



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA**

**SONOLUMINISCENCIA DE UNA SOLA BURBUJA MODELADA
CON MECANICA CLÁSICA NO LINEAL**

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERIA

MECANICA - MECANICA APLICADA

P R E S E N T A :

Francisco Antonio Godínez Rojano

TUTOR:

Dra. Margarita Navarrete Montesinos

2010



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Villagrán Muniz Mayo

Secretario: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

Vocal: Dra. Navarrete Montesinos Margarita

1er. Suplente: Dra. Serrania Soto Florencia

2do. Suplente: Dr. Velázquez Aguilar Víctor Manuel

INSTITUTO DE INGENIERIA

TUTOR DE TESIS:

Margarita Navarrete Montesinos



AGRADECIMIENTOS

Con amor a mis padres Alicia y Francisco, a mi hermano José Mario y a mi abuelita Alicia.

Agradezco muy especialmente a la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ingeniería, grandes instituciones del país.

A mi directora de tesis Dra. Margarita Navarrete por todo su apoyo y colaboración en la realización de este trabajo.

A mis amigos: Francisco Tort, Eduardo Badillo, Francisco Hernández, Julián Jaimes, Ulises Meza y Víctor Velázquez.

A todos los miembros del jurado por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Al Dr. Mayo Villagrán por las facilidades otorgadas en el laboratorio de fotofísica en el CCADET.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada.

A DGAPA-PAPIIT con el proyecto IN107509.

RESUMEN

La sonoluminiscencia ultrasónica de una sola burbuja, SLUB, reproducida en un líquido acuoso es un fenómeno de cavitación controlada en donde la emisión de luz se obtiene en una zona delimitada del espacio paramétrico P_a - R_0 . Actualmente, el uso de diversos fluidos tanto orgánicos como inorgánicos para reproducirla ha revelado que la zona de emisión está lejos de ser conocida en su totalidad. Esta zona, delimitada por líneas de estabilidad/inestabilidad, se calcula mediante modelos clásicos que predicen tanto el comportamiento radial como superficial de la burbuja. Numéricamente y experimentalmente se ha encontrado que dos factores que delimitan el tamaño máximo de la burbuja, así como su ruptura y/o disolución son: su comportamiento superficial durante el crecimiento-colapso y la densidad que alcanza el líquido alrededor de ella hacia el final del colapso.

Para aplicar el fenómeno de la SLUB a nivel ingenieril y en forma eficiente es necesario identificar las líneas limítrofes correspondientes a la formación de ondas de choque tanto en el gas como en el líquido y de las inestabilidades: paramétrica (IP), Rayleigh-Taylor (IRT), de Bjerknes (IBj), difusiva, de las oscilaciones del radio inicial y de doble periodo.

Por lo anterior, en este trabajo se desarrolla la metodología, así como los procedimientos matemáticos y numéricos basados en la hidrodinámica clásica para identificar estos umbrales no importando el origen de la cavitación luminiscente. En particular, se calcularon dos espacios considerando un resonador esférico, agua como líquido de trabajo, argón en el interior de la burbuja, y como fuerza de excitación un campo acústico senoidal. Un espacio se obtuvo para condiciones a nivel del mar a 38 kHz en los intervalos: $0.6 \leq R_0 \leq 9 \mu\text{m}$; $0.05 \leq P_a \leq 0.22 \text{ MPa}$, y otro para condiciones ambientales de la ciudad de México a 50 kHz en la ventana: $0.6 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$; $0.05 \leq P_a \leq 0.28 \text{ MPa}$. Bajo estas condiciones se encontró esencialmente que: a) durante los últimos 5 ns del colapso la IP y la IRT son suprimidas por un aumento súbito en las densidades del gas dentro de la burbuja y del líquido alrededor de ella, b) el umbral de la cavitación luminiscente comienza cuando la velocidad de la interfase gas-líquido de la burbuja alcanza la velocidad del sonido del líquido, c) si las líneas de la IP e IRT se localizan por debajo de la línea de la IBj (38 kHz) las burbujas se disuelven antes de alcanzar la inestabilidad por movimiento de traslación, d) si las líneas de la IP e IRT se localizan por encima de la línea de la IBj (50 kHz) se presenta la cavitación luminiscente con movimiento de traslación, e) burbujas $\approx 2 \mu\text{m}$, excitadas a presiones $\geq 0.12 \text{ MPa}$ son estables superficialmente y su tamaño mínimo y disolución están controlados por la difusión de masa, f) para ambas frecuencias el doble periodo se presenta fuera de la zona de sonoluminiscencia estable.

Por otro lado, también se estudió teóricamente y experimentalmente el efecto de perturbar el líquido en la luminiscencia por colapso de burbuja cónica (CBL). Aquí, un pistón líquido comprime una burbuja en el ápice de una cavidad cónica, la fuerza impulsora es una diferencia de presiones entre las caras del pistón líquido. Fundamentalmente, la dinámica del colapso no sufre cambios al añadir sustancias al pistón líquido, sin embargo se observaron diferencias tanto en las características de los pulsos de luz (duración e intensidad) como en las líneas espectrales.

Esto sugiere una cascada de cambios físico-químicos a lo largo del colapso-rebote de la burbuja; los cuales, varían dependiendo del tipo y cantidad de sustancia añadida.

Considerando una compresión adiabática de la burbuja cónica, la simulación numérica predice temperaturas y presiones máximas promedio $\sim 8000 \text{ K}$, $\sim 2 \text{ GPa}$ respectivamente, a partir de las cuales se establece una secuencia probable para explicar la intensidad y ancho de los destellos: i) generación de especies excitadas por clivaje homolítico, ii) colisiones inelásticas de primer orden, que producen estados excitados de moléculas, iii) la des-excitación de muchas de estas especies produce emisión UV-Vis, la cual a su vez excita moléculas cromóforas por procesos de absorción y/o absorción multifotónica.

CONTENIDO

JURADO	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN	iv
ÍNDICE GENERAL	v

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN GENERAL

1.1 Introducción	1
1.2 Objetivos generales	3
1.3 Contenido por capítulo	4

CAPÍTULO 2

SONOLUMINISCENCIA (SL): UNA BREVE INTRODUCCIÓN

2.1 Cavitación acústica	5
2.2 Tipos de sonoluminiscencia acústica.....	5
2.3 Antecedentes históricos de la SL	6
2.4 Arreglo experimental para reproducir la SLUB.....	8
2.5 Comportamiento dinámico de una burbuja sonoluminiscente ..	10
2.6 Observaciones experimentales de la SLUB	12
2.6.1 Pulso de luz y espectro de emisión	12
2.6.2 Onda de choque emitida por una burbuja sonoluminiscente	14
2.7 Teorías para explicar la SLUB	20
2.7.1 Modelo de la onda de choque	20
2.7.2 Otros modelos	21
a) Solidificación de agua a alta presión	21
b) Radiación de vacío	22
c) El modelo del micro jet (Fractoluminiscencia)	23
d) El modelo hidrodinámico-químico	24
2.8 Colapso de una burbuja cónica	29
2.8.1 Arreglo experimental para producir luminiscencia por colapso de burbuja cónica (CBL)	29
2.8.2 Observaciones experimentales de la CBL	32
2.9 Comentarios generales	36

CAPÍTULO 3

MODELOS DE LA DINÁMICA DE UNA BURBUJA

3.1 Movimiento radial	38
3.1.1 Ecuación de Rayleigh-Plesset (ERP)	38
3.1.2 Ecuación de Gilmore (EG)	40
3.2 Movimiento de las deformaciones superficiales	45
3.2.1 Inestabilidad paramétrica (IP)	45
3.2.2 Inestabilidad Rayleigh-Taylor (IRT)	47
3.3 Difusión de masa	49
3.4 Umbral de formación de ondas de choque en el gas	50
3.5 Umbral de formación de ondas de choque en el líquido	51
3.6 Umbral de temperatura	51
3.7 Inestabilidad de Bjerknes	52
3.8 Modelo hidrodinámico y termodinámico para simular el colapso de la burbuja cónica	54

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA: CÁLCULOS NUMÉRICOS

4.1 Movimiento radial: Solución de la Ecuación de Gilmore	58
4.2 Inestabilidad paramétrica	58
4.3 Inestabilidad Rayleigh-Taylor (IRT)	66
4.4 Umbral de Equilibrio difusivo (UED)	67
4.5 Formación de ondas de choque: en el gas y en el líquido	68
4.7 Umbral de temperatura y curvas de inestabilidad de Bjerknes	69
4.8 Umbral de oscilaciones del radio inicial (UORI)	69
4.9 Umbral de doble periodo (UDP)	71

CAPÍTULO 5

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1 Espacio paramétrico P_a - R_0	74
l) Inestabilidad Paramétrica (IP)	74
a) Comparación vs. los umbrales teóricos	74

I) Inestabilidad Paramétrica (IP)	74
a) Comparación vs. los umbrales teóricos	74
b) Comparaciones vs. los experimentos	81
c) Curva de la IP a condiciones de la ciudad de México	89
II) Inestabilidad Rayleigh-Taylor (IRT)	90
a) Comparaciones vs. resultados experimentales y teóricos	90
b) Curva de la IRT para las condiciones de la ciudad de México	98
III) Curvas de estabilidad difusiva	99
a) Comparaciones vs. resultados experimentales	99
b) Curva de la UED para las condiciones de la ciudad de México	100
IV) Umbrales de formación de ondas de choque en el gas y en líquido, y umbral de temperatura	101
a) Comparaciones vs. resultados experimentales	101
b) Curvas $M_g=1$, $M_l=1$, $M_l=2$ y $T_g=9000$ K a condiciones de la ciudad de México	103
V) Curvas de estabilidad traslacional (Bjerknes)	104
VI) Espacio paramétrico con sus umbrales	107
VII) Caos y doble periodo en el movimiento radial de la burbuja	111
VIII) Burbuja cónica: resultados experimentales	115
a) Respuesta del dispositivo	116
b) Características de los pulsos de luz	117
c) Características de los espectros	121
c.1) Transiciones OH A2 S+ - X2 Pi	121
c.2) Bandas Swan	124
c.3) Na*, K*, y complejos Na-Ar, K-Ar	125
c.4) Emisión débil y difusa de líneas provenientes del átomo Ar cerca de la región infra-roja	126
IX) Burbuja cónica: resultados teóricos	128
X) Comparaciones entre la dinámica radial del colapso de una burbuja cónica luminiscente y una burbuja esférica luminiscente	133

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES	137
-------------------------------------------------------	------------

APÉNDICE A

FUNDAMENTOS

A.1 Comportamiento de una burbuja SL como un sistema dinámico no lineal	141
A.1.1 Caos	141
A.1.2 Doble periodo: Una ruta hacia el caos	143
A.2 Onda de choque	146
a) ¿Que es?	146
b) ¿Cómo se origina?	146
c) ¿Cómo se forma?	147
d) ¿Cómo se modela matemáticamente?	148
A.3 Espacio paramétrico de una burbuja: condiciones de estabilidad	150

APÉNDICE B	
PROGRAMAS	154

LISTA DE SÍMBOLOS	191
--------------------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS	193
-----------------------------------------	-----

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN GENERAL

1.1 Introducción

La sonoluminiscencia de una burbuja (SLUB), es un proceso físico en el que la energía acústica de ondas de sonido (con longitudes de onda ~ 10 cm) en un líquido, es concentrada mediante la oscilación volumétrica no lineal de una burbuja de gas. Cuando la burbuja colapsa hasta su radio mínimo, la concentración de energía es máxima y el gas en su interior alcanza altas presiones (~ 1000 MPa), densidades (~ 1000 Kg) y temperaturas (~ 10000 K) resultando en disociación de compuestos moleculares, ionización parcial, y la emisión de luz detectable a simple vista ^{1,2}.

La SLUB es reproducible en el laboratorio utilizando un resonador equipado con piezoeléctricos para generar un campo de presión estacionario, en cuyo nodo de velocidad queda atrapada una burbuja oscilante¹. Con este arreglo, la emisión de luz es controlada y estabilizada durante horas, permitiendo una investigación experimental detallada. También simplifica substancialmente los modelos teóricos requeridos, facilitando las comparaciones con los experimentos y el subsecuente refinamiento de los modelos.

El estudio de la SLUB, es interesante desde un punto de vista académico porque ofrece la posibilidad de investigar procesos físicos y las propiedades de la materia a condiciones extremas; las cuales, difícilmente se conseguirían en el laboratorio mediante otros medios. La variedad de procesos asociados a la sonoluminiscencia incluyen: la transferencia de masa y calor, reacciones químicas, deformaciones superficiales y las emisiones de luz y ondas de choque, entre otros.

Desde el punto de vista práctico, las propiedades únicas de éste fenómeno resultan atractivas en algunas aplicaciones tecnológicas como la fabricación de láseres, la catálisis de reacciones químicas aprovechando las altas presiones y temperaturas³, el tratamiento de residuos peligrosos⁴, la fabricación de materiales exóticos^{5,6}, y más recientemente la posibilidad de producir fusión nuclear⁷. Sin embargo, la SLUB solo se ha producido en burbujas cuyo radio inicial (R_0) es del orden de micras. Esto ha impedido aplicar el fenómeno en forma eficiente y aun nivel masivo. No solo se han encontrado limitantes en el tamaño de la burbuja, sino también en la amplitud del campo acústico de excitación, P_a . Cuando se utiliza agua como líquido huésped, la SLUB ocurre en una diminuta ventana ($0.12 \lesssim P_a \lesssim 0.16$ MPa; $1 \lesssim R_0 \lesssim 8$ μm) del espacio paramétrico P_a - R_0 . Aunque las bases teórico-experimentales para determinar los umbrales de dicha ventana han sido desarrolladas durante la pasada década, faltan por clarificar algunos aspectos; como ejemplo, sería establecer el rol que juegan en conjunto los cambios de densidad del gas y del líquido en la estabilidad superficial de la burbuja cuando esta colapsa hasta su volumen mínimo. El contestar a ésta y otras cuestiones, nos ayudará a encontrar formas para extender las zonas de luminiscencia o escalar el fenómeno y así usarlo en situaciones prácticas. En otras palabras, el problema fundamental desde un punto de vista ingenieril, es aumentar el tamaño de la burbuja y la intensidad de los destellos. Con respecto a esto último, en años recientes se ha logrado producir SLUB más brillante utilizando mezclas líquidas de ácido y agua⁸, además el espacio paramétrico ha sido expandido; sin embargo, las burbujas en medios ácidos siguen siendo de algunas micras al momento de la emisión.

Afortunadamente, existen otros dispositivos que aunque no utilizan como excitación la energía de ondas de ultrasonido, producen burbujas luminiscentes de mayor tamaño. Uno de ellos es el "Tubo U" que usa como excitación la energía de un pulso de presión para comprimir una burbuja cónica (BC) de gas emulando el colapso de una burbuja esférica⁹. La BC posee dimensiones que van de los centímetros antes de ser comprimida hasta algunos milímetros cuando alcanza su volumen mínimo y ocurre el destello. La ventaja más importante con respecto a la

SLUB, es que la presión y la temperatura en el interior de la BC son registradas directamente sin tener necesidad de inferirlos mediante modelos termodinámicos u otras mediciones indirectas (como los espectros de emisión).

1.2 Objetivos generales

a. Desarrollar la metodología así como los procedimientos matemáticos y numéricos fundamentados en la hidrodinámica clásica para determinar los umbrales que delimitan la ventana de la SLUB estable en el espacio P_a-R_0 .

a.1- Implementar algoritmos y programas para calcular los umbrales.

a.2- Comparar los resultados numéricos con resultados teóricos y experimentales reportados en la literatura para validar nuestros procedimientos.

a.3- Clarificar el rol que juegan las densidades del gas y del líquido en la estabilidad superficial de la burbuja.

a.4- Construir mapas de SLUB estable/inestable en el espacio P_a-R_0 , a condiciones ambientales de la ciudad de México.

b. Estudiar teórica y experimentalmente el efecto de perturbar el líquido en la luminiscencia por colapso de burbuja cónica.

b.1- Registrar y analizar los pulsos de luz y los espectros de emisión.

b.2- Simular numéricamente la dinámica del colapso de una BC y la termodinámica asociada a la compresión del gas en su interior.

b.3- Guiados con los resultados de los incisos anteriores, identificar los mecanismos de excitación / des-excitación molecular y atómica que expliquen la emisión.

c. Comparar la dinámica del colapso de burbujas luminiscentes esféricas y cónicas.

1.3 Contenido por capítulo

En el capítulo 2, revisamos los resultados experimentales más relevantes de la SLUB y algunos de los mecanismos para explicar la emisión de luz. Tratamos de que esta revisión fuera compacta, pero de una extensión suficiente para que el lector se familiarice con el tema. También, se ofrece una breve revisión sobre aspectos y resultados experimentales del colapso de burbujas cónicas incluyendo una descripción del dispositivo “Tubo U” para producirlas. Al final de este capítulo, se ofrecen comentarios sobre los mecanismos de emisión de luz en la SLUB, que a juzgar por los hallazgos experimentales recientes serían los más probables.

Después en el capítulo 3, damos detalles sobre los modelos hidrodinámicos para simular el movimiento radial de la burbuja esférica, así como la dinámica de sus deformaciones superficiales. De igual forma, se proporcionan las ecuaciones y condiciones necesarias para calcular los diferentes umbrales que se localizan dentro del espacio P_a-R_0 . Por último, se dan las ecuaciones para calcular la hidrodinámica y termodinámica del colapso de una burbuja cónica.

En el capítulo 4, se desarrolla la metodología para el cálculo de los umbrales en el espacio paramétrico.

En el capítulo 5, se presentan y discuten los resultados teóricos correspondientes a la SLUB, y los resultados teórico-experimentales correspondientes al colapso de la burbuja cónica.

El capítulo 6, contiene las conclusiones generales del presente trabajo, así como el trabajo a futuro en esta línea de investigación.

En el anexo A, se explican algunos tipos de comportamiento dinámico observados en la burbuja luminiscente, a saber: caos y doble periodo. Se explica un diagrama de bifurcación típico para una burbuja; con el fin de facilitar su interpretación a quienes no están familiarizados. En otro apartado, se explica lo que es una onda de choque y como se modela matemáticamente. Por último, se explica detalladamente el espacio paramétrico, y se analizan las condiciones necesarias para que haya sonoluminiscencia estable en burbujas esféricas.

En el anexo B, se proporcionan todos los listados de los programas desarrollados y utilizados para los cálculos de esta tesis.

CAPÍTULO

2

SONOLUMINISCENCIA (SL): UNA BREVE INTRODUCCIÓN

2.1 Cavitación acústica

Es un fenómeno que abarca la nucleación, crecimiento y colapso de burbujas inmersas en líquidos que son irradiados con ondas acústicas con intensidades ≥ 0.5 MPa a frecuencias en el intervalo de (15 KHz a 1GHz)¹⁰. Bajo ciertos valores de intensidad y frecuencia, el colapso de una o varias burbujas hace que la mezcla de gas y vapor contenida en ellas alcance condiciones de presión y temperatura extremas, de tal forma que las burbujas emiten un pulso de luz. A este fenómeno se le conoce como sonoluminiscencia (SL).

2.2 Tipos de sonoluminiscencia acústica

Existen dos clases de SL: sonoluminiscencia de múltiples burbujas (SLMB) y de una sola burbuja (SLUB). En la SLMB, la emisión de luz proviene de aplicar campos acústicos pulsados en líquidos en donde se producen cúmulos de burbujas cavitantes que interactúan entre sí, dichas burbujas alcanzan temperaturas de hasta 5000 K, presiones cercanas a 100 MPa y velocidades de calentamiento-enfriamiento de $\sim 10^{10}$ K/s [10]. Este fenómeno se caracteriza por ser errático, transitorio, e impredecible. Sin embargo es el que más se utiliza en la industria para acelerar reacciones químicas (sonoquímica). En la SLUB se aplica un campo acústico senoidal estacionario para atrapar y hacer levitar en una posición fija a una burbuja de gas/vapor dentro de un medio líquido. Las variaciones del campo hacen que la burbuja oscile volumétricamente y de manera no lineal, alcanzando velocidades supersónicas durante el colapso; lo cual, permite concentrar energía y calentar los gases del interior para producir la

emisión de un pulso de luz por cada ciclo acústico.

Típicamente la frecuencia del campo acústico para producir SLUB oscila entre¹¹: (20 – 40) KHz. Es importante señalar que el radio de la burbuja es pequeño comparado con la longitud de onda del campo acústico aplicado; por ejemplo a una frecuencia de 20 KHz, el radio máximo de la burbuja justo antes de iniciarse el colapso es $\sim 50 \mu\text{m}$ y el radio mínimo es menor a $1 \mu\text{m}$.

En algunos casos, las condiciones físicas y químicas dentro de la burbuja en el colapso son aún más extremas que las alcanzadas en la SLMB. A lo largo de los años se han hecho predicciones teóricas de la temperatura de una burbuja SL típica. En 1993, Wu y Roberts¹² publicaron los primeros resultados indicando temperaturas tan altas como 10^8 K. En años posteriores, las predicciones para el valor máximo de la temperatura han disminuido en varios órdenes de magnitud debido a la consideración de diversos efectos físicos como: disipación térmica, efectos viscosos, condensación del vapor de agua en el interior de la burbuja y reacciones químicas. Los resultados de cálculos más recientes¹³⁻¹⁶ (desde 1997 hasta 2000) arrojan valores de temperatura que oscilan entre 10,000K y 20,000 K. Por otro lado se ha calculado que la presión del gas alcanza valores tan altos como¹³: $\sim 10^{10}$ Pa.

2.3 Antecedentes históricos de la SL

El primer resultado ligado con la SLUB fue el estudio teórico realizado por Lord Rayleigh¹⁷ en 1917, el cual tenía como objetivo explicar las causas de la erosión producida por cavitación observada en las hélices de los barcos.

Rayleigh dedujo una ecuación para simular el colapso de una cavidad esférica vacía e inmersa en un líquido incompresible, que predice un aumento ilimitado tanto de la velocidad de la pared de la cavidad, como de la presión en el líquido cercano a su superficie. En condiciones reales, una burbuja (cavidad esférica) contiene una cantidad de gas en su interior que frena el colapso; pero aún así, la velocidad de la superficie de la burbuja alcanza valores que generan ondas de choque y chorros (jets) que erosionan la superficie de las hélices de los barcos.

Con este resultado Rayleigh sentó las bases de la teoría clásica de la dinámica de burbujas. Durante la Segunda Guerra Mundial se suscitó un interés en el desarrollo de la teoría de la dinámica de burbujas para simular explosiones bajo el agua¹⁸. En las siguientes décadas el formalismo de Rayleigh fue refinado y desarrollado por Plesset¹⁹, Prosperetti²⁰ y otros; para dar lugar a la ecuación que en la actualidad se conoce como Rayleigh-Plesset. Esta ecuación ha sido utilizada por muchos investigadores^{2,21,22} para simular el comportamiento dinámico del radio de una burbuja sonoluminiscente.

Por el lado experimental, las primeras observaciones de emisión de luz proveniente de burbujas producidas por campos de sonido data del año 1934, cuando H. Frenzel y H. Schultes²³ realizaban experimentos con el SONAR. Ellos observaron que placas fotográficas sumergidas en agua bajo un campo acústico se velaban debido a pequeños destellos de luz emitidos en forma aleatoria por algunas burbujas. Este fenómeno era justamente la SLMB; y como ya se mencionó, su naturaleza transitoria e impredecible hizo difícil su estudio y permaneció olvidado varios años.

Fue en 1962 cuando Yosioka y Omura²⁴ reportaron por vez primera la emisión de luz de una sola burbuja controlada por ultrasonido, sin embargo su descubrimiento fue poco difundido y olvidado. Fue hasta 1989, cuando Felipe Gaitan²⁵ reprodujo la SLUB en forma controlada haciendo levitar una sola burbuja dentro de un recipiente esférico con agua mediante un campo acústico estacionario. La emisión de luz proveniente de la burbuja se capta a simple vista e implica una cantidad de $10^5 - 10^7$ fotones por pulso.

La compresión de una burbuja luminiscente es suficientemente esférica y adiabática, para concentrar la energía del colapso en un volumen pequeño. La amplitud del campo utilizado en los experimentos oscila alrededor de 0.1 MPa, que en agua corresponde a un número de Mach $M \approx 10^{-5}$ ($M=u/c$ donde u es la velocidad del fluido y c la velocidad del sonido en éste). Entonces, la densidad de energía de la onda acústica es:

$$U = \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} \rho (Mc)^2 \approx 1.08 \times 10^{-11} \text{ eV/átomo}$$

donde ρ es la densidad del agua. Suponiendo que la emisión de luz se origina a partir de la excitación de una molécula, ion ó átomo y dado que la luz emitida tiene componentes en el ultravioleta con energías de ~ 6 eV, éste fenómeno implica una *concentración ó amplificación* de más de 11 órdenes de magnitud²⁶.

2.4 Arreglo experimental para reproducir la SLUB

La figura (2.1) muestra el diagrama e imagen de un arreglo experimental típico para reproducir SLUB¹.

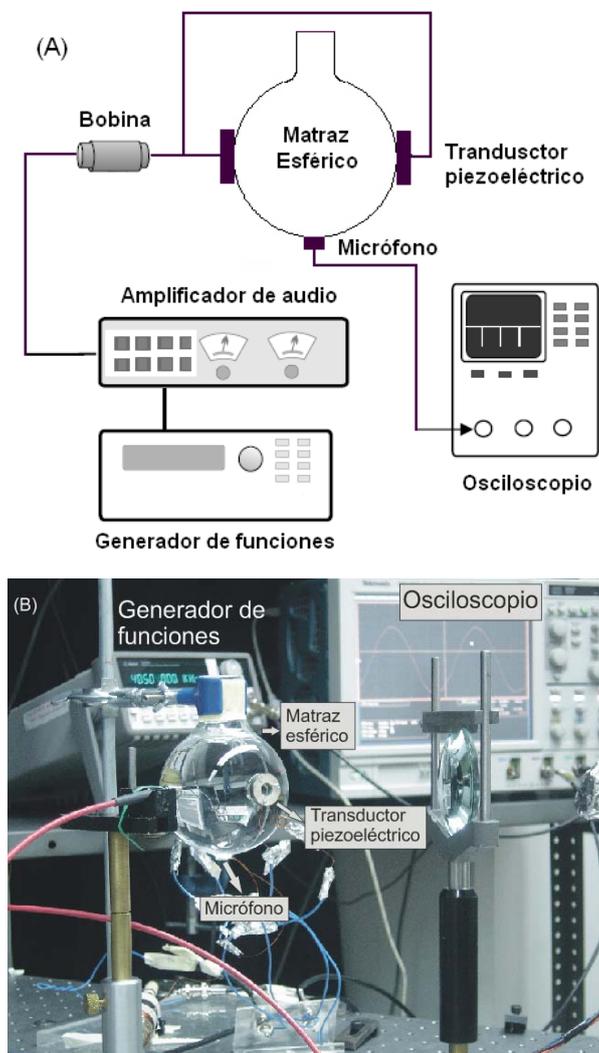


Figura 2.1 (A) Esquema de un arreglo experimental típico para producir SLUB. (B) Arreglo experimental montado en el Laboratorio de Pruebas no Destructivas del Instituto de Ingeniería/UNAM; el resonador es un matraz esférico de cuarzo de 290 ml cuya frecuencia de resonancia es aproximadamente 18 ± 2.7 KHz.

Consta de un matraz esférico (resonador), que está equipado con tres piezoeléctricos; dos de los cuales se encuentran pegados en posiciones opuestas sobre el ecuador y se utilizan para convertir la señal eléctrica senoidal en ondas acústicas. El tercer piezoeléctrico, está pegado en el polo sur y es para monitorear el campo acústico dentro del resonador. El matraz se llena con agua desgasificada y se excita con una señal senoide a su frecuencia de resonancia.

La figura (2.2) ilustra las fases del comportamiento dinámico de una burbuja de aire en función de la amplitud del campo (P_a). A presiones menores a 0.1 MPa la burbuja oscila de manera esférica y lineal (las fases de expansión y compresión son simétricas con respecto al tiempo), pero se disuelve debido a la tensión superficial. Cuando la presión de excitación se eleva por encima de 0.1 MPa, la burbuja aumenta de tamaño debido a procesos de difusión de masa²⁷ y eventualmente se fragmenta y se vuelve a formar; inestabilidades de superficie y un comportamiento de bailoteo se observan²⁸. Si la presión se aumenta hasta el umbral de 0.122 MPa, la burbuja es atrapada en una posición fija, y los pulsos de luz comienzan a producirse. Arriba de 0.122 MPa la intensidad de la luz emitida aumenta en proporción directa con la amplitud del campo acústico²⁹ hasta que el umbral de extinción (disolución) es alcanzado alrededor de 0.162 MPa.

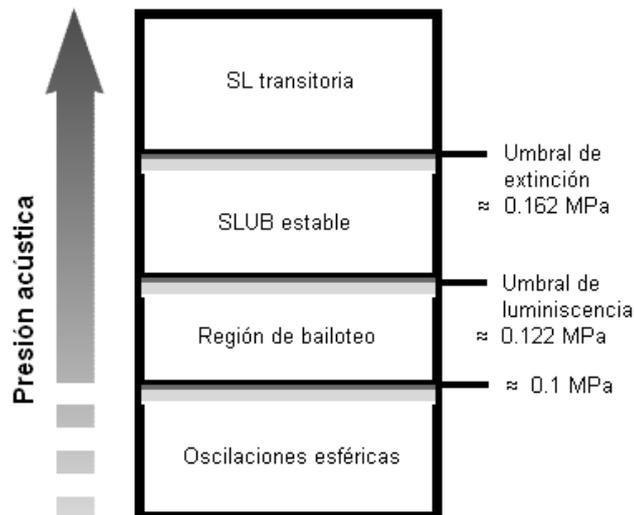


Figura 2.2 Intervalos del comportamiento dinámico de una burbuja de aire inmersa en agua y excitada con un campo acústico estacionario.

2.5 Comportamiento dinámico de una burbuja sonoluminiscente

El movimiento radial de una burbuja sonoluminiscente sigue un comportamiento no lineal, caracterizado por una asimetría entre una etapa de expansión lenta y una compresión rápida seguida de una serie de rebotes.

En la figura (2.3 A) se muestra la curva del radio de una burbuja en función del tiempo, la curva se obtuvo en el laboratorio usando el método de dispersión Mie³⁰. La burbuja inmersa en el fluido comienza su movimiento con un radio inicial (R_0) caracterizado por el equilibrio mecánico entre la presión del gas en su interior y la presión ambiental del exterior.

Cuando el campo de presión se torna negativo, en la región indicada por el tiempo $t_A \sim 8 \mu\text{s}$, la burbuja se expande. Cuando la presión de excitación se torna positiva, la burbuja continúa expandiéndose debido a su inercia durante un tiempo $t_B \sim 1.5 \mu\text{s}$ hasta alcanzar un radio máximo (R_{max}). En este punto, el volumen de la burbuja ha crecido desde su valor inicial en un factor de 1000; la presión interna disminuye sin contra-restar la presión en el líquido y entonces la burbuja colapsa durante un lapso de $t_C \sim 500 \text{ ns}$.

El colapso es desacelerado mientras la burbuja se aproxima a su radio mínimo (R_{min}) o radio de van der Waals. En este momento, los gases contenidos en la burbuja alcanzan densidades y temperaturas altas y son emitidos un pulso de luz y una onda de choque que viaja a través del líquido y hacia las paredes del resonador. Después, la burbuja experimenta una serie de rebotes “pulsaciones” (figura 2.3 B) caracterizados por una frecuencia de $1/t_D \sim 1.25 \text{ MHz}$; la cual, resulta ser del mismo orden de magnitud que la frecuencia de resonancia de la burbuja¹.

Finalmente, la burbuja alcanza el radio inicial de equilibrio y todo el proceso se repite para el siguiente ciclo. Controlando algunos parámetros como la frecuencia de excitación y la temperatura del líquido, el movimiento radial se reproduce durante millones de ciclos. La figura 2.3C muestra cinco ciclos consecutivos de una burbuja SL excitada con un campo de 50 kHz.

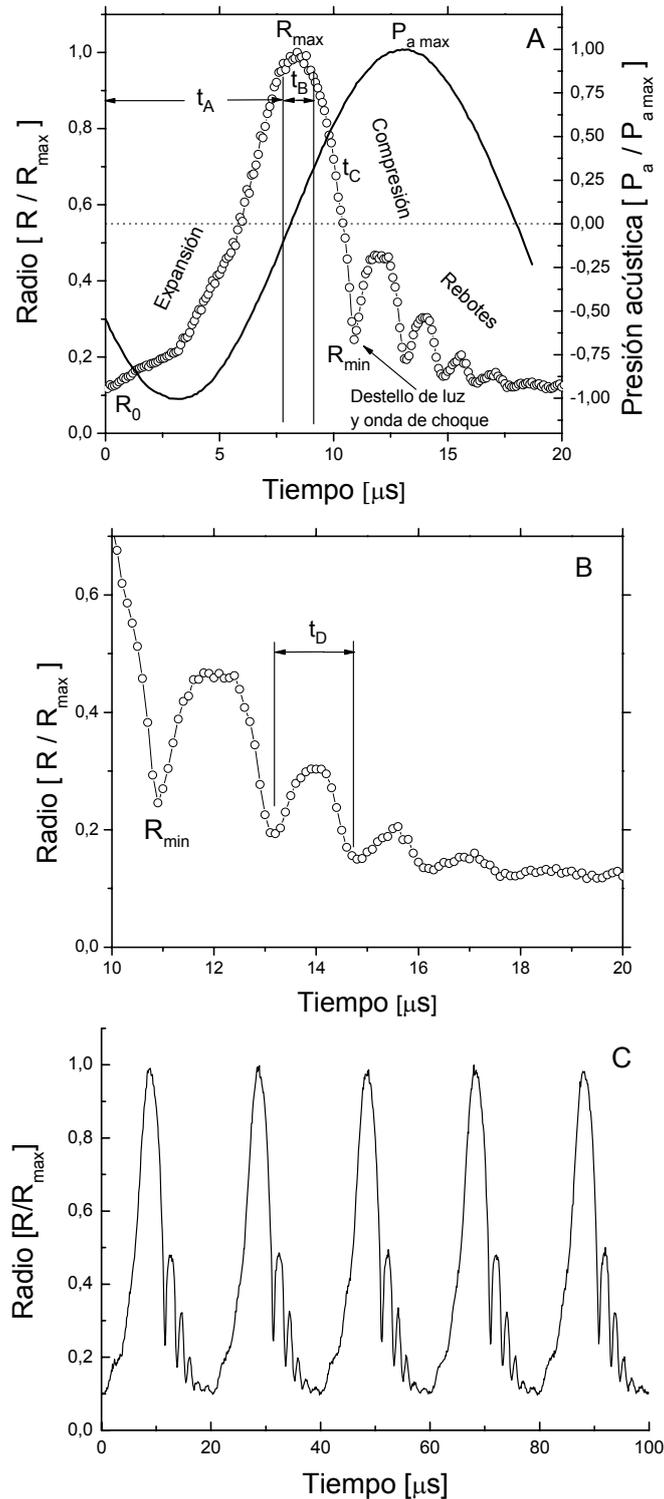


Figura 2.3 Radio versus tiempo de una burbuja sonoluminiscente típica. La burbuja fue producida experimentalmente en condiciones ambientales de la ciudad de México. La frecuencia del campo acústico de excitación fue alrededor de 50 kHz. (A) Un ciclo completo de oscilación; la presión acústica se muestra en línea continua, la curva con símbolos representa la dinámica del radio. (B) La serie de rebotes. (C) Cinco ciclos consecutivos de movimiento radial.

2.6 Observaciones experimentales de la SLUB

2.6.1 Pulso de luz y espectro de emisión

En la figura (2.4a) se muestra la forma del pulso de luz de la SLUB en agua a una frecuencia de excitación de 20 kHz. La curva se midió directamente con una cámara "streak" integrando las imágenes de 600 destellos individuales. Los experimentos indican que el tiempo de elevación (T_e) permanece prácticamente constante al aumentar P_a . Pero el tiempo de caída (T_c) y el ancho del pulso (FWHM) aumentan en forma similar al aumentar P_a , ver figura (2.4b).

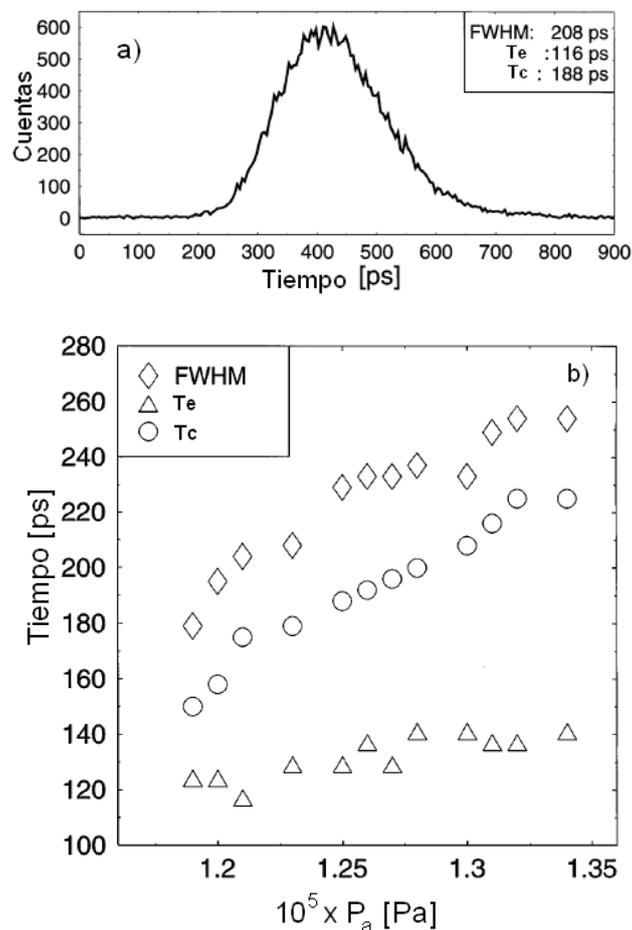


Figura 2.4 a) Forma del pulso de luz emitido por una burbuja luminiscente típica. La forma del pulso es asimétrica con un tiempo de elevación T_e más pequeño que el tiempo de caída T_c . b) variación de T_e , T_c y FWHM en función de P_a . Ambas figuras fueron extraídas de [31].

Durante los primeros 10 años de experimentación con la SLUB, los resultados indicaban que el espectro de emisión del destello era continuo (sin líneas) y se extendía del visible al ultravioleta (700 a 200 nm). En contraste el espectro proveniente de la SLMB consta de un continuo similar al de la SLUB pero con líneas espectrales provenientes del radical OH^* y metales alcalinos como el Na^* , ver figura (2.5a). Estas diferencias hacían suponer que la SLUB y SLMB eran fenómenos distintos. Fue en el 2001, cuando Young *et al.*³² detectaron líneas de emisión en la SLUB provenientes del radical neutro OH. Pero fue hasta el 2007, cuando Xu *et al.*³³ observaron mediante espectroscopía resuelta en tiempo líneas del radical excitado OH^* y de Na^* , estableciendo una conexión entre la SLUB y la SLMB, ver figura (2.5b).

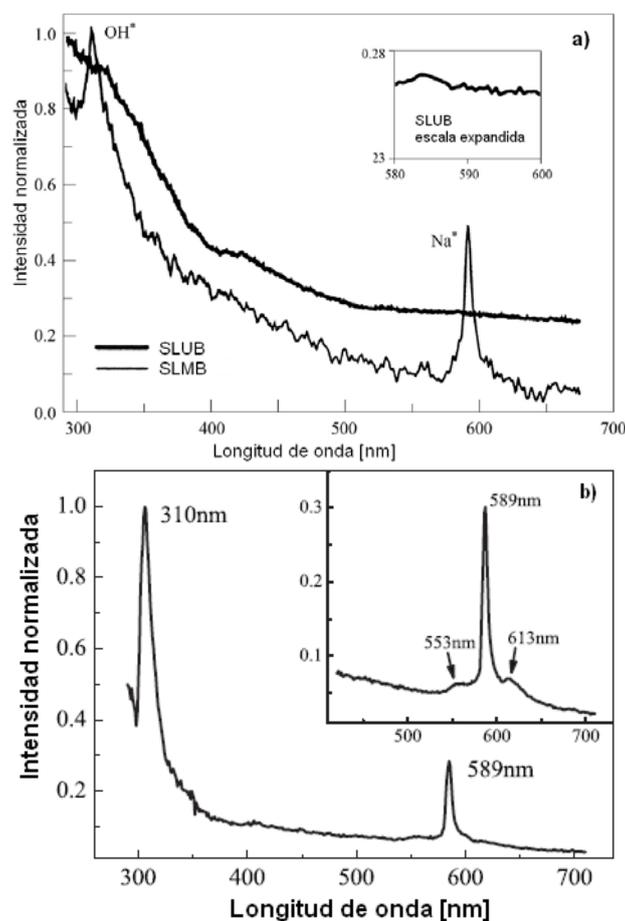


Figura 2.5 a) Comparación entre los espectros de emisión de la SLUB y la SLMB en una solución de cloruro de sodio. Cada espectro fue normalizado con respecto a su mayor intensidad³⁴. b) Espectro de emisión de la SLUB con líneas de emisión de OH^* y Na^* en agua disuelta con sulfato de sodio³³.

2.6.2 Onda de choque emitida por una burbuja sonoluminiscente

En la etapa final del colapso, la presión alrededor de su superficie alcanza valores ~ 6000 MPa dando lugar a la formación de una onda de choque esférica (ver figura 2.5) emitida hacia el líquido a una velocidad cercana a 4000 m/s ³⁵. Comúnmente, la onda de choque se mide situando un hidrófono de aguja en la vecindad de la burbuja. Con dicha medición se determinan la forma, amplitud, duración y tiempo de elevación del pulso.

En la figura (2.6) se muestra la forma típica de una onda de choque emitida por una burbuja SL, la señal fue registrada con un hidrófono de aguja situado a cinco milímetros del centro de la burbuja.

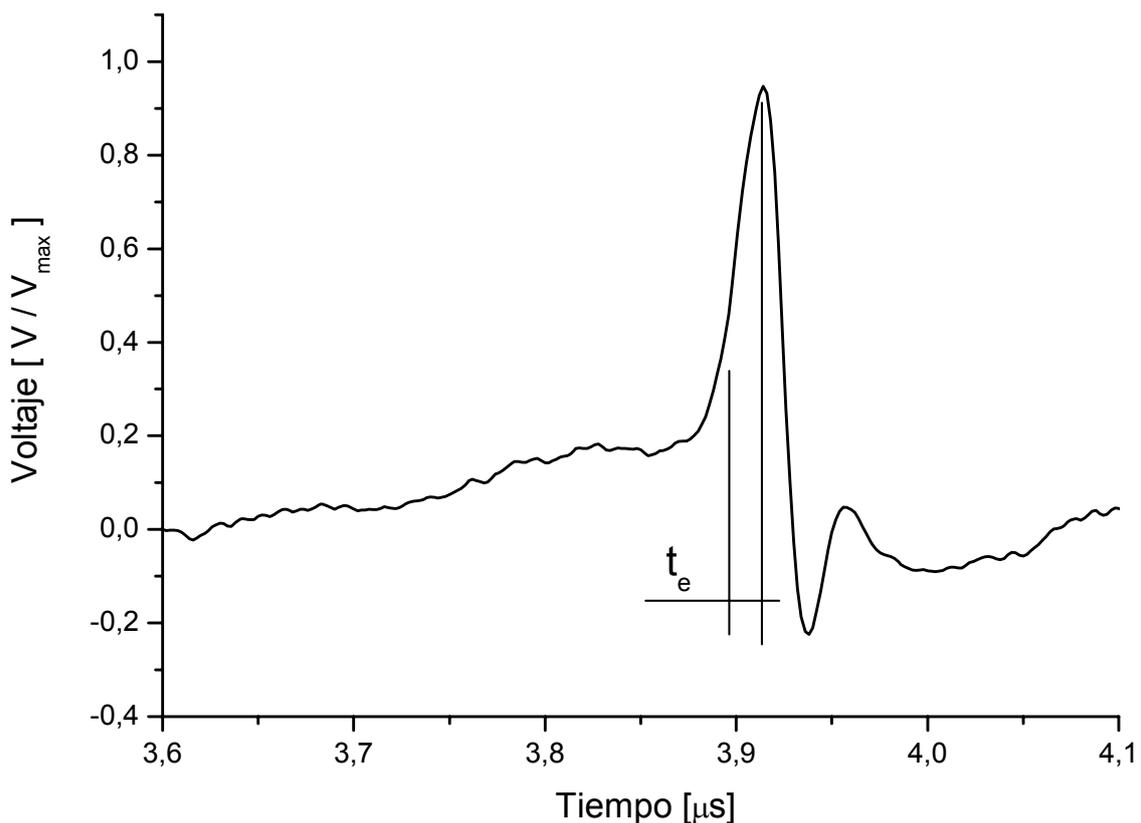


Figura 2.6 Señal típica de una onda de choque emitida por una burbuja sonoluminiscente a condiciones ambientales de la ciudad de México. El tiempo de elevación $t_e \approx 20$ ns es similar a lo antes reportado, ver tabla (2.1).

Otros experimentos, como los realizados por Holzfuss et al.³⁶ han evidenciado que la onda de choque se propaga en forma no lineal al principio de la emisión; es decir, que el pulso acústico se atenúa rápido y en forma proporcional a $1/r$.

Por otro lado, los experimentos de Wang et al.³⁷ permiten suponer que la onda de choque se forma a una distancia de alrededor de $200\ \mu\text{m}$ desde el centro de la burbuja.

Tabla 2.1 Amplitud y tiempo de elevación de ondas de choque emitidas por burbujas SL. Comparación entre valores teóricos y experimentales.

	Experimentos			Morales ^{40b}
	Weninger et al. ³⁸	Matula et al. ³⁹	Dan ^{40a}	
Amplitud a un 1 mm del centro de la burbuja (MPa)	0.303	0.17	2.4*	
Tiempo de elevación (ns)	10	5.2	5	22

* Las señales del experimento no fueron procesadas (deconvueltas).

En la figura (2.7) se muestran una serie de fotografías de una onda de choque emitida por una burbuja sonoluminiscente. Para obtenerlas, se utilizó una cámara CCD e iluminación estroboscópica⁴¹. Los resultados dejan ver que el frente de la onda permanece esférico.

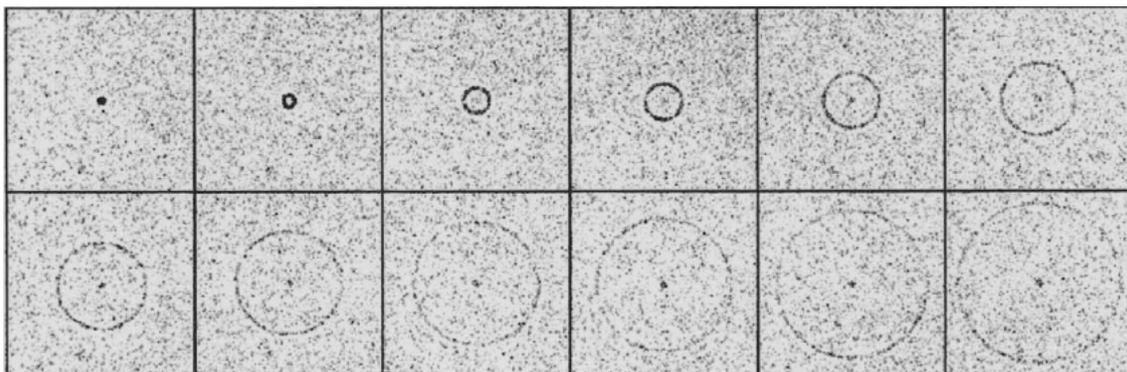


Figura 2.7 Imágenes sucesivas de una onda de choque esférica emitida por una burbuja sonoluminiscente, propagándose a través del líquido circundante. La separación temporal entre cada cuadro es de 30 ns, el tamaño de cada cuadro corresponde a un área de $1.6 \times 1.6\ \text{mm}^2$.

Durante la década de los noventa se desarrollaron muchos experimentos con la SLUB obteniendo resultados de gran interés para investigadores de todo el mundo. Algunos que ya han sido mencionados, y otros no menos importantes se sintetizan en la tabla (2.2).

Tabla 2.2 Principales resultados experimentales de la SLUB en la década de los noventa.

Año	Autores	Valores experimentales	Observaciones experimentales
1991	Barber y Putterman ²⁶	10 - 50 KHz	<i>Sincronización entre la emisión del destello y la frecuencia de excitación.</i>
1991	Barber y Putterman ²⁶	100 ps como límite superior	<i>La duración del destello luminoso es corto.</i>
1995	Moran et al. ⁴²	10 ps como límite inferior	
1997	Gompf et al. ⁴³	100 – 300 ps (dependiendo de la concentración de gas y la P _a)	
1992	Hiller, Putterman y Barber ⁴⁴	200 - 700 nm	<i>Espectro de radiación continuo.</i>
1995	Matula et al. ⁴⁵		
1992	Hiller et al. ⁴⁴		<i>Mientras el agua es enfriada desde 22°C hasta 3°C, la intensidad de la SLUB se incrementa en un factor ~ 10</i>
1994	Hiller et al. ⁴⁶		<i>Un aumento del 1% en el contenido de gas noble de una burbuja de nitrógeno, aumenta la intensidad de la luz en más de un orden de magnitud. En pruebas de SLUB con Argón, Xenón y Helio se observa que la emisión más brillante ocurre con Xenón, seguida por el Argón y por último el Helio.</i>
1998	Holfuss et al. ³⁶		<i>La burbuja emite ondas de choque a través del líquido con una velocidad de propagación por encima de los 2000 m/s y una presión superior a 550 MPa.</i>

En los últimos 10 años se han dado otros resultados experimentales que han permitido entender más el fenómeno y han abierto las posibilidades de aplicación del mismo.

En 2002, Taleyarkhan *et al.*⁷ publicaron resultados experimentales que sugieren reacciones nucleares durante el colapso de burbujas producidas en acetona deuterada. Para la nucleación de las burbujas en la acetona, se utilizó un generador de neutrones con una energía de 14 MeV, las burbujas recién formadas aumentan su volumen bajo la acción de un campo acústico hasta alcanzar un radio máximo; para después, colapsar. Con esta técnica, se alcanzan relaciones de compresión de $R_{\max}/R_0 \sim 10^5$; mucho mayores a las alcanzadas en los experimentos típicos de SLUB donde $R_{\max}/R_0 \sim 10$. Las dos características clave para identificar una reacción de fusión son la emisión de neutrones en el intervalo de 2,5 MeV y la formación de tritio, ambos vistos en estos experimentos. No se obtuvieron los mismos resultados cuando los investigadores hicieron experimentos de control con acetona ordinaria, lo que proporciona evidencia estadísticamente significativa de la existencia de reacciones de fusión. Sin embargo, estas mediciones no han sido reproducidas fuera del grupo de Taleyarkhan y permanecen controversiales⁴⁷.

La SLUB ocurre en una zona pequeña del espacio paramétrico $P_a - R_0$ y por tal motivo una inquietud ha sido escalar el fenómeno para aumentar la intensidad de los pulsos de luz. Por ejemplo, se han utilizado otros líquidos además del agua para producir SLUB.

Se ha observado que una burbuja sonoluminiscente en ácido sulfúrico emite pulsos de luz 3 órdenes de magnitud más brillantes que los de una burbuja en agua⁴⁸. Soluciones con altas concentraciones de H_2SO_4 han sido de gran utilidad para estudiar los mecanismos fundamentales de la SLUB incluyendo las condiciones físicas (presión y temperatura) y los procesos químicos que ocurren durante el colapso de la burbuja.

Por ejemplo, en 2005 Flannigan y Suslick⁴⁸ encontraron picos de emisión provenientes de iones (O_2^+) y del argón atómico (Ar) para SLUB en mezclas de agua y H_2SO_4 . El pico espectral del Ar indica estados excitados de alta energía (>

13 eV) que no se explican mediante procesos térmicos, y lo mismo ocurre para el O_2^+ . Estos resultados llevan a concluir que las especies Ar y O_2^+ podrían ser originadas a partir de un *plasma caliente* en el centro; mediante colisiones con electrones de alta energía, iones o partículas.

En 2006, Flannigan *et al.*⁴⁹ determinaron la presión promedio dentro de una burbuja SL en ácido sulfúrico. Para ello utilizaron dos técnicas: una basada en el análisis detallado del espectro de emisión y sus líneas relacionadas con el átomo de Ar, la otra fue basada en mediciones del radio de la burbuja vs. tiempo obtenidas con dispersión de luz.

Para burbujas que emitían luz tenue, se encontró con ambos métodos que la presión dentro de la burbuja es ~ 150 MPa. Cuando la amplitud del campo acústico aumenta, la intensidad de la SL aumenta en un factor de 10,000 pero se pierde resolución en las líneas espectrales; y solo a partir de las mediciones del radio vs. tiempo se infieren presiones internas > 370 MPa.

Sin embargo, los experimentos de SLUB en ácido sulfúrico presentan algunas dificultades sobre la estabilidad de la burbuja; la cual, se mueve en órbitas cuasi-periódicas alrededor de un punto que se va desplazando al aumentar la amplitud del campo acústico. La estabilidad espacial de una burbuja SL en ácido sulfúrico es más compleja que en agua, e incluso al aumentar suficientemente la presión acústica se generan inestabilidades en su trayectoria.

Dicho inconveniente fue resuelto por Urteaga y Bonetto⁸ en 2008, ellos lograron estabilizar en el centro de un resonador esférico a una burbuja SL en una solución de H_2SO_4 . Para lograrlo, utilizaron un campo acústico de excitación compuesto por la frecuencia fundamental del resonador junto con un armónico.

El novedoso campo de excitación es utilizado además para ampliar el espacio paramétrico de la SLUB e incrementar en un factor de cuatro la emisión luminiscente con respecto a aquella obtenida en agua.

En la tabla 2.3 se sintetizan los resultados experimentales más relevantes de la SLUB en la última década.

Tabla 2.3 Principales resultados experimentales de la SLUB desde el año 2001 hasta fechas recientes.

Año	Autores	Observaciones experimentales
2001	Young et al. ³²	SLUB en agua, espectro con picos anchos de emisión a 310 y 337 nm provenientes de radicales neutros OH. Los picos se observaron solo en burbujas con emisión de luz de baja intensidad.
2002	Dam et al. ⁵⁰	Bifurcación de doble periodo en la intensidad de los destellos. Se pierde la simetría esférica de la burbuja al final del colapso.
2002	Taleyarkhan et al. ⁷	Emisión de neutrones ~ 2.5 MeV a partir de reacciones de fusión nuclear durante el colapso de una burbuja en acetona. Producción de Tritio.
2002	Shapira et al. ⁵¹	Se repite el mismo experimento de Taleyarkhan et al. ⁷ sin observar evidencia de fusión nuclear.
2004	Dam y Levinsen ⁵²	El tamaño de la región donde ocurre la emisión es ≤ 200 nm.
2007	Xu et al. ³³	SLUB en agua, espectro con pico de emisión a 310 nm proveniente del OH*. También se observa una línea atómica del Na a 589 nm y dos satélites; uno azul a 553 nm y uno rojo a 613 nm. SLUB en mezcla de 85% H ₂ SO ₄ y agua (burbuja sin movimiento de traslación), espectro con líneas de emisión de OH*, Na, Na-Ar* y Ar en burbujas estables y brillantes. La evolución temporal de los espectros confirma el proceso de rectificación a escalas < 0.1s.
2007	Flannigan y Suslick ⁵³	SLUB en mezclas de H ₂ SO ₄ y agua. A bajas P _a , se observan picos de emisión provenientes de Ar* en burbujas en movimiento de traslación elíptica. Para altas P _a , la intensidad de la SL disminuye, se observan picos de emisión provenientes de Na* y K*, y el movimiento de traslación de la burbuja se hace errático con cambios abruptos de dirección.
2008	Chen et al. ⁵⁴	Espectroscopia resuelta en tiempo (durante el ancho del pulso ≈ 10 ns) de SLUB en H ₂ SO ₄ . Al comienzo de la luminiscencia se observan líneas atómicas de Kr a 810 nm implicando temperaturas máximas de 100000 K. 8 ns después de iniciada la luminiscencia la línea de Kr desaparece y la temperatura máxima es de ~ 10000 K. La temperatura promedio es ~ 11000 K.
2008	Urteaga y Bonetto ⁸	Se logra atrapar en una posición fija a una burbuja de gas en una mezcla de H ₂ SO ₄ (85%) +H ₂ O. La potencia de emisión de esta burbuja es 15 μ W. La intensidad de la emisión es 50 % mayor a lo antes reportado ⁴⁸ .
2010	Xu y Suslick ⁵⁵	SLUB en ácido fosfórico, espectro con pico de emisión a 310 nm proveniente del OH*. El rango de temperaturas de acuerdo a los espectros va de 6200 9500 K mientras P _a varía de 0.19 a 0.31 MPa. Las mediciones se hicieron para burbujas en movimiento traslacional.

2.7 Teorías para explicar la SLUB

Existen numerosas teorías que tratan de explicar la SLUB, sin embargo, en la actualidad ninguna de ellas es capaz de explicar todas las propiedades que caracterizan al fenómeno. La teoría de la onda de choque de implosión propuesta por Seth Putterman² y su grupo de científicos de la UCLA es la que ha recibido mayor aceptación.

2.7.1 Modelo de la onda de choque

Algunas mediciones indican que la pared de la burbuja alcanza velocidades supersónicas durante el colapso; lo cual, sugiere la formación de una onda de choque de implosión emitida hacia el interior de la burbuja. El frente de la onda se acelera mientras se enfoca hacia el origen y concentra la energía. Mientras la onda de choque alcanza su radio mínimo se produce un calentamiento súbito de los gases contenidos en la burbuja; los cuales, se ionizan y forman un plasma. La luz se emite solo mientras el plasma existe mediante el proceso de Bremsstrahlung térmico a partir de la aceleración de electrones libres. Estos electrones se aceleran y radian luz mientras colisionan con los iones, emitiendo un espectro continuo que se ajusta bien a las observaciones.

Esta teoría provee un mecanismo razonable para explicar la concentración de energía en la burbuja; y con la inclusión de algunos refinamientos, explica el incremento en la intensidad de los destellos cuando el agua es enfriada y el rol que juegan los gases nobles.

Adicionalmente; es importante mencionar que los cálculos de algunos investigadores⁵⁶⁻⁵⁸ utilizando diferentes ecuaciones de estado y diferentes modelos de movimiento radial de la burbuja no indican necesariamente la formación de ondas de choque de implosión durante la SLUB, y tampoco existe evidencia experimental que indique su formación².

2.7.2 Otros modelos

a) Solidificación de agua a alta presión

Robert Hickling⁵⁹, sugiere que las altas presiones (> 1 GPa) que ocurren durante las últimas etapas del colapso en la SLUB, hacen que el líquido cercano a la pared de la burbuja se solidifique en forma de partículas de hielo durante un lapso de (~ 1 ns). Hickling acepta que la concentración de energía en la SLUB se debe a la formación de una onda de choque de implosión²; pero además, supone que dicha onda es disparada por la solidificación transitoria del agua en las etapas finales del colapso.

La solidificación causa inicialmente una caída en la presión “rarefacción”. Sin embargo, el agua comprimida alrededor de la zona de solidificación se mueve hacia el centro de la burbuja como lo muestran algunos cálculos del número de Mach⁶⁰, formando así una onda de compresión convergente que va siguiendo la rarefacción, ver figura (2.8). La onda convergente comprime los gases hasta que alcanzan altas temperaturas produciéndose el pulso de luz.

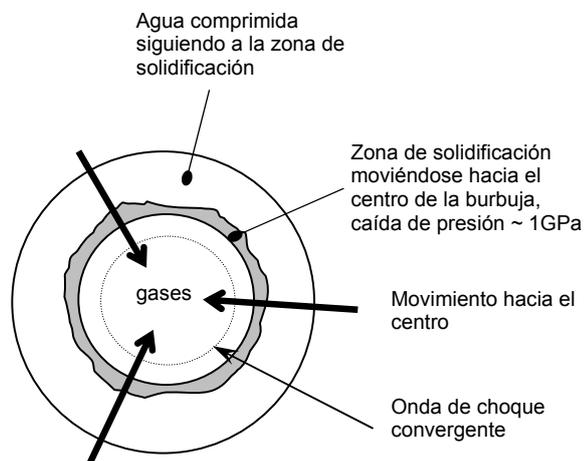


Figura 2.8 Formación de la onda de choque de compresión debida a la caída de presión por la solidificación del agua cercana a la pared de la burbuja.

El hecho de que la intensidad del pulso en la SLUB aumente al disminuir la temperatura del agua encuentra una explicación con esta hipótesis. Mientras la temperatura del agua se reduce; el tiempo, la cantidad y la extensión de

solidificación aumentan haciéndose más grande la caída de presión. Como consecuencia la onda de choque de implosión asociada será más intensa y el pulso de luz también.

Parece intrigante que el colapso de la burbuja genere altas temperaturas en el gas dentro de la misma, y al mismo tiempo, se congele el agua alrededor de su pared. Sin embargo; algunas estimaciones⁶¹ muestran que durante el corto periodo de tiempo envuelto, la cantidad de calor radiado y conducido no causa un aumento significativo en la temperatura del agua cercana a la pared de la burbuja como para inhibir su congelamiento.

b) Radiación de vacío

Eberlein⁶² plantea que la radiación en la SLUB se debe al efecto Unruh; el cual, establece que un espejo uniformemente acelerado en el vacío emite fotones con la distribución espectral de radiación de cuerpo negro. Este tipo de radiación también se genera por el movimiento de dieléctricos. Siempre que una interfase entre dos dieléctricos se mueve con cierta aceleración se crean fotones. La superficie de una burbuja de aire en agua resulta ser dicha interfase entre dos medios dieléctricos. Cuando la burbuja se colapsa el movimiento de la interfase es altamente no lineal, y su aceleración alcanza valores que son lo suficientemente grandes para hacer que la radiación del vacío cuántico sea un proceso no despreciable.

Poco después de que Eberlein lanzara su propuesta, las críticas no se hicieron esperar. Por ejemplo, Lambrecht⁶³ encontró que la rapidez del colapso de la burbuja debía ser superior a la velocidad de la luz para explicar la intensidad del pulso observado, lo cual es inconsistente con las observaciones. Sumándose a este resultado, se encontraron otras inconsistencias⁶⁴⁻⁶⁷ que parecían restarle relevancia a la teoría de radiación del vacío cuántico para explicar la SLUB.

En contraste, han surgido modelos más refinados basados en la radiación de vacío que hacen plausible su aplicación en el estudio de la emisión de luz en la SLUB. Visser *et al.*⁶⁸ y Liberati *et al.*⁶⁹ postulan que durante las últimas etapas del

colapso de la burbuja se produce un cambio espacio-temporal en el índice de refracción del gas en el interior de la misma. El cambio en el índice de refracción ocurre en el orden de femtosegundos para explicar la cantidad de fotones registrados experimentalmente. Con el trabajo de estos autores no es necesario concluir que la velocidad en la pared de la burbuja tenga que ser del orden o incluso mayor a la velocidad de la luz en el vacío.

c) El modelo del micro jet (Fractoluminiscencia)

Según Prosperetti⁷⁰ en los experimentos típicos con la SLUB, el gradiente de presión local causado por la onda acústica de excitación provoca un movimiento traslacional periódico de la burbuja. Algunos cálculos teóricos y ciertas observaciones muestran que una burbuja que al mismo tiempo se traslada y colapsa, no permanece esférica dando lugar a la formación de un “jet” de líquido que se dispara hacia el interior de la burbuja a velocidad supersónica. Si la presión del campo acústico y el jet son lo suficientemente intensos la burbuja adquiere una forma toroide como lo indica una simulación numérica⁷⁰ (ver figura 2.9). El umbral incipiente de la SLUB ocurre cuando la punta del jet golpea en la superficie interior de la burbuja (señalada en la figura 2.9 como zona de impacto). El umbral de extinción de los pulsos de luz coincide con la ruptura total de la burbuja cuando el impacto del jet es suficientemente intenso.

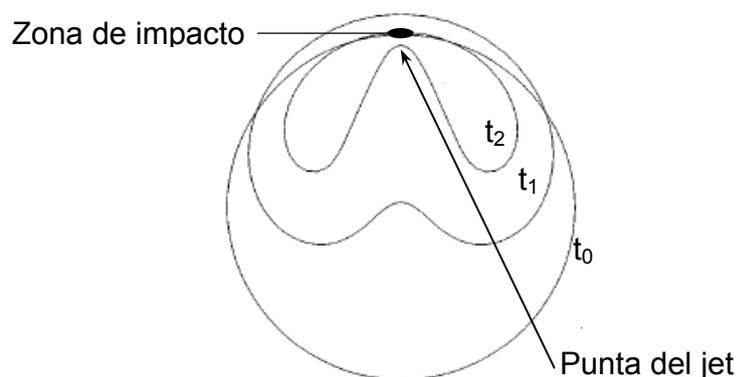


Figura 2.9 Formas sucesivas de una burbuja que se traslada y colapsa. En tiempo cero (t_0) la forma es esférica, en los dos tiempos posteriores (t_1 , t_2) la burbuja adquiere una forma toroide.

