



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**FUNCIONES DISTANCIA Y ARCOS DE MÍNIMA LONGITUD:
MARCO TEÓRICO, MODELADO Y APLICACIONES A PROBLEMAS DE
OPTIMIZACIÓN.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

SISTEMAS - INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

P R E S E N T A:

EUSEBIO VARGAS ESTRADA

TUTORA:

DRA. HÉRICA SÁNCHEZ LARIOS



MÉXICO, D.F.

2009

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. Mayra Elizondo Cortés.
Secretario: Dra. Idalia Flores de la Mota.
Vocal: Dra. Hérica Sánchez Larios.
1er. Suplente: Dr. Ricardo Aceves García.
2do. Suplente: Dr. Servio Tulio Guillén Burguete.

Esta tesis se realizó en
Ciudad Universitaria, Distrito Federal.

TUTORA DE TESIS:

Dra. Hérica Sánchez Larios.

Firma

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Programa de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, mi alma mater, por las oportunidades de desarrollo profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo otorgado que me permitió continuar y concluir con éxito el nivel de maestría.

A los profesores: Dra. Hérica Sánchez Larios y Dr. Servio Tulio Guillén Burguete, por su confianza, dirección y apoyo permanente e incondicional para la realización de este trabajo en el Instituto de Ingeniería.

Al comité de sinodales, por la atención brindada, aportaciones y observaciones hechas al presente trabajo.

A todos los profesores con los que compartí tiempo durante el programa de maestría y cuyo conocimiento ha permeado en mi formación académica.

A mis abuelos: Gabriel y Elena, por su ejemplo de amor, entrega, compromiso y lealtad incondicionales.

A mi padre: Eusebio, por su apoyo, confianza, amistad y aliento permanentes que me impulsan a seguir adelante.

A mi madre: Alicia, por su gran cariño y cuidados en todo momento.

A todos mis hermanos, por los momentos felices manifestaciones de apoyo y sonrisas que me han regalado, especialmente Aimée, quien ha estado a mi lado siempre.

A Marita, quien llegó al final de este capítulo para ser el comienzo de muchos más en mi vida.

LES DOY LAS GRACIAS.

Eusebio Vargas Estrada.

Tabla de contenido.

Abstract.

Introducción.

| | |
|---|----|
| Capítulo 1. ESTADO DEL ARTE | 8 |
| 1.1. REVISIÓN DE ARTÍCULOS..... | 9 |
| Capítulo 2. DISTANCIA Y FUNCIONES DISTANCIA | 30 |
| 2.1. DEFINICIÓN DE CONJUNTO..... | 31 |
| 2.2. RELACIONES EN CONJUNTOS..... | 31 |
| 2.3. DISTANCIA COMO UNA RELACIÓN..... | 32 |
| 2.4. CONCEPTO DE DISTANCIA..... | 33 |
| 2.5. OTRAS MÉTRICAS..... | 36 |
| 2.6. ALGUNAS FUNCIONES DISTANCIA CONOCIDAS..... | 37 |
| 2.6.1. MÉTRICAS..... | 37 |
| 2.6.2. CUASIMÉTRICA..... | 40 |
| 2.6.3. SEMIMÉTRICA..... | 41 |
| 2.6.4. PSEUDOMÉTRICA..... | 41 |
| 2.6.5. PREMÉTRICA..... | 41 |
| 2.7. DIFERENTES ACEPCIONES DEL CONCEPTO DISTANCIA..... | 42 |
| 2.7.1. DISTANCIA TIEMPO..... | 43 |
| 2.7.2. DISTANCIA ECONÓMICA..... | 43 |
| 2.7.3. DISTANCIA COGNITIVA..... | 45 |
| 2.7.4. DISTANCIA SOCIAL..... | 46 |
| 2.8. FUNCIONES DISTANCIA GENERALIZADAS..... | 48 |
| Capítulo 3. LONGITUD DE ARCO | 50 |
| 3.1. ARCO..... | 51 |
| 3.2. LONGITUD DE ARCO..... | 51 |
| 3.2.1. CASO CARTESIANO..... | 51 |
| 3.2.2. CASO PARAMÉTRICO..... | 54 |
| 3.3. LONGITUD DE ARCO GENERALIZADO..... | 57 |
| Capítulo 4. ARCOS ASOCIADOS A UNA FUNCIÓN DISTANCIA Y ARCOS DE MÍNIMA LONGITUD | 60 |
| 4.1. CONCEPTOS GENERALES DE CÁLCULO DE VARIACIONES..... | 61 |
| 4.1.1. LA VARIACIÓN Y SUS PROPIEDADES..... | 65 |
| 4.1.2. ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE..... | 67 |
| 4.2. ARCOS ASOCIADOS A UNA FUNCIÓN DISTANCIA Y ARCOS DE MÍNIMA LONGITUD..... | 70 |
| 4.2.1. ARCOS INDUCIDOS POR UNA FUNCIÓN DISTANCIA..... | 71 |
| 4.2.2. ARCOS MÍNIMOS..... | 72 |
| 4.2.3. GEODÉSICAS..... | 73 |
| 4.3. MÉTODOS PARA DETERMINAR LOS ARCOS DE MÍNIMA LONGITUD EN SUPERFICIES..... | 74 |
| 4.3.1. CAMINO MAS CORTO SOBRE UNA SUPERFICIE SUAVE..... | 74 |
| 4.3.2. MINIMIZACIÓN DIRECTA DE LA INTEGRAL $z = \int_a^b ds$ | 76 |
| 4.3.3. MINIMIZACIÓN DE $z = \int_a^b ds$ RESOLVIENDO LAS ECUACIONES DE EULER..... | 76 |

| | |
|--|-----------|
| 4.4. ALGORITMOS PARA DETERMINAR CAMINOS MÁS CORTOS: CASO DISCRETO..... | 78 |
| 4.4.1. DIJKSTRA..... | 79 |
| 4.4.2. FLOYD..... | 80 |
| Capítulo 5. FUNCIONES DISTANCIA EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS..... | 81 |
| 5.1. MEDICIÓN DE DISTANCIA EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN..... | 82 |
| 5.2. NORMAS Y FUNCIONES ESTIMADORAS DE DISTANCIA..... | 84 |
| 5.2.1. CARACTERIZACIÓN DE UNA NORMA: NORMAS REDONDAS Y DE BLOQUE..... | 85 |
| 5.2.2. PROPIEDADES BÁSICAS DE UNA NORMA..... | 86 |
| 5.2.3. LA NORMA L_p | 87 |
| 5.3. ARCOS INDUCIDOS POR LAS MÉTRICAS L_p | 87 |
| Capítulo 6. MODELADO DE FUNCIONES DISTANCIA: CASO DISCRETO..... | 89 |
| 6.1. DETERMINACIÓN DE LOS ARCOS DE MÍNIMA LONGITUD Y MODELADO DE UNA FUNCIÓN DISTANCIA A PARTIR DE SU FUNCIÓN LAGRANGIANA..... | 90 |
| 6.2. ANTECEDENTES: FUNCIÓN LAGRANGIANA DE UNA FUNCIÓN DISTANCIA SOBRE UNA REGIÓN CONTINUA M | 94 |
| 6.3. PROCEDIMIENTO PARA MODELAR UNA FUNCIÓN DISTANCIA SOBRE UNA REGIÓN DISCRETA N A PARTIR DE UNA FUNCIÓN LAGRANGIANA..... | 98 |
| 6.3.1. OBTENCIÓN DE UNA FUNCIÓN LAGRANGIANA SOBRE LA REGIÓN DISCRETA N ... | 99 |
| Conclusiones..... | 100 |
| Referencias..... | 102 |

Abstract.

This thesis is related with the interpretation, application and mathematical modeling of distance functions with more general properties than common used distance functions have (based on the L_p metric); these general distance functions let us include anisotropic conditions that appear in many real life problems: asymmetric, non positive and non homogeneous conditions . An important question is: ¿what does distance mean in different areas of knowledge? The answer to this question and the way that it is related with other concepts, such as paths (arcs) of minimal length, graphs and space, commonly used in Engineering problems (i.e. a vehicle motion planning on different surfaces) and Operations Research problems that imply distance functions in their solutions (i.e. Facility location and Routing problems), are main themes in this academic work.

Some cardinal concepts that appear in this thesis are: distance function, distance, location, direction, surface, geodesics and the concept of paths associated to a distance function on a discrete region.

INTRODUCCIÓN

OBJETIVO: *Desarrollar un método que permita modelar funciones distancia en regiones discretas a partir de resultados obtenidos por los doctores Sánchez Larios y Guillén Burguete para modelar funciones distancia sobre superficies continuas.*

El presente trabajo trata sobre la interpretación, aplicación y modelado de funciones distancia más generales que las comúnmente usadas en la formulación de problemas. Una pregunta central es qué se entiende por el concepto *distancia*, interesándonos además la manera en que se relaciona éste con otros conceptos, tales como *caminos* (arcos) de mínima longitud, *redes* y *espacio*, usados en algunos problemas de específicos de ingeniería (tales como el movimiento de un robot sobre una superficie) y en problemas de optimización que involucran funciones distancia en su formulación como, por ejemplo, problemas de localización de servicios.

Algunos conceptos eje en esta tesis son: función distancia, distancia, dirección, superficie, geodésicas, así como caminos asociados a una función distancia sobre una región discretizada.

A lo largo del desarrollo de nuestro trabajo, por un lado, se recopilan resultados teóricos y de aplicación obtenidos de diferentes disciplinas que tienen que ver con funciones distancia, distancia y caminos (arcos) de mínimo recorrido; sobre estos últimos, además de referirnos a los de mínima longitud, también se consideran los de mínimo costo, tiempo, energía, etc. dado que, como se detalla en el cuerpo de la tesis, el concepto de *distancia* puede tener diferentes acepciones que dependen del contexto en el que se encuentre enmarcado el problema de que se trate.

Por otro lado, se aborda el tema referente al modelado de funciones distancia que cumplen la desigualdad del triángulo, en las que, por lo mismo, se pueden aprovechar herramientas del cálculo variacional; tal es el caso del modelado de funciones distancia sobre superficies continuas.

La aportación principal de la tesis es que, tomando como referencia esta forma de modelar funciones distancia en superficies continuas, se propone un método para modelar las mismas funciones en el que se discretizan tanto la superficie sobre la cual ocurren los desplazamientos, como las direcciones de posible movimiento.

Todos estos puntos se abordan en seis capítulos, los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo uno se hace un resumen de diversos artículos, ordenados cronológicamente, que tratan sobre funciones distancia, caminos de mínima longitud, problemas de ruta más corta, entre otros. A través de estos trabajos se pueden observar diferentes acepciones del término distancia, además de la diversidad de áreas que lo ocupan en el planteamiento y resolución de problemas.

El capítulo dos se dedica a la definición formal de los términos distancia y función distancia, así como también el de algunas métricas conocidas; se abordan aspectos matemáticos de las mismas y se desarrollan diferentes acepciones del concepto *distancia* que permiten observar el uso que se le ha dado a dicho concepto en diferentes áreas del conocimiento.

En el capítulo tres el tema principal es el de longitud de arco. Este concepto es muy importante para el desarrollo de la propuesta del último capítulo, es por ello que se comienza con la obtención de la longitud de arco en los casos más comunes: el cartesiano y el paramétrico. Al final se introduce el concepto de longitud de arco generalizado tomado de los trabajos de Sánchez Larios y Guillén Burguete.

El capítulo cuatro contiene aspectos teóricos sobre métodos para obtener arcos de mínima longitud mediante métodos para casos continuos, donde el cálculo de variaciones es una herramienta muy útil y por tanto se agregan conceptos generales de esta teoría, y también para casos discretos, donde la teoría de redes ha tratado el tema y ha estudiado algoritmos que permiten resolver este problema, llamado el problema de la ruta más corta. Para este último caso, sólo se hace referencia a dos algoritmos, tal vez los más conocidos, para el cálculo de rutas más cortas: Dijkstra y Floyd.

Dado que las funciones distancia y el concepto mismo de distancia se ocupan en diversos problemas de optimización, se toma como ejemplo a uno de los problemas más estudiados en la ingeniería: el problema de localización de servicios. En el capítulo cinco se desarrolla de una manera más profunda la forma en que estas funciones son modeladas y la manera en que el concepto mismo de distancia es usado en el planteamiento y resolución de este tipo de problemas donde la métrica L_p y sus combinaciones lineales son las formas más comunes de modelar distancias.

Una vez desarrollados los conceptos necesarios, se propone, en el capítulo seis, una forma de modelar funciones distancia sobre regiones discretas a través de la aplicación del concepto de *función lagrangiana* de una función, dando como resultado un procedimiento general para llevar a cabo este modelado que se fundamenta en los resultados de trabajos anteriores. La estructura general de la tesis entonces permite, desde el principio de la misma, ir construyendo el marco teórico que da sustento a la propuesta final del modelado de funciones distancia generales para regiones discretas.

La parte final del trabajo contiene las conclusiones del mismo y los posibles trabajos futuros a los que da pie el presente; además del apartado de referencias que sirve para poder profundizar en los resultados de trabajos que dan pie a la propuesta principal de esta tesis.

CAPÍTULO UNO

ESTADO DEL ARTE

"It is when suffering seems near to them that men have pity; as for disasters that are ten thousand years off in the past or the future, men cannot anticipate them, and either feel no pity for them, or at all events feel it in no comparable measure." (Aristotle)

1.1. REVISIÓN DE ARTÍCULOS.

Dentro de la revisión bibliográfica realizada se encontraron artículos que en su mayoría se relacionan con aplicaciones a la robótica (planeación de movimientos), análisis de imágenes y localización de servicios; sin embargo, también se han revisado trabajos de otros campos, como los sociales, donde las funciones distancia se mencionan como parte importante, aunque debe subrayarse que sólo en algunos de estos trabajos el tratamiento de los conceptos sobre funciones distancia y métricas es de carácter formal, si bien existe alguno que lo haga, y sólo se limitan a introducir conceptos generales no matemáticos sobre el tema.

Es por lo anterior que, dado el carácter formal de la perspectiva en que se revisa el tema, se incluyen los trabajos más representativos y que ofrecen una panorámica del nivel en que se ha tratado el concepto de función distancia, así como también, que dan cuenta de los principales desarrollos en la materia que se han alcanzado, donde se ve reflejada la necesidad de establecer un concepto general de función distancia que facilite a la diversas áreas de aplicación el cálculo de distancias entre objetos, sin que dicho concepto generalizado sea desarrollado formalmente.

Neil C. Rowe and Ron S. Ross (1990). ***Optimal grid-free path planning across arbitrarily terrain with anisotropic friction and gravity effects.*** IEEE Transactions on Robotics and Automation. USA.

En este trabajo se plantea una alternativa de solución al problema de encontrar caminos de mínima energía a través de terrenos anisotrópicos, dicha alternativa no requiere la imposición de de una discretización uniforme de la región considerada sino que propone el uso de una aproximación del terreno a través de poliedros que la representen.

El método propuesto explota el hecho de que existen cuatro formas, matemáticamente simples, de cruzar de manera óptima un terreno homogéneamente anisotrópico:

- 1) En forma recta sin que el vehículo frene en los terrenos isotrópicos.
- 2) En forma recta sin que el vehículo frene pero viajando lo más cercanamente posible a una dirección impermisible
- 3) Cambiando la dirección o "serpenteando" de tal forma que se eviten las direcciones impermisibles.
- 4) De forma recta sin frenar sin importar si el terreno es isotrópico o anisotrópico.

El modelo físico básico utilizado para el planteamiento del método de solución es el de la representación de un cuerpo móvil en un plano inclinado y se describe como sigue:

Asumiendo que el agente móvil no presenta aceleración neta en el camino y que las vueltas o cambios de dirección involucran pérdidas de energía insignificantes, las principales fuerzas externas que operan sobre el agente son la gravitacional y la de fricción, así, cuando el agente móvil cruza una pendiente de ángulo de inclinación igual a θ (que toma valores positivos si el camino es ascendente o valores negativos si el camino es descendente) en la dirección del gradiente, la suma de las dos fuerzas es igual a

$$F = |mg(\mu\cos\theta + \text{sen}\theta)|$$

Donde mg representa el peso del agente móvil y μ el coeficiente de fricción de la superficie que actúa en contra del desplazamiento del agente. Este es el trabajo externo por unidad de área (o "distancia" a recorrer) que debe ser efectuado por el vehículo para avanzar sobre el terreno, de tal manera que el costo de energía del camino es la integral de la expresión sobre el camino.

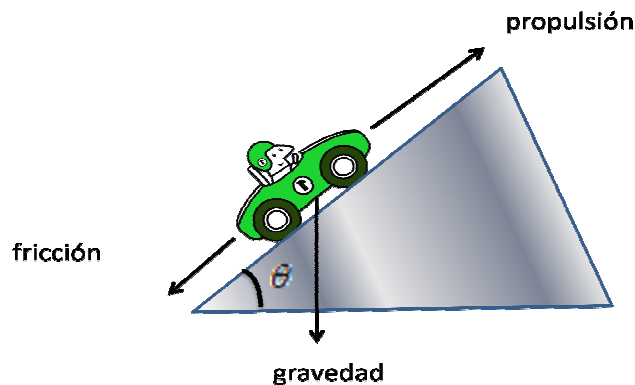


Fig. 1.1. Modelo físico básico del movimiento de un cuerpo sobre un plano inclinado.

Al modelo físico descrito se le hacen algunas simplificaciones para facilitar su manejo en el método propuesto, tales simplificaciones son:

- i) No se considera el viajar directamente hacia arriba o directamente hacia abajo, de tal forma que la fuerza normal no es coplanar con el plano de la pendiente, esto es, dicha fuerza es sólo dependiente del gradiente.
- ii) Se considera el trabajar con la proyección en el plano (sobre un mapa) para manejar el caso en dos dimensiones.

Esta última consideración hace que la pérdida de energía por fricción dependa sólo de la longitud del camino visto desde arriba dado que la longitud percibida del camino en una pendiente vista desde arriba es igual a la longitud del camino multiplicada por el coseno del ángulo de la pendiente, θ .

Además, tales consideraciones hacen que el trabajo contra la fuerza de gravedad sea independiente del camino entre dos puntos y puede, por tanto, ser omitido para la búsqueda del camino óptimo, con ello, sólo la distancia y el coeficiente de fricción son significativos en el problema planteado.

El objetivo de usar un modelo físico general simplificado en conjunto con la aproximación de la región a través de poliedros es el de reducir el problema de múltiples caminos a un conjunto finito de posibilidades probabilísticamente óptimas para después, mediante un método de búsqueda, encontrar el camino de costo óptimo sobre dicho conjunto.

El anisotropismo que se supone del terreno considera cuatro casos:

- a. El agente móvil puede presentar límites en la fuerza ejercida para tratar de contrarrestar las fuerzas de gravedad y de fricción.
- b. Es posible que se presenten límites de potencia o velocidad desarrollados por el agente móvil.
- c. Puede existir una pérdida de tracción que resulta peligrosa en una superficie muy inclinada.
- d. Se pueden presentar volcaduras en terrenos de pendientes muy pronunciadas.

Finalmente se prueba que, sobre el conjunto de todos los caminos entre algún punto de partida o inicial y otro de llegada o final que cruzan la misma región acotada, el costo del camino es una función convexa de parámetros suficientes para especificar el camino, estos parámetros son las distancias sobre la región si se considera un coeficiente de fricción constante para cada sub-camino.

No se profundiza sobre la forma de calcular distancias entre puntos del poliedro que representa el terreno anisotrópico en el que se supone se moverá el vehículo.

Kimmel, Ron; Kiryati, Nahum (1995). ***Finding Shortest Paths on Surfaces by Fast Global Approximation and Precise Local Refinement.*** Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, USA. Department of Electrical Engineering, Israel Institute of Technology, Israel.

Los autores abordan el problema de encontrar el camino más corto con el enfoque de un algoritmo compuesto de dos fases: en la primera fase se combina un estimador de longitud en 3-D con graficador para obtener de forma rápida una aproximación global al camino más corto; en la segunda fase la aproximación se refina para convertirse en una curva geodésica más corta (un camino óptimo local), esto se logra usando un algoritmo que deforma una curva inicial arbitraria que termina en dos puntos de la superficie. La curva en 3-D es transformada en una equivalente en 2-D.

Se destaca que la búsqueda del camino más corto entre dos puntos, también conocida como la geodésica mínima, en una superficie de tres dimensiones es muy importante en problemas de navegación robótica y en el análisis de formas tridimensionales (especialmente en investigaciones del cerebro humano).

La propuesta de solución utiliza el concepto de geodésica, cuando en realidad no la obtiene, como medio para obtener el camino más corto en 3-D, sin embargo, lo que se maneja en realidad es una proyección de una curva tridimensional, que estima la distancia entre dos puntos, sobre el plano y un refinamiento de la proyección por iteraciones para obtener una longitud menor de la curva proyectada.

Kimmel, Ron; Amir, Arnon; Bruckstein, Alfred (1995). ***Finding Shortest Paths on Surfaces Using Level Sets Propagation.*** IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol 17, No. 6. USA.

Se presenta un algoritmo para determinar caminos de mínima longitud entre dos regiones en una superficie de tres dimensiones usando una discretización rectangular de la superficie. En este algoritmo, un primer paso es obtener un mapa de distancias del área objetivo, este mapa se computa a través de la propagación de una curva equidistante en la superficie. Las curvas equidistantes son calculadas como los conjuntos de ceros de una función bivariada que evoluciona en el tiempo.

Se destaca que las geodésicas son caminos más cortos locales en el sentido de que cualquier perturbación en ellas incrementa su longitud, así, la mínima longitud entre dos puntos es la mínima geodésica que conecta tales puntos.

Los autores determinan las mínimas geodésicas construyendo un sistema coordenado geodésico polar en la superficie alrededor del área fuente. Usando tal sistema coordenado obtienen un mapa geodésico circular o mapa de contornos equidistantes en la superficie y con esto, construyen un mapa de distancias Euclidiano en la superficie.

Al final, lo que se busca es ajustar las condiciones del método de solución propuesto a las marcadas por el enfoque de métricas Euclidianas para estimar distancias.

Kappor, Sanjiv; Maheshwari, Sachindra; Mitchell, Joseph (1997). ***An Efficient Algorithm for Euclidean Shortest Paths Among Polygonal Obstacles in the Plane***. Department of Computer Science and Engineering, Indian Institute of Technology, New Delhi, India. Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York, USA.

Se propone un algoritmo para la solución de la búsqueda de caminos más cortos entre obstáculos poligonales en el plano.

El fundamento de la propuesta es como sigue: Si P denota un polígono (conectado y cerrado) en el plano y presenta h hoyos (obstáculos) y un total de n vértices, se puede establecer el problema de calcular un camino más corto desde un punto $s \in P$ hasta un punto $t \in P$.

La propuesta de los autores inicia con una triangulación del espacio P donde los puntos inicial y final están establecidos. El algoritmo busca establecer caminos o "corredores" entre los subespacios triangulares cuidando el pasar por los puntos que geoméricamente proporcionan las mínimas distancias de acuerdo a la geometría Euclidiana del triángulo.

Finalmente, haciendo uso del algoritmo de Dijkstra para la búsqueda de rutas más cortas, se establece el camino de mínima longitud. La diferencia con otros algoritmos del mismo tipo es la forma en que se discretiza el espacio haciendo uso de la triangulación del mismo.

No existe discusión alguna sobre el tipo de función distancia considerada, sin embargo se infiere que se maneja la métrica Euclidiana dada la inclusión de la geometría del triángulo para la determinación de distancias mínimas.

Lanthier, Mark; Maheswari, Anil; Sack, Jörg-Rüdiger (1999). ***Shortest Anisotropic Paths on Terrains***. Proceedings of the 26th International Colloquium on Automata, Languages and Programming. Carleton University, Ottawa, Ontario. Canada.

En este trabajo se discute el problema de computar caminos más cortos en terrenos anisotrópicos. Se define un *terreno* como un conjunto de puntos y arcos (que conecta a los puntos) de los cuales su proyección en el plano x - y forma una triangulación.

Se da cuenta de la gran cantidad de trabajos elaborados sobre el cómputo de caminos Euclidianos más cortos y se señala que el enfoque de caminos ponderados más cortos provee más realismo en el modelado de situaciones que incorporan atributos del terreno tales como costos variables para diferentes regiones, esta característica permite, por ejemplo, modelar situaciones en diferentes ambientes: agua, arena o en carreteras.

El principal motivo de su estudio es modelar situaciones bajo terrenos anisotrópicos donde se pueden identificar ciertas direcciones de viaje que representan pendientes que son muy pronunciadas para ascenderlas o inseguras para viajar por ellas debido que es posible una volcadura, un resbalamiento o pérdida de tracción.

Se plantea la necesidad de estudiar métodos para dar soluciones aproximadas dada la complejidad computacional del problema y se analiza la propuesta de un algoritmo del tipo ε -aproximación que permite dos fuerzas principales que actúan contra la propulsión de un vehículo: fricción y gravedad.

Este modelo asume una aceleración neta igual a cero sobre el camino desde s hasta t y costo nulo por cambio de dirección. L es el arco más largo de un terreno P compuesto de n caras triangulares, cada cara f_j , $1 \leq j \leq n$, con un costo μ_j que pertenece al coeficiente de fricción cinética para cada cara. Además, se tiene que cada cara tiene más de tres rangos de ángulos que definen direcciones permisibles para viajar, y, en conjunto con los rangos de frenado, hay más de cuatro rangos angulares importantes por cara: *ángulos críticos de frenado*.

Dados dos puntos s y t en P puede no existir un camino válido $\Pi(s,t)$ entre tales puntos, pero en este trabajo se asume que existe al menos un camino válido y, aunque se hace esta suposición, el algoritmo puede detectar la ausencia de caminos válidos y reportar cuando tales caminos no existen.

La propuesta es usar una discretización del terreno poliédrico estableciendo puntos de Steiner a lo largo de las aristas del poliedro. Así, se construye un grafo G que contiene puntos de Steiner como vértices y aristas como interconexiones entre dichos puntos que corresponden a los segmentos que caen completamente en las caras triangulares del poliedro. El problema geométrico del camino más corto en un poliedro se convierte así en un problema de grafos de tal manera que los algoritmos eficientes existentes para caminos más cortos en grafos pueden ser usados.

