



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA**

**PRESENTA**

**ARALLELY ALEGRÍA DÍAZ**

**TUTOR:**

**DR. RAMÓN DOMÍNGUEZ MORA**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente:

Dr. Oscar A. Fuentes Mariles

Secretario:

Dr. Jesús Gracia Sánchez

Vocal:

Dr. Ramón Domínguez Mora

1er. Suplente:

Dr. Carlos A. Escalante Sandoval

2do. Suplente:

M.I Víctor Franco

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. Ramón Domínguez Mora

## *AGRADECIMIENTOS*

### *A DIOS*

*Por darme la vida y las fuerzas para superar la adversidad y lograr una meta más,  
gracias porque todo lo que tengo lo proveíste Tú.*

### *A MIS PADRES*

*Por su amor, paciencia y apoyo incondicional, porque sin ellos esto no hubiese sido posible.  
Gracias por estar conmigo en todo momento, cuando todo estaba bien, pero sobre todo cuando las cosas no  
salían como quería, porque cuando más los necesitaba tenía la seguridad de que ustedes estaban allí  
Gracias. Los Amo.*

### *A MIS HERMANOS*

*Nery, Aricela, Lilitiana, Luis Alberto y Romario Alexis  
Gracias por creer y confiar en mí. Hoy quiero decirles que ustedes fueron el motivo que hizo posible llegar  
a la meta.*

### *A MI PRINCESITA*

*Gracias porque tu existencia ha llenado mi vida de alegría. Paolita Te Amo.*

### *FAMILIARES Y AMIGOS*

*Agradezco a Dios por darme la oportunidad de tener una maravillosa familia y por conocer a excelentes  
personas que han estado conmigo en el trayecto de mi vida.*

### *A MIS MAESTROS*

*Gracias, porque sus conocimientos han contribuido a mi formación profesional. De forma especial  
agradezco al Dr. Ramón Domínguez Mora por su apoyo incondicional, paciencia y dedicación que  
hicieron posible alcanzar el objetivo. Al Dr. Carlos Escalante Sandoval, M.I Victor Franco, Dr. Oscar A.  
Fuentes Mariles y Dr. Jesús Gracia Sánchez por su valiosa aportación a este trabajo y por compartir sus  
conocimientos en cada clase impartida.*

*A la Dra. Delva Guichard Romero, al M.I. Juan José Muciño Porras y a todos los Ingenieros que me  
alentaron para seguir esta trayectoria.*

*Agradezco al Instituto de Ingeniería, UNAM por permitirme estar en sus instalaciones, y prepararme  
para el campo laboral. A todas las personas que laboran en este instituto con las que compartí  
momentos especiales que siempre tendré presente.*

*A Dios, a mis Padres, familiares, amigos, maestros y compañeros que de diversas maneras contribuyeron  
a la realización de este proyecto. Gracias. . .*

## CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN .....	9
1.1 Objetivos .....	10
1.2 Planteamiento del problema.....	10
1.3 Estado del arte .....	11
1.4 Descripción de capítulos .....	13
2 ANTECEDENTES .....	15
2.1 Características generales del sistema hidroeléctrico Grijalva.....	15
2.1.1 Presa La Angostura.....	16
2.1.1 Presa Chicoasén .....	17
2.1.1 Presa Malpaso .....	18
2.1.1 Presa Peñitas .....	19
2.1 Información utilizada.....	20
3 METODOLOGÍA.....	26
3.1 Definiciones.....	26
3.2 Métodos de optimización.....	27
3.2.1 Programación dinámica determinística .....	28
3.2.1.1 Ejemplo: Repartición de un esfuerzo comercial del libro Invitación a la Investigación de operaciones.....	31
3.2.2 Programación dinámica estocástica.....	38
3.2.2.1 Aplicación de programación dinámica estocástica en una presa .....	46
3.3 Programas de optimación y simulación .....	106
3.4 Curva guía.....	107
4 APLICACIONES .....	108
4.1 Función objetivo.....	109
4.2 Algoritmo de optimación para tomar en cuenta la curva guía .....	110
4.3 Política de operación.....	110
4.4 Optimización y simulación de las curvas guía .....	113
5 RESULTADOS .....	129
6 CONCLUSIONES .....	139
7 REFERENCIAS.....	141

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Sistema de presas del río Grijalva (Chiapas y Tabasco).....	16
Figura 2.2 Perfil del sistema hidroeléctrico del río Grijalva (Boletín de presas, Hernández B.H) .....	17
Figura 3.1 Procedimiento de programación dinámica .....	31
Figura 3.2 Curva de inversión-beneficio para cada zona .....	34
Figura 3.3 Combinación de soluciones para $A=10$ .....	35
Figura 3.4 Variables discretizadas en un embalse .....	41
Figura 3.5 Condiciones a evitar en una presa .....	43
Figura 3.6 Condiciones de carga en una presa .....	44
Figura 3.7 Procedimiento de programación dinámica estocástica .....	45
Figura 3.8 Estados de la presa .....	48
Figura 4.1 Curva guía de la política POL XIV para las presas La Angostura y Malpaso .....	117
Figura 4.2 Registro histórico de niveles. La Angostura. Análisis y tendencias del SHG. Julio 2009 .....	118
Figura 4.3 Registro histórico de niveles. Malpaso. Análisis y tendencias del SHG. Julio 2009 .....	118
Figura 4.4 Elevaciones simuladas con el registro histórico y política XIV. Presa Angostura .....	119
Figura 4.5 Elevaciones simuladas con el registro histórico y política XIV. Presa Malpaso .....	120
Figura 4.6 Curva guía de la política POL 1 para las presas La Angostura y Malpaso .....	126
Figura 4.7 Curva guía de la política POL 2 para las presas La Angostura y Malpaso .....	126
Figura 4.8 Curva guía de la política POL 3 para las presas La Angostura y Malpaso .....	127
Figura 4.9 Curvas guía de las políticas POL 2-6 para las presas La Angostura y Malpaso .....	128
Figura 4.10 Curva guía de la política POL 7 para las presas La Angostura y Malpaso .....	129
Figura 5.1 Comparación del volumen total sintético, histórico y ajuste. Serie sintética 1 .....	136
Figura 5.2 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual de la media de las 10 series sintéticas .....	137
Figura 5.3 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual de la Desv. Estándar de las 10 series sintéticas .....	137
Figura 5.4 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del Coef. Asimetría de las 10 series sintéticas .....	137
Figura 5.5 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del Coef. Variación de las 10 series sintéticas .....	138
Figura 5.6 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del Coef. Autocorrelación de las 10 series sintéticas .....	138

Figura 5.7 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del Coef. Correlación cruzada de las 10 series sintéticas .....138

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1 Volúmenes registrados de ingreso quincenal. La Angostura .....	23
Tabla 2.2 Volúmenes registrados de ingreso quincenal. Malpaso .....	25
Tabla 3.1 Inversión-beneficio para cada zona .....	34
Tabla 3.2 Beneficio óptimo de invertir A millones para cada combinación de zona .....	38
Tabla 3.3 Reparticiones óptimas de las inversiones de la sociedad <i>Carta Nueva</i> .....	39
Tabla 3.4 Probabilidades de ingreso a la presa .....	48
Tabla 3.5 Resultado del cálculo de $\emptyset$ .....	53
Tabla 3.6 $B_{ast}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 50 .....	54
Tabla 3.7 $B_{ast}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 50 .....	59
Tabla 3.8 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 50 .....	59
Tabla 3.9 $B_{ast}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 49 .....	64
Tabla 3.10 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 49 .....	65
Tabla 3.11 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 49 .....	69
Tabla 3.12 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 48 .....	74
Tabla 3.13 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 48 .....	78
Tabla 3.14 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 47 .....	83
Tabla 3.15 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 47 .....	88
Tabla 3.16 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 46 .....	92
Tabla 3.17 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 46 .....	97
Tabla 3.18 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 45 .....	101
Tabla 3.19 $B_{ast} - B_{ast\text{ mínimo}}$ en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 45 .....	106
Tabla 3.20 Resumen del beneficio máximo dado una extracción óptima para los 6 años calculados	107
Tabla 3.21 Política de operación óptima de la presa .....	108
Tabla 4.1 Política de operación para la etapa 6 enero-mayo. Cada unidad corresponde a una extracción de 60 millones de $m^3$ por quincena .....	114
Tabla 4.2 Resumen de la simulación de políticas de operación óptima del sistema de presas del río Grijalva .....	116
Tabla 4.3 Volumen histórico de ingreso por cuenca propia acumulado desde la segunda quincena de julio hasta la segunda quincena de octubre. La Angostura .....	121
Tabla 4.4 Volumen histórico de ingreso por cuenca propia acumulado desde la segunda quincena de agosto hasta la primera quincena de noviembre. Malpaso .....	122

Tabla 4.5 Incremento de volumen de la curva guía POL XIV para ambas presas .....	124
Tabla 4.6 Comparación entre el incremento del volumen en la curva guía de la pol XIV y los estadísticos del registro histórico. La Angostura .....	125
Tabla 4.7 Comparación entre el incremento del volumen en la curva guía de la POL XIV y los estadísticos del registro histórico. Malpaso .....	125
Tabla 5.1 Curva guía de la política POL 7 en volumen, estados y niveles .....	131
Tabla 5.2 Política de operación para la etapa 1: Noviembre-Diciembre .....	132
Tabla 5.3 Política de operación para la etapa 2: Octubre .....	133
Tabla 5.4 Política de operación para la etapa 3: Septiembre .....	133
Tabla 5.5 Política de operación para la etapa 4: Agosto .....	134
Tabla 5.6 Política de operación para la etapa 5: Junio y Julio .....	134
Tabla 5.7 Política de operación para la etapa 6: Enero a mayo .....	135
Tabla 5.8 Resumen de la simulación conjunta con 10 registros sintéticos de 100 años con la política POL 7 .....	139
Tabla 5.9 Frecuencia de derrames, déficit y rebase de la curva guía. Política 7.....	140



## 1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas de aprovechamiento hidráulico de México y del mundo tienden a ser más eficientes en cuanto a su operación, esto se refleja en el esfuerzo que hacen las dependencias encargadas de la administración y conservación del agua al destinar recursos económicos para la investigación y estudio de políticas de extracción, para maximizar tanto el aprovechamiento del agua como el beneficio económico que se obtenga (Rebolledo, 1990).

El objetivo del sistema de presas del Grijalva es generar energía eléctrica; en conjunto con el del Balsas representan más del 50% de la capacidad hidroeléctrica total en operación de todo el país (Arganis, 2004). La optimización vía programación dinámica estocástica ha sido una herramienta útil y viable para alcanzar una función objetivo sujeta a restricciones a pesar de lo complejo que esta resulte porque debe cumplir los siguientes objetivos:

- Maximizar la energía media anual producida.
- Mantener los niveles de almacenamiento por debajo de la curva de seguridad llamada curva guía.
- Reducir la probabilidad de derrames por el vertedor, no solo porque significa pérdida de generación de energía, sino porque puede causar inundaciones aguas abajo de la presa.
- Garantizar la entrega de una energía mínima al sistema.
- Dar preferencia a la energía pico.

En este trabajo se presenta una metodología para determinar políticas de operación tomando en cuenta el concepto de curva guía (la cual establece para cada mes niveles de almacenamiento que debe tener el vaso de una presa, que no deben ser excedidos con el fin de evitar daños aguas abajo), para ello se ensayaron diferentes curvas guías con el que se obtuvieron políticas de operación, se comparan los resultados obtenidos y se eligió la política óptima para el sistema de presas del río Grijalva.



Las políticas de operación se determinaron en quincenas, sin embargo, en el modelo de simulación utilizado se pueden usar intervalos de tiempo menores. Con cada política se simuló el funcionamiento del vaso para conocer la energía esperada, el almacenamiento mínimo, y si presenta algún derrame o déficit en el sistema de presas, a fin de comparar los resultados y encontrar la política óptima. Se tomó como base inicial la curva guía que establece la Comisión Nacional del Agua; de manera adicional, se consideraron los estadísticos del comportamiento histórico de los volúmenes de ingreso por cuenca propia con objeto de disminuir la subjetividad para proponer las elevaciones de dicha curva guía.

## 1.1 Objetivos

### Objetivo general

- Encontrar la política de operación óptima del sistema de presas del río Grijalva a través del análisis de los efectos de una curva guía.

### Objetivos particulares

- Introducir al lector a la Programación Dinámica
- Proponer diferentes curvas guía y analizar los efectos que se producen en la obtención de políticas de operación.
- Maximizar la generación eléctrica del sistema de presas manteniendo los niveles de seguridad para mitigar inundaciones aguas abajo.

## 1.2 Planteamiento del problema

La Comisión Federal de Electricidad (CFE) sigue la política de operación óptima en el sistema de presas del río Grijalva, que la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA) propone mediante el concepto de curva guía; para definir esta curva, en este trabajo se ensayaron diferentes curvas guía para encontrar aquella que permita la mayor generación de energía eléctrica pero que brinde una mayor seguridad aguas abajo durante su operación.



### 1.3 Estado del arte

El problema de determinar la política de operación óptima a largo plazo en un sistema de presas ha sido el tema de numerosas investigaciones y publicaciones en los últimos sesenta años.

A continuación se presentan trabajos de investigación y publicaciones referentes al tema, realizados en México y en el extranjero desde el año 1990 al presente.

#### Estudios realizados en México

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México se encuentran los trabajos de Rebolledo S. (1990) que analiza la “Operación óptima de un sistema hidráulico formado por dos presas en paralelo”; Avilés H. R. (1994) con la “Optimación en línea de presas hidroeléctricas”; Contreras C. C. (1999) con la “Operación óptima de sistema de presas en cascada”; Arganis J. M. (2004) con la “Operación óptima de un sistema de presas en cascada para generación hidroeléctrica tomando en cuenta condiciones reales de operación y el uso de muestras sintéticas para el pronóstico”.

En el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua se encuentran los trabajos de Sánchez C. y Wagner G., en el 2003 presentan “Determinación de reglas de operación óptima para dos embalses, utilizando un algoritmo genético” y en el 2004 “Modelo numérico para la operación óptima de un hidrosistema de aguas superficiales”.

En particular la operación óptima del sistema de presas del río Grijalva ha sido objeto de estudio para el Instituto de Ingeniería de la UNAM, en dicho instituto se encuentran los trabajos de Domínguez et al (1993) en el que se planteó el problema de determinar políticas de operación mensual, que hicieran máxima a una función objetivo que toma en cuenta la generación de energía a largo plazo y que procura evitar derrames y déficit; Domínguez et al (1998) complementa el estudio de 1993, define políticas de extracción trabajando el sistema de presas La Angostura y Malpaso, en función del almacenamiento final del mes previo, en ambas presas; Domínguez et al (2000) hace una revisión del funcionamiento y operación de las presas del río Grijalva; Domínguez et al (2001) adapta el modelo de optimación de políticas de extracciones del sistema de presas, considerando el valor relativo de la energía “de pico” respecto a la “de base”, incorporando restricciones de energía mínima propuesta



por CFE; Domínguez et al (2006) generan nuevas políticas de operación, que toma en cuenta los eventos hidrológicos ocurridos en el 2005.

### **Estudios realizados en el extranjero**

William S. Butcher de la Universidad de Texas en Austin (1971) publica “Stochastic dynamic programming for optimum reservoir operation” en el que muestra que para un embalse que tiene diferentes usos se puede encontrar una política óptima con programación dinámica estocástica, dicha política se indica en términos del estado del embalse (volumen de almacenamiento) en el mes anterior, tal política se podría aplicar en la operación a tiempo real sobre una base de registro mensual.

Ferhat T. Ürkman of Dokuz Eylül University Izmir, Turkey (1991) publica “Optimization of large scale hydroelectric generating systems” en el que presenta el sistema de la agregación-optimización-desagregación para modelar sistemas hidroeléctricos interconectados.

Frederick G. A. (1996) presenta “A study of optimization of reservoir operations of the Colorado River” que hace una investigación exhaustiva de si los modelos de optimización se han utilizado para la toma de decisiones en cuanto a la operación del río Colorado, crea un modelo de optimización mensual que incluye las políticas de operación y por ultimo utiliza el modelo para determinar la flexibilidad operacional para aumentar la generación eléctrica.

Watkins D. W. Jr. (1997), “A scenario-based stochastic programming model for water supplies from the Highland lakes” muestra un modelo de programación dinámica estocástica en un escenario-base para la gerencia de los lagos Highland por la autoridad del bajo Río Colorado en Texas. El modelo considera 2 objetivos: Maximiza el rendimiento esperado de la venta del agua mientras que el abastecimiento de agua se mantenga firme y Maximizar los beneficios recreacionales.

Sánchez C. E. y Andreu A. J (2002) con el proyecto “Expansión óptima de sistemas de recursos hídricos superficiales: Aplicación a un sistema real en España” que presenta dos sistemas de recursos hídricos superficiales para ser ampliados de manera óptima en su infraestructura hidráulica, emplea como metodología al Algoritmo genético.



Ailing Li (2004) publica el trabajo “A study on the large-scale system decomposition-coordination method used in optimal operation of a hydroelectric” en el que presenta el método descomposición-coordinación que simplifica la dimensión del problema, aplicando esta teoría en los sistemas hidroeléctricos de múltiples embalses en serie, con un ejemplo práctico de dos depósitos hidroeléctricos en serie del río Amarillo en China en el que los resultados son satisfactorios y eficaces para la operación en tiempo real.

Uhr Markus (2006) presenta “Optimal operation of a hydroelectric power system subject to stochastic inflows and load” que usa la programación estocástica para encontrar políticas óptimas en términos de costo mínimo de producción, en el modelo se incluyen las afluencias del agua y la carga de la energía, los problemas son aproximados empleando el método de la Aproximación media de la muestra (SAA, Sample Average Approximation) y se solucionan usando un procedimiento de descomposición jerarquizado.

Long Le Ngo (2006) con el proyecto “Optimising reservoir operation” contribuye en el desarrollo de un marco en el cual el modelo de simulación se junta con un método numérico en la búsqueda para optimizar las variables de decisión definidas para la operación del embalse. Presenta el sistema de modelado de MIKE 11 que simula el flujo en el sistema de ríos incluyendo el embalse, usa el software AUTOCAL para la optimización. Realiza la aplicación en el embalse Hoa Bin en la cuenca del río Rojo en Vietnam.

Abolghasemi R. H. (2008) con el proyecto “Optimization of the Kootenay River hydroelectric system with a linear programming model” que optimiza la operación del sistema de Kootenay (lago natural mas grande de la Columbia Británica), con un modelo de programación lineal e incluye cinco plantas hidroeléctricas y un canal.

#### **1.4 Descripción de capítulos**

El trabajo está integrado por cinco capítulos incluyendo éste, los cuales se describen a continuación:

El capítulo 1 presenta los objetivos que se pretenden alcanzar al final de la elaboración del proyecto, se plantea la problemática a seguir y se presentan de forma resumida estudios realizados en el país y en el extranjero referente al tema en estudio.



Las características generales del sistema de presas del río Grijalva se presentan de manera individual en el capítulo 2, donde además se describe la recopilación de la información utilizada para obtener la política de operación óptima para el sistema de presas en estudio.

En el capítulo 3 se presenta la metodología desarrollada. Primero se definen los conceptos utilizados, enseguida se describen los métodos de optimización y se presentan los ejemplos correspondientes. También se presentan los programas de optimización y simulación, se enfatiza el concepto de curva guía y la importancia de tomarla en cuenta en la obtención de la política de operación óptima.

La aplicación de la metodología al Sistema de presas del río Grijalva se encuentra en el capítulo 4. Se define la función objetivo y se presenta el algoritmo de optimización que toma en cuenta la curva guía, también se muestran las diferentes curvas guía ensayadas y el resumen de resultados obtenidos en la simulación.

En el capítulo 5 se presenta a detalle la política óptima encontrada en el capítulo 4, se realiza la simulación conjunta de las presas con la información registrada y se compara con las obtenidas con una serie sintética de mil años. Las conclusiones y recomendaciones se presentan en el capítulo 6.

Al final de este trabajo se proporcionan las referencias y páginas electrónicas que fueron consultadas durante su desarrollo.



## 2 ANTECEDENTES

### 2.1 Características generales del sistema hidroeléctrico Grijalva

El mayor desarrollo hidroeléctrico del país, con una capacidad de 4800 MW, se encuentra en la cuenca del río Grijalva. La Cuenca del río Grijalva se ubica entre los meridianos 91°30' y 94°30' de longitud Oeste y los paralelos 14°30' y 19° de latitud Norte. En la Figura 2.1 se presenta un esquema visto en planta de la disposición de las presas a lo largo del Río Grijalva.



Figura 2.1 Sistema de presas del río Grijalva (Chiapas y Tabasco)

El sistema hidroeléctrico Grijalva (figura 2.2) opera en cascada y está formada por Angostura (Belisario Domínguez), Chicoasén (Manuel Moreno Torres), Malpaso (Netzahualcóyotl) y Peñitas (Ángel Albino Corzo).

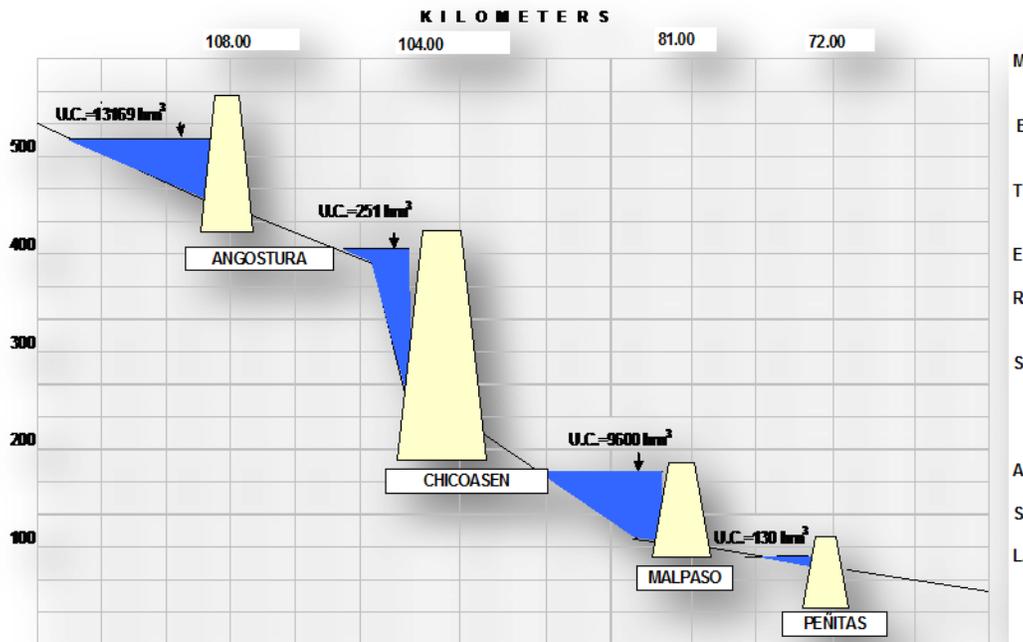


Figura 2.2 Perfil del sistema hidroeléctrico del río Grijalva (Boletín de presas, Hernández B.H)

### 2.1.1 Presa La Angostura

La central hidroeléctrica Dr. Belisario Domínguez, conocida como “La Angostura”, fue el segundo aprovechamiento construido sobre el río Grijalva entre los años 1969-1974 por CFE. Se ubica en el alto Grijalva, en el municipio de Venustiano Carranza, a 55 km al sureste de la ciudad de Tuxtla Gutiérrez.

El área de la cuenca es de 18099 km<sup>2</sup>, el gasto medio anual de 318 m<sup>3</sup>/s que corresponde a un volumen medio anual de 10028 millones de m<sup>3</sup>. La precipitación promedio anual es de 1379 mm.

El embalse tiene una capacidad total de almacenamiento de 19736 millones de m<sup>3</sup>, con capacidad útil de 13169 millones de m<sup>3</sup>, siendo la de mayor capacidad del país.

El nivel de aguas máximas extraordinarias (NAME) está a 539.50 msnm, el nivel de aguas máximas ordinario (NAMO) a 533 msnm y el nivel de aguas mínimo de operación (NAMINO) a 500 msnm. El labio superior de la compuerta se encuentra a 539.60 msnm.



La cortina tiene una altura de 146.70 m, medida desde el punto más bajo de su cimentación. La corona está a 543 msnm, el ancho es de 10 m y la longitud de 323.50 m. Tiene un bordo libre de 3.50 m. El volumen total de la cortina es de 4.2 millones de m<sup>3</sup>.

Para descargar los volúmenes excedentes de los escurrimientos extraordinarios, se cuenta con dos vertedores de demasías, cuya cresta está a 519.60 msnm, la longitud total de la cresta es de 50 m, con capacidad máxima de descarga de 6900 m<sup>3</sup>/s.

La presa cuenta con dos obras de toma, cada una dispone de una estructura de rejillas de 12 x 27 m, capta el agua del embalse y lo conduce a una turbina hidráulica mediante un túnel de 8.7 de diámetro y 320 m de longitud, en promedio. Cada túnel se controla con dos compuertas rodantes.

Cuenta con dos casas de máquinas subterráneas, la primera tiene una longitud de 114 m y 90 m la segunda, ambas con un ancho de 19 m y 46 m de alto. El sistema cuenta con 5 turbinas hidráulicas tipo Francis con potencia de 184000 kW cada una, con una carga de diseño de 94 m. La central hidroeléctrica tiene una capacidad efectiva instalada de generación de 900 MW; la generación neta de diseño es de 1375.32 Gwh.

### **2.1.2 Presa Chicoasén**

La central hidroeléctrica Ing. Manuel Moreno Torres, conocida como Chicoasén, fue el tercer aprovechamiento construido sobre el río Grijalva entre los años 1974-1980. Se ubica aguas abajo de la presa La Angostura, a una distancia de 104 km entre ejes de cortina, a 21 km al norte de Tuxtla Gutiérrez, en el municipio de Chicoasén, Chiapas.

El área de la cuenca es 7940 km<sup>2</sup>, el gasto medio anual es de 377 m<sup>3</sup>/s, aproximadamente. El embalse tiene una capacidad total de 1443 millones de m<sup>3</sup>. Su elevación al NAME se encuentra a 395 msnm, la elevación al NAMO es de 392.50 msnm y el NAMINO a 380 msnm. El labio superior de la compuerta se encuentra a 394 msnm y la cresta del vertedor a 373 msnm con una longitud de 76 m y capacidad máxima de descarga de 15000 m<sup>3</sup>/s.



La cortina es de materiales graduados, tiene 200 m de longitud y una altura máxima de 262 m por la que se considera la más alta del país. El volumen total de la cortina es de 14.5 millones de m<sup>3</sup>. El núcleo central es simétrico, tiene 110 m de ancho en la base y 15 m en la corona. La elevación de la corona está a 402 msnm y tiene una longitud de 584m. El bordo libre es de 10 m.

La obra de toma se encuentra 182 m aguas arriba de la casa de máquinas y a 112 m del eje de la cortina, tiene un canal de acceso y ocho tomas independientes con un gasto máximo por toma de 189 m<sup>3</sup>/s por toma.

La casa de máquinas es subterránea, tiene 199 m de longitud, 20.50 m de ancho y 43 m de altura. Para su acceso se cuenta con un túnel de 800 m de longitud aproximadamente y sección portal de 8.45 x 9.40 m. La obra civil se construyó en dos etapas para poder alojar hasta ocho grupos turbina generador, en la primera se instalaron 5 turbogeneradoras tipo Francis de 300 MW cada una, y en la segunda se instalaron 3 más, de igual capacidad.

Actualmente, Chicoasén tiene una capacidad efectiva instalada de generación de 2400 MW, la generación neta de diseño es de 3324.87 Gwh, convirtiéndose en la más eficiente en generación eléctrica del país.

### **2.1.3 Presa Malpaso**

La central hidroeléctrica Netzahualcóyotl, conocida como Malpaso, fue la primera en construirse del sistema de presas del Grijalva, entre los años 1959-1964. Se localiza en el municipio de Tecpatán, Chiapas, a 125 km del suroeste de la ciudad de Villahermosa, Tabasco. La distancia horizontal entre ejes de la cortina de Chicoasén y de Malpaso es aproximadamente de 81 km.

El escurrimiento medio anual que se tiene hasta la presa Malpaso es aproximadamente de 547 m<sup>3</sup>/s. El NAME se encuentra a 188 msnm, el NAMO a 182.50 msnm y el NAMINO a 144 msnm. El labio superior de la compuerta está a 183.60 msnm. El embalse tiene una capacidad total de 13000 millones de m<sup>3</sup> hasta la elevación del NAME y capacidad útil de 9600 millones de m<sup>3</sup>.



A partir del desplante la cortina tiene una altura máxima de 138 m; la longitud por la corona es de 478 m. En la base la cortina tiene un ancho de 485 m, y sobre la corona es de 10 m. La elevación de la corona está a 192 msnm y tiene un bordo libre de 5.40 m.

La obra de toma está ubicada en el margen derecho, formada por seis tuberías a presión, de 7 m de diámetro, cuenta con rejillas de protección así como compuertas de emergencia e inspección.

La casa de máquinas es subterránea, ubicada en el margen derecho de la cortina, totalmente revestida de concreto; tiene 20 m de ancho, 161 m de largo y 30 m de alto. Se construyó en 2 etapas para albergar seis unidades turbo generadores tipo Francis, en la primera se instalaron 4 y 2 en la segunda, con potencia nominal de 180 MW cada una. Para su ventilación se construyeron seis lumbreras aguas arriba de esta.

Cuenta con un vertedor de servicio y otro de emergencia, el primero es una estructura de concreto, formada por un cimacio vertedor, con tres compuertas radiales de 15 x 15 m. La longitud de la cresta es de 45m, está a 76.50 msnm, tiene una capacidad máxima de descarga de 11100 m<sup>3</sup>/s. La estructura fue diseñada para regularizar la avenida máxima ordinaria, estimada en 8500 m<sup>3</sup>/s, a un gasto de 3500 m<sup>3</sup>/s. El de emergencia se encuentra inmediato al vertedor de servicio, solo funciona cuando se presentan avenidas superiores a la máxima ordinaria, la longitud de cresta es de 10 m y la capacidad máxima de descarga es de 10650 m<sup>3</sup>/s.

Actualmente, tiene una capacidad efectiva instalada de generación de 1080 MW, y generación neta de diseño de 2367.74 Gwh.

#### **2.1.4 Presa Peñitas**

La central hidroeléctrica Gral. Ángel Albino Corzo, conocida como Peñitas, fue la última en construirse entre los años 1979-1987. Se ubica a 10 km al noroeste de la comunidad de Ostuacán, región norte del estado de Chiapas a escasos 5 km de su frontera con Tabasco. Se encuentra aguas abajo de la presa Malpaso, sobre la distancia entre ejes de cortina es de 72 km aproximadamente.



El área de la cuenca es de 1358 km<sup>2</sup>, la presa es la más pequeña en longitud y en profundidad. El NAME se encuentra a 95.50 msnm, el NAMO a 87.40 msnm, el NAMINO a 85 msnm. El labio superior de la compuerta está a 91.13 msnm.

El aprovechamiento tiene una capacidad total aproximada de 1630 millones de m<sup>3</sup>, la capacidad útil de generación es alrededor de 130 millones de m<sup>3</sup> y su capacidad para control de avenidas es 961 millones de m<sup>3</sup>. La cortina tiene una altura máxima de 58 m. El NAME se encuentra a 95.50 msnm, el NAMO a 87.40 msnm y el NAMINO a 85 msnm. La cresta del vertedor está a 76.50 msnm.

El aprovechamiento tiene una capacidad efectiva instalada de generación de 420 MW, la generación neta de diseño es de 1219.04 Gwh.

## 2.2 Información utilizada

La CH La Angostura y la CH Malpaso tienen una capacidad de almacenamiento grande en comparación con la CH Chicoasén y la CH Peñitas, por ello se propuso trabajar con un sistema equivalente formado por dos presas (La Angostura y Malpaso) considerando las cargas de las presas restantes. La forma en que opera Chicoasén y Peñitas consiste en extraer lo que es descargado por La Angostura y Malpaso más los escurrimientos producidos en sus cuencas, procurando mantener ciertos niveles que dependen de la época del año.