Prosperetti propone que el mecanismo responsable de la emisión de luz es un proceso de *fractoluminiscencia*; es decir la emisión de luz asociada con la “fractura” del líquido.

Se sabe que cuando algunos materiales sólidos se fracturan emiten luz. Un ejemplo interesante es el espectro de fractura del cuarzo; el cual, es continuo, sin líneas espectrales, y semejante al espectro de radiación del cuerpo negro. Todas estas características son cualitativamente similares al espectro de la SLUB⁴⁴.

Para que un proceso de fractura ocurra en un líquido; la rapidez de deformación aplicada al mismo debe ser grande y en un lapso ~ 50 ps, para que las moléculas no tengan el tiempo suficiente de moverse a un sitio cercano. En tal caso el líquido no fluirá, pero mostrará una rigidez elástica finita.

En procesos usuales de fractura, las grietas ocurren en defectos o en otros puntos débiles en el sólido. Justamente los átomos de gases nobles presentes en la SLUB juegan el papel de puntos débiles que dan origen a las fallas. Como todos los momentos multipolares de un átomo de gas noble desaparecen, solo se forman enlaces débiles entre éste y las moléculas de agua circundantes. Esta idea explica la marcada dependencia entre la intensidad de los pulsos de luz y el tipo de gas disuelto en la SLUB⁴⁶.

Así por ejemplo; como el átomo de xenón es más grande que el átomo de argón, entonces el punto de iniciación sería más débil y la grieta se formaría más fácil dando pulsos más intensos. A la inversa, el átomo de helio es más pequeño que los átomos de argón y xenón, entonces la tendencia a la formación de grietas es inhibida dando pulsos débiles.

También es importante mencionar que el enfriamiento del líquido incrementa el número de enlaces de hidrógeno, o incrementa el tiempo de relajación del fluido. En consecuencia el agrietamiento ocurre con mayor probabilidad y la intensidad de la luz se incrementaría en concordancia con lo observado⁴⁴.

d) El modelo hidrodinámico-químico

El estudio de sonoquímica se hace por lo general con reactores ultrasónicos para

producir múltiples burbujas en un fluido, SLBM. Para explicar las emisiones de luz en estos sistemas se han sugerido gran cantidad de procesos químicos, catalizados por las altas presiones y temperaturas alcanzadas por las implosiones de cavidades. Didenko *et al.*⁷² atribuyen las emisiones a química de altas energías que sucede dentro y en la cercanía de las burbujas (emisión atómica y molecular). Sin embargo, en la SLUB la química juega un papel importante en la rectificación de argón dentro de la burbuja, cuando se tiene aire disuelto en el líquido huésped. Como sugieren Lohse y Hilgenfeldt⁷³, las temperaturas alcanzadas durante el colapso de la burbuja en la SLUB rebasan la temperatura de disociación del nitrógeno y el oxígeno (≈ 9000 K), produciendo la formación de radicales de O y N, los cuales reaccionan con los radicales de H y O formados a partir de la disociación del vapor de agua. La recombinación de radicales produce la formación de (NO, NO₂, ...) que son altamente solubles en agua, así estos productos ya no se difunden hacia el interior de la burbuja durante la etapa de expansión del siguiente ciclo. De esta forma los gases inertes son los únicos que permanecen dentro de una burbuja SL después de muchos ciclos de oscilación, la razón es que ellos no reaccionan con el vapor del líquido a altas temperaturas. En una teoría ulterior basada en la teoría química antes mencionada, Hilgenfeldt Grossmann y Lohse¹⁴ explican las emisiones de la SLUB mediante una compresión adiabática del gas contenido en la burbuja (la hidrodinámica es modelada con la ecuación de Rayleigh-Plesset). Según los autores, en la mayor parte del ciclo acústico la burbuja oscila isotérmicamente, pero en la región del radio mínimo, alcanza tales velocidades (\geq velocidad del sonido en el gas) que su movimiento se aproxima a una compresión adiabática. Las temperaturas máximas que se obtienen con este modelo $\sim 30\,000$ K, suficientes para emisión de cuerpo negro. Sin embargo, existen resultados experimentales que muestran que el ancho de los pulsos de luz es independiente de la longitud de onda^{31,43}, lo cual es inexplicable con radiación de Planck. Por este motivo, Hilgenfeldt *et al.* proponen una corrección a la radiación de cuerpo negro debida a la pequeña ionización de los gases contenidos en el interior de la burbuja. Esta fracción de gas ionizado (<10% según la referencia), afecta la emisión de cuerpo negro por su absorción y

emisión. Así las emisiones en SLUB provienen de Bremsstrahlung térmico y radiación por recombinación (des-ionización).

La mayor ventaja de este modelo, en comparación con los otros presentados, esta en ofrecer una fórmula relativamente simple para las emisiones de luz. De esta manera se pueden simular fácilmente un gran número de situaciones físicas con diferentes parámetros. A grandes rasgos los resultados presentados por Hilgenfeldt *et al.* concuerdan con los experimentos; aunque presenta dos problemas:

- 1) la hidrodinámica de la burbuja se basa en la ecuación de Rayleigh-Plesset, la cual es una aproximación dudosa de lo que en realidad pasa en el colapso cerca del radio mínimo.

- 2) una compresión adiabática debería ionizar mucho más a los gases nobles pesados (xenón, kriptón, con ionización a ~ 13 eV) que a los ligeros (neón, helio, con ionización a ~ 27 eV), pero los resultados experimentales en SLUB muestran que las emisiones de todos estos gases son del mismo orden.

En la tabla (2.4), se comparan las cinco teorías analizadas en función de su capacidad para explicar las características de la SLUB. Las teorías más exitosas parecen ser las del microjet y la de solidificación de agua (que en realidad es un refinamiento de la teoría de la onda de choque de implosión). Sin embargo, la experimentación futura tendrá la última palabra en indicar cual de ellas es más apropiada para explicar la SLUB.

Es importante hacer notar la existencia de más teorías que intentan explicar la SLUB. Sin ahondar en cada una de ellas, el interés después de una extensa revisión⁵⁶⁻⁸⁷ fue obtener un panorama general que muestre por un lado la gran variedad de teorías que se han generado alrededor de la SLUB; y por otro lado las relaciones entre unas teorías y otras. Para lograrlo, las distintas teorías se clasificaron de acuerdo a los mecanismos que proponen para concentrar la energía y producir luz; así como a las diferentes zonas de la burbuja donde se

emiten fotones.

Entre las distintas zonas de la burbuja donde se emiten fotones se identificaron: la interfase líquido-gas, un punto caliente justo en su centro, en todo su volumen interior. En la figura (2.10) se muestra la localización de la fuente de emisión de luz y su conexión con la teoría correspondiente. Los mecanismos de concentración que se identificaron son: una onda de choque de implosión, un microjet; y una compresión adiabática.

Tabla 2.4 Comparación entre la efectividad de cuatro teorías para explicar las propiedades observadas en la SLUB. El símbolo (✓) indica que la teoría explica la propiedad observada. El símbolo (?) indica que la teoría probablemente explica la observación.

	Onda de choque	Radiación de vacío	Solidificación de agua	Micro jet	Hidrodinámica-Química
Duración del pulso		✓		?	✓
Efecto del tipo y cantidad de gas noble disuelto			✓	✓	?
Temperatura del líquido			✓	✓	?
Efectos de diferentes líquidos			?	✓	?
Espectro y temperatura observados	✓	✓	✓	?	✓
Intensidad del pulso	✓	✓	✓	?	✓

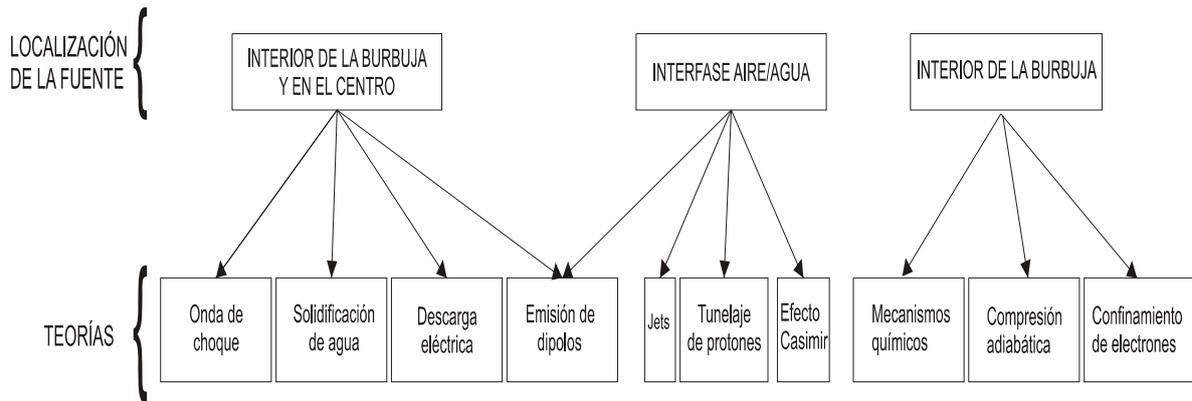


Figura 2.10 Localización de la fuente de emisión de luz según cada teoría.

En la figura (2.11) se clasifican los mecanismos de concentración de energía y los mecanismos de emisión de luz; además se muestra como están relacionados con cada teoría.

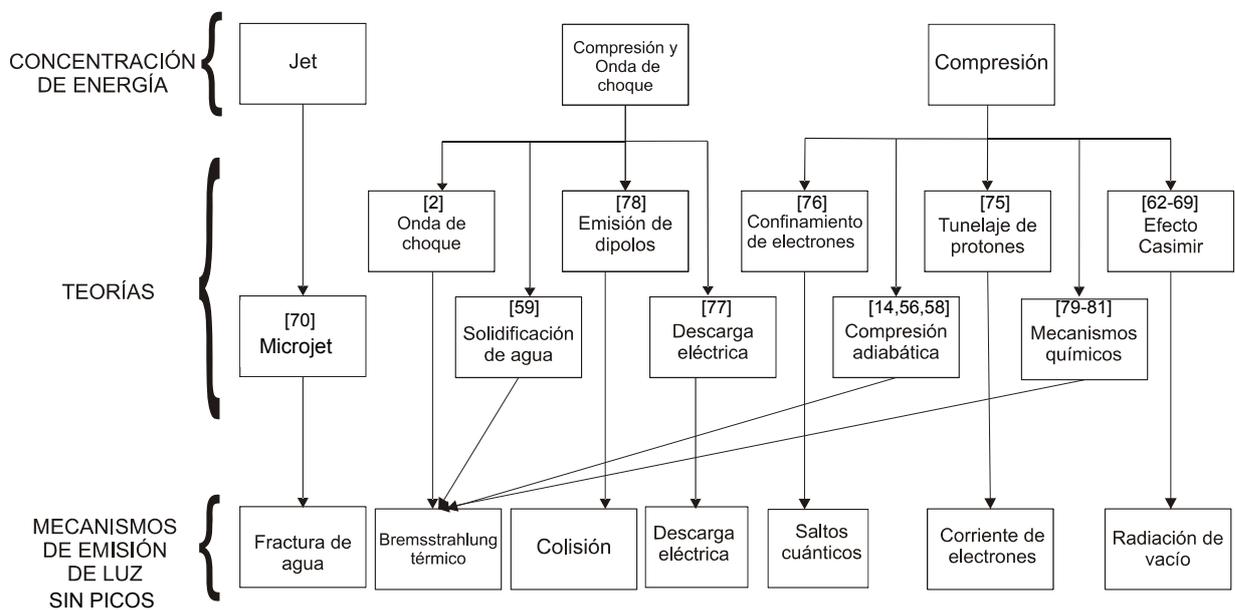


Figura 2.11 Teorías que intentan explicar el fenómeno de SLUB. Relaciones entre los mecanismos de emisión de luz y concentración de energía.

2.8 Colapso de una burbuja cónica

A finales de la década de los 60's, un grupo de investigadores liderado por Kosky^{88,89} realizaron experimentos con un dispositivo equipado fundamentalmente con un tubo en forma de "U", para producir el colapso de una burbuja cónica (BC) mediante el movimiento de un pistón líquido. En estos experimentos, la intención era emular el colapso de burbujas esféricas y estudiar a detalle la dinámica de la cavidad y la termodinámica de los gases en el interior de la burbuja al ser comprimidos. Un modelo muy detallado de estos procesos se ofrece en [9].

A finales de los noventas, la utilización del tubo U para producir burbujas luminiscentes, recobró interés por el redescubrimiento de la SLUB. Una de las ventajas de la luminiscencia producida en tubo U con respecto a la SLUB es que se puede controlar fácilmente la inercia de la burbuja sin tener que cambiar simultáneamente la densidad del líquido y otras de sus propiedades⁹⁰. Además, el mayor tamaño de una burbuja cónica facilita el monitoreo de algunas variables en su interior como la presión del gas. En la última década, la investigación se ha centrado en estudiar la emisión de luz proveniente de la BC cuyo interior es típicamente una mezcla de gas noble y vapor de líquido.

2.8.1 Arreglo experimental para producir luminiscencia por colapso de burbuja cónica (CBL)

En las figuras (2.12) y (2.13) se muestran el diagrama y la imagen de un "Tubo U". Existen algunas variantes para ajustar las condiciones iniciales, pero fundamentalmente el procedimiento para comprimir el gas es el siguiente: El tubo se llena parcialmente con líquido desgasificado (para nuestro sistema se usaron 270 ± 10 ml) a condiciones ambientales. Subsecuentemente, el aire libre (que antes estaba disuelto) se extrae del sistema hasta que la presión de vacío es de alrededor de 1500 Pa. Después, un pequeño volumen de gas inerte se inyecta por el *brazo 1* desplazando la columna de líquido en el *brazo 2*. Esta presión se mide como una diferencia de altura Δh . A un tiempo arbitrario cero, la válvula, B, se abre

dejando entrar aire a presión, $P_{ext}(t)$, en el *brazo 2*; después de lo cual, la columna de líquido (L) “pistón líquido” comienza a moverse hasta que el gas es comprimido dentro de la cavidad cónica alcanzando un volumen final.

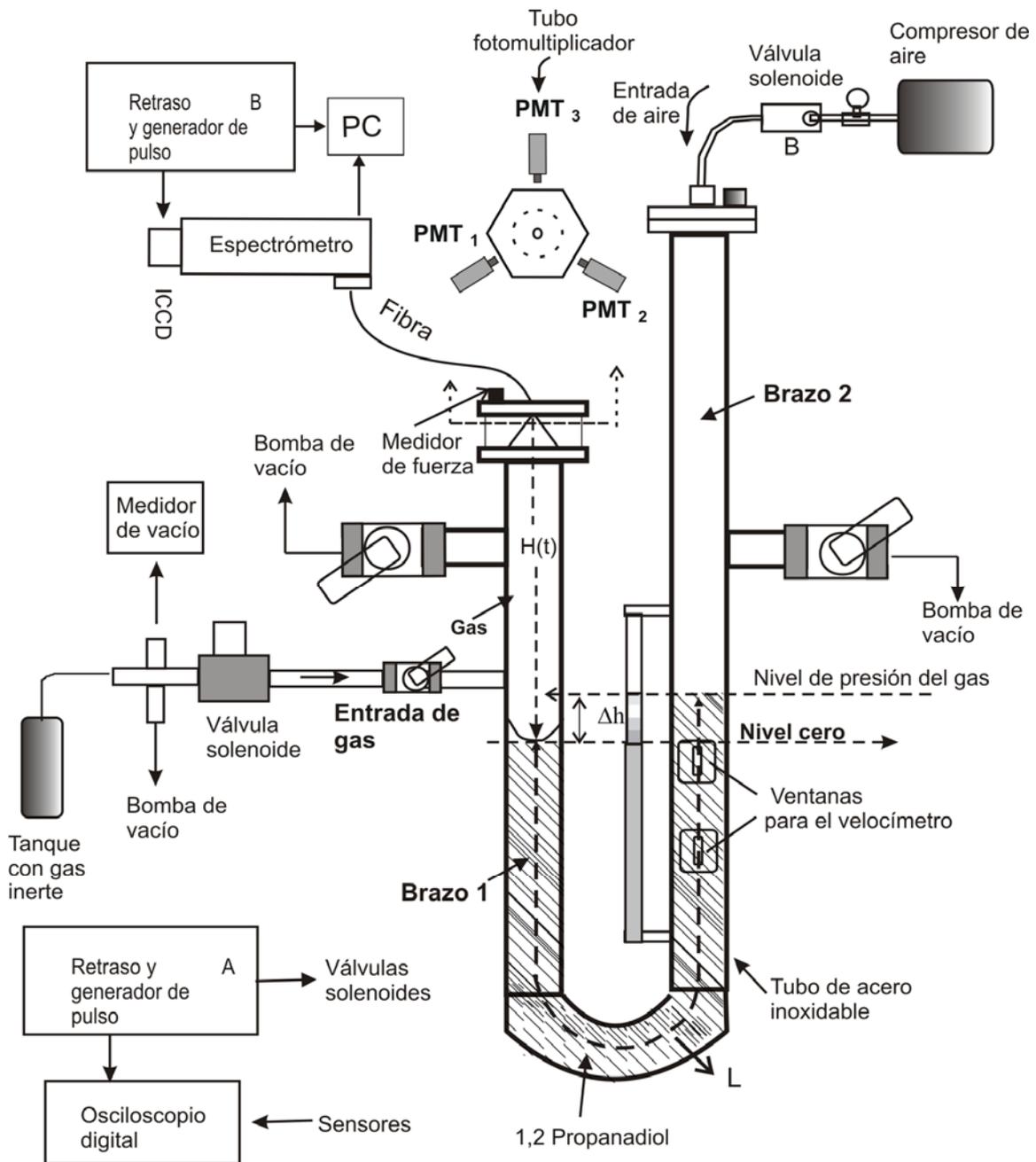


Figura 2.12 Esquema de un arreglo experimental para la obtención de la luminiscencia por colapso de burbuja cónica.

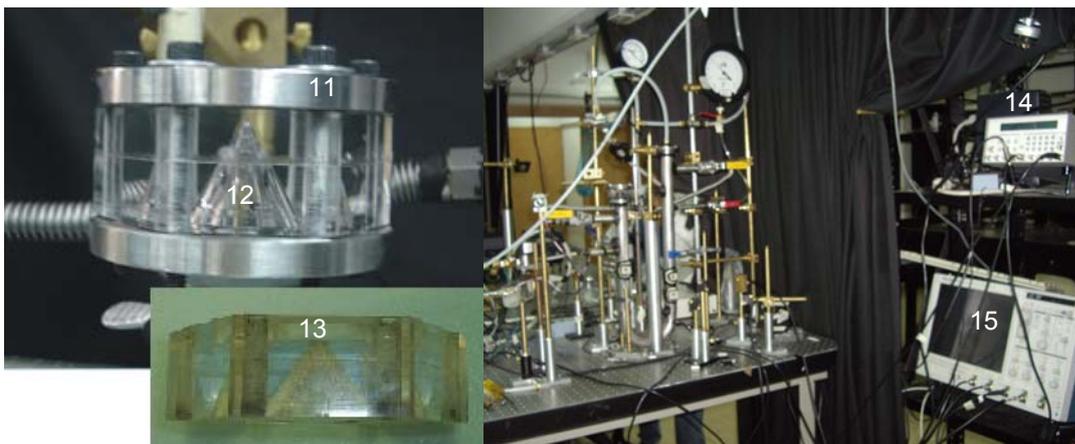


Figura 2.13 Arreglo experimental para la obtención de la luminiscencia por colapso de burbuja cónica. Dispositivo montado en el Laboratorio de Pruebas no Destructivas del Instituto de Ingeniería/ UNAM. 1) Tubo de acero inoxidable en forma de U, 2) terminación cónica, 3) ventanas para velocimetría láser, 4) válvulas de apertura rápida, 5) válvula solenoide, 6) manómetro de vacío, 7) medidor Pirani, 8) láser de diodo, 9) fotodiodo rápido, 10) fotodiodo, 11) brida de acero, 12) cámara cónica, 13) lente de cuarzo, 14) generador de pulsos, 15) osciloscopio.

2.8.2 Observaciones experimentales de la CBL

La figura (2.14) muestra los resultados experimentales de Leighton *et al.*⁹¹. Los perfiles del pulso principal de presión (A, cuya amplitud es de ~ 4 MPa y un ancho de $\sim 700 \mu\text{s}$) y tres rebotes consecutivos (B, C, D) se despliegan en la parte superior. En la parte inferior se observan puntos experimentales relativos al tiempo del colapso que oscila entre 2 y 13 ms.

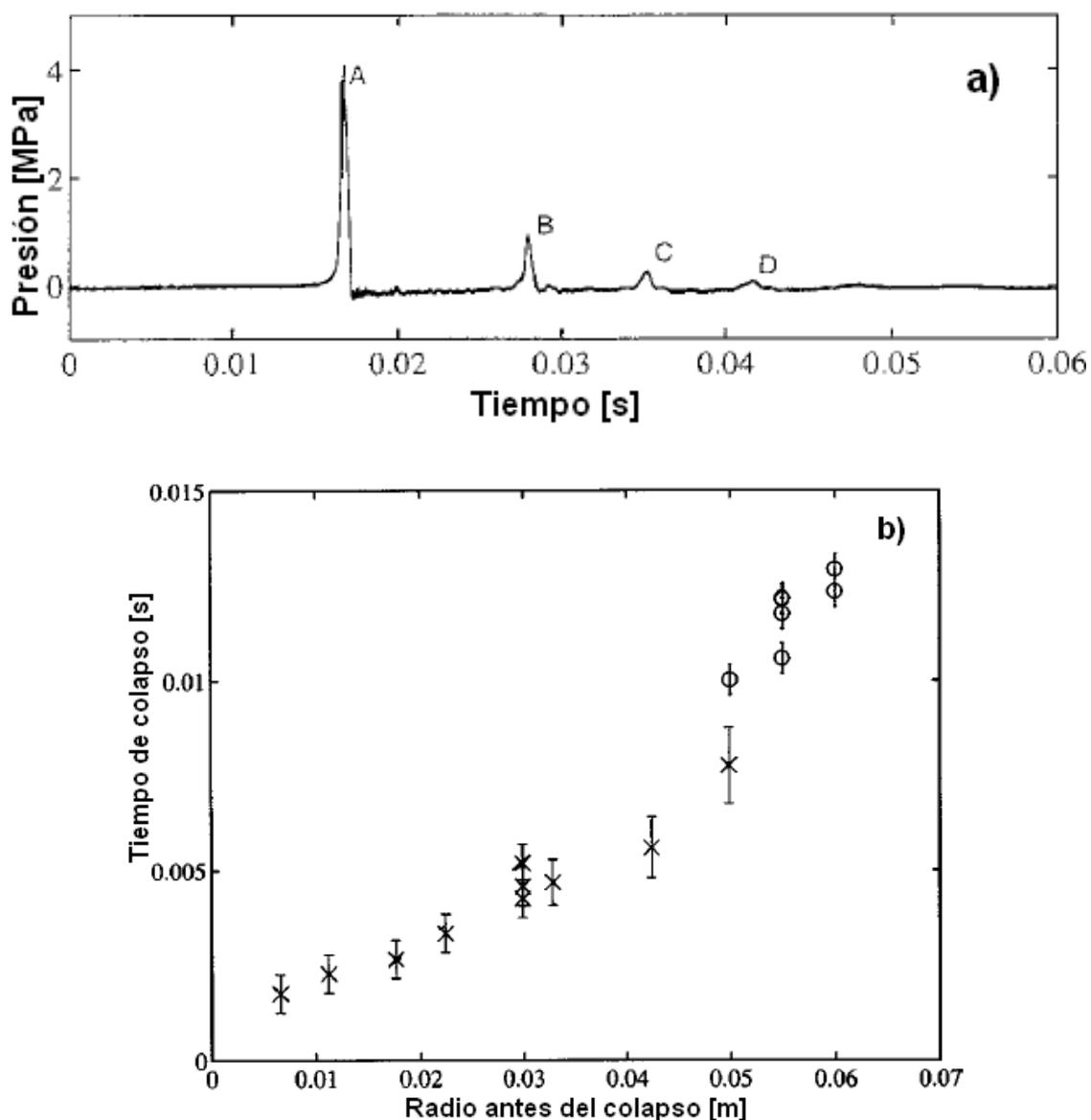


Figura 2.14 a) Pulsos de presión y b) tiempo de colapso de una burbuja cónica; ambas figuras se extrajeron de [91].

La figura (2.15) muestra las señales del pulso de luz registradas con un fotomultiplicador. En la parte superior se observa la correspondiente a una burbuja en agua, claramente un destello consiste de ramilletes de sub-pulsos con anchos más cortos que se extienden durante 3000 μs . Los pulsos observados en 1,2-propanediol se asemejan a curvas gaussianas, cuyos anchos van típicamente de algunas decenas a centenas de μs , Fig. (2.15b).

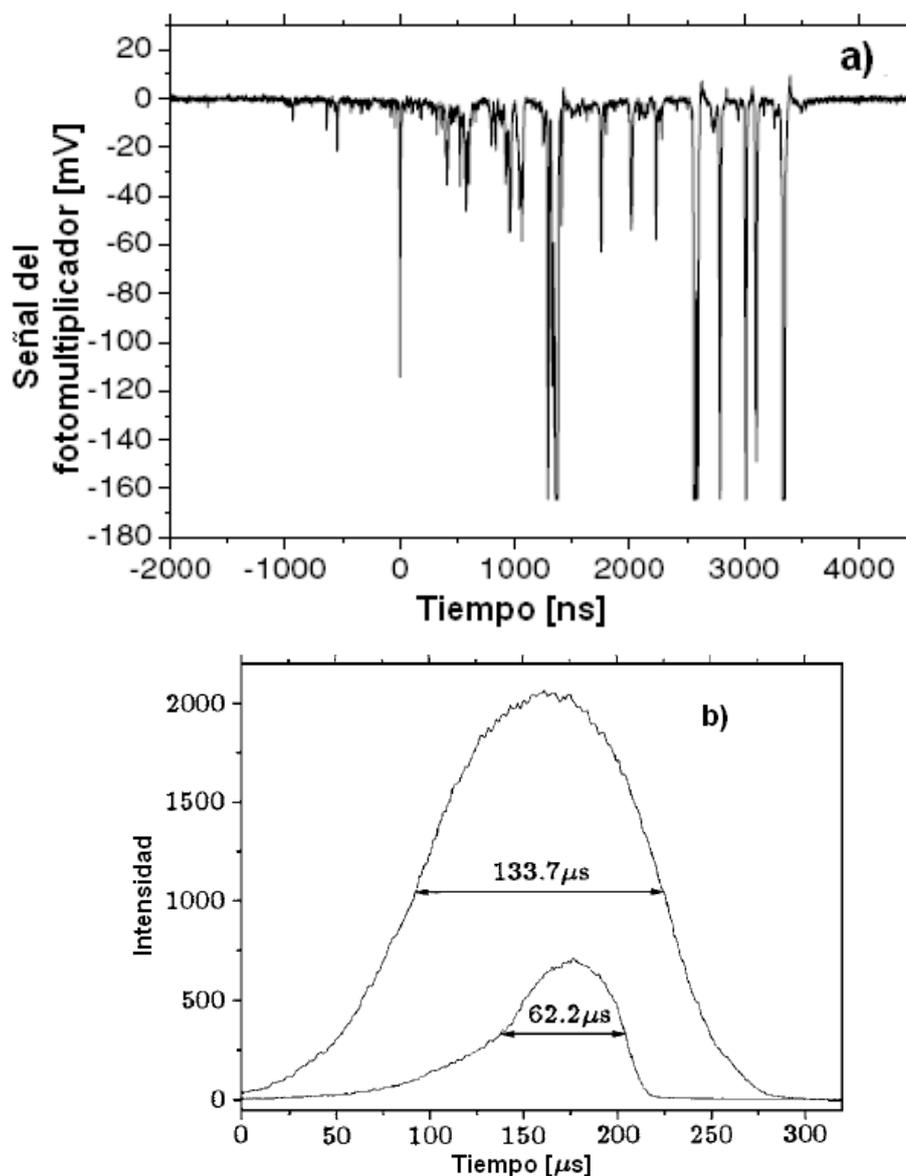


Figura 2.15 Pulsos de luz de una burbuja cónica en dos medios líquidos: a) agua [92], b) 1,2-propanediol [90].

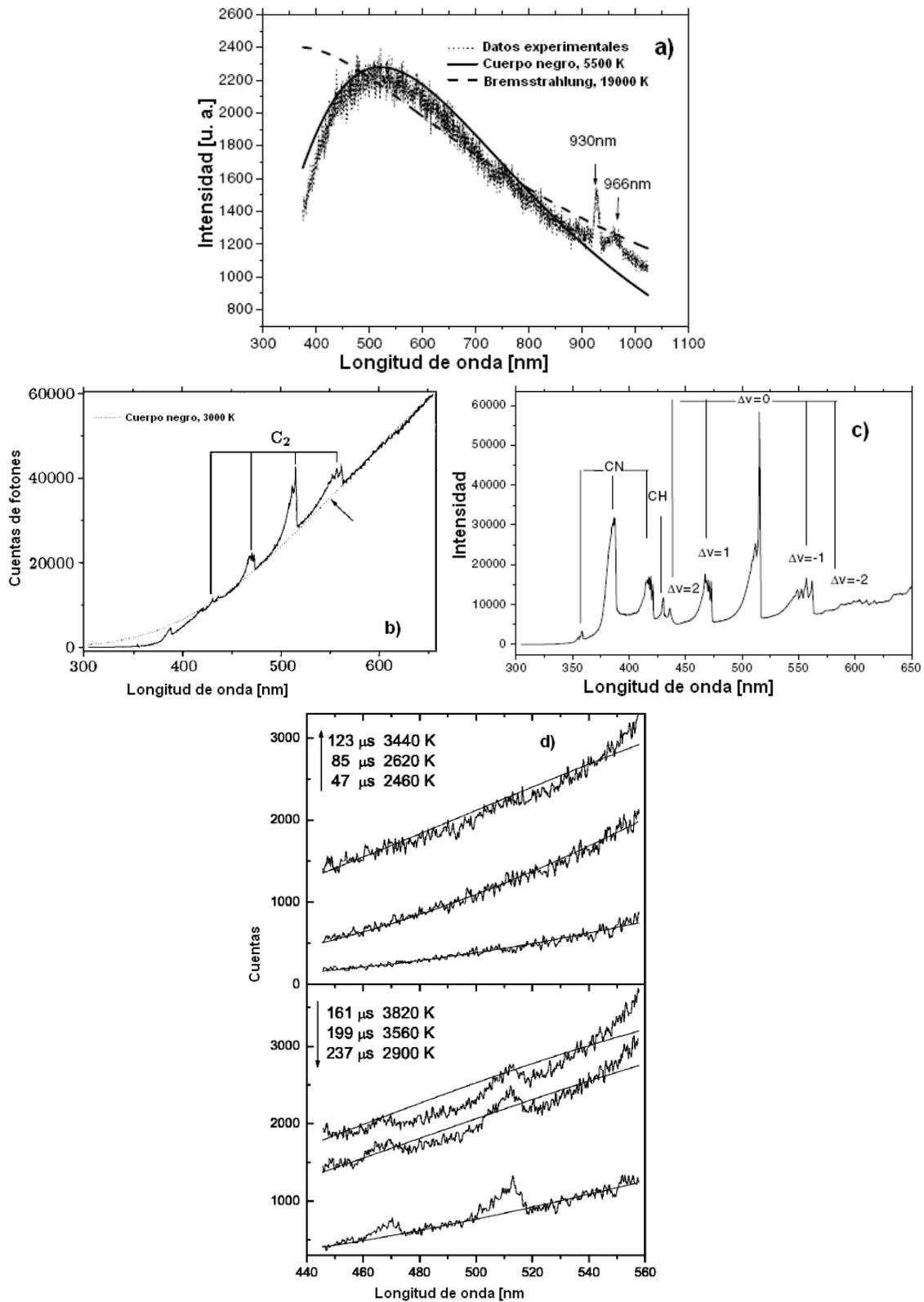


Figura 2.16 Espectros de emisión de una burbuja cónica en dos medios líquidos: a) agua [92]; 1,2-propanediol b) [90]; c) [93]; d) [94].

La figura (2.16) muestra una variedad de espectros registrados en agua y 1,2-propanediol. La característica común es un continuo que concuerda con radiación de cuerpo negro a partir de la cual se infieren temperaturas de entre 3000 y 5500 K. Todos los espectros presentan bandas superpuestas; para el 1,2-propanediol bandas Swan de C_2 , para el agua se observaron bandas asociadas a la emisión de luz de moléculas de agua H_2O^* y otros compuestos. En la tabla (2.5) se sintetizan los resultados experimentales más relevantes de la CBL desde los experimentos de Hawtin *et al.*⁹ en 1970 hasta la época reciente.

Tabla 2.5 Principales resultados experimentales de la LCBC desde la década de los setentas hasta fechas recientes.

Año	Autores	Valores experimentales	Observaciones experimentales
1970	Hawtin <i>et al.</i> ⁹	~ 1 MPa / 30-60 ms	Presión máxima dentro de la burbuja/Duración del colapso
2000	Leighton <i>et al.</i> ⁹¹	4 - 80 MPa / 2-13 ms	
2004	Qi-Dai <i>et al.</i> ⁹⁴	BC de Argón en 1-2 Propanediol, espectroscopia resuelta en tiempo utilizando una cámara streak. Se detectaron espectros continuos con tres bandas Swan de C_2 superpuestas a 470, 515 y 555 nm. También se observaron líneas de CH, CN y OH. Ajustes a los espectros de emisión dan una temperatura promedio de 3000 K considerando radiación de cuerpo negro. En promedio el ancho de los pulsos fue de 100 μ s.	
2005	Qi-Dai <i>et al.</i> ⁹⁰	BC en 1-2 Propanediol, espectro continuo de los 300 a los 655 nm con bandas Swan de C_2 sobrepuestas a 438, 473, 516 y 563 nm. Un ajuste al espectro considerando radiación de cuerpo negro da 3000 K. El ancho de los pulsos de luz es de 133.7 μ s para una presión de vacío de 1000 Pa, y para una presión de 300 Pa el ancho es de 62.2 μ s.	
2007	Shou-Jie <i>et al.</i> ⁹³	BC en 1-2 Propanediol, espectro continuo con cinco bandas Swan de C_2 con picos en 618.8, 563.5, 516.5, 473.8 y 438.1 nm. La temperatura vibracional calculada a partir de las bandas Swan es de alrededor de 5400 \pm 350 K.	
2008	Ha jing <i>et al.</i> ⁹⁵	BC en 1-2 Propanediol, espectro continuo que abarca desde la región ultravioleta hasta cerca de la región infrarroja sobre el cual aparece una línea de resonancia del Na a 589 nm. Acompañando a esta línea se encontraron dos bandas satélite a 554 y 620 nm provenientes de complejos Na-Ar.	
2010	Shou-Jie <i>et al.</i> ⁹²	BC en agua, espectro continuo que abarca desde la región ultravioleta hasta cerca de la región infrarroja sobre el cual aparecen dos bandas a 930 nm (proveniente de algunas especies producidas durante la cavitación) y 966 nm (proveniente de la emisión de moléculas de agua). Un ajuste al espectro considerando radiación de cuerpo negro arroja una temperatura de 5500 K, un ajuste con Bremsstrahlung da 19000 K.	

2.9 Comentarios generales

La SLUB posee características únicas, que han resultado atractivas para ingenieros y científicos de todo el mundo a lo largo de las dos últimas décadas. Entre dichas características es de resaltar las altas presiones y temperaturas que se alcanzan dentro de la burbuja; y que probablemente serán aprovechadas en la generación de reacciones químicas, la fabricación de nuevos materiales, el tratamiento de aguas residuales y la fusión en frío. La última aplicación sería fascinante, pues el desarrollo de un generador de fusión termonuclear de bajo costo ofrecería una fuente de energía, relativamente segura y poco contaminante si se le compara con los reactores de fisión nuclear convencionales que generan productos de desecho que tardan miles de años en degradarse; en cambio, los residuos de las centrales de fusión se degradarían a niveles no peligrosos en pocas décadas. Aunque la posibilidad de la fusión en frío con la burbuja ha generado controversia, los experimentos más recientes con SLUB en ácido sulfúrico indican temperaturas máximas ~ 100000 K sostenidas por decenas de picosegundos⁵⁴; con lo que se reavivan las esperanzas de quienes defienden la fusión nuclear mediante el colapso de burbujas.

Sin embargo; para desarrollar tecnologías eficientes que estén basadas en la SLUB es necesario sortear dos obstáculos. Uno de ellos es escalar el fenómeno, lo que se traduciría en aumentar la energía que produce la burbuja en sus diferentes formas: acústica, luminosa, etc.

La otra dificultad estriba en resolver satisfactoriamente algunos aspectos del fenómeno que aún son intrigantes. Por ejemplo, falta por clarificar el rol que juegan las ondas de choque en el fenómeno o cual es la máxima concentración de energía.

Por otro lado, la gran diversidad de resultados obtenidos en experimentos de SLUB con diferentes líquidos, diferentes tipos y concentraciones de gas, y diferentes valores de parámetros como la amplitud del campo acústico; invitan a suponer que la emisión de fotones no solo se deba a un mecanismo de emisión de luz sino a una combinación de varios mecanismos. Si esta idea resultara ser cierta

entonces la respuesta al misterio de la SLUB involucraría también diferentes mecanismos de concentración de energía y distintas zonas en la burbuja donde se emitirían fotones; de acuerdo a lo mostrado en las figuras (2.10) y (2.11).

De hecho, las observaciones más recientes indican que durante el periodo del colapso el espectro de emisión va evolucionando evidenciando al menos dos mecanismos. Uno asociado a procesos químicos de alta energía con la correspondiente emisión molecular y/o atómica catalizada por temperaturas de entre 5000-9000 K. Y el otro asociado a procesos de radiación bremsstrahlung cuando las temperaturas promedio son de entre 10000- 15000 K y el radio de la burbuja es mínimo.

CAPÍTULO

3

MODELOS DE LA DINÁMICA DE UNA BURBUJA

Se analizan y comparan entre sí las ecuaciones de Rayleigh-Plesset, ERP, y de Gilmore, EG. Ambos modelos son simplificaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y han sido ampliamente utilizados en la simulación de la dinámica radial de burbujas. Se estudia también la ecuación para simular la evolución dinámica de las deformaciones superficiales; y se analizan brevemente los principios físicos, formulaciones y criterios para calcular los umbrales del espacio paramétrico P_a-R_0 .

3.1 Movimiento radial

3.1.1 Ecuación de Rayleigh-Plesset (ERP)

Uno de los modelos accesibles para estudiar la dinámica de una burbuja es la ecuación de Rayleigh-Plesset (para su deducción, ver referencias [96, 97]). La ERP se deduce para números de Mach $\dot{R}/c_0 \ll 1$, se emplea para modelar con gran aproximación la evolución temporal del radio de una burbuja y es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden expresada por¹:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_0}(P_g(R) - P_0 - P_e(t)) - 4\mu\frac{\dot{R}}{\rho_0 R} - 2\frac{\sigma}{\rho_0 R} + \frac{R}{\rho_0 c_0} \frac{d}{dt}(P_g - P_e), \quad (3.1)$$

donde \dot{R} es la velocidad de la pared de la burbuja en función del tiempo, y c_0 es la velocidad del sonido en el líquido considerada como constante.

El lado izquierdo de la ec. (3.1) representa la inercia de la burbuja a la aceleración producida por la fuerza resultante que actúa sobre ella; la cual es la diferencia de presiones dentro, P_g , y fuera de la burbuja, $-(P_0 + P_e)$.

El amortiguamiento es debido a la viscosidad, μ , y la radiación acústica en el líquido por el movimiento de la burbuja se representa por el término “ $(R/\rho c_0) d(P_g - P_e)/dt$ ”.

Las propiedades del líquido son: σ = tensión superficial, μ = viscosidad y ρ_0 = densidad. P_0 es la presión hidrostática, P_g es la presión del gas en el interior de la burbuja expresada por una ecuación de estado y $P_e(t) = -P_a \sin(\omega t)$ es la presión de excitación.

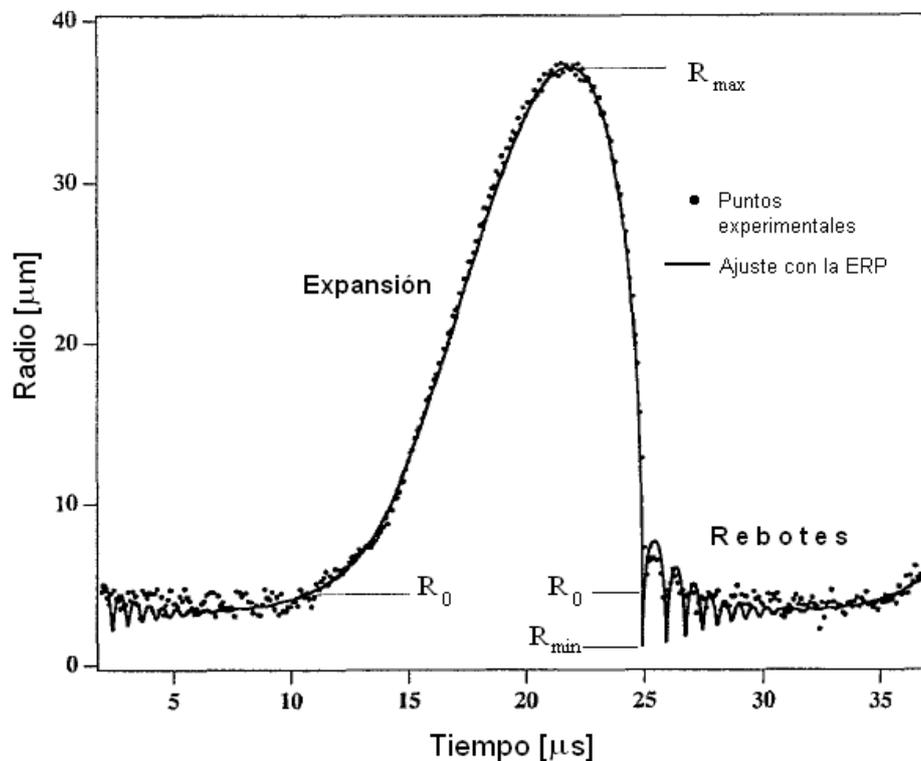


Figura 3.1 Radio vs. tiempo de una burbuja de xenón en régimen de sonoluminiscencia a aproximadamente 26 kHz. Los puntos experimentales (indicados con símbolos) se midieron mediante dispersión Mie [1]. La línea gruesa continua es un ajuste de la ERP a dichos datos; los parámetros del ajuste son: $P_a=0.146$ MPa, $R_0=4.3$ μm .

En la figura 3.1, se muestra un ajuste de la ERP a un conjunto de puntos experimentales. En especial, la ecuación describe bien la etapa de expansión desde el radio inicial (R_0) hasta el radio máximo (R_{max}) y la serie de rebotes (oscilaciones amortiguadas) después del radio mínimo (R_{min}). Esto se debe a que la velocidad de la pared de la burbuja en las etapas antes descritas es mucho menor a la velocidad del sonido en el líquido; en otras palabras, la relación

$\dot{R}/c_0 \ll 1$ se satisface. Sin embargo en los últimos 200 ns de la compresión (desde R_0 hasta R_{min}) la condición $\dot{R}/c_0 \ll 1$ no es satisfecha¹ y por ende la ERP no se ajusta a las observaciones. Según nuestros propios cálculos, la ERP predice velocidades máximas ~ 8000 m/s para burbujas en condiciones típicas de sonoluminiscencia, y éstas son superiores a los valores registrados experimentalmente 350 - 4000 m/s [98,35]. Por lo que se han propuesto modelos que consideran la compresibilidad del líquido con un efecto de disminución en la velocidad máxima, entre otras características.

3.1.2 Ecuación de Gilmore (EG)

A diferencia de la ERP, la ecuación de Gilmore incluye algunos términos para considerar la compresibilidad del líquido, representados por las relaciones " \dot{R}/C y $\dot{R}/3C$ ".

La EG se expresa como [99]:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3C}\right) \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{C}\right) H + \left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) \frac{R}{C} \frac{dH}{dt}, \quad (3.2)$$

Donde la entalpía (H) y la velocidad del sonido (C) en el líquido, son variables y están definidas por:

$$H = \int_{P_\infty}^P \rho_l^{-1} dP, \quad (3.3)$$

$$C = \left[c_0^2 + (m-1)H \right]^{1/2}. \quad (3.4)$$

Para resolver la ec. (3.2) es necesario conocer H y C en función de la presión P , la cual a su vez, es función de t ó de R . La ecuación de Tait se utiliza comúnmente para relacionar H y C con P , ajustándose bien al comportamiento de muchos fluidos al ser sometidos a altas presiones:

$$\frac{P+B}{P_0+B} = \left(\frac{\rho_l}{\rho_0} \right)^m, \quad (3.5)$$

donde las constantes B y m dependen del tipo de líquido. Para el agua $B=304.7$ MPa, $m=7$.

La presión en la pared de la burbuja esta dada por:

$$P = P_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R}. \quad (3.6)$$

La presión lejos de la burbuja es: $P_\infty = P_0 - P_e(t)$; por otro lado, la presión del gas dentro de la burbuja se simula considerando una ecuación de estado del tipo van der Waals:

$$P_g = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - h^3}{R^3 - h^3} \right). \quad (3.7)$$

La temperatura y densidad del gas dentro de la burbuja se calculan a partir de:

$$T_g = T_0 \left(\frac{R_0^3 - h^3}{R^3 - h^3} \right)^{\gamma-1}, \quad (3.8)$$

$$\rho_g = \frac{P_g M_g}{\Re T_g + P_g b}. \quad (3.9)$$

La deducción de la ec. (3.2) se basa en algunas consideraciones, entre las que destacan⁹⁹:

- 1) La burbuja permanece esférica en todo momento.
- 2) La burbuja está inmersa en un volumen de líquido infinito.
- 3) La fuerza de gravedad es despreciable.
- 4) Fuerzas que producen asimetrías son despreciables.

5) El flujo de líquido es esféricamente simétrico y por lo tanto irrotacional ($\nabla \times \bar{u} = 0$; el flujo de líquido no posee componentes rotacionales: el fluido no describe movimientos circulares ni helicoidales). Por lo que el campo de velocidades del fluido se expresa como el gradiente de su potencial;
 $\bar{u} = \nabla \phi$.

6) La ecuación de conservación de cantidad de movimiento¹⁰⁰ se expresa por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla \phi) + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{4\mu}{3\rho} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) \quad (3.10)$$

la viscosidad del líquido μ en la ecuación (3.10) es constante a través del espacio (pero puede variar con el tiempo).

7) Como los efectos de viscosidad y compresibilidad se consideran pequeños, se desprecia el último término de la ecuación (3.10) el cual representa la interacción entre ambos efectos.

8) Los efectos de la viscosidad se introducen mediante las condiciones de frontera (en el balance de presiones en la superficie de la burbuja;

$$P = P_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R}.$$

La ecuación de Gilmore describe (con buena aproximación si se le compara con la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes) el colapso de una burbuja cuando el número de Mach en el líquido $M_l = \dot{R}/C$, es incluso ~ 2.2 [99].

Otros estudios teórico-numéricos como los de Hickling y Plesset⁶⁰ han demostrado que incluso la EG da resultados similares a las ecuaciones de Navier-Stokes para números de Mach de hasta 5.

Experimentalmente, Delgadino y Bonneto⁹⁸ registraron la velocidad máxima que alcanza una burbuja SL en las últimas etapas del colapso resultando ser de 350

m/s, con esta velocidad el número de Mach en el líquido sería menor a uno, considerando incluso que la velocidad del sonido permaneciera constante. Sin embargo, otras mediciones indirectas sugieren valores de hasta 4000 m/s [35]; a estas velocidades el Mach en el líquido sería ≈ 2.7 (si la velocidad del sonido en el líquido fuera constante), e inclusive menor si la velocidad del sonido se considera variable (pues C aumenta durante el colapso por el incremento en la densidad del líquido alrededor de la pared de la burbuja).

Las consideraciones anteriores, validan el uso de la ecuación de Gilmore para modelar la dinámica radial de burbujas en condiciones de sonoluminiscencia.

Las diferencias de la EG con respecto a la ERP, se hacen claras comparando simulaciones numéricas a las mismas condiciones. En la figura (3.2a) se despliegan dos curvas de la dinámica radial $R(t)$ para una burbuja en condiciones típicas de sonoluminiscencia. En la escala utilizada, las curvas son casi indistinguibles, resultados similares son mostrados por Prosperetti y Hao¹⁰¹.

Un acercamiento en la zona del colapso, figura (3.2b), nos muestra un retraso en la evolución radial predicho por el modelo EG con respecto a la curva radial calculada con la ERP; lo cual se debe a los efectos de compresibilidad del líquido incluidos en la EG.

Sin embargo, la diferencia entre los modelos ERP y EG se hace más evidente al comparar los números de Mach en el líquido calculados con cada uno de los modelos.

La figura (3.2c) muestra claramente como la compresibilidad del líquido hace que las velocidades predichas por la EG sean más pequeñas durante el colapso; las cuales, a su vez son cercanas a los valores experimentales.

En otras palabras, el modelo EG predice un aumento en la densidad del fluido alrededor de la burbuja durante el colapso y por ende la velocidad de propagación del sonido aumenta y el número de Mach disminuye.

Las simulaciones y los resultados de las comparaciones correspondientes a las figuras (3.2a), (3.2b) y (3.2c) son similares a los presentados por Hilgenfeldt *et al.*²².

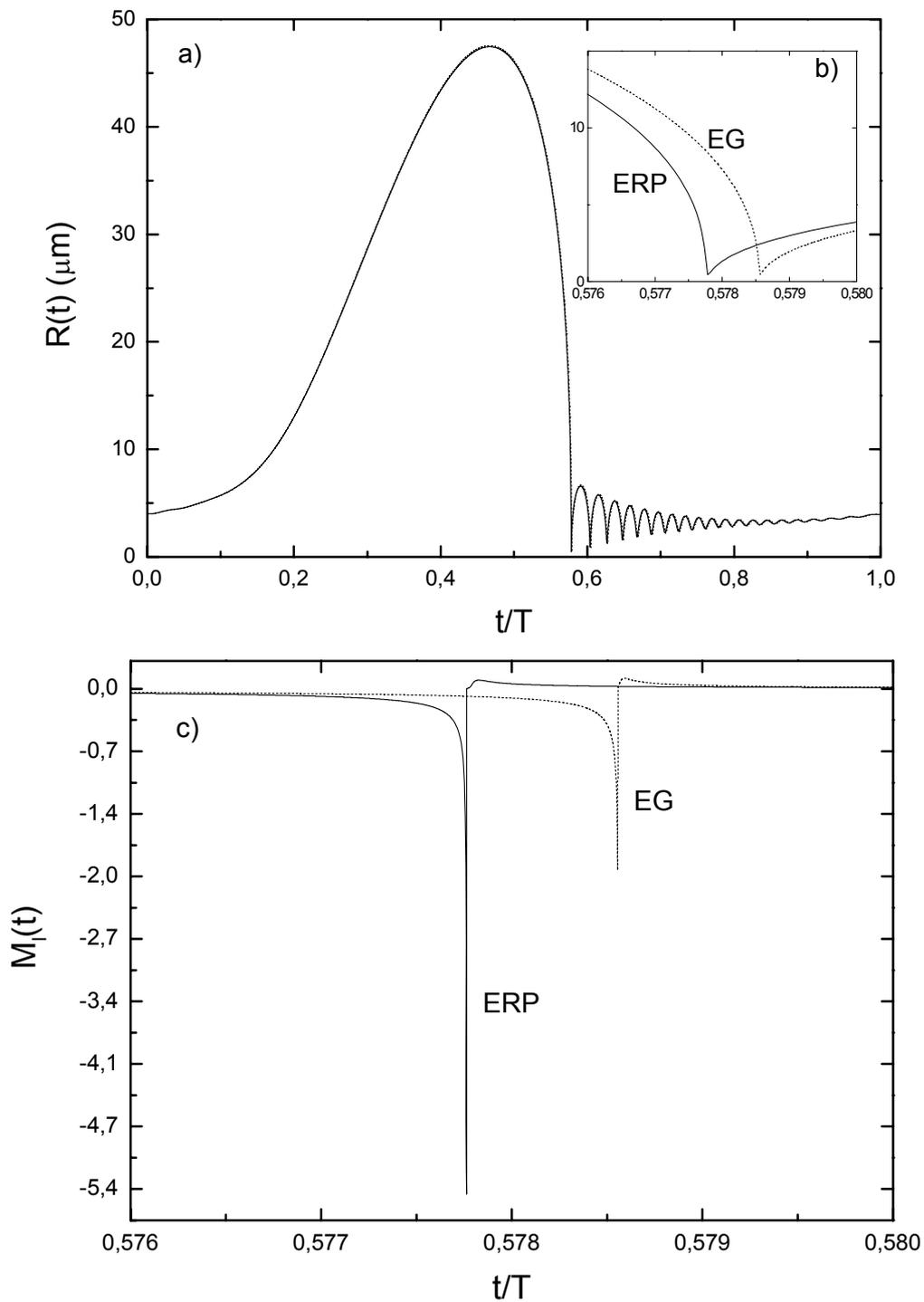


Figura 3.2 a) Radio vs. tiempo para una burbuja en condiciones de sonoluminiscencia. La línea continua se calculó con la ERP, la línea punteada casi indistinguible se calculó con la EG. b) Acercamiento de la figura (a) en la cercanía del primer colapso. d) Números de Mach en el líquido calculados con la ERP (línea continua, $M_l = \dot{R}/c_0$) y la EG (línea punteada, $M_l = \dot{R}/C$) para el intervalo de tiempo mostrado en la figura (b). Los parámetros de la simulación numérica son: $P_a=0.141$ MPa, $\omega/2\pi=26.5$ kHz, $\gamma=1$.

3.2 Movimiento de las deformaciones superficiales

3.2.1 Inestabilidad paramétrica (IP)

En esta sección se modela la evolución de una distorsión en la forma esférica inicial de una burbuja (ver figura 3.3) sometida a un campo acústico que la hace oscilar volumétricamente.

La distorsión se modela matemáticamente considerando una expansión de armónicos esféricos, expresada por^{102,103}:

$$r(t, \theta, \phi) = R(t) + a_n(t) Y_n^q(\theta, \phi) \quad (3.11)$$

en donde $R(t)$ es el radio de la burbuja sin distorsión, Y_n^q es un armónico esférico de grado q y orden n ; por último $a_n(t)$ es la amplitud de la distorsión. La formulación para calcular la dinámica de $a_n(t)$ siguiendo un comportamiento lineal se encuentra en la literatura con algunas variantes¹⁰⁴⁻¹⁰⁶. De entre las cuales se escogió la formulación propuesta por Yuan *et al.*¹⁰⁵; que permite simular cambios en las densidades del gas y del líquido, introduciendo ecuaciones de estado para relacionar la densidad con la presión.

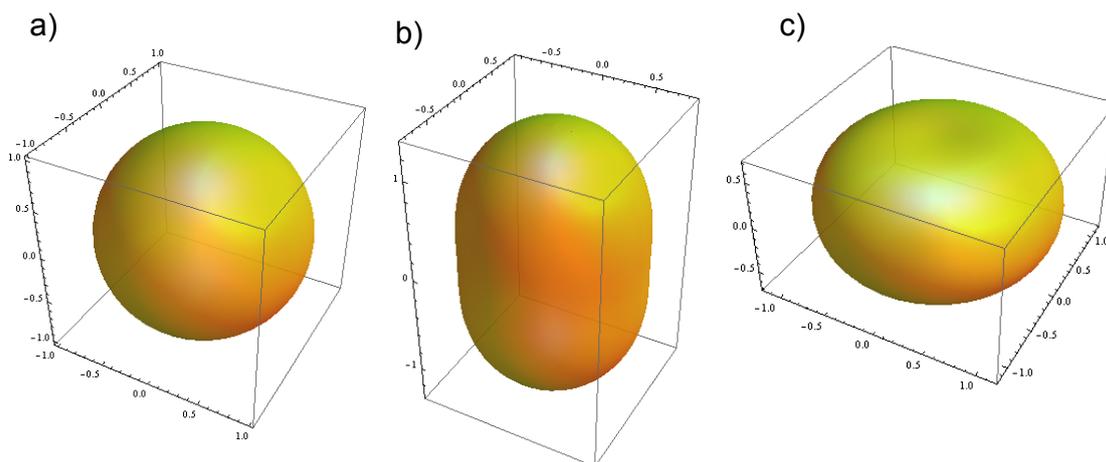


Figura 3.3 a) Esfera de radio unitario; b) esfera de radio unitario distorsionada con un armónico esférico positivo de orden 2 y amplitud 0.5, ($r = 1 + 0.5Y_2^0$); c) esfera de radio unitario distorsionada con un armónico negativo de orden 2 y amplitud 0.5, ($r = 1 - 0.5Y_2^0$).

Para calcular la amplitud de la distorsión se apela a la aproximación de la capa límite, entonces:

$$\ddot{a}_n(t) + B_n(t)\dot{a}_n(t) + A_n(t)a_n(t) = 0, \quad (3.12)$$

donde $\dot{a}_n = da_n / dt$,

$$A_n(t) = \frac{\left\{ \left[\frac{(n+1)(n+2)}{n} \frac{\rho_g}{\rho_l} - (n-1) \right] \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\beta_n \sigma}{\rho_l R^3} + \left[\beta_n - \frac{n(n-1)(n+2)}{1+2\delta/R} \right] \frac{2\nu \dot{R}}{R^3} \right\}}{\left(1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}, \quad (3.13)$$

$$B_n(t) = 3 \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\left[\frac{n(n+2)^2}{1+2\delta/R} - \beta_n \right] \frac{2\nu}{R^2}}{\left(1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}, \quad (3.14)$$

$$\beta_n = (n-1)(n+1)(n+2), \quad (3.15)$$

y el espesor de la capa límite δ es¹⁰²,

$$\delta = \min \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\omega}}, \frac{R}{2n} \right). \quad (3.16)$$

La viscosidad cinemática (ν) se reemplaza en las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.16) por:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_l}, \quad (3.17)$$

donde la viscosidad dinámica (μ) se considera constante, pero la densidad del líquido es variable y función de la presión expresada por la ecuación de Tait (3.5).

3.2.2 Inestabilidad Rayleigh-Taylor (IRT)

La inestabilidad de Rayleigh-Taylor ocurre en una escala de tiempo del orden de nanosegundos cuando la burbuja rebota justo después de alcanzar su radio mínimo. Hasta el momento no existe un criterio establecido para determinar cuantitativamente el umbral de la IRT^{1,102}. Una aproximación numérica utilizada en este estudio consiste en calcular el factor de amplificación de una distorsión inicial $(a_n(0), \dot{a}_n(0))$ de dimensión nanométrica durante el colapso principal. Según Yuan *et al.* [rr14], el factor de amplificación (FA) está definido por:

$$FA = \frac{a_n(t)}{a_n(0)}, \quad (3.18)$$

los mismos autores definen al colapso principal como el periodo que va desde el momento en que la burbuja alcanza el radio máximo ($t_{R_{\max}}$), momento en el que una perturbación inicial $(a_n(0), \dot{a}_n(0))$ comienza a crecer, hasta el momento del primer rebote cuando la distorsión en función del tiempo $a_n(t)$ deja de crecer.

Según Hilgenfeldt *et al.*¹⁰², la burbuja se rompe y disuelve si la distorsión llega a crecer durante el colapso principal hasta un tamaño comparable a $R(t)$, la burbuja se rompe y disuelve. Este criterio queda expresado por

$$\max_{\{t_{R_{\max}} < t < t_{R_{\min}} + t_{RT}\}} \left(\frac{|a_n(t)|}{R(t)} \right) \geq 1 \quad (3.19)$$

donde $t_{R_{\min}}$ es el tiempo en que se sostiene el radio mínimo de la burbuja, y t_{RT} es un tiempo adicional en el que la distorsión deja de crecer. La curva umbral de la IRT está determinada por la relación (3.19).

En la figura (3.4a) se muestra una curva típica del radio en función del tiempo de una burbuja SL, en ella se indican los distintos tiempos en los que se basa el criterio (3.19).

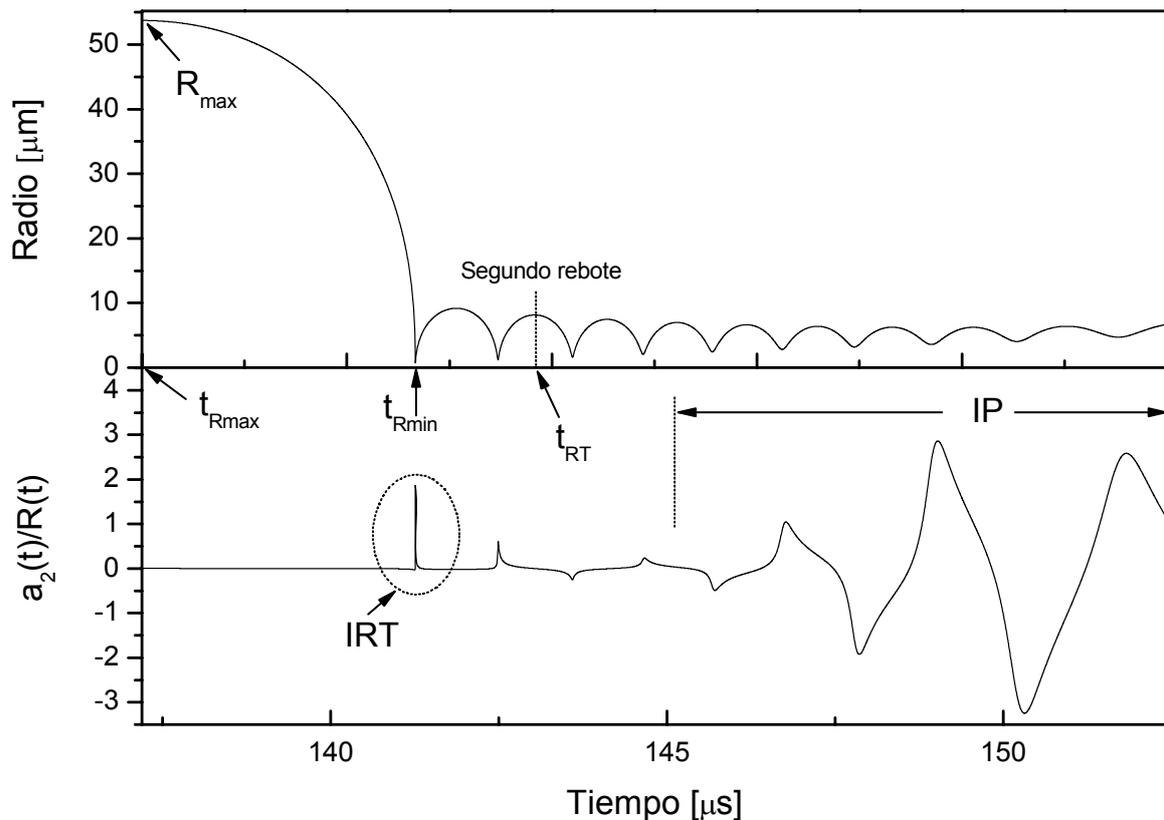


Figura 3.4 a) Radio de la burbuja en función del tiempo; b) evolución temporal de la distorsión normalizada $a_n(t)/R(t)$ para un armónico esférico de orden $n=2$ y amplitud inicial $a_2(0)=10$ nm. La gráfica muestra la dinámica radial de la burbuja desde 3 1/2 ciclos de oscilación en adelante para hacer visible la IRT. Otros parámetros de la simulación numérica son: $P_a=0.151$ MPa, $\omega/2\pi=32.8$ kHz, $R_0=6$, $\gamma=1$.

En la figura (3.4b) se muestra la correspondiente evolución temporal de la distorsión normalizada con respecto al radio de la burbuja $a_n(t)/R(t)$. Cerca del radio mínimo aparece la IRT caracterizada por una curva en forma de pulso con un ancho ≈ 3 nanosegundos, y una amplitud ≈ 2 en concordancia con el criterio (3.19). Después de la IRT hay un periodo de transición en el que se forma la inestabilidad paramétrica, IP, caracterizada por una curva irregular con cierta periodicidad, y con algunas crestas cuya amplitud rebasan la unidad indicando la ruptura de la burbuja.

3.3 Difusión de masa

En presencia de un campo acústico, una burbuja que oscila volumétricamente incrementa su tamaño o se disuelve debido al proceso de difusión de gas a través de su superficie “interfase líquido-gas”.

Bajo condiciones adecuadas, el proceso de difusión alcanza un estado de equilibrio donde la cantidad de masa de gas que entra en la burbuja esta balanceada con la cantidad de masa de gas que sale de ella durante el ciclo de oscilación. Así, la burbuja permanece oscilando indefinidamente manteniendo su tamaño. El proceso mediante el cual se llega al estado de equilibrio se conoce como difusión rectificada¹⁰⁷.

