



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

DISEÑO DE COMPENSADORES PARA MODOS
DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en Ingeniería
Ingeniería Eléctrica - Control

PRESENTA:

José Antonio Rosales Martínez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman

2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez
Secretario: Dr. Luis Agustin Alvarez-Icaza Longoría
Vocal: Dr. Leonid M. Fridman
1^{er} Suplente: Dr. Jorge Angel Dávila Montoya
2^{do} Suplente: Dr. Javier Francisco Bejarano Rodríguez

Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ingeniería, UNAM

TUTOR DE TESIS
Dr. Leonid M. Fridman

FIRMA

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor el Dr. Leonid Fridman por el apoyo recibido, al grupo de Modos deslizantes por las opiniones y críticas sobre mi trabajo. Y al colegio de profesores de la maestría en control, por los conocimientos transmitidos en las clases que me impartieron.

También expreso un gran agradecimiento al Dr. Igor Boiko por el apoyo recibido durante la elaboración de este trabajo.

Expreso mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me otorgó durante mis estudios de maestría con el CVU 269450, la cual culminó con la presentación de esta tesis.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Estado del arte	1
1.2	Contribución	2
1.3	Motivación	3
1.4	Objetivo	3
1.5	Planteamiento del problema	3
1.6	Estructura de la tesis	4
2	Preliminares	5
2.1	Función Descriptiva (FD)	5
2.1.1	Calculo de la FD de un elemento no lineal	6
2.1.2	Parámetros de oscilaciones usando FD	8
2.2	Ganancia Equivalente de un relevador	9
2.3	LPRS: Lugar geométrico de sistemas relevados perturbados	14
2.3.1	Motivación del LPRS	15
2.3.2	LPRS para un sistema representado por su función de transferencia	17
2.4	Modos Deslizantes de Segundo Orden en el Dominio de la Frecuencia	20
2.4.1	Algoritmo <i>Twisting</i>	21
2.4.2	Algoritmo <i>Sub-optimal</i>	26
3	Diseño de Compensadores	31

3.1	Compensador para un sistema controlado por <i>Twisting</i>	32
3.1.1	Simulaciones de compensadores para <i>Twisting</i>	36
3.2	Compensador para un sistema controlado por <i>Sub-Optimal</i>	38
3.2.1	Simulaciones de compensadores para <i>Sub-optimal</i>	41
4	Ajuste de ganancia de lazo para MD2O	43
4.1	Ajuste de ganancia equivalente para <i>Twisting</i>	44
4.2	Ajuste de ganancia equivalente para <i>Sub-optimal</i>	45
4.3	Ejemplo	46
5	Conclusiones	53
5.1	Trabajo Futuro	54

Índice de figuras

1.1	Diagrama General	4
2.1	Sistema no lineal	5
2.2	Representación en FD de un elemento no lineal	7
2.3	Sistema linealizado con FD	8
2.4	Obtención de A y ω mediante la solución de la ecuación de balance armónico	9
2.5	Sistema relevado	10
2.6	Análisis con FD de un relevador con histéresis	11
2.7	Oscilaciones asimétricas en presencia de señales externas	12
2.8	Función de sesgo	13
2.9	Modelo de movimiento promedio	14
2.10	LPRS y análisis de oscilaciones	16
2.11	Representación en bloques del algoritmo Twisting para FD	21
2.12	Análisis de Twisting con FD	22
2.13	Sistema controlado por Twisting “linealizado”	23
2.14	Representación en bloques del algoritmo Twisting para LPRS	23
2.15	Análisis de Twisting con LPRS	25
2.16	Representación en bloques de sub-optimal	26
2.17	Análisis de Sub-Optimal con FD	28
2.18	Análisis de Sub-Optimal con LPRS	29

3.1	Frecuencia de corte del sistema masa-resorte-amortiguador	33
3.2	Análisis de Compensadores para Twisting con FD	34
3.3	Análisis de Compensadores para Twisting con LPRS	35
3.4	Sistema con Twisting en presencia de perturbación	35
3.5	Simulación del efecto de Compensadores en Ω y a_y para Twisting .	37
3.6	Simulación del efecto de Compensadores en el valor en estado es- table para Twisting	38
3.7	Análisis de Compensadores para Sub-optimal con FD	39
3.8	Análisis de Compensadores para Sub-optimal con LPRS	40
3.9	Simulación del efecto de Compensadores en Ω y a_y para Sub-optimal	41
3.10	Simulación del efecto de Compensadores en el valor en estado es- table para Sub-optimal	42
4.1	Análisis con FD para Twisting y Suboptimal	47
4.2	Ajuste de ganancia equivalente para el sistema controlado por <i>Twisting</i>	48
4.3	Ajuste de ganancia equivalente para el sistema controlado por <i>Sub- optimal</i>	49
4.4	Simulaciones de ajuste de ganancia para el sistema controlado por Twisting	51
4.5	Simulaciones de ajuste de ganancia para el sistema controlado por Sub-optimal	51

Índice de tablas

1.1	Contribución	2
3.1	Ganancias equivalentes y valores en estado estable de sistema controlado por <i>Twisting</i>	36
3.2	Tabla comparativa de análisis de compensadores para <i>Twisting</i>	37
3.3	Ganancias equivalentes y valores en estado estable de sistema controlado por <i>Sub-optimal</i>	40
3.4	Tabla comparativa de análisis de compensadores para <i>Sub-optimal</i>	42
4.1	Ajuste de k_{nTw}	48
4.2	Ajuste de k_{nsub}	49

Resumen

En este trabajo, se diseñan compensadores de *chattering* y perturbaciones para sistemas lineales controlados por algoritmos de Modos Deslizantes de Segundo Orden (MD2O), en particular se analiza el algoritmo *Twisting* y el algoritmo *Sub-optimal*. Los compensadores se diseñan con el objetivo de atenuar el efecto de *chattering* y mejorar el desempeño de los algoritmos ante perturbaciones constantes. La compensación se lleva a cabo agregando al sistema filtros de retardo de fase que modifican la ganancia de lazo del sistema (para bajas frecuencias) incrementando a través de este mecanismo la ganancia equivalente k_n de los algoritmos de MD2O, mejorando con esto el rechazo a perturbaciones de los algoritmos analizados. Se presentan también compensadores de adelanto de fase como comparación. El método de función descriptiva y el método de LPRS (*Locus Perturbed of a Relay System*) son usados en el diseño de los compensadores y para analizar el efecto en el sistema de los compensadores diseñados. Se presentan ejemplos de diseño con simulaciones.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Estado del arte

Desde el surgimiento de los modos deslizantes (MD) a finales de la década de 1950 [16], el principal problema para su implementación es la presencia de vibraciones de alta frecuencia y amplitud finita, conocidas como *chattering*. Este fenómeno indeseado se produce debido a la presencia de dinámicas parásitas o dinámicas no modeladas, que acompañan inevitablemente a la dinámica principal de la planta. Entonces, el análisis de *chattering* fue y es un problema teórico de interés, pero también es un problema práctico de especial importancia.

Los Modos Deslizantes de Segundo Orden (MD2O) [17] surgen en 1986 como una técnica de control robusto aplicable a plantas de grado relativo 2, no solo de grado relativo 1 como los MD de primer orden. Los MD2O permiten convergencia en tiempo finito de la variable deslizante y de sus derivadas, y además, teóricamente, son libres de *chattering*. Debido a esta última característica, los MD2O son considerados como parte de los enfoques empleados para eliminar o atenuar el *chattering*. Algunos de estos enfoques para tratar el problema de *chattering* son: (1) el uso de funciones saturación [14], [27] en lugar de funciones signo con el objetivo de tener un controlador continuo; (2) el enfoque de observación [13] que consiste en agregar un observador que estime los estados del sistema teniendo como salida los estados estimados libres de *chattering*; y (3) agregar un compensador (filtro pasa-bajas) [1] [25] que atenúe los efectos de las dinámicas de alta frecuencia o *chattering*.

Sin embargo, en la década pasada surgen trabajos de análisis de MD2O en el dominio de la frecuencia que demuestran la existencia de *chattering* en MD2O, [11], [9], basándose en el argumento de que cualquier modelo es una aproximación del sistema real que representa y por lo tanto no considera las dinámicas parásitas intrínsecas de la planta causantes de *chattering* en el sistema. Los análisis men-



cionados muestran una forma de obtener los parámetros de *chattering*, amplitud y frecuencia, que no solo permitieron saber de su existencia, sino también abrieron la posibilidad de proponer formas de atenuarlo y de mejorar el desempeño del controlador, usando el concepto de ganancia equivalente de un MD2O.

Los principales métodos de análisis aplicados a MD2O hasta la fecha son Función Descriptiva (FD) [22] [2] y lugar geométrico de un sistema relevado perturbado (LPRS, por sus siglas en inglés *The Locus of a Perturbed Relay System*) [5]. Con el método de FD se han analizado los algoritmos: *Twisting* [11],[15]; *Sub-optimal* [10]; *Super-twisting* [9],[15]; y *Terminal* [10]. Y con LPRS se han analizado: *Twisting* [4],[15]; y *Sub-optimal* [12].

Tomando como base las herramientas de MD2O en el dominio de la frecuencia se ha propuesto el diseño de compensadores para atenuar el efecto de *chattering* y mejorar el desempeño del controlador, [6], [7], incrementando la ganancia equivalente del controlador.

En este trabajo se presentan compensadores que atenúan el *chattering* y mejoran el desempeño de los algoritmos de MD2O, *Twisting* y *Sub-optimal*.

1.2 Contribución

La contribución principal del trabajo es el diseño de compensadores en el dominio de la frecuencia para sistemas controlados por los algoritmos *Twisting* y *Sub-optimal*, estos compensadores atenúan el fenómeno *chattering* presente en MD2O y mejoran el rechazo a perturbaciones de los algoritmos ante perturbaciones constantes.

La Tabla 1.1 muestra con una cita los trabajos ya desarrollados sobre compensadores de *chattering* y de perturbaciones para Modos Deslizantes de Primer Orden (MD1O) y MD2O. Y con un **SI** se indica en que tipo de compensadores de los ya mencionados tiene contribución este trabajo.

Tabla 1.1: *Contribución*

Compensadores	MD1O	MD2O	
		Twisting	Sub-optimal
Chattering	Boiko 2007, [6]	SI	Allota et al. 2005, [1]
Perturbaciones	Boiko 2007, [6]	SI	SI



1.3 Motivación

Las herramientas desarrolladas para MD2O en el dominio de la frecuencia forman las bases y el inicio de un camino (o varios), aún no explorado de trabajar con algoritmos de MD. Una vertiente de esta base es acoplar dos formas de mejorar el comportamiento de sistemas controlados por MD, una forma es usar MD2O y la otra es diseñar compensadores que no solo combatan el problema de *chattering* sino además mejoren el desempeño del sistema controlado por un MD2O, esto con el argumento de que una vez que se diseño el controlador por MD2O para que el sistema tenga una respuesta deseada, es mejor diseñar un compensador que modifique el comportamiento del sistema que variar los parámetros del controlador. Otra punto importante a considerar en la elección de diseñar compensadores es que el diseño se hace en el dominio de la frecuencia y los trabajos realizados en frecuencia con FD y LPRS para MD y MD2O, mencionados en el estado del arte, muestran que existe un rechazo no ideal de perturbaciones, [6] y [7], que se puede atacar con el diseño de compensadores, y este rechazo no ideal de perturbaciones no se puede ver y no se considera en el diseño de controladores de MD y MD2O en el dominio del tiempo.

1.4 Objetivo

Diseño de compensadores para sistemas controlados por Modos Deslizantes de Segundo Orden, en particular *Twisting* y *Sub-optimal*, que atenúen *chattering* y/ó perturbaciones, usando los métodos en el dominio de la frecuencia de Función Descriptiva y LPRS (por sus siglas en inglés, *Locus of a Perturbed Relay System*).

1.5 Planteamiento del problema

El tipo de sistemas considerados en este trabajo son sistemas lineales SISO que pueden representarse mediante una función de transferencia y se considera que la salida del sistema (y), ver Fig. 1.1, se controla con un algoritmo de MD2O, *Twisting* o *Sub-optimal*

La función de transferencia $W(s)$ contiene la dinámica principal y dinámicas parásitas. En este trabajo se considera como dinámica parásita la presencia de un actuador. Debido a la presencia de dinámicas parásitas en el sistema, lo cual genera *chattering* en MD2O [8] y [12], el funcionamiento del sistema controlado por el MD2O se deteriora y esto provoca un rechazo no ideal de perturbaciones. La meta principal del trabajo es diseñar compensadores ($W_c(s)$) conectados en serie con la planta ($W(s)$), ver Fig. 1.1, que modifiquen el comportamiento del sistema

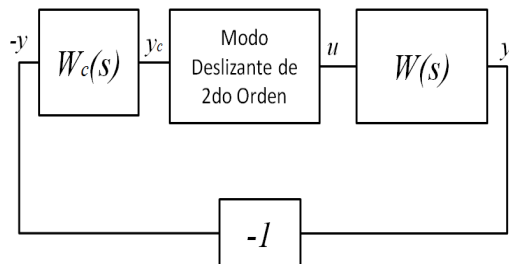


Figura 1.1: *Diagrama General*

sin variar los parámetros del controlador, para atenuar el efecto de *chattering* y mejorar el funcionamiento del sistema con respecto a valores promedio (estado estable) en presencia de perturbaciones constantes.

1.6 Estructura de la tesis

La tesis tiene la siguiente estructura: en el Capítulo 2 se muestran las herramientas en el dominio de la frecuencia utilizadas en el diseño de los compensadores para *Twisting* y *Sub-optimal*; el Capítulo 3 contiene la forma en que se diseñaron los compensadores y se verifican los resultados teóricos obtenidos a través de simulaciones; en el Capítulo 4 se propone una manera de calcular los compensadores a partir de los parámetros deseados de respuesta del sistema, verificando con simulaciones los resultados obtenidos; y en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan dos métodos de análisis en el dominio de la frecuencia y algunos conceptos importantes que se emplearon para desarrollar este trabajo. Los métodos que se presentan son Función Descriptiva [22] [2] y LPRS [5], que se muestran primero de una manera general y finalmente de manera particular para los algoritmos *Twisting* y *Sub-optimal* de MD2O, los cuales son los algoritmos analizados en este trabajo. Estos métodos son las herramientas principales para el diseño de los compensadores del Capítulo 3, ya que con FD y LPRS se obtienen los parámetros, frecuencia y amplitud de las oscilaciones del sistema controlado por MD2O, necesarios para diseñar los compensadores y hacer el análisis de rechazo de perturbaciones.