La información utilizada fueron los volúmenes registrados de ingreso quincenal de 1959-2008 para cada presa, tal como se muestra en las tablas 2.1 y 2.2; la información fue recopilada de la manera siguiente:

- Hasta el año 2001 se contaba con los ingresos mensuales y quincenales por cuenca propia obtenidos de registros históricos diarios de 1959-1999, excepto los años 1975 y 1976.
- Al registro con el que se contaba al 2001 se agregaron los datos de 1975 y 1976 dividiendo el volumen mensual entre dos, de esta manera el periodo 1959-1999 quedó sin huecos.



POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA



- Adicionalmente, se incluyeron los datos de los años 2000-2005 obtenidos por el funcionamiento diario de la presa La Angostura, para la presa Malpaso los datos se obtuvieron del funcionamiento diario mas los escurrimientos por cuenca propia de Chicoasén, todos estos proporcionados por CFE.
- Actualmente, se cuenta con los datos del 2006-2008 procedentes de la operación diaria dados por CFE, lo que representa contar con los volúmenes de ingreso quincenales de 1959-2008.

Tabla 2.1 Volúmenes registrados de ingreso quincenal. La Angostura.

Año/Quincena	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1959	180.9	165.7	132.8	100.7	108.1	106.8	91	103.6	98.6	116.9	181.3	513.8
1960	160.2	144.4	115.1	96.1	90.4	86.9	77.1	83.4	85.4	135.9	542	806
1961	200.4	187.4	163	122	124.3	120.3	118.6	93.7	113.1	110.8	286.5	463.6
1962	180.3	160.4	130.3	96.9	99.8	98.6	99.7	103.6	96.2	105.2	251.4	595.7
1963	156	143.3	118.3	90.2	94.1	90.8	81.3	75.9	85.5	90.4	151.5	242.3
1964	168.5	147.3	113	93.9	88.4	85	74.2	70.1	77	102.5	301.5	462.5
1965	156.9	147.5	117.2	93.7	97.3	90.4	76.6	73.2	78.9	94.9	191.2	578.4
1966	186.4	175	147.4	114.3	120	112.7	123.5	120.3	135	139.3	183.1	743.3
1967	181.3	172.9	140.8	105.8	107.8	103.6	97.6	102.5	78.6	90.7	155.6	318.5
1968	133.5	126.6	103.3	85	81.1	79.7	72.8	65.4	77	173.2	255.4	602.2
1969	160.4	142	113.6	85.7	88	85.9	82.1	76.5	72.6	147.5	165.9	485.6
1970	220.1	202.4	166.9	126.1	127.7	120.2	101.1	92.5	96.9	116.6	174.6	343.2
1971	213	187.8	151.3	118.2	125.2	117.8	108.1	91.5	96.1	121.3	200.2	212.4
1972	176.9	167.8	139.9	114	107.9	105.2	92.9	92.4	119.8	137.2	337.6	528.8
1973	117.2	110.5	92.9	72.3	75.1	71.6	66.6	63	60.4	85.8	190.4	417.3
1974	216.5	216.5	142	142	134	134	105.7	105.7	128.5	128.5	222.5	222.5
1975	80.5	80.5	54.5	54.5	45	45	29	29	65	65	159.5	159.5
1976	167	167	133.5	133.5	134	134	126.5	126.5	154.5	154.5	525	525
1977	148.5	148.8	106.6	54.2	82	76.8	107.9	112.9	114.8	184.1	286.2	443.6
1978	209.2	183.2	79.7	88.8	101.7	98.9	76.7	62.3	201	277.4	310.2	412.4
1979	242.3	190.5	131	107.4	111.7	70.7	93.3	115.9	137	203.7	372.6	458
1980	191.6	156.5	139.3	122.2	109.8	109.8	171.4	131.4	141.6	181.8	204.7	367.2
1981	173.2	139.5	100.6	97.4	125.7	136.7	194	173.4	117.9	143.1	285.7	1150.2
1982	90.1	159.5	150.7	112.5	125	104.2	120.7	94.2	119.8	421.4	503.9	967.3
1983	134.3	150.2	143.2	152.1	137	155.1	97.1	122.6	82.9	118.3	274.6	438.5
1984	129	129.9	114.5	81.2	141.1	102.1	67.3	140.3	211	445	697.1	814.9
1985	168.7	147	123.8	115.4	128.5	126.6	79.3	116.7	150.9	223	376.6	378.2
1986	174.3	162.3	105.6	83.4	99	69.2	78.2	177.7	92.4	279.9	377	499.8
1987	102.3	159.5	104.2	48.4	59.1	31.1	36.2	90.3	160.3	176.2	236.9	394
1988	86.1	112.1	112.9	107.6	40.5	56.7	70.5	128.6	100	101.5	257.9	668.1
1989	123.7	100.9	85	119.1	106	74.5	118.8	86.8	110.6	154.8	204.8	636.2
1990	184.9	174	120.5	112.6	114.8	79.7	86.7	125.2	129.2	149	263.4	488.8
1991	255.7	115	121.1	76.4	98	96.8	96.2	48	94.7	125.4	220.1	463.1
1992	118.5	84.4	110	72.3	69.7	98	74	81.7	18.8	100.1	239.9	559.1
1993	130.4	132.9	53.8	78.6	69.4	90.6	68.9	57.9	86.8	116.4	162.5	551.5
1994	100.2	110.7	114	62.8	144.1	92.6	64.5	68.2	86.2	124.8	217.4	173.4
1995	82.3	61.9	44.8	53	60.5	81.1	88.5	111.2	139	157.6	184.8	1022.8
1996	112.9	164.8	94.6	106.3	85.5	122.4	65.9	87.9	123.9	288.8	623.9	850.3
1997	148.3	140.2	128.3	99.2	127.4	77.5	69.2	106.3	54.6	196.4	255.1	280.1
1998	171.7	117.1	106.3	116.6	99.4	77.4	99	46.1	66.3	70.2	100.2	304.8
1999	157.9	127.3	120.9	100.2	113.2	108.6	86	87.7	130.8	125.7	357	827.3
2000	163.7	126.3	123.8	70	47.6	52	46.1	84	14.6	422.6	1117.8	732.1
2001	114.7	101.5	88.5	105.8	108.1	79	65.1	55.1	86.2	176.8	263.2	161.9
2002	103.6	84.5	32.5	50	16.5	48.8	76.3	82.1	64.1	131.9	197.9	355.2
2003	139.9	63.9	24.4	60.4	101.2	49.3	71.4	56.5	52.1	102	236.1	467.2
2004	113.2	95.6	62.1	43	26.8	25.7	29.7	36.1	26.1	186.7	520.1	251.1
2005	187.6	48.7	39.6	29.1	31.8	29.8	28.7	3.9	36.3	65.7	135.9	1127.2
2006	148.5	119.7	79.3	86.5	42.7	56.6	76.6	58.4	79.2	236.1	835.4	874.5
2007	138.3	118.4	115.5	98.5	59	60.7	59.4	80.3	72.4	142.9	254	277.7
2008	126.9	122.2	116.7	70.8	49.5	146.6	35.4	35.8	36.7	160.7	632.8	696.9
Media	154.57	137.88	109.39	92.53	93.61	89.48	84.47	88.69	97.15	162.12	313.62	522.80
Desvest	41.22	37.11	33.09	26.82	32.66	30.14	31.56	34.19	41.46	85.68	195.41	247.93
Coef de asim	0.21	-0.33	-0.84	-0.24	-0.59	-0.08	0.96	0.21	0.42	1.95	2.17	0.75
rj+1,j	0.59	0.78	0.72	0.69	0.69	0.57	0.62	0.53	0.33	0.74	0.38	0.57

Tabla 2.1 Continuación

Año/Quincena	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1959	285.8	367.1	512.2	553	381.2	496.6	750	1198.1	488	323.1	261	213.4
1960	668.5	819.6	673.2	1102.8	1395.2	1570.9	1348.8	987.1	836.6	404	313.4	260.5
1961	413.5	573.9	325.3	670.6	674.6	594.8	753.3	495	1053	422.5	272.6	225.9
1962	786.9	351.4	473.4	1105.4	1246.5	2026	1389.2	752.4	484	293.4	224	195.4
1963	650.7	737.9	541.5	788.4	483.2	1948.8	1267	547.9	521.4	356.3	262.2	220.7
1964	708.9	1187.5	595	575	917.3	1224.8	1256.1	605	365.5	283.7	241.4	233.1
1965	712.6	393.7	802.2	824.1	534	1353.9	1355.2	1252.9	608.1	389.2	279.7	227.1
1966	909.6	782.2	644.4	687.3	1058.2	1240.2	1293.5	1197.8	633.4	378.8	276.1	212.6
1967	242.2	330.1	275.4	597.8	429.3	535.7	967.2	656.1	385	228.7	178.4	169.5
1968	694.7	422.1	260	317.4	706.9	1230	677.3	1209.2	456.6	282.3	243.6	200.4
1969	1017.2	438.6	1450.3	1733.6	2104.6	2104	1553.2	1127.2	708.5	463.4	356.9	277
1970	666.4	1171.5	1183.7	1047.3	1564.9	1409.3	1401.1	985.5	691.6	437.5	323.3	275.7
1971	221.9	429.4	837.2	1122.7	1453.8	829.6	1472.9	936.4	466.9	372.1	269.9	225.2
1972	238.5	653.3	566.7	561.4	533.5	537.8	482.7	379.7	257.7	208.1	152.7	145.9
1973	319.8	431.5	772.1	1656.6	1625.2	987.1	1587.4	1673.6	699	415.2	354.8	270.4
1974	365	365	231.5	231.5	706	706	503.5	503.5	169	169	123.5	123.5
1975	270	270	479	479	1072	1072	1040.5	1040.5	480.5	480.5	221	221
1976	750	750	316.5	316.5	508	508	666.5	666.5	279	279	245	245
1977	283.6	184.1	676.3	484	418.7	1178	505.2	340.5	348.8	177.4	140.7	225.9
1978	561.4	857.3	563	1021.5	1267.5	1078.9	923.5	676.1	342.9	206.8	189.4	240.1
1979	577.3	650.3	528	1052.8	1823.2	1805.3	1056.9	633	428	353.8	290.8	255.8
1980	210.1	572	755.6	642.4	898.1	1757.3	1317.1	531.2	333.6	250.5	206.2	191.5
1981	950.7	989.4	830.2	1558	1159.4	2038.4	1890.4	923.4	559.7	349.7	268	309.3
1982	369.9	611.9	412.4	548.7	600.2	1488.7	1625.9	719.9	427.2	253.9	219	215.6
1983	480.6	655.7	779.2	550.2	1758.2	1170.3	519.9	559.2	371.9	257.8	228.4	179
1984	850.4	1116.3	1370.8	1188.5	1876.5	2095.6	1308.1	593.9	358.3	274.1	265.1	211.6
1985	528.7	608.9	646	1384.1	689.8	1344.6	967.3	531.5	511.3	264.1	153.3	179.5
1986	723.6	350.1	342.9	811.7	805.1	420.6	475.1	317.1	272.8	197.1	156.1	137.4
1987	462.9	850.1	868.6	411.7	998.6	899.7	630.2	279.2	165.4	160.2	123.8	98.4
1988	730.2	681.9	1070.9	1514	1699.6	1159.1	1457.1	548.4	344.7	287.7	199.5	180.7
1989	326.7	430.9	477.4	1166.2	1061.1	1998	1899.6	1089.1	446	325.1	261	137.1
1990	609.6	497.7	377.3	423.6	860.5	978.6	719.5	471.9	247.4	320	307.8	229.8
1991	518	142.9	286.5	257	346.8	768.1	1025.7	533.9	274.7	152.7	249.4	162.8
1992	550	366.1	567.7	674.9	774.9	1230.4	970.6	426.9	322.4	227.9	159.7	149.7
1993	880.3	252.7	384.8	1292	1120.7	1240.2	1136	556	466.7	236.2	162.8	107.6
1994	146.3	162.6	376.7	439.1	293.6	700.6	773.4	372.7	197.3	128.9	67.5	49.7
1995	565.4	897.1	970.8	1283.2	2134.6	1878.3	923.7	683.8	386.7	311.8	193.9	207.1
1996	833.3	732	913.3	1125.7	921.7	1048.5	1384.7	655.6	371.6	308.1	197.9	125.1
1997	605.6	295.9	302.7	337.9	1108.7	1224.2	1579.7	544.4	365.1	366	312.8	175.5
1998	257.2	566.5	459.8	770.9	2223.7	873.9	915.2	988.6	930.4	512.3	252.3	205.6
1999	868.3	633.3	745.2	1027.9	1551.9	2289.1	2213.6	1680.5	702.4	518	558.4	212.9
2000	359.8	307.2	868.9	625	1236.2	1551.4	1083.8	535.4	310	205.8	156.9	153.8
2001	239.4	343.3	468	571.7	678.9	1039.6	813.1	753.9	290.7	190.2	96.2	118.6
2002	305.4	259.3	249.2	286.9	695.7	790.4	1314	402.6	288	209.7	151.1	122
2003	325	406.3	330.4	660.5	731.9	1334.7	1078.3	573.9	357.4	285.6	181.4	139.7
2004	246.2	440.9	318.9	259.4	613.6	795.5	1172	636.6	240.4	143.7	85.8	76.9
2005	971.4	1071.7	395.8	1334.3	903.5	1384	4064.4	669.8	345.7	227.5	201.9	146.9
2006	479.7	1159.2	672.4	594.4	1113.8	819.9	1044.5	829.2	448.4	268.6	236.3	200.7
2007	176.3	380.7	549.7	870.6	1058.9	1119.7	895.7	1347.1	438.3	295	226.5	189.3
2008	1348.6	1182.4	1146.8	1006.2	1107.1	1673.3	1498.6	881.9	408.4	271.3	219.6	159.8
Media	545.28	582.63	612.92	810.91	1038.54	1231.01	1178.96	750.03	437.73	294.49	226.38	188.75
Desvest	268.97	291.29	292.63	398.22	497.05	488.49	574.21	330.57	186.67	96.63	82.30	54.93
Coef de asim	0.60	0.67	0.99	0.53	0.69	0.38	2.67	1.06	1.31	0.49	1.15	-0.27
rj+1,j	0.52	0.50	0.61	0.60	0.49	0.48	0.33	0.58	0.82	0.81	0.68	0.58

Tabla 2.2 Volúmenes registrados de ingreso quincenal. Malpaso

Año/Quincena	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1959	327.2	327.2	272.2	272.2	193.1	229	243.7	264.1	118.7	109.7	193.3	500.7
1960	218.9	250.4	163.8	141.4	161.6	127.6	108.6	138	100.5	84.6	31.4	276.5
1961	400.4	299.2	223.2	154.5	232.8	135.3	119.3	121.2	164.4	94.7	48.3	317.5
1962	253.2	209.5	136.3	92.8	172.1	155.3	220.5	186.3	120.6	121.2	84.6	335.8
1963	151.3	228.3	226.7	121.2	136.6	136.5	83.5	73.3	72.1	76.6	96.6	102.9
1964	348	243	184.5	141.9	126.3	134.2	142.8	89.1	76.5	121.9	196.8	469
1965	174	342.3	186.6	238.9	136.4	167.6	101.4	103.8	123.8	110.1	133.4	400.9
1966	282.6	247	254.4	197.4	207.5	207.8	218.5	232.8	229.8	241.3	156.9	602.6
1967	275.4	253.8	216.6	160.9	162.3	153.6	142.7	155.8	121.3	136.1	113.4	244.9
1968	232.9	231.8	194	159.2	151.6	145.5	130.1	113.3	128	226.2	95	431.8
1969	251.6	221.1	167.6	134.9	138	134.3	128.6	116.3	110.9	176.5	60.3	131.2
1970	321	297.7	235	173.8	174	169.8	133.7	124.9	123.2	143.9	96.6	156.2
1971	315.1	294.1	247.3	189.4	193.2	175.1	139.1	124.2	113.3	171.2	130.5	168
1972	224.2	216	183.2	150.6	141	140.1	122.1	121.7	142	192.9	179.6	264
1973	175.4	163.2	136	103.8	103.9	102.7	98.4	91.1	90.6	116.6	123.1	243.7
1974	125.7	125.7	153.4	153.4	104	104	166.8	166.8	24.5	24.5	65.6	65.6
1975	165.5	165.5	101	101	82.5	82.5	74	74	100.5	100.5	124	124
1976	285.5	285.5	172	172	106	106	102.5	102.5	50.5	50.5	101	101
1977	87.9	102.4	163.3	107.2	122.3	90.4	59.1	61.3	65.9	7	39	148.3
1978	219.8	96.6	158	82.3	47.9	154.4	54.7	10.2	-20	18.2	154.3	238.5
1979	190	167.8	111.1	151.7	58.8	43.4	69.6	55.5	9.8	30.3	292.2	128.6
1980	49.9	172.1	280.4	121.6	217.5	105.1	62.9	48.2	-103.1	-190.8	-250.1	-72.6
1981	100.4	105	201.7	285.8	68.2	65.2	62.5	26.7	75.4	188.1	163.9	789.8
1982	111.6	84.6	164.4	109.9	87.9	19.3	71.8	110.2	58.4	217.5	195.3	475.9
1983	348.5	68.9	97.2	60.3	59.7	71.8	-2.3	91.6	30	42.1	93.8	119.9
1984	142.4	267.1	181.6	90.1	86.2	133.2	79	66.7	142.7	269.7	436.9	501.4
1985	165.5	182.1	228.6	116.7	99.4	177.9	115.2	50.1	83.3	88.7	239	326.2
1986	249.9	382.6	88.5	70.3	64.4	112.3	56.1	72.6	84.6	741.8	465.4	228.3
1987	26.5	30.9	51.5	2.6	81	12	50.7	-4	36.7	18	239.8	244.7
1988	234.2	112.6	184.5	125.7	80.1	75	67.4	70.3	76.6	89.4	58.1	488.4
1989	104.6	181.6	211.7	104.5	72.7	86	130.3	61.8	92.2	85.4	115.6	192
1990	178.4	164.3	146.1	108.3	130.9	140.2	167	59.2	118.4	107.3	206.5	346.4
1991	169.8	128.4	395.1	122.2	63	79.6	60.2	44.1	66.8	65.1	94.5	427
1992	210.2	299.3	146.6	125.2	98.8	80.9	76.3	37.6	40.5	78.1	199.4	526.8
1993	55.4	181.1	90.5	113.5	75.5	77.6	42.8	85.4	51	47	178.9	596.3
1994	245.9	239.6	132.6	199.1	129.2	154.2	138.2	113.1	86.2	-697.8	147.4	136.7
1995	186.6	73	137.5	150.3	76.1	40.1	56	59.6	50.2	66.9	81.6	538
1996	252.5	200.3	157.1	74.1	126.7	67.4	102.6	238.1	207.2	174.6	321.2	588.8
1997	94.9	156.6	119	119	101.9	54.1	89.1	66.8	124.7	111.9	198.7	219.8
1998	77.4	133.1	88.9	44.6	54	26.6	49.9	51.5	17.9	37.4	38.8	110.4
1999	224.7	124	186.1	197	84.9	100.2	77.3	161.8	83.1	131.2	128.2	444.6
2000	421	113.6	150.1	69.8	76.5	47.1	73.6	88.4	35.6	339.8	694.6	540.7
2001	218.4	108.2	246.3	273.4	77.4	79.1	100	100	78.2	145.3	246.9	129.4
2002	133.8	117.8	322.9	209.3	173.8	230	49.6	25.7	47.6	63.6	229.9	443.6
2003	178.9	146.6	130.1	37.2	59.5	49.1	57.5	4.2	34.9	171.9	188.8	618.7
2004	494.1	211.2	222.6	157.4	106.7	72.4	76.3	0.8	193.3	109.9	444.2	199.3
2005	53.4	78.6	53.9	41.2	38.4	17.1	-19.8	17	30.7	30.4	99.6	523.2
2006	199.9	372.4	200	178.5	113	124.1	128.7	82	113.5	125.5	406.7	411.8
2007	474.7	213.3	206.1	97.5	117.4	99.6	69.6	68.8	83.8	104.4	8.6	144.7
2008	206.4	137.6	97.2	70.9	78.3	42.6	84.9	74.8	49.3	162.7	15.5	739.8
Media	212.71	191.09	176.10	133.53	113.02	106.70	96.66	89.99	83.13	105.59	164.07	328.63
Desvest	105.96	83.92	66.43	60.72	47.54	53.39	50.94	58.56	56.78	167.42	144.60	195.31
Coef de asim	0.63	0.38	0.70	0.51	0.71	0.30	0.73	1.01	-0.16	-1.21	1.04	0.32
rj+1,j	0.39	0.23	0.57	0.42	0.71	0.65	0.72	0.51	0.29	0.44	0.29	0.71

Tabla 2.2 Continuación

Año/Quincena	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1959	183.4	209.4	285	437.5	328.9	390.1	459.7	1257.1	563.2	627.5	252.3	235.9
1960	265.4	482.1	222	898.6	747.5	643.5	199.2	392.5	612.8	283.2	341	248.8
1961	247.5	306.4	399.6	362	431.4	229.8	623.2	682.1	980.9	304.9	170.8	201.9
1962	655.7	320.2	149.4	507.4	700.5	1466	977.8	505.2	374.8	219.7	175.7	155.3
1963	366.5	896.1	354.1	354.1	349.5	2367.6	1156.1	377.2	342	386.8	308.8	252.3
1964	513.2	966.2	437.6	423.9	806.1	663.8	845.1	302.4	141.1	222.3	512.7	306.8
1965	497.8	202.6	365	543	386	465.3	1168.3	1359.5	581.4	272.7	332.9	361.6
1966	743.3	483.8	469.3	525	1225.2	1731.2	1339.7	780	418.7	314.2	270.7	265.9
1967	189	193.7	150.8	441.4	312.1	395.7	947	563.2	342.8	290.7	240.5	217.2
1968	479.3	378.2	204.4	250.7	304.9	1264.7	540.6	1029.3	439	312.9	267.8	233.4
1969	451.3	275.2	669	804.1	1529.3	1601.4	866.4	360.8	365.3	349.7	314.1	306
1970	223.9	555.6	742.4	428.5	1799.9	1732.1	1216.9	517.3	406.3	265.6	253.5	266.9
1971	148.6	265.9	447.7	417.1	1339	341	936.3	676.8	379.6	308.5	259.1	214.5
1972	151.6	425.2	316.3	295.2	301.6	189.5	401.1	312.5	226.6	199.8	183.4	190
1973	256.7	235.5	529.8	1405.9	2109.9	608.8	1130.1	1194.6	537.5	344.7	302.1	250.7
1974	69.1	69.1	400	400	95.5	95.5	54.7	54.7	108	108	69.1	69.1
1975	159	159	253.5	253.5	603.5	603.5	632.5	632.5	200	200	77	77
1976	357	357	157	157	312.5	312.5	363.5	363.5	332	332	324.5	324.5
1977	122.9	180.4	452.2	287.8	170.8	399.5	381.3	134.7	488	155.6	186.7	351.4
1978	329.8	755.1	229.9	324.1	456.4	647.6	463.2	458.4	337.1	140.5	333.9	204.7
1979	215.1	138.6	118	794.8	1134.2	1229.6	406.1	287.6	326.9	291.2	466.5	455.4
1980	-102.3	555.2	353.2	441.6	376.3	2134	742.7	413.3	336.8	343	227.9	205.5
1981	903	884	384.2	1261.3	569	959.4	847.8	444.3	392.8	178	105.5	148.7
1982	100.7	319.9	202.8	117.8	317.7	867.2	713.5	316.8	440.5	165.4	116.6	318.6
1983	291.5	293.5	322.3	281.7	1151.1	1024.5	232.9	436	279	94.3	112.7	272.6
1984	619	458.9	793.6	424.5	1184.5	1128.9	498.1	166.6	110.9	136.6	262.8	164.2
1985	267.4	384.8	337.2	851.8	380.6	577.1	492.9	118.3	133.6	38.5	228.2	266.1
1986	498	208.3	237.4	374.1	429.9	226.7	308.9	187.3	133.2	177.3	153.7	67.7
1987	338.4	246.3	338.8	174.4	683.6	428.4	521.8	74.8	103	154.1	50.5	80.8
1988	497.9	390.9	566	765.2	1363.1	453.3	1340.7	349.7	207.9	379.6	333.6	203.8
1989	237.8	216.7	268	503.8	505.8	2363.7	1027.4	674.5	203.4	291.7	322.2	356.3
1990	456	318.8	233.3	251.7	465.5	362.9	368.5	328.3	318	362.4	697.1	241.9
1991	304.8	135.6	110.9	192.9	225.9	352.3	740.7	265.4	299.6	362.8	216.4	326.7
1992	469.4	405.9	370.2	426.4	391.9	688.6	558.3	280.2	195.4	231.2	177.6	123.6
1993	623	195.6	241.7	1125	703.9	607	625.7	578.5	413.8	203.2	162.4	174.2
1994	258.7	180.9	172.4	337.5	197.5	279.1	362.8	168.5	102.9	62.3	67.3	80.2
1995	411.7	484.5	758	994.7	1133.6	742.1	968	430	274.8	197.7	263.9	208.6
1996	591.7	476.1	592.3	684.5	593	545.6	780.1	314.1	375.5	327.4	228	184.3
1997	414	155.8	124.2	194.8	331.9	310.1	821.9	519.4	296.3	380.3	255.5	133.2
1998	266.8	394.8	375.7	363.8	1500.6	674.1	671.4	928	1006.7	288.9	188.7	188.3
1999	793.7	367	308.4	590.3	1105.4	939.7	1652.4	856.2	494.1	270.1	200	224.1
2000	267.7	273.4	702.5	494.6	894.7	1421.2	1070.9	373.2	233.5	258	200.9	378
2001	162	225.4	233	439	554.9	954.7	623.4	604	526	156.2	173.8	365.9
2002	293.7	261.9	118.9	148.1	707.9	947.6	811.1	205.1	413.5	319.5	301.8	183.7
2003	366.6	381.7	253.7	507.3	753.8	1407.4	2057.9	589.7	508.7	585.2	302.9	290.8
2004	173.2	501.1	333.2	206.1	439.5	684.6	579.5	309.8	385.7	94.7	135.6	273.4
2005	623.6	957.7	384.7	1302.1	622.4	412.5	1983.6	428.4	248.8	340.1	274.1	350.7
2006	273.3	552.5	432.1	251.2	595.2	443.7	534.7	402.5	341.4	214	356	186.5
2007	117.4	242.6	261.7	582.7	682.6	341.3	631	1671.3	360	261.3	245	233.1
2008	873.2	617.3	539.5	380.6	487.9	1085.7	711.5	480	208	252.7	173.6	173.9
<b>Media</b>	<b>360.36</b>	<b>378.85</b>	<b>354.06</b>	<b>499.62</b>	<b>695.89</b>	<b>814.84</b>	<b>767.78</b>	<b>503.12</b>	<b>356.96</b>	<b>261.14</b>	<b>243.55</b>	<b>231.89</b>
<b>Desvest</b>	<b>214.64</b>	<b>215.96</b>	<b>175.22</b>	<b>306.77</b>	<b>448.36</b>	<b>563.25</b>	<b>416.08</b>	<b>336.15</b>	<b>186.53</b>	<b>113.79</b>	<b>115.56</b>	<b>88.19</b>
<b>Coef de asim</b>	<b>0.65</b>	<b>1.28</b>	<b>0.86</b>	<b>1.39</b>	<b>1.23</b>	<b>1.23</b>	<b>1.19</b>	<b>1.56</b>	<b>1.49</b>	<b>0.75</b>	<b>1.33</b>	<b>0.12</b>
<b>rj+1,j</b>	<b>0.39</b>	<b>0.29</b>	<b>0.30</b>	<b>0.43</b>	<b>0.25</b>	<b>0.36</b>	<b>0.27</b>	<b>0.52</b>	<b>0.36</b>	<b>0.44</b>	<b>0.45</b>	<b>0.12</b>



### 3 METODOLOGÍA

Para determinar el óptimo funcionamiento de una presa o de un sistema de presas se aplican técnicas de optimización. Un método que se adapta a las características del problema de este tipo de funcionamiento es la programación dinámica, cuyo precursor es Richard E. Bellman. La programación dinámica se puede clasificar en: Determinística (las variables de entrada son conocidas) y Estocástica (se introduce una componente probabilística en las variables de entrada). En el caso de una presa, si los ingresos son conocidos se dice que es determinístico, si solo se conocen la probabilidades asociadas a esos ingresos es estocástico.

Otra de las técnicas de investigación de operaciones que ayuda a la solución del problema es la simulación; este procedimiento intenta representar las operaciones de los procesos y sistemas reales de manera numérica para su análisis y estudio, además se pueden añadir todas las variables que participan en el proceso.

Para una mejor comprensión se presentan las definiciones de *política de operación*, *estado*, *etapa* y *función objetivo*, conceptos claves en el desarrollo de este capítulo.

#### 3.1 Definiciones

Se puede definir a la *política de operación* como el conjunto de reglas que determinan cual debe ser el volumen de extracción o el volumen deseable al final de la *etapa* tomando en cuenta el *estado* presente del sistema, el cual se define en términos de variables medibles, principalmente el volumen almacenado en la presa y la época del año.

Se entiende por *estado* la situación actual del embalse, se expresa en términos de volumen, es decir, es el almacenamiento al inicio de cada etapa.

La *etapa* representa un período de tiempo, que puede ser un año, un mes, una quincena, un día, etc.



Para poder obtener una política óptima, es necesario establecer una norma que permita comparar distintas políticas y decidir cuál es la mejor. A esta norma de comparación se le llama *función objetivo*.

La *función objetivo* es una relación matemática entre las variables de decisión y una magnitud que representa el objetivo (minimizar o maximizar) o producto del sistema. Es la suma de los beneficios correspondientes a cada etapa. Esta función debe permitir que se pueda evaluar de manera independiente la contribución de cada etapa al objetivo final y comparar las distintas políticas de operación y decidir cuál es la mejor.

### 3.2 Métodos de optimización

Los métodos de optimización tienen su origen en la Segunda Guerra Mundial, la investigación matemática se extendió hacia zonas que hasta entonces le habían sido ajenas. El término “Operations Research” fue utilizado por primera vez en Inglaterra, en 1941. Las investigaciones realizadas en los centros de Investigación Operativa de la Royal Air Force y otros organismos militares británicos permitieron, entre otras cosas, incrementar la eficacia de los patrullajes aéreos en busca de submarinos alemanes. Rápidamente se hizo evidente que las mismas técnicas utilizadas en el ámbito militar podían servir en otras áreas de aplicación.

Existen distintos métodos de optimización, desde técnicas tradicionales como la programación lineal, programación dinámica, hasta métodos recientes como la optimización global, algoritmos genéticos, redes neuronales, etc. De los métodos mencionados, en este trabajo se aplicó programación dinámica, técnica que permite determinar de manera eficiente la secuencia de decisiones que optimizan el comportamiento de un sistema que evoluciona a lo largo de una serie de etapas.

Al comenzar cada una de las etapas, antes de tomar la decisión, el sistema podrá encontrarse en un estado de los varios posibles para esa etapa. Esto significa que para cada etapa debe definirse un conjunto de estados. El estado debe sintetizar toda la información que debemos conocer de la evolución del sistema en etapas anteriores. Una vez tomada la decisión en el estado correspondiente, el sistema evolucionará hacia alguno de los estados posibles para la etapa siguiente. El comportamiento del sistema puede percibirse como una secuencia de decisiones y evoluciones.



La programación dinámica está asociada a situaciones de evolución de un sistema a lo largo de varias etapas, de ahí el nombre de dinámica. Cuando la evolución es conocida con certeza una vez tomada la decisión, se tiene programación dinámica determinística; de lo contrario, cuando el sistema puede evolucionar hacia diferentes estados según una ley de probabilidad conocida, se tiene programación dinámica estocástica.

