

A los asistentes a los cursos del Centro de Educación

Continua

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar 15 días antes de la terminación del curso, en las oficinas del Centro, con la Sra. Sánchez.

El control de asistencia se efectuará al terminar la primera hora de cada día de clase, mediante listas especiales en las que los interesados anotarán personalmente su asistencia. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN LA
GESTION DE EMPRESAS.

Fecha	Duración	TEMA	Profesor
Feb. 15	17-21 Hrs.	Introducción a la Ing. de Sistemas.	Dr. F. Ochoa.
Feb. 16	9-13 "	Métodos de Optimización.	Ing. Zavala.
Feb. 16	15-19 "	Modelos de Asignación y Programación de Recursos.	Ing. Aguirre.
Feb. 22	17-21 "	Evaluación de Proyectos.	Ing. Castellanos.
Feb. 23	9-13 "	Int. a los Fenómenos Aleatorios I.	Ing. Castilleja.
Feb. 23	15-19 "	Int. a los Fenómenos Aleatorios II.	Ing. Escutia.
Marz. 10.	17-21 "	Teoría de Decisiones en la Empresa.	Ing. Acosta.
Marz. 2	9-13 "	Selección de Inversiones bajo riesgo.	Ing. Huet. Ing. Moreno.
Marz. 2	17-21 "	Planeación de Est. Adm. Sist. de Información.	Ing. Escutia. Ing. Zúñiga.

**APLICACION DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN
LA GESTION DE EMPRESAS**

MODELOS DE ASIGNACION DE RECURSOS

JOEL O. AGUIRRE R.

TEMAS:

- I. GRAFICAS
- II. CAMINOS OPTIMOS
- III. PLANEACION DE PROYECTOS
(Un Proceso Matricial)
- IV. PLANEACION, PROGRAMACION Y
CONTROL DE PROYECTOS
- V. MODELO SHAFFER
- VI. MODELO WIEST
- VII. MODELO HADLEY
- VIII. MODELO PRITSKER, WATTERS Y WOLFE

III. PLANEACION DE PROYECTOS
(Un Proceso Matricial)



I N D I C E

- ANTECEDENTES
- METODOLOGIA
- PLANEACION DE UNA REESTRUCTURACION ADMINISTRATIVA

ANTECEDENTES

A partir del desarrollo de los métodos de ruta crítica en 1957, el número de aplicaciones en diversas latitudes a proyectos de muy diversas naturalezas es verdaderamente notable. Conviene destacar que, este desarrollo ha ido paralelo con la evolución de las ciencias de la administración. (1)

El tema que trata el presente artículo es relativo a la utilización de algunos aspectos matemáticos en la tarea de los analistas para la planeación de grandes proyectos.

Es ampliamente conocido que en la planeación de proyectos se forma un modelo coordinado del orden en el que deben ejecutarse todas las actividades integrantes (2). Como un primer paso, se elabora un listado con todas las actividades que, supuestamente, forman el proyecto. El nivel de detalle de dichas actividades dependerá de la precisión deseada, como de la experiencia que se tenga en proyectos semejantes.

En un segundo paso, se analiza el orden de ejecución de actividades, normalmente, de las siguientes formas:

Utilizando una tabla de secuencias o sea una matriz cuadrada, en donde para las actividades, por renglón, se indican sus inmediatas precedentes.

Después

		U ₁	U ₂	U ₃		U _n
Antes	U ₁		1			
	U ₂			1		
	U ₃					1
	U _n					

Como una tabla de secuencia para un mediano número de actividades es difícil de manipular, surge otra forma de obtener las secuencias de las actividades; esto es, mediante la elaboración de un listado de éstas y las que le siguen, normalmente denominado listado de precedencias.

<u>Actividad</u>	<u>Actividad Posterior</u>
U ₁	U ₂
U ₂	U ₃
U ₃	U _n

Lamentablemente cuando el número de actividades es muy grande, también la lista de precedencias resulta de una complicación extrema que impide, en muchos casos, la elaboración sencilla y rápida del tercer paso; es decir, de la representación del plan mediante una red.

Se plantea en este artículo, un método para elaborar la red, de grandes proyectos, con posibilidad de fraccionarse en subproyectos y -

con actividades genéricas.

Se aplican conceptos de algebra lineal y teoría de redes, a fin de simplificar el orden de ejecución de subproyectos y actividades genéricas y de este modo, a la vez de obtener fácilmente la red del proyecto, se identifican todas las actividades incluidas.

METODOLOGIA

El método consiste en primer término, en definir el orden de realización de los diversos subproyectos, mediante una matriz o tabla de precedencias. De esta manera se está en posibilidad de definir para la red, cuáles son las precedencias obligatorias en los subproyectos por condiciones particulares del proyecto.

	x_1	x_2		x_{n-1}	x_n
x_1	0	0		1	0
x_2	0	1		0	0
x_{n-1}	0	0		0	1
x_n	0	0		0	0

Matriz (A) de subproyectos

$a_{ij} = 1$ si a_{ij} es un elemento de la matriz (A)

$a_{ij} = 0$ si a_{ij} no es un elemento de la matriz (A)

En segundo término, ya que los subproyectos están constituidos por una serie de actividades genéricas, puede determinarse su precedencia por condiciones técnicas.

	y_1	y_2		y_{m-1}	y_m
y_1	0	1		0	0
y_2	0	0		1	0
y_{m-1}	0	0		0	1
y_m	0	0		0	0

Matriz (B) de actividades

$b_{ij} = 1$ si b_{ij} es un elemento de la matriz (B)

$b_{ij} = 0$ si b_{ij} no es un elemento de la matriz (B)

Conjugado ambas matrices o ambas tablas de precedencias, se puede formar otra matriz en la que se indique, en los renglones, los subproyectos y en las columnas, las actividades de acuerdo, con el orden previamente establecido.

A continuación debe definirse la matriz asociada a las actividades específicas que componen cada subproyecto.

...

ACTIVIDADES

	y_1	y_2		y_{m-1}	y_m
x_1	0	1		1	1
x_2	1	0		1	0
x_{n-1}	0	1		0	1
x_n	1	1		0	1

SUBPROYECTOS

Matriz (C) de Subproyectos y Actividades

$$c_{ij} = 1 \text{ si } c_{ij} \text{ existe}$$

$$c_{ij} = 0 \text{ si } c_{ij} \text{ no existe}$$

A partir de esta última matriz se obtiene fácilmente la red de precedencias técnicas, en la cual quedan relacionadas las actividades específicas (c_{ij}) que componen cada subproyecto, misma que se complementa al añadir los nudos inicial y final.

La identificación para cada actividad específica queda definida con la identificación asociada, tanto a las actividades genéricas (y_j) como a cada subproyecto (x_i), lo que puede apreciarse en la figura 1.

Queda sólo por definir y añadir a la red, la secuencia adicional de actividades por restricción de recursos, lo que puede hacerse mediante un listado de precedencias o matriz adicional, el cual está minimizado, ya que un buen número de estas restricciones ya está incluido en la red de precedencias técnicas.

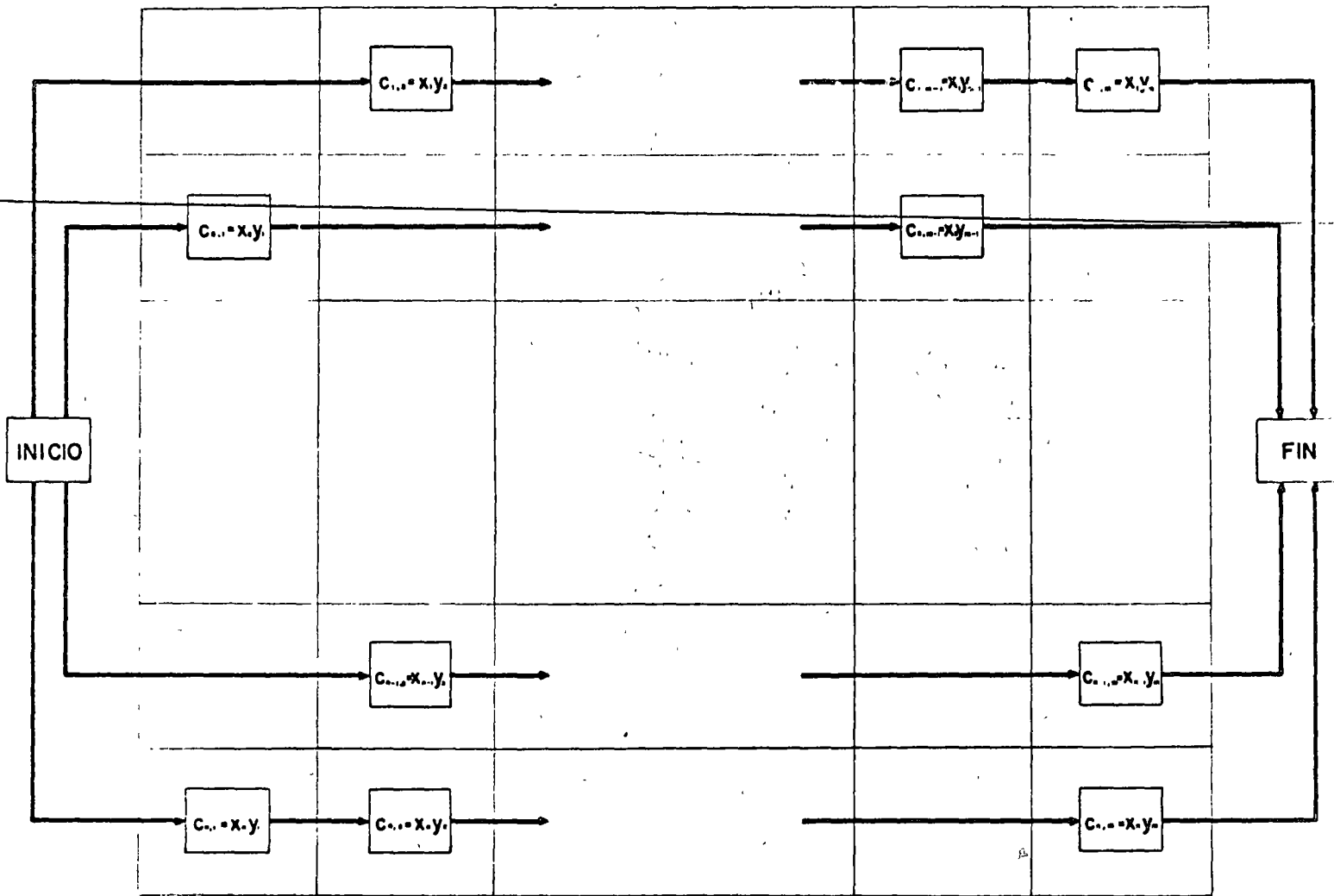


FIGURA 1

PLANEACION DE UNA REESTRUCTURACION ADMINISTRATIVA

Se presenta un ejemplo hipotético sobre la planeación de la reestructuración administrativa de una compleja organización.

Como paso previo se han definido los problemas fundamentales que afectan a dicha organización, mismos que constituyen, para este caso, los subproyectos.

La secuencia de éstos por condiciones particulares de la organización se indica en forma listada, con una numeración en cientos, misma que permite dejar lugar para la identificación de las actividades genéricas.

El listado ordenado, de todos los subproyectos es el siguiente:

- 100 Definición de programas y metas
- 200 Definición de costos de operación
- 300 Elaboración de presupuestos
- 400 Definición de necesidades de instalaciones
- 500 Sistema de dotación de materiales de trabajo
- 600 Sistemas de dotación de ropa de trabajo
- 700 Equipo de transporte
- 800 Reglamentación sobre autoridad y responsabilidad
- 900 Capacitación de administradores
- 1000 Area de relaciones públicas
- 1100 Normas generales de operación

- 1200 Archivo de clientes
- 1300 Definición de la demanda insatisfecha

Atendiendo el orden técnico de realización de las actividades genéricas en un subproyecto, se encontró la secuencia siguiente:

- 4 Estudio inicial
- 8 Definición del problema
- 12 Definición del objetivo del estudio
- 16 Investigación preliminar
- 20 Plan de trabajo
- 24 Recopilación de información
- 28 Programación para análisis
- 32 Análisis de datos
- 36 Formulación del diagnóstico
- 40 Generación de alternativas
- 44 Presentación de alternativas
- 48 Selección de alternativa
- 52 Diseño de nuevos sistemas
- 56 Diseño de procedimientos
- 60 Mecanización
- 64 Promoción de resultados
- 68 Integración de recursos humanos
- 72 Capacitación del personal
- 76 Supervisión del funcionamiento
- 80 Evaluación del sistema

Nótese, que la numeración, también, está espaciada con el fin de dejar lugar a la inclusión de actividades intermedias, de acuerdo con los imponderables presentados en la fase del control del proyecto.

Los subproyectos específicos, con sus actividades particulares - por realizar, de acuerdo a la situación del problema y de la organización se indican a continuación:

100	Definición de programas y metas	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
		40	Generación de alternativas
		44	Presentación de alternativas
200	Definición de costos de operación	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		28	Programación para análisis
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
300	Elaboración de presupuestos	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		28	Programación para análisis
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
		40	Generación de alternativas
		44	Presentación de alternativas
		48	Selección de alternativas
		52	Diseño de un nuevo sistema
		60	Mecanización
		64	Promoción de resultados
		72	Capacitación del personal
		76	Supervisión del funcionamiento
		80	Evaluación del sistema

400	Definición de necesidades de instalaciones	4	Estudio inicial
		8	Definición del problema
		12	Definición de objetivos del estudio
		16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
		40	Generación de alternativas
		44	Presentación de alternativas
		48	Selección de alternativas
		52	Diseño de un nuevo sistema
500	Sistema de dotación de materiales de trabajo	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		28	Programación para análisis
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
		52	Diseño de un nuevo sistema
		60	Mecanización
		72	Capacitación del personal
		76	Supervisión del funcionamiento
		80	Evaluación del sistema
600	Sistema de dotación de ropa de trabajo	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		28	Programación para análisis
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
		52	Diseño de un nuevo sistema
		60	Mecanización
		72	Capacitación del personal
		76	Supervisión del funcionamiento
		80	Evaluación del sistema
700	Equipo de transporte	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico

800	Reglamentación sobre auto ridad y responsabilidad	4	Estudio inicial
		8	Definición del problema
		12	Definición de objetivos del estudio
		16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		32	Análisis de datos
		36	Formulación del diagnóstico
		40	Generación de alternativas
		44	Presentación de alternativas
		48	Selección de alternativas
		56	Diseño de procedimientos
		64	Promoción de resultados
		72	Capacitación del personal
		76	Supervisión del funcionamiento
		80	Evaluación del sistema
900	Capacitación de adminis- tradores	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		32	Análisis de datos
		40	Generación de alternativas
		44	Presentación de alternativa
		48	Selección de alternativas
		72	Capacitación del personal
		76	Supervisión del funcionamiento
		80	Evaluación del sistema
1000	Area de relaciones pú- blicas	16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		32	Análisis de datos
		56	Diseño de procedimientos
		72	Capacitación del personal
		76	Supervisión del funcionamiento
		80	Evaluación del sistema
1100	Normas generales de operación	4	Estudio inicial
		8	Definición del problema
		12	Definición de objetivos del estudio
		16	Investigación preliminar
		20	Plan de trabajo
		24	Recopilación de información
		28	Programación para análisis
		32	Análisis de datos
		36	Formulación de diagnóstico

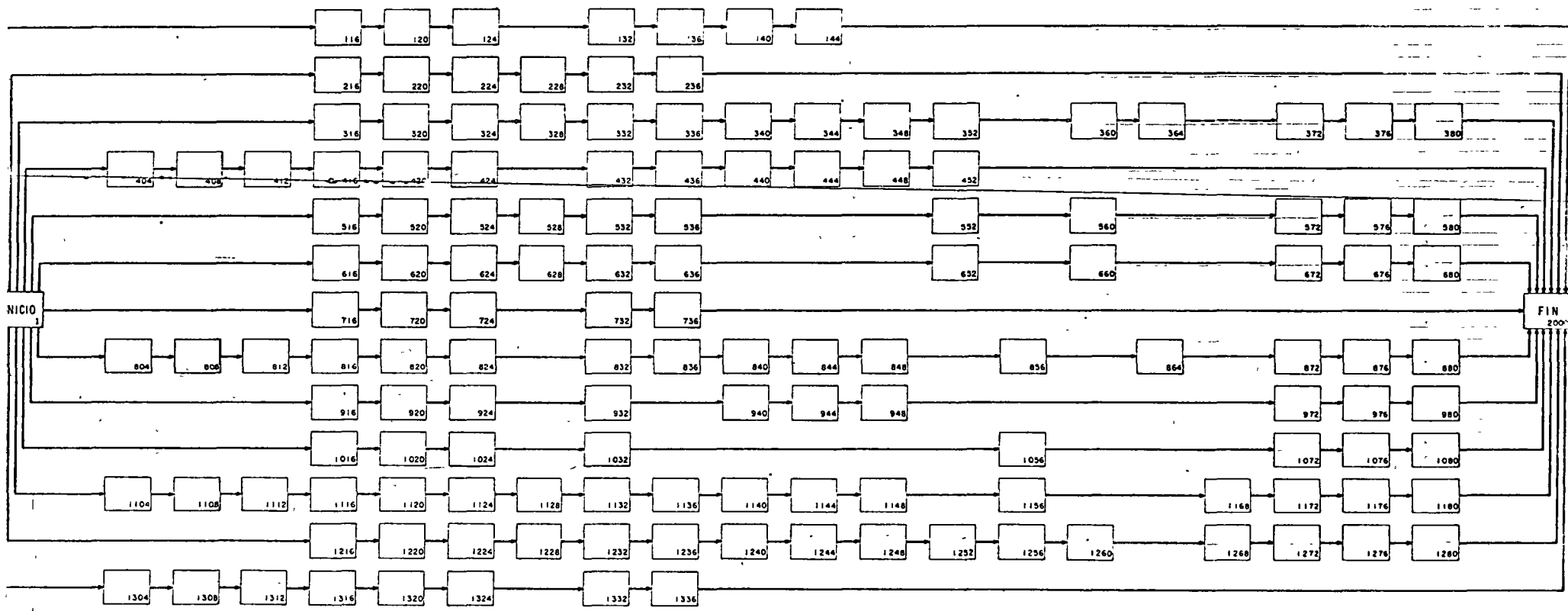
	40	Generación de alternativas
	44	Presentación de alternativas
	48	Selección de alternativas
	56	Diseño de procedimientos
	68	Integración de recursos humanos
	72	Capacitación del personal
	76	Supervisión del funcionamiento
	80	Evaluación del sistema
1200 Archivo de clientes	16	Investigación preliminar
	20	Plan de trabajo
	24	Recopilación de información
	28	Programación para análisis
	32	Análisis de datos
	36	Formulación del diagnóstico
	40	Generación de alternativas
	44	Presentación de alternativas
	48	Selección de alternativas
	52	Diseño de un nuevo sistema
	56	Diseño de procedimientos
	60	Mecanización
	68	Integración de recursos humanos
	72	Capacitación del personal
	76	Supervisión del funcionamiento
	80	Evaluación del sistema
1300 Definición de la demanda insatisfecha	4	Estudio inicial
	8	Definición del problema
	12	Definición de objetivos del estudio
	16	Investigación preliminar
	20	Plan de trabajo
	24	Recopilación de información
	32	Análisis de datos
	36	Formulación del diagnóstico

Una vez, que se tiene conocimiento de lo anterior, se está en posibilidad de construir la matriz asociada al proyecto (anexo I) y su red de precedencias técnicas (anexo II) con la numeración de cada actividad específica.

El paso final, no incluido, es añadir las restricciones por recursos, mismas que complementan la red; con todo lo cual se está en posibilidad de continuar con la fase de la programación con los métodos usuales de ruta crítica.

ACTIVIDADES SUB-PROYECTOS	ESTUDIO INICIAL	DEFINICION DEL PROBLEMA	DEFINICION OBJETIVOS DEL ESTUDIO	INVESTIGACION PRELIMINAR	PLAN DE TRABAJO	RECOLECCION DE INFORMACION	PROGRAMACION PARA ANALISIS	ANALISIS DE DATOS	FORMULACION DEL DIAGNOSTICO	GENERACION DE ALTERNATIVAS	PRESENTACION DE ALTERNATIVAS	SELECCION DE ALTERNATIVAS	DISENO DE UN NUEVO SISTEMA	DISENO DE PROCEDIMIENTOS	MECANIZACION	PROMOCION DE RESULTADOS	INTEGRACION DE RECURSOS HUMANOS	CAPACITACION DEL PERSONAL	SUPERVISION DEL FUNCIONAMIENTO	EVALUACION DEL SISTEMA
	4	5	17	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
DEFINICION DE PROGRAMAS Y METAS 100	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DEFINICION DE COSTOS DE OPERACION 200	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ELABORACION DE PRESUPUESTOS 300	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
DEFINICION DE NECESIDADES DE INSTALACIONES 400	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
SISTEMA DE DOTACION DE MATERIALES DE TRABAJO 500	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
SISTEMA DE DOTACION DE ROPA DE TRABAJO 600	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
EQUIPO DE TRANSPORTE. 700	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
REGLAMENTACION SOBRE AUTORIDAD Y RESPONSABILIDAD 800	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
CAPACITACION DE ADMINISTRADORES 900	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
AREA DE RELACIONES PUBLICAS. 1000	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
HORAS GENERALES DE OPERACION 1100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
ARCHIVO DE CLIENTES 1200	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
DEFINICION DE LA DEMANDA INSATISFECHA 1300	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MATRIZ DE SUBPROYECTOS Y ACTIVIDADES
ANEXO I



RED DE PRECEDENCIAS TECNICAS
ANEXO II

Gráficas

I. CONCEPTOS GENERALES

En este capítulo se definen las nociones principales de la teoría de las gráficas finitas del modo más intuitivo posible sin pretender formular una axiomática rigurosa.

GRAFICA DE ORDEN n . Sea un conjunto finito $X = \{x_i\} \ i = 1, 2, \dots, n$ y el conjunto A de elementos (x_i, x_j) tales que $x_i, x_j \in X$. La pareja $G = (X, A)$ constituye una gráfica de orden n .

A cada elemento de X se hace corresponder un punto del plano que se llama vértice de la gráfica y que representa al elemento de X al cual corresponde.

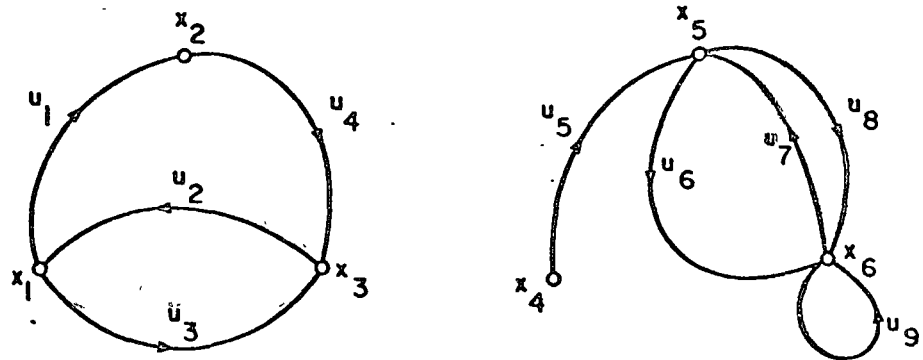


Figura 9.1

A cada elemento $(x_i, x_j) \in A$ se hace corresponder una flecha que va de x_i a x_j que se llama un arco de la gráfica y que representa al elemento de A al cual corresponde. Es posible que existan varios arcos distintos que vayan de un vértice x_i a otro x_j ; en este caso los arcos se representarán con $(x_i, x_j)_1, (x_i, x_j)_2, \dots$

La fig. 9.1 da un ejemplo de representación de una gráfica con la ayuda de vértices y arcos.

En este caso se tiene:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$A = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3),$$

$$(x_3, x_1), (x_4, x_5), (x_5, x_6)_1,$$

$$(x_5, x_6)_2, (x_6, x_5), (x_6, x_6)\} \quad |X| = 6, |A| = 9$$

en donde

$|X|$ = número de elementos contenidos en X .

9.1. Conceptos orientados

Extremos. Sea un arco $u = (x_i, x_j)$, x_i es el extremo inicial y x_j es el extremo final del arco u . Algunas veces se dice que x_i es un predecesor de x_j o que x_j es un sucesor de x_i .

Arcos adyacentes. Dos o más arcos se dicen adyacentes si tienen un vértice común. Así, en la fig. 9.1, los arcos (x_1, x_2) y (x_2, x_3) son adyacentes.

Vértices adyacentes. Dos vértices x_i y x_j son adyacentes si son distintos y al menos existe un arco (x_i, x_j) o (x_j, x_i) . Así en la fig. 9.1, x_1 y x_3 son adyacentes, también lo son x_2 y x_3 pero x_1 y x_4 no lo son.

Arcos incidentes a un vértice. Semigrados. Se dice que un arco es incidente a un vértice x_i hacia el exterior, si x_i es su extremo inicial y su extremo final es distinto de x_i . El semigrado exterior de un vértice x_i es el número de arcos incidentes al vértice x_i hacia el exterior.

Análogamente se definen los conceptos arco incidente a un vértice hacia el interior y semigrado interior de un vértice. Así en la fig. 9.1 el semigrado interior de x_3 es 2.

Arco incidente a un conjunto de vértices. Si $Y \subset X$ es un conjunto de vértices de la gráfica $G = (X, A)$, se dice que el arco $u = (x_i, x_j)$ es incidente a Y hacia el exterior si se tiene $x_i \in Y, x_j \notin Y$. El conjunto de arcos incidentes a Y hacia el exterior, se representa con $w^+(Y)$.

Análogamente se dice que el arco $v = (x_m, x_n)$ es incidente a Y hacia el interior si se tiene $x_m \notin Y, x_n \in Y$ y al conjunto de arcos incidentes a Y hacia el interior se le representa con $w^-(Y)$.

Al conjunto $w^+(Y) \cup w^-(Y)$ de los arcos incidentes a Y se le representa con $w(Y)$.

Por ejemplo, si en la fig. 9.1 se tiene $Y = \{x_2, x_3, x_4\}$ entonces:

$$w^+(Y) = \{u_2, u_5\} \quad w^-(Y) = \{u_1, u_3\}$$

$$w(Y) = w^+(Y) \cup w^-(Y) = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$$

Subgráfica, gráfica parcial y subgráfica parcial. Una subgráfica de la gráfica (X, A) es una gráfica constituida por un conjunto $Y \subset X$ y por el conjunto de todos los arcos de A que unen vértices de Y .

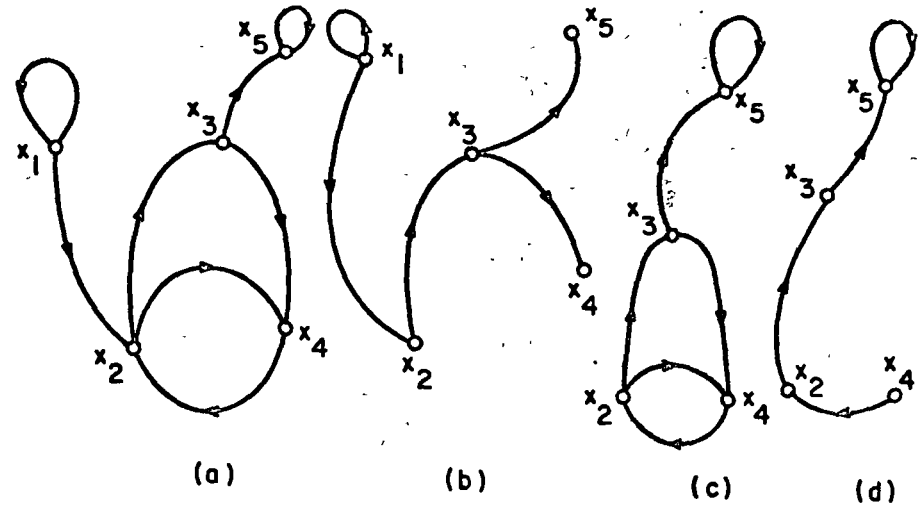


Figura 9.2

Así en la fig. 9.2, (c) es una subgráfica de la gráfica (a).

Una gráfica parcial de (X, A) es una gráfica constituida por todos los vértices de X y por los arcos de un conjunto $B \subset A$. En la fig. 9.2, (b) es una gráfica parcial de (a).

Una subgráfica parcial es una gráfica parcial de una subgráfica. En la fig. 9.2, (d) es una subgráfica parcial de (a).

Por ejemplo, si X es el conjunto de las ciudades de la República Mexicana y A es el conjunto de las carreteras contadas dos veces (una en cada sentido) entonces la gráfica (X, A) está representada por el mapa carretero de la República, el mapa de las supercarreteras es una gráfica parcial y el mapa carretero de Chihuahua es una subgráfica.

Camino, camino simple, camino elemental. Un camino es una secuencia $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ de arcos tal que el extremo final de cada arco coincide con el extremo inicial del arco que le sigue.

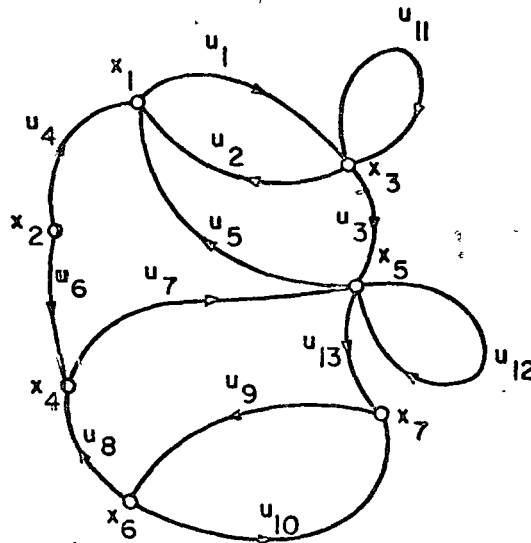


Figura 9.3

Así en la fig. 9.3 se pueden mencionar los caminos:

$$(u_1, u_3, u_{13}, u_9), (u_6, u_7, u_8, u_{11}, u_2)$$

Un camino también puede representarse por los vértices que contiene:

$$(x_1, x_3, x_5, x_7, x_6), (x_2, x_4, x_5, x_1, x_3, x_1)$$

Un camino es simple si no utiliza más de una vez el mismo arco y en caso contrario es compuesto.

Un camino es elemental si no utiliza más de una vez el mismo vértice, en caso contrario se dice que es no elemental.

Los ejemplos que siguen se refieren a la fig. 9.3.

- (u_1, u_3, u_{13}, u_9) es elemental y simple.
- (u_1, u_3, u_5) es no elemental y simple.
- $(u_7, u_{13}, u_9, u_8, u_7)$ es compuesto y no elemental.

Longitud de un camino. La longitud de un camino $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ es el número de arcos que contiene la secuencia y se representa con $l(\mu)$. Así refiriéndose a la fig. 9.3, se tiene:

$$\mu = (u_1, u_3, u_{13}, u_9) \quad l(\mu) = 4$$

Circuito, circuito elemental, anillo. Un circuito es un camino finito $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ en el cual el extremo inicial de u_1 coincide con el extremo final de u_k . Un circuito puede representarse por los arcos o los vértices que contiene. En la fig. 9.3 (u_5, u_1, u_3) ó (x_5, x_1, x_3, x_5) es un circuito.

Se dice que un circuito es elemental, si todos los vértices que contiene son distintos a excepción de los vértices inicial y final que coinciden. En la fig. 9.3 (u_5, u_1, u_3) es un circuito elemental.

Se habla de un anillo en el caso de que un circuito esté constituido por un solo vértice y un solo arco. En la fig. 9.3 u_{11} y u_{12} son anillos.

Gráfica completa. Se dice que una gráfica $G=(X, A)$ es completa si se tiene que:

$$\forall x_i, x_j : (x_i, x_j) \notin A \implies (x_j, x_i) \in A$$

En otras palabras, una gráfica es completa si toda pareja de vértices de G están ligados al menos en una de las dos direcciones. Así la fig. 9.4 representa a una gráfica completa.

Gráfica simétrica y gráfica antisimétrica. Se dice que la gráfica $G = (X, A)$ es simétrica si se tiene que:

$$\forall x_i, x_j : (x_i, x_j) \in A \implies (x_j, x_i) \in A$$

En una gráfica simétrica, toda pareja de vértices adyacentes están siempre unidos por dos arcos de orientaciones opuestas.

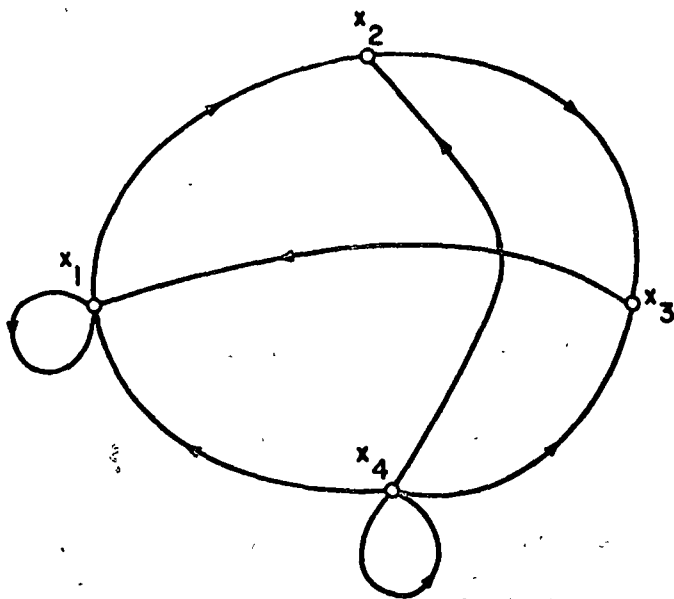


Figura 9.4

Una gráfica $G = (X, A)$ es antisimétrica si se tiene que

$$\forall x_i, x_j : (x_i, x_j) \in A \implies (x_j, x_i) \notin A$$

Una gráfica antisimétrica no puede contener anillos y entre toda pareja de vértices adyacentes, no puede existir más de un arco.

Por ejemplo las figs. 9.5 y 9.6 representan una gráfica simétrica y una antisimétrica respectivamente.

Gráfica fuertemente conexa. Se dice que una gráfica $G = (X, A)$ es fuertemente conexa si $\forall x_i$ y $\forall x_j$ con $x_i \neq x_j$ siempre existe un camino de x_i a x_j .

Por ejemplo la gráfica representada por la fig. 9.7 es fuertemente conexa mientras que la representada en la fig. 9.6 no lo es.

a) **Algoritmo para determinar si una gráfica $G = (X, A)$ es fuertemente conexa.**

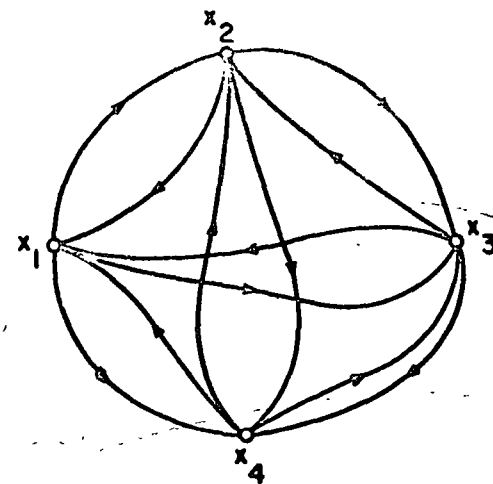


Figura 9.5

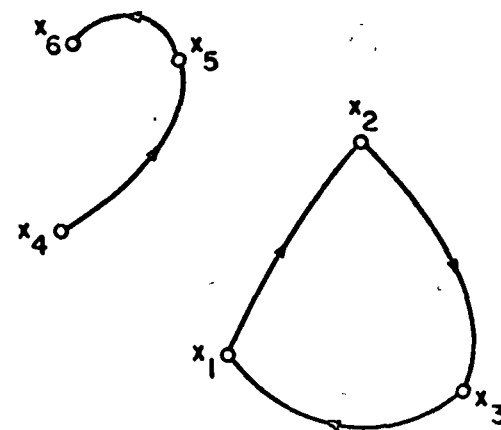


Figura 9.6

- Se elige un vértice arbitrario x_i y se marca con los símbolos (+) y (-).
- Se marca con (+) todo vértice $x_j \neq x_i$ tal que $(x_i, x_j) \in A$.
- Se marca con (-) todo vértice $x_j \neq x_i$ tal que $(x_j, x_i) \in A$.
- Se repiten los pasos anteriores para cada uno de los vértices de G .
- Si al final todos los vértices están marcados con (+) y con (-) entonces la gráfica es fuertemente conexa.

La ilustración de la aplicación del método anterior a la gráfica representada en la fig. 9.7, se muestra en la fig. 9.8.

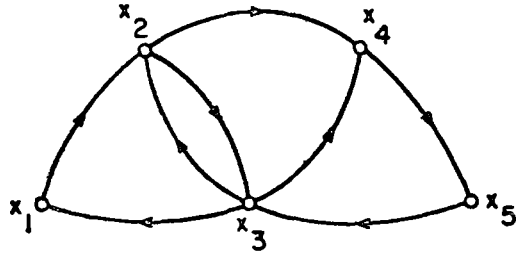


Figura 9.7

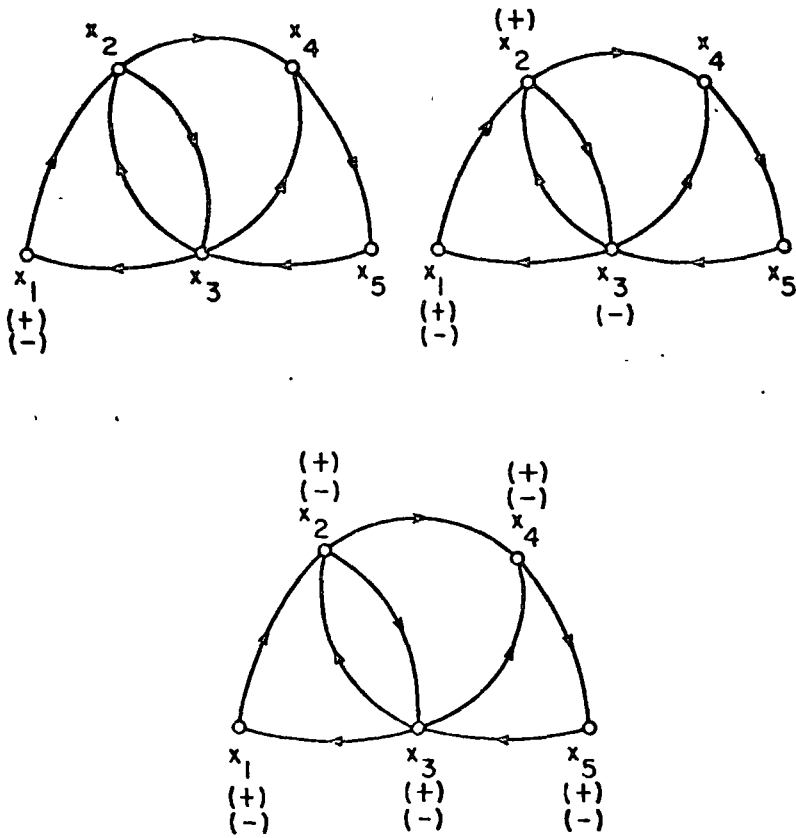
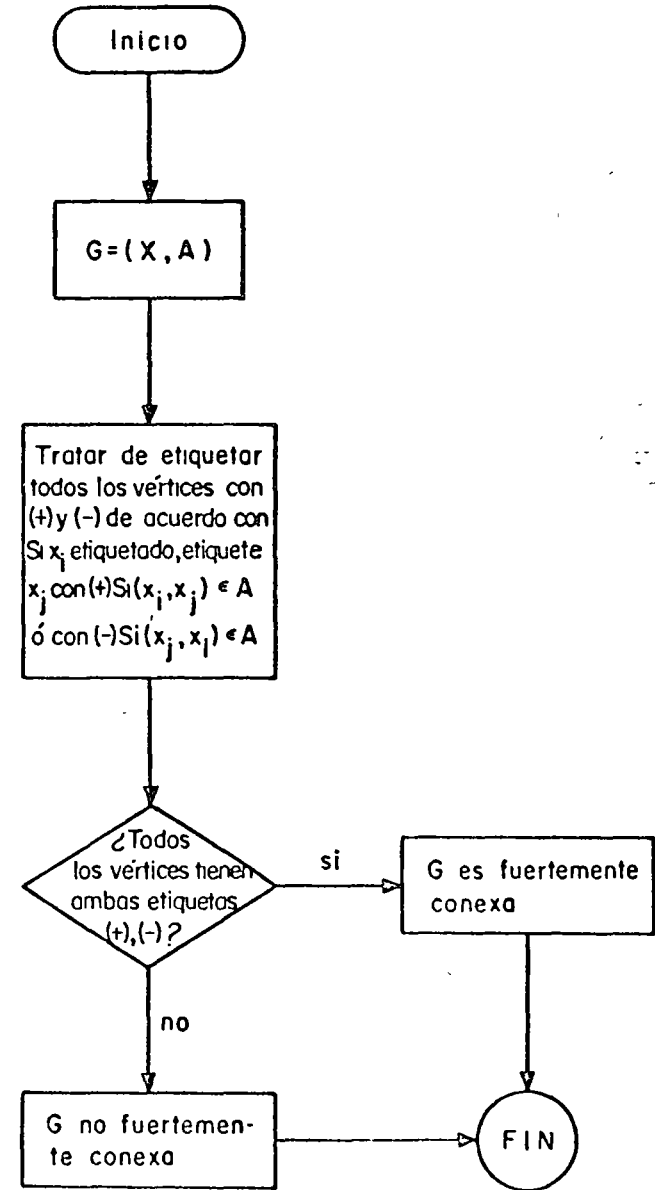


Figura 9.8





Caminos óptimos

10.1. Camino mínimo

Camino mínimo. Dados los vértices x_i y x_j de una gráfica $G = (X, A)$, se llama camino mínimo de x_i a x_j , y se representa con $d(x_i, x_j)$, al número de arcos del camino de longitud mínima que va de x_i a x_j .

Así para el ejemplo de la fig. 2.1 se tiene $d(x_0, x_1) = 3$ y $d(x_1, x_0) = 4$. Si no existe ningún camino que vaya de x_i a x_j se escribe $d(x_i, x_j) = \infty$ y además en el caso de que $x_i = x_j$ se conviene en escribir $d(x_i, x_i) = 0$.

Es fácil ver, partiendo de la definición, que:

$$d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k), x_i, x_j, x_k \in X \quad (10.1.1)$$

y que si la gráfica G es simétrica, entonces:

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = \lambda(x_i, x_j)$$

A $\lambda(x_i, x_j)$ se le llama distancia entre los vértices x_i y x_j .

Algoritmo del camino mínimo. Para determinar el o los caminos mínimos que van del vértice x_i al vértice x_j se procede como sigue:

a) Se marca con un 0 al vértice x_p . Sea $A(0)$ el conjunto respectivo, esto es, $A(0) = \{x_p\}$

b) Se marca con un 1 a todos los vértices x_i adyacentes a x_p y tales que $(x_p, x_i) \in A$. Al conjunto de vértices marcados en esta etapa se le designará con $A(1)$.

c) Se marca con un 2 a todos los vértices x_i adyacentes a los vértices x_i marcados en el inciso anterior y tales que $(x_i, x_j) \in A$. Al conjunto de vértices marcados en esta etapa se le designará con $A(2)$.

d) Se prosigue en la misma forma hasta llegar a marcar el vértice x_f . Supóngase que $x_f \in A(m)$ y considérense los vértices $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ tales que:

- | | |
|----------------------|--------------------------------|
| $x_{i_1} \in A(m-1)$ | $(x_{i_1}, x_f) \in A$ |
| $x_{i_2} \in A(m-2)$ | $(x_{i_2}, x_{i_1}) \in A$ |
| | |
| $x_{i_m} \in A(0)$ | $(x_{i_m}, x_{i_{m-1}}) \in A$ |

El camino $\mu = [x_p = x_{i_m}, x_{i_{m-1}}, \dots, x_{i_1}, x_f]$ es el camino mínimo buscado.

La demostración del algoritmo antes descrito es inmediata y está basada en el siguiente principio fundamental de la programación dinámica:

"Un camino mínimo solo puede estar formado por caminos parciales de longitud mínima."

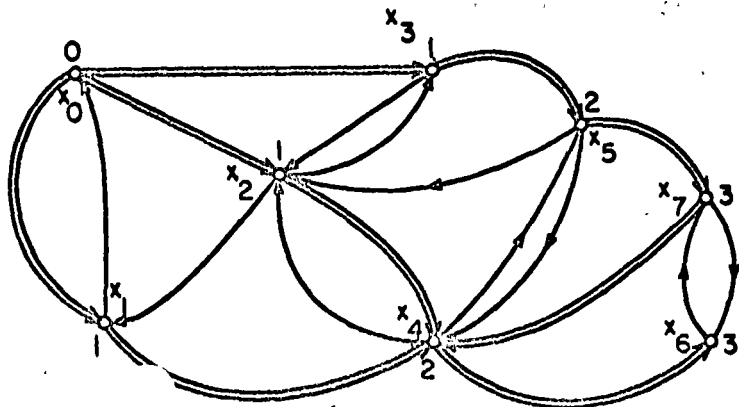


Figura 10.1

Como ejemplo se determinará el camino mínimo que va del vértice x_0 al x_7 de la gráfica mostrada en la fig. 2.1. La aplicación del algoritmo del camino mínimo conduce a los siguientes resultados:

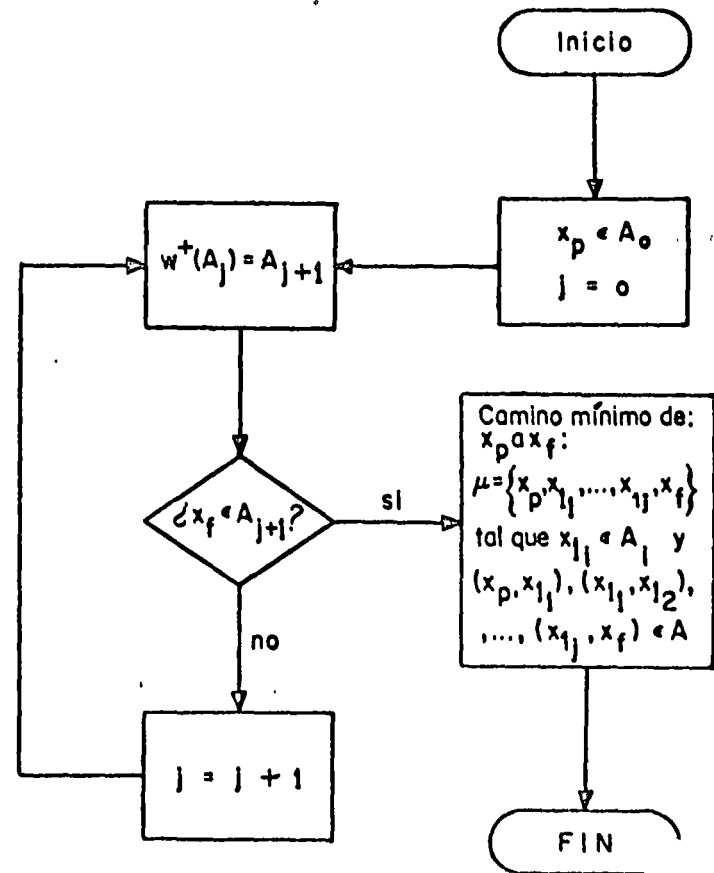
$$A(0) = [x_0], A(1) = [x_1, x_2, x_3], A(2) = [x_4, x_5]$$

$$A(3) = [x_6, x_7],$$

$$\mu = [x_0, x_1, x_2, x_5, x_7] \text{ ó } [x_0, x_1, x_4, x_5, x_7] \text{ ó } [x_0, x_2, x_4, x_5, x_7]; d(x_0, x_7) = 3$$

Simultáneamente pueden obtenerse los caminos mínimos que van de x_0 a cualquier otro vértice de la gráfica. Estos caminos se indican con doble trazo en la fig. 10.1.

El diagrama de flujo del algoritmo es:



10.2. Camino de valor mínimo

Sea una gráfica $G = (X, A)$ y supóngase que todo arco u tiene asociado un número $v(u)$ llamado valor de u . Se trata de encontrar un camino que vaya de un vértice $x_0 \in X$ a otro vértice $x_n \in X$ y tal que su valor total

$$v(\mu) = \sum_{u \in \mu} v(u) \quad (10.2.1)$$

sea mínimo.

Sea $v_{ij} = v[(x_i, x_j)]$ si $(x_i, x_j) \in A$; $v_{ij} = +\infty$ si $(x_i, x_j) \notin A$. A todo arco (x_i, x_j) se hará corresponder un número ξ_{ij}^i tal que $\xi_{ij}^i = 1$ si μ contiene al arco (x_i, x_j) y $\xi_{ij}^i = 0$ en caso contrario. De esta manera el problema del camino de valor mínimo queda resuelto si se logra minimizar a:

$$Z = \sum_i \sum_j v_{ij} \xi_{ij}^i \quad (10.2.2)$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi_{ij}^i &\leq 1 & i, j = 0, 1, \dots, n \\ \sum (\xi_{ij}^i - \xi_{ij}^j) &= 0 & \left\{ \begin{array}{l} i \neq 0 \\ i \neq n \end{array} \right. \\ \sum (\xi_{j0}^0 - \xi_{j0}^j) &= 1 & \\ \sum (\xi_{jn}^n - \xi_{jn}^j) &= -1 & \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

ξ_{ij}^i entero.

En otras palabras, el problema del camino de valor mínimo equivale a un problema de programación lineal entera.

10.3. Algoritmo de Dantzig para el camino de valor mínimo

Supóngase que en el paso k de un cierto proceso de cálculo se conocen los caminos de valor mínimo que ligan a k vértices de una gráfica con un cierto origen x_0 . Sea S el conjunto de esos k vértices (fig. 10.2).

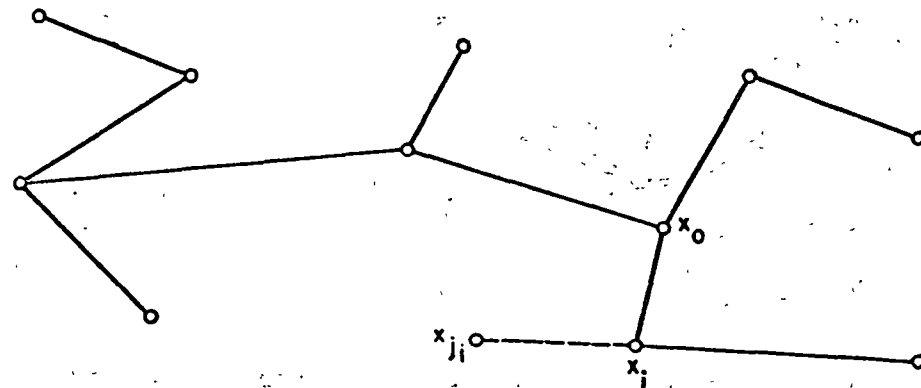


Figura 10.2

Sean:

- El vértice $x_i \in S$
- l, el valor del camino de valor mínimo que va de x_0 a x_i .
- $x_{j_i} \notin S$ un vértice adyacente a x_i en caso de existir y
- λ_i el valor del arco (x_i, x_{j_i}) de valor mínimo.

Es claro que como siguiente paso del cálculo deberá elegirse x_i , como el $(k+1)$ -ésimo vértice de S si se tiene:

$$l_i + \lambda_i = \min (l_i + \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (10.3.1)$$

Obsérvese que la regla anterior implica que para seleccionar el $(k+1)$ -ésimo vértice es necesario realizar k comparaciones y consecuentemente en una gráfica con n vértices se necesitarán no más de: $1 + 2 + \dots + n = n(n-1)/2$ comparaciones. La forma de sistematizar los cálculos se ilustrará con un ejemplo.

Ejemplo. - Calcular los caminos de valor mínimo, con origen en x_0 , de la gráfica de la fig. 10.3 en la cual se muestra el valor asociado a cada arco.

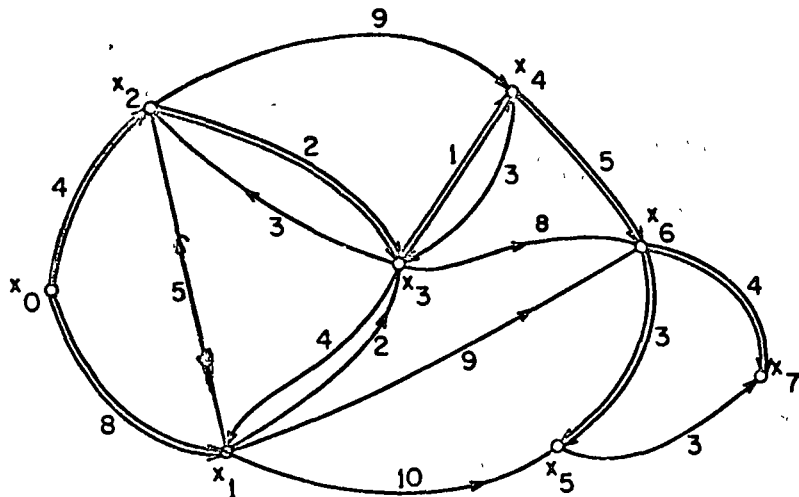


Figura 10,3

Paso 1. Se construye una tabla que muestre el conjunto $w(x_i)$ de cada vértice, ordenando los arcos por valor creciente según se muestra en la tabla 10.1.

Inicialmente el conjunto S está constituido únicamente por el vértice x_0 .

Paso 2. Se elige el arco (x_0, x_2) escribiendo su valor -4- en el encabezado de la columna x_2 ; se tachan todos los arcos que pertenezcan a $w(x_2)$. Se agrega x_2 al conjunto S . El camino de valor mínimo que va de x_0 a x_2 es $\mu_2 = [x_0, x_2]$.

x_0	8 IV x_1	4 I x_2	6 II x_3	7 III x_4	15 VI x_5	12 V x_6	16 VII x_7
x_0, x_2 4 I	x_1, x_3 2 II	x_2, x_3 2 II	x_3, x_4 1 III	x_4, x_3 3 II	x_5, x_7 3 VII	x_6, x_5 3 VI	
x_0, x_1 8 IV	x_1, x_6 9 V	x_2, x_1 5 IV	x_3, x_2 3 I	x_4, x_6 5 V		x_6, x_7 4 VII	
	x_1, x_5 10 VI	x_2, x_4 9 III	x_3, x_1 4 IV	x_3, x_6 8 V			

Tabla 10.1

Paso 3. Puesto que $l_i + \lambda_i = \min(l_i + \lambda_i)$ se compara $(x_0, x_1) -8-$ con $(x_2, x_3) -4 + 2-$ (arco que está contenido en una columna cuyo encabezado ha sido previamente marcado), se elige el camino x_0, x_2, x_3 , se escribe su valor 6 en el encabezado de la columna x_3 y se tachan todos los arcos que pertenezcan a $w(x_3)$. Se agrega x_3 al conjunto S . El camino de valor mínimo que va de x_0 a x_3 es $\mu_3 = [x_0, x_2, x_3]$.

Paso 4. Se comparan $(x_0, x_1) -8-$, $(x_2, x_1) -4 + 5-$ y $(x_3, x_4) -6 + 1-$ (estos arcos son el primero no tachado de cada columna cuyo encabezado ya ha sido marcado), se elige el camino x_0, x_2, x_3, x_4 , se escribe su valor -7- en el encabezado de la columna x_4 y se tachan todos los arcos que pertenezcan a $w(x_4)$. Se agrega x_4 al conjunto S . El camino de valor mínimo que va de x_0 a x_4 es $\mu_4 = [x_0, x_2, x_3, x_4]$.

Paso 5. Se comparan $(x_0, x_1) -8-$, $(x_2, x_1) 4 + 5-$, $(x_3, x_1) -6 + 4$ y $(x_4, x_6) -7 + 5-$, se elige el camino x_0, x_1 , se escribe su valor -8- en el encabezado de la columna x_1 y se tachan todos los arcos que pertenezcan a $w(x_1)$. Se agrega x_1 al conjunto S . El camino de valor mínimo que va de x_0 a x_1 es $\mu_1 = [x_0, x_1]$.

Paso 6. Se prosigue de la misma forma hasta llegar a encabezar todas las columnas. De esta manera se obtienen los caminos de valor mínimo que van de x_0 a cualquier otro vértice de la gráfica que se muestran con doble trazo en la figura. Se presenta el diagrama de flujo del método en la rutina G-3.

10.4. Camino de valor máximo

Para investigar un camino de valor máximo la gráfica no debe contener circuitos pues en caso contrario se podrá tener caminos de longitud no finita y consecuentemente el valor de estos caminos sería ilimitado.

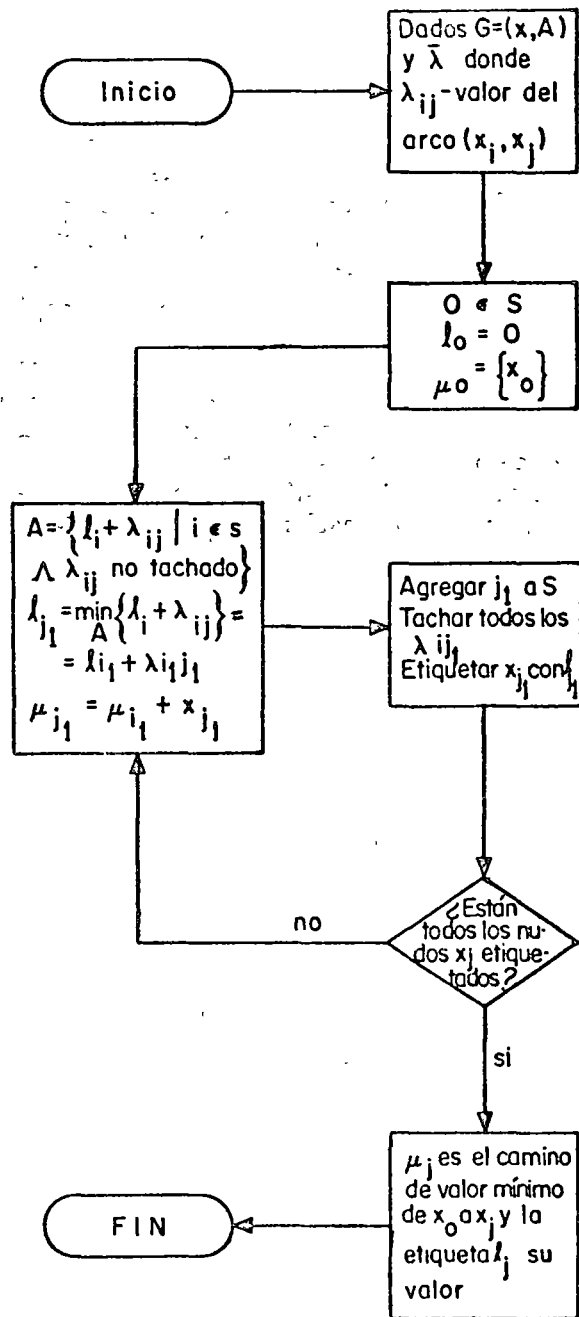
Algoritmo para determinar si una gráfica no tiene circuitos (Berge).

a) Se marca todo vértice x_i que no tiene sucesor.

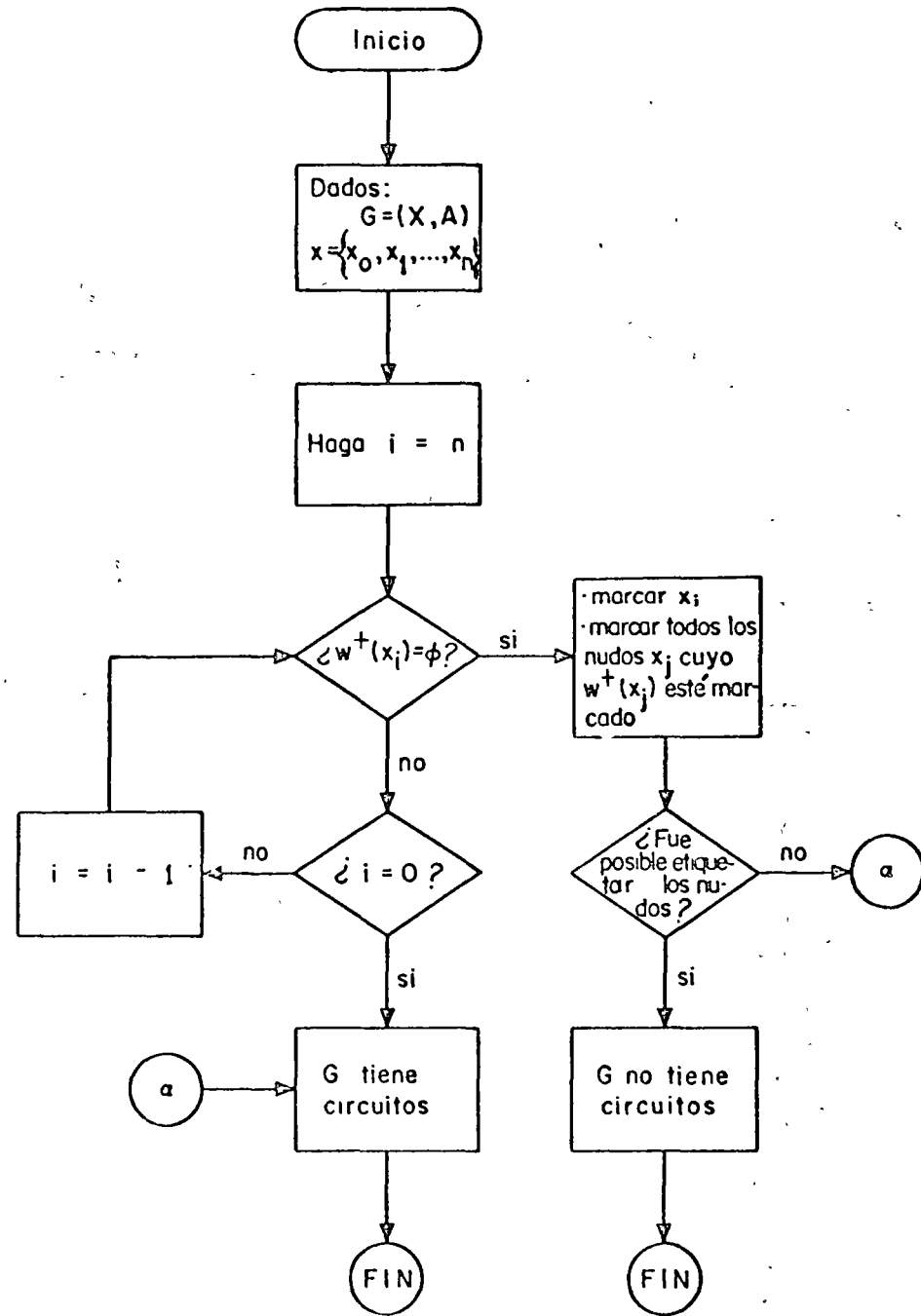
b) Se marca todo vértice x_j tal que todos sus sucesores están marcados.

Si de esta manera se llegan a marcar todos los vértices, entonces la gráfica no tiene circuitos.

El diagrama de flujo de este algoritmo se muestra en la rutina G-4; una aplicación, se ilustra en la fig. 10.4 en donde el número romano asociado a cada vértice indica el orden en que se marcó ese vértice.



(Rutina G-3)



(Rutina G-1)

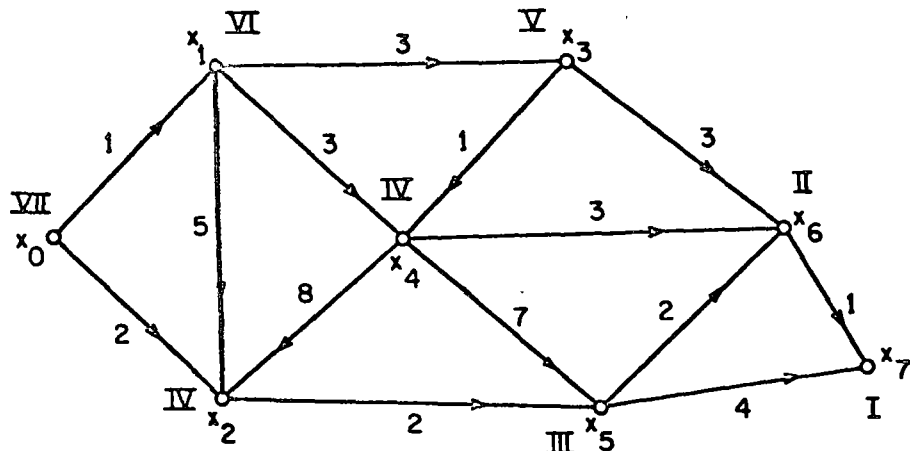


Figura 10.4

10.5. Algoritmos gráficos para caminos de valor óptimo

Se describirá primeramente el algoritmo gráfico para determinar el camino de valor mínimo entre dos vértices.

Primera parte:

Paso 1. Elegir un vértice inicial y marcarlo con un cero.

Paso 2. Todos aquellos vértices que están en arcos incidentes al exterior del vértice inicial se deben marcar con el valor asociado a su arco correspondiente.

Paso 3. Todo vértice que sea extremo final de un arco cuyo extremo inicial tenga una marca deberá marcarse con la suma de ésta más el valor asociado a dicho arco.

Paso 4. Si un arco es marcado más de una vez se elegirá la marca de menor valor.

Paso 5. Los pasos 3 y 4 se repetirán hasta que todos los vértices de la gráfica estén marcados.

Paso 6. La marca sobre un vértice cualquiera representa el valor del camino mínimo que va del vértice inicial a ese vértice.

La primera parte del algoritmo sólo sirve para indicar cual es el valor del camino mínimo entre un vértice "inicio" y todos los demás de la gráfica, a continuación se presenta como determinar los arcos que forman esos caminos.

Segunda parte:

Paso 1. Elija un vértice como final del camino mínimo y márkuelo con el valor de éste.

Paso 2. Todos aquellos vértices que se encuentran en arcos incidentes al interior del vértice final se deben marcar con la diferencia entre la marca del vértice fin del camino y el valor del arco correspondiente.

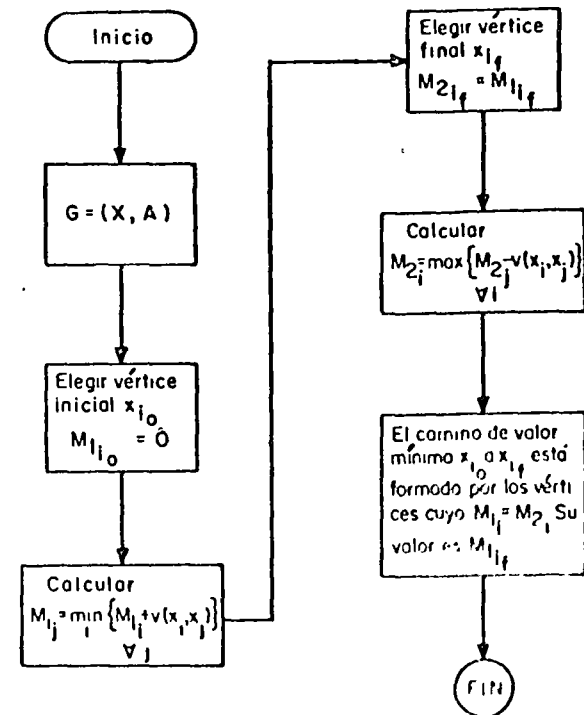
Paso 3. Todo vértice que sea extremo inicial de un arco cuyo extremo final tenga una marca deberá marcarse con la diferencia de ésta menos el valor asociado a dicho arco.

Paso 4. Si un arco es marcado más de una vez se elegirá la marca de mayor valor.

Paso 5. Los pasos 3 y 4 se repetirán hasta que se marque el vértice inicial del camino. Esta marca debe coincidir con la que se le dió en la primera parte del algoritmo.

Paso 6. El camino de valor mínimo entre los dos vértices llamados inicial y final esta formado por todos aquellos vértices que tengan marcas iguales debido a la aplicación de las dos partes del algoritmo.

Diagramáticamente:



Una aplicación de este algoritmo se ilustra en la gráfica de la fig. 10.5.

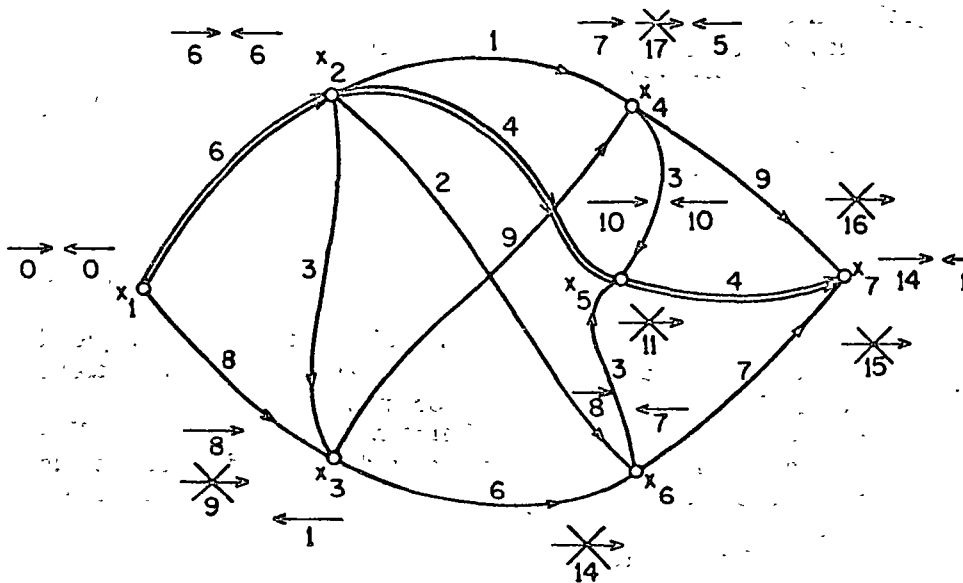


Figura 10.5

Se supuso como vértice origen del camino al vértice x_1 y como vértice final al x_7 . Las marcas de la primera parte del algoritmo se indicaron con una flecha cuyo sentido es de izquierda a derecha en tanto que las marcas de la segunda parte se indicaron con una flecha con sentido de derecha a izquierda.

El algoritmo gráfico para definir los caminos de valor máximo es idéntico al ya descrito salvo en el paso 4 de ambas partes en donde debe decir:

Primera parte:

Paso 4. Si un arco es marcado más de una vez se elegirá la marca de mayor valor.

Segunda parte:

Paso 4. Si un arco es marcado más de una vez se elegirá la marca de menor valor.

Una aplicación del algoritmo gráfico para caminos de valor máximo se ilustra en la gráfica de la fig. 10.6.

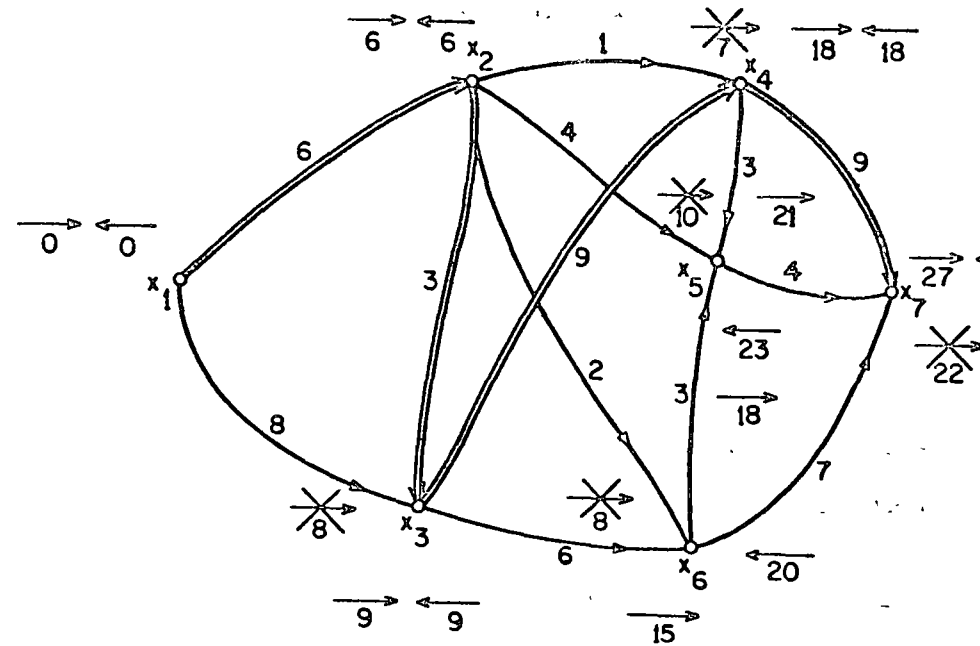


Figura 10.6

10.6. Algoritmo matricial para caminos de valor óptimo

A continuación se describe un algoritmo matricial para definir los caminos de valor óptimo.

Matriz (V) de valores asociados a una gráfica.

Esta matriz se representará con:

$$V = (v_{ij})$$

y es una matriz cuadrada de orden igual al número de vértices de la gráfica cuyos elementos v_{ij} se definen de la siguiente manera:

a) Si se desea encontrar el camino de valor mínimo.

$$V_{ij} = \begin{cases} \text{valor del arco } (x_i, x_j), & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ M & \text{si } (x_i, x_j) \notin A \quad M \rightarrow \infty \\ 0 & \text{si } x_i = x_j \end{cases}$$

b) Si se desea encontrar el camino de valor máximo.

$$v_{ij} = \begin{cases} \text{valor del arco } (x_i, x_j), & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ -M & \text{si } (x_i, x_j) \notin A \\ 0 & \text{si } x_i = x_j \end{cases}$$

Para este caso la gráfica no debe tener circuitos.

Definición de operaciones matriciales.

Sean las siguientes matrices.

$$A = (A_{ij})_{n \times n}, B = (B_{ij})_{n \times n}$$

La operación matricial $A * B = C$ se define en función de los caminos de valor óptimo que se desean obtener.

$$\begin{aligned} a) C_{ij} &= \min_k \{a_{ik} + b_{kj}\} \\ &= \min_k \{a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, a_{i3} + b_{3j}, \dots, a_{in} + b_{nj}\} \end{aligned}$$

Si se desea encontrar los caminos de valor mínimo.

$$\begin{aligned} b) C_{ij} &= \max_k \{a_{ik} + b_{kj}\} \\ &= \max_k \{a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, a_{i3} + b_{3j}, \dots, a_{in} + b_{nj}\} \end{aligned}$$

Si se desea encontrar los caminos de valor máximo.

Matriz de caminos de valor óptimo

Si $V = (v_{ij})$ es la matriz de valores asociados a una gráfica, la matriz de caminos de valor óptimo es V^{n-1} , en donde n es el número de vértices de una gráfica. Lo anterior fue establecido

por Shimbel pero sólo para caminos de valor mínimo y además no definió cuáles eran estos caminos.

Si en un momento dado se obtiene $V^m = V^{m-1}$, siendo $m < n - 1$ la matriz V^m es la matriz de caminos de valor óptimo.

Para llegar rápidamente a la matriz de caminos de valor óptimo es conveniente ir calculando las siguientes potencias:

$$V, V^2, V^4, V^8, V^{16}, \dots$$

Ejemplo. Obtener los caminos de valor mínimo para la gráfica que se muestra en la fig. 10-7.

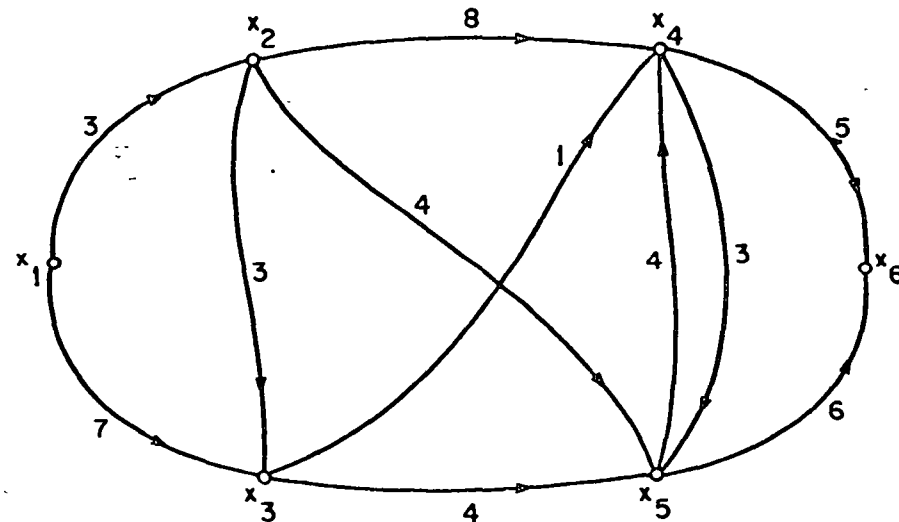


Figura 10.7

La matriz de valores asociados a la gráfica es:

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 & M & M & M \\ M & 0 & 3 & 8 & 4 & M \\ M & M & 0 & 1 & 4 & M \\ M & M & M & 0 & 3 & 5 \\ M & M & M & 4 & 0 & 6 \\ M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de caminos de valor mínimo es V^6 , puesto que el número de vértices (n) de la gráfica es 6. Se tiene.

$$V^6 = V^5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 8 & 7 & M \\ M & 0 & 3 & 4 & 4 & 10 \\ M & M & 0 & 1 & 4 & 6 \\ M & M & M & 0 & 3 & 5 \\ M & M & M & 4 & 0 & 6 \\ M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior se calculó con base en las operaciones que se establecieron antes, a continuación se muestra como fue construido el primer renglón de la matriz.

$$v_{11} = \min \{0 + 0, 3 + M, 7 + M, M + M, M + M, M + M\} = 0$$

$$v_{12} = \min \{0 + 3, 3 + 0, 7 + M, M + M, M + M, M + M\} = 3$$

$$v_{13} = \min \{0 + 7, 3 + 3, 7 + 0, M + M, M + M, M + M\} = 6$$

$$v_{14} = \min \{0 + M, 3 + 8, 7 + 1, M + 0, M + 4, M + M\} = 8$$

$$v_{15} = \min \{0 + M, 3 + 4, 7 + 4, M + 3, M + 0, M + M\} = 7$$

$$v_{16} = \min \{0 + M, 3 + M, 7 + M, M + 5, M + 6, M + 0\} = M$$

La matriz V^6 se obtuvo de igual manera y se comparó con la matriz V^5 .

$$V^6 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 7 & 7 & 12 \\ M & 0 & 3 & 4 & 4 & 9 \\ M & M & 0 & 1 & 4 & 6 \\ M & M & M & 0 & 3 & 5 \\ M & M & M & 4 & 0 & 6 \\ M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix}$$

$$V^6 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 7 & 7 & 12 \\ M & 0 & 3 & 4 & 4 & 9 \\ M & M & 0 & 1 & 4 & 6 \\ M & M & M & 0 & 3 & 5 \\ M & M & M & 4 & 0 & 6 \\ M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix}$$

Consecuentemente V^6 es la matriz de caminos de valor mínimo y habrá que investigar la integración de estos caminos.

Definición de los arcos que forman los caminos de valor óptimo

Para esto es necesario utilizar la matriz de arcos no modificados $S = (S_{ij})_{n \times n}$ cuyos elementos S_{ij} se definen de la siguiente manera:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el valor del arco } (x_i, x_j) \text{ no fue modificado entre la matriz } V \text{ y la matriz que define los valores de los caminos de valor óptimo.} \\ 0 & \text{Cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Así para el ejemplo anterior la matriz de arcos no modificados se obtuvo comparando los valores de la matriz V y la matriz V^6 resultando:

$$S = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A continuación se explicará como se obtienen los arcos que forman los caminos de valor mínimo que parten del vértice x_1 , de igual manera debe procederse para todos los demás caminos que tienen como origen los otros vértices.

Observando el renglón 1 de la matriz S se ve que solo existe el camino (x_1, x_2) de un arco que va de x_1 a otro cualquiera de la gráfica, lo que define el conjunto de caminos de valor mínimo que parten de x_1 .

$$c_1(x_1) = (x_1, x_2)$$

Analizando ahora como inicio el vértice x_2 se observa que existen dos caminos de un solo arco que parten de x_2 y son (x_2, x_3) y (x_2, x_5) si el valor del camino se contabiliza a partir de x_1 , se tendrá un conjunto de caminos formados por dos arcos que parten de x_1 y que son respectivamente los caminos de valor mínimo de x_1 a x_3 y de x_1 a x_5 .

$$c_2(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) \\ (x_1, x_2, x_5) \end{array} \right.$$

De la misma manera se observa que los caminos de un solo arco que parten de x_3 son (x_3, x_4) y (x_3, x_6) y los caminos de un solo arco que parten de x_5 son (x_5, x_4) y (x_5, x_6) que unidos a los caminos definidos en el inciso anterior conducen a los caminos formados por 3 arcos que siguen, cuyo valor también se consigna.

Camino	Valor
(x_1, x_2, x_3, x_4)	7
(x_1, x_2, x_3, x_6)	10
(x_1, x_2, x_5, x_4)	11
(x_1, x_2, x_5, x_6)	13

El valor de cada camino se calculó a partir de la matriz V (matriz de valores asociados a la gráfica) como sigue: el valor del arco que va de x_1 a x_2 es 3, del arco que va de x_2 a x_3 es 3 y por último el de x_3 a x_4 es 1; por lo tanto el camino (x_1, x_2, x_3, x_4) tiene el valor $3 + 3 + 1 = 7$. Análogamente se calcularon los valores de los caminos restantes.

Puede observarse que hay dos caminos que conducen a x_4 , para determinar cual es el óptimo se comparan los valores obtenidos con los consignados en la matriz V^s (de caminos de valor mínimo) concluyendo que el camino de valor mínimo de x_1 a x_4 es (x_1, x_2, x_3, x_4) y por lo tanto el conjunto de caminos de valor óptimo que parten de x_1 formados por 3 arcos es:

$$c_3(x_1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se hace ver que el camino de valor mínimo que parte de x_1 y que está formado por 4 arcos es:

$$c_4(x_1) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)$$

Puede observarse que no existen otros caminos de valor mínimo que se inicien en el vértice x_1 .

El diagrama de flujo del algoritmo matricial para caminos de valor óptimo es el mostrado en la rutina G-6.

Aplicación a caminos mínimos o máximos

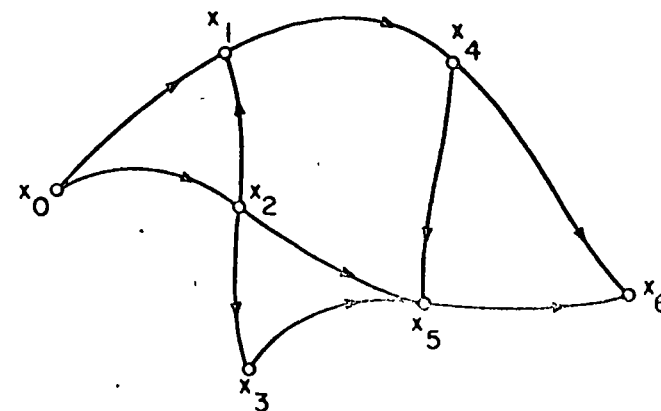


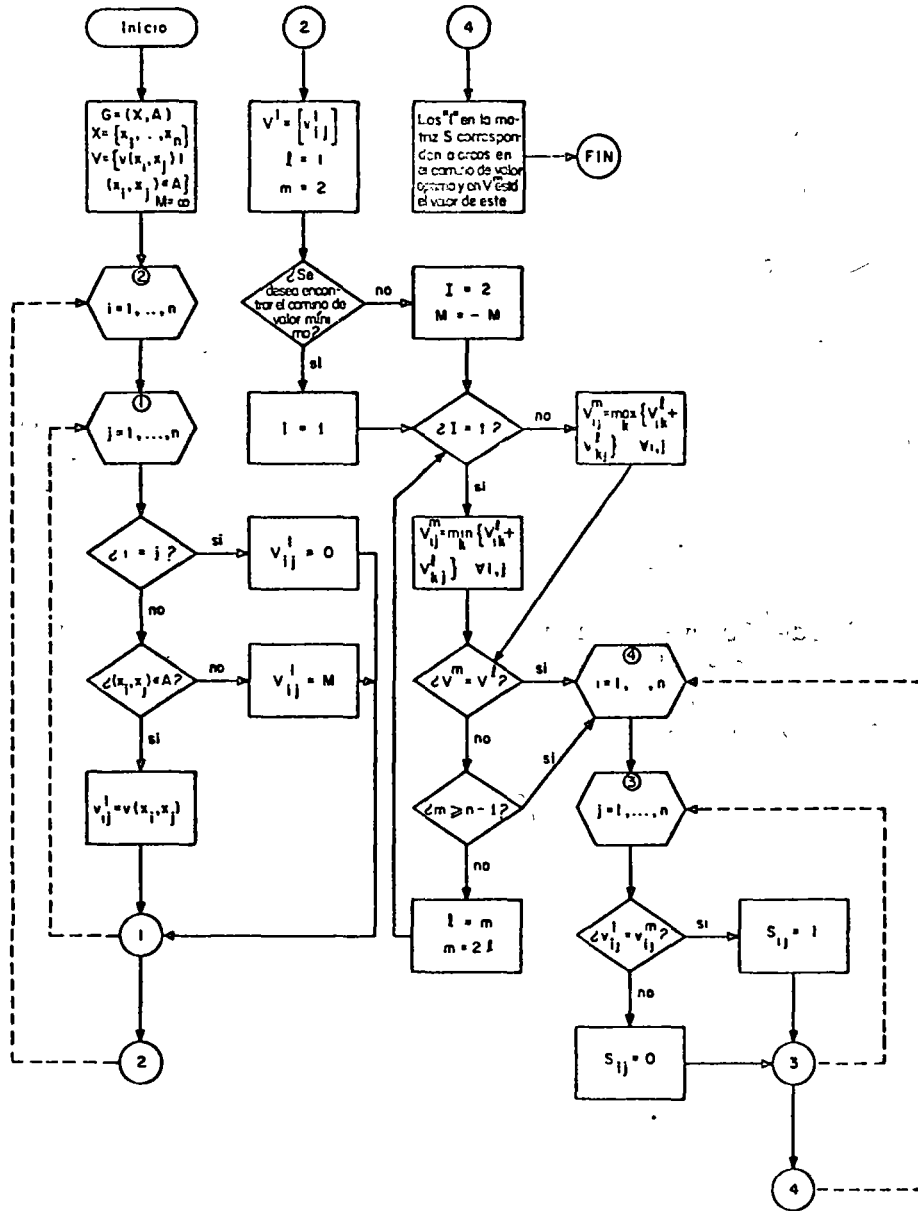
Figura 10.8

El problema de los caminos mínimos (o maximos) puede resolverse aplicando el algoritmo matricial para caminos de valor óptimo. Para ello basta asociar a cada arco un valor de 1 y proceder en forma idéntica a lo ya establecido.

A título de ejemplo considérese la gráfica de la fig. 10.8. Para obtener los caminos mínimos entre dos vértices de esta gráfica bastará considerar la matriz:

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & M & M & M & M \\ M & 0 & M & M & 1 & M & M \\ M & 1 & 0 & 1 & M & 1 & M \\ M & M & M & 0 & M & 1 & M \\ M & M & M & M & 0 & 1 & 1 \\ M & M & M & M & M & 0 & 1 \\ M & M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

cuyas potencias cuarta y octava son respectivamente:

$$V^4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ M & 0 & M & M & 1 & 2 & 2 \\ M & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ M & M & M & 0 & M & 1 & 2 \\ M & M & M & M & 0 & 1 & 1 \\ M & M & M & M & M & 0 & 1 \\ M & M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$


(Rutina G-6)

$$V^3 = \begin{matrix} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ M & 0 & M & M & 1 & 2 & 2 \\ M & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ M & M & M & 0 & M & 1 & 2 \\ M & M & M & M & 0 & 1 & 1 \\ M & M & M & M & M & 0 & 1 \\ M & M & M & M & M & M & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Obsérvese que la matriz V^4 es la matriz de caminos mínimos. Los arcos que definen a estos caminos se encuentran de igual manera que para el caso de caminos de valor óptimo.

I N T R O D U C C I O N

El interés en usar los métodos de ruta crítica para planeación, programación y control de proyectos ha sido a partir de los años 1959, año en que fueron creados. Su vasta aplicación, que ha sido desde planear un día de campo hasta un vuelo a la luna a dado lugar a una gran popularidad para estos Métodos.

En general tales métodos pueden reducir un complejo proyecto de una simple gráfica libre de ambigüedades y, al menos externamente, libre de complejos análisis matemáticos.

Hasta hace poco tiempo no existían en realidad métodos que ayudaran a un correcto control en proyectos. Para cada proyecto, el director realizaba su propio programa, que cuando iba mejor, se apoyaba en un diagrama de barras realizando a intuición y experiencia del responsable de la dirección del mismo.

Desde su iniciación y dentro del actual desarrollo los métodos de ruta crítica se han usado con notable éxito en grandes proyectos; trabajos de construcción; programas de desarrollo; operaciones de instalaciones múltiples

en fin, en toda clase de proyectos.

En consecuencia al tratar de todos los proyectos estaremos interesados en:

- a) Planeación: Determinación de las actividades que constituyen el proyecto, incluyendo la interrelación existente entre ambos.
- b) Programación: Determinación de las duraciones de las actividades, así como de los tiempos de iniciación y terminación de cada una de ellas, considerando costos y recursos.
- c) Control: Velar por la correcta ejecución de las actividades dentro del programa.

Estos procedimientos están basados en las relaciones de precedencia que existen entre las diversas actividades que forman el proyecto, si las mostramos gráficamente, obtendremos una red que nos indicará el principio, actividades intermedias llevándonos hasta el fin del proyecto.

Pero el desarrollo de estos métodos ha nacido de la aplicación de la investigación de operaciones y ciencias de información para los problemas de construcción, y vienen de un simple pero inteligente algoritmo de la teoría de las redes de flujo que capacita a los encargados de

Listar todas las actividades de un proyecto, fácil y ordenadamente.

El concepto de redes data ya de cierto tiempo y no fué sino hasta el año 1959 cuando surgió el método PERT (Program Evaluation and Review Technique) como una consecuencia de buscar el mejor método para controlar todas las actividades que intervenían en el proyecto de los proyectiles Polaris.

El CPM (Critical Path Method) surgió también en 1959 al encontrarse el método de reducir tiempos de trabajos, de mantenimiento y construcción y así minimizar los costos directos e indirectos.

Si consideramos las diferencias entre PERT y CPM se llega a la conclusión que en el caso del PERT se considera para las actividades unas duraciones probables y en CPM las duraciones se consideran determinísticas.

En general para los 2 métodos y sus variaciones se considerará una Metodología de la ruta crítica que será común a todos esos casos.

A P L I C A C I O N E S

En general para los métodos de ruta crítica consistirán en los siguientes pasos:

Preparación del diagrama de redes.

Estimación de tiempos esperados para cada actividad.

Computación del programa de ruta crítica.

Correcta interpretación de los resultados.

La experiencia al usar estos métodos ha proporcionado los siguientes beneficios:

- 1) Estimular una disciplina lógica en la planeación, programación y control de proyectos.
- 2) Estimular el llevar a cabo una planeación detallada de gran alcance.
- 3) Proporcionar un método común de comunicación y documentación de los planes del proyecto, programas, costos y tiempo de ejecución.
- 4) Identificar las actividades más críticas del proyecto y enfocar la atención en éstas.
- 5) Ilustrar los efectos de cambios en la totalidad del programa.
- 6) Indicar el procedimiento de realizar el proyecto para lograr un costo mínimo.
- 7) Determinar con tiempo suficiente los recursos necesarios en cualquier momento durante la ejecución del proyecto.
- 8) Analizar en cualquier momento el efecto producido por alguna situación imprevista y estar capacitado

para tomar medidas preventivas.

- 9) Lograr que la intervención del personal directivo-principal del proyecto solo se ejerza en caso de situaciones imprevistas.

El desarrollo de la presente Tesis será como sigue:

- 1) La parte de planeación, con la determinación de la red del proyecto conociendo las actividades y la sucesión de ellas.
- 2) Las estimaciones del tiempo requerido para llevar a cabo cada una de las actividades, considerando la disponibilidad de mano de obra y equipo.
- 3) La programación que nos dará las iniciaciones y terminaciones más próximas y más lejanas, identificando a la vez la ruta crítica, asimismo las holguras para las actividades no contenidas dentro de ella.
- 4) Control. Por medio de la revisión del progreso del proyecto contra lo programado, se analizarán tanto los retrasos como los adelantos, revisando la red y obteniendo un nuevo programa.
- 5) Costos. Aprovechando las relaciones tiempo-costo la ruta crítica nos proporcionará el control de costos en el proyecto a la vez que se logra optimizar la relación tiempo-costo, utilizando tanto con

tos directos como indirectos.

- 6) La asignación de recursos necesaria para la correcta ejecución de las tareas de un proyecto se analizará para obtener la más conveniente utilización de personal u otra clase de recursos.

Utilizando métodos de ruta crítica se simulan de un modo sencillo los efectos de cambios en el programa o en el plan y así determinar una forma aceptable de utilización de esos recursos.

- 7) Utilización de computadores en CPM.

Qué ventajas se obtendrán y cuáles serán sus limitaciones.

- 8). Ejemplo. Tramo de construcción de la vía férrea - Rinconcillo-Pozo Blanco.

PLANEACION DEL PROYECTO.

La planeación del proyecto consistirá en formar un modelo coordinado del orden en el que deben ejecutarse todas las actividades necesarias para terminar el mismo. Entendiéndose dentro de ese término además de las propias actividades, las entregas, inspecciones y operaciones afines.

Para que la planeación sea eficiente, se deben reunir las siguientes condiciones:

- a) Tener personal especializado en la ejecución de procesos similares.
- b) Conocer los métodos posibles de realización del proyecto, teniendo en cuenta los recursos disponibles.
- c) Considerar los tiempos requeridos para la terminación de cada actividad constituyente del proyecto.

El primer paso en la planeación de un proyecto es hacer un listado con todas las actividades que forman el proyecto.

Será conveniente dividir dichas actividades, en prin-

principales, y además cada una de éstas en secundarias, a la vez que en terciarias y así sucesivamente hasta llegar a las actividades elementales del proyecto.

Esto puede ser ilustrado en la Fig. 1

El nivel de detalle está asociado con la precisión y la economía en la presentación.

				Número de orden de las actividades			
				1°	2°	3	
Proceso Productivo	A ₁	{	A ₁₁	{	A ₁₁₁	{	A ₁₁₁₁
			---		A ₁₁₂		A ₁₁₁₂
			---		A _{11r}		A _{111r}
A ₂	{	A _{1K}	{	A _{1KI}	{	A ₂₁₁	
		---		A _{1KS}		A _{21t}	
		---		A ₂₁		A ₂₁₁	
A _n	{	A _{ni}	{	A _{ni1}	{	A _{2iu}	
		---		A _{niv}		A _{ni1}	
		---		A _{nr}		A _{ni1}	
			A _{nr}			A _{nrq}	

Fig 1

Al considerar cualquier actividad particular o grupo de actividades con la idea de agrandarlas, condensarlas o

eliminarlas, el diagrama irá normado por alguna de las siguientes consideraciones:

- a) ¿Quién usará la red y cuáles serán los provechos y la capacidad de control?
- b) ¿Es práctico expandir la actividad para darle más detalle?
- c) ¿Habrá separación de personal experto, facilidades o áreas de responsabilidad envueltas en la actividad causadas por el mayor detalle?

En general una persona con práctica podrá desarrollar con buen criterio un apropiado nivel de detalle para el proyecto en particular.

El siguiente paso es analizar el orden de ejecución de actividades, pudiendo hacerse de 2 formas, la primera de ellas utilizando una "Tabla de Secuencias" en la cual se colocan dichas actividades tanto en los renglones como en las columnas, correspondiendo a cada una de éstas un solo renglón y una sola columna.

Para formar la tabla de secuencias, se siguen las 2 siguientes reglas:

- 1) Se analiza cada renglón determinando qué actividades pueden iniciarse inmediatamente después de terminada la actividad consignada en el renglón. Para

esto se recorre el renglón examinando las columnas y colocando una marca (X) en los casilleros de las columnas que corresponden a las que han de realizarse inmediatamente después.

- 2) Se analiza cada columna determinando qué actividades deben estar terminadas inmediatamente antes de poder empezar la actividad consignada en la columna.

Se recorre la columna examinando los renglones y colocando una marca (X) en los casilleros de los renglones que corresponden a las que deben estar terminadas inmediatamente antes.

Tabla de Secuencias
Fig 2

		Después								
		Antes	1	2	3	4	5	6	7	8
0	X									
1		X								
2			X							
3				X						X
4					X					
5						X				
6							X			

En este ejemplo

La 1a. actividad a realizar será la 1, después de la actividad 1, se iniciará la actividad 2, terminada ésta, se iniciará la actividad 3. Terminada la actividad 3, se podrán iniciar las actividades 4 y 9 y así sucesivamente.

Se puede apreciar que una tabla de secuencias para más de 15 actividades se convierte en impráctica, entonces surge la 2a. forma de obtener las secuencias de las actividades, y esto es utilizando una lista de actividades teniendo ésta 3 columnas, como se vé en la Fig. 3.

Simultánea	Actividad	Posterior
	0	1, 12, 18
	1	2
	2	3
20, 14	3	4, 9
	4	5
	5	6
	6	7

Esta nos indicará sin las limitaciones de la tabla, que se pueden iniciar simultáneamente las actividades 1, 12 y 18, que simultáneamente con la actividad 3, se realizan las actividades 20 y 14, y después de la 3,

las actividades 4 y 9, y así sucesivamente.

Lista y
secuencia de
actividades

Fig 3

Realizada la fase anterior, se procederá a la cons -

trucción de la red que muestre la relación de las actividades.

Hay varios modos de representar las actividades en las redes.

La más convencional representación entre los constructores que usan los métodos de ruta crítica es el sistema de diagrama de flechas, que no es el mejor sistema.

Otro sistema el utilizado en el diagrama de precedencias o nudos.

Se presentarán los 2 métodos haciendo incapié en éste último por las muchas ventajas que lleva.

Se dá por hecho el considerar la gráfica como una red de transporte, esto es:

- a) Que existe un punto y uno solo que llamaremos fuente de la red y del cual salen arcos.
- b) Existe un punto y no solo que será el sumidero de la red y a él solo llegarán los arcos.
- c) Una serie de arcos intermedios que tendrán cierta capacidad (en nuestro caso, tiempo)

DESCRIPCION DEL DIAGRAMA DE FLECHAS.

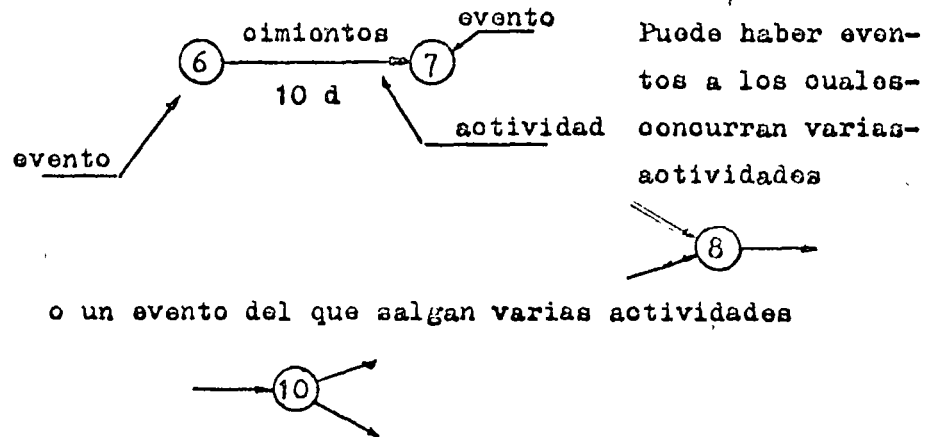
En el diagrama de flechas, las líneas (flechas) representarán las actividades.

Considerando nudos en los extremos de las flechas. Nudos que marcarán el inicio o la terminación de la actividad considerada. A estos nudos los llamaremos eventos.

De este modo, el nudo en el fin de una flecha representará un evento que marcará el posible inicio de esa actividad.

Y el nudo en la punta de la flecha será el evento que marque la terminación de todas las actividades que finalicen en ese nudo.

Estos nudos son numerados, así, son necesarios 2 números para cada actividad, uno en el nudo inicial y otro en el nudo final.

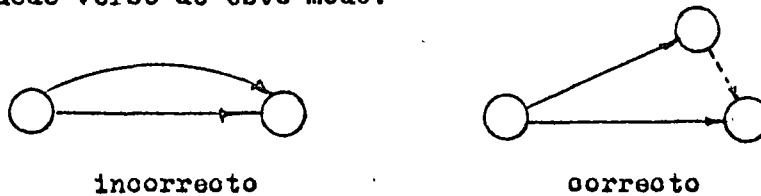


Se tienen que seguir algunas reglas para trabajar correctamente los diagramas de flechas.

- 1) Antes que una actividad pueda comenzar, todas las actividades precedentes deben estar terminadas.

- 2) Entre 2 eventos cualesquiera solo puede haber una actividad que se liga al fin de la otra actividad con una actividad ficticia (dummy) de duración cero.
- 3) Los números en los eventos no deberán estar duplicados.

