A los asistentes a los cursos del Centro de Educación Continua

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar 15 días antes de la terminación del curso, en las oficinas del Centro, con la Sra. Sánchez.

El control de asistencia se efectuará al terminar la primera hora de cada día de clase, mediante listas especiales en las que los interesados anotarán personalmente su asistencia. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Ing. Melesio Gutiérrez P.

TEMA I

## CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS.

Ing. Jorge Terrazas

### LAS FUNCIONES DE UN EJECUTIVO.

Todo ejecutivo tiene fundamentalmente dos funciones, y muchos desarrollan solamente una de ellas.

Su primer función es la de "mantener los standards", lo que se refleja, en vigilar que las actividades se desarrollen conforme a lo planeado, que los costos no excedan al costo standard preestablecido, que la obra de mano lleve a cabo el trabajo de acuerdo con el método standard predeterminado, que el material y la obra de mano que se requieran, se encuentren disponibles, que los materiales sean suministrados de acuerdo con el programa y en las cantidades correctas, que se mantenga y no disminuya la calidad especificada del producto y así sucesivamente. El "mantener los standards" es en muchas ocasiones la más importante tarea que llevan a cabo algunos ejecutivos, y por otro lado, nadie niega que esa función absorve mucho tiempo y exige un gran esfuerzo.

Sin embargo, existe otra función del ejecutivo y que consiste en mejorar esos "standards" fijados, de tal manera que la compañía pueda mejorar la calidad de sus productos, ampliar la gama de los mismos, abrirse nuevos mercados, incrementar la productividad de sus trabajadores y la eficiencia en general de sus métodos, etc...; y en cuanto a rendimientos económicos, aumentar o al menos mantener

su nivel de utilidades, frente a las condiciones que plantea una - competencia creciente.

En esta segunda función, el ejecutivo debe generar alternativas, lo cual logra sometiendo a prueba todas las normas, procedimientos y métodos implantados dentro de su esfera de responsabilidades y buscando otras posibles alternativas de acción y adaptándolas o nó, de acuerdo con criterios económicos.

Este segundo papel, es vital, ya que dentro de una industria competitiva cualquier empresa que se contente solo con mantener sus standards existentes, se encontrará en decadencia a causa de la presión de la competencia.

La empresa que se limita a mantener con éxito su statu quo, mientras otras compañías mejoran su método y aumentan sus utilidades, descubrirá eventualmente que no puede igualar los precios establecidos por sus competidores progresistas.

Desgraciadamente, muchos ejecutivos no están preparados para desarrollar esta función tan importante, ya que con demasiada frecuencia, carecen totalmente de preparación para la toma de decisiones económicas, y lo que es aún peor, en muchas ocasiones subestiman y desprecian esta área de actuación, lo cual origina que no obstante lo intensamente que un ejecutivo trabaje en su papel de "mantener los standards", su empresa y él individualmente como administrador, pueden fracasar.

En este curso, trataremos de establecer las funciones desde el punto de vista económico del ejecutivo y de presentar los principios y los procedimientos que deben normar lo que se ha dado en llamar una toma de decisiones económicas.

Analicemos esta segunda función de un ejecutivo como un proceso de dos fases consistentes en:

1) Generar alternativas.
2) Evaluarlas y adoptarlas o nó, después de analizarlas ampliamente desde el punto de vista de los criterios económicos.

Solo si el ejecutivo tiene conciencia clara de estos criterios, podrá llevar a cabo una búsqueda inteligente de alternativas y después, tomar decisiones economicamente correctas.

## LA GENERACION DE ALTERNATIVAS.

La segunda función del ejecutivo se desprende de la primera. Tanto si se tienen dificultades para mantener un standard establecido, como si no se les tiene, el standard mismo puede ser la base de investigación, para encontrar un medio más económico para efectuar una acción determinada. Así por ejemplo, en el caso de una obra en construcción, el director de la misma puede hacerse preguntas como las siguientes: ¿se seleccionó el equipo más adecuado en cuanto a número, tipo y capacidad de unidades?, ¿ puede acelerarse el

proceso de construcción mediante otra escuela de ataque de los diferentes frentes?, ¿el número de personal obrero y técnico - ubicado en cada frente es el adecuado?, ¿debe incrementarse?, ¿debe disminuirse?. Luego de un análisis profundo y sistematizado, el director de la obra, podrá determinar, con plena conciencia en los criterios económicos, si los juicios presupuestos originalmente eran los adecuados o conviene seguir nuevas alternativas.

A partir de cada acto que se efectue de acuerdo con normas establecidas, un ejecutivo entrenado a pensar bajo esta línea de acción, podrá generar otras alternativas económicas.

La toma de decisiones económicas invade cualquier área de actividades de un ejecutivo, desde el aspecto ventas hasta el de producción y desde las finanzas hasta el aspecto técnico ingenieril.

Una función muy importante del ejecutivo es el estar proporcionando continuamente mejoras y cambios, aunque bien es cierto que el puro cambio, por si mismo, no implica necesariamente una decisión económica.

Otro claro ejemplo en el medio de la construcción, lo constituye el problema de un proyectista y calculista quien debe decidir entre hacer una estructura de acero o de concreto o mista, atendiendo a factores como pueden ser: distintos tipos de cimentaciones dependiendo del peso de la superestructura en cada una de las alternativas, costos de

conservación y mantenimiento dentro de un cierto horizonte económico, valor de recuperación de la estructura, disponibilidad de personal especializado en la localidad, etc...

Cada peso que se gasta, se propone gastar o se propone no gastar, constituye la base de una decisión económica. Si un ejecutivo decide no hacer ningún cambio a una situación existente, está tomando una decisión económica, ya que la decisión de no hacer nada, implica la decisión de continuar haciendo las cosas de la misma manera, y de rechazar todas las posibles alternativas de acción, tanto las generadas por él mismo después de un análisis crítico, como de las que desconoce por no haberlas buscado.

Una decisión no puede decirse que constituye una auténtica decisión económica a menos que:

1) Todas las alternativas hayan sido examinadas.
2) Todos los elementos de costo y de beneficio hayan sido considerados.
3) Se hayan seguido técnicas y procedimientos correctos para su evaluación.

Así por ejemplo, en el caso particular de la posibilidad de reemplazar una máquina existente, la decisión económica puede ser: aprobar el gasto de $ 80,000.00 para la compra de una máquina nueva, o rechazar este gasto y conservar la existente, o gastar $ 45,000.00 en una

diferente, o autorizar $ 130,000.00 por una nueva de mayor - capacidad, o invertir $ 25,000.00 en la reparación y mejora de la máquina actual.

Analicemos más detenidamente el aspecto de la generación de alternativas de acción, como paso inicial del proceso de una toma de decisiones.

"Un análisis económico puede definirse como la comparación entre alternativas, en la cual las diferencias entre ellas, se expresan, hasta donde es factible, en términos monetarios".

Cuando en una comparación de este tipo entre alternativas, estan involucrados de alguna forma, aspectos de índole técnica en general, se dice que se trata de un análisis de ingenieria económica.

"Las decisiones se toman entre alternativas": no hay propiamente una decisión, si no hay al menos dos cursos de acción posibles.

Antes de tomar una decisión es necesario dejar claramente definidos los beneficios, ventajas y desventajas de cada una de las alternativas posibles.

Al comparar alternativas, es muy conveniente expresar los efectos o consecuencias de cada alternativa, en forma tal que sean conmensurables entre sí; es decir, los beneficios y costos, las ventajas y desventajas de cada alternativa, deben ser expresados numericamente, y estos números a su vez, expresados en las mismas unidades para

poder ser comparados. Para efecto de las decisiones económicas, las unidades normalmente empleadas, y de hecho las únicas que sirven para tal fin, son las unidades monetarias.

Para hacer conmensurables y comparables las características de las diversas alternativas, pueden sugerirse dos pasos: primero, expresar cada una de las características en sus unidades físicas más apropiadas, y segundo, convertir mediante el establecimiento de una escala de valores, las unidades físicas, en unidades monetarias.

De no ser conmensurables entre sí las diferencias entre las alternativas, puede correrse el peligro de que al compararlas, se de igual peso a diferencias triviales que a diferencias realmente importantes entre ellas.

"Debe reconocerse que solo las diferencias entre alternativas, son relevantes en su comparación."

Si por ejemplo, al comparar dos procedimientos constructivos, se estima que el factor obra de mano, será igual en ambas alternativas, o sea, que se estima tenga el mismo costo en una y en otra, deberá excluirse dicho factor para efectos de la comparación entre ellas, ya que es claro que dicho factor, al afectar igualmente a ambas alternativas, no aportará juicio alguno para la selección de una u otra.

Puede arguirse que en ocasiones el análisis económico de una situación para efectos de una toma de decisiones, es inútil, pues la alternativa a seguir es evidente. Aparentemente este sería el caso de un empresario que expresara: "Tengo una máquina que tiene más de 15 años de estar funcionando y a la que ya no es fisicamente posible seguir reparando y manteniendo en operación, por lo que sin necesidad de ningún análisis ni de la aplicación de técnicas y fórmulas sofisticadas, concluyo que debo cambiarla por otra...". Sin embargo, podríamos hacer notar a este empresario, que de hecho sí tomó una decisión y que esta se inició hace varios años, pues pudiera suceder que un análisis revele que debería hacer cambiado esa máquina hace más de 8 años por ejemplo, y que su decisión, (aún sin haber sido fruto de un razonamiento conciente), fué equivocada, al haber optado de hecho, por la alternativa de absorver los sobrecostos de un mantenimiento y reparaciones antieconómicas durante los últimos 8 años, y de haber rechazado los ahorros que la compra de una nueva máquina le hubieran originado, de haberse llevado a cabo el reemplazo, económicamente justificado, de la máquina actual.

De lo anterior, concluimos que la toma de decisiones económicas en un sentido integral, incluye tanto la generación como la evaluación

de las alternativas y que dado que la selección de una alternativa es siempre el objeto de una decisión, el proceso de la toma de una decisión económica, prosigue solo si las diversas alternativas a seguir, han sido establecidas.

La selección de la alternativa final nunca debe ser objeto de adivinanza ni dejada al "designio de los dioses".

Ni la intuición ni las corazonadas, son del todo realistas ni confiables. Sin embargo, se puede arguir y debe aceptarse, el hecho de que mucha de la información de que se dispone para la toma de una decisión está basada en meras estimaciones. A esto, puede responderse afirmando que esas estimaciones logradas por medio de un cuidadoso estudio de la información disponible, son de cualquier manera más confiables que meras adivinanzas o elucubraciones intuitivas. Lo anterior no quiere decir que la intuición, que se orienta al futuro pero que de hecho involucra ciertos recuerdos y experiencias del pasado, no tenga en ocasiones cierto grado de validez.

RESPONSABILIDAD POR LA TOMA DE DECISIONES ECONOMICAS.

El que un ejecutivo no este ejerciendo la segunda función a que se ha aludido, se manifiesta principalmente en una decidida tendencia a no hacer cambios, es decir, a seguir haciendo lo mismo y de la misma manera, y en el hecho de que rara vez, una inversión o una erogación se justifiquen me-

diante un criterio económico adecuado.

Muchos ejecutivos no sienten verdadera responsabilidad por los costos que generan o por los costos que de hecho " protegen " al mantener el status quo. Consciente o inconscientemente, consideran el llevar a cabo erogaciones monetarias, como una consecuencia inherente e inevitable de su trabajo; como un privilegio obvio de la función ejecutiva; y cuando un ejecutivo se acostumbra a esta actitud, llega a considerar que estos costos son responsabilidad de la compañía. Si reflexionara en esto se daria cuenta que estos costos son de su responsabilidad ya que se ubican dentro de su esfera administrativa, y es él, y no la compañía quien selecciona la alternativa a seguir de entre todas las demás posibles.

Ahora bien, las necesidades de capital en muchos proyectos alcanzan cifras considerables. Obviamente, ese capital requerido se obtiene de diversas fuentes, internas o externas a la empresa, y es natural que tanto a los que aportan ese capital como a los encargados de controlar su gastos, les preocupe el que sea utilizado de la manera más efectiva, ya que el éxito de un proyecto ingenieril o de un negocio en general, se mide en términos de su eficiencia financiera.

Por lo anterior, el ingeniero debe combinar en cada proyecto, la técnica con los requerimientos y limitaciones financieras, sin olvidar además otros valo-

res involucrados como pueden ser los de caracter social humano, estético, político, etc...

El problema más serio que se deriva de aceptar o rechazar proposiciones o peticiones de adjudicación de fondos y recursos a determinados renglones - ( lo cual de hecho, representa alternativas de inversión ), sobre la base de que tan urgentes son, radica en que el programa de utilización de recursos queda supeditado a un concurso de personalidades. Las partidas mas importantes se adjudican al departamento que ha sido más elocuente en la solicitud de fondos y más persistente en la presentación de sus requerimientos, y no al departamento que por haber realizado un estudio económico con que respaldar su petición, ha presentado esta, en forma tardía. En una organización, toda - decisión de adjudicación e inversión de fondos, debería estar respaldada y - justificada con un análisis económico.

El primer criterio que debe seguirse en la selección de alternativas de inversión, es el de dar el mejor uso posible a los recursos, normalmente limita - dos, con que cuenta una organización.

Estos recursos limitados con que contamos para realizar inversiones, pueden ser de varios tipos, como terrenos, fuerza de trabajo, materiales, dinero efectivo, etc..., pero dado que en el ámbito comercial se acostumbra expresar el - valor de la mayoría de los recursos, en términos monetarios, es necesario -

evaluar las disponibilidades y sus limitaciones en términos de dinero.

Al evaluar una inversión propuesta, acostumbramos preguntar, si será suficientemente productiva. Este término de " suficientemente productiva ", se refiere, como veremos en forma detallada más adelante, a la compración entre la tasa de recuperación que esperamos obtener de dicha inversión, con el costo total que dicha inversión implica y con la tasa de recuperación que pudiesemos obtener de otras inversiones.

Sin embargo, no todos las posibles consecuencias que representa el seguir una alternativa, pueden ser reducidas a términos monetarios, de donde se desprende que es necesario contemplar en segundo criterio en el análisis de selección de alternativas, que tome en consideración estos factores o aspectos a los que denominaremos: valores " no monetarios " o " no cuantitativos "..

Con los recientes adelantos de las matemáticas, estadística , técnicas de computación, etc..., que permiten el manejo de problemas económicos más complejos, el ingeniero tiene la oportunidad de jugar un papel aún más importante en el proceso de la toma de decisiones, ya que no solo cuenta con las bases matemáticas y cientificas para comprender el uso de tales técnicas, sino que además tienen el criterio igenieril que permite reconocer las limitaciones prácticas de estas técnicas y el efecto de la falta de información que comunmente existe en las situaciones reales, todo lo cual lo capacita para seleccionar la alternativa más adecuada y realista.

El privilegio u obligación de un ejecutivo de señalar y elegir una alternativa, no va desligada a la responsabilidad de demostrar que su sugestión es la más adecuada de entre otras. Desde el inicio debe estar consciente de todos los - costos resultantes de su decisión.

Las decisiones deben estar basada en las consecuecias que se prevee implique la posible implantación de cada una de las alternativas ". En muchas ocasiones, - existe la deformación de considerar solo el valor inicial de una inversión, - siendo que frecuentemente los costos futuros que se generan pueden ser con mucho, más importantes que el inicial, Así por ejemplo, la decisión de invertir $ 100,000.00 en un máquina, debe haber estado ligada a la consideración de costos futuros como pueden ser: Obra de mano de operación, consumo de energía, desperdicio de material, necesidad de supervisión extra, mantemimiento y - conservación necesarias, seguros, impuestos, etc... Tambien deben considerse beneficios o ingresos especiales, como el valor de rescate. Todo lo cual implica que el análisis completo de la alternativa, debe hacerse dentro de un - cierto período que constituye el horizonte económico.

VALORES NO MONETARIOS O NO CUANTITATIVOS.

Pocas decisiones, de tipo personal o de negocios, son hechos sobre la base - unicamente de consideraciones financieras. Aún más, las consideraciones sobre la eficiencia económica de un proyecto pueden verse influenciadas en gran parte por aspectos no monetarios.

"Las decisiones entre alternativas de inversión deben también considerar y dar peso, a todas aquéllas consecuencias esperadas como originadas de la

implantación de cada uno de los posibles cursos de acción, y que por una u otra razones, no pueden reducirse o expresarse en términos monetarios."

A este tipo de factores, es frecuente referirse también con otros terminos como son: factores de juicio, impoderables, intangibles, etc...

La decisiones y recomendaciones relativas a la factibilidad de proyectos ingenieriles, deben tener en cuenta toda una serie de factores monetarios y no monetarios. Entre estos últimos podemos nombrar leyes y principios económicos, situación imperante de los negocios en un momento dado, valores sociales y humanos, objetivos personales y de grupo, gustos de consumidores, reglamentaciones gubernamentales, legislación de orden fiscal y económico, etc...

Las consideraciones sobre aspectos no monetarios adquieren especial importancia en el caso particular de las decisiones de tipo personal y en el terreno de los intereses particulares.

MEDIDA DE LA EFICIENCIA ECONOMICA:

La actividad ingenieril se desarrolla dentro de dos entornos, el físico y el económico. El éxito que se alcance manejando o alterando el entorno físico para producir bienes y servicios depende del conocimiento que se tenga de las leyes físicas. Sin mebargo, el beneficio que reporten esos bienes y servicios, depende de la utilidad que proporcionen, medida esta en terminos eco

nómicos. Se podrían enumerar muchos ejemplos de estructuras, máquinas, procesos, etc., que presentan un excelente diseño físico y mécanico pero escaso o nulo sentido económico. Por esta razón, es esencial que los proyestos ingenieriles se evaluen en términos de beneficio y de costo antes de ser aceptados.

"El prerequisito esencial para el éxito de un proyecto ingenieril, es su factibilidad económica."

La función normal del ingeniero consiste en manejar los elementos de un entorno, el físico, para crear utilidad en un segundo entorno, el económico.

El objetivo de todo proyecto ingenieril, es el de obtener el mayor resultado posible, por unidad de recurso empleado, lo cual se logra mediante la más efectiva utilización de materiales, energía y en general, de cualquier tipo de recurso. El grado de eficiencia en la utilización de los recursos se mide mediante la expresión:

$$\text{eficiencia} = \frac{\text{out put}}{\text{in put}}$$

lo cual no es más que el cociente entre los resultados obtenidos y los recursos empleados. Esta expresión mide el éxito de la actividad ingenieril dentro del entorno físico, en un primer nivel de eficiencia, que se conoce como "eficiencia mecánica" o "eficiencia ingenieril". Tanto el Input como el

Output se expresan en unidades tales como kilowats, Btu, horas, etc... Cuando este tipo de unidades físicas están involucradas, la eficiencia siempre será menor que la unidad o menor que el 100 %.

Sin embargo, para un ingeniero también le es fundamental un segundo nivel de eficiencia, la "eficiencia económica" o "eficiencia financiera", la cual se determina con la misma fórmula general de la eficiencia, solo que convirtiendo las unidades físicas tanto del input como del output a valores monetarios, lo que puede expresarse:

$$\text{eficiencia económica} = \frac{\text{beneficio}}{\text{costo}}$$

Es bien sabido que la eficiencia física o ingenieril no puede alcanzar valores mayores de 100 %. En cambio, la eficiencia económica si puede exceder de dicho valor, y de hecho, solo será aceptable cuando eso suceda. Una alta eficiencia física no es garantía de una alta eficiencia económica. Una baja eficiencia física no es razón suficiente para dejar de considerar una alternativa, ya que pueden existir otras circunstancias económicas que compensen esa baja eficiencia física.

Consideremos el ejemplo de una planta de generación de energía, cuya eficiencia física sea tan solo de un 14 %. Supongamos que el output en forma de energía eléctrica y expresado en Btu, tenga un valor económico de 8 unidades monetarias por millón de unidades de output y que el input en la forma de gas natural o expresado en Btu,

tiene un valor económico de 0.70 unidades monetarias por millón de unidades de gas consumido. En estas condiciones:

$$\text{eficiencia económica} = \frac{\text{Btu output x valor de la energía eléctrica}}{\text{Btu input x valor del gas natural.}}$$

$$= 0.14 \times \frac{8 \text{ unidades monetarias}}{0.70 \text{ unidades monetarias}}$$

$$= 1.6$$

lo cual indica una eficiencia económica de un 160 %.

Si un inversionista decide expander su negocio y adquirir un cierto número de camiones, podrá seleccionar el tipo de camión mediante su eficiencia mecánica, pero la factibilidad y conveniencia de la inversión general, deberá contemplarla a través de la eficiencia económica, en donde el output o beneficio, será la retribución económica que se obtenga por el servicio de los camiones, y el input o costo, debe incluir los costos de operación, la depreciación, los intereses del capital invertido, los impuestos y todos los demás gastos asociados.

La forma más comunmente empleada para estimar la eficiencia financiera, es mediante la llamada "tasa de recuperación", sobre un capital invertido, expresado en porciento:

$$\text{tasa de recuperación (anual)} = \frac{\text{utilidad neta (anual)}}{\text{capital invertido}}$$

Un ejemplo de determinación de la eficiencia mecánica instantanea, la constituyen los medidores eléctricos para determinar en un instante dado, el output o el input de un motor.

Para la evaluación final de la mayoría de los proyectos, aún en aquellos en los cuales el aspecto ténico ingenieril juega un papel muy importante, la eficiencia económica debe prevalecer sobre la eficiencia física. Esto es debido a que la función de la ingeniería, es crear utilidad dentro del entorno económico por medio de la utilización de los elementos del entorno físico; y dado que este objetivo se traduce en máximizar el servicio, y el nivel de servicio puede expresarse en términos monetarios, se concluye que el criterio económico es la base de una evaluación, y la meta, la maximización de la utilidad.

## EFICIENCIA INGENIERIL CONTRA EFICIENCIA ECONOMICA.

La meta de todo ingeniero y en general, de la actividad empresarial y gerencial es la de lograr una eficiencia económica dentro de rangos aceptables y no la búsqueda de eficiencia ingenieril o mecánica.

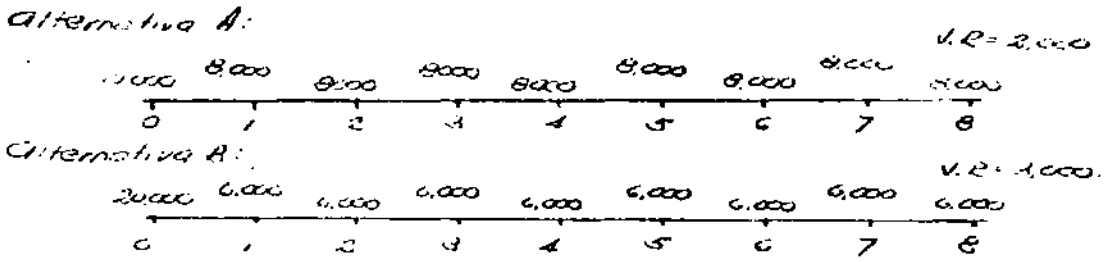
Ejemplo: Supongamos que para resolver una necesidad operativa y después de una investigación se nos presentan dos alternativas:

Alternativa "A": adquirir una máquina (A) con precio inicial de

$ 10,000.00, con costo anual de operación ( incluyendo obra de mano, combustibles, mantenimiento, etc...) de $ 8,000.00 ( el cual suponemos uniforme por simplificación). Vida económica estimada de 8 años, y valor de recuperación de $ 2,000.00 al término de ese período.

Alternativa "B": adquirir una máquina (B) para el mismo trabajo, con precio de adquisición de $ 20,000.00; gastos de operación de $ 6,000.00 anuales. Vida económica estimada de 8 años y valor de recuperación de $ 3,000.00.

Representemos las dos alternativas de la siguiente manera:




El monto total del desembolso para la alternativa "A", es de - - $ 72,000.00 y para la alternativa "B" de $ 65,000.00.

(Hacemos notar que no estamos considerando en estas sumas el factor tiempo, y como demostraremos posteriormente, la simple suma de costos es insuficiente para comparar dos alternativas).

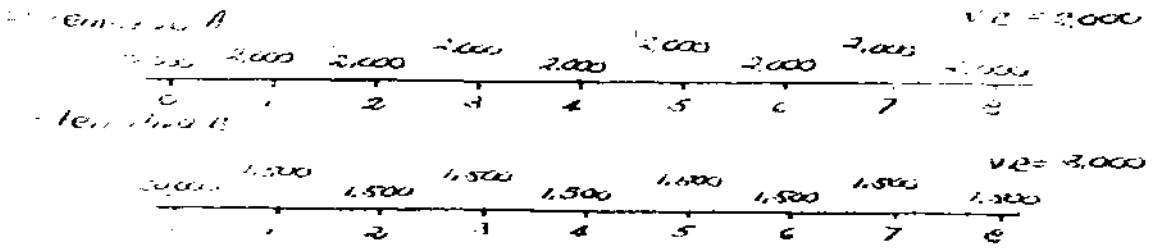
Observamos que "B" tiene mayor eficiencia ingenieril, dado que hemos supuesto que en un mismo período ambas máquinas tienen

el mismo rendimiento en cuanto a producción de servicio se refiere, pero el insumo de "B", medido por su gastos de operación anual es de $ 6,000.00, en tanto que el de "A", es de $ 8,000.00. Esto es explicable ya que el sobrecosto inicial de la máquina "A" con respecto a la "B", sugiere mejoras en la construcción de "A" y por tanto una mayor eficiencia mecánica.

Conclusión: "B" realiza el mismo trabajo que "A" pero con menor cantidad total de pesos. "B" tiene mayor eficiencia económica.

En este caso "B" tiene la mayor eficiencia económica y también la mayor eficiencia mecánica o ingenieril, pero esto es mera - - coincidencia. La búsqueda de alta eficiencia económica, no necesariamente coincide con la búsqueda de alta eficiencia ingenieril, ya que si esto fuera cierto, la elección de la alternativa más económica pudiera ser realizada en base solo a la eficiencia mecánica.

Supongamos que se propone el empleo de las dos máquinas anteriores "A" y "B", en condiciones de menor ritmo de trabajo, y en base a esta menor utilización, los costos de operación anuales se calculan en $ 2,000.00 para "A" y en $ 1,500.00 para "B". La nueva situación puede representarse:



El desenvolso total para "A" es ahora de $ 24,000.00 y de $ 29,000.00 para "B".

Observamos ahora que la máquina "B", con mayor eficiencia mecánica tiene ahora menor eficiencia económica que "A".

Lo anterior demuestra que no hay ninguna "receta" para la selección de la alternativa más económica; por lo que habrá que hacer un análisis para cada conjunto de circunstancias. La selección de la alternativa más económica, cambió de "B" a "A"; de la máquina con mayor eficiencia mecánica, a la de menor eficiencia mecánica. La distina selección fué originada en este caso por un cambio en el ritmo de utilización del equipo; pero también pudieran haber sido determinantes factores como cambios en el costo horario de la obra de mano, en el costo unitario de la energía, en el valor de renta por metro cuadrado de piso, o cualquier otro factor de costo. El efecto combinado de todos estos elementos de costo, debe ser evaluado, para cada situación, por el ejecutivo encargado de tomar una decisión.

El ejemplo también ilustra el hecho de que la máquina que se seleccione en determinadas circunstancias, puede rechazarse en otras.

En el análisis de alternativas con baja eficiencia ingenieril, es tan necesario como el de alternativas de alta eficiencia ingenieril.

La afirmación de que el objetivo primordial de la ingeniería es lograr una eficiencia económica satisfactoria, no va en contradicción con otros objetivos de la ingeniería, como son: la exactitud, la confiabilidad, la seguridad, etc..., ya que, como veremos posteriormente, estas cuestiones son decididas por consideraciones económicas, ya que pudiera suceder que en determinadas circunstancias, no sea economicamente factible o conveniente, diseñar con absoluta exactitud, ciento por ciento de confiabilidad, o perfecta seguridad.

DEFINICION DE INGENIERIA ECONOMICA.

La ingeniería presenta dos enfoques: uno, concerniente al aprovechamiento de los recursos materiales y fuerzas de la naturaleza, y el otro, la satisfacción de las necesidades humanas: (y dado que los primeros son escasos respecto a las segundas, de aquí se desprende la esencial relación de la Ingeniería con la Economía).

El término Ingeniería económica puede definirse como: "el conjunto de conocimientos, técnicas y prácticas de análisis y síntesis, incluyendo consideraciones sobre factores humanos, necesarios para la evaluación del beneficio que reportan productos y servicios generados por la actividad ingenieril, en relación a su costo".

El término: "económica" , implica "administración con desarrollo -

económico"; y unido al concepto de "ingeniería", engloba la idea de máximo servicio por unidad de costo, a través de la Ingeniería.

La primera función de la ingeniería económica, es la evaluación - cuantitiva de los proyectos ingenieriles, en términos de beneficio y costo, antes de que estos sean ejecutados. En este aspecto, la ingeniería económica es similar a la ingeniería de diseño cuya función es la de predecir materiales, dimensiones y combinación de elementos estructurales de un proyecto, antes de que este sea realizado.

Un estudio económico presenta dos etapas:

a) recopilación de datos.

b) procesamiento matemático de los datos.

Ninguno de estos dos pasos constituye un fin en si mismo, sino medios de alcanzar el verdadero y útlimo objetivo: la determinación de la bondad y factivilidad económica de una alternativa y su selección.

NATURALEZA DE LAS DECISIONES.

Las rachas de buena suerte o las noches de fortuna, atestiguan el - hecho de que los jugadores y aventureros algunas veces ganan. Sin - embargo, podemos también hablar de infinidad de ocasiones en las que en "volado" o "la inspiración del momento", han fallado rotundamente en cuanto a lograr un beneficio.

Por lo anterior, y debido a una sincera necesidad por parte de in -

genieros, científicos y administradores en general, de contar con un sistemático y lógico proceso de análisis para la toma de decisiones es, por lo que se crearon diversos métodos de administración científica.

Sin embargo, tanto la intuición como los "métodos analíticos" son - reconocidos y tienen su lugar dentro del proceso de la toma de decisiones, en cuanto que la intuición, aunque se ubica en el presente, de manera inconciente e informal, involucra recuerdos y experiencias del pasado, en los cuales se basa para hacer ciertas predicciones en el futuro.

El implantar un método analítico, cuesta dinero, y algunas decisiones menores no american esa erogación por lo que podemos afirmar que los métodos analíticos, serán empleados siempre que esto sea técnicamente factible y justificable economicamente. Fuera de estos límites, el buen juicio y la intuición, basados en la experiencia, son recursos necesarios y legítimos.

Al analizar una situación para efectos de una toma de decisiones, - habrá que determinar su "grado de sensibilidad", esto es, el que tan vulnerable es con pequeños cambios en los factores condicionantes de esa situación. La consecuencia inmediata de la "alta sensibilidad" de una situación dada, será la de tener que garantizar, mediante estudio minucioso la validez de los datos que intervendrán en la toma de

decisiones, y dado que los factores que pueden influir en una decisión pueden ser muy numerosos, habrá que dar primacia a aquellos más sensibles.

Cuando en una situación de decisión se presentan varios objetivos, es probable que, haya que reconocer, que no hay un curso de acción que optimice simultaneamente todos los objetivos. En esta circunstancia será necesarios seleccionar la alternativa que aquilibre de la mejor manera posible los objetivos en conflicto; es decir una alternativa que "suboptimice".

Las tácticas basadas en un horizonte económico de 1 ó 2 años, no necesariamente tendrán la misma eficiencia, que las que contemplen un horizonte mayor.

Un horizonte de comparación muy corto, puede distorsionar seriamente los valores. Un horizonte muy largo introduce incertidumbre. A medida que se alarga el horizonte de comparación, sus predicciones sufren en su credibilidad.

GRADOS DE CERTEZA.

Podemos clasificar las decisiones gerenciales, dentro de tres categorías generales que caracterizan las condiciones de la situación desisional y que sugieren un método de análisis. Estas son:

a) Decisiones suponiendo certeza.

b) Decisiones que reconocen riesgo.

c) Decisiones que admiten incertidumbre.

En el primer caso se considera que todas las condiciones del problema se conocen con seguridad al suponer certeza, estamos basando el análisis en un conjunto de suposiciones que suponeremos tengan una alta esperanza de ocurrencia.

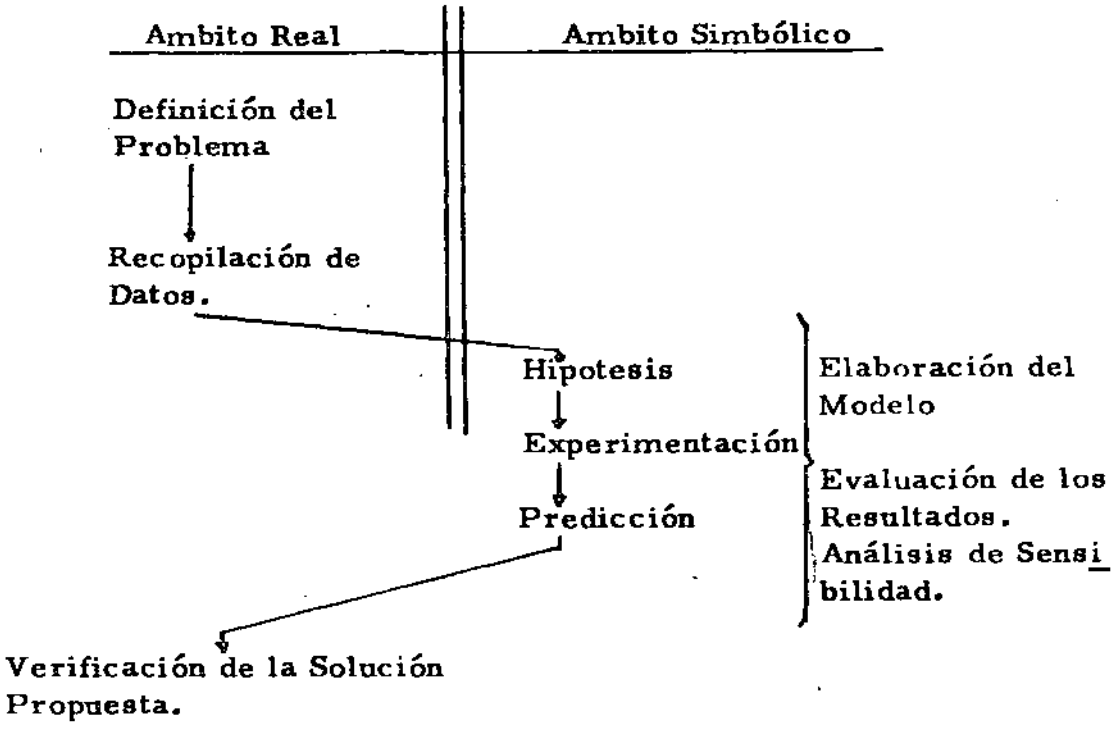
En el segundo caso, el analista considera poder obtener buenas estimaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de las futuras condiciones y del efecto económico de dichas condiciones. Es frecuente que la determinación del valor de dichas probabilidades implique erogaciones originadas por investigaciones y experimentaciones.

El considerar decisiones bajo condiciones de incertidumbre implica que el analista desea incluir los efectos de diferentes factores, pero le resulta imposible hacer estimaciones sobre sus probabilidades de ocurrencia.

## PROCESO DE LA TOMA DE DECISIONES.

La toma de decisiones se desarrolla dentro de dos ámbitos: el real, en el que tienen lugar los problemas del diario, y el simbólico, en el que se trata de representar a los problemas del ámbito real para su estudio y resolución.

Esquemáticamente el proceso puede representarse:




DEFINICION DEL PROBLEMA Y RECOPILACION DE DATOS.

El problema se origina en el ámbito real, dentro de los diversos - campos de la actividad humana.

Los datos son los que definen y clasifican a un problema.

El conjunto de datos permite al analista elaborar un modelo que re- presente en el ámbito simbólido al problema del ámbito real.

El lenguaje simbolico permite traducir la información del ámbito - real, a una forma utilizable en el ámbito simbólico.

Se formulan hipótesis respecto al comportamiento del modelo y se - someten a prueba experimentándolas para tratar de simular las reacciones del modelo.

De esta experimentación surge una predicción de comportamiento.

Esta predicción se convierte al ámbito real y trata de verificarse. Si la predicción resulta válida, el problema esta resuelto. Si no, el oido se vuelve a repetir tratando de recopilar más información que amplie la visión del problema.

Se dice que el proceso es sistemático en cuanto a que se procede paso a paso dentro de una secuela lógica.

La definición del problema se inicia con el establecimiento preciso de los objetivos y por la captación de información relativa al problema, en la mayor cantidad y de la mejor calidad posibles. Será necesario analizar el grado de sensibilidad de las alternativas e introducir el concepto de suboptimización. A medida que las ramificaciones e implicaciones de un problema son más amplias, la definición de las metas es más compleja.

Una preliminar búsqueda de soluciones, implica el enlistar todos los posibles cursos de acción.

La cantidad y calidad de los datos recapitados es fundamental, ya que todos los demás pasos del proceso, descansan en dichos datos, y ninguno de los pasos puede compensar la falta de ellos.

Ya se había comentado el que en toda decisión intervienen factores que no pueden traducirse a pesos y centavos; estos son los factores no monetarios o intangibles. La distinción entre los facotres tangibles y los intangibles, radica en la mayor o menor facilidad y exactitud con que pueden ser expresados cuantitativamente. Otros ejemplos de intangibles pueden ser: consideraciones de seguridad, reputaciones, amistades, relaciones públicas, etc...

ELABORACION DEL MODELO.

Un modelo es la representación del ámbito real. Se inicia la fórmulación de un modelo desde el momento de fijar objetivos y alternativas. Un modelo muestra la relación de causa a efecto entre objetivos y restricciones. Se maneja de tal manera que muestre el resultado final de seguir un determinado curso de acción.

Dado que las situaciones de decisión varian muy ampliamente, son necesarios varios tipos de modelos. Consideraremos tres clases: físicos, esquemáticos y matemáticos. Especialmente nos interesan los modelos matemáticos para su uso en estudios económicos.

Los modelos físicos pueden ser menores, mayores o de igual tamaño que el objeto que representan. Ejemplos de estos modelos en el campo de la ingeniería los constituyen: modelos de canales, rompeolas, cortinas, sistemas de tuberías, etc...

Los modelos esquemáticos son representaciones gráficas de diversas situaciones. Ejemplos de estos modelos, son: Organigramas, que muestran la división y delegación de autoridades, gráficas de proceso de flujo de producción, redes econométricas, redes de camino crítico, gráficas de punto de equilibrio.

Los modelos matemáticos están constituidos por ecuaciones y fórmulas. Como ejemplos podemos nombrar a los modelos probabilísticos, a los modelos estadísticos, a los modelos de programación lineal, etc...

EVALUACION.

El mérito de un modelo radica en que también represente el ámbito real. La prueba útlima y definitiva de un modelo, se presenta cuando las predicciones en cuanto al comportamiento del problema, se someten a la realidad.

Cada tipo de modelo se evalua en forma diferente. Un buen modelo contribuye a completar el análisis de un problema en cuanto a que hacen más fácil y objetivo observar los resultados originados por diversos inputs.

Una vez que los procedimientos de toma de deciones han sido seguidos, la autoridad final es el encargado de tomar las decisiones. En analista debe evaluar la exactitud y factivilidad de sus datos y de su modelo. Debe modular las predicciones del modelo mediante consideraciones sobre factores intangibles.

LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Las inversiones sólidas de capital son tan importantes para la economía de una empresa individual como para la economía nacional en conjunto. La expansión de las empresas y la introducción en ellas de adelantos tecnológicos, representan factores importantes para el - desarrollo económico y contribuyen considerablemente a aumentar la productividad y a elevar el nivel de vida.

Los problemas implicados en la definición de las políticas de -- inversión de capital y en la selección de las posibilidades de inversión se cuentan entre los más difíciles que afrontan los ejecutivos en negocios. Las inversiones de capital no representan un área aislada en la toma de decisiones. Implican el conocimiento de las alternativas de producción, pronósticos del mercado, evaluación de los precios tanto de adquisición de materias primas como de venta de los productos en el mercado, posibilidades y costo de financiamientos, etc.

El proceso de la toma de decisiones se basa en estimaciones sobre el futuro. Las inversiones en propiedades inmuebles, generalmente no pueden recuperarse en períodos de tiempo cortos. Normalmente, una vez que una compañía ha asignado fondos para una determinada inversión, se ha comprometido a seguir un sendero futuro del cual no podrá desviarse fácilmente. Por consiguiente, los elementos

de incertidumbre y riesgo son particularmente grandes en las decisiones que se relacionan con la inversión de capital, y ésto, - - frecuentemente induce a los ejecutivos de negocios a confiar en corazonadas o en reglas generales. En vista de la importancia vital de las decisiones, esto es inadmisible. Un plan económicamente sólido para las inversiones de capital, establece un procedimiento, una mecánica, para detectar, recopilar, analizar y evaluar todos los datos sobre la realidad de las condiciones en las que se pretende invertir a fin de poder seleccionar las propuestas más convenientes.

Las empresas de éxito, generalmente tienen más proyectos de inversiones potenciales que fondos disponibles para realizarlos, por lo que, la escasez de fondos es un factor determinante en el procedimiento para aprobar los proyectos de inversión a los que se vayan a adjudicarse los limitados recursos con que cuenta la empresa, la cual, en estas condiciones, se ve obligada a establecer elementos de juicio, mecanismos y criterios para seleccionar entre las alternativas propuestas.

Se pueden distinguir diversos tipos de proyectos de inversión de capital: proyectos no lucrativos, proyectos de utilidades no conmesurables, proyectos de reposición de equipo, proyectos de inversión en activos, proyectos de expansión, proyectos para la reducción de costos de operación Y/o de producción, proyectos para mejorar la

calidad de la proudcción, proyectos para lograr el mantenimiento de cierto nivel de ganancias, proyectos de investigación y desarrollo, etc...; y los elementos de juicio que se emplean para evaluar la conveniencia de una inversión de capital propuesta, dependen de la naturaleza de la misma inversión, así por ejemplo, los proyectos de inversión que llamamos "no lucrativos", implican gastos que se originan de requerimientos legislativos, de tipo contractual, etc., como pudiera ser el caso de una reglamentación que obligará a las empresas a la implantación de sistemas para el control de emanaciones, o a la construcción de tapiales para garantizar la seguridad de los transeuntes, o a la obligación de invertir en cursos para la alfabetización o capacitación técnica de los trabajadores, etc. Puesto que gastos de éste tipo son obligatorios, una empresa no tiene necesidad de establecer criterios para evaluar la conveniencia de estas erogaciones.

Por otro lado, los proyectos de "utilidades no conmensurables", se refieren a inversiones cuyo objetivo es el de aumentar utilidades, pero cuyo monto no puede calcularse dentro de un grado razonable de exactitud. A éste tipo de inversiones pertenecen los gastos en publicidad, los de promoción, las erogaciones en cursos de actualización impartidas al personal técnico y administrativo, el costo de asesorías para la revisión de los sistemas operativos de una empresa, las inversiones para otorgar una nueva prestación a los empleados y

y trabajadores a fin de mejorar su estado de ánimo, etc., Puede suponerse que una compañía interesada en maximizar sus utilidades, no realizará inversiones de éste tipo, a menos que esté convencida de que en última instancia, estas rendiran una utilidad. Desafortunadamente en la mayoría de los casos, es virtualmente imposible medir exactamente el ingreso marginal derivada de tales gastos. Con respecto a las inversiones de capital de ésta categoría, la empresa debe confiar primordialmente en el criterio de sus gerentes más bien que en datos cuantitativos.

Sin embargo existen otro tipo de inversiones, los cuales no solo es factible, sino en cierto aspecto obligatorio, justificar plenamente mediante un análisis económico una estimación cuantitativa de las utilidades y del rendimiento que se esperan obtener de dicha inversión. A reposición de equipo, de inversión en activos, de expansión, etc..., y así por ejemplo, si se demuestra que los ahorros en costo que se derivarán de la adquisición de una nueva maquinaria para la substitución de una existente, van a proporcionar un rendimiento satisfactorio sobre la inversión de capital correspondiente, entonces el reemplazo se vuelve económicamente conveniente.

Aunque en lo sucesivo, nos ocuparemos principalmente del uso de los datos cuantitativos para determinar la conveniencia de los

desembolsos de capital, es muy importante reconocer que en el análisis de factibilidad económica del último tipo de inversiones descritas, deben hacerse intervenir, el factor riesgo, que varía según la naturaleza de cada proyecto y los elementos no cuantitativos o no monetarios, sobre los cuales ya se hizo mensión anteriormente, ya que ambos elementos pueden ser determinantes en la decisión final. Por tanto, aspectos como las buenas relaciones con el personal de trabajo, el mantenimiento de una posición de prestigio dentro de una industria, el hacer frente a la competencia, y el cumplimiento de las leyes estatales y municipales, entre muchos otros que pudiésemos citar, pueden ser los motivos que decidan una inversión, independientemente de las posibilidades de costo e ingresos. Serían ejemplo de tales erogaciones, las encaminadas a actividades tendientes a proporcionar servicios y prestaciones para los trabajadores, a la introducción de maquinaria para poder hacer frente a la competencia, a los desembolsos para investigaciones y desarrollo de nuevas técnicas y procedimientos de producción y control, a garantizar la salud y seguridad de los trabajadores, etc...

En los estudios de inversión deben incluirse todos los factores de costo que se estimen inherentes a los proyectos bajo consideración. Es así, que debe reflejarse cualquier ahorro previsto en los costos de materiales o los que se deriven de la utilización del equipo o de

la fuerza de trabajo. Igualmente deben preveerse hasta donde sea factible los cambios que pudiesen presentarse en los costos de la obra de mano directa, materiales, manejo de los mismos, utilización del equipo, rendimientos, mantenimiento, reparaciones, etc..., así como de los aumentos o disminuciones en costos indirectos específicos tales como impuestos, seguros, fianzas, administración de oficinas centrales y de campo, financiamiento, etc...

De igual manera habrá que considerar todos los beneficios directos e indirectos que cada una de las alternativas de inversión ofrezca.

Ambos factores, de egresos e ingresos, de costos y de beneficios, deberán contemplarse dentro del horizonte económico que se considere adecuado en cada caso.

EL INCENTIVO DE LA UTILIDAD.

El incentivo que existe en cualquier decisión de invertir es el de obtener una utilidad. Cada erogación que encierre la esperanza de originar una utilidad, puede considerarse como "inversión", y de hecho éste efecto es lo que define al concepto de inversión.

La utilidad es la motivación que induce a una persona a invertir,

y en consecuencia a renunciar a satisfacer sus necesidades presentes, con la esperanza de poder satisfacer mayor número de necesidades en el futuro. Esta motivación es la que rige las inversiones de cualquier índole: personales, industriales, etc.

La utilidad puede también explicarse como el resultado de la productividad del capital.

FUENTES DE CAPITAL.

Los suministros de capital de una empresa, pueden provenir de varias "fuentes" y cada una de ellas puede tener diferente "costo" para la empresa.

En términos generales, podemos clasificar las llamadas "fuentes de capital" de una empresa en:

a) Fuentes internas.

b) Fuentes externas.

Las fuentes internas de capital están constituidas por:

1) El capital Constitutivo o Social de la empresa, integrado por las aportaciones directas de los socios o accionistas.

2) Las utilidades de ejercicios anteriores no distribuidas, o comúnmente llamados "pendientes por aplicar", y que al no ser retira-

das por los socios, se dejan dentro de la empresa, para incrementar el capital de trabajo. Este capital de hecho constituye un préstamo de los socios a la empresa, para permitir las operaciones propias de la misma.

3) Los fondos de depreciación.

Las fuentes externas de capital quedan representadas por los préstamos otorgados a la empresa, por instituciones de crédito, inversionistas particulares, etc...

El capital Social es aquel que es propiedad de quienes lo usan y quienes esperan recibir en retribución una "utilidad".

La retribución correspondiente al capital prestado por las fuentes de financiamiento externas, se denomina: "interes".

El prestamista solo recibe un "interes" que es prefijado en monto y plazo y no participa de ningún otro beneficio derivado de la inversión que se haga en el capital, pero por otra parte, tampoco está sujeto a riesgos ni contingencias, al menos en circunstancias normales.

Es de hacerse notar que dentro de las "utilidades" que percibe el dueño del capital podemos distinguir dos partes: un "interes", similar

al que percibe como remuneración el capital prestado, y que corresponde al "costo" propiamente dicho del capital empleado; y una segunda parte que representa una compensación adicional al dueño del capital por el riesgo en que ha incurrido al realizar la inversión con su propio dinero.

Esta subdivisión solo es válida desde el punto de vista de un análisis económico, ya que, como veremos más tarde, el punto de vista contable no acepta el impactar la "utilidad" (al menos para efectos de libros) de éste interes, o costo interno del dinero.

Cuando en una empresa, no es posible lograr el ingreso de nuevo capital social ni conseguir más préstamos externos, el capital disponible para nuevas inversiones quedará limitado a las fuentes internas de financiamiento y su incremento estará constituido solamente por la retención de las utilidades (si las hay) y por los fondos que en cada periodo se integran a las reservas de depreciación de los activos existentes.

Sin embargo, aun en aquellos casos en que para incrementar los recursos de la empresa, sea factible recurrir al aumento del capital social mediante el ingreso de nuevos accionistas, se encuentra normalmente, cierta resistencia a seguir esta alternativa, sobre todo en las empresas pequeñas y medianas, ya que el aceptar nuevos so-

cios implica, para el grupo actual de dueños, normalmente reducida, el sacrificar el control que tienen de la empresa.

Para calcular el "costo del capital" de la compañía, habrá que estimar primero el costo de cada fuente y analizar después la composición de la disponibilidad total.

El problema de determinar éste costo del capital, la más conveniente composición de los fondos y el interfecto en los costos de cada una de las fuentes de capital, es sumamente compleja pero de gran importancia para la planeación financiera de una empresa.

Dichas complejidades provienen fundamentalmente de la dificultad de calcular el costo de cada fuente de financiamiento (que además de variable y sensible a muchos factores) y del hecho de que al realizar una inversión, los fondos empleados rara vez pueden identificarse con su fuente y más bien pueden considerarse emanados de algún tipo de crisol de capitales en el cual todos los fondos disponibles se funden y pierden su identidad.

EL COSTO POR EL USO DEL CAPITAL:

De acuerdo con el principio del incentivo de la utilidad, cada peso gastado debe satisfacer la esperanza de utilidad del dueño del ca-

pital. Por otro lado, vemos en el inciso anterior que las fuentes de financiamiento de una empresa pueden ser internas, constituidas por el capital que en forma general llamaremos "capital propio", y externos, constituidas por "capital prestado". A cada tipo de capital corresponde una remuneración distinta de acuerdo con sus características propias.

El término: "interes", se emplea para designar el pago o renta correspondiente al uso del dinero y que representa el costo del mismo. (Recordemos que incluida dentro del concepto "utilidad," hemos distinguido una parte constituida por un "interes" por el uso mismo del capital). Esta renta que se paga por el uso del capital, en escencia es la misma que se paga o se impacta en los costos, por ejemplo, por el uso de maquinaria o equipo, ya sea éste propio o rentado.

Sin embargo, es evidente que una empresa se encuentra en situación distinta se opera con capital propio que se lo hace con la misma cantidad de dinero, solo que con capital prestado. Hay una clara e importante diferencia entre el uso de capital propio y el uso de capital prestado; y entre los conceptos de utilidad e interes.