### 1.2.1 Programación dinámica determinística

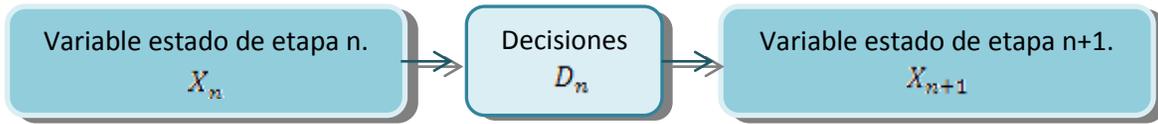
Es una técnica matemática orientada a la solución de problemas con *decisiones secuenciales en etapas sucesivas* donde se debe obtener el máximo beneficio. En cada etapa se valora no solo el beneficio actual de tomar una decisión sino los beneficios acumulados hasta dicha etapa. El problema a resolver se divide en etapas, en cada una de las etapas debe tomarse una decisión que depende del estado. Se tiene la solución del problema cuando se encuentra la decisión óptima.

El principio de optimalidad de Bellman (1957) establece que “Una política óptima tiene la propiedad siguiente: cualquiera que sea el estado y la decisión inicial, las decisiones restantes deben de constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión.”

Del principio de optimalidad se entiende que:

- La política óptima para las siguientes etapas no depende de la política tomada en las etapas anteriores.
- La decisión para encontrar la política óptima inmediata solo depende del estado actual y no de cómo se llegó hasta él.
- Toda la información sobre el pasado se resume en el estado en que se encuentra y el beneficio que se obtuvo.
- Una vez conocida la solución óptima global, cualquier solución parcial que involucre solo una parte de las etapas es también una solución óptima. Todo subconjunto de una solución óptima es a su vez una solución óptima para un problema parcial.

Mediante una decisión  $D_n$  se va de un estado al comienzo de una etapa  $X_n$  a otro estado al comienzo de la siguiente  $X_{n+1}$  como se observa a continuación.



donde

$n$  índice de cada etapa

$D_n$  decisión tomada en la etapa  $n$ , y tiene influencia en la etapa  $n+1$

$X_n$  estados de la etapa  $n$

En cada etapa se evalúa la decisión óptima para cada uno de los estados  $X_n$ . Cada estado guarda la información necesaria para tomar las decisiones futuras sin necesidad de conocer cómo se ha alcanzado dicho estado. Este procedimiento se realiza de forma recursiva incorporando cada vez una etapa hasta llegar a las que conforman el problema original, se puede llamar  $P_0$  al problema global y  $P_{1,2,\dots,N}$  al problema resultante de considerar solo la etapa  $n=1,2,\dots$  hasta la etapa  $N$ . El procedimiento se puede hacer hacia adelante o hacia atrás (figura 3.1).

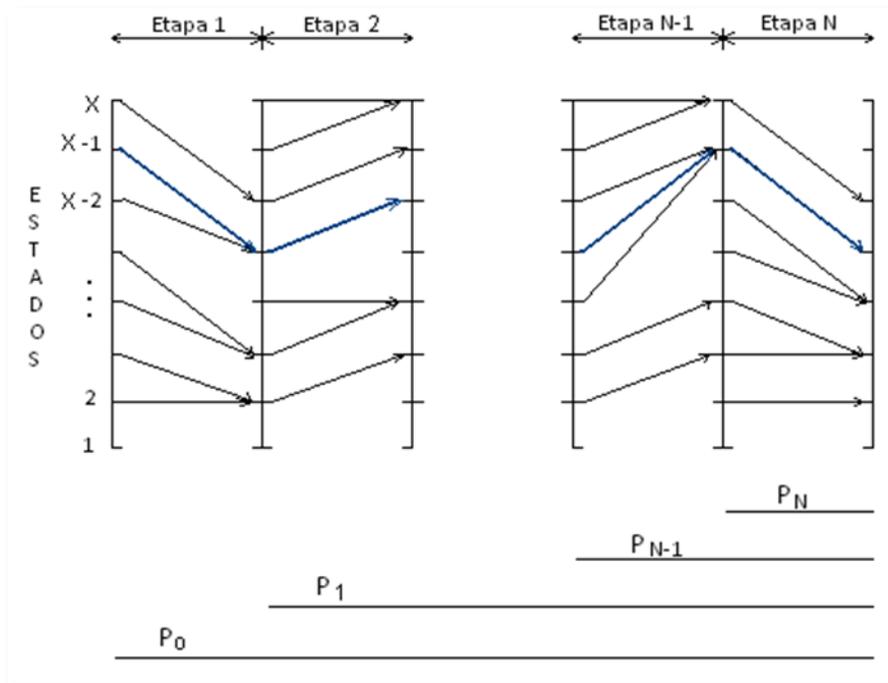


Figura 3.1 Procedimiento de programación dinámica.



Para efectuar la programación dinámica se proponen los pasos siguientes (Labadie, 2000):

1. Definir las etapas de decisión secuencial.
2. Separar las variables del problema en variables de estado (definen el estado del sistema antes y después de cada decisión) y en variables de control (son las variables de decisión).
3. Definir una ecuación de estado del sistema que relacione las variables de estado con las de decisión.
4. Establecer una función objetivo que pueda evaluar de manera independiente la contribución de cada etapa al objetivo final; pueden ser funciones producto, máximo, mínimo, etc.
5. Imponer restricciones separables por niveles, que sean independientes al comportamiento del sistema en otras fases.

Matemáticamente el principio de optimalidad puede expresarse como:

$$f_n(X_n) = \max_{d_n} [r_n(X_n, d_n) + f_{n-1}(X_{n-1})] \quad (3.1)$$

donde

$n$  número de etapas subsecuentes en el proceso

$X_n$  variable de entrada a la  $n$ -ésima etapa

$d_n$  variable de decisión en la  $n$ -ésima etapa

$f_n(X_n)$  beneficio máximo de un proceso con  $n$  etapas y entradas  $s_n$  hasta la  $n$ -ésima etapa

$X_{n-1}$  estado anterior en la etapa  $n-1$

$r_n$  salida de la etapa  $n$  y entrada a la etapa  $n-1$

$f_{n-1}(X_{n-1})$  beneficio máximo desde la etapa 1 a la  $n-1$

Las principales ventajas de la programación dinámica son:

1. La función objetivo y las restricciones pueden ser ecuaciones no lineales.
2. Se puede aplicar a problemas que tienen un gran número de etapas y reduce el número de alternativas por comparar, por ejemplo, si se quiere resolver un problema que tiene 10 estados posibles con 5 etapas, el número de alternativas sería:



- Considerando una evaluación exhaustiva de alternativas de optimización:  
 $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 = 100000$
- Con programación dinámica determinística:  $10^2$  alternativas en la primera etapa, otras  $10^2$  en la segunda..., es decir, un total de:  $5 \times 10^2 = 500$ .

3. La solución del problema de optimización puede ser una o toda una familia de políticas óptima que dependen del estado del sistema.

Con objeto de facilitar la comprensión del método de programación dinámica determinística, a continuación se presenta el ejemplo “*Repartición de un esfuerzo comercial*”, tomado del libro *Invitación a la investigación de operaciones*, 2da edición (Kaufmann A. y Faure R., 1963), trata de un problema combinatorio de asignación que se resuelve con programación dinámica determinística, se conocen todas las variables y se puede resolver con un procedimiento hacia atrás o hacia adelante.

#### **1.2.1.1 Ejemplo: Repartición de un esfuerzo comercial del libro *Invitación a la Investigación de operaciones*.**

Un grupo de dinámicos financieros mexicanos ha resuelto invertir 10 millones de pesos en la nueva marca de vino *Carta Nueva*. Así, pues, en cuatro ciudades de las principales de México se decide iniciar una vigorosa campaña comercial: México en el centro, Monterrey en el Noroeste, Guadalajara en el occidente y Veracruz en el oriente.

En este problema se puede observar claramente que las etapas corresponden a las zonas comerciales I, II, III, y IV, respectivamente, y que los estados posibles corresponden a invertir desde 0, 1, 2, ..., 10 millones de pesos.

Se realizó un estudio del mercado en las 4 zonas y se establecieron curvas de ganancias medias en función de las inversiones totales (almacenes, tiendas de venta, representantes, publicidad, etc.), con la cual se formaron la tabla 3.1 y figura 3.2.



Tabla 3.1 Inversión-beneficio para cada zona.

Inversión (millones)	Beneficios por zona			
	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
1	0.28	0.25	0.15	0.20
2	0.45	0.41	0.25	0.33
3	0.65	0.55	0.40	0.42
4	0.78	0.65	0.50	0.48
5	0.90	0.75	0.62	0.53
6	1.02	0.80	0.73	0.56
7	1.13	0.85	0.82	0.58
8	1.23	0.88	0.90	0.60
9	1.32	0.90	0.96	0.60
10	1.38	0.90	1.00	0.60

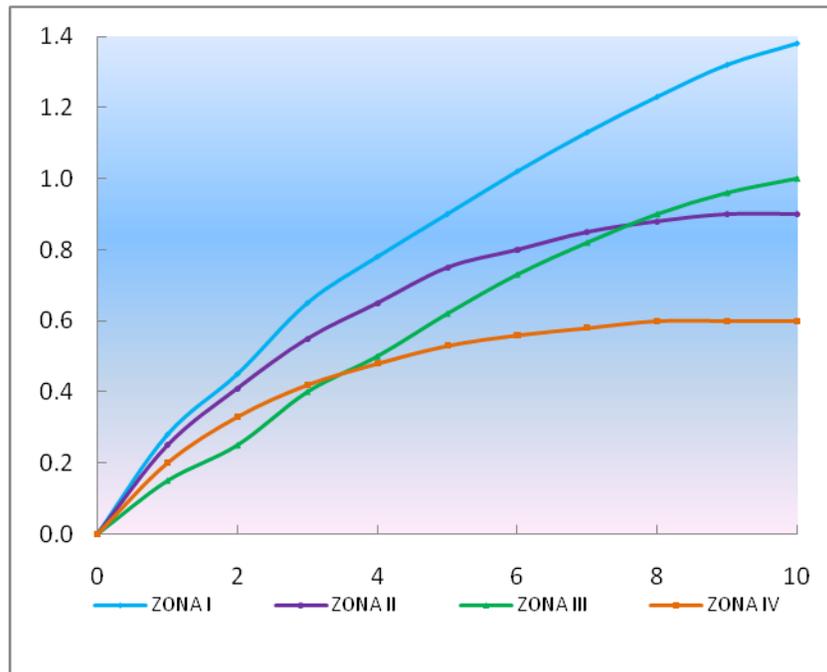


Figura 3.2 Curva de inversión-beneficio para cada zona.



En vista de la figura 3.2 la pregunta es ¿en dónde se deben de asignar los 10 millones de pesos de los que se dispone para que la ganancia total sea máxima? Para lograrlo se debe optimizar la función objetivo. Este tipo de problema tiene un carácter combinatorio; se trata de distribuir un total de 10 unidades sobre 4 posiciones. Se podría calcular los beneficios correspondientes a cada combinación: (10,0,0,0), (9,1,0,0), (9,0,1,0), (9,0,0,1), (8,1,1,0), (8,1,0,1), (8,0,1,1), (8,2,0,0), (8,0,2,0), (8,0,0,2), ... , (4,4,2,0), ... , (4,4,1,1), ... , (4,3,3,0), ... , (4,3,2,1), ... , (4,2,2,2), ... ¡286 cálculos que hay que efectuar! Pero como el grupo de financieros desea conocer la solución óptima, en el caso en que no se invirtieran en total más que 9, 8,7,..., 1 millón de pesos, nos coloca frente una gran cantidad de cálculos (1001) que se pueden encontrar a partir de los datos de la tabla 3.1.

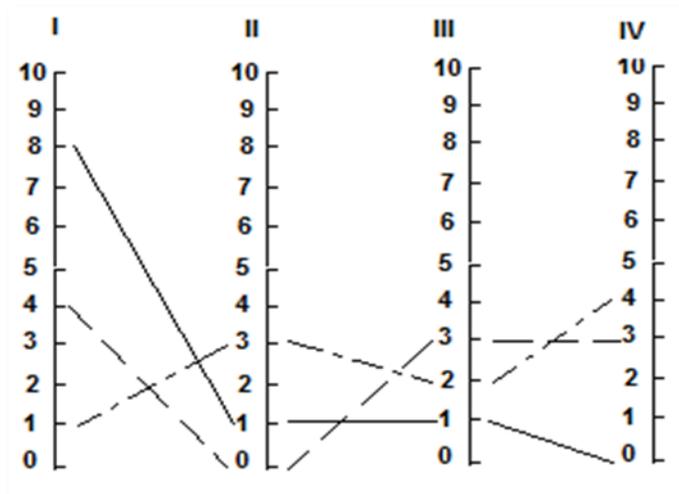


Figura 3.3 Combinación de soluciones para A=10.

El algoritmo propuesto que ayuda a reducir el número de cálculos es el obtenido por el matemático Bellman y se llama *programación dinámica*. El método consiste en asignar el recurso disponible en 2 zonas, por ejemplo zona I y II juntos, se elige el óptimo y se escribe su trayectoria, enseguida se combina el resultado óptimo con la zona III y posteriormente con la zona IV. Debido a que el problema es determinístico no es necesario seguir un orden en las combinaciones, con el fin de comparar los resultados con los obtenidos en el libro *Invitación a la investigación de operaciones* (Kaufmann A. y Faure R., 1963) se propone la combinación siguiente: Zona IV y III, después con la zona II y finalmente se unirá con la zona I.



La forma de operar será la siguiente:

- $f_1(x)$  → Función correspondiente a la zona I
- $f_2(x)$  → Función correspondiente a la zona II
- $f_3(x)$  → Función correspondiente a la zona III
- $f_4(x)$  → Función correspondiente a la zona IV

$f_{4,3}(A)$  es la asignación óptima de invertir A millones en IV y III juntos,  $f_{4,3,2}(A)$  es la asignación óptima de invertir A millones en IV, III y II juntos,  $f_{4,3,2,1}(A)$  es la asignación óptima de invertir A millones en IV, III, II, y I juntos.

Para evaluar  $f_{4,3}(0,1,2 \dots 10)$ , hay que calcular en cada caso todas las posibles alternativas y se resalta la que conduce al máximo beneficio, tal como se muestra a continuación:

→ El beneficio de invertir 0 millones en las zonas IV y III juntas es cero.

→ El beneficio de invertir 1 millón en las zonas IV y III juntas según la tabla 3.1 es:

$$f_{4,3}(1) = f_4(1) + f_3(0) = 0.20 + 0 = \mathbf{0.20}$$
$$f_{4,3}(1) = f_4(0) + f_3(1) = 0 + 0.15 = 0.15$$

→ El beneficio de invertir 2 millones en las zonas IV y III juntas según la tabla 3.1 es:

$$f_{4,3}(2) = f_4(2) + f_3(0) = 0.33 + 0 = 0.33$$
$$f_{4,3}(2) = f_4(1) + f_3(1) = 0.20 + 0.15 = \mathbf{0.35}$$
$$f_{4,3}(2) = f_4(0) + f_3(2) = 0 + 0.25 = 0.25$$

→ El beneficio de invertir 3 millones en las zonas IV y III juntas según la tabla 3.1 es:

$$f_{4,3}(3) = f_4(3) + f_3(0) = 0.40 + 0 = 0.40$$
$$f_{4,3}(3) = f_4(2) + f_3(1) = 0.25 + 0.20 = 0.45$$
$$f_{4,3}(3) = f_4(1) + f_3(2) = 0.15 + 0.33 = \mathbf{0.48}$$
$$f_{4,3}(3) = f_4(0) + f_3(3) = 0 + 0.42 = 0.42$$

→ El beneficio de invertir 4 millones en las zonas IV y III juntas según la tabla 3.1 es:

$$f_{4,3}(4) = f_4(4) + f_3(0) = 0.50 + 0 = 0.50$$
$$f_{4,3}(4) = f_4(3) + f_3(1) = 0.40 + 0.20 = \mathbf{0.60}$$
$$f_{4,3}(4) = f_4(2) + f_3(2) = 0.25 + 0.33 = 0.58$$
$$f_{4,3}(4) = f_4(1) + f_3(3) = 0.15 + 0.42 = 0.57$$
$$f_{4,3}(4) = f_4(0) + f_3(4) = 0 + 0.48 = 0.48$$



De esta forma se calculan los valores:  $f_{4,3}(5)$ ,  $f_{4,3}(6)$ ,  $f_{4,3}(7)$ ,  $f_{4,3}(8)$ ,  $f_{4,3}(9)$  y  $f_{4,3}(10)$ , y se escribe la trayectoria del beneficio máximo  $f_{4,3}(A)$  como se muestra en la tabla 3.2. A partir de esos resultados se obtienen los valores óptimos  $f_{4,3,2}(A)$  y partiendo de ellos, los óptimos  $f_{4,3,2,1}(A)$ , como se muestra en la tabla 3.2. Por ejemplo, se tiene que:

$$f_{4,3,2}(2) = f_{4,3}(1,1) + f_3(0) = 0.35 + 0 = 0.35$$

$$f_{4,3,2}(2) = f_{4,3}(1,0) + f_3(1) = 0.20 + 0.25 = \mathbf{0.45}$$

$$f_{4,3,2}(2) = f_{4,3}(0,0) + f_3(2) = 0 + 0.41 = 0.41$$

$$f_{4,3,2,1}(2) = f_{4,3,2}(1,0,1) + f_3(0) = 0.45 + 0 = 0.45$$

$$f_{4,3,2,1}(2) = f_{4,3,2}(0,0,1) + f_3(1) = 0.25 + 0.28 = \mathbf{0.53}$$

$$f_{4,3,2,1}(2) = f_{4,3,2}(0,0,0) + f_3(2) = 0 + 0.45 = 0.45$$

En la tabla 3.2 se muestran los resultados de invertir A millones en la combinación propuesta.

La tabla 3.2 permite conocer cuáles serán las políticas que corresponden a la utilidad máxima para una inversión dada. Por ejemplo, si se invierten 5 millones en las 4 zonas, hay que colocar 1 millón en la zona IV, cero en la zona III, 1 millón en la zona II y 3 millones en la zona I obteniendo una ganancia de 1.10 millones.

Finalmente se puede concluir con la tabla 3.3 que presenta las reparticiones óptimas de las inversiones de la sociedad *Carta Nueva*.

Tabla 3.2 Beneficio óptimo de invertir A millones para cada combinación de zona.

Inversión (A)	Zona			Trayectoria IV , III	Zona		Trayectoria IV , III , II	Zona		Trayectoria IV , III , II , I
	IV	III	IV + III		II	IV + III + II		I	IV + III + II + I	
0	0.00	0.00	0.00	0,0	0.00	0.00	0,0,0	0.00	0.00	0,0,0,0
1	0.20	0.15	0.20	1,0	0.25	0.25	0,0,1	0.28	0.28	0,0,0,1
2	0.33	0.25	0.35	1,1	0.41	0.45	1,0,1	0.45	0.53	0,0,1,1
3	0.42	0.40	0.48	2,1	0.55	0.61	1,0,2	0.65	0.73	1,0,1,1
4	0.48	0.50	0.60	1,3	0.65	0.76	1,1,2	0.78	0.90	1,0,1,2 ó 0,0,1,3
<b>5</b>	<b>0.53</b>	<b>0.62</b>	<b>0.73</b>	<b>2,3</b>	<b>0.75</b>	<b>0.90</b>	<b>1,1,3</b>	<b>0.90</b>	<b>1.10</b>	<b>1,0,1,3</b>
6	0.56	0.73	0.83	2,4	0.80	1.03	2,1,3	1.02	1.26	1,0,2,3
7	0.58	0.82	0.95	2,5	0.85	1.15	1,3,3	1.13	1.41	1,1,2,3
8	0.60	0.90	1.06	2,6	0.88	1.28	2,3,3	1.23	1.55	1,1,3,3
9	0.60	0.96	1.15	2,7 ó 3,6	0.90	1.38	2,4,3	1.32	1.68	2,1,3,3 ó 1,1,3,4
10	0.60	1.00	1.24	3,7	0.90	1.50	2,5,3	1.38	1.81	2,1,3,4



**Tabla 3.3 Reparticiones óptimas de las inversiones de la sociedad Carta Nueva.**

Si dispone de: (millones)	Invierta en:				Obtendrá un beneficio óptimo de: (millones)
	IV	III	II	I	
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0.28
2	0	0	1	1	0.53
3	1	0	1	1	0.73
4	1	0	1	2	0.9
	0	0	1	3	
5	1	0	1	3	1.1
6	1	0	2	3	1.26
7	1	1	2	3	1.41
8	1	1	3	3	1.55
9	2	1	3	3	1.68
	1	1	3	4	
10	2	1	3	4	1.81

Siguiendo la combinación ascendente, el sistema de restricciones está reducido a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = A \quad (3.2)$$

Así que para obtener:

$$F(A) = \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{Max}} [f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)] \quad (3.3)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = A$$

Se opera por etapas o secuencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1,2}(A) = \underset{x \in d_1}{\text{Max}} [f_1(x) + f_2(A-x)] \\ F_{1,2,3}(A) = \underset{x \in d_2}{\text{Max}} [F_{1,2}(x) + f_3(A-x)] \\ F_{1,2,3,4}(A) = \underset{x \in d_3}{\text{Max}} [F_{1,2,3}(x) + f_4(A-x)] \\ \text{si se tiene } n \text{ etapas:} \\ F(A) = \underset{x \in d_n}{\text{Max}} [F_{1,2,\dots,(n-1)}(x) + f_n(A-x)] \end{array} \right. \quad (3.4)$$



Con la ecuación 3.4 se obtiene el máximo de  $f_1$  y  $f_2$  para los valores de  $x_1$  y  $x_2$ , tales que cumplan con la restricción:

$$A = x_1 + x_2 \quad (3.5)$$

Así se obtendrá una función  $F_{1,2}$  de A. Enseguida se calcula el máximo de la  $F_{1,2}$  y  $f_3$  para los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , tales que cumplan con la restricción:

$$A = x_1 + x_2 + x_3 \quad (3.6)$$

Después de obtener  $F_{1,2,3}$  de A, se calcula el máximo de  $F_{1,2,3}$  y  $f_4$ ; y así hasta terminar el número de etapas que se tenga, para este ejemplo se termina hasta obtener  $F_{1,2,3,4}$ .

### 1.2.2 Programación dinámica estocástica

Cuando la programación dinámica se aplica en sistemas de embalses, las variables de estado son los niveles de almacenamiento, las etapas el intervalo de tiempo (meses, quincenas, semanas), las variables de decisión son las salidas del embalse y la variable aleatoria generalmente es el volumen de ingreso, dicha variable puede representarse como una función de distribución de probabilidad lo que permite dar paso a la programación dinámica estocástica.

La ecuación de continuidad gobierna el funcionamiento de una presa, aplicado a un intervalo de tiempo (etapa) se expresa como, (Domínguez et al, 2000):

$$S_j = S_i + VI_j - VS_j \quad (3.7)$$

donde

$S_j$  almacenamiento al final de la etapa, en  $L^3$

$S_i$  almacenamiento al inicio de la etapa, en  $L^3$

$VI_i$  volumen de ingreso durante la etapa, en  $L^3$

$VS_j$  volumen extraído durante la etapa, en  $L^3$

La programación dinámica estocástica toma en cuenta el carácter aleatorio de los volúmenes de ingreso al embalse ( $VI$ ), éste se representa con una función de distribución de probabilidades que depende principalmente de la época del año a la que pertenece el



intervalo de tiempo, es decir, es la variable no controlable del sistema. Sin embargo,  $VS_j$  es la variable que se puede controlar en el sistema.  $S_i$  define la condición inicial y determina el estado del sistema.

Los almacenamientos  $S_j$  y las extracciones  $VS_j$  del sistema se sujetan a las restricciones siguientes:

$$VS_{min} \leq VS_j \leq VS_{max}$$

$$S_{min} \leq S_j \leq S_{max}$$

El embalse tiene un volumen útil que se divide en  $NS$  intervalos de magnitud  $\Delta V$  como se observa en la figura 3.4, de tal forma que si se usa el mismo intervalo para discretizar todas las variables, la ecuación de continuidad 3.7 toma la forma:

$$j = i + x - k \tag{3.8}$$

sujeta a:

$$1 \leq j \leq NS$$

$$0 \leq k \leq NK$$

$$1 \leq x \leq NX$$

donde

$i = 1, 2, 3, \dots, NS \rightarrow$  Volumen almacenado (por unidad  $\Delta V$ ) al inicio de la etapa

$j = 1, 2, 3, \dots, NS \rightarrow$  Volumen almacenado (por unidad  $\Delta V$ ) al final de la etapa

$x = 1, 2, 3, \dots, NX \rightarrow$  Volumen de ingreso (por unidad  $\Delta V$ ) durante la etapa

$k = 0, 1, 2, \dots, NK \rightarrow$  Volumen de extracción (por unidad  $\Delta V$ ) durante la etapa

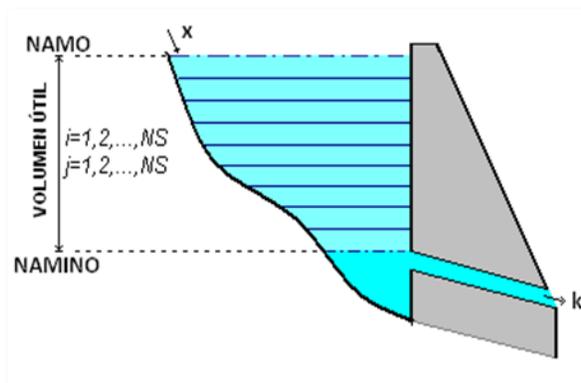


Figura 3.4 Variables discretizado en un embalse.



Al considerar las variables de forma discreta, el beneficio que corresponde a una etapa  $n$  cualquiera, depende del volumen extraído  $k$  y de los almacenamientos  $i$  y  $j$  al inicio y al final de la etapa; es decir, los beneficios en la etapa se pueden expresar como  $b_n^k(i, j)$ .

La programación dinámica estocástica aplicada a la operación de presas de almacenamiento permite dar respuesta a las interrogantes siguientes:

- *¿Cuál es el problema?* Cuánto se debe de extraer ( $k$ ), de tal forma que satisfaga las demandas y se obtenga el beneficio óptimo durante su operación.
- *¿En función de qué se decide?* Depende del nivel del almacenamiento al inicio de la etapa ( $i$ ), de la época del año (etapa  $n$ ), y de los ingresos que se tengan; sin embargo, esta es la variable de disturbio, si se tratara de un problema determinístico sería un dato conocido, en presas solo se tienen pronósticos (obtenidos de observaciones de los estados atmosféricos) o predicciones (se obtienen de la estadística de los ingresos históricos).
- *¿Para qué?* Puede ser para generar energía, dotación de riego, agua potable, etc. Evitar derrames o déficit (implica no poder satisfacer las demandas). Garantizar una reserva. Se evalúa a través de la función objetivo que es la suma de los beneficios individuales  $b_n$  correspondientes a cada etapa que a su vez dependen de las extracciones por lo que es necesario saber cuánto se gana si se extrae  $k$  pasando de un estado  $i$  a un estado  $j$ .
- *¿Cuáles son las restricciones a cumplir?* Dado que el funcionamiento de una presa se rige por la ecuación de continuidad se debe cumplir que el almacenamiento al final de la etapa sea mayor o igual que el mínimo, pero que sea menor o igual que el máximo.

Durante la operación de una presa se puede presentar dos condiciones que se desean evitar (figura 3.5):

- Se puede suponer que lloverá poco, por lo tanto se extrae poco, sin embargo la realidad es que llueve mucho (subestimé), entonces el almacenamiento al final de la etapa ( $j$ ) será mayor que el NAMO (Nivel de aguas máximas ordinarias) y esto implicará un *derrame*, por lo tanto un castigo.



- El volumen en el NAMINO es uno ( $i=1$ ) y supongo que lloverá mucho por lo que se extrae mucho, pero la realidad es que llovió poco (sobrestimé), entonces el almacenamiento al final de la etapa ( $j$ ) será menor al NAMINO (Nivel de aguas mínimas de operación) lo que implicará un *déficit*, es decir no podré satisfacer las demandas comprometidas, por lo tanto también implica un castigo.

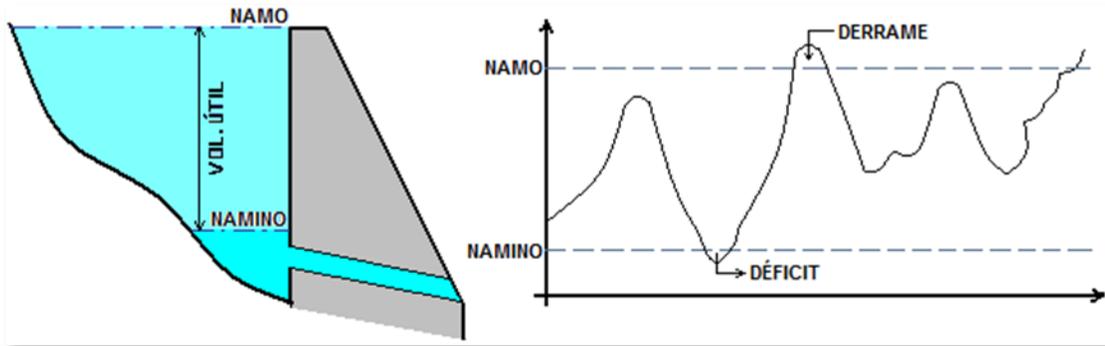


Figura 3.5 Condiciones a evitar en una presa.

Al tratarse de una presa hidroeléctrica, el objetivo principal es la generación de energía, por lo tanto, cada vez que se tenga derrame o déficit se aplican castigos, éstos dependerán de los daños que se ocasionen al derramar aguas abajo o de no satisfacer las demandas. La función objetivo queda de la forma siguiente:

$$F.O = \sum_{n=1}^n b_n^k(i,j) - \sum C_{derr}(derrame) - \sum C_{def}(déficit) \quad (3.9)$$

donde

$b_n^k(i,j)$  beneficio que se obtiene por generación de energía eléctrica.

$C_{derr}(derrame)$  producto del derrame por su respectivo coeficiente de penalización.

$C_{def}(déficit)$  producto del déficit por su respectivo coeficiente de penalización.

El criterio para calcular el beneficio por generación de energía al pasar de un nivel a otro en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  consiste en calcular la energía como:

$$E = \frac{(H_j + H_i)}{2} V \left( \frac{9.81\eta}{3600} \right) \quad (3.10)$$



donde

$E$  energía generada en el intervalo  $\Delta t$ , en KWh

$V$  volumen turbinado en el intervalo  $\Delta t$ , en  $m^3$

$\eta$  eficiencia del sistema

$H_i$  carga al inicio del intervalo  $\Delta t$  referida al nivel del desfogue, en m. (Figura 3.6)

$$H_i = h_i - h_{desfogue}$$

$h_i$  elevación al inicio del intervalo  $\Delta t$  referida al nivel del mar

$H_j$  carga al final del intervalo  $\Delta t$  referida al nivel del desfogue, en m. (Figura 3.6)

$$H_j = h_j - h_{desfogue}$$

$h_j$  elevación al final del intervalo  $\Delta t$  referida al nivel del mar

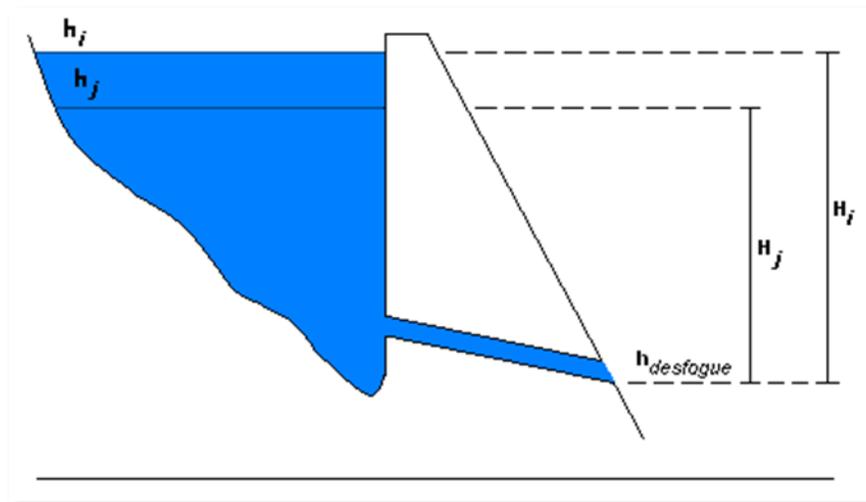


Figura 3.6 Condiciones de carga en una presa.