2.1 Función Descriptiva (FD)

La FD es un tipo de linealización de un elemento no lineal sujeto a una entrada senoidal. El tipo de sistemas a los cuales puede aplicarse FD son aquellos que puedan representarse mediante el diagrama de bloques mostrado en la figura 2.1

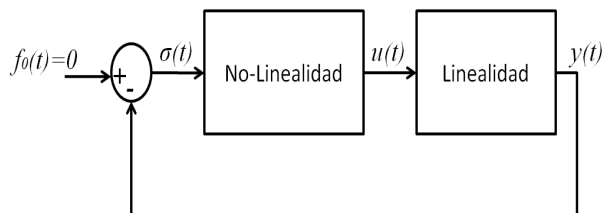


Figura 2.1: *Sistema no lineal*



Considerando el sistema no lineal de la figura 2.1, los requerimientos que debe cumplir el sistema para poder aplicar el método de FD son[27]:

1. **Existe solo una componente no lineal.** Esto quiere decir que si hay dos o más elementos no lineales en el sistema, estos se deben poder agrupar como una sola no linealidad (como puede hacerse en el caso de dos no linealidades en paralelo) ó solo considerar una de las no linealidades y omitir las restantes.
2. **El elemento no lineal es invariante en el tiempo.** Esta suposición implica que se consideran solo sistemas no lineales autónomos. La razón de esta suposición es que el método de FD está basado en gran parte en el uso de la traza de Nyquist, la cual se aplica solo a sistemas invariantes en el tiempo.
3. **Con una entrada senoidal $\sigma = \sin(\omega t)$, solo la componente fundamental $u_1(t)$ de la salida $u(t)$ es considerada.** El presente requerimiento es la suposición fundamental del método de FD. Esta suposición implica que los armónicos de alta frecuencia son omitidos en el análisis. Para cumplir esta suposición es importante que el elemento lineal que tiene como entrada $u(t)$, o sea la salida de la no linealidad, tenga las propiedades de un filtro pasa-bajas, es decir

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)| \quad \text{para } n = 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

Esta suposición se conoce como hipótesis de filtro pasa bajas.

4. **La no linealidad es impar.** Significa que la gráfica del elemento no lineal entre su entrada y su salida, $u(\sigma)$, es simétrica con respecto al origen. Esta suposición se introduce por simplicidad en los cálculos, porque el término estático de la expansión en series de Fourier de la salida $y(t)$ es cero.

2.1.1 Cálculo de la FD de un elemento no lineal

Conociendo el tipo de sistemas a los cuales se puede aplicar el método de FD, así como los requerimientos que deben de cumplir, se procede a mostrar como se representa un elemento no lineal mediante su FD.

Considere que el elemento no lineal de la figura 2.1 tiene una entrada senoidal con amplitud A y frecuencia ω , $\sigma = A \sin(\omega t)$, como se muestra en la figura 2.2. La salida de la no linealidad es una señal periódica, aunque no senoidal. Al ser la salida de la no linealidad $u(t)$ una señal periódica, ésta puede representarse mediante series de Fourier como

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2.2)$$



donde los coeficientes de Fourier a'_i s y b'_i s son generalmente funciones de A y ω , y se calculan con las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) d(\omega t) \quad (2.3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.5)$$

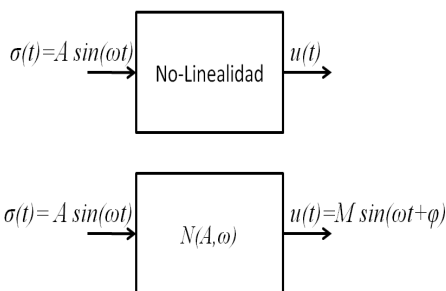


Figura 2.2: Representación en FD de un elemento no lineal

Tomando en cuenta las suposiciones mostradas arriba, la cuarta suposición indica que $a_0 = 0$, además la tercera suposición indica que solo se considera la primera componente de los coeficientes de Fourier, por lo tanto

$$u(t) \approx u_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = M \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (2.6)$$

donde $M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ y $\phi = \text{artan}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$.

De la ecuación (2.6) se puede concluir que la primera componente de la serie de Fourier de la salida de la no linealidad correspondiente a una entrada senoidal, es una senoidal con la misma frecuencia que la entrada. Representando dicha salida en el dominio complejo, u_1 puede reescribirse como

$$w_1 = M \cdot e^{j(\omega t + \phi)} = (b_1 + ja_1) \cdot e^{j\omega t} \quad (2.7)$$

De igual forma que el concepto de respuesta en frecuencia de una función, el cual se define como la relación en el dominio de la frecuencia de la salida senoidal entre la entrada senoidal de un sistema, la FD se define como **la representación compleja de la salida de la no linealidad entre la representación compleja de su entrada**, es decir

$$N(A, \omega) = \frac{M \cdot e^{j(\omega t + \phi)}}{A \cdot e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\phi} = \frac{1}{A} (b_1 + ja_1) \quad (2.8)$$



Una vez obtenida la FD de la no linealidad, esta puede tratarse como un elemento lineal con función de respuesta en frecuencia $N(A, \omega)$, como en la figura 2.2. De la ecuación (2.8) se puede ver que la FD de una no linealidad depende de la amplitud, A , y de la frecuencia, ω , pero en este trabajo solo se tratará con el caso en que la FD depende solo de la amplitud A , en primer lugar porque las no linealidades usadas tienen FD que solo depende de la amplitud y en segundo porque es más fácil el manejo de este tipo de FD.

2.1.2 Parámetros de oscilaciones usando FD

Teniendo el conocimiento de como calcular la FD de una no linealidad, a continuación se mostrará la forma de obtener los parámetros de las oscilaciones, A y ω , presentes en el sistema de control, ver figura 2.1. La obtención de A y ω se basa en la forma de determinar ciclos límite¹ mediante el método de FD.

Considere el sistema mostrado en la figura 2.3 donde $N(A)$ es la FD y $W(j\omega)$ representa al elemento lineal.

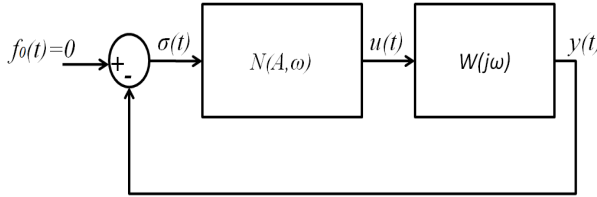


Figura 2.3: Sistema linealizado con FD

Suponiendo que $\sigma = A \sin(\omega t)$, se analiza las siguientes relaciones entrada-salida de cada uno de los elementos del sistema de la figura 2.3:

$$\Sigma(j\omega) = -W(j\omega)Y(j\omega) \quad (2.9)$$

$$U(j\omega) = N(A)\Sigma(j\omega) \quad (2.10)$$

Reescribiendo (2.9) y (2.10) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} N(A) & -1 \\ 1 & W(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma(j\omega) \\ U(j\omega) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

ecuación que tiene solución no trivial si el determinante de la matriz cuadrada es cero, es decir

$$\begin{vmatrix} N(A) & -1 \\ 1 & W(j\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

¹Un ciclo límite se define como una trayectoria cerrada aislada, ver [27]



o

$$1 + N(A)W(j\omega) = 0 \quad (2.13)$$

Resolviendo esta ecuación se encuentran los parámetros de las oscilaciones, amplitud A y frecuencia ω . La ecuación (2.13) es conocida como la *ecuación de balance armónico*.

La ecuación de balance armónico se resuelve de manera gráfica reescribiéndose como:

$$W(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \quad (2.14)$$

de tal manera que al graficar $W(j\omega)$ (Diagrama de Nyquist) y $-1/N(A)$ se obtienen los parámetros de las oscilaciones en la intersección de estas dos gráficas, como se muestra en la figura 2.4.

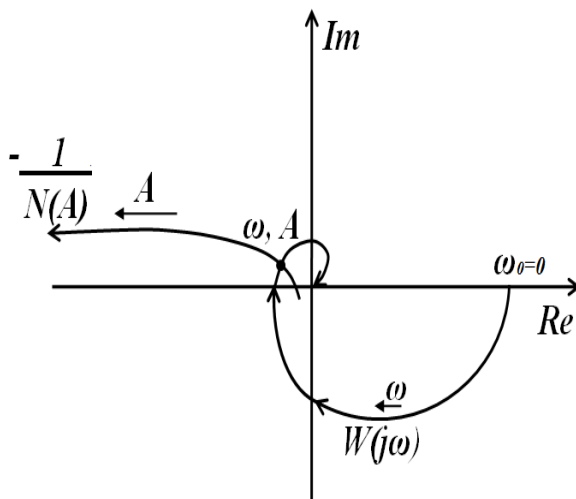


Figura 2.4: Obtención de A y ω mediante la solución de la ecuación de balance armónico

2.2 Ganancia Equivalente de un relevador

En la sección anterior se trató el problema planteado en el Capítulo 1 de una manera general sin especificar que la no linealidad considerada en este trabajo es un relevador, ya que los algoritmos de MD2O, al contener a la función *signo* pueden representarse por medio de relevadores [7]. El objetivo de representar los



algoritmos de MD2O como relevadores es atacar el problema de control de los sistemas controlados por un MD2O como sistemas relevados los cuales han sido ampliamente estudiados [2], [20], [29] [30].

El estudio de sistemas relevados se ha enfocado en tres problemas principales: existencia de movimientos periódicos (encontrar amplitud y frecuencia de oscilaciones, tratado en la sección anterior), estabilidad de ciclos límite y análisis entrada-salida (seguimiento y propagación de señales externas a través del sistema) el cual incluye el problema de atenuación de perturbaciones. En este último punto es donde entra el concepto de ganancia equivalente de un relevador, el cual será tratado en esta sección.

Considere el sistema descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x \\ u &= \begin{cases} +c & \text{si } f_0 - y \geq b \\ -c & \text{si } f_0 - y \leq -b \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times 1}$, $\mathbf{C} \in R^{1 \times n}$ son matrices, u es el valor de la entrada de control y f_0 es una entrada constante al sistema.

La figura 2.5 muestra el diagrama de bloques del sistema descrito en (2.15), donde $f = f_0$ es la entrada del sistema o una señal externa (perturbación), u es el control, y es la salida del sistema, σ es la señal de error, c es la amplitud del relevador, b es el valor de la histéresis del relevador y $W(s)$ es la función de transferencia de la parte lineal (en este caso de la planta), la cual puede obtenerse a partir de (2.15) como $W(s) = \mathbf{C}(Is - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

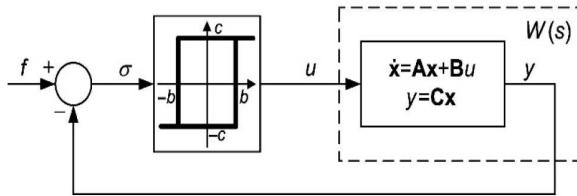


Figura 2.5: Sistema relevado

Empleando FD se analiza el sistema de la figura 2.5 suponiendo que $f = f_0 = 0$ y que $\sigma = a \sin(\Omega t)$, donde a y Ω son la amplitud y frecuencia desconocidas cuyo objetivo de análisis es encontrarlas, si existen.

Usando (2.8) se obtiene la FD del relevador con histéresis del sistema en análi-



sis con la siguiente fórmula

$$N(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi a} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \sin(\omega t) dt + j \frac{\omega}{\pi a} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.16)$$

que da como resultado una FD que depende solo de la amplitud, la cual es la siguiente [2]:

$$N(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - j \frac{4cb}{\pi a^2}, \quad (a \geq b) \quad (2.17)$$

Entonces, empleando la *ecuación de balance armónico* $W(j\omega) = -1/N(a)$ se encuentran la amplitud a y la frecuencia Ω , considerando

$$N(a)^{-1} = -\frac{\pi a}{4c} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - j \frac{\pi b}{4c}, \quad (a \geq b) \quad (2.18)$$

y resolviéndola de manera gráfica obteniendo la traza de Nyquist de $W(s)$ y graficando (2.18) que es una línea recta horizontal paralela al eje real debido a que la parte imaginaria no depende de a , como se muestra en la figura 2.6.

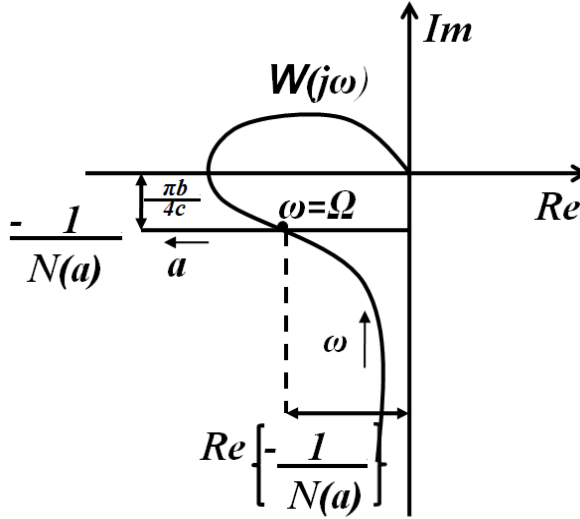


Figura 2.6: Análisis con FD de un relevador con histéresis

De la intersección de las gráficas mostradas en la figura 2.6, Ω se obtiene de la frecuencia de la traza de Nyquist correspondiente a la intersección y la amplitud se obtiene de

$$Re \left\{ -\frac{1}{N(a)} \right\} = -\frac{\pi a}{4c} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.19)$$

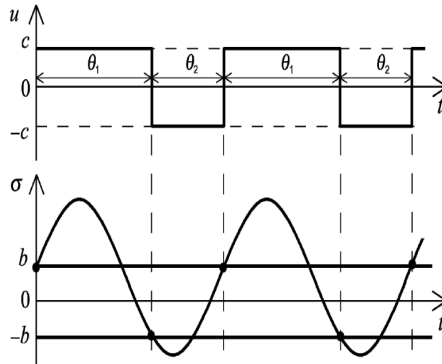


Figura 2.7: Oscilaciones asimétricas en presencia de señales externas

despejando a y sustituyendo $Re\{-1/N(a)\}$ por la distancia entre el eje imaginario y la intersección de las gráficas.

Ahora se trata el caso en que $f = f_0 \neq 0$, el cual es clave para el análisis de perturbaciones en el sistema considerado.

Asumiendo que la entrada del sistema es una señal constante $f = f_0 \neq 0$, ocurre un movimiento periódico asimétrico en el sistema representado mediante el diagrama de bloques de la figura 2.5, tal que cada señal contiene un término constante y un término periódico, ver figura 2.7

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 + \sigma_p(t) \\ u &= u_0 + u_p(t) \\ y &= y_0 + y_p(t)\end{aligned}$$

donde el sub-índice “0” se refiere al término constante de la serie de Fourier y el sub-índice “p” se refiere al término periódico de la función (suma de los términos periódicos de la serie de Fourier).

El término constante es el valor promedio de la señal durante su periodo. Ahora, suponiendo que la entrada del sistema cambia suavemente de un valor negativo a uno positivo, tal que el sistema presenta una oscilación estable, y midiendo los valores del término constante del control (u_0) contra los valores del término constante de la señal de error (σ_0), de tal manera que se determina el término constante del control en función del término constante de la señal de error, la cual es una función suave (no discontinua): $u_0 = u_0(\sigma_0)$.