Los puntos en el espacio paramétrico P_a - R_0 , en los cuales la burbuja alcanza el equilibrio difusivo se calcularon según la siguiente condición propuesta por Fyrrillas y Szeri¹⁰⁸:

$$\frac{C_\infty}{C_0} = \frac{\langle P_g \rangle_{t,4}}{P_0}, \quad (3.20)$$

la relación (3.20) expresa el equilibrio de masas de entrada y salida durante un ciclo de oscilación. Aquí la media ponderada $\langle \rangle_{t,4}$ esta definida por:

$$\langle P_g \rangle_{t,4} = \frac{\int_0^T P_g R^4(t) dt}{\int_0^T R^4(t) dt}. \quad (3.21)$$

Donde P_g esta definida por la Ec. (3.7), y $R(t)$ es la solución de la Ec. (3.2). La saturación de gas se refiere a la relación C_∞/C_0 , donde C_∞ es la concentración de gas en algún punto alejado de la burbuja y C_0 es la concentración a la presión ambiente.

3.4 Umbral de formación de ondas de choque en el gas

Hilgenfeldt *et al.*¹⁰² sugieren que la emisión de luz en la SL se inicia por un mecanismo hidrodinámico de concentración de energía. Dicho mecanismo está ligado a una onda de choque originada por las altas velocidades de la pared esférica durante las últimas etapas del colapso. La onda se propaga hacia el centro geométrico de la burbuja y a través del gas contenido en ella. El frente de la onda es acelerado conforme se acerca al origen, así la energía que transporta se concentra y los gases cerca del radio mínimo se calientan hasta que la emisión ocurre.

Para que la onda de choque en el gas se forme, la velocidad de la pared de la burbuja (\dot{R}) debe ser al menos del orden de la velocidad del sonido en el gas (c_g), lo cual se expresa mediante el número de Mach en el gas:

$$M_g = \frac{-\dot{R}}{c_g} \gtrsim 1, \quad (3.22)$$

donde

$$c_g = \sqrt{\gamma \frac{P_g}{\rho_g} \frac{R^3}{R^3 - h^3}}. \quad (3.23)$$

Entonces la curva teórica para $M_g \approx 1$ (ver Fig. A.8A) representa por un lado el umbral de formación de ondas de choque en el gas y por otro lado el umbral de inicio de la SL. Hacia la izquierda de dicha curva, se hacen cavitarse burbujas cuyo movimiento radial es no-lineal pero sujeto a la condición

$$\dot{R}_{\max} < c_g < C. \quad (3.24)$$

Donde \dot{R}_{\max} se refiere a la velocidad máxima de la pared de la burbuja. En el régimen de “cavitación subsónica”¹⁰⁹ caracterizado por la condición (3.23), no se forman ondas de choque en el gas y tampoco en el líquido.

Ya se ha señalado que hacia la derecha de la curva $M_g \approx 1$, la velocidad de la pared de la burbuja excede la velocidad del sonido en el gas y se forman ondas de choque en él; pero si además la velocidad de la pared es menor a la velocidad del sonido en el líquido las burbujas se encuentran en el régimen de “*cavitación de fase gaseosa*”¹⁰⁹, es decir

$$c_g < \dot{R}_{\max} < C. \quad (3.25)$$

3.5 Umbral de formación de ondas de choque en el líquido

Burbujas en el régimen de cavitación gaseosa desarrollan velocidades de colapso cada vez mayores si por ejemplo se mantiene su radio inicial y la amplitud del campo acústico se incrementa. Eventualmente \dot{R}_{\max} sobrepasa tanto la velocidad del sonido en el gas como la velocidad del sonido en el líquido:

$$c_g < C < \dot{R}_{\max}, \quad (3.26)$$

el régimen caracterizado por el criterio (3.26) es clasificado por Vaughan y Leeman¹⁰⁹ como “*cavitación en fase líquida.*”

La curva que cumple con la condición

$$M_l = \frac{|\dot{R}|}{C} \approx 1, \quad (3.27)$$

representa el inicio del régimen de cavitación líquida; pero también el umbral de formación de ondas de choque en el líquido.

3.6 Umbral de temperatura

Lohse y Hilgenfeldt⁷³ propusieron este límite para explicar el proceso de rectificación dentro de la burbuja. Alrededor de 9000 K el nitrógeno y oxígeno del aire disuelto en el agua, se disocian para formar radicales de O y N; los cuales, reaccionan con los radicales de oxígeno e hidrógeno formados a partir de la

disociación del vapor de agua. La recombinación de dichos radicales forma compuestos que se disuelven en el agua circundante y así se va “rectificando” el contenido de la burbuja quedando en su mayoría gas Argón.

Para evaluar este umbral es necesario calcular la temperatura suponiendo un índice politrópico, γ , distinto de uno durante los últimos instantes del colapso. Estos autores proponen un modelo con un índice efectivo, γ_{ef} , que es función del número de Peclet; éste a su vez es función del tiempo. Para casi todo el ciclo de oscilación $\gamma_{ef} \approx 1$; excepto cuando $R(t) \leq R_0$, $\gamma_{ef} \approx 5/3$.

Por simplicidad, nosotros consideramos $\gamma = 5/3$ a lo largo de todo el ciclo de oscilación.

La curva que satisface la condición

$$293 \left(\frac{R_0^3 - h^3}{R^3 - h^3} \right)^{2/3} \approx 9000 \quad (3.28)$$

representa el umbral de temperatura, $T_g=9000$ K.

3.7 Inestabilidad de Bjerknes

En los experimentos de SLUB la burbuja es atrapada dentro de un resonador (usualmente esférico, y así considerado en los cálculos posteriores) por el efecto combinado de su oscilación volumétrica no-lineal y del campo de sonido. Un cuerpo de volumen (V) en un líquido y bajo un gradiente de presión (∇P) experimenta una fuerza $F = -V \nabla P$. Si estas cantidades varían periódicamente en el tiempo o fluctúan rápidamente, la fuerza neta sobre el cuerpo es el promedio de F en el tiempo. La fuerza resultante que actúa sobre una burbuja esférica en un campo de sonido estacionario se conoce como “*fuerza primaria de Bjerknes*” y es igual a¹¹⁰

$$F_B = f_B r, \quad (3.29)$$

$$f_B = \frac{4}{9} \pi k^2 \langle R^3(t) P_e(t) \rangle. \quad (3.30)$$

Donde: r es la coordenada radial, $k=\omega/c_0$ es el número de onda del campo acústico de excitación y la presión de excitación es $P_e(t)=-P_a \sin(\omega t)$. Por otro lado, $\langle \dots \rangle$ representa el promedio en el tiempo durante un ciclo de oscilación y se calcula mediante la integral ¹¹¹:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T R^3(t) P_e(t) dt . \quad (3.31)$$

Cerca de las inmediaciones del antinodo de presión, la fuerza F_B actúa como un resorte lineal y su rigidez representada por f_B puede cambiar de signo. Si la cantidad $\langle R^3(t) P_e(t) \rangle$ es negativa entonces $f_B < 0$, así la fuerza de Bjerknes esta dirigida hacia el centro del resonador esférico y es atrapada. Si $\langle R^3(t) P_e(t) \rangle$ es positiva entonces $f_B > 0$, la burbuja es repelida, y la posición de la burbuja en el antinodo de presión es inestable. La curva que cumple con la condición

$$\frac{4}{9} \pi k^2 \langle R^3(t) P_e(t) \rangle = f_B > 0 , \quad (3.32)$$

representa el umbral de repulsión de la burbuja.

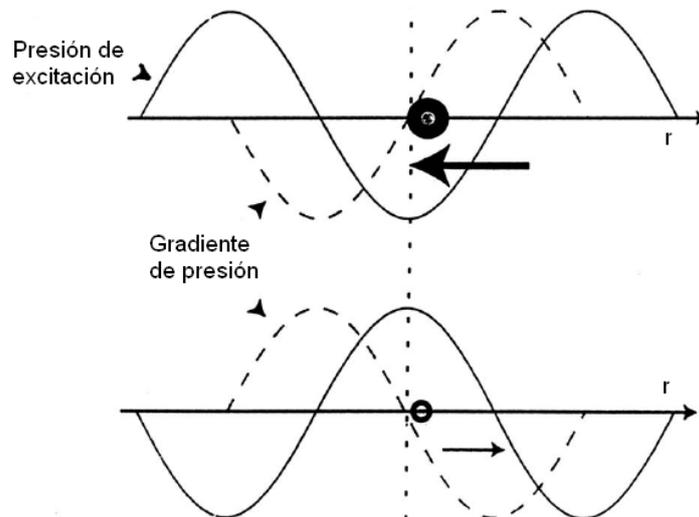


Figura 3.5 Levitación de una burbuja SL en un antinodo de presión. Cuando la burbuja es grande (durante la fase de expansión) la F_B esta dirigida hacia el antinodo y la burbuja es atrapada. En cambio, si la burbuja es pequeña (durante la fase de compresión) entonces es repelida por la F_B hacia afuera del antinodo.

En la figura (3.5) se muestra la dirección de la F_B y como esta cambia de sentido en función del tamaño de la burbuja durante un ciclo de oscilación. Una burbuja típica en régimen sonoluminiscente es de un tamaño tal que $f_B < 0$ en las fases de expansión y de los rebotes; lo cual representa la mayor parte del tiempo de un ciclo de oscilación. En cambio, alcanza un tamaño tal que $f_B > 0$ durante la compresión que solo dura una pequeña fracción de todo un ciclo; así el efecto neto de la F_B es atrapar a la burbuja en una posición cerca del antinodo.

3.8 Modelo hidrodinámico y termodinámico para simular el colapso de la burbuja cónica

En la práctica ya hemos visto que el dispositivo consiste de un tubo U como el de la figura (2.12). Sin embargo, para simplificar la descripción matemática, la curvatura en la parte inferior del tubo U no se toma en cuenta; en su lugar se modela el movimiento de la columna de líquido en un tubo horizontal⁹ como se ilustra en la figura 3.6.

Se considera que el líquido está inicialmente en reposo y todo el sistema está en equilibrio térmico con los alrededores.

El movimiento de la columna de líquido a través de la porción tubular del aparato desde una posición inicial H_0 ; $H(t) \geq H_c$, se describe con:

$$\ddot{H}(l_0 - H_0) = -\frac{1}{\rho}(P_{ext}(t) - P_{g1}), \quad (3.33)$$

donde la longitud de la columna (l_c) es

$$l_c = l_0 - H_0, \quad (3.34)$$

y

$$l(0) = l_0.$$

La presión del gas considerando un proceso politrópico se escribe como

$$P_{g1} = P_{g1}(0) \left(\frac{H_0 - \frac{2}{3}H_c}{H(t) - \frac{2}{3}H_c} \right)^\gamma, \quad (3.35)$$

y la temperatura del gas en esta región es

$$T_{g1} = T_{g1}(0) \left(\frac{H_0 - \frac{2}{3}H_c}{H(t) - \frac{2}{3}H_c} \right)^{\gamma-1}. \quad (3.36)$$

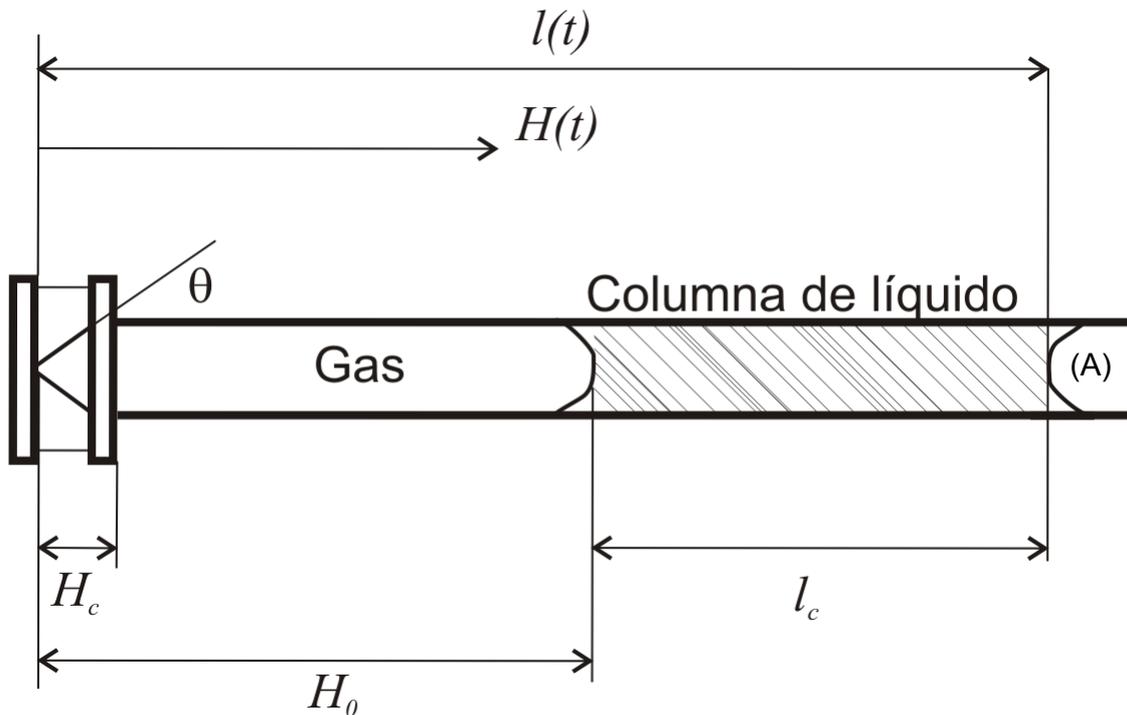


Figura 3.6 Modelo para la descripción matemática del colapso de la burbuja cónica.

Cuando la interface líquido/gas “menisco” se mueve desde la base del cono hacia el ápice; $H(t) \leq H_c$, se tiene

$$H \left[1 - \frac{2H}{H_c} + \frac{Hl}{H_c^2} \right] \ddot{H} + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{H_c} \right)^4 - \frac{4H}{H_c} + \frac{2Hl}{H_c^2} \right] \dot{H}^2 = -\frac{1}{\rho} (P_{ext}(t) - P_{g2}), \quad (3.37)$$

donde

$$l = l_0 - H_0 + H_c - \frac{1}{3} \left(\frac{H_c^3 - H^3}{H_c^2} \right), \quad (3.38)$$

$$P_{g2} = P_{g1}(0) \left(\frac{H_0 - \frac{2}{3}H_c}{\frac{1}{3}H_c} \right)^\gamma \left(\frac{H_c}{H} \right)^{3\gamma}, \quad (3.39)$$

$$T_{g2} = T_{g1}(0) \left(\frac{H_0 - \frac{2}{3}H_c}{\frac{1}{3}H_c} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{H_c}{H} \right)^{3(\gamma-1)}. \quad (3.40)$$

Las ecuaciones (3.33) – (3.40) se resuelven sujetas a las condiciones iniciales, $t = 0$:

$$H(0) = H_0 \text{ [m]}$$

$$\dot{H}(0) = 0 \text{ [m/s]}$$

$$P_{g1}(0) = P_0 + 9.81 \rho \Delta h \text{ [Pa]}$$

$$T_{g1}(0) = 298.15 \text{ [K]}$$

A un tiempo cero arbitrario, la presión ($P_{ext}(t)$) se aplica en (A) (ver figura 3.6). Se considera que esta presión crece linealmente hasta alcanzar un valor máximo P_{ext} y permanecer constante.

La condición que produce el colapso es $P_{ext}(t) > P_{g1}$, así las condiciones de frontera para obtener la solución son

$$t \geq 0 \quad P_0 + at < P_{ext}, \quad P_{ext}(t) = P_0 + at$$

$$t > 0 \quad P_0 + at \geq P_{ext}, \quad P_{ext}(t) = P_{ext}$$

donde a es una constante determinada por:

$$a = \frac{P_A}{\Delta t},$$

y Δt es un retraso para considerar el llenado de la tubería y la apertura de las válvulas.

CAPÍTULO

4

METODOLOGÍA: CÁLCULOS NUMÉRICOS

Aquí se describen los procedimientos para encontrar los umbrales: de las deformaciones superficiales de la IP y la IRT, de estabilidad difusiva, de formación de ondas de choque en el gas y en el líquido, de inestabilidad de Bjerknes y de doble periodo. El método general para calcular cada umbral se ejemplifica en la figura 4.1.

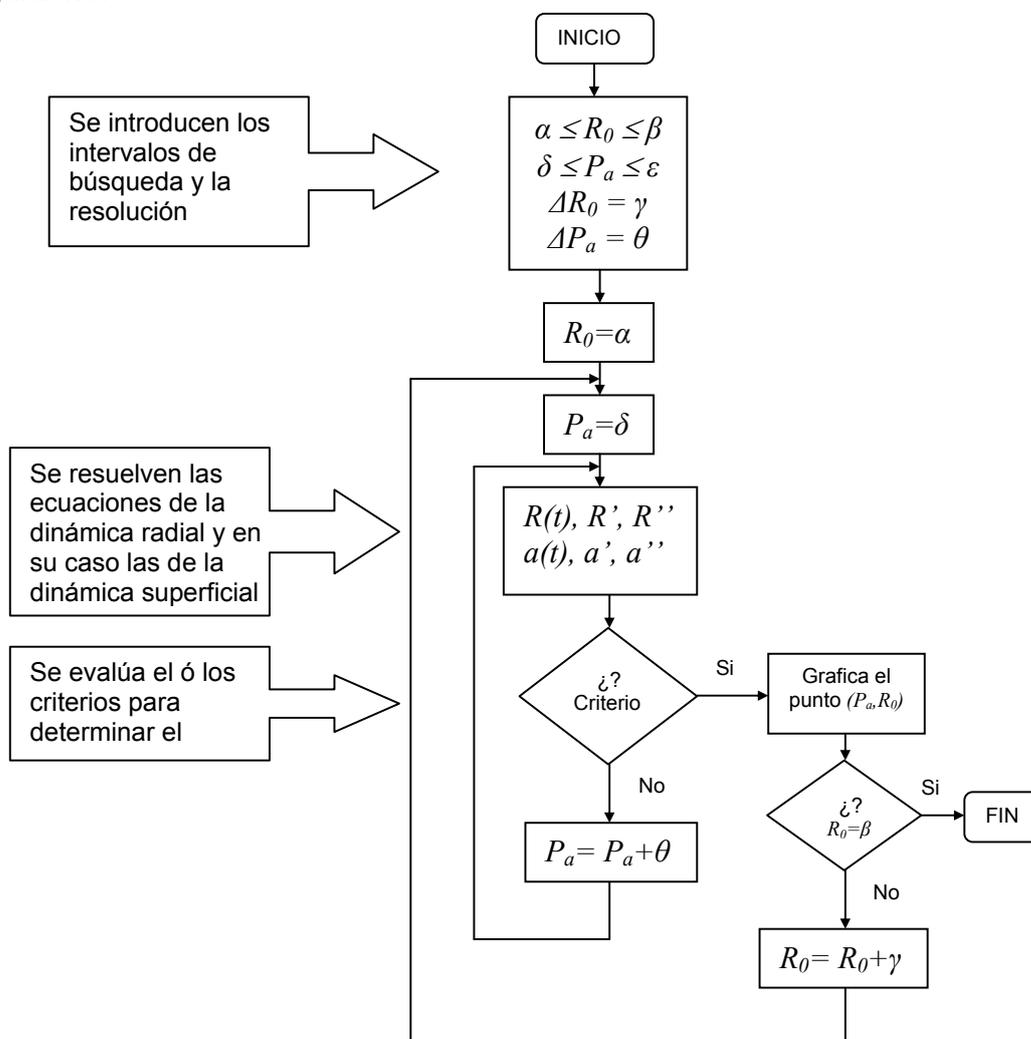


Figura 4.1 Diagrama de flujo para determinar los umbrales del espacio paramétrico P_a-R_0 .

Por supuesto existen algunas particularidades para calcular cada umbral que serán abordadas en detalle a lo largo del capítulo.

4.1 Movimiento radial: Solución de la Ecuación de Gilmore

La EG es resuelta numéricamente utilizando el comando NDSolve del programa MATHEMATICA. En dicho comando se utilizó el método “StiffnessSwitching” el cual se adapta y conmuta automáticamente entre un método numérico para resolver problemas “rígidos” (ExplicitModifiedMidpoint) y un método numérico para resolver problemas “no rígidos” (LinearlyImplicitEuler). Para mayores detalles se sugiere consultar¹¹².

4.2 Inestabilidad paramétrica

Es necesario recordar que la IP ocurre cuando una pequeña distorsión inicial en la forma de la superficie esférica de una burbuja crece y se acumula a lo largo de muchos ciclos del movimiento radial de la burbuja a escalas de tiempo del orden de los milisegundos. La inestabilidad paramétrica esta caracterizada por áreas “islas” en el espacio P_a - R_0 de formas intrincadas y por lo general de dimensiones pequeñas. Usualmente, estas islas no son tomadas en cuenta por que su tamaño es del orden de la incertidumbre experimental¹¹³. Entonces, las zonas de estabilidad e inestabilidad paramétricas en el espacio P_a - R_0 son delimitadas por una sola línea umbral (por encima de esta línea las burbujas son inestables).

Con fines ilustrativos, la figura (4.2a) muestra las características típicas de las áreas “islas” de la inestabilidad paramétrica calculadas para burbujas en condiciones de sonoluminiscencia según An *et al.*¹⁰⁶. Una vez eliminadas las islas, las zonas de estabilidad e inestabilidad en el espacio paramétrico son delimitadas con una sola línea continua, ver figura (4.2b). El criterio para eliminar las islas se tomó en forma cualitativa, así la línea divisoria se trazó libremente.

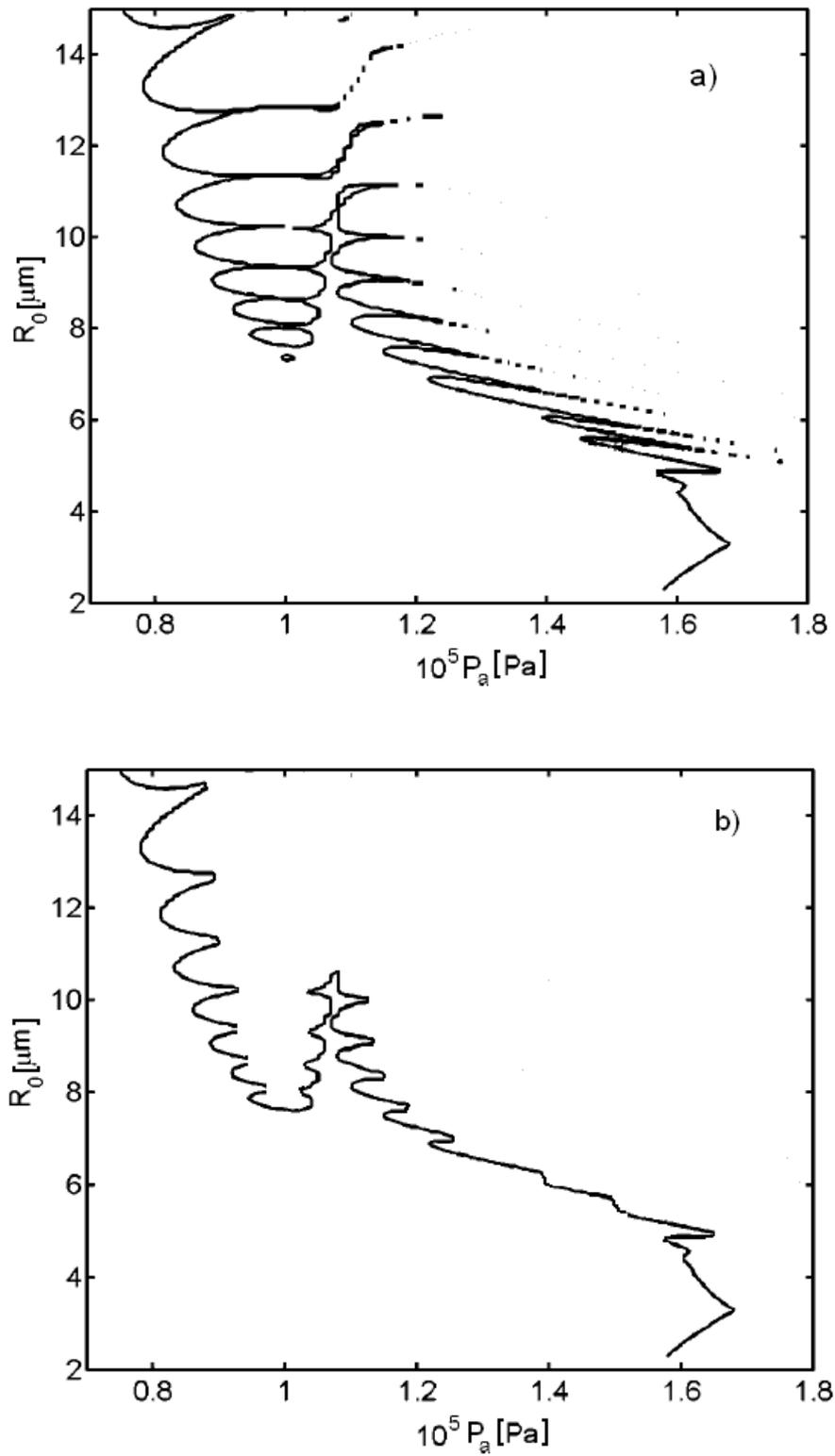


Figura 4.2 a) Umbral de inestabilidad con islas angostas de formas intrincadas en color negro; b) la línea aproximada del umbral de la IP correspondiente a la figura (a); las islas han sido eliminadas por ser del orden de la incertidumbre experimental.

Las burbujas en condiciones de sonoluminiscencia estable presentan un comportamiento radial periódico. Como las funciones $A_n(t)$ y $B_n(t)$ (ecs. 3.13 y 3.14 respectivamente) dependen del radio y sus derivadas temporales, se considera que ambas funciones también son periódicas con una frecuencia igual a la del campo de excitación, $T = 2\pi/\omega$. De acuerdo a lo anterior, la ec. (3.12) es reconocida como una ecuación de Hill cuya estabilidad se analiza con el cálculo de la matriz de transición de Floquet durante un ciclo de oscilación¹⁰². La inestabilidad paramétrica ocurre cuando el máximo valor propio de la matriz de transición es mayor a uno.

El método para calcular la IP utilizado en este trabajo consta de los siguientes pasos:

Paso 1)

Resolver la ecuación de la dinámica radial durante algunos ciclos para dejar atrás la solución transitoria y obtener la solución estable y periódica.

En este paso, el objetivo es determinar un número mínimo de ciclos de solución del modelo de Gilmore con los cuales se alcanza la solución estacionaria. Es importante establecer un número mínimo de ciclos para ahorrar tiempo de cómputo.

Cualitativamente, la solución transitoria de la EG se hace evidente a partir de algunos diagramas de bifurcación (ver Anexo A) construidos con los primeros ciclos de oscilación. Como primer intento, la EG fue resuelta para los tres primeros ciclos de oscilación y solo se graficaron los puntos correspondientes al radio inicial, R_0 , del segundo y tercer ciclos; dichos puntos delinear dos curvas de forma similar pero desfasadas entre sí (ver fig. 4.3a). Esta diferencia indica que la solución de la EG se encuentra en estado transitorio.

Al aumentar progresivamente el número de ciclos de solución, el desfaseamiento entre los puntos correspondientes al último par de ciclos se hace menos visible

delineándose una sola curva formada por una sucesión de puntos que representan estados permanentes y periódicos del sistema.

En las figuras (4.3 y 4.4 se muestran varios diagramas de bifurcación del modelo de Gilmore contruidos con las mismas condiciones iniciales ($R(0)=7\mu\text{m}$; $\dot{R}(0)=0\text{ m/s}$) y el mismo $\Delta P_{a^*} = \Delta P_a / B = 0.8 \times 10^{-6}$ (donde B es la constante de la ecuación de estado de Tait), pero utilizando distinto número de ciclos de solución; los parámetros como la frecuencia de excitación 26.5 kHz y las propiedades del agua son las mismas utilizadas por Hilgenfeldt *et al.*¹⁰².

El diagrama de la figura (4.3b) se construyó tomando en cuenta los cinco primeros ciclos de solución de la EG y solo se graficaron los puntos correspondientes al radio inicial de los ciclos cuarto y quinto, en este caso se observa un pequeño desfase entre las curvas indicando aún el estado transitorio de la solución. El diagrama de la figura (4.4a) se construyó con diez ciclos de solución de la EG y solo se graficaron los puntos correspondientes a los ciclos nueve y diez; en este caso el desfase entre las curvas es imperceptible indicando que la solución es periódica y permanente al menos en el intervalo ($0 \leq P_{a^*} \leq 0.0008$) ó ($0 \leq P_a \leq 0.243\text{ MPa}$). Por último en el diagrama de la figura (4.3b) se utilizaron sesenta ciclos de la solución y solo se graficaron los puntos correspondientes a los últimos diez ciclos. A simple vista los diagramas (4.4a) y (4.4b) no muestran diferencias entre sí indicando que es satisfactorio considerar como mínimo diez ciclos de solución para dejar atrás los efectos transitorios; al menos para este caso en particular ($R(0)=7\mu\text{m}$).

Un análisis similar al anterior, pero haciendo un barrido en R_0 en el rango ($1 \leq R_0 \leq 9\ \mu\text{m}$) con incrementos de $\Delta R_0 = 1\mu\text{m}$ y considerando el mismo intervalo de presiones ($0 \leq P_a \leq 0.243\text{ MPa}$); sugiere de igual forma que el número mínimo de ciclos de solución para dejar atrás los efectos transitorios es diez. Los resultados de un experimento numérico realizado por Simon Gábor¹¹⁴, muestran que incluso cinco ciclos de solución son suficientes para alcanzar la solución estacionaria en burbujas con radios $R_0 < 7\mu\text{m}$. Aunque el análisis de Simon se basa en la ERP y en un método diferente al aquí propuesto, sus resultados son equiparables con los aquí obtenidos ya que las curvas del “radio” calculadas con la EG y la ERP son

similares en los rangos de R_0 y P_a considerados (ver fig. 3.2, Cap.3), estos rangos son por supuesto aquellos en los que típicamente ocurre la SLUB.

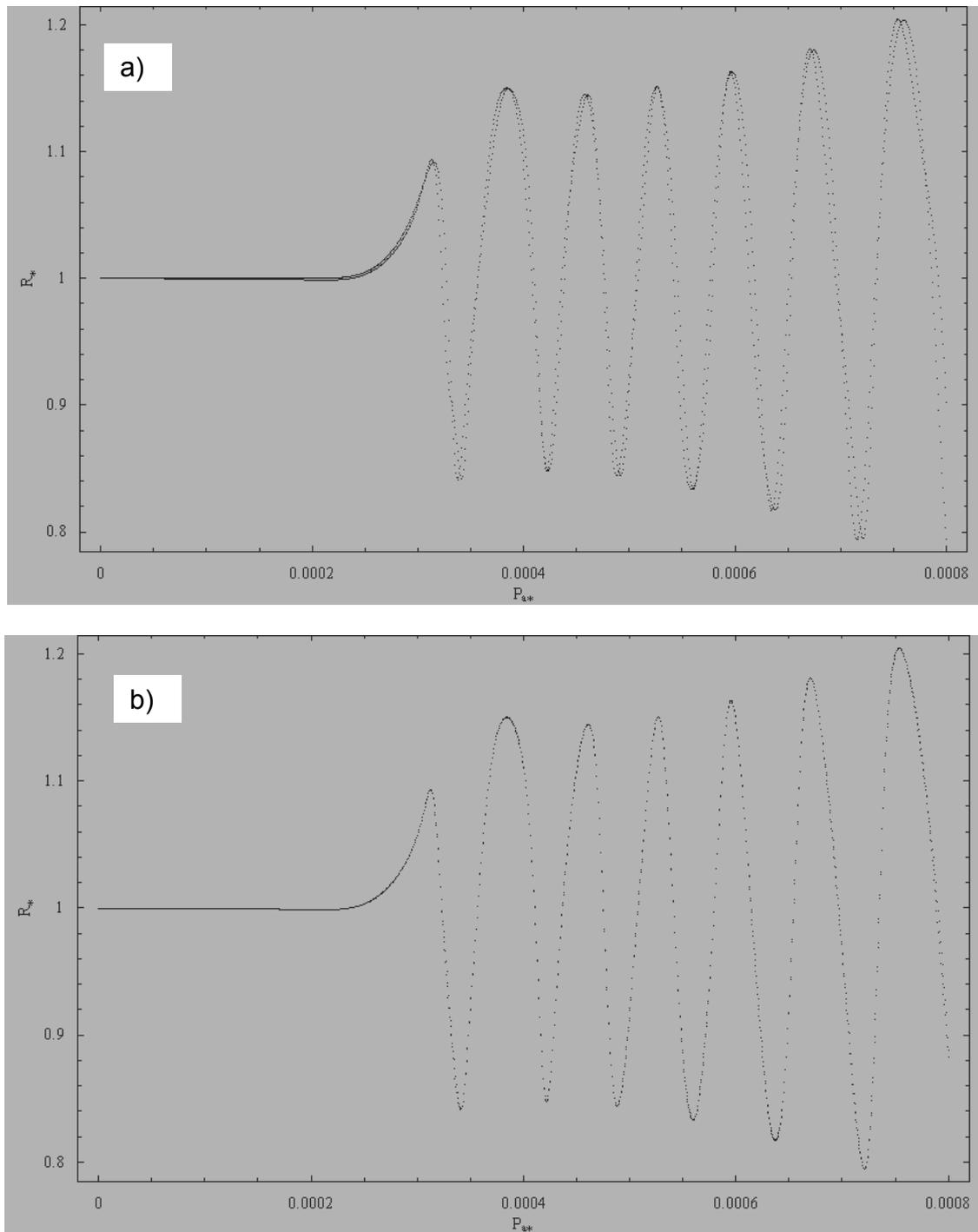


Figura 4.3 Diagramas de bifurcación para una burbuja de siete micras de radio inicial excitada con un campo acústico senoidal de 26.5 kHz, utilizando: a) tres ciclos de solución para generar cada punto del diagrama; b) cinco ciclos de solución. El eje de las abscisas está normalizado con respecto al radio inicial de la burbuja R_0 , el eje de las ordenadas se normaliza con respecto a la constante B de la ecuación de estado de Tait; es decir $P_a^* := P_a/B$.

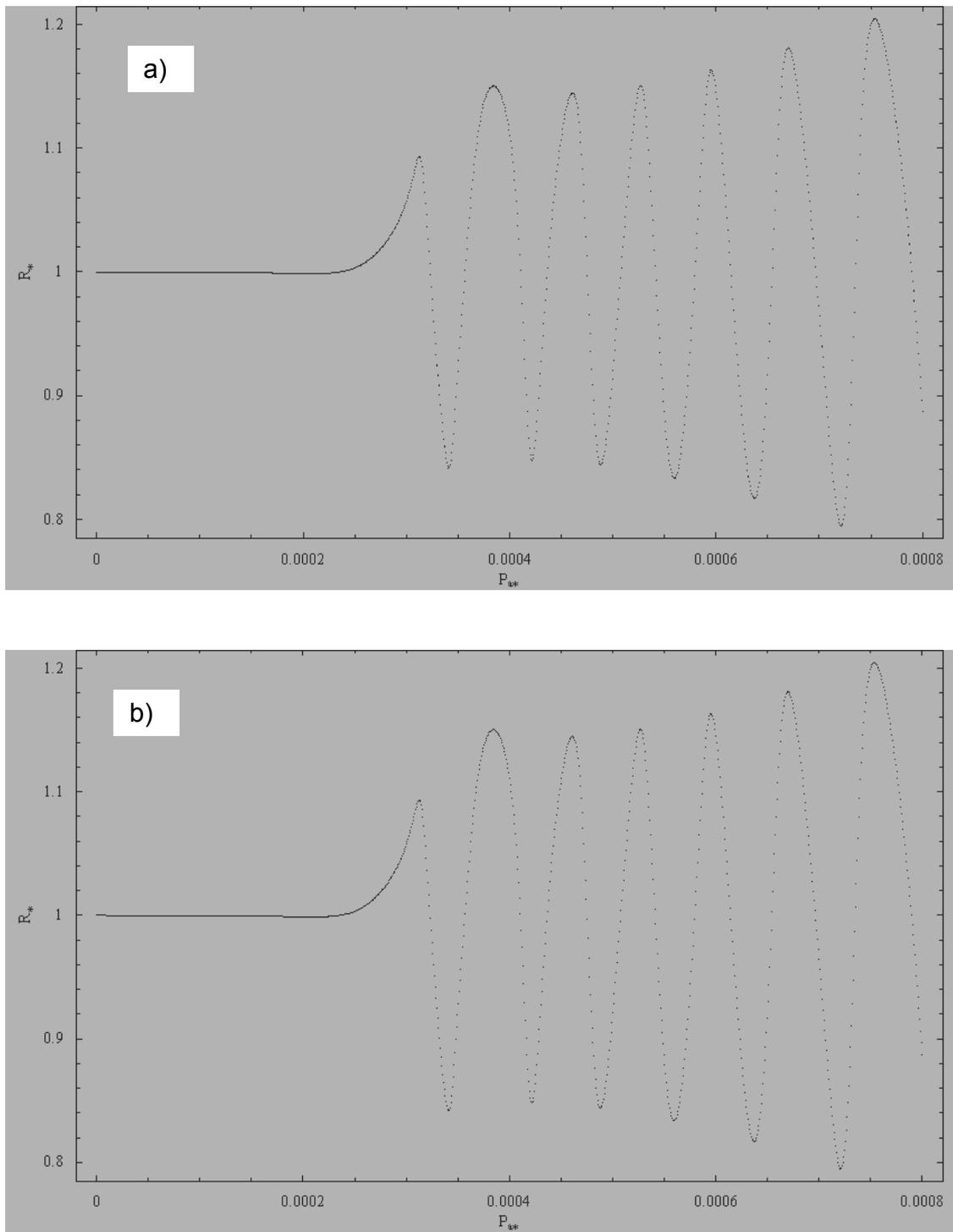


Figura 4.4 Diagramas de bifurcación para una burbuja de siete micras de radio inicial excitada con un campo acústico senoidal de 26.5 kHz, utilizando: a) diez ciclos de solución; b) sesenta ciclos de solución.

Paso 2)

Al comienzo del onceavo ciclo, se acopla la ecuación que simula la dinámica de la distorsión $a_n(t)$ con las ecuaciones de la dinámica radial para aplicar el análisis de estabilidad durante este ciclo.

La ecuación (3.12) se re-escrive como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_n(t) \\ \dot{a}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_n(t) & B_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(t) \\ \dot{a}_n(t) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

y la matriz de transición de Floquet $\Phi(0, T)$ que relaciona los *estados del sistema* (4.1) en los tiempos 0 y T ($T = 2\pi/\omega$), esta definida por^{115,116}:

$$\begin{pmatrix} a_{n11}(T) & a_{n21}(T) \\ \dot{a}_{n12}(T) & \dot{a}_{n22}(T) \end{pmatrix} = \Phi(0, T) \begin{pmatrix} a_{n11}(0) & a_{n21}(0) \\ \dot{a}_{n12}(0) & \dot{a}_{n22}(0) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Según algunos autores como Bauchau *et al.*¹¹⁶ y Rand¹¹⁷, la estabilidad del sistema (4.1) se determina con el siguiente procedimiento:

1. *Evaluación de la matriz de transición.* La ecuación (4.2) sugiere seleccionar dos condiciones iniciales independientes de tal forma que

$$\begin{pmatrix} a_{n11}(0) & a_{n21}(0) \\ \dot{a}_{n12}(0) & \dot{a}_{n22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n11}(0) & 0 \\ 0 & \dot{a}_{n22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Convenientemente, la matriz identidad se obtiene adimensionalizando las ecuaciones 3.2 - 3.9, 3.12 - 3.16 con las siguientes escalas de referencia:

$$\text{Tiempo: } \sqrt{\rho_0} R_0 / \sqrt{B}$$

$$\text{Longitud: } R_0$$

2. Luego se integran las ecuaciones de movimiento del sistema (4.1) en el intervalo de 0 a T para cada conjunto de condiciones iniciales (primero para el vector columna $[1, 0]^T$, luego para el vector $[0, 1]^T$), y así se encuentra que:

$$\Phi(0, T) = \begin{pmatrix} a_{n11}(T) & a_{n21}(T) \\ \dot{a}_{n12}(T) & \dot{a}_{n22}(T) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

3. Se evalúan los valores propios de la matriz de transición (4.4).
4. Se evalúa el siguiente criterio: Si el valor absoluto del máximo valor propio de la matriz $\Phi(0, T)$ es mayor a uno entonces el sistema (4.1) es inestable; y en caso contrario es estable.

Paso 3)

Se realiza una búsqueda en el espacio paramétrico P_a - R_0 , para establecer en que pares de puntos la burbuja es estable/inestable según el criterio del inciso d) del paso anterior.

Entrando en detalles, la búsqueda se inicia fijando dos rangos de interés, uno para el radio inicial ($R_{01} \leq R_0 \leq R_{02}$) y otro para la presión aplicada ($P_{a1} \leq P_a \leq P_{a2}$). Después se realiza un barrido en el espacio P_a - R_0 con incrementos fijos en el radio ΔR_0 y en la presión ΔP_a .

Para obtener una representación completa de las áreas de estabilidad/inestabilidad paramétrica (ver figura 4.2a) se evalúa el criterio del inciso (d) a través de todo el rango de presión aplicada y a través de todo el rango del radio inicial. Los puntos (P_a , R_0) en el espacio P_a - R_0 que corresponden a burbujas inestables se grafican en color oscuro, los puntos que corresponden a burbujas estables no se grafican (sin embargo quedan representados por las áreas en color blanco).

Para obtener una sola línea (ver figura 4.2b) que divide las zonas de estabilidad/inestabilidad se procede de diferentes maneras:

- 1) Una de ellas es calcular todas las áreas de estabilidad/inestabilidad como se propuso arriba y luego eliminar las pequeñas "islas" que carecen de valor práctico¹¹³.
- 2) Otra manera consiste en iniciar la búsqueda para un valor fijo en R_0 digamos $R_0=0$; conforme avanza el barrido para P_a se evalúa el criterio del inciso (d) hasta que la burbuja sea inestable, en esta situación el barrido en P_a se detiene y se inicia una nueva búsqueda partiendo de un nuevo valor

fijo de R_0 que es incrementado en ΔR_0 . Este proceso secuencial de búsqueda se repite hasta cubrir todo el rango del radio inicial. Vale la pena hacer notar que esta manera alternativa consume menos tiempo de cómputo (ver diagrama 4.1).

4.3 Inestabilidad Rayleigh-Taylor (IRT)

Para cada punto (P_a, R_0) del espacio paramétrico P_a - R_0 se realiza lo siguiente:

Primer Paso:

La ecuación de la dinámica radial se resuelve para los primeros diez ciclos de oscilación, así se obtiene la solución estacionaria.

Segundo Paso:

La ecuación de la dinámica radial se resuelve para el onceavo ciclo junto con la ecuación de la dinámica superficial (3.12). La perturbación inicial se debe a diversos factores como a fluctuaciones moleculares por gradientes de temperatura⁹ entre otros. Siguiendo a Yuan *et al.*¹⁰⁵ se consideró una perturbación inicial de:

$$(a_n(0) = 10 \text{ nm}, \dot{a}_n(0) = 0 \text{ m/s}) \quad (4.5)$$

Tercer Paso:

Se evalúa el criterio (3.19) entre los tiempos $t_{R_{\max}}$ y t_{RT} ; por supuesto correspondientes al onceavo ciclo. Según nuestros experimentos numéricos, se determinó que $t_{RT} = 2 \mu\text{s}$.

Cuarto Paso:

La línea umbral de de la IRT es el resultado de todos los puntos que cumplen con el criterio (3.19) localizados mediante una búsqueda barriendo a lo largo de los intervalos de R_0 y P_a .

4.4 Umbral de Equilibrio difusivo (UED)

Para establecer éste límite, primero se calcularon las curvas de equilibrio difusivo con el siguiente procedimiento:

Primer Paso:

Para determinar las curvas de equilibrio difusivo en el espacio (P_a, R_0) se fijan en primera instancia dos rangos de búsqueda, uno para el radio inicial $(R_{01} \leq R_0 \leq R_{02})$ y otro para la presión aplicada $(P_{a1} \leq P_a \leq P_{a2})$. También se fija un valor de interés para la saturación de gas C_∞/C_0 , por ejemplo $C_\infty/C_0=0.001\%$.

Segundo Paso:

La ecuación de la dinámica radial se resuelve para los primeros diez ciclos de oscilación tomando $P_a = P_{a1}$, y como condiciones iniciales: $R_0 = R_{01}$ y $\dot{R}(0) = 0$.

Tercer Paso:

Con la solución del onceavo ciclo se calcula " $\langle P_g \rangle_{t,4} / P_0$ " (según las Ecs. 3.20 y 3.21) a lo largo de el intervalo de búsqueda para la presión aplicada $(P_{a1} \leq P_a \leq P_{a2})$; iniciando con P_{a1} e incrementando paulatinamente en una cantidad ΔP_a hasta alcanzar el valor de interés para la saturación de gas, que como ejemplo se fijó en $C_\infty/C_0=0.001\%$.

Cuarto Paso:

La búsqueda continúa incrementando paulatinamente el valor de R_0 y aplicando el segundo y tercer pasos hasta alcanzar el límite superior del rango de búsqueda establecido para el radio inicial, esto es cuando $R_0 = R_{02}$.

En la figura (4.5) se muestran dos curvas típicas de equilibrio difusivo en burbujas sonoluminiscentes; en una de ellas considerando una saturación de gas del 0.1 % en la otra se considera del 0.02%. La parte punteada de las curvas representa puntos de equilibrio difusivo inestable, en contraste la parte gruesa-continua es para representar los puntos de equilibrio difusivo estable cuya pendiente es

positiva, es decir:

$$\frac{d\langle P_g \rangle_{t,4}}{dR_0} > 0. \quad (4.6)$$

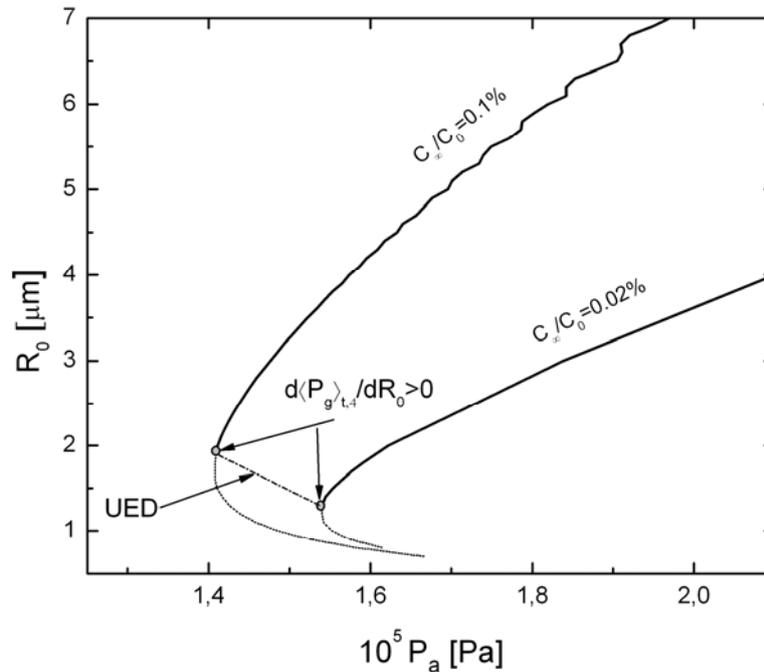


Figura 4.5 Curvas de equilibrio difusivo para burbujas sonoluminiscentes en agua y excitadas con un campo acústico senoidal de 32.8 kHz. La parte gruesa-continua representa puntos de equilibrio difusivo estable, la parte punteada es para burbujas en equilibrio difusivo inestable.

El UED se trazó uniendo los puntos donde cada curva de equilibrio difusivo comienza a ser estable.

4.5 Formación de ondas de choque: en el gas y en el líquido.

Estas curvas se calcularon en forma similar a las de equilibrio difusivo. La única diferencia son los criterios que determinan cada umbral. Para que se formen ondas de choque en el gas se evalúa el criterio (3.22).

Para que se formen ondas de choque en el líquido, se tiene que cumplir el criterio (3.27). Para ondas de choque cuyo Mach es superior a uno, también se utilizó el criterio (3.27) pero ahora:

$$M_l = \frac{|\dot{R}|}{C} \approx \zeta, \quad \text{con } \zeta > 1 \quad (4.7)$$

4.7 Umbral de temperatura y curvas de inestabilidad de Bjerknes

Estas curvas límite se calcularon en forma similar a las de equilibrio difusivo. Hay que enfatizar que para el umbral de temperatura el proceso de compresión de los gases se considera adiabático y el criterio a evaluar es el (3.28). Para determinar los umbrales de Bjerknes hay que evaluar el criterio (3.31).

4.8 Umbral de oscilaciones del radio inicial (UORI)

Esta curva se obtuvo a partir de 19 diagramas de bifurcación de la ecuación de Gilmore como el que se muestra en la figura (4.6). Cada diagrama representa el comportamiento de R_0 al variar la amplitud del campo acústico P_a . Para más detalles de su construcción se sugiere ver los apéndices A, B y [118].

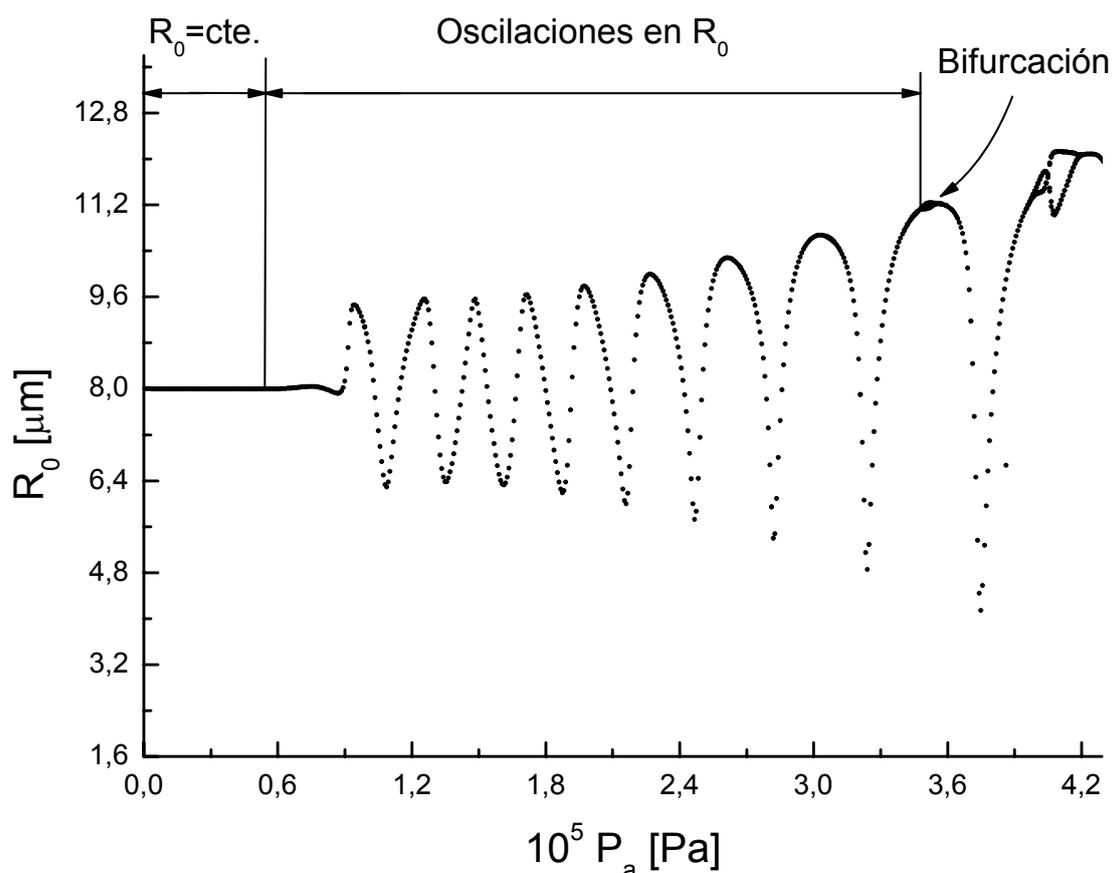


Figura 4.6 Diagrama de bifurcación de la EG para una burbuja de $R_0 = 8 \mu\text{m}$ (correspondiente a $P_a = 0$) en agua y excitada con un campo acústico de 26.5 kHz.

Para $0 < P_a < 0.6 \times 10^5$ Pa, R_0 permanece constante y la solución estacionaria de la ecuación de Gilmore es periódica con $T = 2\pi/\omega$. Cuando $P_a \gtrsim 0.6 \times 10^5$ Pa, la solución estacionaria de la EG se mantiene periódica con $T = 2\pi/\omega$, pero el radio inicial oscila conforme aumenta P_a . El inicio de éste comportamiento, coincide con el UORI; para determinarlo se definió el siguiente criterio:

$$\left| \frac{dR_0^*}{dP_a^*} \right| \geq 10 \quad (4.8)$$

que establece que la primera derivada del radio inicial con respecto a la presión de excitación (normalizada con respecto a B , $P_a^* = P_a/B$) debe ser mayor o igual a 10. Donde R_0^* representa al radio inicial en función de la presión $R_0(P_a)$ normalizado con respecto al radio inicial correspondiente a $P_a=0$; es decir $R_0^* = R_0(P_a)/R_{0@P_a=0}$. Y P_a esta normalizada con respecto a B ; esto es $P_a^* = P_a/B$.

Para aplicar el criterio (4.8) se construyó una función de interpolación entre los puntos discretos del diagrama de bifurcación. Vale la pena mencionar que tanto el proceso de interpolación obtenido con el programa OriginPro 7.5 como los programas para obtener los diagramas de bifurcación encierran errores numéricos que solo permitieron encontrar variaciones del radio inicial con respecto a la presión no menores a 10.

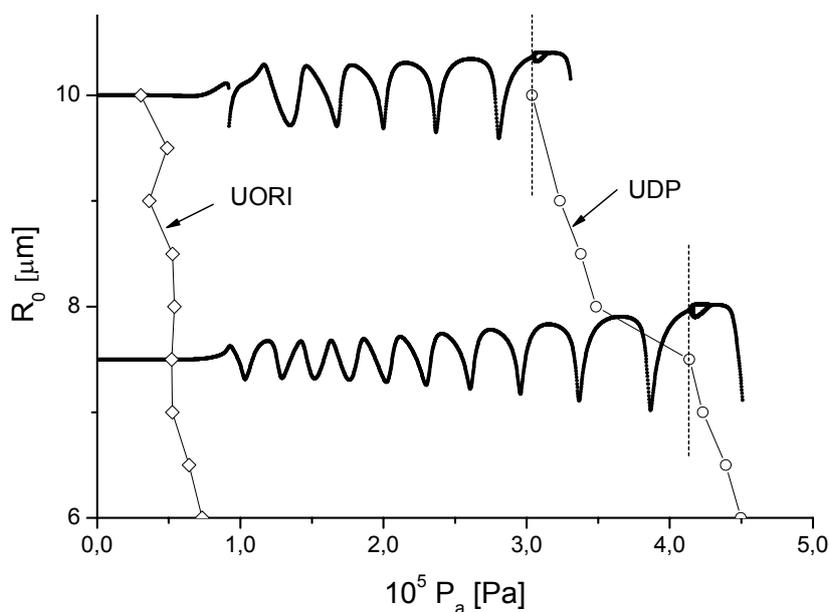


Figura 5.7 Diagramas de bifurcación de la EG para 2 burbujas de $R_0 = 7.5 \mu\text{m}$ y $R_0 = 10 \mu\text{m}$ ($P_a=0$) excitadas con un campo acústico de 26.5 kHz.

En la figura (4.7) se muestran dos diagramas de bifurcación para distintos R_0 , y la línea del UORI que se construyó uniendo los 19 puntos (símbolos romboidales) donde se satisface el criterio (4.8).

4.9 Umbral de doble periodo (UDP)

En referencia a la figura (4.6), cuando $P_a \approx 3.45 \times 10^5$ Pa, la solución estacionaria de la EG se bifurca. Para $3.45 < P_a < 3.51 \times 10^5$ Pa la solución presenta doble periodo. El UDP se construyó uniendo los 19 puntos (círculos huecos, Fig. 4.7) para los cuales la bifurcación es incipiente y ocurre por vez primera.

CAPÍTULO

5

RESULTADOS Y SU ANÁLISIS

En esta sección se presentan las curvas umbrales del espacio P_a - R_0 calculadas numéricamente considerando distintas condiciones ambientales y frecuencias de excitación. Especialmente los umbrales de la IP, de formación de ondas de choque y del doble periodo obtenidos para $f=26.5$ kHz y condiciones a nivel del mar, sirvieron para hacer comparaciones con los umbrales teóricos publicados en la literatura y así validar los diferentes métodos numéricos y programas de cómputo desarrollados.

Los procedimientos para calcular los umbrales de la IRT y de estabilidad difusiva fueron validados comparándolos con resultados experimentales obtenidos a 32.8 kHz y a condiciones normales de presión y temperatura.

También se presentan los cálculos de las zonas de estabilidad-inestabilidad en el espacio P_a - R_0 a condiciones ambientales de la ciudad de México. Estos serán útiles en trabajos teórico-experimentales sobre SLUB ha realizarse en algunas instalaciones del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Por otro lado se presentan los cálculos del modelo hidrodinámico-termodinámico de una burbuja cónica producida en Tubo-U y se realizan algunas comparaciones con la hidrodinámica de una burbuja esférica luminiscente.

Durante el cálculo de las inestabilidades paramétrica y de Rayleigh-Taylor, surgió el interés por estudiar el efecto que tienen tanto las variaciones de densidad del gas como del líquido en las deformaciones superficiales. Se consideraron tres casos de estudio:

Caso I: La relación de densidades $RD=\rho_g/\rho_l$ en las Ecs. (3.13) y (3.14) es igual a cero, empleando las mismas fórmulas utilizadas en [102].

Caso II: La densidad del gas varía en función del tiempo y es modelada con la Ec. (3.9), la densidad del líquido se considera constante $\rho_l=1000 \text{ kg/m}^3$; por supuesto la RD es también función del tiempo.

Caso III: Las densidades del líquido y del gas varían en función del tiempo, Ecs. (3.5) y (3.9) respectivamente; en este caso la RD es también función del tiempo.

5.1 Espacio paramétrico P_a - R_0

I) Inestabilidad Paramétrica (IP)

a) Comparación vs. los umbrales teóricos de Hilgenfeldt et al.¹⁰²

En la figura (5.1), se observan dos curvas que representan la inestabilidad paramétrica de burbujas inmersas en agua y excitadas acústicamente con una función senoide. La línea gruesa-continua fue extraída del trabajo de Hilgenfeldt et al.¹⁰², quienes la calcularon con la ERP considerando: agua a condiciones normales de presión y temperatura (101325 Pa y 293 K, respectivamente), una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma = 1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de todo el ciclo, y una frecuencia de excitación de 26.5 kHz. La línea fina-punteada (correspondiente al caso I) fue calculada con la EG utilizando exactamente las mismas condiciones ambientales y los mismos parámetros que los utilizados en [102]; además se utilizó la ecuación (3.12) y la IP se determinó mediante una búsqueda secuencial en el espacio R_0 - P_a (ver Cap. 4). Para el análisis de la estabilidad se consideró un armónico esférico de orden $n = 2$ por ser el más inestable¹¹⁹. En los cálculos también se consideró que la densidad del gas ρ_g es igual a cero en todo momento y la densidad del líquido ρ_l permanece constante a lo largo de cada ciclo, siendo igual a 1000 kg/m^3 . Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $3 \leq R_0 \leq 10 \text{ } \mu\text{m}$; $0.05 \leq P_a \leq 1.5 \times 10^5 \text{ Pa}$. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.25 \text{ } \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.05 \times 10^5 \text{ Pa}$.

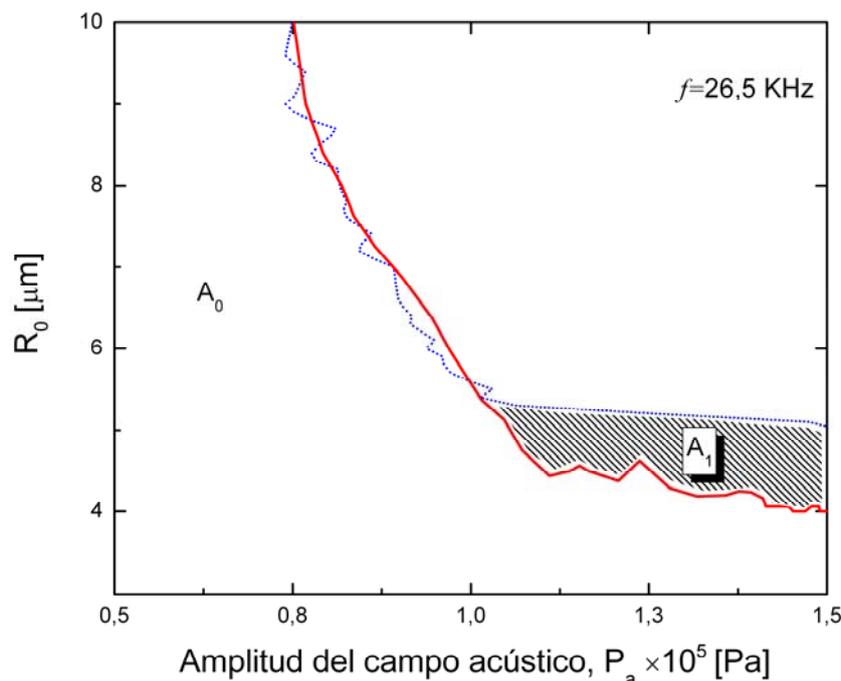


Figura 5.1 Efecto de la compresibilidad del líquido en las líneas limítrofes de la inestabilidad paramétrica de una burbuja inmersa en agua. Curva en línea gruesa-continua calculada por Hilgenfeldt et al.¹⁰² utilizando la ERP, la curva en línea punteada fue calculada con la EG y corresponde al caso I.

La figura (5.1) muestra concordancia entre las curvas calculadas con la EG y la ERP a presiones de excitación de entre 0.7 y 1×10^5 Pa y $R_0 \gtrsim 5.5$ μm . Pero a presiones mayores a 1×10^5 Pa y radios iniciales menores a 5.5 micras, la curva de la IP calculada con el modelo de Gilmore predice un umbral por encima del umbral obtenido con la ERP; esta diferencia es de alrededor de una micra en el intervalo de presiones (1 a 1.5×10^5 Pa) en el que típicamente se observa sonoluminiscencia. El área de estabilidad calculada con la EG es mayor en un 11.5% a aquella calculada con la ERP; esto es $(A_1 \times 100)/A_0 \approx 11.5$. Por supuesto, éste cálculo depende de la ventana que se haya considerado; para este caso fue: $3 \lesssim R_0 \lesssim 10$ μm , $0.5 \lesssim P_a \lesssim 1.5 \times 10^5$ Pa.

El incremento en la región de estabilidad se explica por los términos de corrección (\dot{R}/c) que contiene el modelo de Gilmore para simular la compresibilidad del líquido; los cuales, se traducen en aceleraciones de la pared de la burbuja menores a aquellas calculadas con la ERP. Ahora, se sabe que la aceleración de la burbuja juega un papel fundamental en la estabilidad superficial de la misma.

Menores aceleraciones radiales, implican burbujas más estables superficialmente como encontraron Brenner *et al.*¹¹, Yuan *et al.*¹⁰⁵ y Augsdörfer *et al.*¹⁰³. El efecto de la disminución en la aceleración se observa en la figura (5.2). El valor máximo de \ddot{R} calculado con la EG resulta ser un orden de magnitud menor que aquel calculado con la ERP para el intervalo $1.2 \leq P_a \leq 1.4 \times 10^5$ Pa. Inclusive, cuando la amplitud de la presión de excitación es cercana al límite de extinción de la SLUB ($P_a \approx 1.6 \times 10^5$ Pa), la disminución en la aceleración es aún mayor.