El capital que proviene de un préstamo, normalmente presenta las siguientes características: ha sido solicitado por tiempo determina-

do transcurrido el cual, se ha prometido reintegrarlo; el interes que por su uso se pagará, ha sido previamente fijado y no dependen del resultado de la inversión a que el dinero se ha destinado, es decir, teoricamente, al menos no está sujeto al elemento riesgo. Por otro lado, tampoco será incremen tado ni recibirá beneficio alguno adicional, si las utilidades que se obtengan de la inversión, resultan ser mayores que las previstas. Cuando el presta mista de un capital analiza y determina la tasa de interés que le es atracti va y a la cual está dispuesto a prestar su dinero, toma en cuenta: el ries go en el que considera incurrir de que su dinero no le sea devuelto ( el cual trata de reducir al mínimo mediante la exigencia de garantías colatera les, avales de terceros, etc... ), sus gastos administrativos y el margen de utilidad que espera obtener.

A diferencia de lo anterior, la inversión del capital propio, tiene como esperanza de retribución, una utilidad, pero de hecho nada garatiza al inver sionista que dicha utilidad será obtenida, ni el tiempo en el que se obtenga, y lo que es más, casi siempre existe el riesgo de que ni el capital inicial inver tido pueda ser recuperado. Se desprende de aquí lo justo de la diferencia en monto que normalmente existe entre " utilidad " e " interes ".

Otra muy importante diferencia es utilidad e inter es, es el tratamiento que la legislación fiscal dá a uno y a otro. Para el que percibe un interes, éste constituye en beneficio, una utilidad, la cual está gravada fiscalmente; en cambio, para el que paga dicho interés, ésta erogación representa un cos to el cual es deducible fiscalmente. Las tasas de impuesto con las que el -

fisco gana los ingresos obtenidos en calidad de interés ( como remuneración por dinero que ha sido prestado ), y en calidad de utilidad ( por una inversión realizada ), son muy distintas. Es claro que el impacto financiero que representa el pago del impuesto correspondiente en cada caso, debe estimarse y considerarse previamente en el análisis de toda alternativa de inversión.

La obligación de compensar con un rédito ó de "pagar " por el uso de un capital a su propietario puede constituír una obligación legal, como es el caso de la obligación contractual originaria por el préstamo de cierto capital a un interés y a un plazo predeterminado. O puede ser una obligación moral, como es la contraída por los dirigentes de una empresa con respecto a los accionistas cuyos fondos manejan y a quienes deben redituar unos "dividendos ", Aún en el caso de capital propio, existe una obligación de sentido común de reconocer un costo de nuestro propio capital, derivado del hecho de que al invertir ese capital en esa alternativa, se están rechazando las utilidades o beneficios que hubiere proporcionado ese capital invertido en otra alternativa.

En forma genérica a la tasa de interés que constituye la recompensa por el uso del capital en cualquier forma de inversión, denomina frecuentemente " tasa de recuperación del capital ", ó simplemente "tasa de recuperación ".

Aún en el caso de inversiones efectuados por alguna dependencia gubernamental, debe considerarse, al hacer el análisis de factibilidad económica, un

costo correspondiente al capital por emplear y debe fijarse una tasa de re cuperación al proyecto ya que dicho capital por emplear, ha sido obtenido por medio de recaudación de impuestos, de los particulares, y habrá que - reconocer que éstos hubiesen obtenido una cierta tasa de recuperación al invertir su dinero de no haberseles privado de este, mediante el cobro de impuesto.

De cuarlquier manera y sea cual sea la fuente de la cual previenen los fondos por emplear debemos reconocer que : "dar dinero, cuesta dinero ".

Hay varias razones que justifican el hecho de tener que considerar un costo al capital por emplear, y que se expresa mediante una " tasa de recuperación ", cada vez que se analiza una inversión. Entre ellas podemos - nombrar: 1o. la tasa de recuperacíon, renumera el dueño del capital por el hecho de no poder usarlo mientras aquel a quien se le ha confiado, lo está - usando. 2o. - la tasa de recuperación compensa al dueño del capital por el riesgo que está corriendo al invertir su capital. 3o. - la tasa de recupera - ción, constituye un incentivo que para el dueño del capital invierta.

A menos que el impacto económico correspondiente al " costo del Capital " sea considerado de alguna manera en un análisis de inversión, el estudio resultante será inexacto, equívoco e inútil.

Aunque la inclusión del interés es indispensable en el estudio de inver-

siones, la determinación de un tipo de interés apropiado es una tarea que presenta algunas dificultades. A veces se consideran erróneamente al interés como si fuese igual al rendimiento sobre la inversión. Queremos volver a insistir en que el rendimiento sobre la inversión consiste de dos elementos: interés y utilidad. El primero representa el costo del dinero empleado; el segundo una recompensa por el riesgo y la incertidumbre. El costo del interés constituye el elemento de criterio mínimo para la aceptación de proyectos de inversión de capital que se emprenden para obtener utilidades. Una empresa debe recuperar, por lo menos, el costo correspondiente al dinero empleado antes de que pueda considerar que ha obtenido una utilidad sobre su nueva inversión. Por otra parte, el elemento de criterio de aceptación mínimo que puede considerarse como una recompensa por el riesgo y la incertidumbre varía con la naturaleza del riesgo incurrido.

Al elegir entre las inversiones potenciales, una compañía sólo debería aceptar aquellas propuestas cuyo rendimiento esperado sobrepase, cuando menos, el costo del capital. Haciendo una comparación muy sencilla, sería antieconómico para una persona pedir dinero prestado en el propósito de realizar una inversión, si es que no va a poder invertir esos fondos en forma que le proporcionen un rendimiento mayor que los intereses que deben pagar. El costo del capital constituye el elemento de criterio mínimo de aceptación o la tasa mínima de rendimientos sobre la nueva inversión. Proyectos de capital que rindan ingresos inferio-

res a ésta tasa mínima aceptable, diluyen el capital de los accionistas y conducen a las empresas a un proceso de descapitalización. Desafortunadamente, el determinar el costo del capital de una empresa es quizás el área más compleja y sujeta a controversias en el campo de las finanzas.

COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL.

Todo propietario de capital, tiene más de una alternativa para invertir su dinero. Cada vez que acepta una de esas alternativas, renuncia a la oportunidad de invertir en otras alternativas y por tanto, renuncia también al beneficio que esas otras alternativas le hubiesen reportado. Esta situación da lugar al concepto de "Costo de oportunidad". Ejemplificándo el concepto anterior a un caso muy sencillo, supongamos que una persona tiene dos oportunidades para invertir sus ahorros: adquirir bonos financieros que el reportarán un 9% de intereses anual o invertir en una casa para habitarla con su familia. Si decide invertir sus ahorros en la compra de la casa, de hecho está rechazando la oportunidad de adquirir los bonos y por tanto rechazada también una utilidad del 9% sobre su capital, y debe reconocer entonces que esta tasa: 9%, que deja de percibir, constituye el costo del capital con el que va a financiar la compra de la casa, aunque éste capital sea suyo. Por tanto, antes de decidirse deberá comprar ésta utilidad (que dejará de percibir) con la utilidad (en éste caso, satisfacción) que le proporcionará la posesión de una casa propia para él y su familia.

Lo anterior deja de manifiesto, que ni para el capital propio, puede evitar considerarse un costo: "el costo de oportunidad", cuando se pretende aplicarlo a una inversión o al logro de un satisfactor. Desde el momento en que el propietario de un cierto capital decide invertir en determinada alternativa y partiendo de la base de que los recursos con que cuenta son limitados, esta de hecho renunciando a la posibilidad de invertir en otras alternativas, aunque una de ellas pudiera ser en el peor de los casos, simplemente dejar el dinero en el Banco ganando un cierto interés por bajo que este sea. Por otro lado debe analizar si la utilidad esperada, usualmente expresada en términos de una tasa de interés anual, es suficiente para justificar la inversión en la alternativa propuesta; y aunque estrictamente hablando, no existe costo del capital (ya que éste es propio), al invertirlo debe esperarse, como mínimo, recibir una utilidad al menos igual a la de las alternativas rechazadas, siendo esta utilidad rechazada y perdida, lo que constituye el costo de oportunidad del capital.

En orden a determinar si la tasa de recuperación esperada en una cierta inversión es suficiente, debe compararse esta tasa esperada con las tasas que pudieran obtenerse de usar el capital en otras alternativas.

En la industria, un empresario tiene basicamente dos alternativas de inversión de capital de la firma: una es invertir el dinero dentro de la

misma empresa (como capital de trabajo para las operaciones propias de la misma), y otra es invertirlo fuera de la empresa (en compra de bonos financieros, acciones de otras empresas, etc...).

Veamoslo de esta forma: es cierto que no debería aprobarse la inversión del capital social de la empresa, (o la reinversión de las utilidades obtenidas, en su caso), dentro de la misma, si la tasa de recuperación que se espera obtener es inferior a los que se pudiese obtener con alguna inversión fuera de la empresa. Las oportunidades externas y sus tasas de recuperación, constituyen, desde este punto de vista, un criterio de límite inferior para la inversión interna. Sin embargo, la alternativa de invertir externamente a la empresa, es muy raro que pudiese representar una situación adecuada, ya que, por un lado, dentro del campo industrial, lo normal es que a una empresa se le presenten internamente una infinidad de alternativas y posibilidades de inversión de fondos para mejorar su situación económica, para incrementar su nivel de ingresos, reducir costos de producción u operación, inversiones en maquinaria de producción, equipo de transporte, equipo de oficina para la implementación de nuevos sistemas administrativos, inversiones en medidas para aumentar las prestaciones del personal, etc... y por otro lado, si en realidad las mejores alternativas de inversión se presentan en el exterior, no hay razón para continuar con ese negocio y en consecuencia la empresa debe liquidarse.

Solo en una situación particular en la que se tenga en un momento dado, un superavit de recursos monetarios, se podría justificar que ciertos fondos fuesen destinados a la compra de bonos o acciones aún de relativo bajo interes, cuando se prevea que, de no proceder así, dichos fondos permanecerán "inactivos" en una cuenta bancaria sin obtener ninguna recuperación.

Se sobre entiende que para que lo anterior pueda justificarse, la situación descrita es meramente temporarl y circunstancial, ya que de no ser así lo mejor es que los administradores de la empresa, reintegren el capital a los accionistas de la misma, por resultar evidente que de seguir dicho capital invertido en la empresa, no podrá rendir a sus dueños una tasa de recuperación mínima esperada. Es claro que un administrador, actua incorrectamente cuando retiene ese capital sabiendo que no puede satisfacer esas mínimas esperanzas de utilidad de los inversionistas.

Resulta entonces claro, que el costo de oportunidad de la empresa está determinado por el costo de oportunidad de sus accionistas, ya que cada accionista, al momento de invertir en la empresa, mediante la compra de nuevas acciones o conservando las anteriormente adquiridas o prestando dinero para la operación de la empresa, está rechazando otras oportunidades de inversión y de hecho, las utilidades que estas

últimas le hubiesen podido proporcionar. Esas oportunidades y esas esperanzas, se convierten en consecuencia, en el costo de oportunidad del capital social de la empresa.

No podemos mencionar el costo de oportunidad sin dejar de observar que sugiere un medio de determinar el costo del capital.

Si el financiamiento se lleva a cabo con fondos ajenos, es decir, con capital prestado, la tasa de interés que se paga por el uso del dinero claramente establece el costo del capital.

EL VALOR DEL DINERO CON EL TIEMPO.

Hemos visto que el dinero debe estar "ganando"cuando menos, lo que hemos llamado el costo del capital y esto da origen al concepto del valor del dinero con el tiempo, el cual puede ilustrarse de la siguiente manera:

Supongamos un préstamo de $ 1,000.00 que será usado durante los próximos cuatro años. Consideramos que el costo del capital es de 10% anual.

En estas condiciones, la cantidad adeudada al cabo del primer año -

está constituida por la cantidad original $ 1,000.00 más $ 100.00 correspondientes al costo del capital, o sea, $ 1,100.00; al final del segundo año, serán $ 1,100.00, más el costo del capital por ese año, $ 110.00, lo que da un total de $ 1,210.00; al final del tercer año la cantidad será de $ 1,210.00 más $ 121.00, o sea, $ 1,331.00; y al final del cuarto año, serán $ 1,331.00 más $ 133.10, o sea, $ 1,464.10.

Lo anterior constituye un proceso de interés compuesto, esto es, la acumulación de intereses sobre el capital original y sobre los intereses anteriormente generados.

Aplicando el concepto del valor del dinero con el tiempo en el ejemplo anterior, observamos que $ 1,000.00 de hoy, tienen un valor de - $ 1,100.00 dentro de un año y de $ 1,210.00 dentro de dos, de $ 1,331.00 dentro de tres, y de $ 1,464.10 dentro de cuatro. En forma inversa, también podemos decir que una cantidad de $ 1,464.10 dentro de cuatro años, equivalen a $ 1,000.00 hoy.

Claro que lo anterior es considerando una tasa de incremento del valor del dinero con el tiempo, de 10% anual, lo cual no siempre será cierto, ya que podrá ser mayor o menos de acuerdo con las condiciones de cada caso particular pero al menos, lo que podemos asegurar, es que dicho

valor nunca es cero.

Como ejemplo de que lo anterior es cierto, preguntémonos si alguien nos querrá prestar $ 1,000.00 ofreciéndole nosotros reintegrarle los mismos $ 1,000.00 al cabo de un año; aún dandole plenas garantías de que su dinero le será entregado sin falta y en fecha determinada. Si nadie acepta, la razón será que $ 1,000.00 de hoy, no equivalen a $ 1,000.00 dentro de un año. Si la mínima cantidad que alguien exige le sea pagada dentro de un año para otorgarnos el préstamo de - - $ 1,000.00, es de $ 1,100.00, esto significa que el valor del dinero con el tiempo, se valúa en 10% anual.

Lo anterior nos lleva además a otra consideración: supongamos que nos informan que las erogaciones que se llevarán a cabo en cierta inversión, serán: $ 1,000.00 el día de hoy, $ 1,100.00 al terminar el primer año y $ 1,210.00 al terminar el segundo año. No podemos decir, que el costo de la inversión está representado por la suma de las erogaciones: $ 1,000.00 más $ 1,100.00 , más $ 1,210.00 igual a $ 3,310.00.

Ya que estaríamos sumando cantidades cuyo monto está expresado en distinto tiempo; es decir, si bien es cierto que el desembolso real si será de $ 3,310.00, también lo es el hecho de que ésta erogación no

será efectuada de un golpe en un momento dado, sino que parte al menos de la misma, será diferida una y dos años.

Lo correcto es, sumar las tres cantidades, pero una vez que han sido expresadas "en un mismo tiempo", así por ejemplo, si actualizamos los valores de cada año al momento actual y consideramos por otro lado que la tasa representativa del valor del dinero con el tiempo, es de un 10%, tenemos:

| | |
|---|---|
| Valor actual, de $ 1,000.00 gastados hoy: | $ 1,000.00 |
| Valor equivalente actual de $ 1,100.00, que se gastarán dentro de un año: | 1,000.00 |
| Valor equivalente actual de $ 1,210.00 que se gastarán dentro de dos años. | 1,000.00 |
| Suma actualizada de las erogaciones, al día de hoy.; | $ 3,000.00 |

Podemos establecer, que en reconocimiento del concepto de valor de dinero con el tiempo, las cantidades de un cierto flujo de efectivo, deberán ser traducidas a un mismo punto del tiempo, antes de ser sumadas o comparadas entre si; y es muy importante que quede claro que no pueden sumarse o compararse, cantidades expresadas en distintos puntos del tiempo.

Ahora bien, detengamonos un momento a pensar: ¿Cuál es la razón de fondo de que siempre que analizamos una alternativa de inversión, haya necesidad de considerar un incremento del valor del dinero con el tiempo?. La primera respuesta que se nos ocurre es que el tener que pagar un interés, constituye un hecho en el ámbito de los negocios y en general en el medio mercantil. Pero entonces surge a su vez, otra pregunta aún más compleja: ¿Cómo se explica y se justifica que en los negocios, el interés del dinero, sea un hecho?.

En Economía se explica lo anterior mediante un análisis de la situación de la oferta y de la demanda de fondos para inversión. Desde el punto de vista de la oferta, el interés es necesario como incentivo para invertir. Desde el punto de vista de la demanda, el interés es posible dado que el capital es productivo.

Desde el punto de vista de la oferta, si una persona presta dinero que ha ahorrado, se priva de poder satisfacer en ese momento ciertas necesidades. No puede emplear su dinero en la adquisición de bienes de consumo, si se lo ha prestado a alquien, o si lo ha invertido en la compra de maquinaria o equipo (esto es, en bienes de producción), o ha comprado acciones de una empresa, o lo ha pagado como impuestos al gobierno. En todos estos casos requiere la existencia de un incentivo que lo compense del diferimiento que estas inversiones implican, de la satisfacción inmediata de sus necesidades.

Por otro lado hay que reconocer que otro incentivo, como es el - "sentimiento de seguridad", puede en un momento dado, ser más importante que el incentivo: interés. Es común que cierta cantidad de fondos se invierten a tasas menores de interés, pero en condiciones de menor riesgo, ya que la sensación de confianza y seguridad que una inversión de este tipo proporciona, compensa una tasa de recuperación baja relativamente a las que pudieran brindar otras alternativas de inversión pero que implicasen mayor riesgo. Sin embargo, en términos generales podemos afirmar que mientras mayor sea la tasa de interés, mayor es la motivación para diferir el consumo, e invertir con la esperanza de obtener un interés sobre nuestro dinero. Es razonable suponer que si desaparecieran las perspectivas de obtener un interés como remuneración a la inversión del dinero, también desaparecerían los estímulos para invertir..

Ahora, desde el punto de vista de la demanda, ¿cómo es posible pagar interés?, esto es, ¿cómo puede una empresa encontrar conveniente - pedir dinero prestado y pagar el interés requerido por ella? ¿cómo puede una sociedad pagar dividendos a sus accionistas, lo cual no es más que una remuneración por la inversión de su dinero?. La respuesta es que los bienes de capital son productivos. El capital y los bienes de producción (maquinaria, equipo, estructuras, etc...), son productivos. Es por esto que una empresa puede pagar un interés sobre dinero prestado, o puede atraer capital de socios que invertirá en

bienes de producción, y pagarles posteriormente dividendos mayores que el interés que pudieran haber obtenido simplemente prestado su dinero.

Con lo anterior tenemos la doble explicación al interés: "El interés puede existir porquo el capital es productivo, y es necesario que el interés exista para que haya un incentivo substancial para la inversión".

Pero quizás, más correcto que decir que los bienes de capital son productivos, sería afirmar que bajo circunstancias favorables, bienes de capital específicos son suficientemente productivos para generar una recuperación a determinar si bajo determinadas circunstancias, bienes de capital específicos serán lo suficientemente productivos para generar una recuperación atractiva, es un problema de - - Ingeniería Económica. Cada situación deberá ser examinada a la luz de los beneficios y costos que las circunstancias permitan estimar. Las consideraciones de tipo técnico que un problema de este tipo implica, hacen necesaria la intervención de conceptos de Ingeniería - Económica para su solución.

Un analista, conocedor de los principios y los técnicos de la Ingeniería Económica, está capacitado para hacer recomendaciones respecto a la conveniencia o no, de invertir en bienes de producción, ya que puede

# ANALISIS ECONOMICO DE

# DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE LA CONSTRUCCION

## TEMA I

## CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Contenido.

Concepto y Naturaleza de las Decisiones Económicas:

- Las Funciones de un Ejecutivo.
- La Generación de Alternativas.
- Responsabilidad por la toma de Decisiones Económicas.
- Valores no Monetarios o no Cuantitativos.
- Medida de la Eficiencia Económica.
- Eficiencia Económica contra Eficiencia Mecánica.
- Definición de Ingeniería Económica.
- Naturaleza de las Decisiones.
- Grados de Certeza.
- Proceso de la Toma de Decisiones:
  - Definición del Problema y Recopilación de Datos.
  - Elaboración del Modelo.
  - Evaluación.

Notas Sobre Inversiones de Capital y su Programación.

- Las Inversiones de Capital.
- El Incentivo de la Utilidad.
- Fuentes de Capital.
- El Costo por el Uso del Capital.
- El Valor del Dinero en el Tiempo.
- Tasa mínima Interna de Recuperación.

determinar si dichos bienes, bajo las circunstancias específicas del caso, serán tan productivas como para generar una tasa de recuperación (interés) lo suficientemente atractiva para justificar la inversión en ellas.

TASA MINIMA INTERNA DE RECUPERACION.

Los estados financieros de un negocio, el Balance general y el Estado de Pérdidas y Ganancias principalmente, muestran la utilidad total general obtenida por medio de la inversión realizada, pero debemos notar que de ellos solo podemos determinar la productividad promedio de cada peso. Desgraciadamente el sistema contable no está diseñado para ser más específico al respecto.

Antes de aprobar una inversión debemos insistir en que cada peso; a) garantice una tasa de recuperación y b) que ésta no sea menor que una tasa mínima de recuperación prefijada.

La determinación de la tasa mínima de recuperación se deriva de la forma o criterio de la empresa para aplicar y distribuir sus fondos disponibles normalmente limitados y cubrir una demanda casi siempre mayor de ellos.

Normalmente, cada año, una empresa podrá predecir con mayor o menor

aproximación la disponibilidad de fondos con que podrá contar en ese período para cubrir los gastos de las operaciones que sus inversiones demanden. El suministro de fondos podrá provenir como ya hemos visto, principalmente de reinversión de utilidades, de liquidación y fondos de depreciación de activos fijos, líneas de crédito, créditos externos diversos o de incrementos de capital social, etc., pero lo importante es que generalmente, el programa de suministros es escaso en comparación con la demanda de fondos y recursos monetarios que requieren las alternativas de inversión que se presentan.

Para ilustrar el problema supongamos que la demanda de fondos para el año siguiente se prevee sea de $ 32,000,000.00 aproximadamente, pero se estima que las diversas fuentes de financiamiento proveerán solamente unos $ 20,000,000.00. El objetivo del director de fianzas, será obviamente, invertir los $ 20,000,000.00 disponibles, en aquellas alternativas de inversión que ofrezcan la mayor retribución y rechazar proposiciones por un monto de $ 12,000,000.00 que prometen menor retribución.

Para lograr esto, partamos de la suposición de que el analista esté en posición de poder enumerar sus alternativas de inversión en orden decreciente de acuerdo con su retribución estimada.

| Alternativas | Inversión Requerida para cada alternativa | Tasa probable de Recuperación. | Monto acumulado de Inversión. |
|---|---|---|---|
| A | 2'400,000.00 | 35 % o más | 2'400,000.00 |
| B | 1'000,000.00 | 30 % - 34 % | 3'400,000.00 |
| C | 4'300,000.00 | 26 % - 29 % | 7'700,000.00 |
| D | 6'700,000.00 | 22 % - 25 % | 14'000,000.00 |
| E | 2'400,000.00 | 18 % - 21 % | 16'800,000.00 |
| F | 3'200,000.00 | 16 % - 17 % | 20'000,000.00 |
| G | 3'000,000.00 | 14 % - 15 % | 23'000,000.00 |
| H | 5'600,000.00 | 12 % - 13 % | 26'600,000.00 |
| I | 5'400,000.00 | menos de 12 % | 32'000,000.00 |

En estas condiciones, el fondo disponible de $ 20,000,000.00 deberá ser aplicado solo a aquellos proyectos que prometen una tasa de recuperación de 16 % o más. Esto significa que la tasa interna mínima de recuperación aceptable para el próximo año y dadas las condiciones anteriores, es de 16 %, que es la tasa mínima de recuperación que esperamos obtener al invertir en el proyecto F, ya que bloquear recursos en alguna de las alternativas G, H, o I, que ofrecen tasa de recuperación máxima menor de 16 %, equivale a eliminar la posibilidad de invertir en una alternativa que brinde 16 % o más.

Esto quiere decir que cualquier inversión que ofrezca 16 % o más, debe ser aprobada y cualquier proyecto que ofrezca una tasa menor,

debe ser rechazada. También quiere decir que $ 12'000,000.00 de inversiones que prometen tasas de recuperación hasta de un 15 % serán rechazadas. La tasa mínima de recuperación establece el límite inferior, abajo del cual no podemos invertir, es decir, establece la tasa interna mínima aceptable de recuperación.

Enfocado desde otro punto de vista, podemos decir que si en una serie de alternativas de inversión: la alternativa A es preferible a la alternativa B, la B es preferible a la C, etc..., M. es la alternativa menos preferible aceptada y N es la alternativa más preferible no aceptada; el costo a considerar al capital, para cualquier alternativa B por ejemplo, de inversión, es la tasa de recuperación de N, ya que representa la utilidad que rechazamos automáticamente cuando aceptamos invertir en B. Así por ejemplo en el caso ilustrado, al agotarse los recursos disponibles con la alternativa F, se establece como costo de oportunidad, la tasa de 15%.

En la tabla anterior, las alternativas: A, B, C,..H, I, pueden interpretarse como alternativas de inversión de diversa índole que se le presentan a un inversionista en un momento dado. O pudieran ser diversos artículos producidos por una fábrica y cuyo volumen de producción individual no puede incrementar a voluntad por estar condicionado por

la demanda en el mercado; de no ser así, la empresa aplicaría la totalidad de sus recursos a producir los artículos A y B que mayor recuperación le proporcionan, aúnque también por otro lado, desearía contar con los recursos económicos suficientes para, producir la mayor variedad posible de artículos, aún los que le reportan bajo margen de utilidad, con el fin de presentar al consumidor una gama más amplia de productos e incrementar así el área de su propio mercado. Dado que ni una ni otra alternativa son posibles, dada la limitación del mercado, por una parte, y lo limitado de sus recursos por otra, debe optar por aplicar los recursos de que dispone, para ir saturando cada uno de los renglones A, B, C,... sucesivamente, hasta el agotamiento de dichos recursos, lo cual sucede en el ejemplo planteado, en la alternativa F. Para el caso de una empresa constructora, las alternativas pudieran significar obras o conjuntos de obras, que considera puede solicitar y obtener de diversas fuentes de trabajo durante el próximo año y con cada una de las cuales, en condiciones normales y por experiencias pasadas ( dado que conoce el tipo de obra que ejecuta cada fuente, precios y condiciones de trabajo ), espera poder obtener, al finalizar cada una de ellas, una tasa de recuperación dentro del rango expresado en la tabla.

Para efectos del ejemplo planteado, los porcentajes indicados en la tabla, como probables tasas de recuperación, se refieren a tasas de

utilidad neta contablemente hablando, es decir solo faltando deducir el costo del capital empleado, costo que, como veremos más adelante, y salvo el caso de que haya constituido una erogación efectiva, la Contabilidad no registra, reconociéndose solo como costo desde el punto de vista de análisis económico, para efectos de calcular la utilidad neta (económica), y determinar así la bondad económica de la inversión.

Al referirse, para efectos del grupo de alternativas I, de tasas probables de recuperación de "menos del 12 %", se sobre entiende que la tasa pueda ser menor del 12% pero mayor que el porcentaje indicativo del costo del capital, ya ni siquiera es aceptable una inversión cuya tasa de recuperación fuese igual al costo del capital, ya que en esas condiciones, el inversionista solo cubriría sus costos pero no tendría ningún margen adicional que le compensara de los riesgos en que incurre o de las desventajas u obligaciones que adquiere, como la de pagar en fecha prefijada el capital en el caso de que se trabaje con dinero prestado.

Por lo anterior el límite mínimo que se marque para considerar aceptable la tasa de recuperación de una alternativa, será superior al costo del capital en el porcentaje que el inversionista considere que queda compensado su riesgo.

Debe tomarse en consideración, que para el caso de empresas constructoras, su costo de capital frecuentemente es bajo, ya que

si bien es cierto que normalmente debe recurrir a dinero prestado para operar, el cual es caro, u opera con capital social que también lo es, también es cierto que cuenta con el financiamiento de proveedores y subcontratistas, por el cual normalmente no paga y que puede representar en monto y en proporción a las otras fuentes de financiamiento, un renglón considerable. Cuando más, se podrá decir que el costo de dicho capital, está representado por el porcentaje de "descuentos por pronto pago", que deja de percibirse al no poder cubrir el importe de las compras oportunamente.

Cabe recordar que el costo del capital, es el promedio de los costos de capital de las diversas fuentes de financiamiento, ya que como se dijo anteriormente, los capitales se funden en un solo crisol para efectos de la operación de la empresa, lo cual hace muy difícil identificar, una cantidad de dinero empleado, con la fuente de financiamiento de la cual proviene.

Ahora bien, debemos reconocer, que las cosas no son en la realidad tan simples como se plantea en el ejemplo de la tabla. Por ejemplo, es probable que sea muy difícil preveer las oportunidades que se presentarán en el transcurso del próximo año o asegurar que no se presentarán otras que las supuestas. El límite del monto de capital proveniente de financiamiento externo, normalmente no es fijo, y más bien puede afirmarse que varía de acuerdo con las oportunidades

y perspectivas que se presentan a la empresa, los resultados que va obteniendo, su situación en cuanto a prestigio, solidez, etc... Otros factores pueden influir, además de la probable tasa de recuperación, en el grado de atractivo que presenten las diversas alternativas, como pueden ser, la duración del período en que se espera obtener los rendimientos de cada alternativa, o el grado de riesgo que se considere asociado a cada una de ellas; así por ejemplo, pudiera suceder que se decidiese invertir en la alternativa G en lugar de la F, por implicar ésta última un riesgo mucho mayor que la primera, no obstante la G, ofrezca menor tasa de recuperación.

Es indudable, que las diversas alternativas de inversión, normalmente implican diferente grado de riesgo y que el grado de riesgo influye considerablemente en la tasa mínima que resulta atractiva para invertir en cada alternativa.

Es un hecho reconocido en el ámbito real de los negocios, que una empresa con escaso capital propio, y por tanto con mayor necesidad de capital prestado, y que en general representa alto riesgo para quien le presta, consigue ese dinero prestado a una tasa de interés mucho más alto que el que se brinda a empresas más consolidadas y con mayor respaldo económico. Empresas en dificultades, difícilmente encuentran financiamiento externo, aún siendo caro. A empresas en auge, se les brinda diversas oportunidades de financiamiento, a tasas de interés bajos, por el hecho de que quienes invierten en ellas reconocen una garantía para su capital y muy bajas probabilidades para el elemento riesgo.

Frecuentemente el factor de riesgo es reconocido y evaluado pro la gerencia de las empresas sin mayor formalismo de reglas y tomado en consideración para la toma de decisiones.

Sin embargo, no obstante las objeciones expresadas y las dificultades que puedan presentarse en cada caso particular, debe quedar claro el principio de que la tasa mínima interna de recuperación debe ser seleccionada teniendo como objetivo fundamental el lograr dentro de la situación y condiciones particulares de cada empresa, el mejor aprovechamiento posible de los recursos de que dispone.

Por todos los criterios expuestos, si a una empres se le presentan en un momento dado, amplias oportunidades de inversión por un lado, con la posibilidad de obtener de ellas altas tasas de recuperación, y por otro lado, se encuentra con que los recursos de que dispone para llevar a cabo dichas inversiones, resultan escasos, en relación al monto de capital que las mismas requieren, su tasa mínima atractiva de recuperación será muy alta. Si por el contrario, durante cierto periodo, el mercado le ofrece reducidas alternativas de inversión, con bajas tasas probables de recuperación, y además dispone de capital para operar, su tasa mínima atractiva de recuperación disminuirá sensiblemente, al menos mientras dichas circunstancias prevalezcan.

Si en las condiciones del ejemplo planteado en la tabla, se llegará a determinar que en promedio, el costo de capital de los $ 20'000,000.00 disponibles para operar, ya considerando la composición de dicho capital

y el costo individual de las diversas fuentes de financiamiento que lo integran, es de un 7 %, lo cual pudiese suceder si por ejemplo, el monto del capital que puede conseguir prestado la empresa de fuentes externas, es mucho mayor en porcentaje al capital, normalmente caro, proveniente de fuentes internas y además puede conseguirlo a tasas de interés muy bajas; la tasa mínima atractiva de recuperación seguiría siendo de 16 %, ya que prevalece el argumento de que: "invertir en una alternativa que ofrezca tasa de recuperación inferior a 16 %, equivale a eliminar la posibilidad de invertir en otra alternativa que ofrezca 16 %, o más, dado que los recursos son limitados". En estas circunstancias nos damos cuenta que para efectos de la determinación de la tasa mínima de recuperación, el dato de un 7%, para el costo del capital, resultó irrelevante, (al menos en éste ejemplo, y dada la diferencia entre el 7% y el 16%).

Lo que cabría pensar en este caso, es en la posibilidad de conseguir mayor capital para invertir, aún a una tasa de interés más alta, con el consiguiente incremento del costo promedio del costo del capital, ahora en un 7%, y aplicarlo a alternativas del grupo G, H, o I, solo teniendo cuidado de que la diferencia entre el costo promedio del capital empleado en las diversas inversiones (ya en estas condiciones, mayor de 7%), y la tasa mínima esperada de recuperación de dichas inversiones (ya menor del 16%), sea tal que compense, de acuerdo con

las consideraci ones hechas anteriormente, los riesgos en que se incurre al invertir, al aceptar dinero prestado, etc...

Obviamente el objetivo que persigue un inversionista es el de obtener las tasas más altas de recuperación posibles "después" de impuestos y no "antes" de impuestos. Si fuese invariablemente cierto que un ordenamiento de proyectos de inversión según sus tasas de recuperación, fuese el mismo antes y después de impuestos, las conclusiones de los análisis económicos no dependerían del hecho de si los estudios fuesen hechos considerando las condiciones antes o después de impuestos. Bajo estas circunstancias la mayor simplicidad que implica el realizar los estudios económicos antes de impuestos, sería una base válida que justificara el realizarlos siempre antes de impuestos, y solo aumentar las tasas mínimas atractivas, o las tasas de interés consideradas, lo suficiente para obsorver los efectos del pago de impuestos.

Sin embargo, frecuentemente sucede que los mejores proyectos después de impuestos, no son los mismos que los mejores antes de impuestos. Esto se explica por el hecho de que para distintas circunstancias se presentan diferencias en cuanto a los factores que son deducibles en un caso y en otro, o al hecho de que distintos tipos de inversiones se rigen por diferente legislación fiscal y por tanto, por distintas tasas de impuestos. Por lo anterior, podemos concluir que es conveniente

y en ocasiones necesario, en las condiciones de industria competitiva realizar los análisis económicos "después de impuestos".

Es muy conveniente hacer notar que los criterios en cuanto a la tasa mínima interna de recuperación, una vez fijada ésta dentro de una empresa, sean observados en todos los niveles de la misma y no unicamente en los niveles generales. Es decir, que los efectos que la tasa mínima establecida debe tener en toda decisión de inversión dentro de la empresa, se contempla no solo en las decisiones que se tomen en las altas esferas de la Dirección, sino también en las que se tomen en los departamentos de operación, compras, etc... Es frecuente observar que en las decisiones que se toman en estratos inferiores, no se siguen las políticas de inversión dictadas por la gerencia y que normalmente se toman sin previo análisis económico por elemental que sea y en base a tradición, costumbre, inercia o mera intuición. Sería absurdo suponer que en una empresa constructora, se están recibiendo - efectivamente los beneficios de una política de óptimo uso de los recursos, cuando a nivel gerencial se analiza ampliamente y con enfoque económico si la empresa deba encargarse o no de la ejecución de una Obra o si se invierte el capital propio de la misma en la adquisición de terrenos para la realización de un fraccionamiento, pero se descuida el hecho de que en el departamento de adquisición de equipo, se compre maquinaria cuantia sin justifi-

cación real económica en cuanto a la oportunidad del momento, tipo, capacidad, etc..., o no se remplace equipo que ya superado su período de vida económica y continua en operación.

Finalmente, solo queremos recalcar que la selección de una tasa mínima atractiva de recuperación, tiene obviamente, una gran influencia en las decisiones que se tomen a todos los niveles. Proposiciones de inversiones que parecen ser atractivas con una tasa de 7 %, puede ser que se demuestre económicamente que deben ser vetadas aún con tasa de recuperación de un 15 %.

Hay que tener en mente que los elementos básicos en la determinación de la tasa mínima interna atractiva de recuperación son ordinariamente: la tasa de recuperación de la oportunidad en que rechazamos invertir, y el costo promedio del capital disponible, ambos factores considerados. No existe una cifra determinada como tasa mínima aceptable de recuperación, que sea apropiada bajo todas las circunstancias. Dicha tasa deberá ser analizada y establecida en cada caso y para cada situación.

## DIFERENCIA ENTRE EL ENFOQUE CONTABLE Y EL CRITERIO DE ANALISIS ECONOMICO

Un análisis económico tiene por objeto determinar si un cierto capital debe ser invertido o aplicado a otro fin distinto del actual. Un estudio económico tiene como elementos, cursos de acción que aún no se han realizado. Tiene que ver con "eventos futuros": ¿se debe seguir cierto curso de acción? ¿el procedimiento es más económico?. El análisis económico proporciona bases para las decisiones.

Ahora bien, una vez que se ha tomado la decisión de invertir y el capital ha sido invertido, se desean conocer los resultados financieros, para lo cual se establecen mecanismos y procedimientos especificamente orientados para la determinación de los resultados financieros y el control de las operaciones: todos los cuales constituyen la contabilidad general y la contabilidad de costos.

La contabilidad es en este sentido, la historia de un negocio; se refiere a eventos pasados. Actua ya conociendo ingresos y egresos. Estima resultados y calcula cual fué la tasa de recuperación.

El análisis económico recomienda una cierta inversión. Si la decisión se toma basado en el estudio económico, la contabilidad comprobará posteriormente si el estudio económico y las recomendaciones fueron correctas.

La contabilidad tiene la ventaja de trabajar con hechos historicos, financieros ya acaecidos, el análisis económico solo cuenta con estimaciones sobre el futuro.

Posteriormente, las observaciones de la contabilidad pueden ser aprovechadas por el analista económico, pero deben saber ser interpretadas.

Como en un experimento, la contabilidad registra todos los eventos significativos financieramente hablando de una inversión y de estos hace posible determinar los resultados y preparar un reporte financiero.

Interpretando correctamente estos reportes se toman las decisiones en el campo económico por los dirigentes.

Se trata de dos funciones distintas pero conectadas.

El Contador nunca afecta las operaciones de un "costo de Capital", a menos que hayan sido efectuado erogaciones, como pueden ser pagos de intereses bancarios, pago de hipotecas, etc..., mientras que el analista carga a cada peso, de la responsabilidad de cubrir el "costo del capital". Así por ejemplo, si la adquisición de activos o la operación de la empresa son financiados completamente por capital social, no hay que pagar fisicamente un interés como se haría en el caso de que el dinero fuese prestado. En este caso, la Contabilidad

no impacta los costos con el importe de un interés correspondiente al capital empleado. Sin embargo, quien realice el análisis - económico de la inversión, debe considerar un interés correspondiente al capital empleado y emanado del concepto del costo de oportunidad.

Muy frecuentemente surgen conflictos entre los Ingenieros y los Contadores debido a su distinto enfoque y punto de vista respecto a los costos. Estas controversias reflejan un mutuo desconocimiento de los objetivos de los procedimientos que cada uno de ellos aplica para propósitos distintos. Es necesario el reconocimiento por ambos de la diferencia en los objetivos de su actuación.

TEMA II

# DESARROLLO Y ANALISIS DE FORMULAS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION

## NOMENCLATURA.

Para representar en forma objetiva el flujo de efectivo resultante de una inversión, resulta muy util el empleo de una "escala de tiempo". En esta escala, las unidades de tiempo son los períodos de interés, que no necesariamente son meses o años. Cuando las erogaciones o los ingresos se llevan a cabo a lo largo de un período, en la escala de tiempo, se acostumbra representar el movimiento de caja, concentrado al final de dicho período.

Para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de la tasa de recuperación, utilizaremos la siguiente momenclatura:

P: representa la suma presente de dinero. En la escala de tiempo ocurre en el punto cero, es decir, al principio del período inicial.

F: representa la suma de dinero a una fecha específica futura. En la escala de tiempo, ocurre en el punto(n), al terminar el último período. En mucha de la literatura técnica relativa, es frecuente se represente con (S).

A: Representa el importe de cada pago, en una serie uniforme de pagos, que se efectuan al final de cada período. En mucha de la

literatura técnica relativa, es frecuente se represente con (R).

i: Designa a la tasa de interés generada al final de cada período.

n: Representa el número de períodos de interés considerados.

El interés, (i) es la tasa de recuperación, o la recuperación en si, correspondiente a una inversión. La reinversión de intereses, y el pago de intereses sobre esos intereses, origina el proceso de interés compuesto. Se observa que este proceso refleja el concepto inherente del "valor del dinero con el tiempo", es decir, el hecho de que cada peso "crece" con el tiempo.

Para la determinación del interés por período, es necesario interpretar correctamente lo siguiente:

"10 % computado trimestralmente", indica el que se consideran cuatro períodos de interés, de 3 meses de duración cada uno y en que se genera un 2.5 % de interés al final de cada uno de ellos.

"10 % de interés" (sin más indicaciones), indica un interés de 10 % anual.

En el primer caso, el interés de 10 % es un "interés nominal", ya que el hecho de que se pague parcialmente por adelantado, da lugar a que el "interés efectivo" sea mayor.

En el segundo caso, el interés nominal y el efectivo, coinciden.

Interés Simple.

El interés simple se calcula mediante la expresión:

$$I = Pni$$

por tanto: $F = P + I = P + Pni = P(1+ni)$

Ordinariamente la unidad de tiempo para el período de interés se considera de 1 año. Cuando es necesario calcular el interés correspondiente a una fracción de año, se considera por mera simplificación, constituido el año por 12 meses, de 30 días, con un total de 360 días. Estas consideraciones dan lugar al interés simple ordinario. Si se calcula sobre la base de 365 se genera el interés simple exacto.

En la práctica, el interés simple se emplea en préstamos a corto plazo y cuando el período se mide en días.

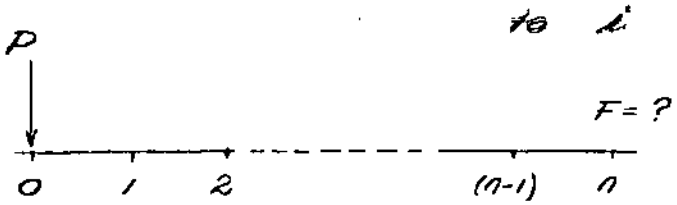
Ejemplo:

Calcular el interés simple que originan $ 1,000. a una tasa de interés de 6 % anual, durante 60 días.

$$I = 1,000 \times \left(\frac{0.06}{365}\right) \times 60 = \$\ 9.86$$

## Factor de un pago único con interés compuesto

¿Qué monto final F origina un capital inicial P, invertido durante n periodos a una tasa de interes compuesto i ?




datos: P, n, i
F = ?

El valor de P con el tiempo será:

Al final del primer periodo: $P + Pi = P(1+i)$
Al final del segundo periodo: $P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$

Por inducción se puede concluir que al final de n periodos, la cantidad acumulada será: $F = P(1+i)^n$

al factor: $(1+i)^n$ se le denomina: "factor de un pago único con interes compuesto."

y se representa:

a) $({}_{i-n}spcaf)$ que significa: single-payment Compound-Amount factor

b) $(F/P, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar un pago único P, para encontrar la cantidad acumulada F al final de n periodos a una tasa de interes i.

Conclusión:

$$F = P(1+i)^n$$
$$F = P \cdot {}_{i-n}spcaf = P \cdot (F/P, i\%, n)$$

Ejemplo:

¿Cuál es la cantidad acumulada F por \$1.000, durante 10 años a una tasa de interes del 6% anual ?

$F = P \cdot {}_{i-n}spcaf$

$F = 1.000 \cdot {}_{6-10}spcaf$

$F = 1.000 \ (1 + 0.06)^{10} = 1.000 \cdot 1.7908$

$F = \$1.790.^{80}$

Ejemplo:

Consideremos el mismo problema con el que se ejemplificó el interes simple:

Calcular el monto de los intereses que originan $1,000.00 invertidos a una tasa de interes de 6% anual durante 60 días, considerando interes compuesto.

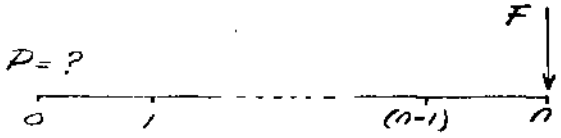
$$F = P \cdot (1+i)^n = 1{,}000.00 \cdot \left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{60} = \$1{,}009.91$$

$$\text{Interes} = F - P = 1{,}009.91 - 1{,}000.00 = \$9.91$$

que es solo 1/2 % mayor que el resultado obtenido con interes simple; lo que podria justificar que para préstamos a corto plazo se emplease el criterio de interes simple.

Factor de actualización de un pago único

¿Qué capital inicial P, origina un capital final F, después de haber sido invertido durante n periodos a una tasa i de interes compuesto?




datos: F, n, i%
P = ?

Mediante un proceso inverso al anterior, podemos concluir que:

$$P = F\,\frac{1}{(1+i)^n}$$

al factor: $\frac{1}{(1+i)^n}$ se le denomina: "factor de actualización de un pago único"

y se representa:

a) $({}_{i\text{-}n}spp\,wf)$ que significa: single payment present worth factor.

b) $(P/F, i\%, n)$

y es el factor por el cual se multiplica un valor futuro F, para obtener el valor presente P, que lo originó.

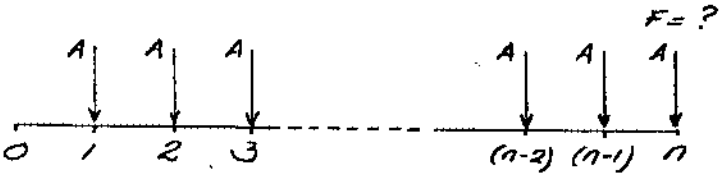
Conclusión:

$$P = F\,\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$P = F \cdot {}_{i\text{-}n}spp\,wf = F \cdot (P/F, i\%, n)$$

## Factor de interes compuesto de una serie uniforme de pagos

¿Qué capital final F, origina la inversión uniforme de una cantidad constante A, durante n periodos y a una tasa i de interes compuesto?




datos: A, n, i%
F = ?

Cada pago A origina diferente interes compuesto, pues cada una de ellas tiene un periodo de inversión distinto: el primer A, tiene (n-1) periodos, el segundo A, (n-2) periodos, etc..., el último A, ocurre en el punto n y no origina interes. En estas condiciones, la suma F estará integrada:

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \dots + A(1+i)^2 + A(1+i) + A \quad (1)$$

multiplicando ambos miembros por $(1+i)$:

$$F(1+i) = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + A(1+i)^3 + A(1+i)^2 + A(1+i) \quad (2)$$

restando la ecuación (1) de la (2):

$$F(1+i) - F = A(1+i)^n - A$$

$$F(1+i-1) = A\left[(1+i)^n - 1\right]$$

de donde: $$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Al factor: $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ se le denomina: "factor de interes compuesto de una serie uniforme de pagos" y se representa:

a) $({}_{i\text{-}n}uscaf)$ que significa: Uniform series compound amount factor.

b) $(F/A, i\%, n)$

y es el factor por el cual se multiplica el valor A de cada pago uniforme, para obtener el importe acumulado F, después de n periodos y a una tasa de interes compuesto i.

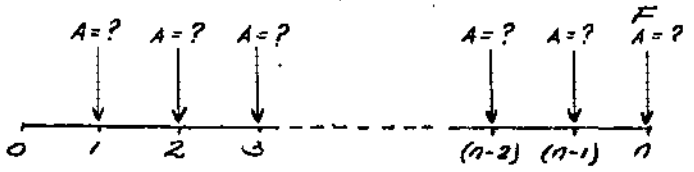
Conclusión:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = A \cdot {}_{i\text{-}n}uscaf = A \cdot (F/A, i\%, n)$$

## Factor del fondo de amortización

¿Qué capital constante A hay que invertir periodicamente durante n periodos, con una tasa i de interes compuesto, para acumular un capital final F ?




datos: F, n, i %
A = ?

despejando A en la expresión anterior:

$$A = F \cdot \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

al factor : $\left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina :
"factor del fondo de amortización"
y se representa :

a) ( $_{i-n}sfdf$ ) que significa: sinking fund deposit factor

b) ( A/F, i %, n )

y es el factor por el que hay que multiplicar el monto final F, para encontrar el importe A de los pagos uniformes y constantes que lo originan durante n periodos y a una tasa i de interes compuesto.

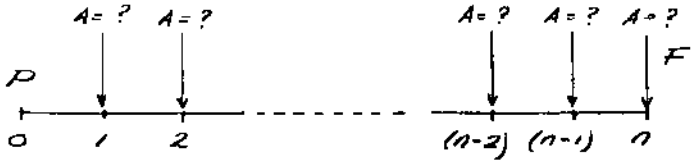
Conclusión:

$$A = F \cdot \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = F \cdot {}_{i-n}sfdf = F \cdot (A/F, i\%, n)$$

## Factor de Recuperación del Capital

¿Qué monto uniforme A se debe invertir a una tasa $i$ de interes compuesto, al final de cada periodo, durante $n$ periodos, para obtener el mismo monto final F que se obtendria si se invirtiera una cantidad inicial P durante el mismo tiempo y a la misma tasa de interes $i$ ?




datos: $P$, $n$, $i\%$
$A = ?$

Hablamos determinado que:

$$A = F \cdot \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

pero, por otro lado tenemos que: $F = P\,(1+i)^n$

substituyendo, resulta:

$$A = P \cdot \left[ \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Al factor: $\left[ \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina: "factor de recuperación del capital" y se representa:

a) $({}_{i-n}crf)$ que significa: capital recovery factor

b) $(A/P, i\%, n)$

y es el factor por el cual se multiplica P para encontrar el valor de los pagos A que lo recuperan al final de $n$ periodos a una tasa $i$ de interes compuesto.

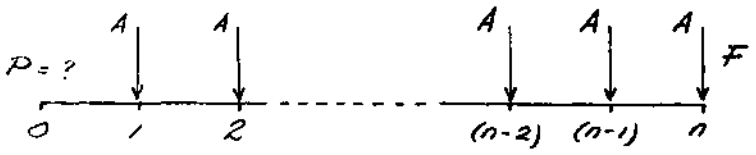
Conclusión:

$$A = P \cdot \left[ \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = P \cdot {}_{i-n}crf = P \cdot (A/P, i\%, n)$$

## Factor de actualización de una serie uniforme de pagos

¿Cuál es el capital inicial $P$ que invertido durante $n$ periodos a una tasa $i$ de interes compuesto, produce el mismo capital final $F$, que una serie uniforme de pagos $A$ al final de cada uno de los $n$ periodos y a la misma tasa de interes $i$ ?




datos : $A$, $i\%$, $n$
$P = ?$

despejando el valor de $P$, en la última expresión :

$$P = A \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right]$$

al factor : $\left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right]$ se le denomina "factor de actualización de una serie uniforme de pagos." y se representa :

a) $({}_{i-n}uspwf)$ que significa : uniform series present worth factor

b) $(P/A, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el valor del pago uniforme $A$, al final de cada uno de $n$ periodos y a una tasa $i$ de interes compuesto, para encontrar el valor $P$ que recuperan.

