UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERÍA

"MRP Y EOQ BAJO UN ENTORNO DE INCERTIDUMBRE APLICANDO CONJUNTOS BORROSOS"

TESIS

que para obtener el grado de

MAESTRA EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PRESENTA:

BRENDA BERENICE FLORES BRITO

TUTOR: DR. RICARDO ACEVES GARCÍA

NOVIEMBRE 2010

DEDICATORIA

Son muchas las personas a las que me gustaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en el corazón. Sin importar en donde estén, si alguna vez llegan a leer esta dedicatoria quiero darles las gracias por formar parte de mi, por todo lo que me han brindado y por sus bendiciones.

Mami, no me equivoco si digo que eres la mejor mamá del mundo, gracias por todo tu esfuerzo, tu apoyo y por la confianza que depositaste en mi. Gracias porque siempre, aunque lejos, has estado a mi lado.

Papi, éste es un logro que quiero compartir contigo, gracias por creer en mí, quiero que sepas que ocupas un lugar especial en mi corazón, eres mi equilibrio.

A mis hermanas Rosy y Faby, ustedes son mis brazos, mis hemisferios, mi corazón, mi risa, mi llanto, porque siempre confían en mí, son parte de mi vida.

Krishna, aunque todavía no sabes leer, un día vas a prender y por eso también te dedico esta tesis. Te quiero bebé.

Bris, Jimy y Karla, no hay mejor apoyo que ir al café con ustedes, mis mejores amigos, los admiro.

Brenda B. Flores Brito

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en especial a mi director de tesis, el Dr. Ricardo Aceves García por sus asesorías y tiempo que me dedicó para que yo lograra realizar este trabajo.

También agradezco a todos mis profesores por los conocimientos que adquirí con sus enseñanzas en la maestría.

Finalmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios de maestría.

Brenda B. Flores Brito

ÍNDICE

RESUMEN

El presente trabajo de investigación surgió por la necesidad de analizar los modelos para el control de inventarios más utilizados en la industria mexicana, considerando la demanda un parámetro bajo un entorno de incertidumbre, como generalmente se encuentra en los mercados. Para poder dar solución a estos modelos se utilizó la Teoría de Conjuntos Borrosos, la cual permite definir parámetros bajo incertidumbre especificándolos como números borrosos.

Los modelos de inventarios que se muestran son: el modelo de Programación Lineal (PL) para el sistema de Planeación de los Requerimientos de los Materiales (MRP) y los modelos de Lote Económico (EOQ). Primero se plantearon los modelos de forma clásica, posteriormente se resolvieron utilizando los números borrosos. Para esto se utilizó el número borroso trapezoidal (NBTr) y el número borroso triangular (NBT). Además de la descripción de los números borrosos más utilizados, se incluye información sobre la clasificación y los criterios de selección de la funciones de membresía.

Se presentan ejemplos ilustrativos que permiten entender la manera de analizar los modelos incorporando la incertidumbre, así como gráficas y análisis de los resultados. Lo cual permite conocer las ventajas y desventajas de utilizar los números borrosos pero sobre todo dar solución al problema considerando la incertidumbre en la demanda. Para el modelo de MRP se utilizó el software LINGO para resolverlo.

Finalmente, la utilización de los Conjuntos Borrosos a los modelos de inventarios, permitió realizar un análisis de cómo resolver problemas de PL con restricciones flexibles, y realizar cálculos de aproximaciones para los números borrosos utilizando los α-cortes. Se recomienda realizar un análisis de las desviaciones de los valores calculados y las aproximaciones, cuando las diferencias entre los valores son grandes, sin embargo en el presente trabajo debido a los resultados obtenidos en el ejemplo ilustrativo no fue necesario realizarlo.

INTRODUCCIÓN

El control de los inventarios surge de la necesidad de tener disponibilidad de materias primas para iniciar el proceso de producción y de tener suficientes productos terminados para satisfacer la demanda de los clientes. **Por inventario debe entenderse al material que se encuentra almacenado esperando ser utilizado**. Existen diferentes tipos de inventario que se clasifican y ubican según su propósito o uso. En relación a la producción el inventario se clasifica en tres categorías: *de materias primas, de trabajo en proceso y de productos terminados.*

El *inventario de materias primas* se refiere al material que las empresas adquieren sin procesar, o que es necesario para el proceso de producción, por ejemplo: madera, metales, sustancias químicas, combustibles, etc. Por otro lado, el *inventario de trabajo en proceso* se origina durante la producción, son productos que han iniciado una transformación pero que aun necesitan pasar por procesos para considerarse productos terminados. Finalmente, el inventario de productos terminados cubre los productos o bienes que han concluido todos los procesos de fabricación y que se almacenan esperando ser vendidos o enviados al cliente. Existen otras clases de inventarios que se originan debido al proceso de distribución, o materiales que son necesarios para el funcionamiento de la empresa, por ejemplo los suministros que son necesarios para el mantenimiento de equipo.

El objetivo principal de las empresas es tener inventarios pequeños, con la finalidad de disminuir costos por mantener en existencias las mercancías, por otro lado las empresas buscan dar un servicio de la mejor calidad a sus clientes. Tanto la disminución de inventarios como el servicio a los clientes tienen un comportamiento contradictorio, debido a que la disminución en la disponibilidad (en consecuencia los costos por mantener) implica un mayor riesgo en el servicio al cliente; ya que la disponibilidad de las mercancías disminuye. Y por otro lado, si se busca tener siempre una disponibilidad al cien por ciento se tendrá un impacto en el aumento del tamaño de los inventarios.

La mayoría de las empresas deciden tener inventarios altos, para satisfacer siempre la demanda de sus clientes, esta política de inventarios tiene costos altos pero una mejor disponibilidad, sin embargo, no permite que las empresas se esfuercen por buscar una mejor política. Por otro lado las empresas que sacrifican la disponibilidad por la disminución de los costos, se ven obligadas a buscar nuevas prácticas para mejorar la disponibilidad pero sin sacrificar de forma considerable los inventarios.

Las implicaciones financieras y operativas que la eficiencia o deficiencia en el control de los inventarios puede llevar consigo en los resultados de una empresa, está conduciendo a las compañías a tomar mayor conciencia acerca de una correcta administración de sus materiales. Lamentablemente, aún hay empresas que no se han adentrado lo suficiente, ni atacado de raíz las causas y consecuencias detener inventarios altos o desproporcionados.

Una de las razones de ser del inventario es asegurar el surtido de un producto ante una demanda incierta. A mayor incertidumbre, mayor inventario. Generalmente se aplican técnicas o modelos exactos para determinar la cantidad a ordenar, con datos de demanda que no se adecuan a la realidad. La metodología clásica utilizada para el estudio del comportamiento de la demanda, es la aplicación de un sistema de pronósticos (Gutierrez y Vidal 2008), la mayoría de las empresas recurre a esta técnica para determinar con cierta probabilidad la demanda para cierto período de tempo. Sin embargo, la demanda del mercado es difícil de cuantificar.

Si se considera a la demanda del producto como un parámetro bajo incertidumbre, es decir, se define como un dato incierto que puede estar alrededor de ciertos valores, se posible aplicar la **Teoría de Conjuntos Borrosos** para tratarla. La demanda es establecida como un dato incierto, debido a que los mercados que tienen que satisfacer las empresas, actualmente, tienen ese comportamiento. El entorno de incertidumbre de la demanda del mercado puede ser analizado por un esquema de tres escenarios:

Optimista, pesimista y más probable(Gutierrez y Vidal 2008). Sin embargo en las áreas en donde los criterios humanos, la evaluación y las decisiones son importantes, la Teoría de los Conjuntos Borrosos puede ser de gran utilidad (Mula, Poler y Garcia, Aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos en la Planficación de la Producción: Un estudio de la literatura. 2004).

Es importante mencionar que actualmente existen diferentes técnicas y modelos para la gestión de los inventarios, complementando además con software comercial o libre que permiten de forma más rápida, determinar el sistema de inventarios. Sin embargo las empresas siguen teniendo problemas para el control de los inventarios, ya que no existe un panorama claro de cuáles son las metodologías que deben utilizarse para mejorar la gestión de los inventarios mediante herramientas cuantitativas(Wagner 2002); lo que permite seguir realizando estudios sobre este tema.

Se seleccionaron los modelos MRP y EOQ, debido a los resultados obtenidos por *Corporate Resources Management* (Management s.f.), en un estudio realizado para empresas mexicanas de diversos sectores y diferentes tamaños, donde se determinan las técnicas y modelos más utilizados en el control del sistema de inventarios en México.

Este trabajo surgió por la necesidad de resolver los problemas de inventarios considerando la demanda incierta, es decir definiendo su valor como un número borroso. Este estudio incluye la solución al modelo MRP usando Programación Lineal con la demanda definida como un número borroso y para la determinación de una política óptima el modelo de Lote Económico, que se deriva de un análisis gráfico del comportamiento del nivel de almacenamiento, Definiendo también la demanda como un número borroso.

El objetivo de este trabajo de investigación es resolver el problema de inventarios para las técnicas más utilizadas en México, considerando la demanda bajo incertidumbre y definida como un número borroso.

La estructura de este trabajo es la siguiente: En el **Capítulo uno**, se da una idea general de los que es un Sistema de Inventarios, los objetivos y los componentes del mismo, justificando las técnicas utilizadas en este trabajo, por medio de los resultados obtenidos del estudio realizado por la empresa *Corporate Resources Managment* (CRM). En el **Capítulo dos**, se describen por separado cada una de las técnicas que se utilizaran para el análisis en este trabajo, primero se presenta una descripción general de la técnica de Planeación de los Requerimientos de los Materiales (MRP), de los datos de entrada y salida que considera y por último las variables y parámetros del modelo de programación lineal que se utilizan para resolverlo. Dentro del mismo capítulo se presentan las variaciones del modelo de Lote Económico (EOQ), incluyendo para cada modelo los supuestos y las variables que involucran, complementando la información con la gráfica del nivel de almacenamiento, por último se presenta la forma de obtener la política óptima (determinación de Q, T, S, etc.). En el **Capítulo tres**, se presenta la teoría necesaria para definir un parámetro bajo incertidumbre; para especificar un número borroso es necesario definir la función de membresía, por esta razón se presentan los tipos más utilizados de estas funciones y la manera en la que se pueden seleccionar. Finalmente se encuentra una descripción detallada de los dos números borrosos más utilizados, esto permite posteriormente definir la demanda como un número borroso e incorporarla a los modelos originales. Una vez explicada la forma de definir la demanda como un número borroso, se aplica esto a la solución de los MRP y EOQ descritos en el capítulo dos, este análisis se presenta por separado. En el **Capítulo cuatro** se presenta la forma de incorporar a un modelo de programación lineal la borrosidad de un parámetro, se modifica el modelo para MRP y se presenta un ejemplo con datos numéricos. En el **Capítulo cinco**, se presenta la manera de analizar los modelos de Lote Económico nuevamente considerando la incertidumbre en la demanda, de manera general se describen las etapas para resolver el problema, se presentan gráficas de los cálculos y se analizan los resultados. Por último, se presentan las conclusiones a las que se llegó al considerar la demanda bajo incertidumbre y resolver el problema de inventarios con Teoría de Conjuntos Borrosos.

1 SISTEMAS DE INVENTARIOS

1.1 Introducción

El desarrollo de la teoría de inventarios, la aplicación de las matemáticas y la estadística se inició desde los años 50, cuando en la Oficina de Investigación Naval de California destinaron recursos para la investigación en el área (Girlich y Chikan 2001). Desde ese entonces, la diversidad de trabajos de investigación y extensión que se ha desarrollado, mediante la utilización de herramientas técnicas, clásicas y modernas es amplia.

Ballou define a los inventarios como las acumulaciones de materias primas, provisiones, componentes, trabajo en proceso y productos terminados, que aparecen en numerosos puntos a lo largo del canal de producción y de logística de una empresa (Ballou 2004). El incremento en los inventarios implica un incremento en los costos, pero **tener inventarios insuficientes para satisfacer la demanda del mercado implica costos por faltantes y además un mal servicio al cliente.**

La cadena de suministro por sus siglas en ingles SC *(Supply Chain)* se define como, el conjunto de operaciones que relaciona estrechamente a cada uno de los actores, productores y proveedores involucrados en la fabricación de un producto o en la oferta de un servicio, hasta su integración operacional y de gestión. En consecuencia, se trata de un conjunto de operaciones que se da desde la información relativa a la demanda, hasta los datos necesarios para la distribución, pasando por la concepción y la producción propiamente dicha. Por consiguiente la cadena de suministro está formada por varios elementos que interactúan entre sí con el objetivo de realizar de manera eficiente las operaciones de distribución, abastecimiento, almacenamiento y transporte entre otras.

Los inventarios son una de las partes más importantes de los elementos que conforman la cadena de suministro, en la siguiente figura se pueden observar los flujos de materiales y los puntos donde se localizan los inventarios. Estos están localizados en almacenes de materia prima, de producto terminado y dentro de un modo de transporte.

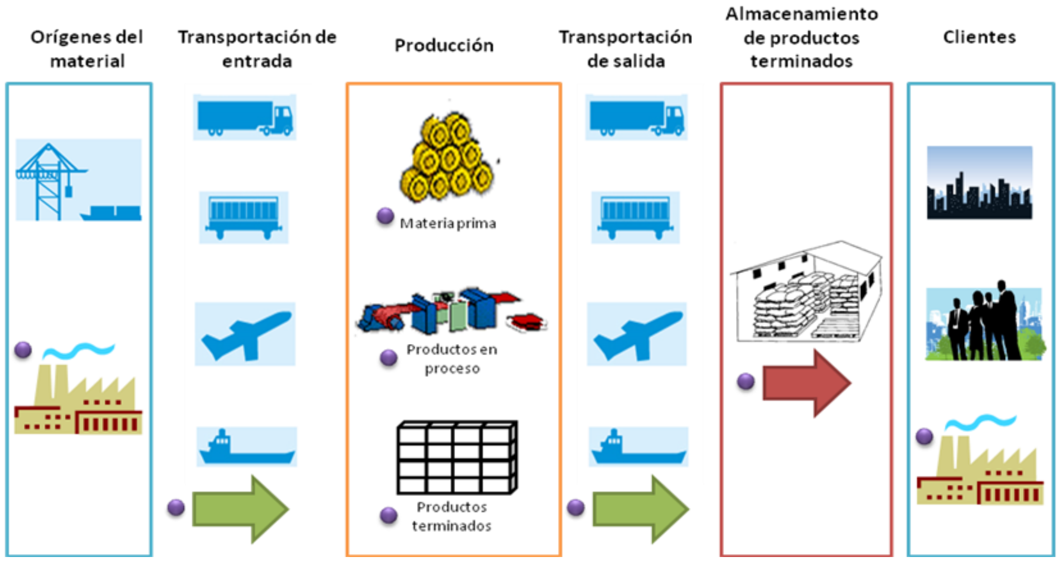

Figura 1 Localización de los inventarios en la cadena de suministro

Fuente: Ballou, Ronald., Logística. Administración de la cadena de suministro, 5ta. Edición. Pearson Educación México, 2004

El proceso de planeación de los inventarios forma parte de un macro proceso de planeación de la cadena de suministro. Si bien no es el único, sí es uno de los más importantes, pues el resto de los procesos de planeación (distribución, capacidades, producción, materiales) depende en gran medida de la estrategia de inventarios que se elija. Lo anterior permite tener una idea más general de la importancia y del impacto de una correcta gestión de los inventarios en el proceso de la cadena de suministro.

Los inventarios se consideran como la acumulación de material, este material tiene un valor monetario para la empresa que lo posee y que trata de controlarlo. Este material se almacenará por un tiempo determinado, esperando ser vendido o utilizado, sin embargo durante este tiempo se encuentra en forma improductiva.

La finalidad de las empresas es definir una política de inventarios que les permita controlar y optimizar sus operaciones logísticas. Se conoce como **control de inventarios** a las actividades y técnicas de manutención de las existencias de artículos en los niveles deseados, independientemente de que sean: materias primas, productos en proceso o producto terminado[1].

1.2 Objetivos de un sistema de inventarios

Los objetivos de aplicar un modelo o técnica para la planeación de un Sistema de Inventarios son: determinar la cantidad óptima a ordenar y cuando se debe de hacer la orden de compra, con la finalidad de reducir lo inmovilizado en el almacén y aumentar el nivel de servicio (disponibilidad). Estos objetivos ayudarán a las empresas entre otras cosas a posponer inversiones en ampliaciones de capacidad de almacenaje.

Cada departamento de una empresa productiva tiene un objetivo cuando se trata de los inventarios, en la siguiente tabla se muestran estos objetivos (Zipper 1984).

Tabla 1. Objetivos de los inventarios para cada departamento

Departamento	Objetivo
Ventas	Estar preparado para atender los pedidos de sus clientes lo más pronto posible, pretende siempre tener existencias suficientes de productos terminados o bien de material para producir rápidamente estos productos.
Producción	Desea ser eficiente, lo cual implica que preferiría mantener un nivel alto de producción para reducir el costo de la misma por producto. Para ello requiere tener en existencia una cantidad suficiente de materiales, componentes y trabajos en proceso para que no se pare la producción por falta de material.
Ingeniería	Prefiere minimizar los inventarios puesto que no se aplazarían demasiado los cambios en ingeniería mientras que con inventarios grandes dichos cambios se podrían hacer hasta agotar los diseños

[1] Definición obtenida del Glosario Logístico de la revista "Énfasis Logístico"

Departamento	Objetivo
	anteriores.
Compras	Quiere obtener los mejores precios de compra. Por ello prefiere hacer pocos pedidos grandes en lugar de muchos pequeños. Además está interesado en constituir inventarios en prevención de alzas en los precios y escasez en el mercado.
Finanzas	Desearía minimizar las formas de invertir en inventarios por el costo de capital y los efectos negativos que tienen los inventarios grandes en los costos.
Personal y Relaciones industriales	Considera adecuada la creación de un inventario durante la época de baja demanda y estabilizar así el nivel de empleados, evitando despidos y una fuente rotación de personal.

1.3 Componentes de un sistema de inventarios

Los componentes de un sistema de inventarios son:

- Patrón de demanda
- Patrón de oferta
- Restricciones de operación
- Mecanismo de decisión o política de pedidos
- Costo total del inventario

A partir de estos componentes se puede decir que *los inventarios se consideran como amortiguadores* entre el proceso de abastecimiento y la demanda. De esta forma se considera el siguiente proceso, en donde por un lado se abastece de bienes y por otro se consumen estos mismos.

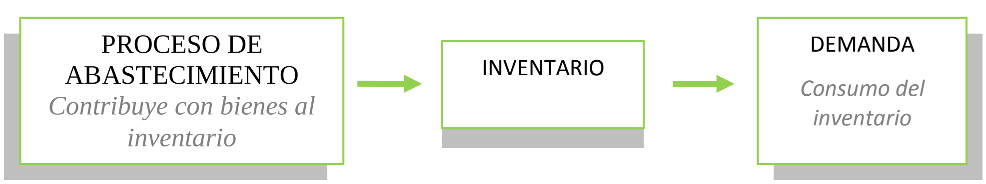

Figura 2 Proceso de abastecimiento y consumo de la demanda

Los inventarios son necesarios debido a las *diferencias en las tasas de los tiempos, entre el abastecimiento y la demanda*, esta diferencia se puede atribuir tanto a factores internos como a factores externos. Los factores endógenos son cuestiones de política, pero los exógenos son incontrolables.

En la Figura 3 se presentan los factores internos más recurrentes, entre los cuales se encuentra el servicio al cliente, economías de escala y suavizamiento de la operación, estos factores dependen de decisiones que se tomen por parte de los administradores o encargados de los inventarios, producción y ventas.

Factores Internos

Factores Internos	Servicio a clientes	El inventario permite satisfacer de inmediato la demanda, lo que trae como consecuencia una satisfacción del cliente.
	Economías de escala	Existen ciertos costos fijos asociados con la producción y la compra, como pueden ser los costos por preparación y los costos por ordenar, respectivamente.
	Suavizamiento de la operación	Se usa cuando la demanda varía con el tiempo. El inventario acumulado en periodos de demanda baja, permite satisfacer cuando la demanda aumenta en otros periodos. De esta forma el departamento de producción opera a una tasa constante.

Figura 3 Descripción de los factores internos

En la Figura 4 se describen los factores externos.

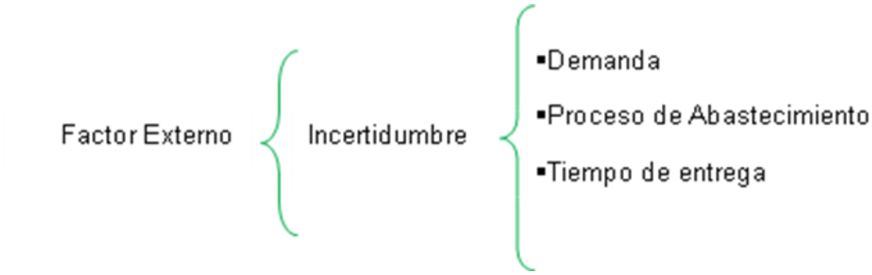

Figura 4 La incertidumbre como factor externo

Una manera de evitar la incertidumbre, es mantener en inventario más unidades de las pronosticadas; esto disminuye la posibilidad de quedarse sin unidades en caso de que la demanda real exceda a la demanda pronosticada; a este inventario adicional se conoce como *inventario de seguridad*. El proceso de reabastecimiento es otra fuente de incertidumbre que puede justificar mantener un inventario de seguridad. El tiempo de entrega se refiere al tiempo que transcurre entre emitir una orden y recibir el producto, en ocasiones este tiempo es incierto, ya que puede que no se reciba la mercancía en la fecha planeada.

Para aplicar un modelo y una política de gestión de inventarios es necesario hacer un estudio de la variabilidad de la demanda, sin embargo, la demanda del mercado cada vez es más difícil de cuantificar y determinar de manera precisa, debido a que varía constantemente, por lo tanto se considera necesario realizar un análisis de la demanda bajo incertidumbre.

La incertidumbre se origina por la falta de información o datos históricos insuficientes sobre el comportamiento de la demanda. En el caso de demanda de un producto, la incertidumbre se origina debido a que no se conoce con certeza la cantidad de unidades que demandará el mercado, y por lo tanto la cantidad de unidades que se debe de producir. Cubrir satisfactoriamente con la demanda es uno de los principales objetivos de las empresas. Pero cada vez se vuelve más complicado. Tomando en cuenta la importancia de la demanda para el control de los inventarios y que se conoce con poca certeza su comportamiento, este trabajo se enfocó en realizar un análisis a este parámetro.

Realizar un análisis bajo incertidumbre requiere de un mayor razonamiento, el aplicar varios parámetros bajo este entorno complica a un más los cálculos y la determinación del modelo como tal.

La mejor estrategia de inventarios es aquella que entiende y considera las características de la demanda de los productos y su complejidad. Finalmente, el fin del proceso de planeación de inventario debe ser, como el de la cadena de suministro, maximizar el servicio al cliente optimizando los recursos y capacidades que la empresa dedica para ello.

1.4 Técnicas conocidas y utilizadas para el control de inventarios en México

En el año 2007 la empresa *Corporate Resources Management* (CRM), realizó un estudio en la industria mexicana sobre las técnicas conocidas y utilizadas para el control del sistema de inventarios de materias primas. CRM consideró empresas de diferentes sectores y además de diferentes tamaños. Se obtuvieron los siguientes resultados:

- La técnica más conocida es Punto de reorden para la planeación de inventarios, esta técnica es sencilla y tiene su utilidad en materiales que presentan una demanda constante, sin embargo cada vez es más complicado encontrar comportamientos de este tipo en los mercados.
- El modelo de EOQ lo conocen 87.2 % de las empresas estudiadas, mientras que la técnica MRP lo conocen el 78%, se puede concluir que en general las empresas a las que se les aplicó este estudio tienen un conocimiento aceptable de las técnicas y modelos que pueden utilizar, sin embargo lo importante de este estudio fue conocer las técnicas y los modelos que las empresas utilizan para el control de los inventarios.
- La técnica más usada es Punto de reorden seguida de EOQ con 76.9%, por otro lado la técnica de Revisión periódica es utilizada únicamente por el 37.5%, mientras que, solo un 58.5% ha hecho uso de la técnica MRP, técnica que requiere de un control en el manejo de las variables de planeación (pronóstico, tiempo de entrega y tamaño de lote) así como llevar un control con los datos históricos para ir actualizando la información.