A pesar de que el modelo básico físico es similar para otros trabajos, la principal diferencia es el uso de un número logarítmico de puntos de Steinern sobre cada arista del P y estos puntos son puestos siguiendo una progresión geométrica a lo largo de cada arista. Este enfoque da lugar a un algoritmo de búsqueda de caminos Euclidianos, ponderados y anisotrópicos.

Se verifica que, dado el planteamiento manejado, el concepto implícito de distancia mínima es el de línea recta y se busca resolver el problema mediante una representación del terreno como un grafo donde los métodos conocidos son aplicables.

Bóna, Andrej; Slawinski, Michel (2002). *Ray-paths as parametric curves in anisotropic, non-uniform media: differential-geometry approach*. Nonlinear Analysis, 51. Elsevier Science.

En este estudio se aborda la problemática de calcular caminos de ondas de señales o caminos de rayos en un medio no uniforme.

Se basa en el principio de Fermat de tiempo de viaje estacionario bajo el contexto de elasticidad perfecta donde la velocidad de una señal es únicamente función de su dirección y posición. La formulación general de estos rayos como curvas paramétricas en medios arbitrariamente anisotrópicos y horizontalmente uniformes se usa para calcular estos caminos para las señales y los tiempos de trayectoria de las mismas.

La descripción del medio anisotrópico se da mediante el uso de curvas elementales (wavefronts), de las cuales, el tamaño, orientación y forma pueden cambiar de un punto a otro sobre el eje vertical. Estas curvas elementales pueden ser vistas como indicativas de la geometría asociada a un medio dado.

Se propone la formulación de una métrica de acuerdo a la cual todas las distancias desde un punto origen o fuente a cualquier otro punto en la curva elemental son iguales, así, para un medio anisotrópico no uniforme, estas curvas son cerradas y presentan simetrías determinadas por las leyes fundamentales de la teoría de elasticidad y por propiedades específicas del medio en esos puntos. La formulación de este tipo de métrica está basada en el concepto de geometría Finsleriana donde la definición de la distancia varía con la posición y la dirección (un caso particular de dicha geometría está dado por la geometría de Riemann donde las curvas elementales son elipses).

Este es otro de los pocos trabajos que propone una forma alterna de manejar el concepto de anisotropía mediante el uso de herramientas de cálculo de variaciones e introduce el uso de métricas definidas en geometrías diferentes a la Euclidiana.

Jongrae, Kim; Hespanha, Joao (2003). ***Discrete Approximation to Continuous Shortest-Path: Application to Minimum-Risk Path Planning for Groups of UAVs.*** Department of Electrical & Computer Engineering, University of California, USA.

En este artículo se aborda el problema de encontrar caminos más cortos ponderados en condiciones anisotrópicas en un dominio continuo, es decir, el cómputo de un camino entre dos puntos que minimiza la integral de línea de una función de costo-ponderado sobre el camino. Este costo-ponderado depende de la posición instantánea y la dirección de movimiento.

El algoritmo que se propone para la solución de este problema reduce el mismo a un problema de optimización sobre un grafo finito, restringe la búsqueda a caminos formados por la concatenación de segmentos de líneas rectas entre puntos a partir de una discretización adecuada de la región continua. Para maximizar la eficiencia del algoritmo, no se exige una discretización uniforme de la región, para ello se usa un algoritmo propuesto de muestreo llamado “*honeycomb*” el cual minimiza la penalización en costo producida por la discretización de un espacio continuo.

Se apunta que, generalmente, los trabajos se refieren a este problema como optimización de caminos más cortos, pero esto sólo es cierto cuando la función de costo-ponderado es constante, para el caso que se aborda, dicha función no lo es (dadas las condiciones anisotrópicas del espacio que la hacen depender de la dirección del movimiento), así que se refieren al problema como optimización de caminos ponderados anisotrópicos más cortos y se plantea formalmente como sigue:

Sea P el conjunto de todos los caminos (en unidades de velocidad) en \mathcal{R}^2 desde x_i hasta x_f que son continuos y, por partes, diferenciables dos veces, es decir, un conjunto de funciones continuas $\rho: [0, T] \rightarrow \mathcal{R}, T > 0$ para las cuales:

- (i) $\rho(0) = x_i$ y $\rho(T) = x_f$
- (ii) $\dot{\rho}$ y $\ddot{\rho}$ existen en $[0, T]$ excepto para un número finito de puntos
- (iii) $\|\dot{\rho}\| = 1$ donde quiera que esta derivada exista

El problema de optimización de caminos ponderados anisotrópicos más cortos es calcular un camino $\rho^* \in P$ tal que

$$J[\rho^*] = \min_{\rho \in P} J[\rho]$$

Donde $J: P \rightarrow [0, \infty)$ denota la función definida por

$$J[\rho] := \int_0^T \ell(\rho(t), \dot{\rho}(t)) dt$$

Para cada $\rho: [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$ en P .

Se asume, en todo el trabajo, que la función de costo-ponderado es continuamente diferenciable.

Una vez más, debido a la complejidad de la solución del problema continuo, se resuelve para una aproximación en el caso discreto, donde no se asegura un óptimo, sino más bien una aproximación del costo arbitrariamente cercana al óptimo.

Al final se muestra una aplicación para el caso en que se quiere maximizar la probabilidad de sobrevivencia de un grupo de Vehículos Aéreos No tripulados (UAVs) al cruzar un espacio aéreo resguardado por Unidades de Misiles Antiaéreos (SAMs) ubicados en posiciones bien definidas dando buenos resultados y quedando trabajo pendiente para evitar la sobre-representación de puntos que el algoritmo de muestreo arroja al ser aplicado con diferentes vehículos en la misma situación.

Es el primer trabajo encontrado donde se plantea la solución del problema desde la perspectiva del cálculo de variaciones (sin ser mencionado así) a través de usar una funcional para los casos en donde las condiciones del medio son anisotrópicas.

Nagy, Benedek (2003). *Shortest Paths in Triangular Grids with Neighbourhood Sequences*. Journal of Computing and Information Technology.

Se analizan algunas propiedades de las discretizaciones triangulares y hexagonales en espacios digitales de dos dimensiones.

Debido a que en la geometría digital los espacios con que se trabajan consisten en puntos discretos con coordenadas discretas, el autor define una función distancia que toma valores enteros.

Se analiza el hecho de que, dado que en los principios de la geometría digital se usaban las discretizaciones cuadradas en investigaciones, se producían dos tipos de movimientos en dos dimensiones: el movimiento llamado “por cuadras” o “en bloques” de ciudad que permite sólo movimientos horizontales y verticales; y el movimiento “de ajedrez” donde los desplazamientos diagonales son también permitidos. Así, se señala, basado en este tipo de movimientos, en este tipo de discretización se tienen dos tipos de métricas para calcular distancias.

Mediante el concepto de secuencias en vecindades se pueden establecer distancias entre dos puntos de una región, para el caso analizado por el autor, las discretizaciones hexagonales son de interés, así como las triangulares (las cuales son el dual de las primeras) y se establecen medidas de distancia en ambos casos a través de hallar secuencias vecinas. Sin embargo, el encontrar este tipo de secuencias no garantiza que se esté generando una métrica.

Para el caso de las rejillas hexagonales se usa una función distancia *natural* basada en las relaciones naturales en vecindades entre patrones hexagonales, así, se usa un sistema de tres valores coordenados para describir este tipo de discretización. Se asegura que las aproximaciones de las distancias Euclidianas no son difíciles en este sistema, es decir, las rejillas hexagonales ofrecen una manera fácil de hacer que su geometría digital sea similar a la Euclidiana.

El caso de las rejillas triangulares se trata de manera similar, sin embargo, como se dijo antes, las funciones distancia generadas en ambos casos por las secuencias en vecindades no prueban ser una métrica para cada secuencia.

Hjaltason, Gísli; Samet, Hanan (2003). ***Properties of Embedding Methods for Similarity Searching in Metric Spaces***. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 25, No. 5.

Este artículo involucra directamente los conceptos de funciones distancia y espacios métricos aplicados a la búsqueda de similitudes entre objetos de un mismo conjunto.

Las aplicaciones que se mencionan son el análisis de datos complejos, tales como imágenes, documentos, secuencias de ADN, etc. todas parte del análisis de bases de datos complejas donde típicamente se persigue el encontrar objetos que son similares a un objeto predeterminado, la similitud o disimilitud está definida por una función distancia.

Se establece que el costo de evaluar la distancia entre dos objetos es muy alto, computacionalmente hablando, de esta manera el objetivo en este tipo de procesos de búsqueda de similitudes es mantener las comparaciones en un mínimo mientras la calidad de los resultados se mantiene (esto es una situación ideal).

Una manera de alcanzar el objetivo planteado es proyectar o *introducir* los objetos o datos en un espacio vectorial de tal forma que las distancias de los objetos introducidos se aproximen a las distancias reales, así, se pueden efectuar comparaciones entre la mayor parte de los objetos en el espacio vectorial.

El trabajo de los autores está orientado al análisis de los efectos de llevar a acabo este tipo de proyección de un conjunto en un espacio vectorial definido, tales efectos pueden ser el dejar fuera

a elementos del conjunto original que resulten ser tan relevantes que afecten los resultados obtenidos de las comparaciones hechas, además de la distorsión que se presenta al cambiar el espacio original por una proyección de menor dimensión.

Especialmente se analizan los métodos de proyección o introducción llamados SparseMap, FastMap y MetricMap; el primer método es una variante del método Lipschitz, mientras que los dos últimos están inspirados en una reducción dimensional para espacios Euclidianos.

Se muestra que, en general, ninguno de los métodos analizados garantiza que las comparaciones en los objetos proyectados no tengan exclusiones importantes o exclusiones trascendentales, pero se demuestra que existen casos limitados donde dicha garantía sí se mantiene.

Otro punto que se destaca es que una variante del método SparseMap permite comparaciones sin exclusiones importantes, además, se muestra que con los métodos FastMap y MetricMap las distancias obtenidas pueden ser mucho más grandes que las distancias reales, lo cual hace casi imposible el hecho de poder modificar estos métodos para garantizar que no presenten exclusiones importantes.

Se puntualiza que el tipo de función distancia usada en este tipo de métodos se requiere que sea una métrica o, en el peor de los casos, que sólo un número reducido de distancias viole la desigualdad del triángulo. Se menciona que una ventaja importante de este tipo de métodos es que se pueden aplicar sin importar la naturaleza de los datos dado que las funciones distancia son tratadas como cajas negras.

Formalmente, los conceptos usados se establecen como sigue:

Una *tupla* (S, d) se dice que es un espacio métrico finito si S es un conjunto finito de cardinalidad N y $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una métrica distancia.

Se busca proyectar un espacio métrico finito en espacios de menor dimensión y con normas reales, esto es, espacios vectoriales reales con una norma, que sirvan de base de una distancia-métrica. Usualmente la norma es una de las normas $L_p: \|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$; las distancias-métricas que se basan en tales normas son llamadas métricas Minkowski cuando $p \geq 1$. Se puntualiza el hecho de que las normas más comunes son la Euclidiana (L_1), la de Bloques de Ciudad (L_2) y la de Tablero de Ajedrez (L_∞).

Una proyección de un espacio métrico finito (S, d) en (\mathbb{R}^k, δ) es un mapeo $F: S \rightarrow \mathbb{R}^k$ donde k es la dimensión del espacio proyectado y $\delta: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la distancia-métrica del espacio proyectado. Si se denota la norma en \mathbb{R}^k por $\|\cdot\|$, la distancia-métrica δ está definida como $\delta(x, y) = \|x - y\|$. Idealmente la distancia $\delta(F(o_1), F(o_2))$ en el espacio proyectado es muy cercana a la distancia $d(o_1, o_2)$ en el espacio original, sin embargo, es casi imposible y/o impráctico alcanzar una correspondencia exacta entre las distancias basadas en d y δ .

No se plantea la posibilidad de usar otro tipo de métricas o funciones distancia.

Aggarwal, Charu (2003). ***Towards Systematic Design of Distance Functions for Data Mining Applications***. IBM T. J. Watson Research Center, NY. USA.

En este trabajo, proveniente de la industria del cómputo, se plantea la necesidad de realizar investigación en torno al diseño de funciones distancia ad-hoc a las necesidades de los usuarios del manejo de información, específicamente de *data mining* o minería de datos.

Dado el incremento en la velocidad de recolección de datos, se señala la importancia de las funciones distancia en aplicaciones de data mining (clustering, calificación de datos, búsqueda del vecino más cercano, entre otras) como una tarea clave y se puntualiza que la forma más efectiva de una función distancia sólo puede ser expresada en el contexto de un dominio particular de datos, siendo una tarea no trivial, e incluso un reto, el encontrar tal forma de la función. Como ejemplo de la aseveración anterior, se habla del dominio de los textos donde el diseño de funciones distancia ha sido considerado un aspecto de tal importancia y complejidad que ha sido el centro de investigaciones intensivas en tres décadas. El diseño final de las funciones distancia en este dominio ha sido alcanzado sólo mediante pruebas empíricas y consensos sobre la calidad de los resultados surgidos de diferentes variaciones.

El aspecto más importante, según el autor, del diseño de funciones distancia es, dado que el ser humano es el usuario final de cualquier aplicación, que dicho diseño debe satisfacer los requerimientos del usuario de manera efectiva.

Por lo anterior, se establece la necesidad de un enfoque sistemático para diseñar funciones distancia que sean sensibles a las características particulares de los dominios de los datos. La meta es crear funciones distancia de una forma automática y a la par minimizar el trabajo requerido del usuario.

Formalmente: Se considera un conjunto de datos D que contiene un conjunto de N registros, cada uno con d dimensiones. Se asume que los registros \bar{X} y \bar{Y} son sacados de la base de datos D . Se define una función distancia paramétrica $f(\bar{X}, \bar{Y}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ como la función de sus argumentos \bar{X} y \bar{Y} y los k parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Debe notarse que esta definición de función distancia es incompleta dado que sólo asume una forma básica de la función y deja varios parámetros sin especificar; tales parámetros no especificados son *aprendidos* por una serie de interacciones con usuarios cuya realimentación es usada para ajustar la función distancia básica con el objetivo de que satisfaga los requerimientos del usuario final.

Además, se destaca que dicho marco de referencia o enfoque sistemático debe crear funciones que sean significativamente más efectivas que las popularmente usadas, como las métricas Euclidianas, las cuales presentan problemas en bases de datos muy grandes debido a que

generalmente las diferencias entre datos pueden no ser tan significativas y la información de distancia entre ellos dado por la norma Euclidiana no es tan efectiva.

Finalmente se señala que en la mayoría de los casos, la elección de la función distancia a usar en cierta aplicación no está predefinida, sino que más bien es elegida de manera heurística.

Mohler, Joel; Umble, Ron (2004). ***Minimal Paths on Some Simple Surfaces with Singularities.*** Department of Mathematics, Lehigh University, Bethlehem. Department of Mathematics, Millersville University, Millersville.

En este trabajo se presenta un análisis matemático sobre caminos más cortos encontrados en superficies simples de formas conocidas: cilindros y copas cónicas.

Se aborda el análisis desde la perspectiva geométrica para llegar a una clasificación de los caminos encontrados en cada superficie.

El problema se plantea de la siguiente forma: Dados dos puntos A y B en una lata de sopa o una copa cónica S, encontrar todos los caminos de mínima longitud que los conectan. Los autores aseguran la existencia de tales caminos basándose en el teorema de Ascoli que dice que el espacio $S^{[a,b]} = \{\gamma: [a, b] \rightarrow S \mid \gamma \text{ continuo}\}$ es compacto.

Una de las conclusiones presentadas es que, cuando el número de caminos es finito, existen a lo más cuatro en una lata y tres en una copa, además de que se prueba el hecho de que los caminos mínimos son siempre geodésicas.

Se aprovecha el hecho de que estas formas tridimensionales pueden descomponerse en regiones planas (descomposición isométrica) conectadas en algunas partes de sus fronteras. Las geodésicas en S aparecen como una unión de segmentos de líneas rectas en alguna familia de un modelo plano.

El trabajo desarrolla ciertos puntos sobre caminos más cortos en superficies muy bien determinadas (un cilindro y un cono) y demuestra que estos caminos son finitos y determinados por geodésicas usando un “desdoblamiento” de las superficies en regiones planas interconectadas donde se pueden “visualizar” tales geodésicas como una secuencia encadenada de segmentos de líneas rectas.

Endelman, Jeffrey; Silberg, Jonathan; Wang, Zhen-Gang; Arnold, Frances (2004). **Site-directed protein recombination as a shortest-path problem**. Protein Engineering, Design & Selection, Vol. 7, No. 7. Oxford University Press.

Otro campo donde surge el problema de encontrar caminos más cortos es en el análisis de comportamiento de proteínas; este campo ha tomado especial relevancia en los últimos 10 años. El trabajo aborda el problema de modelar el proceso de recombinación de proteínas y lo plantea como un problema de caminos más cortos.

Su base está en el siguiente razonamiento: El diseño de proteínas busca una secuencia de aminoácidos que codifica una proteína con propiedades deseadas. Una estrategia exitosa para lograr este objetivo es la llamada *evolución en laboratorio* que involucra la búsqueda de las propiedades de interés en librerías de proteínas, estas librerías son generalmente creadas mediante recombinación y/o mutación de proteínas padres con estructuras similares. El proceso de diseño de librerías es complementario al diseño de secuencias en la cual una nueva proteína es creada *de novo* o haciendo cambios específicos guiados por modelos a una proteína padre.

Por diversidad se entiende el cómo las proteínas en la librería difieren de las características de los padres y entre ellas mismas, y aunque la diversidad es necesaria para efectuar cambios en la función de una proteína, es, a su vez, contraria a la necesidad de estabilidad de las proteínas desdobladas, es decir, mientras muchas mutaciones son neutrales o disruptivas para la estructura de la proteína, la fracción de proteínas desdobladas estables en una librería tiende a decrecer con la diversidad.

De manera equivalente a lo establecido con anterioridad, para una función de energía que mide la estabilidad de la proteína, la energía promedio de todas las proteínas en una librería $\langle E \rangle$ tiende a incrementar con la diversidad. Este tipo de intercambio (trade-off) o contraposición de elementos es común en problemas de diseño de proteínas con objetivos de desempeño en conflicto. Es por ello que los autores proponen una estrategia que involucra el encontrar librerías en la superficie óptima de intercambio energía-diversidad.

Se aplica la estrategia a un método llamado Recombinación dirigida (SDR) en la cual se seleccionan n cruza en una alineación de p padres relacionados en estructura para definir un conjunto de $p(n+1)$ fragmentos de péptidos los cuales son ensamblados de forma combinatoria para crear una librería de p^{n+1} proteínas-quimeras.

Para optimizar las librerías SDR para un conjunto de padres dado con un número fijo de cruza n , se minimiza la energía promedio de todas las quimeras $\langle E \rangle$, sujeta a las restricciones de longitud L de cada fragmento de péptido:

$$\min_{(X_1, X_2, \dots, X_n)} \langle E \rangle$$

Sujeto a

$$L_{min} \leq L \leq L_{max}$$

Donde (X_1, X_2, \dots, X_n) son las localizaciones de las cruces.

En este artículo se prueba que para una proteína de longitud N , la ecuación anterior es equivalente a encontrar el camino más corto en una red con $O(nN)$ nodos. Así, se obtiene un algoritmo para el diseño de librerías llamado RASPP (Recombination as a Shortest-Path Problem) que ayuda a determinar cuáles diseños conducirán a librerías de menor energía.

El concepto de distancia usado no es el tradicional (longitud de camino recorrido) y se establece en términos de energía, sin embargo no se establecen claramente las propiedades de la función distancia utilizada.

Johnson, David; Cohen, Elaine (2004). ***Unified Distance Queries in a Heterogeneous Model.*** Proceedings Technical Conferences, ASME Design Engineering Technical Conferences, Salt Lake City, Utah. USA.

Los autores proponen como tema central de su discusión la necesidad de establecer un método para encontrar la distancia entre dos modelos con diferentes representaciones dado que las funciones distancia pueden ser difíciles de formular y requerir múltiples métodos especializados.

Las aplicaciones principales para este tipo de métodos son simulación, planeación de caminos o rutas para robots, dispositivos controladores y modelación, todas en ambientes con representaciones heterogéneas.

Los modelos que, según el trabajo, son los más usados para comparar distancias se usan en ambientes homogéneos, de tal forma que las funciones para encontrar la mínima distancia son muy especializadas en el modelo en que se aplicará, ya sea en ambientes poligonales o en ambientes de “nubes de puntos”.

El hecho de que se tenga que desarrollar una función distancia especializada para que sea aplicable al ambiente en que se trabaje hace que el cúmulo de tal tipo de funciones crezca en gran manera, de tal forma que a la fecha no es posible saber con exactitud cuántas funciones distancia han sido o, aún, deben ser desarrolladas.

El enfoque que se propone es el de un algoritmo que se basa en otros desarrollos y los generaliza para poder computar una distancia mínima entre dos objetos que pueden pertenecer a diferentes ambientes. Los enfoques que se toman como base son:

Modelos para búsquedas entre objetos de ambientes poligonales, lo cuales generalmente están compuestos por colecciones de triángulos. Este tipo de modelos generan una cantidad de distancias calculadas entre puntos para posteriormente efectuar una comparación entre ellas y “podar” las mayores del conjunto calculado de manera iterativa hasta obtener la menor de las distancias. Algunos enfoques fijan fronteras de búsqueda para acelerar el proceso de cálculo.

El otro tipo de modelo es de los llamados paramétricos lo cuales están compuestos de “parches” o porciones de superficies suaves y basan su funcionamiento en métodos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones que describen las condiciones de mínima distancia entre dos modelos paramétricos.

La distancia entre dos modelos paramétricos $F(u,v)$ y $G(s,t)$ es la mínima magnitud del vector diferencia $D(u,v,s,t) = |F(u,v) - G(s,t)|$; la magnitud de la función D al cuadrado evita la raíz cuadrada involucrada en el concepto Euclidiano de distancia usado generalmente en este tipo de cálculos como una aproximación aceptable.

Los extremos del vector diferencia ocurren en las raíces coincidentes del conjunto de sus derivadas parciales

$$(F - G) \cdot F_u = 0$$

$$(F - G) \cdot F_v = 0$$

$$(F - G) \cdot G_s = 0$$

$$(F - G) \cdot G_t = 0$$

Este sistema de ecuaciones ha sido resuelto mediante computación simbólica, métodos de intervalos y otros métodos numéricos los cuales tienen la ventaja de una convergencia rápida y son de relativamente fácil implementación.

Algunos otros autores han hecho el esfuerzo de combinar estos enfoques pero no se han logrado métodos generales eficientes de cálculo de distancias mínimas, sólo se menciona un método alternativo que usa proyecciones ortogonales desde un punto de una superficie a otro punto en otra superficie que eventualmente lleve a una intersección entre ambas.

Se sostiene la aseveración de que mientras se han desarrollado enfoques para encontrar la distancia mínima entre dos objetos de la misma representación o de la misma familia, no ha habido mucho esfuerzo en desarrollar métodos generales para computar distancias que involucren objetos de diferentes representaciones o familias.

El enfoque mostrado es llamado Función Distancia Genérica Modelo-Modelo y está basado en la observación de la distancia mínima local entre dos modelos que, de acuerdo al artículo, puede ser encontrada a través de:

1. Encontrar la mínima distancia desde un punto objetivo en el primer modelo hasta el segundo modelo.
2. Usando el punto obtenido anteriormente como un nuevo punto objetivo, encontrar el punto más cercano a tal punto en el primer modelo.
3. Repetir este proceso hasta que la distancia mínima entre ambos modelos converja.

Generalmente inicializan la búsqueda encontrando los puntos más cercanos entre dos conjuntos o “cajas” delimitadas que contienen ambos modelos.

Se establece que, de acuerdo a los resultados obtenidos en sus pruebas, su algoritmo converge en el 95% de los casos estudiados a la misma distancia buscada entre dos modelos diferentes.

Se dice que el algoritmo es flexible al permitir el uso de funciones distancia especializadas y que, incluso, esto lo hace más eficiente, sin embargo no se hace mención explícita de que se haya probado con enfoques diferentes al Euclidiano o de que se haya formulado alguna función distancia general.

Riviere, Thomas; Brisset, Pascal (2005). ***Shortest Path in Planar Graph and Air Route Network***. Proceedings of the International Conference on Research in Air Transportation.

El artículo presenta una solución desarrollada con el objetivo de contribuir a la creación una red de rutas aéreas europeas unificada.

La base de este trabajo es la integración de herramientas conocidas: Recocido Simulado y el algoritmo de Floyd-Warshall para caminos más cortos. El trabajo busca generar una red de rutas que sea compatible con el concepto Menor-Sector para control de tráfico aéreo y que provea de rutas más cortas posibles a las aeronaves.

En el concepto de Menor-Sector, sólo un controlador aéreo es responsable de un número m de aeronaves desde la salida hasta la llegada en terminales aéreas, a diferencia del concepto tradicional donde existen dos controladores en dos sectores del espacio aéreo controlando n aeronaves.

Como inicio del nuevo algoritmo, se propone una discretización del espacio aéreo europeo simple: una *rejilla* o *grid* cuadrado donde cada arista representa 4000 km de longitud; cabe mencionar

que dada la curvatura de la tierra, las rutas reales se estiman 32% más largas que las directas establecidas en el *grid* del espacio aéreo propuesto.

La aplicación del método de recocido simulado es simple para establecer diferentes rutas y construir con ellas una red que finalmente será optimizada con el algoritmo de Floyd-Warshall.

Las limitaciones son principalmente dos:

1. La distancia entre dos puntos opuestos no puede ser menor que 100 km
2. Un camino más corto no puede incluir un ángulo menor que 90 grados.

Tales limitaciones obedecen a criterios necesarios para asegurar que se respeten las leyes físicas en vuelos.

A pesar de que el trabajo reviste importancia en el diseño de una red unificada de vuelos en Europa, no se menciona nada al respecto de la forma en que las distancias son estimadas. También se puede observar que, dado el hecho de usar aproximaciones no geodésicas, se asume un error estimado de un 32% entre las distancias estimadas y las reales.

Linderman, Stephen; LaValle, Steven (2005). *Current Issues in Sampling-Based Motion Planning*. Department of Computer Science, University of Illinois. USA.