Conclusión :

$$P = A \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \cdot {}_{i-n}uspwf = A \cdot (P/A, i\%, n)$$

Frecuentemente, en el planteamiento de algunos problemas de análisis económico, se conoce la suma que será solicitada como préstamo o invertida inicialmente, así como la corriente futura de pagos que su amortización o recuperación origine, y lo que se busca es calcular la tasa de recuperación de la inversión.

En estas condiciones y para el caso de "pago único", el problema se reduce a despejar (i) de la expresión:

$$F = P(1+i)^n$$

de donde:

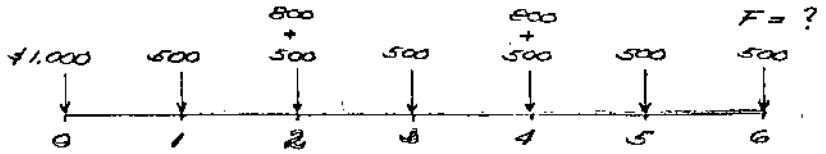
$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1}$$

que puede resolverse por logaritmos.

En los demás casos, el problema es más complejo como para ser resuelto directamente y el método más razonable en estas condiciones resulta ser el de interpolación.

Ejemplo:

Dada la siguiente serie de pagos:




calcular el importe de la cantidad final F acumulada al final de los 6 años, considerando una tasa de interes del 10%

$$F = 1{,}000 \cdot (1+0.10)^6 + 800\,(1+0.10)^4 + 800\,(1+0.10)^2 + 500\left[\frac{(1+0.10)^6-1}{0.10}\right]$$

que puede representarse:

$$F = 1{,}000 \cdot {}_{10-6}spcaf + 800\ {}_{10-4}spcaf + 800\ {}_{10-2}spcaf + 500 \cdot {}_{10-6}uscaf$$

o también:

$$F = 1000 \cdot (F/P, 10\%, 6) + 800\,(F/P, 10\%, 4) + 800 \cdot (F/P, 10\%, 2) + 500 \cdot (F/A, 10\%, 6)$$

$$F = 1{,}000 \times 1.7716 + 800 \times 1.4641 + 800 \times 1{,}2100 + 500 \times 7.7156$$

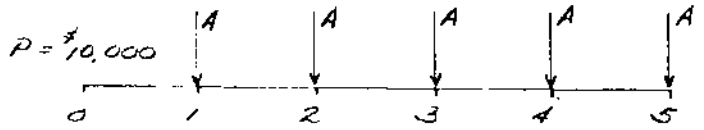
$$F = \$1{,}771^{60} + 1{,}171^{28} + 968^{00} + 3{,}857^{80}$$

$$F = \$\ 7{,}768^{68}$$

---

Ejemplo:

Sigamos paso a paso, el proceso de recuperación de un capital invertido a una tasa de interes $i$ y durante $n$ periodos. Ejemplifiquemos numericamente el proceso, suponiendo un capital inicial: $P = \$10{,}000$. invertido a una tasa: $i = 10\%$ durante: $n = 5$ años




cálculo de A:

$$A = P \cdot {}_{i-n}crf$$

$$A = 10{,}000 \cdot {}_{10-5}crf$$

$$A = \$10{,}000 \times 0.26380 = \$2{,}638.^{00}$$

| Año | Adeudo al principio del año | Intereses generados al final del año | Capital más intereses adeudados al final del año | Pago al final del año | Capital adeudado al final del año, después del pago anual | Capital ya Recuperado |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $10,000 | $1,000 | $11,000 | $2,638 | $8,362 ① | $1,638 ② |
| 2 | 8,362 | 836 | 9,198 | 2,638 | 6,560 ③ | 1,802 ④ |
| 3 | 6,560 | 656 | 7,216 | 2,638 | 4,578 | 1,982 |
| 4 | 4,578 | 458 | 5,036 | 2,638 | 2,398 | 2,180 |
| 5 | 2,398 | 240 | 2,638 | 2,638 | 0 | 2,398 |
| | | | | | | $10,000 |

Ejemplo del calculo de los elementos:

① : $11,000 − 2,638 = $8,362
② : $2,638 − 1,000 = $1,638
③ : $9,198 − 2,638 = $6,560
④ : $2,638 − 836 = $1,802

## Algunas Relaciones entre las Formulas

De la deducción de las fórmulas, se desprende:

$$_{i\text{-}n}spcaf = \frac{1}{_{i\text{-}n}sppwf} \qquad _{i\text{-}n}uscaf = \frac{1}{_{i\text{-}n}sfdf} \qquad _{i\text{-}n}crf = \frac{1}{_{i\text{-}n}uspwf}$$

Empleando la otra notación, las mismas relaciones adquieren la forma:

$$(F/P, i\%, n) = \frac{1}{(P/F, i\%, n)} \qquad (F/A, i\%, n) = \frac{1}{(A/F, i\%, n)} \qquad (A/P, i\%, n) = \frac{1}{(P/A, i\%, n)}$$

---

Puede demostrarse que:

$$1 + {}_{i\text{-}1}spcaf + {}_{i\text{-}2}spcaf + \dots + {}_{i\text{-}(n-2)}spcaf + {}_{i\text{-}(n-1)}spcaf = {}_{i\text{-}n}uscaf$$

y también:

$$_{i\text{-}1}sppwf + {}_{i\text{-}2}sppwf + \dots + {}_{i\text{-}(n-1)}sppwf + {}_{i\text{-}n}sppwf = {}_{i\text{-}n}spwf$$

---

$$_{i\text{-}n}crf - i = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i = \frac{i(1+i)^n - i\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{i(1+i)^n - i(1+i)^n + i}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{i}{(1+i)^n - 1} = {}_{i\text{-}n}sfdf$$

$$\therefore \; _{i\text{-}n}crf - i = {}_{i\text{-}n}sfdf$$

## Serie de Pagos con Gradiente de Incremento

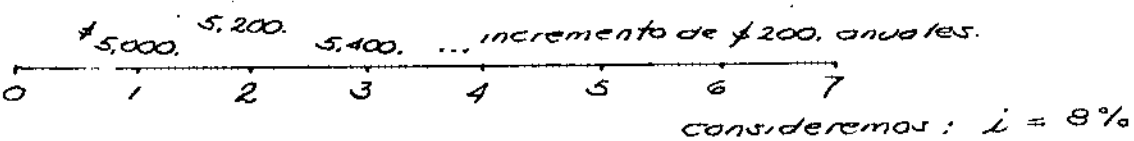
En algunos problemas de Ingenieria Económica, el flujo de efectivo puede mostrarse como una serie de ingresos o egresos que se incrementan o disminuyen en cada periodo. Este puede ser el caso, por ejemplo, de los costos de mantenimiento de un cierto equipo, los cuales, es normal que muestren un incremento año con año.

Si el incremento es el mismo en cada periodo, se hablará de una "serie de pagos con gradiente de incremento aritmético"; si los incrementos varían cada periodo en función de un factor constante, se tendrá una "serie de pagos con gradiente de incremento geométrico."

Aun en el caso de que en una serie de pagos, estos varíen en forma irregular, habría que estudiar la posibilidad de ajustar dicha serie a una de las series anteriores.

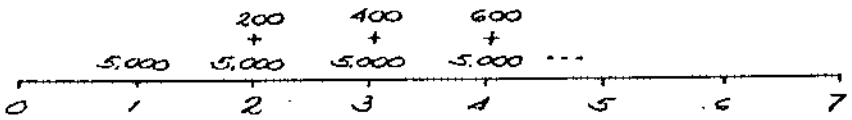
A) <u>Gradiente de incremento aritmético</u>

Supongamos la siguiente serie de pagos:

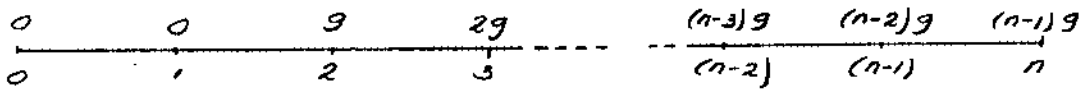



Calcular los valores de F o de P en una serie como la anterior, sería muy laborioso contando solo con las fórmulas anteriores.

La serie anterior puede representarse:




ya que los $5,000 anuales constituyen una serie uniforme que puede ser tratada con las fórmulas establecidas anteriormente, fijemos nuestra atención en la parte afectada por el gradiente anual, en este caso, de $200. y al que vamos a representar con (g). La serie parcial, puede representarse, generalizando a un horizonte de n periodos:




Trataremos de traducir la serie anterior en:

UNA SERIE UNIFORME EQUIVALENTE, de la siguiente manera:

$$F = g \cdot {}_{(n-2)}spcaf + 2g \cdot {}_{(n-3)}spcaf + \ldots + (n-2)g \cdot {}_{1}spcaf + (n-1)g \quad (1)$$

Cuántos de periodos faltantes

Multiplicando la igualdad ① por $(\,,spcaf)$:

$$F\cdot\,,spcaf = \underbrace{g\cdot_{(n-1)}spcaf + 2g\cdot_{(n-2)}spcaf}\,+\ldots+(n-2)g\cdot_{2}spcaf+(n-1)g\cdot\,,spcaf \quad ②$$

se obtiene de:

$$_{(n+1)}spcaf\cdot\,,spcaf = (1+i)^{n-2}\cdot(1+i)^{1}$$
$$= (1+i)^{n-1}$$
$$= {}_{(n-1)}spcaf$$

Restando ① de ②:

$$F - F\cdot\,,spcaf = -g\cdot_{(n-1)}spcaf - g\cdot_{(n-2)}spcaf - \ldots - g\cdot_{2}spcaf - g\cdot\,,spcaf + (n-1)g$$

Cambiando de signos en ambos miembros y sacando a $(g)$ como factor común:

$$\underbrace{F\,,spcaf - F}_{\substack{=F\cdot(1+i)-F\\ =F+Fi-F\\ =F\cdot i}} = g\underbrace{\left[{}_{(n-1)}spcaf + {}_{(n-2)}spcaf+\ldots+{}_{2}spcaf+\,,spcaf+1\right]}_{={}_{n}uscaf\ \text{(ver pag. 85)}} - ng$$

$$F\cdot i = g\cdot{}_{n}uscaf - ng \quad ③$$

Multiplicando por el factor: ${}_{n}sfdf$ (que es el recíproco de ${}_{n}uscaf$):

$$F\cdot i\cdot{}_{n}sfdf = g\cdot\underbrace{{}_{n}uscaf\cdot{}_{n}sfdf}_{=1} - ng\cdot{}_{n}sfdf$$

dado que: $F\cdot{}_{n}sfdf = A$
despejando la $(i)$ se tiene:

$$A = \frac{g}{i} - \frac{ng}{i}\,{}_{n}sfdf \quad \therefore \quad \boxed{\begin{array}{c} A = g\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\,{}_{i\text{-}n}sfdf\right] \\ A = g\cdot{}_{i\text{-}n}asf \end{array}}$$

Al factor: $\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\,{}_{i\text{-}n}sfdf\right]$ se le denomina: factor de serie aritmética y se representa:

a) ${}_{i\text{-}n}asf$ que significa: arithmetic series factor

b) $(A/g, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el gradiente de una serie aritmética, para encontrar el valor A de una serie uniforme equivalente.

Así, para el ejemplo propuesto, el valor de los pagos A, de una serie uniforme equivalente, será:

$$A = 5{,}000 + 200 \cdot {}_{8-7}asf = 5{,}000 + 200 \cdot 2.6937$$

$$A = \$\ 5{,}538.74$$

Por otro lado, de la ecuación ③, se puede obtener el valor de F:

$$\boxed{F = \frac{g}{i}\left[{}_{i-n}uscaf - n\right]}$$

También puede encontrarse el valor presente de la serie con gradiente aritmética:

$$P = A\ {}_{n}uspwf = g\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\ {}_{n}sfdf\right]{}_{n}uspwf$$

$$P = g\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= g\frac{1}{i}\left({}_{i-n}uspwf - n \cdot {}_{i-n}sppwf\right) \\ P &= g \cdot {}_{i-n}gpwf \end{aligned}}$$

Al factor: $\frac{1}{i}\left({}_{i-n}uspwf - n \cdot {}_{i-n}sppwf\right)$ se le denomina: factor de actualización del gradiente de una serie aritmética, y se representa:

a) ${}_{i-n}gpwf$ que significa: gradient present worth factor.

b) $(P/g, i\%, n)$

Es claro que la relación entre los factores anteriores, será:

$${}_{i-n}gpwf = {}_{i-n}asf \cdot {}_{i-n}uspwf$$

que también puede representarse:

$$(P/g, i\%, n) = (A/g, i\%, n) \cdot (P/A, i\%, n)$$

## 3. Gradiente de incremento Geométrico.

Consideremos una serie de pagos del tipo:


Calculemos el valor F acumulado al término de n periodos:

$$F = D(1+i)^{n-1} + aD(1+i)^{n-2} + \dots + a^{n-3}D(1+i)^2 + a^{n-2}D(1+i) + a^{n-1}D \quad (1)$$

multiplicando ambos miembros por: $\frac{(1+i)}{a}$

$$F\frac{(1+i)}{a} = \frac{D}{a}(1+i)^n + D(1+i)^{n-1} + aD(1+i)^{n-2} + \dots + a^{n-4}D(1+i)^3 + a^{n-3}D(1+i)^2 + a^{n-2}D(1+i) \quad (2)$$

Restando la ecuación (2) de la (1):

$$F - F\frac{(1+i)}{a} = -\frac{D}{a}(1+i)^n + a^{n-1}D$$

$$F\left[\frac{a-(1+i)}{a}\right] = D\left[a^{n-1} - \frac{(1+i)^n}{a}\right]$$

$$F\left[a-(1+i)\right] = D\left[a^n - (1+i)^n\right]$$

por tanto: $$\boxed{F = D\left[\frac{a^n-(1+i)^n}{a-(1+i)}\right]}$$

El factor: $\left[\frac{a^n-(1+i)^n}{a-(1+i)}\right]$ se le denomina "factor de serie geométrica".

A partir del valor de F de la expresión anterior, se pueden calcular los valores de P y el de A, este último, correspondiente a una serie uniforme equivalente.

## Valores Límite de las fórmulas

el número de periodos (n) tiende a valores muy grandes, es decir: $n \to \infty$

$$_{\infty}spcaf = (1+i)^{\infty} = \infty$$

$$_{\infty}spcof = \frac{1}{(1+i)^{\infty}} = 0$$

$$_{\infty}uscaf = \frac{(1+i)^{\infty}-1}{i} = \infty$$

$$_{i\to\infty}sfdf = \frac{i}{(1+i)^{\infty}-1} = 0$$

$$_{i\to\infty}crf = \frac{i(1+i)^{\infty}}{(1+i)^{\infty}-1}$$

en este caso, caemos en una indeterminación, por lo que resulta más sencillo evaluar el límite, mediante la expresión:

$$_{i\to\infty}crf = {}_{i\to\infty}sfdf + i = 0 + i = i$$

$$_{i\to\infty}uspwf = \frac{1}{_{i\to\infty}crf} = \frac{1}{i}$$

$$_{i\to\infty}asf = \frac{1}{i}$$

5. la tasa de interes (i), vale 0 :

$$_{0\to n}spcaf = 1$$

$$_{0\to n}sppwf = 1$$

$$_{0\to n}uscaf = n$$

$$_{0\to n}uspwf = n$$

$$_{0\to n}sfdf = \frac{1}{n}$$

$$_{0\to n}crf = \frac{1}{n}$$

$$_{0\to n}asf = \frac{n-1}{2}$$

INTERES CONTINUO.

Para el desarrollo de las fórmulas mostradas anteriormente, se aceptó inicialmente que todos los pagos ocurren en forma discreta, es decir, en cada período se consideran agrupados en un solo pago ocurriendo éste al final del período. Como consecuencia, a los intereses correspondientes se les aplican las mismas consideraciones. Surge la duda de si un sistema de pagos e intereses como el anterior refleja la realidad, y de no ser así, de cual es el grado de error que introducen las suposiciones hechas.

Por un lado, es cierto que ciertos pagos en realidad se concentran en un punto específico del tiempo, como es el caso del pago para la compra de un equipo o del ingreso que se obtiene por su venta, los cuales se ubican en la escala de tiempo, al inicio y al final del primero y último períodos respectivamente, lo cual sí refleja la realidad, pero otros efectivos de caja ocurren en forma más o menos contínua en el transcurso de un período, como sucede por ejemplo, con erogaciones semanales para el pago de obra de mano, o mensuales o bimestrales, para cubrir los gastos por concepto de energía, materiales, impuestos, operación en general, etc... y suponerlos todos ellos concentrados o representados al final de un período, digamos anual, es evidente que configura una situación muy diferente de la real. Quizás un modelo en que se considerasen todos estos pagos

fluyendo continuamente, como una corriente de agua, a lo largo del período, sería probablemente más apegado a la realidad que considerarlos concentrados al final del año. Además hay casos en que ni la inversión inicial, por ejemplo, es puntual, ya que se distribuye a lo largo de uno o varios períodos, como es el caso de la construcción de una obra en la que los pagos para sufragar los gastos de la misma, se distribuyen a todo lo largo del período que dura la construcción.

El criterio del "interés continuo" proviene de la suposición de que los costos y los beneficios se generan en cada día, en cada hora y en cada minuto de la operación.

La verdad es que uno y otro criterios, representan e implican un conjunto de suposiciones y consideraciones, ya que en general en el ámbito real, el flujo de efectivo ni obedece totalmente a un modelo discreto, ni se comporta como un líquido que fluye continuamente. Ambos métodos proporcionan resultados aproximados y sin embargo los rangos de error que implican no son de tal magnitud que invaliden alguno de los criterios.

Sin embargo, la costumbre establecida, sobre todo en los campos de la industria y el comercio, propician el empleo del sistema descrito. En general, el tratamiento que se da al dinero dentro de los sistemas

comunmente aceptados, de pagos, compras, inversiones en bonos y acciones, otorgamiento de préstamos, hipotecas, etc..., se - ajusta al sistema discreto.

El criterio de interés continuo tiene aplicación en el desarrollo de ciertos modelos matemáticos para la toma de decisiones o en aquellos casos en que por la naturaleza misma del flujo de efectivo, se hace conveniente el empleo de dicho criterio.

## INTERES NOMINAL E INTERES EFECTIVO.

Muchas transacciones comerciales, estipulan que el cálculo de intereses, así como su cargo o abono, se haga en períodos uniformes menores de un año; Sin embargo, aún en estos casos, es costumbre indicar la tasa de interés de esa inversión en base anual, aunque los períodos de pago o cálculo de los intereses sean menores de un año. Así por ejemplo, si una tasa de interés es de 3% cada 6 meses, se acostumbra referirse a ella como una tasa de 6 % anual, solo que al interés calculado de esta manera se le designa como: "tasa nominal de interés" para diferenciarla de la tasa real o efectiva que es algo mayor que el 6 %.

Así por ejemplo, el interés real anual o efectivo de un capital de $ 100.00 invertido a una tasa de 6 % computado semestralmente, se calcula·

Intereses generados en los primeros 6 meses:

$$I = \$\,100 \times 0.03 = \$\,3.00$$

Capital total al iniciar el segundo semestre:

$$P + Pi = \$\,100.00 + \$\,3.00 = \$\,103.00$$

Interes sobre el capital anterior al final del segundo

Semestre: $I = \$\,103.00 \times 0.03 = \$\,3.09$

Interés total acumulado durante el año:

$$\$\,3.00 + 3.09 = \$\,6.09$$

Tasa real en el año de interés:

$$\frac{\cancel{\$}\,6.09}{\cancel{\$}\,100} = 0.0609 = 6.09\,\%$$

A esta tasa real de interés, con base anual, se le denomina: "tasa de interés efectiva". De aquí en adelante vamos a emplear la denominación "tasa real" para períodos menores de un año y "tasa efectiva" exclusivamente para indicar la tasa real correspondiente a un año.

Cuando se de como dato la tasa nominal, para poder aplicar las formulas, habrá que calcular primero la tasa real por período y trabajar con el número de períodos correspondientes a esa tasa real. Las tasas nominales, no sirven para base de comparación entre alternativas sino hasta que han sido convertidas a tasas efectivas.

La tasa efectiva de interés es el interés anual total percibido por unidad de capital empleado, considerando que este interés (cuando es computado en períodos menores de un año), es invertido por el resto

del año tan pronto como se genera, en los mismo términos y condiciones de inversión a que esta sujeto el capital principal.

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva de interés de un capital de $ 100.00 invertido a una tasa de 6 % computada cada 3 meses, durante 10 años.

Tasa real de interes en el trimestre : $6/4 = 1.5\%$
Número de periodos trimestrales en los 10 años = 40
Cantidad acumulada al término de los 10 años :

$$F = P_{\,1.5-40}\,spcaf = \$100.00\,(1+0.015)^{40}$$

$$F = \$100.00 \times 1.8140$$
$$F = \$181.40$$

Analicemos más detenidamente el proceso :
El capital acumulado al cabo de un año, correspondiente a cada peso invertido, será :

$$F = \$1.00\;{}_{1.5-4}spcaf = \$1.0614$$

En consecuencia, el importe de los intereses ganados /por año/ por peso :

$$F - P = \$1.0614 - 1.00 = \$0.0614$$

lo que equivale a una tasa efectiva de interes del : 6.14 %

Generalizando :

$$\text{tasa efectiva de interes} = \left[\frac{F-P}{P}\right] = \left[\frac{P\;{}_{i'-M}spcaf - P}{P}\right]$$

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = \left({}_{i'-M}spcaf - 1\right) = (1+i')^{M} - 1}$$

donde $(i')$ es la tasa real por periodo y $(M)$ es el número de periodos que hay en un año, correspondientes a la tasa real $(i')$

Cuando se tiene como dato, la tasa nominal de interes anual $(r)$, la expresión toma la forma :

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = \left(1 + \frac{r}{M}\right)^{M} - 1}$$

Para el caso particular del interes continuo, el número de periodos (M) en cada uno de los cuales se computa el interes, tiende a ser muy grande, es decir:

$$M \longrightarrow \infty$$

y en estas condiciones, si en la expresión: $\left(1+\frac{r}{M}\right)^M$

llamamos: $\frac{M}{r} = K$ de donde: $M = Kr$

sustituyendo queda: $\left(1+\frac{1}{K}\right)^{Kr} = \left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^K\right]^r$

si tender: $M \longrightarrow \infty$, también: $K \longrightarrow \infty$

y recordando que: $\lim\limits_{K\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{K}\right)^K\right\} = e$

entonces: $\lim\limits_{M\to\infty} \left(1+\frac{r}{M}\right)^M = e^r$

en estas condiciones, para el caso del interes continuo, se tendra:

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = e^r - 1}$$

---

Ejemplo:

¿Qué tasa es mayor:
3% computada mensualmente
o 3½% computada semestralmente ?

a) 3% (nominal anual) computado mensualmente:
tasa real mensual: 3/12 = ¼%
número de periodos en el año = 12

tasa efectiva de interes: $\underset{1/4-12}{spcaf} - 1 = 1.0304 - 1 = 0.0304$
$= 3.04\%$

) 3½% (nominal anual) computado semestralmente:
tasa real semestral: 3.5/2 = 1.75%
número de periodos en un año = 2

tasa efectiva de interes: $\underset{1.75-2}{spcaf} - 1 = 1.0353 - 1 = 0.0353$
$= 3.53\%$

∴ es mayor una tasa de 3½% computada semestralmente

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva de interes a que es invertido un capital de $100.- si la tasa anual (nominal) es de 12% y es computada en periodos: anual, semestral, trimestral, mensual, diario y continuo. Calcular la cantidad F acumulada en cada caso al cabo de 1 año

| Periodo de computación | Número de periodos en 1 año | Tasa de interes real en el periodo | Cálculo | Tasa efectiva de interes | Cantidad F acumulada en 1 año |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $F = \$100(1+0.12)^1$ |
| anual | 1 | $12/1 = 12\%$ | $_{12-1}$ spcaf $-1 = 1.1200 - 1 = 0.12$ | 12% | $= \$112.^{00}$ |
| semestral | 2 | $12/2 = 6\%$ | $_{6-2}$ spcaf $-1 = 1.236 - 1 = 0.1236$ | 12.36 % | $= \$112.^{36}$ |
| trimestral | 4 | $12/4 = 3\%$ | $_{3-4}$ spcaf $-1 = 1.1255 - 1 = 0.1255$ | 12.55 % | $= \$112.^{55}$ |
| mensual | 12 | $12/12 = 1\%$ | $_{1-12}$ spcaf $-1 = 1.1268 - 1 = 0.1268$ | 12.68 % | $= \$112.^{68}$ |
| diario | 360 | $12/360 = 0.0333\%$ | $_{0.0333-360}$ spcaf $-1 = (1+0.000333)^{360} - 1 =$ | | |
| | | | $\log(1.000333)^{360} = 360 \log 1.000333$ | | |
| | | | $= 360 \times 0.0001442 = 0.051912$ | | |
| | | | $(1.000333)^{360} = \text{antilog } 0.051912 = 1.1269$ | | |
| | | | $(1+0.000333)^{360} - 1 = 0.1269$ | 12.69 % | $= \$112.^{69}$ |
| continuo | $\to \infty$ | $12/\infty \to 0$ | $e^{0.12} - 1 =$ | | |
| | | | $\log e^{0.12} = 0.12 \log e$ | | |
| | | | $= 0.12 \times 0.4343$ | | |
| | | | $= 0.0521$ | | |
| | | | $e^{0.12} = \text{antilog } 0.0521 = 1.127$ | | |
| | | | $e^{0.12} - 1 = 1.127 - 1 = 0.127$ | 12.70 % | $= \$112.^{70}$ |

El ejemplo anterior ilustra la diferencia entre tasa nominal y tasa real y la necesidad de especificar cual tasa se conoce como dato al hacer el análisis de una alternativa.

Observamos que si en el sistema de interés continuo y en el de interés discreto, se trabaja con la misma tasa efectiva, la cantidad acumulada al final de un año es la misma, lo cual indica que la diferencia entre sus tasas nominales, es irrelevante y así por ejemplo, una tasa efectiva de interés de 12.7 %, acumula en el ejemplo anterior una F = $ 112..70 tanto para el sistema discreto como para el sistema discreto como para el continuo.

Es claro que en el sistema de interés continuo, la tasa nominal - anual siempre será distinta de la tasa efectiva, ya que la primera vale (r) y la segunda ( $e^r - 1$ ), razón por la cual, en las tablas de interés continuo siempre se indica la tasa efectiva con la cual se calculan los factores, pero se indica también la tasa nominal - - (anual) a la cual corresponde. En cambio por el sistema de interés discreto, la tasa nominal será igual a la tasa efectiva, excepto cuando los intereses se computen en períodos menores de un año.

Vemos en el ejemplo, que los valores obtenidos para el interés contínuo, son muy similares a los correspondientes al interés discreto, con período de computación diario y aún a los de período de computación mensual.

TASA DE DESCUENTO.

En todos los casos que anteceden, hemos considerado que los intereses son computados y pagados al final de cada período de interés. Cuando el pago de los intereses se hace por adelantado, es decir, al inicio del período, se dice que este pago constituye un "descuento".

Si un capital(P) *inicial*, es invertido y acumula una cantidad(F)al final de un cierto período, entonces:(F - P) representa los intereses:

sobre P, ( si los intereses son pagados al final del período).

sobre S, ( si los intereses son descontados al inicio del período).

en estas condiciones:

tasa de interés $i = \frac{F - P}{P} = \frac{F}{P} - 1$

tasa de descuento: $d = \frac{F - P}{F} = 1 - \frac{P}{F}$.

de las expresiones anteriores se deduce que: $\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$

También puede demostrarse que para el caso de la tasa de descuento:

$$\boxed{\begin{aligned} F &= P\frac{1}{(1-d)^n} = P(1-d)^{-n} \\ P &= F(1-d)^n \end{aligned}}$$

# TABLE E–1

## 1% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0100 | 0.9901 | 1.000 00 | 1.010 00 | 1.000 | 0.990 | 1 |
| 2 | 1.0201 | 0.9803 | 0.497 51 | 0.507 51 | 2.010 | 1.970 | 2 |
| 3 | 1.0303 | 0.9706 | 0.330 02 | 0.340 02 | 3.030 | 2.941 | 3 |
| 4 | 1.0406 | 0.9610 | 0.246 28 | 0.256 28 | 4.060 | 3.902 | 4 |
| 5 | 1.0510 | 0.9515 | 0.196 04 | 0.206 04 | 5.101 | 4.853 | 5 |
| 6 | 1.0615 | 0.9420 | 0.162 55 | 0.172 55 | 6.152 | 5.795 | 6 |
| 7 | 1.0721 | 0.9327 | 0.138 63 | 0.148 63 | 7.214 | 6.728 | 7 |
| 8 | 1.0829 | 0.9235 | 0.120 69 | 0.130 69 | 8.286 | 7.652 | 8 |
| 9 | 1.0937 | 0.9143 | 0.106 74 | 0.116 74 | 9.369 | 8.566 | 9 |
| 10 | 1.1046 | 0.9053 | 0.095 58 | 0.105 58 | 10.462 | 9.471 | 10 |
| 11 | 1.1157 | 0.8963 | 0.086 45 | 0.096 45 | 11.567 | 10.368 | 11 |
| 12 | 1.1268 | 0.8874 | 0.078 85 | 0.088 85 | 12.683 | 11.255 | 12 |
| 13 | 1.1381 | 0.8787 | 0.072 41 | 0.082 41 | 13.809 | 12.134 | 13 |
| 14 | 1.1495 | 0.8700 | 0.066 90 | 0.076 90 | 14.947 | 13.004 | 14 |
| 15 | 1.1610 | 0.8613 | 0.062 12 | 0.072 12 | 16.097 | 13.865 | 15 |
| 16 | 1.1726 | 0.8528 | 0.057 94 | 0.067 94 | 17.258 | 14.718 | 16 |
| 17 | 1.1843 | 0.8444 | 0.054 26 | 0.064 26 | 18.430 | 15.562 | 17 |
| 18 | 1.1961 | 0.8360 | 0.050 98 | 0.060 98 | 19.615 | 16.398 | 18 |
| 19 | 1.2081 | 0.8277 | 0.048 05 | 0.058 05 | 20.811 | 17.226 | 19 |
| 20 | 1.2202 | 0.8195 | 0.045 42 | 0.055 42 | 22.019 | 18.046 | 20 |
| 21 | 1.2324 | 0.8114 | 0.043 03 | 0.053 03 | 23.239 | 18.857 | 21 |
| 22 | 1.2447 | 0.8034 | 0.040 86 | 0.050 86 | 24.472 | 19.660 | 22 |
| 23 | 1.2572 | 0.7954 | 0.038 89 | 0.048 89 | 25.716 | 20.456 | 23 |
| 24 | 1.2697 | 0.7876 | 0.037 07 | 0.047 07 | 26.973 | 21.243 | 24 |
| 25 | 1.2824 | 0.7798 | 0.035 41 | 0.045 41 | 28.243 | 22.023 | 25 |
| 26 | 1.2953 | 0.7720 | 0.033 87 | 0.043 87 | 29.526 | 22.795 | 26 |
| 27 | 1.3082 | 0.7644 | 0.032 45 | 0.042 45 | 30.821 | 23.560 | 27 |
| 28 | 1.3213 | 0.7568 | 0.031 12 | 0.041 12 | 32.129 | 24.316 | 28 |
| 29 | 1.3345 | 0.7493 | 0.029 90 | 0.039 90 | 33.450 | 25.066 | 29 |
| 30 | 1.3478 | 0.7419 | 0.028 75 | 0.038 75 | 34.785 | 25.808 | 30 |
| 31 | 1.3613 | 0.7346 | 0.027 68 | 0.037 68 | 36.133 | 26.542 | 31 |
| 32 | 1.3749 | 0.7273 | 0.026 67 | 0.036 67 | 37.494 | 27.270 | 32 |
| 33 | 1.3887 | 0.7201 | 0.025 73 | 0.035 73 | 38.869 | 27.990 | 33 |
| 34 | 1.4026 | 0.7130 | 0.024 84 | 0.034 84 | 40.258 | 28.703 | 34 |
| 35 | 1.4166 | 0.7059 | 0.024 00 | 0.034 00 | 41.660 | 29.409 | 35 |
| 40 | 1.4889 | 0.6717 | 0.020 46 | 0.030 46 | 48.886 | 32.835 | 40 |
| 45 | 1.5648 | 0.6391 | 0.017 71 | 0.027 71 | 56.481 | 36.095 | 45 |
| 50 | 1.6446 | 0.6080 | 0.015 51 | 0.025 51 | 64.463 | 39.196 | 50 |
| 55 | 1.7285 | 0.5785 | 0.013 73 | 0.023 73 | 72.852 | 42.147 | 55 |
| 60 | 1.8167 | 0.5504 | 0.012 24 | 0.022 24 | 81.670 | 44.955 | 60 |
| 65 | 1.9094 | 0.5237 | 0.011 00 | 0.021 00 | 90.937 | 47.627 | 65 |
| 70 | 2.0068 | 0.4983 | 0.009 93 | 0.019 93 | 100.676 | 50.169 | 70 |
| 75 | 2.1091 | 0.4741 | 0.009 02 | 0.019 02 | 110.913 | 52.587 | 75 |
| 80 | 2.2167 | 0.4511 | 0.008 22 | 0.018 22 | 121.672 | 54.888 | 80 |
| 85 | 2.3298 | 0.4292 | 0.007 52 | 0.017 52 | 132.979 | 57.078 | 85 |
| 90 | 2.4486 | 0.4084 | 0.006 90 | 0.016 90 | 144.863 | 59.161 | 90 |
| 95 | 2.5735 | 0.3886 | 0.006 36 | 0.016 36 | 157.354 | 61.143 | 95 |
| 100 | 2.7048 | 0.3697 | 0.005 87 | 0.015 87 | 170.481 | 63.029 | 100 |

## TABLE E–2

### 1¼% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0125 | 0.9877 | 1.000 00 | 1.012 50 | 1.000 | 0.988 | 1 |
| 2 | 1.0252 | 0.9755 | 0.496 89 | 0.509 39 | 2.012 | 1.963 | 2 |
| 3 | 1.0380 | 0.9634 | 0.329 20 | 0.341 70 | 3.038 | 2.927 | 3 |
| 4 | 1.0509 | 0.9515 | 0.245 36 | 0.257 86 | 4.076 | 3.878 | 4 |
| 5 | 1.0641 | 0.9398 | 0.195 06 | 0.207 56 | 5.127 | 4.818 | 5 |
| 6 | 1.0774 | 0.9282 | 0.161 53 | 0.174 03 | 6.191 | 5.746 | 6 |
| 7 | 1.0909 | 0.9167 | 0.137 59 | 0.150 09 | 7.268 | 6.663 | 7 |
| 8 | 1.1045 | 0.9054 | 0.119 63 | 0.132 13 | 8.359 | 7.568 | 8 |
| 9 | 1.1183 | 0.8942 | 0.105 67 | 0.118 17 | 9.463 | 8.462 | 9 |
| 10 | 1.1323 | 0.8832 | 0.094 50 | 0.107 00 | 10.582 | 9.346 | 10 |
| 11 | 1.1464 | 0.8723 | 0.085 37 | 0.097 87 | 11.714 | 10.218 | 11 |
| 12 | 1.1608 | 0.8615 | 0.077 76 | 0.090 26 | 12.860 | 11.079 | 12 |
| 13 | 1.1753 | 0.8509 | 0.071 32 | 0.083 82 | 14.021 | 11.930 | 13 |
| 14 | 1.1900 | 0.8404 | 0.065 81 | 0.078 31 | 15.196 | 12.771 | 14 |
| 15 | 1.2048 | 0.8300 | 0.061 03 | 0.073 53 | 16.386 | 13.601 | 15 |
| 16 | 1.2199 | 0.8197 | 0.056 85 | 0.069 35 | 17.591 | 14.420 | 16 |
| 17 | 1.2351 | 0.8096 | 0.053 16 | 0.065 66 | 18.811 | 15.230 | 17 |
| 18 | 1.2506 | 0.7996 | 0.049 88 | 0.062 38 | 20.046 | 16.030 | 18 |
| 19 | 1.2662 | 0.7898 | 0.046 96 | 0.059 46 | 21.297 | 16.819 | 19 |
| 20 | 1.2820 | 0.7800 | 0.044 32 | 0.056 82 | 22.563 | 17.599 | 20 |
| 21 | 1.2981 | 0.7704 | 0.041 94 | 0.054 44 | 23.845 | 18.370 | 21 |
| 22 | 1.3143 | 0.7609 | 0.039 77 | 0.052 27 | 25.143 | 19.131 | 22 |
| 23 | 1.3307 | 0.7515 | 0.037 80 | 0.050 30 | 26.457 | 19.882 | 23 |
| 24 | 1.3474 | 0.7422 | 0.035 99 | 0.048 49 | 27.788 | 20.624 | 24 |
| 25 | 1.3642 | 0.7330 | 0.034 32 | 0.046 82 | 29.135 | 21.357 | 25 |
| 26 | 1.3812 | 0.7240 | 0.032 79 | 0.045 29 | 30.500 | 22.081 | 26 |
| 27 | 1.3985 | 0.7150 | 0.031 37 | 0.043 87 | 31.881 | 22.796 | 27 |
| 28 | 1.4160 | 0.7062 | 0.030 05 | 0.042 55 | 33.279 | 23.503 | 28 |
| 29 | 1.4337 | 0.6975 | 0.028 82 | 0.041 32 | 34.695 | 24.200 | 29 |
| 30 | 1.4516 | 0.6889 | 0.027 68 | 0.040 18 | 36.129 | 24.889 | 30 |
| 31 | 1.4698 | 0.6804 | 0.026 61 | 0.039 11 | 37.581 | 25.569 | 31 |
| 32 | 1.4881 | 0.6720 | 0.025 61 | 0.038 11 | 39.050 | 26.241 | 32 |
| 33 | 1.5067 | 0.6637 | 0.024 67 | 0.037 17 | 40.539 | 26.905 | 33 |
| 34 | 1.5256 | 0.6555 | 0.023 78 | 0.036 28 | 42.045 | 27.560 | 34 |
| 35 | 1.5446 | 0.6474 | 0.022 95 | 0.035 45 | 43.571 | 28.208 | 35 |
| 40 | 1.6436 | 0.6084 | 0.019 42 | 0.031 92 | 51.490 | 31.327 | 40 |
| 45 | 1.7489 | 0.5718 | 0.016 69 | 0.029 19 | 59.916 | 34.258 | 45 |
| 50 | 1.8610 | 0.5373 | 0.014 52 | 0.027 02 | 68.882 | 37.013 | 50 |
| 55 | 1.9803 | 0.5050 | 0.012 75 | 0.025 25 | 78.422 | 39.602 | 55 |
| 60 | 2.1072 | 0.4746 | 0.011 29 | 0.023 79 | 88.575 | 42.035 | 60 |
| 65 | 2.2422 | 0.4460 | 0.010 06 | 0.022 56 | 99.377 | 44.321 | 65 |
| 70 | 2.3859 | 0.4191 | 0.009 02 | 0.021 52 | 110.872 | 46.470 | 70 |
| 75 | 2.5388 | 0.3939 | 0.008 12 | 0.020 62 | 123.103 | 48.489 | 75 |
| 80 | 2.7015 | 0.3702 | 0.007 35 | 0.019 85 | 136.119 | 50.387 | 80 |
| 85 | 2.8746 | 0.3479 | 0.006 67 | 0.019 17 | 149.968 | 52.170 | 85 |
| 90 | 3.0588 | 0.3269 | 0.006 07 | 0.018 57 | 164.705 | 53.846 | 90 |
| 95 | 3.2548 | 0.3072 | 0.005 54 | 0.018 04 | 180.386 | 55.421 | 95 |
| 100 | 3.4634 | 0.2887 | 0.005 07 | 0.017 57 | 197.072 | 56.901 | 100 |



## TABLE E–3

### 1½% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0150 | 0.9852 | 1.000 00 | 1.015 00 | 1.000 | 0.985 | 1 |
| 2 | 1.0302 | 0.9707 | 0.496 28 | 0.511 28 | 2.015 | 1.956 | 2 |
| 3 | 1.0457 | 0.9563 | 0.328 38 | 0.343 38 | 3.045 | 2.912 | 3 |
| 4 | 1.0614 | 0.9422 | 0.244 44 | 0.259 44 | 4.091 | 3.854 | 4 |
| 5 | 1.0773 | 0.9283 | 0.194 09 | 0.209 09 | 5.152 | 4.783 | 5 |
| 6 | 1.0934 | 0.9145 | 0.160 53 | 0.175 53 | 6.250 | 5.697 | 6 |
| 7 | 1.1098 | 0.9010 | 0.136 56 | 0.151 56 | 7.323 | 6.598 | 7 |
| 8 | 1.1265 | 0.8877 | 0.118 58 | 0.133 58 | 8.433 | 7.486 | 8 |
| 9 | 1.1434 | 0.8746 | 0.104 61 | 0.119 61 | 9.559 | 8.361 | 9 |
| 10 | 1.1605 | 0.8617 | 0.093 43 | 0.108 43 | 10.703 | 9.222 | 10 |
| 11 | 1.1779 | 0.8489 | 0.084 29 | 0.099 29 | 11.863 | 10.071 | 11 |
| 12 | 1.1956 | 0.8364 | 0.076 68 | 0.091 68 | 13.041 | 10.908 | 12 |
| 13 | 1.2136 | 0.8240 | 0.070 24 | 0.085 24 | 14.237 | 11.732 | 13 |
| 14 | 1.2318 | 0.8118 | 0.064 72 | 0.079 72 | 15.450 | 12.543 | 14 |
| 15 | 1.2502 | 0.7999 | 0.059 94 | 0.074 94 | 16.682 | 13.343 | 15 |
| 16 | 1.2690 | 0.7880 | 0.055 77 | 0.070 77 | 17.932 | 14.131 | 16 |
| 17 | 1.2880 | 0.7764 | 0.052 08 | 0.067 08 | 19.201 | 14.908 | 17 |
| 18 | 1.3073 | 0.7649 | 0.048 81 | 0.063 81 | 20.489 | 15.673 | 18 |
| 19 | 1.3270 | 0.7536 | 0.045 88 | 0.060 88 | 21.797 | 16.426 | 19 |
| 20 | 1.3469 | 0.7425 | 0.043 25 | 0.058 25 | 23.124 | 17.169 | 20 |
| 21 | 1.3671 | 0.7315 | 0.040 87 | 0.055 87 | 24.471 | 17.900 | 21 |
| 22 | 1.3876 | 0.7207 | 0.038 70 | 0.053 70 | 25.838 | 18.621 | 22 |
| 23 | 1.4084 | 0.7100 | 0.036 73 | 0.051 73 | 27.225 | 19.331 | 23 |
| 24 | 1.4300 | 0.6995 | 0.034 92 | 0.049 92 | 28.634 | 20.030 | 24 |
| 25 | 1.4509 | 0.6892 | 0.033 26 | 0.048 26 | 30.063 | 20.720 | 25 |
| 26 | 1.4727 | 0.6790 | 0.031 73 | 0.046 73 | 31.514 | 21.399 | 26 |
| 27 | 1.4948 | 0.6690 | 0.030 32 | 0.045 32 | 32.987 | 22.068 | 27 |
| 28 | 1.5172 | 0.6591 | 0.029 00 | 0.044 00 | 34.481 | 22.727 | 28 |
| 29 | 1.5400 | 0.6494 | 0.027 78 | 0.042 78 | 35.999 | 23.376 | 29 |
| 30 | 1.5631 | 0.6398 | 0.026 64 | 0.041 64 | 37.539 | 24.016 | 30 |
| 31 | 1.5865 | 0.6303 | 0.025 57 | 0.040 57 | 39.102 | 24.646 | 31 |
| 32 | 1.6103 | 0.6210 | 0.024 58 | 0.039 58 | 40.688 | 25.267 | 32 |
| 33 | 1.6345 | 0.6118 | 0.023 64 | 0.038 64 | 42.299 | 25.879 | 33 |
| 34 | 1.6590 | 0.6028 | 0.022 76 | 0.037 76 | 43.933 | 26.482 | 34 |
| 35 | 1.6339 | 0.5939 | 0.021 93 | 0.036 93 | 45.592 | 27.076 | 35 |
| 40 | 1.8140 | 0.5513 | 0.018 43 | 0.033 43 | 54.268 | 29.916 | 40 |
| 45 | 1.9542 | 0.5117 | 0.015 72 | 0.030 72 | 63.614 | 32.552 | 45 |
| 50 | 2.1052 | 0.4750 | 0.013 57 | 0.028 57 | 73.683 | 35.000 | 50 |
| 55 | 2.2679 | 0.4409 | 0.011 83 | 0.026 83 | 84.530 | 37.271 | 55 |
| 60 | 2.4432 | 0.4093 | 0.010 39 | 0.025 39 | 96.215 | 39.380 | 60 |
| 65 | 2.6320 | 0.3799 | 0.009 19 | 0.024 19 | 108.803 | 41.338 | 65 |
| 70 | 2.8355 | 0.3527 | 0.008 17 | 0.023 17 | 122.364 | 43.155 | 70 |
| 75 | 3.0546 | 0.3274 | 0.007 30 | 0.022 30 | 136.973 | 44.842 | 75 |
| 80 | 3.2907 | 0.3039 | 0.006 55 | 0.021 55 | 152.711 | 46.407 | 80 |
| 85 | 3.5450 | 0.2821 | 0.005 89 | 0.020 89 | 169.665 | 47.861 | 85 |
| 90 | 3.8189 | 0.2619 | 0.005 32 | 0.020 32 | 187.930 | 49.210 | 90 |
| 95 | 4.1141 | 0.2431 | 0.004 82 | 0.019 82 | 207.606 | 50.462 | 95 |
| 100 | 4.4320 | 0.2256 | 0.004 37 | 0.019 37 | 228.803 | 51.625 | 100 |

## TABLE E–4

### 1¾% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0175 | 0.9828 | 1.000 00 | 1.017 50 | 1.000 | 0.983 | 1 |
| 2 | 1.0353 | 0.9659 | 0.495 66 | 0.513 16 | 2.018 | 1.949 | 2 |
| 3 | 1.0534 | 0.9493 | 0.327 57 | 0.345 07 | 3.053 | 2.898 | 3 |
| 4 | 1.0719 | 0.9330 | 0.243 53 | 0.261 03 | 4.106 | 3.831 | 4 |
| 5 | 1.0906 | 0.9169 | 0.193 12 | 0.210 62 | 5.178 | 4.748 | 5 |
| 6 | 1.1097 | 0.9011 | 0.159 52 | 0.177 02 | 6.269 | 5.649 | 6 |
| 7 | 1.1291 | 0.8856 | 0.135 53 | 0.153 03 | 7.378 | 6.535 | 7 |
| 8 | 1.1489 | 0.8704 | 0.117 54 | 0.135 04 | 8.508 | 7.405 | 8 |
| 9 | 1.1690 | 0.8554 | 0.103 56 | 0.121 06 | 9.656 | 8.260 | 9 |
| 10 | 1.1894 | 0.8407 | 0.092 38 | 0.109 88 | 10.825 | 9.101 | 10 |
| 11 | 1.2103 | 0.8263 | 0.083 23 | 0.100 73 | 12.015 | 9.927 | 11 |
| 12 | 1.2314 | 0.8121 | 0.075 61 | 0.093 11 | 13.225 | 10.740 | 12 |
| 13 | 1.2530 | 0.7981 | 0.069 17 | 0.086 67 | 14.457 | 11.538 | 13 |
| 14 | 1.2749 | 0.7844 | 0.063 66 | 0.081 16 | 15.710 | 12.322 | 14 |
| 15 | 1.2972 | 0.7709 | 0.058 88 | 0.076 38 | 16.984 | 13.093 | 15 |
| 16 | 1.3199 | 0.7576 | 0.054 70 | 0.072 20 | 18.282 | 13.850 | 16 |
| 17 | 1.3430 | 0.7446 | 0.051 02 | 0.068 52 | 19.602 | 14.595 | 17 |
| 18 | 1.3665 | 0.7318 | 0.047 74 | 0.065 24 | 20.945 | 15.327 | 18 |
| 19 | 1.3904 | 0.7192 | 0.044 82 | 0.062 32 | 22.311 | 16.046 | 19 |
| 20 | 1.4148 | 0.7068 | 0.042 19 | 0.059 69 | 23.702 | 16.753 | 20 |
| 21 | 1.4395 | 0.6947 | 0.039 81 | 0.057 31 | 25.116 | 17.448 | 21 |
| 22 | 1.4647 | 0.6827 | 0.037 66 | 0.055 16 | 26.556 | 18.130 | 22 |
| 23 | 1.4904 | 0.6710 | 0.035 69 | 0.053 19 | 28.021 | 18.801 | 23 |
| 24 | 1.5164 | 0.6594 | 0.033 89 | 0.051 39 | 29.511 | 19.461 | 24 |
| 25 | 1.5430 | 0.6481 | 0.032 23 | 0.049 73 | 31.027 | 20.109 | 25 |
| 26 | 1.5700 | 0.6369 | 0.030 70 | 0.048 20 | 32.570 | 20.746 | 26 |
| 27 | 1.5975 | 0.6260 | 0.029 29 | 0.046 79 | 34.140 | 21.372 | 27 |
| 28 | 1.6254 | 0.6152 | 0.027 98 | 0.045 48 | 35.738 | 21.987 | 28 |
| 29 | 1.6539 | 0.6046 | 0.026 76 | 0.044 26 | 37.363 | 22.592 | 29 |
| 30 | 1.6828 | 0.5942 | 0.025 63 | 0.043 13 | 39.017 | 23.186 | 30 |
| 31 | 1.7122 | 0.5840 | 0.024 57 | 0.042 07 | 40.700 | 23.770 | 31 |
| 32 | 1.7422 | 0.5740 | 0.023 58 | 0.041 08 | 42.412 | 24.344 | 32 |
| 33 | 1.7727 | 0.5641 | 0.022 65 | 0.040 15 | 44.154 | 24.908 | 33 |
| 34 | 1.8037 | 0.5544 | 0.021 77 | 0.039 27 | 45.927 | 25.462 | 34 |
| 35 | 1.8353 | 0.5449 | 0.020 95 | 0.038 45 | 47.731 | 26.007 | 35 |
| 40 | 2.0016 | 0.4996 | 0.017 47 | 0.034 97 | 57.234 | 28.594 | 40 |
| 45 | 2.1830 | 0.4581 | 0.014 79 | 0.032 29 | 67.599 | 30.966 | 45 |
| 50 | 2.3808 | 0.4200 | 0.012 67 | 0.030 17 | 78.902 | 33.141 | 50 |
| 55 | 2.5965 | 0.3851 | 0.010 96 | 0.028 46 | 91.230 | 35.135 | 55 |
| 60 | 2.8318 | 0.3531 | 0.009 55 | 0.027 05 | 104.675 | 36.964 | 60 |
| 65 | 3.0884 | 0.3238 | 0.008 38 | 0.025 88 | 119.339 | 38.641 | 65 |
| 70 | 3.3683 | 0.2969 | 0.007 39 | 0.024 89 | 135.331 | 40.178 | 70 |
| 75 | 3.6735 | 0.2722 | 0.006 55 | 0.024 05 | 152.772 | 41.587 | 75 |
| 80 | 4.0064 | 0.2496 | 0.005 82 | 0.023 32 | 171.794 | 42.880 | 80 |
| 85 | 4.3694 | 0.2289 | 0.005 19 | 0.022 69 | 192.539 | 44.065 | 85 |
| 90 | 4.7654 | 0.2098 | 0.004 65 | 0.022 15 | 215.165 | 45.152 | 90 |
| 95 | 5.1972 | 0.1924 | 0.004 17 | 0.021 67 | 239.840 | 46.148 | 95 |
| 100 | 5.6682 | 0.1764 | 0.003 75 | 0.021 25 | 266.752 | 47.061 | 100 |