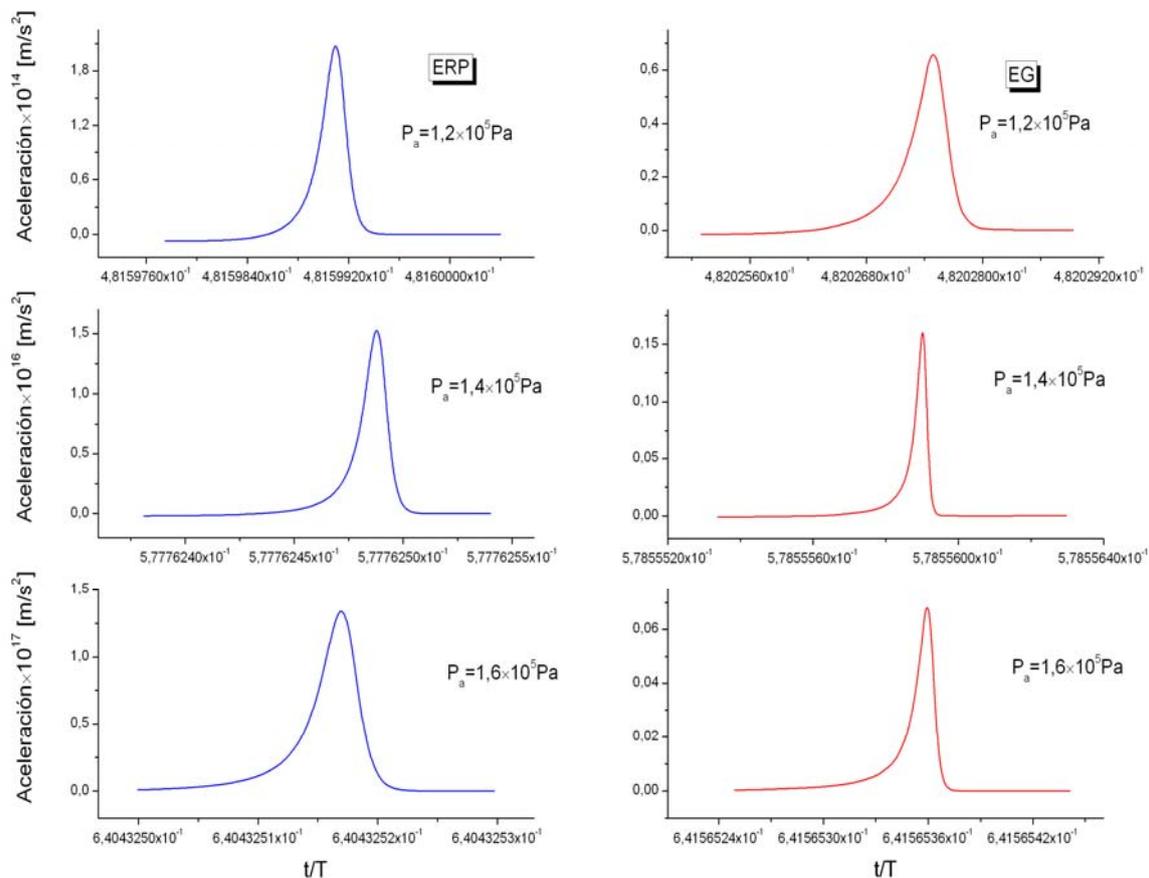


Figura 5.2 Disminución de la aceleración de la burbuja debida a los términos de compresibilidad (\dot{R}/c) contenidos en la EG. Las curvas de la columna izquierda fueron calculadas con la ERP, y las de la columna derecha con la EG. Se consideraron burbujas de gas inmersas en agua excitadas con una frecuencia de 26.5 kHz. La comparación se hizo tomando en cuenta tres valores de P_a en el intervalo típico de la SLUB; $1.2 \leq P_a \leq 1.6 \times 10^5$ Pa.

En la figura (5.3) se muestra la comparación entre las curvas de la inestabilidad paramétrica, considerando armónicos esféricos de orden dos $n = 2$, para burbujas de argón inmersas en agua a las mismas condiciones ambientales y con los

mismos parámetros del líquido y de la excitación acústica utilizados en [102]. La IP en línea gruesa y continua fue calculada tomando en cuenta variaciones de la densidad del líquido y del gas como funciones del tiempo (mediante las Ecs. 3.5 y 3.9 respectivamente); esta línea representa el *caso III*. La línea delgada y discontinua se calculó tomando en cuenta únicamente la variación de la densidad del gas dentro de la burbuja, representando el *caso II*. Las curvas en línea delgada-continua y punteada corresponden a las curvas mostradas en la figura (5.1). Los intervalos analizados fueron: $1 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$; $0.5 \leq P_a \leq 4.5 \times 10^5 \text{ Pa}$. Los incrementos en el radio inicial y en la presión aplicada fueron: $\Delta R_0 = 0.25 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.05 \times 10^5 \text{ Pa}$.

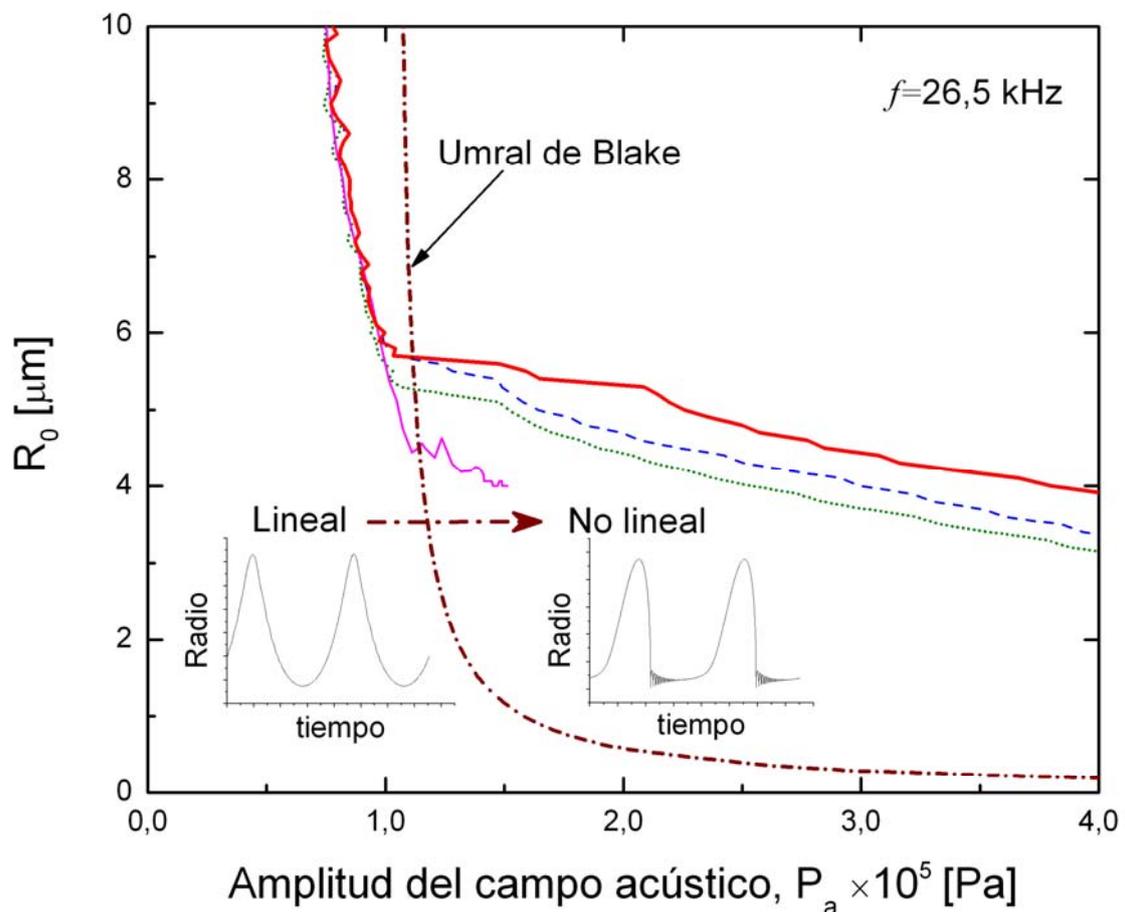


Figura 5.3 Efecto de las variaciones de densidad del gas y del líquido sobre las líneas de inestabilidad paramétrica de una burbuja inmersa en agua. Curva en línea delgada-continua calculada por Hilgenfeldt et al.¹⁰² utilizando la ERP, curva en línea punteada fue calculada con la EG para $\rho_g=0$ y $\rho_l=1000 \text{ kg/m}^3$; caso I. La curva de la IP en línea delgada-discontinua se calculó con la EG para $\rho_g(t) \neq 0$ y $\rho_l=1000 \text{ kg/m}^3$; caso II. La curva en línea gruesa-continua se calculó con la EG para $\rho_g(t) \neq 0$ y $\rho_l(t) \neq 0$; caso III.

En la figura (5.3) no se aprecian diferencias importantes entre las curvas para burbujas de $5.5 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$ sometidas a bajas presiones de excitación, $P_a < 1 \times 10^5 \text{ Pa}$. Cuando la presión de excitación es alrededor de $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ (marcada con una línea hipérbola, que representa el umbral de Blake [22]) y $R_0 \approx 4\text{-}6 \mu\text{m}$, el comportamiento de las curvas de estabilidad comienza a ser diferente entre sí; bajo estas condiciones, el movimiento radial de las burbujas cambia de lineal a no-lineal. En este régimen, la burbuja se expande “lentamente” y colapsa en forma rápida (ver figuras en la parte inferior izquierda), y los efectos de compresibilidad del líquido empiezan a ser notables. Claramente las variaciones de densidad del gas y del líquido amplían la zona de estabilidad; es decir, producen un efecto estabilizador sobre la deformación superficial. Un análisis más detallado del efecto estabilizador por los cambios de densidad se hará más adelante.

En la figura (5.4) se muestra el aumento en las áreas de estabilidad debido a la compresibilidad del líquido y las variaciones de densidad del gas y del líquido. Los cálculos de dichas áreas se realizaron en una ventana en la que típicamente se produce la SLUB en agua; $1.5 \leq R_0 \leq 6$; $1.2 \leq P_a \leq 1.63 \times 10^5 \text{ Pa}$ (ver Cap.2, fig. 2.2). Hay que notar que el límite inferior para $R_0 \approx 1.5$ corresponde a bajas concentraciones de gas disuelto en el agua $C_\infty / C_0 \leq 0.001 \%$, a las cuales las burbujas alcanzan la estabilidad difusiva. El límite superior para el radio inicial $R_0 \leq 6 \mu\text{m}$, está limitado por la curva para el caso III, sin embargo éste límite coincide aproximadamente con el límite observado experimentalmente $R_0 \leq 6 - 7 \mu\text{m}$ [119]. También es importante señalar que la línea IP de Hilgenfeldt *et al.*¹⁰² (línea delgada-continua) fue calculada en el rango $1.5 \leq P_a \leq 1.63 \times 10^5 \text{ Pa}$ siguiendo el método de éstos autores. Es claro que al utilizar la EG en lugar de la ERP, se predice un incremento en el área de estabilidad de aproximadamente 31.5 % ($A_1 \times 100 / A_0 \approx 31.5$). Dicho aumento es atribuible a la disminución de las aceleraciones de la pared de la burbuja debida a los términos de compresibilidad contenidos en la EG. Si adicionalmente se consideran variaciones de densidad del gas, se predice un incremento extra de alrededor del 13.7 % ($A_2 \times 100 / A_0 \approx 13.7$). Y si además se toman en cuenta las variaciones de densidad del líquido, se predice

un incremento extra de alrededor del 9.2 % ($A_3 \times 100 / A_0 \approx 9.2$); el cual es comparable en magnitud con el incremento encontrado por los cambios en ρ_g .

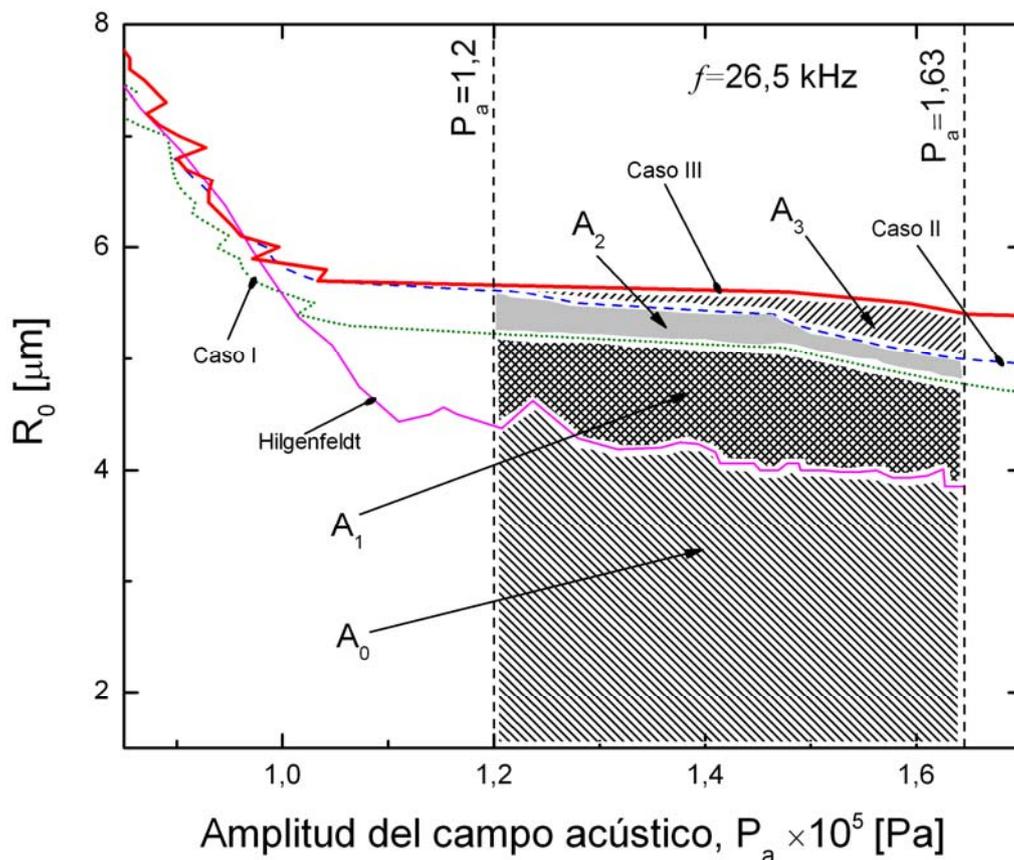


Figura 5.4 Incremento de la región de estabilidad, en el espacio $P_a - R_0$, debido al efecto de la compresibilidad del líquido (A_1), las variaciones de densidad del gas (A_2) y del líquido (A_3). Las diferentes curvas de la IP corresponden a las mostradas en la figura (5.3).

Por lo anterior, el efecto dominante en la estabilización de las burbujas, es el de la compresibilidad del líquido.

En conjunto, la inclusión de los tres efectos predice un aumento en el área de estabilidad de alrededor del 54.4 % (esta área está delimitada por: $4 \lesssim R_0 \lesssim 6 \mu\text{m}$, $1.2 \lesssim P_a \lesssim 1.6 \times 10^5 \text{ Pa}$); este resultado tiene diversas implicaciones:

1. Una mayor área de estabilidad implica burbujas más grandes oscilando radialmente en forma no lineal. Las burbujas pueden ser esféricas o seguir oscilando radialmente con una ligera deformación superficial¹²⁰.

2. Las burbujas esféricas concentran de manera más eficiente la energía, algunas observaciones indican que de hecho una burbuja deformada emite un pulso más intenso que una burbuja esférica bajo las mismas condiciones de excitación¹²¹.
3. Las burbujas en el área de estabilidad extra, colapsan alcanzando radios mínimos (R_{min}) del orden del radio de van der Waals, es decir $R_{min} \sim R_0/8.86$; en otras palabras la densidad del gas alcanza la densidad del agua a temperatura ambiente $\sim 1200 \text{ Kg/m}^3$. Ver figura (5.5a).
4. La relación de expansión definida como: $RE=R_{max}/R_0$ (donde R_{max} es el radio máximo de la burbuja cuando esta se expande), es un parámetro que da información de la concentración de energía de las burbujas durante el colapso¹²². A mayores RE mayor concentración de energía y viceversa. Las burbujas en el área de estabilidad extra, no son tan eficientes concentrando la energía pues solo alcanzan relaciones de expansión de $10 \lesssim RE \lesssim 30$. En cambio, burbujas más pequeñas excitadas a altas presiones alcanzan los valores máximos de la RE. Este comportamiento está directamente ligado a la concentración de gas disuelto en el líquido y por ende a la cantidad de gas dentro de la burbuja. Cuando una burbuja oscila durante muchos ciclos, su contenido se "rectifica" quedando únicamente en su interior gas noble (Argón, típicamente)¹⁰⁷. Manteniendo fija la amplitud de la presión de excitación (P_a); se tiene, que a mayor saturación de gas C_∞ / C_0 , mayor cantidad de gas noble quedará en la burbuja (implicando un mayor volumen) y la concentración de energía será menor. Ver figura (5.5b).
5. Si se considera un modelo de compresión mixto de los gases contenidos en la burbuja ($\gamma=1$ a lo largo de todo el ciclo de oscilación, excepto cuando la burbuja está muy cerca del radio mínimo, allí $\gamma=5/3$), las temperaturas máximas estarían en el rango: $20000 \lesssim T_g \lesssim 40000 \text{ K}$ [73]. A estas temperaturas se ionizan los gases y la emisión de luz provendría de la

desaceleración de electrones “bremsstrahlung” provenientes del plasma. Es claro observar en la Figura (5.5c) que las burbujas pequeñas excitadas con altas amplitudes del campo acústico alcanzan las máximas temperaturas $T_g \approx 60000$ K. Esto sin embargo, no implica que los pulsos de luz sean brillantes; y la razón es porque a menor cantidad de gas se tienen menor cantidad de emisores¹¹⁹. De hecho las burbujas con una cantidad intermedia de emisores y con menores RE parecen ser las más brillantes (zona sin cuadrícula en la figura 5.5c).

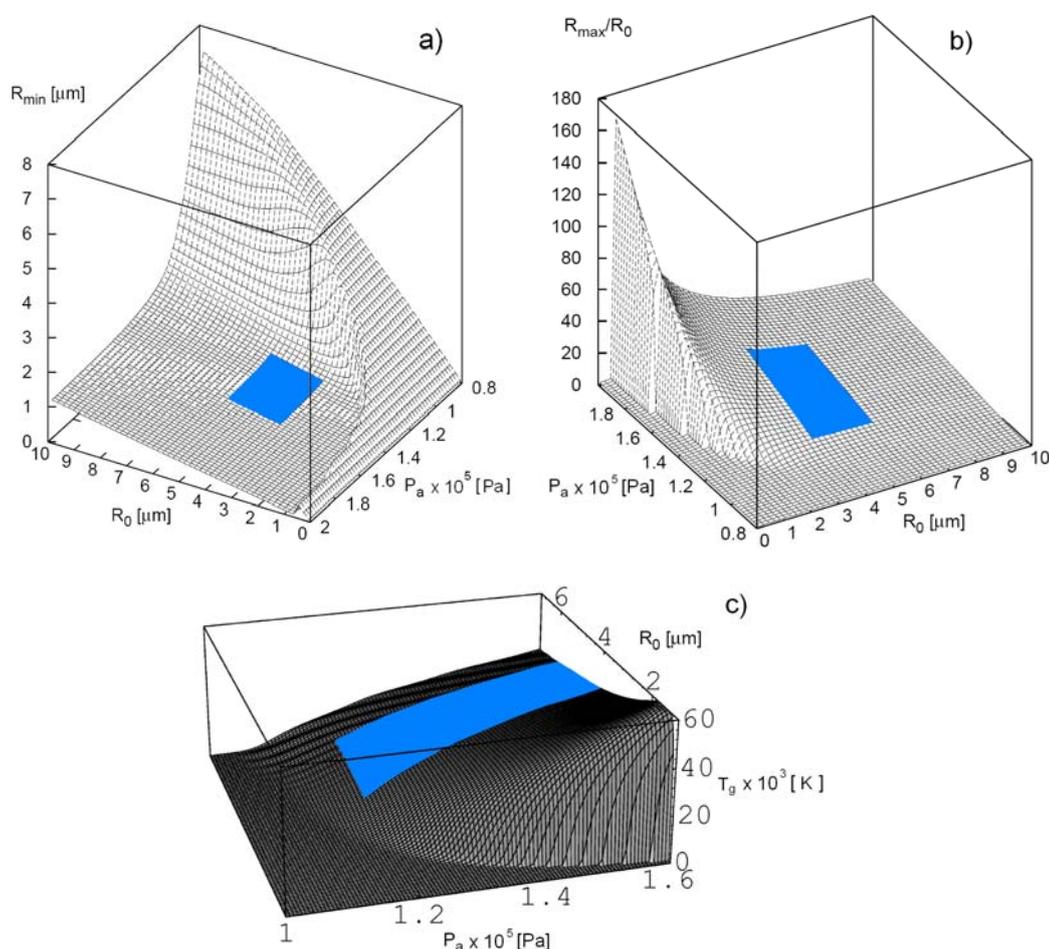


Figura 5.5 La ventana superficie (sin cuadrícula) indicada en cada una de las tres figuras, representa el incremento del 54.4 % en el área de estabilidad predicho por el modelo propuesto; a) radio mínimo¹²³, b) relación de expansión¹²³, c) temperatura máxima del gas en la etapa final de compresión⁷³. Las figuras (a) y (b) fueron calculadas para una frecuencia de 20 kHz; la figura (c) se calculó para una frecuencia de 26.5 kHz. Esta diferencia no es substancial para la comparación que se está realizando, pues solo es con el fin de dar una idea de los ordenes de magnitud de los parámetros analizados.

b) Comparaciones vs. los experimentos de Ketterling y Apfel ¹¹⁹, y vs. otros resultados teóricos ^{102,113}.

El cálculo de las curvas de la IP se realizó siguiendo el método explicado en el Capítulo 4; págs. 60-66. Se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua a condiciones normales de presión y temperatura (101325 Pa y 293 K, respectivamente), una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma=1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, una frecuencia de excitación de $f = 32.8$ kHz y la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2). Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $1 \leq R_0 \leq 9.5 \mu\text{m}$; $0.6 \leq P_a \leq 2.6 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.05 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.0016 \times 10^5$ Pa.

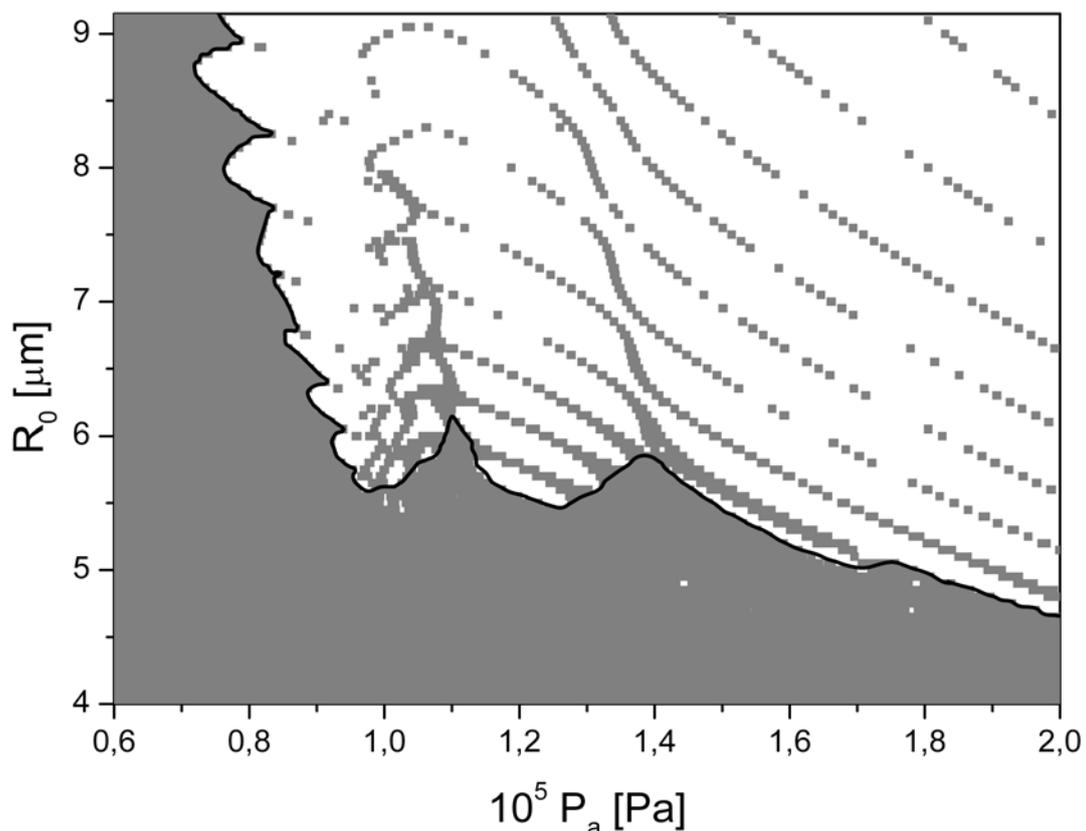


Figura 5.6 Las áreas oscuras son las regiones de estabilidad correspondientes al caso III. Los cálculos se hicieron considerando burbujas de Argón en agua excitadas con una frecuencia $f = 32.8$ kHz. Por supuesto, las áreas blancas corresponden a burbujas paraméricamente inestables. La línea gruesa y continua fue trazada a mano libre y delimita aproximadamente las regiones de estabilidad-inestabilidad en el espacio paramétrico.

La figura (5.6) muestra en detalle la complejidad de las regiones de estabilidad paramétrica (zonas oscuras), calculadas con el modelo propuesto para el caso III. Como parte de dicha complejidad, se observan islas estrechas de formas intrincadas; características similares se exhiben en [120] y [121]. De hecho, las islas mostradas en estos trabajos, resultan ser más finas (estrechas) que las aquí obtenidas por el hecho de utilizar una mayor resolución en los cálculos. En general, las islas son más pequeñas que los límites de la incertidumbre experimental¹²² haciendo difícil su verificación. En términos prácticos, ellas son eliminadas y las regiones de estabilidad/inestabilidad en el espacio P_a - R_0 quedan delimitadas por una sola línea divisoria (ver Cap. 4, pag.59). Con este criterio cualitativo, la línea límite para el caso III (línea gruesa) fue trazada aproximadamente con una herramienta de dibujo del software OriginLab®. En la figura (5.7), se ilustran las líneas de la IP calculadas para los tres casos de estudio. Las líneas correspondientes a los casos I y II también fueron trazadas con la herramienta de dibujo como se hizo para el caso III.

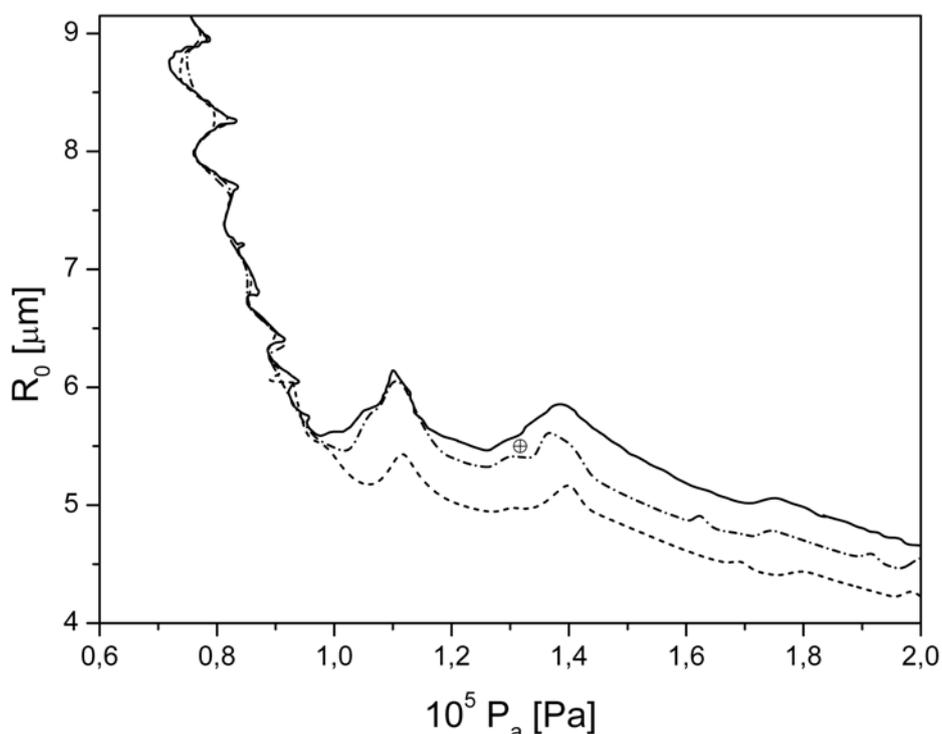


Figura 5.7 Comparación entre las curvas de la IP correspondientes a los tres casos de estudio. Curva en línea gruesa-continua representa el caso III, la curva en línea discontinua-punteada fue calculada para el caso II y la curva en línea punteada corresponde al caso I. El símbolo corresponde a las condiciones: $R_0=5.5\mu\text{m}$, $P_a=1.32 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $f=32.8 \text{ kHz}$.

Por debajo de la línea fronteriza de la IP, la burbuja es paraméricamente estable. Evidentemente, las tres líneas comienzan a mostrar marcadas diferencias entre sí, a partir de $P_a \sim 1 \times 10^5$ Pa y para burbujas de $R_0 \sim 4.6$ micras; bajo estas condiciones, el comportamiento de las burbujas deja de ser lineal. Así, ellas comienzan a oscilar en forma no lineal, caracterizada por tres etapas: una expansión lenta, un colapso rápido y una serie de rebotes. A medida que aumenta la presión de excitación, el colapso se torna más violento y las variaciones de densidad del gas dentro de la burbuja y del líquido alrededor de su pared no son insignificantes. El modelo predice un rápido incremento en ambas densidades hacia el final del colapso; y también predice valores máximos de la densidad del gas incluso mayores que los de la densidad del líquido en condiciones ambientales, véase la Fig. (5.8b).

Yuan *et al.*¹⁰⁵ y Lin *et al.*¹²⁴, han mostrado que el aumento considerable de la densidad del gas tiene un efecto estabilizador en la inestabilidad paramétrica de burbujas. Este resultado se confirma en la figura. (5.7), la línea de la IP para el caso II se encuentra alrededor de 0.3 ~ 0.6 micras por encima de la línea de la IP para el caso I a lo largo del rango de presión $P_a = 1 \sim 2 \times 10^5$ Pa, lo que implica la supresión de la IP por los cambios de densidad del gas. Esto implica un incremento de la región de estabilidad del $A_1 \times 100 / A_0 \approx 11.2$ % en la ventana donde típicamente se produce la SLUB en agua, $2 \leq R_0 \leq 6$ μm ; $1.2 \leq P_a \leq 1.6 \times 10^5$ Pa, ver figura (5.9).

Además, si la densidad del líquido varía, se encuentra una ampliación adicional de la zona de la estabilidad en el espacio $P_a - R_0$; de acuerdo con esto, la línea para el caso III se localiza alrededor de 0,4 ~ 0,7 micras por encima de la línea de la IP para el caso I a lo largo del intervalo de presión $P_a = 1 \sim 2 \times 10^5$ Pa. La ampliación adicional de la zona de estabilidad, se explica por el incremento repentino de la densidad del líquido cuando el radio de la burbuja está cerca de su valor mínimo, como se muestra en la figura (5.8c). Además, se ve que ρ_l alcanza valores máximos ~ 1700 kg/m³ y aún mayores, lo que sugiere la solidificación transitoria del agua alrededor de la pared de la burbuja, es decir, la formación de partículas de hielo⁵⁹.

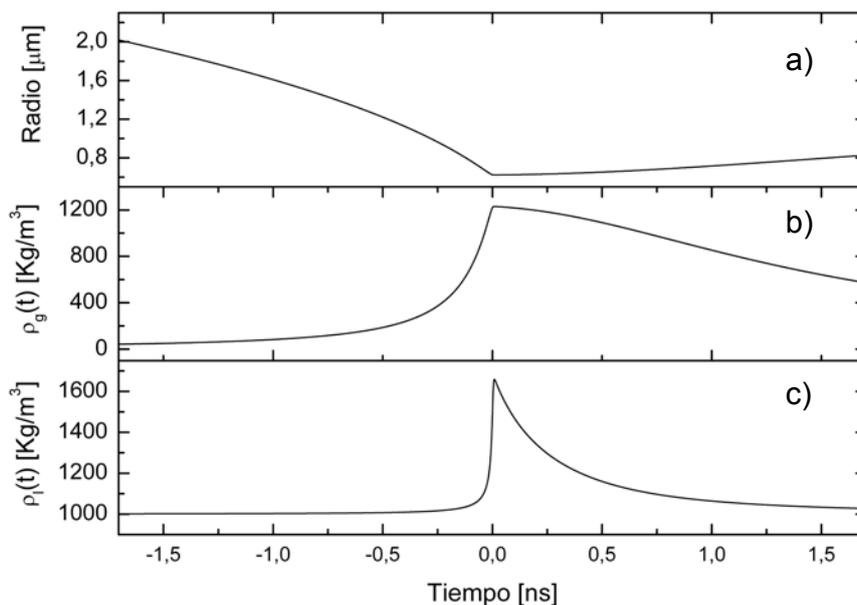


Figura 5.8 (a)-(c) muestran la evolución temporal del radio, la densidad del gas dentro de la burbuja y la densidad del líquido en su pared durante las etapas finales del colapso y el principio del primer rebote, para $R_0=5.5\mu\text{m}$, $P_a=\times 10^5\text{ Pa}$ y $f=32.8\text{ kHz}$. El tiempo cero corresponde al instante en que la burbuja alcanza su radio mínimo.

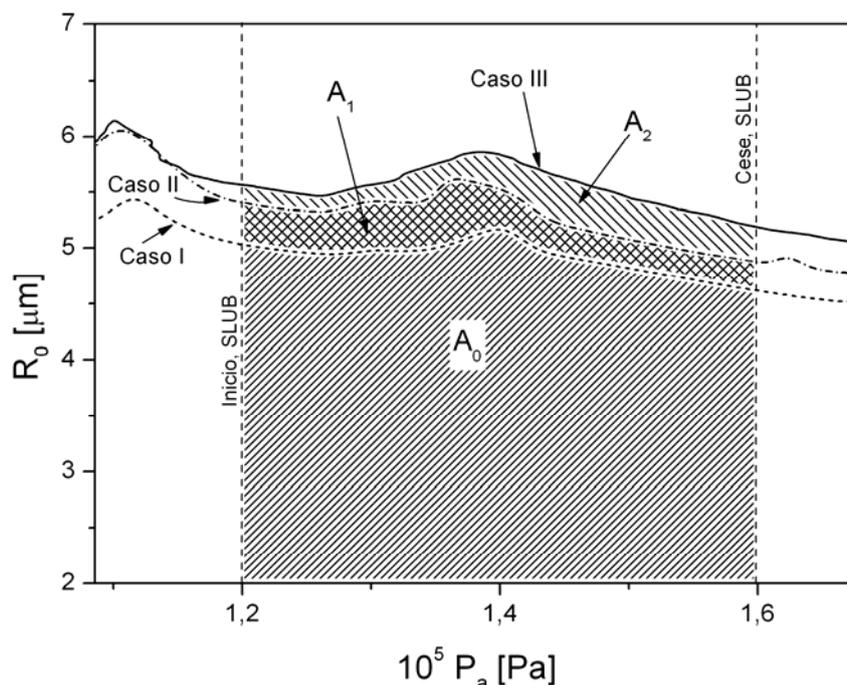


Figura 5.9 Ampliación de la figura (5.7). El área sombreada A_1 representa el incremento de la región de estabilidad por las variaciones de ρ_g , Case II. La ampliación extra de la región de estabilidad por las variaciones de ρ_g y ρ_l , Caso III, esta representada por el área sombreada A_2 . La ventana analizada, esta delimitada por los valores típicos de inicio ($P_a \approx 1.2 \times 10^5\text{ Pa}$) y cese ($P_a \approx 1.6 \times 10^5\text{ Pa}$) de la SLUB en agua. En el eje R_0 , el límite inferior se fijó en $R_0=2\text{ }\mu\text{m}$, el cual satisface el equilibrio difusivo a bajas concentraciones de gas disuelto en el agua.

Debido al incremento de ρ_l , la ampliación extra del área de estabilidad en la ventana típica de SLUB en agua es $A_1 \times 100/A_0 \approx 8.3\%$, ver figura (5.9). Este resultado es comparable en magnitud al obtenido cuando solo varía la densidad del gas. Por lo tanto, el efecto combinado de las variaciones tanto del gas como del líquido representa un aumento en el área de estabilidad de $(A_1 + A_2) \times 100/A_0 \approx 19.5\%$. Por supuesto, esta predicción no es despreciable y valdrá la pena compararla más adelante con los experimentos para establecer si es válida.

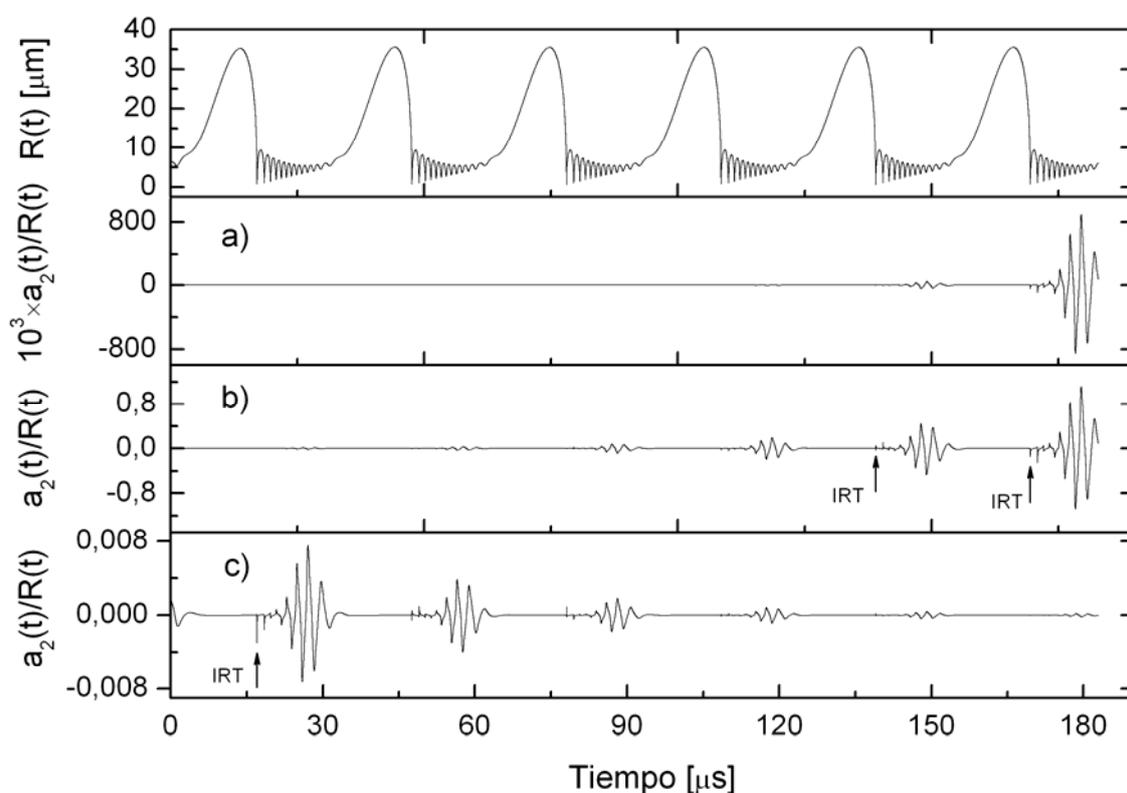


Figura 5.10 En la parte superior se muestra el radio vs. tiempo, para $R_0=5.5\mu\text{m}$, $P_a=1.32 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $f=32.8 \text{ kHz}$. Las figuras (a)-(c) muestran la evolución típica de la amplitud de la deformación superficial (normalizada) $a_2(t)/R(t)$. Las curvas (a), (b) y (c) corresponden a los casos I, II y III respectivamente.

Alternativamente, en la figura (5.10) se analizan los efectos de supresión de la IP debidos a las variaciones de densidad del gas y el líquido. Las Figs. (5.10a) y (5.10b) representan la amplificación típica de la amplitud de una distorsión superficial normalizada con respecto al radio (ADSN), $a_2(t)/R(t)$, como una función

del tiempo. Aunque las dos curvas se calcularon para las mismas condiciones ($R_0 = 5.5 \mu\text{m}$ y $P_a = 1.32 \times 10^5 \text{ Pa}$, indicadas por un símbolo hueco en la Fig. 5.7), corresponden a diferentes casos de estudio. En la Fig. (5.10a), sólo se distinguen el quinto y sexto ciclos de oscilación de la ADSN para el caso I; en realidad los primeros cuatro ciclos se desarrollan pero solo se vuelven visibles a escalas de graficación más pequeñas, ver fig. (5.11).

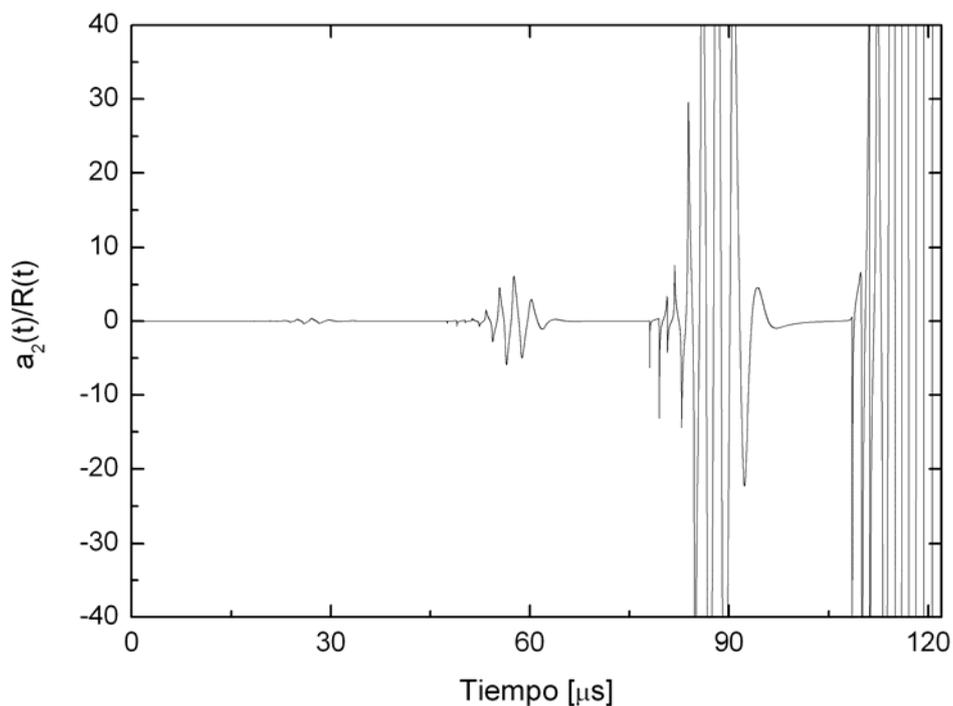


Figura 5.11 Extracto de la figura (5.10a); evolución temporal de $a_2(t)/R(t)$ para los primeros cuatro ciclos graficada a una escala menor para el eje vertical. Ahora las oscilaciones paramétricas se hacen visibles.

Como era de esperarse, cuando se incluye la densidad del gas, caso II, los valores absolutos de los máximos de la ADSN de cada uno de los seis ciclos de la Fig. (5.10b) son evidentemente más pequeños que los correspondientes al caso I en las figuras (5.10a) y (5.11), lo cual indica que la IP se ha reducido, pero no se ha suprimido, debido a las variaciones de densidad del gas. En consecuencia, el valor absoluto de los picos de la ADSN van aumentando de un ciclo al siguiente hasta que en cierto instante sobrepasan el valor de uno; lo cual implica la ruptura de la

burbuja^{102,103}. Así, la destrucción de la burbuja se produce con mayor razón en el *caso I*.

Cuando las densidades del gas y del líquido varían, *caso III*, la predicción indica los picos más pequeños de la ADSN como se muestra en la figura (5.10c). Sin embargo, a diferencia de los casos *I* y *II*, la ADSN inicial es sólo amplificada por la IRT (en forma de pulso y señalada en la figura con una flecha) en las cercanías del primer colapso principal; dando lugar a las subsecuentes oscilaciones paramétricas, luego las oscilaciones posteriores de la ADSN van desapareciendo de un ciclo a otro hasta que la IP es totalmente suprimida; así la esfericidad de la burbuja es restaurada. En concordancia con esto, el símbolo hueco representado en la figura (5.7) se encuentra localizado por debajo de la línea correspondiente al *caso III*.

En la figura (5.12), se muestran algunas líneas limítrofes de la IP calculadas a partir de la simulación numérica de: las ecuaciones de Navier-Stokes¹²⁴ (ENS), la ecuación de Gilmore correspondiente al *caso III* y la tradicional ERP¹⁰². Dichas líneas se comparan con los datos experimentales¹¹⁹.

Se observa claramente que la línea discontinua-punteada de la ENS concuerda bien con los experimentos. En cambio, la línea delgada-punteada calculada a partir de la ERP constituye una predicción demasiado conservadora. Esto no es sorprendente ya que la ERP no toma en cuenta transferencia de calor ni de masa a través de la pared de la burbuja; justamente, estos mecanismos de transferencia de energía amortiguan los rebotes radiales, y por tanto la inestabilidad superficial.

Como era de esperarse, la línea correspondiente al *caso III* concuerda mejor con los experimentos que la línea obtenida con la ERP. Como se argumentó anteriormente, esta mejora se explica por los términos de corrección de la compresibilidad del líquido incluidos en la EG.

En los intervalos; $5.5 \lesssim R_0 \lesssim 9 \mu\text{m}$ y $0.8 \lesssim P_a \lesssim 1 \times 10^5 \text{ Pa}$, la línea para el *caso III*, muestra una tendencia similar (pendiente negativa) a la mostrada por los puntos experimentales (símbolos circulares huecos). Sin embargo, dicha línea se encuentra a la izquierda y lejos de los datos del experimento.

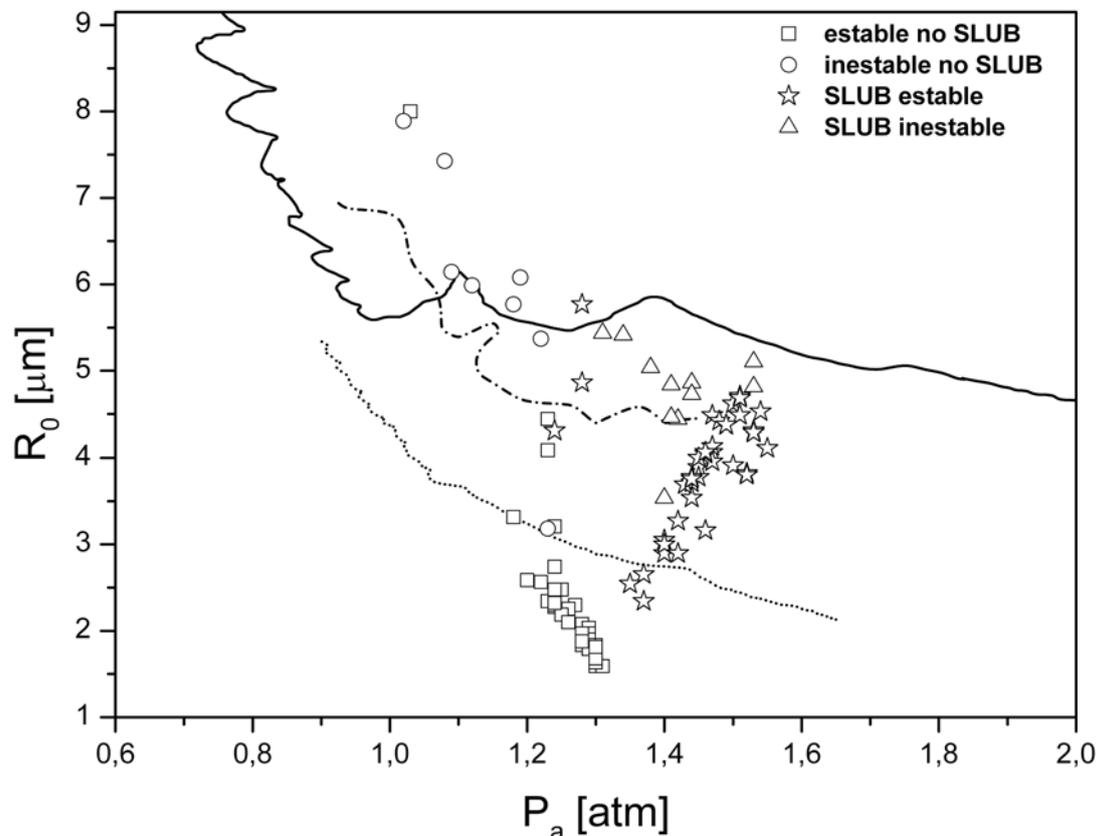


Figura 5.12 Comparación entre las curvas de la inestabilidad paramétrica calculadas con diferentes modelos de la dinámica radial. Curva en línea delgada-punteada fue calculada por Hilgenfeldt et al.¹⁰² utilizando la ERP, la curva en línea discontinua-punteada se calculó a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes¹¹³, la línea gruesa-contínua corresponde al caso III. Los símbolos corresponden a datos experimentales obtenidos por Ketterling y Apfel¹¹⁹.

La discrepancia podría reducirse si amortiguación del movimiento radial por los efectos térmicos fueran tomados en cuenta a través de un modelo mixto considerando la compresión del gas como isotérmica-adiabática (MCIA). Esta aproximación es más realista que la compresión isotérmica aquí utilizada. Los cálculos de Yuan et al.¹⁰⁵, muestran que en el régimen de baja presión, $P_a < 1 \times 10^5$ Pa, un modelo como el MCIA predice una línea de IP en mejor concordancia con los datos experimentales y situada a la derecha de la correspondiente línea IP calculada al considerar únicamente una compresión isotérmica. Para $R_0 \approx 5-6 \mu\text{m}$ y $P_a \gtrsim 1 \times 10^5$ Pa, la línea para el caso III es aproximadamente horizontal (mostrando una pequeña pendiente dependiente de P_a). Especialmente, en el intervalo de $1 \lesssim P_a < 1.3 \times 10^5$ Pa, esta línea fronteriza delimita bien las

regiones de estabilidad-inestabilidad de acuerdo a los datos del experimento (símbolos circulares huecos), sin embargo, para el intervalo $1.3 \lesssim P_a \lesssim 1.6 \times 10^5$ Pa esta línea sobre estima el límite experimental, según lo indicado por los símbolos triangulares huecos. Como antes, el desacuerdo podría reducirse mediante el MCI, el cual predice límites de la IP que se localizan aproximadamente a una micra y media por debajo de aquellos límites que se encuentran con el modelo isotérmico¹⁰⁵.

Aunque la ecuación de Gilmore arroja mejores predicciones de las zonas de estabilidad/inestabilidad que la ERP, continúa siendo un modelo simplificado en comparación con aquel basado en las ENS. Sin embargo, el uso de la EG para el cálculo de las líneas de frontera de la IP requiere menos recursos de cómputo que al utilizar las ENS. Esta ventaja es aún más evidente para presiones $P_a \gtrsim 1.52 \times 10^5$ Pa, es decir, cuando la compresión del gas se vuelve tan violenta que calcular un ciclo completo de movimiento de la burbuja con las ENS se convierte en una tarea que consume mucho tiempo¹¹³.

c) Curva de la IP a condiciones de la ciudad de México

Como se mencionó antes, se cuenta con un sistema para producir experimentalmente la SLUB; el cual, se encuentra instalado en el laboratorio de pruebas no destructivas del Instituto de Ingeniería, y está equipado con un resonador esférico de 280 ml que es excitado al doble de su frecuencia natural de resonancia (el segundo armónico), es decir $f = 50.5$ kHz. El cálculo de la IP asociado a dicho sistema, se realizó siguiendo el método explicado en el Capítulo 4; págs. 60-66. Se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua a $P_a = 77154$ Pa y $T_0 = 292.5$ K, una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma = 1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2) y únicamente se consideró el caso III. Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $1 \leq R_0 \leq 12$ μm ; $0.5 \leq P_a \leq 4 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 1$ μm ; $\Delta P_a = 0.1 \times 10^5$ Pa.

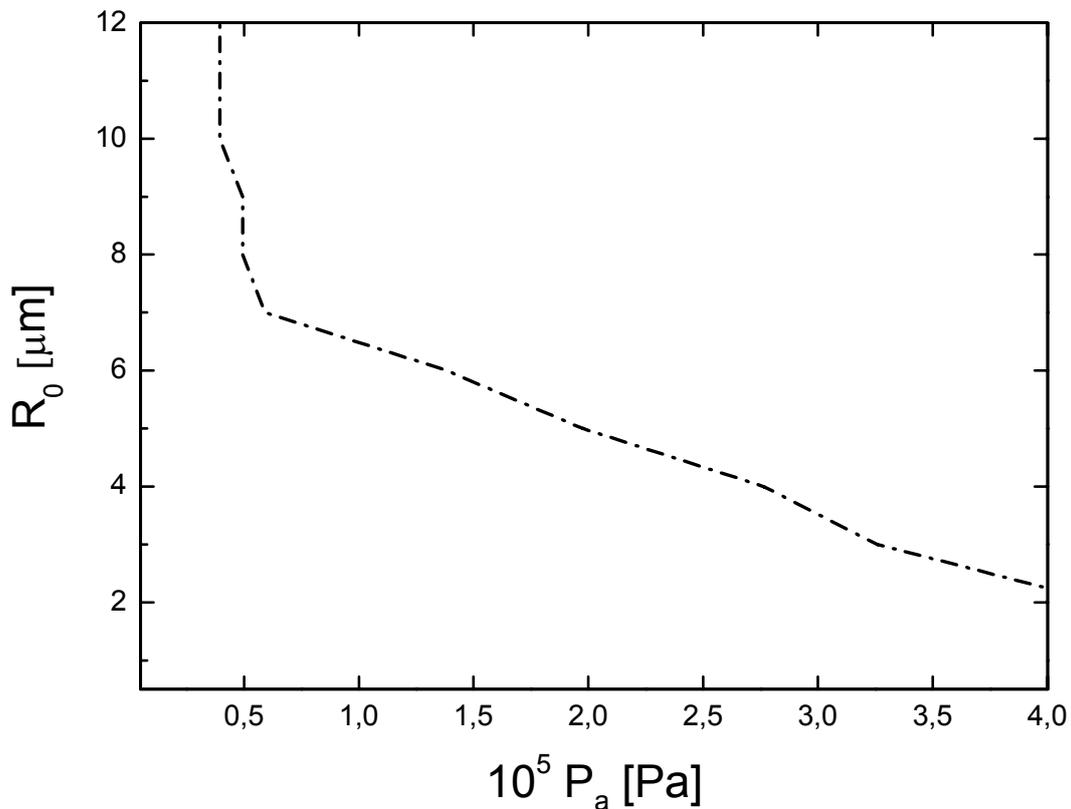


Figura 5.13 La línea gruesa discontinua-punteada representa la curva de la IP calculada a condiciones de la ciudad de México y para el caso III.

II) Inestabilidad Rayleigh-Taylor (IRT)

a) Comparaciones vs. resultados experimentales de Ketterling y Apfel¹¹⁹, y vs. otros resultados teóricos¹²⁴.

El cálculo de las curvas de la IRT se realizó siguiendo el método explicado en el Capítulo 4; pág. 66. Se consideraron: burbujas de Argón en agua a condiciones normales de presión y temperatura (101325 Pa y 293 K, respectivamente), una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma = 1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, una frecuencia de excitación de $f = 32.8$ kHz y la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2). Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $0.6 \leq R_0 \leq 7 \mu\text{m}$; $0.5 \leq P_a \leq 2.53 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.05 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.001 \times 10^5$ Pa.

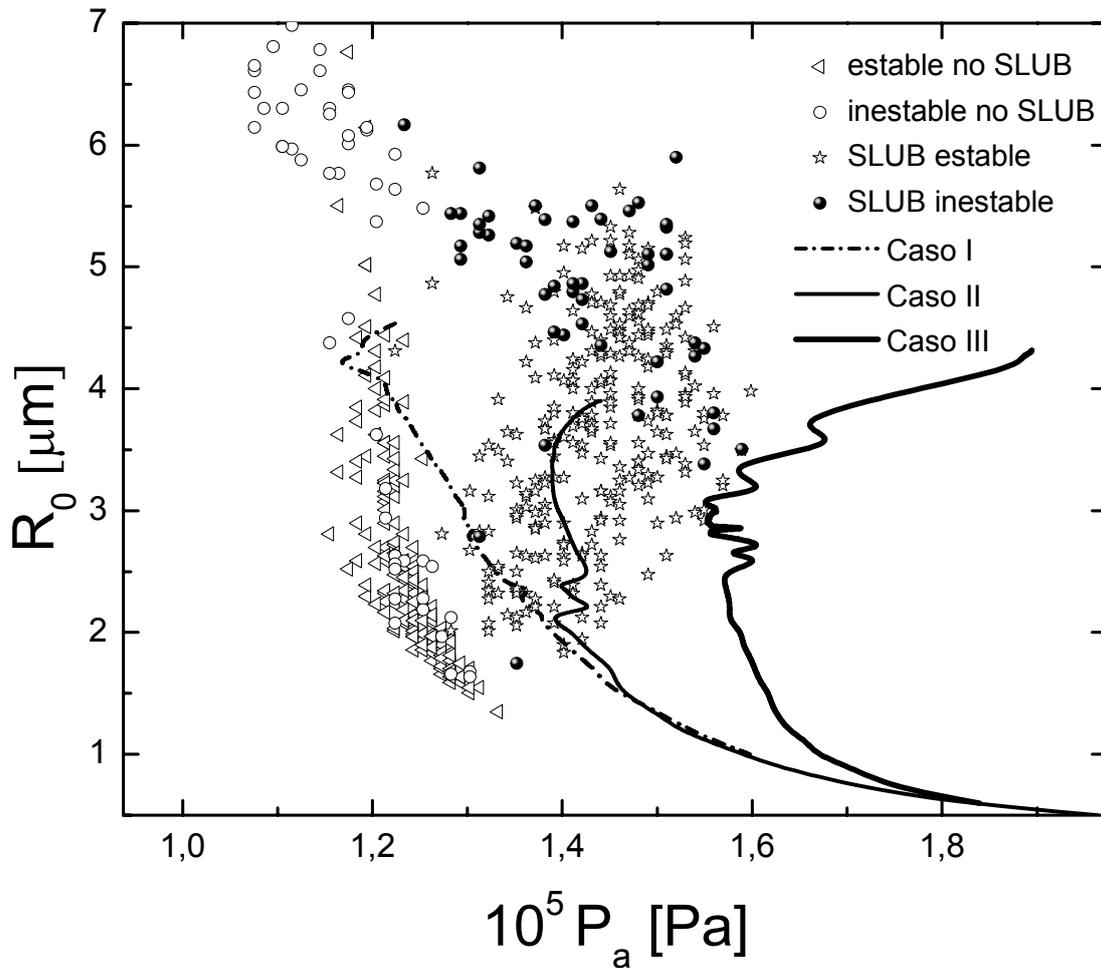


Figura 5.14 Líneas de la IRT para los tres casos de estudio. Los símbolos corresponden a datos experimentales obtenidos por Ketterling y Apfel¹¹⁹, para burbujas de Argón en agua a $T_0=293$ K y $P_0=101$ kPa, y excitadas con una frecuencia de $f=32.8$ kHz.

La Fig. (5.14) muestra los límites de la IRT calculados en el espacio $P_a - R_0$ para los tres casos de estudio. A la izquierda de la línea de la IRT, la burbuja es estable. La línea de la IRT para el caso I posee una pendiente negativa, y además se localiza a la izquierda y lejos de la frontera indicada por los experimentos. Claramente, esta línea es una predicción muy conservadora comparada con el umbral experimental.

Al incluir las variaciones de densidad del gas, caso II, la predicción muestra una línea fronteriza localizada a la derecha de la línea correspondiente al caso I, lo que indica una región de estabilidad mayor y en mejor concordancia con los experimentos, sin embargo, este resultado sigue siendo conservador. El cambio

de posición de la línea para el caso II, y la ampliación de la región de estabilidad son consecuencia del efecto estabilizador de las variaciones de densidad del gas sobre la IRT¹²⁴. Además, si la densidad del líquido varía, se predice una ampliación adicional de la zona de la estabilidad en el espacio $P_a - R_0$, ver la línea gruesa en la figura (5.14). Aunque la línea para el caso III indica un efecto estabilizador debido a cambios en ρ_g y ρ_l , ésta no se ajusta bien a los límites experimentales indicando una zona de estabilidad mayor.

Ahora, se analiza con mayor detalle el efecto de las densidades del gas y del líquido sobre la IRT mediante el comportamiento del coeficiente $A_n(t)$ del tercer término de la Ec. (3.12). Como se indica en [105], la relación de densidades, RD , afecta en gran medida el comportamiento de $A_n(t)$ al cambiar la contribución de la aceleración de la pared de la burbuja \ddot{R} ; la cual, es un factor dominante en la IRT. En la mayor parte de un ciclo de oscilación ó en $P_a < 1 \times 10^5$ Pa, RD es pequeño. Sin embargo se vuelve importante para $P_a > 1 \times 10^5$ Pa y cuando el radio de la burbuja está cerca de su valor mínimo.

Sin considerar las variaciones de densidad del gas, caso I, $A_2(t)$ se asemeja a un pulso negativo que implica inestabilidad superficial, ver línea punteada en la figura (5.15f).

La Fig. (5.15c) muestra el perfil de la densidad del gas para el caso II, el cual es idéntico a la curva de la RD (pero sin dimensiones); si $R(t)$ es igual al radio mínimo R_{min} , la densidad del gas alcanza un máximo (~ 1200 kg/m³ limitada por el núcleo de van der Waals para burbujas de argón) y $A_2(t)$ se convierte en un pulso positivo disminuyendo la amplitud de las distorsiones superficiales, ver línea discontinua-punteada en la figura (5.15f).

En la figura. (5.15e), la curva de la RD muestra un pequeño pulso con un máximo local cerca del R_{min} , este comportamiento está asociado con el aumento repentino de la densidad del líquido predicho por el modelo. La figura (5.15d) muestra el comportamiento de la densidad del líquido, es claro como la ρ_l crece súbitamente en las etapas finales del colapso con un máximo ~ 2000 kg/m³ que incluso sugiere la solidificación transitoria de agua alrededor de la pared de la burbuja, es decir, la formación de partículas de hielo⁵⁹.

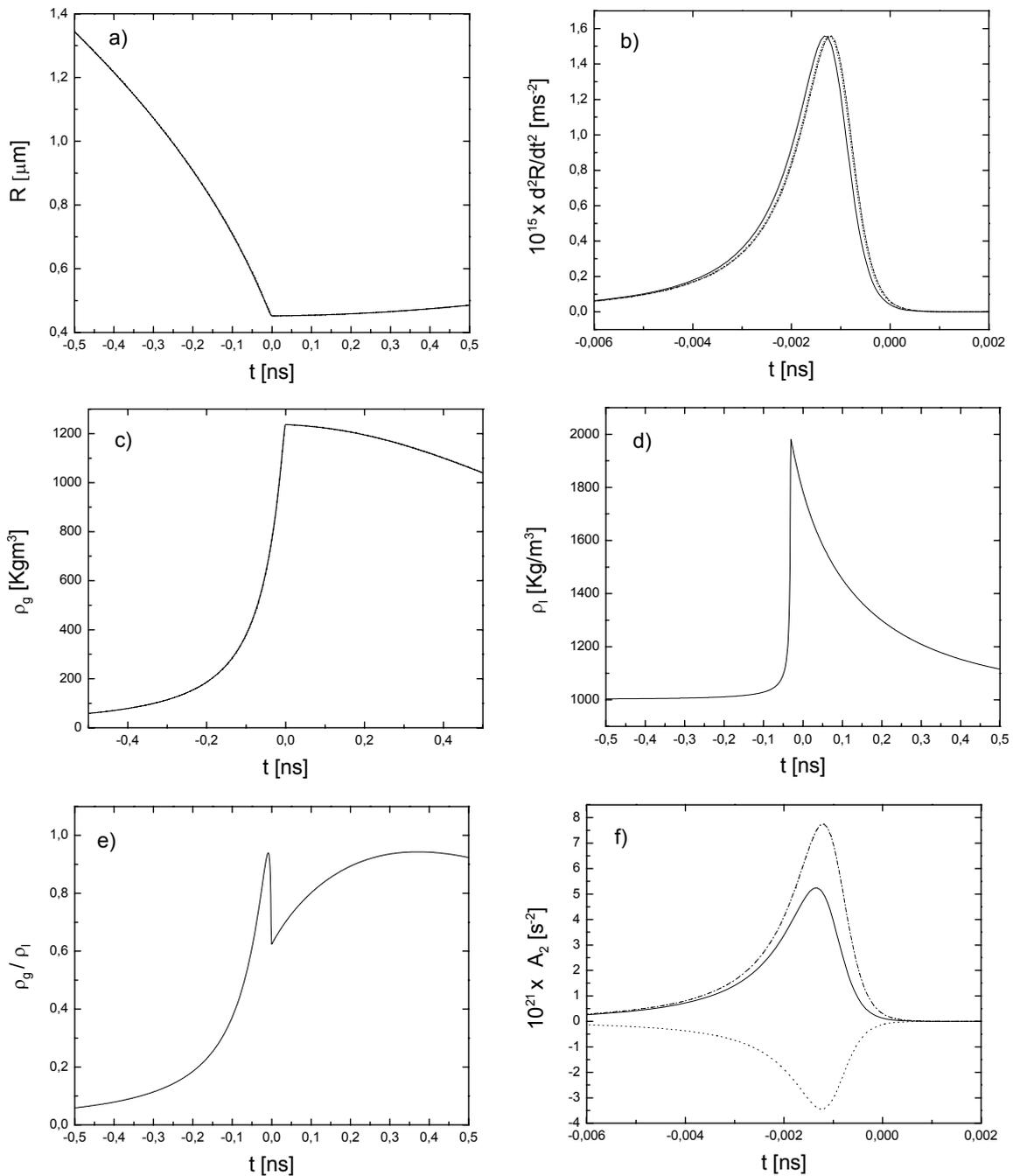


Figura 5.15 (a) y (b) muestran la evolución en el tiempo del radio, y la aceleración de una burbuja durante el breve periodo de colapso y el primer rebote, para $R_0 = 4 \mu\text{m}$ y $P_a = 1.47 \times 10^5 \text{ Pa}$. $t = 0$, indica el instante en el que la burbuja alcanza su radio mínimo. (c) y (d) muestran la evolución temporal de las densidades del gas y del líquido respectivamente, (e) muestra el perfil de la RD, y (f) muestra el comportamiento de $A_2(t)$. Las líneas punteadas corresponden al caso I, las líneas discontinuas-punteadas son para el caso II y las líneas continuas para el caso III.

