A los asistentes a los cursos del Centro de Educación Continua

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar 15 días antes de la terminación del curso, en las oficinas del Centro, con la Sra. Sánchez.

El control de asistencia se efectuará al terminar la primera hora de cada día de clase, mediante listas especiales en las que los interesados anotarán personalmente su asistencia. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Ing. Melesio Gutiérrez

centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam

CURSO DE ANALISIS ESTRUTURAL.

CONCEPTOS FUDAMENTALES DE MECANICA ESTRUCTURAL.

DR. PORFIRIO BALLESTEROS.

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

CEC UNAM P. BALLESTEROS Feb./1974.

1-. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECANICA ESTRUTURAL

1.1-. Energía de la Formación.

1.1.1-. Tensión.
1.1.2-. Corte.
1.1.3-. Torsión.
1.1.4-. Flexion.
1.1.5-. Expresion general.

1.2-. Principio de Superposisión.

1.2.1-. Introducción.
1.2.2-. Casos en que no rige el principio de superposisión.
1.2.3-. Ecuaciones generales de superposisión de causas y efectos.
1.2.3.1 Introducción.
1.2.3.2 Estructura hiperestática de grado "n"
1.2.3.3 Ejemplos.

1.3-. Generalización de la energía de deformación.

1.3.1 Ejemplos.

1.4-. Teorema de Castigliano.

1.4.1 Ejemplos.

1.5-. Teorema del Trabajo mínimo.

1.5.1 Ilustración mediante ejemplos.

2-. METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

2.1-. Método de Fuerzas y de Formación.

2.1.1-. Método de deformación.
2.1.2-. Método de fuerzas.

2.2-. Elementos de algebra matricial.

2.2.1-. Introducción.
2.2.2-. Suma de matrices.
2.2.3-. Resta de matrices.
2.2.4-. Multiplicación escalar de matrices.
2.2.5-. Multiplicación entre matrices.
2.2.6-. Transposición de matrices.
2.2.7-. Tipos particulares de matrices.

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECANICA ESTRUCTURAL

1.1.- Energía de deformación

Considerando sistemas elásticos lineales y que el sistema estructural se deforma bajo la acción de incrementos graduales de fuerzas externas, las cuales producen trabajo que es almacenado en el sistema en forma de Energía de deformación. Si se desprecian las pequeñas perdidas de energía calorimétrica, la energía puede ser recuperada descargando gradualmente el sistema.

1.1.1.- Energía de deformación por tensión.

Considerando la barra prismática de la figura 1.1.1a de sección transversal A, modulo de elasticidad E y longitud l, bajo la acción de incrementos graduales de P, se tiene

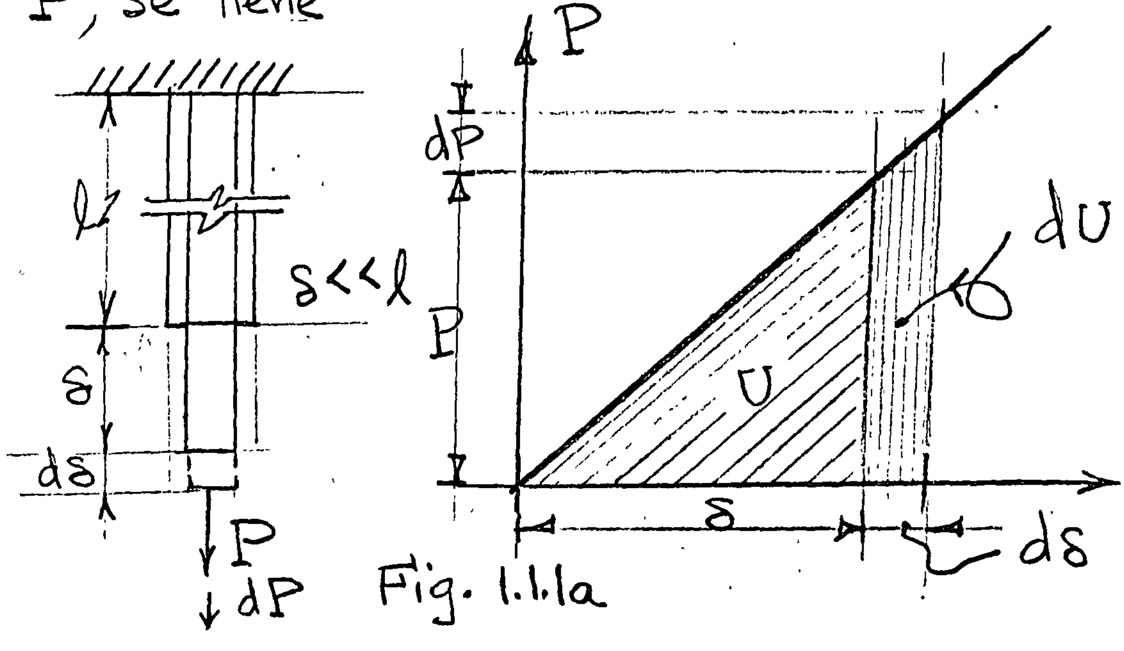


Fig. 1.1.1a

$$dU = P\,d\delta \qquad (a)$$

$$U = \int_0^\delta P\,d\delta = \frac{1}{2}P\delta \qquad (b)$$

donde U es la energía de deformación almacenada en la barra en la deformación de 0 a δ.

De la ley de Hooke

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \qquad (c)$$

substituyendo (c) en (b) se obtiene

$$U = \frac{P^2 l}{2AE} \qquad (d)$$

$$U = \frac{AE\delta^2}{2l} \qquad (e)$$

la energía por unidad de volumen es

$$u = \frac{U}{Al} \qquad (f)$$

de (d), (e) y (f) se obtiene

$$u = \frac{P^2}{2A^2E} = \frac{\sigma^2}{2E} \qquad (g)$$

$$u = \frac{E\delta^2}{2l^2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \qquad (h)$$

por ejemplo la energía por unidad de volumen que puede almacenar el acero estructural hasta el límite elástico $\sigma_Y = 2.3$ Ton/cm² para $E = 2.1\times10^6$ Kg/cm² es

$$u = \frac{(2{,}300)^2}{2\times2.1\times10^6} = 1.26\ \frac{\text{Kg-cm}}{\text{cm}^3}$$

1.1.2.- Energía de deformación por corte

De la figura 1.1.2a se observa que

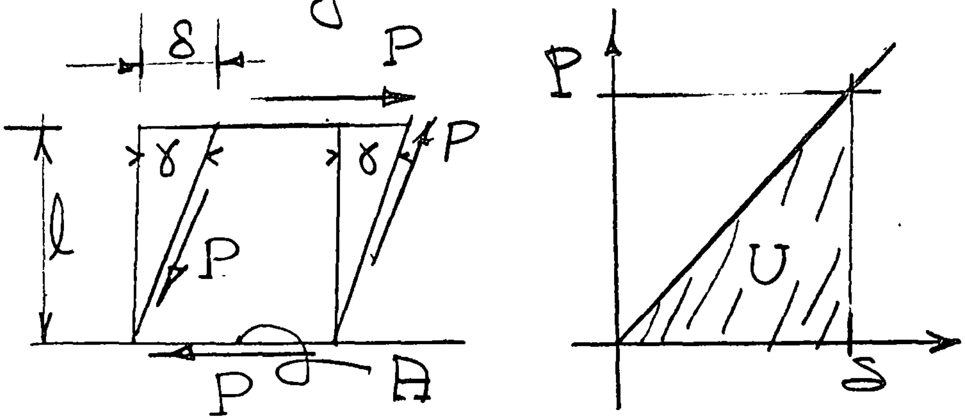


Fig. 1.1.2a

$$U = \frac{P\delta}{2} \qquad (a)$$

para pequeñas deformaciones

$$\gamma = \frac{\delta}{l} = \frac{P}{AG} = \frac{\tau}{G} \qquad (b)$$

donde G es el modulo de rigidez o de corte de (a) y (b) se obtiene

$$U = \frac{P^2 l}{2AG} = \frac{AG\delta^2}{2l} \qquad (c)$$

y la energía por unidad de volumen es

$$u = \frac{U}{Al} = \frac{P^2}{2A^2G} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\delta^2}{2l^2} = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (d)$$

1.1.3.- Energía de deformación por torsión de una barra circular.

De la Fig. 1.1.3a se observa que

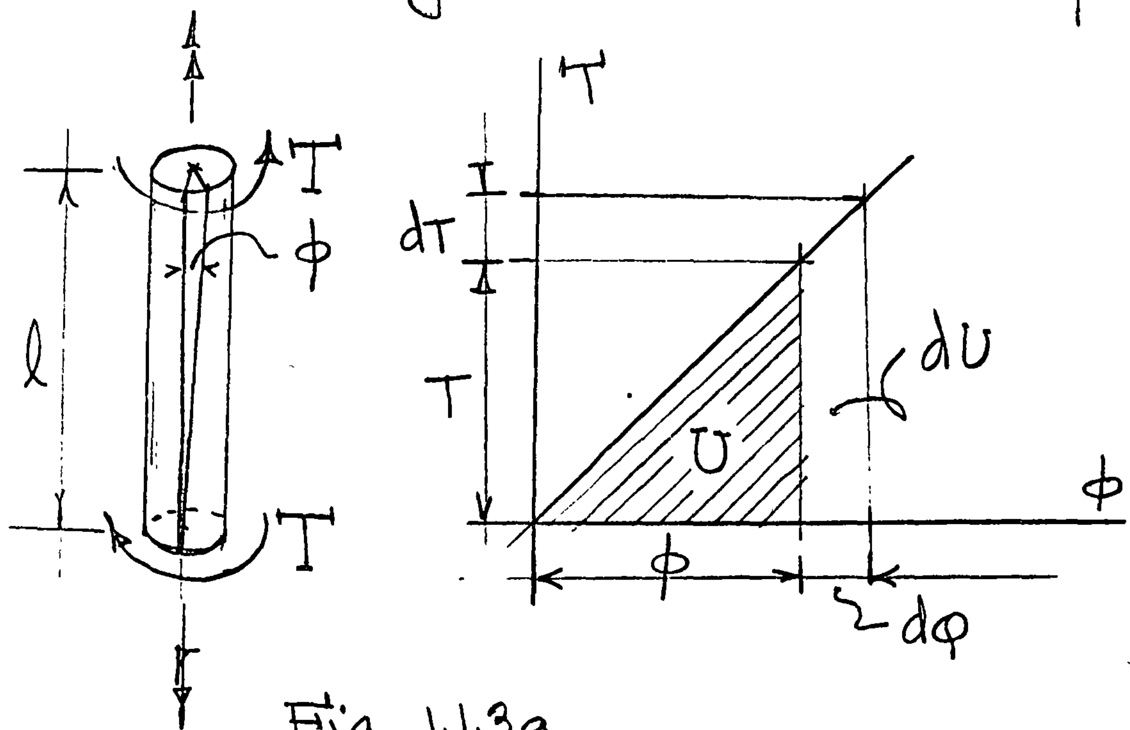


Fig. 1.1.3a

$$U = \frac{T\phi}{2} \qquad (a)$$

$$\phi = \frac{Tl}{C} \qquad (b)$$

donde l es la longitud de la barra y $C = GJ$ es la rigidez de torsión, G es el módulo de torsión y J el momento polar de inercia de la sección transversal de la barra.

Substituyendo (b) en (a)

$$U = \frac{T^2 l}{2C} \quad , \quad U = \frac{\phi^2 C}{2l} \qquad (c)$$

1.1.4 Energía de deformación por flexión

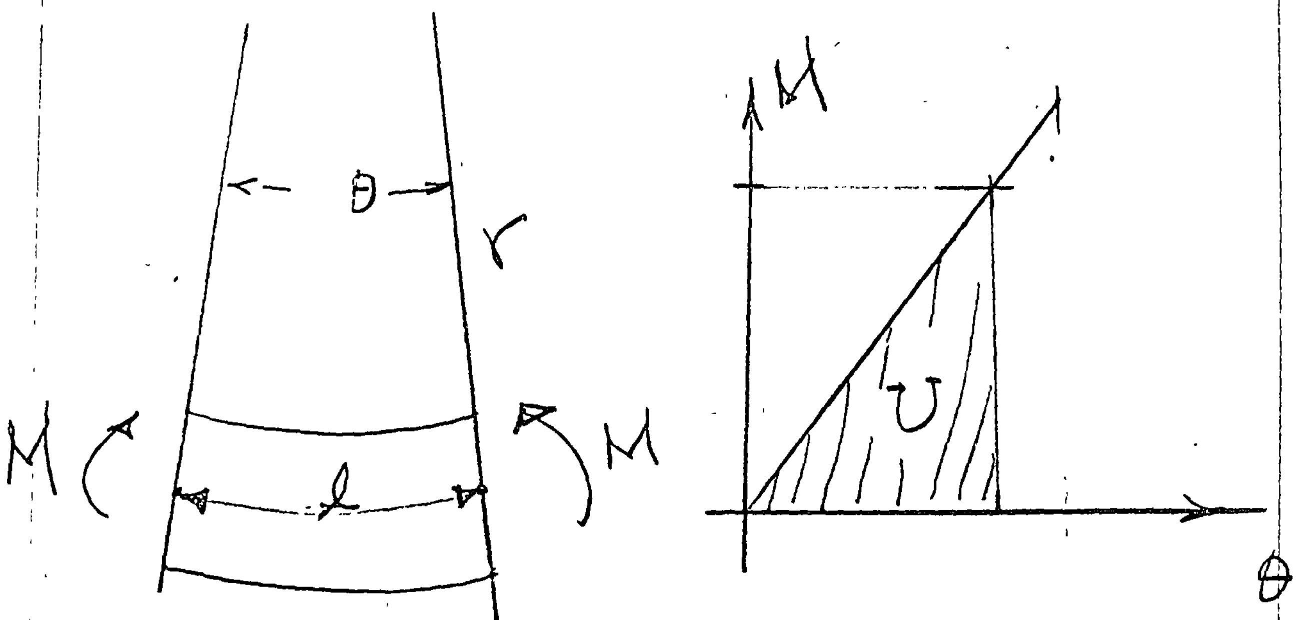


Fig. 1.1.4a

De la figura 1.1.4a se observa que

$$U = \frac{M\theta}{2} \qquad (a)$$

$$\theta = \frac{Ml}{EI} \qquad (b)$$

de (a) y (b) se obtiene

$$U = \frac{M^2 l}{2EI}, \quad U = \frac{\theta^2 EI}{2l} \qquad (c)$$

donde EI es la rigidez de flexión, I es el momento de inercia de la sección transversal

1.1.5 Expresión general de la energía de deformación en una barra.

en (1.1.1.a) reemplazando P por N y l ~~por~~ ds se tiene

$$dU_N = \frac{N^2 ds}{2AE}, \text{ integrando}$$

$$U_N = \int_0^S \frac{N^2 ds}{2AE} \qquad (a)$$

En 1.1.4c substituyendo l por ds

$$dU_M = \frac{M^2 ds}{2EI}, \text{ integrando}$$

$$U_M = \int_0^S \frac{M^2 ds}{2EI} \qquad (b)$$

En 1.1.3b substituyendo T por M_T y l por ds se tiene

$$dU_T = \frac{M_T^2 ds}{2G}, \text{ integrando}$$

$$U_T = \int_0^S \frac{M_T^2 ds}{2G} \qquad (c)$$

Para determinar la energía de deformación por corte considerando la barra de la figura 1.1.5a se tiene

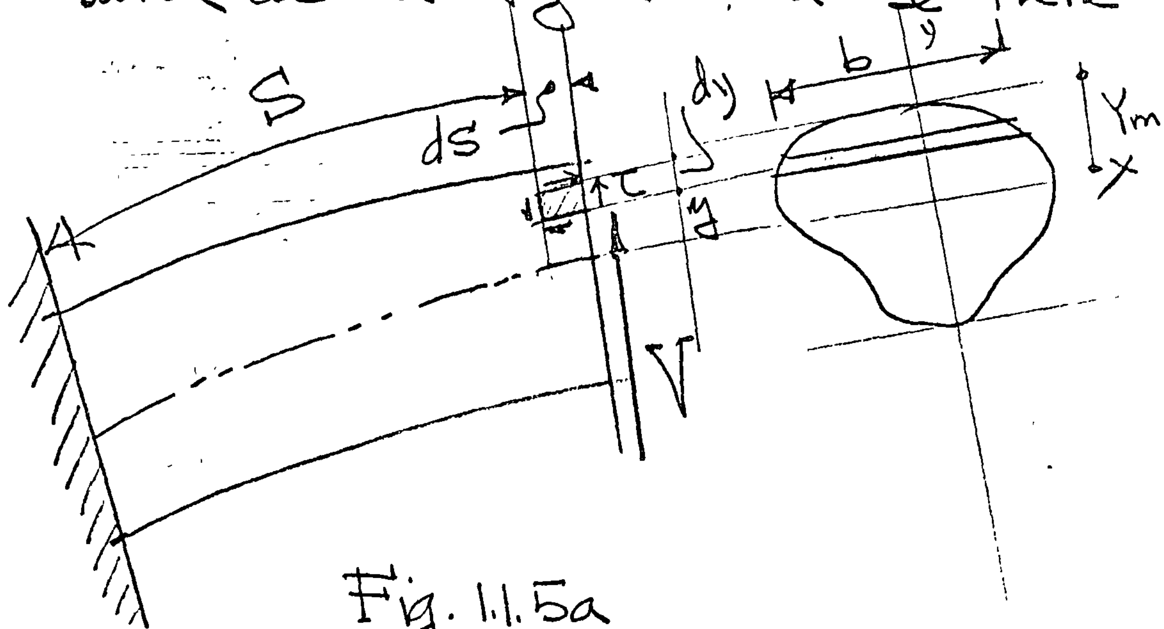


Fig. 1.1.5a

$$dU_v = u\,dV = u(b\,ds\,dy) \qquad (d)$$

substituyendo (1.1.2d) en (1.1.5d)

$$dU_v = \frac{b\tau^2}{2G}\,ds\,dy \text{ , integrando}$$

$$U_v = \int_0^S \int_0^y \frac{b\tau^2}{2G}\,ds\,dy \qquad (e)$$

aceptando la teoría elemental de vigas

$$\tau = \frac{V Q_y^{Y_m}}{bI} \qquad (f)$$

en (f) V es el cortante función de s

$Q_y^{Y_m}$ es el momento estático de y a Y_m el cual es función de y, b es el ancho a la distancia y respecto a los ejes centroidales principales x, y, substituyendo (f) en (e) se obtiene

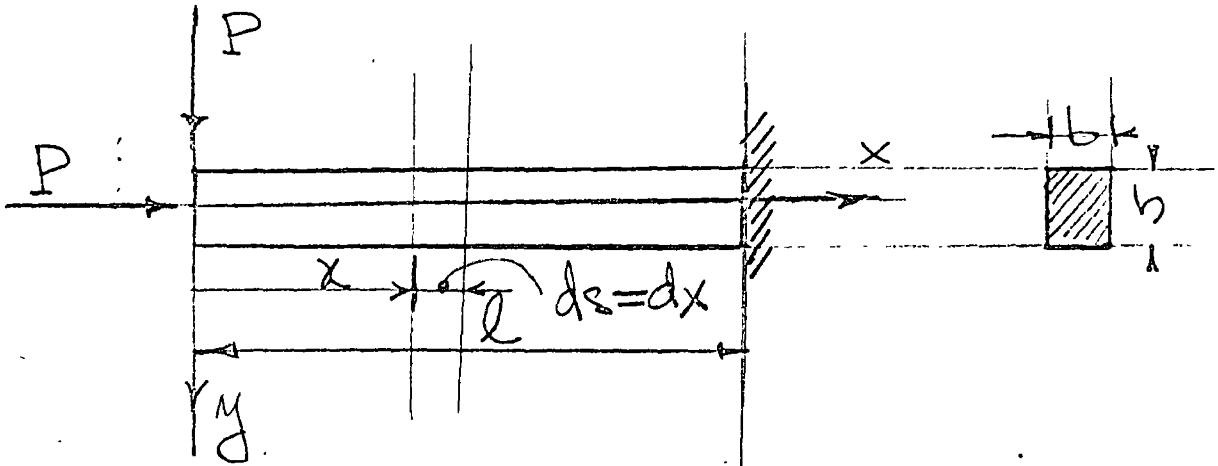
$$U_v = \int_0^S \int_0^y \frac{V^2 Q_y^{y_m}}{2bI^2G}\, ds\, dy \qquad (g)$$

Sumando 1.1.5a, b, c, y g se obtiene la expresión de la energía de deformación debido a una carga normal N, momento flector M, momento de torsión M_T y cortante V en una barra coplanar de longitud S.

$$\boxed{U = \int_0^S \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_0^S \frac{M^2 ds}{2EI} + \int_0^S \frac{M_T^2 ds}{2GJ} + \int_0^S\int_0^y \frac{b\tau^2}{2G}\, ds\, dy} \qquad (h)$$

1.1.6 Ejemplos

En la viga en cantiliver mostrada de sección rectangular b h determinar las energías de deformación por corte carga normal y compararlas con la energía por flexión.



1.1.6.1 Energía de Flexión

$$M = -Px \qquad 0 \leq x \leq l \qquad (a)$$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 \qquad (b)$$

substituyendo (a) y (b) en (1.1.5 h)

$$U_M = \int_0^l \frac{M^2 ds}{2EI} = \int_0^l \frac{(-Px)^2 dx}{2E\frac{1}{12}bh^3}$$

integrando y efectuando operaciones algebraicas

$$U_M = 2\frac{P^2}{Eb}\left(\frac{l}{h}\right)^3 \qquad (c)$$

1.1.6.2.- Energía por carga normal

$$N = -P \qquad (a)$$

$$A = bh \qquad (b)$$

substituyendo (a) y (b) en (1.1.5 h)

$$U_N = \int_0^l \frac{N^2 ds}{2EA} = \int_0^l \frac{(-P)^2 dx}{2Ebh}$$

Integrando y efectuando operaciones algebraicas

$$U_N = \frac{1}{2}\frac{P^2}{Eb}\cdot\left(\frac{l}{h}\right) \qquad (c)$$

1.1.6.2.- Energía por cortante

Para una sección rectangular bh

$$\tau = \frac{VQ_y^{y_m}}{bI} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (a)$$

substituyendo (a) en (1.1.5h) se tiene

$$U_V = \int_0^x dx \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} \frac{b}{2G}\frac{V^2}{2^2 I^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy \qquad (b)$$

considerando la relación modular

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{para } \nu = 0.3, \; I = \frac{1}{12}bh^3$$

en (b) e integrando respecto a y y respecto a x y efectuando operaciones algebraicas, se obtiene

$$U_V = 1.56\frac{P^2}{Eb}\frac{l}{h} \qquad (c)$$

Comparando las expresiones (1.1.6.1c) (1.1.6.2c) y (1.1.6.2c) para un claro $l = 5.00$ m y un peralte $h = 30$ cm se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} U_V &= 0.00286\, U_M \\ U_N &= 0.0009\, U_M \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales la energía de deformación debida a la carga normal N y cortante V es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante M.

Cuando existe momento torsionante M_T (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.

1.2 Principio de Superposisión.

1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

Considerando el ejemplo mostrado en la figura 1.2.2a, la viga AB esta sujeta a la

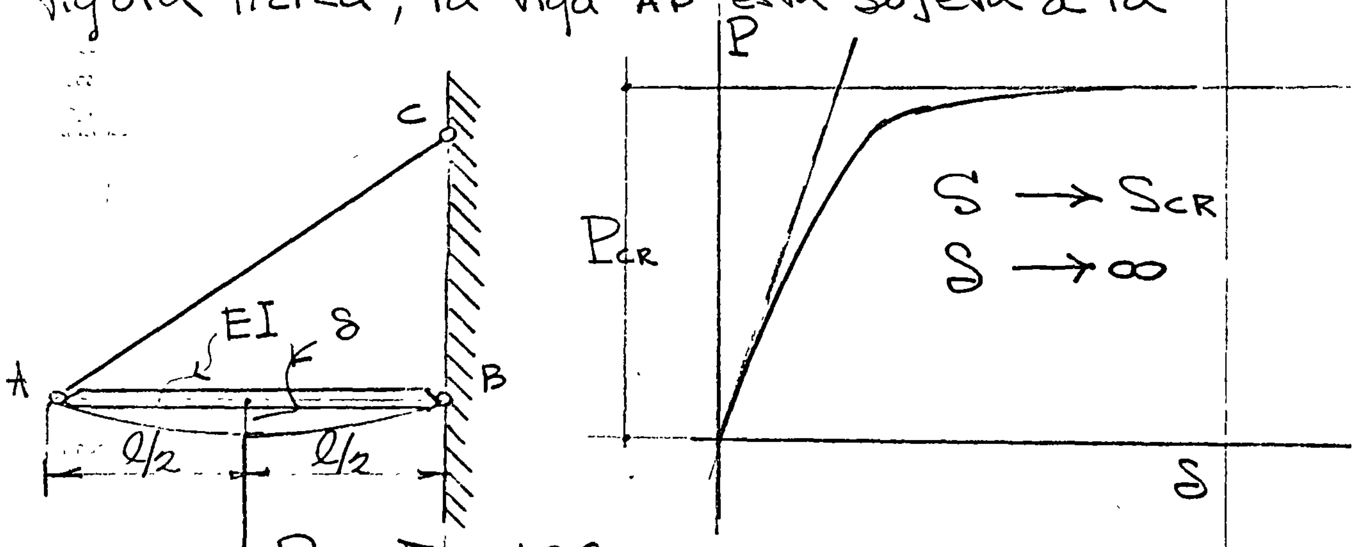


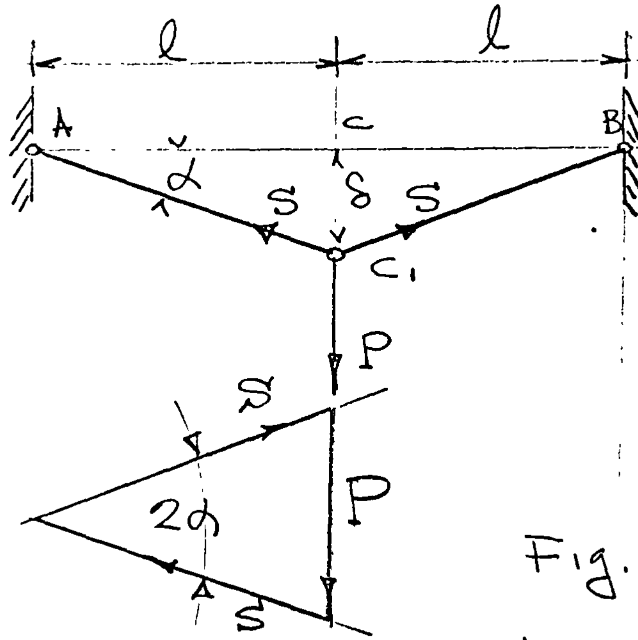
Fig. 1.2.2a

acción simultanea de fuerzas axiales y laterales, se concluye que δ no es función lineal de P y puede ser representada por la fórmula

$$\delta \doteq \frac{Pl^3}{48EI}\,\frac{1}{1 - S/S_{CR}} \qquad (1.22.a)$$

donde, $S_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, S carga axial en AB debida a P.

Otro ejemplo en el cual el principio de superposisión no rige, sería el sistema mostrado en la figura 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ($\tan\alpha \doteq \alpha$).



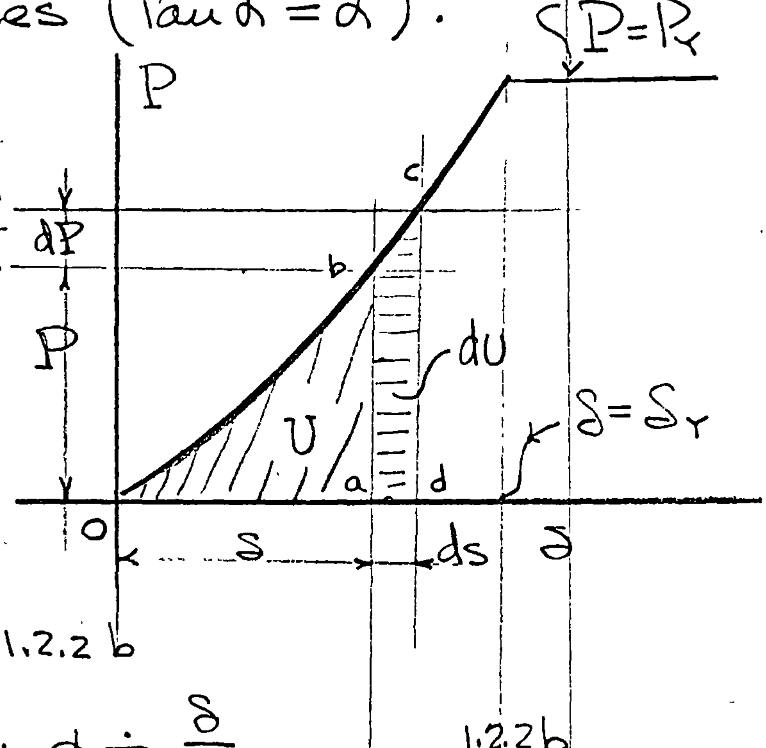


Fig. 1.2.2 b

pequeñas deformaciones: $\alpha \doteq \dfrac{\delta}{l}$ 1.2.2b

Equilibrio: $$S = \frac{P}{2\alpha}$$ 1.2.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}-l}{l} \doteq \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{l^2}$$ 1.2.2d

Ley de Hooke: $$\varepsilon = \frac{S}{AE}$$ 1.2.2e

de 1.2.2 c, d y e se obtiene

$$\boxed{\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \;,\quad P = \frac{\delta^3 AE}{l^3}}$$ 1.2.2f

De nuevo se observa que la deflexión δ no es función lineal de P aunque el material cumple internamente con la ley de Hooke y la relación entre δ y P es representada por la curva de la figura 1.2.2 b. El area Oab representa el trabajo efectuado por P durante la deflexión δ y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras AC y CB., la cual es igual a

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta = \frac{AE}{l^3}\int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} \qquad 1.2.2\,g$$

ó

$$U = \frac{l P^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}} \qquad 1.2.2\,h$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores U no es función de segundo grado de δ ó P, como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

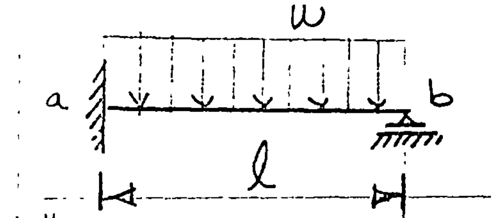
En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas externas es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexion adicional $S\delta$ a la compresión S y la barra trabaja en flexo compresión.

1.2.3 Ecuaciones generales de superposición

1.2.3.1. Introducción

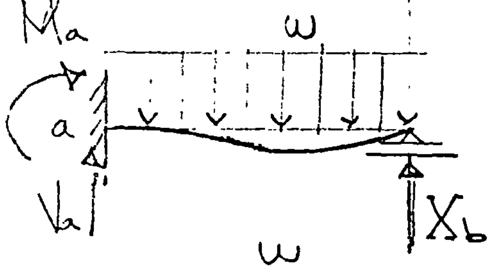
En el analisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como modulo de elasticidad momento de inercia, etc., Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectua su analisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticos son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc.- Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposición de causas y efectos, consideraremos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme w

empotrada en a y libremente apoyada en b.



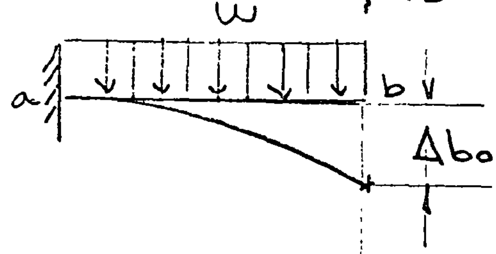
Estructura actual.

Δb = Deflexión de el punto b en la estructura debida a todas las causas



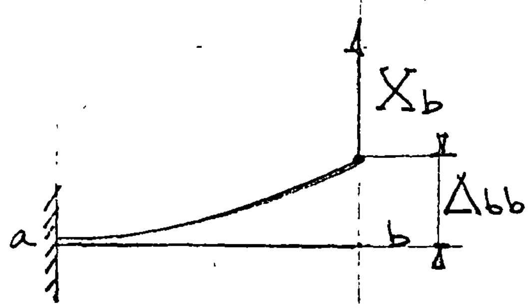
Estructura primaria.

Selección de redundante, X_b

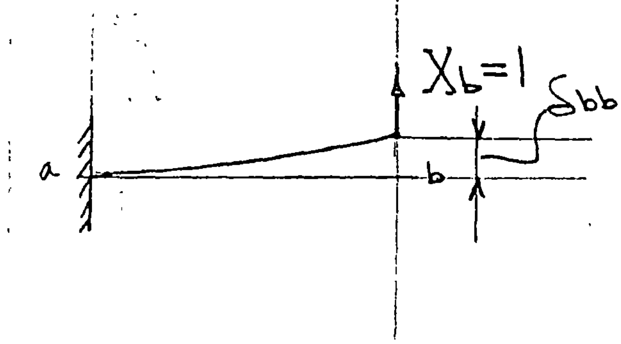


Condición de equilibrio $X_b = 0$

Δb_o = Deflexión en dirección de la redundante con $X_b = 0$



Δbb = Deflexión en dirección de la redundante debida a X_b con $w = 0$



δbb = Deflexión en dirección de la redundante debido a una fuerza unitaria $X_b = 1$

La ecuación de superposición si el principio es válido:

$$\Delta_b = \Delta_{bo} + \Delta_{bb} = \Delta_{bo} + \bar{X}_b \delta_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde:

$$\bar{X}_b = -\frac{\Delta_{bo}}{\delta_{bb}} \quad (b)$$

(δ_{bb} o d_{bb} es llamado coeficiente de flexibilidad)

1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en análisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio $X_i = 0$ sea estable e isostática, aceptando la siguiente notación:

Δ_i = Deflexión total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

Δ_{io} = Deflexión del punto i en dirección de la redundante X_i en condiciones de equilibrio estable isostático $X_i = 0$.

Δ_{iT} = Deflexión del punto i debida a un cambio de temperatura ΔT.

Δ_{iA} = Deflexión del punto i debida a asentamientos de apoyo.

Δ_{iE} = Deflexion en el punto i debida a errores de fabricación.

δ_{i1} = Deflexión en el punto i debida a la condición $X_1 = 1$

δ_{i2} = " " " " " " " " " $X_2 = 1$

$\vdots$

δ_{in} " " " " " " " " " $X_n = 1$

Cualquier redundante puede suponerse que actua arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su linea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposisión en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_n\delta_{1n} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_n\delta_{2n} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_n\delta_{nn} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix} \quad (b)$$

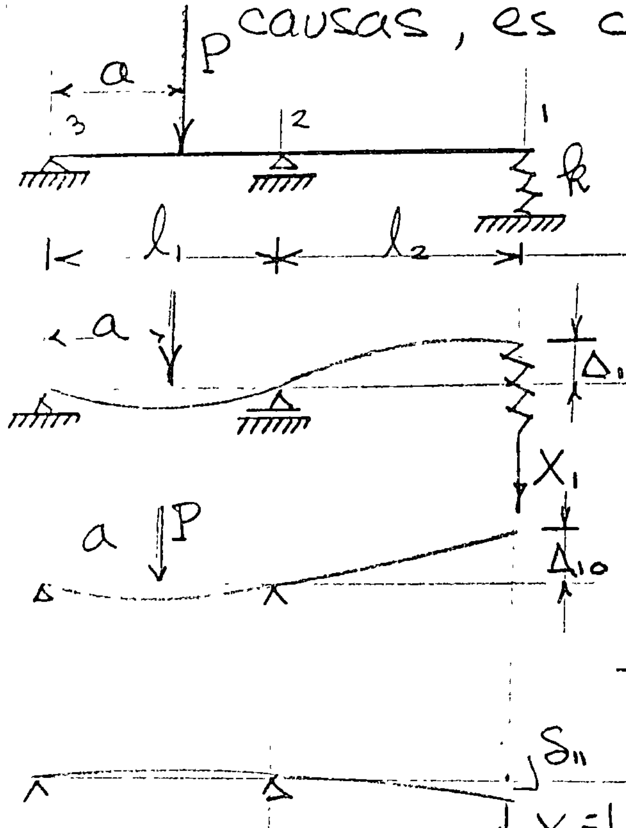
1.2.3.3.- Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de superposisión.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

1- Nunca seleccionar como redundante una reacción estaticamente determinada, ello conducirá a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición $X_i = 0$

2- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido

3- Debe observarse que Δ_i, deflexión total del punto de aplicación de la redundante X_i debida a todas las causas, es casi siempre cero.



Estructura actual

k constante elástica resorte $\left[\frac{L}{F}\right]$

Estructura primaria

$$\Delta_1 = X_1 k \qquad (c)$$

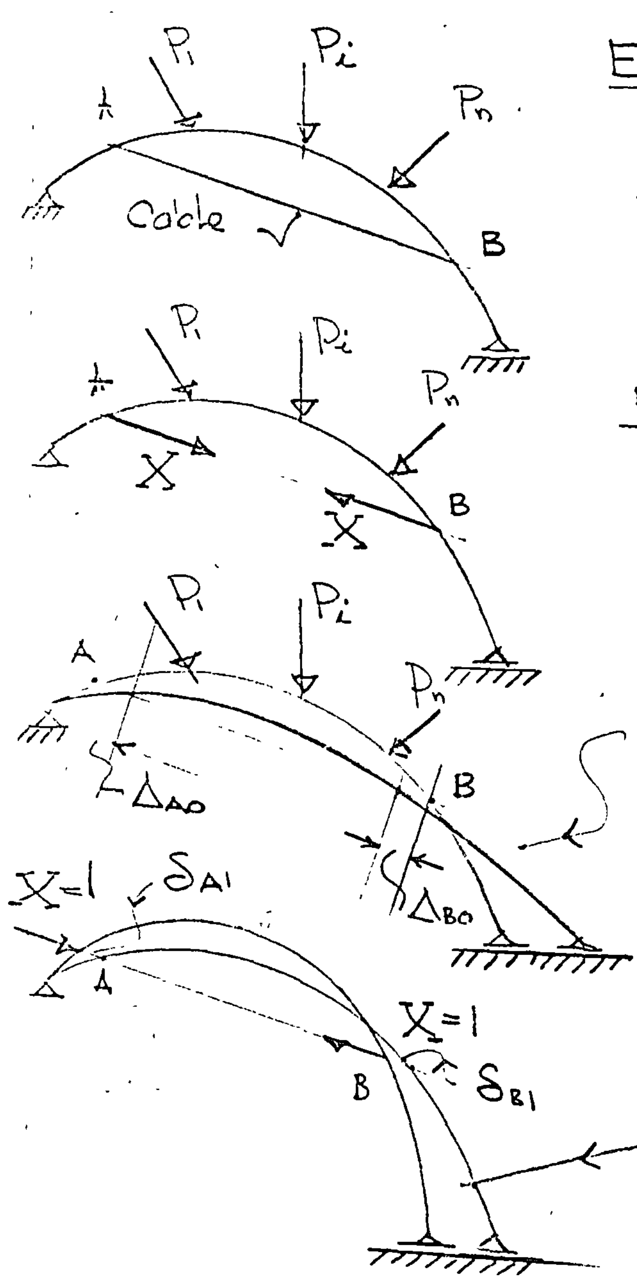
Condición $X_1 = 0$

Condición $X_1 = 1$

De Ec. (a) se tiene

$$\Delta_1 = \Delta_{10} - X_1 \delta_{11} \qquad (d)$$

de (c) y (d) se obtiene $\boxed{X_1 = \frac{\Delta_{10}}{}}$ (e)



Estructura actual:

Arco coplanar con un tirante AB bajo un sistema de cargas P_n

Estructura primaria

Selección como redundante la tensión en el cable, X.

