UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

VALUACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA DE SISTEMAS
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

P R E S E N T A:

ALFREDO OMAR PALAFOX ROCA

TUTOR:
FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

2010

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dra. Patricia E. Balderas Cañas

Secretario: Dr. Ricardo Aceves García

Vocal: Dr. Francisco Venegas Martínez

1er Suplente: Dr. Guillermo Sierra Juarez

2do Suplente: Dr. Manuel Ordorica Mellado

Lugar donde se realizó la tesis:
FACULTAD DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:
FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

____

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, gracias Dios por iluminar mi camino; por Tu apoyo incondicional en esta etapa de mi vida.

A mis padres, María del Carmen y Alfredo, por su energía y amor que no reconoce de tiempo y espacio. A Ustedes dos muy en especial, por creer en mí, con todo mi respeto y amor les dedico esta tesis.

A mi hermana, Paola Ivette, por ser un motor, junto con Kevin, que me impulsa a seguir adelante.

A Mauro e Hiliana, sin ustedes no lo hubiera logrado, mi gratitud hacia los dos será eterna. Hiliana, gracias por tus palabras, tu tiempo y tu ayuda que trascienden lo imaginable.

A mis profesores, porque en cada momento procuraron inculcar valores y por compartir su conocimiento. A la Dra. Patricia Balderas le agradezco sus consejos y el aporte a esta tesis. Al Dr. Francisco Venegas, su apoyo, sus enseñanzas y por aceptar dirigir esta tesis.

Al resto de mi familia y demás seres queridos.

RESUMEN

En los modelos de valuación de opciones frecuentemente se supone una volatilidad constante, la volatilidad es la razón de ser de los mercados financieros, por lo tanto, resulta más apropiado considerarla estocástica. En la presente tesis se propone una volatilidad estocástica que sigue una cadena de Markov finita.

ABSTRACT

In the option valuation models frequently it is assumed a constant volatility, the volatility is the reason for being in the financial markets, therefore, it results more appropriate to consider it stochastic. In the current thesis it is proposed a stochastic volatility that follows a finite Markov chain.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde 1973 con la aparición de la famosa fórmula de valuación de opciones, los derivados se han vuelto una parte integral de la vida diaria en la industria financiera, las opciones y los derivados son herramientas que nos permiten controlar el riesgo de exposición, y también son empleados en las estrategias especulativas en mercados de renta fija, acciones, monedas, mercancías y energía.

En la presente tesis se propone el problema de la maximización de la utilidad, la cobertura y la valuación de la opción. En este último punto se presenta la propuesta de una matriz de transición estocástica que represente los posibles valores de la volatilidad, esto serviría para ilustrar de forma sencilla una valuación de la opción sin considerar a la volatilidad como fija.

Otros objetivos que se persiguen en esta tesis son presentar las bases matemáticas de la teoría de programación dinámica, así como procurar incluir bibliografía o referencias actuales que permitan una mejor aproximación en una primera instancia a temas como los que esta tesis toca.

En principio para llegar hasta el punto donde se analiza el planteamiento del problema se ha considerado oportuno mostrar los elementos que dan fuerza al estudio de las matemáticas financieras y que sirven como herramientas fundamentales para el desarrollo de nuevas ideas en este rubro.

Se han escogido los elementos de la teoría de la probabilidad, del análisis del cálculo estocástico, de la programación dinámica y el problema de un consumidor inversionista para modelar la valuación de opciones, en particular de una opción call europea. La idea es mostrar la teoría detrás de las fórmulas de valuación de opciones y conformación de portafolios.

El marco en donde se analiza el problema del consumidor-inversionista considera a la volatilidad como estocástica, esto es, no se toma a la volatilidad como un valor fijo predeterminado. Muchos han sido los trabajos donde se pretende modelar este tipo de fenómenos (ver [1] y [10]), no obstante, la selección del problema, así como su solución resultan un tanto cuanto diferentes al resto de la literatura sobre la conformación del portafolio y el uso de las cadenas de Markov.

La propuesta final busca enriquecer el estudio de la valuación de opciones y para ello se vale de la programación dinámica estocástica y el trabajo de Chen Guo [11], mediante el uso de una cadena de Markov finita. Aplicando los resultados obtenidos por Guo [11] se demuestra que es posible conformar un portafolio libre de riesgo conformado por acción, bono y opciones sobre esa acción en particular.

CAPÍTULO 1. REVISIÓN DE CONCEPTOS DE PROBABILIDAD

En este primer capítulo se presentan conceptos básicos y fundamentales de la teoría de la probabilidad. A manera de resumen son repasados temas como probabilidad, variable aleatoria, entre otras, hasta llegar al concepto de martingalas. Esta revisión de tales conceptos obedece a que éstos conforman uno de los pilares de la teoría financiera.

1.1 Eventos y Probabilidad

Un espacio de medida es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ cuyas componentes definiremos a continuación. Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{F}$ es una **σ- álgebra** si:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(b) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$,

(c) Si $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$, entonces $\cup A_n \in \mathcal{F}$.

La condición (c) es aplicable solamente a sucesiones numerables, concretamente a familias numerables de eventos, y no a familias arbitrarias de eventos de $\mathcal{F}$. La pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ es llamada **espacio medible** debido a que es posible definir una medida sobre dicho espacio. Si A es un conjunto en $\mathcal{F}$, decimos que A es **$\mathcal{F}$-medible**. Si $(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio medible, en probabilidad se dice que Ω es el **espacio muestral** o **evento seguro**, y que $\mathcal{F}$ es una familia de eventos. A un conjunto $A \in \mathcal{F}$ se le llama **evento**. Al conjunto vacío $\varnothing \in \mathcal{F}$ se le llama **evento imposible**.

Dado un espacio muestral Ω, la σ-álgebra más pequeña está dada por $\{\Omega, \varnothing\}$ y la más grande por el conjunto potencia 2^{Ω}, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de Ω. Claramente, la unión de σ-álgebras no es una σ-álgebra, por (c), y la intersección de σ-álgebras sí lo es. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω. Se define la **σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$** como:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \cap\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega \text{ con } \mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$$

Por otro lado, $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$, pues cualquier otra σ-álgebra que contenga a $\mathcal{A}$ debe contener a $\sigma(\mathcal{A})$.

Definición. Sea $\mathcal{F}$ una σ- álgebra en Ω. Una **medida de probabilidad P** es una función $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que:

1) $P(\Omega) = 1$ (ó $P(\varnothing) = 0$);

2) $P(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{F}$; y

3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de eventos ajenos dos a dos (i.e. $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, $i,j \in \mathbb{N}$) se cumple que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

A la tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le conoce como **espacio de probabilidad**, como podemos observar este espacio es sólo un caso particular de un espacio de medida.

1.2 Variables Aleatorias

Si $\mathcal{F}$ es una σ- álgebra en Ω, entonces una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice $\mathcal{F}$-medible si $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$ para todo conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ representa a la σ- álgebra de Borel, es decir, la σ- álgebra de los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, entonces dicha función X es llamada **variable aleatoria**.

La σ- álgebra $\sigma(X)$ generada por una v.a., variable aleatoria, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ consiste de todos los conjuntos de la forma $\{X \in B\}$, donde B es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$.

La σ- álgebra $\sigma\{X_i : i \in I\}$ generada por una familia $\{X_i : i \in I\}$ de vv.aa. es definida como la σ- álgebra más pequeña que contiene a todos los eventos de la forma $\{X_i \in B\}$, donde B es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ con $i \in I$.

Toda v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ da lugar a una medida de probabilidad

$$P_X(B) = P\{X \in B\}$$

en $\mathbb{R}$ definida sobre la σ- álgebra de los conjuntos de Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. A P_X se le llama **distribución** de X. La función $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ es llamada la **función de distribución** de X.

Llamamos a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una **función de Borel** si la imagen inversa $f^{-1}(B)$ de cualquier conjunto Boreliano en $\mathbb{R}$ es un conjunto de Borel. Si existe una función de Borel $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano $B \subset \mathbb{R}$

$$P\{X \in B\} = \int_B f_X(x)dx,$$

entonces X es una variable aleatoria con **distribución absolutamente continua** y f_X es llamada la densidad de X . Si existe una sucesión (finita o infinita) de números reales distintos $x_1, x_2, \ldots$ tal que para cualquier Boreliano $B \subset \mathbb{R}$

$$P\{X \in B\} = \sum_{x_i \in B} P\{X = x_i\},$$

entonces se dice que X tiene **distribución discreta** con valores $x_1, x_2, \ldots$ y masa $P\{X = x_i\}$ en x_i.

La **distribución conjunta** de varias vv.aa. $X_1, \ldots, X_n$ es una medida de probabilidad $P_{X_1 \cdots X_n}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $P_{X_1 \cdots X_n}(B) = P\{(X_1 \cdots X_n) \in B\}$ para cualquier conjunto Boreliano B en $\mathbb{R}^n$. Si existe una función $f_{X_1 \cdots X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{P}\{(X_1 \cdots X_n) \in \mathrm{B}\} = \int_{\mathrm{B}} f_{X_1 \cdots X_n}(X_1 \cdots X_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Para todo conjunto de Borel B en $\mathbb{R}^n$, entonces $f_{X_1 \cdots X_n}$ es llamada densidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$.

Definición. Una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice **integrable** si $\int_\Omega |X| \, d\mathrm{P} < \infty$.

Entonces $\mathrm{E}(X) = \int_\Omega X d\mathrm{P}$ existe y es llamada la **esperanza** de X. En el análisis real a la familia de variables aleatorias integrables se le denota por L^1 o, en caso de posible ambigüedad, por $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Definición. Una v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada **cuadrado integrable** si $\int_\Omega |X|^2 d\mathrm{P} < \infty$.

Entonces la **varianza** de X puede ser definida por $\mathrm{Var}(X) = \int_\Omega (X - \mathrm{E}(X))^2 d\mathrm{P}$. La familia de vv.aa. cuadrado integrables $X : \Omega \to \mathbb{R}$ serán denotadas por L^2 o, en caso de posible ambigüedad, por $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

1.3 Probabilidad Condicional e Independencia

Definición. Para cualesquiera eventos A, $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{P}(B) \neq 0$ la **probabilidad condicional** de A dado B está definida por $\mathrm{P}(A|\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$. Dos eventos A, $B \in \mathcal{F}$ son llamados independientes si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. En general, decimos que n eventos $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ik} \in \mathcal{F}$ son **independientes** si

$$\mathrm{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}) = \mathrm{P}(A_{i1})\mathrm{P}(A_{i2}) \cdots \mathrm{P}(A_{ik})$$

para cualesquiera índices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

Dos vv.aa. X y Y son llamadas **independientes** si para cualesquiera conjuntos de Borel A, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ los eventos $\{X \in A\}$ y $\{Y \in B\}$ son independientes. Decimos que n

variables aleatorias X_1, X_2, …, X_n son **independientes** si para todo Boreliano $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ los eventos $\{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}$ son independientes. En general, una familia (finita o infinita) de vv.aa. se dice **independiente** si cualquier número finito de vv.aa. de esta familia son independientes.

Si dos variables aleatorias integrables $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ son independientes, entonces no están correlacionadas, i. e., $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, siempre que el producto XY sea integrable también. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ son vv.aa. integrables independientes, entonces $\mathrm{E}(X_1 X_2 \cdots \cap X_n)=\mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)\cdots E(X_n)$, con tal que el producto $X_1 X_2 \ldots X_n$ sea integrable.

Dos σ- álgebras $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ contenidas en $\mathcal{F}$ son llamadas **independientes** si cualesquiera dos eventos $A \in \mathcal{G}$ y $B \in \mathcal{H}$ son independientes. Similarmente, cualquier número finito de σ- álgebras $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ contenidas en $\mathcal{F}$ son **independientes** si cualesquiera n eventos $A_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{G}_n$ son independientes. En general, una familia (finita o infinita) de σ- álgebras se dice **independiente** si todo número finito de ellas son independientes.

Definición. Una variable aleatoria X es **independiente** de una σ- álgebra $\mathcal{G}$ si las σ- álgebras $\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes. Esto puede extenderse a cualquier familia (finita o infinita) que consista de variables aleatorias, o de σ- álgebras, o bien, de una combinación de ellas. Dicha familia es independiente si para todo número finito de vv.aa. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y de $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ de esta familia las σ- álgebras $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ y $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ son independientes.

1.4 Esperanza Condicional

Definición. Sean X y Y vv.aa. con densidad conjunta $f(x,y)$, i. e.,

$$f(x,y) = \mathrm{P}\{X = x,\ Y = y\},$$

y sean

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \sum_y f(x,y) \ \text{ y } \ f_Y(y) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = y) = \sum_x f(x,y)$$

las densidades marginales de X y Y, respectivamente. Definimos la **densidad condicional de *Y* dado *X* = *x*** como

$$\begin{aligned} f(y\,|\,x) &= f(x,y)/f_X(x) \quad \text{si } f_X(x) > 0, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } f_X(x) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Asimismo, la **distribución condicional de *Y* dado que *X* = *x*** es

$$F(y\,|\,x) = \mathrm{P}(Y \le y\,|\,X = x) = \sum_{y' \le y} f(y'\,|\,x). \tag{2}$$

Si además Y está en L^1, definimos la **esperanza condicional de *Y* dado que *X* = *x*** como

$$E(Y\,|\,X = x) = \sum_y y f(y\,|\,x). \tag{3}$$

Para vv.aa. continuas tenemos definiciones análogas. Es decir, sean X y Y vv.aa. continuas con densidad conjunta $f(x,y)$ y sea $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ la densidad marginal de X. Entonces definimos la **densidad condicional** de Y dado $X = x$ como

$$\begin{aligned} f(y\,|\,x) &= f(x,y)/f_X(x) \quad \text{si } f_X(x) > 0, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } f_X(x) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Además, tenemos la **distribución condicional**

$$F(y\,|\,x) = \mathrm{P}(Y \le y\,|\,X = x) = \int_{-\infty}^{y} f(y'\,|\,x)dy' \tag{5}$$

y, para Y en L^1, la **esperanza condicional**

$$E(Y\,|\,X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y\,|\,x)dy\,. \tag{6}$$

En cualquier caso, discreto o continuo, se puede ver que la densidad condicional $f(\cdot\,|\,x)$ es una densidad de probabilidad si $f_X(x) > 0$. En el caso discreto tenemos $f(\cdot\,|\,x) \ge 0$ y, además,

$$\sum_y f(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \sum_y f(x,y) = \frac{1}{f_X(x)} f_X(x) = 1.$$

Proposición 1.4.1. (a) Si X y Y son vv.aa. discretas, entonces

$$f_Y(y) = \sum_x f(y|x) f_X(x), \tag{7}$$

y si son continuas, entonces

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) f_X(x) dx. \tag{8}$$

(b) Si X y Y son independientes, entonces

$$(b_1)\ f(y|x) = f_Y(y), \quad (b_2)\ E(Y|X=x) = E(Y) \quad \text{(para } Y \in L^1\text{)}. \tag{9}$$

Demostración (Hernández-Lerma, [12]). (a) Por (1), el lado derecho de (7) resulta

$$\sum_x f(y|x) f_X(x) = \sum_x f(x,y) = f_Y(y).$$

Análogamente (8) se obtiene de (4).