La función $u_0 = u_0(\sigma_0)$, es conocida como *función de sesgo* (*bias function* en inglés) dos funciones de sesgo se muestran en la figura 2.8

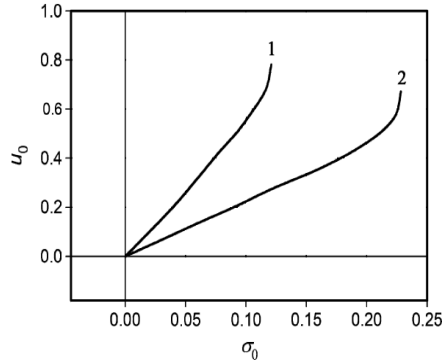


Figura 2.8: Función de sesgo

La derivada del término constante del control (u_0) con respecto al término constante de la señal de error (σ_0) alrededor del punto de error cero, es decir $\sigma_0 = 0$, da como resultado la *ganancia equivalente* de un relevador, k_n . La *ganancia equivalente* de un relevador se usa como una aproximación local de la *función de sesgo*:

$$k_n = \left. \frac{du_0}{d\sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \frac{u_0}{\sigma_0} \quad (2.20)$$

Cuando se presentan entradas constantes o entradas lentas (estas pueden ser señales que se deseen seguir o perturbaciones), el comportamiento de un sistema relevado es similar al comportamiento de un sistema lineal con respecto a la respuesta de la señal considerada, por lo tanto, encontrar el valor de la *ganancia equivalente* es un punto importante en el análisis entrada-salida del sistema relevado, por lo que lo es también para el tipo de sistemas tratados en este trabajo. Una vez que se obtiene la *ganancia equivalente*, el análisis de entrada-salida se hace como si el sistema fuera lineal, reemplazando el relevador por una ganancia lineal k_n .

NOTA: El uso del concepto de ganancia equivalente en el caso de Modos Deslizantes (MD) es una buena manera de tratar a los sistemas controlados por algoritmos de MD como sistemas lineales, debido a que las variaciones de la señal de error (σ) son generalmente pequeñas en el caso de MD y, por lo tanto, k_n al ser una aproximación local de la *función de sesgo* (en $\sigma = 0$) aproxima de buena forma el comportamiento del relevador.

Al modelo que resulta de sustituir la *ganancia equivalente* k_n por el relevador se le llama el modelo de movimientos promedio (o constantes), ver figura 2.9.

Como ejemplo y porque se usará en las siguientes secciones, se presenta como se obtiene la *ganancia equivalente* para el relevador con histéresis de la figura 2.5.

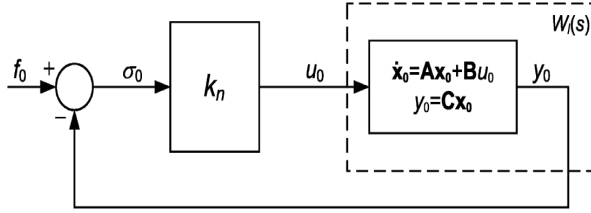


Figura 2.9: Modelo de movimiento promedio

Considerando el caso en que $f = f_0 \neq 0$, la FD del relevador con histéresis (2.17) cambia a la siguiente [2]:

$$N(a, \sigma_0) = \frac{2c}{\pi a} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b + \sigma_0}{a}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b - \sigma_0}{a}\right)^2} \right] - j \frac{4cb}{\pi a^2}, \quad (a \geq b + |\sigma_0|) \quad (2.21)$$

donde a es la amplitud de la oscilación. El término constante (valor promedio) de la señal de error como función de a y σ_0 está dado por la siguiente fórmula [7]:

$$u_0(a, \sigma_0) = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b + \sigma_0}{a} - \arcsin \frac{b - \sigma_0}{a} \right) \quad (2.22)$$

De (2.21) y (2.22), se obtiene la *ganancia equivalente* k_n del relevador con la derivada del término promedio del control respecto al término promedio del error para una entrada senoidal asimétrica:

$$k_n = \left. \frac{\partial u_0}{\partial \sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} = \frac{2c}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad (2.23)$$

2.3 LPRS: Lugar geométrico de sistemas relevados perturbados

En esta sección se presenta el segundo método en el dominio de la frecuencia utilizado como herramienta para desarrollar este trabajo, el método se conoce como LPRS por sus siglas en inglés *Locus of a Perturbed Relay System* y en español se conoce como Lugar geométrico de sistemas relevados perturbados [15].



2.3.1 Motivación del LPRS

El método se presenta a partir del concepto de balance armónico por lo que para explicarlo se parte de método de FD aplicado a un relevador con histéresis, figura 2.5. Entonces, tomando como base las fórmulas del inverso negativo de la FD y de la ganancia equivalente de un relevador con histéresis, obtenidas de (2.18) y (2.23) respectivamente, las cuales se muestran a continuación:

$$-N^{-1}(a) = -\frac{\pi a}{4c} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} - j \frac{\pi b}{4c}, (a \geq b) \quad (2.24)$$

$$k_{nFD} = \frac{2c}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad (2.25)$$

y considerando la ecuación de balance armónico $W(j\Omega) = -1/N(a)$, puede escribirse la siguiente fórmula [5]:

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{2} \frac{1}{k_{n(FD)}} + j \frac{\pi}{4c} y_{(FD)}(0) \quad (2.26)$$

donde en la parte imaginaria de (2.26) puede verse la condición de conmutación del relevador de - a +(definida como tiempo cero), esta condición de conmutación se cumple cuando la salida del sistema es igual al valor negativo de la histéresis (-b): $y_{FD}(t = 0) = -b$.

El análisis con FD de un relevador muestra y permite considerar que la frecuencia de oscilación Ω y el valor de la ganancia equivalente $k_{n(FD)}$ cambian si se modifica el valor de la histéresis del relevador b , por lo tanto se consideran los siguientes mapeos: para Ω , $M_1 : b \rightarrow \Omega$ y para $k_{n(FD)}$, $M_2 : b \rightarrow k_n$. Entonces, asumiendo que M_1 tiene un mapeo inverso $M_1^{-1} : \Omega \rightarrow b$ y aplicando la regla de la cadena, se considera el mapeo $M_2(M_1^{-1}) : \Omega \rightarrow b \rightarrow k_n$. Ahora, definiendo una función J_{FD} que represente la expresión de la parte derecha de (2.26), si se aplica el mapeo $M_2(M_1^{-1}) : \omega \rightarrow b \rightarrow k_n$, $\omega \in [0; \infty)$, en el cual la frecuencia ω es el parámetro independiente, la expresión que representa a la función J_{FD} es la siguiente [5]:

$$J_{FD}(\omega) = -\frac{1}{2k_n} + j \frac{\pi}{4c} y(t) \Big|_{t=0} \quad (2.27)$$

donde $k_n = M_2(M_1^{-1})$, $y(t)|_{t=0} = M_1^{-1}$ y $t = 0$ es el tiempo de conmutación del relevador de $-c$ a $+c$.

La parte real de $J_{FD}(\omega)$ contiene información sobre la ganancia equivalente con lo cual se puede conocer la amplitud y la parte imaginaria de $J_{FD}(\omega)$ involucra la condición de conmutación del relevador, por lo que tiene información sobre la frecuencia de oscilación.

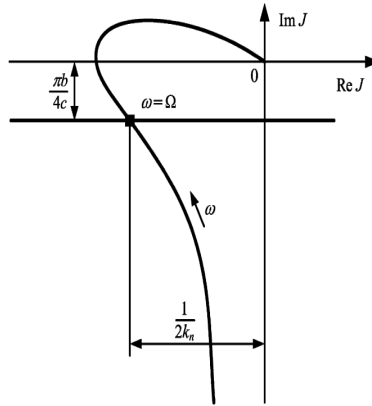


Figura 2.10: *LPRS y análisis de oscilaciones*

Es necesario señalar que los valores de k_n y de la frecuencia de oscilación Ω de la expresión $J_{FD}(\omega)$ son aproximados en relación con la hipótesis de filtro pasa-bajas considerada al usar el método de FD. Entonces es interesante relajar la hipótesis de filtro pasa-bajas para tener valores exactos tanto de Ω como de k_n , pues de esta manera se considerarían mas armónicas y no solo la primera, lo que tendría como resultado mayor aproximación en los valores de Ω y k_n .

Por lo tanto, para poder considerar todas las frecuencias y tener mayor aproximación, se obtiene una función $J(\omega)$ que sea válida para todas las frecuencias y que preserve la forma de $J_{FD}(\omega)$. A esta nueva función $J(\omega)$ junto con su traza en el plano complejo para $\omega \in [0; \infty)$ se le llama lugar geométrico de un sistema relevado perturbado (LPRS, por sus siglas en inglés *the locus of a perturbed relay system*).

Suponiendo que contamos con el LPRS de algún sistema que se desea analizar, igual que con FD, podemos obtener los valores de k_n y Ω con la bondad de que se obtienen valores teóricamente exactos. En la figura 2.10 se muestra un posible ejemplo de la interpretación geométrica del LPRS, el punto de intersección del LPRS, osea de la función $J(\omega)$, y la línea recta, la cual se encuentra a una distancia de $\pi b/4c$ abajo del eje real y paralela a este eje, permite calcular la frecuencia de las oscilaciones y la ganancia equivalente k_n del relevador.

Como al calcular la función $J(\omega)$ se desea conservar la forma de (2.27), la frecuencia de oscilaciones puede ser calculada resolviendo la ecuación:

$$\text{Im}J(\Omega) = -\frac{\pi b}{4c} \quad (2.28)$$



y la ganancia equivalente k_n como

$$k_n = \frac{1}{2\text{Re}J(\Omega)} \quad (2.29)$$

En resumen el LPRS se puede definir como una representación exacta en el dominio de la frecuencia de un relevador.

En la siguiente sección se mostrará la forma en que se calcula $J(\omega)$ para obtener los parámetros exactos del un sistema representado mediante una función de transferencia.

2.3.2 LPRS para un sistema representado por su función de transferencia

A continuación se muestra como se obtiene la fórmula de $J(\omega)$ que entrega valores exactos de amplitud y frecuencia para el caso en que se tenga una planta lineal sin integradores.

Expandiendo en serie de Fourier la señal $u(t)$ de la figura 2.7, se obtiene:

$$u(t) = u_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)}\right) \times \left\{ \cos\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \cos(k\omega t) + \sin\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \sin(k\omega t) \right\} \quad (2.30)$$

donde $u_0 = c(\theta_1 - \theta_2)/(\theta_1 + \theta_2)$, $\omega = 2\pi/(\theta_1 + \theta_2)$. Por lo tanto, $y(t)$ como una respuesta de la planta con función de transferencia $W(s)$ a una entrada $u(t)$ puede escribirse como

$$y(t) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)}\right) \times \left\{ \cos\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \cos[k\omega t + \varphi(k\omega)] + \sin\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \sin[k\omega t + \varphi(k\omega)] \right\} A(k\omega) \quad (2.31)$$

donde $\varphi(k\omega) = \arg W(jk\omega)$, $A(k\omega) = |W(jk\omega)|$, $y_0 = u_0 |W(j0)|$.

Las condiciones de conmutación del relevador de acuerdo a la figura 2.7 son las siguientes:

$$\begin{aligned} f_0 - y(0) &= b \\ f_0 - y(\theta_1) &= -b \end{aligned} \quad (2.32)$$



donde $y(0)$ y $y(\theta_1)$ se obtienen de (2.31) considerando $t = 0$ y $t = \theta_1$, respectivamente:

$$y(0) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[0.5 \sin \left(\frac{2\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Re} W(jk\omega) + \sin^2 \left(\frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Im} W(jk\omega) \right] / k \quad (2.33)$$

$$y(\theta_1) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[0.5 \sin \left(\frac{2\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Re} W(jk\omega) - \sin^2 \left(\frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Im} W(jk\omega) \right] / k \quad (2.34)$$

Considerando (2.33) y (2.34) como conocidas, las incógnitas del sistema de ecuaciones formado por las condiciones de conmutación (2.32) son f_0 y b . Las expresiones para obtener la solución del sistema de ecuaciones son:

$$f_0 = \frac{y(0) + y(\theta_1)}{2} \quad (2.35)$$

$$b = \frac{y(\theta_1) - y(0)}{2} \quad (2.36)$$

Derivando (2.32) con respecto a f_0 , considerando (2.33) y (2.34), se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{c |W(0)|}{2\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \\ & + \frac{c}{\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re} W(\omega_k) \\ & - \frac{2c}{\theta^2} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} + \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi k}{2} \frac{d \operatorname{Im} W(\omega_k)}{d\omega_k} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c |W(0)|}{2\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \\ & + \frac{c}{\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re} W(\omega_k) \\ & + \frac{2c}{\theta^2} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} + \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi k}{2} \frac{d \operatorname{Im} W(\omega_k)}{d\omega_k} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$



donde $\omega_k = \pi k/\omega$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para $d(\theta_1 - \theta_2)/df_0$ y $d(\theta_1 + \theta_2)/df_0$ se obtiene las fórmulas que contienen las derivadas para el punto $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/\omega$, es decir, $d(\theta_1 + \theta_2)/df_0|_{f_0=0} = 0$, primera parte de la solución que corresponde a la derivada de la frecuencia de oscilación, y la segunda parte de la solución da como resultado:

$$\left. \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{df_0} \right|_{f_0=0} = 2\theta / \left[c \left(|W(0)| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re} W(\omega k) \right) \right] \quad (2.39)$$

Considerando la fórmula del sistema en lazo cerrado de f_0 a u del sistema mostrado en la figura 2.5, se puede escribir:

$$\left. \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{df_0} \right|_{f_0=0} = k_n / (1 + k_n |A(0)|) 2\theta / c \quad (2.40)$$

Igualando (2.39) y (2.40), y despejando k_n , se obtiene la siguiente expresión:

$$k_n = 0.5 / \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} W(k\pi/\theta) \quad (2.41)$$

Tomando en cuenta la fórmula (2.41), la identidad $\omega = \pi/\theta$, y la forma de la función $J_{FD}(\omega)$ que se quiere conservar para $J(\omega)$, se obtiene la expresión final para $\operatorname{Re} J(\omega)$

$$\operatorname{Re} J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{Re} W(k\omega)$$

De manera similar, resolviendo (2.36) para b sustituyendo $y(0)$ y $y(\theta_1)$ con la forma de (2.33) y (2.34), respectivamente, se obtiene la expresión

$$b = -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin^2 \left(\frac{\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \right) \operatorname{Im} W(k\omega) \quad (2.42)$$

Empleando la identidad $\sin^2(A) = 0.5 - 0.5 \cos(2A)$ y considerando $\theta_1 = \theta_2 = \theta$



la expresión (2.42) se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 b &= -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(k\pi) \right] \text{Im}W(k\omega) \right\} \\
 &= -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (-1)^k \right] \text{Im}W(k\omega) \right\} \\
 &= -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{Im}W[(2k-1)\omega] \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

Entonces conservando la forma de $J_{FD}(\omega)$ para obtener $J(\omega)$, se sustituye (2.43) en (2.28) y se obtiene la parte imaginaria del LPRS como

$$\text{Im}J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{Im}W[(2k-1)\omega]$$

Finalmente juntando la parte real y la parte imaginaria, la fórmula del LPRS $J(\omega)$ para sistemas representados en función de transferencia es:

$$J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \text{Re}W(k\omega) + j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{Im}W[(2k-1)\omega] \tag{2.44}$$

2.4 Modos Deslizantes de Segundo Orden en el Dominio de la Frecuencia

En esta sección se presentan los métodos en el dominio de la frecuencia FD y LPRS, mostrados en las secciones anteriores, aplicados a los algoritmos *Twisting* y *Sub-optimal*. El objetivo de aplicar FD y LPRS a MD2O es obtener los parámetros de *chattering*: amplitud y frecuencia. Los argumentos que establecen que los parámetros de las oscilaciones obtenidos vía FD y LPRS, son los parámetros de *chattering* se expresan a continuación [7]: al hacer un análisis entrada salida a las funciones signo de los algoritmos de MD2O, consideradas como relevadores, se obtiene la amplitud de la entrada de la no linealidad y la frecuencia de la salida de la no linealidad, enfocándose en la frecuencia, la frecuencia de salida de la función signo es la frecuencia de conmutación del relevador que genera las oscilaciones periódicas y que genera el efecto de *chattering* por lo cuál dicha frecuencia puede ser considerada como la frecuencia de *chattering* y al tratar el sistema como un sistema lineal, con ayuda de la ganancia equivalente, esta frecuencia se mantiene en cada parte del sistema (u , y , ver figura 1.1). Con respecto a la amplitud a la entrada del relevador, esta si cambia a lo largo del sistema, pero al realimentar la

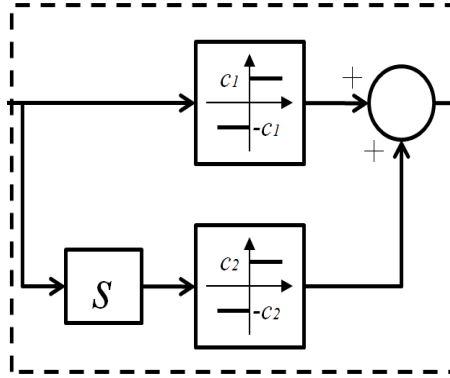


Figura 2.11: Representación en bloques del algoritmo *Twisting* para *FD*

salida esta se conecta a la entrada del relevador, por lo tanto, la amplitud de la salida del sistema (y) es la amplitud de la entrada del relevador y es esta amplitud la que se encuentra con *FD* y *LPRS*, ver figura 1.1.