Sobre el mantenimiento de técnicas de planeación de inventarios, el estudio se enfocó a cuestionar a las empresas sobre la frecuencia con la que revisan los parámetros que usan para la planeación, una buena práctica en estos tiempos es la revisión de los datos al menos cada bimestre, sin embargo, el estudio permitió conocer que existen empresas que realizan sus revisiones anualmente, otras en cambio por semestre. Y desgraciadamente existe un porcentaje mínimo que lo revisa bimestral o menos.

Con este estudio también se determinó la frecuencia de uso; sobre este concepto se analizaron dos perspectivas, la primera referente al porcentaje de las partes controladas por la técnica y la segunda al porcentaje del monto total de inventario controladó por la técnica.

- Nuevamente Punto de reorden sigue controlado la mayor cantidad de los materiales, mientras que, la Revisión periódica controla la menor cantidad de partes.
- Con relación al porcentaje del valor total del inventario controlado, la técnica MRP fue la que obtuvo un mayor porcentaje de control, lo que significa que los pocos que la usan la utilizan para cuidar los productos de mayor valor en el inventario y dejan a las otras técnicas el resto del control del material.

Del estudio anterior se puede concluir que una de las técnicas más utilizadas es la aplicación de los modelos de Lote Económico, ya que el 76.9 % de las empresas la utiliza. Además este modelo controla del 10 al 25% de unidades.

En el caso del modelo de MRP, a pesar de ser una técnica que permite reducir los inventarios y realizar una planeación sobre la producción, solo el 59% de las empresas la utilizan, una de las razones es por la disciplina y mantenimiento tan frecuente que deben de aplicar las empresas. Este modelo controla en unidades del 10 al 25%, sin embardo en el valor total del inventario controlado equivale del 40 al 60%, lo que quiere decir que, a pesar de que las empresas lo utilizan para controlar pocos productos, estos son los que más impactan en costos.

Por lo anterior, este proyecto de investigación se enfoca a los modelos MRP y EOQ, el primero por ser unos de los modelos más eficientes para el control de los inventarios; mientras que, los modelos de EOQ pertenecen a los modelos más utilizados por las empresas y además con más vigencia de uso en la planificación de los inventarios.

La descripción de cada uno de estos modelos se presenta en el siguiente capítulo, donde se describen las variables y parámetros que involucran y consideran, se presenta además la forma de determinar una política óptima para los modelos de Lote Económico. Para el caso de MRP se presenta el modelo de programación lineal, mientras que, para lo modelos de EOQ se describen las fórmulas que permiten obtener el tamaño del pedido, el tamaño del periodo, entre otros.

1.5 El problema de inventarios con datos inciertos

Gran parte del conocimiento con lo que los humanos razonan es inexacto o incierto en uno u otro aspecto, por esta razón el ser humano ha tenido la necesidad de desarrollar varias teorías que permiten la incorporación de la incertidumbre. A continuación se enlistan algunas de estas teorías (Frost 1989).

- **Teoría de la probabilidad**

Esta teoría proporciona un medio para tratar el conocimiento que se refiere a acontecimientos verdaderamente aleatorios. El empleo de la teoría de la probabilidad para tratar con incertidumbre presenta varias desventajas, por mencionar algunas se tiene que:

- Es difícil obtener valores exactos para probabilidades *a priori.* En ocasiones solo se dispone de estimaciones subjetivas.
- El valor de probabilidad único asignado a una hipótesis no indica nada acerca de su precisión.

- **Teoría de la certidumbre**

La teoría de la certidumbre fue desarrollada para utilizarse en sistemas expertos, como parte de un intento para dar solución a algunos problemas de la teoría de la probabilidad. Una ventaja de utilizar esta teoría es, que permite manipular las estimaciones subjetivas tales que los valores calculados son atractivos intuitivamente.

- **Teoría de la evidencia Dempster/Schafer**

En esta teoría hace una distinción entre incertidumbre e ignorancia. Es necesario especificar "*funciones de creencias*" en lugar de probabilidades. Está basada en la teoría de las probabilidades, por esta razón presenta las mismas desventajas.

- **Calculo de la incidencia**

El cálculo de incidencias se basa en la teoría de la probabilidad en teoría de conjuntos. Es un mecanismo para el razonamiento de la incertidumbre, que brinda soluciones aceptables.

- **Teoría de la plausibilidad**

La teoría de la plausibilidad proporciona líneas orientadas para razonar con conocimiento obtenido a partir de fuentes que no son totalmente fiables. En particular, esta teoría permite razonar con conjuntos inconsistentes de conocimiento obtenido a partir de fuentes imperfectas.

- **Teoría de los conjuntos borrosos**

La teoría de los conjuntos borrosos, proporciona un medio para tratar con la incertidumbre, en términos de la creación de una función de membresía (detonación imprecisa). Zadeh ha descrito cómo se puede utilizar la lógica borrosa para superar problemas tales como: equivalencias, disposiciones, etc.

La idea de incorporar la incertidumbre de los modelos matemáticos aparece con Dantzing, conocido como "el padre de la programación lineal". Sin embargo, esta visión no ha sido atractiva debido a los elevados requerimientos computacionales. Existe un gran número de enfoques en los que la incertidumbre puede ser formalizada, a continuación se presentan algunos enfoques para tratar la incertidumbre en la planificación de la producción (Mula y Poler, Models for production planning under uncertainty: A review 2006).

Programación estocástica

Los modelos de programación estocástica (PE) combinan el paradigma de la programación lineal con la formulación de parámetros aleatorios. La PE puede usar escenarios o distribuciones de probabilidades para los parámetros inciertos. Existen modelos de PE basados en escenarios de demandas con ciertas probabilidades.

Escudero y Kamesan (1993)[2] presentan un modelo de PE para el problema del MRP (*Material Requirements Planning*) con incertidumbre en la demanda. Escudero y otros (1993) analizan diferentes enfoques para la planificación de la producción y la capacidad utilizando PE.

---

[2] Escudero, LF, Kamesan P, Wets RJB, (1993) Production Planning via Scenario Modeling, Annals of Operations Research, 43, pp. 311-335.

Teoría de los conjuntos borrosos

La teoría de los Conjuntos Borrosos, hace una distinción entre aleatoriedad e imprecisión. Existen trabajos que presentan la formade palicar esta teoría a la toma de decisiones con incertidumbre. Petrovic[3] menciona que la incertidumbre existente en algunos parámetros necesarios para la gestión de la cadena de suministro ha sido tratada principalmente como procesos estocásticos y descrita por distribuciones de probabilidad.

En estas situaciones, la incertidumbre de los parámetros puede ser especificada basándose en la experiencia y juicios subjetivos. Zimmermann (1996)[4] comento que, para expresar estas descripciones aproximadas, los conjuntos difusos son muy útiles por su simplicidad conceptual y computacional. Guiffrida y Nagi (1998)[5] realizan un estudio extensivo sobre la aplicación de la teoría de conjuntos difusos en el área de la gestión de la producción.

Programación Dinámica (PD).

La PD es un enfoque para la modelación, análisis y resolución de problemas de decisión dinámicos tanto en entornos deterministas como estocásticos. La principal diferencia entre programación dinámica y estocástica está en la estructura utilizada para formular ambos modelos. En PD los conceptos de "estado del proceso" y "función valor" juegan un rol central, mientras que estos conceptos no son utilizados en programación estocástica.

Modelos de simulación.

Los modelos de simulación aunque pueden representar una gran variedad de problemas, no pueden ser usados efectivamente para optimizar un problema dado, sino más bien para evaluar una medida de desempeño. Existen problemas que, formulan un modelo de programación lineal y la incertidumbre es incorporada utilizando el modelo de simulación de Monte Carlo.

[3] Petrovic D. (2001) Simulation of supply chain behavior and performance in an uncertain environment, International Journal of production Economics, 71, 429-438.

[4] Zimmermann, H.J. (1996) Fuzzy Set Theory – and its Applications, #rd. Revised edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, MA.

[5] Guiffrida A. I., Nagi R. (1998) Fuzzy set Theory Applications in Production Management Research: A literature survey, Journal of Intelligente Manufacturing, Vol. 9 (1), pp. 39-56.

CAPÍTULO DOS

2 SISTEMAS MRP Y EOQ PARA EL MANEJO DE LOS INVENTARIOS

2.1 Planeación de los Requerimientos de Material (MRP)

El modelo o la técnica MRP sirve cuando se tienen múltiples productos, que mantienen una estructura de varios niveles, el MRP ayuda a determinar la cantidad a ordenar y cuando ordenar para cada artículo que forme parte de la relaciones de productos.

El MRP se ha utilizado principalmente cuando existe dependencia entre las demandas de los artículos, la utilización de este modelo en el control de los inventarios permite disminuir los niveles de inventarios pero además permite predecir los requerimientos de los materiales para un horizonte de planeación.

La implementación en las empresas requiere de información precisa y completa sobre los siguientes puntos:

- Necesidades de los materiales.
- Planeación de la producción.

El contar con la información de los puntos anteriores implica que las empresas tengan control sobre sus actividades, esto se ha convertido en una razón por la cual ciertas empresas no utilicen este modelo.

Existen tres componentes que alimentan al MRP, estos son: el programa de producción, el archivo del estado legal del inventario y un archivo de lista de materiales.

Mientras que las salidas de información del MRP son:

- Los requerimientos para emitir la orden.
- Reprogramacion de las ordenes.
- Ordenes planeadas.

En seguida se presenta el modelo para un Sistema de MRP, primero se describen las variables de decisión, coeficientes tecnológicos y datos de entrada. Posteriormente se presenta la función objetivo, que como ya se ha mencionado es una función de costos que se requiere minimizar, y por último las restricciones del modelo.

2.1.1 Modelo de Programación Lineal para MRP

El modelo que se presenta a continuación fue propuesto por Mula (Mula, Poler y García, MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach 2006), no obstante para los fines de este trabajo se han realizado modificaciones sobre el mismo. Como se observará el modelo maneja restricciones de capacidad y de demanda, para esta última la restricción es un balance entre lo que se tiene, lo que se adeuda y lo que se requiere. Para la restricción de capacidad este modelo incluye costos por horas extras y por tiempo ocioso, sin embargo esta restricción puede no contemplar estos términos, si es que, la empresa que lo aplicará no incurre en ellos o no se requieren analizar en el sistema. Por lo tanto la restricción de capacidad, quedaría definida únicamente por el tiempo requerido para producir el artículo o los artículos por la cantidad producida en un período, esto no sobrepasará la capacidad disponible en ese periodo.

Variables de decisión y parámetros del modelo

Índices

T	Número de periodos en el horizonte de planeación (t = 1, … , T)
I	Número de Productos (i = 1, … , I)

R	Conjunto de Recursos (r =1, … , R)

Variables de decisión

P_{it}	Cantidad a producir del producto i en el periodo t
$INVT_{it}$	Inventario del producto i al final del periodo t
Rd_{it}	Demanda retrasada del producto i al final del período t

Coeficientes de la función objetivo (costos)

cp_i	Costo de producir una unidad del producto i
ci_i	Costo del inventario por cada unidad del producto i
crd_i	Costo por faltantes por unidad del producto i
$ctoc_{rt}$	Costo por tiempo ocioso del recurso r en el período t
$ctex_{rt}$	Costo por tiempo extra del recurso r en el período t

Datos

d_{it}	Demanda del producto i en el periodo t
TS_i	Tiempo de reabastecimiento del producto i
$INVT_{i0}$	Inventario del producto i en el periodo 0
Rd_{i0}	Faltantes en la demanda del producto i en el período 0
RP_{it}	Recepciones programadas del producto i en el periodo t
Toc_{rt}	Tiempo ocioso del recurso r en t
Tex_{rt}	Tiempo extra del recurso r en t

Coeficientes tecnológicos

AR_{ir}	Tiempo requerido del recurso r para producir una unidad del producto i
CAP_{rt}	Capacidad disponible del recurso r en el periodo t

Función Objetivo

Minimizar

$$z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}(cp_i p_{it} + ci_i INVT_{it} + crd_i Rd_{it}) + \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}(ctoc_{rt} Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt})$$

Sujeto a:

Restricción para cubrir la demanda

$$INVT_{i,t-1} - Rd_{i,t-1} + p_{i,t-TSi} + RP_{it} - INVT_{i,t} + Rd_{i,t} = d_{it}\,; \quad \forall\, i\,, \forall t$$

Restricción de capacidad

$$\sum_{i=1}^{I} AR_{ir} P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt}\,; \quad \forall r\,, \forall t$$

Cubrir con los retrasos en el último periodo del horizonte

$$Rd_{iT} = 0\,; \;\; \forall i$$

Restricción de no negatividad

$$p_{i,t}\,, INVT_{i,t}\,, Rd_{i,t}\,, Toc_{rt}\,, Tex_{rt} \geq 0; \qquad \forall i\,, \qquad \forall r, \qquad \forall t$$

Se observa que la función objetivo de este modelo incluye como primera parte, la minimización de la suma de los costos, como son: los costos por producir por la cantidad que se produce, los costos por inventario por la cantidad de material que se encuentra en inventario y los costos por faltantes por los faltantes de cada artículo. En la segunda parte de la función objetivo se minimiza la suma de los costos que se originan por tiempo extra y por tiempo ocioso de los recursos.

Este modelo contiene una restricción para cubrir la demanda, la cual es un balance entre lo que entra, sale y se retiene del producto (i), durante un período de tiempo (t). La segunda restricción es necesaria para cuando la empresa tiene una capacidad limitada, ya que incluye la capacidad de los recursos para producir, en el caso de que la empresa considere políticas de tiempo extra se consideran dentro de esta restricción.

Finalmente, se tienen una restricción para cada producto (i), que permite, que en el último período se cubran con los retrasos. Por último las restricciones de no negatividad (si es necesario se pueden incluir restricciones para que las variables sean enteras).

2.2 Modelos de Lote Económico (EOQ)

El modelo básico de EOQ fue propuesto por Wilson en 1934, es un modelo que calcula la reposición del tamaño del pedido para un sistema de inventario para un determinado artículo (Soodong y James 2000).

Los componentes en los modelos de Lote Económico son los siguientes (Aguilar Semestre 2009-I):

- **Demanda:** se supone que la demanda de los artículos es conocida y constante.
- **Oferta:** Es una parte controlada por el decisor y queda determinada por el tamaño del pedido y nivel máximo de almacenamiento.
- **Restricciones de Operación:** dependen de cada modelo, por ejemplo el déficit en la demanda.
- **Políticas de Pedidos:** son los valores calculados que se les asigna a las variables involucradas en cada modelo.
- **Costo de Inventario:** El costo de inventario es un costo total, que involucra el costo por ordenar, costo por inventario, costo por déficit y costo de compra o producción.

El costo promedio **CP(Q)**, depende de la cantidad de pedidos que se realicen Q (tamaño del pedido) para cubrir la demanda y de la cantidad de unidades que se almacenen. En la siguiente figura se observa que CP(Q) es una función convexa.

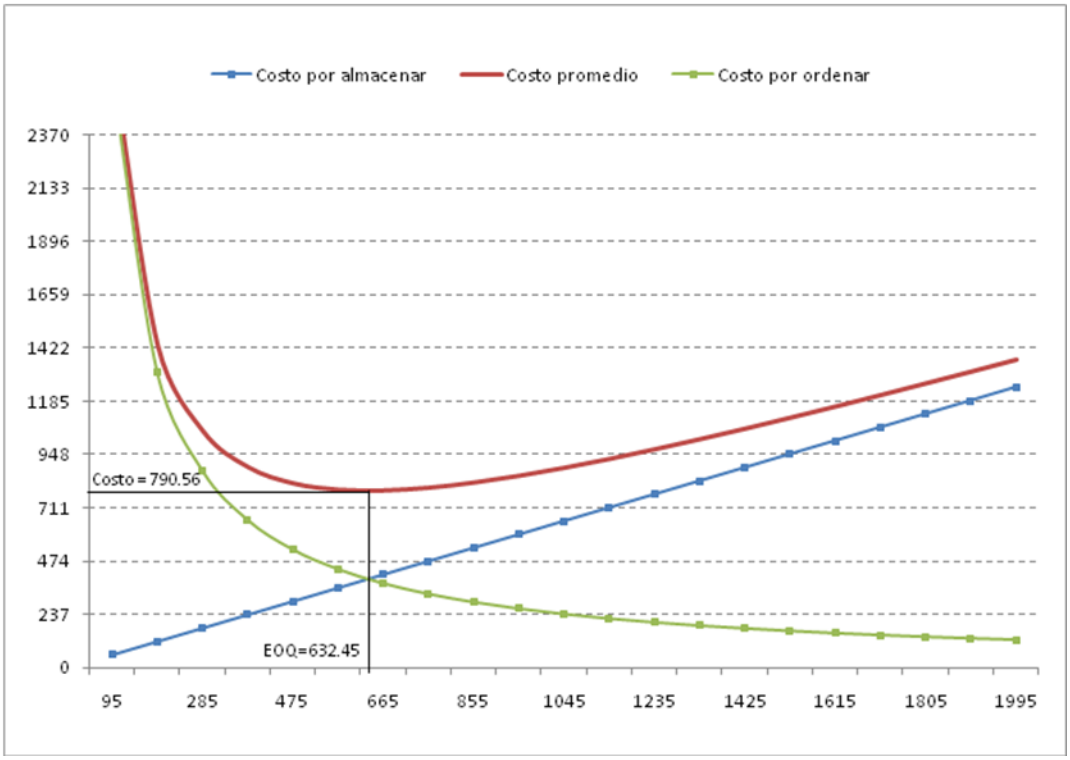

Figura 5 Gráfica del costo promedio en un modelo de EOQ

En Q* los valores de los costos por mantener en inventario y por ordenar son los mismos, como se muestra en la Figura 5.

Los modelos de lote económico son modelos que consideran una demanda determinista, en donde es requerida una revisión periódica. Existen cuatro tipos de modelos de lote económico, que se diferencian por la producción y los faltantes que permiten:

1. Modelo sin producción y sin déficit
2. Modelo con producción y sin déficit
3. Modelo sin producción y con déficit
4. Modelo con producción y con déficit

A continuación se presenta cada modelo de EOQ por separado, se describen las variables y los supuestos que aplica para cada modelo, así como la determinación de una política óptima de inventario, es decir, cuánto y cuando ordenar, complementando la información se presenta la gráfica que describe el nivel de almacenamiento a través del tiempo.

Los modelos que se presentan en este capítulo se utilizarán posteriormente en el Capítulo 5 para aplicar la Teoría de Conjuntos Borrosos, en donde se muestran las modificaciones que implica considerar la demanda como un parámetro incierto, un ejemplo numérico, el cual se resuelve de manera clásica e incluyendo la demanda como un número borroso. Finalmente se realizarán comparaciones entre los modelos originales y los modificados.

Modelo sin Producción y sin Déficit

El modelo de lote económico sin producción y sin déficit, es el modelo con el cual, cualquier empresa que se encuentra en un proceso inicial y que por consiguiente no cuenta con datos históricos. El uso de este modelo permite generar información que se puede utilizar posteriormente como datos históricos.

Variables de decisión y parámetros del modelo

d	Demanda del artículo (No. de artículos por unidad de tiempo)
Q	Tamaño del pedido (No. de artículos)
T	Tamaño del período (Tiempo)
h	Costo por almacenar (u.m. por artículo por unidad de tiempo)
c	Costo por comprar (u.m. por artículo)
k	Costo por ordenar (u.m por pedido)

u.m. =unidad monetaria

Supuestos del modelo

- La demanda de artículos es una constante conocida y positiva.
- El tiempo de entrega de los pedidos es cero, es decir cualquier pedido que se haga se recibe inmediatamente.
- Los costos involucrados son conocidos.

Comportamiento del nivel del inventario

El comportamiento del inventario para un modelo de Lote Económico sin producción y sin déficit, se presenta en la Figura 6.

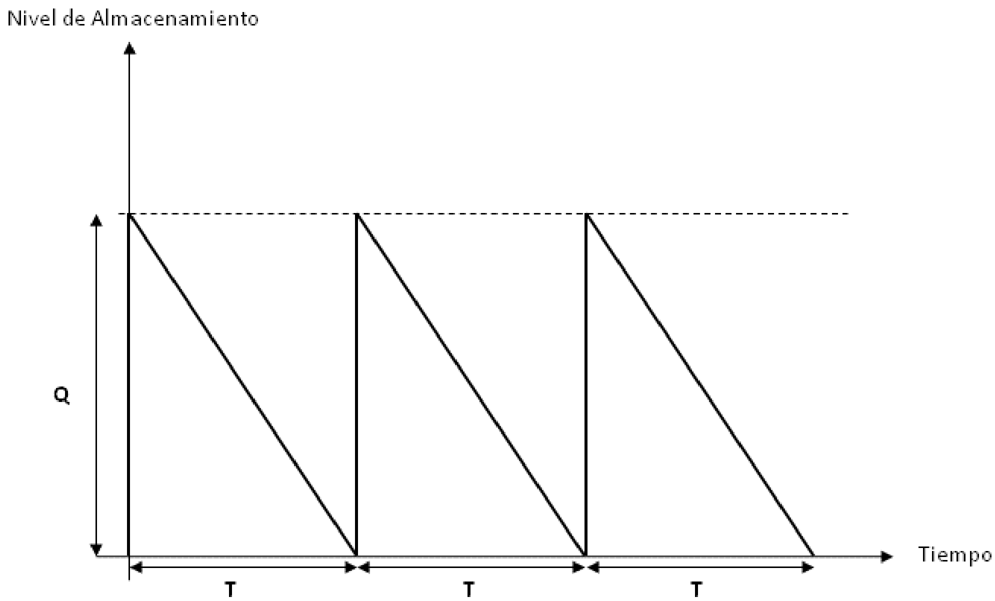

Figura 6 Comportamiento del modelo sin producción y sin déficit

El número de artículos que se deben de ordenar está definido por Q*, y se obtiene de la siguiente manera:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}}$$

El tamaño del periodo de tiempo T, es igual a:

$$T^* = \sqrt{\frac{2k}{hd}}$$

El costo promedio asociado a la política óptima de pedido es:

$$CP(Q^*) = \sqrt{2hkd} + cd$$

Modelo con Producción y sin Déficit

El modelo de Lote Económico con producción y sin déficit, se utiliza cuando la empresa produce una determinada cantidad de productos, este modelo considera dos periodos de tiempo, el primero considera que se tiene producción y en el segundo se satisface la demanda. No admite faltantes.

Variables de decisión y parámetros del modelo

d	Demanda del artículo (No. de artículos por unidad de tiempo)
q	Artículos producidos (No. de artículos por unidad de tiempo)
Q	Tamaño del pedido (No. de artículos)
S	Nivel máximo de almacenamiento (No. de artículos)
T	Tamaño del período (unidades de tiempo)
$T1$	Periodo de entrega o producción (unidades de tiempo)
$T2$	Período que cubre la demanda (unidades de tiempo)
h	Costo por almacenar (u.m. por artículo, por unidad de tiempo)
c	Costo por comprar (u.m. por artículo)
k	Costo por ordenar o producir (u.m.)