(b) Recordando, decimos que n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **independientes** si para todo Boreliano $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ los eventos $\{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}$ son independientes, esto es,

$$\mathrm{P}\{X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n\} = \mathrm{P}\{X_1 \in B_1\} \cdots \mathrm{P}\{X_n \in B_n\} \quad \forall\ B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Entonces, $f(x,y) = f(x)f(y)$. Por lo tanto, de (1) y (4) se obtiene la condición (b_1) en (9). Asimismo (b_2) se sigue de (b_1) y de la definición de esperanza condicional. En efecto, en el caso discreto (3) obtenemos

$$E(Y|X=x) = \sum_y y f(y|x) = \sum_y y f_Y(y) = E(Y).$$

En forma similar, en el caso continuo (b_2) se obtiene de (b_1) y (6).

Sean X y Y vv.aa. sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, con Y en L^1. Definimos la **esperanza condicional de *Y* dada la variable aleatoria *X*** como la v.a. $E(Y|X): \Omega \to \mathbb{R}$ con valores $E(Y|X)(\omega) = E(Y|X=x)$ si $X(\omega) = x$. Nótese que $E(Y|X=x) = E(Y)$ para $Y \in L^1$ si X y Y son independientes, este resultado se sigue por (b_1) y aplicando la definición de esperanza condicional, para el caso discreto (análogo para el caso continuo) se obtiene que $E(Y \mid X = x) = \sum_y yf(y \mid x) = \sum_y yf(y) = E(Y)$.

Teorema 1.4.2. Si Y está en L^1, entonces

(a) Para cualquier v.a. X,

$$E(Y) = E[E(Y \mid X)]. \qquad (10)$$

En particular,

$$E(Y) = \sum_x E(Y \mid X = x) f_X(x) \qquad \text{si } X \text{ es discreta,} \qquad (11)$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y \mid X = x) f_X(x) dx \qquad \text{si } X \text{ es continua.} \qquad (12)$$

(b) Supóngase que, además, X es una v.a. y g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Borel tales que

Y y $Y \cdot g(X)$ están en L^1. Entonces

$$E[Yg(X) \mid X = x] = g(x)E(Y \mid X = x) \qquad (13)$$

y, por lo tanto,

$$E[Yg(X) \mid X] = g(X)E(Y \mid X). \qquad (14)$$

En particular, si $Y = 1$ se sigue de (1) y (2) que

$$E[g(X) \mid X = x] = g(x) \text{ y } E[g(X) \mid X] = g(X) \qquad (15)$$

Demostración (Hernández-Lerma, [12]). (a) Supóngase que X es una v.a. discreta. Luego, usando (7) y la definición de esperanza obtenemos que

$$E(Y) = \sum_y yf_Y(y) = \sum_y y \sum_x f(y \mid x) f_X(x).$$

Luego, intercambiando las sumatorias (lo cual es válido porque Y está en L^1),

$$E(Y) = \sum_x [\sum_y yf(y \mid x)] f_X(x) = \sum_x E(Y \mid X = x) f_X(x).$$

Esto da (11) y, por lo tanto, (10) si X es discreta. Cuando X es continua, la demostración de (12) es similar, usando ahora (8).

(b) En el caso discreto, usando (3) y el lado derecho de (13) resulta

$$\begin{aligned} g(x)E(Y \mid X = x) &= g(x) \sum_y yf(y \mid x) \\ &= \sum_y yg(x) f(y \mid x) \\ &= E[Yg(x) \mid X = x] \qquad \text{por (3)} \\ &= E[Yg(X) \mid X = x] \end{aligned}$$

lo cual demuestra (13). El caso continuo se demuestra en forma similar.

Propiedad de la Esperanza Iterada: $E[E(X \mid \mathcal{G})] = E(X)$.

$\mathcal{G}$ es una sub-σ- álgebra de $\mathcal{F}$ (una sub-σ- álgebra es una σ- álgebra contenida en otra σ- álgebra). La demostración se sigue directamente de la definición de esperanza condicional.

1.5 Martingalas

Definición. Considérese una sucesión $\{X_n\}$ de vv.aa. en L^1, en donde X_n representa el capital de un jugador después de n jugadas. Sea X_0 el capital inicial del jugador. Si

$$E(X_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n) = X_n \qquad \forall\ n = 0,1,\dots \tag{16}$$

se dice que el juego es "honesto" o que $\{X_n\}$ es una **martingala**. En este caso, la propiedad de la esperanza iterada da que $E(X_{n+1}) = E(X_n) \quad \forall\ n = 0,1,\dots$, de modo que la ganancia esperada del jugador permanece constante: $E(X_n) = E(X_0) \quad \forall\ n = 0,1,\dots$.

Por otra parte, si

$$E(X_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n) \geq X_n \qquad \forall\ n = 0,1,\dots, \tag{17}$$

se dice que el juego está a favor del del jugador o que $\{X_n\}$ es una **submartingala**, y la ganancia esperada es no decreciente porque $E(X_{n+1}) \geq X_n \qquad \forall\ n = 0,1,\dots$.

Finalmente, se dice que el juego está en contra del jugador o que $\{X_n\}$ es una **supermartingala** si

$$E(X_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n) \leq X_n \qquad \forall\ n = 0,1,\dots, \tag{18}$$

en cuyo caso la ganancia esperada es no decreciente pues $E(X_{n+1}) \leq X_n \quad \forall\ n = 0,1,\dots$.

Sea (Ω, $\mathcal{F}$, P) un espacio de probabilidad y T un subconjunto de $\mathbb{R}$ (por ejemplo, T = [a,b], T = {0, 1, 2, …} ó T = (-∞, ∞)).

Definición. Sea $\{X_t, t \in T\}$ una familia de vv.aa. sobre Ω y $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ una familia de sub-σ- álgebras de $\mathcal{F}$. Decimos que:

(a) $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ es una **filtración** de $\mathcal{F}$ si la familia es no decreciente en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall\ s,t \in T$ con $s < t$;

(b) la familia $\{X_t, t \in T\}$ **está adaptada** a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para $t \in T$;

(c) $\{X_t, t \in T\}$ es una **martingala con respecto a** $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ (o que $\{ X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ es una martingala) si

(c1) $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ es una filtración de $\mathcal{F}$,

(c2) $\{X_t, t \in T\}$ está adaptada a $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$,

(c3) X_t está en L^1 $\forall\ t \in T$, y

(c4) $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \quad \forall\ s,t \in T,$ con $s \leq t$.

Si la igualdad en (c4) se sustituye por $\geq$ ó $\leq$, es decir, para todo $s \leq t$

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \ \text{ ó } \ E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s,$$

Se dice entonces que $\{ X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ es una **submartingala** o una **supermartingala**, respectivamente.

En este apartado sólo se considera el caso en el que T es un conjunto de números enteros. Si $X_\bullet = \{X_n\}$ es una sucesión de vv.aa., entonces la familia $\mathcal{F}_\bullet = \{\mathcal{F}_n\}$ con

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \ldots, X_n\} \ \ \forall\ n = 0,1,\ldots \tag{19}$$

se le llama **filtración natural** de $X_\bullet$. Nótese que, efectivamente, $\{\mathcal{F}_n\}$ es una filtración (porque $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ para todo n) y que $X_\bullet$ está adaptada a $\mathcal{F}_\bullet$ (porque X_n es $\mathcal{F}_n$-medible para todo n). Por lo tanto, la condición (16) coincide con (c) pues

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad \forall\ n = 0,1,\ldots, \tag{20}$$

y similarmente para (17) y (18).

Cuando $X_\bullet = \{X_n\}$ es una martingala con respecto a su filtración natural, se dice simplemente que $X_\bullet$ es una **martingala**. Para submartingalas o supermartingalas se usa una terminología similar.

Observación. (a) $\{ X_n, \mathcal{F}_n, n = 0,1, \ldots\}$ es una martingala ssi

$$E(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad \forall\ n \geq 0,\ k \geq 1.$$

Esta condición también se cumple para submartingalas o supermartingalas reemplazando la igualdad por las desigualdades respectivas.

(b) $\{X_n\}$ es una submartingala (con respecto a $\{\mathcal{F}_n\}$, digamos) ssi $\{-X_n\}$ es una supermartingala.

(c) Sean $X_0, X_1, \ldots$ vv.aa. en L^1. Si $X_{n+1} = X_n$ para todo n (en particular si $X_n = c$, una constante, para todo n), entonces $\{X_n\}$ es una martingala. Si $X_{n+1} \geq X_n$ ó $X_{n+1} \leq X_n$ para todo n, entonces $\{X_n\}$ es una submartingala o una supermantigala, respectivamente. En otras palabras, una sucesión monótona de vv.aa. es una submartingala o una supermantigala dependiendo de que la sucesión sea creciente o decreciente, respectivamente.

CAPÍTULO 2. REPASO DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Los procesos estocásticos buscan modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo; un caso particular es la cadena de Markov, la cual tiene muchas aplicaciones, incluyendo, por supuesto, las finanzas. Aunado a este tema se presenta a forma de introducción tanto la integral de Itô como la fórmula de Itô, los cuales constituyen las bases del análisis estocástico. Restringiremos nuestra atención a aquellas partes del análisis estocástico que resulten útiles para la teoría de la valuación de opciones.

2.1 Cadenas de Markov

Definición.Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y E un conjunto no vacío, finito o numerable. Una sucesión de vv.aa. $\{X_n : \Omega \to \mathrm{E},\ n = 0, 1, 2, \ldots \}$ se llama **cadena de Markov** con espacio de estados B si satisface la **condición de Markov**, esto es, si para todo $n \geq 1$ y toda sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_{n\text{-}2}, x, y \in \mathrm{E}$ se cumple que

$$\mathrm{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x, \ldots, X_0 = x_0) = \mathrm{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x). \qquad (1)$$

La distribución de X_0 se llama **distribución inicial** y la denotaremos por $\boldsymbol{\pi}$.

Observaciones. Los comentarios que se dan a continuación son algunas precisiones y complementos a esta definición.

1. Frecuentemente E es un subconjunto de los números enteros. En estos casos E es un conjunto ordenado.

2. La distribución de una variable aleatoria discreta $X : \Omega \to \mathrm{E}$ es $(\mathrm{P}(X = x))_{x \in E}$. En el caso $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{Z}$ la distribución se considera como un vector de dimensión igual a la cardinalidad de E.

3. El lado derecho de la ecuación (1) se refiere a que la probabilidad de estar en el estado y al instante n dado que en los estados anteriores la cadena siguió la trayectoria $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n\text{-}2}, x\}$, sólo depende del estado inmediato anterior, i. e., del estado en el instante $n-1$.

4. A la familia $\{P(X_n = y \mid X_{n-1} = x);\ n \in \mathbb{N},\ x, y \in E\}$ se le llama **familia de probabilidades de transición** de la cadena. Describe la evolución de ésta en el tiempo.

5. Si $P(X_n = y \mid X_{n-1} = x)$ no depende de *n*, decimos que la cadena es **homogénea** (con respecto al tiempo). En una cadena de Markov homogénea a $P(X_n = y \mid X_{n-1} = x)$ se le suele denotar por $P_{x,y}$.

6. Para $m \geq 1$ se denota por $P_{x,y}^{(m)}$ a $P(X_{n+m} = y \mid X_{n-1} = x)$ y significa la probabilidad de ir en *m* pasos o unidades de tiempo de *x* a *y*. Se llama **probabilidad de transición en *m* pasos**.

7. Para *x*, $y \in$ E se define a $P_{x,y}^{(0)}$ como $\delta_{x,y}$, donde $\delta_{x,y}$ es la delta de Kronecker, es decir, vale 1 si $x = y$ y vale 0 si $x \neq y$.

8. En el caso en el que E sea finito, se considera a la matriz $P = (P_{x,y})_{x,y\, \in E}$ y se le llama **matriz de transición**.

9. Si la distribución inicial $\boldsymbol{\pi}$ es igual al vector $(\delta_{x,y})_{y \in E}$, es decir,

$$P(X_0 = x) = 1 \text{ y } P(X_0 \neq x) = 0,$$

entonces se usa la notación $P_X(A) = P(A \mid X_0 = x),\ A \in \mathcal{F}$, y se dice que la cadena empieza en *x*.

10. Observe que la suma de las entradas de los renglones de la matriz de transición es igual a uno, es decir, para todo $x \in$ E se tiene $\sum_{y \in E} P_{x,y} = 1.$ En efecto, sea $x \in$ E,

$$\begin{aligned}
1 &= P_X(X_{n+1} \in E) \\
&= P(X_{n+1} \in E \mid X_n = x) \\
&= P\Big(\bigcup_{y \in E} \{X_{n+1} = y\} \mid X_n = x\Big) = \sum_{y \in E} P_{x,y}.
\end{aligned}$$

Para la última igualdad se descompuso el espacio total como una unión finita o numerable de conjuntos mutuamente ajenos para así poder aplicar la aditividad de la medida de probabilidad (Ver sección 1.1 del capítulo anterior).

Lema. Sean $x, y, z \in$ E y $0 \leq m \leq n$-1 entonces se cumple que

$$P(X_{n+1} = y \mid X_n = z, X_m = x) = P_{z,y} \tag{2}$$

Demostración. Se demostrará el caso en el que m = 0. La prueba del caso más general es análoga.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_{n+1}=y \mid X_n=z, X_0=x)=\frac{\mathrm{P}(X_{n+1}=y, X_n=z, X_0=x)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\frac{\mathrm{P}(X_{n+1}=y, X_n=z, \bigcup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}\{X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1\}, X_0=x)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}\frac{\mathrm{P}(X_{n+1}=y, X_n=z,\ X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1, X_0=x)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}\mathrm{P}(X_{n+1}=y \mid X_n=z,\ X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1, X_0=x) \\
&\qquad\qquad\cdot\frac{\mathrm{P}(X_n=z,\ X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1, X_0=x)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\mathrm{P}_{z,y}\cdot\sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}\frac{\mathrm{P}(X_n=z,\ X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1, X_0=x)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\mathrm{P}_{z,y}\cdot\frac{\mathrm{P}\left(X_n=z, \bigcup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}\{X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1\}, X_0=x\right)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\mathrm{P}_{z,y}\cdot\frac{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_0=x)} \\
&=\mathrm{P}_{z,y}
\end{aligned}
$$

Lema. Sean $y, z \in$ E, $n \in \mathbb{N}$ y $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ subconjuntos de E. Entonces se cumple

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=y \mid X_n=z, X_{n-1}\in A_{n-1},\ldots,X_1\in A_1, X_0\in A_0)=\mathrm{P}_{z,y} \qquad (3)$$

Demostración.