## TABLE E–5

### 2% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0200 | 0.9804 | 1.000 00 | 1.020 00 | 1.000 | 0.980 | 1 |
| 2 | 1.0404 | 0.9612 | 0.495 05 | 0.515 05 | 2.020 | 1.942 | 2 |
| 3 | 1.0612 | 0.9423 | 0.326 75 | 0.346 75 | 3.060 | 2.884 | 3 |
| 4 | 1.0824 | 0.9238 | 0.242 62 | 0.262 62 | 4.122 | 3.808 | 4 |
| 5 | 1.1041 | 0.9057 | 0.192 16 | 0.212 16 | 5.204 | 4.713 | 5 |
| 6 | 1.1262 | 0.8880 | 0.158 53 | 0.178 53 | 6.308 | 5.601 | 6 |
| 7 | 1.1487 | 0.8706 | 0.134 51 | 0.154 51 | 7.434 | 6.472 | 7 |
| 8 | 1.1717 | 0.8535 | 0.116 51 | 0.136 51 | 8.583 | 7.325 | 8 |
| 9 | 1.1951 | 0.8368 | 0.102 52 | 0.122 52 | 9.755 | 8.162 | 9 |
| 10 | 1.2190 | 0.8203 | 0.091 33 | 0.111 33 | 10.950 | 8.983 | 10 |
| 11 | 1.2434 | 0.8043 | 0.082 18 | 0.102 18 | 12.169 | 9.787 | 11 |
| 12 | 1.2682 | 0.7885 | 0.074 56 | 0.094 56 | 13.412 | 10.575 | 12 |
| 13 | 1.2936 | 0.7730 | 0.068 12 | 0.088 12 | 14.680 | 11.348 | 13 |
| 14 | 1.3195 | 0.7579 | 0.062 60 | 0.082 60 | 15.974 | 12.106 | 14 |
| 15 | 1.3459 | 0.7430 | 0.057 83 | 0.077 83 | 17.293 | 12.849 | 15 |
| 16 | 1.3728 | 0.7284 | 0.053 65 | 0.073 65 | 18.639 | 13.578 | 16 |
| 17 | 1.4002 | 0.7142 | 0.049 97 | 0.069 97 | 20.012 | 14.292 | 17 |
| 18 | 1.4282 | 0.7002 | 0.046 70 | 0.066 70 | 21.412 | 14.992 | 18 |
| 19 | 1.4568 | 0.6864 | 0.043 78 | 0.063 78 | 22.841 | 15.678 | 19 |
| 20 | 1.4859 | 0.6730 | 0.041 16 | 0.061 16 | 24.297 | 16.351 | 20 |
| 21 | 1.5157 | 0.6598 | 0.038 78 | 0.058 78 | 25.783 | 17.011 | 21 |
| 22 | 1.5460 | 0.6468 | 0.036 63 | 0.056 63 | 27.299 | 17.658 | 22 |
| 23 | 1.5769 | 0.6342 | 0.034 67 | 0.054 67 | 28.845 | 18.292 | 23 |
| 24 | 1.6084 | 0.6217 | 0.032 87 | 0.052 87 | 30.422 | 18.914 | 24 |
| 25 | 1.6406 | 0.6095 | 0.031 22 | 0.051 22 | 32.030 | 19.523 | 25 |
| 26 | 1.6734 | 0.5976 | 0.029 70 | 0.049 70 | 33.671 | 20.121 | 26 |
| 27 | 1.7069 | 0.5859 | 0.028 29 | 0.048 29 | 35.344 | 20.707 | 27 |
| 28 | 1.7410 | 0.5744 | 0.026 99 | 0.046 99 | 37.051 | 21.281 | 28 |
| 29 | 1.7758 | 0.5631 | 0.025 78 | 0.045 78 | 38.792 | 21.844 | 29 |
| 30 | 1.8114 | 0.5521 | 0.024 65 | 0.044 65 | 40.568 | 22.396 | 30 |
| 31 | 1.8476 | 0.5412 | 0.023 60 | 0.043 60 | 42.379 | 22.938 | 31 |
| 32 | 1.8845 | 0.5306 | 0.022 61 | 0.042 61 | 44.227 | 23.468 | 32 |
| 33 | 1.9222 | 0.5202 | 0.021 69 | 0.041 69 | 46.112 | 23.989 | 33 |
| 34 | 1.9607 | 0.5100 | 0.020 82 | 0.040 82 | 48.034 | 24.499 | 34 |
| 35 | 1.9999 | 0.5000 | 0.020 00 | 0.040 00 | 49.994 | 24.999 | 35 |
| 40 | 2.2080 | 0.4529 | 0.016 56 | 0.036 56 | 60.402 | 27.355 | 40 |
| 45 | 2.4379 | 0.4102 | 0.013 91 | 0.033 91 | 71.893 | 29.490 | 45 |
| 50 | 2.6916 | 0.3715 | 0.011 82 | 0.031 82 | 84.579 | 31.424 | 50 |
| 55 | 2.9717 | 0.3365 | 0.010 14 | 0.030 14 | 98.587 | 33.175 | 55 |
| 60 | 3.2810 | 0.3048 | 0.008 77 | 0.028 77 | 114.052 | 34.761 | 60 |
| 65 | 3.6225 | 0.2761 | 0.007 63 | 0.027 63 | 131.126 | 36.197 | 65 |
| 70 | 3.9996 | 0.2500 | 0.006 67 | 0.026 67 | 149.978 | 37.499 | 70 |
| 75 | 4.4158 | 0.2265 | 0.005 86 | 0.025 86 | 170.792 | 38.677 | 75 |
| 80 | 4.8754 | 0.2051 | 0.005 16 | 0.025 16 | 193.772 | 39.745 | 80 |
| 85 | 5.3829 | 0.1858 | 0.004 56 | 0.024 56 | 219.144 | 40.711 | 85 |
| 90 | 5.9431 | 0.1683 | 0.004 05 | 0.024 05 | 247.157 | 41.587 | 90 |
| 95 | 6.5617 | 0.1524 | 0.003 60 | 0.023 60 | 278.085 | 42.380 | 95 |
| 100 | 7.2446 | 0.1380 | 0.003 20 | 0.023 20 | 312.232 | 43.098 | 100 |

## TABLE E–6

### 2½% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0250 | 0.9756 | 1.000 00 | 1.025 00 | 1.000 | 0.976 | 1 |
| 2 | 1.0506 | 0.9518 | 0.493 83 | 0.518 83 | 2.025 | 1.927 | 2 |
| 3 | 1.0769 | 0.9286 | 0.325 14 | 0.350 14 | 3.076 | 2.856 | 3 |
| 4 | 1.1038 | 0.9060 | 0.240 82 | 0.265 82 | 4.153 | 3.762 | 4 |
| 5 | 1.1314 | 0.8839 | 0.190 25 | 0.215 25 | 5.256 | 4.646 | 5 |
| 6 | 1.1597 | 0.8623 | 0.156 55 | 0.181 55 | 6.388 | 5.508 | 6 |
| 7 | 1.1887 | 0.8413 | 0.132 50 | 0.157 50 | 7.547 | 6.349 | 7 |
| 8 | 1.2184 | 0.8207 | 0.114 47 | 0.139 47 | 8.736 | 7.170 | 8 |
| 9 | 1.2489 | 0.8007 | 0.100 46 | 0.125 46 | 9.955 | 7.971 | 9 |
| 10 | 1.2801 | 0.7812 | 0.089 26 | 0.114 26 | 11.203 | 8.752 | 10 |
| 11 | 1.3121 | 0.7621 | 0.080 11 | 0.105 11 | 12.483 | 9.514 | 11 |
| 12 | 1.3449 | 0.7436 | 0.072 49 | 0.097 49 | 13.796 | 10.258 | 12 |
| 13 | 1.3785 | 0.7254 | 0.066 05 | 0.091 05 | 15.140 | 10.983 | 13 |
| 14 | 1.4130 | 0.7077 | 0.060 54 | 0.085 54 | 16.519 | 11.691 | 14 |
| 15 | 1.4483 | 0.6905 | 0.055 77 | 0.080 77 | 17.932 | 12.381 | 15 |
| 16 | 1.4845 | 0.6736 | 0.051 60 | 0.076 60 | 19.380 | 13.055 | 16 |
| 17 | 1.5216 | 0.6572 | 0.047 93 | 0.072 93 | 20.865 | 13.712 | 17 |
| 18 | 1.5597 | 0.6412 | 0.044 67 | 0.069 67 | 22.386 | 14.353 | 18 |
| 19 | 1.5987 | 0.6255 | 0.041 76 | 0.066 76 | 23.946 | 14.979 | 19 |
| 20 | 1.6386 | 0.6103 | 0.039 15 | 0.064 15 | 25.545 | 15.589 | 20 |
| 21 | 1.6796 | 0.5954 | 0.036 79 | 0.061 79 | 27.183 | 16.185 | 21 |
| 22 | 1.7216 | 0.5809 | 0.034 65 | 0.059 65 | 28.863 | 16.765 | 22 |
| 23 | 1.7646 | 0.5667 | 0.032 70 | 0.057 70 | 30.584 | 17.332 | 23 |
| 24 | 1.8087 | 0.5529 | 0.030 91 | 0.055 91 | 32.349 | 17.885 | 24 |
| 25 | 1.8539 | 0.5394 | 0.029 28 | 0.054 28 | 34.158 | 18.424 | 25 |
| 26 | 1.9003 | 0.5262 | 0.027 77 | 0.052 77 | 36.012 | 18.951 | 26 |
| 27 | 1.9478 | 0.5134 | 0.026 38 | 0.051 38 | 37.912 | 19.464 | 27 |
| 28 | 1.9965 | 0.5009 | 0.025 09 | 0.050 09 | 39.860 | 19.965 | 28 |
| 29 | 2.0464 | 0.4887 | 0.023 89 | 0.048 89 | 41.856 | 20.454 | 29 |
| 30 | 2.0976 | 0.4767 | 0.022 78 | 0.047 78 | 43.903 | 20.930 | 30 |
| 31 | 2.1500 | 0.4651 | 0.021 74 | 0.046 74 | 46.000 | 21.395 | 31 |
| 32 | 2.2038 | 0.4538 | 0.020 77 | 0.045 77 | 48.150 | 21.849 | 32 |
| 33 | 2.2589 | 0.4427 | 0.019 86 | 0.044 86 | 50.354 | 22.292 | 33 |
| 34 | 2.3153 | 0.4319 | 0.019 01 | 0.044 01 | 52.613 | 22.724 | 34 |
| 35 | 2.3732 | 0.4214 | 0.018 21 | 0.043 21 | 54.928 | 23.145 | 35 |
| 40 | 2.6851 | 0.3724 | 0.014 84 | 0.039 84 | 67.403 | 25.103 | 40 |
| 45 | 3.0379 | 0.3292 | 0.012 27 | 0.037 27 | 81.516 | 26.833 | 45 |
| 50 | 3.4371 | 0.2909 | 0.010 26 | 0.035 26 | 97.484 | 28.362 | 50 |
| 55 | 3.8888 | 0.2572 | 0.008 65 | 0.033 65 | 115.551 | 29.714 | 55 |
| 60 | 4.3998 | 0.2273 | 0.007 35 | 0.032 35 | 135.992 | 30.909 | 60 |
| 65 | 4.9780 | 0.2009 | 0.006 28 | 0.031 28 | 159.118 | 31.965 | 65 |
| 70 | 5.6321 | 0.1776 | 0.005 40 | 0.030 40 | 185.284 | 32.898 | 70 |
| 75 | 6.3722 | 0.1569 | 0.004 65 | 0.029 65 | 214.888 | 33.723 | 75 |
| 80 | 7.2100 | 0.1387 | 0.004 03 | 0.029 03 | 248.383 | 34.452 | 80 |
| 85 | 8.1570 | 0.1226 | 0.003 49 | 0.028 49 | 286.279 | 35.096 | 85 |
| 90 | 9.2289 | 0.1084 | 0.003 04 | 0.028 04 | 329.154 | 35.666 | 90 |
| 95 | 10.4416 | 0.0958 | 0.002 65 | 0.027 65 | 377.664 | 36.169 | 95 |
| 100 | 11.8137 | 0.0846 | 0.002 31 | 0.027 31 | 432.549 | 36.614 | 100 |



## TABLE E–7

### 3% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0300 | 0.9709 | 1.000 00 | 1.030 00 | 1.000 | 0.971 | 1 |
| 2 | 1.0609 | 0.9426 | 0.492 61 | 0.522 61 | 2.030 | 1.913 | 2 |
| 3 | 1.0927 | 0.9151 | 0.323 53 | 0.353 53 | 3.091 | 2.829 | 3 |
| 4 | 1.1255 | 0.8885 | 0.239 03 | 0.269 03 | 4.184 | 3.717 | 4 |
| 5 | 1.1593 | 0.8626 | 0.188 35 | 0.218 35 | 5.309 | 4.580 | 5 |
| 6 | 1.1941 | 0.8375 | 0.154 60 | 0.184 60 | 6.468 | 5.417 | 6 |
| 7 | 1.2299 | 0.8131 | 0.130 51 | 0.160 51 | 7.662 | 6.230 | 7 |
| 8 | 1.2668 | 0.7894 | 0.112 46 | 0.142 46 | 8.892 | 7.020 | 8 |
| 9 | 1.3048 | 0.7664 | 0.098 43 | 0.128 43 | 10.159 | 7.786 | 9 |
| 10 | 1.3439 | 0.7441 | 0.087 23 | 0.117 23 | 11.464 | 8.530 | 10 |
| 11 | 1.3842 | 0.7224 | 0.078 08 | 0.108 08 | 12.808 | 9.253 | 11 |
| 12 | 1.4258 | 0.7014 | 0.070 46 | 0.100 46 | 14.192 | 9.954 | 12 |
| 13 | 1.4685 | 0.6810 | 0.064 03 | 0.094 03 | 15.618 | 10.635 | 13 |
| 14 | 1.5126 | 0.6611 | 0.058 53 | 0.088 53 | 17.086 | 11.296 | 14 |
| 15 | 1.5580 | 0.6419 | 0.053 77 | 0.083 77 | 18.599 | 11.938 | 15 |
| 16 | 1.6047 | 0.6232 | 0.049 61 | 0.079 61 | 20.157 | 12.561 | 16 |
| 17 | 1.6528 | 0.6050 | 0.045 95 | 0.075 95 | 21.762 | 13.166 | 17 |
| 18 | 1.7024 | 0.5874 | 0.042 71 | 0.072 71 | 23.414 | 13.754 | 18 |
| 19 | 1.7535 | 0.5703 | 0.039 81 | 0.069 81 | 25.117 | 14.324 | 19 |
| 20 | 1.8061 | 0.5537 | 0.037 22 | 0.067 22 | 26.870 | 14.877 | 20 |
| 21 | 1.8603 | 0.5375 | 0.034 87 | 0.064 87 | 28.676 | 15.415 | 21 |
| 22 | 1.9161 | 0.5219 | 0.032 75 | 0.062 75 | 30.537 | 15.937 | 22 |
| 23 | 1.9736 | 0.5067 | 0.030 81 | 0.060 81 | 32.453 | 16.444 | 23 |
| 24 | 2.0328 | 0.4919 | 0.029 05 | 0.059 05 | 34.426 | 16.936 | 24 |
| 25 | 2.0938 | 0.4776 | 0.027 43 | 0.057 43 | 36.459 | 17.413 | 25 |
| 26 | 2.1566 | 0.4637 | 0.025 94 | 0.055 94 | 38.553 | 17.877 | 26 |
| 27 | 2.2213 | 0.4502 | 0.024 56 | 0.054 56 | 40.710 | 18.327 | 27 |
| 28 | 2.2879 | 0.4371 | 0.023 29 | 0.053 29 | 42.931 | 18.764 | 28 |
| 29 | 2.3566 | 0.4243 | 0.022 11 | 0.052 11 | 45.219 | 19.188 | 29 |
| 30 | 2.4273 | 0.4120 | 0.021 02 | 0.051 02 | 47.575 | 19.600 | 30 |
| 31 | 2.5001 | 0.4000 | 0.020 00 | 0.050 00 | 50.003 | 20.000 | 31 |
| 32 | 2.5751 | 0.3883 | 0.019 05 | 0.049 05 | 52.503 | 20.389 | 32 |
| 33 | 2.6523 | 0.3770 | 0.018 16 | 0.048 16 | 55.078 | 20.766 | 33 |
| 34 | 2.7319 | 0.3660 | 0.017 32 | 0.047 32 | 57.730 | 21.132 | 34 |
| 35 | 2.8139 | 0.3554 | 0.016 54 | 0.046 54 | 60.462 | 21.487 | 35 |
| 40 | 3.2620 | 0.3066 | 0.013 26 | 0.043 26 | 75.401 | 23.115 | 40 |
| 45 | 3.7816 | 0.2644 | 0.010 79 | 0.040 79 | 92.720 | 24.519 | 45 |
| 50 | 4.3839 | 0.2281 | 0.008 87 | 0.038 87 | 112.797 | 25.730 | 50 |
| 55 | 5.0821 | 0.1968 | 0.007 35 | 0.037 35 | 136.072 | 26.774 | 55 |
| 60 | 5.8916 | 0.1697 | 0.006 13 | 0.036 13 | 163.053 | 27.676 | 60 |
| 65 | 6.8300 | 0.1464 | 0.005 15 | 0.035 15 | 194.333 | 28.453 | 65 |
| 70 | 7.9178 | 0.1263 | 0.004 34 | 0.034 34 | 230.594 | 29.123 | 70 |
| 75 | 9.1789 | 0.1089 | 0.003 67 | 0.033 67 | 272.631 | 29.702 | 75 |
| 80 | 10.6409 | 0.0940 | 0.003 11 | 0.033 11 | 321.363 | 30.201 | 80 |
| 85 | 12.3357 | 0.0811 | 0.002 65 | 0.032 65 | 377.857 | 30.631 | 85 |
| 90 | 14.3005 | 0.0699 | 0.002 26 | 0.032 26 | 443.349 | 31.002 | 90 |
| 95 | 16.5782 | 0.0603 | 0.001 93 | 0.031 93 | 519.272 | 31.323 | 95 |
| 100 | 19.2186 | 0.0520 | 0.001 65 | 0.031 65 | 607.288 | [illegible].599 | 100 |

## TABLE E-8

### 3½% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0350 | 0.9662 | 1.000 00 | 1.035 00 | 1.000 | 0.966 | 1 |
| 2 | 1.0712 | 0.9335 | 0.491 40 | 0.526 40 | 2.035 | 1.900 | 2 |
| 3 | 1.1087 | 0.9019 | 0.321 93 | 0.356 93 | 3.106 | 2.802 | 3 |
| 4 | 1.1475 | 0.8714 | 0.237 25 | 0.272 25 | 4.215 | 3.673 | 4 |
| 5 | 1.1877 | 0.8420 | 0.186 48 | 0.221 48 | 5.362 | 4.515 | 5 |
| 6 | 1.2293 | 0.8135 | 0.152 67 | 0.187 67 | 6.550 | 5.329 | 6 |
| 7 | 1.2723 | 0.7860 | 0.128 54 | 0.163 54 | 7.779 | 6.115 | 7 |
| 8 | 1.3168 | 0.7594 | 0.110 48 | 0.145 48 | 9.052 | 6.874 | 8 |
| 9 | 1.3629 | 0.7337 | 0.096 45 | 0.131 45 | 10.368 | 7.608 | 9 |
| 10 | 1.4106 | 0.7089 | 0.085 24 | 0.120 24 | 11.731 | 8.317 | 10 |
| 11 | 1.4600 | 0.6849 | 0.076 09 | 0.111 09 | 13.142 | 9.002 | 11 |
| 12 | 1.5111 | 0.6618 | 0.068 48 | 0.103 48 | 14.602 | 9.663 | 12 |
| 13 | 1.5640 | 0.6394 | 0.062 06 | 0.097 06 | 16.113 | 10.303 | 13 |
| 14 | 1.6187 | 0.6178 | 0.056 57 | 0.091 57 | 17.677 | 10.921 | 14 |
| 15 | 1.6753 | 0.5969 | 0.051 83 | 0.086 83 | 19.296 | 11.517 | 15 |
| 16 | 1.7340 | 0.5767 | 0.047 68 | 0.082 68 | 20.971 | 12.094 | 16 |
| 17 | 1.7947 | 0.5572 | 0.044 04 | 0.079 04 | 22.705 | 12.651 | 17 |
| 18 | 1.8575 | 0.5384 | 0.040 82 | 0.075 82 | 24.500 | 13.190 | 18 |
| 19 | 1.9225 | 0.5202 | 0.037 94 | 0.072 94 | 26.357 | 13.710 | 19 |
| 20 | 1.9898 | 0.5026 | 0.035 36 | 0.070 36 | 28.280 | 14.212 | 20 |
| 21 | 2.0594 | 0.4856 | 0.033 04 | 0.068 04 | 30.269 | 14.698 | 21 |
| 22 | 2.1315 | 0.4692 | 0.030 93 | 0.065 93 | 32.329 | 15.167 | 22 |
| 23 | 2.2061 | 0.4533 | 0.029 02 | 0.064 02 | 34.460 | 15.620 | 23 |
| 24 | 2.2833 | 0.4380 | 0.027 27 | 0.062 27 | 36.667 | 16.058 | 24 |
| 25 | 2.3632 | 0.4231 | 0.025 67 | 0.060 67 | 38.950 | 16.482 | 25 |
| 26 | 2.4460 | 0.4088 | 0.024 21 | 0.059 21 | 41.313 | 16.890 | 26 |
| 27 | 2.5316 | 0.3950 | 0.022 85 | 0.057 85 | 43.759 | 17.285 | 27 |
| 28 | 2.6202 | 0.3817 | 0.021 60 | 0.056 60 | 46.291 | 17.667 | 28 |
| 29 | 2.7119 | 0.3687 | 0.020 45 | 0.055 45 | 48.911 | 18.036 | 29 |
| 30 | 2.8068 | 0.3563 | 0.019 37 | 0.054 37 | 51.623 | 18.392 | 30 |
| 31 | 2.9050 | 0.3442 | 0.018 37 | 0.053 37 | 54.429 | 18.736 | 31 |
| 32 | 3.0067 | 0.3326 | 0.017 44 | 0.052 44 | 57.335 | 19.069 | 32 |
| 33 | 3.1119 | 0.3213 | 0.016 57 | 0.051 57 | 60.341 | 19.390 | 33 |
| 34 | 3.2209 | 0.3105 | 0.015 76 | 0.050 76 | 63.453 | 19.701 | 34 |
| 35 | 3.3336 | 0.3000 | 0.015 00 | 0.050 00 | 66.674 | 20.001 | 35 |
| 40 | 3.9593 | 0.2526 | 0.011 83 | 0.046 83 | 84.550 | 21.355 | 40 |
| 45 | 4.7024 | 0.2127 | 0.009 45 | 0.044 45 | 105.782 | 22.495 | 45 |
| 50 | 5.5849 | 0.1791 | 0.007 63 | 0.042 63 | 130.998 | 23.456 | 50 |
| 55 | 6.6331 | 0.1508 | 0.006 21 | 0.041 21 | 160.947 | 24.264 | 55 |
| 60 | 7.8781 | 0.1269 | 0.005 09 | 0.040 09 | 196.517 | 24.945 | 60 |
| 65 | 9.3567 | 0.1069 | 0.004 19 | 0.039 19 | 238.763 | 25.518 | 65 |
| 70 | 11.1128 | 0.0900 | 0.003 46 | 0.038 46 | 288.938 | 26.000 | 70 |
| 75 | 13.1986 | 0.0758 | 0.002 87 | 0.037 87 | 348.530 | 26.407 | 75 |
| 80 | 15.6757 | 0.0638 | 0.002 38 | 0.037 38 | 419.307 | 26.749 | 80 |
| 85 | 18.6179 | 0.0537 | 0.001 99 | 0.036 99 | 503.367 | 27.037 | 85 |
| 90 | 22.1122 | 0.0452 | 0.001 66 | 0.036 66 | 603.205 | 27.279 | 90 |
| 95 | 26.2623 | 0.0381 | 0.001 39 | 0.036 39 | 721.781 | 27.484 | 95 |
| 100 | 31.1914 | 0.0321 | 0.001 16 | 0.036 16 | 862.612 | 27.655 | 100 |



## TABLE E-9

### 4% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0400 | 0.9615 | 1.000 00 | 1.040 00 | 1.000 | 0.962 | 1 |
| 2 | 1.0816 | 0.9246 | 0.490 20 | 0.530 20 | 2.040 | 1.886 | 2 |
| 3 | 1.1249 | 0.8890 | 0.320 35 | 0.360 35 | 3.122 | 2.775 | 3 |
| 4 | 1.1699 | 0.8548 | 0.235 49 | 0.275 49 | 4.246 | 3.630 | 4 |
| 5 | 1.2167 | 0.8219 | 0.184 63 | 0.224 63 | 5.416 | 4.452 | 5 |
| 6 | 1.2653 | 0.7903 | 0.150 76 | 0.190 76 | 6.633 | 5.242 | 6 |
| 7 | 1.3159 | 0.7599 | 0.126 61 | 0.166 61 | 7.898 | 6.002 | 7 |
| 8 | 1.3686 | 0.7307 | 0.108 53 | 0.148 53 | 9.214 | 6.733 | 8 |
| 9 | 1.4233 | 0.7026 | 0.094 49 | 0.134 49 | 10.583 | 7.435 | 9 |
| 10 | 1.4802 | 0.6756 | 0.083 29 | 0.123 29 | 12.006 | 8.111 | 10 |
| 11 | 1.5395 | 0.6496 | 0.074 15 | 0.114 15 | 13.486 | 8.760 | 11 |
| 12 | 1.6010 | 0.6246 | 0.066 55 | 0.106 55 | 15.026 | 9.385 | 12 |
| 13 | 1.6651 | 0.6006 | 0.060 14 | 0.100 14 | 16.627 | 9.986 | 13 |
| 14 | 1.7317 | 0.5775 | 0.054 67 | 0.094 67 | 18.292 | 10.563 | 14 |
| 15 | 1.8009 | 0.5553 | 0.049 94 | 0.089 94 | 20.024 | 11.118 | 15 |
| 16 | 1.8730 | 0.5339 | 0.045 82 | 0.085 82 | 21.825 | 11.652 | 16 |
| 17 | 1.9479 | 0.5134 | 0.042 20 | 0.082 20 | 23.698 | 12.166 | 17 |
| 18 | 2.0258 | 0.4936 | 0.038 99 | 0.078 99 | 25.645 | 12.659 | 18 |
| 19 | 2.1068 | 0.4746 | 0.036 14 | 0.076 14 | 27.671 | 13.134 | 19 |
| 20 | 2.1911 | 0.4564 | 0.033 58 | 0.073 58 | 29.778 | 13.590 | 20 |
| 21 | 2.2788 | 0.4388 | 0.031 28 | 0.071 28 | 31.969 | 14.029 | 21 |
| 22 | 2.3699 | 0.4220 | 0.029 20 | 0.069 20 | 34.248 | 14.451 | 22 |
| 23 | 2.4647 | 0.4057 | 0.027 31 | 0.067 31 | 36.618 | 14.857 | 23 |
| 24 | 2.5633 | 0.3901 | 0.025 59 | 0.065 59 | 39.083 | 15.247 | 24 |
| 25 | 2.6658 | 0.3751 | 0.024 01 | 0.064 01 | 41.646 | 15.622 | 25 |
| 26 | 2.7725 | 0.3607 | 0.022 57 | 0.062 57 | 44.312 | 15.983 | 26 |
| 27 | 2.8834 | 0.3468 | 0.021 24 | 0.061 24 | 47.084 | 16.330 | 27 |
| 28 | 2.9987 | 0.3335 | 0.020 01 | 0.060 01 | 49.968 | 16.663 | 28 |
| 29 | 3.1187 | 0.3207 | 0.018 88 | 0.058 88 | 52.966 | 16.984 | 29 |
| 30 | 3.2434 | 0.3083 | 0.017 83 | 0.057 83 | 56.085 | 17.292 | 30 |
| 31 | 3.3731 | 0.2965 | 0.016 86 | 0.056 86 | 59.328 | 17.588 | 31 |
| 32 | 3.5081 | 0.2851 | 0.015 95 | 0.055 95 | 62.701 | 17.874 | 32 |
| 33 | 3.6484 | 0.2741 | 0.015 10 | 0.055 10 | 66.210 | 18.148 | 33 |
| 34 | 3.7943 | 0.2636 | 0.014 31 | 0.054 31 | 69.858 | 18.411 | 34 |
| 35 | 3.9461 | 0.2534 | 0.013 58 | 0.053 58 | 73.652 | 18.665 | 35 |
| 40 | 4.8010 | 0.2083 | 0.010 52 | 0.050 52 | 95.026 | 19.793 | 40 |
| 45 | 5.8412 | 0.1712 | 0.008 26 | 0.048 26 | 121.029 | 20.720 | 45 |
| 50 | 7.1067 | 0.1407 | 0.006 55 | 0.046 55 | 152.667 | 21.482 | 50 |
| 55 | 8.6464 | 0.1157 | 0.005 23 | 0.045 23 | 191.159 | 22.109 | 55 |
| 60 | 10.5196 | 0.0951 | 0.004 20 | 0.044 20 | 237.991 | 22.623 | 60 |
| 65 | 12.7987 | 0.0781 | 0.003 39 | 0.043 39 | 294.968 | 23.047 | 65 |
| 70 | 15.5716 | 0.0642 | 0.002 75 | 0.042 75 | 364.290 | 23.395 | 70 |
| 75 | 18.9453 | 0.0528 | 0.002 23 | 0.042 23 | 448.631 | 23.680 | 75 |
| 80 | 23.0500 | 0.0434 | 0.001 81 | 0.041 81 | 551.245 | 23.915 | 80 |
| 85 | 28.0436 | 0.0357 | 0.001 48 | 0.041 48 | 676.090 | 24.109 | 85 |
| 90 | 34.1193 | 0.0293 | 0.001 21 | 0.041 21 | 827.983 | 24.267 | 90 |
| 95 | 41.5114 | 0.0241 | 0.000 99 | 0.040 99 | 1 012.785 | 24.398 | 95 |
| 100 | 50.5049 | 0.0198 | 0.000 81 | 0.040 81 | 1 237.624 | 24.505 | 100 |

## TABLE E–10

### 4½% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0450 | 0.9569 | 1.000 00 | 1.045 00 | 1.000 | 0.957 | 1 |
| 2 | 1.0920 | 0.9157 | 0.489 00 | 0.534 00 | 2.045 | 1.873 | 2 |
| 3 | 1.1412 | 0.8763 | 0.318 77 | 0.363 77 | 3.137 | 2.749 | 3 |
| 4 | 1.1925 | 0.8386 | 0.233 74 | 0.278 74 | 4.278 | 3.588 | 4 |
| 5 | 1.2462 | 0.8025 | 0.182 79 | 0.227 79 | 5.471 | 4.390 | 5 |
| 6 | 1.3023 | 0.7679 | 0.148 88 | 0.193 88 | 6.717 | 5.158 | 6 |
| 7 | 1.3609 | 0.7348 | 0.124 70 | 0.169 70 | 8.019 | 5.893 | 7 |
| 8 | 1.4221 | 0.7032 | 0.106 61 | 0.151 61 | 9.380 | 6.596 | 8 |
| 9 | 1.4861 | 0.6729 | 0.092 57 | 0.137 57 | 10.802 | 7.269 | 9 |
| 10 | 1.5530 | 0.6439 | 0.081 38 | 0.126 38 | 12.288 | 7.913 | 10 |
| 11 | 1.6229 | 0.6162 | 0.072 25 | 0.117 25 | 13.841 | 8.529 | 11 |
| 12 | 1.6959 | 0.5897 | 0.064 67 | 0.109 67 | 15.464 | 9.119 | 12 |
| 13 | 1.7722 | 0.5643 | 0.058 28 | 0.103 28 | 17.160 | 9.683 | 13 |
| 14 | 1.8519 | 0.5400 | 0.052 82 | 0.097 82 | 18.932 | 10.223 | 14 |
| 15 | 1.9353 | 0.5167 | 0.048 11 | 0.093 11 | 20.784 | 10.740 | 15 |
| 16 | 2.0224 | 0.4945 | 0.044 02 | 0.089 02 | 22.719 | 11.234 | 16 |
| 17 | 2.1134 | 0.4732 | 0.040 42 | 0.085 42 | 24.742 | 11.707 | 17 |
| 18 | 2.2085 | 0.4528 | 0.037 24 | 0.082 24 | 26.855 | 12.160 | 18 |
| 19 | 2.3079 | 0.4333 | 0.034 41 | 0.079 41 | 29.064 | 12.593 | 19 |
| 20 | 2.4117 | 0.4146 | 0.031 88 | 0.076 88 | 31.371 | 13.008 | 20 |
| 21 | 2.5202 | 0.3968 | 0.029 60 | 0.074 60 | 33.783 | 13.405 | 21 |
| 22 | 2.6337 | 0.3797 | 0.027 55 | 0.072 55 | 36.303 | 13.784 | 22 |
| 23 | 2.7522 | 0.3634 | 0.025 68 | 0.070 68 | 38.937 | 14.148 | 23 |
| 24 | 2.8760 | 0.3477 | 0.023 99 | 0.068 99 | 41.689 | 14.495 | 24 |
| 25 | 3.0054 | 0.3327 | 0.022 44 | 0.067 44 | 44.565 | 14.828 | 25 |
| 26 | 3.1407 | 0.3184 | 0.021 02 | 0.066 02 | 47.571 | 15.147 | 26 |
| 27 | 3.2820 | 0.3047 | 0.019 72 | 0.064 72 | 50.711 | 15.451 | 27 |
| 28 | 3.4397 | 0.2916 | 0.018 52 | 0.063 52 | 53.993 | 15.743 | 28 |
| 29 | 3.5840 | 0.2790 | 0.017 41 | 0.062 41 | 57.423 | 16.022 | 29 |
| 30 | 3.7453 | 0.2670 | 0.016 39 | 0.061 39 | 61.007 | 16.289 | 30 |
| 31 | 3.9139 | 0.2555 | 0.015 44 | 0.060 44 | 64.752 | 16.544 | 31 |
| 32 | 4.0900 | 0.2445 | 0.014 56 | 0.059 56 | 68.666 | 16.789 | 32 |
| 33 | 4.2740 | 0.2340 | 0.013 74 | 0.058 74 | 72.756 | 17.023 | 33 |
| 34 | 4.4664 | 0.2239 | 0.012 98 | 0.057 98 | 77.030 | 17.247 | 34 |
| 35 | 4.6673 | 0.2143 | 0.012 27 | 0.057 27 | 81.497 | 17.461 | 35 |
| 40 | 5.8164 | 0.1719 | 0.009 34 | 0.054 34 | 107.030 | 18.402 | 40 |
| 45 | 7.2482 | 0.1380 | 0.007 20 | 0.052 20 | 138.850 | 19.156 | 45 |
| 50 | 9.0326 | 0.1107 | 0.005 60 | 0.050 60 | 178.503 | 19.762 | 50 |
| 55 | 11.2563 | 0.0888 | 0.004 39 | 0.049 39 | 227.918 | 20.248 | 55 |
| 60 | 14.0274 | 0.0713 | 0.003 45 | 0.048 45 | 289.498 | 20.638 | 60 |
| 65 | 17.4807 | 0.0572 | 0.002 73 | 0.047 73 | 366.238 | 20.951 | 65 |
| 70 | 21.7841 | 0.0459 | 0.002 17 | 0.047 17 | 461.870 | 21.202 | 70 |
| 75 | 27.1470 | 0.0368 | 0.001 72 | 0.046 72 | 581.044 | 21.404 | 75 |
| 80 | 33.8301 | 0.0296 | 0.001 37 | 0.046 37 | 729.558 | 21.565 | 80 |
| 85 | 42.1585 | 0.0237 | 0.001 09 | 0.046 09 | 914.632 | 21.695 | 85 |
| 90 | 52.5371 | 0.0190 | 0.000 87 | 0.045 87 | 1 145.269 | 21.799 | 90 |
| 95 | 65.4708 | 0.0153 | 0.000 70 | 0.045 70 | 1 432.684 | 21.883 | 95 |
| 100 | [illegible]885 | 0.0123 | 0.000 56 | 0.045 56 | 1 790.856 | 21.950 | 100 |



## TABLE E–11

### 5% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0500 | 0.9524 | 1.000 00 | 1.050 00 | 1.000 | 0.952 | 1 |
| 2 | 1.1025 | 0.9070 | 0.487 80 | 0.537 80 | 2.050 | 1.859 | 2 |
| 3 | 1.1576 | 0.8638 | 0.317 21 | 0.367 21 | 3.153 | 2.723 | 3 |
| 4 | 1.2155 | 0.8227 | 0.232 01 | 0.282 01 | 4.310 | 3.546 | 4 |
| 5 | 1.2763 | 0.7835 | 0.180 97 | 0.230 97 | 5.526 | 4.329 | 5 |
| 6 | 1.3401 | 0.7462 | 0.147 02 | 0.197 02 | 6.802 | 5.076 | 6 |
| 7 | 1.4071 | 0.7107 | 0.122 82 | 0.172 82 | 8.142 | 5.786 | 7 |
| 8 | 1.4775 | 0.6768 | 0.104 72 | 0.154 72 | 9.549 | 6.463 | 8 |
| 9 | 1.5513 | 0.6446 | 0.090 69 | 0.140 69 | 11.027 | 7.108 | 9 |
| 10 | 1.6289 | 0.6139 | 0.079 50 | 0.129 50 | 12.578 | 7.722 | 10 |
| 11 | 1.7103 | 0.5847 | 0.070 39 | 0.120 39 | 14.207 | 8.306 | 11 |
| 12 | 1.7959 | 0.5568 | 0.062 83 | 0.112 83 | 15.917 | 8.863 | 12 |
| 13 | 1.8856 | 0.5303 | 0.056 46 | 0.106 46 | 17.713 | 9.394 | 13 |
| 14 | 1.9800 | 0.5051 | 0.051 02 | 0.101 02 | 19.599 | 9.899 | 14 |
| 15 | 2.0789 | 0.4810 | 0.046 34 | 0.096 34 | 21.579 | 10.380 | 15 |
| 16 | 2.1829 | 0.4581 | 0.042 27 | 0.092 27 | 23.657 | 10.838 | 16 |
| 17 | 2.2920 | 0.4363 | 0.038 70 | 0.088 70 | 25.840 | 11.274 | 17 |
| 18 | 2.4066 | 0.4155 | 0.035 55 | 0.085 55 | 28.132 | 11.690 | 18 |
| 19 | 2.5270 | 0.3957 | 0.032 75 | 0.082 75 | 30.539 | 12.085 | 19 |
| 20 | 2.6533 | 0.3769 | 0.030 24 | 0.080 24 | 33.066 | 12.462 | 20 |
| 21 | 2.7860 | 0.3589 | 0.028 00 | 0.078 00 | 35.719 | 12.821 | 21 |
| 22 | 2.9253 | 0.3418 | 0.025 97 | 0.075 97 | 38.505 | 13.163 | 22 |
| 23 | 3.0715 | 0.3256 | 0.024 14 | 0.074 14 | 41.430 | 13.489 | 23 |
| 24 | 3.2251 | 0.3101 | 0.022 47 | 0.072 47 | 44.502 | 13.799 | 24 |
| 25 | 3.3864 | 0.2953 | 0.020 95 | 0.070 95 | 47.727 | 14.094 | 25 |
| 26 | 3.5557 | 0.2812 | 0.019 56 | 0.069 56 | 51.113 | 14.375 | 26 |
| 27 | 3.7335 | 0.2678 | 0.018 29 | 0.068 29 | 54.669 | 14.643 | 27 |
| 28 | 3.9201 | 0.2551 | 0.017 12 | 0.067 12 | 58.403 | 14.898 | 28 |
| 29 | 4.1161 | 0.2429 | 0.016 05 | 0.066 05 | 62.323 | 15.141 | 29 |
| 30 | 4.3219 | 0.2314 | 0.015 05 | 0.065 05 | 66.439 | 15.372 | 30 |
| 31 | 4.5380 | 0.2204 | 0.014 13 | 0.064 13 | 70.761 | 15.593 | 31 |
| 32 | 4.7649 | 0.2099 | 0.013 28 | 0.063 28 | 75.299 | 15.803 | 32 |
| 33 | 5.0032 | 0.1999 | 0.012 49 | 0.062 49 | 80.064 | 16.003 | 33 |
| 34 | 5.2533 | 0.1904 | 0.011 76 | 0.061 76 | 85.067 | 16.193 | 34 |
| 35 | 5.5160 | 0.1813 | 0.011 07 | 0.061 07 | 90.320 | 16.374 | 35 |
| 40 | 7.0400 | 0.1420 | 0.008 28 | 0.058 28 | 120.800 | 17.159 | 40 |
| 45 | 8.9850 | 0.1113 | 0.006 26 | 0.056 26 | 159.700 | 17.774 | 45 |
| 50 | 11.4674 | 0.0872 | 0.004 78 | 0.054 78 | 209.348 | 18.256 | 50 |
| 55 | 14.6356 | 0.0683 | 0.003 67 | 0.053 67 | 272.713 | 18.633 | 55 |
| 60 | 18.6792 | 0.0535 | 0.002 83 | 0.052 83 | 353.584 | 18.929 | 60 |
| 65 | 23.8399 | 0.0419 | 0.002 19 | 0.052 19 | 456.798 | 19.161 | 65 |
| 70 | 30.4264 | 0.0329 | 0.001 70 | 0.051 70 | 588.529 | 19.343 | 70 |
| 75 | 38.8327 | 0.0258 | 0.001 32 | 0.051 32 | 756.654 | 19.485 | 75 |
| 80 | 49.5614 | 0.0202 | 0.001 03 | 0.051 03 | 971.229 | 19.596 | 80 |
| 85 | 63.2544 | 0.0158 | 0.000 80 | 0.050 80 | 1 245.087 | 19.684 | 85 |
| 90 | 80.7304 | 0.0124 | 0.000 63 | 0.050 63 | 1 594.607 | 19.752 | 90 |
| 95 | 103.0357 | 0.0097 | 0.000 49 | 0.050 49 | 2 040.694 | 19.806 | 95 |
| 100 | 131.5013 | 0.0076 | 0.000 38 | 0.050 38 | 2 610.025 | [illegible]8 | 100 |

## TABLE E–12

### 5½% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0550 | 0.9479 | 1.000 00 | 1.055 00 | 1.000 | 0.948 | 1 |
| 2 | 1.1130 | 0.8985 | 0.486 62 | 0.541 62 | 2.055 | 1.846 | 2 |
| 3 | 1.1742 | 0.8516 | 0.315 65 | 0.370 65 | 3.168 | 2.698 | 3 |
| 4 | 1.2388 | 0.8072 | 0.230 29 | 0.285 29 | 4.342 | 3.505 | 4 |
| 5 | 1.3070 | 0.7651 | 0.179 18 | 0.234 18 | 5.581 | 4.270 | 5 |
| 6 | 1.3788 | 0.7252 | 0.145 18 | 0.200 18 | 6.888 | 4.996 | 6 |
| 7 | 1.4547 | 0.6874 | 0.120 96 | 0.175 96 | 8.267 | 5.683 | 7 |
| 8 | 1.5347 | 0.6516 | 0.102 86 | 0.157 86 | 9.722 | 6.335 | 8 |
| 9 | 1.6191 | 0.6176 | 0.088 84 | 0.143 84 | 11.256 | 6.952 | 9 |
| 10 | 1.7081 | 0.5854 | 0.077 67 | 0.132 67 | 12.875 | 7.538 | 10 |
| 11 | 1.8021 | 0.5549 | 0.068 57 | 0.123 57 | 14.583 | 8.093 | 11 |
| 12 | 1.9012 | 0.5260 | 0.061 03 | 0.116 03 | 16.386 | 8.619 | 12 |
| 13 | 2.0058 | 0.4986 | 0.054 68 | 0.109 68 | 18.287 | 9.117 | 13 |
| 14 | 2.1161 | 0.4726 | 0.049 28 | 0.104 28 | 20.293 | 9.590 | 14 |
| 15 | 2.2325 | 0.4479 | 0.044 63 | 0.099 63 | 22.409 | 10.038 | 15 |
| 16 | 2.3553 | 0.4246 | 0.040 58 | 0.095 58 | 24.641 | 10.462 | 16 |
| 17 | 2.4848 | 0.4024 | 0.037 04 | 0.092 04 | 26.996 | 10.865 | 17 |
| 18 | 2.6215 | 0.3815 | 0.033 92 | 0.088 92 | 29.481 | 11.246 | 18 |
| 19 | 2.7656 | 0.3616 | 0.031 15 | 0.086 15 | 32.103 | 11.608 | 19 |
| 20 | 2.9178 | 0.3427 | 0.028 68 | 0.083 68 | 34.868 | 11.950 | 20 |
| 21 | 3.0782 | 0.3249 | 0.026 46 | 0.081 46 | 37.786 | 12.275 | 21 |
| 22 | 3.2475 | 0.3079 | 0.024 47 | 0.079 47 | 40.864 | 12.583 | 22 |
| 23 | 3.4262 | 0.2919 | 0.022 67 | 0.077 67 | 44.112 | 12.875 | 23 |
| 24 | 3.6146 | 0.2767 | 0.021 04 | 0.076 04 | 47.538 | 13.152 | 24 |
| 25 | 3.8134 | 0.2622 | 0.019 55 | 0.074 55 | 51.153 | 13.414 | 25 |
| 26 | 4.0231 | 0.2486 | 0.018 19 | 0.073 19 | 54.966 | 13.662 | 26 |
| 27 | 4.2444 | 0.2356 | 0.016 95 | 0.071 95 | 58.989 | 13.898 | 27 |
| 28 | 4.4778 | 0.2233 | 0.015 81 | 0.070 81 | 63.234 | 14.121 | 28 |
| 29 | 4.7241 | 0.2117 | 0.014 77 | 0.069 77 | 67.711 | 14.333 | 29 |
| 30 | 4.9840 | 0.2006 | 0.013 81 | 0.068 81 | 72.435 | 14.534 | 30 |
| 31 | 5.2581 | 0.1902 | 0.012 92 | 0.067 92 | 77.419 | 14.724 | 31 |
| 32 | 5.5473 | 0.1803 | 0.012 10 | 0.067 10 | 82.677 | 14.904 | 32 |
| 33 | 5.8524 | 0.1709 | 0.011 33 | 0.066 33 | 88.225 | 15.075 | 33 |
| 34 | 6.1742 | 0.1620 | 0.010 63 | 0.065 63 | 94.077 | 15.237 | 34 |
| 35 | 6.5138 | 0.1535 | 0.009 97 | 0.064 97 | 100.251 | 15.391 | 35 |
| 40 | 8.5133 | 0.1175 | 0.007 32 | 0.062 32 | 136.606 | 16.046 | 40 |
| 45 | 11.1266 | 0.0899 | 0.005 43 | 0.060 43 | 184.119 | 16.548 | 45 |
| 50 | 14.5420 | 0.0688 | 0.004 06 | 0.059 06 | 246.217 | 16.932 | 50 |
| 55 | 19.0058 | 0.0526 | 0.003 05 | 0.058 05 | 327.377 | 17.225 | 55 |
| 60 | 24.8398 | 0.0403 | 0.002 31 | 0.057 31 | 433.450 | 17.450 | 60 |
| 65 | 32.4646 | 0.0308 | 0.001 75 | 0.056 75 | 572.083 | 17.622 | 65 |
| 70 | 42.4299 | 0.0236 | 0.001 33 | 0.056 33 | 753.271 | 17.753 | 70 |
| 75 | 55.4542 | 0.0180 | 0.001 01 | 0.056 01 | 990.076 | 17.854 | 75 |
| 80 | 72.4764 | 0.0138 | 0.000 77 | 0.055 77 | 1 299.571 | 17.931 | 80 |
| 85 | 94.7238 | 0.0106 | 0.000 59 | 0.055 59 | 1 704.069 | 17.990 | 85 |
| 90 | 123.8002 | 0.0081 | 0.000 45 | 0.055 45 | 2 232.731 | 18.035 | 90 |
| 95 | 161.8019 | 0.0062 | 0.000 34 | 0.055 34 | 2 923.671 | 18.069 | 95 |
| 100 | 211.4686 | 0.0047 | 0.000 26 | 0.055 26 | 3 826.702 | 18.096 | 100 |