2.4.1 Algoritmo *Twisting*

El algoritmo *Twisting* de modos deslizantes está definido como

$$u = -c_1 \text{sign}(y) - c_2 \text{sign}(\dot{y}) \quad (2.45)$$

donde las constantes $c_1 > c_2 > 0$ son los parámetros del algoritmo, y y \dot{y} son la salida del sistema y su derivada, respectivamente y u es la entrada a la planta lineal $W(s)$, ver figura 1.1

Función Descriptiva del Algoritmo *Twisting*

Considerando (2.45), el algoritmo *Twisting* puede representarse mediante el diagrama de bloques mostrado en la figura 2.11

Entonces, la función descriptiva para *Twisting* esta dado por la suma de las dos no-linealidades en paralelo

$$N = N_1 + sN_2 \approx \frac{4c_1}{\pi a_1} + j\Omega \frac{4c_2}{\pi a_2} = \frac{4}{\pi a_1} (c_1 + jc_2) \quad (2.46)$$

donde a_1 es la amplitud de la salida y , $a_2 = \Omega a_1$ y Ω es la frecuencia de $y(t)$.

Ahora, para obtener la solución periódica de $y(t)$, que en este caso representa los parámetros de *chattering* (amplitud y frecuencia), se aplica la ecuación de



balance armónico

$$W(j\omega) = -\frac{1}{N(a_1)} \quad (2.47)$$

donde $W(j\omega)$ es la traza de *Nyquist* de la planta (incluyendo dinámicas parásitas). Considerando la FD (2.46), la ecuación de balance armónico puede reescribirse como:

$$\frac{1}{N(a_1)} = \frac{\pi a_1}{4} \frac{c_1 - jc_2}{(c_1^2 + c_2^2)} \quad (2.48)$$

Por lo tanto, la amplitud a_1 y la frecuencia Ω de *chattering* se pueden obtener del punto de intersección entre la traza de Nyquist de la planta y el inverso negativo de la FD, como se puede ver en la figura 2.12.

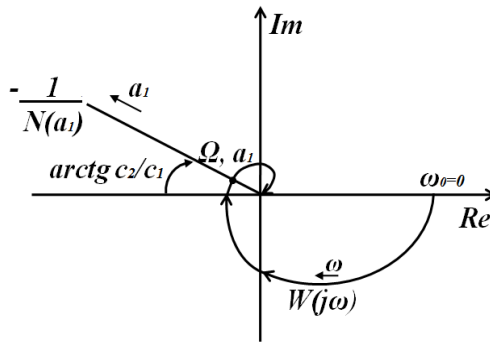


Figura 2.12: Análisis de *Twisting* con FD

Una vez obtenidos los parámetros de *chattering*, se puede calcular la ganancia equivalente del algoritmo *Twisting* [11] como la ganancia equivalente de los relevadores, con el objetivo de realizar un análisis de valores promedio (estado cuasi-estable) para analizar el rechazo de perturbaciones del sistema controlado por *Twisting*. La ganancia equivalente k_{nTw} se obtiene usando la siguiente fórmula [11], [15]:

$$\begin{aligned} k_{nTw1} &= \frac{2c_1}{\pi a_1} \\ k_{nTw2} &= \frac{2c_2}{\pi a_1 \Omega} \end{aligned} \quad (2.49)$$

El modelo del sistema, en el cual los relevadores son reemplazados por sus respectivas ganancias equivalentes, ver figura 2.13, describe la dinámica del sistema con respecto a valores promedio. Esta especie de linealización del sistema puede aplicarse al análisis de la propagación de entradas de control constantes y



perturbaciones en el sistema, usando técnicas de control lineal, como se mostrará en el Capítulo 3.

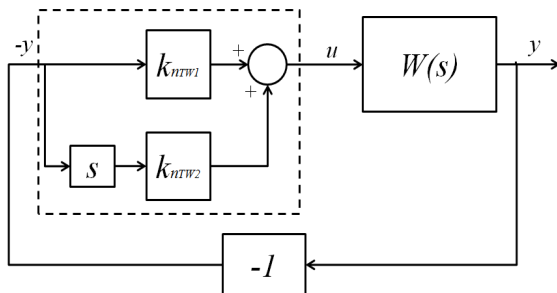


Figura 2.13: Sistema controlado por Twisting “linealizado”

LPRS del Algoritmo *Twisting*

El método LPRS considera la presencia de un solo relevador, a diferencia de FD que puede considerar más de uno, por lo tanto para poder aplicar LPRS a *Twisting* se requiere hacer una transformación del problema a uno equivalente, como se muestra en la figura 2.14.

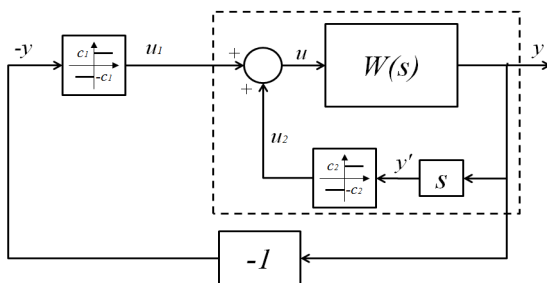


Figura 2.14: Representación en bloques del algoritmo Twisting para LPRS

En la figura 2.14, la parte encerrada por la línea punteada representa una planta equivalente que resulta de la transformación aplicada. Sin embargo, la planta equivalente es no lineal debido a que se encuentra presente el segundo relevador del algoritmo *Twisting*. Como en este trabajo se aplica LPRS solo a plantas lineales, el segundo relevador es aproximado mediante su FD para tener una planta lineal equivalente, lo cual no representa pérdida de aproximación [15]



Tomando en cuenta la expresión para calcular $J(\omega)$ (2.44), la parte imaginaria del LPRS es el valor de la salida de la planta en el instante en que el relevador conmuta de “-” a “+”, entonces la parte imaginaria del LPRS se encuentra a la salida de la planta en el instante de conmutación de la señal cuadrada u_1 aplicada a la entrada de la planta, ver figura 2.14. La señal de control u_2 también se aplica a la entrada de la planta, por lo que la salida y , se considera como la suma de las dos salidas y_1 y y_2 , resultado de la respuesta a las entradas de control u_1 y u_2 , respectivamente.

Se propone una función auxiliar $L(c, \omega, \theta)$ para calcular el LPRS del algoritmo *Twisting*, la cual representa la salida de una planta lineal en el instante $t = \theta T$ (T es el periodo de la oscilación) si una señal cuadrada periódica de amplitud c es aplicada a dicha planta, entonces:

$$L(c, \omega, \theta) = y(t)|_{t=2\pi\theta/\omega}$$

donde $\theta \in [-0.5, 0.5]$, $\omega \in [0, \infty]$. Valores positivos de θ corresponden al tiempo después del instante de conmutación del relevador (de amplitud c_1) y valores negativos de θ corresponden al tiempo anterior del instante de conmutación del relevador.

Considerando el análisis en series de Fourier de la respuesta de una planta lineal ante una señal cuadrada periódica, la función $L(\omega, \theta)$ puede representarse como:

$$L(\omega, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \{ \text{sen}[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Re}W[(2k-1)\omega] + \text{cos}[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Im}W[(2k-1)\omega] \} \quad (2.50)$$

Comparando (2.50) con la definición del LPRS, ver sección 2.3, se tiene como resultado $\text{Im}J(\omega) = L(\omega, 0)$ por lo que con la fórmula de $L(\omega, \theta)$ se puede obtener la parte imaginaria del LPRS para *Twisting*.

Entonces podemos obtener la expresión de $\text{Im}J(\omega)$ para *Twisting* como una suma de las respuestas de la planta a dos señales cuadradas periódicas, como se muestra a continuación:

$$\text{Im}J(\omega) = L(c_1, \omega, 0) + L(c_2, \omega, \theta) \quad (2.51)$$

el valor del tiempo de corrimiento θ entre la conmutación del primer y el segundo relevador es desconocido pero se puede encontrar con la siguiente ecuación:

$$\dot{y}(\theta) = 0$$

la cual puede expresarse en función de $L(\omega, \theta)$ como:

$$c_1 L_1(\omega, -\theta) + c_2 L_1(\omega, 0) = 0 \quad (2.52)$$



donde L_1 es la función $L(\omega, \theta)$ calculada para la función de transferencia $W_L(s) = sW(s)$ (función de transferencia de u a \dot{y}).

Considerando lo anterior, la metodología de análisis de movimientos periódicos en un sistema controlado por *Twisting* es: para cada punto de frecuencia del LPRS, la ecuación (2.52) se resuelve para encontrar el tiempo de corrimiento entre las conmutaciones de los dos relevadores, donde la función $L(\omega, \theta)$ se calcula como en (2.52). Después la parte imaginaria del LPRS se calcula mediante la ecuación (2.51). Con la parte imaginaria del LPRS calculada, la frecuencia de oscilación se encuentra con la ecuación (2.28) considerando $c = c_1$

Para calcular la parte real del LPRS para *Twisting* se propone hacerlo con la parte real del LPRS mostrado en la sección 2.3, pero considerando como planta $W(s)$ la función de transferencia en lazo cerrado de la planta equivalente. Entonces, considerando lo mencionado anteriormente la función $J(\omega)$ para obtener el LPRS del algoritmo *Twisting* es:

$$J(\omega) = \text{Re} \left[\frac{W(j\omega)}{(1 + j\omega \cdot N_2 \cdot W(j\omega))} \right] + j \left[L(\omega, 0) + \frac{c_2}{c_1} L(\omega, \theta) \right] \quad (2.53)$$

donde $N_2 = \frac{4c_2}{\pi A_2}$ es la FD del segundo relevador y $A_2 = \frac{4c_1 \omega |W(j\omega)|}{\pi}$.

La interpretación geométrica para obtener los parámetros de las oscilaciones vía LPRS para un sistema controlado por *Twisting* se presenta en la figura 2.15.

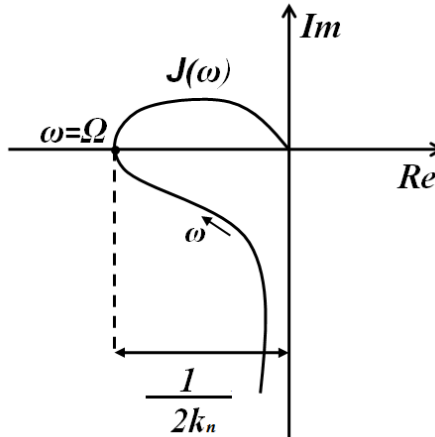


Figura 2.15: Análisis de *Twisting* con LPRS

La frecuencia de *chattering* Ω es la frecuencia que corresponde a la intersección de $J(\omega)$ con el eje real, mientras que la amplitud se obtiene a partir de la distancia



entre el origen y la intersección con el eje real, aplicando la siguiente fórmula [11],[15]:

$$a = \frac{c_1}{\pi Re(\Omega)}$$

La ganancia equivalente $k_{nTwLPRS}$ puede ser obtenida directamente de la intersección del LPRS con el eje real mediante $k_{nTwLPRS} = 1/2Re(\Omega)$ o con la amplitud de la oscilación como en el caso de FD como:

$$k_{nTwLPRS} = \frac{2c_1}{\pi a}$$

que es la misma fórmula para calcular k_{nTw1} en el caso de FD.

De la misma forma que en FD, al reemplazar el algoritmo Twisting por $k_{nTwLPRS}$ se puede realizar un análisis de valores promedio del sistema, con lo cual se analiza el rechazo a perturbaciones del sistema controlado por Twisting.

2.4.2 Algoritmo *Sub-optimal*

El algoritmo *Sub-optimal* está definido por la siguiente expresión

$$u = -U \cdot \text{sign}(y - \beta y_{Mi}) \quad (2.54)$$

donde β (parámetro de anticipación) y U son los parámetros del controlador, y_{Mi} es el último punto singular de y , por ejemplo, el valor de y en el último instante de tiempo t_{Mi} ($i = 1, 2, \dots$) cuando $\dot{y}(t_{Mi}) = 0$.

Asuma que el comportamiento en estado estable de un sistema controlado por *Sub-optimal* es periódico y forma un ciclo límite que no tiene sesgo. Entonces, los puntos singulares y_M de la variable y son una secuencia de valores positivos y negativos con la misma magnitud: $y_M^p, -y_M^p$ (donde “ p ” se refiere a periodo). La conmutación del control ocurre en el instante cuando la salida $y(t)$ es igual a βy_M^p o a $-\beta y_M^p$. Esto corresponde a un comportamiento de relevador con histéresis (figura 2.16).