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=y \mid X_n=z, X_{n-1}\in A_{n-1},\ldots,X_1\in A_1, X_0\in A_0)$$

por definición es igual a

$$\frac{\mathrm{P}(X_{n+1}=y, X_n=z, X_{n-1}\in A_{n-1},\ldots,X_1\in A_1, X_0\in A_0)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_{n-1}\in A_{n-1},\ldots,X_1\in A_1, X_0\in A_0)},$$

que a su vez se puede expresar como

$$\sum_{x_0\in A_0,\ldots,x_{n-1}\in A_{n-1}}\frac{\mathrm{P}(X_{n+1}=y, X_n=z, X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1, X_0=x_0)}{\mathrm{P}(X_n=z, X_{n-1}\in A_{n-1},\ldots,X_1\in A_1, X_0\in A_0)}.$$

Cada sumando se puede expresar de la siguiente manera

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=y\mid X_n=z,X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_1=x_1,X_0=x_0)$$
$$\cdot\frac{\mathrm{P}(X_n=z,X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_1=x_1,X_0=x_0)}{\mathrm{P}(X_n=z,X_{n-1}\in A_{n-1},\dots,X_1\in A_1,X_0\in A_0)}\ .$$

Al aplicar la propiedad de Markov, obtenemos

$$\sum_{x_0\in A_0,\dots,x_{n-1}\in A_{n-1}}\mathrm{P}(X_{n+1}=y\mid X_n=z)\cdot\frac{\mathrm{P}(X_n=z,X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_1=x_1,X_0=x_0)}{\mathrm{P}(X_n=z,X_{n-1}\in A_{n-1},\dots,X_1\in A_1,X_0\in A_0)}.$$

El primer factor sale de la sumatoria y lo que queda dentro de la misma suma 1, por lo que está expresión se reduce a

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=y\mid X_n=z)=\mathrm{P}_{z,y}\,.$$

Proposición. Si $x_0, x_1, \dots, x_n \in$ E y $\pi(x_0) = \mathrm{P}(X_0=x_0)$, entonces

$$\mathrm{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n,X_0=x_0)=\pi(x_0)\mathrm{P}_{x_0,x_1}\cdot\mathrm{P}_{x_1,x_2}\cdots\mathrm{P}_{x_{n-1},x_n}. \tag{4}$$

Demostración.

$$\mathrm{P}(X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\mid X_0=x_0)=\frac{\mathrm{P}(X_0=x_0,X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)}{\mathrm{P}(X_0=x_0)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0)\cdot\mathrm{P}(X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0)}{\mathrm{P}(X_0=x_0)}$$
$$=\mathrm{P}_{x_{n-1},x_n}\cdot\mathrm{P}(X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_1=x_1\mid X_0=x_0)$$
$$=\mathrm{P}_{x_0,x_1}\cdot\mathrm{P}_{x_1,x_2}\cdots\mathrm{P}_{x_{n-1},x_n}.$$

La última igualdad se obtiene por recursión. Ahora la igualdad es inmediata. Una consecuencia inmediata de (4) es

$$\mathrm{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\mid X_0=x_0)=\mathrm{P}_{x_0,x_1}\cdot\mathrm{P}_{x_1,x_2}\cdots\mathrm{P}_{x_{n-1},x_n}. \tag{5}$$

Esto se debe a que el término $\pi(x_0)$ aparece tanto en el numerador como en el denominador, siendo así que queda la expresión deseada en (5).

Proposición. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ fijos y $x_0, \dots, x_n, \dots, x_{n+k} \in$ E, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1}=x_{n+1},\dots,X_{n+k}=x_{n+k}\mid X_n=x_n,\dots,X_0=x_0)=\\ \mathrm{P}(X_1=x_{n+1},X_2=x_{n+2},\dots,X_k=x_{n+k}\mid X_0=x_n)\end{aligned} \tag{6}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \\
&= \frac{\mathrm{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_{n+k} = x_{n+k})}{\mathrm{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0) \cdot \mathrm{P}(X_0 = x_0)}{\mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0) \cdot \mathrm{P}(X_0 = x_0)} \\
&= \frac{\mathrm{P}_{x_0, x_1} \cdot \mathrm{P}_{x_1, x_2} \cdots \mathrm{P}_{x_{n+k-1}, x_{n+k}}}{\mathrm{P}_{x_0, x_1} \cdot \mathrm{P}_{x_1, x_2} \cdots \mathrm{P}_{x_{n-1}, x_n}} \\
&= \mathrm{P}_{x_n, x_{n+1}} \cdot \mathrm{P}_{x_{n+1}, x_{n+2}} \cdots \mathrm{P}_{x_{n+k-1}, x_{n+k}} \\
&= \mathrm{P}(X_1 = x_{n+1}, \ldots, X_k = x_{n+k} \mid X_0 = x_n).
\end{aligned}$$

Obsérvese que las desigualdades antepenúltima y última se obtienen aplicando (5).

Proposición (ecuación de Chapman-Kolmogorov). Para una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con espacios de estados E y para todo *n*, *m* $\in \mathbb{N}$ y toda pareja *x*, *y* $\in$ E se cumple

$$\mathrm{P}(X_{n+m} = y \mid X_0 = x) = \sum_{z \in E} \mathrm{P}^{(m)}_{x,z} \mathrm{P}^{(n)}_{z,y} = \mathrm{P}^{(n+m)}_{x,y} \tag{7}$$

Demostración. Se hará por inducción. Se supone que $\forall\, k \in \mathbb{N}$ con $k < (n + m)$ se cumple (7). Veamos que también se cumple para $n + m$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^{(n+m)}_{x,y} = \mathrm{P}(X_{n+m} = y \mid X_0 = x) = \frac{\mathrm{P}(X_{n+m} = y, X_0 = x)}{\mathrm{P}(X_0 = x)} \\
&= \mathrm{P}(X_{n+m} = y, \bigcup_{z \in E} \{X_n = z\}, X_0 = x) \frac{1}{\mathrm{P}(X_0 = x)} \\
&= \sum_{z \in E} \frac{\mathrm{P}(X_{n+m} = y, X_n = z, X_0 = x)}{\mathrm{P}(X_0 = x)} \\
&= \sum_{z \in E} \frac{\mathrm{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = z, X_0 = x) \cdot \mathrm{P}(X_n = z, X_0 = x)}{\mathrm{P}(X_0 = x)} \\
&= \sum_{z \in E} \mathrm{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = z) \cdot \mathrm{P}(X_n = z, X_0 = x) \\
&= \sum_{z \in E} \mathrm{P}^{(n)}_{x,z} \mathrm{P}^{(m)}_{z,y}
\end{aligned}$$

En el caso que E sea finito, $\mathrm{P}_{x,y}^{(k)}$ es precisamente la entrada *x, y* de la potencia *k*-ésima de la matriz de transición.

Definición. En una cadena de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacios de estados E, matriz de transición $(\mathrm{P}_{x,y})_{x,y\,\in E}$ y para $x, y \in$ E, se dice que:

1. De ***x* se accede a *y*** si existe $n \geq 0$ tal que $\mathrm{P}_{x,y}^{(n)} > 0$ y se denota por $(x \to y)$.

2. ***x* y *y* se comunican entre sí,** lo que se denota por $(x \leftrightarrow y)$, si se cumplen $(x \to y)$ y $(y \to x)$.

3. Un estado $x \in$ E es **estado recurrente** si

$$\mathrm{P}(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \mid X_0 = x) = 1.$$

4. Un estado $x \in$ E es **estado transitorio** si

$$\mathrm{P}(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \mid X_0 = x) < 1.$$

5. Un estado $x \in$ E se llama estado absorbente si $\mathrm{P}_{x,x} = 1$.

Observemos que en el caso en que x sea un estado transitorio se tiene $\mathrm{P}(X_n \neq x \text{ para todo } n \geq 1 \mid X_0 = x) > 0$, i. e., la probabilidad de nunca regresar al estado x es estrictamente positiva, de ahí su nombre.

Proposición. $x \leftrightarrow y$ es una relación de equivalencia y da lugar a una partición del espacio de estados E.

Demostración. Para ver que es una relación de equivalencia se mostrará que:

(i) $x \leftrightarrow x$

(ii) $x \leftrightarrow y$ si y sólo si $y \leftrightarrow x$

(iii) $x \leftrightarrow y$ y $y \leftrightarrow z$ implican que $x \leftrightarrow z$

La afirmación (i) se cumple porque $P^0_{x,x} = 1$. La (ii) es inmediata por la definición de estados que se comunican. Veamos que se cumple (iii): sabemos que existen *n, m, n′, m′* $\in \mathbb{N}$ tales que $P^{(n)}_{x,y} > 0$, $P^{(m)}_{y,x} > 0$, $P^{(n')}_{y,z} > 0$, $P^{(m')}_{z,y} > 0$. Se ve que $x \to z$ ya que, por Chapman-Kolmogorov, $P^{(n+n')}_{x,z} = \sum_{l \in E} P^{(n)}_{x,l} \cdot P^{(n')}_{l,z} \geq P^{(n)}_{z,y} \cdot P^{(n')}_{y,z} > 0$; análogamente, $z \to x$ porque $P^{(m+m')}_{z,x} = \sum_{l \in E} P^{(m')}_{z,l} \cdot P^{(m)}_{l,z} \geq P^{(m')}_{z,y} \cdot P^{(m)}_{y,z} > 0$.

Definición. Se dice que C $\subset$ E es una **clase de comunicación** si cualesquiera dos estados de C se comunican entre sí. Dado $x \in$ E, su clase de comunicación se denota así: C(x) = {$y \in$ E: $x \leftrightarrow y$}. Se dice que un conjunto de estados C $\subset$ E es **cerrado** si ningún estado de E$-$C puede ser accedido desde un estado de C.

Se dice que la cadena es **irreducible** si cualquiera de las siguientes condiciones (equivalentes entre sí) se cumple:

(a) Desde cualquier estado de E se puede acceder a cualquier otro.
(b) Todos los estados se comunican entre sí.
(c) C(x) = E para algún $x \in$ E.
(d) C(x) = E para todo $x \in$ E.
(e) El único conjunto cerrado es el total.

(i) Es obvio que (a) implica (b) porque al decir que de todo estado $x \in$ E se puede acceder a cualquier otro se incluye el caso de que cualquier estado se comunica con cualquier otro.

(ii) (b) implica (c) y (d) de manera obvia por la definición de C(x).

(iii) Supongamos que (d) se cumple y (e) no, i. e., existe un conjunto cerrado D $\subsetneq$ E. Entonces para cualquier estado $x \in$ D se tendrá que C(x) $\subset$ D, lo que contradice la hipótesis (d).

Por último, sean A(x) = {$z \in$ E: $x \to z$} y A(y) = {$z \in$ E: $y \to z$}. Es claro que, por la hipótesis (e), A(x) = A(y) = E, lo que implica que (a) se cumple.

2.2 La Integral de Itô

Definición. El **movimiento Browniano** $B(t)$ es un proceso estocástico que comienza en cero, i.e., $B(0) = 0$, y el cual satisface las siguientes propiedades:

1. **Incrementos independientes**: La variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es independiente de la variable aleatoria $B(u) - B(v)$ siempre que $t > s \geq u > v \geq 0$.
2. **Incrementos estacionarios**: La distribución de $B(t) - B(s)$ para $t > s \geq 0$ es sólo una función de $t - s$, y no de t y s separadamente.
3. **Incrementos normales**: La distribución de $B(t) - B(s)$ para $t > s \geq 0$ es normal con esperanza 0 y varianza $t - s$.

La integral de Itô está en el corazón del análisis estocástico, y es la principal razón para la existencia de un análisis que difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación. La integral de Itô define lo que uno debiera comprender por una integración de un proceso estocástico con respecto al movimiento Browniano (o algún otro proceso estocástico). El objetivo de esta sección es dar una interpretación de la expresión

$$\int_0^t X(s)dB(s), \tag{8}$$

donde $X(s)$ es un proceso estocástico. Decimos que (8) es la integral de Itô de $X(t)$ con respecto al movimiento Browniano. Permitámonos recordar cuál sería la interpretación de tal integral si $X(s)$ y $B(s)$ no fuera un proceso estocástico, sino funciones determinísticas. Asumamos que $f(s)$ y $g(s)$ son dos funciones suaves del tiempo s, y considere la integral.

$$\int_0^t g(s)df(s). \tag{9}$$

Cuando $f(s)$ es una función diferenciable, se escribe $df(s)/ds = f'(s)$, o en otras palabras, $df(s) = f'(s)ds$. Sustituyendo esta última expresión a la integral en (9) se llega a

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds,$$

la cual reconocemos como la integral estándar. ¿Pero qué pasa si *f*(*s*) no es diferenciable? Aún podemos definir la integral (9). Cuando *f*(*s*) no está fluctuando mucho para diferentes valores de *s*, esto es, cuando *f*(*s*) es de variación acotada, podemos probar que la integral está bien definida como el límite

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

Ya que *f*(*s*) tiene variación acotada, $f(s_{i+1})$ no está muy lejos de $f(s_i)$. A partir de esto uno puede probar que el límite existe mientras *g*(*s*) no esté variando mucho. Por supuesto, si la función *g*(*s*) es extremadamente fluctuante en diferentes puntos del tiempo, el límite puede divergir.

Definiremos la integral (8) en una forma análoga como el límite

$$\int_0^t X(s,\omega)dB(s,\omega) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i,\omega)(B(s_{i+1},\omega) - B(s_i,\omega)). \qquad (10)$$

Nótese que tomamos el límite para cada ω fija. El problema aquí es que el límite puntual en general no existe para muchos procesos estocásticos *X*(*s*). Para cada ω, la función $s \to B(s,\omega)$ es extremadamente volátil. De hecho, representa un ejemplo de una función continua, pero diferenciable en ninguna parte. Aún peor, el movimiento Browniano como función del tiempo no es de variación acotada para cada ω, como se requiere en *f*(*s*). Necesitamos compensar la aspereza de los cursos del movimiento Browniano poniendo dos condiciones sobre el proceso *X*(*s*); Bajo estas condiciones el límite existirá. La primera condición es que *X*(*s*) sea independiente de los incrementos Brownianos, mientras que la segunda condición tiene algo que ver con la variación de *X*(*s*).

Por la tercera propiedad del movimiento Browniano sabemos que la varianza de un incremento Browniano está dada por

$$E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = s_{i+1} - s_i.$$

Si $X(s_i)$ es independiente del incremento $B(s_{i+1}) - B(s_i)$, encontramos que

$$E[X(s_i)(B(s_{i+1})-B(s_i))^2]=E[X^2(s_i)]E[(B(s_{i+1})-B(s_i))^2]$$
$$=E[X^2(s_i)](s_{i+1}-s_i).$$

Consideremos el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1})-B(s_i)). \tag{11}$$

Al asumir que $X(s_i)$ es independiente de $B(s_{i+1})-B(s_i)$ para toda $i=1,\ldots,n-1,$ encontramos que por independencia de los incrementos Brownianos que:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1})-B(s_i))\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n-1} E[X^2(s_i)](s_{i+1}-s_i).$$

Identificamos a la suma del lado derecho como una aproximación de la integral $\int_0^t E[X^2(s)]ds.$ Por consiguiente, si esta integral existe, deducimos

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1})-B(s_i))\right)^2\right]=\int_0^t E[X^2(s)]ds,$$

que lleva a la conclusión que la varianza de la suma en (11) converge a $\int_0^t E[X^2(s)]ds.$ Asumiendo que esta integral existe, hemos mostrado que

$$E\left[\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1})-B(s_i))\right)^2\right]=\int_0^t E[X^2(s)]ds. \tag{12}$$

Esta integral existe siempre que sea finita, esto es, cuando el proceso estocástico $X(s)$ es tal que su segundo momento pueda ser integrado de 0 a 1.

En (12) vemos a partir del límite en el lado izquierdo que las $X(s_i)$'s tienen que ser independiente de los incrementos $B(s_{i+1})-B(s_i)$ para toda $i=1,\ldots,n-1.$ Esto nos lleva a la segunda condición la cual dice que el proceso integrando $X(s)$ tiene que ser un proceso adaptado.

