left(\frac{0.65 E}{l d / b t} \right)^2 + \left(\frac{\pi^2 E}{(l / r_y)^2} \right)^2}$$

en donde r_y es el radio de giro de la parte de la sección recta de la pieza que se muestra en la figura con respecto a un eje de simetría vertical.



Si en esta expresión se desprecia ahora el primer tér -

mino dentro del radical se llega a:

$$\sqrt{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l/r_y)^2}$$

válida únicamente en el rango de comportamiento elástico del material, esto es para $\frac{l}{r_y} > C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$ y que, afectada del coeficiente

C_b , es la fórmula 1.5-6b de las especificaciones que establecen que:

$$\text{para } l/r_y \geq \sqrt{\frac{510 \times 10^3 C_b}{\sigma_y}} \quad (\text{sistema inglés})$$

$$F_b = \frac{170 \times 10^3 C_b}{(l/r_y)^2} \quad (\text{sistema inglés})$$

para valores de $\frac{l}{r_y} < C_c$ se está fuera del rango de comportamiento elástico del material y conviene hacer uso de la ecuación 7 para tenerlo en cuenta, haciéndolo así, utilizando un coeficiente de seguridad adecuado y utilizando de nuevo el factor C_b se llega a la fórmula 1.5-6a de las especificaciones

$$F_b = \left[\frac{2}{3} - \frac{\sigma_y (l/r_y)^2}{1530 \times 10^3 C_b} \right] \sigma_y \quad 1.5.6a \quad (\text{sistema inglés})$$

válida para:

$$\sqrt{\frac{102 \times 10^3 C_b}{\sqrt{I_y}}} \leq \lambda / r_y \leq \sqrt{\frac{510 \times 10^3 C_b}{\sqrt{I_y}}} \quad (\text{sistema inglés})$$

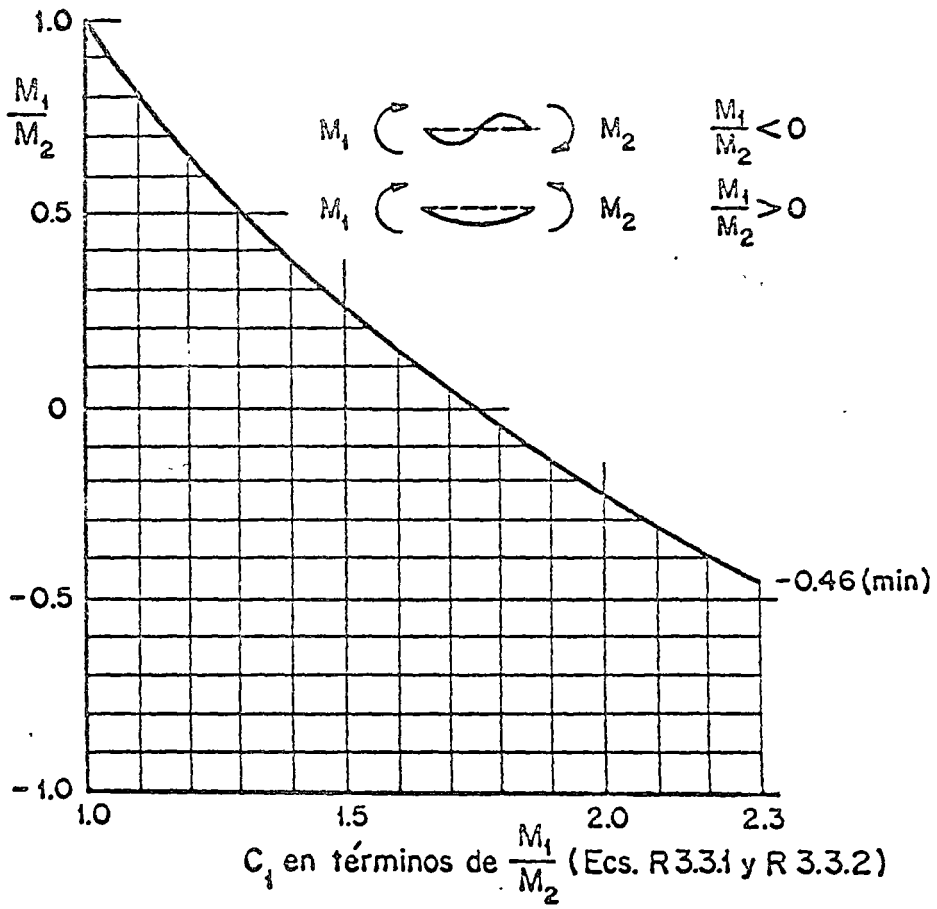
El factor C_b que aparece en todas las expresiones permite liberalizar los esfuerzos permisibles al tener en cuenta la variación del momento flexionante a lo largo del claro que en general no es tan crítica como la supuesta en la deducción de la expresión general

$$C_b = 1.75 + 1.05 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + 0.3 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2.3$$

donde M_1 es el menor y M_2 el mayor de los momentos flexionantes con respecto al eje de mayor momento de inercia de la sección en los extremos de la pieza. M_1/M_2 es positiva cuando tienen el mismo signo (doble curvatura) y negativa cuando tienen signo contrario (curvatura simple). Cuando el momento entre los extremos es mayor que en estos se debe tomar $C_b = 1$.

(Ver 3.3a)

Nomograma para la determinación de C_1



CALCULO DEL MOMENTO CRITICO DE PANDEO LATERAL DE VIGAS DE SECCION I ó H, UTILIZANDO EL METODO "EXACTO"

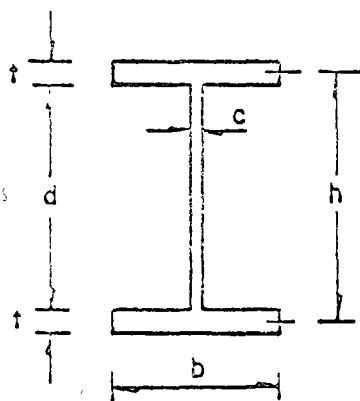
En el subcapítulo 3.3, pág 2073, de las Recomendaciones, se dan las ecs R.3.3.1 y R.3.3.2 para el cálculo del momento crítico de pandeo lateral de vigas de sección I ó H flexionadas alrededor de su eje de mayor momento de inercia, y en la pág 2072 de los Comentarios se indica que cuando se desee una precisión mayor pueden utilizarse las ecuaciones y gráficas de las refs 3.7 y 3.8.

Aquí se presenta la secuela que debe seguirse para calcular el momento crítico de acuerdo con esas referencias, utilizando gráficas que reducen notablemente el trabajo numérico requerido para hacerlo.

1o. Se escoge un perfil

2o. Se calculan el momento de inercia I_y correspondiente al eje de simetría situado en el plano del alma y el momento $M_y = S\sigma_y$ del perfil escogido, o se leen sus valores en las tablas de Propiedades de Secciones I ó H (Ad. 10 y Ad. 11)

3o. Se calcula la constante de torsión de Saint Venant, K_T , por medio de la ec $K_T = c^3 d/3 + 2 t^3 b/3$ (ver fig 1 para el significado de las literales), o se lee su valor en las tablas de Propiedades de Secciones I ó H (Ad.10 y Ad. 11)



h = Distancia entre centros de gravedad de los patines

Fig 1

4o. Se calcula el parámetro "a" por medio de la ec

$$a = 0.805 h \sqrt{I_y/K_T} (*) \quad (1)$$

o se lee su valor en las tablas de Propiedades de Secciones I ó H (Ad.10 y Ad. 11)

5o. Se determina el valor del parámetro C_4 por medio de las curvas de las figs 4 a 7

* La forma general de las ecuaciones para calcular "a" y M_c es

$$a = \sqrt{\frac{C_w E}{K_T G}}, \text{ donde } C_w \text{ es la constante de torsión por alabeo, y}$$

$$M_c = \frac{C_4}{L} \sqrt{E I_y G K_T}$$

Las ecs 1 y 2 se han obtenido sustituyendo en las generales a E y G por $2.03 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y 0.30, respectivamente; por consiguiente, son válidas exclusivamente para perfiles de acero.

Tomando en las ecs 1 y 2 a I_y y K_T en cm^4 , h y L en cm, "a" se obtiene en cm y M_c en kg-cm.

6o. Se calcula el momento crítico de pandeo lateral con la ecuación

$$M_c = \frac{1\,265\,000\,C_4}{L} \sqrt{I_y K_T} \quad (*) \quad (2)$$

7o. Se compara el momento M_c , calculado en el paso anterior, con $M_y/2$:

- a) Si M_c es menor o igual que $M_y/2$, el pandeo se presenta en el intervalo elástico, y el valor obtenido en el paso 6 es el momento crítico de pandeo lateral buscado.
- b) Si M_c es mayor que $M_y/2$, el pandeo se presenta en el intervalo inelástico, y es necesario corregir el valor obtenido en el paso 6 para obtener el momento crítico de pandeo lateral buscado. La corrección se efectúa por medio de la ecuación

$$(M_c)_{\text{corregido}} = M_y (1 - 0.25 M_y/M_c) \quad (3)$$

en la que M_c es el valor dado por la ec 2, o utilizando la curva de la fig 8, que es aplicable a perfiles de acero A36.

La ec 3 es la R.3.3.3 de las Recomendaciones.

Ejemplo 1. Determinar el valor máximo de la carga P que puede soportar la viga de la figura, aplicada en su patín superior, teniendo en cuenta que los extremos pueden girar libremente alrededor del eje vertical de simetría y que no existe ningún soporte lateral intermedio. El acero utilizado es A36.

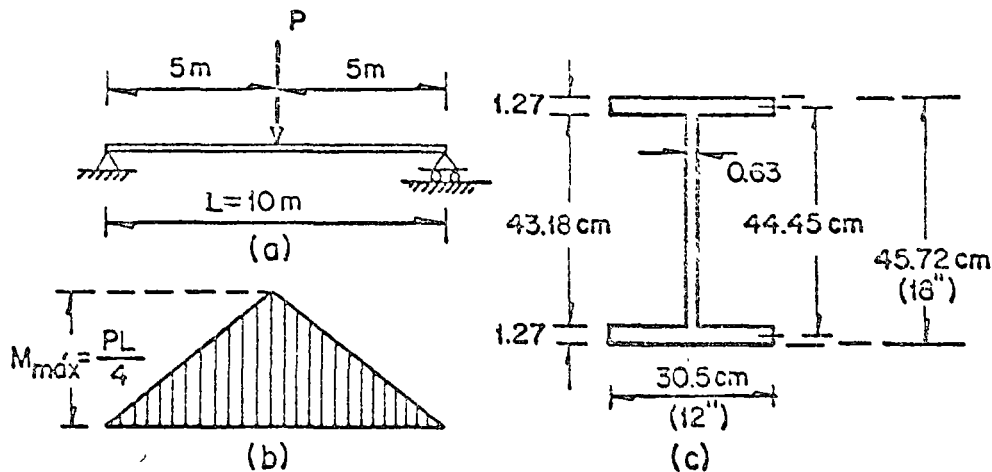


Fig 2

Las propiedades de la sección transversal aparecen en la Ad.10.

a) Utilizando las Recomendaciones.

De acuerdo con R.3.3, el momento crítico elástico es el mayor de los dos valores siguientes:

° Ver nota al pie de la página anterior.

$$M_{c1} = \frac{EA_t}{L/r_y} C_1 = \frac{2039000 \times 104.84 \times 1.27}{1000/7.6} \times 1.0 = 2070000 \text{ kg-cm} = 20.7 \text{ Tm}$$

$$M_{c2} = \frac{4.7EAd}{(L/r_y)^2} C_1 = \frac{4.7 \times 2039000 \times 104.84 \times 45.72}{(1000/7.6)^2} = 2670000 \text{ kg-cm} = 26.7 \text{ Tm}$$

La longitud L que aparece en las ecuaciones anteriores es la distancia entre puntos del patín comprimido fijos lateralmente, que en este caso es la longitud total de la viga.

C_1 vale 1.0 porque el momento en el centro del claro es mayor que en cualquiera de los apoyos.

Los dos valores de M_c pueden obtenerse más rápidamente utilizando los coeficientes EAt_r_y y $4.7EAdr_y^2$ tabulados en Ad. 10; empléandolos se llega a los resultados siguientes:

$$M_{c1} = (EAt_r_y) \frac{C_1}{L} = \frac{2.063 \times 10^9}{1000} = 2063000 \text{ kg-cm} = 20.6 \text{ Tm}$$

$$M_{c2} = (4.7EAdr_y^2) \frac{C_1}{L^2} = \frac{2652 \times 10^9}{10^6} = 2652000 \text{ kg-cm} = 26.5 \text{ Tm}$$

El perfil considerado tiene un $M_y = 47.0 \text{ Tm}$

$M_c = 26.7 \text{ Tm} > \frac{M_y}{2} \therefore$ El pandeo se presenta en el intervalo inelástico, y es necesario corregir el resultado obtenido hasta ahora, utilizando para ello la ec R.3.3.3.

$$(M_c)_{\text{corregido}} = M_y \left(1 - 0.25 \frac{M_y}{M_c}\right) = 47.0 \left(1 - 0.25 \times \frac{47.0}{26.5}\right) = 47.0 (1 - 0.44) = 26.3 \text{ Tm}$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}} L}{4} = 26.3 \text{ Tm} \therefore P_{\text{máx}} = \frac{26.3 \times 4}{10} = 10.5 \text{ Ton}$$

b) Utilizando el método "exacto"

- 1o. El perfil escogido es el mostrado en la fig 2c.
- 2o. De la Ad. 10 : $I_y = 5995 \text{ cm}^4$
- 3o. De la Ad. 10 : $K_T = 45.4 \text{ cm}^4$
- 4o. De la Ad. 10 : $a = 411.7 \text{ cm}$
- 5o. De la fig 5, para $a/L = 411.7/1000 \approx 0.41$, $C_4 = 4.6$

(La curva utilizada es la IAS, correspondiente al diagrama de momentos 1, a apoyos extremos que pueden girar libremente alrededor del eje "y" y carga aplicada en el patín superior de la viga.)

$$6o. M_c = \frac{1265000 C_4}{L} \sqrt{I_y K_T} = \frac{1265000 \times 4.6}{1000} \sqrt{5995 \times 45.4} = 3050000 \text{ kg-cm} = 30.5 \text{ Tm}$$

- 7o. De la Ad. 10, $M_y = 47.0 \text{ Tm}$, $M_y/2 = 23.5 \text{ Tm} \therefore M_c = 30.5 > M_y/2$

b) De la fig 8, para $\frac{M_y}{M_c} = \frac{47.0}{30.5} = 1.54,$

$$\frac{(M_c)_{\text{corregido}}}{M_c} = 0.94 \therefore (M_c)_{\text{corregido}} = 0.94 \times 30.5 = 28.7 \text{ Tm}$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}} L}{4} = 28.7 \text{ Tm} \therefore P_{\text{máx}} = \frac{28.7 \times 4}{10} = 11.5 \text{ Ton}$$

Ejemplo 2. El mismo problema del Ejemplo 1, pero con la carga colgando del patín inferior de la viga.

a) Solución utilizando las Recomendaciones

Se llega al mismo resultado que en el Ejemplo 1, $P_{\text{máx}} = 10.5 \text{ Tm}$

b) Solución utilizando el método "exacto"

Pasos 1o. al 4o., iguales que en el Ejemplo 1.

5o. De la fig. 5, para $a/L = 0.41$, $C_4 = 10.5$

(Ahora se empleó la curva |AI, correspondiente al mismo diagrama de momentos y a restricciones en los apoyos iguales a las del Ejemplo 1, pero a la carga aplicada en el patín inferior)

$$6o. M_c = \frac{1\,265\,000 \times 10.5}{1000} \sqrt{5995 \times 45.4} = 6970000 \text{ kg-cm} = 69.7 \text{ Tm}$$

$$7o. M_c > M_y/2$$

b) De la fig 8, para $\frac{M_y}{M_c} = \frac{47.0}{69.7} = 0.675,$

$$\frac{(M_c)_{\text{corregido}}}{M_c} = 0.56 \therefore (M_c)_{\text{corregido}} = 0.56 \times 69.7 = 39.0 \text{ Tm}$$

$$P_{\text{máx}} = \frac{39.0 \times 4}{10} = 15.6 \text{ Tm}$$

Obsérvese que en las Recomendaciones no se hace ninguna distinción por el hecho de que la carga esté aplicada en el patín superior o en el inferior, mientras que el método "exacto" permite determinar que la resistencia de la viga es bastante mayor en el segundo caso que en el primero.

Ejemplo 3. El mismo problema de los Ejemplos 1 y 2, pero suponiendo ahora que la viga está conectada, en sus dos extremos a columnas que impiden totalmente las rotaciones alrededor de los ejes de simetría verticales y las restringen alrededor de los horizontales, de tal manera que el diagrama de momentos flexionantes es el de la fig 3b.

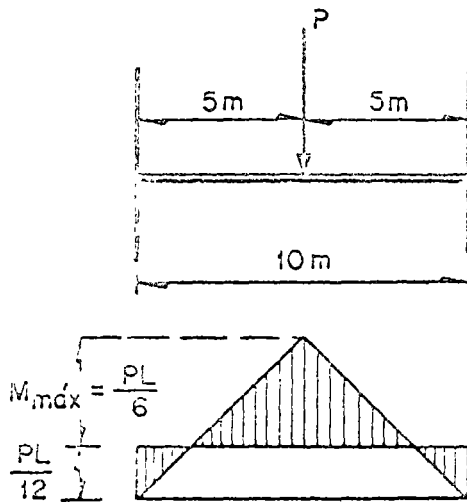


Fig 3

a) Solución utilizando las Recomendaciones.
Puesto que el momento en el centro del claro es mayor que en cualquiera de los apoyos, C_1 sigue valiendo 1, y se conserva el valor de $(M_c)_{\text{corregido}}$ calculado en el Ejemplo 1.

$$M_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}} L}{6} = 26.3 \text{ Tm}$$

$$(b) \quad \therefore P_{\text{máx}} = \frac{26.3 \times 6}{10} = 15.8 \text{ Ton}$$

Este resultado se conserva para cualquier posición de la carga P con respecto al centroide de la sección en la que está aplicada.

b) Solución utilizando el método "exacto"

Se resolverá para tres posiciones de la carga: en el patín superior de la viga, en el centroide de la sección y en el patín inferior.

Pasos 1o. al 4o, iguales que en el Ejemplo 1.

5o. De la fig 5, para $a/L = 0.41$, y

a) Carga en el patín superior (curva 3BS), $C_4 = 10.3$

b) Carga en el centroide (curva 3BC), $C_4 = 18.6$

c) Carga en el patín inferior (curva 3BI), $C_4 = 32.8$

6o. a) $M_c = 68.2 \text{ Tm}$

b) $M_c = 123.5 \text{ Tm}$

c) $M_c = 217.0 \text{ Tm}$

7o. En los tres casos M_c es mayor que $M_y/2$, de manera que hay que hacer la corrección por inelasticidad, utilizando la fig 8.

$$a) \text{ Para } \frac{M_y}{M_c} = \frac{47.0}{68.2} = 0.690, \quad \frac{(M_c)_{\text{corregido}}}{M_c} = 0.57,$$

$$(M_c)_{\text{corregido}} = 0.57 \times 68.2 = 38.8 \text{ Tm}$$

$$b) \text{ Para } \frac{M_y}{M_c} = \frac{47.0}{123.5} = 0.382, \quad \frac{(M_c)_{\text{corregido}}}{M_c} = 0.34,$$

$$(M_c)_{\text{corregido}} = 0.34 \times 123.5 = 42.0 \text{ Tm}$$

$$c) \text{ Para } \frac{M_y}{M_c} = \frac{47.0}{217.0} = 0.216, \frac{(M_c)_{\text{corregido}}}{M_c} = 0.20,$$

$$(M_c)_{\text{corregido}} = 0.20 \times 217.0 = 43.4 \text{ Tm}$$

Carga máxima:

$$a) P_{\text{máx}} = \frac{38.8 \times 6}{10} = 23.2 \text{ Ton} \quad (23.2/15.8 = 1.48)$$

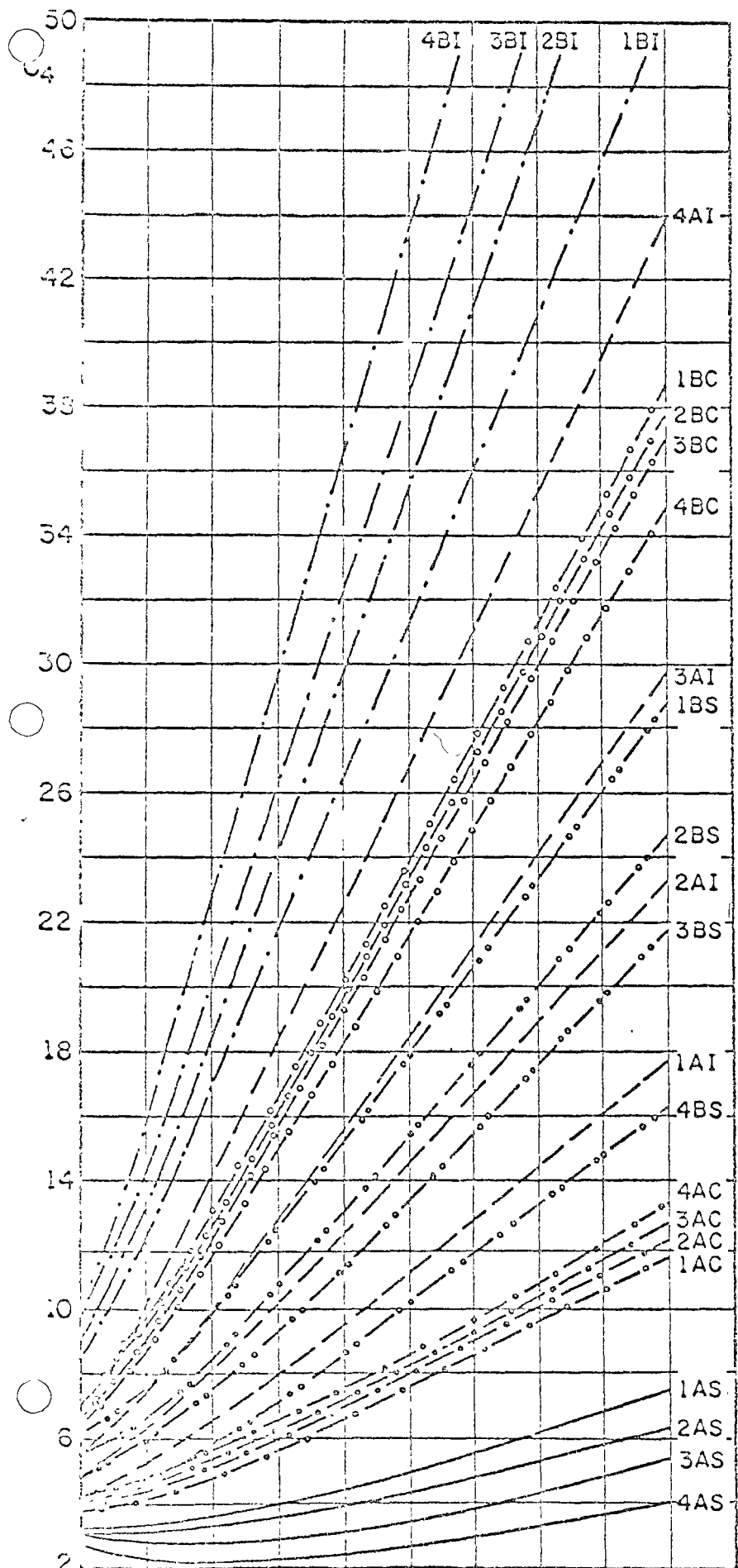
$$b) P_{\text{máx}} = \frac{42.0 \times 6}{10} = 25.2 \text{ Ton} \quad (25.2/15.8 = 1.60)$$

$$c) P_{\text{máx}} = \frac{43.4 \times 6}{10} = 26.0 \text{ Ton} \quad (26.0/15.8 = 1.65)$$

Obsérvese que las capacidades de carga obtenidas con el método exacto son considerablemente más elevadas que las calculadas con las fórmulas de las Recomendaciones (48, 60 y 65 por ciento mayores, en los casos a, b y c, respectivamente).