Supuestos del modelo

- La demanda de artículos es una constante conocida y positiva.
- El tiempo de entrega de los pedidos es cero, es decir cualquier pedido que se haga se recibe inmediatamente.
- Los costos involucrados son conocidos.
- La cantidad que se produce es conocida y además con la finalidad de evitar faltantes, se considera que la producción es mayor que la demanda.
- El tamaño del periodo es T, y se divide en 2 períodos:
  - **T1.** Tiempo durante el cual existe producción de artículos
  - **T2.** Tiempo durante el cual no se produce, se cubre la demanda con los artículos que se tienen en inventario.

Comportamiento del nivel del inventario

El comportamiento del inventario para un modelo de Lote Económico con producción y sin déficit, se presenta en la Figura 7.

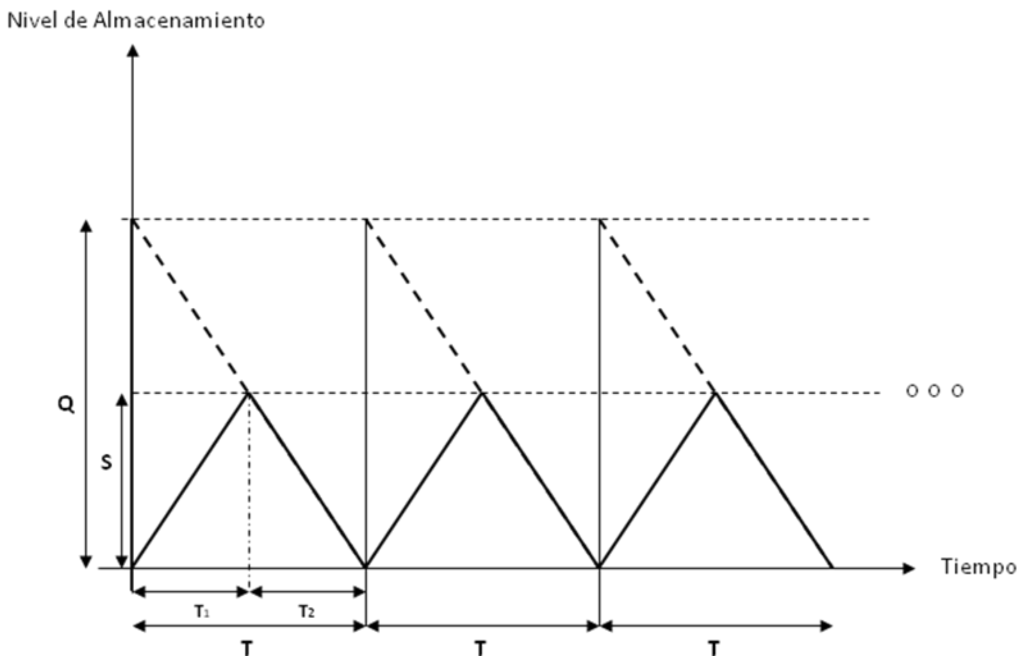

Figura 7 Modelo con producción sin déficit

La solución óptima se determina por las siguientes ecuaciones, las cuales permiten conocer el tamaño del pedido y del período, el nivel máximo de inventario, así como el costo promedio del inventario.

- **Tamaño del pedido**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}}\sqrt{\frac{q}{q-d}}$$

- **Tamaño del Período**

$$T^* = \sqrt{\frac{2k}{hd}}\sqrt{\frac{q}{q-d}}$$

- **Nivel máximo de inventario**

$$S^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}}\sqrt{\frac{q-d}{q}}$$

- **Costo promedio**

$$CP(Q^*) = \sqrt{2h\left(1-\frac{d}{q}\right)kd} + cd$$

Donde T se compone de dos períodos, no necesariamente iguales. La determinación de estos periodos implica conocer la cantidad que se produce (q), así como la demanda. A continuación se presentan las ecuaciones que determinan los valores de T_1 y T_2 en una política de inventarios con producción y que no permite faltantes.

$$T_1^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}}\sqrt{\frac{1}{q(q-d)}}$$

$$T_2^* = \sqrt{\frac{2k}{hd}}\sqrt{\frac{q-d}{q}}$$

Modelo sin Producción y con Déficit

Este modelo considera lo descrito en el modelo básico de Lote Económico sin producción y sin déficit, permitiendo faltantes, por lo tanto se tendrá un costos por los mismos.

Variables de decisión y parámetros del modelo

d	Demanda del artículo (No. de artículos por unidad de tiempo)
Q	Tamaño del pedido (No. de artículos)
S	Nivel máximo de almacenamiento (No. de artículos)
s	Nivel máximo de déficit (No. de artículos)
T	Tamaño del período (unidades de tiempo)

T1	Producción y déficit (unidades de tiempo)
T2	Demanda y déficit (unidades de tiempo)
h	Costo por almacenar (u.m. por artículo, por unidad de tiempo)
c	Costo por comprar (u.m. por artículo)
k	Costo por ordenar (u.m.)
p	Costo por faltantes (u.m. por artículo, por unidad de tiempo)

Supuestos del modelo

- La demanda de artículos es una constante conocida y positiva.
- El tiempo de entrega de los pedidos es cero, es decir cualquier pedido que se haga se recibe inmediatamente.
- Los costos involucrados son conocidos.
- El tamaño del periodo es T, y se divide en 2 períodos (no necesariamente iguales):

  T1. Tiempo durante el cual se tienen artículos en inventario y se cubre la demanda.

  T2. Tiempo durante el cual existe déficit del artículo.

Comportamiento del nivel del inventario

El comportamiento del inventario para un modelo de Lote Económico con producción y con déficit, se presenta en la Figura 8.

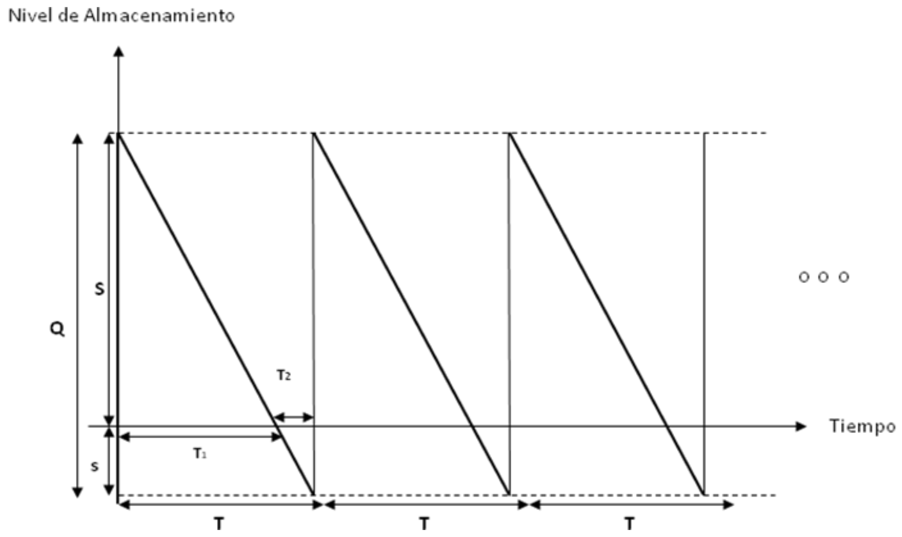

Figura 8 Modelo sin producción con déficit

La solución óptima se determinará por las siguientes ecuaciones, las cuales determinan el tamaño y tamaño del período, el nivel máximo de inventario, así como el nivel máximo de faltantes, por último se presentan el costo promedio del inventario, respectivamente.

- **Tamaño del pedido**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

- **Tamaño del Período**

$$T^* = \sqrt{\frac{2k}{hd}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

- **Nivel máximo de inventario**

$$S^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

- **Nivel máximo de faltantes**

$$s^* = \sqrt{\frac{2kd}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

- **Costo promedio**

$$CP(Q^*) = \frac{k + cQ + h\frac{S^*}{2}T_1 + P\frac{s^*}{2}T_2}{T}$$

Debido a que T se compone de dos períodos. La determinación de estos periodos implica conocer el nivel máximo de almacenamiento y el nivel máximo de faltantes, a continuación se presentan las ecuaciones que determinan los valores de T_1 (en función del nivel de almacenamiento) y T_2 (en función del nivel de faltantes) en una política de inventarios que permite faltantes.

$$T_1^* = \frac{S^*}{d}$$

$$T_2^* = \frac{s^*}{d}$$

Modelo con Producción y con Déficit

En la actualidad la mayoría de las pequeñas empresas, cuentan con un plan de producción, el cual les permite conocer la cantidad de productos que se elaboran a lo largo de un periodo de tiempo. Además, considerando que se permiten tener faltantes, y que por lo tanto no se cubrirá toda la demanda (el déficit de artículos implica un costo), el modelo que permite determinar la cantidad a ordenar y cuando hacerlo, es el modelo de Lote Económico con la variación de que considera producción y déficit. A continuación se presenta una descripción detallada de los parámetros, variables del modelo.

Variables de decisión y parámetros del modelo

d	Demanda del artículo (No. de artículos por unidad de tiempo)
q	Artículos producidos (No. de artículos por unidad de tiempo)
Q	Tamaño del pedido (No. de artículos)
S	Nivel máximo de almacenamiento (No. de artículos)
s	Nivel máximo de déficit (No. de artículos)
T	Tamaño del período (unidades de tiempo)
T_1	Producción y déficit (unidades de tiempo)
T_2	Producción e inventario (unidades de tiempo)
T_3	Inventario y demanda (unidades de tiempo)
T_4	Demanda y déficit (unidades de tiempo)
h	Costo por almacenar (u.m. por artículo, por unidad de tiempo)
c	Costo por comprar (u.m. por artículo)
k	Costo por ordenar (u.m.)
p	Costo por faltantes (u.m. por artículo, por unidad de tiempo)

Supuestos del modelo

- La demanda de artículos es una constante conocida y positiva.
- El tiempo de entrega de los pedidos es cero, es decir cualquier pedido que se haga se recibe inmediatamente.
- Los costos involucrados son conocidos.
- La cantidad que se produce es conocida y además con la finalidad de evitar faltantes, se considera que la producción es mayor que la demanda.
- El tamaño del periodo es T, y se divide en 4 períodos (no necesariamente iguales):
  - **T1.** Tiempo durante el cual existe producción de artículos y déficit.
  - **T2.** Tiempo durante el cual existe producción y artículos en existencia.
  - **T3.** Tiempo durante el cual no se produce (artículos en inventario) y se cubre la demanda.
  - **T4.** Tiempo durante el cual existe déficit y demanda del artículo.

Comportamiento del nivel del inventario

El comportamiento del inventario para un modelo de Lote Económico con producción y con déficit, se presenta en la Figura 9, en donde se puede ver lo siguiente:

- El tamaño del pedido (Q), es igual a:

$$Q = S + s + \Delta Q$$

- El tamaño del período (T), como se menciono anteriormente se divide en 4 períodos, de T_1 a T_4, por lo tanto la suma de los 4 períodos define a T.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

- El área de almacenamiento se define, por una altura del tamaño de S y por una base que involucra a los períodos T_2 y T_3.

- Mientras que el área de faltantes o déficit por una altura del tamaño de s y una base que involucra a los tiempos T_1 y T_4.

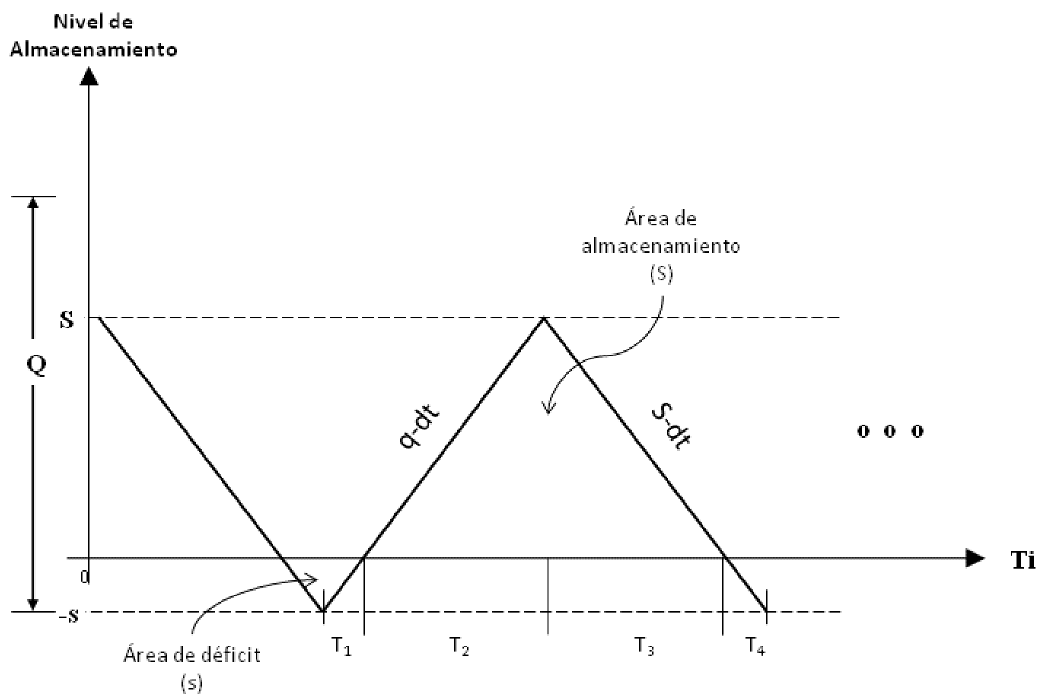

Figura 9 Comportamiento del nivel del inventario

La determinación de las variables se describe a continuación.

El costo total de inventario, por unidad de tiempo es igual a:

$$CT = k + cQ + h\left(\frac{T_2 + T_3}{2}\right)S + p\left(\frac{T_1 + T_4}{2}\right)s$$

El tamaño del pedido T, de define como

$$T = \frac{Q}{d}$$

Por lo tanto $Q = Td$

El costo promedio está en función de Q, S y s, se define como:

$$CP = \frac{CT}{T}$$

Sustituyendo el valor de CT en la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$CP = \frac{k + cQ + h\left(\frac{T_2 + T_3}{2}\right)S + p\left(\frac{T_1 + T_4}{2}\right)s}{T}$$

Para los períodos Ti, se determina su valor, tomando en cuenta el comportamiento del nivel del almacenamiento.

$$T_1 + T_4 = \frac{s}{(q-d)} + \frac{s}{d} = \frac{sq}{d(q-d)} = \frac{s}{d\left(1 - \frac{d}{q}\right)}$$

$$T_2 + T_3 = \frac{S}{(q-d)} + \frac{S}{d} = \frac{Sq}{d(q-d)} = \frac{S}{d\left(1 - \frac{d}{q}\right)}$$

Sustituyendo el valor de T por Q/d y tomando en cuenta los valores de $T_1 + T_4$ y $T_2 + T_3$ en función de S y s, se tiene lo siguiente:

$$CP(Q) = \frac{kQ}{d} + cd + h\left(\frac{S^2}{2Q\left(1 - \frac{d}{q}\right)}\right) + p\left(\frac{s^2}{2Q\left(1 - \frac{d}{q}\right)}\right)$$

El nivel de almacenamiento y el nivel de déficit determinan el nivel óptimo de Q*, estos se calculan de la siguiente manera:

$$S + s = d(T_3 + T_4) = (q-d)(T_1 + T_2)$$

Pero Q = dT

$$Q = d\ (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$$

Reordenando se tiene que

$$Q = d\ (T_1 + T_4) + d\ (T_2 + T_3)$$

Sustituyendo los valores de Ti

$$Q = d\left(\frac{s}{d\left(1-\frac{d}{q}\right)}\right) + d\left(\frac{S}{d\left(1-\frac{d}{q}\right)}\right)$$

Lo que es igual a:

$$Q = \frac{s}{\left(1-\frac{d}{q}\right)} + \frac{S}{\left(1-\frac{d}{q}\right)}$$

La solución óptima se determina por las ecuaciones siguientes, las cuales determinan el tamaño del pedido, el nivel máximo de inventario, así como el nivel de faltantes respectivamente.

- **Tamaño del pedido**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2k}{h\left(1-\frac{d}{q}\right)}}\ \sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

- **Nivel máximo de inventario**

$$S^* = \sqrt{\frac{2kd\ \left(1-\frac{d}{q}\right)}{h}}\ \sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

- **Nivel máximo de faltantes**

$$s^* = \sqrt{\frac{2kd\left(1 - \frac{d}{q}\right)}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

En el siguiente capítulo se presenta la información requerida para definir la demanda como un número borroso, debido a que es un parámetro que en la actualidad se encuentra bajo incertidumbre. Es necesario tener los conocimientos básicos sobre la Teoría de Conjuntos Borrosos, por esta razón la información que se presenta se puede complementar profundizando con la bibliografía a la que se hace referencia y además consultando el apéndice sobre las operaciones básicas y algebraicas con números borrosos.

3 Conjuntos borrosos para definir parámetros bajo incertidumbre

La teoría de los Conjuntos Borrosos es, de hecho un paso hacia un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la sutil imprecisión del mundo real, un acercamiento nacido de la incesante búsqueda humana por lograr una mejor comprensión de los procesos mentales y del conocimiento.

L. A. Zadeh

Berkeley, California, mayo de 1972 L. A. Zadeh

3.1 Nomenclatura

A	Conjunto o subconjunto clásico
$\hat{A}$	Conjunto o subconjunto borroso
$\in$	Pertenece a
$\notin$	No pertenece a
$\subset$	Subconjunto de
$\subseteq$	Subconjunto de o igual a
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\bar{A}$	Complemento del conjunto *A*
$\bar{\hat{A}}$	Complemento del conjunto borroso *A*
ϕ	Conjunto vacio

$\forall x$	Cuantificador universal (para todo *x*)
$\mu_{\tilde{A}} = (x)$	Función de membresía del elemento *x* al subconjunto borrosos $\hat{A}$
A_{α}	Subconjunto ordinario del nivel α de un subconjunto borroso $\hat{A}$

3.2 Introducción

Los sistemas son generalmente estudiados y formulados por métodos cuantitativos. En Investigación de Operaciones la formulación de un problema es lo que permite aplicar posteriormente un algoritmo o una heurística para resolverlo. Sin embargo, generalmente la formulación del modelo se hace de forma precisa, esto se puede observar en la construcción de la función objetivo y las restricciones; ya que los números y operadores están definidos por números reales o por un operador clásico, respectivamente. En otras palabras los coeficientes de la función objetivo, los coeficientes tecnológicos de las restricciones o los lados derechos de las mismas son números que se encuentran en el conjunto de los números reales.

En 1965 el Dr. Zadeh publicó un artículo titulado “Fuzzy Sets” (L. A. Zadeh 1965), en este articulo describió por medio de las matemáticas clásicas de conjuntos, cómo trabajar matemáticamente con expresiones imprecisas, tal y como lo hacemos los seres humanos. Por esta razón al Dr. Zadeh se le conoce como padre de la Teoría de Conjuntos Borrosos.

La Teoría de Conjuntos Borrosos o difusos nace de la necesidad de estudiar sistemas que se adecuan más a la realidad, sistemas que se puedan describir o formular de forma matemática pero en donde uno o varios parámetros se encuentran representados por números difusos. Por ejemplo, en el problema de inventarios el valor de la demanda de cierto producto, es un valor incierto, ya que no se conoce con seguridad su valor para periodos posteriores, pero posiblemente se conoce el comportamiento que ha tenido durante los periodos transcurridos. Con los datos históricos disponibles se puede representar la demanda como un número difuso, mediante la construcción de la función de membresía. El número difuso representa la imprecisión que se puede encontrar en la realidad.

Los Conjuntos Borrosos permiten que se puedan estudiar sistemas aplicando matemáticas clásicas y además admite que el planteamiento y la solución representen más a la realidad en donde se desarrolla el sistema que se estudia. La modificación de los modelos clásicos a modelos que permiten lo borroso, proporcionan resultados más reales.

Un fundamento en el que se basa la teoría de conjuntos difusos es el *Principio de incompatibilidad*, el cual menciona que en la medida en que crece la complejidad de un sistema, en esa misma medida disminuye nuestra capacidad para hacernos precisos y aun significativos enunciados acerca de su conducta hasta alcanzar un umbral, más allá del cual la precisión y la significación resultan casi siempre, características mutuamente excluyentes(L. Zadeh 1975).

Definiciones elementales

El término **fuzzy** es traducido al español por *difuso o borroso*. Dicho término fue utilizado por L. A. Zadeh para designar una categoría en el ámbito de las Matemáticas, y más en concreto en una de sus ramas: la Teoría de Conjuntos(Velarde Lombraña 1996).

Conjunto Clásico (Crisp Set)

Un conjunto clásico está definido como una colección de objetos o elementos con características bien definidas que lo hacen pertenecer o no pertenecer al conjunto. Los Conjuntos se representan por letras mayúsculas (A, B, C,…etc.) y a los elementos que conforman al conjunto por letras minúsculas (a, b, c,…etc.).

Los conjuntos clásicos se expresan de diversas maneras:

- En forma de lista, esto es listando todos los elementos que forman parte del conjunto
- Por una condición, y
- Definiendo la pertenencia y no pertenencia por medio de la función característica. Para el caso de los conjuntos clásicos, esta función toma valores de 0 si el elemento no pertenece al conjunto y de 1 si el elemento pertenece.

A continuación se presentan, cuatro ejemplos de conjuntos que se definen de diferente forma.

A = {2, 4, 6}

B = {4, 6, 8, 10}

S = {x | x^2 - 6x + 11 ≥ 3}

A = {(1,0), (2,1), (3,0),(4,1), (5,0), (6,1)}[6]

Conjunto Borroso (Fuzzy Set)

Un conjunto borroso es la generalización de un conjunto clásico y la función de membresía es la generalización de la función característica. La definición formal de un conjunto borroso es la siguiente:

Sea **E** un conjunto enumerable o no, y *x* un elemento de **E**; entonces, un "subconjunto borroso" $\hat{A}$ de E es un conjunto de pares ordenados:

$$\{(x|\mu_{\hat{A}}(x))\}, \quad \forall x \ \in \mathrm{E}$$

Donde $\mu_{\hat{A}}(x)$ es la función característica de membresía de *x* en $\hat{A}$. Así, si $\mu_{\hat{A}}(x)$ toma sus valores en un conjunto **M** llamado "conjunto de membresía". Se puede decir que x toma sus valores de **M** mediante la función $\mu_{\hat{A}}(x)$.

Ejemplo

Sea E el conjunto borroso finito de los diez números enteros:

$$\mathrm{E} \ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Y el subconjunto borroso $\hat{A}$ que contiene a los primeros 6 números de E de la forma siguiente:

6 El primer valor dentro del paréntesis representa al elemento, mientras que el segundo valor representa el valor de la función característica.

$\tilde{A} = \{(0,0), (1,0.2), (2,0.3), (3,1), (4,0.8), (5,0.5)\}$

Donde los $\mu_{\tilde{A}}(x)$ están dadas subjetivamente.

Observando el conjunto borroso anterior se puede mencionar las siguientes características: el número 3 pertenece completamente al conjunto (el valor de la función de membresía es 1) mientras que, el número 0 no pertenece al conjunto A. Los números restantes pertenecen al conjunto con diferentes grados, por ejemplo el número 4 pertenece con un grado de 0.8, mientras que el número 1 pertenece con grado de 0.2, por lo tanto se concluye que estos dos números pertenecen al conjunto, sin embargo, el número 4 pertenece con mayor grado que el número 1.

Subconjunto ordinario de nivel α

Sea $\alpha \in [0,1]$, se llamará "Subconjunto ordinario de nivel α" de un subconjunto borroso $\hat{A}$, al subconjunto ordinario:

$A_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$

Ejemplo

Sea:

$\tilde{A} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5), (x_3, 0.8), (x_4, 1), (x_5, 0.7), (x_6, 0.4), (x_7, 0.2)\}$

Se tiene que el subconjunto ordinario de nivel α = 0.6 es el siguiente:

$A_\alpha = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1), (x_6, 0), (x_7, 0)\}$

Se observa que x_3, x_4 y x_5 pertenecen al conjunto de nivel α = 0.6.