La curva del coeficiente $A_2(t)$ para el caso III tiene forma de pulso, ver línea continua de la figura (5.15f), ésta es similar a la encontrada para el caso II, pero con menos amplitud. Como antes, esto implica la supresión de la IRT.

Es importante señalar que el cambio en el comportamiento de $A_2(t)$, debido a las variaciones de densidad del gas y/o del líquido son sólo importantes hacia el final de un colapso violento, de hecho, la IRT se producirá durante los subsecuentes rebotes, es decir, después del colapso principal¹⁰³. Esto es cierto para los tres casos de estudio, la figura (5.16) muestra cómo la IRT amplifica una distorsión inicial durante el primer rebote hasta alcanzar un máximo cuando la burbuja colapsa por segunda vez. Pero, al mismo tiempo, la figura (5.16) muestra que la máxima deformación $Max |a_2|$ es atenuada por el incremento en la densidad de gas y del líquido cerca del colapso.

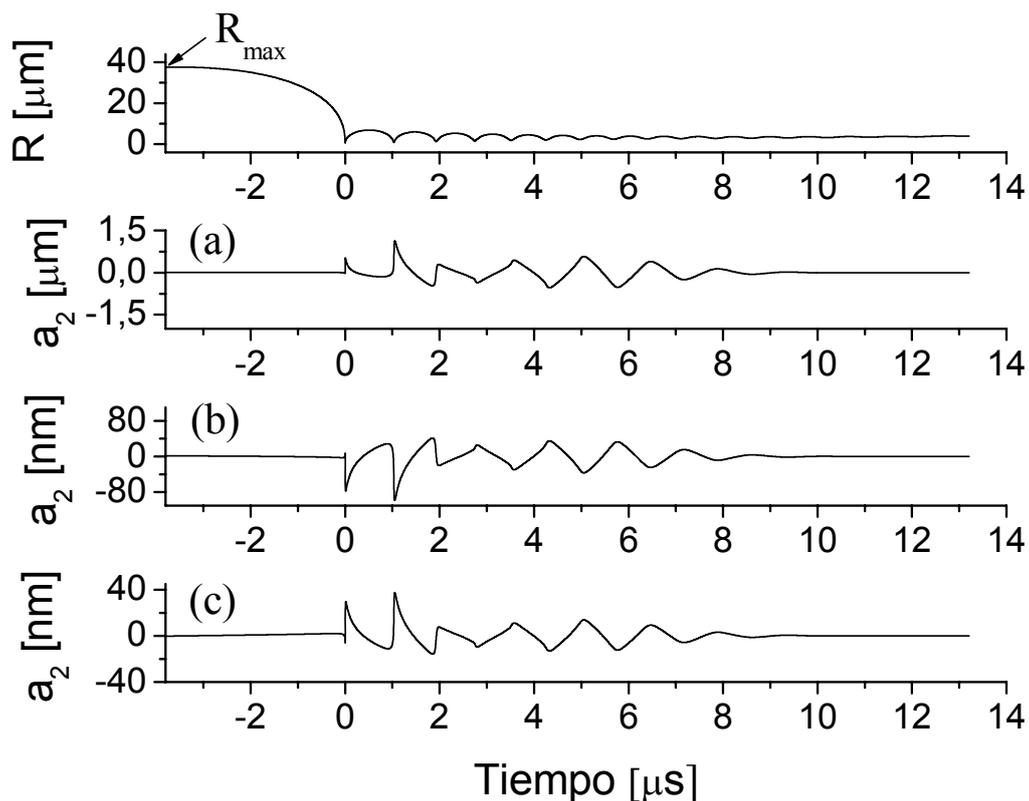


Figura 5.16 En la parte superior se muestra $R(t)$ vs. tiempo durante la etapa del colapso y los rebotes posteriores, para una burbuja de $R_0 = 4 \mu\text{m}$ excitada con: $P_a = 1.32 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $f = 32.8 \text{ kHz}$. El tiempo cero corresponde al instante en que la burbuja alcanza su radio mínimo. (a), (b) y (c) muestran la evolución temporal de $a_2(t)$ para los casos I, II y III respectivamente.

La fig. (5.16a) indica que sin tomar en cuenta los cambios de densidad del gas, la $Max |a_2| \approx 1,12$ micras, ahora si las variaciones de densidad del gas se consideran $Max |a_2| \approx 98$ nm, esto es una reducción $\approx 91\%$.

Incluyendo cambios en la densidad del líquido se predice $Max |a_2| \approx 40$ nm, lo que es una reducción $\approx 96\%$ con respecto al caso I.

La figura (5.17) muestra una comparación entre los límites de la IRT calculados con dos modelos diferentes para las oscilaciones radiales.

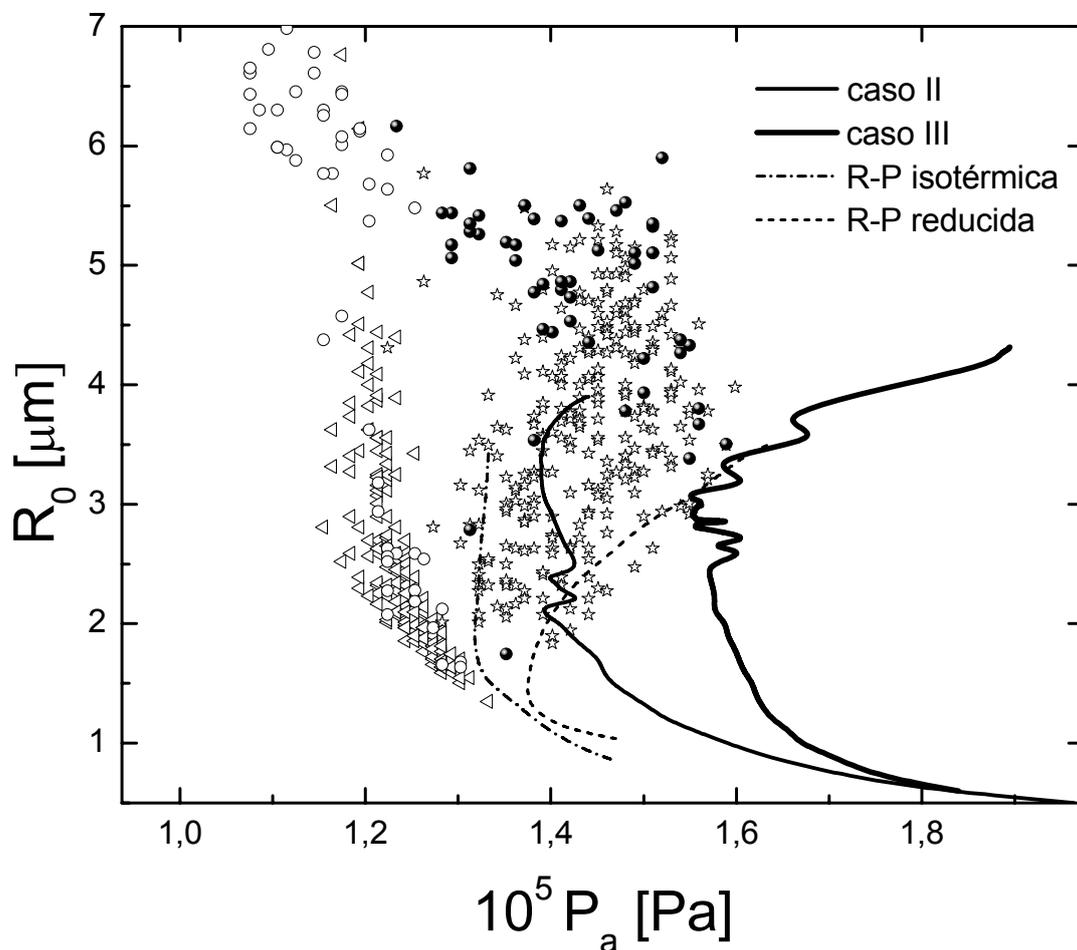


Figura 5.17 Influencia de los diferentes modelos de la dinámica radial sobre la localización y forma de las curvas de la IRT. Las líneas para los casos II y III fueron calculadas con el modelo de Gilmore (Ec. 3.2). Las curvas nombradas: "R-P isotérmica" y "R-P reducida" fueron calculadas a partir de una versión de la ERP¹²⁴. Los datos experimentales corresponden a los mostrados en la Fig. (5.14).

La línea discontinua-punteada se calculó considerando cambios en la densidad del gas y con una versión simplificada de la ERP suponiendo una compresión isotérmica¹²⁴ $\gamma = 1$, ésta es comparable con la línea para el caso II. Es evidente que la línea de la IRT calculada con la ERP tiene una pendiente vertical y se encuentra a la izquierda de la línea para el caso II, lo que implica colapsos más fuertes y burbujas más inestables. Este resultado se explica por la ecuación de Gilmore, que contiene términos de corrección por compresibilidad del líquido (con un efecto de amortiguación de la oscilación radial) haciéndola una mejor descripción que la ERP. La línea discontinua se calculó con una ERP, pero incluyendo algunos mecanismos de amortiguación radial como la transferencia de calor. Ahora, la línea es menos conservadora y muestra una pendiente positiva, de acuerdo con la tendencia experimental al menos para burbujas con $R_0 \lesssim 3.5 \mu\text{m}$.

De acuerdo a la figura (5.17), el modelo para el caso III, predice una línea de IRT con pendiente positiva para burbujas con $R_0 \gtrsim 3$ micras. Sin embargo, el umbral experimental de la IRT sugiere el comportamiento contrario, es decir, una curva de pendiente negativa especialmente para burbujas en el rango de $3 \lesssim R_0 \lesssim 5,5 \mu\text{m}$.

Es importante señalar que los límites de la IRT que se determinan con el criterio (3.19), implican la ruptura de las burbujas, umbral de extinción de la SLUB¹²⁵.

Ahora, un criterio de “aplastamiento” definido por

$$\left\{ t_{R_{\max}} < t < t_{R_{\min}} + t_{RT} \right\} \left(\frac{|a_n(t)|}{R(t)} \right) = \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.1)$$

permitiría el cálculo de líneas de la IRT con la posibilidad de tener burbujas

deformadas superficialmente con un movimiento radial oscilatorio a lo largo de muchos ciclos acústicos e incluso emitiendo pulsos de luz.

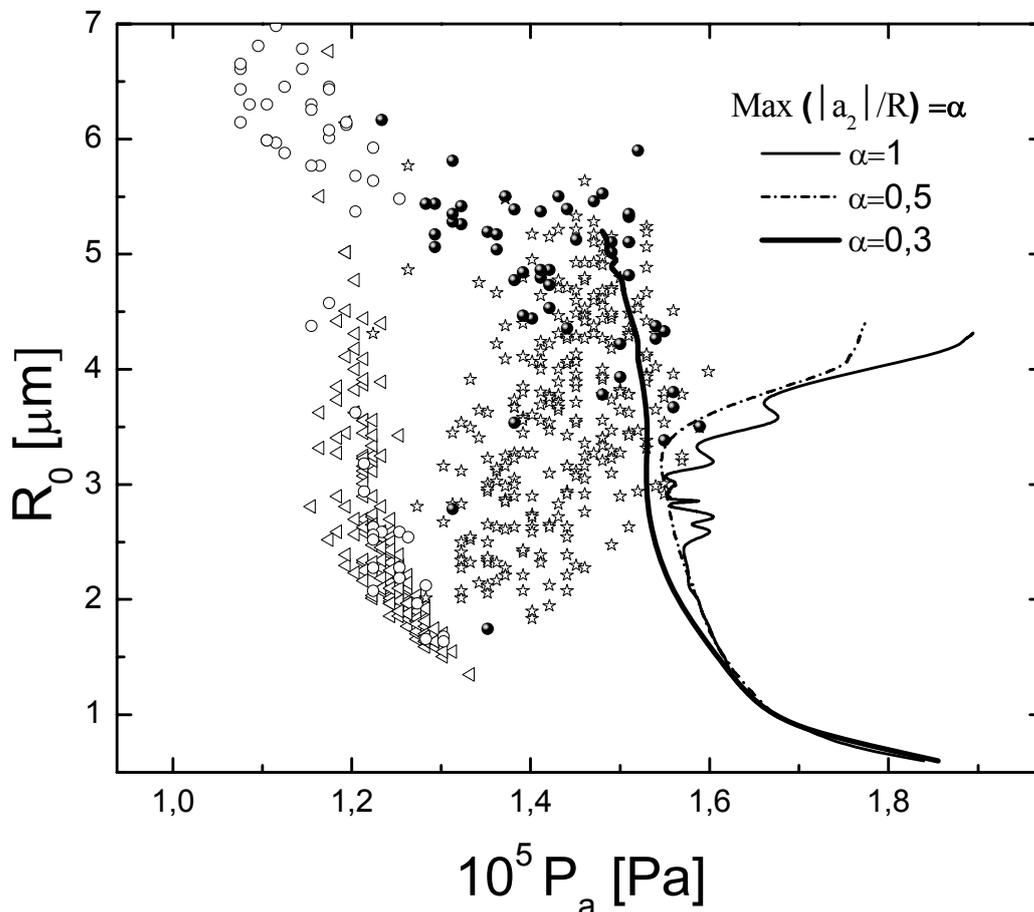


Figura 5.18 Comparación entre las líneas de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor calculadas con diferentes valores del criterio definido por la Ec. (5.1). Los símbolos corresponden a los datos experimentales mostrados en la Fig. (5.14).

La figura (5.18) ilustra las líneas de la IRT calculadas con el nuevo criterio (5.1) para $\alpha = (1, 0.5, \text{ y } 0.3)$. Cuando $\alpha = 1$, la línea de la IRT corresponde a aquella del caso III en la figura (5.17); para $\alpha = 0.5$, se obtiene una línea de la IRT ligeramente diferente a la del caso III.

Sin embargo, para $\alpha = 0.3$ la predicción es una línea de la IRT cuya pendiente ha cambiado de positiva a negativa coincidiendo bien con los datos experimentales.

b) Curva de la IRT para las condiciones de la ciudad de México

El cálculo de la IRT asociado al sistema experimental descrito en la pág. 89 de este capítulo, se realizó siguiendo el método explicado en el Capítulo 4; pág.66.

Se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua a $P_0 = 77154$ Pa y $T_0 = 292.5$ K, una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma = 1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2) y únicamente se consideró el caso III.

La excitación de la burbuja esta caracterizada por una función senoidal cuya frecuencia es $f = 50.5$ kHz.

Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $.5 \leq R_0 \leq 8$ μm ; $0.5 \leq P_a \leq 4 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.05$ μm ; $\Delta P_a = 0.001 \times 10^5$ Pa.

En la figura (5.19) se muestran dos curvas de la IRT evaluadas con el criterio (5.1) para $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.3$.

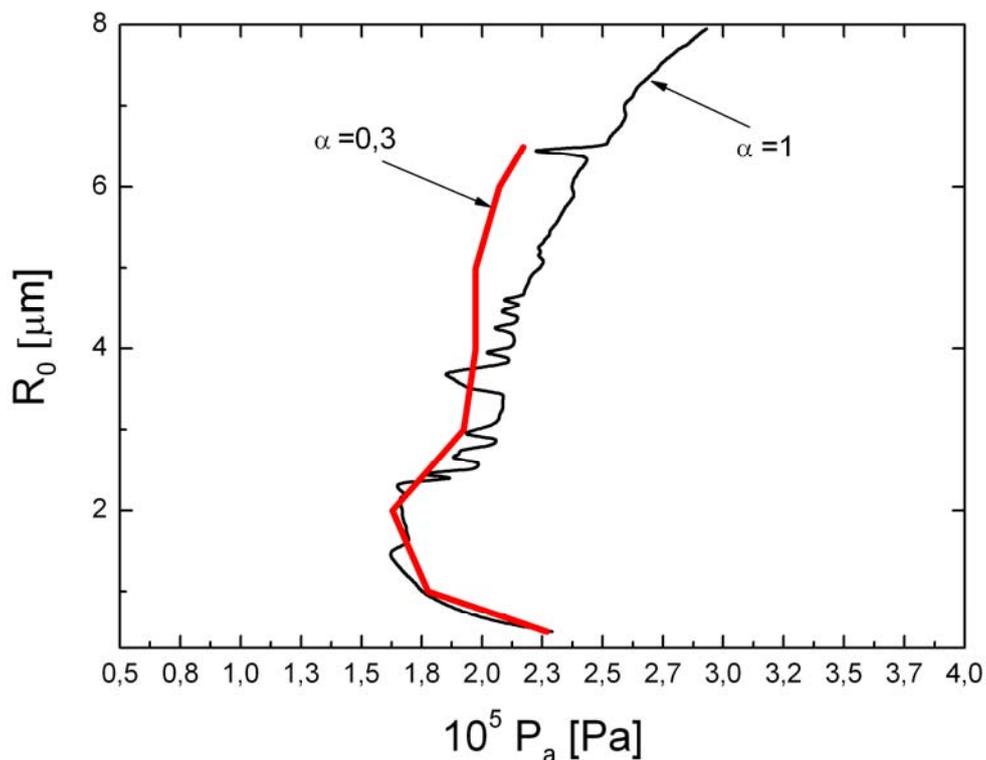


Figura 5.19 La línea gruesa continua representa la curva de la IRT calculada a condiciones de la ciudad de México y para el caso III.

III) Curvas de estabilidad difusiva

a) Comparaciones vs. resultados experimentales de Ketterling y Apfel¹¹⁹

Estas curvas se calcularon según el método descrito en el Capítulo 4; págs.67, 68. Se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua a $P_0= 101325$ Pa y $T_0= 293$ K, una compresión/expansión isotérmica del gas “ $\gamma = 1$ ” en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2).

Se fijaron distintos valores de saturación de gas C_∞ / C_0 {1.2, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.03, 0.02, 0.01, 0.008 %}. Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $0.5 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$; $0.08 \leq P_a \leq 2.3 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.01 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.001 \times 10^5$ Pa.

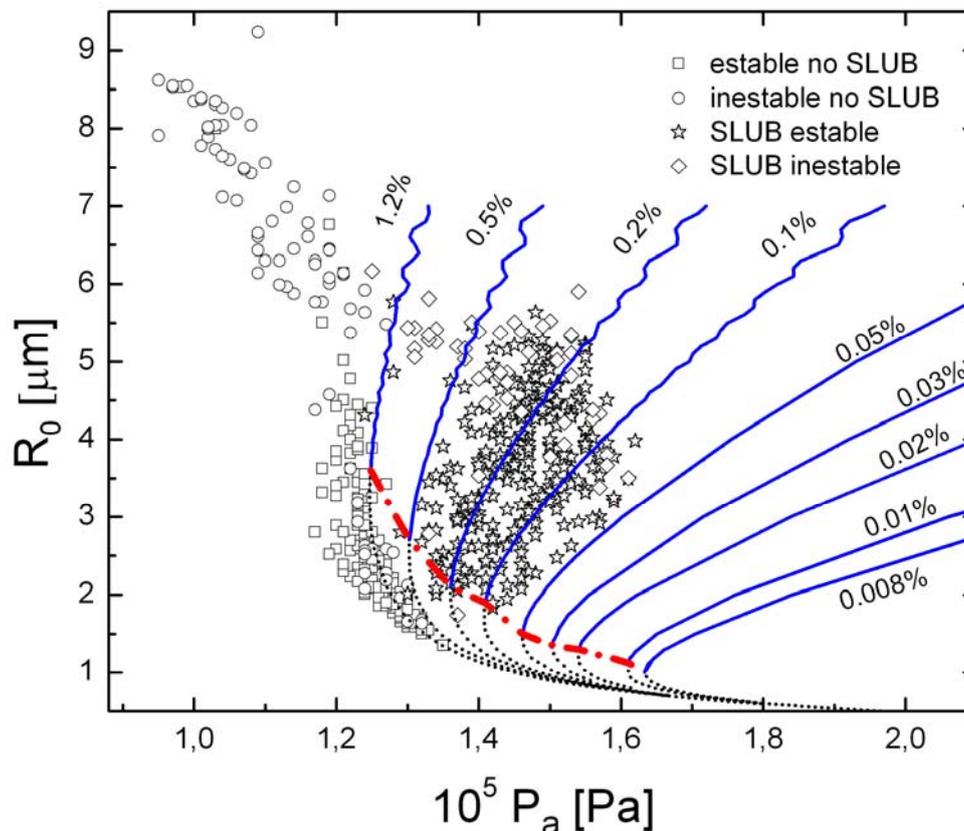


Figura 5.20 Curvas de equilibrio difusivo para burbujas sonoluminiscentes en agua y excitadas con un campo acústico senoidal de 32.8 kHz. La parte gruesa-continua representa puntos de equilibrio difusivo estable, la parte punteada es para burbujas en equilibrio difusivo inestable. La línea gruesa discontinua-punteada representa el umbral de equilibrio difusivo. Los símbolos corresponden a los datos experimentales de Ketterling y Apfel¹¹⁹.

La línea discontinua-punteada se definió en el capítulo 4 (pág. 68) como el umbral de equilibrio difusivo, UED. Claramente, éste representa un límite inferior para R_0 . Ésta línea delimita muy bien las zonas donde se producen burbujas luminiscentes y no luminiscentes sin importar si son estables ó inestables superficialmente.

b) Curva de la UED para las condiciones de la ciudad de México

En la figura (5.21) se muestra la curva del umbral de estabilidad difusiva construida con tres puntos considerando los valores de saturación de gas C_∞/C_0 {1.2, 0.2, 0.02 %}. Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $0.5 \leq R_0 \leq 6 \mu\text{m}$; $1.2 \leq P_a \leq 3.5 \times 10^5 \text{ Pa}$. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.5 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.001 \times 10^5 \text{ Pa}$.

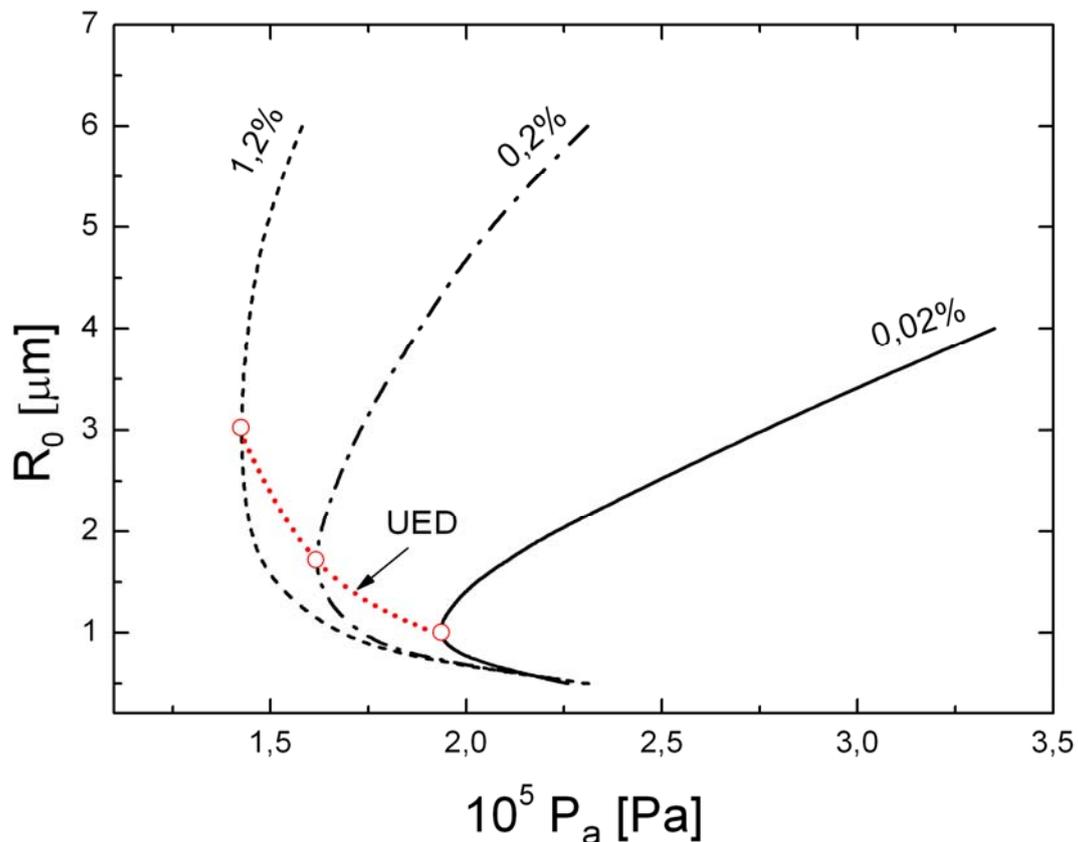


Figura 5.21 Curvas de equilibrio difusivo para burbujas sonoluminiscentes en agua y excitadas con un campo acústico senoidal de 50 kHz. Para construir la curva del UED solo se utilizaron tres puntos.

IV) Umbrales de formación de ondas de choque en el gas y en líquido, y umbral de temperatura

a) Comparaciones vs. resultados experimentales de Ketterling y Apfel¹¹⁹

Estas curvas se calcularon según el método descrito en el Capítulo 4; págs.68, 69. Se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua a $P_0= 101325$ Pa y $T_0= 293$ K, una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma = 1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2). Se fijaron distintos valores del número de Mach para las ondas de choque en el líquido $M_l \{1, 1.55, 1.7, 2, 2.2\}$. Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $0.5 \leq R_0 \leq 9 \mu\text{m}$; $0.08 \leq P_a \leq 2.3 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0= 0.01 \mu\text{m}$; $\Delta P_a=0.001 \times 10^5$ Pa.

La curva $M_g=1$, figura (5.22), no solo indica la formación de ondas de choque en el gas (OCHG) sino también ha sido propuesta por Hilgenfeldt *et al.*¹⁰² como el umbral de inicio de la emisión de luz. Esta curva discrimina bien entre las zonas donde se producen burbujas, y donde no. Pero claramente, subestima el inicio de la luminiscencia que supuestamente ocurriría a $P_a \approx 1.1 \times 10^5$ Pa, los experimentos muestran que la luminiscencia inicia a presiones mayores, es decir a $P_a \approx 1.3 \times 10^5$ Pa. Esto indica que la curva $M_g=1$ es una condición necesaria pero no suficiente para que haya emisión.

Es interesante observar como la curva $M_l =1$, marca muy bien el inicio de la emisión de acuerdo a los experimentos. Lo anterior parece ser solo una coincidencia, pues parece difícil hallar una explicación a la emisión a partir de la formación de ondas de choque en el líquido. Para que se inicie la emisión se tiene que alcanzar un umbral de temperatura de los gases al ser comprimidos $T_g \sim 9000$ K; este umbral ocurre alrededor de $P_a \approx 1.3 \times 10^5$ Pa [10]. En la figura (5.22) se muestra la curva del umbral de temperatura calculada según el criterio (3. 28). Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $2 \leq R_0 \leq 9 \mu\text{m}$; $0.08 \leq P_a \leq 2.3 \times 10^5$ Pa. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0= 1 \mu\text{m}$; $\Delta P_a=0.01 \times 10^5$ Pa.

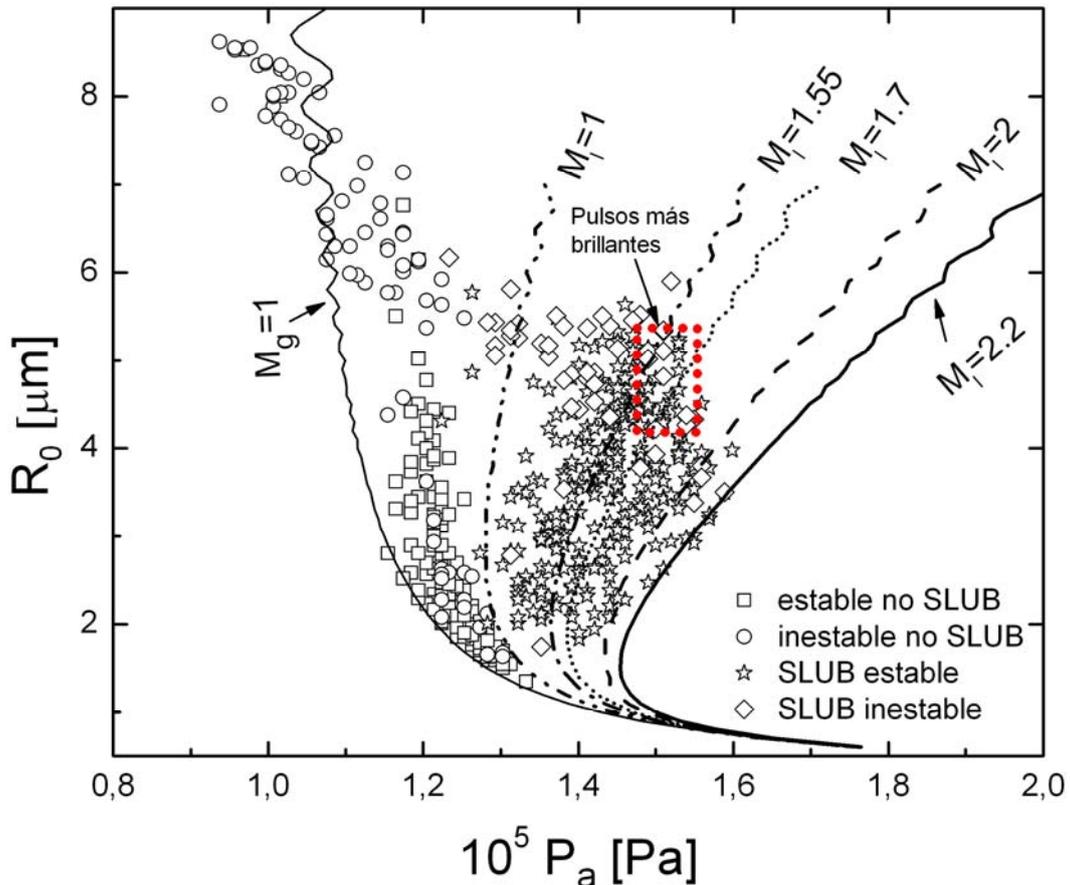


Figura 5.22 La curva $M_g=1$, representa el umbral de formación de ondas de choque en el gas. Las curvas M_l , son los umbrales de formación de ondas de choque el líquido correspondientes a diferentes números de Mach. En la ventana rectangular se midieron los destellos más brillantes. Se consideraron burbujas de Argón en agua, excitadas con un campo acústico senoidal de 32.8 kHz. Los símbolos corresponden a los experimentos de Ketterling y Apfel¹⁹.

Es interesante hacer notar que para estos experimentos, el número de Mach máximo calculado es de 2.2, éste corresponde a burbujas con $R_0 < 4 \mu\text{m}$ y cerca del umbral de extinción. Sin embargo la intensidad de los pulsos de luz a lo largo de esta línea no es la máxima observada.

Las máximas intensidades de luz se detectaron en burbujas localizadas entre las líneas $M_l=1.55$ y $M_l=1.7$ y a $4 \leq R_0 \leq 5 \mu\text{m}$. Esta pequeña ventana corresponde a burbujas que concentran medianamente la energía, y cuyas relaciones de expansión son $10 \leq RE \leq 30$, ver figura (5.5).

En base a lo anterior, es posible explicar el porque las burbujas con $R_0 < 4 \mu\text{m}$ y

excitadas a presiones $P_a \geq 1.5 \times 10^5$ Pa emiten las ondas de choque más veloces. Precisamente estas burbujas contienen menos cantidad de gas, pero con relaciones de expansión altas $30 \lesssim RE \lesssim 80$. Esta combinación implica concentrar más la energía, pero al tener menos partículas de gas, dicha energía no puede ser almacenada tan eficientemente como en la burbujas más grandes. La forma en que la energía cinética del colapso se transforma es en ondas de choque hacia el líquido más intensas.

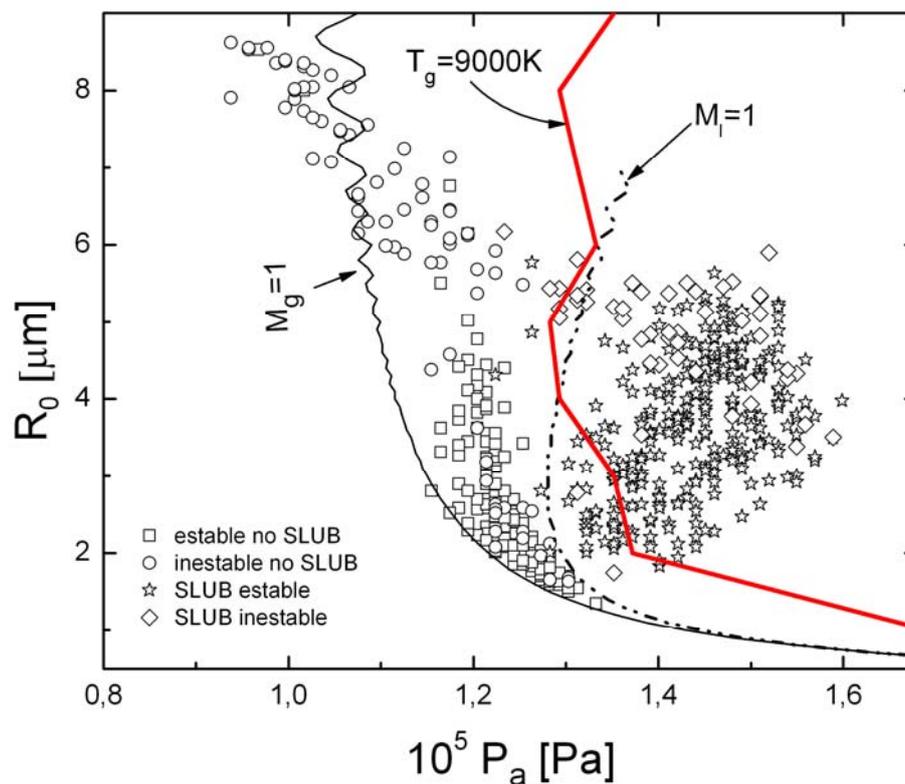


Figura 5.23 La curva $T_g=9000$ K, representa el umbral de temperatura para el inicio de la emisión.

La curvas $M_g=1$ y $M_l=1$, son las mismas presentadas en la figura (5.21). Los símbolos corresponden a los experimentos de Ketterling y Apfel¹¹⁹.

b) Curvas $M_g=1$, $M_l=1$, $M_l=2$ y $T_g=9000$ K a condiciones de la ciudad de México

Para su cálculo se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua a $P_0=77154$ Pa y $T_0=292.5$ K, una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma=1$ " en el interior de la burbuja a lo largo de cada ciclo, la dinámica radial se simuló con la

ecuación de Gilmore (3.2). Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $.5 \leq R_0 \leq 12 \mu\text{m}$; $0.1 \leq P_a \leq 4 \times 10^5 \text{ Pa}$. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.05 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.001 \times 10^5 \text{ Pa}$.

También se muestra la curva del umbral de temperatura, $T_g = 9000 \text{ K}$. Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $2 \leq R_0 \leq 9 \mu\text{m}$; $0.08 \leq P_a \leq 2.3 \times 10^5 \text{ Pa}$. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 1 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.01 \times 10^5 \text{ Pa}$.

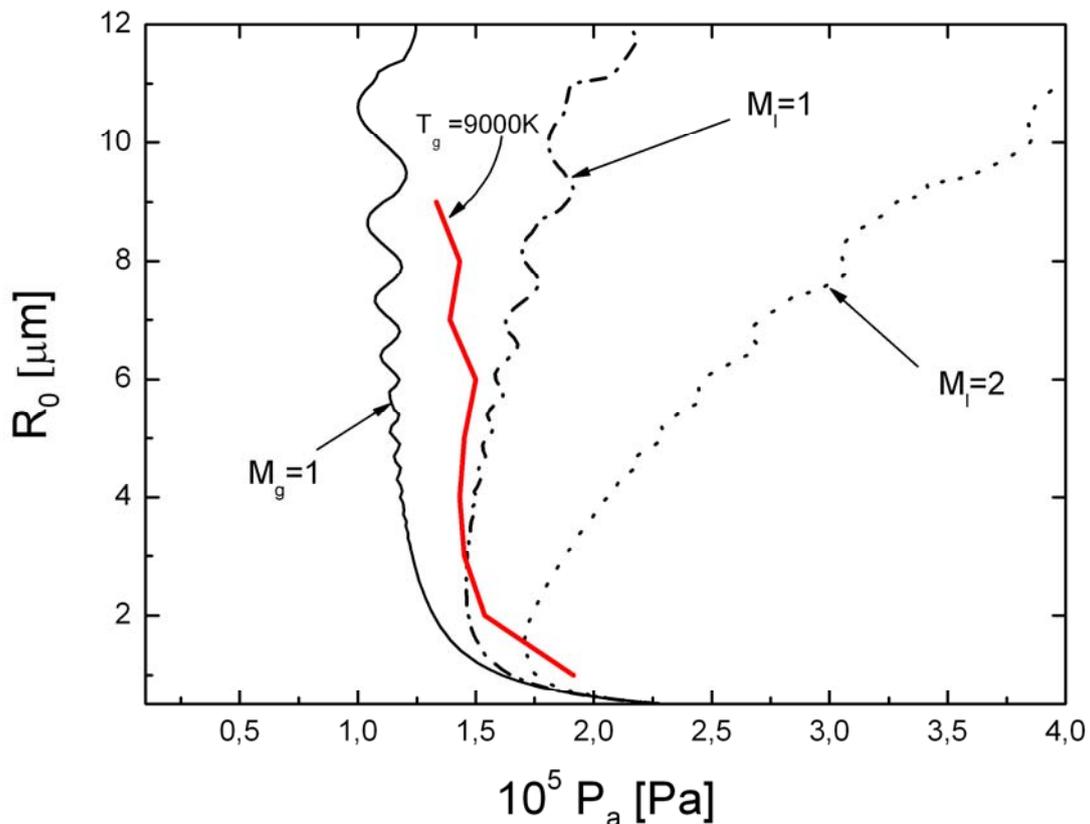


Figura 5.24 Curvas de los umbrales de formación de ondas de choque: en el gas $M_g=1$ y en el líquido $M_l=1$, $M_l=2$. La curva $T_g=9000 \text{ K}$, representa el umbral de temperatura para el inicio de la emisión. Se consideraron burbujas de Argón en agua, excitadas con un campo acústico senoidal de 50 kHz a condiciones ambientales de la ciudad de México.

V) Curvas de estabilidad traslacional (Bjerknes)

Para calcular estas curvas, se consideraron: burbujas de Argón inmersas en agua, una compresión/expansión isotérmica del gas " $\gamma = 1$ " en el interior de la burbuja a

lo largo de cada ciclo y la dinámica radial se simuló con la ecuación de Gilmore (3.2). Los intervalos del radio inicial y la presión aplicada fueron: $.5 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$; $0.1 \leq P_a \leq 4 \times 10^5 \text{ Pa}$. Los incrementos correspondientes fueron: $\Delta R_0 = 0.05 \mu\text{m}$; $\Delta P_a = 0.001 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Se obtuvieron curvas a tres diferentes frecuencias {26.5, 32.8, 53 kHz} para burbujas bajo condiciones normales: $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ y $T_0 = 293 \text{ K}$. La comparación entre ellas muestra pocas diferencias principalmente en el intervalo $5 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$, ver figura (5.25).

La curva correspondiente a 50 kHz se calculó para burbujas a condiciones de la ciudad de México: $P_0 = 77154 \text{ Pa}$ y $T_0 = 292.5 \text{ K}$. Esta línea permanece aproximadamente paralela pero desplazada hacia la derecha de la línea correspondiente a 53 kHz (con la cual es comparable). Este resultado es consistente con el efecto que tiene la disminución de la presión ambiental en la SLUB. Se ha observado que si P_a se mantiene constante, y P_0 es disminuido, la relación de expansión, RE, aumenta hasta que P_0 alcanza un valor crítico; en el que la burbuja se traslada fuera del antinodo de presión¹²⁶. Para mayor claridad, se marcó como ejemplo una línea vertical en $P_a = 1.8 \times 10^5 \text{ Pa}$, ver figura (5.25). Para $P_0 = 101325 \text{ Pa}$, la inestabilidad de Bjerknes ocurre a $R_0 \approx 3.2 \mu\text{m}$, pero por el efecto de la disminución en la presión ambiental hasta $P_0 = 77154 \text{ Pa}$ la inestabilidad traslacional ahora ocurre a $R_0 \approx 5.6 \mu\text{m}$.

En otras palabras, al tener una presión ambiental cada vez menor y con la misma energía de excitación es posible expandir más las burbujas hasta alcanzar el radio crítico impuesto por la inestabilidad de Bjerknes.

En la figura 5.26 se muestra la curva de Bjerknes, el umbral de la IP para el caso III y los experimentos correspondientes a una frecuencia de 32.8 kHz. La inestabilidad traslacional ocurre según el cálculo, a presiones $P_a \approx 1.8 \times 10^5 \text{ Pa}$. La curva de Bjerknes esta localizada por encima de la curva de la IP, indicando que las burbujas excitadas a $P_a \lesssim 1.8 \times 10^5 \text{ Pa}$ son atrapadas en el antinodo de presión aún cuando algunas de ellas desarrollen deformaciones superficiales. Éste resultado, esta claramente reivindicado con los datos experimentales y además coincide con otros resultados teóricos como los presentados por Moshaii *et al.*¹²⁷.

Algo similar ocurre para el caso de la ciudad de México. El umbral de Bjerknes se localiza por encima de la línea de la IP, ver figura (5.27).

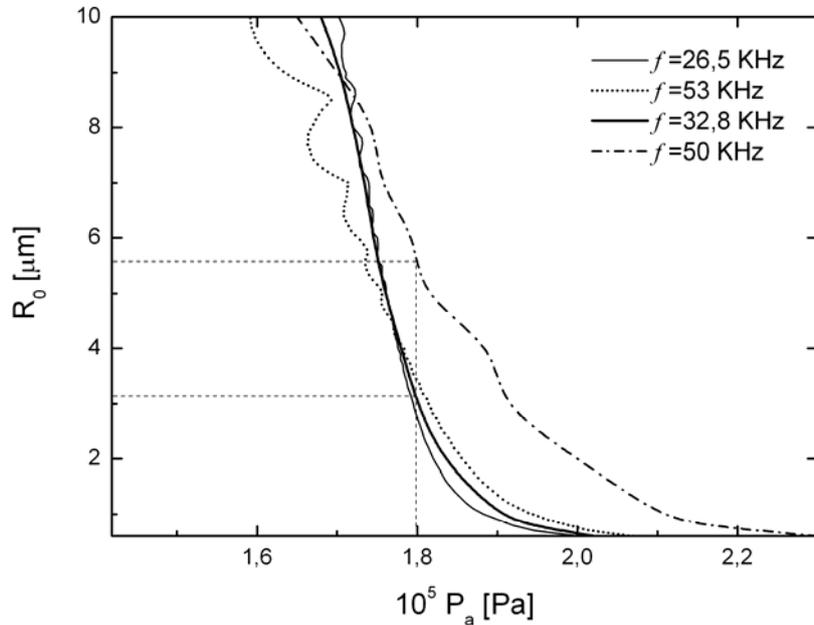


Figura 5.25 Curvas de la inestabilidad de Bjerknes para diferentes frecuencias de excitación. Las curvas correspondientes a $f = \{26.5, 32.8 \text{ y } 53 \text{ kHz}\}$ fueron calculadas con una presión ambiental de $P_0 = 0.101 \text{ MPa}$, la curva a $f = 50 \text{ kHz}$ fue calculada para $P_0 = 0.077 \text{ MPa}$ (condiciones de la Ciudad de México).

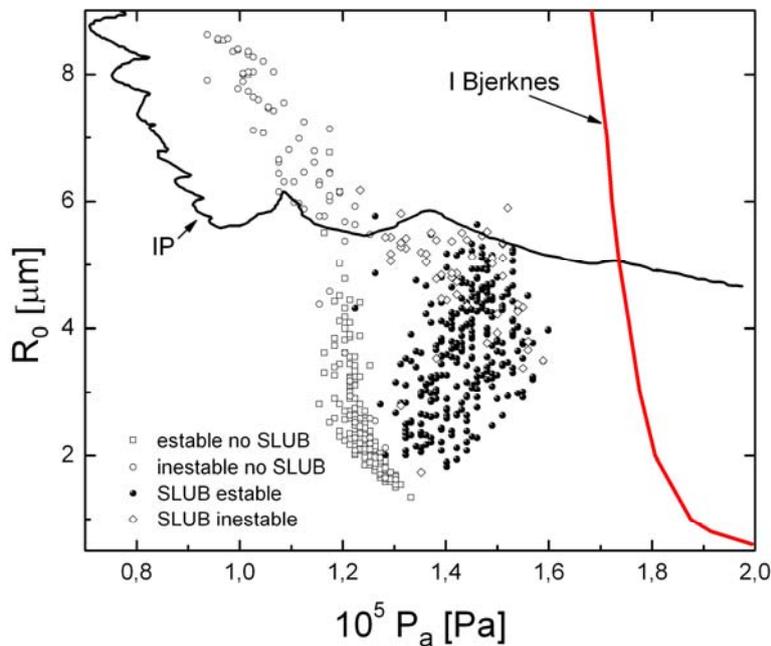


Figura 5.26 Curvas de la inestabilidad de Bjerknes para diferentes frecuencias de excitación. Las curvas correspondientes a $f = \{26.5, 32.8 \text{ y } 53 \text{ kHz}\}$ fueron calculadas con una presión ambiental de $P_0 = 0.101 \text{ MPa}$, la curva a $f = 50.5 \text{ kHz}$ fue calculada para $P_0 = 0.077 \text{ MPa}$ (condiciones de la Ciudad de México).

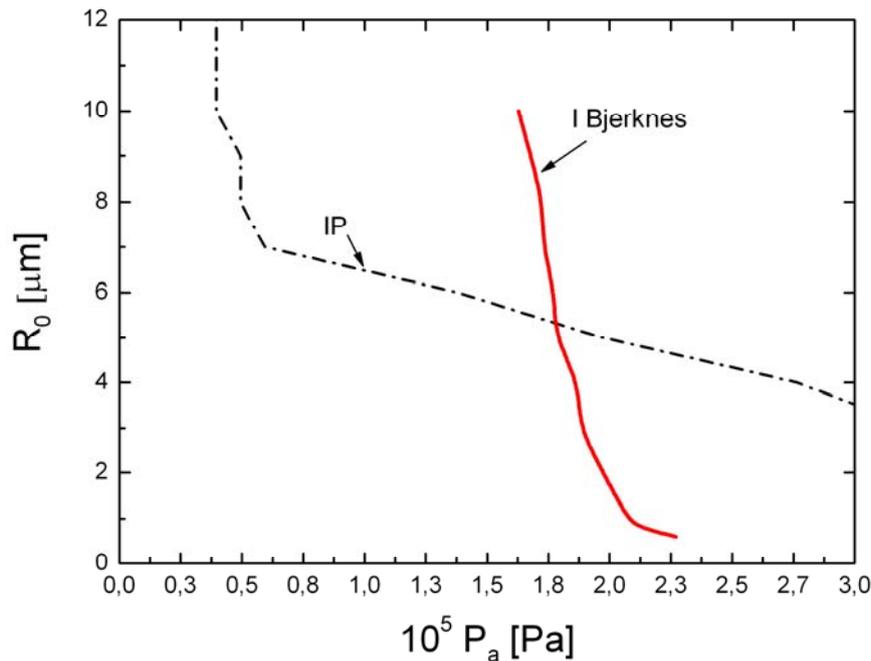


Figura 5.27 Curvas de la inestabilidad de Bjerknes para diferentes frecuencias de excitación. Las curvas correspondientes a $f = \{26.5, 32.8 \text{ y } 53 \text{ kHz}\}$ fueron calculadas con una presión ambiental de $P_0 = 0.101 \text{ MPa}$, la curva a $f = 50.5 \text{ kHz}$ fue calculada para $P_0 = 0.077 \text{ MPa}$ (condiciones de la Ciudad de México).

VI) Espacio paramétrico con sus umbrales

En la figura (5.28) se muestra el espacio paramétrico P_a - R_0 para $f = 32.8 \text{ kHz}$.

La ventana de sonoluminiscencia estable “área achurada” consta de cuatro límites:

- i) En el eje vertical, R_0 , en la parte superior queda limitada por la IP (caso III) y en la parte inferior por el umbral de equilibrio difusivo.
- ii) En el eje horizontal, P_a , por el lado izquierdo queda limitada por el umbral de temperatura $T_g = 9000 \text{ K}$ y por el lado derecho por la IRT (para $\alpha = 0.3$).

La ventana teórica concuerda bien con los experimentos, a excepción de la zona delimitada por $5 \leq R_0 \leq 5.7 \mu\text{m}$ y $1.35 \leq P_a \leq 1.5 \times 10^5 \text{ Pa}$; en la que un cúmulo de burbujas luminiscentes inestables están presentes. También en esta región se observan puntos intercalados de burbujas sonoluminiscentes estables e inestables lo cual hace difícil identificar un límite y una tendencia.

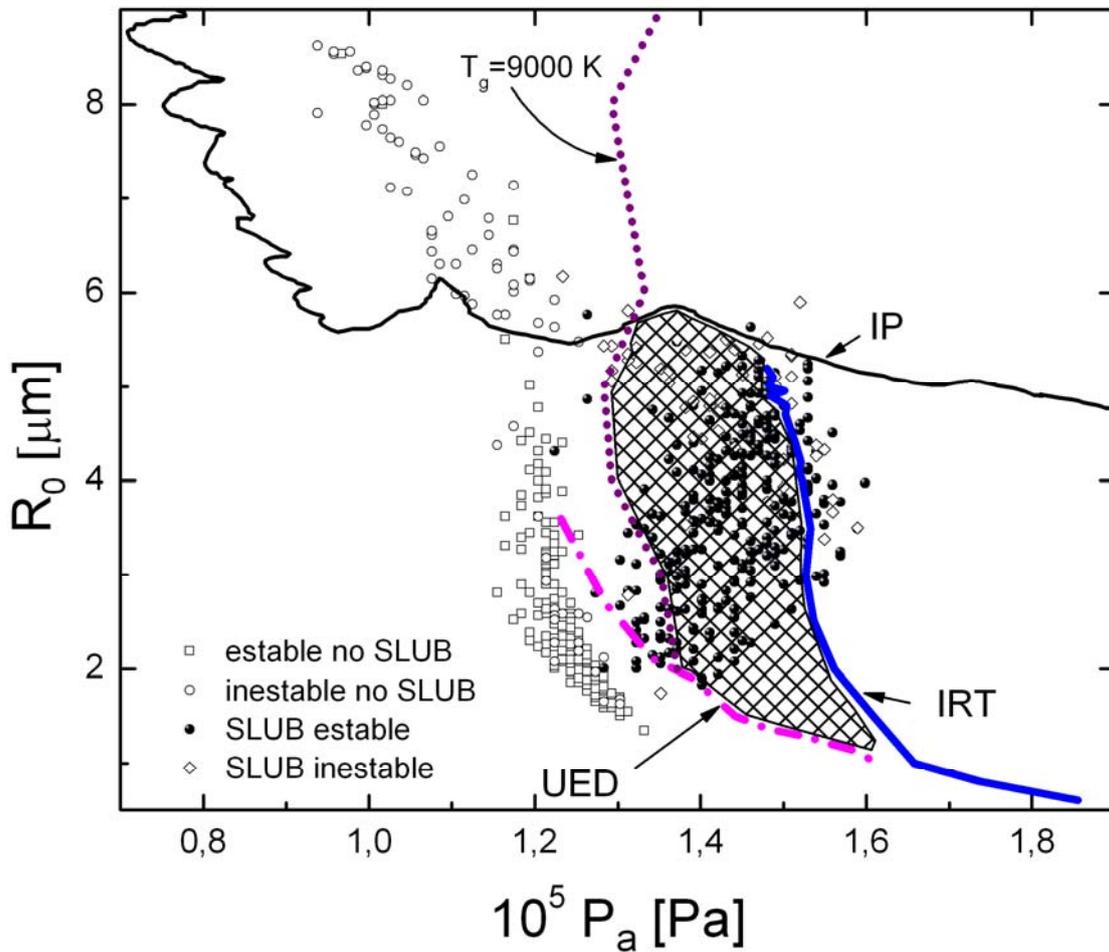


Figura 5.28 Zona de la SLUB estable (área achurada) en el espacio paramétrico para burbujas de Argón en agua a $f=32.8$ kHz.

En la figura (5.29) se muéstrala zona de la SLUB estable para $f=50$ kHz. A diferencia de la figura (5.28), el límite de estabilidad por la derecha esta determinado por la inestabilidad de Bjerknes para $R_0 \gtrsim 3$ μm ; para burbujas menores esta determinada por la curva de la IRT.

Guiados por los resultados teórico-experimentales para el caso $f=32.8$ kHz, en la figura (5.30) se identifican dos sub-zonas (R1, R2) dentro de la región de SLUB estable (gris claro) para indicar características importantes sobre las ondas de choque y los pulsos de luz. La región R1, señala donde es probable la emisión de los destellos más intensos. En esta región también se esperarían ondas de choque con números de Mach, $M_l=1.3-1.8$.

En la región R2, se producirían las ondas de choque con números de Mach, $M_l \sim 2$; aunque las burbujas en esta región concentran eficientemente la energía, no producen los destellos más intensos.

La región en gris oscuro, indica burbujas estables superficialmente en movimiento de traslación y sonoluminisizando. Este comportamiento ha sido observado y caracterizado en fluidos de trabajo más viscosos que el agua. Por ejemplo, en mezclas de agua y glicerina se han observado burbujas luminiscentes describiendo órbitas elipsoidales¹²⁸. Dentro de la zona de la SLUB en traslación se identifica una sub-zona donde se producen las ondas de choque más intensas $M_l \approx 2$ (ver figura 5.29).

La identificación de las zonas y sub-zonas de estabilidad es importante para desarrollar aplicaciones de la SLUB. Una posibilidad es utilizar la luminiscencia en el tratamiento y desinfección de agua¹²⁹.

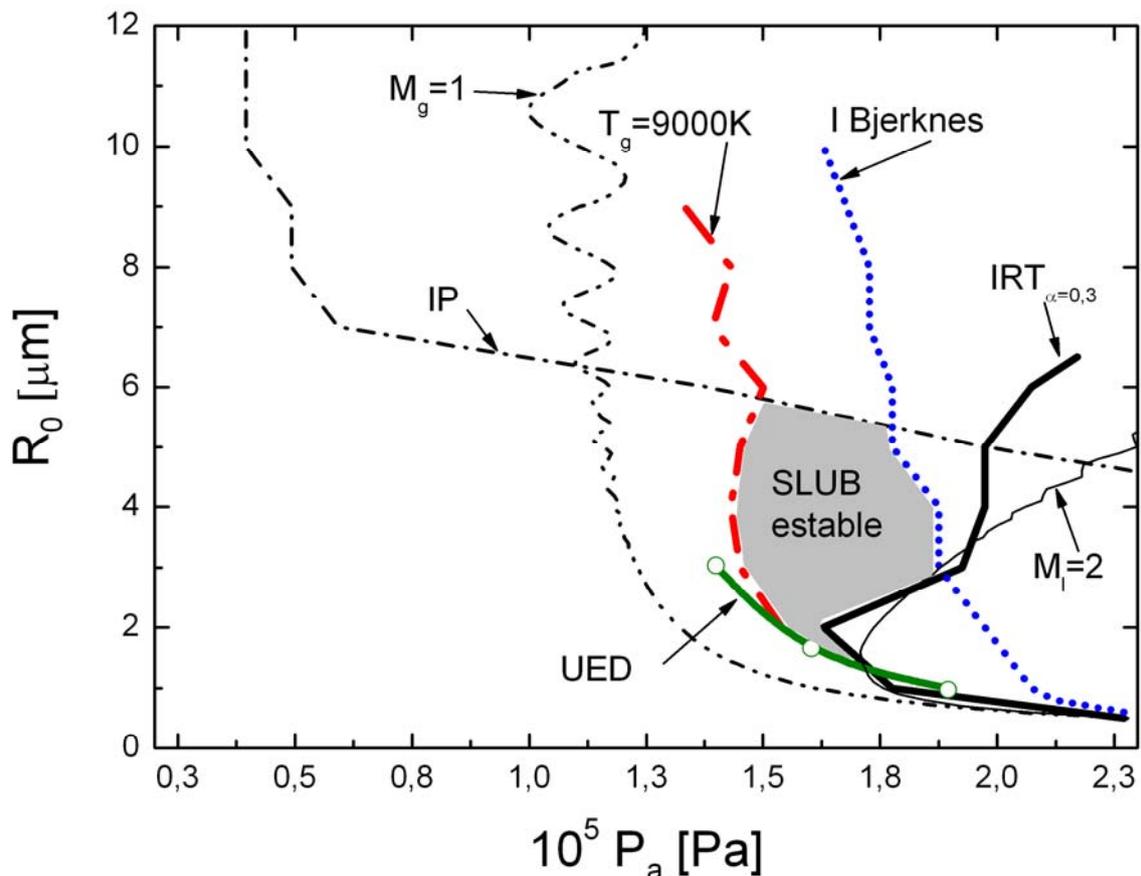


Figura 5.29 Zona de la SLUB estable en el espacio paramétrico para burbujas de Argón en agua a $f=50$ kHz.

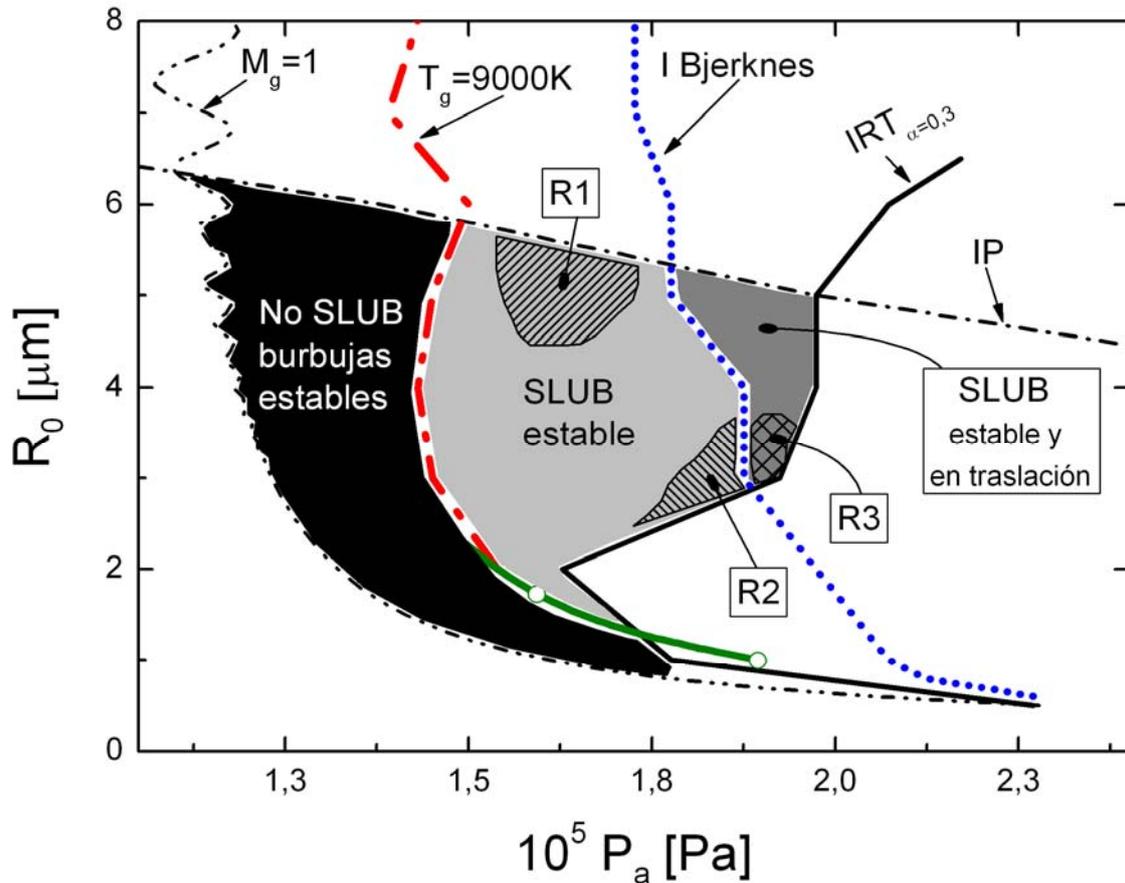


Figura 5.30 Zonas de estabilidad para burbujas de Argón en agua a $f=50$ kHz.

La descomposición de pesticidas presentes en el agua se logra por la producción de oxidantes OH, H₂O₂ y O₃ debido a las altas presiones y temperaturas durante la compresión de la burbuja. Estos oxidantes se producen eficientemente al alcanzar el umbral de temperatura $T_g=9000$ K.

Los destellos activan fotocatalizadores los cuales a su vez producen más oxidantes. La zona R1 sería conveniente para este propósito.

Las ondas de choque en el líquido son capaces de exterminar algunos microorganismos y además promover la ruptura molecular de algunos contaminantes. Si ésta fuera la necesidad primordial, lo conveniente sería trabajar en las regiones R2 y R3.

VII) Caos y doble periodo en el movimiento radial de la burbuja

Se construyeron los diagramas de bifurcación para el radio inicial de la burbuja variando la presión de excitación como parámetro de control. En total se construyeron veinte diagramas para abarcar un intervalo del radio inicial de la burbuja $0.6 \leq R_0 \leq 10 \mu\text{m}$ y un intervalo de la presión de excitación $0 \leq P_a \leq 8.2 \times 10^5 \text{ Pa}$. La temperatura del líquido (en este caso agua) se consideró constante y con un valor de 293 K; los demás parámetros como la viscosidad y la tensión superficial entre otros, fueron tomados de [102]. La frecuencia del campo acústico fue de 26.5 kHz.

Los diagramas se obtuvieron resolviendo la ecuación de Gilmore durante 45 ciclos para cada punto (P_a, R_0) . Los primeros 30 ciclos de la solución transitoria fueron eliminados; y por tanto, lo que se observa en cada diagrama es un total de 15 ciclos de la solución estacionaria. El tiempo de cómputo para cada diagrama osciló entre 15 y 50 horas dependiendo del radio inicial utilizando una PC con un procesador a 2.8 GHz y 496 MB de RAM. Los diagramas correspondientes al radio inicial más pequeño consumieron un mayor número de horas de cómputo.

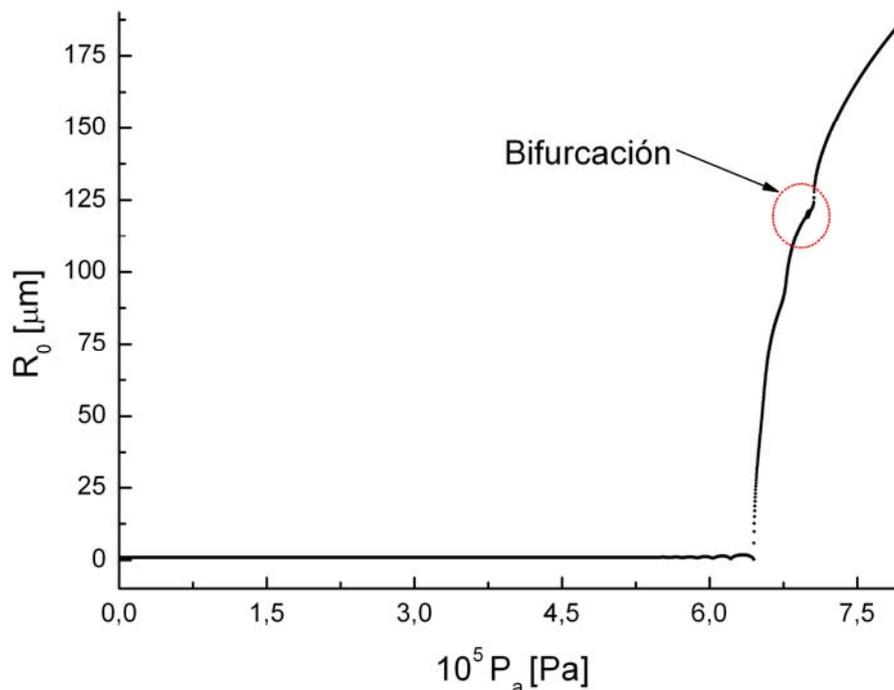


Figura 5.31 Diagrama de bifurcación para $R_0 = 1 \mu\text{m}$ y una burbuja de Argón en agua a $f = 26.5 \text{ kHz}$.

En la figura (5.31) se muestra un diagrama de bifurcación para un radio inicial pequeño $R_0 = 1 \mu\text{m}$. Se observan algunas oscilaciones alrededor de $P_a \approx 5.625 \times 10^5 \text{ Pa}$. Estas oscilaciones crecen conforme P_a aumenta hasta un valor ($P_a \approx 6.3 \times 10^5 \text{ Pa}$) en el que R_0 comienza a crecer en forma exponencial hasta que la primera bifurcación se hace presente ($P_a \approx 6.3 \times 10^5 \text{ Pa}$). La figura (5.32) muestra un acercamiento de la figura (5.31) para hacer visible la bifurcación. El comportamiento antes descrito fue similar en los diagramas para $R_0 \leq 2 \mu\text{m}$.