Condición X=0

Condición X=1

$$\Delta_{AB} = \Delta_{AO} + \Delta_{BO} \qquad (f)$$

$$\Delta_A = \Delta_{AO} + X\delta_{A1} \qquad (g)$$

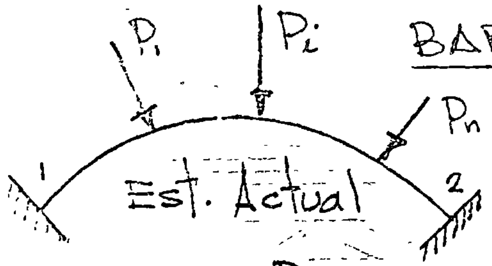
$$\Delta_B = \Delta_{BO} + X\delta_{B1} \qquad (h)$$

Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{AO} + \Delta_{BO} + X(\delta_{A1} + \delta_{A2}) = 0$$

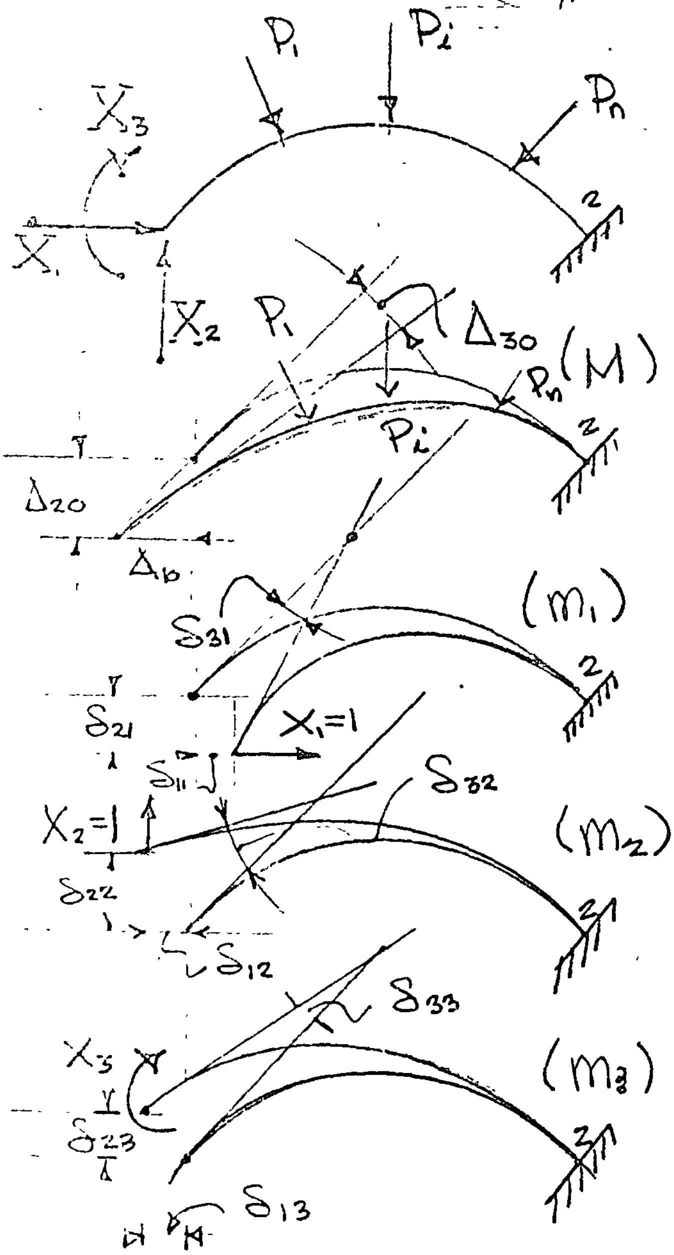
de donde despejando la redundante X se tiene

$$\boxed{X = -\frac{\Delta_{AO} + \Delta_{BO}}{\delta_{A1} + \delta_{B1}}} \qquad (i)$$



BARRA PLANA EMPOTRADA

Problema hiperestático de orden 3



Estructura Primaria

Selección de redundantes X_1, X_2, X_3 y condición de empotramiento $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$

Condición $X=0$

Condición $X_1=1$

Condición $X_2=1$

Condición $X_3=1$

Las ecuaciones aplicando el principio de superposisión son

$$\Delta_1 = \Delta_{01} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}$$
$$\Delta_2 = \Delta_{02} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} \qquad (I)$$
$$\Delta_3 = \Delta_{03} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}$$

expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{01} \\ \Delta_{02} \\ \Delta_{03} \end{bmatrix} \qquad (k)$$

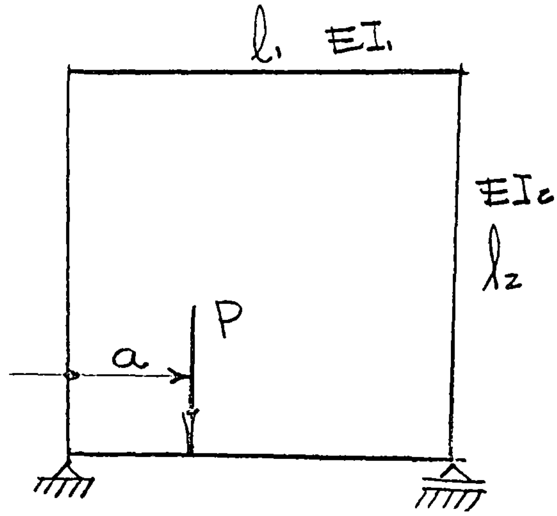
Aplicando el Teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} son igual a

$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

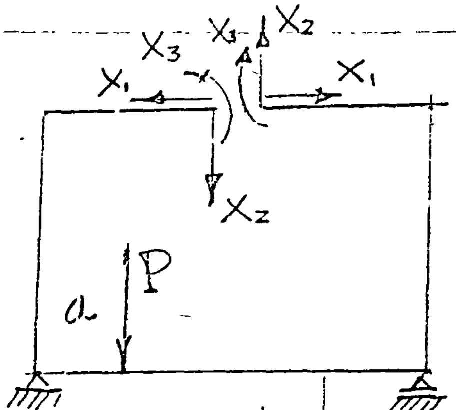
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI} \qquad (l)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

MARCO CONTINUO RECTANGULAR BAJO LA ACCION DE UNA CARGA P



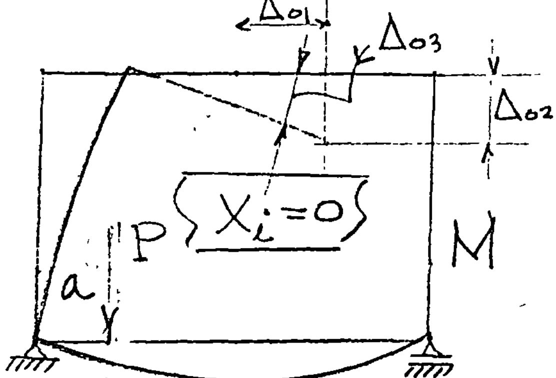
Estructura actual



Estructura primaria:

Selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposisión son:



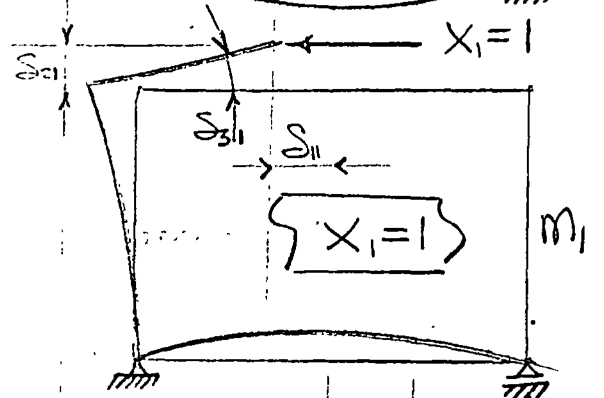
$$\Delta_1 = \Delta_{01} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{02} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0 \quad (m)$$

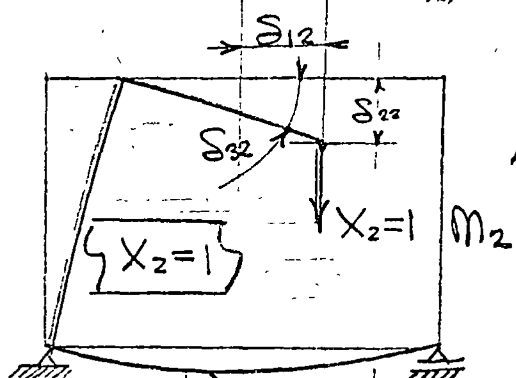
$$\Delta_3 = \Delta_{03} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

ó

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{01} \\ \Delta_{02} \\ \Delta_{03} \end{bmatrix} \quad (n)$$



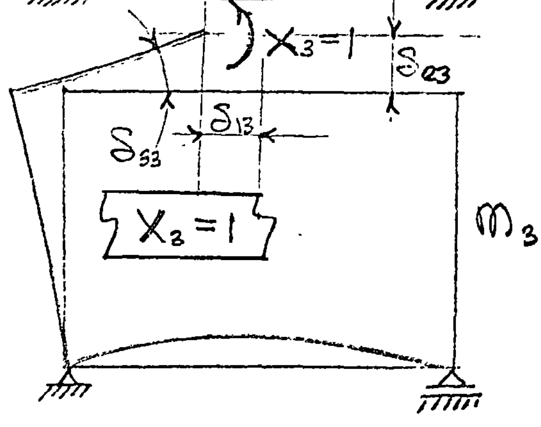
Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación se obtienen los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} y Δ_{0i}.



$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

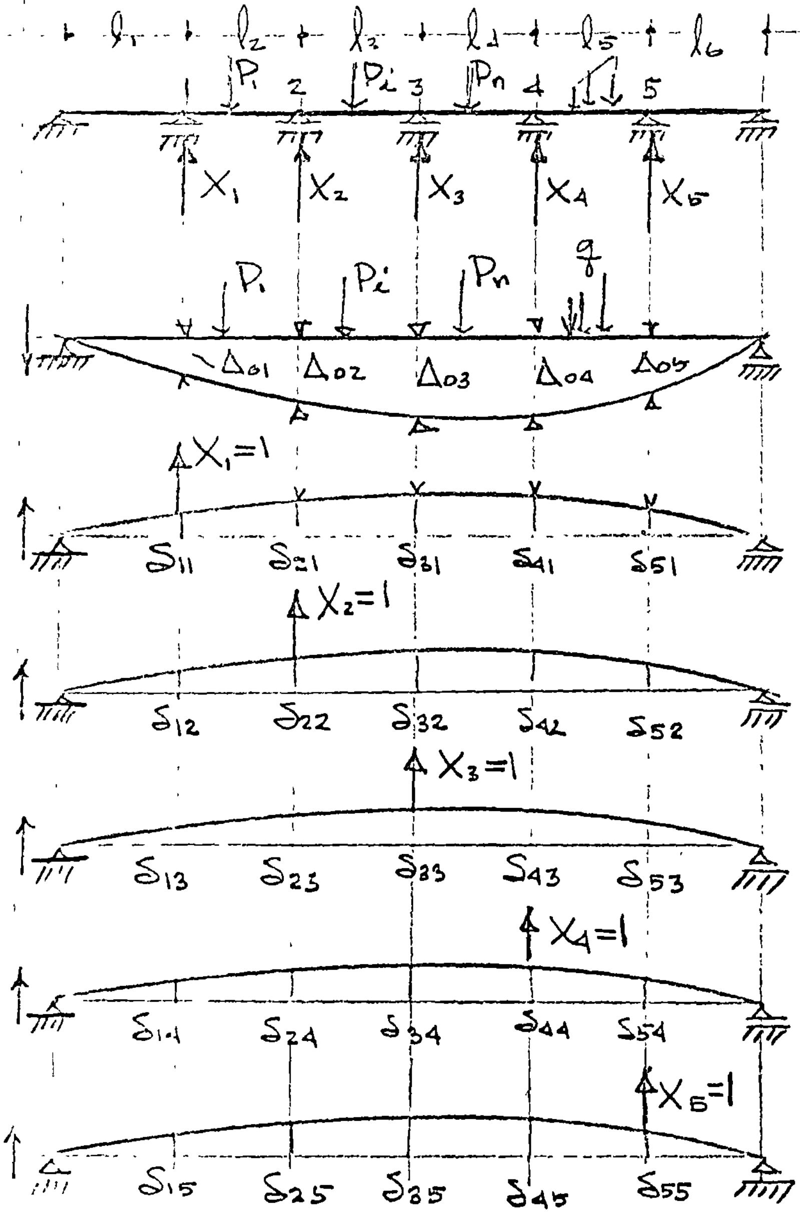
$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$



$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

Viga continua de 7 apoyos

ESTRUCTURA ACTUAL Y PRIMARIA



Condición $X_i=0$

Condición $X_1=1$

Condición $X_2=1$

Condición $X_3=1$

Condición $X_4=1$

Condición $X_5=1$

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª Ecuación

$\Delta_1 = \Delta_{01} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} = 0$ 1ª Ec

$\Delta_2 = \Delta_{02} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} = 0$ 2ª "

$\Delta_3 = \Delta_{03} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} = 0$ 3ª "

$\Delta_4 = \Delta_{04} + X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} = 0$ 4ª "

$\Delta_5 = \Delta_{05} + X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} = 0$ 5ª "

$$[\delta_{ij}][X_j] = -[\Delta_{0j}]$$

1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación. La misma conclusión es valida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultaneamente e incrementan gradual mente hasta su valor final. Si

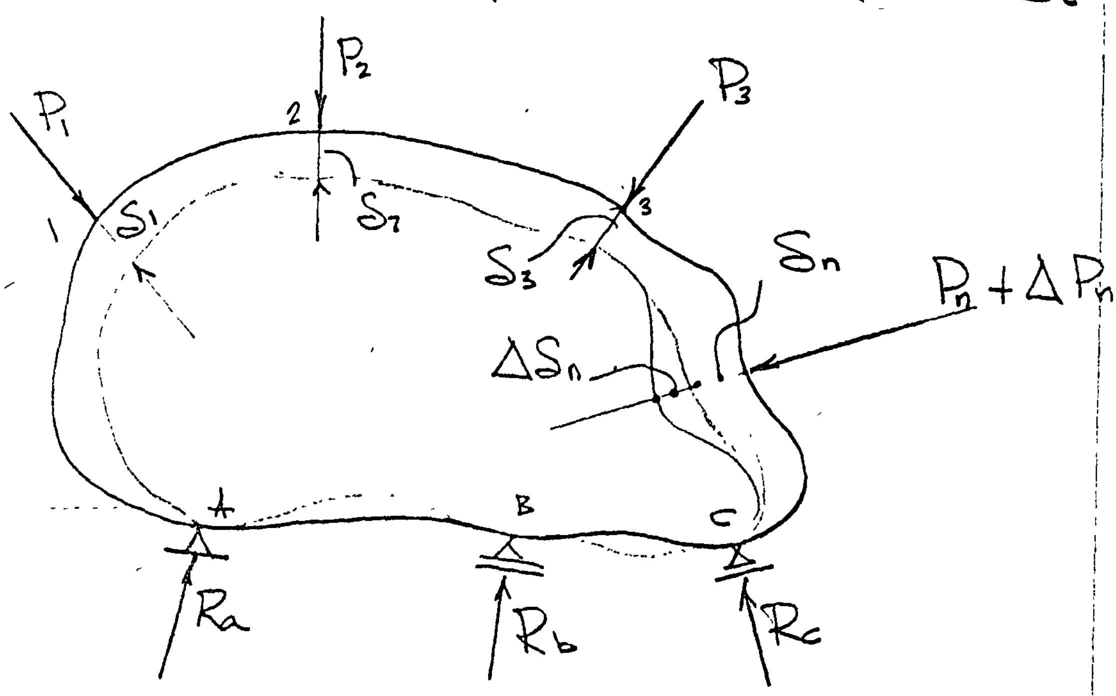


Fig. 1.3.1

el principio de superposición rige, los desplazamientos seran funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas

Substituyendo (b) en (a) se obtiene

$$U = \frac{\ell^3}{96EI}\left(P^2 + \frac{6}{\ell}PM_a + \frac{6}{\ell}PM_b + \frac{16}{\ell^2}M_a^2 + \frac{16}{\ell^2}M_b^2 + \frac{16}{\ell^2}M_aM_b\right) \quad (c)$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, M_a y M_b

Tarea

En el ejemplo de la viga de la Fig 1.3.1a

Demostrar:

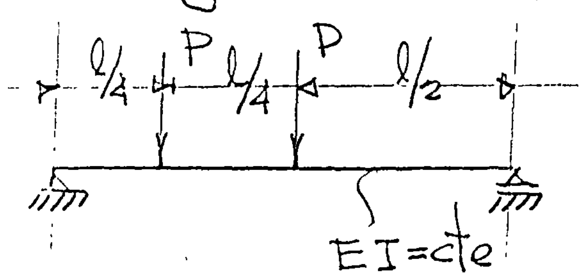
a) $\frac{\partial U}{\partial P} = \delta$, $\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a$, $\frac{\partial U}{\partial M_b} = \theta_b$

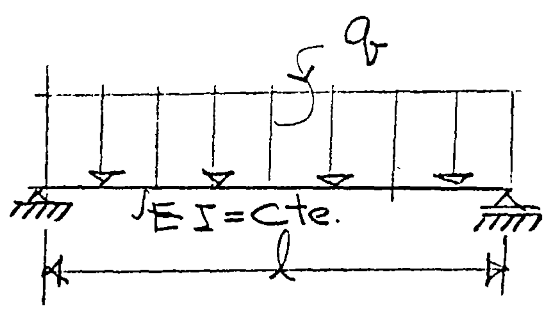
b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos δ, θ_a, θ_b

c) Demostrar que

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a} = M_a, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b} = M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal bh





las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}P_i\delta_i=\frac{1}{2}\left(P_1\delta_1+P_2\delta_2+\cdots+P_n\delta_n\right) \qquad (1.3.1)$$

1.3.1.- Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la Fig. 1.3.1a

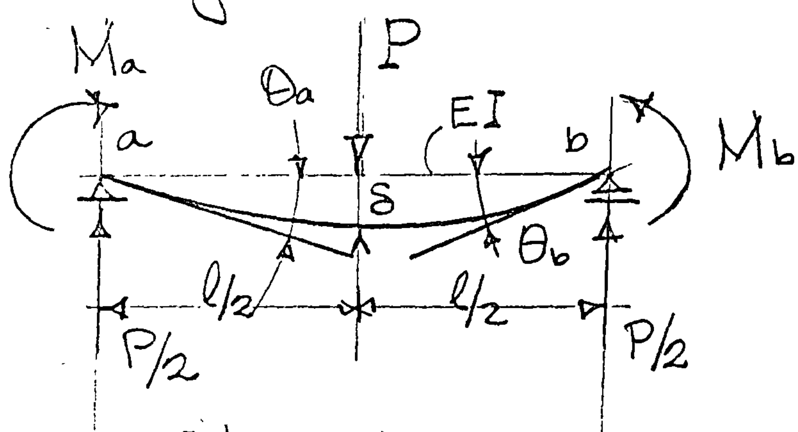


Fig. 1.3.1a

La energía de deformación es

$$U=\frac{1}{2}\left(P\delta+M_a\theta_a+M_b\theta_b\right) \qquad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left.\begin{aligned}\delta&=\frac{Pl^3}{48EI}+\frac{M_al^2}{16EI}+\frac{M_bl^2}{16EI}\\ \theta_a&=\frac{Pl^2}{16EI}+\frac{M_al}{3EI}+\frac{M_bl}{6EI}\\ \theta_b&=\frac{Pl^2}{16EI}+\frac{M_al}{6EI}+\frac{M_bl}{3EI}\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

1.4 Teorema de Castigliano

Suponiendo que el principio de superposición rige, y que U se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS NOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA CORRESPONDIENTE FUERZA O MOMENTO

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \qquad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicacion de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Durante la aplicación de P_i se producen deformaciones δ_i y se almacena cierta energía de deformacion dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1). Si subsecuentemente a P_n se aplica un incremento ΔP_n, la energía U incrementará

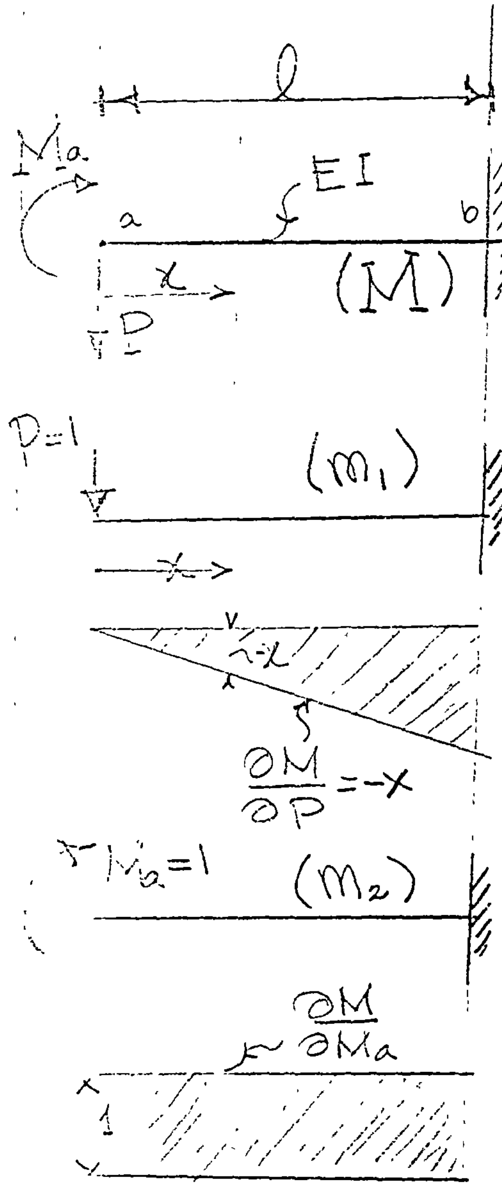
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \qquad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar ΔP_n después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n(\delta_n + \Delta \delta_n) = U + \Delta P_n \delta_n \qquad (1.4.3)$$

igualando (1.4.2) con (1.4.3) se demuestra (1.4.1)

1.4.1 Ejemplos de aplicación



La variación de $M(x)$ es

$$M = M_a - Px \qquad (a)$$

La energía de deformación por flexión.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (b)$$

Del Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\delta_a = \int_0^l \frac{M\, m_1}{EI} ds \qquad (c)$$

Substituyendo (a) en (c)

$$\delta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(-x)\, dx$$

$$\delta_a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{M_a l^2}{2EI} \qquad (d)$$

De nuevo del Teorema de Castigliano

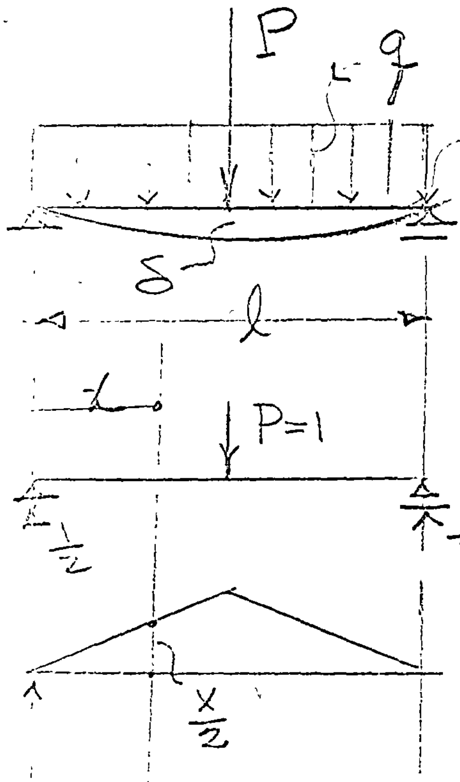
$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_a}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M\, m_2}{EI} dx \qquad (e)$$

Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\theta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(1)\, dx = \frac{M_a l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculó U en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flector debido a causas unitarias P y M_a.



$$M = \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad (f)$$

$$m = \frac{x}{2} \qquad (g)$$

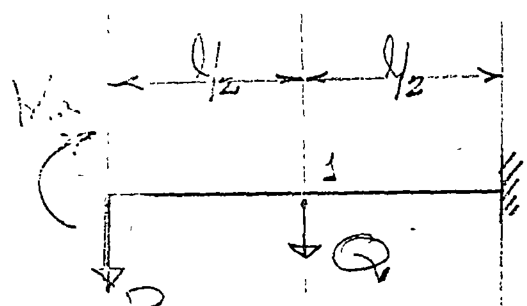
De la energía de deformación por flexión y el Teorema de Castigliano

$$\delta = 2\int_0^{l/2} \frac{Mm}{EI}\,dx \qquad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = 2/EI \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{584}\frac{ql^4}{EI} \qquad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivando con respecto a ella.



$$M = M_a - Px \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2} \qquad (i)$$

$$M = M_a - Px - Q\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (j)$$

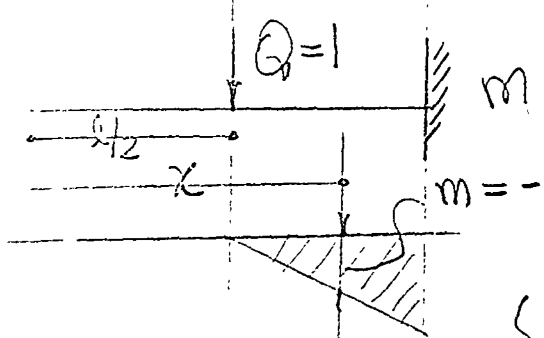
para $\frac{l}{2} \le x \le l$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (k)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$ energía de def. por flexión

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = -\int_{l/2}^{l} \frac{1}{EI}(M_a - Px)\left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

$$\delta_1 = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{M_a l^2}{8EI} \qquad (l)$$



$m = -1(x - l/2)$

$$\delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx \qquad (m)$$

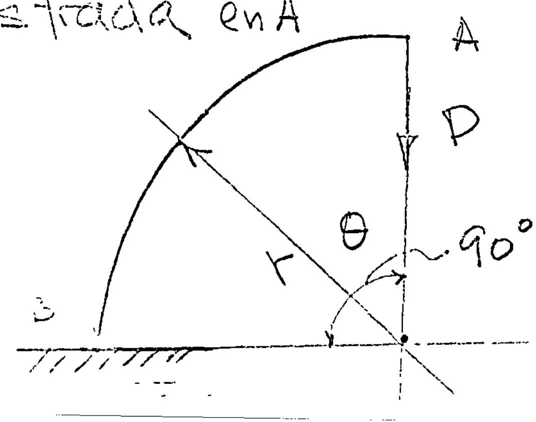
{en este caso $\frac{\partial U}{\partial Q} = 0 \quad 0 \le x \le l/2$}

En conclusión se observa que la derivación del Teorema de Castigliano, fué basada en el principio de superposición. De allí que la energía de deformación U debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuantes. Sí el principio de superposición no rige y U no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

Ejemplos de Tarea

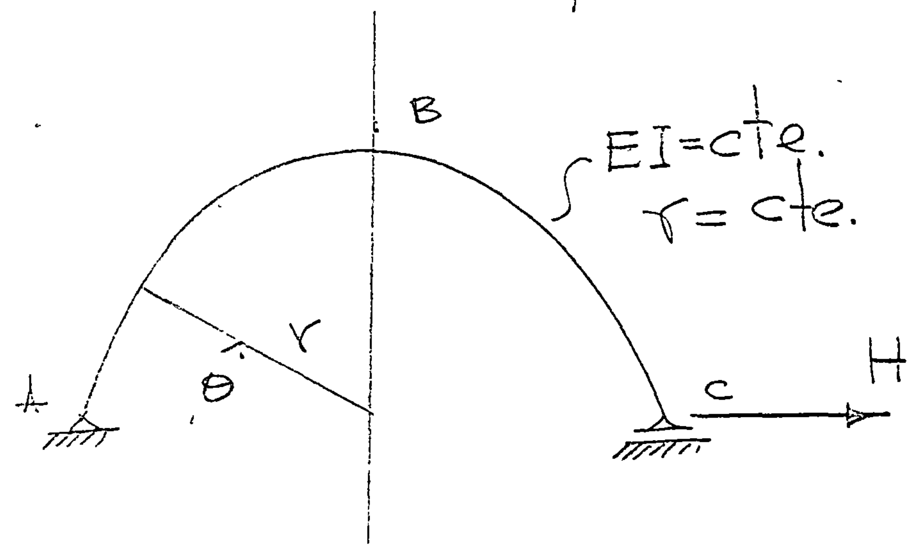
a) Utilizando el Teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme q, claro l, y rigidez flexionante EI = constante.

b) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de la viga curva mostrada en A

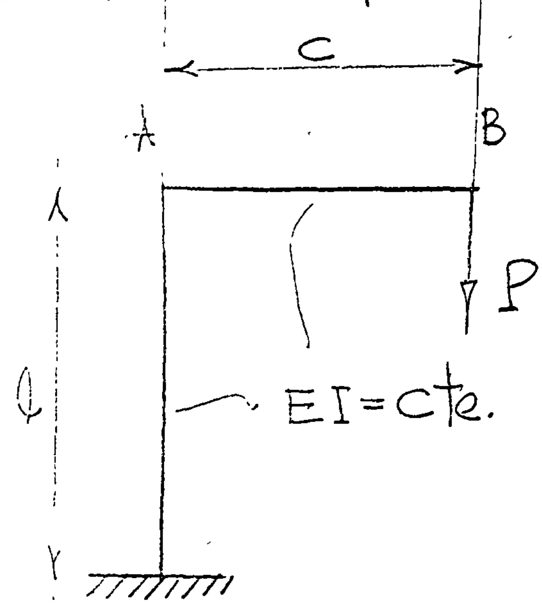


r = cte

c) Determinar el desplazamiento horizontal en C y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



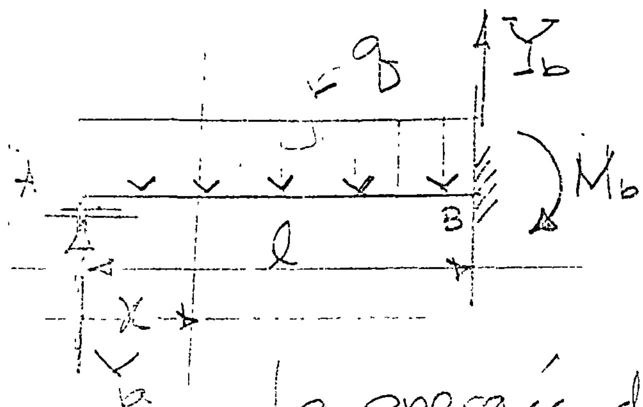
1.5 Teorema del Trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cualquier redundante deberá ser cero si su acción es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las magnitudes de las reacciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal que la energía de deformación del sistema en dicho punto sea máxima o mínima, lo anterior es el método del Trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0,\ \frac{\partial U}{\partial X_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial U}{\partial X_n}=0 \qquad (1.5.1)$$

1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme. (grado $n=1$).



La energía de deformación del sistema por flexión es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (a)$$

Del Teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a}\left[\int \frac{M^2 dx}{2EI}\right] = \frac{1}{EI}\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \qquad (b)$$

$$M = Y_a x - \frac{q x^2}{2} \qquad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = x \qquad (d)$$

Substituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l \left(Y_a x - \frac{q x^2}{2}\right) x\,dx = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{q l^4}{8} = 0$$

de donde $\quad Y_a = 3/8\, q l \qquad (e)$

En el sistema se tienen 3 reacciones Y_a, Y_b, M_b y 3 ecuaciones dos de estática y una del Teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior si se considera
si se considera como redundante M_b
se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{\partial}{\partial M_b}\left[\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}\right] = \frac{1}{EI}\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = 0 \qquad (f)$$

el momento flector es

$$M = \left(\frac{ql}{2} - \frac{M_b}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2} \qquad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{x}{l} \qquad (h)$$

substituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

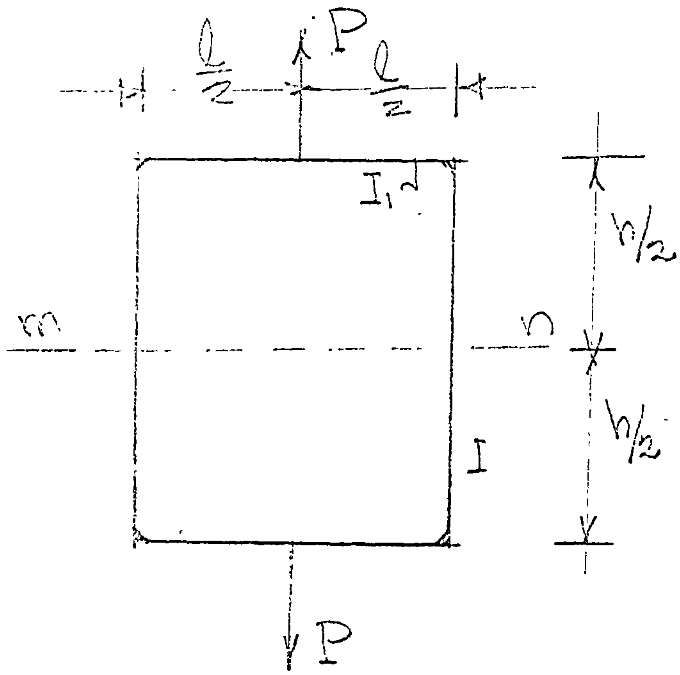
$$\int_0^l \left[\left(\frac{ql}{2} - \frac{M_b}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2}\right]\frac{x}{l} dx = 0 \qquad (i)$$

integrando (i) y despejando M_b se obtiene

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \qquad (j)$$

Ejemplos de Tarea

1- Determinar los momentos en la sección m-n en la estructura mostrada



2 -

2.- METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

2.1 Métodos de Fuerzas y Deformación

En los métodos de analisis de sistemas estáticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el teorema del Trabajo mínimo considerando la energía de deformación del sistema. Este procedimiento general es llamado el método de las fuerzas.

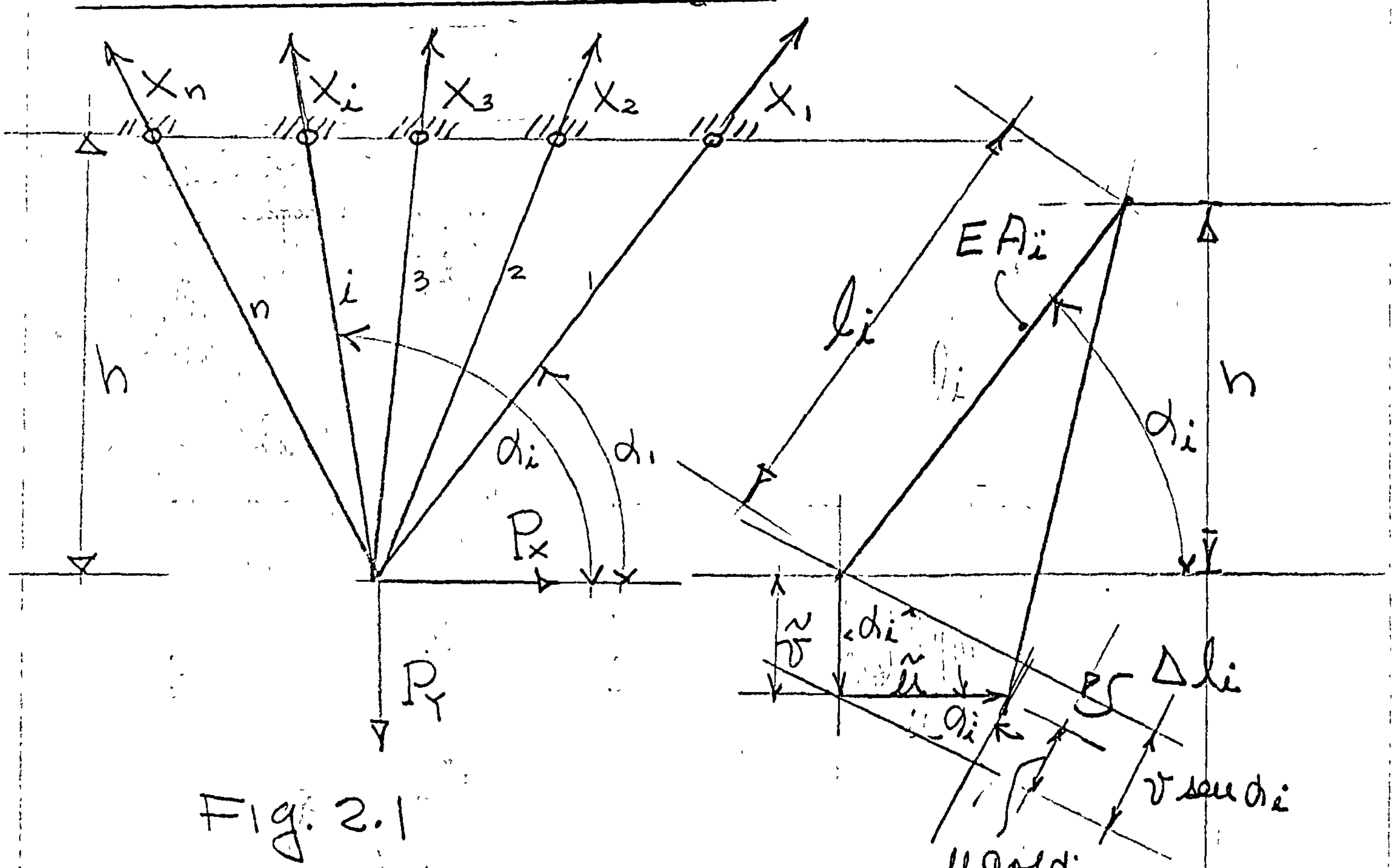


Fig. 2.1

Para ilustrar en un mismo ejemplo

la distinción entre los dos métodos, consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas P_x y P_Y con n barras, el número de redundantes sea $n-2$. Entonces para determinar las redundantes $X_1, X_2, \ldots X_{n-2}$, se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el Teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0, \frac{\partial U}{\partial X_2}=0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}}=0 \qquad (a)$$

lo anterior es el método de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier[1] sugirió el método de desplazamientos. La deformación del sistema de la figura 2.1 estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontal y vertical u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños

[1] Navier, "Résumé des leçons", 2 ed., p. 345, Paris, 1833.

la deformación axial de cualquier barra i será

$$\Delta l_i = v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i \qquad (b)$$

y de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{E A_i}{l_i}(v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i) \qquad (c)$$

de la figura 2.1

$$l_i = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha_i} \qquad (d)$$

substituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{E A_i}{h}(v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i) \operatorname{sen} \alpha_i \qquad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\sum X_i \cos \alpha_i = P_x \qquad (f)$$

$$\sum X_i \operatorname{sen} \alpha_i = P_y \qquad (g)$$

substituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$v \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cos \alpha_i - u \sum_{i=1}^{n} A_i \cos^2 \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{P_x h}{E} \qquad (i)$$

$$v \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^3 \alpha_i - u \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cos \alpha_i = \frac{P_y h}{E} \qquad (j)$$

de (i) y (j) se determinan u y v las cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza X_i en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideración de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificación substancial, especialmente si el número de barras n es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incógnitas que son las deformaciones u y v. En el caso del método de las fuerzas tendremos que resolver $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incógnitas. Es conveniente observar que el método de las deformaciones involucró 3 etapas básicas que son

ecuación (b): Compatibilidad geométrica de deformaciones, u, v y Δl.

ecuación (e): Ley de Hooke.

ecuaciones (f) y (g): Equilibrio

2.2 Elementos de algebra matricial

2.2.1 En la solución de sistemas estáticamente indeterminados independientemente de que se el método de las fuerzas o deformaciones es necesario la solución de ecuaciones simultaneas lineales algebraicas. Independientemente de cualquier problema de analisis estructural, un sistema de tales ecuaciones será

$$
\begin{array}{c}
\\
m \text{ hileras}
\end{array}
\begin{array}{l}
\overbrace{\hspace{6cm}}^{n \text{ columnas}} \\
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m
\end{array}
\right.
\end{array}
\qquad (a)
$$

$$
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
$$

$$
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n
$$

Para simplificar la técnica de la solución de (a), es conveniente utilizar algebra matricial, en notación matricial (a) puede escribirse

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}
\qquad (b)
$$

ó

$$
[a_{ij}][x_j] = [c_i] \quad (i, j = 1, 2, \ldots n) \qquad (c)
$$

ó

$$
Ax = c \qquad (d)
$$

cada arreglo de números dentro de los parentesis angulares es llamado "matris", los números o símbolos se llaman elementos, y en (a) se tienen m hileras y n columnas, la matris se dice que es de orden m×n. Cuando hay solamente una columna o una hilera de elementos en la matris es llamada vector columna o vector hilera. Se entiendo que la matris $[a_{ij}]$ en (b) opera sobre el vector columna $[x_j]$ en tal forma que produce el sistema de ecuaciones (a).

Es conveniente mencionar que el uso de métodos matriciales no representa no representa ninguna revolución en el analisis de sistemas estructurales elásticos lineales, es realmente ventajoso para el uso de las computadoras electronicas digitales

2.2.2 Suma de matrices.

Para sumar dos matrices, simplemente se suman los elementos correspondientes para obtener la matris suma. Es posible solamente si las dos matrices son del mismo orden m×n. la regla de suma se establece simbolicamente como sigue

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \qquad (e)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) \cdots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix}$$

2.2.3 Resta de matrices

Similarmente a (2.2.2) la regla de resta de matrices es

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [(a_{ij} - b_{ij})] \qquad (f)$$

de lo anterior se observa que dos matrices son iguales si son iguales sus elementos correspondientes, $a_{ij} = b_{ij}$.

De la regla de suma de matrices, para multiplicar una matriz dada por un número escalar λ, simplemente se multiplica cada elemento por λ, simbólicamente

$$\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \qquad (g)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (g)$$

2.2.3 Multiplicación de matrices

Para obtener el producto AB de dos matrices A y B, se tiene lo siguiente el elemento c_{ij} de la hilera i de A y la columna j de B, de la matris producto es obtenido multiplicando la hilera i de A con la columna j de B, elemento por elemento, y sumando los productos obtenidos. Si A es de orden $m \times n$ y B del orden $n \times q$. En forma simbólica, el elemento c_{ij} de la matris producto $C = AB$ será

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} = (a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}) \qquad (k)$$

o sea:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 \cdots & j & \cdots & n \end{array}}^{\text{columnas}} \\ \text{hileras}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array}\right. & \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mj} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \overbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 \cdots & j & \cdots & q \end{array}}^{\text{columnas}} & \\ \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1j} & \cdots b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2j} & \cdots b_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} \cdots & b_{ij} & \cdots b_{iq} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nj} & \cdots b_{nq} \end{bmatrix}} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array}\right\}\text{hileras} \end{array} \qquad (i)$$

$A \equiv [a_{ij}]$ orden $m \times n$ $\qquad$ $B \equiv [b_{ij}]$ orden $n \times q$

(hileras) x (columnas)

$$\begin{bmatrix} \overbrace{(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n1})}^{c_{11}} & \overbrace{(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2})}^{c_{12}} & \cdots & \overbrace{(a_{11}b_{1q}+a_{12}b_{2q}+\cdots+a_{1n}b_{nq})}^{c_{1q}} \\ \overbrace{(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n1})}^{c_{21}} & \overbrace{(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2})}^{c_{22}} & \cdots & \overbrace{(a_{21}b_{1q}+a_{22}b_{2q}+\cdots+a_{2n}b_{nq})}^{c_{2q}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overbrace{(a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1})}^{c_{m1}} & \overbrace{(a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\cdots+a_{mn}b_{n2})}^{c_{m2}} & \cdots & \overbrace{(a_{m1}b_{1q}+a_{m2}b_{2q}\cdots a_{mn}b_{nq})}^{c_{nq}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$C=[c_{ij}]=\left[(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})\right] \quad (2)$$

orden $n \times q$ n hileras, q columnas

Debe observarse que la multiplicación $[a_{ij}][b_{ij}]$ es posible solamente si el número de columnas de $A \equiv [a_{ij}]$ es igual al número de hileras de $B \equiv [b_{ij}]$

Es necesario observar que la multiplicación matricial no es conmutativa, es decir, $AB \neq BA$.

Ejemplo sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A es de orden 2×3 y B de orden 3×2
el numoro de columnas de A es igual al numero de hileras de B, la multiplicación es posible

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{32}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

oden 2×2

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) & (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) & (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}) \\ (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21}) & (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22}) & (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}) \end{bmatrix}$$

orden 3×3

se verifica que $AB \neq BA$

No siempre ambos productos existen AB y BA.

Volviendo a la expresión matricial (b) del sistema de ecuaciones lineales algebraicas (a), al efectuar la multiplicación $[a_{ij}][x_j]$ se obtiene el sistema de ecuaciones. Ello explica la razón por la cual se ha establecido la regla anterior de multiplicación matricial.

2.2.4 Transposisión de matrices

La matris transpuesta de A, representada por A', se obtiene reescribiendo la matriz A en tal forma que sus hileras llegan a ser columnas, tomadas en la misma secuencia y viceversa. Simbólicamente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}] \equiv A \qquad (l)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ji}] = [a_{ij}]' = A' \qquad (m)$$

Considerando la regla de multiplicación junto con la de transposisión se demuestra el producto matricial transpuesto $(AB)'$ es igual al producto conmutado de las transpuestas individuales.

$$(AB)' = B'A' \qquad (n)$$

2.2.5 Matris unitaria

La matris

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (o)$$

es llamada matris unitaria de orden $n \times n$, tiene todos los elementos cero excepto los de la diagonal principal que son igual a la unidad. En algebra matricial la matris unitaria I corresponde en todas las formas a la idea de unidad del algebra ordinaria.

Si una matris unitaria es multiplicado por un número escalar λ se obtiene

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \qquad (p)$$

la cual se como matris escalar

2.2.6 Matris diagonal

Una matris de la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

es llamada matris diagonal de orden n. La matris unitaria I y la matris escalar λI, son por supuesto casos especiales de matris diagonal.

Hay varios otros tipos especiales, de matrices, pero las introducidas serán suficientes para nuestros propósitos. En resumen tenemos:

a) La matris rectangular de orden $m \times n$
b) " " cuadrada " " $n \times n$
c) El vector hilera $[X_i]$
d) " " columna $[X_j]$
e) La matris unitaria de orden $n \times n$
f) " " escalar " " "
g) " " diagonal " " "

2.2.7 Inversion de matrices

Volviendo de nuevo al sistema de ecuaciones (a), (b), (c) ó (d) y escribiéndolo en la forma matricial $AX = C$, establecemos por definición que la solución puede ser expresada en la siguiente forma:

$$x = \frac{c}{A} = A^{-1}c = Rc$$

ó

$$x = \frac{[c_j]}{[a_{ij}]} = [a_{ij}]^{-1}[c_j] \qquad (r)$$

esto nos da la idea de dividir una matriz por otra, o, más apropiadamente, de encontrar la reciproca R de una matriz dada A. Este proceso es llamado inversión. Para efectuarlo, se busca una matriz R tal que $RA = I$, donde I es la matris unitaria. Es importante observar que un sistema de ecuaciones simultaneas tendrá una solución única solamente si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, por lo tanto $A = [a_{ij}]$ será siempre una matris cuadrada de orden $n \times n$ ó un determinante de orden n. De lo contrario, el concepto de inversión de matrices no tiene significado.

Existen varios procedimientos para la inversión de una matris cuadrada. A continuación describiremos ~~uno de~~ los procedimentos. Primero es necesario introducir el concepto de adjunta de una matris dada A lo cual se escribe Adj A. Se define como la transpuesta de otra matris C formada por los cofactores de los elementos a_{ij} de la matris dada A.

la ilustración de lo anterior se puede observar mediante el siguiente ejemplo.