En este artículo se hace una revisión de las técnicas usadas para la planeación de movimientos en robótica y sus aplicaciones.

Este tipo de técnicas basan su actuar en una exploración aleatoria del espacio, generando una muestra del mismo después de haberlo discretizado, este tipo de espacio es llamado C-Space o espacio de configuración y está constituido de un conjunto de puntos representativos del espacio total. La forma en que se muestrea el espacio, es decir, el algoritmo usado para obtener la muestra del espacio es muy importante en este tipo de técnicas, por lo que debe ponerse especial cuidado en su elección.

Otro elemento importante en esta técnica es la forma en que se determina si un camino atraviesa por un obstáculo o no (camino en colisión con un obstáculo) de tal manera que se pueda tomar una decisión en cuanto a si dicho camino es o no factible.

Además de describir la técnica en forma general, también se da cuenta de las aplicaciones en ciencias biológicas que de un tiempo a la fecha han venido desarrollándose con estas técnicas.

El objetivo es que se encuentre el camino más corto entre dos puntos de un espacio, entendiendo que el costo de cada camino queda determinado no sólo por la distancia física entre los puntos, sino también por el gasto de energía que implicaría el recorrerlos.

El tema de funciones distancia queda manifiesto en la revisión de los criterios para efectuar un muestreo: discrepancia y dispersión. Esto formalmente se establece de la siguiente forma:

Sea $X = [0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ que define un espacio sobre el cual se generarán muestras. Se considera evaluar la uniformidad de un conjunto, P , de N -dimensional puntos de muestra $\{p_0, \dots, p_{N-1}\}$. La *discrepancia* está definida como

$$D(P, R) = \sup_{R \in \mathbb{R}} |\mu(R) - |P \cap R|/N|$$

Donde $|\cdot|$ de un conjunto denota su cardinalidad, μ denota la medida de Lebesgue, y R es un rango del espacio.

La dispersión está definida como

$$\delta(P, \rho) = \sup_{x \in X} \min_{p \in P} \rho(x, p)$$

Donde ρ denota cualquier métrica.

En el artículo, los autores destacan que, a menos que se diga lo contrario, se entiende que esta métrica es ℓ^∞ , es decir normas del tipo L_p .

Cheng, Siu-Wing; Na, Hyeon-Suk; Vigneron, Antoine; Wang, Yajun (2007). ***Approximate shortest paths in anisotropic regions.*** Department of Computer Science and Engineering, HKRUST, Hong Kong and Applied Mathematics and Informatics Department, INRA, France.

Este es un trabajo multidisciplinario que aborda el problema de encontrar el camino más corto para un móvil en un terreno subdividido en planos con n vértices.

Se plantean las aplicaciones de las soluciones de este problema a diferentes ámbitos: Sistemas de Información Geográficos, Logística, Planeación de Movimientos y Gráfica Computacional entre los más importantes.

Además se describe que, como los caminos encontrados caen en un ambiente geométrico en todas las aplicaciones y este ambiente es usualmente representado por una división poligonal (o poliédrica) del terreno o espacio considerado, pueden usarse diferentes métricas en diferentes regiones de la subdivisión para modelar los efectos de fricción, viento, inclinación o cualquier otra restricción mecánica. Es debido a las diversas aplicaciones y a la variedad de ambientes

geográficos posibles, así como métricas, que se han desarrollado extensivamente algoritmos para solucionar este problema.

Los autores parten de los trabajos hechos sobre el problema planteado para una región ponderada donde un robot (señalado como un punto en la región) se mueve sobre una subdivisión en planos T , y cada cara f de T es asociada con un peso $w_f > 0$; aquí, el costo de un camino en un cara f es la longitud de este camino multiplicada por w_f . Se asume que las caras de la subdivisión T son todas triangulares. El número de vértices de T se denota por n . Uno de los primeros algoritmos que trabaja bajo este esquema es una versión continua del algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta más corta de un grafo; otros algoritmos discretizan el espacio de búsqueda fijando puntos de Steiner y encontrando un camino más corto en un grafo cuyos nodos son dichos puntos.

Se señala que la principal limitación de este enfoque (modelo de región ponderada) es que sólo permite modelar situaciones donde las métricas usadas son isotrópicas, es decir, que no se puede tomar en cuenta efectos tales como vientos, corrientes o cualquier otro campo de fuerza que se favorece en ciertas direcciones del trayecto.

J. Reif y Z. Sun (2004) dan a conocer, en su trabajo *Movement planning in the presence of flows*, un modelo más general donde la planeación de movimientos se podía dar en la presencia de flujos uniformes y que permitía modelar la fuerza de fricción y un flujo uniforme en cada región. Aquí se establece la necesidad de remover la dependencia en parámetros difíciles de obtener para el tiempo de corrida y, además, se manifiesta la deseabilidad de manejar más tipos de métricas generales para poder modelar una mayor cantidad de problemas de aplicaciones reales.

Siguiendo la línea de trabajo, los autores consideran una generalización del modelo de Reif y Sun: Un punto-robot se mueve en una subdivisión en planos desde un punto fuente v_s a un punto destino v_d . La subdivisión T puede presentar "hoyos" que modelan posibles obstáculos. La distancia en cada cara f de la subdivisión se mide de acuerdo a una posible función distancia convexa asimétrica, así, diferentes funciones distancia convexas pueden ser usadas en diferentes caras. B_f denota la unidad "disco" de la función distancia de una cara f y se asume que B_f esta contenida en una unidad disco Euclidiana concéntrica y que, a su vez, B_f contiene un disco concéntrico Euclidiano de radio $1/\rho$; en otras palabras, se plantea que existe un valor $\rho \geq 1$ tal que la velocidad del robot en cualquier dirección y en cualquier cara de T está en el intervalo $[1/\rho, 1]$. Para este enfoque, los problemas de la región ponderada y la planeación de caminos en la presencia de flujos uniformes son casos especiales.

Se asegura que el algoritmo presentado es el primero en manejar funciones distancia convexas generales (que no son necesariamente una métrica dado que pueden ser asimétricas aunque cumplen con la desigualdad del triángulo) y, aunque se afirma que no es obvia la existencia de un camino óptimo en el modelo propuesto, se sostiene que, de acuerdo a la teoría de espacios de longitud, se puede probar que existe un camino óptimo rectificable.

Se introduce una función distancia-costo definida como

$$d(x, y) = \inf\{\text{cost}(P): \text{es un camino poligonal desde } x \text{ hasta } y, P \subset |T|\}$$

Cuyas propiedades son:

- (i) Para cualquier $x, y \in |T|$, $x = y$ si y sólo si $d(x, y) = 0$
- (ii) Para cualquier $x, y \in |T|$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- (iii) Para cualquier $x, y \in |T|$, $\|xy\| \leq d(x, y)$
- (iv) $d(., .)$ es continua sobre $|T|^2$
- (v) Para cualquier $x, z \in |T|$, existe una $y \in |T|$ tal que $d(x, y) = d(y, z) = d(x, z)/2$

Asumiendo que el costo de un camino poligonal esta bien definido y es positivo.

Es posible que este trabajo sea de los pocos que mencionan un concepto como el de función distancia convexa general y la particularidad de que puede ser asimétrica (por tanto dejaría de ser una métrica) y, a pesar de hacerlo, no profundizan en el tema de su modelado.

CAPÍTULO DOS

DISTANCIA Y FUNCIONES DISTANCIA

[The] heart of scientific method, and of all rational study of any human activity, lies in the process of identifying sets and of understanding the structural properties of relations between sets.
R.H. Atking, 1974.

2.1. Conjunto.

Un conjunto es una colección bien definida de objetos o elementos, es decir, una colección donde es posible dar una respuesta no ambigua a la pregunta “¿Este objeto x pertenece al conjunto Y ?”. Un conjunto puede ser definido, básicamente, por extensión (lista de todos sus elementos) o por intensión (postulando una o más propiedades que cada elemento debe poseer); además, cada conjunto puede ser dividido en otros conjuntos más pequeños llamados subconjuntos.

2.2. Relaciones en conjuntos.

Una relación λ en un conjunto, también llamada relación binaria, puede definirse como un subconjunto del conjunto Producto Cartesiano. Formalmente puede escribirse como $\lambda \subseteq A \times A$, siendo A cualquier conjunto.

Dado que las relaciones son conjuntos en sí mismas, también pueden definirse por extensión o por intensión, además, puede definirse una relación mediante una red o grafo con los nodos representando a los elementos de un conjunto y los arcos representando una relación entre ellos.

Una relación en un conjunto A se dice reflexiva si $a_i \lambda a_i \forall i$, es decir, si cada elemento está relacionado consigo mismo; una relación es simétrica cuando $\forall i y j, a_i \lambda a_j$ implica $a_j \lambda a_i$. Se dice que una relación es transitiva si, dados tres elementos i, j y k $a_i \lambda a_j$ y $a_j \lambda a_k$ implica $a_i \lambda a_k$; es intransitiva si $a_i \lambda a_j$ and $a_j \lambda a_k$ no implica $a_i \lambda a_k$ para cualesquiera tres elementos; es no-transitiva si algunas tripletas muestran transitividad mientras otras no.

Una relación que es simultáneamente reflexiva, simétrica y transitiva es llamada una relación de equivalencia y dicha relación particiona un conjunto en clases de equivalencia.

Propiedades que pueden cumplir las relaciones binarias:

Se definen las siguientes propiedades o condiciones que *puede* cumplir una relación o función binaria.

Una función binaria $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ cumple la propiedad PX, si para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$, y para toda $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$, donde S^n es la *n-esfera euclidiana*, $S^n = \left\{ \mathbf{u} \in R^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 = 1 \right\} \subseteq R^n$:

| | |
|---|--|
| P1. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ | (Desigualdad del triángulo) |
| P2. $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ | (Identidad) |
| P3. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ | (No negatividad) |
| P4. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ | (Simetría) |
| P5. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ | (Definitoreidad) |
| P6. $d(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ | (Uniformidad) |
| P7. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ | (Antisimetría) |
| P8. $d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{v}\lambda) = d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{u}\lambda)$ para toda $\lambda > 0$ pequeña | (Isotropía) |
| P9. $d(\lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para toda $\lambda \in R$ | (Homogénea positiva de grado uno en $\lambda > 0$). |

2.3. Distancia como una relación.

Existe una relación, que surge muy a menudo en problemas de optimización, que presenta propiedades que la hacen singular y digna de ser tomada en especial consideración: *la distancia*.

Si suponemos que se define un área suficientemente pequeña como para ignorar la curvatura de la superficie de la Tierra y se toma un conjunto de objetos con coordenadas cartesianas conocidas, resultaría trivial el representar estos objetos en un mapa o configuración en dos dimensiones. Las distancias entre pares de objetos pueden ser medidas directamente desde el mapa o calculadas usando las coordenadas de ubicación.

Como ejemplo de este concepto, se tiene a la distancia Euclidiana, $d_E(i, j)$, entre cualquier par de objetos definida como

$$d_E(i, j) = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2}$$

Expresión que puede ser escrita, de manera alternativa, como

$$d_E(i, j) = [(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2]^{1/2}$$

O, por razones de conveniencia para la generalización del concepto, de la siguiente forma

$$d_E(i, j) = \left[\sum_{k=1}^2 (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}$$

Esta medida de la distancia Euclidiana o física es una relación particularmente restringida que tiene las siguientes propiedades:

- 1) Se considera el conjunto producto Cartesiano de parejas ordenadas, cada miembro del cual es un elemento de un conjunto bien definido de objetos.
- 2) A cada pareja ordenada (i, j) se le asigna un número real no negativo (en cualesquiera unidades apropiadas) que se llamará la *distancia* entre i y j escrita como $d_E(i, j)$.
- 3) Si $d_E(i, j) = 0$, entonces $i = j$. Se puede escribir $d_E(i, i) = 0$ para toda i , indicando que la distancia desde cualquier objeto hacia sí mismo es cero; esta propiedad es llamada reflexividad.
- 4) La distancia Euclidiana, $d_E(i, j)$, es la longitud de la línea más corta que une las ubicaciones de un par de objetos (distancia conocida como "vuelo de cuervo"). Sólo existe una distancia así definida para cualquier par de objetos.
- 5) La medida de la distancia tiene la propiedad de simetría: $d_E(i, j) = d_E(j, i)$.
- 6) La medida de distancia cumple la desigualdad del triángulo: $d_E(i, j) \leq d_E(i, k) + d_E(j, k)$

Estas propiedades de la distancia Euclidiana son equivalentes a aquellas requeridas por el concepto matemático de métrica para ser considerado tal, así, la relación distancia Euclidiana es la métrica más frecuentemente encontrada aunque existen otras funciones usadas para el cálculo de distancias, dichas funciones se tratarán más adelante.

2.4. Concepto de distancia.

Un espacio métrico comprende un conjunto de objetos y un conjunto de distancias que relaciona esos objetos, y aún cuando se ha definido la distancia Euclidiana en un espacio de dos dimensiones, los objetos que se manejan en un problema pueden estar caracterizados por más de dos dimensiones, y las distancias Euclidianas pueden ser generalizadas a varias (en general m) dimensiones:

$$d_E(i, j) = \left[\sum_{k=1}^m (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}$$

Un representación gráfica de objetos es posible hasta tres dimensiones, pero para $m > 3$, aunque las ubicaciones y distancias existen en un espacio multidimensional, no pueden ser dibujados en una hoja.

Los espacios Euclidianos multidimensionales surgen con mayor frecuencia en estadística multivariada donde las dimensiones corresponden al número de variables y x_{ik} denota el valor de la observación (objeto) i en la variable k . No obstante, la distancia medida entre cualesquiera dos observaciones depende de las unidades en las cuales las variables sean medidas, así, la fórmula de la distancia Euclidiana es válida sólo si las dimensiones de las variables tienen escalas idénticas.

Aún cuando la métrica Euclidiana no es la única existente (B. Everitt, 1980), en la práctica es la más ampliamente usada, es decir, aunque estamos condicionados, tal vez por los resultados de la trigonometría elemental, a pensar en la distancia entre dos puntos como la línea recta, no debemos equivocarnos en aceptar que la distancia Euclidiana es la única métrica disponible, existen diversas métricas como las que se encuentran en el Diccionario de Distancias (E. Deza, 2006) donde se da cuenta de diferentes relaciones de distancia usadas en varios campos del conocimiento.

El concepto de distancia es uno de los más básicos en la experiencia humana. En la vida cotidiana usualmente significa algún grado de cercanía entre dos objetos físicos o ideas, por ejemplo, longitud, intervalo de tiempo, brecha, rango de diferencia o lejanía, mientras que el término métrica es generalmente usado como un estándar para una medición.

Las notaciones matemáticas de distancia-métrica y espacio-métrico se desarrollaron desde hace más de un siglo por Fréchet (1906) y Hausdorff (1914) como un caso especial de un espacio topológico infinito. Los espacios-métricos infinitos son vistos usualmente como una generalización de la métrica $|x - y|$ en los números reales.

Actualmente, las métricas-distancia se han convertido en herramientas esenciales en diferentes áreas de las Matemáticas y sus aplicaciones incluyen Geometría, Probabilidad, Estadística, Teoría de Codificación/Grafos, Agrupación (*Clustering*), Análisis de datos, Reconocimiento de Patrones, Redes, Ingeniería, Gráfica/Visión Computarizada, Astronomía, Cosmología, Biología Molecular y otras áreas de las ciencias.

El diseñar las métricas-distancia más apropiadas se ha convertido en una tarea regular para muchos investigadores; especialmente la búsqueda más intensa de este tipo de métricas se da en Genética, Análisis de Imágenes, Reconocimiento de Voces, Recuperación de Información, entre otras áreas. A menudo una misma métrica-distancia aparece independientemente en diferentes áreas (por ejemplo, la distancia de edición entre palabras, la distancia evolutiva en Biología o la distancia Levenstein en Teoría de Codificación).

Un ejemplo claro de estas variaciones en métricas esta dado por la fórmula de la distancia Euclidiana, donde, al remplazar los exponentes 2 y $\frac{1}{2}$ por exponentes generales p y $1/p$ y para asegurar que la distancia permanezca no negativa, se remplazan los paréntesis por barras verticales que denotan valores absolutos, se tiene:

$$d_p(i, j) = \left[\sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}|^p \right]^{1/p}$$

Esta expresión define una familia entera de métricas conocidas como las *p-métricas de Minkowski* donde la distancia Euclidiana es simplemente un caso especial en el cual se toma la raíz cuadrada de la suma de intervalos cuadrados sobre todas las dimensiones. La constante p puede tomar valores entre 1 y el infinito; para valores $p < 1$, la desigualdad del triángulo es violada y, por tanto, ya no se considera una métrica de acuerdo a la definición de la misma dada por E. Deza (2006).

2.5. Otras métricas.

Como se destacó anteriormente, las p -métricas de Minkowski en su caso particular cuando $p=2$, da por resultado la métrica llamada Euclidiana; otra métrica que es derivada de las mismas p -métricas es aquella cuyo valor de p es igual a 1 llamada métrica Manhattan (también llamada “de cuadrados de ciudad” o “de taxi”) la cual calcula la distancia como la suma de los intervalos sobre cada eje coordenado. En el espacio Euclidiano existe sólo un camino más corto, mientras que en el espacio Manhattan habrá en general un gran número de los mismos dependiendo de la configuración de rutas; así, esta situación viene a destacar la importancia que tiene el sistema coordenado en la determinación de distancias de acuerdo con cualquier métrica Minkowski diferente a $p=2$, es decir, la métrica Euclidiana es la única métrica Minkowski que posee la propiedad de invariancia rotacional.

Otra métrica que surge frecuentemente en las ciencias sociales es el índice de disimilitud definido como

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k |X_{ik} - X_{jk}|$$

En general, i y j son dos objetos y k denota un atributo medible de cada objeto. Por ejemplo, i y j pueden ser dos unidades de área y si se quisiera medir el porcentaje de la población en el área i , X_{ik} , que pertenece al k -th grupo étnico, el índice de disimilitud nos dice la extensión por la cual la mezcla étnica en i difiere de aquella en j ; específicamente, nos dice el porcentaje de la población en i que tendría que ser removida para que las diferencias desaparecieran. El índice varía desde 0 a 100; satisface el axioma de simetría, es no negativo y también satisface la desigualdad del triángulo.

De hecho, hablando estrictamente, este índice define una pseudométrica en lugar de una métrica dado que $\delta(i,j)=0$ no implica necesariamente que $i=j$.

Proximidades.

Han surgido numerosos conceptos de distancia en diferentes disciplinas, aunque sólo algunas de ellas son distancias reales en el sentido de que obedecen los requerimientos de una métrica, sin embargo, existen relaciones definidas sobre un conjunto de objetos que, a pesar de no cumplir con las propiedades exigidas para una métrica, pueden ser consideradas conceptualmente como poseedoras de propiedades *parecidas* a las métricas-distancias; es decir, aunque estas relaciones no son métricas, pueden ser manipuladas para producir un espacio dentro del cual las relaciones son, de facto, distancias verdaderas.

Estas relaciones con propiedades parecidas a las métricas son llamadas proximidades (McFarland and Brown, 1973) y dan paso (A. Gatrell, 1983) a la incorporación de las medidas de *similitud* (cercanía) y *disimilitud* (separación espacial).

Así, las proximidades son funciones muy generales definidas en un par ordenado de elementos del producto Cartesiano de un conjunto; no necesitan ser no negativas, o reflexivas o simétricas, y no necesitan cumplir con la desigualdad del triángulo. Más aún, una métrica requiere que si $d(i,j)=0$ entonces i y j son diferentes nombres para el mismo objeto: esto no es requerido por una medida de proximidad.

2.6. Algunas funciones distancia conocidas.

Existe un grupo de funciones que sirven para medir distancia y que cumplen con los requerimientos de una métrica, las cuales, al ser analizadas y comparadas entre sí, muestran las posibles distorsiones, impuestas por los mismos requerimientos de una métrica, que sufren las distancias reales en un problema al ser representadas mediante dichas funciones, las cuales, se tratan a continuación de manera más formal.

Los espacios de interés en muchos problemas de optimización son complejos y variados. Por ejemplo, el conjunto de todas las oficinas en la ciudad de México junto con todas las rutas de transporte entre estas oficinas se pueden usar para describir un “espacio”, considerando que la “distancia” entre cualesquiera dos oficinas está definida como el tiempo que le toma a una persona para trasladarse desde una oficina hasta otra por la ruta más rápida en un momento dado del día.

Si las distancias se deben medir en términos más generales que simples longitudes, entonces las reglas convencionales que se utilizan para la medición de distancias se deben cambiar y las herramientas de análisis espacial, tal como los Sistemas de Información Geográfica (SIG), se deben reevaluar a la luz de tales cambios. Sin embargo, las implicaciones de cambiar, por ejemplo, de la muy conocida fórmula Euclidiana a otras medidas, necesitan un marco teórico que las fundamenten, así como una justificación.

2.6.1. Métricas

Para poder manejar la noción de distancia se requieren principalmente dos elementos:

- a) Un conjunto finito o infinito de objetos distintos, y
- b) Una regla o conjunto de reglas para determinar la “separación” de pares de objetos (es decir, contar con una forma de medir).

Una métrica (o métrica distancia), d_{ij} , satisface las siguientes condiciones:

- i). $d_{ij} > 0$ si $i \neq j$ (no negatividad, o coloquialmente, distinción o separación)
- ii). $d_{ij} = 0$ si $i = j$ (definitividad, o equivalencia)
- iii). $d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$ (desigualdad del triángulo)
- iv). $d_{ij} = d_{ji}$ (simetría)

donde i y j son elementos (o puntos) de algún conjunto predefinido de objetos o elementos, E .

Frecuentemente el conjunto $E = R \times R = R^2$, es el conjunto de pares de números reales y la medida d_{ij} es la distancia (métrica) euclidiana, definiendo así con (E, d) el espacio euclidiano 2-dimensional. Sin embargo, si un conjunto de mediciones de distancias satisface las condiciones arriba mencionadas esto no implica que estas puedan ser representadas en el espacio euclidiano, es decir, estas condiciones son necesarias pero no suficientes para que sea posible una representación euclidiana.

Si se fija un punto j (por ejemplo el cero) y d_{ij} es una constante, entonces la ecuación de la métrica describe una "bola" (conjunto de puntos, por ejemplo, un círculo, una elipse, una esfera) con respecto al punto fijo. De esta manera, se pueden comparar todas las métricas en R^2 dibujando la gráfica de sus bolas alrededor del origen.

Es razonable preguntar qué clase de funciones satisfacen los requerimientos enlistados arriba, es decir, ¿una función distancia tiene que ser la fórmula estándar euclidiana? Con el fin de satisfacer las primeras dos condiciones mencionadas, la medida debe producir un resultado positivo o cero. Suponiendo (inicialmente) que una medida de distancia necesita utilizar una función algebraica simple, la diferencia entre coordenadas parece ser una base para determinar la separación entre los puntos, para lo cual se debe, cualquiera de dos, tomar el valor absoluto de esta diferencia, o una potencia par, por ejemplo 2 o 4. En la práctica ambos enfoques se pueden usar, aunque el uso de la cuarta potencia o potencias pares más altas son inusuales. Estas expresiones aplicadas a coordenadas de valores reales sobre un espacio uniformemente continuo también conduce a que la condición de simetría se cumpla. Si se usa una potencia tal como 2 o en general $p \geq 1$, es usual eliminar el efecto subsecuentemente sacando la raíz p -ésima a la suma de las diferencias, todo esto es necesario con el fin de satisfacer las condiciones de las métricas antes mencionadas para toda p . Estos procedimientos potencia/raíz son similares al cálculo de un rango de medidas estadísticas tal como las medidas de tendencia central, como por ejemplo la varianza y la desviación estándar, en poblaciones 1, 2 o n -dimensionales.

La siguiente expresión corresponde a una función distancia que cumple con las condiciones de una métrica:

$$d(f, g) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones real-valuadas sobre el intervalo cerrado $[0,1]$. En este caso la métrica proporciona una formulación conocida como aproximación por "mínimos cuadrados".

Un enfoque muy diferente a la definición de una métrica sin requerir el uso de potencias pares o valores absolutos es considerar solamente valores positivos. Por ejemplo, la función

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

satisface todos los requerimientos antes mencionados y es conocida como la *métrica discreta*.

El conjunto de condiciones para que una función sea una métrica son tan familiares que puede parecer ocioso cuestionar su validez, sin embargo, existen varios aspectos en los que se basa el concepto de métrica que son insatisfactorios en muchas situaciones de la vida real, en particular las condiciones de simetría, no negatividad, y desigualdad del triángulo, condiciones de las cuales se muestra su falta de cumplimiento en problemas de la vida real.

El primer inconveniente es que una sola medida se supone que se aplica a *todos* los pares de puntos en E . Esto encaja con mediciones sobre hojas de papel (por ejemplo, mapas, planos de construcción, etc.) y sobre un espacio libre (por ejemplo en el aire), pero una sola medida es insatisfactoria en casi todas las demás situaciones. Es decir, es muy inusual que el espacio en estudio sea *completamente homogéneo*, sin variaciones para cada dirección o para cada subregión de una región dada. Por esta razón uno puede argumentar que las medidas de distancias deberían reflejar tales variaciones; es decir, preferiríamos tener diferentes formulaciones dependiendo de dónde o en cuál dirección se hacen las mediciones de distancias.

El segundo problema surge de las condiciones i ($d_{ij} > 0$ si $i \neq j$) y iii ($d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$) de las métricas. De aquí surgen los caminos implicados por una función distancia, la razón es porque la medida seleccionada aplica para todos los pares de puntos en el espacio E , y como la desigualdad del triángulo se cumple, entonces existe algún punto, k , “entre” el origen i y el destino j para toda pareja i, j . Esta noción de distancia conduce a una estructura específica, que es un conjunto finito o infinito de puntos que yacen entre i y j , lo que da la noción de *arco*. Lo anterior sugiere que una función distancia solamente se puede aplicar a una escala (dentro de una región) para la cual los resultados obtenidos de distancias se pueden confirmar como consistentes (invariantes) para todos los pares de puntos en esa región. Por tanto, las funciones distancia se pueden considerar como un concepto que debe aplicarse localmente sobre una región dada.