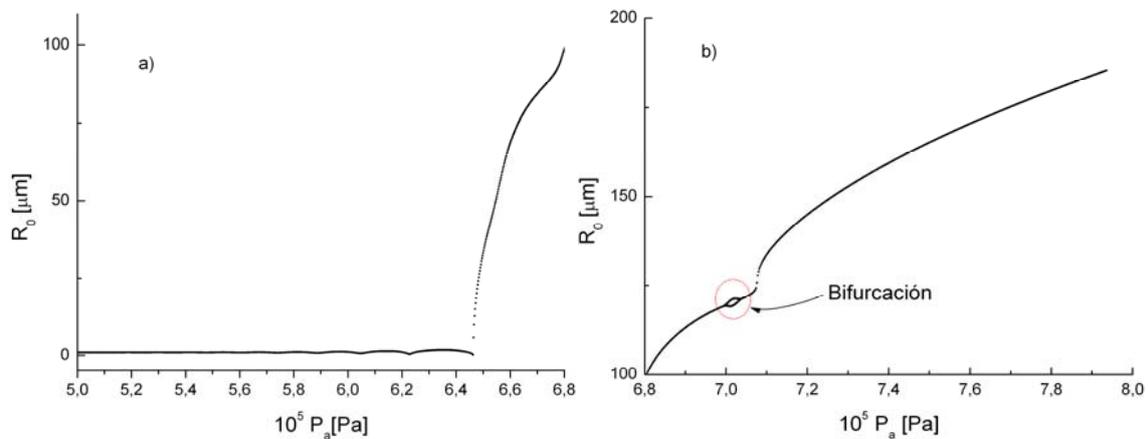


Figura 5.32 Acercamiento de la figura 6.31 para hacer visible la bifurcación.

En los diagramas para $R_0 \geq 2.5 \mu\text{m}$, también se presentan oscilaciones que crecen en amplitud conforme aumenta P_a , sin embargo no se observa un crecimiento exponencial y la primera bifurcación se presenta “montada” en las oscilaciones, ver figura (5.33).

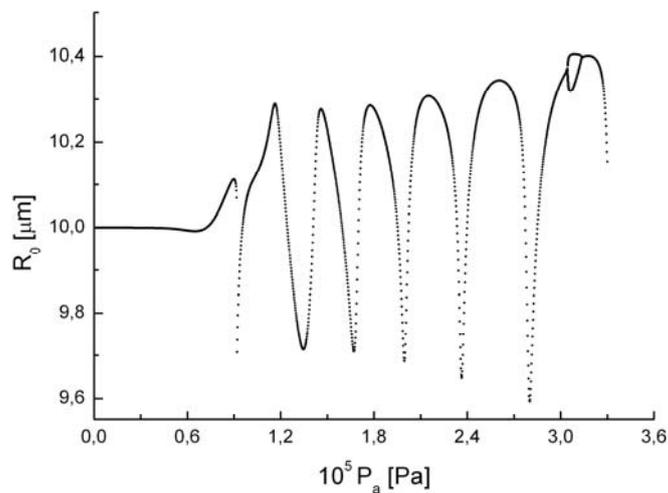


Figura 5.33 Diagrama de bifurcación para una burbuja de Argón en agua con $R_0=10 \mu\text{m}$.

En la figura (5.34) se muestran las curvas del UORI y del UDP con algunos de los diagramas utilizados para su construcción. Es importante hacer notar, que antes de alcanzar el UORI, la solución estacionaria de la ecuación de Gilmore resulta ser periódica con un periodo igual al de la excitación y además no se observan oscilaciones en R_0 . Ya sabemos que al exceder el UORI habrá oscilaciones en R_0 ; y sin embargo, la solución estacionaria del modelo de Gilmore permanece periódica con la misma frecuencia de la excitación.

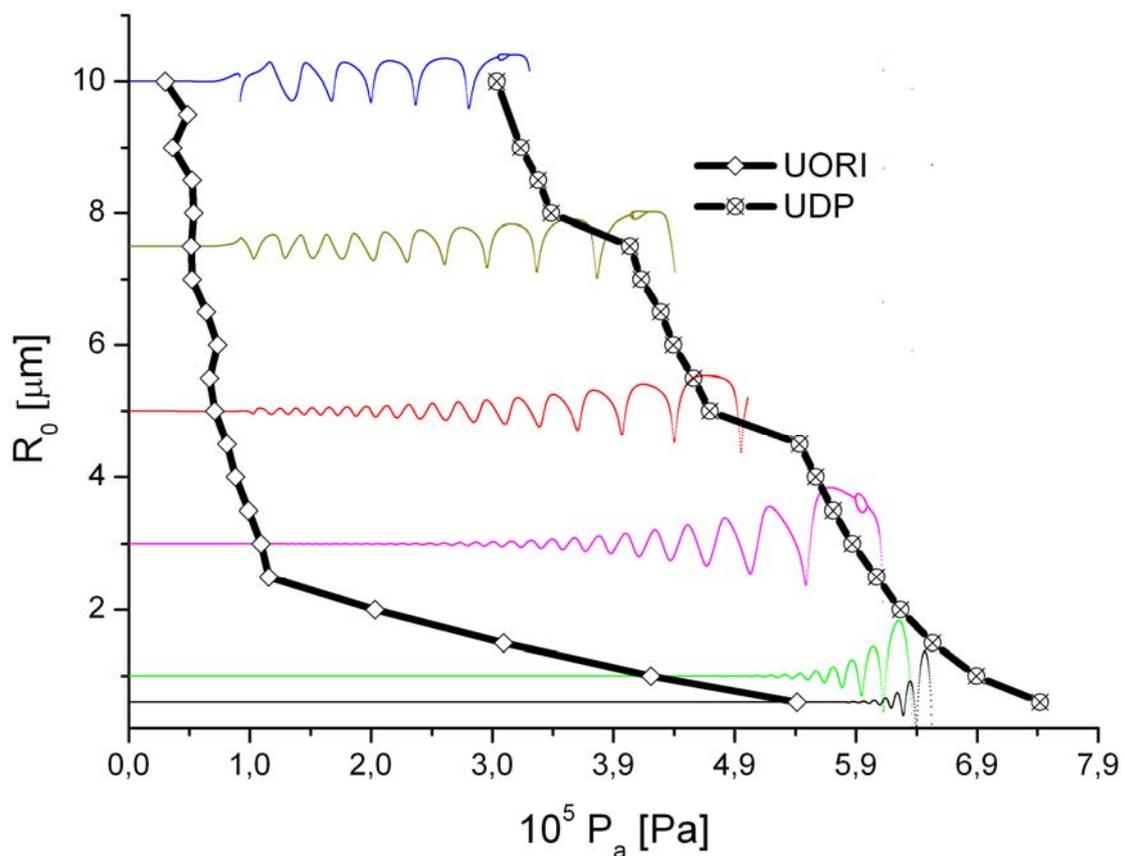


Figura 5.34 Umbral de las oscilaciones en el radio para burbujas de Argón en agua a $f=26.5$ kHz.

Hay dos aspectos más por señalar:

- 1) Se ve claramente que la tendencia de las curvas UORI y UDP es similar indicando que tanto las oscilaciones en R_0 como la aparición de doble periodo ocurren a presiones de excitación mayores en burbujas pequeñas y viceversa.
- 2) En general las bifurcaciones abarcan intervalos de presión cortos (del orden de

0.1×10^5 Pa), para luego aparecer de nuevo oscilaciones crecientes en el radio inicial a medida que sigue aumentando la presión. En este caso se puede afirmar con seguridad que las bifurcaciones son de periodicidad 2 por el algoritmo utilizado (ver apéndice B) para construir los diagramas de bifurcación; mediante el cual, se calculan los diagramas de Poincaré correspondientes a cada valor de presión. Precisamente, una bifurcación en el radio corresponde a dos puntos en el diagrama de Poincaré; y por lo tanto doble periodicidad¹³⁰.

La figura (5.35) muestran las curvas del UORI y del UDP y una región en color oscuro donde teóricamente se produce sonoluminiscencia estable en burbujas de Argón en agua a $f=26.5$ kHz [102]. Las burbujas con $R_0 \geq 2.5$ μm dentro de la región de SLUB estable presentarán pequeñas oscilaciones en R_0 , pero el movimiento radial será periódico. La región de SLUB estable se localiza muy por debajo de la curva UDP indicando que la doble periodicidad y caos observados en la amplitud de los destellos¹³¹ no tendría explicación a partir de las bifurcaciones y caoticidad en la dinámica radial; el mecanismo principal provendría de las distorsiones superficiales de la burbuja, perdiéndose así la simetría esférica en la parte final del colapso. A una conclusión similar llegan Simon *et al.*¹¹⁴ y Holt *et al.*¹³¹.

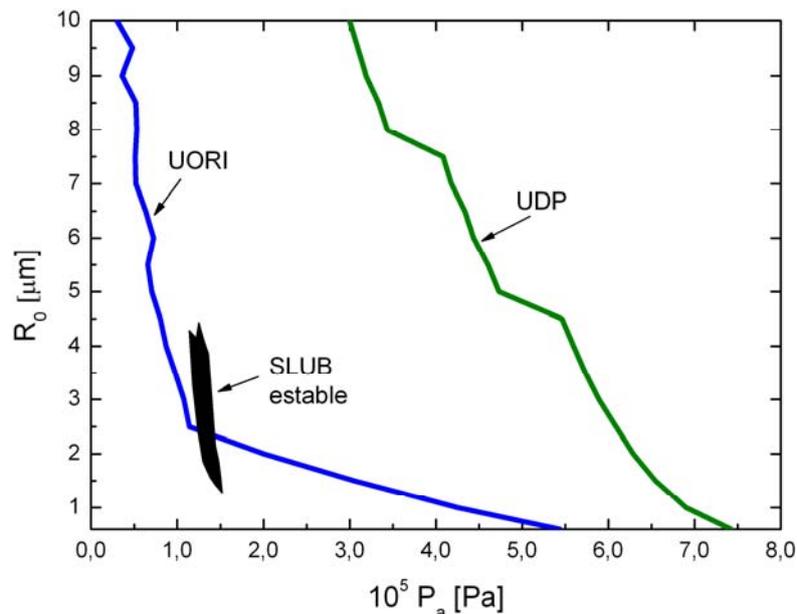


Figura 5.35 Umbrales de las oscilaciones en el radio (UORI) y de doble periodo (UDP) para burbujas de Argón en agua a $f=26.5$ kHz.

VIII) Burbuja cónica: resultados experimentales

Se estudió la influencia que tiene el perturbar la composición química del pistón líquido. Se consideraron tres casos:

caso I: 1,2-Propanediol / Ar

caso II: 1,2-Propanediol + H₂SO₄ (0.6 mol L⁻¹) / Ar

caso III: 1,2-Propanediol + H₂SO₄ (0.6 mol L⁻¹) + NaCl (0.03 mol L⁻¹) / Ar

Todos los experimentos se realizaron siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 2 (págs. 29,30). Para ver detalles sobre la instrumentación para registrar: la presión, los pulsos de luz y los espectros; consultar [132].

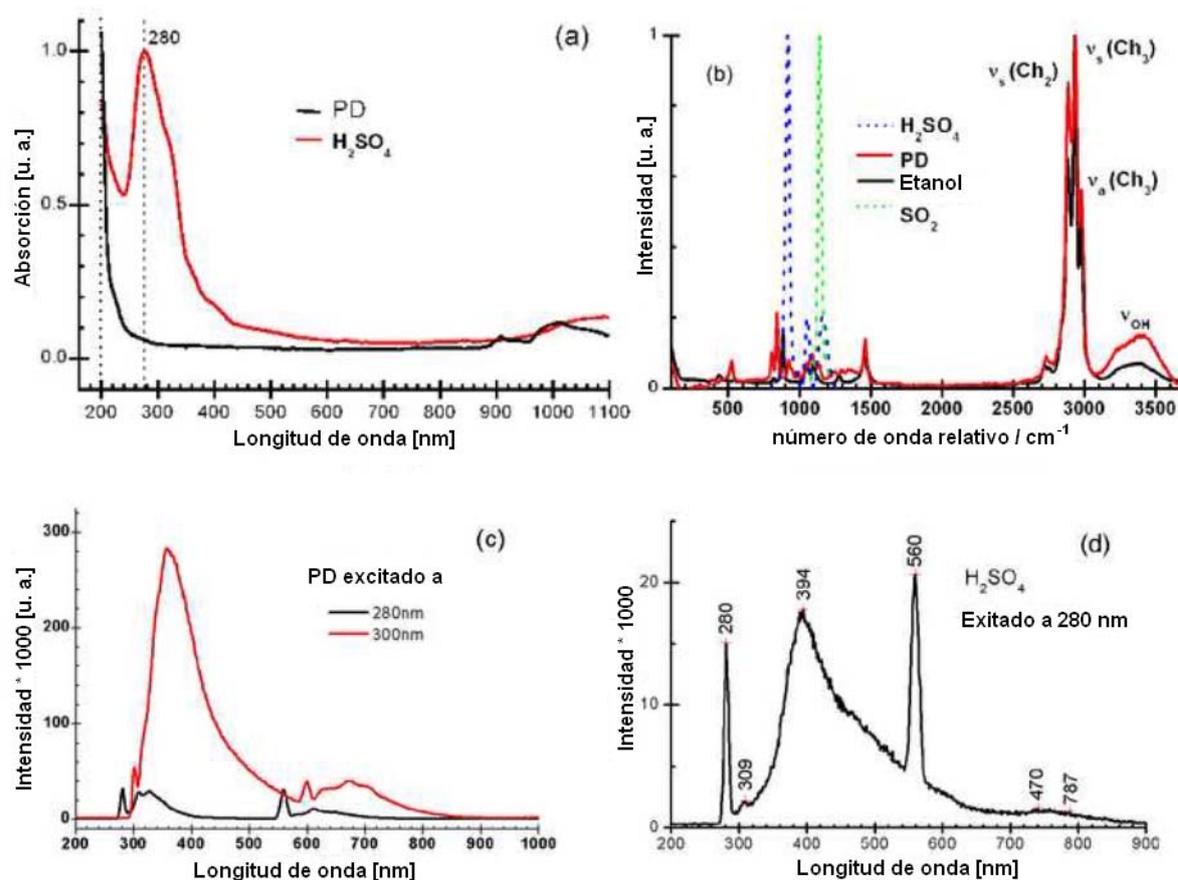


Figura 5.36 a) Espectros de absorción del PD y del H₂SO₄ tal como fueron adquiridos, b) espectros Raman del PD y del H₂SO₄ vs. etanol y SO₂ para enfatizar sus características, c) espectros de fluorescencia excitados a 280 y 300 nm para el PD, y d) espectros de fluorescencia excitados a 280 nm para el H₂SO₄.

Es importante señalar que todos los componentes de las mezclas líquidas fueron adquiridos como reactivos de primer grado para investigación química. Sin embargo contienen moléculas o átomos en estado inestable a condiciones ambientales. Los espectros Raman y de fluorescencia del 1,2- propanediol (PD) y del H_2SO_4 indican la presencia de una gran cantidad de impurezas en ambas sustancias; ver figura (5.36).

a) Respuesta del dispositivo

El tubo U sin gas y sin líquido presentó una frecuencia de resonancia de 480 Hz. Cuando se introdujo el líquido, la frecuencia se desplazó a 184 Hz. El colapso del gas hacia el ápex del cono produce un pulso de presión que es radiado a la columna del líquido y golpea las superficies sólidas de la cavidad cónica y la ventana de cuarzo localizada en el ápex (ver figura 2.13, Cap.2). La energía transmitida como una onda de esfuerzo viaja a través de la brida de acero hacia el sensor de fuerza.

La curva en la parte superior de la figura (5.37) corresponde a la señal del láser que registró el movimiento del menisco sin la inyección del gas.

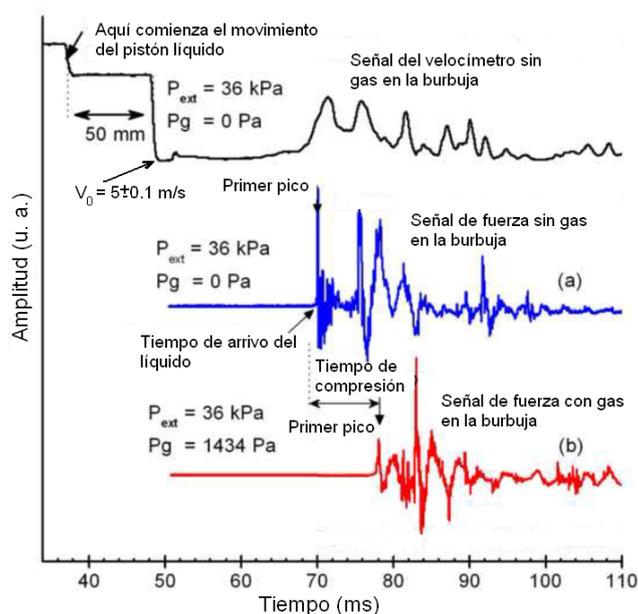


Figura 5.37 Señales simultáneas adquiridas con el velocímetro (gráfica en la parte superior) y del sensor de fuerza.

También se despliegan las señales típicas del sensor de fuerza para dos situaciones de compresión: a) cuando el pistón líquido trabaja a condiciones de vacío, sin gas en la cavidad y b) cuando el gas es inyectado en el *brazo 1* (ver figura 2.12, Cap.2), y así se tiene una presión inicial de gas para ser comprimido. El tiempo de arribo para la situación (a), ~ 70 ms, fue considerado como la respuesta del aparato. La diferencia entre los tiempos de arribo de las situaciones (a) y (b) representa un retraso que bajo las presentes condiciones experimentales, promedió un valor de 10 ms.

b) Características de los pulsos de luz

Se registraron una y múltiples emisiones bajo ciertas condiciones, ver figura (5.38a).

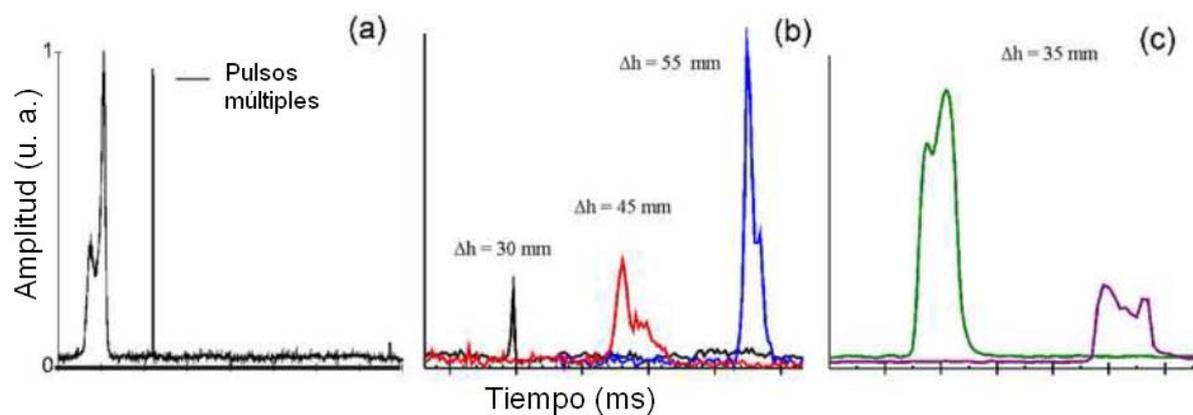


Figura 5.38 a) Emisiones múltiples, b) forma de los pulsos al incrementar la presión del gas inerte, c) forma de los pulsos a distintas presiones de excitación pero con la misma cantidad de gas.

Los pulsos que se registraron al incrementar la presión del gas se ilustran en la figura (5.38b). Y algunos ejemplos de la forma de los pulsos en función de la presión de excitación se muestran en la figura (5.38c).

Aún cuando las condiciones del experimento no cambiaron, la amplitud, el ancho y la forma de los pulsos varían significativamente. El pulso luminiscente exhibe gran variedad de perfiles. Sin embargo siempre desplegaron un máximo principal y más de dos máximos locales, uno ocurre antes (precursor) del máximo principal y uno

después. Estos máximos locales, se asemejan a aquellos generados por cavitación láser^{133,134}.

Cuando la burbuja colapsa con baja presión de gas inerte, el máximo principal y el precursor son del mismo orden. En esta situación, las emisión de luz detectada simultáneamente con tres foto-multiplicadores a diferentes ángulos sobre un mismo plano horizontal, indican que el pulso no posee simetría axial. Este comportamiento se ilustra en la figura (5.39) para dos direcciones, bajo condiciones de $\Delta h = 40 \pm 2$ mm, $V_0 = 6 \pm 0.2$ m/s, $P_{\text{ext}} = 262$ kPa. Adicionalmente, cuando se han realizado algunas repeticiones del experimento, se encontró que la intensidad del pulso aumenta hasta alcanzar un valor máximo para después atenuarse y hacerse cada vez más ancho. Esto también se observa en la figura (5.39).

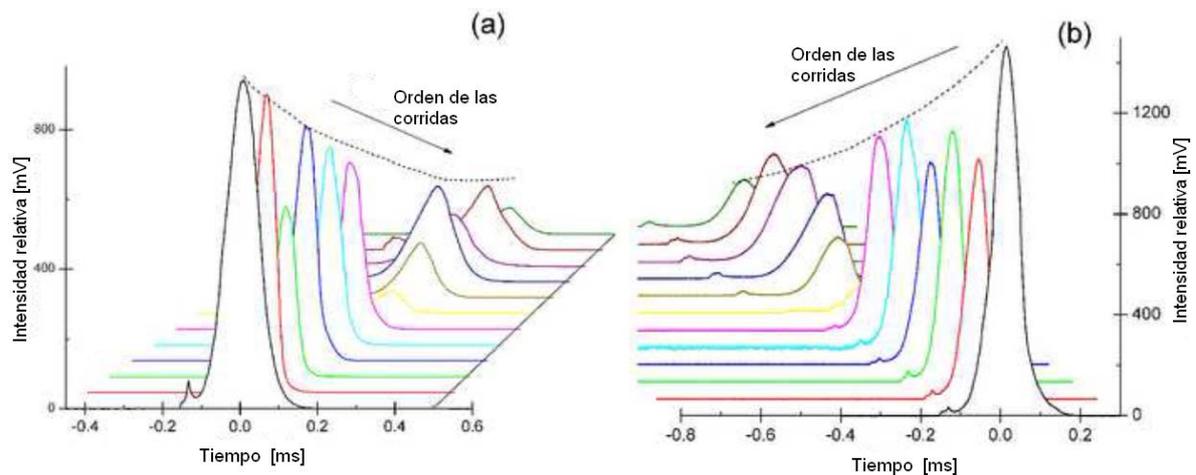


Figura 5.39 Gráfica en cascada de las señales invertidas de un fotomultiplicador conforme aumenta el número de corridas experimentales. Las señales fueron tomadas simultáneamente en tres direcciones. Sólo se despliegan los resultados de dos direcciones (a) y (b). El valor máximo de cada curva se ha desplazado a $t = 0$.

El comportamiento antes descrito, se debe al proceso de compresión repetitiva, que causa variaciones en la composición del pistón líquido (descomposición química). Esto puede ser registrado los espectros Raman y de fluorescencia del líquido, tomados antes (1) y después (2) del proceso de compresión repetitiva. En las figuras (5.40a) y (5.40b) se muestran los espectros correspondientes al caso I, indicando la degradación del líquido por el proceso iterativo de experimentación.

Hubo un aumento en la cantidad de especies fluorescentes y un cambio hacia longitudes de ondas más anchas.

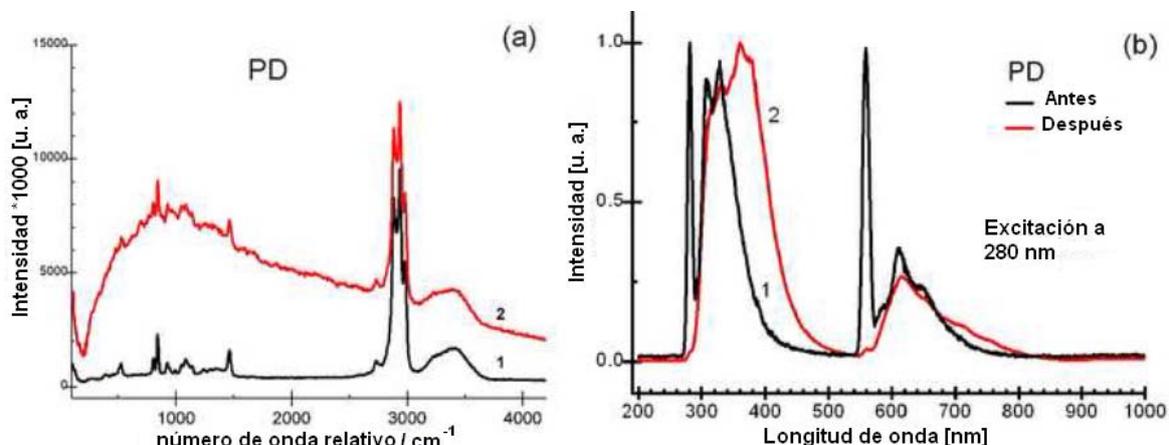


Figura 5.40 Caso I, a) espectros Raman, b) espectros de fluorescencia. Antes (1) y después (2) de las corridas experimentales.

Las figuras (5.41a) y (5.41b) muestran como la intensidad del pulso varía en función del tipo de solución líquida. La intensidad de luz promedio para el caso II fue dos veces mayor que la del caso I, mientras que la intensidad para el caso III fue tres veces mayor a la del caso I.

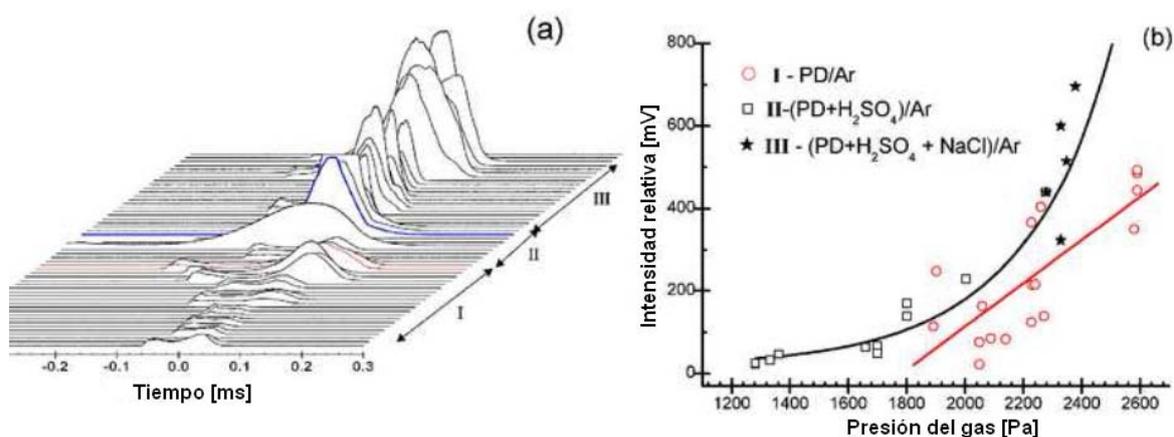


Figura 5.41 Comparaciones de la intensidad de los pulsos de luz en función de la presión del gas y del líquido huésped. a) Gráficas en cascada de la emisión de luz provenientes de las corridas experimentales para los casos I, II y III en forma consecutiva. b) Se grafican las máximas intensidades y se les ajusta una curva exponencial; se encontró un comportamiento lineal cuando el pistón líquido fue utilizado sin añadirle impurezas.

Como se observa, cuando se adicionan impurezas arriba de una cierta concentración, la intensidad creció en forma no lineal. Sin embargo, este no fue el caso cuando el líquido del pistón es usado sin adiciones (*caso 1*); bajo tales circunstancias, la intensidad se incrementó en forma lineal.

El comportamiento hidrodinámico del pistón líquido no fue modificada substancialmente por la adición de sustancias. Así, prácticamente la densidad no varió y el tiempo del colapso y el pulso de presión no se vieron afectados en gran medida. Sin embargo, se encontraron cambios físico-químicos substanciales. El H_2SO_4 es un agente oxidante que acelera la descomposición del PD. Se sabe que la adición de altas concentraciones ($1-2 \text{ mol L}^{-1}$) de sales metálicas al agua incrementa la luminiscencia del continuo proveniente de las moléculas de H_2O^* y los iones cloruro inhiben las reacciones de los radicales OH. La descomposición físico-química de las mezclas líquidas se siguió tomando los espectros de absorción y Raman del líquido antes y después de usar el pistón líquido como se ilustra en las figuras (5.42a) y (5.42b).

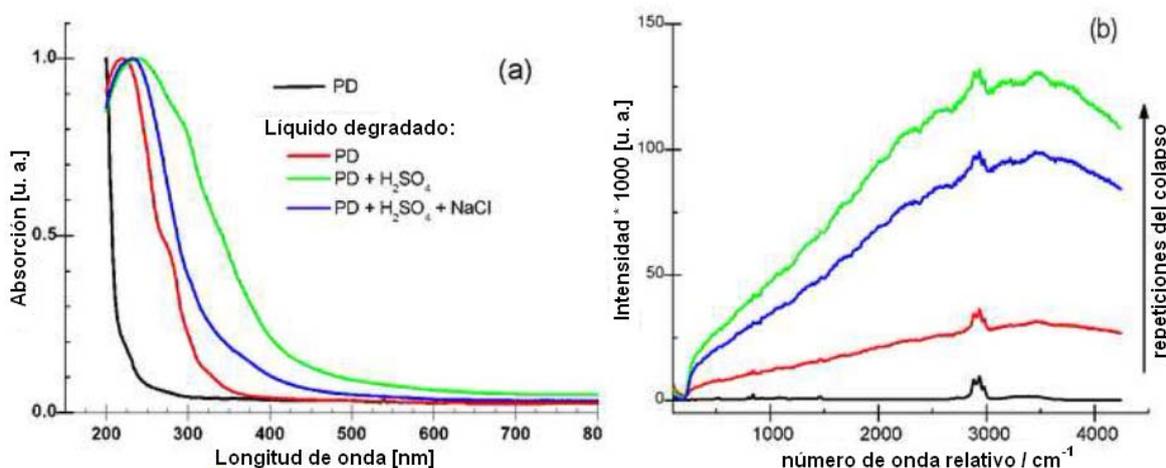


Figura 5.42 Comparación espectral. a) Espectros de absorción de las soluciones usadas como pistón líquido, con y sin adición de sustancias, muestran un cambio en la banda de absorción hacia longitudes de onda mayores después de muchas corridas experimentales. b) Los correspondientes espectros Raman (a 532 nm), éstos muestran un gran incremento en fluorescencia como función de las sustancias añadidas.

Los espectros de absorción de las soluciones muestran un cambio de la banda de absorción hacia longitudes de onda más anchas en forma contraria a la solución inicial. Los espectros Raman (a 532 nm) muestran un incremento en fluorescencia en función de las sustancias adicionadas y la repetición de las corridas experimentales. Los espectros indican que un gran número de cromóforos fueron generados durante el proceso experimental y que ellos se incrementaron cuando las sustancias fueron adicionadas. Obviamente, el incremento de moléculas cromóforas en el líquido del pistón y el procedimiento de compresión (ver Capítulo 2, págs. 29,30) hicieron que el vapor y gotas de estas especies fueran integradas a la composición del gas. Sin embargo, hay que recordar que después de este incremento en intensidad (lineal o no) vino una disminución de esta como se observa en la figura (5.39).

c) Características de los espectros

Para encontrar él o los mecanismos que expliquen la emisión proveniente de la BC, resulta esencial entender los procesos químicos que se inician cuando la energía cinética es absorbida por las especies dentro de la burbuja durante la compresión. Esta energía debe ser suficiente para producir movimientos moleculares que afecten las uniones y configuraciones químicas. La secuencia real de los procesos moleculares y atómicos que ocurren entre la excitación mecánica del colapso y la emisión de fotones sigue siendo desconocida. Para dar con la naturaleza de las especies luminiscentes, se registraron los espectros provenientes del colapso de la BC y fueron analizados en el rango de longitudes de onda que va de 280 a 880 nm para los tres casos de estudio.

c.1) Transiciones OH $A^2 \Sigma^+ - X^2 \Pi_i$

El radical hidroxilo ($^{\circ}\text{OH}$) es la especie más importante en los procesos de oxidación¹³⁵⁻¹³⁷. Un OH excitado se relaja hacia el estado $X(0)$ y tales moléculas

OH pueden perdurar por largos periodos de tiempo (muchas decenas de microsegundos). Hay muchos estudios de estas reacciones en la fase gaseosa y en la solución líquida. En la SLBM y en la SLUB en agua, el colapso principal esta asociado con una generación rápida de radicales $\cdot\text{OH}$ una vez que la temperatura excede 4000K [16]. Aún cuando, cerca de 2600K, el 10% de las moléculas de agua se disocian térmicamente a presión atmosférica¹³⁸.

Los espectros del radical $\cdot\text{OH}$ de los tres casos se muestran en la figura (5.43). Como se observa, hay un corrimiento hacia el rojo asociado a los casos II y III con respecto al caso I.

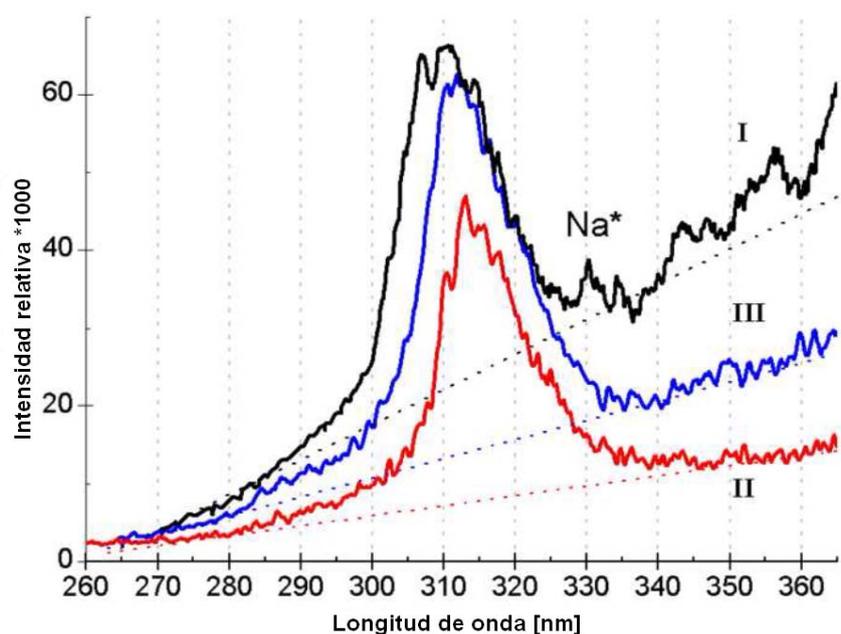


Figura 5.43 Características espectrales en el intervalo 280- 350 nm asociadas a las transiciones del OH correspondientes a las tres soluciones de prueba. El continuo por debajo de 315 nm puede ser asociado a los excimeros OH-Ar. Aparentemente, la emisión del continuo es más intensa para el caso I; también esta presenta un pico asociado a la emisión del átomo Sodio.

Los sistemas II y III exhibieron un componente sin características (sin: picos, líneas ó bandas) que comenzó cerca de 315 nm y se extendió hasta mas allá de 350 nm. Según Sehgal *et al.*¹³⁹, el continuo sin características por debajo de los 315 nm, se debe a la presencia de otros sistemas moleculares como se observa en los radicales OH generados por láser en presencia de un gas inerte. Lo último

se debe a la des-excitación electrónica de los complejos OH-Ar. En el caso I, también se observó la línea del Na*.

La observación de las transiciones OH A-X en los presentes experimentos con la BC, así como en la SLBM y en la SLUB, concuerda completamente con la detección de radicales OH(X) en la cavitación acústica de soluciones acuosas¹³⁵⁻¹³⁷. La interpretación de las transiciones OH A² Σ⁺ - X² Π_i se encuentran en forma detallada en [136].

Los reacciones probables para la formación de OH* pueden ser:

- i) Disociación térmica de moléculas de agua (vapor y /o líquido) y energía de excitación del electrón debido a colisiones inelásticas de primer orden:



- ii) Energía cinética, EC, absorbida por las moléculas de agua se convierte directamente en energía de excitación del electrón:



- iii) Absorción de luz ultravioleta emitida por otras moléculas, incluyendo la emisión proveniente de las reacciones anteriores:



- iv) Colisiones entre H₂O* • M y/ o triple colisión entre H₂O* • [H...OH...M]* generando complejos emisores en la región < 300 nm como:



Aquí, M es una molécula de agua o un átomo de gas inerte.

De acuerdo a las características del espectro, todas las reacciones de arriba pueden ocurrir en el colapso de la BC. Como se verá más adelante, también los intervalos de presión y temperatura (600 a 8000 K) predichos por el modelo serán suficientes para producir estas reacciones. Se sabe bien que la energía cinética transmitida directamente por el pistón líquido (a través de la interfase) a los componentes de la burbuja es muy pequeña; sin embargo, a un nivel molecular es suficiente para activar y/o excitar especies moleculares o átomos que están en estado inestable. De acuerdo a esto, consideramos que la energía cinética absorbida directamente por las especies moleculares y atómicas en un estado inestable es lo que activa varios mecanismos acoplados para producir la emisión de luz. Conforme progresa el colapso, la energía de excitación del electrón se incrementa debido a las colisiones inelásticas. El tiempo de interacción entre las especies es muy largo ya que el tiempo del colapso es lento (~ 1 ms).

c.2) Bandas Swan

La figura (5.44a) muestra la presencia de bandas de C_2 y un pico a 431 nm identificado como un sistema CH. Para el caso 1, se observó que cuando la presión de excitación excede cierto umbral (45 kPa, manométrica), emerge un continuo y la intensidad del pulso aumenta, ver figura (5.44b).

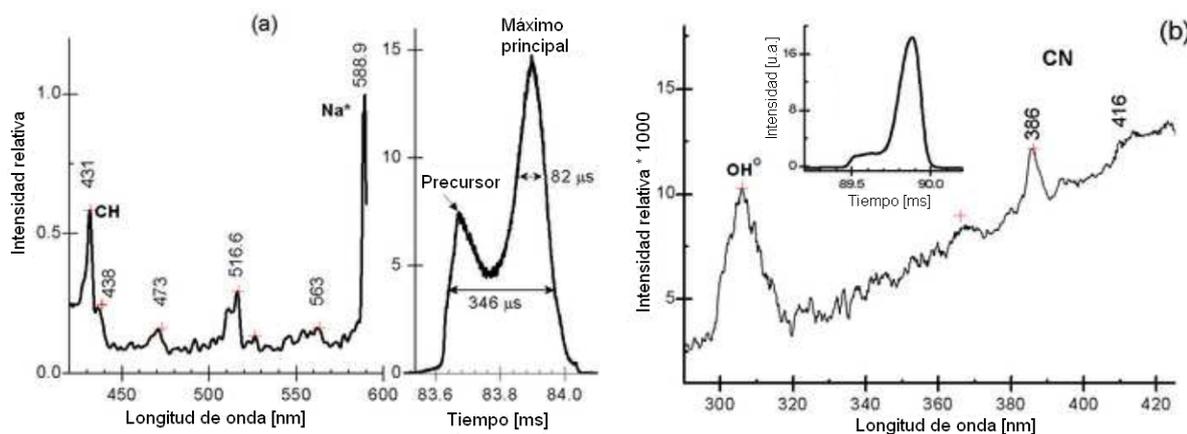


Figura 5.44 Espectro de emisión para el caso 1. a) Se observan la emisión de bandas C_2 a 438, 473, 516 y 563 nm. Los picos a 431 y 588.9 nm están asociados a las transiciones de CH y Na, respectivamente. b) La emisión continua y el pico sobrepuesto a 416 esta asociado a las transiciones de CN. Los pulsos de luz asociados a cada espectro se muestran junto a ellos.

Adicionalmente, la figura (5.44b) muestra los picos CN^* a 386 y 416 nm y el sistema violeta CN, estas bandas solo fueron observadas para el caso I. Por otro lado, la emisión de bandas de C_2 se aprecia difícilmente en los espectros de los casos II y III, como se muestra en la figura (5.45). Ahí, se observa una relación entre la intensidad, el ancho de los pulsos de luz y la presión del gas. Considerando la solución I como el pistón líquido, la emisión de luz fue ancha con una intensidad débil a bajas presiones de gas y de excitación. Sin embargo, en el espectro correspondiente, las transiciones C_2 , CH, CN, Na-Ar, y K se distinguen perfectamente, y no así cuando se adicionaron sustancias, casos II y III. En los casos II y III, la intensidad se incrementó pero el ancho de los pulsos disminuyó, ver figura a figura (5.45).

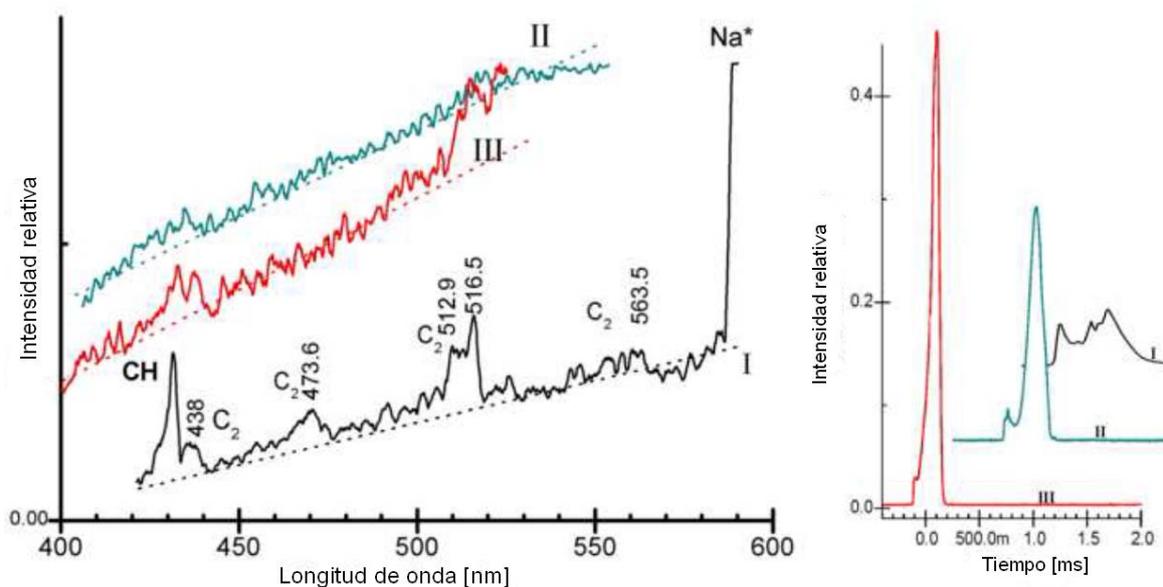


Figura 5.45 Emisión de bandas C_2 provenientes de los casos I, II y III; y el pulso de luz correspondiente a cada espectro.

c.3) Na^* , K^* , y complejos Na-Ar, K-Ar

Los espectros de la BC fueron registrados en la vecindad de las líneas de resonancia ($^2\text{P}-^2\text{S}$) de los metales alcalinos. La figura (5.46a) ilustra los espectros de la BC entre 520-670 nm para los tres casos. El espectro para el caso I, el cual

contiene pequeñas impurezas de sodio y agua, reveló las mismas características que el obtenido para el caso II, al que se le adicionó ácido sulfúrico. Es clara la presencia de los complejos azul y rojo Na-Ar, sin embargo, estos estuvieron ausentes en el caso III. La intensidad normalizada de la luz emitida se muestra en la figura (5.46b). El caso III muestra el ancho más pequeño y no presenta precursor.

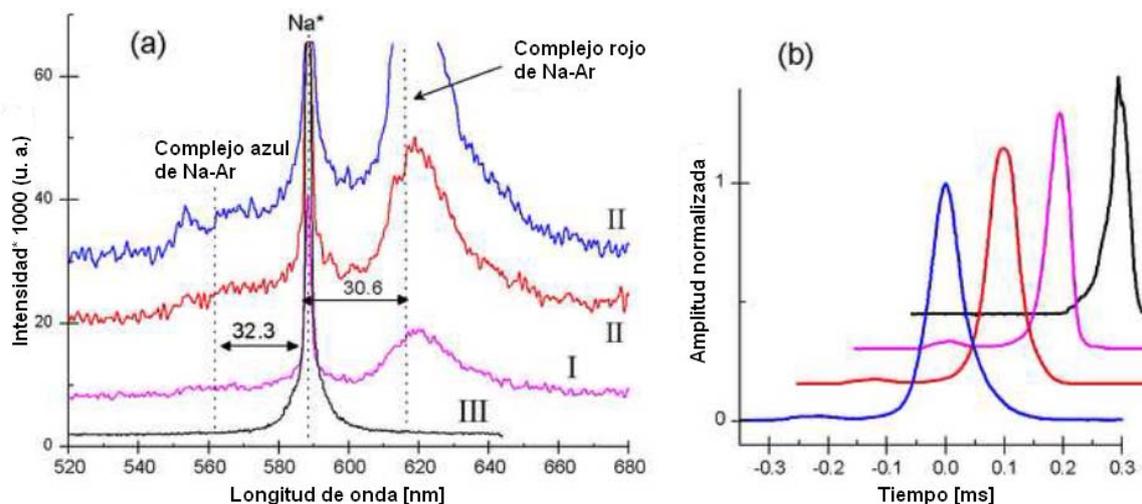


Figura 5.46 Espectros de emisión y pulsos de luz de los tres casos entre 520-670 nm. a) Líneas de resonancia del Na ($3P \rightarrow 3S$). Obvias diferencias se observan entre: los casos I y II, complejos azules y rojos de Na-Ar pueden distinguirse, sin embargo, ellos desaparecen para el caso III. b) Una comparación entre las formas de los pulsos de luz, en la cual se observa la desaparición del precursor para el caso III.

Estos resultados indican que el cloruro de sodio y el cloruro de potasio produjeron una perturbación significativa, dominando la emisión cuando ellos excedieron una cierta cantidad, en el presente caso 0.03 mol L^{-1} .

c.4) Emisión débil y difusa de líneas provenientes del átomo Ar cerca de la región infra-roja

La figura (5.47) muestra la emisión de líneas de Ar cerca de la región infra-roja junto a la resonancia del K. Hacia el lado derecho de cada espectro se muestra el pulso de luz registrado con los fotomultiplicadores y las barras coloreadas indican la presión y temperatura calculadas a partir de la base del cono. En los tres casos,

el tiempo del colapso es alrededor de ~ 1 ms y el radio de compresión es de alrededor de 12, ambos considerados desde la base del cono hacia el ápex. Estos valores se obtuvieron utilizando los datos experimentales.

Para los casos I y II, las bandas aparecieron bajo las condiciones indicadas en las leyendas de la figura. Se observan las bien conocidas líneas de emisión del potasio: 766.5 nm ($P_{3/2}$) y 769.9 nm ($P_{1/2}$).

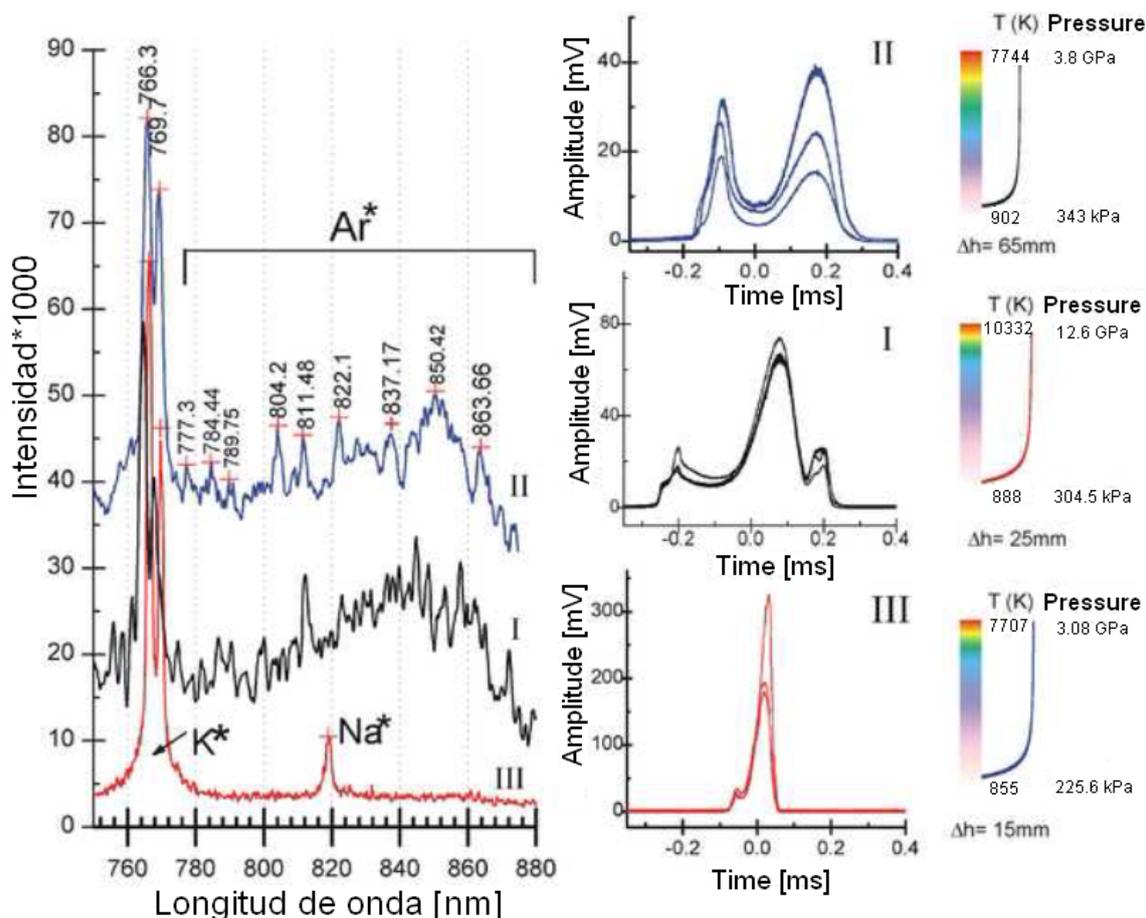


Figura 5.47 Una emisión débil y difusa de líneas de Ar^* cerca del infra-rojo junto a la resonancia del átomo de K son observadas para los casos II y III. La temperatura y presión alcanzadas durante el proceso de compresión, y predichas por el modelo, se muestran junto a cada espectro así como el correspondiente pulso de luz.

Las bandas satélite azul y roja alrededor del potasio no fueron detectadas en nuestros experimentos. Esto es porque no fue adicionado cloruro de potasio en el caso III. Por otro lado, las bandas satélite roja y azul alrededor del Na fueron

observadas usando la *solución I*, aún cuando el cloruro de sodio no se encontró como impureza.

La observación simultánea de las emisiones de Na^* y Ar^* a bajas presiones de excitación con o sin ácido sulfúrico, con poco o mucho gas inerte, sugiere que las especies emisoras fueron formadas a distintos tiempos durante el colapso, así como en diferentes locaciones espaciales como muestran la forma de los pulsos (en los cuales los “precursores” aparecen o no). La cercanía entre los valores máximos de la presión y temperatura (calculados con el modelo) para los tres casos indica que el comportamiento hidrodinámico del pistón líquido y la termodinámica de la compresión del gas no fueron substancialmente afectados. Sin embargo, los pulsos para cada caso mostraron obvias diferencias, sugiriendo una cascada de cambios físico-químicos produciendo directamente las diversas formas y características de los pulsos y de los espectros.

IX) Burbuja cónica: resultados teóricos

La figura 5.48, muestra los resultados del modelo de Hawtin *et al.*⁹ (ver Cap. 3, págs. 54-56) utilizando los datos experimentales. Se muestran el desplazamiento $H(t)$, su primera y segunda derivadas, así como la evolución temporal de la presión y la temperatura en el interior de la burbuja. La columna de gráficos de la izquierda corresponden a la evolución temporal a lo largo de la sección tubular, es decir, $H_c < H(t) \leq H_0$.

La columna de gráficos de la derecha corresponde a la porción cónica, $0 < H(t) \leq H_c$. Los datos de la simulación fueron: $\gamma=1.3$, $\Delta h=12$ mm, $H_c=0.0229$ m, $H_0=0.256$ m, $dH(0)/dt=0$ m/s, $l_c=0.5$ m, $P_0=2177$ Pa, $P_{ext}=248$ KPa, $a=4.96$ MPa/s, $\rho=1036$ Kg/m³.

La interface comenzó a moverse tan pronto como la presión de excitación, $P_{ext}(t)$, fue aplicada, y la columna de líquido alcanzó la base del cono en aproximadamente 71.2 ms. Subsecuentemente, el líquido fue acelerado debido a efectos geométricos hasta que la burbuja alcanzó su volumen mínimo; éste proceso tomó 868 μ s.

El tiempo total para comprimir la burbuja de gas fue $t_c = 72.078$ ms; el cual, es comparable en magnitud al tiempo registrado experimentalmente por un sensor de fuerza $\approx 77.5 \pm 5$ ms, ver señal en la parte inferior de la figura (5.37).

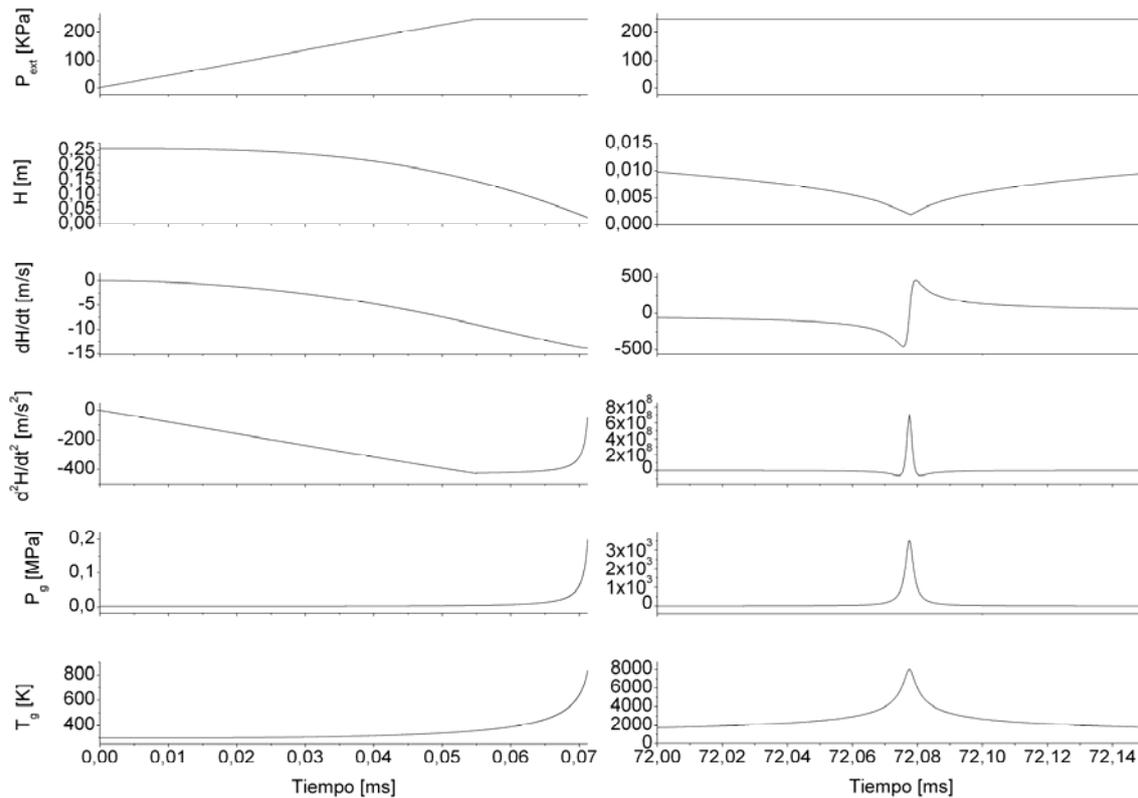


Figura 5.48 De arriba abajo, el comportamiento como función del tiempo de la presión de excitación P_{ext} ; la altura H , y su primera y segunda derivadas dH/dt , d^2H/dt^2 ; la presión de la mezcla gaseosa P_g y su temperatura T_g .

La velocidad de la columna después de haberse trasladado 5 cm se registró experimentalmente mediante un arreglo de láseres, resultando en $V_0 = 5 \pm 0.1$ m/s, el modelo predice una velocidad de $|dH/dt| = 4.959$ m/s. Los cálculos arrojaron una presión máxima $P_{gmax} = 3.6$ GPa y una temperatura máxima de $T_{gmax} = 8066.79$ K. La proporción de calentamiento/enfriamiento fue $\sim 10^8$ Ks⁻¹.

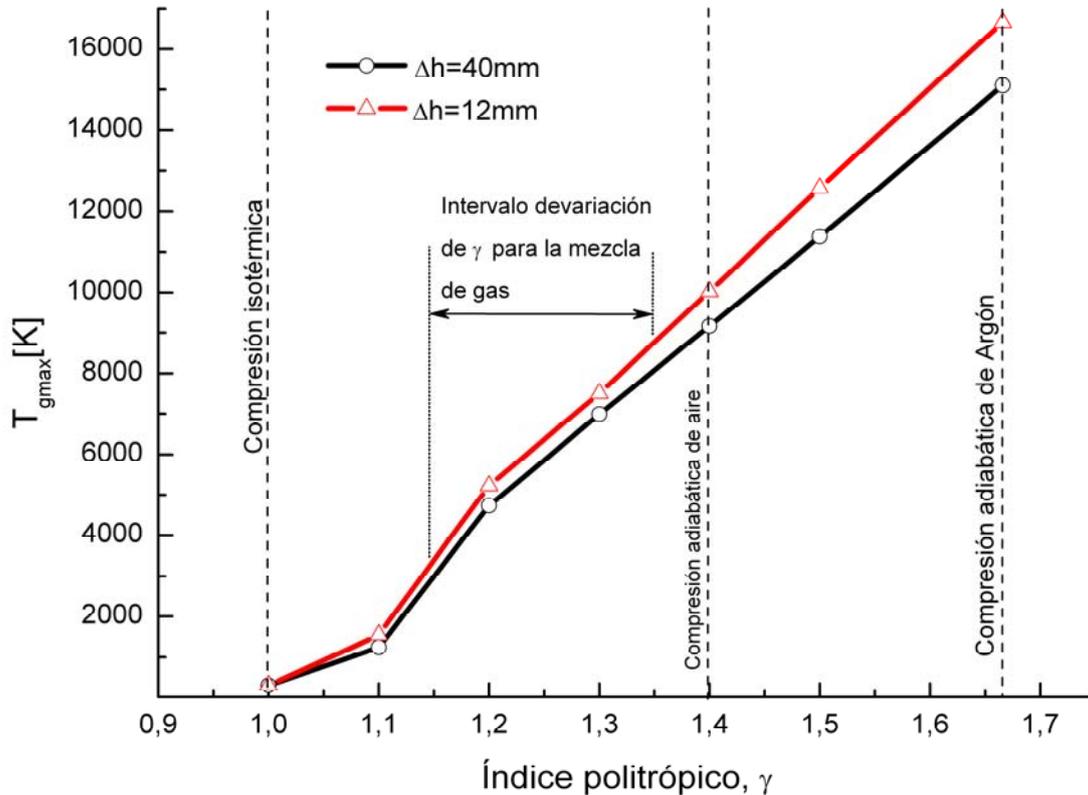


Figura 5.49 Temperaturas máximas como función del índice politrópico γ . Los cálculos se realizaron con el modelo de *Hawtin et al.*²⁴ para dos valores de Δh ; 40 y 20 mm.

La figura (5.49) muestra las máximas temperaturas calculadas a diferentes valores de γ , considerando un valor inicial del índice politrópico de $\gamma_0 \sim 1.3$. Los resultados experimentales indicaron cambios en las características de los pulsos (ancho, amplitud, aparición de satélites) de luz conforme aumentaba el número de corridas experimentales, ver figura (5.39). Tales cambios fueron incluidos considerando variaciones de γ dentro del intervalo 1.15-1.35. El límite inferior fue calculado considerando una mezcla de gas con una alta fracción volumétrica de vapor de líquido (83 %) y el resto Ar (17 %). El límite superior fue calculado para una baja fracción volumétrica de vapor de líquido (10 %), aire (45%) y Ar (45%). Cabe recalcar que en el modelo, γ permanece constante durante la compresión del gas para cada corrida experimental; éste solo cambia como una función de la composición del gas. La figura (5.49) indica $T_{gmax} = 3000$ a 8000 K para $\Delta h=40$ mm y $T_{gmax} = 3000$ a 8500 K para $\Delta h=12$ mm; éstos intervalos de temperatura son muy

bajos para apelar a un mecanismo de ionización molecular que explique las emisiones. Como es bien sabido, la preponderancia del vapor de líquido, el vapor de agua y las reacciones químicas determinarán las presiones y temperaturas locales dentro de la burbuja cónica.

Bajo las presentes condiciones experimentales se dan los siguientes comentarios:

1. De acuerdo a numerosos autores^{2, 91, 133, 134, 140-145}, uno o más mecanismos de emisión de luz pueden ser activados dependiendo de los detalles del colapso.
2. La energía almacenada en la compresión del gas es liberada casi exclusivamente a través de la emisión de ondas de sonido, como se describe en [140,145].
3. La temperatura y presión máximas predichas por el modelo fueron ~ 8000 K y ~ 3 GPa, respectivamente. El tiempo del colapso fue ~ 1 ms.
4. Solo el clivaje homolítico (la ruptura de un enlace simple, dos electrones, en el que un electrón permanece en cada uno de los átomos) es considerado bajo las consideraciones antes descritas.
5. La intensidad y la forma de la luz emitida depende de la presión inicial del gas, la presión de excitación y las propiedades físico-químicas del líquido del pistón y las sustancias disueltas en él. Es claro que la intensidad y el ancho del pulso no dependen directamente de la temperatura máxima alcanzada en el colapso, pero sí de la duración en la cual la temperatura media es mantenida por encima de la temperatura en la que las reacciones químicas no equilibradas son activadas.
6. Las propiedades físico-químicas del líquido del pistón, varían en función del número de corridas experimentales por los procesos de degradación del líquido.
7. Procesos de absorción y desorción (por el vacío aplicado) que toman lugar en la interfase líquido-gas y en las paredes explican como las especies moleculares y atómicas han penetrado en la cavidad, aumentando o atenuando la luminiscencia.
8. La temperatura del colapso no es suficiente para ionizar el gas inerte.
9. La mayor parte de la emisión molecular proviene de reacciones quimiluminiscentes.

10. De acuerdo a los datos experimentales y las características espectrales, la luminiscencia es producida por muchas reacciones químicas catalizadas por temperaturas localizadas que emergen a distintos tiempos a lo largo del colapso-rebote.

11. La observación simultánea de complejos OH-Ar y Na-Ar así como Ar* aplicando una presión de excitación baja, con o sin ácido sulfúrico, a baja o alta presión del gas inerte, sugieren que otros mecanismos están involucrados en los procesos de excitación, tales como: la absorción fotónica y /o multifotónica.

Durante el colapso y principios del rebote, el crecimiento continuo de la presión y temperatura solo induce disociación y numerosos tipos de reacciones químicas; las cuales, toman lugar dentro de la burbuja. Un gran número de los productos de estas reacciones fueron oxidantes y moléculas cromóforas, las cuales fueron dispersadas y mezcladas cuando el volumen de líquido retornó a su posición original. En la cavidad cónica permaneció una capa de líquido, y cuando el vacío fue aplicado, ocurrieron procesos de desorción y ablación tanto de las paredes de la cavidad como de la interfase líquido-gas. Así, la cavidad se llenó parcialmente con vapor y gotas, las cuales acarreaban impurezas sólidas. Estas especies nuevas fueron mezcladas con el gas inerte inyectado para integrar la nueva burbuja para el siguiente colapso. Consecuentemente, la intensidad, forma, ancho y características espectrales de la luz emitida fueron afectados.

En otras palabras, las características de la luminiscencia dependen de la secuencia experimental (repetición), en la cual algunos procesos acumulativos¹⁴⁷ pueden desarrollarse dentro de la cámara cónica.

El mecanismo que resultó de la combinación de los datos espectroscópicos, las características del pulso, cambios en el líquido del pistón, características dinámicas del colapso y la temperatura predicha por el modelo, implican la siguiente secuencia:

i) Generación de especies excitadas por clivaje homolítico (solo disociación) tanto por la temperatura como por la energía cinética (aire, vapor y gotas del líquido, gas inerte y otras especies como átomos y moléculas en estado inestable bajo condiciones ambientales). ii) Colisiones inelásticas de primer orden (o más)

producen estados excitados como OH^* , C_2H^* , y hay también la formación de estados M-Rg^* , y $\text{H}_2\text{O}^*\cdot\text{Rg}$ (M=Metal, Rg= gas inerte). iii) La des-excitación de muchas de estas especies produce emisión UV-Vis, la cual excita los nuevos productos de reacción (moléculas cromóforas) por procesos de absorción y/ o absorción multifotónica¹⁴⁶. Las emisiones de los cromóforos se superponen para integrar toda la emisión detectada^{129,148}.