Sea la matris dada

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Entonces la matris C, formada por los cofactores de A, será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (t)$$

donde el determinante

$$|b_2 c_3| \equiv \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3 \quad \text{es}$$

es llamado el cofactor del elemento a_1

$$-|b_1 c_3| \equiv -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - c_1b_3)$$ es el

cofactor del elemento a_2. La regla de signos para los cofactores es

$$\begin{bmatrix} (+) & (-) & (+) & \cdots \\ (-) & (+) & (-) & \cdots \\ (+) & (-) & (+) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

En general para determinar el cofactor de un elemento cualquiera a_{ij} de una matris de orden $n \times n$, se tacha la hilera i y la columna j y se escribe el determinante de los términos remanentes de acuerdo con la regla de signos mencionada, por ejemplo en el ejemplo anterior el cofactor del elemento a_2, con $i = 2$, $j = 1$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & \cancel{c_2} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; \quad \text{cof de } a_2 \equiv A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Habiendo obtenido la matris C de los cofactores de la matris (s), de acuerdo con la regla anterior la matris adjunta de A, definida como la transpuesta de C, será

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} |b_2 c_3| & -|b_1 c_3| & |b_1 c_2| \\ -|a_2 c_3| & |a_1 c_3| & -|a_1 c_2| \\ |a_2 b_3| & -|a_1 b_3| & |a_1 b_2| \end{bmatrix} \quad (u)$$

Cuando la adjunta de una matris cuadrada A ha sido formada, se puede demostar que

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = |A|\, I \qquad (v)$$

donde $|A|$ es el determinante de A y I es la matris unitaria. Dividiendo (v) por $|A| \neq 0$,

$$\frac{A(\operatorname{adj} A)}{|A|} = \frac{(\operatorname{adj} A)A}{|A|} = I = R\underline{A}$$

Entonces,

$$R = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} = |A|^{-1} \operatorname{adj} A \qquad (w)$$

es la requerida inversa de A

Siguiendo las reglas para invertir cualquier matris cuadrada, puede fácilmente demostrarse que la inversa de cualquier matris diagonal será obtenida simplemente invirtiendo cada uno de los elementos a lo largo de la diagonal principal. Entonces, si

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conociendo ahora el método de inversión de una matris cuadrada, se puede ilustrar la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas algebraicas lineales de orden 3×3, considerando

$$3x + 2y - z = 4$$
$$x - y - 2z = 5$$
$$-2x + y - z = -3$$

En notación matricial estas ecuaciones se escriben en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

la matris C de los cofactores de A será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

la adjunta de A será la transpuesta de C

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

Para determinar el valor del determinante de A, se desarrolla por cofactores de los elementos de la primer hilera y se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 2(3) - 1(-1) = -3 - 6 + 1 = -8$$

Finalmente despejando el vector columna de ecuaciones (Y) y (W)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1\times4 + 1\times5 + 3\times(-3) \\ -3\times4 - 5\times5 - 7\times(-3) \\ -1\times4 - 7\times5 - 5\times(-3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Esto es, $x=1$, $y=2$, $z=3$ representa la solución requerida. Este ejemplo simple involucra muchas de las operaciones de algebra matricial previamente discutidas, y el estudiante que todas las etapas son claras a él antes de seguir posteriormente.

Es conveniente mencionar algunos ejemplos de escribir expresiones algebraicas en notación matricial. Por ejemplo,

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \qquad (x)$$

multiplicando el vector hilera por el vector columna

$$[a_1\ a_2 \ldots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

De nuevo tomando

$$c = a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \cdots + a_{nn} x_n y_n \qquad (y)$$

en conección con (y) definimos las siguientes matrices:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Transponiendo el vector columna x en el vector hilera x' y efectuando la multiplicación $x'Ay$ se obtiene

$$[x_1\ x_2 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \cdots + a_{nn} x_n y_n]$$

de lo anterior se ve que la ecuación (y) puede ser expresada matricialmente como

$$c = x' A y$$

2.2.8 Problemas de tarea

1- Determinar la matris suma A+B sí

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2- De los valores de A y B en 1 determinar la matris producto AB

3- De los valores AB de del Prob 1 determinar la matris producto BA

4- Escribir las transpuesta de cada una de las matrices dadas en el problema 1

5- Dadas las matrices cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

demuestre que B es la adjunta de A y determine la matris producto AB.

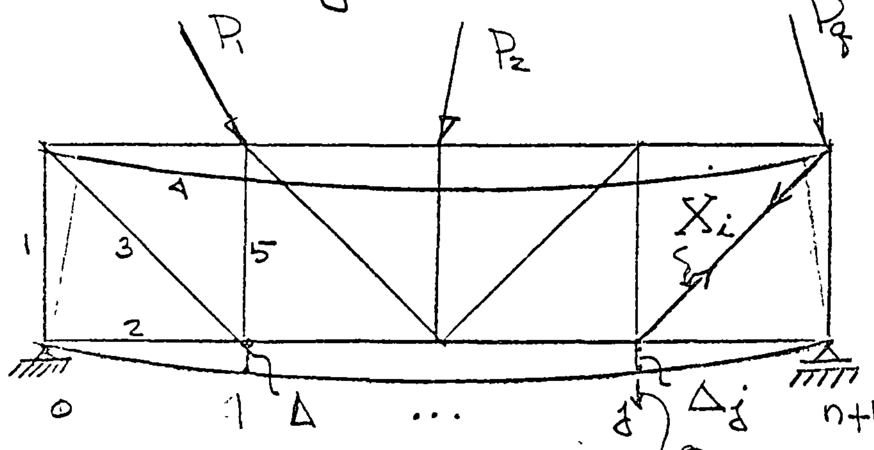
2.2.9 Referencias para algebra matricial.

a) Fuller, E.L. "Basic matrix theory", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

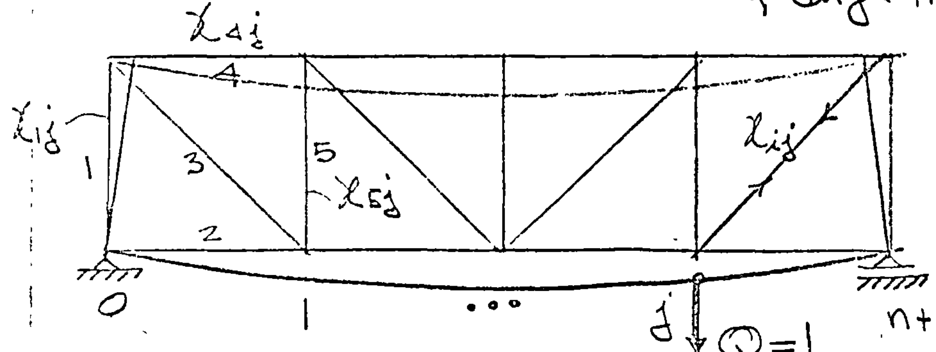
b) Aitken A.C. "Determinants and Matrices," Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

2.3 Aplicaciones de métodos matriciales a armaduras planas.

Para ilustrar el uso de métodos matriciales en el analisis de armaduras articuladas en los nudos, comensaremos considerando un problema de deflexiones. En la Fig. 2.3.1 se tiene una armadura con m miembros sujeta de un sistema externo de cargas P_i, y se requiere determinar la deflexión vertical del nudo j debida al sistema de cargas P_i. Si X_i representa las fuerzas axiales en la estructura real y x_{ij} los fuerzas axiales en la extructura bajo la condición de carga unitaria en j



Estructura real ó actual



condición Q=1

$$\frac{\partial U}{\partial Q}=1$$

Del Teorema de Castigliano y la energía de deformación por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i^2 l_i}{2AE} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i x_{ij} l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^{m} X_i x_{ij} P_i \qquad (b)$$

donde $P_i = \frac{l_i}{EA_i}$ es el factor de flexibilidad de la barra i.

Si se desean calcular las n deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores x_{ij} para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los numeros de influencia en la forma de una matris de orden $m \times n$ como sigue:

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (c)$$

(c) se denomina matris de geometría de la armadura.

Acomodando los factores de flexibilidad P_i en forma de una matris diagonal de orden $m \times m$

$$[P_i] = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \qquad (d)$$

la cual es llamada matris de flexibilidad de la armadura.

Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales X_i producidas por el sistema de cargas P_i han sido calculadas, y son arregladas en la forma de una matris vector columna

$$[X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (e)$$

la cual es llamada matris de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices las m ecuaciones (b) pueden expresarse matricialmente

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (f)$$

o sea con notación indicial

$$[\Delta_j] = [x_{ij}]' [P_i] [X_i] \qquad (g)$$

Como un ejemplo numérico, se considera la armadura mostrada en la Fig. 2.3.2 la cual tiene $m = 9$ miembros. Supongase que se requiere determinar la deflexión vertical de los nudos superiores a y b, bajo la acción de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeración de los miembros se muestra en la figura, así como sus dimensiones. Cada barra tiene una sección transversal $A_i = 1$ pulg^2 y un modulo de elasticidad $E = 30 \times 10^3$ Kips/pul^2

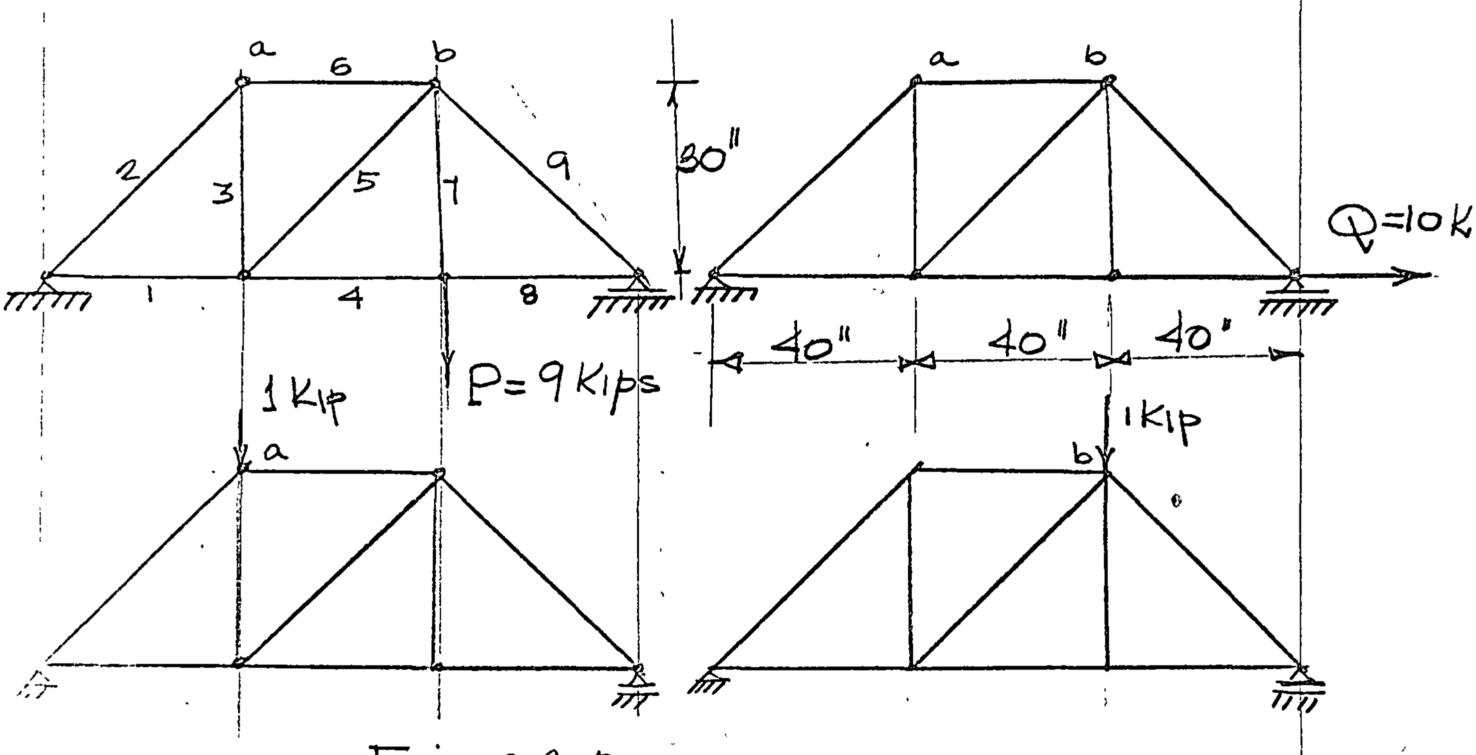


Fig. 2.3.2

El procedimento a seguir es el siguiente:

a) Se calculan las fuerzas axiales en los nueve miembros bajo las dos condiciones de carga obteniendo la matris de fuerzas

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

b) Similarmente se calculan las fuerzas axiales debido a las condiciones de fuerzas unitarias verticales en los puntos a y b respectivamente obteniendo la matris

$$[x_{ij}] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -5 \\ -3 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ -8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

c) Se calculan los coeficientes de flexibilidad $\rho_i = \frac{l_i}{A_i E}$ obteniendo la matris de flexibilidad escrita diagonalmente

$$[\rho_i] = \frac{10}{E}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad (j)$$

Substituyendo (h),(i) y (j) en (g) se obtiene

$$[\Delta_i] = [\lambda_{ij}]'[\rho_i][X_i] \qquad (g)$$

$$[\Delta_i] = \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (l)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 860 & 640 \\ 1417 & 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318'' & 0.0525'' \\ 0.0237'' & 0.0296'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ap} & \Delta_{bp} \\ \Delta_{aq} & \Delta_{bq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix} \qquad (m)$$

2.4 Analisis matricial de vigas continuas

Los ejemplos estudiados en 2.3 representan ilustraciónes de la formulación matricial del método de las fuerzas de analisis. Como una discusión de la formulación matricial del método de deformaciones.

Las ecuaciones de pendiente - deflexión de la viga mostrada en la Fig. 2.4.1.

$$M_{ab} = k(4\theta_a + 2\theta_b) + \mathcal{M}_{ab} \qquad (a)$$

$$M_{ba} = k(2\theta_a + 4\theta_b) + \mathcal{M}_{ba} \qquad (b)$$

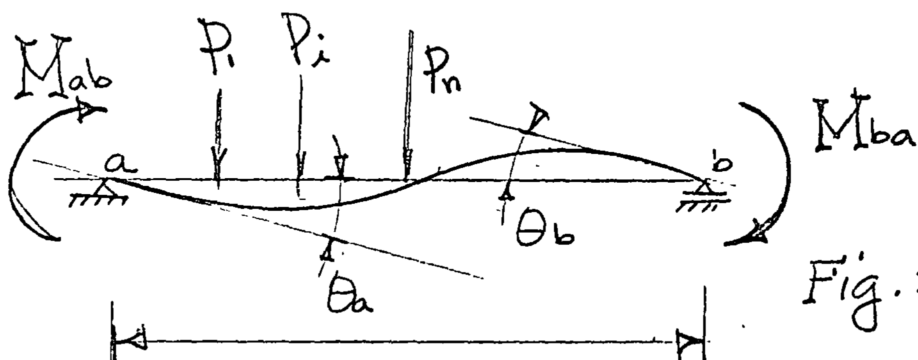


Fig. 2.4.1

donde $\mathcal{M}_{ab}$ y $\mathcal{M}_{ba}$ son los momentos de empotramiento perfecto y $k = \frac{EI}{l}$ es el factor de rigidez de la viga. (a) y (b) se pueden escribir en forma matricial

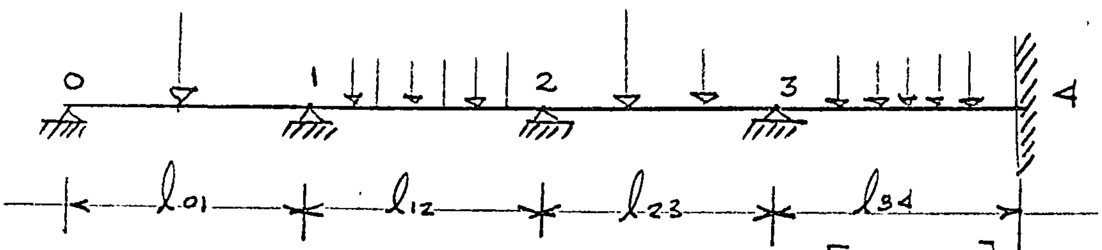
$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{ab} \\ \mathcal{M}_{ba} \end{bmatrix} \qquad (c)$$

en (c), la matris de orden 2x2 $\begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = K$ es llamada matris de rigidez de la viga.

referente a las ecuaciones (a) y (b) en el caso de una viga de sección variable

$$K = \begin{bmatrix} k\,k_{aa} & k\,k_{ab} \\ k\,k_{ab} & k\,k_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a & R \\ R & K_b \end{bmatrix}$$

Considerando una viga de 4 claros como se muestra en la Fig. 2.4.2



$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & K'_{10} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{12} & R_{12} \\ R_{21} & K_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{23} & R_{23} \\ R_{32} & K_{32} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{34} & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= K_{12}\theta_1 + R_{12}\theta_2 + \mu_{12} \\ M_{23} &= K_{23}\theta_2 + R_{23}\theta_3 + \mu_{23} \\ M_{34} &= K_{34}\theta_3 + \mu_{34} \end{aligned} \qquad (d)$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} \\ M_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12} & R_{12} & 0 \\ 0 & K_{23} & R_{23} \\ 0 & 0 & K_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{23} \\ \mu_{34} \end{bmatrix} \qquad (e)$$

En la misma forma para los extremos derechos de cada claro se tiene

$$M_{10} = K'_{10}\theta_1 + \mu'_{10}$$
$$M_{21} = R_{21}\theta_1 + K_{21}\theta_2 + \mu_{21} \qquad (f)$$
$$M_{32} = R_{32}\theta_2 + K_{32}\theta_3 + \mu_{32}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_{10} \\ M_{21} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{10} & 0 & 0 \\ R_{21} & K_{21} & 0 \\ 0 & R_{32} & K_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu'_{10} \\ \mu_{21} \\ \mu_{32} \end{bmatrix} \qquad g)$$

en cada una de las expresiones (e) y (g) el primer subindice indica el apoyo y el segundo el claro considerado. Por ejemplo K_{23} es el factor de rigidez para la parte izquierda del tercer claro, μ_{21} es el momento de empotramiento a la derecha del segundo claro, puesto que hay un solo valor de R para cada claro el orden de los subindices no es importante

REFERENCIAS

1.- Beaufait F.W., Rowan W.H., Hoadley P.G., Hackett R.M. "Computer Methods of Structural Analisis", Prentice Hall 1970.

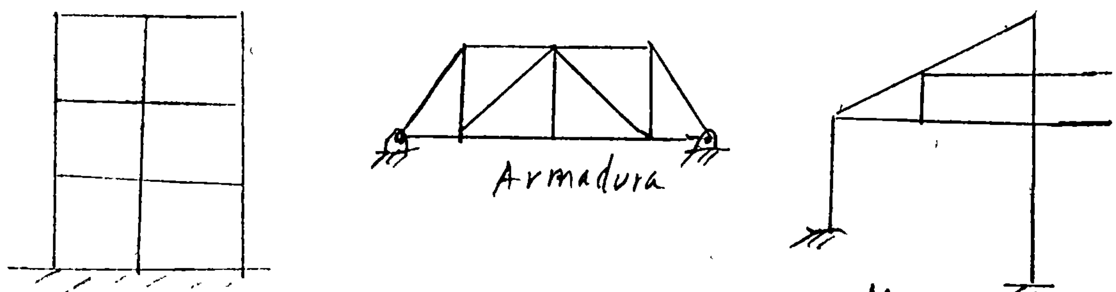
2.- Martin H.C. "Introduction to matrix methods of structural Analisis" McGraw Hill Book Co.

3.- Wang C.K. "Matrix Methods of Structural Analisis" International Tex book Co.

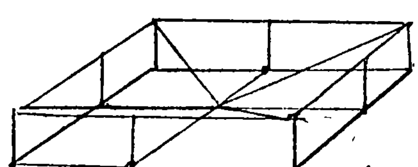
3.- INTRODUCCION AL ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS.

3.1.- Problema Típico de análisis estructural.

En este curso sólo estudiaremos el análisis de estructuras esqueléticas (estructuras formadas por barras) de comportamiento elástico lineal.



Ejemplos de estructuras esqueléticas



Estructura tridimensional

3.1.1) Datos de un problema típico de análisis estructural

a) Geometría de la estructura. Dimensiones de los ejes, dimensiones de las secciones (lo que supone un prediseño).

b) Propiedades mecánicas de los materiales. Módulo de elasticidad E, constante de Poisson ν.

c) Solicitaciones. Estudiaremos solo las solicitaciones estáticas (fuerzas aplicadas gradualmente, para no producir vibraciones), tales como peso propio, carga viva, sismo (análisis sísmico estático), viento, etc.

3.1.2) Incognitas

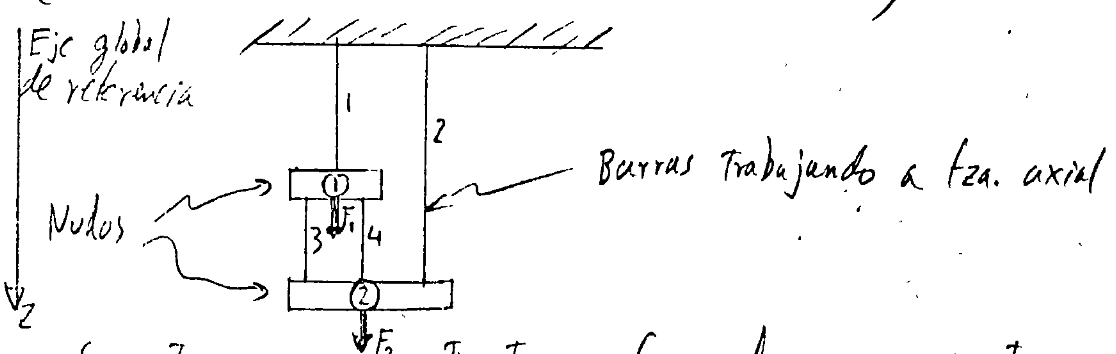
a) Desplazamientos en algunos puntos de la estructura (v.g.: los nudos).

b) Deformaciones.

c) Esfuerzos. Generalmente en lugar de esfuerzos se obtienen los elementos mecánicos (M, V, N) en algunas secciones.

3.2.— Ejemplo introductorio

Consideremos la siguiente estructura unidimensional (la consideramos de un ancho casi nulo).

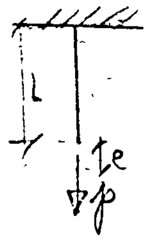


Se tiene una estructura formada por cuatro barras ($m_B = 4$) y dos nudos ($m_N = 2$).

Los datos son:

a) Geometría de la estructura. En este caso basta con la topología de la estructura.

b) Rigideces de las barras. Se llama rigidez k_i de una barra i cualquiera a la relación entre su fza. axial entre su alargamiento



$$\frac{p}{e} = k \quad \text{ó bien:} \quad p = ke$$

$k = \frac{EA}{L}$ para una barra prismática (A = Area de su sección)

c) Solicitaciones. En este caso las fuerzas verticales F_1 y F_2 aplicados en los nudos.

3.2.1) <u>Principios fundamentales del análisis estructural</u>

Para resolver nuestro problema utilizaremos los siguientes tres principios.

a) Principio de <u>continuidad</u> ó de compatibilidad geométrica.

Este principio supone que los desplazamientos en todos los puntos de la estructura son funciones continuas de posición y que por lo tanto en este ejemplo se pueden obtener las siguientes relaciones entre las deformaciones (alargamientos de las barras) y los desplazamientos de los nudos.

Sean:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$, las deformaciones (alargamientos) de las 4 barras $\begin{cases} + & \text{alargamiento} \\ - & \text{acortamiento.} \end{cases}$

$$[d] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$, los desplazamientos verticales de los nudos $\begin{cases} + \downarrow & \text{hacia abajo} \\ - \uparrow & \text{hacia arriba} \end{cases}$

Por continuidad: (por simple inspección de la figura)

$$e_1 = d_1$$
$$e_2 = d_2$$
$$e_3 = -d_1 + d_2$$
$$e_4 = -d_1 + d_2$$

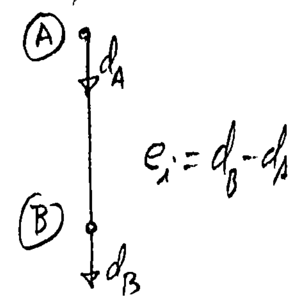
ó bien: $$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$; ó $\boxed{[e] = [a][d]}$ --- 3.2.1.1

donde: $$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ (matriz de continuidad)

Obsérvese que para una barra i cualquiera

$$e_i = d_B - d_A$$

donde: d_A = desplazamiento de su nudo superior
d_B = " " " " " inferior



b) Ley de Hooke. Relación lineal entre deformaciones de las barras y sus fuerzas axiales.

Sean: $[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$, las fzas. (axiales) en las barras $\begin{cases} + \text{ Tensión} \\ - \text{ Compresión} \end{cases}$

Por la ley de Hooke

$$p_1 = k_1 e_1$$
$$p_2 = k_2 e_2$$
$$p_3 = k_3 e_3$$
$$p_4 = k_4 e_4$$

(k_i = rigidez de la barra i)

o bien: $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ & & & k_4 \end{bmatrix}}_{\text{(matriz diagonal)}} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$; ó $\boxed{[p] = [k][e]}$ 3.2.1.2

donde: $[k] = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ & & & k_4 \end{bmatrix}$

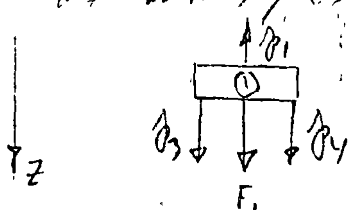
(matriz de rigidez de las barras)

c) Equilibrio. La estructura debe estar en equilibrio, o sea que la resultante de las fzas. que obren sobre cualquier región de ella, debe ser nula. En nuestro ejemplo basta con cumplir $\Sigma F_z = 0$ para cada nudo.

Sean:

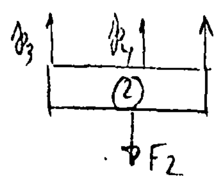
$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Aislemos al nudo (1) (supongamos positivas a las fuerzas en las barras, ésto es de tensión).



$$F_1 = p_1 \quad - p_3 - p_4 \quad (\Sigma F_z = 0)$$

Aislemos al nudo (2)



$$F_2 = \quad p_2 + p_3 + p_4$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \text{ ó } \boxed{[F] = [a]^T [p]} \qquad 3.2.1.3$$

donde: $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (Matriz de equilibrio)

Obsérvese que la matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad, resultado muy interesante que posteriormente demostraremos en forma general.

3.2.2. Solución del problema estructural (Método de los desplazamientos)

Nuestras incognitas son: [e], [d], [p]
Nuestros datos son: [a], $[a]^T$ [k], [F]
Para resolver el problema sustituyamos 3.2.1.1 en 3.2.1.2

$$p = kae \quad --- \; 3.2.2.1$$

sustituyamos 3.2.2.1 en 3.2.1.3

$$\boxed{[F] = [a]^T [k][a][d]} \quad --- \; 3.2.2.2$$

Es fácil ver en este ejemplo, que la matriz $[a^T ka]$ es cuadrada, posteriormente estudiaremos las condiciones para que sea no singular (su determinante distinto de cero) por lo tanto de la ecuación 3.2.2.2 se pueden despejar a los desplazamientos de los nudos

$$\boxed{[F] = [K][d]} \qquad \text{donde: } [K] = [a]^T [k][a] \; .. \; 3.2.1.5$$

(Matriz de rigidez de la estructura)

ya sea invirtiendo a [K] ó bien resolviendo por cualquier procedimiento al sistema de ecuaciones.

Una vez obtenidos los desplazamientos [d] bastará sustituir estos en 3.2.1.1 para obtener las deformaciones [e] y sustituir estas últimas en 3.2.1.2 para obtener las fuerzas en las barras [p], se tiene una comprobación si se sustituyen estas últimas en 3.2.1.3 y se comprueba el equilibrio.

Para nuestro ejemplo supongamos que

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ Ton/cm $\therefore$ $[k] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$F_1 = 10$ Ton
$F_2 = 5$ Ton $\therefore$ $[F] = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

Calculemos $[K]$ utilizando 3.2.2.3

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuando los productos matriciales

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Observese que $[K]$ es simétrica.(*)

Nuestro sistema de ecuaciones será:

$$[F] = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

O bien:

$$10 = 3d_1 - 2d_2$$
$$5 = -2d_1 + 3d_2$$

resolviendo este sistema se obtiene

$$d_1 = 8 \text{ cm.} \quad \text{ó} \quad [d] = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \text{cm}$$
$$d_2 = 7 \text{ cm.}$$

Sustituyendo en 3.2.1.1

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \therefore \quad \begin{matrix} e_1 = 8 \text{ cm.} \\ e_2 = 7 \\ e_3 = -1 \\ e_4 = -1 \end{matrix} \quad \text{ó} \quad [e] = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{cm.}$$

Sustituyendo $[e]$ en 3.2.1.2

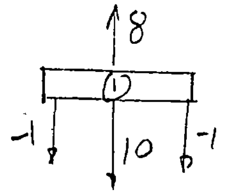
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \therefore \quad \begin{matrix} p_1 = 8 \text{ Ton} \\ p_2 = 7 \text{ Ton} \\ p_3 = -1 \text{ Ton} \\ p_4 = -1 \text{ Ton} \end{matrix} \quad \text{ó} \quad [p] = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{Ton}$$

(*) Lo que es muy simple de demostrar en general. Si $K = a^T k a$ se sigue que: $K^T = a^T k^T a$ pero $k^T = k$ (por ser k diagonal), por consiguiente $K^T = a^T k a = K$ esto es K y su transpuesta son iguales ó sea K es simétrica.

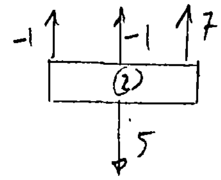
Comprobemos el equilibrio, sustituyendo $[p]$ en 3.2.1.3

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \checkmark\checkmark$$

O bien comprobemos directamente este equilibrio



$$\Sigma F_z = 10 + (-1) + (-1) + 8 = 0 \checkmark$$



$$\Sigma F_z = 5 - (-1) - (-1) - 7 = 0 \checkmark$$

Nótese que las barras 1, 2 trabajan a tensión, mientras que las 3 y 4 trabajan a compresión.

3.2.3.- Estructuras isostáticas y estructuras hiperestáticas

Consideremos la ecuación de equilibrio (3.2.1.3)

$$F = a^T p$$

Definimos como estructura isostática a aquella en que con la sola ecuación de equilibrio se pueden obtener los valores de las fuerzas en las barras $[p]$, ó sea que esta definición implica que $[a]^T$ sea cuadrada y no singular.

En nuestro ejemplo $[a]^T$ no es cuadrada (2×4), o sea tenemos dos ecuaciones con cuatro incognitas; definimos como estructura hiperestática a aquella en que $[a]^T$ es rectangular de orden $(m_N \times m_B)$ (m_N = no. de nudos; m_B = no. de barras) y tal que $m_B > m_N$ y además es necesario que su rango sea m_N (ó sea que de a^T se pueda obtener una matriz cuadrada de $m_N \times m_N$ no singular).

A continuación trataremos de explicar estas definiciones.

a) Si $[a]^T$ es cuadrada y no singular, se puede obtener $[p]$ por puro equilibrio de ahí que la estructura sea isostática.

$$F = a^T p \therefore p = (a^T)^{-1} F$$

sustituyendo en 3.2.1.2 $\Rightarrow e = (k)^{-1} p = k^{-1} (a^T)^{-1} F$

" " " 3.2.1.1 $\Rightarrow d = (a)^{-1} e = a^{-1} k^{-1} (a^T)^{-1} F$

Observese que $(a^T)^{-1}$ existe por ser a^T no singular y obviamente también existe $(a)^{-1}$; $(k)^{-1}$ siempre existe ya que (k) es siempre diagonal y ningún valor de su diagonal es nulo (suponemos barras de sección no nula).

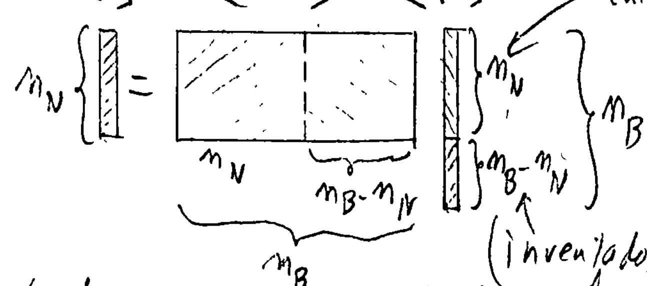
Observe también que de la última ecuación

$$d = a^{-1} (k)^{-1} (a^T)^{-1} F$$

se deduce que: $(K)^{-1} = (a^T k a)^{-1} = a^{-1} k^{-1} (a^T)^{-1}$; lo cual solo es <u>válido para estructuras isostáticas.</u>

b) Si la estructura es hiperestática la matriz $[a]^T$ es rectangular n_N ▨ n_B, por lo que en la ecuación $F = a^T p$ tenemos mas incógnitas que ecuaciones; para que exista cuando menos una solución (estructura estable) será necesario que se puedan inventar $(n_B - n_N)$ valores de $[p]$ y calcular los n_N restantes

$$[F] = [a^T] \cdot [p]$$



para lo cual la matriz cuadrada de $(n_N \times n_N)$ que se obtiene tiene que ser no singular. Aclaremos estas ideas con nuestro ejemplo:

$$n_N = 2;\ n_B = 4$$

$$\left[a^T\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array} \text{ Barras} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots (1) \\ \cdots (2) \end{array} \\ \text{Nudos} \end{array}$$

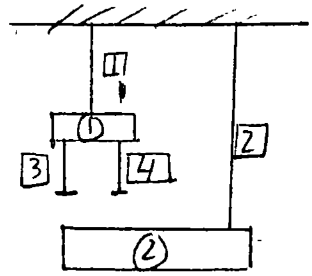
Nuestra ecuación de equilibrio es:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \hdashline p_3 \\ p_4 \end{array}\right]$$

podemos dar a p_3 y p_4 cualquier valor y calcular los valores de p_1 y p_2 ya que la matriz formada por las columnas $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ de $[a^T]$ es no singular

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Decimos que las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ son las barras redundantes y las $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ forman la estructura primaria.



$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ estr. primaria
$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ barras redundantes

Efectivamente, podemos cortar las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ (o darles cualquier valor a sus fzas. axiales) y la estructura será estable.

A la matriz cuadrada de $m_N \times m_N$ que se forma de $[a^T]$ se le llama $[a_0^T]$ y al resto se le llama $[a_R^T]$.

$$\left[a^T\right] = \left[\begin{array}{c:c} \underbrace{a_0^T}_{(m_N \times m_N)} & \underbrace{a_R^T}_{(m_N \times (m_B - m_N))} \end{array}\right]$$

En nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [a_R^T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay varias posibilidades de estructura primaria, por ejemplo: barras $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, cuya matriz $[a_0^T]$ será:

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1^a \text{ y } 3^a \text{ columna de } a^T)$$

$$\det[a_0^T] = 1 \neq 0$$

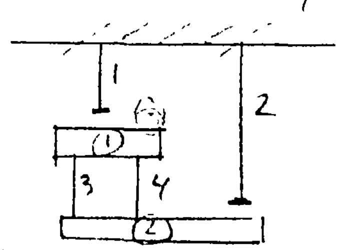
Otras posibilidades podrían ser: $\boxed{1}, \boxed{4}$

$\boxed{2}, \boxed{3}$

$\boxed{2}, \boxed{4}$

No se puede escoger como estructura primaria a la $\boxed{3}, \boxed{4}$ porque $[a_0^T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\det[a_0^T] = 0$

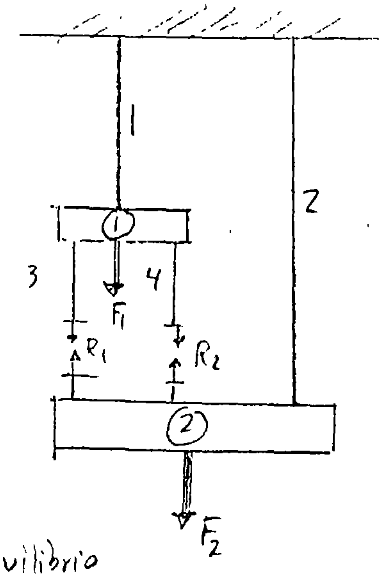
efectivamente, cortando a $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ la estructura es inestable.



3.2.4.- <u>Otro método de solución del problema estructural (Método de las fuerzas)</u>

Con el concepto de estructura primaria podemos desarrollar otro método para resolver el problema estructural, es el llamado método de las fuerzas. Usaremos los tres principios fundamentales, pero en orden inverso (equilibrio, ley de Hooke, continuidad).

Consideramos el mismo ejemplo y elijamos a $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ como la estructura primaria. ($\boxed{3}$, $\boxed{4}$ serán las barras redundantes)



Cortemos a las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ y supongamos que en esos cortes obran fuerzas desconocidas R_1 y R_2 (las redundantes) que obviamente serán los valores de p_3 y p_4 respectivamente.

Equilibrio

a) Nuestras ecuaciones de equilibrio serán:

$$F_1 = p_1 \qquad - R_1 - R_2$$
$$F_2 = \qquad p_2 + R_1 + R_2$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \Big[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{[a_0^T]} \Big| \underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{[a_R^T]} \Big] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow [p_0] \\ \\ \leftarrow [R] \end{matrix}$$

ó bien:
$$[F] = [a_0^T \,|\, a_R^T] \begin{bmatrix} p_0 \\ \hline R \end{bmatrix} = [a_0^T][p_0] + [a_R^T][R]$$

de estas ecuaciones podemos despejar a $[p]$ ya que $[a_0^T]$ es no singular.

$$a_0^T p_0 = F - a_R^T R \ \therefore \ \underline{p_0 = (a_0^T)^{-1} F - (a_0^T)^{-1} a_R^T R}$$

en nuestro ejemplo: $[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore (a_0^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[p_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [R]$$

o bien
$$[p_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [R]$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

además tenemos que:

$$p_3 = R_1$$
$$p_4 = R_2$$

por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \hdashline p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \qquad 3.2.4.1$$

O en ecuaciones escalares:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} p_1 = & F_1 & & +R_1 & +R_2 \\ p_2 = & & F_2 & -R_1 & -R_2 \\ p_3 = & & & R_1 & \\ p_4 = & & & & R_2 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones 3.2.4.1 se pueden escribir también como:

$$\boxed{[p] = [b_0][F] + [b_R][R]} \quad \text{--- } 3.2.4.2$$

donde:

$$[b_0] = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \; ; \; [b_R] = \begin{bmatrix} -(a_0^T)^{-1} a_R^T \\ \hdashline I \end{bmatrix}$$

b) Ley de Hooke

De la ecuación 3.2.1.2 se tiene:

$$[p] = [k][e]$$

pero $[k]$ es cuadrada y no singular por lo que existe su inversa $[k]^{-1}$ que llamaremos $[f]$ (matriz de flexibilidades de las barras); obviamente que $[f]$ es también diagonal (como $[k]$) y tal que $f_i = 1/k_i$

por consiguiente:

$$\boxed{[e] = [f][p]} \quad \text{--- } 3.2.4.3$$

Sustituyendo 3.2.4.2 en 3.2.4.3 se obtiene

$$[e] = [f][b_0][F] + [f][b_R][R] \quad \text{--- } 3.2.4.4$$

c) Continuidad

Consideremos a los desplazamientos relativos de R_1 y R_2 como nuevos desplazamientos, llamemosle u_1, u_2 respectivamente:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Por consideraciones geométricas obtengamos d_1, d_2, u_1, u_2, a partir de e_1, e_2, e_3, e_4 (figura pag. 81)

$$\begin{aligned} d_1 &= e_1 \\ d_2 &= e_2 \\ u_1 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ u_2 &= e_1 - e_2 + e_4 \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \hline u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

pero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]^T \quad \left(\text{ecs. } \begin{matrix} 3.2.4.1 \\ 3.2.4.2 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T \quad (*)$$

por consiguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} [d] &= [b_0^T][e] \\ [u] &= [b_R^T][e] \end{aligned}} \quad \text{--- } 3.2.4.5$$

Los valores de $[u]$ deberán ser nulos ya que los cortes de las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ no existen; esta es la condición de continuidad.

Sustituyendo 3.2.4.4 en la 1ª ecuación de 3.2.4.5 se obtiene:

$$[u] = [b_R^T][f][b_0][F] + [b_R^T][f][b_R][R]$$

pero, como $[u] = 0$, se puede despejar de esta ecuación a $[R]$ ya que la matriz $b_R^T f b_R$ es cuadrada (...de comprobar) y no singular (**), quedando:

$$\boxed{[R] = -[b_R^T f b_R]^{-1}[b_R^T f b_0][F]} \quad \text{--- } 3.2.4.6$$

Ecuación que nos da los valores de las redundantes $[R]$.

(*) Posteriormente demostraremos en forma general esta propiedad.

(**) Posteriormente lo demostraremos.

Sustituyendo 3.2.4.6 en 3.2.4.2 se obtiene $[p]$

$$p = b_0 F - b_R \left(b_R^T f b_R\right)^{-1} \left(b_R^T f b_0\right) F$$

o bien:

$$[p] = \left[b_0 - b_R \left(b_R^T f b_R\right)^{-1} b_R^T f b_0\right][F]$$

O bien:

$$\boxed{[p] = [b][F]} \quad --- \quad 3.2.4.7$$

donde: $[b] = \left[b_0 - b_R \left(b_R^T f b_R\right)^{-1} b_R^T f b_0\right]$

Sustituyendo 3.2.4.7 en 3.2.4.3 se obtiene $[e]$

$$\boxed{[e] = [f][b][F]} \quad --- \quad 3.2.4.8$$

Sustituyendo 3.2.4.8 en la 1a ecuación de 3.2.4.5 se obtiene $[d]$

$$\boxed{[d] = [b_0^T][f][b][F]} \quad --- \quad 3.2.4.9$$

Se puede demostrar y es obvio que así debe ser, que:

$[b_0^T f b] = (K)^{-1}$ (inverso de la matriz de rigidez de la estructura) (ver ec. 3.2.2.3)

También se puede demostrar que:

$$b_0^T f b = b^T f b$$

cuyo significado físico posteriormente estudiaremos.

Apliquemos los resultados anteriores a nuestro ejemplo. Ya obtuvimos $[b_0]$ y $[b_R]$

$$[b_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ec.\ 3.2.4.1)$$

Además $[f] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ cm/ton

Obtengamos $\left[b_R^T f b_R\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Invirtiendo esta matriz:

$$\left[b_R^T f b_R\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Obtengamos $-\left[b_R^T f b_R\right]^{-1}\left[b_R^T f b_0\right] =$

$$- \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Obtengamos $[b] = \left[b_0 + b_R \left\{-\left(b_R^T f b_R\right)^{-1} b_R^T f b_0\right\}\right]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz se puede obtener el valor de $[p]$ para cualquier $[F]$, ya que $p = bF$

En nuestro ejemplo: $[F] = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

por consiguiente: $[p] = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ Ton

mismos resultados que los obtenidos por el método de los desplazamientos.

Obtengamos $[b_0^T f\, b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

$$[b_0^T f\, b] = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

que es fácil comprobar que es el inverso de $[K]$ (pag. 76)

Obtengamos $[d] = [b_0^T f\, b][F] = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ (ec. 3.2.4.9)

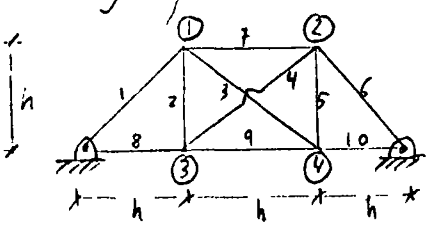
$$[d] = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \text{cm.}$$

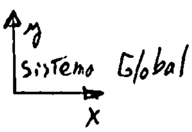
4.– ARMADURAS BIDIMENSIONALES

4.1.– Introducción.

Una armadura es una estructura formada por barras que solo trabajan a fuerza axial, los nudos son articulaciones y las fuerzas externas se aplican solo en los nudos; cada nudo se puede desplazar en dos direcciones y las fuerzas externas pueden tener dos componentes.

Ejemplo:





m_N = Número de nudos libres.(*)

m_B = Número de barras

$m_N = 4$

$m_B = 10$

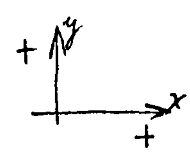
4.2.— Vectores estructurales

a) Desplazamientos: los desplazamientos d_j tendrán dos componentes d_{jx}, d_{jy}.

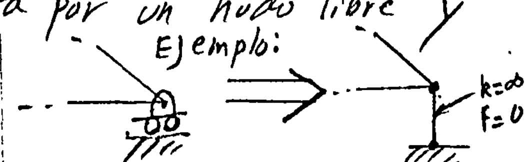
$$[d] = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Orden de $[d]$: $2m_N \times m_c$

(m_c = No. de condiciones de carga)

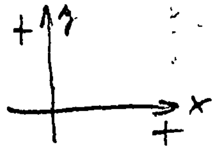


(*) En caso de que un apoyo no sea completo (tiene posibilidad de algún movimiento), se sustituirá por un nudo libre y barras de rigidez infinita ó flexibilidad nula que impidan los movimientos del nudo en las direcciones



b) Fuerzas: las fuerzas F_j tendrán dos componentes F_{jx}, F_{jy}.