## TABLE E–13

### 6% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0600 | 0.9434 | 1.000 00 | 1.060 00 | 1.000 | 0.943 | 1 |
| 2 | 1.1236 | 0.8900 | 0.485 44 | 0.545 44 | 2.060 | 1.833 | 2 |
| 3 | 1.1910 | 0.8396 | 0.314 11 | 0.374 11 | 3.184 | 2.673 | 3 |
| 4 | 1.2625 | 0.7921 | 0.228 59 | 0.288 59 | 4.375 | 3.465 | 4 |
| 5 | 1.3382 | 0.7473 | 0.177 40 | 0.237 40 | 5.637 | 4.212 | 5 |
| 6 | 1.4185 | 0.7050 | 0.143 36 | 0.203 36 | 6.975 | 4.917 | 6 |
| 7 | 1.5036 | 0.6651 | 0.119 14 | 0.179 14 | 8.394 | 5.582 | 7 |
| 8 | 1.5938 | 0.6274 | 0.101 04 | 0.161 04 | 9.897 | 6.210 | 8 |
| 9 | 1.6895 | 0.5919 | 0.087 02 | 0.147 02 | 11.491 | 6.802 | 9 |
| 10 | 1.7908 | 0.5584 | 0.075 87 | 0.135 87 | 13.181 | 7.360 | 10 |
| 11 | 1.8983 | 0.5268 | 0.066 79 | 0.126 79 | 14.972 | 7.887 | 11 |
| 12 | 2.0122 | 0.4970 | 0.059 28 | 0.119 28 | 16.870 | 8.384 | 12 |
| 13 | 2.1329 | 0.4688 | 0.052 96 | 0.112 96 | 18.882 | 8.853 | 13 |
| 14 | 2.2609 | 0.4423 | 0.047 58 | 0.107 58 | 21.015 | 9.295 | 14 |
| 15 | 2.3966 | 0.4173 | 0.042 96 | 0.102 96 | 23.276 | 9.712 | 15 |
| 16 | 2.5404 | 0.3936 | 0.038 95 | 0.098 95 | 25.673 | 10.106 | 16 |
| 17 | 2.6928 | 0.3714 | 0.035 44 | 0.095 44 | 28.213 | 10.477 | 17 |
| 18 | 2.8543 | 0.3503 | 0.032 36 | 0.092 36 | 30.906 | 10.828 | 18 |
| 19 | 3.0256 | 0.3305 | 0.029 62 | 0.089 62 | 33.760 | 11.158 | 19 |
| 20 | 3.2071 | 0.3118 | 0.027 18 | 0.087 18 | 36.786 | 11.470 | 20 |
| 21 | 3.3996 | 0.2942 | 0.025 00 | 0.085 00 | 39.993 | 11.764 | 21 |
| 22 | 3.6035 | 0.2775 | 0.023 05 | 0.083 05 | 43.392 | 12.042 | 22 |
| 23 | 3.8197 | 0.2618 | 0.021 28 | 0.081 28 | 46.996 | 12.303 | 23 |
| 24 | 4.0489 | 0.2470 | 0.019 68 | 0.079 68 | 50.816 | 12.550 | 24 |
| 25 | 4.2919 | 0.2330 | 0.018 23 | 0.078 23 | 54.865 | 12.783 | 25 |
| 26 | 4.5494 | 0.2198 | 0.016 90 | 0.076 90 | 59.156 | 13.003 | 26 |
| 27 | 4.8223 | 0.2074 | 0.015 70 | 0.075 70 | 63.706 | 13.211 | 27 |
| 28 | 5.1117 | 0.1956 | 0.014 59 | 0.074 59 | 68.528 | 13.406 | 28 |
| 29 | 5.4184 | 0.1846 | 0.013 58 | 0.073 58 | 73.640 | 13.591 | 29 |
| 30 | 5.7435 | 0.1741 | 0.012 65 | 0.072 65 | 79.058 | 13.765 | 30 |
| 31 | 6.0881 | 0.1643 | 0.011 79 | 0.071 79 | 84.802 | 13.929 | 31 |
| 32 | 6.4534 | 0.1550 | 0.011 00 | 0.071 00 | 90.890 | 14.084 | 32 |
| 33 | 6.8406 | 0.1462 | 0.010 27 | 0.070 27 | 97.343 | 14.230 | 33 |
| 34 | 7.2510 | 0.1379 | 0.009 60 | 0.069 60 | 104.184 | 14.368 | 34 |
| 35 | 7.6861 | 0.1301 | 0.008 97 | 0.068 97 | 111.435 | 14.498 | 35 |
| 40 | 10.2857 | 0.0972 | 0.006 46 | 0.066 46 | 154.762 | 15.046 | 40 |
| 45 | 13.7646 | 0.0727 | 0.004 70 | 0.064 70 | 212.744 | 15.456 | 45 |
| 50 | 18.4202 | 0.0543 | 0.003 44 | 0.063 44 | 290.336 | 15.762 | 50 |
| 55 | 24.6503 | 0.0406 | 0.002 54 | 0.062 54 | 394.172 | 15.991 | 55 |
| 60 | 32.9877 | 0.0303 | 0.001 88 | 0.061 88 | 533.128 | 16.161 | 60 |
| 65 | 44.1450 | 0.0227 | 0.001 39 | 0.061 39 | 719.083 | 16.289 | 65 |
| 70 | 59.0759 | 0.0169 | 0.001 03 | 0.061 03 | 967.932 | 16.385 | 70 |
| 75 | 79.0569 | 0.0126 | 0.000 77 | 0.060 77 | 1 300.949 | 16.456 | 75 |
| 80 | 105.7960 | 0.0095 | 0.000 57 | 0.060 57 | 1 746.600 | 16.509 | 80 |
| 85 | 141.5789 | 0.0071 | 0.000 43 | 0.060 43 | 2 342.982 | 16.549 | 85 |
| 90 | 189.4645 | 0.0053 | 0.000 32 | 0.060 32 | 3 141.075 | 16.579 | 90 |
| 95 | 253.5463 | 0.0039 | 0.000 24 | 0.060 24 | 4 209.104 | 16.601 | 95 |
| 100 | 339.3021 | 0.0029 | 0.000 18 | 0.060 18 | 5 638.368 | 16.618 | 100 |

## TABLE E–14

## 7% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0700 | 0.9346 | 1.000 00 | 1.070 00 | 1.000 | 0.935 | 1 |
| 2 | 1.1449 | 0.8734 | 0.483 09 | 0.553 09 | 2.070 | 1.808 | 2 |
| 3 | 1.2250 | 0.8163 | 0.311 05 | 0.381 05 | 3.215 | 2.624 | 3 |
| 4 | 1.3108 | 0.7629 | 0.225 23 | 0.295 23 | 4.440 | 3.387 | 4 |
| 5 | 1.4026 | 0.7130 | 0.173 89 | 0.243 89 | 5.751 | 4.100 | 5 |
| 6 | 1.5007 | 0.6663 | 0.139 80 | 0.209 80 | 7.153 | 4.767 | 6 |
| 7 | 1.6058 | 0.6227 | 0.115 55 | 0.185 55 | 8.654 | 5.389 | 7 |
| 8 | 1.7182 | 0.5820 | 0.097 47 | 0.167 47 | 10.260 | 5.971 | 8 |
| 9 | 1.8385 | 0.5439 | 0.083 49 | 0.153 49 | 11.978 | 6.515 | 9 |
| 10 | 1.9672 | 0.5083 | 0.072 38 | 0.142 38 | 13.816 | 7.024 | 10 |
| 11 | 2.1049 | 0.4751 | 0.063 36 | 0.133 36 | 15.784 | 7.499 | 11 |
| 12 | 2.2522 | 0.4440 | 0.055 90 | 0.125 90 | 17.888 | 7.943 | 12 |
| 13 | 2.4098 | 0.4150 | 0.049 65 | 0.119 65 | 20.141 | 8.358 | 13 |
| 14 | 2.5785 | 0.3878 | 0.044 34 | 0.114 34 | 22.550 | 8.745 | 14 |
| 15 | 2.7590 | 0.3624 | 0.039 79 | 0.109 79 | 25.129 | 9.108 | 15 |
| 16 | 2.9522 | 0.3387 | 0.035 86 | 0.105 86 | 27.888 | 9.447 | 16 |
| 17 | 3.1588 | 0.3166 | 0.032 43 | 0.102 43 | 30.840 | 9.763 | 17 |
| 18 | 3.3799 | 0.2959 | 0.029 41 | 0.099 41 | 33.999 | 10.059 | 18 |
| 19 | 3.6165 | 0.2765 | 0.026 75 | 0.096 75 | 37.379 | 10.336 | 19 |
| 20 | 3.8697 | 0.2584 | 0.024 39 | 0.094 39 | 40.995 | 10.594 | 20 |
| 21 | 4.1406 | 0.2415 | 0.022 29 | 0.092 29 | 44.865 | 10.836 | 21 |
| 22 | 4.4304 | 0.2257 | 0.020 41 | 0.090 41 | 49.006 | 11.061 | 22 |
| 23 | 4.7405 | 0.2109 | 0.018 71 | 0.088 71 | 53.436 | 11.272 | 23 |
| 24 | 5.0724 | 0.1971 | 0.017 19 | 0.087 19 | 58.177 | 11.469 | 24 |
| 25 | 5.4274 | 0.1842 | 0.015 81 | 0.085 81 | 63.249 | 11.654 | 25 |
| 26 | 5.8074 | 0.1722 | 0.014 56 | 0.084 56 | 68.676 | 11.826 | 26 |
| 27 | 6.2139 | 0.1609 | 0.013 43 | 0.083 43 | 74.484 | 11.987 | 27 |
| 28 | 6.6488 | 0.1504 | 0.012 39 | 0.082 39 | 80.698 | 12.137 | 28 |
| 29 | 7.1143 | 0.1406 | 0.011 45 | 0.081 45 | 87.347 | 12.278 | 29 |
| 30 | 7.6123 | 0.1314 | 0.010 59 | 0.080 59 | 94.461 | 12.409 | 30 |
| 31 | 8.1451 | 0.1228 | 0.009 80 | 0.079 80 | 102.073 | 12.532 | 31 |
| 32 | 8.7153 | 0.1147 | 0.009 07 | 0.079 07 | 110.218 | 12.647 | 32 |
| 33 | 9.3253 | 0.1072 | 0.008 41 | 0.078 41 | 118.933 | 12.754 | 33 |
| 34 | 9.9781 | 0.1002 | 0.007 80 | 0.077 80 | 128.259 | 12.854 | 34 |
| 35 | 10.6766 | 0.0937 | 0.007 23 | 0.077 23 | 138.237 | 12.948 | 35 |
| 40 | 14.9745 | 0.0668 | 0.005 01 | 0.075 01 | 199.635 | 13.332 | 40 |
| 45 | 21.0025 | 0.0476 | 0.003 50 | 0.073 50 | 285.749 | 13.606 | 45 |
| 50 | 29.4570 | 0.0339 | 0.002 46 | 0.072 46 | 406.529 | 13.801 | 50 |
| 55 | 41.3150 | 0.0242 | 0.001 74 | 0.071 74 | 575.929 | 13.940 | 55 |
| 60 | 57.9464 | 0.0173 | 0.001 23 | 0.071 23 | 813.520 | 14.039 | 60 |
| 65 | 81.2729 | 0.0123 | 0.000 87 | 0.070 87 | 1 146.755 | 14.110 | 65 |
| 70 | 113.9894 | 0.0088 | 0.000 62 | 0.070 62 | 1 614.134 | 14.160 | 70 |
| 75 | 159.8760 | 0.0063 | 0.000 44 | 0.070 44 | 2 269.657 | 14.196 | 75 |
| 80 | 224.2344 | 0.0045 | 0.000 31 | 0.070 31 | 3 189.063 | 14.222 | 80 |
| 85 | 314.5003 | 0.0032 | 0.000 22 | 0.070 22 | 4 478.576 | 14.240 | 85 |
| 90 | 441.1030 | 0.0023 | 0.000 16 | 0.070 16 | 6 287.185 | 14.253 | 90 |
| 95 | 618.6697 | 0.0016 | 0.000 11 | 0.070 11 | 8 823.854 | 14.263 | 95 |
| 100 | 867.7163 | 0.0012 | 0.000 08 | 0.070 08 | 12 381.662 | 14.269 | 100 |



## TABLE E–15

## 8% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.0800 | 0.9259 | 1.000 00 | 1.080 00 | 1.000 | 0.926 | 1 |
| 2 | 1.1664 | 0.8573 | 0.480 77 | 0.560 77 | 2.080 | 1.783 | 2 |
| 3 | 1.2597 | 0.7938 | 0.308 03 | 0.388 03 | 3.246 | 2.577 | 3 |
| 4 | 1.3605 | 0.7350 | 0.221 92 | 0.301 92 | 4.506 | 3.312 | 4 |
| 5 | 1.4693 | 0.6806 | 0.170 46 | 0.250 46 | 5.867 | 3.993 | 5 |
| 6 | 1.5869 | 0.6302 | 0.136 32 | 0.216 32 | 7.336 | 4.623 | 6 |
| 7 | 1.7138 | 0.5835 | 0.112 07 | 0.192 07 | 8.923 | 5.206 | 7 |
| 8 | 1.8509 | 0.5403 | 0.094 01 | 0.174 01 | 10.637 | 5.747 | 8 |
| 9 | 1.9990 | 0.5002 | 0.080 08 | 0.160 08 | 12.488 | 6.247 | 9 |
| 10 | 2.1589 | 0.4632 | 0.069 03 | 0.149 03 | 14.487 | 6.710 | 10 |
| 11 | 2.3316 | 0.4289 | 0.060 08 | 0.140 08 | 16.645 | 7.139 | 11 |
| 12 | 2.5182 | 0.3971 | 0.052 70 | 0.132 70 | 18.977 | 7.536 | 12 |
| 13 | 2.7196 | 0.3677 | 0.046 52 | 0.126 52 | 21.495 | 7.904 | 13 |
| 14 | 2.9372 | 0.3405 | 0.041 30 | 0.121 30 | 24.215 | 8.244 | 14 |
| 15 | 3.1722 | 0.3152 | 0.036 83 | 0.116 83 | 27.152 | 8.559 | 15 |
| 16 | 3.4259 | 0.2919 | 0.032 98 | 0.112 98 | 30.324 | 8.851 | 16 |
| 17 | 3.7000 | 0.2703 | 0.029 63 | 0.109 63 | 33.750 | 9.122 | 17 |
| 18 | 3.9960 | 0.2502 | 0.026 70 | 0.106 70 | 37.450 | 9.372 | 18 |
| 19 | 4.3157 | 0.2317 | 0.024 13 | 0.104 13 | 41.446 | 9.604 | 19 |
| 20 | 4.6610 | 0.2145 | 0.021 85 | 0.101 85 | 45.762 | 9.818 | 20 |
| 21 | 5.0338 | 0.1987 | 0.019 83 | 0.099 83 | 50.423 | 10.017 | 21 |
| 22 | 5.4365 | 0.1839 | 0.018 03 | 0.098 03 | 55.457 | 10.201 | 22 |
| 23 | 5.8715 | 0.1703 | 0.016 42 | 0.096 42 | 60.893 | 10.371 | 23 |
| 24 | 6.3412 | 0.1577 | 0.014 98 | 0.094 98 | 66.765 | 10.529 | 24 |
| 25 | 6.8485 | 0.1460 | 0.013 68 | 0.093 68 | 73.106 | 10.675 | 25 |
| 26 | 7.3964 | 0.1352 | 0.012 51 | 0.092 51 | 79.954 | 10.810 | 26 |
| 27 | 7.9881 | 0.1252 | 0.011 45 | 0.091 45 | 87.351 | 10.935 | 27 |
| 28 | 8.6271 | 0.1159 | 0.010 49 | 0.090 49 | 95.339 | 11.051 | 28 |
| 29 | 9.3173 | 0.1073 | 0.009 62 | 0.089 62 | 103.966 | 11.158 | 29 |
| 30 | 10.0627 | 0.0994 | 0.008 83 | 0.088 83 | 113.283 | 11.258 | 30 |
| 31 | 10.8677 | 0.0920 | 0.008 11 | 0.088 11 | 123.346 | 11.350 | 31 |
| 32 | 11.7371 | 0.0852 | 0.007 45 | 0.087 45 | 134.214 | 11.435 | 32 |
| 33 | 12.6760 | 0.0789 | 0.006 85 | 0.086 85 | 145.951 | 11.514 | 33 |
| 34 | 13.6901 | 0.0730 | 0.006 30 | 0.086 30 | 158.627 | 11.587 | 34 |
| 35 | 14.7853 | 0.0676 | 0.005 80 | 0.085 80 | 172.317 | 11.655 | 35 |
| 40 | 21.7245 | 0.0460 | 0.003 86 | 0.083 86 | 259.057 | 11.925 | 40 |
| 45 | 31.9204 | 0.0313 | 0.002 59 | 0.082 59 | 386.506 | 12.108 | 45 |
| 50 | 46.9016 | 0.0213 | 0.001 74 | 0.081 74 | 573.770 | 12.233 | 50 |
| 55 | 68.9139 | 0.0145 | 0.001 18 | 0.081 18 | 848.923 | 12.319 | 55 |
| 60 | 101.2571 | 0.0099 | 0.000 80 | 0.080 80 | 1 253.213 | 12.377 | 60 |
| 65 | 148.7798 | 0.0067 | 0.000 54 | 0.080 54 | 1 847.248 | 12.416 | 65 |
| 70 | 218.6064 | 0.0046 | 0.000 37 | 0.080 37 | 2 720.080 | 12.443 | 70 |
| 75 | 321.2045 | 0.0031 | 0.000 25 | 0.080 25 | 4 002.557 | 12.461 | 75 |
| 80 | 471.9548 | 0.0021 | 0.000 17 | 0.080 17 | 5 886.935 | 12.474 | 80 |
| 85 | 693.4565 | 0.0014 | 0.000 12 | 0.080 12 | 8 655.706 | 12.482 | 85 |
| 90 | 1 018.9151 | 0.0010 | 0.000 08 | 0.080 08 | 12 723.939 | 12.488 | 90 |
| 95 | 1 497.1205 | 0.0007 | 0.000 05 | 0.080 05 | 18 701.507 | 12.492 | 95 |
| 100 | 2 199.7613 | 0.0005 | 0.000 04 | 0.080 04 | 27 484.516 | 12.494 | 100 |

## TABLE E–16

## 10% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.1000 | 0.9091 | 1.000 00 | 1.100 00 | 1.000 | 0.909 | 1 |
| 2 | 1.2100 | 0.8264 | 0.476 19 | 0.576 19 | 2.100 | 1.736 | 2 |
| 3 | 1.3310 | 0.7513 | 0.302 11 | 0.402 11 | 3.310 | 2.487 | 3 |
| 4 | 1.4641 | 0.6830 | 0.215 47 | 0.315 47 | 4.641 | 3.170 | 4 |
| 5 | 1.6105 | 0.6209 | 0.163 80 | 0.263 80 | 6.105 | 3.791 | 5 |
| 6 | 1.7716 | 0.5645 | 0.129 61 | 0.229 61 | 7.716 | 4.355 | 6 |
| 7 | 1.9487 | 0.5132 | 0.105 41 | 0.205 41 | 9.487 | 4.868 | 7 |
| 8 | 2.1436 | 0.4665 | 0.087 44 | 0.187 44 | 11.436 | 5.335 | 8 |
| 9 | 2.3579 | 0.4241 | 0.073 64 | 0.173 64 | 13.579 | 5.759 | 9 |
| 10 | 2.5937 | 0.3855 | 0.062 75 | 0.162 75 | 15.937 | 6.144 | 10 |
| 11 | 2.8531 | 0.3505 | 0.053 96 | 0.153 96 | 18.531 | 6.495 | 11 |
| 12 | 3.1384 | 0.3186 | 0.046 76 | 0.146 76 | 21.384 | 6.814 | 12 |
| 13 | 3.4523 | 0.2897 | 0.040 78 | 0.140 78 | 24.523 | 7.103 | 13 |
| 14 | 3.7975 | 0.2633 | 0.035 75 | 0.135 75 | 27.975 | 7.367 | 14 |
| 15 | 4.1772 | 0.2394 | 0.031 47 | 0.131 47 | 31.772 | 7.606 | 15 |
| 16 | 4.5950 | 0.2176 | 0.027 82 | 0.127 82 | 35.950 | 7.824 | 16 |
| 17 | 5.0545 | 0.1978 | 0.024 66 | 0.124 66 | 40.545 | 8.022 | 17 |
| 18 | 5.5599 | 0.1799 | 0.021 93 | 0.121 93 | 45.599 | 8.201 | 18 |
| 19 | 6.1159 | 0.1635 | 0.019 55 | 0.119 55 | 51.159 | 8.365 | 19 |
| 20 | 6.7275 | 0.1486 | 0.017 46 | 0.117 46 | 57.275 | 8.514 | 20 |
| 21 | 7.4002 | 0.1351 | 0.015 62 | 0.115 62 | 64.002 | 8.649 | 21 |
| 22 | 8.1403 | 0.1228 | 0.014 01 | 0.114 01 | 71.403 | 8.772 | 22 |
| 23 | 8.9543 | 0.1117 | 0.012 57 | 0.112 57 | 79.543 | 8.883 | 23 |
| 24 | 9.8497 | 0.1015 | 0.011 30 | 0.111 30 | 88.497 | 8.985 | 24 |
| 25 | 10.8347 | 0.0923 | 0.010 17 | 0.110 17 | 98.347 | 9.077 | 25 |
| 26 | 11.9182 | 0.0839 | 0.009 16 | 0.109 16 | 109.182 | 9.161 | 26 |
| 27 | 13.1100 | 0.0763 | 0.008 26 | 0.108 26 | 121.100 | 9.237 | 27 |
| 28 | 14.4210 | 0.0693 | 0.007 45 | 0.107 45 | 134.210 | 9.307 | 28 |
| 29 | 15.8631 | 0.0630 | 0.006 73 | 0.106 73 | 148.631 | 9.370 | 29 |
| 30 | 17.4494 | 0.0573 | 0.006 08 | 0.106 08 | 164.494 | 9.427 | 30 |
| 31 | 19.1943 | 0.0521 | 0.005 50 | 0.105 50 | 181.943 | 9.479 | 31 |
| 32 | 21.1138 | 0.0474 | 0.004 97 | 0.104 97 | 201.138 | 9.526 | 32 |
| 33 | 23.2252 | 0.0431 | 0.004 50 | 0.104 50 | 222.252 | 9.569 | 33 |
| 34 | 25.5477 | 0.0391 | 0.004 07 | 0.104 07 | 245.477 | 9.609 | 34 |
| 35 | 28.1024 | 0.0356 | 0.003 69 | 0.103 69 | 271.024 | 9.644 | 35 |
| 40 | 45.2593 | 0.0221 | 0.002 26 | 0.102 26 | 442.593 | 9.779 | 40 |
| 45 | 72.8905 | 0.0137 | 0.001 39 | 0.101 39 | 718.905 | 9.863 | 45 |
| 50 | 117.3909 | 0.0085 | 0.000 86 | 0.100 86 | 1 163.909 | 9.915 | 50 |
| 55 | 189.0591 | 0.0053 | 0.000 53 | 0.100 53 | 1 880.591 | 9.947 | 55 |
| 60 | 304.4816 | 0.0033 | 0.000 33 | 0.100 33 | 3 034.816 | 9.967 | 60 |
| 65 | 490.3707 | 0.0020 | 0.000 20 | 0.100 20 | 4 893.707 | 9.980 | 65 |
| 70 | 789.7470 | 0.0013 | 0.000 13 | 0.100 13 | 7 887.470 | 9.987 | 70 |
| 75 | 1 271.8952 | 0.0008 | 0.000 08 | 0.100 08 | 12 708.954 | 9.992 | 75 |
| 80 | 2 048.4002 | 0.0005 | 0.000 05 | 0.100 05 | 20 474.002 | 9.995 | 80 |
| 85 | 3 298.9690 | 0.0003 | 0.000 03 | 0.100 03 | 32 979.690 | 9.997 | 85 |
| 90 | 5 313.0226 | 0.0002 | 0.000 02 | 0.100 02 | 53 120.226 | 9.998 | 90 |
| 95 | 8 556.6760 | 0.0001 | 0.000 01 | 0.100 01 | 85 556.760 | 9.999 | 95 |
| 100 | 13 780.6123 | 0.0001 | 0.000 01 | 0.100 01 | 137 796.123 | 9.999 | 100 |



## TABLE E–17

## 12% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.1200 | 0.8929 | 1.000 00 | 1.120 00 | 1.000 | 0.893 | 1 |
| 2 | 1.2544 | 0.7972 | 0.471 70 | 0.591 70 | 2.120 | 1.690 | 2 |
| 3 | 1.4049 | 0.7118 | 0.296 35 | 0.416 35 | 3.374 | 2.402 | 3 |
| 4 | 1.5735 | 0.6355 | 0.209 23 | 0.329 23 | 4.779 | 3.037 | 4 |
| 5 | 1.7623 | 0.5674 | 0.157 41 | 0.277 41 | 6.353 | 3.605 | 5 |
| 6 | 1.9738 | 0.5066 | 0.123 23 | 0.243 23 | 8.115 | 4.111 | 6 |
| 7 | 2.2107 | 0.4523 | 0.099 12 | 0.219 12 | 10.089 | 4.564 | 7 |
| 8 | 2.4760 | 0.4039 | 0.081 30 | 0.201 30 | 12.300 | 4.968 | 8 |
| 9 | 2.7731 | 0.3606 | 0.067 68 | 0.187 68 | 14.776 | 5.328 | 9 |
| 10 | 3.1058 | 0.3220 | 0.056 98 | 0.176 98 | 17.549 | 5.650 | 10 |
| 11 | 3.4785 | 0.2875 | 0.048 42 | 0.168 42 | 20.655 | 5.938 | 11 |
| 12 | 3.8960 | 0.2567 | 0.041 44 | 0.161 44 | 24.133 | 6.194 | 12 |
| 13 | 4.3635 | 0.2292 | 0.035 68 | 0.155 68 | 28.029 | 6.424 | 13 |
| 14 | 4.8871 | 0.2046 | 0.030 87 | 0.150 87 | 32.393 | 6.628 | 14 |
| 15 | 5.4736 | 0.1827 | 0.026 82 | 0.146 82 | 37.280 | 6.811 | 15 |
| 16 | 6.1304 | 0.1631 | 0.023 39 | 0.143 39 | 42.753 | 6.974 | 16 |
| 17 | 6.8660 | 0.1456 | 0.020 46 | 0.140 46 | 48.884 | 7.120 | 17 |
| 18 | 7.6900 | 0.1300 | 0.017 94 | 0.137 94 | 55.750 | 7.250 | 18 |
| 19 | 8.6128 | 0.1161 | 0.015 76 | 0.135 76 | 63.440 | 7.366 | 19 |
| 20 | 9.6463 | 0.1037 | 0.013 88 | 0.133 88 | 72.052 | 7.469 | 20 |
| 21 | 10.8038 | 0.0926 | 0.012 24 | 0.132 24 | 81.699 | 7.562 | 21 |
| 22 | 12.1003 | 0.0826 | 0.010 81 | 0.130 81 | 92.503 | 7.645 | 22 |
| 23 | 13.5523 | 0.0738 | 0.009 56 | 0.129 56 | 104.603 | 7.718 | 23 |
| 24 | 15.1786 | 0.0659 | 0.008 46 | 0.128 46 | 118.155 | 7.784 | 24 |
| 25 | 17.0001 | 0.0588 | 0.007 50 | 0.127 50 | 133.334 | 7.843 | 25 |
| 26 | 19.0401 | 0.0525 | 0.006 65 | 0.126 65 | 150.334 | 7.896 | 26 |
| 27 | 21.3249 | 0.0469 | 0.005 90 | 0.125 90 | 169.374 | 7.943 | 27 |
| 28 | 23.8839 | 0.0419 | 0.005 24 | 0.125 24 | 190.699 | 7.984 | 28 |
| 29 | 26.7499 | 0.0374 | 0.004 66 | 0.124 66 | 214.583 | 8.022 | 29 |
| 30 | 29.9599 | 0.0334 | 0.004 14 | 0.124 14 | 241.333 | 8.055 | 30 |
| 31 | 33.5551 | 0.0298 | 0.003 69 | 0.123 69 | 271.292 | 8.085 | 31 |
| 32 | 37.5817 | 0.0266 | 0.003 28 | 0.123 28 | 304.847 | 8.112 | 32 |
| 33 | 42.0915 | 0.0238 | 0.002 92 | 0.122 92 | 342.429 | 8.135 | 33 |
| 34 | 47.1425 | 0.0212 | 0.002 60 | 0.122 60 | 384.520 | 8.157 | 34 |
| 35 | 52.7996 | 0.0189 | 0.002 32 | 0.122 32 | 431.663 | 8.176 | 35 |
| 40 | 93.0510 | 0.0107 | 0.001 30 | 0.121 30 | 767.091 | 8.244 | 40 |
| 45 | 163.9876 | 0.0061 | 0.000 74 | 0.120 74 | 1 358.230 | 8.283 | 45 |
| 50 | 289.0022 | 0.0035 | 0.000 42 | 0.120 42 | 2 400.018 | 8.305 | 50 |
| ∞ | | | | 0.120 00 | | 8.333 | ∞ |

## TABLE E–18

### 15% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.1500 | 0.8696 | 1.000 00 | 1.150 00 | 1.000 | 0.870 | 1 |
| 2 | 1.3225 | 0.7561 | 0.465 12 | 0.615 12 | 2.150 | 1.626 | 2 |
| 3 | 1.5209 | 0.6575 | 0.287 98 | 0.437 98 | 3.472 | 2.283 | 3 |
| 4 | 1.7490 | 0.5718 | 0.200 26 | 0.350 27 | 4.993 | 2.855 | 4 |
| 5 | 2.0114 | 0.4972 | 0.148 32 | 0.298 32 | 6.742 | 3.352 | 5 |
| 6 | 2.3131 | 0.4323 | 0.114 24 | 0.264 24 | 8.754 | 3.784 | 6 |
| 7 | 2.6600 | 0.3759 | 0.090 36 | 0.240 36 | 11.067 | 4.160 | 7 |
| 8 | 3.0590 | 0.3269 | 0.072 85 | 0.222 85 | 13.727 | 4.487 | 8 |
| 9 | 3.5179 | 0.2843 | 0.059 57 | 0.209 57 | 16.786 | 4.772 | 9 |
| 10 | 4.0456 | 0.2472 | 0.049 25 | 0.199 25 | 20.304 | 5.019 | 10 |
| 11 | 4.6524 | 0.2149 | 0.041 07 | 0.191 07 | 24.349 | 5.234 | 11 |
| 12 | 5.3503 | 0.1869 | 0.034 48 | 0.184 48 | 29.002 | 5.421 | 12 |
| 13 | 6.1528 | 0.1625 | 0.029 11 | 0.179 11 | 34.352 | 5.583 | 13 |
| 14 | 7.0757 | 0.1413 | 0.024 69 | 0.174 69 | 40.505 | 5.724 | 14 |
| 15 | 8.1371 | 0.1229 | 0.021 02 | 0.171 02 | 47.580 | 5.847 | 15 |
| 16 | 9.3576 | 0.1069 | 0.017 95 | 0.167 95 | 55.717 | 5.954 | 16 |
| 17 | 10.7613 | 0.0929 | 0.015 37 | 0.165 37 | 65.075 | 6.047 | 17 |
| 18 | 12.3755 | 0.0808 | 0.013 19 | 0.163 19 | 75.836 | 6.128 | 18 |
| 19 | 14.2318 | 0.0703 | 0.011 34 | 0.161 34 | 88.212 | 6.198 | 19 |
| 20 | 16.3665 | 0.0611 | 0.009 76 | 0.159 76 | 102.444 | 6.259 | 20 |
| 21 | 18.8215 | 0.0531 | 0.008 42 | 0.158 42 | 118.810 | 6.312 | 21 |
| 22 | 21.6447 | 0.0462 | 0.007 27 | 0.157 27 | 137.632 | 6.359 | 22 |
| 23 | 24.8915 | 0.0402 | 0.006 28 | 0.156 28 | 159.276 | 6.399 | 23 |
| 24 | 28.6252 | 0.0349 | 0.005 43 | 0.155 43 | 184.168 | 6.434 | 24 |
| 25 | 32.9190 | 0.0304 | 0.004 70 | 0.154 70 | 212.793 | 6.464 | 25 |
| 26 | 37.8568 | 0.0264 | 0.004 07 | 0.154 07 | 245.712 | 6.491 | 26 |
| 27 | 43.5353 | 0.0230 | 0.003 53 | 0.153 53 | 283.569 | 6.514 | 27 |
| 28 | 50.0656 | 0.0200 | 0.003 06 | 0.153 06 | 327.104 | 6.534 | 28 |
| 29 | 57.5755 | 0.0174 | 0.002 65 | 0.152 65 | 377.170 | 6.551 | 29 |
| 30 | 66.2118 | 0.0151 | 0.002 30 | 0.152 30 | 434.745 | 6.566 | 30 |
| 31 | 76.1435 | 0.0131 | 0.002 00 | 0.152 00 | 500.957 | 6.579 | 31 |
| 32 | 87.5651 | 0.0114 | 0.001 73 | 0.151 73 | 577.100 | 6.591 | 32 |
| 33 | 100.6998 | 0.0099 | 0.001 50 | 0.151 50 | 664.666 | 6.600 | 33 |
| 34 | 115.8048 | 0.0086 | 0.001 31 | 0.151 31 | 765.365 | 6.609 | 34 |
| 35 | 133.1755 | 0.0075 | 0.001 13 | 0.151 13 | 881.170 | 6.617 | 35 |
| 40 | 267.8635 | 0.0037 | 0.000 56 | 0.150 56 | 1 779.090 | 6.642 | 40 |
| 45 | 538.7693 | 0.0019 | 0.000 28 | 0.150 28 | 3 585.128 | 6.654 | 45 |
| 50 | 1 083.6574 | 0.0009 | 0.000 14 | 0.150 14 | 7 217.716 | 6.661 | 50 |
| ∞ | | | | 0.150 00 | | 6.667 | ∞ |



## TABLE E–19

### 20% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.2000 | 0.8333 | 1.000 00 | 1.200 00 | 1.000 | 0.833 | 1 |
| 2 | 1.4400 | 0.6944 | 0.454 55 | 0.654 55 | 2.200 | 1.528 | 2 |
| 3 | 1.7280 | 0.5787 | 0.274 73 | 0.474 73 | 3.640 | 2.106 | 3 |
| 4 | 2.0736 | 0.4823 | 0.186 29 | 0.386 29 | 5.368 | 2.589 | 4 |
| 5 | 2.4883 | 0.4019 | 0.134 38 | 0.334 38 | 7.442 | 2.991 | 5 |
| 6 | 2.9860 | 0.3349 | 0.100 71 | 0.300 71 | 9.930 | 3.326 | 6 |
| 7 | 3.5832 | 0.2791 | 0.077 42 | 0.277 42 | 12.916 | 3.605 | 7 |
| 8 | 4.2998 | 0.2326 | 0.060 61 | 0.260 61 | 16.499 | 3.837 | 8 |
| 9 | 5.1598 | 0.1938 | 0.048 08 | 0.248 08 | 20.799 | 4.031 | 9 |
| 10 | 6.1917 | 0.1615 | 0.038 52 | 0.238 52 | 25.959 | 4.192 | 10 |
| 11 | 7.4301 | 0.1346 | 0.031 10 | 0.231 10 | 32.150 | 4.327 | 11 |
| 12 | 8.9161 | 0.1122 | 0.025 26 | 0.225 26 | 39.581 | 4.439 | 12 |
| 13 | 10.6993 | 0.0935 | 0.020 62 | 0.220 62 | 48.497 | 4.533 | 13 |
| 14 | 12.8392 | 0.0779 | 0.016 89 | 0.216 89 | 59.196 | 4.611 | 14 |
| 15 | 15.4070 | 0.0649 | 0.013 88 | 0.213 88 | 72.035 | 4.675 | 15 |
| 16 | 18.4884 | 0.0541 | 0.011 44 | 0.211 44 | 87.442 | 4.730 | 16 |
| 17 | 22.1861 | 0.0451 | 0.009 44 | 0.209 44 | 105.931 | 4.775 | 17 |
| 18 | 26.6233 | 0.0376 | 0.007 81 | 0.207 81 | 128.117 | 4.812 | 18 |
| 19 | 31.9480 | 0.0313 | 0.006 46 | 0.206 46 | 154.740 | 4.844 | 19 |
| 20 | 38.3376 | 0.0261 | 0.005 36 | 0.205 36 | 186.688 | 4.870 | 20 |
| 21 | 46.0051 | 0.0217 | 0.004 44 | 0.204 44 | 225.026 | 4.891 | 21 |
| 22 | 55.2061 | 0.0181 | 0.003 69 | 0.203 69 | 271.031 | 4.909 | 22 |
| 23 | 66.2474 | 0.0151 | 0.003 07 | 0.203 07 | 326.237 | 4.925 | 23 |
| 24 | 79.4968 | 0.0126 | 0.002 55 | 0.202 55 | 392.484 | 4.937 | 24 |
| 25 | 95.3962 | 0.0105 | 0.002 12 | 0.202 12 | 471.981 | 4.948 | 25 |
| 26 | 114.4755 | 0.0087 | 0.001 76 | 0.201 76 | 567.377 | 4.956 | 26 |
| 27 | 137.3706 | 0.0073 | 0.001 47 | 0.201 47 | 681.853 | 4.964 | 27 |
| 28 | 164.8447 | 0.0061 | 0.001 22 | 0.201 22 | 819.223 | 4.970 | 28 |
| 29 | 197.8136 | 0.0051 | 0.001 02 | 0.201 02 | 984.068 | 4.975 | 29 |
| 30 | 237.3763 | 0.0042 | 0.000 85 | 0.200 85 | 1 181.882 | 4.979 | 30 |
| 31 | 284.8516 | 0.0035 | 0.000 70 | 0.200 70 | 1 419.258 | 4.982 | 31 |
| 32 | 341.8219 | 0.0029 | 0.000 59 | 0.200 59 | 1 704.109 | 4.985 | 32 |
| 33 | 410.1863 | 0.0024 | 0.000 49 | 0.200 49 | 2 045.931 | 4.988 | 33 |
| 34 | 492.2235 | 0.0020 | 0.000 41 | 0.200 41 | 2 456.118 | 4.990 | 34 |
| 35 | 590.6682 | 0.0017 | 0.000 34 | 0.200 34 | 2 948.341 | 4.992 | 35 |
| 40 | 1 469.7716 | 0.0007 | 0.000 14 | 0.200 14 | 7 343.858 | 4.997 | 40 |
| 45 | 3 657.2620 | 0.0003 | 0.000 05 | 0.200 05 | 18 281.310 | 4.999 | 45 |
| 50 | 9 100.4382 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.200 02 | 45 497.191 | 4.999 | 50 |
| ∞ | | | | 0.200 00 | | 5.000 | ∞ |

## TABLE E-20

### 25% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.2500 | 0.8000 | 1.000 00 | 1.250 00 | 1.000 | 0.800 | 1 |
| 2 | 1.5625 | 0.6400 | 0.444 44 | 0.694 44 | 2.250 | 1.440 | 2 |
| 3 | 1.9531 | 0.5120 | 0.262 30 | 0.512 30 | 3.813 | 1.952 | 3 |
| 4 | 2.4414 | 0.4096 | 0.173 44 | 0.423 44 | 5.766 | 2.362 | 4 |
| 5 | 3.0518 | 0.3277 | 0.121 85 | 0.371 85 | 8.207 | 2.689 | 5 |
| 6 | 3.8147 | 0.2621 | 0.088 82 | 0.338 82 | 11.259 | 2.951 | 6 |
| 7 | 4.7684 | 0.2097 | 0.066 34 | 0.316 34 | 15.073 | 3.161 | 7 |
| 8 | 5.9605 | 0.1678 | 0.050 40 | 0.300 40 | 19.842 | 3.329 | 8 |
| 9 | 7.4506 | 0.1342 | 0.038 76 | 0.288 76 | 25.802 | 3.463 | 9 |
| 10 | 9.3132 | 0.1074 | 0.030 07 | 0.280 07 | 33.253 | 3.571 | 10 |
| 11 | 11.6415 | 0.0859 | 0.023 49 | 0.273 49 | 42.566 | 3.656 | 11 |
| 12 | 14.5519 | 0.0687 | 0.018 45 | 0.268 45 | 54.208 | 3.725 | 12 |
| 13 | 18.1899 | 0.0550 | 0.014 54 | 0.264 54 | 68.760 | 3.780 | 13 |
| 14 | 22.7374 | 0.0440 | 0.011 50 | 0.261 50 | 86.949 | 3.824 | 14 |
| 15 | 28.4217 | 0.0352 | 0.009 12 | 0.259 12 | 109.687 | 3.859 | 15 |
| 16 | 35.5271 | 0.0281 | 0.007 24 | 0.257 24 | 138.109 | 3.887 | 16 |
| 17 | 44.4089 | 0.0225 | 0.005 76 | 0.255 76 | 173.636 | 3.910 | 17 |
| 18 | 55.5112 | 0.0180 | 0.004 59 | 0.254 59 | 218.045 | 3.928 | 18 |
| 19 | 69.3889 | 0.0144 | 0.003 66 | 0.253 66 | 273.556 | 3.942 | 19 |
| 20 | 86.7362 | 0.0115 | 0.002 92 | 0.252 92 | 342.945 | 3.954 | 20 |
| 21 | 108.4202 | 0.0092 | 0.002 33 | 0.252 33 | 429.681 | 3.963 | 21 |
| 22 | 135.5253 | 0.0074 | 0.001 86 | 0.251 86 | 538.101 | 3.970 | 22 |
| 23 | 169.4066 | 0.0059 | 0.001 48 | 0.251 48 | 673.626 | 3.976 | 23 |
| 24 | 211.7582 | 0.0047 | 0.001 19 | 0.251 19 | 843.033 | 3.981 | 24 |
| 25 | 264.6978 | 0.0038 | 0.000 95 | 0.250 95 | 1 054.791 | 3.985 | 25 |
| 26 | 330.8722 | 0.0030 | 0.000 76 | 0.250 76 | 1 319.489 | 3.988 | 26 |
| 27 | 413.5903 | 0.0024 | 0.000 61 | 0.250 61 | 1 650.361 | 3.990 | 27 |
| 28 | 516.9879 | 0.0019 | 0.000 48 | 0.250 48 | 2 063.952 | 3.992 | 28 |
| 29 | 646.2349 | 0.0015 | 0.000 39 | 0.250 39 | 2 580.939 | 3.994 | 29 |
| 30 | 807.7936 | 0.0012 | 0.000 31 | 0.250 31 | 3 227.174 | 3.995 | 30 |
| 31 | 1 009.7420 | 0.0010 | 0.000 25 | 0.250 25 | 4 034.968 | 3.996 | 31 |
| 32 | 1 262.1774 | 0.0008 | 0.000 20 | 0.250 20 | 5 044.710 | 3.997 | 32 |
| 33 | 1 577.7218 | 0.0006 | 0.000 16 | 0.250 16 | 6 306.887 | 3.997 | 33 |
| 34 | 1 972.1523 | 0.0005 | 0.000 13 | 0.250 13 | 7 884.609 | 3.998 | 34 |
| 35 | 2 465.1903 | 0.0004 | 0.000 10 | 0.250 10 | 9 856.761 | 3.998 | 35 |
| 40 | 7 523.1638 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.250 03 | 30 088.655 | 3.999 | 40 |
| 45 | 22 958.8740 | 0.0001 | 0.000 01 | 0.250 01 | 91 831.496 | 4.000 | 45 |
| 50 | 70 064.9232 | 0.0000 | 0.000 00 | 0.250 00 | 280 255.693 | 4.000 | 50 |
| ∞ | | | | 0.250 00 | | 4.000 | ∞ |



## TABLE E-21

### 30% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.3000 | 0.7692 | 1.000 00 | 1.300 00 | 1.000 | 0.769 | 1 |
| 2 | 1.6900 | 0.5917 | 0.434 78 | 0.734 78 | 2.300 | 1.361 | 2 |
| 3 | 2.1970 | 0.4552 | 0.250 63 | 0.550 63 | 3.990 | 1.816 | 3 |
| 4 | 2.8561 | 0.3501 | 0.161 63 | 0.461 63 | 6.187 | 2.166 | 4 |
| 5 | 3.7129 | 0.2693 | 0.110 58 | 0.410 58 | 9.043 | 2.436 | 5 |
| 6 | 4.8268 | 0.2072 | 0.078 39 | 0.378 39 | 12.756 | 2.643 | 6 |
| 7 | 6.2749 | 0.1594 | 0.056 87 | 0.356 87 | 17.583 | 2.802 | 7 |
| 8 | 8.1573 | 0.1226 | 0.041 92 | 0.341 92 | 23.858 | 2.925 | 8 |
| 9 | 10.6045 | 0.0943 | 0.031 24 | 0.331 24 | 32.015 | 3.019 | 9 |
| 10 | 13.7858 | 0.0725 | 0.023 46 | 0.323 46 | 42.619 | 3.092 | 10 |
| 11 | 17.9216 | 0.0558 | 0.017 73 | 0.317 73 | 56.405 | 3.147 | 11 |
| 12 | 23.2981 | 0.0429 | 0.013 45 | 0.313 45 | 74.327 | 3.190 | 12 |
| 13 | 30.2875 | 0.0330 | 0.010 24 | 0.310 24 | 97.625 | 3.223 | 13 |
| 14 | 39.3738 | 0.0254 | 0.007 82 | 0.307 82 | 127.913 | 3.249 | 14 |
| 15 | 51.1859 | 0.0195 | 0.005 98 | 0.305 98 | 167.286 | 3.268 | 15 |
| 16 | 66.5417 | 0.0150 | 0.004 58 | 0.304 58 | 218.472 | 3.283 | 16 |
| 17 | 86.5042 | 0.0116 | 0.003 51 | 0.303 51 | 285.014 | 3.295 | 17 |
| 18 | 112.4554 | 0.0089 | 0.002 69 | 0.302 69 | 371.518 | 3.304 | 18 |
| 19 | 146.1920 | 0.0068 | 0.002 07 | 0.302 07 | 483.973 | 3.311 | 19 |
| 20 | 190.0496 | 0.0053 | 0.001 59 | 0.301 59 | 630.165 | 3.316 | 20 |
| 21 | 247.0645 | 0.0040 | 0.001 22 | 0.301 22 | 820.215 | 3.320 | 21 |
| 22 | 321.1839 | 0.0031 | 0.000 94 | 0.300 94 | 1 067.280 | 3.323 | 22 |
| 23 | 417.5391 | 0.0024 | 0.000 72 | 0.300 72 | 1 388.464 | 3.325 | 23 |
| 24 | 542.8008 | 0.0018 | 0.000 55 | 0.300 55 | 1 806.003 | 3.327 | 24 |
| 25 | 705.6410 | 0.0014 | 0.000 43 | 0.300 43 | 2 348.803 | 3.329 | 25 |
| 26 | 917.3333 | 0.0011 | 0.000 33 | 0.300 33 | 3 054.444 | 3.330 | 26 |
| 27 | 1 192.5333 | 0.0008 | 0.000 25 | 0.300 25 | 3 971.778 | 3.331 | 27 |
| 28 | 1 550.2933 | 0.0006 | 0.000 19 | 0.300 19 | 5 164.311 | 3.331 | 28 |
| 29 | 2 015.3813 | 0.0005 | 0.000 15 | 0.300 15 | 6 714.604 | 3.332 | 29 |
| 30 | 2 619.9956 | 0.0004 | 0.000 11 | 0.300 11 | 8 729.985 | 3.332 | 30 |
| 31 | 3 405.9943 | 0.0003 | 0.000 09 | 0.300 09 | 11 349.981 | 3.332 | 31 |
| 32 | 4 427.7926 | 0.0002 | 0.000 07 | 0.300 07 | 14 755.975 | 3.333 | 32 |
| 33 | 5 756.1304 | 0.0002 | 0.000 05 | 0.300 05 | 19 183.768 | 3.333 | 33 |
| 34 | 7 482.9696 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.300 04 | 24 939.899 | 3.333 | 34 |
| 35 | 9 727.8604 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.300 03 | 32 422.868 | 3.333 | 35 |
| ∞ | | | | 0.300 00 | | 3.333 | ∞ |

## TABLE E–22

## 35% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.3500 | 0.7407 | 1.000 00 | 1.350 00 | 1.000 | 0.741 | 1 |
| 2 | 1.8225 | 0.5487 | 0.425 53 | 0.775 53 | 2.350 | 1.289 | 2 |
| 3 | 2.4604 | 0.4064 | 0.239 66 | 0.589 66 | 4.172 | 1.696 | 3 |
| 4 | 3.3215 | 0.3011 | 0.150 76 | 0.500 76 | 6.633 | 1.997 | 4 |
| 5 | 4.4840 | 0.2230 | 0.100 46 | 0.450 46 | 9.954 | 2.220 | 5 |
| 6 | 6.0534 | 0.1652 | 0.069 26 | 0.419 26 | 14.438 | 2.385 | 6 |
| 7 | 8.1722 | 0.1224 | 0.048 80 | 0.398 80 | 20.492 | 2.507 | 7 |
| 8 | 11.0324 | 0.0906 | 0.034 89 | 0.384 89 | 28.664 | 2.598 | 8 |
| 9 | 14.8937 | 0.0671 | 0.025 19 | 0.375 19 | 39.696 | 2.665 | 9 |
| 10 | 20.1066 | 0.0497 | 0.018 32 | 0.368 32 | 54.590 | 2.715 | 10 |
| 11 | 27.1439 | 0.0368 | 0.013 39 | 0.363 39 | 74.697 | 2.752 | 11 |
| 12 | 36.6442 | 0.0273 | 0.009 82 | 0.359 82 | 101.841 | 2.779 | 12 |
| 13 | 49.4697 | 0.0202 | 0.007 22 | 0.357 22 | 138.485 | 2.799 | 13 |
| 14 | 66.7841 | 0.0150 | 0.005 32 | 0.355 32 | 187.954 | 2.814 | 14 |
| 15 | 90.1585 | 0.0111 | 0.003 93 | 0.353 93 | 254.738 | 2.825 | 15 |
| 16 | 121.7139 | 0.0082 | 0.002 90 | 0.352 90 | 344.897 | 2.834 | 16 |
| 17 | 164.3138 | 0.0061 | 0.002 14 | 0.352 14 | 466.611 | 2.840 | 17 |
| 18 | 221.8236 | 0.0045 | 0.001 59 | 0.351 58 | 630.925 | 2.844 | 18 |
| 19 | 299.4619 | 0.0033 | 0.001 17 | 0.351 17 | 852.748 | 2.848 | 19 |
| 20 | 404.2736 | 0.0025 | 0.000 87 | 0.350 87 | 1 152.210 | 2.850 | 20 |
| 21 | 545.7693 | 0.0018 | 0.000 64 | 0.350 64 | 1 556.484 | 2.852 | 21 |
| 22 | 736.7886 | 0.0014 | 0.000 48 | 0.350 48 | 2 102.253 | 2.853 | 22 |
| 23 | 994.6646 | 0.0010 | 0.000 35 | 0.350 35 | 2 839.042 | 2.854 | 23 |
| 24 | 1 342.7973 | 0.0007 | 0.000 26 | 0.350 26 | 3 833.706 | 2.855 | 24 |
| 25 | 1 812.7763 | 0.0006 | 0.000 19 | 0.350 19 | 5 176.504 | 2.856 | 25 |
| 26 | 2 447.2480 | 0.0004 | 0.000 14 | 0.350 14 | 6 989.280 | 2.856 | 26 |
| 27 | 3 303.7848 | 0.0003 | 0.000 11 | 0.350 11 | 9 436.528 | 2.856 | 27 |
| 28 | 4 460.1095 | 0.0002 | 0.000 08 | 0.350 08 | 12 740.313 | 2.857 | 28 |
| 29 | 6 021.1478 | 0.0002 | 0.000 06 | 0.350 06 | 17 200.422 | 2.857 | 29 |
| 30 | 8 128.5495 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.350 04 | 23 221.570 | 2.857 | 30 |
| 31 | 10 973.5418 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.350 03 | 31 350.120 | 2.857 | 31 |
| 32 | 14 814.2815 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.350 02 | 42 323.661 | 2.857 | 32 |
| 33 | 19 999.2800 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.350 02 | 57 137.943 | 2.857 | 33 |
| 34 | 26 999.0280 | 0.0000 | 0.000 01 | 0.350 01 | 77 137.223 | 2.857 | 34 |
| 35 | 36 448.6878 | .. | 0.000 01 | 0.350 01 | 104 136.251 | 2.857 | 35 |
| ∞ | | | | 0.350 00 | | 2.857 | ∞ |