La única regla que no está muy clara es la (3) y esto puede verse de este modo:



Prácticamente al dibujar la red, cada actividad se escribe de un modo breve y descriptivo sobre la flecha, pudiéndose también describir la actividad por sus eventos iniciales o terminales.



DESCRIPCION DEL SISTEMA DIAGRAMA DE PRECEDENCIAS O ACTIVIDADES EN NUDOS

Como su nombre lo indica "actividades en los nudos", en este sistema de redes, las actividades se encuentran gráficamente representadas por nudos en lugar de flechas.

Las flechas son usadas únicamente para representar - las relaciones de dependencia entre los nudos.

En esta etapa podemos hacer comparaciones entre los - 2 sistemas.

- a) El diagrama de precedencias es más simple de desarrollar pues un nudo es una actividad, así las relaciones secuenciales se muestran directamente por flechas entre las diversas actividades, y es un modo simple y fácil de entender.

Al utilizar los diagramas de flechas, en algunas - ocasiones una actividad es dependiente de una o - más actividades que en este caso se deberán de introducir a la actividad ficticia (dummy) que muestre las relaciones existentes.

Esto a la larga resulta complicado y requiere más- destreza en la construcción de diagramas.

En las figuras se representa la ilustración de un caso por los 2 métodos, existiendo casos mucho más complejos.

Diagrama de Flechas

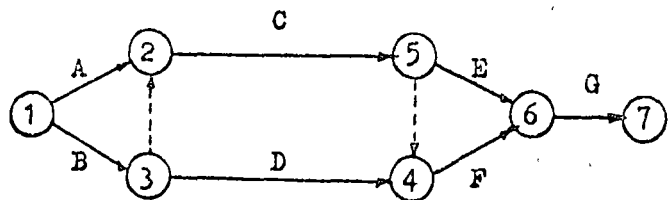
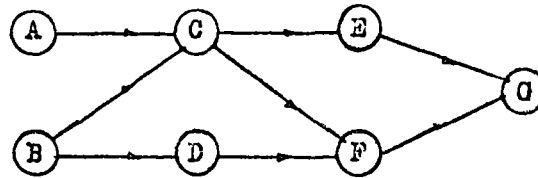


Diagrama de
Precedencias

En el diagrama de precedencias se muestran todas las relaciones de una manera directa y simple.

La actividad ficticia (3-2) en el diagrama de flechas indica que las actividades C y D siguen a la actividad B, pero solo una de ellas, la actividad C, sigue a la actividad A.

Para la actividad ficticia (5-4) se le puede dar un significado semejante al anterior.

- b) Las actividades ficticias son necesarias en diagramas de flechas para evitar la duplicación de números de eventos donde 2 o más actividades tienen la misma condición precedente.

Este problema no existe en los diagramas de precedencia como se vé en las siguientes figuras:

Diagrama de flechas

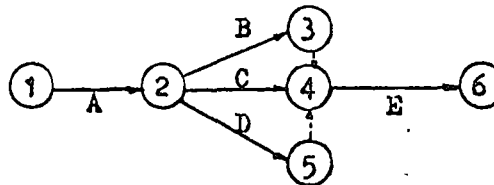
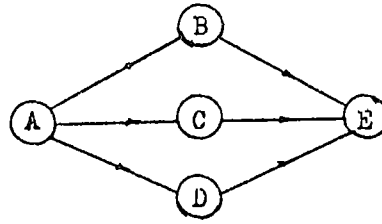


Diagrama de
Precedencias



- c) El diagrama de precedencias puede ser desarrollado y terminado más rápidamente por el hecho de que es más sencillo de construir.
- d) Los diagramas de precedencias son mucho más fáciles de revisar que los diagramas de flechas. Líneas y nudos en un diagrama de precedencias pueden ser añadidos o suprimidos sin perturbar el resto del diagrama. Por el contrario cuando son añadidas o suprimidas las flechas de un diagrama, a menudo es necesario reconstruir una gran parte del mismo.
- e) La marca individual para las actividades en el diagrama de precedencias es muy ventajoso, pues es más simple que la marcación doble en las actividades de un diagrama de flechas.
- f) Una marca para una actividad una vez que es asignada en el diagrama de precedencias no se necesita ser cambiada cuando se hacen revisiones en el diagrama. Esto no sucede en el diagrama de flechas, donde una revisión puede requerir la introducción-

de una actividad ficticia.

g) Aquellos eventos que son importantes pueden ser -
 marcados en el diagrama de precedencias, pero -
 eventos sin importancia no necesitan ser mostrados
 contrariamente al diagrama de flechas en donde ca-
 da nudo representa un evento y no necesariamente -
 son eventos específicos que se desea mostrar.

Por ejemplo, si varias flechas (en el diag. de -
 flechas) terminan en un nudo común, ese nudo repre-
 sentará un evento que ocurrirá solo después de que
 todas esas actividades hayan sido terminadas.

Sin embargo, la terminación de una de ellas que pu-
 diera tener un especial significado, podría termi-
 nar en una flecha más próxima, entonces, para sepa-
 rar este evento, sería necesario introducir una ac-
 tividad ficticia en el diagrama de flechas.

OPINIONES SOBRE LOS DIAGRAMAS DE PRECEDENCIA.

J. J. Moder, y C. R. Phillips, en un apéndice de su -
 libro "Project Managenent with C.P.M. and PERT", el cual-
 está basado en el uso de diagramas de flechas, comentan:

"La principal ventaja del sistema de precedencias es-
 la simplicidad, al evitar las actividades ficticias tiene

especiales características pues elimina muchos problemas de redes, especialmente para principiantes.

La única desventaja de este sistema es que su uso no está generalizado.

Los autores han usado el sistema y han examinado a estudiantes sobre su habilidad para aprender y comparar los otros sistemas; como resultado de esas comparaciones se ha llegado a la conclusión que el sistema de precedencia es muy superior al de flechas".

Ya se ha notado en muchos reportes la tendencia por parte de algunos contratistas de pasar de los diagramas de flechas a los de precedencias.

Una cita de John Pondhahl, de la Universidad de Stanford es como sigue:

"Mi opinión", él concluye, "es que los diagramas de precedencias son más sencillos y por esta razón ganarán en opinión a aquellos que comparen prácticamente los 2 sistemas".

Opiniones semejantes fueron obtenidas por parte de contratistas que usan el sistema de precedencias:

Simplificación del dibujo con la consiguiente reducción de tiempo para producir la red, lo que representa:

Ventajas en numerar las actividades en lugar de los -

eventos.

Eliminación de actividades ficticias.

Mayores detalles y plan más comprensivo.

ESTIMACIONES DE TIEMPO.

Llamamos duración de la actividad y la representamos por T al tiempo estimado para su realización.

Este tiempo es expresado en días de trabajo, aunque pueden utilizarse horas y semanas según el tipo del mismo.

Las estimaciones de tiempo, como ya se habrá mencionado, están basadas en tiempos deterministas (a diferencia del PERT) pues en trabajos de construcción, la experiencia de contratistas ha proporcionado con gran margen de seguridad estas duraciones.

El tiempo expresado en días de trabajo, posteriormente deberá ser cambiado a días de calendario, o sea, considerar la semana de 6 días de trabajo (o como se acostumbra) tomando en consideración incluso los días festivos.

Como el clima es una de las grandes incertidumbres en la construcción, se puede tomar esto en cuenta, reduciendo

do a criterio la eficacia del equipo durante el tiempo de lluvias, o aumentando la duración de las actividades.

En algunos casos se aumentará la duración al 20% o - por ejemplo en regiones sumamente lluviosas la eficiencia disminuirá en un 50%.

Las estimaciones de las duraciones de las actividades no incluyen contingencias como fuego, inundaciones, obstáculos imprevistos, etc., puesto que no hay factores de seguridad.

Esta, la preparación de la red, es uno de los pasos más importantes para la correcta construcción de la misma, pues además de considerar la secuenciación de actividades y la duración de cada actividad, deberá tomarse en cuenta el nivel de detalle que se procurará. Esto estará asociado con la precisión y la economía de la presentación, en general, el diagramador se preguntará sobre quien va a usar la red y hasta donde llegan sus intereses, también, si será factible dividir la actividad en muchos detalles. Que si habrá mayores áreas de responsabilidad - *asociada por el mayor detalle.*

En general el nivel de detalle será ajustado por una persona con buen sentido y criterio.

PROGRAMACION

DIAGRAMA DE FLECHAS.

Como ya se ha estimado la duración de cada actividad y se conoce el orden de precedencia, se está en capacidad de recorrer la red de el inicio hasta la terminación y así encontrar: la duración del proyecto, actividades que la determinan y las libertades que hay en las demás actividades.

La programación se hará primero calculando el "paso hacia adelante", con el que se conocerán los tiempos más próximos de inicio y más próximos de terminación y después, el "paso hacia atrás" con el que se conocerán los tiempos más lejanos de iniciación y terminación permitidos para no retrasar la terminación del proyecto.

Conocido esto se puede conocer para cada actividad sus holguras libres, las holguras totales y quedarán determinadas las actividades críticas y las que están próximas a serlo.

Se usará para estos cálculos la siguiente nomenclatura:

- T:** Duración estimada para la actividad.
- TOP:** Tiempo de ocurrencia más próximo.
Tiempo más cercano en el que pueden iniciarse todas las actividades que tienen su origen en ese evento.
- TOL:** Tiempo de ocurrencia más lejano.
Tiempo más lejano en que se pueden terminar todas las actividades que llegan a un evento sin retrasar la duración del proyecto.
- TPI:** Tiempo más próximo de iniciación de una actividad.
Es el TOP de su evento inicial.
- TPT:** Tiempo más próximo de terminación.
TOP del evento inicial más la duración.
- TLI:** Tiempo más lejano de iniciación.
TOL del evento terminal menos la duración de la actividad.
- TLT:** Tiempo más lejano de terminación.
Es el TOL del evento terminal de una actividad.
- HL:** Holgura libre.
Representa el mayor tiempo que puede retrasarse la terminación de una actividad sin afectar las holguras de las demás actividades.
- HT:** Holgura total.
Máxima cantidad de tiempo que la duración de una

actividad puede ser alargada sin retrasar la terminación del proyecto.

" P A S O A D E L A N T E "

Como se había mencionado, el objeto del paso hacia adelante es conocer los tiempos más próximos de iniciación y terminación.

- 1) Se considerará que para el tiempo de salida del evento inicial de la red como TOP=0

Cada actividad empezará tan pronto como su evento-predecesor ocurra.

$TPI=TOP$ (para el evento predecesor)

- 2) La terminación más próxima, será igual al inicio más próximo más la duración para cada actividad.

$TPT=TPI+t$

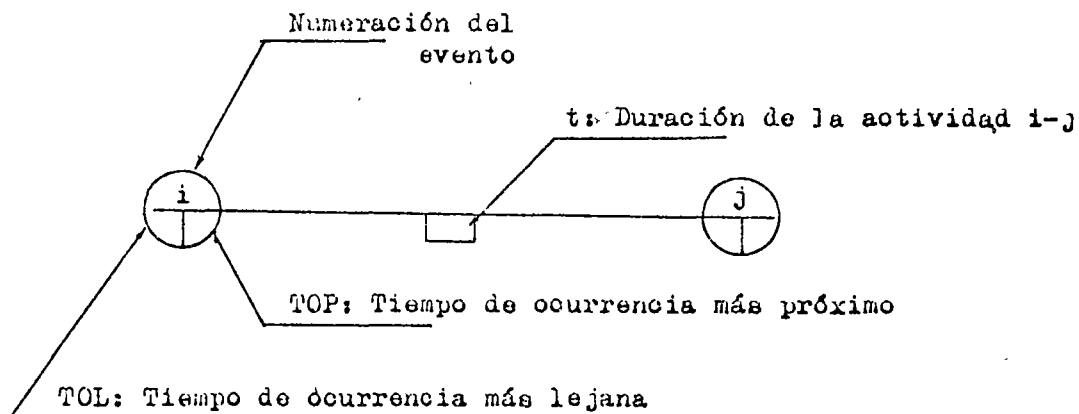
- 3) El tiempo de ocurrencia más próximo para un evento es el más grande de todos los tiempos más próximos de terminación de las actividades que lleguen al evento en cuestión.

$TOP=$ más largo de $TPT_1, TPT_2, \dots, TPT_N$ para un evento al que llegan N actividades.

Para presentar todos los cálculos de un modo simple y objetivo usaremos para los eventos del diagrama de fle-

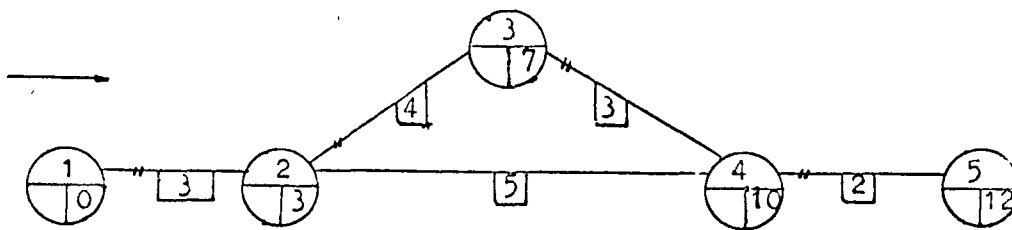
chas símbolos que harán más fácil seguir los "pasos adelante" y los "pasos atrás"

Estos son: .



Ejemplo del "paso adelante"

Suponiendo que tenemos una red compuesta por 5 actividades, conocidas previamente en el orden de precedencias- y las duraciones de las actividades



Para el evento (1) inicial, sabemos que $(TOP)_1 = 0 = TPI_1$

Para encontrar el TPI de la actividad 1-2, solo tenemos que sumar su tiempo más próximo de iniciación con su duración, esto es: $TPI_{1-2} = TPI_1 + t = 0 + 3 = 3$

Como no llegan más actividades al evento 2 máximo de los TPT es el único que llega y es 3

Para la actividad 2-3, el $(TOP)_2 = (TPI)_{23} = 3$, $3+4 = 7$

Y por tanto en el evento 3, el $(TOP)_3 = (TPI)_{34} = 7$

Antes de considerar la actividad 2-4 vemos que al evento 4, llegan 2 actividades, por tanto el (TOP), será el máximo de los 2 tiempos más próximos de terminación que lleguen a ese evento, veamos:

$$(TOP)_4 = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (TPT)_{34} = (TPI)_{34} + t_{34} = 10 \\ (TPT)_{24} = (TPI)_{24} + t_{24} = 8 \end{array} \right\} = 10$$

Para la actividad 4-5, que es la actividad final en contramos

$$(TPI)_{34} = (TOP)_4 = 10$$

$$TPI = 10 + 2 = 12 = (TOP)_5$$

Siendo 12 la duración total del proyecto, por tanto la ruta crítica tiene una duración de 12 días y está formada por las actividades: 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5

" REGRAS DE CÁLCULO "

Con este procedimiento estaremos en condiciones de conocer los tiempos más lejanos de iniciación y los tiempos más lejanos de terminación para cada actividad, o sea que partiremos de la fecha de terminación y avanzando hacia atrás llegaremos hasta el inicio del proyecto.

Las reglas son las siguientes:

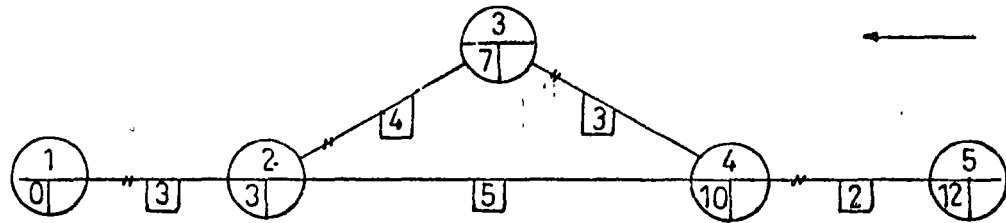
- a) Para el evento terminal, el tiempo de ocurrencia más lejano (TOL) de ese evento es igual al tiempo de ocurrencia más próximo (TOP) por tanto es igual al tiempo más próximo de terminación de la última actividad $TOL = TOP = TPT = TIT$
- b) El tiempo más lejano de iniciación de una actividad es igual al tiempo más lejano (permisible) de su evento sucesor menos la duración de la actividad considerada

$$TII = TIT - d$$

- c) El tiempo más lejano permisible para un evento es el mínimo de todos los tiempos permisibles de iniciación más lejana que salgan de ese evento

$$TPI = \min \{ (TII)_1, (TII)_2, \dots, (TII)_n \}$$

Siguiendo con el ejemplo, el paso atrás será:



Para el evento final el tiempo de ocurrencia próxima-
es igual al tiempo de ocurrencia límite

$$(TOP)_5 = (TOL)_5 = 12$$

Así para la actividad 4-5, su tiempo de inicio más le-
jano será igual a su tiempo más lejano de terminación

$$(TOL)_5 = TLT_{45}$$

Menos su duración, luego

$TLI = TLT - T_{45} = 12 - 2 = 10$ que es también el tiempo de ocu-
rrencia más lejano del evento 4

$$(TOL)_4 = 10$$

Siguiendo ahora con la actividad 3-4 consideramos

$$(TOL)_4 = (TLT)_{34} = 10$$

Por lo tanto el tiempo más lejano de iniciación será

$$TLI = 10 - 3 = 7$$

Para el evento 2, observamos que salen 2 actividades-
de él, por tanto, con la definición de TOL que es el míni
mo de todos los tiempos más lejanos de iniciación

$$(TOL)_2 = \text{MIN} \left\{ \begin{array}{l} (TLI)_{23} = (TLT)_{23} - T_{23} = 7 - 4 = 3 \\ (TLI)_{24} = (TLT)_{24} - T_{24} = 10 - 5 = 5 \end{array} \right\} = 3$$

Y $(TOL)_2$ viene siendo el tiempo más lejano de terminación de la actividad 1-3, por tanto su tiempo más lejano de iniciación será:

$$(TLI)_{12} = (TLT)_{12} - T_{12} = 3 - 3 = 0$$

Con esto hemos conocido la duración total del proyecto y estamos en condiciones de saber las holguras tanto libres como totales.

Como un auxiliar para esto, utilizaremos una tabla en donde el encabezado va a estar formado por la actividad, duración, inicio más próximo, terminación más próxima, inicio más lejano, terminación más lejana, holgura libre y holgura total.

Vemos:

La holgura libre de una actividad, como lo habíamos dicho es igual al TOP (tiempo de ocurrencia próxima) del evento final de la actividad menos el TPT (tiempo más próximo de terminación) de la actividad, esto viene a ser:

$$HL = TOP - TPT$$

Y viene a ser la cantidad de tiempo que se puede retrasar esa actividad sin afectar la actividad siguiente.

Para nuestro ejemplo (se puede visualizar en la red dibujada, por tanto se facilitará más)

Para	1-2	$(TOP)_2 - (TPI)_{12} = 3-3=0$
	2-3	7-7= 0
	2-4	10-8= 2
	3-4	10-10=0
	4-5	12-12=0

Por tanto la única actividad con holgura libre es la 2-4 con una duración de 2 días.

La holgura total de una actividad es la diferencia entre el tiempo de ocurrencia más lejana (TOL) permisible - del evento terminal, menos el tiempo más próximo de terminación (TPI) de la actividad y representa el tiempo que puede retrasarse la terminación de la actividad sin retrasar la terminación del proyecto.

$$HT = TOL - TPI.$$

Esto es lo mismo que decir que la holgura total es igual a la diferencia entre el tiempo más lejano de terminación y el tiempo más próximo de terminación o la diferencia entre el tiempo más lejano de iniciación y el tiempo más próximo de iniciación de la actividad en cuestión.

$$HT = TLT - TPT$$

$$HT = TLI - TPI$$

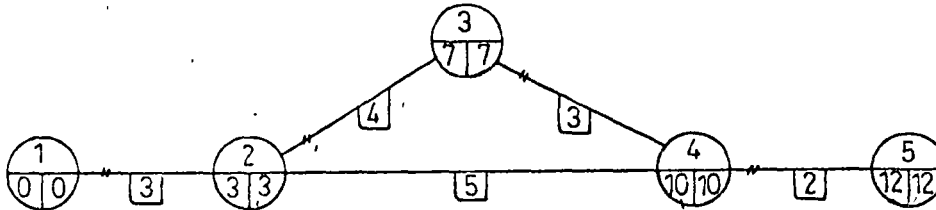
Como veremos en seguida utilizando la tabla de programación, resulta muy fácil encontrar esta holgura total, -

únicamente de restar 2 columnas de un renglón.

Actividad	HT
1-2	$TLT-TPT= 3-3= 0$
2-3	$7-7 = 0$
2-4	$10-8 = 2$
3-4	$10-10= 0$
4-5	$12-12= 0$

Como visualmente se pueden hacer estas restas es muy fácil comprobar si los valores de TLT-TPI y TLI-TPI están correctos pues haciendo esas restas, los resultados deberán ser iguales.

Tenemos pues formada con todos los datos necesarios la red que nos ayudará a formar la tabla de programación.



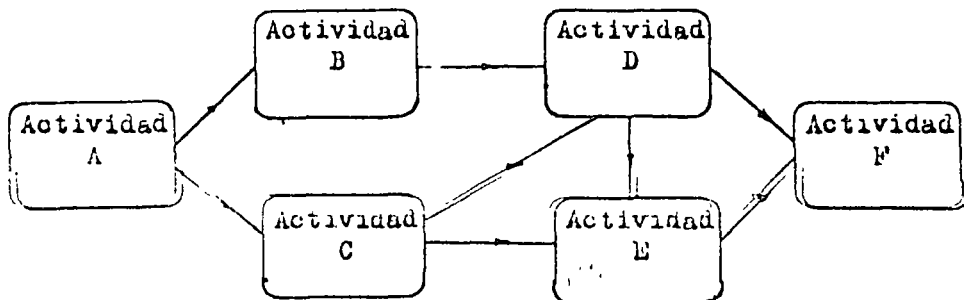
Actividad	Duración	Más próximo inicio	Terminación más próxima	Más lejano inicio	Terminación más lejana	Holgura Libre	Holgura Total
1-2	3	0	3	0	3	0	0
2-3	4	3	7	3	7	0	0
2-4	5	3	8	5	10	2	2
3-4	3	7	10	7	10	0	0
4-5	2	10	12	10	12	0	0

Conviene hacer notar que en esta tabla se dan las fechas en días de trabajo a partir de cero. Más adelante se agrega para cada actividad otro cuadro en la columna correspondiente a cada fecha programada para transformar esas fechas de días de trabajo a día de calendario, siendo éstas las que realmente se van a utilizar.

Así mismo ya se puede uno dar cuenta, que aquellas actividades con holgura total igual a cero son las actividades críticas que norman la duración del proyecto.

DIAGRAMA DE PRECEDENCIAS

En este sistema que también recibe el nombre de diagrama de nudos, las actividades se encuentran representadas por los nudos en lugar de las flechas. Por tanto las flechas solo representan las relaciones de dependencia entre los nudos.



Se nota por principio, que ya no hay actividades ficticias, aunque todas las flechas en este diagrama se pueden considerar como tales pues no representan actividades sino solo relaciones de dependencia.

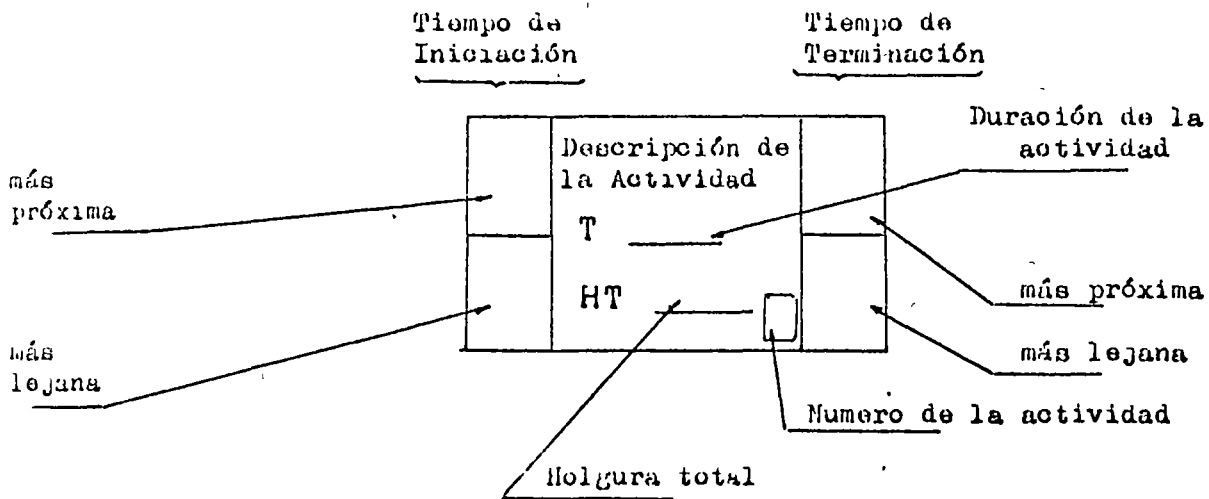
Ocasionalmente se presenta que el proyecto se inicie con varias actividades simultáneamente o también se puede terminar simultáneamente con otras tantas actividades, entonces se agrega un nudo adicional al inicio o en la terminación del mismo (Actividad con duración cero).

Sería el caso en que las actividades B y C (ver gráfi

ca anterior) fueran el inicio del proyecto, entonces a la actividad A se le llamaría inicio con una duración igual a cero.

Lo mismo debe hacerse en un caso semejante para la terminación del proyecto.

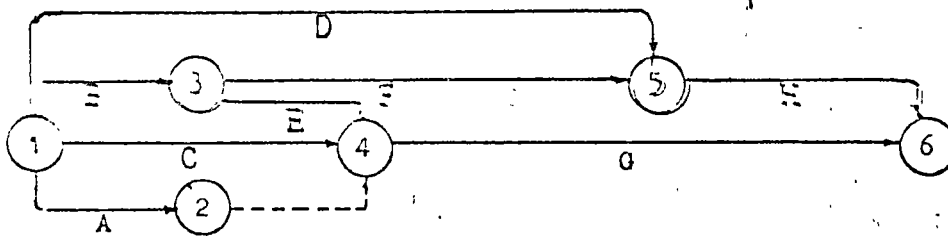
Los símbolos que se usarán para hacer más sencilla la técnica para encontrar la ruta crítica se indican a continuación:



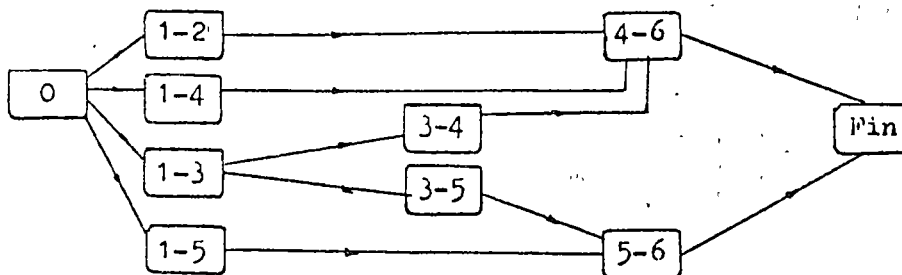
Siguiendo las reglas para encontrar la ruta crítica, - esto es, ya conocida la técnica para el paso adelante, el paso atrás, se presenta el siguiente ejemplo que se realizará desde la planeación de la red, considerando solo el estudio de las secuencias entre las actividades.

Actividad	Actividad Posterior	Duración
A , (1-2)	G, (4-6)	10
B , (1-3)	E, F, (3-4), (3-5)	5
C , (1-4)	G, (4-6)	20
D , (1-5)	H, (5-6)	25
E , (3-4)	G, (4-6)	8
F , (3-5)	H, (5-6)	15
G , (4-6)	Fin	24
H , (5-6)	Fin	10

Por el método de las flechas, esto implicará una red como la siguiente:



Utilizando el diagrama de precedencias, nos evitamos la actividad ficticia 2-4



Nótese en ésta la ausencia de flechas punteadas, además en este tipo de diagrama se presenta el caso en el cual el proyecto se inicia y se termina con varias actividades simultáneamente, por lo cual se han agregado los nudos inicial y final.

El siguiente paso es, sobre el diagrama de precedencias encontrar la ruta crítica siguiendo las reglas dadas anteriormente tanto para el "paso adelante" como para el "paso atrás".

En este diagrama de precedencias se puede apreciar fácilmente que después de la actividad inicial (duración cero) empiezan simultáneamente 4 actividades: (1-2), (1-3), (1-4), (1-5).

Se observa que una vez terminada la actividad (1-3) pueden comenzar las actividades (3-4) y (3-5).

Terminadas las actividades (1-2), (1-4) y (3-4) puede darse comienzo a la actividad (4-6).

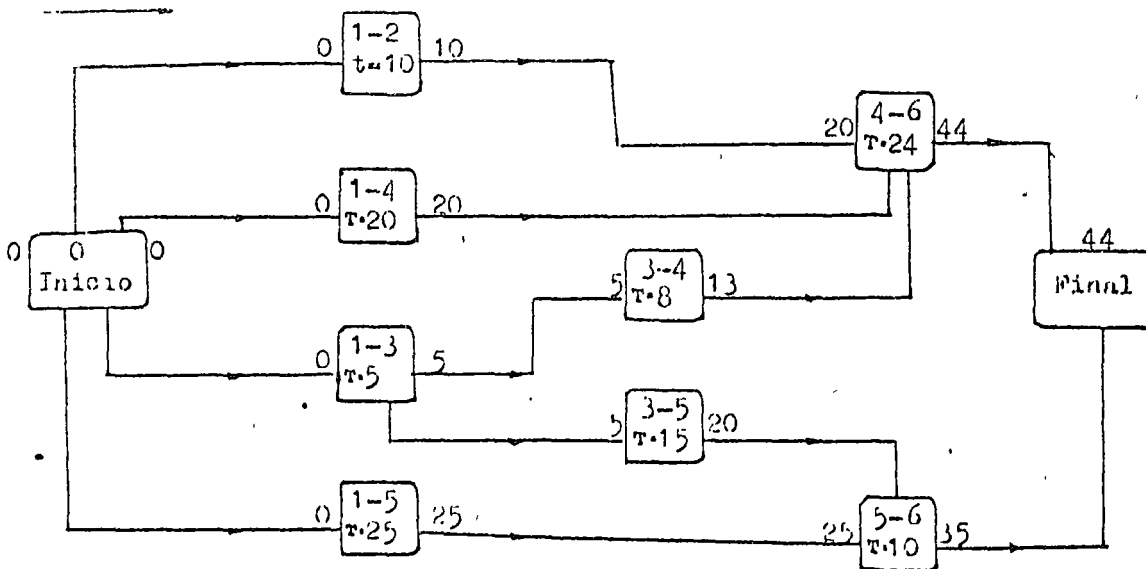
Terminadas las actividades (1-5) y (3-5) se puede comenzar la actividad (5-6).

Al terminarse tanto la (4-6) como la (5-6) se puede decir que se ha llegado al fin del proyecto.

" PASO ADELANTE "

(Diagrama de Precedencias)

Empecemos en el paso adelante dibujando la red con los datos necesarios introducidos en cada nudo.



Como la actividad inicial es artificial, su duración es igual a cero, por tanto inmediatamente pasamos a considerar la actividad (1-2) que empezará en el tiempo cero - (tiempo más próximo de iniciación, TPI) sumada con la duración de esa actividad, obtenemos el tiempo más próximo de terminación TPT de la actividad considerada (1-2)

$$TPT = TPI + T = 0 + 10 = 10$$

Así podemos continuar con las actividades (1-4), (1-3) y (1-5), todas estas con TPI iguales a cero, luego esos tiempos más próximos de iniciación sumados con la respectiva duración, nos dará el tiempo más próximo de terminación para la correspondiente actividad.

Act.	TPI	+ T	= TPT
1-3	0	5	5
1-4	0	20	20
1-5	0	25	25

Para la actividad 3-4, su TPI es 5, como su duración es 8, su TPT es 13.

Para la actividad 3-5,

$$TPT = TPI + T = 5 + 15 = 20$$

La iniciación de la actividad 4-6 dependerá de la terminación de 3 actividades, que son la 1-2, 1-4 y 3-4, considerándose el mayor de todos los tiempos más próximos de terminación de esas actividades.

$$\text{Max. } \left\{ \begin{array}{l} (TPT)_{1-2} = 10 \\ (TPT)_{1-4} = 20 \\ (TPT)_{3-4} = 13 \end{array} \right\} = 20$$

Luego 20 es el tiempo más próximo de iniciación de la actividad 4-6 sumándole su duración 24, se obtiene su

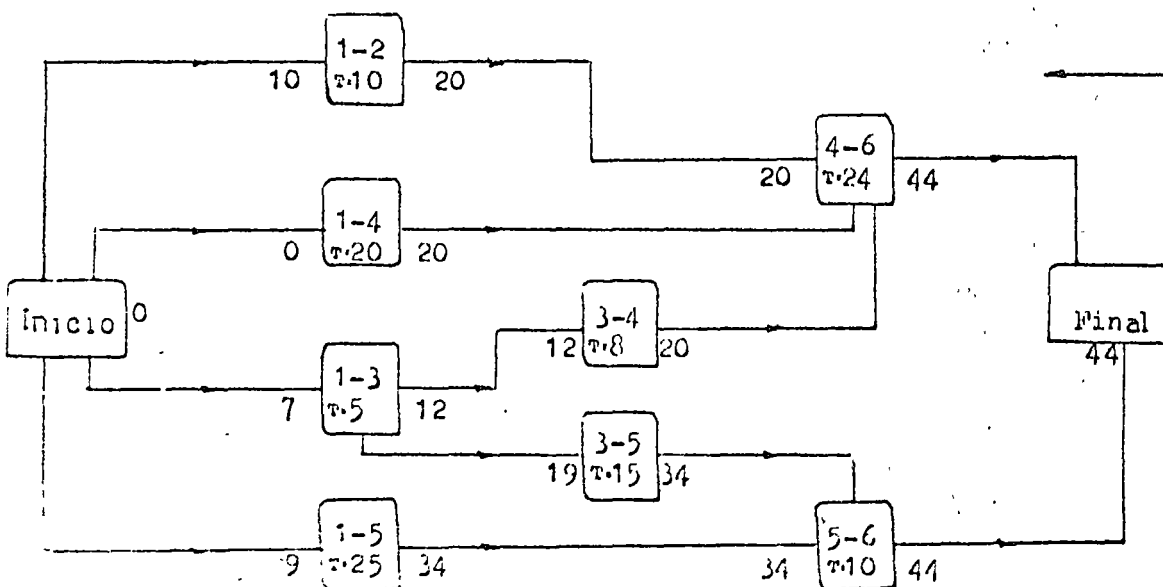
$$TPT = 44$$

Para la actividad 5-6, se hace una operación semejante y se encuentra que tiene un $TPI=25$, $t=10$, luego un $TPT=35$

Y se llega a la actividad final de duración cero, por tanto la duración total del proyecto es 44 días formado por las actividades 1-4 y 4-6 que por norma la duración del proyecto, constituyen las actividades críticas.

" P A S O A T R A S "

Este paso atrás lo comenzaremos a partir de la actividad terminal, donde consideramos el tiempo más próximo de terminación ($TPT=44$) como el tiempo más lejano de terminación permisible ($TLT=44$) para las 2 actividades reales finales 4-6 y 5-6.



Como tiempo más lejano de iniciación (permisible) es el tiempo más lejano de terminación menos la duración.

Por tanto $TLI = TLT - T$

Entonces para la actividad (4-6), $TLT = 44 - 24 = 20$

Y para la actividad 5-6, $TLT = 44 - 10 = 34$

Así seguimos con las demás actividades, recorriendo en sentido contrario la dirección de las flechas, considerando el tiempo más lejano de terminación como el mínimo de los tiempos más lejanos de iniciación de la actividad anterior.

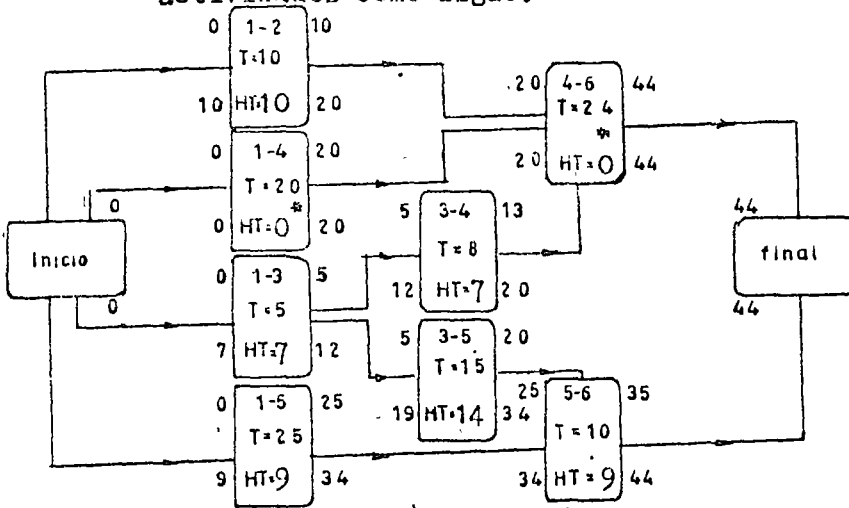
Y sus tiempos más lejanos de iniciación, restando las duraciones respectivas esto es:

Act.	TLT	- T	= TLI
1-2	20	10	10
1-4	20	20	0
3-4	20	8	12
3-5	34	15	19
1-5	34	25	9

Queda finalmente la actividad 1-3 en donde se considera como tiempo más lejano de terminación, el mínimo de los tiempos más lejanos de iniciación de las actividades 3-4 y 3-5, resultando ser 12.

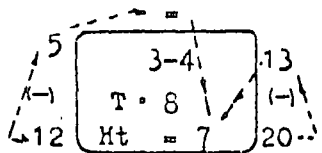
Por tanto su tiempo más próximo de iniciación es $12 - 5 = 7$

La red quedará con las TPI, TPT, TLI, TLT, para las actividades como sigue:



Siguiendo ahora la mecánica para hallar la holgura total, como sabemos es la diferencia entre los tiempos más-próximos y más lejanos de iniciación (o terminación) de una actividad, por tanto directamente en el diagrama dibujado podemos hacer la resta visualmente y anotar en la parte inferior del cuadro destinado a cada actividad los valores correspondientes.

Ejemplo:



Encontrando también que las actividades críticas están constituidas por actividades en holgura total igual a cero.

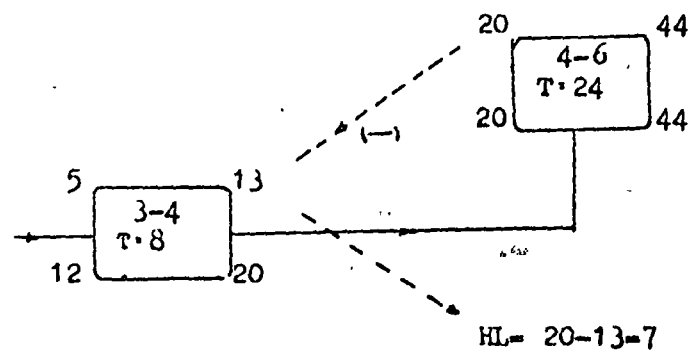
La operación para la holgura libre es un tanto más trabajosa. Recordando la fórmula de holgura libre, tenia-

$HL = TOP - TPT$

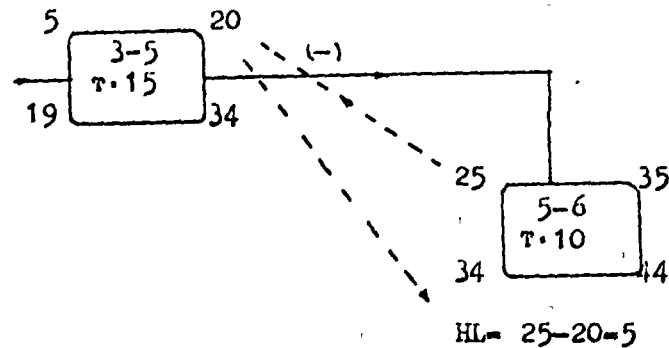
Aquí en el sistema de precedencias se tomará la holgura libre de una actividad como la diferencia entre el TPI de la actividad precedente y el TPT de la actividad considerada

Ejemplo:

Holgura libre de la actividad 3-4



Para la actividad 3-5



Se construye finalmente la tabla semejante a la realizada anteriormente, añadiendo ahora el espacio disponible para

pasar de fecha de trabajo a días de calendario. Al considerar los días de calendario se tomarán en cuenta los días que no se trabajen comúnmente, domingos, días festivos, etc.

Se comienza colocando en la casilla correspondiente a cero el día de inicio del proyecto y se cuentan los días de trabajo en el calendario y se escribe la terminación de cada actividad, cuidando, o teniendo en cuenta que por ejemplo si se termina una actividad el día (de trabajo) 10 y se inicia la siguiente el día 10, en día de calendario se iniciará un día más tarde.

Act	T	Mas		Próximo		Más lejano		HL	HT	
		inicio		terminación		inicio	terminación			
1-2	10	0		10		10		20		10
1-3	5	0		5		7		12		7
1-4	20	0		20		0		20		0
1-5	25	0		25		9		34		9
3-4	8	5		13		12		20		7
3-5	15	5		20		19		34		14
4-6	24	20		44		20		44		0
5-6	10	25		35		34		44		9

V.- CONTROL1) Introducción

Los conceptos descritos anteriormente permiten realizar una planeación para un proyecto determinado. Esta planeación está basada en datos estimativos que pueden no corresponder a la realidad durante la ejecución del proceso, por lo tanto, puede ser necesario hacer modificaciones periódicas a la planeación inicial.

Estas modificaciones como se ilustrará posteriormente, pueden ser realizadas con la aplicación sucesiva del método de la ruta crítica.

Esto significa que los beneficios reales que puede proporcionar la aplicación del método de la ruta crítica no quedan restringidos al primer diagrama de programación manteniéndolo estático; sino que el mismo método nos puede ayudar a controlar la ejecución del proyecto, siempre y cuando se posea la información adecuada, como podría ser: progresos de los trabajos en curso, gastos realizados, cambios básicos en suministro de materiales, etc.

Para la determinación de la periodicidad con la que deban recibirse estos datos en el centro de control se toman en cuenta la complejidad y urgencia del proyecto, y -

en esta forma es posible controlar con relativa facilidad, el trabajo, el presupuesto y la dirección del avance de la obra.

2) Necesidad del control

Durante el desarrollo de un proyecto determinado siempre se presentan cambios de información que afectan el diagrama original y tienen principalmente dos fuentes:

- a) Cambios de tiempo y
- b) Cambios en la lógica o diseño.

Referente a los cambios de tiempo, el nuevo diagrama ya sea de flechas o de precedencias, ya modificado, debe reflejar:

- Cambio en la fecha de terminación del proyecto
- Cambio en la secuencia crítica
- Imposibilidad de alcanzar las fechas señaladas para puntos intermedios.
- Cambios en las holguras de los trabajos no críticos
- Incremento de la mano de obra o del equipo indispensable programado.

Por otra parte, los cambios de diseño se originan frecuentemente por la adición de nuevos trabajos, cancelación de trabajos previamente planeados o la necesidad de hacer una descomposición más detallada de la Red planeada Original. Estas causas generalmente producen un ajuste en

la secuencia crítica, un cambio en las fechas o la aceleración del proyecto original para mantenerlo dentro del programa.

Por los motivos anteriores, el método de la Ruta Crítica aplicada para control, presta sus ventajas para aquellos trabajos en los cuales es necesario principiar la ejecución del proyecto, aún cuando no esté terminado totalmente el diseño integral definitivo.

Una manera fácil de controlar la presentación de los cambios anteriormente citados, y poder tomar decisiones precisas para contrarestarlos o eliminarlos y conocerlos, es el responder con las informaciones que se tengan, las siguientes preguntas:

- 1) ¿Existen errores en la duración y en la cuantificación de alguna o algunas de las actividades?
- 2) ¿Se han presentado atrasos imprevistos en alguna o en algunas de las actividades?
- 3) ¿Es necesario modificar sustancialmente algunas partes del proyecto?
- 4) ¿Los recursos requeridos para la ejecución del proyecto pueden estar disponibles en la cantidad y con la oportunidad requeridas?

Conocida la nueva situación real y con la ayuda del método de la Ruta Crítica, bastará con verter esta infor-

mación en la gráfica original y aplicar el procedimiento que será explicado con detalle en el inciso siguiente.

3) Efectos de una modificación en la duración de una actividad.

Las actividades de un proyecto, pueden clasificarse - en:

- a) Actividades críticas o actividades con holgura total nula.
- b) Actividades no críticas o actividades con holgura total no nula.

Como las actividades en una trayectoria crítica de un proyecto no tienen holguras, si al realizar dicho proyecto, algunas de ellas se retrasan un cierto tiempo, todo el proceso sufre el mismo retraso. Recíprocamente si alguna de las actividades críticas se adelanta un cierto tiempo, hay posibilidad de acortar la duración del proceso, - el mismo tiempo o un tiempo menor, dependiendo de las duraciones de las trayectorias no críticas.

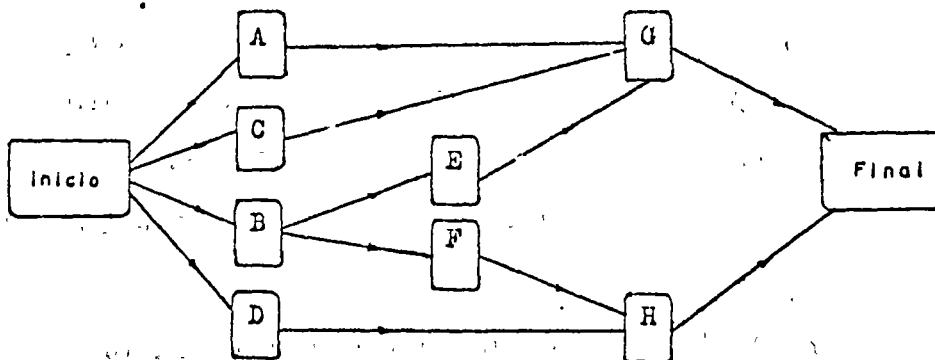
Por otra parte, si una de las actividades no críticas se retrasa un tiempo menor o igual que su holgura total, - por definición de ésta, la duración del proceso no se altera, sin embargo, si dicho retraso excede la holgura libre de las actividades, el retraso de ella modificará la fecha de iniciación más próxima de las actividades que se

encuentran en las trayectorias que se inician con la actividad en cuestión.

De lo anterior se incluye que desde el punto de vista del control de la realización de un plan para un proceso-productivo, las actividades más importantes son las críticas y aquellas para las cuales el cociente: $\frac{\text{holgura total}}{\text{duración}}$ es pequeño.

4) Actualización de la Red

Como ilustración para este tema y con objeto de indicar una secuencia lógica para realizar el control de un proyecto y la determinación de la nueva ruta crítica, se analizará el diagrama que hemos venido utilizando:



Si consideramos que cada actividad se inició el día correspondiente a su TPI y no existe ningún incremento en su duración, al final del día 22 se observará la siguiente situación

A) Para las actividades que ya fueron iniciadas

- 1) Las actividades A, C, B, E y F han sido terminadas
- 2) La actividad D se terminará en 3 días más
- 3) La actividad G lleva 2 días de iniciada y le faltan 22 días para terminar

B) Actividades que no se han iniciado todavía

- 1) Solo la actividad H resta por iniciarse, se iniciará en 3 días más

Suponiendo ahora que en lugar de las condiciones anteriores, para el día 22 de ejecución del proyecto se tienen las siguientes condiciones reales:

A) Para las actividades que ya fueron iniciadas:

- 1) La actividad A se terminó de acuerdo con el programa original
- 2) La actividad C pudo ejecutarse más rápidamente y tuvo una duración de 16 días.
- 3) La actividad B que consiste en el suministro del material que requiere la ejecución de las actividades E y F se ha retrasado 1 día respecto a lo programado
- 4) Problemas laborales han retrasado también la ejecución de la actividad D y se estima que tendrán una duración total de 30 días.
- 5) Las actividades E y F fueron iniciadas tan pronto

to se terminó la actividad B, la actividad E tuvo una duración total de 9 días y la F una duración de 13 días

- 6) La actividad G se inició de acuerdo con la terminación de la actividad C y se lleva un adelanto respecto a lo programado de 2 días
- B) Para las actividades que no se han iniciado
- 1) Debido al desarrollo del proyecto, se estima que la actividad H durará 15 días en lugar de 10

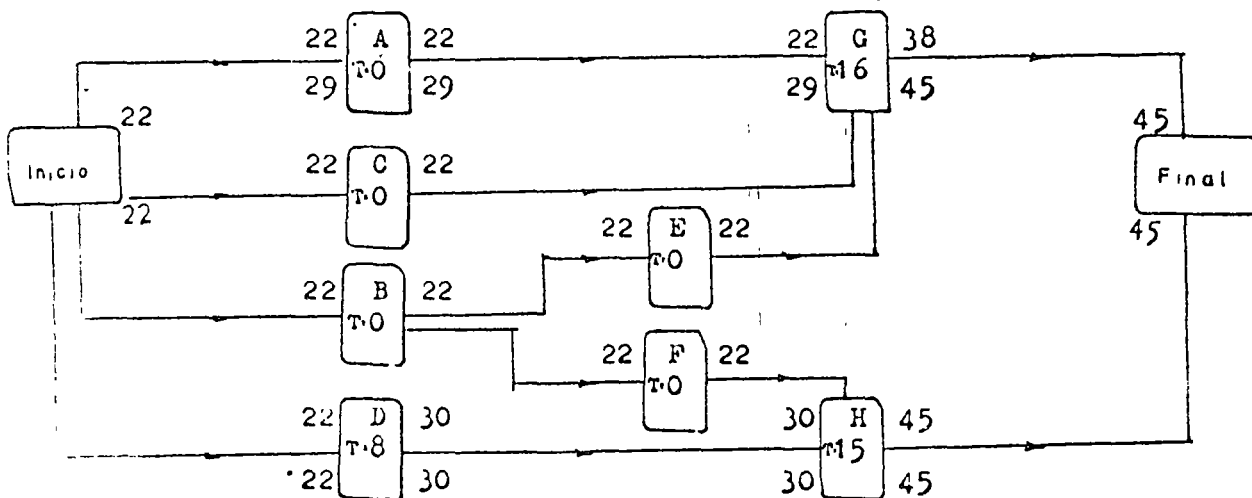
Las nuevas condiciones enunciadas pueden condensarse mediante la siguiente tabla:

Actividad	Actividades terminadas día de terminación	Actividades en proceso días para terminar	Actividades no iniciadas duración
A	10	—	—
B	6	—	—
C	16	—	—
D	—	8	—
E	15	—	—
F	19	—	—
G	—	16	—
H	—	—	15

Para proceder a la corrección del diagrama, una vez -
realizado el control, la información anterior se utiliza-
de la manera siguiente:

- a) La fecha correspondiente al momento de la realiza-
ción del control, se coloca como TPI del nudo ini-
cial.
- b) Se asocia la duración cero a todas las actividades
terminadas. En nuestro caso: A, B, C, E y F.
- c) A las actividades en proceso se les asocia una du-
ración igual a los días que necesitan para su ter-
minación, esto es, los valores que aparecen en la
3^a columna de la tabla anterior.
- d) A las actividades que aún no se han iniciado se -
les asocia la duración que aparece en la 4^a colum-
na de la misma tabla.

Finalmente se procede a la reprogramación de la red,-
utilizando el método de precedencias, se obtiene:



Nótese que originalmente las actividades críticas eran C y G y la duración del proyecto era de 44 días.

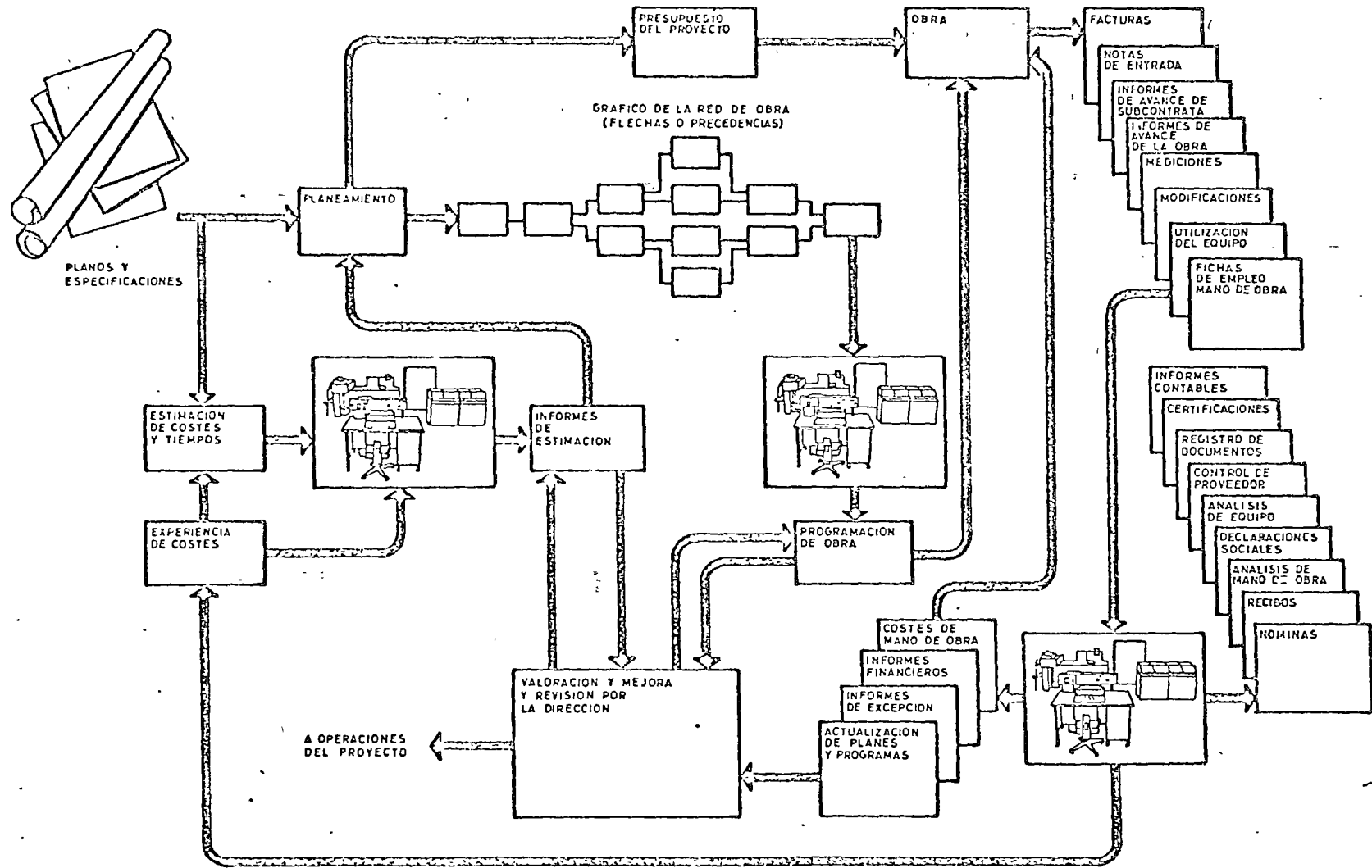
Una vez realizado el control, las actividades críticas con D y H y la duración estimada del proyecto es de 45 - días medidos a partir de la iniciación del proyecto.

Si como responsables del proyecto deseamos mantener - la duración de 44 días, se puede hacer lo siguiente:

- a) Ejecutar más rápidamente las actividades críticas - con lo cual se incrementará en general la necesi - dad de obreros y equipo.
- b) Reconstruir aquella porción del diagrama de prece - dencias que involucre actividades que no se han - iniciado.

Esto puede ocasionar cambios en la definición mis - ma de las actividades y en su interdependencia.

CICLO DE CONTROL DE PROYECTO DE CONSTRUCCION





LA INVESTIGACION DE OPERACIONES: APLICACIONES Y METODOLOGIA

por

Felipe Ochoa *

1. INVESTIGACION DE OPERACIONES

Es comunmente conocida la controversia que existe entre diversos especialistas tocante a la definición y delimitación de la Investigación de Operaciones y la Ingeniería de Sistemas. La primera tuvo su origen durante la Segunda Guerra Mundial, propiciada por los especialistas de los complejos militares aliados, buscando resolver problemas de organización en forma óptima; como fué determinar el tamaño más conveniente de los convoyes de barcos mercantes, para minimizar la acción destructora de los grupos de submarinos alemanes; o buscar los programas de vuelo de bombarderos con objeto de lograr el efecto de destrucción óptimo. La Ingeniería de Sistemas por su parte, se originó por las mismas fechas en instituciones y empresas de investigación y desarrollo, como el caso del sistema de microondas para transmisión de programas de televisión y conversaciones telefónicas en todos los Estados Unidos Continentales, cuyos estudios exploratorios se iniciaron alrededor de 1940.

En general se considera que la Investigación de Operaciones difiere de la In

* Director General, Felipe Ochoa y Asociados.

geniería de Sistemas en el tipo de problemas que nominalmente prefiere atacar. El investigador de operaciones se dedica a la optimización de las operaciones de sistemas existentes como por ejemplo: operación óptima de una línea de producción, mezcla óptima de inversiones de los recursos de un banco, número más conveniente de cajas de cobranza en un supermercado, etc. El especialista en Ingeniería de Sistemas, supuestamente se dedica al desarrollo de sistemas no existentes, tales como un nuevo sistema de transporte metropolitano, un sistema integrado de producción camaronera en lagunas costeras, etc.

Sin embargo, el que se necesite un nuevo equipo o nuevas tácticas, depende directamente del problema *per se* y no de la persona llamada para resolverlo.

El proceso intelectual para la resolución de problemas tanto de investigación de operaciones como de ingeniería de sistemas muestra fases totalmente análogas como son la definición del problema, la elaboración de un modelo matemático representativo, la selección del método de solución del modelo y la implementación de la solución.

Varias conclusiones pragmáticas se desprenden de la controversia señalada antes:

- a. Ambas disciplinas aplican el enfoque de sistemas, en contraposición con el enfoque de componentes, en la solución de problemas.
- b. Ambas están convencidas de la naturaleza interdisciplinaria de los problemas que abordan y de la complejidad de los mismos.

- c. Igualmente consideran demostrado el valor del equipo humano multidisciplinario para abordar los problemas operacionales.
- d. Ambas han atraído a los científicos y estudiosos hacia el mundo de la acción y la decisión.
- e. Solicitan los servicios de científicos generalistas, más que especialistas, aunque no va en su contra el que además sea experto en un subcampo específico.
- f. En general las similitudes existentes entre la Investigación de Operaciones y la Ingeniería de Sistemas son mucho más importantes que sus diferencias.

El campo de acción es nuevo, importante y diferente; por tanto se justifica ampliamente la discusión tendiente a elaborar programas para la preparación de especialistas en estos campos, quizá con el tiempo amalgamados en un solo nombre como, el ya varias veces sugerido de "Ciencia de los Sistemas".

2. CAMPOS DE APLICACION

Los campos de aplicación de la Investigación de Operaciones han sido muy variados en países que la han utilizado durante los últimos 25 años. En sus principios estuvo totalmente enfocada hacia las aplicaciones militares y más tarde, a la industria, a la banca y a las instituciones gubernamentales.

Basándose en la experiencia de esos países, y teniendo en cuenta nuestra rea

lidad contemporánea así como las necesidades de un país en desarrollo como el nuestro, podemos preveer una extensa gama de aplicaciones entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

a. *Industria*

Planeación y control óptimo de la producción.

Asignación óptima de recursos a la producción.

Pronóstico de demanda.

Mantenimiento y reemplazo de equipo.

Distribución óptima de productos.

Diseño de facilidades en plantas industriales.

Localización de plantas y bodegas.

b. *Banca*

Selección óptima de cartera.

Elaboración de presupuestos.

Manejo de activos.

Sistema de evaluación de créditos.

Cobranza de carteras vencida y legal.

Inversión óptima de capital.

Simulación de operación integral de empresas de crédito.

c. *Complejos Urbanos*

La organización y funcionamiento de las áreas metropolitanas constituyen un ejemplo clásico del problema de sistemas, complejo en extremo, de gran interacción entre sus componentes. En este contexto se busca planear a largo plazo la operación de las ciudades en todos sus aspectos, procuran

do proporcionar a sus habitantes un *habitat* eficiente y agradable y un medio humano ideal. Dada esta complejidad, puede anticiparse que en las áreas metropolitanas, el especialista en sistemas o investigación de operaciones puede hacer valiosas aportaciones.

Los problemas más importantes en este campo son los problemas de congestión, tanto habitacional como de transporte, de comunicaciones y de servicio en general, los cuales tienen que resolverse para proporcionar estándares adecuados a sus habitantes.

3. METODOLOGIA

La definición de la Investigación de Operaciones dada por Morse y Kimball es la siguiente: "La Investigación de Operaciones es un método científico para proporcionar a los departamentos ejecutivos, bases cuantitativas para sus decisiones relacionadas con las operaciones bajo su control."

Esta definición se ha vuelto más ambiciosa a medida que se ha desarrollado el campo y se han atacado y resuelto problemas cada vez más complejos. Se enfatiza en la actualidad la optimización en la toma de decisiones.

De acuerdo con lo anterior, el investigador de operaciones requiere de una serie de métodos y disciplinas de carácter científico para la solución de los problemas que se le proponen.

Esta metodología podemos considerarla formada principalmente por la aptitud de elaborar modelos matemáticos que describan con suficiente aproximación el fenómeno que se trata de representar y segundo, por las técnicas, agrupadas

bajo el nombre de Teoría de Optimización, que permitan obtener la mejor solución del problema operacional que se plantea.

B I B L I O G R A F I A

1. C.W. Churchman, R. L. Ackoff and E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1957.
2. P. M. Morse and G. E. Kimball, *Methods of Operations Research*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
3. C. D. Flagle, W. H. Huggins and R. H. Roy, editors, *Operations Research and Systems Engineering*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1960.
4. K. J. Schlager, "Systems Engineering-Key to Modern Development", *IRE Trans., Prof. Gp. Eng. Management*, 3, 1956, pp. 64-66.
5. H. H. Goode and R. E. Machol, *System Engineering-an Introduction to the Design of Large-Scale Systems*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1957.
6. Arthur D. Hall *A Methodology for Systems Engineering*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1962.
7. Felipe Ochoa, *La Investigación de Operaciones y su Metodología Matemática*, Acta Politécnica Mexicana Vol. X No. 49, 1969, pp. 129-132.



40

I. LA TEORIA DE OPTIMIZACION Y SUS APLICACIONES

por

F. Ochoa *

1. INTRODUCCION

El objetivo de este artículo es formalizar los conceptos que permiten describir la naturaleza y campo de aplicación de la *teoría de optimización*. Se define primero el problema de optimización y se discuten los aspectos complejos del mismo. Se identifican luego los pasos fundamentales del proceso de solución de un problema de optimización: a) Definición del problema. b) -- Formulación de un modelo de optimización. c) Selección de un método de solución. d) Aplicación del método de solución. Cada paso del proceso y lo que cada uno implica se discute en detalle.

Finalmente se presenta una clasificación tentativa tanto de los modelos de optimización como de las técnicas de solución.

* Director General, Felipe Ochoa y Asociados.

2. EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

Cuando un ejecutivo o persona responsable de tomar decisiones se ve confrontado con el problema de seleccionar un curso de acción entre un conjunto de alternativas, se verá compelido a escoger la mejor, en términos de un cierto objetivo u objetivos predeterminados, según la naturaleza del problema.

Se asume en lo anterior, que el grado en el cual cada alternativa se acerca al objetivo puede evaluarse mediante un método cuantitativo. En otras palabras, una medida de la utilidad de cada curso de acción puede determinarse, permitiendo así al que toma decisiones, seleccionar la alternativa que registre la máxima utilidad. El grado de acercamiento al objetivo en cada caso particular es la "figura de mérito".

DEFINICION - Un problema de optimización se define como la selección, entre un conjunto de varias alternativas (posiblemente un número infinito) de un problema, de aquella para la cual la figura de mérito se optimiza (se maximiza o minimiza).

3. TEORIA DE OPTIMIZACION. NATURALEZA DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION.

La naturaleza de los problemas de optimización es en general bastante compleja y una gran variedad de casos, presentando diversas características, se encuentran a menudo en problemas prácticos.

Para visualizar la complejidad inherente a la naturaleza del problema, considérense los siguientes ejemplos:

- a) El que toma decisiones puede verse confrontado con un problema que tenga un objetivo claramente definido que debe optimizarse, sin embargo el problema puede estar sujeto o no a una serie de restricciones, las cuales a su vez, pueden no estar claramente definidas. También tendrá que tener en cuenta para la solución del problema, si el comportamiento del mismo es determinístico o estocástico.
- b) El que toma decisiones podrá verse en el caso de tener que interactuar y competir con otros participantes, cada uno de los cuales trata de tomar decisiones que optimicen su propia figura de mérito.
- c) Varias decisiones tendrán que tomarse en un problema de etapas múltiples, donde el objetivo es una optimización a largo plazo en contraposición con una suboptimización de una etapa particular del problema.

Es esta naturaleza tan diversa, así como las características estructurales -- tan distintas de los modelos (Ver sección 6), que indican claramente la necesidad de una gran variedad de técnicas para atacar la solución de problemas de optimización. El conjunto de todas estas técnicas, o sea las incluidas -- dentro de los nombres específicos de *programación matemática, teoría de juegos, teoría estadística de la decisión, programación dinámica, teoría del -- control, cálculo de variaciones, etc.*, constituyen, junto con sus bases teóricas, la teoría general de optimización.

La teoría de optimización, en su acepción más amplia, es la rama unificada -- del *análisis matemático* que proporciona un enfoque formal para la solución -- de los problemas de optimización.

4. PROCESO DE SOLUCION

El proceso de solución para problemas de optimización puede no ser idéntico en todos los casos y puede diferir debido a la naturaleza especial del problema; sin embargo siempre será posible distinguir en el proceso los pasos básicos indicados en la Figura I.1. Las líneas de retroalimentación indican la posible revisión de las decisiones anteriores.

5. DEFINICION DEL PROBLEMA

En la etapa de definición del problema se identifican las variables de decisión o control que lo gobiernan, y se especifica a su vez la forma de interacción entre ellas. Deberá definirse una figura de mérito en términos de -- las variables de control relevantes, y el rango de los controles debe especificarse explícita o implícitamente. Finalmente, las restricciones que deben satisfacer las variables habrá que establecerlas.

6. FORMULACION DE UN MODELO MATEMATICO

Una vez que el problema ha quedado adecuadamente definido, el paso subse- - cuente es formular un modelo abstracto (usualmente un modelo matemático), - que represente fielmente la estructura esencial del problema y que pueda te ner solución mediante la aplicación de un procedimiento conocido.

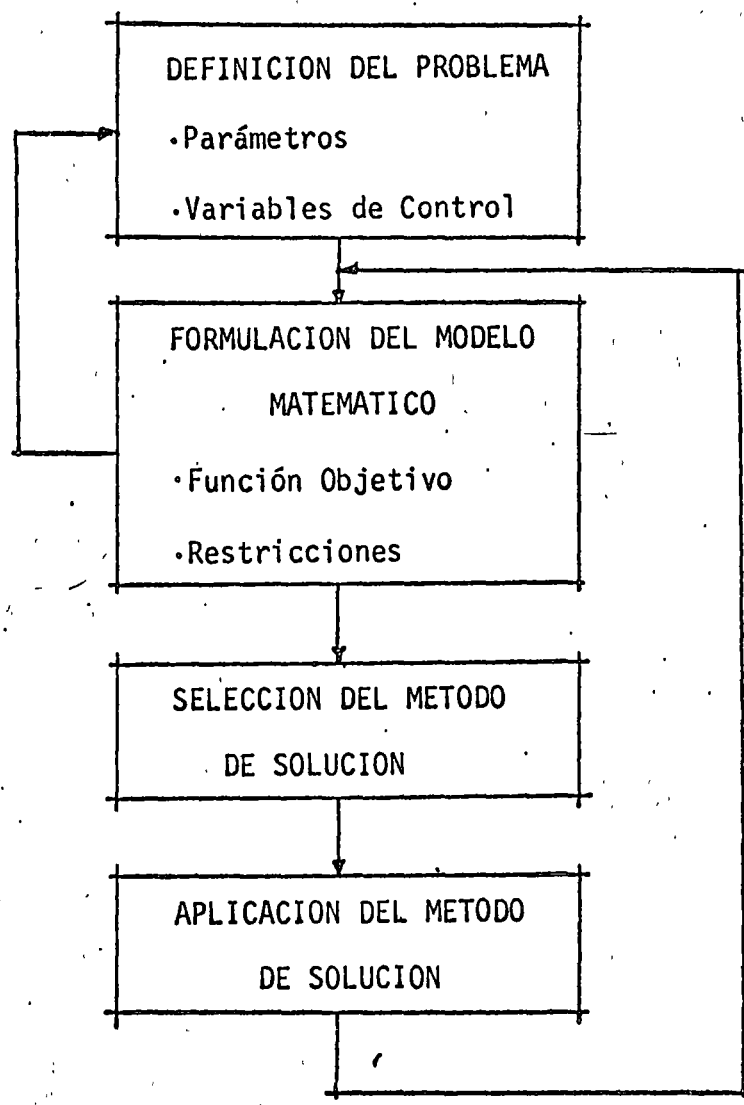


Fig. I.1 Proceso de Solución del Problema de Optimización

Quando se haga referencia a modelos, lo entendemos en el sentido de Karlin*; "un modelo es una adecuada abstracción de la realidad que preserva la estructura esencial del problema de tal manera que su análisis proporcione información acerca de la situación concreta así como de otras situaciones que tengan la misma estructura formal".

Es claro que la solución del modelo producirá resultados confiables solo en la medida que el modelo sea representativo del problema original. Si el problema no ha sido modelado apropiadamente, su solución puede llevar a resultados dudosos o completamente erróneos; por ejemplo considérese el caso de un modelo de programación lineal que da una solución no acotada como resultado de no haber incluido una de las restricciones dentro del modelo.

Se analizan a continuación algunas características distintivas de los modelos de optimización que permitirán su clasificación. Esto será útil para identificación posterior de los modelos que se tratarán en las demás sesiones -- del seminario.

Se distinguen tres componentes principales de un modelo de optimización:

- a. El conjunto de variables del problema.
- b. La figura de mérito por optimizar.
- c. El dominio de definición de las variables del problema (determinado por las restricciones del problema).

* Karlin, S., "Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics", Vol. I, Addison-Wesley, 1959.

La solución óptima para cierta clase de problemas de optimización consiste - en valores numéricos que toman las variables del problema, satisfaciendo las restricciones y optimizando simultáneamente la figura de mérito.

Otras clases de problemas de optimización buscan una curva o función (problemas variacionales), que satisfaga a un conjunto de restricciones y haga óptima una cierta expresión funcional del conjunto de curvas factibles.

Para ciertos problemas el objetivo será susceptible de representación matemática como una función de las variables de control. Para otros problemas esta representación explícita puede no ser obtenible, y la figura de mérito para un conjunto dado de valores de las variables de control podrá conocerse solo después de completar un proceso complejo (como un proceso de simulación, un análisis ingenieril, la solución de un programa de computación muy elaborado, o una búsqueda en una tabla).

Más aun, el problema puede ser restringido o no restringido. Para problemas restringidos susceptibles de modelarse en forma matemática explícita, la naturaleza de las expresiones que representan a las restricciones puede ser - muy diversa. Por ejemplo pueden ser expresiones algebraicas o trascendentes, igualdades o desigualdades, lineales o no lineales y siendo el dominio de -- las variables un conjunto continuo o discreto. También, algunas de las res-- tricciones pueden ser ecuaciones diferenciales o integrales.

A la luz de la discusión anterior, se ha elaborado la clasificación de los - modelos de optimización en forma de estructura arbolada, mostrada en las - - Figuras I.2a y b. El árbol obviamente puede ser expandido tanto en la direc-

ción horizontal como en la vertical hasta hacerlo tan completo como se requiera o se desee.

Se distinguen ciertas ramas del árbol que representan a clases específicas de problemas, para las cuales los procedimientos de solución constituyen un desarrollo matemático bien establecido. Por ejemplo, los modelos en la rama de optimización restringida para los cuales tanto las restricciones como el objetivo puede representarse en forma matemática cerrada, constituyen aquella parte de la teoría de optimización generalmente conocida como *programación matemática*.

Como segundo ejemplo, considérese la clase de problemas para los cuales la función objetivo en forma explícita, se expresa mediante una integral definida (objetivo funcional) con o sin condiciones subsidiarias. La solución de tales modelos cae dentro del campo del *cálculo clásico de variaciones*.

Finalmente, considérense aquellos modelos con restricciones y/o objetivo que no aceptan representación matemática explícita. La optimización de tales modelos puede intentarse por medio de técnicas que se designan con el rubro general de *métodos de búsqueda directa*.

Un ejemplo de esta clase sería un cierto proceso estocástico (por ejemplo -- una línea de espera, un proceso de renovación) que está siendo analizado mediante una simulación en computadora. Los parámetros de entrada pueden variarse y la simulación ejecutarse para cada conjunto de valores. Mediante -- los resultados de salida de cada corrida puede estimarse una *medida de efectividad* (MDE) de los parámetros de entrada correspondientes. Si el problema

consiste en seleccionar los parámetros de entrada que optimicen la MDE, se -
requerirá una técnica de búsqueda directa para obtener el óptimo al mismo --
tiempo que se minimiza el número de experimentos simulados.

7. TECNICAS DE SOLUCION

Las técnicas de solución son los procedimientos y algoritmos desarrollados para la solución de problemas de optimización. La solución de un problema -- implica usualmente la determinación de los valores numéricos de las variables de control y el valor óptimo de la figura de mérito.

Los métodos de optimización se dividen generalmente en dos grandes categorías: *métodos indirectos y directos*. Con los métodos directos, la solución óptima se busca calculando directamente los valores de la función objetivo en diferentes puntos de la región factible. Los valores así obtenidos se comparan y, por medio de un criterio auxiliar, se analiza ahora un nuevo punto que, es de esperarse, mejorará el valor de la función objetivo.

Alternativamente, los métodos indirectos buscan un conjunto de valores de -- las variables de control que satisfagan condiciones necesarias de optimalidad previamente conocidas. El método clásico del cálculo diferencial es un ejemplo del tipo indirecto. En efecto, se buscan valores de las variables para los cuales las primeras derivadas de la función objetivo se anulen, suponiendo que se garantice la continuidad de la función y la existencia de las derivadas en la región de interés. En esta forma, el problema de optimización ha sido transformado en un problema de búsqueda de raíces.

El algoritmo Simplex de la programación lineal exhibe aspectos tanto del método directo como del indirecto. Lleva a cabo una búsqueda directa solo entre los puntos extremos de la región factible (puntos que satisfacen la condición necesaria de optimalidad) en forma tal que la figura de mérito sea --

cuando menos tan buena como en el paso previo. Finalmente, el óptimo se detecta, de entre el conjunto de puntos extremos, cuando el criterio indirecto de factibilidad de la solución complementaria del problema dual asociado se ha satisfecho.

Para ciertos modelos matemáticos de optimización, el método de solución puede incluir la transformación del modelo original en uno equivalente que prometa ser de más fácil tratamiento que el original. Considérese la metodología de la *programación geométrica* *: en este caso, la optimización polinomial se formula en términos de su problema dual y este es el modelo que realmente se resuelve. Otro ejemplo es la transformación en un problema de programación lineal de un programa no lineal *separable*.

Las técnicas directas pueden subdividirse en dos grupos principales: métodos *simultáneos y secuenciales*. Las técnicas de búsqueda simultánea calculan los valores de la función objetivo o superficie de respuesta para un conjunto de puntos determinados *a priori* mediante una cierta estrategia de búsqueda. Los métodos de búsqueda secuencial, por otra parte, se refieren a el examen secuencial de las soluciones de cada intento experimental, basando la localización de intentos subsecuentes en los resultados de los anteriores. En las Figuras I.3a y b se presenta un subconjunto de técnicas de solución representativas de cada una de las clases de métodos discutidos en esta sección.

* Duffin, R.J., E.L. Peterson, y C. M. Zener, *Geometric Programming*, John Wiley, 1967.

8. SELECCION DEL METODO DE SOLUCION.

La selección de un método de solución conveniente para un problema dado depende del tipo de modelo empleado, las técnicas de solución existentes para ese modelo particular y las facilidades de computación disponibles para el ingeniero analista.

En el proceso de selección se pueden considerar factores tales como linealidad del modelo, número de variables, número de restricciones, estructuras especiales, separabilidad de las variables en las restricciones y/o función objetivo, superficies representativas de las restricciones o del objetivo - de rápida interpretación geométrica, etc.

La selección final de un método adecuado para un problema particular depende por tanto de las propiedades detalladas del modelo así como de las técnicas de solución que formen parte del paquete de *software* de la instalación - de computadora disponible.

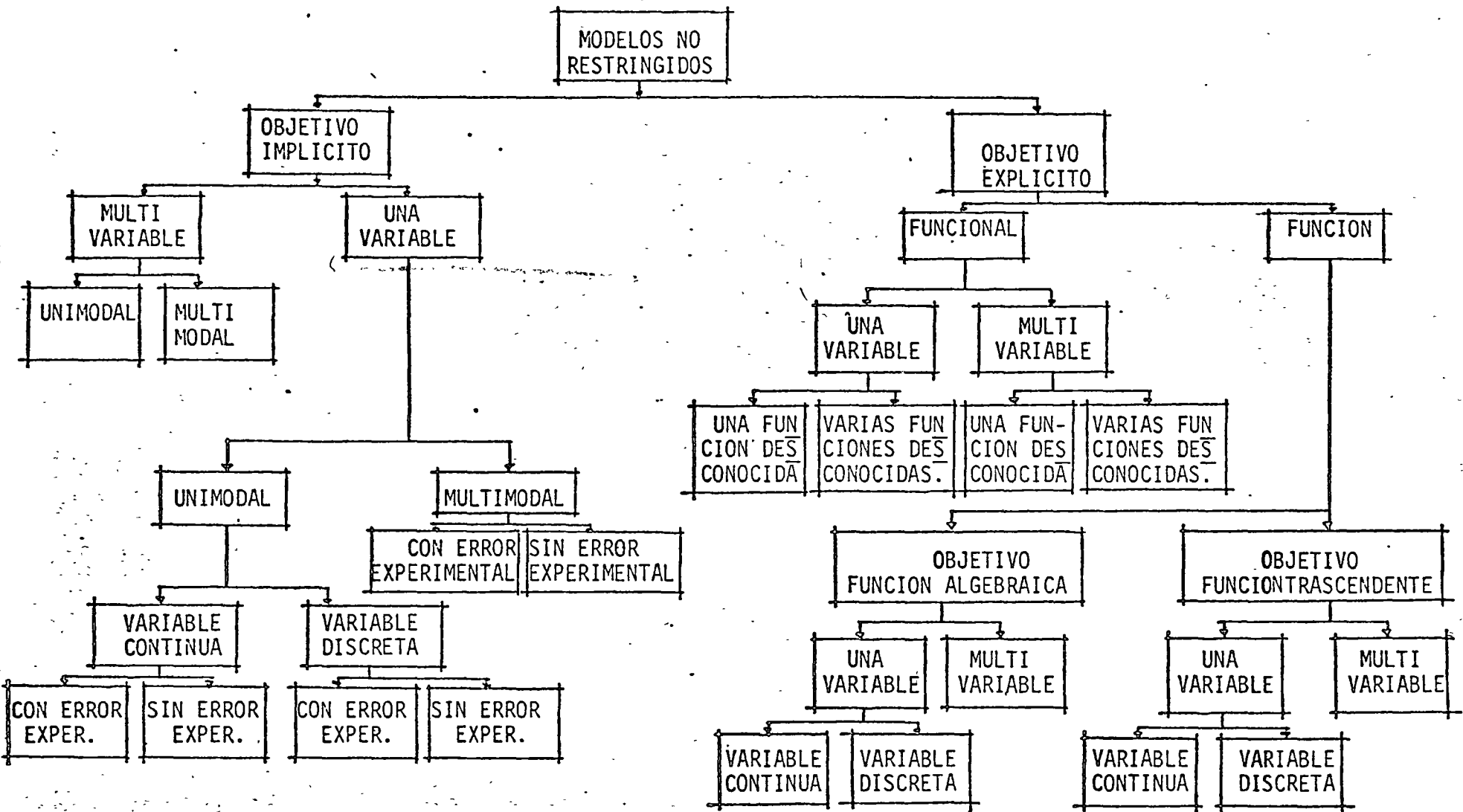


Fig. I.2a Clasificación de Modelos de Optimización

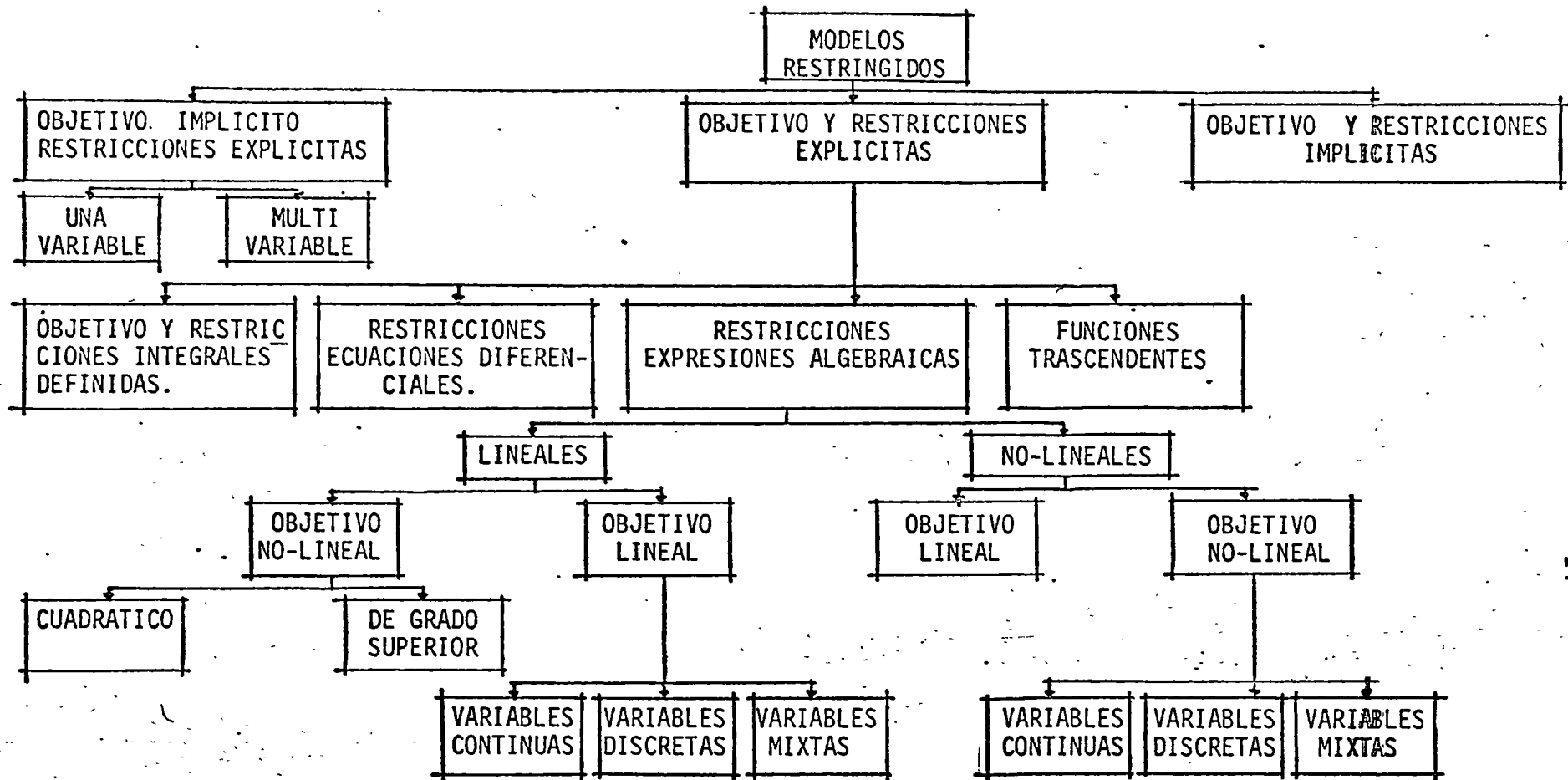


Fig. I.2b Clasificación de Modelos de Optimización

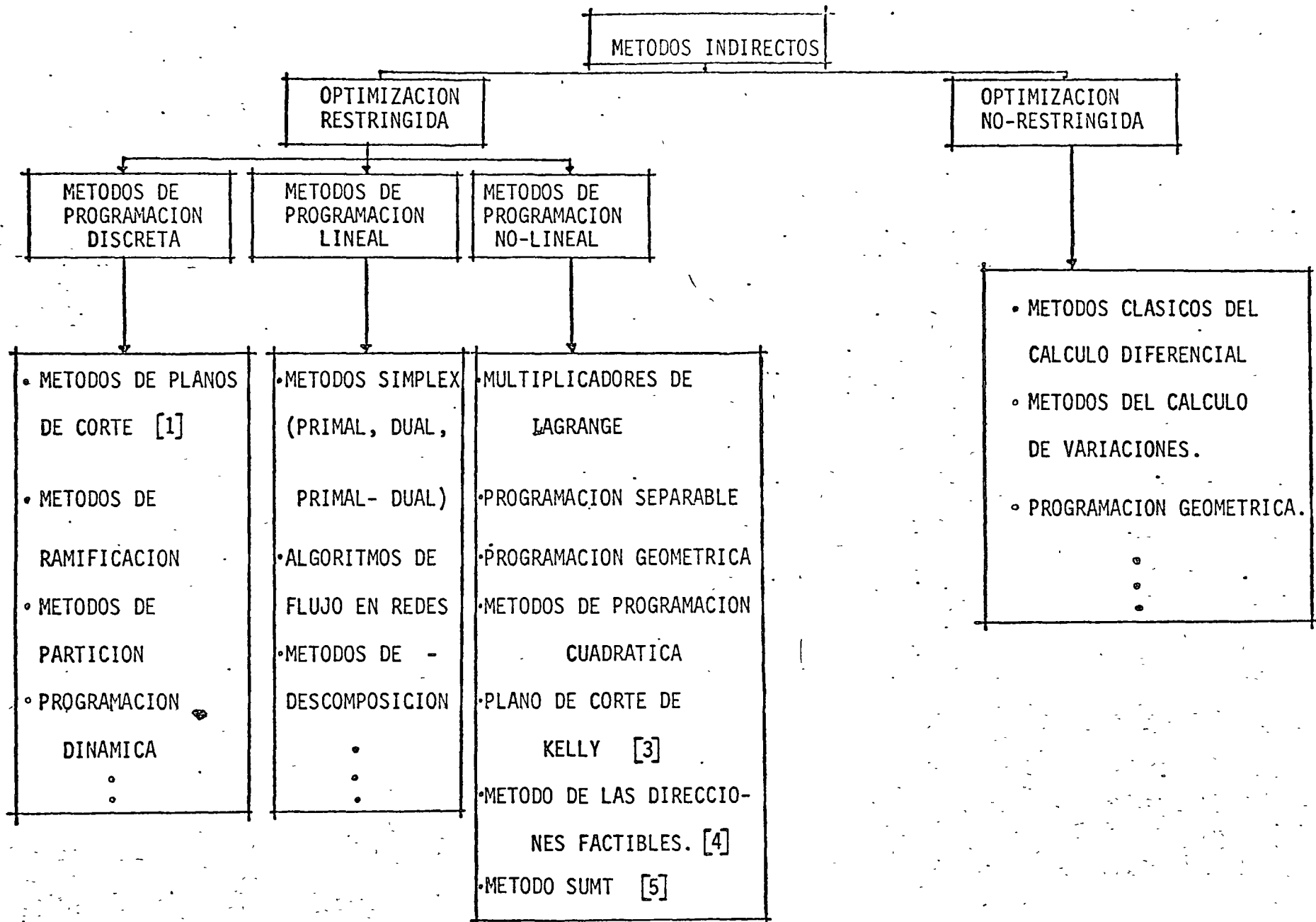
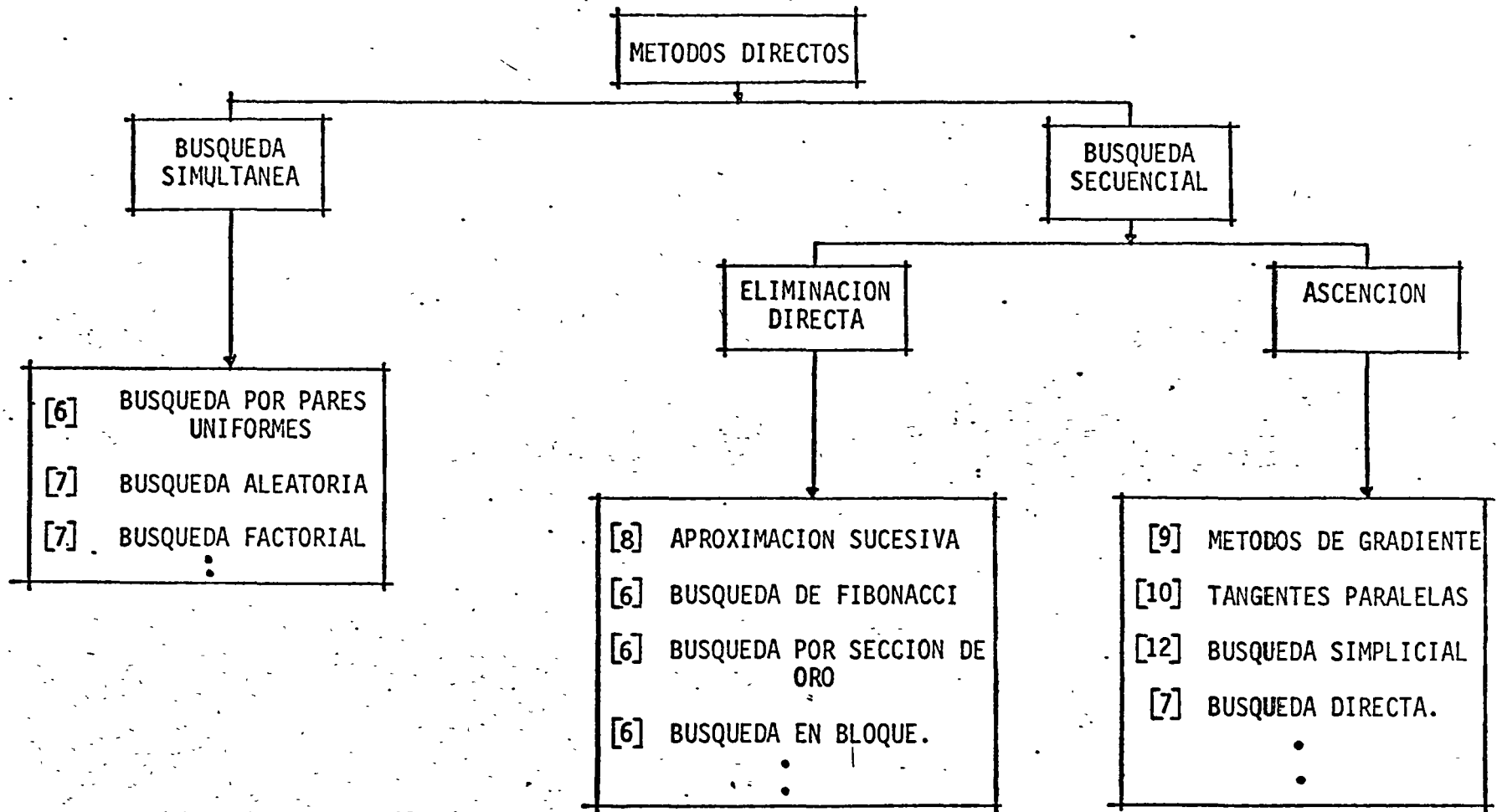


Fig. I.3a. Clasificación de Métodos de Solución



NOTA: Los números entre paréntesis corresponden a las referencias bibliográficas.

Fig. I.3b. Clasificación de Métodos de Solución

REFERENCIAS

- (1) Balinski, M.L., "Integer Programming: Method, Uses, Computation", *Management Science*, Vol. 12, No. 3, November 1965, pp. 255-264.
- (2) Wolfe, P., "The Simplex Method for Quadratic Programming", *Econometrica*, Vol. 27, 1959, pp. 382-398.
- (3) Kelley, J. E., Jr., "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs", *J. SIAM*, Vol. 8, December 1960, pp. 703-712.
- (4) Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1960.
- (5) Fiacco, A. V., and G. P. McCormick, "Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming", *Management Science*, Vol. 10, 1964, pp. 601-617.
- (6) Wilde, D. J. and C. S. Beightler, *Foundations of Optimization*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- (7) Brooks, S. H., "A Discussion of Random Methods for Seeking Maxima", *Operations Research*, Vol. 6, 1958, pp. 244-251.
- (8) Berman, G., "Minimization by Successive Approximation", *J. SIAM Num. Anal.*, Vol. 3, 1966, pp. 123-133.
- (9) Hadley, G., *Non Linear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1964, Ch. 9.

- (10) Shah, B. V., R. J. Buehler, and O. Kempthorne, "Some Algorithms for Minimizing a Function of Several Variables", *J. SIAM*, Vol. 12, March 1964, pp. 74-92.
- (11) Hooke, R. and T. A. Jeeves, "'Direct Search' Solution of Numerical and Statistical Problems", *J. Assn. Comp. Mach.*, Vol. 8, April 1961, pp. 212-229.
- (12) Spendley, N., G. R. Hext, and F. R. Himsworth, "Sequential Application of Simplex Design in Optimization and Evolutionary Operations", *Technometrics*, Vol. 4, November, 1962, pp. 441-459.
- (13) Ochoa, F. "Applications of Discrete Optimization Techniques to Capital Investment and Network Synthesis Problems", R 68-43 Massachusetts Institute of Technology, Enero 1968.



centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam



APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN LA
GESTION DE EMPRESAS

EVALUACIÓN DE PROYECTOS

ING. GUILLERMO CASTELLANOS GUZMAN

22 de febrero de 1974

CURSO.- Aplicaciones de la Ingeniería de
Sistemas en la Gestión de Empresas.

TEMA:

EVALUACION DE PROYECTOS

ING. GUILLERMO CASTELLANOS G.

1984

- iii) Ingeniería del Proyecto.- Descripción técnica del proyecto, investigaciones preliminares, especificación de los equipos y estructuras, selección de los procesos de elaboración, justificación del grado de mecanización adoptado, cantidad y calidad de los insumos requeridos, etc.

- iv) Cálculo de las Inversiones.- Cálculo de las inversiones totales en moneda nacional y extranjera que el proyecto exige, considerando la inversión en activos fijos y el capital de trabajo ó circulante.

- v) Presupuesto de gastos e ingresos anuales y organización de los datos para la evaluación.- Estimación de los costos e ingresos que resultarían del funcionamiento de la empresa incluyendo en forma ordenada aquellos antecedentes que puedan ser necesarios para evaluar el proyecto; efectos sobre la balanza de pagos, presupuestos y disponibilidad de la mano de obra, etc.

- vi) Evaluación del Proyecto.- Utilización de criterios de evaluación para poder calificar el proyecto y compararlo con otros para determinar prelación.

- vii) Financiamiento.- Especificaciones de las fuentes monetarias a que se recurrirá y las formas en que se proyecta canalizar los recursos financieros para llevar a cabo la iniciativa.

- viii) Organización y Ejecución.- Solución de problemas relativos a la constitución legal de la empresa y a la organización para el montaje y realización del proyecto.

EVALUACION DE PROYECTOS

Ing. Guillermo Castellanos Guzmán.

INTRODUCCION

El objetivo básico de todo estudio económico de un proyecto es evaluarlo, es decir, calificarlo para determinar si es bueno o malo y compararlo con otros proyectos de acuerdo con una determinada escala de valores a fin de establecer un orden de prelación. Esta tarea exige precisar las "ventajas" y "desventajas" de la asignación de recursos a un fin dado. El problema teórico de establecer cual es el criterio de evaluación que se debe utilizar para establecer prelación no ha sido aún resuelto en definitiva; sin embargo, se distinguen dos grupos principales: por un lado los patrones de comparación de proyectos conforme al interés del empresario privado y por el otro los que interesan a la comunidad en su conjunto y que se pueden llamar criterios sociales de evaluación.

Los capítulos en que podemos dividir el estudio de un proyecto son:

- i) Estudio de Mercado.— Estudio de la demanda de los bienes y servicios a que el proyecto se refiere.
- ii) Determinación del tamaño y la localización.— Determinación de la capacidad de producción que ha de instalarse y de la localización de la nueva unidad productora.

....

ESTUDIOS DE MERCADO

Mercado es un conjunto de individuos cuyas solicitudes de oferta y demanda, conducen a establecer un precio, llamado precio de mercado, que ha de normar las transacciones que se realicen con ciertos bienes o servicios.

El estudio de mercado tiene por objetivo determinar la cuantía de bienes y servicios que han de fluir de una unidad productora y que la comunidad esta dispuesta a adquirir a determinado precio.

La función de demanda de un bien o servicio, expresa las cantidades demandadas por la comunidad en función del precio de venta de ese bien o servicio, o sea que es una función del tipo $Q = Q(P)$.

La función de oferta de un bien o servicio, expresa las cantidades que los productores estan dispuestos a ofrecer al mercado, en función del precio de venta de ese bien o servicio y tambien es de la forma $O = O(P)$.

Existe un precio para el cual se igualan las dos funciones y que corresponde al precio de mercado.

La nueva producción debida al proyecto se sumará en algunos casos al actual volumen de transacciones y en otros solo reemplazará a una parte o a la totalidad de los bienes ó servicios procedentes de otros orígenes (nacionales o extranjeros).

La determinación cuantitativa de la demanda solo tiene sentido en relación con determinados precios de venta, los cuales influirán sobre el monto de los ingresos estimados.

El estudio de mercado deberá proporcionar criterios útiles para determinar la capacidad que ha de instalarse en la nueva unidad productora y estimar los probables ingresos durante la vida útil de la realización del proyecto.

La recopilación de antecedentes, comprendidos los relativos a la comercialización y a la influencia de la política económica, sentará las bases empíricas del estudio, pues permitirá conocer en cada caso las variables importantes que afectan la cuantía de la demanda y los precios. Si hay racionamientos, subsidios, aranceles protectores, etc.

Con los antecedentes obtenidos y las hipótesis de trabajo adoptadas, se podrán establecer algunas premisas teóricas con objeto de cuantificar la demanda actual y futura.

Otro aspecto a considerar en el estudio de mercado es el que se refiere tanto a la elasticidad de la demanda con respecto al ingreso y con respecto al precio.

La elasticidad de la demanda con respecto al ingreso indica la variación porcentual de la demanda al producirse una variación porcentual del ingreso.

$$E_y = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta Y}{Y}}$$

La elasticidad de la demanda con respecto al precio indica la variación porcentual de la demanda de un bien o servicio, al producirse una variación porcentual en el precio de venta de ese bien o servicio.

$$E_p = - \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Esta última es negativa ya que la función demanda es estrictamente decreciente.

El conocimiento del coeficiente de elasticidad-precio de la demanda de un bien o servicio cualquiera, permite formarse una idea aproximada de la magnitud en que podrá cambiar la cuantía de la demanda y en consecuencia el valor de las ventas, en el caso de que se produzca una modificación en el precio de esa mercadería.

Si se tiene por ejemplo que la demanda sea de 2 camisas al año por hombre al precio de \$ 100/camisa y que la elasticidad precio sea de 3 para este producto, al subir el precio a \$ 101/camisa (1%), el consumo por hombre al año disminuirá en 3% o sea a 1.94/hombre. Si se tratara de un área en que viven 10 000 consumidores de camisas, el volumen de ventas, que era de \$ 2 millones al año disminuiría a \$ 1 959 400 ($10\ 000 \times 1.94 \times 101$).

Existen algunos servicios "gratuitos", como la educación, la salud pública, carreteras, etc, para los cuales es difícil estimar la demanda, por lo que solo se toman como base ciertos indicadores como ingresos per capita, habitantes/cama de hospital, habitantes/médico, niños/profesor, etc. y se comparan con estos mismos indicadores existentes en otros países.

Una vez conocida la demanda actual, será necesario hacer algunas hipótesis para tratar de cuantificar la demanda futura tomando en cuenta hasta donde sea posible, la idiosincrasia de los consumidores, las elasticidades de los bienes ó servicios considerados, etc; así como también las series históricas con que se cuente relacionadas con los consumidores de estos bienes ó servicios.

TAMAÑO Y LOCALIZACION DEL PROYECTO

Como para cualquier otro aspecto del proyecto, la solución óptima en cuanto a tamaño y ubicación será aquella que conduzca al resultado económico más favorable para el proyecto en conjunto. Este resultado se puede medir por uno ó más de los siguientes coeficientes: utilidades por unidad de capital (Rentabilidad), costo unitario mínimo, cociente de ventas a costos, cuantía total de las utilidades.

Dentro de las relaciones recíprocas generales existentes entre los diferentes aspectos de un proyecto, con respecto al tamaño se pueden considerar las siguientes:

La relación tamaño-mercado, en cuyo análisis adquiere especial interés el dinamismo de la demanda y su distribución geográfica. En segundo lugar se encuentra la relación entre el tamaño y el costo de producción, conocida también por economía de escala. Como los costos de producción, incluido el flete hasta el lugar de uso, serán también función de la localización, considerando la influencia de la distribución geográfica de la demanda, puede apreciarse la especial vinculación entre tamaño y localización.