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$



Orden de $[F]$: $2m_N \times m_c$

c) Deformaciones: las deformaciones serán los alargamientos ó acortamientos de las barras

$$[e] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

+ alargamiento
− acortamiento

Orden de $[e]$: $m_B \times m_c$

d) Fuerzas en las barras: las fuerzas en las barras serán sus fuerzas axiales.

$$[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{10} \end{bmatrix}$$

+ Tensión
− Compresión

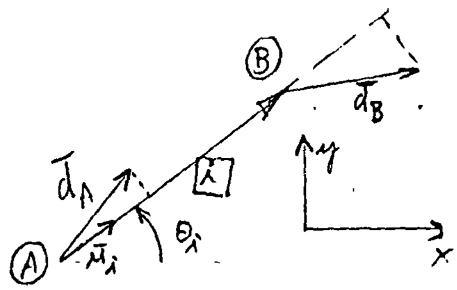
Orden de $[p]$: $m_B \times m_c$

4.3 — Solución de armaduras bidimensionales por el método de los desplazamientos.

a) Continuidad.

$$\boxed{[e] = [a][d]} \quad \text{--- } 4.3.1$$

Obtengamos el valor de e_i para una barra i cualquiera en función de los desplazamientos de sus nudos extremos Ⓐ y Ⓑ. Sea $\overline{\mu}_i$ un vector unitario paralelo a la barra i, consideremos que las barras tienen orientación (de Ⓐ a Ⓑ).



El alargamiento e_i sera igual a:

$$e_i = \underset{\bar{\mu}_i}{\mathrm{Proy}}\ \bar{d}_B - \underset{\bar{\mu}_i}{\mathrm{Proy}}\ \bar{d}_A$$

Pero: $d_B = \begin{bmatrix} d_{Bx} \\ d_{By} \end{bmatrix}$; $d_A = \begin{bmatrix} d_{Ax} \\ d_{Ay} \end{bmatrix}$; $\mu_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \mathrm{sen}\,\theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i \\ s_i \end{bmatrix}$

Por geometria se tiene:

$$\underset{\bar{\mu}_i}{\mathrm{Proy}}\ \bar{d}_B = \bar{d}_B \cdot \bar{\mu}_i = d_{Bx}\, c_i + d_{By}\, s_i$$

análogamente

$$\underset{\bar{\mu}_i}{\mathrm{Proy}}\ \bar{d}_A = d_{Ax}\, c_i + d_{Ay}\, s_i$$

por lo tanto:

$$4.3.2 \quad --- \quad \underline{\underline{e_i = d_{Bx}\, c_i + d_{By}\, s_i - (d_{Ax}\, c_i + d_{Ay}\, s_i)}}$$

Con ayuda de la expresión 4.3.2 obtendremos la regla para obtener el renglón i de la matriz $[a]$ que corresponde a los coeficientes de la deformación e_i.

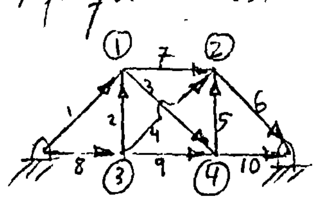
$$\text{Renglón } i \longrightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ e_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \quad -\mu_i^T \cdots +\mu_i^T \quad \end{bmatrix} \\ \qquad\ \ (A) \qquad\quad (B) \end{array} \begin{bmatrix} \vdots \\ d_A \\ \vdots \\ d_B \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(cada columna doble de $[a]$ corresponde a un nudo)

ya que 4.3.1 se puede tambien escribir como

$$\underline{e_i = -[\mu_i^T][d_A] + [\mu_i^T][d_B]} \quad ---- \quad 4.3.3$$

Apliquemos esta regla a nuestro ejemplo:



$\mu_1^T = [+0.71 \quad +0.71] = \mu_4^T$

$\mu_2^T = \mu_5^T = [0 \quad 1]$

$\mu_3^T = \mu_6^T = [+0.71 \quad -0.71]$

$\mu_7^T = \mu_8^T = \mu_9^T = \mu_{10}^T = [1 \quad 0]$

$[a] =$

Barra	①		②		③		④	
1	+0.71	+0.71						
2					0	-1		
3	-0.71	+0.71					+0.71	-0.71
4			+0.71	+0.71	-0.71	-0.71		
5			0	1			0	-1
6			-0.71	+0.71				
7	-1	0	1	0				
8					1	0		
9					-1	0	1	0
10							-1	0

nudo → ① ② ③ ④ Barra

$$= \begin{bmatrix} [a_0] \\ \hline [a_R] \end{bmatrix}$$

Notas: a) En las barras cuyo nodo (A) ó (B) es un apoyo (por ejemplo 1) no se considera a este como nudo.

b) Los blancos son ceros.

Observese que el orden de $[a]$ es: $n_B \times 2n_N$

b) Ley de Hooke.

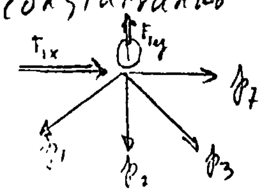
$$\boxed{[p] = [k][e]} \quad \text{--- } 4.3.3$$

donde $[k]$ es una matriz diagonal $k_{ii} = \dfrac{E_i A_i}{L_i}$

c) Equilibrio.

$$\boxed{[F] = [a^T][p]} \quad \text{-- } 4.3.4$$

Sera interesante verificar esta expresión para nuestro ejemplo, considerando el equilibrio del nudo ①

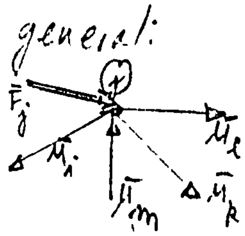


$$\begin{matrix} \Sigma F_x = 0; \\ \Sigma F_y = 0; \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} F_{1x} &= 0.71\, p_1 - 0.71\, p_3 - p_7 \\ F_{1y} &= 0.71\, p_1 + p_2 + 0.71\, p_3 \end{aligned} \right.$$

o bien

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} = [F_1] = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} -0.71 \\ +0.71 \end{bmatrix} p_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} p_7$$

en general:



$$(\Sigma F = 0) \quad 0 = [F_j] + [\mu_i]\, p_i - [\mu_m]\, p_m + [\mu_k]\, p_k + [\mu_l]\, p_l$$

o bien:

$$\underline{[F_j] = -[\mu_i]\, p_i + [\mu_m]\, p_m - [\mu_k]\, p_k - [\mu_l]\, p_l}$$

De la expresión anterior obtendremos la regla para formar por renglones (dobles) a la matriz $[a^T]$: cada columna corresponde a una barra i, si esta sale del nudo le corresponde $-[\mu_i]$ si entra al nudo le corresponde $+[\mu_i]$

$$\text{Renglón } j \text{ (doble)} \longrightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ F_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} & & & \\ \left[\cdots -[\mu_i] \right. & +[\mu_m] & -[\mu_k] & \left. -[\mu_l] \right] \\ \boxed{i} & \boxed{m} & \boxed{k} & \boxed{l} \end{array}$$

a las barras que no inciden en el nudo j le corresponde un vector nulo. Es obvio que esta regla coincide con la regla para formar por renglones a la matriz $[a]$.

El orden de $[a^T]$ será: $2M_N \times M_B$

d) Solución por el método de los desplazamientos

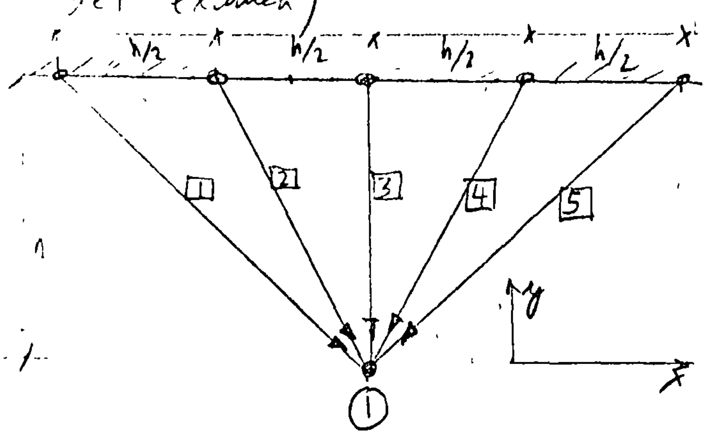
Combinando 4.3.1, 4.3.3 y 4.3.4 obtendremos la ecuación:

$$[F] = [K][d] \qquad \text{donde: } [K] = [a^T][k][a]$$

Se tienen $2M_N$ ecuaciones con $2M_N$ incognitas

Con los valores de $[d]$ se obtienen $[e]$ y $[p]$ con 4.3.1 y 4.3.3., se comprueba con la ecuación de equilibrio 4.3.4

¡Apliquemos este método al siguiente ejemplo. (ver problema 4 del examen)



Por consideraciones geométricas obtenemos los vectores $[\mu_i]$

$$[\mu_1]^T = [+0.707 \quad -0.707] \; ; \; [\mu_2^T] = [+0.447 \quad -0.894]$$

$$[\mu_3^T] = [0 \quad -1] \; ; \; [\mu_4^T] = [-0.447 \quad -0.894] \; ; \; [\mu_5^T] = [-0.707 \quad -0.707]$$

Obtengamos la matriz $[a]$

$$[a] = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} +0.707 & -0.707 \\ +0.447 & -0.894 \\ 0 & -1 \\ -0.447 & -0.894 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \end{array}$$

- Obtengamos $[k]$: $\quad k_{ii} = \frac{EA}{L_i}$ (EA = constante para todas las barras)

$$k_1 = k_5 = 0.707 \frac{EA}{h} \; ; \; k_2 = k_4 = 0.894 \frac{EA}{h} \; ; \; k_3 = \frac{EA}{h}$$

(observe que $1/L_i = |\mu_{iy}|/h$)

Por consiguiente $[k] = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0.707 & & & & \\ & 0.894 & & & \\ & & 1.000 & & \\ & & & 0.894 & \\ & & & & 0.707 \end{bmatrix}$

Obtengamos $[K] = [a^T][k][a]$

$$[a^T][k] = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.447 & 0 & -0.447 & -0.707 \\ -0.707 & -0.894 & -1 & -0.894 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & & & & \\ & 0.894 & & & \\ & & 1.00 & & \\ & & & 0.894 & \\ & & & & 0.707 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 0.50 & 0.4 & 0 & -0.4 & -0.5 \\ -0.5 & -0.8 & -1 & -0.8 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$[a^T k][a] = \qquad \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.447 & -0.894 \\ 0 & -1 \\ -0.447 & -0.894 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1.064 & 0 \\ 0 & 3.136 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo la matriz $[K]$ resultó diagonal, por lo tanto la obtención de $[d]$ será muy simple:

$$\boxed{\begin{aligned} d_{1x} &= \frac{F_{1x}}{1.064}\left(\frac{h}{EA}\right) \\ d_{1y} &= \frac{F_{1y}}{3.136}\left(\frac{h}{EA}\right) \end{aligned}}$$

ya que: $[K]^{-1} = \frac{h}{EA}\begin{bmatrix} 1/1.064 & 0 \\ 0 & 1/3.136 \end{bmatrix}$

Observe que en este ejemplo: $n_N = 1$; $n_B = 5$

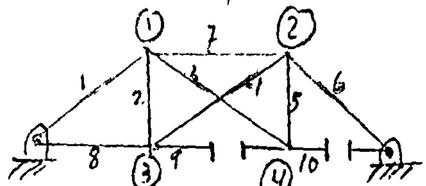
$$n_B - 2n_N = 3 > 2n_N$$

o sea que por este método tendremos menos incógnitas $(2n_N)$ que por el método de las fuerzas $(n_B - 2n_N)$; esto en general no es cierto para armaduras convencionales, en que se tiene en general: $n_B - 2n_N > 2n_N$ y por lo tanto el método más conveniente de emplear es el método de las fuerzas.

4.4.- Solución de armaduras bidimensionales por el método de las fuerzas.

a) Equilibrio:

Para elegir teóricamente a la estructura primaria se podrá usar el criterio desarrollado en las pags. 79 y 80, o sea que las $2n_N$ barras que forman la estructura primaria sean tales que $[a_0^T]$ sea no singular; obviamente este criterio no es práctico, salvo en algunos casos muy especiales, por lo que la elección de la estructura primaria la haremos por consideraciones estáticas sencillas; en el ejemplo que hemos estudiados elegiremos como estructura primaria a la formada por las barras [1] a [8] siendo los redundantes la [9] y [10].



Estructura primaria

La ecuación de equilibrio será:

$$\boxed{[F]=[b_0][F]+[b_R][R]} \quad \text{--4.4.1}$$

donde: $[R]=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\end{bmatrix}$; $(p_9=R_1\ ;\ p_{10}=R_2)$

A continuación veremos una forma simple de obtener $[b_0]$ y $[b_R]$:

Supongamos que en la estructura primaria se tiene que $[R]=0$; $[F]=\begin{array}{r}\\ \\ \\ \\ \text{Renglón } i\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. (las componentes de $[F]$ todas nulas, menos la i-esima con valor unitario)

por lo tanto: $[p]=[b_0]\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow\text{Renglón } i\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}=\begin{bmatrix}b_{01i}\\b_{02i}\\ \vdots\\ \vdots\\b_{0m_Bi}\end{bmatrix}$ (columna i-esima de $[b_0]$)

O sea que las fuerzas axiales para esa condición de carga corresponde a la columna i-esima de $[b_0]$; por consiguiente, para obtener $[b_0]$ habrá que resolver la estructura $2m_N$ veces con

$$[F]=[I]=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots\\0&1&0&\cdots\\0&0&1&\cdots\\0&0&0&\cdots\end{bmatrix}}_{2m_N \text{ condiciones de carga}} \quad (\text{matriz identidad})$$

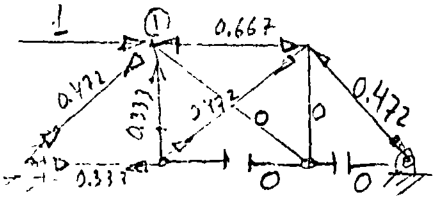
El razonamiento anterior se justifica obviamente si en 4.4.1 hacemos $[R]=0$; $[F]=[I]$ $\therefore$ $[p]=[b_0]$.

(recordemos que si $[F]$ es de orden $2m_N \times m_c$, $[p]$ será de orden $m_B \times m_c$, en este caso $m_c=2m_N$, por lo tanto $m_B \times m_c = m_B \times 2m_N$ (orden de $[b_0]$))

Apliquemos este procedimiento a nuestro ejemplo:

columna 1 de $[b_0]$ $[F] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$; $F_{1x} = 1$

$F_{1y} = F_{2x} = \cdots = 0$



Para resolver la armadura seccionamos a la estructura en la barra $\boxed{6}$ y tomamos momentos en el apoyo izquierdo, obteniendo así la fuerza en $\boxed{6}$; las demás fuerzas las obtenemos por el método de los nudos.

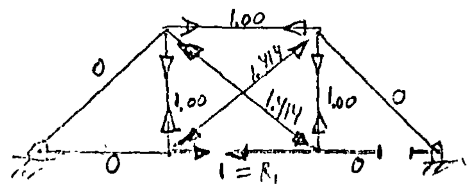
$$[p] = \begin{bmatrix} +0.472 \\ -0.333 \\ 0 \\ +0.472 \\ 0 \\ -0.472 \\ -0.667 \\ +0.333 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1^{a} \text{ columna de } [b_0]$$

En forma análoga obtendremos las demás columnas de $[b_0]$ (la 2^{a} con $F_{1y} = 1$; $F_{1x} = F_{2x} = F_{2y} = \cdots 0$, etc.)

$$[b_0] = \begin{bmatrix} +0.472 & +0.944 & +0.472 & +0.472 & 0 & +0.944 & 0 & +0.472 \\ -0.333 & +0.333 & -0.333 & -0.333 & 0 & -0.667 & -1.000 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1.414 & 0 \\ +0.472 & -0.472 & +0.472 & +0.472 & 0 & -0.472 & +1.414 & +0.472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.00 & -1.000 \\ -0.472 & +0.472 & -0.472 & +0.944 & 0 & +0.472 & 0 & +0.944 \\ -0.667 & +0.667 & +0.333 & +0.333 & 0 & +0.667 & -1.00 & +0.333 \\ +0.333 & -0.333 & +0.333 & +0.333 & +1.000 & -0.333 & +1.000 & +0.333 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [a_0^T]^{-1} \\ \hline 0 \end{bmatrix}}_{\text{(Ver pag. 82)}}$$

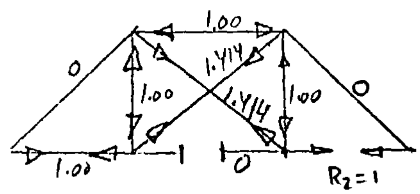
La regla para obtener $[b_R]$ es similar, sea: $[F] = 0$ y $[R] = [I]$ en la estructura primaria, por lo tanto $[p] = [b_R]$. (En este ejemplo $[b_R]$ tendrá dos columnas, la 1^{a} para $R_1 = 1$, $R_2 = 0$ y la 2^{a} para $R_1 = 0$, $R_2 = 1$)

1ª Columna de $[b_R]$



$$[p] = \begin{bmatrix} 0 \\ +1.00 \\ -1.414 \\ -1.414 \\ +1.00 \\ 0 \\ +1.00 \\ 0 \\ +1.00 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2ª Columna de $[b_R]$



$$[p] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.00 \\ +1.414 \\ +1.414 \\ -1.00 \\ 0 \\ -1.00 \\ +1.00 \\ 0 \\ +1.00 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[b_R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +1.000 & -1.00 \\ -1.414 & +1.414 \\ -1.414 & +1.414 \\ +1.00 & -1.000 \\ 0 & 0 \\ +1.000 & -1.00 \\ 0 & +1.000 \\ +1.00 & 0 \\ 0 & +1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[a_0^T]^{-1}[a_R^T] \\ \hline I \end{bmatrix}$$

(Ver pag. 82)

Es necesario hacer notar que para resolver una estructura por el método de las fuerzas en la cual no se piden todos los desplazamientos $[d]$ entonces no es necesario obtener la matriz $[b_0]$ sino el valor de $[b_0][F]$, el cual se puede obtener directamente resolviendo la estructura primaria con las fuerzas $[F]$ y $[R]=0$, a los valores de $[p]$ así obtenidos se les llama $[p_0]$ (fuerzas axiales isostáticas), la ecuación 4.4.1 se transforma entonces en:

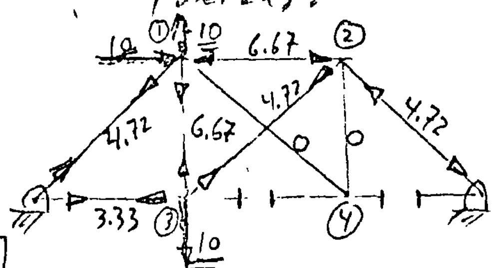
$$\boxed{[p] = [p_0] + [b_R][R]} \quad \ldots \quad 4.4.2$$

donde $[p_0]$ son las fuerzas axiales en la estructura primaria si obran sobre ésta las fuerzas reales $[F]$ con redundantes $[R]$ nulos.

Supongamos que en nuestro ejemplo [F] sea igual a:

$$[F] = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Ton.}$$

Obtengamos $[p_0]$, resolviendo a la estructura primaria con estas fuerzas:



Por lo tanto: $[p_0] = \begin{bmatrix} +4.72 \\ +6.67 \\ 0 \\ +4.72 \\ 0 \\ -4.72 \\ -6.67 \\ +3.33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ton.

b) Ley de Hooke:

$$\boxed{[e] = [f][p]} \quad \cdots \quad 4.4.3$$

donde [f] es diagonal y $f_{ii} = \frac{L_i}{E_i A_i} \left(= 1/K_{ii} \right)$

Supongamos que en nuestro ejemplo: $f_1 = f_2 = \cdots = f_{10} = 1$ cm/ton

o sea que $[f] = [I]$.

c) Continuidad:

$$\boxed{[M] = [b_R^T][e]} \quad \cdots \quad 4.4.4$$

$$\boxed{[d] = [b_0^T][e]} \quad \cdots \quad 4.4.5$$

Por continuidad los desplazamientos relativos de las redundantes $[u]$ deben ser nulos, por lo que sustituyendo 4.4.2 en 4.4.3 y ésta en 4.4.4 obtenemos:

$$\boxed{0 = [b_P^T][f][p_0] + [b_R^T][f][b_R][R]} \quad 4.4.6$$

En esta ecuación despejamos a $[R]$, que sustituido en 4.4.2 nos permitirá obtener los valores de $[p]$ y sustituyendo estos en 4.4.3 obtener $[e]$ que sustituidos estos últimos en 4.4.4 nos dan una comprobación $([u] = 0)$.

d) Apliquemos lo anterior a nuestro ejemplo.

Obtengamos $[b_R^T][f][b_R]$

$$[b_R^T][f][b_R] = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & -1.414 & -1.414 & 1.00 & 0 & 1.00 & 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & -1.00 & +1.414 & +1.414 & -1.00 & 0 & -1.00 & 1.00 & 0 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix}$$

$$[b_R^T f b_R] = \begin{bmatrix} 8.00 & -7.00 \\ -7.00 & 9.00 \end{bmatrix} \; cm/Ton$$

Obtengamos $[b_R^T][f][p_0]$

$$[b_R^T][f][p_0] = [b_R^T] \begin{bmatrix} 4.72 \\ 6.67 \\ 0 \\ 4.72 \\ 0 \\ -4.72 \\ -6.67 \\ +3.33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad [b_R^T f p_0] = \begin{bmatrix} -6.67 \\ +10.00 \end{bmatrix} \; cm.$$

Por lo tanto, sustituyendo en 4.4.6

$$0 = \begin{bmatrix} -6.67 \\ 10.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.00 & -7.00 \\ -7.00 & 9.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

O bien:

$$\begin{cases} 8.00\,R_1 - 7.00\,R_2 = +6.67 \\ -7.00\,R_1 + 9.00\,R_2 = -10.00 \end{cases}$$

cuya solución es: $R_1 = -0.435$; $R_2 = -1.45$

O sea: $[R] = \begin{bmatrix} -0.435 \\ -1.450 \end{bmatrix}$ Ton.

Sustituyendo el valor de $[R]$ en 4.4.2 obtendremos $[p]$:

$$[p] = \begin{bmatrix} 4.72 \\ 6.67 \\ 0 \\ 4.72 \\ 0 \\ -4.72 \\ -6.67 \\ 3.33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +1.02 \\ -1.44 \\ -1.44 \\ +1.02 \\ 0 \\ +1.02 \\ -1.45 \\ -0.44 \\ -1.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4.72 \\ +7.79 \\ -1.44 \\ +3.28 \\ +1.02 \\ -4.72 \\ -5.65 \\ +1.88 \\ -0.44 \\ -1.45 \end{bmatrix} \text{ Ton.}$$

Como $[f] = [I]$ $\therefore$ $[e] = [p]$ (cm.)

Comprobemos sustituyendo $[e]$ en 4.4.4

$$[u] = \begin{bmatrix} b_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.72 \\ 7.79 \\ -1.44 \\ 3.28 \\ 1.02 \\ -4.72 \\ -5.65 \\ 1.88 \\ -0.44 \\ -1.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.11 \\ -0.12 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si se desean obtener todos los valores de $[d]$, sustituyamos el val. de $[e]$ en 4.4.5 (obsérvese que es la única ecuación donde figura $[b_0]$)

$$[d] = \begin{bmatrix} b_0^T \end{bmatrix} [e] = \begin{bmatrix} 7.67 \\ -1.01 \\ 2.04 \\ -4.29 \\ 1.88 \\ -8.78 \\ +1.45 \\ -5.31 \end{bmatrix} \text{ cm.}$$

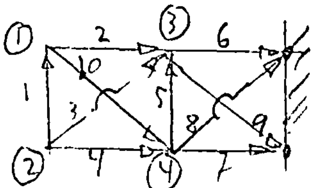
Si sólo se desean algunos valores de $[d]$, sólo habrá necesidad de obtener las columnas correspondientes de $[b_0]$; por ejemplo, si se desea d_{3x}, habrá que obtener la 5.ª columna de $[b_0]$ (resolviendo la estructura primaria con $F_{3x}=1$) y multiplicando la transpuesta de esta columna por $[e]$.

En general:

$$d_k = [b_{0k}^T][e] \quad (\text{donde } [b_{0k}] \text{ la } k\text{-ésima columna de } [b_0])$$

---

e) A continuación vamos a estudiar un ejemplo donde $[a_0^T]$ es una matriz triangular inferior.



$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_5$

$u_2 = u_6 = u_4 = u_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u_3 = u_8 = \begin{bmatrix} +0.71 \\ +0.71 \end{bmatrix}$; $u_9 = u_{10} = \begin{bmatrix} +0.71 \\ -0.71 \end{bmatrix}$

La matriz $[a^T]$ es igual a: (ver pág. 71)

$$[a^T] = \left[\begin{array}{cccccccc|cc}
0 & -1 & & & & & & & & -0.71 \\
1 & 0 & & & & & & & & +0.71 \\
0 & & -0.71 & -1 & & & & & & \\
-1 & & -0.71 & 0 & & & & & & \\
 & 1 & +0.71 & & 0 & -1 & & & -0.71 & \\
 & 0 & +0.71 & & 1 & 0 & & & +0.71 & \\
 & & & 1 & 0 & & -1 & -0.71 & & +0.71 \\
 & & & 0 & -1 & & 0 & -0.71 & & -0.71
\end{array}\right]$$

$[a_0^T]$ Diagonal $[a_R^T]$

Observe que si particionamos a $[a_0^T]$ en matrices de (2×2) la matriz $[a_0^T]$ es triangular inferior, se demuestra que su determinante es el producto de los determinantes de su diagonal (matrices de 2×2) los cuales ninguno es nulo, por consiguiente:

$$\det [a_0^T] \neq 0.$$

Además se demuestra también que la inversión de $[a_0^T]$ es muy simple (para obtener $[b_0]$ y $[b_R]$).

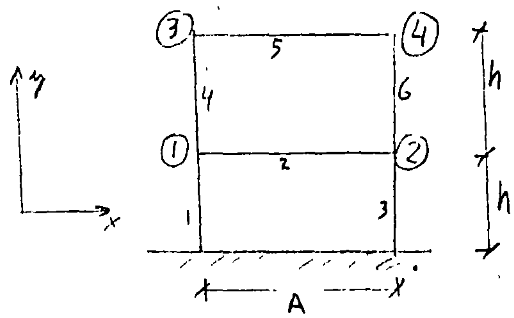
Todo lo anterior se debe a que la estructura primaria se puede resolver <u>completamente</u> por nudos y hemos numerado las barras y nudos en forma adecuada.

5.— MARCOS PLANOS

4.1.— Introducción

Entenderemos por marco plano a una estructura plana formada por barras sujetas a deformaciones por flexión, fuerza axial y fuerza cortante; en este capítulo estudiaremos marcos formados por barras en los que sólo consideraremos deformación por flexión, sin considerar acortamiento o alargamiento de las mismas.

Como un ejemplo de marco plano consideremos el pórtico siguiente:



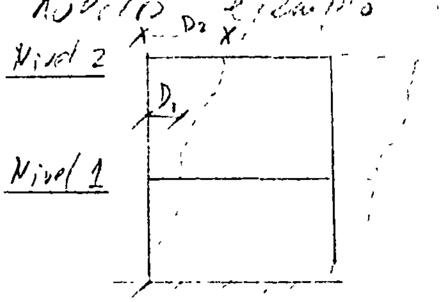
$n_N = 4$
$n_B = 6$

Este marco está formado por seis barras que se conectan en cuatro nudos; obsérvese que los nudos son nudos elásticos.

4.2 Vectores estructurales

4.2.1.— Desplazamientos [d]

En los marcos planos, por considerarse flexión en las barras, se considera a los giros (φ) de los nudos como desplazamientos. Al no considerar acortamiento de las barras, los desplazamientos de los nudos son muy limitados, a cada desplazamiento lineal le llamaremos un grado de libertad; en nuestro ejemplo los nudos no tienen desplazamientos d_y por impedírselo las columnas, los desplazamientos d_x de los nudos serán iguales los de los nudos ① y ② (D_1) y ③,④ (D_2) por no acortarse las trabes, a esos desplazamientos (D_1, D_2) los llamaremos desplazamientos de los niveles 1 y 2 ó desplazamientos de los grados de libertad; por lo tanto en nuestro ejemplo



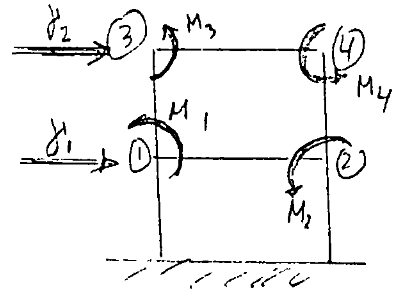
$$[d] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{D+} \\ (+)\,\varphi \end{array} \right.$

Convención de signos

4.2.2.- Fuerzas [F]

Los fuerzas [F] serán momentos externos en los nudos ($M_1, M_2, \ldots M_N$) y fuerzas paralelas a los grados de libertad de la estructura, en nuestro ejemplo serán fuerzas horizontales aplicadas en los niveles 1 y 2.



$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{F+} \\ (+)\,M \end{array} \right.$

Convención de signos.

$$[F] \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix}$$

4.2.3.- Deformaciones [e]

Lo más conveniente será considerar como las deformaciones de las barras a las deformaciones angulares θ_A, θ_B (se supondrán orientadas las barras $\overrightarrow{AB}$) medidas a partir de la recta que une A y B después de deformarse la barra.

$\left. \begin{array}{l} (+)\,\theta_A \\ (+)\,\theta_B \end{array} \right\}$ Convención de signos

$$\boxed{[e_i] = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}} \quad \ldots \; 4.2.3.1$$

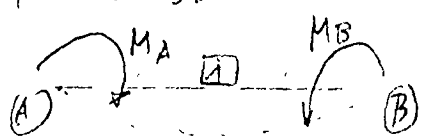
(*) Observe que los órdenes de [d] y [F] serán $(n_N + n_D) \times n_C$, donde n_D = No. de grados de libertad; en nuestro ejemplo: $6 \times n_C$

en nuestro ejemplo: $[e] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{B2} \\ \vdots \\ \theta_{A6} \\ \theta_{B6} \end{bmatrix}$ --- 4.2.3.2

el orden de $[e]$ será $2m_B \times m_c$.

4.2.4.- Fuerzas en las barras $[p]$

Para ser congruentes con la definición de las deformaciones, definiremos como fuerzas en las barras a los momentos flexionantes en A y B



M_A (+) , M_B (+) } Convención de signos.

$$[p_i] = \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}$$

por lo tanto en nuestro ejemplo:

$$[p] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ \vdots \\ M_{A6} \\ M_{B6} \end{bmatrix} \quad \text{--- 4.2.3.3}$$

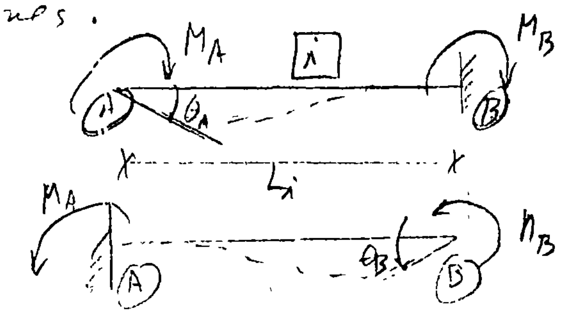
el orden de $[p]$ será: $2m_B \times m_c$

4.3.- <u>Matriz de rigidez de las barras $[k_i]$</u>

Por el hecho de tener ahora las componentes de deformación y de fuerza en las barras, la relación lineal entre ellas será una matriz de 2x2.

$$[p_i] = \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [k_i][e_i] = [k_i]\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

El valor de $[k_i]$ lo obtendremos recordando las siguientes relaciones:



$$\begin{cases} M_A = \dfrac{4EI_i}{L_i}\,\theta_A \quad (+) \\ M_B = \dfrac{2EI_i}{L_i}\,\theta_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_A = \dfrac{2EI}{L}\,\theta_B \\ M_B = \dfrac{4EI_i}{L_i}\,\theta_A \end{cases}$$

de acuerdo con nuestra convención de signos tendremos:

$$M_A = \frac{4E_iI_i}{L_i}\,\theta_A - \frac{2E_iI_i}{L_i}\,\theta_B$$

$$M_B = -\frac{2E_iI_i}{L_i}\,\theta_A + \frac{4E_iI_i}{L_i}\,\theta_B$$

o sea que: $$\boxed{[k_i] = \frac{E_iI_i}{L_i}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}} \quad --- \; 4.3.1$$

Donde E_i = Módulo de elasticidad de la barra $\boxed{i}$

I_i = Momento de inercia de su sección transversal de la barra de sección uniforme $\boxed{i}$

L_i = Longitud de la barra recta $\boxed{i}$

La matriz $[k]$ (rigidez de las barras) será:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & k_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_6 \end{bmatrix} \quad --- \; 4.3.2$$

el orden de $[k]$ será $2n_B \times 2n_B$

(+) Estos valores son la rigidez angular en A (r_{AA}) y r_{AB} ($= \frac{1}{2} r_{AA}$). Ver cualquier libro elemental de estructuras.

Nota: Si la barra $\boxed{i}$ es de sección variable existen tablas(1) que nos dan las rigideces angulares y los factores de transporte, en ese caso la matriz $[k_i]$ tiene la siguiente forma

$$[k_i] = \begin{bmatrix} r_{AA} & -t_{BA}\, r_{BB} \\ -t_{AB}\, r_{AA} & r_{BB} \end{bmatrix}$$

(Obsérvese que: $t_{AB}\, r_{AA} = t_{BA}\, r_{BB}$)

4.4.- Aplicación de los principios fundamentales a la solución por el método de desplazamientos de un marco plano.

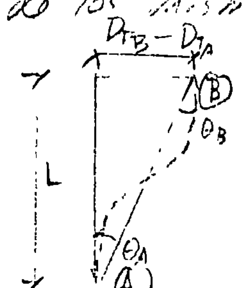
4.4.1.- Continuidad

$$\boxed{[e] = [a][d]} \quad \ldots \; 4.4.1.1$$

La deformación $[e_i]$ de una barra $\boxed{i}$ será función de los giros de sus nudos extremos (φ_A, φ_B) y de los desplazamientos transversales de los mismos (D_{TA}, D_{TB})

$\theta_A = -\varphi_A$

$\theta_B = +\varphi_B$



$$\theta_A = -\frac{(D_{TB} - D_{TA})}{L}$$

$$\theta_B = +\frac{(D_{TB} - D_{TA})}{L}$$

o sea:

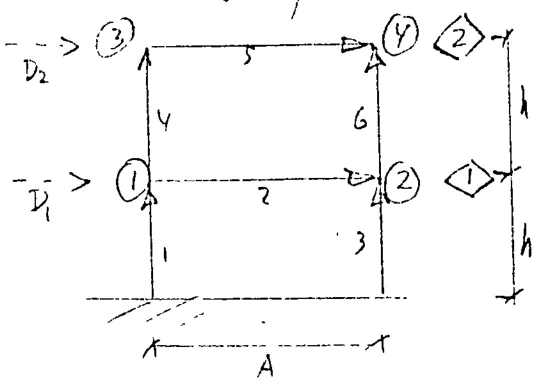
$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= -\varphi_A + \frac{D_{TA}}{L} - \frac{D_{TB}}{L} \\ \theta_B &= +\varphi_B - \frac{D_{TA}}{L} + \frac{D_{TB}}{L} \end{aligned}\right\}$$

(1) Por ejemplo "Handbook of Frame Constants" editado por "Portland Cement Association"

o bien

$$[e_1] = \begin{bmatrix}\theta_{1_1}\\ \theta_{1_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1/L & -1/L \\ 0 & 1 & -1/L & +1/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_A\\ \varphi_B \\ D_{T_A}\\ D_{T_B}\end{bmatrix} \qquad 4.4.1.2$$

Apliquemos estas fórmulas a cada uno de las barras de nuestro ejemplo y así obtengamos la matriz $[a]$, obsérvese que cada columna de $[a]$ corresponde a un valor de $[d]$ y cada renglón doble a un valor de $[e_i]$.



$[a] =$

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	D_1	D_2
$[e_1]$	0	0	0	0	$-1/h$	0
	1	0	0	0	$+1/h$	0
$[e_2]$	-1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0
$[e_3]$	0	0	0	0	$-1/h$	0
	0	1	0	0	$+1/h$	0
$[e_4]$	-1	0	0	0	$+1/h$	$-1/h$
	0	0	1	0	$-1/h$	$+1/h$
$[e_5]$	0	0	-1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0
$[e_6]$	0	-1	0	0	$+1/h$	$-1/h$
	0	0	0	1	$-1/h$	$+1/h$

El orden de $[a]$ es: $2n_B \times (n_N + n_D)$

4.4.2.- Ley de Hooke.

$$[p] = [k][e] \qquad 4.4.2.1$$

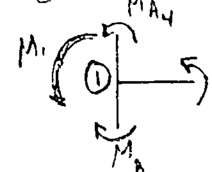
Se utilizaron las expresiones 4.2.3.3, 4.2.3.2 y 4.3.2.

4.4.3 .- Equilibrio

$$\boxed{[F] = [a^T]\,[\gamma]} \qquad 4.4.3.1$$

Es interesante obtener directamente $[a^T]$ por consideraciones de equilibrio únicamente, o sea:

$\sum M_{nudo\,①} = 0$

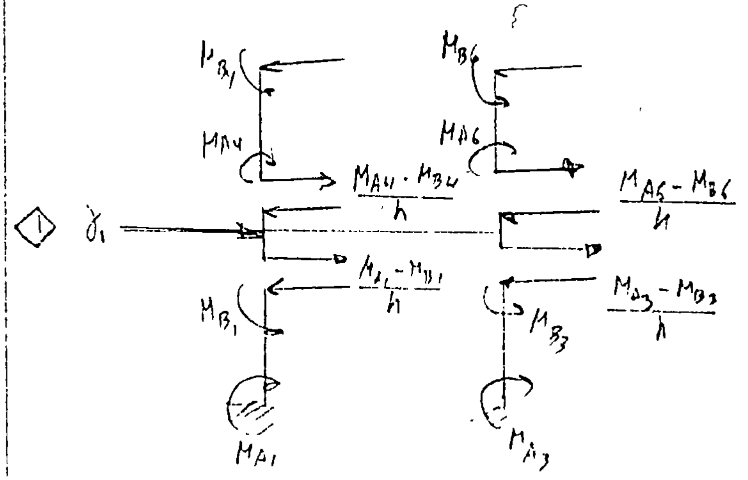


$$M_1 = M_{B_1} - M_{A_2} - M_{A4}$$

$\sum M_{②} = 0$

$$M_2 = M_{B_2} + M_{B_3} - M_{A6}$$

etc.



$\sum F_{zas}$ en nivel ① $= 0$

$$F_1 = -\left(\frac{M_{A_1} - M_{B_1}}{h}\right) - \left(\frac{M_{A_3} - M_{B_3}}{h}\right) + \left(\frac{M_{A_4} - M_{B4}}{h}\right) + \left(\frac{M_{A_6} - M_{B6}}{h}\right)$$

; luego:

$$F_1 = -\tfrac{1}{h} M_{A_1} + \tfrac{1}{h} M_{B_1} - \tfrac{1}{h} M_{A_3} + \tfrac{1}{h} M_{B_3} + \tfrac{1}{h} M_{A_4} - \tfrac{1}{h} M_{B_4} + \tfrac{1}{h} M_{A_6} - \tfrac{1}{h} M_{B6}$$

etc.

4.4.4 — Solución.

Combinando 4.4.1.1, 4.4.2.1, 4.4.3.1 se obtiene

$$\boxed{[F] = [K][d]} \quad \text{-- 4.4.4.1}$$

donde:

$$[K] = [a^T][k][a]$$

en esta ecuación se despejo a $[d]$ se sustituye en 4.4.1.1 se obtiene $[e]$ se sustituye en 4.4.2.1 se obtiene $[p]$ se sustituye en 4.4.3.1 se comprueba el equilibrio.

Obtengamos $[K]$ en nuestro ejemplo, supongamos que todas las barras tienen igual inercia y longitud ($A = h = L$)

$$K = a^T k a$$

$\therefore$

$$[K] = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cccc|cc} 12 & 2 & 2 & 0 & 0 & +6/L \\ 2 & 12 & 0 & 2 & 0 & +6/L \\ 2 & 0 & 8 & 2 & -6/L & +6/L \\ 0 & 2 & 2 & 8 & -6/L & +6/L \\ \hline 0 & 0 & -6/L & -6/L & 48/L^2 & -24/L^2 \\ +6/L & +6/L & +6/L & +6/L & \frac{-24}{L^2} & 24/L^2 \end{array}\right]$$

centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam

ANALISIS ESTRUCTURAL

INTRODUCCION A LAS COMPUTADORAS

LENGUAJE BASIC

DR. PORFIRIO BALLESTEROS
ING. JULIO DAMY RIOS

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

INTRODUCCION A LAS COMPUTADORAS

Generalidades

La computadora es una herramienta en la solución de problemas, sin embargo, es necesario observar que la computadora únicamente ejecuta una serie de instrucciones y no "resuelve problemas" por si sola. No se le puede preguntar ¿Cómo se simula un inventario? ¿Qué costos se deben considerar?. Se necesita especificar una serie de instrucciones para la solución de estos problemas. En otras palabras, la computadora nos ofrece una ayuda muy valiosa proporcionando resultados cuantitativos para explorar diferentes alternativas.

La computadora es la culminación de dispositivos de cálculo como el ábaco, regla de cálculo, tablas, nomogramas, calculadoras de escritorio, etc. Estas últimas también se modernizan y las hay que no trabajan con engranes sino con circuitos electrónicos aumentando notablemente su velocidad. Estas calculadoras son semi-automáticas en el sentido de que están bajo el control del operador.

Obsérvese sin embargo, que con todos los dispositivos mencionados antes no se cambia esencialmente la manera de proceder para resolver un problema.

La computadora corresponde al grupo de dispositivos automáticos y requiere un enfoque completamente diferente para la solución de problemas. Antes de efectuar cualquier cálculo, se tiene que especificar en su totalidad el proceso de solución del problema.

Los desarrollos más importantes en el campo de las computadoras han tenido lugar en los últimos 25 años. Las primeras computadoras mecánicas fueron inventadas por Pascal y Leibnitz, aunque se ha aceptado que el principio de las computadoras modernas se inició con la Máquina Analítica de Babbage en 1833. Hollerith patentó en 1889 las tarjetas perforadas que se usan en la mayoría de los sistemas. La primera computadora digital moderna totalmente electrónica fué la desarrollada por Eckert y Mauchly en la Universidad de Pensilvania en 1946 y se denominó Computadora Automática e Integrador Numérico Eléctrico, utilizando bulbos en su mayor parte, lo que representó un adelanto con respecto a la computadora Mark 1 de Aiken construída en la Universidad de Harvard en 1944 y que hacía uso de relevadores electromecánicos en lugar de bulbos. Las computadoras actuales fueron posibles gracias al desarrollo de dispositivos de memoria y de que las instrucciones también se pudieran almacenar, de manera que controlaran automáticamente la operación de la máquina, basándose la idea del programa almacenado en las investigaciones del Dr. J. Neumann. El sistema numérico binario, conocido en la antiguedad, se refinó para utilizarlo en la operación interna de las computadoras.

Clasificación y componentes de una Computadora

Las computadoras se clasifican en digitales y analógicas. Las digitales implican que dentro de la computadora la información se representa por una serie de caracteres como sucede en una calculadora de escritorio o sumadora, donde los números se representan por dígitos. En las analógicas los números se representan por cantidades físicas de variación contínua. Es el caso del termostato en el que los contactos se desplazan de una manera contínua según la variación de la temperatura. Otro ejemplo sencillo es la regla de cálculo. Al final de este artículo se presentan las características de las computadoras analógicas e híbridas y se comparan con las computadoras digitales

Por computadora electrónica se indica que las operaciones de la máquina son a base de circuitos electrónicos y no por sistemas mecánicos de engranes. Con ésto se obtiene una gran velocidad en las operaciones. Las sumas por ejemplo, son del orden de micro o nanosegundos.

En general las computadoras se pueden considerar divididas en las siguientes partes (figura 1).

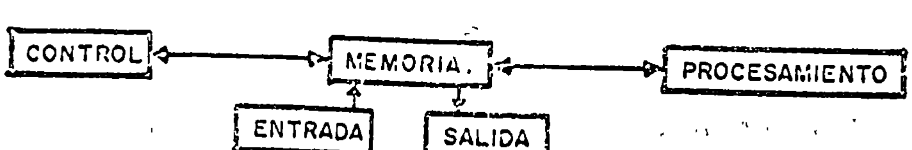


Figura 1.

La entrada es para introducir información a la computadora y puede ser por tarjetas perforadas, cinta de papel, cinta magnética o por lectora óptica. La salida es para transmitir información de la computadora al operador y puede ser por tarjetas perforadas, cinta de papel, cinta magnética, impresora, diagramas, tubos de rayos catódicos o disco magnético.