Definición (**Integración de Itô**). Un proceso estocástico $X(s)$ es llamado Itô integrable en el intervalo $[0, t]$ si:

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$, y

2. $\int_0^t E[X^2(s)]ds < \infty.$

La Integral de Itô es definida como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s,\omega)dB(s,\omega) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i,\omega)(B(s_{i+1},\omega) - B(s_i,\omega)), \tag{13}$$

donde el límite se toma para toda $\omega \in \Omega$. Nótese que la integral de Itô en sí misma se convierte en un proceso estocástico al ser parametrizada por el tiempo t. Además, este proceso es adaptado sobre todo intervalo de tiempo puesto que será el límite de una suma de funciones de movimiento Browniano $B(s)$ para tiempos $s \leq t$.

Teorema. La esperanza y la varianza de la integral de Itô son

$$E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right] = 0, \quad \mathrm{Var}\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right) = \int_0^t E[X^2(s)]ds. \tag{14}$$

La relación para la varianza es conocida como la Itô isometría.

Demostración.

La integral de Itô está definida como

$$\int_0^t X(s)dB(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i).$$

Para cada n, la esperanza de la sumas se convierte en

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X(s_i)]E[B(s_{i+1}) - B(s_i)] = 0.$$

Después tomando el límite de la esperanza cuando n se va a infinito se obtiene que la esperanza de la integral de Itô es igual a cero (ver apéndice B).

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right) &= E\left[\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)^2\right] - E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right]^2 \\ &= E\left[\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] \\ &= \int_0^t E[X^2(s)]ds.\end{aligned}$$

A continuación, derivamos algunas propiedades de la integral de Itô las cuales son útiles en algunos cálculos. Ante todo, la integral de Itô es lineal. Si $X(s)$ y $Y(s)$ son dos procesos Itô integrables, entonces $aX(s) + bY(s)$ es Itô integrable y

$$\int_0^t (aX(s) + bY(s))dB(s) = a\int_0^t X(s)dB(s) + b\int_0^t Y(s)dB(s),$$

donde a y b son constantes. Además, el proceso $X(s) = 1$ es Itô integrable y por lo tanto tenemos a partir de la linealidad que para una constante a,

$$\int_0^t a dB(s) = a\int_0^t dB(s) = aB(t).$$

La definición de la integral de Itô no es muy operacional. Como se recordará del cálculo básico, la antiderivada es la pista cuando se calculan integrales. En el contexto de las integrales de Itô existe una técnica de antiderivación similar, llamada la fórmula de Itô.
Para ver lo que podemos esperar cuando integramos procesos estocásticos con respecto al movimiento Browniano, se incluye un ejemplo al que retomaremos en la sección de la fórmula de Itô. Usando la definición de límite y la propiedad de que el movimiento Browniano en sí mismo es integrable, es posible mostrar que

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}t.$$

Obtenemos un término adicional $-t/2$ en el lado derecho, el cual no aparecería si la integral siguiera las reglas clásicas del cálculo: si integramos una función diferenciable $f(s)$ con respecto a sí misma, se tiene que (con $f(0) = 0$),

$$\int_0^t f(s)df(s) = \int_0^t f(s)f'(s)ds = \frac{1}{2}f^2(t).$$

Aquí no se tiene ningún término de corrección extra. Esta integral, la cual puede ser fácilmente encontrada tras introducir la fórmula de Itô, muestra la diferencia entre análisis estocástico y las reglas clásicas del cálculo.

2.3 La Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es un recurso que puede ser usado para calcular explícitamente muchas integrales de Itô. Sin embargo, la fórmula tiene un rango mucho más amplio de aplicaciones, y es una de las principales herramientas para deducir precios de contratos de opciones. La fórmula de Itô es una versión estocástica de la regla de la cadena clásica de diferenciación, y prescribe como una función de movimiento Browniano $f(B(t))$, o más generalmente, una función de un proceso estocástico $f(X(t))$, cambia estocásticamente a medida que el tiempo progresa. La dinámica estocástica de $f(X(t))$ será descompuesta en la dinámica del proceso $X(t)$ y la tasa de cambio de $f(x)$, dada por sus derivadas. La integral de Itô es el principal ingrediente en la regla de la cadena estocástica. Junto con la integral de Itô, la fórmula de Itô es la base para el análisis estocástico moderno. Recordemos la regla clásica de la cadena para funciones diferenciables.

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones diferenciables. Al recurrir a la regla de la cadena, vemos que la derivada de $f(g(t))$ con respecto a t como:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))g'(t).$$

Integrando ambos lados con respecto al tiempo de 0 a t, y asumiendo que $g(0) = x$, se tiene que:

$$f(g(t)) = f(x) + \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

Esta es la forma integral de la regla de la cadena. Puesto que cada trayecto del movimiento Browniano es una función del tiempo, uno podría pensar que al plantear $g(t) = B(t)$ nos daría la fórmula de Itô como:

$$f(B(t)) = f(x) + \int_0^t f'(B(s))B'(s)ds.$$

Cuando se definió la integral de Itô, puntualizamos la no diferenciablidad de los trayectos del movimiento Browniano. Por lo tanto, $B'(s)$ no es significativo. No obstante, podríamos interpretar $B'(s)ds$ como $dB(s)$, y sugerir

$$f(B(t)) = f(x) + \int_0^t f'(B(s))dB(s), \tag{15}$$

como la fórmula de Itô. Desafortunadamente, (15) no es correcta.

El supuesto de que $g(0) = x$ significa que $B(0) = x$. Como se verá más adelante, es conveniente tener la posición inicial de un movimiento Browniano en un punto arbitrario x. Retrocediendo a la definición en (2.2) del movimiento Browniano, propiedad 3, se tendría ahora que $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(x, t-s)$. Alternativamente, podemos definir un movimiento Browniano que comienza en x como el proceso $B^x(t) = x + B(t)$, donde $B(t)$ es definido como un movimiento Browniano que comienza en cero.

La regla de la cadena se prueba usando primero una expansión de Taylor de $f(g(s_{i+1}))$ alrededor de $f(g(s_i))$ donde $\{s_i\}_{i=1}^n$ es una partición del intervalo [0, t], y luego se permite que el número de puntos de partición se vaya a infinito. Siguiendo el mismo procedimiento en el caso del movimiento Browniano, uno obtiene términos de corrección adicionales puesto que las varianzas de los incrementos Brownianos son iguales a los correspondientes incrementos del tiempo. Estos términos adicionales no convergen a cero cuando $n \to \infty$, sino a una integral sobre el tiempo. Ahora examinamos con más detalle lo que llegará a ser la fórmula de Itô.

Suponga que el movimiento Browniano comienza en x, $B(0) = x$, y f es una función dos veces diferenciable. Sean, además, s_i y s_{i+1} dos puntos arbitrarios en el intervalo $[0, t]$, con $s_i < s_{i+1}$. Una expansión de segundo orden de Taylor alrededor de $B(s_i)$ con residuo nos lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f(B(s_{i+1})) - f(B(s_i)) &= f'(B(s_i))(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \\ &\quad + \frac{1}{2} f''(B(s_i))(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 + R\{(B(s_{i+1}) - B(s_i))^3\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Asumamos a continuación que tenemos una sucesión de puntos $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ con la propiedad

$0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = t.$

Una suma desde $i = 1$ a $n - 1$ produce

$$\begin{aligned} f(B(t)) - f(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} f'(B(s_i))(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 + \sum_{i=1}^{n-1} R\{(B(s_{i+1}) - B(s_i))^3\}. \end{aligned}$$

De la definición de integración de Itô sabemos que el primer término en el lado derecho convergirá a la integral de Itô cuando $n \to \infty$. Pero, ¿qué hay acerca de los otros dos términos? Calculando la esperanza del segundo término se tiene que

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2\right] &= \sum_{i=1}^{n-1} E[f''(B(s_i)](s_{i+1} - s_i) \\ &\to \int_0^t E[f''(B(s_i)]ds, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Este límite existe mientras la integral sea finita, lo que está garantizado si, por ejemplo, f'' es una función acotada. Dado que está integral en general es diferente de cero, concluimos que la segunda suma del lado derecho de (16) converge a un límite diferente de cero. De hecho, después de algunos cálculos tediosos, une puede probar que la suma tiende a $\int_0^t f''(B(s))ds$. El truco es mostrar que

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))(B(s_{i+1})-B(s_i))^2 - \sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))(s_{i+1}-s_i)\right)^2\right] \to 0,$$

para $n \to \infty$ (ver apéndice B). Consideraciones similares revelan que

$$\sum_{i=1}^{n-1} R\{(B(s_{i+1})-B(s_i))^3 \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Teorema (**La fórmula de Itô para el movimiento Browniano**). Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable y supongamos que el movimiento Browniano inicia en x. Entonces,

$$f(B(t)) = f(x) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))dB(s). \tag{17}$$

El proceso estocástico $f'(B(s))$ es Itô integrable siempre que la condición $\int_0^t E[f'(B(s))^2]ds < \infty$ sea satisfecha ya que el proceso es claramente adaptado. El tercer término de la derecha de la integral en (17) está bien definido en tanto que $\int_0^t f''(B(s))$ sea integrable en el sentido clásico. Esto es cierto cuando, por ejemplo, f'' es una función continua, porque entonces el proceso estocástico $f''(B(s))$ tendrá trayectorias continuas y así será una función acotada en el intervalo [0, t]. Una condición suficiente para tener varianza finita es que $E\left[\int_0^t f''(B(s))^2 ds\right] < \infty$. En resumen, imponemos dos condiciones extras a f:

$$E\left[\int_0^t f'(B(s))^2 ds\right] < \infty, \quad E\left[\int_0^t f''(B(s))^2 ds\right] < \infty. \tag{18}$$

Téngase en cuenta que estas dos condiciones implican que $f(B(t))$ tiene varianza finita. En el futuro, siempre supondremos que estas condiciones de integrabilidad se cumplen.

Note que como f se asume dos veces diferenciable, no podemos aplicar funciones $f(x)=|x|$ en la fórmula de Itô.

Como una primera aplicación de la fórmula de Itô se calculará la integral $\int_0^t B(s)dB(s)$ que consideramos anteriormente.

Ejemplo. Sea $f(x)=x^2$, y suponga que el movimiento Browniano comienza en cero. Recurriendo a la fórmula de Itô para el movimiento Browniano, se tiene que:

$$B^2(t)=0^2+\int_0^t 2B(s)dB(s)+\frac{1}{2}\int_0^t 2ds,$$

y por lo tanto,

$$\int_0^t B(s)dB(s)=\frac{1}{2}B^2(t)-\frac{1}{2}t.$$

Cuando se valúan opciones enfrentaremos el problema de encontrar la dinámica de una función de movimiento Browniano geométrico, y una leve generalización de la integral de Itô simplificará esta tarea. La clase natural de procesos estocásticos a considerar son las llamadas semimartingalas.

Definición. El proceso estocástico $X(t)$ es llamado una **semimartingala** si existen dos procesos estocásticos Itô integrables $Y(t)$ y $Z(t)$ tales que

$$X(t)=x+\int_0^t Y(s)dB(s)+\int_0^t Z(s)ds. \tag{19}$$

Téngase en consideración que suponemos que ambos procesos, $Y(t)$ y $Z(t)$, son adaptados, lo que lleva a la adaptabilidad de $X(t)$. Por otra parte, puesto que $Z(t)$ también es Itô integrable, la semimartingala tiene un segundo momento finito. Si estableciéramos que $Z(t)$ = 0, la semimartingala $X(t)$ se reduce a la integral de Itô.

Teorema (**La fórmula General de Itô**). Supongamos que $f(t,x)$ es una función la cual es diferenciable una vez en t y dos veces diferenciable en x, y sea $X(t)$ una semimartingala. Entonces

$$\begin{aligned} f(t,X(t))= f(0,x)&+\int_0^t Y(s)\frac{\partial f(s,X(s))}{\partial x}dB(s)+\int_0^t \frac{\partial f(s,X(s))}{\partial t} \\ &+Z(s)\frac{\partial f(s,X(s))}{\partial x}+\frac{1}{2}Y^2(s)\frac{\partial^2 f(s,X(s))}{\partial x^2}ds. \end{aligned} \tag{20}$$

La derivación de esta regla de la cadena para semimartingalas sigue muy de cerca el argumento para el movimiento Browniano. Necesitamos imponer algunas condiciones de integrabilidad adicionales con el fin de asegurar la existencia de los diferentes términos. La integrabilidad de Itô y la existencia de los segundos momentos son verificados bajo las siguientes condiciones:

$$E\left[\int_0^t \left(\frac{\partial f(s,X(s))}{\partial t}\right)^2 + Z^2(s)\left(\frac{\partial f(s,X(s))}{\partial x}\right)^2 \right.$$
$$\left. + Y^4(s)\left(\frac{\partial^2 f(s,X(s))}{\partial^2 x}\right)^2 ds\right] < \infty, \tag{21}$$

y

$$E\left[\int_0^t Y(s)^2 \left(\frac{\partial f(s,X(s))}{\partial x}\right)^2 ds\right] < \infty, \tag{22}$$

las cuales son levemente más fuertes que (18). Obsérvese que $f(t,X(t))$ es una semimartingala. De hecho, la fórmula de Itô demuestra que una función de una semimartingala es de nuevo una semimartingala.

Normalmente la fórmula de Itô se escribe en su forma diferencial; en forma compacta:

$$df(x,X(t)) = \left\{\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial t} + Z(t)\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}Y^2(t)\frac{\partial^2 f(t,X(t))}{\partial x^2}\right\} dt + Y(t)\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x} dB(t). \tag{23}$$

Adoptaremos esta forma de establecer la regla de la cadena estocástica, pero el significado preciso se estableció en el teorema inmediato anterior.

Resulta útil a veces usar la versión corta de (23):

$$df(x,X(t)) = \frac{\partial f(t,X(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X(t))}{\partial x^2}(dX(t))^2, \tag{24}$$

junto con las reglas del cálculo $(dt)^2 = 0$, $dtdB(t) = dB(t)dt = 0$ y $(dB(t))^2 = dt$. Aplicando estas reglas a (24) volvemos a (23).

Finalizamos esta sección con una fórmula de Itô multidimensional. Introducimos m movimientos Brownianos independientes $B_1(t),\ldots,B_m(t)$, y supongamos que $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ son n semimartingalas con dinámicas

$$
\begin{aligned}
dX_1(t) &= Y_{11}(t)dB_1(t) + \cdots + Y_{1m}(t)dB_m(t) + Z_1(t)dt \\
&\vdots \\
dX_n(t) &= Y_{n1}(t)dB_1(t) + \cdots + Y_{nm}(t)dB_m(t) + Z_n(t)dt.
\end{aligned}
$$

La notación $\mathbf{X}(t)$ está para el vector $(X_1(t),\ldots,X_n(t))'$. Considere ahora una fución vector-valuada de t y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $g(t,x) = (g_1(t,x),\ldots,g_p(t,x))'$. La dinámica estocástica de $g(t,\mathrm{X}(t))$ está dada por la versión multidimensional de la fórmula de Itô al considerar cada coordenada proceso. Para $k = 1, \ldots, p$,

$$
\begin{aligned}
dg_k(t,\mathrm{X}(t)) = {} & \frac{\partial g_k(t,\mathrm{X}(t))}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k(t,\mathrm{X}(t))}{\partial x_i} dX_i(t) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_k(t,\mathrm{X}(t))}{\partial x_i x_j} dX_i(t)X_j(t),
\end{aligned}
\tag{25}
$$

con las reglas $dB_i(t)dB_j(t) = \delta_{ij}dt$, $(dt)^2 = dB_i(t)dt = dtdB_i(t) = 0$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y cero de otra forma.