Las alternativas de tamaño entre las cuales se puede escoger se van reduciendo a medida que se examinan los aspectos relacionados con la ingeniería, las inversiones, la localización, etc. La magnitud del mercado dará la primera orientación, ya que la demanda puede ser tan pequeña que solo justifique la instalación mínima, eliminándose inicialmente cualquiera otra solución. Si el mercado es suficiente para admitir varias alternativas, muchas de ellas pueden quedar eliminadas al decidir la técnica y la localización. Las alternativas que queden después de este primer análisis podrán examinarse conforme a los criterios de evaluación citados. La-

decisión final se podría adoptar en base de estos coeficientes y otros factores no cuantificables.

La decisión sobre el tamaño dependerá del punto de vista con que se aborde el problema. Al empresario privado le interesa, en esencia lograr la máxima rentabilidad ó las utilidades totales que se puedan obtener con el capital propio. El costo unitario le preocupa mas bien en términos de su posición competitiva. Desde el punto de vista de la comunidad en conjunto, interesa fundamentalmente producir el bien ó servicio al menor costo por unidad, y si el precio de venta es el mismo, la escala a la cual se consigue esta es la misma que lleva al máximo el cociente ventas a costos.

El problema de la localización se suele abordar en dos etapas: en la primera se decide la zona general en que se instalará la empresa y en la segunda se elige el punto preciso, considerando ya los problemas de detalle (costos de terrenos, facilidades administrativas, etc.) Hay factores como las estructuras tributarias, concesiones legales, disponibilidad de edificios, etc., que en ciertos casos son de detalle y en otros pueden ser de gran importancia. En general, los problemas decisivos serán los de transporte y de disponibilidad y costo de los insumos.

Habrán casos en que, con el fin de descongestionar ciertas zonas de un país, se adopte una política deliberada para diversificar geográficamente la producción. En igualdad de condiciones y aún con pequeñas desventajas, se promueve la instalación industrial en determinadas zonas, creando al mismo tiempo incentivos tributarios o de otro orden.

La presentación y el estudio del problema se pueden facilitar mucho mediante planos y diagramas. En un plano se pueden colocar por ejemplo, las fuentes de materias primas, los posibles empalmes eléctricos, las fuentes de agua, las zonas de mercado, las distancias por carretera y por ferrocarril, etc.

INGENIERIA DEL PROYECTO

La ingeniería del proyecto se refiere a aquella parte del estudio que se relaciona con su fase técnica, es decir, con la participación de los ingenieros en las etapas del estudio, instalación, puesta en marcha y funcionamiento.

El tipo de problemas que plantea la fase técnica del proyecto en términos generales es:

- i) Ensayos e investigaciones preliminares.- Estos ensayos abarcan — cuestiones de muy variable naturaleza; pruebas de resistencia del terreno para la construcción de edificios, experiencias de laboratorio ó en plantas de ensayo para demostrar la posibilidad de utilizar materias ó procedimientos determinados y las condiciones en que esta utilización sería posible, etc.
- ii) Selección y descripción del proceso de producción.- En muchos casos el proyecto no plantea problemas especiales en cuanto al proceso ó sistema de producción, pero en otros encierra complejidades y alternativas que convendría explicar conjuntamente con las soluciones ofrecidas relacionándolas con las investigaciones previas.
- iii) Selección y especificación de equipos.- Hay que distinguir las dos etapas que implica el proceso de selección, la elección del tipo — de equipo, para especificar las propuestas y selección entre los — distintos equipos dentro del tipo elegido, a fin de decidir entre las propuestas.
- iv) Los edificios industriales y su distribución en el terreno.- Los — lugares de recepción, almacenes, talleres centrales y otras instalaciones, deberán estar emplazadas en buena disposición funcional — respecto a los cuerpos del edificio de la fábrica propiamente tal-

y a los servicios de transporte. La distribución de los edificios industriales en el terreno tendrá una relación muy importante con los problemas de manejo y circulación de materias primas, materiales en proceso de elaboración y productos. Es muy importante prever desde el comienzo las posibles ampliaciones, a fin de mantener la relación armónica inicial.

- v) Distribución de los equipos en los edificios o en otros puntos de la fábrica.- La eficiencia de la operación manufacturera depende en gran medida de la disposición de los equipos, pues ésta redundará en economías de movimiento, tiempo y materiales, y en general en la facilidad dinámica del proceso.
- vi) Proyectos complementarios de ingeniería.- Es muy frecuente que en los proyectos tengan que preverse instalaciones adicionales destinadas a proporcionar servicios necesarios para la producción misma o para la población ocupada en el proyecto. Los ejemplos más claros serían las obras complementarias de agua potable e industrial o destinadas a la evacuación de aguas residuales; a establecer conexiones o plantas de energía eléctrica, gasoductos o empalmes de transportes, a la construcción de campamentos y viviendas, oficinas de administración, edificios para el bienestar de la población, etc.
- vii) Rendimientos.- Decididos el método de fabricación, el tamaño de la planta y la disposición de equipos y edificios, será posible estimar la cuantía de cada uno de los insumos que demandará el proyecto, tanto en el montaje como en el funcionamiento. La estimación de esa cuantía en términos físicos es la hipótesis básica para estimar los costos de operación y el de estos insumos, y también servirá como elemento de comparación para juzgar la eficiencia administrativa y técnica estimada para la empresa ya en funcionamiento.

- viii) Flexibilidad en la capacidad de producción.- Este punto ha sido ya abordado en relación con la distribución de los edificios en el terreno y de los equipos en los edificios. La necesidad de dar flexibilidad a la capacidad de producción se deriva a veces de la naturaleza de la demanda y por otras causas. La adaptación a las variaciones estacionales de la demanda, plantea la necesidad de una flexibilidad desde el punto de vista de lograr producir eficientemente a los distintos ritmos de producción, dada una cierta capacidad.
- ix) Programas de trabajo.- El programa de trabajo establece la ordenación con que se procederá a la instalación y puesta en marcha de la empresa. Su objetivo puede resumirse esencialmente en los siguientes puntos: a) prever una serie de problemas que se presentarán en la etapa de montaje y anticipar posibles soluciones; b) establecer una secuencia de inversiones sobre cuya base se estudiará el financiamiento del proyecto, y c) establecer el plan preliminar de funcionamiento hasta llegar a la capacidad normal.

LAS INVERSIONES EN EL PROYECTO

La decisión de llevar adelante un proyecto, significa asignar a su realización una cantidad de variados recursos que se pueden agrupar en dos grandes tipos: a) los que requieren la instalación del proyecto o sea el montaje y b) los requeridos para la etapa de funcionamiento propiamente dicha.

Los recursos necesarios para la instalación constituyen el capital fijo ó inmovilizado del proyecto, y los que requieren el funcionamiento constituyen el capital de trabajo o circulante.

El activo o acervo fijo comprende el conjunto de bienes que no son motivo de transacciones corrientes por parte de la empresa. Se adquieren una sola vez durante la etapa de instalación del proyecto y se utilizan a lo largo-

de su vida útil. Su valor monetario constituye el capital fijo de la empresa. Se suelen clasificar en tangibles e intangibles los primeros son como maquinaria y equipos con sus costos de montaje, los edificios e instalaciones complementarias, la tierra y los recursos naturales y los segundos pueden ser las patentes, los derechos de autor, los gastos de organización y puesta en marcha.

En general, una parte de las inversiones se debe hacer en moneda extranjera, ya sea por concepto de equipos y otros componentes de la inversión fija o por la necesidad de mantener existencias de bienes importados. El proyecto deberá especificar cuanto habrá que invertir en moneda nacional y cuanto en moneda extranjera, a fin de poder estimar los efectos directos sobre la balanza de pagos.

Los proyectos de propósitos múltiples plantean el problema de establecer que parte de la inversión común se debe considerar necesaria para cada propósito. La forma de solucionar el problema suele tener gran importancia para las decisiones políticas relacionadas con la asignación de los fondos destinados a obras públicas. Si una obra financiada con fondos públicos cumple simultáneamente propósitos de riego y de producción de energía eléctrica, por ejemplo, la manera de prorratear la inversión entre ambos objetivos afectará a la cuantía de los costos fijos de obtención de uno y otro propósito, lo que a su vez puede afectar a los precios que se cobrarían por el agua y por la energía eléctrica.

El problema no ha encontrado solución definitiva aún y los autores que han abordado el tema reconocen en general, que siempre habrá una cuestión de juicio, criterio o circunstancias que no se puede llevar a fórmulas; sin embargo existen varios criterios que pueden considerarse satisfactorios para realizar ese prorrateo.

EL PRESUPUESTO DE INGRESOS Y GASTOS Y LA ORDENACION DE LOS DATOS BASICOS -
PARA LA EVALUACION

El cálculo básico es el de los gastos e ingresos anuales que resultarían de llevar a la realidad el proyecto, datos que se pueden presentar tabulados en forma de una cuenta de dos columnas llamada presupuesto estimativo de ingresos y gastos. A partir de este presupuesto es fácil obtener la cuantía de las utilidades anuales, los costos unitarios, los cocientes ó módulos de ventas a costos y otras cifras o coeficientes significativos. Las informaciones de detalle para estimar cada rubro del presupuesto pueden también resumirse y organizarse como presupuestos parciales de mano de obra, materias primas y otros materiales, energía, etc., lo que facilitará el cotejo de las necesidades del proyecto en cada uno de estos insumos con las fuentes en que pueden obtenerse.

Tanto el presupuesto global anual de ingresos y gastos, como los presupuestos parciales anuales podrán variar a lo largo de la vida útil del proyecto. Las causas principales de variación son: a) las posibles fluctuaciones de precios y b) los distintos porcentajes de la capacidad de producción realmente utilizada.

En resumen, para fines de evaluación cada presupuesto anual tendrá vigencia por un número de años durante el cual se supone que no habrá cambios importantes y muy a menudo se opera simplemente con un solo presupuesto, que se considera representativo de toda la vida útil.

CRITERIOS DE LA EVALUACION DE PROYECTOS

Las diferencias sustantivas entre los criterios de evaluación se refieren a las diferentes maneras de considerar, especificar y medir lo que en cada caso se entiende por recursos empleados y beneficios obtenidos; sin embargo, todo cómputo de evaluación debe abordar los conceptos de valoración, homogeneidad y extensión.

La valoración

Debido a la diferente naturaleza física de los bienes y servicios, la determinación de su cuantía relativa para fines de evaluación se expresa mediante un denominador común, que es la unidad monetaria. La valoración consiste en asignar precios a los bienes y servicios relacionados con un proyecto, los cuales no siempre son los precios de mercado los representativos, sino los que llamaremos precios sociales, que no son más que los precios de mercado corregidos para fines de evaluación.

Homogeneidad

Los cálculos de evaluación abarcan toda la vida útil del proyecto, por lo que habrá que operarse con valores monetarios correspondientes a transacciones realizadas en distintas fechas. Para que tales magnitudes sean comparables, es necesario hacer las homogéneas respecto al tiempo, utilizando para ello equivalencias financieras.

Extensión

La realización de un proyecto provoca una serie de reacciones económicas en cadena hacia atrás ó "hacia el origen" y hacia adelante ó "hacia el des

tino" del mismo. El problema de la extensión consiste en considerar y cuantificar estas repercusiones económicas del proyecto, dentro del criterio de evaluación adoptado.

En este aspecto, los criterios de evaluación se dividen en dos grandes grupos, los que miden los efectos que corresponden sólo al proyecto mismo, que se llaman "efectos directos" y los que tratan de medir también los "efectos indirectos", tanto en cuanto a recursos empleados, como a beneficios resultantes.

TIPOS DE COEFICIENTES DE EVALUACION

Las distintas formas de valorar, la posibilidad de incluir o no los efectos indirectos y la posibilidad de seleccionar y definir de distintas maneras - los patrones de comparación, hacen que existan muchos criterios de evaluación y que se plantee la cuestión de cual de ellos será mas adecuado.

I.- LA EVALUACION PARA EL EMPRESARIO Y LA EVALUACION SOCIAL.-

Una buena parte de las controversias registradas en torno a los criterios - de prioridad surgen indudablemente de la falta de una distinción clara del objetivo de la evaluación ya que depende de la entidad en favor de quien se evalúa, por lo que han surgido confusiones al valerse de criterios adecuados para seleccionar en función del interés individual y tratar de aplicarlos a casos en que hay que hacerlo en función del interés social.

Estas consideraciones permiten establecer la primera gran distinción entre los criterios de evaluación; por un lado, los que son útiles para la comparación entre los proyectos privados y por el otro, aquellos que son aplica-

bles desde un punto de vista social. No hay problemas conceptuales en cuanto a lo que el empresario privado entiende por beneficios, ya que su móvil fundamental es el de las utilidades, sea en términos absolutos o por unidad de capital propio (Rentabilidad). Tampoco hay dudas sobre las formas de medición; en cuanto a valoración le interesan los precios de mercado y en cuanto a extensión sólo los beneficios y costos directos del proyecto. El problema es conceptual y prácticamente mas difícil en el caso de la evaluación social.

Cabe señalar que quienquiera que sea el realizador o promotor de un proyecto, pertenezca al sector público o al privado, deberá afrontar el problema del financiamiento, lo que hace siempre necesaria una evaluación a precios de mercado. Además, aunque se determine la prelación desde el punto de vista social, muchos proyectos se dejarán a la iniciativa privada, y en ese caso habrá que determinar si serán atractivos ó no para el empresario privado y cuales serían los incentivos que podrían despertar su interés.

II.- LOS DISTINTOS CRITERIOS DE EVALUACION SOCIAL.-

La mayor complejidad de la evaluación social explica la diversidad de criterios sugeridos en la práctica ó que sería posible proponer, y a la vez la dificultad para lograr una clasificación satisfactoria de los mismos. Para facilitar un primer esquema conceptual se presentan dos formas de agruparlos:

a) Criterios parciales e integrales.-

La ordenación de los proyectos en una escala de prelación, se puede lograr mediante un coeficiente único de evaluación ó mediante la combinación, ponderada en alguna forma, de varios coeficientes parciales.

Se llaman criterios integrales a aquellos que tratan de ofrecer un patrón único y total de evaluación y parciales o fraccionarios a aquellos que están destinados a combinarse con otros.

Entre los coeficientes parciales de evaluación se pueden citar por ejemplo, la mano de obra ocupada por unidad de capital y el aporte neto a la balanza de pagos por unidad de inversión total o de la componente de la inversión en divisas.

b) La productividad de un recurso o del complejo de insumos.-

Los coeficientes de evaluación se pueden definir aritméticamente como cocientes entre lo que en términos generales se llamarían "ventajas" y "desventajas" del proyecto. Las fórmulas de evaluación miden pues, productividades de algún tipo y se podría hacer una distinción entre aquellos criterios que miden la productividad de un solo factor o recurso económico (por ejemplo, el capital o la mano de obra) y aquellos otros que miden la productividad del conjunto de los insumos requeridos.

Decidida cual es la productividad que el criterio de evaluación desea expresar; cabe aún una extensa gama de variación en cuanto a los valores que se colocarán en el numerador. Así, si se desea medir la productividad del capital, se podrá hacer en términos de valor agregado por unidad de capital, de divisas ahorradas por unidad de capital, de personal ocupado por unidad de capital, etc.

Consideraciones similares pueden hacerse con respecto a la productividad de otros factores singulares ó del complejo de insumos.

LA SELECCION ENTRE LOS CRITERIOS PARA EVALUAR

En términos generales puede afirmarse que si se trata de evaluar con criterio social, lo que mas importa es el incremento del producto nacional que se obtiene por unidad del complejo de recursos que se emplean en el proyecto. Todas las magnitudes se debieran valorar a precios sociales y habría que tomar en cuenta no solo los beneficios y recursos directamente relacionados con el proyecto, sino también los indirectos.

Sin embargo, en muchos casos se prefiere medir la productividad del recurso escaso, usando como denominador en el cociente de evaluación el capital, la mano de obra ó las divisas invertidas; pero esta evaluación puede resultar incompleta, ya que el proceso de producción envuelve la utilización conjunta de los factores que se complementan e integran en la llamada función de producción.

La producción en una faena agrícola podría aumentar porque los obreros -- aprovechan mejor su tiempo, porque se les entrega mejor semilla ó porque se pone a su disposición tractores y otras máquinas. Si se omiten todos -- estos factores y solo se mide la producción por hombre, no será posible establecer si se obtuvo un producto mayor con la misma suma de factores, uno de los cuales rindió más, o gracias al aumento de los recursos empleados.

Se pueden hacer planteamientos similares en cuanto a los beneficios o efectos del proyecto cuantificados en el numerador del cociente, lo que hace -- que se presenten limitaciones prácticas y conceptuales para reunir todos -- estos efectos y sumarlos en unidades homogéneas. De ahí que se propongan -- a veces coeficientes parciales para medir por separado los efectos. A base de ellos se podría obtener una idea de conjunto que permitiera determinar prelación, dando mayor ponderación a aquel factor que se considere -- más importante en un caso dado, aunque esta ponderación podría llegar a -- tener un grado de subjetividad del mismo orden que las apreciaciones indispensables para vencer las limitaciones prácticas en la obtención de los datos necesarios para la evaluación integral.

FACTORES ECONOMICOS Y POLITICOS EN LA EVALUACION

Las consideraciones de naturaleza política, suelen desempeñar un papel decisivo en las prioridades de la inversión. Además, hay muchos proyectos destinados a abastecer servicios que no son materia de mercado y cuya demanda no se expresa en términos monetarios, sino en peticiones o gestiones de los grupos interesados, como los servicios de alcantarillado, el alumbrado público, etc.

Conviene tener presente que en las prioridades de inversión pueden influir planteamientos relacionados con la necesidad de dar mejor cohesión social y administrativa a un país.

De todo lo anterior podría desprenderse que al final de cuentas, no son tan importantes los criterios económicos de evaluación ya que a la postre la evaluación económica está supeditada a un criterio político y por consiguiente no habrá justificación para esforzarse en una evaluación cuidadosa; sin embargo, la conclusión correcta es la inversa. Si por razones de orden político, un proyecto A resulta preferible a otro B siendo que conforme a la evaluación económica B es superior a A, es preciso conocer el precio que se paga por esa decisión política; pero ese precio sólo se puede averiguar calculando los coeficientes económicos de prelación.

Por otra parte, no hay que caer en el extremo de suponer que todos los proyectos estarán sujetos a un análisis de tipo político específico. Dado un cierto marco de política económica y realidad institucional, lo más probable es que la decisión respecto a la mayoría de los proyectos se tome simplemente conforme a un criterio económico de evaluación. La importancia de la evaluación económica es pues indudable.

EL FACTOR TIEMPO EN LA EVALUACION

En las evaluaciones se debe considerar el factor tiempo en el uso de los capitales, en las disponibilidades de los ingresos y en el espaciamiento de los egresos lo cual implica la adopción de una tasa de interés. El problema consiste en hacer homogéneas series de dinero en el tiempo, pues para efectos de comparación económica y evaluación, la suma de los costos y de los ingresos resultantes en la vida de la empresa no se podrá realizar a menos que los componentes se hagan homogéneos. De igual manera se razona para considerar el caso en que los valores anuales de ingresos ó egresos no sean iguales, ya sea por cambio de capacidad, por variaciones de precios, de tipos de cambio y si se desea reducir las cifras a valores anuales uniformes y equivalentes, habrá que realizar cálculos de regularización en el tiempo.

Los métodos de equivalencia mas comunmente usados son el del valor uniforme anual equivalente y el del valor actualizado, los cuales se deducen de las mismas fórmulas, por lo que la utilización de uno ó de otro depende de los datos del problema o de los objetivos perseguidos.

1.- Costo uniforme anual equivalente.--

Los costos totales de un proyecto están constituidos por un desembolso inicial, correspondiente a la inversión en una fecha dada y por una serie de desembolsos que se irán produciendo anualmente, durante todos los años de la vida útil del proyecto y con la siguiente expresión, se puede transformar la suma invertida P en una serie equivalente de valores anuales iguales R en donde ya estan consideradas la depreciación y los intereses.

$$R = P \frac{i (1 + i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Al factor entre paréntesis se le llama "factor de recuperación de capital". Conocida la tasa de interés i y el plazo de duración de la inversión n , el factor de recuperación se puede obtener en tablas financieras.

Ejemplo.— Consideremos dos proyectos A y B cuyas características son las siguientes:

	<u>A</u>	<u>B</u>
Inversión fija	10 000	7 000
Costos de producción (funcionamiento, conservación, impuestos, intereses y arriendos).	3 000	3 500

El factor de recuperación de capital obtenido de las tablas para 10 años y 6% es de 0.13587, por lo que el costo equivalente anual por la inversión fija es:

$$\begin{aligned} \text{Proyecto A} & \quad 10\,000 \times 0.13587 = 1\,359 \\ \text{Proyecto B} & \quad 7\,000 \times 0.13587 = 951 \end{aligned}$$

El costo total anual será:

$$\begin{aligned} \text{Proyecto A} & \quad : 1\,359 + 3\,000 = 4\,359 \\ \text{Proyecto B} & \quad : 951 + 3\,500 = 4\,451 \end{aligned}$$

Si ambos proyectos producen la misma cantidad y calidad de cosas, resultará que el proyecto B es más caro.

Cuando al final de la vida útil se recupera una parte "L" de la inversión fija, la fórmula del costo equivalente anual es:

$$R = (P - L) \times f.r.o. + L \times i$$

2.- Valor actualizado.-

En vez de hacer homogéneos los valores en términos de desembolsos -- anuales, se puede hacer en términos de inversión inicial, reduciendo todos los pagos anuales al equivalente de un solo pago, efectuado junto con la inversión. En este caso las fórmulas descuentan los valores futuros, permitiendo sumar los costos de la inversión con todos los costos anuales. Dada una serie de valores periódicos de n términos y un tipo de interés i, las fórmulas permiten calcular la inversión inicial equivalente. Desde luego, este proceso de actualización es el mismo que se aplica también a los ingresos. Despejando el valor inicial en la fórmula anteriormente vista queda:

$$P = \frac{R}{f.r.o.} = R \times (f.a)$$

O sea que el recíproco del factor de recuperación del capital es el factor de actualización. Esta expresión se utilizará para obtener el valor inicial equivalente de una serie de valores anuales iguales; -- pero si no todos los valores son iguales, se puede aplicar la expresión:

$$P = \frac{R}{(1 + i)^t}$$

En donde R es una cantidad en el año t y P es el valor inicial equivalente de esa cantidad a una tasa de interés i.

Ejemplo.- Supongamos los mismos dos proyectos A y B del ejemplo anterior, pero ahora deseamos actualizar los datos.

El factor de actualización de la serie a 10 años y 6% de interés es -- 7.36, por lo que el valor inicial equivalente de los costos anuales -- es:

Proyecto A: $7.36 \times 3\ 000 = 22\ 080$

Proyecto B: $7.36 \times 3\ 500 = 25\ 760$

Por lo que el costo actualizado total será de:

Proyecto A: $10\ 000 + 22\ 080 = 32\ 080$

Proyecto B: $7\ 000 + 25\ 760 = 32\ 760$

ASIGNACION DE VALORES

Precios de Mercado y Costos Sociales.--

El precio de mercado sería representativo del valor real de los bienes y servicios, si funcionaran libremente las leyes de la oferta y la demanda, en condiciones de competencia perfecta, ocupación plena de todos los recursos y completa movilidad de los factores. Si por interferencias, trabas ó reglamentaciones de cualquier orden no se cumplen estas condiciones, el sistema de precios estará deformado. De ahí que se considere necesario corregir los precios de mercado para obtener el llamado costo social de los factores.

Las modificaciones fundamentales que se han propuesto hacer a los precios de mercado, se podrían agrupar en dos grandes tipos que no se excluyen entre sí. Unas consisten en eliminar de dichos precios las influencias de impuestos y subsidios y las otras en emplear los llamados "costos de oportunidad". El costo de oportunidad de un recurso requerido por un proyecto, es el valor imputable a este recurso, de lo que se dejaría de producir en otra actividad en la que se podría utilizar y de la que se le sustraería para emplearlo en el proyecto.

EFECTOS INDIRECTOS

Cada proyecto establece una cadena de reacciones que tendrá siempre efectos cuantitativos de amplio radio de acción. Si se dispusiera de un cuadro muy detallado de insumo-producto, cabría utilizarlo para estimar las consecuencias finales de la introducción de tal o cual alteración representada por un proyecto dado. Pero en la generalidad de los casos, no se contará con tales cuadros. La alternativa está en realizar algún tipo de estimaciones que aún no siendo perfectas, sean por lo menos mejores que las que se obtienen de considerar sólo los efectos directos.

La cuantía de los efectos indirectos en la evaluación social del proyecto, tanto en cuanto a beneficios, como a recursos empleados, variará según el tipo de proyecto de que se trate. En general, los proyectos destinados a producir servicios básicos para la producción, se justificarán por sus efectos en el resto de la economía, mas bien que por los resultados del proyecto mismo. Consideraciones similares pueden ser también válidas en cuanto al servicio de transportes.

CRITERIOS DEL EMPRESARIO PRIVADO

1.- La Rentabilidad.-

El empresario privado juzga los méritos de un proyecto, esencialmente en términos de las utilidades que produciría y ese es, en consecuencia, el rubro del cual le interesa lograr un máximo. Por otra parte, todos los recursos que pondría en juego para obtener estas utilidades, los reduce al común denominador de unidades de capital, rubro que le interesa reducir al mínimo compatible con los requisitos del proyecto. En este caso se utiliza lo que se llama rentabilidad del proyecto y se suele expresar como el porcentaje que representan las utilidades anuales, respecto al capital empleado para obtenerlas.

Aunque el concepto de rentabilidad es claro, la medición de su coeficiente se presta a ambigüedades derivadas de la distinta manera de definir el capital y las utilidades. Así, en cuanto a capital puede distinguirse por una parte, entre capital fijo y circulante, y por otra, entre capital propio y créditos de diverso tipo. En cuanto a utilidades, el cálculo dará resultados distintos según como se consideren la depreciación y los intereses.

El hecho de que la forma de financiamiento afecte la rentabilidad, es precisamente lo que hace posible emplear la política crediticia como un medio eficaz para hacer atractiva una inversión dada.

El cálculo de la rentabilidad se puede plantear determinando la tasa de interés con la cual se obtiene la equivalencia financiera entre una serie de valores anuales y un capital dado. Los valores anuales que se consideran son las utilidades brutas, es decir, las que se computan sin costos por depreciación y que se les puede llamar también ingresos netos, por ser la diferencia entre los ingresos y costos anuales de producción. A esta tasa de interés se le llama rentabilidad por equivalencia. Su cálculo tiene la ventaja de que elimina algunas de las ambigüedades señaladas y evita la necesidad de adoptar en los costos una tasa convencional de interés por el uso de capital.

Ejemplo.- Supóngase que la inversión inicial en un proyecto de 20 años de vida es 10 000, que los ingresos iguales anuales son 20 000 y que los egresos, excluidos depreciación e intereses son 19 000 todos los años. ¿Cuál es la rentabilidad de la inversión inicial?

Llamando ingresos netos a la diferencia entre ingresos y egresos anuales, su valor sería de 1 000 al año. El problema consiste en determinar la tasa i que hace equivalentes 20 anualidades de 1 000 con una inversión inicial de 10 000.

Aplicando las expresiones de factor de actualización y de recuperación del capital se tiene:

$$f.a. = \frac{10\ 000}{1\ 000} = 10$$

$$f.r.o. = \frac{1\ 000}{10\ 000} = 0.10$$

Para 20 años, el factor de actualización vale 10.594 con $i = 7\%$ y 9.818 con $i = 8\%$, por lo que interpolando llegamos a $i = 7.76\%$ que es la rentabilidad por equivalencia de la inversión.

El cálculo anterior es sencillo, debido a que los valores anuales de ingresos y egresos se suponen iguales. Cuando no lo son, la tasa de interés para la equivalencia se calcula por procedimientos de actualización angular, que consisten en actualizar a distintas tasas de interés, cada uno de los valores anuales obtenidos como diferencia entre los ingresos netos y los intereses correspondientes al capital circulante. Sumados estos valores actualizados, se comparan con la inversión inicial y se determina también por aproximaciones sucesivas e interpolación, la tasa de interés para la cual la suma es exactamente igual a la inversión fija.

2.- La Velocidad de Rotación del Capital.-

Este coeficiente se obtiene como cociente entre el valor bruto anual de la producción de la empresa y el capital. El coeficiente es solo de evaluación parcial, porque al empresario le interesa el máximo de utilidades; pero la velocidad de rotación del capital es un índice significativo, por revelar la cifra de negocios que se puede alcanzar con una inversión dada, que es también el reflejo indirecto de sus posibles utilidades. El valor recíproco de este coeficiente es una de las expresiones cuantitativas empleadas para medir la intensidad de capital de un proyecto.

CRITERIOS SOCIALES DE EVALUACION

1.- La Relación Producto-Capital.-

Así como la rentabilidad mide la productividad del capital en términos -- que interesan principalmente al empresario privado (utilidades), la relación entre el valor agregado al producto nacional y el capital expresa la productividad de este último en un sentido social.

Se llama "valor agregado" a la diferencia entre el valor de venta de la -- producción estimada en el proyecto y las compras que se deben hacer a -- otras empresas para obtener esa producción (materias primas, energía, lubricantes, repuestos, etc). El valor agregado es numéricamente igual a la suma de sueldos, salarios, arriendos, intereses y utilidades de la empresa; con respecto a la depreciación y a los impuestos indirectos, el valor agregado puede ser neto ó bruto y valorado a costo de los factores o a precios de mercado. Es neto si excluye la depreciación y es a costo de factores -- si excluye la tributación indirecta ó los subsidios.

En el cálculo del capital se suelen incluir las inversiones en existencias, que en algunos casos pueden adquirir especial importancia.

La productividad del capital en términos de valor agregado directo no ofrece grandes ventajas como criterio exclusivo de evaluación. Así lo demuestra el caso de los proyectos que producen servicios tales como energía -- eléctrica y transportes, generalmente de bajo valor agregado directo, pero de gran trascendencia indirecta. Si se empleara el criterio directo quedarían descartados de una lista de prelación, siendo que suelen tener alta prioridad. De ahí que tenga importancia considerar la relación producto-capital, teniendo en cuenta los efectos directos e indirectos.

2.- Ocupación por Unidad de Capital.-

Siempre será interesante consignar en el proyecto las repercusiones que este tendrá en cuanto a ocupación, principalmente si existen problemas especiales de desocupación. La cantidad de personal que se logre ocupar por unidad de capital, puede pasar a ser un coeficiente de alta ponderación.

Este coeficiente de ocupación, como podría designársele, se obtendrá dividiendo el número de personas empleadas por el proyecto entre el capital total que el mismo requiere. La valoración social del capital invertido será aquí especialmente interesante, pues si hay desocupación disminuirá el denominador sin afectar al numerador, mejorando mucho el coeficiente. La valoración a precios de mercado será también indispensable, para abordar el problema del financiamiento.

Conviene recordar a este respecto, los distintos tipos de mano de obra que los proyectos requieren, pues en general puede ser no calificada la disponible, de ahí que pueda ser útil computar por unidad de capital, los coeficientes de ocupación de mano de obra no calificada.

La ocupación de personal en un determinado sector, contribuirá a crear nuevas fuentes de trabajo. En una situación de desocupación, esos efectos indirectos pueden ser muy importantes por lo que convendrá estimarlos aunque su medición envuelva dificultades prácticas y conceptuales.

3.- El Factor Divisas.-

Un proyecto puede ser consumidor o productor neto de divisas, según que el balance final de divisas insumidas y divisas liberadas por sustitución de importaciones ó incremento en las exportaciones, de un saldo negativo ó positivo. Se llama efecto positivo de divisas a la cuantía de moneda ex-

tranjera que el proyecto permite liberar por sustitución de importaciones o por mayores exportaciones. El efecto negativo del proyecto estará representado por la cuantía de las divisas requeridas para su instalación, operación y mantenimiento. El efecto neto será la diferencia entre los efectos positivo y negativo.

Un coeficiente sencillo para evaluar el proyecto en cuanto a divisas se obtendría dividiendo el efecto neto anual en divisas entre la componente de divisas de la inversión que requiere el proyecto, o sea, que es una especie de relación producto-capital, pero referida sólo a la moneda extranjera que interese.

4.- Criterio Beneficio-Costo

Al comentar el criterio de rentabilidad del capital, se vió que este se aplicaba porque da una mayor importancia a lo que le interesa al empresario: las utilidades por unidad de capital empleado en la empresa; sin embargo, desde un punto de vista social, puede interesar mas bien lograr el máximo de la producción total (no sólo de las utilidades), con el mínimo del complejo de recursos empleados (no sólo del capital). A este coeficiente se le llama beneficios-costos y se expresa por el cociente obtenido al dividir el valor de la producción entre los costos totales involucrados.

A continuación se presenta un ejemplo tomando en cuenta sólo los efectos directos y valorando a precios de mercado.

	Proy. A	Proy. B
Inversión Total Fija	2 000	2 000
Valor de la Producción		
Anual (ingresos)	1 000	1 250

	Proy. A	Proy. B
Gastos de Producción Anual (funcionamiento, conservación, impuestos, seguros)	550	800
Costo Equivalente Anual de La Inversión Fija (Al 6% de interes)	271	271
Costo Equivalente Anual Total	821	1 071
Beneficios-Costos	1.22	1.17

El cálculo de este coeficiente basándose solo en los beneficios y costos directos del proyecto y valorados a precios de mercado, no conducirá a una evaluación que refleje en forma adecuada la mejor conveniencia social.

Si pensamos en proyectos con elevado cociente de beneficios-costos directos que a simple vista revelan no tener prioridad social, como los correspondientes a la elaboración de artículos suntuarios en un país con limitaciones de capital, puede tener excelentes utilidades sin que sea beneficioso para la comunidad.

En cambio proyectos como caminos, agua potable, alcantarillado, etc., suelen acusar una baja tasa de beneficios-costos directos; sin embargo, los beneficios mas importantes son indirectos, debido a que facilitan la producción de otros sectores de la economía.

En este último tipo de proyectos se acostumbra trabajar con los beneficios directos e indirectos provocados cada año de la vida útil y con los costos sociales anuales involucrados, con la cual se obtiene un cociente de beneficios-costos al dividir la suma actualizada de los beneficios entre la su

ma actualizada de los costos, cociente que debe ser mayor que la unidad - para considerar atractiva la inversión.

En ocasiones se acostumbra definir otro índice no en forma de cociente sino de diferencia entre la suma de beneficios actualizados y la suma de costos actualizados a la que se le llama beneficio neto actualizado y que deberá ser positiva para que la inversión sea atractiva.

En todos estos cálculos, interviene una tasa de actualización que desde el punto de vista social difiere de la tasa de interés (valor del dinero), ya que aquella se establece de manera de asegurar que las inversiones consideradas no tengan un mejor empleo en otro sector de la economía.

Es necesario considerar, que la tasa de actualización constituye un medio para tener en cuenta el deseo del país de obtener resultados rápidos, o al contrario, de sacrificar los resultados obtenidos en los primeros años para beneficiar a las generaciones futuras. Una tasa de actualización elevada favorece a los proyectos que generan beneficios a corto plazo, mientras que una tasa baja conduce a aceptar proyectos con beneficios importantes a largo plazo.

Otro indicador llamado coeficiente de rentabilidad inmediato se obtiene — dividiendo los beneficios en el primer año de operación del proyecto, entre la suma de costos actualizados. La importancia de este indicador es — que permite determinar el año óptimo de puesta en servicio de un proyecto, siendo el año en el cual el coeficiente de rentabilidad inmediata es igual a la tasa de actualización, siempre y cuando la serie de beneficios sea — creciente con el tiempo. Para evitar el tener que seleccionar una tasa de actualización en ocasiones se suele utilizar la llamada tasa interna de — rendimiento, que no es mas que la tasa a la que hay que actualizar los beneficios y los costos, de manera que su suma sea igual considerando el horizonte económico o la vida útil del proyecto. Esta tasa se obtiene por — aproximaciones sucesivas y deberá ser mayor a la de actualización para que el proyecto sea atractivo.

Ejemplo.- Supongamos un proyecto cuya vida útil sea de 5 años a partir de su puesta en operación y que la inversión inicial es de 10 000 realizada en un año. Los beneficios anuales directos e indirectos y los costos anuales correspondientes a operación, conservación, etc. se muestran en el siguiente cuadro.

<u>Año</u>	<u>Gastos</u>	<u>Beneficios</u>
0	-	-
1	10 000	-
2	500	1 000
3	550	1 800
4	590	2 700
5	620	6 000
6	650	8 500

Considerando una tasa de actualización del 12% y actualizando al año 0 los beneficios y los costos mediante la expresión:

$$b_0 = \frac{b_n}{(1+i)^n}$$

en donde *i* es la tasa de actualización.

<u>Año</u>	<u>Factor de Actualización</u>	<u>Gastos Actualizados</u>	<u>Beneficios Actualizados</u>
0	1	-	-
1	0.89	8 900	-
2	0.79	395	790
3	0.71	390	1 278
4	0.64	377	1 728
5	0.57	353	3 420
6	0.51	332	4 335
S U M A S		10 747	11 551

Relación beneficios-costos $11\ 551/10\ 747 = 1.07$ (mayor que 1)

Beneficio neto actualizado $11\ 551 - 10\ 747 = 804$ (mayor que 0)

Coefficiente de rentabilidad inmediata $= \frac{1\ 000}{10\ 747} = 0.093$ (9.3%)

Para obtener la tasa interna de rendimiento se repetiría el mismo cálculo anterior variando la tasa de actualización, hasta obtener la misma suma de beneficios actualizados y costos actualizados.

LOS CRITERIOS MIXTOS

Los criterios mixtos consisten en evaluar los proyectos utilizando diversos criterios parciales de los ya mencionados y después en función de las importancias relativas de estos criterios ponderarlos cualitativamente o si es posible cuantitativamente, ya sea para llegar a un coeficiente único que permita establecer las prelacións, o para establecerlas a partir de consideraciones subjetivas. La principal dificultad en este tipo de criterios consiste en determinar la forma de combinar y ponderar los criterios parciales de evaluación, para llegar a un índice final que permita establecer las ordenes relativas de prioridad de diferentes proyectos.

ORDENES DE PRELACION

Ya sea a partir de los criterios mixtos, o utilizando el coeficiente de evaluación mas conveniente según el caso, se establecen los órdenes de prelación para indicar los proyectos desde el más ventajoso hasta el menos ventajoso. Este orden de prioridad permitirá seleccionar los proyectos a realizar, ya que como los recursos no son ilimitados, no se podrán realizar todos los proyectos cuyo índice de evaluación indique que es bueno, sino solamente aquellos que tengan la mayor prioridad después de considerar también los aspectos sociales y políticos.

La programación matemática puede ser de gran ayuda para determinar la combinación óptima de proyectos a realizar, teniendo en cuenta las restricciones de recursos que puedan existir y algunas otras limitaciones en cuanto a divisas, mano de obra desocupada, etc, de manera de lograr el máximo del objetivo buscado que puede ser el beneficio neto actualizado, o las utilidades, etc.

FINANCIAMIENTO Y ORGANIZACION

Para llevar a cabo un proyecto, es necesario establecer como será financiado y como se estructurará la entidad responsable de su ejecución. Es preciso concebir una empresa determinada que cuente efectiva ó virtualmente con los fondos de financiamiento, realice las obras proyectadas y dirija las faenas de producción.

La experiencia muestra que son pocos todos los esfuerzos que se hagan por prever y resolver los problemas que se pudieran presentar en este período de transición. La nueva organización tendrá que hacer frente a cuestiones de orden legal, contratar personal técnico y administrativo, redactar estatutos y terminar los estudios para llegar a la etapa de proyecto final.

Las cuestiones relativas al financiamiento, estan muy relacionadas con las de la organización de la empresa. Si por ejemplo, se decide que el capital sea aportado en forma de acciones, ello implica tomar una decisión no solo en cuanto a la forma de financiamiento, sino también en lo que se refiere a la estructura social de la empresa.

En términos generales, no se justificará realizar en forma minuciosa estudios relativos a la organización y financiamiento, si previamente no se ha resuelto llevar adelante la iniciativa. Sin embargo, la calificación de prelación de un proyecto y la decisión de realizarlo pueden a veces estar relacionadas con determinadas cuestiones legales, financieras o administrativas. Tal sería el caso de los proyectos que necesiten expropiaciones, -

el de los que suponen problemas especiales vinculados con la localización ó con el uso de ciertas patentes, etc.

Por otra parte, las limitaciones financieras pueden constituir un factor - importante, en la determinación de otros aspectos del proyecto como financiamiento se deberá considerar simultaneamente con el resto del proyecto y no después.

Los recursos para el financiamiento de proyectos, provienen de dos fuentes generales: i) Las utilidades no distribuidas, las reservas de depreciación o de otro tipo, a las que se engloba bajo el nombre de "fuentes internas" - de las empresas y ii) El mercado de capitales y los bancos que constituyen las llamadas "fuentes externas". Ambas se relacionan entre si, pues cuando las utilidades no distribuidas y las reservas de depreciación no se - - reinvierten en la propia empresa, pueden afluir al mercado de capitales y - establecer una demanda de otros títulos y valores. Las fuentes internas - de ciertas empresas, pasan de esta manera a ser fuentes externas de otras.

Los proyectos del sector público se financiarán con los saldos positivos - de la cuenta corriente de este sector y con los préstamos obtenidos del - sector privado local o de fuentes externas. Como el superávit provendrá - esencialmente de impuestos pagados por la comunidad, la formación de este - ahorro se habrá logrado principalmente a través del sistema impositivo. -- Naturalmente, la asignación de fondos para inversiones específicas será -- resuelta por decisión gubernamental, y dichas inversiones se podrán reali- zar a través de entidades fiscales. Así pues, el problema de obtener y -- asignar recursos para proyectos del sector público, está estrechamente li- gado con la política fiscal y con las finalidades del programa.

RESUMEN Y PRESENTACION DEL PROYECTO

Los funcionarios ejecutivos de alta jerarquía, a los que les corresponda tomar decisiones u opinar sobre proyectos tendrá en general poco tiempo para revisar todo el material que se somete a su consideración, y algunas veces no podrán apreciarse los detalles técnicos de los estudios. Conviene pues, resumir el proyecto para facilitar la formación de un juicio global acerca de él, sin necesidad de estudiarlo en todas sus partes.

La presentación de las materias que componen un proyecto, se puede hacer de varias maneras igualmente satisfactorias. El orden y la forma de presentación dependerán de la preferencia personal del proyectista, de la índole del proyecto, etc., sin embargo una forma aceptable puede ser siguiendo el orden marcado en este trabajo, empezando por un resumen de todos los capítulos y procurando no recargar el texto con todos los detalles, razonamientos, estadísticas, análisis y estudios parciales que pueden haber sido necesarios para llegar a determinadas conclusiones, sino distinguir las materias que son imprescindibles en cuanto a contenido y coherencia, de aquellas otras que son accesorias, reservando estas últimas para anexos o apéndices.

Ejemplos.-

1.- Obtener las equivalencias financieras de \$ 10 000 en el año 0 para las siguientes cuatro modalidades de pago, considerando un interés del 6% anual, y un plazo de 10 años para la amortización.

a) Si se pagan los intereses al final de cada año y se amortizan los \$ 10 000 de una sola vez al final de los 10 años.

En cada uno de los primeros 9 años, se pagarán únicamente 600 correspondientes a los intereses anuales, o sea 5 400 y en el último

año se pagaran 10 600, correspondientes a la amortización y a los intereses del último año, por lo que los \$ 10 000 del año 0 son equivalentes a \$ 16 000 pagados en la forma expuesta.

- b) Amortizando \$ 1 000 cada año, y pagando el interés por el saldo del capital no amortizado

<u>Fin del año</u>	<u>Adeudo</u>	<u>Amortización</u>	<u>Intereses</u>	<u>Pago anual total</u>
0	10 000	-	-	-
1	9 000	1 000	600	1 600
2	8 000	1 000	540	1 540
3	7 000	1 000	480	1 480
4	6 000	1 000	420	1 420
5	5 000	1 000	360	1 360
6	4 000	1 000	300	1 300
7	3 000	1 000	240	1 240
8	2 000	1 000	180	1 180
9	1 000	1 000	120	1 120
10	0	1 000	60	1 060
T o t a l		10 000	3 300	13 300

o sea, que los \$ 10 000 iniciales son equivalentes a los \$13 300 pagados en la forma indicada.

- c) Pagando una cuota anual por intereses y amortizaciones, de tal manera que la suma de ambas sea igual cada año.

Para esto, calculamos el factor de recuperación de capital, para $i=6\%$ y $n=10$ años y se obtiene $f.r.o.=0.135868$, por lo que las cuotas anuales equivalentes serán de 1358.68. Como el primer año se pagarán de intereses \$ 600, la amortización será de 758.68, por lo que el saldo para el siguiente año será de 9 241.32, al cual se le-

Obtendrá el 6% para determinar los intereses en el segundo año y — por diferencia obtener la cuota de amortización.

En el siguiente cuadro se puede observar, que la cuota de amortización es cada año mas alta, mientras que la de intereses cada año — mas baja.

<u>Fin del Año</u>	<u>Adeudo</u>	<u>Amortización</u>	<u>Inteseses</u>	<u>Cuota Anual Total</u>
0	10 000	-	-	-
1	9 241.32	758.68	600.00	1 358.68
2	8 437.12	804.20	554.48	1 358.68
3	7 584.67	852.45	506.23	1 358.68
4	6 681.07	903.60	455.08	1 358.68
5	5 723.25	957.82	400.86	1 358.68
6	4 707.98	1 015.28	343.40	1 358.68
7	3 631.77	1 076.20	282.48	1 358.68
8	2 491.00	1 140.77	217.91	1 358.68
9	1 281.78	1 209.22	149.46	1 358.68
10	-	1 281.78	76.90	1 358.68
<hr/>				
T o t a l		10 000.00	3 586.80	13 586.80

o sea, que los \$ 10 000 iniciales son equivalentes a \$ 13 586.80 pagados en la forma indicada.

Se puede observar que esta cantidad \$ 13 586.80 es bastante parecida a la del caso b) \$ 13 300; sin embargo para tasas de interés mas altas y mayor plazo, la diferencia entre los dos valores tiende a crecer.

- d) Si se adopta una forma de pago, sin abonos intermedios, pagando al final de los 10 años de una sola vez el capital y los intereses compuestos se tendría:

$$C = 10\ 000 (1+i)^n = 10\ 000 (1.06)^{10} = 17\ 908.49$$

Estos \$ 17 908.49 pagados al final de los 10 años, son equivalentes a los \$ 10 000.00 iniciales.

Se puede deducir de lo anterior, que se pueden plantear infinitas combinaciones de amortización, que darán otras tantas sumas diferentes, todas ellas financieramente equivalentes, dados los plazos y la tasa de interés.

- 2.- Para las mismas cuatro consideraciones del ejemplo anterior, obtener las equivalencias financieras de los \$ 10 000, pero considerando -- ahora $i=10\%$ y $n=8$ años.
- 3.- Si para amortizar una inversión, se van a pagar 6 cuotas anuales -- iguales con valor de \$2 000.00 cada una, determinar el valor de la inversión inicial y lo correspondiente a pago de amortización e intereses en cada año, considerando una tasa de interés del 5%

El factor de actualización para 6 años y 5% de interés resulta ser - 5.07462, por lo que la inversión inicial equivalente es:

$$I = 5.07462 \times 2\ 000 = \$ 10\ 151.38$$

Los intereses en el primer año = $0.05 \times 10\ 151.38 = 507.57$ y la amortización en el primer año = $2\ 000 - 507.46 = 1\ 492.43$ y el saldo para el siguiente año = $10\ 149.24 - 1\ 492.54 = 8\ 658.95$.

El cuadro completo es el siguiente:

Fin del Año	Saldo	Amortización	Intereses	Cuota Anual
0	10 151.38	-	-	-
1	8 658.95	1 492.43	507.57	2 000.00
2	7 091.90	1 567.05	432.95	2 000.00
3	5 446.50	1 645.40	354.60	2 000.00
4	3 718.83	1 727.67	272.33	2 000.00
5	1 904.77	1 814.06	185.94	2 000.00
6		1 904.77	95.23	2 000.00
T o t a l		10 151.38	1 848.62	12 000.00

- 4.- Si ahora se tuvieran 5 cuotas anuales iguales con valor de \$ 3 200.00 y considerando un interés del 9%, cual sería la inversión inicial -- equivalente.
- 5.- Supóngase que en un proyecto se requieren \$ 1 600 millones en inversiones fijas, las cuales se realizarán de acuerdo con los programas -- de la siguiente manera:

Año	1	25 %
Año	2	50 %
Año	3	20 %
Año	4	5 %

Para tal fin, en el primer año de instalación se obtendrá un crédito por \$ 1 000 millones, para financiar el equipo importado, al 6% de -- interés anual sobre saldos insolutos y amortizable en 10 partes igua -- les, en otros tantos años a partir del segundo año del período de -- instalación. El resto de la inversión correspondiente a terrenos, -- obras civiles, instalaciones y equipos civiles, se financiará con -- capital propio.

A los aportes de capital propio se les imputará un 4% anual no acumu -- lable, durante el período de instalación.

Si las inversiones a base de capital extranjero y nacional son a --
igual ritmo, determinar el valor del capital fijo del proyecto, al --
comienzo del 5^a año.

Calendario de Inversiones

Año	Componente Extranjera	Componente Nacional	T o t a l
1	250 000 000	150 000 000	400 000 000
2	500 000 000	300 000 000	800 000 000
3	200 000 000	120 000 000	320 000 000
4	50 000 000	30 000 000	80 000 000
Totales	1 000 000 000	600 000 000	1 600 000 000

Amortización e Intereses de la Deuda

Año	Deuda	Amortización	Intereses	T o t a l
1	1 000 000 000	-	60 000 000	60 000 000
2	1 000 000 000	100 000 000	60 000 000	160 000 000
3	900 000 000	100 000 000	54 000 000	154 000 000
4	800 000 000	100 000 000	48 000 000	148 000 000
Total Intereses			222 000 000	

Aportación de Capital Propio

Año	Inversión	Amortización e Intereses de la deuda	Subtotal	Intereses Imputables al Capital
1	150 000 000	60 000 000	210 000 000	33 600 000 (16%)
2	300 000 000	160 000 000	460 000 000	55 200 000 (12%)
3	120 000 000	154 000 000	274 000 000	21 920 000 (8%)
4	30 000 000	148 000 000	178 000 000	7 120 000 (4%)
Total Intereses Imputados				117 840 000

Capital fijo al comienzo del 5^a año.

$$1\ 600\ 000\ 000 + 222\ 000\ 000 + 117\ 840\ 000 = 1\ 939\ 840\ 000$$

- 6.- Calcular el capital fijo del proyecto del ejemplo anterior al comienzo del 5^a año, para los dos casos siguientes:
- a) Sin considerar intereses sobre las cuotas de amortización y
 - b) Considerando que los pagos de amortización e intereses de la deuda se realizan al término de los períodos contables.
- 7.- Determinar la inversión fija al año de puesta en marcha del proyecto, así como el valor del capital circulante del mismo, si se cuenta con los siguientes datos:

Trimestre	Equipo, edificio e instalaciones	Pagos Extraordinarios a Personal	Costos Organiz.	Ing. y Admón.	Gastos de puesta en marcha
1	90	—	—	10	—
2	100	—	—	—	—
3	100	—	—	—	—
4	90	—	—	—	—
5	100	—	—	30	—
6	—	—	—	30	—
7	100	10	10	—	—
8	—	10	10	10	80

- ii) A las inversiones se les imputa un interés del 2% trimestral no acumulable.
- iii) La composición de costos por unidad producida (en pesos) es la siguiente:

Materia prima	10
Materiales	2
Gastos varios	10
Sueldos y salarios	8
Amortización	2
Intereses	1
- iv) La duración del proceso de elaboración es de 3 meses.
- v) La capacidad de producción diaria es de 250 unidades.
- vi) La existencia de materiales y materia prima en depósito deberá ser igual a la necesaria para la producción de 2 meses.
- vii) El plazo de venta es de 30 días.

viii) El plazo de compra de materiales es de 15 días.

Capital fijo a la puesta en marcha

Trimestre	Inversión	Intereses	T o t a l
1	100	16 (16%)	116
2	100	14 (14%)	114
3	100	12 (12%)	112
4	90	9 (10%)	99
5	130	10.4 (8%)	140.4
6	30	1.8 (6%)	31.8
7	120	4.8 (4%)	124.8
8	110	2.2 (2%)	112.2

Capital Fijo

\$ 850.20 Millones

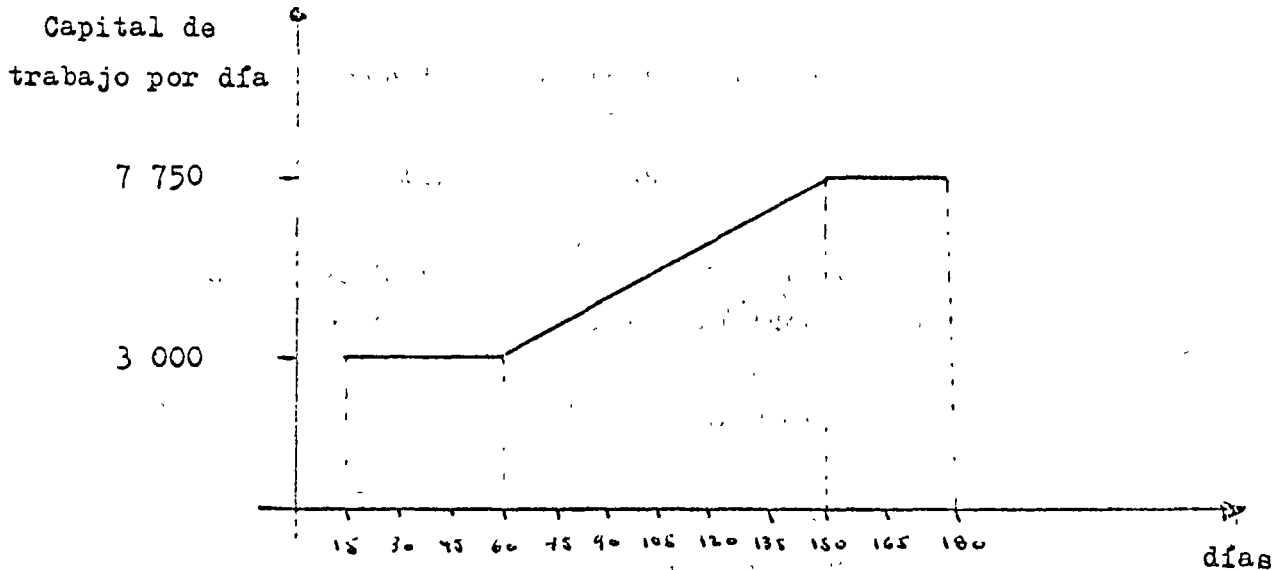
Cálculo del capital circulante

El capital circulante lo definiremos como si fuera inventario.

Materia prima y materiales $(10+2) \times 250$ unidades/día = \$ 3 000/día.

Los gastos de producción, sin considerar la amortización son:

$$(10 + 2 + 10 + 8 + 1) \times 250 \text{ unidades/día} = \$7 750/\text{día}.$$

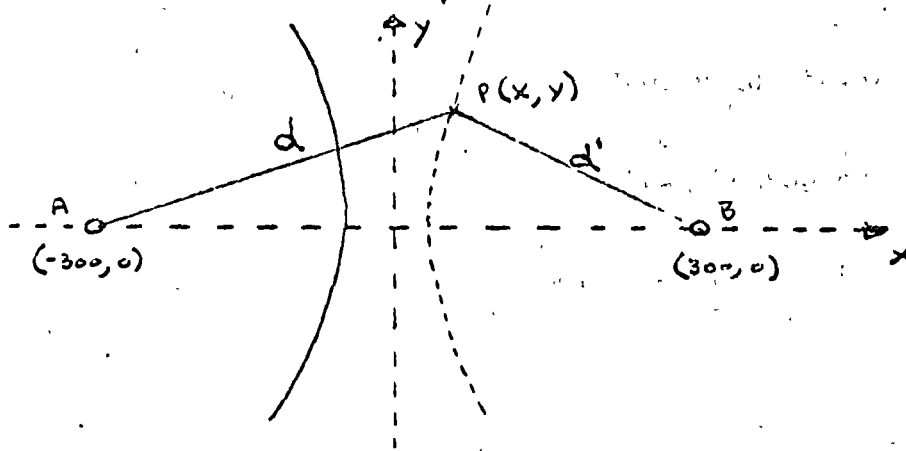


El capital circulante, será el área bajo la curva.

$$45 \times 3\,000 + (3\,000 + 7\,750) \times 90/2 + 7\,750 \times 30 = \\ = 135\,000 + 483\,750 + 232\,500 = \$ 851\,250$$

8.- Repetir el cálculo anterior; pero considerando ahora un interés de --
1.5% trimestral acumulable y un período de elaboración de 2 meses.

9.- La distancia entre dos poblaciones es de 600 Km., en cada una de ellas
existe un ingenio que produce azúcar de remolacha. El costo de pro- --
ducción en el primer ingenio es de \$ 4 840/Ton. y en el segundo -- -- --
\$ 4 688/Ton. Determinar el área de mercado de cada proyecto, suponién-
do un flete uniforme de \$ 1.00/Ton.-Km.



El precio por tonelada de azúcar de remolacha en el punto P sería de:

$$\text{Llevada del punto A: } 4\,840 + d$$

$$\text{Llevada del punto B: } 4\,688 + d'$$

La condición para que P sea un punto de la frontera de las áreas de --
mercado de los dos proyectos, es que los precios en ese punto sean --
iguales, ya sea llevada desde el punto A o desde el punto B.

$$4\ 840 + \sqrt{(300+x)^2 + Y^2} = 4\ 688 + \sqrt{(300-x)^2 + Y^2}$$
$$\sqrt{(300+x)^2 + Y^2} = \sqrt{(300-x)^2 + Y^2} - 152$$

Elevado al cuadrado

$$(300+x)^2 + Y^2 = (300-x)^2 + Y^2 - 304 \sqrt{(300-x)^2 + Y^2} + 23\ 104$$
$$90\ 000 + 600x + x^2 = 90\ 000 - 600x + x^2 - 304 \sqrt{(300-x)^2 + Y^2} + 23\ 104$$
$$1\ 200x - 23\ 104 = 304 \sqrt{(300-x)^2 + Y^2}$$

Elevado al cuadrado nuevamente

$$1\ 440\ 000x^2 - 55\ 449\ 600x + 533\ 794\ 816 = 92\ 416 (90\ 000 - 600x + x^2) + Y^2$$
$$1\ 440\ 000x^2 - 55\ 449\ 600x + 533\ 794\ 816 = 92\ 416x^2 - 55\ 449\ 600x + 8\ 317\ 440\ 000 +$$
$$+ 92\ 416 Y^2$$
$$1\ 347\ 584x^2 - 92\ 416 Y^2 = 7783\ 645\ 184$$

Finalmente:

$$\frac{x^2}{5\ 776} - \frac{Y^2}{84\ 224} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola; aunque solo la rama cercana al - -
punto A es la que tiene sentido.

10.- Determinar el área de los proyectos del ejemplo anterior, pero ahora considerando tarifas diferenciales con las distancias del siguiente tipo:

<u>Distancia</u>	<u>Costo por toneladas (\$)</u>
100	88.00 /
200	122.00
300	159.00
400	184.00
500	210.00
600	231.00
700	247.00
800	263.00
900	280.00
1 000	295.00
1 100	312.00
1 200	328.00
1 300	344.00
1 400	353.00
1 500	366.00
1 600	379.00
1 700	392.00
1 800	405.00
1 900	418.00
2 000	431.00

Para kilometrajes intermedios, se interpola linealmente entre los ex tremos inferior y superior, así por ejemplo para 420 Km., el costo - por tonelada sería $184 + 0.20 (210-184)=184+5.2=189.2$

Sugestión.- Los puntos de la frontera deberán cumplir con:

$$4\ 840 + f_a = 4\ 688 + f_b$$

o sea: $f_b - f_a = 152$

Se puede suponer el f_a y obtener el f_b . Realizando esta operación - varias veces pueden quedar delimitadas en forma aproximada las áreas de mercado de cada proyecto.

11.- Contando con los siguientes datos, determinar el coeficiente de elasticidad-ingreso del consumo de cemento.

<u>Concepto</u>	<u>1962</u>	<u>1967</u>
Ingreso Nacional (a precios constantes de 1950)	\$ 62 353 Millones	\$ 63 227 Millones
Población	16 519 120 Hab.	18 575 527 Hab.
Importación de cemento	435 343 Ton.	60 000 Ton.
Exportación de cemento	---	---
Existencias al comienzo del año	---	5 000 Ton.
Existencias al final del año	1 000 Ton.	705 Ton.
Producción de cemento	1 251 770 Ton.	1 659 321 Ton.

Consumos globales reales:

$$Q_{1962} = 1\,251\,770 + 435\,343 - 000 = 1\,686\,113$$

$$Q_{1967} = 1\,659\,321 + 60\,000 + 5\,000 - 705 = 1\,723\,616$$

Consumo per cápita:

$$q_{1962} = \frac{1\,686\,113}{16\,519\,120} = 0.102 \text{ Ton/Hab.}$$

$$q_{1967} = \frac{1\,723\,616}{18\,575\,527} = 0.093 \text{ Ton/Hab.}$$

Ingreso per cápita:

$$y_{1962} = \frac{62\,353\,000\,000}{16\,519\,120} = \$ 3\,780/\text{Hab.}$$

$$y_{1967} = \frac{63\,227\,000\,000}{18\,575\,527} = \$ 3\,400/\text{Hab.}$$

Tasas de crecimiento:

$$\gamma_q = \frac{\Delta q}{q} = \frac{0.093 - 0.102}{0.102} = - 0.09$$

$$\gamma_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{3\,400 - 3\,780}{3\,780} = - 0.10$$

Entonces

$$\epsilon_y(q) = \frac{-0.09}{-0.10} = + 0.9$$

- 12.- Con los datos del ejemplo anterior, y considerando que en 1973 la población será de 23 000 000 habitantes y el ingreso per cápita será de \$ 4 000/Hab., determinar el posible consumo global de cemento.

Para el período de 1967 a 1973, las tasas de crecimiento son:

$$\gamma_y = \frac{4\,000 - 3\,400}{3\,400} = \frac{600}{3\,400} = 0.176$$

Por lo tanto:

$$\gamma_q = \epsilon_y(q) \times \gamma_y = 0.9 \times 0.176 = 0.158$$

Por lo que el consumo per cápita de cemento en 1973 será de:

$$q_{1973} = 1.158 \times 0.093 = 0.108 \text{ Ton/Hab.}$$

y el consumo global real en ese año será de:

$$Q_{1973} = 23\,000\,000 \text{ hab} \times 0.108 \text{ ton/hab} = 2\,484\,000 \text{ ton.}$$

13.- Consideremos dos ciudades A y B, las cuales estan ligadas por un camino pavimentado de 100 Km de longitud, en el cual los autom6viles - circulan a una velocidad media de 70 K/Hr., los autobuses a 65 K/Hr. y los camiones a 60 K/Hr. El tr4nsito actual es de 2 500 veh6culos- por d4a, de los cuales el 50% corresponde a autom6viles, el 15% a - autobuses y el 35% restante a camiones.

Se pretende estudiar un proyecto carretero entre los mismos puntos - A y B con mejores especificaciones y m4s corto, con objeto de disminuir los costos de transporte. De acuerdo al proyecto, los autom6vi les podr4n circular por este camino a una velocidad media de 90 K/Hr., los autobuses a 85 K/Hr. y los camiones a 70 K/Hr. La longitud de - este camino ser4 de 70 Km y se espera que aproximadamente el 40% del tr4nsito se podr4 desviar del camino antiguo al propuesto (dato obtenido con ayuda de estudios de origen y destino)

El tr4nsito en el camino actual esta creciendo a una tasa del 8% - - anual y se espera que se mantenga hasta el primer a4o de operaci6n - de la obra, a partir del cual se esperan incrementos del 10%, 12%, - 13%, 11%, 9% hasta volverse a estabilizar a 8% anual.

El costo horario por veh6culo y operadores se ha estimado en \$ 6.15- para autom6viles, \$ 32.97 para autobuses y \$ 32.97 para camiones y - el costo de tracci6n por veh6culo-kil6metro se ha estimado en \$ 0.30 para autom6viles, \$ 0.54 para autobuses y \$ 0.73 para camiones.

Los costos considerados son los siguientes:

Inversi6n	\$	1 000 000/Km. a realizar en dos - a4os, en el primer a4o 40% y en el segundo 60%.
Conservaci6n	\$	20 000/Km/a4o
Reconstrucci6n al a4o 9		90 000/Km.
Reconstrucci6n al a4o 16		150 000/Km.

Obtener la relación beneficios-costos del proyecto, considerando como ventajas los ahorros en tiempo de recorrido y los ahorros en tracción por menor longitud que tendrán los usuarios durante un horizonte económico de 20 años de operación y considerando una tasa de actualización del 12% anual.

Cálculo del ahorro unitario

	Automóviles	Autobuses	Camiones
Tiempo de recorrido			
Camino actual	1.43 Hs.	1.54 Hs.	1.67 Hs.
Camino propuesto	<u>0.78</u>	<u>0.82</u>	<u>1.00</u>
Ahorro	0.65	0.72	0.67
Longitud			
Camino actual	100 Km.	100 Km.	100 Km.
Camino propuesto	<u>70</u>	<u>70</u>	<u>70</u>
Ahorro	30	30	30
Costos			
Horario por vehículo y operadores	6.15	32.97	32.97
De tracción por vehículo-kilómetro	0.30	0.54	0.73
Composición del tránsito	0.50	0.15	0.35

Ahorro unitario anual por tiempo

Automóviles	$0.65 \times 6.15 \times 0.50 \times 365 =$	\$	729.55
Autobuses	$0.72 \times 32.97 \times 0.15 \times 365 =$		1 295.75
Camiones	$0.67 \times 32.97 \times 0.35 \times 365 =$		2 821.45
	Subtotal		<u>4 846.75</u>

Ahorro unitario anual por costos de tracción

Automóviles	$30 \times 0.30 \times 0.50 \times 365 =$	\$	1 642.50
Autobuses	$30 \times 0.54 \times 0.15 \times 365 =$		886.95
Camiones	$30 \times 0.73 \times 0.35 \times 365 =$		2 797.80
	Subtotal		<u>5 327.25</u>

Ahorro unitario anual \$ 10 174.00

Proyección del Tránsito y Beneficios
(en miles de pesos)

<u>Año</u>	<u>Factor</u>	<u>Tránsito</u>	<u>Beneficios</u>	
0	1.00	1 000		} Etapa de construcción
1	1.08	1 080		
2	1.08	1 166		
3	1.08	1 259	12 809	} 1er. año de operación
4	1.10	1 385	14 090	
5	1.12	1 551	15 781	
6	1.13	1 753	17 835	
7	1.11	1 945	19 788	
8	1.09	2 120	21 569	
9	1.08	2 290	23 294	
10	1.08	2 473	25 158	
11	1.08	2 671	27 171	
12	1.08	2 885	29 344	
13	1.08	3 115	31 691	
14	1.08	3 364	34 226	
15	1.08	3 633	36 964	
16	1.08	3 924	39 921	
17	1.08	4 238	43 117	
18	1.08	4 577	46 566	
19	1.08	4 943	50 291	
20	1.08	5 338	54 314	
21	1.08	5 765	58 659	
22	1.08	6 226	63 343	

En lo que se refiere a costos se tendrá:

Inversión:	\$ 1 000 000/Km x 70 Km. =	\$ 70 000 000	
Año 1		28 000 000	(40%)
Año 2		42 000 000	(60%)
Conservación anual	\$ 20 000 x 70 =	1 400 000	
Reconstrucción al año 9	90 000 x 70 =	6 300 000	
Reconstrucción al año 16	150 000 x 70 =	10 500 000	

Determinación de la relación beneficios-costos
(Miles de pesos)

Año	Factor Act.	Beneficios	Beneficios Act.	Costos	Costos Actualizados
0	1.00	--	--	--	--
1	1.12	--	--	28 000	25 000
2	1.25	--	--	42 000	33 600
3	1.40	12 809	9 149	1 400	1 000
4	1.57	14 090	8 974	1 400	892
5	1.76	15 781	8 966	1 400	795
6	1.97	17 835	9 053	1 400	711
7	2.21	19 788	8 954	1 400	633
8	2.47	21 569	8732	1 400	567
9	2.77	23 294	8 409	1 400	505
10	3.10	25 158	8 115	1 400	451
11	3.48	27 171	7 807	6 300	1 810
12	3.90	29 344	7 524	1 400	359
13	4.36	31 691	7 268	1 400	321
14	4.89	34 226	7 000	1 400	286
15	5.47	36 964	6 757	1 400	256
16	6.13	39 921	6 512	1 400	228
17	6.86	43 117	6 285	1 400	204
18	7.69	46 566	6 055	10 500	1 365
19	8.61	50 291	5 841	1 400	162
20	9.64	54 314	5 634	1 400	145
21	10.80	58 659	5 431	1 400	129
22	12.10	63 343	5 235	1 400	115
S u m a s			147 701		68 534

$$\text{Relación beneficios-costos} = \frac{147\ 701}{68\ 534} = 2.15 \text{ (mayor que 1)}$$

De esto se deduce que la obra es conveniente, ya que la relación es mayor que la unidad; sin embargo, deberá compararse con otras obras para saber su orden de prioridad.

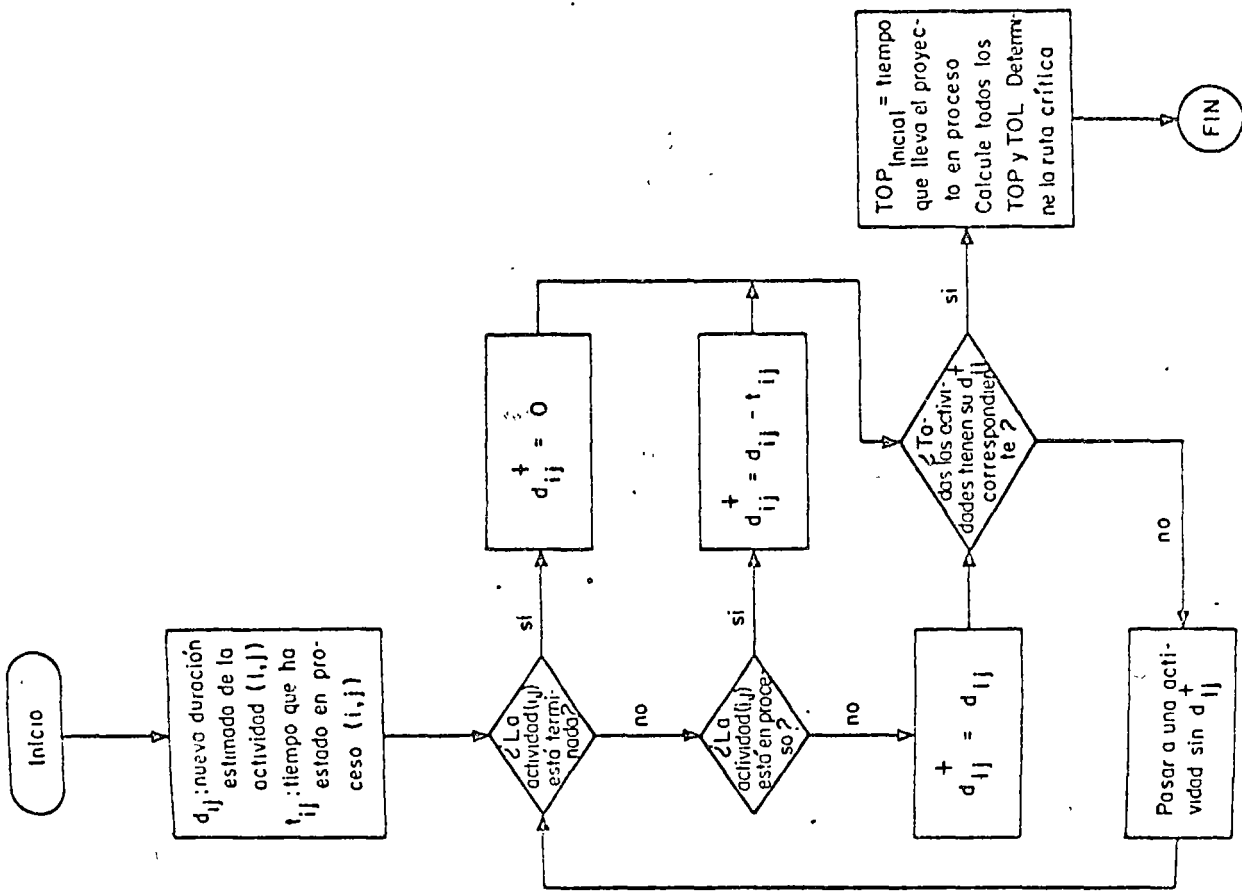
$$\text{Beneficio neto actualizado} = 147\ 701\ 000 - 68\ 534\ 000 = \$ 79\ 167\ 000$$

Por tanteos puede calcularse la tasa interna de retorno, variando la tasa de actualización hasta igualar la suma de beneficios actualizados con la suma de costos actualizados.

B I B L I O G R A F I A

- 1 Manual de Proyectos de Desarrollo Económico.- Naciones Unidas.
- 2 Apuntes de la clase de Evaluación de Proyectos de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la -- U.N.A.M., impartida por el Ing. Alejandro González Cueto.
- 3 La Evaluación de Proyectos de Desarrollo Económico.- John A.- King. Banco Mundial. Editorial Tecnos.
- 4 Carreteras en los países en vía de desarrollo.- E. Odier.- Editorial Eyrolles.

Cualquier plan para la ejecución de un proyecto debe ser tal que sólo utilice los recursos de que se dispone. Por ejemplo, si el



V. MODELO SHAFFER
(Asignación de Recursos)

plan sugerido por un diagrama de flechas requiere la utilización simultánea de 4 malacates, cuando sólo se dispone de dos; deberá modificarse el plan original de la manera más eficiente posible.

En este inciso se estudiará cómo modificar una planeación inaceptable. En general se utilizan los cálculos del plan original y los niveles máximos disponibles de cada recurso. El método consiste en modificar la secuencia de las actividades en forma tal que se respeten las disponibilidades y se minimicen los posibles incrementos en la duración del proyecto obtenida del plan original.

Para aplicar el método de asignación de recursos (MAR) se requiere de la siguiente información.

- a) El diagrama de flechas original. Este diagrama se obtiene sin tener en cuenta las disponibilidades de cada recurso.
- b) Asociadas a cada actividad se deben tener:
 - i) Su duración estimada
 - ii) La cantidad necesaria de cada recurso para que la actividad tenga una duración igual a la estimada.
- c) El nivel máximo disponible de cada recurso.

El MAR proporciona un nuevo diagrama de flechas en el cual no se requiere, en ningún instante, mayor cantidad de un recurso que aquella de que se dispone.

Supóngase que al realizar los cálculos asociados al diagrama de la fig. 11.22 resulta que las actividades C y E deben atacarse simultáneamente pero que ello requeriría mayor cantidad de un recurso que aquella de la que se dispone. Supóngase además que la mejor solución al conflicto entre C y E es que la actividad E se ejecute inmediatamente después que la C. Para que esta nueva condición quede representada en el diagrama de flechas, es necesario agregar dos flechas mudas, un nudo adicional, cambiar el extremo de la flecha de C y reenumerar los nudos del diagrama. La nueva configuración se muestra en la fig. 11.23. En esta figura se conservan todas las relaciones entre actividades que se muestran en la fig. 11.22 y sólo se agregaron las relaciones adicionales que surgieron al considerar los requerimientos y las disponibilidades de un cierto recurso.

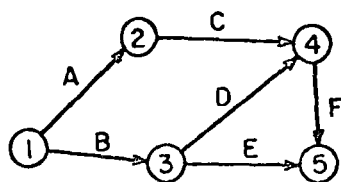


Figura 11.22

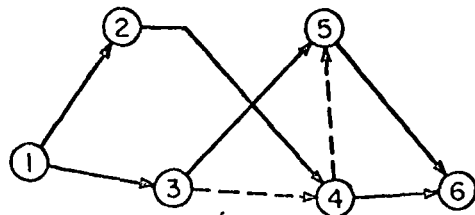


Figura 11.23

Si se piensa que los cambios de secuencia de las actividades debidos a limitación de recursos, pueden involucrar a muchas de ellas, es posible darse cuenta de lo difícil que resultaría dibujar el diagrama de flechas resultante. Es por esta razón que antes de discutir el MAR se estudiará lo que se llamará diagrama de flechas modificado (diagrama de precedencias).

En esta nueva notación se utilizan círculos para representar a las actividades del proyecto, esto es, cada círculo del diagrama corresponde a una actividad del proyecto. Las flechas que conectan a los círculos se usan para describir relaciones entre las actividades. Así por ejemplo si A debe preceder a B la notación apropiada es la que se muestra en la figura (a) de la tabla 11.8. En esta tabla se consignan las dos representaciones gráficas de algunas relaciones entre actividades.

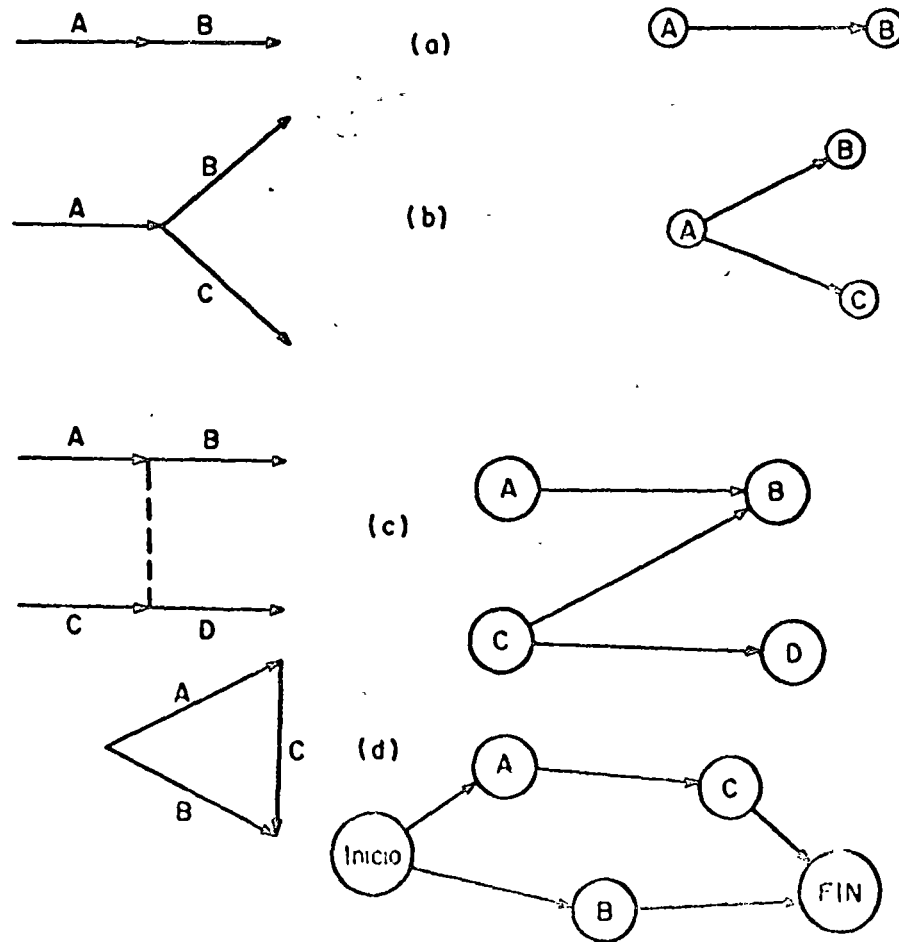


Tabla 11.8

Deben observarse las actividades mudas "Inicio" y "FIN" de duración nula que se utilizaron a fin de lograr la representación de la figura (d) de la tabla 11.8.

Utilizando la notación modificada, los diagramas de las figs. 11.22 y 11.23 quedan representados respectivamente por las figs. 11.24 y 11.25 que siguen:

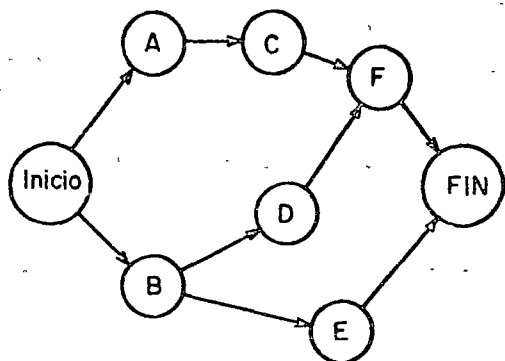


Figura 11.24

Cabe recalcar que el paso de la fig. 11.24 a la 11.25 se logró trazando una sola flecha, mientras que para pasar de la fig. 11.22 a la 11.23 fueron necesarios 4 cambios. Es claro que la utilización de la nueva notación permite lograr una representación gráfica mucho menos compleja.

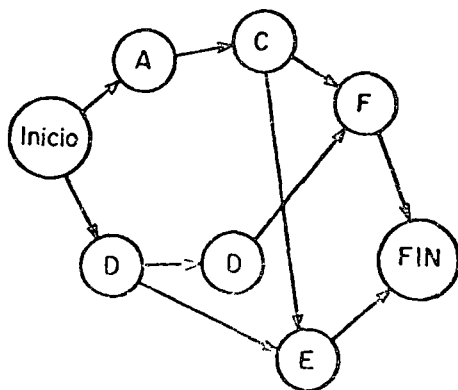


Figura 11.25

Los cálculos asociados al diagrama modificado son muy similares a los que ya se conocen.

Para obtener los tiempos más próximos de iniciación (TPI) de las actividades:

- a) Se asigna un TPI de cero al primer círculo
- b) Los TPI de las actividades restantes son iguales al máximo de los tiempos más próximos de terminación (TPT) de las actividades que están inmediatamente antes de la analizada.

El tiempo más lejano de iniciación (TLI) de cada actividad se obtiene:

- a) Asignando a la última actividad del proyecto un TLI igual a su TPI.
- b) Los TLI de las actividades restantes son iguales al mínimo de los TLI de las actividades que siguen inmediatamente después de la actividad analizada menos la duración de esa actividad.

La holgura total (HT) de una actividad es igual a la diferencia entre su TLI y su TPI.

Los cálculos antes descritos sólo pueden realizarse cuando el diagrama modificado tiene un sólo círculo inicial y un sólo círculo final.

Un ejemplo de cálculo se consigna en la fig. 11.26 y la tabla 11.9. Los símbolos \rightarrow y \leftarrow designan respectivamente el TPI y el TLI de cada actividad. Se observa que la ruta crítica está constituida por las actividades A, D, I y L.

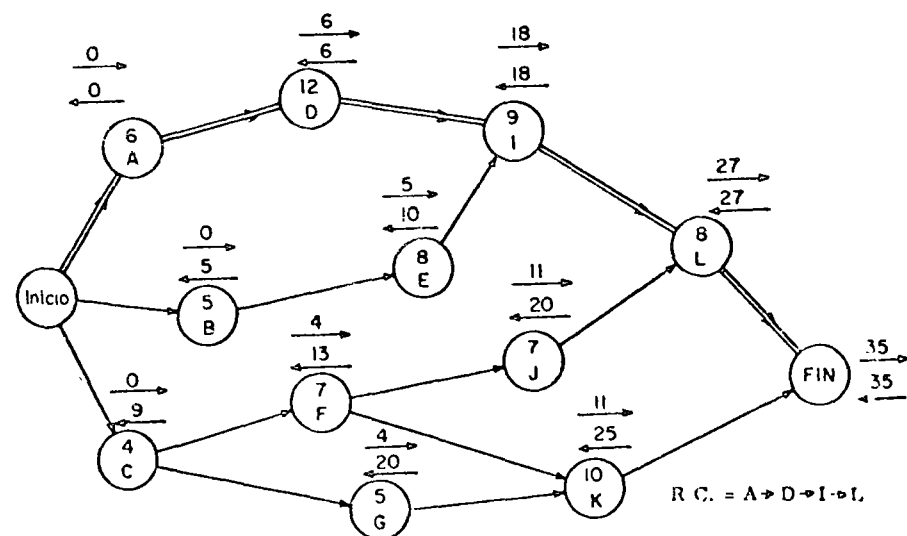


Figura 11.26

ACTIVIDAD	DURACION	TPI	TLI	TPT	HT
A	6	0	0	6	0
B	5	0	5	5	5
C	4	0	9	4	9
D	12	6	6	18	0
E	8	5	10	13	5
F	7	4	13	11	9
G	5	4	20	9	16
I	9	18	18	27	0
J	7	11	20	18	9
K	10	11	25	21	14
L	8	27	27	35	0

Tabla 11.9

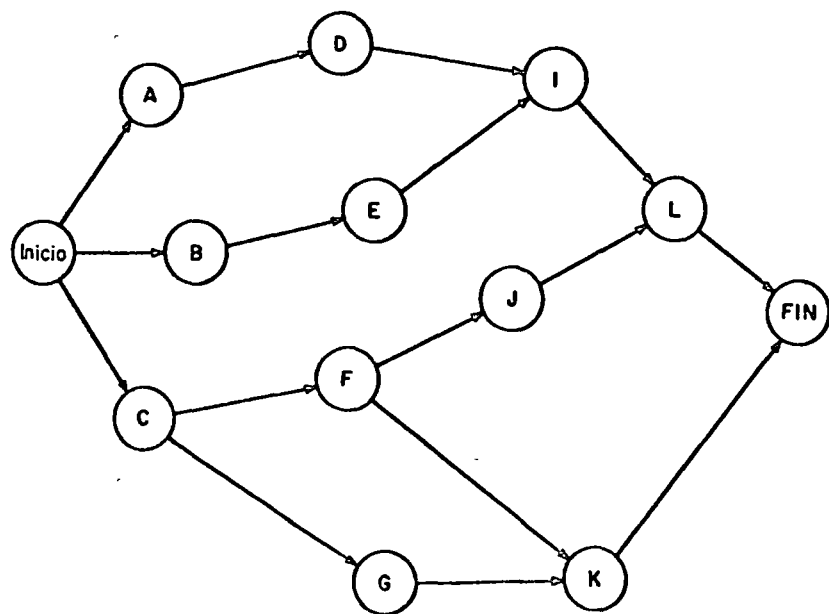


Figura 11.27

Se explicará el MAR mediante un ejemplo. Se tiene la siguiente información:

- La red modificada de la fig. 11.27
- La información referente a las actividades, que se consigna en la tabla 11.10.
- Las cantidades máximas disponibles de cada recurso que también se dan en la tabla 11.10.

Actividades	Duración	Recursos Necesarios	
		R_1	R_2
A	6	3	1
B	5	1	0
C	4	2	1
D	12	3	1
E	8	1	2
F	7	0	1
G	5	0	1
I	9	2	0
J	7	2	0
K	10	2	1
L	8	0	3
Recursos Disponibles		5	4

Tabla 11.10

El primer paso en el MAR es utilizar el diagrama de la fig. 11.27 para calcular los TPI, TLI, TPT y HT de cada actividad. Estos cálculos ya se realizaron en la fig. 11.26, y están consignados en la tabla 11.9.

Con esta información es posible dibujar el diagrama de barras correspondiente al plan original según se muestra en la fig. 11.28. Los trazos punteados en dicha figura indican la holgura total de la actividad correspondiente.

En la fig. 11.28 se observa que en el primer período de tiempo, esto es, en el primer día, deben atacarse simultáneamente las actividades A, B y C lo cual requiere de 6 unidades de recurso R_1 .

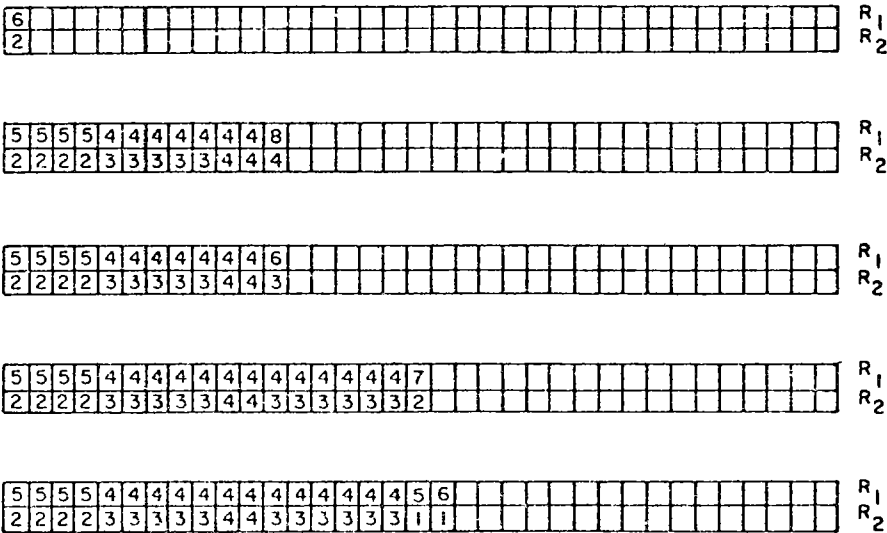
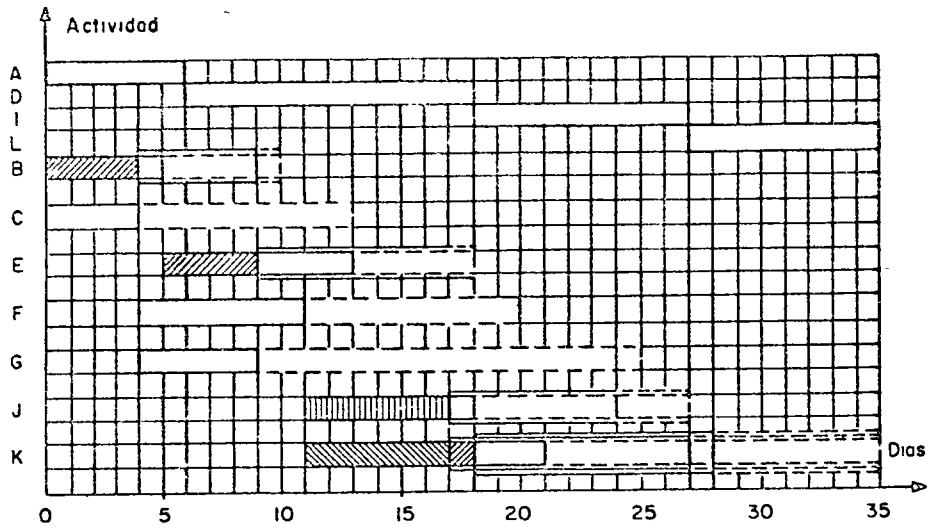


Figura 11.28

Como sólo se dispone de 5 unidades de ese recurso debe modificarse la secuencia de las actividades A, B y C.

Para resolver un posible conflicto surgido por la limitación de los recursos disponibles se procede como sigue:

- a) De entre todas las actividades involucradas en el conflicto se eligen dos: la I y la J.
- b) La actividad I es aquella que posee el mínimo TPT.
- c) La actividad J es aquella que posee el máximo TLL.
- d) Se obliga a que la actividad J siga a la I.

Cuando la selección anterior conduce a que $I = J$, entonces se usa aquella actividad más próxima al mínimo TPT ó al máximo TLL. Este proceso se repite cuantas veces sea necesario.

En la tabla 11.9 se observa que la actividad C tiene simultáneamente el mínimo TPT y el máximo TLL. Consecuentemente se investiga qué actividad tiene el TPT más próximo al de C, esta es la actividad B. Por lo tanto debe obligarse que la actividad C preceda a la B. Esta nueva restricción se incluye en el diagrama tal como se muestra en la fig. 11.29.

Los cálculos asociados a la fig. 11.29 se consignan en la tabla 11.11. Se observa que los nuevos TPI de B y E son respectivamente 4 y 9. Esto modifica el diagrama de la fig. 11.28 en donde las barras correspondientes a E y F quedan ahora representadas con doble trazo y el desplazamiento de su TPI por el tramo aciurado de la barra original.

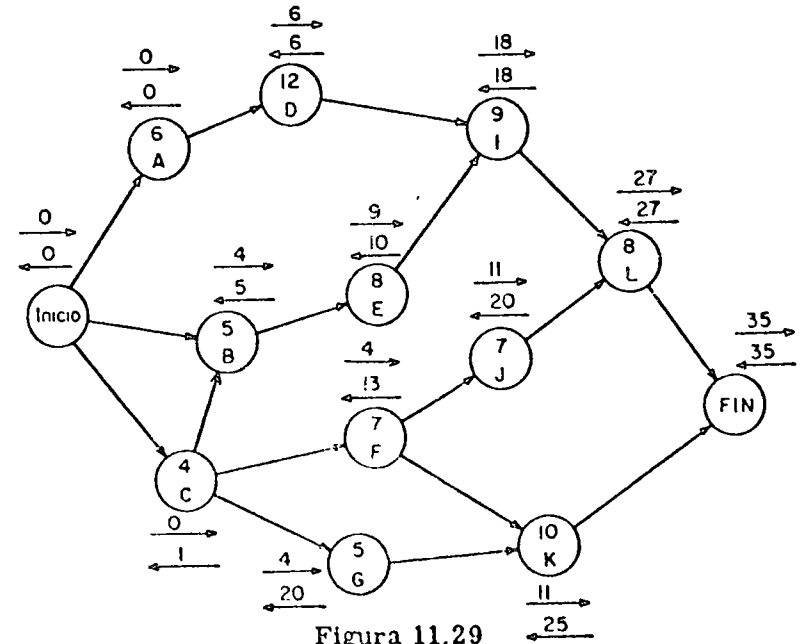


Figura 11.29

Actividad	Duración	Recursos necesarios		TPI	TLI	TPT	HT
		R ₁	R ₂				
A	6	3	1	0	0	6	0
B	5	1	0	4	5	9	1
C	4	2	1	0	1	4	1
D	12	3	1	6	6	18	0
E	8	1	2	9	10	17*	1
F	7	0	1	4	13	11	9
G	5	0	1	4	20	9	16
I	9	2	0	18	18	27	0
J	7	2	0	11	20	18	9
K	10	2	1	11	25*	21	14
L	8	0	3	27	27	35	0

Tabla 11.11

Actividad	Duración	Recursos Necesarios		TPI	TLI	TPT	HT
		R ₁	R ₂				
A	6	3	1	0	0	6	0
B	5	1	0	4	5	9	1
C	4	2	1	0	1	4	1
D	12	3	1	6	6	18	0
E	8	1	2	9	10	17*	1
F	7	0	1	4	13	11	9
G	5	0	1	4	20	9	16
I	9	2	0	18	18	27	0
J	7	2	0	11	20*	18	9
K	10	2	1	17	25	27	8
L	8	0	3	27	27	35	0

Tabla 11.12

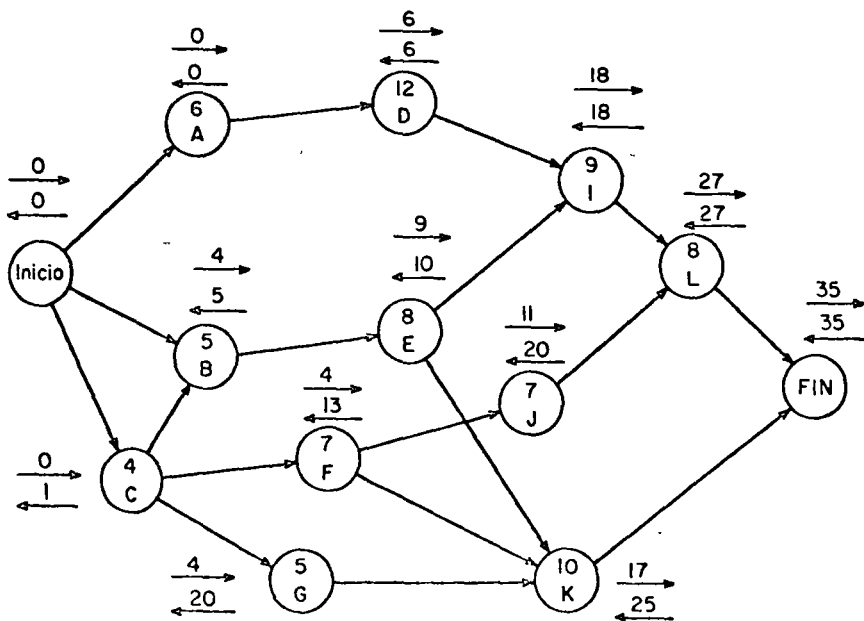


Figura 11.30

En estas nuevas condiciones, en el día 12 las actividades D, E, J y K requieren de 8 unidades del recurso R₁ lo cual excede a la disponibilidad. Al observar los TPT y los TLI de D, E, J y K se ve que este conflicto podría resolverse haciendo que K siga a E. El diagrama resultante se muestra en la fig. 11.30

Los cálculos asociados a la fig. 11.30 se resumen en la tabla 11.12. Se observa que el nuevo TPI de K es 17. Esto vuelve a modificar el diagrama de la fig. 11.28 en donde la barra correspondiente a K queda ahora representada con doble trazo y el desplazamiento de su TPI por el ascisurado de la barra original. También se observa una reducción en los recursos necesarios en el día 12 pero quedando todavía arriba de los disponibles; esto se debe a que el TPT de J no sufrió ningún cambio. Al analizar los TPT y los TLI de las actividades D, E y J se ve que este conflicto podría resolverse haciendo que la actividad J siga de la E. El diagrama resultante se muestra en la fig. 11.31.

Los cálculos asociados a la fig. 11.31 se muestran en la tabla 11.13. En estas nuevas condiciones en el día 18 las actividades D, J y K requieren de 7 unidades del recurso R₁ lo cual excede a la disponibilidad. Al observar los TPT y los TLI de dichas actividades se ve que este conflicto podría resolverse haciendo que

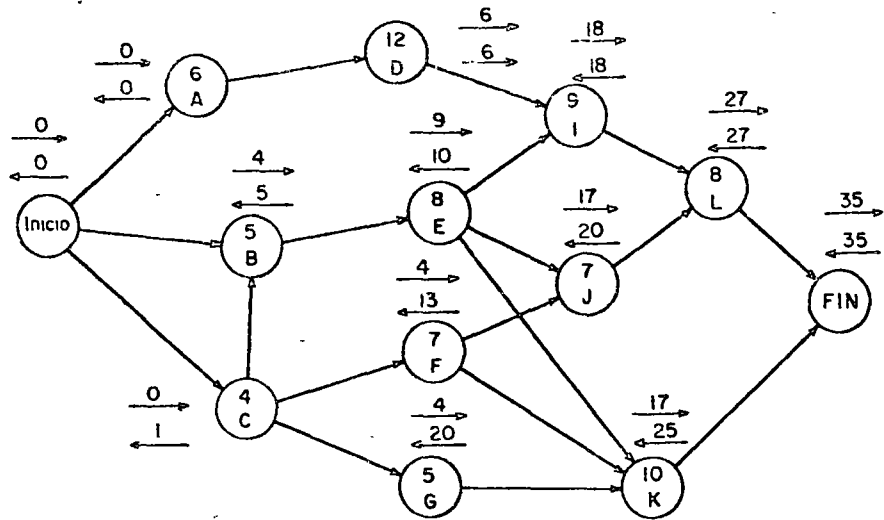


Figura 11.31

Activi- dad	Dura- ción	Recursos Necesarios		TPI	TLI	TPT	HT
		R ₁	R ₂				
A	6	3	1	0	0	6	0
B	5	1	0	4	5	9	1
C	4	2	1	0	1	4	1
D	12	3	1	6	6	18*	0
E	8	1	2	9	10	17	1
F	7	0	1	4	13	11	9
G	5	0	1	4	20	9	16
I	9	2	0	18	18	27	0
J	7	2	0	17	20	24	3
K	10	2	1	17	25*	27	8
L	8	0	3	27	27	35	0

Tabla 11.13

la actividad K siga de la D. El diagrama resultante se muestra en la fig. 11.32.

Los cálculos asociados a la fig. 11.32 se muestran en la tabla 11.14. En este caso se observa que el día 19 las actividades I, J y K requieren de 6 unidades del recurso R₂, lo cual excede a la disponibilidad. Al analizar los TPT y los TLI de dichas actividades se ve que este conflicto podría resolverse haciendo que la actividad K siga de la J según se muestra en la fig. 11.33.