En la Figura 10 se muestra la gráfica del ejemplo anterior, donde se observa el comportamiento de la función de membresía para cada elemento y además con una línea punteada se presenta el nivel α, observando la gráfica se puede determinar los elementos que están dentro del subconjunto ordinario a este nivel.

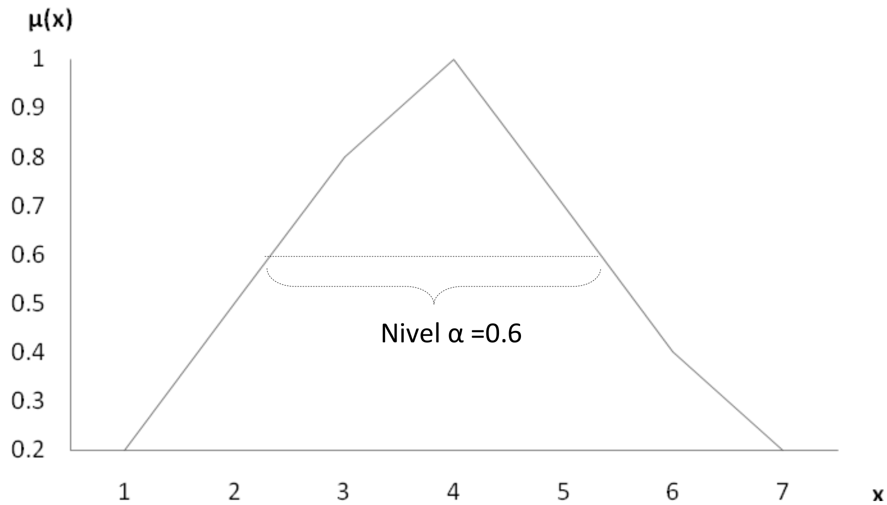

Figura 10 Subconjunto ordinario

Se puede observar que, sí el valor del nivel α decrece el número de elementos que forman el conjunto de ese nivel α aumenta. Considerando esto se tiene que:

si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces $A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$

Subconjunto ordinario de corte α

Sea $\alpha \in [0,1]$, se llamará "Subconjunto ordinario de corte α" de un subconjunto borroso $\hat{A}$, al subconjunto ordinario:

$$A'_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > \ \alpha\}$$

La diferencia entre el nivel α y el corte α, consiste en que la desigualdad en el corte α es estrictamente mayor.

Del ejemplo anterior se puede calcular el subconjunto ordinario de corte α = 0.5, el resultado se muestra a continuación.

$$A'_{\alpha=0.6} = \{(x_1,0),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,1),(x_5,1),(x_6,0),(x_7,0)\}$$

Soporte de un subconjunto borroso

Se llama soporte de un subconjunto borroso $\hat{A}$ de E al conjunto que contiene todos los elementos cuya función de membresía es no nula. Se define como el conjunto S(A) dado por

$$S(A) = \{x \in E: \mu_{\hat{A}}(x) > 0\}$$

En otras se palabras, se tiene que

$$x \in S(A) \Leftrightarrow \mu_{\hat{A}}(x) > 0$$

Por lo tanto, si $\mu_{\hat{A}}(x)$ es constante sobre $S(A)$, entonces A es no borroso.

En la Figura 11 se muestra el soporte de un conjunto borroso, para este ejemplo el soporte está definido por el intervalo $[a, d]$.

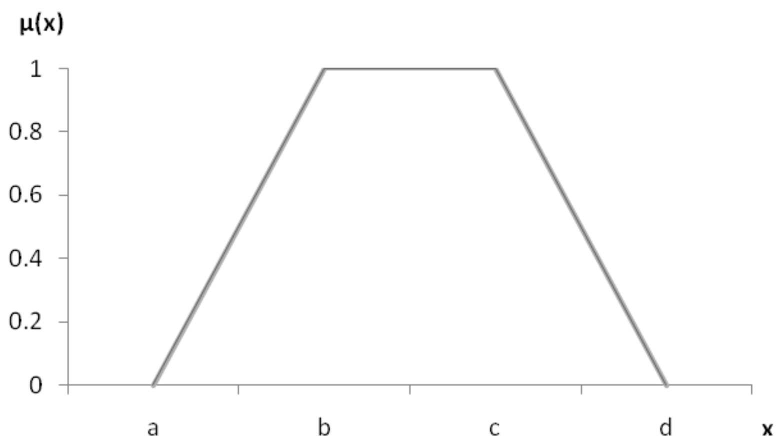

Figura 11. Soporte del subconjunto borroso

Convexidad

Un subconjunto borroso $\hat{A}$ de $\mathbb{R}$ es convexo si y sólo si para todo $\alpha \in [0, 1]$ todo α-corte es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Un subconjunto convexo (Tanaka 1997) también puede definirse como:

$\tilde{A}$ es convexo si y sólo si

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \text{Min}(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$$

$$\forall x_1, x_2 \in \text{E y } \lambda \in [0,1]$$

En las Figura 12 y Figura 13 se muestra un conjunto borroso convexo y no convexo, respectivamente. Se puede notar que el conjunto convexo está definido por un único intervalo α de corte; mientras que, el conjunto no convexo tiene un corte α, definido por dos intervalos.

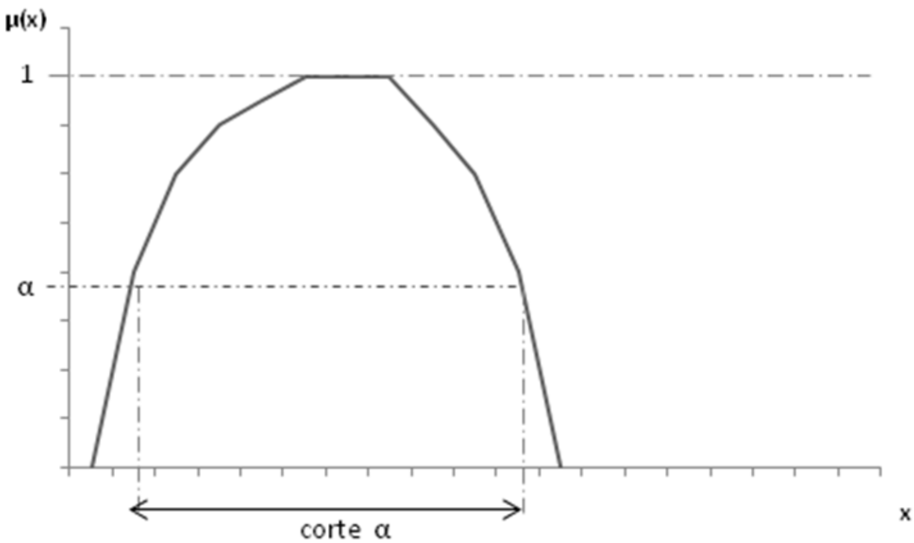

Figura 12 Conjunto convexo

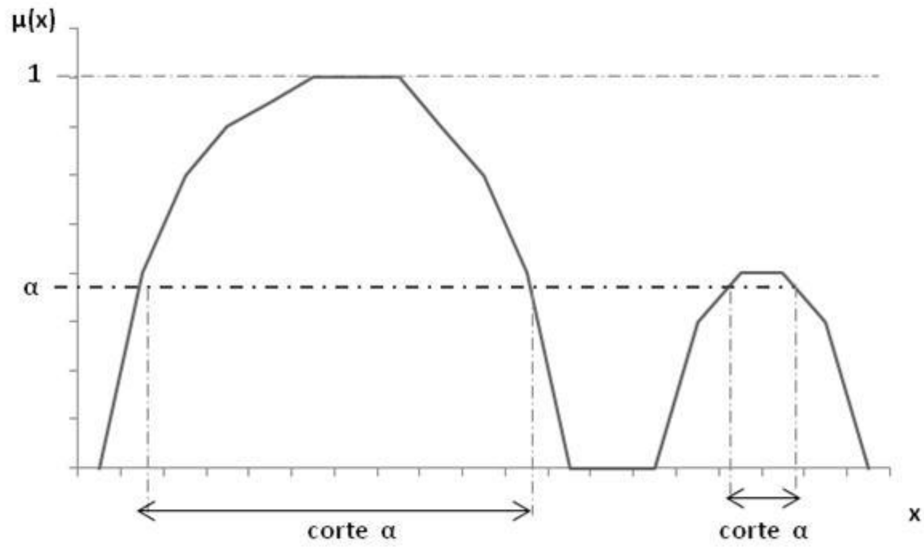

Figura 13 Conjunto no convexo

Normalización de un conjunto borroso

Un conjunto borroso $\hat{A}$ es normal si y sólo si:

$\mathrm{Sup}_x\ \mu_{\hat{A}}(x) = 1$

En la Figura 12 el conjunto borroso es normal, ya que su función de membresía es igual a 1. El conjunto es normal si se tiene por lo menos un elemento con función de membresía con valor de 1.

Un conjunto que no es normal se le conoce como conjunto subnormal. Este conjunto se puede normalizar, si se toma como referencia el máximo valor de la función de membresía y todos los elementos se dividen entre este valor.

En la Figura 14 se presenta un conjunto borroso subnormal, en donde el factor es el siguiente:

$\mathrm{Sup}_x\ \mu_{\hat{A}}(x) = 0.8$

Para normalizarlo es necesario dividir cada $\mu_{\tilde{A}}(x)$ entre 0.8.

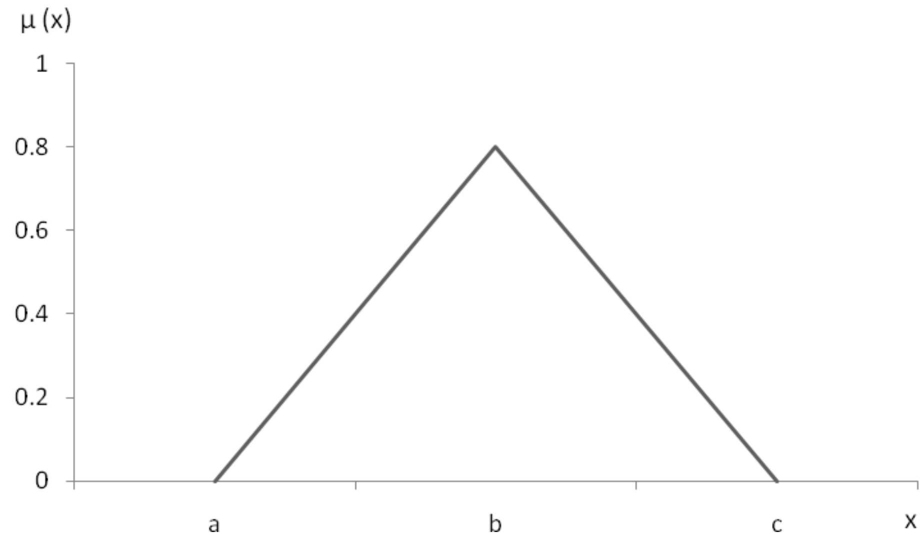

Figura 14. Ejemplo de un subconjunto borroso subnormal

En la figura siguiente se presenta la gráfica del subconjunto normalizado, en donde se puede observar que el máximo valor de la función de membresía es 1.

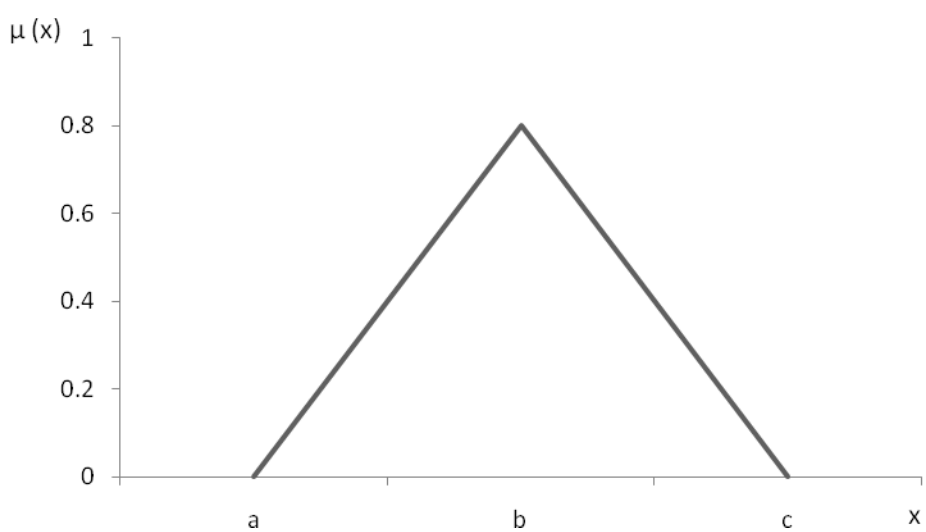

Figura 15 Conjunto normalizado

3.3 Funciones de Membresía

La función de membresía es uno de los elementos más importantes en los conjuntos difusos; en el Apéndice A se presentan las operaciones básicas y algebraicas en donde se observa que estas operaciones se llevan a cabo por medio del valor de la función de membresía que cada elemento posea. En todos los enfoques de modelado basados en la Teoría de Conjuntos Borrosos, es necesario definir la función de membresía que caracteriza a los números *fuzzy* o los subconjuntos difusos que representan la posible incertidumbre presente en el problema particular (Mula y E., Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos Difusos en la planificación de la producción: Un Estudio de la Literatura 2004).

En la Teoría de Conjuntos Borrosos, un conjunto borroso es una clase de objetos, en donde un elemento pertenece al conjunto con cierto grado y no de manera absoluta. Se dice que cada elemento pertenece con cierto grado de membresía entre el intervalo [0, 1].

La forma analítica de funciones de membresía de los conjuntos clásicos y los borrosos, se diferencia por el hecho de que en el caso de los conjuntos clásicos los valores solo pueden ser 0 o 1, es decir, el elemento pertenece o no pertenece al conjunto. Mientras que, en el caso de los Conjuntos Borrosos la función de membresía puede tomar valores entre 0 y 1, por ejemplo 0.2, 0.5, 0.7, etc.

La forma analítica de la función de membresía de un conjunto clásico es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Para un conjunto borroso es de la forma siguiente:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\colon \mathrm{U} \rightarrow [0,1]$$

Si el elemento que pertenece al conjunto difuso tiene un grado de membresía de 1, significa que el elemento pertenece completamente al conjunto, si el grado de pertenencia es cero, ese elemento no pertenece al conjunto (generalmente no se incluyen elementos si su grado de pertenencia es cero). Entre más cercano sea el grado de pertenencia al valor 1, significa que este elemento tiene mayor compatibilidad al conjunto. El intervalo [0, 1] puede ser especificado con otros valores, pero debido a la practicidad es recomendable utilizar valores entre 0 y 1.

Clasificación

Existen diferentes clasificaciones y características de la función de membresía, a continuación se presentan la clasificación desarrollada por Lai y Hwang (Lai y y Hwang 1992), la cual consiste en agruparlas en 4 categorías como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Clasificación de las funciones de membresía

Categoría	**Ejemplos**
Funciones de pertenencia basadas en representaciones heurísticas.	• Función unimodal de Zadeh • Función de potencia de Dimitriu y Luban
Funciones de pertenencia basadas en inquietudes exactas respecto a un problema.	• Función lineal de Zimmermann • Función triangular de Tanaka • Función lineal de Hanna
Funciones de pertenencia basadas en demandas más teóricas.	• Función de Trussel • Función de Suarovski
Funciones de pertenencia como modelos de los conceptos humanos.	• Función de Hersh • Función de Zimmermann

Ejemplos

Existen diferentes tipos de función de membresía que pueden ser utilizadas, a continuación se presentan las más recomendables (Martín Armario 1982).

- **Función de membresía simple, que corresponde al conjunto ordinario:**

$$(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } & 0 \leq x \leq k \\ 0 \text{ para } & x > k \end{cases}$$

- **Función de membresía escalonada**

$$\boldsymbol{\mu(x) = 1} \text{ para } 0 \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{k_1}$$

$$\boldsymbol{\mu(x) = \alpha} < 1 \text{ para } \boldsymbol{k_1} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{k_2}$$

.
.
.

$$\boldsymbol{\mu(x) = 0} \text{ para } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{k_m}$$

- **Función de membresía lineal**

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < k_1 \\ \dfrac{k_2 - x}{k_2 - k_1}, & k_1 \leq x < k_2 \\ 0, & x \geq k_2 \end{cases}$$

- **Otros tipos**

Se puede utilizar cualquier tipo de función para modelar el grado de pertenencia de los elementos de un subconjunto borroso, sin embargo, es importante considerar que dependiendo del tipo de función utilizada la complejidad para solucionar el modelo puede aumentar considerablemente.

Criterios para la selección

Existen varios criterios que pueden ser usados para la selección de la función de membresía. A continuación se presentan en la Tabla 3 los recomendados (Azorín 1979).

Tabla 3. Criterios de selección para la función de membresía

Criterio individual	Los grados de pertenencia de los elementos del subconjunto borroso son definidos de forma subjetiva por la persona que realiza el estudio.
Criterios Colectivos	Consiste en tomar una muestra $\mu(x)$ para cada elemento, a diferentes personas involucradas y relacionadas con el parámetro que representa al subconjunto borroso, se obtiene un promedio tomando en cuenta el peso relativo de cada participante.
Procedimientos experimentales	Por medio de experimentos físicos se obtiene el valor de $\mu(x)$.
Procedimiento analítico	Es necesario que se utilicen modelos que de forma analítica permitan definir la función de membresía.

3.4 Números Borrosos

El número difuso se puede definir en cualquier campo referencial ordenado, por mencionar algunos se tienen: los números reales, reales positivos, enteros o los números naturales.

Se define un número borroso (Fuzzy Number) $\tilde{A}$, como un subconjunto borroso de los números reales. Los números borrosos verifican las siguientes propiedades:

1. Normalidad

$$\text{Sup}\ \boldsymbol{\mu_{\tilde{A}}}\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$$

2. Nivel α

$$\forall \boldsymbol{\alpha}\ \in\ [\mathbf{0},\mathbf{1}]\ \text{el conjunto},\ \boldsymbol{A_\alpha} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} :\ \boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x}) \geq\ \boldsymbol{\alpha}\},\ \text{es compacto}$$

3. Convexidad

$$\forall \alpha\ ,\beta\ \in\ [0,1]\ \text{con}\ \alpha\ > \beta\ \ \text{se tiene que}\ \tilde{A}_\alpha\ \subset\ \tilde{A}_\beta$$

Los números reales y los intervalos de números reales pueden tratarse como casos particulares de números borrosos (Lazzari y Machado 1998). El intervalo [2, 8] puede expresarse de la siguiente manera:

$$\forall x\ \in\ \mathbb{R} :$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ x < 2 \\ 1 & \text{si}\ \ 2 \leq\ x \leq 8 \\ 0 & \text{si}\ \ x > 8 \end{cases}$$

Gráficamente, se tiene lo siguiente:

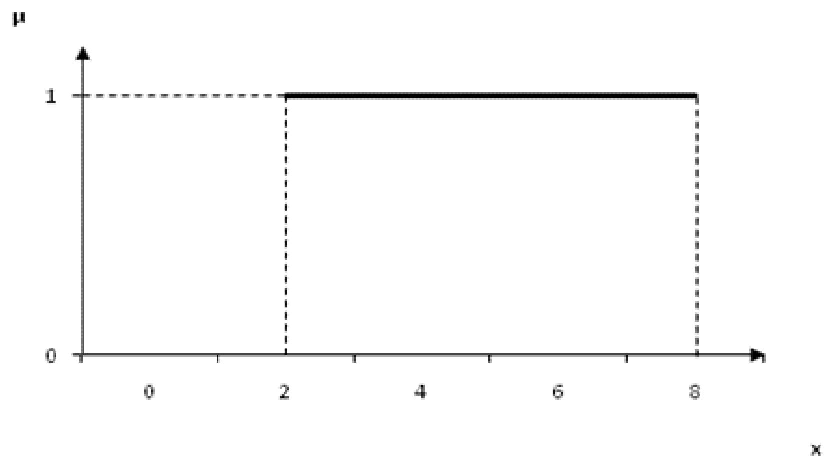

Figura 16 Intervalo [2, 8]

Los números borrosos que se utilizaran para los modelos de inventarios, son los números borrosos que incluyen a los números e intervalos definidos sobre los números reales.

Representación de los números borrosos

Un número borroso se puede representar de dos maneras(Kaufmann y Gil 1987):

1. Para el nivel α se le asigna el intervalo de confianza:

$$\forall\alpha \in [0,1]$$

$$A_\alpha = \left[\mathbf{a}_1^{(\alpha)}, \mathbf{a}_2^{(\alpha)}\right]$$

2. Asignar $\mu(x)$, la función que representa los niveles del número borroso para cada valor de $x \in \mathrm{R}$ (eventualmente que pertenece a Z), para este caso hay que definir la función tanto a la izquierda como a la derecha.

A continuación se presenta un ejemplo en donde se muestra como a partir de una función de membresía dada se obtienen los intervalos de nivel α (Lazzari y Machado 1998).

Dado un número borroso $\hat{A}$, cuya función de membresía es:

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x+2}{5} & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{-x+5}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra de manera gráfica la función de membresía para el número borroso $\hat{A}$.

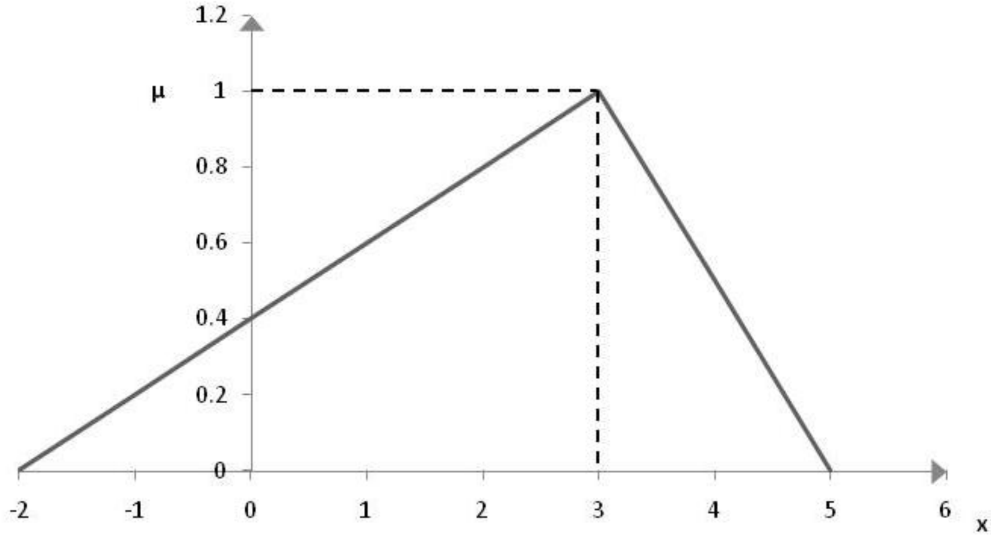

Figura 17 Representación de la función de membresía del número borroso A

El procedimiento para obtener los α-cortes para cada nivel de α, es tomar α en lugar de μ, considerando la función inversa, tanto del lado izquierdo como del lado derecho. De esta forma se obtendrá $a_1(\alpha)$ y $a_2(\alpha)$ respectivamente. Para el ejemplo anterior se obtiene de la siguiente manera.