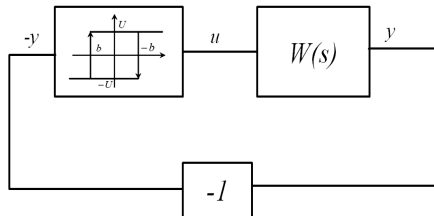


Figura 2.16: Representación en bloques de *sub-optimal*



Función Descriptiva del algoritmo *Sub-optimal*

Debido a que el algoritmo *Sub-optimal* se puede representar como un relevador con histéresis su Función Descriptiva es la de un relevador con esta característica, donde el valor de dicha histéresis es desconocido debido a que depende de la salida y del sistema, la cual tiene como parámetros los valores que se quieren encontrar. Asumiendo que durante un periodo de movimiento los valores extremos de la salida, ó el valor de la salida y , coincide en magnitud con la amplitud de la oscilación, por lo tanto, y_M es la amplitud desconocida, podemos obtener la FD de algoritmo de la siguiente manera:

$$N(a_y) = \frac{4c}{\pi a_y} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_y^2}} + j \frac{4bc}{\pi a_y^2} \quad (2.55)$$

donde el valor de la histéresis $b = \beta y_{Mi}$, $c = U$ y $a_y = y_M$. Después de algunas manipulaciones algebraicas la FD (2.55) puede reescribirse como:

$$N(a_y) = \frac{4c}{\pi a_y} \left(\sqrt{1 - \beta^2} + j\beta \right) \quad (2.56)$$

De igual manera que con el algoritmo *Twisting*, los parámetros de *chattering* del sistema controlado por *Sub-optimal* pueden ser encontrados con ayuda de la ecuación de balance armónico $W(j\omega)N(a_y) = -1$, como se muestra a continuación:

$$-\frac{1}{N(a_y)} = -\frac{\pi y_M}{4U} \left(\sqrt{1 - \beta^2} - j\beta \right) \quad (2.57)$$

El punto de intersección entre la traza de *Nyquist* y el inverso negativo de la función descriptiva, ver figura 2.17, da como resultado la frecuencia de *chattering*, mientras que la amplitud se obtiene con la siguiente fórmula [12], [7]:

$$a_y = \frac{4UW(j\Omega)}{\pi} \quad (2.58)$$

La ganancia equivalente para *Sub-Optimal* k_{nsub} se obtiene con ayuda de los parámetros de la oscilación y de la siguiente expresión [7]:

$$\begin{aligned} k_n^* &= \frac{2U}{\pi a_y \sqrt{1 - \beta^2}} \\ k_{nsub} &= k_n^* (1 + \beta) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Reemplazando el algoritmo por su ganancia equivalente da como resultado el modelo de propagación de entradas constantes y perturbaciones a través del sistema.

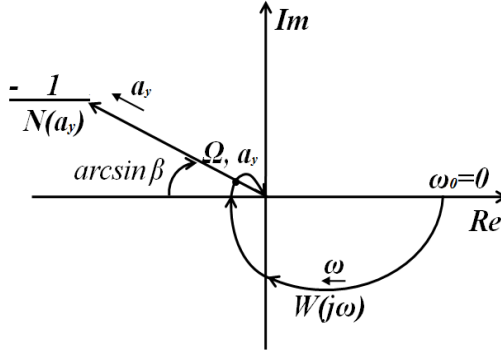


Figura 2.17: Análisis de Sub-Optimal con FD

LPRS del Algoritmo *Sub-optimal*

A pesar de que el algoritmo *Sub-optimal* puede aproximarse como un relevador con histéresis donde el valor de la histéresis depende de la amplitud de la oscilación y es por lo tanto desconocido, un método exacto para obtener los parámetros de la oscilación puede obtenerse aplicando el siguiente procedimiento.

Considerando la siguiente función $\Phi(\omega)$

$$\Phi(\omega) = -\sqrt{[a_y(\omega)]^2 - y^2\left(\frac{\pi}{\omega}, \omega\right)} + jy\left(\frac{\pi}{\omega}, \omega\right)$$

donde $y\left(\frac{\pi}{\omega}, \omega\right)$ es el valor de la salida del sistema en el instante de tiempo cuando el relevador conmuta desde $-c$ a c (π/ω es la mitad de un periodo y $t = 0$ se asume, sin pérdida de generalidad, como el tiempo en el que el relevador conmuta de $-c$ a c), y $a_y(\omega)$ es la amplitud de la salida de la planta en el periodo considerado de frecuencia ω :

$$a_y = \max_{t \in [0, T]} |y(t, \omega)| \quad (2.60)$$

$y(t, \omega)$ puede ser calculada mediante series de Fourier

$$y(t, \omega) = \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{2}\pi k\right) \sin[k\omega t + \varphi(k\omega)] L(\omega k) \quad (2.61)$$

donde $\varphi(k\omega) = \arg W(jk\omega)$, $L(k\omega) = |W(jk\omega)|$ son la fase y la magnitud de $W(j\omega)$ para la frecuencia $k\omega$, respectivamente.

La variable $a_y(\omega)$ puede ser calculada usando (2.59) y $y\left(\frac{\pi}{\omega}, \omega\right)$ como la parte imaginaria del LPRS o con la serie (2.61).

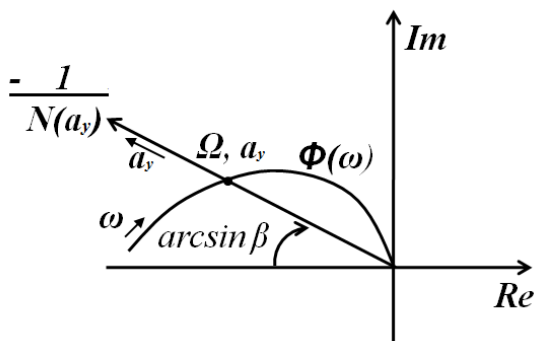


Figura 2.18: Análisis de Sub-Optimal con LPRS

Con la función $\phi(\omega)$ calculada, realizamos el análisis de un posible movimiento periódico de la misma forma como en FD, simplemente reemplazando la traza de *Nyquist* de $W(j\omega)$ con la función $\phi(\omega)$. La interpretación geométrica de este análisis se muestra en la figura 2.18.

Entonces, los parámetros de *chattering* para un sistema con algoritmo *Sub-optimal*, se encuentran en la intersección entre la función $\phi(\omega)$ y el inverso negativo de la FD de *Sub-optimal*, donde la frecuencia correspondiente a la intersección de la función $\phi(\omega)$ es la frecuencia de *chattering* Ω y la amplitud de la salida es la correspondiente a la intersección del inverso negativo de la FD.



Capítulo 3

Diseño de Compensadores

En este capítulo se presenta el diseño de compensadores para sistemas lineales controlados por los algoritmos *Twisting* o *Sub-optimal*. Primero se presenta un ejemplo de diseño aplicado a un sistema masa resorte amortiguador y terminando el ejemplo se presenta la lista de los pasos que se llevan a cabo para diseñar el compensador.

Considere el siguiente sistema masa-resorte-amortiguador en un plano inclinado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u_a + D\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde x_1 y x_2 son la posición y velocidad de la masa, respectivamente, D es una perturbación (acotada) debida a la fuerza de gravedad que actúa sobre la masa del sistema y u_a es la entrada de control desarrollada por un actuador con la siguiente dinámica

$$T_a \dot{u}_a + u_a = u\tag{3.2}$$

con constante de tiempo $T_a = 0.01$ segundos. La entrada al actuador u será dada por el algoritmo *Twisting* o por el algoritmo *Sub-optimal*. El objetivo de control es mantener la masa del sistema en $x_1 = 0$

Los compensadores propuestos son de adelanto de fase y de retraso de fase con función de transferencia $W_{c_{ret}}(s)$ y $W_{c_{ade}}(s)$, respectivamente, [6].

$$W_{c_{ret}}(s) = \frac{\frac{s}{\kappa\omega_0} + 1}{\frac{s}{\omega_0} + 1}\tag{3.3}$$

$$W_{c_{ade}}(s) = \frac{\frac{s}{\omega_0} + 1}{\frac{s}{\delta\omega_0} + 1}\tag{3.4}$$

donde $\kappa, \delta > 1$. El diseño de los compensadores se presenta para el sistema conformado por (3.1) y (3.2) en la siguiente sección. Para el caso en que el



algoritmo *Twisting* está presente en el sistema el diseño se presenta con detalle, mientras que para el caso de *Sub-optimal* al ser igual el procedimiento se trata de una forma mas rápida.

3.1 Compensador para un sistema controlado por *Twisting*

En el diseño de los compensadores propuestos en este trabajo, existen dos parámetros que deben ser calculados, el primero es la frecuencia característica del compensador ω_0 y el segundo es el factor de separación κ en retraso de fase y δ en adelante de fase. Para calcular ω_0 del compensador de retraso de fase, seleccionamos la frecuencia media del compensador $\omega_{mid} = \sqrt{\kappa\omega_0^2}$ coincidiendo con la frecuencia media del rango entre ω_{max} y Ω como en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\omega_{mid} &= \sqrt{\kappa\omega_0^2} = \sqrt{\omega_{max}\Omega} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{\omega_{max}\Omega}{\kappa}}\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde ω_{max} representa la frecuencia de corte del sistema (planta+actuador) y Ω representa la frecuencia de *chattering*. La frecuencia característica ω_0 del compensador de adelante de fase se calcula de la misma manera que es calculada la frecuencia característica del compensador de retraso de fase, dando como resultado la siguiente fórmula:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_{max}\Omega}{\delta}}\quad (3.6)$$

donde se puede ver que para los dos casos solo cambia el factor de separación.

Entonces, como primer paso en el diseño se obtiene la frecuencia de *chattering* Ω con el método de Función Descriptiva o con LPRS, en este caso se aplica FD y se considera que el sistema tiene como controlador el algoritmo *Twisting* siguiente:

$$u = 0.8 \cdot \text{sign}(y) + 0.6 \cdot \text{sign}(\dot{y})\quad (3.7)$$

el resultado del análisis con FD se muestra en la figura 3.2, donde resulta una frecuencia de *chattering* $\Omega = 78.7$.

La frecuencia $\omega_{max} = 1.27$ es obtenida a partir del diagrama de Bode del sistema (planta+actuador), ver figura 3.1. Por lo tanto con la expresión del compensador de retraso (3.5) y considerando los valores siguientes: $\Omega = 78.7$, $\omega_{max} = 1.27$ y $\kappa = 2$, la frecuencia característica del compensador de retraso es $\omega_0 = 7.07$. El compensador que corresponde a los parámetros ya mencionados tiene la siguiente función de transferencia:

$$W_{c_{ret}}(s) = \frac{0.07073s + 1}{0.1415s + 1}\quad (3.8)$$



considerando el mismo procedimiento, el compensador de adelanto de fase (3.4) proponiendo $\delta = 2.5$ es:

$$W_{c_{ade}}(s) = \frac{0.1582s + 1}{0.06326s + 1} \quad (3.9)$$

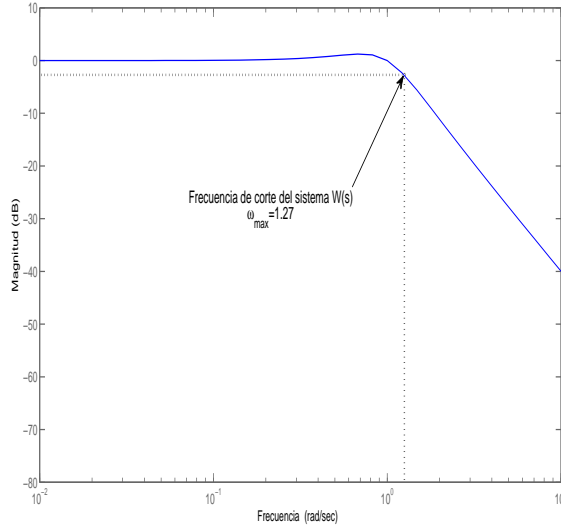


Figura 3.1: *Frecuencia de corte del sistema masa-resorte-amortiguador*

La selección de los parámetros de separación entre polo y cero de los compensadores de retardo y adelanto, κ y δ , respectivamente, se realiza con base en el porcentaje de incremento o decremento de la frecuencia de *chattering* Ω , es decir, para el caso de $\kappa = 2$ se espera un cambio en Ω del 20 por ciento y en el caso de $\delta = 2.5$ se espera un cambio del 25 por ciento.

La figura 3.2 muestra los resultados obtenidos para el sistema controlado por el algoritmo *Twisting* sin la presencia de compensadores y con la presencia de los compensadores diseñados, usando el método de FD. Como lo muestran los resultados, el compensador de retardo de fase disminuye la amplitud de la salida a_y y la frecuencia de *chattering* Ω en un 20 por ciento, mientras que el compensador de adelanto de fase incrementa la amplitud a_y y la frecuencia de *chattering* Ω en un 25 por ciento.

La figura 3.3 muestra el análisis de compensadores con el método de LPRS. El efecto causado por los dos compensadores en el caso del análisis con LPRS es el mismo que para FD, sin embargo como puede apreciarse en las figuras 3.2 y 3.3,

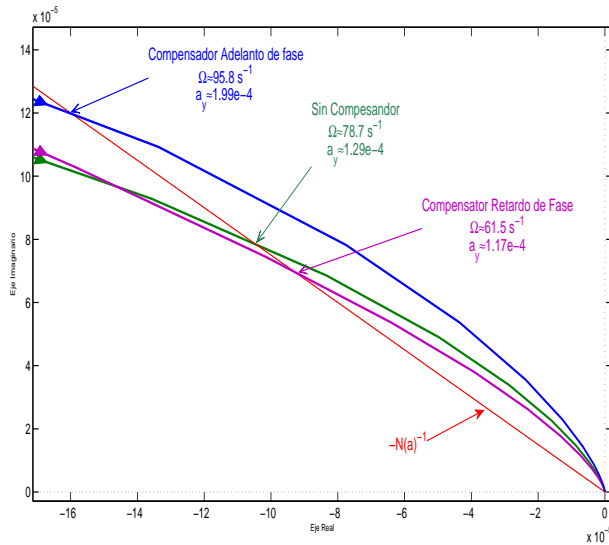


Figura 3.2: Análisis de Compensadores para Twisting con FD

los valores de la frecuencia de *chattering* Ω y de la amplitud a_y no resultan ser los mismos. Para el caso de Ω la diferencia nos es tan notoria como en el caso de a_y , pero tomando en cuenta que teóricamente el método LPRS es exacto a diferencia de FD que es aproximado, se puede concluir que los resultados del análisis en el caso de LPRS son más confiables, esto podrá verificarse más adelante cuando se presenten los resultados de simulación del presente análisis.

Con los parámetros de las oscilaciones del sistema masa-resorte-amortiguador controlado por *Twisting*, obtenidos cuando los compensadores diseñados están presentes en el lazo de control del sistema, se puede hacer un análisis de valores promedio (estado estable) en presencia de perturbaciones.