Para las variables discretizadas, en la ecuación 3.10 el volumen de descarga se expresa en términos de la variable de decisión  $k$ , y las cargas en términos de los estados  $i, j$ .

Un algoritmo de programación dinámica estocástica se resuelve con un proceso hacia atrás, es decir, se define un cierto número de años  $N$  (por ejemplo el correspondiente a la vida útil de la presa) después del cual los beneficios se consideran nulos, y se realiza el cálculo desde ese año  $N$  hasta el año 1. Para entender este procedimiento se muestra la figura 3.7.

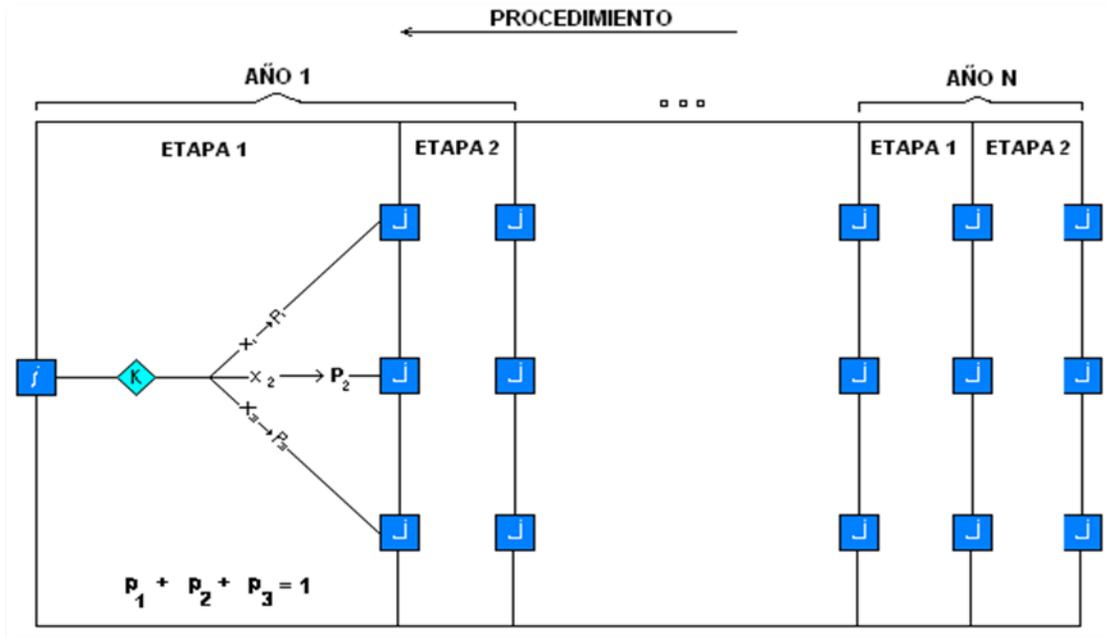


Figura 3.7 Procedimiento de programación dinámica estocástica.

El cálculo del beneficio acumulado se hace en sentido inverso al tiempo debido a que no se sabe con certeza la trayectoria para obtener cierto beneficio (pudo haber sido con cierto ingreso  $x$  y con una extracción  $k$  diferente, hay muchas combinaciones). En la figura 3.4 se observa que se conoce el estado inicial  $i$  con extracción  $k$ , sin embargo para pasar al estado  $j$  existen tres trayectorias diferentes, esto se debe a que el ingreso es aleatorio (depende de la etapa en que se encuentra) y está definida por las probabilidades  $P_1, P_2$  y  $P_3$  de que ingrese  $X_1, X_2$  y  $X_3$  respectivamente, dichas probabilidades deben de sumar la unidad. Esto indica que si se empieza a calcular el beneficio máximo del año  $N$  al año 1 se garantiza que el beneficio total sea el óptimo.

La programación dinámica estocástica establece que el beneficio total en la presa se obtiene con la ecuación recursiva siguiente:

$$B_n^k(i) = \sum P_n^k(i, j) [b_n^k(i, j) + B_{n+1}^*(j)] \tag{3.11}$$

donde

$B_n^k(i)$  beneficio hasta la etapa  $n$ , dada la política de operación  $k$  y el estado inicial  $i$ .



$P_n^k(i, j)$  probabilidades asociadas a cada etapa  $n$ , de tener un ingreso tal que, para la extracción  $k$  se pase del estado inicial  $i$  al estado final  $j$ . Toma en cuenta la ecuación de continuidad  $j_i = i + x - k$ , de tal forma que corresponde a la probabilidad de que  $x$  sea igual a  $j - i + k$ .

$b_n^k(i, j)$  beneficio que se obtiene en la etapa  $n$  si se decide una extracción  $k$  y se pasa del estado inicial ( $i$ ) al final ( $j$ ).

$B_{n+1}^*(j)$  beneficio esperado óptimo hasta la etapa  $n+1$ , dado el estado  $j$ .

$B_n^*(i) = \text{Máx}_k [B_n^k(i)]$  máximo, para todas las extracciones posibles, de los beneficios acumulados  $B_n^k(i)$ .

$k^*(i)$  extracción que corresponde al máximo beneficio.

La ecuación 3.11 se puede descomponer en 2 partes, la primera es aquella en la que el cálculo se repite  $P_n^k(i, j)[b_n^k(i, j)]$  porque las condiciones de probabilidad de ingreso para cada etapa será la misma en todos los años  $N$ , a este cálculo se le llamará  $\phi$  (cálculo de las  $\phi$ ) y se obtiene con la ecuación 3.12; la segunda consiste en calcular el beneficio acumulado  $B_n^k(i) = \phi_n^k(i) + \sum P_n^k(i, j) [B_{n+1}^*(j)]$  asociado a cada extracción  $k$ , y seleccionar el óptimo  $B_n^*(i) = \text{Máx}_k [B_n^k(i)]$  y la extracción correspondiente  $k^*(i)$ .

$$\phi_n^k(i) = \sum P_n^k(i, j) b_n^k(i, j) \quad (3.12)$$

donde

$\phi_n^k(i)$  valor esperado del beneficio inmediato en la etapa  $n$ , dada la condición inicial  $i$  y extracción  $k$ , estos valores dependen de la época del año; para evitar repetir cálculos se calculan solo para las  $m$  etapas en que se divide este. Para cada etapa estos valores son constantes en todos los años.

Por lo tanto la ecuación 3.11 se transforma en:

$$B_n^k(i) = \phi_n^k(i) + \sum P_n^k(i, j) [B_{n+1}^*(j)] \quad (3.13)$$

Después de calcular las  $\phi_n^k(i)$  para las  $n$  etapas, los términos que restan en la ecuación 3.13 se calculan para las  $n$  etapas de la vida útil con el criterio siguiente:

- Se propone un número de años  $N$ , que puede ser el de la vida útil.



- Se calculan las  $\Phi$  para todas las etapas de un año, tomando en cuenta el número de estados y las extracciones. Por ejemplo: si se tiene 2 etapas ( $n$ ), 3 estados ( $l$ ) y extracciones  $K=1,2,3$ , se tiene que encontrar 18 valores de  $\Phi$ .
- Se encuentra el beneficio total en la etapa  $B_n^k(i)$ , el proceso se inicia en orden cronológico descendente. La etapa 2 se inicia con  $B^*(j)=0$ , para todas las  $j$ , por lo que  $B^*(i)$  para la etapa 1 son los máximos de las  $f_i$  de la etapa 2. Este procedimiento se repetirá para años anteriores hasta que el incremento en los beneficios obtenidos para cada valor  $i$  se repita de un ciclo anual al otro. Al cumplirse esta condición el cálculo termina y la política óptima estará dada por los valores  $k_{n,l}^*(i)$  correspondientes al último ciclo calculado.

La ecuación 3.13 es la función objetivo a maximizar; dicha función permite comparar distintas políticas de operación y decidir cuál es la mejor.

Cuando el sistema a optimizar consta de dos presas el problema es encontrar la política de extracciones  $K_{i,n}(i_1, i_2)$  que indique la cantidad que se debe extraer del vaso  $l$  durante la etapa  $n$ , tomando en cuenta los estados iniciales en cada vaso  $(i_1, i_2)$  para que el beneficio acumulado a lo largo de las  $N$  etapas de operación de las presas sea el máximo. Este problema se resuelve utilizando la ecuación de recurrencia siguiente:

$$B_n^{k_1 k_2}(i_1, i_2) = [b_{n, k_1}(i_1, j_1) + b_{n, k_1, k_2}(i_1, j_1, i_2, j_2)] + B_{n+1}^*(j_1, j_2) \quad (3.14)$$

El criterio para encontrar el beneficio total en la etapa es el mismo.

Con objeto de facilitar la comprensión del proceso de aplicación de la programación dinámica estocástica para encontrar la política de operación óptima de una presa, en seguida se resuelve un problema sencillo. Se trata de una *presa que tiene 4 estados, 2 etapas y un máximo de 3 extracciones; se conocen las probabilidades de ingreso en cada etapa*. Es un problema que se puede resolver en Excel o en algún lenguaje de programación, se presenta con el objetivo de que el lector pueda seguirlo para después aplicar la programación dinámica estocástica a un sistema de presas que opera en cascada.



### 1.2.2.1 Aplicación de programación dinámica estocástica en una presa

Se tiene una presa como se muestra en la figura 3.8, consta de 4 estados y se consideran 2 etapas donde el mayor número de extracciones es igual a 3, y la vida útil son 50 años. El beneficio en cada una de las etapas se define mediante la ecuación 3.15.

$$b_k(i, j) = 2k(i + j) - 2(\text{derrame}) - 1(\text{déficit}) \quad (3.15)$$

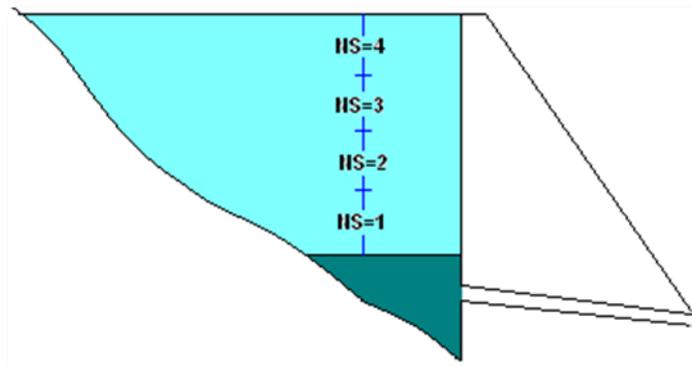


Figura 3.8 Estados de la presa.

Por lo tanto:

NS = 4, número de estados en la presa

NK = 3, número de extracciones en la presa

N = 2, número de etapas

Los ingresos en una presa son aleatorios y están asociados a las probabilidades de la tabla 3.4.

Tabla 3.4 Probabilidades de ingreso a la presa.

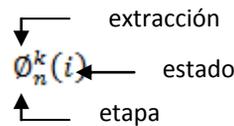
INGRESOS (x)	PROBABILIDAD DE INGRESOS	
	ETAPA 1	ETAPA 2
1	0.3	0.1
2	0.4	0.2
3	0.2	0.4
4	0.1	0.3



El beneficio total en la presa se obtiene con la ecuación 3.13, se sigue el procedimiento explicado en el inciso 3.2.2.

**Paso 1. Cálculo de las fis ( $\emptyset$ )**

Las fis ( $\emptyset$ ) se obtienen con la ecuación 3.12. El cálculo se realiza para cada etapa (N) y estado (S) en el que se encuentre la presa, se considera la extracción (k) y los posibles ingresos. Por lo tanto se obtendrá 12 fis en cada etapa.



➔ Cálculo para la etapa 1 y estado 4,  $\emptyset_1^k(4)$ .

Para  $k=1 \rightarrow \emptyset_1^1(4)$

$$j = i + x - k = 4 + x - 1 = 3 + x$$

Cuando

$j_i$  resulta entre 1 y 4,  $j_{i+1} = j_i$ ; derrame = 0; déficit = 0

$j_i$  mayor que 4,  $j_{i+1} = 4$ ; derrame =  $j_i - 4$ ; déficit = 0

$j_i$  menor que 1,  $j_{i+1} = 1$ ; derrame = 0; déficit =  $1 - j_i$

1	2	3	4	5	6	7	8
x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\emptyset_1^1(4)$
1	4	0	0	4	16	0.3	<b>13.8</b>
2	5	1	0	4	14	0.4	
3	6	2	0	4	12	0.2	
4	7	3	0	4	10	0.1	

Columna 1. Se escriben los ingresos posibles x (volúmenes de agua).



*Columna 2.* Se obtiene el estado al final de la etapa  $j_i$ , que depende del ingreso  $x$ . De acuerdo con la ecuación de continuidad.

$$j = i + x - k = 4 + x - 1 = 3 + x$$

*Columna 3.* Se verifica si hay *derrame* en la presa. El estado máximo en la presa es 4, por lo tanto si  $j > 4$  implica un derrame.

*Columna 4.* Se verifica si hay *déficit* en la presa. El estado mínimo en la presa es 1, por lo tanto si  $j < 1$  implica un déficit.

*Columna 5.* Se obtiene el estado al final de la etapa  $j_{i+1}$ , considerando los derrames y déficits que puedan existir. Es decir, si  $1 < j_i < 4$  entonces  $j_{i+1}$  es igual a  $j_i$ , de lo contrario:

$$j \geq 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

$$j \leq 1 \rightarrow j_{i+1} = 1$$

*Columna 6.* Se calcula el beneficio ( $b$ ) con la ecuación 3.15, donde  $k=1$ ,  $i=4$ ,  $j = j_i+1$ .

*Columna 7.* Se asigna la probabilidad para cada ingreso.

*Columna 8.* Se obtiene el valor de  $\emptyset$  con la ecuación 3.12, que es la suma del producto de los beneficios (columna 6) por las probabilidades (columna 7) de que se obtengan dicho beneficio.

Con el procedimiento anterior se obtiene  $\emptyset_1^k(4)$  para  $k=2,3$ .

$$j = i + x - k = 4 + x - 2 = 2 + x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\emptyset_1^2(4)$
1	3	0	0	3	28	0.3	<b>30.0</b>
2	4	0	0	4	32	0.4	
3	5	1	0	4	30	0.2	
4	6	2	0	4	28	0.1	

$$j = i + x - k = 4 + x - 3 = 1 + x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\emptyset_1^3(4)$
1	2	0	0	2	36	0.3	<b>41.8</b>
2	3	0	0	3	42	0.4	
3	4	0	0	4	48	0.2	
4	5	1	0	4	46	0.1	



➤ Cálculo para la etapa 1 y estado 3,  $\phi_1^k(3)$ .

$$j = i + x - k = 4 + x - 2 = 2 + x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(3)$
1	3	0	0	3	12	0.3	12.6
2	4	0	0	4	14	0.4	
3	5	1	0	4	12	0.2	
4	6	2	0	4	10	0.1	

$$j = i + x - k = 3 + x - 2 = 1 + x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(3)$
1	2	0	0	2	20	0.3	23.8
2	3	0	0	3	24	0.4	
3	4	0	0	4	28	0.2	
4	5	1	0	4	26	0.1	

$$j = i + x - k = 3 + x - 3 = x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(3)$
1	1	0	0	1	24	0.3	30.6
2	2	0	0	2	30	0.4	
3	3	0	0	3	36	0.2	
4	4	0	0	4	42	0.1	

➤ Cálculo para la etapa 1 y estado 2,  $\phi_1^k(2)$ .

$$j = i + x - k = 2 + x - 1 = 1 + x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(2)$
1	2	0	0	2	8	0.3	9.8
2	3	0	0	3	10	0.4	
3	4	0	0	4	12	0.2	
4	5	1	0	4	10	0.1	



$$j = i + x - k = 2 + x - 2 = x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(2)$
1	1	0	0	1	12	0.3	<b>16.4</b>
2	2	0	0	2	16	0.4	
3	3	0	0	3	20	0.2	
4	4	0	0	4	24	0.1	

$$j = i + x - k = 2 + x - 3 = x - 1$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(2)$
1	0	0	1	1	17	0.3	<b>20.1</b>
2	1	0	0	1	18	0.4	
3	2	0	0	2	24	0.2	
4	3	0	0	3	30	0.1	

Analizado por completo el estado 3 y 4 se observa que solo se presentan derrames, sin embargo cuando la presa se encuentra en el estado 2 y se tiene una extracción  $k=3$  cuando el ingreso es  $x=1$  se presenta el primer déficit, esto se debe a que el ingreso es menor que la extracción y el estado de la presa es bajo.

➤ Cálculo para la etapa 1 y estado 1,  $\phi_1^k(1)$ .

$$j = i + x - k = 1 + x - 1 = x$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(1)$
1	1	0	0	1	4	0.3	<b>6.2</b>
2	2	0	0	2	6	0.4	
3	3	0	0	3	8	0.2	
4	4	0	0	4	10	0.1	

$$j = i + x - k = 1 + x - 2 = x - 1$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_1^k(1)$
1	0	0	1	1	7	0.3	<b>9.3</b>
2	1	0	0	1	8	0.4	
3	2	0	0	2	12	0.2	
4	3	0	0	3	16	0.1	



$$j = i + x - k = 1 + x - 3 = x - 2$$

x	$j_i$	Derrame	Déficit	$j_{i+1}$	b	prob	$\phi_i^k(1)$
1	-1	0	2	1	10	0.3	<b>11.6</b>
2	0	0	1	1	11	0.4	
3	1	0	0	1	12	0.2	
4	2	0	0	2	18	0.1	

El procedimiento para obtener  $\phi$  para la etapa 2 es el mismo, lo diferente son las probabilidades de ingreso. Los resultados del cálculo de  $\phi$  para las 2 etapas se resumen en la tabla 3.5.

Tabla 3.5 Resultado del cálculo de  $\phi$ .

NS	K		
		ETAPA 1	ETAPA 2
4	1	13.8	12.2
	2	30.0	29.6
	3	41.8	45
3	1	12.6	11.8
	2	23.8	25.8
	3	30.6	35.4
2	1	9.8	10.6
	2	16.4	19.6
	3	20.1	23.9
1	1	6.2	7.8
	2	9.3	11.9
	3	11.6	13.4

**Paso 2. Cálculo del beneficio total en la etapa  $B_n^k(i)$ .**

El proceso se inicia en orden cronológico descendente, por lo tanto se iniciará en el año 50 con la etapa 2; después la etapa 1, posteriormente el año 49 y así sucesivamente hasta encontrar la política de operación óptima. El beneficio total en la etapa se obtiene con la ecuación 3.13



➔ AÑO N=50

Etapa 2

Para obtener el  $B_n^k(i)$  de la etapa 2 se considera que el beneficio obtenido al final de la vida útil es nulo por lo que  $B_{n+1}^*(j) = 0$ , y la ecuación 3.13 se reduce a:

$$B_n^k(i) = \emptyset_n^k(i)$$

Para seguir con el cálculo de la etapa 1, se necesita conocer el beneficio máximo en la etapa 2 dada una extracción óptima  $\{B_n^*(i) = \text{Máx}_k[B_n^k(i)]\}$ , que para fines prácticos le llamaremos  $B_{ast}$ . De la tabla 3.5 se observa que para el estado  $i=4$  el beneficio máximo de 45 se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ , para  $i=3$  se obtiene 35.4 con  $k=3$ , y así sucesivamente para todos los estados de la presa, de esta forma se obtiene la tabla 3.6.

Tabla 3.6 $B_{ast}$ en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 50		
<b>I</b>	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	3	<b>45.00</b>
<b>3</b>	3	<b>35.40</b>
<b>2</b>	3	<b>23.90</b>
<b>1</b>	3	<b>13.40</b>

Etapa 1

En esta etapa el  $B_{n+1}^*(j)$  ya tiene un valor que corresponde a los obtenidos en la tabla 3.6. Por lo tanto el cálculo de  $B_n^k(i)$  se puede explicar de la forma siguiente:

Para  $i=4; k=1$

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>x</b>	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(4)$
1	4	45	13.50	<b>58.80</b>
2	4	45	18.00	
3	4	45	9.00	
4	4	45	4.50	

beneficio esperado                      45.00  
beneficio en la etapa  $\emptyset_1^1(4)$             13.80



*Columna 1.* Se escriben los ingresos posibles  $x$  (volúmenes de agua).

*Columna 2.* Se obtiene el estado al final de la etapa  $j_i+1$ , considerando los derrames y déficits que se tengan. Son los valores que se obtuvieron en la columna 5 del cálculo de las  $\emptyset$ , para este caso de la etapa 1.

*Columna 3.* Se anota el  $B_n^*(i) = \text{Máx}_k [B_n^k(i)]$  conocido como  $B_{ast}$  que se obtuvo en la etapa 2 (tabla 3.6) según el estado ( $j_{i+1}$ ) en que se encuentre, para este caso en particular para todos los ingresos se llega al estado final 4, por lo tanto el  $B_{ast}$  es igual a 45 en todos los casos.

*Columna 4.* Se realiza el producto de la probabilidad de ingreso en la etapa en estudio (tabla 3.4) por la  $B_{ast}$  (columna 3).

*Columna 5.* Se obtiene el beneficio total en la etapa  $B_n^k(i)$ , que es la suma del beneficio esperado más el beneficio en la etapa. El beneficio esperado es igual a la suma del producto de las probabilidades de ingreso por las  $B_{ast}$   $\{\sum P_n^k(i, j) [B_{n+1}^*(j)]\}$ , en otras palabras es la suma de la columna 4. El beneficio en la etapa  $[\emptyset_n^k(i)]$  es el que se obtuvo en el paso 1 dependiendo del estado y extracción, para este caso es  $\emptyset_1^1(4)$ , ver tabla 3.5.

Para  $i=4 ; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(4)$
1	3	35.4	10.62	72.12
2	4	45	18.00	
3	4	45	9.00	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado*                      42.12  
*beneficio en la etapa  $\emptyset_1^2(4)$ ,*              30.00

El procedimiento fue el mismo, pero se tienen las observaciones siguientes:

- Para  $k=2$ , se observa que el estado al final de la etapa empieza a variar, por ejemplo, para un ingreso  $x=1$  el estado al final de la etapa es 3, por lo tanto  $B_{ast}$  es diferente (ver tabla 3.6).
- El beneficio en la etapa es  $\emptyset_1^2(4)$ , ver tabla 3.5.



Para  $i=4$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^3(4)$
1	2	23.9	7.17	<b>76.63</b>
2	3	35.4	14.16	
3	4	45	9.00	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado*                      34.83  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(4)$             41.80

Una vez calculado el beneficio total  $B_n^k(i)$  para todas las extracciones posibles del estado 4, se obtiene el beneficio máximo ( $B_{ast}$ ) dada la extracción óptima ( $k_{ast}$ ). En este caso, para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 76.63$  se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ .

De esta forma se procederá para obtener el beneficio total para los estados  $i=3,2,1$ . Así mismo para obtener  $B_{ast}$  y  $K_{ast}$ .

Para  $i=3$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^1(3)$
1	3	35.4	10.62	<b>54.72</b>
2	4	45	18.00	
3	4	45	9.00	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado*                      42.12  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(3)$             12.60

Para  $i=3$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^2(3)$
1	2	23.9	7.17	<b>58.63</b>
2	3	35.4	14.16	
3	4	45	9.00	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado*                      34.83  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(3)$             23.80



Para  $i=3$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(3)$
1	1	13.4	4.02	<b>55.76</b>
2	2	23.9	9.56	
3	3	35.4	7.08	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado* 25.16  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(3)$  30.60

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 58.63$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=2$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(2)$
1	2	23.9	7.17	<b>44.63</b>
2	3	35.4	14.16	
3	4	45	9.00	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado* 34.83  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(2)$  9.80

Para  $i=2$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(2)$
1	1	13.4	4.02	<b>41.56</b>
2	2	23.9	9.56	
3	3	35.4	7.08	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado* 25.16  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(2)$  16.40



Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(2)$
1	1	13.4	4.02	<b>37.80</b>
2	1	13.4	5.36	
3	2	23.9	4.78	
4	3	35.4	3.54	

*beneficio esperado*                      17.70  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(2)$             20.10

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 44.63$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(1)$
1	1	13.4	4.02	<b>31.36</b>
2	2	23.9	9.56	
3	3	35.4	7.08	
4	4	45	4.50	

*beneficio esperado*                      25.16  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(1)$             6.20

Para  $i=1$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(1)$
1	1	13.4	4.02	<b>27.00</b>
2	1	13.4	5.36	
3	2	23.9	4.78	
4	3	35.4	3.54	

*beneficio esperado*                      17.70  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(1)$             9.30



Para  $i=1$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^3(1)$
1	1	13.4	4.02	<b>26.05</b>
2	1	13.4	5.36	
3	1	13.4	2.68	
4	2	23.9	2.39	

*beneficio esperado* 14.45  
*beneficio en la etapa*  $\phi_1^3(1)$  11.60

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 31.36$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.7 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 1.

**Tabla 3.7  $B_{ast}$  en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 50**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	3	<b>76.63</b>
<b>3</b>	2	<b>58.63</b>
<b>2</b>	1	<b>44.63</b>
<b>1</b>	1	<b>31.36</b>

Hasta aquí se ha analizado un año completo, por estrategia se aplica el truco de restar el  $B_{ast}$  menor con el fin de no acumular valores muy grandes y para revisar el momento en el que los resultados empiezan a repetirse (se comparan entre etapas, es decir, etapa 1 vs etapa 1 del año siguiente, etapa 2 vs etapa 2 del año siguiente). Al restar el valor mínimo ( $B_{ast}=31.36$ ) el  $B_{ast}$  de la etapa 1 queda como se muestra en la tabla 3.8

**Tabla 3.8  $B_{ast} - B_{ast\text{mínimo}}$  en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 50**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	3	<b>45.27</b>
<b>3</b>	2	<b>27.27</b>
<b>2</b>	1	<b>13.27</b>
<b>1</b>	1	<b>00.00</b>



➔ AÑO N=49

Etapa 2

Para calcular el beneficio total de esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.8. El procedimiento a seguir es el mismo, recordando que las probabilidades de ingreso y  $\emptyset$  dependen de la etapa en estudio.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(4)$
1	4	45.27	4.53	<b>57.47</b>
2	4	45.27	9.05	
3	4	45.27	18.11	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado*                      45.27  
*beneficio en la etapa  $\emptyset_2^1(4)$*                       12.20

*Columna 3.* Se anota el  $B_n^*(i) = \text{Máx}_k [B_n^k(i)]$  conocido como  $B_{ast}$  que se obtuvo en la etapa 1 del año 50 (tabla 3.8) según el estado ( $j_{i+1}$ ) en que se encuentre, para este caso en particular para todos los ingresos se llega al estado final 4, por lo tanto el  $B_{ast}$  es igual a 45.27 en todos los casos.

*Columna 5.* Se obtiene el beneficio total en la etapa  $B_n^k(i)$ , que es la suma del beneficio esperado más el beneficio en la etapa. El beneficio esperado es igual a la suma del producto de las probabilidades de ingreso por las  $B_{ast}$   $\{\sum P_n^k(i, j) [B_{n+1}^*(j)]\}$ , en otras palabras es la suma de la columna 4. El beneficio en la etapa  $[\emptyset_n^k(i)]$  es el que se obtuvo en el paso 1 dependiendo del estado y extracción, para este caso es  $\emptyset_2^1(4)$ , ver tabla 3.5.



Para  $i=4$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(4)$
1	3	27.27	2.73	<b>73.07</b>
2	4	45.27	9.05	
3	4	45.27	18.11	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado* 43.47  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(4)$  29.60

Para  $i=4$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(4)$
1	2	13.27	1.33	<b>83.47</b>
2	3	27.27	5.45	
3	4	45.27	18.11	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado* 38.47  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^3(4)$  45.00

Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 83.47$  se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ .

Para  $i=3$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(3)$
1	3	27.27	2.73	<b>55.27</b>
2	4	45.27	9.05	
3	4	45.27	18.11	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado* 43.47  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(3)$  11.80



Para  $i=3$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_2^2(3)$
1	2	13.27	1.33	<b>64.27</b>
2	3	27.27	5.45	
3	4	45.27	18.11	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado*                    38.47  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(3)$*         25.80

Para  $i=3$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_2^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>62.54</b>
2	2	13.27	2.65	
3	3	27.27	10.91	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado*                    27.14  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(3)$*         35.40

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 64.27$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=2$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_2^1(2)$
1	2	13.27	1.33	<b>49.07</b>
2	3	27.27	5.45	
3	4	45.27	18.11	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado*                    38.47  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(2)$*         10.60



Para  $i=2$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>46.74</b>
2	2	13.27	2.65	
3	3	27.27	10.91	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado*                    27.14  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(2)$*             19.60

Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>37.39</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	13.27	5.31	
4	3	27.27	8.18	

*beneficio esperado*                    13.49  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(2)$*             23.90

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 49.07$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>34.94</b>
2	2	13.27	2.65	
3	3	27.27	10.91	
4	4	45.27	13.58	

*beneficio esperado*                    27.14  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(1)$*             7.80



Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>25.39</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	13.27	5.31	
4	3	27.27	8.18	

*beneficio esperado*                      13.49  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*             11.90

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>17.38</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	13.27	3.98	

*beneficio esperado*                      3.98  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(1)$*             13.40

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 34.94$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.9 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 2 del año en estudio.

**Tabla 3.9  $B_{ast}$  en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 49**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	3	<b>83.47</b>
<b>3</b>	2	<b>64.27</b>
<b>2</b>	1	<b>49.07</b>
<b>1</b>	1	<b>34.94</b>



Se ha analizado un año más, recordando la estrategia de restar el valor mínimo de  $B_{ast}$  se forma la tabla 3.10.

Tabla 3.10  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 49

<b>I</b>	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	3	<b>48.53</b>
<b>3</b>	2	<b>29.33</b>
<b>2</b>	1	<b>14.13</b>
<b>1</b>	1	<b>00.00</b>

### Etapa 1

En esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.10.

Para  $i=4; k=1$

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(4)$
1	4	48.53	14.56	<b>62.33</b>
2	4	48.53	19.41	
3	4	48.53	9.71	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado* 48.53  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(4)$  13.80

Para  $i=4; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(4)$
1	3	29.33	8.80	<b>72.77</b>
2	4	48.53	19.41	
3	4	48.53	9.71	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado* 42.77  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(4)$  30.00



Para  $i=4$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^3(4)$
1	2	14.13	4.24	<b>72.33</b>
2	3	29.33	11.73	
3	4	48.53	9.71	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado* 30.53  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(4)$  41.80

Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 72.77$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=3$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^1(3)$
1	3	29.33	8.80	<b>55.37</b>
2	4	48.53	19.41	
3	4	48.53	9.71	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado* 42.77  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(3)$  12.60

Para  $i=3$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^2(3)$
1	2	14.13	4.24	<b>54.33</b>
2	3	29.33	11.73	
3	4	48.53	9.71	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado* 30.53  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(3)$  23.80



Para  $i=3; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^3(3)$
1	1	0.00	0.00	46.97
2	2	14.13	5.65	
3	3	29.33	5.87	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado*                      16.37  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(3)$             30.60

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 55.37$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=2; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^1(2)$
1	2	14.13	4.24	40.33
2	3	29.33	11.73	
3	4	48.53	9.71	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado*                      30.53  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(2)$             9.80

Para  $i=2; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^2(2)$
1	1	0.00	0.00	32.77
2	2	14.13	5.65	
3	3	29.33	5.87	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado*                      16.37  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(2)$             16.40



Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>25.86</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.13	2.83	
4	3	29.33	2.93	

*beneficio esperado*                      5.76  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(2)$             20.10

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 40.33$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>22.57</b>
2	2	14.13	5.65	
3	3	29.33	5.87	
4	4	48.53	4.85	

*beneficio esperado*                      16.37  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(1)$             6.20

Para  $i=1$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>15.06</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.13	2.83	
4	3	29.33	2.93	

*beneficio esperado*                      5.76  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(1)$             9.30



Para  $i=1$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>13.01</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	14.13	1.41	

*beneficio esperado*                      1.41  
*beneficio en la etapa*  $B_2^3(1)$             11.60

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 22.57$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.11 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 1 del año en estudio, con el truco de restarle el valor mínimo de  $B_{ast}$ .