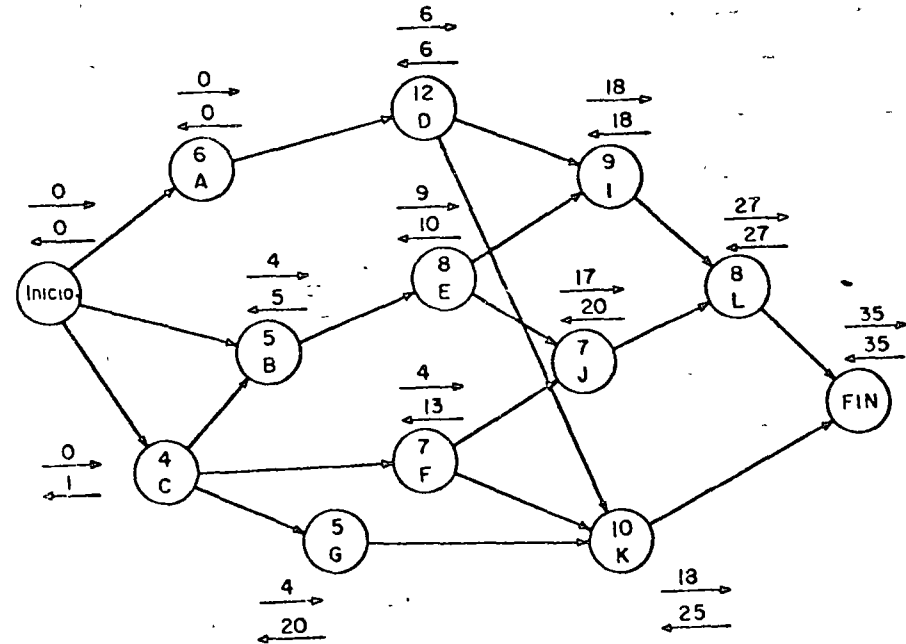


Figura 11.32

Al realizar los cálculos asociados a la fig. 11.33 se concluye que los requerimientos de recursos en cualquier instante son menores que las disponibilidades con lo cual el proceso termina. Conviene como etapa final remover las flechas redundantes del diagrama, así en la fig. 11.32 se puede eliminar la flecha que va de F a K sin destruir ninguna de las relaciones lógicas entre las actividades. El diagrama queda finalmente como se muestra en la fig. 11.34 en donde también se consigna el diagrama de barras correspondiente.

Obsérvese que con la programación original la duración del proyecto fué de 35 días y esta duración no se modificó al ajustar la secuenciación de las actividades de acuerdo con la disponibilidad de recursos.

Actividad	Duración	Recursos Necesarios		TPI	TLI	TPT	HT
		R ₁	R ₂				
A	6	3	1	0	0	6	0
B	5	1	0	4	5	9	1
C	4	2	1	0	1	4	1
D	12	3	1	6	6	18	0
E	8	1	2	9	10	17	1
F	7	0	1	4	13	11	9
G	5	0	1	4	20	9	16
I	9	2	0	18	18	27	0
J	7	2	0	17	20	24	3
K	10	2	1	18	25	28	7
L	8	0	3	27	27	35	0

Tabla 11.14

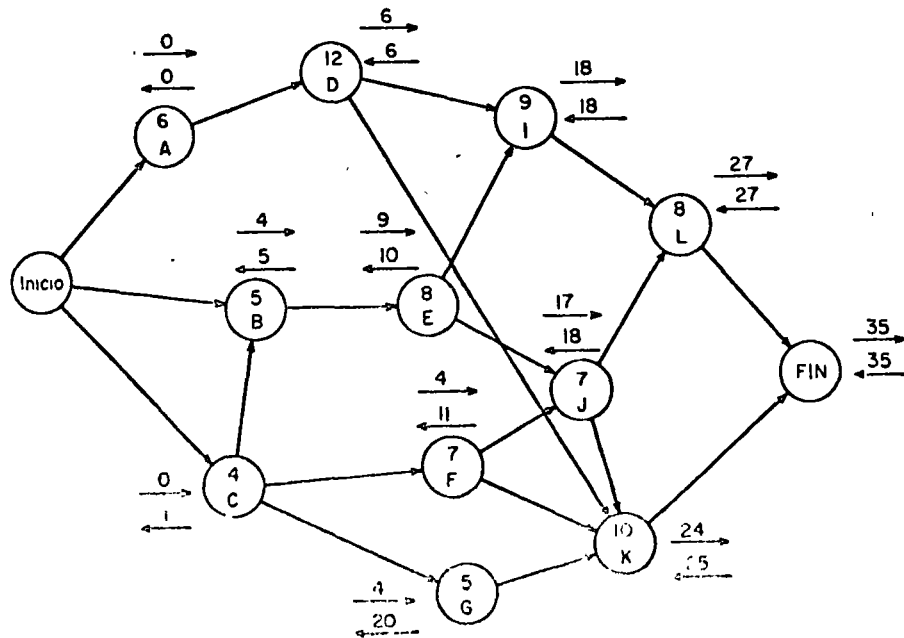


Figura 11.33

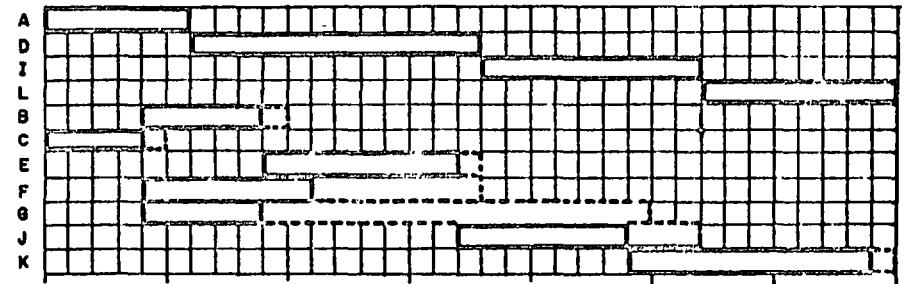
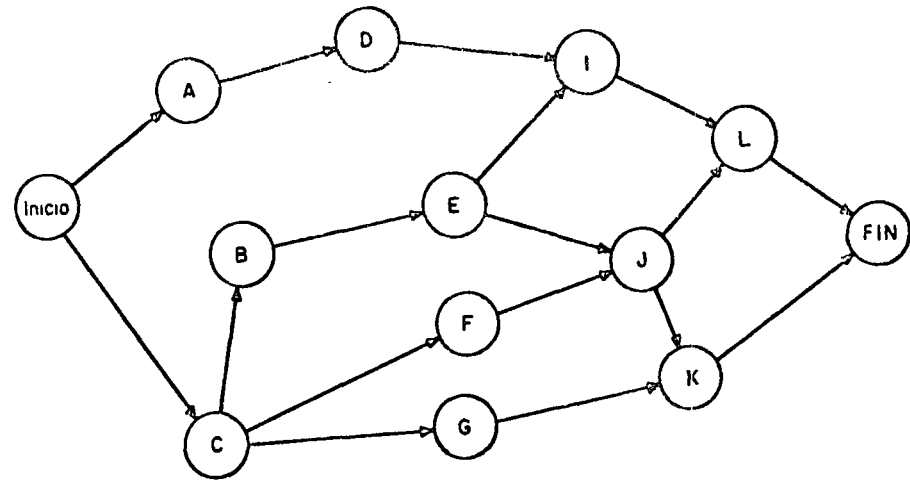
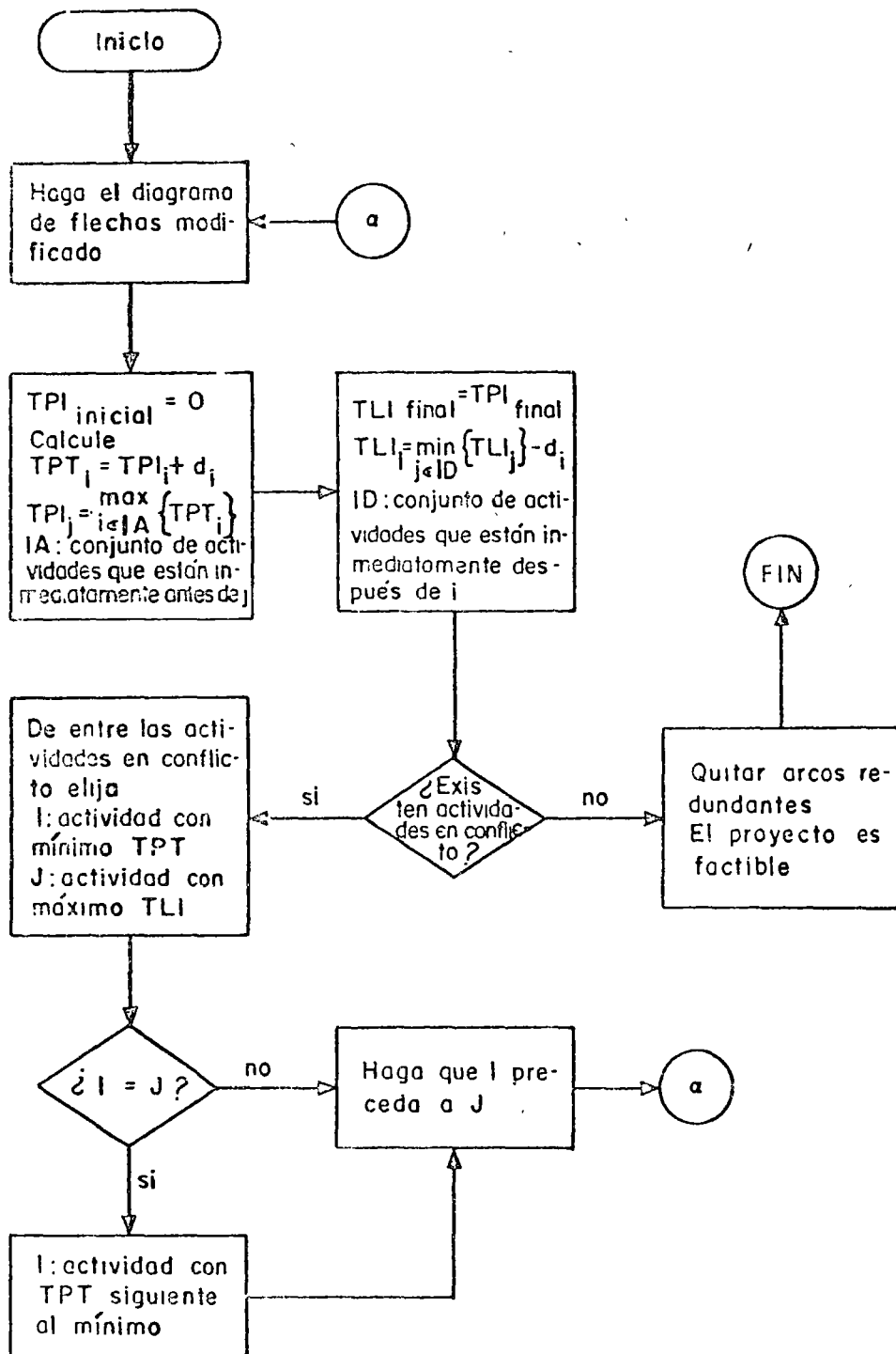


Figura 11.34

El método de asignación de recursos queda representado en el siguiente diagrama de flujo:





11.5. Balanceo de Recursos (Wiest)

A continuación se describe un método heurístico para asignar recursos en aquellos proyectos en donde no sólo se desea evitar el que se requieran más recursos de los que se dispone sino además se procura que los recursos disponibles no utilizados sean mínimos. El método se ilustrará a través de un ejemplo.

Supóngase que el diagrama de precedencias de la fig. 11.35 representa un proyecto particular y que las duraciones estimadas de cada una de las actividades de este proyecto son las dadas en la tabla 11.15. En dicha tabla se muestra la disponibilidad de un cierto recurso *R* así como las cantidades de dicho recurso que se necesitan para llevar a cabo cada una de las actividades en un tiempo normal. Asimismo se especifican las cantidades del recurso *R* que se necesitarían en un día cualquiera, a excepción del último, de los programados para realizar cada actividad para que, además de cumplir con la tarea normal, se pueda ahorrar un día de trabajo en el lapso que resta para terminar dicha actividad a partir de la fecha en que se haga la modificación a la asignación de recursos. Para especificar considérese la actividad *B* de la tabla 11.35 que tiene una duración normal de 6 días. Si en uno de los primeros cinco días se modifica la dotación de recursos de 100 a 200, entonces la duración de la actividad *B* se reduce de 6 a 5 días; si se hace lo mismo en dos días entonces dicha duración se reduce a 4 días y así sucesivamente hasta llegar a la duración límite de 3 días.

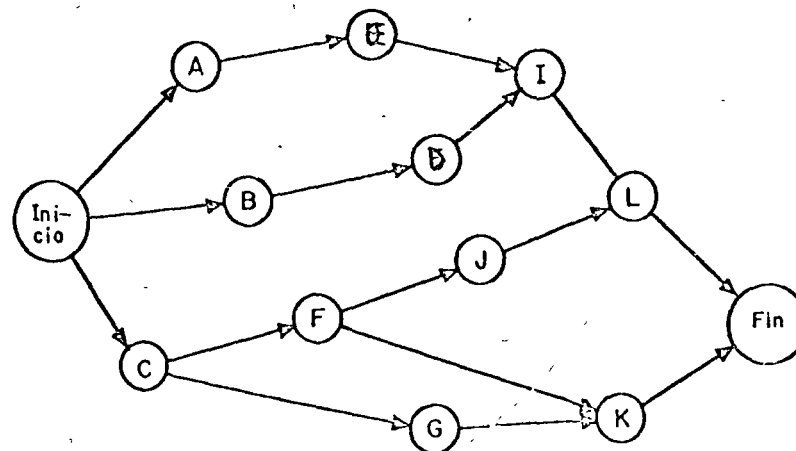


Figura 11.35

VI. MODELO WIEST
(Balanceo de Recursos)

Con los recursos que se muestran en la tabla 11.15 a lo más que se puede reducir la duración de una actividad es a la mitad de lo programado como normal o a la mitad más uno, según que dicha duración normal sea igual a un número par o impar de días respectivamente. Esto se debe a que se supondrá que solo se harán acortamientos de días completos.

Actividad	Duración	Necesidades diarias del recurso	
		Normal	Para acortar un día
A	5	50	100
B	6	100	200
C	4	50	100
D	12	200	400
E	8	150	300
F	7	200	400
G	6	100	200
I	9	150	300
J	7	100	200
K	10	100	200
L	8	100	200
Disponibilidad diaria del Recurso $R = 350$			

Tabla 11.15

El algoritmo de Wiest procede heurísticamente como sigue:
 Paso 1. Aplicar el método de la ruta crítica para obtener:
 a) duración del proyecto

- b) las actividades críticas
- c) los tiempos más próximos de iniciación
- d) los tiempos más lejanos de iniciación
- e) las holguras totales

Los resultados para el ejemplo bajo análisis se muestran en la tabla 11.16.

Actividad	Duración	TPI	TLI	HT
A	5	0	5	5
B	6	0	0	0
C	4	0	9	9
D	12	6	6	0
E	8	5	10	5
F	7	4	13	9
G	6	4	19	15
I	9	18	18	0
J	7	11	20	9
K	10	11	25	14
L	8	27	27	0

Tabla 11.16

Paso 2. Dibujar el diagrama de barras y de éste deducir la distribución diaria de los recursos para llevar a cabo el proyecto (fig. 11.36).

Paso 3. Estudiar si la distribución de los recursos necesarios cumple con los requisitos de disponibilidad y uniformidad en cuanto a su asignación diaria. En la fig. 11.36 se observa que esto no acontece ya que por ejemplo en el primer día solo se requieren 200 unidades del recurso R , mientras que en el séptimo se necesitan 650. Ello significa que en el primer día se está desperdiciando

150 unidades de las disponibles y que en el séptimo se requieren 300 unidades extras. Para corregir defectos de estetipo se aplicarán los pasos que siguen:

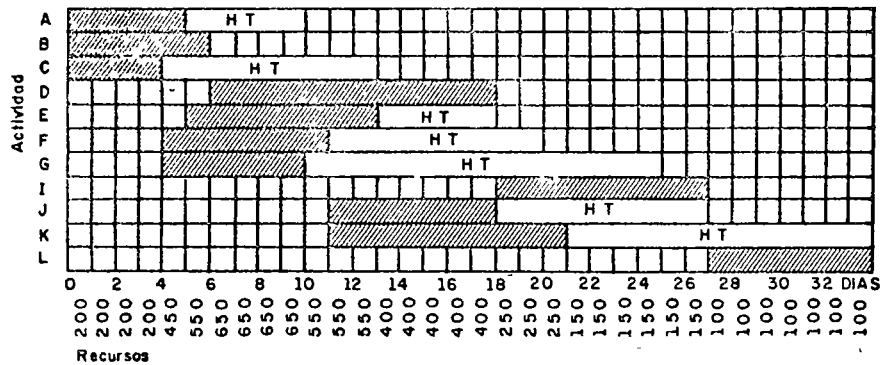


Figura 11.36

Paso 4. Llevar a cabo un doble ordenamiento de las actividades en forma creciente; primeramente conforme a sus tiempos más próximos de iniciación, y en seguida en lo que respecta a sus holguras totales y sin alterar el primer ordenamiento. Esto se muestra en la tabla 11.17.

J	Actividad	TPI	HT
1	B	0	0
2	A	0	5
3	C	0	9
4	F	4	9
5	G	4	15
6	E	5	5
7	D	6	0
8	J	11	9
9	K	11	14
10	I	18	0
11	L	27	0

Tabla 11.17.

Paso 5. Aplicar los análisis descritos en los subincisos 5.1 y 5.2 que siguen, según que existan recursos no utilizados o que los recursos disponibles sean insuficientes para el día bajo estudio.

5.1. Existen recursos no utilizados en el día bajo análisis.

a) Revisar actividad por actividad según el orden indicado en la tabla 11.17. Investigar si es posible incrementar la dotación de recursos de la actividad analizada en forma tal que se logre reducir su duración en un número entero de días y no se exceda la disponibilidad de recursos no utilizados para el día bajo estudio. Si lo anterior es posible se modifica la dotación de recursos para la actividad y el día considerados.

b) Recalcular la duración de la actividad afectada conforme a su nueva dotación de recursos.

c) Modificar, conforme a la nueva asignación, la cantidad de recursos que aún están desperdiciándose.

d) Selecciónese otra actividad para aplicar nuevamente el paso 5 y continúese de la misma manera hasta que no sea posible lograr nuevas asignaciones.

e) Repítanse los pasos 1, 2, 4 y 5 para las nuevas condiciones de proyecto de los días que restan por analizar.

5.2. Los recursos disponibles en el día bajo análisis son insuficientes para llevar a cabo las actividades programadas.

a) Seleccione aquellas actividades que conjuntamente requieran de una cantidad de recursos lo más cercana a la disponible para el día analizado. El orden de selección debe ser el que se indique en una tabla como la 11.17.

b) Se pospone un día el inicio de las actividades programadas para el día bajo estudio y que no fueron seleccionadas en el paso inmediato anterior.

c) Se repiten los pasos 1, 2, 4 y 5 para las nuevas condiciones de proyecto de los días que restan por analizar.

En seguida se muestra el estudio del ejemplo que nos ocupa.

Análisis del primer día de proyecto. En el diagrama de barras de la fig. 11.36 se observa que las actividades programadas para este día son la A, la B y la C. Para llevarlas a cabo se necesitan 200 unidades del recurso y se dispone de 350; por lo tanto deberá aplicarse el paso 5.1. De la tabla 11.17 se concluye que las actividades deben analizarse en el orden B, A, C.

a) Análisis de la actividad B. Realizar esta actividad a un ritmo normal requiere de 100 unidades diarias del recurso R pero, de acuerdo con la tabla 11.15, es posible incrementar su asignación a 200 lo que traería como consecuencia:

- i) Aprovechar parte de los recursos disponibles no utilizados.
- ii) Reducir la duración de la actividad en un día y, dado que ella es crítica, reducir también en un día la duración del proyecto.

Consecuentemente se decide incrementar la dotación de recursos de la actividad B y por lo tanto ya sólo se dispondrá de 50 unidades no utilizadas del recurso R.

b) Análisis de la actividad A. Realizar esta actividad a un ritmo normal requiere de 50 unidades del recurso R pero, de acuerdo con la tabla 11.15, es posible incrementar su asignación a 100 unidades lo que traería consigo:

- i) Aprovechar las 50 unidades aún disponibles y no utilizadas.
- ii) Reducir la duración de la actividad en un día.

Por lo tanto conviene incrementar la dotación de recursos de la actividad A con lo cual se agota la disponibilidad de recursos no utilizados el primer día.

Puesto que se ha modificado la programación original, se repiten los pasos 1, 2, 4 y 5 para las nuevas condiciones de proyecto.

Análisis del segundo día de proyecto. Este análisis es igual al efectuado para el primer día por lo que se deja como ejercicio al lector. Los resultados se muestran en la fig. 11.37 y en la tabla 11.18. Se observa que se ha reducido la duración de la actividad A de 5 a 3 días con lo cual llega a su límite.

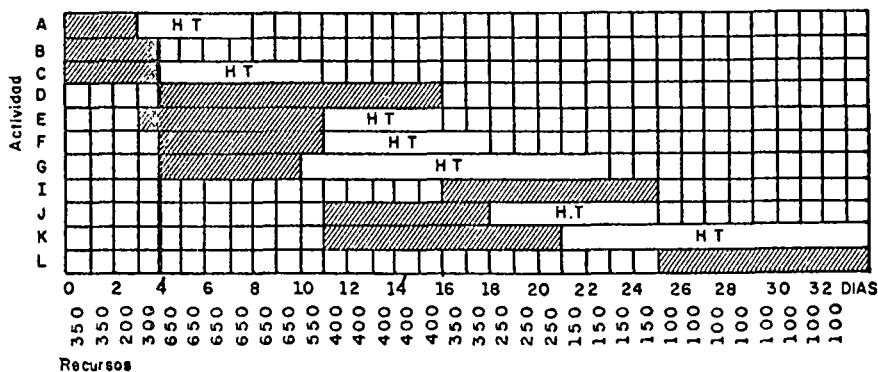


Figura 11.37

J	Actividad	TPI	HT
1	B	0	0
2	A	0	5
3	C	0	7
4	E	3	5
5	D	4	0
6	F	4	7
7	G	4	13
8	J	11	7
9	K	11	12
10	I	16	0
11	L	25	0

Tabla 11.18

Análisis del tercer día de proyecto. En el diagrama de barras de la fig. 11.37 se observa que las actividades programadas para este día siguen siendo la A, la B y la C. Para llevarlas a cabo se necesitan 200 unidades del recurso R y se dispone de 350; por lo tanto deberá aplicarse el paso 5.1. De la tabla 11.18 se concluye que las actividades deben analizarse en el orden B, A, C.

a) Análisis de la actividad B. Se incrementa la dotación de esta actividad a 200 unidades del recurso R ya que esto permite acortar su duración en un día y aprovechar 100 de las 150 unidades del recurso R disponibles y no utilizadas.

b) Análisis de la actividad A. No es posible cambiar la asignación de recursos de esta actividad ya que ha llegado a su duración límite.

c) Análisis de la actividad C. Se incrementa la dotación de recursos de C ya que:

- i) Se tienen 50 unidades del recurso R no aprovechadas.
- ii) Es posible incrementar la asignación de recursos para la actividad C de 50 a 100 unidades y con ello reducir su duración en un día.

Dado que nuevamente se han modificado las condiciones de proyecto se repiten los pasos 1, 2 y 4. Los resultados muestran en la fig. 11.33 y en la tabla 11.19.

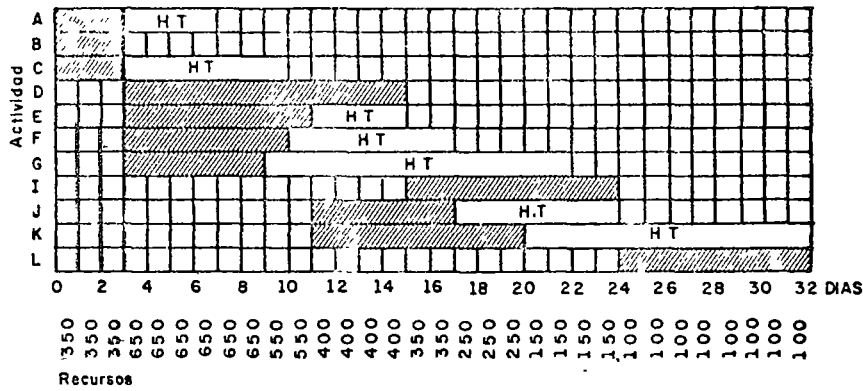


Figura 11.38

J	Actividad	TPI	HT
1	B	0	0
2	A	0	4
3	C	0	7
4	D	3	0
5	E	3	4
6	F	3	7
7	G	3	13
8	J	10	7
9	K	10	12
10	I	15	0
11	L	24	0

Tabla 11.19

Análisis del cuarto día de proyecto. En el diagrama de barras de la fig. 11.38 se observa que las actividades programadas para este día son *D, E, F* y *G*. Para llevarlas a cabo se necesitan 650 unidades del recurso *R* y solo se dispone de 350; por lo tanto deberá aplicarse el paso 5.2, como sigue:

a) Seleccionéense, respetando el orden indicado en la tabla 11.19, aquellas actividades que conjuntamente requieran de una cantidad de recursos que más se acerca a la disponible.

b) Se pospone un día el inicio de las actividades programadas y que no fueron seleccionadas en el paso inmediato anterior.

Consecuentemente deberán seleccionarse las actividades *D* y *E* y posponer un día el inicio de *F* y *G*.

Los análisis de los días de proyecto restantes son semejantes a los ya descritos por lo que se dejan como ejercicio al lector. El resultado final se muestra en la fig. 11.39.

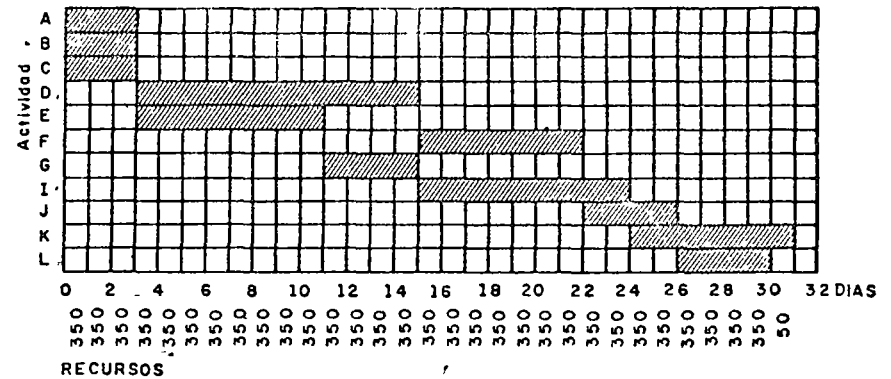


Figura 11.39

Obsérvese que:

i) Se ha logrado usar al máximo los recursos disponibles ya que, con la sola excepción del último día de proyecto, en los restantes la cantidad de recursos utilizada es siempre igual a la cantidad de recursos disponible.

ii) La duración del proyecto se acortó cuatro días.

El diagrama de flujo del algoritmo de Wiest se muestra en la rutina G-12 en donde:

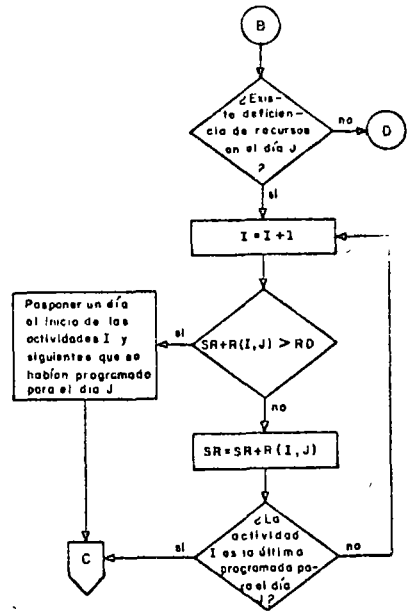
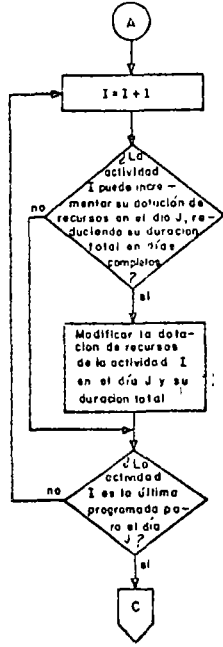
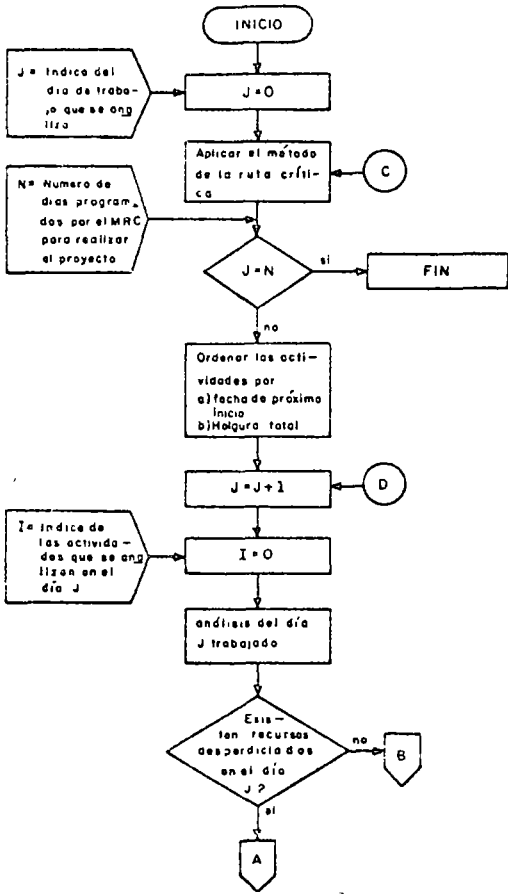
$R(I, J)$ = Recursos necesarios para realizar la actividad *I* en el día *J*.

SR = Suma de recursos para realizar hasta la actividad *I*-1 en el día *J*.

RD = Recursos disponibles en el día *J*.

11.6. Optimización de Programas

11.6.1. Formulación del problema. En general cada actividad de un proyecto puede realizarse de diversas maneras. Esto ocasiona que cada flecha del diagrama tiene asociada una pareja (duración, costo) para cada método de ejecución de la actividad representada por la flecha.



VII. MODELO HADLEY
(Planeación de Proyectos
y Programación de Mano-
de Obra)

Las ecuaciones de sistema resultan:

$$\begin{aligned}
0 &= \xi_1 + \xi_{01} - x_1 & 0 &= \xi_{12} + \xi_{0,23} - x_{12} \\
\xi_1 &= \xi_2 - x_2 & \xi_{12} &= \xi_{22} + \xi_{03} - x_{22} \\
\xi_2 + \xi_{31} &= \xi_3 - x_3 & \xi_{22} &= \xi_{32} - x_{32} \\
\xi_{01} &= \xi_{11} - x_{11} & \xi_{32} + \xi_{02} &= \xi_{42} - x_{42} \\
\xi_{11} &= \xi_{21} + \xi_{02} - x_{21} & \xi_{03} &= \xi_{13} - x_{13} \\
\xi_{21} &= \xi_{31} - x_{31} & \xi_{13} + \xi_{0,23} + \xi_{14} &= \xi_{23} - x_{23} \\
& & 0 &= \xi_{14} - x_{14} \\
& & R &= \xi_3 + \xi_{42} + \xi_{23}
\end{aligned}$$

El análisis principiaría en el diagrama de arriba hacia abajo y distinguiendo subsistemas con ramas divergentes, convergentes y con alimentación hacia adelante. Obsérvese que no se presenta retroalimentación puesto que en los diagramas de flechas no se permiten circuitos cerrados.

193. Asignación de recursos a una red constructiva

En el número anterior se estudió el caso en que los recursos se asignaban sin to mar en cuenta que los ya usados en una actividad se pueden usar posteriormen- te.

Ahora bien, para las redes que corresponden a obras no sucede así y a la asig- nación debe usar otro tipo de modelo. El que a continuación se expone se en-

cuenta basado en uno de Hadley y hace uso de la Programación Entera en vez de la Dinámica.

Se supondrá que el día es el menor período de tiempo que debe considerar, de manera que, la programación de la obra se hará sobre una base diaria, es claro que esto puede reducirse a la hora o ampliarse a la semana o al mes. Los recursos por asignar en una obra serán: equipo, materiales, dinero, hombre. Se designará con a_{kj} la disponibilidad del recurso k en el día j . En total se considerarán K recursos. Después de estudiar la Ruta Crítica en la red de actividades se ha concluido que el terminarla requiere de un máximo de N días y de un mínimo de n días. En total se requiere concluir I diferentes actividades en un cierto orden que es conocido. Puesto que no sólo una actividad puede realizarse en un día cualquiera se considerará que el conjunto de actividades $I(i)$ debe encontrarse terminado antes de iniciar la actividad i . Sea α_{ik} la cantidad del recurso k requerida por la actividad i . Sea x_{ij} la variable que define el porcentaje de actividad i que puede realizarse en el día j .

Es claro entonces que el primer grupo de restricciones que debe cumplirse es:

$$\sum_{i=1}^I \alpha_{ik} x_{ij} \leq a_{kj}, \quad k = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, N.$$

Por otra parte para que la obra se encuentre terminada deberá cumplirse que

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1$$

$$i = 6 \quad l(6) = \{2\}$$

$$x_{61} \leq \sigma_{21}$$

$$x_{62} \leq \sigma_{22}$$

$$x_{63} \leq \sigma_{23}$$

$$x_{64} \leq \sigma_{24}$$

$$x_{65} \leq \sigma_{25}$$

$$x_{66} \leq \sigma_{26}$$

$$x_{67} \leq \sigma_{27}$$

$$x_{68} \leq \sigma_{28}$$

$$x_{69} \leq \sigma_{29}$$

$$i = 7 \quad l(7) = \{4, 5\}$$

$$x_{71} \leq \sigma_{41}$$

$$x_{72} \leq \sigma_{42}$$

$$x_{73} \leq \sigma_{43}$$

$$x_{74} \leq \sigma_{44}$$

$$x_{75} \leq \sigma_{45}$$

$$x_{76} \leq \sigma_{46}$$

$$x_{77} \leq \sigma_{47}$$

$$x_{78} \leq \sigma_{48}$$

$$x_{79} \leq \sigma_{49}$$

$$x_{71} \leq \sigma_{51}$$

$$x_{72} \leq \sigma_{52}$$

$$x_{73} \leq \sigma_{53}$$

$$x_{74} \leq \sigma_{54}$$

$$x_{75} \leq \sigma_{55}$$

$$x_{76} \leq \sigma_{56}$$

$$x_{77} \leq \sigma_{57}$$

$$x_{78} \leq \sigma_{58}$$

$$x_{79} \leq \sigma_{59}$$

$$x_{41} \leq \mathcal{J}_{42}$$

$$x_{41} + x_{42} \leq \mathcal{J}_{43}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq \mathcal{J}_{44}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq \mathcal{J}_{45}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \leq \mathcal{J}_{46}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \leq \mathcal{J}_{47}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq \mathcal{J}_{48}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} \leq \mathcal{J}_{49}$$

$$x_{51} \leq \mathcal{J}_{52}$$

$$x_{51} + x_{52} \leq \mathcal{J}_{53}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq \mathcal{J}_{54}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq \mathcal{J}_{55}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} \leq \mathcal{J}_{56}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} \leq \mathcal{J}_{57}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} \leq \mathcal{J}_{58}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} \leq \mathcal{J}_{59}$$

Por lo que hace a la función objetivo, se considerará que el costo diario por operario es de \$ 50.00, cualquiera que sea la actividad y el día, entonces:

$$Z = 50 \cdot [2(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19}) + 4(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29}) + 5(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36})]$$

$$\begin{aligned}
 &+x_{37}+x_{38}+x_{39})+3(x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49}) \\
 &+1(x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59})+4(x_{61}+x_{62} \\
 &+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{69})+3(x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75} \\
 &+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{79})]
 \end{aligned}$$

Para resolver el problema se empleará el método de Benders.

VIII. MODELO PRITSKER, WATTERS Y WOLFE
(Asignación de Recursos en Pro--
yectos Múltiples)

riables x_{it} para cada proyecto deben valer 0 hasta que hayan sido terminadas. Esto es, el proyecto i se habrá terminado en el período t cuando se tenga $\sum_{q=1}^{t-1} x_{ijq} = 1$ para todas las N actividades -

del proyecto i . Este requerimiento puede anotarse:

$$x_{it} \leq \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=1}^{t-1} x_{ijq} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, I \\ t = e_i, e_i+1, \dots, G \end{array} \quad (3)$$

Se requiere además una restricción cuando una actividad no puede iniciarse hasta que otra ó más de las restantes hayan sido terminadas. -

Por ejemplo si en el proyecto i la actividad m debe preceder a la n y t_{im} y t_{in} son los períodos de terminación de las actividades m y n respectivamente deberá tenerse:

$$t_{im} + d_{in} \leq t_{in}$$

Nótese que $t_{im} = \sum_{t=l_{im}}^{u_{im}} t x_{imt}$ y $t_{in} = \sum_{t=l_{in}}^{u_{in}} t x_{int}$ Conse -

cientemente las restricciones de forma apropiadas son:

$$\sum_{t=l_{im}}^{u_{im}} t x_{imt} + d_{in} \leq \sum_{t=l_{in}}^{u_{in}} t x_{int} \quad (4)$$

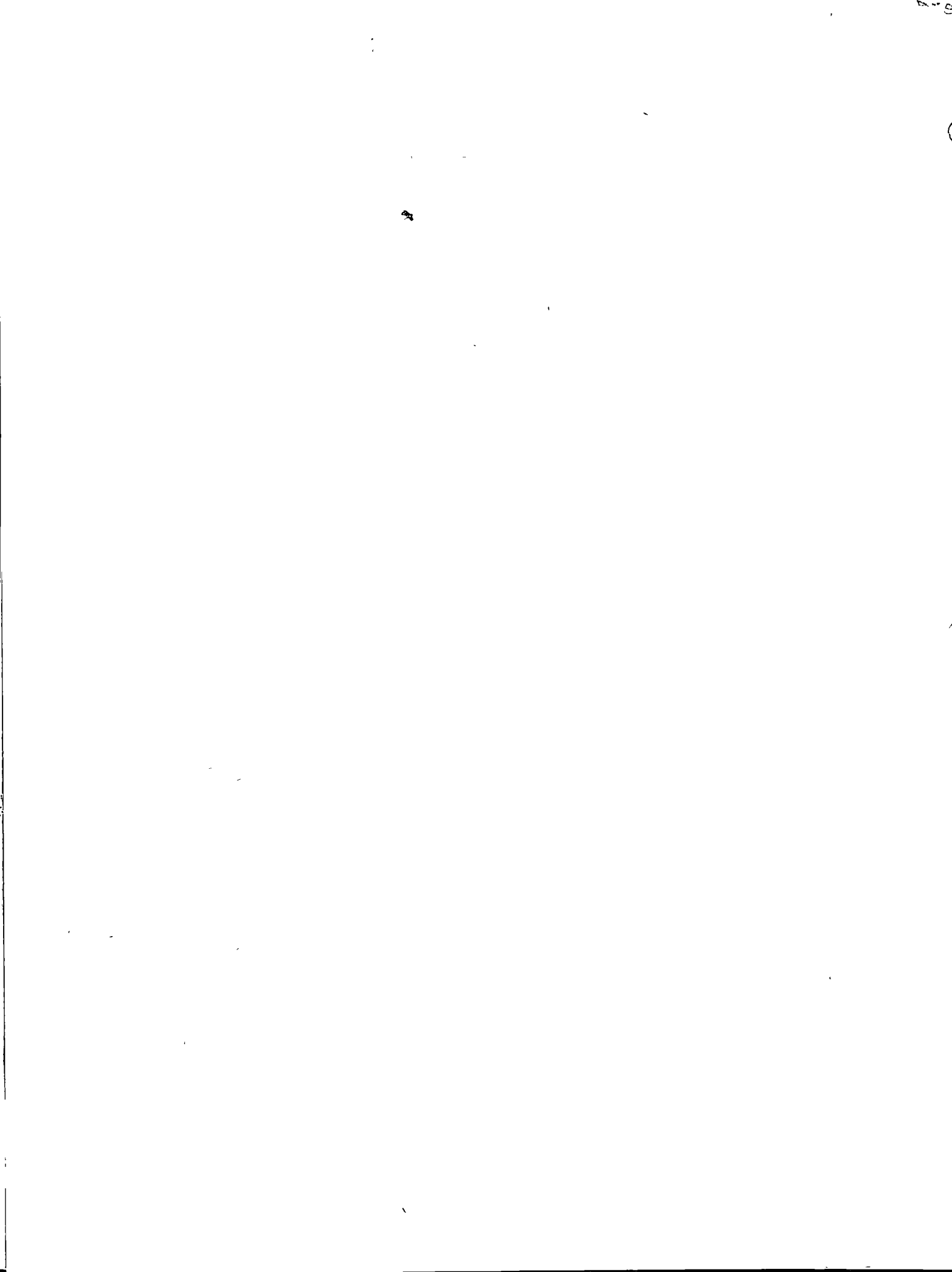
Por otra parte los valores r_{ijk} designan al número de unidades de recurso tipo k que se necesitan para llevar a cabo la actividad j

del proyecto i . Se supone que los recursos requeridos por una actividad se usan hasta que ella se termina. Si ésta hipótesis no se verifica entonces son necesarias algunas modificaciones. Por ejemplo si un cierto recurso solo se usa en los primeros p períodos de la actividad con $p < d_{ij}$ entonces esa actividad se trata como 2 actividades secuenciales con diferentes requerimientos y con duraciones p y $d_{ij} - p$. De esta manera las restricciones de recursos podrán aplicarse a cualquier división de una actividad en 2 ó más sub-actividades.

En cualquier período dado, la cantidad del recurso k utilizada no puede exceder a la cantidad disponible de dicho recurso. Un trabajo estará siendo procesado en el período t y terminado en el período q si $t \leq q \leq t + d_{ij} - 1$. Consecuentemente las restricciones de tamaño pueden escribirse:

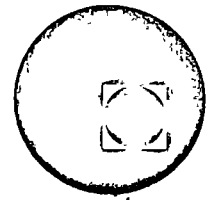
$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=t}^{t+d_{ij}-1} r_{ijk} x_{ijq} \leq R_{kt}; \quad \begin{matrix} t = \min a_{ij}, \dots, \max G_i \\ k = 1, 2, \dots, K \end{matrix} \quad (5)$$

De esta manera el problema de optimización consiste en maximizar la función objetivo dada en (1) sujeta a las restricciones (2) a (5).





centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam



CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS
EN LA GESTION DE EMPRESAS.

INTRODUCCION A LOS FENOMENOS ALEATORIOS I.

ING. CLEMENTE CASTILLEJA.

1) DEFINICIONES BASICAS:

EXPERIMENTO ALEATORIO. — EN SU FORMA MAS GENERAL ES LA OBSERVACION, PARA FINES DE ANALISIS, DE UN FENOMENO ALEATORIO.

FENOMENO ALEATORIO. — ES AQUEL CUYA OCURRENCIA ESTA CONDICIONADA POR EL AZAR.

VARIABLE ALEATORIA. — ES AQUELLA QUE REPRESENTA LOS RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO.

TEORIA DE PROBABILIDADES. — ES EL ESTUDIO DE LOS METODOS QUE SON COMUNES EN EL TRATAMIENTO DE LOS FENOMENOS ALEATORIOS.

2) DEFINICIONES DE PROBABILIDAD:

1) DEFINICION CLASICA:

SI UN EVENTO A SE VERIFICA DE h FORMAS DISTINTAS DE n POSIBLES, TODAS IGUALMENTE FACTIBLES, ENTONCES LA PROBABILIDAD DE QUE EL EVENTO A OCURRA QUEDA DEFINIDA POR EL COCIENTE:

$$P(A) = h/n$$

2) DEFINICION EMPIRICA:

SI S CONTIENE TODOS LOS RESULTADOS POSIBLES DEL EXPERIMENTO E, A ES UN EVENTO CONTENIDO EN S Y SE REALIZA EL EXPERIMENTO E

2. VALORES EN h DE LAS CUALES SE VERIFICA
1, ENTONCES LA PROBABILIDAD DEL EVENTO Δ
QUEDA DEFINIDA POR EL LÍMITE CUANDO $n \rightarrow \infty$
DEL COCIENTE (h/n) ESTO ES:

$$P(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h}{n} \right)$$

3- DEFINICION AXIOMÁTICA

SI Δ Y B SON DOS EVENTOS CONTENIDOS EN EL
ESPACIO S , ENTONCES:

AXIOMA 1 $0 \leq P(\Delta) \leq 1$

AXIOMA 2 $P(S) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

AXIOMA 3 i) SI Δ Y B SON MUTUAMENTE
EXCLUSIVOS, $\Delta \cap B = \emptyset$

$$P(\Delta + B) = P(\Delta) + P(B)$$

ii) SI Δ Y B NO SON MUTUAMENTE
EXCLUSIVOS, $\Delta \cap B \neq \emptyset$

$$P(\Delta + B) = P(\Delta) + P(B) - P(\Delta \cap B)$$

EJEMPLO 1.

UNA FÁBRICA PRODUCE 100 ARTICULOS POR UNI-
DAD DE TIEMPO (UT) LOS CUALES SON ALMACEN-
NADOS SIN IDENTIFICACIÓN QUE LOS DISTINGA EN-
TRE SÍ. LA FÁBRICA DISPONE DE TRES EQUIPOS
QUE TRABAJAN INDEPENDIENTEMENTE Y REALIZAN TODA
LA PRODUCCIÓN DE LA FÁBRICA. EL EQUIPO 1,

PRODUCE 50 ARTÍCULOS POR DÍ, EL EQUIPO 2 PRODUCE 30, Y EL EQUIPO 3 PRODUCE 20.

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL SACAR AL AZAR UN ARTÍCULO, ESTE HAYA SIDO HECHO POR EL EQUIPO 1?

$$\text{NÚMERO TOTAL DE ARTÍCULOS} = 50 + 30 + 20 = 100$$

$$\text{NÚMERO DE ARTÍCULOS HECHOS POR EL EQUIPO 1} = 50$$

SI LA EXTRACCIÓN DEL ARTÍCULO SE REALIZA AL AZAR, SE PUEDE SUPONER QUE CUALQUIERA DE LOS 100 ARTÍCULOS PUEDE SER SELECCIONADO CON LA MISMA PROBABILIDAD, ES DECIR "TODOS SON IGUALMENTE FACTIBLES"

DE DONDE:

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{EL ARTÍCULO EXTRAÍDO} \\ \text{PROVIENE DEL EQUIPO 1} \end{array} \right\} = \frac{50}{100} = \frac{5}{10}$$

DE LA MISMA FORMA:

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{EL ARTÍCULO EXTRAÍDO} \\ \text{PROVIENE DEL EQUIPO 2} \end{array} \right\} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{EL ARTÍCULO EXTRAÍDO} \\ \text{PROVIENE DEL EQUIPO 3} \end{array} \right\} = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

ADemás:

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{EL ARTÍCULO EXTRAÍDO} \\ \text{PROVIENE DE CUALQUIERA} \\ \text{DE LOS 3 EQUIPOS} \end{array} \right\} = \frac{50}{100} + \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = 1$$

EJEMPLO 2

Se sabe, por la información que ha sido registrada por la fábrica, que el número medio de artículos defectuosos que produce la fábrica por unidad de tiempo es de 7. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar al azar un artículo del almacén, este resulte defectuoso?

$$\{A\} = \{\text{sacar un artículo defectuoso}\}$$

$$N\{A\} = \text{número de formas en que se verifica el evento } A$$

$$N\{A\} = 7$$

$$N\{S\} = \text{número de formas en que se verifica el universo } S$$

$$N\{S\} = 100$$

$$P\left\{ \begin{array}{l} \text{de que el artículo} \\ \text{extraído sea defectuoso} \end{array} \right\} = \frac{7}{100}$$

$$P[D] = \frac{7}{100}$$

3) INDEPENDENCIA DE EVENTOS

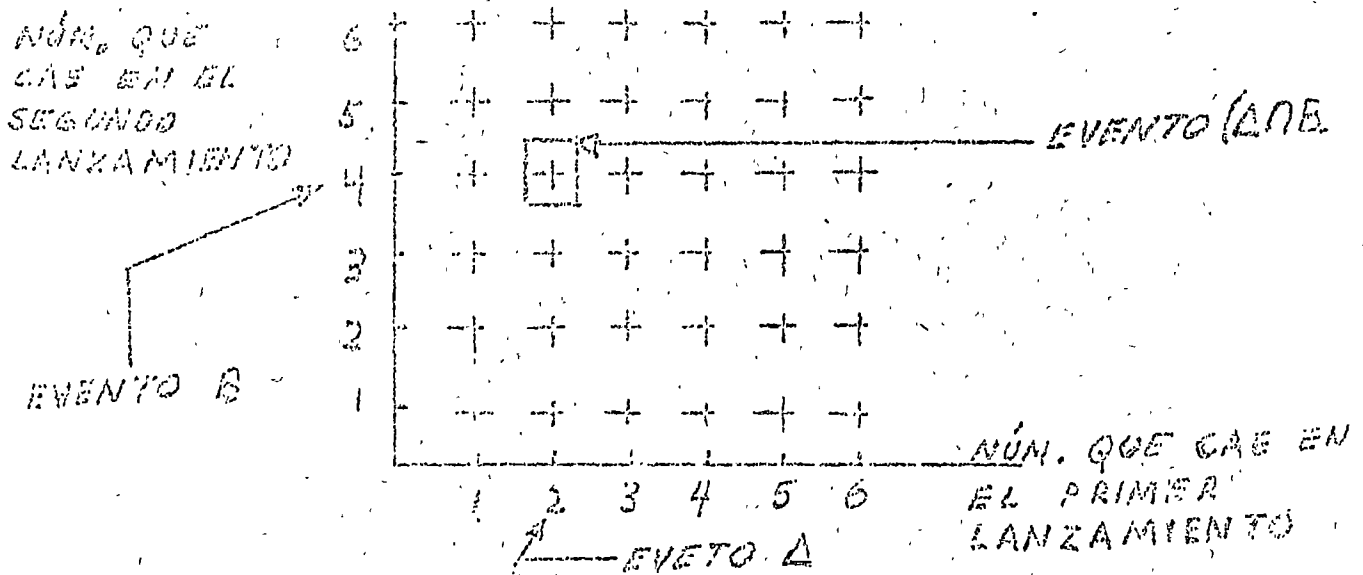
DEFINICIÓN:

LOS EVENTOS A Y B SON INDEPENDIENTES ENTRE SI, SI LA OCURRENCIA DE A NO AFECTA LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE B Y VICEVERSA. SI A Y B SON INDEPENDIENTES SE CUMPLE QUE:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EJEMPLO ACLARATORIO:

SE LANZA UN DADO DOS VECES CONSECUTIVAS ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE CAIGA HACIA ARRIBA UN 2 EN EL PRIMER LANZAMIENTO Y UN 4 EN EL SEGUNDO?



$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

A) PROBABILIDAD CONDICIONAL

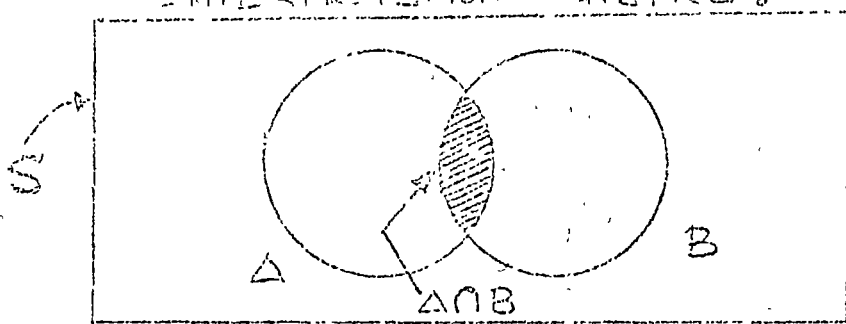
DEFINICIÓN:

SI Δ Y B SON LOS EVENTOS Y LA OCURRENCIA DE Δ IMPLICA LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE B Y VICEVERSA, SE DICE QUE Δ Y B SON EVENTOS DEPENDIENTES, O SEA:

$$P[\Delta/B] = \frac{P[\Delta \cap B]}{P[B]}$$

EN OTRAS PALABRAS, B PROPORCIONA INFORMACION ADICIONAL DE Δ CON LA CUAL SE PUEDE REVALUAR LA PROBABILIDAD ASIGNADA A ESTE.

INTERPRETACION GRAFICA:



$$P(A) = \frac{A}{S}$$

$$P(B) = \frac{B}{S}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

≡ EJEMPLO 3

CONTINUANDO CON EL EJEMPLO 1; DE LOS REGISTROS LLEVADOS POR LA FÁBRICA SE HA OBSERVADO QUE EL NÚMERO MEDIO DE ARTÍCULOS DEFECTUOSOS PRODUCIDOS POR EL EQUIPO 1 SON 2 POR UNIDAD

DE ALTIPO, EN LA MISMA FORMA SE HA DETEC-
 TADO QUE EL EQUIPO 2 PRODUCE 3 ARTÍCULOS
 DEFECTUOSOS POR UT Y EL EQUIPO 3, 2
 ARTÍCULOS DEFECTUOSOS POR UT. CALCULAR
 LA PROBABILIDAD DE OBTENER, EN UNA EX-
 TRACCIÓN AL AZAR, UN ARTÍCULO DEFE C-
 TUOSO DADO QUE PROVIENE DEL EQUIPO 1;
 DEL EQUIPO 2; DEL EQUIPO 3.

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{SACAR UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO, SI SE SA} \\ \text{BE QUE PROVIENE DEL} \\ \text{EQUIPO 1} \end{array} \right\} = P[D|E_1]$$

$$P[D|E_1] = \frac{P[D \cap E_1]}{P[E_1]}$$

NÚMERO DE ARTÍCULOS
 DEFECTUOSOS HECHOS POR
 EL EQUIPO 1

NÚMERO TOTAL DE
 ARTÍCULOS

NÚMERO DE ARTÍCULOS
 HECHOS POR EL EQUIPO 1

NÚMERO TOTAL DE
 ARTÍCULOS

$$P[D|E_1] = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{2}{50} = \frac{4}{100}$$

EN LA MISMA FORMA:

$$P[D|E_2] = \frac{3}{30} = \frac{10}{100}$$

$$P[D|E_3] = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}$$

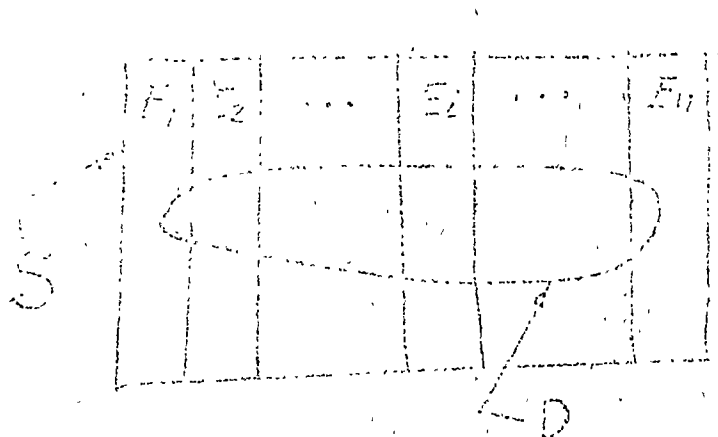
5) REGLA DE PROBABILIDADES TOTALES

Si $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_n$ SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI, TAL QUE SU UNIÓN LLENE EL UNIVERSO, Y D ES UN EVENTO NO VACÍO SIEMPRE EXCLUSIVO CON ESTOS; SI SE CUMPLE

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) \quad \text{SE DEMUESTRA QUE:}$$

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) P(E_i)$$

DEMOSTRACION:



$$\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) = P(D)$$

$$P(D \cap E_i) = \frac{P(D \cap E_i)}{P(E_i)}$$

$$P(D \cap E_i) = P(D \cap E_i) P(E_i)$$

$$\sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) P(E_i)$$

$$\sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) = P(D) \quad \text{DE DONDE:}$$

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) P(E_i)$$

EJEMPLO 4:

UTILIZANDO LA INFORMACION DE LOS EJEMPLOS 1 Y 3, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE UN ARTÍCULO EXTRAÍDO AL AZAR RESULTE DEFECTUOSO.

$$P[D] = P[D|E_1]P[E_1] + P[D|E_2]P[E_2] + P[D|E_3]P[E_3]$$

$$P[D|E_1] = \frac{4}{100}$$

$$P[E_1] = \frac{5}{10}$$

$$P[D|E_2] = \frac{10}{100}$$

$$P[E_2] = \frac{3}{10}$$

$$P[D|E_3] = \frac{10}{100}$$

$$P[E_3] = \frac{2}{10}$$

DATOS DEL EJEMPLO

No. 3

DATOS DEL EJEMPLO

No. 1

$$P[D] = \frac{4}{100} \cdot \frac{5}{10} + \frac{10}{100} \cdot \frac{3}{10} + \frac{10}{100} \cdot \frac{2}{10} = \frac{70}{1000}$$

$$P[D] = \frac{7}{100}$$

6) TEOREMA DE BAYES

BAJO LAS MISMAS HIPÓTESIS SUPUESTAS EN EL DESARROLLO DE LA EXPRESION DE LA PROBABILIDAD TOTAL SE TIENE QUE:

$$(E_j \cap D) = (D \cap E_j)$$

$$P[E_1|D] = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{7}{100}} = \frac{200}{700} = \frac{2}{7}$$

EN LA MISMA FORMA; PARA $j=2$

$$P[D|E_2] P[E_2] = \frac{10}{100} \cdot \frac{3}{10} = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$$

$$P[E_2|D] = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{7}{100}} = \frac{300}{700} = \frac{3}{7}$$

PARA $j=3$

$$P[D|E_3] P[E_3] = \frac{10}{100} \cdot \frac{2}{10} = \frac{20}{1000} = \frac{2}{100}$$

$$P[E_3|D] = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{7}{100}} = \frac{200}{700} = \frac{2}{7}$$

RESUMEN

$$P[E_1|D] = \frac{2}{7}$$

$$P[E_2|D] = \frac{3}{7}$$

$$P[E_3|D] = \frac{2}{7}$$

$$\sum_{i=1}^3 P[E_i|D] = 1$$

$i=1$

$$P(E_i/D) = \frac{P(E_i \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|E_i) P(E_i)}{P(D)}$$

$$P(D \cap E_i) = P(D/E_i) P(E_i)$$

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D/E_i) P(E_i)$$

ANALÓGAMENTE

$$P(E_i/D) = \frac{P(D/E_i) P(E_i)}{\sum_{i=1}^n P(D/E_i) P(E_i)}$$

EJEMPLO 5

UTILIZANDO LA INFORMACIÓN DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE UN ARTÍCULO QUE SE HA EXTRAÍDO Y RESULTO DEFECTUOSO, HAYA SIDO HECHO POR EL EQUIPO 1, POR EL EQUIPO 2, POR EL EQUIPO 3

$$\sum_{i=1}^n P(D/E_i) P(E_i) = P(D) = \frac{7}{100}$$

$$P(D/E_1) P(E_1) = \frac{4}{100} \cdot \frac{5}{10} = \frac{20}{1000} = \frac{2}{100}$$

$$P(E_1/D) = P$$

PROBABILIDAD DE QUE UN ARTÍCULO QUE RESULTÓ DEFECTUOSO, HAYA SIDO HECHO POR EL EQUIPO 1

7) DISTRIBUCION BINOMIAL

EXPERIMENTO DE BERNOULLI. -- ES AQUEL QUE TIENE UNO DE DOS RESULTADOS POSIBLES. ÉXITO-FALLA, DESECCION-NO DESECCION, O-SI, ETC.

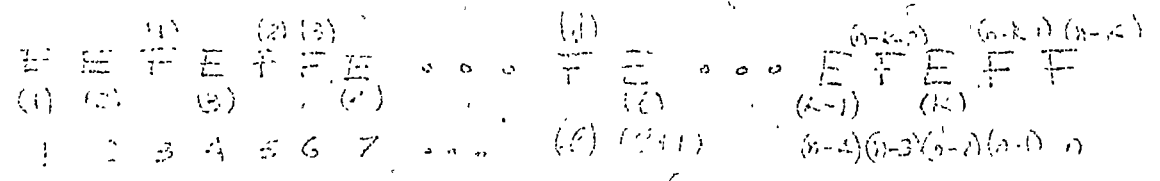
EVENTOS DE BERNOULLI. -- SON LOS DOS RESULTADOS POSIBLES DE UN EXPERIMENTO DE BERNOULLI.

EXPERIMENTO I.

SE REALIZAN n EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES DE BERNOULLI, CUYO RESULTADO ES ÉXITO O FALLA, Y SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE RESULTEN k ÉXITOS Y $(n-k)$ FALLAS EN UN ORDEN DETERMINADO EN LOS n EXPERIMENTOS. SI P ES LA PROBABILIDAD DE ÉXITO EN UN INTENTO Y $(1-P)$ ES LA PROBABILIDAD DE FALLA.

ÉXITO = E $P\{\text{ÉXITO}\} = P$
 FALLA = F $P\{\text{FALLA}\} = 1-P$

ORDEN DE RESULTADOS QUE INTERESA:



SEA $\{\Delta\} = \{\text{EL ORDEN DE RESULTADOS ANTERIOR}\}$

P APARECE (k) VECES
 $(1-P)$ APARECE $(n-k)$ VECES, DE DONDE SI LOS EVENTOS SON INDEPENDIENTES:

$$P\{\Delta\} = P^k (1-P)^{n-k}$$

PLANTEAMIENTO 2

SE REALIZAN n EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES DE BERNOULLI Y SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE RESULTEN k ÉXITOS, EN UN ORDEN CUALQUIERA, EN LOS n INTENTOS.

$$\left. \begin{array}{l} \text{NÚMERO DE FORMAS POSIBLES} \\ \text{EN QUE SE PRESENTAN } k \\ \text{ÉXITOS EN } n \text{ INTENTOS} \end{array} \right\} = C_k^n$$

TODAS SON FORMAS DIFERENTES (EXCLUSIVAS) Y DE IGUAL PROBABILIDAD $[p^k (1-p)^{n-k}]$ DE DONDE:

$$P\{k \text{ ÉXITOS EN } n \text{ INTENTOS}\} = P(n, k)$$

$$P(n, k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

EJEMPLO:

CON LA INFORMACIÓN DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES, SE SABE QUE LA PROBABILIDAD DE SACAR UN ARTÍCULO DEFECTUOSO EN UN INTENTO ES $(7/100)$. UN COMPRADOR SE LLEVA UN LOTE DE 5 ARTÍCULOS, SE DESEA CONOCER LA PROBABILIDAD DE QUE EN EL LOTE VAYAN:

- I) NINGÚN ARTÍCULO DEFECTUOSO.
- II) UN ARTÍCULO DEFECTUOSO.
- III) MÁS DE UN ARTÍCULO DEFECTUOSO.

$$I) P\{ \text{NINGÚN ARTÍCULO DEFECTUOSO} \} = P(5, 0)$$

$$P(5, 0) = C_0^5 \left(\frac{7}{100}\right)^0 \left(\frac{93}{100}\right)^5 = \left(\frac{93}{100}\right)^5$$

$$P\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array} \right\} = P\{5;1\}$$

$$P\{5;1\} = \binom{5}{1} \left(\frac{7}{100}\right)^1 \left(\frac{93}{100}\right)^4 = \frac{35 \times 93^4}{100^5}$$

$$\text{III) } P\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array} \right\} = 1 - P\{5;0\} - P\{5;1\}$$

DADO QUE: $\sum_{k=0}^5 P\{5,k\} = 1$

$$P\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array} \right\} = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^5 - \left(\frac{35 \times 93^4}{100^5}\right)$$

$$P\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array} \right\} = \frac{4,2193}{100}$$

b) DISTRIBUCIÓN DE POISSON

SE REALIZAN n EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES DE BERNOULLI Y SE DESHA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE k ÉXITOS, EN UN ORDEN CUALQUIERA, EN LOS n INTENTOS, SI n ES UN NÚMERO "GRANDE".

$p = \left\{ \text{PROBABILIDAD DE UN ÉXITO EN UN INTENTO} \right\}$

$$\text{SI } \lambda = np, \quad p = \lambda/n$$

$$P(n, 0) = C_0^n p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$$

$$\ln [P(n, 0)] = n \ln (1-p)$$

$$\ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} - \frac{\lambda^3}{3n^3} - \dots$$

SI n ES "GRANDE" $n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \approx -\lambda$, DADO QUE

$$n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} - \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} - \dots = -\lambda$$

$$\ln P(n, 0) = -\lambda \Rightarrow P(n, 0) = e^{-\lambda}$$

$$\text{SI } p \rightarrow 0 \Rightarrow (1-p) \rightarrow 1$$

$$\frac{P(k, n)}{P(k-1, n)} = \frac{C_k^n p^k (1-p)^{n-k}}{C_{k-1}^n p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

$$= \frac{\lambda - (k-1)p}{k(1-p)} \approx \frac{\lambda}{k}$$

... $P(k-1, n)$ ENTONCES:

$$P(k, n) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

... $P(k, n) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, POR INDUCCIÓN:

$$P(k, n) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ PARA } k=0, 1, 2, \dots$$

EJEMPLO:

CON LA INFORMACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN LOTE DE 100 SE ENCONTREN:

- (i) MÁS DE DOS DEFECTIVOS (ii) UN ÚNICO DEFECTIVO.
- (iii) MÁS DE OCHO DEFECTIVOS (iv) MÁS DE DOS DEFECTIVOS

$$P(k, n) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\lambda = np = 100 \times \frac{7}{100} = 7$$

$$(i) P(1, 2) = \frac{7^2 e^{-7}}{2!} = \frac{49}{2} e^{-7}$$

$$(ii) P(7, 1) = \frac{7^1 e^{-7}}{1!} = 7 e^{-7}$$

$$(iii) P(10, 0) = \frac{7^0 e^{-7}}{0!} = e^{-7}$$

$$(iv) P\{\text{MÁS DE 2 DEFECTIVOS}\} = 1 - P(7, 0) - P(7, 1) - P(7, 2)$$

$$P\{\text{MÁS DE 2 DEFECTIVOS}\} = 1 - \frac{65}{2} e^{-7}$$

9) DISTRIBUCIÓN NORMAL

Bajo condiciones muy generales la variable aleatoria Y definida por:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

con X_i variables aleatorias independientes tiene una función de probabilidad normal definida por la expresión:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

Donde $y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$

Ejemplo ilustrativo:

La variable aleatoria X tiene una media de 30 con una desviación estándar de 10. ¿Cuál es la probabilidad que en una observación X tome un valor entre 20 y 40?

$$y_1 = \frac{20-30}{10} = -1 \quad y_2 = \frac{40-30}{10} = 1$$

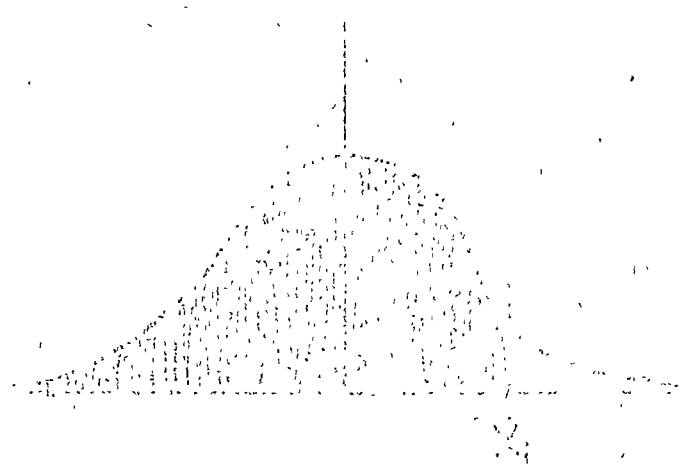
$$P\{20 \leq X \leq 40\} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$P\{20 \leq X \leq 40\} = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

Los valores de la integral están generalmente tabulados en la siguiente forma.

con $\lambda = \frac{K_1 + K_2}{n}$
 (VALORES DE K_1 Y K_2 EN LA TABLA)
 con $\lambda = \frac{K_1 + K_2}{n}$

$$P\{Y \leq K_1 + K_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



70) APROXIMACION DE LAS FUNCIONES BINOMIAL Y DE POISSON POR LA DISTRIBUCION NORMAL

a) BINOMIAL: cuando n es grande y p es pequeño

$$P\{Y = K_1\} = \binom{n}{K_1} p^{K_1} (1-p)^{n-K_1} = \frac{n!}{K_1! (n-K_1)!} p^{K_1} (1-p)^{n-K_1}$$

$$P\{Y = K_2\} = \frac{n!}{K_2! (n-K_2)!} p^{K_2} (1-p)^{n-K_2}$$

$$P\{Y \leq K_1 + K_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

con $\lambda = \frac{K_1 + K_2}{n}$

con $\lambda = \frac{K_1 + K_2}{n}$

LA DISTRIBUCION DE POISSON Y SU APROXIMACION POR LA BINOMIAL, EN OTRAS PALABRAS APROXIMACION NORMAL SE REALIZA POR LA MISMA FORMA PARA LOS DOS CASOS

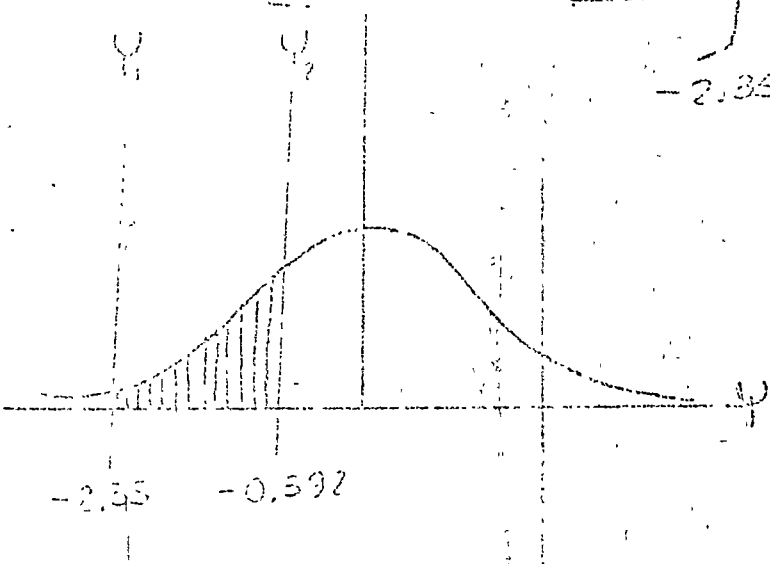
EXAMPLE

CON LA DISTRIBUCION DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES
CALCULAR LA PROBABILIDAD DE SACAR EN UN LOTE
DE 100 ARTICULOS ENTRE 4 Y 5 ARTICULOS
DEFECTUOSOS.

$$Y_1 = \frac{4 - 100 \times \frac{27}{100}}{\sqrt{100 \left(\frac{27}{100} \right) \left(\frac{73}{100} \right)}} \triangleq -2.35$$

$$Y_2 = \frac{5 - 100 \times \frac{27}{100}}{\sqrt{100 \left(\frac{27}{100} \right) \left(\frac{73}{100} \right)}} \triangleq -0.392$$

$$P[4 \leq X \leq 5] = \int_{-2.35}^{-0.392} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 0.2389$$



$$\Delta_{Y_1, Y_2} = \Delta_{-\infty, Y_1} - \Delta_{-\infty, Y_2}$$

$$\Delta_{-\infty, Y_1} = 0.9906$$

$$\Delta_{-\infty, Y_2} = 0.6517$$

$$\Delta_{Y_1, Y_2} = 0.2389$$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

$f(x)$ ES UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA VARIABLE ALEATORIA X SI CUMPLE QUE:

(i) $f(x) \geq 0$ $\forall -\infty < x < \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

(iii) $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = P[X_1 \leq X \leq X_2]$

(iv) ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ SI X ES V.A. CONTINUA

$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(x_i)$ SI X ES V.A. DISCRETA

$E[X] = M_X$ DONDE M_X ES LA MEDIA DE LA V.A. X

EjemPlo: LANZAMIENTO DE UN DADO.

SE DE UN	1	2	3	4	5	6	
SE DADO	5	10	15	20	25	30	X_i
CON PROBABILIDAD	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$P(x_i)$

¿CUANTO ESPERO GANAR EN UNA SOLA JUEGADA?

$$E[X] = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{6} \cdot 25 + \frac{1}{6} \cdot 30$$

$$E[X] = 17.5$$

ESPERO GANAR 17.5

EjemPlo:

UN INVESTITORISTA HA COLOCADO 100 UM. (UNIDADES MONETARIAS). PREGUNTA: QUE SE PUEDEN PRESENTAR 5 SITUACIONES FUTURAS DIFERENTES.

LA SITUACION FUTURA

SE PUEDE PRESENTAR CUALQUIERA DE LAS SITUACIONES DE:

EN CUYO CASO GANARAS (EN UM)

1	2	3	4	5	$P(X_i)$
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	
20	25	300	-25	-20	X_i

$$E[X] = \frac{1}{15} \cdot 20 + \frac{1}{15} \cdot 25 + \frac{1}{30} \cdot 300 - \frac{1}{20} \cdot 25 - \frac{1}{15} \cdot 20$$

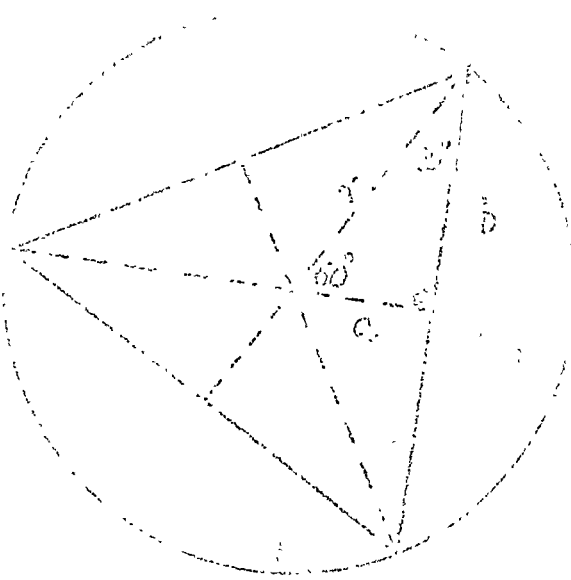
$$E[X] = 10$$

EL INVESTITORISTA ESPERA GANAR 10 UNIDADES MONETARIAS

PROBLEMA DE BERTRAND

ENCUENTRA LA DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD.
 EN UN CÍRCULO DE RADIO r SE DIBUJA UN TRIÁNGULO
 CON VERTICES A, B Y C CUAL ES LA PROBABILIDAD DE
 QUE LA LONGITUD DE UNA CUERDA ESCAJA (LA) DE
 $r\sqrt{3}$, LA LONGITUD DE UN LADO DEL TRIÁNGULO EQUILÁ-
 TERO INSERITO?

LA SOLUCIÓN



$$a = r \sin 30^\circ$$

$$b = r \cos 30^\circ$$

$$a = \frac{r}{2}$$

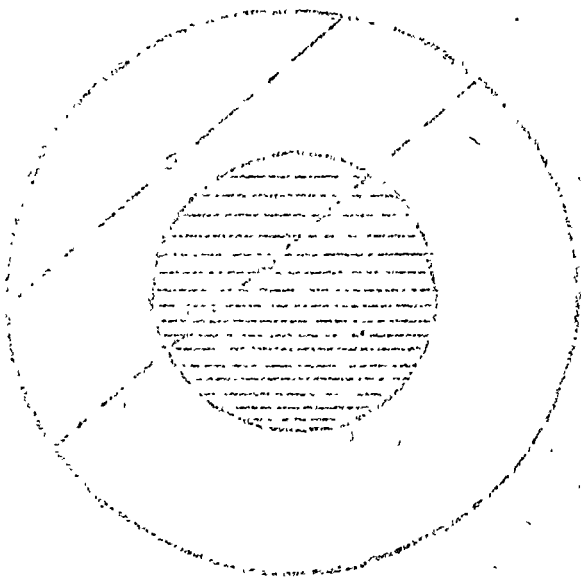
$$b = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$ab = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

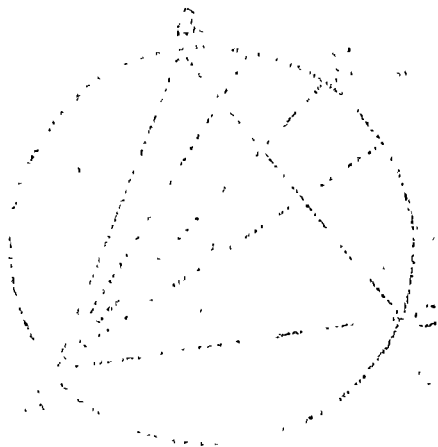
$$\Delta = [L > r\sqrt{3}]$$

$$P[\Delta] = \frac{\pi r^2 / 4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

SI EL CENTRO DE LA LÍNEA
 CAE EN EL CÍRCULO PEQUEÑO
 $L > r\sqrt{3}$ LUEGO $P[\Delta] = \frac{\Delta \pi r^2}{\pi r^2}$



SOLUCIÓN $P[\Delta] = \frac{1}{4}$

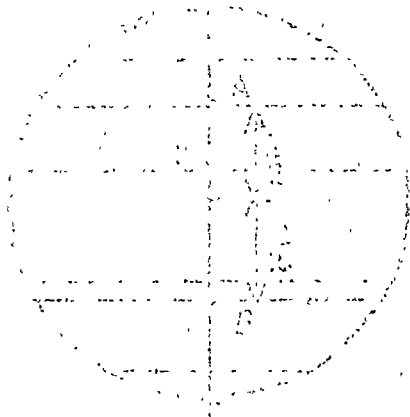


1º X (C) = 2πR cos(α)
 distancia A-C = R cos α

$$P(A) = \frac{2\pi R \cos \alpha}{2\pi R} = \cos \alpha$$

2º solución $P(A) = \frac{1}{3}$

3º solución



si, el centro de la esfera
 (C) = sea punto A' entonces
 A-C = R

$$P(A) = \frac{R}{R} = \frac{1}{3}$$

3º solución $P(A) = \frac{1}{3}$

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad \left[\frac{1}{3} \right] \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

si hay una línea que está

APLICACION DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN
LA GESTION DE EMPRESAS

MODELOS DE ASIGNACION DE RECURSOS

JOEL O. AGUIRRE R.

- I GRAFICAS Y CAMINOS OPTIMOS
- II PLANEACION, PROGRAMACION Y
CONTROL DE PROYECTOS
- III MODELO SHAFFER
- IV MODELO WIEST
- V MODELO HADLEY
- VI MODELO PRITSKER, WATTERS Y WOLFE

I GRAFICAS Y CAMINOS OPTIMOS



Instituto Mexicano Del Seguro Social

CONCEPTOS

Gráfica de Orden n

Sea un conjunto finito

$X = \{x_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ y el conjunto

$A = \{(x_i, x_j) / x_i, x_j \in X\}$ a la pareja

$G = [X, A]$ se le llama gráfica de orden n

A cada elemento del conjunto X le corresponde un punto del plano que se llama vértice y a cada elemento del conjunto A le corresponde una flecha llamada arco que va del vértice x_i al vértice x_j .

Gráfica de orden n

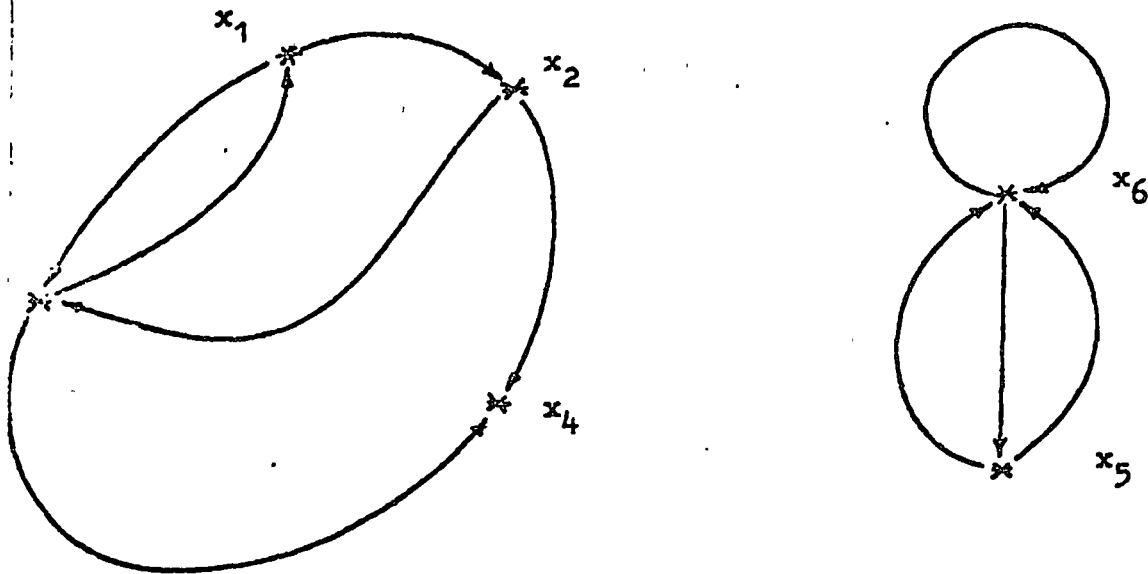


Figura 1

Vértices Adyacentes.

Son aquellos vértices que están unidos mediante un arco, por ejemplo en la figura 1, los vértices x_1 y x_2 , x_3 y x_4 son adyacentes.

Extremos.

Se dice que un vértice es extremo inicial de un arco si este se inicia en dicho arco, y un vértice es extremo final de un arco si es el vértice en donde termina el arco.

CAMINO

Es una secuencia de arcos tal que el extremo final de cada arco coincide con el extremo inicial del arco que le sigue. Así en la figura 2 se pueden mencionar los caminos.

$$C_1 = \{x_3, x_1, x_2, x_5, x_4\}$$

$$C_2 = \{x_3, x_1, x_2, x_2, x_3, x_1\}$$

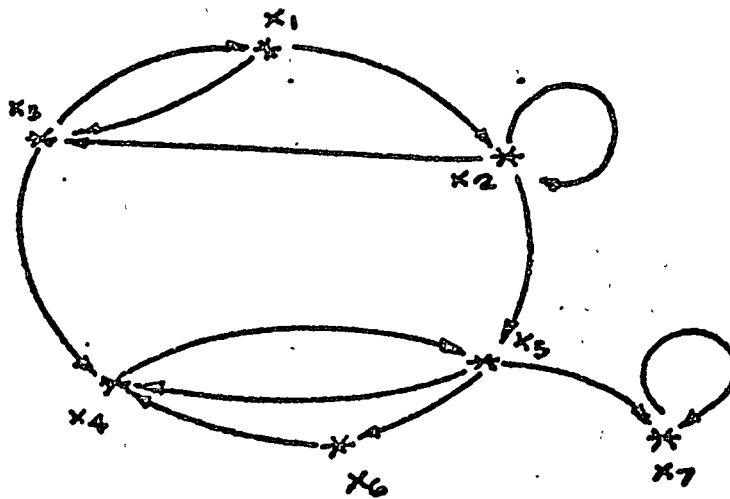


Figura 2

CIRCUITO

Es un camino en donde el vértice inicial coincide con el vértice final. Por ejemplo en la figura 2.

$$C_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_1\}$$

LONGITUD DE UN CAMINO

La longitud de un camino es el número de arcos que contiene la secuencia.

VALOR ASOCIADO A UN ARCO

A cada arco de una gráfica es posible asociarle un número $v(x_i, x_j)$ llamado valor del arco (x_i, x_j) así por ejemplo en la siguiente gráfica, figura 3, cada arco tiene asociado un valor.

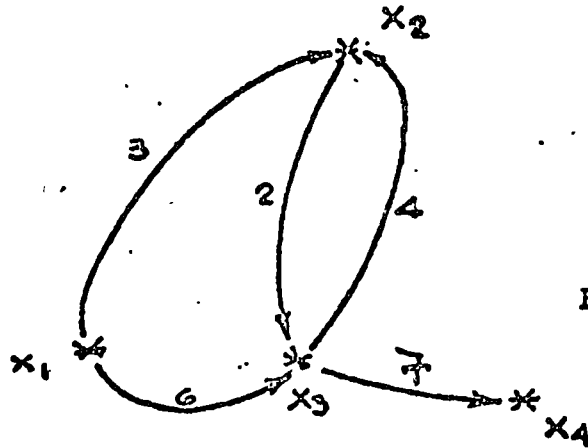


Figura 3

- $v(x_1, x_2) = 3$
- $v(x_1, x_3) = 6$
- $v(x_2, x_3) = 2$
- $v(x_3, x_2) = 4$
- $v(x_3, x_4) = 7$

CAMINOS DE LONGITUD OPTIMA

Camino de Longitud Mínima

En una gráfica $G = \{ X, A \}$ al camino de menor número de arcos que va del vértice $x_i \in X$ al vértice $x_j \in X$ se le llama camino de longitud mínima.

Camino de longitud máxima

En una gráfica $G = \{ X, A \}$ al camino de mayor número de arcos que va del vértice $x_i \in X$ al vértice $x_j \in X$ se le llama camino de longitud máxima.

CAMINOS DE VALOR OPTIMO

Camino de Valor mínimo.

Sea una gráfica $G = \{X, A\}$ en donde todo arco $(x_i, x_j) \in A$ tiene asociado un valor $v(x_i, x_j)$. Se llama camino de valor mínimo aquel que va del vértice $x_m \in X$ al vértice $x_n \in X$, tal que su valor total:

$$v(c) = \sum_{(x_i, x_j) \in c} v(x_i, x_j) \text{ es mínimo}$$

Camino de valor máximo

Al camino cuyo valor total $v(c)$ es máximo se le denomina camino de valor máximo.

Nota.- Para poder definir en una gráfica.

$G = \{X, A\}$ tanto los caminos de longitud máxima ó de valor máximo es necesario que no existan circuitos.

CAMINOS DE LONGITUD MINIMA O MAXIMA

I ALGORITMOS GRAFICOS

a) Descripción del algoritmo para determinar el camino de longitud minima entre dos vértices.

1.- Márquese con un "0" el vértice elegido como el inicio del camino (x_p).

2.- Márquese con un "1" los vértices x_i adyacentes al vértice definido como inicio (x_p) y que son extremo final del arco que se inicia en dicho vértice.

3.- Márquese con un "2" todos los vértices x_j adyacentes a los vértices x_i marcados con "1" y además que son extremo final del arco que se inicia en x_i .

4.- Continúese de la misma manera con los vértices no marcados hasta marcar el vértice considerado como fin del camino (x_f). En el caso de marcar un vértice más de una vez elíjase el de menor valor.

5.- El camino mínimo entre 2 vértices (x_p, x_f) está definido por:

$$C = \{x_p, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im} = x_f\}$$

II ALGORITMO MATRICIAL

A continuación se describe el algoritmo matricial para definir los caminos de valor óptimo.

1.- Matriz (v) de valores asociados a una gráfica.

La matriz:

$$V = (v_{ij})$$

base para definir los caminos óptimos es una matriz cuadrada de orden igual al número de vértices de la gráfica cuyos elementos v_{ij} se definen de la siguiente manera:

a) Si se desea encontrar el camino de valor mínimo.

$$v_{ij} = \begin{cases} \text{Valor del arco } (x_i, x_j), & \text{Si } (x_i, x_j) \in A \\ M & \text{si } (x_i, x_j) \notin A \quad M \rightarrow \infty \\ 0 & \text{si } x_i = x_j \end{cases}$$

b) Si se desea encontrar el camino de valor máximo.

$$v_{ij} = \begin{cases} \text{Valor del arco } (x_i, x_j), & \text{Si } (x_i, x_j) \in A \\ -M & \text{Si } (x_i, x_j) \notin A \\ 0 & \text{Si } x_i = x_j \end{cases}$$

Para este caso la gráfica no debe tener circuitos.

2.- Definición de Operaciones Matriciales.

Sean las siguientes matrices

$$A = (A_{ij})_{n \times n} \quad B = (B_{ij})_{n \times n}$$

La operación matricial $A * B = C$ se define en función de los caminos de valor óptimo que se desea definir.

$$\begin{aligned} a) \quad C_{ij} &= \min_k \{ a_{ik} + b_{kj} \} \\ &= \min_k \{ a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + a_{2j}, \\ &\quad a_{i3} + a_{3j}, \dots, a_{in} + b_{nj} \} \end{aligned}$$

Si se desea encontrar los caminos de valor mínimo.

$$\begin{aligned} b) \quad C_{ij} &= \max_k \{ a_{ik} + b_{kj} \} \\ &= \max_k \{ a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + a_{2j}, a_{i3} + a_{3j}, \\ &\quad \dots, a_{in} + b_{nj} \} \end{aligned}$$

Si se desea encontrar los caminos de valor máximo.

3.- Matriz de caminos de valor óptimo.

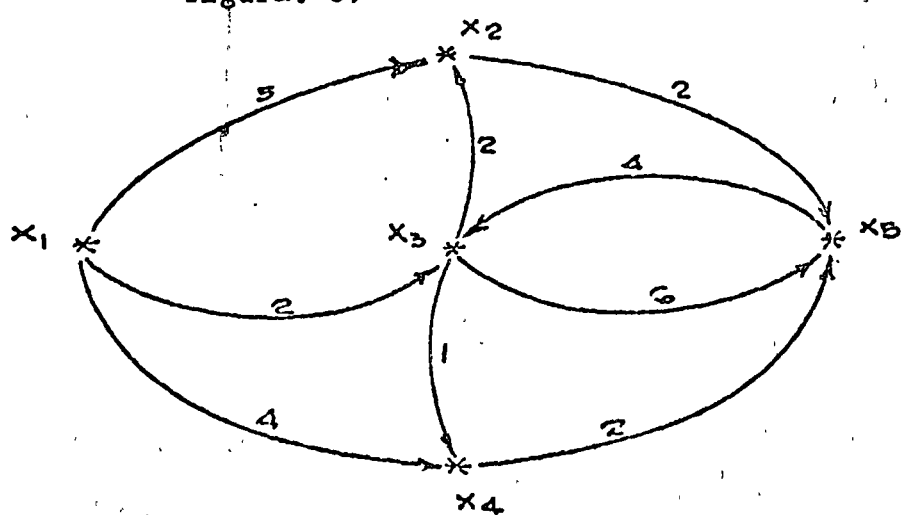
Si $V = (v_{ij})$ es la matriz de valores asociados a una gráfica, la matriz de caminos de valor óptimo es v^{n-1} , en donde n es el número de vértices de una gráfica. Lo anterior fué definido por Shimbél en 1954 pero solo para caminos de valor mínimo y además no definió cuales eran los caminos.

Si en un momento dado se define $v^m = v^{m-1}$, siendo $m < n-1$ la matriz v^m es la matriz de caminos de valor óptimo.

Para llegar rápidamente a la matriz de caminos de valor óptimo es conveniente ir definiendo las siguientes potencias:

$$V, V^2, V^4, V^8, V^{16} \dots$$

4.- Ejemplo.- Definir los caminos de valor mínimo para la gráfica que se muestra en la siguiente figura. 6)



5.- Definición de los arcos que forman los caminos de valor óptimo.

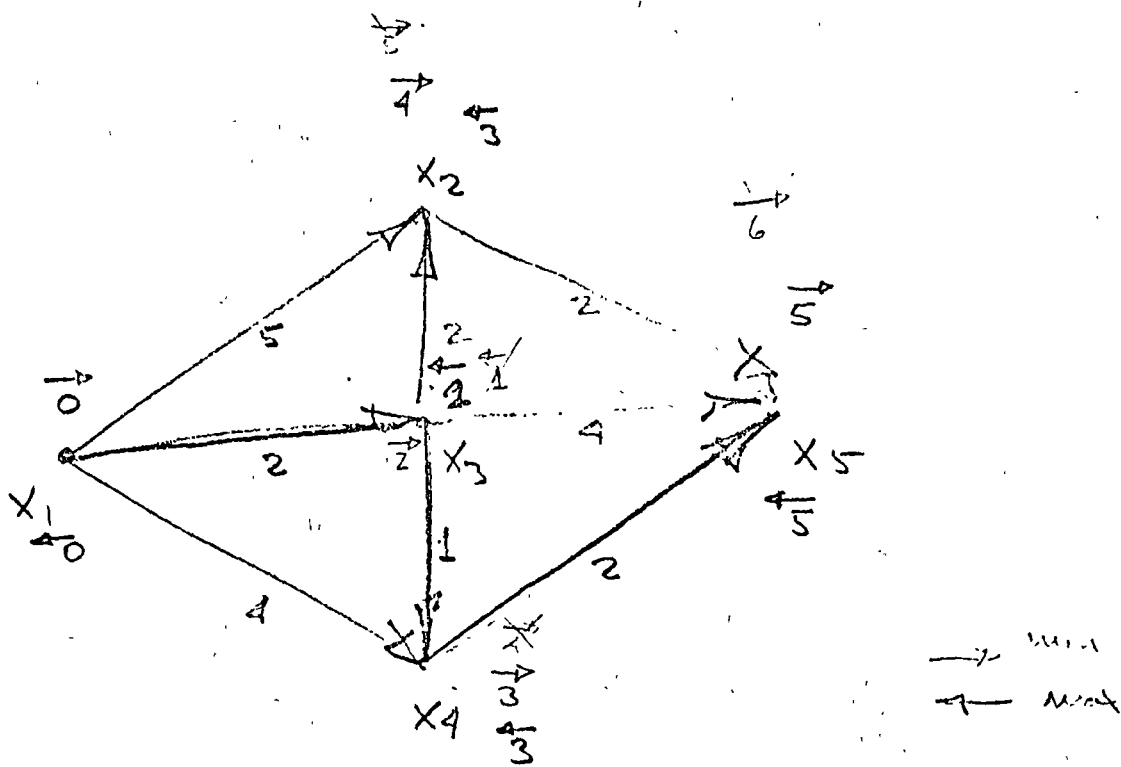
Para ésto es necesario definir la matriz de arcos no modificados $S = S_{ij}$ $n \times n$ cuyos elementos S_{ij} se definen de la siguiente manera:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el valor del arco } (x_i, x_j) \text{ no} \\ & \text{fué modificado entre la matriz } V \\ & \text{y la matriz que define los valores} \\ & \text{de los caminos de valor óptimo.} \\ 0 & \text{Cualquier otro caso.} \end{cases}$$

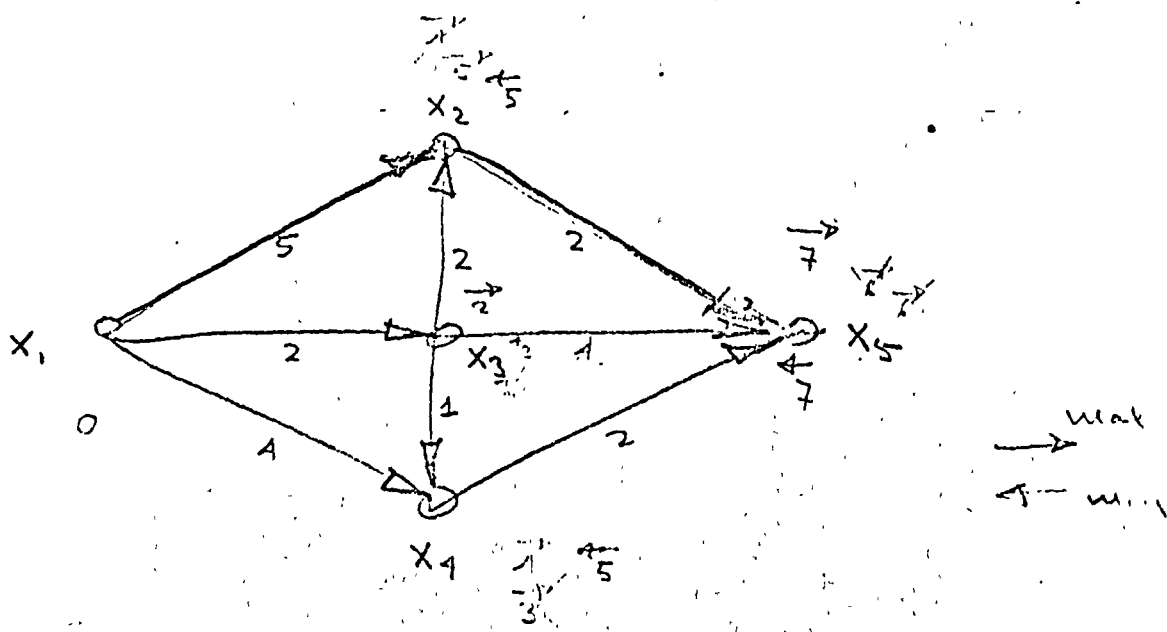
Con una matriz formada de esa manera se pueden definir los arcos que forman los caminos de valor óptimo, así por ejemplo para el caso del problema anterior la matriz de arcos no modificados se obtuvo comparando los valores de la matriz V y la matriz V^4 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	1	0	0
x_2	0	0	0	0	1
$S = x_3$	0	1	0	1	0
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	1	0	0

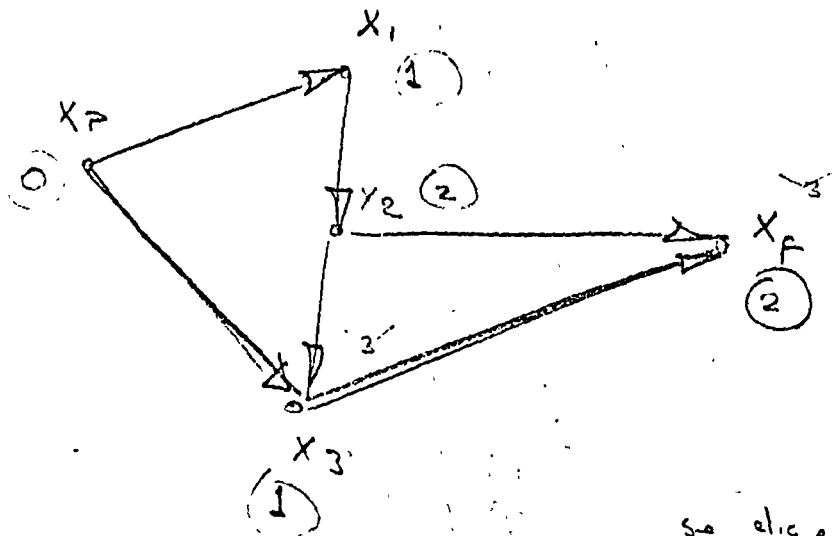
CAMINOS DE VALOR MÍNIMO (ó MÁXIMO)



CAMINOS DE VALOR MÁXIMO

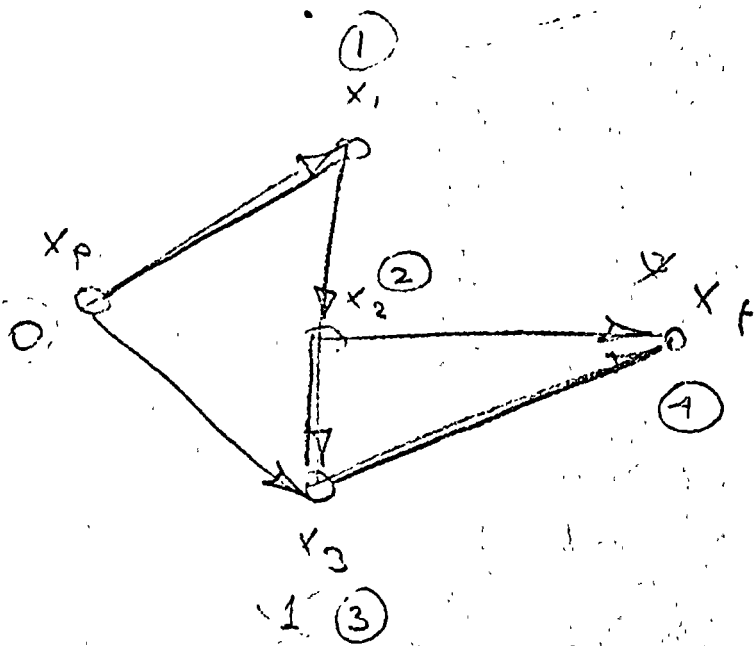


CAMINO DE LONGITUD MINIMA



se elige el menor

CAMINO DE LONGITUD MAXIMA

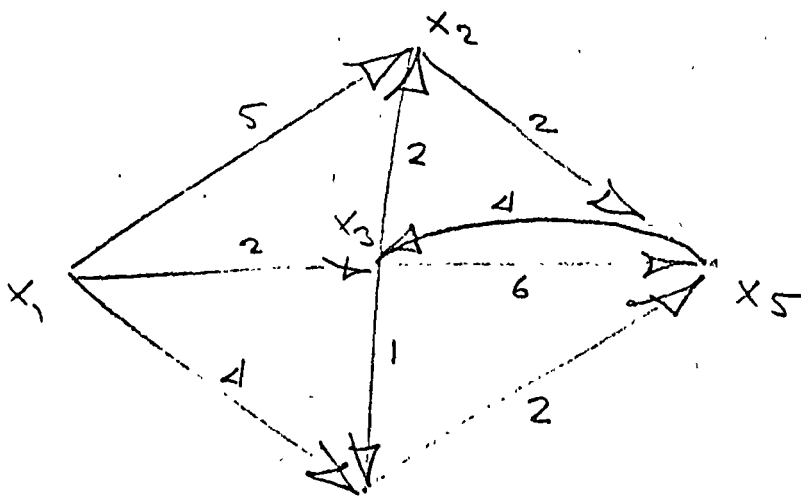


se elige el mayor

CAMINOS DE VALOR OPTIMO

ALGORITMO MATRICIAL

Caminos de valor minimo



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	5	2	4	M
x_2	M	0	M	M	2
x_3	M	2	0	1	6
x_4	M	M	M	0	2
x_5	M	M	4	M	0

de caminos de valor minimo es V^4 puesto q no
 al no de vertices es 5

$$V \cdot V = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ M & 0 & 6 & M & 2 \\ M & 2 & 0 & 1 & 3 \\ M & M & 6 & 0 & 2 \\ M & 6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 & M \\ M & 0 & M & M & 2 \\ M & 2 & 0 & 1 & 6 \\ M & M & M & 0 & 2 \\ M & M & 1 & M & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$V_{11} = \min(0+0, 5+M, 2+M, 1+M, M+M) = 0$$

$$V_{12} = \min(5+0, 0+5, 2+2, M+1, M+2) = 1$$

$$V_{13} = \min(2+0, 5+M, 0+2, M+1, 1+M) = 2$$

$$V_{14} = \min(1+0, M+5, 1+2, 0+1, M+M) = 3$$

$$V_{15} = \min(0+M, 5+0, 6+2, 2+1, 0+M) = 6$$

$$V \cdot V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ M & 0 & 6 & M & 2 \\ M & 2 & 6 & 1 & 3 \\ M & M & 6 & 0 & 2 \\ M & 6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V^1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ M & 0 & 5 & 7 & 2 \\ M & 2 & 0 & 1 & 3 \\ M & 8 & 6 & 0 & 2 \\ M & 6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V^8 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ M & 0 & 5 & 7 & 2 \\ M & 2 & 0 & 1 & 3 \\ M & 8 & 6 & 0 & 2 \\ M & 6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Posiciones iguales:
valores iguales = 1 en matriz S

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 & M \\ M & 0 & M & M & 2 \\ M & 2 & 0 & 1 & 6 \\ M & M & M & 0 & 2 \\ M & M & 4 & M & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

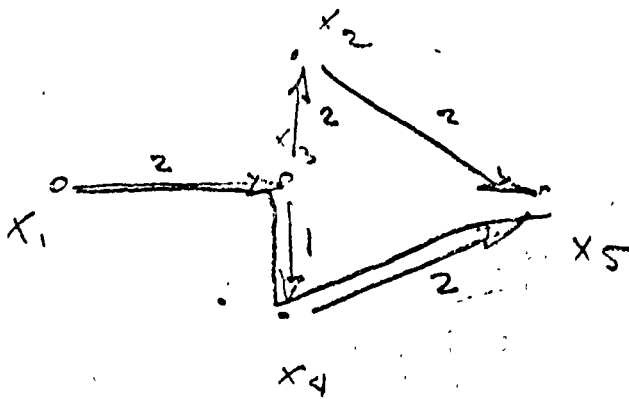
Matriz de caminos

$$C_1(x_1) = (x_1, x_3)$$

$$C_2(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} x_1, x_3, x_2 \\ x_1, x_3, x_4 \end{array} \right\}$$

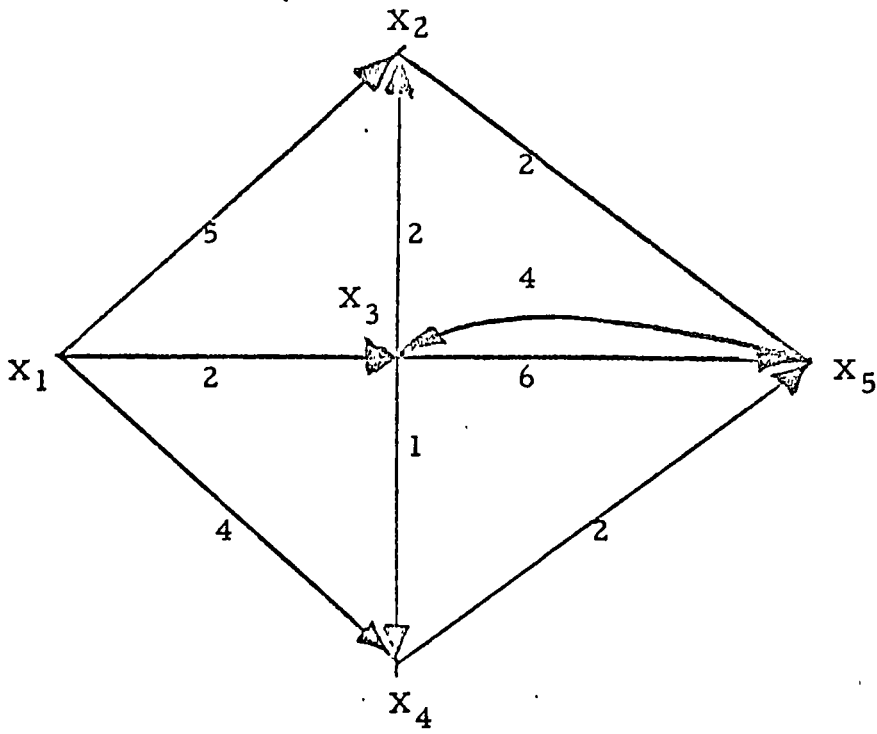
$$C_3(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} x_1, x_3, x_2, x_5 \\ x_1, x_3, x_4, x_5 \end{array} \right\}$$

camino mínimo



camino mínimo

$$(x_1, x_3, x_4, x_5)$$



MINIMO :

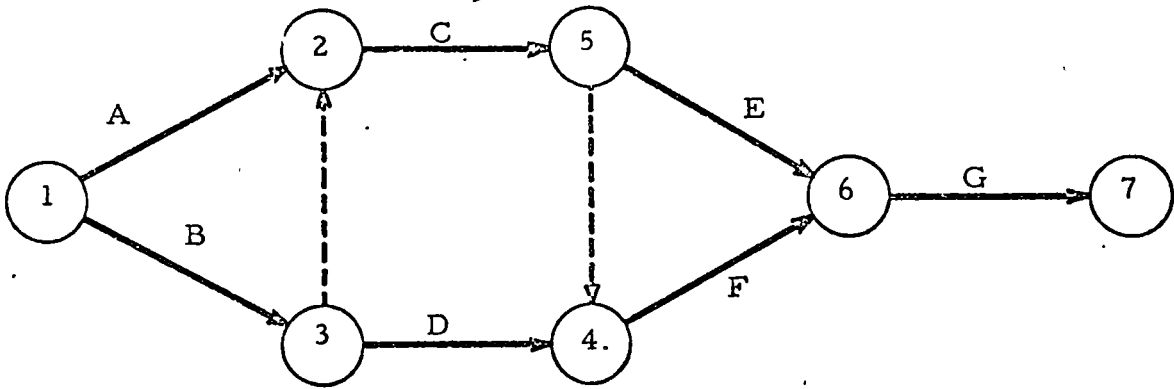
	4	2	3	5
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$x_1 x_3$: 2	$x_2 x_5$: 2	$x_3 x_4$: 1	$x_4 x_5$: 2	$x_5 x_3$: 4
$x_1 x_4$: 4	$x_3 x_2$: 2			
$x_1 x_2$: 5	$x_3 x_5$: 6			
1				

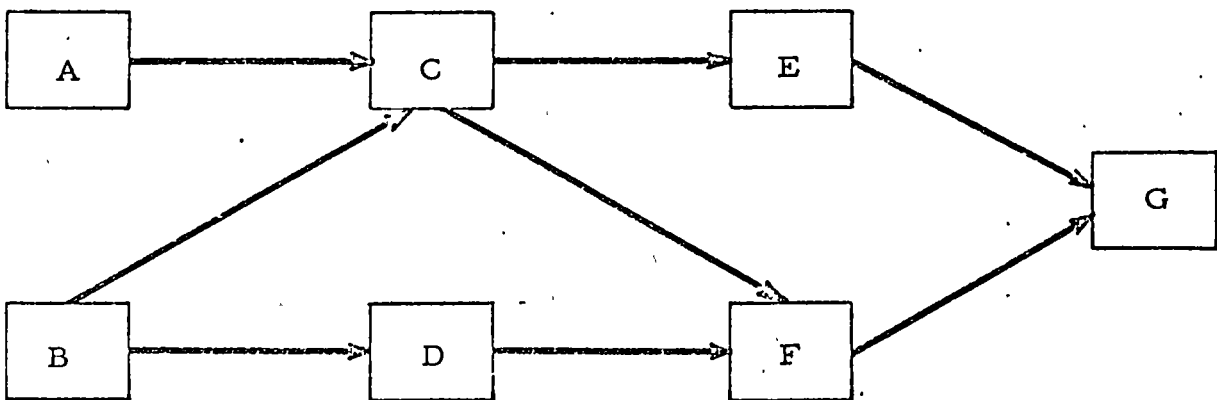
II PLANEACION, PROGRAMACION Y
CONTROL DE PROYECTOS

- a) PLANEACION: Determinación de las actividades que constituyen el proyecto. Incluyendo la interrelación existente entre ellas.
- b) PROGRAMACION: Determinación de las duraciones de las actividades, así como de los tiempos de iniciación y terminación de cada una de ellas y del proyecto. Consideración de los recursos.
- c) CONTROL: Vigilancia de la correcta ejecución de las actividades dentro del programa.