X) Comparaciones entre la dinámica radial del colapso de una burbuja cónica luminiscente y una burbuja esférica luminiscente

En este inciso se comparan las simulaciones de los radios, Fig. (5.50), y velocidades, Fig. (5.51), durante la etapa compresión y subsecuente(s) rebote(s) de una burbuja cónica (Ecs. de Hawtin, 3.33-340) y una burbuja esférica (Ec. Rayleigh-Plesset, 3.1), ambas bajo condiciones típicas de luminiscencia.

En las simulaciones se considera que la presión del gas en el interior de la burbuja es espacialmente uniforme y la compresión del mismo es adiabática. Otros datos para las soluciones numéricas correspondientes a la burbuja esférica y cónica se muestran en las tablas 5.1 y 5.2, respectivamente. Para que la comparación tenga sentido, el movimiento del menisco de la burbuja cónica se toma a partir de la base del cono.

Para el análisis comparativo se utilizaron tres parámetros:

- i) La relación de los tiempos del colapso: t_{Hmin}/t_{Rmin}
- ii) Las relaciones de compresión: V_{1BC}/V_{2BC} y V_{1BE}/V_{2BE} .
- iii) Los números de Mach: M_{BC} y M_{BE} .

Donde: V_{1BC} es el volumen del cono, V_{2BC} volumen de la burbuja cónica cuando ésta alcanza su radio mínimo. V_{1BE} es el volumen de la burbuja esférica cuando esta se expande hasta alcanzar su radio máximo, V_{2BE} es el volumen correspondiente al radio mínimo.

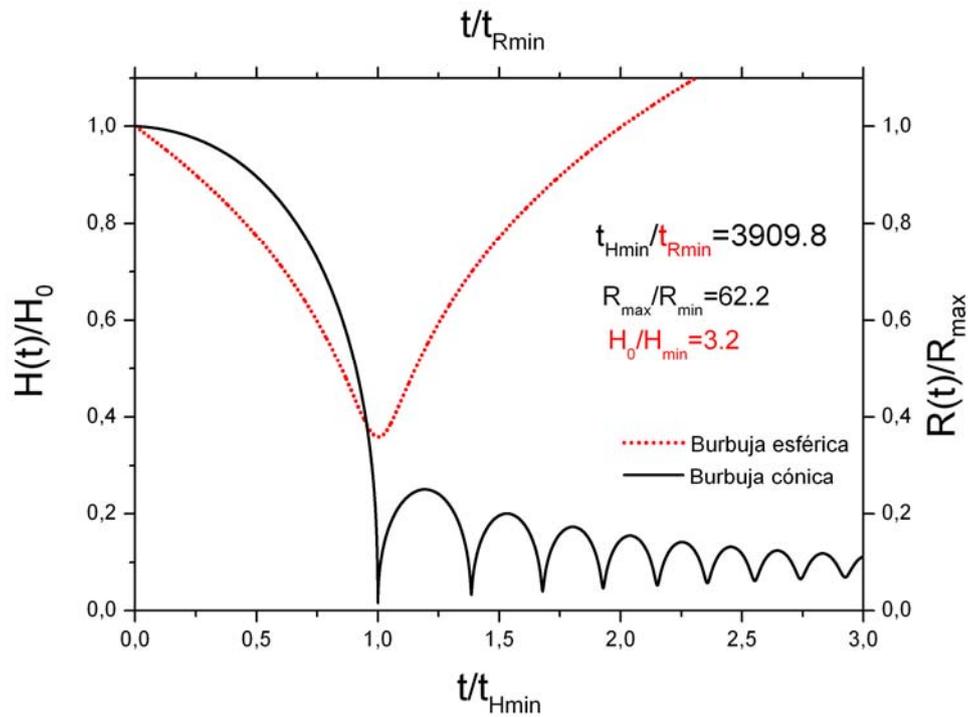


Figura 5.50 Comparación entre los radios cerca del colapso de una burbuja cónica y una burbuja esférica.

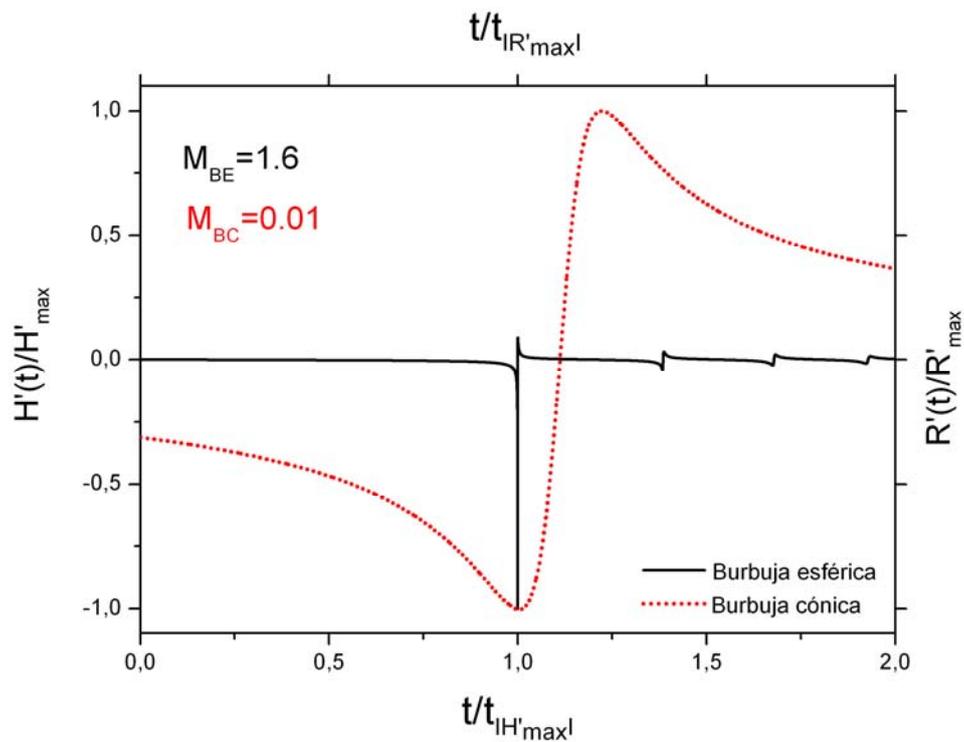


Figura 5.51 Comparación entre las velocidades radiales cerca del colapso de una burbuja cónica y una burbuja esférica.

A partir del valor de los distintos parámetros se pueden establecer algunas diferencias fundamentales entre cada tipo de colapso:

$t_{hmin}/t_{Rmin}=3909.8$, $M_{BE}=1.6$, $M_{BC}=0.01$; indican que el colapso de la burbuja cónica es más lento. Este resultado se debe a efectos geométrico-inerciales. Es claro que al aumentar el tamaño de la burbuja se requerirá mayor energía para alcanzar las altas presiones y temperaturas necesarias al menos para producir disociaciones moleculares y reacciones químicas que produzcan el destello. Para el caso de la temperatura, los cálculos del inciso (IX), muestran temperaturas máximas en la burbuja cónica del orden de 8000 K; en cambio, en una burbuja esférica se alcanzan temperaturas del orden de 20000 K según se han inferido a partir de los espectros de emisión.

Otra diferencia importante es la cantidad de fotones que se emiten por destello. En la SLUB se han registrado entre $10^5 - 10^7$ fotones/pulso; en contraste, un pulso proveniente de la burbuja cónica emite 10^{15} fotones/pulso, esto es de 8 a 10 órdenes de magnitud mayor a lo observado en la burbuja esférica. Este comportamiento se explica a partir de las relaciones de compresión, el tiempo del colapso y la cantidad de gas contenida en la burbuja. En la SLUB se alcanzan relaciones de compresión $V_{1BE}/V_{2BE} \sim 100000$ en un tiempo ~ 500 ns; y la cantidad de moles de gas argón se calcula en forma simple considerando un radio inicial típico de $5 \mu\text{m}$ y una densidad $\sim 1.6 \text{ kg/m}^3$ [102]. Así el volumen inicial resulta $V_0 = \frac{4}{3} \pi (5 \times 10^{-6})^3 = 5.2 \times 10^{-16} \text{ m}^3$ y con la masa molecular del argón $M_g = 39.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$; finalmente el número de moles resulta ser $\sim 2 \times 10^{-14}$.

Ahora, en la burbuja cónica se alcanzan relaciones de compresión $V_{1BC}/V_{2BC} \sim 20$ en tiempos ~ 1 ms, y con un número de moles de gas que se determina aproximadamente con las condiciones iniciales y la ley de los gases ideales tomando la presión, el volumen y la temperatura como: 2500 Pa, $1.625 \times 10^{-4} \text{ m}^3$, 298 K respectivamente; así el número de moles resulta 1.64×10^{-4} . Como ya se mencionó el proceso de compresión en la SLUB es más rápido que en la CBL y la relación de compresión en la SLUB es cuatro órdenes de magnitud mayor a la alcanzada en la CBL; aunado a esto, hay menos átomos dentro de la burbuja esférica de los que hay en la burbuja cónica. Aún cuando el proceso de

compresión en la CBL no produce colisiones tan energéticas entre los átomos (traducidas en mayores temperaturas) y por ende un menor número de fotones por emisor, el mayor número de partículas al final resulta en un pulso brillante. En burbujas más pequeñas como en la SLUB se alcanzan mayores temperaturas y el número de fotones por emisor es mayor, sin embargo este incremento no es suficiente para hacer que la burbuja esférica sea más brillante que la burbuja cónica.

Tabla 5.1 Datos de la simulación para la burbuja esférica.

R_0	Radio inicial	4.5 [μm]
c_0	Velocidad del sonido en el agua	1481 [m/s]
η	Viscosidad del agua	0.001 [kg/m s]
σ	Tensión superficial del agua	0.0725 [kg/s ²]
ρ_0	Densidad del agua	1000 [kg/m ³]
γ	Índice politrópico	5/3
ω	Frecuencia del campo acústico de excitación	$2\pi \times 26500$ [rad/s]
P_a	Amplitud del campo acústico de excitación	1.4×10^5 [Pa]

Tabla 5.2 Datos de la simulación para la burbuja cónica.

H_c	Altura del cono	0.2 [m]
$H(0)$	Altura inicial desde la punta del cono hasta el menisco	0.23 [m]
$\dot{H}(0)$	Velocidad inicial del menisco	0 [m/s]
l_c	Longitud de la columna de líquido	0.57 m
ρ	Densidad del líquido	1036 [kg/m ³]
γ	Índice politrópico	5/3
$P_{gl}(0)$	Presión inicial del gas	350 [Pa]
P_{ext}	Amplitud de la presión aplicada	275 [kPa]

CAPÍTULO

6

CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES

Se desarrollaron una serie de programas y métodos para calcular diferentes umbrales de estabilidad-inestabilidad en el espacio P_a - R_θ . Cuando el líquido huésped es agua, la SLUB estable ocurre en una ventana delimitada por cuatro umbrales. Los límites superior e inferior asociados a R_θ , corresponden a la inestabilidad paramétrica y al equilibrio difusivo, respectivamente. Los límites superior e inferior asociados a P_a , corresponden a la inestabilidad de Rayleigh-Taylor y al umbral de temperatura (~ 9000 K), respectivamente. La ventana predicha por el modelo se ajusta bien a algunos datos experimentales publicados en la literatura. Esta concordancia permitió validar en cierta medida los programas y procedimientos aquí desarrollados; sin embargo, serían necesarios un mayor número de estudios comparativos.

Nuestros cálculos, han revelado que durante los instantes finales del colapso, las densidades del gas dentro de la burbuja y del líquido en su superficie crecen rápidamente alcanzando valores elevados ($\rho_g \approx 1200$ kg/m³, $\rho_l \approx 1700$ kg/m³) con un efecto estabilizador sobre las inestabilidades superficiales; tanto la IP como la IRT son suprimidas en cierta medida. El rápido crecimiento de la densidad del líquido no solo es importante para entender las distorsiones superficiales en la SLUB. También es significativo para explicar la posible formación de compuestos químicos y cristales de hielo. Una capa de líquido solidificado con estas características y envolviendo a la burbuja durante los últimos instantes del colapso tendrá que ser tomada en cuenta en las mediciones de la luz emitida y en los mecanismos para explicar la emisión.

Recientemente la intensidad de la SLUB ha sido aumentada llevando a cabo experimentos con soluciones ácidas. Hasta ahora, solo se han publicado pocos

trabajos teóricos sobre la estabilidad de forma de las burbujas en medios ácidos, y ellos se basan en modelos simplificados de la ecuación de Rayleigh-Plesset sin incluir variaciones de densidad. Así, en el futuro será necesario clarificar el rol que juegan las densidades del gas y del líquido en la estabilidad superficial de la SLUB en los sistemas gas noble / (ácido + agua).

Se calcularon los umbrales que delimitan la ventana de la SLUB estable a condiciones de la ciudad de México y bajo un campo acústico senoidal de 50 kHz. Dentro de la ventana se identificaron sub-regiones donde se producen las ondas de choque más veloces y los destellos más brillantes. Estos resultados, representan un primer paso para el desarrollo de tecnologías basadas en la SLUB y destinadas al tratamiento de aguas residuales a un nivel terciario.

Consideramos que un aspecto significativo de este estudio, es el desarrollo de los programas como herramientas que sin duda permitirán identificar nuevas zonas de SLUB. Las posibilidades son muy extensas, hasta ahora la mayor parte de la investigación se ha centrado en el espacio bidimensional P_a-R_0 . Pero existen otros parámetros igualmente importantes como: la temperatura del líquido, la concentración de gas disuelto en él y la frecuencia de excitación entre otros; por supuesto, esto sugiere el análisis de espacios de más de dos parámetros que no solo revelarán regiones de SL hasta ahora inexploradas sino también las relaciones de competencia entre diversos efectos caracterizados por los parámetros.

Otras posibilidades para expandir la SLUB, se sugieren a continuación:

- Trabajar con frecuencias de excitación más bajas a las utilizadas típicamente (< 27 kHz) para producir burbujas más grandes y con mayores relaciones de expansión. Sin embargo al aumentar el tamaño de la burbuja también aumenta la difusión de vapor de líquido hacia su interior, lo cual disminuye la luminiscencia si el líquido huésped es agua; para revertir este efecto, se recomienda llevar al líquido al punto de congelación.
- Nuestros programas ofrecen la libertad de incluir con facilidad: diversos tipos de ecuaciones de estado para simular el comportamiento del gas y del líquido, distintos tipos de excitación como la adición de armónicos y pulsos

sincronizados con el colapso y diversas mezclas gaseosas y líquidas, entre otros. Con relación a lo último es recomendable trabajar con líquidos cuya tensión superficial sea menor a la del agua y al mismo tiempo su viscosidad rebase a la del agua ($\mu_l \gtrsim 30 \mu_{agua}$).

Se realizaron experimentos con un "Tubo U" para producir el colapso de una burbuja cónica de gas utilizando tres soluciones líquidas. Los resultados experimentales indican: pulsos de luz no-homogéneos tanto espacial como temporalmente (con distintos anchos, intensidades y formas) y diferentes características espectrales dependiendo de la solución líquida y las repeticiones experimentales. También, se realizaron simulaciones del colapso de la BC utilizando un modelo hidrodinámico y considerando una compresión politrópica de la mezcla gaseosa. Las predicciones indican una temperatura y presión máximas de ~ 8000 K y ~ 100 MPa, respectivamente.

Los hallazgos teórico-experimentales anteriores, permitieron formular una posible secuencia de reacciones químicas para explicar la emisión:

i) Generación de especies excitadas mediante clivaje homolítico; el cual, es activado por temperatura y/ o energía cinética; ii) colisiones inelásticas de primer orden que producen estados excitados como el OH^* y C_2H^* entre otros; iii) la des-excitación de muchas de estas especies produce emisión en el intervalo UV-VIS; la cual, excita mediante procesos de absorción y /o absorción multifotónica a algunos productos de reacción como las moléculas cromóforas. Las emisiones de los cromóforos se superponen para integrar toda la emisión detectada.

Es necesario trabajo a futuro para poner a prueba la secuencia de emisión propuesta, y también para identificar e incluir correcciones necesarias al modelo.

Será recomendable realizar:

- Espectroscopia resuelta en tiempo. Para determinar que tipo de especies emisoras forman parte de la mezcla gaseosa y como evoluciona su composición y cantidad. También se podría inferir la evolución temporal de la temperatura.
- Espectrometría de masa antes y después de cada corrida experimental. Para establecer como la composición de la mezcla gaseosa varía con la

repetición de los ensayos. De esta forma, se podrá determinar γ_0 y su dependencia con el número de repeticiones; así como los límites superior e inferior del intervalo de variación de γ .

- Medir la presión del colapso dentro de la cámara cónica. Para evitar retrasos y ruido debido a los elementos de transmisión (paredes de la cavidad y brida metálica) entre el medidor de fuerza y el interior.

La comparación entre el colapso de una burbuja esférica y una burbuja cónica dejó ver algunas diferencias sustanciales. El colapso de la BC es tres órdenes de magnitud más lento que el de la burbuja esférica. De este modo, las presiones y temperaturas en la BC no son tan espectacularmente altas como las obtenidas en la SLUB ($T_g \sim 20000$ K, $P_g \sim 1$ GPa).

Lo relevante del colapso de la BC producido con Tubo-U, es que permite un estudio más controlado y detallado del comportamiento del gas en su interior que el que se tiene con la SLUB. Esto sin duda aumentará el entendimiento de fenómenos afines como la sonoluminiscencia de multiburbujas.

El mayor tamaño y brillantes de la BC en comparación a la burbuja esférica de micras de la SLUB, es atractivo en aplicaciones destinadas al tratamiento de agua; de hecho otros sistemas relacionados como el Tubo Venturi ya son utilizados comercialmente con este propósito.

APÉNDICE

A

FUNDAMENTOS

A.1 Comportamiento de una burbuja SL como un sistema dinámico no lineal

En uno de los experimentos con SLUB, Barber *et al.*²⁶ encontraron que la dinámica de la burbuja era extraordinariamente “estable”. Sin embargo, la asimetría temporal entre la expansión y la compresión del movimiento radial de la burbuja señalan que es no lineal. La teoría de dinámica de sistemas¹⁴⁹⁻¹⁵² muestra que los sistemas no lineales, como el ejemplificado por la SLUB, presentan diferentes tipos de movimiento (caos, doble periodo, cuasi-periodicidad, etc.) en función del valor de sus condiciones iniciales (ver fig. A.2) y algunos parámetros asociados a la excitación.

A.1.1 Caos

En matemáticas el término “caos” se utiliza para describir sistemas no lineales que exhiben un comportamiento dinámico en función de las condiciones iniciales¹³⁰. Una pequeña perturbación en las condiciones iniciales es amplificada exponencialmente a lo largo del tiempo, dando como resultado soluciones dinámicas radicalmente diferentes. Este tipo de comportamiento parece ser estocástico; sin embargo, los sistemas no lineales a los que hacemos referencia no poseen variables ni excitaciones aleatorias, de tal modo que su evolución dinámica en el tiempo esta totalmente “determinada” por sus condiciones iniciales. A lo anterior se le conoce como caos determinista, o simplemente “caos”. El comportamiento caótico se presenta en fenómenos naturales como el clima¹⁵³. También es observado en los laboratorios en una variedad de sistemas

incluyendo: circuitos eléctricos¹⁵⁴, reacciones químicas¹⁵⁵, burbujas en régimen de cavitación¹⁵⁶ como en burbujas sonoluminiscentes^{131,157,158}, etc.

El comportamiento caótico de una burbuja se entiende mejor analizando una simulación numérica de la dinámica radial utilizando la ecuación de Rayleigh-Plesset (ver capítulo 3). La figura (A.1) muestra dos soluciones correspondientes a dos condiciones iniciales. La línea continua se calculó para un $R_0=30\ \mu\text{m}$, la línea punteada se calculó para un $R_0=30.01\ \mu\text{m}$; la diferencia entre las dos condiciones iniciales “perturbación” es de $\Delta R_0=0.01\ \mu\text{m}$. En la gráfica se observa como a partir del décimo ciclo de oscilación, ambas soluciones difieren radicalmente indicando con claridad como una perturbación en el radio inicial crece exponencialmente a lo largo de pocos ciclos.

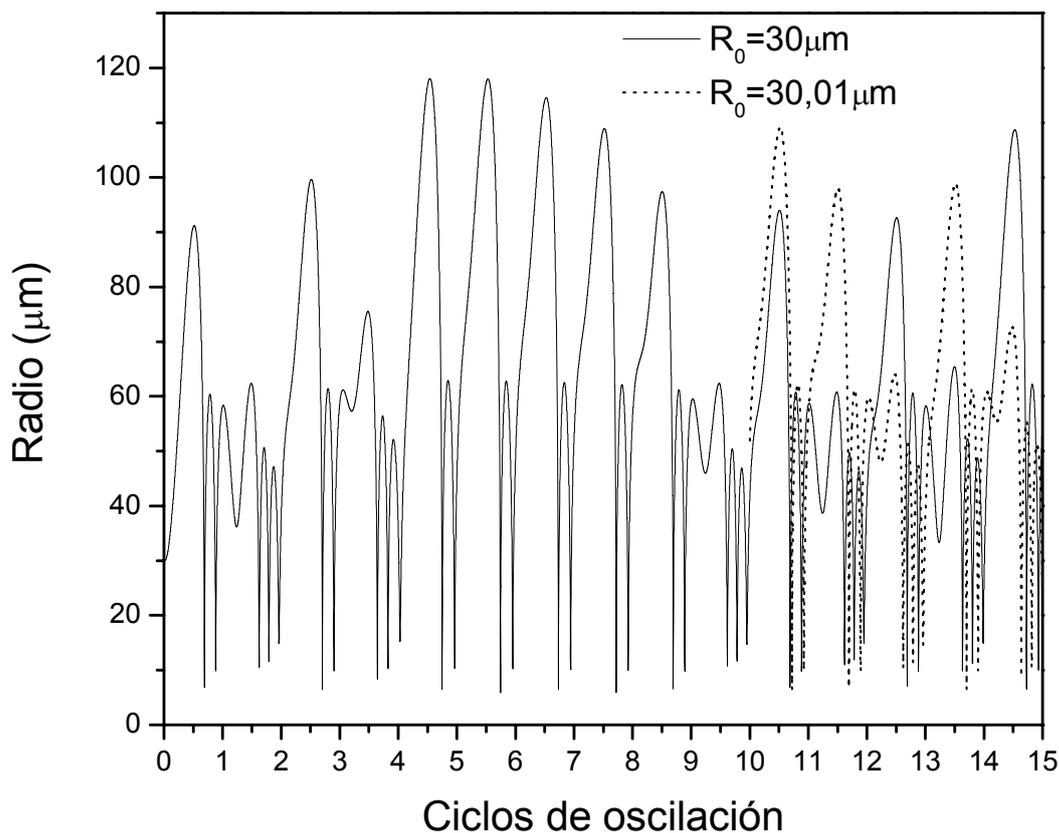


Figura A.1 Evolución del radio de dos burbujas en régimen caótico a lo largo de catorce ciclos de oscilación. Los parámetros de la simulación numérica son: $P_a=0.137\ \text{Mpa}$, $\omega/2\pi=26.5\ \text{kHz}$, $\gamma=5/3$.

El régimen caótico se diferencia de la solución periódica que muestra la figura (A.2a) en un aspecto importante, al incrementar R_0 la frecuencia angular de los rebotes disminuye; como resultado, no hay tiempo suficiente para que los rebotes se amortigüen completamente antes de que la siguiente expansión comience. Así cada nuevo ciclo de oscilación tendrá “memoria” de la amplitud no amortiguada del ciclo previo, dando como resultado grandes variaciones en el radio máximo.

A.1.2 Doble periodo: Una ruta hacia el caos

Consideremos un sistema no lineal excitado por una fuerza periódica; representada por ejemplo por una función senoidal cuya frecuencia y amplitud sean (Ω) y (F) respectivamente. Bajo ciertos valores de éstos parámetros, el movimiento del sistema es estable y periódico con una frecuencia igual a (Ω) . Sin embargo, al aumentar por ejemplo el valor de (F) ó al variar las condiciones iniciales, el movimiento del sistema se torna periódico y estable pero con una frecuencia al doble de la frecuencia de excitación (2Ω) ; a este comportamiento se le llama bifurcación de doble periodo. Si (F) sigue aumentando el sistema presenta otros regímenes de movimiento periódico con frecuencias que son múltiplos pares de la frecuencia de excitación $(n\Omega; n=2,4,\dots)$ hasta que finalmente el movimiento se hace caótico¹³⁰.

En la figura (A.2) se despliegan tres simulaciones numéricas correspondientes al comportamiento de una burbuja conforme aumenta su radio inicial manteniendo constantes los parámetros de la excitación. El modelo utilizado fue la ERP, ec. (3.1). En la gráfica superior (a), se muestra la simulación del radio de una burbuja típica en régimen de sonoluminiscencia; en este caso la solución es periódica repitiéndose el mismo patrón de movimiento cada ciclo a lo largo del tiempo. El radio máximo de la burbuja (R_{max}) alcanza el mismo valor y ocurre a la misma frecuencia en cada ciclo. En la gráfica (b), se observa un régimen de doble-periodo; en el cual, se repite el mismo patrón de movimiento cada dos ciclos de oscilación. El radio máximo oscila entre dos valores, “la solución se bifurca”. En la gráfica inferior (c), el movimiento de la burbuja es caótico, “aperiódico”.

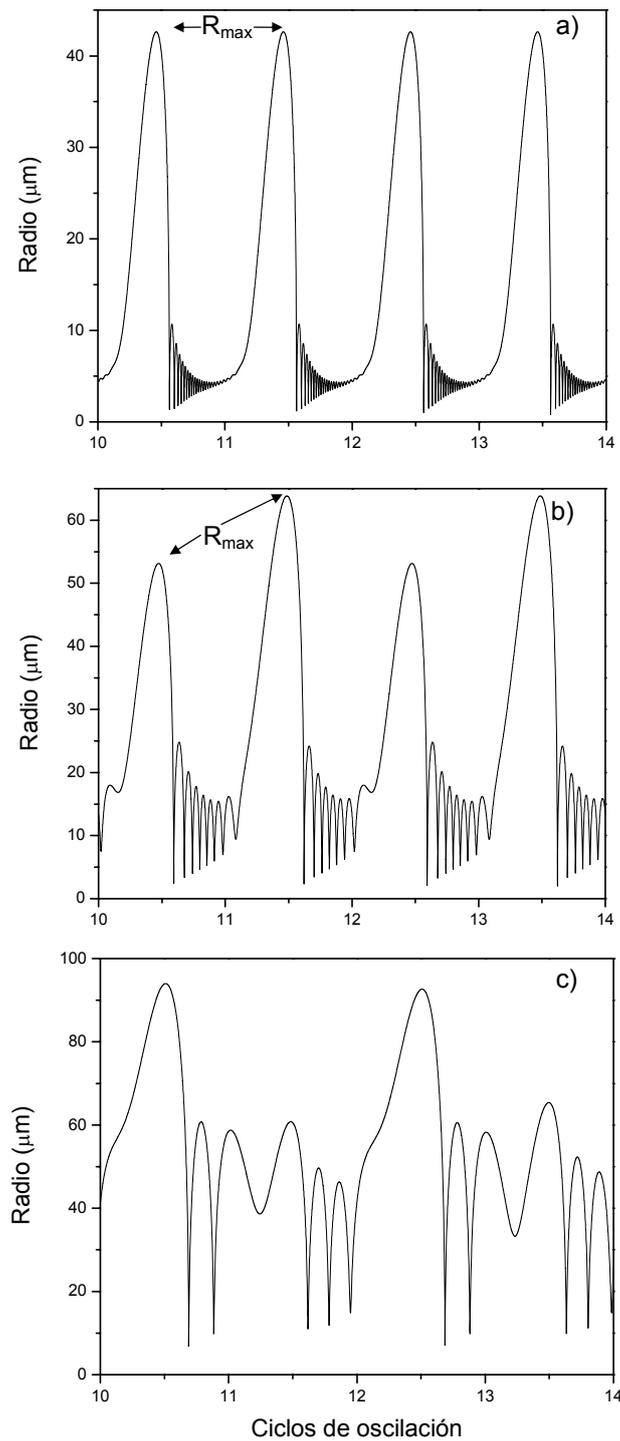


Figura A.2 a) Movimiento periódico de una burbuja SL típica ($R_0=4.5 \mu\text{m}$). b) Dinámica de una burbuja con doble periodo ($R_0=11 \mu\text{m}$). c) Movimiento de una burbuja en régimen caótico ($R_0=30 \mu\text{m}$). Los parámetros de la simulación numérica son: $P_a=0.137 \text{ Mpa}$, $\omega/2\pi=26.5 \text{ kHz}$, $\gamma=5/3$. Para dejar atrás la solución transitoria se eliminan los diez primeros ciclos de oscilación.

Para analizar la transición que experimenta el comportamiento dinámico de un sistema conforme varía algún parámetro de control como la amplitud de la excitación, es común construir lo que se conoce como diagrama de bifurcación^{130,151,152}. En la figura (A.3) se muestra un diagrama de bifurcación para una burbuja cuyo radio inicial es de 20 μm . En este caso el interés es analizar como el radio inicial de la burbuja cambia conforme (P_a) aumenta. Cada punto del diagrama muestra el radio inicial de la burbuja (después de diez ciclos de oscilación para dejar atrás la solución transitoria) para cada valor de (P_a). Para presiones menores a 7.5 el comportamiento de la burbuja es periódico, aún cuando el radio inicial aumenta ligeramente conforme aumenta (P_a). Pero para presiones en el rango $7.5 \lesssim P_a \lesssim 7.6$ el radio inicial se bifurca “oscila entre dos valores para una misma P_a ” indicando que el movimiento de la burbuja esta en un régimen de doble periodo. Si (P_a) aumenta mas allá de 7.6, el diagrama muestra grandes cúmulos de puntos indicando que el radio inicial no toma valores preferenciales, así la dinámica de la burbuja es caótica.

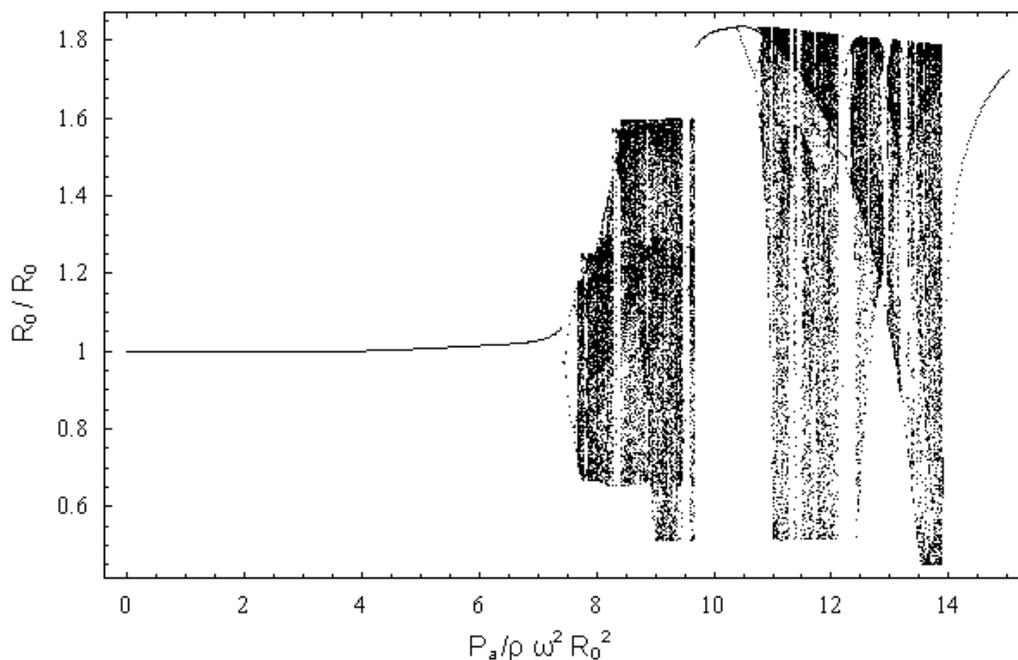


Figura A.3 Diagrama de bifurcación del radio inicial (R_0) de la burbuja conforme varía la amplitud del campo acústico de excitación (P_a) para: $R_0 = 20\mu\text{m}$, $\gamma = 5/3$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\omega/2\pi = 27 \text{ kHz}$. El rango de presión graficado es: $0 \leq P_a \leq 0.17 \text{ MPa}$.

A.2 Onda de choque

a) ¿Que es?

El término onda de choque denota una superficie, por ejemplo, un plano, a través del cual el estado de un fluido (esto es, su presión, densidad, temperatura, etc.), sufre un cambio súbito¹⁵⁹. Una onda de choque se propaga a través de un medio estacionario con una velocidad superior a la velocidad del sonido en el medio. La energía que transporta una onda de choque se disipa relativamente rápido con la distancia de propagación. Cuando una onda de choque viaja a través de la materia, la energía total se preserva, pero la energía que es extraída en forma de trabajo disminuye (aumenta la entropía).

b) ¿Cómo se origina?

Las ondas de choque se originan de diferentes maneras. Por ejemplo, cuando un cuerpo se mueve a través de un medio a una velocidad mayor a la del sonido en dicho medio, tal como ocurre con algunos aviones y proyectiles; o cuando un flujo supersónico golpea a un cuerpo en reposo.

Otro ejemplo ocurre en las explosiones bajo el agua¹⁶⁰. La detonación de una carga explosiva dentro del agua genera una burbuja de gas de alta presión y temperatura, la cual se expande a alta velocidad dando origen a una primera onda de choque esférica que viaja a través del agua. La burbuja sigue expandiéndose hasta alcanzar un radio máximo para luego colapsar, iniciándose así un nuevo ciclo.

Algo similar ocurre en las técnicas de “litotripsia extracorporea” utilizadas como tratamiento médico en la eliminación de cálculos renales¹⁶¹. En estas técnicas se utiliza una descarga eléctrica dentro del agua para producir una burbuja de vapor que se expande muy rápido, creando una onda de choque en el líquido. En algunos dispositivos la onda de choque emitida por la burbuja es reflejada y enfocada hacia el “cálculo”; el cual, eventualmente es fracturado y disuelto.

c) ¿Cómo se forma?

Una onda acústica que desde la fuente donde se origina posee una amplitud lo suficientemente grande, experimentará cambios en su forma, amplitud y duración conforme se propaga.

Para explicar el cambio en la forma de la onda hay que tomar en cuenta que todos los materiales presentan algún grado de no-linealidad entre la fuerza y la deformación. Por ejemplo, los líquidos y sólidos son compresibles hasta cierto grado, con la compresibilidad disminuyendo mientras la presión aumenta. Este efecto permite que la velocidad de la onda se incremente con la presión. El resultado de este incremento es que las partes de alta presión ($\partial u/\partial t > 0$) de la onda se propaguen más rápido que las partes de baja presión ($\partial u/\partial t < 0$), ver figura (A.4c).

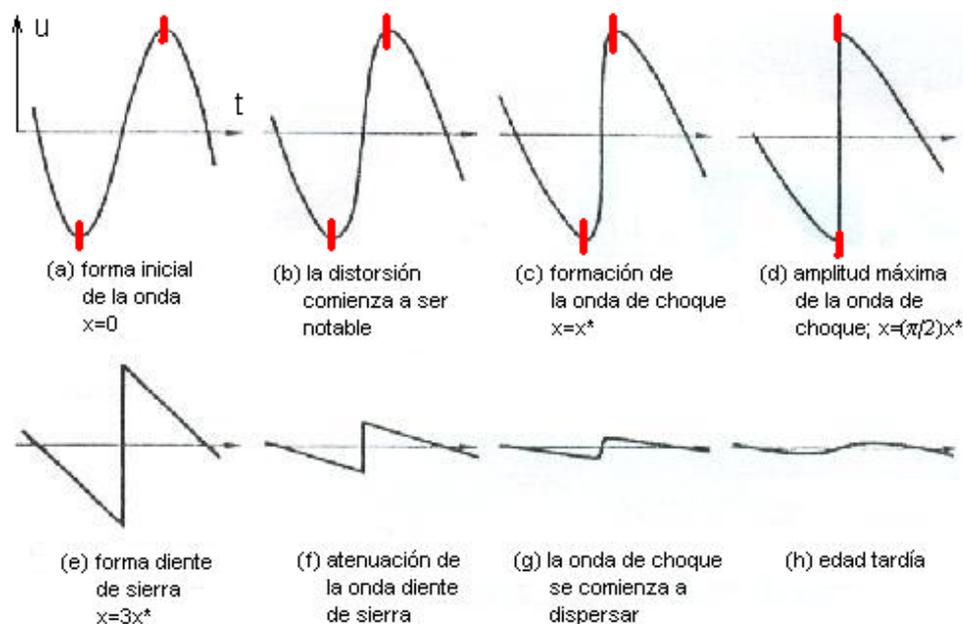


Figura A.4 Distorsión progresiva de una onda que en su origen es de forma senoidal y con una amplitud finita. Los diferentes incisos muestran la forma de la onda en función del tiempo mientras se va propagando a distancias cada vez más lejanas de la fuente. Esta figura se extrajo de la referencia [162].

Eventualmente el frente de la onda se “agudiza” formando un brinco vertical, como se ilustra en la figuras (A.4d); en esta etapa la onda posee la amplitud máxima.

Posteriormente la amplitud de la onda comienza a disminuir principalmente por efectos de disipación viscosa y su forma se asemeja a un “diente de sierra”, figura (A.4e). Conforme aumenta la distancia de propagación la onda continúa atenuándose debido a otros procesos como la dispersión (la velocidad de propagación de la onda depende de su frecuencia, los armónicos mas grandes son rápidamente absorbidos), figura (A.4g). A distancias lejanas de la fuente, la onda retoma su forma original con una amplitud que decae en forma exponencial con la distancia haciéndose presente el fenómeno de saturación; en el cual, la amplitud de una onda en su edad tardía, figura (A.4h), es independiente de la amplitud que poseía en la fuente¹⁶³.

Desde un punto de vista matemático la onda de choque se considera una discontinuidad porque el tiempo de elevación (t_e) es cero. Sin embargo las ondas de choque reales no son discontinuas, esto es, (t_e) es pequeño pero sin llegar a ser cero, ver figura (2.6).

d) ¿Cómo se modela matemáticamente?

El modelo más simple para estudiar ondas de choque en un medio viscoso es la ecuación de Burgers para ondas planas, expresada como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{A1})$$

esta ecuación simula fenómenos físicos donde interactúan procesos de convección (término no lineal del lado izquierdo de la Ec. A1) y difusión¹⁶⁴ (término del lado derecho).

En la figura (A.5) se muestra una simulación numérica de la ecuación (A1). En este caso se tomó el parámetro de viscosidad $\nu = 0.01$; para que el término no lineal ($u \partial u / \partial x$) domine sobre el término lineal ($\nu \partial^2 u / \partial x^2$), logrando que el proceso de difusión sea lo suficientemente lento y con una contribución pequeña comparado con el proceso de convección. Cuando la onda de choque es generada por una fuente pequeña, esta se propaga hacia afuera en todas

direcciones formando un frente esférico. La versión de la ecuación de Burgers para este caso, toma la forma¹⁶³

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{\beta}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (\text{A2})$$

donde r es la distancia radial desde el centro de la fuente, y τ es un tiempo retardado. Además: c_0 , ρ_0 , β y b son la velocidad del sonido, la densidad, el coeficiente de no linealidad y el coeficiente de absorción lineal del fluido, respectivamente. El segundo término del lado izquierdo de la Ec. (A2) describe el efecto de atenuación geométrica de la onda conforme se propaga hacia afuera, es importante hacer notar que si la onda converge la onda se amplifica por efecto geométrico. Los efectos no lineales son descritos por el tercer término del lado izquierdo, mientras que la disipación viscosa es descrita por el primer término del lado derecho de la Ec. (A2).

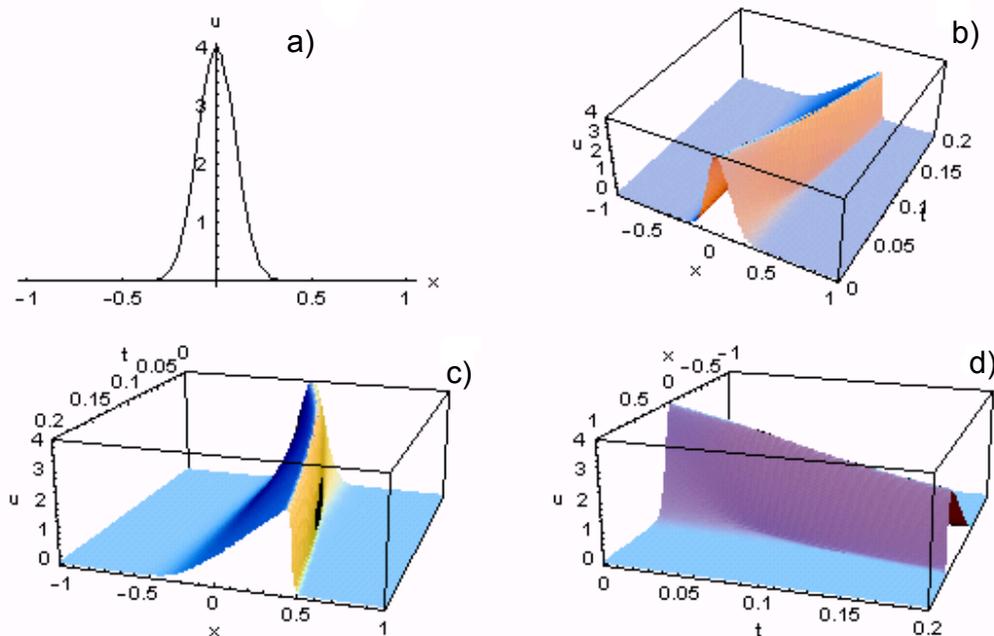


Figura A.5 Solución numérica de la ecuación de Burgers para ondas planas. En a) y b) se observa que la condición inicial es como un pulso Gaussiano. c) El pulso inicial se transforma en una onda de choque (forma de diente de sierra) después de cierto tiempo. d) La amplitud del pulso inicial se va atenuando conforme transcurre el tiempo. Las condiciones de frontera son: $u(-1,t)=0$; $u(1,t)=0$; y la condición inicial $u(x,0) = (50/\pi)^{1/2} e^{-50x^2}$.

A.3 Espacio paramétrico de una burbuja: condiciones de estabilidad

La SLUB estable se caracteriza por la emisión de un pulso de luz por cada ciclo de oscilación de la burbuja; el cual, esta en sincronía con la frecuencia del campo acústico de excitación. Además, la intensidad de los pulsos de luz es la misma durante millones ó incluso billones de ciclos de oscilación.

Algunos resultados experimentales^{28,119,165} indican que la SLUB estable ocurre en una pequeña sección de todo el espacio paramétrico $P_a - R_0$. El tamaño y localización de la sección de estabilidad ha sido calculado teóricamente^{102,166} con buena aproximación a los hallazgos experimentales.

La sección de SLUB estable esta delimitada por fronteras cuya tendencia y localización en el espacio paramétrico se deben a diversas condiciones dinámicas y de estabilidad impuestas al movimiento oscilatorio de la burbuja, estas son:

(i) Durante la fase del colapso, la pared líquido-gas de la burbuja (interfase) debe alcanzar al menos la velocidad del sonido en el gas (c_g) para asegurar suficiente transferencia de energía del líquido hacia el gas.

(ii) La burbuja tiene que ser estable a las oscilaciones no esféricas de su superficie; las cuales producen la fragmentación en burbujas de menor tamaño.

(iii) La burbuja tiene que ser estable con respecto a los procesos de difusión de gas que ocurren en su interfase (la burbuja no debe disolverse o crecer para mantener su estabilidad).

(iv) Los constituyentes de la burbuja tienen que ser químicamente estables. (Se consideran burbujas de argón por la hipótesis de rectificación).

En la figura (A.8A) se muestra la zona teórica donde potencialmente se producen burbujas SL; una zona experimental del espacio $P_a - R_0$ donde ocurre la SLUB se

muestra en la figura (A.8B) (además de otras zonas donde ocurren otro tipo de comportamiento).

El criterio (i) significa que el número de Mach con respecto a (c_g) es mayor que 1, esto es

$$|M_g| = \frac{|\dot{R}|}{c_g} \gtrsim 1. \quad (\text{A3})$$

Las burbujas situadas a la derecha de la línea discontinua (ver fig. A.8A) cumplen con este criterio; es decir aquellas con un radio inicial (R_0) suficientemente grande y excitadas con un campo de amplitud (P_a) elevada.

La estabilidad en la forma superficial, criterio (ii), limita la sonoluminiscencia estable en burbujas con $R_0 \lesssim 4 - 5 \mu\text{m}$ según los cálculos de Hilgenfeldt et al.¹⁰² (ver fig. A.8A). Sin embargo, por el amortiguamiento en las deformaciones superficiales debido procesos de conducción de calor algunos experimentos indican un umbral mayor $\sim 7\mu\text{m}$ ²⁸.

Desde un punto de vista físico, las posibles fuentes de distorsión en la forma esférica de una burbuja incluyen procesos como: las fluctuaciones térmicas de moléculas en la interfase líquido/gas¹⁰³ un gradiente de presión no uniforme en la pared de la burbuja debido a la excitación de los armónicos de la frecuencia fundamental de resonancia¹⁶⁷, o debido al paso de una onda de choque reenfocada³⁶.

Una pequeña distorsión en la forma de la burbuja evoluciona a distintas escalas de tiempo, y en función de ello se identifican diversos tipos de inestabilidades superficiales; entre ellas están:

- (a) La inestabilidad paramétrica (IP), que se debe a la acumulación y crecimiento de una pequeña perturbación inicial a lo largo de muchos ciclos de oscilación¹⁶⁸, esta caracterizada por una escala de tiempo de milisegundos.
- (b) La inestabilidad de Rayleigh-Taylor (IRT), que ocurre cerca del radio mínimo de la burbuja cuando el gas es acelerado hacia el fluido¹⁰², esta inestabilidad se desarrolla durante escalas de tiempo de nano segundos.

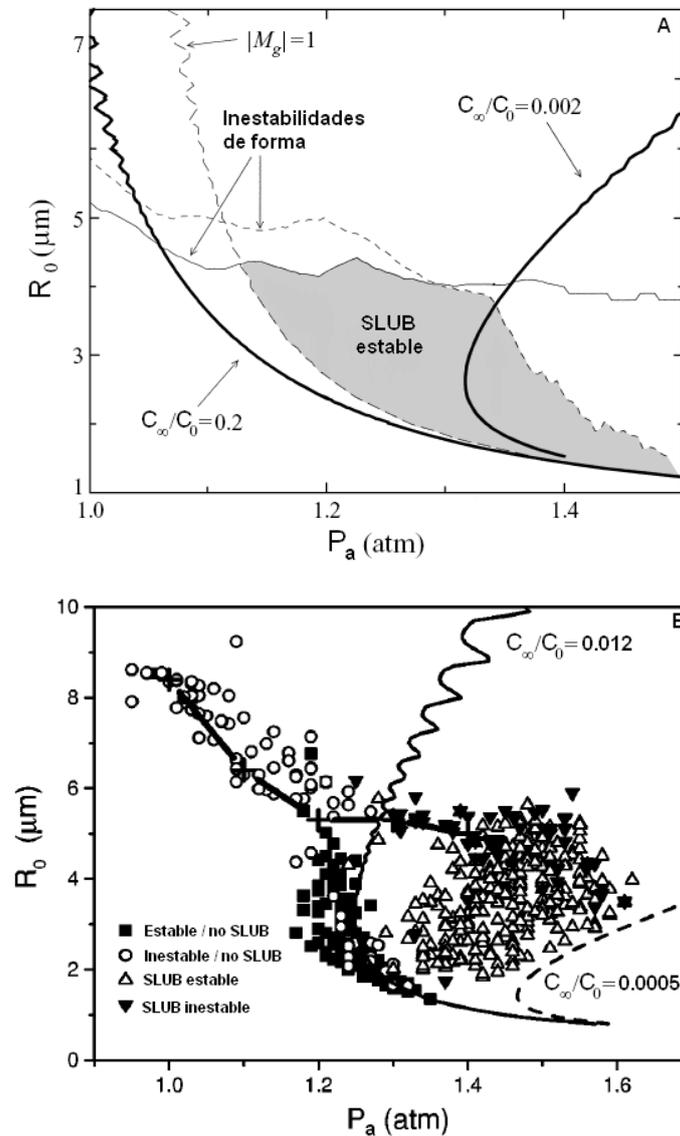


Figura A.8 (A) Espacio paramétrico (P_a , R_0), calculado teóricamente para una burbuja de argón inmersa en agua y excitada con un campo acústico senoidal de 26.5 kHz¹⁰². La sección sombreada es donde potencialmente ocurre la SLUB estable. Las burbujas por debajo de las curvas de inestabilidad de forma son estables a las oscilaciones superficiales no esféricas; la línea continua representa la inestabilidad paramétrica (IP), la línea punteada combina las inestabilidades de Rayleigh-Taylor (IRT) y aquella debida a los rebotes. Las burbujas sobre las curvas gruesas y continuas están en equilibrio difusivo para $C_\infty/C_0=0.2, 0.002$, respectivamente. (B) Los símbolos representan puntos experimentales para diferentes tipos y concentraciones de gas; y distintos regímenes de comportamiento (estable/inestable; sonoluminiscente / no-sonoluminiscente)¹¹⁹. La frecuencia del campo acústico de excitación fue de aproximadamente 32.8 kHz. La línea gruesa y continua es un cálculo teórico del umbral de la (IP).

Los criterios (i) y (ii) determinan en conjunto el área sombreada en el espacio (P_a , R_0) donde potencialmente ocurren la sonoluminiscencia en burbujas. La

posición real de una burbuja SL esta determinada por la condición (iii) para un equilibrio difusivo del gas dentro de la burbuja y del gas disuelto en el líquido (líneas gruesas y continuas en la figura 3.8A). Estas líneas de equilibrio muestran pendientes negativas cuando los puntos de equilibrio son inestables, es decir que las burbujas debajo de la línea se encogen y disuelven, las burbujas por encima de la línea crecen. Con altas concentraciones de gas disuelto en el líquido (por ejemplo $C_{\infty}/C_0=0.2$, la curva del lado izquierdo), solo puntos de equilibrio inestable son posibles en el rango de parámetros de interés. Las concentraciones bajas $C_{\infty}/C_0 \sim 0.02$ (la curva de la derecha) son necesarias para tener estabilidad difusiva. La pendiente positiva de la rama superior de esta curva caracteriza a estas burbujas como estables.

APÉNDICE

B

PROGRAMAS

Todos los programas se desarrollaron en Mathematica™ (versión 5.2) siguiendo el paradigma de programación funcional. El diagrama de flujo del capítulo 5, sirvió de guía para estructurar la mayoría de programas exceptuando al que se desarrolló para calcular los diagramas de bifurcación, más adelante será proporcionado.

Las ecuaciones que describen la dinámica radial y superficial de la burbuja fueron normalizadas para reducir errores numéricos. Para tal fin, se tomaron las siguientes escalas de referencia:

$$\begin{aligned} \text{Tiempo} &= [\rho_0^{1/2} R_0 / B^{1/2}], \\ \text{longitud} &= [R_0]; \\ \text{presión} &= [B]; \\ \text{densidad} &= [\rho_0]. \end{aligned} \tag{B1}$$

La versión normalizada de la ecuación de Gilmore (3.2) corresponde a la ecuación “Ec1” del programa “Inestabilidad-Paramétrica.nb”, ver pág. (160).

Las ecuaciones adimensionales para las densidades del gas y del líquido son:

$$\rho_g = \frac{1}{\Gamma g \left(\frac{R[t]^3 - as^3}{R0s^3 - as^3} \right) + \zeta g} \tag{B2}$$

$$\rho_l = \rho_{0s} \left(\frac{Bs + \left(P0s + \frac{2\sigma s}{R0s} \right) \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2\sigma s}{R[t]} - \frac{4\mu s x[t]}{R[t]}}{Bs + P0s} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{B3}$$

$x[t]$ en la Ec. (B3) representa la velocidad radial de la burbuja $\dot{R}(t)$. Los parámetros adimensionales: $R0s, \rho_{0s}, Bs, P0s, \Gamma g, \zeta g$, etc. Se encuentran definidos dentro del

programa, ver pág. (162). Hay que tomar en cuenta, que las ecuaciones (B2) y (B3) se introducen tal cual si se está analizando el caso *III*. Cuando se analiza el caso *II*, la ecuación (b) se introduce tal cual, pero ahora la densidad del líquido sería $\rho_l = \rho_0 s$. Si se estudia el caso *I*, $\rho_g = 0$.

La ecuación de la dinámica de la distorsión (3.12) en su versión normalizada corresponde a la “Ec2” en el listado, ver pág. (161). El mismo proceso de adimensionalización fue utilizado en todos los programas, de tal forma que las ecuaciones antes descritas son válidas en todos ellos.

Para ejecutar cada programa es necesario definir un intervalo de búsqueda en el radio inicial R_0 , primera casilla del programa. Después se ejecutan (shift+Enter) las casillas dos y tres. Al final de la casilla tres es donde se define el intervalo de búsqueda de la amplitud P_a . Una vez que se ha definido, se ejecuta el comando “Map” de la casilla cuatro para generar los resultados.

El listado de cada programa se muestra siguiendo el orden utilizado en la presentación de resultados del capítulo 5.

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

```
incrrad = Table[R0sw, {R0sw, .000005, .000007, .00000005}];
```

```
Ec1 = R[t] * x'[t] *
```

$$\left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} \left(1 - x[t] / \left(3 * \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right) \right) * \right.$$

$$x[t]^2 == \left(1 + x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \right.$$

$$\left. \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{(n-1) * \rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) + \right.$$

$$\left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \right.$$

$$R[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \right.$$

$$\left(\frac{\alpha s * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} * \right.$$

$$\left. \left(-3 * \gamma * \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - 4 * \mu s * \right.$$

Inestabilidad-Paramétrica.nb

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{1}{n}} * (-d * \omega s * \text{Cos}[\omega s * t]) \Bigg); \\
\text{Ec2} = & u'[t] + \left(\frac{3 x[t]}{R[t]} + \frac{\frac{\rho 0 s \left(\frac{Bs + (P0s - \frac{2 * \sigma s}{R0s}) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2 * \sigma s - 4 * us * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}}}{Bs + P0s} * R[t]^2}{1 + \left(\frac{m+1}{m} \right) * \frac{\frac{1}{\Gamma g \left(\frac{R[t]^3 - as^3}{R0s^3 - as^3} \right) + \zeta g}}{\rho 0 s \left(\frac{Bs + (P0s - \frac{2 * \sigma s}{R0s}) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2 * \sigma s - 4 * us * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}}}} \right)} \right) * u[t] + \\
& \left(\left(\frac{(m+1)(m+2)}{m} * \frac{\frac{1}{\Gamma g \left(\frac{R[t]^3 - as^3}{R0s^3 - as^3} \right) + \zeta g}}{\rho 0 s \left(\frac{Bs + (P0s - \frac{2 * \sigma s}{R0s}) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2 * \sigma s - 4 * us * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}}} \right) - (m-1) \frac{x'[t]}{R[t]} + \right. \\
& \left. \frac{\varphi}{\rho 0 s \left(\frac{Bs + (P0s - \frac{2 * \sigma s}{R0s}) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2 * \sigma s - 4 * us * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}}} \right) * R[t]^3 + \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon}{\rho 0 s \left(\frac{Bs + (P0s - \frac{2 * \sigma s}{R0s}) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2 * \sigma s - 4 * us * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}}} \right) * R[t]^3 * \left(\beta - \frac{m(m-1)(m+2)}{1 + \frac{2 * \zeta g}{R[t]}} \right) \Bigg) / \\
& \left(1 + \left(\frac{m+1}{m} \right) * \frac{\frac{1}{\Gamma g \left(\frac{R[t]^3 - as^3}{R0s^3 - as^3} \right) + \zeta g}}{\rho 0 s \left(\frac{Bs + (P0s - \frac{2 * \sigma s}{R0s}) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} - \frac{2 * \sigma s - 4 * us * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}}} \right) \right) * a1[t] == 0;
\end{aligned}$$

```

Off[General::spell];
Clear[Cambr0]
Cambr0[R0_] := Module[{rho0, P0, omega, mu, sigma, a, c0, gamma, n, B, m, beta, a10,
  da20, b, Mg, T0, Rg, tRT, pe, re, Te, ps, os, us, P0s, R0s, as, ws, as,
  rho0s, Bs, c0s, zeta, gamma, epsilon, phi, ndrop, nplot, rtimexp, incrpres, TMM, psi},
  (*Parámetros del modelo Gilmore*)
  rho0 = 1000;
  P0 = 101325;
  omega = 32800 * 2 * pi;
  mu = 0.001;
  sigma = 0.073;
  a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
  c0 = 1481;
  gamma = 1;
  n = 7;
  B = 304600000;
  m = 2;
  beta = (m - 1) (m + 1) (m + 2);
  a10 = .000000001;
  da20 =  $\sqrt{\frac{B}{rho0}}$ ;
  b = .00003219;

```

Inestabilidad-Paramétrica.nb

```

Mg = 39.9 * 10^-3;
T∞ = 273.15 + 20;
Rg = 8.3145;
tRT = R0;
(*Escalas*)
pe = B;
re = R0;
Te =  $\frac{\rho_0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
ρe = ρ0;
(*Parámetros adimensionales*)
σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
ωs = ω * Te;
αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * ρe}$ ;
ρ0s =  $\frac{\rho_0}{pe}$ ;
Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
ξg =  $\frac{\rho_e b}{Mg}$ ;
Γg =  $\frac{\rho_e Rg T\infty}{Mg (P0 + \frac{2\sigma}{R0})}$ ;
e =  $\frac{2 \mu Te}{\rho_0 re^2}$ ;
φ =  $\frac{\beta \sigma Te^2}{\rho_0 re^3}$ ;
(*ndrop= ciclos de la solución transitoria;
nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
ndrop = 10;
nplot = 1;
rtimaxp[d_] :=
Module[{T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10, δ1s, sol11, sol12, XT, X0inv, F, vpmax, Ω},
T = 2 * π / ωs; g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /.
Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold, Ec1, x[0] == xold}, {R, x},
{t, 0, T}, Method → StiffnessSwitching]];
pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
ppl = pp /. {α_Complex, z_Complex} → {Re[α], Re[z]};
(*Condiciones iniciales
después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
Vi =  $\frac{ppl[[2, 2]] + ppl[[1, 2]]}{2}$ ;
Ri =  $\frac{ppl[[2, 1]] + ppl[[1, 1]]}{2}$ ;
sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi},
{R[t], x[t]}, {t, 0, 2 * π / ωs}, Method → StiffnessSwitching];
(*Genera el valor de δ*)

```

Inestabilidad-Paramétrica.nb

```

δ1s = Min[{Min[Table[{ $\frac{R[t]}{2m}$  /. sol10[[1]]}, {t, 0, 2*π/ωs, .1}]] /.
  {z_Complex} → {Re[z]}],  $\frac{1}{re} \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 \omega}}$ ];

(*Solución del modelo primer vector columna;
primera condición inicial C.I.*)
sol11 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi, a1'[t] == u[t],
  a1[0] ==  $\frac{a10}{re}$ , Ec2, u[0] == 0}, {R[t], x[t], a1[t], u[t]},
  {t, 0, 2*π/ωs}, Method → StiffnessSwitching];

(*Solución del modelo segundo vector columna;
segunda C.I.*)
sol12 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi,
  a1'[t] == u[t], a1[0] == 0, Ec2, u[0] ==  $\frac{Te*da20}{re}$ },
  {R[t], x[t], a1[t], u[t]}, {t, 0, 2*π/ωs}, Method → StiffnessSwitching];

(*Genera la Matriz X (T)*)
XT = List[{a11T = First[ReplaceAll[a1[t] /. sol11, t → 2*π/ωs]] /.
  {z_Complex} → {Re[z]}], a21T =
  First[ReplaceAll[a1[t] /. sol12, t → 2*π/ωs]] /. {z_Complex} → {Re[z]}],
  {a12T = First[ReplaceAll[u[t] /. sol11, t → 2*π/ωs]] /. {z_Complex} → {Re[z]}],
  a22T = First[ReplaceAll[u[t] /. sol12, t → 2*π/ωs]]] /.
  {z_Complex} → {Re[z]};

(*Genera la Matriz X (0)-1*)
X0inv = Inverse[{{N[ $\frac{a10}{re}$ ], 0}, {0, N[ $\frac{Te*da20}{re}$ ]}}];

(*Genera la Matriz de Floquet *)
F = X0inv.XT;

(*Genera los eigenvalores de la Matriz de Floquet *)
{vp1, vp2} = Eigenvalues[F];

(*Genera el eigenvalor máximo*)
vpmax = Max[{Abs[vp1], Abs[vp2]}];

(*Genera una tabla con pares de ceros y solo se escoge
la primer pareja que cumple con la condición de  $\frac{Abs(s_1)}{R} > 1$ *)
If[vpmax ≤ 1, Ω = {d  $\frac{304600000}{101325}$ , 1000000*R0}, Ω = {0., 0.}];

(*Genera una tabla con incrementos de la presión de excitación*)
incrpres = Table[pasd, {pasd,  $\frac{.6*101325}{304600000}$ ,  $\frac{2*101325}{304600000}$ ,  $\frac{.001*101325}{304600000}$ ]];

TMM = Map[rtimaxp, incrpres]

Timing[Tsal = Map[Cambr0, incrrad]]

```

Inestabilidad de Rayleigh-Taylor.nb

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

```
incrrad = Table[R0sw, {R0sw, .0000039, .00000391, .000000003}]; Ec1 = R[t] * x'[t] *
  \left( 1 - x[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right.
  \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) +
  \frac{3}{2} \left( 1 - x[t] / \left( 3 * \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right.
  \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) *
  x[t]^2 == \left( 1 + x[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right.
  \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) *
  \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{(n-1) * \rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right.
  \left. (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) +
  \left( 1 - x[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right.
  \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) *
  R[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right.
  \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} *
  \left( \frac{\alpha s * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} * \right.
  \left. \left( -3 * \gamma * \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - 4 * \mu s * \right. \right.
  \left. \left. \left( \frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} * (-d * \omega s * Cos[\omega s * t]) \right) \right);
```

Inestabilidad de Rayleigh-Taylor.nb

```

Off[General::spell];
Clear[CambR0]
CambR0[R0_] := Module[{ρ0, P0, ω, μ, σ, a, c0, γ, n, B, m, β,
  a10, b, Mg, T∞, Rg, tRT, pe, re, Te, ρe, σs, μs, P0s, R0s, as, ωs, αs,
  ρ0s, Bs, c0s, ζg, Γg, ε, φ, ndrop, nplot, rtimexp, incrpres, TMM, ψ},
  (*Parámetros del modelo Gilmore*)
  ρ0 = 1000;
  P0 = 101325;
  ω = 32800 * 2 * π;
  μ = 0.001;
  σ = 0.073;
  a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
  c0 = 1481;
  γ = 1;
  n = 7;
  B = 304600000;
  m = 2;
  β = (m - 1) (m + 1) (m + 2);
  a10 = 10 * 10^-9;
  b = .00003219;
  Mg = 39.9 * 10^-3;
  T∞ = 273.15 + 20;
  Rg = 8.3145;
  tRT = 500 * 10^-9;
  (*Escalas*)
  pe = B;
  re = R0;
  Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
  ρe = ρ0;
  (*Parámetros dimensionales*)
  σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
  μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
  P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
  R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
  as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
  ωs = ω * Te;
  αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * \rhoe}$ ;
  ρ0s =  $\frac{\rho0}{\rhoe}$ ;
  Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
  c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
  ζg =  $\frac{\rhoe b}{Mg}$ ;
  Γg =  $\frac{\rhoe Rg T\infty}{Mg (P0 + \frac{2c0}{R0})}$ ;
  ε =  $\frac{2 \mu Te}{\rho0 re^2}$ ;