Nota: En el presente capítulo las demostraciones de la sección 2.1 se siguen del libro Cadenas de Markov [6], el cual como su nombre lo dice es un compendio de los tópicos más destacados de Cadenas de Markov; las secciones restantes siguen las ideas de Espen Benth [9]. En algunos casos se realizaron ligeras modificaciones a sus desarrollos.

CAPÍTULO 3. PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA

Para resolver un problema de optimización estático con restricciones, típicamente se emplea el método del multiplicador de Lagrange. La solución al problema es caracterizada por las condiciones de primer orden del problema de Lagrange. Para resolver un problema de control óptimo estocástico se emplea la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. En este capítulo introduciremos dicho método de optimización.

3.1 Un ejemplo.

Consideremos un agente económico sobre un intervalo de tiempo fijo [0, T]. En el tiempo $t = 0$ el agente está dotado con una riqueza inicial x_0 y su problema es cómo disponer de su inversión y su consumo en el horizonte de tiempo dado. Asumamos que las oportunidades de inversión del agente son las siguientes:

- El agente puede invertir dinero en el banco a una tasa determinística de interés r, i.e., tiene acceso al activo libre de riesgo B con

$$dB = rBdt. \tag{1}$$

- El agente puede invertir en un activo riesgoso con un proceso en el precio S_t, donde asumimos que la dinámica de S está dada por un modelo estándar de Black-Scholes

$$dS = \alpha Sdt + \sigma SdW. \tag{2}$$

Denotamos a las ponderaciones del portafolio relativo del agente en el tiempo t por u_t^0, para el activo sin riesgo, y u_t^1, para el activo riesgoso, respectivamente. Su tasa de consumo en el tiempo t es denotada por c_t.

Restringimos a las estrategias de consumo-inversión del consumidor a que sean autofinanciables, y como es usual asumimos que se vive en un mundo donde el comercio continuo y las ventas en corto ilimitadas son posibles. Si denotamos la riqueza del consumidor en el tiempo t por X_t, se sigue ahora que por el lema (con algunos ajustes) que se menciona en el apéndice C la dinámica de X está dada por

$$dX_t = X_t[u_t^0 r + u_t^1 \alpha]dt - c_t dt + u_t^1 \sigma X_t dW_t. \tag{3}$$

El objetivo del agente es seleccionar la estrategia de portafolio-consumo de tal manera que se maximice su utilidad total en [0, T], y supongamos que esta utilidad es dada por

$$E\left[\int_0^t F(t,c_t)dt + \Phi(X_T)\right], \tag{4}$$

donde F es la función de utilidad instantánea para el consumo, mientras que Φ es una función de "herencia" la cual mide la utilidad de conservar cierta cantidad de dinero al final del periodo. Una restricción natural en consumo es la condición

$$c_t \geq 0, \ \forall t \geq 0, \tag{5}$$

y tenemos también la restricción

$$u_t^0 + u_t^1 = 1, \ \forall t \geq 0. \tag{6}$$

Dependiendo de la situación actual podemos ser forzados a imponer otras restricciones (por ejemplo, la no negatividad de la riqueza del consumidor), pero no haremos esto en este momento.

Podemos ahora formalmente establecer el problema de maximización de la utilidad del consumidor como sigue.

$$\begin{aligned}
&\max_{u^0,u^1,c} E\left[\int_0^t F(t,c_t)dt + \Phi(X_T)\right] \\
&\text{tal que } dX_t = X_t[u_t^0 r + u_t^1 \alpha]dt - c_t dt + u_t^1 \sigma X_t dW, \\
&X_0 = x_0, \\
&c_t \geq 0, \ \forall t \geq 0, \\
&u_t^0 + u_t^1 = 1, \ \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Un problema de este tipo se le conoce como **problema de control óptimo estocástico**. En este contexto el proceso X es llamado **proceso de estados** (o **variable de estado**), los procesos u^0, u^1, c son llamados **procesos de control**, y tenemos un número de **restricciones de control**.

3.2 El Problema Formal.

Continuamos con el estudio de problemas de control óptimo en forma general. Con este fin, sean $\mu(t,x,u)$ y $\sigma(t,x,u)$ funciones dadas de la forma

$$\begin{aligned}
\mu &: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \\
\sigma &: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n\times d}.
\end{aligned}$$

Para un punto dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la siguiente ecuación diferencial estocástica controlada.

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \\ X_0 &= x_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Vemos al proceso X n-dimensional como una variable de estados, la cual queremos controlar. Podemos controlar (parcialmente) a X escogiendo los procesos de control u k-dimensionales en una forma adecuada. W es un proceso de Wiener (o movimiento Browniano) d-dimensional, y ahora debemos intentar dar un significado matemático preciso a las expresiones en (7).

Observación. En este capítulo, donde trabajaremos para una medida fija, todos los procesos de Wiener son denotados por la letra W.

Nuestro primer problema en el modelado concierne a la clase de procesos de control admisibles. En la mayoría de los casos es natural que se requiera que los procesos de control u sean adaptados al proceso X. En otras palabras, en el tiempo t el valor u_t del proceso de control sólo se le permite depender de los valores pasados observados del proceso de estado X. Una forma natural para obtener un proceso de control adaptado es seleccionar una función determinística $g(t, x)$

$$g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,$$

y entonces definir el proceso de control u por $u_t = g(t, X_t)$. Tal función g es llamada **ley de control de retroalimentación**, y en lo consiguiente nos restringiremos al considerar solamente leyes de control de retroalimentación.

Supongamos ahora que hemos seleccionado una ley de control fija $\mathbf{u}(t, x)$. Entonces podemos insertar $\mathbf{u}$ en (7) para obtener la ecuación diferencial estocástica estándar

$$dX_t = \mu(t, X_t, \mathrm{u}(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t, \mathrm{u}(t, X_t))dW_t. \tag{8}$$

En casos más concretos también tenemos que satisfacer algunas restricciones de control, y modelamos esto adoptando como dado un subconjunto fijo $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y que requiere que $u_t \in U \ \forall t$.

Definición. Una ley de control $\mathbf{u}$ es llamada admisible si

- $\mathrm{u}(t, x) \in U \ \forall t \in \mathbb{R}_+$ y $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Dado cualquier punto inicial (t, x) la ecuación diferencial estocástica

$$dX_s = \mu(s, X_s, \mathrm{u}(\mathrm{s}, X_s))ds + \sigma(s, X_s, \mathrm{u}(\mathrm{s}, X_s))dW_s,$$
$$X_t = x$$

tiene una única solución. A la clase de leyes de controles admisibles se le denota $\mathcal{U}$.

Definición. Considere la ecuación (8), y denotemos la matriz transpuesta con $'$.

- Para cualquier vector fijo $u \in \mathbb{R}^k$, las funciones μ^u, σ^u y $C^{\mathrm{u}}(t, x)$ están definidas por

$$\mu^u(t,x) = \mu(t,x,u),$$
$$\sigma^u(t,x) = \sigma(t,x,u),$$
$$C^u(t,x) = \sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)'.$$

- Para ley de control **u**, las funciones μ^{u}, σ^{u}, $C^{\mathrm{u}}(t, x)$ y $F^{\mathrm{u}}(t, x)$ están definidas por

$$\mu^{\mathrm{u}}(t,x) = \mu(t,x,\mathrm{u}(t,x)),$$
$$\sigma^u(t,x) = \sigma(t,x,\mathrm{u}(t,x)),$$
$$C^u(t,x) = \sigma(t,x,\mathrm{u}(t,x))\sigma(t,x,\mathrm{u}(t,x))',$$
$$F^{\mathrm{u}}(t,x) = F(t,x,\mathrm{u}(t,x)).$$

- Para cualquier vector fijo $u \in \mathbb{R}^k$, el operador diferencial parcial está definido por

$$\mathcal{A}^u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^u(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^u(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

- Para cualquier ley de control **u**, el operador diferencial parcial está definido por

$$\mathcal{A}^{\mathrm{u}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{\mathrm{u}}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^{\mathrm{u}}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Una notación más y corta para (8) se escribiría como

$$dX_t^{\mathrm{u}} = \mu^{\mathrm{u}} dt + \sigma^{\mathrm{u}} dW_t. \qquad (9)$$

Ahora consideramos a la función objetivo del problema de control, y por lo tanto tomamos como dado un par de funciones

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$
$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Ahora definimos la función valor de nuestro problema como la función

$$\mathcal{J}_0(\mathrm{u}) = E\left[\int_0^T F(t, X_t^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_t)dt + \Phi(X_T^{\mathrm{u}})\right],$$

donde X^{u} es la solución para (8) con la condición inicial $X_0 = x_0$. Nuestro problema formal por lo tanto se puede escribir como la maximización $\mathcal{J}_0(\mathrm{u})$ sobre toda $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, y definimos al **valor óptimo** $\hat{\mathcal{J}}_0$ por

$$\hat{\mathcal{J}}_0 = \sup_{\mathrm{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_0(\mathrm{u}).$$

Si existe una ley de control admisible $\hat{\mathrm{u}}$ con la propiedad que $\mathcal{J}_0(\hat{\mathrm{u}}) = \hat{\mathcal{J}}_0$, entonces decimos que $\hat{\mathrm{u}}$ es una **ley de control óptimo** para el problema dado. Nótese que, como para cualquier problema de optimización, la ley óptima puede no existir. Para un problema de control específico nuestro principal objetivo es encontrar la ley de control óptima (si existe), o por lo menos aprender algo acerca del comportamiento cualitativo de la ley óptima.

3.3 La Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Dado un problema de control óptimo tenemos dos preguntas por responder:
¿Existe una ley de control óptima?
Dado que un problema de control óptimo existe, ¿cómo la encontramos?
En este capítulo estamos principalmente interesados en la pregunta (b), y la metodología usada para tratar el problema será la programación dinámica. La principal idea es incrustar nuestro problema original en una clase más grande de problemas, y entonces juntar todos estos problemas junto con una ecuación diferencial parcial conocida como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Entonces se muestra que el problema de control es equivalente al problema de encontrar una solución al problema de encontrar una solución a la ecuación de HJB.
Ahora describimos la idea que propuesta, y para este propósito escogemos un punto fijo en el tiempo *t*, con $0 \le t \le T$. También escogemos un punto fijo *x* en el espacio de estados, i. e., $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición. El problema de control $\mathcal{P}(t, x)$ es definido como el problema de maximizar

$$E_{t,x}\left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s)ds + \Phi(X_T^{\mathrm{u}})\right], \tag{10}$$

Dada la dinámica

$$dX_s^{\mathrm{u}} = \mu(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}(\mathrm{s}, X_s^{\mathrm{u}}))ds + \sigma(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}(\mathrm{s}, X_s^{\mathrm{u}}))dW_s, \quad X_t = x, \tag{11}$$

y las restricciones

$$\mathrm{u}(s, y) \in U, \quad \forall (s, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Usamos las letras *s* y *y* arriba porque las letras *t* y *x* han sido usadas para denotar el punto fijo seleccionado (*t*, *x*). Hacemos notar que en términos de la definición anterior, nuestro problema es el problema $\mathcal{P}(0, x_0)$.

Definición.

* La **función valor** $\mathcal{J} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$\mathcal{J}(t, x, \mathrm{u}) = E\left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s)ds + \Phi(X_T^{\mathrm{u}})\right]$$

dada la dinámica en (11).

* La **función de valor óptimo** $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida por

$$V(t, x) = \sup_{\mathrm{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, \mathrm{u}).$$

Así $\mathcal{J}(t, x, \mathrm{u})$ es la utilidad esperada usando la ley de control **u** sobre el intervalo de tiempo [*t*, T], dado el hecho de que empezamos en el estado *x* al tiempo *t*. Nuestro objeto principal de interés es la función de valor óptima, y el siguiente paso será deducir una ecuación diferencial parcial para *V*. Cabe señalar que esta derivación es altamente heurística.

Suposición. Suponemos lo siguiente.

1. Existe una ley de control óptimo $\hat{\mathrm{u}}$.
2. La función valor óptima $V \in C^{1,2}$, i. e., continua y diferenciable dos veces.
3. Una serie de procedimientos restrictivos en los siguientes argumentos pueden ser justificados.

Proseguimos con la deducción de la ecuación diferencial parcial, y con este fin $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$. Además escogemos un número real *h* (un “pequeño” incremento en el tiempo) tal que $t + h < T$. Seleccionamos una ley de control **u** arbitraria pero fija, y definimos la ley de control $\mathbf{u}^*$ por

$$\mathrm{u}^*(s,y)=\begin{cases}\mathrm{u}(s,y), & (s,y)\in[t,t+h]\times\mathbb{R}^n\\ \hat{\mathrm{u}}(s,y), & (s,y)\in(t+h,T]\times\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

En otras palabras, si usamos $\mathbf{u}^*$, entonces usamos el control arbitrario **u** durante el intervalo de tiempo $[t, t + h]$, y entonces cambiamos a la ley de control óptimo para el resto del periodo de tiempo. Toda la idea de la programación dinámica se reduce al siguiente procedimiento.

* Primero, dado el punto (t, x), como en la página anterior, consideramos las siguientes dos estrategias sobre el intervalo de $[t, T]$:

Estrategia I. Usar la ley óptima $\hat{\mathrm{u}}$.

Estrategia II. Usar la ley de control $\mathbf{u}^*$ definida anteriormente.

* Entonces estimamos las utilidades esperadas obtenidas por las respectivas estrategias.

* Finalmente, usando el hecho de que la estrategia I por definición tiene que ser al menos tan bueno como la estrategia II, y haciendo tender h a cero, obtenemos nuestra ecuación diferencial parcial fundamental.

Utilidad esperada para la estrategia I: Ésta es trivial, puesto que por definición la utilidad es el óptimo dado que $\mathcal{J}(t,x,\hat{\mathrm{u}})=V(t,x)$.

Utilidad esperada para la estrategia II. Dividimos el intervalo de tiempo $[t, T]$ en dos partes, los intervalos $[t, t + h)$ y $(t + h, T]$ respectivamente.

* La utilidad esperada, usando la estrategia II, para el intervalo de tiempo $[t, t + h)$ está dado por

$$E_{t,x}\left[\int_t^T F(s,X_s^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_s)ds\right].$$

* En el intervalo $[t + h, T]$ observamos que al tiempo $t + h$ estaremos en el estado (estocástico) X_{t+h}^{u}. Puesto que, por definición usaremos la estrategia óptima durante el intervalo $[t + h, T]$ vemos que la restante utilidad esperada al tiempo $t + h$ está dada por $V(t+h,X_{t+h}^{\mathrm{u}})$. En consecuencia la utilidad esperada sobre el intervalo $[t + h, T]$, condicional al hecho de que en el tiempo t estamos en el estado x, está dado por

$$E_{t+h}^{\mathrm{u}}[V(t+h,X_{t+h}^{\mathrm{u}})].$$

Siendo así que la utilidad esperada total para la estrategia II es

$$E_{t,x}\left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s)ds + V(t+h, X_{t+h}^{\mathrm{u}})\right].$$

Comparando las estrategias: Por definición la estrategia I es la óptima, por ello tenemos la siguiente desigualdad:

$$V(t,x) \geq E_{t,x}\left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s)ds + V(t+h, X_{t+h}^{\mathrm{u}})\right]. \tag{13}$$

También notamos que el signo de desigualdad se debe a que la ley de control arbitraria **u** seleccionada, la cual usamos para el intervalo [$t + h$, T] no necesita ser óptima.