METODOS



FLECHAS



PRECEDENCIAS

- T: Duración estimada para la actividad.
- TOP: Tiempo de ocurrencia más próximo.
Tiempo más cercano en el que pueden iniciarse todas las actividades que tienen su origen en ese evento.
- TOL: Tiempo de ocurrencia más lejano.
Tiempo más lejano en que se pueden terminar -- todas las actividades que llegan a un evento sin retrasar la duración del proyecto.
- TPI: Tiempo más próximo de iniciación de una actividad.
Es el TOP de su evento inicial.
- TPT: Tiempo más próximo de terminación.
TOP del evento inicial más la duración.

TLI: Tiempo más lejano de iniciación.

TOL del evento terminal menos la duración de la actividad.

TLT: Tiempo más lejano de terminación.

Es el TOL del evento terminal de una actividad.

HL: Holgura libre.

Representa el mayor tiempo que puede retrasarse la terminación de una actividad sin afectar las holguras de las demás actividades.

HT: Holgura total.

Máxima cantidad de tiempo que la duración de una actividad puede ser alargada sin retrasar la terminación del proyecto.

" PASO ADELANTE "

El objeto del paso hacia adelante es conocer los tiempos más próximos de iniciación y terminación.

- 1) Se considerará que para el tiempo de salida del -
evento inicial de la red como $TOP=0$

Cada actividad empezará tan pronto como su evento predecesor ocurra.

$$TPI = TOP \quad (\text{para el evento predecesor})$$

- 2) La terminación más próxima, será igual al inicio más próximo más la duración para cada actividad.

$$TPT = TPI + t$$

- 3) El tiempo de ocurrencia más próximo para un evento es el más grande de todos los tiempos más próximos de terminación de las actividades que lleguen -
al evento en cuestión.

$TOP = \text{más largo de } TPT_1, TPT_2, \dots, TPT_3 \text{ para un evento al que llegan } N \text{ actividades.}$

" PAÑO ATRAS "

Con este procedimiento estaremos en condiciones de conocer los tiempos más lejanos de iniciación y los tiempos más lejanos de terminación para cada actividad.

Las reglas son las siguientes:

a) Para el evento terminal, el tiempo de ocurrencia más lejano (TOL) de ese evento es igual al tiempo de ocurrencia más próximo (TOP) por tanto es -- igual al tiempo más próximo de terminación de la última actividad $TOL = TOP = TPT = TLT$

b) El tiempo más lejano de iniciación de una actividad es igual al tiempo más lejano (permisible) de su evento sucesor menos la duración de la actividad considerada

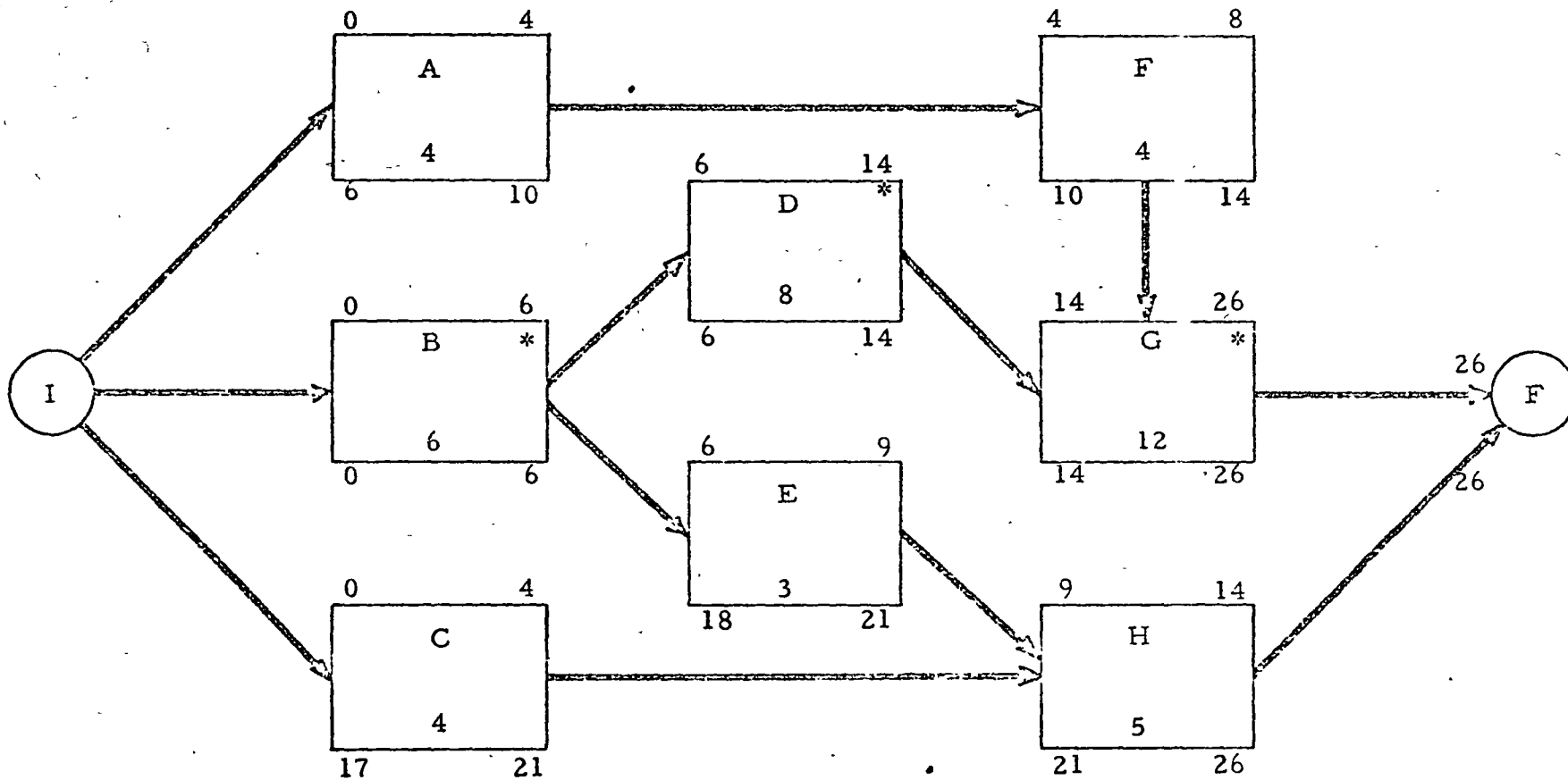
$$TLI = TLT - t$$

c) El tiempo más lejano permisible para un evento es el mínimo de todos los tiempos permisibles de iniciación más lejana que salgan de ese evento

$$TOL = \text{MIN} \left\{ (TLI)_1, (TLI)_2 \dots (TLI)_n \right\}$$

Actividad	Duración	Posterior
A	4	F
B	6	D,E
C	4	H
D	8	G
E	3	H
F	4	G
G	12	-
H	5	-

DATOS



RED DE PRECEDENCIAS

Actividad	Duración	TPI	TPT	TLI	TLT	HL	HT
A	4	0	4	6	10	0	6
B	6	0	6	0	6	0	0 *
C	4	0	4	17	21	5	17
D	8	6	14	6	14	0	0 *
E	3	6	9	18	21	0	12
F	4	4	8	10	14	6	6
G	12	14	26	14	26	0	0 *
H	5	9	14	21	26	12	12

Programa

ACTIVIDADES

B
D
G
A
C
F
E
H

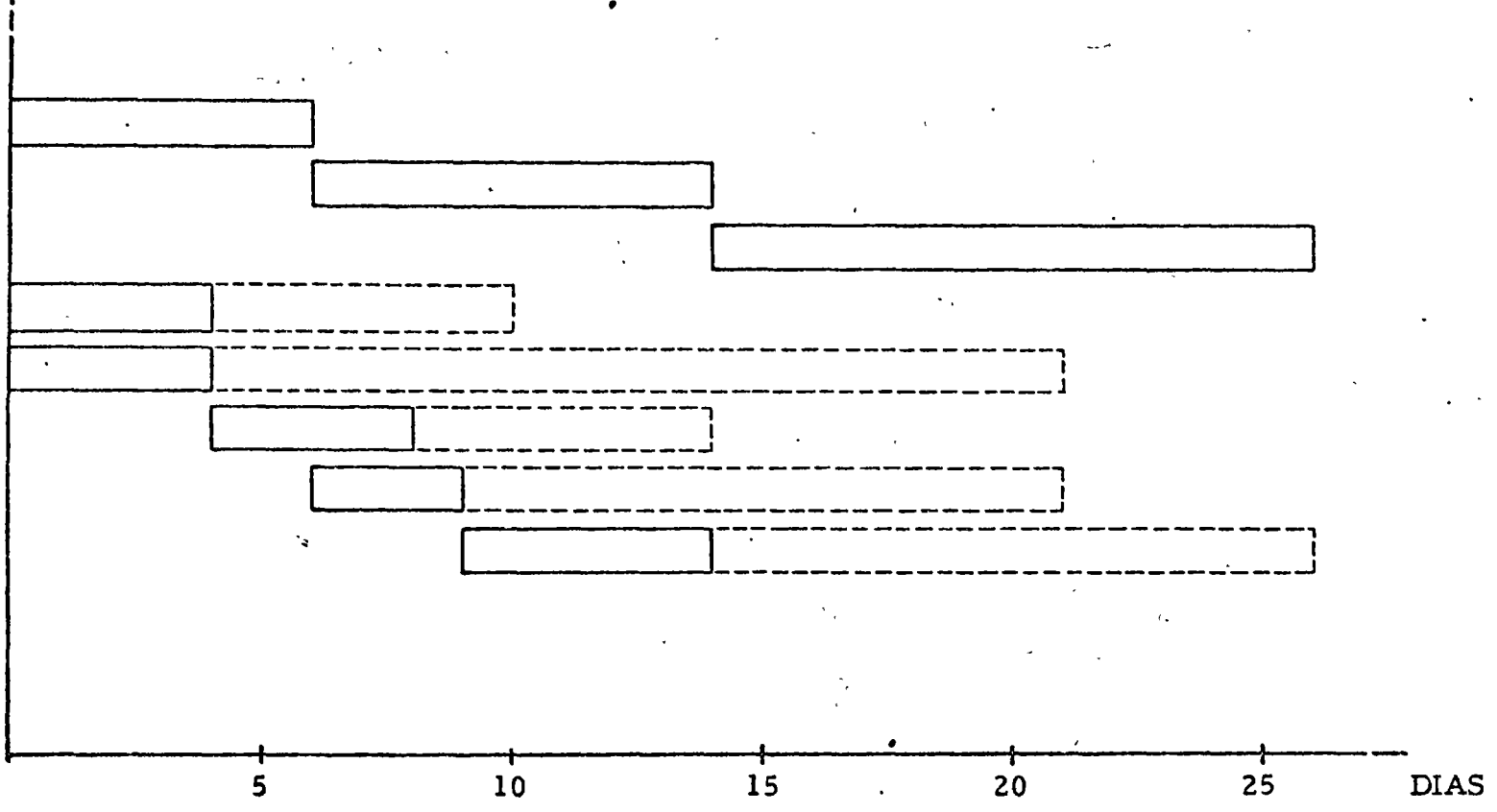
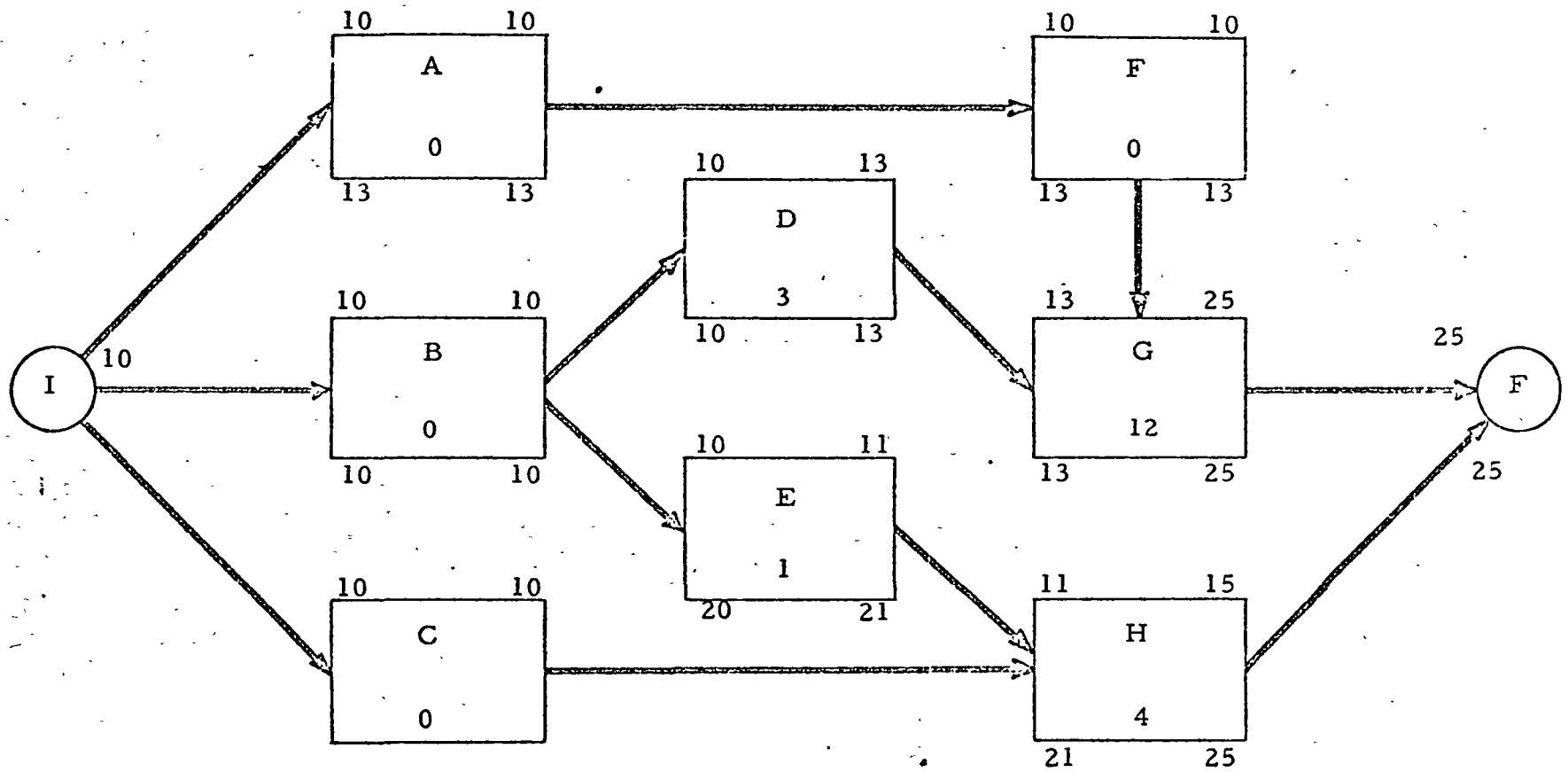


DIAGRAMA DE BARRAS
TPI

Actividades	Actividades terminadas día de terminación	Actividades en proceso días para terminar	Actividades No iniciadas duración
A	5	-	-
B	5	-	-
C	4	-	-
D	-	3	-
E	-	1	-
F	8	-	-
G	-	-	12
H	-	-	4

Revisión el día 10



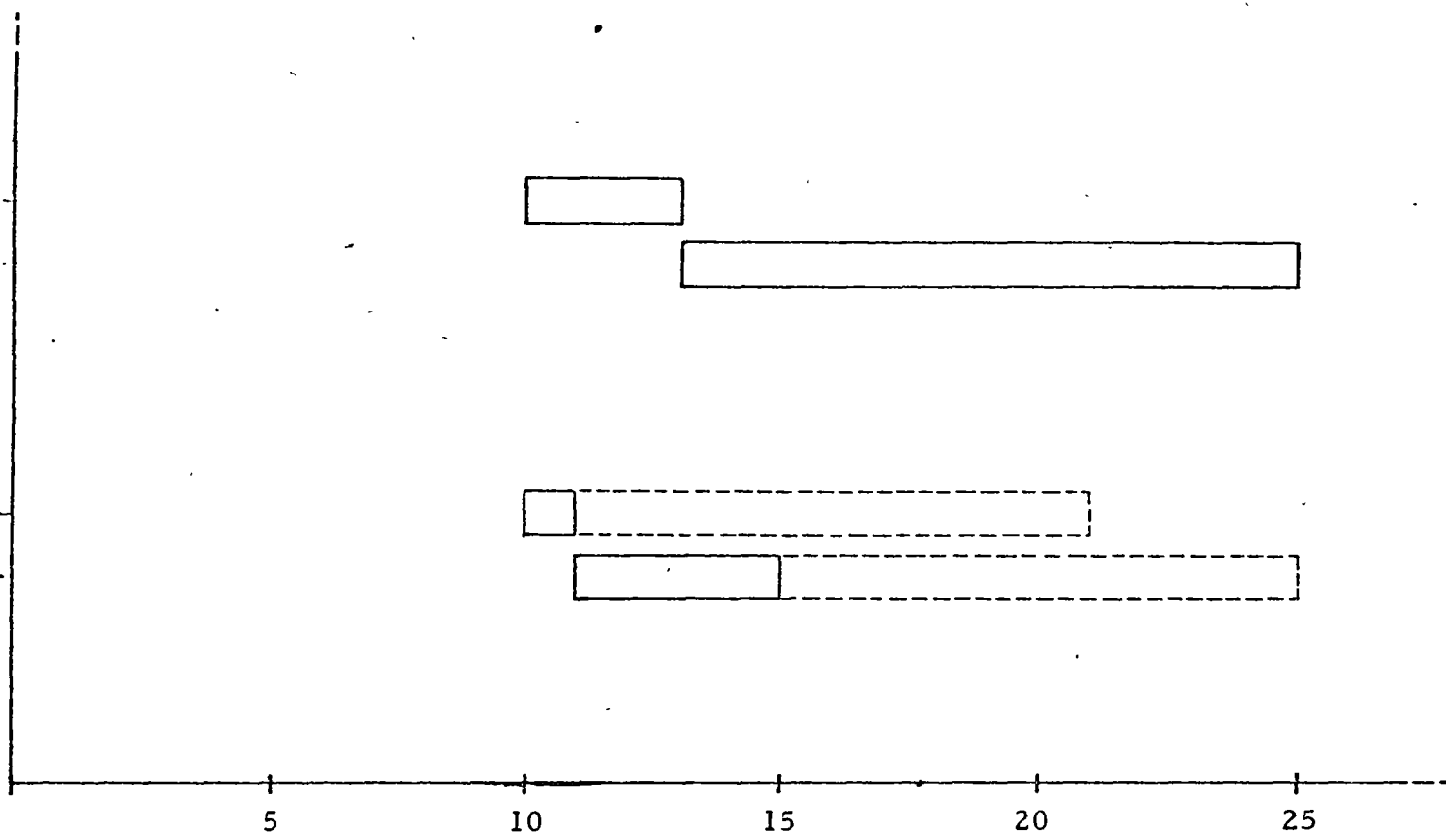
RED ACTUALIZADA

D

G

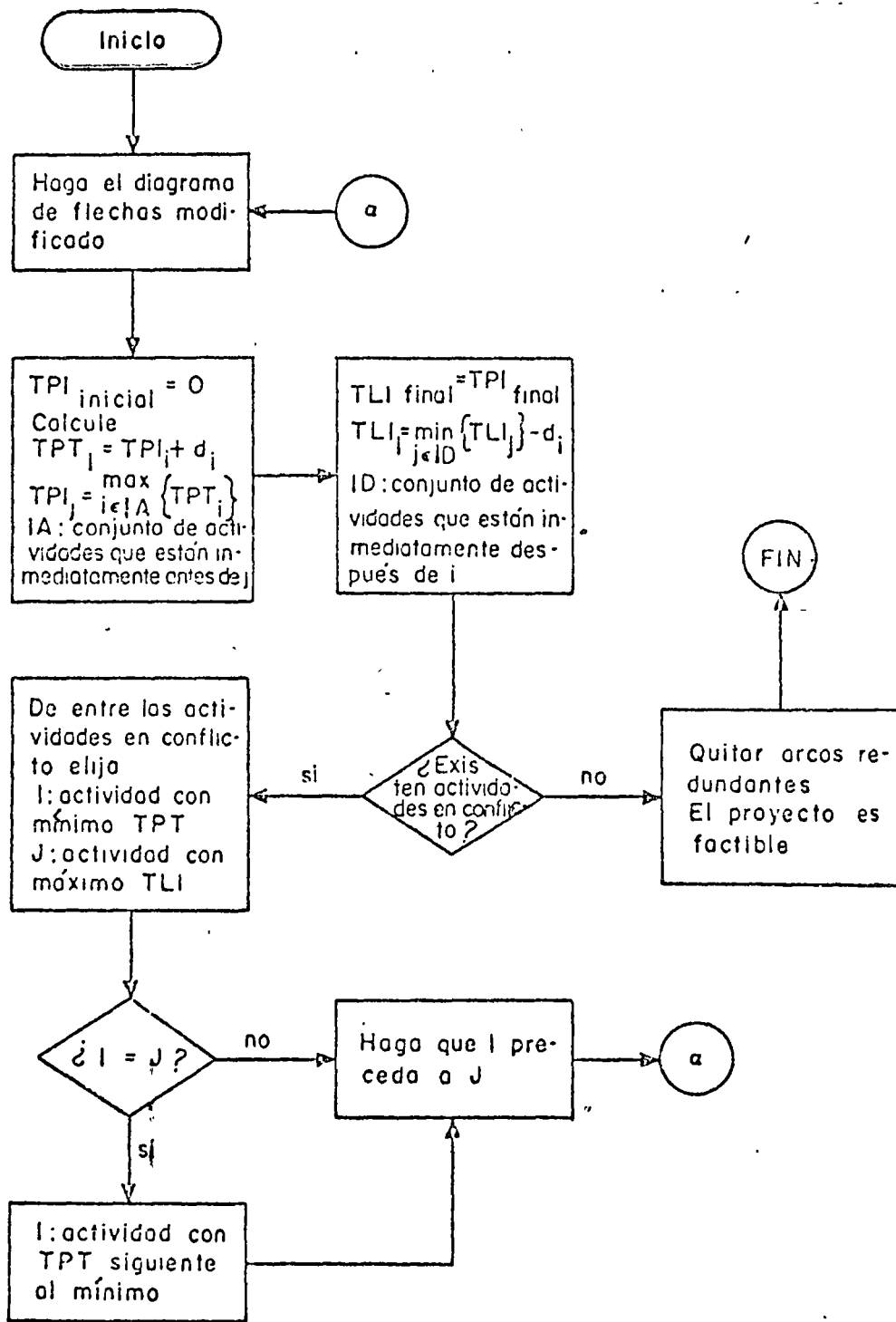
E

H



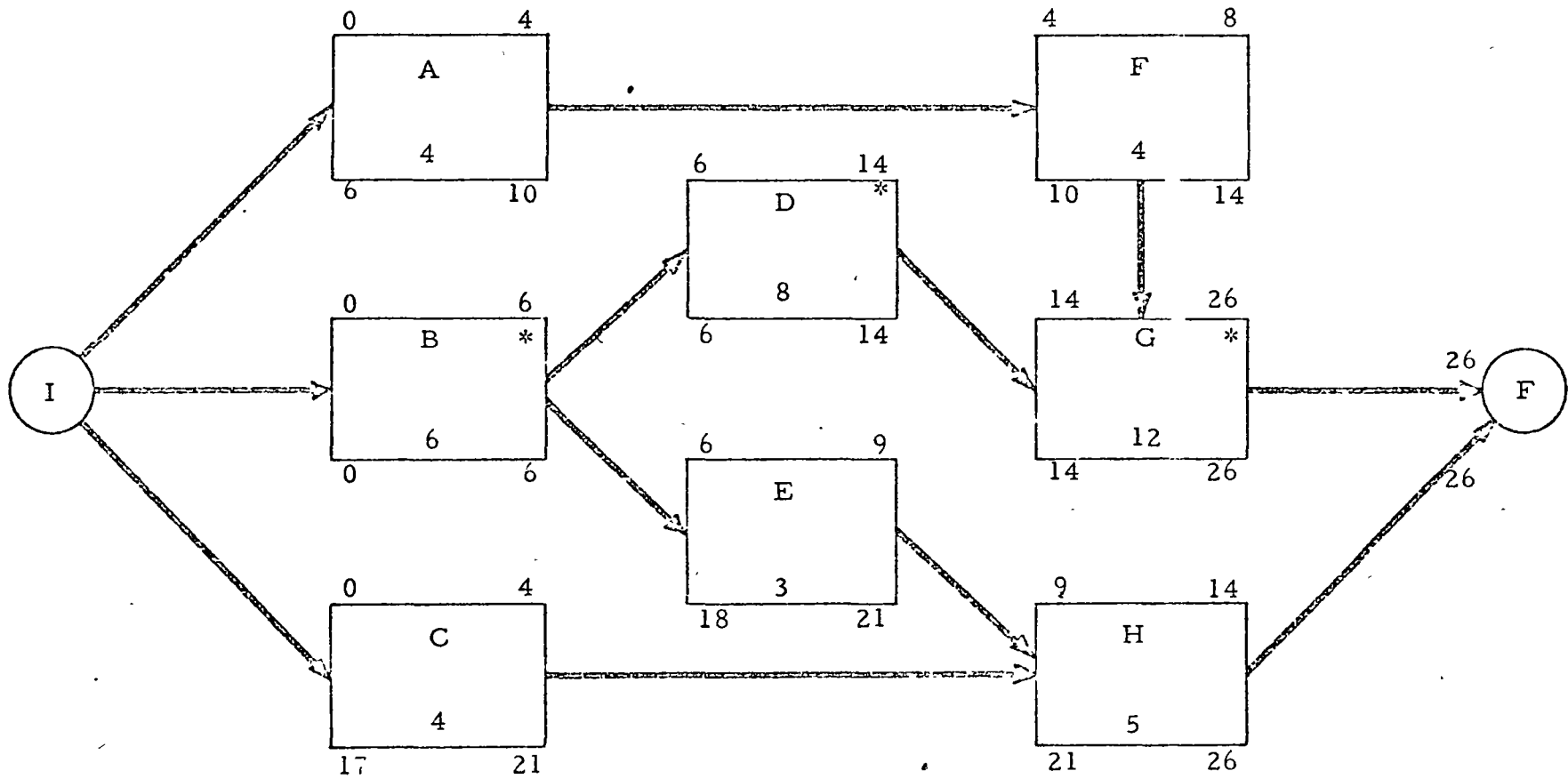
CONTROL
AL DIA 10

III MODELO SHAFFER

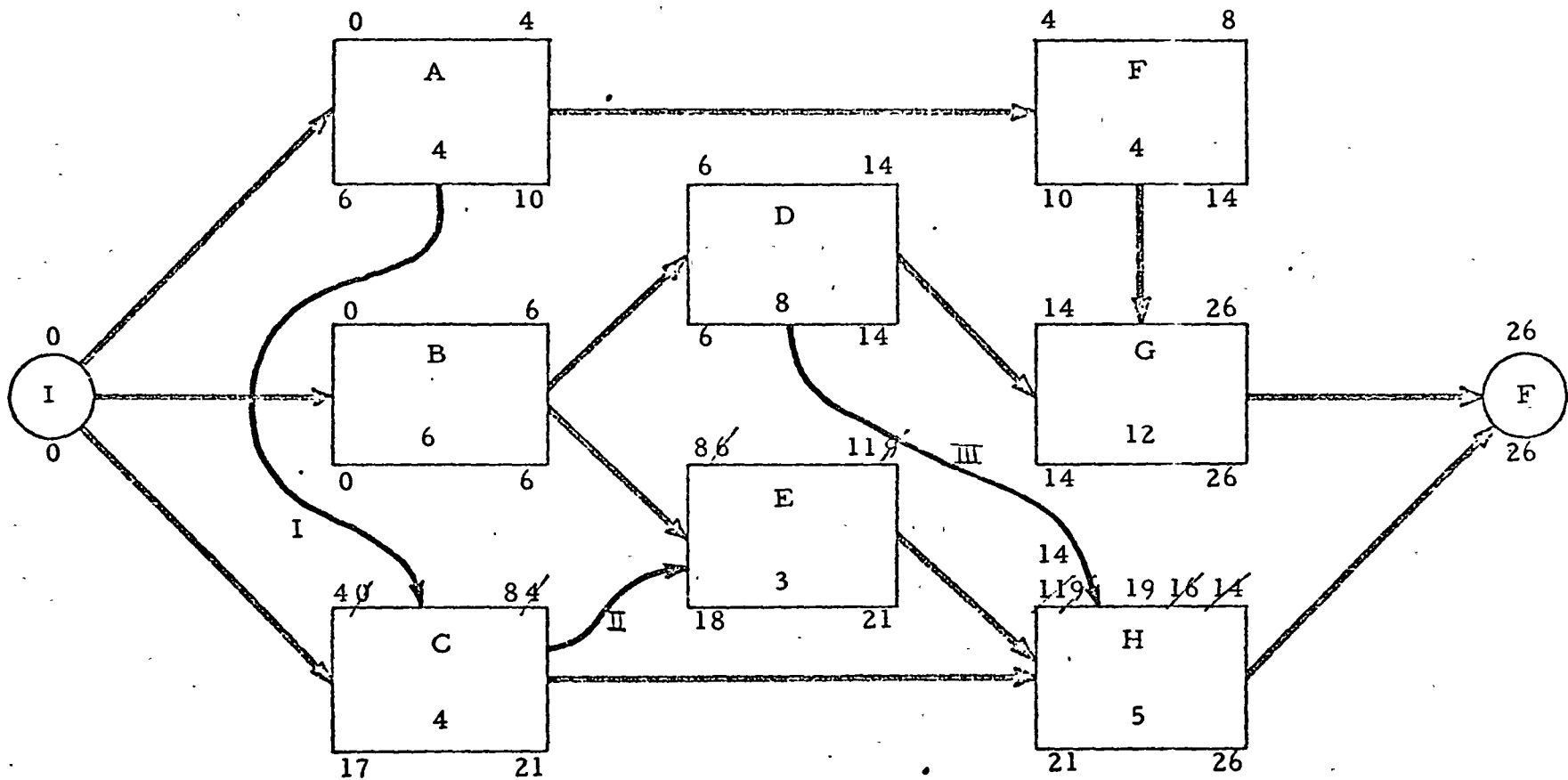


ALGORITMO DE SHAFER

Actividades	Duración	Recursos Necesarios	
		R ₁	R ₂
A	4	3	1
B	6	1	0
C	4	2	1
D	8	3	1
E	3	1	2
F	4	0	1
G	12	0	1
H	5	4	2
Recursos Disponibles		5	4

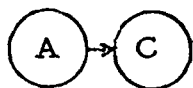


RED DE PRECEDENCIAS



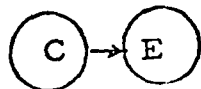
Día 1

act. : B, A, C,
 i : A y C (min TPT)
 j : C (max TLI)



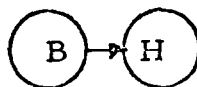
Día 7

Act: C, F, D, E,
 i: C y F
 j: E

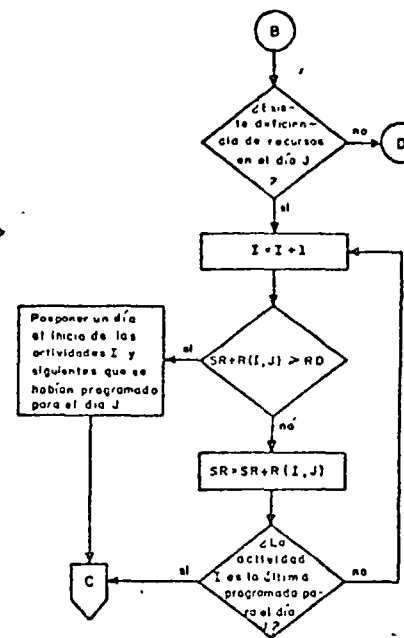
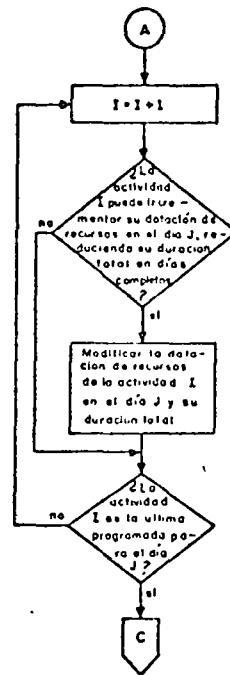
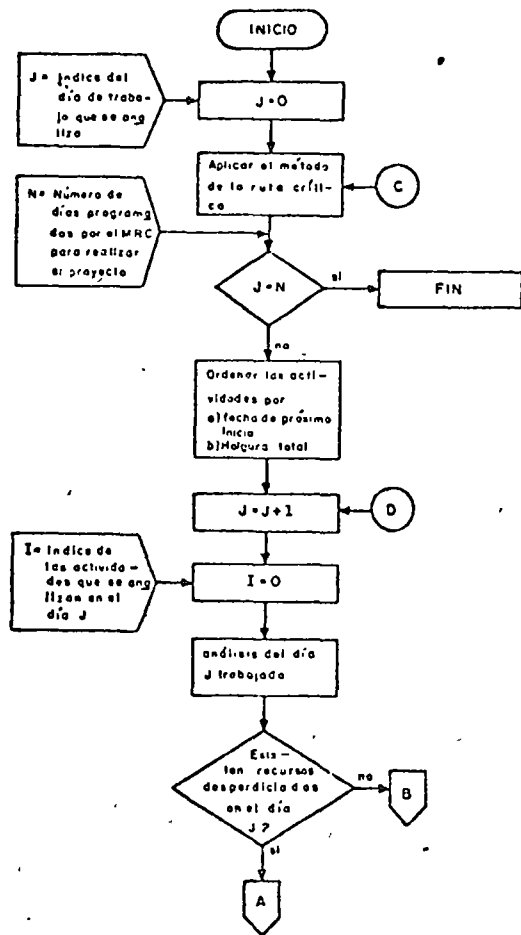


Día 2

Act: B, H
 i: B
 j: H



IV MODELO WIEST



ALGORITMO DE WIEST

Actividad	Duración	Necesidades Diarias del Recurso	
		Normal	Para acortar un día

A	4	200	400
B	6	50	100
C	4	150	300
D	8	200	400
E	3	100	200
F	4	150	300
G	12	50	100
H	5	200	400

Disponibilidad diaria del recurso: 350

ACTIVIDADES

B

D

G

A

C

F

E

H

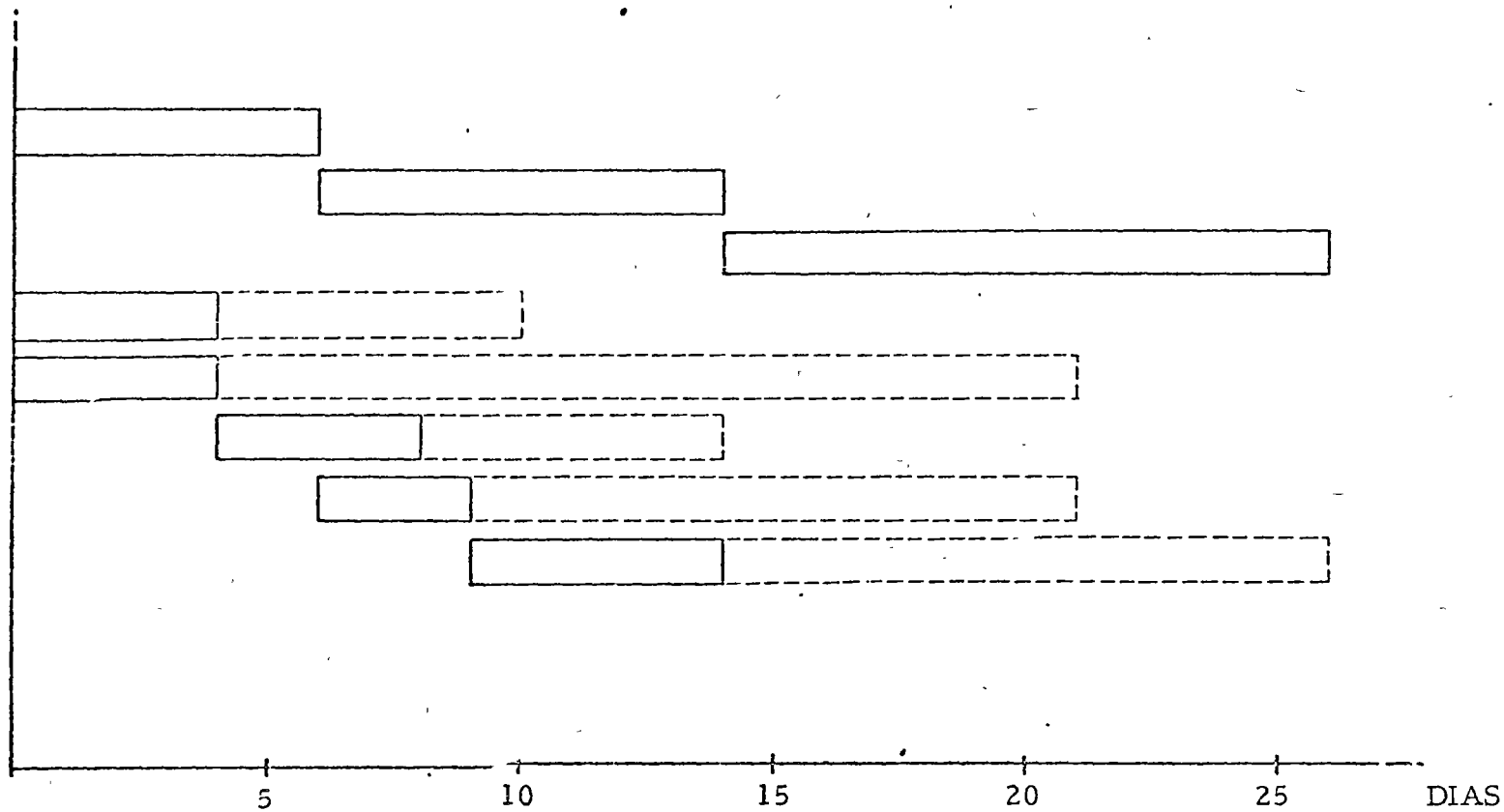
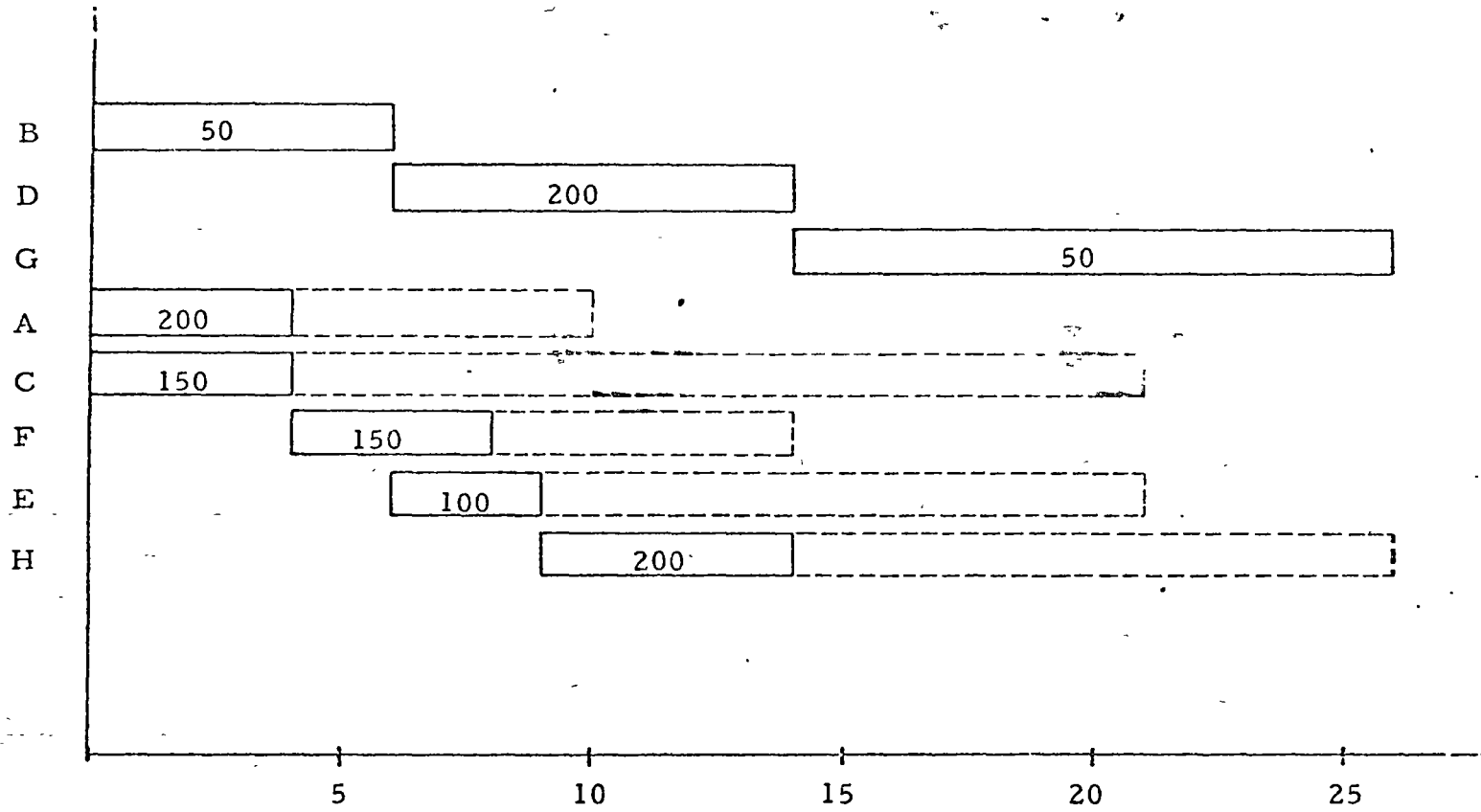


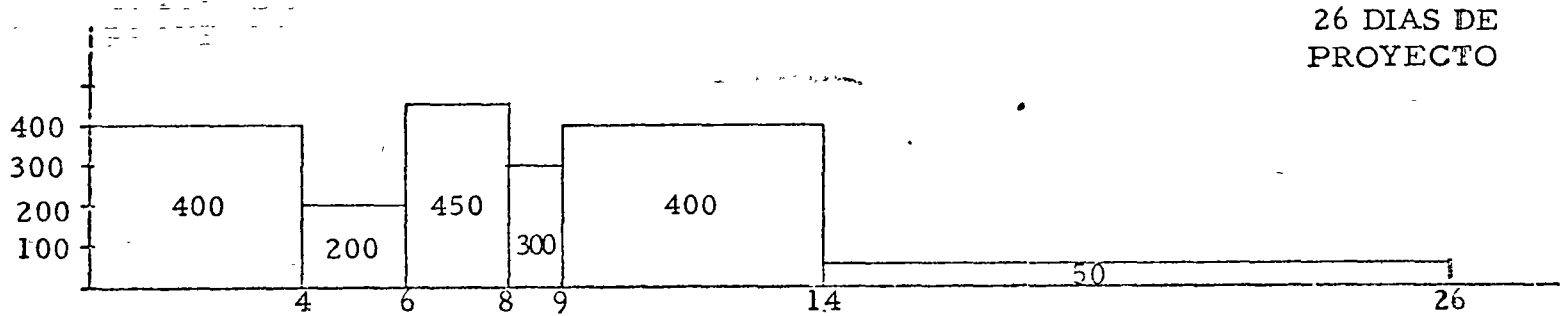
DIAGRAMA DE BARRAS
TPI

J	Actividad	TPI	HT
1	B	0	0
2	A	0	6
3	C	0	17
4	F	4	6
5	D	6	0
6	E	6	12
7	H	9	12
8	G	14	26

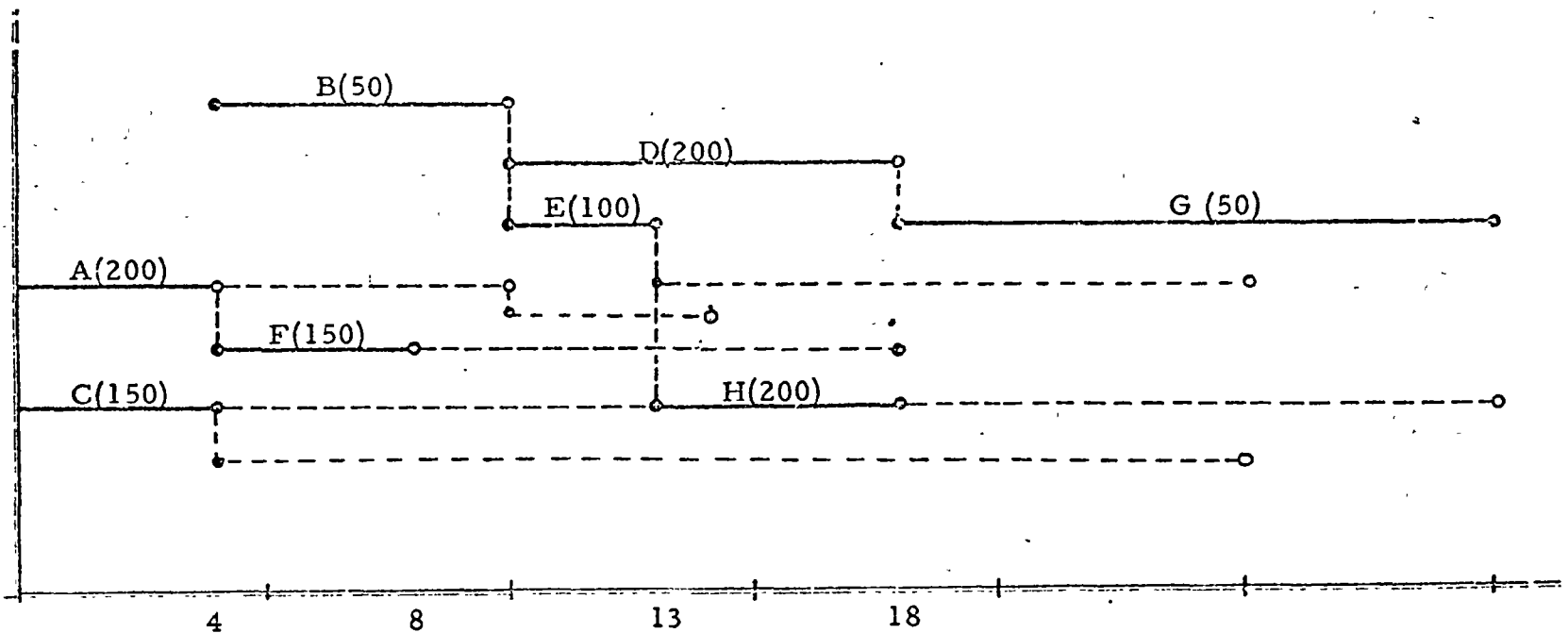
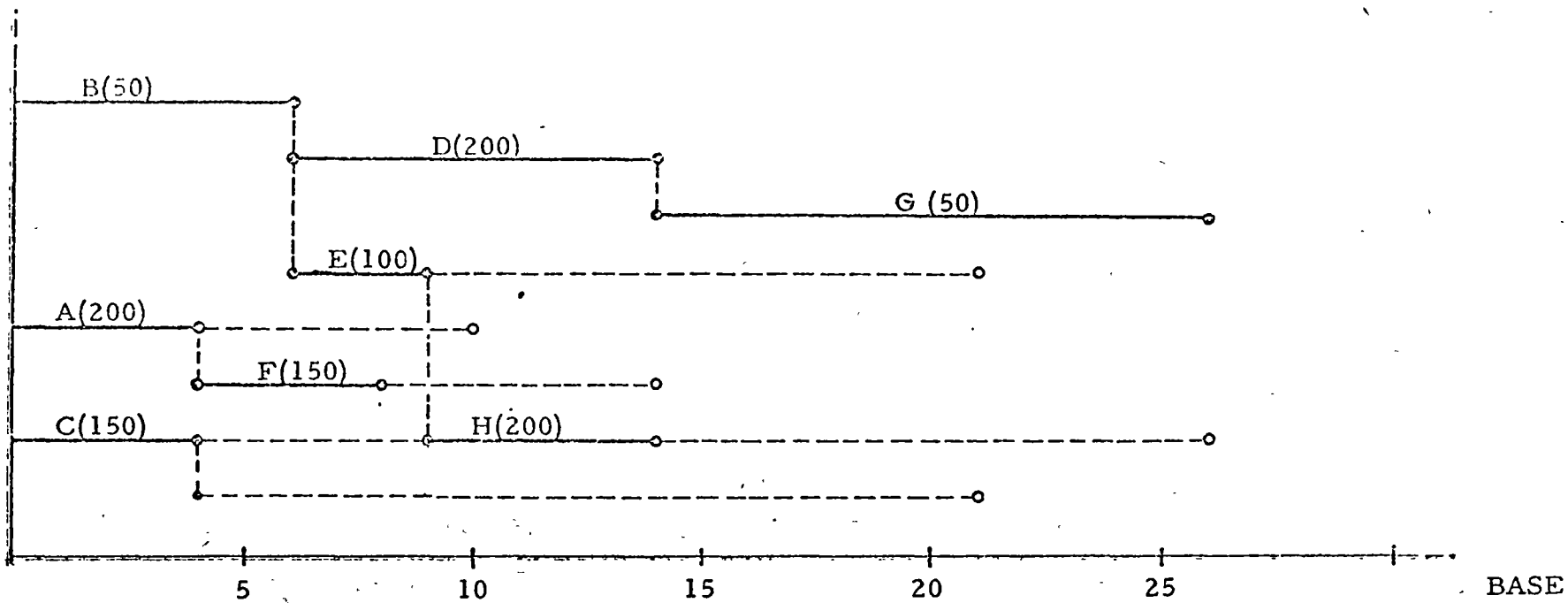
Actividades según TPI y HT



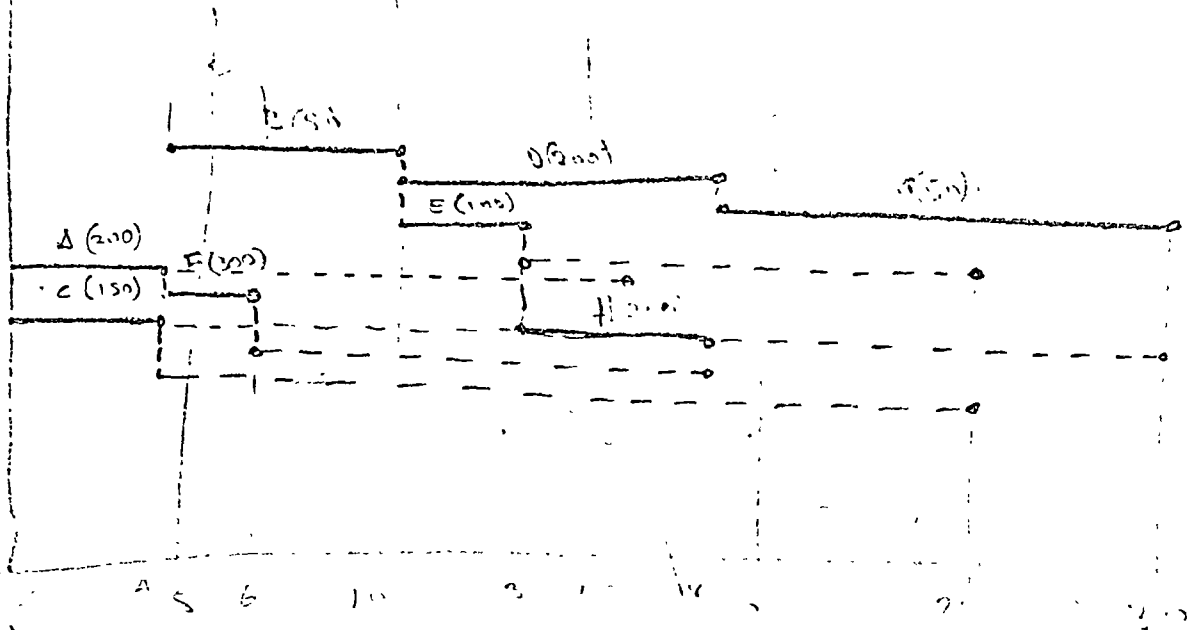
SUMA DE
RECURSOS



26 DIAS DE
PROYECTO

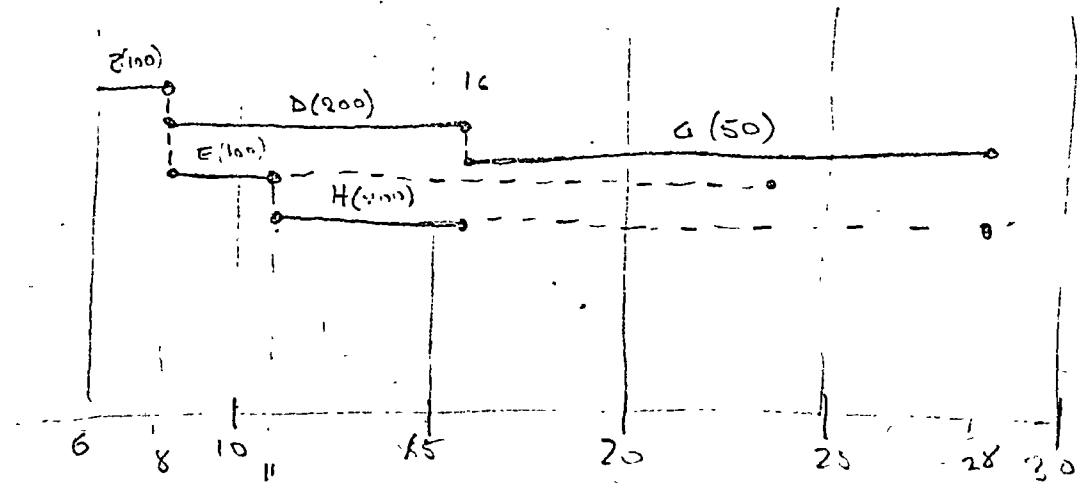


2

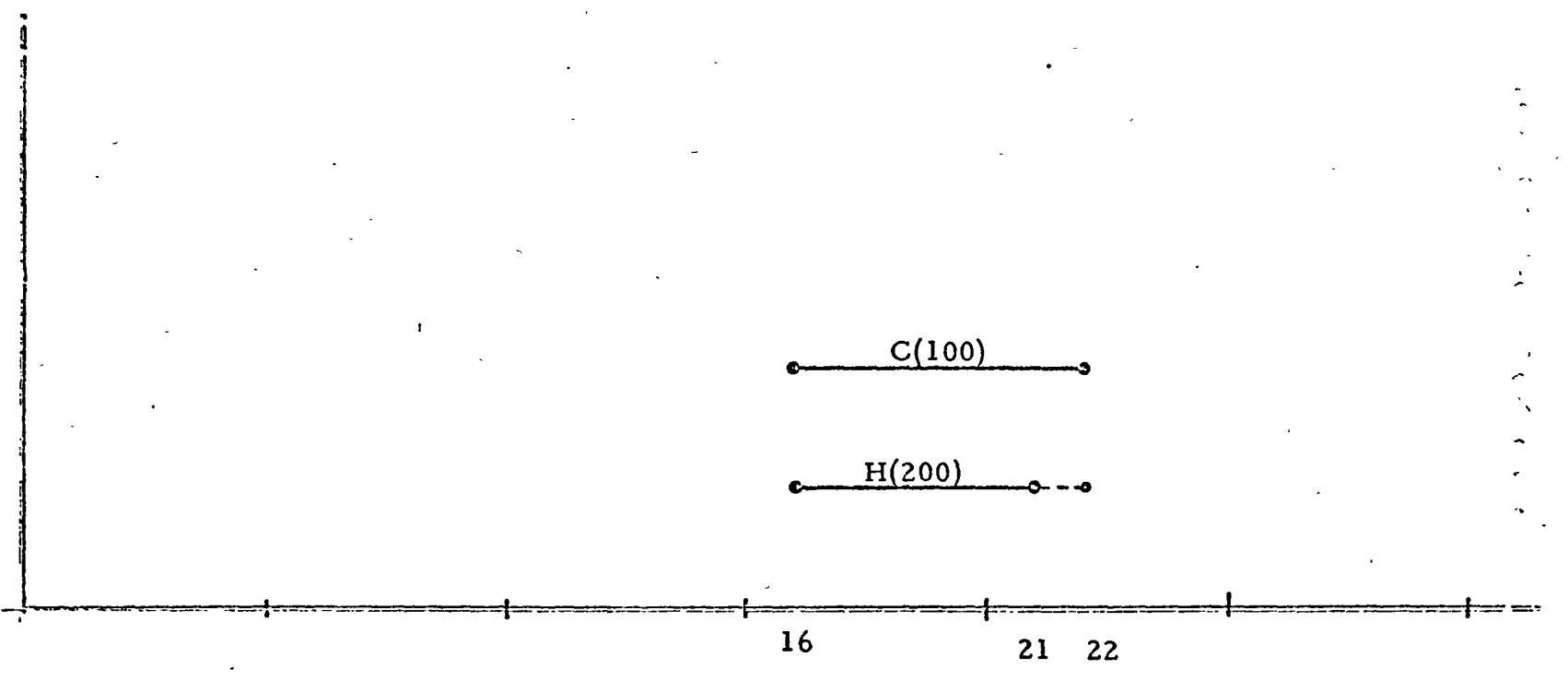
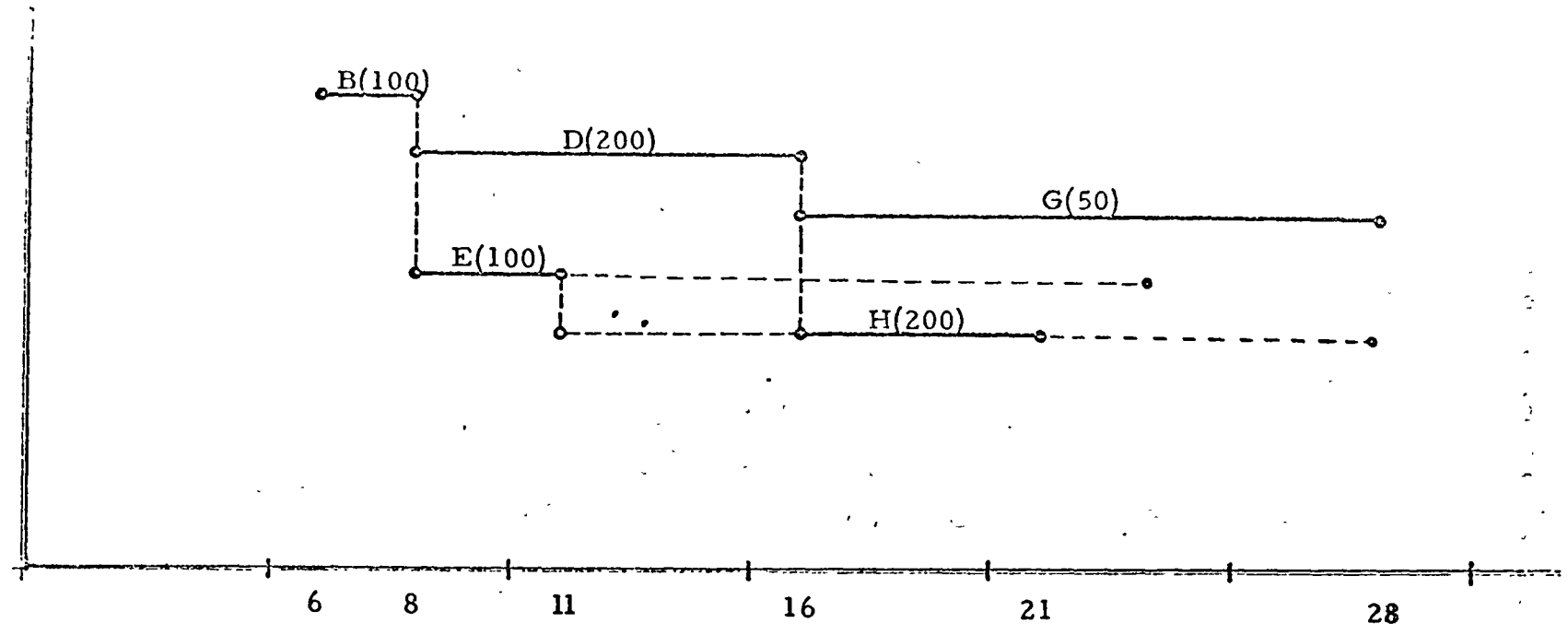


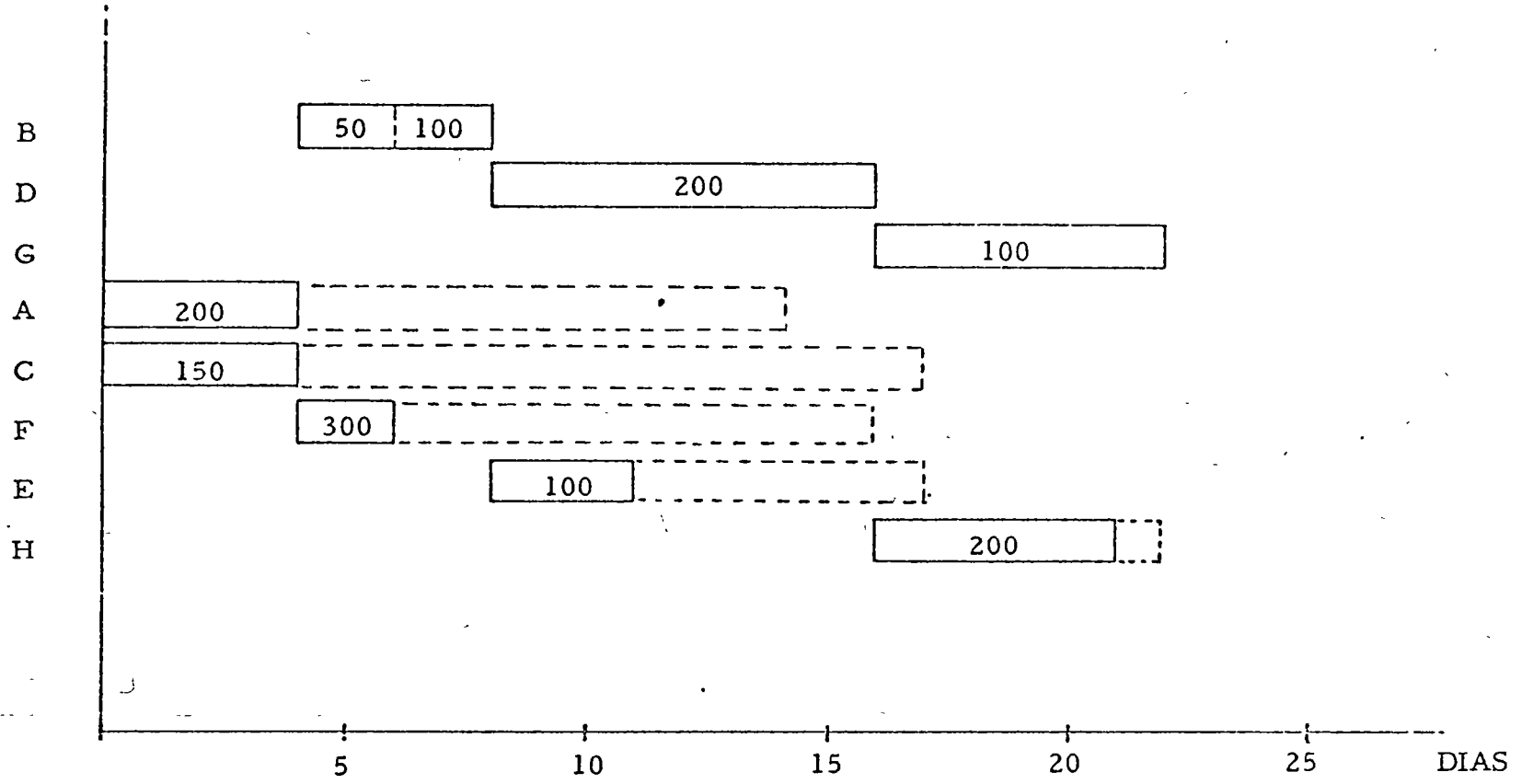
$\Sigma R = 350 - 150$

1

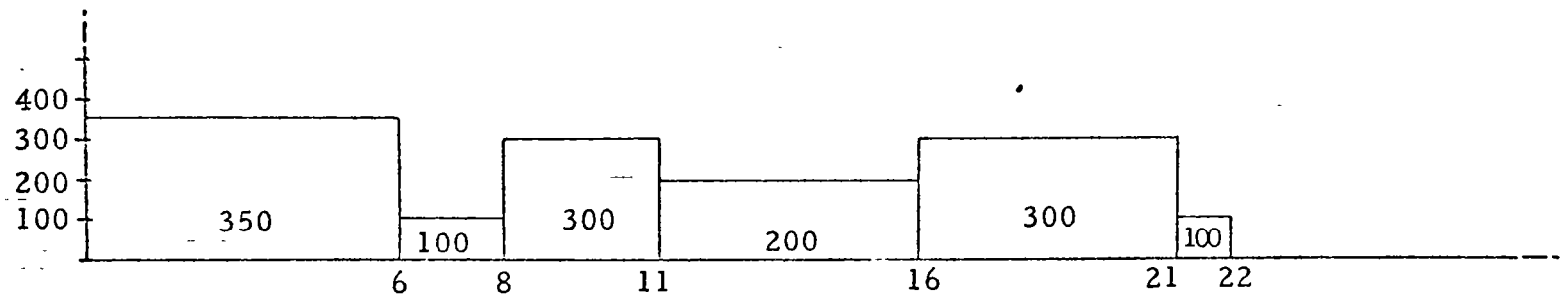


$\Sigma R = 100 + 300 + 100 +$





SUMA DE RECURSOS



22 DIAS DE PROYECTO

V MODELO HADLEY

RESTRICCION DE RECURSOS

Si a_{kj} es la cantidad de recursos disponible el día j se representará:

$$\sum_i \alpha_{ki} x_{ij} \leq a_{kj}$$

$$[a_{ki}] [x_{ij}] \leq [a_{kj}]$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1I} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{I1} & x_{I2} & \dots & x_{IN} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kN} \end{bmatrix}$$

RESTRICCION DE CONDICION

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$[x_{ij}] \bar{e} = \bar{e}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{I1} & x_{I2} & \dots & x_{IN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ASIGNACION DE RECURSOS

C_{kj} : costo del recurso k en el día j

α_{ki} : coeficiente de participación del recurso k en la actividad i

X_{ij} : fracción de la actividad i llevada a cabo el día j

FUNCION OBJETIVO :

$$\text{Min } Z = \sum_i^I \sum_j^N \sum_k^K (C_{kj} \alpha_{ki} X_{ij})$$

Matricialmente puede representarse como :

$$\text{Min } Z = [C_{jk}] [\alpha_{ki}] [X_{ij}]$$

que es :

$$\text{Min } Z = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{K1} & C_{K2} & \dots & C_{KN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1I} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{K1} & \alpha_{K2} & \dots & \alpha_{KI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{I1} & X_{I2} & \dots & X_{IN} \end{bmatrix}$$

los datos necesarios para formar las matrices utilizadas en la función objetivo y restricciones del problema quedarían definidas por las matrices:

$$[a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kN} \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, K \text{ (recursos)}$$

$$j = 1, 2, \dots, N \text{ (días)}$$

$$[\alpha_{ki}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1I} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kI} \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, K \text{ (recursos)}$$

$$i = 1, 2, \dots, I \text{ (actividades)}$$

$$[c_{kj}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kN} \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, K \text{ (recursos)}$$

$$j = 1, 2, \dots, N \text{ (días)}$$

La recopilación de los datos necesarios para estas matrices, puede hacerse utilizando una tabla semejante a la siguiente:

RESTRICCIONES DE FORMA

$$a) \sum_{u=1}^{j-1} (x_{i,u}) \geq \delta_{i',j} \quad \forall i', j$$

matricialmente

$$[x_{i,u}] \bar{e} \geq [\delta_{i',j}]$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,j-1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{N,j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{Nj} \end{bmatrix}$$

$$b) \quad x_{ij} \leq \delta_{i,j} \quad i \leq I(i), \quad \forall i, j$$

$$x_{i1} \leq \delta_{i'1}$$

$$x_{i2} \leq \delta_{i'2}$$

$$\dots$$
$$x_{iN} \leq \delta_{i'N}$$

RECURSOS RESTRICCIÓN	X_{1j}	X_{12}	X_{13}	α_{11}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	α_{12}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	α_{13}
1				α_{11}				α_{12}				α_{13}
2				α_{21}				α_{22}				α_{23}
3				α_{31}				α_{32}				α_{33}
Rok				α_{120}				α_{122}				α_{123}

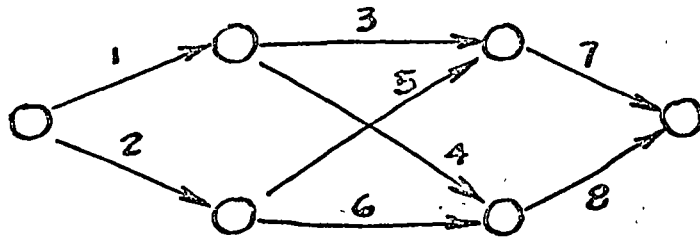
TABLA 1

RECURSOS	DÍAS	1	2	N
1		a_{11} c_{11}	a_{12} c_{12}	a_{1N} c_{1N}
2				
k		a_{k1} c_{k1}	a_{k2} c_{k2}	a_{kN} c_{kN}

TABLA 2

PLANTEAR FUNCION OBJETIVO Y RESTRICCIONES

8 actividades (i)
 3 días (j)
 3 recursos (k)



$$a_{kj} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

cantidad de recursos k disponibles el día j

$$\alpha_{ki} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

coeficientes de participación del recurso k en la actividad i

$$c_{jk} = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.15 & 0.25 & 0.3 \\ 1.2 & 1.4 & 1.6 \end{vmatrix}$$

costo del recurso k el día j

RESTRICCION DE RECURSOS

$$\sum_i \alpha_{ki} X_{ij} \leq a_{kj}$$

$$\alpha_{ki} X_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{días} \\ \left[\begin{array}{ccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ \dots & & \\ \dots & & \\ X_{81} & X_{82} & X_{83} \end{array} \right] \end{matrix} \leq \begin{matrix} \text{días} \\ \left[\begin{array}{ccc} j \\ 6 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{array} \right] \end{matrix}$$

dia 1

$$0X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{71} + X_{81} \leq 6$$

$$2X_{11} + X_{31} + X_{61} + 2X_{81} \leq 4$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{61} + 2X_{71} \leq 3$$

dia 2

$$X_{22} + X_{32} + X_{72} + X_{82} \leq 7$$

$$2X_{12} + X_{32} + X_{62} + 2X_{82} \leq 6$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{62} + 2X_{72} \leq 5$$

dia 3

$$X_{23} + X_{33} + X_{73} + X_{83} \leq 9$$

$$2X_{13} + X_{33} + X_{63} + 2X_{83} \leq 5$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{63} + 2X_{73} \leq 4$$

función Objetivo

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j \sum_k c_{kj} \alpha_{ki} x_{ij}$$

$$c_{jk} \alpha_{ki} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.8 & 0.7 & 0 & 0 & 0.9 & 1.3 & 1.1 \\ 0.8 & 0.45 & 0.4 & 0 & 0 & 0.55 & 0.75 & 0.65 \\ 4.4 & 2.8 & 2.6 & 0 & 0 & 3.0 & 4.4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & & \\ \dots & & \\ \dots & & \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

De donde la función objetivo es:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 1.3 x_{11} + 0.8 x_{21} + \dots + 1.1 x_{31} + 0.8 x_{12} + \dots \\ & + 0.65 x_{32} + 4.4 x_{13} + \dots + 4 x_{33} \end{aligned}$$

RESTRICCION DE CONDICION

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

$$[x_{ij}] \bar{e} = \bar{e}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

.....

.....

.....

.....

$$x_{81} + x_{82} + x_{83} = 1$$

$$n = 8$$

RESTRICCIONES DE FORMA

$$x_{ij} \leq d_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\sum_{u=1}^3 k_{iu} \geq d_{ij}$$

i : actividad (1, 2, ... 3)
 j : días (1, 2, 3)

Act 1

$$\begin{aligned} x_{11} &\leq d_{01} \\ x_{12} &\leq d_{02} \\ x_{13} &\leq d_{03} \end{aligned}$$

$j=1$

$$\begin{aligned} x_{10} &\geq d_{11}, \quad 0 \geq d_{11} \\ x_{20} &\geq d_{21}, \quad 0 \geq d_{21} \\ x_{30} &\geq d_{31}, \end{aligned}$$

Act 2

$$\begin{aligned} x_{21} &\leq d_{01} \\ x_{22} &\leq d_{02} \\ x_{23} &\leq d_{03} \end{aligned}$$

$j=2$

$$\begin{aligned} \dots \\ x_{60} &\geq d_{61}, \quad 0 \geq d_{61} \end{aligned}$$

Act 3

$$\begin{aligned} x_{31} &\leq d_{11} \\ x_{32} &\leq d_{12} \\ x_{33} &\leq d_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq d_{12} \\ x_{21} &\geq d_{22} \\ x_{31} &\geq d_{32} \\ x_{61} &\geq d_{62} \end{aligned}$$

.....

$j=3$

Act 7

$$\begin{aligned} x_{71} &\leq d_{31} \\ x_{72} &\leq d_{32} \\ x_{73} &\leq d_{33} \\ x_{71} &\leq d_{51} \\ x_{72} &\leq d_{52} \\ x_{73} &\leq d_{53} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &\geq d_{13} \\ x_{21} + x_{22} &\geq d_{23} \\ \dots \\ x_{62} + x_{63} &\geq d_{63} \end{aligned}$$

Act 8

$\Sigma = 30$

total $9 + 8 + 30 + 18 = 65$ restricciones 21-10

VI MODELO PRITSKER, WATTERS
Y WOLFE

O B J E T I V O S :

- 1.- Minimizar la duración total de los proyectos.
- 2.- Minimizar el retraso total o multas por retrasos para todos los proyectos.

RESTRICCIONES:

- 1.- Recursos limitados.
- 2.- Relaciones de precedencia entre actividades.
- 3.- Posibilidad de fraccionar actividades.
- 4.- Fechas obligadas de actividades y proyectos.
- 5.- Sustitución de recursos en la realización de las actividades.
- 6.- Requerimientos de ejecución de actividades concurrentes y no concurrentes.

Se utilizará la siguiente notación:

i = Número de proyecto, $i = 1, 2, \dots, I$; I = Número de proyectos.

j = Número de la actividad, $j = 1, 2, \dots, N_i$; N_i = Número de actividades en el proyecto i .

t = Período de tiempo, $t = 1, 2, \dots, \max G_i$; G_i = Fecha obligada de terminación. El proyecto i debe terminarse en ó antes del período G_i . Si no se especifica una fecha obligada entonces G_i es el último período en el horizonte de planeación.

g_i = Fecha deseada de terminación. El proyecto i no se atrasa si se termina en ó antes del período g_i .

e_i = Período más próximo de terminación del proyecto i .

a_{ij} = Período de iniciación de la actividad j del proyecto i . Se considera que la iniciación ocurre al principio de los períodos correspondientes.

d_{ij} = Número de períodos necesarios para realizar la actividad j del proyecto i . Se supone conocido.

l_{ij} = Período más próximo de terminación de la actividad j .

u_{ij} = Período más lejano de terminación de la actividad j ; ó bien, una fecha obligada de terminación para dicha actividad.

k = Identificación del recurso, $k = 1, 2, \dots, K$; K = Número de recursos distintos requeridos por los proyectos.

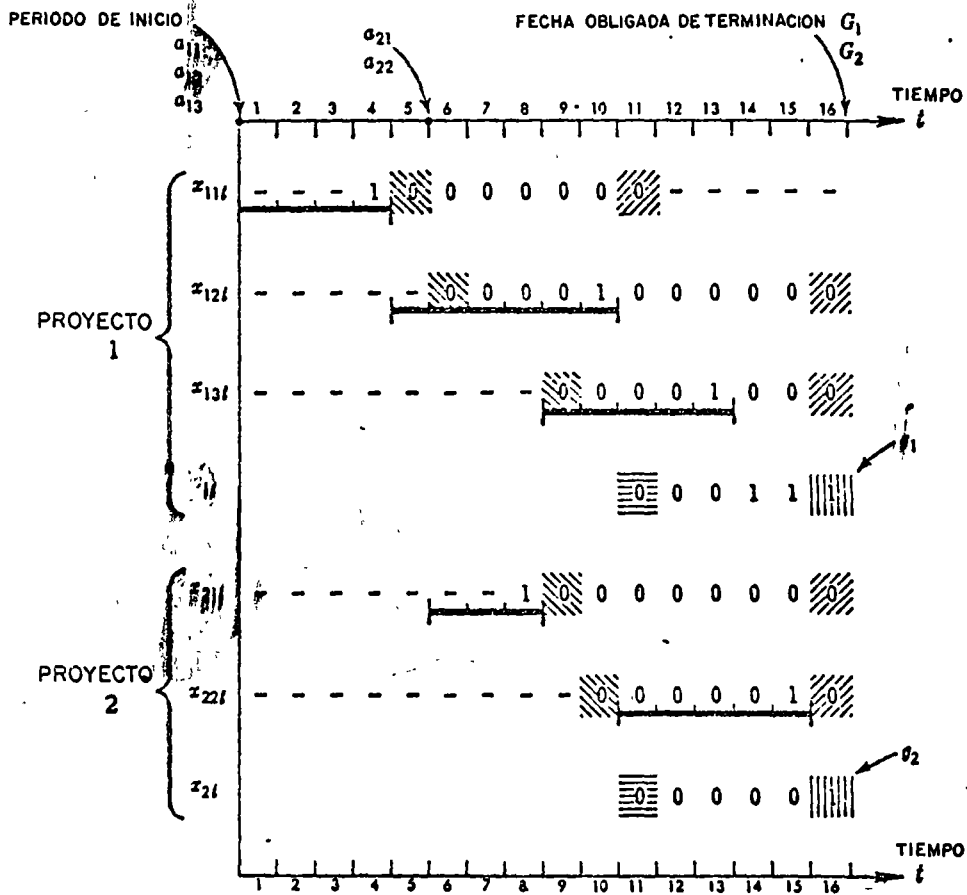
r_{ijk} = Cantidad del recurso k requerido por la actividad j del proyecto i .

R_{kt} = Cantidad disponible del recurso k en el período t .

x_{ijt} = Variable que vale 1 si la actividad j del proyecto i se termina en el período t , y 0 en caso contrario. x_{ijt} no debe tratarse necesariamente como

una variable en todos los períodos puesto que vale 0 para $t < l_{ij}$ y para $t > u_{ij}$.

x_{it} = Variable que vale 1 si todas las actividades del proyecto i se han terminado en el período t , y 0 en caso contrario. x_{it} no debe tratarse necesariamente como una variable en todos los períodos puesto que es igual a 0 para $t < e$ y 1 para $t > G_i$.



SITUACION HIPOTETICA DE DOS PROYECTOS

FUNCIÓN OBJETIVO.

Si el período de iniciación del i -ésimo proyecto es a_i , entonces su duración está dada por:

$$G_i - \sum_{t=e_i}^{G_i} x_{it} + 1 - a_i$$

Minimizar la duración de un solo proyecto es equivalente a maximizar el número de períodos restantes después de que el proyecto sea terminado en donde éste número de períodos es igual a : $\sum_{t=e_i}^{G_i} x_{it}$. Consecuentemente, la función objetivo por minimizar es la suma de las duraciones de todos los proyectos, esto es:

$$\max Z = \sum_{i=1}^I \sum_{t=e_i}^{G_i} x_{it}$$

RESTRICCIONES.

Cada una de las actividades deben terminarse; consecuentemente las variables x_{it} para cada proyecto deben valer 0 hasta que hayan sido terminadas. Esto es, el proyecto i se habrá terminado en el período t cuando se tenga

$$\sum_{q=1}^{t-1} x_{ijq} = 1 \text{ para todas las } N \text{ actividades del pro-}$$

yecto i . Este requerimiento puede anotarse:

$$x_{it} \leq \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=1}^{t-1} x_{ijq} \quad \begin{array}{l} i= 1, 2, \dots, I \\ t= e_i, e_{i+1}, \dots, G \end{array}$$

Se requiere además una restricción cuando una actividad no puede iniciarse hasta que otra ó más de las restantes hayan sido terminadas.

Por ejemplo si en el proyecto i la actividad m debe preceder a la n y t_{im} y t_{in} son los períodos de terminación de las actividades m y n respectivamente deberá tenerse:

$$t_{im} + d_{in} \leq t_{in}$$

Nótese que

$$t_{im} = \sum_{t=1}^{u_{im}} t \times x_{imt}, \text{ y } t_{in} = \sum_{t=1}^{u_{in}} t \times x_{int} \quad \text{Conse-}$$

cientemente las restricciones de forma apropiadas son:

$$\sum_{t=1}^{u_{im}} t \times x_{imt} + d_{in} \leq \sum_{t=1}^{u_{in}} t \times x_{int}$$

Por otra parte los valores r_{ijk} designan al número de unidades de recurso tipo k que se necesitan para llevar a cabo la actividad j del proyecto i . Se supone que los recursos requeridos por una actividad se usan hasta que ella se termina. Si esta hipótesis no se verifica entonces son necesarias algunas modificaciones. Por ejemplo si un cierto recurso solo se usa en los primeros p períodos de la actividad con $p \leq d_{ij}$ entonces esa actividad se trata como 2 actividades secuenciales con diferentes requerimientos y con duraciones p y $d_{ij} - p$. De esta manera las restricciones de recursos podrán aplicarse a cualquier división de una actividad en 2 ó más sub-actividades.

En cualquier período dado, la cantidad del recurso k utilizada no puede exceder a la cantidad disponible de dicho recurso. Un trabajo estará siendo procesado en el período t y terminado en el período q si $t \leq q \leq t + d_{ij} - 1$. Consecuentemente las restricciones de tamaño pueden escribirse:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{N_j} r_{ijk} x_{ijq} \leq R_{kt}; \quad t = \min a_{ij}, \dots, \max G_j; \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Proyecto	Actividad	Rede	Precedencia	Período	Inicio	Duración	Función	Requisitos		
								K=1	K=2	K=3
(i)	(j)	(i, j)	(\bar{a}_{ij})	(d_{ij})	(G_i)					
1	1			1	4	8	5	3	2	
1	2	(1,1)		1	3	8	0	1	1	
1	3			1	3	8	2	0	2	
2	1			2	3	9	1	1	1	
2	2			2	2	9	2	0	0	
2	3	(2,1)		2	2	9	2	2	0	
3	1			3	5	9	2	1	1	
3	2			3	1	9	1	3	0	
Cantidad de recurso k disponible en cada período R_{kt} :										
							8	5	4	

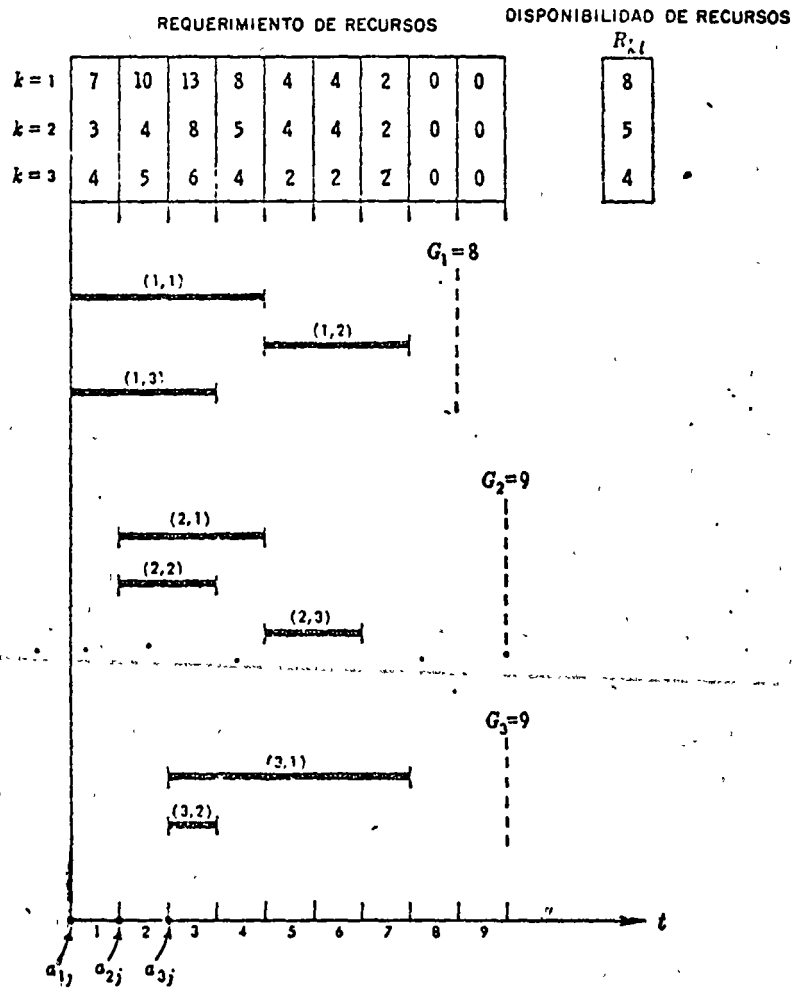
Las Variables requeridas están numeradas como sigue:

Variable No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Variable	x_{114}	x_{127}	x_{133}	x_{134}	x_{135}	x_{136}	x_{137}	x_{214}	x_{215}	x_{216}

Variable No:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Variable	x_{223}	x_{224}	x_{225}	x_{226}	x_{227}	x_{228}	x_{236}	x_{237}	x_{238}	x_{317}

Variable No.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Variable	x_{318}	x_{323}	x_{324}	x_{325}	x_{326}	x_{327}	x_{328}	x_{18}	x_{27}	x_{28}

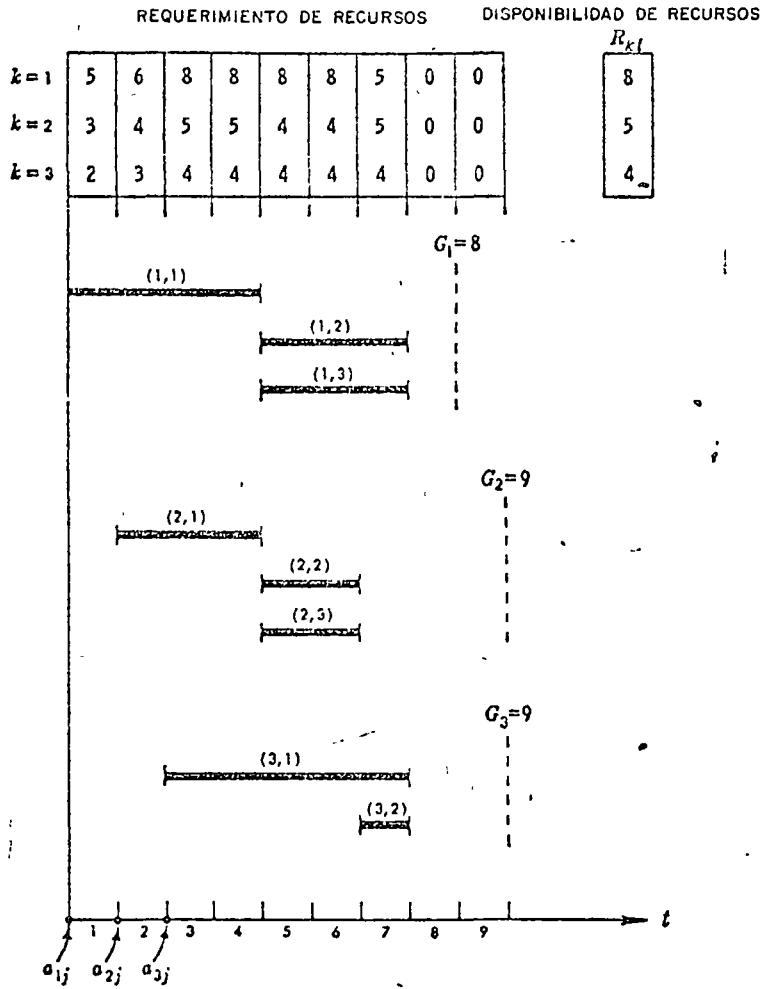
Variable No.	31	32	33
Variable	x_{29}	x_{38}	x_{39}



INICIOS MAS PROXIMOS CON RECURSOS ILIMITADOS

No de Restricción	Número de Variable																																	Restricción		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33			
	Coeficiente de Función-Objetivo																																			
	-4	-7	-3	-4	-5	-6	-7	-4	-5	-6	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-6	-7	-8	-7	-3	-3	-4	-5	-6	-7	-8	65	65	65	65	65	65			
1	1																																		1	
2		1																																	1	
3			1																																1	
4				1																															1	
5					1																														1	
6						1																													1	
7							1																												1	
8								1																											1	
9		-1	-1	-1	-1	-1	-1																												1	
10								-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	
11									-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
12											-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
13												-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
14													-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
15	-1	1																																		1
16								-3	-2	-1																										1
17																																				1
18																																				1
19																																				1
20																																				1
21																																				1
22																																				1
23	-5																																		1	
24	-3	1																																	1	
25	-2	1																																	1	
26																																			1	
27																																			1	
28																																			1	
29																																			1	
30																																			1	
31																																			1	
32																																			1	
33																																			1	
34																																			1	
35																																			1	
36																																			1	
37																																			1	

COEFICIENTES DE FUNCION OBJETIVO Y RESTRICCIONES



SOLUCION OPTIMA

ESPERANZA MATEMÁTICA: EJEMPLO PRACTICO

UN CONSTRUCTOR DESEA SELECCIONAR LA ESTRATEGIA DE CONSTRUCCIÓN A SEGUIR EN CIERTO TRABAJO EN EL QUE HA DE REALIZAR DOS OPERACIONES INDEPENDIENTES I y II QUE HAN DE REALIZARSE EN SUCECIÓN. CADA OPERACIÓN PUEDE REQUERIR 4, 5 ó 6 UT (UNIDADES DE TIEMPO) PARA REALIZARSE.

CADA OPERACIÓN PUEDE REALIZARSE A TRES RANGOS DIFERENTES DE RAPIDEZ, CADA UNO A DIFERENTE COSTO COMO EN SEGUIDA SE INDICA.

OPERACION	RANGO	COSTO POR DIA EN UM.
I	A	200
	B	240
	C	280
II	D	200
	E	300
	F	400

UM =
(UNIDADES MONETARIAS)

ADICIONALMENTE, SI EL TRABAJO NO ESTA TERMINADO EN 10 UT EL CONSTRUCTOR HA DE PAGAR UNA MULTA DE 2000 UM/UT DE RETRASO.

EL CONSTRUCTOR, CON BASE EN LOS REGISTROS DE TRABAJOS SIMILARES REALIZADOS POR EL EN EL PASADO, DETERMINA EL SIGUIENTE CUADRO DE PROBABILIDADES.