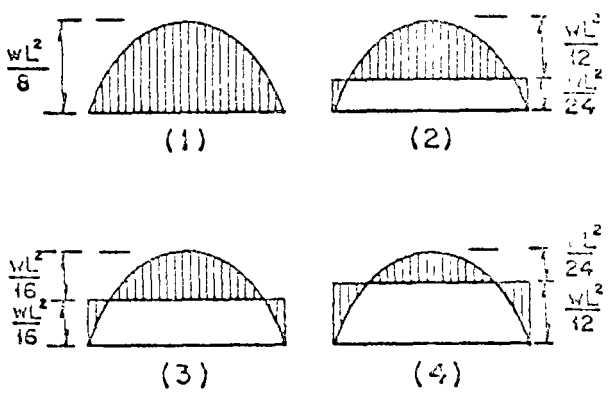
Aunque los porcentajes anteriores cambian con las condiciones de apoyo y carga, así como con las características geométricas de las vigas, la aplicación del método exacto suele llevar a diseños más económicos que los que se obtienen al aplicar las fórmulas de las Recomendaciones, ya que para obtenerlas es necesario hacer simplificaciones conservadoras, que no se requieren cuando se emplea el método exacto.

Valores del coeficiente C_4 para vigas con carga uniformemente repartida y diversas condiciones de apoyo



NOMENCLATURA

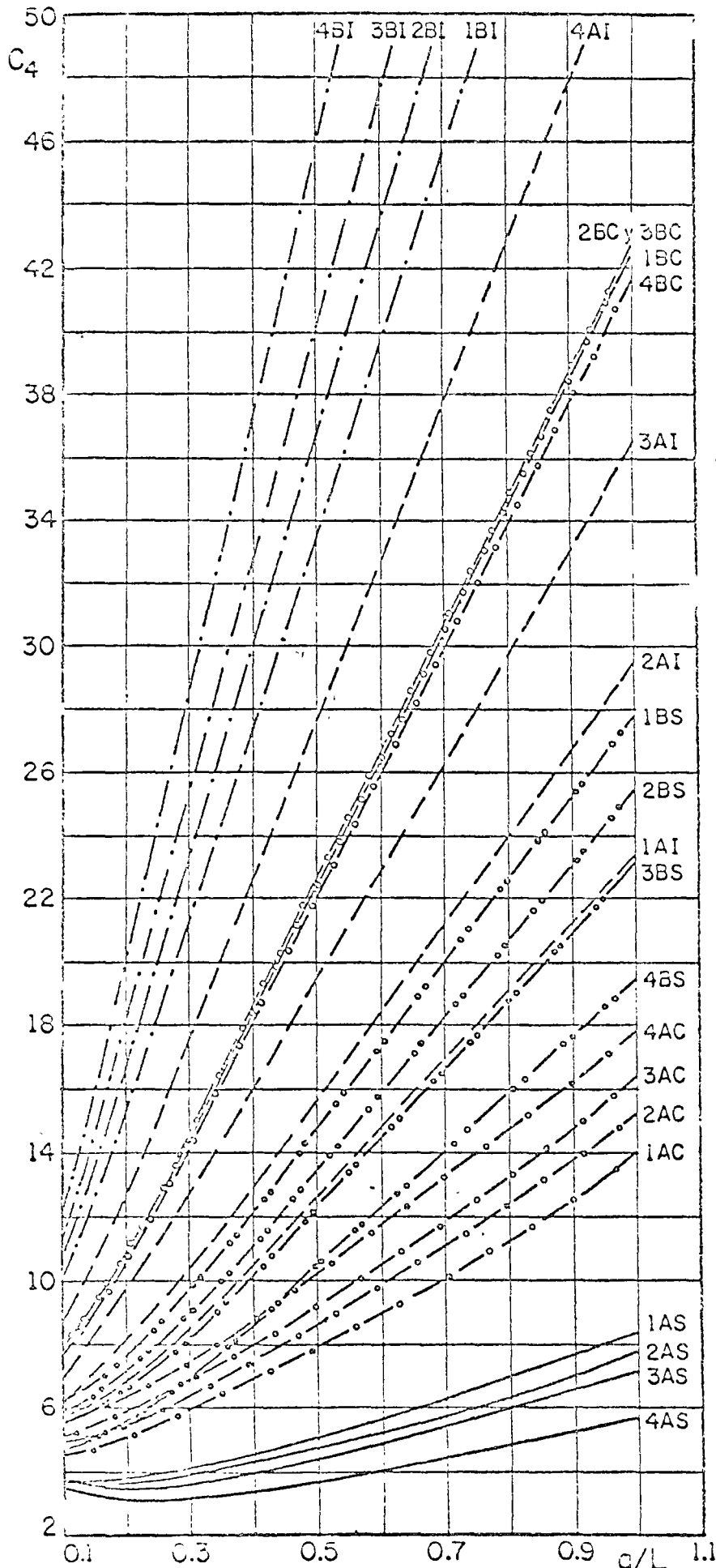
Cada curva está designada con un número seguido de dos letras
 El número se refiere a la restricción existente en los extremos de la viga respecto a giros alrededor del eje horizontal x; se han considerado los cuatro casos siguientes:



La primera letra indica las condiciones de apoyo de la viga relativas a giros alrededor del eje vertical "y":
 A, los extremos pueden girar libremente
 B, los extremos están fijos
 La segunda letra corresponde a la posición de la carga respecto al eje central de la viga:
 S, carga aplicada en el patín superior
 C, carga aplicada en el eje central
 I, carga aplicada en el patín inferior

Fig 4

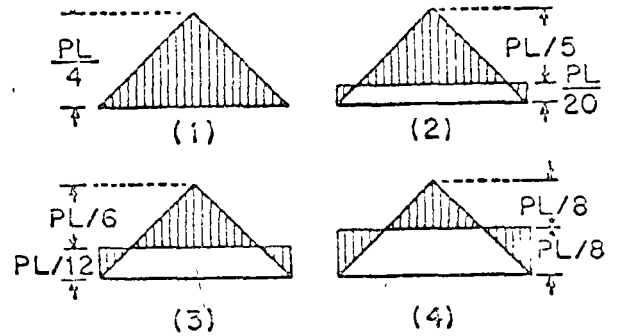
Valores del coeficiente C para vigas con una carga concentrada en el centro del claro y diversas condiciones de apoyo



NOMENCLATURA

Cada curva está designada con un número seguido de dos letras.

El número se refiere a la restricción existente en los extremos de la viga respecto a giros alrededor del eje horizontal "x"; se han considerado los cuatro casos siguientes:



La primera letra indica las condiciones de apoyo de la viga relativas a giros alrededor del eje vertical "y":

A, los extremos pueden girar libremente

B, los extremos están fijos

La segunda letra corresponde a la posición de la carga respecto al eje centroidal de la viga:

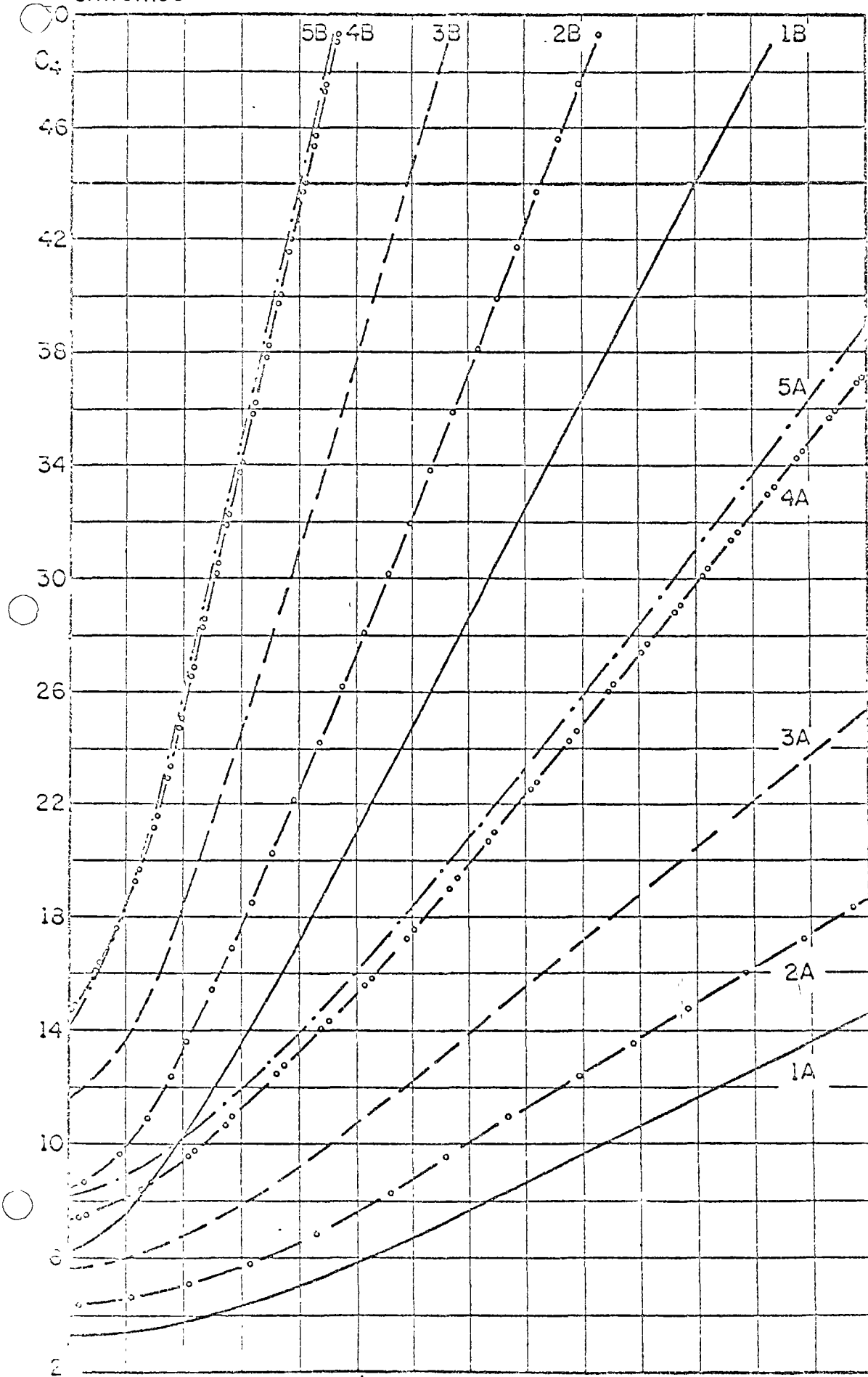
S, carga aplicada en el patín superior

C, carga aplicada en el eje centroidal

I, carga aplicada en el patín inferior

Fig 5

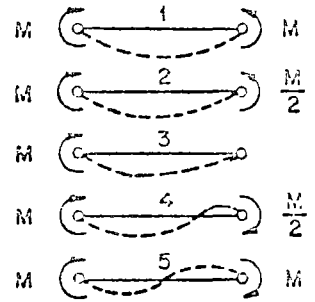
Valores del coeficiente C_4 para vigas flexionadas por pares aplicados en sus extremos



NOMENCLATURA

Cada curva está designada por un número y una letra.

El número indica la condición de carga; se han considerado los cinco casos siguientes



La letra se refiere a las condiciones de apoyo de la viga relativos a giros alrededor del eje vertical "y":

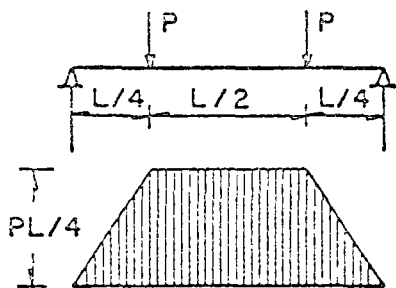
A, los extremos pueden girar libremente.
B, los extremos están fijos.

Fig 6

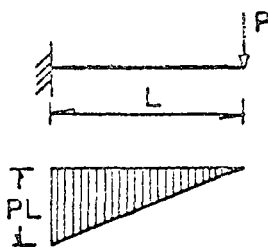
Valores del coeficiente C_4 para vigas con varias condiciones de apoyo y carga

Las curvas de esta figura corresponden a los casos siguientes:

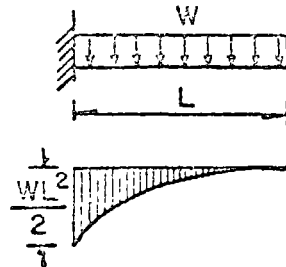
1AS, 1AC, 1AI



1VS, 1VC, 1VI



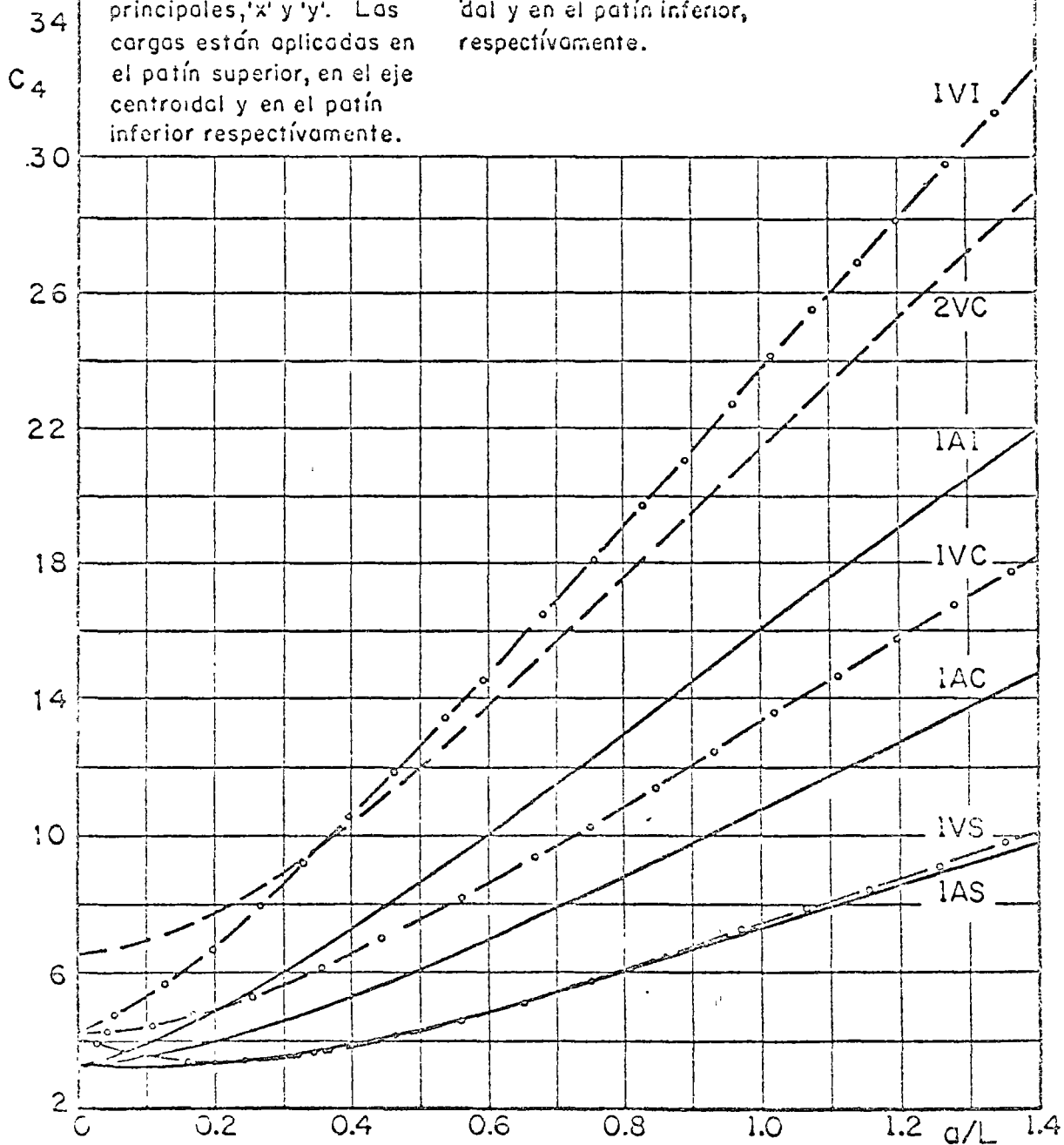
2VC



Los extremos de la viga pueden girar libremente alrededor de los dos ejes principales, 'x' y 'y'. Las cargas están aplicadas en el patín superior, en el eje centroidal y en el patín inferior respectivamente.

Viga en voladizo, carga aplicada en el patín superior, en el eje centroidal y en el patín inferior, respectivamente.

Viga en voladizo, carga aplicada en el eje centroidal.



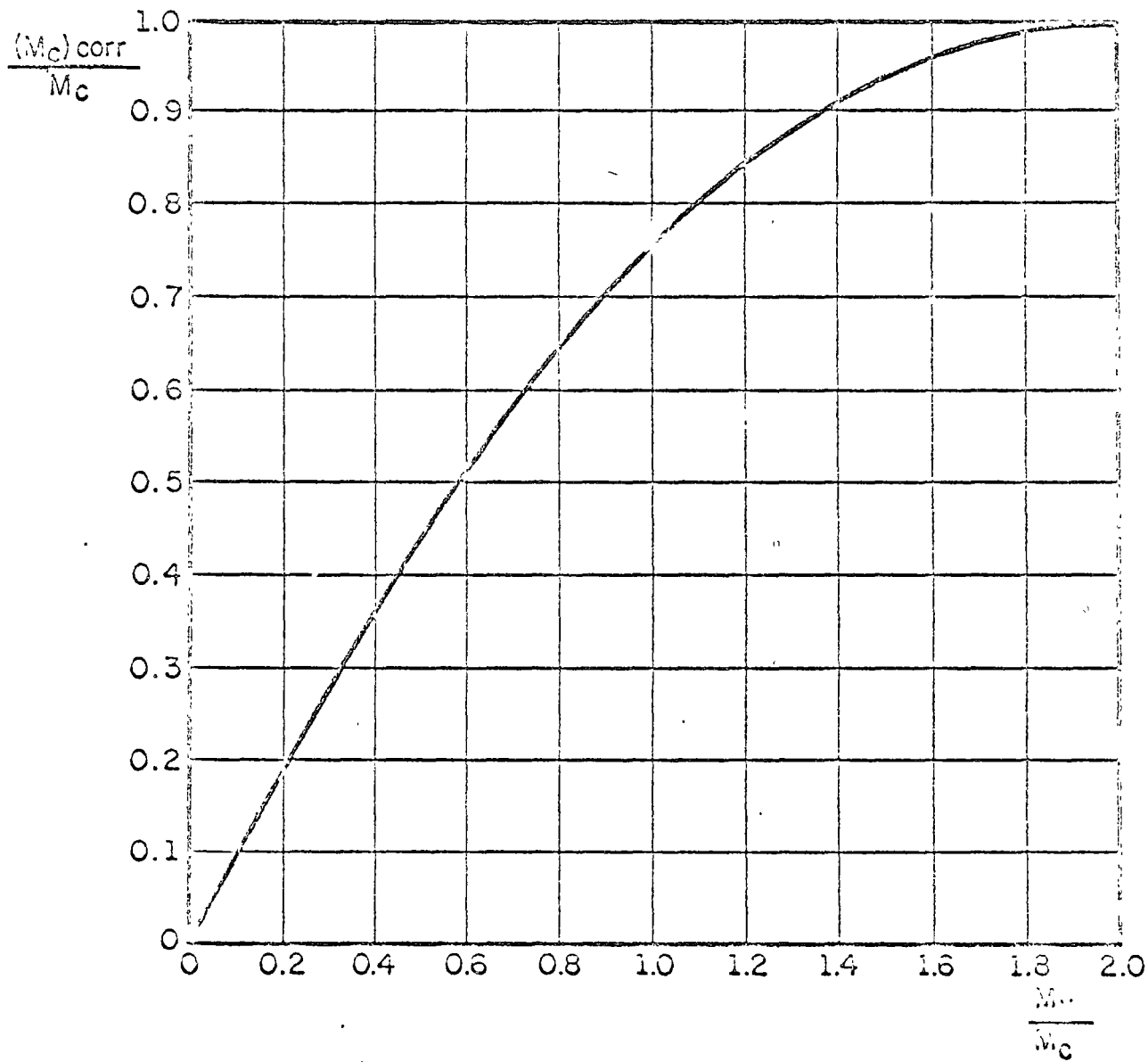


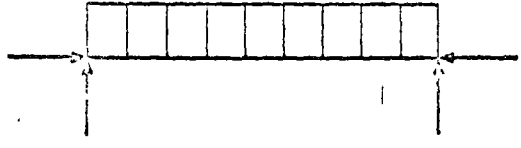
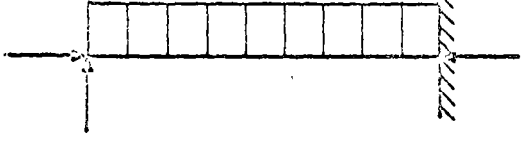
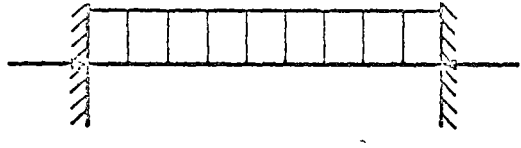
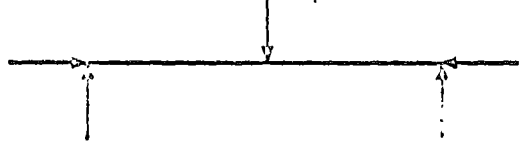
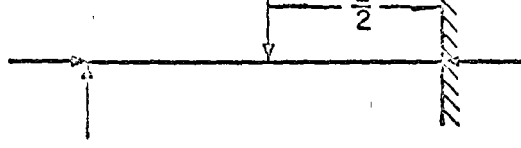
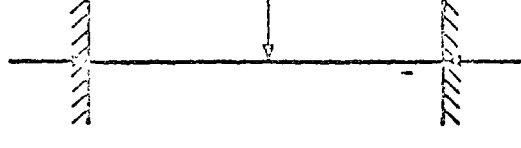
Fig 8 Corrección por inelasticidad

VALORES DE $\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$, EN $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, PARA EL CALCULO DE P_E , E_c (R.4.3.2)