Para el lado izquierdo se tendría:

$$\alpha = \frac{x+2}{5}$$

$$5\alpha = x + 2$$

$$5\alpha - 2 = x$$

$$a_1(\alpha) = 5\alpha - 2$$

Del mismo modo, para el lado derecho se obtiene $a_2(\alpha)$

$$\alpha = \frac{-x+5}{2}$$

$$2\alpha = -x + 5$$

$$-2\alpha + 5 = x$$

$$a_2(\alpha) = -2\alpha + 5$$

De esta forma, la representación de este número borroso, en función de los α-cortes es la siguiente:

$$A_\alpha = [5\alpha - 2,\ -2\alpha + 5]$$

De esta representación se puede conocer rápidamente, que si α =0 entonces $A_0 = [-2, 5]$, en cambio cuando α =1 entonces $A_0 = [3, 3]$, de la figura anterior se observa que estos valores representan los valores de x cuando μ =0 y 1.

La función de membresía y los α-cortes, son representaciones que nos permiten conocer a una primera instancia información sobre el número borroso, además como se puede ver, es fácil pasar de una representación a otra. En el capítulo sobre los modelos de inventarios de EOQ considerando la demanda un número borroso, se realizan los cálculos utilizando los α-cortes.

3.4.1 Números Borrosos Triangulares

El número borroso triangular es aquel número borroso real y continuo, tal que su función de membresía determina con el eje de las abscisas un triangulo. Por consiguiente, está formado por tres números reales. Su función de membresía es lineal a izquierda y a derecha. Existe un elemento único que pertenece completamente al número borroso. De tal forma que el número borroso triangular (NBT) queda determinado de la siguiente manera:

NBT $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$, en donde

$a_1 \leq a_2 \leq a_3$

a_1, significa el valor más pequeño posible que puede tomar ese parámetro incierto.

a_2, significa el valor más posible que puede tomar ese parámetro incierto.

a_3, significa el valor más grande posible que puede tomar ese parámetro incierto.

La definición de manera formal del número borroso triangular es la siguiente:

Se define un número borroso triangular $A \in \mathbb{R}$ como aquel subconjunto borroso de $\mathbb{R}$ con función de membresía $\mu_A(x)$ dada por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{-x + a_3}{a_3 - a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si } x > a_3 \end{cases}$$

De forma gráfica el NBT se tiene lo siguiente:

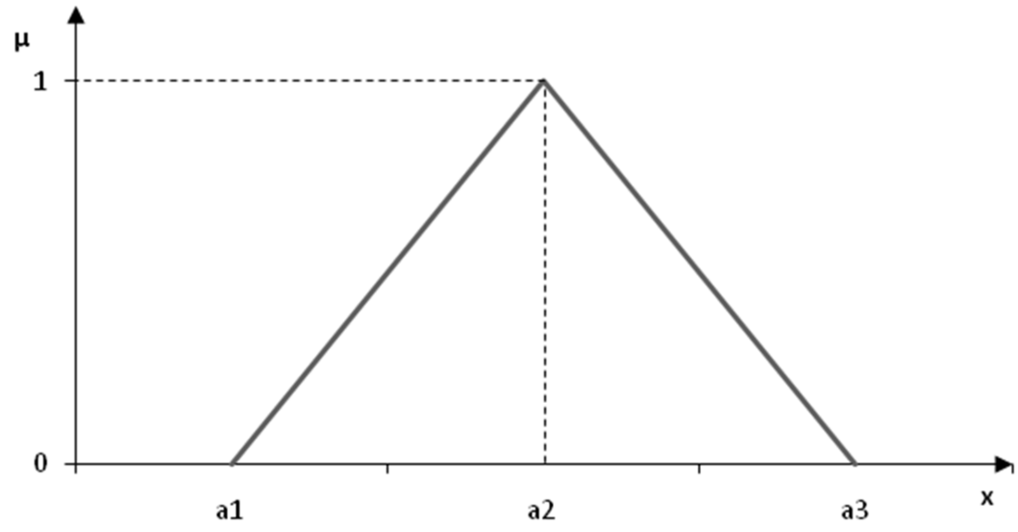

Figura 18 Número borroso triangular (NBT)

Por lo tanto, por cada valor del NBT que se incrementa de a_1- a_2, su función de membresía aumenta linealmente de 0 a 1, mientras que, si el valor de NBT se incrementa de a_2- a_3, su función de membresía disminuye linealmente de 1 a 0.

3.4.2 Números Borrosos Trapezoidales

El número borroso trapezoidal es aquel número borroso real y continuo. Está formado por cuatro números reales. Su función de membresía es lineal a izquierda y a derecha. Existe un intervalo de números reales, los cuales pertenecen completamente al número borroso. De tal forma que el número borroso trapezoidal (NBTr) queda determinado de la siguiente manera:

NBTr $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, en donde

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$

a_1, significa el valor más pequeño posible que puede tomar ese parámetro incierto.

$a_2 - a_3$, el intervalo de números reales más posible que puede tomar ese parámetro incierto.

a_4, significa el valor más grande posible que puede tomar ese parámetro incierto.

La definición de manera formal del número borroso trapezoidal es la siguiente:

Se define un número borroso trapezoidal $A \in \mathbb{R}$ como aquel subconjunto borroso de $\mathbb{R}$ con función de membresía $\mu_A(x)$ dada por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & si\ a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & si\ a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{-x + a_4}{a_4 - a_3} & si\ a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & \text{si } x > a_4 \end{cases}$$

De forma gráfica, para el NBTr se tiene lo siguiente:

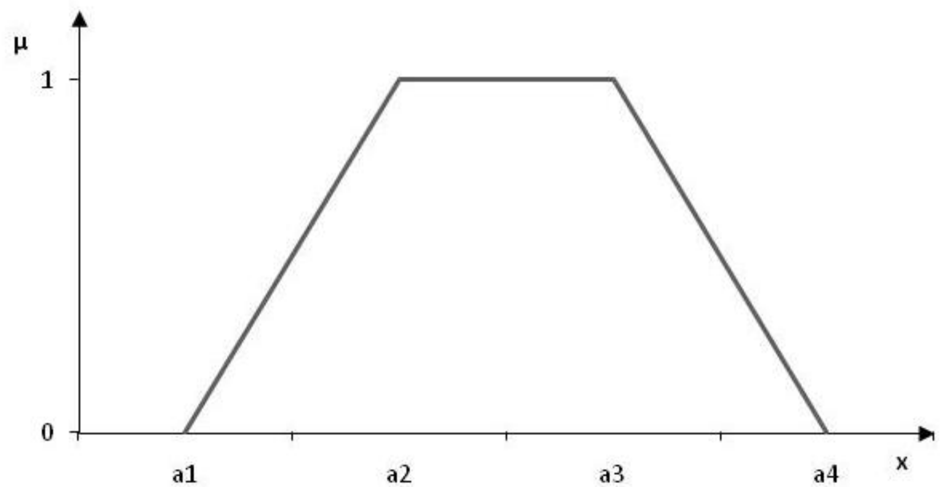

Figura 19 Número borroso trapezoidal (NBTr)

Por lo tanto, por cada valor del NBTr que se incremente de a_1- a_2, su función de membresía aumenta linealmente de 0 a 1, mientras que, si el valor de NBTr se incrementa de a_3- a_4, su función de membresía disminuye linealmente de 1 a 0. En el intervalo de a_2- a_3 la función es constante con un valor de 1.

CAPITULO CUATRO

4 MODELO DE MRP CONSIDERANDO LA DEMANDA UN NÚMERO BORROSO

4.1 Programación Lineal Borrosa

En1947 George Dantzig desarrollo el algoritmo simplex, para resolver problemas de programación lineal (PL). La técnica se aplica a una amplia variedad de problemas reales en los campos de la industria, salud, economía, transporte, etc.,(Taha 2004). Por esa razón la programación lineal es una de las ramas más estudiadas en los últimos años, y una de las herramientas más útiles para las empresas. La programación lineal se aplica a modelos de optimización en los que las funciones objetivo y restricciones son estrictamente lineales.

Los modelos de programación lineal se representan de forma estándar de la siguiente manera:

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

s. a.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

La función objetivo del problema de PL es *z*, la cual se busca minimizar o maximizar.

De forma matricial se tiene la matriz d coeficientes de las restricciones:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz A=[a_{ij}] es la matriz de *mxn*, llamada matriz de restricciones.El vector de las variables involucradas en la función objetivo se define por

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

El vector de restricciones

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Finalmente el vector costo de la función objetivo

$$\mathrm{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

Por consiguiente se tendría:

$$\max\,(\min)\; z = cx$$

s.a.

$$A\mathrm{x} \leq (\geq) b$$

$$\mathrm{x} \geq 0$$

Existen distintos casos que se pueden dar en la programación lineal borrosa o flexible, por ejemplo: cuando el lado derecho de las restricciones son números borrosos, o bien cuando los coeficientes de la matriz A son números borrosos o cuando se tienen los dos casos anteriores. Este trabajo solo se enfoca a analizar el primer caso, debido a que la demanda corresponde al lado derecho de la restricción. A este tipo de restricciones se les llama restricciones flexibles (López y Restrepo 2008).

Un problema de programación lineal con restricciones flexibles, se define de la siguiente manera:

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq B_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Considerando que B_i es un número borroso de forma trapezoidal (NBTr), con la siguiente función de membresía.

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq d_i \\ \dfrac{-x + d_i + p_i}{p_i} & \text{si } d_i < x < d_i + p_i \\ 0 & \text{si } x \geq d_i + p_i \end{cases}$$

Donde $x \in$ R

Como se puede observar en la Figura 20, la forma gráfica del número borroso es lineal y descendente de d_i a $(d_i + p_i)$.

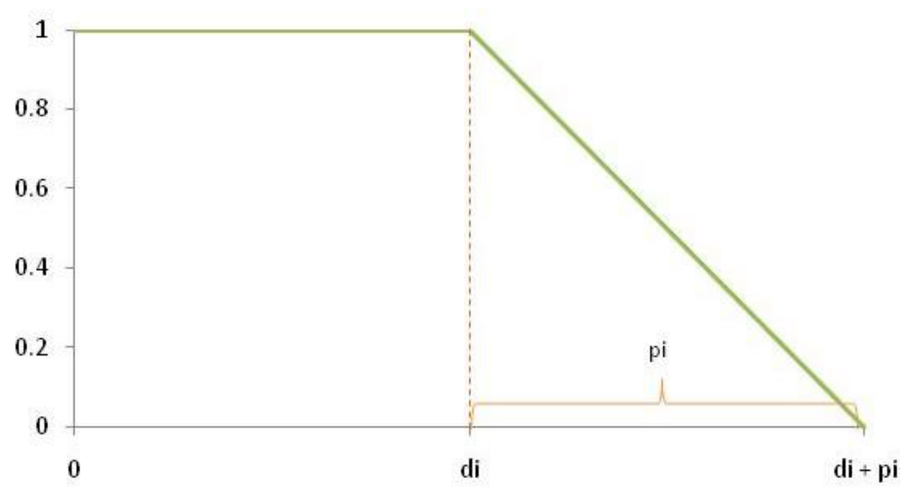

Figura 20 Número borroso para el problema de PLD

Una vez que se tiene definido el tipo de número borroso que se utilizará para representar el parámetro bajo incertidumbre, para resolver el PLD es necesario calcular el conjunto difuso de valores óptimos, por lo tanto es necesario calcular el límite superior (z_u) e inferior (z_l) para la función objetivo[7]. La forma de calcular estos límites, es resolviendo un problema de PL para cada *z* de la siguiente manera:

- Problema de PL para obtener z_l

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

- Problema de PL para obtener z_u

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i + p_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Se observa que cada nuevo PL, considera los límites del número borroso. El conjunto borroso de valores óptimos se representara por G, el cual se define de la siguiente manera:

[7] También llamados grado de aspiración(zu) y grado mínimo de cumplimiento (zl)

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_u \leq CX \\ \dfrac{CX - z_l}{z_u - z_l} & \text{si } z_l < CX < z_u \\ 0 & \text{si } CX \leq z_l \end{cases}$$

Introduciendo una nueva variable, λ, donde $\lambda \in [0,1]$ se tiene el siguiente problema de PL (Zimmermann 1993).

$$\max \lambda$$

s.a.

$$\lambda \leq \frac{CX - z_l}{z_u - z_l}$$

$$\lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i + p_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$\lambda, x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

En donde λ representa al grado de membresía máximo, dentro del conjunto borroso de valores óptimos (G(x)), valor que varía entre z_l y z_u (Martínez Fonseca 2001). Reordenando la función objetivo se tiene lo siguiente:

$$\max \lambda$$

s.a.

$$\lambda(z_u - z_l) - CX \leq z_l$$

$$\lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i + p_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$\lambda, x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

A continuación se presenta el modelo para MRP considerando las restricciones flexibles, es decir se define como un modelo de programación lineal borroso, posteriormente se presenta un ejemplo numérico, el cual permite realizar un análisis de los resultados al considerar la demanda un número bajo incertidumbre. Para resolverlo se aplicará lo expuesto en esta sección.

4.2 Aplicación al Modelo para MRP

En la sección 2.1.1 de este trabajo se presentó el modelo de PL para MRP, primero se describieron los parámetros y las variables que involucra el modelo, posteriormente se presentó la función objetivo y las restricciones, enseguida se presenta únicamente el modelo con la función objetivo y las restricciones considerando la borrosidad.

Considerando que existe un número borroso que representa la incertidumbre y por consiguiente el comportamiento de la demanda de la siguiente manera:

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq d_i \\ \dfrac{-x + d_i + p_i}{p_i} & \text{si } d_i < x < d_i + p_i \\ 0 & \text{si } x \geq d_i + p_i \end{cases}$$

El modelo queda definido como se muestra a continuación, en donde se puede ver que la función objetivo y la restricción de la demanda se modificaron, las otras restricciones se definen de la misma manera.

Función Objetivo Maximizar λ

Sujeto a:

$$\lambda(z_u - z_l) - \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}(cp_i p_{it} + ci_i INVT_{it} + crd_i Rd_{it}) + \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}(ctoc_{rt} Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt}) \leq -z_l$$

$$\lambda(d_{it,u} - d_{it,l}) + INVT_{i,t-1} - Rd_{i,t-1} + p_{i,t-TSi} + RP_{it} - INVT_{i,t} + Rd_{i,t} \leq d_{it,u} \; ; \quad \forall\, i, \forall t$$

$$\sum_{i=1}^{I} AR_{ir} P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \; ; \quad \forall r, \forall t$$

$$Rd_{iT} = 0\ ;\ \forall i$$

$$p_{i,t}\ ,INVT_{i,t}\ ,Rd_{i,t}\ ,Toc_{rt}\ ,Tex_{rt} \geq 0; \quad \forall i\ , \quad \forall r, \quad \forall t$$

4.3 Ejemplo de Aplicación

El siguiente ejemplo ilustrativo, permite formular el modelo de PL, que se explicó en la sección 2.1.1, para esto se presentan las tablas con los datos del problema a posteriormente el código que se utilizó para resolverlo con el software LINGO 6.0 (LINGO/PC s.f.). Posteriormente se da una explicación de las modificaciones que se realizan a la función objetivo y a la restricción para cubrir con la demanda, finalmente se obtiene el resultado considerando la demanda un número borroso. Debido a la extensión del código modificado, éste se presenta en el Apéndice B para su consulta.

El problema considera 11 productos, de los cuales solo uno es producto final, para producir este producto es necesario realizar mezclas y armados con los productos restantes. En la Figura 21 se presenta la lista de materiales.

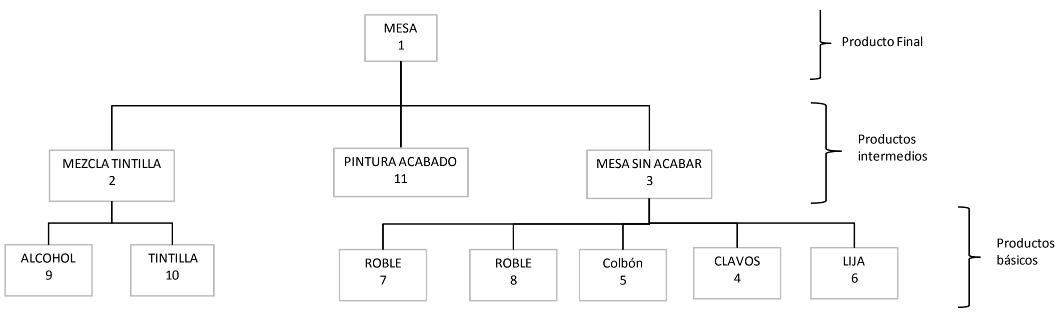

Figura 21 Lista de materiales para la producción de una mesa

La demanda del producto final para los siguientes 4 periodos es la siguiente:

Período	Producto final
1	100
2	160
3	160
4	240

Los datos que se presentan en este problema son datos estimados. Para el ejemplo no se consideran restricciones de capacidad de producción, lo que si se contempla es cubrir con la demanda y satisfacer la producción de los productos debido a otros subproductos.

En la siguiente tabla se presentan los cotos por producir, almacenar y por tener faltantes por cada producto, así como el inventario inicial. El ejemplo no considera entregas de material por recepciones programadas.

Producto	Costo por producir $	Costo por almacenar $	Costo por faltantes $	Inventario inicial (Unidades)
1	100	4	12	0
2	40	5	28	0
3	30	5	42	0
4	2	0.3	15	250
5	10	5	25	10
6	10	3	17	10
7	120	6.48	158	15
8	130	6.48	158	15
9	50	2.22	72	5
10	70	2.22	80	10
11	100	2.22	125	5

Figura 22 Costos e inventario inicial de los productos

Con estos datos, se puede plantear el modelo para solucionarlo en LINGO. El número de Periodos que se modelaran es T= {1, 2, 3, 4}, el número de productos es 11, por lo que I = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. La función objetivo busca minimizar la suma de los costos, por lo que esta se define de la siguiente manera: *(costo por producir el producto i por la producción de i) + (costo por inventario de i por el inventario de i) + (costo por faltantes de i por loa faltantes de i) para todo i y pata todo t.* A continuación se presenta la función objetivo para este problema ilustrativo.

Como se observa las variables, se encuentran definidos para todos los productos y para todos los períodos, por ejemplo, p11 significa la producción del producto i=1 en el período t=1, la variable inv34 significa el inventario del producto i= 3 en el período t=4 y así sucesivamente.

```
min
=(100*p11+4*inv11+12*rd11+100*p12+4*inv12+12*rd12+100*p13+4*inv13+12*r
d13+100*p14+4*inv14+12*rd14) +
(40*p21+5*inv21+28*rd21+40*p22+5*inv22+28*rd22+40*p23+5*inv23+28*rd23+
40*p24+5*inv24+28*rd24)+
(30*p31+5*inv31+42*rd31+30*p32+5*inv32+42*rd32+30*p33+5*inv33+42*rd33+
30*p34+5*inv34+42*rd34)+
(2*p41+0.3*inv41+15*rd41+2*p42+0.3*inv42+15*rd42+2*p43+0.3*inv43+15*rd
43+2*p44+0.3*inv44+15*rd44)+
(10*p51+5*inv51+25*rd51+10*p52+5*inv52+25*rd52+10*p53+5*inv53+25*rd53+
10*p54+5*inv54+25*rd54)+
(10*p61+3*inv61+17*rd61+10*p62+3*inv62+17*rd62+10*p63+3*inv63+17*rd63+
10*p64+3*inv64+17*rd64)+
(120*p71+6.48*inv71+140*rd71+120*p72+6.48*inv72+140*rd72+120*p73+6.48*
inv73+140*rd73+120*p74+6.48*inv74+140*rd74)+
(130*p81+6.48*inv81+158*rd81+120*p82+6.48*inv82+158*rd82+130*p83+6.48*
inv83+158*rd83+120*p84+6.48*inv84+158*rd84)+
(50*p91+2.22*inv91+72*rd91+50*p92+2.22*inv92+72*rd92+50*p93+2.22*inv93
+72*rd93+50*p94+2.22*inv94+72*rd94)+
(70*p101+2.22*inv101+80*rd101+70*p102+2.22*inv102+80*rd102+70*p103+2.2
2*inv103+80*rd103+700*p104+2.22*inv104+80*rd104)+
(100*p111+2.22*inv111+125*rd111+100*p112+2.22*inv112+125*rd112+100*p11
3+2.22*inv113+125*rd113+100*p114+2.22*inv114+125*rd114);

!Demanda del producto final;

d11=100;
d12=160;
d13=160;
d14=240;


!Demanda de los otros productos i;

d21= 0.5*d11;
d22= 0.5*d12;
d23= 0.5*d13;
d24= 0.5*d14;

d31= d11;
d32= d12;
d33= d13;
d34= d14;

d41= 16*d11;
d42= 16*d12;
d43= 16*d13;
d44= 16*d14;

d51= d11;
d52= d12;
d53= d13;
d54= d14;

d61= 2*d11;
d62= 2*d12;
d63= 2*d13;
d64= 2*d14;

d71= 4*d11;
d72= 4*d12;
d73= 4*d13;
d74= 4*d14;

d81= d11;
d82= d12;
d83= d13;
d84= d14;

d91= 0.25*d11;
d92= 0.25*d12;
d93= 0.25*d13;
d94= 0.25*d14;

d101= 0.25*d11;
d102= 0.25*d12;
d103= 0.25*d13;
d104= 0.25*d14;
```

```
d111= 0.25*d11;
d112= 0.25*d12;

!Restricciones de demanda

i=1;
inv10= 0;
rd10=0;
inv10-rd10+p11-inv11+rd11=d11;
inv11-rd11+p12-inv12+rd12=d12;
inv12-rd12+p13-inv13+rd13=d13;
inv13-rd13+p14-inv14+rd14=d14;
inv14=0;


!i=2;
inv20= 0;
rd20=0;
inv20-rd20+p21-inv21+rd21=d21;
inv21-rd21+p22-inv22+rd22=d22;
inv22-rd22+p23-inv23+rd23=d23;
inv23-rd23+p24-inv24+rd24=d24;


!i=3;
inv30= 0;
rd30=0;
inv30-rd30+p31-inv31+rd31=d31;
inv31-rd31+p32-inv32+rd32=d32;
inv32-rd32+p33-inv33+rd33=d33;
inv33-rd33+p34-inv34+rd34=d34;


!i=4;

inv40=250;
rd40=0;
inv40-rd40+p41-inv41+rd41=d41;
inv41-rd41+p42-inv42+rd42=d42;
inv42-rd42+p43-inv43+rd43=d43;
inv43-rd43+p44-inv44+rd44=d44;

!i=5;
inv50=10;
rd50=0;
inv50-rd50+p51-inv51+rd51=d51;
inv51-rd51+p52-inv52+rd52=d52;
inv52-rd52+p53-inv53+rd53=d53;
inv53-rd53+p54-inv54+rd54=d54;


!i=6;
inv60= 10;
rd60=0;
inv60-rd60+p61-inv61+rd61=d61;
inv61-rd61+p62-inv62+rd62=d62;
d113= 0.25*d13;
d114= 0.25*d14;

inv62-rd62+p63-inv63+rd63=d63;
inv63-rd63+p64-inv64+rd64=d64;


!i=7;
inv70= 15;
rd70=0;
inv70-rd70+p71-inv71+rd71=d71;
inv71-rd71+p72-inv72+rd72=d72;
inv72-rd72+p73-inv73+rd73=d73;
inv73-rd73+p74-inv74+rd74=d74;


!i=8;
inv80=15;
rd80=0;
inv80-rd80+p81-inv81+rd81=d81;
inv81-rd81+p82-inv82+rd82=d82;
inv82-rd82+p83-inv83+rd83=d83;
inv83-rd83+p84-inv84+rd84=d84;


!i=9;
inv90= 5;
rd90=0;
inv90-rd90+p91-inv91+rd91=d91;
inv91-rd91+p92-inv92+rd92=d92;
inv92-rd92+p93-inv93+rd93=d93;
inv93-rd93+p94-inv94+rd94=d94;


!i=10;
inv100= 10;
rd100=0;
inv100-rd100+p101-
inv101+rd101=d101;
inv101-rd101+p102-
inv102+rd102=d102;
inv102-rd102+p103-
inv103+rd103=d103;
inv103-rd103+p104-
inv104+rd104=d104;


!i=11;
inv110= 5;
rd110=0;
inv110-rd110+p111-
inv111+rd111=d111;
inv111-rd111+p112-
inv112+rd112=d112;
inv112-rd112+p113-
inv113+rd113=d113;
```

```
inv113-rd113+p114-                    inv114+rd114=d114;

!Restricciones de producción;         0.5*p24+p34+0.5*p114-p14=0;
                                      p91+p101-p21=0;
0.5*p21+p31+0.5*p111-p11=0;           p91+p101-p22=0;
0.5*p22+p32+0.5*p112-p12=0;           p91+p101-p23=0;
0.5*p23+p33+0.5*p113-p13=0;           p91+p101-p24=0;

0.0625*p41+p51+0.5*p61+0.25*p71+p81-p31=0;
0.0625*p42+p52+0.5*p62+0.25*p72+p82-p32=0;
0.0625*p43+p53+0.5*p63+0.25*p73+p83-p33=0;
0.0625*p44+p54+0.5*p64+0.25*p74+p84-p34=0;
```

Como se observa en el modelo anterior, se agregaron restricciones que permiten determinar la demanda de los productos que dependen del producto final. Para cada producto i, se agregaron cuatro restricciones para cubrir la demanda, de t =1…4. Las características del modelo son:

- Existen en total 131 variables
- Un total 57 restricciones
- El modelo se resolvió en 50 iteraciones

El valor de la función objetivo es de $951,824.00.