Observación. Tenemos la igualdad en (13) si y sólo si la ley de control **u** es una ley óptima $\hat{\mathrm{u}}$. (Nótese que una ley óptima no tiene que ser única).

Ya que, por la suposición, V es suave usaremos la fórmula de Itô para obtener

$$\begin{aligned} V(t+h, X_{t+h}^{\mathrm{u}}) = V(t,x) + \int_t^{t+h}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^{\mathrm{u}}) + \mathcal{A}^{\mathrm{u}}V(s, X_s^{\mathrm{u}})\right\}ds \\ + \int_t^{t+h}\nabla_x V(s, X_s^{\mathrm{u}})\sigma^{\mathrm{u}}dW_s. \end{aligned} \tag{14}$$

Si aplicamos el operador esperanza $E_{t,x}$ a esta ecuación, y asumimos suficiente integrabilidad, entonces la integral estocástica se desvanecerá. Entonces podemos insertar la ecuación resultante dentro de la desigualdad (13). El término $V(t, x)$ se cancelará, dejándonos con la desigualdad

$$E_{t,x}\left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s) + \left\{\frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^{\mathrm{u}}) + \mathcal{A}^{\mathrm{u}}V(s, X_s^{\mathrm{u}})\right\}ds\right] \leq 0. \tag{15}$$

Dividiendo por h, se mueve h dentro de la esperanza y se hace tender h a cero. Asumiendo suficiente regularidad para permitirnos tomar el límite dentro de la esperanza, usando el teorema fundamental del cálculo integral, y recordando que X_t = x, obtenemos

$$F(t,x,u) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \mathcal{A}^u V(s,x) \leq 0, \tag{16}$$

donde u denota el valor de la ley **u** evaluada en (t, x), i. e., u = **u**(t, x). Puesto que la ley de control **u** fue arbitraria, esta desigualdad se mantendrá para todos las elecciones de $u \in \mathcal{U}$, y se tendrá la igualdad si y sólo si $u = \hat{\mathrm{u}}(t, x)$. Tenemos por consiguiente

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup_{u\in\mathcal{U}}\left\{F(t,x,u) + \mathcal{A}^u V(s,x)\right\} = 0.$$

Durante el proceso el punto (t, x) fue fijo, pero como fue tomado arbitrariamente vemos que la ecuación es verdadera para todo $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, tenemos una ecuación diferencial parcial, obviamente necesitamos unas condiciones de frontera. Una de esas condiciones se obtiene fácilmente, pues $V(T, x) = \Phi(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema (**La Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman**). Bajo la suposición, lo siguiente se cumple.

1. V satisface la ecuación de HJB.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup\limits_{u \in \mathcal{U}} \left\{ F(t,x,u) + \mathcal{A}^u V(s,x) \right\} = 0 & \forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ V(T,x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2. $\forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$ el supremo en la ecuación de HJB de arriba es alcanzado por $u = \hat{u}(t, x)$.

Teorema (**Teorema de Verificación)**. Suponga que tenemos dos funciones $H(t, x)$ y $g(t, x)$, tal que

* H es suficientemente integrable (véase la siguiente observación), y resuelve la ecuación de HJB

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x) + \sup\limits_{u \in \mathcal{U}} \left\{ F(t,x,u) + \mathcal{A}^u H(s,x) \right\} = 0 & \forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ H(T,x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

* La función g es una ley de control admisible.
* Para cada (t, x), el supremo en la expresión

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ F(t,x,u) + \mathcal{A}^u H(s,x) \right\}$$

se alcanza por la elección $u = g(t, x)$.

Entonces lo siguiente es cierto.

1. La función valor V óptima para el problema de control está dada por $V(t, x) = H(t, x)$.
2. Existe una ley de control óptimo $\hat{u}$, y de hecho $\hat{u}(t,x) = g(t,x)$.

La letra H ha sido usada en lugar de V en la ecuación de HJB, esto es porque V por definición denota la función de valor óptima.

Demostración (para consultar toda la prueba ver [3]). Supongamos a H y g como arriba. Ahora escogemos una ley de control arbitraria $u \in \mathcal{U}$, y fijamos un punto (t, x). Definimos a X^{u} en el intervalo de tiempo $[t, T]$ como la solución a la ecuación

$$dX_s^{\mathrm{u}} = \mu(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}(\mathrm{s}, X_s^{\mathrm{u}}))ds + \sigma(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}(\mathrm{s}, X_s^{\mathrm{u}}))dW_s,$$
$$X_t = x.$$

insertando el proceso X^{u} dentro de la función H y usando la fórmula de Itô se obtiene

$$H(T, X_T^{\mathrm{u}}) = H(t,x) + \int_t^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^{\mathrm{u}}) + \mathcal{A}^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}}) \right\} ds$$
$$+ \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^{\mathrm{u}}) \sigma^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}}) dW_s.$$

Como H resuelve la ecuación de HJB vemos que

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t,x) + F(t,x,u) + \mathcal{A}^u H(t,x) \le 0$$

para toda $u \in \mathcal{U}$, y por lo tanto tenemos, para cada s y con probabilidad P casi donde sea (es decir, se cumple esta condición en todas partes, y donde no se cumple se tiene medida de probabilidad cero), la desigualdad

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t,x) + \mathcal{A}^u H(t,x) \le -F(t,x,u).$$

De las condiciones de frontera para la ecuación de HJB tenemos que $H(T, X_T^{\mathrm{u}}) = \Phi(X_T^{\mathrm{u}})$, así obtenemos la desigualdad

$$H(t,x) \ge \int_t^T F^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}}) ds + \Phi(X_T^{\mathrm{u}}) + \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^{\mathrm{u}}) \sigma^{\mathrm{u}} dW_s.$$

Tomando las esperanzas, y suponiendo suficiente integrabilidad, hacemos que la integral estocástica desaparezca, dejándonos con la desigualdad

$$H(t,x) \ge E_{t,x}\left[\int_t^T F^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}}) ds + \Phi(X_T^{\mathrm{u}}) \right] = \mathcal{J}(t,x,\mathrm{u}).$$

Ya que la ley de control **u** fue tomada arbitrariamente esto nos da

$$H(t,x) \ge \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t,x,\mathrm{u}) = V(t,x). \tag{17}$$

Para obtener la otra desigualdad, menor que, escogemos una ley de control específica **u**(t, x) = **g**(t, x). Realizando los mismos cálculos, y utilizando el hecho la suposición tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t,x) + F\mathrm{g}(t,x) + \mathcal{A}^{\mathrm{g}} H(t,x) = 0,$$

obtenemos la igualdad

$$H(t,x) = E_{t,x}\left[\int_t^T F^{\mathrm{g}}(s, X_s^{\mathrm{g}})ds + \Phi(X_T^{\mathrm{g}})\right] = \mathcal{J}(t,x,\mathrm{g}). \qquad (18)$$

Por el otro lado, tenemos la desigualdad trivial

$$V(t,x) \geq \mathcal{J}(t,x,\mathrm{g}), \qquad (19)$$

así que, usando (17)-(19), obtenemos

$$H(t,x) \geq V(t,x) \geq \mathcal{J}(t,x,\mathrm{g}) = H(t,x).$$

Esto muestra de hecho que

$$H(t,x) = V(t,x) = \mathcal{J}(t,x,\mathrm{g}),$$

lo cual prueba que H = V, y que **g** es la ley de control óptimo.

Observación. El supuesto de que H es "suficientemente integrable" en el teorema de arriba se hace con el propósito de que la integral estocástica tenga valor esperado cero. Este será el caso si, por ejemplo, H satisface la condición

$$\nabla_x H(s, X_s^{\mathrm{u}})\sigma^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}}) \in \mathcal{L}^2,$$

para todas las leyes de control admisibles.

3.4 Manipulando la Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Consideramos nuestro problema de control óptimo estocástico estándar con la correspondiente ecuación de HJB:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup\limits_{u \in \mathcal{U}}\left\{F(t,x,u) + \mathcal{A}^u V(s,x)\right\} = 0, \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \qquad (20)$$

Esquemáticamente procedemos como sigue.

1. Considere la ecuación de HJB como una ecuación diferencial parcial para una función desconocida V.

2. Fije un punto arbitrario $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ y resuelva, para esta elección fija de (t, x), el problema de optimización estático

$$\max_{u \in \mathcal{U}}[F(t,x,u) + \mathcal{A}^u V(t,x)].$$

3. Nótese que en este problema u es la única variable, mientras que t y x son consideradas como parámetros fijos. Las funciones F, μ, σ y V son consideradas como dadas.

4. La elección óptima de u, denotada por $\hat{u}$, dependerá de nuestra elección de t y x, así como también de V y de sus derivadas parciales. Para destacar esta dependencia escribimos $\hat{u}$ como

$$\hat{u} = \hat{u}(t,x;V). \tag{21}$$

5. La función $\hat{u}(t,x;V)$ es nuestra candidata para la ley de control óptimo, pero dado que desconocemos V esta expresión es incompleta. Por lo tanto, sustituimos la expresión para $\hat{u}$ en (21) dentro de la ecuación diferencial parcial (20), dándonos la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + F^{\hat{u}}(t,x) + \mathcal{A}^{\hat{u}} V(t,x) = 0, \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \tag{22}$$

Ahora resolvemos la ecuación diferencial parcial de arriba (ver la observación abajo). Entonces ponemos la solución V dentro de (21). Usando el teorema de verificación podemos identificar a V como la función valor óptima, y $\hat{u}$ como la ley de control óptima.

Observación. El trabajo duro de la programación dinámica consiste en resolver el punto 5 anterior. No hay métodos analíticos generales disponibles para esto, así que el número de problemas de control óptimos conocidos con una solución analítica es de hecho muy pequeño. En un caso real uno usualmente trata de conjeturar una solución. Tal conjetura se basa en la observación intuitiva que si hay una solución analítica al problema, entonces es muy probable que V herede algunas propiedades estructurales de la función de frontera Φ, así como de F, la función de utilidad instantánea.

CAPÍTULO 4. MAXIMIZACIÓN DE UTILIDAD Y VALUACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Se supone que la volatilidad es modelada por un movimiento geométrico Browniano. Se supone que los agentes tienen acceso a tres activos financieros: acción, una opción (opciones) sobre la acción y un bono libre de riesgo que paga tasa fija, r. Se supone que no hay impuestos ni costos de transacción en el mantenimiento del portafolio, es decir, no hay comisiones.

4.1 Valuación de una opción con volatilidad estocástica que sigue una cadena de Markov.

La volatilidad estocástica es una de las principales causas para que los precios observados de las opciones se desvíen del modelo de Black-Scholes, B-S, [4]. Muchos modelos de volatilidad estocástica en el precio del activo subyacente se han trabajado con procesos estocásticos en tiempo continuo. Debido a que no se negocia la volatilidad, entendiéndola como un activo, ésta no puede ser replicada por ningún activo existente, la valuación de la opción se complica por la presencia de los precios del mercado de riesgo.

En 1990 R. J. Ritchey notó que la solución de Hull y White [14] es una suma ponderada de soluciones de B-S, lo cual implica que el bien subyacente sigue unas distribuciones normales mixtas. Posteriormente Chen Guo [11] modifica el procedimiento en el trabajo original de Ritchey, en el cual se desarrolla un árbol binomial, y propone una cadena de Markov finita con k niveles de volatilidad discreta (estados), así la mezcla siempre tiene k distribuciones que la conforman.

El espacio de estados de volatilidad finito también hace que sea posible la cobertura libre de riesgo. Si existen más de $2n + 1$ (donde n es un entero positivo) opciones negociadas contra el mismo activo subyacente, ahora mostramos que el portafolio de cobertura libre de riesgo puede ser establecido tal que

(i) el portafolio es libre de riesgo sin importar que estado de la volatilidad ocurra;

(ii) el valor del portafolio y sus retornos instantáneos son idénticos a través de todos los estados de la volatilidad.

El bien subyacente sigue un proceso lognormal de la siguiente forma:

$$dS = \mu S dt + \sigma(t) S dZ, \tag{1}$$

excepto que la volatilidad $\{\sigma(t),\ t \geq 0\}$ se asume como una cadena de Markov, la cual se especifica por una matriz de probabilidades de transición de un paso:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11}(\Delta t) & \mathrm{P}_{11}(\Delta t) & \cdots \mathrm{P}_{1k}(\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{P}_{i1}(\Delta t) & \mathrm{P}_{i2}(\Delta t) & \cdots \mathrm{P}_{ik}(\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{P}_{k1}(\Delta t) & \mathrm{P}_{k2}(\Delta t) & \cdots \mathrm{P}_{kk}(\Delta t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

La entrada *i-j*

$$p_{ij}(\Delta t) = \mathrm{Prob}\left\{\sigma(t+h) = \sigma_j \mid \sigma(t) = \sigma_i\right\} \geq 0 \tag{3}$$

denota la probabilidad de que la volatilidad presente en el estado σ_i transitará al estado σ_j sobre un intervalo de tiempo fijo Δt. Los *k* niveles de la volatilidad son ordenados e indexados del más bajo al más alto:

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k. \tag{4}$$

El intervalo de tiempo puede ser arbitrariamente pequeño, y en el límite la cadena de Markov se vuelve un proceso de Markov en tiempo continuo. Nos restringiremos al caso discreto por conveniencia para estimar la probabilidad de transición a n pasos,

$$p_{ij}(n \cdot \Delta t) = \mathrm{Prob}\left\{\sigma(t + n \cdot \Delta t) = \sigma_j \mid \sigma(t) = \sigma_i\right\}, \tag{5}$$

la cual es la entrada *i-j* de la matriz de transición en *n*-pasos. Por la propiedad de Chapman Kolmogorov, descrita en el capítulo 2, dicha matriz es la matriz de transición a un paso elevada a la enésima potencia. Debido a que los mercados financieros cierran tras un día de comercio, el marco discreto se justifica.