**Tabla 3.11  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 49**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	2	<b>50.20</b>
<b>3</b>	1	<b>32.80</b>
<b>2</b>	1	<b>17.76</b>
<b>1</b>	1	<b>00.00</b>

Para revisar si el proceso ha terminado se comparan los resultados de  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo de la etapa 1 del año 50 vs etapa 1 del año 49 (tabla 3.8 vs tabla 3.11); en este caso se observa que aun existe variación lo que indica que aun no se ha encontrado la política óptima. Hasta este año no se compara la etapa 2 porque el truco solo se aplicó en el año 49, sin embargo en los años posteriores si se hará la comparación entre etapas.



➔ AÑO N=48

Etapa 2

Para calcular el beneficio total de esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.11. El procedimiento a seguir es el mismo.

Para  $i=4$ ;  $k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(4)$
1	4	50.20	5.02	<b>62.40</b>
2	4	50.20	10.04	
3	4	50.20	20.08	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado* 50.20  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(4)$*  12.20

Para  $i=4$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^2(4)$
1	3	32.80	3.28	<b>78.06</b>
2	4	50.20	10.04	
3	4	50.20	20.08	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado* 48.46  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(4)$*  29.60

Para  $i=4$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^3(4)$
1	2	17.76	1.78	<b>88.47</b>
2	3	32.80	6.56	
3	4	50.20	20.08	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado* 43.47  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(4)$*  45.00



Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 88.47$  se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(3)$
1	3	32.80	3.28	<b>60.26</b>
2	4	50.20	10.04	
3	4	50.20	20.08	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado*            48.46  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(3)$     11.80

Para  $i=3; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^2(3)$
1	2	17.76	1.78	<b>69.27</b>
2	3	32.80	6.56	
3	4	50.20	20.08	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado*            43.47  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(3)$     25.80

Para  $i=3; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>67.13</b>
2	2	17.76	3.55	
3	3	32.80	13.12	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado*            31.73  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^3(3)$     35.40



Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 69.27$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=2; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(2)$
1	2	17.76	1.78	<b>54.07</b>
2	3	32.80	6.56	
3	4	50.20	20.08	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado*      43.47  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(2)$*       10.60

Para  $i=2; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>51.33</b>
2	2	17.76	3.55	
3	3	32.80	13.12	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado*      31.73  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(2)$*       19.60

Para  $i=2; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>40.84</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.76	7.10	
4	3	32.80	9.84	

*beneficio esperado*      16.94  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(2)$*       23.90



Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 54.07$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>39.53</b>
2	2	17.76	3.55	
3	3	32.80	13.12	
4	4	50.20	15.06	

*beneficio esperado*            31.73  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(1)$     7.80

Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>28.84</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.76	7.10	
4	3	32.80	9.84	

*beneficio esperado*            16.94  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(1)$     11.90

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>18.73</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	17.76	5.33	

*beneficio esperado*            5.33  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^3(1)$     13.40



Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 39.53$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.12 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 2 del año en estudio, con el truco de restarle el valor mínimo de  $B_{ast}$ .

Tabla 3.12  $B_{ast} - B_{ast\ mínimo}$  en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 48

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
4	3	48.94
3	2	29.74
2	1	14.54
1	1	00.00

### Etapa 1

En esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.12.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob \cdot B_{ast}$	$B_1^1(4)$
1	4	48.94	14.68	<b>62.74</b>
2	4	48.94	19.58	
3	4	48.94	9.79	
4	4	48.94	4.89	

beneficio esperado 48.94  
beneficio en la etapa  $B_1^1(4)$  13.80



Para  $i=4$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^2(4)$
1	3	29.74	8.92	<b>73.18</b>
2	4	48.94	19.58	
3	4	48.94	9.79	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado*            43.18  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(4)$     30.00

Para  $i=4$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^3(4)$
1	2	14.54	4.36	<b>72.74</b>
2	3	29.74	11.90	
3	4	48.94	9.79	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado*            30.94  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(4)$     41.80

Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 73.18$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=3$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_1^1(3)$
1	3	29.74	8.92	<b>55.78</b>
2	4	48.94	19.58	
3	4	48.94	9.79	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado*            43.18  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(3)$     12.60



Para  $i=3$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^2(3)$
1	2	14.54	4.36	<b>54.74</b>
2	3	29.74	11.90	
3	4	48.94	9.79	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado* 30.94  
*beneficio en la etapa  $\Phi_1^2(3)$*  23.80

Para  $i=3$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>47.26</b>
2	2	14.54	5.82	
3	3	29.74	5.95	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado* 16.66  
*beneficio en la etapa  $\Phi_1^3(3)$*  30.60

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 55.78$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=2$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^1(2)$
1	2	14.54	4.36	<b>40.74</b>
2	3	29.74	11.90	
3	4	48.94	9.79	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado* 30.94  
*beneficio en la etapa  $\Phi_1^1(2)$*  9.80



Para  $i=2$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>33.06</b>
2	2	14.54	5.82	
3	3	29.74	5.95	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado*            16.66  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(2)$     16.40

Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>25.98</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.54	2.91	
4	3	29.74	2.97	

*beneficio esperado*            5.88  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(2)$     20.10

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 40.74$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>22.86</b>
2	2	14.54	5.82	
3	3	29.74	5.95	
4	4	48.94	4.89	

*beneficio esperado*            16.66  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(1)$     6.20



Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>15.18</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.54	2.91	
4	3	29.74	2.97	

*beneficio esperado*                      5.88  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*             9.30

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>13.05</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	14.54	1.45	

*beneficio esperado*                      1.45  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(1)$*             11.60

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 22.86$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.13 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 1 del año en estudio con el truco de restarle el valor mínimo de  $B_{ast}$ .

**Tabla 3.13  $B_{ast} - B_{ast\text{mínimo}}$  en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 48**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	2	<b>50.32</b>
<b>3</b>	1	<b>32.92</b>
<b>2</b>	1	<b>17.88</b>
<b>1</b>	1	<b>00.00</b>



Al terminar otro año se realiza la comparación de los resultados de  $B_{ast\ mínimo}$  de la etapa 1 y 2 del año anterior (año 49) con el año presente (año 48); en otras palabras se compara la tabla 3.10 vs 3.12 que corresponden a la etapa 2 y la tabla 3.11 vs 3.13 a la etapa 1. Hasta este año existe una variación mínima en los resultados.

➔ **AÑO N=47**

Etapa 2

Para calcular el beneficio total de esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.13. El procedimiento a seguir es el mismo.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_2^1(4)$
1	4	50.32	5.03	62.52
2	4	50.32	10.06	
3	4	50.32	20.13	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      50.32  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(4)$             12.20

Para  $i=4; k=2$

x	j <sub>i+1</sub>	B <sub>ast</sub> (j <sub>i+1</sub> )	prob*B <sub>ast</sub>	B <sub>2</sub> <sup>2</sup> (4)
1	3	32.92	3.29	78.18
2	4	50.32	10.06	
3	4	50.32	20.13	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      48.58  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(4)$             29.60



Para  $i=4; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(4)$
1	2	17.88	1.79	<b>88.60</b>
2	3	32.92	6.58	
3	4	50.32	20.13	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(4)$*                       45.00

Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 88.60$  se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(3)$
1	3	32.92	3.29	<b>60.38</b>
2	4	50.32	10.06	
3	4	50.32	20.13	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      48.58  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(3)$*                       11.80

Para  $i=3; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(3)$
1	2	17.88	1.79	<b>69.40</b>
2	3	32.92	6.58	
3	4	50.32	20.13	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(3)$*                       25.80



Para  $i=3$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>67.24</b>
2	2	17.88	3.58	
3	3	32.92	13.17	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      31.84  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(3)$*             35.40

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 69.40$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=2$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(2)$
1	2	17.88	1.79	<b>54.20</b>
2	3	32.92	6.58	
3	4	50.32	20.13	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(2)$*             10.60

Para  $i=2$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>51.44</b>
2	2	17.88	3.58	
3	3	32.92	13.17	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*                      31.84  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(2)$*             19.60



Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>40.93</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.88	7.15	
4	3	32.92	9.88	

*beneficio esperado*            17.03  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(2)$*     23.90

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 54.20$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>39.64</b>
2	2	17.88	3.58	
3	3	32.92	13.17	
4	4	50.32	15.10	

*beneficio esperado*            31.84  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(1)$*     7.80

Para  $i=1$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>28.93</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.88	7.15	
4	3	32.92	9.88	

*beneficio esperado*            17.03  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*     11.90



Para  $i=1$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>18.76</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	17.88	5.36	

*beneficio esperado*                      5.33  
*beneficio en la etapa  $B_2^3(1)$*             13.40

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 39.53$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.14 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 2 del año en estudio, con el truco de restarle el valor mínimo de  $B_{ast}$ .

**Tabla 3.14  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 47**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	3	<b>48.96</b>
<b>3</b>	2	<b>29.76</b>
<b>2</b>	1	<b>14.56</b>
<b>1</b>	1	<b>0.00</b>



Etapa 1

En esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.14.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^1(4)$
1	4	48.96	14.69	<b>62.76</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*                      48.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(4)$             13.80

Para  $i=4; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^2(4)$
1	3	29.76	8.93	<b>73.20</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*                      43.20  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(4)$             30.00

Para  $i=4; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^3(4)$
1	2	14.56	4.37	<b>72.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*                      30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(4)$             41.80



Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 73.20$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(3)$
1	3	29.76	8.93	<b>55.80</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            43.20  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(3)$     12.60

Para  $i=3; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(3)$
1	2	14.56	4.37	<b>54.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(3)$     23.80

Para  $i=3; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>47.27</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(3)$     30.60



Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 55.80$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=2; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(2)$
1	2	14.56	4.37	<b>40.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(2)$         9.80

Para  $i=2; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>33.07</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(2)$         16.40

Para  $i=2; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>25.99</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.56	2.91	
4	3	29.76	2.98	

*beneficio esperado*            5.89  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(2)$         20.10



Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 40.76$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>22.87</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*                      16.67  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(1)$*                       6.20

Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>15.19</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.56	2.91	
4	3	29.76	2.98	

*beneficio esperado*                      5.89  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*                       9.30

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>13.06</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	14.56	1.46	

*beneficio esperado*                      1.46  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(1)$*                       11.60



Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 22.87$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.15 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 1 del año en estudio con el truco de restarle el  $B_{ast}$  mínimo.

**Tabla 3.15  $B_{ast} - B_{ast\text{mínimo}}$  en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 47**

I	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	2	<b>50.33</b>
<b>3</b>	1	<b>32.93</b>
<b>2</b>	1	<b>17.89</b>
<b>1</b>	1	<b>00.00</b>

Para saber si se ha encontrado la política de operación óptima se compara la tabla 3.12 vs 3.14 que corresponden a la etapa 2, y la tabla 3.13 vs 3.15 a la etapa 1, se observa que aun existe una variación mínima entre resultados.

➔ **AÑO N=46**

Etapa 2

Para calcular el beneficio total de esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.15. El procedimiento a seguir es el mismo.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
x	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(4)$
1	4	50.33	5.03	<b>62.53</b>
2	4	50.33	10.07	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      50.33  
*beneficio en la etapa*  $B_2^1(4)$             12.20



Para  $i=4; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(4)$
1	3	32.93	3.29	<b>78.19</b>
2	4	50.33	10.07	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado* 48.59  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(4)$*  29.60

Para  $i=4; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(4)$
1	2	17.89	1.79	<b>88.60</b>
2	3	32.93	6.59	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado* 43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(4)$*  45.00

Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 88.60$  se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(3)$
1	3	32.93	3.29	<b>60.39</b>
2	4	50.33	10.07	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado* 48.59  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(3)$*  11.80



Para  $i=3$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(3)$
1	2	17.89	1.79	<b>69.40</b>
2	3	32.93	6.59	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(3)$*             25.80

Para  $i=3$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>67.25</b>
2	2	17.89	3.58	
3	3	32.93	13.17	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      31.85  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(3)$*             35.40

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 69.40$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=2$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(2)$
1	2	17.89	1.79	<b>54.20</b>
2	3	32.93	6.59	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(2)$*             10.60



Para  $i=2$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>51.45</b>
2	2	17.89	3.58	
3	3	32.93	13.17	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      31.85  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(2)$             19.60

Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>40.93</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.89	7.15	
4	3	32.93	9.88	

*beneficio esperado*                      17.03  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^3(2)$             23.90

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 54.20$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>39.65</b>
2	2	17.89	3.58	
3	3	32.93	13.17	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      31.85  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(1)$             7.80



Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>28.93</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.89	7.15	
4	3	32.93	9.88	

*beneficio esperado*                      17.03  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*             11.90

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>18.77</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	17.89	5.37	

*beneficio esperado*                      5.37  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(1)$*             13.40

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 39.65$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.16 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 2 del año en estudio, con el truco de restarle el  $B_{ast}$  mínimo.

**Tabla 3.16  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 46**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
4	3	<b>48.96</b>
3	2	<b>29.76</b>
2	1	<b>14.56</b>
1	1	<b>0.00</b>



Etapa 1

En esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.16.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^1(4)$
1	4	48.96	14.69	<b>62.76</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado* 48.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(4)$  13.80

Para  $i=4; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^2(4)$
1	3	29.76	8.93	<b>73.20</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado* 43.20  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(4)$  30.00

Para  $i=4; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	$prob * B_{ast}$	$B_1^3(4)$
1	2	14.56	4.37	<b>72.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado* 30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(4)$  41.80



Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 73.20$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(3)$
1	3	29.76	8.93	<b>55.80</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*      43.20  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(3)$       12.60

Para  $i=3; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(3)$
1	2	14.56	4.37	<b>54.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*      30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(3)$       23.80

Para  $i=3; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>47.27</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*      16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(3)$       30.60



Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 55.80$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=2; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(2)$
1	2	14.56	4.37	<b>40.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(2)$         9.80

Para  $i=2; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>33.07</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(2)$         16.40

Para  $i=2; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>25.99</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.56	2.91	
4	3	29.76	2.98	

*beneficio esperado*            5.89  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(2)$         20.10



Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 40.76$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>22.87</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*                      16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^1(1)$             6.20

Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>15.19</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.56	2.91	
4	3	29.76	2.98	

*beneficio esperado*                      5.89  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^2(1)$             9.30

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>13.06</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	14.56	1.46	

*beneficio esperado*                      1.46  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_2^3(1)$             11.60

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 22.87$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .



La tabla 3.17 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 1 del año en estudio con el truco de restarle el valor mínimo  $B_{ast}$ .

**Tabla 3.17  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 46**

I	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
<b>4</b>	2	<b>50.33</b>
<b>3</b>	1	<b>32.93</b>
<b>2</b>	1	<b>17.89</b>
<b>1</b>	1	<b>00.00</b>

Hasta aquí se han analizado 5 años, se comparan los resultados de  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo de las 2 etapas del año anterior con el año presente; es decir se compara la tabla 3.14 que corresponde a la etapa 2 del año 47 con la tabla 3.16 correspondiente a la etapa 2 del año 46, y la tabla 3.15 con la tabla 3.17 que corresponden a la etapa 1, se observa que los resultados empiezan a repetirse, ya no existe variación. Para comprobar que ya no existirán variaciones se analizará un año más.

➔ **AÑO N=45**

Etapa 2

Para calcular el beneficio total de esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.17. El procedimiento a seguir es el mismo.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(4)$
1	4	50.33	5.03	<b>62.53</b>
2	4	50.33	10.07	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      50.33  
*beneficio en la etapa*  $B_2^1(4)$             12.20



Para  $i=4; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(4)$
1	3	32.93	3.29	<b>78.19</b>
2	4	50.33	10.07	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado* 48.59  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(4)$*  29.60

Para  $i=4; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(4)$
1	2	17.89	1.79	<b>88.60</b>
2	3	32.93	6.59	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado* 43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(4)$*  45.00

Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 88.60$  se obtiene con una extracción óptima  $k=3$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(3)$
1	3	32.93	3.29	<b>60.39</b>
2	4	50.33	10.07	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado* 48.59  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(3)$*  11.80



Para  $i=3$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(3)$
1	2	17.89	1.79	<b>69.40</b>
2	3	32.93	6.59	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                    43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(3)$*         25.80

Para  $i=3$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>67.25</b>
2	2	17.89	3.58	
3	3	32.93	13.17	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                    31.85  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(3)$*         35.40

Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 69.40$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=2$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(2)$
1	2	17.89	1.79	<b>54.20</b>
2	3	32.93	6.59	
3	4	50.33	20.13	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                    43.60  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(2)$*         10.60



Para  $i=2$ ;  $k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>51.45</b>
2	2	17.89	3.58	
3	3	32.93	13.17	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      31.85  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(2)$*             19.60

Para  $i=2$ ;  $k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>40.93</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.89	7.15	
4	3	32.93	9.88	

*beneficio esperado*                      17.03  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(2)$*             23.90

Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 54.20$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1$ ;  $k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>39.65</b>
2	2	17.89	3.58	
3	3	32.93	13.17	
4	4	50.33	15.10	

*beneficio esperado*                      31.85  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(1)$*             7.80



Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>28.93</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	17.89	7.15	
4	3	32.93	9.88	

*beneficio esperado*                      17.03  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*             11.90

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob*B <sub>ast</sub>	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>18.77</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	17.89	5.37	

*beneficio esperado*                      5.37  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(1)$*             13.40

Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 39.65$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.18 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 2 del año en estudio, con el truco de restarle el  $B_{ast}$  mínimo.

**Tabla 3.18  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 2 para todos los estados de la presa. Año 45**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
4	3	<b>48.96</b>
3	2	<b>29.76</b>
2	1	<b>14.56</b>
1	1	<b>0.00</b>



Etapa 1

En esta etapa se consideran los resultados de  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  de la tabla 3.18.

Para  $i=4; k=1$

1	2	3	4	5
$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(4)$
1	4	48.96	14.69	<b>62.76</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado* 48.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(4)$  13.80

Para  $i=4; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(4)$
1	3	29.76	8.93	<b>73.20</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado* 43.20  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(4)$  30.00

Para  $i=4; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(4)$
1	2	14.56	4.37	<b>72.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado* 30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(4)$  41.80



Para el estado  $i=4$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 73.20$  se obtiene con una extracción óptima  $k=2$ .

Para  $i=3; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(3)$
1	3	29.76	8.93	<b>55.80</b>
2	4	48.96	19.58	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            43.20  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(3)$     12.60

Para  $i=3; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(3)$
1	2	14.56	4.37	<b>54.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(3)$     23.80

Para  $i=3; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(3)$
1	1	0.00	0.00	<b>47.27</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(3)$     30.60



Para el estado  $i=3$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 55.80$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=2; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^1(2)$
1	2	14.56	4.37	<b>40.76</b>
2	3	29.76	11.90	
3	4	48.96	9.79	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            30.96  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^1(2)$         9.80

Para  $i=2; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^2(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>33.07</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            16.67  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^2(2)$         16.40

Para  $i=2; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_1^3(2)$
1	1	0.00	0.00	<b>25.99</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.56	2.91	
4	3	29.76	2.98	

*beneficio esperado*            5.89  
*beneficio en la etapa*  $\Phi_1^3(2)$         20.10



Para el estado  $i=2$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 40.76$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

Para  $i=1; k=1$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^1(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>22.87</b>
2	2	14.56	5.82	
3	3	29.76	5.95	
4	4	48.96	4.90	

*beneficio esperado*            16.67  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^1(1)$*         6.20

Para  $i=1; k=2$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^2(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>15.19</b>
2	1	0.00	0.00	
3	2	14.56	2.91	
4	3	29.76	2.98	

*beneficio esperado*            5.89  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^2(1)$*         9.30

Para  $i=1; k=3$

$x$	$j_{i+1}$	$B_{ast}(j_{i+1})$	prob* $B_{ast}$	$B_2^3(1)$
1	1	0.00	0.00	<b>13.06</b>
2	1	0.00	0.00	
3	1	0.00	0.00	
4	2	14.56	1.46	

*beneficio esperado*            1.46  
*beneficio en la etapa  $\Phi_2^3(1)$*         11.60



Para el estado  $i=1$  el beneficio máximo  $B_{ast} = 22.87$  se obtiene con una extracción óptima  $k=1$ .

La tabla 3.19 muestra los resultados  $B_{ast}$  y  $k_{ast}$  obtenidos en la etapa 1 del año en estudio con el truco de restarle el  $B_{ast}$  mínimo.

**Tabla 3.19  $B_{ast} - B_{ast}$  mínimo en la etapa 1 para todos los estados de la presa. Año 45**

$i$	$k_{ast}$	$B_{ast}(i)$
4	2	50.33
3	1	32.93
2	1	17.89
1	1	00.00

Se compara la tabla 3.16 con la 3.18 correspondientes a la etapa 2, y la tabla 3.17 con la 3.19 a la etapa 1, se observa que los valores se mantienen constantes, ya no existe variación, esto indica que se ha encontrado la política óptima.

La tabla 3.20 muestra de forma resumida el beneficio máximo que se obtiene dado una extracción óptima para los 6 años calculados. Se observa que después de realizar el 4to cálculo los datos se empiezan a repetir, para corroborar se hace el cálculo de 2 años más y el resultado es evidente, esto quiere decir que se ha encontrado la política de operación óptima.



POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALV,  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA



Tabla 3.20 Resumen del beneficio máximo dado una extracción óptima para los 6 años calculados.

AÑO	ETAPA 2								ETAPA 1							
	<i>i</i> = 4		<i>i</i> = 3		<i>i</i> = 2		<i>i</i> = 1		<i>i</i> = 4		<i>i</i> = 3		<i>i</i> = 2		<i>i</i> = 1	
	B <sub>ast</sub>	k <sub>ast</sub>														
50	45.00	3	35.40	3	23.90	3	13.40	3	45.27	3	27.27	2	13.27	1	00.00	1
49	48.53	3	29.33	2	14.13	1	00.00	1	50.20	2	32.80	1	17.76	1	00.00	1
48	48.94	3	29.74	2	14.54	1	00.00	1	50.32	2	32.92	1	17.88	1	00.00	1
47	<b>48.96</b>	<b>3</b>	<b>29.76</b>	<b>2</b>	<b>14.56</b>	<b>1</b>	<b>00.00</b>	<b>1</b>	<b>50.33</b>	<b>2</b>	<b>32.93</b>	<b>1</b>	<b>17.89</b>	<b>1</b>	<b>00.00</b>	<b>1</b>
46	<b>48.96</b>	<b>3</b>	<b>29.76</b>	<b>2</b>	<b>14.56</b>	<b>1</b>	<b>00.00</b>	<b>1</b>	<b>50.33</b>	<b>2</b>	<b>32.93</b>	<b>1</b>	<b>17.89</b>	<b>1</b>	<b>00.00</b>	<b>1</b>
45	<b>48.96</b>	<b>3</b>	<b>29.76</b>	<b>2</b>	<b>14.56</b>	<b>1</b>	<b>00.00</b>	<b>1</b>	<b>50.33</b>	<b>2</b>	<b>32.93</b>	<b>1</b>	<b>17.89</b>	<b>1</b>	<b>00.00</b>	<b>1</b>



Tabla 3.21 Política de operación óptima de la presa.

PARA EL OPERADOR		ETAPA	
		1	2
ESTADO	1	1	1
	2	1	1
	3	1	2
	4	2	3

Para fines prácticos al operador de la presa se le entrega como resultado la tabla 3.21.

La tabla 3.21 dice que según el estado y etapa en que se encuentre la presa es lo que el operador tiene que extraer para obtener el beneficio máximo. Por ejemplo, si la presa está en el estado 3 y etapa 1 tiene que extraer una unidad de volumen ( $m^3$ ), si se encuentra en el mismo estado pero en la etapa 2 tiene que extraer dos unidades de volumen; si la presa se encuentra en el estado 4 y etapa 1 se extraen dos unidades de volumen, para el mismo estado en la etapa 2 se extraen 3 unidades de volumen. De esta forma se garantiza que se obtendrá el beneficio máximo.

### 3.3 Programas de optimización y simulación

Para obtener los beneficios esperados máximos en un horizonte de planeación de N etapas y definir las políticas de operación óptima para el sistema de presas del río Grijalva se ejecutaron dos programas de optimización: CAFIT2P.FOR que calcula los beneficios en cada etapa (cálculo de las fi) con la ecuación 3.6, este programa es una reestructuración del programa CALFIT.FOR elaborado a mediados de la década de los 90. El programa CAFIT2P.FOR está compuesto por un cuerpo principal y varias subrutinas, estas se encuentran detalladas en el respectivo manual (Domínguez et al, 2009). Proporcionan archivos de resultados con el nombre de FITE y por lo general son archivos extensos.

El segundo programa que completa el proceso de optimización es el programa OPDIN2VS.FOR que es una reestructuración del programa OPTIDIN.FOR. Este programa se alimenta con los archivos de resultados del programa CAFIT2P.FOR, y simplifica totalmente al algoritmo para el cálculo del beneficio total. El principal archivo de salida es el de las políticas de operación, llamado ARPOLVS. Este archivo también es entregado en un formato



de tipo matricial (que es el que se pretende los operadores aprendan a utilizar) llamado MEEVS. Los detalles se encuentran en el manual respectivo (Domínguez et al, 2009).

Finalmente, se utilizó el programa SIMULM2P.FOR que realiza la simulación conjunta a nivel quincenal del funcionamiento de vasos de las presas Angostura y Malpaso; se toma en cuenta las cargas de Chicoasén para Angostura y de Peñitas para Malpaso (esta consideración se hace desde la función objetivo), así como los escurrimientos por cuenca propia de Chicoasén hacia Malpaso. El programa entrega como salida los archivos de resultados de las simulaciones para cada quincena, así como un resumen anual y quincenal, para cada presa, en los archivos SIQPRE1 y SIQPRE2. De manera adicional reporta en dos archivos los años y quincenas en los que la curva guía de las presas Angostura y Malpaso fue igualada o excedida. Mayores detalles sobre los formatos del archivo de datos de este programa y de su funcionamiento se proporcionan en el manual correspondiente (Domínguez et al, 2009).

### **3.4 Curva guía**

La Comisión Federal de Electricidad tiene como objetivo generar la mayor energía eléctrica posible, por lo que prefiere mantener el mayor nivel de almacenamiento en las presas (mayor carga), mientras que la Comisión Nacional del Agua prefiere tener menor nivel de almacenamiento para proteger aguas abajo; por esta razón ambas dependencias realizaron un acuerdo para hacer un estudio científico técnico y poder fijar la curva guía de los sistemas de presas.

La curva guía también llamada curva índice es la curva de seguridad que sirve de referencia para saber si una presa está en riesgo o no, y son establecidas por el Comité Técnico de Operación de Obras Hidráulicas. En esta curva se establecen niveles de almacenamiento que la CONAGUA solicita no ser excedidos.

Para tomar en cuenta la curva guía en el algoritmo de optimización se introdujeron castigos por rebasar la curva guía en cada uno de los embalses. En este trabajo se probaron diferentes curvas guía con el objetivo de encontrar la política que garantice los niveles de seguridad aguas abajo de la presa sin castigar la generación.



## 4 APLICACIONES

En este capítulo se presenta la aplicación de la metodología (presentada en el capítulo 3) al objeto de estudio “Sistema de presas del río Grijalva”. Este sistema hidroeléctrico opera en cascada y está formado por las presas: La Angostura, Chicoasén, Malpaso y Peñitas. Las características generales del sistema se encuentran descritas en el capítulo 2.

Debido a que las presas La Angostura y Malpaso tienen una capacidad de almacenamiento grande en comparación a la de Chicoasén y Peñitas, es posible trabajar con un sistema equivalente formado por dos presas: La Angostura y Malpaso. La Angostura considera la carga de Chicoasén; Malpaso considera la carga de Peñitas, así como los escurrimientos por cuenca propia de Chicoasén. La forma en que operan las presas Chicoasén y Peñitas consiste prácticamente en extraer lo que es descargado por La Angostura y Malpaso, procurando mantener ciertos niveles que dependen de la época del año.

La aplicación se reduce a un sistema que consta de 2 presas, 6 etapas y 22 estados en la presa 1 y 16 en la presa 2 en unidades de incremento de volumen  $\Delta V$  de 600 millones de  $m^3$ . Si se compara las características del sistema de presas en estudio con el ejemplo descrito en el capítulo 3.2.2.1 se observa que la gran cantidad de etapas y estados hace que la solución se vuelve extensa y compleja, además de que ahora el problema trata de 2 presas. Para resolver este problema se hace uso de la programación dinámica estocástica, además del uso de un lenguaje de programación en este caso FORTRAN.

El problema a resolver se divide en tres partes para el cual se elaboraron tres programas: CAFIT2P.FOR, OPDIN2VS.FOR y SIMULM2P.FOR. El primero obtiene el valor de cada una de las fis ( $\emptyset$ ) equivalente al paso 1 del capítulo 3.2.2.1, cuando el programa concluye entrega como resultados los archivos FITE. El segundo programa se alimenta con los archivos FITE, con un procedimiento de acumulación en el sentido contrario del tiempo análogo al descrito en el capítulo 3.2.2.1 encuentra la política de operación óptima para cada presa, como resultado entrega el archivo de salida ARPOLVS, y para los operadores el archivo MEEVS que tiene un formato matricial.



Finalmente, el tercer programa realiza la simulación conjunta y entrega como salida los archivos de resultados de las simulaciones para cada quincena, así como un resumen anual y quincenal para cada presa, en los archivos SIQPRE1 y SIQPRE2. De manera adicional reporta en dos archivos los años y quincenas en los que la curva guía de las presas La Angostura y Malpaso fue igualada o excedida.

#### 4.1 Función objetivo

En la función objetivo se propuso la maximización del valor esperado del beneficio total por generación, imponiendo penalizaciones por déficit o derrames en el sistema de presas, tal como se describe en la ecuación 4.1.

$$FO = \text{Max } E(GE_{Ang} + GE_{Malp} - C_1 DERR_{Ang} - C_2 DERR_{Malp} - C_1 DEF_{Ang} - C_2 DEF_{Malp}) \quad (4.1)$$

donde

$E( )$  operador valor esperado

$GE$  energía generada, GWh

$DERR$  derrame, millones de  $m^3$

$DEF$  déficit, millones de  $m^3$

$C_1$  y  $C_2$  coeficientes de penalización por derrame

$C_1$  y  $C_2$  coeficiente de penalización por déficit

$Ang$  y  $Malp$  subíndices correspondiente a la presa La Angostura y Malpaso, respectivamente.

Para evaluar la función objetivo se debe tomar en cuenta la ecuación de continuidad, las restricciones dadas por las condiciones de extracción máxima y mínima, el número de estados en los que se considera dividida la capacidad útil de cada presa y el número de datos del ingreso, todas en su forma discreta.