VALIDOS PARA ACERO DE CUALQUIER TIPO

$\frac{KI}{r}$	$\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$	$\frac{KI}{r}$	$\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$	$\frac{KI}{r}$	$\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$	$\frac{KI}{r}$	$\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$	$\frac{KI}{r}$	$\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$	$\frac{KI}{r}$	$\frac{\pi^2 E}{(KI/r)^2}$
21	45632	51	7736	81	3067	111	1633	141	1012	171	628
22	41578	52	7442	82	2993	112	1603	142	998	172	620
23	38041	53	7163	83	2921	113	1575	143	983	173	672
24	34937	54	6901	84	2851	114	1548	144	970	174	664
25	32198	55	6653	85	2785	115	1521	145	956	175	657
26	29768	56	6417	86	2720	116	1495	146	944	176	649
27	27604	57	6193	87	2658	117	1470	147	931	177	642
28	25667	58	5982	88	2598	118	1444	148	919	178	634
29	23927	59	5781	89	2540	119	1421	149	906	179	628
30	22359	60	5589	90	2485	120	1397	150	894	180	621
31	20940	61	5408	91	2429	121	1374	151	882	181	614
32	19652	62	5235	92	2377	122	1351	152	870	182	607
33	18479	63	5069	93	2327	123	1330	153	859	183	601
34	17408	64	4913	94	2277	124	1308	154	849	184	594
35	16427	65	4762	95	2230	125	1288	155	838	185	587
36	15527	66	4619	96	2183	126	1268	156	827	186	582
37	14699	67	4483	97	2138	127	1247	157	816	187	575
38	13936	68	4351	98	2095	128	1227	158	805	188	570
39	13230	69	4227	99	2053	129	1208	159	796	189	563
40	12577	70	4107	100	2012	130	1191	160	785	190	558
41	11970	71	3991	101	1973	131	1172	161	776	191	551
42	11407	72	3882	102	1933	132	1154	162	766	192	545
43	10883	73	3776	103	1897	133	1137	163	757	193	540
44	10394	74	3675	104	1861	134	1121	164	748	194	535
45	9937	75	3578	105	1824	135	1103	165	739	195	529
46	9516	76	3483	106	1790	136	1087	166	730	196	524
47	9109	77	3394	107	1757	137	1072	167	721	197	519
48	8733	78	3307	108	1725	138	1056	168	712	198	513
49	8382	79	3225	109	1693	139	1041	169	704	199	508
50	8049	80	3144	110	1663	140	1026	170	696	200	502

Valores de ψ y η para distintas condiciones de carga

C A S O	ψ	η
	0	1.0
	-0.3	$1 - 0.3 \frac{P_0}{P_E}$
	-0.4	$1 - 0.4 \frac{P_0}{P_E}$
	-0.2	$1 - 0.2 \frac{P_0}{P_E}$
	-0.4	$1 - 0.4 \frac{P_0}{P_E}$
	-0.6	$1 - 0.6 \frac{P_0}{P_E}$



DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO (DEL 12 DE MARZO AL 23 DE ABRIL DE 1975)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
1. ING. JUAN A. ALVAREZ GUTIERREZ Mérida 207-4 Col. Roma México 7, D. F. Tel: 5-84-14-88	BICA, S. A. de C. V. Paseo de la Reforma No.503-1 Col. Cuauhtémoc México 3, D. F. Tel: 5-53-67-55
2. ING. EDUARDO BRAVO GONZALEZ Sur 69-A No.3131-2 Col. Viaducto Piedad México 13, D. F. Tel: 5-30-44-41	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO,S.A. Tlaloc No.90-4o. Piso Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-46-46-12
3. SR. MOISES CABALLERO TELLEZ Tepeyac No. 290 Col. Industrial México 14, D. F. Tel: 5-77-78-50	BICA, S. A. de C. V. Paseo de la Reforma No.503 Col. Cuauhtémoc México 3, D. F. Tel: 5-53-67-55
4. ING. BALTAZAR CAMPOS DE LA FUENTE Juan Sarabia 225 Col. Nueva Sta. María México 16, D. F. Tel: 5-56-66-91	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola y Av. Universidad Col. Narvarte México, D. F. Tel: 5-38-28-37
5. SR. IGNACIO CASTELLANOS TIBURCIO Dr. Andrade 72 7F-7 Col. Doctores México 7, D. F. Tel: 5-78-73-05	SERVICIOS PROFESIONALES DE INGENIERIA, S. A. Melchor Ocampo No. 445 Mexico 5, D. F. Tel: 5-75-02-90
6. ING. JORGE CASTILLO RIVERA Edif.40-D-201 Unidad Lindavista México 14, D. F. Tel: 5-87-15-74	ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA Zacatenco Col. Lindavista México, D. F.
7. SR. JERONIMO AGUILAR CHAVEZ Concepción Beistequi No.1653 Col. Narvarte México 12, D. F. Tel: 5-43-59-30	COLINAS DE BUEN, S. A. Viaducto Miguel Alemán No.190 Col. Narvarte México 12, D. F. Tel: 5-38-05-44 al 46

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS
DE ACERO (DEL 12 DE MARZO AL 23 DE ABRIL DE 1975)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
8. SR. JUAN F. GARCIA FELIX Zamora 5-1 Col. Condesa México 11, D. F. Tel: 5-53-58-98	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No.77-9o. Piso México, D. F. Tel: 5-46-65-77
9. ING. JUAN GARCIA JARQUE Hda. de la Nave No. 48 Bosques de Echegaray México, D. F. Tel: 5-60-36-07	GARCIA JARQUE, A.P. Av. Baja California No.206-306 Col. Roma Sur México 7, D. F. Tel: 5-64-49-30
10. SR. RAUL GARCIA VARGAS Quebrada 216-7 Col. Narvarte México 12, D. F.	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Miguel Laurent 840-1er. Piso Col. Vertiz-Narvarte México 13, D. F. Tel: 5-59-20-48
11. ING. ALFONSO GONZALEZ CARBAJAL Medicos No. 20 Col. Sifón México 8, D. F. Tel: 5-82-30-44	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No.77-9o. Piso México, D. F. México, D. F. Tel: 5-46-65-77
12. SR. GONZALO HERNANDEZ BUENFIL Av. México No.74-9 Col. Sta. Cruz Atoyac México 13, D. F. Tel: 5-75-67-27	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Miguel Laurent No.840-1er. Piso Col. Vertiz Narvarte México 13, D. F. Tel: 5-59-20-48
13. ING. ANTONIO IRIGOYEN REYES Edificio A-11 Departamento 701 Torres de Mixcoac México 19, D. F. Tel: 5-93-35-32	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Av. Xola y Universidad Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5-19-27-70
14. ING. ROBERTO ISLAS DOMINGUEZ Cerrada del Pedregal No. 40 Col. Coyoacán México 21, D. F. Tel: 5-54-37-21	ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIONES ELECTROMECHANICAS, S. A. Insurgentes Sur No.1991 Edif. "B" Desp.202 Guadalupe Inn México 20, D. F. Tel: 5-48-54-88

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO (DEL 12 DE MARZO AL 23 DE ABRIL DE 1975)

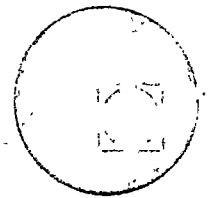
<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
15. ING. MANUEL MARTINEZ PIQUERO México, D. F.	ESTRUCTURAS INDUSTRIALES DE ACERO, S. A. Av. México No.1256 Santa Teresa México 20, D. F. Tel: 5-68-23-49
16. ING. EDUARDO NORIEGA GARCIA Vid No. 128 Col. Nueva Sta. María México 16, D. F. Tel: 5-47-13-27	SUMESA Calz. Vallejo No. 980 Col. Industrial Vallejo México 16, D. F. Tel: 5-67-06-03
17. ING. MIGUEL PEDRERO RODRIGUEZ Bahía de Ballenas No.25-3 Verónica Anzures México 17, D. F. Tel: 5-45-88-62	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A. Melchor Ocampo No. 172 Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-92-37-18
18. ING. CARLOS E. PEREZ GARAGARZA Miguel Angel de Quevedo No.366 Col. Coyoacán México 21, D. F. Tel: 5-54-16-08	PRODUCCION GRAFICA, S. A. Madero No.6-408 Centro México 1, D. F. Tel: 5-10-45-92
19. ING. FERNANDO PEREZ VILLAGOMEZ Av. Universidad No.1619 Villa Obregón México 21, D. F. Tel: 5-54-66-12	SERVICIOS PROFESIONALES DE INGENIE- RIA Melchor Ocampo No.445 México 5, D. F. Tel: 5-25-02-90
20. ING. RAUL G. RIOS GARCIA Dr. Carmona y Valle 124-13 Col. Doctores México 7, D. F. Tel: 5-78-67-07	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO,S.A. Tlaloc 90-1er. Piso Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-92-37-18
21. SR. HUMBERTO RODRIGUEZ GARCIA México, D. F.	ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECA- NICA Y ELECTRICA Zacatenco Col. Lindavista México, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS
DE ACERO (DEL 12 DE MARZO AL 23 DE ABRIL DE 1975)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
22. ING. HUGO SOLORZANO GONZALEZ México, D. F.	FLUOROCARBONS WORKS, S. A. México, D. F.
23. ING. NOE TERAN VILLANUEVA Norte 58 No.3808 Col. Río Blanco México 14, D. F. Tel: 5-37-26-45	FERROCARRILES NACIONALES DE MEXICO Av. Centrl No. 140-8o. Piso México 3, D. F. Tel: 5-47-56-04
24. ING. NORBERTO VILLEGAS BOBADILLA Privada de Marte No. 38 Col. Guerrero México 3, D. F. Tel: 5-97-47-25	BICA, S. A. DE C.V. Paseo de la Reforma No.503-1er. Piso Col. Cuauhtémoc México 3, D. F. Tel: 5-53-67-55



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO DIMENSIONAMIENTO
DE ESTRUCTURAS DE ACERO

1. Ing. Félix Colinas Villoslada
Profesor
Facultad de Ingeniería
Gerente de Colinas de Buen, S.A.

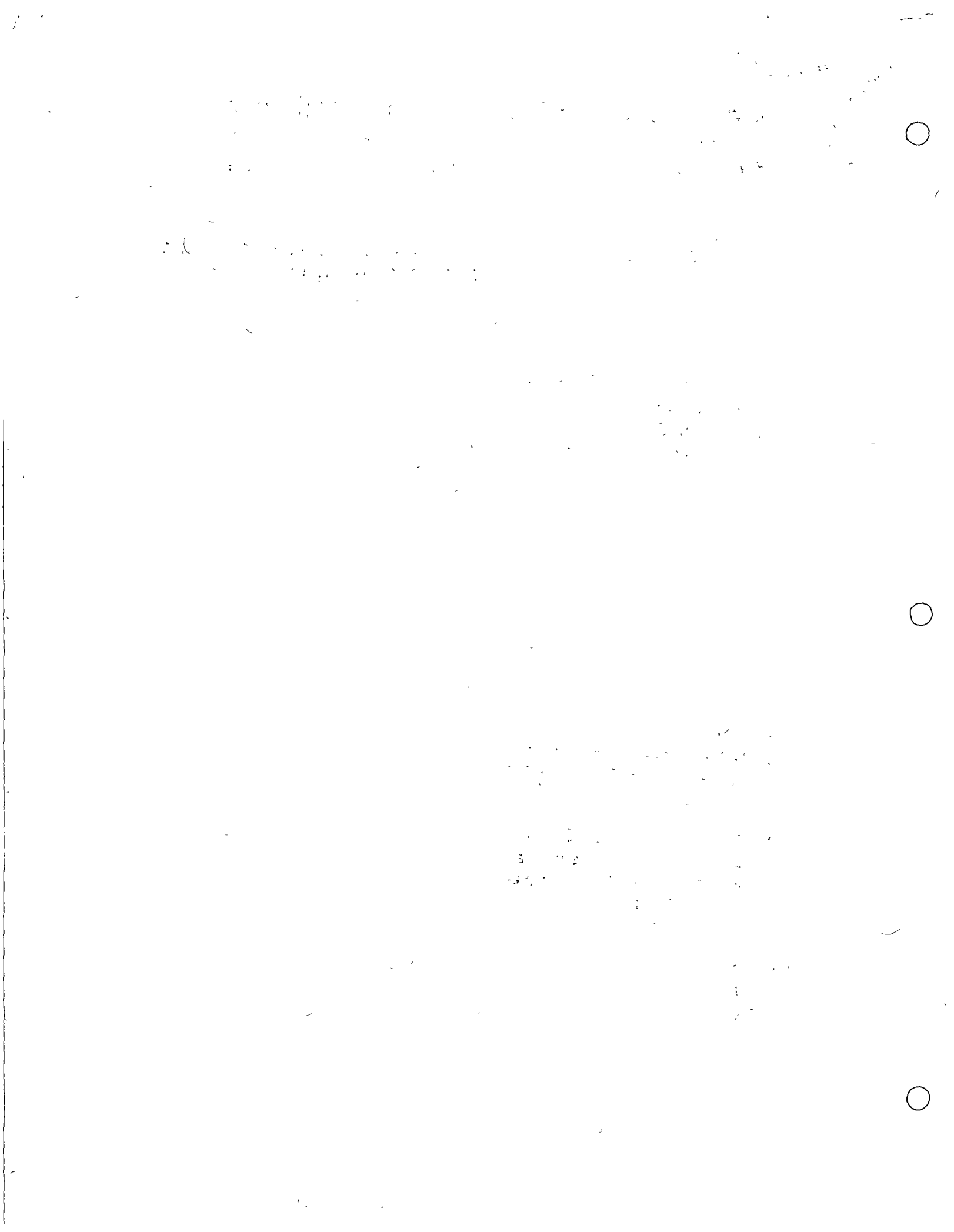
2. M. en C. Enrique Del Valle Calderón
Director
Facultad de Ingeniería
U. N. A. M.

3. M. en C. Enrique Martínez Romero
Consultor en Ingeniería Estructural

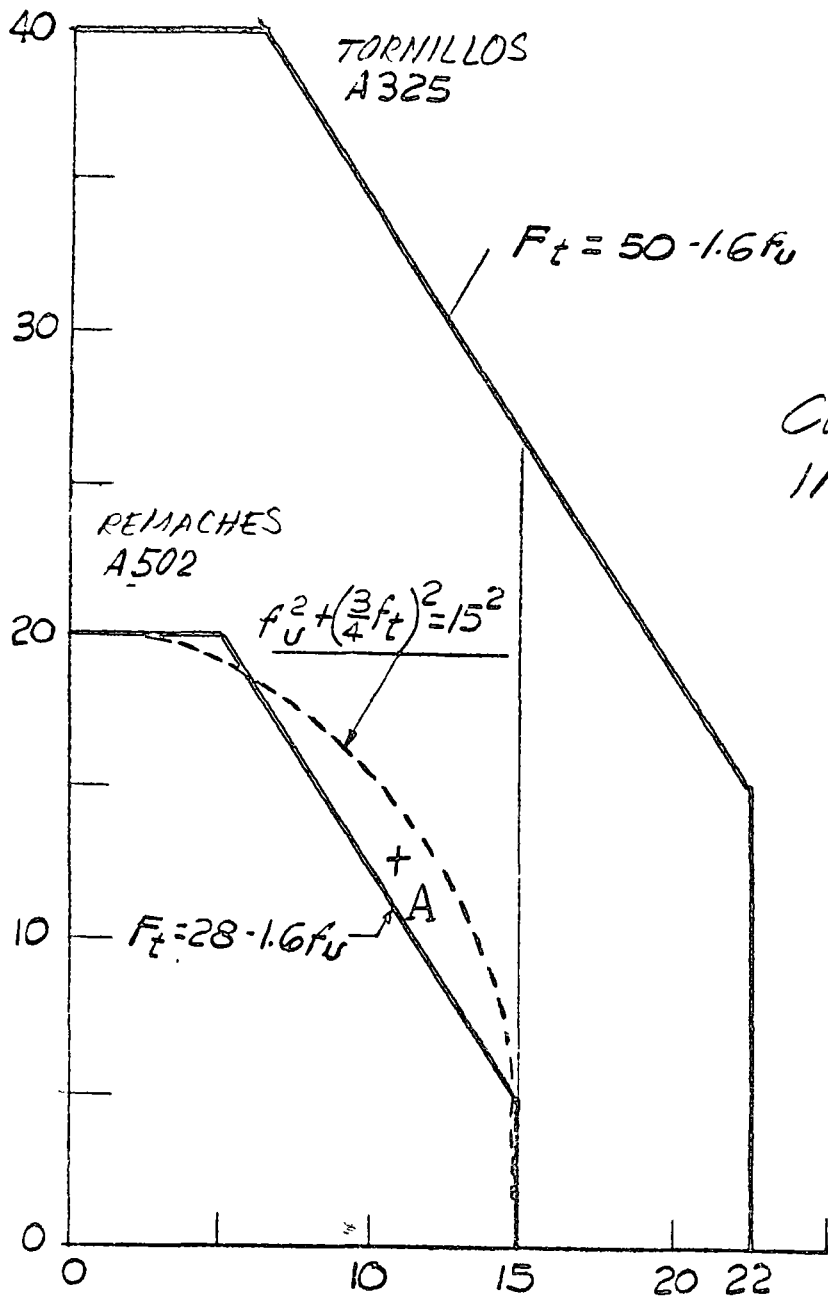
4. Ing. José Luis Sánchez Martínez
Ingeniero Estructural en la Cía.
Colinas de Buen, S.A.

5. Ing. Marco A. Tapia L.
Profesor de Mecánica
Escuela de Ingeniería
U. N. A. M.

6. Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
Profesor
División de Estudios Superiores
Fac. de Ingeniería, UNAM.



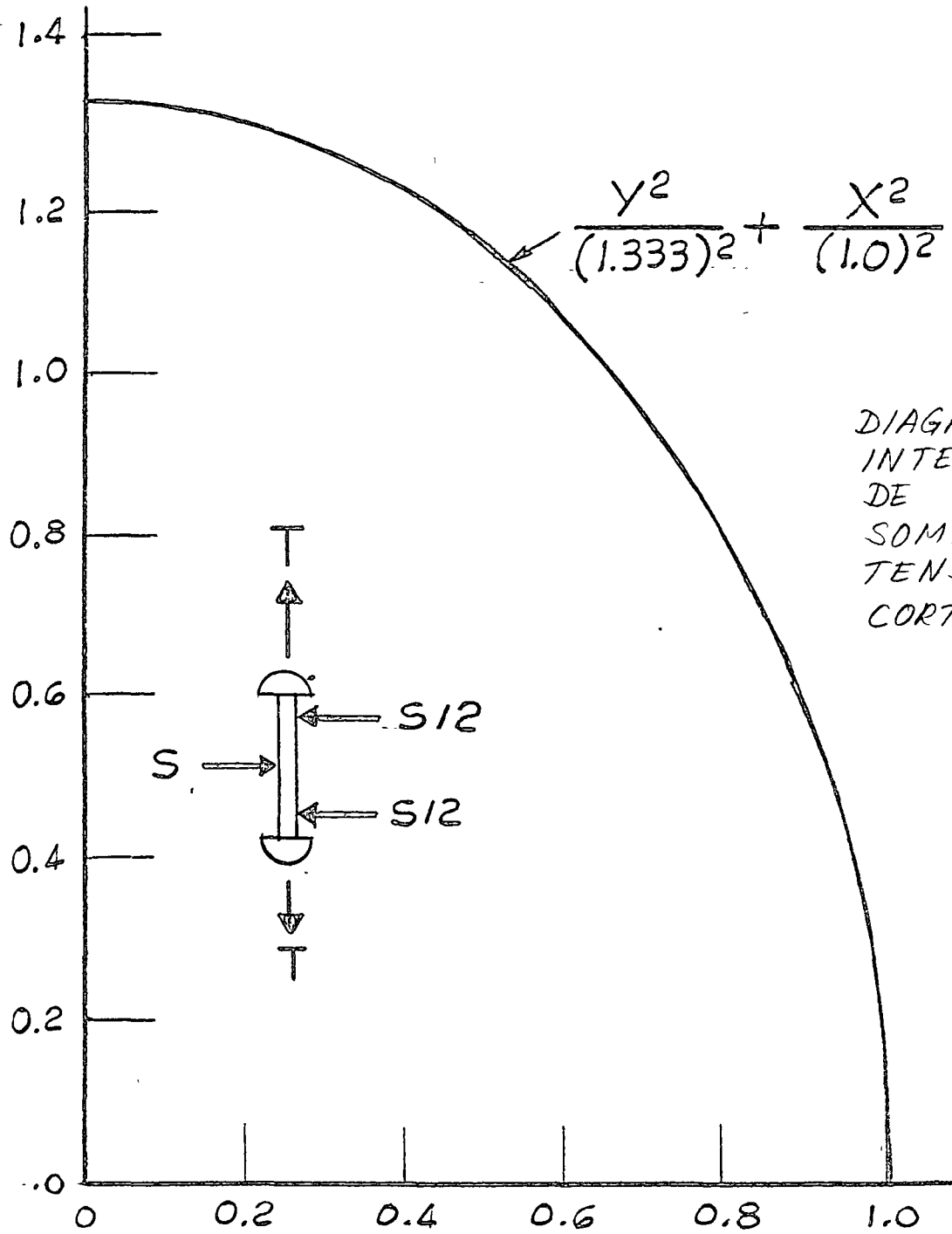
ESTUDIO PERMISIBLE A TENSION (KSI)



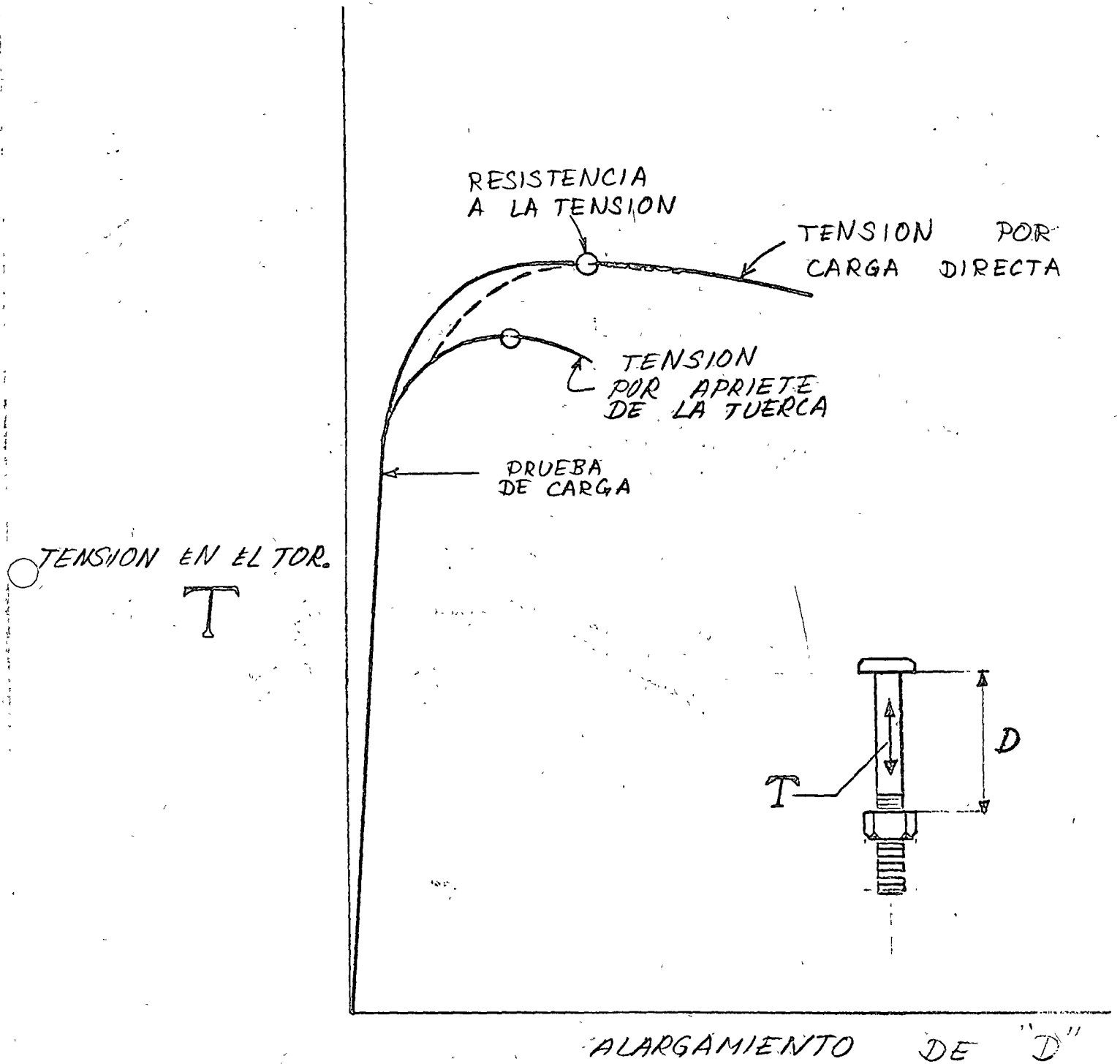
CURVAS DE INTERACCION AISC

ESFUERZO PERMISIBLE A COMPRESION CORTANTE (KSI)