4.3.1 Demanda como un número borroso

La utilización de la demanda como un número borroso, implica realizar las modificaciones que se presentaron en la sección anterior, para esto es necesario agregar una nueva variable, y modificar las restricciones de la demanda. Para esto es necesario resolver el modelo para cada uno de los límites. Obtener las diferencias y resolver nuevamente el modelo. Primero es necesario definir la demanda como un número borroso, en este caso, se define como un número borroso trapezoidal. Después se calculan los límites de la función objetivo, para posteriormente definir un modelo que incluya en las restricciones los dos límites. Para el período t=1, la demanda se comporta como se muestra en la siguiente figura.

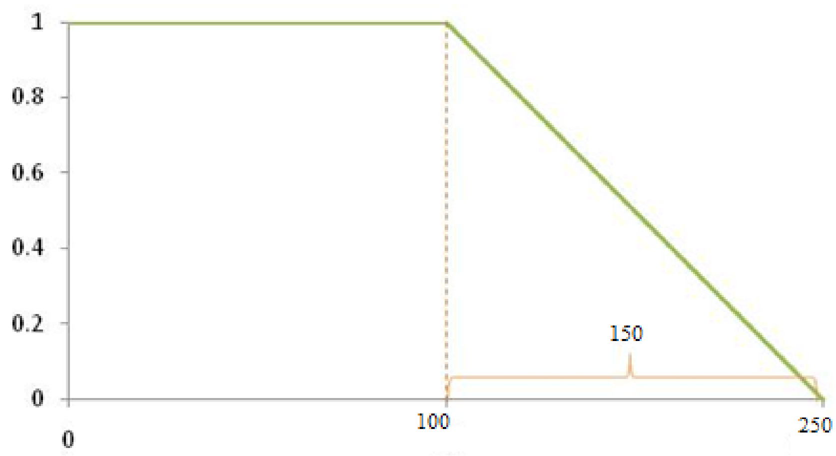

Figura 23 Comportamiento de la demanda para el período t=1.

Con la siguiente función de membresía.

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 100 \\ \dfrac{-x+250}{150} & \text{si } 100 < x < 250 \\ 0 & \text{si } x \geq 250 \end{cases}$$

Donde $x \in$ R

Para los siguientes períodos los datos son:

Período	d_i	$d_i + p_i$
2	160	280
3	160	280
4	240	360

A continuación se realiza la modificación sobre una de las restricciones.

```
i=1;
inv10= 0;
rd10=0;
x8*(150)+(inv10-rd10+p11-inv11+rd11)<= d11;
x*(120)+(inv11-rd11+p12-inv12+rd12)<=d12;
x*(120)+(inv12-rd12+p13-inv13+rd13)<=d13;
x*(120)+(inv13-rd13+p14-inv14+rd14)<=d14;
```

[8] La x equivale a λ

```
inv14=0;
```

Como se observa en las restricciones anteriores, el valor que se encuentra entre paréntesis es el resultado de la diferencia entre los límites del número borroso. La letra x equivale a la letra griega λ (nueva variable). El valor de derecha es el límite superior. Para las siguientes restricciones se realiza el mismo procedimiento. Es necesario considerar que la demanda de los otros productos depende de la demanda del producto 1, por lo que en el modelo el valor entre paréntesis se encuentra definido por la demanda inferior y la demanda con el incremento. La función objetivo cambia a una función de maximizar la nueva variable, y la anterior cambia utilizando el z_u y z_l.

4.4 Análisis de resultados

El modelo modificado tiene las siguientes características:

- 132 variables
- 59 restricciones
- Y se resolvió en 54 iteraciones

El valor de la función objetivo es $ 940,077.54.

Comparando los resultados, se observa que se obtuvo un mejor resultado haciendo más flexibles las restricciones. Existen otras modificaciones que se pueden aplicar para resolver el modelo incluyendo la borrosidad, otra opción es considerar la borrosidad en los costos (Mula y Poler, Material Requirement Planning with fuzzy constraints and fuzzy coefficientes 2007). Para ver otros ejemplos de funciones de membresía se recomienda consultar el trabajo desarrollado por Zimmermann (Zimmermann 1993).

En el siguiente capítulo se presenta el análisis de los modelos de Lote Económico considerando la demanda un número borroso triangular, se presentan gráficas y se proponen las etapas de solución.

5 Modelos de EOQ considerando la demanda un número borroso

Los modelos del Lote Económico, como ya mencionó, representan en México un porcentaje considerable dentro de los modelos más utilizados, a pesar de la edad de estos modelos, aún vigentes en las empresas, en especial en las micro, pequeñas y medianas. En el **Capítulo 2** se presentaron los modelos de EOQ, las variables, los supuestos y la forma de obtener la cantidad óptima del tamaño del pedido (Q), además de obtener las variable del tiempo y niveles de almacenamiento y faltantes. Existen diferentes trabajos realizados, que implican más consideraciones y variables, no obstante para los fines de esta investigación es suficiente con los modelos ya presentados.

En este capítulo se presentan las etapas propuestas para resolver los modelos de Lote Económico cuando la demanda está definida como un número borroso, debido a la incorporación de la incertidumbre.

5.1 Etapas propuestas para el análisis de los modelos de Lote Económico

Las etapas que a continuación se enlistan resultaron de un análisis profundo, que surgió de la realización de varios ejemplos al utilizar diferentes modelos de EOQ y diferentes números borrosos para definir la demanda. Las etapas generales que aquí se presentan permiten resolver o analizar un modelo de Lote Económico que considere la demanda como un número borroso.

1. **Seleccionar el modelo de Lote Económico que mejor se adecue a las necesidades y datos que se tengan**

De acuerdo a los datos que se tengan en el problema, y al comportamiento del nivel de almacenamiento, se decide cual modelo es el que se debe aplicar.

2. **Definir la demanda como un número borroso**

En el **Capítulo 3**, se presentan los conceptos de la teoría de los Conjuntos Borrosos. En este capítulo se mencionó, que la función de membresía es uno de los elementos más representativos de los números borrosos y se complementó la información con la descripción de las funciones más utilizadas, finalmente se presentaron los números borrosos que permiten trabajar con los número reales, como es el caso de la demanda. La definición de la demanda como un número borroso implica que se tiene el conocimiento de que la demanda se encuentra entre ciertos parámetros. Por ejemplo, si se define la demanda como un número triangular significaría que la demanda se encuentra entre tres valores (el mínimo valor, el más posible, y el máximo valor).

La definición de un número borroso, se puede realizar por medio de la descripción de la función de la membresía, o bien con su representación gráfica. Es necesario que se obtengan los valores para los α-cortes, en este punto es necesario que se determine la "longitud de paso", es decir, el incremento que tendrán los α-cortes, donde α se encuentra entre 0 y 1. El valor del incremento implicará la precisión de los cálculos.

Una vez que se conocen los valores que definen la demanda y el comportamiento que estos tienen, se pasa a la etapa 2.

3. **Agregar a los cálculos la borrosidad de la demanda definida por los α-cortes**

Se recomienda que se realicen los cálculos por separado, es decir, de las fórmulas que determinan la política óptima, realizar primeramente los cálculos que no incluyan la parte de la borrosidad, una vez que se obtengan estos valores se incorporará la borrosidad. Para este punto se tendrán, de acuerdo a la longitud de paso de los α-cortes que se haya decidido, varios valores para cada variable; esto debido a que se realizan los cálculos para cada valor de la demanda relacionada a los α-cortes.

4. **Determinar los valores para las variables del modelo expresadas como un número borroso**

Al realizar los cálculos para cada variable se obtendrá un número borroso, esto se origina de la incorporación de la demanda como un número borroso, de esta manera se tiene que, sí la demanda se ha definido como un número borroso triangular (NBT) los resultados para las demás variables originarán también un NBT. Es recomendable hacer las gráficas para cada una de las variables, ya que esto permitirá verificar los resultados.

5. **Realizar aproximaciones para cada una de las variables utilizando los α-cortes**

Una vez que se realiza el cálculo utilizando la demanda como un NB (número borroso), es necesario realizar una aproximación al NB que se obtuvo, la diferencia entre los cálculos y las aproximaciones es que los primeros se obtienen utilizando las fórmulas y la demanda como un NB, y las aproximaciones se obtienen utilizando únicamente los valores que resultaron de los cálculos y que definen al NB y calculando los α-cortes, es decir ahora cada variable se considera como un NB.

Lo anterior permite que se pueda obtener un resultado definido por ciertos valores, si la demanda es un NBTr entonces se obtendrán números borrosos trapezoidales para las demás variables. Gráficamente se pueden observar diferencias entre los valores calculados y las aproximaciones obtenidas.

6. **Realizar un análisis de desviaciones entre los valores calculados y los obtenidos de los α-cortes**

Cuando se tienen las graficas en donde se observan los valores calculados y las aproximaciones para cada una de las variables, se puede llegar a final del proceso si las diferencias entre una curva y otra no son representativas, en caso contrario es recomendable realizar un análisis de las curvas de las desviaciones.

Enseguida se presenta un ejemplo que permite entender y aplicar las etapas descritas y además, ayudar a tener una idea más clara de cómo resolver los modelos de Lote Económico incorporando la incertidumbre. Primero se presentará el ejemplo resuelto de manera clásica y posteriormente el ejemplo incluyendo la demanda como un número borroso triangular.

Figura 24 Etapas propuestas para solucionar el modelo de EOQ con la demanda como un número borroso

5.2 Ejemplo de aplicación al modelo sin producción y sin déficit

A continuación se presenta un ejemplo del modelo del Lote Económico sin producción y sin déficit, el cual ya había sido descrito en la sección 2.2.1, primero se soluciona el ejemplo resuelto de manera clásica y posteriormente considerando el parámetro de la demanda como un número borroso. Cuando se presenta el modelo se considera la borrosidad se mencionan las etapas propuestas anteriormente. Dado que es un ejemplo ilustrativo, la *etapa 1* se realiza en esta parte.

Ejemplo resuelto de manera clásica

Una compañía manufacturera adquiere de un proveedor externo una refacción número 644, que se utiliza en la producción de equipo estereofónico. La empresa espera fabricar aproximadamente 100,000 sistemas que utilizan esa parte, durante el año. La demanda es relativamente constante durante todo el año. El costo asociado con los pedidos es $25 por cada uno. La política de costo de inventario que la compañía ha utilizado tradicionalmente, es cargar el 20% del costo de compra como costo anual de conservación de inventarios para cualquier artículo. El precio que la compañía paga por cada una de las partes 644 es $6.25

a) Determinar la cantidad óptima de pedido que se debe de utilizar con objeto de minimizar los costos.

b) ¿Cuál es el costo promedio asociado con la cantidad óptima de pedido?

c) ¿Cuántos pedidos haría la empresa en el año?

Solución

Datos

d = 10000 unidades/año

k = 25 u.m./pedido

c = 6.25 u.m/unidad

h es por política de la compañía el 20% del costo de compra, por lo tanto

h = (20%)(6.25)= 1.25 u.m.*unidad/año

La determinación de la cantidad óptima de pedido que se debe de utilizar con objeto de minimizar los costos se calcula de la siguiente manera:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}} = Q^* = \sqrt{\frac{2(25)(10000)}{1.25}} = 632.455$$ unidades por pedido

¿Cuál es el costo promedio asociado con la cantidad óptima de pedido?

$CP(Q^*) = \sqrt{2hkd} + cd$ = $CP(Q^*) = \sqrt{2 \times 1.25 \times 25 \times 10000} + (6.25 \times 10000)$

$CP(Q^*) = 63290.56$ u.m./año

¿Cuántos pedidos haría la empresa en el año?

N= numero de pedidos, $N = \dfrac{d}{Q^*} = \dfrac{10000}{632.455} = 15.811$ pedidos/año

En la siguiente longitud de periodo

$T^* = \sqrt{\dfrac{2k}{hd}}$ = $T^* = \sqrt{\dfrac{2 \times 25}{1.25 \times 10000}} = 0.0632$ año

$T^* = 0.0632\ año \left(\dfrac{50\ semanas}{1\ año} \right) = 3.1622$ semanas

Ejemplo resuelto aplicando Teoría de Conjuntos Borrosos

En el ejemplo anterior se resuelve un problema de inventarios, aplicando el modelo EOQ sin producción y sin déficit. A continuación se analiza considerando la demanda no como un parámetro constante, sino como un número difuso. Nuevamente se consideran los datos del problema anterior.

5.2.1 Demanda como un número borroso

Para este caso se considera que la demanda no es conocida con nitidez, lo cual sucede en varias situaciones reales. Se admite que la demanda es un número borroso triangular (*etapa 2*), de la siguiente manera:

$$\tilde{d} = (a, b, c)$$

$$\tilde{d} = (5800, 8500, 13700)$$

Su función de membresía $\mu_d(x)$ se define como:

$$\mu_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5800 \\ \dfrac{x - 5800}{2700} & \text{si } 5800 \leq x \leq 8500 \\ \dfrac{-x + 13700}{5200} & \text{si } 8500 \leq x \leq 13700 \\ 0 & \text{si } x > 13700 \end{cases}$$

Se puede escribir para los α-cortes de *d*

$$d_\alpha = [5800 + (8500 - 5800)\alpha, \quad 13700 - (13700 - 8500)\alpha]$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

Simplificando

$$d_\alpha = [5800 + (2700)\alpha, \quad 13700 - (5200)\alpha]$$

$\alpha \in [0,1]$

Ahora se realiza el cálculo de los α-cortes con un incremento de 0.1, desde 0 hasta 1.

α	***d***	
0	5800	13700
0.1	6070	13180
0.2	6340	12660
0.3	6610	12140
0.4	6880	11620
0.5	7150	11100
0.6	7420	10580
0.7	7690	10060
0.8	7960	9540
0.9	8230	9020
1	8500	8500

De manera gráfica el número borroso que representa a la demanda, se muestra en la siguiente figura.

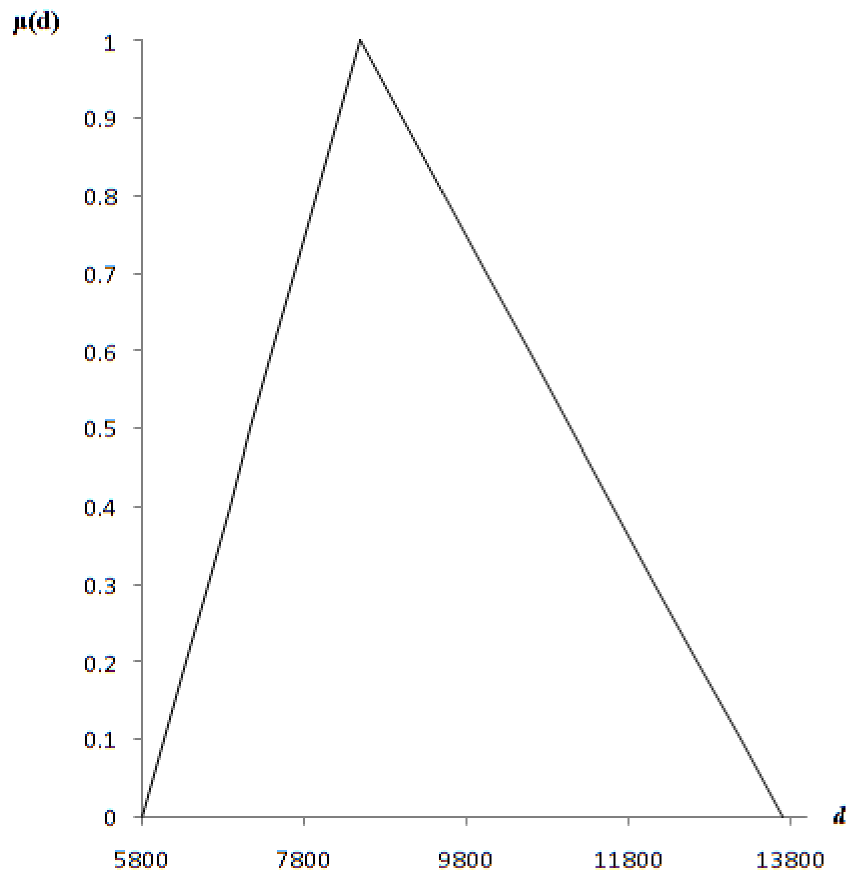

Figura 25 Representación gráfica de la demanda como NBT

En el problema que se está analizando, el único valor que se considera un número borroso es la demanda, por consiguiente los demás datos del problema continúan siendo los mismos. La manera de realizar los cálculos es resolviendo la parte que no es borrosa e incorporando posteriormente la parte borrosa (*etapa 3*), es importante mencionar que al final se obtendrá un nuevo número borroso para cada variable. Por ejemplo, para determinar la cantidad requerida (Q), se resolverá la parte que involucra el costo por ordenar (k) y el costo por mantener en inventario (h). Por otra parte se realizará el cálculo para el número borroso *d*, este último cálculo se llevará a cabo para los α-cortes, la precisión dependerá de la persona que realiza los cálculos. Para este caso el incremento de α es de 0.1.

Para cada variable que se determina (*etapa 4*), se presenta la gráfica del número difuso que se obtuvo al considerar la demanda, como NBT. Posteriormente se presenta una aproximación, la cual implica tomar en cuenta los tres números reales que definen al número y realizar los α-cortes, a diferencia de obtener los valores de realizar los cálculos con el numero borroso *d.*

La determinación de la cantidad de pedido se realiza primero resolviendo la parte no borrosa.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2k}{h}} = Q^* = \sqrt{\frac{2(25)}{1.25}} = 6$$

Finalmente se incorporan la parte borrosa y la no borrosa

$$Q = \sqrt{\frac{2k}{h}} \bullet \sqrt{5800 + (2700)\alpha, 13700 - (5200)\alpha}$$

En la Tabla 4 se presentan los resultados obtenidos para el tamaño del pedido.

Tabla 4 Cálculos y aproximaciones triangulares de Q

α	Q		$\tilde{Q} = [482 + (101)\alpha,$	$740 - (157)\alpha]$
0	482	740	482	740
0.1	493	726	492	725
0.2	504	712	502	709
0.3	514	697	512	693
0.4	525	682	522	677
0.5	535	666	532	662
0.6	545	651	543	646
0.7	555	634	553	630
0.8	564	618	563	615
0.9	574	601	573	599
1	583	583	583	583

En la tabla anterior se puede observar, en la primera columna los valores para α con una longitud de paso de 0.1, en la columna 2 y 3, se presentan los resultados de aplicar la formula de Q, considerando la demanda un número borroso. En último lugar las columnas 4 y 5 muestran los resultados de las aproximaciones triangulares (utilizando los límites obtenidos de los cálculos de las columnas 2 y 3), esto se puede representar de la siguiente manera:

Se obtiene el número borroso Q, cuya aproximación triangular (*etapa 5*) es:

$\tilde{Q} = (482, 583, 740)$

De manera gráfica, se observa que la diferencia entre el valor $\tilde{Q}$ obtenida de los cálculos utilizando el NBT de la demanda, y el valor de la aproximación triangular, es mínima, como se puede ver en la Figura 26.

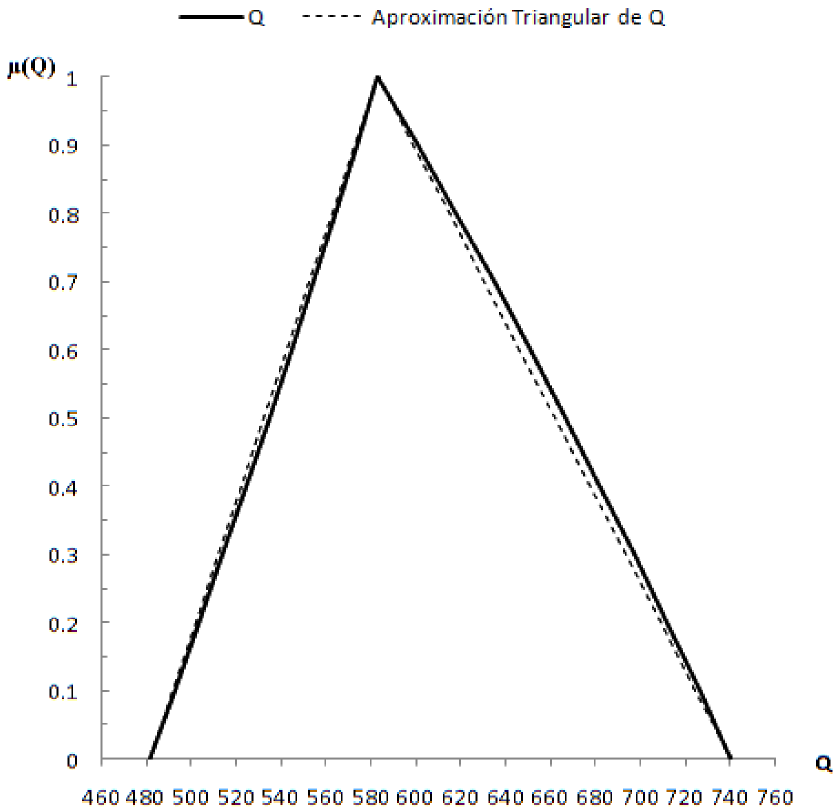

Figura 26 Representación gráfica de Q

De la misma forma que se obtuvo $\tilde{Q}$, se calcula el valor para las siguientes variables (*continuación de la etapa 4*), seguidamente se presentan los resultados de los cálculos realizados y las gráficas correspondientes.

La longitud del periodo (T), y el número de pedidos (N), son variables que se encuentran en función de la demanda, sin embargo el valor de N, se obtiene utilizando el valor de Q calculado anteriormente. En la tabla siguiente se presentan los resultados obtenidos para la variable N.

Tabla 5 Cálculos y aproximaciones triangulares de N

α	$N = \frac{d_\alpha}{\tilde{Q}}$		$\tilde{N} = [12 + (3)\alpha,\ \ 19 - (4)\alpha\ ]$	
0	12	19	12	19
0.1	12	18	12	*18*
0.2	13	18	13	18
0.3	13	17	13	17
0.4	13	17	13	17
0.5	13	17	13	17
0.6	14	16	14	16
0.7	14	16	14	16
0.8	14	15	14	15
0.9	14	15	14	15
1	15	15	15	15

En la Tabla 5 se presentan los valores para α y la longitud de paso que se definió (0.1) (columna 1), los resultados de aplicar la fórmula para obtener N (columna 2 y 3) y por último los resultados de las aproximaciones triangulares (columna 4 y 5).