La memoria es el dispositivo para almacenar información interna que consiste en las instrucciones del programa y los datos sobre los que se ejecutan las instrucciones. Lo usual es que la memoria sea un arreglo de núcleos magnéticos. Existen dispositivos auxiliares de almacenamiento como discos y cintas magnéticos.

La unidad de procesamiento realiza todas las operaciones aritméticas y lógicas. En las operaciones aritméticas su función es semejante a los registros de una sumadora y en las operaciones lógicas se prueba el signo de un número o se comparan dos números.

La unidad de control tiene el papel de supervisor para toda la máquina. Arregla las instrucciones en la sucesión adecuada y controla que las componentes apropiadas de la máquina realicen las operaciones que especifican las instrucciones. Para máquinas semi-automáticas el control es externo.

La analogía entre las componentes de la computadora y el sistema usual de operación es fácil de establecer. Imagínese una persona en su escritorio: la entrada y salida son los documentos de recepción y salida en las charolas de correspondencia, el almacenamiento o memoria son los papeles en donde se escriben las anotaciones, métodos de análisis, etc., y las operaciones aritméticas o procesamiento se realizan con la sumadora de escritorio. Todas estas secciones están conectadas y bajo control de la persona trabajando en dicho escritorio.

En los últimos 20 años las computadoras han progresado en todas sus componentes, de algunas operaciones por segundo a miles y millones de ellas por segundo. Las computadoras actuales pueden en un minuto hacer cálculos que demandarían 40 siglos de una persona con conocimientos en matemáticas. Existen métodos de verificación que aseguran que las operaciones y los resultados son correctos a estas altas velocidades de operación. El progreso tan rápido de las computadoras también es debido a que al programar la operación de una computadora de una manera nueva se encuentra generalmente que la máquina hace más de para lo - que originalmente fué diseñada.

Solución de un problema

En la solución de un problema por medio de una computadora se requieren los pasos siguientes:

1. Especificación del problema. Con esto se indica que se debe identificar perfectamente el problema y sus limitaciones, conocer el método general de solución, las variables del problema y los resultados deseados. Para ésto se necesita conocer los campos de matemáticas relacionados con el problema.

2. Análisis. Es la formulación matemática detallada del problema o algoritmo, de manera que se tengan una serie de pasos aritméticos accesibles al lenguaje de la computadora. Es decir, que las funciones trigométricas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc., se deben expresar en términos de operaciones aritméticas adecuadas para la computadora.

3. Programación. Consiste en establecer el procedimiento numérico como una serie detallada de operaciones. Se considera dividida en dos partes: en la primera la sucesión de operaciones se presenta en forma gráfica en un diagrama de bloques o diagrama de flujo. Esto permite dar una idea -- precisa de lo que se desea hacer. La segunda parte es la presentación de este diagrama en un lenguaje accesible a - la máquina. Esta parte se denomina codificación.

4. Verificación. Es la prueba exhaustiva del programa para - eliminar todos los errores que tenga, de manera que efectúe lo que se desea. Los resultados de prueba se comparan con resultados conocidos de problemas ya resueltos.

5. Documentación. Consiste en preparar un instructivo del -- programa, de manera que cualquier otra persona pueda conocer y utilizar el programa.

6. Producción. Es la última etapa y se consideran datos de entrada del problema obteniéndose las soluciones correspondientes. En general se pueden introducir varios grupos de datos referentes a distintas condiciones del problema o problemas, obteniéndose las respuestas correspondientes sin que sea necesaria la intervención del operador entre los distintos grupos de datos.

De lo antes expuesto se puede observar que es necesario un conocimiento del problema y de los campos de matemáticas relacionados con él. Por esta razón el énfasis en los libros de texto y en los manuales está en el análisis y en la programación.

La selección del método de análisis es muy importante. Por ejemplo, la resolución de un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas puede implicar treinta mil operaciones utilizando el método de determinantes con la regla de Cramer. Un método de eliminaciones sucesivas puede necesitar sólo doscientas operaciones. Sin embargo, hay que tener presente los problemas de la programación que pudieran ser mayores para métodos que requieran un menor número de operaciones.

Diagrama de Flujo

Un ejemplo de diagrama de flujo de una actividad diaria como ir al trabajo, puede ser como se indica en la figura 2.

Este diagrama de bloque se puede presentar en diagramas de flujo más detallados, como se estudiará posteriormente en los ejemplos de aplicación.

Dada la aplicación tan general de las computadoras, algunos de los pasos del diagrama anterior tendrán que cambiarse en otros campos, como por ejemplo en la traducción de idiomas.

Se ha observado que la programación de un método es más ilustrativo que cualquier número de soluciones manuales que se hayan efectuado con ese método. También se ha observado que tan importante como es aprender programación lo es evaluar, adaptar y utilizar los programas desarrollados por otros programadores. Dentro del tema de programación están los lenguajes de programación.

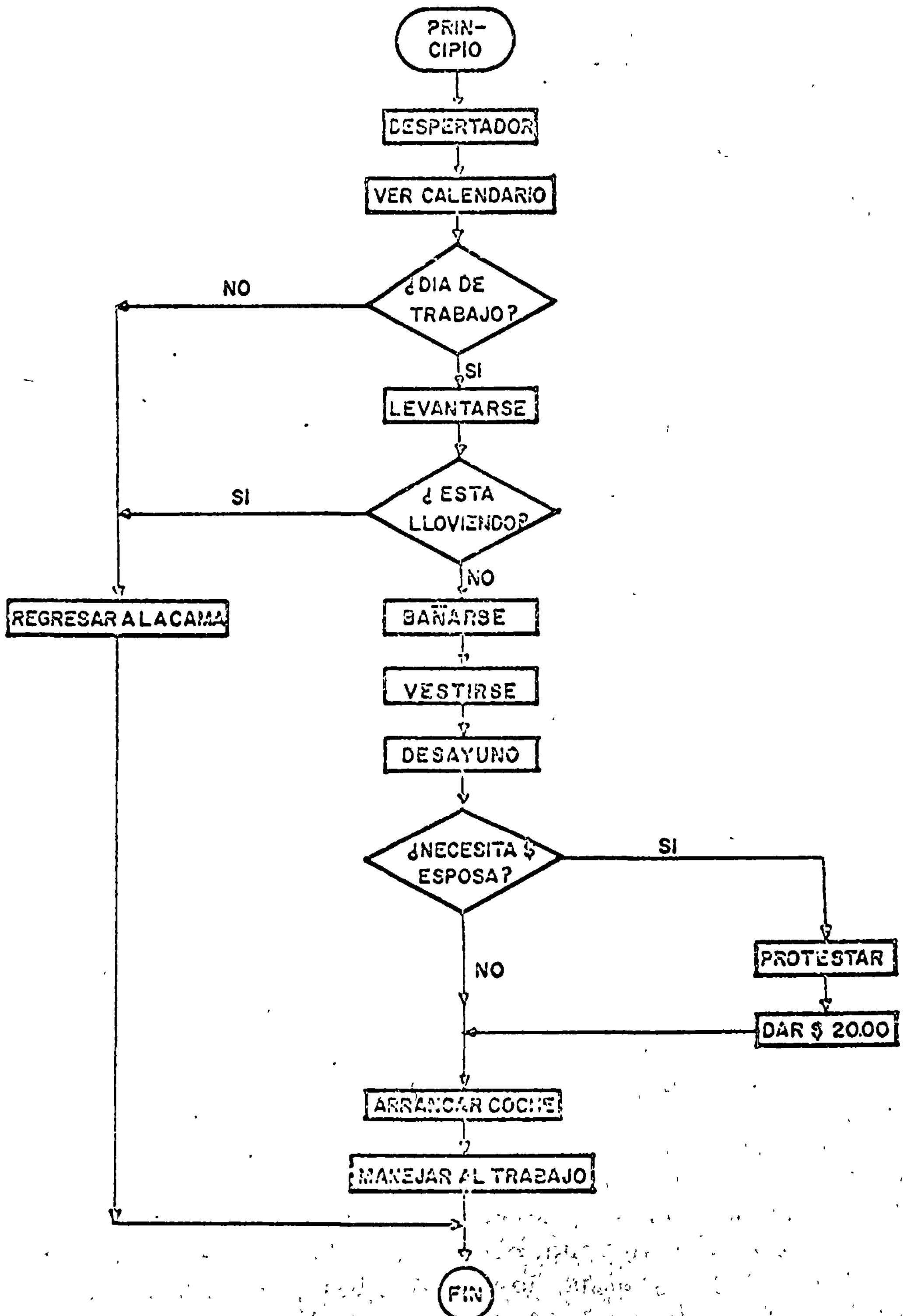

PRIN-
CIPIO
DESPERTADOR
VER CALENDARIO
¿DIA DE TRABAJO?
NO
SI
LEVANTARSE
¿ESTA LLOVIENDO?
SI
NO
REGRESAR A LA CAMA
BAÑARSE
VESTIRSE
DESAYUNO
¿NECESITA $ ESPOSA?
SI
NO
PROTESTAR
DAR $ 20.00
ARRANCAR COCHE
MANEJAR AL TRABAJO
FIN

Figura 2.

Lenguajes de programación

Los lenguajes de programación han experimentado también - un gran progreso. El lenguaje más elemental es el llamado lenguaje de máquina o lenguaje absoluto. En general, en una instrucción de máquina se especifican dos elementos: la operación y el operando. En el lenguaje absoluto la operación se - indica según un código numérico que se asigna al diseñar la - computadora. Por ejemplo, el número 32 puede indicar la operación de suma. El segundo elemento, o sea el operando, se identifica por su dirección. La dirección especifica la posición del elemento en la memoria de la máquina. Al escribir por -- ejemplo 32 0600 se indica que se sume el contenido de la posición número 0600 de memoria al contenido actual del acumulador El lenguaje de máquina son las instrucciones que la máquina - puede interpretar directamente, utilizándose códigos numéricos para las operaciones y las direcciones de las posiciones en memoria donde están almacenados los operandos. Es necesario tener presentes tanto los códigos de operación como las posiciones en memoria de los operandos. Sin embargo, los lenguajes - absolutos son diferentes para distintos modelos de computadoras y por esta razón no es frecuente el uso del lenguaje de máquina.

A continuación se tienen los lenguajes simbólicos o de ensamble. En este lenguaje, las operaciones se indican en forma abreviada, por ejemplo, ADD para suma y DIV para división. Además, se pueden designar direcciones simbólicas arbitrarias a - posiciones en memoria que contienen operandos o instrucciones. Un programa escrito en lenguaje simbólico no es aceptado directamente por la máquina, pero existe un programa de ensamble -- que traduce el lenguaje simbólico a lenguaje de máquina.

Se tienen después los lenguajes de procedimiento, que permiten la especificación de operaciones en unidades de procesamiento denominadas proposiciones. Ejemplos de estos lenguajes son: FORTRAN, ALGOL, PL-1, MAD, COBOL, AUTOCOMM, etc. Los cuatro primeros son para problemas técnicos y los dos últimos para problemas administrativos. El cambio de cada uno de estos lenguajes al lenguaje de máquina se efectúa por medio de un -- programa llamado compilador.

La programación se facilita mucho con los lenguajes de procedimiento. Por ejemplo, en FORTRAN se puede escribir la proposición: A = B + C. Esta proposición ocasiona que la máquina localice en memoria los elementos que identifique con B y C, sumando sus contenidos y guardando el resultado en el elemento identificado con A. La posición en memoria de los elementos A, B y C es proporcionada automáticamente por la máquina.

Por último, existen los lenguajes orientados a problemas específicos o super-lenguajes. En éstos la descripción de un problema se asemeja mucho a la terminología establecida en esa materia. De esta forma el problema se describe a la computadora básicamente en los mismos términos en que se le describirá a una persona conocedora de ese tema. Se puede utilizar un lenguaje de procedimiento para efectuar la conversión de la descripción del problema hecha en el lenguaje orientado. Ejemplos de estos super-lenguajes son: COGO, GROPE, STRESS, ICES. El primero se aplica en topografía, el segundo para problemas de optimización y los dos últimos en problemas de ingeniería civil. Estos lenguajes orientados a problemas revolucionan la enseñanza, ya que el estudiante puede conversar con la computadora a través de una terminal y utilizar la terminología usual en el campo en el que está resolviendo sus problemas.

Obsérvese que con cada desarrollo de los lenguajes se aumenta la facilidad de la programación.

Ejecución de un programa

Para la ejecución de un programa se necesita escribir primero las proposiciones en el lenguaje de procedimiento utilizado. Estas proposiciones se escriben en hojas especiales de codificación, y se procede a la perforación de tarjetas obteniéndose el programa fuente.

El programa fuente bajo control del compilador puede tener errores que se detectan y que aparecen impresos en el diagnóstico. Se corrigen y se vuelve a compilar hasta que no se detectan errores. En este caso, el compilador traduce las proposiciones a lenguaje de máquina obteniéndose el programa objeto. Inmediatamente después, la computadora bajo control del programa objeto, lee los datos del problema y ejecuta las instrucciones con dichos datos, obteniendo los resultados.

El programa objeto se puede perforar en tarjetas o cinta de papel y en lo sucesivo no será necesario compilarlo sino proceder directamente a su ejecución. Para ello se utiliza un programa llamado cargador, que lee las tarjetas o cinta de papel del programa objeto y las almacena en memoria. Al terminar esta lectura, el control se transfiere a la primera instrucción y la computadora estará bajo el control del programa objeto.

Operación interna de la máquina

La operación interna de la máquina está basada en la aritmética binaria. En el sistema binario la base es el número 2 y sólo hay dos símbolos, el 0 y el 1. La razón de esto es que en la construcción de la computadora se utilizan núcleos o anillos magnéticos que sólo tienen dos direcciones posibles de magnetización, como se muestra en la figura 3. Cada uno de estos núcleos es un dígito binario o bit.

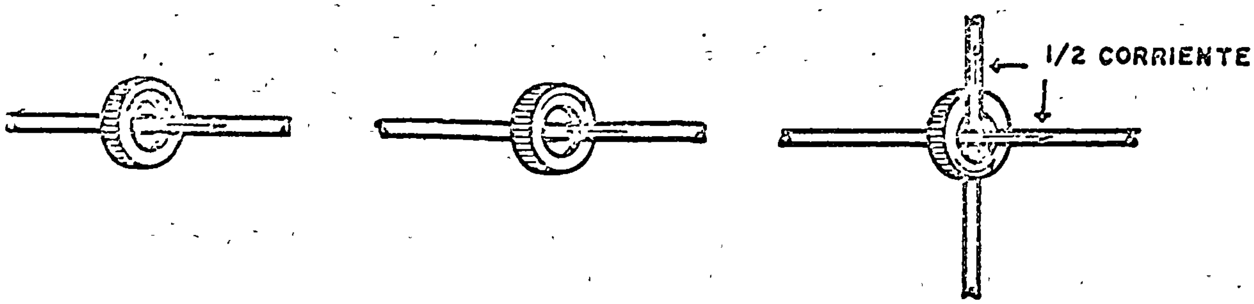


Figura 3.

La magnetización de un anillo cuando circula una corriente por el alambre interior la observó Faraday por primera vez, durante sus experimentos sobre electricidad. Observó también que el sentido de magnetización del anillo cambia cuando cambia el sentido de la corriente en el alambre interior.La construcción se hace pasando dos alambres por el centro del anillo como se indica en la figura de la derecha. En realidad falta un tercer alambre que detecte el sentido de magnetización del anillo.

La tecnología ha permitido la construcción de los anillos con un diámetro cada vez menor. La unidad de medida es el mil (1 mil = 1 pulg /1000), observándose que en 1960 los diámetros de los anillos eran de 50 mils y que en un futuro cercano se vislumbran diámetros de 12 mils.

Los núcleos magnéticos se usan en el dispositivo de memoria porque reúnen las características siguientes: se pueden magnetizar fácilmente, conservan su magnetismo indefinidamente si no hay interferencias, cambian el sentido de magnetización con un mínimo de corriente y se pueden fabricar en tamaños muy pequeños.

Se llama palabra a una unidad de información que se ha codificado para usarse en la computadora como una serie de bits. Una longitud usual de la palabra es de 12 bits, aunque pueden tenerse palabras de 36 bits, como en las computadoras IBM 7090-7094. Dependiendo de la máquina involucrada, las longitudes de las palabras pueden ser fijas o variables.

En general, en una instrucción de 12 bits, se usan 6 bits para la operación o sea el código de la función y 6 bits para el operando o sea la dirección de ejecución. Si una instrucción necesita mayor número de bits, se utilizan dos palabras. La distribución gráfica para una instrucción de 12 bits es como se muestra en la figura 4.

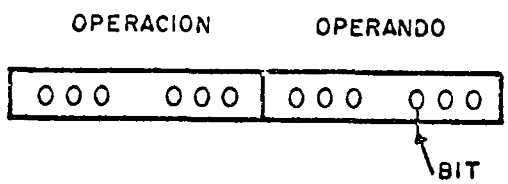


Figura 4.

Los núcleos magnéticos se arreglan en mallas por planos y según arreglos paralelos de planos, como se muestra en la figura 5. Cada línea vertical que pasa por las intersecciones corresponde a una localidad, dirección o posición en la memoria. Sin embargo, el número de una localidad es completamente distinto de la información almacenada en esa localidad, que puede ser una instrucción o un dato para usarse posteriormente. Es decir, la localidad 2310 no indica que contiene al número 2310. En la figura 5 se consideran 6 planos y entonces se dispone de 6 bits en la dirección vertical para cada intersección. Con estos 6 bits se pueden identificar números o letras, asignándoles 0 ó 1 según la dirección de magnetización. La identificación de números y letras se presentará al considerar posteriormente los sistemas numéricos.

En los nuevos sistemas se utilizan otras unidades denominadas bytes y son las unidades más pequeñas a las que se hace referencia. En el sistema IBM-700 el byte consta de 6 bits y en el sistema IBM-360 consta de 8 bits y de un noveno bit de verificación de paridad y al cual no se puede hacer referencia. Los bytes se pueden manipular individualmente o en grupos y en el sistema 360 se define a 2 bytes adyacentes como media palabra; 4 bytes consecutivos como una palabra; y 8 bytes consecutivos como una palabra doble.

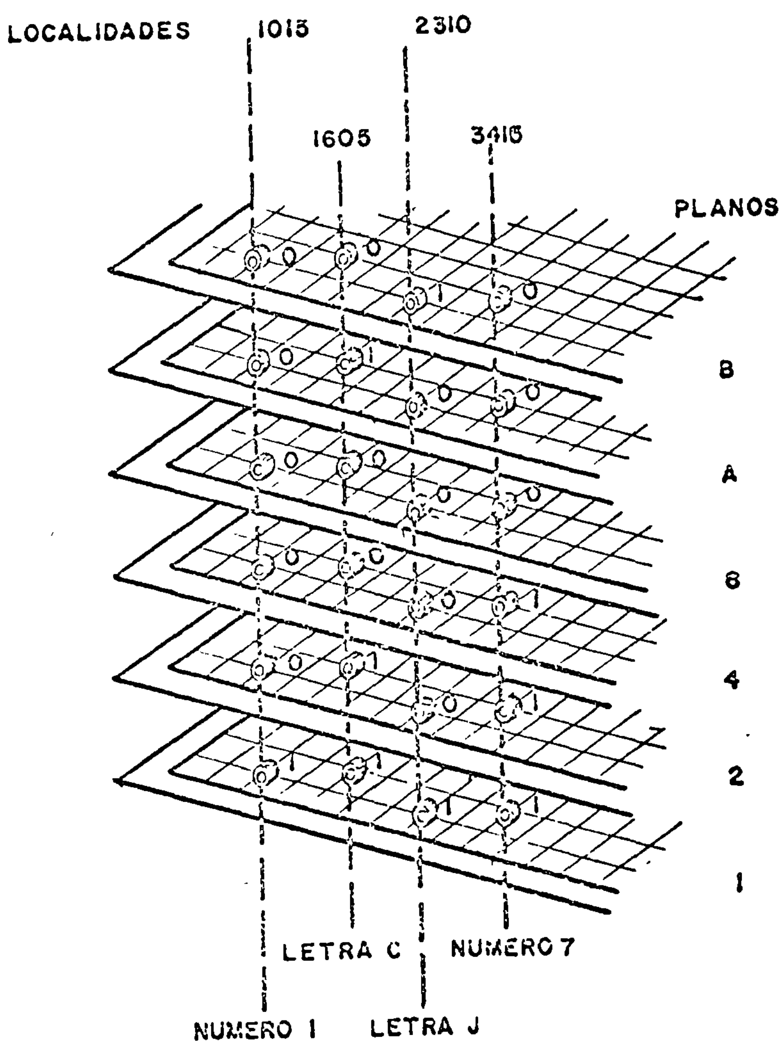


Figura 5.

Errores

Los errores provienen de tres fuentes.

El primer tipo corresponde a los errores propios de los datos. Los datos representan cantidades físicas y existe incertidumbre en su medida. También se incluye el caso de constantes que no pueden representarse exactamente, como es el caso de los números π y e, o fracciones como 1/3, 2/3, etc.

El segundo tipo son los errores de truncamiento. Corresponden al caso de calcular por ejemplo sen x, cos x, e^x, etc., -- usando series. Estas series tienen un número infinito de elementos pero evidentemente para calcular su valor sólo se puede considerar un número finito de ellos.

Por último, se tienen los errores de aproximación o redondeo. Estos se producen ya que los números pueden tener únicamente determinado número de dígitos y en operaciones como multiplicación, A = B X C, el resultado puede tener un número de dígitos mayor que el permitido. En este caso el resultado se redondea o simplemente se pierden los dígitos menos significativos.

Un aspecto importante en el estudio de errores es el referente a la propagación del error, es decir, poder estimar el error en el resultado debido al efecto de los errores en los operandos. Es conveniente conocer métodos que reduzcan esta propagación de errores.

Computadoras Analógicas e Híbridas

La computadora analógica es una colección de dispositivos electrónicos que pueden efectuar operaciones matemáticas básicas como suma, resta, multiplicación, división y generación de funciones. Es muy útil en el estudio de sistemas de variación en el tiempo ya que la computadora simula fácilmente el comportamiento dinámico de cualquier sistema. Por medio de tableros y perforaciones, con cables y clavijas en sus extremos para introducirlas en las perforaciones, se puede formar un modelo electrónico de una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales que describan la operación o comportamiento dinámico de un sistema. Por esta razón la computadora analógica es - básicamente una herramienta para la investigación y también para la enseñanza.

Las soluciones de la computadora se presentan usualmente en forma gráfica en un osciloscopio. El operador tiene la oportunidad de cambiar los coeficientes de un potenciómetro y ajustar los valores de los parámetros, experimentando el comportamiento del modelo y observando instantáneamente el efecto del cambio de parámetros en una o más variables del sistema en estudio.

La computadora analógica tiene la característica de poder cambiar la escala de tiempo y hacer lentas las soluciones rápidas o acelerar las soluciones lentas, lo que resulta en un mejor análisis y un costo menor. Estos casos se presentan -- por ejemplo para analizar explosiones que ocurren en una fracción de segundo y que tienen que hacerse más lentas en la computadora para estudiarlas. Otros procesos como la fatiga en metales que puede durar varios años tienen que acelerarse en la computadora para poder estudiarlos.

En algunos sistemas físicos es imposible o muy peligroso estudiar las condiciones críticas de operación del sistema, - como en el caso de un reactor nuclear o de una red eléctrica. Sin embargo, el modelo de computadora puede llevarse al límite de destrucción y proporcionar de hecho la única manera segura de analizar con detalle el comportamiento del sistema en situaciones críticas.

Las computadoras analógicas tienen las desventajas de estar limitadas en el tamaño del problema que pueden resolver, de no tener dispositivo de memoria para almacenar soluciones, y por lo tanto, no pueden considerar decisiones lógicas con - las soluciones obtenidas, para decidir la secuencia de cálculo posterior.

Algunas aplicaciones de las computadoras analógicas son en las industrias eléctrica, del acero, procesos químicos, -- aviones, cohetes, transferencia de calor, análisis dinámico - de estructuras, reactores nucleares y recientemente en biomedicina y bioingeniería.

Las personas que usan las computadoras digitales y analógicas se han especializado a tal grado que no hay comunicación entre ellas, aunque se admite que algunos problemas son más adecuados para alguno de los tipos de computadora. Sin embargo, para algunos problemas de ingeniería se hizo necesario utilizar las técnicas de computación analógica y digital, dando como resultado la computadora híbrida.

La computadora híbrida es una combinación de computadoras analógica y digital, con un sistema adecuado de comunicación y operación, ya que la analógica opera básicamente en forma continua y en paralelo, mientras que la digital opera en forma -- discretizada y secuencial. El problema de comunicación no es sólo la conversión de analógica a digital y viceversa, sino -- también la solución de los complejos problemas de tiempo para asegurar que la transferencia de información entre los dos sistemas se realiza eficientemente. Las computadoras híbridas se pueden aplicar en problemas de ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, especialmente si se aplica la generación de funciones de variables múltiples; sistemas de control con combinaciones de variables continuas y discretas, y análisis estadísticos.

Resumen

A continuación se presentan algunas de las ventajas y desventajas más importantes de las computadoras digital y analógica.

La computadora digital tiene la ventaja de operación completamente automática y a alta velocidad, gran capacidad de memoria para almacenar información, programación sencilla para - la recuperación de información en memoria, resolución númerica de variables y posibilidad de obtener la precisión deseada. -- También se pueden tomar decisiones lógicas. Las desventajas - son que se opera en forma discontinua y los cálculos entre intervalos pueden implicar errores apreciables y dificultad para obtener una solución estable. Si se desean resultados gráficos, como se opera con tablas de números se aumenta el tiempo de máquina, lo que también ocurre cuando el problema aumenta - sus dimensiones y complejidad. La escala de tiempo no se puede alterar y debido a esto es difícil añadir partes de un sistema físico. Sin embargo, se pueden resolver problemas de -- cualquier tamaño si se cuenta con tiempo de máquina suficiente.

La computadora analógica tiene la ventaja de alta velocidad de operación, facilidad de cambio de parámetros y observación instantánea de los efectos de estos cambios de manera que el operador puede experimentar realmente el modelo en estudio. La computadora opera en paralelo, de manera que el tiempo de - solución es independiente de la complejidad del problema; además se puede cambiar la escala de tiempo. Los resultados se -

presentan en forma gráfica y no se aumenta el tiempo de máquina con esta representación. No hay necesidad de aprender lenguajes de programación. Se tienen desventajas en el tamaño de los problemas, precisión de las componentes del problema y capacidad de memoria limitada. Para mejorar la precisión se requieren cálculos laboriosos o imposibles, lo que también sucede para cálculos discretizados y funciones lógicas, no contándose además con métodos de programación automáticos.

Obsérvese finalmente que la programación de una computadora digital es en realidad una ciencia por si misma y no tiene relación con otras ramas científicas como la ingeniería, la física, la química, etc.

LENGUAJE BASIC

1. Generalidades.

El lenguaje BASIC es un lenguaje de programación que se asemeja a la notación matemática ordinaria. Cumple con el requisito de tener un vocabulario sencillo, fácil de entender y utilizar, que permite la especificación de los programas en forma precisa y completa. Su nombre proviene de Beginner's All-purpose Symbolic Instrucción Code, es decir, Código de instrucción simbólica de fines generales para principiantes. Es un lenguaje orientado al procedimiento, en lugar de orientarse a la máquina y es el lenguaje de programación más sencillo en cuanto a su aprendizaje y uso, comparado con otros lenguajes como: FORTRAN, COBOL, ALGOL y PL/1.

El desarrollo original del lenguaje BASIC se efectuó en el Dartmouth College, auspiciado por la Fundación Nacional para la Ciencia. Se ha desarrollado fundamentalmente para los usuarios de sistemas con tiempo compartido. El sistema de tiempo compartido permite que varios usuarios compartan el uso de una computadora central de gran capacidad, a la que se encuentran unidos por teletipo. Teniendo en cuenta la velocidad de operación de la computadora, cada usuario se comunica con la computadora, desde su terminal, como si fuera el único usuario. La terminal, está ligada a la computadora por medio de línea telefónica y por lo mismo la distancia entre terminal y computadora puede ser cualquiera. Se han tenido terminales en la ciudad de México, ligadas a una computadora central de gran capacidad situada en los Angeles, California.

Los elementos básicos de este lenguaje lo constituyen las constantes, variables, arreglos, expresiones y proposiciones. El programa para la solución de un problema consiste en un grupo de proposiciones formado por expresiones y operadores, que siguen reglas previamente establecidas semejantes a las reglas gramaticales. A -

continuación se presentan los elementos básicos del lenguaje BASIC.

2. Numeración de renglones.

Cada renglón de un programa en lenguaje BASIC se debe numerar. Este número, que identifica al renglón, se encuentra al principio de cada renglón o proposición y puede tener de uno a cinco dígitos. Ningún número de proposición debe repetirse en el programa, ejecutando la computadora las proposiciones indicadas en el orden especificado por los números de renglón o proposición. Los números de proposición no tienen signo.

La razón de la numeración de todos los renglones se debe al tipo de comunicación que se establece en un sistema de tiempo compartido. Con este sistema se necesita tener la flexibilidad de identificación de un renglón cualquiera, para facilitar la comunicación entre la terminal y la computadora central.

Antes de proceder a la ejecución de las proposiciones o instrucciones, la computadora reordena las proposiciones de acuerdo a los números de renglón correspondientes. Por esta razón las proposiciones pueden introducirse en cualquier orden, pudiéndose añadir o modificar proposiciones en cualquier posición del programa. Por lo tanto, no se recomienda la numeración consecutiva de los renglones, ya que la intercalación de un nuevo renglón implicaría la renumeración de las proposiciones restantes del programa.

Independientemente del orden en el que se introduzcan las proposiciones de un programa, aparecerán ordenadas por orden progresivo cuando se solicita un listado de dicho programa.

3. Constantes.

Una constante es un número cualquiera, entero o real, que no cambia de valor al utilizarse de una ejecución del programa a la siguiente ejecución. Las constantes enteras no tienen punto decimal, en tanto que las constantes reales incluyen punto decimal, que puede estar colocado en cualquier posición.

Las constantes pueden ser positivas o negativas, pudiendo tener un máximo de nueve dígitos en la generalidad de los sistemas. El signo más es opcional para números positivos, o sea que una constante sin signo se supone positiva. La magnitud de una constante puede ser cero o estar comprendida en el intervalo aproximado entre 10^{-75} y 10^{75}, dependiendo del tipo de computadora. Obsérvese que no se permite el uso de comas en los números. Ejemplos de constantes:

aceptables	no aceptables	
0	- 1,285	(no se permite coma)
+ 15	1,285.72	(no se permite coma)
- 145.862513	846792003243	(demasiado grande)
987654321	846792.003243	(demasiado grande)

Para números muy grandes o muy pequeños, se tiene la posibilidad de utilizar la nomenclatura exponencial, que consiste en un número seguido de la letra E y de una constante entera, positiva o negativa, de uno o dos dígitos, que indica la potencia de 10 por la que se multiplica el número que procede a la letra E. Ejemplos de constantes:

aceptables	no aceptables
2.5 E+4 (2.5×10^4)	2.5 E90 (demasiado grande)
-0.4 E5 (-0.4×10^5)	-0.4 E5.5 (exponente debe ser entero)
-6 E-3 (-6×10^{-3})	E-3 (falta número antes de la E)
3.15 E02 (3.15×10^2)	3,2 E+3 (no se permite coma)

4. <u>Variables</u>.

Las variables indican cualquier cantidad, entera o real, a la que se puede hacer referencia y que puede tener distintos valores durante la ejecución de un programa.

Una variable se indica por cualquier letra del alfabeto o por una letra del alfabeto, seguida por un solo dígito, entre 0 y 9, lo que permite un total de 286 posibilidades para identificar variables.

Los valores y rangos de variación de las variables son los -- mismos que los de las constantes. Todas las variables se inicializan automáticamente con el valor cero, de manera que no es necesario asignarles ningún valor, cuando su valor inicial es cero. (Pueden existir excepciones según el tipo de computadora). Ejemplos de variables:

aceptables	no aceptables	
B	5B	(no empieza con letra)
X	BC	(demasiadas letras)
X2	B12	(demasiados caracteres)
C1	C/	(caracter no alfanumérico*)
C9	C.	(caracter no alfanumérico*)

Las proposiciones LET, READ e INPUT sirven para asignar valores numéricos a las variables, los que se almacenan en la - posición o localidad de la memoria de la máquina, reservada - para cada una de las variables.

Existen las llamadas variables alfanuméricas, que permiten el manejo de datos alfanuméricos, como nombres, direcciónes y -- cualquier otra información de identificación. Las variables alfanuméricas se indican por medio de una sola letra del alfabeto seguida del símbolo de pesos. Por lo tanto existen 26 - nombres de variables alfanuméricas y son A$, B$, C$, etc. Estas variables pueden tener un máximo de 15 caracteres o columnas disponibles para su identificación. Las variables alfanuméricas se considerán posteriormente en la sección de características especiales del lenguaje BASIC.

5. Arreglos y subíndices.

Una variable con subíndice se forma en BASIC con el nombre de un arreglo, seguido de paréntesis, en los que se comprenden

---

*Los caracteres alfanuméricos están formados por letras y números, exclusivamente.

uno o dos subíndices separados por una coma.

El nombre del arreglo, que es una variable, consiste de una sola letra del alfabeto, por lo que existen 26 posibilidades de nombres de variables con subíndices. Es decir, con el nombre de la variable con subíndice se hace referencia a un arreglo formado por un conjunto ordenado de cantidades. Un solo nombre de variable con subíndice puede representar entonces muchas cantidades. El número de subíndices representa la dimensión del arreglo, por ejemplo,

B (25), D(15,15)

son arreglos de una y dos dimensiones, respectivamente. Los arreglos de una dimensión se denominan arreglos lineales o vectores y los de dos dimensiones se designan matrices, en donde el primer subíndice identifica el renglón y el segundo la columna del elemento considerado.

Los subíndices pueden ser constantes, variables o expresiones, como se presenta en la sección siguiente. Como ejemplos, si el arreglo A(I) contiene los elementos

8, 7, 20, 9, 11, 16

entonces A(2) tiene el valor 7, A(4) tiene el valor 9, etc. Los elementos de un arreglo se numeran en forma consecutiva, empezando en general con el número 1. Existen sistemas que no aceptan los subíndices cero o negativos. Sin embargo,hay sistemas que sí aceptan el subíndice cero, en donde el arreglo C(3) consistirá de los cuatro elementos siguientes:

C(0), C(1), C(2), C(3)

Se recomienda iniciar la referencia a los subíndices de arreglos con el número 1, de manera que las proposiciones sean aceptadas en todos los sistemas, aun cuando se pierda una posición en los sistemas que aceptan el cero como subíndice.

Si el arreglo B(I,J) tiene los elementos

$$\begin{matrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 9 \end{matrix}$$

entonces B(1,2) tiene el valor 3, B(2,2) el valor 4, B(3,2) el valor -1, etc.

Se permite que el nombre de un arreglo se use también como nombre de una variable, en un mismo programa. Por lo tanto, C y C(I) representan elementos diferentes. Sin embargo, una misma letra no puede utilizarse para designar dos arreglos a conjuntos de datos diferentes, en un mismo programa.

6. Expresiones.

Una expresión se define como una constante, una variable con o sin subíndices, una función o cualquier combinación de estos elementos, separados por operadores y paréntesis, y que cumplen las reglas para formar expresiones.

Los símbolos de los operadores aritméticos se presentan en la Tabla 1.

símbolo	operación
+	adición
-	sustracción
*	multiplicación
/	división
$\uparrow$ ó **	exponenciación

Tabla 1. Operadores aritméticos

No se permite que dos operadores se encuentren uno junto al otro, considerándose el caso de exponenciación (**) como un solo símbolo. Conviene observar que para exponenciación, el símbolo $\uparrow$ es el que se utiliza generalmente.

Existe la regla que permite el uso de paréntesis para establecer agrupamientos de la misma manera que en la notación matemática ordinaria. Cuando el orden de las operaciones no se indica completamente con el uso de paréntesis, el orden de ejecución es el siguiente: en primer lugar se efectúan las exponenciaciones, después las multiplicaciones y divisiones, y finalmente las sumas y restas. Sin embargo, en el caso de que el nivel de operaciones sea el mismo, como por ejemplo multiplicaciones y divisiones, o sumas y restas, se procede de izquierda a derecha en el orden de ejecución. Con respecto al uso de paréntesis, el orden de ejecución es del paréntesis más interior hacia el paréntesis más exterior. Siempre que en una expresión se tengan dudas en las operaciones que se efectúan, se recomienda el uso adicional de paréntesis. Por ejemplo, en la expresión.

$$A/B - D * F + C \uparrow E$$

Se tendría el orden de ejecución siguiente: se elevaría C al exponente E, A se dividiría entre B, D se multiplicaría por F, al cociente A/B se le restaría el producto D * F y al resultado de esta operación se le sumaría el resultado de C $\uparrow$ E para obtener el resultado final.

En la operación de exponenciación existe la regla de que una expresión cualquiera se puede elevar a un exponente real, positivo o negativo, pero no se permite que una cantidad negativa se eleve a un exponente real, ya que en general el resultado es complejo. Por lo tanto, una cantidad negativa sólo puede elevarse a un exponente entero.

A continuación se presentan algunos ejemplos referentes a expresiones.

Expresión Matemática	Expresión BASIC Correcta	Incorrecta
b-2	B-2	B-3 (cambio de constante
ab	A*B	AB (falta símbolo de multiplicar)
d/(-c)	D/(-C)	D/-C (dos operadores juntos)
$-a^3$	-A ↑ 3	(-A) ↑ 3=$(-a)^3$
(a+b)c	(A+B)*C	A+B*C = a+bc
ba^{e+1}	B*A ↑ (E+1)	B*A ↑ E+1=ba^{e+1}
$(b/d)^{2.5}$	(B/D) ↑ 2.5	B/D↑2.5 = $b/d^{2.5}$
mb/aj	M*B/(A*J)	M*B/A*J= mbj/a
b/(d-a)	B/(D-A)	B/D-A=b/d-a
$(z_i+x_i)y_i$	(Z(I)+X(I))*Y(I)	Z(I)+X(I)*Y(I)=$z_i+x_iy_i$

Obsérvese que en las operaciones aritméticas, las cantidades -- pueden ser reales o enteras, permitiéndose el tipo de operación mixta. En este caso, las cantidades enteras se convierten en - reales antes de efectuarse la operación mixta correspondiente. En otros lenguajes de programación no se permiten operaciones - aritméticas mixtas que involucren cantidades enteras y reales.

7. Funciones proporcionadas.

Todos los sistemas tienen disponible una serie de funciones matemáticas de uso frecuente y a las cuales se puede hacer referencia fácilmente. Los nombres de las funciones consisten de - tres letras, seguidas de un argumento encerrado dentro de paréntesis. Las funciones ocupan en una expresión la misma posición que las variables y constantes. En la tabla 2 se presentan las funciones disponibles en BASIC.

Función Matemática	Nombre	Ejemplo
Seno de un ángulo (radianes	SIN	SIN (X)
Coseno de un ángulo (radianes)	COS	COS (A ↑ 2+B)
Tangente de un ángulo radianes)	TAN	TAN (0.5*Y)
Angulo tangente (radianes)	ATN	ATN (X*Y)
Tangente hiperbólica (radianes)	HTN	HTN (1./X ↑ 2)
Exponencial	EXP	EXP (X+Y)
Raíz cuadrada	SQR	SQR (B ↑ 2-4*A*C)
Valor absoluto	ABS	ABS (COS (Y))
Logaritmo natural	LOG	LOG (5.223)
Logaritmo decimal	LGT	LGT (ABS (X))

Tabla 2. Funciones proporcionadas

En las funciones anteriores, a continuación del nombre - aparece el argumento dentro de paréntesis, como se muestra en los ejemplos.

Algunas otras funciones son:

INT que calcula el máximo entero que no excede el valor del argumento. Por ejemplo,
INT(5.8)=5 e INT(-1.7)=-2
Para redondear números se utiliza INT(X+0.5) si X es positiva, e INT(X-0.5) si X es negativa, o -- también INT(X+0.5*SGN(X)), en donde

SGN evalúa el signo del argumento, teniéndose
SGN(X)=-1 para X<0
SGN(X)= 0 para X=0
SGN(X)=+1 para X>0

RND genera números pseudoaleatorios y si el argumento es cero, la función proporciona un número aleatorio; un argumento positivo se usa para iniciar la sucesión de números aleatorios y si el argumento es negativo se utiliza un número aleatorio para - iniciar la sucesión de números aleatorios.

8. Proposiciones.

Las proposiciones o instrucciones que se usan en el lenguaje BASIC pueden ser de los tipos siguientes: aritmética, de control, entrada y/o salida, de especificación y de subprograma.

8.1 Proposición aritmética LET.

La proposición LET es una proposición aritmética que se utiliza para especificar las operaciones de cálculo que hay que efectuar y es de la forma

LET R=E

en donde R representa una variable con o sin subíndices y E indica una expresión aritmética. En estas proposiciones el signo de igualdad significa reemplazo o sustitución y no debe interpretarse como el signo igual usado en la notación matemática ordinaria. Por lo tanto, se efectúan todas las operaciones indicadas en la expresión E y el resultado final se sustituye o almacena en la localidad identificada por la variable R. Por ejemplo,

Proposición aritmética	Significado
10 LET C=B/7.5	dividir B entre 7.5 y almacenar el resultado en C
20 LET D=A+B+C	sumar los valores de A,B y C, y guardar el resultado en D
30 LET X=A+B*C	el valor de A se le suma el del producto B*C y el resultado se almacena en X
40 LET Y=X+1.5	si X vale 3 entonces Y vale 4.5
50 LET I=I+1	al valor de I se le suma 1 y el resultado de la suma constituye el nuevo valor de I
60 LET Y=5+COS(X)	a 5 se le suma el valor de COS(X) y la suma se guarda en Y
70 LET A(I)=3.*A(I)	A(I) se multiplica por 3 y es el nuevo valor de A(I)

No serían ejemplos válidos,

80 LET A*B=C+D	el primer miembro debe ser una variable
90 LET I-1=I	la expresión es a la derecha del signo igual no a la izquierda.

En los ejemplos anteriores, los números de la primera columna son los números de identificación de renglón, como se indicó en la sección 2.

En algunos sistemas se puede omitir la palabra LET y las proposiciones aritméticas tienen la forma: R=E

8.2 Proposiciones de control

Las proposiciones de control se utilizan para especificar el orden de ejecución de las proposiciones de un programa. En principio las proposiciones se ejecutan según el orden progresivo indicado por los números de renglón o de proposición, utilizándose las proposiciones de control para alterar este orden. Se tienen las proposiciones de control siguientes:

Proposición GO TO

Tiene la forma

```
GO TO n
```

en donde n es el número de renglón de otra proposición del programa. Al encontrarse la proposición anterior, la siguiente proposición que se ejecuta es la que tiene el número de renglón n. Ejemplo,

```
:        :
40   GO  TO   70
50       .
60       .
70       .
.        .
.        .
```

Al ejecutarse la proposición 40, la proposición siguiente que se ejecuta es la 70, no ejecutándose las instrucciones de los renglones 50 y 60.

Proposición ON-GO TO

Con esta proposición se especifica también la proposición que se ejecuta a continuación, aunque el número de renglón de la proposición a la que se hace transferencia puede cambiarse durante la ejecución del programa. Tiene la forma general.

ON a GO TO n_1, n_2, ..., n_m

en donde a representa cualquier expresión válida y n_1, n_2, ..., n_m son números de renglones a los que se puede hacer transferencia, dependiendo del valor de la expresión a. Si el valor de a es 1, se hace transferencia al renglón n_1 y si es m, se hace transferencia al renglón n_m. Por lo tanto, lo que se considera es la parte entera de la expresión a, que debe estar entre los valores 1 a m. Si no se encuentra en este intervalo, se imprime un mensaje indicando el error. En esta proposición se pueden incluir tantos números de renglón como espacio disponible se tenga en dicho renglón. Por ejemplo, al ejecutarse la proposición:

```
60 ON B↑2-A*C  GO TO  45,90,75,150
```

se transfiere el control a los números de renglón 45,90,75 ó 150 dependiendo de si B↑2-A*C tiene, respectivamente, los valores 1,2,3 ó 4. Si el valor fuera 3.8, la parte entera es 3 y el control se transfiere al renglón con el número 75.