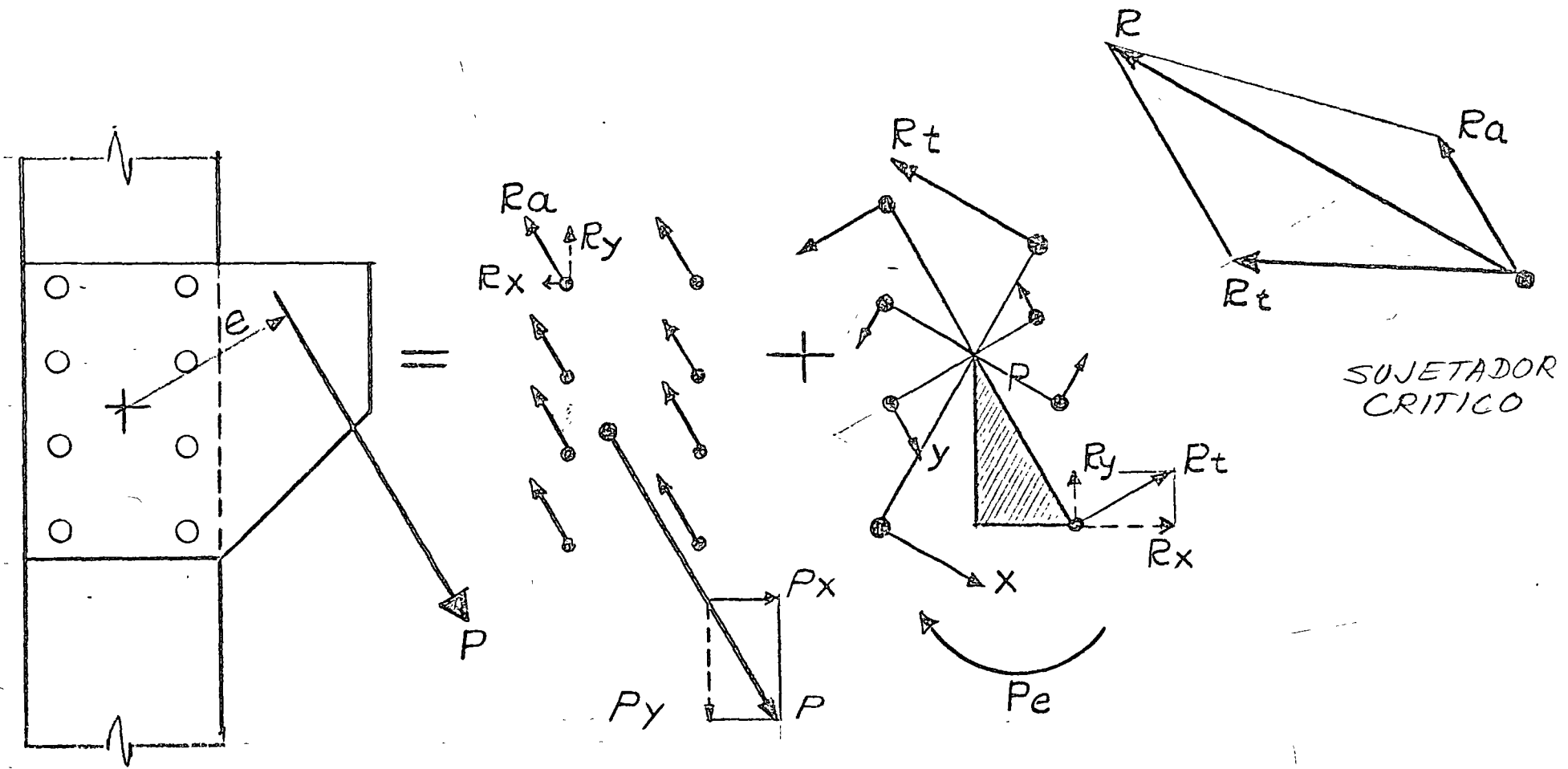
$$Y = \frac{\text{COMPONENTE DE TENSION } T}{\text{RESISTENCIA DEL SUJ. A TENSION}}$$



$$X = \frac{\text{COMPONENTE DE CORTANTE } S}{\text{RESISTENCIA DEL SUJ. AL CORTE}}$$



CURVAS TENSION-ALARGAMIENTO PARA TORNILLOS A 325



CONEXION
ECCENTRICA

COMPONENTE
AXIAL (DIRECTA)

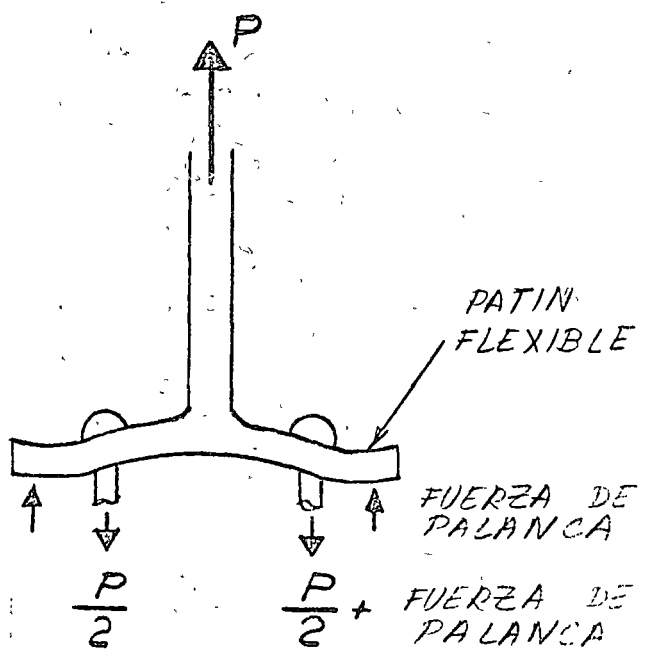
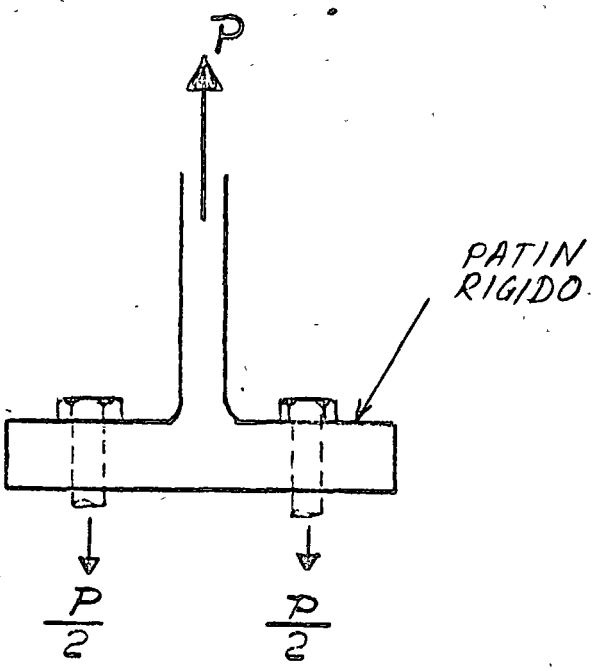
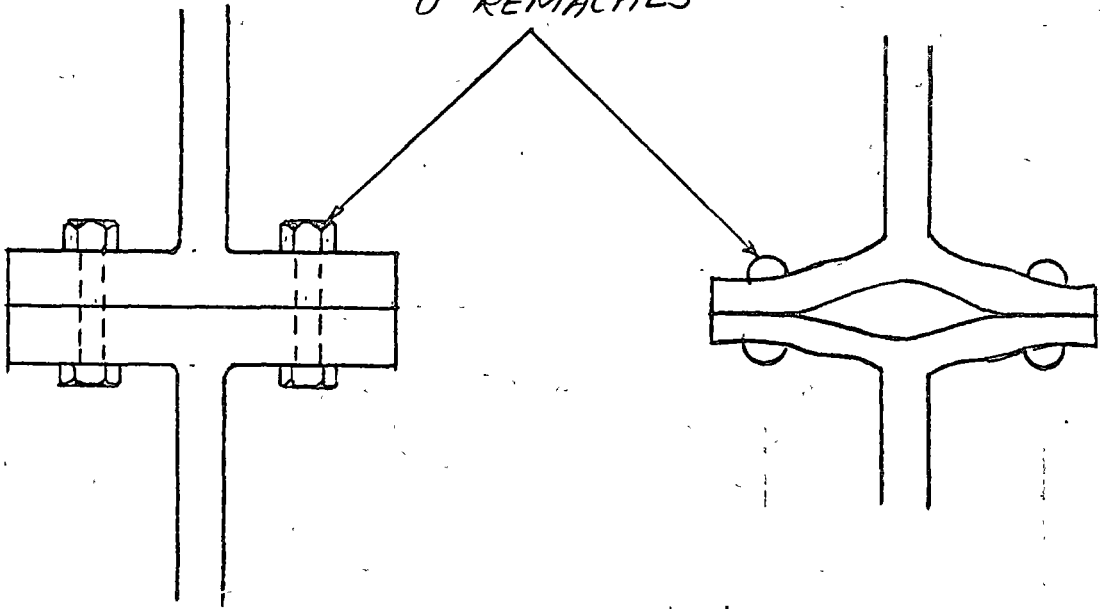
COMPONENTE
TORSIONAL

SUJETADOR
CRITICO

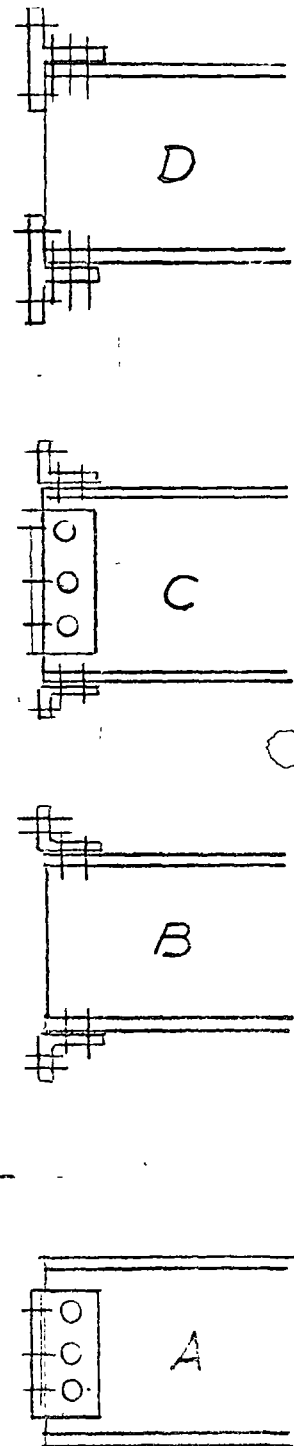
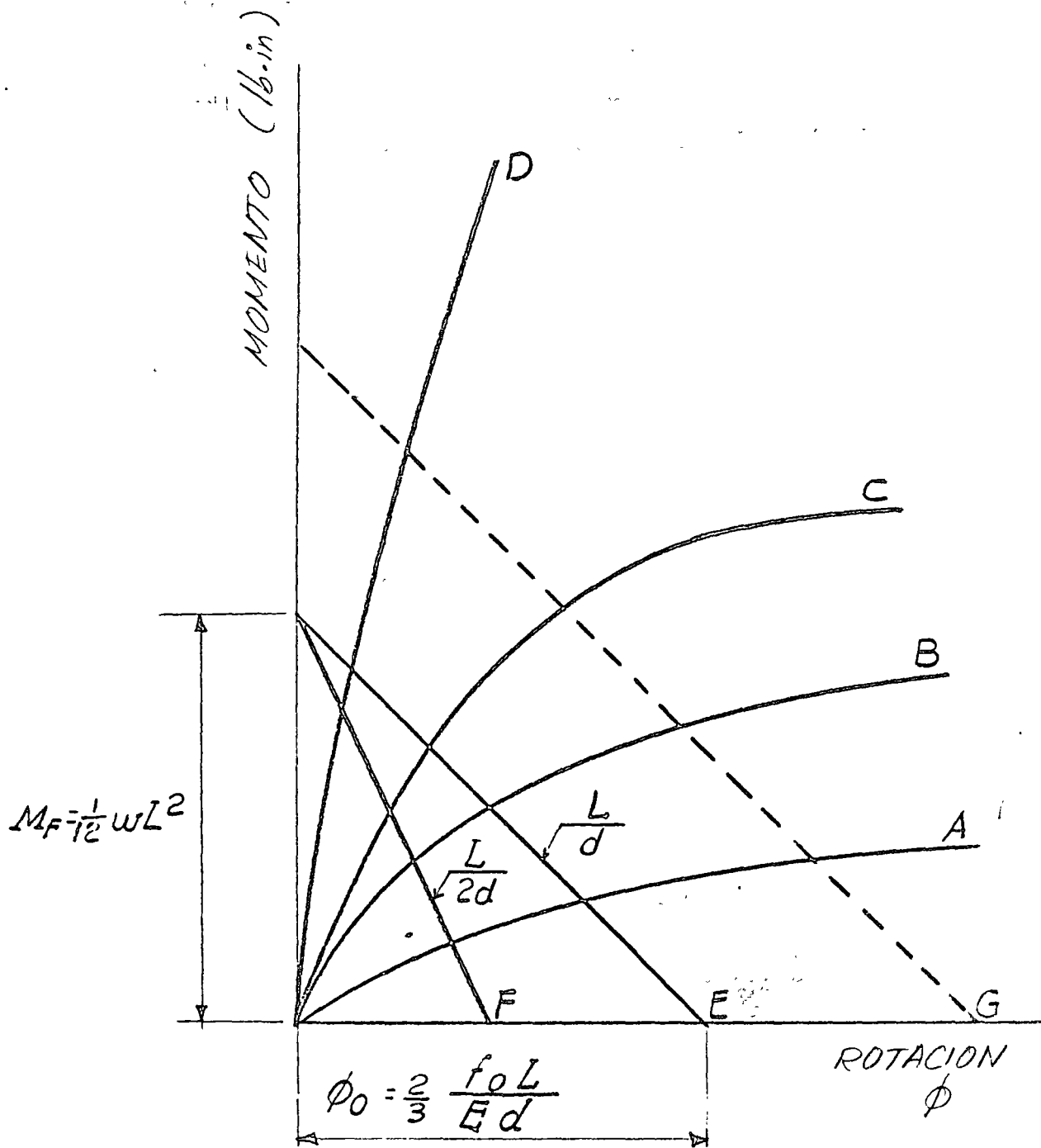
SOLUCION DE CONEXION ECCENTRICA



TORNILLOS
O REMACHES



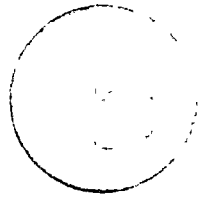
ACCION DE PALANCA EN SUJETADORES



CURVAS TÍPICAS MOMENTO-ROTACION PARA DIFERENTES CONEXIONES



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

T E M A : DIRECT TENSION INDICAFORS FOR
INSTALLATION OF HIGH STRENGTH
STRUCTURAL BOLTS.

M. EN C. ENRIQUE MARTINEZ ROMERO.

Volume No. 72
February 15, 1974

DIRECT TENSION INDICATORS FOR INSTALLATION
OF HIGH STRENGTH STRUCTURAL BOLTS

(Load Indicator Washers for Structural Bolting)

This TECHNICAL STEELTALK provides a complete reference for the use of Load Indicator Washers in the installation of high strength structural bolts. A basic description, installation and inspection procedure, test report, sample applications and guideline specification are included.

Used without this cover, the body of this TECHNICAL STEELTALK may be distributed on a selected basis to interested deciders.

Distribution:
Standard TECHNICAL STEELTALK Distribution

DIRECT TENSION INDICATORS FOR INSTALLATION OF HIGH STRENGTH STRUCTURAL BOLTS

In April 1972, the specification governing the use of high strength bolts for structural applications was revised by the Research Council on Riveted and Bolted Structural Joints. This revision was probably the most significant change ever recorded in the 20+ year history of structural bolting - it introduced a new, third method of bolt installation, a method which provides for the use of direct tension indicators.

What is a direct tension indicator? A direct tension indicator (DTI) is any device which provides positive evidence of correct bolt tension through the direct measurement of some characteristic of the device (usually a deformation).

The use of the DTI for installation of high strength structural bolts should result in a new high level of confidence in bolted structural connections. The DTI allows simplified, less costly inspection, and leaves a permanent witness of the installation. Inspection may be performed immediately after installation or at any time in the future.

Although we have seen several proposals for direct tension indicator devices, the Load Indicator Washer (LIW) appears to be the most practical and economical direct tension indicator presently available. The LIW has been thoroughly tested, both in the laboratory and in actual field applications.

Description of the Load Indicator Washer

What is a Load Indicator Washer, and how does it work? The LIW is a hardened circular washer which has a group of protrusions pressed out of the flat surface. In use, the washer is placed on the bolt with the protrusions bearing against a hardened surface of the bolt-nut assembly, usually the underside of the bolt head. As the bolt is tightened, the bolt clamping force causes the protrusions to partially flatten, thus closing the gap between the LIW and the bolt head. When the gap is reduced to a prescribed measurement, the bolt has been properly tightened.

Load Indicator Washers are produced for both A325 and A490 high strength structural bolts. The LIW is produced in two distinct configurations to avoid any possibility of mixing these two different strength levels. Load Indicator Washers for use with A325 bolts are completely round while those for use with A490 bolts have three rounded "ears" extending out from the circumference and spaced at 120°. The two LIW types are shown in Figure 1.

Load capacity of the LIW is varied for each bolt diameter and grade by changing the number and size of the protrusions. Specified load values for the LIW's are held between minus 0 and plus 15%, and these values are verified by statistical quality control testing at the manufacturing facility.

NOTE: This material is reproduced from TECHNICAL STEELTALK No. 72 dated February 15, 1974 issued by the Sales Engineering Division of Bethlehem Steel Corporation, Bethlehem, Pennsylvania.

Installation Procedure

The installation of high strength bolts using the Load Indicator Washer closely follows the basic procedures for turn-of-nut or calibrated wrench tightening. These procedures are detailed in Bethlehem Booklet No. 2867, "High Strength Bolting for Structural Joints"; however, two basic rules are repeated here:

1. All plies of the connection should be drawn into firm contact by using a sufficient number of "snugged" fitting-up bolts.
2. Tightening of the bolts should progress from the most rigid part of the connection to its free edges.

Generally, the LIW is placed on the bolt with the protrusions bearing against the underside of the bolt head. If the bolt head will not be visible (for inspection of the LIW) after installation, or if the bolt head must be turned to install properly, then the LIW should be placed at the nut end of the bolt assembly, and a supplemental hardened flat washer must be used. For a "nut end" installation, the LIW is placed on the bolt with the protrusions facing toward the nut, the hardened flat washer is placed on the bolt against the LIW protrusions, and then the nut is installed. Details illustrating the two basic LIW assemblies are given in Figure 2. If the LIW must be placed at the head end of the bolt, and if the bolt head must be turned, then a supplemental hardened flat washer must be placed between the LIW protrusions and the bolt head. Similarly, the nut could be turned with the LIW at that end.

Five basic rules for installation of the LIW should be remembered:

1. The LIW protrusions must always bear against a hardened surface. (Note, A325 nuts are not normally hardened.)
2. The surface contacting the LIW protrusions should not turn during installation. However, for those installations where the LIW is used with a hardened flat washer, some slight movement of the flat washer may be noted and is acceptable.
3. An extra 1/8" should be added to calculated bolt lengths to allow for the thickness of the installed LIW, and an extra 1/4" should be allowed if the LIW is used in conjunction with a hardened flat washer.
4. The LIW "gap" requirement does not change as bolt lengths change because the gap closure is a direct function of bolt force and not related to bolt elongation.
5. Special washer requirements of the Research Council Bolting Specification, such as those related to slotted and oversize holes, must be properly observed. The LIW may not be substituted for such required washers, but may be used in conjunction with those washers.

When the LIW is used with A490 bolts installed in material having a yield point less than 40 ksi, the LIW may be used in place of one of the hardened flat washers required by the specification.

After the LIW has been properly placed, and the connection has been properly "fit up", the nut should be turned sufficiently to reduce the average gap between the LIW and the bolt head to 0.015" or less, but the gap should not be reduced to zero. If the LIW is used in conjunction with a hardened flat washer (for example, at the nut end) the fastener assembly should be tightened until the gap between the LIW and the hardened flat washer is reduced to 0.010".

Inspection and Verification

Inspection is accomplished by checking the average gap of the LIW bolt assembly with a metal feeler gauge, see Figure 3. Two important rules for inspection should be emphasized:

1. Inspection should be based upon the average gap because the bolt will never be perfectly centered in the LIW, therefore, the protrusions will not collapse uniformly.
2. The feeler gauge is used as a "no go" inspection tool; that is, if the gauge does not enter the gap (but a gap is evident) the installation is considered satisfactory.

Although the LIW is classed as an installation tool, in reality it is an inspection tool. Since the wrench operator will often be on the side of the connection opposite the LIW, he cannot easily observe changes in the LIW "gap". Therefore, rather than use a "gap" criterion for installation, the operator would develop a "modified turn-of-nut" procedure to install the bolt and then check the "gap". For average length bolts, approximately one full turn from the "snug" position will reduce the LIW gap to the required dimension; the extra rotation of approximately one-half turn is required to compensate for deformation of the LIW protrusions. Of course, specific turn criteria should be verified for each LIW installation. A verification procedure similar to that commonly used for calibrating other accepted bolting procedures may be used.

A verification setup is illustrated in Figure 4. Note that the bolt has been mounted in the Skidmore-Wilhelm bolt calibrator (a hydraulic load cell device) with the bolt head and LIW bearing against the front face plate. This arrangement is a reversal of normal placement of the bolt, but this arrangement is necessary so that the LIW can bear against the bolt head and the gap can be readily observed. Note that a special sleeve and a hardened washer are required on the nut side of the calibrator. A longer bolt than is needed for the connection geometry may be required for the verification setup. The verification procedure should follow these steps:

1. Place the LIW on the bolt with the protrusions against the bolt head.
2. Insert the bolt-LIW assembly in the calibrator with the flat face of the LIW against the front face plate.

3. Place the filler sleeve and a hardened flat washer on the bolt.
4. Install the nut on the bolt and continue to turn the nut (hold the head so that it does not turn against the LIW) until the required minimum tension for that size bolt is indicated by the Skidmore-Wilhelm gauge. Take note of the nut rotation used to reach the required tension, and observe the average gap. Often, the gap will be greater than that specified, demonstrating that further tightening until the "no go" gauge condition is satisfied results in a bolt tension greater than that required. This result is acceptable.
5. The amount of nut rotation observed during verification may then be used to install similar bolts in the actual connection.