ESTRATEGIA

ESTRATEGIA	8 UT	9 UT	10 UT	11 UT	12 UT	SOMA
ΔD	0.02	0.13	0.33	0.37	0.25	1.0
ΔE	0.06	0.23	0.35	0.27	0.09	1.0
ΔF	0.12	0.36	0.35	0.14	0.03	1.0
B D	0.03	0.18	0.40	0.34	0.05	1.0
B E	0.09	0.30	0.36	0.22	0.03	1.0
B F	0.18	0.45	0.27	0.09	0.1	1.0
C D	0.06	0.28	0.46	0.20	0	1.0
C E	0.18	0.36	0.34	0.12	0	1.0
C F	0.36	0.42	0.18	0.04	0	1.0

CÁLCULO DE LA MULTA ESPERADA

SI LA DURACIÓN TOTAL DEL TRABAJO ES:

- 11 UT SE TIENE UNA MULTA DE 2000 UM
- 12 UT SE TIENE UNA MULTA DE 4000 UM
- 8 " " " " " " 0 "
- 9 " " " " " " 0 "
- 10 " " " " " " 0 "

~~CÁLCULO DE LA MULTA ESPERADA~~

$E[\text{MULTA } \Delta D] = (0.02)0 + (0.13)0 + (0.33)0 + (0.37)2000 + (0.15)4000 = 1340 \text{ UM}$
 $E[\text{MULTA } \Delta E] = (0.06)0 + (0.23)0 + (0.35)0 + (0.27)2000 + (0.09)4000 = 900 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } \Delta F] = (0.12)0 + (0.36)0 + (0.35)0 + (0.14)2000 + (0.03)4000 = 400 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } B D] = (0.03)0 + (0.18)0 + (0.40)0 + (0.34)2000 + (0.05)4000 = 880 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } B E] = (0.09)0 + (0.30)0 + (0.36)0 + (0.22)2000 + (0.03)4000 = 560 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } B F] = (0.18)0 + (0.45)0 + (0.27)0 + (0.09)2000 + (0.01)4000 = 220 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } C D] = (0.06)0 + (0.28)0 + (0.46)0 + (0.20)2000 + (0)4000 = 400 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } C E] = (0.18)0 + (0.36)0 + (0.34)0 + (0.12)2000 + (0)4000 = 280 \text{ "}$
 $E[\text{MULTA } C F] = (0.36)0 + (0.42)0 + (0.18)0 + (0.04)2000 + (0)4000 = 80 \text{ "}$

RESUMEN

ESTRATEGIA	MULTA ESPERADA
Δ D	1340
Δ E	900
Δ F	400
B D	880
B E	560
B F	220
C D	400
C E	240
C F	80

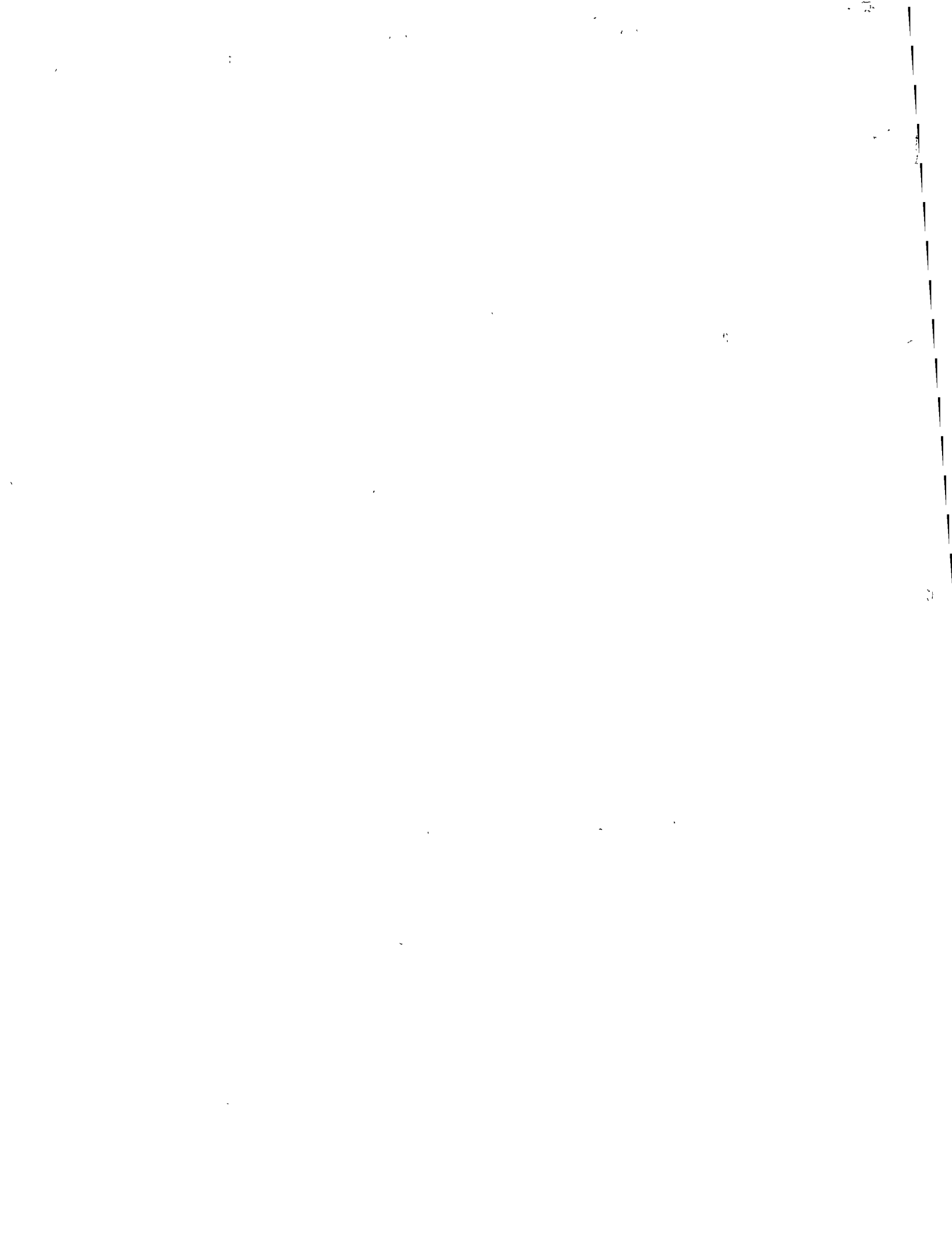
5

FINALMENTE:

ESTRATEGIA	COSTO ESPERADO DE LA OPERACIÓN	COSTO ESPERADO DE LA OPERACIÓN	MULTA ESPERADA	COSTO TOTAL ESPERADO
	I	II		
Δ D	1020	1080	1340	3440
Δ E	1020	1550	900	3470
Δ F	1020	1800	400	3220
B D	1152	1080	880	3112
B E	1152	1550	560	3212
B F	1152	1800	220	3172
C D	1232	1080	400	2712
C E	1232	1550	240	2972
C F	1232	1800	80	3112

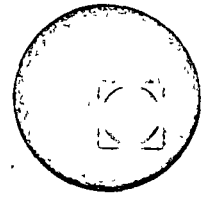
CONCLUSIÓN

LA ESTRATEGIA QUE MINIMIZA EL COSTO TOTAL ESPERADO ES C D CON UN VALOR DE 2712 UM



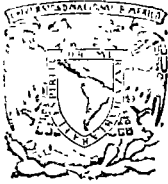


centro de educación continua facultad de ingeniería, unam

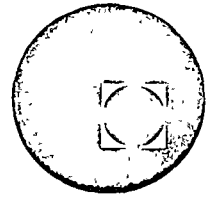


DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN LA GESTION DE EMPRESAS.

1. Ing. Jesús Acosta Flores
Asesor
Dirección General de Ing. de Sistemas
S. O. P.
México, D.F.
2. Ing. Guillermo Castellanos Guzmán
Subjefe de Bienestar Social
Dir. de Inversiones Públicas
Secretaría de la Presidencia
Palacio Nal. Edif. 10-3 Piso
México, D.F.
3. Ing. Clemente Castilleja Salas
Encargado de la Evaluación de
Proyectos en el Comité para el
Desarrollo de los Recursos de
las Cuencas Centro y Nte. de Son.
S. R. H.
Abraham Glz. # 3 Mezanine
México, D.F.
4. Ing. Francisco Escutía Navarro
Jefe de la Ofi. de Recuperación
de Información S. O.P.
Xola 1755
México, D.F.
5. Ing. Juan Huet Morales
Ing. de Sistemas
Dir. de Valuación de la
S. R. H.
P. de la Reforma # 51. 15° Piso
México, D.F.
6. Ing. Alberto Moreno Bonett
Jefe del Depto. de Análisis de Sistemas
Dir. Gral. de Ing.
S. O. P.
Ave. Universidad
México, D.F.



centro de educación continua facultad de ingeniería, unam

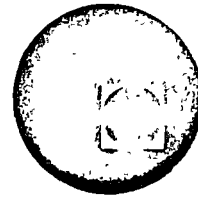


DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO APLICACIONES
DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN LA GESTION DE
EMPRESAS

7. Dr. Felipe Ochoa Rosso
Director General
Felipe Ochoa y Asociados
Ave. Revolución No. 1909-7° Piso
México 20, D.F.
8. Ing. Joel Othon Aguirre Rodríguez
Jefe del Depto. de Proyectos
I. M. S. S.
Reforma 476-8° Piso
México, D.F.
9. Ing. Jaime Humberto Zavala Vargas
Jefe de la Ofi. de Modelos de Decisión
Dir. Gral. de Ing. de Sistemas
en la S. O. P.
10. Ing. Sergio Zúñiga Barrera
Jefe del Depto. de Sistemas de Información
Dirección General de Ing. de Sistemas
S. O. P.
Xola 1755 P.B.
México, D.F.

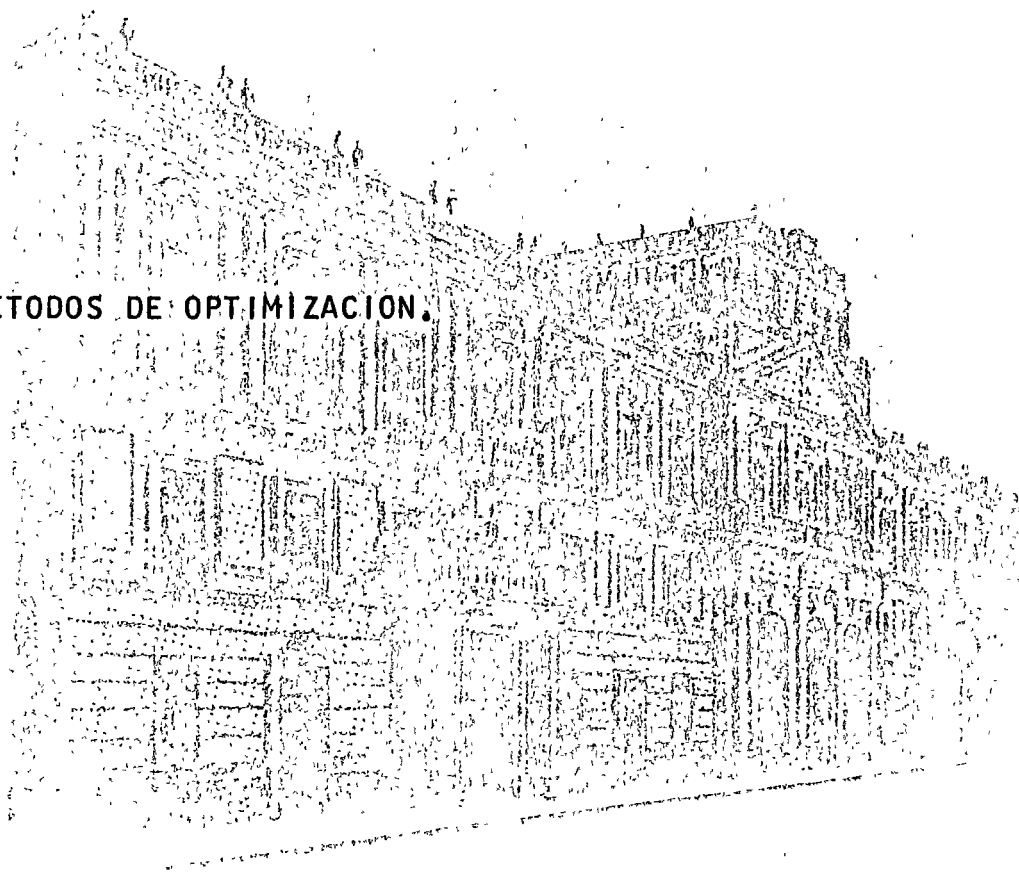


centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam



APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN LA GESTION
DE EMPRESAS.

METODOS DE OPTIMIZACION.



ING. JAIME HUMBERTO ZAVALA VARGAS.

METODOS DE OPTIMIZACION (PROGRAMACION LINEAL)

I.- INTRODUCCION

1.1 Identificación del problema

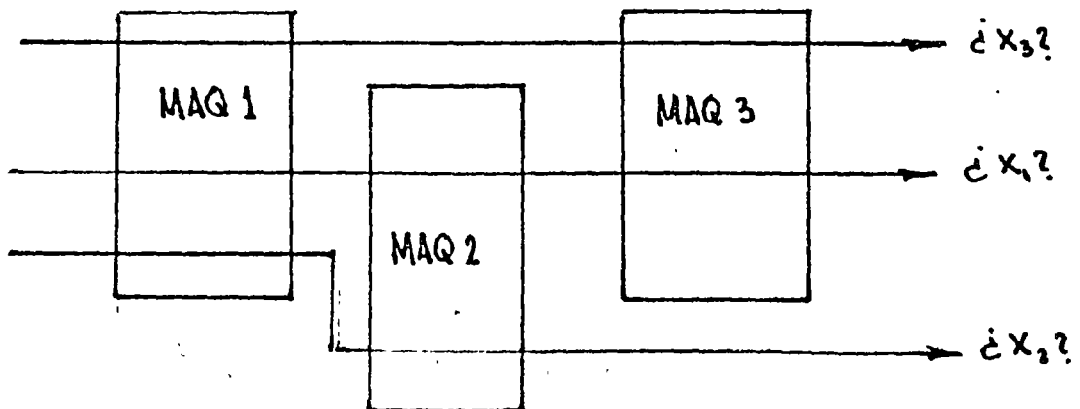
- Se tiene definido un objetivo (maximizar ganancias, minimizar costos, etc.)
- Se maneja simultaneamente un gran número de variables.
- Existen interacciones entre las variables.
- Se tienen recursos limitados.

P.L.= Distribución de los recursos para alcanzar los objetivos -
deseados.

1.2 Problemas generales

1.2.1 Problema de producción

Una fábrica tiene exceso de capacidad en 3 de sus máquinas y según estudios de mercado, se pueden introducir 3 - nuevos productos a la venta. El proceso de fabricación se muestra representado en la siguiente figura. ¿Cuánto producir de cada producto, si se desean maximizar las ganancias.



La capacidad disponible de las máquinas es la siguiente.

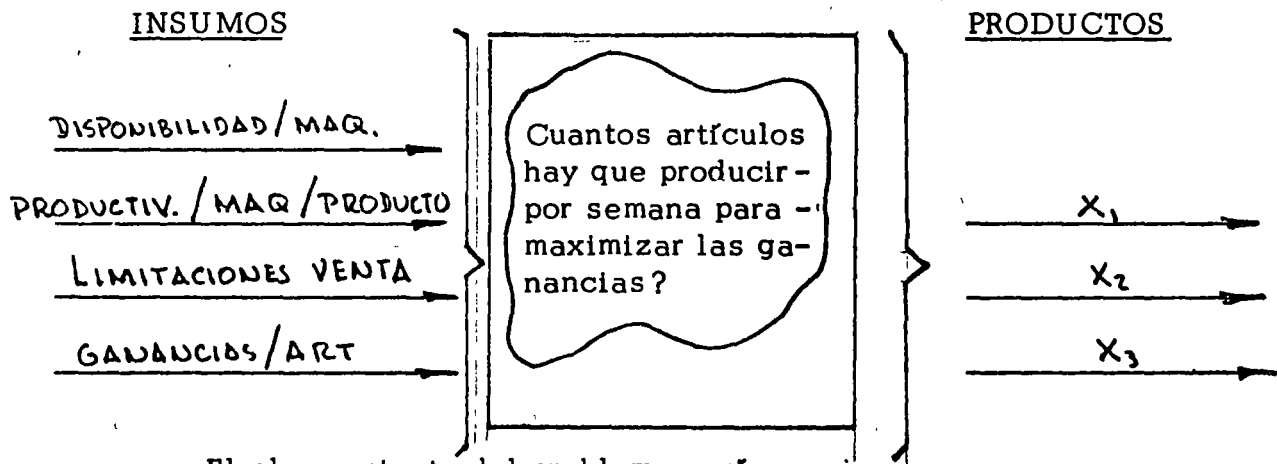
MAQUINA	TIEMPO DISPONIBLE (hrs. maq. por semana)
1	200
2	100
3	50

El número de horas de proceso requerido por cada artículo - en las diferentes máquinas es:

MAQ.	PRODUCTIVIDAD (hrs. maq. por unidad)		
	Producto 1	Producto 2	Producto 3
1	8	2	3
2	4	3	-
3	2	-	1

El departamento de ventas indica que las ventas potenciales para los productos 1 y 2 es ilimitada; mientras que el producto 3 no tendrá una venta de mas de 20 artículos por semana.

Las ganancia unitaria esperada de los artículos es de \$ 20.00, - \$ 6.00 y de \$ 8.00, respectivamente.



El planeamiento del problema sería:

a) Función objetivo

$$\text{MAX } Z = 20X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

b) Restricciones de Disponibilidad (capacidad)

$$\begin{aligned} 8X_1 + 2X_2 + 3X_3 &\leq 200 \text{ Hrs. (MAQUINA 1)} \\ 4X_1 + 3X_2 &\leq 100 \text{ Hrs. (MAQUINA 2)} \\ 2X_1 + &+ X_3 \leq 50 \text{ Hrs. (MAQUINA 3)} \end{aligned}$$

c) Restricción de ventas

$$X_3 \leq 20$$

d) Restricciones de no negatividad

$$\begin{aligned} X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \\ X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

En resumen nuestro problema será
MAXIMIZAR

$$Z = 20X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 8X_1 + 2X_2 + 3X_3 &\leq 200 \\ 4X_1 + 3X_2 &\leq 100 \\ 2X_1 + &+ X_3 \leq 50 \\ &X_3 \leq 20 \end{aligned}$$

Además:

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0$$

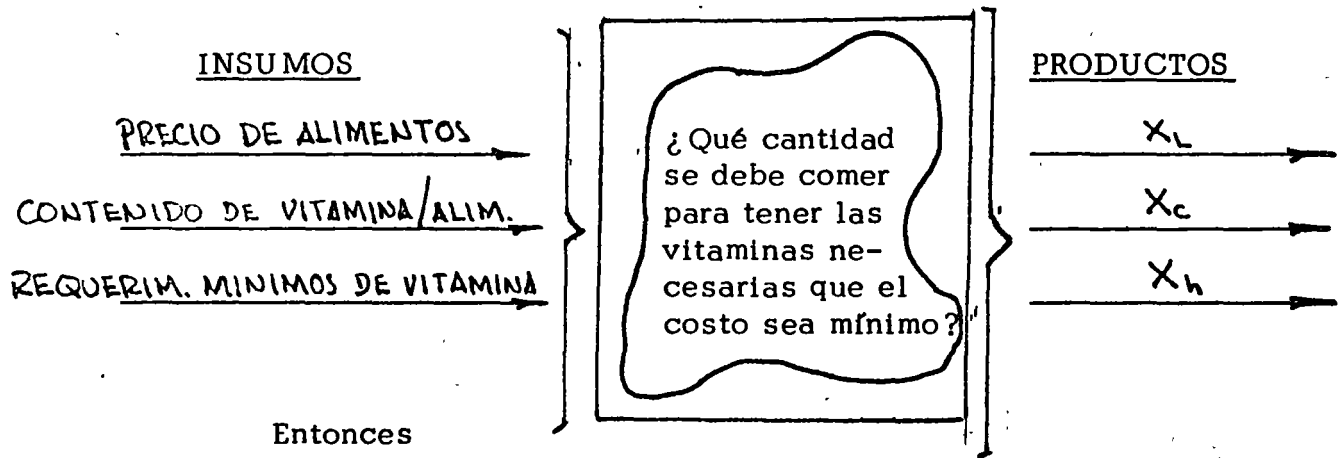
1.2.2 El problema de la dieta.

Los requerimientos nutricionales para una determinada dieta son: Vitamina A, C y D. La dieta se limitará a leche, carne y huevos; el número de mg. de vitaminas que contiene cada alimento es el siguiente:

VITAMINA	GALON DE LECHE	LIBRA DE CARNE	DOCENA DE HUEVOS	REQUERIMIENTOS MÍNIMOS DIARIOS
A	1	1	10	1 mg.
B	100	10	10	50 mg.
D	10	100	10	10 mg.
COSTO	\$1.00	\$1.10	\$0.50	

¿Qué cantidad de leche, carne y huevos se debe comer de tal forma que el costo sea mínimo?

SEA: X_L # DE GALONES DE LECHE
 X_C # DE LIBRAS DE CARNE
 X_H # DE DOCENAS DE HUEVOS



$$\text{MIN } Z = 1.0 X_L + 1.10 X_C + 0.50 X_H$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} X_L + X_C + X_H &\geq 1 \\ 100 X_L + 10 X_C + 10 X_H &\geq 50 \\ 10 X_L + 100 X_C + 10 X_H &\geq 10 \end{aligned}$$

Además: $X_L \geq 0$; $X_C \geq 0$; $X_H \geq 0$

1.2.3 El problema del Transporte.

Un fabricante desea embarcar un número de unidades de un artículo, desde varios almacenes hasta cierto número de tiendas de menudeo.

Cada tienda requiere un cierto número de unidades del artículo mientras que cada almacén puede suministrar hasta cierta cantidad.

NOMENCLATURA

m = Número de almacenes

n = Número de tiendas

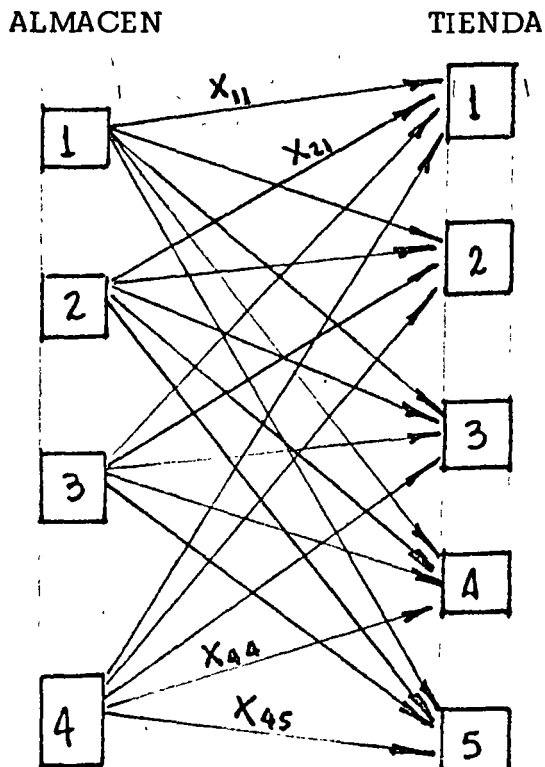
a_i = Cantidad total del artículo disponible para embarque en el almacén 'i'

b_j = Requiriendo total del artículo por la tienda "j"

x_{ij} = Cantidad del artículo embarcado desde el almacén "i" a la tienda "j"

c_{ij} = Costo resultante de embarcar una unidad del artículo - desde el almacén "i" a la tienda "j"

ESQUEMA DEL PROBLEMA:



¿Cuántas unidades enviar desde cada almacén a cada tienda de tal forma que el costo total del embarque sea mínimo?

Ahorita supondremos que:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j \quad \left(\begin{array}{l} \text{LA CANTIDAD TOTAL DISPONIBLE ES} \\ \text{IGUAL A LA CANTIDAD TOTAL} \\ \text{REQUERIDA} \end{array} \right)$$

La función objetivo sería:

$$\text{MIN } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \dots + C_{15}X_{15} + C_{21}X_{21} + \dots + C_{45}X_{45}$$

Sujeto a las restricciones:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = a_1$$

que es la cantidad total embarcada desde el almacén 1

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = a_2 \quad (\text{almacén 2})$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = a_3 \quad (\text{almacén 3})$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = a_4 \quad (\text{almacén 4})$$

la cantidad total embarcada a cada tienda es:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = b_1 \quad (\text{tienda 1})$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = b_2 \quad (\text{tienda 2})$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = b_3 \quad (\text{tienda 3})$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = b_4 \quad (\text{tienda 4})$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = b_5 \quad (\text{tienda 5})$$

además

$$X_{ij} \geq 0 \quad ; \quad \forall i \quad ; \quad \forall j$$

1.2.4 El problema de asignación.

Una fábrica ha adquirido 3 máquinas nuevas de diferentes tipos. Existen 4 lugares disponibles para instalarlas. Algunos lugares son más deseables para instalar cada máquina-

debido a su proximidad del centro de trabajo.

¿Cómo asignar las máquinas en los lugares disponibles con el objeto de minimizar el costo del manejo de materiales?

MAQ.	COSTO ESTIMADO POR UNIDAD DE TIEMPO POR MANEJO DE MTLES.			
	LUGAR			
	1	2	3	4
A	13	10	12	11
B	15	X	13	20
C	5	7	10	6

El lugar 2 no se considera deseable para la máquina B.

1.3 Algebra de matrices.

Def. Matriz

"es un arreglo rectangular de numeros"

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

si $m=n$ se le llama matriz cuadrada de orden "n"

Producto de 2 matrices:

$$A_{m \times r} ; B_{r \times n} \text{ ENTONCES } C = AB$$

DONDE $C_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{2(3)+1 \times 0}_{C_{11}} & \underbrace{2 \times 2 + 1 \times 1}_{C_{12}} \\ \underbrace{3(3)+2 \times 0}_{C_{21}} & \underbrace{3 \times 2 + 2 \times 1}_{C_{22}} \\ \underbrace{4 \times 3 + 5 \times 0}_{C_{31}} & \underbrace{4 \times 2 + 5 \times 1}_{C_{32}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden "n"

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} ; a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

DETERMINANTES

Asociada a cada matriz cuadrada hay un número que se le llama el determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 0 \times 2 = 3$$

MATRICES SINGULARES Y NO SINGULARES

"La matriz A (cuadrada) se dice que es singular si $|A| = 0$

no singular si $|A| \neq 0$

MATRIZ INVERSA

"Dada una matriz "A" si existe una matriz cuadrada

"B" que satisface

$$AB = BA = I$$

entonces a "B" se le llama la inversa de A

si llamamos a "B" como A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

OBTENCION DE LA INVERSA (GAUSS)

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} ; \quad \text{¿ } A^{-1} ?$$

$|A| \neq 0$ POR LO TANTO TIENE INVERSA

	A			I		
$\div 4 \longrightarrow$	④	1	2	1	0	0
	0	1	0	0	1	0
	8	4	5	0	0	1
$X(-8) \longrightarrow$	1	1/4	2/4	1/4	0	0
	0	1	0	0	1	0
$+ \longrightarrow$	⑧	4	5	0	0	1
$+ \longrightarrow$	1	①/4	2/4	1/4	0	0
$X(-1/4) \longrightarrow$	0	1	0	0	1	0
	0	2	1	-2	0	1
$X(-2) \longrightarrow$	1	0	2/4	1/4	-1/4	0
$+ \longrightarrow$	0	1	0	0	1	0
	0	②	1	-2	0	1
$+ \longrightarrow$	1	0	②/4	1/4	-1/4	0
$X(-2/4) \longrightarrow$	0	1	0	0	1	0
	0	0	1	-2	-2	1
	1	0	0	5/4	3/4	-2/4
	0	1	0	0	1	0
	0	0	1	-2	-2	1
	I			A^{-1}		

COMPROBADO SI A^{-1} ES INVERSA:

Se sabe que $A^{-1} A = A A^{-1} = I$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & -2/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & -2/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

SOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS POR METODO GAUSS-JORDAN

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 7$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 = 4 \quad ; \quad AX = b$$

$$X_1 + 3X_2 + 5X_3 = 2$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad X_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad b_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A X = b; \quad A A^{-1} = A^{-1} A \quad \text{entonces} \quad IX = A^{-1} b$$

$$\text{por lo tanto} \quad X = A^{-1} b$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/8 & 2/8 & -2/8 \\ -9/8 & 11/8 & 5/8 \\ 5/8 & -7/8 & -1/8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/8 & 2/8 & -2/8 \\ -9/8 & 11/8 & 5/8 \\ 5/8 & -7/8 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/8 \\ -9/8 \\ 5/8 \end{bmatrix}$$

ESTO ES PARA $n = m$ (# incognitas = # ecuaciones)

SOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS ($m < n$):

$$\begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 + a_{15} X_5 = b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 + a_{25} X_5 = b_2 \\ a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 + a_{35} X_5 = b_3 \end{array}$$

Si se forma la siguiente matriz (BASE)

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se le puede obtener A_1^{-1}

asociada a esta matriz está el vector X^1 que es:

$$X^1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

si se suponen valores arbitrarios a X_4 y X_5 entonces

$X^1 = A_1^{-1} b - C_1$ donde C_1 es la matriz siguiente

$$C = \begin{bmatrix} a_{14} X_4 - a_{11} X_5 \\ a_{24} X_4 - a_{25} X_5 \\ a_{34} X_4 - a_{35} X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix}$$

El número de valores arbitrarios que se pueden dar a X_4 y X_5 son infinito; el número de matrices del tipo A_1 que se pueden formar son 10. Se tienen infinito número de soluciones.

Si $X_4 = X_5 = 0$ se reduce el problema

una solución será:

$$X^1 = A_1^{-1} b \text{ con } X_4 = X_5 = 0 \text{ (SOLUCION BASICA)}$$

$$\# \text{ de soluciones básicas} = {}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

las soluciones básicas con $X_i \geq 0$ se llaman SOLUCIONES
BASICAS FACTIBLES

II METODOS DE SOLUCION

2.1.- SOLUCION GRAFICA E INTERPRETACION

Considerese el siguiente modelo de Programación Lineal

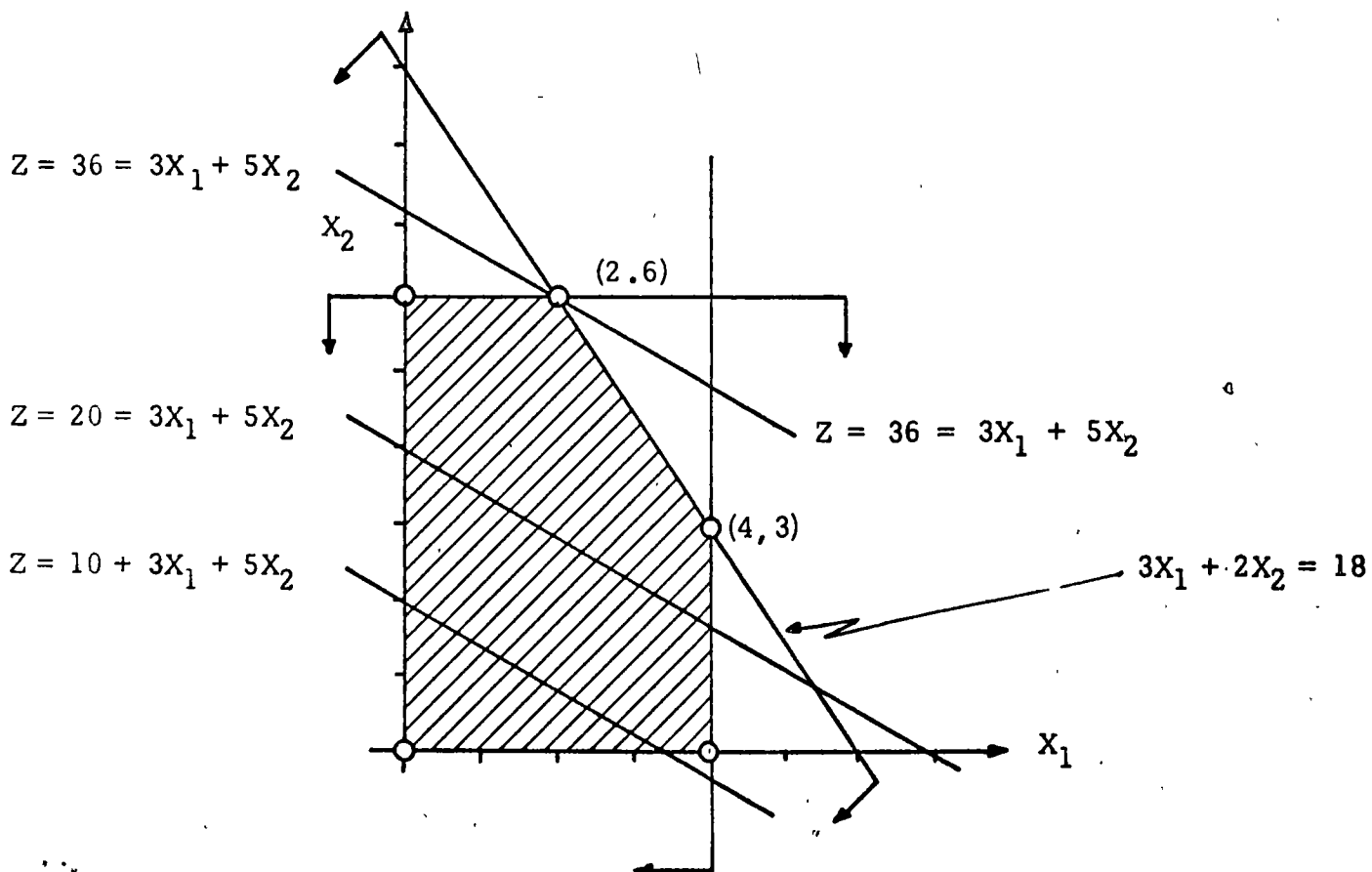
$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

sujeto a: $X_1 \leq 4$

$$X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

además $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$



▨ Soluciones factibles

○ Soluciones básicas factibles ("Puntos extremo")

2.2.- METODO SIMPLEX

2.2.1.- Descripción del Método

- Examina soluciones básicas factibles
- ¿Cuántas? solo las más "prometedoras" y se "para el procedimiento" cuando detecta una óptima.
- Una vez que se sitúa en la primera solución básica se va al punto extremo adyacente que le proporciona mayor Z . Después de situarse este y si no encuentra otro punto extremo que mejore la Z , esta será la solución óptima.
- Cada solución va siendo mejor que la anterior (nunca regresa a una solución ya investigada).

Ya se conoce como se encuentran soluciones básicas (puntos extremo) para un sistema de ecuaciones aunque $n > m$.

¿Cómo se determinan soluciones básicas para un sistema de desigualdades?

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a:

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

además $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$

Se introducirán "Variables de Holgura"

F.O. $\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$

S.A.

X_1	$+ X_3$	$= 4$
X_2	$+ X_4$	$= 6$
$3X_1 + 2X_2$	$+ X_5$	$= 18$

además $X_j \geq 0$; $J = 1, 2, 3, 4, 5$

La primera solución básica factible se forma considerando como base X_3 , X_4 , X_5 (variables básicas) y como variables no básicas a X_1 y X_2 .

$$X_1 = 0 ; X_2 = 0 ; X_3 = 4 ; X_4 = 6 ; X_5 = 18$$

por lo que: $Z = 0$

La siguiente solución básica que incrementa Z es un punto extremo adyacente a $(X_1 = 0, X_2 = 0)$, lo cual implica sacar de la base una variable básica e introducir una no-básica y de esta forma obtener una nueva base.

¿Cual entra a la base X_1 ó X_2 ? ¿Cual sale X_3, X_4 ó X_5 ?

Entra la que incremente en mayor cantidad la F.O.

$Z = 3X_1 + 5X_2$

X_2 incrementa Z a razón de 5 por unidad
 X_1 incrementa Z a razón de 3 por unidad

Entra a la Base X_2

ECUACION	INCREMENTO MAXIMO DE X_2
$X_3 = 4 - \cancel{X_1}$	Sin Límite
$X_4 = 6 - X_2$	$X_2 = 6$ para $X_4 \geq 0$
$X_5 = 18 - \cancel{3X_1} - 2X_2$	$X_2 = 9$ para $X_5 \geq 0$

Sale de la base "la que X_2 haga llegar a más pronto a cero"

Saldrá X_4

$$\begin{array}{l} \textcircled{c} X_5 + \textcircled{a} \rightarrow \text{a) } Z - 3X_1 - 5X_2 = 0 \\ \text{b) } X_1 + X_3 = 4 \\ \text{c) } X_2 + X_4 = 6 \rightarrow \text{sale} \\ \textcircled{c} (-2) + \textcircled{d} \rightarrow \text{d) } 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{entra} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a') } Z - 3X_1 + 5X_4 = 30 \\ \text{b') } X_1 + X_3 = 4 \\ \text{c') } X_2 + X_4 = 6 \\ \text{d') } 3X_1 - 2X_4 + X_5 = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a') } Z - 3X_1 + 5X_4 = 30 \\ \text{b') } X_1 + X_3 = 4 \\ \text{c') } X_4 + X_2 = 6 \\ \text{d') } 3X_1 - 2X_4 + X_5 = 6 \rightarrow \text{sale} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{entra} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = X_4 = 0 ; \\ X_3 = 4; X_2 = 6; \\ X_5 = 6 \quad Z = 30 \end{array} \right.$$

¿es óptima? $Z = 30 + 3X_1 - 5X_4$ pero $X_4 = 0$

$$Z = 30 + 3X_1$$

es factible incrementar Z introduciendo X_1

ECUACION	Incremento Máximo de X_1
$X_3 = 4 - X_1$	$X_1 \leq 4$
$X_2 = 6 - X_4$	sin límite
$X_5 = 6 - 3X_1 + 2X_4$	$X_1 \leq 2$

- a") $Z + 3X_4 + X_5 = 36$
- b") $X_3 + \frac{2}{3}X_4 - \frac{1}{3}X_5 = 2$
- c") $X_2 + X_4 = 6$
- d") $X_1 - \frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{3}X_5 = 2$

$$\begin{array}{l}
 \text{a") } Z + 3X_4 + X_5 = 36 \\
 \text{b") } \frac{2}{3}X_4 - \frac{1}{3}X_5 + X_3 = 2 \\
 \text{c") } X_4 + X_2 = 6 \\
 \text{d") } -\frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{3}X_5 + X_1 = 2
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = 2; X_2 = 6; \\ X_3 = 2; X_4 = X_5 = 0 \\ Z = 36 \end{array}$$

$$Z = 36 - 3X_4 - X_5 \quad \text{sol. óptima}$$

VARIABLES DE HOLGURA:

$$\text{a) } X_1 + X_2 \leq b ; \quad X_1 + X_2 + X_3 = b \quad (\text{holgura positiva})$$

$$\text{b) } X_1 + X_2 \geq b ; \quad X_1 + X_2 - X_3 = b \quad (\text{holgura negativa})$$

VARIABLES ARTIFICIALES

Si se tienen restricciones del tipo IGUALDAD

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 = b_i$$

se usan variables artificiales para poder formar la base inicial -
(que es una matriz identidad)

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + X_3 = b_i$$

X_3 valdrá siempre cero en la solución óptima.

Volviendo a la restricción tipo b)

$X_1 + X_2 - X_3 = b$ con ella no puede formarse la base inicial , -

se le añade una variable artificial $X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = b$.

2.2 FORMATO DE CALCULO

MIN $Z = X_2 - 3X_3 + 2X_5 \Rightarrow \text{MAX}(-Z) = -X_2 + 3X_3 - 2X_5$

S.O.

$(X_1) + 5x_4 - x_3 + 2x_5 = 7$
 $-2x_2 + 4x_3 + (X_4) = 12$
 $-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + (X_6) = 10$

	C_j	0	-1	3	0	-2	0		
C_B	BASE	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Θ
0	P_1	7	1	3	-1	0	2	0	-7
0	P_4	12	0	-2	(4)	1	0	0	3 $\blacktriangleright \div 4$
0	P_6	10	0	-4	3	0	8	1	3.33
$\Delta_1 = C_j - \sum C_{ij}$		/	0	-1	3	0	-2	0	
0	P_1	10	1	(10/4)	0	1/4	2	0	4 $\blacktriangleright \times 4/10$
3	P_3	3	0	-2/4	1	3/4	0	0	-6
0	P_6	1	0	-10/4	0	-3/4	8	1	-4/10
$\Delta_2 = C_j - \sum C_{ij}$		/	0	2/4	0	-3/4	-2	0	
-1	P_2	4	4/10	1	0	1/10	8/10	0	
3	P_3	5	2/10	0	1	12/10	4/10	0	
0	P_6	11	1	0	0	2/10	10	1	
$\Delta_3 = C_j - \sum C_{ij}$		/	-2/10	0	0	-32/10	-24/10	0	

← COSTOS DE OPORT.

← COSTOS DE OPORT.

∴ sol. óptima
 $(X_2=4; X_3=5; X_6=11)$
 $(X_1 = X_4 = X_5 = 0)$

$\text{MAX}(-Z) = -4 + 3(5) - 2(0) = 11$

- 1º CALCULAR COSTOS DE OPORTUNIDAD
- 2º EXTRA EL MAYOR POSITIVO; SI TODOS SON ≤ 0 LA SOLUCION ES ÓPTIMA
- 3º - calcular columna Θ , SALE EL Q' TENGA LA MENOR C. POSITIVA Y MAYOR DE CERO

2.3.- ALGORITMO PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

EL PROBLEMA GENERAL DEL TRANSPORTE.

Un producto debe ser embarcado en las cantidades a_1, a_2, \dots, a_m respectivamente, donde cada uno de "m" puntos de EMBARQUE U ORIGENES y deben ser recibidos en cantidades b_1, b_2, \dots, b_n respectivamente por cada uno de "n" destinos. Se conocen todas las combinaciones de " C_{ij} " que es el costo de transportar una unidad desde el origen "i" hasta el destino "j" $\sum X_{ij}$ (las cantidades a ser transportadas a través de todas las rutas) con objeto de minimizar el costo total de transporte?

SUPOSICION: $\sum_i a_i = \sum_j b_j$; la cantidad total transportada es igual a la cantidad total recibida

Para $m = 3$ y $n = 5$ $MIN Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \dots + C_{35}X_{35}$

a)	$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}$									$= a_1$
b)					$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25}$					$= a_2$
c)									$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35}$	$= a_3$
d)	X_{11}				$+ X_{21}$				$+ X_{31}$	$= b_1$
e)		X_{12}			$+ X_{22}$				$+ X_{32}$	$= b_2$
f)			X_{13}		$+ X_{23}$				$+ X_{33}$	$= b_3$
g)				X_{14}		$+ X_{24}$			$+ X_{34}$	$= b_4$
h)					X_{15}		$+ X_{25}$		$+ X_{35}$	$= b_5$
i)									X_{ij}	≥ 0

a) \rightarrow h) son $m+n$ ECUACIONES y $m \cdot n$ VARIABLES

Si se suman las ecuaciones d) hasta h) y a esta suma se le resta b) + c), resulta la ecuación a). La ecuación a) es redundante y no necesita ser incluida en el sistema.

"m + n - 1" ecuaciones y "m n" variables

Si $\sum_i a_i > \sum_d b_j$ (disponible para embarque > requerido) se -
trabaja con un "destino ficticio"

Si $\sum_i a_i < \sum_d b_j$ (disponible para embarque < requerido) se tra-
baja con un "origen ficticio"

Ejemplo.

Una compañía ha decidido iniciar la producción de 5 nuevos artícu-
los en sus 3 plantas que tienen exceso de capacidad de produc-
ción

Planta	Capacidad disponible por unidad de tiempo.
1	40
2	60
3	90

Se han hecho estudios de mercado y se estiman las siguientes ven-
tas:

Producto	Ventas potenciales por unidad de tiempo.
1	30
2	40
3	70
4	40
5	60

el ^{PRECIO} ~~proceso~~ de venta unitario es igual para cada producto.

La planta 3 no puede producir el artículo 5. Los costos variables por unidad, de acuerdo a la planta y al producto son los siguientes:

PLANTA	COSTOS VARIABLES POR UNIDAD				
	1	2	3	4	5
1	20	19	14	21	16
2	15	20	13	19	16
3	18	15	18	20	X

¿Que cantidad de cada artículo se debe producir en cada planta para que los costos sean mínimos?

CONSIDERANDO A LAS PLANTAS COMO ORIGENES Y A LOS PRODUCTOS

~~Considerando~~ como destinos se asemeja a un problema de transporte.

La capacidad disponible será la cantidad embarcada y las ventas parciales será la cantidad recibida en cada destino.

Como las ventas potenciales (requerido) > capacidad disponible (embarcado) se considerará una planta ficticia.

2002

	DESTINO					DISPONIBLE PARA ENBARQUE
	1	2	3	4	5	a_i
1	X_{11} 20	X_{12} 19	X_{13} 14	X_{14} 21	X_{15} 16	40
2	X_{21} 15	X_{22} 20	X_{23} 13	X_{24} 19	X_{25} 16	60
3	X_{31} 18	X_{32} 15	X_{33} 18	X_{34} 20	X_{35} M	90
4	X_{41} 0	X_{42} 0	X_{43} 0	X_{44} 0	X_{45} 0	50
DEMANDA	30	40	70	40	60	

← "planta ficticia"

Ahora se tiene que $\sum_i a_i = \sum_j b_j$

CONSTRUCCION DE LA PRIMERA SOLUCION BASICA

ESQUINA NOROESTE

	1	2	3	4	5	a_i
1	20	19	14	21	16	40
2	15	20	13	19	16	60
3	18	15	18	20	M	90
4	0	0	0	0	0	50
b_j	30	40	70	40	60	240

$$X_{11} = \text{MIN}(a_1, b_1) = 30$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30					10
2	0					60
3	0					90
4	0					50
b_j	0	40	70	40	60	

$$X_{12} = \text{MIN}(a_1, b_2) = 10$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30	10	0	0	0	0
2	0					60
3	0					90
4	0					50
b_j	0	30	70	40	60	

$$X_{22} = \text{MIN}(a_2, b_2) = 30$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30	10	0	0	0	0
2	0	30				30
3	0	0				90
4	0	0				50
b_j	0	0	70	40	60	

$$X_{23} = \text{MIN}(a_2, b_3) = 30$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30	10	0	0	0	0
2	0	30	30	0	0	0
3	0	0				90
4	0	0				50
b_j	0	0	40	40	60	

$$X_{33} = \text{MIN}(a_3, b_3) = 40$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30	10	0	0	0	0
2	0	30	30	0	0	0
3	0	0	40			50
4	0	0	0			50
b_j	0	0	0	40	60	

$$X_{34} = \text{MIN}(a_3, b_4) = 40$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30	10	0	0	0	0
2	0	30	30	0	0	0
3	0	0	40	40		10
4	0	0	0	0		50
b_j	0	0	0	0	60	

$$X_{35} = \text{MIN}(a_3, b_5) = 10$$

	1	2	3	4	5	a_i
1	30	10	0	0	0	0
2	0	30	30	0	0	0
3	0	0	40	40	10	0
4	0	0	0	0		50
b_j	0	0	0	0	50	

40

60

90

$$X_{45} = 50$$

30 30 70 40

	1	2	3	4	5	a_i		
1	30	20	10	19		40		
2		30	20	30	13	60		
3			40	18	40	20	10	90
4					50	10	50	
b_j	30	40	70	40	60	240		

$$Z = 30 \times 20 + 10 \times 19 +$$

$$\dots + 10M + 50 \times 0$$

$$Z = \text{Grande}$$

Desventaja: para asignar no toma en cuenta costos por lo que estará muy alejado del óptimo, ello implica más iteraciones

Otros métodos (mínimo de renglones, mínimo de columnas, mínimo de la matriz) pero el mejor es el Vogel.

VOGEL :

	1	2	3	4	5	a_i	0_i
1	20	19	14	21	16	40	$16-14$ 2
2	15	20	13	19	16	60	$15-13$ 2
3	18	15	18	20	M	90	$18-15$ 3
4	0	0	0	0	0	50	0
b_j	30	40	70	40	60	240	
D_j	$15-0$ 15	$15-0$ 15	$13-0$ 13	$19-0$ 19	$16-0$ 16		

$X_{44} = 40$

- 1.- Sacar diferencias
- 2.- Seleccionar la diferencia mayor
- 3.- Seleccionar costo mínimo
- 4.- Seleccionar Min a_i, b_j y asegurar ASIGNAR
- 5.- Repetir

	1	2	3	4	5	a_i	0_j	0_i
1	20	19	14	0 21	16	40	2	$16-14$ 2
2	15	20	13	0 19	16	60	2	$15-13$ 2
3	18	15	18	0 20	M	90	3	$18-15$ 3
4	0	0	0	40 0	0	10	0	0
b_j	30	40	70	0	60			
D_j	15	15	13	19	16			

$X_{45} = 10$

	1	2	3	4	5	a_i	0_j	0_i
1	20	19	14	0 21	16	40	2	2
2	15	20	13	0 19	16	60	2	2
3	18	15	18	0 20	M	90	3	3
4	0 0	0 0	0 0	40 0	10 0	0	0	0
b_j	30	40	70	0	50			
D_j	15	15	13	19	16			
D_j	$18-15$ 3	$19-15$ 4	$14-13$ 1		0			

$X_{32} = 40$

	1	2	3	5	a_i	0_i
1	20	19	14	16	40	$\frac{16-14}{2}$
2	15	20	13	16	60	$\frac{16-13}{3}$
3	18	15	18	M	50	$\frac{18-15}{3}$
b_j	30	0	70	50		
D_j	18-15		14-13	16-16		
	3		1	0		

$X_{31} = 30$

	1	3	5	a_i	0_i
1	20	14	16	40	$\frac{16-14}{2}$
2	15	13	16	30	$\frac{16-13}{3}$
3	18	18	M	50	$\frac{M-18}{3}$
b_j	0	70	50		
D_j	14-13	16-16			
	1	0			

$X_{33} = 50$

	3	5	a_i	0_i
1	14	16	40	2
2	13	16	30	3
3	18	M	0	
b_j	20	50		
D_j	1	0		

$X_{23} = 20$

	3	5	a_i	0_i
1	14	16	40	16
2	13	16	10	16
b_j	0	50		
D_j		16		

$X_{15} = 40$

$X_{25} = 10$

	1	2	3	4	5	a_i
1					40	40
2	30		20		10	60
3		40	50			90
4				40	10	50
b_j	30	40	70	40	60	

Los costos asociados a la primera solución básica factible

	1	2	3	4	5
1					16
2	15		13		16
3		15	18		
4				0	0

Dantzing demostró que si pueden encontrarse números "U_i" y "V_j" tales que para aquellas X_{ij} en la solución básica tenemos $U_i + V_j = C_{ij}$ y $U_i + V_j = \bar{C}_{ij}$ para que aquellas que no se encuentran en la base

Si todas las variables no básicas tienen $C_{ij} - \bar{C}_{ij} \geq 0$ entonces la solución es óptima

$$\begin{aligned}
 U_1 + V_5 &= 16 \\
 U_2 + V_1 &= 15 \\
 U_2 + V_3 &= 13 \\
 U_2 + V_5 &= 16 \\
 U_3 + V_2 &= 15 \\
 U_3 + V_3 &= 18 \\
 U_4 + V_4 &= 0 \\
 U_4 + V_5 &= 0
 \end{aligned}$$

la solución de este sistema se logra fácilmente con la siguiente tabla:

		1	2	3	4	5
	u \ v	15	10	13	16	16
1	0					16
2	0	15		13		16
3	5		15	18		
4	-16				0	0

La matriz \bar{C}_{ij} será

		1	2	3	4	5
	u \ v	15	10	13	16	16
1	0	15	10	13	16	16
2	0	15	10	13	16	16
3	5	20	15	18	21	21
4	-16	-1	-6	-3	0	0

La matriz $C_{ij} - \bar{C}_{ij}$ será

	1	2	3	4	5
1	5	9	1	5	0
2	0	10	0	3	0
3	-2	0	0	-1	M
4	1	6	3	0	0

existen negativos no es
óptima.

Seleccionamos para entrar a la base la más negativa (X_{31}). La tabla siguiente nos da el criterio para saber cual sale de la base.

	1	2	3	4	5	a_i
1					40	40
2	$30 - \theta$		$20 + \theta$		10	60
3	θ	40	$50 - \theta$			90
4				40	10	50
b_j	30	40	70	40	60	

$\theta \leq 30$ para que no se haga negativo entonces sale de la base X_{21}

La tabla quedaría como sigue :

	1	2	3	4	5	a_i
1					40	40
2			50		10	60
3	30	40	20			90
4				40	10	50
b_j	30	40	70	40	10	

Se obtiene la matriz \bar{C}_{ij} y luego la matriz $C_{ij} - \bar{C}_{ij}$ y se checa si es óptima. Si no es se repite; finalmente la solución óptima es la siguiente

	1	2	3	4	5	a_i
1			10		30	40
2			60			60
3	30	40		20		90
4				20	30	50
b_j	30	40	70	40	60	

2.5.- ALGORITMO PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE ASIGNACION

Este problema es un caso particular del de Transporte cuando:

$n = m$; número de orígenes = número de destinos

$a_i = 1 \forall_i$; la cantidad enviada es una unidad

$b_j = 1 \forall_j$; la cantidad recibida es una unidad

MAQUINA	COSTO POR UNIDAD DE TIEMPO DE MANEJO DE MATERIALES			
	LOCALIZACION			
	1	2	3	4
A	13	10	12	11
B	15	X	13	20
C	5	7	10	6

como $n = m$ entonces se pondrá una máquina ficticia

		1	2	3	4		
- 10	→	A	13	10	12	11	M es un costo muy grande
- 13	→	B	15	M	13	20	
- 5	→	C	5	7	10	6	
		D	0	0	0	0	

El procedimiento de solución es convertir esta matriz de costo a otra de costo equivalente para la cual se logre una asignación biunívoca y de costo mínimo.

	1	2	3	4
A	3	0	2	1
B	2	M	0	7
C	0	2	5	1
D	0	0	0	0

Sol. óptima - $a_i = 1$ asignación
 $b_j = 1$ asignación

Otro ejemplo

a)

	1	2	3	4	5	
- 8 →	A	11	17	8	16	20
- 6 →	B	9	7	12	6	15
- 12 →	C	13	16	15	12	16
- 17 →	D	21	24	17	28	26
- 10 →	E	14	10	12	11	15

b)

A	3	9	0	8	12
B	3	1	6	0	9
C	1	4	3	0	4
D	4	7	0	11	9
E	4	0	2	1	5

- 1
- 4

no es sol. $\left. \begin{matrix} b_3 > 1 \\ b_4 > 1 \end{matrix} \right\}$

óptima

	1	2	3	4	5
A	2	9	0	8	8
B	2	1	6	0	5
C	0	4	3	0	0
D	3	7	0	11	5
E	3	0	2	1	1

no es sol. $\left\{ \begin{array}{l} a_3 > 1 \\ b_3 > 1 \\ b_4 > 1 \end{array} \right\}$
 óptima

reservar asignación donde $a_i = 1$ y $b_j = 1$ y tachar los ceros

si ya hay asignación (empezar por renglones y luego por columnas)

	1	2	3	4	5
A			0		
B				0	
C	0				
D					
E		0			

no es aún sol. óptima solo se han hecho 4 de 5 asignaciones. ¿Cómo crear más ceros sin eliminar dos que ya tenemos o sin generar costos negativos?

	1	2	3	4	5
A	2	9	0	8	8
B	2	1	6	0	5
C	0	4	3	0	0
D	3	7	0	11	5
E	3	0	2	1	1

②

dibujar líneas hasta cubrir los ceros (# de líneas = # de asignaciones ya hechas). Seleccionar el mínimo que quedó descubierto y añadir este en los elementos donde se cruzan las líneas.

f)

	1	2	3	4	5
A	0	7	0	6	6
B	2	1	8	0	5
C	0	4	5	0	0
D	1	5	0	9	3
E	3	0	4	1	1

repetir desde el paso d

g)

	1	2	3	4	5
A	$\boxed{0}$	7	0	6	6
B	2	1	8	$\boxed{0}$	5
C	0	4	5	0	$\boxed{0}$
D	1	5	$\boxed{0}$	9	3
E	3	$\boxed{0}$	4	1	1

Solución Óptima

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = 1 \quad \forall_i \\ b_j = 1 \quad \forall_j \end{array} \right\}$$

3.- PLANTEAMIENTO DE DIVERSOS PROBLEMAS

3.1. Una planta de concreto empleada en la construcción de una determinada presa usa una mezcla de 30% de arena y 70% DE GRAVA por peso. Existen dispositivos naturales en 5 lugares cerca nos a la presa, cada uno con composiciones y costos de explotación y transporte diferentes, según se muestra en la siguiente tabla.

MTL.	D E P O S I T O S				
	1	2	3	4	5
Arena	40%	20%	50%	80%	70%
Grava	60%	80%	50%	20%	30%
costo/ Ton	\$150	\$180	\$100	\$125	\$200

Por cada tonelada de concreto producida

¿Cuántas toneladas de cada uno de los depósitos se deben usar, de tal manera que se minimicen los costos?

PLANTEAMIENTO:

$$\text{MIN } Z = 150X_1 + 180X_2 + 100X_3 + 125X_4 + 200X_5$$

s.a

$$0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.5X_3 + 0.8X_4 + 0.7X_5 = 0.30$$

$$0.6X_1 + 0.8X_2 + 0.5X_3 + 0.2X_4 + 0.3X_5 = 0.70$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1.0 \quad ?$$

$$X_j \geq 0$$

3.2.- Una refinería desea mezclar 4 destilados del petróleo para formar 3 tipos de Gasolina. A, B, C. El problema es determinar la mezcla de los 4 destilados que maximizan la ganancia.

La disponibilidad y costos de los 4 destilados son los siguientes :

Destilados	Cantidad max. de barriles disponibles por día	Costo por barril
1	3 000	\$3
2	2 000	\$6
3	4 000	\$4
4	1 000	\$5

Para mantener la calidad requerida de cada tipo de gasolina se especifican a continuación porcentajes máximos y mínimos de cada destilado

Gasolina tipo	Especificaciones	Precio de venta por barril
A	no más de 30% de 1 no menos de 40% de 2 no más de 50% de 3	\$5.50
B	no más de 50% de 1 no menos de 10% de 2	\$4.50
C	no más de 50% de 1	\$3.50

PLANTEAMIENTO

Si Y_i ($i = A, B, C$) = # de barriles de gasolina tipo "i" producidos por día

Z_{ij} ($i=A, B, C; j = 1, 2, 3, 4$) = cantidad del destilado "j" en la gasolina "i"

es decir

la cantidad total del destilado j usado en los 3 tipos de gasolina sería

$$Z_{A1} Y_A = Z_{B1} Y_B + Z_{C1} Y_C ; \text{ implica programación cuadrática}$$

Si $X_{ij} = Z_{ij} Y_i$ ya es solo una variable y se puede usar programación lineal.

X_{ij} = # de barriles del destilado "j" utilizado para la gasolina "i" (por día).

UTILIDAD = precio de venta-costo

$$\begin{aligned} \text{MAX } E = & 5.50(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}) + 4.5(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4}) \\ & + 3.5(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4}) - 3(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}) - 6(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) \\ & - 4(X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}) - 5(X_{A4} + X_{B4} + X_{C4}) \end{aligned}$$

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \leq 3000$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \leq 2000$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \leq 4000$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} \leq 1000$$

; disponibilidad de destilados

$$\frac{X_{A1}}{X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}} \leq 0.30$$

; especificación para la gasolina "A" del destilado 1

$$\frac{X_{A2}}{X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}} \geq 0.40$$

; especificación para la gasolina "A" del destilado 2

$$\frac{X_{A3}}{X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}}$$

; especificación para la gasolina "A" del destilado 3

$$\frac{X_{B1}}{X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4}} \leq 0.50 \quad ; \text{ especificación para la gasolina "B" del destilado 1}$$

$$\frac{X_{B2}}{X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4}} \geq 0.10 \quad ; \text{ especificación para la gasolina "B" del destilado 2}$$

$$\frac{X_{C1}}{X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4}} \leq 0.70 \quad ; \text{ especificación para la gasolina "B" del destilado 3}$$

además, restricciones de no-negatividad.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Linear algebra.- Ed. Addison-Wesley
Hadley.
- 2.- Linear Programming.- Ed. Addison Wesley
Hadley.
- 3.- Linear Programming
Llewellyn.
- 4.- Programación lineal.- Ed. CECSA
Saul I. Gass.
- 5.- Ingeniería de Sistemas.- Ed. Cámara Nacional de la In-
dustria de la Construcción.
A. Gonzalez Cueto, J.L. Guerra Guajardo, F.J. Jauffred M.
A. Moreno Bonett, S. Zúñiga B.
- 6.- Introduction to Operations Research
Ed. Holden Day
Hillier - Lieberman.



TECNOLOGIA DE LOS SISTEMAS DE INFORMACION

1.- Función del Sistema de Información.

El Sistema de Información es a la organización como el Sistema nervioso al ser humano, y tiene como fin el - coordinar y proporcionar (a los diversos nodos de decisión) la información para la toma de decisiones. El término incluye todo procesamiento programado de información.

El Sistema de Información está superpuesto a una estructura organizativa, y no coincide necesariamente con - ella. Contiene canales formales, e informales sin embargo, los segundos son poco confiables.

Hay dos tipos de salida para los Sistemas de Información:

- a) Información para decisiones no programadas
(extractos y resúmenes)
- b) Los diversos tipos de información operativas
(ordenes de compra, facturas, etc.)

Funciones que cumplen en el Sistema de Información

Todos los Sistemas de Información coinciden en las siguientes:

a) Recolección de Datos.-

Consiste en captar y registrar los datos que atañen a la organización y a su ambiente (aparato sensorial)

- i) Volúmen de los datos recolectados. Es grande el generado por cualquier empresa. Sin embargo es antieconómico e inútil recolectarlos todos.
- ii) Métodos de la recolección: La captación y registro puede ser desde completamente manual hasta totalmente automática.
- iii) Reducción del volúmen de datos recolectados, la capacitación es la etapa en que más errores se cometen y por lo tanto la más cara. Reduciéndolo el volúmen de datos se reduce el costo del Sistema, por tanto. (por ejemplo menos vigilancia y evitando la repetición. Otra forma es predecir (en vez de recolectar) siempre que sea posible.

b). Clasificación de datos y preparación de índices.

La clasificación se logra mediante la identificación del suceso con diversos atributos (independientes o estructurados jerárquicamente) que son importantes para la toma de decisiones.

Los términos índices que describen los datos narrativos representan una abstracción, cosa que lo hace complicado.

c) Compresión de los datos. Reducir el volumen de los datos sin reducir demasiado severamente el contenido de información. Por medio de:

i) Filtrado de información insignificante.

ii) Agregados de datos.

iii) Compresión de datos probabilísticos.

Por ejemplo una variable se describe con un solo parámetro, que representa una forma de "absorción de incertidumbre". Esta compresión reduce el volumen de los datos y genera mayor consistencia a través de toda la organización.

Cuando un solo valor es insuficiente es factible obtener información adicional acerca de la distribución en una cantidad de formas diferentes. El rango, así como una estimación de la moda se están haciendo cada vez más familiares.

Junto con la media, se denominan "pesimista" "muy posible" y "optimista".

d) Archivo de datos.

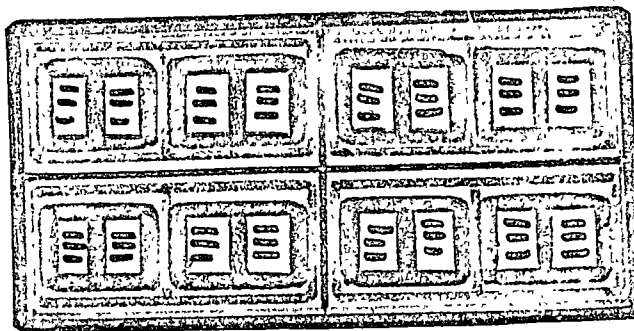
Cumple la función de memoria y permite que la organización actúe sobre la base de información relativas a un pasado arbitrariamente distante.

i) Organización para la base de datos.

Implica la estructuración, formato y la localización (ubicación) de la base de datos (suma total de la información archivada a disposición de la empresa)

- Estructura. Jerarquización y fragmento de la base de datos en subconjuntos con información relativamente homogénea. A estos subconjuntos se les llama ficheros y están a su vez subdivididos en registros, éstos en campos y los campos en subcampos.

SUBCAMPOS
FICHEROS
REGISTROS
CAMPOS
BASE DE DATOS



La base de datos debe mostrar adecuadamente las relaciones existentes entre las distintas subdivisiones.

ii) Identificación de los datos archivados.

Puede ser explícita (los datos se acompañan de una marca o etiqueta debidamente codificada y con una clave) o implícita (por la posición física absoluta o relativa a otros datos). Les resulta mejor la primera cuando los datos son en extremo variables, sin embargo aumentan las exigencias de archivo.

iii) Medios de archivo.

Sirve cualquier medio que pueda adoptar dos o más estados estables. Son determinantes el costo y los tiempos de acceso.

iv) Jerarquía de archivos.

A mayor probabilidad de recuperación, menor tiempo de acceso. Esto es un proceso dinámico; el movimiento en que los se deben descartar o relegar a un nivel inferior dentro de la jerarquía del archivo es principalmente función del costo.

e) Administración de los datos. Facilitar el acceso a la información contenida en la base de datos

i) Requerimientos:

- Eficiencia en el procesamiento de rutina. Se puede aumentar segmentando la base de datos en ficheros separados, de modo que determinado tipo de proceso requiera tener acceso a registros de datos relativamente homogéneos.

- CONSULTAS "AD_HOC"

No es posible predecir las necesidades futuras de información.

Esta es proporcionada por el sistema respondiendo a consultas "Had Hoc". La respuesta puede necesitar de alguna forma de cómputo (desde una suma hasta simulación).

El proceso de recuperación de datos puede resumirse de esta manera: Existe un conjunto de datos formales archivados que denominamos base de datos. Para cualquier consulta dada, hay un subconjunto "relevante" de estos datos (posiblemente un conjunto vacío): todos los datos restantes forman un subconjunto "irrelevante". La persona que consulta trata de describir el conjunto relevante en términos de una pregunta. Esta es cotejada luego con una descripción del conjunto completo de datos que se describen en términos de un plan de clasificación. Como resultado, se recuperaran ciertos datos y todos los otros se descartan. De tal manera, la base total de datos se reparte en cuatro subconjuntos:

- 1.- Relevantes y recuperados
- 2.- Irrelevantes y descartados
- 3.- Relevantes y descartados
- 4.- Irrelevantes y recuperados

El objeto de diseñar un sistema de recuperación estriba, evidentemente, en hacer que los datos últimos subconjuntos resulten todo lo pequeño que sea posible (para un gasto de recursos determinado). Solo en ciertos casos especiales los dos conjuntos quedan vacíos; en general se debe lograr el equilibrio entre la recuperación de demasiados datos irrelevantes y otros, muy pocos, relevantes.

- Seguridad- Comprende:

Protección contra pérdida o destrucción, secreto y validez. Las soluciones, respectivamente, son duplicación; controles - en cuanto al formato, alcance, etc. (aprovechando la redundancia que pudiera haber). Se refiere; y la posibilidad de reparar la base de datos en segmentos que posean acceso selectivo - para examinar o modificar los elementos que constituyen los datos.

- Generalización y Flexibilidad -

Adaptabilidad a cambios necesarios en las salidas. Capacidad de aceptar menos datos o reestructurar o eliminar los existentes.

Sistemas de Administración de Datos.

La mayor especialización en la administración de datos se concentra en la eficiencia en procesamientos de operaciones de sistema y el mayor defecto en las exigencias de generalización

y flexibilidad. Ya hay sistemas que pueden lograr un mayor - logro de todas las actividades.

Computación.-

Procesos dentro del Sistema de Información que transforma los datos de entrada en los datos de salida. Cualquier manipulación bien definida de símbolos, representen o no cantidades numéricas, constituye una forma de computación. Las transacciones se procesan con la base de datos para mantener ésta - actualizada.

Transmisión de Datos -

Comunicación entre puntos separados geográficamente. Mediante el movimiento físico del soporte, o mediante la transmisión de una señal eléctrica.

La transmisión de datos se justifica con frecuencia por que es más económica la computación centralizada (reduce la capacidad total exigida y el costo unitario de computación al explotador las economías de escala). Sin embargo hay que tomar en cuenta el costo de transmisión mismo que variará de acuerdo al volumen de los datos, distancia, necesidad de exactitud.

Hay casos en que se justifican más vanas subunidades, o varias subunidades y una gran unidad, sin embargo en muchos casos la justificación mas importante de la transmisión de datos estriba en que permite el planeamiento sobre una base más global, ya que las actividades de las subunidades se complementan.

Exposición (salida) de datos.-

Preparar en forma adecuada la percepción humana, la información producida. Es la conexión entre el Sistema de Información y los miembros de la organización.

La vasta masa de la información exhibida se aprecia visualmente, que poseen un formato narrativo o tabular donde la información es codificada en forma de un conjunto de símbolos - relativamente limitado.

El material gráfico es cada vez más atractivo, rápido y económico. Algunos sistemas usan exposición auditiva (teléfono) y a veces táctil.

Debe haber una relación estrecha entre la máquina y los miembros de la organización. A fin de que exista ésta, es necesaria una comunicación estrecha.

1.- Acoplamiento más estrecho del Sistema de Información.

En un sistema fragmentado de Información, cada subsistema es responsable de la recolección de sus propios datos. Con una capacidad limitada para el manejo de la información, generalmente resulta más barato duplicar la recolección de datos y no alcanzar la coordinación necesaria para evitarlo.

A 1 Fragmentar los archivos, se aumenta el costo de archivo, hay problemas de conciliación entre - archivos, y se hace casi imposible la unidad de la organización. El procesamiento fragmentario implica también duplicidad en la recuperación.

En el sistema entregado se tiene una base común de datos. La fragmentación se basa en la jerarquización los medios de archivo, y hay datos que pueden no ser de utilidad a todos y por tanto no está en la base común de datos, sino en alguna sub.

2.- Acoplamiento más estrecho entre las actividades de la organización. El motivo que lleva a la integración de las partes del sistema de información es una mayor efectividad en el procesamiento de datos, en tanto que la integración de las actividades de la organización se refiere a la efectividad de toda organización.

Para lograr un mayor acoplamiento de las actividades, se debe proporcionar un acceso fácil a los datos relativos a una amplia gama de actividades, y se debe cumplir el complejo procesamiento que se requiere para lograr un planeamiento comprensivo.

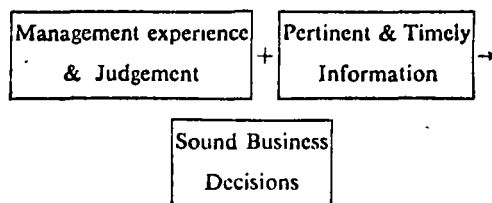
Management Information Systems for Corporate Planning and Control

R. N. Kashyap*

Management Consultant

In this article, R. N. Kashyap, Principal of R. N. Kashyap & Associates, explains the role that management information systems play both in the development of corporate plans for a business enterprise and in the control of the activities of the enterprise. He maintains that a well designed and properly implemented management information system offers management tremendous opportunities for improving the quality and effectiveness of corporate plans and for achieving much sounder control of the business activities at all levels within the organization. He indicates some of the steps that need to be taken for harnessing the advances that are being made in the field of information technology for developing effective information systems to aid management in their planning and control decisions. Mr. Kashyap mentions that careful consideration has to be given to a number of factors including organizational arrangements for design of MIS, determination of the degree of sophistication of MIS and estimation of system costs vs. system benefits in order to ensure the successful development of information systems for management planning and control.

MANAGEMENT INFORMATION SYSTEMS play a vitally important role in the development of corporate long term as well as short term plans and in achieving effective control of business activities at all levels within the enterprise. Information is an important resource within a business enterprise and it might be considered to be equal in importance to the traditional resources of men, money, materials and machines. Availability of pertinent, accurate, and timely information is most essential for making effective planning and control decisions. The quality of decisions made by management is dependent both on the experience and judgement of the decision-maker and the scope and accuracy of information available to him for decision-making.



With the increasing size of organizations and the mounting complexity of doing business, both the risks of losses from poor decisions and the opportunities of gain from good decisions have become very large. This situation is making it almost mandatory that the best possible information be made available for making the planning and control decisions in a business enterprise.

In parallel with the increasing need for pertinent and timely information by management, there have been impressive advances in the field of information technology and in the capacity to meet management's information needs promptly and economically. Advances have taken

place in the areas of data collection, data storage, data manipulation and data dissemination and display; and also in the development of analytical and simulation models. Such models enable management to predict the outcomes from specific planned actions and thus enable them to explore a variety of alternative courses of action leading to improved planning of corporate activities. These developments are leading to highly effective man-machine information systems which offer exciting possibilities for improving the decision processes.

SYSTEMS APPROACH TO MANAGEMENT

More and more, forward looking managements are recognizing the need for a 'systems' view of management. The systems concept is a useful way of thinking about the job of managing an enterprise. It provides a framework for visualizing internal and external factors as an integrated whole. Basically, the systems approach is an attitude of mind. Management needs to develop a philosophy in which planning, organizing, controlling and communication are accomplished in terms of subsystems integrated into a composite whole. The fundamental notion behind the operation of any system is the concept of feedback and control. Managing is a cyclical process. The management cycle, broadly, contains three main elements, viz. planning, operations and control. The process can be illustrated schematically as shown in Figure 1.

The cycle starts with the planning function. Here decisions are made with regard to company goals and the best plan is selected among the possible alternative plans to achieve the goals. Based on the plans, instructions are issued and activities

*R. N. Kashyap is the Principal of the specialist consultancy organization R. N. Kashyap & Associates. He has been associated for many years with Lockheed Aircraft Corporation where he assumed responsibility for guiding the development of company-wide information systems for management planning and control.

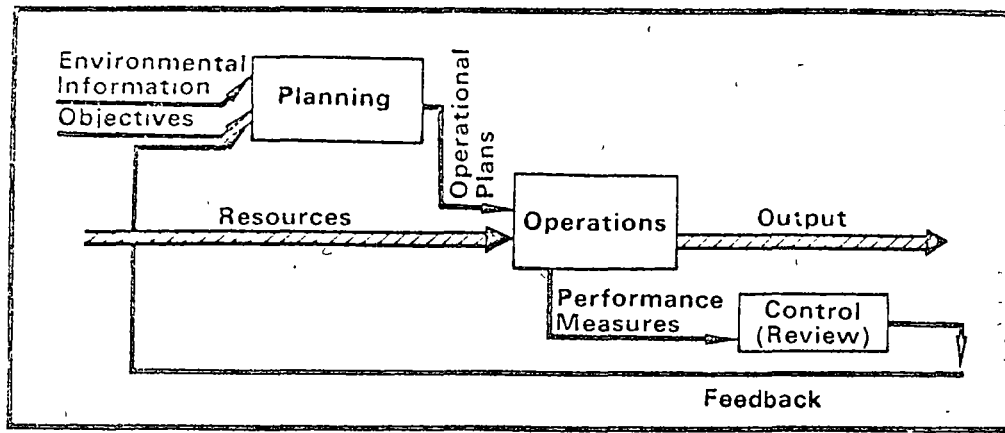


Figure 1. The Management Cycle.

proceed, under the direction of management, as closely in accordance with the plans as possible. Actual results are measured and compared against the plans. The cycle is completed with the planning function again coming into play to determine how performance can be improved in those areas where it has fallen short of the objective.

A basic element in any system is information. The information flows through a business system along with the men and materials necessary to accomplish the planned objectives of the organization. The flow of information is as important as the physical flows for achieving the organizational objectives. It is necessary for the information to flow to key decision points within the organization where action is taken with regard to the goods and services being provided by the organization. Thus information-decision systems are an integral part of any operating system, whether it is designed to yield a product or a service.

M.I.S. AND CORPORATE PLANNING

A management information system has been defined as a set of procedures and methods for the regular, planned collection, analysis, and presentation of information for use in making management decisions. The main purpose for developing an M.I.S. is to provide the necessary intelligence on a timely basis to help management plan, execute, and control. With the rapid advances in the field of information technology, the scope of information available to managers has increased to such an extent that decisions are typically being made more efficiently. It is worthwhile to examine the role that M.I.S. plays in the planning and control of company activities. Before this can be attempted, it is necessary to have a look at the corporate planning process and the interlinking of planning and control.

Corporate planning is concerned with

defining in a systematic and organized manner what the organization will do in future and the means it will adopt in accomplishing it. Corporate planning is concerned with all stages of the planning process within an organization. There are three stages involved in the corporate planning process:

- Setting the objectives of the organization.
- Defining the action necessary to achieve these objectives.
- Adjusting action to meet unforeseen changes in circumstances.

Planning, like the organization itself,

has a hierarchical structure. The overall objectives of the organization have to be translated into a hierarchy of objectives at all levels within the organization. The plans at different levels are then developed to achieve the objectives for that level. In this context, it is worth noting that high level planning deals with aggregate variables extending over relatively long time spans. Lower level planning progressively adds greater detail within the constraints provided by the more aggregate plans. Lowest level plans contain a great deal of information and taken together describe the desired behaviour of the organization.

Figure 2 shows a schematic representation of the planning and control process within a business organization and its interaction with the management information system. It can be seen that there are two basic streams of information flowing through an organization, viz. 'planning information' and 'control information'. Planning information is the strategic information about critical business problems and is concerned mostly with the external environmental conditions that exist or are likely to exist within which the business enterprise has to operate successfully. Control information, on the other hand, is concerned mainly with event

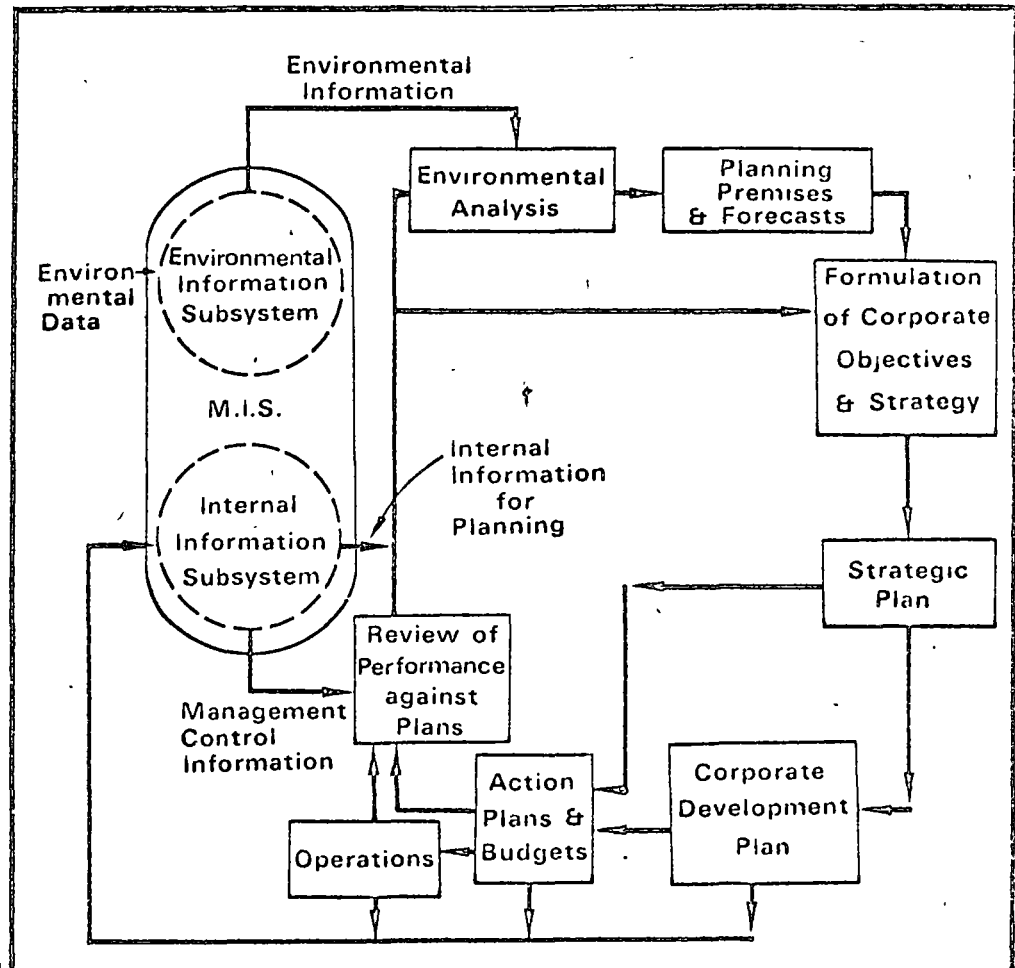


Figure 2. M.I.S. in Corporate Planning—Corporate Planning and Control Cycle.

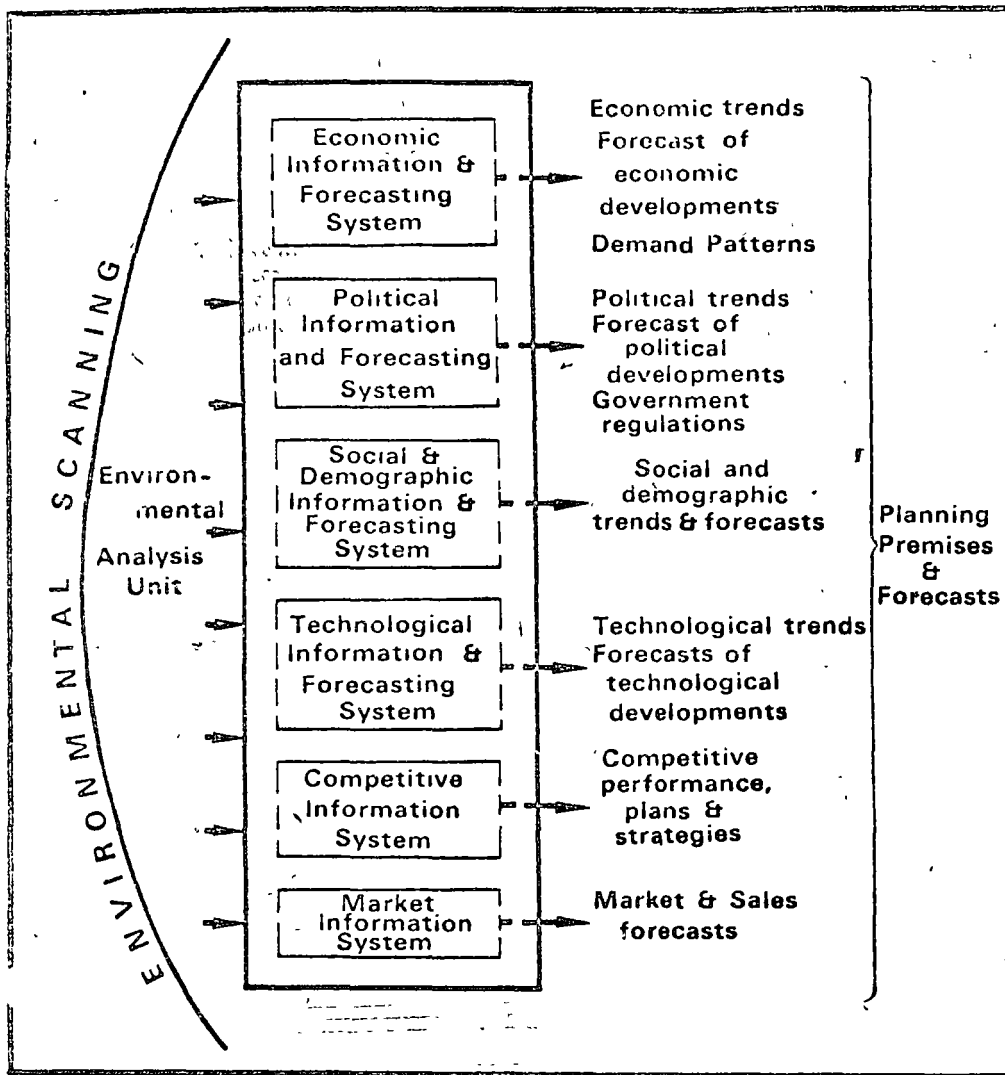


Figure 3. Environmental Information Subsystem.

taking place internally within the enterprise. Figures 3 and 4 represent overall views of the environmental and internal information subsystems of the M.I.S. In the environmental information subsystem, detailed data is collected and analyzed about the economic, political, social and technological (trends) as well as detailed competitive and market information in order to provide planning premises and forecasts required in the planning process. In the internal information subsystem detailed data about internal functional performance against plans is analyzed to provide functional and management control reports and internal data for planning purposes.

As a matter of fact, the advances in information technology are having a profound impact on organizations, primarily through the improvements they make possible in the planning process.

Information is vital to good planning decisions. In order to ensure that pertinent, accurate and timely information is available for making such decisions, it is necessary to harness the advances in the field of information technology

for developing effective management information systems to aid in management decision-making. It is necessary to evolve an integrated information system to service all the planning and control systems of the enterprise. Specifically, advances in information technology affect the planning and control process within the enterprise in the following important ways:

1. They permit greater formalization of the planning process. Greater emphasis can be placed on analytical and/or simulation models instead of the usual intuitive models. These models can be manipulated with ease to provide a prediction of outcomes stemming from planned actions. This can lead to considerable improvement in the quality of plans developed through the systematic evaluation of a number of plans.
2. They permit an increase in the scope of activities falling within a given sub-unit of the enterprise. This, in turn, leads to an increase in the permitted size of a 'manageable' task resulting in a corresponding

reduction in the number of organizational sub-units to handle the total task of the enterprise. With the reduction in the number of organizational sub-units, the coordination problems are also reduced and the effectiveness of sub-units is increased as a result of the consolidation of the related activities within the sub-unit.

3. Because of its speed and reduced cost, a man-machine planning system enables the planning cycle to be repeated more often with the result that the plans can be kept up-to-date and current. It also enables inconsistencies amongst plans at different levels to be identified because of detailed amplification of high-level plans by lower-level models. This facilitates making suitable modifications to appropriate plans to make them consistent.
4. Information technology has a major impact on the organization in so far as it enables management to monitor more closely the operations of lower level management as a result of the increased data handling capability it provides. This close monitoring of operations often leads to greater centralization of the activities of the organization.

INFORMATION REQUIREMENTS FOR PLANNING AND CONTROL

From an overall point of view, the process of developing a management information system involves specifying the requirements for information in the management decision-making activity, determining the sources of data, and then matching the requirements for information with the appropriate sources of data employing some of the tools and techniques made available by the advances in information technology. Thus specification of the information needs is an important first step in the development of information systems for management planning and control. These needs have to be determined for the major decision-making activities throughout the business organization.

Specifying the information requirements involves first understanding the business process of the enterprise, then making a thorough examination of the decision-making activities and development of a comprehensive conceptual model relating these decision-making activities, and finally determining the specific information requirements for making the major decisions. It is important to follow a highly systematic and thorough approach in determining the information requirements of the organization.

Basically, there are two main purposes for which information is required by the

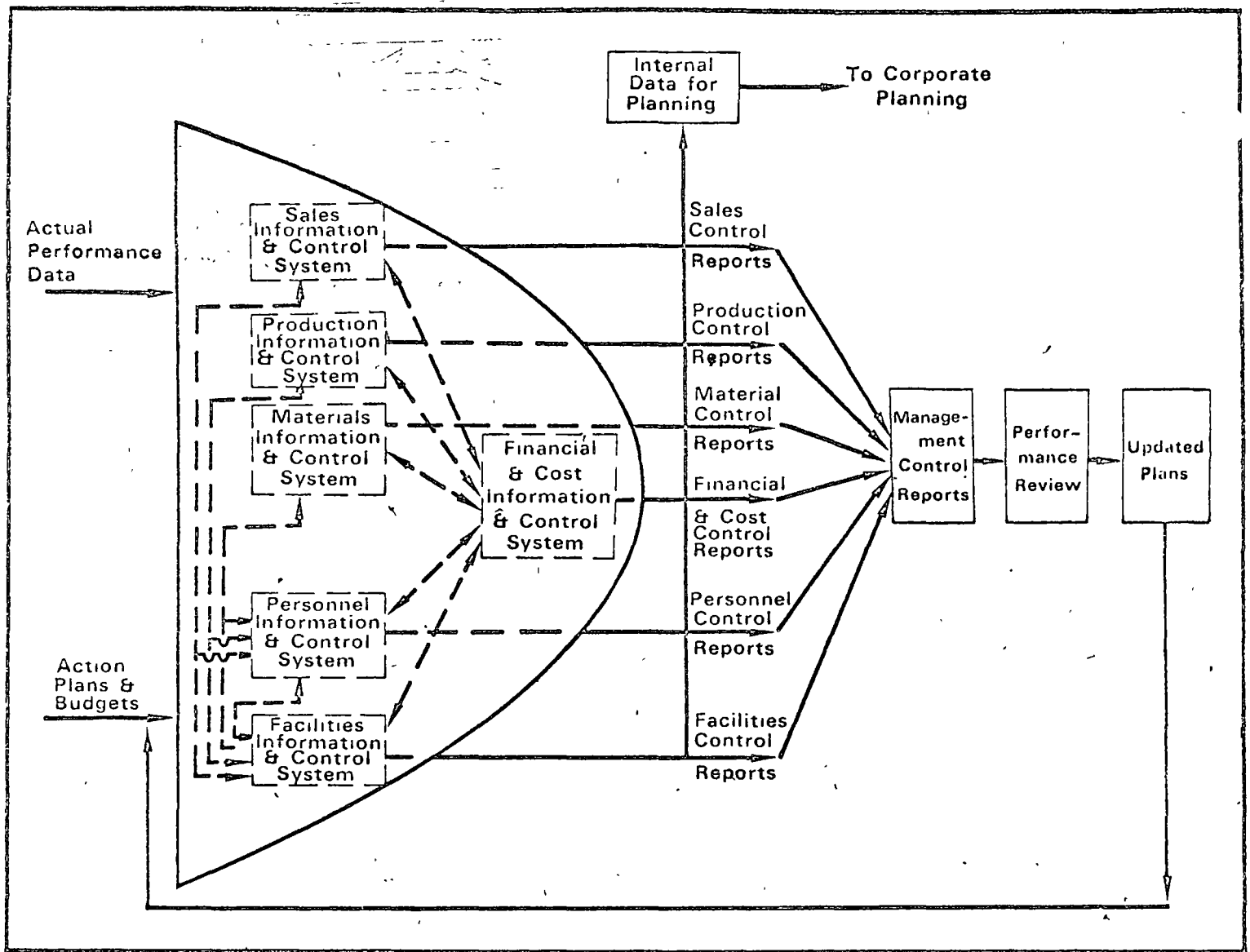


Figure 4. Internal Information Subsystem.

management. These are:

- (a) To plan effectively the activities of the company; and
- (b) To receive timely information on actual performance as compared to planned performance in order to control the activities.

The type of information required for the above two purposes is generally different, as has already been indicated, and careful analysis of information requirements under these two categories needs to be made. An important distinction in the type of information required under these two categories is that the planning information is largely concerned with the events taking place outside the organization and hence is beyond the control of management. In order to develop sound plans, management is required to give consideration to the best means of adapting to the situation in the external environment. On the other hand control information is concerned with the events

taking place within the organization and so is subject to control by management. On the whole, the information required for control purposes is better developed in most organizations than the information required for planning purposes.

(a) Information Requirements for Planning Purposes

There are three² major types of information required for making planning decisions in an effective manner. These are:

(i) Environmental information

This includes information concerned with the economic, political, social, and technological developments taking place in the business environment. An evaluation is usually required of significant economic and industry trends which affect the markets for the company's products.

(ii) Competitive information

This includes information associated

with the past and current performance and future plans of all the important competitors. All planning decisions have to take into account the possible actions and strategies being followed by the competitors.

(iii) Internal information

This includes internal information about company operations required for planning purposes such as utilization of plant and facilities, product profitability etc. Internal information required for planning purposes is often different from that required for control purposes or is required in a different format or level of detail. This type of information is useful for preparing and appraising plans, analyzing opportunities for capital investment and other planning decisions.

Table I indicates, broadly, how these types of information are related to specific steps in the corporate planning process.

Table 1. Main Types of Information Required in the Corporate Planning Process

Steps in Corporate Planning	Problem Definition	Type of Information Required
1. Environmental Research and Analysis	What's ahead? <input type="radio"/> User needs <input type="radio"/> Competition <input type="radio"/> Technology <input type="radio"/> Economy <input type="radio"/> Regulatory problems	Industry and Market information Competitive intelligence Technological forecasts National and International economic trends Political and social trends and forecasts
2. Position Audit	Where do we stand? <input type="radio"/> Resources <input type="radio"/> Capacities <input type="radio"/> Profit source <input type="radio"/> Investment <input type="radio"/> Market share	Internal information Industry information Internal information Financial information Market information
3. Identification of Attributes	Company's strengths and weaknesses —Internal Evaluation <input type="radio"/> Products <input type="radio"/> Resources —External Evaluation <input type="radio"/> Competitors <input type="radio"/> Market Standing <input type="radio"/> Vulnerability	Internal and Market information Competitive intelligence Market information Market and Technological information
4. Proposed Objectives	What to do? Why?	Past performance (Internal information) Environmental information Position audit Company's strengths and weaknesses
5. Formulation and Evaluation of Corporate Strategy	What means to adopt?	Objectives Current forecast of future performance Industry potential analysis Estimate of resources Competitive characteristics
6. Development of Strategic and Action Plans	Implementation of corporate strategy	Strategic decisions Detailed internal information Detailed market information

requires such information either for taking control action or for keeping himself informed. Based on such a detailed analysis it is feasible to prepare a 'Control Information Checklist' indicating the specific control information required by each manager, frequency of reporting, standard to be used for comparison and the manner of indicating the variances. A sample format for the Control Information Checklist is shown in Table 2.

As is evident, charting of information requirements is a highly challenging and time consuming task and has to be carried out in a thorough and systematic manner to ensure that *only* the relevant information in the correct format is communicated to each manager in order to enable him to take decisions effectively. Once the information needs of an organization are fully determined, it is required to prepare a clear specification and a statement of objectives which an information system would be required to meet.

CONSIDERATIONS IN DEVELOPMENT OF MANAGEMENT INFORMATION SYSTEM

The development of a management information system is a challenging task, as it involves developing the means for planning, measuring, and controlling an increasingly complex business enterprise operating in an equally complex business environment. To achieve success in the development of the M.I.S., it is necessary to pay attention to a number of considerations which affect the design of such systems. These considerations include:

- (i) determination of organizational arrangements for the design of the M.I.S.;
- (ii) assessment of the degree of sophistication of the M.I.S.;
- (iii) determination of overall system specifications; and
- (iv) estimation of system costs vs. system benefits.

These are all important considerations which can significantly affect the chances of successful development and implementation of the management information system.

(b) Information Requirements for Control Decisions

The information required for control purposes is to enable management to compare current performance against plans and to initiate necessary action in order to bring actual performance in line with the planned performance. A large variety of information about all aspects of company's performance is usually re-

quired on a repetitive basis in order to take proper control action and timeliness is often the key to usefulness of such information.

An effective way of charting control information is to prepare an 'Information Requirements Matrix' for the entire company showing the specific type of control information to be generated and the particular departmental manager who

(a) Organizational Arrangements for the Design of the M.I.S.

Increasingly managements are finding that the organizational problems involved in the successful development of management information system are much more difficult to solve than the technical problems associated with its development. It is required to make appropriate or-

Table 2. Control Information Checklist

Performance Information	Report Frequency	Standard	Variance Shown by	Required by—Manager							
				1	2	3	4	5	6	7...	
				C*	C*	†					

*C—For control purposes

†—For information purposes.

ganizational arrangements which assure not only top management direction and control but also line management participation and support to the efforts of the team selected for the design of the information system. These arrangements have to be carefully defined in order to avoid conflict and hostility during the development of the M.I.S.

(b) Degree of Sophistication of the M.I.S.

Before proceeding with the development of the M.I.S., it is necessary to decide on the level of sophistication of the M.I.S. to be developed. This decision has to be based on a review of the company's information needs and the costs of meeting them. Aside from the cost aspect, it is also important to pay attention to the abilities of the managers to contribute to the development of the M.I.S. and to work with it once it is developed. The managers are required to state explicitly their planning, decision-making and control procedures and assist in the formulation of analytical approaches and models. A balance needs to be maintained between the level of sophistication of the managers and M.I.S. sophistication. As more and more sophisticated M.I.S. are developed, it is necessary to improve manager capabilities to utilize such systems effectively.

(c) Determination of Overall System Specifications

In addition to the decisions with regard to the type of system to be developed, it is necessary to decide on the overall system specifications such as the nature of data bank, the form and the method of data display and selection of computer configuration. Such decisions require active participation not only of top management but also of line managers for identifying critical decision areas and identification of information required for planning and controlling corporate activities. It is required to make cost/benefit analyses of alternative system designs in order to select the best design. One important

decision is the degree of manager-system interaction that is desired, i.e. the extent to which the manager wants instantaneous response from the M.I.S. and the extent to which he is satisfied with a regular pattern of reports reaching him sometime after the event. The configuration of computer equipment required is dependent on the system's performance specifications and the selection of a particular system design.

(d) Estimation of System Costs vs. System Benefits

Management Information systems are costly to develop and operate, and before management can authorize expenditures of such large sums of money and effort, it requires clear justification of the value of the system. It should be borne in mind that the main purpose of an M.I.S. is to help management make better and more profitable decisions. So an M.I.S. has to be evaluated in terms of its impact on managerial effectiveness, which is not an easy task. Here a subjective estimate of the benefits from an M.I.S. has often to be relied upon. The economics of information system design requires constant balance between the value of the information carried in the system and the cost of designing and operating it.

Careful attention has to be paid to these and other such considerations before work can be started on the development of the management information system.

DEVELOPMENT OF THE MANAGEMENT INFORMATION SYSTEM

It is necessary to follow an effective step-by-step approach in order to achieve success in the development of a complex integrated management information system. The design of an information system has to be carried out in a number of overlapping phases and each of the phases has to be clearly identified. These phases are:

1. Planning and Programming

This is concerned with planning, or-

ganizing and control of effort devoted to management information system development.

2. Overall Design

This involves development of the alternative designs of the management information system in preliminary form for evaluation and selection of the most promising design.

3. Detailed Design

This involves development of the operational information systems in detail.

4. Implementation

This is concerned with conversion of the above specification of the management information system into a working system. To a great extent these phases overlap. Thus, in some cases planning and programming cannot be properly completed until the overall design has been completed. Detailed design and implementation frequently overlap because the design may require testing of partial systems or installations.

The crucial phase in the above is perhaps the development of an optimum overall design of the M.I.S. and it is instructive to look at the steps that should be followed for arriving at the overall design of the M.I.S. These steps are:

- (i) development of a clear statement of system objectives;
- (ii) establishment of system constraints;
- (iii) determination of information needs of the organization;
- (iv) utilizing techniques like input/output analysis and flow charting to trace back the information needs to the information sources;
- (v) determining alternative overall designs by finding alternative ways of matching information sources with information needs and selecting the most promising design; and
- (vi) documentation of the system concept of the selected system.

The system concept of the most promising overall design selected has then to be further developed into a detailed design of the management information system.

SUCCESSFUL IMPLEMENTATION OF THE MANAGEMENT INFORMATION SYSTEM

In order to ensure successful implementation of the management information system in an organization, it is very necessary to analyze the human aspects of implementing such a system. Basically, this involves determining the impact of implementing newly designed information systems on the employees in the organization. There is a natural desire to maintain the status quo among all human beings whether they are lower-

level employees or even their supervisors and managers within an organization. There is some apprehension that the change is more likely to be bad for them rather than be good or in any case they may be expected to adapt to the new situation. This sort of feeling can result in active or passive hostility to the implementation of the M.I.S. unless the implementation phase is properly planned and appropriate policies and guidelines are established for equitable handling of job changes and possible redundancies. Many otherwise well developed M.I.S. have failed to provide expected benefits because of inadequate attention to this factor.

The implementation of a whole set of information systems involving formalizing of information flows at all levels within the organization is likely to affect the jobs and activities of a very large number of employees within the organization. In many organizations employing large numbers of office staff, such implementation can lead to actual redundancies of staff personnel. Even if redundancies do not occur there is the problem of retraining a large number of personnel to work with the discipline required to work with computer-based information systems or problems of transfers from one department to another. Therefore, before attempts are made to implement the management information system, it is necessary to analyze in detail the impact of implementing such a system on the employees and to determine specifically the extent and scope of job changes that would be involved as a result of the implementation of the system. A planned approach has then to be developed for handling these job changes in a systematic and harmonious way.

APPLICATION OF THE MANAGEMENT INFORMATION SYSTEM FOR CORPORATE PLANNING AND CONTROL

Management information is a dynamic tool in the hands of forward-looking management both for improving the quality of corporate planning decisions as well as for increasing the effectiveness of management control activities. These benefits can be achieved only if top management purposefully directs and controls the development of effective information systems for planning and control; and after they are developed, ensures that they are effectively utilized at all levels of management within the organization.

Specifically, effective application of management information system can enable the company management to:

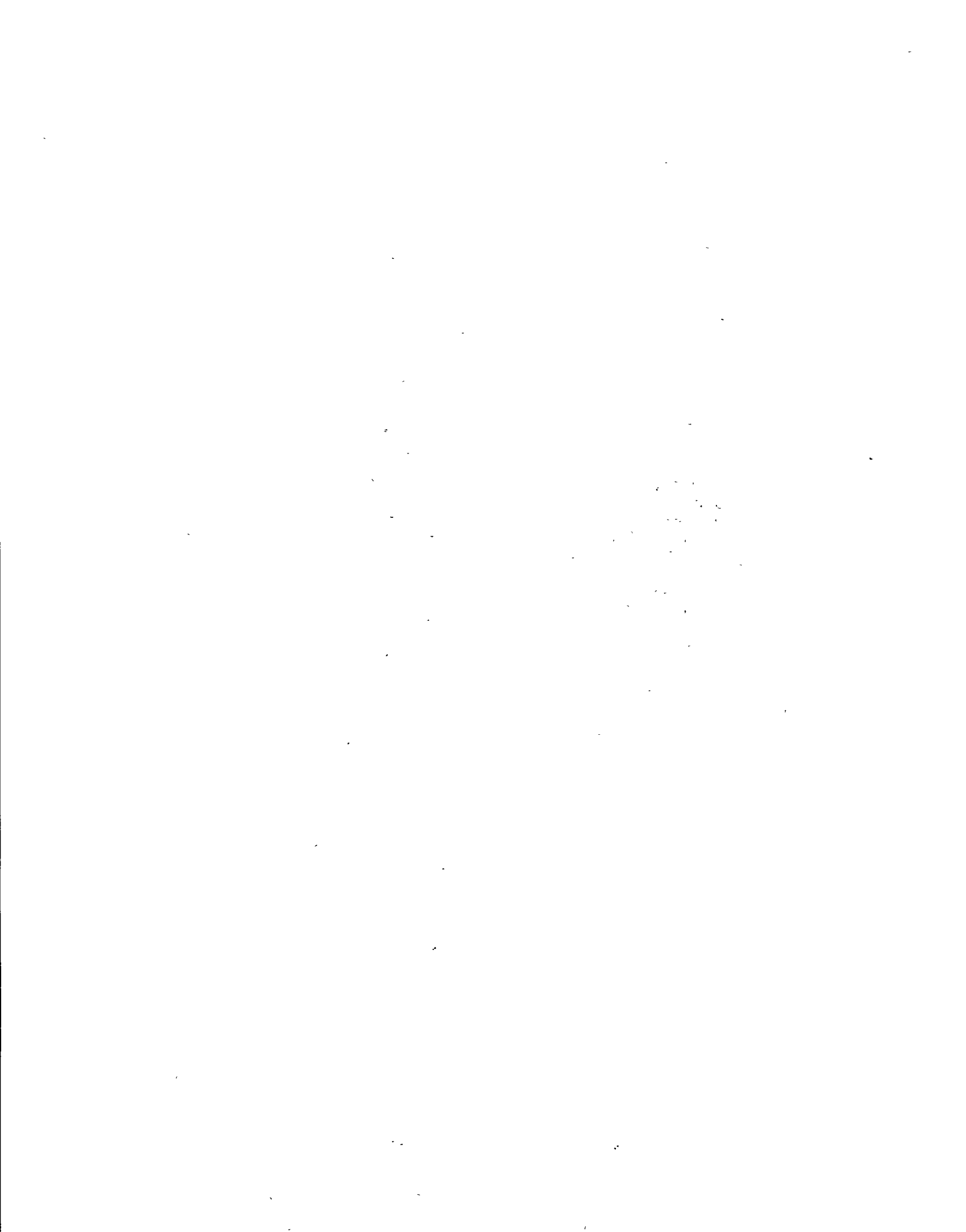
- (a) formulate meaningful corporate strategy through provision of pertinent environmental and internal information, evaluation of alternative courses of action and determination of the 'best' course of action to meet overall company objectives;
- (b) pre-test corporate plans through simulation of company operations for a future time period and evaluation of the response of the enterprise to alternative courses of action under varying environmental conditions;
- (c) create effective 'Management Decision Centres' for systematic presentation of crucial information to management and thus provide a meaningful environment for management action;
- (d) retrieve specific information associated with company's activities on request and thus improve its capability to reach quick and effective decisions;

- (e) utilize quantitative decision models to reach 'optimum' decisions particularly in the logistics and operational area; and
- (f) quickly review current performance against predetermined standards or plans in a comprehensive manner and take appropriate and timely action to control the activities of the enterprise. Impressive progress is being made in the development of real-time control systems which respond almost instantaneously to the events within the company thus improving soundness of decisions.