Una situación más general es la “infraestructura” entre pares de objetos, $S \in E$, que podría requerir eliminar algunas de las exigencias restrictivas de las métricas, tal como la simetría, triangularidad, y no negatividad. Para ilustrar esto supongamos que se desea atender en 4 posibles hospitales (de los cuales 3 son privados y 1 es público) a un grupo de 700 personas contagiadas por un virus, tal que la distancia total recorrida caminando sea mínima. Hay personas que ya están concentradas en el hospital público (Hospital General) las cuales pueden quedarse ahí para ser atendidas o desplazarse hacia los demás hospitales. Los datos son los siguientes:

| Hospital | Tiempo caminando al hospital general | Número de personas que podrían atenderse en el lugar |
|-----------------------------|--------------------------------------|--|
| 1 | $a_{11} = 5$ | 700 |
| 2 | $a_{21} = 7$ | 700 |
| 3 | $a_{31} = 3$ | 300 |
| 4 (Hospital General) | $a_{41} = 0$ | 200 |

Como se ve en la tabla, solamente los lugares 1 y 2 tienen la capacidad para atender al grupo completo de personas, y el lugar 1 da un tiempo total de recorrido de 3500 minutos mientras que el lugar 2 da un total de 4900 minutos. Sin embargo, si el grupo de personas se puede repartir entre los hospitales basándose en la proximidad al Hospital General y considerando que se puede

utilizar parcialmente el lugar 1, entonces el tiempo total de recorrido por las 700 personas se reduce a $200(0)+300(3)+200(5) = 1900$ minutos en total. En este caso, la “medida” es el tiempo que toma caminar hasta el Hospital General, multiplicado por el número de personas que hace el recorrido.

En este ejemplo no se tiene idea si los hospitales privados están localizados a lo largo de un camino, a la derecha o a la izquierda del Hospital General, o si están distribuidos dentro de una región. La medida seleccionada para tomar la decisión no fue una métrica (geográfica). Sin embargo, si se considerara que las personas del ejemplo pudieran ir desde un lugar hasta otro, entonces se requeriría más información (por ejemplo, el tiempo de recorrido entre cada lugar) lo cual ya impondría un grado de métrica consistente con el problema. Este simple ejemplo se puede extender a problemas de localización de mayor interés. Cabe hacer notar que la condición simetría de las métricas no es un requisito en tales casos.

Es de interés pues, preguntarse si las restricciones de simetría y triangularidad son necesarias para contar con medidas útiles en problemas más generales que las simples medidas basadas en las coordenadas de los puntos sobre el plano. Enseguida se examina cada uno de estos casos.

2.6.2. Cuasimétrica.

Si la desigualdad del triángulo se cumple pero la simetría no, el espacio resultante se describe como una métrica más relajada. Un ejemplo que cumple las condiciones de esta métrica es el caso de los tiempos de recorrido en una región urbana, donde en general, es más fácil o más rápido viajar de **a** a **b** que de **b** a **a**. Este tipo de falta de simetría aplica en muchas otras situaciones, tales como cuando hay un flujo direccional o presión, por ejemplo, el flujo de tráfico en diferentes tiempos del día, vuelos trasatlánticos afectados por vientos, sistemas de comunicación de un solo sentido, tarifas de servicios diferenciadas por el momento del día, disponibilidad de un servicio en función del tiempo, superficies con cierta inclinación (en general, no es lo mismo subir que bajar).

La asimetría es otra característica de muchos servicios de telecomunicaciones, en donde algunos módems estándares y las más recientes tecnologías operan de esta manera (la información recibida es generalmente más rápida que la información transmitida). Los estudiosos de las métricas aplicadas a la psicología también requieren que ésta sea asimétrica porque, por ejemplo, nuestra capacidad de recibir y procesar información dista mucho de nuestra capacidad de responder de una manera activa.

Aunque una cuasimétrica es útil, aplicable a muchos problemas y entendible sin ningún esfuerzo, esta no se ajusta a un comportamiento estricto como métrica, por eso cuando se requiere que un modelo satisfaga la simetría, la asimetría se puede “remover” haciendo por ejemplo:

$$d'(i,j) = [d(i,j) + d(j,i)]/2 \quad \text{o} \quad d'(i,j) = \max\{d(i,j), d(j,i)\}$$

Si un espacio cuasimétrico exhibe una *simetría débil* (es decir, si $d(x,y) = d(y,x)$ para todo x, y que estén suficientemente cerca uno del otro) entonces el espacio es un *espacio cuasimétrico uniforme*. Tales espacios son topológicamente equivalentes a los espacios métricos. Se demuestra en Smith (1989) que se requiere un espacio cuasimétrico para que en éste existan arcos mínimos,

además de la condición de asimetría débil, es decir, para la existencia de arcos mínimos no es necesario que se satisfaga la simetría para distancias grandes.

2.6.3. Semimétrica.

Si la restricción de simetría se cumple pero la desigualdad del triángulo no, el espacio resultante es llamado *semimétrico*. En estos espacios cabe la posibilidad de que $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) < d(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, lo cual contradice la noción de que “es mejor no rodear” así como también contradice las nociones que se tienen comúnmente de distancia y espacio. Un ejemplo de tal espacio serían los tiempos de vuelo, donde por ejemplo los vuelos directos entre lugares que están geográficamente más separados en distancia son frecuentemente más cercanos (en tiempo) que múltiples viajes cortos desde el origen hasta el destino. Un patrón similar se puede encontrar en los itinerarios de los viajes en tren y otros tipos de transporte, donde los viajes en trenes tipo “express” combinados con trenes que hacen paradas pueden alcanzar un destino más rápido que un tren que va directo haciendo paradas, aunque la distancia ferroviaria recorrida puede ser más grande.

En caso de que se cumpla la triangularidad *débil* (es decir, la desigualdad del triángulo solamente se cumpla dentro de regiones pequeñas donde los puntos están cerca uno del otro) entonces se le llama *semimétrica uniforme*. Un ejemplo hipotético de tales espacios podría ser los tiempos de recorrido de los viajes en una ciudad, donde dentro de pequeñas regiones (unas cuantas calles del mismo tipo) siempre es más rápido ir de \mathbf{a} a \mathbf{b} que de \mathbf{a} a \mathbf{c} y de \mathbf{c} a \mathbf{b} , mientras que a través de la ciudad con múltiples estructuras de caminos y rutas, ir de \mathbf{a} a \mathbf{c} podría ser más rápido que ir de \mathbf{a} a \mathbf{b} .

2.6.4. Pseudométrica.

El término pseudométrica se ha usado por algunos autores para referirse a medidas que pueden satisfacer una o más de las condiciones de una métrica, pero se permite que $d_{ij} = 0$ con $i \neq j$. Por ejemplo, una medida que compara densidades de población entre una muestra de ciudades a través de $d_{ij} = |densidad\ i - densidad\ j|$. Esta distancia satisface los requerimientos de no negatividad, triangularidad y simetría, pero no satisface la “distintez” (o diferenciación entre dos poblaciones diferentes de igual magnitud poblacional, es decir, esta métrica satisface que $d_{ij} = 0$ sólo si $i = j$).

2.6.5. Premétrica.

Esta es una función distancia que, comparada con las anteriores, se puede esperar que sea más aplicable a problemas de la vida real. Esta función distancia se define como una función binaria $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ que cumple la condición de identidad ($d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$, para toda $\mathbf{a} \in E$) y la desigualdad del triángulo; es decir, es una función distancia más relajada que las métricas, pues no se le pide que cumpla las condiciones de simetría, no negatividad, y uniformidad. Por lo que una premétrica se puede aplicar, por ejemplo, en problemas donde la distancia sea la mínima energía consumida (o gastada) por un objeto por trasladarse desde un punto hasta otro permitiéndose la recuperación de energía, en cuyo caso, la “distancia” sería negativa. Además, por no requerir la

uniformidad, las premétricas se pueden aplicar a espacios no homogéneos. En el capítulo 6 se dan algunos ejemplos detallados sobre el modelado de estas premétricas.

A partir de las descripciones hechas en esta sección, se tiene la siguiente clasificación de funciones distancia de acuerdo con las condiciones que deben satisfacer.

| Nombre | Identidad : $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0,$ $\forall \mathbf{a} \in E$ Desigualdad del triángulo: $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b}),$ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ | No negatividad $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0,$ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ | Simetría $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a}),$ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ | Definitoreidad $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ si $\mathbf{a} = \mathbf{b},$ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ |
|----------------------|---|--|---|--|
| <i>Premétrica</i> | V | | | |
| <i>Métrica débil</i> | V | V | | |
| <i>Cuasimétrica</i> | V | V | | V |
| <i>Pseudométrica</i> | V | V | V | |
| <i>Métrica</i> | V | V | V | V |

2.7. Diferentes acepciones del concepto *distancia*.

La noción de *distancia* tiene diferentes significados de acuerdo al contexto en el que se desarrolle el tema: tiempo y costo son dos de las ideas más frecuentemente asociadas a dicho concepto, aún cuando existen muchas más. Sobre este punto se muestran enseguida varias interpretaciones posibles del concepto *distancia*.

2.7.1. *Distancia-tiempo.*

Dado un conjunto de ubicaciones en un espacio geográfico, podemos definir una relación en este conjunto que represente el *traslado más rápido* desde una ubicación a otra. Esta relación, denotada como una matriz $\{t_{ij}\}$ de tiempos de viaje o traslado, es irreflexiva, no simétrica y no transitiva.

De acuerdo a la escala en la que se establezca la medición de la distancia-tiempo se puede hablar de *distancia en la ciudad* y de *distancia inter-urbana* (A. Gatrell, 1983). En ambos conceptos, se visualiza un fenómeno de convergencia en la distancia-tiempo de diferentes lugares, este fenómeno se presenta por la evolución de vehículos de transporte los cuales son cada vez más rápidos y tienden a acortar las diferencias de tiempos de traslado entre diferentes puntos.

2.7.2. Distancia-económica.

Lowe y Moryadas (1975) establecen la distancia económica como el costo monetario incurrido cuando se viaja a través de cierta distancia geográfica; sin embargo existen diferentes tipos de relaciones económicas tales como relaciones de proximidad de atributos (empleo, productos, concentración geográfica, niveles de tecnología, desarrollo) y de interacción (ventas, flujos de información, comercio regional, comercio internacional).

El término “distancia económica” es preferido al término “distancia-costo” dado que abarca los costos del sector transportista y las tasas cargadas a los clientes.

CAMINOS DE COSTO MÍNIMO.

La hipótesis de una superficie uniforme de transporte en la teoría clásica de localización significa que el camino desde i a j que minimiza los costos es una línea recta, de hecho, en cualquier área que es razonablemente homogénea en términos de terreno, se puede esperar que la ruta que une dos ubicaciones se desvíe sólo marginalmente de una línea recta; la distancia física y la distancia-costo son intercambiables.

Lo que se puede esperar de los caminos de costo mínimo (geodésicas) cuando hay más de una sola zona es, de acuerdo con Lösch (1954), que una ruta puede ser “refractada” a través de las fronteras entre dos zonas con costos de tránsito diferentes de la misma forma que la luz es refractada a través de dos medios.

El problema puede establecerse como, dadas dos zonas con costos de tránsito diferentes c_1 y c_2 , el objetivo es determinar el punto donde la ruta debe cruzar la frontera. Estableciendo formalmente la analogía, la ley de Snell de refracción establece que la solución a este problema involucra el encontrar dos ángulos, θ_1 y θ_2 , tales que

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

Claramente, si $c_1 > c_2$ tiene sentido económico el reducir la longitud de la ruta a través de la zona 1, mientras, en el extremo, si c_1 es excesivamente mayor que c_2 , la ruta a través de la zona 1 será ortogonal a la frontera.

Werner (1968) planteó la situación de resolver el problema si existen n regiones con costos diferentes. Una vez más, los costos unitarios se asumen conocidos para todas las regiones, y el problema es encontrar una serie de segmentos de línea recta de longitud l_j ($j=1, \dots, n$) tal que el costo total de la ruta, C , es minimizado

$$\min C = \sum_j c_j l_j$$

Así, Werner ofrece una solución matemática formal y un método gráfico para encontrar el camino de mínimo costo que evitan las regiones de alto costo y “buscan” las regiones de bajo costo.

DISTANCIA ECONÓMICA Y DISTANCIA GEOGRÁFICA.

Mientras en algunas instancias puede existir una relación directa y simple entre distancia geográfica y el costo de cubrir dicha distancia, en otros casos las relaciones son más tenues.

Un ejemplo de una función de costo generalizada esta dada en el trabajo de Wilson *et al* (1969)

$$c_{ij}^k = a_1 t_{ij}^k + a_2 e_{ij}^k + a_3 d_{ij}^k + p_j^k + \delta^k$$

Aquí k es un índice para el modo de transporte ($k=1$ para auto; $k=2$ para transporte público). El tiempo de viaje es denotado por t_{ij} y esto incluye el tiempo tomado para estacionar ($k=1$). El término e_{ij} representa “tiempo en exceso” e incorpora el tiempo de espera ($k=2$). La distancia entre i y j es d_{ij} , p_j denota costos terminales y δ es una “penalización modal” (igual a cero si $k=1$ pero es estimado en términos monetarios como el inconveniente de viajar en transporte público).

Los parámetros son estimados de muestras e incorpora la valuación del tiempo de viaje y la forma en que las agencias de viaje perciben el costo del mismo. Claramente, entonces, en este ejemplo la “distancia económica” entre dos zonas es más que una simple función de distancia, sino que incorpora el tiempo de viaje entre otros factores.

DISTANCIA ECONÓMICA Y TEORÍA DE LOCALIZACIÓN.

Históricamente los esfuerzos para resolver problemas de localización se originaron con el reto de Fermat lanzado en el siglo XVII: “Dados 3 puntos en el plano encontrar un cuarto punto tal que la suma de su distancia hacia los otros 3 puntos dados es mínima”.

Desde el punto de vista de la Investigación de Operaciones, la formulación de problemas de localización de servicios se basa en la construcción de modelos matemáticos apropiados y la proposición de métodos de solución de dichos modelos.

El tipo de problemas en los que se centra esta área son aquellos que buscan la respuesta a una pregunta central *¿dónde* localizar un objeto (u objetos) llamado *servicio*?

El servicio puede interactuar con un grupo de objetos diferentes cuya localización es fija llamados servicios, además de una serie de puntos o zonas de demanda de tales servicios que generalmente se asume fija.

Para poder llevar a cabo una medición de la distancia entre el servicio a ser localizado y aquellos que ya lo están, se necesita de una métrica apropiada, además de una función objetivo que permita evaluar las diferentes opciones de localización. La selección del lugar puede estar sujeta a una serie de restricciones geográficas, de costo de transporte, distancia, consumo de energía, etc.

Los problemas de localización de servicios pueden ser clasificados de forma general en dos tipos:

1. Problemas de localización de un solo servicio.
2. Problemas de localización múltiples servicios.

Además, cada clasificación puede tener variantes, lo que amplía el espectro de casos estudiados y enfoques propuestos para la solución de este tipo de problemas.

El objetivo general de este estudio es planear la inclusión de nuevos servicios en una estructura ya existente, reconfigurar una distribución dada o planear completamente un nuevo sistema y en muchos casos se requiere un planteamiento de localización-asignación de servicios.

El número de lugares posible para la localización puede un conjunto finito de puntos en un espacio de dos o tres dimensiones, o también puede ser un subconjunto continuo en dichos espacios. Además es importante resaltar que los modelos para este tipo de problemas usan la distancia real entre puntos y tal distancia es función de las coordenadas de los puntos analizados.

Frecuentemente los modelos de conjuntos continuos son usados para *generar* sitios candidatos para ser seleccionados por modelos de conjuntos finitos.

Dentro de las variantes que puede presentar la forma básica del problema existe la usada para la localización de servicios de emergencia como bases de ambulancias o estaciones de bomberos donde puede ser deseable minimizar la máxima distancia del servicio a cualquier punto de demanda posible; este tipo de problemas son llamados problemas *minimax* y requieren métodos de solución específicos.

También puede ser considerado el efecto sobre las localizaciones óptimas de la inclusión de nuevos servicios que pueden cambiar los flujos entre servicios existentes o el conjunto de puntos fijos ya sea en número o distribución; para este tipo de problemas, se han desarrollado varios modelos dinámicos y probabilísticos.

2.7.3. Distancia Cognitiva.

Existe una importante distinción entre “percibida” y “cognitiva” que está ligada fuertemente al concepto de *escala*. Si hacemos juicios acerca de la proximidad de objetos que podemos ver hablamos de distancia percibida; en una escala mayor podemos hacer juicios implícitos o explícitos sobre la separación espacial de objetos que no podemos ver directamente, así, en estos casos se requiere concebir o conceptualizar las distancias (distancia cognitiva).

La importancia de la distancia cognitiva es que puede sustituir a la distancia física como una variable que explica a la misma, modelando así el comportamiento espacial entre diversos objetos. La estrategia general para llevar a cabo este procedimiento de sustitución es sacar información de

una muestra de estimaciones de distancias entre pares de objetos de un conjunto, después se procede a analizar la relación de las distancias, cognitivas y físicas, para determinar el conjunto de factores que se supone (por hipótesis) tienen una influencia notable en las posibles discrepancias entre ambas medidas de distancias.

Un ejemplo muy conocido de este tipo de relación entre distancia cognitiva y distancia física está dado por la expresión que representa el concepto de regresión lineal estadística (A. Gatrell, 1983)

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

Donde Y denota o significa la distancia cognitiva, X es la distancia física, ε es el error estocástico en que se incurre al sustituir una distancia con otra, α es el intercepto y β es la tasa a la cual la distancia cognitiva varía con la distancia física.

Cabe destacar que en el proceso de relacionar ambas distancias un aspecto que debe ser analizado y tomado con sumo cuidado es el de la estimación de los parámetros α y β ya que el valor del intercepto afecta la interpretación de la expresión que se obtenga; el valor de la tasa de cambio puede sub o sobre estimar la relación entre ellas; además es necesario tomar en cuenta también los errores estándar de los coeficientes de regresión.

Un aspecto importante que subyace en el concepto de distancia cognitiva es la serie de factores que influyen en la percepción de la misma, es decir, todas aquellas circunstancias que hacen que una persona sobre o sub estime las distancias reales. Ejemplos de dichos factores son, entre otros, la complejidad del medio donde se desarrollan las actividades cotidianas, así, en una ciudad la percepción de las distancias físicas pueden tienden a ser diferentes entre personas que habitualmente se trasladan en transporte público subterráneo y las que lo hacen en auto; otro ejemplo de estos factores son elementos tales como ríos, donde quienes estiman distancias transversales a ellos tienden a sobreestimarlas, a diferencia de quienes efectúan una estimación de distancias paralelas a dichos ríos en cuyo caso las estimaciones suelen ser no muy diferentes de las distancias físicas. Otro elemento que influye en las estimaciones de distancias es la forma de las vías de comunicación entre los puntos a considerar, es decir, si las vías de comunicación entre ellos son predominantemente rectas o con muchas sinuosidades, siendo más precisas en el primer caso que en el segundo donde existe una tendencia a sobreestimar.

2.7.4. Distancia Social.

Cuando se habla de relaciones sociales, invariablemente se usan términos que tienen un significado espacial: se comparan *posiciones* sociales o *status* haciendo uso de ciertas frases manera coloquial tales como “ascenso social”, “desplazamiento de las fronteras sociales” o “mantener su distancia de”, estas frases implican la existencia de *espacios sociales* (A. Gatrell, 1983).

Las palabras “distancia social” encierran diferentes nociones: las ubicaciones de individuos con respecto a otros pueden ser concebidas en términos de actitudes, relaciones de dominancia o frecuencia relativa de intereses compartidos.

Como se mencionó antes, el análisis del concepto *distancia* lleva consigo la definición de un conjunto de objetos de los cuales su ubicación y separación, en cualquier sentido, debe ser considerada. Así, el análisis de la distancia social requiere distinguir entre objetos en dos escalas diferentes: individuos y grupos de individuos.

Si hablamos de nivel microscópico examinamos las interacciones entre individuos y, entonces, se analiza la forma en que las similitudes en sus atributos permiten percibir las distancias sociales. Cuando se habla de nivel macroscópico se examinan las relaciones entre grupos de individuos y se analizan las preferencias relativas de los grupos y sus elecciones agregadas.

De forma enunciativa, más no limitativa, los siguientes también son campos o áreas donde las funciones distancia tienen aplicaciones directas además de las muy conocidas distancias físicas y químicas (para una descripción detallada de las funciones distancia generadas en estos y otros campos se remite a Diccionario de Distancias, E. Deza. 2006):

| Áreas de aplicación de las funciones distancia. |
|---|
| Distancias en cadenas y permutaciones. |
| Distancias en números, polinomios y matrices. |
| Distancias en análisis de funciones. |
| Distancias en Teoría de Probabilidad. |
| Distancia en Teoría de Grafos. |
| Distancia en Teoría de Codificación. |
| Distancia y Similitudes en Análisis de Datos. |
| Distancias en Planos reales y digitales. |
| Distancias en Audio e Imagen. |
| Distancias en Análisis de Secuencias Genéticas. |
| Distancias en Cosmología y Teoría de la Relatividad. |

2.8. FUNCIONES DISTANCIA GENERALIZADAS.

De acuerdo con Sánchez Larios y Guillén Burguete (2008b), una función distancia generalizada d , o función distancia d , se define como una función binaria $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ que cumple con la propiedad de identidad $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0, \forall \mathbf{a} \in R^n$.

En este mismo trabajo se definen los siguientes conceptos importantes para la definición de la longitud de arco asociada a una función distancia generalizada, así como para la obtención de una expresión que sirva para determinar dicha distancia:

Un camino en R^n de $\mathbf{a} \in R^n$ hasta $\mathbf{b} \in R^n$ es una función continua $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ tal que $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$ y $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$.

Se llama arco orientado de $\mathbf{a} \in R^n$ a $\mathbf{b} \in R^n$ a la imagen orientada $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq R^n$ del camino $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$.

Un arco de clase C^1 es un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que tiene una representación paramétrica $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ clase C^1 cuya derivada es diferente de cero en su dominio. Al conjunto de todos los arcos clase C^1 en R^n se les denota por Ω .

Una sucesión de puntos en R^n de la forma $(\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$ donde $k \geq 1$ se dice que es una sucesión en R^n desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} , donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son llamados los puntos extremos de la misma. Al conjunto de todas las sucesiones en R^n desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} se denota por $P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Una función distancia $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ asocia a cada sucesión $P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ un número real $\Lambda(P)$ llamado d -longitud de la sucesión P definida como

$$\Lambda(P) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$$

Esto es, la d -longitud es la suma de las distancias respecto a la función distancia o la suma de las d -distancias.

Una *partición* de un arco orientado se define como la partición de un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ en sub-arcos, así, dicha partición determina una sucesión de puntos y , de manera recíproca, cada sucesión de puntos determina una partición.

Al conjunto de todas las particiones de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se denota por $P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$.

La partición definida por el conjunto determinado por la sucesión $(\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \mathbf{b})$ se llama *partición trivial* y se denota como $\{C(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}$.

Un *refinamiento* de una partición P de un arco es aquella, denotada por Q , tal que cada elemento de la misma está contenido en un elemento de P .

Se define la *d-longitud* de una partición $P \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ como la *d-longitud* de la sucesión $P, \Lambda(P)$.

Todos estos conceptos se retoman en el apartado dedicado a la longitud de arco donde se define el mismo asociado a una función distancia generalizada.

CAPÍTULO TRES

LONGITUD DE ARCO

"There is no object so large ... that at great distance from the eye it does not appear smaller than a smaller object near." (Leonardo da Vinci)

3.1. Arco.

Se define un *arco* como cualquier curva continua que une dos puntos; también se llama arco a un segmento de circunferencia que queda definido por tres puntos, o dos puntos extremos y el radio, o por su cuerda.

3.2. Longitud de arco.

En geometría, es común encontrar expresiones relacionadas con el cálculo de la longitud de un arco, es decir, la longitud de una curva continua que une dos puntos. De tales expresiones, las más comunes son aquellas donde la curva o arco se expresa en coordenadas cartesianas o en forma paramétrica. Las deducciones de estas expresiones se tratan a continuación.

3.2.1. Longitud de arco: caso cartesiano.

Suponiendo que una curva C se ha definido por medio de la ecuación $y = f(x)$ donde f es continua en $a \leq x \leq b$, obtenemos una aproximación poligonal a C dividiendo el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos con los extremos x_0, x_1, \dots, x_n y todos de la misma longitud Δx .

Si $y_i = f(x)$ entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está en la curva y el polígono con vértices P_0, P_1, \dots, P_n que se muestra en la figura 2.1. es una aproximación de C . La longitud L de C es aproximadamente igual a la longitud de ese polígono y la aproximación es mejor cuando n crece; esto puede verse en la figura 2.2. donde el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i aparece agrandado y se muestran aproximaciones con valores sucesivos decrecientes de Δx .

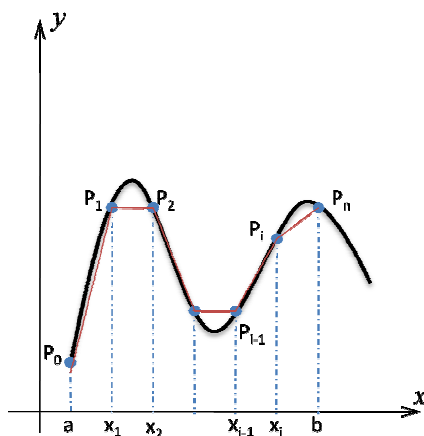


Fig. 3.1.

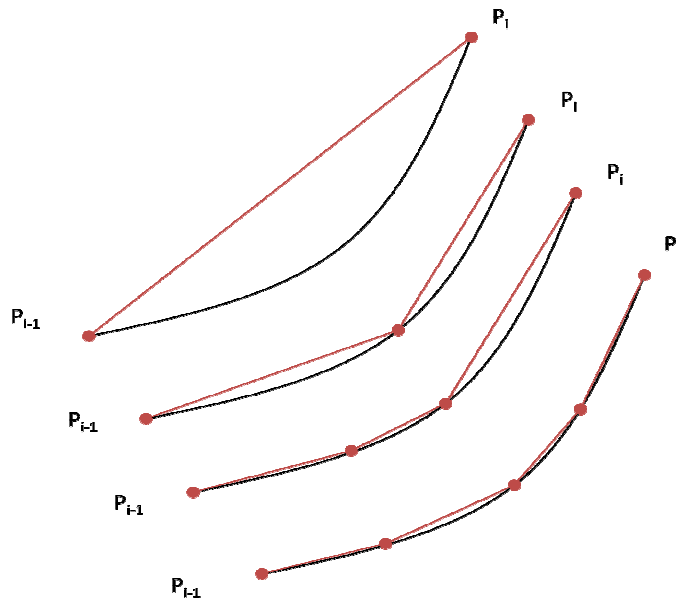


Fig. 3.2.