When the LIW is to be used at the nut end, the verification procedure would be similar; however, the bolt would be installed in reverse position and the filler sleeve would not be used. In general, the verification procedure should attempt to simulate the field application, when possible.

Test Results

The LIW has been tested in Great Britain, where it was developed by Cooper and Turner, Ltd., and in the United States. Tests performed in the USA were conducted at Lehigh University under the direction of Dr. John W. Fisher, and were reported in the Engineering Journal of the American Institute of Steel Construction, First Quarter 1973 issue. The Lehigh tests evaluated Load Indicator Washers for both A325 and A490 bolts, used with three different bolt diameters (7/8", 1" and 1-1/8" A325; 7/8" and 1-1/8" A490), in simulated connection details representing both parallel and out-of-parallel surfaces. Three grip lengths were evaluated for 7/8" diameter A325 bolts. Significant conclusions of the Lehigh study included the following direct quotations:

1. "This examination of Coronet (trade name for Cooper-Turner Product) load indicators has indicated that, when calibrated in a hydraulic bolt calibrator, the average load reached at a gap of 0.015" was always equal to or greater than the specified minimum bolt tension." (Editorial note: Bethlehem Load Indicator Washers are identical to the Coronet load indicators.)
2. "Since the gap closure is independent of grip length, the use of the load indicator should overcome problems related to over-tightening which are encountered at times with short grip fasteners."
3. "Bolts installed in plates with parallel surfaces resulted in an average gap closure of about 0.011". This corresponded to a bolt clamping force 10% to 15% greater than the specified minimum tension. It would appear that by requiring that the gap be no more than 0.015", field installations will always result in bolt tensions which exceed the minimum required bolt tension."

4. "Bolts installed in plates or shapes with out-of-parallel surfaces can utilize the average gap closure as an indication of bolt tension. However, an equally reliable method appears to result when the gap is completely closed at some point around the load indicator."
5. "Care should be taken to avoid complete closure of the gap at all points around the washer. This will prevent the possibility of over-tightening the bolt to an extent causing damage; it will also prevent satisfactory inspection of the bolt, since it is not possible to determine what tension exists in the closure condition."

Availability

Bethlehem Load Indicator Washers are available with a "black" finish only (uncoated) as follows:

1. For use with A325 Type 1 or Type 2 bolts in diameters from 1/2" through 1-1/4", inclusive.
2. For use with A490 bolts in diameters from 3/4" through 1-1/4", inclusive.

Applications

Load Indicator Washers have been in use in Great Britain for several years. The LIW was introduced to the United States only recently; however, acceptance is already widespread. The following list of projects provides a sampling of Load Indicator Washer applications:

General Telephone Building	Fort Wayne, IN
22-Story Bank Building	Chattanooga, TN
Federal Office Building	Syracuse, NY
Hospital Building	Syracuse, NY
Hospital Building	Bowling Green, KY
Airport Building	Covington, KY
Blue Cross Office Building	Cincinnati, OH
Union Pacific Office Building	Omaha, NB
County Bridge	Brome County, NY
Penobscot Paper Company Building	Old Town, ME
Railroad Bridge Over Big Black River	State of Mississippi
Open Deck Parking Structure	Utica, NY
Columbia University Library	New York, NY

Specifications

The following sample specification has been prepared as a guide for specification writers:

All high strength bolts shall be installed in accordance with Paragraph 5e, "Tightening by Use of a Direct Tension Indicator", of the Specification for Structural Joints Using ASTM A325 or A490 Bolts, April 18, 1972 as approved by the Research Council on Riveted and Bolted Structural Joints and endorsed by the American Institute of Steel Construction.

Load Indicator Washers shall be used as the approved direct tension indicator and shall be installed as follows:

1. The Load Indicator Washer shall be placed on the bolt with the protrusions facing the bolt head (see below for under nut fitting).
2. The assembly shall be fitted into place and the nut installed. Hardened flat washers under the nut are not necessary unless the applicable general specification requires them. Special washer requirements of the general specification, such as those related to slotted and oversize holes, must be observed.
3. Sufficient bolts in the joint shall be "snugged" to draw the connecting members into close contact, then all bolts shall be tightened until the average gap between the face of the indicator and the underside of the bolt head is reduced to at least 0.015".
4. Tightening shall progress systematically from the most rigid part of the joint to its free edges until the load indicators on all bolts are closed to at least the required gap. The gap can be measured with a feeler gauge. To prevent over-tightening to the extent of damaging the bolt, the gap shall not be completely closed.
5. When it is required to use the load indicator under the nut, a hardened flat washer shall be fitted between the indicator and the nut. After the bolt is installed in the connection, the Load Indicator Washer should be placed on the bolt with the protrusions facing the nut; the hardened flat washer should be placed against the Load Indicator Washer protrusions before the nut is installed. For this assembly, tightening is continued until the average gap between the Load Indicator Washer and the hardened flat washer is closed to at least 0.010" in accordance with the procedure given above.
6. If the load indicator must be placed under the head, and the head must be turned, then a hardened flat washer must be used between the load indicator protrusions and the bolt head. For this fastener assembly, the average gap between the load indicator and the hardened flat washer should be closed to 0.010".

Generally, a visual inspection should be adequate; however, where additional inspection is desired, the inspector shall check the LIW gap for 10% of the bolts in a connection but not less than two bolts, selected at random.

Inspection of the installed Load Indicator Washer shall be accomplished by checking the residual gap with a metal feeler gauge. The bolt installation shall be judged correct if the average gap is equal to or less than 0.015" for Load Indicator Washers installed under the bolt head without hardened flat washers or 0.010" for Load Indicator Washers installed at either head or nut end and in conjunction with hardened flat washers.

When there is a need for additional confirmation of proper bolt tension, the inspector may require a verification procedure as follows:

Three assemblies of bolt, nut and Load Indicator Washer shall be tightened by the same procedure as for the bolts under inspection in a device capable of indicating bolt tension. Upon tightening the bolt to the required minimum tension, the inspector will verify the applicable average gap measurement.

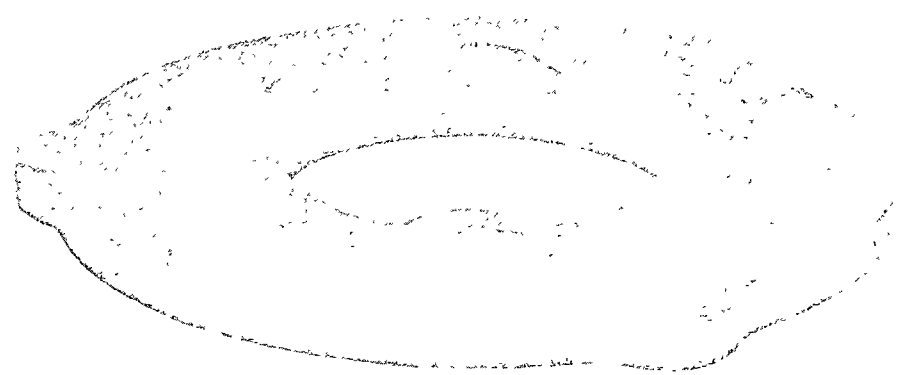


Sold under license from Cooper+Turner, Inc.
U S. Patent No 3187621

two load indicator washer types



A325



A490

FIGURE 1

two basic load indicator washer assemblies

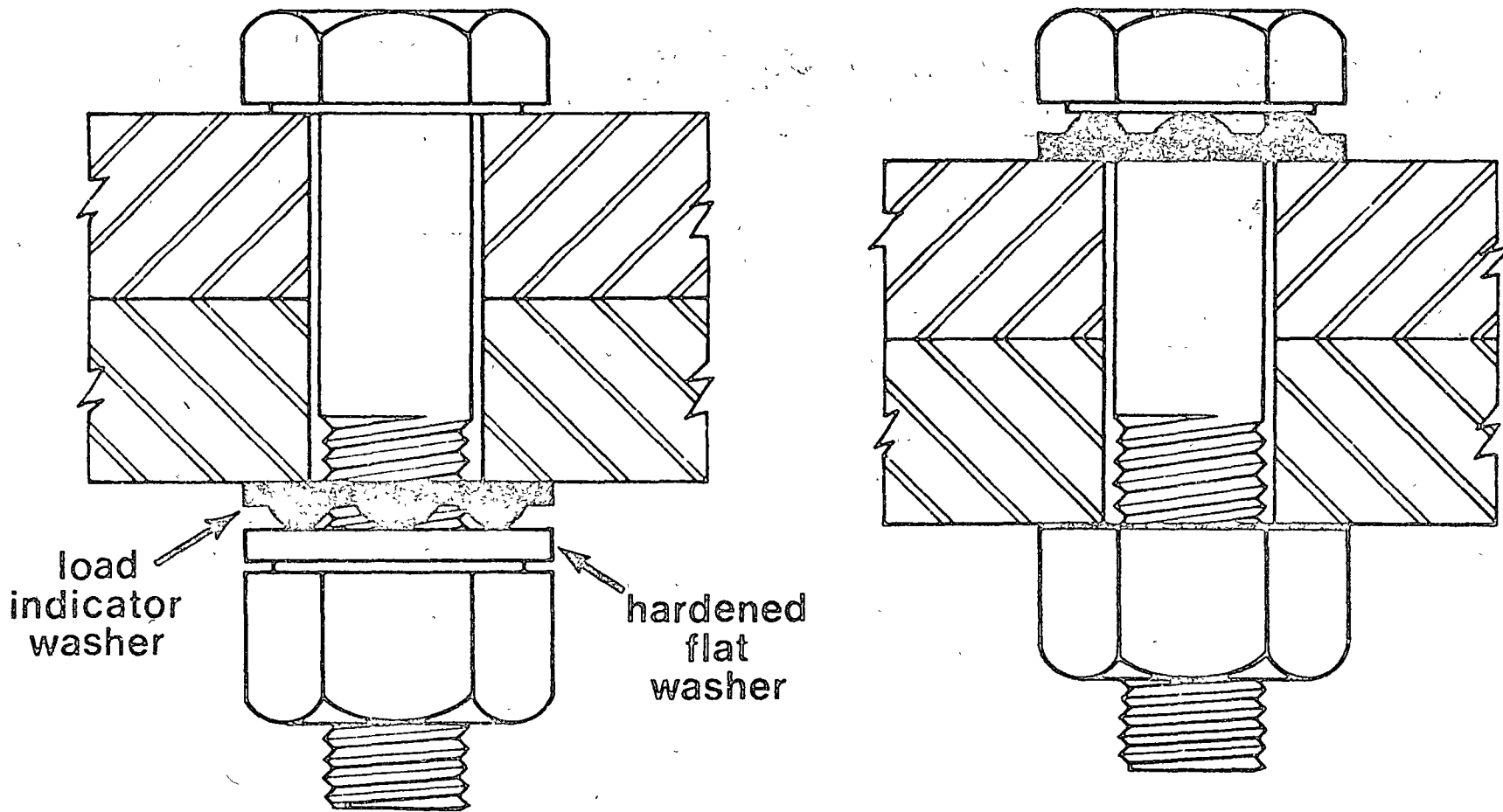
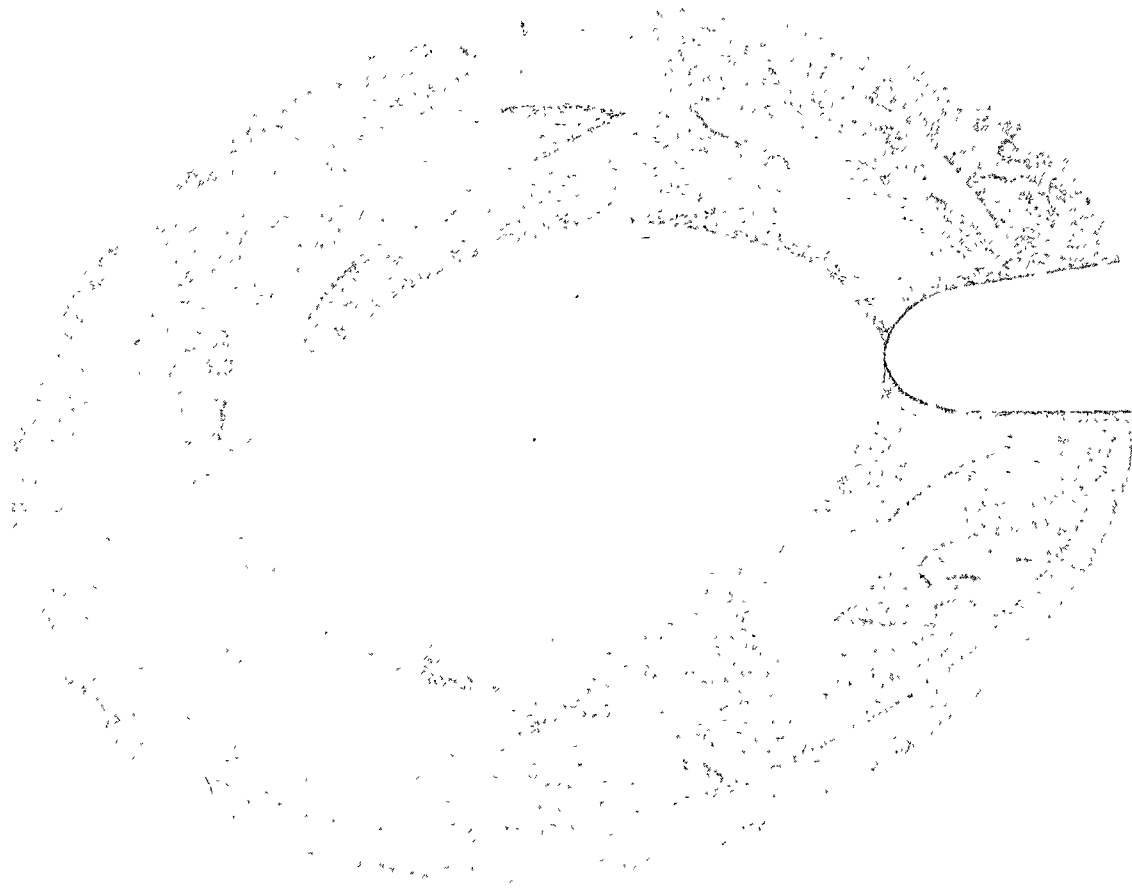


FIGURE 2

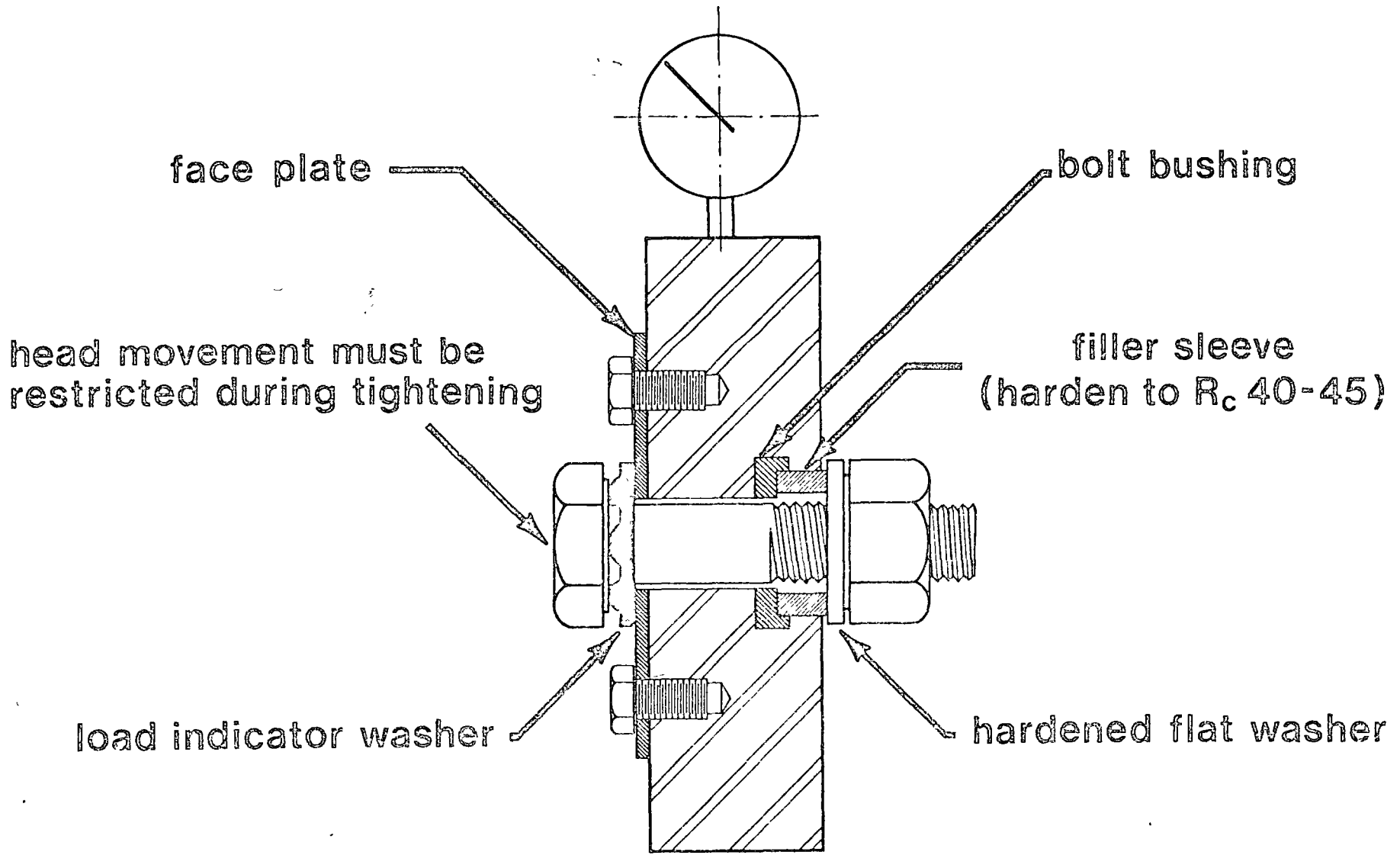
inspection gage



.015

FIGURE 3

verification of bolt tension



hydraulic bolt calibrator

FIGURE 4



1. PRODUCT NAME

Bethlehem Load Indicator Washer

2. MANUFACTURER

Bethlehem Steel Corporation
Bethlehem, Pennsylvania 18016
Phone (215) 694-2424

3. PRODUCT DESCRIPTION

Basic Use: The Load Indicator Washer is a hardened circular washer which has a group of protrusions pressed out of the flat surface. In use, the washer is placed on the bolt with the protrusions bearing against a hardened surface of the bolt-nut assembly, usually the underside of the bolt head. As the bolt is tightened, the bolt clamping force causes the protrusions to partially flatten, thus closing the gap between the Load Indicator Washer and the bolt head. When the gap is reduced to a prescribed measurement, the bolt has been properly tightened.

Grades and Identification:

Load Indicator Washers are produced for both A 325 and A 490 high-strength structural bolts. The Load Indicator Washer is produced in two distinct configurations to avoid any possibility of mixing the two strength levels. Load Indicator Washers for use with A 325 bolts are completely round while those for use with A 490 bolts have three rounded "ears" extending out from the circumference and spaced at 120°. The two Load Indicator Washer types are shown in Figure 1.

Sizes: Bethlehem Load Indicator Washers are available with a black finish only (uncoated) as follows.

- For use with A 325 Type 1 or Type 2 bolts in diameters from 1/2 in. through 1 1/4 in., inclusive.
- For use with A 490 bolts in diameters from 3/4 in. through 1 1/4 in., inclusive.

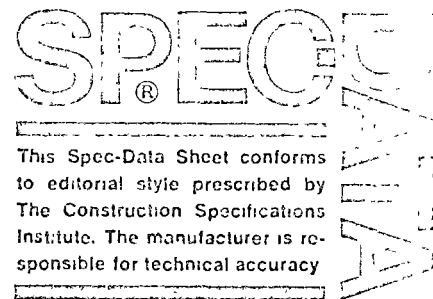
4. TECHNICAL DATA

Capacity: Load capacity of the Load Indicator Washer is varied for each bolt diameter and grade by changing the number and dimensions of the protrusions. Specified load values for the Load Indicator Washers are held between minus 0 and plus 15%, and these values are verified by statistical quality control testing at the manufacturing facility.

Test Results: The Load Indicator Washer has been tested in Great Britain, where it was devel-

oped by Cooper and Turner, Ltd., and in the United States. Tests performed in the United States were conducted at Lehigh University under the direction of Dr. John W. Fisher, and were reported in the Engineering Journal of the American Institute of Steel Construction, First Quarter 1973 issue. The Lehigh tests evaluated Load Indicator Washers for both A 325 and A 490 bolts, used with three different bolt diameters (7/8 in., 1 in. and 1 1/8 in. A 325; 7/8 in. and 1 1/8 in. A 490), in simulated connection details representing both parallel and out-of-parallel surfaces. Three grip lengths were evaluated for 7/8 in. diameter A 325 bolts. Significant conclusions of the Lehigh study included the following *direct quotations*.

- "This examination of Coronet (trade name for the Cooper-Turner product) load indicators has indicated that, when calibrated in a hydraulic bolt calibrator, the average load reached at a gap of 0.015 in. was always equal to or greater than the specified minimum bolt tension." (Editorial note: Bethlehem Load Indicator Washers are identical to the Coronet load indicators.)
- "Since the gap closure is independent of grip length, the use of the load indicator should overcome problems related to over-tightening which are encountered at times with short grip fasteners."
- "Bolts installed in plates with parallel surfaces resulted in an average gap closure of about 0.011 in. This corresponded to a bolt clamping force 10% to 15% greater than the specified minimum tension. It would appear that by requiring that the gap be no more than 0.015 in., field installations will always result in bolt tensions which exceed the minimum required bolt tension."
- "Bolts installed in plates or shapes with out-of-parallel surfaces can utilize the average gap closure as an indication of bolt tension. However, an equally reliable method appears to result when the gap is completely closed at some point around the load indicator."
- "Care should be taken to avoid complete closure of the gap at all points around the washer. This will prevent the possibility of over-tightening the bolt to an extent causing



This Spec-Data Sheet conforms to editorial style prescribed by The Construction Specifications Institute. The manufacturer is responsible for technical accuracy

damage; it will also prevent satisfactory inspection of the bolt, since it is not possible to determine what tension exists in the closure condition."

5. INSTALLATION

Method: The installation of high-strength bolts using the Load Indicator Washer closely follows the basic procedures for turn-of-nut or calibrated wrench tightening. These procedures are detailed in Bethlehem Booklet No. 2867, "High Strength Bolting for Structural Joints"; however, two basic rules are repeated:

- All plies of the connection should be drawn into firm contact.
- Tightening of the bolts should progress from the most rigid part of the connection to its free edges.

Generally, the Load Indicator Washer is placed on the bolt with the protrusions bearing against the underside of the bolt head. If the bolt head will not be visible (for inspection of the Load Indicator Washer) after installation, or if the bolt head must be turned to install properly, then the Load Indicator Washer should be placed at the nut end of the bolt assembly, and a supplemental hardened flat washer must be used. For a "nut end" installation, the Load Indicator Washer is placed on the bolt with the protrusions facing toward the nut, the hardened flat washer is placed on the bolt against the Load Indicator Washer protrusions, and then the nut is installed. Details illustrating the two basic Load Indicator Washer assemblies are given in Figure 2. If the Load Indicator Washer must be placed at the head end of the bolt, and if the bolt head must be turned, then a supplemental hardened flat washer must be placed between the Load Indicator Washer protrusions and the bolt head. Similarly, the nut could be turned with the Load Indicator Washer at that end.