Effective application of well designed information systems is leading to the development of a philosophy of 'management by systems' whereby management is attempting to establish, where appropriate, a programmed set of decision rules to handle the large volume of recurring type of decisions. These decision rules can then be applied by the lower level management with appropriate assistance from the M.I.S. This enables management to devote most of its efforts to handling the more unusual and unprogrammed set of decisions. ■

REFERENCES

- (1) James C. Emery, *The Impact of Information Technology on Organisation*, Proceedings of the 24th Annual Meeting, Academy of Management, Chicago, Illinois (28-30 Dec. 1964).
- (2) R. Donald Daniel, *Management Information Crisis*, *Harvard Business Review* (Sept.-Oct. 1961).
- (3) Victor P. Buell, *Marketing Management in Action*, Pan Books, London (1966).
- (4) Donald F. Cox and Robert E. Good, *How to Build a Marketing Management Information System*, *Harvard Business Review* (May-June 1967).



SIMULACION DIGITAL DE SISTEMAS DISCRETOS

Introducción.

En este artículo se pretende dar una breve descripción de los diferentes tipos de modelos que son usados para la solución de problemas de simulación, haciendo una exposición sobre los elementos que intervienen en la simulación digital. Se revisan los principales lenguajes de computadora existentes, y se concluye con una descripción de problemas tanto de Ingeniería como de otros campos que han sido o pueden ser resueltos mediante la simulación.

Los modelos matemáticos han sido usados en la Ingeniería para fines de análisis y diseño desde hace muchos años. Por ejemplo, en el problema de analizar y predecir las deformaciones de una viga sujeta a cargas externas, por medio de hipótesis simplificadoras e idealizaciones, se establece un modelo que permite calcular los elementos deseados. La fórmula de la esquadria es un modelo muy conocido en la Ingeniería Civil.

En el caso de sistemas más complejos, sobre todo de tipo dinámico (que varían con el tiempo), la solución analítica del modelo establecido no es ya sencillo, y en algunos casos ni siquiera posible. Con el advenimiento de las computadoras electrónicas de alta velocidad se han desarrollado técnicas que permiten hacer simulaciones del comportamiento de los sistemas con relativa facilidad.

Se han desarrollado así mismo lenguajes de computadora, como el SIMSCRIPT, GPSS, GASP, etc., que permiten una vez establecido el modelo, resolverlo y obtener resultados con facilidad y rapidez.

Debe considerarse que la simulación digital es una técnica aún nueva en la Ingeniería Civil que puede tener una infinidad de aplicaciones, estando sólo limitado por la imaginación de los usuarios.

Sistemas y Modelos

Existen tantas definiciones de Sistemas, como libros sobre el tema se han escrito, cada una de ellas dando énfasis a un aspecto diferente. Creemos que para nuestro fin, la que más se ajusta es la dada por Gordon (Ref. 1).

"Un sistema es una agregación o ensamblaje de elementos, unidos en una interacción o interdependencia regular".

Se llaman sistemas continuos a aquellos en que los cambios son predominantemente "suaves", y su descripción estará generalmente dada en forma de ecuaciones continuas. Los sistemas discretos son aquellos en que los cambios ocurren en forma discontinua, es decir, en determinados tiempos. Sin embargo el tipo de descripción no necesariamente coincide con el tipo de sistema. Para fines de estudio, los sistemas continuos se pueden simplificar, discretizándolos, y estudiando los cambios a través de una serie de pasos discretos.

Con objeto de poder estudiar el comportamiento de un sistema, el primer paso que debe darse es representarlo por medio de un modelo. Los modelos no deben ser tan complejos ni difíciles como el sistema representado, pues no tendrían entonces ninguna ventaja. Se pueden construir modelos mucho más simples que la realidad, que sin embargo representan adecuadamente las características del sistema real.

No existen modelos únicos para representar la realidad. De hecho el modelo depende de la persona que lo elabore, o los aspectos que interesen estudiar el sistema. La calidad del modelo, depende de su simplicidad y de su apego a la realidad; para lograrla se requiere imaginación y creatividad en el grupo que lo desarrolle. No es posible preparar un manual para construcción de modelos, es más, de existir ese manual sería contraproducente ya que restringiría la creatividad de los que lo usaran. Ackoff (Ref. 2) ha establecido una serie de patrones, basados en experiencias anteriores que permiten dar ideas básicas para el establecimiento de modelos.

Existen varios tipos de modelos, a saber:

- Simbólicos, usan letras, números y otros tipos de símbolos para representar variables y las relaciones entre ellas. Toman la forma de relaciones matemáticas. (Se acostumbra por lo tanto llamarlos modelos matemáticos). Como ejemplo tenemos la ley gravitacional de Newton.
- Icónicos, las propiedades importantes se representan por sí mismas, generalmente con un cambio de escala, es decir son imágenes del sistema real, pues tienen su misma apariencia. Como ejemplos, tenemos los modelos a escala de aviones estudiados en túneles de viento, o los modelos del sistema solar usados en los planetarios.
- Análogos, en donde una serie de propiedades son usadas para representar a otro conjunto de propiedades. Un sistema hidráulico puede ser usado como analogía de un sistema de tráfico de automoviles; también es conocida la analogía entre sistemas eléctricos e hidráulicos.
- Lógicos, dado por elementos de tipo lógico que al seguir una secuencia dan por resultado una representación del sistema. Los diagramas de flujo y los programas de computadora son ejemplos de este tipo de modelos.

Como se definirá más adelante, la simulación de tipo digital, de la cual se habla en este artículo, maneja exclusivamente modelos de tipo simbólico o matemático. Los modelos pueden a su vez, de acuerdo con sus características, subdividirse en varias clases, las cuales no son mutuamente exclusivas (Ref. 3).

- Modelos determinísticos, donde el resultado queda descrito completamente en términos de los datos de entrada; es decir, las relaciones están perfectamente establecidas entre las variables y ninguna de ellas es aleatoria. Su solución más adecuada es por medio de técnicas analíticas. Un ejemplo, es el cálculo tradicional de deformaciones en una viga, debidas a cargas determinadas.
- Modelos estocásticos, donde cuando menos una de las características está dada por una función de probabilidad. En este caso el uso de técnicas analíticas es muy compleja, requiriéndose otras técnicas, como simulación, para su solución. Un ejemplo se encuentra en el funcionamiento de vasos de presas, donde el escurrimiento de los ríos es una variable aleatoria.

- Modelos estáticos, son aquellos en que la variable tiempo no interviene explícitamente. Por ejemplo, casi todas las aplicaciones de programación lineal y no lineal caen en esta categoría. La mayor parte de los modelos estáticos, son a su vez determinísticos, por lo que pueden resolverse con técnicas analíticas.
- Modelos dinámicos, donde se manejan interacciones en el tiempo. Pueden resolverse por métodos analíticos en algunos casos sencillos, pero en general se resuelven por algún sistema numérico como puede ser la simulación digital. Los fenómenos económicos y demográficos requieren generalmente, modelos de este tipo.

Simulación Digital

De acuerdo con Naylor (Ref. 3), podemos definir simulación digital como:

"Una técnica numérica para llevar al cabo experimentos en una computadora digital, utilizando ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de un sistema, a lo largo de un cierto período de tiempo".

De acuerdo con la definición anterior estaremos tratando con modelos matemáticos, dinámicos y generalmente estocásticos, de sistemas discretos. No se trata de obtener soluciones analíticas de problemas, sino se trata de seguir el comportamiento numérico de una serie de elementos representativos del sistema a lo largo del tiempo, estando sus interacciones perfectamente definidas.

En general podemos decir que la simulación usa el modelo matemático como un laboratorio de experimentación con el cual va a obtener resultados, los cuales puede utilizar para diferentes objetivos.

La forma de efectuar estos estudios depende de la naturaleza de los mismos. En general los estudios de los sistemas son de tres tipos: Análisis, diseño y postulación. (Ref. 1). Generalmente se llama ingeniería de sistemas a los estudios que incluyen análisis y diseño.

El uso de la simulación para cada uno de ellos puede resumirse como sigue:

- Análisis de sistemas, que estudia sobre el modelo el comportamiento de un sistema existente o propuesto. La situación ideal sería hacer el análisis sobre el sistema real, lo cual en la mayoría de los casos no es posible, por lo cual la simulación da una herramienta adecuada para investigar el comportamiento del sistema.

- Diseño de sistemas, cuyo objeto es producir un sistema que cumpla con ciertas especificaciones. El diseñador propone unos ciertos elementos constitutivos, y estudia su comportamiento por medio de simulación. Si éste es adecuado y cumple con las restricciones y especificaciones propuestas, se acepta, en caso contrario se corrige y vuelve a someterse a simulación.

- Postulación de sistemas, usado principalmente en las ciencias sociales, económicas y políticas, donde se conoce el comportamiento del sistema, pero no los procesos que producen ese comportamiento. Se hacen hipótesis y se establece un modelo, tratando en este caso de ajustarlo a la realidad por medio de parámetros. Una vez hecho, se puede entender mejor el funcionamiento del sistema, predecir eventos y formular hipótesis más refinadas.

Podemos resumir lo anterior diciendo que la simulación es una técnica que nos permite conocer el funcionamiento de un sistema, sin tener que construirlo, a la vez que nos da oportunidad, de probar diferentes soluciones y adoptar la más conveniente. En caso de sistemas ya existentes nos permite entenderlos mejor y propener cambios a los mismos, sin necesidad de experimentar directamente en ellos, lo cual es molesto, costoso e inseguro.

A través de las simulación se pueden estudiar los efectos de cambios en el sistema, cambiando los elementos e interacciones en el modelo. Puede además usarse como un dispositivo pedagógico para la enseñanza tanto a estudiantes como a personal de operación, de los efectos de los diferentes elementos en el sistema y las consecuencias de las decisiones que se toman sobre la operación del mismo.

La simulación puede servir para experimentar sobre nuevas simulaciones acerca de las cuales conocemos poco, y nos permiten predecir lo que pueda pasar. Al introducir nuevos componentes al sistema, nos puede anticipar sobre posibles problemas que surjan en la operación real del mismo.

En la técnica de simulación de eventos discretos, se manejan modelos cuyas entidades interactúan entre sí en puntos discretos de tiempo y no continuamente. Se llaman entidades a los objetos cuyo comportamiento interesa en el sistema, llamándose atributos las propiedades que pueden tener. Las actividades son los procesos que causan los cambios en el sistema, tomando tiempo en realizarse. Los eventos son los instantes de tiempo en que las actividades empiezan o cesan. El estado del sistema es una descripción de las entidades, atributos y actividades en un momento dado. La simulación lo que trata es de seguir los cambios de estados a lo largo del tiempo.

Existen eventos endógenos que son aquellos generados por el modelo en sí, de acuerdo con actividades previas, y eventos exógenos que son los estímulos al modelo que provienen del "mundo exterior". El límite entre este "mundo exterior" y el sistema depende del modelo utilizado, y los fines del mismo, ya que en algunos casos los elementos pueden considerarse como externos y en otros como parte del sistema.

Pasos a seguir en la solución de problemas de simulación.

La aplicación de simulación a diferentes tipos de estudios, hace necesario establecer una cierta secuencia lógica de pasos a seguir en la solución del problema:

1. Definición del problema. Aunque parece obvio, para encontrar la solución de un problema, lo primero que debemos hacer es tratar de establecer claramente cual es el problema que se trata de resolver, y establecer los objetivos del estudio.
2. Planeación del estudio. Una vez definido lo que se quiere obtener, es conveniente establecer un plan detallado sobre la amplitud del estudio, limitar en tiempo y en extensión las partes constitutivas del mismo, con objeto de establecer un plan previo que debe seguirse, y evitar concentrarse en unos aspectos más que en otros. Una falla común en problemas de simulación, es que se pierde el contacto con el problema real y se pretende sacar a lo largo del estudio más información de la que puede obtenerse de los datos disponibles.
3. Revisión y obtención de datos. Es conveniente ver con que datos se cuenta, y su confiabilidad. En caso de que no se tenga información suficiente, es necesario establecer los medios para recolectar y procesar información, que sea usada como dato para el estudio.

4. Formulación y evaluación del modelo matemático. Debe establecerse la estructura del modelo a ser usado, especificando sus componentes, sus variables, parámetros y sus relaciones funcionales.

Según lo antes expuesto el modelo debe enfatizar las partes del sistema que se quieran estudiar. Los parámetros deben establecerse de acuerdo con los datos disponibles. Las variables representativas deben escogerse adecuadamente, y establecer las relaciones entre ellas lo más sencillo posible, con objeto de no complicar demasiado el modelo. Debe tenerse en mente la facilidad de programación y eficiencia de la solución con la computadora. Claro está, que en ningún momento debe sobresimplificarse el modelo y ya no representar al sistema real en forma adecuada. Una vez establecido el modelo es conveniente revisarlo detenidamente con objeto de evaluarlo, ver su potencialidad y estar seguros que representa al sistema real y puede ser usado para los experimentos para los que fue diseñado.

5. Formulación del programa de computadora. Una vez establecido el modelo, debe escogerse el lenguaje de computadora que se utilizará para su solución, ya que ésta depende mucho del lenguaje escogido. Más adelante se hablará sobre algunos de los métodos de programación existentes. En donde sea posible, se escogerá el lenguaje más adecuado y en otros se usará el disponible. Como en todo caso de programación de computadoras, deberá hacerse un diagrama de flujo, codificación, y pruebas del programa. Estas pruebas deben hacerse con objeto de que el programa represente el modelo propuesto.
6. Validación. Este es uno de los pasos más complejos, ya que requiere un gran conocimiento del problema simulado, y mucho juicio. Básicamente pueden hacerse dos pruebas para validar un modelo. Primero, estudiar qué tanto se parecen los valores simulados de variables endógenas a los datos históricos reales, si es que existen. Segundo, observar que tan exactas son las predicciones del modelo respecto al sistema real, es decir si dan valores lógicos. Claro está que además pueden establecerse todas las pruebas estadísticas clásicas.
7. Diseño de experimentos. Con objeto de cumplir con los objetivos del estudio, debemos de establecer los experimentos que se harán con el modelo, tomando en cuenta el costo del uso de la computadora. Es común que si no se tiene un diseño previo de los experimentos a efectuar, el usuario acaba con una gran cantidad de información obtenida sin planeación y sin saber que hacer de ella.

8. Ejecución de la simulación, y análisis de resultados. Una vez que se tiene el modelo, el programa y los experimentos, hay que hacerlos utilizando la computadora. Las respuestas obtenidas, si los objetivos fueron claramente trazados, contribuirán a entender mejor el sistema real y a tomar decisiones sobre el mismo. Los resultados finales pueden tabularse o graficarse.

Lenguajes de Computadora para Simulación

El hecho de que la simulación digital requiera una gran cantidad de cálculos numéricos, lleva al uso de computadoras electrónicas digitales.

Dentro de los sistemas de programación de las computadoras existen superlenguajes de propósito múltiple como son el FORTRAN, COBOL, ALGOL y PL/I, que pueden ser usados para resolver problemas de simulación. Sin embargo se ha observado que los problemas de simulación, tienen en sí características muy específicas y repetitivas, por lo cual se han diseñado lenguajes especiales. Estos lenguajes además de estar contruidos con una cierta lógica que permite fácilmente implantar los problemas de simulación, tienen rutinas que son muy útiles, como son la generación de números aleatorios, formación de tablas de frecuencia, cálculos de variables estadísticas, manejo de colas, etc.

Aunque es difícil poder decir, cual es el lenguaje de simulación más adecuado para un determinado problema, se han hecho estudios comparativos de eficiencias de uso de lenguajes para determinados prototipos. Uno de los mejores estudios fue hecho por Teichroew (Ref. 4) comparando resultados del uso de los seis principales lenguajes para simulación discreta.

Existen lenguajes diseñados para simulación continua en computadoras digitales, siendo las principales: 1130/CSMP, 360/CSMP, y DYNAMO (Ref. 1).

Para fines de este artículo sólo nos interesan los lenguajes utilizados para simulación discreta. Existen una gran cantidad de ellos, si lo más

importantes: SIMSCRIPT (Ref. 5), GPSS (Ref. 6), GASP II (Ref. 7), MULA (Ref. 8), SIMPAC (Ref. 9) y SIMSCRIPT II (Ref. 10).

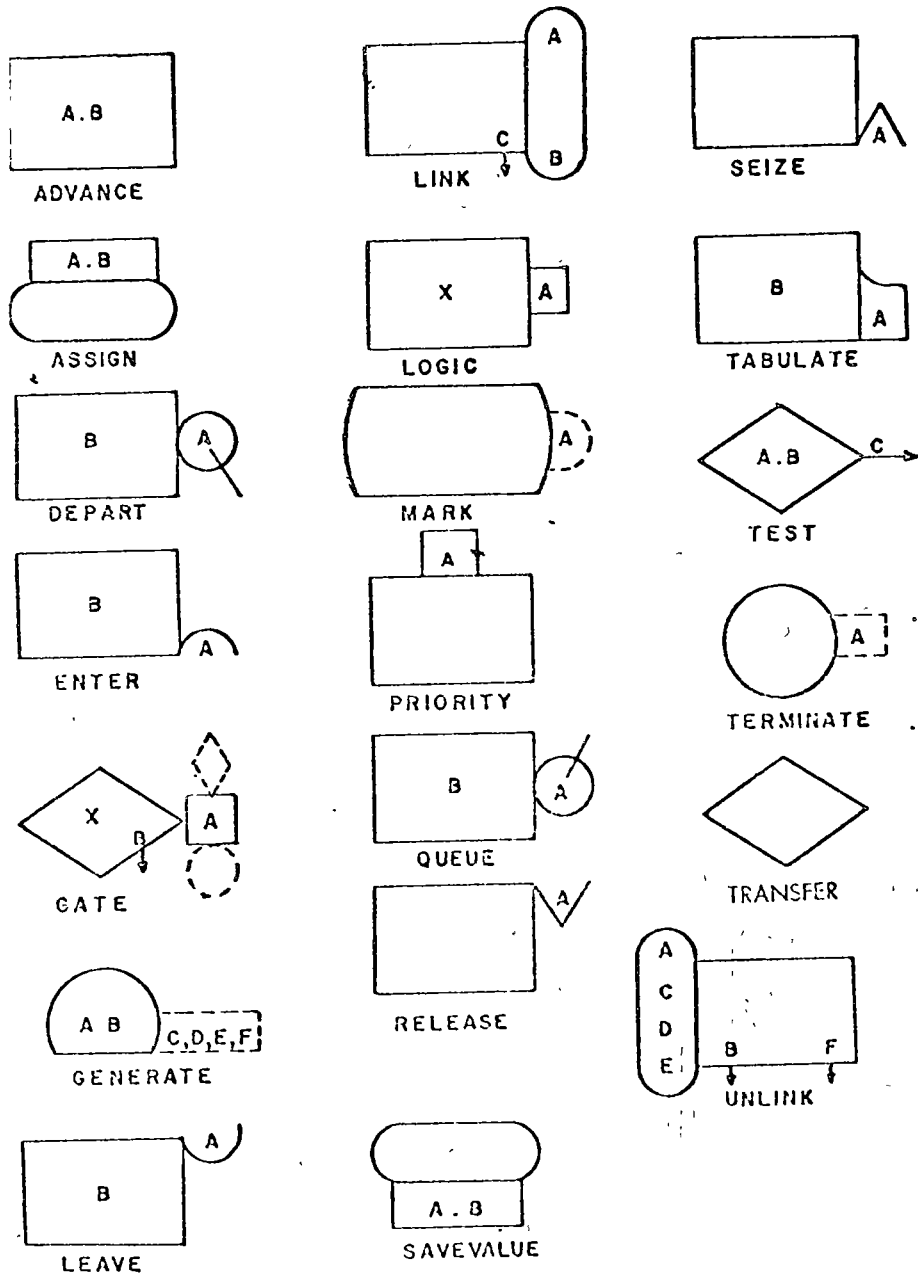


Fig. 1.—Símbolos de GPSS.

No se pretende dar una descripción detallada de cada uno de los lenguajes mencionados, sino sólo se describen brevemente las características principales de los dos más utilizados, que son GPSS y SIMSCRIPT.

a) GPSS. Estas iniciales representan: "General Purpose Simulation System". (Sistema de Simulación de Propósito General). Fue desarrollado originalmente por G. Gordon. El sistema a ser simulado, se describe como un diagrama de bloques, en que cada uno de los bloques representa una actividad, y las líneas que los unen representan la secuencia en que se van a ejecutar estas actividades. En algunos casos, de acuerdo con decisiones lógicas o comparaciones, la computadora selecciona uno de diferentes caminos que salen de un mismo bloque. Cada uno de los bloques tiene una notación diferente y una acción perfectamente definida. En la figura 1 se presentan los principales bloques utilizados por GPSS, con sus nombres respectivos. Las letras A — F representan los campos variables utilizados en cada bloque.

Existen entidades llamadas transacciones, que son generadas con ciertos intervalos por bloques del diagrama y que tienen ciertas características. Estas transacciones recorren el diagrama de bloque en bloque de acuerdo con el tiempo simulado, que es controlado por un "reloj interno", el cual indica el tiempo real de la simulación. Existen dos tipos de equipos que pueden ser utilizados por las transacciones: Instalaciones, que pueden ser ocupadas por una transacción a la vez y almacenes que pueden ser utilizados simultáneamente por varias transacciones. Al recorrer los bloques, las transacciones pueden ser detenidas en uno de ellos (por ejemplo, en caso de que una instalación esté en uso), o pueden tomar caminos alternos. Se puede asignar niveles de prioridad a las transacciones y hacer decisiones lógicas complejas durante la simulación.

Existen rutinas para generar números aleatorios, establecer funciones estocásticas, formar tablas de frecuencia etc. Una transacción da por terminado su recorrido al llegar un bloque de terminación. Únicamente para fines ilustrativos, se presenta en la figura 2, el diagrama de bloques que corresponda a la simulación de una red telefónica.

El GPSS automáticamente lleva estadísticas de colas, uso de instalaciones y almacenes, retrasos sufridos en el recorrido, etc., imprimiéndose éstas al final como resultado de la simulación.

b) SIMSCRIPT. Este lenguaje fue desarrollado por un equipo dirigido por H. M. Markowitz, en la Corporación Rand. Básicamente consiste en

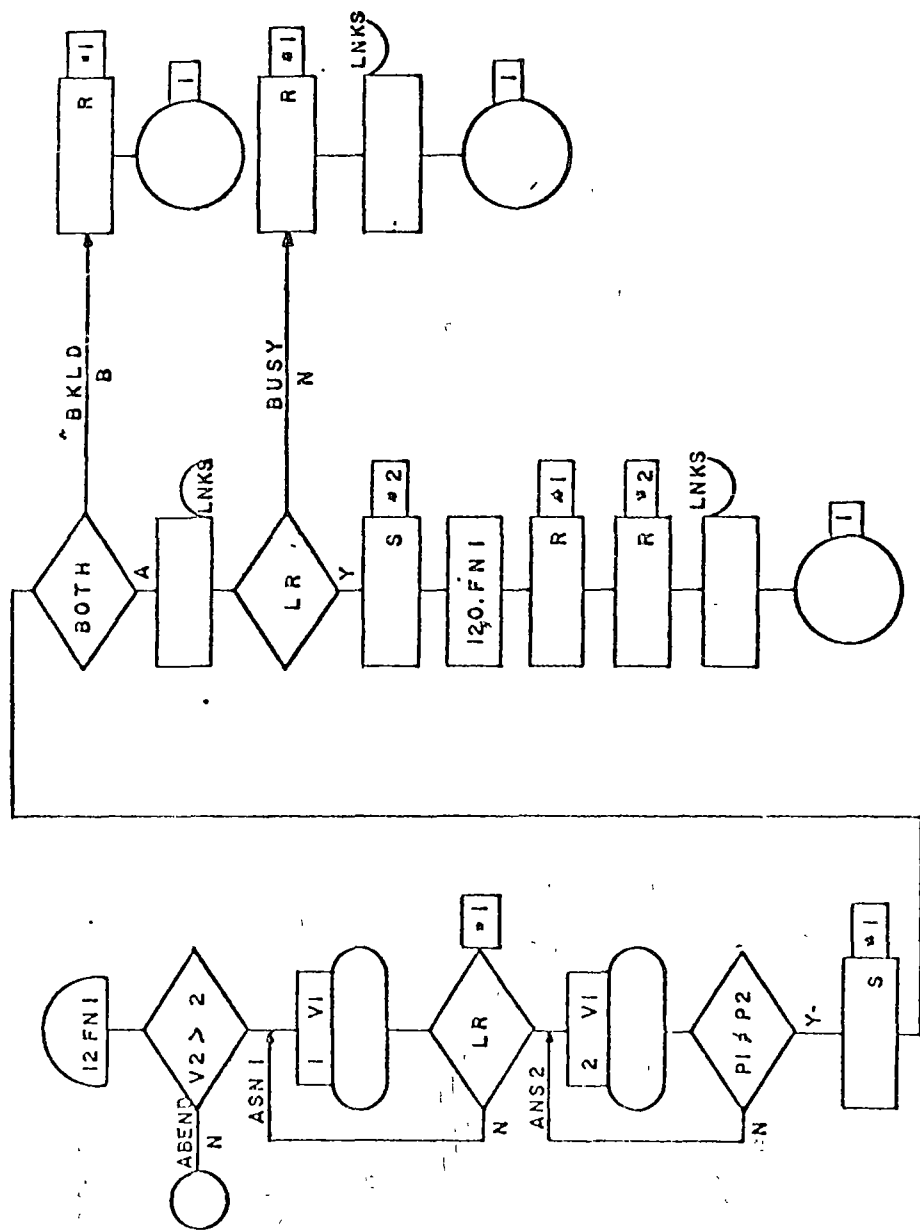


Fig. 2.—Diagrama de bloques GPSS. Simulación red telefónica.

una rutina de tiempos que pone en funcionamiento las diferentes subrutinas que ejecutan las acciones de los eventos, tanto endógenos como exógenos. En esta rutina de tiempo se registran las ocurrencias futuras de eventos, y de acuerdo con el reloj de tiempo interno de la simulación, se van programando para que ocurran los eventos endógenos generados por la simulación en sí, y los exógenos generados externamente. El usuario debe escribir subrutinas cerradas en un lenguaje similar al FORTRAN, para cada evento. En estas subrutinas se cambia el estado del modelo de acuerdo con las características propias de cada evento.

El SIMSCRIPT tiene construidas rutinas para generación de números aleatorios, funciones para acumulación, funciones de tipo estadístico y un programa generador de reportes, que permite con gran facilidad presentar en forma adecuada los resultados de la simulación.

Aunque el SIMSCRIPT fue diseñado para fines de simulación, en realidad puede ser usado para problema de tipo general, de hecho la nueva versión llamada SIMSCRIPT II (Ref. 10), contiene cinco niveles de programación que pueden servir para resolver desde problemas muy sencillos de aprendizaje de programación, hasta para la solución de sistemas muy complejos de simulación.

Aplicaciones de Simulación de Sistemas.

Sería imposible describir o siquiera mencionar todas las aplicaciones que se han hecho de la simulación. Ha sido usada prácticamente en todas las ramas de la Ciencia e Ingeniería. En el año de 1966, IBM publicó una biografía sobre simulación que contenía la descripción de 948 trabajos. (Ref. 11).

Aunque ha sido aplicada al estudio de sistemas de negocios, económicos, sociológicos, psicológicos, humanos, biológicos, logísticos, militares, políticos etc., mencionaremos a continuación algunos problemas resueltos en el campo técnico.

Como es natural imaginarse, la simulación ha sido utilizada en grandes proporciones en la simulación del funcionamiento interno de computadoras electrónicas. Estos estudios han permitido mejorar los equipos, en cuanto a su eficiencia de utilización de dispositivos, evaluar técnicas de tiempo compartido, fijando las políticas óptimas para distribución de tiempos entre usuarios, y aún simulaciones de centros de computación para estudiar cual es la mejor forma de operarlos (Ref. 12, 13, 14, 15).

En varios congresos y conferencias se han tratado problemas de tipo técnico (Ref. 16). Únicamente para fines de ilustración daremos algunos de los temas de los trabajos desarrollados:

- Simulación de una carretera automatizada
- Modelo de la red ferrocarrilera Canadiense CN
- Simulación FORTRAN de una flota de buques tanque
- Simulación de líneas de ensamble
- Simulación de procesos de manufactura
- Simulación de sistemas telefónicos
- Modelo de elevadores en una terminal de granos
- Simulación del funcionamiento de una estructura para estacionamiento.

Complementamos esta lista con ideas sobre posibles aplicaciones de la simulación en el campo técnico, algunas de las cuales ya han sido desarrolladas y aplicadas.

- Sistemas de transporte colectivo urbano (camiones, metro, etc.)
- Casetas de cobro en autopistas
- Recepción, almacenamiento y distribución de petróleo en puertos.
- Funcionamiento de aeropuertos
- Operación de sistemas hidroeléctricos
- Diseño de plantas industriales
- Funcionamiento de gasolineras y estaciones de servicio
- Operación de elevadores en edificios altos
- Acarreos de materiales
- Redes de CPM (Ruta Crítica), para escoger estrategias
- Operación de sucursales bancarias.

Referencias:

1. Gordon, G. "System Simulation". Prentice Hall. (1969).
2. Ackoff, R. L. y Sasieni, M.W. "Fundamentals of Operation Research". John Wiley & Sons. (1968).
3. Naylor, T. H., Bolintfy, J. L., Burdick, D.S., Chu, K. "Computer Simulation Techniques". John Wiley & Sons. (1966).
4. Teichroew, D. y Lubin, J. F., "Computer Simulation — Discussion of the Technique and Comparison of Languages". Communications of the ACM. Vol. 9, No. 10, Oct. 1966, pág. 723-741.
5. Markowitz, H. M., Hausner B. y Karr, H. W. "Simsript, A Simulation Programming Language". Prentice Hall (1963).
6. "General Purpose Simulation System". Introductory User's Manual. Publication IBM H—20—0304.
7. Pritsker, A. B., y Kiviat, P. J. "Simulation with GASP II". Prentice Hall (1969).
8. Dahl, O. J. y Nygaard, K. "SIMULA — an ALGOL — Based Simulation Language". Communications of the ACM. Vol. 9, No. 9, Sept. 1966, pág. 671-678.
9. "SIMPAC", User's Manual". TM 602/00/00, Systems Development Corporation. Santa Mónica, Calif. (1962).
10. Kiviat, P. J. Villanueva, R. y Markowitz, H. M. "The SIMSCRIPT II Programming Language". Prentice Hall. (1969).

11. "Bibliography on Simulation". IBM Corp. Forma No. 320-0924. (1966).
12. Mac Dougall, M. H. "Computer System Simulation: An Introduction". Computer Surveys ACM. Vol. 2, No. 3, Sept. 1970, pág. 191-209.
13. Nielsen, N. R. "The Simulation of Time Sharing Systems". Communications of the ACM. Vol. 10, No. 7, Jul. 1967, pág. 397-412.
14. Hutchinson, G. K. "A Computer Center Simulation Project". Communications of the ACM. Vol. 8, No. 9, Sept. 1965, pág. 559-568.
15. Katz, J. H. "An Experimental Model of System/360". Communications of the ACM. Vol. 10, No. 11, Nov. 1967, pág. 694-702.
16. "Digest of the Second Conferencia on Applications of Simulation". SHARE/ACM/IEEE/SCI. (1968).

Ing. Leonard RAPOPORT *

* Profesor de la División de Estudios Superiores de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

METODO DE SIMULACION

MONTE CARLO +

SU APLICACION A LOS

FENOMENOS DE ESPERA +

EL ESTUDIO DEL COMPOR-
TAMIENTO DE UN SISTEMA
IMPLICA LA CONSTRUCCION
DE UN MODELO.

DISTINTOS TIPOS DE MODELOS

- MATEMATICOS

$$Y = mx + b$$

- ICONICOS

TUNEL DE VIENTO

- ANALOGICOS

ELECTRICOS-HIDRAUL.

- LOGICOS

DIAGRAMA RUTA CRITICA

- DETERMINISTAS

PROGRAMACION LINEAL

- PROBABILISTAS

FUNCION DE PROB. NORMAL

- ESTATICOS

NO INTERVIENE \pm po.

- DINAMICOS

INTERVIENE \pm po.

- ESTOCASTICOS

PROBABILISTA-DINAMICO

SIMULACION :

- ES UNA TECNICA NUMERICA PARA LLEVAR A CABO EXPERIMENTOS, EMPLEANDO MODELOS MATEMATICOS Y LOGICOS, QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA, A LO LARGO DE UN CIERTO PERIODO DE TIEMPO.

ENFOQUE Y ALCANCE DE LA SIMULACION :

NINGUNA PARTE SUBSTANCIAL DEL
UNIVERSO ES TAN SIMPLE PARA COMPREN-
DERSE Y CONTROLARSE SIN ABSTRACCION,
ESTA CONSISTE EN REEMPLAZAR LA PARTE
DEL UNIVERSO BAJO ESTUDIO, POR UN
MODELO SIMILAR CON POSIBILIDAD DE SER
EMPLEADO PARA PREDICCION Y CONTROL

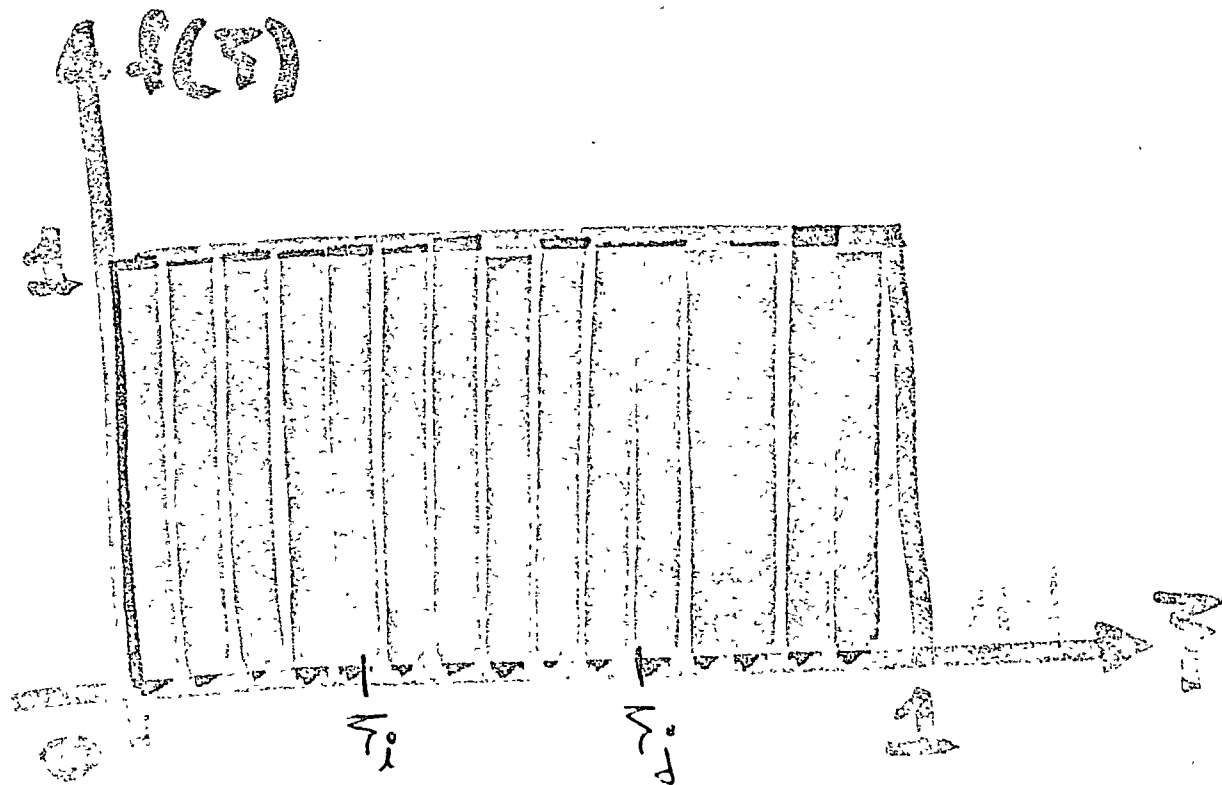
MODELO : REALISMO vs. SIMPLICIDAD

NUMEROS ALEATORIOS: ↓

SON AQUELLOS QUE TIENEN
IGUAL PROBABILIDAD DE OCURRENCIA

SU FUNCION DE PROBABILIDAD SERA'

RECTANGULAR



TECNICAS PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS:

1. MUESTREO FISICO
2. CUADRADO MEDIO
3. CONSECUCIONAL MULTIPLICATIVO.

METODO CONGRUENCIAL

MULTIPLICATIVO:

$$X_{n+1} = A X_n \pmod{M}$$

Ej. Sean: $A=2$; $X_1=4$; $M=11$

$$X_2 = X_{n+1} = 2 \times 4 \pmod{11} = 3$$

$$X_3 = 2 \times 3 \pmod{11} = 5$$

$$X_4 = 2 \times 5 \pmod{11} = 1$$

$$X_5 = 2 \times 1 \pmod{11} = 2$$

$$X_6 = 2 \times 2 \pmod{11} = 4$$

...

FORMULAS EMPIRICAS:

$$X_{n+1} = 23X_n \pmod{10^{2n+1}}$$

PERIODO 5'882.352

$$X_{n+1} = 5^{17}X_n \pmod{2^{4n}}$$

PERIODO 2^{10}

PODEMOS DEFINIR UN
CONJUNTO DE NUMEROS
ALEATORIOS τ_i , TALES
QUE :

$$0 \leq \tau_i \leq 1$$

METODO DE SIMULACION DE MONTE CARLO :

CONSIESTE EN SUBSTITUIR LA POBLACION REAL, POR UNA POBLACION TEORICA DEFINIDA POR UNA FUNCION DE PROBABILIDAD Y SELECCIONAR UNA MUESTRA DE LA POBLACION TEORICA POR MEDIO DE UNA SUCESSION DE NUMEROS ALEATORIOS.

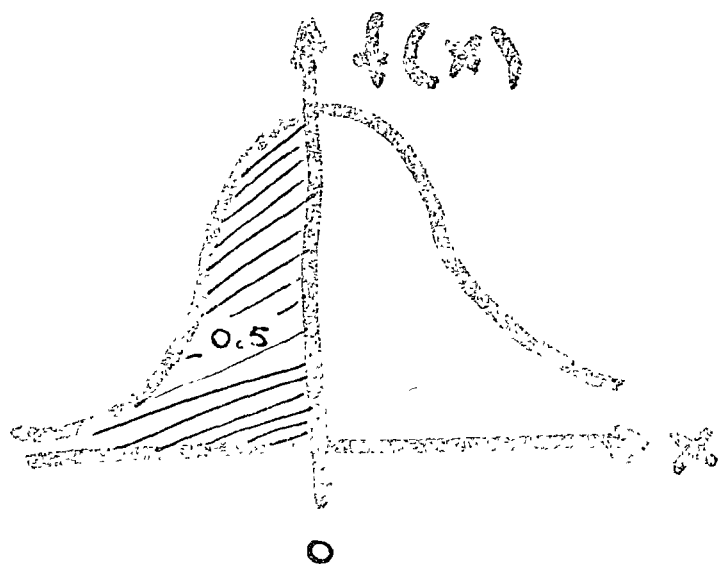
METODO DE SIM. MC.

PASO 1

CONSTRUIR LA GRAFICA DE LA
DISTRIBUCION ACUMULADA DE
PROBABILIDAD.

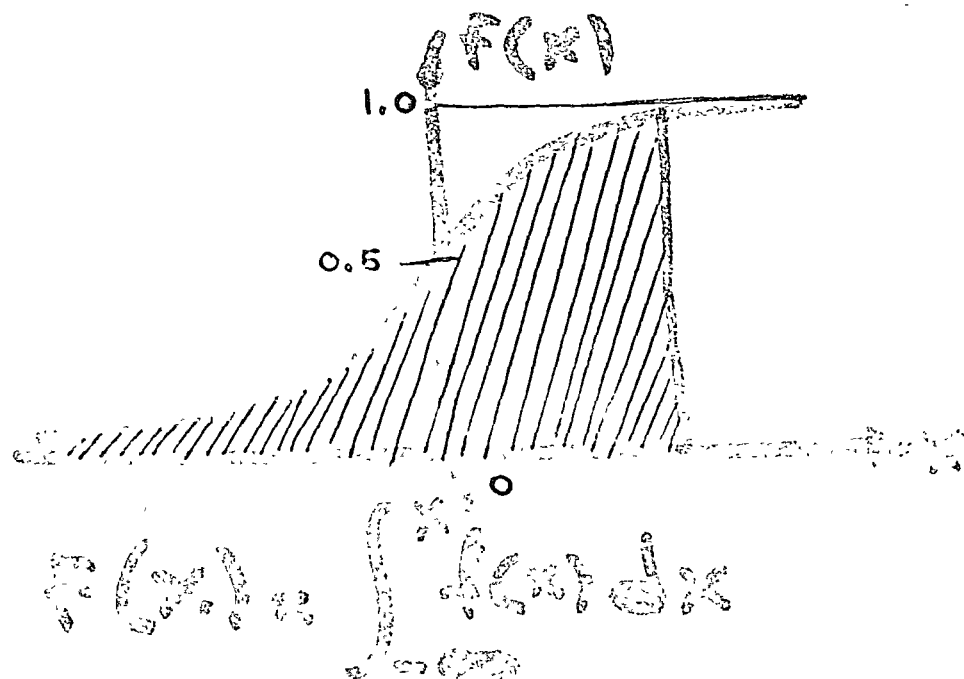
FUN. PROB

$$f(x) = P(X=x)$$



FUN. ACUM. PROB.

$$F(x) = P(X \leq x)$$



METODO DE SIM. MC

PASO 2

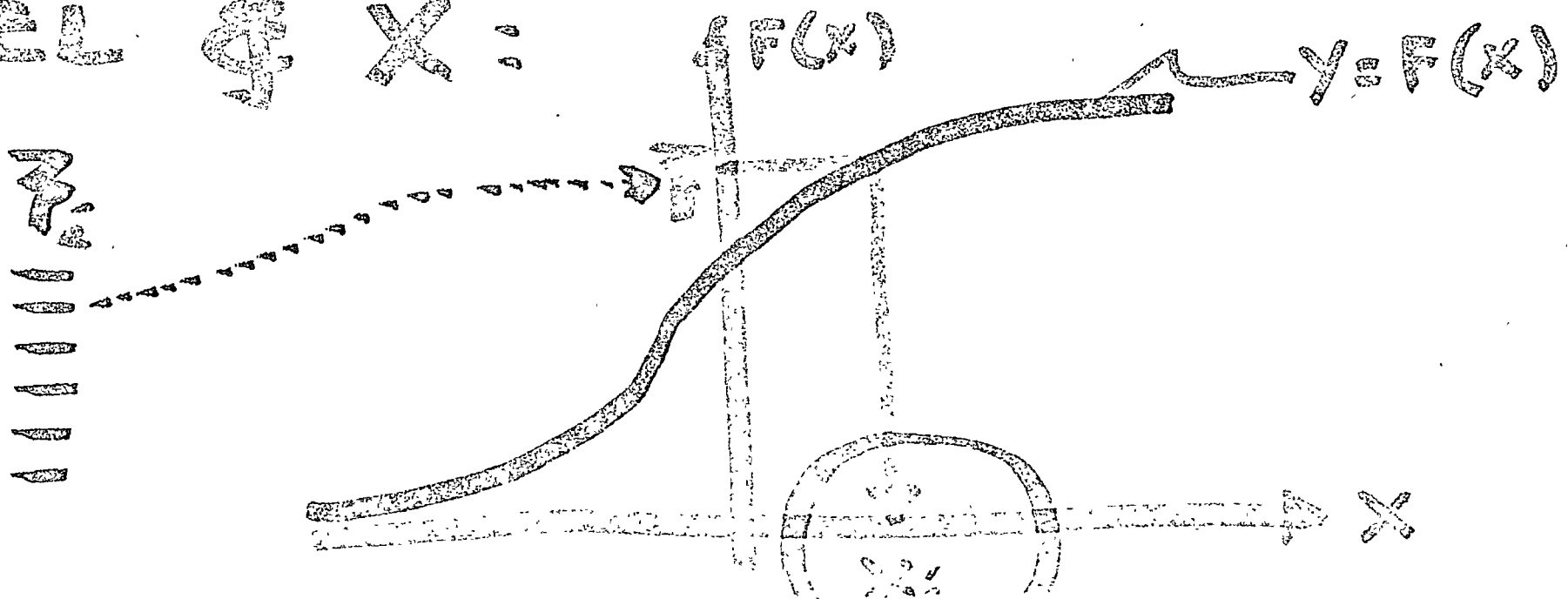
ESCOGER UN NUMERO ALEATORIO r ENTRE CERO Y UNO.

$$0 \leq r \leq 1$$

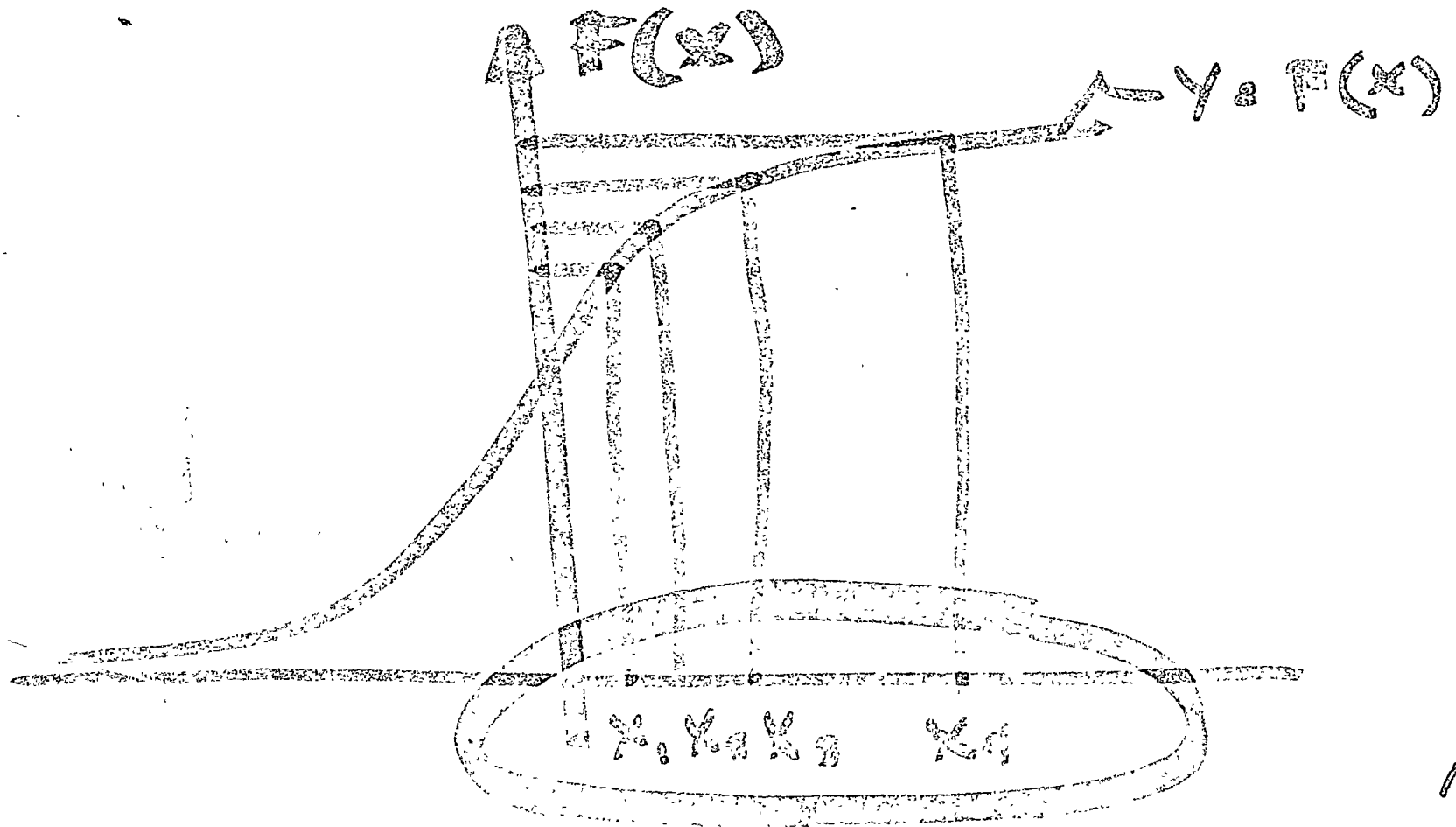
METODO DE SIM. MC

PAISO 3

ENTRAR CON EL VALOR DE Y
AL EJE $F(x)$ HASTA COCER
A LA CURVA $Y = F(x)$ Y PRO-
YECTAR EL PUNTO SOBRE
EL X :



EL VALOR x_i SERA UN ELEMENTO DE LA MUESTRA SIMULADA CON FUNCION DE PROBABILIDAD $f(x)$.



GENERACION DE UNA MUESTRA
DE UNA POBLACION CON DISTRI-
BUCION DE PROBABILIDAD

NO NORMAL

PARAMETROS $N(\mu, \sigma)$

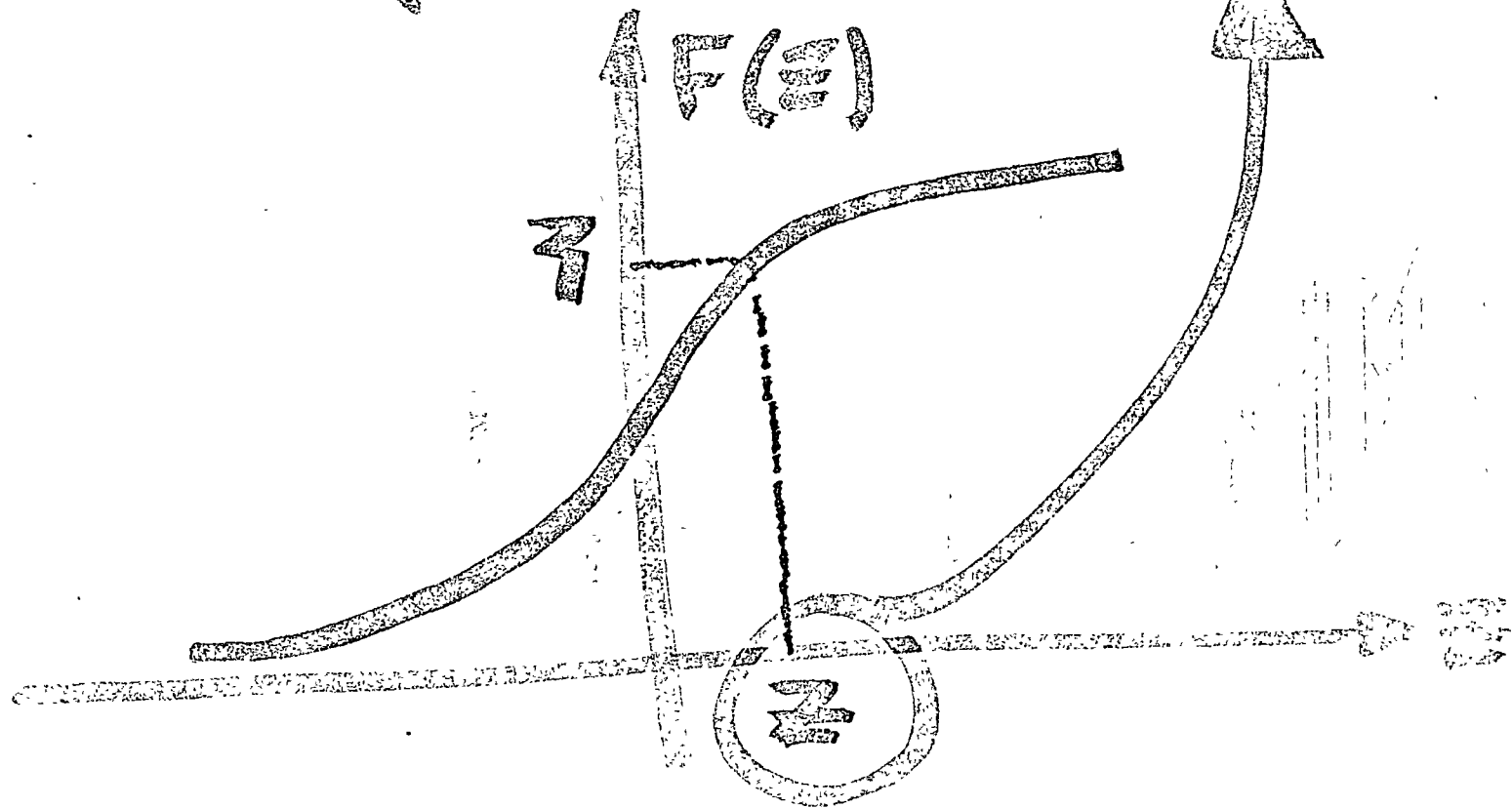
μ = MEDIA

σ = DESVIACION ESTANDAR

VARIABLE NORMAL ESTANDARIZADA:

$$ZADA: Z(0,1)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow X = Z\sigma + \mu$$



EJEMPLO: $A=15$; $V=3$

Z	Z	$X = 3Z + 15$
0.51	0.03	15.09
0.24	-0.71	12.87
0.45	-0.13	14.61
0.30	-0.53	13.41
0.03	-1.09	9.33
0.64	0.36	16.08
0.15	1.04	11.88
0.09	-1.34	10.98
0.21	-0.81	12.27
0.41	-0.22	14.11

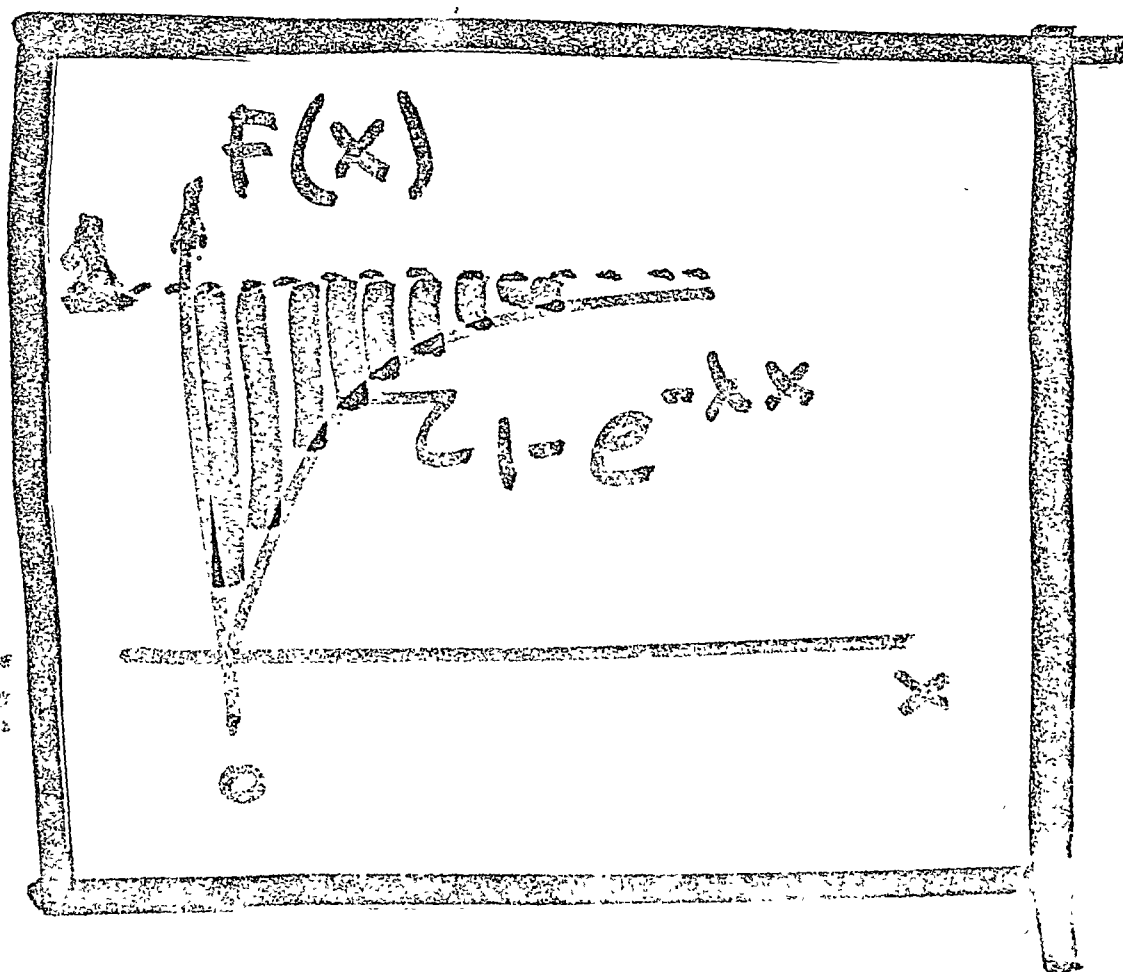
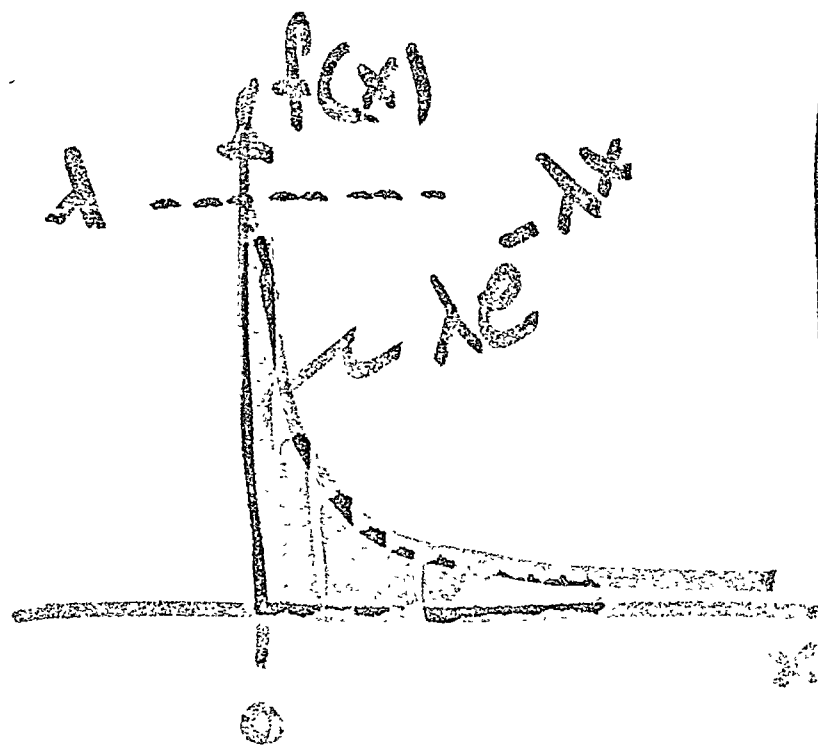
GENERACION DE UNA MUESTRA
DE UNA POBLACION CON DIS-
TRIBUCION DE PROBABILIDAD

EXPONENCIAL

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$ constante

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



TRANSFORMACIONE

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$0 \leq T_i \leq 1$$

$$T = F(x)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - T_i$$

$$h e^{-\lambda x} = h(1 - T_i)$$

$$-\lambda x (0.4343) = \ln(1 - T_i)$$

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1 - T_i}\right)$$

EJEMPLO: $\lambda = 1/15$

$$X_i = \frac{1}{43(\lambda)} h(1-F_i) = \underbrace{34.5}_{K} h(1-F_i)$$

F	$(1-F)$	C. MAN	$h(1-F)$	X_i
0.06	0.94	1.973	1.027	9.93
0.42	0.58	1.763	1.237	7.93
0.54	0.46	1.663	1.337	11.38
0.68	0.32	1.964	1.036	11.77
0.46	0.54	1.732	1.268	8.97
0.74	0.26	1.415	1.585	20.01
0.23	0.77	1.866	1.14	3.77
0.60	0.40	1.602	1.398	13.45
0.02	0.98	1.991	1.009	9.31
0.79	0.21	1.392	1.608	23.38

GENERACION DE UNA MUESTRA
DE UNA POBLACION CON DISTRI-
BUCION DE PROBABILIDAD

POISSON

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

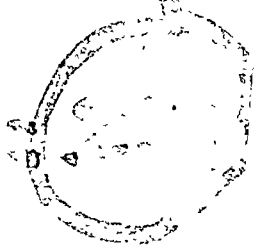
$$F(x) = \sum_0^x \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

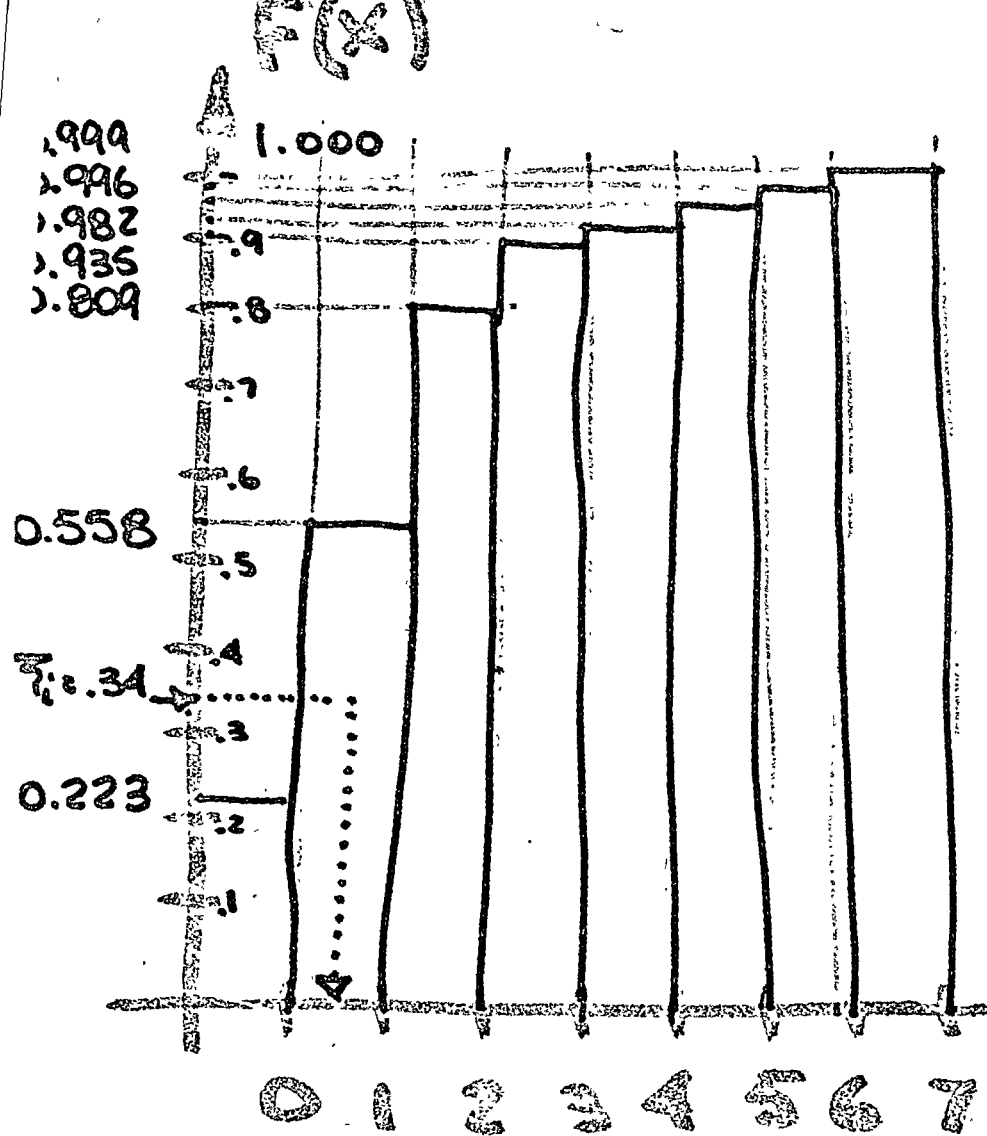
PARAMETRO λ

EXAMPLE: $\lambda = 1.5$

x	$P(x)$	$\sum P(x)$
0	0.223	0.223
1	0.335	0.558
2	0.251	0.809
3	0.126	0.935
4	0.047	0.982
5	0.014	0.996
6	0.003	0.999
7	0.001	1.000

$$P(x=2) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1.5} 1.5^2}{2!} = 0.251$$





F_i	X_i
0.34	1
0.65	2
0.67	2
0.04	0
0.90	3
0.42	1
0.83	3
0.52	2
0.75	2
0.81	3

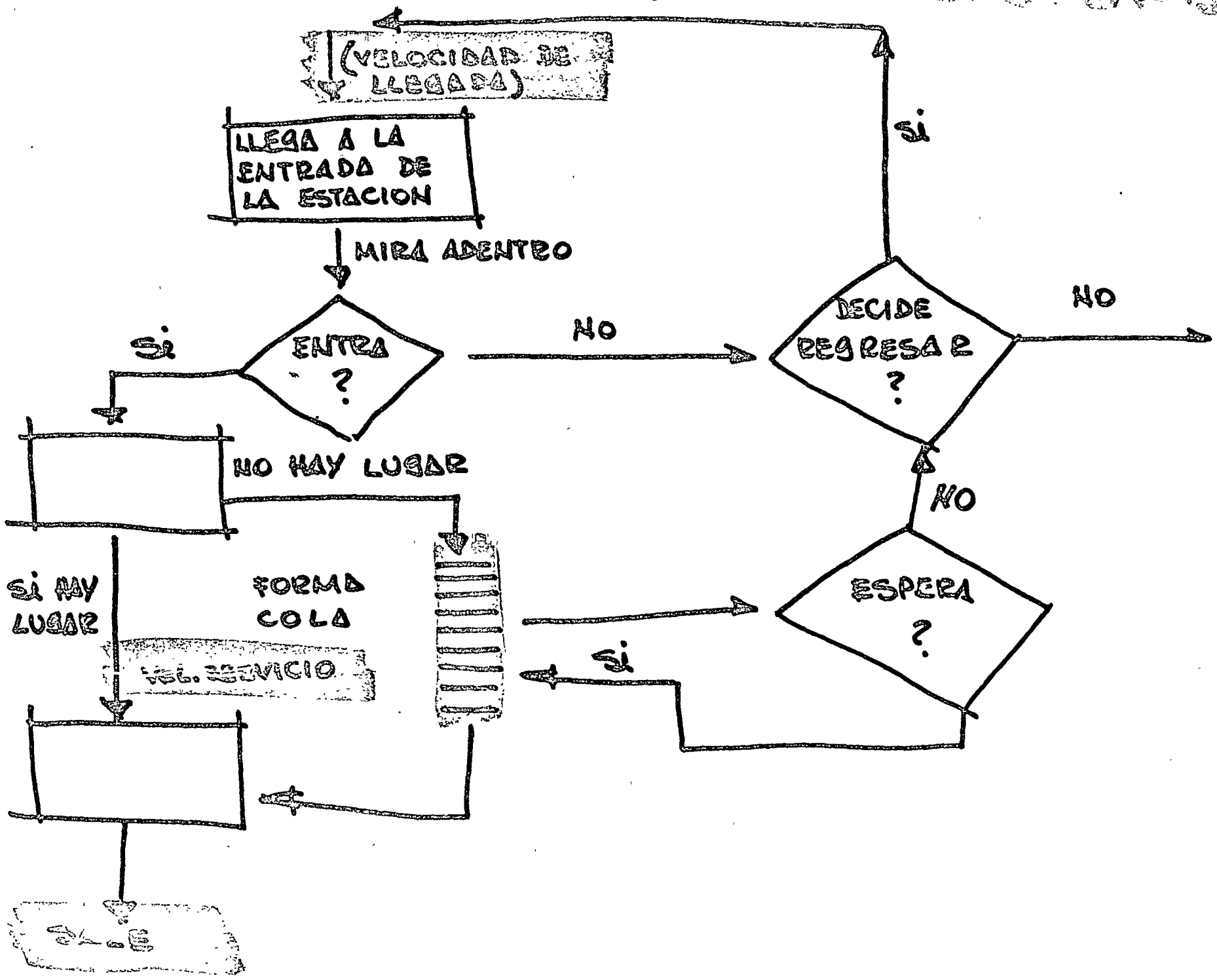
GRAFICA DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD ACUMULADA $F(x)$

LÍNEAS DE ESPERA

CONSIDERERESE UNA INSTALACION EN LA QUE SE EJECUTA UN TRABAJO O SE PRESTA UN SERVICIO ; LAS UNIDADES QUE LLEGAN FORMAN UNA COLA O LÍNEA DE ESPERA.

- DISCIPLINA DE LA COLA : ORDEN CON EL QUE SON ATENDIDOS.
- ESTACION DE SERVICIO : PUNTO DONDE SE SUMINISTRA UN SERVICIO A LA VEZ.
- LINEA DE SERVICIO : VARIAS ESTACIONES DE SERVICIO.
- * EL SISTEMA PUEDE REPRESENTARSE MEDIANTE UN DIAGRAMA O' MODELO LOGICO \Rightarrow

MODELO LOGICO DE UN SISTEMA:



EJEMPLO:

UNA LINEA DE AUTOBUSES LLEGA A UNA PARADA CON D.P. NORMAL : MEDIA 15 MIN , DES. EST 3 MIN.

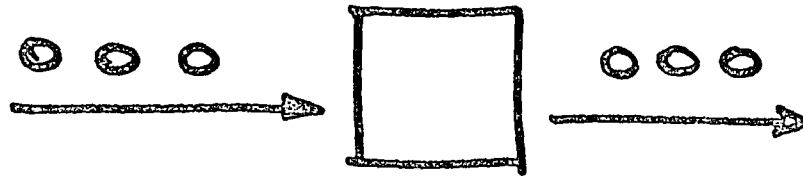
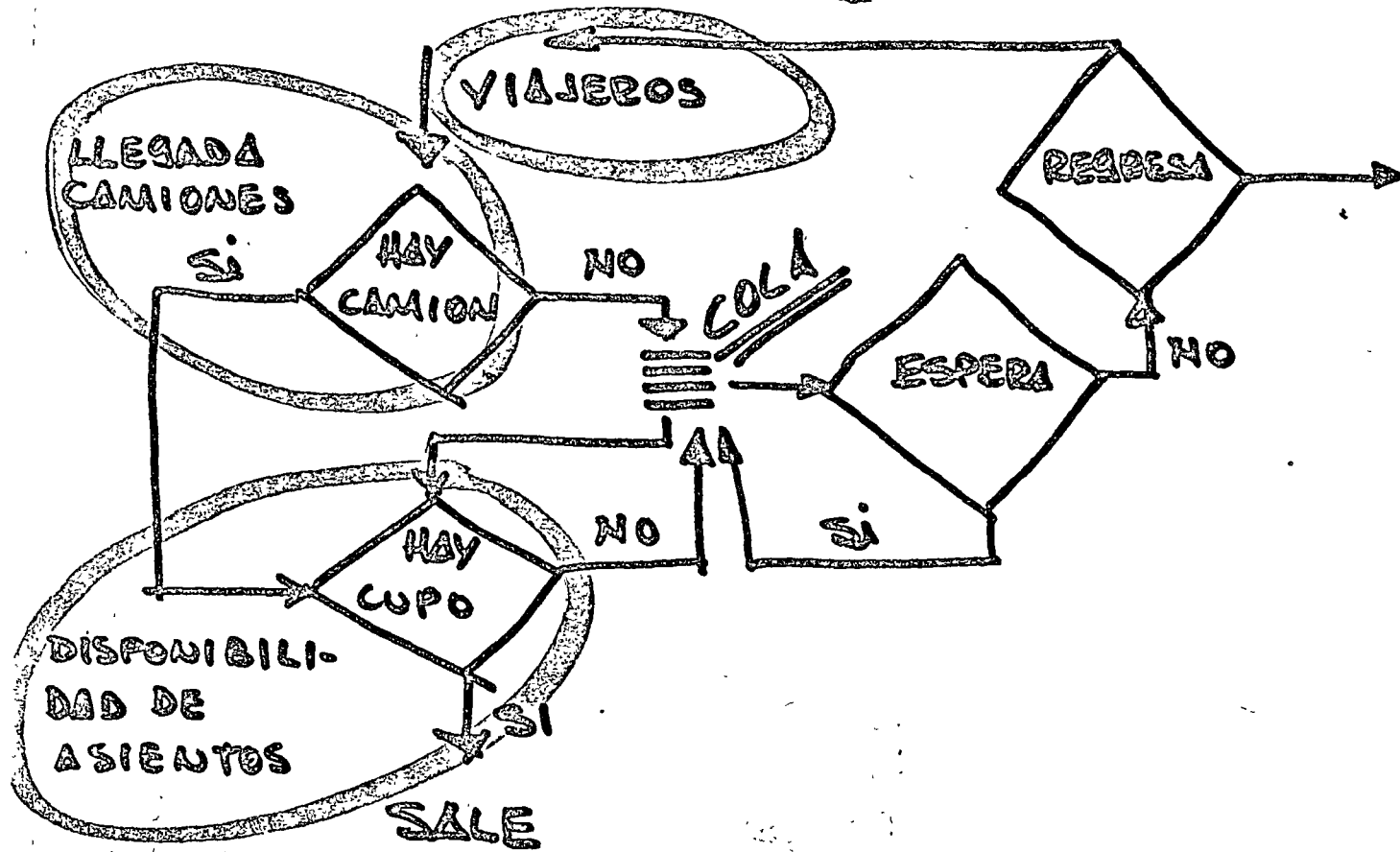
LOS USUARIOS DE LA LINEA LLEGAN CON D.P. EXPONENCIAL CON: $\lambda = 1/15$ PERSONAS/MIN.

EL NUMERO DE ASIENTOS VACIOS TIENE UNA D.P. POISSON CON : $\lambda = 1.5$ ASIENTOS/CAMION.

LA LINEA NO PERMITE VIAJEROS DE PIE.

ENCONTRAR EL TIEMPO MEDIO DE ESPERA Y EL TAMAÑO MEDIO DE LA COLA.

DIAGRAMA:



PASO 1: SIMULAR LA LLEGADA DE AUTOBUSES A LA PARADA:

$$X_i = Z_i T + M$$

$$L_i = Z_i T + M$$

Z_i	INSTANTE DE LLEGADA
15.09	15.09
12.87	27.96
14.61	42.57
13.41	55.98
9.33	65.31
16.08	81.39
11.88	93.27
10.98	104.25
12.57	116.82
14.31	131.13

PRASO 2 : SIMULAR LOS ASIENTOS

VACIOS EN C/CAMION :

$$F(x) = \sum \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\lambda = 1.5$$

ASIENTOS VACIOS
1
2
2
0
3
1
3
2
2
3

PASO 3: SIMULAR LA LLEGADA DE LOS VIAJEROS.

$$X = -\frac{1}{0.43 \lambda} \lg(1 - r_i)$$

$$\lambda = 1/15$$

$$t_i = -\frac{1}{.43(1/15)} \lg(1 - r_i)$$

t_i	INSTANTE DE LLEGADA
0.93	0.93
7.93	8.86
11.38	20.24
11.77	32.01
8.97	40.98
20.01	60.99
3.79	64.78
13.45	78.23
0.31	78.54
23.39	101.93

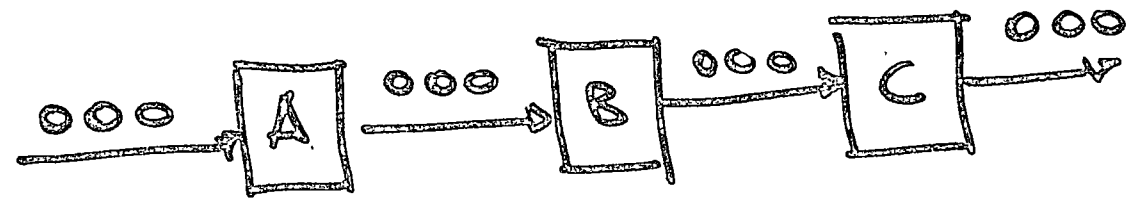
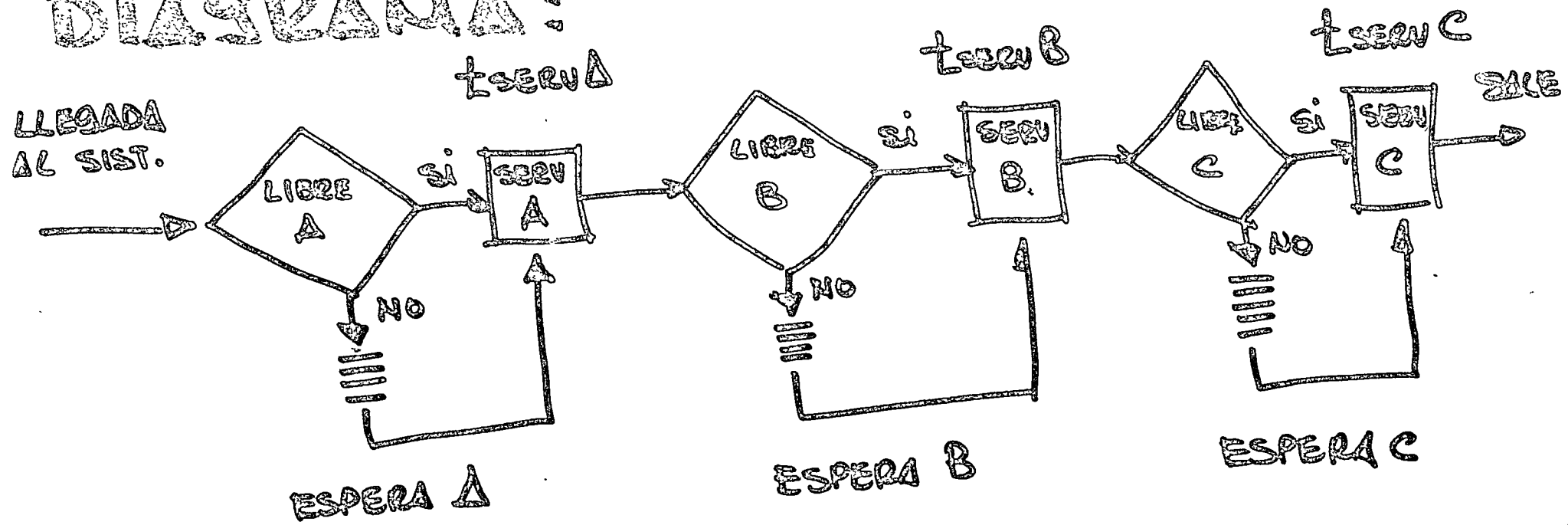
PASO 4 : ASIGNAR LOS VALORES SIMULADOS.

LLEGADA CAMION	ASIENTOS VACIOS	LLEGADA VIAJEROS	TIEMPO ESPERA	TAMAÑO COLA
15.09	①	0.93	14.16	1
27.96	②	8.86	19.10	0
42.57	②	20.24	7.72	2
55.98	0	32.01	10.56	0
65.31	③	40.98	1.59	2
81.39	①	60.99	4.32	0
93.27	③	64.78	0.53	2
104.25	②	78.23	3.16	1
116.82	2	78.54	14.73	1
131.13	3	101.93	2.32	1
			$\Sigma = 78.19$	$\Sigma = 10$

$$\text{TIEMPO MEDIO DE ESPERA} = \frac{78.19}{10} = 7.819 \text{ MIN}$$

$$\text{TAMAÑO MEDIO DE COLA} = \frac{10}{10} = 1 \text{ VIAJERO}$$

DIAGRAMA:



EJEMPLO:

UNA LINEA DE PRODUCCION DE CIERTO ARTICULO CONSTA DE TRES ESTACIONES DE SERVICIO (EN LINEA).

- LAS LLEGADAS SON EXPONENCIALES CON

$$\lambda = 1/20 \text{ LLEGADA/MIN.}$$

- LOS TIEMPOS DE SERVICIO SON DE LA SIGUIENTE

FORMA

ETAPA 1: $N(10, 5)$

ETAPA 2: $E(\lambda = 1/15)$

ETAPA 3: $CTE = 15$

DETERMINAR EL TIEMPO ESPERADO EN EL SISTEMA:

DETERMINAR EL TIEMPO MEDIO DE ESPERA:

TIEMPOS DE LLEGADAS AL SISTEMA :

$$E(1/20) \Rightarrow L_i = -\frac{1}{.43(1/20)} \lg(1-\rho_i)$$

TIEMPO DE SERVICIO EN LA PRIMERA ETAPA

$$N(10,5) \Rightarrow L_i = Z_i 5 + 10$$

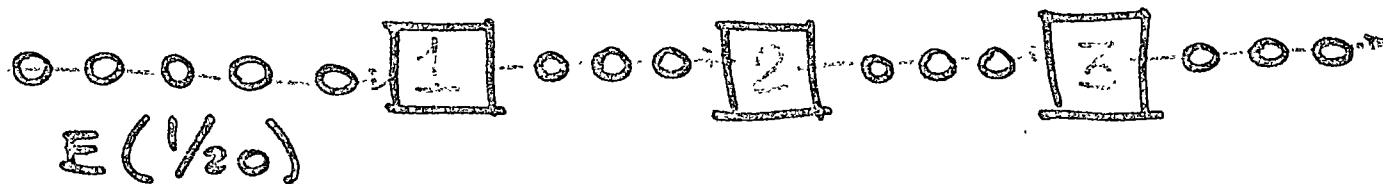
TIEMPO DE SERVICIO EN LA SEGUNDA ETAPA

$$E(1/15) \Rightarrow L_i = -\frac{1}{.43(1/15)} \lg(1-\rho_i)$$

TIEMPO DE SERVICIO EN LA TERCERA ETAPA

CTE = 15 MIN.

$$N(10,5) \quad E(1/15) \quad K=15$$



SOLUCION:

LEGADA SISTEM	ENTRA 1E	SALE 1E	ENTRA 2E	SALE 2E	ENTRA 3E	SALE 3E	TPO EN SIST.
25	25	36	36	45	45	60	35
32	36	49	49	53	60	75	43
42	49	55	55	67	75	90	48
73	73	81	81	107	107	122	49
⋮							
760	760	771	861	896	896	911	2372

$$\text{TIEMPO MEDIO EN EL SISTEMA} = 2372 / 36 = 65.9 \text{ MIN}$$

$$\text{TIEMPO MEDIO DE ESPERA} = 65.9 - 10 - 15 - 15 = 25.9 \text{ MIN}$$

EJEMPLO:

UNA INSTALACION TIENE DOS ESTACIONES DE SERVICIO LAS QUE ATIENDEN CON LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES

$$A = 0.40$$

$$B = 0.60$$

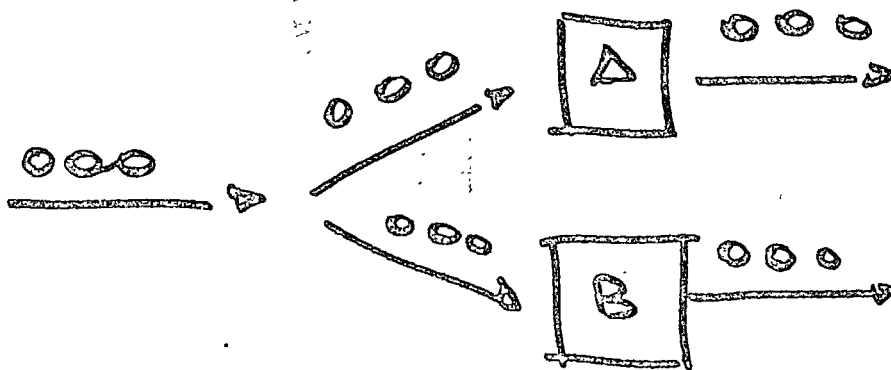
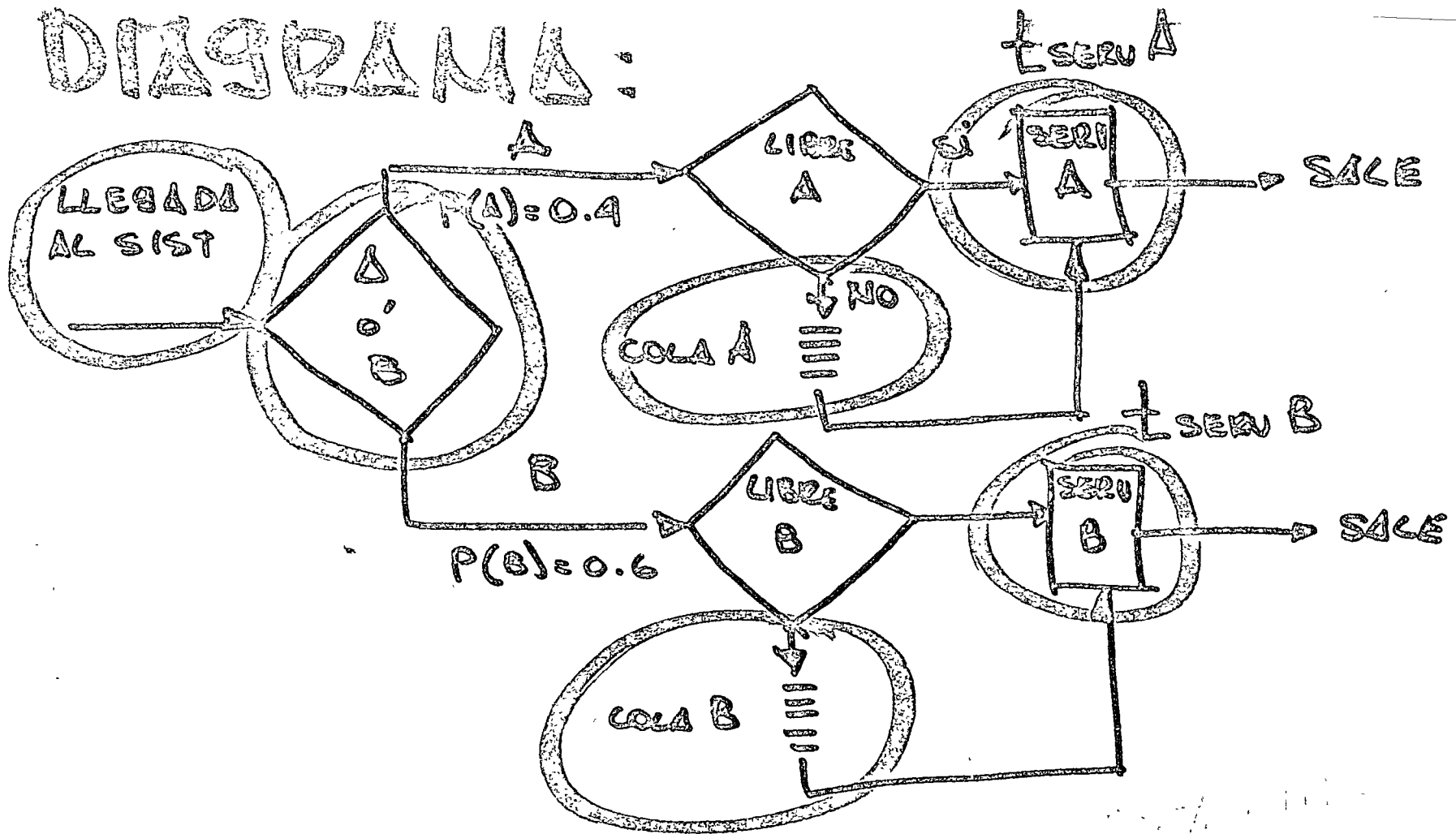
LAS LLEGADAS AL SISTEMA SON EXPONENCIALES CON $\lambda = 1/20$

EL TIEMPO DE SERVICIO ES IGUAL PARA AMBAS EXPONENCIAL CON $\lambda = 1/10$

DETERMINE EL TAMAÑO DE AMBAS COLAS (PROMEDIO)

DETERMINE EL TIEMPO MEDIO DE ESPERA

DIAGRAMA:



SOLUCION:

LLEGADA SISTEMA	T_i	A	B	TIEMPO SERV.	ENTRA A	SALE A	ESPERA A	ENTRA B	SALE B	ESPERA B	
5.40	.42		X	25				5.40	30.40	0	3
6.66	.12	X		7	6.66	13.66	0				
16.26	.62		X	10				30.40	40.40	14.14	3
17.96	.16	X		31	17.96	48.96	0				
31.96	.76		X	21				40.40	51.40	8.44	3
39.26	.52		X	12				61.40	73.40	22.14	2
43.56	.35	X		36	43.56	84.96	5.4				
55.26	.69		X	32				73.40	105.40	18.14	2
74.86	.86		X	7				105.40	112.40	30.54	1
86.26	.68		X	1				112.40	113.40	26.14	
							5.4			119.54	

TPO. MEDIO DE ESPERA A = $5.4/3$

TPO. MEDIO DE ESPERA B = $119.54/7$

COLA MEDIA A = $1/3$

COLA MEDIA B = $17/7$

INTRODUCCION
A LOS PROCESOS
MARKOVIANOS

ALGUNAS POSIBLES APLICACIONES

DE LA SIMULACION:

- SISTEMAS DE TRANSPORTE COLECTIVO
- CASETAS DE COBRO EN AUTOPISTAS
- FUNCIONAMIENTO DE AEROPUERTOS
- SISTEMAS HIDRAULICOS
- DISEÑO DE PLANTAS INDUSTRIALES
- GASOLINERAS Y ESTACIONES DE SERVICIO
- OPERACION DE ELEVADORES EN EDIFICIOS ALTOS
- ACARREO DE MATERIALES
- REDES DE RUTA CRITICA PARA SELECCION DE ESTRATEGIAS
- OPERACION DE SUCURSALES BANCARIAS

⋮

VECTOR PROBABILISTICO

$$\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

\bar{X} ES UN VECTOR PROBABILISTICO SI:

$$0 \leq X_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

Ej:

$$\bar{X} = (0.1, 0.2, 0.7)$$

ES UN V.
PROBABIL.

$$\bar{Y} = (-0.1, 0.2, 0.7)$$

NO ES UN V.
PROBABIL.

$$\bar{Z} = (1.0, 0.2, 0.7)$$

NO ES UN V.
PROBABIL.

PROCESOS ESTOCASTICOS

UN FENOMENO ALEATORIO QUE SURGE EN UN PROCESO QUE SE DESARROLLA EN EL TIEMPO DE UNA MANERA CONTROLADA POR LEYES PROBABILISTAS SE DENOMINA UN PROCESO ESTOCASTICO.

LOS PROCESOS MARKOVIANOS SON PROCESOS ESTOCASTICOS.

EL PRODUCTO DE DOS MATRICES ESTOCASTICAS, ES OTRA MATRIZ ESTOCASTICA.

DE DONDE SE INFIERE QUE CUALQUIER POTENCIA DE UNA MATRIZ ESTOCASTICA ES TAMBIEN UNA MATRIZ ESTOCASTICA.

$$\text{Ej: } A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ESTOCASTICA:

$A = [a_{ij}]$ ES UNA MATRIZ ESTOCASTICA

1. $i, j = 1, 2, \dots, m$ (CUADRADA)

2. $0 \leq a_{ij} \leq 1$ (ELEMENTOS ENTRE CERO Y UNO)

3. $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1 ; \forall j$ (FORMADA POR V. PROBABILISTICOS)

Ej: $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$ ES UNA MATRIZ ESTOCASTICA

MATRIZ ESTOCÁSTICA REGULAR

SE DICE QUE LA MATRIZ P ES ESTOCÁSTICA REGULAR, SI EXISTE ALGUNA POTENCIA DE P PARA LA QUE TODOS SUS ELEMENTOS SEAN NO NULOS.

Ej:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; P_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

P_1 ES M.E. REGULAR

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; P_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$P_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7/8 & 1/8 \end{bmatrix}; P_2^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

P_2 NO ES M.E. REGULAR

PUNTO FIJO DE UNA MATRIZ

SEA A UNA MATRIZ DE ORDEN n

SEA U UN VECTOR DE n COMPONENTES

PODEMOS FORMAR EL PRODUCTO:

$$UA$$

SI EL RESULTADO ES $UA = U$ Y $U \neq 0$
SE DICE QUE U ES PUNTO FIJO DE A .

SE CUMPLE QUE:

$$(kU)A = (kU) \quad \text{si } k \neq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$uA = (2, -1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (2, -1)$$

2. LA SUCESION P, P^1, P^2, \dots SE APROXIMA
 A LA MATRIZ T CUYOS RENGLONES SON
 EL PUNTO FIJO \bar{L} :

Ej

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.37 & 0.63 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.31 & 0.69 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.69 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$$

⋮

$$\begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 \end{bmatrix}$$

LQD

SEA P UNA MATRIZ ESTOCASTICA REGULAR :

1. P TIENE UN PUNTO FIJO UNICO \bar{t}

Ej $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$\bar{t}P = \bar{t}$$

$$\bar{t} = (x, 1-x) ; x + (1-x) = 1$$

$$(x, 1-x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = (x, 1-x)$$

$$x(0) + (1-x)(1/2) = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{t} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

COMPROBACION :

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

LQD

CADENAS DE MARKOV:

CONSIDERE UNA SECUENCIA DE PRUEBAS CUYOS RESULTADOS SATISFACEN LO SIGUIENTE:

1. CADA RESULTADO PERTENECE AL CONJUNTO FINITO

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

LLAMADO ESPACIO DE ESTADOS DEL SISTEMA.

2. SI EN LA n -ESIMA PRUEBA EL RESULTADO ES a_i , SE DICE QUE EL SISTEMA ESTA EN EL ESTADO a_i EN EL n -ESIMO PASO.

3. EL RESULTADO DE LA PRUEBA n DEPENDE SOLO DE LA ANTERIOR ($n-1$) Y NO DE NINGUNA OTRA.

3. si p es un vector de probabilidad
la sucesion de vectores:

pP, pP^2, pP^3, \dots se aproximan al

vector fijo \bar{E}

E

$$\text{SEA } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ y } p = [0, 1]$$

$$pP = [0, 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [0.5, 0.5]$$

$$pP^2 = [0, 1] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} = [0.25, 0.75]$$

$$pP^3 = [0, 1] \begin{bmatrix} 0.31 & 0.69 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} = [0.34, 0.66]$$

$$\vdots$$
$$= [0.33, 0.67]$$

MATRIZ DE TRANSICION DEL SISTEMA

A CADA POSIBLE ESTADO A_i CORRESPONDE
UN RENGLON $P_{ij} : \{ P_{i1}, P_{i2} \dots P_{im} \}$ LOS
QUE T_i FORMAN LA MATRIZ DE TRANSICION
DEL SISTEMA $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nm} \end{bmatrix}$

P ES UNA MATRIZ ESTOCASTICA

4. PARA CADA PAREJA DE ESTADOS (a_i, a_j)
SE ESTABLECE LA PROBABILIDAD DE QUE
 a_j OCURRA INMEDIATAMENTE DESPUES DE

$$a_i : P_{ij} = P[a_j, n / a_i, n-1]$$

UN PROCESO QUE CUMPLE LO ANTERIOR ES
UN PROCESO ESTOCASTICO DE MARKOV O'
UNA CADENA DE MARKOV.

EJEMPLO

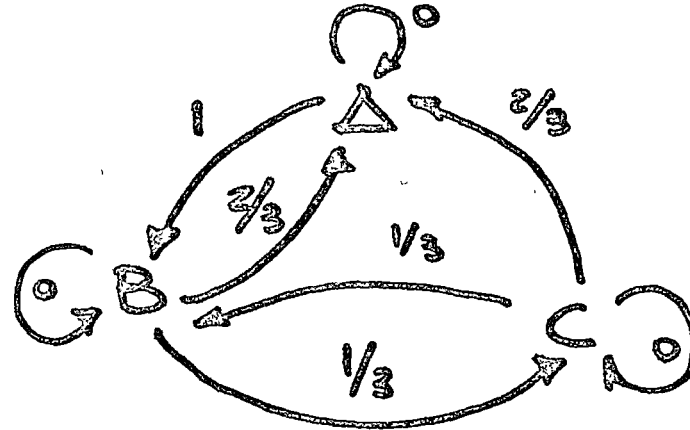
SE HA OBSERVADO EN UN PERIODO LARGO DE TIEMPO QUE EL RESULTADO DEL CONCURSO DE 3 CONTRATISTAS ES COMO SIGUE:

- SI A GANA EL SIGUIENTE GANA B.
- SI B GANA EL SIGUIENTE GANA A CON $P(2/3)$
O' C CON $P(1/3)$.
- SI C GANA EL SIGUIENTE GANA A CON $P(2/3)$
O' B CON $P(1/3)$.

A LA LARGA CUANTOS CONCURSOS GANARAN RESPECTIVAMENTE LOS CONTRATISTAS?

PASO 1

DIBUJAR EL DIAGRAMA DE TRANSICION DEL SISTEMA :



PASO 2

ESTABLECER LA MATRIZ DE TRANSICION DEL SISTEMA :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

SEA P LA MATRIZ DE TRANSICION DEL SISTEMA
 EN EL TRANCURSO DEL TIEMPO LA PROBABILIDAD
 DE QUE CUALQUIER ESTADO A_j SE PRESENTE ES
 APROX. IGUAL A LA COMPONENTE \bar{L}_j DEL PUNTO
 FIJO \bar{L} .

\bar{L}_j CALCULEMOS EL VECTOR \bar{L} DE P

CONTINUA

$$(x, y, z) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = (x, y, z)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z &= x \\ x + \frac{1}{3}y &= y \end{aligned} \right\}$$

$$\text{HACIENDO } z=1 \\ y=3 \\ x=8/3$$

RESULTADO:

$$\frac{1}{3}y = z$$

$$\Rightarrow U = \left(\frac{8}{3}, 3, 1 \right); \text{ HAGAMOS:}$$

$$K = \frac{8}{3} + \frac{9}{3} + \frac{3}{3} = \frac{20}{3}$$

1	GANA	2/5	DE LOS CONC.
3	"	9/20	"
2	"	3/20	"

$$\bar{L} = \frac{3}{20} \left(\frac{8}{3}, 3, 1 \right)$$

$$\bar{L} = \left[\frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20} \right]$$

EL VECTOR $\bar{p}^{(0)}$ REPRESENTA LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD INICIAL :

Ej EN NUESTRO PROBLEMA $\bar{p}^{(0)} = [0, 0, 1]$
SIGNIFICA QUE EL CONTRATISTA C GANO EL CONCURSO.

EL VECTOR $\bar{p}^{(n)}$ REPRESENTA LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD EN EL PASO n :

$$\bar{p}^{(n)} = [p_1^{(n)}, p_2^{(n)} \dots p_n^{(n)}]$$

SE DESEA CONOCER LA PROBABILIDAD DE QUE EL SISTEMA CAMBIE DEL ESTADO A_i AL A_j EN n PASOS.

SI P ES LA MATRIZ DE TRANSICION DEL SISTEMA Y $\bar{p} = (p_i)$ EL VECTOR DE PROBABILIDAD DEL SISTEMA PARA UN TIEMPO ARBITRARIO, ENTONCES $\bar{p}P$ ES LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD UN PASO ADELANTE :

$$p^{(1)} = p^{(0)} P ; p^{(2)} = p^{(1)} P ; \dots ; p^{(3)} = p^{(2)} P$$

Ej

SI EL CONTRATISTA C GANO EL CONCURSO
CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE GANE DE NUEVO
DOS EVENTOS DESPUES?

$$\bar{p}^{(0)} = [0, 0, 1] \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}^{(1)} = [0, 0, 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = [2/3, 1/3, 0]$$

$$\bar{p}^{(2)} = [2/3, 1/3, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = [2/9, 2/3, 1/9]$$

$$P[\text{C GANA DOS EVENTOS DESPUES}] = 1/9$$

INTRODUCCION A LOS FENOMENOS ALEATORIOS

Definiciones básicas

Experimento.- En su forma más general, es la observación, con fines de análisis de un fenómeno aleatorio.