El valor de $\tilde{N}$ tiene una aproximación triangular igual a $\tilde{N} = (12, 15, 19)$. De la cual, la representación gráfica es la siguiente:

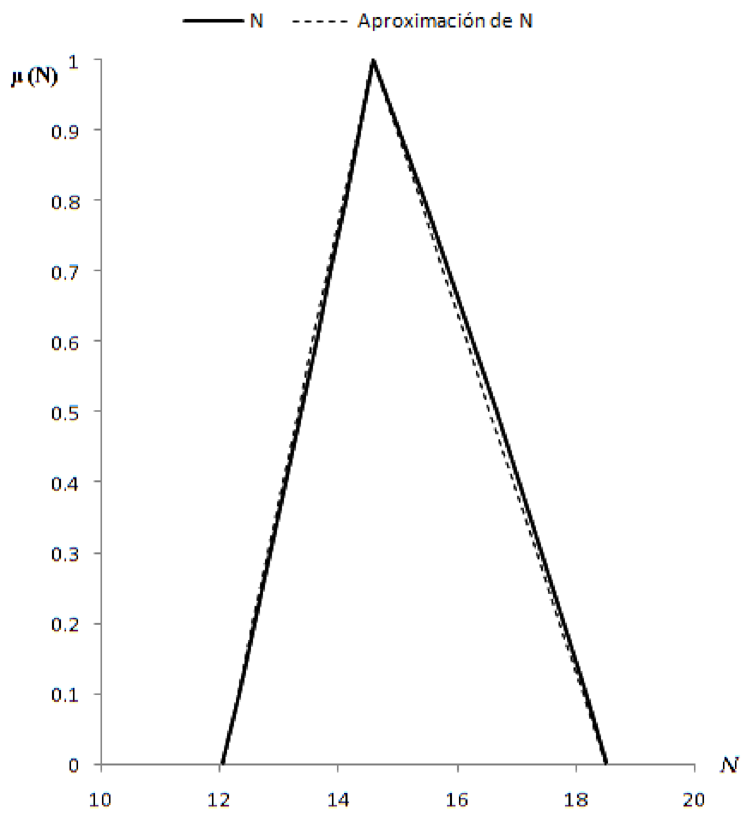

Figura 27 Representación gráfica de N

De la misma manera para T, fue necesario calcular el término sin la parte borrosa y después realizar los cálculos incluyendo la parte borrosa. En la siguiente tabla se presentan los resultados de los cálculos para los α-cortes y en seguida los resultados de las aproximaciones de T como un número borroso.

Tabla 6 Cálculos y aproximaciones triangulares de T

α	$T = \sqrt{\frac{2k}{h}} * \frac{1}{\sqrt{d_\alpha}}$		$\tilde{T} = [0.054 + (0.014)\alpha, 0.083 - (0.015)\alpha$	
0	0.08305	0.05403	0.054	0.083
0.1	0.08118	0.05509	0.055	0.082
0.2	0.07943	0.05621	0.057	0.080
0.3	0.07779	0.05740	0.058	0.079
0.4	0.07625	0.05867	0.060	0.077
0.5	0.07480	0.06003	0.061	0.076
0.6	0.07342	0.06149	0.063	0.074
0.7	0.07212	0.06306	0.064	0.073
0.8	0.07089	0.06475	0.066	0.071

α	$T = \sqrt{\frac{2k}{h} * \frac{1}{\sqrt{d_\alpha}}}$		$\tilde{T} = [0.054 + (0.014)\alpha, 0.083 - (0.015)\alpha$	
0.9	0.06972	0.06659	0.067	0.070
1	0.06860	0.06860	0.069	0.069

De manera gráfica se presentan los resultados en la Figura 28.

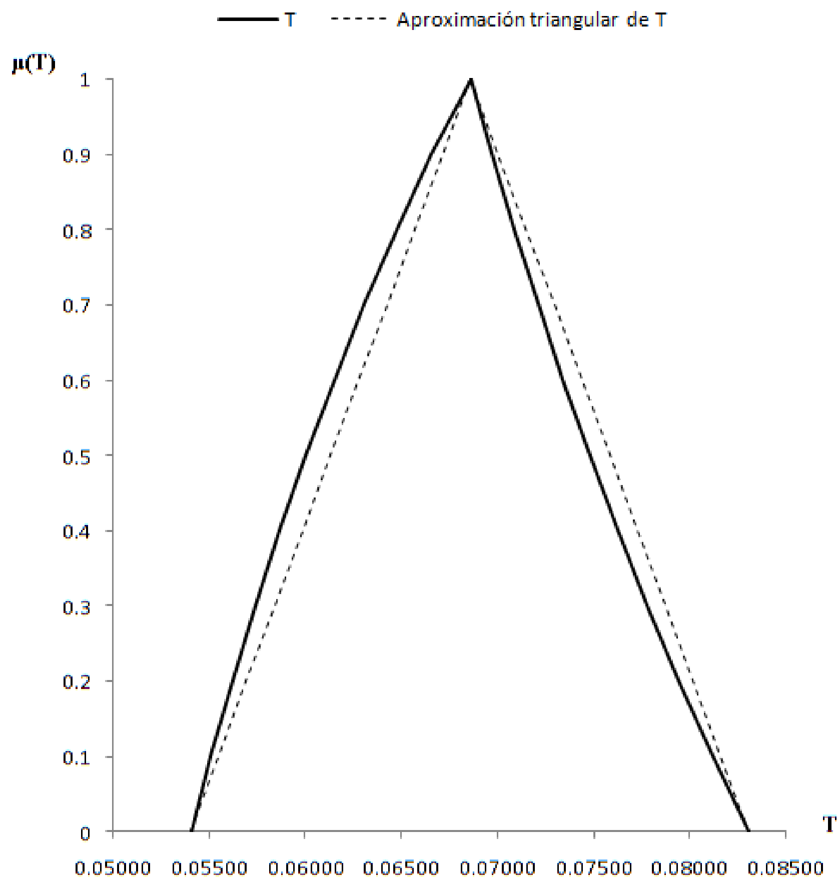

Figura 28 Representación gráfica de T

Finalmente el costo promedio del inventario, el cual también depende de la demanda, queda definido de la siguiente manera como NBT.

Tabla 7 Cálculos y aproximaciones triangulares de CP

α	$CP(\tilde{Q}) = \sqrt{2hk} * \sqrt{d_\alpha} + cd$		$\widetilde{CP}(Q) = [36852 + (17002)\alpha,\quad 86550 - (32$	
0	36852	86550	36852	86550
0.1	38553	83283	38552	83281

α	$CP(\tilde{Q}) = \sqrt{2hk} * \sqrt{d_\alpha} + cd_\alpha$		$\widetilde{CP}(Q) = [36852 + (17002)\alpha,$	$86550 - (32$
0.2	40254	80015	40252	80011
0.3	41955	76746	41953	76741
0.4	43656	73477	43653	73472
0.5	45356	70208	45353	70202
0.6	47056	66938	47053	66932
0.7	48756	63668	48753	63663
0.8	50455	60397	50454	60393
0.9	52155	57126	52154	57124
1	53854	53854	53854	53854

Cuya representación gráfica es la que se muestra en la siguiente figura.

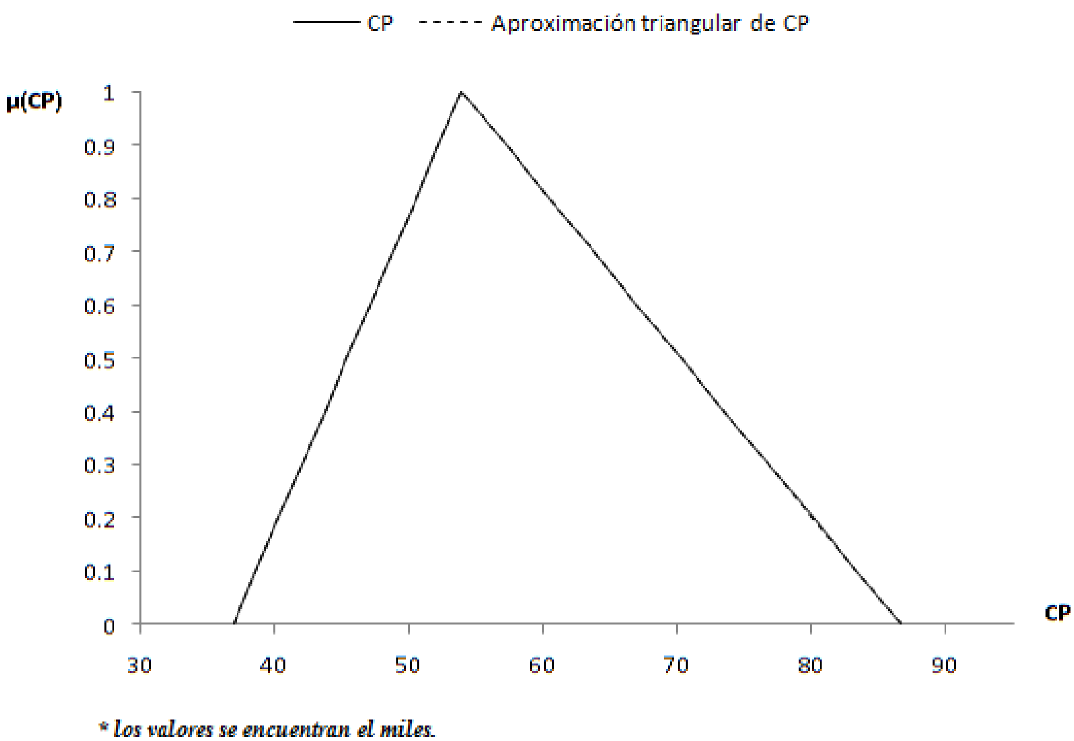

Figura 29 Representación gráfica del costo promedio

Como se puede observar en la Figura 28 no se aprecia una diferencia significativa entre los valores calculados y la aproximación. Esto debido al costo por comprar, ya que este no depende de la cantidad a ordenar sino de la demanda que se tiene que cubrir. Por esta razón en la Tabla 8 y Figura 30 se presenta el análisis para el CP(Q), que depende de Q, por consiguiente se omite en los cálculos el producto *cd*. Esto permite obtener datos que favorecen la visualización entre el número borroso calculado y la aproximación.

Tabla 8 Cálculos y aproximaciones triangulares de CP

α	$CP(\tilde{Q}) = \sqrt{2hk} * \sqrt{d_\alpha}$		$\widetilde{CP}(Q) = [602 + (127)\alpha, 925 - (196)\alpha]$	
0	602	925	602	925
0.1	616	908	615	906
0.2	629	890	627	886
0.3	643	871	640	866
0.4	656	852	653	847
0.5	668	833	665	827
0.6	681	813	678	807
0.7	693	793	691	788
0.8	705	772	704	768
0.9	717	751	716	749
1	729	729	729	729

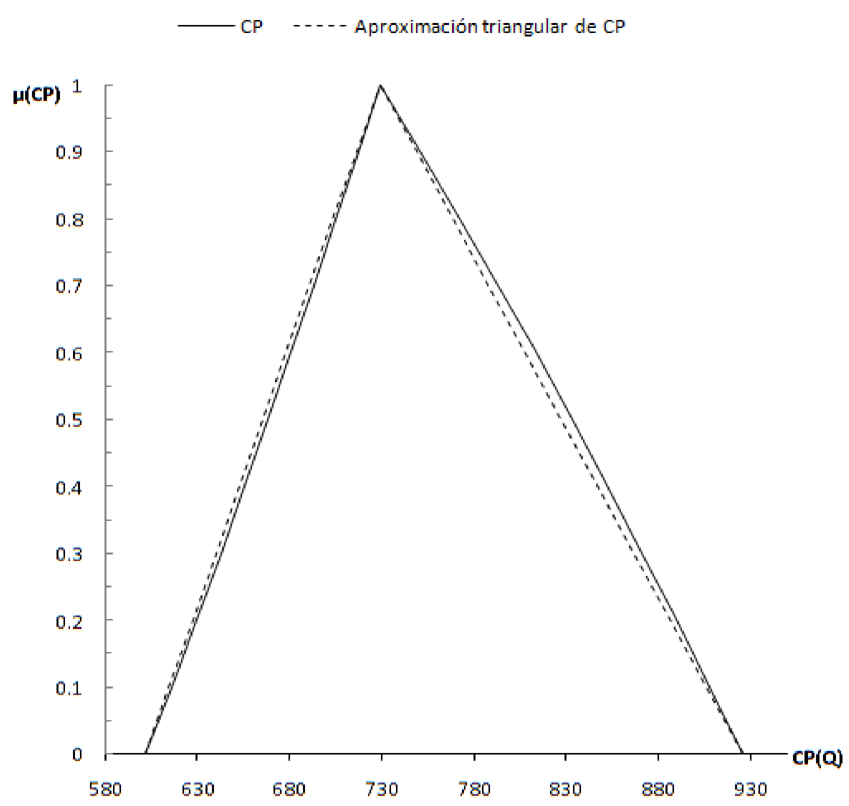

Figura 30 Representación gráfica del CP que depende de Q

5.3 Análisis de resultados

En las graficas y tablas mostradas se ha presentado la comparación entre los datos obtenidos y los números borrosos determinados por la cálculo de las aproximaciones usando los α-cortes. Se puede observar que la aproximación es aceptable, por lo que se considera innecesario, en este contexto, el cálculo de las expresiones generales de desviación entre las curvas reales y sus aproximaciones, que por otra parte dan lugar a fórmulas más complicadas (Kaufmann y Gil 1987).por lo que se puede escribir para este ejemplo como resultado:

$\breve{Q}$ = (482, 583, 740)

$\bar{C}P(Q)$ =(602, 729, 925)

$\breve{T}$ =(0.054, 0.0686, 0.083)

$\breve{N}$ =(12, 15, 19)

De los anteriores resultados se pueden decir, que para el caso de Q, el valor más posible es el de 583 unidades, mientras que el menor y máximo valor del tamaño de pedido es 482 y 740, respectivamente. Para CP(Q), T y N se tiene una descripción similar, ya que los cálculos dependen del mismo NBT.

Para los modelos de Lote Económico descritos en el capítulo 2 y que no se desarrollaron en esta sección, se presentan los siguientes comentarios:

- Una de las partes más importantes es la definición de la demanda como un número borroso y con esto la determinación de la función de membresía y los α-cortes, debido a que de esto depende la forma en que se incorpora la demanda en los cálculos.

- Al aplicar otro número borroso diferente al que se presentó en este ejemplo, es importante determinar los valores necesarios para dicho número, en el caso de que se defina un número trapezoidal es necesario que se obtengan cuatro valores, y que estos se utilicen para el cálculo de la aproximación trapezoidal. Véase la sección 3.4.2.

- Para los siguientes modelos de Lote Económico se obtuvieron resultados similares a los mostrados en este ejemplo, la diferencia se halla en las ecuaciones que se utilizan en cada uno para determinar las variables.
- La aplicación de las etapas propuestas, para la incorporación del parámetro de la demanda como un número borroso en los modelos de Lote Económico, permite resolver el problema de manera sistemáticamente, obteniendo resultados de fácil análisis.

Conclusiones y Trabajos Futuros

Actualmente los Sistemas de Inventarios siguen dando problemas en la administración de las empresas. Generalmente se utilizan pronósticos para analizar la demanda y obtener futuros valores. Sin embargo, los mercados cada vez son más caóticos y es difícil predecir el comportamiento de la demanda. Es importante incorporar la experiencia y el conocimiento de los encargados del Sistema de inventarios ya que esto permitirá incorporar a la poca o insuficiente información, conocimiento que permitirá definir de una mejor manera este parámetro.

Para incorporar la incertidumbre de la demanda en un Sistema de Inventarios, es recomendable utilizar Conjuntos Borrosos para solucionarlo. Se explicó que una de las partes más importantes al utilizar los Conjuntos Borrosos es definir una función de membresía, los números más utilizados son los números triangulares y trapezoidales, debido a los números que utiliza y a su comportamiento lineal.

Para modelos de PL borrosa o con restricciones flexibles, es necesario transformar el modelo a uno de PL y resolver, incorporando una nueva variable, la cual representará la función de membresía para la solución del modelo. Se observó que al incorporar la demanda como un número trapezoidal al modelo de MRP implicó una mayor cantidad de restricciones, y en ocasiones una mayor cantidad de iteraciones, pero al considerar las restricciones flexibles se obtuvo un valor más óptimo para el problema que se resolvió.

Para el análisis de los modelos de EOQ, la incorporación de la demanda como un número borroso implicó, realizar las operaciones matemáticas por separado, para finalmente incluir la borrosidad, y puesto que la política óptima de los modelos de Lote Económico son ecuaciones o fórmulas fue necesario aplicarlo a cada una de ellas. Como se explico para estos modelos se incluyeron gráficas que permitieron realizar una comparación con la aproximación calculada. Las etapas que se describieron para solucionar los modelos de EOQ incluyendo la demanda como un número borroso, permitieron resolver el modelo de manera eficiente. Para los modelos de EOQ se obtiene como resultado la definición de las variables de la política definidas como un número borroso, para este análisis fue necesario realizar cálculos para los α-cortes. Para los α-cortes se utilizo una longitud de paso de 0.1, ya que este valor permitió tener mayor precisión en los valores calculados así como en la aproximación.

La utilización de los Conjuntos Borrosos permitió resolver los modelos de MRP y de EOQ considerando la demanda como un parámetro bajo incertidumbre.

Al aplicar los números borrosos trapezoidales y triangulares, y describir su comportamiento por medio de la función de membresía, surgió la idea de poder definir nuevos números con diferentes funciones de membresía. Dentro del contenido de este trabajo se presentan algunos criterios de selección de la función de membresía, los cuales sirven de base para poder definir nuevos números que se apliquen a casos específicos.

Se pueden realizar nuevos análisis de la manera de resolver los modelos de programación lineal, incluyendo dos nuevas variables para función objetivo, donde la primera represente el menor valor y la segunda el mayor valor. De esta manera se pueden plantear diferentes maneras de abordar el problema, por medio de operados min y max.

REFERENCIAS

Aguilar, Patricia. *Apuntes de la materia de Teoria de Inventarios.* UNAM: Maestría en Ingeniería en Sistema (Investigación de Operaciones), Semestre 2009-I.

Arias Martinez, C. H. «Conjuntos Borrosos, Teoría Básica y Aplicación al Análisis de Decisiones.» *Tesis UNAM.* México, 1988.

Azorín, Poch. *Algunas Aplicaciones de los Conjuntos Borrosos a la Estadistica.* Madrid: I.N.E., 1979.

Ballou, R. *Logística. Administración de la cadena de suministro .* Pearson Prentice Hall, 2004.

Girlich, H, y A. Chikan. «The Origins of Dinamyc Inventory Modeling under Uncertainty.» (International Journal of Production Economics) 71, nº pags 351-363 (2001).

Gutierrez, V, y J. Vidal. «Inventory Management Models in Supply Chains: A Literature review.» (Univ. Antioquia), nº 43 (2008).

Kaufmann, A, y J Gil. *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* España: Hispano Europea, S. A., 1987.

Kaufmann, A. *Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos.* México: CECSA, 1982.

Lai, y C. y Hwang. *Fuzzy Mathematical Programming Methods and Aplications.* Berlin: Springer - Verlag, 1992.

Lazzari, L, y E Machado. *Teoría de la decisión fuzzy.* Argentina: MACCHI, 1998.

LINGO/PC, SUPER. «LINDO Systems Inc.» *Release 6.0.* www.lindo.com: Copyright (c) 1999.

López, Héctor, y M. Restrepo. «Flexible linear programming with fuzzy constraints.» (Revista de Ingeniería e Investigación) 28, nº 1 (2008).

Management, Corporate Resources. «Corporate Resources Management s.c.» www.crmmexico.com (último acceso: 11 de Septiembre de 2009).

Martín Armario, E. «La Teoría de los Conjuntos Borrosos y la Toma de Decisiones.» (Revista Española de Financiación y Contabilidad) 11, nº 38 y 39 (1982).

Martínez Fonseca, P. *Conjuntos Borrosos y Algunas Aplicaciones.* México: Tesis UNAM, 2001.

Mula, J, R. Poler, y J.P García. «MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach.» (Fuzzy sets and systems), nº 157 (2006).

Mula, J, y Poler E. *Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos Difusos en la planificación de la producción: Un Estudio de la Literatura.* Valencia: VIII Congreso de Ingeniería de Organización, 2004.

Mula, J., R Poler, y P. Garcia. «Aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos en la Planficación de la Producción: Un estudio de la literatura.» (Congreso de Ingeniería de Organización), nº VIII (2004).

Mula, J., y R., Garcia. J.P. Poler. «Material Requirement Planning with fuzzy constraints and fuzzy coefficientes.» (Fuzzy Set and Systems), nº 150 (2007).

Soodong, Choi, y Noble James. «Determination of economic order quantities (EOQ) in an integrated material flow system.» (International Journal of Production Research. Taylor & Francis Ltd) 38, nº 14 (2000).

Taha, Hamdy A. *Investigación de Operaciones.* Pearson Educación, 2004.

Tanaka, K. *An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Aplications.* New York: Springer-Verlag, 1997.

Velarde Lombraña, J. «Pensamiento Difuso, Pero No Confuso:de Aristóteles a Zadeh.» (Psicothema) 8, nº 2 (1996).

Wagner, H. «And Them There Were None.» (Operations Research) 50 (2002).

Zadeh, L. A. «Fuzzy Sets.» (Information and Control) 8 (1965).

Zadeh, L.A. «The concept of a lingüistic variable and its application to approximate reasoning.» (Information Sciences) 8, nº pags. 199-249 (1975).

Zimmermann, H. J. *Fuzzy Set Theory and Its Aplications 2da. Edición.* USA: Kluwer Academic Publishers, 1993.

Zipper, J. *Sistemas de inventarios.* Mc Graw Hill, 1984.

APÉNDICES

A. Operaciones básicas y algebraicas en la Teoría de Conjuntos Borrosos

- **Operaciones básicas**

Conjunto vacio

Un conjunto difuso $\hat{A}$ es vacio si y sólo si su función de membresía $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es igual a cero, es decir para todo $x \in E$,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

Inclusión

Sean **E** un conjunto y **M** su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E;** se dice que $\hat{A}$ es un subconjunto de $\tilde{B}$, si

$$x \in E : \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Esto se representará por: $\tilde{A} \subset \tilde{B}$

Ejemplo

Sean:

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y M=[0,1]

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.2), (x_2|0.4), (x_3|0.0), (x_4|\ 0.9), (x_5|0.6)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.4), (x_2|0.7), (x_3|0.0), (x_4|\ 1), (x_5|0.7)\}$$

Por lo tanto se tiene que:

$\tilde{A} \subset \tilde{B}$

Debido a que se cumple lo siguiente:

0.2 < 0.4, 0.4<0.7, 0 =0, etc.

Igualdad

Sean **E** un conjunto y **M** su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E;** se dice que $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ son iguale si, y solamente si:

$$x \in E : \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Esto se representará por:

$\tilde{A} = \tilde{B}$

Ejemplo.

Sean:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } M=[0,1]$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.4), (x_2|0.7), (x_3|0.2)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.4), (x_2|0.7), (x_3|0.2)\}$$

Por lo tanto se tiene que

$\tilde{A} = \tilde{B}$

Debido a que se cumple lo siguiente:

0.4 = 0.4, 0.7 = 0.7 y 0.2=0.2.