Five basic rules for installation of the Load Indicator Washer should be remembered.

BETHLEHEM STEEL
FEBRUARY, 1975
FASTENERS AND SUPPORTS

- a. The Load Indicator Washer protrusions must always bear against a hardened surface.
- b. The surface contacting the Load Indicator Washer protrusions should not turn during installation. However, for those installations where the Load Indicator Washer is used with a hardened flat washer, some slight movement of the flat washer may be noted and is acceptable.
- c. An extra $\frac{1}{8}$ in. should be added to calculated bolt lengths to allow for the thickness of the installed Load Indicator Washer, and an extra $\frac{1}{4}$ in. should be allowed if the Load Indicator Washer is used in conjunction with a hardened flat washer.
- d. The Load Indicator Washer "gap" requirement does not change as bolt lengths change because the gap closure is a direct function of bolt *force* and not related to bolt elongation.
- e. Special washer requirements of the Research Council Bolt-ing Specification, such as those related to slotted and oversize holes, must be properly observed. The Load Indicator Washer may not be substituted for such required washers, but may be used in conjunction with those washers. When the Load Indicator Washer is used with A 490 bolts installed in material having a yield point less than 40 ksi, the Load Indicator Washer may be used in place of one of the hardened flat washers required by the specification.

After the Load Indicator Washer has been properly placed, and the connection has been properly "fit up," the nut should be turned sufficiently to reduce the *average* gap between the Load Indicator Washer and the bolt head to 0.015 in. or less, but the gap should not be re-

duced to zero. If the Load Indicator Washer is used in conjunction with a hardened flat washer (for example, at the nut end) the fastener assembly should be tightened until the gap between the Load Indicator Washer and the hardened flat washer is reduced to 0.010 in.

Inspection: Inspection is accomplished by checking the *average* gap of the Load Indicator Washer bolt assembly with a metal feeler gage, see Figure 3. Two important rules for inspection should be emphasized:

- a. Inspection should be based upon the *average* gap because the bolt will never be perfectly centered in the Load Indicator Washer, therefore, the protrusions will not collapse uniformly.
- b. The feeler gage is used as a "no go" inspection tool; that is, if the gage does not enter the gap (but a gap is evident) the installation is considered satisfactory.

Although the Load Indicator Washer is classed as an installation tool, in reality it is an *inspection* tool. Since the wrench operator will often be on the side of the connection opposite the Load Indicator Washer, he cannot easily observe changes in the Load Indicator Washer "gap." Therefore, rather than use a "gap" criterion for installation, the operator would develop a "modified turn-of-nut" procedure to install the bolt and then check the "gap." For average length bolts, approximately one full turn from the "snug" position will reduce the Load Indicator Washer gap to the required dimension; the extra rotation of approximately one-half turn is required to compensate for deformation of the Load Indicator Washer protrusions. Of course, specific turn criteria should be verified for each Load Indicator Washer installation. A verification procedure similar to that commonly used for calibrating other accepted bolting procedures may be used.

A verification setup is illustrated

in Figure 4. Note that the bolt has been mounted in the Skidmore-Wilhelm bolt calibrator (a hydraulic load cell device) with the bolt head and Load Indicator Washer bearing against the front face plate. This arrangement is a reversal of normal placement of the bolt, but this arrangement is necessary so that the Load Indicator Washer can bear against the bolt head and the gap can be readily observed. Note that a special sleeve and a hardened washer are required on the nut side of the calibrator. A longer bolt than is needed for the connection geometry may be required for the verification setup. The verification procedure should follow these steps:

- a. Place the Load Indicator Washer on the bolt with the protrusions against the bolt head.
- b. Insert the bolt-Load Indicator Washer assembly in the calibrator with the flat face of the Load Indicator Washer against the front face plate.
- c. Place the filler sleeve and a hardened flat washer on the bolt.
- d. Install the nut on the bolt and continue to turn the *nut* (hold the head so that it does not turn against the Load Indicator Washer) until the required minimum tension for that size bolt is indicated by the Skidmore-Wilhelm gage. Take note of the nut rotation used to reach the required tension, and observe the *average* gap. Often, the gap will be greater than that specified, demonstrating that further tightening until the "no go" gage condition is satisfied results in a bolt tension greater than that required. This result is acceptable.
- e. The amount of nut rotation observed during verification may then be used to install similar bolts in the actual connection.

When the Load Indicator Washer

is to be used at the nut end, the verification procedure would be similar; however, the bolt would be installed in reverse position and the filler sleeve would not be used. In general, the verification procedure should attempt to simulate the field application, when possible.

6. AVAILABILITY AND COST

Availability: Bethlehem Load Indicator Washers are available for shipment anywhere in the country from our fastener plant in Lebanon, Pennsylvania.

Sizes are stocked for prompt shipment.

Cost: Prices for Bethlehem Load Indicator Washers will be furnished on request. Consult telephone directory for nearest Bethlehem sales office.

7. GUARANTEE

Load Indicator Washers are manufactured on the basis of compliance with specifications which are met at the production plant. There are no guarantees or warranties which extend beyond specification compliance as stated herein.

8. MAINTENANCE

When properly installed, Load Indicator Washers require no maintenance.

9. TECHNICAL SERVICES

Bethlehem Steel has an experienced staff of Sales Engineers available for technical consultation in most major cities. To arrange a meeting, call the Sales Engineer in the Bethlehem office nearest you or write to Bethlehem Steel Corporation, Bethlehem, PA 18016.

10. FILING SYSTEMS

Uniform Construction Index SPEC-DATA II. Bethlehem Load Indicator Washers Folder 2950 available on request.



Sold under license
from Cooper + Turner, inc.
U S Patent No 3187621

Figure 1 Two load indicator washer types

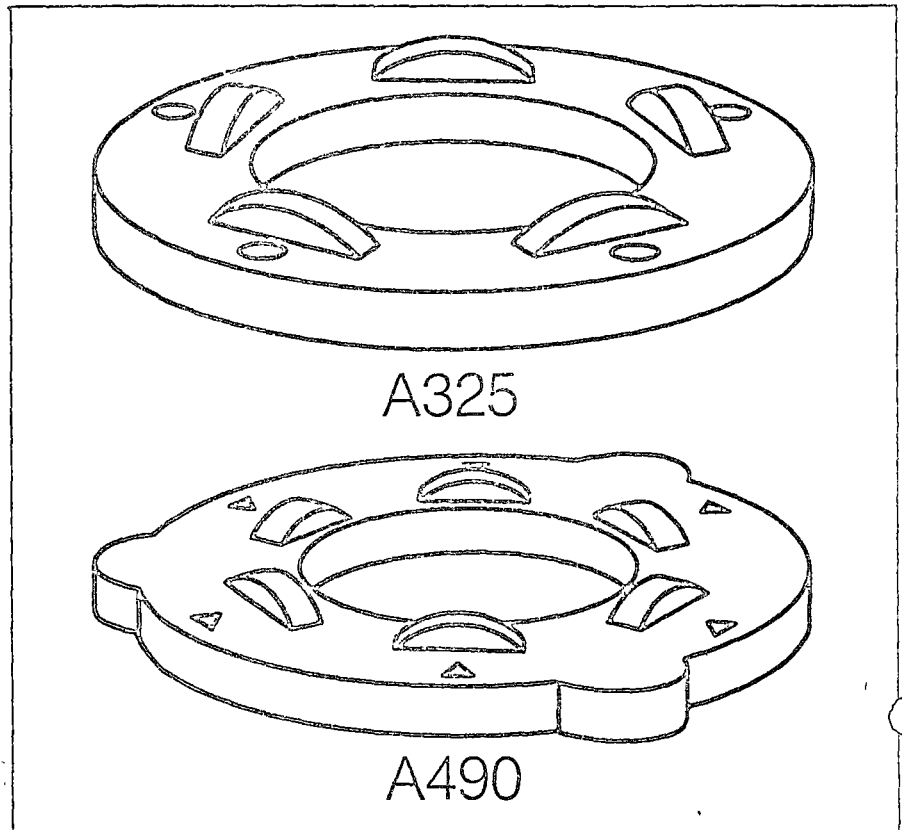


Figure 3. Inspection gage

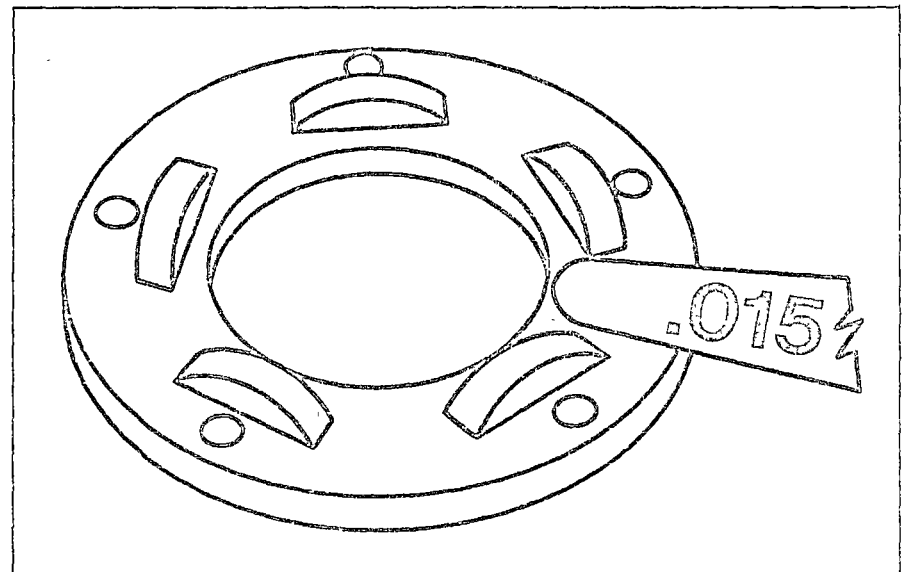


Figure 2. Two basic load indicator washer assemblies

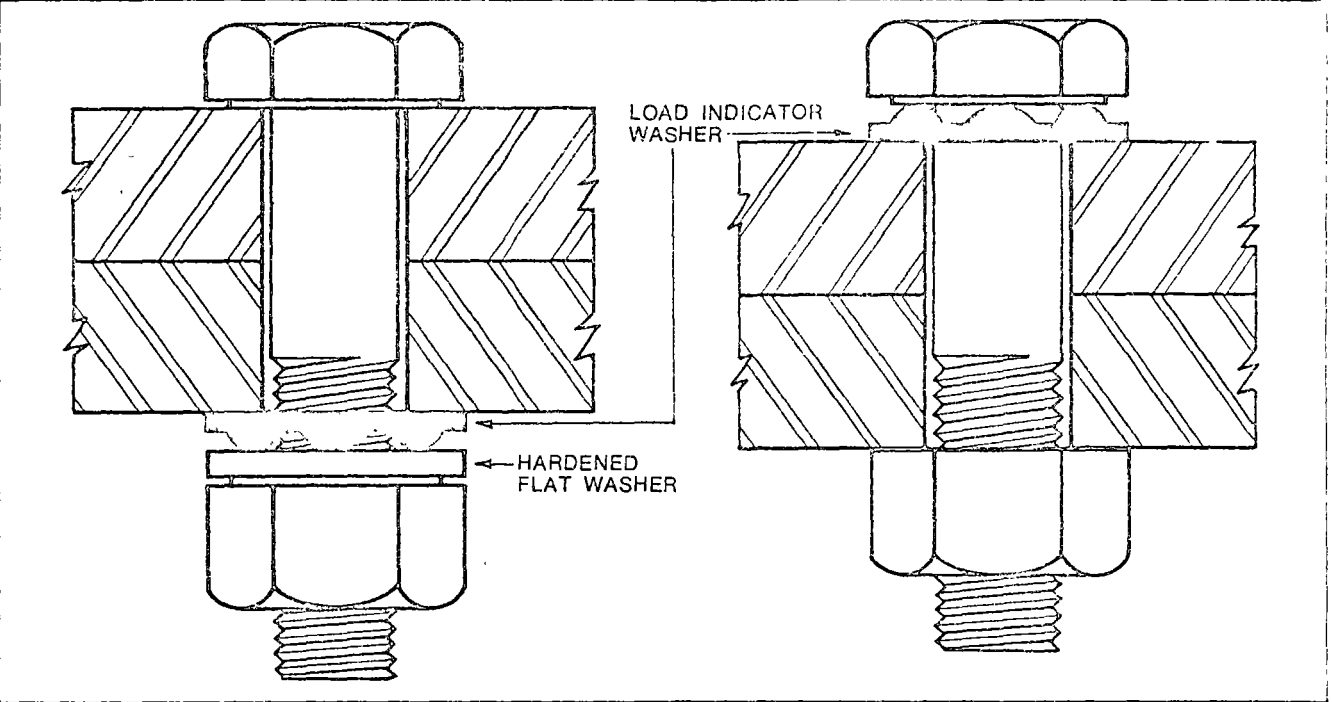
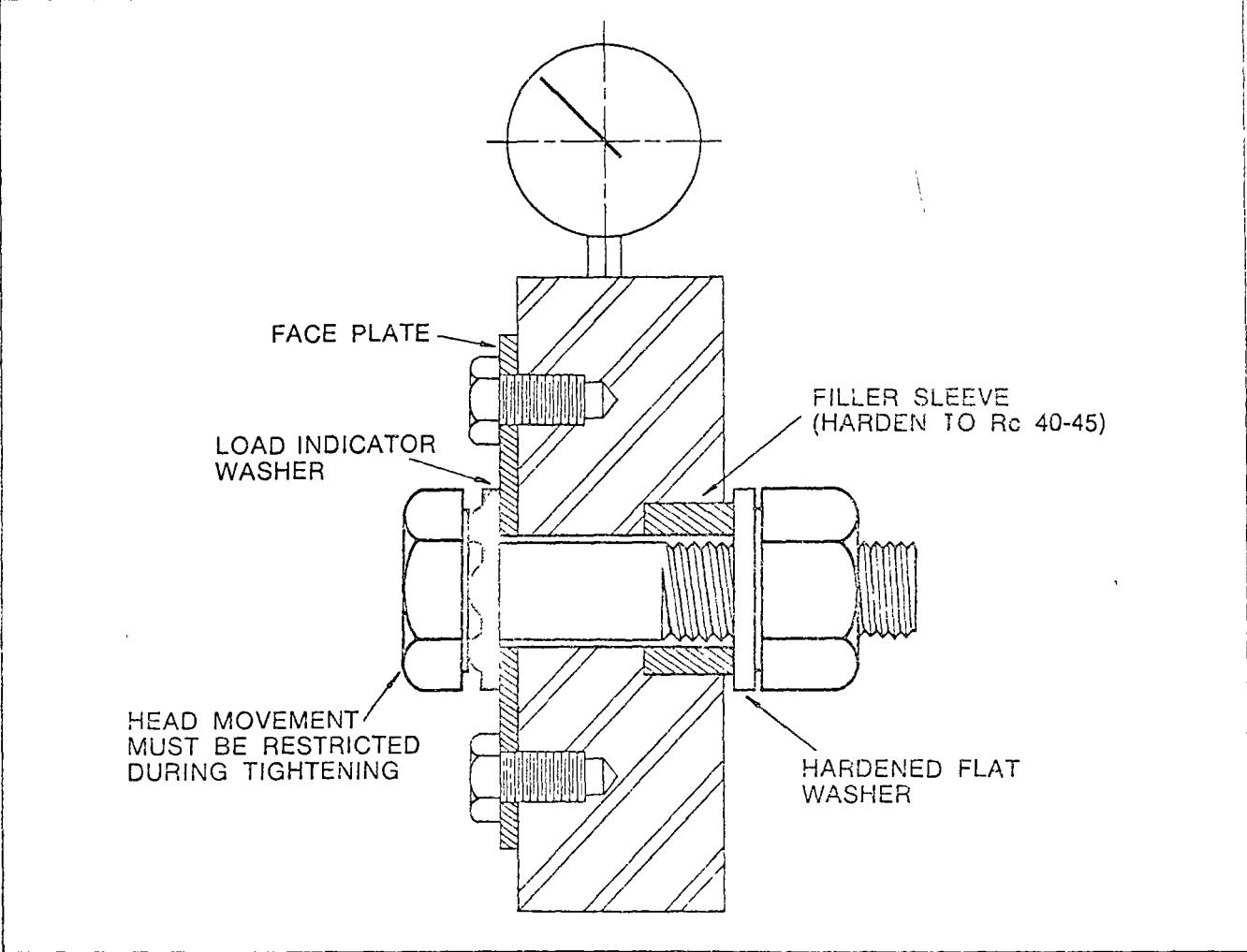


Figure 4. Hydraulic bolt calibrator



1. PRODUCT NAME

ASTM A325 and A490 High-Strength Structural Bolts, Nuts and Washers

2. MANUFACTURER

Bethlehem Steel Corporation
Bethlehem, PA 18016
Phone: (215) 694-2424

3. PRODUCTION DESCRIPTION

Basic Use: A325 and A490 high-strength structural bolts, nuts, and washers are used extensively in the field for joining structural members of steel-framed buildings, bridges, towers, and other major structures. They are also widely used for many types of shop-fabricated assemblies. Specifically, A325 and A490 bolts are intended for use in friction- or bearing-type connections in accordance with the design and assembly requirements set forth by the Research Council on Riveted and Bolted Structural Joints of the Engineering Foundation. (See "Applicable Standards" section below.)

Limitations: None (when installed in accordance with the requirements of the Research Council Specification).

Grades: High-strength bolts are made and furnished by Bethlehem in the following grades:

ASTM A325 Type 1 and Type 2 High-Strength Carbon-Steel Structural Fasteners.

A325 high-strength bolts are also available with a slotted recess in the threaded end designated as Bethlehem's N-DRIV.

WEATH-R Weathering-Steel High-Strength Structural Fasteners, which meet ASTM A325 Type 3.

ASTM A490 High-Strength Alloy-Steel Structural Fasteners.

Sizes: See Table 1.

Identification Markings: See Table 1.

Applicable Standards: Specifications of primary importance covering A325 and A490 high-strength structural bolts are:

a. Specification for Structural Joints using ASTM A325 or A490 Bolts, approved by the Research Council on Riveted and Bolted Structural Joints of the Engineering Foundation, April 18, 1972.

b. ASTM Standard Specification for High-Strength Bolts for Structural Steel Joints, Including Suitable Nuts and Plain Hardened Washers, ASTM Designation: A325.

c. ASTM Standard Specification for Quenched and Tempered Alloy Bolts for Structural Steel Joints, ASTM Designation: A490.

When galvanized high-strength structural bolts are specified, the bolts are ASTM A325 Type 1. The nuts are ASTM A194-69, Grade 2H. Galvanized bolts, nuts and washers are hot-galvanized in accordance with ASTM Spec. A153-71, Class C Nuts are tapped oversize and are provided with an additional

lubricant which shall be clean and dry to the touch.

The Research Council Specification for Structural Joints prohibits the use of hot-dip galvanized or other coating types on A490 bolts.

Other high-strength bolting specifications worthy of special mention are the AREA (American Railway Engineering Association) Specification and the AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials) Specification. In addition, numerous local, city, and state-level specifications on the subject have also been issued. For the most part, these all borrow heavily from Research Council and ASTM Specifications.

4. TECHNICAL DATA

Properties: A325 and A490 high-strength structural bolts, nuts, and washers are manufactured by Bethlehem to meet chemical composition and mechanical property requirements specified by the American Society for Testing and Materials.

Allowable Working Stresses: The allowable working stresses for A325 and A490 bolts, as specified by the Research Council for use in both bridges and buildings, are set forth in Table 2.

Minimum Fastener Tension: Table 3 shows the minimum tension to which each size and grade of bolt must be tightened to achieve a satisfactory structural joint.

5. INSTALLATION

Methods: Three methods for tightening high-strength bolts have been approved by the Research Council:

a. **Calibrated-Wrench Tightening** which utilizes a special wrench designed to cut off at a preset torque, where the torque setting must produce a bolt tension 5 to 10 percent in excess of the required minimum.

b. **Turn-of-Nut Tightening** which may be accomplished with any wrench having sufficient power to tighten the bolt in accordance with the required nut rotation from snug-tight condition shown in Table 4. ("Snug" is defined as the point at which the wrench begins to impact and assumes that the connection has been properly drawn together by fitting-up bolts.)

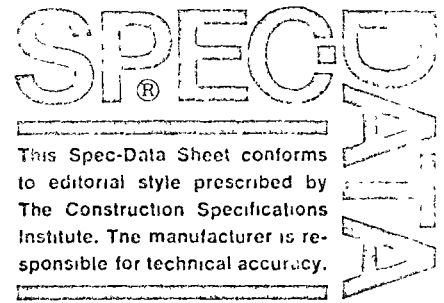
c. **Tightening by Use of Direct Tension Indicator** which may be any device that can demonstrate proper bolt tension by an accurate direct measurement procedure Bethlehem Load Indicator Washers satisfy this method of tightening.

All bolts must be tightened to provide at least the minimum fastener tension shown in Table 3.

Inspection: Completed work should be inspected.

a. visually (to make certain that bolts in completed connections bear proper identification symbols);

b. visually (to see that the hexagon faces of bolt heads or nuts show marks indicating that wrenches were ade-



This Spec-Data Sheet conforms to editorial style prescribed by The Construction Specifications Institute. The manufacturer is responsible for technical accuracy.

quately used on the torqued unit of the assembly);

c. mechanically (to determine that a representative percentage of bolts in each connection has been torqued to at least specified minimum tension),

d. mechanically (through the use of appropriate measuring equipment or gages in conjunction with a direct tension indicator).

Calibration: Regardless of the method of installation, the use of a calibrating device to check out tools and equipment and to provide a means of reliable inspection is essential.

For complete details on proper tightening and inspection procedures we invite you to write for Booklet 2867.

6. AVAILABILITY AND COST

Availability: Bethlehem high-strength bolts are available for shipment anywhere in the country from our fastener plants in Lebanon, Pa., Los Angeles, Calif., Seattle, Wash., Birmingham, Ala., and East Chicago, Ind., and our mill depot in Houston, Texas. Popular diameters and lengths are stocked for prompt shipment; non-stock sizes on inquiry, can usually be furnished within 4 to 5 weeks when ordered in production quantities.

Cost: Prices for all types of Bethlehem high-strength fasteners and Bethlehem Load Indicator Washers will be furnished on request. Consult telephone directory for nearest Bethlehem sales office.

7. GUARANTEE

A325 and A490 bolts are manufactured on the basis of compliance with ASTM specifications which are met at the production plant. There are no guarantees or warranties which extend beyond specification compliance as stated herein.

8. MAINTENANCE

When properly installed, high-strength structural bolts require no maintenance.