Por lo anterior, se define la longitud L de la curva C cuya ecuación es $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ como igual al límite de la suma de las longitudes de esos polígonos inscritos (si el límite existe).

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1} - P_i|$$

Es decir, se divide la curva en un gran número de partes pequeñas, luego se calculan las longitudes aproximadas de las partes pequeñas para después sumarlas, por último se saca el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

La definición de longitud de arco, expresada por la ecuación anterior, no se presta para su uso para fines de cómputo, pero se puede obtener una fórmula integral útil para calcular L en el caso en que f tenga una derivada continua, es decir, que f sea *lisa* o *suave*.

Con $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Al aplicar el teorema del valor medio a f , en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, vemos que hay un número x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

esto es

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} \\ |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \sqrt{(\Delta x)^2} \\ |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a la definición dada

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \text{ (puesto que } \Delta x > 0)$$

Lo que, de acuerdo a la definición de integral definida, es igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Esta integral existe porque la función $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua.

Lo anterior queda establecido en el siguiente teorema:

Si f' es continua en $[a,b]$, la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Con la notación de Leibnitz se puede escribir la fórmula de la siguiente forma

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

3.2.2. Longitud de arco: caso paramétrico.

De acuerdo con Marsden y Tromba (1991), si se considera una trayectoria dada $\sigma(t)$, se puede pensar en la misma como la trayectoria de una partícula con rapidez $S(t) = \|\sigma'(t)\|$; esta trayectoria traza una curva en el espacio y surge la siguiente pregunta: ¿Cuál es la longitud de la curva conforme t varía de a a b ?

La respuesta intuitiva es que debe ser igual al total de la distancia recorrida, esto es igual a $\int_a^b S(t) dt$, lo que conduce a la siguiente definición:

Sea $\sigma: [a, b] \rightarrow R^n$ una trayectoria clase C^1 . La longitud de σ está definida como

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

En R^3 hay otra forma de justificar la fórmula para $l(\sigma)$ dada en la definición anterior basada en aproximaciones poligonales:

Se parte el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b;$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b - a}{N}; 0 \leq i \leq N - 1$$

Después se considera la poligonal obtenida al unir pares sucesivas de puntos $\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})$ para $0 \leq i \leq N - 1$; esto produce una aproximación poligonal a σ

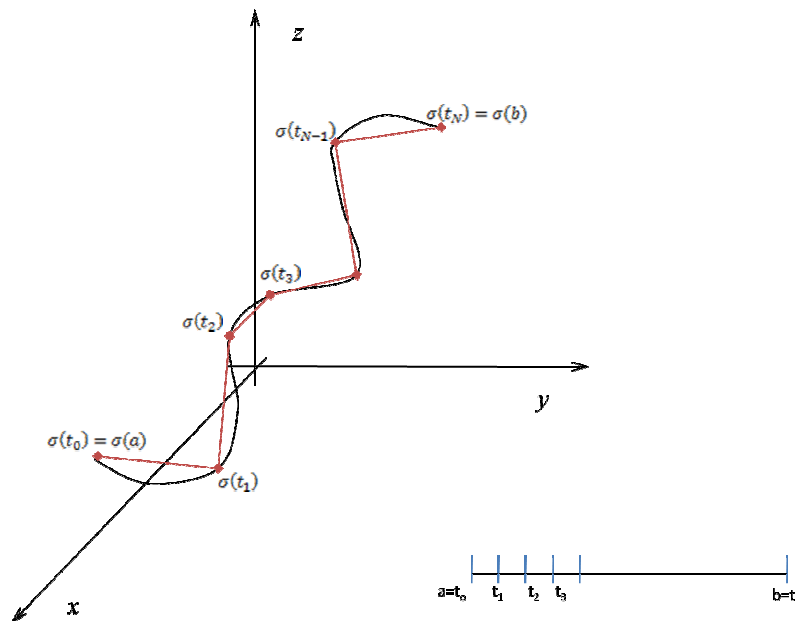


Fig. 3.3.

De la fórmula para la distancia en R^3 se sigue que el segmento de $\sigma(t_i)$ a $\sigma(t_{i+1})$ tiene longitud:

$$\|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}$$

$$\text{donde } \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Aplicando el teorema del valor medio a $x(t), y(t)$ y $z(t)$ en $[t_i, t_{i+1}]$, obtenemos tres puntos $t_i^*, t_i^{**}, t_i^{***}$ tales que

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i) \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= z'(t_i^{***})(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Así, el segmento de $\sigma(t_i)$ a $\sigma(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2} (t_{i+1} - t_i)$$

Entonces la longitud de la poligonal dada es

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2} (t_{i+1} - t_i)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, esta poligonal aproxima mejor la imagen de σ . Por tanto, se define la longitud de arco de σ como el límite, si existe, de la ecuación S_N cuando $N \rightarrow \infty$. Como se supone que las derivadas x', y' y z' son continuas en $[a, b]$, se puede concluir que el límite existe y está dado por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

De acuerdo con $\int_a^b f(t)dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$ donde t_0, \dots, t_N es una partición de $[a, b]$, $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ es arbitrario y f es una función continua.

La imagen de una trayectoria de clase C^1 no necesariamente es "muy suave" ya que puede presentar dobleces puntiagudos a cambios bruscos de dirección, por ejemplo, la hipocicloide de cuatro picos $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow R^2, t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ donde en los picos $\sigma'(t) = 0$, la recta tangente no está bien definida y la rapidez del punto $\sigma(t)$ es cero (la dirección de $\sigma(t)$ puede cambiar de manera abrupta en puntos cercanos al reposo).

Si se tiene una trayectoria $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en R^3 , es común denotarla por $s(t) = \sigma(t)$ de modo que

$$\sigma'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$$

Así, $\|\sigma'(t)\| = \left\| \frac{ds}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$, con esta notación se puede escribir la longitud de arco de σ como

$$l(\sigma) = \int_a^b \left\| \frac{ds}{dt} \right\| dt$$

También es común introducir la función de longitud de arco $s(t)$ dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$$

de modo que

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\| = \left\| \frac{ds}{dt} \right\|$$

y

$$l(\sigma) = \int_a^b s'(t) dt = s(b) - s(a)$$

La definición de la longitud de arco puede extenderse hasta incluir trayectorias que no sean de clase C^1 pero que se formen al pegar un número finito de trayectorias C^1 . Una trayectoria $\sigma: [a, b] \rightarrow R^3, t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ se llama trayectoria de clase C^1 a trozos si existe una partición de $[a, b]$ tal que la función σ restringida a cada intervalo $[t_i, t_{i+1}], 0 \leq i \leq N-1$, sea continuamente diferenciable. Esto significa que la derivada existe y es continua en $[t_i, t_{i+1}]$; las derivadas en los extremos de cada intervalo se calculan usando límites desde dentro del intervalo (esto es, límites por un lado).

En el caso de que una trayectoria sea C^1 a trozos, se define la longitud de arco de la trayectoria como la suma de las longitudes de arco de las trayectorias C^1 que la forman. Esto es, si la partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ satisface las condiciones dadas anteriormente, se define la longitud de arco como

$$\sigma = \sum_{i=0}^{N-1} (\text{longitud de arco de } \sigma \text{ de } t_i \text{ a } t_{i+1})$$

De acuerdo a la perspectiva del presente trabajo, una definición importante es la de longitud de arco generalizado mismo que se presenta a continuación.

3.3. Longitud de arco (generalizado).

La longitud de arco asociada con la función distancia generalizada d de un arco C (o d -longitud de C) se define (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2008b) como un número real L tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe una partición P_ϵ de C tal que $|L - \Lambda(P)| < \epsilon$ para todo refinamiento P de P_ϵ . Si la d -longitud de un arco existe, entonces es única.

$C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se dice d -rectificable si la d -longitud de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es finita y dicha d -longitud se denota como $l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. De acuerdo con el mismo trabajo, se afirma que los subarcos de cualquier partición P de un arco d -rectificable $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ son arcos d -rectificables y que la suma de sus d -longitudes es igual a la d -longitud de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

La derivada direccional unilateral de una función $d(\mathbf{x}, \cdot)$ en \mathbf{x} en la dirección \mathbf{v} se denota por $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ y se define por

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta s \mathbf{v}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\Delta s}$$

Y dado que se afirma que la función distancia generalizada cumple la propiedad de identidad, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ y F se reescribe como

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta s \mathbf{v})}{\Delta s}$$

Expresión que se cumple para toda $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in R^n$ donde $F(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$

La derivada direccional unilateral F de la función distancia d es la función $F: R^n \times R^n \rightarrow R$ dada por la expresión anterior. Así, la función F evaluada en un punto \mathbf{x} y en una dirección \mathbf{v} se denota por $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, y F a lo largo del camino $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ se denota por $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))$.

La determinación de la longitud de un arco, denotado como d -longitud, en términos de F bajo la suposición de que dicho arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pertenece a la clase C^1 y es rectificable se desarrolla a continuación siguiendo el procedimiento dado en Sánchez Larios y Guillén Burguete (2008b):

Dado que cualquier conjunto ordenado de puntos interiores de $[a, b]$, $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ con $k > 0$ determina una partición no trivial ($a = s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k+1} = b$) de $[a, b]$ y una partición no trivial $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}(s_0), \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}(s_2), \dots, \mathbf{x}(s_k), \mathbf{x}(s_{k+1}) = \mathbf{b})$ del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, entonces la d -longitud de P es

$$\Lambda(P) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1}))$$

Si se supone que $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ es una función continua sobre su dominio y, puesto que $\mathbf{x}(t)$ y $\dot{\mathbf{x}}(t)$ son funciones continuas, entonces $F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ es una función continua y acotada en $[a, b]$ y, por tanto, integrable.

Así, dada la existencia de $F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ en $t \in [a, b]$, existe un $\Delta s > 0$ tal que

$$\left| F(\mathbf{x}(\xi), \dot{\mathbf{x}}(\xi)) - \frac{d(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}(\xi) + \dot{\mathbf{x}}(\xi)\Delta s)}{\Delta s} \right| < \varepsilon$$

Para toda $\xi \in [t, t + \Delta s]$ y todo $\varepsilon > 0$

La conclusión anterior puede ser aplicada a una partición $(a = s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k+1} = b)$ de un intervalo $[a, b]$ y se llega a que, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que se cumple

$$\left| F(\mathbf{x}(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}(\xi_i)) - \frac{d(\mathbf{x}(\xi_i), \mathbf{x}(\xi_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i)\Delta s_i)}{\Delta s_i} \right| < \varepsilon$$

Para toda $\xi_i \in [s_i, s_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$ y para todo refinamiento P de P_ε

Por lo tanto también se cumple que

$$|F(\mathbf{x}(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}(\xi_i))\Delta s_i - d(\mathbf{x}(\xi_i), \mathbf{x}(\xi_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i)\Delta s_i)| < \varepsilon\Delta s_i$$

Para toda $\xi_i \in [s_i, s_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$

De acuerdo con las definiciones dadas en el capítulo anterior, se tiene que

$$\Lambda P = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}(\xi_i), \mathbf{x}(\xi_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i)\Delta s_i)$$

Por lo que se obtiene lo siguiente

$$\left| \sum_{i=0}^k F(\mathbf{x}(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}(\xi_i))\Delta s_i - \Lambda(P) \right| < \varepsilon(b - a)$$

Para toda $\xi_i \in [s_i, s_{i+1})$

Esta última condición es igualmente válida si $\varepsilon(b - a)$ se reemplaza por $\frac{\varepsilon}{2}$ y dado que se supone que $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un arco d -rectificable, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que se cumplen las siguientes condiciones

$$\left| \sum_{i=0}^k F(\mathbf{x}(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}(\xi_i)) \Delta s_i - \Lambda(P) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para toda $\xi_i \in [s_i, s_{i+1})$

y

$$|L - \Lambda(P)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo refinamiento P de P_ε .

Así, se concluye que existe una partición P_ε del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=0}^k F(\mathbf{x}(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}(\xi_i)) \Delta s_i \right| < \varepsilon$$

Para toda $\xi_i \in [s_i, s_{i+1})$, $\varepsilon > 0$ y todo refinamiento P de P_ε .

Y, finalmente, se llega a que

$$L = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$$

Para cualquier arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de clase C^1 , el integrando de la expresión anterior es una función continua en $[a, b]$ por lo que L está bien definida y el arco es d -rectificable.

CAPÍTULO CUATRO

ARCOS ASOCIADOS A UNA FUNCIÓN DISTANCIA Y ARCOS DE MÍNIMA LONGITUD

"Nothing makes Earth seem so spacious as to have friends at a distance; they make the latitudes and longitudes." (Henri David Thoreau)

4.1. Conceptos Generales de Cálculo de Variaciones.

El Cálculo de Variaciones comenzó a desarrollarse en 1696, llegando a ser una disciplina matemática independiente con métodos propios de investigación después de los trabajos fundamentales de L. Euler quien puede considerarse como el fundador del Cálculo de Variaciones o Cálculo Variacional.

Hubo tres problemas que ejercieron gran influencia en el desarrollo de esta disciplina:

- 1) **El Problema de la Braquistócrona.** En 1696, Iohannis Bernoulli publicó una carta en la que propuso el problema sobre las líneas de deslizamiento más rápido, o braquistócronas. En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad de que un punto material se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el punto B en el menor tiempo posible.

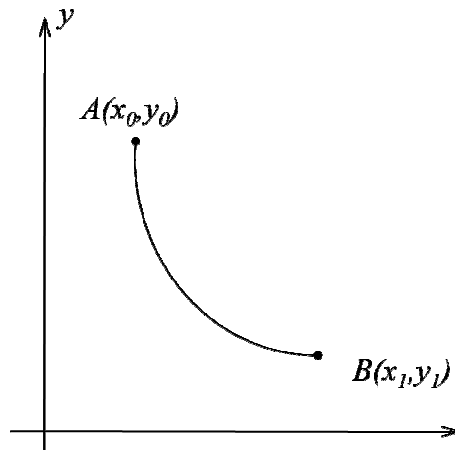


Fig. 4.1.

- 2) **Problema de las líneas geodésicas.** Se plantea determinar la línea de menor longitud que una dos puntos dados en cierta superficie $\varphi(x, y, z) = 0$.

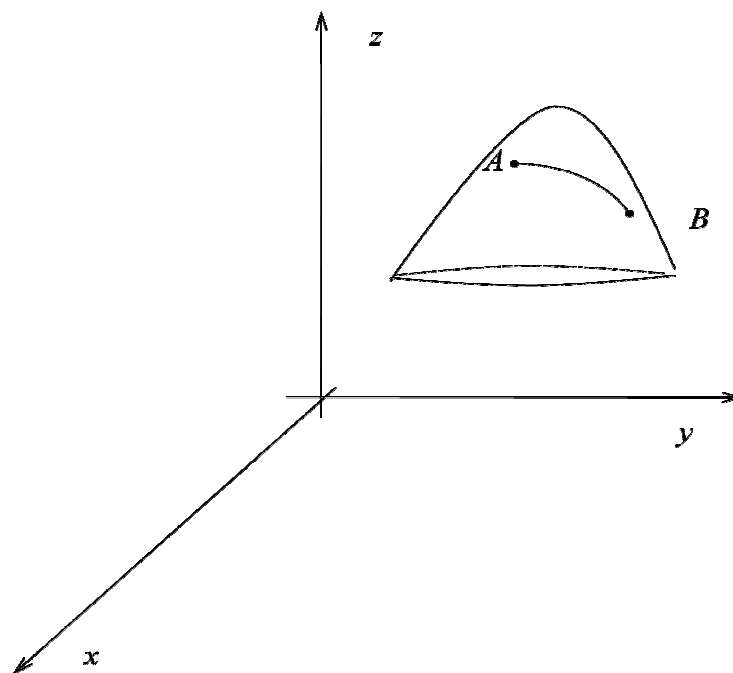


Fig. 4.2.

Estas líneas son llamadas líneas geodésicas. Se tiene aquí un problema variacional típico sobre el llamado extremo fijo o condicional. Se pide hallar el mínimo de la funcional

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

y además las funciones $y(x)$ y $z(x)$ deben someterse a la condición $\varphi(x, y, z) = 0$.

- 3) **Problema isoperimétrico.** Se plantea hallar una línea cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S . Esta línea es la circunferencia. En este problema se exige hallar el extremo de la funcional S con una condición complementaria peculiar: la longitud de la curva debe ser constante, es decir, la funcional

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

se mantiene constante. Las condiciones de este tipo se llaman isoperimétricas.

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $z=f(x)$, con frecuencia surge en los problemas físicos la necesidad de hallar los valores máximos y mínimos de un género especial de magnitudes llamadas *funcionales*.

Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones. Como ejemplo se tiene la longitud l del arco de una curva plana (o alabeada) que una dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, esta magnitud es una funcional de acuerdo a la siguiente figura:

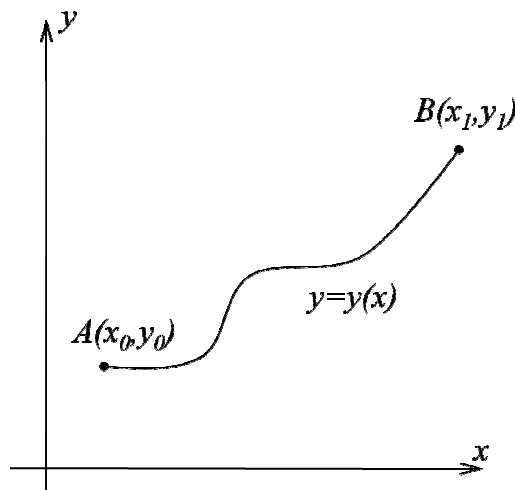


Fig. 4.3.

La magnitud l puede calcularse si se da la ecuación de la curva $y = y(x)$, entonces

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

El área S de cierta superficie es también una funcional puesto que se determina escogiendo la superficie, es decir, escogiendo la función $z(x, y)$ que figura en la ecuación $z = z(x, y)$ de la superficie, esto arroja la funcional

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Donde D es la proyección de la superficie en el plano Oxy .

Los momentos de inercia, los momentos estáticos, las coordenadas del centro de gravedad de cierta curva o superficie homogénea, son también funcionales dado que sus valores se determinan eligiendo la curva o la superficie, es decir, las funciones contenidas en la ecuación o superficie (funciones argumento).

En todos estos ejemplos se tiene una dependencia que es característica para las funcionales: a una función (escalar o vectorial) le corresponde un número, mientras que al dar una función $z = f(x)$ a un número le corresponde otro número. A los problemas en que se exige investigar al máximo o el mínimo de una funcional se les denominan *problemas variacionales*.

El Cálculo de Variaciones se ocupa de la determinación de los valores máximos y mínimos de las funcionales. El objeto de esta teoría del cálculo es buscar esa *función argumento* $y(x)$ en correspondencia a la cual una integral del tipo

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

adquiere un valor máximo o mínimo, a este valor se le denomina de manera genérica un *extremo* de la funcional y a la función $f(x)$ que le corresponde se le llama la *extremal*. Los problemas de cálculo de variaciones se han extendido a la búsqueda de extremales de funcionales de cualquier tipo.

En el cálculo diferencial ordinario se suele decir que una función $y=F(x)$ alcanza un valor extremo (relativo) para $x=x_0$ cuando es posible determinar un intervalo (x_0-h, x_0+h) grande o pequeño (vecindad (h) de la abscisa x_0) tal que $F(x_0)$ es menor (o mayor) que $F(x)$ en todos los demás puntos del intervalo. En el campo del cálculo de variaciones, el concepto de punto x_0 del eje x se reemplaza por el de función $y=f(x)$ y el de vecindad del punto x_0 por el de vecindad de la función $y=f(x)$ definida como sigue:

Dada una cantidad positiva h , se dice que una función $y=f^*(x)$ está en la vecindad (h) de una función $y=f(x)$, en intervalo (x_1, x_2) cuando se tiene

$$|f(x) - f^*(x)| < h \text{ para } x_1 \leq x \leq x_2$$

es decir, cuando la curva $y = f^*(x)$, en dicho intervalo, está incluida dentro de una faja de ancho $2h$, cuyo eje es la curva $y = f(x)$.

El problema fundamental del Cálculo de Variaciones puede expresarse de la siguiente manera (Levi, 1980):

En el dominio de las funciones argumento admisibles para una funcional determinada, hallar esa función argumento (extremal) para la cual la funcional alcanza un valor extremo, con respecto a los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio, que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña de la extremal.

4.1.1. La Variación y sus propiedades.

Dado que los métodos de resolución de los problemas de cálculo variacional guardan cierta similitud a los métodos empleados en el análisis de singularidades de las funciones, es conveniente tener un marco comparativo para ambos casos como el mostrado a continuación (Elsogoltz, 1969):

| Cálculo Diferencial | Cálculo de Variaciones |
|--|--|
| <p>La variable z se llama función de la variable x, cuya notación es $z = f(x)$. Si a cada valor de x de cierta región de variación de x le corresponde un valor de z, es decir, se presenta la correspondencia: al número x le corresponde el número z.</p> <p>De manera análoga se definen las funciones de varias variables.</p> | <p>La variable v se llama funcional que depende de la función $y(x)$, cuya notación es $v = v[y(x)]$. Si a cada función $y(x)$ de cierta clase le corresponde un valor v, es decir, se presenta la correspondencia: a la función $y(x)$ le corresponde un número v.</p> <p>De manera análoga se definen las funcionales dependientes de varias funciones y las funcionales dependientes de varias variables.</p> |
| <p>Se llama incremento Δx del argumento x de la función $f(x)$ a la diferencia entre dos valores de esta variable: $\Delta x = x - x_1$.</p> <p>Si x es la variable independiente, la diferencial de x coincide con su incremento: $dx = \Delta x$.</p> | <p>Se llama incremento o variación δy del argumento $y(x)$ de la funcional $v[y(x)]$ a la diferencia entre dos funciones: $\delta y = y(x) - y_1(x)$.</p> <p>Aquí se supone que $y(x)$ varía arbitrariamente en cierta clase de funciones.</p> |
| <p>La función $f(x)$ se llama continua si a una pequeña variación de x le corresponde una pequeña variación de la función $f(x)$.</p> <p>La función $f(x)$ es continua para $x = x_0$ si para todo ε positivo existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ cuando $x - x_0 < \delta$.</p> <p>Aquí se sobreentiende que x toma valores para los cuales la función $f(x)$ está definida.</p> | <p>La funcional $v[y(x)]$ se llama continua si a una pequeña variación de $y(x)$ le corresponde una pequeña variación de ésta.</p> <p>La funcional $v[y(x)]$ es continua para $y = y_0(x)$ en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, si para todo ε positivo existe un $\delta > 0$ tal que $v[y(x)] - v[y_0(x)] < \varepsilon$ para</p> $\begin{aligned} y(x) - y_0(x) &< \delta, \\ y'(x) - y'_0(x) &< \delta, \\ &\dots \\ &\dots \\ y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x) &< \delta. \end{aligned}$ <p>Aquí se sobreentiende que la función $y(x)$ se toma de la clase de funciones en la cual la funcional $v[y(x)]$ está definida.</p> |
| <p>Se llama función lineal a la función $l(x)$ que satisface las siguientes condiciones: $l(cx) = cl(x)$, donde c es una constante arbitraria, y $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$.</p> | <p>Se llama funcional lineal a la funcional $L[y(x)]$ que satisface las siguientes condiciones: $L[cy(x)] = cL[y(x)]$, donde c es una constante arbitraria, y $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$.</p> |

| | |
|---|--|
| <p>La función lineal de una variable tiene la forma $l(x) = kx$, donde k es constante.</p> | |
| <p>Si el incremento de la función $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ puede representarse en la forma $\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x$, donde $A(x)$ no depende de Δx y $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, entonces la función se llama derivable, y la parte $A(x)\Delta x$ del incremento, lineal con respecto Δx, se llama diferencial de la función y se denota por df.</p> <p>Dividiendo entre Δx y pasando al límite para $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene que $A(x) = f'(x)$ y, por lo tanto, $df = f'(x)\Delta x$.</p> | <p>Si el incremento de la funcional $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$ puede representarse en la forma $\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\max \delta y$, donde $L[y(x), \delta y]$ es una funcional lineal con respecto a δy, $\max \delta y$ es el valor máximo de δy y $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ cuando $\max \delta y \rightarrow 0$, entonces la parte del incremento lineal con respecto a δy, es decir, $L[y(x), \delta y]$, se llama variación de la funcional y se designa por δv.</p> |
| <p>La diferencial de la función $f(x)$ es igual a $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) _{\alpha=0}$</p> | <p>La variación de la funcional $v[y(x)]$ es igual a $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] _{\alpha=0}$</p> |
| <p>Si la función derivable $f(x)$ alcanza su máximo o su mínimo en un punto interior $x = x_0$ de la región de definición de la función, entonces en este punto será $df = 0$.</p> | <p>Si la funcional $v[y(x)]$, que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para $y = y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces para $y = y_0(x)$ será $\delta v = 0$.</p> |

Definición. La funcional $v[y(x)]$ tiene un máximo en la curva $y = y_0(x)$, si su valor en cualquier curva próxima a $y = y_0(x)$ no es mayor que $v[y_0(x)]$, es decir $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$.

Si $\Delta v \leq 0$ y además $\Delta v = 0$ sólo cuando $y(x) = y_0(x)$, entonces se dice que en la curva $y(x) = y_0(x)$ se tiene un máximo estricto. De forma análoga, se define la curva $y(x) = y_0(x)$ en la que hay un mínimo. En este caso $\Delta v \geq 0$ para todas las curvas cercanas a la curva $y = y_0(x)$.