Proposición IF-THEN

Con esta proposición se puede alterar el orden de ejecución, dependiendo de si cierta relación entre expresiones es verdadera o falsa. La forma de esta proposición es

IF a operador de relación b THEN n

en donde a y b son expresiones válidas relacionadas por un operador de relación. Si la relación entre las expresiones es verdadera, el control se transfiere a la proposición con número de renglón n y si es falsa se hace transferencia al renglón que sigue inmediatamente a esta proposición en el programa.

Los operadores de relación son seis y para representarlos se usan los símbolos mostrados en la Tabla 3.

Símbolo	Significado	Ejemplo	
=	igual a	A=B	A igual a B
<	menor que	A< X	A menor que X
>	mayor que	B > 10	B mayor que 10
< =	menor o igual a	X< =Y	X menor o igual a Y
>=	mayor o igual a	5 > =B	5 mayor o igual a B
< >	no igual a	A<>B+X	A no igual a (B+X)

Tabla 3. Operadores de relación.

Por ejemplo, en

```
25   IF   X+Y < = 3   THEN 85
30        .
35        .
```

si X+Y suman 3 o menos, la relación es verdadera y el control se transfiere al renglón número 85. Sin embargo, si X+Y suma más de 3, la relación es falsa y el control se transfiere a la proposición con número de renglón 30, que es la inmediatamente a continuación de la proposición IF-THEN.

Proposiciones FOR y NEXT

Con estas dos proposiciones se pueden ejecutar repetidamente una serie de instrucciones, que se denominan rango o ciclo de la iteración, cambiándose el valor de las variables en cada iteración. La proposición FOR es la primera del rango o ciclo y la proposición NEXT la última. La forma general de estas proposiciones es:

```
FOR  R= a  To b STEP  c
     .
     .
     .
NEXT  R
```

en donde R representa una variable, generalmente llamada índice, que debe ser la misma para ambas proposiciones FOR y NEXT

y a,b,c indican cualquier expresión válida en BASIC.

La primera vez que se ejecutan las instrucciones, la variable R tiene el valor a, y para cada repetición el índice R se recalcula incrementándole al valor de a acumulativamente el valor de c, hasta obtener el valor de la expresión b. El incremento c puede ser positivo o negativo; si es positivo la interaciones se ejecutan hasta el valor máximo del índice que no exceda (menor o igual) al valor de la expresión b y si el incremento c es negativo las iteraciones se ejecutan hasta que el valor último del índice sea mayor o igual al de la expresión b. Después de ejecutarse el ciclo o iteración por última vez, el control se transfiere a la proposición inmediatamente a continuación de la proposición NEXT.

En el caso en que el incremento c sea igual a +1, se puede - omitir la parte STEP c, escribiéndose la proposición FOR como sigue:

```
FOR R = a TO b
```

En el caso en el que el valor inicial de la expresión a sea mayor que el valor final de la expresión b (o menor si el incremento c es negativo), el ciclo no se ejecuta y el control se transfiere inmediatamente a la proposición que sigue a la proposición NEXT.

Ejemplos:

```
50  FOR  N=1 TO 8 STEP 3          El ciclo se repite
     :                            para N=1,4,7
     .
90  NEXT N
```

```
60  FOR  A=10 TO 3 STEP-2          El ciclo se repite para
     .                             A=10,8,6,4
     :
100 NEXT A

150 FOR  B1=0 TO 4                 El ciclo se repite para
     .                             B1=0,1,2,3,4
     :
170 NEXT B1

315 FOR J=SQR(7+X)  TO  Y*Z1 STEP (X-Y) ↑ 2
     :
385 NEXT J
```

No serían ejemplos válidos:

```
90  FOR  K=15 TO 1
     :
120 NEXT K

45  FOR D=1 TO 30 STEP -4
     :
85  NEXT D
```

En algunos sistemas, estos ciclos o iteraciones se ejecutan evaluando la expresión a, que se asigna a la variable o índice, recorriéndose el ciclo hasta la proposición NEXT; en este instante se evalúa la expresión c, que se añade a la a para el nuevo valor del índice, comparándose con el valor que se calcula de la expresión b. Si el valor del índice no excede al valor de b, se repite el ciclo con el nuevo valor del índice, recalculándose las expresiones c y b en cada iteración. Por lo tanto, la expresión a se calcula una sola vez, pero las expresiones b y c se evalúan en todas y cada una de las repeticiones del ciclo.

Al utilizar las proposiciones FOR y NEXT, se debe tener en cuenta que el valor del índice no debe cambiarse con otra proposición dentro del rango o ciclo. Sin embargo, la forma de ejecución de las iteraciones en algunos sistemas permite que las expresiones a,b y c contengan valores que pueden cambiar durante la ejecución de las iteraciones en el ciclo o rango, Existen sistemas en los que las expresiones a, b y c se calculan una sola vez al principio de la primera ejecución, no recalculándose en las ejecuciones posteriores de los ciclos.

Dentro del rango de proposiciones FOR-NEXT, pueden existir otras proposiciones FOR-NEXT, constituyendo una nidificación o anidación de proposiciones FOR-NEXT, con la condición de que un rango interior se encuentre totalmente dentro de un rango exterior. Se permite la transferencia fuera del rango de las proposiciones FOR-NEXT en cualquier instante. Sin embargo, lo que la mayoría de los sistemas no permite es la transferencia de control fuera de un rango y el regreso posterior del control dentro de este rango, especialmente cuando se cambian los valores de R, a, b y c. Un caso especial lo constituyen los subprogramas, permitiéndose el uso y regreso de un subprograma al rango de proposiciones FOR-NEXT, en una nidificación de proposiciones FOR-NEXT.

A continuación se presentan algunas configuraciones de proposiciones FOR-NEXT, indicándose con llaves los rangos de estas proposiciones.

Configuraciones aceptadas

```
FOR   A
FOR   X
NEXT  X
NEXT  A
```

```
FOR   B
FOR   Y
NEXT  Y
FOR   Z3
NEXT  Z3
NEXT  B
```

Configuraciones no aceptadas

```
FOR   A
FOR   X
NEXT  A
NEXT  X
```

```
FOR   B1
FOR   B1
NEXT  B1
NEXT  B1
```

Obsérvese que no se permite la misma variable en distintos rangos de una nidificación de proposiciones FOR-NEXT.

Proposición STOP

Esta proposición tiene la forma

```
STOP
```

y el resultado de un procesamiento en la terminación de la ejecución del programa. Por ejemplo,

```
490  STOP
```

termina la ejecución del programa en la proposición de número de renglón 490

Proposición END

Tiene la forma general

```
END
```

e indica el final de un programa, siendo físicamente la última proposición de todo programa. Las proposiciones posteriores no se compilan. De lo previamente expuesto, la proposición END debe de tener el número de renglón mayor de todas las proposiciones del programa. Por ejemplo, son equivalentes:

```
  125  GO TO 99999            125  STOP
         :                           :
99999  END                  99999  END
```

Proposición CHAIN

Esta proposición permite parar la ejecución del programa que se esté corriendo, iniciando la compilación y ejecución de otro programa que se indica en esta proposición. Tiene la forma general.

CHAIN nombre programa, n

en donde nombre de programa identifica al nuevo programa cuya ejecución se inicia, pudiendo aplicarse a programas de biblioteca. La letra n especifica el número de renglón del nuevo programa, en el cual se inicia la ejecución. Es opcional y si no aparece, la ejecución del programa se inicia en la primera proposición ejecutable de dicho programa. Ejemplos:

```
20  CHAIN  ANINV1
50  CHAIN  PROG25, 300
```

en donde los nombres de los programas, cuya ejecución se inicia son ANINV1 y PROG25, respectivamente, iniciándose la ejecución en el renglón 300 del segundo programa.

Los nombres de programas se forman con un máximo de seis caracteres alfanuméricos, requiriéndose en la mayoría de los sistemas que el primer caracter del nombre del programa sea una letra.

Proposición REM

Es una proposición de información, que permite la inserción de comentarios dentro de un programa. Tiene la forma general

REM comentario

en donde el comentario no tiene ningún efecto en la ejecución del programa, sirviendo únicamente para efectos de control mediante la identificación de partes del programa o para cualquier uso que se desee. Por ejemplo,

```
125    REM   CALCULO DE LA DEPRECIACION
        .
        .
        .
210    REM   SOLUCION DE ECUACIONES
211    REM   METODO DE JORDAN
        .
        .
        .
```

Se recomienda un uso amplio de comentarios dentro de un programa, lo que facilita la identificación de las distintas partes del mismo. Los comentarios pueden intercalarse en cualquier parte del programa y no hay limitación en cuanto al número de comentarios que pueden utilizarse en un programa.

8.3 Proposiciones de entrada/salida

Las proposiciones de entrada/salida controlan la transmisión de información entre la computadora y las unidades terminales de entrada/salida. Esta información se transmite en grupos de datos (archivos) compuestos de uno o varios registros, cada uno de los cuales está formado por elementos. Ejemplos de registros son renglones impresos, tarjetas o cinta de papel perforadas, o las imágenes de esta información en disco o cinta magnética. Se tienen las proposiciones siguientes:

Proposiciones READ y DATA

Las proposiciones READ y DATA asignan los valores numéricos de las variables, que se utilizan en el programa y no puede usarse una proposición sin la otra. Tienen la forma general

```
READ  lista de variables
DATA  lista de constantes
```

en donde la lista de variables en la proposición READ -

indica los nombres de las variables de los datos de entrada, separados por comas y a las que se especificarán en ese orden, los valores indicados en la lista de constantes de la proposición DATA.

La computadora, antes de ejecutar un programa, organiza todas las proposiciones DATA, de acuerdo a su número de renglón, en un solo bloque de datos. Por ejemplo, son equivalentes:

```
155  DATA 5,3              175  DATA 5,3,7,6,9
160  DATA 7,6,9
```

El bloque de datos proporciona las constantes en el orden correspondiente y según las variables que indican las proposiciones READ durante la ejecución del programa. Las proposiciones DATA pueden encontrarse en cualquier parte del programa, prestándose cuidado a que se encuentren en el orden correcto. Por lo general las proposiciones DATA se agrupan inmediatamente antes de la proposición END, de manera que se localicen en un solo lugar y con la ventaja de reducir a un mínimo de renumeración de renglones cuando se necesitan añadir datos a un programa por medio de proposiciones DATA. Por ejemplo son equivalentes,

```
15  READ  A, B, X, Y        15  READ A,B
    .                       20  READ X, Y
    :                           .
50  DATA  7                     :
55  DATA  3,5,4             60  DATA 7,3,5,4
```

asignándoles a las variables A, B, X, Y, los valores 7,3,5,4, respectivamente. Otra alternativa para asignar valores a las variables anteriores, aunque pierde flexibilidad el programa, es:

```
10  LET  A=7
15  LET  B=3
20  LET  X=5
25  LET  Y=4
```

Las proposiciones

```
150   READ  K,L,A1
        .
        :
300   DATA  5,-3.25
310   DATA  4.6E-2
```

asigna a las variables K,L,A1, los valores 5,-3.25, ---- 0.046, respectivamente.

Proposición INPUT

Esta proposicón permite la entrada de datos mientras se está corriendo el programa, lo que es útil cuando se desea utilizar un programa escrito por otra persona y sólo se desean cambiar los datos de entrada. La proposición tiene la forma general

INPUT lista de variables

en donde la lista de variables indica los nombres de las variables cuyos valores se introducen por medio del teclado de la terminal. Por ejemplo, al ejecutarse

```
15 INPUT A1, A2, A3
```

la computadora imprime el signo de interrogación?, y espera a que el usuario introduzca los valores numéricos - respectivos de las variables A1, A2, A3, separando cada uno de estos números por medio de una coma. A continuación se oprime la tecla de RETURN y la computadora prosigue con el resto del programa.

Es evidente, que esta proposición no es ventajosa para - el caso en que se desea introducir una gran cantidad de datos, debido a la dificultad de verificar posibles errores al introducirlos y por el tiempo excesivo de máquina que puede requerirse.

Proposición PRINT

Esta proposición permite la comunicación entre la máquina y el usuario, mediante la impresión de información, y tiene la forma general

PRINT lista de elementos

en donde la lista de elementos incluye valores de variables y expresiones, resultados de cálculos numéricos, impresión de mensajes o títulos, saltar renglones en blanco para el espaciamiento vertical de la información y mayor facilidad en la lectura, así como combinaciones de los elementos anteriores. Ejemplos,

```
15  PRINT X, Y, X ↑ 2 + Y ↑ 2, SQR (X ↑ 2+Y ↑ 2)
```

produce la impresión de los valores de las variables X, Y y los valores de las expresiones $(X^2 + Y^2)$ y $(X^2 + Y^2)^{1/2}$, respectivamente, en un mismo renglón.

```
25  PRINT  "VALOR A",  "VALOR B"
```

produce la impresión en un solo renglón, de la información comprendida entre comillas.

Cuando los elementos se separan por comas, como en los dos ejemplos previos, la impresión se efectúa automáticamente, dividiendo el renglón en cinco campos o zonas, procediendo de izquierda a derecha. Cada zona tiene asignadas 15 columnas o caracteres, para un total de 75 caracteres por renglón. La coma sirve de señal para desplazar la impresión de información a la zona o campo que sigue. En el caso de utilizar la quinta y última zona de un renglón, la impresión continúa en la primera zona del renglón siguiente.

Las zonas de impresión pueden reducirse colocando punto y coma en lugar de coma. Las nuevas zonas son de 3 columnas para números de 1 dígito, de 6 columnas para números de 2 a 4 dígitos, de 9 columnas para números de 5 a 7 dígitos y de 12 columnas para números de 8 a 10 dígitos. Esta distribución de columnas y zonas varía para distintos sistemas. Sin embargo, la primera columna de cualquier zona de impresión, se reserva para el signo, el que sólo se imprime cuando es menos.

Por ejemplo, la proposición

```
50  PRINT "EL CUADRADO DE "; A; "ES"; A ↑ 2
```

produce para A=3, la impresión

```
EL CUADRADO DE  3 ES  9
```

La proposición sin lista de elementos,

```
35  PRINT
```

produce el salto de un renglón en blanco.

Es usual utilizar las proposiciones PRINT e INPUT para identificar la información de entrada. Por ejemplo,

```
15  PRINT "LA CONSTANTE ES IGUAL A"

25  INPUT C1
```

produce la impresión de

```
LA CONSTANTE ES IGUAL A

?
```

en donde el valor de la constante C1 se indicaría a continuación del signo de interrogación.

En la impresión de valores numéricos se debe tener presente que los números se justifican al extremo de la izquierda de la zona correspondiente. Los números enteros se imprimen -- sin punto decimal y para los números reales sólo se consideran seis dígitos significativos, no imprimiéndose los ceros después del último dígito significativo que se encuentra a - la derecha del punto decimal. Los números enteros iguales o mayores que 2^{30} ó 10^{9}, según el sistema, se imprimen usando la notación E. La notación E se usa también para números - decimales menores que 0.1 y que exceden de seis dígitos significativos. Esta notación E consiste de un dígito seguido de punto decimal y de cinco dígitos, seguidos de la letra E y de una constante entera, positiva o negativa, de uno o dos dígitos, que indica la potencia de 10 por la que se multiplica el número que procede a la letra E.

Función de impresión TAB

Con esta función se especifica la posición de impresión en - la cual se inicia la transferencia de datos y tiene la forma

TAB (expresión)

en donde la expresión se calcula y se utiliza sólo la parte entera para definir la posición en la que se inicia la impresión. La función TAB se usa en la proposición PRINT, por - ejemplo

```
55 PRINT  X1; TAB(15); X2; TAB(25); X3; TAB(30+J); X4
```

produce que una vez impreso el valor de X1, la impresión se reinicie en la columna 15 para la variable X2, en la columna 25 para X3, y si J vale 5, en la columna 35 para la variable X4.

Se recomienda el uso de punto y coma con la función TAB, con el objeto de minimizar la longitud de los campos. En algunos sistemas se permite el uso de comas después de la función TAB, conservándose el mismo espaciamiento de los campos que con el punto y coma. La especificación de la función TAB se ignora cuando el argumento es menor que la posición de impresión en la que se encuentra el carro.

Proposición PRINT USING

Con esta proposición se puede obtener la impresión de información con un formato especificado, que se indica con una proposición de imagen o máscara. Estas proposiciones tienen la forma

PRINT USING n, lista

n : máscara o imagen

en donde n es el número de renglón de la proposición asociada de máscara o imagen
lista es la identificación de las constantes, números, variables (numéricas y alfanuméricas) y funciones, separados por comas, cuya impresión se desea
máscara o imagen define el formato de impresión mediante el uso de caracteres de control y constantes de impresión.

La proposición de imagen con número de renglón n puede encontrarse en cualquier parte del programa, no siendo necesario que se encuentre junto a la proposición PRINT USING correspondiente. Por ejemplo, las proposiciones

```
20 LET A=4
30 : EL CUADRADO DE ### ES ###.## Y EL CUBO ES ##.#↑↑↑↑
40 PRINT USING 30, A, A*A, A↑3
```

Producirián la impresión siguiente

```
EL CUADRADO DE  4 ES 16.00 Y EL CUBO ES 6.4E+01
```

El caracter de control para especificaciones numéricas es el símbolo # y se utiliza en las conversiones enteras, decimales y exponenciales, como se indica en el ejemplo previo. Para números enteros se usan uno o más caracteres # sin punto decimal y el valor del número se trunca, imprimiéndose sólo la parte entera. En la especificación real o decimal se utilizan uno o más caracteres # con un punto decimal en cualquier posición, aunque por lo menos un caracter # debe preceder al punto decimal. En esta especificación el último dígito del formato se redondea. En el caso exponencial se cumple la especificación anterior y se añaden cuatro caracteres ↑ que se utilizan para la letra E, el signo y una constante de uno o dos dígitos, que indica la potencia de 10 por la que se multiplica el número que precede a la letra E. Todas las especificaciones de valores numéricos se justifican a la derecha y en todos los casos se reserve el primer caracter para el signo del número. En algunos sistemas se amplían los campos a la derecha cuando el número correspondiente es demasiado grande y en general cuando se excede la capacidad de un campo especificado, se imprimen asteriscos en los campos cuya capacidad se ha excedido.

La información alfanumérica se puede manipular utilizando campos limitados por comillas, que son los caracteres de control para especificaciones alfanuméricas. La longitud del campo comprende los espacios y/o caracteres dentro de comillas, incluyendo también los espacios que usan las comillas, por lo que la información que se sustituye tendrá siempre dos o más caracteres. Los campos alfanuméricos se justifican a la izquierda con espacios en blanco para las columnas del campo que no se usan y truncando los caracteres que exceden la longitud del campo. Por ejemplo, las proposiciones

```
10  READ  N$
20  PRINT USING  30, N$
30  :    "NOMBRE"
40  DATA HERNANDEZ
```

producen la lectura de la variable N$, que es el nombre HERNANDEZ, cuya impresión se pide en el renglón 20, con el formato que indica el renglón 30 que permite un máximo de 8 caracteres (6 para NOMBRE y 2 para las comillas). La información dentro de comillas se sustituye por la variable alfanumérica HERNANDEZ, que tiene 9 caracteres, por lo que se pierde el último, y la impresión que proporciona la máquina es

```
                HERNANDE
Sería           GOMEZ
la impresión si el renglón 40 fuera
                40 DATA GOMEZ .
```

Algunos sistemas tienen el caracter de control ', que se sustituye por el primer caracter de la información alfanumérica, independientemente del número de caracteres que tenga la variable alfanumérica correspondiente. Por ejemplo, si en los casos antes considerados, se tuvieran las proposiciones

```
20 PRINT USING  30, N$, "MB"
30 :  "NOMBRE"    '
```

se producirían las impresiones

```
HERNANDE  M
GOMEZ     M
```

En el caso en que la proposición PRINT USING contenga menos elementos que las especificaciones de conversión de la proposición de imagen correspondiente, las especificaciones que sobran se ignoran y si contiene más elementos que las especificaciones indicadas, éstas se reutilizan en nuevos renglones hasta completar la impresión de los elementos indicados en la lista de la proposición PRINT USING.

Proposición RESTORE

Esta proposición permite en un programa, la lectura de un mismo grupo de datos, tantas veces como sea necesario. La forma de la proposición es

RESTORE

y cada vez que se usa ocasiona que el indicador del bloque de datos se reinicialice al primer elemento de la primera proposición de datos.

Por ejemplo, las proposiciones

```
 50  READ     A, B, C
      :
 70  RESTORE
 90  READ     A, B, C
      :
120  DATA     5.2,3,1.25
```

produce dos veces en el programa, la lectura del mismo grupo de datos, el que aparece una sola vez en la proposición de renglón 120.

8.4 Proposición de especificación DIM

La proposición DIM es una proposición de especificación que proporciona información al compilador con respecto a la naturaleza y características de determinados arreglos. Es una proposición no ejecutable en el sentido que no genera instrucciones en el programa objeto y en la mayoría de los sistemas debe preceder a la primera proposición ejecutable del programa fuente. Por regla general, una especificación que describe datos debe anteceder a cualquier otra proposición que se refiera a esos datos, aunque en algunos sistemas no se cumple esta regla.

Esta proposición tiene la forma general

$$\text{DIM}\quad a(k_1),\ b(k_2), \ldots,\ c(k_3)$$

en donde a,b,c son nombres de arreglos y k_1, k_2, k_3 se componen de una o dos constantes enteras sin signo, separadas por coma, y representando cada una el valor máximo reservado para cada subíndice del arreglo.

Cuando un arreglo no aparece indicado en la proposición DIM la máquina le reserva automáticamente 10 localidades para cada subíndice. Por lo tanto, si ningún subíndice en los arreglos de un programa excede el valor 10, puede omitirse la proposición DIM. Por ejemplo, la proposición

```
15 DIM A(35), B(15,15), C$(20), D(3,4), E(8)
```

reserva 35 localidades para el arreglo A, 225 localidades (15 x 15) para la matriz B, 20 localidades de un máximo de 15 caracteres alfanuméricos cada una para el arreglo C$, 12 localidades para el arreglo bidimensional D y 8 espacios de memoria para el arreglo E.

La ventaja de especificar un subíndice menor de 10, es reservar menos espacio de memoria que el que automáticamente se reservaría de 10 localidades, si no se hace ninguna indicación. Este ahorro de espacio puede utilizarse para aumentar la capacidad de un programa, aumentando por ejemplo el número de instrucciones. Se permite el uso de arreglos alfanuméricos, pero únicamente si son de una dimensión.

Algunos sistemas consideran la existencia del subíndice cero y en el ejemplo anterior reservarían 36 localidades para el arreglo A, 256 localidades para el arreglo B, etc. Sin embargo, como algunos sistemas no aceptan el subíndice cero, no debe recurrirse a su uso si se desea tener un programa que sea aceptado en cualquier sistema.

En los arreglos bidimensionales o matriciales, el primer subíndice define el número de renglones y el segundo define el número de columnas del arreglo. La manipulación de matrices se ha simplificado bastante y se presenta posteriormente.

En un programa pueden aparecer varias proposiciones DIM, aunque por lo general la especificación de un arreglo sólo se especifica una vez. Sin embargo, algunos sistemas permiten redefinir el tamaño de los arreglos. Se tendría por ejemplo,

```
10  DIM  A (20,20)
    :
    :
60  LET N= ...
70  DIM  A (2*N, N+ 5)
    :
    :
```

8.5 Proposiciones de subprogramas

Los subprogramas se usan con ventaja en los casos en que se requiere, en partes diferentes de un programa, un mismo cálculo cambiando los datos. Los subprogramas permiten escribir una sola vez las proposiciones del cálculo y hacer referencia a dicho cálculo en cualquier parte del programa, sin necesidad de repetir en cada ocasión todas las proposiciones del cálculo.

Los subprogramas se dividen en funciones de proposición y en subrutinas. Los subprogramas de funciones de proposición -- calculan un solo valor para el programa principal y forman - parte integral del programa en el que aparecen, utilizándose para su definición la proposición siguiente:

Proposición DEF

Con esta proposición se define el subprograma de función de proposición y tiene la forma

DEF nombre (a) = b

en donde nombre especifica el nombre de la función de proposición; a indica un argumento mudo y b representa una expresión válida en BASIC, limitada en general a no exceder el renglón correspondiente a esta proposición.

Los nombres de la función de proposición constan de tres letras, siendo las dos primeras las letras FN en todos los casos. Por lo tanto, existen 26 posibilidades de nombres para las funciones de proposición: FNA, FNB, ..., FNZ. El argumento consiste en general de una sola variable, que es variable muda. Si el sistema permite varios argumentos, éstos se separan por comas y son también variables mudas. La expresión a la derecha del signo igual puede incluir variables adicionales a la indicada en el argumento y también otras funciones, incluyendo funciones - definidas por otras proposiciones DEF.

Por ejemplo, se tienen los casos

```
 30  DEF FNX(X) = 5*X + SQR(X)
  .
  :
 70  LET Z = Y+FNX(3.0)
  :
100  LET A = B*FNX(Z ↑ 2)

 80  DEF FNB (A) = A*B ↑ 2+C/5
  .
  :
120  LET X = 25*EXP (FNB (Y+3))
  :
```

Obsérvese que se pueden sustituir expresiones para las variables y así en el renglón 120 la expresión Y + 3 -- reemplaza a la variable muda A. Previamente a la ejecución de esta proposición se debieron definir valores a las variables B y C, indicadas en la función definida - en el renglón 80.

También, antes de ejecutarse el renglón 120, la variable Y debe tener un valor numérico definido.

Las funciones definidas con proposiciones DEF pueden estar colocadas en cualquier parte del programa, aunque - es usual escribirlas en la primera parte del programa - en el que se utilizan.

Los subprogramas de subrutina se usan cuando se repiten una serie de operaciones en un mismo programa y a diferencia del subprograma de función de proposición se pueden calcular varios valores para el programa principal del cual forma parte la subrutina. Otra diferencia consiste en que en la subrutina no hay argumentos mudos y como tal no se indican argumentos. Para definir los subprogramas de subrutina se utilizan las proposiciones siguientes:

Proposición GOSUB

Con esta proposición se hace transferencia del programa a la subrutina y tiene la forma

GOSUB n

en donde n es el número de renglón al cual se hace transferencia de control.

Una vez ejecutadas las proposiciones de la subrutina, el control regresa a la proposición inmediatamente a continuación de la proposición GOSUB que hizo la transferencia de control a la subrutina. Por ejemplo,

```
      :
      .
120 GOSUB 520
130   .
      :
520   :
      .
```

ocasiona la transferencia de control al renglón 520 al ejecutarse la proposición GOSUB indicada en el renglón 120. Una vez ejecutadas las proposiciones del subprograma de subrutina, el control regresaría a la proposición con número de renglón 130. Lo anterior permite hacer múltiple referencia a una misma subrutina, mediante el uso de varias proposiciones GOSUB en distintas partes del programa principal, como por ejemplo,

```
      :
      .
 50 GOSUB 380
 60   .
      :
140 GOSUB 380
150   .
      :
380   :
      :
```

en donde el control regresa al renglón 60 después de la primera ejecución de la subrutina y al renglón 150 después de ejecutar la subrutina por segunda ocasión.

Proposición RETURN

Esta proposición tiene la forma

RETURN

y especifica la terminación de las operaciones de cálculo de una subrutina, regresando el control a la proposición que sigue a la proposición GOSUB que hizo referencia a la subrutina.

La proposición RETURN siempre debe colocarse al final de una subrutina y se permite la existencia de varias proposiciones RETURN en una misma subrutina, terminándose la ejecución de la subrutina al ejecutarse cualquiera de las proposiciones RETURN especificadas en la subrutina. Por ejemplo, considérese el caso

```
      .
      .
120   GOSUB 520
130   .
      .
      .
510   STOP
520   IF (X=0)THEN 570
530   X = - - -
      .
      .
      .
560   RETURN
570   X = - - -
      .
      .
      .
650   RETURN
```

en donde la subrutina termina su ejecución en el renglón 560 si X=0, y en el renglón 650 en caso contrario.

Obsérvese que si la proposición inmediatamente antes del inicio de la subrutina es una proposición STOP, como se muestra en el renglón 510, se asegura que el acceso a la subrutina es únicamente por medio de proposiciones GOSUB.

Un programa puede tener varias subrutinas y se permite que una subrutina haga referencia a otra de ellas, formándose una nidificación de subrutinas, por ejemplo,

```
      :
 30   GOSUB 210
 40   .
      .
      .
190   DATA ---
200   STOP
210   REM  SUBRUTINA 1
      .
250   GOSUB  290
      .
280   RETURN
290   REM  SUBRUTINA 2
      .
      .
      .
350   RETURN
360   DATA ---
600   END
```

Los datos del programa pueden indicarse antes de las subrutinas y/o después de la última subrutina, pero siempre antes de la proposición END de fin de programa.

Proposición CALL

Esta proposición permite utilizar como subrutina un programa externo independiente y tiene la forma

CALL nombre programa

en donde nombre de programa especifica el programa al cual -

se hace referencia como subrutina, pudiendo aplicarse a programas de biblioteca. Por ejemplo,

```
        :
50  CALL ANINV1
        :
```

llamaría como subrutina al programa denominado ANINV1. El programa principal puede llamar a varios otros programas para usarlos como subrutinas, o llamar varias veces a un mismo programa.

Nótese que los nombres de programas se forman con un máximo de seis caracteres alfanuméricos, requiriéndose que el primer caracter del nombre sea una letra, para la mayoría de los sistemas.

Con el uso de esta proposición se tiene la ventaja de que el programa principal y los programas a los que se hace referencia tienen numeraciones de renglones totalmente independientes, o sea que cada programa tiene su propia numeración y no depende de la numeración de renglones de los otros programas. Sin embargo, los datos se obtienen primero del programa principal y una vez terminados, de cada uno de los programas a los que se hace referencia, en el orden en que se ejecutan las proposiciones CALL.

El trabajar los programas en forma independiente presenta la posible desventaja de que una misma variable debe de tener el mismo nombre en todos los programas. La identificación de variables en programas complejos que se combinan es fuente usual de errores.

9. Características especiales

En esta sección de características especiales del lenguaje BASIC se presentan las proposiciones aplicables al manejo de las variables alfanuméricas, la notación simplificada para la ejecución de operaciones algebraicas matriciales y algunas proposiciones implantadas en algunos sistemas y que todavía no son de uso generalizado.

9.1 Variables alfanuméricas

Estas variables permiten el procesamiento de datos alfanuméricos como nombres, direcciones, etc., y se indican por medio de una sola letra del alfabeto, seguida del símbolo de pesos. Por lo tanto, existen 26 nombres de variables alfanuméricas: A$, B$, ..., Z$. Cada variable alfanumérica puede tener un máximo de 15 caracteres o espacios disponibles para su identificación.

Para definir las variables alfanuméricas de un programa, se pueden utilizar las proposiciones LET, READ e INPUT, como sigue:

```
 50  LET  R$ = "VALOR FINAL"

 20  READ A$, B$, C$
      :
150  DATA VALOR, " ", INICIALIZACION

 16  INPUT A$, B$, C$
```

en donde al imprimirse el signo ?, el usuario introduciría los datos alfanuméricos, como indica la proposición DATA de número de renglón 150.

Los espacios en blanco se deben de tomar en cuenta* en las variables alfanuméricas, por lo que la variable R$ en el renglón 50 tiene 11 caracteres.

Otra alternativa equivalente, sería

```
15  READ R$
     :
80  DATA "VALOR FINAL"
```

* Fuera de las variables alfanuméricas los espacios en blanco no tienen significado en BASIC y sirven para facilidad de lectura.

en donde el espacio en blanco se tiene en cuenta, encerrando dentro de comillas el valor de la variable R$.

En el renglón 20 se tienen tres variables, y para tener en cuenta el espacio en blanco, se le encierra dentro de comillas, como se indica en el renglón 150. Además de los espacios en blanco, caracteres como coma y punto y coma, si forman parte de una variable alfanumérica, deben comprenderse dentro de comillas. Si el primer caracter de una variable alfanumérica no fuera una letra del alfabeto, el dato de la variable debe encerrarse dentro de comillas.

También se permite la forma

```
25 LET  M$ = P$
```

para asignar el valor de una variable alfanumérica a otra variable alfanumérica. Sin embargo, como no se pueden efectuar operaciones aritméticas con variables alfanuméricas, sólo se permite una variable alfanumérica a la derecha del signo de igualdad.

Se pueden utilizar variables alfanuméricas con subíndice, pero únicamente para arreglos de una dimensión. Si el arreglo no se indica en la proposición de dimensión DIM, automáticamente se le reservan 10 localidades. Por lo tanto, los arreglos con subíndice mayor de 10 deben especificarse en la proposición DIM.

Por ejemplo, la proposición

```
10 DIM A$(5), B(15), M$(25), C(15,20)
```

reserva 5 localidades para el arreglo A$ y 25 para el M$, con un máximo de 15 caracteres para cada valor, 15 localidades para el arreglo B y 300 localidades para el arreglo bidimensional C. La proposición anterior puede ir seguida por las proposiciones.

```
20 FOR  I=1 TO 5
30 READ  A$(I)
40 NEXT I
```

en donde al arreglo A$ se le asignan cinco valores de varia bles alfanuméricas. Para obtener la impresión de los valores anteriores se puede intercalar la proposición

```
35  PRINT  A$(I)
```

El uso de punto y coma después de una variable alfanumérica, en una lista de impresión, produce que la impresión de la variable siguiente se inicie inmediatamente a continuación de la variable alfanumérica que procede al punto y coma.

En todas las proposiciones anteriores, exceptuando la proposición LET, las variables alfanuméricas y las variables ordinarias pueden aparecer en una misma lista, separadas por coma, como se ha mostrado previamente en la proposición DIM -- con número de renglón 10.

El manejo de variables alfanuméricas en la proposición PRINT USING, se indicó anteriormente al estudiar esta proposición en la sección 8.3.

Aunque no se pueden efectuar operaciones aritméticas con las variables alfanuméricas, se permite la comparación entre -- ellas, por medio de la proposición IF-THEN, permitiéndose -- una sola variable alfanumérica a cada lado del operador de - relación.

La mayoría de las aplicaciones comparan condiciones de igualdad o desigualdad únicamente, por ejemplo

```
25 IF X$  =  "ULTIMO" THEN 90
35 IF Y$  <> "PRIMERO" THEN 150
50 IF X$  =  Y$  THEN  180
70 IF "SEGUNDO" <> Z$ THEN  15
```

En algunos sistemas se permite el uso de los seis operadores de relación y en este caso cada caracter tiene asignado un - valor determinado, con el objeto de poder efectuarse la comparación entre variables alfanuméricas. En la mayoría de -- los sistemas los valores se asignan progresivamente iniciándose con los números (0 a 9) y continuando con las letras --

del alfabeto (A a Z). Los caracteres especiales pueden tener valores menores a los números, mayores a las letras o estar intercalados entre números y letras.

9.2 Matrices.

Las operaciones matriciales se pueden indicar fácilmente, siendo ésta una característica distintiva a la vez que poderosa y útil, del lenguaje BASIC.

Las matrices, siendo arreglos bidimensionales, pueden - nombrarse con una cualquiera de las letras del alfabeto y su tamaño o dimensión debe especificarse en una proposición DIM. Por ejemplo,

```
10 DIM A (3,5), B(15,15)
```

reserva 15 localidades para la matriz A y 225 para la matriz B. El primer índice se refiere al número de renglones y el segundo al número de columnas de una matriz por lo que la matriz A tiene 3 renglones y 5 columnas, y B es una matriz cuadrada de 15 renglones y 15 columnas.

Las dimensiones de las matrices pueden redefinirse posteriormente en el programa, cuidando de no exceder el - espacio reservado para cada matriz en la proposición de dimensión DIM.

Las proposiciones que permiten redefinir las dimensiones de una matriz y que sirven también para inicializar valores de una matriz, son las cuatro proposiciones siguientes:

En lectura de matrices, puede usarse

```
20 MAT READ  A(2,4)
```

produce la lectura de la matriz A de 2 renglones y 4 columnas. La lectura de datos se hace por renglones, o -

sea que primero se leen los elementos A(1,1), A(1,2), A(1,3), A(1,4) y después los elementos A(2,1), A(2,2), A(2,3), A(2,4). Puede escribirse

```
20 MAT READ A, B
```

y se leería primero la matriz A (de 3 renglones y 5 columnas) y después la matriz B (de 15 renglones y 15 columnas), como se definieron en la proposición DIM de número de renglón 10.

Para inicializar a cero todos los elementos de una matriz, se tiene

```
30 MAT A = ZER(2,2)
```

que iguala a cero todos los elementos de una matriz cuadrada de orden 2, o también

```
40 MAT B = ZER
```

que iguala a cero todos los elementos de la matriz B, cuyas dimensiones debieron definirse en una proposición previa.

De manera semejante, para que todos los elementos de una matriz se igualen al número 1, se usa la forma

```
50 MAT B = CON(12, 5)
```

igualándose a 1 todos los elementos de la matriz B, redefinida a 12 renglones y 5 columnas, o también

```
60 MAT A = CON
```

que iguala a 1 todos los elementos de la matriz A, cuyas dimensiones se debieron definir previamente.

Para inicializar una matriz con la matriz unitaria o identidad, en donde los elementos sobre la diagonal son iguales al número 1 siendo nulos todos los elementos restantes de la matriz, se usa la forma

```
70  MAT  B = IDN
```

o la forma general

```
80  MAT  B = IDN (a,b)
```

en donde a y b son cualquier expresión válida en - BASIC, pudiendo ser variables o constantes. Sin embargo, por definición de matriz identidad, se requiere que las matrices sean cuadradas, es decir, que tengan el -- mismo número de renglones que de columnas.

Para la impresión de matrices, que se efectúa renglón - por renglón, intercalando siempre un renglón en blanco, se tienen las formas

```
90  MAT PRINT A
```

que imprime la matriz A, o también

```
100 MAT  PRINT A, B
```

que imprime primero la matriz A y a continuación la matriz B, pudiendo escribirse

```
110  MAT PRINT A, B;
```

que implica formato regular para la matriz A y formato reducido para la matriz B, por preceder al símbolo de - punto y coma. Si la impresión de las dos matrices se - desea con formato compacto, se usaría la proposición

```
120  MAT  PRINT A; B;
```

A continuación se presentan las operaciones matriciales permitidas, debiendo tenerse presente que dichas operaciones implican que las matrices sean conformables, es decir, que tengan las dimensiones adecuadas para que la operación matricial pueda efectuarse. Las operaciones matriciales disponibles son las siguientes:

La suma matricial tiene la forma

```
130  MAT  D = A + C
```

en donde la matriz a la izquierda del signo puede aparecer en el segundo miembro, por ejemplo

```
140  MAT  D = D + C
```

La sustracción matricial tiene la forma

```
150  MAT  B = A - C
```

pudiendo aparecer también la matriz B en el segundo miembro.

La multiplicación de una matriz por un escalar, se efectúa con

```
160  MAT C = (a) * D
```

en donde a es una expresión válida en lenguaje BASIC y debe estar comprendida dentro de paréntesis. Por ejemplo,

```
170  MAT C = (5+SQR(I+3)) *D
```

La misma matriz puede estar en ambos miembros, como en

```
180  MAT  B = (10.0)*B
```

Para igualar una matriz con otra, puede usarse

```
190  MAT D  = (1)*A
```

En los ejemplos anteriores de operaciones matriciales, las matrices A, B, C y D deben de tener las mismas dimensiones.

La multiplicación de dos matrices tiene la forma

```
200  MAT  B = A*C
```

y se necesita que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de renglones de la matriz. El orden de la matriz B debe ser igual al número de renglones de A por el número de columnas de la matriz C.

Para calcular la transpuesta de una matriz, se usa la proposición.

```
210  MAT  C = TRN(A)
```

en donde el número de renglones de C y columnas de A deben ser iguales, así como el número de columnas de C y renglones de A.

Para calcular la inversa de una matriz, se tiene

```
220  MAT  C = INV(A)
```

en donde A y C son matrices cuadradas del mismo orden o dimensión. Si la matriz A es singular, se imprime un mensaje de error.

En los dos ejemplos anteriores no se permite que la misma matriz aparezca en los dos miembros, no siendo aceptables:

```
230  MAT  C = TRN(C)
240  MAT  C = INV(C)
```

Las operaciones matriciales antes expuestas también pueden desarrollarse mediante el uso de las proposiciones BASIC estudiadas en las secciones anteriores, pero es evidente la facilidad de la programación utilizando la notación matricial previamente presentada.

9.3 Desarrollos en proposiciones

Los desarrollos efectuados en las proposiciones, le proporcionan una mayor flexibilidad al lenguaje BASIC. Los desarrollos que se presentan están implantados únicamente en algunos sistemas y son:

En las proposiciones aritméticas se puede prescindir de la palabra LET, quedando la forma general

R = E

en donde R es una variable (ordinaria o alfanumérica) con o sin subíndices y E indica una expresión. También se permite el uso múltiple del signo de igualdad relacionando cualquier número de variables, permitiéndose el uso de una expresión sólo a la derecha del último signo igual. Por ejemplo,

```
15  A = F = G = H = (SQR(X) + Y)*Z
25  B$= K$= R$= "PRIMER VALOR"
```

En algunas versiones la proposición de control IF-THEN puede cambiarse a la proposición IF-GO TO, teniéndose la forma general

IF a operador de relación b GO TO n

Por ejemplo,

```
35  IF  X+Y <  Z ↑ 2   GO TO 90
45  .
55  .
```

transmite el control a la proposición de renglón número 90 en el caso en que X+Y sea menor que Z al cuadrado, y al renglón 45 en caso contrario.

En algunos sistemas los subprogramas de funciones admiten dos o más argumentos, que son variables mudas, como por ejemplo

```
30  DEF  FNB(A, B, C, D) = SQR(A+B*C*D/25)
     .
     .
     .
50  LET  Y = FNB(X(2), R, P, Q*S)
     .
     .
     .
80  LET  X(3) = X(4) + FNB(T, U, V, W)
```

El número de dígitos que se desean en la impresión de resultados numéricos, puede especificarse por medio de la proposición SET DIGITS, que tiene la forma

SET DIGITS (a)

en donde a es una expresión cuyo valor se calcula, conservándose sólo la parte entera, que representa el número de dígitos que aparecen en la impresión de resultados. El valor entero calculado debe estar comprendido entre los valores 1 y 11, recurriéndose a la notación exponencial en caso de exceder el número de dígitos especificados. Unicamente los resultados impresos posteriores a la ejecución de la proposición SET DIGITS se ven afectados por esta proposición.

En las operaciones matriciales, algunos sistemas acceptan proposiciones, como

```
35  MAT  C = D
```

que hace que todos los elementos de la matriz D se copien en la matriz C.

El determinante de una matriz puede obtenerse en el proceso de inversión matricial, mediante la proposición

```
45  MAT  C  = INV (A, D1)
```

en donde en C se almacena la matriz inversa de A y la variable D1 tiene el valor del determinante de la matriz A al término de la inversión matricial de la matriz. La variable D1 es muda, pudiendo representarse el valor del determinante con cualquier otro nombre de variable aceptable en lenguaje BASIC.

I N D I C E

Apéndice A.

Método de Gauss-Seidel para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

El método de Gauss-Seidel es un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales; se demuestra que una condición suficiente para que sea convergente es que la matriz de las ecuaciones sea definida positiva o sea que:

Si $[F] = [K][d]$ (sistema de ecuaciones)

$$[d]^T[K][d] > 0 \quad \text{para toda } [d] \neq 0$$

en el caso de un problema estructural esta condición se cumple obviamente ya que

$$[K][d] = [F]$$

$$\therefore \quad [d]^T[K][d] = [d^T][F] = \begin{matrix}\text{Trabajo}\\ \text{de}\\ \text{deformación}\end{matrix} > 0$$

Expondremos el método de Gauss-Seidel por medio de un ejemplo:

$$\text{Sistema de ecuaciones}\left\{\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 &= 18 \\ +2x_1 - 3x_2 + 20x_3 &= 56 \end{aligned}\right.$$

Observe que en este ejemplo la matriz no solo es definida positiva sino su diagonal es pesada lo cual hace que la convergencia sea muy rápida, este caso se presenta en el análisis de marcos sin grados de libertad (desplazamientos) que es el caso en que la aplicación del método de H. Cross es también muy eficiente, sin embargo este método es general y es válido para la solución de cualquier marco plano.