## TABLE E–23

## 40% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.4000 | 0.7143 | 1.000 00 | 1.400 00 | 1.000 | 0.714 | 1 |
| 2 | 1.9600 | 0.5102 | 0.416 67 | 0.816 67 | 2.400 | 1.224 | 2 |
| 3 | 2.7440 | 0.3644 | 0.229 36 | 0.629 36 | 4.360 | 1.589 | 3 |
| 4 | 3.8416 | 0.2603 | 0.140 77 | 0.540 77 | 7.104 | 1.849 | 4 |
| 5 | 5.3782 | 0.1859 | 0.091 36 | 0.491 36 | 10.946 | 2.035 | 5 |
| 6 | 7.5295 | 0.1328 | 0.061 26 | 0.461 26 | 16.324 | 2.168 | 6 |
| 7 | 10.5414 | 0.0949 | 0.041 92 | 0.441 92 | 23.853 | 2.263 | 7 |
| 8 | 14.7579 | 0.0678 | 0.029 07 | 0.429 07 | 34.395 | 2.331 | 8 |
| 9 | 20.6610 | 0.0484 | 0.020 34 | 0.420 34 | 49.153 | 2.379 | 9 |
| 10 | 28.9255 | 0.0346 | 0.014 32 | 0.414 32 | 69.814 | 2.414 | 10 |
| 11 | 40.4957 | 0.0247 | 0.010 13 | 0.410 13 | 98.739 | 2.438 | 11 |
| 12 | 56.6939 | 0.0176 | 0.007 18 | 0.407 18 | 139.235 | 2.456 | 12 |
| 13 | 79.3715 | 0.0126 | 0.005 10 | 0.405 10 | 195.929 | 2.469 | 13 |
| 14 | 111.1201 | 0.0090 | 0.003 63 | 0.403 63 | 275.300 | 2.478 | 14 |
| 15 | 155.5681 | 0.0064 | 0.002 59 | 0.402 59 | 386.420 | 2.484 | 15 |
| 16 | 217.7953 | 0.0046 | 0.001 85 | 0.401 85 | 541.988 | 2.489 | 16 |
| 17 | 304.9135 | 0.0033 | 0.001 32 | 0.401 32 | 759.784 | 2.492 | 17 |
| 18 | 426.8789 | 0.0023 | 0.000 94 | 0.400 94 | 1 064.697 | 2.494 | 18 |
| 19 | 597.6304 | 0.0017 | 0.000 67 | 0.400 67 | 1 491.576 | 2.496 | 19 |
| 20 | 836.6826 | 0.0012 | 0.000 48 | 0.400 48 | 2 089.206 | 2.497 | 20 |
| 21 | 1 171.3554 | 0.0009 | 0.000 34 | 0.400 34 | 2 925.889 | 2.498 | 21 |
| 22 | 1 639.8976 | 0.0006 | 0.000 24 | 0.400 24 | 4 097.245 | 2.498 | 22 |
| 23 | 2 295.8569 | 0.0004 | 0.000 17 | 0.400 17 | 5 737.142 | 2.499 | 23 |
| 24 | 3 214.1997 | 0.0003 | 0.000 12 | 0.400 12 | 8 032.999 | 2.499 | 24 |
| 25 | 4 499.8796 | 0.0002 | 0.000 09 | 0.400 09 | 11 247.199 | 2.499 | 25 |
| 26 | 6 299.8314 | 0.0002 | 0.000 06 | 0.400 06 | 15 747.079 | 2.500 | 26 |
| 27 | 8 819.7640 | 0.0001 | 0.000 05 | 0.400 05 | 22 046.910 | 2.500 | 27 |
| 28 | 12 347.6696 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.400 03 | 30 866.674 | 2.500 | 28 |
| 29 | 17 286.7374 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.400 02 | 43 214.343 | 2.500 | 29 |
| 30 | 24 201.4324 | 0.0000 | 0.000 01 | 0.400 02 | 60 501.081 | 2.500 | 30 |
| 31 | 33 882.0053 | | 0.000 01 | 0.400 01 | 84 702.513 | 2.500 | 31 |
| 32 | 47 434.8074 | | 0.000 01 | 0.400 01 | 118 584.519 | 2.500 | 32 |
| 33 | 66 408.7304 | | 0.000 01 | 0.400 01 | 166 019.326 | 2.500 | 33 |
| 34 | 92 972.2225 | | 0.000 00 | 0.400 00 | 232 428.056 | 2.500 | 34 |
| 35 | 130 161.1116 | | | 0.400 00 | 325 400.279 | 2.500 | 35 |
| ∞ | | | | 0.400 00 | | 2.500 | ∞ |

## TABLE E–24

### 45% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.4500 | 0.6897 | 1.000 00 | 1.450 00 | 1.000 | 0.690 | 1 |
| 2 | 2.1025 | 0.4756 | 0.408 16 | 0.858 16 | 2.450 | 1.165 | 2 |
| 3 | 3.0486 | 0.3280 | 0.219 66 | 0.669 66 | 4.552 | 1.493 | 3 |
| 4 | 4.4205 | 0.2262 | 0.131 56 | 0.581 56 | 7.601 | 1.720 | 4 |
| 5 | 6.4097 | 0.1560 | 0.083 18 | 0.533 18 | 12.022 | 1.876 | 5 |
| 6 | 9.2941 | 0.1076 | 0.054 26 | 0.504 26 | 18.431 | 1.983 | 6 |
| 7 | 13.4765 | 0.0742 | 0.036 07 | 0.486 07 | 27.725 | 2.057 | 7 |
| 8 | 19.5409 | 0.0512 | 0.024 27 | 0.474 27 | 41.202 | 2.109 | 8 |
| 9 | 28.3343 | 0.0353 | 0.016 46 | 0.466 46 | 60.743 | 2.144 | 9 |
| 10 | 41.0847 | 0.0243 | 0.011 23 | 0.461 23 | 89.077 | 2.168 | 10 |
| 11 | 59.5728 | 0.0168 | 0.007 68 | 0.457 68 | 130.162 | 2.185 | 11 |
| 12 | 86.3806 | 0.0116 | 0.005 27 | 0.455 27 | 189.735 | 2.196 | 12 |
| 13 | 125.2518 | 0.0080 | 0.003 62 | 0.453 62 | 276.115 | 2.204 | 13 |
| 14 | 181.6151 | 0.0055 | 0.002 49 | 0.452 49 | 401.367 | 2.210 | 14 |
| 15 | 263.3419 | 0.0038 | 0.001 72 | 0.451 72 | 582.982 | 2.214 | 15 |
| 16 | 381.8458 | 0.0026 | 0.001 18 | 0.451 18 | 846.324 | 2.216 | 16 |
| 17 | 553.6764 | 0.0018 | 0.000 81 | 0.450 81 | 1 228.170 | 2.218 | 17 |
| 18 | 802.8308 | 0.0012 | 0.000 56 | 0.450 56 | 1 781.846 | 2.219 | 18 |
| 19 | 1 164.1047 | 0.0009 | 0.000 39 | 0.450 39 | 2 584.677 | 2.220 | 19 |
| 20 | 1 687.9518 | 0.0006 | 0.000 27 | 0.450 27 | 3 748.782 | 2.221 | 20 |
| 21 | 2 447.5301 | 0.0004 | 0.000 18 | 0.450 18 | 5 436.734 | 2.221 | 21 |
| 22 | 3 548.9187 | 0.0003 | 0.000 13 | 0.450 13 | 7 884.264 | 2.222 | 22 |
| 23 | 5 145.9321 | 0.0002 | 0.000 09 | 0.450 09 | 11 433.182 | 2.222 | 23 |
| 24 | 7 461.6015 | 0.0001 | 0.000 06 | 0.450 06 | 16 579.115 | 2.222 | 24 |
| 25 | 10 819.3222 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.450 04 | 24 040.716 | 2.222 | 25 |
| 26 | 15 688.0173 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.450 03 | 34 860.038 | 2.222 | 26 |
| 27 | 22 747.6250 | 0.0000 | 0.000 02 | 0.450 02 | 50 548.056 | 2.222 | 27 |
| 28 | 32 984.0563 | | 0.000 01 | 0.450 01 | 73 295.681 | 2.222 | 28 |
| 29 | 47 826.8816 | | 0.000 01 | 0.450 01 | 106 279.737 | 2.222 | 29 |
| 30 | 69 348.9783 | | 0.000 01 | 0.450 01 | 154 106.618 | 2.222 | 30 |
| ∞ | | | | 0.450 00 | | 2.222 | ∞ |



## TABLE E–25

### 50% Compound Interest Factors

| | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | n |
| 1 | 1.5000 | 0.6667 | 1.000 00 | 1.500 00 | 1.000 | 0.667 | 1 |
| 2 | 2.2500 | 0.4444 | 0.400 00 | 0.900 00 | 2.500 | 1.111 | 2 |
| 3 | 3.3750 | 0.2963 | 0.210 53 | 0.710 53 | 4.750 | 1.407 | 3 |
| 4 | 5.0625 | 0.1975 | 0.123 08 | 0.623 08 | 8.125 | 1.605 | 4 |
| 5 | 7.5938 | 0.1317 | 0.075 83 | 0.575 83 | 13.188 | 1.737 | 5 |
| 6 | 11.3906 | 0.0878 | 0.048 12 | 0.548 12 | 20.781 | 1.824 | 6 |
| 7 | 17.0859 | 0.0585 | 0.031 08 | 0.531 08 | 32.172 | 1.883 | 7 |
| 8 | 25.6289 | 0.0390 | 0.020 30 | 0.520 30 | 49.258 | 1.922 | 8 |
| 9 | 38.4434 | 0.0260 | 0.013 35 | 0.513 35 | 74.887 | 1.948 | 9 |
| 10 | 57.6650 | 0.0173 | 0.008 82 | 0.508 82 | 113.330 | 1.965 | 10 |
| 11 | 86.4976 | 0.0116 | 0.005 85 | 0.505 85 | 170.995 | 1.977 | 11 |
| 12 | 129.7463 | 0.0077 | 0.003 88 | 0.503 88 | 257.493 | 1.985 | 12 |
| 13 | 194.6195 | 0.0051 | 0.002 58 | 0.502 58 | 387.239 | 1.990 | 13 |
| 14 | 291.9293 | 0.0034 | 0.001 72 | 0.501 72 | 581.859 | 1.993 | 14 |
| 15 | 437.8939 | 0.0023 | 0.001 14 | 0.501 14 | 873.788 | 1.995 | 15 |
| 16 | 656.8408 | 0.0015 | 0.000 76 | 0.500 76 | 1 311.682 | 1.997 | 16 |
| 17 | 985.2613 | 0.0010 | 0.000 51 | 0.500 51 | 1 968.523 | 1.998 | 17 |
| 18 | 1 477.8919 | 0.0007 | 0.000 34 | 0.500 34 | 2 953.784 | 1.999 | 18 |
| 19 | 2 216.8378 | 0.0005 | 0.000 23 | 0.500 23 | 4 431.676 | 1.999 | 19 |
| 20 | 3 325.2567 | 0.0003 | 0.000 15 | 0.500 15 | 6 648.513 | 1.999 | 20 |
| 21 | 4 987.8851 | 0.0002 | 0.000 10 | 0.500 10 | 9 973.770 | 2.000 | 21 |
| 22 | 7 481.8276 | 0.0001 | 0.000 07 | 0.500 07 | 14 961.655 | 2.000 | 22 |
| 23 | 11 222.7415 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.500 04 | 22 443.483 | 2.000 | 23 |
| 24 | 16 834.1122 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.500 03 | 33 666.224 | 2.000 | 24 |
| 25 | 25 251.1683 | 0.0000 | 0.000 02 | 0.500 02 | 50 500.337 | 2.000 | 25 |
| ∞ | | | | 0.500 00 | | 2.000 | ∞ |

## TABLE E–26

### Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series

This table contains multipliers for a gradient G to convert the *n*-year end-of-year series 0, G, 2G, . . . (*n* — 1)G to an equivalent uniform annual series for *n* years.

| n | 1% | 2% | 3% | 4% | 5% | 6% | 7% | 8% | 10% | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.50 | 0.50 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.48 | 0.48 | 0.48 | 2 |
| 3 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.94 | 3 |
| 4 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.40 | 1.38 | 4 |
| 5 | 1.98 | 1.95 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.81 | 5 |
| 6 | 2.47 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.22 | 6 |
| 7 | 2.96 | 2.92 | 2.88 | 2.84 | 2.81 | 2.77 | 2.73 | 2.69 | 2.62 | 7 |
| 8 | 3.45 | 3.40 | 3.34 | 3.29 | 3.24 | 3.20 | 3.15 | 3.10 | 3.00 | 8 |
| 9 | 3.93 | 3.87 | 3.80 | 3.74 | 3.68 | 3.61 | 3.55 | 3.49 | 3.37 | 9 |
| 10 | 4.42 | 4.34 | 4.26 | 4.18 | 4.10 | 4.02 | 3.95 | 3.87 | 3.73 | 10 |
| 11 | 4.90 | 4.80 | 4.70 | 4.61 | 4.51 | 4.42 | 4.33 | 4.24 | 4.06 | 11 |
| 12 | 5.38 | 5.26 | 5.15 | 5.03 | 4.92 | 4.81 | 4.70 | 4.60 | 4.39 | 12 |
| 13 | 5.86 | 5.72 | 5.59 | 5.45 | 5.32 | 5.19 | 5.06 | 4.94 | 4.70 | 13 |
| 14 | 6.34 | 6.18 | 6.02 | 5.87 | 5.71 | 5.56 | 5.42 | 5.27 | 5.00 | 14 |
| 15 | 6.81 | 6.63 | 6.45 | 6.27 | 6.10 | 5.93 | 5.76 | 5.59 | 5.28 | 15 |
| 16 | 7.29 | 7.08 | 6.87 | 6.67 | 6.47 | 6.28 | 6.09 | 5.90 | 5.55 | 16 |
| 17 | 7.76 | 7.52 | 7.29 | 7.07 | 6.84 | 6.62 | 6.41 | 6.20 | 5.81 | 17 |
| 18 | 8.23 | 7.97 | 7.71 | 7.45 | 7.20 | 6.96 | 6.72 | 6.49 | 6.05 | 18 |
| 19 | 8.70 | 8.41 | 8.12 | 7.83 | 7.56 | 7.29 | 7.02 | 6.77 | 6.29 | 19 |
| 20 | 9.17 | 8.84 | 8.52 | 8.21 | 7.90 | 7.61 | 7.32 | 7.04 | 6.51 | 20 |
| 21 | 9.63 | 9.28 | 8.92 | 8.58 | 8.24 | 7.92 | 7.60 | 7.29 | 6.72 | 21 |
| 22 | 10.10 | 9.70 | 9.32 | 8.94 | 8.57 | 8.22 | 7.87 | 7.54 | 6.92 | 22 |
| 23 | 10.56 | 10.13 | 9.71 | 9.30 | 8.90 | 8.51 | 8.14 | 7.78 | 7.11 | 23 |
| 24 | 11.02 | 10.55 | 10.10 | 9.65 | 9.21 | 8.80 | 8.39 | 8.01 | 7.29 | 24 |
| 25 | 11.48 | 10.97 | 10.48 | 9.99 | 9.52 | 9.07 | 8.64 | 8.23 | 7.46 | 25 |
| 26 | 11.94 | 11.39 | 10.85 | 10.33 | 9.83 | 9.34 | 8.88 | 8.44 | 7.62 | 26 |
| 27 | 12.39 | 11.80 | 11.23 | 10.66 | 10.12 | 9.60 | 9.11 | 8.64 | 7.77 | 27 |
| 28 | 12.85 | 12.21 | 11.59 | 10.99 | 10.41 | 9.86 | 9.33 | 8.83 | 7.91 | 28 |
| 29 | 13.30 | 12.62 | 11.96 | 11.31 | 10.69 | 10.10 | 9.54 | 9.01 | 8.05 | 29 |
| 30 | 13.75 | 13.02 | 12.31 | 11.63 | 10.97 | 10.34 | 9.75 | 9.19 | 8.18 | 30 |
| 31 | 14.20 | 13.42 | 12.67 | 11.94 | 11.24 | 10.57 | 9.95 | 9.36 | 8.30 | 31 |
| 32 | 14.65 | 13.82 | 13.02 | 12.24 | 11.50 | 10.80 | 10.14 | 9.52 | 8.41 | 32 |
| 33 | 15.10 | 14.22 | 13.36 | 12.54 | 11.76 | 11.02 | 10.32 | 9.67 | 8.52 | 33 |
| 34 | 15.54 | 14.61 | 13.70 | 12.83 | 12.01 | 11.23 | 10.50 | 9.82 | 8.61 | 34 |
| 35 | 15.98 | 15.00 | 14.04 | 13.12 | 12.25 | 11.43 | 10.67 | 9.96 | 8.71 | 35 |
| 40 | 18.18 | 16.89 | 15.65 | 14.48 | 13.38 | 12.36 | 11.42 | 10.57 | 9.10 | 40 |
| 45 | 20.33 | 18.70 | 17.16 | 15.70 | 14.36 | 13.14 | 12.04 | 11.04 | 9.37 | 45 |
| 50 | 22.44 | 20.44 | 18.56 | 16.81 | 15.22 | 13.80 | 12.53 | 11.41 | 9.57 | 50 |
| 60 | 26.53 | 23.70 | 21.07 | 18.70 | 16.61 | 14.79 | 13.23 | 11.90 | 9.80 | 60 |
| 70 | 30.47 | 26.66 | 23.21 | 20.20 | 17.62 | 15.46 | 13.67 | 12.18 | 9.91 | 70 |
| 80 | 34.25 | 29.36 | 25.04 | 21.37 | 18.35 | 15.90 | 13.93 | 12.33 | 9.96 | 80 |
| 90 | 37.87 | 31.79 | 26.57 | 22.28 | 18.87 | 16.19 | 14.08 | 12.41 | 9.98 | 90 |
| 100 | 41.34 | 33.99 | 27.84 | 22.98 | 19.23 | 16.37 | 14.17 | 12.45 | 9.99 | 100 |



## TABLE E–26—*Continued*

### Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series

This table contains multipliers for a gradient G to convert the *n*-year end-of-year series 0, G, 2G, . . . (*n* — 1)G to an equivalent uniform annual series for *n* years.

| n | 12% | 15% | 20% | 25% | 30% | 35% | 40% | 45% | 50% | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.47 | 0.47 | 0.45 | 0.44 | 0.43 | 0.43 | 0.42 | 0.41 | 0.40 | 2 |
| 3 | 0.92 | 0.91 | 0.88 | 0.85 | 0.83 | 0.80 | 0.78 | 0.76 | 0.74 | 3 |
| 4 | 1.36 | 1.33 | 1.27 | 1.22 | 1.18 | 1.13 | 1.09 | 1.05 | 1.02 | 4 |
| 5 | 1.77 | 1.72 | 1.64 | 1.56 | 1.49 | 1.42 | 1.36 | 1.30 | 1.24 | 5 |
| 6 | 2.17 | 2.10 | 1.98 | 1.87 | 1.77 | 1.67 | 1.58 | 1.50 | 1.42 | 6 |
| 7 | 2.55 | 2.45 | 2.29 | 2.14 | 2.01 | 1.88 | 1.77 | 1.66 | 1.56 | 7 |
| 8 | 2.91 | 2.78 | 2.58 | 2.39 | 2.22 | 2.06 | 1.92 | 1.79 | 1.68 | 8 |
| 9 | 3.26 | 3.09 | 2.84 | 2.60 | 2.40 | 2.21 | 2.04 | 1.89 | 1.76 | 9 |
| 10 | 3.58 | 3.38 | 3.07 | 2.80 | 2.55 | 2.33 | 2.14 | 1.97 | 1.82 | 10 |
| 11 | 3.90 | 3.65 | 3.29 | 2.97 | 2.68 | 2.44 | 2.22 | 2.03 | 1.87 | 11 |
| 12 | 4.19 | 3.91 | 3.48 | 3.11 | 2.80 | 2.52 | 2.28 | 2.08 | 1.91 | 12 |
| 13 | 4.47 | 4.14 | 3.66 | 3.24 | 2.89 | 2.59 | 2.33 | 2.12 | 1.93 | 13 |
| 14 | 4.73 | 4.36 | 3.82 | 3.36 | 2.97 | 2.64 | 2.37 | 2.14 | 1.95 | 14 |
| 15 | 4.98 | 4.56 | 3.96 | 3.45 | 3.03 | 2.69 | 2.40 | 2.17 | 1.97 | 15 |
| 16 | 5.21 | 4.75 | 4.09 | 3.54 | 3.09 | 2.72 | 2.43 | 2.18 | 1.98 | 16 |
| 17 | 5.44 | 4.93 | 4.20 | 3.61 | 3.13 | 2.75 | 2.44 | 2.19 | 1.98 | 17 |
| 18 | 5.64 | 5.08 | 4.30 | 3.67 | 3.17 | 2.78 | 2.46 | 2.20 | 1.99 | 18 |
| 19 | 5.84 | 5.23 | 4.39 | 3.72 | 3.20 | 2.79 | 2.47 | 2.21 | 1.99 | 19 |
| 20 | 6.02 | 5.37 | 4.46 | 3.77 | 3.23 | 2.81 | 2.48 | 2.21 | 1.99 | 20 |
| 21 | 6.19 | 5.49 | 4.53 | 3.80 | 3.25 | 2.82 | 2.48 | 2.21 | 2.00 | 21 |
| 22 | 6.35 | 5.60 | 4.59 | 3.84 | 3.26 | 2.83 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 22 |
| 23 | 6.50 | 5.70 | 4.65 | 3.86 | 3.28 | 2.83 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 23 |
| 24 | 6.64 | 5.80 | 4.69 | 3.89 | 3.29 | 2.84 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 24 |
| 25 | 6.77 | 5.88 | 4.74 | 3.91 | 3.30 | 2.84 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 25 |
| 26 | 6.89 | 5.96 | 4.77 | 3.92 | 3.30 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 26 |
| 27 | 7.00 | 6.03 | 4.80 | 3.94 | 3.31 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 27 |
| 28 | 7.11 | 6.10 | 4.83 | 3.95 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 28 |
| 29 | 7.21 | 6.15 | 4.85 | 3.96 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 29 |
| 30 | 7.30 | 6.21 | 4.87 | 3.96 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 30 |
| 31 | 7.38 | 6.25 | 4.89 | 3.97 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 31 |
| 32 | 7.46 | 6.30 | 4.91 | 3.97 | 3.33 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 32 |
| 33 | 7.53 | 6.34 | 4.92 | 3.98 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 33 |
| 34 | 7.60 | 6.37 | 4.93 | 3.98 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 34 |
| 35 | 7.66 | 6.40 | 4.94 | 3.99 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 35 |
| 40 | 7.90 | 6.52 | 4.97 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 40 |
| 45 | 8.06 | 6.58 | 4.99 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 45 |
| 50 | 8.16 | 6.62 | 4.99 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 50 |
| 60 | 8.27 | 6.65 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 60 |
| 70 | 8.31 | 6.66 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 70 |
| 80 | 8.32 | 6.67 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 80 |
| 90 | 8.33 | 6.67 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 90 |
| 100 | 8.33 | 6.67 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 100 |

Ejemplo.

Calcular el descuento correspondiente a $1,000.00 pagaderos dentro de 10 años, si la tasa de descuento es del 4% computado semestralmente

tasa de descuento (nominal) = 4%
tasa de descuento real semestral = 4/2 = 2%
número de periodos semestrales en 10 años = 20

La cantidad P que será entregada al prestatario después de descontar por adelantado los intereses será:

$$P = F(1-d)^n = \$1,000.00\,(1-0.02)^{20} = \$1,000.\,(0.98)^{20}$$

cálculo de $(0.98)^{20}$:

$$\log(0.98)^{20} = 20\log(0.98) = 20 \cdot \bar{1}.991226$$
$$= \overline{20} + 19.82452$$
$$= \bar{1}.82452$$
$$(0.98)^{20} = \text{antilog}\ \bar{1}.82452 = 0.66761$$

por tanto: $P = \$1,000.00 \times 0.66761 = \$667.61$

y el descuento será:

$$\text{Descuento} = F - P = \$1,000 - \$667.61$$
$$\text{Descuento} = \$332.39$$

---

INTERPOLACION

Cuando en un momento dado, los valores requeridos para determinadas (i) o (n), no se encuentran en las tablas, y a fin de no tener que calcularlos directamente a partir de las fórmulas, se puede interpolar entre los dos valores más cercanos al buscado.

Dado que los factores no son lineales, aceptamos que al interpolar estamos introduciendo errores; sin embargo estos están normalmente dentro de rangos de tolerancia

Sin embargo, para ciertos factores, y para determinado rango de valores de (i) y de (n), el error que se introduce al interpolar, puede ser considerable.

En cada caso, el buen juicio y el criterio, determinarán si es prudente encontrar los valores buscados mediante la interpolación, o es conveniente partir directamente de las fórmulas y calcularlos por ejemplo, con la ayuda de los logaritmos.

Ejemplo:

Calcular el valor de : $_{32\%-15}crf$

teniendo como datos los valores proporcionados por las tablas:

$_{30-15}crf = 0.305978$

$_{35-15}crf = 0.352926$

0.305978 — 0.352926

30 — 32 — 35

Procediendo por interpolación tendremos que:

$$_{32-15}crf = 0.305978 + (0.352926 - 0.305978) \times \frac{2}{5}$$
$$= 0.305978 + 0.019179$$
$$= 0.325157$$

Calculémoslo directamente a partir de la fórmula:

$$_{32-15}crf = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{0.32(1+0.32)^{15}}{(1+0.32)^{15} - 1}$$

cálculo de: $(1.32)^{15}$

$$\log (1.32)^{15} = 15 \log 1.32$$
$$= 15 \times 0.120574 = 1.80861$$
$$\therefore (1.32)^{15} = \text{anti.log. } 1.80861 = 64.35894$$

$$_{32-15}crf = \frac{0.32 \times 64.35894}{64.35894 - 1} = 0.3250505$$

Vemos que en este caso, la diferencia entre los valores obtenidos por interpolación y directamente, es apenas de : 0.03 %

---

Ejemplo:

Calcular el valor de : $_{15\%-28}spcaf$

teniendo como dato los valores : $_{15\%-25}spcaf = 32.919$

$_{15\%-30}spcaf = 66.212$

32.919 — 66.212

n = 25 — n = 28 — n = 30

Procediendo por interpolación:

$$_{15-28}spcaf = 32.919 + (66.212 - 32.919) \cdot 3/5 =$$
$$= 32.919 + 19.976$$
$$= 52.895$$

Calculémoslo directamente:

$$_{15-28}spcaf = (1+0.15)^{28}$$

$$\log (1.15)^{28} = 28 \log 1.15 = 28 \times 0.060698 = 1.699544$$
$$(1.15)^{28} = \text{antilog } 1.699544 = 50.066$$

Vemos que en este caso el error debido a la interpolación es de 5.65 %, que en un caso específico pudiese tener consecuencias apreciables.

Otro procedimiento que en este caso pudiese seguirse, sería:

$$_{15-28}spcaf = (1+0.15)^{28} = (1+0.15)^{25} \cdot (1+0.15)^{3}$$

donde los valores de estos 2 factores sí están tabulados:

$$(1+0.15)^{28} = 32.919 \cdot 1.5209 = 50.066$$

método con el cual también se encuentra el valor exacto.

---

Ejemplo:

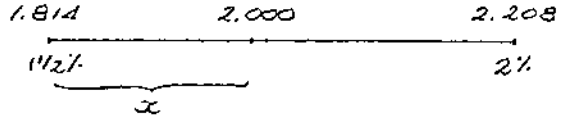
¿A qué tasa de interes, computada trimestralmente, se duplica un capital P invertido a 10 años? Calcular la tasa real trimestral, la tasa nominal anual y la tasa efectiva.


$$P \; _{i-40}spcaf = 2P$$
$$_{i-40}spcaf = 2$$

En las tablas, se pueden encontrar los siguientes valores:

$$_{1\frac{1}{2}-40}spcaf = 1.814$$

$$_{2-40}spcaf = 2.208$$




Interpolando, se obtiene:

$$i = 1\tfrac{1}{2}\% + x = 1\tfrac{1}{2} + \left(\frac{2.000 - 1.814}{2.208 - 1.814}\right) \cdot \tfrac{1}{2} = 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{0.186}{0.394}$$

$$i = 1.5 + 0.236 = 1.736\ \% \quad \text{(tasa real trimestral)}$$

La tasa nominal anual será: $1.736\% \times 4 = 6.944\%$
La tasa efectiva será:

$$\underset{1.736\%-4}{spcaf} - 1 = (1+0.01736)^4 - 1 = 0.07127$$
$$= 7.127\%$$

El problema también se puede resolver mediante la fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[40]{\frac{2P}{P}} - 1 = \sqrt[40]{2} - 1$$

$$\log \sqrt[40]{2} = \frac{\log 2}{40} = \frac{0.30103}{40} = 0.007526$$

$$\sqrt[40]{2} = \text{antilog. } 0.007526 = 1.0175$$

$$i = \sqrt[40]{2} - 1 = 1.0175 - 1 = 0.0175 = 1.75\% \text{ (tasa real trimestral)}$$

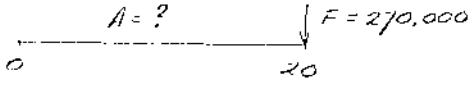
tasa nominal anual $= 1.75 \times 4 = 7.0\%$
tasa efectiva $= \underset{1.75-4}{spcaf} - 1 = 1.07186 - 1 = 0.07186$
$= 7.186\%$

---

Ejemplo:

Una familia desea ahorrar durante los próximos 5 años, \$270.000.$^{00}$ para la adquisición de una casa de campo. Si tiene oportunidad de invertir al 10% anual computado trimestralmente, ¿cuánto debe ahorrar anualmente?

Dado que tenemos como dato la tasa real trimestral que es de: $10/4 = 2.5\%$, tendremos que trabajar en periodos trimestrales que en 5 años son: $5 \times 4 = 20$ periodos




$$A = F \cdot (A/F, i\%, n)$$
$$A = \$270.000. \cdot (A/F, 2.5\%, 20)$$
$$A = \$270.000 \times 0.039147$$
$$A = \$10.569.^{69} \text{ /trimestrales}$$

Pero como el importe del ahorro que se busca es el anual:

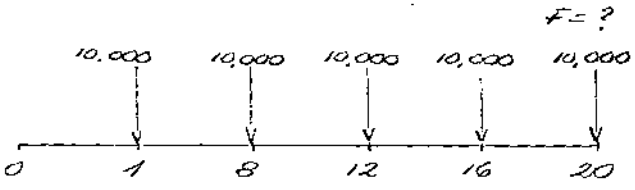

$$F = A \cdot (F/A, i\%, n)$$
$$F = \$10.569.^{69} \cdot (F/A, 2.5\%, 4)$$
$$F = \$10.569.^{69} \times 4.1525 = \$43.890.^{64} \text{ /anuales.}$$

Ejemplo:

Una persona espera recibir un bono por ₡10.000.- al final de cada año y por los próximos 5 años. Si cada bono le redituará un 12% anual computado trimestralmente, ¿cuándo tendrá acumulado al término de los 5 años?

tasa real trimestral = 12/4 = 3%
número de periodos trimestrales en 5 años: 5×4 = 20

1° método




$$F = 10{,}000 \cdot (F/P, 3\%, 16) + 10{,}000 \cdot (F/P, 3\%, 12) + 10{,}000 \cdot (F/P, 3\%, 8) + 10{,}000 \cdot (F/P, 3\%, 4) + 10{,}000$$

$$F = 10{,}000 \times (1.60471 + 1.42576 + 1.26677 + 1.12552 + 1)$$

$$F = 10{,}000 \times 6.42276 = ₡64{,}227.^{60}$$

2° método:

$$F = 10{,}000 \cdot (A/F, 3\%, 4) \cdot (F/A, 3\%, 20)$$

$$F = 10{,}000 \cdot 0.22903 \cdot 26.870$$

$$F = ₡64{,}227.^{60}$$

3° método:

$$F = 10{,}000 \cdot (A/P, 3\%, 4) \cdot (F/A, 3\%, 16)$$

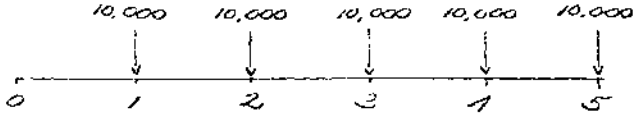
$$F = 10{,}000 \times 0.26903 \cdot 20.157$$

$$F = ₡64{,}227.^{60}$$

4° método:

Calculemos la tasa efectiva correspondiente a una tasa real trimestral de 3%:

tasa efectiva = $(F/P, 3\%, 4) - 1 = 0.12551$



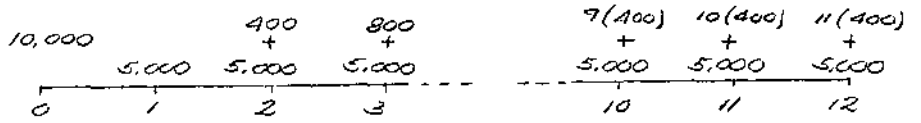

$$F = ₡10{,}000 \cdot (F/A, 12.551\%, 5)$$

$$(F/A, 12.551\%, 5) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0.12551)^5 - 1}{0.12551} = \frac{1.80612 - 1}{0.12551} = 6.42276$$

$$F = ₡10{,}000 \times 6.42276 = ₡64{,}227.^{60}$$

Ejemplo:

Una máquina cuesta: $10,000.00 ya instalada. Se considera tendrá un costo de operación total, de $5,000.00 durante el primer año y se supone se incrementarán en $400. cada año. Si se fija para el capital una tasa de interes anual de 10%, ¿cuál será el costo total de la máquina después de 12 años de operación?




$$F = 10,000 \; {}_{10-12}spcaf + \left[5,000 + 400 \; {}_{10-12}asf\right] \cdot {}_{10-12}uscaf$$

$$F = 10,000 \cdot 3.1384 + \left[5,000 + 400 \times 4.3884\right] \times 21.384$$

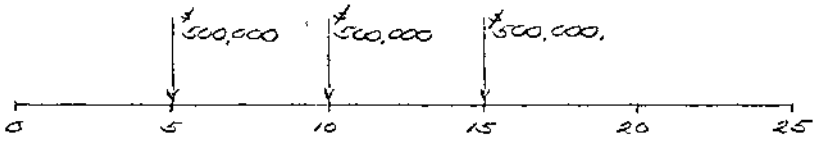
$$F = 31,384. + \left[5,000 + 1,755.36\right] \times 21.384$$

$$F = \$175,832.92$$

---

Ejemplo:

Como parte de un analisis económico de la factibilidad de invertir en un edificio, y unicamente por lo que se refiere al renglón de reparaciones mayores, se supone que las erogaciones necesarias, serán de $500,000.00 al final de los años: 5, 10, 15. Se desea calcular la serie uniforme equivalente de pagos anuales durante 25 años correspondiente a este concepto. Se considera como tasa minima aceptable de recuperación, la de 15%.




$$A = F \cdot (A/F, 15\%, 5) = 500,000. \cdot 0.14832 = \$74,160.00$$

$$P = A \; (P/A, 15\%, 15) = 74,160.00 \cdot 5.8474 = \$433,643.18$$

El valor P anterior es la cantidad total equivalente a la serie de pagos real, expresada en el momento 0. La serie de pagos anuales, equivalente al flujo de efectivo real y distribuido en los 25 años, sera:

$$A = P \; (A/P, 15\%, 25) = 433,643.18 \times 0.1547 = \$67,084.60$$

Comprobemos que la serie de pagos (A) anterior es efectivamente equivalente a la serie de pagos reales:

$$F = A \cdot (F/A, 15\%, 25) = 67.084.^{60} \times 212.793 = \$14.274.600.^{00}$$

Por otro lado, proyectando cada uno de los pagos reales al término del año 25:

$$F = 500.000.^{00} \left[ (F/P, 15\%, 20) + (F/P, 15\%, 15) + (F/P, 15\%, 10) \right]$$

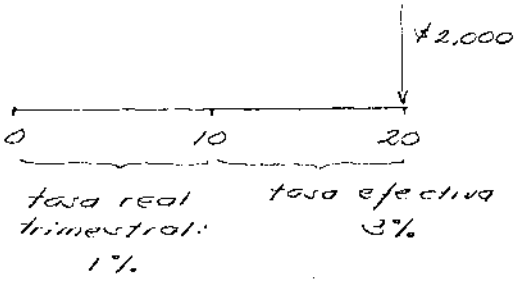
$$F = 500.000 \ (16.3665 \quad + \quad 8.1371 \quad + \quad 4.0456$$

$$F = \$14.274.600.^{00}$$

---

Ejemplo:

Encontrar el valor presente de \$2.000.00 pagaderos al final de 20 años a una tasa de interes de 4% anual computable trimestralmente durante los 10 primeros años y de 3% efectivo durante los 10 años posteriores.




El valor de los \$2.000.00 al año 10, será:

$$P_{(\text{al año } 10)} = 2.000. \cdot {}_{3-10}spp\omega f = 2.000 \cdot \frac{1}{(1+0.03)^{10}}$$

Esta cantidad reflejada al momento 0:

$$P = P_{(\text{al año } 10)} \cdot {}_{1-40}spp\omega f = P_{(\text{al año } 10)} \cdot \frac{1}{(1+0.01)^{40}}$$

por tanto:

$$P = \$2.000.^{00} \ {}_{3-10}spp\omega f \cdot {}_{1-40}spp\omega f$$

que también puede expresarse:

$$P = 2.000.^{00} \cdot (1+0.03)^{-10} \cdot (1+0.01)^{-40}$$

$$P = 2.000.^{00} \cdot 0.74409 \cdot 0.67165 = \$\ 999.^{51}$$

Ejemplo:

Un agiotista presta pequeñas cantidades de dinero, cobrando un interes del 5% mensualmente pero por adelantado. Si después de un mes la deuda no es cubierta, nuevamente cobra el 5%, y asi, hasta que la cuenta sea liquidada. ¿cuál es la tasa efectiva de interes que está cobrando?

De acuerdo con el enunciado, la tasa de descuento real mensual es de un 5%.

Esto también se comprende si recordamos que: tasa efectiva de descuento = diferencia entre la unidad y su valor presente en un periodo unitario de tiempo.

En este caso, por cada ₡1.00, el prestatario recibe en un mes: ₡0.95

$$\therefore \quad d_{real\ mens.} = 1.00 - 0.95 = 0.05 = 5\%$$

Ahora bien:

$$i_{real\ mensual} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.05}{1-0.05} = 0.05263$$

$$i_{efectiva} = \underset{5.263-12}{spcaf} - 1 = (1+0.05263)^{12} - 1$$

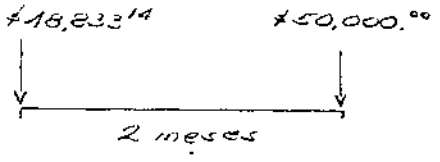
$$= 1.85058 - 1 = 0.85058$$

$$= 85.058\ \%$$

---

Ejemplo:

Un individuo solicita en un Banco, un préstamo de ₡50,000 a 2 meses. Al serle otorgado dicho préstamo se le hace entrega de ₡48,833.14. Desea saber cuál es la tasa de interes equivalente efectiva.




$$d = \frac{F-P}{F} = \frac{50{,}000 - 48{,}833.14}{50{,}000} = \frac{1{,}166.86}{50{,}000} = 0.02333 = 2.333\ \%$$

esta es la tasa de descuento real bimestral

la tasa de interes ($i$) equivalente, será:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.02333}{1-0.02333} = 0.023895 \text{ / bimestral}$$

$$i_{efectiva} = \underset{2.3895-6}{spcaf} - 1 = (1+0.023895)^6 - 1$$
$$= 0.1522$$
$$= 15.22\ \%$$

Para calcular la cantidad que debia darsele líquida al cliente, el empleado del Banco procedió de la siguiente manera, sabiendo que la tasa de descuento establecida por la institución es de 14% anual nominal:

tasa de descuento real bimestral : $14/6 = 2.333\ \%$

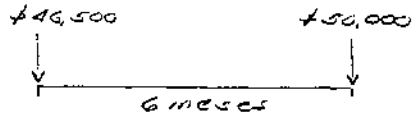
descuento : $\$50.000'' \times 0.02333 = \$1.166.^{86}$
por tanto : cantidad a entregar : $P = 50.000 - 1.166.^{86}$
$= \$48.833.^{14}$

o también:

$$P = F(1-d)^n = 50.000\,(1-0.02333)^1$$
$$= 50.000\,(0.976663)$$
$$= \$48.833.^{14}$$

---

En el mismo ejemplo anterior, si se hubiese solicitado el préstamo por 6 meses:




tasa de descuento nominal anual = 14%
tasa de descuento real semestral = 7%
descuento cobrado por anticipado:
$\$50.000.^{00} \times 0.07 = \$3.500.'$
cantidad líquida a entregar: $50.000 - 3.500' = \$46.500.'$

$$i_{real\ semestral} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.07}{1-0.07} = \frac{0.07}{0.93} = 0.075269$$

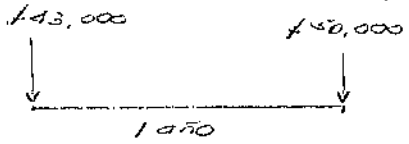
o de otra manera:

$$i_{real\ semestral} = \frac{F-P}{P} = \frac{\$3.500.^{00}}{\$46.500.^{00}} = 0.075269$$

$$i_{efectiva} = \underset{7.5269-2}{spcaf} - 1 = (1+0.075269)^2 - 1$$
$$= 0.1562$$
$$= 15.62\ \%$$

Si el préstamo se hubiese solicitado a un año.

tasa de descuento anual = 14 %
descuento anticipado = 50,000.00 × 0.14 = $ 7,000.
cantidad líquida a entregar: 50,000 − 7,000 = $ 43,000




$$i_{efectiva} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.14}{1-0.14} = \frac{0.14}{0.86} = 0.16279$$

o también:

$$i_{efectiva} = \frac{F-P}{P} = \frac{\$\,7{,}000.}{\$\,43{,}000} = 0.16279$$

o sea: $i_{efectiva} = 16.279\ \%$

La traducción a una $i_{efectiva}$ equivalente, de la tasa de descuento (d) con que realmente se afecta la operación, es solo con el fin de poder comparar la alternativa con otras alternativas, cuyas tasas de recuperación se expresan normalmente en base anual. Esta (i) es solo equivalente a cada situación, y esta es la razón por lo cual se obtienen diferentes tasas efectivas a partir del comportamiento de una tasa de descuento aplicada en la realidad a periodos bimestrales, semestrales y anuales.

TEMA II

# DESARROLLO Y ANALISIS DE FORMULAS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION.

## TEMARIO.

Nomenclatura.

Interés Simple.

Facotr de un Pago Unico con interés compuesto.

Factor de Actualización de un pago único.

Factor de Interés Compuesto de una serie uniforme de pagos.

Factor del Fondo de Amortización.

Factor de Recuperación del Capital.

Factor de Actualización de una serie uniforme de pagos.

Algunas relaciones entre las Fórmulas.

Serie de Pagos con Gradiente de Incremento:

- Gradiente de Incremento Aritmético.
- Gradiente de Incremento Geométrico.

Valores límite de las Fórmulas.

Interés Continuo.

Interés Nominal e Interés efectivo.

Tasa de descuento.

Interpolación.

Significado de la Equivalencia entre alternativas.

SIGNIFICADO DEL CONCEPTO: Equivalencia entre Alternativas.

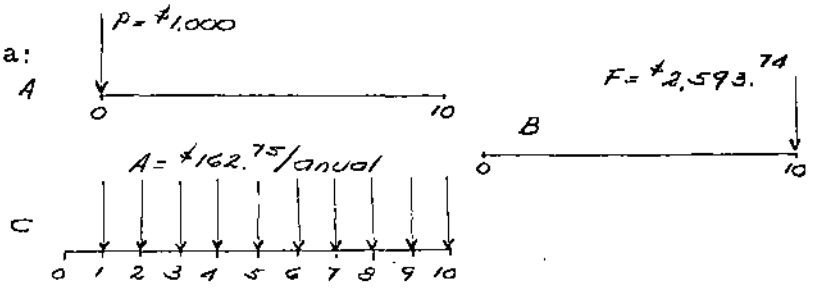
Supongamos que en un momento dado se nos presentan las siguientes alternativas para el pago de una deuda:

A) Pagar $ 1,000.00 ahora.

B) Pagar $ 2,593.74 dentro de 10 años.

C) Pagar $ 162.75 al final de cada año, durante los próximos 10 años.

Estas alternativas se representarían en una escala de tiempos, de la siguiente manera:




Lo primero que se nos ocurriría para comparar las alternativas, sería expresar los diferentes flujos de efectivo en una sola cantidad equivalente ubicada en un mismo punto de la escala de tiempos, es decir, en un mismo momento físico, dado que ahora las cantidades que constituyen las distintas formas de pago, están expresadas en distintos puntos del tiempo y por tanto no son comparables debido al principio del "valor del dinero con el tiempo".

Supongamos que decidimos expresar los pagos de cada alternativa mediante una única cantidad equivalente, ubicada en el momento cero, o lo que es lo mismo, vamos a actualizar o a encontrar el Valor Presente del flujo de pagos de cada alternativa; y para lo cual

fijamos como la tasa de interés del dinero, nuestra tasa mínima atractiva de recuperación. Supongamos que en el momento actual en que debemos tomar la decisión, dicha tasa la estimamos en un 10%.

En estas condiciones, tenemos:

Valor Presente de la alternativa A:

$$VP_A = \$1{,}000.''$$

Valor Presente de la alternativa B:

$$VP_B = \$2{,}593.^{74} \cdot (P/F, 10\%, 10) = 2{,}593.^{74} \times 0.385543 = \$1{,}000.''$$

Valor Presente de la alternativa C:

$$VP_C = \$162.^{75} \cdot (P/A, 10\%, 10) = 162.^{75} \cdot 6.144567 = \$1{,}000.''$$

Nos encontramos ahora, con que expresados en un mismo punto del tiempo, especificamente en el punto cero, las 3 alternativas equivalen a $ 1,000.00 bajo la tasa mínima atractiva de recuperación.

En estas condiciones decimos que las 3 alternativas "equivalentes", lo cual no significa evidentemente que las 3 alternativas sean - - iguales sino que solo sus valores en el tiempo son iguales, y esto, a una tasa de interés del 10%.

Nos preguntamos ahora, ¿cuál es en estas circunstancias el - - criterio para decidir entre una u otra de las alternativas? Sabemos que varios factores del tipo no monetario pudiesen ser determinantes para la selección de una alternativa; así por ejemplo, si no te-

nemos la liquidez suficiente para pagar $1,000.00 ahora, esto es determinante al menos, para rechazar la alternativa A y - aceptar alguna de las otras alternativas mediante las cuales se - difiere el pago de la deuda. Otros argumentos de este tipo, pudieran ser, riesgo, necesidad de emplear los fondos disponibles en otros fines, imagen ante el acreedor, situación general de los negocios, etc.... Pero haciendo abstracción por un momento de los argumentos de tipo no monetario, (sin que esto implique ni negar su importancia ni dejar de reconocer que en determinadas circunstancias pudiesen ser determinantes), nos preguntamos si: ¿no hay otro argumento económico que nos ayude a decir sobre una de las 3 alternativas?, ¿nos es indiferente cual de las alternativas se seleccione?.

Analicemos más a fondo las diferencias entre las alternativas A y B:

Seleccionar A sobre B, significaría gastar $ 1,000.00 ahora, con lo cual se evitaría (se ahorraría) gastar $ 2,593.74 dentro de 10 años. Veamoslo de otra forma: elegir A, equivale a invertir (pagar) ahora $ 1,000.00 y recibir (no tener que pagar), $ 2,593.74 dentro de 10 años.

¿Nos conviene esta inversión propuesta?, ¿cuál sería la tasa de recuperación de esta inversión?, calculémosla:

$$\$1.000.\cdot\cdot \cdot (F/P, i\%, 10) = \$2,593.74$$

despejando: $(F/P, i\%, 10) = 2.59374$

entrando en las tablas, se obtiene que el valor de (i) necesario para que el factor (F/p) adquiera el valor 2.59374 es:

$$i = 10\%$$

Ahora bien, dado que este valor es igual al de la tasa estipulada como mínima atractiva de recuperación, concluimos que la inversión propuesta, representada por la alternativa A, debe ser aceptada, por lo que podemos decir que la alternativa A es preferible a la alternativa B, lo cual se expresa:

$$A > B$$

Recordemos que por definición, latasa mínima atractiva de recuperación es aquella tasa mínima ante la cual responderíamos "si" a cualquier propuesta de inversión que la asegurase. Por otro lado al definir el concepto de la tasa mínima atractiva de recuperación, dejamos establecido el que una vez fijada esta, cualquier alternativa que ofrezca una tasa igual o superior a ella, debe ser aceptada y cualquiera que brinde una tasa menor debe ser rechazada; y dado que, es el ejemplo anterior si supuso que la tasa mínima era del 10%, y al analizar la alternativa A (enfocada como inversión) sobre la alternativa B, se determinó que ofrecía una tasa de recuperación igual

a dicha tasa mínima del 10%, concluimos que debe aceptarse la inversión propuesta por A al ser comparada con la alternativa B.

De la misma manera, al comparar las alternativas B y C, observamos que:

Seleccionar C sobre B significa gastar $ 162.75 al año, durante 10 años para evitar (ahorrar) pagar $ 2,593.74 al final de esos mismos 10 años. Visto de otra forma: equivale a invertir $ 162.75 al final de cada año, y recibir (no tener que pagar) $ 2,593.74 al final de los 10 años. Para calcular la tasa de recuperación que la alternativa C ofrece (enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación está representada por B), procedemos:

$$\$162.75 \cdot (F/A, i\%, 10) = \$2,593.74$$

despejando : $(F/A, i\%, 10) = 15.9374$

de donde resulta : $i = 10\%$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación establecida, siguiendo un razonamiento similar al anterior, concluimos que la alternativa C es preferible a la B, lo que se expresa:

$$C > B$$

Por último, al hacer la comparación entre A y C observamos que: Seleccionar A sobre C significa gastar $ 1,000.00 ahora y evitar (ahorrar) pagar $ 162.75 durante los próximos años, lo cual visto en otra forma, equivale a invertir (pagar) ahora $ 1,000.00 y recibir

(no tener que pagar) $ 162.75 al final de cada año durante los -- próximos 10 años. La tasa de recuperación que la alternativa A ofrece (enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación está representada por C), sería:

$$\$1{,}000.\cdot (A/P, i\%, 10) = \$162.75$$

despejando: $(A/P, i\%, 10) = 0.16275$

de donde resulta: $i = 10\%$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación establecida, mediante un razonamiento analogo al anterior, concluimos que la alternativa A es preferible a la alternativa C, lo cual se expresa:

Por las tres comparaciones sucesivas anteriores, concluimos finalmente que de entre las alternativas A, B y C propuestas, debemos optar por la alternativa A.

Todo lo anterior demuestra que aún siendo equivalentes ciertas - alternativas propuestas, no son en si, iguales,sino que solo estan ligadas por su valor a través del tiempo y que el hecho de elegir entre ellas, no cae al terreno de la indiferencia, sino que basados en principios y conceptos básicos definidos anteriormente, y sin tomar en consideración otros factores de tipo no monetario que pudiesen influir, podemos aun en estos casos establecer criterios de juicio que nos permiten seleccionar económicamente alguna de ellas.

Hay que hacer notar que las 3 alternativas anteriores se refieren a distintas formas de pagos, y el hecho de enfocar cada una de ellas, como inversiones cuya recuperación es "el no tener que pagar" en alguna de las otras formas, no constituye sino un mero artificio que en nada altera la concepción real del problema y que en cambio si nos auxilia en el análisis económico de la situación para efectos de seleccionar la alternativa que resulte más económica.