El análisis del efecto que tiene agregar un compensador en el comportamiento del sistema controlado por *Twisting* se hace empleando el concepto de ganancia equivalente k_{nTw} , entonces, considerando la presencia de perturbaciones en el sistema, el diagrama de bloques que representa el lazo de control analizado es el mostrado en la figura 3.4, donde la función de transferencia de la perturbación D a y es:

$$W_{Dy}(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(0.01s + 1) + (k_{n1} + sk_{n2})} \quad (3.10)$$

Aplicando el teorema del valor final a $W_{Dy}(s)$ el valor de la salida del sistema

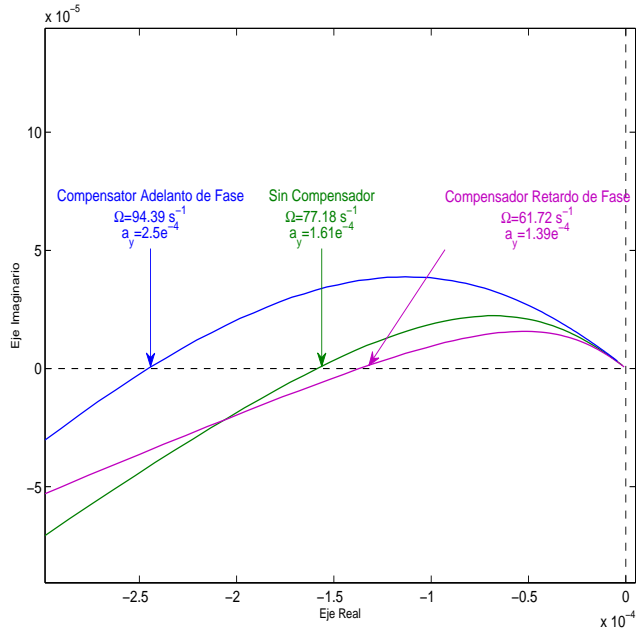


Figura 3.3: Análisis de Compensadores para *Twisting* con LPRS

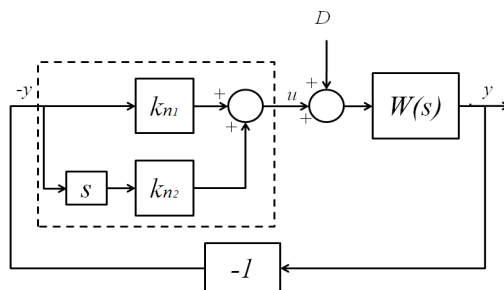


Figura 3.4: Sistema con *Twisting* en presencia de perturbación



en estado estable se calcula con la siguiente fórmula

$$y_{sstw} = \frac{D}{k_{nTw1} + 1} \quad (3.11)$$

Por lo tanto, asumiendo que $D = 0.1$ y considerando (3.11), las ganancias equivalentes con sus respectivos valores en estado estable obtenidos en presencia de los compensadores diseñados se muestran en la Tabla 3.1, donde k_{nTwFD} y

Tabla 3.1: *Ganancias equivalentes y valores en estado estable de sistema controlado por Twisting*

	Sin Compensador	Compensador de Retraso	Compensador de Adelanto
k_{nTwFD}	3948	4353	2559.3
$k_{nTwLPRS}$	3163.3	3664	2037.2
y_{sstwFD}	$2.53e^{-5}$	$2.3e^{-5}$	$3.91e^{-5}$
$y_{sstwLPRS}$	$3.16e^{-5}$	$2.73e^{-5}$	$4.91e^{-5}$

$k_{nTwLPRS}$ representan las ganancias equivalentes calculadas con los parámetros de las oscilaciones obtenidos con FD y LPRS, respectivamente. En el caso de y_{sstwFD} y $y_{sstwLPRS}$ se considera lo mismo.

Los valores mostrados en la Tabla 3.1 indican que el efecto producido al agregar un compensador de retraso de fase, comparado con un compensador de adelanto de fase, mejora el comportamiento del sistema cuando una perturbación se presenta, además de reducir el valor de la salida en estado estable, el análisis mediante FD y LPRS muestran que la presencia de dicho compensador en el lazo de control reduce la frecuencia *chattering* y la amplitud de la oscilación en la salida del sistema.

Es necesario aclarar que la selección del parámetro de separación en el diseño del compensador de retraso de fase para el sistema controlado por *Twisting*, el cual entrega mejores resultados, se eligió con base en el valor más pequeño de frecuencia que se pudo alcanzar para el ejemplo propuesto.

En concreto, el procedimiento para llevar a cabo el diseño de los compensadores es el siguiente: primero se encuentra la frecuencia de corte del sistema ω_{max} , después usando FD o LPRS se obtiene la frecuencia de *chattering* Ω del sistema, y finalmente con Ω y la fórmula (3.5) o (3.6) se propone el parámetro de separación κ o δ de acuerdo al porcentaje de decremento o aumento de la frecuencia de *chattering* deseada.

3.1.1 Simulaciones de compensadores para *Twisting*

La propuesta para verificar los resultados teóricos obtenidos en el diseño de compensadores para el sistema controlado por *Twisting* es presentar una serie de



simulaciones que se llevaron a cabo con ayuda de *Simulink*, donde se obtienen los parámetros de las oscilaciones y los valores en estado estable de la salida.

La figura 3.5 muestra los valores de la frecuencia Ω y la amplitud a_y obtenidos con las simulaciones del sistema masa-resorte-amortiguador con la presencia de los compensadores diseñados.

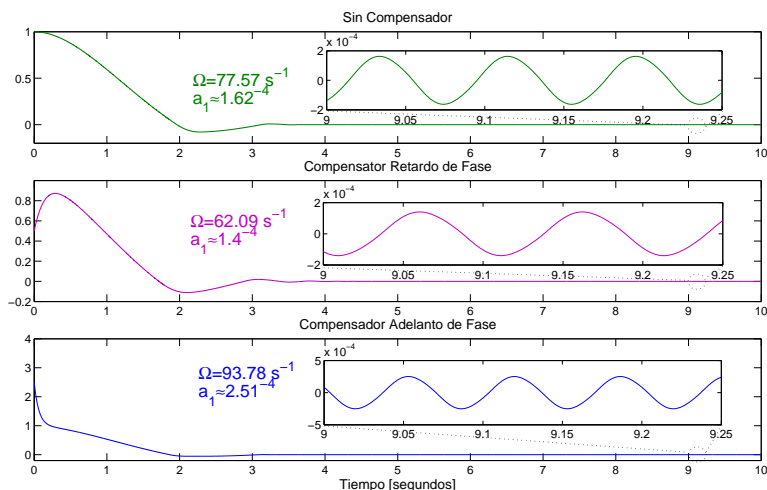


Figura 3.5: Simulación del efecto de Compensadores en Ω y a_y para *Twisting*

La figura 3.6 contiene los valores de estado estable de la salida del sistema sin compensador y con los compensadores diseñados.

Como comparación entre los métodos en el dominio de la frecuencia para el algoritmo *Twisting* empleados en esta sección, se presenta la Tabla 3.2. Como lo muestra la tabla el método LPRS tiene una mejor aproximación a los valores obtenidos en las simulaciones, con esto se puede confirmar, como se menciona antes, que éste método entrega valores mas confiables de los parámetros de oscilación.

Tabla 3.2: Tabla comparativa de análisis de compensadores para *Twisting*

	FD			LPRS			Simulación		
	a	Ω	y_{ss}	a	Ω	y_{ss}	a	Ω	y_{ss}
Sin	$1.29e^{-4}$	78.7	$2.53e^{-5}$	$1.61e^{-4}$	77.18	$3.16e^{-5}$	$1.62e^{-4}$	77.57	$3.02e^{-5}$
Retraso	$1.17e^{-4}$	61.5	$2.3e^{-5}$	$1.39e^{-4}$	61.72	$2.73e^{-5}$	$1.4e^{-4}$	62.09	$2.52e^{-5}$
Adelanto	$1.99e^{-4}$	95.8	$3.91e^{-5}$	$2.5e^{-4}$	94.39	$4.91e^{-5}$	$2.51e^{-4}$	93.78	$4.75e^{-5}$

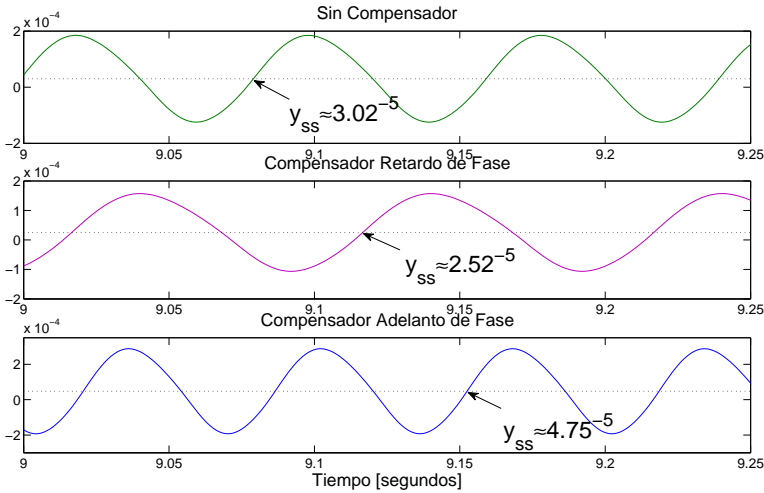


Figura 3.6: Simulación del efecto de Compensadores en el valor en estado estable para *Twisting*

3.2 Compensador para un sistema controlado por *Sub-Optimal*

El compensador para el sistema controlado por *Sub-optimal* se diseña considerando el siguiente controlador:

$$u = -0.1 \cdot \text{sign}(y - 0.5y_{Mi}) \quad (3.12)$$

Los parámetros de *chattering* que resulta del análisis mediante función descriptiva del sistema controlado por *Sub-optimal* se muestran en la figura 2.17.

La frecuencia de corte del sistema (planta+actuador) es $\omega_{max} = 1.27$, ver figura 3.1, entonces, con $\Omega = 24.8$ obtenida a partir del análisis en FD, $\kappa = 1.5$ y $\delta = 2$, los compensadores de retraso y adelanto de fase son:

$$W_{c_{ret}}(s) = \frac{0.09315s + 1}{0.1397s + 1} \quad (3.13)$$

$$W_{c_{ade}}(s) = \frac{0.1613s + 1}{0.08067s + 1} \quad (3.14)$$

Los parámetros de separación entre el polo y el cero en esta caso también representan el factor de incremento o decremento de la frecuencia Ω del sistema.

La figura 3.7 muestra el efecto de cada compensador sobre el sistema controlado por *Sub-optimal* usando el método de FD. Como puede verse el compensador

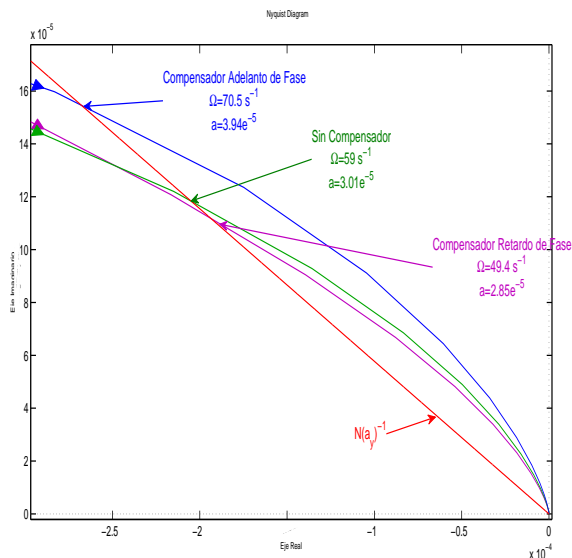


Figura 3.7: Análisis de Compensadores para Sub-optimal con FD

de retraso de fase disminuye la frecuencia de *chattering* un 15 por ciento y la amplitud de las oscilaciones en la salida de la planta, mientras que el compensador de adelanto aumenta el valor de amplitud y frecuencia en un 20 por ciento.

En la figura 3.8 se muestran los parámetros de las oscilaciones usando LPRS cuando los compensadores diseñados se agregan al sistema controlado por *Sub-optimal*. De igual forma que en el caso de *Twisting* los resultados obtenidos con FD y LPRS son aproximados, resaltando otra vez que los valores obtenidos usando LPRS son mas confiables por la exactitud teórica del método.

El análisis del sistema en presencia de perturbaciones es igual que el presentado para el algoritmo *Twisting*, dando como resultado que la expresión para calcular el valor en estado estable de la salida para *Sub-optimal* y_{ssub} sea la misma que en el caso de y_{stw} .

Por lo tanto, con los parámetros de oscilaciones obtenidos en el análisis de FD y LPRS se calculan las ganancias equivalentes k_{nsubFD} (2.59) y $k_{nsubLPRS}$ respectivas a los compensadores diseñados y asumiendo que la perturbación $D = 0.08$, los valores en estado estable en presencia de los compensadores son los mostrados en la Tabla 3.3

Considerando la Tabla 3.3, el compensador de retraso de fase disminuye el error en estado estable del sistema en presencia de perturbaciones, esto se debe

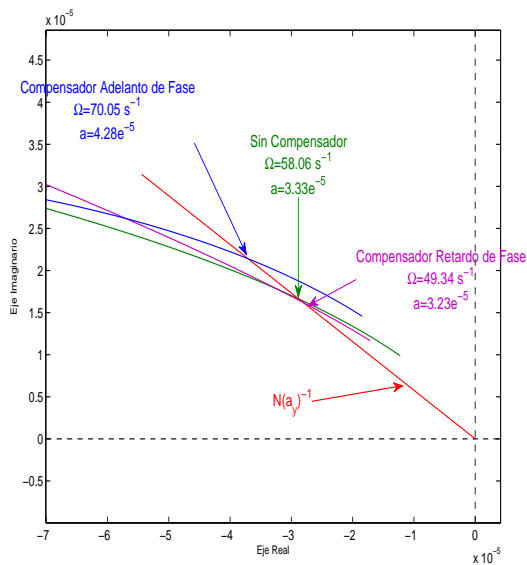


Figura 3.8: Análisis de Compensadores para Sub-optimal con LPRS

Tabla 3.3: Ganancias equivalentes y valores en estado estable de sistema controlado por Sub-optimal

	Sin Compensador	Compensador de Retraso	Compensador de Adelanto
k_{nsubFD}	3661.2	3866	2797.3
$k_{nsubLPRS}$	3311.3	3413.8	2576.3
$y_{sssubFD}$	$2.18e^{-5}$	$2.07e^{-5}$	$2.86e^{-5}$
$y_{sssubLPRS}$	$2.42e^{-5}$	$2.34e^{-5}$	$3.1e^{-5}$



a que agregando el compensador se aumenta el valor de la ganancia equivalente k_{nsub} , lo anterior se concluye al comparar el compensador de retraso de fase con el de adelanto de fase cuya aportación al sistema es contraria a la del compensador de retraso de fase.

De la misma forma que en el caso del sistema controlado por *Twisting*, la selección de los parámetros de separación κ y δ de los compensadores para el sistema controlado por *Sub-optimal* es la que dio como resultado la mínima frecuencia de *chattering*.

3.2.1 Simulaciones de compensadores para *Sub-optimal*

Como en el caso de *Twisting*, se presentan las simulaciones del sistema controlado por *Sub-optimal* para efecto de comparación entre los resultados de simulaciones y los obtenidos con FD y LPRS. Las figuras 3.5 y 3.10, muestran las simulaciones de los parámetros de las oscilaciones y de valores en estado estable, respectivamente.

En la Tabla 3.4, se comparan los valores obtenidos por los dos métodos empleados con los valores de las simulaciones. En este caso la comparación muestra, una vez más, la confiabilidad de los valores obtenidos con el método LPRS, debido a que dichos valores son más aproximados a los valores obtenidos de las simulaciones.