En el mundo físico se presentan dos clases de fenómenos, deterministas y aleatorios. Los fenómenos deterministas son aquellos que tienen un comportamiento que se puede describir con una regla, una ley, una fórmula matemática, etc. en estos se puede predecir y conocer su comportamiento a futuro con seguridad. Los fenómenos aleatorios son aquellos que se rigen o están condicionados por el azar, su comportamiento a futuro solo puede ser planteada en términos de la ley de los grandes números, la teoría de probabilidades.

Los experimentos aleatorios son, naturalmente, aquellos en que la observación se realiza en un fenómeno aleatorio. Los experimentos deterministas aquellos en que la observación se realiza en un fenómeno determinista. En este trabajo se introduce el estudio de los fenómenos aleatorios.

Todo experimento tiene resultados que pueden ser representados con una o más variables. Si los fenómenos analizados son aleatorios la o las variables que lo representen son variables aleatorias.

El conjunto de todos los valores que puede tomar una variable aleatoria es llamado espacio de eventos, donde, cada uno de los valores particulares es un evento simple. Un grupo de eventos simples que tengan un atri-

buto común es un evento compuesto. El evento imposible es aquel que identifica valores que están fuera del campo de la variable aleatoria.

Verificación de un evento. Si al realizar un experimento aleatorio se obtiene como resultado un evento simple a y este pertenece a un evento compuesto A , se dice que el evento compuesto A se verifica. Si resulta un evento simple cualquiera que no pertenece a A se dice que A no se verifica.

Ejemplo

Sea el experimento aleatorio de lanzar dos dados.

Sea la variable aleatoria X , definida como la suma de los números que caen hacia arriba en ambos dados.

I) El espacio de eventos es el conjunto de números naturales del 2 al 12, esto es:

$$S = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

II) Eventos simples son cada uno de los valores del espacio de eventos, por ejemplo

$$a_1 = \{2\}$$

$$a_5 = \{6\}$$

$$a_9 = \{10\}$$

$$a_2 = \{3\}$$

$$a_6 = \{7\}$$

$$a_{10} = \{11\}$$

$$a_3 = \{4\}$$

$$a_7 = \{8\}$$

$$a_{11} = \{12\}$$

$$a_4 = \{5\}$$

$$a_8 = \{9\}$$

III) Eventos compuestos son grupos de valores que tienen un atributo común.

Por ejemplo en un juego al primer lanzamiento son números ganadores 7, 11 y son números perdedores 2 y 12. Esto es:

$$\text{Evento } \{ \text{ganar el juego al primer lanzamiento} \} = A_1 = \{ 7, 11 \}$$

$$\text{Evento } \{ \text{perder el juego al primer lanzamiento} \} = A_2 = \{ 2, 12 \}$$

El evento A_1 está formado por dos eventos simples, el a_7 y el a_{11} .

En la misma forma, el evento A_2 está formado por dos eventos simples diferentes, el a_2 y el a_{12} .

IV) Evento imposible son aquellos que identifican valores que están fuera del campo de la variable. Por ejemplo los eventos compuestos.

$$A_3 = \{ 15, 0, 1 \}$$

$$A_4 = \{ 20, 21, 22 \}$$

y los eventos simples

$$a = \{ 17 \}$$

$$b = \{ 18 \}$$

$$c = \{ 19 \}$$

son eventos imposibles

V) Verificación de un evento. Si el evento es $A_1 = \{ \text{ganar el juego al primer lanzamiento} \}$ se realiza el experimento - lanzamiento de los dos dados - y cae un 7. Diremos que el evento A_1 se ha verificado.

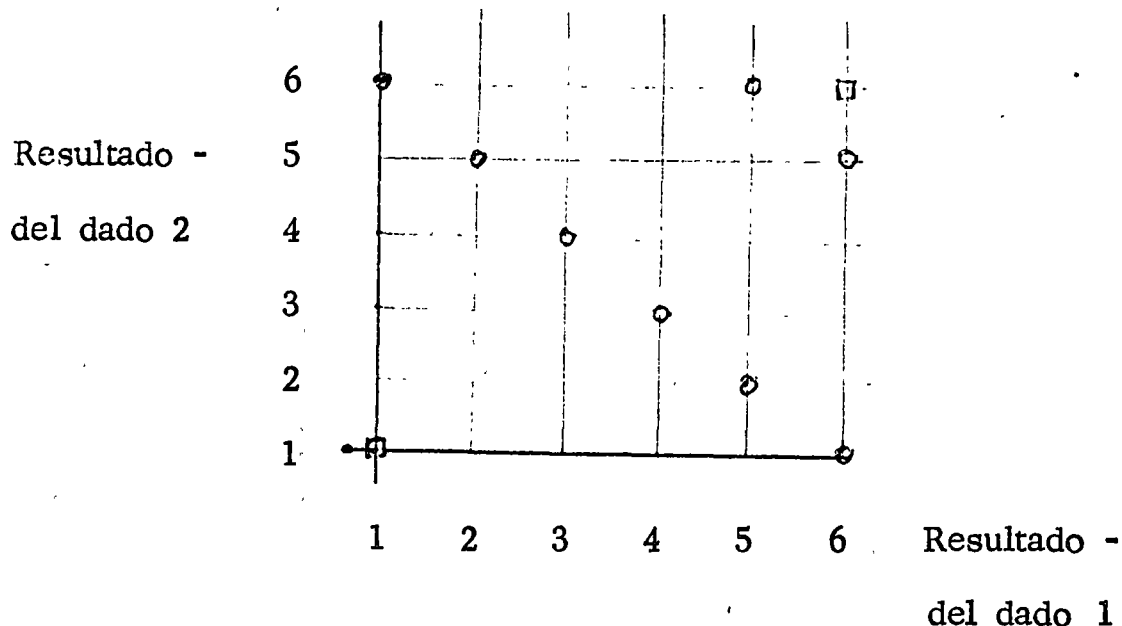
DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

Definición Clásica. Si el evento A se verifica de h formas diferentes de n posibles, todas igualmente factibles, entonces la probabilidad de que el evento A ocurra queda definida por el cociente (h/n). Es decir, si el evento compuesto A está formado por h eventos simples y pertenece a un espacio de eventos formado por n eventos simples, todos igualmente factibles, la probabilidad de ocurrencia del evento A, en un experimento, es la verificación del evento A y este se verifica en h formas de n, finalmente:

$$P(A) = \frac{h}{n}$$

Por ejemplo. En el experimento de lanzar dos dados.

- i) El espacio de eventos son todos los resultados posibles del experimento. Lo identifica la gráfica siguiente.



Por definición del experimento se sabe que todos los eventos - simples del espacio son igualmente factibles.

ii) El evento Ganar el juego en el primer lanzamiento = A_1

$A_1 = \{7, 11\}$ está formado por los eventos simples.

$A_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (6, 5), (5, 6)\}$

$$N(A_1) = 8$$

$$N(S) = 36$$

entonces, la probabilidad de ganar en el primer lanzamiento.

$$P(A_1) = \frac{8}{36}$$

iii) En la misma forma. La probabilidad de perder en el primer lanzamiento.

$A_2 = \{2, 12\}$ formado por los eventos simples

$A_2 = \{(1, 1), (6, 6)\}$

$$N(A_2) = 2$$

$$N(S) = 36$$

$$P(A_2) = \frac{2}{36}$$

Definición empírica. Si S contiene todos los resultados posibles - del experimento E , A es un evento contenido en S y se realiza el experimento E n veces en h de las cuales se verifica A , entonces

la probabilidad del evento A queda definida por el límite cuando n tiende a infinito del cociente (h/n) esto es:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h}{n} \right)$$

En términos prácticos la definición es ambigua pues ¿que tan -- grande ha de ser n para que considere infinito? obviamente el = criterio es variable y queda sujeto al nivel de exactitud que se - dese en la estimación de la probabilidad.

Por ejemplo. En el experimento de lanzar una moneda equilibra da se observaron en:

10	lanzamientos,	4 águilas y	6 soles
100	lanzamientos,	44 águilas y	66 soles
1000	lanzamientos,	472 águilas y	528 soles
10000	lanzamientos,	4873 águilas y	5127 soles

Se piensa, de acuerdo a la definición empírica, que el número - obtenido de águilas y soles tenderá a igualarse cuando el núme- ro de experimentos sea muy grande.

Definición axiomática. Si A y B son dos eventos contenidos en el espacio S, entonces.

Axioma 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

7

Axioma 2 $P(\emptyset) = 0$, $P(S) = 1$

Axioma 3 i) Si A y B son mutuamente exclusivos
es decir $A \cdot B = \emptyset$

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

ii) Si A y B no son mutuamente exclusivos
es decir $A \cdot B \neq \emptyset$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Finalmente, la teoría de probabilidades se define, en forma convencional, como el estudio de los métodos que son comunes en el tratamiento de los fenómenos aleatorios.

Ejemplo 1. Una fábrica dispone de tres máquinas que realizan toda la producción de la fábrica. La máquina 1 realiza el 50% de la producción, la máquina 2 el 30 y la máquina 3 el 20. La producción se almacena sin identificación.

Si se encuentran almacenadas 100 unidades de producción ¿cual es la probabilidad que una unidad tomada al azar haya sido hecha por la máquina 1? ¿por la máquina 2? ¿por la máquina 3?

$$p [\text{máquina 1}] = 0.5$$

$$p [\text{máquina 2}] = 0.3$$

$$p [\text{máquina 3}] = 0.2$$

o bien:

La máquina 1 produjo $\frac{50}{100} = 50$ unidades.

La máquina 2 produjo $\frac{30}{100} = 30$ unidades

La máquina 3 produjo $\frac{20}{100} = 20$ unidades.

Producción Total 100 Unidades

$$p [\text{máquina 1}] = \frac{50}{100}$$

$$p [\text{máquina 2}] = \frac{30}{100}$$

$$p [\text{máquina 3}] = \frac{20}{100}$$

en general:

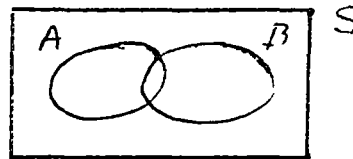
$$p [\text{máquina } i] = \frac{\text{Producción máquina } i}{\text{Producción Total}}$$

Probabilidad condicional.

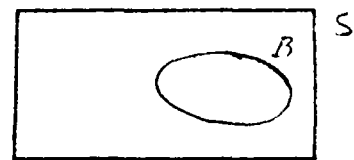
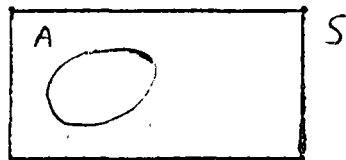
Definición Si A y B son dos eventos compuestos, con eventos simples en común, la ocurrencia de A afecta la probabilidad de ocurrencia de B y viceversa, se dice que A y B son eventos dependientes.

Un enfoque simplificado del problema es plantearlo como una restricción del universo al que pertenece A o B, según el que ocurra primero, en la siguiente forma.

Estado original



Separación de los eventos



$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

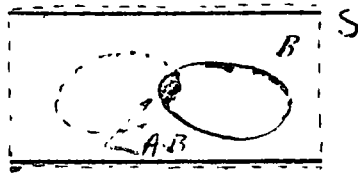
$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)}$$

Se realiza un experimento y

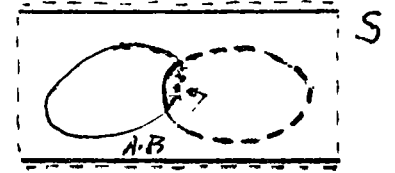
B ocurre

A ocurre

Estado modificado



$$P \left\{ \begin{array}{l} A \text{ dado que } B \\ \text{ha ocurrido} \end{array} \right\} = \frac{N(A \cdot B)}{N(B)}$$



$$P \left\{ \begin{array}{l} B \text{ dado que } \\ A \text{ ha ocurrido} \end{array} \right\} = \frac{N(B \cdot A)}{N(A)}$$

En notación abreviada

$$P [A/B] = \frac{N(A \cdot B)}{N(B)}$$

$$P [B/A] = \frac{N(B \cdot A)}{N(A)}$$

dividiendo numerador y denominador entre $N(S)$

$$P [A/B] = \frac{\frac{N(A \cdot B)}{N(S)}}{\frac{N(B)}{N(S)}}$$

$$P [B/A] = \frac{\frac{N(B \cdot A)}{N(S)}}{\frac{N(A)}{N(S)}}$$

y
$$P(A \cdot B) = \frac{N(A \cdot B)}{N(S)}$$

$$P(B \cdot A) = \frac{N(B \cdot A)}{N(S)}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$$P [A/B] = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

$$P [B/A] = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)}$$

En otras palabras, para el primer caso, la ocurrencia de B proporciona información adicional respecto A (debido a los eventos simples que tienen en común) con la cual se le puede reevaluar la probabilidad asignada. Lo mismo se puede decir en el segundo caso en que ocurre A primero.

Por ejemplo. En la fábrica del problema anterior se saca una muestra de 100 unidades en los que se encuentra al probarlos que hay 7 defectuosas. Entonces, la probabilidad que al sacar al azar una unidad de entre las 100 resulte una defectuosa es:

$$P [D] = \frac{7}{100} \quad (1)$$

Si se realiza un segundo análisis y se detecta que 2 fueron hechas por la máquina 1, 3 por la máquina 2 y 2 por la máquina 3 se tiene:

$$P [M_1] = \frac{50}{100} \quad P [M_2] = \frac{30}{100} \quad P [M_3] = \frac{20}{100}$$

$$\text{además: } P [D.M_1] = \frac{2}{100} \quad P [D.M_2] = \frac{3}{100} \quad P [D.M_3] = \frac{2}{100}$$

Finalmente:

$$P [D/M_1] = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{2}{50}$$

$$P [D/M_2] = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{3}{30}$$

$$P [D/M_3] = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{2}{20}$$

(2)

El conjunto de valores (2) es la información afinada del valor (1) no la modifica, pues para todo el espacio de eventos (1) sigue siendo válida, ^{solo} la discrimi-
na y separa en partes independientes.

INDEPENDENCIA DE EVENTOS.

Definición.- Dos eventos A y B son independientes entre si cuando la probabilidad de ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

En términos de probabilidad condicional; SI

$$P [A/B] = P [A] \quad \text{y} \quad P [B/A] = P [B]$$

Entonces: A y B son independientes.

Si A y B son independientes:

$$P [A/B] = \frac{P [A \cdot B]}{P [B]} \quad \text{y} \quad P [B/A] = \frac{P [B \cdot A]}{P [A]}$$

Pero:

$$P [A] = \frac{P [A \cdot B]}{P [B]} \quad \text{y} \quad P [B] = \frac{P [B \cdot A]}{P [A]}$$

De donde:

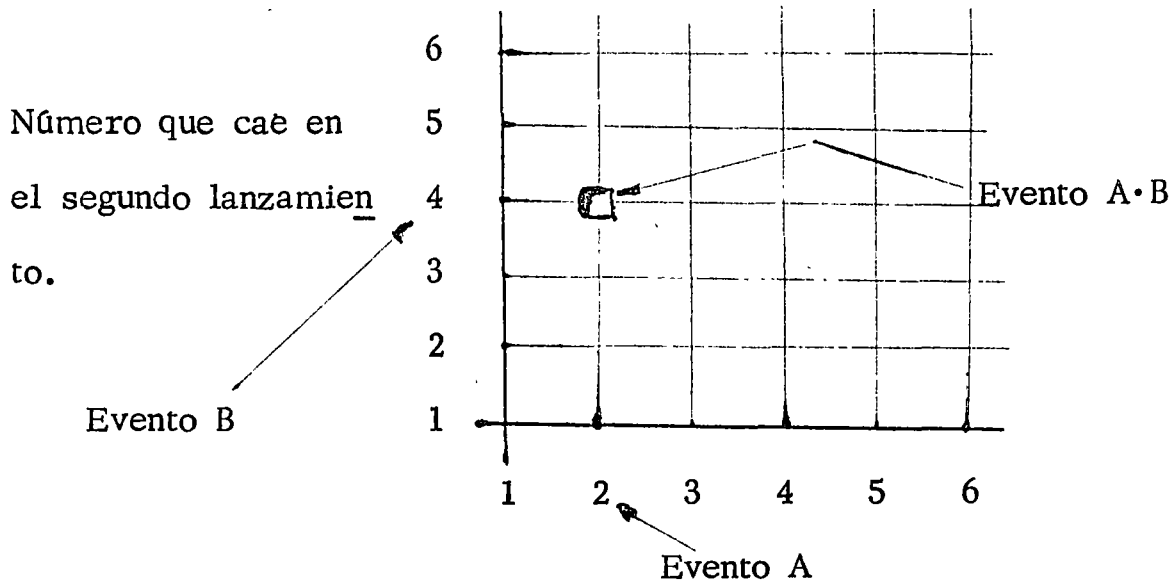
$$P [A \cdot B] = P [A] P [B] \quad \text{y} \quad P [B \cdot A] = P [B] P [A]$$

Además:

$$P [A \cdot B] = P [B \cdot A]$$

Por ejemplo. Se lanza un dado dos veces consecutivas.

¿cuál es la probabilidad que caiga hacia arriba un dos en el primer lanzamiento y un cuatro en el segundo?



$$P[A] = \frac{1}{6}$$

$$P[B] = \frac{1}{6}$$

$$P[A \cdot B] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Ejemplo. Por una calle de un solo sentido de circulación, pasan diariamente un promedio de 1 300 vehículos de los cuales 800 son autos y el resto son camiones. ¿Cuál es la probabilidad que los próximos dos vehículos que pasen sean un auto y un camión?

$$A_1 = \{ \text{Pasa un auto en primer lugar} \}$$

$$A_2 = \{ \text{Pasa un auto en segundo lugar} \}$$

$$B_1 = \{ \text{Pasa un camión en primer lugar} \}$$

$$B_2 = \{ \text{Pasa un camión en segundo lugar} \}$$

Eventos posibles:

A_1	A_2
B_1	B_2
A_1	B_2
B_1	B_2

Satisface la condición los eventos $B_1 A_2$ y $A_1 B_2$

Si los eventos son independientes:

$$P [A_1] = P [A_2] = \frac{800}{1300} = \frac{8}{13}$$

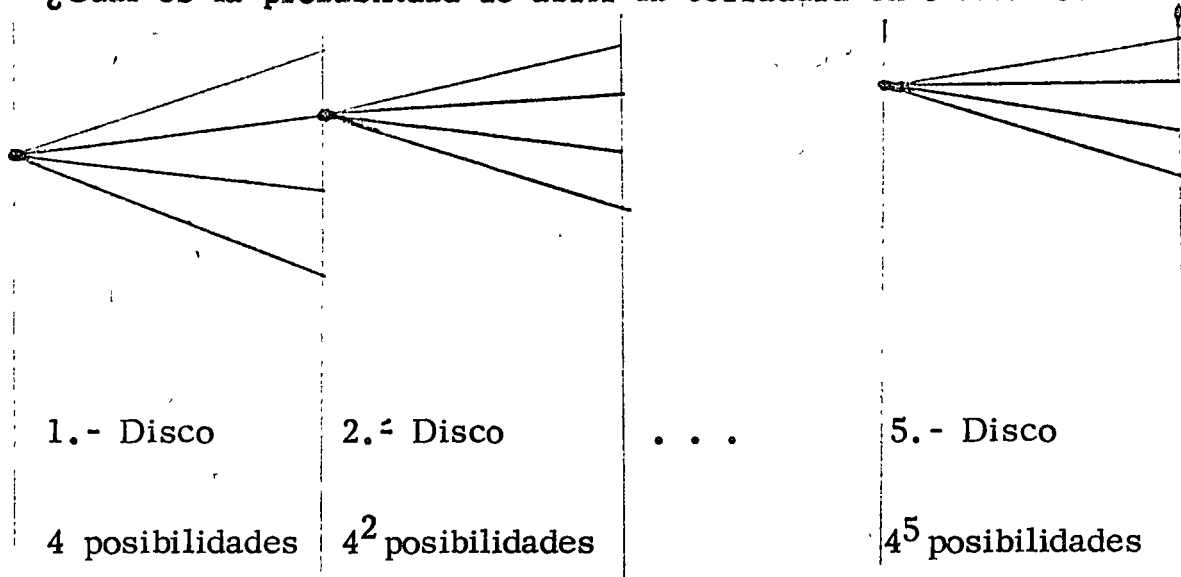
$$P [B_1] = P [B_2] = \frac{500}{1300} = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} P [B_1 A_2 + A_1 B_2] &= P [B_1] P [A_2] + P [A_1] P [B_2] \\ &= \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{13} + \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{80}{169} \end{aligned}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{Los próximos dos vehículos que} \\ \text{pasan son un auto y un camión} \end{array} \right\} = \frac{80}{169}$$

Ejemplo. Una cerradura está formada por 5 discos cada uno con 4 letras. Si se desconoce la combinación.

¿Cuál es la probabilidad de abrir la cerradura en 5 intentos?



$$N(S) = 4^5 = 1024$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{Abrir la cerradura en} \\ \text{5 intentos independien} \\ \text{tes} \end{array} \right\} = \frac{5}{1024}$$

TEOREMA DE PROBABILIDADES TOTALES.

Si E_i ($i=1, 2, \dots, n$) son eventos mutuamente exclusivos entre sí:

$$\prod_{i=1}^n E_i = \emptyset$$

Tal que la suma de ellos llena el espacio de eventos:

$$\sum_{i=1}^n E_i = S$$

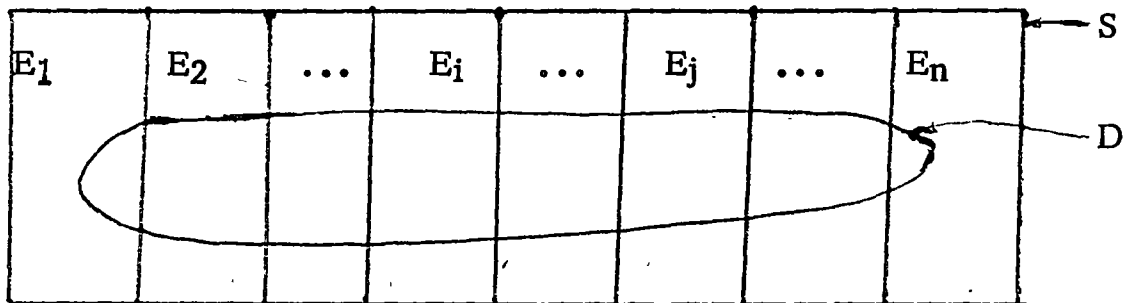
Y D es un evento no mutuamente exclusivo con E_i para algunas i , o sea:

$$\sum_{i=1}^n E_i \cdot D \neq 0$$

Entonces:

$$P[D] = \sum_{i=1}^n P[D | E_i] P[E_i]$$

Demostración



$$P[D / E_i] = \frac{P[D \cdot E_i]}{P[E_i]}$$

$$P[D \cdot E_i] = P[D / E_i] \cdot P[E_i]$$

$$\sum_{i=1}^n P[D \cdot E_i] = \sum_{i=1}^n P[D / E_i] \cdot P[E_i]$$

$$\text{Pero: } P [D] = \sum_{i=1}^n P [D \cdot E_i]$$

$$\text{De donde: } P [D] = \sum_{i=1}^n P [D/E_i] P [E_i]$$

Esta fórmula es de utilidad cuando se conocen las características de las partes que integran el universo o espacio de eventos y se desconocen las de este.

Por ejemplo. Un constructor compró materiales de tres fuentes distintas. La fuente 1 afirma que sus productos no llevan más de un 3% de unidades defectuosas, la fuente 2 no más de un 4% y la fuente 3 un 5%.

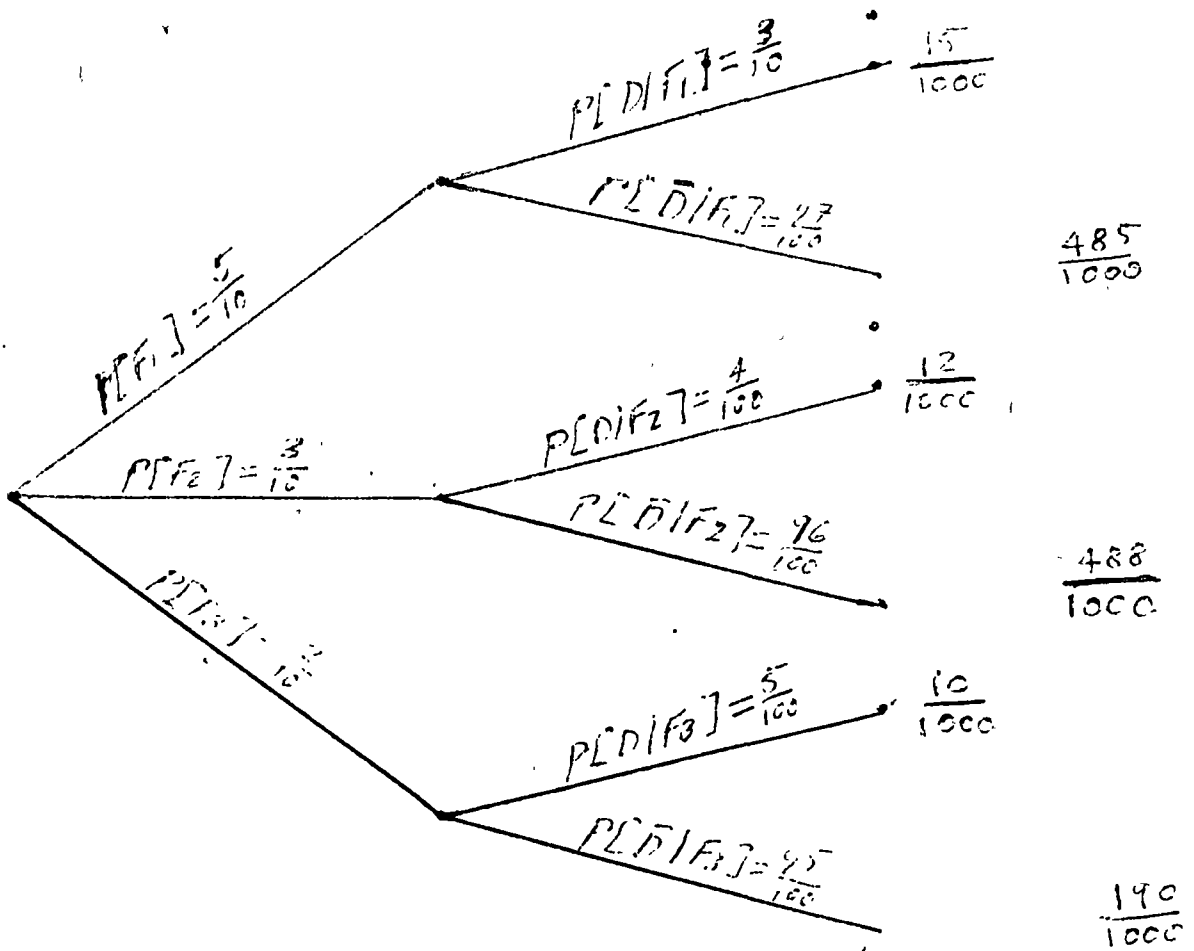
Si el constructor compró el 50% del material en la fuente 1, el 30% en la fuente 2 y el 20% en la fuente 3 ¿cuál es la probabilidad de que al sacar al azar una unidad del material comprado resulte defectuoso?

$$\begin{aligned} P [F_1] &= 0.5 & P [F_2] &= 0.3 & P [F_3] &= 0.2 \\ P [D/F_1] &= 0.03 & P [D/F_2] &= 0.04 & P [D/F_3] &= 0.05 \end{aligned}$$

$$P [D] = 0.03 \times 0.5 + 0.04 \times 0.3 + 0.05 \times 0.2$$

$$P [D] = 0.037$$

Solución x graficando el proceso:



$$P[D] = \sum_{i=1}^3 P[D|F_i]P[F_i] = \frac{37}{1000}$$

$$P[\bar{D}] = \sum_{i=1}^3 P[\bar{D}|F_i]P[F_i] = \frac{963}{1000}$$

Ejemplo. Comprobar los resultados obtenidos en el problema de la fábrica.

Resultados anteriores:

$$P[M_1] = \frac{5}{10} \quad P[M_2] = \frac{3}{10} \quad P[M_3] = \frac{2}{10}$$

$$P[D/M_1] = \frac{2}{50} \quad P[D/M_2] = \frac{3}{30} \quad P[D/M_3] = \frac{2}{20}$$

$$P[D] = \frac{7}{100}$$

Comprobación

$$P[M_1] = \frac{5}{10} \begin{cases} P[D/M_1] = \frac{2}{50} & \frac{10}{500} \\ P[D/M_1] = \frac{48}{50} & \frac{240}{500} \end{cases}$$

$$P[M_2] = \frac{3}{10} \begin{cases} P[D/M_2] = \frac{3}{30} & \frac{9}{300} \\ P[D/M_2] = \frac{27}{30} & \frac{81}{300} \end{cases}$$

$$P[M_3] = \frac{2}{10} \begin{cases} P[D/M_3] = \frac{2}{20} & \frac{4}{200} \\ P[D/M_3] = \frac{18}{20} & \frac{36}{200} \end{cases}$$

$$\frac{2\ 100}{30\ 000}$$

$$\frac{27\ 900}{30\ 000}$$

$$P [D] = \frac{2\ 100}{30\ 000} = \frac{7}{100}$$

$$P [\bar{D}] = \frac{93}{100}$$

TEOREMA DE BAYES.

Bajo la hipótesis consideradas en el desarrollo de la expresión de la probabilidad total, se tiene que:

$$(E_j \cdot D) = (D \cdot E_j)$$

$$P [E_j / D] = \frac{P [E_j \cdot D]}{P [D]} \quad \text{lue go}$$

$$P [E_j / D] = \frac{P [D \cdot E_j]}{P [D]} \quad \text{pero ;}$$

$$P [D \cdot E_j] = P [D/E_j] P [E_j]$$

$$P [E_j/D] = P [D/E_j] \cdot P [E_j]$$

$$P [D] = \sum_{i=1}^n P [D/E_j] P [E_j]$$

Finalmente se obtiene:

$$P[E_j/D] = \frac{P[D/E_j] P[E_j]}{\sum_{i=1}^n P[D/E_i] P[E_i]}$$

Fórmula que constituye la expresión básica de la teoría de Bayes. Esta es una herramienta fundamental en el análisis decisional y puede usarse con carácter predictivo.

Ejemplo. En el problema de la fábrica, calcular la probabilidad de que un artículo que se tomó de almacén al azar y resultó defectuoso, haya sido por la máquina 1. Por la máquina 2. Por la máquina 3.

$$\text{Con la fórmula de Bayes: } P[E_j/D] = \frac{P[D/E_j] P[E_j]}{\sum_{i=1}^n P[D/E_i] P[E_i]}$$

Se sabe que:

$$P[D] = \sum_{i=1}^n P[D/M_i] P[M_i] = \frac{7}{100}$$

$$P[M_1] = \frac{5}{10}$$

$$P[D/M_1] = \frac{5}{50}$$

$$P[M_2] = \frac{3}{10}$$

$$P[D/M_2] = \frac{3}{30}$$

$$P[M_3] = \frac{2}{10}$$

$$P[D/M_3] = \frac{2}{20}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{Un artículo que se sacó y} \\ \text{resultó defectuoso haya si} \\ \text{do hecho por la máquina.} \end{array} \right\} = P[M_j / D]$$

i) Máquina 1

$$P[M_1 / D] = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{50}}{\frac{7}{100}} = \frac{2}{7}$$

ii) Máquina 2

$$P[M_2 / D] = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{30}}{\frac{7}{100}} = \frac{3}{7}$$

iii) Máquina 3

$$P[M_3/D] = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{20}}{\frac{7}{100}} = \frac{2}{7}$$

Ejemplo. En el problema del constructor al analizarse una unidad que se tomó al azar se comprobó que la unidad era defectuosa. -
Calcular la probabilidad de que esa unidad provenga de la fuente 1.
De la Fuente 2. De la fuente 3.

Con la fórmula de Bayes:
$$P[E_j/D] = \frac{P[D/E_j] P[E_j]}{\sum_{i=1}^3 P[D/E_i] P[E_i]}$$

Se sabe que:

$$P[D] = \sum_{i=1}^3 P[D/F_i] P[F_i] = \frac{37}{1000} = 0.037$$

$$P[F_1] = 0.5$$

$$P[D/F_1] = 0.03$$

$$P[F_2] = 0.3$$

$$P[D/F_2] = 0.04$$

$$P[F_3] = 0.2$$

$$P[D/F_3] = 0.05$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{Una unidad que se sacó} \\ \text{al azar y resultó defectuosa} \\ \text{proviene de la fuente } i \end{array} \right\} = P[F_i/D]$$

i) Fuente 1

$$P[F_1/D] = \frac{0.5 \times 0.03}{0.037} = \frac{15}{100} = 0.405$$

ii) Fuente 2

$$P [F_2 / D] = \frac{0.3 \times 0.04}{0.037} = \frac{12}{37} = 0.325$$

iii) Fuente 3

$$P [F_3 / D] = \frac{0.2 \times 0.05}{0.037} = \frac{10}{37} = 0.270$$

LA FUNCION DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Un experimento de Bernouli es aquel que tiene solo dos resultados posibles, por ejemplo éxito o falla, defectuoso o no defectuoso, cero o uno, etc. Por consecuencia, los eventos de Bernouli son los dos resultados posibles de un experimento de Bernouli.

La función de probabilidad binomial queda expresada por:

$$P(n;k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Esta fórmula resuelve el problema del cálculo de la probabilidad de que en n experimentos de Bernouli se presenten exactamente k éxitos de un orden cualquiera.

Los elementos que intervienen son:

n = número de experimentos independientes de Bernouli

k = número de éxitos en los n experimentos

p = probabilidad de éxito en un experimento.

La demostración de la fórmula se realiza con dos planteamientos que en seguida se presentan.

Planteamiento 1. Se realizan n experimentos independientes de Bernouli, que tienen por resultado éxito o falla, se desea calcular la probabilidad de que resulten exactamente k éxitos y $(n-k)$ fallas en un orden prescrito.

Sea:

p la probabilidad de éxito en un solo experimento, - -
(1-p) la probabilidad de falla en un solo experimento.

En notación abreviada.

$$\begin{aligned} \text{Exito} &= E & P(E) &= p \\ \text{Falla} &= F & P(F) &= 1 - p \end{aligned}$$

$$A = \left\{ k \text{ éxitos en } n \text{ experimentos, en un orden prescrito} \right\}$$

Por ejemplo:

$$A = \left\{ E, E, F, E, F, E, \dots, F, E, F, F, E \right\}$$

$$N(A) = n$$

El análisis de la secuencia de los resultados del evento compuesto A es:

E	E	F	E	F	E	...	F	E	F	F	E
1	2		3		4			k-1			k
1	2	3	4	5	6		(n-4)	(n-3)	(n-2)	(n-1)	n
p	p	(1-p)	p	(1-p)	p		(1-p)	p	(1-p)	(1-p)	p

P Aparece k veces
 (1-p) Aparece (n-k) veces

Planteamiento 2. Se realizan n experimentos independientes de Bernouli, que tienen por resultado éxito o falla, se desea calcular la probabilidad de que resulten exactamente k éxitos y $(n-k)$ fallas de un orden cualquiera.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Número de formas posibles} \\ \text{en que se presentan } k \text{ --} \\ \text{éxitos de } n \text{ intentos.} \end{array} \right\} = C_k^n$$

Donde todas son formas diferentes (exclusivas) y de igual probabilidad:

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

De donde:

$$P \left\{ k \text{ éxitos en } n \text{ experimentos, en un orden cualquiera} \right\} = P(n, k)$$

es:

$$P(n, k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

Ejemplo: En un lote de 10 artículos ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 4 defectuosos, si la probabilidad de que sea defectuoso cada uno de ellos independientemente es de 0.25?

- i) El análisis de cada artículo da como resultados posibles defectuosos o no defectuosos. Luego el análisis es un experimento de Bernouli.

ii) No importa el orden en que se presenten los artículos defectuosos. Luego es aplicable la función de probabilidad binomial.

iii) Parámetros: $n = 10$
 $k = 3$
 $p = 0.25$

$$P(10, 3) = C_3^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$= \frac{10!}{3! (10-3)!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$P(10, 3) = 0.2502441$$

7) DISTRIBUCIÓN BINOMIAL 29

EXPERIMENTO DE BERNOULLI.— ES AQUEL QUE TIENE SOLAMENTE DOS RESULTADOS POSIBLES. ÉXITO-FALLA, DEFECTUOSO-NO DEFECTUOSO, 0-1, ETC.

EVENTOS DE BERNOULLI.— SON LOS DOS RESULTADOS POSIBLES DE UN EXPERIMENTO DE BERNOULLI.

PLANTEAMIENTO 1.

SE REALIZAN n EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES DE BERNOULLI, QUE TIENEN POR RESULTADO ÉXITO O FALLA, Y SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE RESULTEN k ÉXITOS Y $(n-k)$ FALLAS EN UN ORDEN DETERMINADO EN LOS n EXPERIMENTOS. SI P ES LA PROBABILIDAD DE ÉXITO EN UN INTENTO Y $(1-P)$ ES LA PROBABILIDAD DE FALLA.

$$\begin{aligned} \text{ÉXITO} &= E & P\{\text{ÉXITO}\} &= P \\ \text{FALLA} &= F & P\{\text{FALLA}\} &= 1-P \end{aligned}$$

ORDEN DE RESULTADOS QUE INTERESA:

$$\begin{array}{cccccccccccc} E & E & F & E & F & F & E & \dots & F & E & \dots & E & F & E & F & F \\ (1) & (2) & (3) & (4) & & & & & (i) & (i+1) & & (n-k-2) & (n-k-1) & (n-k) & & \\ & & & & & & & & & & & (k-1) & (k) & & & \\ & & & & & & & & & & & (n-4) & (n-3) & (n-2) & (n-1) & n \end{array}$$

SE Δ { Δ } = { EL ORDEN DE RESULTADOS ANTERIOR }

P APARECE (k) VECES
 $(1-P)$ APARECE $(n-k)$ VECES, DE DONDE SI
 LOS EXPERIMENTOS SON INDEPENDIENTES:

$$P\{\Delta\} = P^k (1-P)^{n-k}$$

30
PLANTEAMIENTO 2

12

PLANTEAMIENTO 2

SE REALIZAN n EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES DE BERNOULLI Y SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE RESULTEN k ÉXITOS, EN UN ORDEN CUALES QUIERA, EN LOS n INTENTOS.

$$\left. \begin{array}{l} \text{NÚMERO DE FORMAS POSIBLES} \\ \text{EN QUE SE PRESENTAN } k \\ \text{ÉXITOS EN } n \text{ INTENTOS} \end{array} \right\} = C_k^n$$

TODAS SON FORMAS DIFERENTES (EXCLUSIVAS) Y DE IGUAL PROBABILIDAD $[p^k(1-p)^{n-k}]$ DE DONDE:

$$P\{k \text{ ÉXITOS EN } n \text{ INTENTOS}\} = P(n, k)$$

$$P(n, k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

EJEMPLO:

CON LA INFORMACIÓN DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES, SE SABE QUE LA PROBABILIDAD DE SACAR UN ARTÍCULO DEFECTUOSO EN UN INTENTO ES $(7/100)$. UN COMPRADOR SE LLEVA UN LOTE DE 5 ARTÍCULOS, SE DESEA CONOCER LA PROBABILIDAD DE QUE EN EL LOTE VAYAN:

- I) NINGÚN ARTÍCULO DEFECTUOSO.
- II) UN ARTÍCULO DEFECTUOSO.
- III) MAS DE UN ARTÍCULO DEFECTUOSO.

$$I) P\{ \text{NINGÚN ARTÍCULO DEFECTUOSO} \} = P(5, 0)$$

$$P(5, 0) = C_0^5 \left(\frac{7}{100}\right)^0 \left(\frac{93}{100}\right)^5 = \left(\frac{93}{100}\right)^5$$

$$\text{iii)} P\left\{\begin{array}{l} \text{UN UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array}\right\} = P(5,1)$$

$$P(5,1) = C_{11}^5 \left(\frac{7}{100}\right)^1 \left(\frac{93}{100}\right)^4 = \frac{35 \times 93^4}{100^5}$$

$$\text{iii)} P\left\{\begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array}\right\} = 1 - P(5,0) - P(5,1)$$

$$\text{DADO QUE: } \sum_{k=1}^5 P(5,k) = 1$$

$$P\left\{\begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array}\right\} = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^5 - \left(\frac{35 \times 93^4}{100^5}\right)$$

$$P\left\{\begin{array}{l} \text{MÁS DE UN ARTÍCULO} \\ \text{DEFECTUOSO} \end{array}\right\} = \frac{4.2493}{100}$$

8) DISTRIBUCIÓN DE POISSON

SE REALIZAN n EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES DE BERNOULLI Y SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE k ÉXITOS, EN UN ORDEN CUALQUIERA, EN LOS n INTENTOS, SI n ES UN NÚMERO "GRANDE".

$$P = \left\{ \text{PROBABILIDAD DE UN ÉXITO EN UN INTENTO} \right\}$$

$$\text{si } \lambda = np, \quad p = \lambda/n$$

$$P(n, 0) = C_0^n p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$$

$$\ln [P(n, 0)] = n \ln (1-p)$$

$$\ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} - \frac{\lambda^3}{3n^3} - \dots$$

$$\text{si } n \text{ es "GRANDE"} \quad n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \approx -\lambda, \quad \text{DADO QUE}$$

$$n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} - \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} - \dots = -\lambda$$

$$\ln P(n, 0) = -\lambda \implies P(n, 0) = e^{-\lambda}$$

$$\text{si } p \rightarrow 0 \implies (1-p) \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \frac{P(k, n)}{P(k-1, n)} &= \frac{C_k^n p^k (1-p)^{n-k}}{C_{k-1}^n p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1) p}{k (1-p)} \\ &= \frac{\lambda - (k-1)p}{k (1-p)} \approx \frac{\lambda}{k} \end{aligned}$$

ESTO ES:

$$P(n, k) \approx \frac{\lambda}{k} P(k-1, n) \quad \text{ENTONCES:}$$

$$P(n, 0) \approx e^{-\lambda}, \quad P(n, 1) \approx \lambda e^{-\lambda}, \quad P(n, 2) \approx \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

$$P(n, 3) \approx \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{6}, \quad \text{POR INDUCCIÓN:}$$

$$P(n, k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{PARA } k=0, 1, 2, \dots$$

EJEMPLO:

CON LA INFORMACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR, CALCULA LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN LOTE DE 100 ARTÍCULOS RESULTEN:

- i) DOS ARTÍCULOS DEFECTUOSOS ii) UN ARTÍCULO DEFECTUOSO.
 iii) NINGÚN ARTÍCULO DEFECTUOSO iv) MÁS DE DOS ARTÍCULOS DEFECTUOSOS

$$P(\lambda, k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np = 100 \times \frac{7}{100} = 7$$

$$i) P(7, 2) = \frac{7^2 e^{-7}}{2!} = \frac{49}{2} e^{-7}$$

$$ii) P(7, 1) = \frac{7^1 e^{-7}}{1!} = 7 e^{-7}$$

$$iii) P(7, 0) = \frac{7^0 e^{-7}}{0!} = e^{-7}$$

$$iv) P\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁS DE 2 ART.} \\ \text{DEFECTUOSOS} \end{array} \right\} = 1 - P(7, 0) - P(7, 1) - P(7, 2)$$

$$P\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁS DE 2 ART.} \\ \text{DEFECTUOSOS} \end{array} \right\} = 1 - \frac{65}{2} e^{-7}$$

9) DISTRIBUCIÓN NORMAL

BAJO CONDICIONES MUY GENERALES LA VARIABLE ALEATORIA Y DEFINIDA POR:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

CON X_i , VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES TIENE UNA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL DEFINIDAS POR LA EXPRESIÓN

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

DONDE
$$y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO:

LA VARIABLE ALEATORIA X TIENE UNA MEDIA DE 30 CON UNA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE 10. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD QUE EN UNA OBSERVACIÓN X TOMÉ UN VALOR ENTRE 20 Y 40?

$$y_1 = \frac{20 - 30}{10} = -1 \quad y_2 = \frac{40 - 30}{10} = 1$$

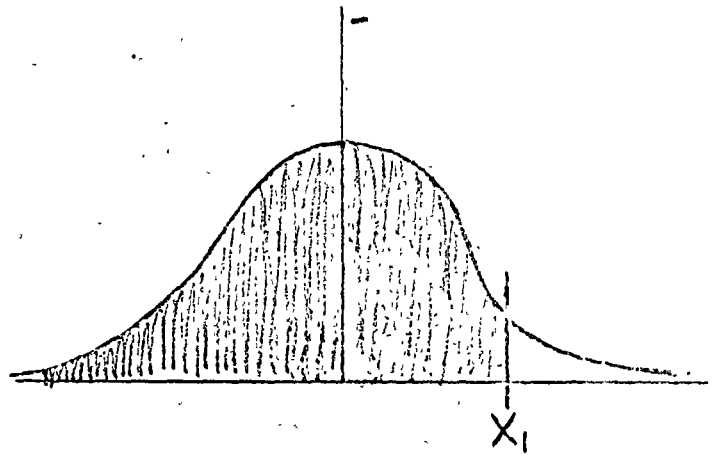
$$P\{20 \leq X \leq 40\} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$P\{20 \leq X \leq 40\} = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

LOS VALORES DE LA INTEGRAL ESTÁN GENERALMENTE TABULADOS EN LA SIGUIENTE FORMA.

Y	0,00 0,01 0,09
0	(VALORES DEL AREA BAJO LA CURVA DE -α A Y ₁)
0,1	
0,2	
⋮	
1,0	
1,1	
⋮	
⋮	
3,9	

$$P[-\alpha < X < X_1] = \int_{-\alpha}^{Y_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Y^2} dY$$



10.) APROXIMACION DE LAS FUNCIONES BINOMIAL Y DE POISSON CON LA FUNCION NORMAL

a) BINOMIAL, OBTENER ENTRE K_1 Y K_2 ÉXITOS, $K_2 > K_1$

$$P(n, K_1) = C_{K_1}^n P^{K_1} (1-P)^{n-K_1} = \frac{n!}{K_1! (n-K_1)!} P^{K_1} (1-P)^{n-K_1}$$

$$P(n, K_2) = C_{K_2}^n P^{K_2} (1-P)^{n-K_2} = \frac{n!}{K_2! (n-K_2)!} P^{K_2} (1-P)^{n-K_2}$$

$$P\{K_1 \leq X \leq K_2\} = \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Y^2} dY$$

$$\text{CON } Y_1 = \frac{K_1 - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$$

$$Y_2 = \frac{K_2 - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$$

LA FUNCION DE POISSON ES UNA VARIACION DE LA BINOMIAL, DE DONDE, LA APROXIMACION NORMAL SE REALIZA EN LA MISMA FORMA PARA LOS DOS CASOS

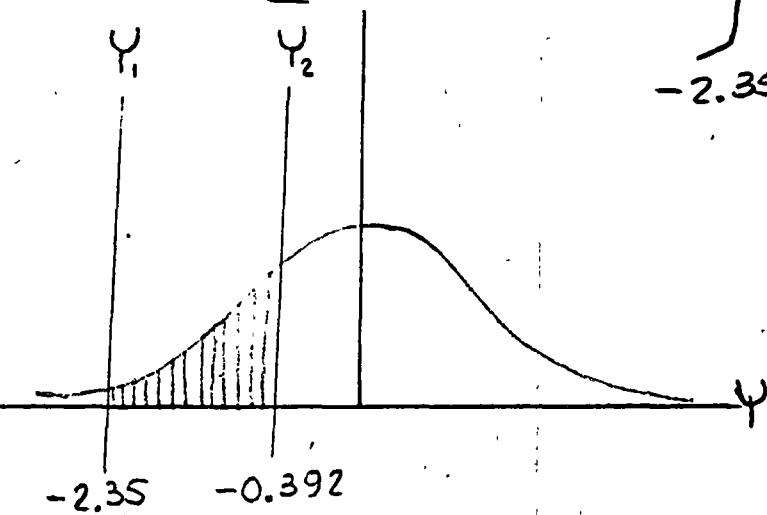
EJEMPLO

CON LA INFORMACIÓN DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES
CALCULAR LA PROBABILIDAD DE SACAR EN UN LOTE
DE 100 ARTÍCULOS ENTRE 1 Y 5 ARTÍCULOS
DEFECTUOSOS.

$$Y_1 = \frac{1 - 100 \times \frac{7}{100}}{\sqrt{100 \left(\frac{7}{100}\right) \left(\frac{93}{100}\right)}} \hat{=} -2.35$$

$$Y_2 = \frac{6 - 100 \times \frac{7}{100}}{\sqrt{100 \left(\frac{7}{100}\right) \left(\frac{93}{100}\right)}} \hat{=} -0.392$$

$$P[1 \leq X \leq 5] = \int_{-2.35}^{-0.392} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 0.2389$$



$$\Delta_{Y_1, Y_2} = \Delta_{-\alpha, Y_1} - \Delta_{-\alpha, Y_2}$$

$$\Delta_{-\alpha, Y_1} = 0.9906$$

$$\Delta_{-\alpha, Y_2} = 0.6517$$

$$\Delta_{Y_1, Y_2} = 0.2389$$

11) FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD E0

$f(x)$ ES UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA VARIABLE ALEATORIA X SI CUMPLE QUE:

- i) $f(x) \geq 0$, $-\infty \leq x \leq \infty$
- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
- iii) $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = P[x_1 \leq X \leq x_2]$

12) ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{SI } X \text{ ES V.A. CONTINUA}$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^n X_i P(X_i) \quad \text{SI } X \text{ ES V.A. DISCRETA}$$

$$E[X] = M_X \quad \text{DONDE } M_X \text{ ES LA MEDIA DE LA V.A. } X$$

EJEMPLO: LANZAMIENTO DE UN DADO

SI CAE UN	1	2	3	4	5	6	
GONO	5	10	15	20	25	30	X_i
CON PROBABILIDAD	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$P(X_i)$

¿ CUANTO ESPERO GANAR EN UNA SOLA

$$E[X] = \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}10 + \frac{1}{6}15 + \frac{1}{6}20 + \frac{1}{6}25 + \frac{1}{6}30$$

21

$$E[X] = 17.5$$

ESPERO GANAR 17.5

EJEMPLO:

UN INVERSIONISTA HA COLOCADO 100 UM. (UNIDADES MONETARIAS). PREVE QUE SE PUEDEN PRESENTAR 5 SITUACIONES FUTURAS DIFERENTES.

LA SITUACION FUTURA	1	2	3	4	5	
SE PUEDE PRESENTAR CON UNA PROBABILIDAD DE:	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$P(X_i)$
EN CUYO CASO GANARÁ (EN UM)	20	25	300	-25	-20	X_i

$$E[X] = \frac{1}{15}20 + \frac{1}{20}25 + \frac{1}{30}300 - \frac{1}{20}25 - \frac{1}{15}20$$

$$E[X] = 10$$

EL INVERSIONISTA ESPERA GANAR 10 UNIDADES MONETARIAS

ESPERANZA MATEMÁTICA: EJEMPLO PRÁCTICO

UN CONSTRUCTOR DESEA SELECCIONAR LA ESTRATEGIA DE CONSTRUCCIÓN A SEGUIR EN CIERTO TRABAJO EN EL CUC HA DE REALIZAR DOS OPERACIONES INDEPENDIENTES I y II QUE HAN DE REALIZARSE EN SUCESIÓN. CADA OPERACIÓN PUEDE REQUERIR 4, 5 O 6 UT (UNIDADES DE TIEMPO) PARA REALIZARSE.

CADA OPERACIÓN PUEDE REALIZARSE A TRES RÍTMOS DIFERENTES DE RAPIDEZ, CADA UNO A DIFERENTE COSTO COMO EN SIGUIDA SE INDICA.

OPERACION	RÍMGO	COSTO POR DIA EN UM.
I	A	200
	B	240
	C	280
II	D	200
	E	300
	F	400

UM =
(UNIDADES MONETARIAS)

ADICIONALMENTE, SI EL TRABAJO NO ESTA TERMINADO EN 10 UT EL CONSTRUCTOR HA DE PAGAR UNA MULTA DE 2000 UM/UT DE RETRASO.

EL CONSTRUCTOR, CON BASE EN LOS REGISTROS DE TRABAJOS SIMILARES REALIZADOS POR EL EN EL PASADO, DETERMINA EL SIGUIENTE CUADRO DE PROBABILIDADES:

OPERACION	RANGO	PROBABILIDAD DE TERMINAR EN:			
		4 UT	5 UT	6 UT	SUMA
I	A	0.2	0.5	0.3	1.0
	B	0.3	0.6	0.1	1.0
	C	0.6	0.4	0.0	1.0
II	D	0.1	0.4	0.5	1.0
	E	0.3	0.4	0.3	1.0
	F	0.6	0.3	0.1	1.0

CALCULO DE LA ESPERANZA DE COSTOS
 CON CADA RANGO:

$$E[\text{costo A}] = \{\text{costo de 4 dias}\} P\{I_4\} + \{\text{costo de 5 dias}\} P\{I_5\} + \{\text{costo de 6 dias}\} P\{I_6\}$$

$$E[\text{costo A}] = 0.2 \times 4 \times 200 + 0.5 \times 5 \times 200 + 0.3 \times 6 \times 200 = 1020$$

$$E[\text{costo B}] = 0.3 \times 4 \times 240 + 0.6 \times 5 \times 240 + 0.1 \times 6 \times 240 = 1152$$

$$E[\text{costo C}] = 0.6 \times 4 \times 280 + 0.4 \times 5 \times 280 + 0.0 \times 6 \times 280 = 1232$$

$$E[\text{costo D}] = 0.1 \times 4 \times 200 + 0.4 \times 5 \times 200 + 0.5 \times 6 \times 200 = 1080$$

$$E[\text{costo E}] = 0.3 \times 4 \times 300 + 0.4 \times 5 \times 300 + 0.3 \times 6 \times 300 = 1500$$

$$E[\text{costo F}] = 0.6 \times 4 \times 400 + 0.3 \times 5 \times 400 + 0.1 \times 6 \times 400 = 1800$$

RESUMEN

OPERACION	RANGO	E[Costo]
I	A	1020
	B	1152
	C	1232
II	D	1080
	E	1500
	F	1800

CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES DE LA DURACIÓN TOTAL DEL TRABAJO.

Duración de la Operación II	6	10	11	12	(DURACIÓN TOTAL DEL TRABAJO)
	5	9	10	11	
	4	8	9	10	
		4	5	6	
	DURACIÓN DE LA OPERACIÓN I				

SI LAS DURACIONES DE LAS DOS OPERACIONES SON COMPLETAMENTE INDEPENDIENTES, ENTONCES

$$P\{8 UT\} = P[I_4]P[II_4]$$

$$P\{9 UT\} = P[I_4]P[II_5] + P[I_5]P[II_4]$$

$$P\{10 UT\} = P[I_4]P[II_6] + P[I_5]P[II_5] + P[I_6]P[II_4]$$

$$P\{11 UT\} = P[I_5]P[II_6] + P[I_6]P[II_5]$$

$$P\{12 UT\} = P[I_6]P[II_6]$$

COMO CADA RANGO TIENE ASIGNADAS PROBABILIDADES DE DURACIÓN DIFERENTES, EL CÁLCULO SE HACE PARA TODAS LAS ESTRATEGIAS POSIBLES

PROBABILIDAD DE DURACION TOTAL.

ACTIVIDAD
 A-D
 A-E
 A-F
 B-D
 B-E
 B-F
 C-D
 C-E
 C-F

	8 UT	9 UT	10 UT	11 UT	12 UT	SUMAS
A-D	0.02	0.13	0.33	0.37	0.15	1.0
A-E	0.06	0.23	0.35	0.27	0.09	1.0
A-F	0.12	0.36	0.35	0.14	0.03	1.0
B-D	0.03	0.18	0.40	0.34	0.05	1.0
B-E	0.09	0.30	0.36	0.22	0.03	1.0
B-F	0.18	0.45	0.27	0.09	0.1	1.0
C-D	0.06	0.28	0.46	0.20	0	1.0
C-E	0.18	0.36	0.34	0.12	0	1.0
C-F	0.36	0.42	0.18	0.04	0	1.0

CÁLCULO DE LA MULTA ESPERADA

LA DURACION TOTAL DEL TRABAJO ES:

- 11 UT SE TIENE UNA MULTA DE 2000 UM
- 12 UT SE TIENE UNA MULTA DE 4000 UM
- 8 " " " " " " 0 "
- 9 " " " " " " 0 "
- 10 " " " " " " 0 "

CÁLCULO DE LA MULTA ESPERADA

- [Multa AD] = (0.02)0 + (0.13)0 + (0.33)0 + (0.37)2000 + (0.15)4000 = 1340 UM
- [Multa AE] = (0.06)0 + (0.23)0 + (0.35)0 + (0.27)2000 + (0.09)4000 = 900 "
- [Multa AF] = (0.12)0 + (0.36)0 + (0.35)0 + (0.14)2000 + (0.03)4000 = 400 "
- [Multa BD] = (0.03)0 + (0.18)0 + (0.40)0 + (0.34)2000 + (0.05)4000 = 880 "
- [Multa BE] = (0.09)0 + (0.30)0 + (0.36)0 + (0.22)2000 + (0.03)4000 = 560 "
- [Multa BF] = (0.18)0 + (0.45)0 + (0.27)0 + (0.09)2000 + (0.01)4000 = 220 "
- [Multa CD] = (0.06)0 + (0.28)0 + (0.46)0 + (0.20)2000 + (0)4000 = 400 "
- [Multa CE] = (0.18)0 + (0.36)0 + (0.34)0 + (0.12)2000 + (0)4000 = 280 "
- [Multa CF] = (0.36)0 + (0.42)0 + (0.18)0 + (0.04)2000 + (0)4000 = 80 "

ESTRATEGIA	MULTA ESPERADA
AD	1340
AE	900
AF	400
BD	880
BE	560
BF	220
CD	400
CE	240
CF	80

FINALMENTE:

ESTRATEGIA	COSTO ESPERADO DE LA OPERACIÓN	COSTO ESPERADO DE LA OPERACIÓN	MULTA ESPERADA	COSTO TOTAL ESPERADO
	I	II		
AD	1020	1080	1340	3440
AE	1020	1550	900	3470
AF	1020	1800	400	3220
BD	1152	1080	880	3112
BE	1152	1550	560	3212
BF	1152	1800	220	3172
CD	1232	1080	400	2712
CE	1232	1550	240	2972
CF	1232	1800	80	3112

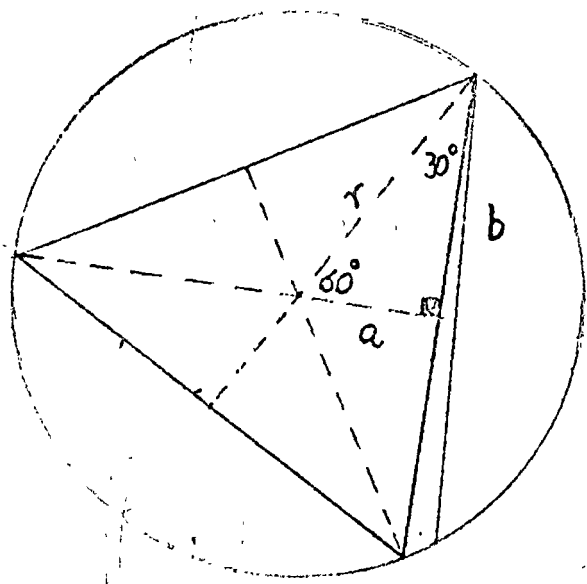
CONCLUSIÓN

LA ESTRATEGIA QUE MINIMIZA EL COSTO TOTAL ESPERADO ES CD CON UN VALOR DE 2712 UM.

PARADOJA DE BERTRAND

(CRÍTICA A LA DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD)
 EN UN CÍRCULO DE RADIO r SE DIBUJA AL AZAR UNA CUERDA AB . ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LA LONGITUD DE ESTA CUERDA SEA MAYOR DE $r\sqrt{3}$, LA LONGITUD DE UN LADO DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO INSCRITO?

1.- SOLUCIÓN



$$a = r \cos 30^\circ$$

$$b = r \sin 30^\circ$$

$$a = \frac{r}{2}$$

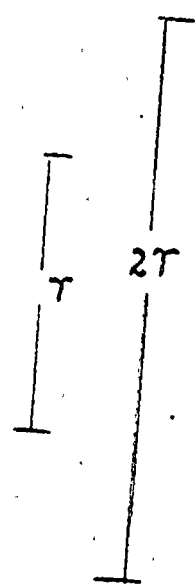
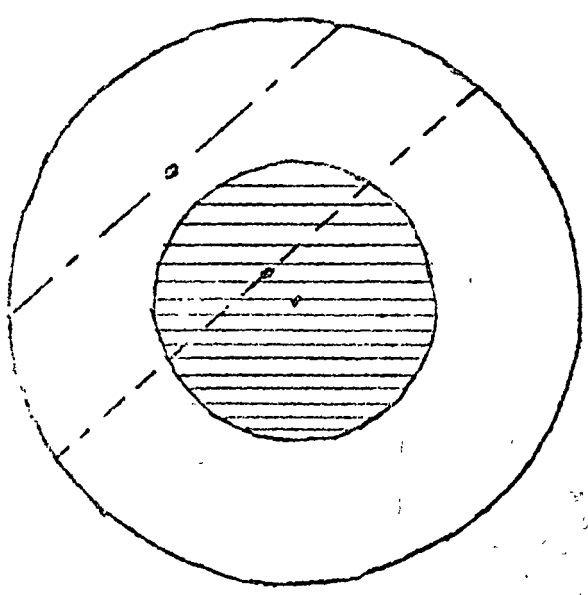
$$b = r \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2b = r\sqrt{3}$$

$$\Delta = [L > r\sqrt{3}]$$

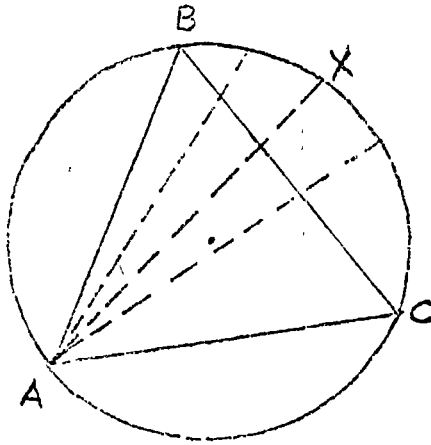
$$P[\Delta] = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

SI EL CENTRO DE LA LINEA CAE EN EL CÍRCULO PEQUEÑO $L > r\sqrt{3}$ LUEGO $P[\Delta] = \frac{\Delta r/2}{\Delta r}$



SOLUCIÓN $P[\Delta] = \frac{1}{4}$

2.- SOLUCIÓN

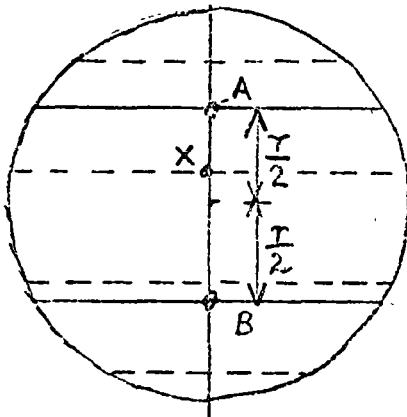


SI X CAE EN ARC(BC)
ENTONCES $L > \tau\sqrt{3}$

$$P[\Delta] = \frac{2\pi\tau/3}{2\pi\tau} = \frac{1}{3}$$

2ª SOLUCIÓN $P[\Delta] = \frac{1}{3}$

3.- SOLUCIÓN



SI EL CENTRO DE LA RECTA
(X) CAE ENTRE \overline{AB} ENTONCES
 $L > \tau\sqrt{3}$

$$P[\Delta] = \frac{\tau}{2\tau} = \frac{1}{2}$$

3ª SOLUCIÓN $P[\Delta] = \frac{1}{2}$

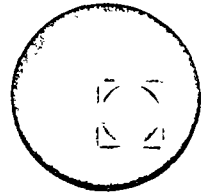
¿ $P[\Delta] = \frac{1}{4}$? ¿ $\frac{1}{3}$? ¿ $\frac{1}{2}$?

SI HAY ERROR ¿ DÓNDE ESTA ?





centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam



CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS
EN LA GESTION DE EMPRESAS

ANALISIS SISTEMATICO DE DECISIONES BAJO Y INCERTIDUMBRE

ING. JESUS ACOSTA FLORES.

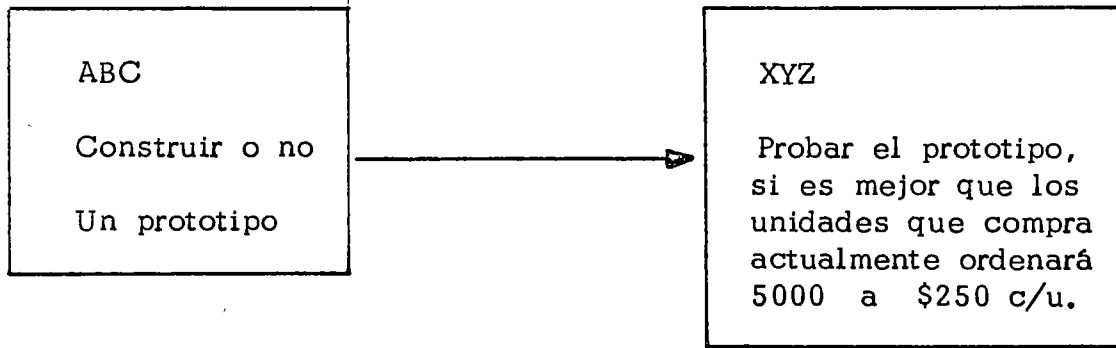
ANALISIS SISTEMATICO DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

VIRTUALMENTE TODAS LAS DECISIONES IMPORTANTES EN LOS
NEGOCIOS SE HACEN BAJO INCERTIDUMBRE Y EL EJECUTIVO
RESPONSABLE DEBE SELECCIONAR UN CURSO DEFINIDO DE -
ACCION DE ENTRE TODOS LOS QUE TIENE DISPONIBLES.

EN EL EJEMPLO SIGUIENTE SE SUGIERE COMO UN EMPRESARIO QUE TIENE UN PROBLEMA DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE PUEDE:

1. DESCRIBIR EL PROBLEMA EN FORMA TAL QUE TIENE ANTE EL TODOS LOS CURSOS POSIBLES DE ACCION, TODOS LOS EVENTOS - POSIBLES QUE PUEDEN AFECTAR LAS CONSECUENCIAS DE ESTOS CURSOS DE ACCION Y TODOS LOS DATOS RELEVANTES REQUERIDOS PARA EVALUAR CADA CONSECUENCIA POSIBLE.
2. DESCOMPONER EL PROBLEMA EN UN NUMERO DE SUBPROBLEMAS Y ENTONCES INFERIR DE LOS RESULTADOS DE ESTOS ANALISIS - PARCIALES QUE CURSO DE ACCION SE DEBERA SELECCIONAR EN EL PROBLEMA PRINCIPAL.

P R O B L E M A



XYZ no paga nada por el prototipo.

COSTOS

Diseño del prototipo \$ 25,000.00

Producción del prototipo 25,000.00

Se necesitan 50,000.00 entre el

18 de septiembre y el 10., de noviembre.

Si se obtiene la orden XYZ pagará a ABC $\$250 \times 5000$

= \$1,250,000.00 el 31 de diciembre.

COSTOS DE PRODUCCION DE LAS 5000 UNIDADES.

Método 1	(Seguro)	
Costo fijo		100,000.00
Variable 5000 x 190 =		<u>950,000.00</u>
		1,050,000.00

Método 2	(Si funciona)	
Costo fijo		140,000.00
Variable 5000 x 164 =		<u>820,000.00</u>
		960,000.00

(Si no funciona, se necesitan 20,000 adicionales)

o sea

C.F.	160,000.00
C.V. 5000 x 190 =	<u>950,000.00</u>
	1,110,000.00

Además el producir las 5000 unidades reducirá las ganancias producidas por contratos con otros clientes de 100,000.00 a 50,000.00.

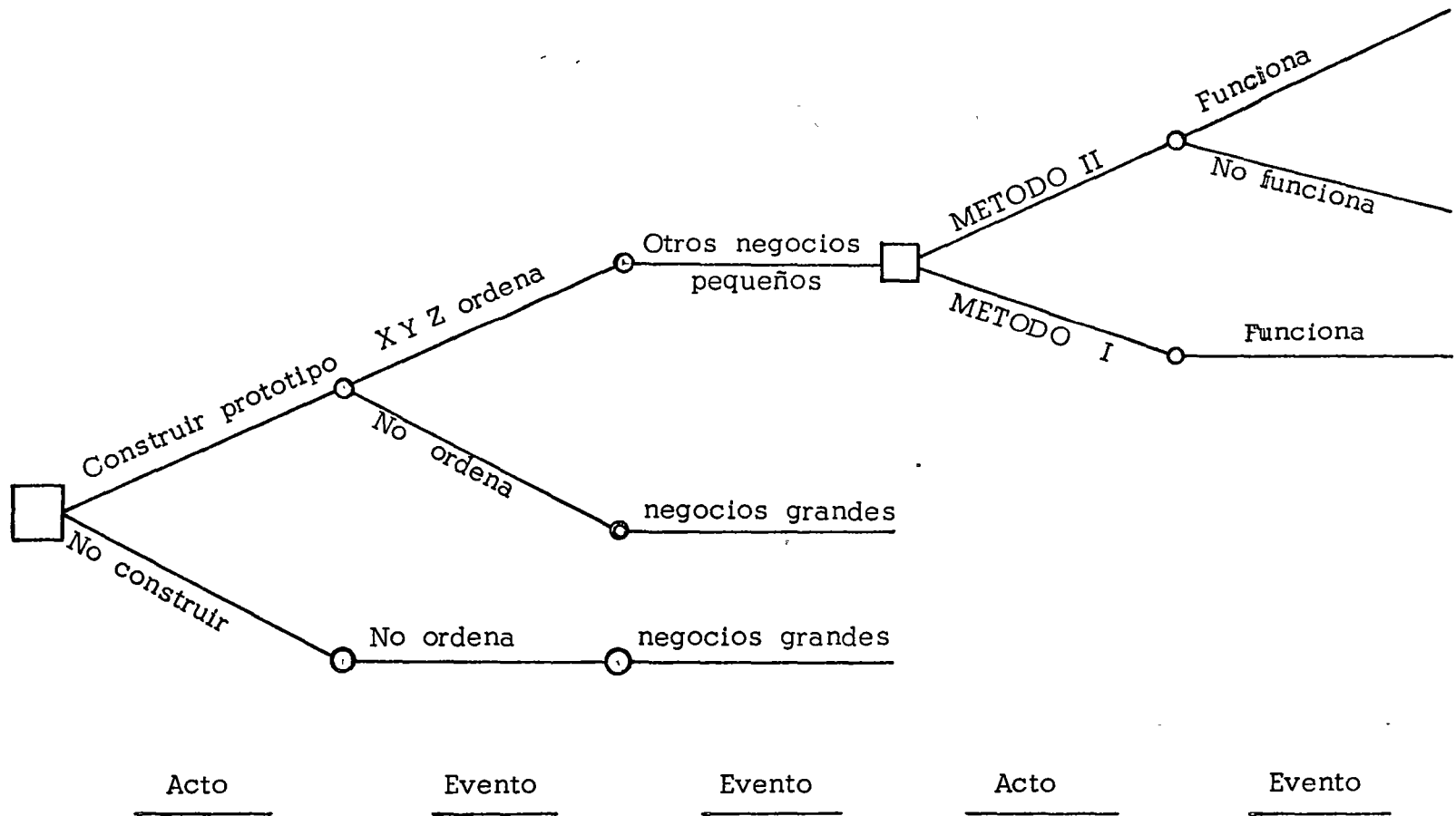


Figura 1. Actos posibles y eventos

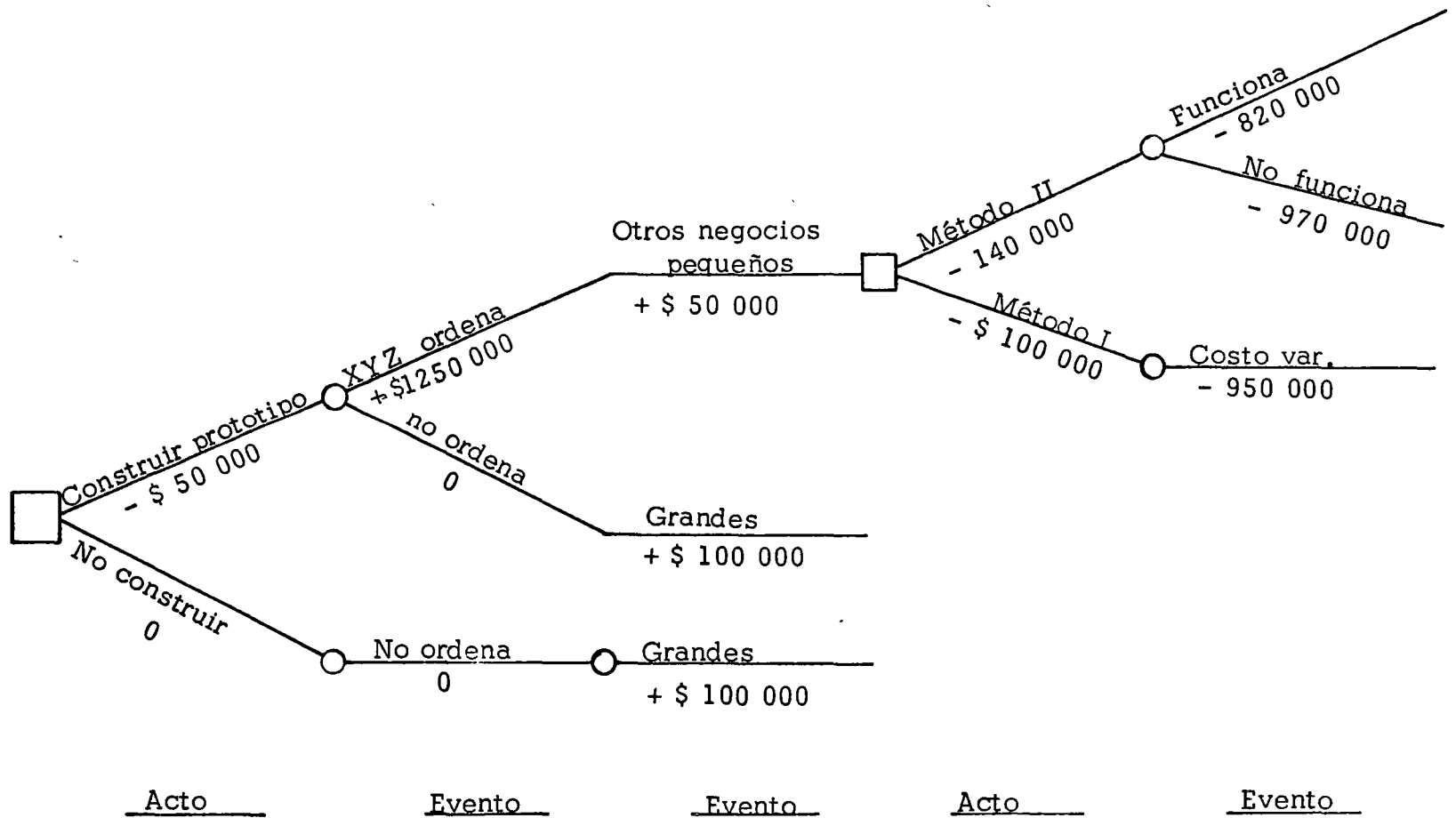


Figura 2.

Flujos parciales de dinero.

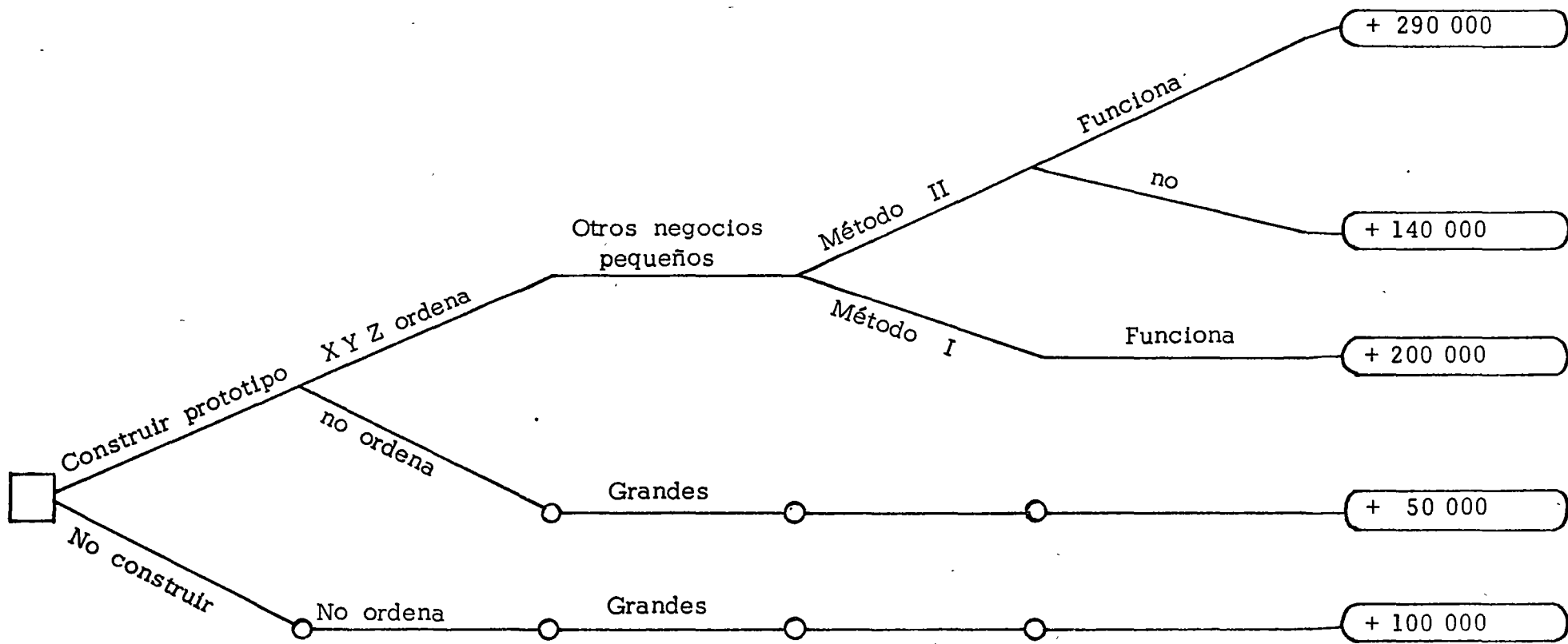


Figura No. 3 Flujos totales de dinero.

NO OBSTANTE QUE LOS FLUJOS DE DINERO TOTALES DESCRIBEN -
COMPLETAMENTE LAS CONSECUENCIAS FINANCIERAS QUE RESULTA-
RAN DE CADA POSIBLE SECUENCIA EVENTOS-ACTOS EN EL PROBLE-
MA DE DECISION, EL GERENTE HARIA PROBABLEMENTE MUY BIEN
CAMBIANDO ESTOS NUMEROS POR OTROS ANTES DE ANALIZAR SU
PROBLEMA.

SIMPLIFICAREMOS EL PROBLEMA POR UN MOMENTO CONSIDERANDO
QUE EL PROBLEMA ES EL SIGUIENTE:

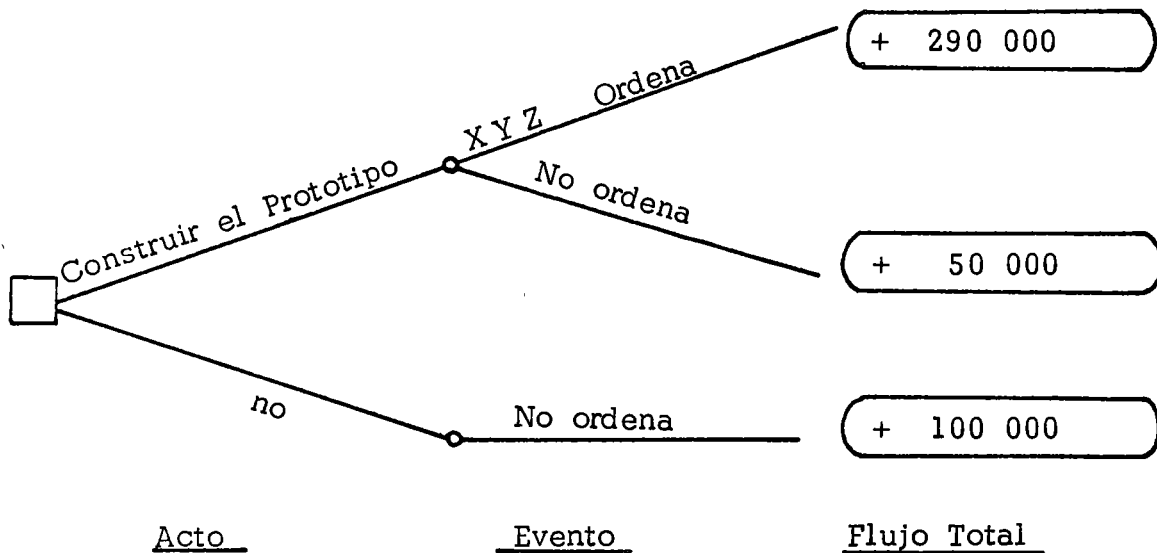


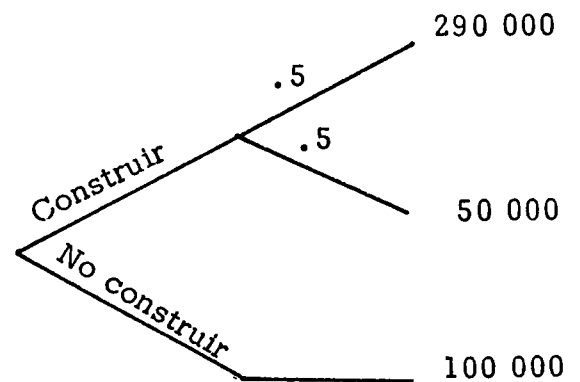
Figura No. 4

ANTES DE DECIDIR HABRIA QUE OBTENER TODOS LOS DATOS DISPONIBLES PARA CONOCER CUAL ES LA POSIBILIDAD QUE EL PROTOTIPO FUNCIONE DE TAL MANERA QUE SE OBTENGA EL PEDIDO PERO NO ES ESTE EL UNICO FACTOR QUE HAY QUE CONSIDERAR.

POR EJEMPLO SUPONGA QUE EL GERENTE ASIGNA LA MISMA POSIBILIDAD A RECIBIR O NO LA ORDEN DE 5000 UNIDADES SI SE CONSTRUYE EL - PROTOTIPO.

Si tiene una gran cantidad de dinero en el banco podría decidir tomar la lotería.

Pero si tiene escasez de dinero y un préstamo bancario que debe pagar - - pronto, posiblemente su decisión serán los 100 000 con certeza.



PODEMOS GENERALIZAR, DICIENDO QUE LA SELECCION DA UNA DECISION CUANDO EL PROBLEMA ES CON INCERTIDUMBRE, DEPENDE NO SOLO DE LOS FLUJOS TOTALES DE DINERO, SINO TAMBIEN DE LA POSICION FINANCIERA.

SUPONGA QUE EL GERENTE DE ABC CONSIDERA QUE UNA MEDIDA ADECUADA DE SU POSICION FINANCIERA ES EL CAPITAL NETO LIQUIDO.

SEA ESTA CANTIDAD - 40 000, O SEA QUE LAS DEUDAS A CORTO PLAZO EXCEDEN EL DINERO QUE TIENE Y LAS CUENTAS POR COBRAR A CORTO PLAZO.

ENTONCES ESTA CANTIDAD SE AGREGA A TODAS LAS RAMAS DEL ARBOL DE DECISIONES.

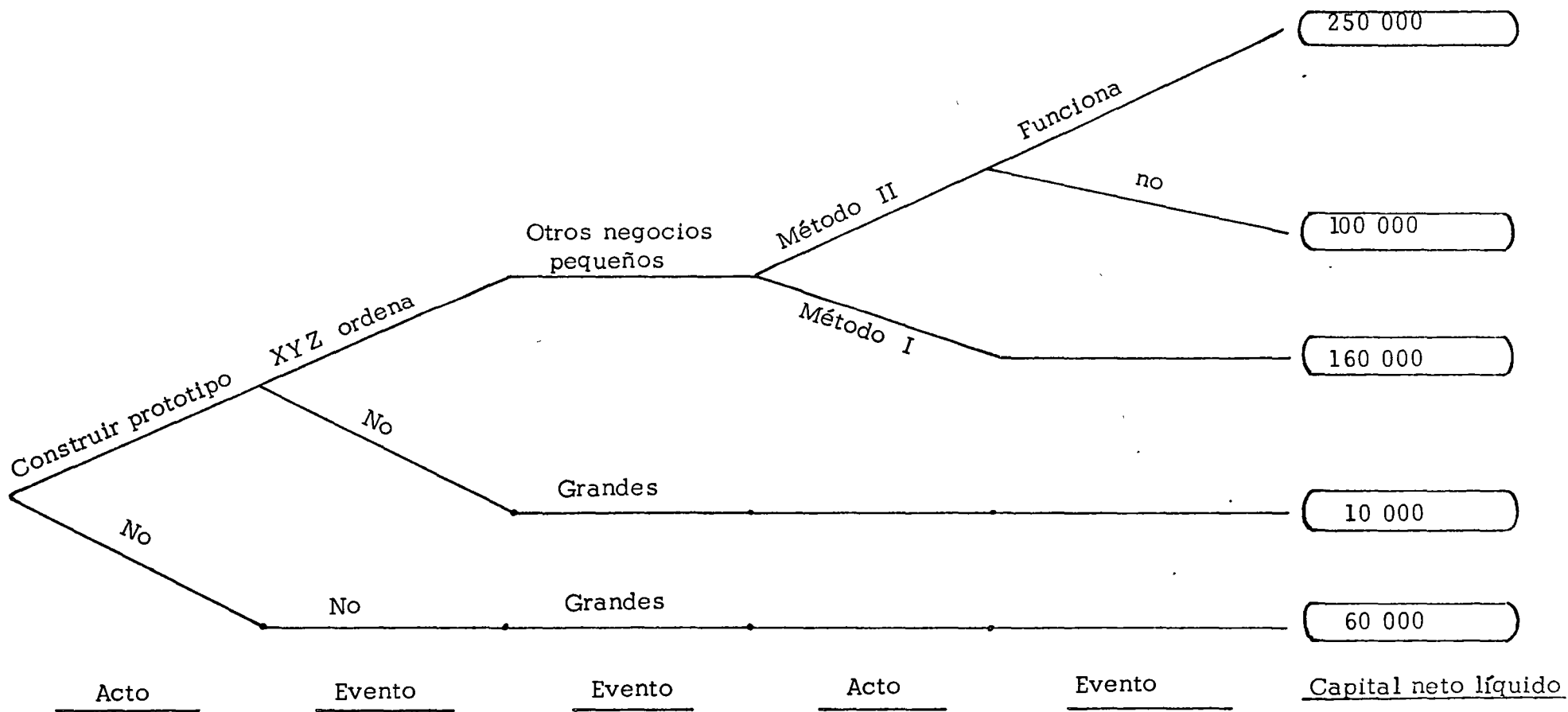
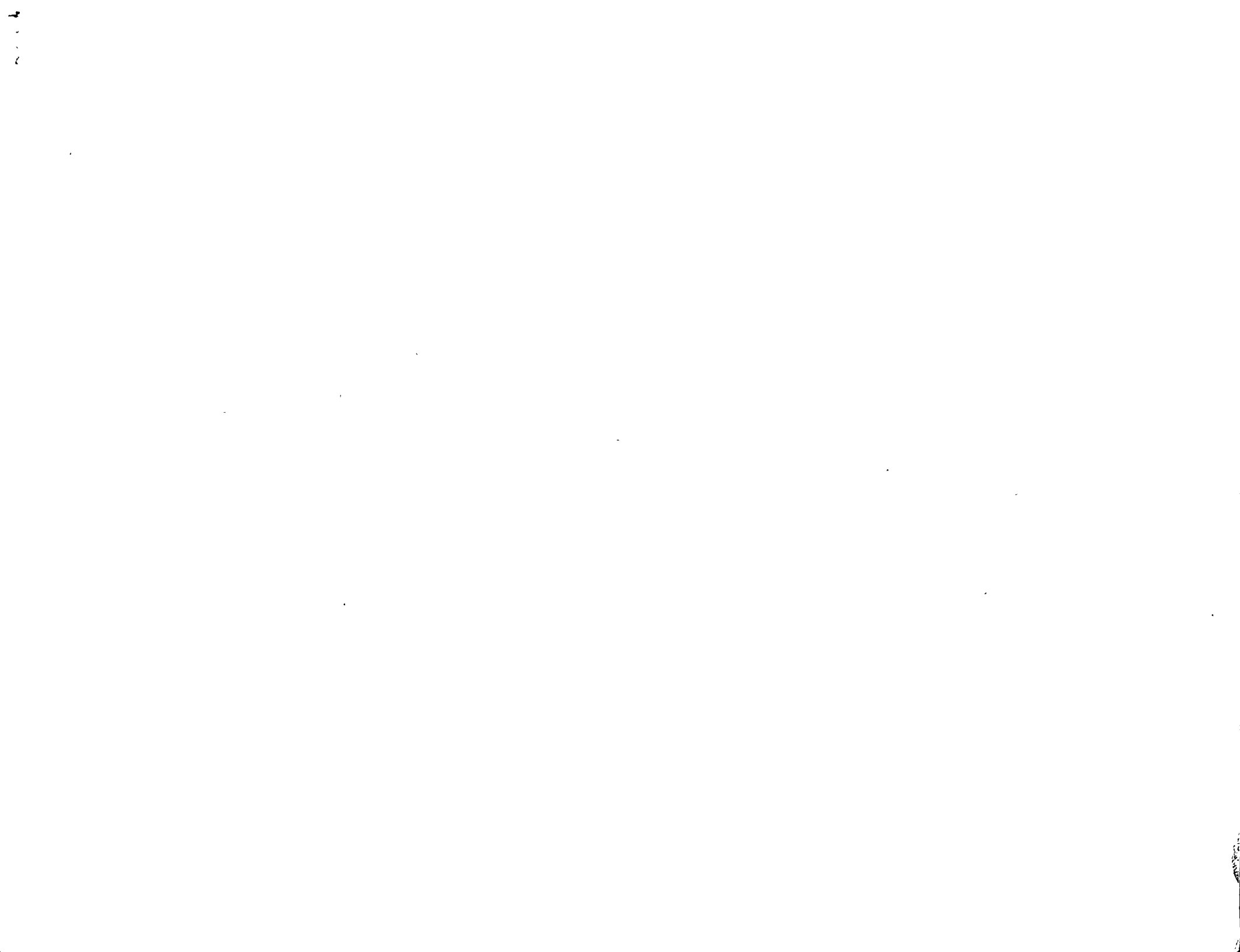


Figura No. 5



DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA
DE SISTEMAS EN LA GESTION DE EMPRESAS (22, 23, 29 y 30 DE MARZO-
Y 5 y 6 DE ABRIL DE 1974)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
1. LIC. JOSE LUIS ACEVEDO VALENZUELA México, D. F.	GRUPO FINANCIERO COMERMEX México, D. F.
2. ING. EMILIO BRACHO UGARTE Paseo de Tabaquitos No. 36 Alteña II Fracc. Lomas Verdes Naucalpan de Juárez Edo. de México	LOMAS VERDES, S. A. DE C. V. Ave. Lomas Verdes No. 64 Alteña II Fracc. Lomas Verdes Naucalpan de Juárez Edo. de México Tel: 5-72-16-77
3. LIC. EMILIO BRODZIAK AMAYA Rafael Angel de la Peña No. 7 Circuito Educadores Cd. Satélite Edo. de México Tel: 5-62-13-72	SECRETARIA DE LA PRESIDENCIA Palacio Nacional México 1, D. F. Tel: 5-22-15-50
4. LIC. FRANCISCO BUCH DIAZ LOMBARDO Mazatlán No. 119 Col. Condesa México 11, D. F.	CERVECERIA MOCTEZUMA, S. A. Paseo de la Reforma No. 155-3er.P. México, D. F. Tel: 5-66-24-33 Ext. 135
5. LIC. JUSTO M. CASASA SAQUI México, D. F.	GRUPO FINANCIERO COMERMEX México, D. F.
6. ING. CARLOS ENRIQUE CASTAÑEDA México, D. F.	
7. SR. GILBERTO CORONADO FIGUEROA Cenobio Paniagua No. 38 Col. Circuito Musicos Cd. Satélite Edo. de México	CERVECERIA MOCTEZUMA, S. A. Paseo de la Reforma No. 155-3er. P. México, D. F. Tel: 5-66-82-50
8. LIC. YOLANDA DE LOS REYES Rafael Angel de la Peña 7 Circuito Educadores Cd. Satélite Edo. de México Tel: 5-62-13-72	CONASUPO Av. Juárez 92-7o. Piso México 1, D. F. Tel: 5-12-58-91

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA
DE SISTEMAS EN LA GESTION DE EMPRESAS (22, 23, 29 y 30 DE MARZO -
Y 5 y 6 DE ABRIL DE 1974)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
9. SR. HIPOLITO FIGUEROA GODOY Blvd. López Mateos 748-201-D Col. Alfonso XIII México 19, D. F.	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 México, D. F. Tel: 5-45-74-60 Ext. 2636
10. ING. DAVID GOMEZ RUIZ Cerro de la Libertad 398 México 21, D. F. Tel: 5-49-03-39	ASARCO MEXICANA, S. A. Baja California 200 Col. Roma Sur México 7, D. F. Tel: 5-64-70-66
11. ING. FRANCISCO GUZMAN LAZO Calle 1 No. 23 Manzana XII Col. Educación México, D. F.	SIDERURGICA LAZARO CARDENAS LAS TRUCHAS, S. A. Yucatán 15 México 7, D. F. Tel: 5-11-20-23
12. ING. ROBIN F. HERNANDEZ Insurgentes Sur 590-404 México 12, D. F. Tel: 5-43-60-90	INDUSTRIAS TUCK DE MEXICO, S.A. Neptuno 62 México 14, D. F. Tel: 5-86-29-54
13. ING. HUGO GUTIERREZ ZEBADUA Calzada Ignazio Zaragoza 287-2 Col. Jardín Balbuena México 9, D. F.	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Ródano 14 Col. Cuauhtemoc México, D. F. Tel: 5-53-71-33 Ext. 26-65
14. ARQ. ARCHIBALDO HOPE México, D. F.	
15. SR. LUCIANO HUERTA HERNANDEZ Fuente de la Diana No. 75 Tecamachalco México, D. F. Tel: 5-89-06-61	GOBIERNO ESTADO DE TLAXCALA Palacio de Gobierno Tlaxcala, Tlax. Tel: 28 y 549
16. ING. HECTOR A. LOPEZ CURTO Cuautla No. 44 México 22, D. F. Tel: 5-73-34-05	FACULTAD DE INGENIERIA DE LA, UNAM Ciudad Universitaria México 20, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA
DE SISTEMAS EN LA GESTION DE EMPRESAS (22, 23, 29 y 30 DE MARZO -
Y 5 y 6 DE ABRIL DE 1974)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
17. ING. LUIS MARTINEZ VAZQUEZ Sor Juana Ines de la Cruz No. 136 México 4, D. F. Tel: 5-47-89-35	DEPARTAMENTO DE ASUNTOS AGRARIOS Y COLONIZACION Bolivar No. 154 Mezzanine Col. Obrera México, D. F. Tel: 5-88-14-11 Ext. 138 y 132
18. ING. ALEJANDRO MEDINA F. Lago Meru 62-12 México 17, D. F. Tel: 5-45-34-18	COLORANTES DEIMAN, S. A. Acatl 320 Azcapotzalco México 16, D. F. Tel: 5-61-42-00
19. LIC. JOSE A. MEDINA José Luis Cuevas 7 Cd. Satélite Naucalpan Edo. de México	COLORANTES DEIMAN, S. A. Acatl 320 Azcapotzalco México 16, D. F. Tel: 5-61-42-00
20. ING. DANIEL OCAMPO SIGUENZA México, D. F.	SECRETARIA DE MARINA Insurgentes Sur No. 465 México, D. F. Tel: 5-64-51-06
21. ING. RENE OJEDA ALANIS México, D. F.	SHATTERPROOF DE MEXICO, S. A. México, D. F.
22. ING. FERNANDO OVIEDO México, D. F.	INDUSTRIAS TUCK DE MEXICO, S. A. Neptuno 62 México 14, D. F.
23. LIC. JUSTINO PEREDA FRANCO México, D. F.	GRUPO FINANCIERO COMERMEX México, D. F.
24. LIC. MARCELO ALBERTO RIVERO GARZA Presa Don Martín 90-2 Col. Irrigación México 10, D. F. Tel: 5-57-51-95	INDUSTRIAS TUCK DE MEXICO, S. A. Neptuno 62 Col. Industrial Vallejo México, D. F. Tel: 5-86-00-11

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS EN LA GESTION DE EMPRESAS (22,23,29 y 30 DE MARZO -- y 5 y 6 DE ABRIL DE 1974)

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
25. SR. UWE RUTENBERG Concepción Beistegui No. 604 Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5-43-94-44	CIA. MEXICANA DE MUEBLES DE ACERO, S. A. Andromaco No. 17 Col. Anáhuac México 17, D. F. Tel: 5-45-74-20 Ext. 31
26. ING. MARTIN SAAVEDRA	
27. LIC. CARLOS HUMBERTO SALAS RUBIO Plomo 148 Col. Valle Gómez México, D. F. Tel: 5-17-55-42	SECRETARIA DE HACIENDA Y CREDITO PUBLICO Descentralizacion Administrativa México, D. F. Tel: 5-91-12-82
28. SR. JAIME FRANKLIN SANCHEZ ANCHONCO FONDO DE LA VIVIENDA ISSSTE Amores No. 1221-13 México 12, D. F. Tel: 5-24-64-21	Balderas No. 58 México 1, D. F. Tel: 5-85-56-88 Ext. 136 y 137
29. C.P. SERGIO SANDOVAL M. México, D. F.	COLORANTES DEIMAN, S. A. Acatl No. 320 Azcapotzalco México 16, D. F. Tel: 5-61-42-00
30. ING. JORGE SALAMONOVITZ F. Mercurio No. 20 Tecamachalco México 10, D. F. Tel: 5-89-30-74	INDUSTRIA MAGNOPLASTICA, S. A. Centeno 652 Granjas México 8, D. F. Tel: 5-19-98-05
31. ING. VICTOR SALAMONOVITZ F. Apolo No. 13 Tecamachalco	INDUSTRIA MAGNOPLASTICA, S. A. Centeno 652

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE APLICACIONES DE LA INGENIERIA
DE SISTEMAS EN LA GESTION DE EMPRESAS (22,23,29 y 30 DE MARZO Y -
5 y 6 DE ABRIL DE 1974)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- | | |
|--|--|
| 32. ING. MANUEL SANCHEZ MENESES
13 Poniente 2113
Puebla, Pue.
Tel: 1-65-36 | ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL DE
LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUE-
BLA.
Ciudad Universitaria
Puebla. Pue. |
| 33. ING. RAUL TREJO CABRERA
Silvestre Revueltas 18
Circuito Musicos
Cd. Satélite
Edo. de México
Tel: 5-62-69-50 | CONSTRUCTORA AVANTE, S. A.
Av. Rio Mixcoac 25-11o. Piso
México, D. F.
Tel: 5-24-36-24 |
| 34. ING. FERNANDO TREVIÑO SOJO
Fuentes 31
Ampliación Vista Hermosa
Cd. Satélite
México, D. F.
Tel: 5-12-56-01 | DIRECCION GENERAL DE PLANEACION
EDUCATIVA
Argentina y Donceles -1er. Piso
México, D. F.
Tel: 5-12-65-93 |
| 35. SR. FERNANDO J. TRONCOSO RODRIGUEZ
Puente de la Morena 63-7
Col. Tacubaya
México, D. F.
Tel: 5-16-42-22 | PETROLEOS MEXICANOS
Av. Marina Nacional No. 329
México, D. F.
Tel: 5-45-74-60 |
| 36. SR. JUAN WOLFFER PALLARES
Antinea 10
Delicias
Apartado Postal 1152
Cuernavaca, Morelos
Tel: 2-59-26 | INDUSTRIA AUTOMOTRIZ DE CUERNA
VACA
Autopista México-Acapulco
Km. 87
Cuernavaca, Morelos
Tel: 5-2-76-00 |
| 37. SR. JAIME ZENIZO GONZALEZ
Seneca No. 338
Col. Polanco
México 5, D. F. | CERVECERIA MOCTEZUMA, S. A.
Paseo de la Reforma No. 155
México, D. F.
Tel: 5-35-49-40 |