Si existe un *x* de E que no satisface $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$, se dice que los Conjuntos Borrosos no son iguales, esto se representa por:

$\tilde{A} \neq \tilde{B}$

Complementación

Sean **E** un conjunto y **M** su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E;** se dice que $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ son complementarios si, y solamente si:

$$\forall x \in E : \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Esto se representa por:

$$\tilde{B} = \tilde{\tilde{A}} \text{ o } \tilde{\tilde{A}} = \tilde{B}$$

Ejemplo.

Sean:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } M=[0,1]$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.13), (x_2|0.61), (x_3|0.0), (x_4|0.8), (x_5|1)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.87), (x_2|0.39), (x_3|1), (x_4|0.2), (x_5|0)\}$$

Por lo tanto se tiene que

$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{B}$

En la Figura 31 se puede observar la función de membresía del subconjunto difuso $\tilde{A}$ con una línea continua, mientras que, la función de membresía del complemento de este subconjunto borroso se muestra con una línea punteada.

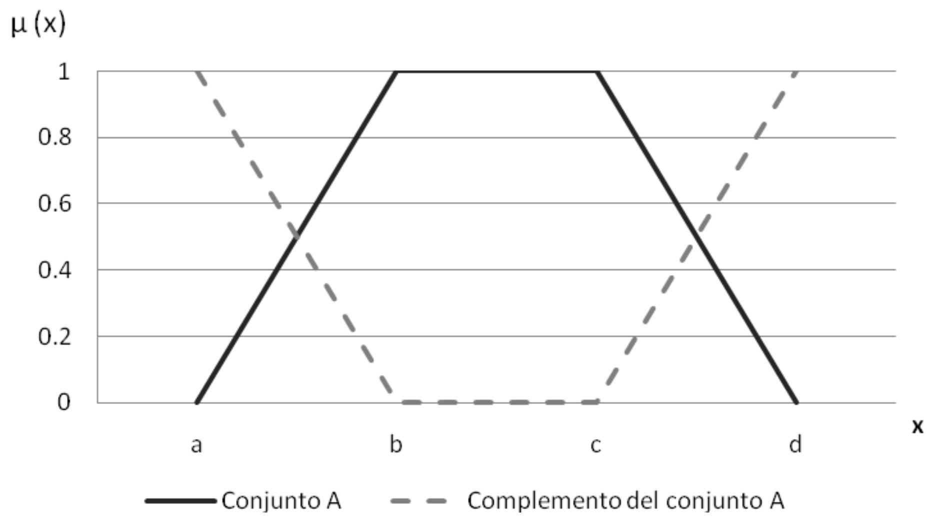

Figura 31 Complemento de un subconjunto borroso A

Intersección

Sean **E** un conjunto y **M** su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E;** se define la intersección:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B},$$

Como el subconjunto borroso más grande contenido, a la vez, en $\hat{A}$ y en $\tilde{B}$. Es decir:

$\forall x \ \in E : \ \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mathrm{MIN}\ (\ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$

Ejemplo.

Sean:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } M=[0,1]$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.2), (x_2|0.6), (x_3|0.0), (x_4|0.8), (x_5|1)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.8), (x_2|0.5), (x_3|0.4), (x_4|0.7), (x_5|0)\}$$

Por lo tanto se tiene que

$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x_1|0.2), (x_2|0.5), (x_3|0), (x_4|0.7), (x_5|0)\}$

En la Figura 32 se muestra un ejemplo de forma gráfica de la intersección entre dos subconjuntos difusos, con una línea más gruesa se marcó la función de membresía de la intersección de estos dos subconjuntos difusos.

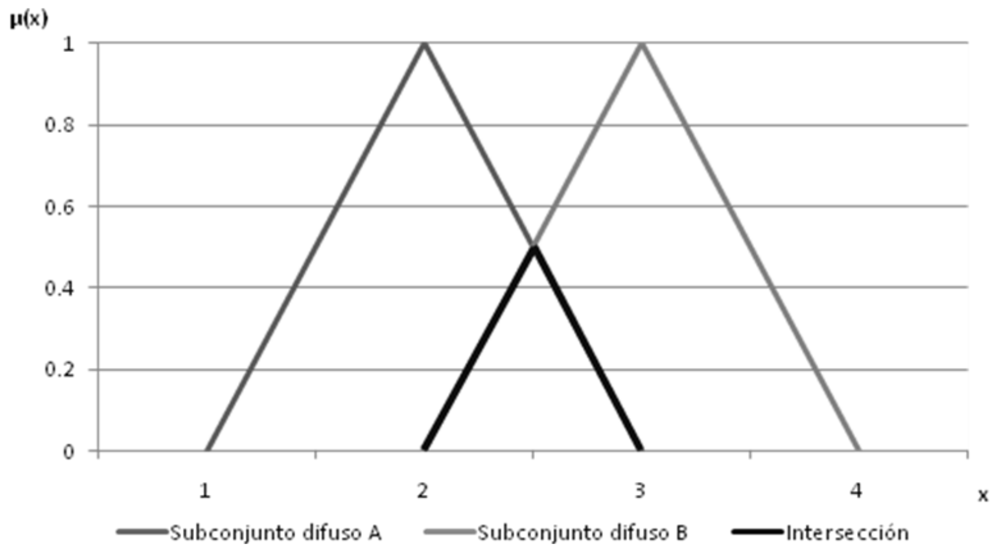

Figura 32. Intersección de los subconjuntos difusos y

Unión

Sean **E** un conjunto y **M** su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E;** se define la unión:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B},$$

Como el subconjunto borroso más pequeño que contiene tanto a $\hat{A}$ como a $\tilde{B}$. Es decir:

$\forall x \in E : \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \text{MAX}\,(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$

Ejemplo.

Sean:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } M=[0,1]$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.4), (x_2|0.6), (x_3|0.2), (x_4|0.8), (x_5|1)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.8),(x_2|0.1),(x_3|0.4),(x_4|0.5),(x_5|0.7)\}$$

Por lo tanto se tiene que

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x_1|0.8),(x_2|0.6),(x_3|0.4),(x_4|0.8),(x_5|1)\}$

En la siguiente figura se muestra la unión de los subconjuntos difusos $\hat{A}$ y $\tilde{B}$, se puede observar que esta unión la conforma para cada elemento la función de membresía mayor. Este nuevo conjunto borroso originado contiene tanto al subconjunto borroso $\hat{A}$ como al $\tilde{B}$.

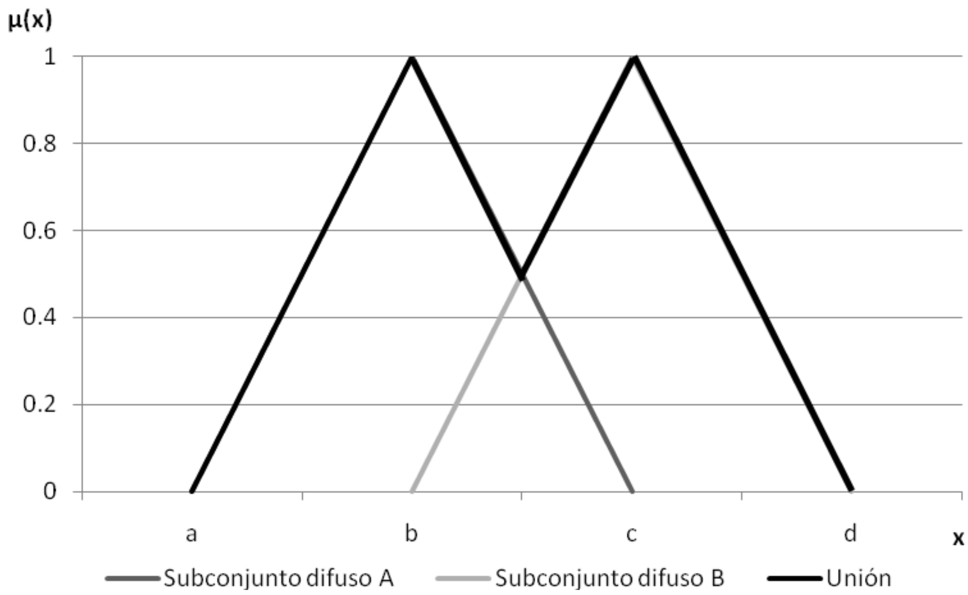

Figura 33 Unión de los subconjuntos difusos y

Suma disyuntiva

La suma disyuntiva o diferencia simétrica (como la denominan algunos autores) de dos subconjuntos se define en términos de la unión y la intersección de la manera siguiente:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \tilde{\tilde{B}}\right) \cup \left(\tilde{\tilde{A}} \cap \tilde{B}\right)$$

Ejemplo

Sean:

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.2),(x_2|0.7),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|0.5)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.5),(x_2|0.3),(x_3|1),(x_4|0.1),(x_5|0.5)\}$$

Se tiene que:

$$\tilde{\bar{A}} = \{(x_1|0.8),(x_2|0.3),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0.5)\}$$

$$\tilde{\bar{B}} = \{(x_1|0.5),(x_2|0.7),(x_3|0),(x_4|0.9),(x_5|0.5)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{\bar{B}} = \{(x_1|0.2),(x_2|0.7),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|0.5)\}$$

$$\tilde{\bar{A}} \cap \tilde{B} = \{(x_1|0.5),(x_2|0.3),(x_3|0),(x_4|0.1),(x_5|0.5)\}$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(x_1|0.5),(x_2|0.7),(x_3|0),(x_4|0.1),(x_5|0.5)\}$$

Diferencia

La diferencia de dos subConjuntos Borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ que denotamos $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$, definimos como sigue:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{\bar{B}}$$

Del ejemplo utilizado para la suma disyuntiva, se obtiene la que la diferencia de los dos Conjuntos Borrosos es:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{(x_1|0.2),(x_2|0.7),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|0.5)\}$$

- **Propiedades de las operaciones básicas**

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ tres subConjuntos Borrosos que pertenecen al conjunto ***E***, se tienen las siguientes propiedades.

1	$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$	Conmutatividad
2	$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$	
3	$\left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right)$	Asociatividad
4	$\left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right)$	
5	$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$	Idempotencia
6	$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$	
7	$\tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{A} \cap \tilde{C}\right)$	Distributividad
8	$\tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) \cap \left(\tilde{A} \cup \tilde{C}\right)$	
9	$\tilde{A} \cap \phi = \phi$	
10	$\tilde{A} \cup \phi = \tilde{A}$	
11	$\tilde{A} \cap \mathrm{E} = \tilde{A}$	
12	$\tilde{A} \cup \mathrm{E} = \mathrm{E}$	
13	$\left(\bar{\bar{\tilde{A}}}\right) = \tilde{A}$	Involución
14	$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}$	Teoremas de De Morgan
15	$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}}$	

Las propiedades de los conjuntos ordinarios o clásicos, también son propiedades de los Conjuntos Borrosos, excepto por las propiedades de complementación:

$$A \cap \bar{A} = \phi$$

$$A \cup \bar{A} = E$$

Estas propiedades se encuentran únicamente en los conjuntos ordinarios.

- **Operaciones Algebraicas**

En este punto se describe la forma de realizar las operaciones algebraicas entre dos subConjuntos Borrosos, nuevamente se presentan ejemplos para que sea más fácil su entendimiento.

Producto algebraico

Sean **E** un conjunto y **M** = [0, 1] su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E**; se define el **producto algebraico** de $\hat{A}$ y $\tilde{B}$, representado por:

$\tilde{A} \cdot \tilde{B}$

La función de membresía del conjunto resultante del producto algebraico viene dada por la siguiente expresión:

$$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x \in \mathrm{E}$$

Ejemplo

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } M=[0,1]$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0.2), (x_2|0.4), (x_3|0.0), (x_4|\ 0.9), (x_5|0.6)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0.4), (x_2|0.7), (x_3|0.0), (x_4|\ 1), (x_5|0.7)\}$$

Entonces el producto algebraico de los subConjuntos Borrosos anteriores es el siguiente conjunto:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(x_1|0.08), (x_2|0.28), (x_3|0.0), (x_4|\ 0.9), (x_5|0.42)\}$$

Suma algebraica

Sean **E** un conjunto y **M** = [0, 1] su conjunto de membresía asociado, $\hat{A}$ y $\tilde{B}$ dos subConjuntos Borrosos de **E**; se define la **suma algebraica** de $\hat{A}$ y $\tilde{B}$, representado por:

$\tilde{A} \hat{+} \tilde{B}$

La función de membresía del conjunto resultante del suma algebraica viene dada por la siguiente expresión:

$$\mu_{\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x \in \mathrm{E}$$

Del ejemplo anterior se tiene que para la suma algebraica es:

$$\tilde{A} \hat{+} \tilde{B} = \{(x_1|0.52), (x_2|0.82), (x_3|0.0), (x_4|\ 1), (x_5|0.88)\}$$

- **Propiedades de las operaciones algebraicas**

Las propiedades que verifican las operaciones $(\cdot)$ y $(\hat{+})$ dados $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ tres subConjuntos Borrosos que pertenecen al conjunto ***E***, son las siguientes:

1	$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \hat{A}$	Conmutatividad
2	$\tilde{A} \hat{+} \tilde{B} = \tilde{B} \hat{+} \hat{A}$	
3	$(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) \cdot \tilde{C} = \tilde{A} \cdot (\tilde{B} \cdot \tilde{C})$	Asociatividad
4	$(\tilde{A} \hat{+} \tilde{B}) \hat{+} \tilde{C} = \tilde{A} \hat{+} (\tilde{B} \hat{+} \tilde{C})$	
5	$\tilde{A} \cdot \phi = \phi$	
6	$\tilde{A} \hat{+} \phi = \tilde{A}$	
7	$\tilde{A} \cdot \mathrm{E} = \tilde{A}$	
8	$\tilde{A} \hat{+} \mathrm{E} = \mathrm{E}$	
9	$\left(\bar{\bar{\tilde{A}}}\right) = \hat{A}$	Involución
10	$\overline{\tilde{A} \cdot \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \hat{+} \bar{\tilde{B}}$	Teoremas de De Morgan

11 $$\overline{\tilde{A} \mathbin{\hat{+}} \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cdot \bar{\tilde{B}}$$

En este caso no se satisfacen las propiedades de idempotencia, distributividad y de complementación.

B. Código del modelo de MRP modificado

Los datos que se presentan a continuación, pertenecen al código que se utilizo en el software de LINGO, para obtener una solución al modelo de programación lineal.

```
!Datos

T={1,2,3,4}
I={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}

Función objetivo
(costo por producir i * producción de i) + (costo por inventario i *
inventario i) + (costo por faltantes i * faltantes i)
para todo i y para todo t;

max = x;

 x*(881118)-
((100*p11+4*inv11+12*rd11+100*p12+4*inv12+12*rd12+100*p13+4*inv13+12*r
d13+100*p14+4*inv14+12*rd14) +
(40*p21+5*inv21+28*rd21+40*p22+5*inv22+28*rd22+40*p23+5*inv23+28*rd23+
40*p24+5*inv24+28*rd24)+
(30*p31+5*inv31+42*rd31+30*p32+5*inv32+42*rd32+30*p33+5*inv33+42*rd33+
30*p34+5*inv34+42*rd34)+
(2*p41+0.3*inv41+15*rd41+2*p42+0.3*inv42+15*rd42+2*p43+0.3*inv43+15*rd
43+2*p44+0.3*inv44+15*rd44)+
(10*p51+5*inv51+25*rd51+10*p52+5*inv52+25*rd52+10*p53+5*inv53+25*rd53+
10*p54+5*inv54+25*rd54)+
(10*p61+3*inv61+17*rd61+10*p62+3*inv62+17*rd62+10*p63+3*inv63+17*rd63+
10*p64+3*inv64+17*rd64)+
(120*p71+6.48*inv71+140*rd71+120*p72+6.48*inv72+140*rd72+120*p73+6.48*
inv73+140*rd73+120*p74+6.48*inv74+140*rd74)+
(130*p81+6.48*inv81+158*rd81+120*p82+6.48*inv82+158*rd82+130*p83+6.48*
inv83+158*rd83+120*p84+6.48*inv84+158*rd84)+
(50*p91+2.22*inv91+72*rd91+50*p92+2.22*inv92+72*rd92+50*p93+2.22*inv93
+72*rd93+50*p94+2.22*inv94+72*rd94)+
(70*p101+2.22*inv101+80*rd101+70*p102+2.22*inv102+80*rd102+70*p103+2.2
2*inv103+80*rd103+700*p104+2.22*inv104+80*rd104)+
(100*p111+2.22*inv111+125*rd111+100*p112+2.22*inv112+125*rd112+100*p11
3+2.22*inv113+125*rd113+100*p114+2.22*inv114+125*rd114))<=-951824;

!Demanda del producto final;

d11=250;
d12=280;
d13=280;
d14=360;
g11=100;
g12=160;
g13=160;
g14=240;
```

```
!Demanda de los otros productos i;

d21= 0.5*d11;
d22= 0.5*d12;
d23= 0.5*d13;
d24= 0.5*d14;

d31= d11;
d32= d12;
d33= d13;
d34= d14;

d41= 16*d11;
d42= 16*d12;
d43= 16*d13;
d44= 16*d14;

d51= d11;
d52= d12;
d53= d13;
d54= d14;

d61= 2*d11;
d62= 2*d12;
d63= 2*d13;
d64= 2*d14;

d71= 4*d11;
d72= 4*d12;
d73= 4*d13;
d74= 4*d14;

d81= d11;
d82= d12;
d83= d13;
d84= d14;

d91= 0.25*d11;
d92= 0.25*d12;
d93= 0.25*d13;
d94= 0.25*d14;

d101= 0.25*d11;
d102= 0.25*d12;
d103= 0.25*d13;
d104= 0.25*d14;

d111= 0.25*d11;
d112= 0.25*d12;
d113= 0.25*d13;
d114= 0.25*d14;

g21= 0.5*g11;
g22= 0.5*g12;
g23= 0.5*g13;
g24= 0.5*g14;

g31= g11;
g32= g12;
g33= g13;
g34= g14;

g41= 16*g11;
g42= 16*g12;
g43= 16*g13;
g44= 16*g14;

g51= g11;
g52= g12;
g53= g13;
g54= g14;

g61= 2*g11;
g62= 2*g12;
g63= 2*g13;
g64= 2*g14;

g71= 4*g11;
g72= 4*g12;
g73= 4*g13;
g74= 4*g14;

g81= g11;
g82= g12;
g83= g13;
g84= g14;

g91= 0.25*g11;
g92= 0.25*g12;
g93= 0.25*g13;
g94= 0.25*g14;

g101= 0.25*g11;
g102= 0.25*g12;
g103= 0.25*g13;
g104= 0.25*g14;

g111= 0.25*g11;
g112= 0.25*g12;
g113= 0.25*g13;
g114= 0.25*g14;


!Restricciones de demanda


i=1;
```

```
inv10= 0;
rd10=0;
x*(150)+(inv10-rd10+p11-inv11+rd11)<= d11;
x*(120)+(inv11-rd11+p12-inv12+rd12)<=d12;
x*(120)+(inv12-rd12+p13-inv13+rd13)<=d13;
x*(120)+(inv13-rd13+p14-inv14+rd14)<=d14;
inv14=0;

!i=2;

inv20= 0;
rd20=0;
x*(d21-g21)+(inv20-rd20+p21-inv21+rd21)<=d21;
x*(d22-g22)+(inv21-rd21+p22-inv22+rd22)<=d22;
x*(d23-g23)+(inv22-rd22+p23-inv23+rd23)<=d23;
x*(d23-g23)+(inv23-rd23+p24-inv24+rd24)<=d24;

!i=3;

inv30= 0;
rd30=0;
x*(d31-g31)+(inv30-rd30+p31-inv31+rd31)<=d31;
x*(d32-g32)+(inv31-rd31+p32-inv32+rd32)<=d32;
x*(d33-g33)+(inv32-rd32+p33-inv33+rd33)<=d33;
x*(d34-g34)+(inv33-rd33+p34-inv34+rd34)<=d34;

!i=4;

inv40=250;
rd40=0;
x*(d41-g41)+(inv40-rd40+p41-inv41+rd41)<=d41;
x*(d42-g42)+(inv41-rd41+p42-inv42+rd42)<=d42;
x*(d43-g43)+(inv42-rd42+p43-inv43+rd43)<=d43;
x*(d44-g44)+(inv43-rd43+p44-inv44+rd44)<=d44;

!i=5;

inv50=10;
rd50=0;
x*(d51-g51)+(inv50-rd50+p51-inv51+rd51)<=d51;
x*(d52-g52)+(inv51-rd51+p52-inv52+rd52)<=d52;
x*(d53-g53)+(inv52-rd52+p53-inv53+rd53)<=d53;
x*(d54-g54)+(inv53-rd53+p54-inv54+rd54)<=d54;

!i=6;

inv60= 10;
rd60=0;
x*(d61-g61)+(inv60-rd60+p61-inv61+rd61)<=d61;
x*(d62-g62)+(inv61-rd61+p62-inv62+rd62)<=d62;
x*(d63-g63)+(inv62-rd62+p63-inv63+rd63)<=d63;
x*(d64-g64)+(inv63-rd63+p64-inv64+rd64)<=d64;


!i=7;
```

```
inv70= 15;
rd70=0;
x*(d71-g71)+(inv70-rd70+p71-inv71+rd71)<=d71;
x*(d72-g72)+(inv71-rd71+p72-inv72+rd72)<=d72;
x*(d73-g73)+(inv72-rd72+p73-inv73+rd73)<=d73;
x*(d74-g74)+(inv73-rd73+p74-inv74+rd74)<=d74;

!i=8;
inv80=15;
rd80=0;
x*(d81-g81)+(inv80-rd80+p81-inv81+rd81)<=d81;
x*(d82-g82)+(inv81-rd81+p82-inv82+rd82)<=d82;
x*(d83-g83)+(inv82-rd82+p83-inv83+rd83)<=d83;
x*(d84-g84)+(inv83-rd83+p84-inv84+rd84)<=d84;

!i=9;

inv90= 5;
rd90=0;
x*(d91-g91)+(inv90-rd90+p91-inv91+rd91)<=d91;
x*(d92-g92)+(inv91-rd91+p92-inv92+rd92)<=d92;
x*(d93-g93)+(inv92-rd92+p93-inv93+rd93)<=d93;
x*(d94-g94)+(inv93-rd93+p94-inv94+rd94)<=d94;


!i=10;

inv100= 10;
rd100=0;
x*(d101-g101)+(inv100-rd100+p101-inv101+rd101)<=d101;
x*(d102-g102)+(inv101-rd101+p102-inv102+rd102)<=d102;
x*(d103-g103)+(inv102-rd102+p103-inv103+rd103)<=d103;
x*(d104-g104)+(inv103-rd103+p104-inv104+rd104)<=d104;


!i=11;

inv110= 5;
rd110=0;
x*(d111-g111)+(inv110-rd110+p111-inv111+rd111)<=d111;
x*(d112-g112)+(inv111-rd111+p112-inv112+rd112)<=d112;
x*(d113-g113)+(inv112-rd112+p113-inv113+rd113)<=d113;
x*(d111-g111)+(inv113-rd113+p114-inv114+rd114)<=d114;


x<=1;

!Restricciones de producción;


0.5*p21+p31+0.5*p111-p11=0;
0.5*p22+p32+0.5*p112-p12=0;
0.5*p23+p33+0.5*p113-p13=0;
0.5*p24+p34+0.5*p114-p14=0;

p91+p101-p21=0;
p91+p101-p22=0;
```

```
p91+p101-p23=0;
p91+p101-p24=0;

0.0625*p41+p51+0.5*p61+0.25*p71+p81-p31=0;
0.0625*p42+p52+0.5*p62+0.25*p72+p82-p32=0;
0.0625*p43+p53+0.5*p63+0.25*p73+p83-p33=0;
0.0625*p44+p54+0.5*p64+0.25*p74+p84-p34=0;
```