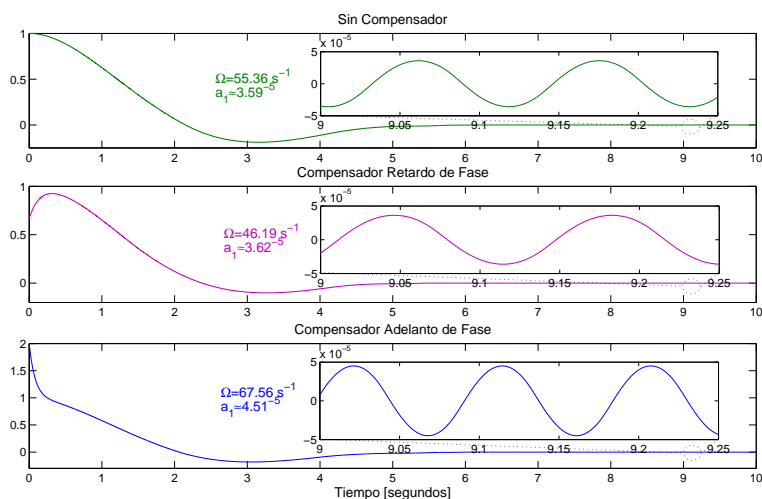


Figura 3.9: Simulación del efecto de Compensadores en Ω y a_y para *Sub-optimal*

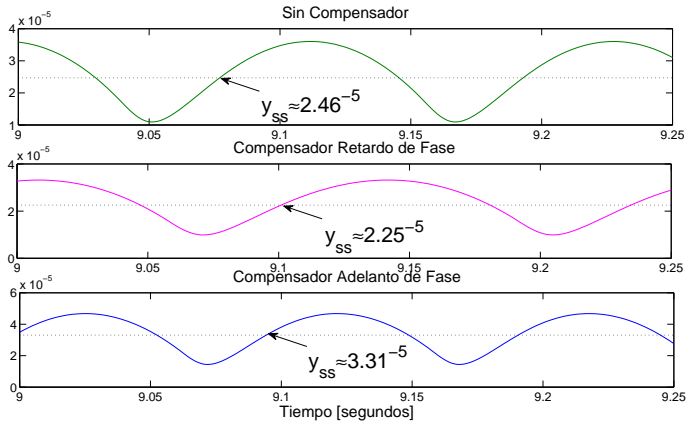


Figura 3.10: Simulación del efecto de Compensadores en el valor en estado estable para Sub-optimal

Tabla 3.4: Tabla comparativa de análisis de compensadores para Sub-optimal

	FD			LPRS			Simulación		
	a	Ω	y_{ss}	a	Ω	y_{ss}	a	Ω	y_{ss}
Sin	$3.01e^{-5}$	59	$2.18e^{-5}$	$3.33e^{-5}$	58.06	$2.42e^{-5}$	$3.59e^{-5}$	55.36	$2.46e^{-5}$
Retraso	$2.85e^{-5}$	49.4	$2.07e^{-5}$	$3.23e^{-5}$	49.34	$2.34e^{-5}$	$3.62e^{-5}$	46.19	$2.25e^{-5}$
Adelanto	$3.94e^{-5}$	70.5	$2.86e^{-5}$	$4.28e^{-5}$	70.05	$3.1e^{-5}$	$4.51e^{-5}$	67.56	$3.31e^{-5}$

Capítulo 4

Ajuste de ganancia de lazo para MD2O

En el capítulo anterior el diseño de compensadores propuesto se presentó de una forma un tanto arbitraria, debido a que no se especifica de manera clara, la manera de elegir el parámetro de separación para los dos compensadores propuestos. En este capítulo se combina la forma de obtener la frecuencia característica ω_0 , del capítulo anterior, con un camino para obtener el parámetro de separación del compensador que dependerá de las características de frecuencia y ganancia equivalente deseadas para el comportamiento de un sistema controlado por el algoritmo *Twisting* o *Sub-optimal*.

La idea principal es encontrar una expresión que relacione la ganancia equivalente con el compensador, W_c , particularmente con los parámetros de diseño α y ω_0 . Es conveniente mencionar que en este caso el compensador que se propone diseñar tiene como función de transferencia

$$W_c(s) = \frac{\frac{s}{\alpha\omega_0} + 1}{\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

donde $\alpha > 0$, que es prácticamente el mismo que en el capítulo anterior con la diferencia de que el parámetro de separación α puede tomar cualquier valor mayor que cero y de esta manera se puede tener un compensador de adelanto si $0 < \alpha < 1$ o uno de atraso si $\alpha > 1$.

Con ayuda de la ecuación de balance armónico se obtiene la siguiente ecuación

$$W_c(j\omega)W(j\omega) = -\frac{1}{N(a)} \quad (4.1)$$

donde la función de transferencia del compensador W_c está presente. Ahora, considerando que el recíproco negativo de cualquier función descriptiva puede



dividirse en parte real y parte imaginaria, la ecuación (4.1) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} [ReW_c ReW - ImW_c ImW] + j [ReW_c ImW + ImW_c ReW] \\ = -Re \frac{1}{N(a)} - j Im \frac{1}{N(a)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ReW y ImW son la parte real e imaginaria del sistema (planta+actuador), respectivamente. La parte real e imaginaria de W_c están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} ReW_c &= \frac{\frac{\omega^2}{\alpha\omega_0^2} + 1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1} \\ ImW_c &= \frac{\frac{\omega}{\alpha\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1} \end{aligned}$$

la frecuencia característica ω_0 del compensador se seleccionada de igual forma que en el capítulo anterior.

Entonces, igualando parte real y parte imaginaria de (4.2) y considerando que $N(a)$ puede reescribirse como $N(k_n)$, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{ReW\omega^2 + \varphi^2 ReW - ImW\omega\varphi\frac{1}{x} + ImW\varphi x}{x^2\omega^2 + \varphi^2} = -Re \frac{1}{N(k_n)} \quad (4.3)$$

$$\frac{ImW\omega^2 + \varphi^2 ImW + ReW\omega\varphi\frac{1}{x} - ReW\varphi x}{x^2\omega^2 + \varphi^2} = -Im \frac{1}{N(k_n)} \quad (4.4)$$

donde $x = \sqrt{\alpha}$ y $\varphi = \sqrt{\omega_{max}\Omega}$. Ahora, sustituyendo el recíproco negativo de la función descriptiva de un MD2O por la parte derecha de (4.3) y (4.4), tenemos un sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver para dos variables, x (ó α) y k_n .

Dos algoritmos por modos deslizantes: *Twisting* y *Sub-optimal*, se consideran en este capítulo. Las ecuaciones para encontrar α y k_n correspondientes a estos algoritmos se presentan en las siguientes secciones.

4.1 Ajuste de ganancia equivalente para Twisting

Considerando la parte derecha del recíproco negativo de la función descriptiva del algoritmo *Twisting* (2.48) y la fórmula para obtener la ganancia equivalente de un sistema controlado por *Twisting* (2.49), el recíproco negativo de la función descriptiva del algoritmo *Twisting* en función de la ganancia equivalente k_{nTw} es:

$$-\frac{1}{N(k_{nTw})} = \frac{2c_1^2}{4k_{nTw}(c_1^2 + c_2^2)} - j \frac{2c_1c_2}{4k_{nTw}(c_1^2 + c_2^2)} \quad (4.5)$$



Entonces, sustituyendo (4.5) en (4.3) y (4.4) podemos resolver el sistema de ecuaciones mencionado anteriormente. De (4.3) se despeja el valor de k_{nTw}

$$k_{nTw} = \frac{2\omega^2 c_1^2 x^2 + 2\varphi^2 c_1^2}{4(c_1^2 + c_2^2) [ReW\omega^2 + \varphi^2 ReW - ImW\omega\varphi\frac{1}{x} + ImW\omega\varphi x]} \quad (4.6)$$

Sustituyendo k_{nTw} en (4.4), la segunda incógnita $x = \sqrt{\alpha}$ se puede obtener con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{c_2}{c_1} ImW\omega c_1 \varphi - ReW\omega\varphi \right] x^2 \\ & + \left[ImW\omega^2 + ImW\varphi^2 + \frac{c_2}{c_1} ReW\omega^2 + \frac{c_2}{c_1} ReW\varphi^2 \right] x \\ & + \left[ReW\varphi - \frac{c_2}{c_1} ImW\omega\varphi \right] = 0 \quad (4.7) \end{aligned}$$

En resumen, el ajuste de la ganancia equivalente para un sistema controlado por *Twisting* se puede hacer llevando a cabo los siguientes pasos:

1. Con la fórmula para obtener el valor en estado estable y_{sstw} de la salida calculamos la ganancia equivalente correspondiente al valor de y_{sstw} deseado.
2. Seleccionamos alguna frecuencia inicial Ω_0 (en un rango entre $[\Omega - 1\text{década}, \Omega]$, donde Ω es la frecuencia de *chattering* del sistema) y calculamos ReW y ImW
3. Encontramos el valor de α con ayuda de (4.7) y de los valores obtenidos en el paso 2, y los sustituimos en k_{nTw} (4.6).
4. Comparamos el valor de k_{nTw} obtenido con el valor deseado en el paso 1, si k_{nTw} no es satisfactoria, regresamos al paso 2 para encontrar la ganancia equivalente k_{nTw} deseada.

4.2 Ajuste de ganancia equivalente para *Sub-optimal*

Para el algoritmo *Sub-optimal* la propuesta para obtener la ganancia es similar al caso del algoritmo *Twisting*, la única diferencia son las ecuaciones que se emplean para calcular k_{nsub} y α .

Considerando el inverso negativo de la FD de *Sub-optimal* (2.57), la ganancia equivalente (2.59) y la ecuación (4.3), la fórmula para calcular la ganancia equivalente k_{nsub} usando el método propuesto es:

$$k_{nsub} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \beta)\omega^2 x^2 + (1 + \beta)\varphi^2}{ReW\omega^2 + \varphi^2 ReW - ImW\omega\varphi\frac{1}{x} + ImW\omega\varphi x} \quad (4.8)$$



y la expresión para calcular α es

$$\begin{aligned}
 & [ReW\omega\varphi - BImW\omega\varphi] x^2 \\
 & - [ImW\omega^2 + ImW\varphi^2 + BReW\omega^2 + BReW\varphi^2] x \\
 & + [BImW\omega\varphi - ReW\omega\varphi] = 0 \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

donde $B = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Como puede verse en la fórmula para calcular k_{nsub} (4.8), el valor de la ganancia equivalente en el método propuesto para *Sub-optimal* no depende del parámetro U . Por lo tanto, se puede concluir que U no “interviene” en el rechazo a perturbaciones del algoritmo. El único parámetro que afecta es β . En el caso de *Sub-optimal*, de los dos parámetros de diseño del algoritmo solo uno afecta el ajuste de la ganancia, mientras que en el caso de *Twisting* los dos parámetros de diseño del algoritmo intervienen en el ajuste.

Para mostrar una manera de aplicar el método de ajuste de ganancia para los dos algoritmos, en la siguiente sección se presenta un ejemplo donde se muestra el uso del método de ajuste para *Twisting* y para *Sub-optimal*.

4.3 Ejemplo

Considerando el sistema masa-resorte-amortiguador del Capítulo 3

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u_a + D
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde x_1 y x_2 son posición y velocidad, respectivamente, D es una perturbación y se asume $D = 0.08$, y u_a es la entrada de control generada por un actuador con dinámica

$$T_a \dot{u}_a + u_a = u \quad (4.11)$$

con $T_a = 0.01$ segundos y u esta dada por el algoritmo *Twisting*, u_{Tw} o por el algoritmo *Sub-Optimal*, u_{sub} .

$$u_{Tw} = 0.8 \cdot \text{sign}(y) + 0.6 \cdot \text{sign}(\dot{y}) \quad (4.12)$$

$$u_{sub} = -0.1 \cdot \text{sign}(y - 0.5y_{Mi}) \quad (4.13)$$

Para aplicar el método de ajuste requerimos obtener la frecuencia de *chattering* y la amplitud de las oscilaciones, las cuales se obtienen usando FD y se muestran en la figura 4.1 para los casos en que la entrada al actuador es u_{Tw} y u_{sub} .

Otro parámetro que necesitamos para comenzar el ajuste de la ganancia es la frecuencia máxima del sistema, que es la frecuencia de corte de (3.1), $w_{max} = 1.27s^{-1}$, ver figura 3.1.

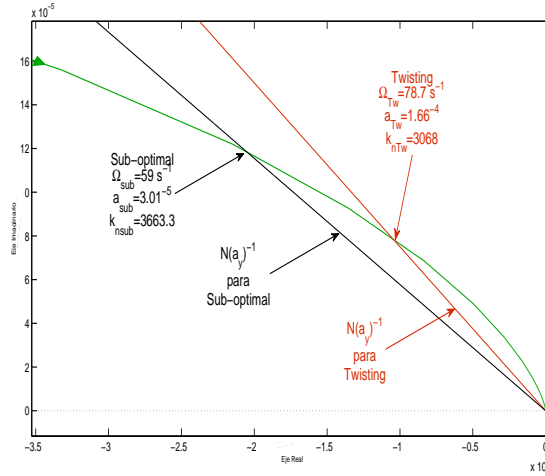


Figura 4.1: Análisis con FD para Twisting y Suboptimal

Los valores en estado estable calculados considerando la perturbación $D = 0.08$ y las ganancias equivalentes k_{nTw} y k_{nsub} calculadas con los parámetros mostrados en la figura 4.1 son:

$$y_{ssTw} = 2.61 \times 10^{-5}$$

$$y_{sssub} = 2.18 \times 10^{-5}$$

Ahora, aplicando el método de ajuste propuesto comenzamos con el primer paso proponiendo reducir en un 10 por ciento los valores en estado estable y_{ssTw} y y_{sssub} calculados sin la presencia de los compensadores. Entonces, los valores deseados de error en estado estable $y_{d_{ssTw}}$ y $y_{d_{sssub}}$ son:

$$y_{d_{ssTw}} = 2.35 \times 10^{-5}$$

$$y_{d_{sssub}} = 1.96 \times 10^{-5}$$

Las ganancias equivalentes para *Twisting* y *Sub-optimal* requeridas para lograr los valores en estado estable deseados son:

$$k_{d_{nTw}} \approx 3403.3$$

$$k_{d_{nsub}} \approx 4080.6$$

Paso 2: la frecuencia de *chattering* seleccionada es $\Omega_{0dTw} = 60.29$ para *Twisting* y $\Omega_{0dsub} = 54.06$ para *Sub-optimal*, con estas frecuencias se calculan los valores de ReW y ImW .