El concepto de extremo de una funcional debe ser explicado mejor: Cuando se habla de un máximo o un mínimo, o mejor dicho, de un máximo o un mínimo relativos, se toma en cuenta el mayor o menor valor de la funcional con respecto a los valores de ésta en las curvas cercanas. Sin embargo, la proximidad de las curvas puede entenderse de formas diferentes, es decir, se debe señalar el orden de la proximidad que se toma en consideración al definir un máximo o un mínimo.

Si la funcional $v[y(x)]$ alcanza su máximo o su mínimo o su mínimo en la curva $y = y_0(x)$ sólo con respecto a todas las curvas para las cuales el módulo de la diferencia $y(x) - y_0(x)$ es pequeño (proximidad de orden nulo), entonces el máximo o el mínimo se llama *fuerte*. Por otro lado, si la funcional $v[y(x)]$ alcanza su máximo o mínimo en la curva $y = y_0(x)$ sólo con respecto a las curvas $y = y(x)$ cercanas a $y = y_0(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden, es decir, no sólo por sus coordenadas, sino también por las direcciones de sus tangentes, el máximo o el mínimo se denomina débil.

4.1.2. Ecuación de Euler-Lagrange.

De acuerdo con Elsgoltz (1969) ,si se analiza el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

donde los puntos frontera de las curvas admisibles están fijos, es decir, $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Y si la función $F(x, y, y')$ se considera derivable tres veces.

La condición necesaria para que exista un extremo en una funcional, es que la variación de la misma se anule.

Se supone que en la curva $y = y(x)$ existen segundas derivadas y que se tiene un extremo. Si se toma cierta curva admisible $y = \bar{y}(x)$ cercana a $y = y(x)$ y se incluyen ambas en la familia monoparamétrica de curvas definidas por $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))$.

Así, cuando $\alpha = 0$, se obtiene la curva $y = y(x)$ y para cuando $\alpha = 1$, se obtiene $y = \bar{y}(x)$ como se muestra en la siguiente figura.

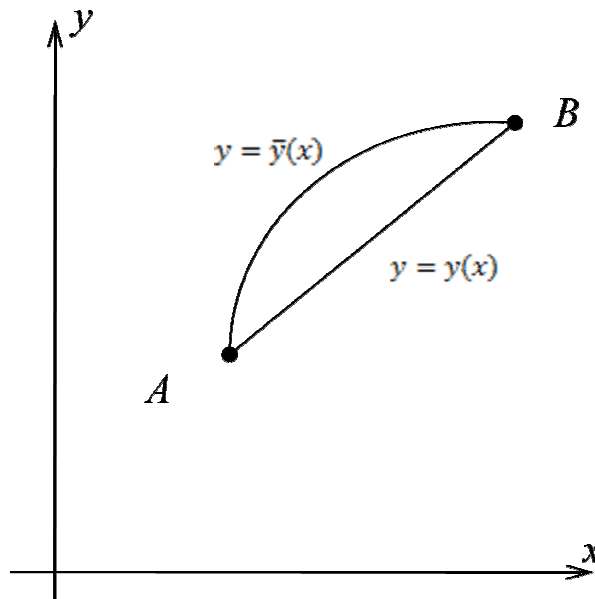


Fig. 4.4.

A la diferencia $\bar{y}(x) - y(x)$ se le llama variación de la función $y = y(x)$ y se designa por δy , esta variación desempeña un papel similar al del incremento de la variable independiente Δx en los problemas de estudio de los extremos de una función $f(x)$; dicha diferencia de funciones es, por tanto, una función de x y se puede derivar una o varias veces, siendo $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$, es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada. De manera análoga

$$(\delta y)'' = \bar{y}''(x) - y''(x) = \delta y''$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(\delta y)^{(k)} = \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}$$

Por lo que se considera la familia $y = y(x, \alpha)$, donde $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\delta y$, esta familia contiene para $\alpha = 0$ la curva en la que se alcanza el extremo, y para $\alpha = 1$ cierta curva admisible cercana de comparación.

Si se consideran los valores de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

sólo en las curvas de la familia $y = y(x, \alpha)$, la funcional se transforma en una función de α , así:

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha)$$

El valor del parámetro α determina una curva de la familia $y = y(x, \alpha)$, y determina también el valor de la funcional $v[y(x, \alpha)]$. La función $\varphi(\alpha)$ tiene un extremo en $\alpha = 0$ ya que para ese valor se obtiene $y = y(x)$, teniendo un extremo con respecto a cualquier curva cercana admisible y de forma particular con respecto a las curvas cercanas de la familia $y = y(x, \alpha)$.

Como se ha planteado, la condición necesaria para que la función $\varphi(\alpha)$ tenga un extremo en $\alpha = 0$ es que su derivada se anule en dicho valor, es decir, que $\varphi'(0) = 0$.

Dado que

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx$$

Se sigue

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx$$

Donde

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha\delta y] = \delta y$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha\delta y'] = \delta y'$$

se tiene

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y'] dx$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'] dx$$

A $\varphi'(0)$ se le llama variación de la funcional y se designa por δv , y como la condición necesaria para que la funcional v tenga un extremo es la anulación de su variación, entonces se sigue que $\delta v = 0$. Donde para la funcional dada en un principio, esta condición se queda expresada como

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0$$

Integrando el segundo sumando por partes y tomando en cuenta que $\delta y' = (\delta y)'$ se sigue que

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx$$

Pero como $\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0$ y $\delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0$ y dado que todas las curvas admisibles en el problema simple considerado pasan por los puntos frontera fijos, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0$$

El primer factor del integrando es una función continua dada en la curva $y = y(x)$ que realiza el extremo, y el segundo factor del mismo integrando, es una función arbitraria que satisface sólo ciertas condiciones muy generales, o mejor dicho, la función δy que se anula en los puntos frontera $x = x_0$ y $x = x_1$ es continua y derivable una o varias veces y δy o δy y $\delta y'$ son pequeños en valor absoluto.

Se usa el lema fundamental del cálculo variacional para simplificar la condición anterior.

Lema fundamental del cálculo variacional: si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0$$

Siendo $\Phi(x)$ una función continua en el segmento $[x_0, x_1]$ entonces $\Phi(x) = 0$ en dicho segmento. Si se aplica el lema anterior en la condición necesaria de extremo en la funcional

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0$$

Entonces se sigue que $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ en la curva $y = y(x)$ que realiza el extremo de la funcional analizada, esto es, $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

O escrita en forma desarrollada

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

A esta última expresión se le conoce con el nombre de ecuación de Euler.

A las curvas integrales de la ecuación de Euler $y = y(x, C_1, C_2)$ se les llama *extremales* y sólo en éstas puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

Para encontrar la curva que realiza un extremo de la funcional anterior, se integra la ecuación de Euler y se determinan las dos constantes arbitrarias de acuerdo a las condiciones de frontera $y(x_0) = y_0$ y $y(x_1) = y_1$. Además, sólo en las *extremales* que satisfacen estas condiciones se puede realizar un extremo de la funcional.

4.2. Arcos asociados a una función distancia y arcos de mínima longitud.

De la conclusión dada al final del capítulo 3 ($L = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$), se derivan los siguientes teoremas (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2008b).

Teorema 1 (Determinación de la d -longitud de arco de un arco d -rectificable).

Si la función distancia $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ tiene una derivada direccional unilateral continua, $F: R^n \times R^n \rightarrow R$, entonces todo arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ clase C^1 es d -rectificable y su d -longitud está dada por

$$l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica clase C^1 de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Teorema 2 (Propiedades de la derivada direccional unilateral F de una función distancia d).

Sea $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ una función distancia y F la derivada direccional unilateral de d dada por

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta s \mathbf{v})}{\Delta s}$$

Entonces se tiene:

- $F(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$.
- La función F es positivamente homogénea de grado uno: $F(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{v}) = \alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ para toda $\alpha > 0$.
- Para $n \geq 2$, $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))$ no depende explícitamente del parámetro s del camino.
- La d -longitud de un arco d -rectificable no depende de su representación paramétrica.
- Si d cumple la desigualdad del triángulo, entonces $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ es una función convexa en \mathbf{v} para cada \mathbf{x} : $F(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{v} + (1 - \alpha) \mathbf{w}) \leq \alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (1 - \alpha) F(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ para toda $\alpha \in [0, 1]$, $\mathbf{x} \in R^n$.

4.2.1. Arcos inducidos por una función distancia.

De la definición de d -longitud de arco dada anteriormente, se deriva la deducción de la existencia de ciertos arcos que son caracterizados por la función distancia d , a estos arcos se les llama arcos d -inducidos los cuales se definen como sigue (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2008b):

Sea $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ una función distancia. Se dice que un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es d -inducido si todas sus particiones tienen la misma d -longitud.

Así, de acuerdo con la definición de longitud de arco, todo arco d -inducido $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es d -rectificable y su d -longitud es igual a la d -longitud de su partición trivial $l_d = (C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. De aquí, se sigue que cada subarco de un arco d -inducido es un arco d -inducido.

De manera equivalente, $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un arco d -inducido si la d -longitud de toda partición de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$ con $k \geq 0$, es igual a la d -distancia de \mathbf{a} a \mathbf{b}

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$$

Para toda $P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b}) \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$

la cual es la d -longitud de la partición trivial de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Por lo que se establece que un arco de \mathbf{a} a \mathbf{b} es d -inducido si, y sólo si, la d -distancia de \mathbf{a} a \mathbf{b} es igual a la suma de las d -distancias entre todos los puntos consecutivos de cualquier sucesión de puntos en el arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, donde la sucesión incluye los puntos extremos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

De lo anterior se sigue que un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es d -inducido si, y sólo si, la restricción de d a $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ cumple la igualdad del triángulo respecto del punto final \mathbf{b} , es decir $d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b})$; $a \leq s \leq t \leq b$ donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

4.2.2. Arcos mínimos.

Si una función distancia no satisface la desigualdad del triángulo, los arcos mínimos no necesariamente son arcos inducidos y el concepto tradicional de que la distancia desde un punto a otro es igual a la longitud del arco más corto que los conecta no es válido (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2008b).

Una función distancia que cumple la desigualdad del triángulo se llama premétrica, así mismo, una función distancia es completa si todo par de puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ está conectado por un arco d -inducido.

Así, si la función distancia d cumple con la desigualdad del triángulo y es, además, completa, se dice que es una premétrica completa y los arcos inducidos son arcos de mínima longitud y la función distancia queda determinada por su derivada direccional unilateral F .

Esta última aseveración indica que d y F proporcionan "información" similar: d proporciona "información global" dado que su valor depende de dos puntos arbitrariamente elegidos en R^n ; F proporciona "información local" dado que su valor depende del punto y la dirección que se consideren en el momento.

Una función distancia $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ satisface la desigualdad del triángulo

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$$

si y sólo si se cumple que $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \forall P$, es decir, que para toda sucesión $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$ la distancia entre los puntos extremos es menor o igual que la longitud de dicha sucesión P .

Si d es una función distancia tal que su derivada direccional unilateral es una función continua y $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es un camino clase C^1 de \mathbf{a} a \mathbf{b} que resuelve el problema

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds \text{ para toda } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$$

entonces, se dice que la imagen de \mathbf{x} , $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega_{[a,b]}$ es un arco de mínima longitud o arco minimal y, por las propiedades de las integrales todos los sub-arcos de un arco minimal son arcos minimales.

Estas observaciones se reúnen en el siguiente teorema (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2008b):

Teorema: *Para cualquier premétrica los arcos inducidos son arcos minimales.*

Si d es una premétrica con una derivada direccional unilateral $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ continua en \mathbf{x} para cada $\mathbf{v} \in R^n$, entonces se cumple:

- i. $F: R^n \times R^n \rightarrow R$ es continua, y por lo tanto, la longitud de arco de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ esta dada por $l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$.
- ii. Si $P, Q \in [C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ son dos particiones de un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, tales que P es un refinamiento de Q , entonces $\Lambda(Q) \leq \Lambda(P)$.
- iii. Para todo arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de clase C^1 , $l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \sup \{\Lambda(P) : P \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]\}$.
- iv. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \Lambda(P) \leq l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ para toda partición $P \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ de un arco d -rectificable clase C^1 .
- v. Para todo arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de clase C^1 , $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ si y sólo si $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un arco inducido.
- vi. Todo arco inducido es un arco minimal.

La demostración de cada punto se da en el trabajo citado.

4.2.3. Geodésicas.

Un problema similar a la determinación de arcos minimales en el Cálculo de variaciones es la construcción de geodésicas en una superficie curvada, esto es, construir las curvas de mínima longitud.

Dados dos puntos \mathbf{a}, \mathbf{b} sobre una superficie $S \subset R^3$, se busca la curva $C \subset S$ que los une y posee la mínima longitud posible.

Por ejemplo, si S es un cilindro circular, entonces existen tres posibles tipos de curvas geodésicas: segmentos de línea recta paralelos a la línea central, arcos de círculos ortogonales a la línea central y hélices espirales. De manera similar, las geodésicas en una esfera son arcos de los llamados grandes círculos. Una aplicación se encuentra en aeronáutica, donde para minimizar la distancia de vuelo, los aviones siguen caminos geodésicos circumpolares alrededor del planeta.

Para formular matemáticamente el problema de minimización geodésico, se supone, por simplicidad, que la superficie $S \subset R^3$ es la gráfica de la función $z = F(x, y)$. Se busca la curva geodésica $C \subset S$ que une los puntos $\mathbf{a} = (a, \alpha, F(a, \alpha))$ y $\mathbf{b} = (b, \beta, F(b, \beta))$ sobre la superficie S .

Si se asume que C puede ser parametrizada por la coordenada x , en la forma $y = u(x)$, $z = v(x) = F(x, u(x))$ donde esta última ecuación asegura que la curva se encuentra en la superficie S ; en particular esto requiere que $a \neq b$. La longitud de la curva está dada por la integral de longitud de arco en tres dimensiones; de tal manera que para encontrar las geodésicas se debe minimizar la funcional

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

o bien

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x)) \frac{du}{dx}\right)^2} dx$$

sujeta a las condiciones de frontera $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$.

Por ejemplo, las geodésicas en una paraboloides dado por $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ pueden ser encontradas al minimizar la funcional

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + (u')^2 + (x + uu')^2} dx$$

4.3. Métodos para determinar los arcos de mínima longitud en superficies.

4.3.1. Camino más corto sobre una superficie suave.

La pregunta de interés que se aborda en esta sección es ¿cuáles arcos son los que están asociados a una función distancia sobre una superficie que no es perfectamente plana?

En la literatura especializada consultada se encontró que, en general, se consideran los caminos mínimos sobre superficies muy regulares (homogéneas), superficies suaves, tales como un plano, una esfera, o un cono. A pesar del desarrollo de la geometría diferencial, no se han estudiado métodos analíticos para la determinación de los arcos mínimos sobre superficies más generales.

Las geodésicas sobre superficies suaves satisfacen la condición de que su vector normal principal coincide con la normal de la superficie que las geodésicas recorren. Esto significa que para una esfera los grandes círculos son las únicas geodésicas, puesto que solamente en estas curvas la normal al camino corresponde a la normal de la superficie. También se han estudiado las geodésicas para el caso de superficies de revolución (superficies radialmente simétricas) donde una función tal como $z = f(x)$ en el plano $y = 0$ se rota alrededor del eje z . En este caso la superficie debe ser parametrizada por las ecuaciones polares:

$$x = u \cos v, y = u \sin v, y z = f(u)$$

En algunos casos, las geodésicas sobre tales superficies se pueden encontrar por medios analíticos y en todos los casos se puede obtener una integral de las ecuaciones diferenciales.

Para superficies polinomiales el problema es más difícil. El paraboloides elíptico es de especial interés porque se puede considerar como un ejemplo muy simplificado de una superficie sin excesiva simetría. Este tipo de superficie puede verse como una simplificación de una montaña o de un valle. Por esta similitud con superficies un poco más reales, se hace el siguiente análisis. La ecuación de un paraboloides elíptico tiene la forma:

$$z = x^2/a^2 + y^2/b^2, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

Las ecuaciones paramétricas son: $x = a u \cos v, y = b u \sin v, y z = u^2$

Con el fin de recorrer un camino de longitud lo más corta posible entre dos puntos a y b sobre tal paraboloides, se debe minimizar la expresión:

$$z = \int_a^b ds = \int_a^b F(u, u', v) dv \tag{1}$$

donde ds es el diferencial del parámetro del camino sobre la superficie y $F(u, u', v)$ es la función lagrangiana (o fundamental) la cual depende de los componentes paramétricos u, v y du/dv . El objetivo es encontrar la curva geodésica $u(v)$ la cual minimiza esta expresión (funcional).

Si se usa la métrica de Riemann, el diferencial ds en coordenadas cartesianas es como sigue:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{21}dydx + g_{22}dy^2$$

donde $g_{11} = 1 + f_x^2, g_{22} = 1 + f_y^2$ y $g_{21} = g_{12} = 1 + f_x f_y,$

por lo que $ds^2 = (1 + 4x^2/a^4)dx^2 + (8xy/a^2b^2)dxdy + (1 + 4y^2/b^4)dy^2$

En este caso (paraboloide), como para muchas otras superficies, se puede obtener una ecuación diferencial para las geodésicas, pero no es muy “amigable” como para resolverse analíticamente por lo que en su lugar se han aplicado métodos numéricos.

Con el fin de hacer notar algunas ventajas del método propuesto en esta tesis, en seguida se describen dos de los métodos más utilizados para resolver el problema de determinación de geodésicas.

4.3.2. Minimización directa de la integral $z = \int_a^b ds = \int_a^b F(u, u', v) dv$

Las principales técnicas son:

a) **Enfoque de Greenspan:** reemplaza z por una aproximación por n pasos, J_n , donde:

$$J_n = \sum_{i=1}^n F \left(u_{i-1}, \frac{u_i - u_{i-1}}{v_i - v_{i-1}}, v_{i-1} \right) (v_i - v_{i-1})$$

con condiciones de frontera $u_0 = u(v_0)$ y $u_n = u(v_n)$, donde (u_0, v_0) y (u_n, v_n) son los puntos extremos de la geodésica. Se puede minimizar la ecuación por diferenciación parcial e igualando el resultado a 0 para $i = 1$ hasta $i = n$. Esto da un sistema de n ecuaciones no lineales en $n - 1$ variables las cuales se pueden resolver a través de métodos iterativos de tipo Newton-Raphson.

b) **Métodos de Rayleigh-Ritz:** se inicia suponiendo que la geodésica $u(v)$ tiene una cierta forma, por ejemplo, una cúbica simple, la expresión de esta curva se sustituye en la funcional (1) para después integrar. Las variables desconocidas se determinan a través de diferenciaciones parciales, igualando estas a 0, y resolviendo las ecuaciones como en el método anterior.

4.3.3. Minimización de $z = \int_a^b ds = \int_a^b F(u, u', v) dv$ **resolviendo las ecuaciones de Euler.**

Curvas mínimas o arcos mínimos.

El problema de las curvas mínimas es un ejemplo del método, aplicado para determinar arcos de mínima longitud sobre superficies, utilizando las ecuaciones de Euler, dicho problema se refiere a encontrar el camino más corto entre dos puntos específicos, y en su más simple manifestación, el procedimiento para resolverlo es el siguiente (Olver, 2006):

Dados dos puntos diferentes $\mathbf{a} = (a, \alpha)$ y $\mathbf{b} = (b, \beta)$ en el plano R^2 , el problema es encontrar la curva de menor longitud que los conecte. La respuesta “obvia” que salta inmediatamente, de acuerdo a las ideas aprendidas en la educación básica, es que la ruta más corta entre dos puntos es la línea recta. Entonces, de acuerdo con la aseveración anterior, la curva mínima debe ser la gráfica de la función afín particular

$$y = cx + d = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$$

que pasa entre o interpola los dos puntos. Sin embargo, este “hecho” comúnmente aceptado es, en un análisis más profundo, tal vez no tan inmediatamente obvio desde un punto de vista rigurosamente matemático.

Ahora se revisa la forma en que se puede formular, matemáticamente, el problema de la curva mínima.

Por simplicidad, se asume que la curva mínima está dada como la gráfica de una función suave $y = u(x)$. Así, por cálculo elemental se tiene que la longitud de la curva está dada por la integral longitud de arco

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

donde $u' = \frac{du}{dx}$. La función $u(x)$ debe satisfacer las condiciones de frontera $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$ para asegurar que su gráfica pase a través de los dos puntos dados.

El problema de encontrar la curva mínima requiere encontrar la función $y = u(x)$, que minimiza la funcional longitud de arco, de entre todas las funciones “razonables” que satisfacen las condiciones de frontera dadas. Es aquí donde cabe preguntarse si es analíticamente obvio que la función

$$y = cx + d = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$$

es aquella que minimiza la integral longitud de arco antes expresada sujeta a las condiciones de frontera.

Así, una de las tareas que motivaron el desarrollo del cálculo de variaciones, es probar de manera rigurosa que la respuesta “obvia” planteada es correcta. La palabra “razonable” es importante. Para la funcional longitud de arco

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

la función $u(x)$ debe ser, por lo menos por partes, clase C^1 (de hecho, si se permitieran funciones discontinuas, entonces la línea recta antes dicha no daría, en muchos casos, el caso mínimo. Más aún, las funciones continuas que no son, por lo menos por partes, clase C^1 no necesitan tener una longitud de arco bien definida.

4.4. Algoritmos para determinar caminos más cortos: caso discreto.

Los problemas de la ruta más corta son parte fundamental de la teoría de redes dado que surgen de manera frecuente en problemas de la vida real y se les ha dado un tratamiento profundo debido a que ha resultado relativamente sencillo encontrar su solución en su expresión más simple, además de que también aparecen como sub-problemas en otros de mayor complejidad.

La teoría desarrollada alrededor de los problemas de ruta más corta, y en general, de los problemas de redes, maneja una notación específica, así como también una serie de supuestos, mismos que le dan sustento a los planteamientos de los algoritmos de solución. De acuerdo con Ahuja, Ravindra K. et al. 1993, estos supuestos son:

Se considera una red dirigida $G = (N, A)$ con una *longitud de arco* o *costo del arco* c_{ij} asociado a cada arco $(i, j) \in A$. La red tiene un nodo s llamado *fuentes*. $A(i)$ representa la lista de adyacencia del nodo i y $C = \max \{c_{ij}: (i, j) \in A\}$.

Se define la longitud de un camino dirigido como la suma de la longitud de los arcos en el camino.

El problema de la ruta más corta es determinar, para cada nodo diferente al nodo fuente $i \in N$, el camino dirigido de menor longitud desde el nodo s al nodo i . De manera alternativa, este problema se puede plantear el problema como el envío de una unidad de flujo desde el nodo s al nodo i por el camino de menor costo (con costos de arco dados por c_{ij}).

Estos enfoques dan como resultado el siguiente modelo de programación lineal para el problema de la ruta más corta:

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ij} = \begin{cases} n-1 & \text{para } i = s \\ -1 & \text{para toda } i \in N - \{s\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todo } (i, j) \in A$$

Los supuestos manejados en el estudio de este tipo de problemas son:

- 1) Todas las longitudes de los arcos son enteros.
 Este supuesto no es necesario para todos los algoritmos (es posible *relajar* este supuesto).
- 2) La red contiene un camino dirigido desde el nodo s a cualquier otro nodo contenido en la misma.
- 3) La red no contiene un ciclo negativo.
- 4) La red es dirigida.

Los algoritmos desarrollados en la teoría de redes para resolver el problema de la ruta más corta se clasifican en dos grupos:

1. Establecimiento de etiquetas.
2. Corrección de etiquetas.

Ambos criterios son de tipo iterativo, asignan etiquetas de distancias tentativas a ciertos nodos en cada paso; estas etiquetas de distancia son estimaciones de las distancias del camino más corto. Estos enfoques varían en la manera en que se actualizan las etiquetas de distancia entre cada paso: los algoritmos de establecimiento de etiquetas designan una etiqueta como permanente (óptima) en cada iteración, por otro lado, los algoritmos de corrección de etiquetas consideran todas las etiquetas como temporales hasta el paso final, cuando todas se convierten en permanentes.

El tipo de problemas para los que se aplica el algoritmo de establecimiento de etiquetas son los de ruta más corta definidos en redes acíclicas con longitudes de arco arbitrarias y los de la ruta más corta con longitudes de arco no negativas; los algoritmos de corrección de etiquetas son más generales y son aplicables a todas las clases de problemas, incluyendo aquellos con longitudes de arco negativas.

Los algoritmos de establecimiento de etiquetas son, en general, más eficientes, mientras que los algoritmos de corrección de etiquetas son aplicables a problemas más generales y ofrecen mayor flexibilidad.

Dos de los algoritmos más conocidos y usados en este tipo de problemas son los algoritmos de Dijkstra y Floyd, mismos que se describen de acuerdo al trabajo de Flores de la Mota (1999).

4.4.1. Algoritmo de Dijkstra.

El algoritmo básico del tipo establecimiento de etiquetas fue desarrollado por Dijkstra y se considera como uno de los métodos más eficientes; dicho algoritmo se describe a continuación:

Objetivo: Obtener la arborescencia de las rutas más cortas de raíz s en una red $G = [N, A, d]$ con costos no negativos en los arcos.

Pasos:

1. (Iniciación de etiquetas). Sea $d(s)=0$ y márchese esta etiqueta como permanente. Sea $d(x) = \infty$, para todo $x \neq s$ y considérense estas etiquetas como temporales. Sean $a(x) = x$ (estas etiquetas indicarán el predecesor de x en la arborescencia). Sea $p = s$.
2. (Actualización de etiquetas). Para todo $x \in \Gamma^+(p)$ que tenga etiqueta temporal, actualizar etiquetas de acuerdo a

$$d(x) = \min \{d(x), d(p) + d(p, x)\}$$

si $d(x)$ se modificó, hacer $a(x) = p$. Sea x^* tal que $d(x^*) = \min \{d(x) \setminus d(x) \text{ es temporal}\}$. Si $d(x^*) = \infty$, terminar. En este caso, no existe arborescencia alguna de raíz s . En otro caso, marcar la etiqueta $d(x^*)$ como permanente. Sea $p = x^*$.

3. (i) (Si se desea la arborescencia). Si todos los nodos tienen etiquetas permanentes, terminar, ésta es la longitud deseada del camino y el conjunto de arcos $\{a(x), x\}$ forman la arborescencia de caminos más cortos. En otro caso, ir al paso 2.