9. TECHNICAL SERVICES

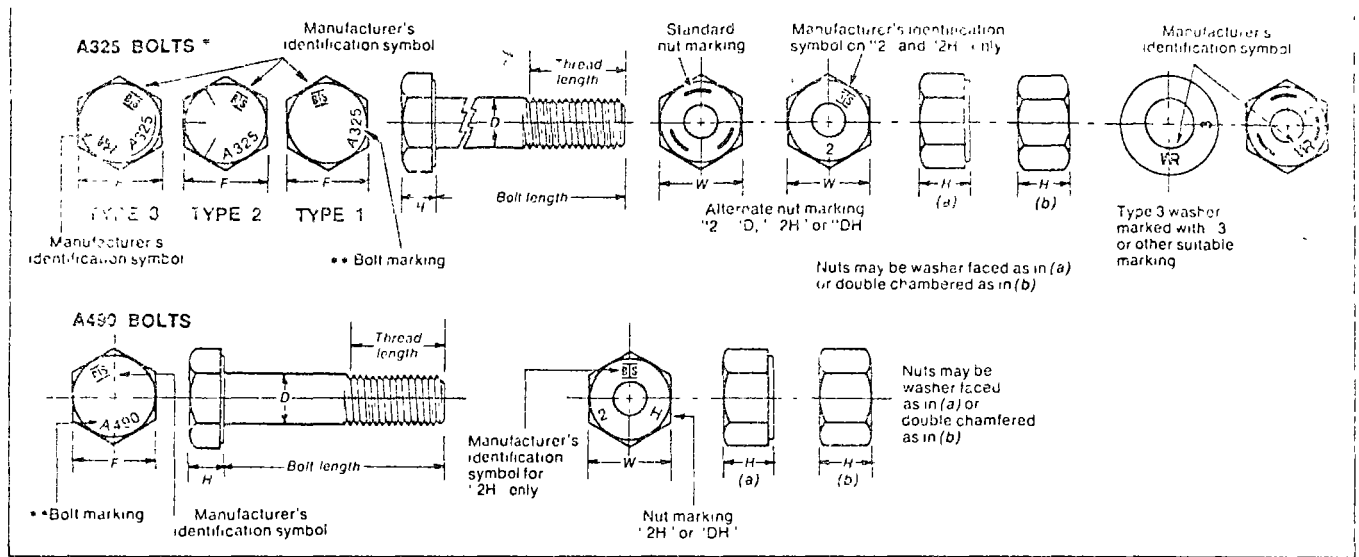
Bethlehem Steel has an experienced staff of Sales Engineers available for technical consultation in most major cities. To arrange a meeting, call the Sales Engineer in the Bethlehem office nearest you, or write to Bethlehem Steel Corporation, Bethlehem, PA 18016.

10. FILING SYSTEMS

Uniform Construction Index SPEC-DATA® II.

Bethlehem High-Strength Bolting Booklet 2867 and Load Indicator Washer Folder 2950 available on request.

The ten-point Spec-Data® format has been reproduced from publications copyrighted by CSI, 1964, 1965, 1966, 1967, and used by permission of The Construction Specifications Institute, Inc., Washington, D.C. 20036.



**TABLE 1—
DIMENSIONS AND
MARKINGS**

*Bethlehem makes available both high strength carbon steel (Type 1) and high strength weathering steel (Type 3) bolts to ASTM A325. The Type 3 bolt is called Weath-R and is identified with the Bethlehem trademark, the A325 underlined, and a WR marking on the head. Weath-R nuts are identified with the WR mark, the numeral 3 and three circumferential lines. The washers show the WR mark and the numeral three.

**ASTM specifications permit the heads of A325 Type 1 to be marked with 3 radial lines, at the manufacturer's option.

**TABLE 2—ALLOWABLE
WORKING STRESSES***

*The tabulated stresses, except for bearing stress, apply to bolts used in any grade of steel.

*Static loading only.

*F_y = Specified minimum yield point of the lowest strength connected part. The bearing stress shall not be more than the specified minimum tensile strength of the lowest strength connected material.

**TABLE 3—
FASTENER TENSION**

*Equal to 70 percent of specified minimum tensile strengths of bolts, rounded off to the nearest kip.

Nominal bolt size, D	Bolt Dimensions, in inches			Nut Dimensions, in inches	
	Heavy Hex Structural Bolts			Heavy Hex Nuts	
	Width across flats F	Height, H	Thread length	Width across flats W	Height, H
1/2	7/8	5/16	1	7/8	3 1/64
5/8	1 1/16	25/64	1 1/4	1 1/16	3 3/64
3/4	1 1/4	15/32	1 3/8	1 1/4	4 1/64
7/8	1 7/16	35/64	1 1/2	1 7/16	5 5/64
1	1 3/8	39/64	1 3/4	1 3/8	6 3/64
1 1/8	1 11/16	11/16	2	1 11/16	1 7/64
1 1/4	2	25/32	2	2	1 7/32
1 3/8	2 3/16	27/32	2 1/4	2 3/16	1 11/32
1 1/2	2 3/8	15/16	2 1/2	2 3/8	1 15/32

Loading Conditions	ASTM A325 Bolts		ASTM A490 Bolts	
	Bridges	Buildings	Bridges	Buildings
Applied tension, psi	36,000	40,000	48,000 ^b	54,000 ^b
Shear, psi:				
1. Friction-type connection	13,500	15,000	18,000	20,000
2. Bearing-type connection, shear plane through threads	13,500	15,000	20,000	22,500
3. Bearing-type connection, threads excluded	20,000	22,000	29,000	32,000
Bearing, psi ^c	1.22 F _y	1.35 F _y	1.22 F _y	1.35 F _y

Bolt Size, in inches	Minimum Fastener Tension ^a in Thousands of Pounds (kips)	
	A325 Bolts	A490 Bolts
	1/2	12
5/8	19	24
3/4	28	35
7/8	39	49
1	51	64
1 1/8	56	80
1 1/4	71	102
1 3/8	85	121
1 1/2	103	148

**TABLE 4—NUT
ROTATION^a FROM
SNUG-TIGHT
CONDITION**

^aApplicable to coarse thread heavy hex structural bolts of all sizes and lengths up to 12 dia., and heavy hex semi-finished nuts. Nut rotation is relative to bolt regardless of the element (nut or bolt) being turned. Tolerance on rotation 30° (one-twelfth) turn over or under.

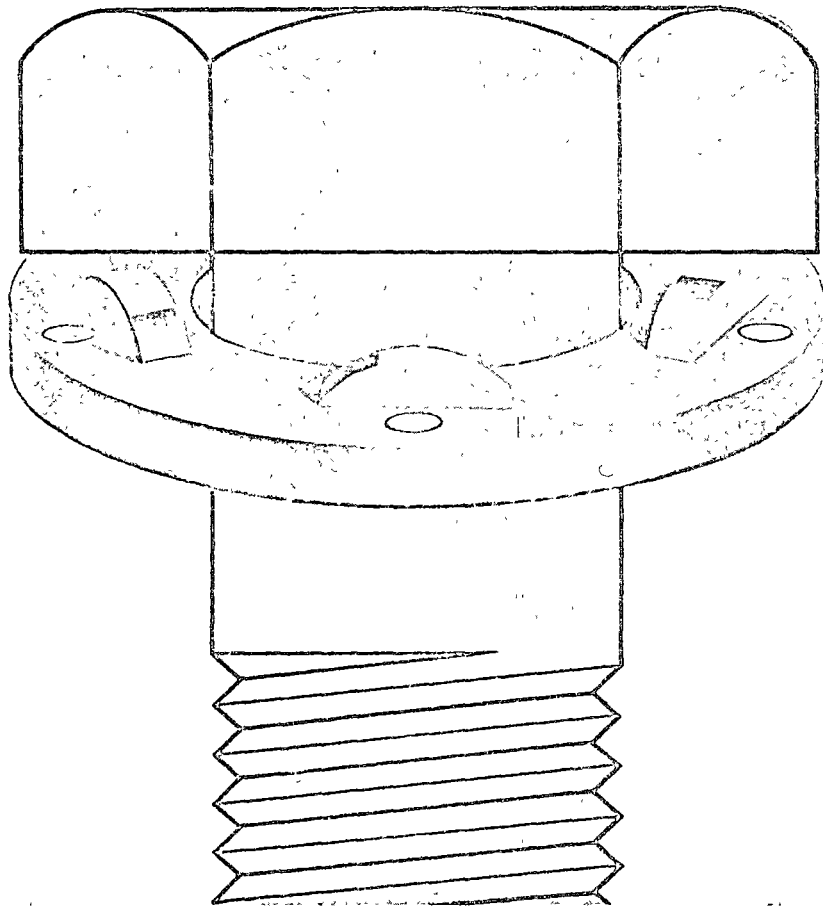
^bNo research work has been performed by the Council to establish the turn-of-nut procedure when bolt lengths exceed 12 diameters. Therefore, the required rotation must be determined by actual tests in a suitable tension device simulating the actual conditions.

Bolt Length (as measured from underside of head to extreme end of point)	Disposition of Outer Faces of Bolted Parts		
	Both faces normal to bolt axis	One face normal to bolt axis and other face sloped not more than 1:20 (bevel washer not used)	Both faces sloped not more than 1:20 from normal to bolt axis (bevel washers not used)
Up to and including 4 diameters	1/3 turn	1/2 turn	2/3 turn
Over 4 diameters but not exceeding 8 diameters	1/2 turn	2/3 turn	5/6 turn
Over 8 diameters but not exceeding 12 diameters ^b	2/3 turn	5/6 turn	1 turn

The Bethlehem Load Indicator Washer

a direct tension indicating device.

a simple and accurate aid to tightening and
inspection of high-strength bolts



Bethlehem 

The Bethlehem Load Indicator Washer

This direct-tension indicator is both simple and accurate . . . for the tightening and inspection of high-strength bolts. The load indicator is a hardened steel washer with a series of protrusions on one face. Induced bolt tension is indicated directly and accurately. Bethlehem furnishes the load indicator washer with a black finish.

Simple to use

Standard wrenches and sockets are used for tightening. No special tools required. No tedious calibration.

Fast

Up to 30 per cent faster on installation and inspection than other accepted methods.

Accurate

When the bolt is tightened to the specified gap, correct bolt tension is automatically induced. There is no need to depend upon an assumed relation between torque and tension in meeting standards.

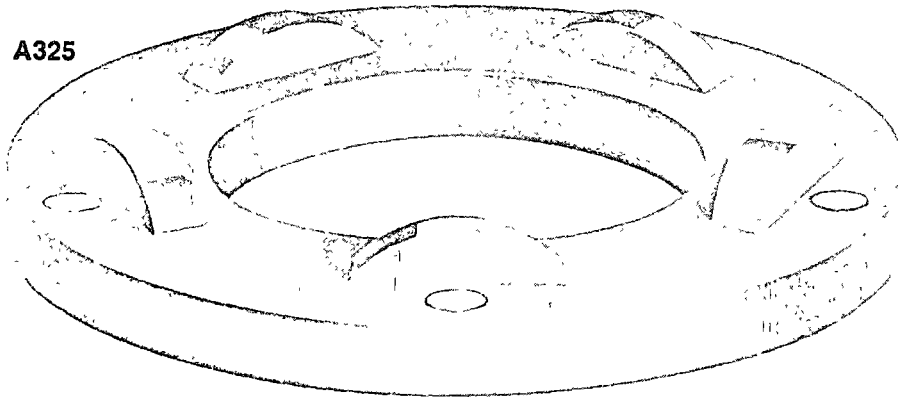
Flexible

Load indicator washers can be used under the head or at the nut end, and thus can be used with countersunk head bolts. They will take up to a 3° flange taper.

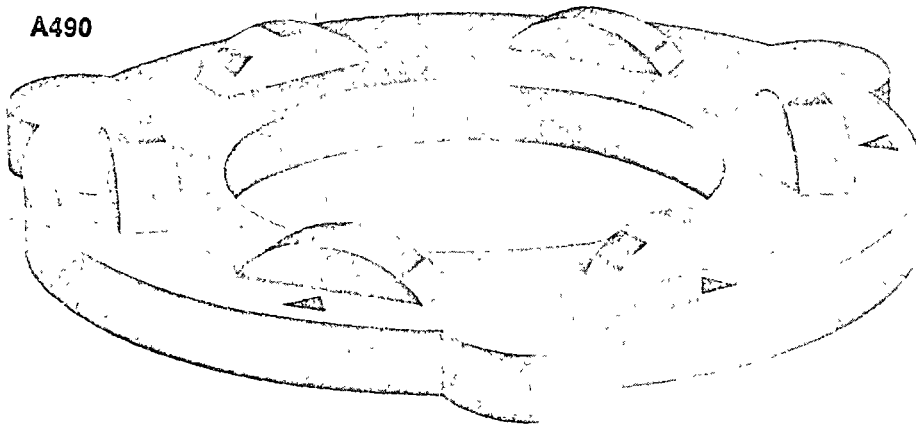
Constant

At the specified gap, bolt tension is repeated to $\pm 15\%$. The critical tension of the bolt will never be less than minimum required, and, as long as the gap is not completely closed, the bolt cannot be over tightened.

A325



A490



Proof of Installation

Load indicator washers leave a permanent witness that proper tightening has been completed. Eye inspection gives acceptable accuracy.

Wide Application

Load indicator washers are manufactured to ASTM A325 and A490, with slightly different configurations for quick identification. Specifications for the use of high-strength bolts in structural steelwork requiring that bolts be tightened to a minimum tension: AISC, AASHTO, AREA, and RCRBSJ.

Figure 1

How it works

The Bethlehem load indicator washer is a specially hardened washer with protrusions on one face, as illustrated in figure 1. The protrusions bear against the underside of the bolt head leaving a gap. As the bolt is tightened the protrusions are flattened and the gap reduced. While tightening, be sure the bolt head does not spin

on the load indicator protrusions. At a specified average gap, measured by feeler gage as in figure 2, the induced bolt tension will not be less than the minimum required by various Standards. Figure 3 shows an assembly in place before and after tightening the bolt. The maximum gaps between load indicator washer and bolt head after tightening are shown in table 1 (page 5). Table 2 (page 5) shows the induced bolt tensions which correspond to these gaps.

Figures 4, 5, and 6 show graphically how the load indicator washer is used with taper flanges and when fitting under the nut, in which case a special nut-faced washer is used.

Other methods for the tightening of high-strength bolts have

drawbacks that are now overcome by the load indicator washer.

Figure 7 shows the wide scatter of tension results obtained with four $\frac{7}{8}$ in., A325 bolts from the same lot tightened by the calibrated wrench method. These are compared with results from similar bolts tightened using load indicator washers.

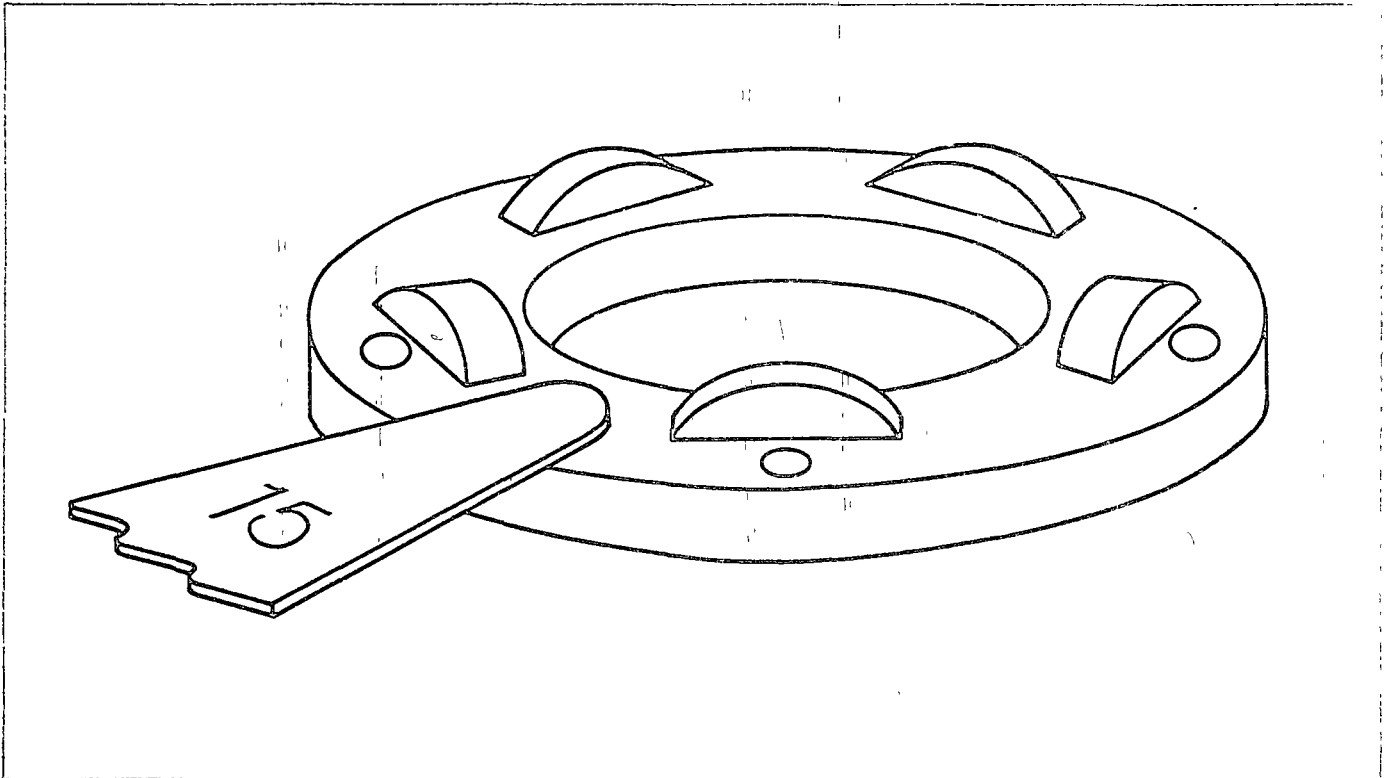
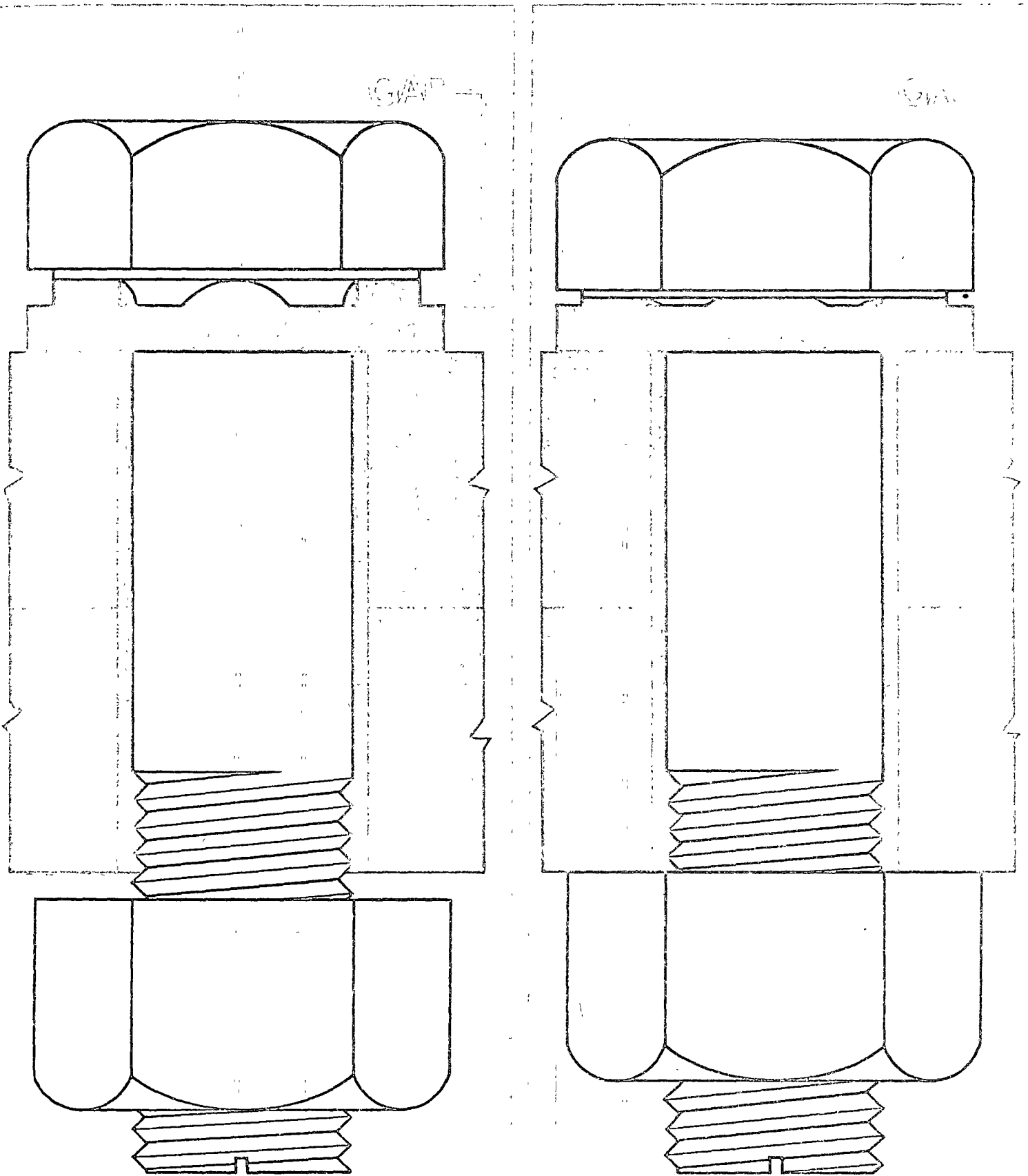


Figure 2

Figure 3



Slotted bolts are shown in various illustrations in this folder. These time-saving bolts are sold as Bethlehem N-DRIV® bolts, and are fully described in our Folder 2708-A.

Table 1 Load indicator gaps to give required minimum bolt tension		
Load Indicator Fitting	A325	A490
	Under Bolt Head Black Finish Bolts	0.015 in.
Under Nut with Nut Face Washers Black Finish	0.010 in.	0.010 in.
With the gaps shown above, required minimum bolt tensions will be induced as given in Table 2.		