El método de Gauss-Seidel se aplica a este ejemplo en la siguiente forma:

1º) Se despeja a la i-ésima incógnita en la i-ésima ecuación (en este caso la de mayor coeficiente).

$$\begin{cases} x_1 = -0.1\,x_2 + 0.2\,x_3 + 0.6 \\ x_2 = +0.125\,x_1 - 0.125\,x_3 + 2.25 \\ x_3 = -0.1\,x_1 + 0.15\,x_2 + 2.80 \end{cases}$$

2º) Se suponen valores iniciales de x_1, x_2, x_3 (por ejemplo: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) y se sustituyen en la 1ª ecuación obteniéndose x_1', se sustituye en la 2ª a x_1' y a los demás supuestos, el procedimiento se continúa (utilizando los valores ya calculados anteriormente) hasta obtener los valores x_1', x_2', x_3' de la 1ª iteración.

3º) El procedimiento se repite y se da por terminado cuando la diferencia entre la última iteración y la penúltima sea lo suficiente pequeña (en general se usa el criterio del error relativo:

$$e_i = \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^{k}}{x_i^{k}} \right| \leq \text{Valor prefijado de antemano}).$$

La fórmula general para obtener x_i^k (la variable i-ésima en la iteración k) es la siguiente:

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^k + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{k-1} + y_i$$

donde a_{ij}, y_i son los elementos de la matriz $[A]$ y el vector $[Y]$ de las ecuaciones:

$$[X] = [A][X] + [Y] \quad (\text{Observe que } a_{ii} = 0)$$

en nuestro ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & +0.2 \\ 0.125 & 0 & -0.125 \\ -0.1 & +0.15 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [Y] = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 2.25 \\ 2.80 \end{bmatrix}$$

Para aplicar Gauss-Seidel a nuestro ejemplo conviene usar la siguiente tabla:

	X_1	X_2	X_3	1
1ª Ecuación		−0.100	+0.200	+0.6
2ª "	+0.115		−0.115	+2.25
3ª "	−0.100	+0.150		+2.80
Valor inicial	0	0	0	
Iteraciones	+0.600	+2.325	+3.088	
	+0.974	+1.984	3.001	
	+1.002	+2.000	+3.000	

la solución exacta es: $\begin{cases} X_1 = 1.000 \\ X_2 = 2.000 \\ X_3 = 3.000 \end{cases}$

Las ventajas de Gauss-Seidel sobre otros métodos son:

1º) La matriz [A] no se modifica durante todo el proceso, lo cual permite almacenarla en la forma mas conveniente

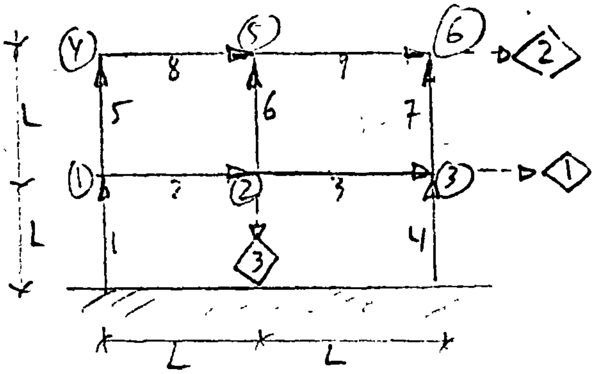
2º) Los errores por redondeo son mínimos, ya que cada iteración podemos considerarla como la iteración inicial.

3º) Si el sistema es indeterminado (mas de una solución posible) se obtiene una de las soluciones (dependiendo esta de los valores iniciales de [X]).

4º) En caso de cometer un error en alguna iteración, ésto no será fatal ya que equivale a considerar a esa iteración como los valores iniciales (obviamente que en caso de errores se alargará el número de iteraciones.

4.5.- Ejemplos de marcos planos.

4.5.1.- Marco con grado de libertad vertical.



Supongamos $EI = cte.$

$$\begin{cases} m_N = 6 \\ m_B = 9 \end{cases}$$

Se tienen dos grados de libertad horizontales (D_1, D_2) y uno vertical (D_3), por lo tanto: $m_D = 3$.

Obtengamos $[a]$ (matriz de continuidad) utilizando la fórmula 4.4.1.2

$[a] =$ (18×9)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	D_1	D_2	D_3
1							$-1/L$		
	1						$+1/L$		
2	-1								$-1/L$
		1							$+1/L$
3		-1							$+1/L$
			1						$-1/L$
4							$-1/L$		
			1				$+1/L$		
5	-1						$+1/L$	$-1/L$	
				1			$-1/L$	$+1/L$	
6		-1					$+1/L$	$-1/L$	
					1		$-1/L$	$+1/L$	
7			-1				$+1/L$	$-1/L$	
						1	$-1/L$	$+1/L$	
8				-1					$-1/L$
					1				$+1/L$
9					-1				$+1/L$
						1			$-1/L$

Esta matriz se puede comprobar por equilibrio obteniendo $[a^T]$.

La matriz $[k]$ será:

$$\underset{(18\times 18)}{[k]} = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_9 \end{bmatrix} \quad \text{donde } [k_i] = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Obtengamos $[K] = [a^T][k][a]$

Efectuando las multiplicaciones matriciales obtenemos:

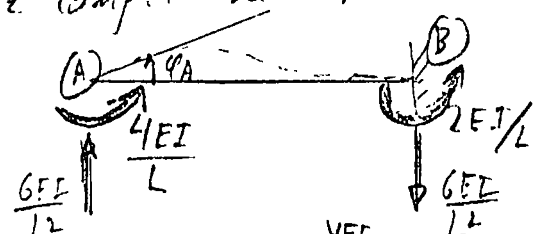
$$[K]_{(9\times 9)} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc}
12 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & +6/L & +6/L \\
2 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & -6/L & +6/L & 0 \\
0 & 2 & 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & +6/L & -6/L \\
2 & 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & -6/L & +6/L & +6/L \\
0 & 2 & 0 & 2 & 12 & 2 & -6/L & +6/L & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & -6/L & +6/L & -6/L \\
\hline
0 & -6/L & 0 & -6/L & -6/L & -6/L & 60/L^2 & -36/L^2 & 0 \\
+6/L & +6/L & +6/L & +6/L & +6/L & +6/L & -36/L^2 & 36/L^2 & 0 \\
+6/L & 0 & -6/L & +6/L & 0 & -6/L & 0 & 0 & 48/L^2
\end{array}\right] \times \frac{EI}{L}$$

4.6.- Obtención directa de la matriz [K]

La matriz $[K]$ tiene una interpretación física interesante, si $[d] = [I]$ ∴ $[F] = [K]$
ó sea que la matriz $[K]$ por columnas (ó renglones) son estas las fuerzas que hay que aplicar a la estructura para obtener desplazamientos unitarios (ver pág. 95).

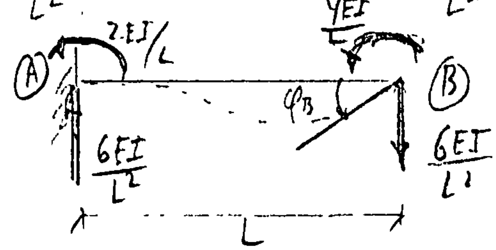
Para poder aplicar esta interpretación habrá que obtener la matriz de rigidez completa (*) de barras rectas (sin acortamiento)

a) $\varphi_A = 1 \quad (\theta_A = -1)$



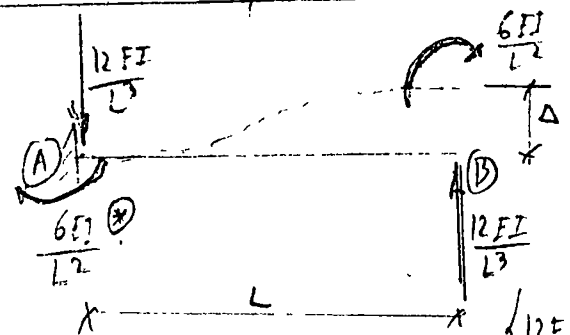
$$\left\{ \frac{6EI}{L^2} = \frac{1}{L}\left(\frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L}\right) \right\}$$

b) $\varphi_B = 1 \quad (\theta_B = +1)$



(*) - Referida a giros φ y desplazamiento relativos Δ.

c) $\Delta = 1$



$$\left\{ \frac{12EI}{L^3} = \frac{1}{L}\left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}\right) \right\}$$

En resumen:

$$\bar{M}_A = \frac{4EI}{L}\varphi_A + \frac{2EI}{L}\varphi_B - \frac{6EI}{L^2}\Delta$$
$$\bar{M}_B = \frac{2EI}{L}\varphi_A + \frac{4EI}{L}\varphi_B - \frac{6EI}{L^2}\Delta$$
$$\bar{F}_A = +\frac{6EI}{L^2}\varphi_A + \frac{6EI}{L^2}\varphi_B - \frac{12EI}{L^3}\Delta$$
$$\bar{F}_B = -\frac{6EI}{L^2}\varphi_A - \frac{6EI}{L^2}\varphi_B + \frac{12EI}{L^3}\Delta$$

donde $\bar{M}_A$, $\bar{M}_B$ momentos externos en A y B (+) y $\bar{F}_A$ y $\bar{F}_B$ fuerzas externas en A y B ($A \longrightarrow B$ $+\uparrow$)

O bien:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_A \\ \bar{M}_B \\ \bar{F}_A \\ \bar{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & +\frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & +\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \Delta \end{bmatrix}$$

En el caso de que la barra sea de sección variable, pero se conozca r_{AA}, r_{BB}, t_{AB}, t_{BA} (ver pág. 106) esta matriz se obtiene en la forma siguiente:

(*) $\theta_A = +\Delta/L$, $\theta_B = -\Delta/L$; $M_A = \frac{4EI}{L}\Delta/L + \frac{2EI}{L}\Delta/L = +\frac{6EI}{L^2}\Delta$

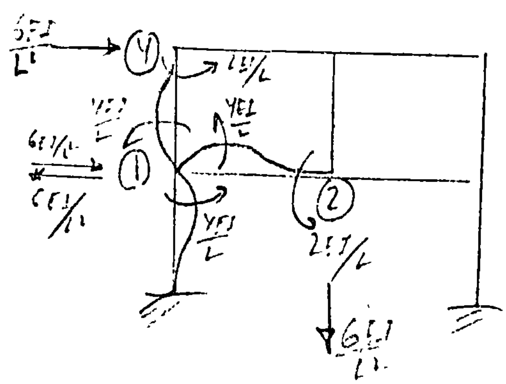
$M_B = -\frac{4EI}{L}\Delta/L - \frac{2EI}{L}\Delta/L = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$ (Momentos flexionantes)

$$\begin{bmatrix} r_{AA} & t_{BA} r_{BB} & -\frac{1}{L}(r_{AA}+t_{BA} r_{BB}) \\ t_{AB} r_{AA} & r_{BB} & -\frac{1}{L}(r_{BB}+t_{AB} r_{AA}) \\ \frac{1}{L}(r_{AA}+t_{BA} r_{BB}) & \frac{1}{L}(r_{BB}+t_{AB} r_{AA}) & -\frac{1}{L^2}(r_{AA}+r_{BB}+2t_{AB} r_{AA}) \\ -\frac{1}{L}(r_{AA}+t_{BA} r_{BB}) & -\frac{1}{L}(r_{BB}+t_{AB} r_{AA}) & +\frac{1}{L^2}(r_{AA}+r_{BB}+2t_{AB} r_{AA}) \end{bmatrix}$$

recuerde que $t_{AB} r_{AA} = t_{BA} r_{BB}$.

Con los resultados anteriores obtengamos la 1ª columna de $[K]$ del ejemplo anterior.

$$\varphi_1 = 1;\ \varphi_2 = \varphi_3 = \dots \varphi_6 = D_1 = \dots D_3 = 0$$



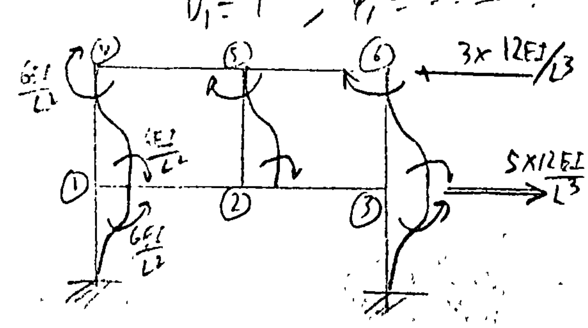
$$\begin{cases} M_1 = 3 \times \frac{4EI}{L} = \frac{12EI}{L} \\ M_2 = \frac{2EI}{L} \\ M_4 = 2EI/L \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} = 0 \\ F_2 = 6EI/L^2 \\ F_3 = 6EI/L^2 \end{cases}$$

etc.

Obtengamos la 7ª columna de $[K]$

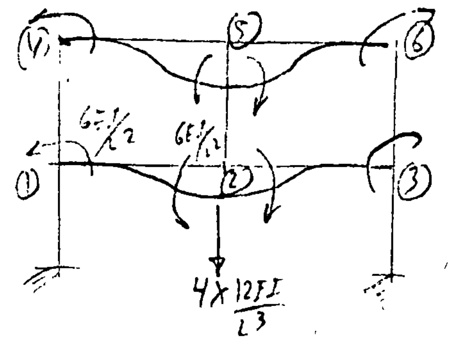
$$D_1 = 1;\ \varphi_1 = \dots D_3 = 0$$



$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = -6EI/L^2 \\ M_3 = 0 \\ M_4 = -6EI/L^2 \\ M_5 = -6EI/L^2 \\ M_6 = -6EI/L^2 \\ F_1 = 60EI/L^3 \\ F_2 = 36EI/L^3 \\ F_3 = 0 \end{cases}$$

Obtengamos la 9ª columna

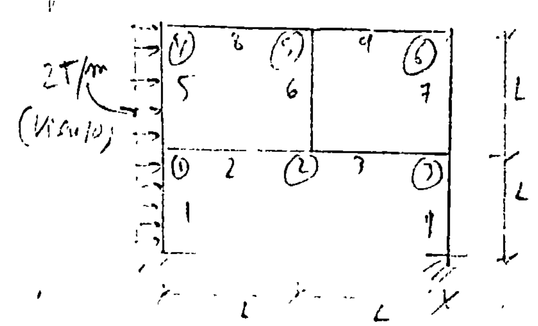
$D_3 = 1$; $\varphi_1 = \cdots D_i = 0$



$$\begin{cases} M_1 = +6EI/L^2 \\ M_2 = 0 \\ M_3 = -6EI/L^2 \\ M_4 = +6EI/L^2 \\ M_5 = 0 \\ M_6 = -6EI/L^2 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = 48\,EI/L^3 \end{cases}$$

4.7.— Marcos con fuerzas en las barras

Supongamos el siguiente problema:

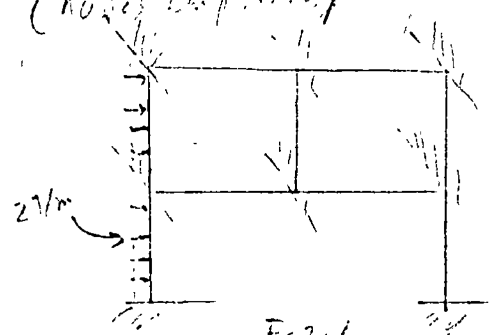


$L = 3{,}00$ m.

$$\begin{cases} I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_0 \\ I_2 = I_3 = I_8 = I_9 = 10\,I_0 \\ E = \text{cte} \end{cases}$$

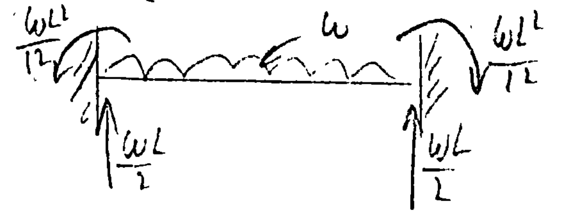
Lo resolveremos en la siguiente forma:

1º) Supongamos a la estructura con $[d] = 0$ y la fza. de viento (nudos empotrados)

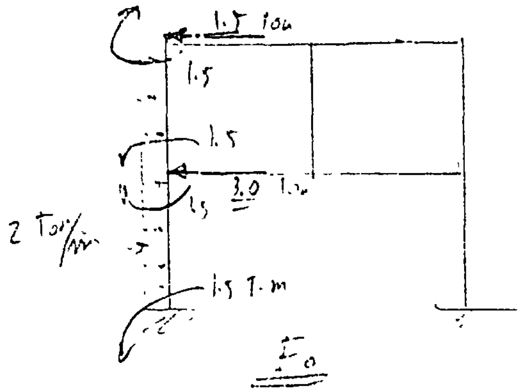


Estado E_0

Por análisis estructural elemental se tiene que una viga doblemente empotrada con carga uniforme w tiene las siguientes reacciones (fzas. de fijación)



Por consiguiente las fuerzas que hay que aplicar a la estructura en el estado E_0 serán:



$\underline{E_0}$

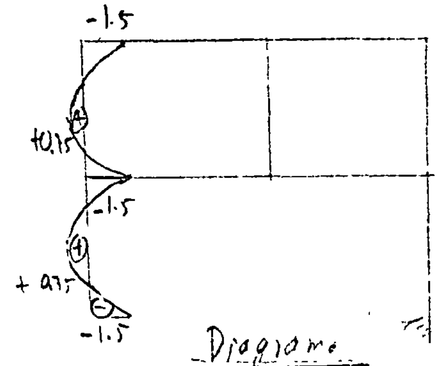
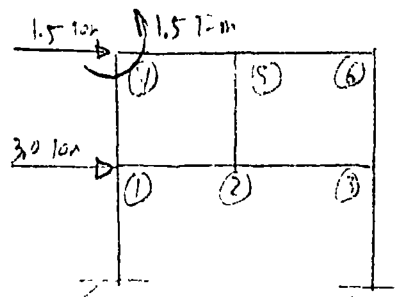


Diagrama de momentos de E_0.

2º) Resolvamos la estructura con las siguientes fuerzas



Estado E_1

$M_1 = +1.5$

$F_1 = 3.00$

$F_2 = 1.5$

Obviamente $E_0 + E_1 =$ Estado real.

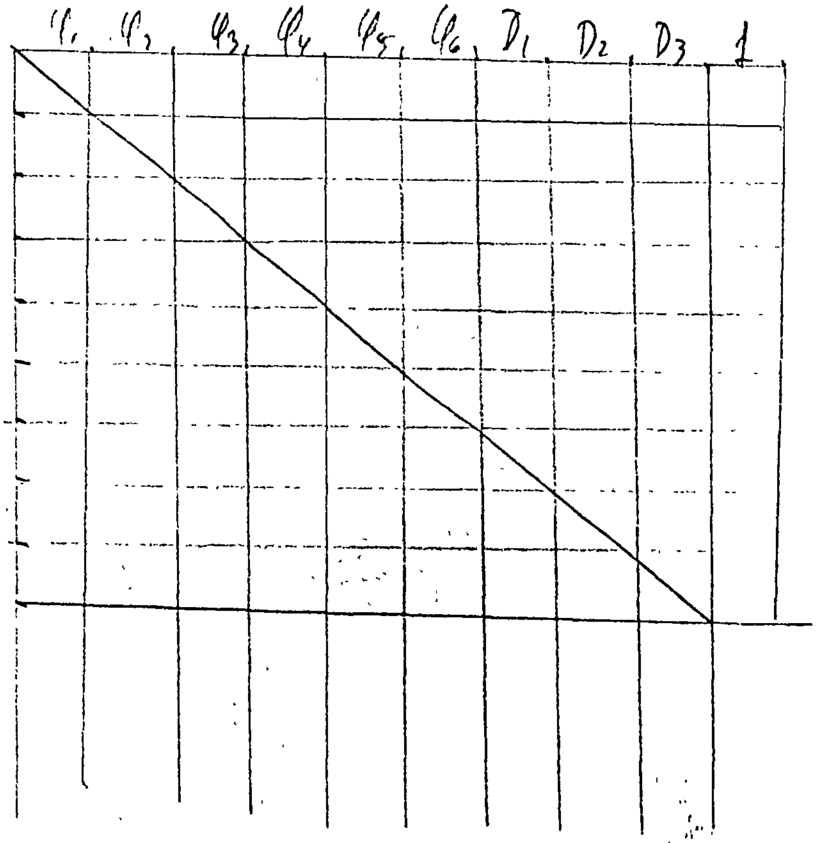
Para resolver E_1 obtenemos $[K]$ por el método directo (pág. 114)

$\begin{pmatrix} l = 3.00 \\ l^2 = 9.00 \end{pmatrix}$

$$[K] = \left[\begin{array}{cccccc|ccc}
48 & 20 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 20 \\
20 & 84 & 20 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\
0 & 20 & 48 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -20 \\
2 & 0 & 0 & 44 & 20 & 0 & -2 & 2 & 20 \\
0 & 2 & 0 & 20 & 84 & 20 & -2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 20 & 44 & -2 & 2 & -20 \\
\hline
0 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 & 6.667 & -4.00 & 0 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -4.00 & 4.00 & 0 \\
20 & 0 & -20 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 & 53.33
\end{array}\right] \times EI_0/L$$

Obtengamos los desplazamientos $[d]$ resolviendo por Gauss-Seidel la ecuación

$$[F]=[K][d] \quad \text{donde } [F]=\begin{bmatrix} +1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 3.00 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Los valores de $[d]$ serán $\quad [d]= \qquad\qquad \times\ 4/EI_0$

Obtengamos $[e]=[a][d]$ utilizando la matriz $[a]$ del ejemplo de la pag. 113 el cual tiene igual geometría que este ejemplo.

$[e] =$

Obtengamos $[p] = [k][e]$, recordando que

$$[k_1] = [k_4] = [k_5] = [k_6] = [k_7] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times EI_0/L$$

$$[k_2] = [k_3] = [k_8] = [k_9] = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix} \times \frac{EI_0}{L}$$

$[p] =$

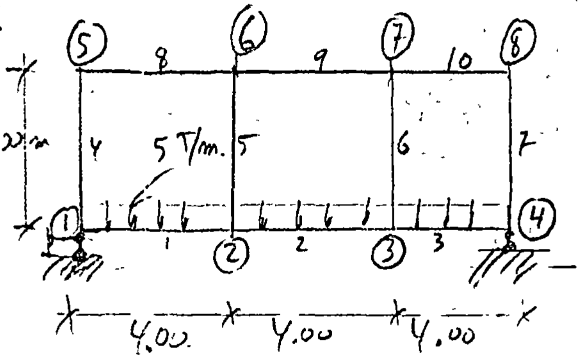
Con estos valores de $[p]$ tracemos el diagrama de momentos del estado E_1

Que sumado al de E_0 nos da el diagrama final de momentos.

4.8.– Mas ejemplos de marcos planos

4.8.1.– Vigas vierendel.

Ejemplo:

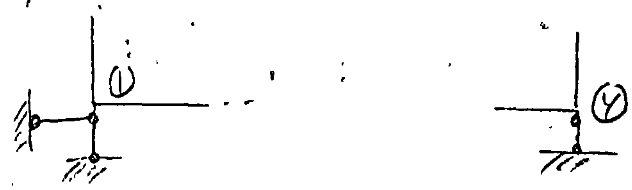


$EI = cte.$

$L = 4.00\ m$

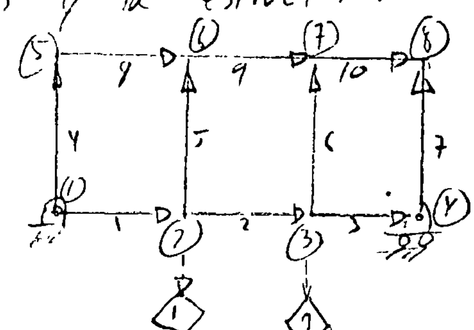
$L^2 = 16\ m^2$

Los apoyos ① y ④ son de esta forma



comunmente se indican como:

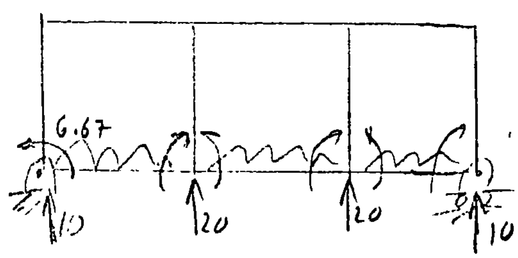
En este problema tenemos dos grados de libertad verticales y uno horizontal cuyo desplazamiento sera nulo por simetría de las cargas y la estructura.



Obtengamos [K] directamente:

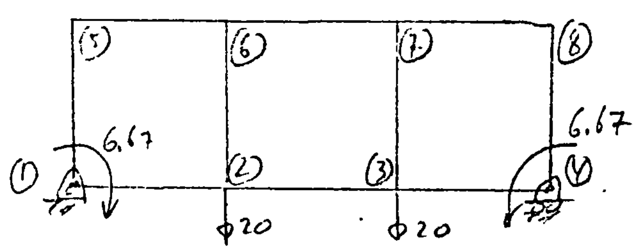
$$[K] = \frac{EI}{L} \times \left[\begin{array}{cccccccc|cc} 8 & 2 & & & 2 & & & & 1.5 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & & & 2 & & & 0 & 1.5 \\ & 2 & 12 & 2 & & & 2 & & -1.5 & 0 \\ & & 2 & 8 & & & & 2 & 0 & -1.5 \\ 2 & & & & 8 & 2 & & & 1.5 & 0 \\ & 2 & & & 2 & 12 & 2 & & 0 & 1.5 \\ & & 2 & & & 2 & 12 & 2 & -1.5 & 0 \\ & & & 2 & & & 2 & 8 & 0 & -1.5 \\ \hline 1.5 & 0 & -1.5 & 0 & 1.5 & 0 & -1.5 & 0 & 3.00 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 0 & -1.5 & 0 & 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3.00 \end{array}\right]$$

Obtengamos el estado E_0 (nudos empotrados)



$$\left(6.67 = \frac{5 \times 4^2}{12}\right)$$

El estado E_1 será:



$$[F] = \begin{bmatrix} -6.67 \\ 0 \\ 0 \\ +6.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones

$$[F] = [K][d]$$

observemos que por la simetría de la estructura y por simetría de cargas, se tiene:

$$\varphi_1 = -\varphi_4 ; \varphi_2 = -\varphi_3 ; \varphi_5 = -\varphi_8 ; \varphi_6 = -\varphi_7$$
$$D_1 = D_2$$

por lo tanto se tienen cinco ecuaciones de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{c}
M_1 \\ M_2 \\ M_5 \\ M_6 \\ \gamma_1
\end{array}
\begin{bmatrix} -6.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
8 & 2 & 2 & 0 & +1.5 \\
2 & 10 & 0 & 2 & +1.5 \\
2 & 0 & 8 & 2 & +1.5 \\
0 & 2 & 2 & 10 & 1.5 \\
1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ D_1 \end{bmatrix}
$$

Resolviendolo por Gauss-Seidel

φ_1	φ_2	φ_5	φ_6	D_1	1
	-0.250	-0.250	0	-0.188	-0.833
-0.200		0	-0.200	-0.150	0
-0.250	0		-0.250	-0.188	0
0	-0.200	-0.200		-0.150	0
-1.0	-1.0	-1.00	-1.00		+13.33
-0.833	+0.167	+0.208	-0.075	+13.863	
-3.54	-1.36	-1.72	-1.46	+21.41	
-4.07	-2.10	-2.63	-2.26	+24.39	
-4.23	-2.50	-2.96	-2.71	+25.73	
-4.32	-2.45	-3.50	-2.67	+26.27	
-4.27	-2.54	-3.20	-2.77	+26.11	
-4.32	-2.49	-3.25	-2.76	+26.15	
-4.31	-2.49	-3.16	-2.78	+26.07	

Por lo tanto:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varphi_1 &= -4.31 \times L/EI \\
\varphi_2 &= -2.49 \\
\varphi_3 &= +2.49 \\
\varphi_4 &= +4.31 \\
\varphi_5 &= -3.16 \\
\varphi_6 &= -2.78 \\
\varphi_7 &= 2.78 \\
\varphi_8 &= +3.16 \\
D_1 &= 26.07 \\
D_2 &= 26.07
\end{aligned}
\right\} = [d]
$$

Obtengamos la matriz $[a]$

$$[a] = \begin{array}{cccccccccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & \varphi_7 & \varphi_8 & D_1 & D_2 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc|cc}
-1 & & & & & & & & -1/L & \\
 & 1 & & & & & & & +1/L & \\
\hline
 & -1 & & & & & & & +1/L & -1/L \\
 & & 1 & & & & & & -1/L & +1/L \\
\hline
 & & -1 & & & & & & & +1/L \\
 & & & 1 & & & & & & -1/L \\
\hline
-1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
\hline
 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
\hline
 & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & -1 & & & & -1/L & \\
 & & & & & 1 & & & +1/L & \\
\hline
 & & & & & -1 & & & +1/L & -1/L \\
 & & & & & & 1 & & -1/L & +1/L \\
\hline
 & & & & & & -1 & & & +1/L \\
 & & & & & & & 1 & & -1/L
\end{array}\right]$$

Obtengamos $[e]$ (de la mitad de la estructura)

$$[e_1] = \begin{bmatrix} -2.21 \\ +4.03 \end{bmatrix} ; \quad [e_2] = \begin{bmatrix} +2.49 \\ +2.49 \end{bmatrix}$$

$$[e_4] = \begin{bmatrix} +4.31 \\ -3.16 \end{bmatrix} ; \quad [e_5] = \begin{bmatrix} +2.49 \\ -2.78 \end{bmatrix}$$

$$[e_8] = \begin{bmatrix} -3.36 \\ +3.74 \end{bmatrix} ; \quad [e_9] = \begin{bmatrix} +2.78 \\ +2.78 \end{bmatrix}$$

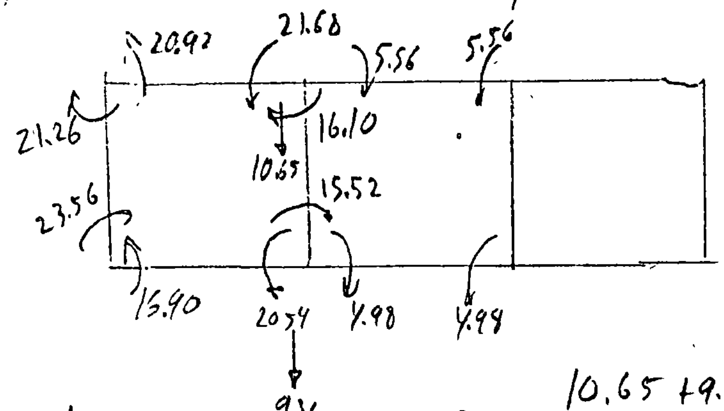
Obtengamos $[p]$

$$[p_1] = \begin{bmatrix} -16.90 \\ +20.54 \end{bmatrix} ; \quad [p_2] = \begin{bmatrix} +4.98 \\ +4.98 \end{bmatrix}$$

$$[p_4] = \begin{bmatrix} +23.56 \\ -21.26 \end{bmatrix} ; \quad [p_5] = \begin{bmatrix} +15.52 \\ -16.10 \end{bmatrix}$$

$$[p_8] = \begin{bmatrix} -20.92 \\ +21.69 \end{bmatrix} ; \quad [p_9] = \begin{bmatrix} +5.56 \\ +5.56 \end{bmatrix}$$

Comprobemos directamente el equilibrio:



Momentos N/B

Fuerzas N/B

$10.65 + 9.36 = 20.01$ ✓

$\Sigma M \approx 0$ (en todos los nudos)

Diagramas de momentos de E_1

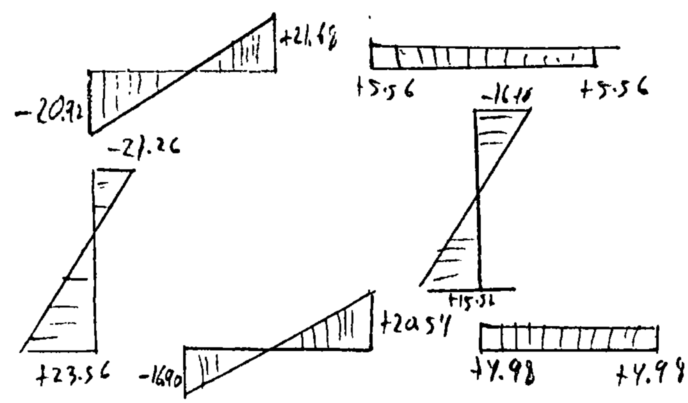
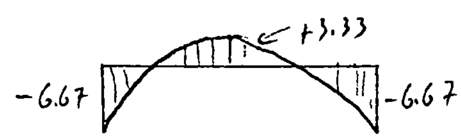
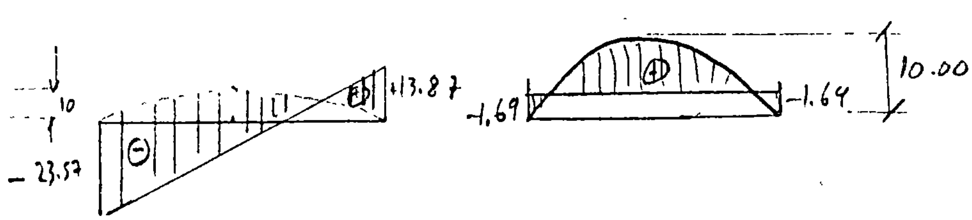


Diagrama de E_0 (solo barras 1 y 2)

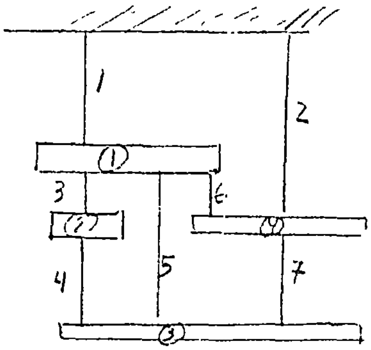


Idem.

Diagrama final de barras 1 y 2.



Para ilustrar mejor la obtención de las matrices $[b_0]$ y $[b_1]$, veamos ahora un ejemplo en el cual obtendremos directamente estas matrices.



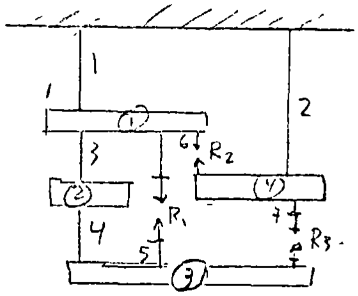
En este ejemplo la matriz $[a^T]$ es la siguiente:

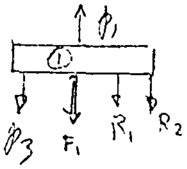
$$[a^T] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$[a_0^T] \qquad [a_R^T]$$

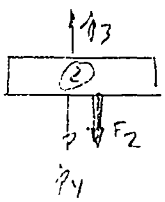
Esta matriz se puede obtener directamente por las ecuaciones de equilibrio o transponiendo la matriz de continuidad $[a]$ (ver pag. 73).

Es obvio que las barras 1, 2, 3, 4 forman la estructura primaria ya que la estructura resultante es estable (la matriz $[a_0^T]$ es no singular). Consideremos a la estructura primaria con las barras 5, 6, 7 cortadas y sobre las que obren las redundantes R_1, R_2, R_3 (obviamente: $R_1 = p_5$; $R_2 = p_6$; $R_3 = p_7$). Obtengamos las ecuaciones de equilibrio de cada nodo.

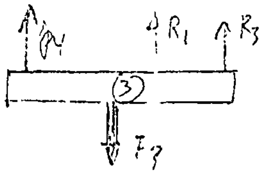




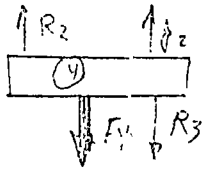
$$F_1 = p_1 - p_3 - R_1 - R_2$$



$$F_2 = p_3 - p_4$$



$$F_3 = p_4 + R_1 + R_3$$



$$F_4 = p_2 + R_2 - R_3$$

Estas cuatro ecuaciones se pueden escribir directamente ya que sus coeficientes forman la matriz $[a^T]$.

Obtengamos p_1, p_2, p_3, p_4 en función de $[F]$ y $[R]$ para lo cual despejémoslas en las siguientes ecuaciones.

$$p_1 - p_3 = F_1 + R_1 + R_2 \quad (d)$$
$$p_3 - p_4 = F_2 \quad (c)$$
$$p_4 = F_3 - R_1 - R_3 \quad (a)$$
$$p_2 = F_4 - R_2 + R_3 \quad (b)$$

(las mismas ecuaciones anteriores pasando a un solo miembro las fuerzas y las redundantes)

De (a) y (b) se obtiene p_4 y p_2, sustituyendo (a) en (c) se obtiene p_3 y sustituyendo este último valor en (d) se obtiene p_1 se obtiene así

$$p_1 = F_1 + F_2 + F_3 + R_2 - R_3$$
$$p_2 = F_4 - R_2 + R_3$$
$$p_3 = F_2 + F_3 - R_1 - R_3$$
$$p_4 = F_3 - R_1 - R_3$$

Además se tiene que:

$$p_5 = R_1$$
$$p_6 = R_2$$
$$p_7 = R_3$$

Estas siete ecuaciones se pueden escribir matricialmente:

$$
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[b_0]}
\!\!\!\!
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[b_1]}
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}
$$

o bien:

$$
\underline{\underline{[p] = [b_0][F] + [b_1][R]}}
$$

Observe que $[b_0]$ y $[b_1]$ se pueden particionar en la siguiente forma:

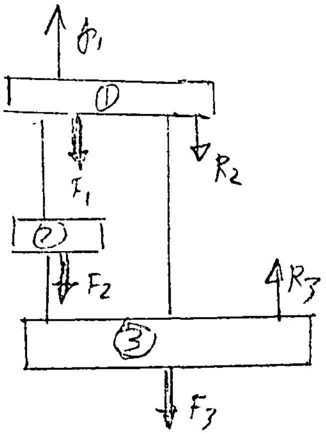
$$
[b_0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} [a_0^T]^{-1} \\ \hline 0 \end{bmatrix}
$$

(ver pág 82)

$$
[b_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -[a_0^T]^{-1}[a_R^T] \\ \hline I \end{bmatrix}
$$

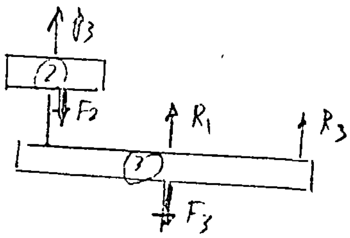
Es interesante hacer notar que P_1 y P_3 (los valores no obtenidos directamente por el equilibrio de los nudos) se pueden obtener directamente considerando el equilibrio de varios nudos simultaneamente (método de las secciones).

Aislando (1), (2) y (3) simultaneamente



$$P_1 = F_1 + F_2 + F_3 + R_2 - R_3$$

Aislando (2), (3) simultaneamente



$$P_3 = F_2 + F_3 - R_1 - R_3$$

Obtengamos los desplazamientos [d] resolviendo por Gauss-Seidel la ecuación

$$[F] = [K][d] \quad \text{donde } [F] = \begin{bmatrix} +1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.00 \\ 3.00 \\ 0 \end{bmatrix}$$

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	D_1	D_2	D_3	f
	-0.417		-0.042				-0.042	-0.047	0
-0.238		-0.238		-0.024		0.024	-0.024		0
	-0.417				-0.042		-0.042	0.417	0
-0.045				-0.455		0.045	-0.045	-0.455	0.034
	-0.024		-0.238		-0.238	0.024	-0.024		0
		-0.045		-0.455		0.045	-0.045	0.455	
	0.3		0.3	0.3	0.3		0.6		0.9
-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	+1.0			0.75
-0.375		+0.375	-0.375			0.375			0
0	0	0	0.034	-0.0081	+0.0037	0.909	1.644	-0.01137	
-0.0657	-0.00181	-0.07119	0.0239	-0.0148	-0.0240	1.8851	2.707	-0.0126	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	
-0.2050	0.0806	-0.2334	0.0268	-0.0218	-0.0579	3.5820	4.5273	-0.949	← 8ª Iteración

Los valores de [d] serán $[d]^T =$ $\left(\times \frac{1}{EI_0}\right)$

Obtengamos $[e] = [a][d]$ utilizando la matriz [a] del ejemplo de la pag. 113 el cual tiene igual geometría que este ejemplo.

$[e_1] = \begin{bmatrix} -1.19399 \\ 0.98903 \end{bmatrix}$ $[e_5] = \begin{bmatrix} -0.11016 \\ 0.34190 \end{bmatrix}$ $[e_8] = \begin{bmatrix} -0.01514 \\ -0.03348 \end{bmatrix}$

$[e_2] = \begin{bmatrix} 0.21660 \\ 1.06898 \end{bmatrix}$ $[e_6] = \begin{bmatrix} -0.39574 \\ 0.29328 \end{bmatrix}$ $[e_9] = \begin{bmatrix} 0.01020 \\ -0.02625 \end{bmatrix}$

$[e_3] = \begin{bmatrix} -0.09226 \\ -0.22176 \end{bmatrix}$ $[e_7] = \begin{bmatrix} -0.08172 \\ 0.27723 \end{bmatrix}$

$[e_4] = \begin{bmatrix} -1.19399 \\ 0.96059 \end{bmatrix}$

Obtengamos $[p] = [k][e]$, recordando que

$$[k_1] = [k_4] = [k_5] = [k_6] = [k_7] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times EI_0/L$$

$$[k_2] = [k_3] = [k_8] = [k_9] = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix} \times \frac{EI_0}{L}$$

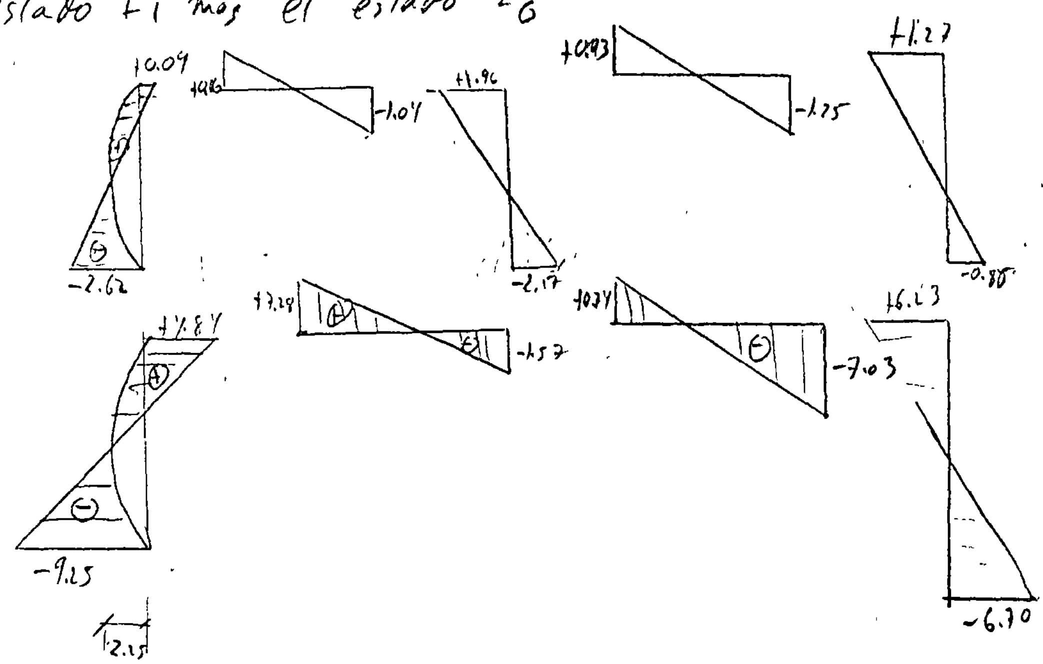
$[p_1] = \begin{bmatrix} -6.75 \\ +6.34 \end{bmatrix}$ $[p_4] = \begin{bmatrix} -6.70 \\ +6.23 \end{bmatrix}$ $[p_8] = \begin{bmatrix} +0.06 \\ -1.04 \end{bmatrix}$

$[p_2] = \begin{bmatrix} +7.28 \\ -1.57 \end{bmatrix}$ $[p_5] = \begin{bmatrix} -1.12 \\ +1.59 \end{bmatrix}$ $[p_9] = \begin{bmatrix} +0.93 \\ -1.25 \end{bmatrix}$

$[p_3] = \begin{bmatrix} +0.74 \\ -7.03 \end{bmatrix}$ $[p_6] = \begin{bmatrix} -2.17 \\ +1.96 \end{bmatrix}$

$[p_7] = \begin{bmatrix} -0.88 \\ +1.27 \end{bmatrix}$

Con estos valores de $[p]$ tracemos el diagrama de momentos del estado E_1 mas el estado E_6



$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_5 \\ M_6 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 & +1.5 \\ 2 & 10 & 0 & 2 & +1.5 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & +1.5 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ D_1 \end{bmatrix}$$

Resolvámosla por Gauss-Seidel

φ_1	φ_2	φ_5	φ_6	D_1	1
	-0.250	-0.250	0	-0.188	-0.833
-0.200		0	-0.200	-0.150	0
-0.250	0		-0.250	-0.188	0
0	-0.200	-0.200		-0.150	0
-1.0	-1.0	-1.00	-1.00		+13.33
-0.833	+0.167	+0.208	-0.075	+13.863	
-3.533	-1.358	-1.704	-1.467	+21.392	
-4.089	-2.098	-2.633	-2.263	+24.413	
-4.240	-2.361	-2.964	-2.597	+25.492	
-4.294	-2.446	-3.070	-2.721	+25.861	
-4.316	-2.472	-3.103	-2.764	+25.985	
-4.324	-2.480	-3.113	-2.779	+26.026	

Por lo tanto.