4.4.2. Algoritmo de Floyd.

Este algoritmo es uno de los procedimientos más eficientes y fue desarrollado como R. W. Floyd y es aplicable a redes que admiten todo tipo de costo. Para este algoritmo se supone que los nodos están numerados progresivamente (1, 2, 3, ..., n) y se usa una matriz llamada C de dimensión igual a n para calcular las longitudes de las rutas más cortas entre cada par de nodos. La longitud de la ruta más corta entre nodos i y j estaría dada por el elemento (i, j) de C .

Objetivo: Obtener las rutas más cortas entre todo par de nodos en una red G con n nodos.

Pasos:

1. Construya la matriz C de dimensión n cuyos elementos c_{ij} son como sigue:
2. Haga $k = k + 1$ para toda $i \neq k$ tal que $c_{ij} \neq \infty$ y para todo $j \neq k$ tal que $c_{kj} \neq \infty$, haga:

$$c_{ij} \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } (i, j) \notin A \\ d(i, j) & \text{si } (i, j) \in A \end{cases} \quad k = 0$$

$$c_{ij} = \min \{c_{ij}, c_{ik} + c_{kj}\}$$

3. i) Si $c_{ii} < 0$ para alguna i , termine. En este caso existe un circuito negativo que contiene al nodo i y por lo tanto no hay solución.
- ii) Si $c_{ii} \geq 0$, para toda i y $k=n$ termine. c_{ij} es la longitud del camino más corto de i a j .
- iii) Si $c_{ii} \geq 0$ para toda i y $k < n$ ir al paso 2.

Recuperación de las rutas.

Para recuperar las rutas más cortas puede construirse una matriz A de dimensión n , donde el elemento a_{ij} de esta matriz será el predecesor del nodo j en la ruta de i a j encontrada en cada iteración. Dada la definición de A , sus entradas se inicializarán $a_{ij} = i$, para todo par de nodos $i, j \in N$.

La matriz A se modificará en el paso 2 de la k -ésima iteración de acuerdo a la siguiente asignación:

$$a_{ij} \begin{cases} a_{kj} & \text{si } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \text{no cambia} & \text{si } c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \end{cases}$$

CAPÍTULO CINCO

FUNCIONES DISTANCIA EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS.

"The path of duty lies in what is near, and man seeks for it in what is remote." (Mencius)

5.1. Medición de Distancia en Problemas de Localización.

Además de conceptos, tales como el costo de terreno, que influyen en la decisión de la localización de servicios, lo que siempre distingue un lugar de otro es su posición relativa a ciertos puntos fijos. Una de las propiedades básicas de la posición relativa es la *distancia*; así, es éste un concepto básico en la formulación de los problemas de localización.

La distancia entre dos puntos puede ser una línea recta; este es un concepto ideal que en la realidad es difícil implementar. Así, podría parecer que sólo existieran algunas aplicaciones para las cuales el modelo apropiado usara distancias en línea recta, sin embargo, como ejemplo tenemos que una buena aproximación de la distancia total promedio entre varios pares de ciudades en una región puede estar dada usando distancias ponderadas en línea recta.

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que cuando un conjunto de objetos puede ser representado como puntos, puede usarse una función predictiva de distancia (FPD) para transformar las coordenadas de dos puntos en una estimación de la distancia entre ellos.

La gran ventaja de usar una FPD en lugar de conformar una base de datos de distancias entre todos los puntos de interés es la rapidez con la que se puede implantar un sistema basado en tales funciones comparado con un sistema basado en datos reales y el nivel de cobertura que puede alcanzarse, además de la gran diferencia de costos entre ambos sistemas.

De acuerdo con Plastria (1995), distancia es la descripción matemática de la idea de proximidad y puede tomar diferentes formas, dependiendo de la aplicación en que se use y el conocimiento de donde se encuentren, por ejemplo, dos puntos es insuficiente para calcular su distancia: se debe conocer además que tipo de medida de distancia se considera.

En un espacio de dos dimensiones o más, la distancia más familiar es la distancia Euclidiana, la cual mide que tan lejos se encuentran dos puntos en una trayectoria de "vuelo de cuervo", considerando la longitud del segmento de la línea recta que los une.

Si los dos puntos están dados por sus coordenadas $X = (x, y)$ y $P = (a, b)$ referidos a un sistema ortonormal, entonces la distancia Euclidiana se obtiene como:

$$d(X, P) = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}$$

Esta forma de medir la distancia puede ser apropiada en ciertos casos, sin embargo podría no serlo para distancias viajadas, excepto en el caso en el que se pudiera viajar en todas las direcciones con la misma facilidad.

Otras medidas de distancia diferentes surgen cuando sólo está permitido viajar en ciertas direcciones como en el caso del movimiento de cierto tipo de máquinas donde, tal vez por razones

técnicas, no se pueden presentar movimientos horizontales y verticales simultáneos, en este caso, la medida apropiada sería la distancia rectangular dada por

$$d(X, P) = |a - x| + |b - y|$$

Si por el contrario, los movimientos, horizontal y vertical, simultáneos sí son posibles, la forma apropiada de medir la distancia es la llamada *distancia máxima*

$$d(X, P) = \max\{|a - x|, |b - y|\}$$

Esta última situación puede ser ampliamente generalizada al considerar que sólo algunos movimientos son permitidos de un conjunto finito de direcciones fijas y sus correspondientes velocidades de desplazamiento. Habría muchas formas posibles de moverse de un punto a otro, eligiéndose la forma o camino que tome el menor tiempo de recorrido, el cual a su vez, determinaría la distancia viajada. De esta forma se obtiene una larga clase de medidas de distancia llamadas distancias de bloque o poliédricas. El nombre dado a este tipo de medidas de distancia se sustenta en el hecho de que cualquier “bola” de radio r es un poliedro.

Por ejemplo, en el plano, la “bola” unitaria para la distancia rectangular es el la figura en forma de “diamante cuadrado” con las esquinas en los puntos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(0,1)$ mientras que para la distancia máxima esta “bola” unitaria toma la forma de un cuadrado unitario con esquinas en los puntos $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ y $(-1,1)$. Ver Fig. 5.1.

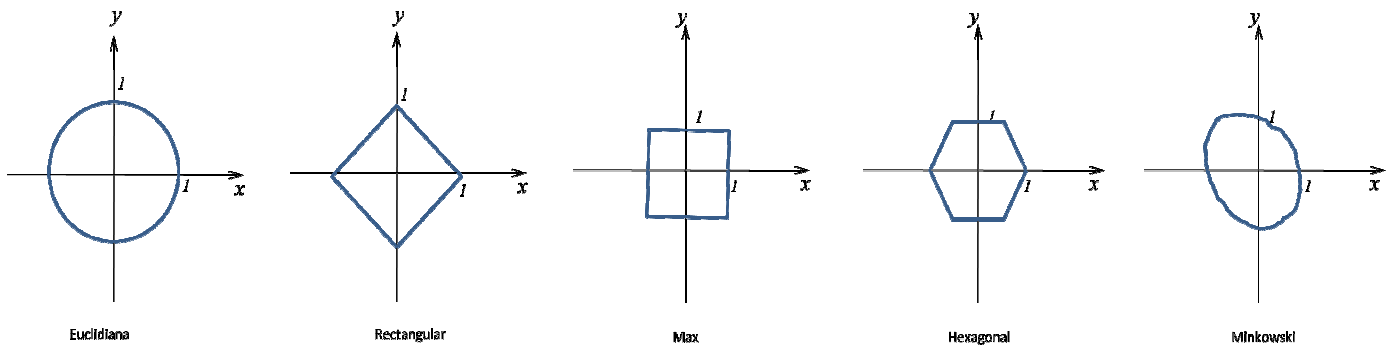


Fig. 5.1. “Bolas” unitarias para diferentes distancias en el plano.

Además de las distancias rectangular y máxima, las distancias más generales de bloque no son directamente aplicables en la práctica, sin embargo, son usadas con frecuencia para aproximar otras nociones de distancia y llevan a formular problemas de localización que son más fáciles de resolver mientras se consiguen modelos que representen mejor las condiciones reales.

A la generalización de las medidas de distancia anteriores se les llama distancias Minkowski las cuales consisten en todas las posibles nociones de distancia que satisfagan la desigualdad del triángulo siendo funciones convexas; la definición de este tipo de distancias es la siguiente

$$d(X, B) = d(0, P - X) = \min\{r > 0 | P - X \in rB\}$$

Dicha definición es la forma de obtener las distancias Minkowski: Considere cualquier conjunto convexo, cerrado y limitado B que contiene al origen, y asumiendo que este conjunto es la "bola" unitaria para alguna medida de distancia. Esto significa que el conjunto B consiste exactamente de todos los puntos alrededor del origen y hasta una distancia de 1 desde el origen; para obtener la "bola" unitaria con radio r , se expande B por un factor r , manteniendo el origen fijo; matemáticamente esto se logra al considerar todos los puntos $X = (a, b)$ que están en B y multiplicar sus coordenadas por r : (ra, rb) . Todos estos puntos forman el conjunto expandido rB . Así, se llama B -distancia desde el origen a algún punto P al menor radio r para el cual P cae dentro de rB . Finalmente, la distancias desde algún otro punto diferente al origen se obtienen trasladando primero el origen a dicho punto.

En la práctica, en los problemas de localización de servicios, se usan factores que agregan una perturbación lineal a las definiciones básicas de distancia, para representar las barreras naturales que impiden el movimiento libre (lagos, ríos, brechas, variaciones en velocidades, pendientes, etc.). Sin embargo, si se quiere una verdadera descripción cercana a las distancias presentadas en los problemas reales, se deben considerar nociones de distancias más complejas donde la teoría de localización no se ha desarrollado aún (Plastria, 1995).

5.2. Normas y funciones estimadoras de distancia.

Una función $k: R^N \rightarrow R^1$ que satisface las siguientes propiedades es llamada una *norma*:

1. $k(x) \geq 0, \forall x \in R^N$ (no negatividad)
2. $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $k(cx) = |c|k(x), \forall x \in R^N, c \in R^1$ (homogeneidad)
4. $k(x) + k(y) \geq k(x + y), \forall x, y \in R^N$ (desigualdad del triángulo)
5. $k(-x) = k(x)$ (simetría)

Las propiedades anteriores aseguran que al usar normas como estimadores de distancia los resultados tienen características similares a las de las distancias reales, tales como:

- No negatividad.
- Simetría: generalmente la distancia de A a B es la misma que de B a A.
- En las distancias se cumple la desigualdad del triángulo que implica que siempre se escoge la distancia menor al recorrer una ruta.

5.2.1. Caracterización de una norma: normas redondas y de bloque.

El caracterizar una norma es útil para su estudio y su manejo, para ello, se define una *envoltura unitaria* B de una norma k en R^N como $B = \{x/k(x) \leq 1\}$

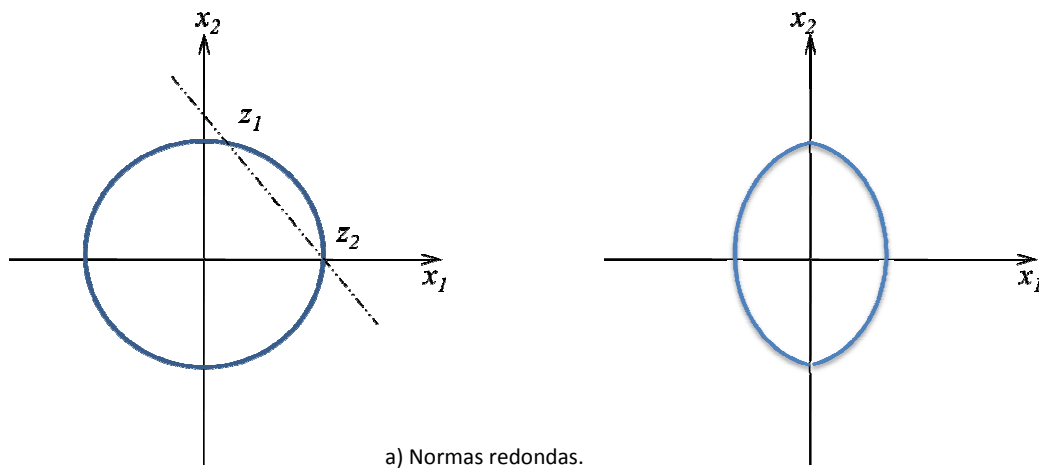
De tal forma que B es el conjunto cerrado de puntos en R^N contenido por el contorno unitario de k . La propiedad de simetría implica que si $y \in B$ entonces $-y$ también de tal manera que B es un conjunto simétrico que contiene al origen.

Si se supone que x_1 y x_2 pertenecen a B y se considera un punto $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ donde $\lambda \in [0,1]$, esto es, y puede ser cualquier punto a lo largo del segmento de línea que une x_1 con x_2 . Entonces, por la desigualdad del triángulo y la propiedad de homogeneidad se tiene que:

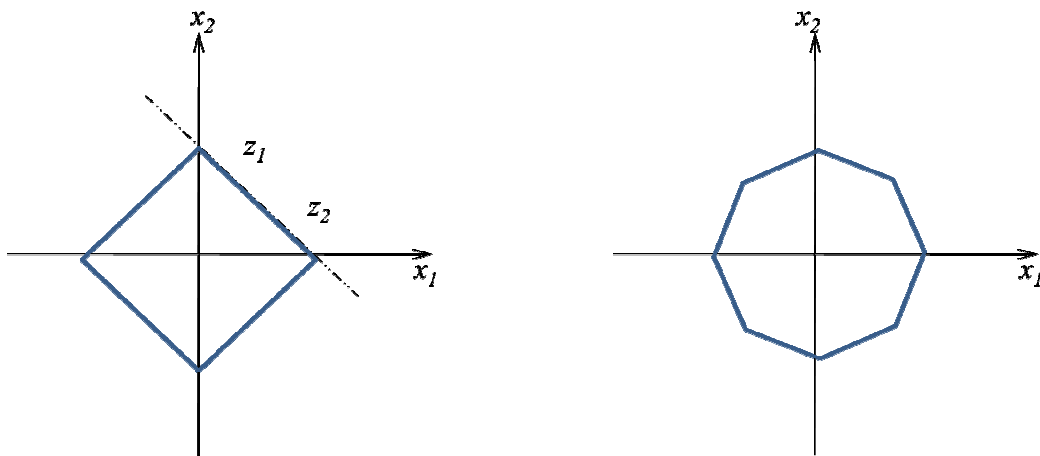
$$k(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda k(x_1) + (1 - \lambda)k(x_2), \forall x_1, x_2 \in R^N \text{ y } \forall \lambda \in [0,1]$$

Así, como $y \in B$, se llega a la conclusión de que la envoltura unitaria es un conjunto convexo, es decir, la envoltura unitaria de cualquier norma es un conjunto convexo simétrico, cerrado y limitado.

Thisse, Ward y Wendell (1984) usaron la envoltura unitaria para distinguir entre normas de bloque y normas redondas; clasificaron las normas de bloque como aquellas cuyos contornos son politopos (polígonos en R^2), a diferencia de las normas redondas, cuyos contornos no contienen "lados planos". Esta diferencia se muestra en la siguiente figura.



a) Normas redondas.



b) Normas de bloque.

Fig. 5.2.

Y para cada clasificación se analiza la existencia de la función derivada en los puntos que conforman la curva unitaria. De esto se desprende una sub-clasificación de las normas en diferenciables y no diferenciables.

Dentro de las normas redondas, la norma ℓ_p es ampliamente usada en modelos de localización por sus características y propiedades.

5.2.2. Propiedades básicas de una norma.

De acuerdo a la desigualdad del triángulo y la propiedad de homogeneidad de toda norma k , se sigue que $k(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda k(x_1) + (1 - \lambda)k(x_2)$ para toda $x_1, x_2 \in R^n$ y toda $\lambda \in [0,1]$. Esto es, k es una función convexa de x en R^n . Este resultado permite que muchos problemas de localización se puedan formular como modelos de minimización convexos.

Propiedad 1. Sea $k(x)$ una norma redonda en R^n , $n > 1$. Entonces $k(x)$ es estrictamente convexa sobre cualquier línea recta que no pase por el origen.

Esta propiedad distingue las normas redondas de las normas de bloque.

Propiedad 2. $l_p(x)$ es una norma redonda diferenciable para $1 < p < +\infty$.

Propiedad 3. Sea $k_1(x)$ que denota una norma de bloque y $k_2(x)$ una norma redonda diferenciable, donde $x \in R^n$, $n > 1$. Sea $k_3(x)$ una combinación lineal positiva de $k_1(x)$ y $k_2(x)$ dada por

$$k_3(x) = a_1 k_1(x) + a_2 k_2(x), a_1, a_2 > 0.$$

Entonces $k_3(x)$ es una norma redonda no diferenciable.

La propiedad 3 implica que cualquier norma de bloque o norma redonda diferenciable puede ser considerada como un caso límite de una norma redonda no diferenciable. En este sentido, la familia de las normas redondas no diferenciables contiene a las familias de normas de bloque y de normas redondas diferenciables.

5.2.3. La norma l_p .

Esta norma es la medida de distancia más ampliamente utilizada dentro de la teoría de localización continua. La forma funcional de esta norma en el espacio Euclidiano N-dimensional es

$$l_p(x) = \sqrt[p]{\sum_{t=1}^N |x_t|^p}, x=(x_1, \dots, x_N)^T \in R^N, p \geq 1$$

Generalmente se asume para los problemas de localización que $p=1$ o 2 , con lo que se obtiene la norma rectangular y la Euclidiana respectivamente. Para los valores de p menores a 1 y mayores que cero, l_p ya no cumple con las propiedades de una norma (distancias *hiper-rectilíneas*). Para el caso en que $p = +\infty$ se tiene la norma Tchebycheff definida como $l_\infty(x) = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Desde un punto de vista práctico, las función distancia elegida para modelar una red de transporte debe ser lo más precisa posible: algunos estudios como los de Love y Morris (1988) y Berens y Köerling (1985) presentan varias medidas, las cuales son, en su mayoría, normas multiplicadas (ponderadas) por un factor que permite tomar en cuenta cuevas, vueltas y otras formas de "ruido" en redes de transporte; además, demuestran que la norma ponderada l_p resulta más precisa que la función ponderada Euclidiana.

Por otro lado, Love y Walker (1994) muestran que la norma ponderada l_p generalmente es más precisa que una norma de bloque, sin embargo, el uso de las normas de bloque permite la formulación de modelos lineales que pueden resolverse por técnicas programación lineal (aunque el número de variables y restricciones aumenta rápidamente con el tamaño del problema) en comparación de aquellos modelos que usan normas redondas que deben usar métodos iterativos no lineales (como el procedimiento de Weiszfeld).

5.3. Arcos inducidos por las métricas L_p .

De acuerdo al apartado anterior, una métrica L_p está definida por

$$l_p(x) = \sqrt[p]{\sum_{t=1}^N |x_t|^p}, x=(x_1, \dots, x_N)^T \in R^N, p \geq 1$$

Que puede escribirse también como [Sánchez Larios (2005)]:

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^n |b_i - a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; p \geq 1, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$$

De donde las llamadas distancia rectangular y la distancia Euclidiana se definen como

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| ; \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$$
$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^n |b_i - a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$$

De las cuales, la métrica Euclidiana es uniforme e invariante frente a rotaciones (es la única isotrópica).

Del Teorema 7.2 del mismo trabajo (Sánchez Larios, 2005) *Arcos inducidos por las métricas L_p* : “Para toda métrica L_p ($p \geq 1$ o $p = \infty$), el segmento de recta que une dos puntos es un arco inducido, aunque no necesariamente es el único: para $p = 1$ o $p = \infty$ los arcos monótonos, en algún sentido, que unen dos puntos son arcos inducidos”. Se puede destacar el hecho de que cualquier “camino” de características monótonas es un arco inducido para estas métricas y no sólo los que se manejan comúnmente en la literatura, los cuales son sólo casos particulares de esta generalidad.

CAPÍTULO SEIS

MODELADO DE FUNCIONES DISTANCIA: CASO DISCRETO

6.1. Determinación de los arcos de mínima longitud y modelado de una función distancia a partir de su función lagrangiana.

En este capítulo se presenta un nuevo enfoque para determinar los arcos de mínima longitud desde un punto **a** hasta otro punto **b**, sobre una región dada, a partir de una función que se ha convenido en llamar *lagrangiana*.

Como ya se ha mencionado, en este trabajo el término longitud se puede referir a distancia de recorrido, tiempo de recorrido, costo de recorrido, energía consumida, o cualquier atributo que sea aditivo a lo largo de un camino.

Con la reciente disponibilidad de rastreo digital de alta calidad y bases de datos vectoriales, corresponde ahora aplicar resultados de investigación teórica sobre funciones distancia más generales que las métricas, así como técnicas para desarrollar bases de datos más precisas que representen las distancias reales sobre una región. De esta manera es recomendable probar y analizar los méritos de estas nuevas teorías cuando se aplican a datos reales y problemas de planeación práctica y comercial. Tales problemas incluyen selección de rutas, construcción de rutas, administración de datos, planeación regional, problemas de localización y muchas otras áreas relacionadas.

El proveer de servicios para el cálculo y la obtención de mediciones de distancia es una parte fundamental de todas las herramientas de datos espaciales. La mayoría de los paquetes de Sistemas de Información Geográfica (SIG's) ofrecen al menos tres categorías de medidas de distancia: i) mediciones de distancia basadas en las coordenadas en el plano o sobre una esfera; ii) mediciones basadas en redes, en este caso la distancia desde un punto hasta otro es la suma de las distancias entre los puntos por los que se pasa para llegar al punto destino; iii) medidas basadas en múltiples líneas, obtenidas de sumar la longitud de segmentos de líneas rectas representando una característica dada.

Es importante hacerse preguntas acerca de los supuestos sobre los que se obtienen estas medidas de distancia, ya que esto podría proporcionar una idea más clara sobre la magnitud del encubrimiento, y posible distorsión, que la disponibilidad instantánea de valores numéricos de los sistemas presenta sobre la complejidad característica de los patrones y procesos de la vida real.

La primera y tercera de estas categorías utiliza la conocida, y relativamente simple, fórmula para distancias en el espacio euclidiano, bi-dimensional y tri-dimensional, sobre la superficie de una esfera perfecta o esferoide. El empleo de estas fórmulas se hace mediante la aplicación de dos suposiciones fundamentales: a) la distancia entre dos puntos se calcula midiendo la "longitud" (costo, tiempo, esfuerzo) del camino más corto en el espacio elegido, lo que significa que se miden

las líneas rectas entre los puntos de interés, para el caso del plano, o los grandes círculos para el caso de la esfera; y b) que el espacio es completamente uniforme (homogéneo), es decir, no hay variaciones en términos de las direcciones o ubicación de un objeto.

Estas suposiciones facilitan el uso de expresiones que solamente requieren el conocimiento de las coordenadas del punto inicial y del punto final, y por consiguiente evitan la complicada pregunta de **cómo se logra** ir desde un punto hasta otro punto.

Aunque la formulación basada en las coordenadas de los puntos es muy cómoda, tiene el inconveniente de que un sistema, tales como los SIG's, no proporcionará las distancias reales entre pares de puntos u objetos a través de una superficie física ya que no toma en cuenta las condiciones reales del espacio.

Para problemas que no están restringidos a pertenecer a redes existentes, las distancias longitudinales se pueden obtener a partir de la representación de la superficie dentro del SIG. Por ejemplo, esto se puede alcanzar usando una representación tipo *laticce*, regular o irregular, a lo largo de cuyos vértices, o a través de sus celdas, se puede trazar un conjunto de arcos para formar un camino entre los puntos origen y destino. Para el caso de los problemas sobre redes existentes, solamente se pueden considerar puntos que pertenecen a dichas redes, ya sea en los arcos o en los nodos, donde las longitudes de los arcos entre los nodos de la red son conocidas. De estos dos enfoques surgen inmediatamente preguntas tales como: qué tan precisa es la representación de la superficie a través de una red, y si la red utilizada distorsiona el camino resultante. ¿Qué camino a través de la red o de la representación de la superficie debe utilizarse (por ejemplo, el camino de longitud más corta, el de mínimo esfuerzo, etc.)?, ¿cuáles son los puntos intermedios entre el punto inicial y el punto final (es decir, los puntos que no están representados explícitamente en el SIG) a manejarse?, ¿son los arcos seleccionados simétricos en términos de las distancias físicas (tiempo, costo, esfuerzo, etc.)?, ¿cuáles restricciones sobre los caminos deberán tomarse en cuenta?

En el mundo real, el cual es no homogéneo, las medidas de distancia que usamos deberían reflejar la variación espacial (y en algunos casos, la variación temporal) que experimentamos y los propósitos para los cuales requerimos las mediciones. Tales medidas deberían obtenerse de elementos incrementales y definidos en términos de **arcos inducidos por una función y una función distancia**, y no en cálculo obtenido de valores de las coordenadas del punto origen y del punto destino. Por tanto, se necesitan formulaciones más generales para medir distancias de acuerdo con los dos términos mencionados, las cuales podrían ser aplicadas en los SIG's.

En muchos casos, las medidas estándares de distancias (euclidiana) se satisfacen en áreas pequeñas, es decir, de manera local. También se trabaja bien con estas medidas sobre áreas más grandes que son razonablemente homogéneas, tales como trayectorias sobre el aire o el agua. Estas medidas son menos útiles si los caminos están restringidos a una superficie variable bi-dimensional y resultan aún menos útiles si se tienen que considerar distancias funcionales. Estas últimas se refieren a distancias físicas, es decir, a aspectos tales como el tiempo, costo, energía,

etc., gastados para ir de un lugar a otro. Estas *funciones distancia*, en general, no son lineales y tampoco satisfarán las condiciones de las métricas tradicionales.