Ecuación de continuidad

$$j = i + x - k$$

Restricciones

$$1 < j < NS$$

$$1 < x < nx$$

$$k_{min} < k < k_{max}$$



donde

- $j$  almacenamiento final por unidad de volumen  $\Delta V$
- $i$  almacenamiento inicial por unidad de volumen  $\Delta V$
- $x$  ingresos por unidad de volumen  $\Delta V$
- $k$  extracciones por unidad de volumen  $\Delta V$
- $NS$  número de estados definido para cada presa
- $nx$  número de datos de la probabilidad de ingreso
- $k_{min}$  extracción mínima, para cada presa, por unidad de volumen  $\Delta V$
- $k_{max}$  extracción máxima, para cada presa, por unidad de volumen  $\Delta V$ , depende del volumen turbinado máximo

#### 4.2 Algoritmo de optimación para tomar en cuenta la curva guía

Para tomar en cuenta a la curva guía expresada en forma discreta y por etapa, se agrega al algoritmo de optimación la lectura de un coeficiente de penalización en el caso de que se rebase la curva guía en cada uno de los embalses. Por lo tanto se modifica a la función objetivo añadiendo la condición siguiente:

- Si el almacenamiento final de la presa  $i$  es menor o igual a la curva guía, el beneficio por generación se calcula:

$$Beneficio = (GE_{presa} - C_1 DERR_{presa} - C_2 DEF_{presa}) \quad (4.2)$$

- En caso contrario, se le impone una penalización,  $CCG_{presa}$ , por exceder a la curva guía:

$$Beneficio = (GE_{presa} - C_1 DERR_{presa} - C_2 DEF_{presa} - CCG_{presa}) \quad (4.3)$$

#### 4.3 Política de operación

Considerando la definición de política de operación dada en el capítulo 3.1, al encontrar la política de operación óptima se proporciona cuál debe ser la extracción (dada en su forma discreta) dependiendo de la etapa y estado en el que se encuentre el sistema. El almacenamiento en cada presa se discretizó en intervalos de 600 millones de  $m^3$ . Angostura tiene un almacenamiento de 7000 millones de  $m^3$ , Malpaso tiene 5500 millones de  $m^3$ , que corresponden a estados discretizados de 11 (7000/600) y 9 (5500/600), respectivamente.



La discretización de las extracciones quincenales varió de acuerdo con la época del año:

- De enero a mayo,  $\Delta V = 60$  millones de  $m^3$
- Para junio y julio,  $\Delta V = 150$  millones de  $m^3$
- Para agosto, septiembre y octubre,  $\Delta V = 300$  millones de  $m^3$
- Para noviembre y diciembre,  $\Delta V = 150$  millones de  $m^3$

A manera de ejemplo se presenta la tabla 4.1, en la que se muestran las extracciones recomendadas en una etapa del año; dichas extracciones fueron codificadas con números de cuatro cifras, de las que las primeras dos (a la izquierda) corresponden a Angostura y las dos siguientes a Malpaso. Por ejemplo, supóngase que al inicio de alguna quincena de la etapa enero a mayo, los volúmenes almacenados en Angostura y Malpaso corresponden a los estados 11 y 9, respectivamente, la tabla A1 indica que la extracción recomendada para esa quincena tendría el código 0705, que significa extraer  $7 \times 60 = 420$  millones de  $m^3$  por las turbinas de Angostura y  $5 \times 60 = 300$  millones de  $m^3$  por las de Malpaso.



POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALV,  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA



Tabla 4.1 Política de operación para la etapa 6 enero-mayo. Cada unidad corresponde a una extracción de 60 millones de m<sup>3</sup> por quincena

ESTADOS	MALPASO																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
ANGOSTURA	1	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	2	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	3	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	4	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	5	0505	0505	0505	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	6	0605	0605	0505	0505	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	7	0705	0605	0605	0505	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	8	0705	0705	0605	0505	0505	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0406	0407	0408	0409	
	9	0705	0705	0605	0605	0505	0505	0505	0505	0505	0505	0505	0506	0507	0508	0509	0510	
	10	0705	0705	0705	0605	0605	0605	0605	0605	0605	0605	0505	0607	0608	0609	0610	0510	
	11	0805	0705	0705	0705	0705	0705	0705	0705	0705	0705	0605	0606	0708	0709	0710	0610	0510
	12	0805	0805	0705	0705	0705	0805	0805	0705	0705	0706	0707	0708	0709	0710	0610	0510	
	13	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0705	0706	0707	0809	0810	0710	0610	0510
	14	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0705	0807	0808	0809	0810	0710	0610	0611
	15	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0806	0807	0808	0809	0810	0710	0711	1419
	16	1405	1405	1406	0805	0805	0805	0805	0805	0805	0806	0807	0808	0809	0810	0811	1419	1419
	17	1405	1405	1406	1407	1408	1409	1410	0805	0806	0807	0808	0809	0810	0811	1419	1419	1419
	18	1405	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	0807	0808	0809	0810	1419	1419	1419	1419
	19	1405	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	809	810	1419	1419	1419	1419	1419
	20	1405	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1419	1419	1419	1419	1419	1419
	21	1405	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1419	1419	1419	1419	1419	1419
	22	1405	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1419	1419	1419	1419	1419	1419



#### 4.4 Optimización y simulación de las curvas guía

Con el objetivo de encontrar la política de operación óptima que permita mayor generación con el menor riesgo, se ensayaron diferentes curvas guía como se muestra en la tabla 4.2.

Este análisis se inicia con la curva guía obtenida de la política POL CG2008 propuesta por CFE en el mismo año, esta curva guía permite generar 513.06 GWh/quincena, con un derrame total de 19.40 millones de  $m^3$  para la presa Malpaso (7.22 millones de  $m^3$  en la primera quincena de octubre de 1970 y de 12.18 millones de  $m^3$  en la primera quincena de octubre del 2003), haciendo un total de 19.40 millones de  $m^3$ ). Cabe mencionar que para este análisis se usaron datos registrados de 1959-2007.

Posteriormente, se propuso la curva guía POL XIV con la que se obtiene 486.82 GW/h por quincena, sin derrames ni déficit en las presas. A partir de esta política se consideraron las láminas de evaporación registradas del 22 de octubre del 2009 al 22 de octubre del 2010, que se usaron para todo el periodo de registro. Esta consideración provocó una ligera disminución en la energía total generada por el sistema (de 26.24 GWh/quincena, 14.71 en La Angostura y 11.53 en Malpaso) pero con un incremento importante en el almacenamiento mínimo de La Angostura de casi 1294.18 millones de  $m^3$ . En Malpaso se presenta un incremento de 618.53 millones de  $m^3$  en el almacenamiento mínimo.

La figura 4.1 muestra la curva guía de la POL XIV para cada presa, se puede observar que aunque mejora en resultados a la POL CG 2008 queda por arriba del NAME, lo que representa un riesgo muy importante ante una avenida extraordinaria.

Tabla 4.2 Resumen de la simulación de políticas de operación óptima del sistema de presas del río Grijalva.

Política / descripción	Año de registro	Energía generada		Energía total GWh/quincena	Almacenamiento mínimo (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )		Derrame (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )		Déficit (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )	
		Angostura	Malpaso		Suma	Angostura	Malpaso	Angostura	Malpaso	Angostura
		<b>POL CG2008:</b> Derrame de 7.22 mil de m <sup>3</sup> en la 1Q de oct de 1970 y de 12.18 mill de m <sup>3</sup> de 1970 y de 12.18 mill de m <sup>3</sup> en la 1Q de oct del 2003.	<b>1959-2007</b>	291.64	221.42	513.06	1385.98	5824.56	0	19.4 <sup>(20)</sup>
<b>SE CONSIDERA LA LÁMINA DE EVAPORACIÓN</b>										
<b>POL XIV PM:</b> Considera la lámina de evaporación del 22 de octubre del 2009 al 22 de octubre del 2010. Se incrementa un año de registro.	<b>1959-2008</b>	276.93	209.89	486.82	2680.16	5206.03	0	0	0	0
<b>CONAGUA ESTABLECE LA CURVA GUÍA EN EL 2009</b>										
<b>POL CONAGUA 2009 PM:</b> La define conagua. La generación total disminuye y el almacenamiento mínimo es muy bajo en ambas presas.	<b>1959-2008</b>	275.51	200.11	475.62	562.64	3022.41	0	0	0	0
<b>SE CONSIDERA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS VOLÚMENES DE INGRESO, CON EL FIN DE TENER UN PROCEDIMIENTO SITEMÁTICO.</b>										
<b>POL 1:</b> Se aplica el sig cambio a POL XIV: Se deja el vol máx - 2 veces la desvest en el periodo de la 1Q JUL-2Q AGO p/ang y de la 2Q AGO-1Q NOV p/malpaso, p/las sig quincenas se sigue una forma lineal a POL XIV siempre que se cumpla con el volumen máx.	<b>1959-2008</b>	276.93	209.88	486.81	2680.19	5206.03	0	0	0	0
<b>SE EVITA QUE QUEDE POR ARRIBA DEL NAME</b>										
<b>POL 2:</b> Se modifica la POL 1: si H>NAME se deja el valor del NAME, si H<NAME se deja el valor de la POL 1, en ambas presas.	<b>1959-2008</b>	276.93	209.88	486.81	2680.19	5206.03	0	0	0	0
<b>POL 3:</b> Partiendo de la POL 2 se deja el valor del vol máx - 2 veces la desvest en el periodo de la 1Q JUL-2Q AGO p/ang y de la 2Q AGO-1Q NOV p/malpaso, p/las sig quincenas se sigue una forma lineal a POL XIV siempre que se cumpla con el volumen máx.	<b>1959-2008</b>	276.82	207.03	483.85	3073.24	5088.19	0	0	0	0
<b>POL 4:</b> Similar a la POL 3, con el siguiente cambio: Se resta 1.5 veces la desvest.	<b>1959-2008</b>	277.34	209.25	486.59	3147.14	5097.93	0	0	0	0
<b>POL 5:</b> Similar a la POL 3, con el siguiente cambio: Se resta 1 desvest.	<b>1959-2008</b>	276.93	209.88	486.81	2680.19	5206.03	0	0	0	0
<b>POL 6:</b> Similar a la POL 3, con el siguiente cambio: Se resta 0.5 veces la desvest.	<b>1959-2008</b>	276.93	209.88	486.81	2680.19	5206.03	0	0	0	0
<b>POLÍTICA ÓPTIMA</b>										
<b>POL 7:</b> A la política 5 se le resta un 2 ΔV en las 24 quincenas.	<b>1959-2008</b>	<b>276.84</b>	<b>207.01</b>	<b>483.85</b>	<b>3085.39</b>	<b>5088.19</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

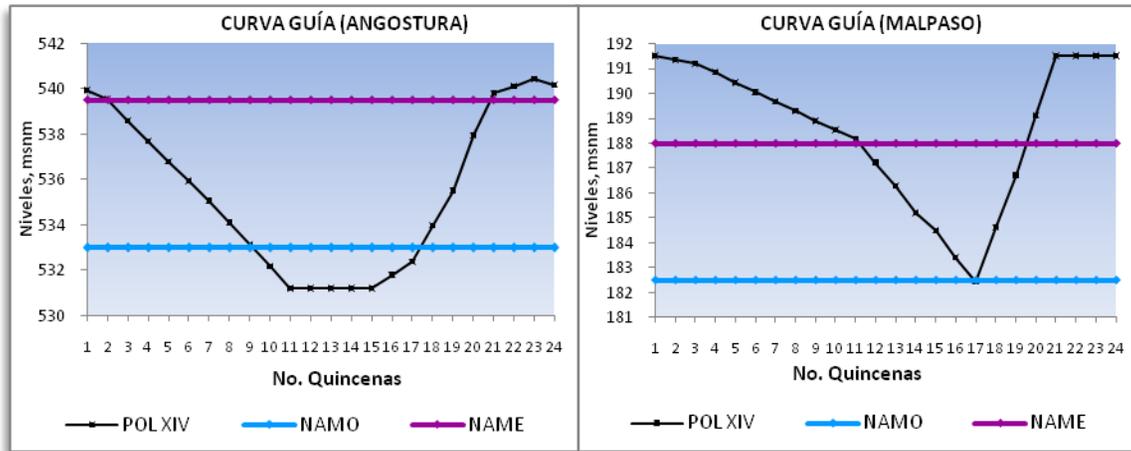


Figura 4.1 Curva guía de la política POL XIV para las presas La Angostura y Malpaso

En el 2009 CONAGUA establece la curva guía POL CONAGUA 2009. Para fines comparativos se realizó la simulación y se obtuvo un valor total de la energía generada de 475.62 GWh/quincena, que es menor a la política anterior; aunado a esto el almacenamiento mínimo es muy bajo en la presa La Angostura, de apenas 562.64 millones de  $m^3$ , considerando que tiene una capacidad de 7000 millones de  $m^3$  esto prácticamente significa vaciar la presa. En Malpaso disminuye en forma importante (a 3022.41 millones de  $m^3$ ) por lo que se considera que esta política castiga demasiado la generación.

Analizando los resultados de las políticas antes mencionadas se observa que la POL XIV se puede ajustar como base para hacerle modificaciones y mejorar los resultados. A partir del análisis de los volúmenes históricos de ingreso por cuenca propia a las presas La Angostura y Malpaso se observó que existe una relación entre el incremento de volumen del almacenamiento en las presas durante la época de avenidas y la desviación estándar de los volúmenes de ingresos, por lo que en las políticas posteriores se considera este parámetro estadístico, para definir las curvas guía mediante un procedimiento sistemático.

Se realizó un análisis de las elevaciones históricamente alcanzadas registradas en el archivo análisis y tendencias del Sistema Hidroeléctrico Grijalva (SHG), el registro abarca del año 1998 al 2008, cabe mencionar que en la figura se incluye la curva guía o curva índice 2009 que maneja la CONAGUA tal como se muestra en las figuras 4.2 y 4.3.





Con los resultados de la simulación conjunta de la política XIV del sistema de presas se calcularon las elevaciones a partir de las ecuaciones 4.4 y 4.5, este cálculo se realizó para el mismo período (1998-2008) y los resultados se muestran en las figuras 4.3 y 4.4.

Para la Angostura:

$$Elev_{La\ Ang} = 0.0214V^{0.7763} + 500 \quad (4.4)$$

Para Malpaso:

$$Elev_{Malp} = 0.010V^{0.8982} + 144 \quad (4.5)$$

donde V es el almacenamiento en millones de m<sup>3</sup>.

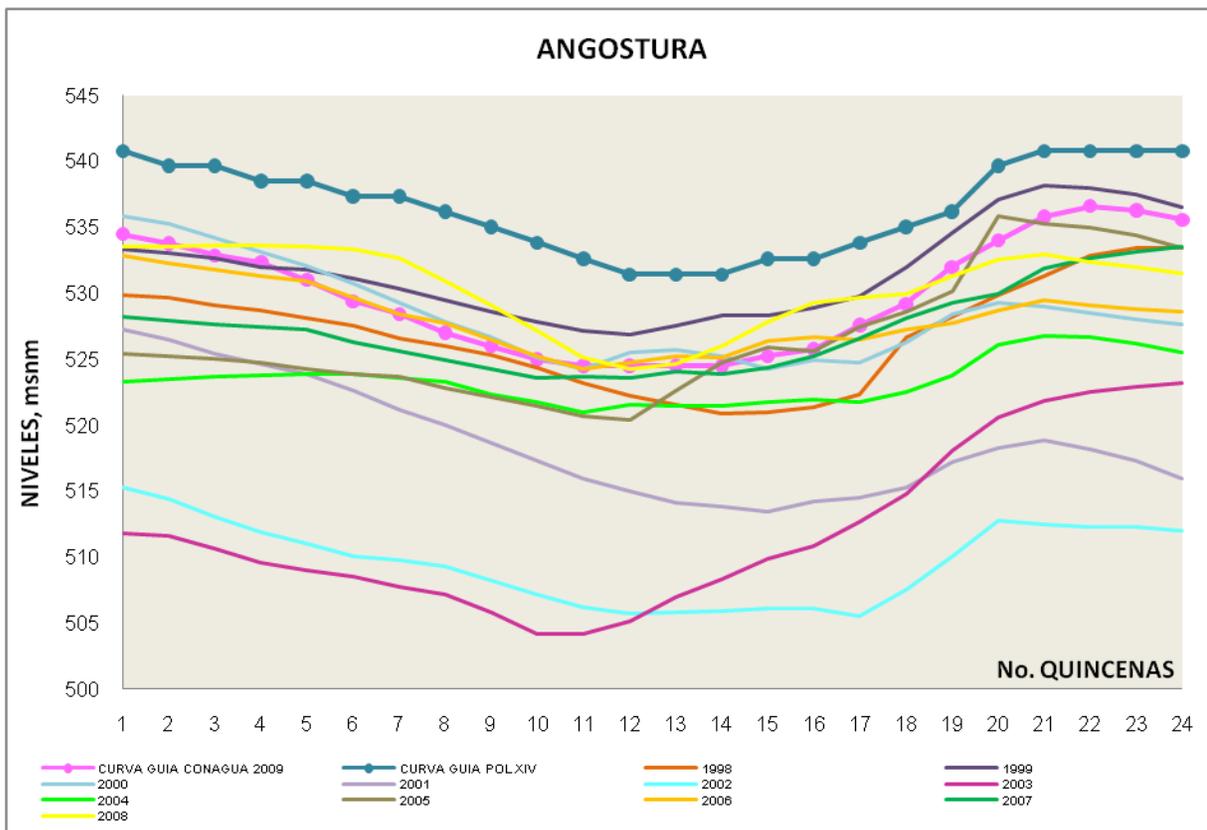


Figura 4.4 Elevaciones simuladas con el registro histórico y política XIV. Presa Angostura.

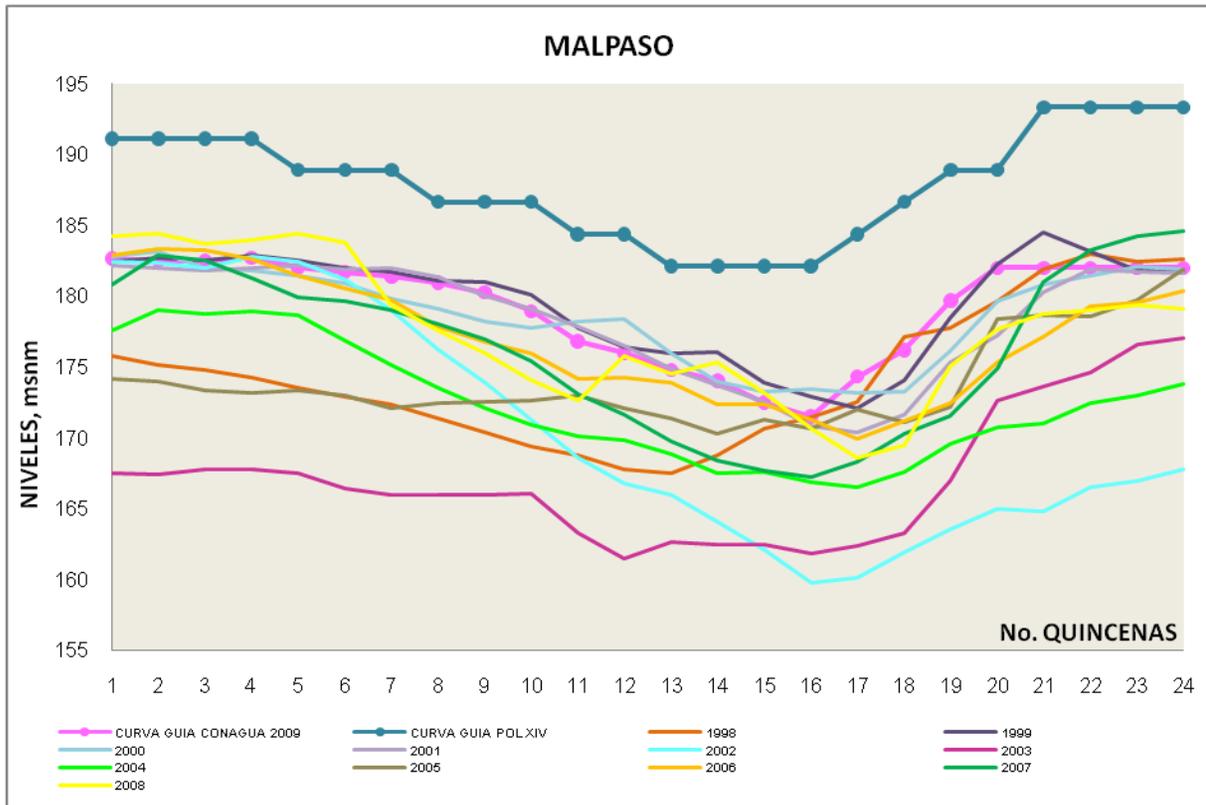


Figura 4.5 Elevaciones simuladas con el registro histórico y política XIV. Presa Malpaso.

De las figuras anteriores se puede apreciar que existe una variación casi lineal desde la primera quincena de enero hasta que ocurre la elevación mínima en cada año. Para La Angostura la elevación mínima se presenta al principio de la primera quincena de julio y a finales de la segunda quincena de octubre se presenta la elevación máxima. Para Malpaso, el mínimo se presenta en la segunda quincena de agosto y el máximo en la primera quincena de noviembre. Es importante resaltar la importancia de definir estos períodos para cada presa porque son los meses en donde hay un mayor escurrimiento y donde se presentan las condiciones más desfavorables (elevación mínima y máxima).

Con el registro de volúmenes de ingreso por cuenca propia y conociendo el periodo más desfavorable en cada presa, se obtuvo el acumulado de dichos volúmenes, es decir, para La Angostura el acumulado de la primera quincena de julio a la segunda quincena de octubre, de la segunda quincena de julio a la segunda quincena de octubre, de la primera quincena de agosto a la segunda quincena de octubre, y así sucesivamente hasta obtener el acumulado de



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



la primera quincena de octubre a la segunda quincena de octubre. Para el caso de Malpaso se obtuvo el acumulado de la segunda quincena de agosto a la primera quincena de noviembre, de la primera quincena de septiembre a la primera quincena de noviembre, ..., de la segunda quincena de octubre a la primera quincena de noviembre.

Después de tener los respectivos acumulados para cada presa, se determinaron sus estadísticos: media, desviación estándar y coeficiente de variación (tabla 4.3 y 4.4). De estos tres parámetros la desviación estándar es la que mide la dispersión de los datos e indica cuanto tienden a alejarse los valores puntuales del promedio, por lo que es el parámetro estadístico que se tomó en cuenta en las políticas posteriores.

**Tabla 4.3 Volumen histórico de ingreso por cuenca propia acumulado desde la segunda quincena de julio hasta la segunda quincena de octubre. La Angostura.**

AÑO	VOLUMEN DE INGRESO QUINCENAL								VOLUMEN ACUMULADO DE LA:						
	1Q JUL	2Q JUL	1QAGO	2QAGO	1QSEP	2QSEP	1QOCT	2QOCT	1Q JUL	2Q JUL	1QAGO	2QAGO	1QSEP	2QSEP	1QOCT
	A LA 2DA. QUINCENA DE OCTUBRE														
1959	285.8	367.1	512.2	553.0	381.2	496.6	750.0	1198.1	4544.0	4258.2	3891.1	3378.9	2825.9	2444.7	1948.1
1960	668.5	819.6	673.2	1102.8	1395.2	1570.9	1348.8	987.1	8566.1	7897.6	7078.0	6404.8	5302.0	3906.8	2335.9
1961	413.5	573.9	325.3	670.6	674.6	594.8	753.3	495.0	4501.0	4087.5	3513.6	3188.3	2517.7	1843.1	1248.3
1962	786.9	351.4	473.4	1105.4	1246.5	2026.0	1389.2	752.4	8131.2	7344.3	6992.9	6519.5	5414.1	4167.6	2141.6
1963	650.7	737.9	541.5	788.4	483.2	1948.8	1267.0	547.9	6965.4	6314.7	5576.8	5035.3	4246.9	3763.7	1814.9
1964	708.9	1187.5	595.0	575.0	917.3	1224.8	1256.1	605.0	7069.6	6360.7	5173.2	4578.2	4003.2	3085.9	1861.1
1965	712.6	393.7	802.2	824.1	534.0	1353.9	1355.2	1252.9	7228.6	6516.0	6122.3	5320.1	4496.0	3962.0	2608.1
1966	909.6	782.2	644.4	687.3	1058.2	1240.2	1293.5	1197.8	7813.2	6903.6	6121.4	5477.0	4789.7	3731.5	2491.3
1967	242.2	330.1	275.4	597.8	429.3	535.7	967.2	656.1	4033.8	3791.6	3461.5	3186.1	2588.3	2159.0	1623.3
1968	694.7	422.1	260.0	317.4	706.9	1230.0	677.3	1209.2	5517.6	4822.9	4400.8	4140.8	3823.4	3116.5	1886.5
1969	1017.2	438.6	1450.3	1733.6	2104.6	2104.0	1553.2	1127.2	11528.7	10511.5	10072.9	8622.6	6889.0	4784.4	2680.4
1970	666.4	1171.5	1183.7	1047.3	1564.9	1409.3	1401.1	985.5	9429.7	8763.3	7591.8	6408.1	5360.8	3795.9	2386.6
1971	221.9	429.4	837.2	1122.7	1453.8	829.6	1472.9	936.4	7303.9	7082.0	6652.6	5815.4	4692.7	3238.9	2409.3
1972	238.5	653.3	566.7	561.4	533.5	537.8	482.7	379.7	3953.6	3715.1	3061.8	2495.1	1933.7	1400.2	862.4
1973	319.8	431.5	772.1	1656.6	1625.2	987.1	1587.4	1673.6	9053.3	8733.5	8302.0	7529.9	5873.3	4248.1	3261.0
1974	365.0	365.0	231.5	231.5	706.0	706.0	503.5	503.5	3612.0	3247.0	2882.0	2650.5	2419.0	1713.0	1007.0
1975	270.0	270.0	479.0	479.0	1072.0	1072.0	1040.5	1040.5	5723.0	5453.0	5183.0	4704.0	4225.0	3153.0	2081.0
1976	750.0	750.0	316.5	316.5	508.0	508.0	666.5	666.5	4482.0	3732.0	2982.0	2665.5	2349.0	1841.0	1333.0
1977	283.6	184.1	676.3	484.0	418.7	1178.0	505.2	340.5	4070.4	3786.8	3602.7	2926.4	2442.4	2023.7	845.7
1978	561.4	857.3	563.0	1021.5	1267.5	1078.9	923.5	676.1	6949.2	6387.8	5530.5	4967.5	3946.0	2678.5	1599.6
1979	577.3	650.3	528.0	1052.8	1823.2	1805.3	1056.9	633.0	8126.8	7549.5	6899.2	6371.2	5318.4	3495.2	1689.9
1980	210.1	572.0	755.6	642.4	898.1	1757.3	1317.1	531.2	6683.8	6473.7	5901.7	5146.1	4503.7	3605.6	1848.3
1981	950.7	989.4	830.2	1558.0	1159.4	2038.4	1890.4	923.4	10339.9	9389.2	8399.8	7569.6	6011.6	4852.2	2813.8
1982	369.9	611.9	412.4	548.7	600.2	1488.7	1625.9	719.9	6377.6	6007.7	5395.8	4983.4	4434.7	3834.5	2345.8
1983	480.6	655.7	779.2	550.2	1758.2	1170.3	519.9	559.2	6473.3	5992.7	5337.0	4557.8	4007.6	2249.4	1079.1
1984	850.4	1116.3	1370.8	1188.5	1876.5	2095.6	1308.1	593.9	10400.1	9549.7	8433.4	7062.6	5874.1	3997.6	1902.0
1985	528.7	608.9	646.0	1384.1	689.8	1344.6	967.3	531.5	6700.9	6172.2	5563.3	4917.3	3533.2	2843.4	1498.8
1986	723.6	350.1	342.9	811.7	805.1	420.6	475.1	317.1	4246.2	3522.6	3172.5	2829.6	2017.9	1212.8	792.2
1987	462.9	850.1	868.6	411.7	998.6	899.7	630.2	279.2	5401.0	4938.1	4088.0	3219.4	2807.7	1809.1	909.4
1988	730.2	681.9	1070.9	1514.0	1699.6	1159.1	1457.1	548.4	8861.2	8131.0	7449.1	6378.2	4864.2	3164.6	2005.5



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



1989	326.7	430.9	477.4	1166.2	1061.1	1998.0	1899.6	1089.1	8449.0	8122.3	7691.4	7214.0	6047.8	4986.7	2988.7	
1990	609.6	497.7	377.3	423.6	860.5	978.6	719.5	471.9	4938.7	4329.1	3831.4	3454.1	3030.5	2170.0	1191.4	
1991	518.0	142.9	286.5	257.0	346.8	768.1	1025.7	533.9	3878.9	3360.9	3218.0	2931.5	2674.5	2327.7	1559.6	
1992	550.0	366.1	567.7	674.9	774.9	1230.4	970.6	426.9	5561.5	5011.5	4645.4	4077.7	3402.8	2627.9	1397.5	
1993	880.3	252.7	384.8	1292.0	1120.7	1240.2	1136.0	556.0	6862.7	5982.4	5729.7	5344.9	4052.9	2932.2	1692.0	
1994	146.3	162.6	376.7	439.1	293.6	700.6	773.4	372.7	3265.0	3118.7	2956.1	2579.4	2140.3	1846.7	1146.1	
1995	565.4	897.1	970.8	1283.2	2134.6	1878.3	923.7	683.8	9336.9	8771.5	7874.4	6903.6	5620.4	3485.8	1607.5	
1996	833.3	732.0	913.3	1125.7	921.7	1048.5	1384.7	655.6	7614.8	6781.5	6049.5	5136.2	4010.5	3088.8	2040.3	
1997	605.6	295.9	302.7	337.9	1108.7	1224.2	1579.7	544.4	5999.1	5393.5	5097.6	4794.9	4457.0	3348.3	2124.1	
1998	257.2	566.5	459.8	770.9	2223.7	873.9	915.2	988.6	7055.8	6798.6	6232.1	5772.3	5001.4	2777.7	1903.8	
1999	868.3	633.3	745.2	1027.9	1551.9	2289.1	2213.6	1680.5	11009.8	10141.5	9508.2	8763.0	7735.1	6183.2	3894.1	
2000	359.8	307.2	868.9	625.0	1236.2	1551.4	1083.8	535.4	6567.7	6207.9	5900.7	5031.8	4406.8	3170.6	1619.2	
2001	239.4	343.3	468.0	571.7	678.9	1039.6	813.1	753.9	4907.9	4668.5	4325.2	3857.2	3285.5	2606.6	1567.0	
2002	305.4	259.3	249.2	286.9	695.7	790.4	1314.0	402.6	4303.5	3998.1	3738.8	3489.6	3202.7	2507.0	1716.6	
2003	325.0	406.3	330.4	660.5	731.9	1334.7	1078.3	573.9	5441.0	5116.0	4709.7	4379.3	3718.8	2986.9	1652.2	
2004	246.2	440.9	318.9	259.4	613.6	795.5	1172.0	636.6	4483.1	4236.9	3796.0	3477.1	3217.7	2604.1	1808.6	
2005	971.4	1071.7	395.8	1334.3	903.5	1384.0	4064.4	669.8	10794.9	9823.5	8751.8	8356.0	7021.7	6118.2	4734.2	
2006	479.7	1159.2	672.4	594.4	1113.8	819.9	1044.5	829.2	6713.1	6233.4	5074.2	4401.8	3807.4	2693.6	1873.7	
2007	176.3	380.7	549.7	870.6	1058.9	1119.7	895.7	1347.1	6398.7	6222.4	5841.7	5292.0	4421.4	3362.5	2242.8	
2008	1348.6	1182.4	1146.8	1006.2	1107.1	1673.3	1498.6	881.9	9844.9	8496.3	7313.9	6167.1	5160.9	4053.8	2380.5	
									<b>Media</b>	<b>6750.28</b>	<b>6205.00</b>	<b>5622.37</b>	<b>5009.45</b>	<b>4198.55</b>	<b>3160.00</b>	<b>1929.00</b>
									<b>Desv.Estandar</b>	<b>2165.01</b>	<b>2003.58</b>	<b>1860.06</b>	<b>1674.98</b>	<b>1367.73</b>	<b>1079.57</b>	<b>750.06</b>
									<b>Coef.Variación</b>	<b>0.32</b>	<b>0.32</b>	<b>0.33</b>	<b>0.33</b>	<b>0.33</b>	<b>0.34</b>	<b>0.39</b>

**Tabla 4.4 Volumen histórico de ingreso por cuenca propia acumulado desde la segunda quincena de agosto hasta la primera quincena de noviembre. Malpaso.**