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= -4.32 \times L/EI \\ \varphi_2 &= -2.48 \\ \varphi_3 &= +2.48 \\ \varphi_4 &= +4.32 \\ \varphi_5 &= -3.11 \\ \varphi_6 &= -2.78 \\ \varphi_7 &= 2.78 \\ \varphi_8 &= +3.11 \\ D_1 &= 26.03 \\ D_2 &= 26.03 \end{aligned} \right. = [d]$$

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL (DEL 27 DE FEBRERO AL 12 DE ABRIL DE 1974)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1. ING. G. RAFAEL ARANDA HERNANDEZ México, D. F.	
2. ING. MARIO ALDAPE VELAZQUEZ Fco. Ruiz 5 Circuito Juristas Cd. Satélite Edo. de México Tel: 5-62-13-13	SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO "METRO" Delicias No. 67 México 1, D. F. Tel: 5-10-38-23
3. ING. NICOLAS D. BETANZOS TRUJILLO Av. Observatorio No. 33 Departamento 204 Col. Tacubaya México 18, D. F. Tel: 5-16-43-68	CONSTRUCCIONES, CONDUCCIONES Y PAVIMENTOS, S. A. Minería No. 145 Col. Escandón México 18, D. F. Tel: 5-16-04-60 Ext. 477
4. ING. JORGE CECEÑA SIDA Pisco 720 Col. Lindavista México 14, D. F. Tel: 5-86-20-17	INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO Ave. de los 100 Metros No. 500 Lindavista Vallejo México, D. F. Tel: 5-67-66-00 Ext. 178
5. ING. MARIO A. CERVANTES ELIAS México, D. F.	COMPAÑIA DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S. A. Melchor Ocampo No. 171 México, D. F.
6. ING.MIGUEL CHAVEZ DOMINGUEZ Chichen Itza No. 205-E Col. Vertiz Narvarte México, D. F. Tel: 5-59-28-14	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Av. Fernando y Niño Perdido Col. Alamos México 13, D. F. Tel: 5-19-27-18
7. ING. IGNACIO GARZA BARRUETA Moras 627 México, D. F. Tel: 5-24-64-46	A T E C, S. A. Ave. Chapultepec 264-3er. Piso México, D. F. Tel: 5-33-33-83

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL (DEL 27 DE FEBRERO AL 12 DE ABRIL DE 1974)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
8.	SRA. ESTHER GOMEZ VALDIVIEZO Oriente 51 No. 360-16 Col. Villa de Cortés México 13, D. F.	DIRECCION GENERAL DE AEROPUERTOS DE LA SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola y Ave. Universidad México, D. F. Tel: 5-19-52-86
9.	ING. RICARDO GUTIERREZ ROJAS México, D. F.	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S. A. Av. Melchor Ocampo No. 171 México, D. F.
10.	ING. VICTOR LEY KOO Universidad 2042-1101 México, D. F. Tel: 5-48-91-41	INSTITUTO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR Insurgentes Sur No. 1079-3er. Piso México, D. F. Tel: 5-98-01-44
11.	ING. ROBERTO MARTINEZ CASTAÑEDA Colorines 40-5 Coyoacán México 21, D. F. Tel: 5-44-49-32	CIA. MEXICANA DE CONSULTORES EN INGENIERIA, S. A. Insurgentes Sur 1824-6o. Piso México 20, D. F. Tel: 5-24-66-54
12.	ING. JUAN ANTONIO ORTIZ ROBLES Callao 771-2 México 14, D. F. Tel: 5-81-14-56	FERROCARRILES NACIONALES DE MEXICO Av. Centrl No. 140-9o. Piso a la "B" México, D. F. Tel: 5-47-36-43
13.	ING. ILDEFONSO PEREZ G. México, D. F.	BUFETE DE CALCULO, S.C. Insurgentes Sur No. 1824-702 México, D. F. Tel: 5-24-24-46
14.	SR. JORGE ARTURO RAMIREZ ALVAREZ Oriente 61 No. 214 Col. Iztaccihuatl México 13, D. F. Tel: 5-79-13-03	

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL (DEL 27 DE FEBRERO AL 12 DE ABRIL DE 1974)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
15. SR. JOAQUIN RODRIGUEZ FLORES Excelsior 185- México 14, D. F. Tel: 5-37-84-65	M. ESQUEDA Y ASOCIADOS, S. A. Carlos Arellano No. 8 Cd. Satélite Edo. de México Tel: 5-65-75-48
16. SR. LUIS G. ROMERO ROMERO Marti No. 49-9 Col. Escandón México 18, D. F.	DIRECCION Y PROYECTO, S.A. Viaducto Miguel Aleman No. 22 México, D. F. Tel: 5-36-15-01
17. SR. AUGUSTO SANCHEZ TOLEDO Norte 84 No. 6509-6 San Pedro el Chico México, D. F.	BUTLER MEXICANA, S. A. Poniente 140 No. 819 Col. Industrial Vallejo México, D. F. Tel: 5-67-97-22
18. ING. W. MARCOS SOSA CUELLAR Nicolás San Juan 434-A México, D. F. Tel: 5-36-12-32	BICA, S. A. DE C.V. Paseo de la Reforma 503-1er. Piso México, D. F. Tel: 5-53-67-55
19. ING. JOSE LUIS TRIGOS SUAREZ México, D. F.	

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO "ANALISIS ESTRUCTÚRAL"

1. Dr. Porfirio Ballesteros Barossio
   Director General
   Cia. Ballesteros, S.A.
   Av. Revolución No. 314-403-B
   San Pedro de los Pinos
   México 18, D.F.

2. Ing. Salvador Medina Rivero
   Gerente
   Cia. Ballesteros, S.A.
   Av. Revolución No. 314-403-B
   San Pedro de los Pinos
   México 18, D.F.

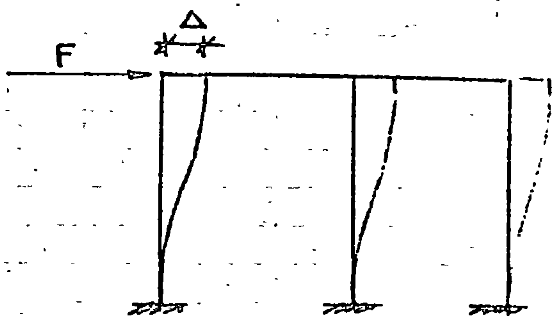
3. Ing. Julio Damy Rios
   Investigador
   Instituto de Ingeniería
   U. N. A. M.
   México 20, D.F.

$F_{sis.} = c \cdot W_1 = V_1 = F_1$

(a) Dado las complejidades de un análisis tridimensional vamos a efectuar una consideración mas ingenieril. Supondremos que la losa es infinitamente rígida, es decir con solamente desplazamientos de cuerpo rígido. d_x, d_y, θ_z

(b) Marcos planos. cada marco se va a considerar como independiente con la conexión de la losa.

Se obtienen las rigideces de entrepiso de todos los marcos.



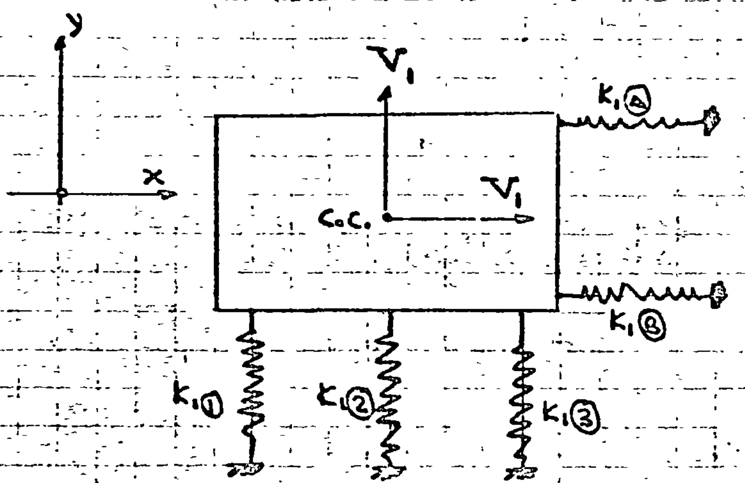
$K_1 = \left(\frac{F}{\Delta}\right)$

Se obtendrán:

$K_1$①, $K_1$②, $K_1$③, K_1Ⓐ, K_1Ⓑ

Rigideces de entrepiso de todos los marcos.

(c) luego analizamos el edificio en conjunto



¿cuanto se desplaza cada marco?

obtener [K] de la losa

③, $\theta = -45°$

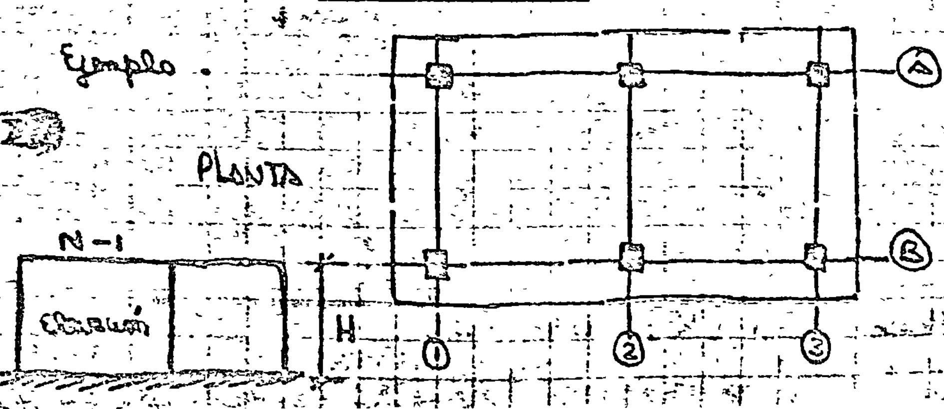
$$K_{\Delta C} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \frac{E\Delta}{L}$$

$$K = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/2+1+1/2 & 1/2-1/2 & -1 & 0 \\ 1/2-1/2 & 1/2+1+1/2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{E\Delta}{L}$$

$$[K] = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{E\Delta}{L}$$

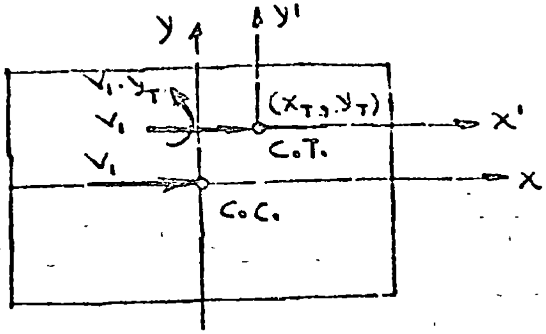
Distribución de fuerzas cortantes en edificios formados por marcos. Análisis Sísmico (Estático).

Ejemplo.



Sismo en X . $F_X = V_1$, $F_Y = 0$, $M_Z = 0$

conviene cambiar de coordenadas al centro de torsión



$$\begin{cases} x_T = \dfrac{x_1 k_1 + x_2 k_2 + x_3 k_3}{k_1 + k_2 + k_3} \\[2ex] y_T = \dfrac{y_A k_A + y_B k_B}{k_A + k_B} \end{cases}$$

$$[K]_{CT} = \begin{pmatrix} \underbrace{k_A + k_B}_{K_{XX}} & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{k_1 + k_2 + k_3}_{K_{YY}} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{k_A y_A'^2 + k_B y_B'^2 + x_1'^2 k_1 + x_2'^2 k_2 + x_3'^2 k_3}_{J} \end{pmatrix}$$

Sismo en X (referido al C.T.)

$F_X = V_1$ $\qquad d_{X\,CT} = V_1 / K_{XX}$

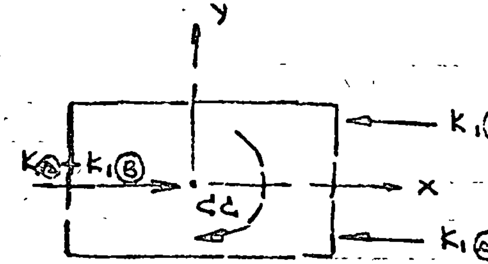
$F_Y = 0$ $\qquad d_{Y\,CT} = 0$

$M_Z = V_1 y_T$ $\qquad \varphi_Z = \dfrac{V_1 \cdot y_T}{J}$

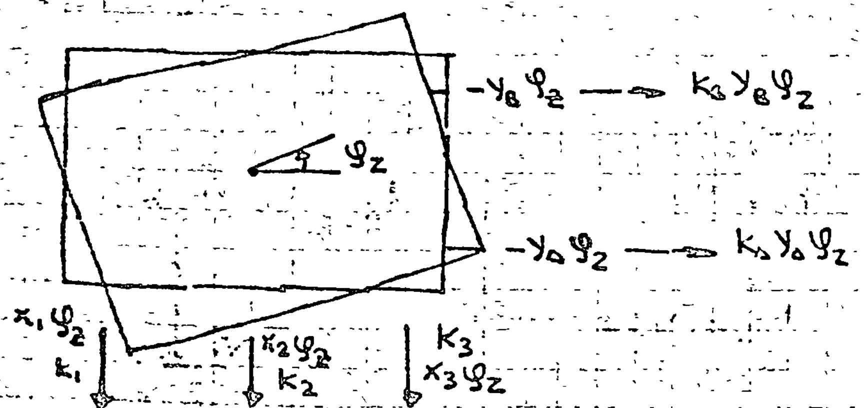
Tarea. Calcular las fuerzas sísmicas de cada marco. Investigar el análisis en dirección del sismo Y.

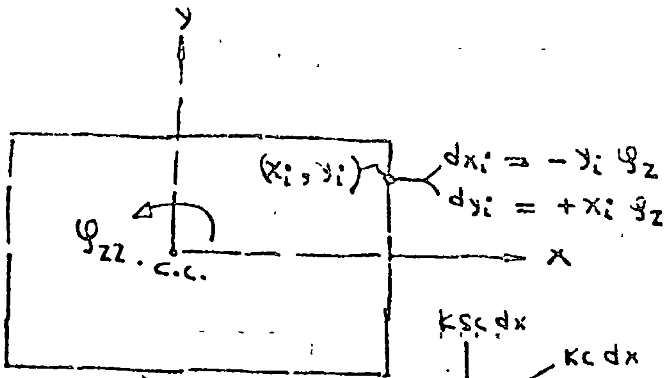
$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_Z \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} d_X \\ d_Y \\ \varphi_Z \end{Bmatrix}$$

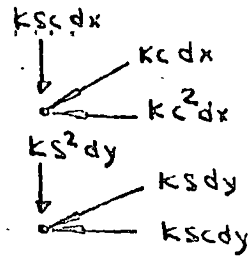
Si $d_X = 1$



$$[K]_{C.C.} = \begin{pmatrix} k_1(A) + k_1(B) & 0 & -(y_B k_B + y_A k_A) \\ 0 & k_1 + k_2 + k_3 & +(x_1 k_1 + x_2 k_2 + x_3 k_3) \\ -(y_B k_B + y_A k_A) & +(x_1 k_1 + x_2 k_2 + x_3 k_3) & k_A y_A^2 + k_B y_B^2 + k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 \end{pmatrix}$$



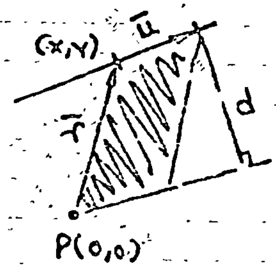




$$M_z = -\sum \left\{ -y_i^2 c_i^2 + y_i x_i c_i s_i + x_i y_i s_i c_i - x_i^2 s_i^2 \right\} k_i \varphi_z$$

$$M_z = \Sigma k_i \cdot (y_i c_i - x_i s_i)^2 = \Sigma k_i \cdot d_i^2$$

d_i = distancia de c.c. a k_i



$$|\bar{r} \times \bar{u}| = d$$

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y$$
$$\bar{u} = \bar{i}\cos\theta + \bar{j}\operatorname{sen}\theta$$

$$\bar{r} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ c & s & 0 \end{vmatrix} = \bar{k} \cdot (xs - yc)$$

$$d = (xs - yc) \quad . \quad d^2 = (xs - yc)^2$$

Es conveniente diagonalizar la matriz [K] para lo cual debemos trasladar el origen y girar los ejes (análogo al problema de los ejes principales).

$$K_{yx} = K_{xy} = \Sigma k_i c_i s_i \quad . \quad [K_o] = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix}$$

si la referimos a otros ejes x', y' rotados α

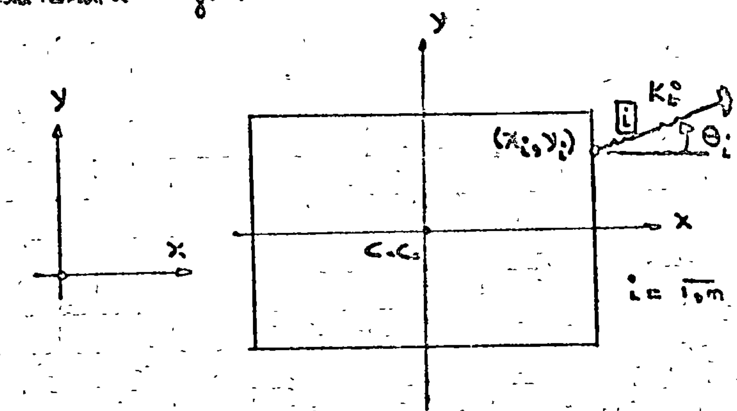
$$[K_o'] = T K_o T^T \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Marcos no ortogonales en planta

se obtiene la rigidez de entrepiso de todos los marcos K_i

(a) Losa infinitamente rígida.

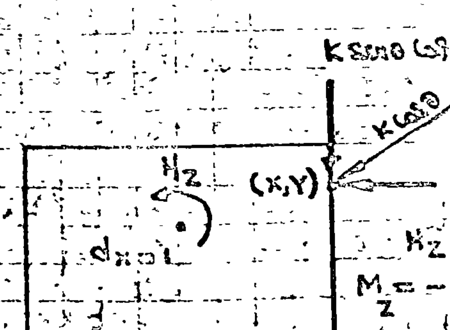
$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}_{c.c.}$$



(b) analisis de la matriz de rigidez [K]

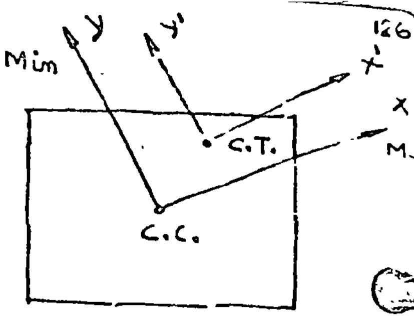
$d_x = 1, d_y = \varphi_z = 0 \qquad d_y = 1, d_x = \varphi_z = 0 \qquad \varphi_z = 1, d_x = d_y$

$$[K]_{c.c.} = \begin{pmatrix} \Sigma k_i \cos^2\theta_i & \Sigma k_i \cos\theta_i \operatorname{sen}\theta_i & \Sigma k_i (x_i \operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_i - y_i \ldots \\ \Sigma k_i \cos\theta_i \operatorname{sen}\theta_i & \Sigma k_i \operatorname{sen}^2\theta_i & \Sigma k_i (x_i \operatorname{sen}^2\theta_i - y_i \operatorname{sen}\theta_i \ldots \\ \Sigma k_i (x_i \operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_i - y_i \cos^2\theta_i) & \Sigma k_i (x_i \operatorname{sen}^2\theta_i - y_i \operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_i) & \Sigma k_i (y_i^2 c_i^2 - 2 x_i y_i c_i s_i + x \ldots \end{pmatrix}$$



$$M_z + \Sigma M_{c.c.} = 0$$
$$M_z = -y K \cos^2\theta + x \cdot K \operatorname{sen} \ldots$$

Δlos ejes ya rotados α vamos a denominarlos por (X,Y).



$$[K] = \begin{pmatrix} \Sigma k_i c_i^2 & 0 & \otimes \\ 0 & \Sigma k_i s_i^2 & \otimes \\ \otimes & \otimes & \Sigma k_i d_i^2 \end{pmatrix}$$

Tarea. averiguar las coordenadas del centro de torsión

3 Agosto - 1973

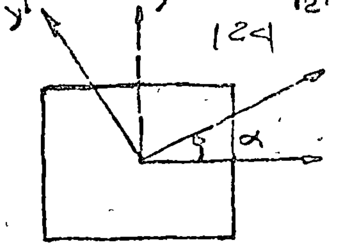
$$K = \begin{pmatrix} \Sigma k_i c_i^2 & \Sigma k_i c_i s_i & \otimes \\ \Sigma k_i c_i s_i & \Sigma k_i s_i^2 & \otimes \\ \underbrace{\Sigma k_i (x_i s_i c_i - y_i c_i^2)}_{\Delta} & \underbrace{\Sigma k_i (x_i s_i^2 - y_i c_i s_i)}_{B} & \Sigma k_i d_i^2 \end{pmatrix}$$

$$x' = x - x_T$$
$$y' = y - y_T$$

$$\Delta' = \Sigma \left\{ k_i \left[(x_i s_i c_i - y_i c_i^2) - x_T s_i c_i + y_T c_i^2 \right] \right\}$$

$$\Delta' = \Delta - x_T \Sigma k_i s_i c_i + y_T \Sigma k_i c_i^2$$

$$\boxed{\Delta' = \Delta - x_T K_{xy} + y_T K_{xx} = 0}$$



$$[K_0'] = \begin{pmatrix} K'_{xx} & 0 \\ 0 & K'_{YY} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} K_{xx} - \lambda & K_{xY} \\ K_{Yx} & K_{YY} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$K_{xx} K_{YY} - \lambda (K_{xx} + K_{YY}) + \lambda^2 - K_{xY}^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{K_{xx} + K_{YY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{xx} + K_{YY}}{2}\right)^2 + K_{xY}^2 - K_{xx} K_{YY}}$$

$$\lambda = \frac{K_{xx} + K_{YY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{YY}}{2}\right)^2 + K_{xY}^2}$$

$$(\text{Max}), \quad K'_{xx} = \frac{K_{xx} + K_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{yy}}{2}\right)^2 + K_{xy}^2}$$

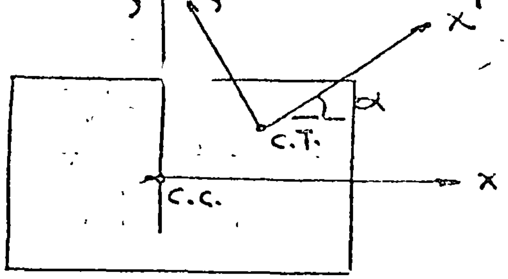
$$(\text{Min}), \quad K'_{yy} = \frac{K_{xx} + K_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{yy}}{2}\right)^2 + K_{xy}^2}$$

$$[K] x_1 = \lambda_1 x_1, \quad [K - \lambda_1 I] x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - K'_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} - K'_{xx} \end{pmatrix}$$

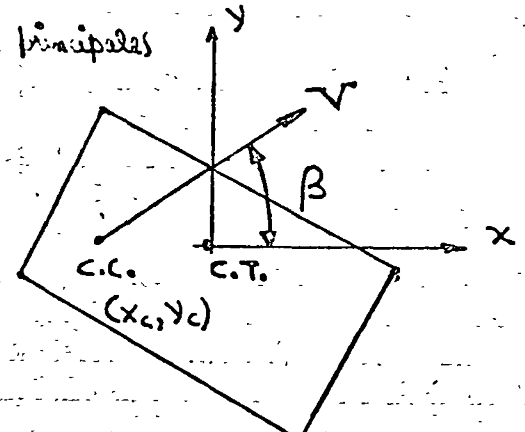
$$\{x\} = \begin{Bmatrix} K_{yy} - K'_{xx} \\ -K_{xy} \end{Bmatrix} = \beta \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{K_{xy}}{K_{yy} - K'_{xx}}}$$



$$[K]_{C.T.} = \begin{pmatrix} \Sigma k_i c_i^2 & & 0 \\ & \Sigma k_i s_i^2 & \\ 0 & & \Sigma k_i d_i^2 \end{pmatrix}$$

ejes principales



Sismo en x
$F_x = V_1$
$F_y = 0$
$M_z = -y_c V_1$

Sismo en y
$F_x = 0$
$F_y = V_1$
$M_z = + x_c V_1$

Tarea. Determinar que valor de β produce el mayor cortante que corresponde a un marco (θ_i) considerando que no hay torsión (C.C. = C.T.) y calcular la correspondiente fuerza cortante.

$$B' = \Sigma \{ k_i [x_i s_i^2 - y_i s_i c_i) - x_T s_i^2 + y_T c_i s_i] \}$$

$$\boxed{B' = B - x_T k_{yy} + y_T k_{xy} = 0}$$

$$\text{Det.} \begin{vmatrix} -k_{xy} & k_{xx} \\ -k_{yy} & k_{xy} \end{vmatrix} = -k_{xy}^2 + k_{xx} k_{yy} \neq 0$$

Tarea. Demostrar que $P_{xx} P_{yy} - (P_{xy})^2 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \text{ --- } x_n \\ y_1, y_2, y_3 \text{ --- } y_n \end{cases}$$ Dos sucesiones

$P_{xx} = \Sigma x_i^2$. $P_{yy} = \Sigma y_i^2$. $P_{xy} = \Sigma x_i y_i$

Solo es cero cuando son sucesiones lineales. (Marcos paralelos en una sola dirección).

Resolviendo las 2 ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x_T &= \frac{-\Delta k_{xy} + B k_{xx}}{k_{xx} k_{yy} - k_{xy}^2} \\ y_T &= \frac{+B k_{xy} - \Delta k_{yy}}{k_{xx} k_{yy} - k_{xy}^2} \end{aligned}}$$

checa perfectamente para los casos particulares en que $k_{xy} = 0$ (marcos ortogonales)

Lo mas recomendable es primero trasladar los ejes y luego rotarlos para diagonalizar la matriz [K]

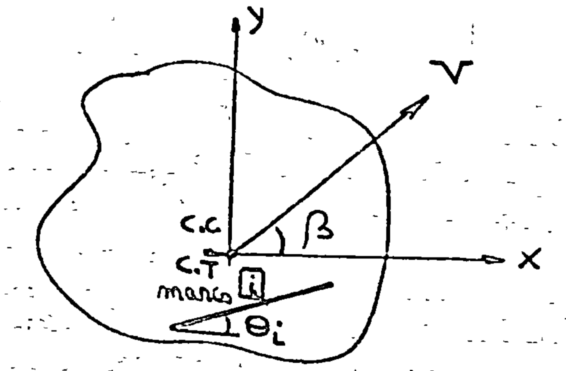
(a) obtener el centro de torsión y las direcciones principales de rigidez, así como las rigideces principales.

(b) Suponiendo que el centro de carga esté en el centro de área, obtener la cortante máxima en cada marco. La cortante total en los 3 marcos es de 50 tons.

Nota. no tomar en cuenta la torsión accidental

<u>obtención de la cortante máxima de un marco</u>

(a) Supongamos que C.T. = C.C.



x, y = ejes principales

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}$$

$$F_x = V \cos\beta$$
$$F_y = V \operatorname{sen}\beta$$

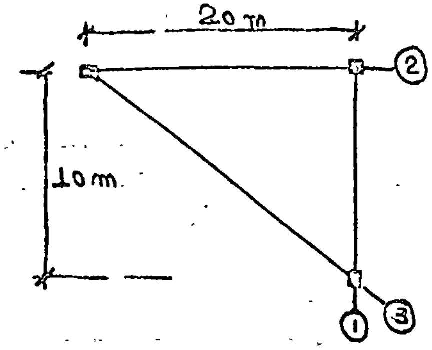
$$[d] = [K]^{-1}_{C.T.}[F] \qquad \begin{cases} d_x = \dfrac{V_0 \cos\beta}{K_{xx}} \\ d_y = \dfrac{V_0 \operatorname{Sen}\beta}{K_{yy}} \end{cases}$$

Sea Δ_i el desplazamiento del marco $\boxed{i}$

$$\Delta_i = d_x \cos\theta_i + d_y \operatorname{Sen}\theta_i$$

Tarea. 6 Agosto

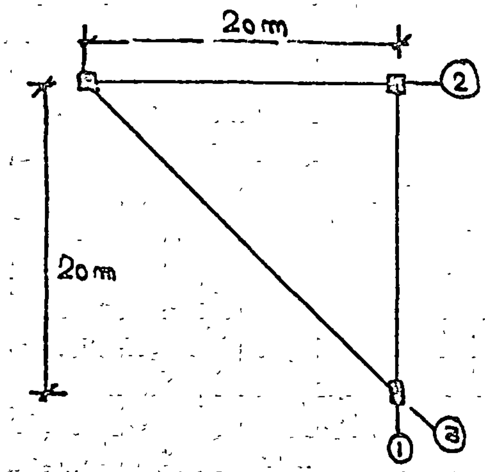
①



$k_1 = k_2 = 50$ ton/cm

$k_3 = 150$ ton/cm

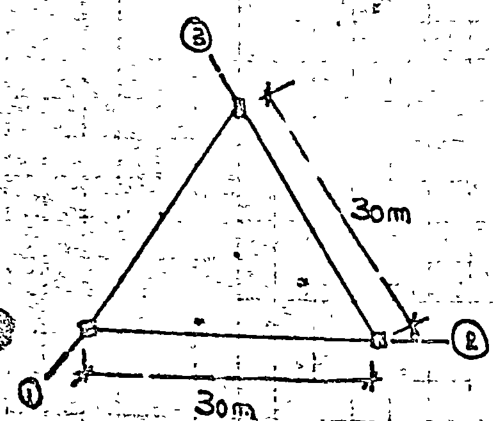
②



$k_1 = k_2 = 70$ ton/cm

$k_3 = 200$ Ton/cm

③



$k_1 = k_2 = k_3 = 100$ ton/cm

$$\Delta_i = V\left\{ \frac{\cos\theta_i \cos\beta}{K_{xx}} + \frac{\operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\beta}{K_{yy}} \right\}$$

Sea δ_i la cortante del marco $\boxed{i}$

$$\delta_i = k_i \cdot \Delta_i$$

obtengamos el Δ_i máximo

$$\frac{d\Delta_i}{d\beta} = V\left\{ -\frac{\operatorname{sen}\beta \cos\theta_i}{K_{xx}} + \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\theta_i}{K_{yy}} \right\} = 0$$

$$\boxed{\tan\beta = \tan\theta_i \left(\frac{K_{xx}}{K_{yy}} \right)}$$

Si: $\theta_i = 0$, $\beta = 0$. $\frac{K_{xx}}{K_{yy}} = \alpha$

$\theta_i = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \quad . \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2\tan^2\theta_i}} \quad . \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\alpha\tan\theta_i}{\sqrt{1+\alpha^2\tan^2\theta_i}}$$

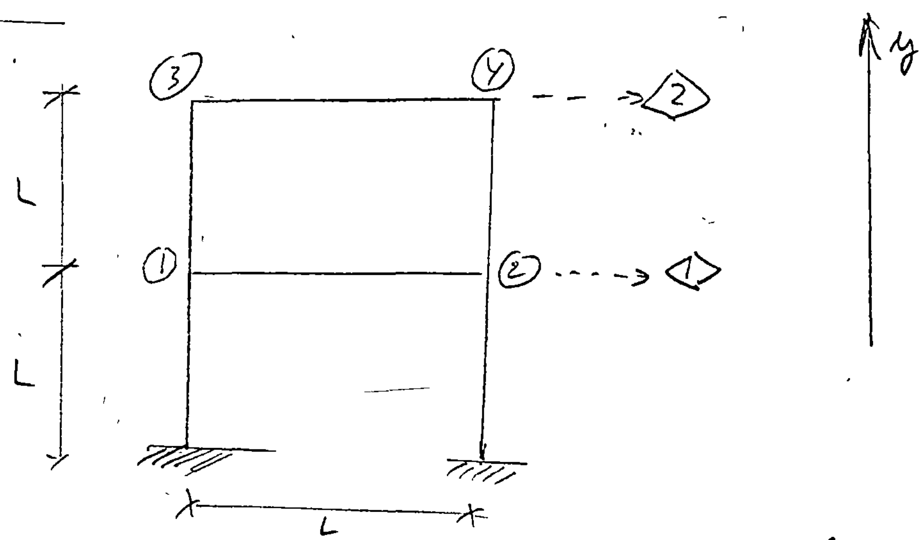
$$\Delta_{i\,(max)} = \frac{V}{K_{xx}}\left\{ \frac{\cos\theta_i + \alpha^2 \operatorname{sen}\theta_i \cdot \tan\theta_i}{\sqrt{1+\alpha^2\tan^2\theta_i}} \right\}$$

Si: $\theta_i = 0$; $\Delta_i = \frac{V}{K_{xx}}$, $\delta_i = \frac{V}{K_{xx}} \cdot k_i$

$\theta_i = 90^\circ$, $\Delta_i = \frac{V}{K_{yy}}$, $\delta_i = \frac{V}{K_{yy}} \cdot k_i$

Marcos en los que se considera el acortamiento y alargamiento de columnas

Ejemplo:

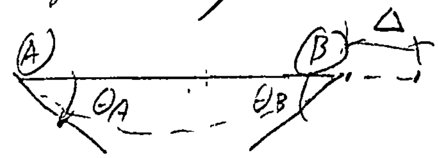


Por facilidad supongamos todas las barras de igual sección ($I = cte$; $A = cte.$)

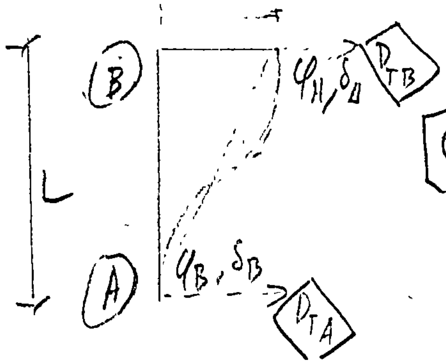
$$[d] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{giros} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Despl. horizontales (grados de libertad)} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Desplazamientos verticales para cada nodo.} \end{array}$$

$+\uparrow$

Para las columnas se tendrán 3 grados de libertad (θ_A, θ_B, Δ = alargamiento)



La Deformación $[e_i] = \begin{bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\\ \Delta\end{bmatrix}$ de una columna será función de los giros y desplazamientos verticales de los nudos extremos y de los desplazamientos transversales de los mismos (ver pág. 106)



$$[e_i] = \begin{bmatrix}\theta_{A_i}\\ \theta_{B_i}\\ \Delta_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & +1/L & -1/L & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1/L & +1/L & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_A\\ \varphi_B\\ D_{TA}\\ D_{TB}\\ \delta_A\\ \delta_B\end{bmatrix}$$

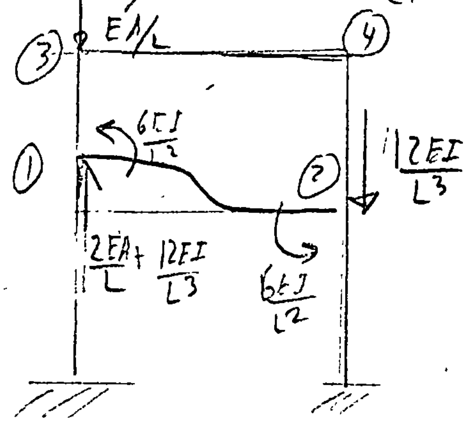
La matriz $[k_i]$ de las columnas será:

$$[k_i] = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} & 0\\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0\\ \hline 0 & 0 & \frac{EA}{L}\end{array}\right]$$

ya que: $[p_i] = \begin{bmatrix}M_{A_i}\\ M_{B_i}\\ \hline N_i\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}\}\ \text{Momentos flex.}\\ \}\ \text{Fza. normal}\end{matrix}$

(ver pág. 114)

Para la obtención directa de $[K]$ considerar la siguiente configuración (por ejemplo para δ_1)



etc.

Para nuestro ejemplo:

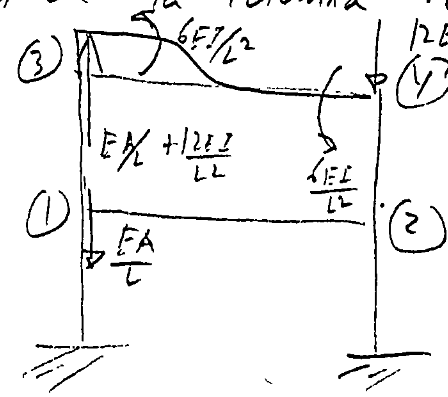
$$[K] = \begin{array}{c|cccc|cc|cccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & D_1 & D_2 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\
\hline
M_1 & 12a & 2a & 2a & 0 & 0 & +\frac{6a}{L} & +\frac{6a}{L} & -\frac{6a}{L} & 0 & 0 \\
M_2 & 2a & 12 & 0 & 2a & 0 & +\frac{6a}{L} & +\frac{6a}{L} & -\frac{6a}{L} & 0 & 0 \\
M_3 & 2a & 0 & 8a & 2a & -\frac{6a}{L} & +\frac{6a}{L} & 0 & 0 & +\frac{6a}{L} & -\frac{6a}{L} \\
M_4 & 0 & 2a & 2a & 8a & -\frac{6a}{L} & +\frac{6a}{L} & 0 & 0 & +\frac{6a}{L} & -\frac{6a}{L} \\
\hline
\delta'_1 & & & & & \frac{48a}{L^2} & -\frac{24a}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\delta'_2 & & & & & -\frac{24a}{L^2} & \frac{24a}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
F_{1y} & & & & & 0 & 0 & \frac{12a}{L^2}+b & -\frac{12a}{L^2} & -b & 0 \\
F_{2y} & & \text{Simétrica} & & & 0 & 0 & -\frac{12a}{L^2} & \frac{12a}{L^2}+2b & 0 & -b \\
F_{3y} & & & & & 0 & 0 & -b & 0 & \frac{12a}{L^2}+b & -\frac{12a}{L^2} \\
F_{4y} & & & & & 0 & 0 & 0 & -b & -\frac{12a}{L^2} & \frac{12a}{L^2}+b
\end{array}$$

Fzas. verticales en los nudos $\{F_{1y}, F_{2y}, F_{3y}, F_{4y}\}$

donde: $\begin{cases} a = EI/L \\ b = EA/L \end{cases}$

(Ver ejemplo págs. 107 a 109)

Obtención de la columna 11ª de $[K]$ $(\delta_3 = 1)$

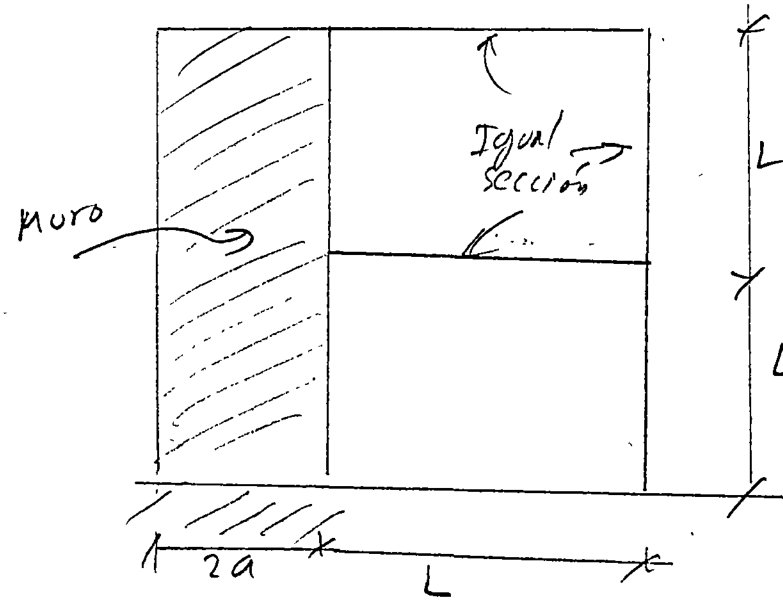


etc.

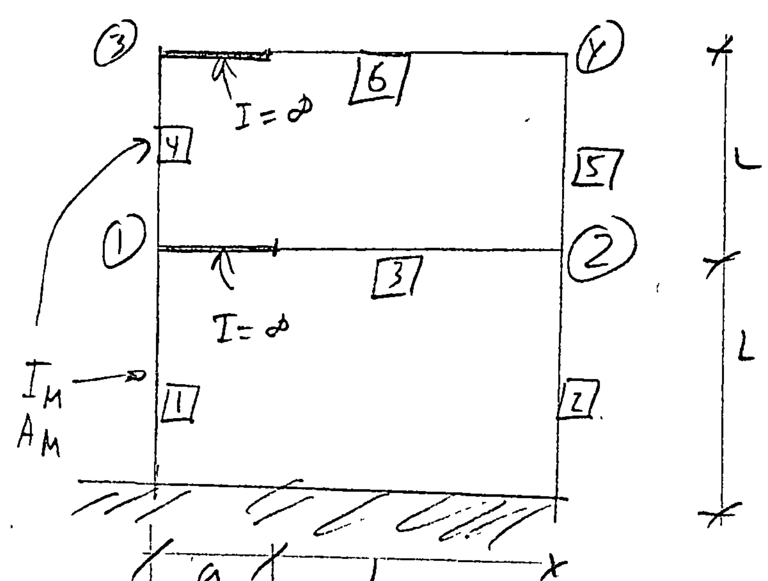
<u>NOTA</u>: El acortamiento y alargamiento de columnas sólo se considera cuando el marco es muy esbelto.

Marcos con muros:

Ejemplo:



La estructura por resolver será:



Será indispensable considerar acortamiento de columnas (ver pags. 126 a 128)

Al muro (barras $\boxed{1}$ y $\boxed{4}$) se le modifican los valores de las rigideces en la siguiente forma (para considerar deformaciones por cortante).

$$\frac{4EI_M}{L} \Rightarrow \frac{4EI_M(1+c)}{L(1+4c)}$$

$$\frac{2EI_M}{L} \Rightarrow \frac{2EI_M(1-2c)}{L(1+4c)}$$

$$\frac{6EI_M}{L^2} \Rightarrow \frac{6EI_M}{L^2(1+4c)}$$

$$\frac{12EI_M}{L^3} \Rightarrow \frac{12EI_M}{L^3(1+4c)}$$

donde:

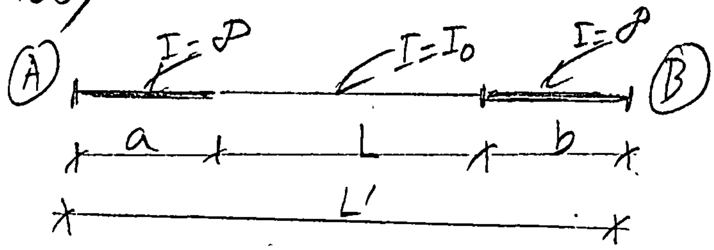
$$c = 6k_f(1+\nu)\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

ν = Módulo de Poisson

k_f = factor de forma del cortante (1.2 para rectangular)

$r = \sqrt{I_M/A_M}$

Para las Trabes $\boxed{3}$ y $\boxed{6}$ (con un Tramo infinito) se usará la siguiente fórmula para r_{AA}, r_{BB}, $t_{BA} r_{BB} = t_{AB} r_{AA}$ (Ver pág. 106)



$$r_{AA} = \frac{4EI_0}{L'}\left\{\frac{L'}{L}\left(1+3\alpha+3\alpha^2\right)\right\}$$

$$r_{BB} = \frac{4EI_0}{L'}\left\{\frac{L'}{L}\left(1+3\beta+3\beta^2\right)\right\}$$

$$t_{AB} r_{AA} = t_{BA} r_{AA} = \frac{2EI_0}{L'}\left\{\frac{L'}{L}\left(1+3\alpha+6\alpha\beta+3\beta\right)\right\}$$

donde $\alpha = a/L$; $\beta = b/L$