Los problemas reales de desplazamiento de objetos sobre una región, frecuentemente muestran anisotropía y no uniformidad. Una función distancia d es *isotrópica en un punto* $\mathbf{x} \in R^n$ si su función lagrangiana F satisface la igualdad $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$; en caso contrario, d es *anisotrópica* en $\mathbf{x} \in R^n$. En otras palabras, isotropía significa que la función lagrangiana $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, no depende de la dirección \mathbf{v} . Si la función distancia d es isotrópica en todos los puntos de su dominio, decimos que d es *isotrópica sobre* R^n , en cuyo caso $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ no depende explícitamente de \mathbf{v} para toda $\mathbf{x} \in R^n$. Si d no es isotrópica sobre R^n entonces es *anisotrópica sobre* R^n . Una función distancia d es *uniforme* (invariante bajo traslaciones), si y sólo si, $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ y $\forall \mathbf{v} \in S^n$; lo cual equivale a que F no dependa de \mathbf{x} .

Cuando un espacio no es homogéneo y las funciones distancias son no uniformes, resulta más cómodo modelarlas a través del lagrangiano.

Este enfoque trata de encontrar los arcos de mínima longitud sobre una superficie no homogénea en la cual en cada punto de la región (y por tanto en cada punto de un arco) se tiene una función lagrangiana que depende del punto y la dirección. Si se quisiera visualizar esto en una gráfica, tendríamos algo como lo que se bosqueja en la figura 6.1.

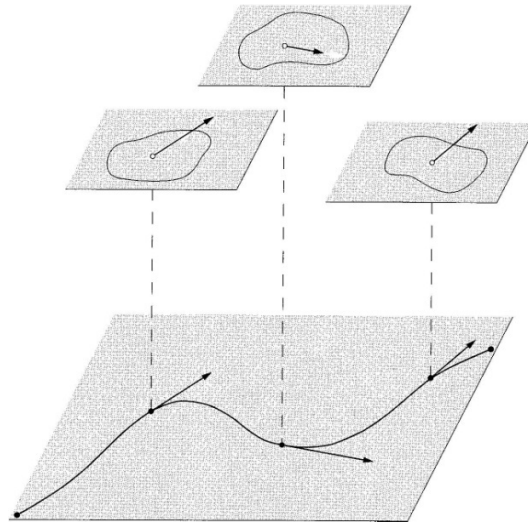


Figura 6.1. Una función lagrangiana que depende del punto del arco y la dirección.

Cabe señalar que si la función lagrangiana no dependiera de la dirección, se tendría el caso particular de las *bolos* de la métrica euclidiana, las cuales son circulares de radio igual a r , donde el valor de la función lagrangiana es r y, por lo tanto, vale lo mismo en todas las direcciones.

El cálculo de variaciones es una herramienta que puede ayudar a encontrar caminos óptimos para muchos problemas de distancia anisotrópica, ya que, el referirse a la dependencia de la distancia

que se avanza a partir de un punto dado con las direcciones, es equivalente a referirse a la dependencia de la distancia que se avanza a partir de un punto con la primera derivada de la parametrización del camino. Sin embargo, la ecuación diferencial de Euler supone **continuidad** de alguna o todas las derivadas de la función distancia.

En el movimiento de objetos donde se consideran por ejemplo, velocidad no constante, frenado, etc., se violan las condiciones de continuidad, especialmente en el frenado abrupto en el que se cambia de dirección en el desplazamiento del cuerpo; entonces, para aplicar con éxito los métodos variacionales, es necesario encontrar subespacios del espacio dentro de los cuales se asegure la continuidad de la distancia y de sus derivadas.

Lo anterior sugiere que, dada una región de interés para la cual se desea encontrar los arcos de mínima longitud, ésta se debe dividir en subregiones tales que conduzcan a una continuidad de la distancia y sus derivadas, lo cual, en términos de la función lagrangiana, significa que ésta sea la misma en cada punto de una subregión.

En la figura 6.2. se ilustra una región que es subdividida en subregiones de acuerdo con la función lagrangiana. Las *bolas* representan la imagen de la función lagrangiana que, como se observa, en cada punto de cada subregión la función lagrangiana es la misma.

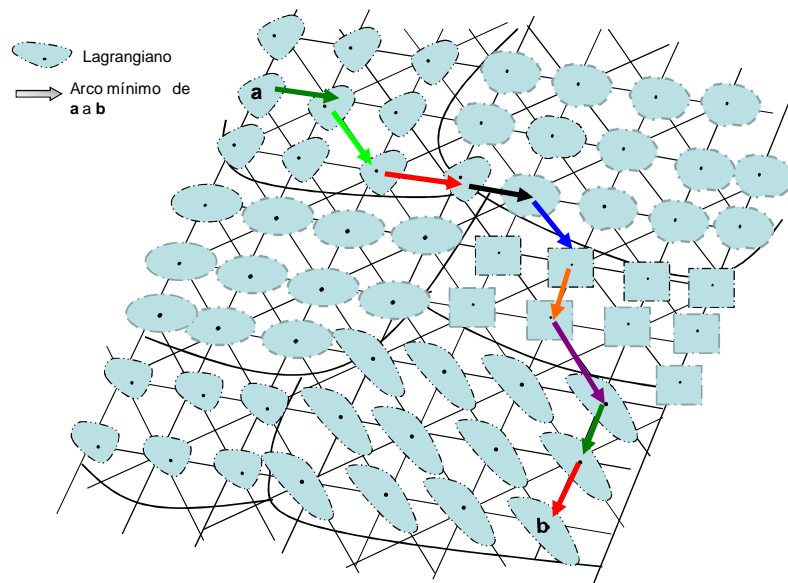


Fig. 6.2. División de una región en subregiones

Una función distancia d que cumple la condición de identidad y la desigualdad del triángulo sobre una región continua M está determinada por una función lagrangiana F mediante la integral de F a lo largo de un arco que va desde un punto a hasta otro punto b , para todo par de puntos de la región M . Las funciones distancia así obtenidas pueden ser asimétricas, no uniformes y no

necesariamente positivas definidas. Estas propiedades no podrían cumplirse si se usan los métodos tradicionales de modelado, los cuales se basan en un proceso de ajustes estadísticos sobre los parámetros de combinaciones lineales positivas de normas L_p pesadas.

En el procedimiento propuesto para modelar funciones distancia generalizadas sobre regiones discretas se parte de la definición de función distancia generalizada y del concepto de longitud de arco asociado a una función distancia, así como el de *lagrangiano*, propuestos por Sánchez Larios y Guillén Burguete (2008b).

6.2. Antecedentes: Función lagrangiana de una función distancia sobre una región continua M

Toda función distancia d sobre una región continua M que cumple la condición de identidad y la desigualdad del triángulo, está determinada por una función lagrangiana F mediante.

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M. \quad (1)$$

Una función distancia d obtenida de esta manera puede tomar valores negativos, ser asimétrica y, por supuesto, no ser uniforme (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2008a). La expresión (1) se obtiene de que la longitud de un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que va desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} está dada por

$$l_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds.$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Para que el valor de cualquiera de las integrales anteriores no dependa de la parametrización del arco, se requiere que F se homogenea positiva en su segundo argumento.

Se debe observar que (1) expresa que la distancia desde un punto \mathbf{a} hasta otro punto \mathbf{b} es igual a la longitud del arco más corto que los conecta. Se puede demostrar que en (1) la función F no es única, y que dos funciones F dan la misma función distancia d si y solamente si en cada punto \mathbf{x} la cerradura convexa de ambas funciones es la misma (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2009). De hecho se cumple el siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en Sánchez Larios y Guillén Burguete (2008b).

Teorema 1 La definición (1) de la función distancia d implica que:

a) d cumple la desigualdad del triángulo;

b) F es convexa en su segundo argumento en cada punto \mathbf{x} si y solo si F es la derivada direccional unilateral de la función distancia d con respecto a su segundo argumento, o sea, la función F en el punto \mathbf{x} en la dirección \mathbf{v} está dada por

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{ds \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + ds\mathbf{v}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{ds}.$$

Como la función distancia d cumple la propiedad de identidad, entonces dicha derivada direccional unilateral viene a quedar como

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{ds \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + ds\mathbf{v})}{ds}. \quad (2)$$

Por (1) y (2), la función lagrangiana F contiene la misma información que d , pero de manera local.

A partir de (2), podemos interpretar a $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ como *la distancia que se avanza en unidades de la distancia d en la dirección de \mathbf{v} a partir de \mathbf{x} , cuando el parámetro del arco que se recorre se incrementa en ds* . Además, por el teorema 1, para que esta interpretación de F sea válida, es indispensable que F sea convexa en su segundo argumento. Esta interpretación se aplica en la sección relacionada con la obtención de la función lagrangiana de una función distancia sobre un espacio discreto N .

Se pueden demostrar (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2009) las siguientes relaciones (tabla 6.1.) entre las propiedades de una función distancia d y su función lagrangiana F .

Tabla 6.1. Propiedades de una función distancia d y su derivada direccional unilateral F

| | Propiedad de d , $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$ | Propiedad de F , $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in TM$ | d se denomina: | Ejemplos: |
|-----|---|---|------------------|-----------------------|
| (a) | $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \geq d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ | $F(\mathbf{x}, \cdot)$ convexa | premétrica | métricas L_p |
| (b) | $d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{v}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{u})$ para $\lambda > 0$ pequeña | $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ | isotrópica | métrica euclidiana |
| (c) | $d(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ | $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ | uniforme | métricas L_p |
| (d) | $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ | $F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ | simétrica | métricas L_p |

A continuación se desarrolla un ejemplo del modelado de funciones distancia bajo los supuestos desarrollados anteriormente.

Ejemplo de modelado de funciones distancia.

Supóngase que la distancia desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} representa el tiempo mínimo que le lleva a un cierto objeto, como la luz o a un viajero, para ir desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} . Por tanto, la "longitud" de un arco es el tiempo requerido por el objeto para recorrer ese arco. La interpretación de $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ parte de que por (1), $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})ds$ es el tiempo que se requiere para ir desde \mathbf{x} hasta $\mathbf{x} + \mathbf{v}ds$ a lo largo de la dirección de \mathbf{v} . La correspondiente velocidad de recorrido es el cociente del espacio recorrido $\mathbf{v}ds$, entre el tiempo $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})ds$ que lleva ese recorrido,

$$\frac{\|\mathbf{v}\| ds}{F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) ds}$$

usando la homogeneidad positiva de la función F en su segundo argumento, se llega a la siguiente igualdad:

$$\frac{\|\mathbf{v}\| ds}{F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) ds} = \frac{ds}{\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) ds} = \frac{1}{F\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)}$$

Por lo que, $1/F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ es la velocidad de movimiento del objeto en la dirección \mathbf{v} .

La interpretación anterior de una función distancia d y su correspondiente función lagrangiana F es aplicable al movimiento de toda clase de objetos, como podría ser el movimiento de vehículos para el transporte.

6.3. Procedimiento para modelar una función distancia sobre una región discreta N a partir de una función lagrangiana.

Debido a la complejidad que presenta, en general el modelado de cualquier fenómeno físico, y en particular el modelado de las funciones distancia generalizadas en el caso continuo, se presenta a continuación, una propuesta alternativa a dicho caso, donde se parte de una discretización del espacio, la cual se supone conocida, y que puede ser obtenida de acuerdo a diferentes técnicas que para tales efectos, se han desarrollado.

Esta alternativa parte de los trabajos realizados para el caso continuo, de las cuales toma su sustento, y del supuesto de que, en caso de que exista, la función lagrangiana está ya determinada totalmente (los métodos para determinar los valores de la función lagrangiana escapan a los alcances de este trabajo).

PROCEDIMIENTO DE MODELADO DE UNA FUNCIÓN DISTANCIA SOBRE UNA REGIÓN DISCRETA.

Para modelar funciones distancia que permitan condiciones tales como no homogeneidad, asimetría y que puedan ser no positivas definidas, sobre una región discreta obtenida de una región continua, se propone el siguiente método:

1. A partir de la región continua de interés, se llega a una región discreta N , obteniéndose así una red con nodos. Esta región discreta se puede obtener seleccionando, de acuerdo con algún criterio, un conjunto de puntos de una región continua M .
2. En cada nodo de la red se determina la función lagrangiana, que llamamos G , la cual está formada por las *distancias* desde ese nodo hasta sus nodos vecinos (la determinación y propiedades de la función G se trata más adelante).
3. La distancia desde un punto \mathbf{a} hasta otro punto \mathbf{b} sobre la región discreta N es la longitud del camino más corto que los conecta. Por lo tanto, se puede proceder a partir de este paso con algún algoritmo para la determinación del camino más corto en redes.

6.3.1. Obtención de una función lagrangiana sobre la región discreta N .

En un espacio discreto N cada nodo $\mathbf{x} \in N$ tiene asociado un *conjunto de nodos vecinos de \mathbf{x}* , que se denota por $D_{\mathbf{x}}N \subseteq N$. La función lagrangiana para este espacio discreto, la cual la denotamos por $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se relaciona con la función distancia discretizada d sobre N por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in N, \mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N. \quad (3)$$

Distancias entre nodos vecinos

Si para el nodo $\mathbf{x} \in N$ y un nodo vecino de \mathbf{x} , digamos $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$, se cumple

$$\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N \Rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + G(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{z} \in D_{\mathbf{x}}N, \quad (4)$$

entonces se dice que G es *convexa en el nodo \mathbf{x} en la dirección de $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$* . Si G es convexa en $\mathbf{x} \in N$ en las direcciones de todos sus nodos vecinos $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$, entonces se dice que G es convexa en $\mathbf{x} \in N$. Si G es convexa en todos los nodos de N entonces se dice que G es *convexa*.

El interés por estos conceptos es que la convexidad de G así definida es condición necesaria y suficiente para que la distancia entre dos nodos cualesquiera sea igual a la longitud del arco más corto que los conecta, o equivalentemente, para que la función distancia a modelar d cumpla la desigualdad del triángulo sobre el espacio N .

Por tanto, verificar que la condición (4) se cumple en cada nodo \mathbf{x} para todas las direcciones garantiza que la función d a modelar cumple la desigualdad del triángulo, lo cual es una ventaja computacional.

Se debe observar que la función lagrangiana G está dada por (3), y que sus valores son las distancias entre nodos vecinos, las cuales se determinan a través de mediciones empíricas o cálculos. Cualquier valor de la función distancia para nodos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$ no vecinos, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es la longitud del camino más corto en N que va desde \mathbf{x} hasta \mathbf{y} .

CONCLUSIONES.

Modelo: Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja (por ejemplo, la evolución económica de un país), que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. *Diccionario Real Academia de la Lengua Española.*

El área que funge como conexión entre los problemas del mundo real que se quieren resolver y el análisis cuantitativo desarrollado para resolverlos se denomina *Modelado*.

Casi cualquier problema que requiere una respuesta cuantitativa involucra la formulación del mismo como un modelo; así, existen, tal vez, tres tipos de modelos: estadístico, discreto y continuo. El primero de ellos es un modelo *diagnóstico*, es decir, trata de interpretar procesos mediante el análisis de datos o mediciones. Los modelos discretos y continuos son llamados *prognósticos*, es decir, que proponen un modelo descriptivo de un fenómeno, mediante el cual se puedan predecir posibles cambios a futuro de acuerdo a las condiciones que se presenten en el momento de su aplicación.

Los modelos describen nuestras creencias, o forma de pensar, acerca de la manera en que el mundo funciona. En el modelado se traducen esas creencias en lenguaje matemático, lo cual conlleva varias ventajas; no obstante las ventajas que presenta este tipo de trabajo, la mayor parte de los sistemas presentes en el mundo real son, por mucho, muy complicados para ser modelados completamente.

Así, en el proceso de modelado se deben identificar las partes más importantes del sistema que serán incluidas en el modelo, y el resto quedará excluido. Otro punto relevante es que el modelado debe analizar la cantidad de manipulación de expresiones que vale la pena hacer dado que, si bien las matemáticas tienen el potencial de probar resultados generales, dichos resultados dependen de manera crítica de la forma de las expresiones empleadas (lo cual se traduce en que a pequeños cambios en la estructura de las expresiones, puedan corresponder grandes cambios en los métodos para resolverlas).

El objetivo de este trabajo consistió en desarrollar un método que permitiera modelar funciones distancia en regiones discretas a partir de los resultados que los doctores Sánchez Larios y Guillén Burguete han obtenido para modelar funciones distancia sobre superficies continuas. Así, y dado que el objetivo general del modelado es usar herramientas matemáticas para entender-explicar-describir-predecir aspectos del mundo real, se puede asegurar que se logró cubrir el objetivo planteado. Dicho método permite modelar funciones distancia sobre regiones discretas que aceptan condiciones más generales que las usuales, es decir, las funciones distancia pueden ser no

positivas definidas, no simétricas y no uniformes. Esta característica de la forma propuesta de modelar hace posible el manejo de condiciones inherentes a problemas reales donde la asimetría, la no uniformidad y los valores negativos de funciones de costo o distancia se hacen presentes. El hecho de hacerlo sobre regiones discretas obedece a que, en general, el modelar fenómenos de la realidad en el terreno continuo presenta dificultades mayores que en el caso discreto, dado que la complejidad de las expresiones aumenta con la inclusión de aspectos reales que dichos fenómenos presentan.

Durante el proceso de formulación del procedimiento, fue necesaria la comprensión del sistema que se requería modelar, y una vez determinado éste y el tipo de modelo a emplear, fue necesario construir un marco de referencia que le diera sustento al método propuesto.

El empleo de métricas L_p y sus combinaciones lineales se ha privilegiado, debido, tal vez, a su relativa facilidad para ser manipuladas, además de su aplicabilidad bajo ciertas condiciones donde los resultados obtenidos son, en general, aceptables; sin embargo, se debe tomar en cuenta que este tipo de modelos no permiten la representación de las condiciones que las funciones distancia generalizadas sí permiten y que pueden resultar de mayor utilidad en cierto tipo de problemas donde las métricas L_p llevan a una simplificación de las condiciones reales tal que los resultados puedan no ser suficientemente aceptables.

Es importante destacar que la literatura especializada sobre las funciones distancia y su modelado, es algo escasa a pesar de la trascendencia que el concepto tiene en la resolución de problemas de optimización. Además la *distancia* en algunos casos sólo se circunscribe a la idea tradicional de distancia *longitudinal*. En este sentido, una de las aportaciones de este trabajo es la recopilación de información relacionada con el tema, tal que permite tener una idea más amplia de lo que representa el concepto *distancia* y la forma en que se ha modelado en diferentes ámbitos.

Los interesados en esta línea de investigación encontrarán un tema que surge casi de manera inmediata: la forma en que se pueden obtener los valores de los lagrangianos en cada nodo; además de proponer un método adecuado para discretizar el espacio objetivo que ayude a obtener subregiones con nodos de lagrangianos iguales.

Un primer paso en la resolución de cualquier problema del mundo real, es encontrar la forma de describir, explicar o bien predecir la parte de la realidad en que reside el problema. Como dicha realidad permanece en el exterior, lo único que se puede hacer es crear en nuestro cerebro ideas o pensamientos acerca de la misma. De este modo, se puede decir que nuestros pensamientos son solo abstracciones de lo que existe. En este sentido, los resultados de la tesis contribuyen a la solución de un problema y reflejan las suposiciones sobre cómo opera el sistema analizado, es decir, las distancias y su medición a través de funciones; así, los resultados de cualquier análisis usando el modelo formulado son válidos bajo los supuestos establecidos.

REFERENCIAS.

1. Aggarwal, Charu (2003). *Towards Systematic Design of Distance Functions for Data Mining Applications*. IBM T. J. Watson Research Center, NY. USA.
2. Ahuja, Ravindra K. et al (1993). *Networks Flows: Theory, algorithms and applications*. Prentice Hall, USA.
3. Angel, S. ; Hyman, G. M. (1976). *Urban Fields: A Geometry of Movement for Regional Science*. Pion Limited, London.
4. Berens, W. y Köerling F.J. (1985). *Estimating road distances by mathematical functions*. European Journal of Operations Research.
5. Bóna, Andrej; Slawinski, Michel (2002). *Ray-paths as parametric curves in anisotropic, non-uniform media: differential-geometry approach*. Nonlinear Analysis, 51. Elsevier Science.
6. Cheng, Siu-Wing; Na, Hyeon-Suk; Vigneron, Antoine; Wang, Yajun (2007). *Approximate shortest paths in anisotropic regions*. Department of Computer Science and Engineering, HKRUST, Hong Kong and Applied Mathematics and Informatics Department, INRA, France.
7. Deza, Elena; Deza, Michel (2006). *Dictionary of Distances*. Elsevier. USA.
8. Drezner, Zvi y W. Hamacher, Horst. (2002). *Facility Location, Applications and Theory*. Springer-Germany.
9. Drezner, Zvi. (1995). *Facility Location, A Survey of Applications and Methods*. USA.
10. Endelman, Jeffrey; Silberg, Jonathan; Wang, Zhen-Gang; Arnold, Frances (2004). *Site-directed protein recombination as a shortest-path problem*. Protein Engineering, Design & Selection, Vol. 7, No. 7. Oxford University Press.
11. Everitt, B. (1980). *Cluster Analysis*. Heinemann. London, England.
12. F. Love, Robert, et al. (1988). *Facilities Location, Models & Methods*. USA.
13. Flores de la Mota, Idalia (1999). *Apuntes de Teoría de Redes*. Departamento de Sistemas, División de Estudios de Posgrado. Facultad de Ingeniería, UNAM. México.
14. Gatrell, Anthony (1983). *Distance and Space: A Geographical Perspective*. Oxford University Press, New York, USA.
15. Hjaltason, Gísli; Samet, Hanan (2003). *Properties of Embedding Methods for Similarity Searching in Metric Spaces*. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 25, No. 5.
16. Johnson, David; Cohen, Elaine (2004). *Unified Distance Queries in a Heterogeneous Model*. Proceedings Technical Conferences, ASME Design Engineering Technical Conferences, Salt Lake City, Utah. USA.
17. Jongrae, Kim; Hespanha, Joao (2003). *Discrete Approximation to Continuous Shortest-Path: Application to Minimum-Risk Path Planning for Groups of UAV's*. Department of Electrical & Computer Engineering, University of California, USA.
18. Kappor, Sanjiv; Maheshwari, Sachindra; Mitchell, Joseph (1997). *An Efficient Algorithm for Euclidean Shortest Paths Among Polygonal Obstacles in the Plane*. Department of Computer Science an Engineering, Indian Institute of Technology, New Deli, India. Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York, USA.
19. Kimmel, Ron; Amir, Arnon; Bruckstein, Alfred (1995). *Finding Shortest Paths on Surfaces Using Level Sets Propagation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol 17, No. 6. USA.
20. Kimmel, Ron; Kiryati, Nahum (1995). *Finding Shortest Paths on Surfaces by Fast Global Approximation and Precise Local Refinement*. Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, USA. Department of Electrical Engineering, Israel Institute of Technology, Israel.

21. Lanthier, Mark; Maheswari, Anil; Sack, Jörg-Rüdiger (1999). *Shortest Anisotropic Paths on Terrains*. Proceedings of the 26th International Colloquium on Automata, Languages and Programming. Carleton University, Ottawa, Ontario. Canada.
22. Levi, Enzo (1980). *Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería. 2^a ed. México.
23. Linderman, Stephen; LaValle, Steven (2005). *Current Issues in Sampling-Based Motion Planning*. Department of Computer Science, University of Illinois. USA.
24. Lösch, A. (1954). *The economist of location*. Yale University Press. New Haven, Connecticut.
25. Love, R.F. y Morris, J.G. (1988). *On estimating road distances by mathematical functions*. European Journal of Operations Research.
26. Love, R.F. y Walker, J.H. (1994). *An empirical comparison of block and round norms for modeling actual distances*. Location Science, 2.
27. Lowe, J.C. y Moryadas, S. (1975). *The geography of movement*. Houghton Miffling, London, England.
28. Mc Farland and Brown, D.J. (1973). *Social distance as a metric: a systematic introduction to smallest space analysis*. In Laumann, E.O. Bounds of pluralism: the form and substance of urban social networks. John Wiley. New York. USA.
29. Mohler, Joel; Umble, Ron (2004). *Minimal Paths on Some Simple Surfaces with Singularities*. Department of Mathematics, Lehigh University, Bethlehem. Department of Mathematics, Millersville University, Millersville.
30. Morales Aguirre, Marco A. (2007). *Metrics for Sampling-Based Motion Planning*. Thesis of PhD. Dep. Computer Science, Texas A&M University. USA.
31. Nagy, Benedek (2003). *Shortest Paths in Triangular Grids with Neighbourhood Sequences*. Journal of Computing and Information Technology.
32. Neil C. Rowe and Ron S. Ross (1990). *Optimal grid-free path planning across arbitrarily terrain with anisotropic friction and gravity effects*. IEEE Transactions on Robotics and Automation. USA.
33. Olver, J. Peter (2007). *Applied Mathematics Lecture Notes, Chapter 21*. School of Mathematics, University of Minnesota. USA.
34. Plastria, Frank (1995). *Continuous location problems*. En (Drezner, 1995) Facility Location, A Survey of Applications and Methods. USA.
35. Riviere, Thomas; Brisset, Pascal (2005). *Shortest Path in Planar Graph and Air Route Network*. Proceedings of the International Conference on Research in Air Transportation.
36. Sánchez, Larios Hérica. (2005). *Modelado de funciones distancia asimétricas y no uniformes*. Tesis de Doctorado. Facultad de Ingeniería, UNAM. México.
37. Sánchez Larios y Guillén Burguete (2008a). *A method for modeling generalized distance functions*. Proceedings of 2008 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics and Informatics. 3075-3079. Beijing, China.
38. Sánchez Larios H. y Guillén Burguete S.T. (2008b). *Funciones distancia asimétricas y no positivas definidas, Parte I: Marco Teórico*. Ingeniería Investigación y Tecnología, IX no. 4, 339-346. UNAM-FI, México.
39. Sánchez Larios y Guillén Burguete (2009). *Funciones distancia asimétricas y no positivas definidas, Parte II: Modelado*. Ingeniería Investigación y Tecnología, X no. 1, 75-83. UNAM-FI, México.
40. Smith T. E (1989). *Shortest-path distances: An axiomatic approach*, Geog. Anal. Vol. 21, no. 1. USA.
41. Thisse, J.F., Ward, J.E. y Wendell, R.E. (1984). *Some properties of Location Problems with block and round norms*. Operations Research. USA.
42. Werner. C. (1968). *The law of refraction in transportation geography: its multivariate extension*. Canadian Geographer. Canada.

43. Wilson, A.G. et al (1969). *Calibration and testing of the SELNEC transport model*. Regional studies. John Wiley. USA.