Año	VOLUMEN DE INGRESO QUINCENAL						VOLUMEN ACUMULADO DE LA:				
	2QAGO	1QSEP	2QSEP	1QOCT	2QOCT	1QNOV	2QAGO	1QSEP	2QSEP	1QOCT	2QOCT
	A LA 1RA. QUINECNA DE NOVIEMBRE										
1959	437.5	328.9	390.1	459.7	1257.1	563.2	3436.5	2999.0	2670.1	2280.0	1820.3
1960	898.6	747.5	643.5	199.2	392.5	612.8	3494.1	2595.5	1848.0	1204.5	1005.3
1961	362.0	431.4	229.8	623.2	682.1	980.9	3309.4	2947.4	2516.0	2286.2	1663.0
1962	507.4	700.5	1466.0	977.8	505.2	374.8	4531.7	4024.3	3323.8	1857.8	880.0
1963	354.1	349.5	2367.6	1156.1	377.2	342.0	4946.5	4592.4	4242.9	1875.3	719.2
1964	423.9	806.1	663.8	845.1	302.4	141.1	3182.4	2758.5	1952.4	1288.6	443.5
1965	543.0	386.0	465.3	1168.3	1359.5	581.4	4503.5	3960.5	3574.5	3109.2	1940.9
1966	525.0	1225.2	1731.2	1339.7	780.0	418.7	6019.8	5494.8	4269.6	2538.4	1198.7
1967	441.4	312.1	395.7	947.0	563.2	342.8	3002.2	2560.8	2248.7	1853.0	906.0
1968	250.7	304.9	1264.7	540.6	1029.3	439.0	3829.2	3578.5	3273.6	2008.9	1468.3
1969	804.1	1529.3	1601.4	866.4	360.8	365.3	5527.3	4723.2	3193.9	1592.5	726.1
1970	428.5	1799.9	1732.1	1216.9	517.3	406.3	6101.0	5672.5	3872.6	2140.5	923.6
1971	417.1	1339.0	341.0	936.3	676.8	379.6	4089.8	3672.7	2333.7	1992.7	1056.4
1972	295.2	301.6	189.5	401.1	312.5	226.6	1726.5	1431.3	1129.7	940.2	539.1
1973	1405.9	2109.9	608.8	1130.1	1194.6	537.5	6986.8	5580.9	3471.0	2862.2	1732.1
1974	400.0	95.5	95.5	54.7	54.7	108.0	808.4	408.4	312.9	217.4	162.7
1975	253.5	603.5	603.5	632.5	632.5	200.0	2925.5	2672.0	2068.5	1465.0	832.5
1976	157.0	312.5	312.5	363.5	363.5	332.0	1841.0	1684.0	1371.5	1059.0	695.5
1977	287.8	170.8	399.5	381.3	134.7	488.0	1862.1	1574.3	1403.5	1004.0	622.7
1978	324.1	456.4	647.6	463.2	458.4	337.1	2686.8	2362.7	1906.3	1258.7	795.5
1979	794.8	1134.2	1229.6	406.1	287.6	326.9	4179.2	3384.4	2250.2	1020.6	614.5
1980	441.6	376.3	2134.0	742.7	413.3	336.8	4444.7	4003.1	3626.8	1492.8	750.1
1981	1261.3	569.0	959.4	847.8	444.3	392.8	4474.6	3213.3	2644.3	1684.9	837.1



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



1982	117.8	317.7	867.2	713.5	316.8	440.5	2773.5	2655.7	2338.0	1470.8	757.3
1983	281.7	1151.1	1024.5	232.9	436.0	279.0	3405.2	3123.5	1972.4	947.9	715.0
1984	424.5	1184.5	1128.9	498.1	166.6	110.9	3513.5	3089.0	1904.5	775.6	277.5
1985	851.8	380.6	577.1	492.9	118.3	133.6	2554.3	1702.5	1321.9	744.8	251.9
1986	374.1	429.9	226.7	308.9	187.3	133.2	1660.1	1286.0	856.1	629.4	320.5
1987	174.4	683.6	428.4	521.8	74.8	103.0	1986.0	1811.6	1128.0	699.6	177.8
1988	765.2	1363.1	453.3	1340.7	349.7	207.9	4479.9	3714.7	2351.6	1898.3	557.6
1989	503.8	505.8	2363.7	1027.4	674.5	203.4	5278.6	4774.8	4269.0	1905.3	877.9
1990	251.7	465.5	362.9	368.5	328.3	318.0	2094.9	1843.2	1377.7	1014.8	646.3
1991	192.9	225.9	352.3	740.7	265.4	299.6	2076.8	1883.9	1658.0	1305.7	565.0
1992	426.4	391.9	688.6	558.3	280.2	195.4	2540.8	2114.4	1722.5	1033.9	475.6
1993	1125.0	703.9	607.0	625.7	578.5	413.8	4053.9	2928.9	2225.0	1618.0	992.3
1994	337.5	197.5	279.1	362.8	168.5	102.9	1448.3	1110.8	913.3	634.2	271.4
1995	994.7	1133.6	742.1	968.0	430.0	274.8	4543.2	3548.5	2414.9	1672.8	704.8
1996	684.5	593.0	545.6	780.1	314.1	375.5	3292.8	2608.3	2015.3	1469.7	689.6
1997	194.8	331.9	310.1	821.9	519.4	296.3	2474.4	2279.6	1947.7	1637.6	815.7
1998	363.8	1500.6	674.1	671.4	928.0	1006.7	5144.6	4780.8	3280.2	2606.1	1934.7
1999	590.3	1105.4	939.7	1652.4	856.2	494.1	5638.1	5047.8	3942.4	3002.7	1350.3
2000	494.6	894.7	1421.2	1070.9	373.2	233.5	4488.1	3993.5	3098.8	1677.6	606.7
2001	439.0	554.9	954.7	623.4	604.0	526.0	3702.0	3263.0	2708.1	1753.4	1130.0
2002	148.1	707.9	947.6	811.1	205.1	413.5	3233.3	3085.2	2377.3	1429.7	618.6
2003	507.3	753.8	1407.4	2057.9	589.7	508.7	5824.8	5317.5	4563.7	3156.3	1098.4
2004	206.1	439.5	684.6	579.5	309.8	385.7	2605.2	2399.1	1959.6	1275.0	695.5
2005	1302.1	622.4	412.5	1983.6	428.4	248.8	4997.8	3695.7	3073.3	2660.8	677.2
2006	251.2	595.2	443.7	534.7	402.5	341.4	2568.7	2317.5	1722.3	1278.6	743.9
2007	582.7	682.6	341.3	631.0	1671.3	360.0	4268.9	3686.2	3003.6	2662.3	2031.3
2008	380.6	487.9	1085.7	711.5	480.0	208.0	3353.7	2973.1	2485.2	1399.5	688.0
<b>Media</b>							<b>3638.2</b>	<b>3138.6</b>	<b>2442.7</b>	<b>1627.9</b>	<b>860.1</b>
<b>Desv.Estandar</b>							<b>1382.8</b>	<b>1243.2</b>	<b>989.3</b>	<b>694.9</b>	<b>461.1</b>
<b>Coef.Variación</b>							<b>0.38</b>	<b>0.40</b>	<b>0.41</b>	<b>0.43</b>	<b>0.54</b>

Para el mismo período desfavorable se obtuvieron los incrementos de volumen de la curva guía de la POL XIV. Es decir, para la presa La Angostura se tiene que de la 2da quincena de junio a la 2da quincena de octubre existe un incremento de 7 estados (unidades de  $\Delta V$ ), de la 1ra quincena de julio a la 2da de octubre se tiene 7,..., de la 1ra quincena a la 2da de octubre se tiene 2, para La Angostura. Para Malpaso, de la primera quincena de agosto a la 2da quincena de octubre se tiene un incremento de 3 estados,..., de la 1ra quincena a la 2da quincena de octubre se tiene un incremento de 1 estado. Este procedimiento se muestra en la tabla 4.5.



Tabla 4.5 Incremento de volumen de la curva guía POL XIV para ambas presas.

QUINCENA	POLÍTICA XIV (ESTADOS)		INCREMENTO DE VOLÚMENE EN ESTADOS	
	LA ANGOSTURA	MALPASO	LA ANGOSTURA	MALPASO
1Q ENE	30	20		
2Q ENE	29	20		
1Q FEB	28	20		
2Q FEB	27	20		
1Q MAR	26	20		
2Q MAR	25	19		
1Q ABR	24	19		
2Q ABR	23	19		
1Q MAY	22	19		
2Q MAY	21	19		
1Q JUN	20	18		
2Q JUN	20	18	7	
1Q JUL	20	17	7	
2Q JUL	20	17	7	
1Q AGO	20	16	7	3
2Q AGO	21	16	6	3
1Q SEP	21	16	6	3
2Q SEP	23	17	4	2
1Q OCT	25	18	2	1
2Q OCT	27	19		
1Q NOV	30	20		
2Q NOV	31	20		
1Q DIC	32	20		
2Q DIC	31	20		

Conociendo los estadísticos de los volúmenes acumulados en el periodo desfavorable para cada presa, obtenidos en las tablas 4.3 y 4.4, y el incremento de volumen en la curva guía de la POL XIV para el mismo periodo, obtenido en la tabla 4.5, se puede encontrar la relación que existe entre ambos resultados. Para comparar ambos resultados, ellos deben tener la misma unidad, por tal motivo, los estadísticos se muestran en su forma discreta, es decir, la media y desviación estándar se dividieron entre la unidad de volumen  $\Delta V=600$  mill de  $m^3$ , tal como se muestra en las tablas 4.6 y 4.7.



**Tabla 4.6 Comparación entre el incremento del volumen en la curva guía de la pol XIV y los estadísticos del registro histórico. La Angostura**

<b>ANGOSTURA</b>	1 JUL	16 JUL	1° AGO	16 AGO	1° SEP	16 SEP	1° OCT	16 OCT
<b>Datos en estados</b>	AL 30 DE OCTUBRE							
Incrementos en pol XIV	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0	6.0	4.0	2.0
Media registro histórico	11.3	10.3	9.4	8.3	7.0	5.3	3.2	1.3
Desvest registro histórico	3.6	3.3	3.1	2.8	2.3	1.8	1.3	0.6
2*desvest (ESTADOS)	7.2	6.7	6.2	5.6	4.6	3.6	2.5	1.1

**Tabla 4.7 Comparación entre el incremento del volumen en la curva guía de la POL XIV y los estadísticos del registro histórico. Malpaso**

<b>MALPASO</b>	16 AGO	1° SEP	16 SEP	1° OCT	16 OCT
	AL 1° DE NOVIEMBRE				
Incrementos en pol XIV	3	3	3	2	1
Media registro histórico	6.1	5.2	4.1	2.7	1.4
Desvest. registro histórico	2.3	2.1	1.6	1.2	0.8
2*desvest (ESTADOS)	4.6	4.1	3.3	2.3	1.5

Finalmente, las tablas anteriores muestran que el incremento de volumen en la curva guía de la POL XIV tiene mayor relación con dos veces la desviación estándar. Con este análisis se hicieron modificaciones con un procedimiento sistemático a políticas posteriores.

La política POL 1 retoma la curva guía de la POL XIV, se deja el volumen máximo de las 24 quincenas y se le resta 2 veces la desviación estándar en los periodos comprendido de la 1ra quincena de julio a la 2da quincena de octubre para La Angostura y de la 2da quincena de agosto a la 1ra quincena de noviembre para Malpaso, para las quincenas diferentes a las mencionadas se conservaron las características de la POL XIV. Para las quincenas de noviembre y diciembre se optó dejar el volumen máximo

Esta política permite obtener un valor de 486.81 GWh/quincena, similar a lo que se obtiene con la política POL XIV. La figura 4.2 muestra la curva guía de la POL 1, que se compara con la POL XIV y la POL CONAGUA 2009. Respecto a la generación total de energía, la POL XIV y POL 1 son prácticamente iguales, la diferencia está en que la POL 1 se obtuvo mediante un proceso sistematizado.



POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA

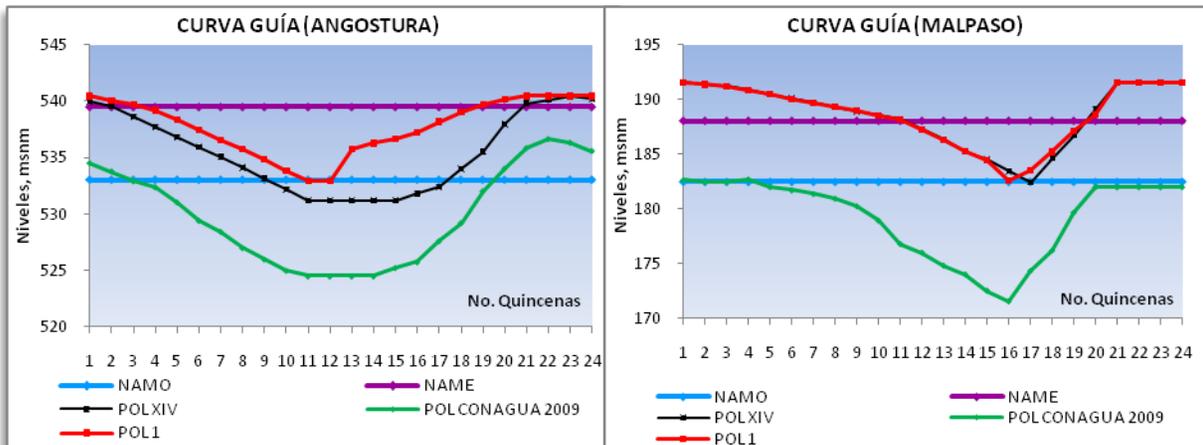


Figura 4.6 Curva guía de la política POL 1 para las presas La Angostura y Malpaso

Para mejorar los resultados obtenidos con la política POL 1 se modificó lo siguiente:

- Si la elevación H (de la POL 1) es superior al NAME se deja el valor del NAME
- Si H es menor que el NAME se deja la elevación H de la POL 1.

Con estas consideraciones se obtuvo la política POL 2, la cual proporciona igual generación de energía que la obtenida con la POL 1 (ver tabla 4.2), con la diferencia de que con esta política se evita que se sobrepase el nivel del NAME, tal como se aprecia en la figura 4.3. A partir de esta política las siguientes no sobrepasarán en ningún punto al NAME.

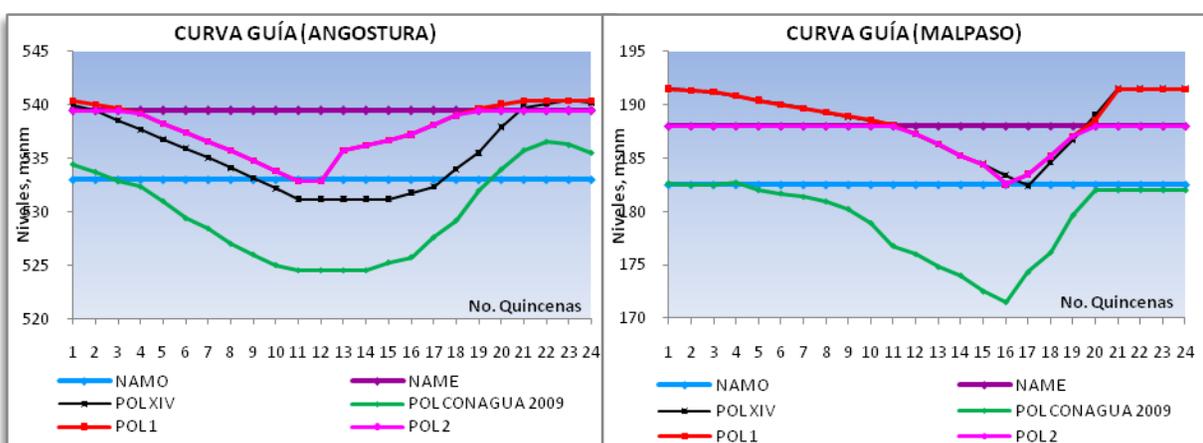


Figura 4.7 Curva guía de la política POL 2 para las presas La Angostura y Malpaso



Se considera que se puede mejorar los resultados de la política POL 2, por tal motivo se ensayó la política POL 3.

Para formar la política POL 3 se siguió el procedimiento utilizado en la POL 2, pero usando como volumen máximo el correspondiente al NAME al cual se le restó 2 veces la desviación estándar en el período que se considera como el desfavorable. La generación total disminuye en 2.96 GWh/quincena la cual no es significativa, sin embargo mejora considerablemente el almacenamiento mínimo en La Angostura a 3073.24 millones de m<sup>3</sup> (tuvo un incremento de 393.05 mill de m<sup>3</sup>). La curva guía de esta política se muestra en la figura 4.4.

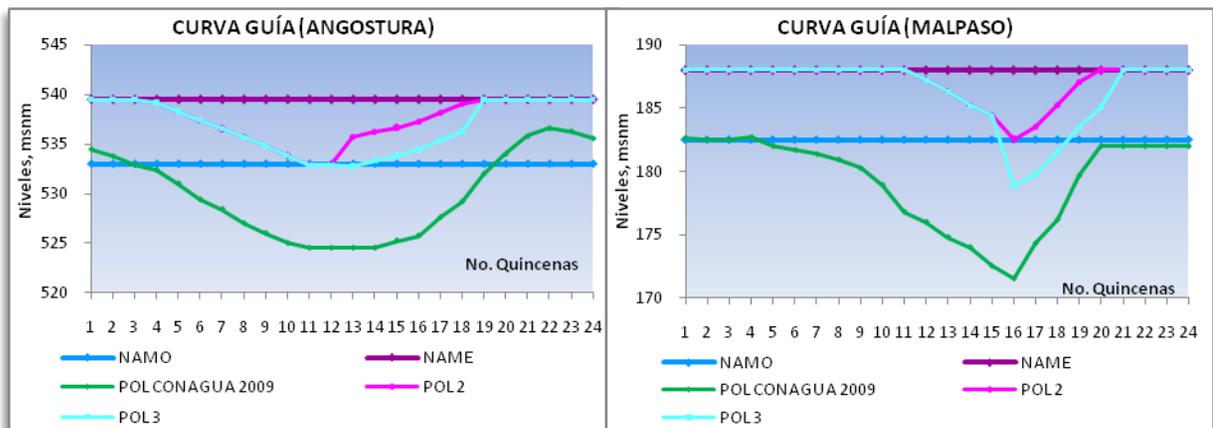


Figura 4.8 Curva guía de la política POL 3 para las presas La Angostura y Malpaso

Con el procedimiento anterior se ensayaron 3 políticas más (POL 4, 5 y 6) con la diferencia que en ellas se resta 1.5, 1, 0.5 veces la desviación estándar, respectivamente. Los resultados se muestran en la tabla 4.2 y las curvas guía en la figura 4.5.



# POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA. EFECTOS DE LA CURVA GUÍA

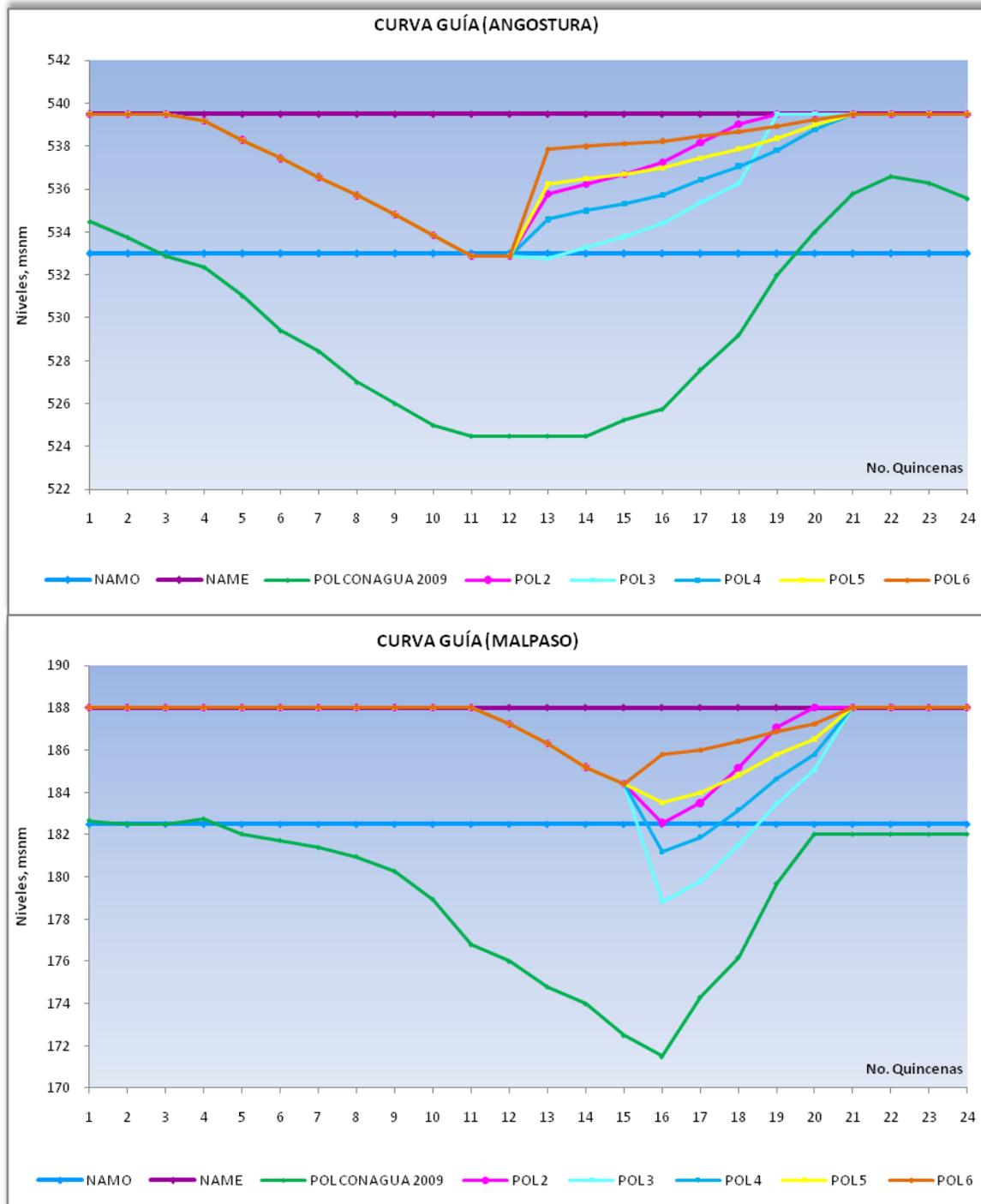


Figura 4.9 Curva guía de la política POL 2-6 para las presas La Angostura y Malpaso



Hasta aquí la política 5 proporciona buenos resultados; considera la evaporación y queda por debajo del NAME. Sin embargo queda por arriba del NAMO, por lo que se probó la política POL 7 que consideró bajar 2  $\Delta V$  en las 24 quincenas, esta política se muestra en la figura 4.6.

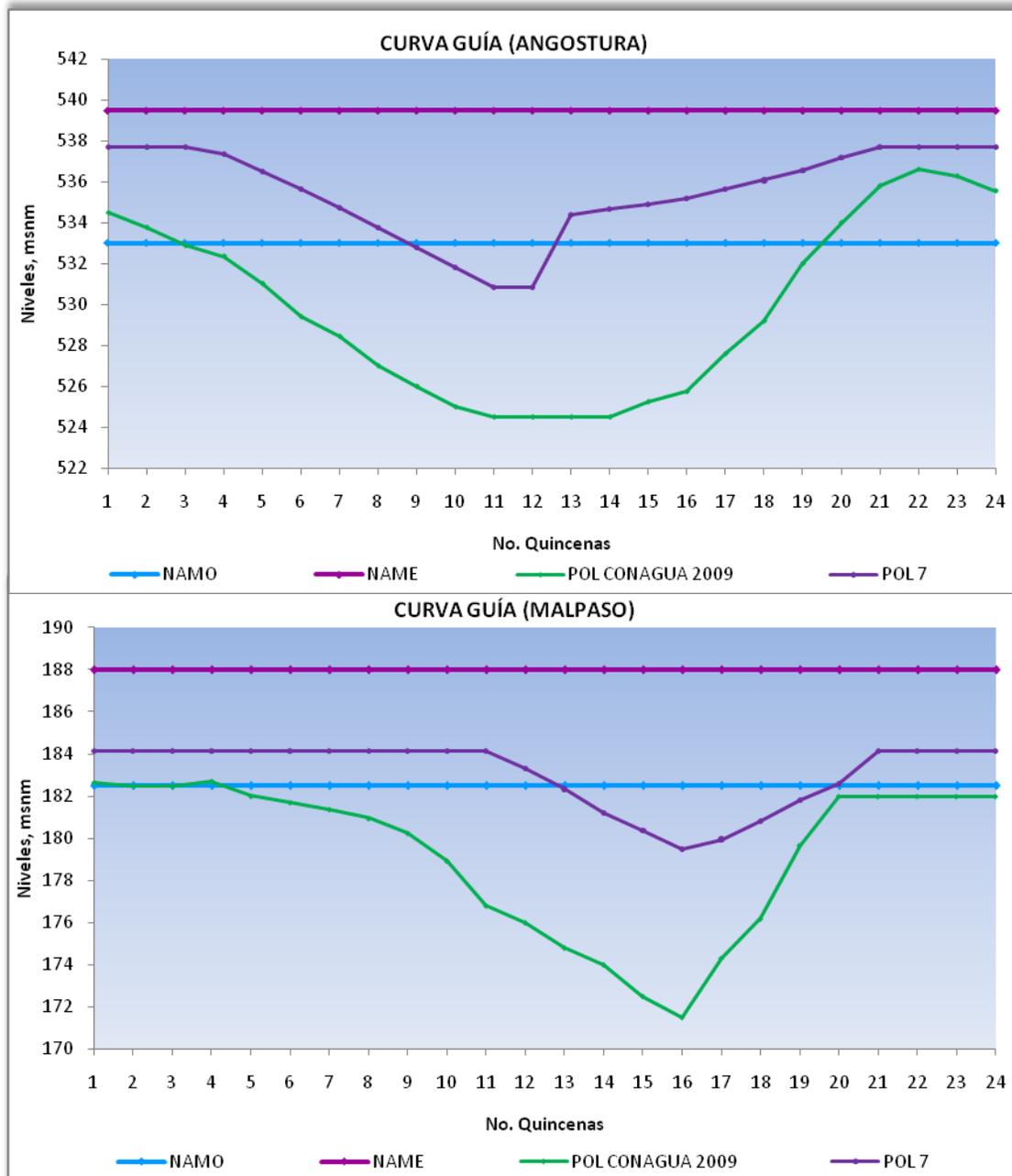


Figura 4.10 Curva guía de la política POL 7 para las presas La Angostura y Malpaso



POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA



La política POL 7 obtiene una energía total de 483.85 GW/h quincena, lo cual indica una ligera disminución en comparación a la política POL 5, sin embargo se logra un almacenamiento mínimo de 3085.39 millones de m<sup>3</sup> en Angostura, lo que representa un incremento importante.

Además, la política POL 7 no sobrepasa en ningún punto el NAME y en el período desfavorable (1ra quincena de julio a la 2da quincena de octubre para La Angostura y de la 2da quincena de agosto a la 1ra quincena de noviembre para Malpaso) tampoco sobrepasa el NAMO, lo que garantiza mayor seguridad aguas abajo. Esta política supera a la generación total que se obtiene con la POL CONAGUA 2009. Los detalles del resultado final se explican a detalle en el capítulo 5.



## 5 RESULTADOS

El propósito de este trabajo es encontrar una política de operación óptima que tome en cuenta la curva guía, dicha curva influye en forma importante en los resultados de simulación, es decir, si la curva guía tiene niveles bajos castiga demasiado la generación, y provoca que el almacenamiento mínimo en la presa sea bajo lo que puede provocar déficit. Por el contrario, si la curva guía tiene niveles altos permite mayor generación de energía, pero se tiene probabilidades de derrame. Por lo anterior se ensayaron diferentes curvas guía hasta encontrar la óptima.

De la simulación de las curvas guías presentadas en la tabla 4.2 del capítulo anterior, la política de operación óptima corresponde a la POL 7, con esta se obtiene una generación total de 483.85 GWh/quincena, es decir, 276.84 GWh/quincena en La Angostura y 207.01 GWh/quincena en Malpaso.

A continuación se presenta la tabla 5.1, que muestra a detalle los valores de la curva guía correspondientes a la POL 7, es decir, se presentan en volumen, estados y elevaciones para las dos presas: La Angostura y Malpaso.

Tabla 5.1 Curva guía de la política POL 7 en volumen, estados y niveles.

QUINCENA	POL 7 ( A LA POL 5 SE LE RESTA UN $\Delta V$ EN LAS 24 QUINCENAS)					
	VOLUMEN		ESTADOS		NIVELES	
	ANGOSTURA	MALPASO	ANGOSTURA	MALPASO	ANGOSTURA	MALPASO
1Q ENE	16157	9801	27	16	537.70	184.12
2Q ENE	16157	9801	27	16	537.70	184.12
1Q FEB	16157	9801	27	16	537.70	184.12
2Q FEB	15943	9801	27	16	537.38	184.12
1Q MAR	15350	9801	26	16	536.49	184.12
2Q MAR	14775	9801	25	16	535.63	184.12
1Q ABR	14200	9801	24	16	534.73	184.12
2Q ABR	13625	9801	23	16	533.77	184.12
1Q MAY	13050	9801	22	16	532.80	184.12
2Q MAY	12475	9801	21	16	531.83	184.12
1Q JUN	11900	9801	20	16	530.86	184.12
2Q JUN	11900	9560	20	16	530.86	183.31
1Q JUL	13992	9270	23	15	534.38	182.34
2Q JUL	14153	8925	24	15	534.66	181.19
1Q AGO	14297	8680	24	14	534.89	180.36
2Q AGO	14482	8418	24	14	535.18	179.46



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



1Q SEP	14789	8557	25	14	535.65	179.95
2Q SEP	15077	8811	25	15	536.08	180.80
1Q OCT	15407	9106	26	15	536.57	181.79
2Q OCT	15826	9339	26	16	537.20	182.57
1Q NOV	16157	9801	27	16	537.70	184.12
2Q NOV	16157	9801	27	16	537.70	184.12
1Q DIC	16157	9801	27	16	537.70	184.12
2Q DIC	16157	9801	27	16	537.70	184.12

Considerando que la curva guía de la política POL 7 es la óptima, la forma de operar se muestra en forma matricial en las tablas 5.2 a 5.8. El primer renglón indica los estados de la presa Malpaso y en la primera columna los estados de la presa La Angostura.

Cada unidad corresponde a una extracción definida de la forma siguiente: Para la etapa 1, 150 millones de m<sup>3</sup>, de la etapa 2-4 a 300 mill de m<sup>3</sup>, la etapa 5 a 150 mill de m<sup>3</sup> y la etapa 6 a 60 mill de m<sup>3</sup>.