La situación de equivalencia entre las alternativas propuestas, se originó de haber establecido como tasa mínima de recuperación, la de 10%. Si esta tasa se altera, las alternativas ya no serán equivalentes y la selección entre ellas se llevará a cabo con un criterio distinto, como se muestra en el siguiente caso:
Supongamos ahora, que estimamos que nuestra tasa mínima atractiva de recuperación es de 15 %. Al actualizar las corrientes de egresos y determinar el valor presente de cada alternativa se tiene:

Valor presente de la alternativa A:

$$VP_A = \$1,000.\cdot\cdot$$

Valor presente de la alternativa B:

$$VP_B = \$2,593.^{74} \cdot (P/F,\ 15\%,\ 10) = \$2,593.^{74} \cdot 0.2472 = \$641.^{17}$$

Valor presente de la alternativa C:

$$VP_C = \$162.^{75} \cdot (P/A,\ 15\%,\ 10) = \$162.^{75} \cdot 5.019 = \$816.^{84}$$

Observamos que la alternativa B tiene el menor costo equivalente,

por lo que ahora constituye la alternativa a seleccionar, y asi por ejemplo, no seleccionamos A sobre B, puesto que esto significaría invertir (gastar) $ 1,000.00 ahora y recibir (no tener que pagar) - $ 2,593.74 dentro de 10 años, pero esta inversión no nos es atractiva, pues la tasa de recuperación que ofrece es tan solo de un - 10 %, que resulta inferior al límite establecido por la tasa estimada como: mínima atractiva de recuperación, que es de 15%, por lo que la alternativa A, debe ser rechazada. Un razonamiento similar podría aplicarse a la comparación de la alternativa C con respecto a la alternativa B.

El que la mejor alternativa sea en estas condiciones, la alternativa B, quiere decir que lo más conveniente económicamente es diferir el pago de la deuda por 10 años y pagar al final $ 2,593.74; y el que nuestro acreedor solicitase que la deuda fuese pagada ahora, esto solo nos sería atractivo, si el mismo aceptase recibir $ 641.17 ahora en lugar de $ 1,000.00.

# T E M A III

## METODOS DE COMPARACION ENTRE ALTERNATIVAS.

Vamos a aplicar todo lo anteriormente visto para el análisis de una alternati - va, a la comparación entre 2 ó más alternativas.

Expondrémos los 3 métodos más aplicables en el campo industrial y median - te los cuales resulta práctica comparar alternativas de inversión que presen - ten distintas series de ingresos y egresos a lo largo del horizonte económico - de comparación.

Los métodos a que se hace referencia son :

1) Método del costo anual equivalente, con tasa mínima atractiva de recuperación, establecida y aplicada como tasa de interés.

2) Método del valor presente, con tasa mínima atractiva de recu - peración establecida y aplicada como tasa de interés.

3) Método de la tasa de recuperación, en donde se calcula la tasa de recuperación problable de cada una de las inversiones pro - puestas y se comparan con la tasa mínima atractiva de recupera - ción establecida.

Otro método empleado en problemas de decisiones económicas, pero principal- mente ubicadas en el sector público, es el de la comparación de las alternati -

vas propuestas mediante el índice: Beneficio/ Costo que cada una de ellas - ofrece.

Demostraremos que con cualquiera de los métodos anteriores, correctamente aplicados y con base a una misma tasa mínima atractiva de recuperación, se - llega a la misma respuesta en cuanto a la alternativa que deba seleccionarse, al menos en aquéllos casos en que es fisicamente posible elegir una sola de - entre las alternativas propuestas.

Sin embargo, llegaremos también a la conclusión de que cada método presenta ventajas y desventajas de ser empleado como elemento de juicio en cada caso particular, debido a que en cada método se dá distinto peso a los diferentes factores de costo o ingreso.

Dado que al comparar alternativas lo que nos interesa son sus diferencias relativas y debido al hecho de que en muchos de los problemas que se nos presentan en el campo de la Ingeniería Económica, las diversas alternativas que tomamos en cuenta, son para un mismo fín, es decir, son para resolver un mis - mo problema; y si los sometemos a análisis y a comparación, es porque consi - deramos que en principio, cualquiera de ellas nos lo resolvería, solo que pretendemos selecionar la que nos resulte más económica, Es por ésto que en - términos generales, todas las alternativas que intervienen en la comparación - representan para nosotros el mismo beneficio. Por lo anterior, casi siempre al establecer las diferencias entre ellas, lo hacemos en base a los costos ó - egresos en general y en ocasiones, el único ingreso considerado es el valor de

rescate al final de la vida económica.

No obstante, cuando los ingresos o beneficios monetarios en general, difieren en cuanto al momento de presentarse ó en cuanto a su seriación, deben tomarse en cuenta e incluirse en el flujo de efectivo.

En éstas condiciones, el análisis económico se inicia con la estimación de los egresos que cada alternativa implica, tanto en monto como en fecha de ocurrencia. La etapa anterior está íntimamente ligada a la determinación del periodo dentro del cual cada alternativa deba ser estudiada, es decir, su horizonte económico.

Una vez establecidos los elementos anteriores, puede suceder que una de las alternativas se muestre en una primera inspección como la más económica, lo cual haga innecesario cualquier análisis posterior.

Ahora bién, rara vez ocurre lo anterior. Normalmente las alternativas presentan flujos de caja tales que muestran costos iniciales relativamente bajos y erogaciones altas a lo largo del horizonte económico, o bién, erogaciones altas iniciales que originan beneficios futuros y reducción de costos futuros. El análisis en estos casos se reduce a investigar si éstos costos mayores iniciales se compensan con los beneficios que originan.

## METODO DEL COSTO ANUAL

Este método consiste fundamentalmente en traducir el flujo de efectivo de cada una de las alternativas por comparar, en una serie uniforme anual equivalente, lo que permitirá poder comparar ya homogeneizadas, alternativas que en la realidad presentan flujos de efectivo, totalmente diferentes entre sí.

El "costo o beneficio anual" resultante, es simplemente un modelo de costo o beneficio, en base a una tasa mínima atractiva de recuperación; es solo una representación de lo que en la realidad estimamos sucederá de seguir cada una de las alternativas propuestas, solo que transformado en una serie uniforme anual equivalente.

El método puede emplearse para comparar las alternativas en base al costo que implican o al beneficio que aportan, razón por la cual también se conoce como: método del beneficio anual. La alternativa con el costo anual equivalente más bajo o con el beneficio anual equivalente más alto, según el caso, será la que deba seleccionarse.

Adoptaremos la siguiente nomenclatura para la aplicación del método:

- $P$ : monto de la inversión total; costo inicial total del equipo; costo ya instalado y funcionando.
- $L$ : Valor de recuperación del activo al final de un periodo dado; normalmente, al final de su vida económica.
- $n$ : horizonte económico del análisis; vida económica del activo. Expresada normalmente en años.
- $I$ : Serie de ingresos. (al final de cada año)
- $D$ : Serie de egresos (al final de cada año)
- $CA$ : Costo Anual uniforme equivalente
- $BA$ Beneficio Anual Uniforme equivalente

Para la aplicación del método seguiremos dos criterios:

a) el de la Recuperación del Capital
b) el del Fondo de Amortización.

### a) Criterio del fondo para la Recuperación del Capital


Distribuyendo $P$ y $L$ en anualidades a lo largo de $(n)$ periodos y a una tasa $(i)$ igual a la tasa interna mínima de recuperación:

$$CA = P \cdot {}_{i\text{-}n}crf - L \, {}_{i\text{-}n}sfdf \quad \sim (1)$$

pero sabemos que: $_{i-n}sfdf = {}_{i-n}crf - i$

substituyendo en ①:

$$CA = P\,{}_{i-n}crf - L\,({}_{i-n}crf - i)$$

por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} &CA = (P-L)\cdot {}_{i-n}crf + Li \\ \text{ó}\quad &CA = (P-L)\cdot (A/P,\ i\%,\ n) + Li \end{aligned}}$$

Los dos sumandos de la expresión anterior representan:

- ·) la recuperación de la fracción $(P-L)$ con sus intereses correspondientes, más
- ·) los intereses correspondientes a la porción faltante $L$, la cual será recuperada al final.

(Partimos de la base de que la cantidad total a recuperar deberá ser, por un lado, la cantidad total invertida $(P)$, y por otro, los intereses de esa cantidad $(P)$ durante $(n)$ periodos y a una tasa $(i)$; solo que, la cantidad a recuperar mediante los pagos anuales es solo $(P-L)$, ya que la cantidad $(L)$, se espera recuperarla al final de los $(n)$ periodos)

La fórmula anterior es aplicable para valores de cero o negativos de $(L)$, con solo las consideraciones algebraicas correspondientes.

La fórmula ① puede aplicarse directamente también para encontrar las anualidades uniformes equivalentes, y de hecho, constituye otro criterio para encontrarlas.

4) <u>Criterio del Fondo de Amortización</u>

Partiendo de la fórmula ①, podemos substituir ahora el valor de: $crf$, sabiendo que:

$$_{i-n}crf = {}_{i-n}sfdf + i$$

de donde: $CA = P\cdot {}_{i-n}sfdf + Pi - L\cdot {}_{i-n}sfdf$

finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} &CA = (P-L)\,{}_{i-n}sfdf + Pi \\ \text{ó}\quad &CA = (P-L)\cdot (A/F,\ i\%,\ n) + Pi \end{aligned}}$$

En donde los dos sumandos de la expresión se pueden interpretar como:

- el importe anual del fondo de amortización que reintegrará la porción (P-L) del capital sin incluir los intereses.
- el interes anual de la inversión total.

---

Ejemplo:

El costo de un equipo ya instalado y funcionando es de $35,000.- con un valor estimado de recuperación de $5,000.- al final de los 10 años de su vida útil. La tasa mínima atractiva de recuperación, se estimo en un 8% anual. Se desea calcular el costo anual equivalente de la inversión propuesta.

a) Con el criterio de la recuperación del capital:

$$CA = (35,000 - 5,000)\ crf_{8-10} + 5,000\ (0.08)$$
$$CA = 30,000 \times 0.14903 + 400$$
$$CA = 4,470.^{90} + 400$$
$$CA = \$\ 4,870.^{90}$$

b) Con el criterio del fondo de amortización:

$$CA = (35,000 - 5,000)\ sfdf_{8-10} + 35,000\ (0.08)$$
$$CA = 30,000 \times 0.06903 + 2,800$$
$$CA = 2,070.^{90} + 2,800$$
$$CA = \$\ 4,870.^{90}$$

Lógicamente, en ambos casos el resultado es el mismo, ya que las dos fórmulas provienen de la misma expresión ①. Sin embargo, en cada caso se muestra un distinto concepto en el manejo de los elementos integrantes del costo de la inversión.

En el primer caso, el comprador abona anualmente: una cantidad de $4,470.^{90}$, para pagar la deuda entera por concepto de la inversión inicial menos lo que espera recuperar al final, $5,000.-, e incluyendo los intereses correspondientes; y otra cantidad de $400. para cubrir los intereses de la parte correspondiente de la deuda, que se espera recuperar.

En el segundo caso, el comprador paga una cantidad $2,070^{90}$, para ir cubriendo anualmente la fracción (P-L)

sin intereses, más una segunda cantidad, ¢2,800., que cubre los intereses anuales de la deuda completa.

Resolviendo directamente el problema, mediante la fórmula original ①, se tendría:

$$CA = 35{,}000\ (A/P,\ 8\%,\ 10) - 5{,}000\ (A/F,\ 8\%,\ 10)$$
$$CA = 35{,}000 \times 0.14903 - 5{,}000 \times 0.06903$$
$$CA = 5{,}216.^{05} - 345.^{15}$$
$$CA = ¢1{,}870.^{90}$$

Aun habría un cuarto criterio para resolver el problema, consistente en encontrar el valor presente de la recuperación (L) multiplicándolo por el factor (P/F). La diferencia entre el costo inicial (P) y el valor presente de la recuperación (L), se multiplica por el factor de recuperación del capital (crf), para encontrar el valor de los pagos uniformes equivalentes anuales, a lo largo de los (n) periodos.

Lo anterior se expresa algebraicamente:

$$\boxed{\begin{aligned} CA &= \left[P - L\ ({}_{i\%}pppwf)\right] \cdot ({}_{i\%}crf) \\ \text{o'}\quad CA &= \left[P - L\ (P/F,\ i\%,\ n)\right] \cdot (A/P,\ i\%,\ n) \end{aligned}}$$

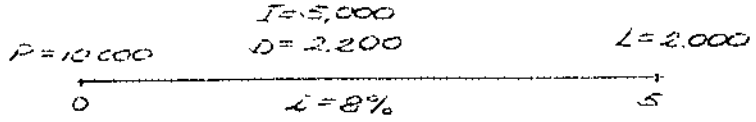
Aplicando a este criterio, los datos del problema:

$$CA = \left[35{,}000 - 5000\ (P/F,\ 8\%,\ 10)\right] \cdot (A/P,\ 8\%,\ 10)$$
$$CA = \left[35{,}000 - 5{,}000 \times 0.4632\right] \times 0.14903$$
$$CA = ¢1{,}870.^{90}$$

---

Ejemplo:

Un activo representa una inversión inicial total de ¢10,000.- Se le suponen 5 años de vida económica y una recuperación final de ¢2,000. Se considera una tasa de recuperación de $i = 8\%$. La inversión implica una corriente anual de ingresos de ¢5,000.- y de gastos de ¢2,200.- durante los 5 años. Se desea determinar si el proyecto de inversión se justifica, teniendo en cuenta que la tasa atractiva mínima de recuperación es de un 8%.




$$B.A. = -\left[(P-L)_{t-n}crf + Li\right] + I - D$$

$$B.A. = -\left[(10{,}000-2{,}000)_{8-5}crf + 2{,}000\,(0.08)\right] + 5{,}000 - 2{,}200$$

$$B.A = -(\quad 3{,}010 \quad + \quad 160 \quad) + 5{,}000 - 2{,}200$$

$$B.A = \$630$$

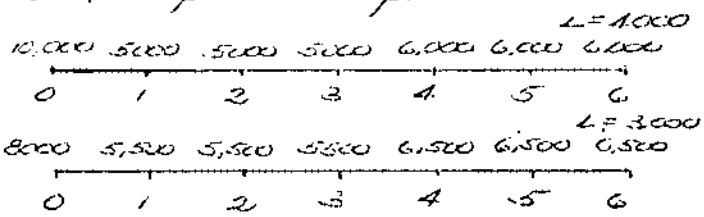
Hágase notar que se está buscando el B.A. (Beneficio Anual) por lo que los gastos se consideran con signo negativo y los ingresos con signo positivo, y dado que el B.A. resulta ser mayor que 0, esto significa que de esta inversión se puede esperar un beneficio mayor al 8%. Específicamente puede decirse que la inversión sí se recupera con una tasa del 8% más una cantidad adicional de \$630.

---

Ejemplo.

Una máquina A cuesta \$10,000 ya instalada; con un valor de rescate de \$4000 al término de 6 años; gastos de operación anuales de \$5,000 durante los 3 primeros años y de \$6,000 durante los 3 últimos. La máquina B cuesta \$8000; con \$3,000 de recuperación al cabo de 6 años. Gastos de operación de \$5,500 durante los 3 primeros años, y de \$6,500 durante los últimos tres. Los incrementos en los costos de operación, se pueden entender como generados por el incremento en los costos de mantenimiento y reparaciones y por la pérdida de eficiencia motivada por la edad. La tasa mínima atractiva es de 15%.

El problema se puede representar:




$$CA_A = (10{,}000 - 4{,}000)\,{}_6crf + 4{,}000\,(0.15) + \left[5000\,{}_3uspwf + 6000\,{}_3uspwf \cdot {}_3sppwf\right]_{2\,1}$$

$$CA_A = 1{,}585 + 600 + 5{,}400 = \$7{,}585$$

$$CA_B = (8000 - 3000)\,{}_6crf + 3{,}000\,(0.15) + \left[5{,}500\,{}_3uspwf + 6{,}500\,{}_3uspwf \cdot {}_3sppwf\right] \cdot {}_6crf$$

$$CA_B = 1{,}321 + 450 + 5{,}897 = \$7{,}668$$

Al ser costo anual, gana en la comparación, la alternativa A.

En el caso de que las alternativas por comparar, presenten corrientes anuales de flujo, irregulares, habrá que convertirlas en una corriente uniforme equivalente, lo cual puede lograrse actualizando la corriente a una fecha dada, y distribuir luego este costo a su costo anual equivalente.

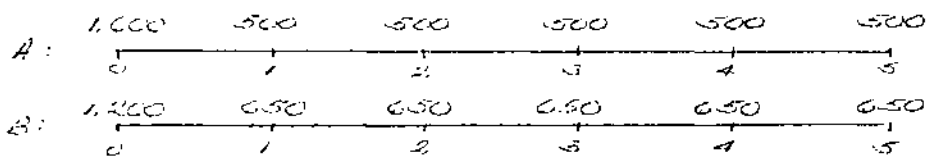
---

## SIGNIFICADO DE LA COMPARACIÓN DE ALTERNATIVAS MEDIANTE EL CRITERIO DEL COSTO ANUAL

La comparación de dos alternativas mediante el criterio del costo anual, tiene más significado e interpretación que el solo hecho de concluir que la alternativa A tiene mayor o menor costo anual que la B. Otra mayor significación se refiere a la mayor inversión que implica una de las alternativas respecto a la otra.

Ejemplo

Una máquina A cuesta \$1.600. Se estima tendrá un costo anual de operación de \$500. durante los 5 años calculados de vida económica. La máquina B cuesta \$1.200. y tiene gastos de \$650 Para ambas máquinas el valor de rescate se considera nulo. Se fija una tasa mínima de recuperación de 8 %.




Analizando el costo anual.

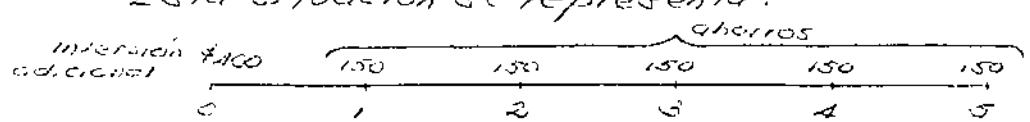
$$CA_A = (1.600 - 0)_{8-5}crf + 500 = 400 + 500 = \$900$$

$$CA_B = (1.200 - 0)_{8-5}crf + 650 = 300 + 650 = 950$$

Diferencia a favor de A (pues se trata de costos) = \$ 50 anuales

Observamos que las diferencias relevantes entre A y B, es el hecho de que A implica una inversión adicional de \$400.- inicialmente, con respecto a B; pero A representa también por otro lado, un ahorro anual de \$150.- respecto a B De aquí surge la pregunta de que sí: ¿La inversión adicional de \$400. se justifica teniendo en cuenta que se requiere una tasa del 8 %? Dicho de otra manera: ¿Los \$400. de inversión inicial, se alcanzan a recuperar con una tasa de 8 % de interes, con los ahorros de \$150 anuales?

Esta situación se representa:

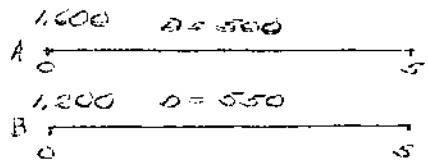



$$\text{Ahorros} - \text{Costo (anuales)} = 150 - 400_{8-5}crf = 150 - 100 = \$50$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente y que

significa que la inversión extra inicial en A si se recupera con una tasa de interes del 8% más una suma adicional de $50 anuales durante 5 años.

Supongamos ahora que los gastos anuales de B son de $550 en lugar de $650.



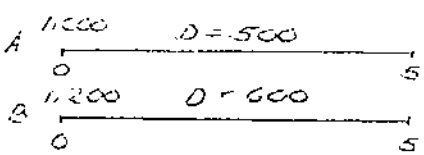

$CA_A = 1{,}600_{8-5}\,crf + 500 = 400 + 500 = 900$

$CA_B = 1{,}200_{8-5}\,crf + 550 = 300 + 550 = 850$

dif. a favor de B: $50 año

Esto significa que la inversión adicional de $400 en A no se alcanza a recuperar con los ahorros de $50 anuales: hay un deficit de $50. anuales durante los 5 años, por lo que dicha sobreinversión no se justifica y por tanto la alternativa por seleccionar es la B.

Consideremos ahora, que los gastos anuales de B son de $600.




$CA_A = 1{,}600_{8-5}\,crf + 500 = 400 + 500 = 900$

$CA_B = 1{,}200_{8-5}\,crf + 600 = 300 + 600 = 900$

diferencia 0

En este caso, la inversión extra de $400. de A, se recupera exactamente a una tasa de 8% y si hemos considerado que esta es la tasa mínima de recuperación fijada por el inversionista, la sobre inversión si se justifica y por tanto, habrá que seguir la alternativa A.

---

El hecho de que la selección entre dos alternativas se realice desde el punto de vista de la inversión inicial que una de ellas representa, no significa que se esté haciendo un analisis solo parcial del problema, ya que, en última instancia, el fin último es determinar cual de las alternativas es la mejor.

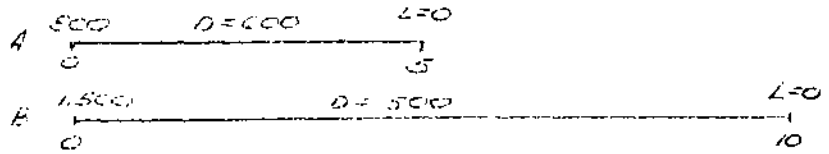
---

## COMPARACION DE ALTERNATIVAS CON DISTINTAS VIDAS ECONOMICAS

Hasta ahora nos hemos limitado a comparar alternativas con igual vida económica. ¿Cómo comparamos alternativas que tengan distinta vida económica?

Ejemplo:

Supongamos una máquina A con $800 de costo inicial, 5 años de vida económica y gastos anuales de operación de $600. Otra maquina B, cuesta $1.500; tiene vida económica de 10 años y $500 de gastos anuales de operación. La tasa mínima de recuperación se considera de 8% y los valores de rescate, despreciables.




$$CA_A = 800\,{}_{8-5}crf + 600 = 200 + 600 = 800$$

$$CA_B = 1{,}500\,{}_{8-10}crf + 500 = 224 + 500 = 724$$

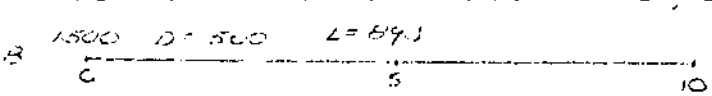
Si solo consideramos un horizonte de 5 años para ambas alternativas y hacemos caso omiso a la corriente de costos en la alternativa B a partir del 6° año en adelante, existe una diferencia a favor de B, de $76 anuales.

Esto, en cierto aspecto, no es incorrecto, ya que se podría considerar que lo que ocurra en B después del 5° año, pertenece al análisis comparativo de alternativas que se vaya a hacer para dicho período, pero surge la duda de si la decisión actual no sería afectada por la decisión o curso de acción que se siguiese en la alternativa A a partir del 5° año. Analizaremos esto más adelante. Pero sigamos ahondando en el primer criterio de despreciar lo que ocurra en B a partir del 5° año.

Podría pensarse que de la corriente de costos que ocurren en B, la parte que no podemos ignorar, para efectos del análisis de los primeros 5 años, es la parte correspondiente a la amortización de la inversión inicial. Actualizando al año 5, la corriente de costos anuales correspondientes a este concepto, se tendría:

$$1{,}500\,{}_{8-10}crf\,{}_{8-5}uspwf = \$893$$

Esta cantidad vendría a representar el valor teórico de rescate que la máquina B tendría al terminar el 5° año, y analizando el costo anual en estas condiciones, se tendría:




$$CA_B = (1{,}500 - 893)\,{}_{8-5}crf + 893\,(0.08) + 500 = 152 + 72 + 500 = \$724$$

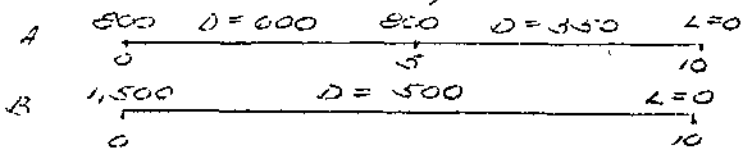
que es mismo valor para el costo anual obtenido anteriormente. Esto puede explicarse de la siguiente manera:

El hecho de tratar de estimar e introducir en el análisis, un valor de recuperación de la máquina B al final del 5° año, tiene como finalidad tratar de eliminar los problemas que presenta la existencia de diferentes vidas económicas en las alternativas. Sin embargo, el considerar un valor de rescate a la máquina al final del 5° año y por otro lado establecer que la vida económica de la máquina es de 10 años, es inconsistente, a menos que el valor de rescate que se suponga sea precisamente el de $893. Ahora bien, esto no es tan fácil de aceptar pues por un lado, se hemos supuesto que el período de vida económica es de 10 años para la máquina B, los $724 será el costo anual mínimo (por definición de vida económica), por lo que sería lógico suponer que el análisis del costo anual en un período menor al de la vida económica, como lo es el de 5 años, fuese mayor al de $724, lo cual implicaría que el valor de rescate al final del año 5 fuese menor a $893, y por otro lado, si el valor de rescate fuese mayor que $893, esto daría lugar a que el

costo anual durante los primeros 5 años fuese menor de $724 lo que destruiría la proposición de que la vida económica fuese de 10 años.

Todo lo anterior es por lo que respecta a la máquina B, pero, ¿cómo influirá en la decisión lo que pueda ocurrir en la alternativa A a partir del 5° año?

Supongamos que el analista tiene elementos para prever que en la alternativa A, al terminar la vida económica de la 1ª máquina, se substituirá al final del 5° año, por una máquina ya mejorada tecnologicamente, con mismo costo inicial de $800, 5 años de vida económica, pero solo $350 de gastos anuales:




$$CA_A = \left[800 + 600_{8-5}\,usp\,wf + 800_{8-5}\,spp\,wf + 350_{8-5}\,usp\,wf_{8-5}\,spp\,wf\right]_{8-10}\,crf$$
$$= \$700$$

$$CA_B = 1500_{8-10}\,crf + 500 = 224 + 500 \qquad = 724$$

Vemos que el considerar una suposición sobre el reemplazo de la primera máquina de A, ha provocado que A sea ahora la alternativa óptima

De todo lo anterior, se podría concluir que:
el criterio de despreciar la corriente de gastos que se originan en la alternativa de mayor vida, a partir de la terminación de la vida económica de la alternativa más corta, solo es válido si:

a) Se estime que en cada alternativa, si hay reemplazos futuros, estos plantearán condiciones totalmente similares a las condiciones del primer ciclo.

b) El período total en el que sean necesarios los servicios de las alternativas A y B, se considere indefinido o represente un común múltiple de las vidas económicas de las alternativas consideradas

Sin embargo debe reconocerse que este criterio, normalmente se sigue "por defecto", es decir, porque no hay buenas bases para considerar que sucederá lo contrario a lo que establecen las condiciones (a) y (b). En todos aquellos casos en que se prevea que las condiciones van a cambiar en los siguientes ciclos, será necesario estimar la corriente de ingresos y egresos y tomarla en cuenta para el análisis de las alternativas

Al respecto de la condición (b), podemos hacer notar que el último ejemplo ilustra el hecho de que una vez que se ha llegado, mediante la suposición de futuros remplazos, a un horizonte económico común múltiplo para ambas alternativas, se puede proceder a la comparación numérica, ya que las decisiones que se tomen de ese período en adelante en cualquiera o en ambas alternativas, serán irrelevantes a la decisión que se tome en el momento presente.

Ejemplo:

Se proponen dos compresoras:

Compresora I: costo inicial: \$3.000, vida económica: 6 años, valor de rescate: \$500, Gastos anuales de operación: \$2.000

Compresora II: costo inicial: \$4.000, vida económica: 9 años, valor de rescate: 0, gastos anuales de operación: \$1.600

Tasa mínima atractiva de recuperación: 15%

$$CA_I = (3.000 - 500)_{15-6}crf + 500\,(0.15) + 2000 = 2.735$$

$$CA_{II} = (4.000)_{15-9}crf + 1.600 = 2.440$$

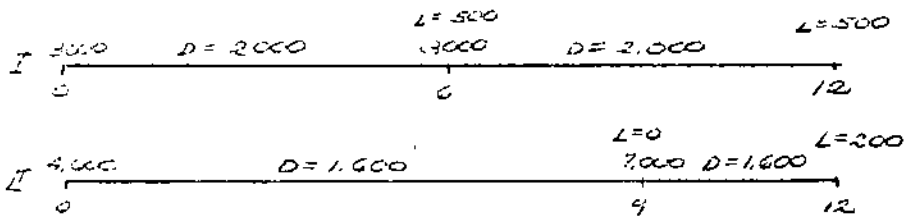
$$\therefore\ CA_{II} < CA_I$$

Supongamos ahora que:

1° para la empresa en cuestión, la compresora solo se requerirá durante 12 años

2° se prevee que mientras para la compresora I se podrá hacer el reemplazo a partir del año 6 con una compresora similar, para la compresora II, se estima que el reemplazo se llevaría cabo al año 9 con otra cuyo costo se estima en \$7.000 y que tendrá valor de rescate después de 3 años de uso, de \$200.

La situación puede sintetisarse:




$$CA_I = \$\,2.735$$

$$CA_{II} = [4.000 + 7000_{15-9}spp\,wf - 200_{15-12}spp\,wf]_{15-12}crf + 1.600$$

$$CA_I = [4.000 + 7.000\,(0.2843) - 200\,(0.1869)]\,(0.1845) + 1.600$$

$$CA_{II} = \$\,2\,650$$

$$\therefore\ CA_{II} < CA_I$$

Lo que significa que aun con el cambio de condiciones, la compresora II, sigue siendo la más conveniente.

DETERMINACION DEL NIVEL MAS ECONOMICO DE INVERSION.

Hay ocasiones en que se nos presentan alternativas simulteaneas de inversión para resolver un mismo problema. Así por ejemplo, imaginemos el caso de que con diversos equipos pudiésemos en principio asegurar un cierto volumen de producción requerido, con calidad similar y dentro de un tiempo especificado, pero representando cada una de ellas, caracteristicas y condiciones distintas, en cuanto aspectos como el monto de la inversón inicial y las condiciones de pago de dicha inversión, cantidad de obra de mano consumida por unidad producida, grado requerido de especialización para los operarios, costo de las refacciones y de las reparaciones, costo y periodicidad especificada para el mantenimiento adecuado, importe de las primas de seguros, período de utilización del equipo, valor de recuperación que se considera poder obtener al final de la vida útil, etc..., diferencias tales, que originan el que no obstante las diversas máquinas propuestas resuelvan el problema desde el punto de vista de producción, desde el punto de vista económico, presentan diferencias substanciales, razón por la cual, es necesario analizar las posibles alternativas con este enfoque, haciendo intervenir todas sus diferencias relativas tanto del tipo monetario como del no monetario; ya que sabemos que a fin de cuentas, el criterio económico será el determinante para la selección de una de las alternativas.

El panorama que se presenta en estas circunstancias, se resume en el hecho de que los diversos equipos pueden seleccionarse entre un amplio rango, que va desde aquel que implica alta inversión inicial pero bajos costos de operación, mantenimiento, etc, hasta aquel de bajo costo total inicial ( incluyendo compra, derechos, transportes, instalación, puesta en marcha, pruebas iniciales, etc..), pero elevados costos anuales equivalentes durante su vida útil. La incógnita en

cuanto a la alternativa por adoptar, se refleja en preguntas tales como: ¿ cuál es el equipo óptimo desde el punto de vista económico?, ¿hasta cuál de los niveles de inversión representado por los diversos equipos disponibles, debe alcanzarse?, habiendo ya determinada la conveniencia de invertir en uno de los equipos: ¿ se justifica la inversión adicional que implica un equipo más automatizado?

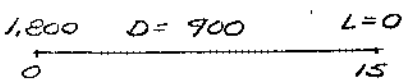
Problemas de este tipo, pueden resolverse mediante cualquiera de los métodos de comparación de alternativas, como son: el del Costo Anual, el del Valor Presente y el del cálculo de la Tasa de Recuperación.

Ejemplo:

Se desea analizar la posibilidad de recubrir una red de tuberias de vapor, con material aislante para evitar en lo posible las pérdidas por calor. A medida que se incrementa el espesor del material aislante, la inversión inicial será mayor, pero se lograrán menores pérdidas anuales por pérdida de calor.

| espesor del aislamiento | importe de la inversión inicial. (dato) | pérdida estimada anual por pérdida de calor (dato) | Costo anual unif. equiv. de recuperación del capital | Costo Total anual equivalente. |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $ 1,800 | 0 | $ 1,800 |
| 3/4" | $ 1,800 | 900 | $ 210 | 1,110 |
| 1" | 2,545 | 590 | 297 | 887 |
| 1 1/2" | 3,340 | 450 | 390 | 840 |
| 2 1/4" | 4,360 | 360 | 509 | 869 |
| 3" | 5,730 | 310 | 669 | 979 |
| 3 1/2" | 7,280 | 285 | 851 | 1,136 |

La obtención del Costo Anual indicado en la última columna, se logra tal como se ejemplifica para el caso del aislamiento de 3/4":

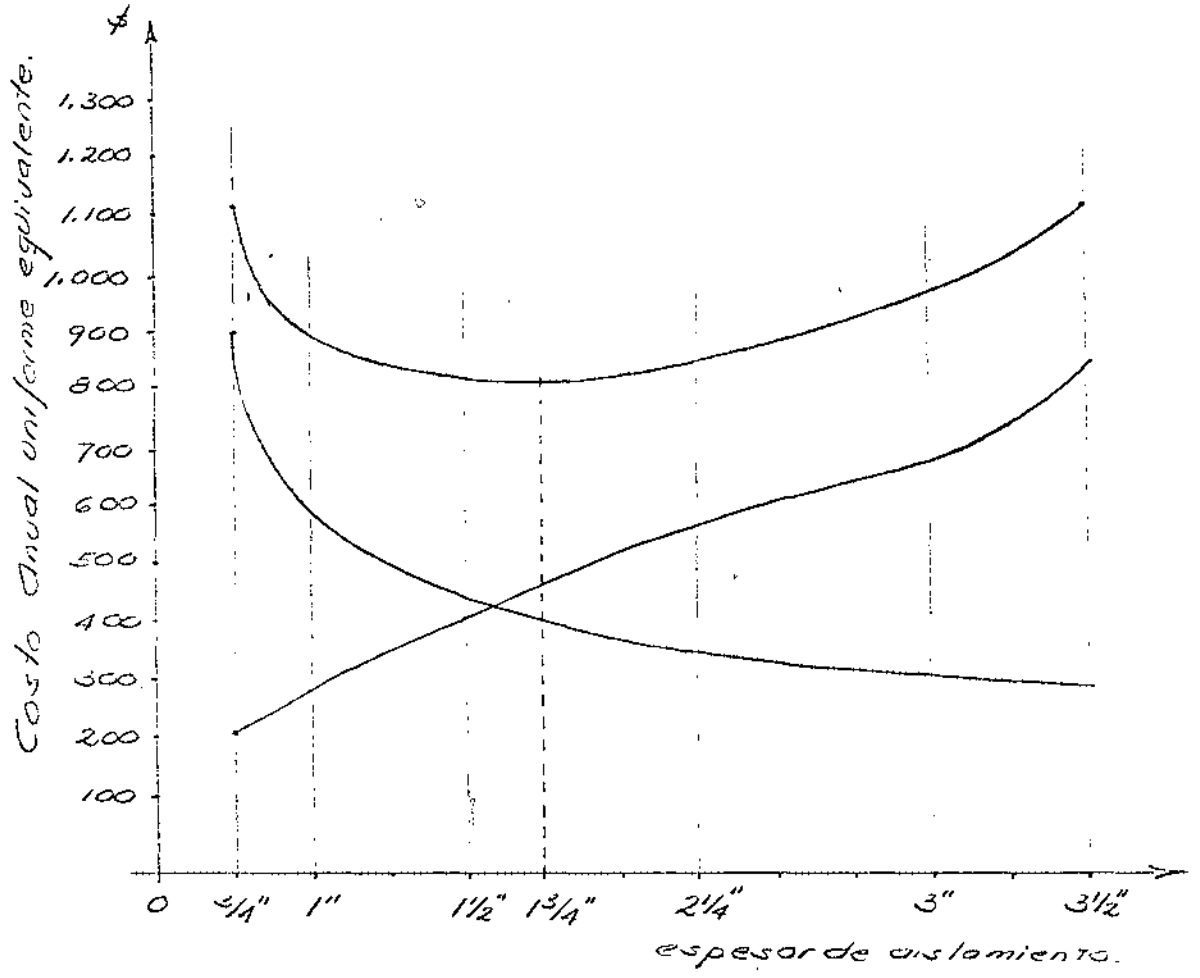



$$C.A. = 1{,}800 \; crf_{8-15} + 900$$

$$CA = 210 + 900 = 1{,}110.$$

Los valores estimados de los factores relativos a costos y ahorros, se muestran en el cuadro anterior. Se ha considerado que el recubrimiento tendrá una vida útil de 15 años. La tasa mínima atractiva de recuperación se considera de un 8%.

Vemos que el Costo Anual uniforme equivalente menor, es el que corresponde al recubrimiento de 11/2" de espesor. Observamos que a medida que se aumenta el espesor, (1a. columna), se incrementa el monto de la inversión inicial, ( 2a. columna), pero decrecen las pérdidas por fuga de calor, todo lo cual origina que los costos anuales ( 5a. columna ) disminuya hasta un mínimo que corresponde precisamente a la alternativa de 1 1/2". Sin embargo, a partir de este



valor mínimo, el Costo Anual equivalente de los subsecuentes niveles de inversión, va aumentando.

El comportamiento de los factores de costo y ahorro anteriores, se muestra en la gráfica anterior.

La razón por la cual los Costos Anuales uniformes equivalentes a los espesores de 2 1/4" en adelante, van creciendo, se explica por el hecho de que la inversión total que cada uno de los niveles implica, va siendo cada vez menos atractiva dada la inversión inicial requerida y los beneficios que esta implica en cuanto a los ahorros originados por la menor pérdida de calor. Dicho de otra forma: la inversión adicional que cada uno de los diferentes espesores de aislamiento implica, comparativamente a la alternativa anterior, ( esto, a partir del espesor de 1 1/2" ), ya no se justifica, dados los ahorros adicionales que por una menor pérdida de calor origina; al menos, considerando una tasa mínima de recuperación de 8%.

Esto último queda de manifiesto, si la comparación entre las alternativas, se realiza no en base a la inversión total que cada una de ellas implica, sino comparativamente, es decir, analizando la inversión adicional o extra, que cada nivel representa con respecto al nivel anterior y comparando con el ahorro adicional por la disminución en la pérdida de calor, que esta inversión adicional origina.

Resolvamos el problema anterior con este criterio de análisis, tal como se muestra en el cuadro siguiente, y en el cual se observa que la inversión extra de $795 que el espesor de 1 1/2" representa comparativamente respecto al de 1", origina ahorros de $140 adicionales anuales por disminución en las

| espesor del aislamiento | inversión inicial | Inversión adicional | Costo de recuperac del capital de la inversión adicional | Pérdida anual por calor | Ahorro anual originado por la inversión adicional | Ahorro neto después de recuperac de la inversión adicional |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | — | — | 1.800 | — | — |
| 3/4" | 1.800 | dif. 1.800 | 210 | 900 | dif 900 (900-210 = | + 690 |
| 1" | 2.545 | dif. 745 | 87 | 590 | dif 310 (310-87 = | + 223 |
| 1 1/2" | 3.340 | 795 × crf 8-15 × 0 11683 = | 93 | 450 | 140 (140-93 = | + 47 |
| 2 1/4" | 4.360 | 1.020 | 119 | 360 | 90 (90-119 = | − 29 |
| 3" | 5.730 | 1.370 | 160 | 310 | 50 (50-160 = | − 110 |
| 3 1/2" | 7.280 | 1.550 | 181 | 285 | 25 (25-181 .. | − 156 |

pérdidas por calor. El resultado de $ 47.00 positivos anuales, significa que esa inversión adicional no solo se recupera con una tasa de 8 % anual durante 15 años, con los ahorros adicionales que origina, sino que de hecho, su tasa de recuperación es mayor que el 8 % en una cantidad representada anualmente por un superhabit de $ 47.00 anuales. En cambio, la inversión adicional por $ 1,020.00 que el espesor de 2 1/4" implica comparativamente con el espesor de 1 1/2", no se alcanza a recuperar con los ahorros de $ 90.00 anuales adicionales que origina, durante 15 años y con una tasa del 8 % anual, apareciendo un deficit anual de $ 29.00 para que esto sucediese.

En el cuadro anterior, el primer renglón, correspondiente al espesor 0" ( lo que equivale a no usar ningún aislamiento ), no presenta valores, ya que se trata de un analisis comparativo, y no existe alternativa anterior a la alternativa de : " no usar aislamientos ".

Ahora bien ¿ porqué no optar porla aternativa de 3/4" de espesor que es la que mayor ahorro neto origina: $690.00 ?.

La respuesta a lo anterior, lo constituye el hecho de que buscamos invertir en todas las alternativas favorables, y todas aquellas que brinden tasas anuales de recuperación de 8 % o más, son atractivas, razón por la cual debemos invertir hasta en la alternativa de 1 1/2"; recordemos que la pregunta originalmente planteada fué : ¿ hasta que nivel de inversión es conveniente invertir? No invertir en la alternativa de 1 1/2", equivale a rechazar una posibilidad de inversión que nos reditua inclusive más de 8 %. El que las inversiones adicionales que implican

los aislamientos de 3/4" y 1", se recuperan con una tasa aún mayor que la de la inversión adicional de la alternativa de 1 1/2", no implica que ésta úl - tima no deba aceptarse.

En este estado de cosas, si quisiéramos optimizar, deberiamos tratar de conseguir un espesor intermedio entre 1 1/2" y 2 1/4" tal que presentase el costo menor anual equivalente ( de acuerdo con el primer criterio de análisis con base en la inversión total ), y que coincidiese con el punto inferior de la curva de Costos Anuales uniformes equivalentes. Este espesor es el que se muestra en la grafica correspondiente y que corresponde a un espesor de 1 3/4". Si - éste valor óptimo tratáse de calcularse con el criterio de análisis de la inversión adicional, sería el correspondiente a aquel cuyo " ahorro neto despúes de recuperar la inversión adicional ( a una tasa del 8 % ) ", fuese de cero, lo cual significaría que la inversión adicional se recupera exactamente al 8 % que es el límite mínimo atractivo de inversión. Podría demostrarse que un aislamiento de 1 3/4" de espesor, con costo inicial de $ 3,845.00 y pérdida anual por - calor de $ 391.00 y por tanto con inversión adicional de $ 505.00 y ahorro adicional de $ 59.00, con respecto a la alternativa de 1 1/2", cumpliría con lo anterior y representaría la maximización en cuanto a nivel de inversión se refiere.

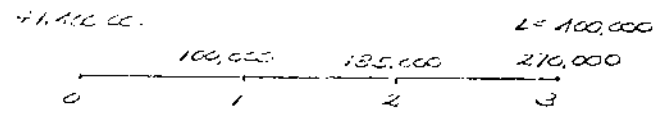
Hacemos notar que el metodo del Costo Anual, solo nos muestra cual es el nivel de inversión más economico, y nos indica si una inversión se recupera a una tasa del 8 % o mayor, pero sin decirnos especificamente los valores de dichas tasas. Este mismo problema puede resolverse con el método de la Tasa de Re-

cuperación que se aplica tal y como se mostrará más adelante y con el cual sí pudiesen calcularse las tasas de recuperación de cada alternativa de inversión total y las de las inversiones adicionales de cada nivel.

El método del Costo Anual también es sumamente util para la determinación del periodo más económico de utilización de un activo depreciable, es decir, de su periodo de vida económica.

EJEMPLO:

Un tractor tiene un precio de adquisición de $1,400,000.00 y dado el comportamiento y montos relativos de los costos de operación y mantenimiento que para un equipo de este tipo se presentan en la realidad durante el transcurso de los años de utilización, se considera poder ajustar (al menos para efectos de este ejemplo), la corriente de dichos costos, a un modelo de seire uniforme con gradiente de incremento aitmético. Supongamos por tanto, que los costos por este concepto son: $ 100,000.00 el primer año y $ 85,000.00 de incremento anual aritmético, se pide calcular los costos anuales uniformes quivalentes correspondientes a periodos de utilización de 3, 5 y 9 años, estimado los valores de recuperación al final de cada uno de ellos, en: $ 400,000.00 $100,000 y $ 50,000.00 respectivamente. Se considera una tasa mínima atractiva de recuperación de 15 %



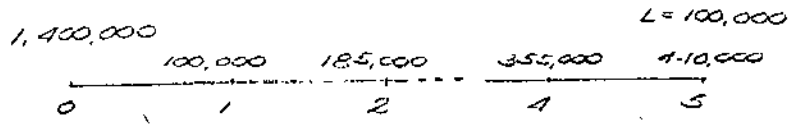

a) periodo: 3 años.

$$CA_3 = (1,400,000 - 100,000)\,{}_{15-3}CRF + 100,000\,(0.15) + 100,000 + 85,000\,{}_{15-3}GSF =$$

$$CA_3 = 1,000,000 \times 0.42798 + 100,000\,(0.15) + 100,000 + 85,000\,(0.90713) =$$

$$CA_3 = 137,980. + 60,000 + 100,000 + 77,106 = \$\,675,086.$$

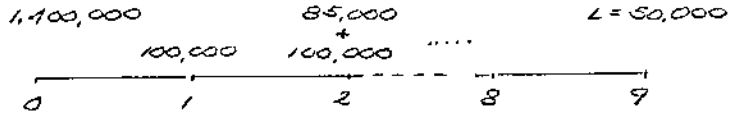
b) periodo: 5 años




$$CA_5 = (1{,}400{,}000 - 100{,}000)\,{}_{15\text{-}5}crf + 100{,}000\,(0{,}15) + 100{,}000 + 85{,}000\,{}_{15\text{-}5}asf$$

$$CA_5 = 387{,}816 + 15{,}000 + 100{,}000 + 146{,}438 = \$\,649{,}254$$

c) periodo: 9 años




$$CA_9 = (1{,}400{,}000 - 50{,}000)\,{}_{15\text{-}9}crf + 50{,}000\,(0{,}15) + 100{,}000 + 85{,}000\,{}_{15\text{-}9}asf$$

$$CA_9 = 282{,}920 + 7{,}500 + 100{,}000 + 262{,}837 = \$\,653{,}257$$

Se observa que el comportamiento de los costos anuales uniformes equivalentes y que involucran la inversión inicial, los costos de operación, conservación y mantenimiento y el valor del rescate, obedece a una curva con concavidad positiva y cuyo punto mínimo coincide precisamente con el llamado periodo de vida económica, y el cual, en el caso presente se encuentra en el entorno correspondiente al punto que representa un periodo de utilización de 5 años para el equipo.

# P A R T E I

## CAPITULO 1: Depreciación

### 1.1.- El Concepto de Depreciación

Uno de los fenómenos con que hay que enfrentarse en todo negocio y en todo análisis de tipo económico, es el hecho de que el valor de toda propiedad de todo bien físico decrece a medida que transcurre el tiempo.

A este decremento del valor con el tiempo se le conoce como depreciación; y aunque constituye un fenómeno innegable y fácil de detectar, su cuantificación y la determinación de su forma y ritmo de generación plantea serios problemas. De hecho, el monto de la depreciación en un momento dado, no podría calcularse con toda exactitud, a menos que se conociese la fecha en que el activo vaya a ser retirado y deje de prestar servicio. Por lo anterior y dado que la depreciación es un costo y debe predecirse para efectos de un estudio económico, es evidente que el analista se enfrentará a delicados problemas para su consideración.

Es decir, mientras que en el campo de la teoría, el concepto de "depreciación" es completamente plausible, su aplicación en la práctica presenta entre otros, problemas como los siguientes:

¿Cuáles son las causas y factores que hacen que el valor de un activo decresca?

¿Qué tan larga es la vida útil de un activo? ¿Cuál es su vida económica? ¿Qué valor de recuperación tendrá al final de su vida útil? ¿Cuál es el modelo de decrecimiento de su valor? ¿Cuál de los métodos o modelos de depreciación conviene aplicar por representar más fielmente el comportamiento real de un activo durante su vida útil?

En general, no es posible obtener respuestas a priori exactas de las incógnitas anteriores y solo serán reveladas por el tiempo. Solo después de que un activo ha terminado su vida útil y perdido su valor, conocemos como, porque, y cuando secedió, pero estas respuestas llegan

demasiado tarde para tener otra utilidad excepto la de valor estadístico en cuanto aportar datos para predicciones futuras de equipos similares. Es por esto que el analista de estos aspectos tendrá que hechar mano de una amplia experiencia, guías y registros estadísticos, pero principalmente de un conocimiento y comprensión profunda de los principios y prácticas de la depreciación.

Uno de los objetivos que se persiguen al calcular la "depreciación es determinar el cargo anual que se aplique a los costos de producción por efecto del consumo parcial que se hace en dicho período, del servicio útil total que es capáz de prestar un activo durante toda su vida útil, así como de determinar en un momento dado el servicio remanente que aún podrá prestar dicho activo.

1.2.- Consideraciones Sobre el Valor

Ya que la depreciación se define como la pérdida progresiva de valor que sufre un cierto bien con el tiempo, es conveniente detenernos a hacer ciertas consideraciones sobre los diversos significados del concepto "valor". Hacemos una aclaración en el sentido de que estas consideraciones las orientamos principalmente hacia aquellos bienes, equipos, máquinas, construcciones y propiedades en general, que constituyen un activo fijo depreciable según el término contable comunmente aceptado.

Probablemente la mejor definición de valor de un activo, dentro de este campo, es aquella que lo describe como el valor presente de todos los futuros beneficios que originará la posisión de ese determinado activo. Sin embargo, no obstante ser una definición muy clara, su aplicación en la práctica presenta serias dificultades, ya que difícilmente pueden determinarse y valuarse por adelantado, los beneficios que proporcionará una cierta propiedad durante todo el período futuro que consideramos durará su tenencia.

El decrecimiento del valor de una propiedad desde la edad cero hasta cualquier edad de servicio es consecuencia de una reducción del valor presente de sus servicios futuros probables. Las propiedades físicas decrecen en valor con la edad y el uso, ya que también hay un decre

cimiento en la cantidad y la calidad de los servicios futuros que pueden prestar antes de ser retirados del servicio.

La medida básica para estimar este decrecimiento de valor en cualquier edad del activo, no es la cantidad de servicio que la unidad ha rendido, no obstante haber sido durante este período de prestación de servicios cuando el valor ha disminuido, sino por el contrario, la medida básica es el decrecimiento del valor presente de los servicios remanentes aún en la unidad, el monto de los cuales es la diferencia entre el valor de ellos estando la unidad nueva y el valor presente de los servicios aún potenciales en ese momento dado, descontando el valor de recuperación.

La causa principal de la pérdida gradual del valor de un equipo es el decrecimiento en el número de futuras recuperaciones anuales dado que va disminuyendo la esperanza de vida del equipo y el decrecimiento del valor de dichas recuperaciones anuales motivado esto por la pérdida paulatina de eficiencia de la unidad, disminución en la capacidad de producción, incremento en el costo de mantenimiento, incremento en el costo de operación, servicio intermitente del equipo y operación a una capacidad menor que la normal.

Por lo anterio, para determinar el valor de un activo deberemos atender a otros indicadores como los que a continuación de analizan.

El índice más comunmente empleado es el valor de mercado, entendiéndose este como aquel precio que pagará un comprador y aceptará el vendedor de una determinada propiedad en una situación de igual ventaja para ambas partes y en la que no exista presión alguna sobre el que compra ni el que vende. El comprador voluntariamente paga ese precio de mercado porque considera que representa el valor presente de los beneficios que le reportará la propiedad de ese bien, pero incluyendo además una cierta tasa de interes o de utilidad.

Una parte desinteresada pudiera también determinar un precio que fuese justo y equitativo para ambas partes, estableciendose entonces otro índice que se conoce como valor justo o valor equitativo.