Sea $F^j(S, X_j, T_j - t; r, \sigma(t))$ el precio de la j-ésima opción call (opción de compra, da el derecho, mas no la obligación de comprar un activo subyacente) en el activo, el cual se distingue de los demás por su precio de ejercicio o fecha de expiración. Consideremos el caso *k* = 2, en el cual la opción puede asumir cualquiera de los dos valores, denotados por $F^j(\sigma_1)$ y $F^j(\sigma_2)$, respectivamente. Un portafolio libre de riesgo puede ser formado al escoger tres calls arbitrarias, etiquetadas como A, B, C y α, β y γ el aporte de cada una al portafolio. El valor del portafolio de cobertura puede expresarse como

$$V = \alpha F^A + \beta F^B + \gamma F^C - S. \tag{6}$$

Sea la volatilidad σ_1 ó σ_2, o sea, σ_i para $i = \{1, 2\}$, el cambio instantáneo del valor en el portafolio puede ser encontrado por el Lema de Itô

$$\begin{aligned} dV(\sigma_i) = \Big\{ & \alpha\left[\mu S F_S^A(\sigma_i) + F_t^A(\sigma_i) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_i)\right] + \beta\left[\mu S F_S^A(\sigma_i) + F_t^A(\sigma_i) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_i)\right] \\ & + \gamma\left[\mu S F_S^A(\sigma_i) + F_t^A(\sigma_i) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_i)\right] - \mu S \Big\} dt \\ & + \sigma_i S\left[\alpha F_S^A(\sigma_i) + \beta F_S^A(\sigma_i) + \gamma F_S^A(\sigma_i) - 1\right] dZ. \end{aligned}$$

Si los pesos α, β y γ son seleccionados tal que

$$\alpha F_S^A(\sigma_i) + \beta F_S^A(\sigma_i) + \gamma F_S^A(\sigma_i) = 1, \tag{7}$$

el portafolio es libre de riesgo porque

$$\begin{aligned} dV(\sigma_i) = \Big\{ & \alpha\left[\mu S F_S^A(\sigma_i) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_i)\right] + \beta\left[\mu S F_S^A(\sigma_i) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_i)\right] \\ & + \gamma\left[\mu S F_S^A(\sigma_i) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_i)\right]\Big\} dt, \end{aligned} \tag{8}$$

lo cual es independiente del movimiento Browniano dZ. Este resultado es válido para toda *i*. Además es posible garantizar que el cambio instantáneo en el valor del portafolio será idéntico en todos los niveles de la volatilidad, i. e.,

$$dV(\sigma_1) = dV(\sigma_2). \tag{9}$$

Esto último se satisface si los pesos son tales que

$$\begin{aligned} & \alpha\left[\mu S F_S^A(\sigma_1) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_1) - \mu S F_S^A(\sigma_2) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_2)\right] \\ & + \beta\left[\mu S F_S^A(\sigma_1) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_1) - \mu S F_S^A(\sigma_2) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_2)\right] \\ & + \gamma\left[\mu S F_S^A(\sigma_1) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_1) - \mu S F_S^A(\sigma_2) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 F_{SS}^A(\sigma_2)\right] = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

De esta manera los pesos pueden ser resueltos simultáneamente al considerar a (7) para ambos valores de *i* y (10).

Por la ecuación en (9) y el argumento de cobertura sin riesgo de B-S, $dV = rVdt$, se implica que $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$, las probabilidades de transición son irrelevantes para el valor del portafolio, aunque son claramente importantes para los precios individuales de las opciones.

Como la cobertura libre de riesgo hace a la deriva irrelevante, los precios de equilibrio de la opción pueden ser evaluados en un mundo neutral al riesgo donde el precio del bien subyacente sigue un proceso en el precio lognormal neutral al riesgo:

$$dS = rSdt + \sigma(t)SdZ. \qquad (11)$$

Si la volatilidad actual está en $\sigma(t) = \sigma_i$, entonces, la distribución condicional del precio del activo en T es simplemente

$$L(S_T, T; S_t, t) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}(T-t) L_j(S_T, T; S_t, t), \qquad (12)$$

donde

$$L(S_T, T; S_t, t) = \frac{1}{S_T\sqrt{2\pi}\sigma_j\sqrt{T-j}} \exp\left\{\frac{\left[\ln(S_T) - \left(\ln(S_t) + \left(r - \sigma_j^2/2\right)(T-t)\right)\right]^2}{2\sigma_j^2(T-t)}\right\}$$

es la distribución lognormal. El peso de la mezcla $p_{ij}(T-t) = p_{ij}(n\Delta T)$ denota la probabilidad de transición en *n* pasos del estado *i* al estado *j*, lo cual implícitamente supone que el tiempo está dividido en intervalos iguales. El precio de una opción call Europea al tiempo *t* puede ser hallado como

$$\begin{aligned} F\left(S_t, t, X, r; \sigma_i\right) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(0, S_T - X\right) L\left(S_T\right) dS_T \\ &= \sum_{j=1}^{k} p_{ij}\left(T-t\right) e^{-r(T-t)} \int_{X}^{\infty} \left(S_T - X\right) L_j\left(S_T\right) dS_T \\ &= \sum_{j=1}^{k} p_{ij}\left(T-t\right) C\left(S_t, X, r, \sigma_j, T-t\right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C(\sigma_j) &= SN(u_j) - Xe^{-r(T-t)}N(\nu_j), \\ u_j &= \frac{\ln(S/X) + \left(r + \sigma_j^2/2\right)(T-t)}{\sigma_j\sqrt{T-t}} \\ \nu_j &= u_j - \sigma_j\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

es la fórmula de B-S.

4.2 Maximización de la Utilidad.

Ahora nos proponemos analizar un portafolio conformado por una acción, una opción sobre la acción y un bono que paga una tasa de interés fija. En la literatura de las matemáticas financieras no es usual encontrar un portafolio conformado de esta manera, sin embargo, no significa que no se hayan estudiado (ver capítulos finales en Venegas [21]). En este caso la propuesta es analizar el siguiente problema.

Se supone que el precio del activo subyacente, S_t, sigue un movimiento Browniano geométrico, cuya varianza al cuadrado es conducida por otro movimiento Browniano geométrico, i. e.,

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ dV_t = \mu V_t dt + \sigma_t V_t dW_t \end{cases}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de tendencia del subyacente, $\alpha \in \mathbb{R}$ es la tendencia de la varianza y $\beta > 0$ es la volatilidad de la varianza, las cuales son cantidades conocidas. Asimismo, supongamos que los movimientos Brownianos están correlacionados entre sí, de tal forma que

$$\operatorname{Cov}\left(dW_t, dZ_t\right) = \rho dt.$$

Ténganse en cuenta que no se considera el pago de dividendos y no se consideran costos de transacción. Como siempre se supone que el precio de una opción europea de compra, c, depende de las variables de estado, esto es, $c = c\left(S_t, V_t, t\right)$. En lo consecuente, a_t denotará la riqueza real del consumidor-inversionista al instante t. Las proporciones de la riqueza que el agente asigna a la tenencia de los diferentes activos, la acción, la opción y el bono serán denotadas, respectivamente, por x_t, y_t y $1 - x_t - y_t$.

La restricción presupuestal está dada por

$$da_t = x_t a_t dR_S + y_t a_t dR_c + (1 - x_t - y_t) a_t r dt - c_t dt,$$

con $dR_S = dS_t / S_t$ y $dR_c = dc/c$. La diferencia entre c y c_t es que la primera se refiere a la opción y la segunda al bien de consumo. Ahora por el lema de Itô, se tiene que el precio de la opción sigue una ecuación de la forma

$$dc = \mu_c c dt + \sigma_c c dW_t + \xi_c c dZ_t,$$

donde los coeficientes están dados por

$$\mu_c = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \alpha V_t \frac{\partial c}{\partial V_t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2}\beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \rho\beta\sigma_t S_t V_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t}\right)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{c}\sigma_t S_t \frac{\partial c}{\partial S_t}$$

$$\xi_c = \frac{1}{c}\beta V_t \frac{\partial c}{\partial V_t}.$$

Por lo anterior, la ecuación de evolución de la riqueza queda como

$$da_t = a_t\left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right]dt + a_t\left(x_t + \sigma_t + y_t\sigma_c\right)dW_t + a_t y_t \xi_c dZ_t.$$

La función de utilidad se definirá como $u(c_t)$. Suponga que la función de bienestar económico está dada por:

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{\{c_t, x_t, y_t\}} E\left[\int_t^T u(c_s)e^{-\delta s}ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad (13)$$

sujeto a la ecuación de la evolución de la riqueza. El parámetro $\delta > 0$ determina la tasa subjetiva de descuento del individuo, $\mathcal{F}_t$ denota la información relevante disponible al tiempo t y $b(a_T, T)$ representa la función de legado (herencia o salvamento) en T. Observe que también T representa la fecha de ejercicio de la opción. Finalmente, se supone que la función de utilidad es estrictamente creciente y cóncava, en otras palabras, la utilidad marginal es positiva pero decreciente.

Veamos el caso de la función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo. La forma funcional es $u(c_t) = \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}$ y el término de legado es $b(a_T, T) = e^{-\delta T}\frac{a_T^{\gamma}}{\gamma}$, donde γ es el parámetro de aversión al riesgo. Si $\gamma = 1$ el c-i es neutral al riesgo, mientras que si $0 < \gamma < 1$ el c-i es adverso al riesgo. Para resolver (13), con la función de utilidad propuesta se utilizará la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Esto es, la función en (13) debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} & \left\{ \frac{c_t{}^{\gamma}}{\gamma} e^{-\delta t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r) x_t + (\mu_c - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \right. \\
& \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} a_t{}^2 \left[(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c)^2 + y_t{}^2 \xi_c{}^2 + 2(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) y_t \xi_c \rho \right] + \frac{\partial J}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 \qquad (14) \\
& \left. + \frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} a_t \beta V_t \left[(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) \rho + y_t \xi_c \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

Al igualar a cero las derivadas parciales en (14) con respecto de c_t, x_t y $y_{t,}$ se obtienen las siguientes condiciones necesarias para un máximo:

$$
\begin{aligned}
& e^{-\delta t} c_t{}^{\gamma-1} - \frac{\partial J}{\partial a_t} = 0, \quad \mu - r = -(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c + y_t \xi_c \rho) \sigma_t a_t \frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} - \sigma_t \beta V_t \rho \frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} \ \text{ y} \\
& \qquad (15) \\
& \mu_c - r = \left[(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) \sigma_c + y_t \xi_c^2 + (x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) \xi_c \rho + y_t \sigma_c \xi_c \rho \right] a_t \frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} - (\rho \sigma_c + \xi_c) \beta V_t \frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}}.
\end{aligned}
$$

Se propone un candidato de solución de la forma

$$
J(a_t, V_t, t) = e^{-\delta t} g(V_t, t) \frac{a_t{}^{\gamma}}{\gamma}, \qquad (16)
$$

el cual separa variables (multiplicativamente). La función $g(V_t, t)$ es conocida como el coeficiente de premio al riesgo. Este nombre se justifica continuación. A partir de (16) se sigue que

$$
\frac{\partial J}{\partial a_t} = e^{-\delta t} g(V_t, t) a_t{}^{\gamma-1}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} = (\gamma - 1) e^{-\delta t} g(V_t, t) a_t{}^{\gamma-2} \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} = e^{-\delta t} \frac{\partial g}{\partial V_t} a_t{}^{\gamma-1}.
$$

En virtud de estas ecuaciones, el coeficiente de aversión al riesgo satisface

$$
-a_t \frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} = 1 - \gamma = -c_t \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}.
$$

Además

$$
\frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} \frac{V_t}{g} = \frac{1}{V_t} \varepsilon_{g, V_t},
$$

donde $\varepsilon_{g,V}$ es la elasticidad de g con respecto de V_t.

Para obtener la ecuación diferencial parcial que determina el precio de la opción se requiere una solución de esquina. En particular $x_t = 1$ y $y_t = 0$, sustituyendo en (15), estas ecuaciones se transforman en

$$c_t^{\gamma-1} = g(V_t,t)a_t^{\gamma-1}, \quad \mu - r = (1-\gamma)\sigma_t^2 - \rho\sigma_t\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} \quad \text{y}$$

$$\mu_c - r = (1-\gamma)\sigma_t(\sigma_c + \xi_c\rho) - (\sigma_c\rho + \xi_c)\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} \; .$$

En particular, los premios al riesgo para el activo subyacente y el producto derivado están dados por las ecuaciones

$$\lambda_S = \frac{\mu - r}{\sigma_t} = (1-\gamma)\sigma_t - \rho\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} \text{ y } \lambda_c = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c}\left(1 + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\rho\right)(1-\gamma)\sigma_t - \left(\rho + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\right)\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}.$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede concluir que

$$\lambda_c = \lambda_S + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\rho(1-\gamma)\sigma_t - \frac{\xi_c}{\sigma_c}\frac{\beta V_t}{g}\frac{\partial g}{\partial V_t},$$

la cual conduce a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial t} + rS_t\frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - rc + \left[\alpha V_t - \rho\beta V_t(1-\gamma)\sigma_t + \frac{\beta^2 V_t^2}{g}\frac{\partial g}{\partial V_t}\right]\frac{\partial c}{\partial V_t} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2}\beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t}\beta V_t^{3/2} S_t \rho = 0,\end{aligned} \tag{17}$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, V_t, t) = \max(S_t - K, 0)$. Asimismo, la ecuación (14) se simplifica si se sustituye el candidato de solución J y la solución de esquina $x_t = 1$ y $y_t = 0$, en cuyo caso se obtiene

$$0 = \frac{g^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma}g + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial g}{\partial t} + \mu g - g^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(\gamma-1)V_t g + (\alpha V_t + \gamma\sigma_t\beta V_t\rho)\frac{1}{\gamma}\frac{\partial g}{\partial V_t} + \frac{\beta^2 V_t^2}{2\gamma}\frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2},$$

donde se ha utilizado que $c_t = \left[g(V_t,t)\right]^{1/\gamma-1} a_t$ y $\dfrac{\partial J}{\partial t} = \left(-\delta g + \dfrac{\partial g}{\partial V_t}\right)e^{-\delta t}\dfrac{a_t^{\gamma}}{\gamma}.$

De esta manera, la ecuación anterior se transforma en

$$0=-\frac{\partial g}{\partial t}+(\gamma-1)g^{\gamma/(\gamma-1)}+\left[(\delta-\mu\gamma)-\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)V_t\right]g-(\alpha V_t+\gamma\beta V_t^{3/2}\rho)\frac{\partial g}{\partial V_t}-\frac{\beta^2V_t^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2}.$$

La condición de frontera, en este caso, $g(V_t,T)=1,$ lo cual asegura que se satisface el valor del legado. Como puede observarse, se requiere la solución de esta última expresión, $g=g(V_t,t),$ a fin de sustituirla en la expresión que le antecede, y resolverla en $c=c\left(S_t,V_t,t\right).$

4.3 Nueva Propuesta de Portafolio

Consideremos, como hasta ahora, a un consumidor-inversionista racional que trata de optimizar su portafolio, conforme a lo propuesto en la sección 4.2, pero en esta ocasión descomponemos la opción en tres opciones sobre la misma acción (diferenciándose entre sí por el precio de ejercicio y la fecha de vencimiento). De tal forma que el portafolio se verá de la siguiente forma

$$\mathrm{V}=\alpha F^A+\beta F^B+\gamma F^C-S+B. \qquad (18)$$

Esta expresión es parecida a (6) más el bono, B. Al igual que en la sección 4.1 la volatilidad no es una constante, sino que se mueve de un estado predeterminado a otro siguiendo una cadena de Markov finita. La idea de este nuevo portafolio es conjuntar las ideas de las secciones anteriores de este capítulo, de tal forma que si al portafolio en (18) lo llamamos V, éste se puede descomponer en $\mathrm{V}=\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2,$ donde V_1 es el portafolio visto en (6) y V_2 es el bono libre de riesgo; siendo así que si se cumple (7) el portafolio V es libre de riesgo, pues sería la suma de dos portafolios libres de riesgo.