Paso 3: los valores de ReW y ImW obtenidos con $\Omega_{0d_{Tw}}$ y $\Omega_{0d_{sub}}$ se sustituyen en la expresión para calcular x y se obtiene como resultado $\alpha_{Tw} = 2.0468$ para *Twisting* y $\alpha_{sub} = 1.3458$ para *Sub-optimal*. Con estos valores los compensadores correspondientes son:

$$W_{c_{Tw}}(s) = \frac{0.06992s + 1}{0.1431s + 1} \quad (4.14)$$

$$W_{c_{sub}}(s) = \frac{0.09958s + 1}{0.134s + 1} \quad (4.15)$$

Paso 4: las figuras 4.2 and 4.3 muestran las ganancias equivalentes, los valores en estado estable y los parámetros de las oscilaciones obtenidos al agregar al sistema los compensadores $W_{c_{Tw}}$ and $W_{c_{sub}}$, respectivamente.

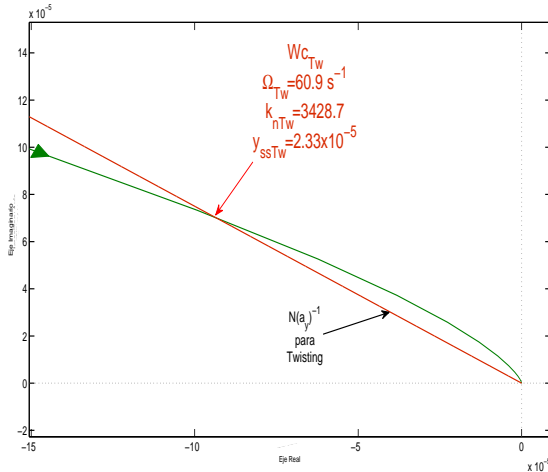


Figura 4.2: Ajuste de ganancia equivalente para el sistema controlado por *Twisting*

Como comparación entre los valores deseados de estado estable de sistema y los que se obtuvieron aplicando el método se presentan las Tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1: Ajuste de k_{nTw}

Valores	y_{ssTw}	k_{nTw}	Ω_{Tw}
Deseados	2.35×10^{-5}	3403.3	$60.29s^{-1}$
Calculados	2.33×10^{-5}	3428.7	$60.9s^{-1}$

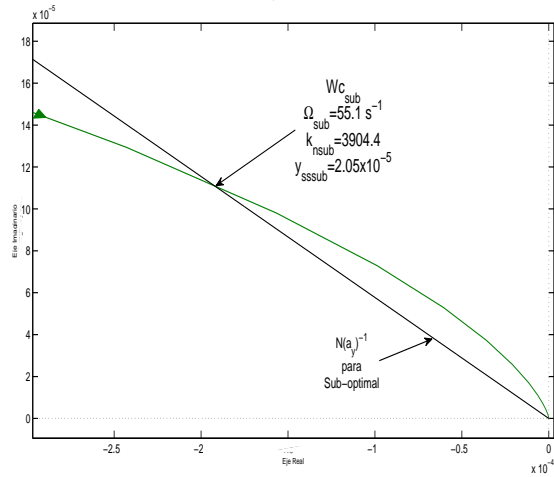


Figura 4.3: Ajuste de ganancia equivalente para el sistema controlado por Suboptimal

Tabla 4.2: Ajuste de $k_{n_{sub}}$

Valores	y_{ssub}	$k_{n_{sub}}$	Ω_{sub}
Deseados	1.96×10^{-5}	4080.6	54.06 s^{-1}
Calculados	2.05×10^{-5}	3904.4	55.1 s^{-1}



Considerando las tablas 4.1 y 4.2 el ajuste de k_{nTw} para el algoritmo *Twisting* es mejor comparado con el resultado obtenido del ajuste de k_{nsub} para el *Sub-optimal*. La razón por la cual la ganancia equivalente deseada k_{nsub} no es alcanzada se debe a la limitante impuesta por los parámetros del controlador, en particular el parámetro β , el cual no permite tener un valor más grande de k_{nsub} que el obtenido. Cabe aclarar que para el caso de *Twisting* la ganancia equivalente obtenida es también la máxima, lo que hace pensar en que las ganancias equivalentes k_{nTw} y k_{nsub} tienen un cota o un límite de incremento.

La figuras 4.4 y 4.4 muestran los resultados de simulación del valor de la salida en estado estable obtenidos con el compensador para el sistema controlado por *Twisting* y con el compensador para el sistema controlado por *Sub-optimal*, los dos casos son comparados con su respectivo error en estado estable sin compensador.

Como se aprecia en las figuras 4.4 y 4.4, el valor en estado estable de la salida del sistema controlado por *Twisting* y *Sub-optimal*, obtenido en las simulaciones con los compensadores que resultaron de aplicar el ajuste de ganancia propuesto, son aproximados a los valores teóricos esperados. En la misma figura se observa que la reducción del error en estado estable de la salida si cumple con el 10 por ciento propuesto.

La falta de aproximación entre los valores teóricos y los resultados de simulación, no se debe al método de ajuste propuesto, pues como se mencionó en el párrafo anterior el porcentaje que se propuso disminuir el valor en estado estable se cumple en la simulación, sino que se debe a que el método de ajuste se aplica usando FD y como se mostró en el Capítulo 3, FD no da resultados con una buena aproximación.

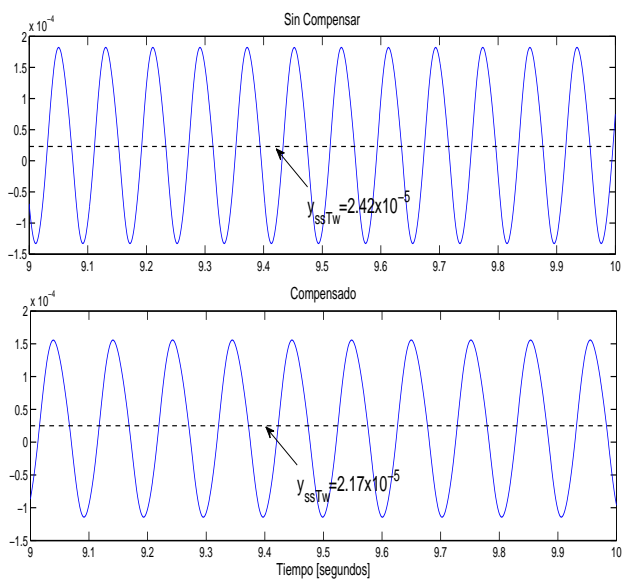


Figura 4.4: Simulaciones de ajuste de ganancia para el sistema controlado por Twisting

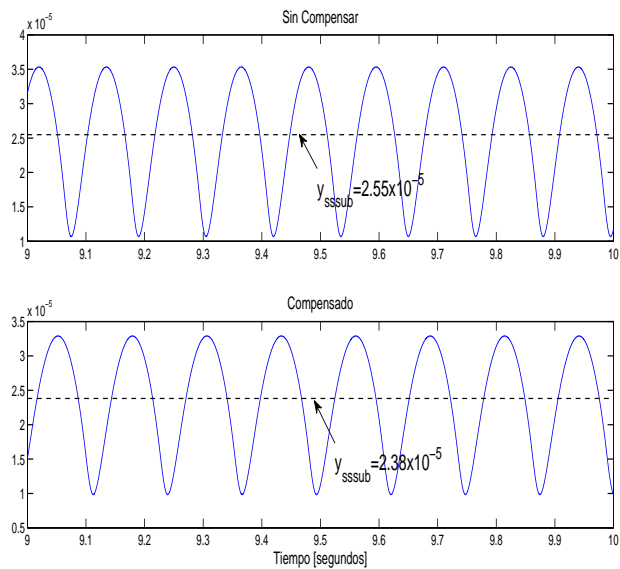


Figura 4.5: Simulaciones de ajuste de ganancia para el sistema controlado por Sub-optimal



Capítulo 5

Conclusiones

Los compensadores diseñados para los algoritmos *Twisting* y *Sub-optimal* mostraron que es posible mejorar el desempeño de los MD2O mediante un compensador que modifique la respuesta en frecuencia (FD y LPRS) del sistema controlado por alguno de estos algoritmos, lo cual se hace agregando un compensador que incremente el valor de la ganancia equivalente de MD2O. Esto en el caso de un compensador de retraso de fase, porque como se mostró en los resultados obtenidos el compensador de adelanto de fase empeora el desempeño de los algoritmos de MD2O.

El método de ajuste de la ganancia equivalente para *Twisting* y *Sub-optimal* propuesto da la oportunidad de poder mejorar el rechazo a perturbaciones constantes de los dos algoritmos, con la posibilidad de elegir las características deseadas del sistema, como frecuencia de *chattering* y error en estado estable. Debido al uso de FD, los resultados teóricos obtenidos no tienen una buena aproximación con los resultados de simulación obtenidos, lo cual es una especie de pago por la facilidad con la que se pudo plantear el método de ajuste, pues el haberlo planteado usando LPRS requiere de más trabajo para poder obtener las fórmulas de ajuste del método.

Aplicar el método de ajuste al ejemplo propuesto mostró que el incremento de la ganancia equivalente esta acotado por los parámetros del controlador, al menos en el caso en que se quiera reducir la frecuencia de *chattering* e incrementar la ganancia equivalente al mismo tiempo, lo cual es obvio puesto que es imposible tener un desempeño excelente con los mismos parámetros del controlador.

Tomando en cuenta la dos formas de diseñar los compensadores del Capítulo 3 y del Capítulo 4, esa cota respecto al aumento de la ganancia equivalente del MD2O se presenta en los dos casos, lo que prueba del rechazo no ideal a perturbaciones de los MD2O, problema que se ataca en este trabajo y con lo mencionado en este párrafo se concluye que no puede eliminarse por completo.



La comparación entre las simulaciones y los valores teóricos obtenidos con FD y LPRS, mostró la confiabilidad de los dos métodos utilizados, resaltando que LPRS da como resultado valores más confiables al tratarse de un método exacto, mientras que FD al ser un método aproximado da como resultado valores aproximados pero confiables hasta cierto punto, porque da una buena aproximación. en este caso también se puede hablar de un pago en el uso de los dos métodos, pues FD da resultados no muy aproximados pero obtener los parámetros es mas rápido y LPRS entrega valores exactos pero es mas tardado obtener los parámetros, además de que requiere de más carga computacional que FD.

5.1 Trabajo Futuro

El primer punto a considerar como trabajo futuro es plantear el compensador de atraso-adelanto el mismo tipo de sistemas que se analizó en este trabajo.

Otro punto es platear el método de ajuste propuesto usando LPRS, con el objetivo de mejorar la proximidad de los resultados teóricos obtenidos.

Un punto mas es extender este trabajo al diseño de compensadores para más algoritmos de MD2O como lo son el algoritmo *Terminal*, algoritmo *Super-twisting* y algoritmo *Quasi-continuo*, lo que lleva no solo atacar el problema de compensación, sino también se debe tratar a fondo el análisis de MD2O en el dominio de la frecuencia con FD y LPRS, esto debido a que los algoritmos mencionados no se han analizado con los LPRS y/o FD.

Finalmente es posible en un futuro probar mediante experimentos en tiempo real la efectividad de los compensadores.

Bibliografía

- [1] ALLOTTA, B., PISANO, A., PUGI, L., AND USAI, E. VSC of a servo-actuated atr90-type pantograph. In *European Control Conference 2005* (Seville, Spain, 2005), pp. 590–595.
- [2] ATHERTON, D. *Nonlinear Control Engineering - Describing Function Analysis and Desing*. Van Nostrand Company Limited, UK, 1975.
- [3] BARTOLINI, G., FRIDMAN, L., PISANO, A., AND USAI, E., Eds. *Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications*. Springer, London, 2008.
- [4] BOIKO, I. Analysis of sliding mode in frequency domain. *International Journal of Control* 78, 13 (2005), 969–981.
- [5] BOIKO, I. Oscillations and transfer properties of relay servo systems-the locus of a perturbed relay system approach. *Automatica* 41 (2005), 677 – 683.
- [6] BOIKO, I. Analysis of closed-loop performance and frequency-domain design of compensating filters for sliding mode control systems. *IEEE Trans. Automatic Control* 52 (2007), 1882–1891.
- [7] BOIKO, I. *Discontinuous control systems, Frequency-Domain Analysis and Design*. Birkhäuser Boston, Boston, 2009.
- [8] BOIKO, I., CASTELLANOS, M., AND FRIDMAN, L. Analysis of response of second-order sliding mode controllers to external inputs in frequency domain. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 18 (2008), 502–514.
- [9] BOIKO, I., AND FRIDMAN, L. Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE Trans. Automatic Control* 50, 9 (2005), 1442–1446.
- [10] BOIKO, I., AND FRIDMAN, L. Frequency domain analysis of second order sliding modes. In *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*,

- C. Edwards, E. Fossas, and L. Fridman, Eds., *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2006, pp. 125–142.
- [11] BOIKO, I., FRIDMAN, L., AND CASTELLANOS, M. Analysis of second-order sliding-mode algorithms in the frequency domain. *IEEE Trans. Automatic Control* 49, 6 (2004), 946–950.
- [12] BOIKO, I., FRIDMAN, L., PISANO, A., AND USAI, E. On the transfer properties of the “generalized sub-optimal” second-order sliding mode control algorithm. *IEEE Trans. Automatic Control* 54, 2 (2009), 399–403.
- [13] BONDAREV, A., BONDAREV, S., KOSTYLEVA, N., AND UTKIN, V. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and Remote Control* 46 (1985), 679–684.
- [14] BURTON, J., AND ZINOBER, A. Continuous approximation of variable structure control. *International Journal of Systems of Science* 17 (1986), 875–888.
- [15] CASTELLANOS, I. *Análisis de modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008. URL: <http://bidi.unam.mx/>.
- [16] EMEL’YANOV, S. V. Method of designing complex control algorithms using an error and its first derivative. *Automation and Remote Control* 18(10) (1957), 123–133.
- [17] EMEL’YANOV, S. V., KOROVIN, S. K., AND LEVANTOVSKY, L. V. Second order sliding modes in controlling uncertain processes. *Soviet Journal of Computer and System Science* 24(4) (1986), 63–68.
- [18] FRIDMAN, L. An averaging approach to chattering. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 46, 8 (2001), 1260–1265.
- [19] FRIDMAN, L. Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 47, 12 (December 2002), 2079 – 2084.
- [20] GELB, A., AND VELDE, W. V. *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [21] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey:U.S.A., 1996.
- [22] KRYLOFF, N. M., AND BOGOLIUBOV, N. N. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1947.
- [23] LEWIS, P. H., AND YANG, C. *Sistemas de control en la ingeniería*. Prentice Hall, Madrid, 1999.

- [24] PERRUQUETTI, W., AND (EDS.), J. B. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, 2002.
- [25] PISANO, A., AND USAI, E. Contact force regulation in wire-actuated pantographs via variable structure control and frequency-domain techniques. *International Journal of Control* 81, 11 (2008), 1747–1762.
- [26] SHTESSEL, Y., AND YOUNGJU, L. New approach to chattering analysis in systems with sliding modes. In *Proc. 35th IEEE Conf. Decision Control* (1996), pp. 790–795.
- [27] SLOTINE, J.-J. E., AND LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Inc., London, Great Britain, 1991.
- [28] VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [29] WANG, Q.-C., LEE, T. H., AND LIN, C. *Relay Feedback: Analysis, Identification and Control*. Springer, London, 2003.
- [30] YU, C.-C. *Autotuning of PID Controllers: A Relay Feedback Approach*. Springer, London, 2006.