En la mayor parte de los casos que se refieren a la depreciación, el criterio que se emplea es el del valor de mercado. Para artículos nuevos es el costo en el mercado, su costo de adquisición el que puede considerarse como valor original para efectos de análisis económico.

Después del valor de mercado, probablemente el más importante es el valor de uso, que es el valor una propiedad representada para su propietario como unidad en operación. Una cierta maquinaria puede valer más para la persona que la posee y la tiene en operación que para otra persona, ya que si ésta quisiese adquirir esa maquinaria tendría que considerar el costo adicional que para él representa el desmontar, transladar y volver a instalar la maquinaria.

El concepto de valor expresado por el valor de uso es muy cercano en su significado al de la definición primera, y por las mismas razones que ésta es difícil de aplicar, es igualmente difícil en la práctica determinar el valor de uso.

El valor en libros es el valor de una propiedad, tal como aparece asentado en los libros de contabilidad en un momento dado. Indica normalmente el monto original del activo menos el importe de los cargos que se han hecho como gastos por depreciación. En sí, representa el monto del capital que aún permanece invertido en el activo y que será recuperado en el futuro mediante el proceso contable de depreciación. El valor en libros puede, en un momento dado, no guardar relación con el valor ~~en libros~~ de mercado de un activo. Los problemas que esto último origina y en general el aspecto contable de la depreciación será tratado ampliamente en capítulo posterior.

Por valor de rescate, o valor de reventa de una propiedad de tipo industrial, se entiende la cantidad neta que recibe el propietario por su venta como artículo de segunda mano, o bien el valor de la propiedad en el momento que es desplazada de la función que actualmente ocupaba a otra posición secundaria con funciones y propósitos diferentes. El indicar que es la cantidad neta quiere decir que al precio de venta, habrá que descontar los gastos de desmontaje, translado y en general todos aquellos gastos que la misma venta origine.

El considerar valor de rescate a una propiedad, implica el que esta tiene utilidad posterior. El precio de reventa estará influido por varios factores como pueden ser: importe de lo que costaría reproducir la propiedad, nivel de precios del mercado en el momento de la venta, localización de la propiedad (especialmente en el caso en que se requiera moverla para su posterior utilización), condición física (una propiedad que ha tenido buen mantenimiento, tendrá mayor precio de reventa que otra propiedad totalmente similar que requiera serias reparaciones para ser usada), demanda en el mercado para dicha propiedad o su producto, substitutos existentes en el mercado, etc... Es indudable que en determinadas circunstancias el valor de rescate de una propiedad pudiera considerarse nulo o aún negativo.

Valor de desecho es el valor neto resultante de la venta de una propiedad industrial como materia prima, como chatarra. También se le conoce como valor de chatarra. La venta se hace bajo estas condiciones por considerarse nula ya la utilidad funcional del artículo. Ahora bien, como el precio de la chatarra en el mercado es sumamente variable, la práctica recomienda un criterio muy conservador en cuanto a la estimación que se haga sobre la recuperación que como chatarra se pueda esperar de un cierto artículo en el futuro. Es común, que para efectos de un análisis económico se considere que el valor de desecho es cero.

## 1.3.- Finalidad y Necesidades de Considerar la Depreciación

Una vez establecido el hecho innegable de la pérdida de valor que sufre una propiedad con el tiempo (al menos en aquellas que constituyen un activo depreciable), habrá que analizar los efectos y reconocer la necesidad de considerar en todo momento éste fenómeno al que hemos denominado "depreciación".

La necesidad de considerar la depreciación se debe entre otras, principalmente a tres razones:

1°.- Preveer la recuperación del capital que ha sido invertido en una propiedad física.

2°.- Permitir que los costos por depreciación sean cargados y formen parte de los costos de producción de los bienes o servicios que se originan mediante el uso de esa propiedad física.

3°.- Considerar los costos de depreciación dentro de los gastos de operación para efectos de pago de impuestos.

Para ilustrar aún en forma muy simple los dos primeros puntos, supongamos un inversionista que compra una máquina para producir un cierto artículo. El precio al que adquiere la máquina es de $ 30,000.00. El costo por concepto de obra de mano, materiales, energía, etc..., de cada artículo es de $ 30.00 y por las condiciones de oferta y demanda en el mercado, puede fijar el precio de venta en $ 50.00 por unidad. Produce con esa máquina 3,000 unidades al año, con lo cual tiene un ingreso bruto de $ 150,000.00 anuales, de los cuales, él considera que $ 90,000.00 son para cubrir todos los gastos y el remanente, $ 60,000.00 constituyen su utilidad por lo que dispone de ellos para gastos diversos.

Supongamos que esta situación se prolonga por 4 años hasta que llega un momento en que se dá cuenta que para continuar su negocio necesita reponer la máquina por otra nueva. Sin embargo, un análisis de la situación revela que por no haber considerado una provisión para la recuperación del capital invertido, la máquina que originalmente le costó $ 30,000.00 ha decrecido en valor, al grado de que actualmente ésto practicamente es el de desecho como chatarra y que el resultado final es que se encuentra sin máquina y lo que es peor, sin dinero para substituirla por una nueva.

Es claro que el error lo cometió al no haber reconocido que la máquina tendría que sufrir una depreciación, y haber hecho una previsión para recuperar el capital invertido, mediante un cargo adicional integrado al costo total de producción, por concepto de depreciación.

La depreciación constituye un costo del mismo modo que los constituyen los conceptos de materiales consumidos, obra de meno, etc..., solo que difiriendo de estos en que es un costo siempre cubierto por adelantado y dado que el capital debe permanecer constante, la recuperación del capital inicial debe realizarse mediante la inclusión del cargo por concepto de depreciación, en el precio de cada uno de los artículos, de una cantidad —

igual a la parte proporcional que les corresponda de la inversión inicial. Así por ejemplo, si en el caso anterior, la producción total de la máquina durante su vida útil se hubiera de antemano estimado en:

3,000 unidades/anuales x 4 años = 12,000 unidades.

el cargo por depreciación correspondiente a cada artículo debió haber sido de:

$ 30,000.00 / 12,000 unidades = $ 2.50 / unidades.

cantidad que el inversionista podia haber reflejado en el precio de venta, incrementándolo o deducirlo de lo que él consideraba su utilidad neta, en el caso de que dicho precio de venta no pudiese aumentarse dadas las condiciones de mercado.

Conocido así el costo real total de producción de un artículo se puede fijar el precio de venta, conocer el monto neto real de la utilidad y garantizar además mediante el reconocimiento de la depreciación y del costo que origina, la recuperación del capital invertido en la máquina y en consecuencia, el mantener constante el capital de una empresa.

Ahora bien, haciamos notar que a pesar de que la inversión en el activo es cubierta de antemano, el costo periódico o por unidad producida, por concepto de depreciación no puede conocerse exactamente hasta que el activo ya ha agotado su período económico de utilización y ha sido desplazado, revendido o rematado como chatarra, ya que solo hasta este momento se conoce el valor total neto de la inversión, la forma y el período en que en la realidad debe prorratearse el cargo total por depreciación y por tanto, el ritmo real de decrecimiento de valor que sufrió el activo durante su vida útil.

No obstante, al ser obvio que un factor determinante al realizar un estudio inicial de comparación entre deversas alternativas, es el conocimiento de los costos por depreciación y su forma de distribución y dado que conocer previamente estos datos con exactitud resulta practicamente imposible por las razones antes citadas, es claro que estos elementos deberán estimarse y suponerse como ciertos para efectos del análisis, lo cual sin embargo, no dista mucho de lo que se hace de hecho con los demás factores de costo como es el caso del costo y rendimiento de materiales, obra de mano, etc... en los que debe hacerse -

una serie de suposiciones iniciales al no tener, en la mayoría de los casos, certeza respecto a su comportamiento futuro.

Sin embargo, debemos reconocer una diferencia muy significativa entre los demás gastos y el correspondiente a la depreciación y que consiste en que los factores de costo: materiales, obra de mano, etc. no han sido pagados de antemano, sino que su erogación normalmente es paulatina pudiendo controlarse su gasto sobre la marcha de acuerdo con la variación de las condiciones en tanto que el decrecimiento del valor de un equipo con el tiempo, es inexorable, y así por ejemplo, si se alteran las condiciones de mercado y la demanda sobre el artículo producido disminuye, se podrá restringir la cantidad empleada de material y del personal laboral con lo que se reducirán los gastos, no así con los cargos por depreciación, que independientemente de dichas variaciones de la demanda seguirán aplicándose igual que antes.

El ejemplo del inversionista ilustrado en este inciso, en forma muy simple, es lo que en el fondo sucede, desgraciadamente con mucha frecuencia en nuestro medio, en el que la pérdida progresiva del capital de las empresas causada por la no ubicación correcta y adecuada de los factores de costo de producción, los conduce al fenómeno de la "descapitalización". Estose origina evidentemente en el desconocimiento del concepto de la depreciación y de su manejo y tratamiento financiero, contable y fiscal.

Respecto a la tercera razón indicada al inicio de este inciso relativo a la necesidad de considerar la depreciación para efectos de impuestos, solo recordaremos aquí que el gasto por depreciación es reconocido como deducible de ingresos para fines del pago de impuestos y como estos son calculados en función de la utilidad, la forma en que los cargos por depreciación se distribuyan durante la vida de un activo, tiene marcado efecto en el pago de impuestos.

Hay dos aspectos que son los que principalmente establecen el modelo según el cual se calculan las deducciones por concepto de depreciación: 1° la duración del período que se estime como vida util del activo y 2° la proporción mediante la cual se prorrateen los cargos por depreciación año tras año durante la vida util considerada del equipo.

El aspecto fiscal de la depreciación será abordado posteriormente en el capítulo correspondiente.

1.4.- Causas y Clasificación de la Depreciación.

Otro problema que se presenta al considerar la depreciación, es el hecho de que el decrecimiento de valor tiene su origen en varias causas que son muy dificiles de predecir con anticipación, y dado que la depreciación se mide por la pérdida de valor y el valor es determinado por los beneficios futuros, todos los factores que afectan los beneficios futuros también deben afectar a la depreciación, por lo que al estimar la depreciación se deben considerar factores como la duración de la vida útil de una propiedad, gastos futuros por operación, mantenimiento, impuestos, futuros cambios tecnológicos, etc. muchos de los cuales al igual que las condiciones futuras no pueden determinarse exactamente, lo que origina una situación muy compleja. No obstante, es necesario que la depreciación sea estimada lo más cercana posible a la realidad.

Las causas o tipos de depreciación pueden clasificarse en términos generales en:

1° Depreciación normal:
- depreciación física.
- depreciación funcional

2° Depreciación extraordinaria
- accidentes
- depreciación originada por una elevación en el nivel de precios.

3° Agotamiento.

Depreciación física.

El desgaste y el deterioro que sufre un activo durante su operación rutinaria, van disminuyendo gradualmente su capacidad física para desarrollar la función que le es encomendada. Esto va originando que los costos de operación y mantenimiento se incrementen, su capacidad productiva decrezca y en consecuencia, también decrezcan los beneficios que de dicho activo se esperan.

El deterioro es causado por la acción de diversos elementos y -

se manifiesta en forma de corrosión de tuberías, oxidación de partes metálicas, putrefacción de secciones de madera, descomposición química, acción bacteriana, etc... El desgaste y el deterioro se originan durante la operación de una máquinaria al estar sujeta esta a impacto, abrasión, vibración, etc...

La depreciación física es fundamentalmente función del tiempo y del uso que se de a una maquinaria. Será afectada grandemente por la política de conservación y mantenimiento que se siga. Hay quien sostiene que es posible conservar una porpiedad de manera que se conserve "tan bien como nueva"; sin embargo, es de dudarse que cualquier objeto sujeto a depreciación pueda estar siempre "como nuevo" independientemente del mantenimiento al que se le sujete. Ahora bien, una propiedad puede ser mejorada de tal manera que valga más que cuando estaba nueva pero ella ya no es la misma que originalmente. Muchas veces se confunde mejoramiento con mantenimiento. Igualmente, también se considera en ocasiones que una propiedad que se ha mantenido en condiciones de alta eficiencia y buena condición física, no puede haber sufrido mucha depreciación. Esta idea conduce, cuando se realizan valuaciones de activos, a apreciaciones de 90% o mayores en el "porcentaje de condición" de una propiedad (porcentaje de desgaste y deterioro observables en un activo, en relación a su estado cuando nuevo), por la simple apariencia e inspección ocular. Sin embargo, la sola apariencia física no es un índice muy veliata en ocasiones, del servicio que aún pueda prestar una propiedad o del servicio que ha rendido a la fecha.

Depreciación funcional

Se podría definir como el decrecimiento del valor originado por la disminución en la demanda de la función para la cual un activo fué diseñado. Es mucho más difícil de calcular que la depreciación física. Esta disminución de la demanda, puede provenir de muchas causas: el que una máquina más eficiente sea fabricada, cambios de estilo, saturación del mercado, etc...

La depreciación causada por el cambio en las necesidades de servicio de un activo, pueden ser el resultado de:

1.- Obsolescencia, motivada por ejemplo, por la aparición en el -

mercado de una máquina superior, más eficiente que convierta en antieconómica la alternativa de seguir operando la máquina actual. Un activo se convierte en obsoleto también, cuando ya no se necesita.

2.- Inadecuancia o incapacidad de satisfacer economicamente un nivel de demanda no previsto inicialmente al adquirir el activo. Puede suceder que este nuevo nivel de demanda de servicio a que se ve sujeto un activo resulte muy por arriba o muy por abajo de la capacidad del mismo, e igualmente se convertirá en inadecuada una máquina cuando resulte demasiado pequeña para el nuevo voluman de producción requerido, como cuando sea demasiado grande y resulte muy costoso y antieconómico operarla a ese nivel solicitado de producción.

No obstante la depreciación física puede ser razonablemente prevista y estimada, no suele suceder lo mismo con la depreciación funcional que resulta ser más imprevisible ya que es causada por eventos que aún no ocurren; y sin embargo, en muchos sectores industriales y empresas, la mayor aportación a la depreciación total, se debe a factores de depreciación funcional y entonces, aunque sea muy dificil de determinar, no puede ser ignorada.

Por lo anterior, y considerando además los rápidos avances actuales en el campo de la tecnología y el acelerado ritmo de mejoras y cambios que caracteriza a la industria moderna, podemos asegurar que la depreciación funcional, es un fenómeno real y de creciente importancia y uqe los aspectos de obsolescencia e inadeduancia, constituyen importantes factores de la economía.

La moderna actitud y disposición a la renovación y reemplazo de los equipos y máquinas en el instante en que resulta económico y benéfico y no hasta el momento en que hay que retirlos por estar practicamente inservibles, constituye un muy importante factor de desarrollo, no solo a nivel de empresa, sino de economía nacional.

Accidentes: Son aquel conjunto de eventos, impredecibles en términos generales, y que originan una rápida o subita pérdida de valor en magnitudes tales que han motivado que en la práctica dichas eventualidades sean cubiertas por seguros, como es el caso de seguros contra incendio, inundación, tormenta,colisión, explosión, etc... La pérdida de valor que originan los accidentes y que puede ser cubierta mediante una poliza de seguro, normalmente no se considera como depreciación debido a su magnitud. Sin embargo, el daño menor causado por accidentes es inevitable y se considera como parte del riesgo del propietario. Los accidentes menores pueden clasificarse como parte del desgaste y deterioro causados por el uso y tratados como depreciación.

Depreciación Debida a Incremento en el nivel de Precios: El cambio en el nivel de precios es un fénomeno económico que constituye una causa de depreciación no muy objetiva y díficil de estimar y que por ser practicamente imposible de predecir, rara vez se toma en consideración al llevar a cabo un análisis económico.

Si el nivel de precios se eleva durante la vida útil de la propiedad, aún en el caso de que la mayor parte del capital invertido en el activo, haya sido recuperado mediante un proceso adecuado de depreciación el capital recuperado será insuficiente para adquirir un reemplazo idéntico, ya que este, ahora resultará más caro, lo que significa que aunque ha habido una recuperación del capital invertido el capital ha decrecido en valor y en consecuencia ha disminuido su poder adquisitivo.

Por consiguiente ha sido de hecho el capital que representa al activo y no el activo en si, el que se ha depreciado. Esta es una primera razón por la cual este tipo de depreciación, que constituye de hecho una depreciación monetaria, no se toma en consideración al hacer un análisis económico de dedisiones entre alternativas.

Por otro lado, la práctica contable comunmente aceptada, relaciona la depreciación con el precio original de un activo y no con el de su reemplazo.

Con referencia a lo anterior, existe un argumento frecuentemente esgrimido en el sentido de que el importe de los fondos recuperados mediante los cargos por depreciación, no es suficiente para adquirir el

activo que ha de reemplazar al activo original una vez que este ha terminado su vida económica, aún tratándose de un activo idéntico, dado que normalmente, debido al proceso inflacionario de la economía en general una máquina idéntica a la actual costará mucho más dentro de un cierto número de años, de lo que cuesta ahora. A este respecto, y aún sin tomar en consideración la costumbre contable o la legislación vigente en materia fiscal, en el caso de un análisis comparativo de alternativas de inversión, una alternativa se encontraría en condiciones totalmente desventajosos, si al activo en el cual se propone invertir, se le exigiese la recuperación no de la inversión que por si implica, sino la inversión que en un futuro va a representar su reemplazo y además redituando una cierta tasa de recuperación atractiva para el inversionista.

Lo anterior justifica el criterio contable inicialmente planteado de considerar como base depreciable el monto de la inversión original en el activo y no el de su reemplazo, teniendo que analizarse el sobre costo del mismo, en su oportunidad, como una nueva inversión de capital.

Agotamiento: Hasta ahora, el término depreciación se ha aplicado a los bienes que constituyen un activo fijo depreciable según el término contable y que son además reemplazables. Cuando el concepto se refiere al consumo de bienes ireemplazables, que constituyen otro importante grupo de activos físicos, como es el caso de los recursos naturales, por ejemplo reservas de gas natural, yacimientos de carbón, petróleo, madera de un bosque, depósitos minerales de todo tipo, depósitos de materiales de construcción como grava, arena, roca de una cantera, etc..., se emplea el término "agotamiento" en lugar del de depreciación, para indicar el decrecimiento del valor de la propiedad con el consumo paulatino.

Todos los recursos enumerados anteriormente, no son reemplazables sino que se van consumiendo paulatinamente hasta su total agotamiento, sin que en este período esten sujetos normalmente a desgaste o deterioro físico, inadecuabilidad, obsolescencia, por lo menos en el sentido en que estos conceptos se aplican a otro tipo de activos físicos y así por ejemplo, al ir extrayendo y vendiendo la roca de una cantera, el valor de la propiedad va decreciendo debido casi exclusivamente a que las reservas van disminuyendo.

Los factores depreciación y agotamiento, se refieren al mismo con--

cepto, solo que el término agotamiento lo aplicamos unicamente para el caso de activos constituidos por recursos naturales no renovables. Como en los casos anteriormente analizados, el gasto anticipado como puede ser - por ejemplo, la inversión inicial para la adquisición de la propiedad, se aplica a los gastos de producción mediante cargos por agotamiento.

Ahora bien, una cantera tiene valor porque el material que de ella - se estrae puede venderse. De la misma manera, una máquina industrial debe su valor al hecho de que el producto que elabora genera un beneficio, por ejemplo, a través de su venta. Sin embargo, resulta más claro el hecho de la pérdida de valor con el tiempo y con el consumo, en el caso de la cantera que en el de la máquina, ya que en el primer caso es evidente que en cada venta de roca se consume una porción de la propiedad disminuyendo en consecuencia su valor, en tanto que en el caso de la máquina, si bien es cierto que junto con la venta de cada artículo producido, no se - vende una fracción de la máquina, si es cierto que cada artículo elaborado representa parte de la capacidad económica total de producción de la - máquina y en consecuencia esta se disminuye en cada venta. En el primer caso, la disminución de valor se aplica a costos mediante los cargos por agotamiento y en el segundo caso con los cargos por depreciación.

Sin embargo, sí hay diferencia en cuanto al tratamiento que se dá a las recuperaciones obtenidas a través de los cargos por agotamiento o depreciación. En el caso de la depreciación, dado que un equipo normalmente es substituido por otro similar al término de su vida útil, las cantidades recuperadas a través de los cargos por depreciación se aplican a la reinversión en dicho equipo similar y de este modo sostener el principio del mantenimiento del capital constante. En el caso del agotamiento, la propiedad no es renovable, así, una vez extraido el petróleo de un pozo, o cortada la madera de un bosque, no se pueden reemplazar, y en estas condiciones las cantidades recuperadas mediante los cargos por agotamiento - no pueden aplicarse a la restitución del material vendido, pero pueden - constituirse en una reserva destinada a la compra de otra propiedad, otra cantera por ejemplo, una vez agotada la actual y recuperado el monto total de la inversión, o pueden entregarse paulatinamente a los propietarios o accionistas a medida que se hagan las recuperaciones, de tal manera que al agotarse la propiedad, los accionistas son propietarios de un bien ya sin valor, ya agotado, pero por otro lado, les habrá sido reintegrado ya

el monto total de su inversión.

El cargo teorico por agotamiento en un año será:

$$\frac{\text{Costo de la propiedad.}}{\text{num. de unidades en la propiedad.}} \times \text{núm. de unidades consumidas en un año.}$$

O puede también evaluarse como un porcentaje del ingreso anual por concepto de ventas.

DEPRECIACION: Definiciones y Significados.- Dentro de la variada literatura existente relativa a la depreciación, de la cual, desgraciadamente muy poca se ha originado en nuestro medio ya que el altísimo porcentaje es de origen extranjero y en ocasiones los criterios planteados no responden o no son aplicables a nuestras necesidades y condiciones, podemos encontrar un buen número de definiciones de la depreciación, muy diversas entre sí por estar elaboradas con distintos criterios y finalidades como pueden ser el criterio de análisis económico, el ingenieril, el contable, el fiscal, o con diversos enfoques como pueden ser el de costos, o el de valor; o definiciones en las que se hace especial hincapié hacia las causas o hacia los efectos de la depreciación.

Sin embargo, todas ellas son válidas y verdaderas atendiendo al motivo específico que haya originado su formulación. Por otro lado, sería impráctico pretender elaborar una definición de depreciación tan amplia que englobara todos los diversos criterios y enfoques.

Y así por ejemplo, desde el punto de vista contable, podemos decir que "el fenómeno de la depreciación, es aquel que se considera a través de un sistema contable que permite distribuir de una manera sistemática y racional, el costo u otro valor base de activos de capital tangibles, deduciendo el valor de recuperación,(de existir este), sobre la vida útil estimada de cada unidad". Lo anterior constituye un proceso de distribución o asignación, no de valuación, que aunque toma en consideración la ocurrencia de los diversos factores que afecten a la depreciación durante un año, no intenta medio o cuantificar los efectos de cada factor en cada año en particular y aclarando por otro lado, que la depreciación anual, es la porción del cargo total que bajo ese determinado sistema contable, se asigna a cada año.

Otra definición nos dice que: "depreciación es la expiración o consumo

en todo o en parte, de la vida de servicio o utilidad de una propiedad, - como resultado de la acción de una o más de las fuerzas conducentes al retiro de servicio de dicha propiedad". Esta definición tiene el mérito de que define la depreciación, no en términos de costo o de valor, sino en - términos de la característica fundamental de una propiedad: su capacidad para rendir un servicio útil.

Desde otro punto de vista, se define como depreciación: "ala pérdida causada por factores que finalmente originan el retiro de servicio de la propiedad, sin que esto pueda ser evitado por operaciones de mantenimiento. Estos factores incluyen el desgaste deterioro, inadecuabilidad y obsolescencia".

La finalidad de considerar la depreciación es la de permitir al poseedor de un activo, recuperar durante la vida útil de la propiedad, el - capital invertido en el.

A pesar de que hemos relacionado la depreciación con la pérdida del valor, en la práctica, su aplicación en contabilidad, estudios de ingeniería económica, estudios fiscales, etc..., se expresa en función de costo, no de valor.

La validez o utilidad que en cada caso tenga cada una de las diversas definiciones, radica en el sentido específico que se quiera dar al - término depreciación, ya que puede tener los siguientes significados:

1°- Como pérdida, decremento o en general, variación del valor de un activo.

2°- Como costo, así como su asignación respectiva dentro del cuadro completo de los costos de operación.

3°- Como índice de la condición o estado físico de una propiedad.

Al respecto de este tercer significado, hay que reconocer que aunque la depreciación no se define en términos de la condición física de un activo, los valuadores la consideran frecuentemente como índice del valor - de una propiedad, lo cual se explica por el hecho de que es obvio que la depreciación del costo o la depreciación del valor de una propiedad, no puede"observarse" en la forma en que puede hacerse con el estado físico - de la propiedad, observación que suministra un índice de la depreciación

del costo o del valor actual de una propiedad. Estas observaciones directas se expresan a través de la "depreciación observada" o del "porcentaje de condición", términos empleados por los valuadores.

Sin embargo, debemos concluir que una estimación real de la asignación de costos por depreciación o del valor presente de una propiedad debe basarse en la edad inadecuabilidad, grado de obsolescencia, utilidad futura y otros factores, tanto como en el estado físico. El estado físico solo, no representa la depreciación, ni es la sola "medida" de la depreciación ni en cuanto a costo, ni en cuanto a valor.

DEPRECIACION Y REEMPLAZO: Desde el punto de vista de costo y dado que el principal propósito de contabilizar los costos por depreciación es el permitir recobrar la base depreciable o inversión depreciable de una propiedad iediante cargos a los costos de producción, es obvio que este objetivo no depende ni guarda relación con una cierta política de reemplazos ni con el costo del futuro reemplazo para la propiedad existente, ya que no es la finalidad de la depreciación ir acumulando un fondo para la futura adquisición de un reemplazo.

Por lo tanto, y en cuanto a costo se refiere, la depreciación no se ve afectada por la política de reemplazo, salvo en cuanto a que esta política controla y determina el período probable o promedio de vida de servicio de una propiedad.

Ahora bien, en cuanto a valor se refiere y precisamente para efectos de una valuación la depreciación si está afectada por el costo del reemplazo.

Dado que el valor de un activo lo hemos definido como el valor presente de los beneficios futuros que dicho activo aportará, si se eleva el costo de reemplazar un activo que en el futuro permita continuar las operaciones, la propiedad existente adquirirá mayor valor actual, (excepto en el caso de que su valor actual ya sea solo el de rescate o de desecho). En estas condiciones, una propiedad existente podrá ser valuada estimando el costo de su reemplazo y ajustando por el efecto de depreciación para compensar la diferencia en la utilidad que tenía la propiedad cuando nueva y la que tiene en la fecha de la valuación.

DEPRECIACION Y MANTENIMIENTO: Muchas veces, a través del tratamiento que se da a los conceptos de depreciación y mantenimiento se adivina una confusión respecto a la liga que guarda el efecto de el conjunto de operaciones que constituyen el mantenimiento con la depreciación.

En principio y por definición la depreciación es independiente del mantenimiento, ya que hemos establecido que la depreciación de un activo físico es la pérdida, no restituida por el mantenimiento de la capacidad de servicio, debido a los factores que finalmente causan el retiro de la propiedad, sin embargo, es claro que una buena política de mantenimiento tiene efecto indirecto en la depreciación, en cuanto a que puede prolongar la vida útil de una propiedad; aunque no obstante, de ninguna manera pueda decirse, por completas que sean las operaciones de conservación y mantenimiento, uqe contraresten el efecto de los factores que a final de cuentas causan el retiro de una propiedad.

El término "mantenimiento" implica la idea de constancia en las operaciones orientadas a conservar en buenas condiciones de operación una propiedad. Los costos de mantenimiento constituyen por tanto un importante renglón de los costos de operación.

Las llamadas reparaciones menores forman parte del mantnimiento y su costo por tanto, se carga a la operación. Las reparaciones mayores también son directamente cargables a la operación, excepto en el caso de mejoras o adiciones que se consideran como nuevas inversiones.

Los costos de mantenimiento y los de conservación son en realidad diferentes en su esencia y en su tratamiento. Los costos de mantenimiento se van originando y cubriendo durante la operación rutinaria y a medida que se van originando, en tanto que los costos por depreciación emanan de la necesidad de amortizar una inversión ya realizada inicialmente, durante el período de vida útil de la propiedad. Los costos de depreciación representan el costo original del activo, proratedo y cargado a la operación, in-dependientemente del estado del mantenimiento. Pero entonces, y hasta cierto punto, el costo por depreciación anual (pero no el costo total por depreciación) puede estar controlado por la política de mantenimiento, ya que una propiedad sujeta a mantenimiento regular y adecuado durará un mayor número de años y estará en capacidad de prestar un mayor número de servicios que una propiedad similar sometida a insuficiente mante

nimiento y normalmente la asiganción anual de costo por depreciación será menor en el primer caso debido a que prestará servicio útil un mayor número de años.

## METODO DEL VALOR PRESENTE.

El método consiste fundamentalmente, en reducir diferencias futuras en - tre alternativas, a una sola cantidad equivalente expresada en el momento presente.

Lo más frecuente, es que las cantidades que constituyen un flujo de efecti - vo, se " lleven " al punto cero, o momento actual, sin embargo, en oca - siones pudiera ser más conveniente, por representatividad, por facilidad de comparación con otras alternativas, etc..., expresar la corriente de e - fectivo concentrada en otro punto cualquiera del tiempo distinto del punto - cero.

Para indicar que una cantidad ó una serie de ingresos y/ o egresos, ha sido expresada en el punto cero, diremos que ha sido " actualizada ".

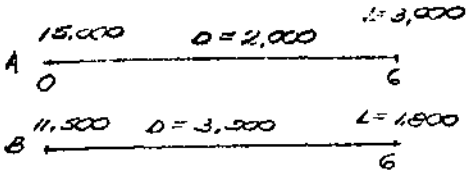
Es frecuente escuchar que para indicar lo anterior, se emplee el término - " descontar ". Así, se dirá que una cantidad o una serie ha sido " descon - tada " al momento actual, sin embargo nosotros consideramos que el térmi- no " actualizar " es más correcto.

Veamos cual es la mecánica y el significado de la comparación de alterna - tivas con el método del Valor Presente:

EJEMPLO:

Consideremos dos alternativas A y B, con los flujos de efectivo que se - muestran en sus respectivas escalas de tiempo. Supongamos además, que

la tasa mínima atractiva de recuperación se fija en 12 %. ¿ Cuál de las dos alternativas es más conveniente ?




Llevando la corriente de gastos y el valor de recuperación al momento actual (cero), se tiene:

$$VP_A = 15{,}000 - 3{,}000\,(P/F,\ 12\%,\ 6) + 2{,}000\,(P/A,\ 12\%,\ 6)$$

$$= 15{,}000 - 3{,}000 \times 0.50663 + 2{,}000 \times 4.1114$$

$$= 15{,}000 - 1{,}520 + 8{,}223 = \qquad \$\ 21{,}703.$$

$$VP_B = 11{,}500 - 1{,}800\,(P/F,\ 12\%,\ 6) + 3{,}500\,(P/A,\ 12\%,\ 6)$$

$$= 11{,}500 - 912 + 14{,}390 = \qquad \$\ 26{,}802.$$

diferencia a favor de A: $ 2 059.

Ya que actualizamos considerando como positivos los gastos, el Valor Presente que nos es favorable es el de la alternativa A, por representar el costo actualizado equivalente menor.

El significado del resultado anterior es el hecho de que la sobre-inversión inicial de $ 3,500.00 que la alternativa A implica sobre la B, se justifica plenamente, yá que no solo se recupera a una tasa de 12 % en el periodo de 6 años con los ahorros de $ 1,500.00 anuales y con un mayor valor de recuperación, por $1,200.00 al final del periodo de servicio analizado, sino que redituá un 12 %, más un porcentaje adicional correspondiente a una cantidad total expresada en el momento actual, de $ 2,059.00.

Si la diferencia hubiese sido cero, aun la alternativa más atractiva sería la A,

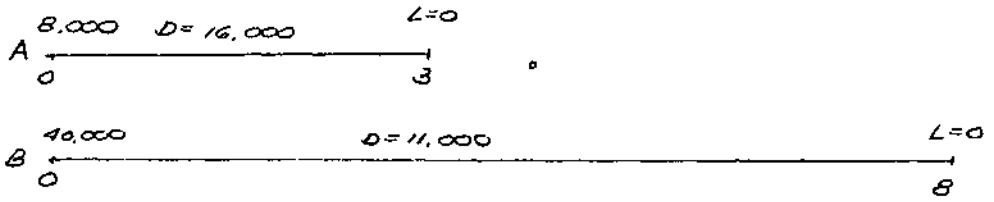
ya que dicho resultado se interpretaría como que la sobre-inversión de A, sobre B, se recupera exactamente con una tasa de intereses del 12%.

En el caso de que la diferencia hubiese sido negativa, esto significaría que la inversión adicional en A no se alcanzaría a recuperar con una tasa del 12%, y siendo esta la tasa mínima atractiva de recuperación, la alternativa A sería rechazada y aceptada la B.

El método del Valor Presente puede ser empleado también para la comparación entre alternativas con distintos periodos de vida económica.

EJEMPLO:

Consideremos dos alternativas de selección de equipos cuyas características se indican en las escalas de tiempo correspondientes. Supongamos una tasa mínima atractiva de recuperación de 10 %.




Recordemos que en términos generales, el tratamiento de un problema de éste tipo puede ser tratado con dos criterios:

a) Considerar como horizonte de comparación, el periodo correspondiente a la alternativa más corta, en este caso: 3 años. Dicho de otra forma, despreciar los futuros posibles eventos y sus consecuencias, más allá de los 3 años.

b) Predecir los cursos de acción que pudiesen seguirse a partir del 3er año, a fin de buscar igualar los horiontes económicos en ambas alternativas A y B.

Apliquemos primero el criterio ( a ). Comparemos las alternativas con el método del Costo Anual y con el del Valor Presente:

Con el Método del Costo Anual:

$CA_A = 8.000\ (A/P, 10\%, 3) + 16.000 = \$\ 19.217$

$CA_B = 40.000\ (A/P, 10\%, 8) + 11.000 = \ \ 18.498$

diferencia a favor de B : $\$\ \ 719$/año

Con el Método del Valor Presente:

$VP_A = 800 + 16.000\ (P/A, 10\%, 3) = \$\ 47.792.$

$VP_B = [40.000\ (A/P, 10\%, 8) + 11.000] \cdot (P/A, 10\%, 3) = 46.004.$

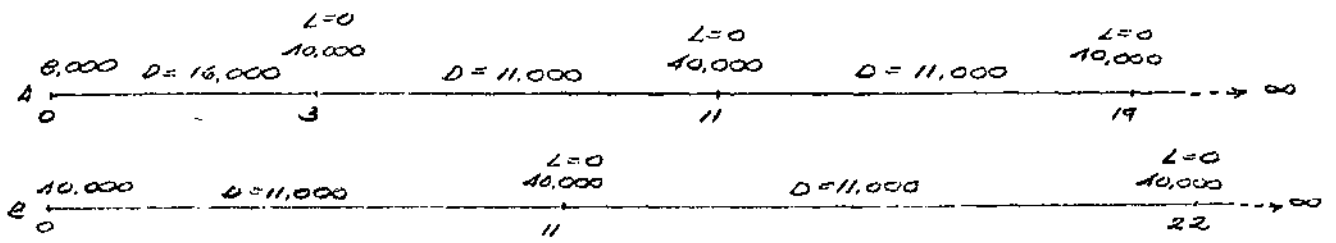
diferencia a favor de B : $\$\ 1.788$ (presente)

ambos resultados son equivalentes, ya que: $1.788 = 719\ (P/A, 10\%, 3)$

De lo anterior, se desprende que el equipo B es el más económico.

Apliquemos ahora el criterio ( b ). Recordamos que una primera postura encuanto a la suposición sobre los reemplazos que pudiesen hacerse a continuación tanto de A como de B para igualar sus periodos de comparación, sería la de suponer reemplazos futuros idénticos a los originales en cada alternativa, hasta un común múltiplo que en este caso sería de 24 años. Pero ya vimos anteriormente que esta situación nos conduce al mismo resultado, aún numericamente, que el obtenido al aplicar el criterio ( a ).

Consideremos entonces que los reemplazos en cada alternativa, se harán con equipos al menos tan eficientes economicamente, como el más económico disponible actualmente. Dado, que al menos en base al criterio ( a ), el equipo más económico, resultó ser el B, supongamos una corriente indefinida de reemplazos a partir de A y B, con equipos Tipo B:




actualizando cada una de las corrientes de costos, se tiene:

$$VP_A = 8.000 + 16,000\ (P/A,\ 10\%,\ 3) + [10.000\ (A/P,\ 10\%,\ 8) + 11,000] \cdot (P/A,\ 10\%,\ \infty) \cdot (P/F,\ 10\%,\ 3) \quad = \$\ 186,\ 716$$

$$VP_B = [10,000\ (A/P,\ 10\%,\ 8) + 11,000] \cdot (P/A,\ 10\%,\ \infty) \quad = \$\ 181,\ 976$$

$$\$\ \ 1,\ 788$$

Que es el mismo resultado obtenido con el criterio A, al analizar unicamente los 3 primeros años.

Este resultado pudo haberse previsto, yá que si observamos las corrientes de costos expresados en las escalas de tiempo, notaremos que al reemplazar en el año 3, a A, con una maquina tipo B, a partir del año 3 se establece para ambas alternativas una situación idéntica, pudiendo entonces " simplificarse " en ambas alternativas dichos periodos a partir del año 3.

Por lo anterior, el suponer reemplazos a partir del años 3, solo introducirá - efectos en la comparación de alternativas, y provocará cambio en el resultado obtenido con el criterio ( a ), a medida que el equipo de reemplazo de A, a - partir del año 3, sea más eficiente economicamente que el equipo B,. Así, - un equipo, ~~un equipo~~ un poco más económico que el de B, igualará las alternativas; y un equipo de mayor economía aun, empleado como reemplazo de A a par

tir del 3o. año, dará supremacía a la alternativa A. Esto se explica, por el hecho de la más pronta utilización y aprovechamiento de mejoras tecnológicas en A, a partir del 3o. año.

---

El método del Valor Presente muestra en determinadas circunstancias, ventajas y desventajas de las alternativas en estudio, en una forma no apreciable en el método del Costo Anual.

Así por ejemplo, en aquéllas situaciones en las que la inversión inicial es predominante sobre el efecto que pudieran tener los costos anuales, de operación por ejemplo, dentro del comportamiento general de un conjunto de alternativas, el metodo del Valor Presente pone de manifiesto, con todo su " Peso ", el efecto de las diferencias en las inversiones iniciales. En otro caso, permitirá poder juzgar sobre la importancia, o no importancia, de dichos costos iniciales.

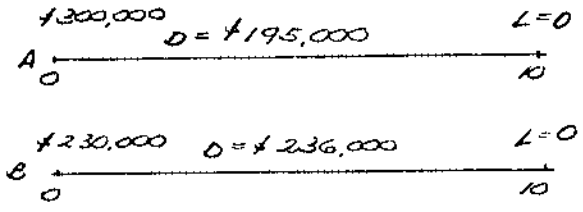
Las características fundamentales del método son: el que las cantidades ubicadas en el momento actual ( o en el punto del tiempo en el cual se "actualiza" el flujo de efectivo ), se muestran con su valor real, y el que las diferencias entre alternativas puedan expresarse y compararse a través de cantidades ( sumas ) únicas y expresadas en un solo punto y no por medio de una serie de sumas o cantidades anuales, tal como sucede en el metodo del Costo Anual, lo que en ocasiones pudiese distorsionar la visión de conjunto sobre una situación dada.

EJEMPLO:

Al Gerente de una planta de proceso le son presentadas dos cotizaciones A y

B para la implantación de un sistema que le permitirá elevar su volumen - anual de producción. Después de realizar un análisis económico, avisa al - agente de ventas del sistema B, que su proposición ha sido descartada, a lo cual este responde estar dispuesto a hacer una rebaja en el precio inicial - del sistema que ofrece. ¿ Cuál es el descuento que debe otorgar el agente - de ventas de B, de forma tal que su sistema se convierta en la alternativa- más economicamente atractiva para el Gerente ?

Las características de los sistemas A y B son las siguientes:




Se estima la tasa mínima de recuperación en 6 %. Dado que lo que es factible de variarse es el precio inicial, conviene analizar el problema con el criterio del Valor Presente:

$$VP_A = 300,000 + 195,000\ (P/A,\ 6\%,\ 10) = \$\ 1.735,220$$

$$VP_B = 230,000 + 236,000\ (P/A,\ 6\%,\ 10) = \underline{\quad 1,966,984}$$

diferencia a favor de A: $ 231,764.

Lo cual quiere decir que la alternativa A no solo no es $ 70,000.00 más cara ( como podría juzgarse si solo se atendiese al monto de las inversiones inicia les ) sino que es $ 231,764.00 más barata ( esta cifra, expresando la diferen- al momento cero ), por lo que, para que el sistema B se convierta en el más

atractivo, habra que avisar al agente de ventas que lo debe implantar totalmente gratis y acompañar su regalo con un cheque por más de $ 1,764.00, yá que aun con un cheque de $ 1,764.00 exactamente, la alternativa A, seguirá siendo la más económica por el hecho que la sobre inversión que representa, con respecto a B, se recuperaría exactamnte aún, al 6 %, que es la tasa que ha sido fijada como tasa mínima atractiva de recuperación.

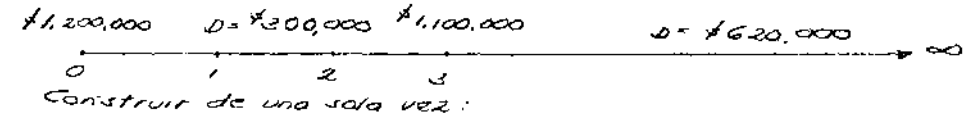
EJEMPLO:

Veamos el caso de una empresa en que se ~~se~~ planea el crecimiento y la expansión de la misma, y para decidir sobre la construcción de uma ampliación de la planta, se presentan dos alternativas: la primera es llevar a cabo la construcción ~~de~~ en dos etapas con diferencia de 3 años entre ellas, y la segunda consiste en construír desde el principio la ampliación completa yá ~~en~~ con la capacidad que se espera necesitar dentro de 3 años. Ambas alternativas presentan ventajas y desventajas como son: el costo de la construcción de la planta en dos partes, es más costosa que la construcción en una sola etapa, lo cual es obvio por la duplicación de ciertos trabajos y actividades como supervisión y dirección de la obra, costos indirectos, el tener que efectuar trabajos que en la segunda etapa deban destruírse, etc..., por otro lado, sí la ampliación se construye desde el principio con la capacidad total, durante los primeros años funcionará a capacidad sobrada, siendo por tanto, muy ineficiente y por tanto más costosa su operación en esta etapa, pero también es muy probable~~mente~~ que si se hace de una sola vez, quede mucho más integrada en su conjunto, de tal manera que su operación, ya en los años futuros, sea más eficiente y por tanto más económica que si se planea y construye en 2 partes.

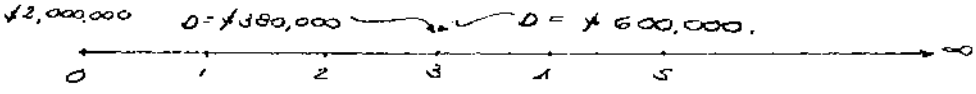
Yá funcionando se supone continuará operando un número indefinido de años

Los resultados de los estudios para una y otra alternativa se le presentan a la empresa de la siguiente manera, yá expresadas en la escala de tiempos:

Construcción en dos etapas: diferimiento de la inversión:




Construir de una sola vez:




Se considera tasa mínima atractiva de recuperación de: 15%

$$VP_{2\,etapas}: 1{,}200{,}000 + 300{,}000\,{}_{15-3}uspwf + \left(1{,}100{,}000 + 620{,}000\,{}_{15-\infty}uspwf\right)\,{}_{15-3}sppwf =$$

$$= 1{,}200{,}000 + 300{,}000 \cdot 2.2832 + \left(1{,}100{,}000 + \frac{620{,}000}{0.15}\right) \cdot 0.65752 =$$

$$= 1{,}200{,}000 + 684{,}960 + 3{,}441{,}021 \qquad = \$\,5{,}325{,}981$$

$$VP_{1\,etapa}: 2{,}000{,}000 + 380{,}000\,{}_{15-3}uspwf + 600{,}000\,{}_{15-\infty}uspwf \cdot {}_{15-3}sppwf$$

$$= 2{,}000{,}000 + 380{,}000 \cdot 2.2832 + \frac{600{,}000}{0.15} \cdot 0.65752$$

$$= 2{,}000{,}000 + 867{,}616 + 2{,}630{,}080 \qquad = \$\,5{,}497{,}696$$

diferencia a favor de la 1ª altern. = $ 171,715

Lo anterior demuestra que la sobre-inversión actual de $800,000.00 que implica el construír en una sola etapa la ampliación de la planta, no se justifica, con los ahorros que origina en cuanto a la construcción total y en cuanto a la operación en los años futuros; esto , al menos, considerando una tasa de interes mínima de 15 %.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE LA CONSTRUCCION ( DEL 9 DE JULIO AL 22 DE AGOSTO - DE 1973 )

| NOMBRE Y DIRECCION | EMPRESA Y DIRECCION |
|---|---|
| 1. ING. JORGE A BOUE<br>Paseo de la Reforma No. 1590<br>México, D. F.<br>Tel: 5-20-70-16 | CONSTRUCTORA I. B. S. A.<br>Oxfor No. 5<br>México 6, D. F.<br>Tel: 5-11-83-37 |
| 2. ING. EDUARDO CAMACHO ARGUELLES<br>México, D. F. | INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOSIAL<br>Reforma No. 506<br>México, D. F. |
| 3. ING. LUIS ANGEL DE LA BRENA LUNA<br>Invernadero No. 168<br>Col. Nueva Sta. María<br>México, D. F.<br>Tel: 5-56-38-39 | M.G.B. CONSTRUCCIONES, S. A.<br>Lafragua No. 4-601<br>México, D. F.<br>Tel: 5-46-58-70 |
| 4. LIC. CARLOS DE LUNA VALDEZ<br>Agustín Gutiérrez Calle No. 39<br>México, D. F.<br>Tel: 5-24-17-67 | NOR IMPULSORA, S. A.<br>Madrid No. 165-7o. Piso<br>México, D. F.<br>Tel: 5-24-51-33 |
| 5. ING. LUOS FELIPE EGUIA RAMOS<br>12 de Octubre No. 49<br>Col. Jardines del Sur<br>México, D. F. | PETROLEOS MEXICANOS<br>Marina Nacional No. 329<br>México, D, F.<br>Tel: 5-31-63-21 |
| 6. ING. JAIME ADOLFO FLORES CHAVEZ<br>Calle 33 No. 7-3<br>Col. Gómez Farías<br>México, D. F. | PETROLEOS MEXICANOS<br>Marina Nacional No. 329-8o. Piso<br>México, D. F.<br>Tel: 5-31-61-49 |
| 7. ING. GERMAN GARCIA VALDEZ<br>Circuito 8 Economistas No. 128<br>Ciudad Satélite<br>Edo. de México | PETROLEOS MEXICANOS<br>Marina Nacional No. 328-8o. Piso<br>México, D. F.<br>Tel: 5-31-61-49 |
| 8. ING. FORTUNATO GUZMAN RIVERA<br>México, D. F. | |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE LA CONSTRUCCION ( DEL 9 DE JULIO AL 22 DE AGOSTO - DE 1973 )

| NOMBRE Y DIRECCION | EMPRESA Y DIRECCION |
|---|---|
| 9. ING. RAUL FELIPE HARO LOPEZ<br>General León No. 43-203<br>Col. San Miguel Chapultepec<br>México, D. F. | INGENIEROS Y ARQUITECTOS, S. A.<br>Minería No. 145<br>Col. Escandón<br>México 18, D. F.<br>Tel: 5-16-04-60 |
| 10. ING. ARMANDO HERMOSILLO MARTINEZ<br>Colina del Zahori No. 60<br>Fraccionamiento Boulevares<br>Naucalpan, Edo. de México<br>Tel: 5-60-67-46 | INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL<br>Jefatura de Conservación del Valle de México |
| 11. ING. PABLO LE ROYAL LEAL<br>Av. Cuauhtémoc No. 1103-1<br>Col. del Valle<br>México 12, D. F. | INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL<br>Paseo de la Reforma No. 506-17o.P.<br>México, D. F.<br>Tel: 5-53-18-37 |
| 12. ARQ. CARLOS MAYORA ROSSELL<br>Callejón Tlalaxco No. 30<br>Col. Coyoacán<br>México 21, D. F.<br>Tel: 5-54-40-42 | INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL<br>Paseo de la Reforma No. 506<br>México, D. F.<br>Tel: 5-53-44-87 |
| 13. ING. JOAQUIN SANCHEZ MARTINEZ<br>Calle "D" No. 37 Manzana 3<br>Col. Educación<br>México 21, D. F.<br>Tel: 5-49-82-67 | INGENIERIA Y ARQUITECTURA ESPECIALIZADA, S. A.<br>Baja California No. 284 Desp.702<br>México 11, D. F.<br>Tel: 5-64-51-28 |
| 14. ING. JOSE LUIS SANCHEZ MARTINEZ<br>Cerro del Hombre No. 56-4<br>México 21, D. F.<br>Tel: 5-54-06-50 | FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNAM.<br>Ciudad Universitaria<br>México 20, D. F. |
| 15. ING. JUAN VALDEZ JUAREZ<br>Fte. del Castillo No. 3<br>Tecamachalco<br>México 10, D. F.<br>Tel: 5-89-00-93 | INGENIEROS Y ARQUITECTOS, S. A.<br>Minería No. 145<br>Col. Escandón<br>México 18, D. F.<br>Tel: 5-16-05-35 |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ECONOMICO DE DECISIONES EN LA INDUSTRIA DE LA CONSTRUCCION ( DEL 9 DE JULIO AL 22 DE AGOSTO DE 1973 )

| NOMBRE Y DIRECCION | EMPRESA Y DIRECCION |
|---|---|
| 16. ARQ. MIGUEL ANGEL VAZQUEZ SANTOYO<br>Fraternidad 79 Edificio Laurel A-11<br>San Angel<br>México 20, D. F.<br>Tel: 5-48-32-58 | INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL<br>Paseo de la Reforma No. 506-17o.P<br>Tel: 5-53-44-87 |
| 17. ING. MANUEL E. VEGA MEMIJE<br>Ixtaccihuatl 6-306<br>Col. Hipodromo Condesa<br>México 11,D. F.<br>Tel: 5-84-36-01 | INGENIERIA, PROYECTOS Y VALUACION S. A.<br>Tuxpan 54 Despacho 105<br>México 7, D. F.<br>Tel: 5-84-37-69 |
| 18. SR. LUIS FELIPE VILCHES GALAN<br>Uxmal No. 704-Altos<br>Col. Narvarte<br>México 13, D. F.<br>Tel: 5-75-38-12 | NACIONAL FINANCIERA ( GERENCIA DE DESARROLLO REGIONAL )<br>Isabel la Católica No. 51-6o. Piso<br>México 1,D. F.<br>Tel: 5-12-29-52 |
| 19. ARQ. RODRIGO ZORRILLA MARTINEZ<br>Eligio Villamar No. 9<br>Col. Coyoacán<br>México 21, D. F. | ZYG CONSTRUCCIONES, S. A.<br>Insurgentes Sur No. 1844-402<br>México, D. F.<br>Tel: 5-24-39-99 |