**Tabla 5.2 Política de operación para la etapa 1: Noviembre-Diciembre.**

ESTADOS	MALPASO																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
ANGOSTURA	1	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	
	2	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	
	3	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	
	4	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	
	5	0302	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	
	6	0302	0302	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	
	7	0302	0302	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0202	0102	0202	0102	0103	0104	0105	
	8	0302	0302	0302	0202	0202	0202	0102	0202	0302	0202	0302	0202	0102	0103	0104	0105	
	9	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0103	0104	0105	
	10	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0103	0104	0105	
	11	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0203	0204	0104	0105	
	12	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0105	
	13	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0308	
	14	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0308	
	15	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0308	
	16	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0602	0602	0602	0603	0302	0302	0303	0304	0103	0104	0308
	17	0102	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0603	0604	0302	0202	0102	0103	0104	0105	
	18	0102	0102	0202	0202	0602	0602	0602	0602	0603	0604	0302	0202	0102	0103	0104	0105	
	19	0202	0302	0302	0302	0202	0602	0602	0602	0603	0302	0302	0202	0203	0204	0205	0206	
	20	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0603	0302	0302	0303	0304	0305	0306	0308	
	21	0302	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0602	0603	0402	0302	0303	0304	0305	0306	0408	
	22	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0603	0604	0605	0404	0405	0608	0609	0408	



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



**Tabla 5.3 Política de operación para la etapa 2: Octubre.**

ESTADOS	MALPASO															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ANGOSTURA	1	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	2	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	3	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	4	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	5	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	6	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	7	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	8	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	9	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	10	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	11	0102	0102	0102	0102	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	12	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	13	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	14	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	15	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0103	0104	0105	0105
	16	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0204	0104	0105	0105
	17	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0304	0204	0104	0105	0105
	18	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0305	0205	0105	0105
	19	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0205	0205	0105
	20	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0205	0205
	21	0402	0402	0402	0402	0402	0402	0402	0402	0404	0404	0405	0405	0305	0305	0305
	22	0402	0402	0402	0402	0402	0402	0402	0404	0404	0405	0405	0405	0405	0305	0305

**Tabla 5.4 Política de operación para la etapa 3: Septiembre.**

ESTADOS	MALPASO															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ANGOSTURA	1	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	2	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	3	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	4	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	5	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	6	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	7	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	8	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	9	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	10	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	11	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	12	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	13	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105
	14	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0104	0104	0105	0105	0105
	15	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0205	0105	0105	0105
	16	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0304	0305	0205	0105	0105
	17	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0205	0105	0105
	18	0402	0402	0402	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0305	0205	0105	0105	0105
	19	0402	0402	0402	0402	0402	0404	0404	0405	0405	0405	0305	0205	0105	0105	0105
	20	0402	0402	0402	0402	0404	0404	0404	0405	0405	0405	0305	0205	0105	0105	0105
	21	0402	0402	0402	0404	0404	0404	0405	0405	0405	0405	0305	0205	0105	0105	0105
	22	0402	0402	0404	0404	0404	0405	0405	0405	0405	0405	0305	0205	0205	0105	0105



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



**Tabla 5.5 Política de operación para la etapa 4: Agosto.**

ESTADOS	MALPASO															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ANGOSTURA	1	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	2	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	3	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	4	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	5	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	6	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	7	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	8	0302	0102	0302	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0105	0105	0105
	9	0302	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	10	0302	0302	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	11	0302	0302	0302	0302	0102	0102	0102	0102	0102	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	12	0302	0302	0302	0302	0102	0302	0102	0102	0304	0104	0104	0105	0105	0105	0105
	13	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0104	0105	0105	0105	0105
	14	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0205	0105	0105	0105
	15	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0305	0205	0105	0105	0105
	16	0302	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0305	0305	0205	0105	0105	0105
	17	0302	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0305	0305	0305	0205	0105	0105	0105
	18	0302	0302	0302	0304	0304	0305	0305	0305	0305	0305	0305	0205	0105	0105	0105
	19	0402	0402	0404	0404	0405	0405	0405	0405	0405	0305	0205	0105	0105	0105	0105
	20	0402	0404	0404	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0305	0205	0205	0105	0105	0105
	21	0404	0404	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0305	0305	0205	0105	0105	0105
	22	0404	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0405	0305	0205	0105	0105	0105

**Tabla 5.6 Política de operación para la etapa 5: Junio y Julio.**

ESTADOS	MALPASO															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ANGOSTURA	1	0202	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0106	0108	0108	0109
	2	0302	0302	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0106	0108	0108	0109
	3	0302	0302	0302	0202	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0106	0108	0108	0109
	4	0302	0302	0302	0202	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0106	0108	0108	0109
	5	0302	0302	0302	0202	0202	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0106	0108	0108	0109
	6	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0102	0102	0103	0104	0105	0208	0108	0108	0109
	7	0302	0302	0302	0302	0202	0202	0102	0102	0103	0104	0105	0208	0108	0108	0109
	8	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0102	0103	0104	0105	0208	0208	0108	0109
	9	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0202	0203	0204	0104	0308	0308	0208	0108	0109
	10	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0304	0205	0308	0308	0208	0209	0210
	11	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0304	0305	0308	0308	0308	0309	0310	0210
	12	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0304	0305	0308	0308	0308	0308	0309	0310	0210
	13	0302	0302	0302	0303	0304	0304	0305	0608	0608	0308	0308	0309	0310	0310	0210
	14	0602	0602	0602	0603	0604	0605	0608	0608	0608	0609	0610	0310	0310	0310	0210
	15	0602	0602	0603	0604	0605	0608	0608	0608	0608	0609	0610	0310	0310	0310	0210
	16	0602	0603	0604	0605	0606	0608	0608	0608	0609	0610	0610	0610	0410	0310	0310
	17	0603	0604	0605	0606	0608	0608	0608	0609	0610	0610	0610	0610	0410	0310	0310
	18	0604	0605	0605	0608	0608	0608	0609	0610	0610	0610	0610	0610	0410	0310	0310
	19	0605	0605	0608	0608	0608	0609	0610	0610	0610	0610	0610	0610	0410	0410	0310
	20	0605	0608	0608	0608	0609	0610	0610	0610	0610	0610	0610	0610	0510	0410	0310
	21	0708	0708	0708	0709	0710	0710	0710	0710	0710	0610	0610	0610	0510	0410	0310
	22	0708	0708	0709	0710	0710	0710	0710	0710	0710	0710	0610	0610	0510	0410	0410

**Tabla 5.7 Política de operación para la etapa 6: Enero a mayo.**



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



ESTADOS	MALPASO																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
ANGOSTURA	1	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105
	2	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105
	3	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105
	4	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105
	5	0302	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105
	6	0302	0302	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0102	0103	0104	0105
	7	0302	0302	0202	0202	0102	0102	0102	0102	0102	0202	0102	0202	0102	0103	0104	0105
	8	0302	0302	0302	0202	0202	0202	0102	0202	0302	0202	0302	0202	0102	0103	0104	0105
	9	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0103	0104	0105
	10	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0102	0103	0104	0105
	11	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0202	0203	0204	0104	0105
	12	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0105
	13	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0308
	14	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0308
	15	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0302	0302	0302	0303	0304	0204	0104	0308
	16	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0602	0602	0603	0302	0302	0303	0304	0103	0104	0308
	17	0102	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0603	0604	0302	0202	0102	0103	0104	0105
	18	0102	0102	0202	0202	0602	0602	0602	0602	0603	0604	0302	0202	0102	0103	0104	0105
	19	0202	0302	0302	0302	0202	0602	0602	0602	0603	0302	0302	0202	0203	0204	0205	0206
	20	0302	0302	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0603	0302	0302	0303	0304	0305	0306	0308
	21	0302	0302	0302	0302	0302	0602	0602	0602	0603	0402	0302	0303	0304	0305	0306	0408
	22	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0602	0603	0604	0605	0404	0405	0608	0609	0408

La política 7 fue simulada con datos hasta el 2008 tomando en cuenta la evaporación. Esta política implica aumentar la curva guía tanto para la presa La Angostura como para Malpaso respecto a la curva guía POL CONAGUA 2009, sin rebasar el NAME en ningún punto y en el período desfavorable sin rebasar el NAMO. Lo anterior fue posible al considerar la estadística de los volúmenes de ingreso mensual a las presas.

Para corroborar que la política POL 7 es la óptima se generaron series sintéticas con el método de Svanidze modificado.

El Método de Svanidze modificado (Arganis J., 2004) tiene la ventaja de que no requiere que los datos sean normales y logra reproducir las autocorrelaciones y las correlaciones cruzadas. El problema que tiene es la preservación de la correlación entre el último periodo del año  $i$  y el primer periodo del año  $i+1$ ; pero lo anterior se resuelve identificando los periodos de más baja correlación y redefiniendo los años (en lugar de usar años cronológicos, se utilizan años hidrológicos).



Los datos de entrada al proceso son las  $n$  series periódicas históricas analizadas; se calculan los totales anuales para cada serie, así como la suma de los  $n$  totales para cada año; para cada una de las series se obtiene la fracción del ingreso mensual con respecto al total anual; en forma adicional se determina, para cada total anual de cada serie, el porcentaje con respecto al total suma. A la serie anual formada por la suma de la  $n$  total se le hace un análisis estadístico para determinar la función de distribución de probabilidades de mejor ajuste; un criterio para la selección es el menor error estándar de ajuste.

Se realiza un doble procedimiento aleatorio; el primero de ellos consiste en utilizar la función de distribución de mejor ajuste, con la que se obtienen  $m$  valores aleatorios de la suma de los totales anuales de La Angostura más Malpaso. El segundo procedimiento es la selección aleatoria de entre  $m$  años históricos, para obtener el porcentaje sintético tanto de los totales anuales de cada serie, así como las fracciones mensuales correspondientes.

Se obtienen los totales anuales sintéticos para cada serie multiplicando el volumen total suma aleatorio por el porcentaje correspondiente al año seleccionado también aleatoriamente. Se multiplica el total anual sintético de cada serie por las fracciones mensuales correspondientes al año seleccionado, con lo que se determinan las  $m$  series periódicas sintéticas.

El volumen total suma histórico tuvo el comportamiento de una función Normal; los parámetros considerados fueron:  $\alpha=17124.52$  y  $\beta=3597.97$ . En la figura 5.1 se muestra la comparación entre el volumen histórico anual total suma, el calculado con la función Normal y el sintético.

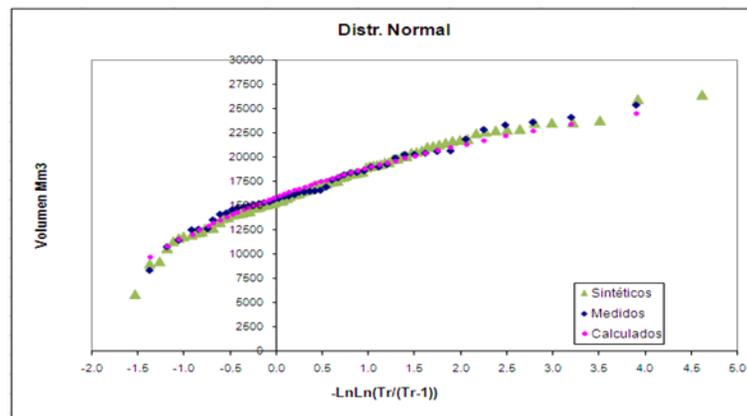


Figura 5.1 Comparación entre el volumen total sintético, histórico y calculado.



## POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA. EFECTOS DE LA CURVA GUÍA



Se generaron 10 series sintéticas de las que se obtuvieron los parámetros estadísticos: media, desviación estándar, coeficiente de asimetría, de variación y de correlación. Se obtuvo el promedio de estos para compararlos con los históricos, tal como se muestran en las figuras 5.2-5.7.

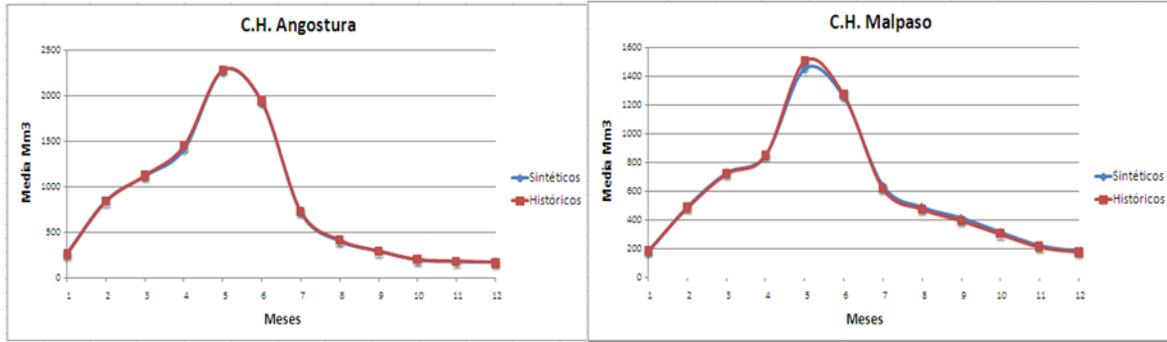


Figura 5.2 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual de la media de las 10 series sintéticas.

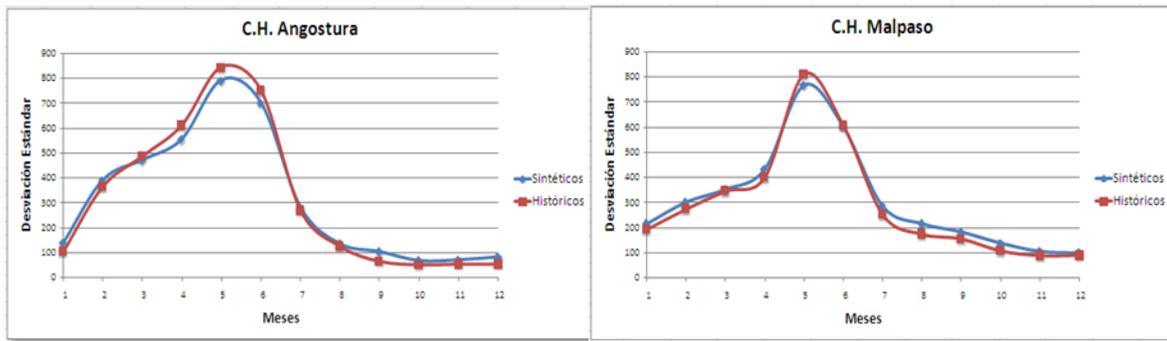


Figura 5.3 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual de la Desv.Estándar de las 10 series sintéticas.

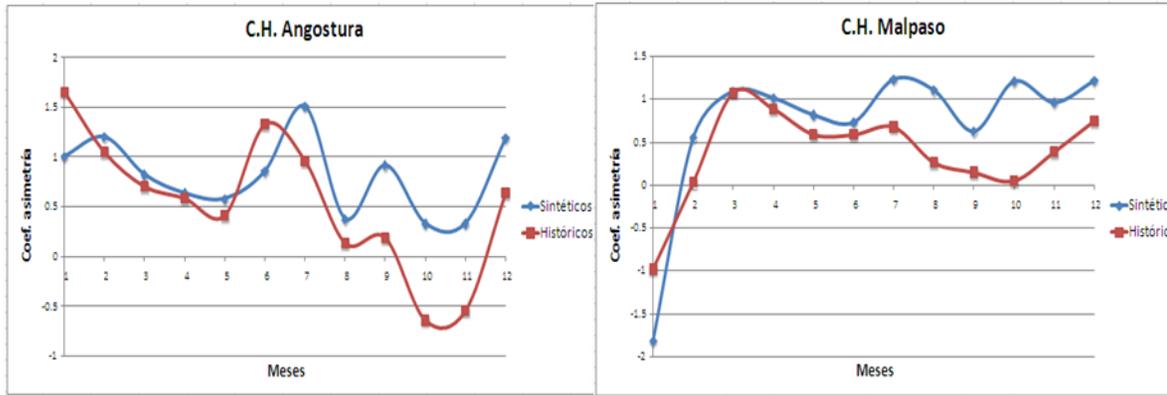


Figura 5.4 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del Coef.Asimetría de las 10 series sintéticas.



# POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA. EFECTOS DE LA CURVA GUÍA

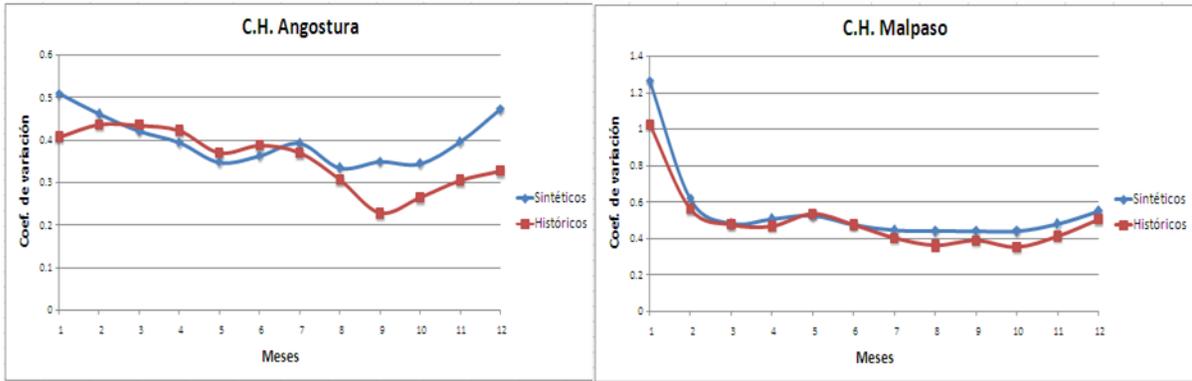


Figura 5.5 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del Coeficiente de Variación de las 10 series sintéticas.

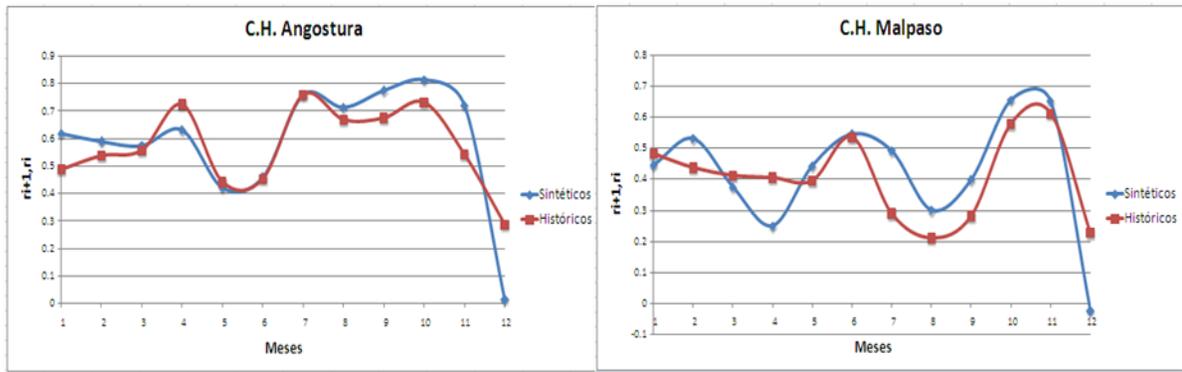


Figura 5.6 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del coeficiente de Autocorrelación de las 10 series sintéticas.

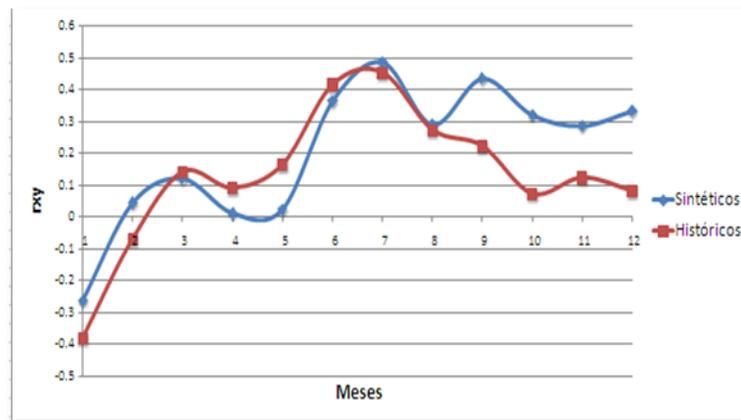


Figura 5.7 Comparación entre el valor histórico y el promedio mensual del coeficiente de correlación cruzada de las 10 series sintéticas.



**POLÍTICA DE OPERACIÓN ÓPTIMA  
DEL SISTEMA DE PRESAS DEL RÍO GRIJALVA.  
EFECTOS DE LA CURVA GUÍA**



Las Figuras 5.2 a 5.7 muestran que el método Svanidze logró reproducir adecuadamente la media en ambas presas en diez de los doce meses del año. El año hidrológico tomado para la generación sintética fue de mayo a diciembre del año  $i$  y de enero a abril del año  $i+1$ . La desviación estándar se ajustó correctamente en la mayoría de los meses del año. En el periodo de Agosto a Septiembre de la presa Angostura, la desviación estándar quedó por debajo de los niveles históricos. El coeficiente de asimetría, coeficiente de variación, coeficientes de correlación y el coeficiente de correlación cruzada en general se reproducen bien; sólo llegan a estar un poco arriba de los valores históricos los coeficientes de asimetría de ambas presas.

Después de generar las 10 series sintéticas de 100 años cada una y corroborar que se lograron preservar sus estadísticos se procedió a realizar la simulación con la política de operación 7 propuesta como óptima. En la tabla 5.8 se muestra el resultado del resumen de las simulaciones, el promedio para las 10 series y su comparación con respecto al promedio de los resultados obtenidos con el registro histórico. Posteriormente, en la tabla 5.9 se presenta la frecuencia de ocurrencia de derrames y déficit que se tienen en el sistema con la generación de mil años sintéticos.

**Tabla 5.8 Resumen de la simulación conjunta con 10 registros sintéticos de 100 años con la política POL 7.**

SERIES SINTÉTICAS	Energía generada GWh/quincena			Derrame $10^6$ de $m^3$		Déficit $10^6$ de $m^3$		Almacenamiento mínimo $10^6$ de $m^3$	
	La Angostura	Malpaso	Suma	La Angostura	Malpaso	La Angostura	Malpaso	La Angostura	Malpaso
1	272.96	209.37	482.33	0	90.62	0	0	2028.81	5213.45
2	283.66	212.96	496.62	0	0.00	0	0	2423.58	5213.62
3	273.18	208.23	481.41	0	0.00	0	0	2081.59	5249.51
4	279.50	210.80	490.30	0	0.00	0	0	2788.99	5731.60
5	283.96	210.01	493.97	0	494.38	0	0	1553.74	5244.62
6	270.84	206.33	477.17	0	0.00	0	0	1518.78	5398.78
7	281.25	210.97	492.22	0	4.42	0	0	2954.16	5218.60
8	284.88	210.72	495.60	0	0.00	0	0	1662.84	5205.79
9	276.17	208.57	484.74	0	0.00	0	0	2998.84	5578.61
10	281.81	209.63	491.44	0	0.00	0	0	2385.04	5314.16
<b>PROMEDIO PROM.SINT/100</b>	<b>278.82</b>	<b>209.76</b>	<b>488.58</b>	<b>0.00</b>	<b>58.94</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2239.64</b>	<b>5336.87</b>
<b>HISTÓRICO/50 AÑOS</b>	<b>276.84</b>	<b>207.01</b>	<b>483.85</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>3085.39</b>	<b>5088.19</b>



Tabla 5.9 Frecuencia de derrames, déficit y rebase de la curva guía. Política 7

SERIES SINTÉTICAS	Años con derrame		Años con déficit		Quincenas en donde se superó la curva guía	
	La Angostura	Malpaso	La Angostura	Malpaso	La Angostura	Malpaso
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
<b>PROMEDIO</b>	<b>0.00</b>	<b>0.3</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

De acuerdo con la tabla 5.8 se tiene que, en promedio de 100 años la energía total generada en el sistema, por quincena, sería de 488.58 GWh/quincena, es decir, aumentaría en 4.73 GWh/quincena respecto al total del promedio histórico. Para Angostura aumenta 1.98 GWh/quincena, mientras que en Malpaso aumentará en un 2.75 GWh/quincena. No se presentarían condiciones de derrames ni déficit en la presa La Angostura, mientras que en Malpaso, en promedio en 100 años se tendría un incremento en el derrame, respecto al histórico podría aumentar en 0.59 millones de m<sup>3</sup>.

Lo anterior indica que la política POL 7 proporciona buenos resultados, pues la generación de series sintéticas permite conocer lo que pasaría en condiciones extremas a largo plazo.

Respecto a la frecuencia de ocurrencia de posibles derrames y déficit en el sistema (Tabla 5.9), se encontró que en la presa La Angostura no se presentarían derrames ni déficit en el sistema en promedio en 100 años; en el caso de Malpaso sólo se presentarían derrames en un año en tres series, es decir en promedio se tendrían 0.3 años con derrame en 100 años y ningún déficit. Es conveniente comentar que si se tuviera déficit significaría que el almacenamiento mínimo en la presa sería igual a cero, cuando hay derrame significa que el almacenamiento en la presa corresponde al NAME.

Adicionalmente, en un promedio de 100 años la curva guía no sería rebasada.



## 6 CONCLUSIONES

Es importante destacar que el óptimo funcionamiento de una presa hidroeléctrica depende de su operación; es decir, saber cuánto debe extraerse dependiendo de la etapa y estado en el que se encuentre operando la presa, por ello es necesario aplicar herramientas que permitan alcanzar este objetivo bajo las restricciones del sistema que se analice.

En este trabajo se aplicó *Programación Dinámica* como herramienta de optimización. Para facilitar al lector la comprensión de dicho método, se presentó un problema sencillo de resolver pero que muestra claramente los beneficios de aplicarlo, de esta forma se introduce a un problema complejo como es un sistema de presas en cascada.

En el ejemplo presentado "*Repartición de un esfuerzo comercial*" se comprobó lo útil que resulta aplicar técnicas de optimización, pues sin utilizarlo se hubieran realizado 1001 cálculos, mientras que usando programación dinámica se realizaron 30 cálculos. También se corroboró que cuando un problema es determinístico no importa el orden para el cálculo, es decir; el procedimiento se puede realizar hacia adelante o hacia atrás y se llega al mismo resultado.

Desde el momento en que se introduce el componente probabilístico, como en el caso del funcionamiento de una presa, en el que solo se conoce las probabilidades de ingreso, se requiere usar la *Programación Dinámica Estocástica*. El procedimiento para aplicar esta metodología es resolver con un proceso hacia atrás, debido a que en principio no se sabe con certeza la trayectoria para obtener cierto beneficio; por el contrario, al final de la vida útil puede considerarse que el beneficio futuro es nulo, es decir, se parte de algo conocido y con un procedimiento hacia atrás se garantiza que el beneficio total será el óptimo.

Se presentó entonces primero en forma detallada un ejemplo del uso de la programación dinámica estocástica aplicada a una presa, suponiendo el caso simplificado de que la presa tiene sólo 4 estados, se consideran 2 etapas y el mayor número de extracciones es igual a 3. Por el contrario cuando se aplica a un sistema de presas real, que además opera en cascada, como en el caso del sistema de presas del río Grijalva, que para fines prácticos se trabajó como un sistema equivalente de dos presas, 6 etapas y 22 estados en la presa 1 y 16



en la presa 2, la solución se torna compleja debido a la cantidad de combinaciones y cálculos, por lo que fue necesario hacer uso de un software.

En este trabajo se analizó la operación del sistema de presas del río Grijalva, por lo que se ensayaron diez curvas guía, entre estas se encuentra la establecida por la CONAGUA en el 2009, la cual se utilizó para fines comparativos en cuanto a generación de energía, almacenamiento mínimo, derrame y déficit.

Las curvas guía influyen notablemente en los resultados de la simulación respecto a la generación total de energía; es decir, si los niveles de la curva guía son bajos la generación total disminuye, que es lo que se observa con la POL CONAGUA. Por el contrario, al subir los niveles de la curva guía la generación total aumenta.

La curva guía 7 que se propone en este trabajo permite incrementar la energía generada y el almacenamiento mínimo en comparación con la usada actualmente. La simulación del registro histórico mostró que con esta curva guía se evita que se produzcan derrames o se presenten déficit.

Para analizar las condiciones extremas en el sistema de presas se simuló con un registro sintético equivalente a 1000 años y se obtuvo que la presa La Angostura no derramó y solamente se obtuvieron 3 ocasiones en las que derramó la presa Malpaso. Con esto se confirma que la curva guía de la POL 7 es la óptima.



## 7 REFERENCIAS

1. Abolghasemi R. H., Optimization of the Kootenay river hydroelectric system with a linear programming model. Master Thesis, Canadá, 2008.
2. Ailing Li, A study on the large-scale system decomposition-coordination method used in optimal operation of a hydroelectric system. Published in Water International, Vol. 29, No. 2, pp. 228-231, China, June 2004.
3. Arganis J. M., Operación óptima de un sistema de presas en cascada para generación hidroeléctrica tomando en cuenta condiciones reales de operación y el uso de muestras sintéticas para el pronóstico. Tesis de Doctorado, UNAM, 2004.
4. Arganis J. M., Domínguez M. R., Estudio integral de la cuenca alta del Río Grijalva. Manejo óptimo de las presas. Informe final elaborado para CFE por el Instituto de Ingeniería, UNAM. Noviembre, 2009.
5. Avilés H. R., Optimización en línea de presas hidroeléctricas. Tesis de Licenciatura, UNAM, 1994.
6. Butcher William S., Stochastic dynamic programming for optimum reservoir operation. Paper No. 71011 of the Water Resources Bulletin (Journal of the American Water Resources Association). University of Texas at Austin, Austin, Texas, 1971.
7. Contreras C. C., Operación óptima de sistemas de presas en cascada. Aplicaciones al sistema del río Grijalva. Tesis de Maestría, UNAM, 1999.
8. Domínguez M. R., Mendoza R. R., Alvarado C. A. y Márquez L.E. Operación integral del sistema hidroeléctrico del río Grijalva. Elaborado para CFE por el Instituto de Ingeniería, UNAM, 1993.
9. Domínguez M. R., Mendoza R. R., Funcionamiento de las Presa Angostura, Chicoasén, Malpaso y Peñitas sobre el Río Grijalva. Elaborado para CNA por el Instituto de Ingeniería, UNAM, 2000.
10. Domínguez M. R., Mendoza R. R., Contreras C. C., Políticas de operación del sistema de presas. Informe preliminar. Elaborado para CNA por el Instituto de Ingeniería, UNAM, 1998.



11. Domínguez M. R., Mendoza R. R., Arganis J. M., Revisión de políticas de operación quincenal de las presas Angostura y Malpaso, en el Río Grijalva. Informe final elaborado para CFE por el Instituto de Ingeniería, UNAM, 2001.
12. Domínguez M. R., Arganis, J. M. L., Carrizosa E. E. Fuentes M. G. E., Echeverri V. C. A., Determinación de avenidas de diseño y ajuste de los parámetros del modelo de optimización de las políticas de operación del sistema de presas del río Grijalva. Elaborado para CFE por el Instituto de Ingeniería, UNAM, 2006.
13. Ferhat T. Ürkman, Optimization of large scale hydroelectric generating systems. Published in Engineering Optimization, Vol. 17, pp. 237-245, Dokuz Eylül University, Faculty of Engineering and Architecture, Izmir, Turkey, May 1991.
14. Fredrick G. A., A study of optimization of reservoir operations of the Colorado River. Master Thesis, University of Colorado, 1996.
15. Kaufmann A., Faure R., Invitation a la recherche opérationnelle. Edición revisada, corregida y aumentada. Editorial continental, S. A. 9° impresión, junio 1980.
16. Rebolledo S. R., Operación óptima de un sistema hidráulico formado por dos presas en paralelo. Tesis de Maestría, UNAM, 1990.
17. Sánchez C. E., Andreu A. J., Expansión óptima de sistemas de recursos hídricos superficiales: Aplicación a un sistema real en España. Universidad Politécnica de Valencia, España, 2002.
18. Sánchez C. E., Wagner G. A., Determinación de reglas de operación óptima para dos embalses, utilizando un algoritmo genético. XIII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico; Universidad Autónoma de Coahuila, Sociedad Matemática Mexicana. Saltillo, Coahuila, México, 2003.
19. Sánchez C. E., Wagner G. A., Modelo numérico para la operación óptima de un hidrosistema de aguas superficiales. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Morelos, México, 2004.
20. Uhr Markus, Optimal operation of a hydroelectric power system subject to stochastic inflows and load. Diploma Thesis, Automatic Control Laboratory, ETH Zürich, Suiza, 2006.
21. Watkins D. W. Jr., A scenario-based stochastic programming model for water supplies from the Highland lakes. University of Texas at Austin, 1997.



---

### Páginas electrónicas

- Asociación Mexicana de Infraestructura Portuaria, Marítima y Costera A.C , en:  
<http://www.amip.org.mx/htm/RevAMIP/A4NUM16/AMIP41618.pdf>
- Cristóbal B. P., Osuna R. A., Portal de subdirección de generación, CFE., 2009-2010.  
<http://h06814.iiie.org.mx/Angostura/inicio/AngosturaFrame.asp?url=../cuencas/chicoasen/PAngostura.asp&lateral=../cuencas/chicoasen/lateralAngostura.asp>
- Comité Técnico Especializado de Información Estadística y Geográfica, en:  
<http://www.seieg.chiapas.gob.mx/seieg/?p=34>
- <http://ingenet.com.mx/noticias/?p=2449>
- <http://www.skyscrapercity.com/showpost.php?p=24831864&postcount=3>