Ahora bien, para el portafolio V_1 se emplea la cadena de Markov para valuar el valor de la opción a través de las ponderaciones $\alpha,\ \beta$ y $\gamma,$ las cuales son representadas por probabilidades en la matriz de transición. A continuación proponemos un ejemplo para mostrar la valuación.

Ejemplo Numérico

Sean σ_1, σ_2 y σ_3 las volatilidades, o en términos de la cadena de Markov, los tres estados con la siguiente matriz de transición de un paso (o diaria):

$$
P = \begin{pmatrix} 0.995 & 0.005 & 0 \\ 0.0025 & 0.995 & 0.0025 \\ 0 & 0.005 & 0.995 \end{pmatrix}
$$

Esto es, la probabilidad de permanecer en el primer estado dado que se está en el primer estado es 0.995; o la probabilidad de estar en el estado dos y pasar al estado tres es 0.0025, donde recordemos que los estados son las volatilidades. Si una opción en consideración expira a los 120 días, las probabilidades de transición se encuentran fácilmente si elevamos P a la potencia 120, lo cual es válido por la ecuación de Chapman Kolmogorov.

$$
P^{120} = \begin{pmatrix} 0.59884 & 0.35031 & 0.05085 \\ 0.17515 & 0.64969 & 0.17515 \\ 0.05085 & 0.35031 & 0.59884 \end{pmatrix}
$$

Tomando el tercer renglón como ejemplo, éste indica que si la volatilidad actual fuera σ_3, entonces, hay un 59.884% de probabilidad de que permanezca en ese estado, mientras que hay un 5.085% de que se mueva al estado uno y un 35.031% de que lo haga al estado dos después de 120 días. De igual manera se interpretan los otros dos renglones correspondientes a las restantes volatilidades.

Tabla 1. **Soluciones Ponderadas de Black-Scholes; S=100; r = 0.08; T = 120.**

Precio de Ejercicio	Precios de Black-Scholes			$\sigma(0)=\sigma_1$	$\sigma(0)=\sigma_2$	$\sigma(0)=\sigma_3$
	$\sigma_1 = 0.01$	$\sigma_2 = 0.02$	$\sigma_3 = 0.03$	Solución Ponderada	Solución Ponderada	Solución Ponderada
70	31.817	31.818	31.881	31.821	31.829	31.856
80	22.077	22.129	22.573	22.120	22.198	22.392
90	12.356	13.005	14.389	12.687	13.134	13.801
100	3.789	5.928	8.141	4.759	5.941	7.145
110	0.331	1.995	4.088	1.105	2.070	3.163
120	0.006	0.495	1.841	0.271	0.645	1.276

Los datos que corresponden a la columna precio de ejercicio se refieren a opciones de compra con diferentes precios de ejercicio; los valores que corresponden a las columnas "Precios de Black-Scholes" son los valores de las opciones call, es decir, sus primas.

Éstas resultan fáciles de calcular pues se aplica directamente la fórmula de Black-Scholes, al no haber incógnitas. Posteriormente las soluciones ponderadas son resultado de multiplicar cada estado (volatilidad) por su respectivo renglón en la matriz de transición de probabilidades una vez que han transcurrido los 120 días.

Por ejemplo, la solución ponderada para un precio de ejercicio de 70 y $\sigma(0) = \sigma_1$ se obtiene:

$$31.817*0.59884+31.818*0.35031+31.881*0.05085 = 31.821.$$

CONCLUSIONES

En la presente tesis se ha conseguido conjuntar bibliografía y referencias diversas que permiten en primera instancia una mayor aproximación a las bases matemáticas que dan sustento a la teoría financiera moderna; como consecuencia es más probable que un lector con escasos o nulos conocimientos en estos tópicos comprenda de una manera más fácil y ágil los principales teoremas y postulados que dan forma a la valuación de derivados y la conformación de portafolios.

Se ha mostrado que es posible para un consumidor-inversionista racional conformar una cobertura libre de riesgo empleando tres opciones (call europeas) sobre una misma acción; y posteriormente se ilustra cómo se valúa una opción considerando las ponderaciones, probabilidades relacionadas a cada estado de la volatilidad, para obtener una solución a la que llamamos ponderada.

Por otro lado, se muestra que un consumidor-inversionista racional, en un ambiente de riesgo incertidumbre, valúa opciones europeas cuando la volatilidad es conducida por un proceso estocástico de manera independiente a sus preferencias.

Finalmente, se concluye también que es posible extender la presente investigación. Por ejemplo, se puede proponer formalmente la construcción de una función de distribución que asigne las probabilidades empleadas en la cadena de Markov del ejemplo en el capítulo 4; se puede llevar el análisis a un proceso de Markov más general; se pueden incorporar otros instrumentos financieros al análisis; y otras extensiones más que el lector proponga.

Apéndice A

Proposición. Sea B tal que $\mathrm{P}(B) > 0$. La función $A \to \mathrm{P}(A|B)$ definida como

$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$, $\forall A \in \mathcal{F}$ es una medida de probabilidad.

Demostración.

- $\mathrm{P}(B\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(B\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$
- $\mathrm{P}(A\cap B) \le \mathrm{P}(B) \Rightarrow 0 \le \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} \le 1$
- $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(A_1\cap B) + \mathrm{P}(A_2\cap B) + \cdots}{\mathrm{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{P}(A_n\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

  los A_n son ajenos dos a dos.

Lema de Borel-Cantelli. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de eventos

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty$, y los eventos A_n son independientes, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$.

Demostración.

(a)

$$\mathrm{P}(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

$$\mathrm{P}(\liminf A_n^c) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c) \le \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} \mathrm{P}(A_n^c)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} (1 - \mathrm{P}(A_n)) \le \lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} e^{-\mathrm{P}(A_n)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)} = 0.$$

(b)

$$\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1 - \mathrm{P}(\liminf A_n^c)$$

$$\mathrm{P}(\liminf A_n^c) \le \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} \mathrm{P}(A_n^c)$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} (1 - \mathrm{P}(A_n)) \le \lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} e^{-\mathrm{P}(A_n)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)} = 0$$

$\therefore\ \mathrm{P}(\limsup A_n) = 1 - \mathrm{P}(\liminf A_n^c) = 1.$

Apéndice B

- Sea $X(s)$ un proceso adaptado. Muestre que para una partición arbitraria $\{s_1, \ldots, s_n\}$ en el intervalo $[0, t]$ tenemos

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X(s_i)^2](s_{i+1} - s_i).$$

Demostración. La expresión $\left\{\sum_{i=1}^{n} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right\}^2$ puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) &= \sum_{i,j=1}^{n} X(s_i)X(s_j)(B(s_{i+1}) - B(s_i))(B(s_{j+1}) - B(s_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X^2(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 + \sum_{i\neq j}^{n} X(s_i)X(s_j)(B(s_{i+1}) - B(s_i))(B(s_{j+1}) - B(s_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X^2(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 + 2\sum_{i<j}^{n} X(s_i)X(s_j)(B(s_{i+1}) - B(s_i))(B(s_{j+1}) - B(s_j)).\end{aligned}$$

Consideramos la esperanza de las dos sumas en la última igualdad: en la primera suma tenemos que $X(s_i)$ es $\mathcal{F}_{s_i}$-adaptada y $(B(s_{i+1}) - B(s_i)$ es independiente de $\mathcal{F}_{s_i}$ ya que los incrementos del movimiento Browniano son independientes. Por lo tanto, $X^2(s_i)$ es independiente de $(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2$, y

$$E\left[X^2(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2\right] = E[X^2(s_i)]E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = E[X^2(s_i)](s_{i+1} - s_i).$$

En la última igual empleamos el hecho de que $B(s_{i+1}) - B(s_i) \sim \mathcal{N}(s_{i+1} - s_i)$.

A continuación probaremos que la segunda suma tiene esperanza cero: como $i < j$, $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ será independiente de $B(s_{j+1}) - B(s_j)$ a partir de la propiedad de los incrementos independientes del movimiento Browniano. Además, $B(s_{j+1}) - B(s_j)$ es independiente de $X(s_i)$ y $X(s_j)$ puesto que son $\mathcal{F}_{s_i}$- y $\mathcal{F}_{s_j}$-adaptadas respectivamente, con $\mathcal{F}_{s_i} \subset \mathcal{F}_{s_j}$. Sabiendo que los incrementos del movimiento Browniano tienen media cero encontramos

$$\begin{aligned}&E\left[X(s_i)X(s_j)(B(s_{i+1}) - B(s_i))(B(s_{j+1}) - B(s_j))\right] \\ &\qquad = E\left[X(s_i)X(s_j)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right]E\left[(B(s_{j+1}) - B(s_j))\right] = 0.\end{aligned}$$

- Muestre que

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))(B(s_{i+1})-B(s_i))^2 - \sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))(s_{i+1}-s_i)\right)^2\right] \to 0,$$

cuando $n \to \infty$ y $\{s_i\}_{i=1}^n$ es una partición del intervalo [0, t].

Demostración. Para simplificar la notación ligeramente, definamos $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ y $\Delta B_i = B(s_{i+1}) - B(s_i)$. Por lo tanto, la esperanza nos deja con

$$E\left[\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))((\Delta B_i)^2 - \Delta s_i))^2\right] = \sum_{i,j=1}^{n-1} E\Big[f''(B(s_i))\, f''(B(s_j)) \\ \times\left((\Delta B_i)^2 - \Delta s_i\right)\left((\Delta B_j)^2 - \Delta s_j\right).$$

Si se tiene que $i < j$ entonces $f''(B(s_i))\, f''(B(s_j))\left((\Delta B_i)^2 - \Delta s_i\right)$ y $(\Delta B_j)^2 - \Delta s_j$ son independientes. Los términos, por consiguiente, tendrán esperanza cero en este caso pues $E\left[(\Delta B_j)^2\right] = \Delta s_j$. Igualmente, todos los términos desaparecerán cuando $j < i$. Por lo tanto, sólo nos quedan los términos donde $i = j$.

Usando la adaptabilidad de $f''(B(s_i))$ nos encontramos con

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i))((\Delta B_i)^2 - \Delta s_i))^2\right] &= \sum_{i=1}^{n-1} E\left[(f''(B(s_i)))^2\right] E\left[(\Delta B_i)^4 - 2(\Delta B_i)^2 \Delta s_i + (\Delta s_i)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} E\left[(f''(B(s_i)))^2\right]\left(3(\Delta s_i)^2 - 2(\Delta s_i)^2 + (\Delta s_i)^2\right) \\ &\le 2 \max_i \Delta s_i \sum_{i=1}^{n-1} E\left[(f''(B(s_i)))^2\right] \Delta s_i . \end{aligned}$$

Permitiendo que $n \to \infty$ se sigue que $\Delta s_i \downarrow 0$, y por ende hemos terminado la demostración.

Apéndice C

Definición. Sea el proceso del precio N-dimensional $\{S(t); t \geq 0\}$ dado.

1. Un **Portafolio Autofinanciable** (la mayoría de las veces simplemente se le llama **portafolio**) es cualquier proceso $\mathcal{F}_t^S$-adaptado N-dimensional $\{h(t); t \geq 0\}$.

2. El portafolio h se dice Markoviano si es de la forma $h(t) = h(t, S(t))$, para alguna función $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

3. El **proceso de valor** V^h correspondiente al portafolio h está dado por

$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) S_i(t).$$

4. Un **proceso de consumo** es cualquier proceso $\mathcal{F}_t^S$-adaptado unidimensional $\{c(t); t \geq 0\}$.

5. Una **pareja consumo-portafolio (*h*, *c*) es llamada autofinanciable** si V^h satisface la condición $dV^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt,$ i. e., $dV^h(t) = h(t)dS(t) - c(t)dt.$

Definición. Para un portafolio dado h el correspondiente **portafolio relativo *u*** está dado por

$$u_i(t) = \frac{h_i S_i(t)}{V^h(t)}, \ i = 1, \ldots, N,$$

donde tenemos $\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1.$

Lema. Una pareja consumo-portafolio (h, c) es autofinanciable si y sólo si

$$dV^h(t) = V^h(t) \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)dt.$$

Demostración.

Por definición (h, c) es autofinanciable si $dV^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt,$ y el portafolio relativo $u_i(t) = \frac{h_i S_i(t)}{V^h(t)}, \ i = 1, \ldots, N.$ Multiplicando y dividiendo por $\frac{h_i(t) S_i(t)}{V^h(t)} \frac{V^h(t)}{h_i(t) S_i(t)}$ dentro de la suma se obtiene la expresión deseada.

Bibliografía/Referencias

[1] Bäuerle, N. and Rieder, U. (2004). "Portfolio Optimization with Markov-modulated stock prices and interest rates". IEEE Trans. Automatic Control 49, pp. 442-447.

[2] Bertsekas, Dimitri P. and Shreve, Steven E. (1978). Stochastic Optimal Control. Academic Press, First Edition.United States of America.

[3] Björk, Tomas (1998). Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press, First Edition. United Kingdom.

[4] Black, Fischer and Scholes, Myron (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". The Journal of Polytical Economy, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

[5] Brzezniak, Zdzislaw and Zastawniak, Tomasz (1999). Basic Stochastic Process. Springer, Second Printing. United Kingdom.

[6] Caballero, M. E.; Rivero, V. M.; Uribe Bravo, G.; y Velarde, C. (2004). Cadenas de Markov. Sociedad Matemática Mexicana, Primera Edición. México.

[7] Chang, Fwu-Ranq (2004). Stochastic Optimization in Continuous Time. Cambridge University Press, First Edition. United States of America.

[8] Duan, Jin-Chuan and Simonato, Jean Guy (2001). "American Option Pricing Under Garch by a Markov Chain Approximation". Journal of Economic Dynamics and Control 25, 1689-1718.

[9] Espen Benth, Fred (2004). Option Theory with Stochastic Analysis. Springer, First Edition (in English). Germany.

[10] Fouque, Jean Pierre; Papanicolaou, George; and Sircar, K. Ronnie (2006). Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility. Cambridge University Press, Second Reprint. United States of America.

[11] Guo, Chen (1998). "Option Pricing with Stochastic Volatility Following a Finite Markov Chain". International Review of Economics and Finance, Vol. 7, No. 4, pp. 407-415.

[12] Hernández Lerma, Onésimo. Notas de Clase (Probabilidad y Procesos Estocásticos, 2009).

[13] Hoel, Paul G.; Port, Sidney C.; and Stone, Charles J. (1972). Introduction to Stochastic Processes. Houghton Mifflin Company, First Edition. United States of America.

[14] Hull, John and White, Alan (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities". The Journal of Finance, Vol. 42, No. 2, pp.281-300.

[15] Jacod, Jean and Protter, Philip (2000). Probability Essentials. Springer, First Edition. Italy.

[16] Korn, Ralf (1998). Optimal Portfolios. World scientific, First reprint. Singapore.

[17] Lamberton, Damien and Lapeyre, Bernard (1996). Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall, First Edition (in English). United Kingdom.

[18] Mackenzie, Donald (2003). “An Equation and its Worlds”. Social Studies of Sciences, Vol. 33, No. 6, pp. 831-868.

[19] Marín, José M. y Rubio, Gonzalo (2001). Economía Financiera. Antoni Bosch, Primera Edición. España.

[20] Oksendal, Bernt (1992). Stochastic Differential Equations. Springer, Third Edition. United States of America.

[21] Venegas Martínez, Francisco (2006). Riesgos Financieros y Económicos. Thomson, Primera Edición. México.