Table 2 Minimum bolt tensions		
Bolt dia (in.)	In thousands of pounds (Kips)	
	A325	A490
1/2	12	—
5/8	19	—
3/4	28	35
7/8	39	49
1	51	64
1 1/8	56	80
1 1/4	71	102

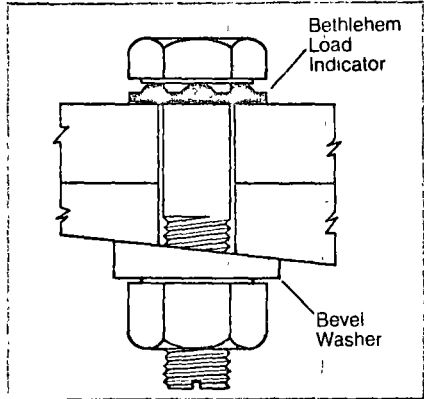


Figure 4

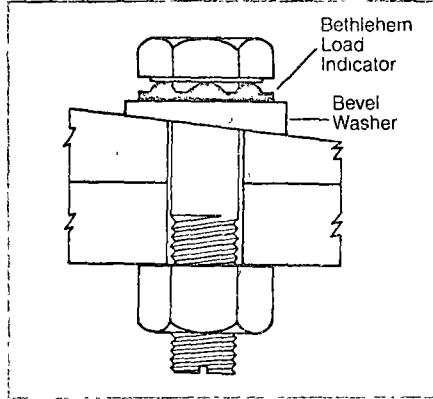


Figure 5

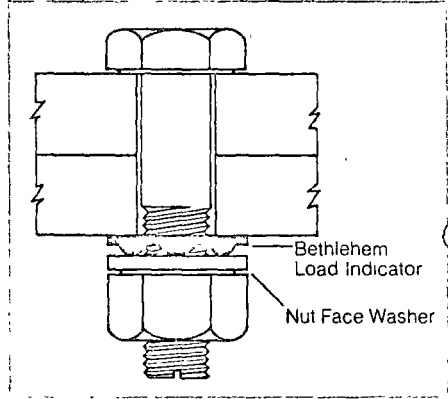


Figure 6

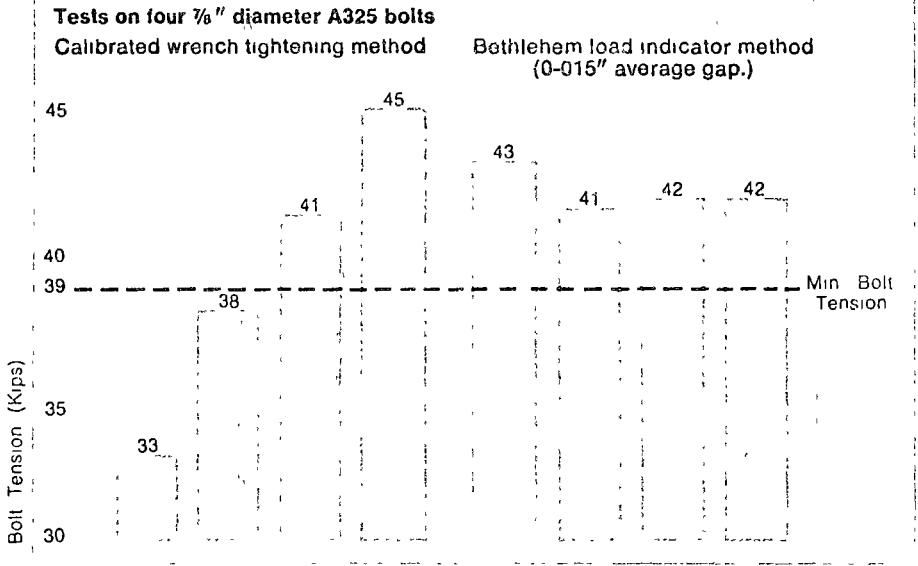
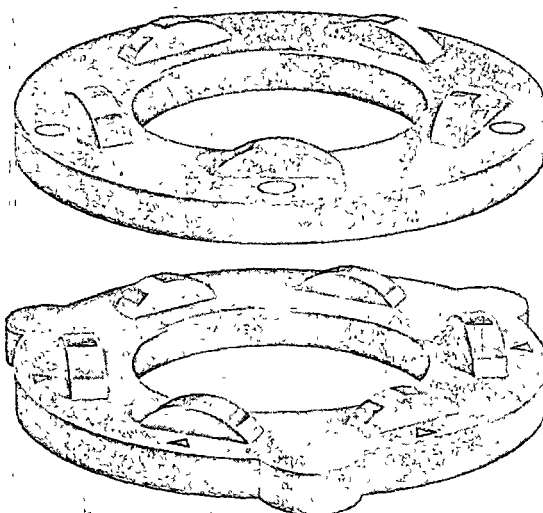


Figure 7



Specification

High-strength bolts can be tightened by use of a direct tension indicating device in accordance with the provisions of Paragraph 5(e) of the Specification for Structural Joints Using ASTM A325 or A490 Bolts, Approved by the Research Council on Riveted and Bolted Structural Joints, April 18, 1972.

Inspection

To be sure that the specified bolt tightness has been obtained, the inspector need only observe the installed bolts and satisfy himself that the indicators have been closed to at least the required gap.

Load Indicator Thickness

An additional $\frac{1}{8}$ in. should be allowed on the bolt length for the load indicator washer or $\frac{1}{4}$ in. if both the indicator and a nut face washer are to be used.

Stress Relaxation and Fatigue

Tests of stress relaxation over long periods on cold-worked steel show that no measureable "cold creep" is experienced at temperatures below 150° C. This is confirmed by tests on load indicator washers which after bolting up to indicated load at ambient temperature show

no relaxation in bolt load after periods of more than 40,000 hours.

Stress reversal axial load tests from zero to 0.6 times proof load on bolts tightened with load indicator washers to proof load show no relaxation in bolt tension after 2,700,000 reversals.

Technical Reports

The load indicator washer is a thoroughly tried and tested product. Tests are fully described in a series of technical reports which are available on request. A comprehensive study was completed in August, 1972, in the paper, "Bolt tension control with a direct tension indicator", by J. H. A. Struick, A. O. Oyeledun and J. W. Fisher of the Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pa.

The Bethlehem load indicator washer is a precision made measuring device and on no account should it be given any further treatment.

The nearest Bethlehem sales office will be happy to give you more details on the load indicator washer. Or write to us at Bethlehem, PA 18016.



Sold under license from Cooper + Turner, Inc.
U.S. Patent No. 3187621

Bethlehem



Bolt Tension Control
with a Direct Tension
Indicator

JOHN H. A. STRUIK, ABAYOMI O. OYELEDUN
AND JOHN W. FISHER



REPRINTED FROM

AISC ENGINEERING JOURNAL

Published by American Institute of Steel Construction, 101 Park Ave., New York, N. Y. 10017

Bolt Tension Control with a Direct Tension Indicator

JOHN H. A. STRUIK, ABAYOMI O. OYELEDUN AND JOHN W. FISHER

ACHIEVING THE MINIMUM required bolt tension in a high strength bolted friction-type joint is a primary factor, since the slip resistance of the joint is dependent on the bolt tension. Current specifications¹ require that high strength structural bolts be tightened to at least 70 percent of the minimum required tensile strength.

For the past two decades installation has been primarily controlled by either turn-of-nut or calibrated wrench tightening. The turn-of-nut method depends upon strain control as contrasted to the torque control of the calibrated wrench method.

Since the turn-of-nut method is primarily strain control, the effectiveness of the method depends on the starting point and accuracy of the rotational measurements.^{2,3} The variability of torque control is well known and was one of the reasons for the development of the turn-of-nut method.

Bolts tightened by the turn-of-nut method may have the outer face of the nut match-marked with the protruding bolt point before final tightening, so that an inspector can visually note the nut rotation. If an impact wrench is used for tightening, a slight peening of the bolt heads or nuts gives an additional indication that the bolt has been tightened. However, if the need for more inspection of bolt tension is necessary, one must use a calibrated inspection torque wrench with all its uncertainties.

The *Coronet* load indicator is a device that provides a different means of evaluating the induced bolt tension during and after tightening. It is a hardened washer with a series of protrusions on one face, as shown in Fig. 1. The washer is usually inserted between the bolt head and the gripped material with the protrusions bearing against the underside of the bolt, leaving a gap (see Fig. 2). Upon tightening, the protrusions are flattened and the

gap is reduced, as shown in Fig. 2. Bolt tension is evaluated from measurements of the residual gap.

High strength bolted joints installed with *Coronet* load indicators have been used in England for the past 10 years, with reports of significant cost savings over both turn-of-nut and calibrated wrench installations. To date, this system has been employed in two structures in the United States, with similar experience.

This study was made to determine the behavior and performance of *Coronet* load indicators when used with A325 and A490 bolts.

TEST PROGRAM

The test program included the study of the load-gap relationship of *Coronet* load indicators with both A325 and A490 bolts. Three diameters of A325 bolts were tested ($\frac{7}{8}$ -in., 1-in., and $1\frac{1}{8}$ -in.) with a 4-in. grip and both parallel and out-of-parallel surfaces. Five bolts with washers were tested for each combination. Two additional test series were undertaken on $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts with $\frac{3}{4}$ -in. and $1\frac{3}{4}$ -in. grips.

Out-of-parallel surfaces were created by inserting tapered washers under both the head and the nut of the

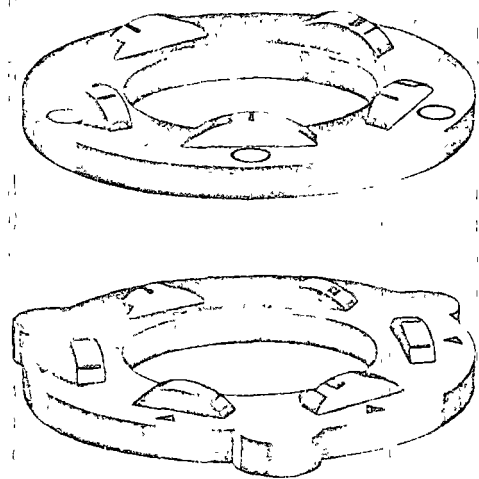


Fig. 1. *Coronet* load indicators

John H. A. Struik is Research Assistant, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pa

Abayomi O. Oyeledun is Research Assistant, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pa

John W. Fisher is Professor of Civil Engineering, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pa

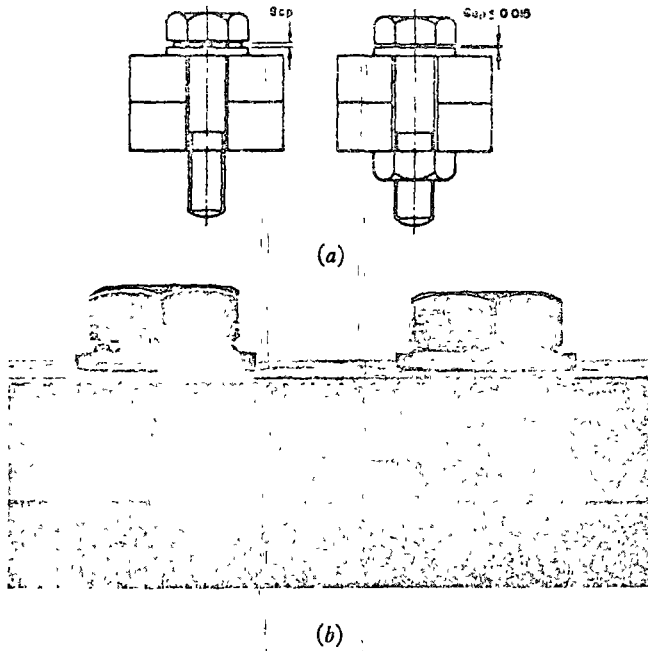


Fig. 2. Coronet load indicators before and after bolt installation

bolt. The washers had a slope of 5 percent, so that the total difference in slope between the contact surfaces of the bolt head, nut, and tapered washers was equal to 10 percent.

The tests on indicators for A490 bolts were carried out on $\frac{7}{8}$ -in. and $1\frac{1}{8}$ -in. bolts with a 4-in. grip. Both parallel and out-of-parallel surface conditions were examined. These tests were all carried out individually in a hydraulic bolt calibrator as shown in Fig. 3. In addition, both A325 and A490 bolts were installed in simulated test joints to evaluate their installation performance and ascertain whether tightening adjacent bolts had any effect on the bolt elongation and gap opening. Table 1 summarizes the experiment design.

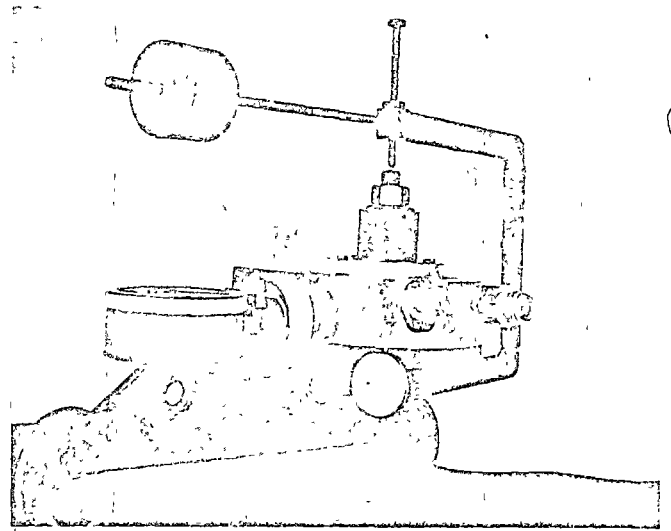


Fig. 3. Calibration of bolts and washers

PREPARATION AND TEST PROCEDURE

Before testing, each bolt was drilled and counter-sunk at each end in order to accommodate the C-frame extensometer used to measure changes in length during tightening.

Two different hydraulic bolt calibrators were used to measure bolt tension during the torqued tension tests. One, with a capacity of 100 kips, was used to test $\frac{7}{8}$ -in. and 1-in. bolts. The other, with a capacity of 220 kips, was used for tests of $1\frac{1}{8}$ -in. bolts.

All bolt elongations were measured with a C-frame extensometer. The gap on the Coronet load indicator was determined with feeler gages.

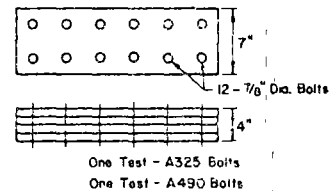
A large capacity pneumatic impact wrench running on a line pressure of about 120 psi was used to tighten the bolts.

Table 1. Summary Experiment Design

Grip Length (in.)	Bolt diameter and Bolt Strength Designation				
	$\frac{7}{8}$ -in.		1-in.	$1\frac{1}{8}$ -in.	
	A325	A490	A325	A325	A490
$\frac{3}{4}$	p	—	—	—	—
$1\frac{3}{4}$	p	—	—	—	—
4	p np	p np	p np	p np	p np

Notes: p = parallel surfaces
np = non-parallel surfaces
For each combination, 5 bolts were tested

(a) Summary bolt calibration tests



(b) Fitting-up tests

Each bolt was initially tightened to a snug load of 5 kips and the gap and elongation recorded. Tension was then induced by turning the nut in increments of 45° with load, elongation, and gap recorded at each increment (see Fig. 3). The test was terminated at gap closure. Upon unloading the bolt to 5 kips, the gap rebound was determined.

The 3/4-in. grip bolts could not be installed in the hydraulic bolt calibrator. Load in the bolt was determined from the elongation measurements and checked against the gap closure measurements. These bolts were all installed in steel plates.

Several bolts were installed in a simulated joint as shown in Table 1. All bolts were snugged to compact the joint, and bolt elongation and gap closure were recorded. Bolts were then tightened in a sequential pattern to simulate an actual joint installation. The nut was turned until the gap between the washer face of the bolt head and the surface of the load indication was reduced to 0.015 in. or less. After each bolt was tightened, the gap and elongation were measured on the bolt just tightened, as well as adjacent fasteners. This permitted an examination of the loss in bolt preload as determined by changes in gap closure and bolt elongation.

RESULTS AND ANALYSIS

Parallel Surfaces—The test results for the basic series of tests with a 4-in. grip, were summarized in the form of bolt tension-gap closure measurements. Figures 4, 5, and 6 show the results for 7/8-in. and 1-in. A325 bolts and 7/8-in. A490 bolts. The mean regression line and the 95 percent confidence limits are also shown. The variation in the test data was nearly uniform at all load levels. The results are directly comparable to measurements made by Cullimore and Boston on high strength bolts with countersunk heads.⁴ The only major difference between the tension-gap relationship determined by Cullimore and Boston and this study was the distribution of the test data. The study in Ref. 4 indicated less variability at higher load levels and smaller gaps. In the study on countersunk heads, the *Coronet* load indicator was placed under the nut and a special nut face washer inserted between the nut and the load indicator. This device is not required or used when the load indicator is inserted under the bolt head.

In order to achieve the minimum required bolt tension, the manufacturer recommends tightening until the gap is reduced to 0.015 in. or less. The 7/8-in. A325 bolts had an indicated bolt tension which varied between 37 kips and 46 kips with an average value of 41 kips at the 0.015 in. maximum gap, as shown in Fig. 4. The minimum required tension is 39 kips.¹ At the 0.015-in. gap closure, the bolt tension in the 1-in. A325 bolts varied from 48.5 kips to 53.5 kips with an average value of 51.0 kips, which was equal to the minimum tension

(see Fig. 5). The 1 1/8-in. bolts varied between 52 kips and 61 kips with an average value of 56.5 kips, which is slightly greater than the minimum required tension.

The 7/8-in. A490 bolts had a tension which varied between 49.5 kips and 55 kips, as illustrated in Fig. 6. The average value of 52.8 kips was in excess of the specified minimum tension of 49 kips. The 1 1/8-in. A490 bolts had a bolt tension which varied from 75 kips to 85 kips, with an average value of 80 kips at a gap of 0.015 in.

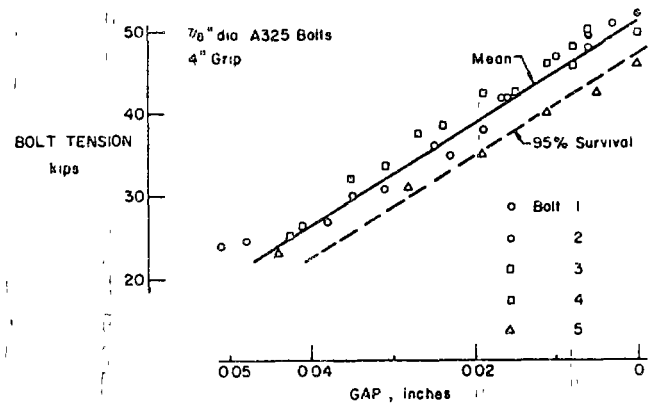


Fig. 4. Calibration of load indicators for 7/8-in. A325 bolts

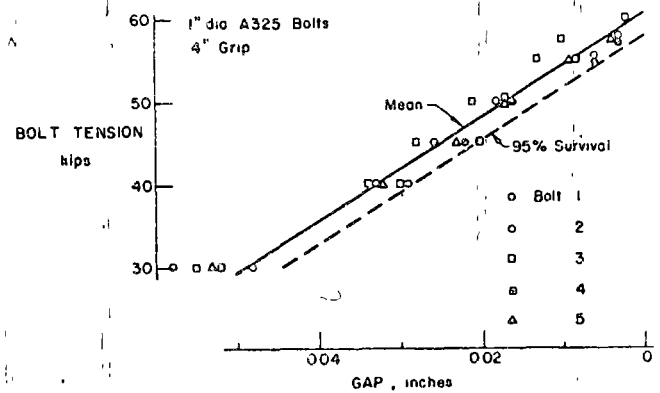


Fig. 5. Calibration of load indicators for 1-in. A325 bolts

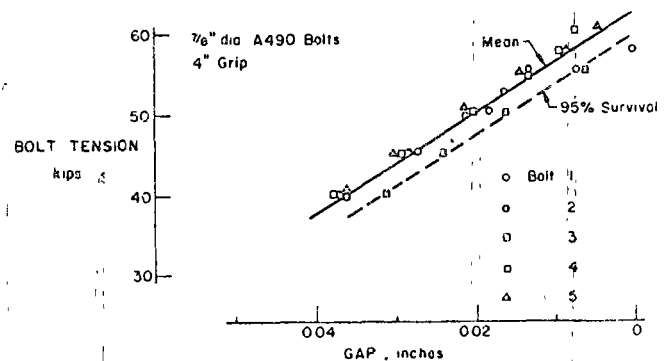


Fig. 6. Calibration of load indicators for 7/8-in. A490 bolts

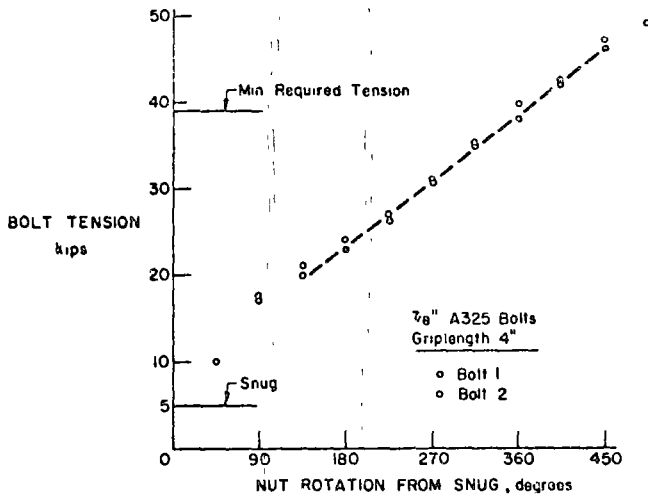


Fig. 7. Nut rotation vs. bolt tension for $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts with load indicating washer

It is readily apparent in Figs. 4 through 6 that the five load indicator tests undertaken with each bolt diameter were in reasonable agreement. The reliability of the tension indicating device was good.

The nut rotation vs. bolt tension relationship for bolts installed with *Coronet* load indicators differs substantially from the relationships normally observed with the turn-of-nut or calibrated wrench installation, as illustrated in Fig. 7. A much greater rotation is needed to achieve the required minimum bolt tension. This results from the presence of the protrusions on the washers which provide a large deformation capacity as they are flattened during tightening. Test results indicated that not much load was introduced into the bolts until the gap was closed to 0.040-0.050 in. Subsequent closure provides a linear relationship between bolt tension and gap opening as illustrated in Figs. 4 through 6.

Influence of Grip Length—It is well known that substantial changes in grip length require changes in installation procedure. This is reflected by the specifications,¹ which require different amounts of nut rotation for long grip bolts. With short grip lengths, troubles have been encountered with over-turned fasteners. The decreased grip length also reduces the rotational capacity.^{2,3}

With the *Coronet* load indicator, the bolt load is determined by the deformation of the washer protrusions. Hence, it is not affected by a change in grip length. This is illustrated in Fig. 8, where the bolt force is plotted as a function of the gap for $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts and a variable grip length. Although different amounts of nut rotation will be experienced, as well as a difference in the bolt elongation because of the bolt grip (see Fig. 9), these factors do not affect the gap

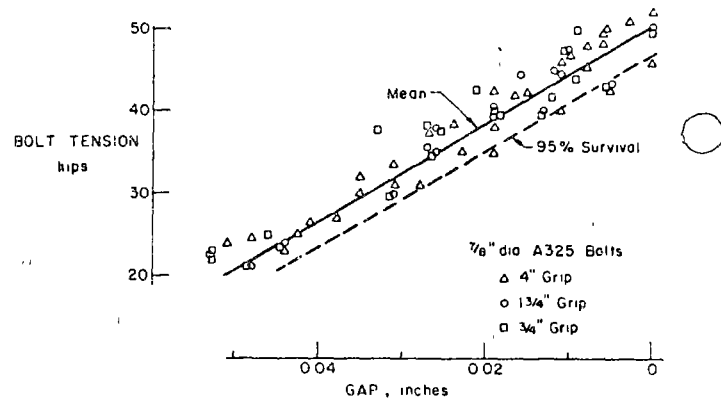


Fig. 8. Calibration of load indicators for $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts with variable grip length

Since the gap measurement is the variable employed for controlling the magnitude of the bolt preload, other factors which influence bolt elongation will be compensated for as well. This would include the number of threads in the grip as well as the short grip bolt. The load indicator should provide a more uniform bolt tension in these situations.

Out-of-Parallel Surfaces—The effect of out-of-parallel bolt surfaces on the gap measurement was evaluated for all bolt diameters studied. A 4-in. grip was used for all tests. The bolt tension as a function of the average gap is plotted in Fig. 10. The average gap closure was determined from three readings taken at 60° intervals. The results for all bolt diameters indicated that the average bolt force exceeded the required minimum bolt tension at an average gap of 0.015 in. The variation in bolt force was about the same as observed with the parallel surface

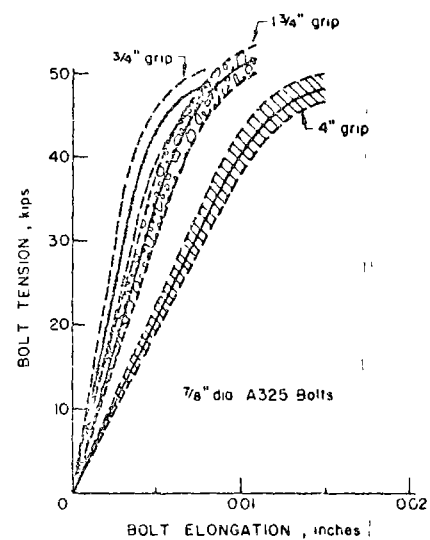


Fig. 9. Torque tension calibration of $\frac{7}{8}$ -in. A325 bolts with variable grip length