```

Inestabilidad de Rayleigh-Taylor.nb

```


$$\varphi = \frac{\beta \sigma T e^2}{\rho_0 r e^3};$$

(*ndrop= ciclos de la solución transitoria;
nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
ndrop = 5;
nplot = 1;
rtimaxp[d_] := Module[{T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10,  $\delta$ 1s,
  diez, diez1, pos, T12, Rmaxi, Vmaxi, sol11, rti,  $\Omega$ }, T = 2 *  $\pi$  /  $\omega$ s;
g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold,
  Ec1, x[0] == xold}, {R, x}, {t, 0, T}, Method -> StiffnessSwitching]];
pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
ppl = pp /. { $\alpha$ _Complex, z_Complex} -> {Re[ $\alpha$ ], Re[z]};
(*Condiciones iniciales
después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
Vi =  $\frac{pp1[[2, 2]] + ppl[[1, 2]]}{2}$ ;
Ri =  $\frac{pp1[[2, 1]] + ppl[[1, 1]]}{2}$ ;
"Solución del modelo
sin la perturbación de forma";
sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi},
  {R[t], x[t]}, {t, 0, 2 *  $\pi$  /  $\omega$ s}, Method -> StiffnessSwitching];
(*Genera el valor de  $\delta$ *)
 $\delta$ 1s = Min[{Min[Table[{ $\frac{R[t]}{2m}$  /. sol10[[1]]}, {t, 0, 2 *  $\pi$  /  $\omega$ s, .1}]] /.
  {z_Complex} -> {Re[z]}],  $\frac{1}{re} \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 \omega}}$ ]];
(*Genera el valor de tRmax*)
diez = Table[{R[t] /. sol10}, {t, 0, 2 *  $\pi$  /  $\omega$ s, incr1 = .05}];
diez1 = diez /.  $\xi$ _Complex -> Re[ $\xi$ ];
pos = Flatten[Position[diez1, Max[diez1]]];
T12 = incr1 * Extract[pos, 1];
(*Genera las condiciones iniciales correspondientes a tRmax*)
Rmaxi = First[ReplaceAll[R[t] /. sol10, t -> T12]];
Vmaxi = First[ReplaceAll[x[t] /. sol10, t -> T12]];
"Solución del modelo tomando
en cuenta la perturbación en la
superficie al inicio del colapso";
sol11 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rmaxi, Ec1, x[0] == Vmaxi, a1'[t] == u[t],

$$a1[0] == \frac{a10}{re}, u'[t] + \left( \frac{3x[t]}{R[t]} + \frac{\frac{\epsilon}{\rho_0 s R[t]^2} \left( \frac{m(m+2)^2}{1 + \frac{2\delta 1s}{R[t]}} - \beta \right)}{1 + \left( \frac{m+1}{m} \right) * \frac{\Gamma g \left( \frac{R[t]^2 - a_1^2}{R_0^2 - a_1^2} \right) + \zeta g}{\rho_0 s}} \right) * u[t] +$$


$$\left( \left( \left( \frac{(m+1)(m+2)}{m} * \frac{1}{\Gamma g \left( \frac{R[t]^2 - a_1^2}{R_0^2 - a_1^2} \right) + \zeta g} - (m-1) \right) \frac{x'[t]}{R[t]} + \frac{\varphi}{\rho_0 s * R[t]^3} + \right. \right.$$


$$\left. \left. \epsilon \frac{x[t]}{\rho_0 s * R[t]^3} * \left( \beta - \frac{m(m-1)(m+2)}{1 + \frac{2\delta 1s}{R[t]}} \right) \right) / \left( 1 + \left( \frac{m+1}{m} \right) * \frac{\Gamma g \left( \frac{R[t]^2 - a_1^2}{R_0^2 - a_1^2} \right) + \zeta g}{\rho_0 s} \right) \right]} * u[t]$$

  a1[t] == 0, u[0] == 0}, {R[t], x[t], a1[t], u[t]},
  {t, T12, 2 *  $\pi$  /  $\omega$ s}, Method -> StiffnessSwitching];

```

Inestabilidad de Rayleigh-Taylor.nb

```

(*Genera el valor preciso de  $\frac{Abs(a_1)}{R_1}$ *)
rti = Max[Table[{{ $\frac{Abs[a_1[t]]}{R[t]}$  /. sol11[[1]]}, {t, T12, 2 *  $\pi$  /  $\omega_s$ , incr1 = .05}]] /.
  {z_Complex}  $\rightarrow$  {Re[z]}; (*Genera una tabla con pares de ceros y solo
  se escoje la primer pareja que cumple con la condición de  $\frac{Abs(a_1)}{R_1} > 1$ *)
  If[rti  $\geq$  1 && rti  $\leq$  1.05,  $\Omega =$  {d, R0, rti},  $\Omega =$  {0., 0.}]];
(*Genera una tabla con incrementos de la presión de excitación*)
incrpres = Table[pasd, {pasd,  $\frac{1.34 * 101325}{304600000}$ ,  $\frac{1.78 * 101325}{304600000}$ ,  $\frac{.0035 * 101325}{304600000}$ ]];
TMM = Map[rtimaxp, incrpres];
 $\psi =$  Select[Flatten[TMM], # > 0. &, 2]]

Timing[Tsai = Map[CambR0, incrrad]]
{17.765 Second, {{{0.000485668, 3.9  $\times 10^{-6}$ , 1.00061}}}}

puntoslimpios = Tsai /. { $\alpha$ _Complex, z_Complex}  $\rightarrow$  {Re[ $\alpha$ ], Re[z]};

Export[
  "RaleyghTayR2a2p5a32p8KHzconrogyrolnoctscritstamay=1EOb.dat", puntoslimpios]
RaleyghTayR2a2p5a32p8KHzconrogyrolnoctscritstamay=1.dat

```

Difusión.nb

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

incrrad = Table[R0sw, {R0sw, .0000005, .000002, .0000005}]; Ec1 =

$$\begin{aligned}
 & R[t] * x'[t] * \left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\
 & \frac{3}{2} \left(1 - x[t] / \left(3 * \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) * \\
 & x[t]^2 == \left(1 + x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) * \\
 & \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{(n-1) * \rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right. \\
 & \quad \left. (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) + \\
 & \left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) * \\
 & R[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \\
 & \left(\frac{\alpha s * (P0s + Bs)}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(-3 * \gamma * \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. 4 * \mu s * \left(\frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) \right) - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} * (-d * \omega s * \text{Cos}[\omega s * t]) \right) \right) \right);
 \end{aligned}$$

Difusión.nb

```

Off[General::spell];
Clear[CambR0]
CambR0[R0_] :=
Module[{ρ0, P0, ω, μ, σ, a, c0, γ, n, B, pe, re, Te, ρe, σs, μs, P0s, R0s, as, ωs, αs, ρ0s,
Bs, c0s, Pminatm, Fmaxatm, ΔPatm, ndrop, nplot, T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10, prueba3,
prueba3l, Inter3, I1, prueba4, prueba4l, Inter4, I2, con, W, Ω, Sal, puntos},
(*Parámetros del modelo Gilmore*)
ρ0 = 1000;
P0 = 77154;
ω = 50000 * 2 * π;
μ = 0.001;
σ = 0.073;
a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
c0 = 1481;
γ = 1;
n = 7;
B = 304600000;
(*Escalas*)
pe = B;
re = R0;
Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
ρe = ρ0;
(*Parámetros adimensionales*)
σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
ωs = ω * Te;
αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * \rhoe}$ ;
ρ0s =  $\frac{\rho0}{\rhoe}$ ;
Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
(*Rango de presiones e incremento de presión
para realizar el barrido dadas en Atm*)
Pminatm = 1.4;
Fmaxatm = 2;
ΔPatm = .001;
(*ndrop=ciclos de la solución transitoria;
nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
ndrop = 10;
nplot = 1;
T = 2 * π / ωs;
Do[g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold,
Ec1, x[0] == xold}, {R, x}, {t, 0, T}, Method -> StiffnessSwitching]];

```

Difusión.nb

```

pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
ppl = pp /. {α_Complex, z_Complex} → {Re[α], Re[z]};
(*Condiciones iniciales después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
vi =  $\frac{\text{ppl}[[2, 2]] + \text{ppl}[[1, 2]]}{2}$ ;
ri =  $\frac{\text{ppl}[[2, 1]] + \text{ppl}[[1, 1]]}{2}$ ;
sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == ri, Ec1, x[0] == vi},
  {R[t], x[t]}, {t, 0, 2 * π / ωs}, Method → StiffnessSwitching];
prueba3 = Table[{t,  $\left(\frac{P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s}}{R0s}\right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3}\right)^Y * R[t]^4 /. \text{sol10}[[1]]$ },
  {t, 0, 2 * π / ωs, (*controlas precisión*).1}];
prueba3l = prueba3 /. {α_, z_Complex} → {α, Re[z]};
Inter3 = Interpolation[prueba3l]; I1 = NIntegrate[Inter3[ξ],
  {ξ, 0, 2 * π / ωs}, MinRecursion → 20, MaxRecursion → 30, MaxPoints → 700000];
prueba4 = Table[{t, R[t]^4 /. sol10[[1]]}, {t, 0, 2 * π / ωs, .1}];
prueba4l = prueba4 /. {α_, z_Complex} → {α, Re[z]};
Inter4 = Interpolation[prueba4l]; I2 = NIntegrate[Inter4[λ],
  {λ, 0, 2 * π / ωs}, MinRecursion → 20, MaxRecursion → 30, MaxPoints → 700000];
con =  $\frac{1}{P0s} \frac{I1}{I2}$ ; W = d *  $\frac{B}{P0}$ ; Ω = {W, R0}; If[con > 0.012 && con < 0.01205,
  Break[], Ω = {0, 0}], {d, Pminatm *  $\frac{P0}{B}$ , Pmaxatm *  $\frac{P0}{B}$ , ΔPatm *  $\frac{P0}{B}}$ ];
Sal[Ω_] := {N[W], N[R0]};
puntos = First[Map[Sal, Ω]]

Timing[Tsal = Map[Cambr0, incread]]

```

Machgas.nb

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

incrrad = Table[R0sw, {R0sw, .000004, .000007, .000001}]; Ec1 =

$$\begin{aligned}
 & R[t] * x'[t] * \left(1 - x[t] \right) / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) + \\
 & \frac{3}{2} \left(1 - x[t] \right) / \left(3 * \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) \Bigg) * \\
 & x[t]^2 == \left(1 + x[t] \right) / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) * \\
 & \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{(n-1) * \rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right. \\
 & \quad \left. (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) + \\
 & \left(1 - x[t] \right) / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) * \\
 & R[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \\
 & \left(\frac{\alpha s * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{1}{n}} * \right. \\
 & \quad \left(-3 * \gamma * \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - \right. \\
 & \quad \left. \left. 4 * \mu s * \left(\frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) \right) - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{1}{n}} * (-d * \omega s * \text{Cos}[\omega s * t]) \right) \Bigg) \Bigg);
 \end{aligned}$$

Machgas.nb

```

Off[General::spell];
Clear[CambR0]
CambR0[R0_] :=
Module[{ρ0, P0, ω, μ, σ, a, c0, γ, n, B, b, Mg, T∞, Rg, pe, re, Te, ρe, σs, μs, P0s, R0s,
  as, ws, αs, ρ0s, Bs, c0s, ξg, Γg, ndrop, nplot, Machmaxp, incrpres, TMM, ψ},
  (*Parámetros del modelo Gilmore*)
  ρ0 = 1000;
  P0 = 101325;
  ω = 32800 * 2 * π;
  μ = 0.001;
  σ = 0.073;
  a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
  c0 = 1481;
  γ = 1;
  n = 7;
  B = 304600000;
  b = .00003219;
  Mg = 39.9 * 10^-3;
  T∞ = 273.15 + 20;
  Rg = 8.3145;
  (*Escala*)
  pe = B;
  re = R0;
  Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{n}} * R0}{B^{\frac{1}{n}}}$ ;
  ρe = ρ0;
  (*Parámetros adimensionales*)
  σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
  μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
  P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
  R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
  as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
  ws = ω * Te;
  αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * ρe}$ ;
  ρ0s =  $\frac{\rho0}{\rhoe}$ ;
  Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
  c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
  ξg =  $\frac{\rhoe * b}{Mg}$ ;
  Γg =  $\frac{\rhoe * Rg * T\infty}{Mg * (P0 + \frac{2g}{R0})}$ ;
  (*ndrop= ciclos de la solución transitoria;
  nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
  ndrop = 10;
  nplot = 1;
  Machmaxp[d_] :=
  Module[{T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10, diez, diez1, pos, T11, Mg, Ω}, T = 2 * π / ws;

```

Machgas.nb

```

g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold,
  Ecl, x[0] == xold}, {R, x}, {t, 0, T}, Method -> StiffnessSwitching]];
pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
ppl = pp /. {a_Complex, z_Complex} -> {Re[a], Re[z]};
(*Condiciones iniciales después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
Vi = (ppl[[2, 2]] + ppl[[1, 2]]) / 2;
Ri = (ppl[[2, 1]] + ppl[[1, 1]]) / 2;
sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ecl, x[0] == Vi,
  {R[t], x[t]}, {t, 0, 2 * pi / omega}, Method -> StiffnessSwitching];
(*Genera una primera aproximación de  $\frac{Abs(R_i)}{C_g}$  *)
diez = Table[{
  
$$\frac{Abs[x[t]]}{\sqrt{\gamma \frac{(P0s + \frac{2 * z_0}{R0s}) * (\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3})^\gamma}{\tau_0 (\frac{R[t]^3 - as^3}{R0s^3 - as^3}) - C_g} \left( \frac{R[t]^3}{R[t]^3 - as^3} \right)}}$$
 /. sol10},
  {t, 0, 2 * pi / omega, incr1 = 1}];
diez1 = diez /.  $\xi$ _Complex -> Re[ $\xi$ ];
pos = Flatten[Position[diez1, Max[diez1]]];
T11 = incr1 * Extract[pos, 1];
(*Genera el valor preciso de  $\frac{Abs(R_i)}{C_g}$  *)
Mg = Extract[NMaximize[{
  
$$\frac{Abs[x[t]]}{\sqrt{\gamma \frac{(P0s + \frac{2 * z_0}{R0s}) * (\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3})^\gamma}{\tau_0 (\frac{R[t]^3 - as^3}{R0s^3 - as^3}) - C_g} \left( \frac{R[t]^3}{R[t]^3 - as^3} \right)}}$$
 /. sol10[[1]],
  T11 - 2 incr1 <= t <= T11 + 2 incr1}, {t}], 1];
(*Genera una tabla con pares de ceros y solo se escoje la primer
pareja que cumple con la condición de Mg > 1*)
If[Mg >= 1 && Mg <= 1.05,  $\Omega$  = {d, R0},  $\Omega$  = {0., 0.}];
(*Genera una tabla con incrementos de la presión de excitación*)
incrpres = Table[pasd, {pasd,  $\frac{1.05 * 101325}{304600000}$ ,  $\frac{1.37 * 101325}{304600000}$ ,  $\frac{.002 * 101325}{304600000}$ ]];
TMM = Map[Machmaxp, incrpres];
 $\psi$  = Select[Flatten[TMM], # > 0. &, 2]
Timing[Teal = Map[Cambr0, incrrad]]

```

Machliquido.nb

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

incrrad=Table[R0sw, {R0sw, .0000009, .0000009, .0000001}]; Ec1 =

$$\begin{aligned}
 & R[t] * x'[t] * \left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{as * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\
 & \frac{3}{2} \left(1 - x[t] / \left(3 * \left(c0s^2 + \frac{as * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right) \right) * \\
 & x[t]^2 == \left(1 + x[t] / \left(c0s^2 + \frac{as * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right) * \\
 & \frac{as * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{(n-1) * \rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right. \\
 & \quad \left. (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) + \\
 & \left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{as * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) * \\
 & R[t] / \left(c0s^2 + \frac{as * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \\
 & \left(\frac{as * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left(-3 * \gamma * \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 4 * \mu s * \left(\frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} * (-d * \omega s * \cos[\omega s * t]) \right) \right) \right) \Bigg);
 \end{aligned}$$

Machliquido.nb

```

Off[General::spell];
Clear[CambR0]
CambR0[R0_] := Module[{ρ0, P0, ω, μ, σ, a, c0, γ, n, B, pe, re, Te, ρe, σs, μs, P0s,
  R0s, as, ws, αs, ρ0s, Bs, c0s, ndrop, nplot, Machmaxp, incrpres, TMM, ψ},
  (*Parámetros del modelo Gilmore*)
  ρ0 = 1000;
  P0 = 101325;
  ω = 32800 * 2 * π;
  μ = 0.001;
  σ = 0.073;
  a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
  c0 = 1481;
  γ = 1;
  n = 7;
  B = 304600000;
  (*Escalas*)
  pe = B;
  re = R0;
  Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
  ρe = ρ0;
  (*Parámetros dimensionales*)
  σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
  μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
  P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
  R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
  as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
  ws = ω * Te;
  αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * ρe}$ ;
  ρ0s =  $\frac{\rho0}{ρe}$ ;
  Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
  c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
  (*ndrop= ciclos de la solución transitoria;
  nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
  ndrop = 10;
  nplot = 1;
  Machmaxp[d_] :=
  Module[{T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10, diez, diez1, pos, T11, M1, Ω}, T = 2 * π / ωs;
  g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold,
    Ec1, x[0] == xold}, {R, x}, {t, 0, T}, Method -> StiffnessSwitching]];
  pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
  ppl = pp /. {α_Complex, z_Complex} -> {Re[α], Re[z]};
  (*Condiciones iniciales después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
  Vi =  $\frac{ppl[[2, 2]] + ppl[[1, 2]]}{2}$ ;
  Ri =  $\frac{ppl[[2, 1]] + ppl[[1, 1]]}{2}$ ;

```

Machliquido.nb

```

sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi},
  {R[t], x[t]}, {t, 0, 2 * pi / ws}, Method -> StiffnessSwitching];
(*Genera una primera aproximación de  $\frac{Abs(R_i)}{c}$  *)
diez = Table[{Abs[x[t]] /  $\left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \right)$ 
  
$$\left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right.$$

  
$$\left. \left. (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right]^{\frac{1}{n}} /. sol10}, {t, 0, 2 * pi / ws, incr1 = 1}];
diez1 = diez /.  $\xi$ _Complex -> Re[ $\xi$ ];
pos = Flatten[Position[diez1, Max[diez1]]];
T11 = incr1 * Extract[pos, 1];
(*Genera el valor preciso de  $\frac{Abs(R_i)}{c}$  *)
M1 = Extract[NMaximize[
  {Abs[x[t]] /  $\left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \right)$ 
  
$$\left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right.$$

  
$$\left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * Sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right]^{\frac{1}{n}} /.$$

  sol10[[1]], T11 - 2 incr1 <= t <= T11 + 2 incr1}, {t}], 1];
(*Genera una tabla con pares de ceros y solo se escoje la primer
  pareja que cumple con la condición de M1>1*)  $\Omega = \left\{ d \frac{304600000}{101325}, M1 \right\}$ ;
(*Genera una tabla con incrementos de la presión de excitación*)
incrpres = Table[pasd, {pasd, 1.4 *  $\frac{101325}{304600000}$ , 1.9 *  $\frac{101325}{304600000}$ , .001 *  $\frac{101325}{304600000}$ }}];
TMM = Map[Machmaxp, incrpres]
Timing[Tsal = Map[CambR0, incrrad]]$$

```

Umbral-Temperatura.nb

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

incrrad=Table[R0sw, {R0sw, .000001, .000001, .0000001}]; Ec1 =

$$\begin{aligned}
 & R[t] * x'[t] * \left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) + \\
 & \frac{3}{2} \left(1 - x[t] / \left(3 * \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) * \\
 & x[t]^2 = \left(1 + x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \Bigg) * \\
 & \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{(n-1) * \rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right. \\
 & \quad \left. (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) + \\
 & \left(1 - x[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \Bigg) * \\
 & R[t] / \left(c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right) \Bigg) * \\
 & \left(\frac{\alpha s * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho0s} \left(\left(Bs + \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(-3 * \gamma * \left(P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left(\frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 4 * \mu s * \left(\frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) - (Bs + P0s - d * \sin[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} * (-d * \omega s * \cos[\omega s * t]) \right) \right) \Bigg);
 \end{aligned}$$

Umbral-Temperatura.nb

```

Off[General::spell];
Clear[Cambr0]
Cambr0[R0_] :=
Module[{ρ0, P0, ω, μ, σ, a, c0, γ, n, B, b, Tg, T∞, Rg, pe, re, Te, ρe, σs, μs, P0s, R0s,
  as, ωs, αs, ρ0s, Bs, c0s, ζg, Γg, ndrop, nplot, Machmaxp, incrpres, TMM, ψ},
  (*Parámetros del modelo Gilmore*)
  ρ0 = 1000;
  P0 = 101325;
  ω = 32800 * 2 * π;
  μ = 0.001;
  σ = 0.073;
  a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
  c0 = 1481;
  γ = 5 / 3;
  n = 7;
  B = 304600000;
  b = .00003219;
  Mg = 39.9 * 10^-3;
  T∞ = 273.15 + 20;
  Rg = 8.3145;
  (*Escalas*)
  pe = B;
  re = R0;
  Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
  ρe = ρ0;
  (*Parámetros adimensionales*)
  σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
  μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
  P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
  R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
  as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
  ωs = ω * Te;
  αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * \rhoe}$ ;
  ρ0s =  $\frac{\rho0}{\rhoe}$ ;
  Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
  c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
  ζg =  $\frac{\rhoe * b}{Mg}$ ;
  Γg =  $\frac{\rhoe * Rg * T\infty}{Mg * (P0 + \frac{2 * \sigma}{R0})}$ ;
  (*ndrop= ciclos de la solución transitoria;
  nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
  ndrop = 10;
  nplot = 1;
  Machmaxp[d_] :=
  Module[{T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10, diez, diez1, pos, T11, Mg, Ω}, T = 2 * π / ωs;

```

Umbral-Temperatura.nb

```

g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold,
  Ec1, x[0] == xold}, {R, x}, {t, 0, T}, Method -> StiffnessSwitching]];
pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
pp1 = pp /. {α_Complex, z_Complex} -> {Re[α], Re[z]};
(*Condiciones iniciales después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
Vi = (pp1[[2, 2]] + pp1[[1, 2]]) / 2;
Ri = (pp1[[2, 1]] + pp1[[1, 1]]) / 2; sol10 =
  NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi}, {R[t], x[t]}, {t, 0, 2*π/ωs},
  Method -> StiffnessSwitching]; (*Genera una primera aproximación de Tg*)
diez = Table[{(273.15 + 20) * (R0s^3 - as^3) / (R[t]^3 - as^3)}^γ-1 /. sol10}, {t, 0, 2*π/ωs, incr1 = 1}];
diez1 = diez /. ξ_Complex -> Re[ξ];
pos = Flatten[Position[diez1, Max[diez1]]];
T11 = incr1 * Extract[pos, 1];
(*Genera el valor preciso de Tg*)
Tg = Extract[NMaximize[{(273.15 + 20) * (R0s^3 - as^3) / (R[t]^3 - as^3)}^γ-1 /. sol10[[1]],
  T11 - 2*incr1 ≤ t ≤ T11 + 2*incr1}, {t}], 1];
(*Genera una tabla con pares de ceros y solo se escoge la primer
pareja que cumple con la condición de Mg>1*)
If[Tg ≥ 9000, Ω = {d * (304600000 / 101325), R0}, Ω = {0., 0.}];
(*Genera una tabla con incrementos de la presión de excitación*)
incrpres = Table[pasd, {pasd, (1.6*101325 / 304600000), (1.8*101325 / 304600000), (.005*101325 / 304600000)}];
TMM = Map[Machmaxp, incrpres];
ψ = Select[Flatten[TMM], # > 0. &, 2]
Timing[Tsal = Map[Cambr0, incrrad]]

```

Bjerknes.nb

(*Genera una tabla con incrementos del radio inicial *)

```
incrrad=Table[R0sw, {R0sw, .000009, .00001, .0000001}]; Ec1=R[t]*x'[t]*

$$\left( 1 - x[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) +$$


$$\frac{3}{2} \left( 1 - x[t] / \left( 3 * \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) *$$


$$x[t]^2 = \left( 1 + x[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) *$$


$$\frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{(n-1) * \rho0s} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right) +$$


$$\left( 1 - x[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) *$$


$$R[t] / \left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} *$$


$$\left( \frac{\alpha s * (P0s + Bs)}{\rho0s} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \left( Bs + \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y - \frac{2 * \sigma s}{R[t]} - \frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]} \right)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} *$$


$$\left( -3 * Y * \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^Y * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - 4 * \mu s * \left( \frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) - (Bs + P0s - d * \text{Sin}[\omega s * t])^{\frac{(n-1)}{n}} * (-d * \omega s * \text{Cos}[\omega s * t]) \right);$$

```

Bjerknes.nb

```

Off[General::spell];
Clear[CambR0]
CambR0[R0_] := Module[{ρ0, P0, ω, μ, σ, a, c0, γ, n, B, pe, re, Te, ρe, αs, μs,
  P0s, R0s, as, ωs, αs, ρ0s, Bs, c0s, ndrop, nplot, BJer, incrpres, TMM, ψ},
  (*Parámetros del modelo Gilmore*)
  ρ0 = 1000;
  P0 = 101325;
  ω = 20000 * 2 * π;
  μ = 0.001;
  σ = 0.073;
  a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
  c0 = 1481;
  γ = 1;
  n = 7;
  B = 304600000;
  (*Escalas*)
  pe = B;
  re = R0;
  Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
  ρe = ρ0;
  (*Parámetros adimensionales*)
  αs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
  μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
  P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
  R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
  as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
  ωs = ω * Te;
  αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * ρe}$ ;
  ρ0s =  $\frac{\rho0}{\rhoe}$ ;
  Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
  c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;
  (*ndrop= ciclos de la solución transitoria;
  nplot=un ciclo de la solución estacionaria*)
  ndrop = 0;
  nplot = 1;
  BJer[d_] :=
  Module[{T, g, pp, ppl, Vi, Ri, sol10, I1, fb, Ω}, T = 2 * π / ωs; g[{Rold_, xold_}] :=
    {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Rold, Ec1, x[0] == xold},
      {R, x}, {t, 0, T}, Method -> StiffnessSwitching]];
  pp = Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop];
  ppl = pp /. {α_Complex, z_Complex} -> {Re[α], Re[z]};
  (*Condiciones iniciales
  después de ndrop ciclos de la solución transitoria*)
  Vi =  $\frac{ppl[[2, 2]] + ppl[[1, 2]]}{2}$ ;

```

Bjerknes.nb

```

Ri =  $\frac{\text{pp1}[[2, 1]] + \text{pp1}[[1, 1]]}{2}$ ;
sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == Ri, Ec1, x[0] == Vi},
  {R[t], x[t]}, {t, 0, 2 *  $\pi$  /  $\omega_s$ }, Method -> StiffnessSwitching];
(*Calculo de fB*)
I1 = NIntegrate[Evaluate[-d * Sin[ $\omega_s$  * t] * R[t]3 /. sol10[[1]]], {t, 0,  $\frac{1}{\frac{\omega_s}{2 * \pi}}$ },
  MinRecursion -> 10, MaxRecursion -> 15] /. z_Complex -> Re[z];
fb =  $\frac{4}{9} \pi \left(\frac{\omega_s}{c0s}\right)^2 \frac{\omega_s}{2 \pi} I1$ ;
(*Se escoje la primer pareja (Pa,R0) que cumple con la condición de fb>0*)
If[fb > 0,  $\Omega = \left\{d * \frac{304600000}{101325}, R0\right\}$ ];
(*Genera una tabla con incrementos de la presión de excitación*)
incrpres =
  Table[ $\text{pasd}$ , { $\text{pasd}$ ,  $\frac{101325}{304600000} 1.65$ ,  $\frac{101325}{304600000} 1.72$ ,  $\frac{101325}{304600000} .001$ ]];
TMM = Map[BJer, incrpres];
 $\psi = \text{Select}[\text{Flatten}[\text{TMM}], \# > 0. \&, 2]$ 
Timing[Tsal = Map[CambR0, incrrad]]

```

Diagrama de flujo del programa para obtener los diagramas de bifurcación.

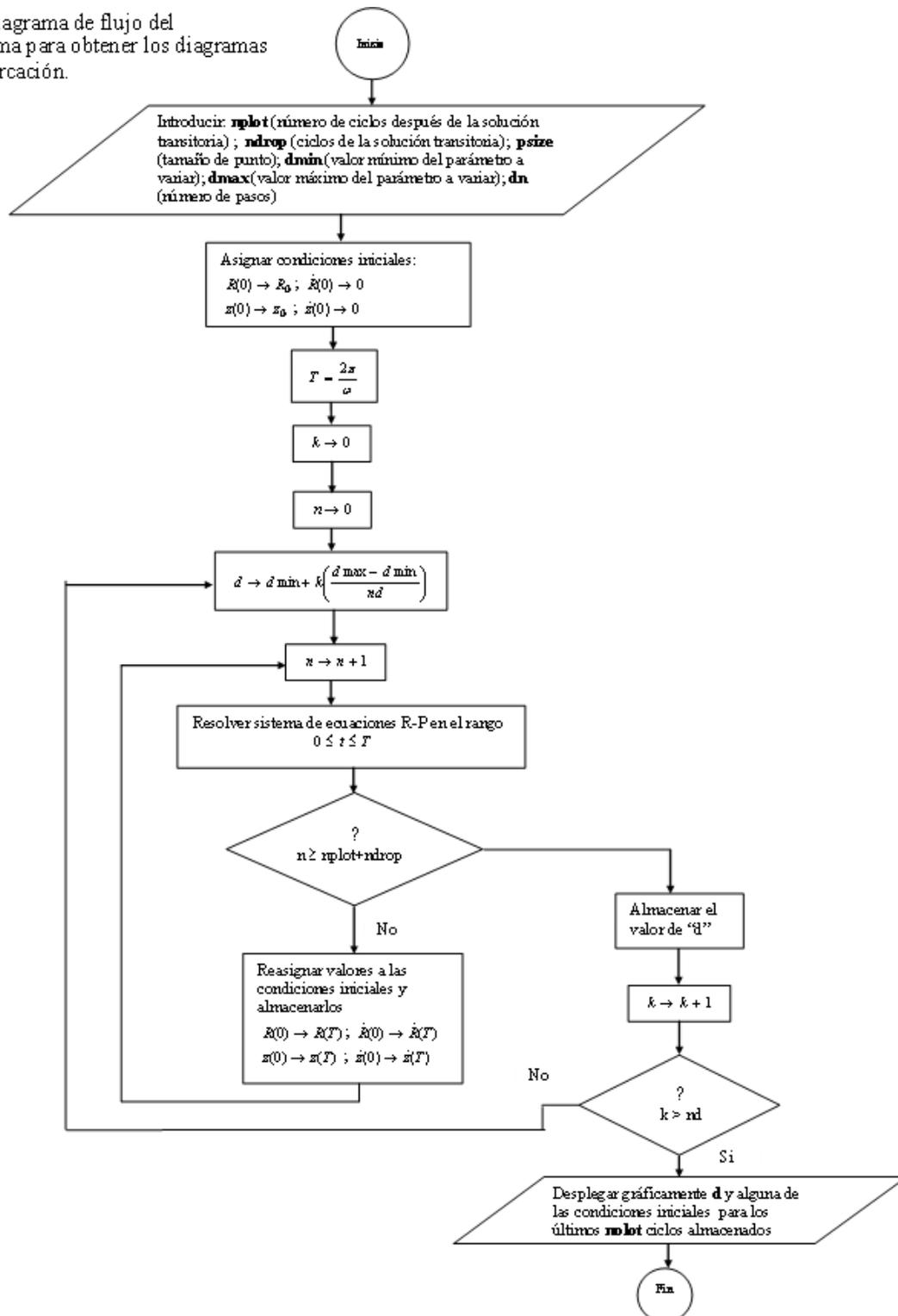


Diagrama-Bifurcación.nb

```

"Ec. Gilmore ";
"Parámetros del modelo";
ρ0 = 1000;
P0 = 101325;
ω = 26500 * 2 * π;
μ = 0.001;
σ = 0.073;
R0 = 1.5 * 10^-6;
a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
c0 = 1481;
γ = 1;
Pa = 7 * 101325;
n = 7;
B = 304600000;
"Escalas";
pe = B;
re = R0;
Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
ρe = ρ0;
"Parámetros adimensionales";
σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
R0s = N[ $\frac{R0}{re}$ ];
as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
Pas = N[ $\frac{Pa}{pe}$ ];
ωs = N[ω * Te];
αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * \rhoe}$ ;
ρ0s =  $\frac{\rho0}{\rhoe}$ ;
Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
c0s = N[ $\frac{c0 * Te}{re}$ ];

```

Diagrama-Bifurcación.nb

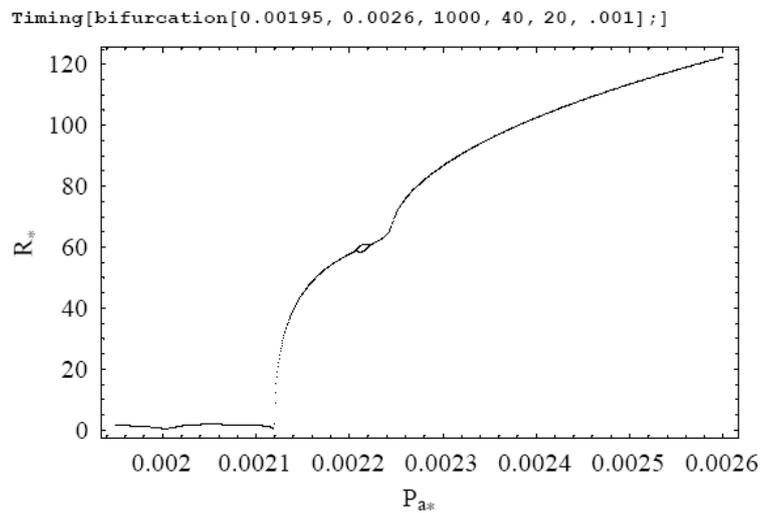
"Solución del modelo";

```

Pσ :=  $\frac{2 * \sigma s}{R[t]}$ ;
Pμ :=  $\frac{4 * \mu s * x[t]}{R[t]}$ ;
Pg :=  $\left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma}$ ;
Pinf := P0s - d * Sin[ωs * t];
H :=  $\frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{(n-1) * \rho 0s} \left( (Bs + Pg - P\sigma - P\mu)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + Pinf)^{\frac{(n-1)}{n}} \right)$ ;
Ci :=  $\left( c0s^2 + \frac{\alpha s * n * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left( (Bs + Pg - P\sigma - P\mu)^{\frac{(n-1)}{n}} - (Bs + Pinf)^{\frac{(n-1)}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$ ;
Clear[bifurcation];
bifurcation[dmin_, dmax_, nd_, ndrop_, nplot_, psize_] :=
{
T = 2 * π / ωs; g[{Rold_, xold_}] := {R[T], x[T]} /. Flatten[NDSolve[
{
R'[t] == x[t], R[0] == Rold, R[t] * x'[t] *  $\left( 1 - \frac{x[t]}{Ci} \right) + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{x[t]}{3 * Ci} \right) * x[t]^2 ==$ 
 $\left( 1 + \frac{x[t]}{Ci} \right) * H + \left( 1 - \frac{x[t]}{Ci} \right) * \frac{R[t]}{Ci} * \left( \frac{\alpha s * (P0s + Bs)^{\frac{1}{n}}}{\rho 0s} \left( (Bs + Pg - P\sigma - P\mu)^{\frac{1}{n}} * \right.$ 
 $\left. \left( -3 * \gamma * \left( P0s + \frac{2 * \sigma s}{R0s} \right) * \left( \frac{R0s^3 - as^3}{R[t]^3 - as^3} \right)^{\gamma} * \frac{R[t]^2 * x[t]}{R[t]^3 - as^3} + \frac{2 * \sigma s * x[t]}{R[t]^2} - \right.$ 
 $\left. \left. 4 * \mu s * \left( \frac{x'[t]}{R[t]} - \frac{x[t]^2}{R[t]^2} \right) \right) - (Bs + Pinf)^{\frac{1}{n}} * (-d * \omega s * Cos[\omega s * t]) \right)$ ,
x[0] == xold}, {R, x}, {t, 0, T}, WorkingPrecision → MachinePrecision,
Method → {Extrapolation, StiffnessTest → False}]]; f[{R_, y_}] := {d, R};
ListPlot[puntos = Flatten[Table[Map[f,
Drop[NestList[g, {1, 0}, nplot + ndrop], ndrop]],
{d, dmin, dmax, (dmax - dmin) / nd}], 1],
PlotStyle → {PointSize [psize]}, PlotRange → All, Axes → None, Frame → True,
FrameLabel → {"Pa", "R*"}, TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 15}];

```

Diagrama-Bifurcación.nb



```
{91818. Second, Null}
```

```
puntoslimpios3 = puntos /. {α_, z_Complex} → {α, Re[z]};
```

```
Timing[Export["Bifurcation154micclusta.dat", puntoslimpios3]]
```

```
{1.492 Second, Bifurcation154micclusta.dat}
```

Ec. Hawtin- Burbuja cónica.nb

EX CITACIÓN;

```
P0 = 150;
a = 0 * 10^6;
Pa = 40000;
ta = .003;

Pinf[t_] := { P0      t < 0
              P0 + a t  0 ≤ t ≤ ta;
              Pa      t > 0

Plot[Pinf[t], {t, 0, .03}, PlotRange → All];
```

MOVIMIENTO EN LA REGIÓN TUBULAR;

```
P0 = 150;
a = 0 * 10^6;
Pa = 40000;
ta = .003;
Ri = .23;
ρ0 = 1036;
hi = .57;
l0 = hi + Ri;
H0 = Ri;
Hc = .02;
vi = 0;
A0 = 5.309 * 10^-4;
P1 = P0 + ρ0 * 9.81 * .02;
V1 = (Ri - Hc) A0 +  $\frac{1}{3}$  A0 * Hc;
n = 1.667;
Pv = P1 *  $\left( \frac{V1}{A0 * H - \frac{2}{3} A0 * Hc} \right)^n$ ;
Sol10 = NDSolve[{H'[t] == x[t],
  x'[t] == Piecewise[{{-  $\frac{1}{\rho0 (l0 - H0)}$   $\left( P0 + a t - P1 * \left( \frac{Ri - \frac{2}{3} Hc}{H[t] - \frac{2}{3} Hc} \right)^n \right)$ , 0 ≤ t ≤ ta},
  {-  $\frac{1}{\rho0 (l0 - H0)}$   $\left( Pa - P1 * \left( \frac{Ri - \frac{2}{3} Hc}{H[t] - \frac{2}{3} Hc} \right)^n \right)$ , t > 0}}], H[0] == Ri, x[0] == vi},
{x[t], H[t]}, {t, 0, .2}, Method → StiffnessSwitching]
{x[t] → InterpolatingFunction[{{0., 0.2}}, <>][t],
 H[t] → InterpolatingFunction[{{0., 0.2}}, <>][t]}
```

Ec. Hawtin- Burbuja cónica.nb

DESPLAZAMIENTO;

```
Timing[prueba26 = Table[{t, H[t] /. Sol10[[1]]}, {t, 0, .0824, .0001}];
bb = ListPlot[prueba26, PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Hue[.6], Thickness[.006]}, PlotRange → {0, .26},
  AxesLabel → {"t", "H"}, TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 15},
  GridLines -> {None, {{.08, {Dashing[{.01, .01}]}}}}];]
{0.047 Second, Null}
```

VELOCIDAD;

```
Timing[prueba27 = Table[{t, x[t] /. Sol10[[1]]}, {t, 0, .0824, .0001}];
bbuu = ListPlot[prueba27, PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Hue[.6], Thickness[.006]}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"t", "dH/dt"}, TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 15},
  GridLines -> {{.0698, {Dashing[{.01, .01}]}}}, None];]
```

ACELERACIÓN;

```
Timing[prueba29 =
  Table[{t, Piecewise[{{-  $\frac{1}{\rho_0 (10 - H_0)} \left( P_0 + a t - P_1 * \left( \frac{R_i - \frac{2}{3} H_c}{H[t] - \frac{2}{3} H_c} \right)^n \right)$ ,  $0 \leq t \leq t_a$ },
    {-  $\frac{1}{\rho_0 (10 - H_0)} \left( P_a - P_1 * \left( \frac{R_i - \frac{2}{3} H_c}{H[t] - \frac{2}{3} H_c} \right)^n \right)$ ,  $t > 0$ }}] /.
  Sol10[[1]]}, {t, 0, .0824, .0001}];
bbuuba = ListPlot[prueba29, PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Hue[.6], Thickness[.006]}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"t", "d2H/dt2"}, TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 15}];]
```

MOVIMIENTO EN LA REGIÓN CÓNICA;

Sol11 =

```

NDSolve[{{H'[t] == x[t], H[t] \left( 1 - \frac{2 H[t]}{Hc} + \frac{H[t] \left( 10 - H0 + Hc - \frac{1}{3} \left( \frac{Hc^3 - H[t]^3}{Hc^2} \right) \right)}{Hc^2} \right) x'[t] +
\left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{H[t]}{Hc} \right)^4 - \frac{4 H[t]}{Hc} + \frac{2 H[t] \left( 10 - H0 + Hc - \frac{1}{3} \left( \frac{Hc^3 - H[t]^3}{Hc^2} \right) \right)}{Hc^2} \right) x[t]^2 == - \frac{1}{\rho_0}
\left( Pa - 112551 * \left( \frac{Hc}{H[t]} \right)^{3n} \right)}, H[0.0824] == 0.02, x[0.0824] == -4.992038290671603`},
{x[t], H[t]}, {t, .0824, .5}, Method -> StiffnessSwitching]

{{x[t] -> InterpolatingFunction[{{0.0824, 0.5}}, <>][t],
H[t] -> InterpolatingFunction[{{0.0824, 0.5}}, <>][t]}}

```

DESPLAZAMIENTO;

```

Timing[prueba2777 = Table[{t, H[t] /. Sol11[[1]]}, {t, .0824, .2, .000005}];
bb77 = ListPlot[prueba2777, PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Hue[.05], Thickness[.006]}, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"t", "H"}, TextStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 15}];]

```

VELOCIDAD;

```

Timing[prueba2888 = Table[{t, x[t] /. Sol11[[1]]}, {t, .0824, .2, .000005}];
bb88 = ListPlot[prueba2888, PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Hue[.05], Thickness[.006]}, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"t", "dH/dt"}, TextStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 15}];]

```

ACELERACIÓN;

Timing[prueba2999 =

```

Table[{t, \left( \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{H[t]}{Hc} \right)^4 - \frac{4 H[t]}{Hc} + \frac{2 H[t] \left( 10 - H0 + Hc - \frac{1}{3} \left( \frac{Hc^3 - H[t]^3}{Hc^2} \right) \right)}{Hc^2} \right) x[t]^2 -
\frac{1}{\rho_0} \left( Pa - 112551 * \left( \frac{Hc}{H[t]} \right)^{3n} \right) \right) /
\left( H[t] \left( 1 - \frac{2 H[t]}{Hc} + \frac{H[t] \left( 10 - H0 + Hc - \frac{1}{3} \left( \frac{Hc^3 - H[t]^3}{Hc^2} \right) \right)}{Hc^2} \right) \right) / .
Sol11[[1]]}, {t, .0824, .086, .00001}];]

```

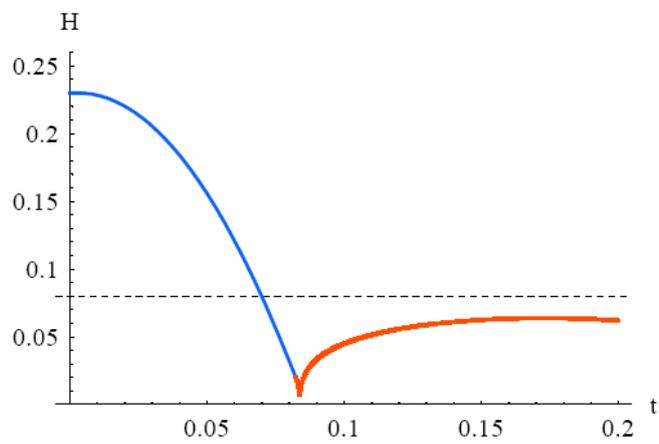
```

bb99 = ListPlot[prueba2999, PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Hue[.05], Thickness[.006]}, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"t", "d^2H/dt^2"}, TextStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 15}];]

```

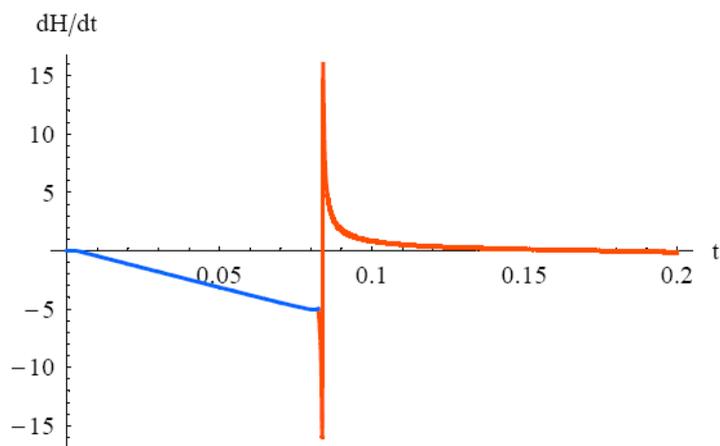
Ec. Hawtin- Burbuja cónica.nb

Show[bb, bb77]



- Graphics -

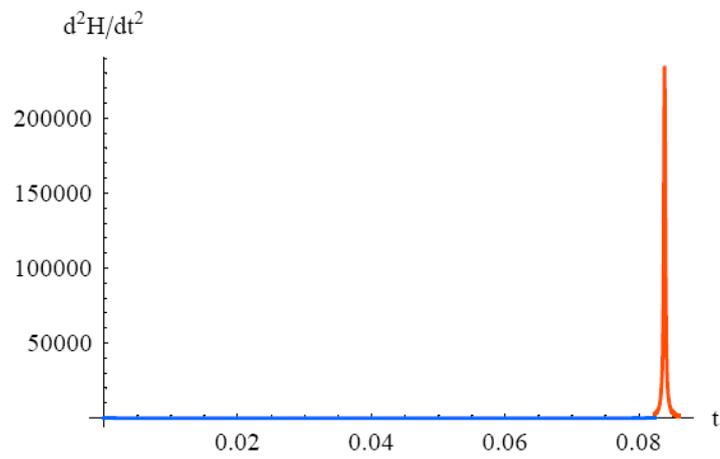
Show[bb88, bbuu]



- Graphics -

Ec. Hawtin- Burbuja cónica.nb

```
Show[bb99, bbuuba]
```



- Graphics -



Gilmore.nb

```

(*Parámetros del modelo Gilmore*)
ρ0 = 1000;
P0 = 101325;
R0 = 5 * 10^-6;
Pa = 145000;
ω = 23500 * 2 * π;
μ = 0.001;
σ = 0.073;
a =  $\frac{R0}{8.86}$ ;
c0 = 1481;
γ = 1;
n = 7;
B = 304600000;
(*Escalas*)
pe = B;
re = R0;
Te =  $\frac{\rho0^{\frac{1}{2}} * R0}{B^{\frac{1}{2}}}$ ;
ρe = ρ0;
(*Parámetros adimensionales*)
σs =  $\frac{\sigma}{re * pe}$ ;
μs =  $\frac{\mu}{pe * Te}$ ;
P0s = N[ $\frac{P0}{pe}$ ];
d =  $\frac{Pa}{pe}$ ;
R0s =  $\frac{R0}{re}$ ;
as =  $\frac{R0}{8.86 * re}$ ;
ωs = ω * Te;
αs =  $\frac{Te^2 * pe}{re^2 * ρe}$ ;
ρ0s =  $\frac{\rho0}{pe}$ ;
Bs =  $\frac{B}{pe}$ ;
c0s =  $\frac{c0 * Te}{re}$ ;

```

Gilmore.nb

```

Timing[Sol10 = NDSolve[{R'[t] == x[t], R[0] == R0s,
  R[t] * x'[t] * (1 - x[t]) / (c0s (Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R0s^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] - 4*us*x[t])/R[t])^(n-1/2n)) +
  3/2 (1 - x[t]) / (3 * (c0s (Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R[t]^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] - 4*us*x[t])/R[t])^(n-1/2n))) *
  x[t]^2 == (1 + x[t]) / (c0s (Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R0s^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] - 4*us*x[t])/R[t])^(n-1/2n)) *
  (cs * n * (P0s + Bs)^(1/n) / ((n-1) * rho0s) *
  ((Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R0s^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] - 4*us*x[t])/R[t])^(n-1/n) -
  (Bs + P0s - d * Sin[ws * t])^(n-1/n)) +
  (1 - x[t]) / (c0s (Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R0s^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] - 4*us*x[t])/R[t])^(n-1/2n)) *
  R[t] / (c0s (Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R[t]^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] - 4*us*x[t])/R[t])^(n-1/2n)) *
  ((cs * (P0s + Bs)^(1/n) / rho0s) * ((Bs + (P0s + (2*cs/R0s) * (R0s^3 - as^3)^Y - 2*cs/R[t] -
  4*us*x[t])/R[t])^(1/n) * (-3 * gamma * (P0s + (2*cs/R0s) * (R0s^3 - as^3)^Y *
  R[t]^2 * x[t] + 2*cs*x[t]/R[t]^2 - 4*us * (x'[t]/R[t] - x[t]^2/R[t]^2)) -
  (Bs + P0s - d * Sin[ws * t])^(1/n) * (-d * ws * Cos[ws * t]))], x[0] == 0},
  {R, x}, {t, 0, 2 * pi / ws}, Method -> StiffnessSwitching];
{0.829 Second, Null}

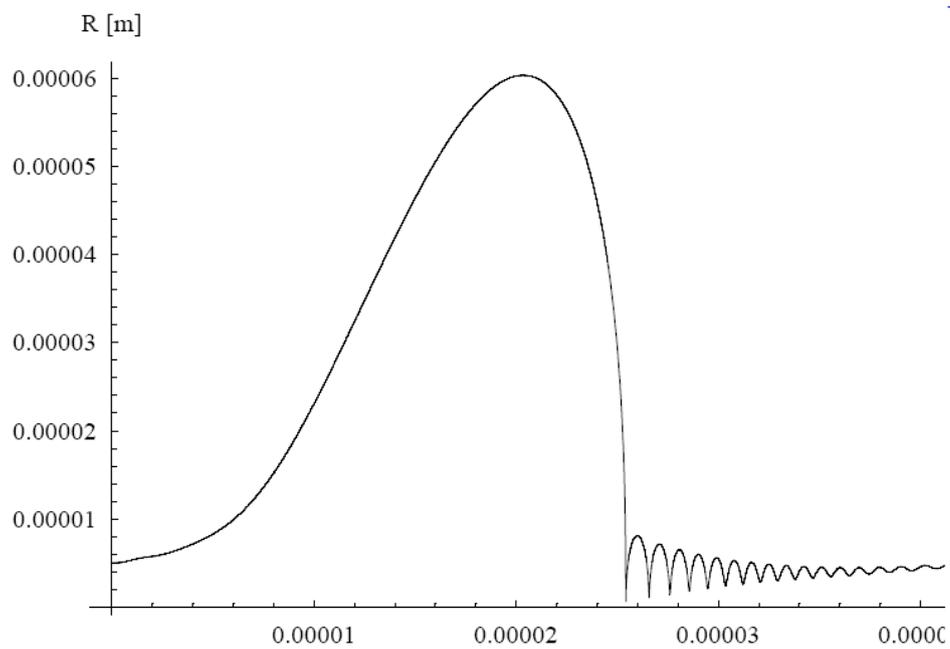
```

Gilmore.nb

"Radio"

```
Timing[Radio10 = Table[{Tet, reR[t] /. Sol10[[1]]}, {t, 0, 2* $\pi$ / $\omega$ s, .1}];
ListPlot[Radio10, PlotJoined  $\rightarrow$  True,
  PlotRange  $\rightarrow$  All, AxesLabel  $\rightarrow$  {"t [s]", "R [m]"},
  TextStyle  $\rightarrow$  {FontFamily  $\rightarrow$  "Times", FontSize  $\rightarrow$  15}];
```

Radio



{1.563 Second, Null}

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Dimensiones
a_n	Amplitud de una distorsión superficial en función del tiempo (m)	L
$a_n(0)$	Amplitud inicial de una distorsión (m)	L
$ADSN$	Amplitud de una distorsión normalizada	Adimensional
B	Constante de la ec. de Tait (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$
c_0	Velocidad del sonido en el líquido considerada constante (m/s)	LT^{-1}
C	Velocidad del sonido en el líquido en función del tiempo (m/s)	LT^{-1}
C_{∞}/C_0	Saturación de gas	Adimensional
c_g	Velocidad del sonido en el gas en función del tiempo (m/s)	LT^{-1}
δ	Espesor de la capa límite (m)	L
$f=\omega/2\pi$	Frecuencia del campo acústico de excitación (Hz)	T^{-1}
FA	Factor de amplificación de las deformaciones superficiales	Adimensional
F_B	Fuerza de Bjerknes (N)	MLT^{-2}
f_B	Coefficiente de rigidez de la fuerza de Bjerknes (N/m)	MT^{-2}
γ	Índice politrópico	Adimensional
g	Aceleración debida a la gravedad (m/s ²)	LT^{-2}
$h=R_0/8.86$	Radio de van der Waals del núcleo duro para burbujas de argón (m)	L
H	Entalpía del líquido (J/Kg K)	$L^2T^2\Theta^{-1}$
$H(t)$	Distancia desde el ápex hasta el menisco (m)	L
H_c	Altura del cono (m)	L
$k=\omega/c_0$	Número de onda del campo acústico de excitación (rad/m)	L^{-1}
l	Longitud del pistón líquido (m)	L
m	Constante de la ec. de Tait (Pa)	Adimensional
M_g	Número de Mach en el gas	Adimensional
M_l	Número de Mach en el líquido	Adimensional
n	Orden del armónico esférico	Adimensional
μ	Viscosidad dinámica del líquido (Pa s)	$ML^{-1}T^{-1}$
ν	Viscosidad cinemática del líquido (m ² /s)	L^2T^{-1}
∇P	Gradiente de presión asociado al campo acústico de excitación (N/m ³)	$MT^{-2}L^{-2}$
P	Presión en la pared de la burbuja (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$
P_e	Presión de excitación (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$
$P_{ext}(t)$	Presión de excitación, Tubo U (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$
P_g	Presión del gas en el interior de la burbuja (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$
P_0	Presión ambiente (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$
P_{∞}	Presión lejos de la burbuja (Pa)	$ML^{-1}T^{-2}$

\mathfrak{R}	Constante universal de los gases (kJ/Kmol K)	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}mol^{-1}$
R_0	Radio inicial (ó de equilibrio) de la burbuja (m)	L
$R(t)$	Radio de la burbuja en función del tiempo (m)	L
R_{max}	Radio máximo de la burbuja (m)	L
R_{min}	Radio mínimo de la burbuja (m)	L
RE	Relación de expansión	Adimensional
\dot{R}_{max}	Velocidad máxima de la pared de la burbuja (m/s)	LT^{-1}
ρ_0	Densidad del líquido considerada constante (Kg/m ³)	ML^{-3}
ρ_g	Densidad del gas (Kg/m ³)	ML^{-3}
ρ_l	Densidad del líquido (Kg/m ³)	ML^{-3}
σ	Tensión superficial del líquido (Kg/s ²)	MT^{-2}
$T=1/f$	Período de oscilación de la burbuja (s)	T^{-1}
T_0	Temperatura ambiente (K)	Θ
T_e	Tiempo de elevación (s)	T
T_c	Tiempo de caída (s)	T
T_g	Temperatura del gas dentro de la burbuja en función del tiempo (K)	Θ
t_{Rmin}	Tiempo en que se sostiene el radio mínimo de la burbuja (s)	T
t_{RT}	Tiempo en que la inestabilidad de RT deja de crecer (s)	T
u	Velocidad del fluido (m/s)	LT^{-1}
u_b	Velocidad de la burbuja en la dirección vertical (m/s)	LT^{-1}
u_l	Velocidad del líquido (m/s)	LT^{-1}
u_r	Velocidad relativa de la burbuja (m/s)	LT^{-1}
$V(t)$	Volumen de la burbuja en función del tiempo(m ³)	L^3
ω	Frecuencia angular del campo acústico de excitación (rad/s)	T^{-1}

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Barber, B. P., R. A. Hiller, R. Löfstedt, S. J. Putterman, and K. R. Weninger, 1997, "Defining the unknowns of sonoluminescence," *Phys. Rep.* **281**, 65–143.
2. Putterman, S. J., and K. R. Weninger, 2000, "Sonoluminescence: How bubbles turn sound into light," *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **32**, 445-476.
3. Reisse, J., Caulier, T., Deckerkheer, C., Kegelaers, Y., Segebarth, N., and Bartik, K., 1999, "Sonochemistry and Sonoluminescence," Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 205-224.
4. Russel, J. P., 1999, "Sonochemistry and Sonoluminescence," Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 372-376.
5. Suslick, K. S., and Casadonte, D. J., 1987, "Heterogeneous sonocatalysis with nickel powder," *J. Am. Chem. Soc.* **109**, 3459-3461.
6. Suslick, K. S., 1995, "Applications of ultrasound to materials chemistry," *MRS Bull.* **20**, 29.
7. Taleyarkhan R. P., C. D. West, J. S. Cho, R. T. Lahey, Jr., R. I. Nigmatulin, and R. C. Block, 2002, "Evidence for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitation," *Science* **295**, 1868.
8. Urteaga R., and Bonetto, F. J., 2008, "Trapping an Intensely Bright, Stable Sonoluminescing Bubble," *Phys. Rev. Letters* **100**, 074302.
9. Hawtin, P., Henwood, G.A., and Huber, R.A., 1970, "On the collapse of water vapor cavities in a bubble analogue apparatus," *Chem. Eng. Sci.* **25**, 1197-1209.
10. Suslick, K. S., 2001, "Sonoluminescence and Sonochemistry," *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, 3rd Ed., Meyers, R. A. (ed.); Academic Press, Inc.: San Diego.
11. Brenner, M. P., S. Hilgenfeldt, and D. Lohse, 2002, "Single-bubble Sonoluminescence," *Reviews of Modern Physics* **74**, 425-484.
12. Wu, C. C., and P. H. Roberts, 1993, "Shock-Wave Propagation in a Sonoluminescing Gas Bubble," *Phys. Rev. Letters* **70**, No. 22, 3424-3427.
13. Yasui, K., 1997, "Alternative Model of Single-Bubble Sonoluminescence," *Phys. Rev. E* **56**, No. 6, 6750-6760.
14. Hilgenfeldt, S., S. Grossmann; and D. Lohse, 1999, "A simple explanation of

light emission in sonoluminescence," *Nature (London)* **398**, 402–405.

15. Hilgenfeldt, S., S. Grossmann, and D. Lohse, 1999, "Sonoluminescence light emission," *Phys. Fluids* **11**, 1318–1330.

16. Storey, B. D., and A. J. Szeri, 2000, "Water vapour, sonoluminescence and sonochemistry," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **456**, 1685–1709.

17. Rayleigh, L., 1917, "On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity," *Phil. Mag.* **34**, 94-98.

18. Herring, C., 1941, "Theory of pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion," OSRD Rep. No. 236.

19. Plesset, M., 1949, "The dynamics of cavitation bubbles," *J. Appl. Mech.* **16**, 277.

20. Prosperetti, A., 1977, "Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquid," *J. Acoust. Soc. Am.* **61**, 17-27.

21. Barber, P. B., and S. J. Putterman, 1992, "Light scattering measurements of the repetitive supersonic implosion of a sonoluminescing bubble," *Phys. Rev. Letters* **69**, No. 26, 3839-3842.

22. Hilgenfeldt, S., M. P. Brenner, S. Grossmann, and D. Lohse, 1998, "Analysis of Rayleigh-Plesset dynamics for sonoluminescing bubbles," *J. Fluid Mech.* **365**, 171-204.

23. Frenzel, H., and H. Shultes, 1934, "Lumineszenz im ultraschall-beschickten Wasser," *Z. Phys. Chem. Abt. B* **27B**, 421-424.

24. Yosioka, A., and Omura A., 1962, "The light emission from a single bubble driven by ultrasound and the spectra of acoustic oscillations," *Proc Annual Meet Acoustic Soc Jpn*, pages 125-126.

25. Gaitan, D. F., 1990, Ph.D. thesis (The University of Mississippi).

26. Barber, B. P., and S. J. Putterman, 1991, "Observation of synchronous picosecond sonoluminescence," *Nature (London)* **352**, 318–320.

27. Crum, L. A., 1980, "Measurements of the growth of air bubbles by rectified diffusion," *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 203-211.

28. Holt, R. G., and Gaitan, D. F., 1996, "Observation of stability boundaries in the parameter space of single bubble sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3791-3794.

29. Matula, T. J., 1999, "Inertial cavitation and single-bubble sonoluminescence," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357**, 225-249.
30. Barber, B. P., and S. Putterman, 1992, "Light Scattering Measurements of the Repetitive Supersonic Implosion of a Sonoluminescing Bubble," *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3839-3842.
31. Pecha, R., Gompf, G. N., Wang, Z. Q. and Eisenmenger, W., 1998, "Resolving the Sonoluminescence Pulse Shape with a Streak Camera," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 717-720.
32. Young, J. B., Nelson, J. A. and Kang, W., 2001, "Line Emission in Single-Bubble Sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2673-2676.
33. Xu, J., Chen, W., Xu, X., Liang, Y., Huang, W. and Gao, X., 2007, "Composition and its evolution inside a sonoluminescing bubble by line spectra," *Phys Rev E* **76**, 026308.
34. Matula, T.J., Roy, R.A., Mourad, P.D., McNamara III, W.B. and Suslick, K.S., 1995, "Comparison of multibubble and single-bubble sonoluminescence," *Phys Rev Lett.* **75**, 2602.
35. Pecha, R. and Gompf, B., 2000, "Microimplosions: Cavitation Collapse and ShockWave Emission on a Nanosecond Time Scale," *Physical Review Letters* **84**, 1328-1330.
36. Holzfuss, J., Rüggeberg, M., and Billo, A., 1998, "Shock Wave Emissions of a Sonoluminescing Bubble," *Physical Review Letters* **81**, 5434-5437.
37. Wang, Z. Q., Pecha, R., Gompf, B., and Eisenmenger, W., 1999, "Single bubble sonoluminescence: Investigation of the emitted pressure wave with a fiber optic probe hydrophone," *Physical Review E* **59**, 1777-1780.
38. Weninger, K. R., Barber, B. P., and Putterman, S. J., 1997, "Pulsed Mie Scattering Measurements of the Collapse of a Sonoluminescing Bubble," *Physical Review Letters* **78**, 1799-1802.
39. Matula, T. J., Hallaj, I. M., Cleveland, R. O., Crum, L. A., Moss, W. C., Roy, R. A., 1998, "The acoustic emissions from single-bubble sonoluminescence," *J. Acoust. Soc. Am.* **103**, 1377-1382.
- 40a. Dan, M., 2000, "Single bubble sonoluminescence," Ph. D. Thesis, Concordia University, Canada.
- 40b. Morales, J. L., 2006, "Sistema para la reproducción de sonoluminiscencia en resonador esférico," Tesis de Maestría, UNAM, México.
41. Ohl, C. D., Kurz, T., Geisler, R., Lindau, O., and Lauterborn, W., 1999, "Bubble

dynamics, shock waves and sonoluminescence,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357**, 269-294.

42. Moran, M.J., R. E. Haigh, M. E. Lowry, D. R. Sweider, G. R. Abel, J. T. Carlson, S. D. Lewia, A. A. Atchley, D. F. Gaitan, and X. K. Maruyame, 1995, “Direc Observations of Single Sonoluminescence Pulses,” *Nucl. Instrum. Methods* **B96**, 651.

43. Gompf B., R. Günther, G. Nick, R. Pecha, and W. Einsenmenger, 1997, “Resolving Sonoluminescence Pulse Width with Time-Correlated Single Photon Counting,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1405 – 1408.

44. Hiller, R., S. J. Putterman, and B. P. Barber, 1992, “Spectrum of Synchronous Picosecond Sonoluminescence,” *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1182-1184.

45. Matula T. J., R. A. Roy, P. D. Mourad, W. B. Mcnamara III, and K. S. Suslick, 1995, “Comparison of Multibubble and Single-Bubble Sonoluminescence Spectra,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2602-2605.

46. Hiller, R., K. Weninger, S. J. Putterman, and B. P. Barber, 1994, “Effect of Noble Gas Doping in Single-Bubble Sonoluminescence,” *Science* **266**, 248-250.

47. Camara, C. G., Hopkins, S. D., Suslick, K. S. and Putterman, S. J., 2007, “Upper Bound for Neutron Emission from Sonoluminescing Bubbles in Deuterated Acetone,” *Phys. Rev. Letters* **98**, 064301.

48. Flannigan, D. J., and Suslick, K. S., 2005, “Plasma formation and temperature measurement during single-bubble cavitation,” *Nature (London)* **434**, 52-55.

49. Flannigan, D. J., Hopkins, S. D., Camara, C. G., Putterman, S. J. and Suslick, K. S., 2006, “Measurement of pressure and density inside a single sonoluminescing bubble,” *Phys. Rev. Letters* **96**, 204301.

50. Dam, J. S., Levinsen, M. T. and Skogstad, R., M., 2002, “Period-Doubling Bifurcations from Breaking the Spherical Symmetry in Sonoluminescence: Experimental Verification,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 084303.

51. Shapira, D. and Saltmarsh, M., 2002, “Nuclear Fusion in Collapsing Bubbles— Is It There? An Attempt to Repeat the Observation of Nuclear Emissions from Sonoluminescence,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 104302.

52. Dam, J. S. and Levinsen, M. T., 2004, “Size of the Light-Emitting Region in a Sonoluminescing Bubble,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 144301.

53. Flannigan, D. J. and Suslick, K. S., 2007, “Emission from Electronically Excited Metal Atoms during Single-Bubble Sonoluminescence,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 134301.

54. Chen, W., Huang, W., Liang, Y., Gao, X. and Cui, W., 2008, "Time-resolved spectra of single-bubble sonoluminescence in sulfuric acid with a streak camera," *Phys. Rev. E* **78**, 035301.
55. Xu, H. and Suslick, K. S., 2010, "Molecular Emission and Temperature Measurements from Single-Bubble Sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **104**, 244301.
56. Yuan, L., H. Y. Cheng, M. C. Chu, and P. T. Leung, 1998, "Physical parameters affecting sonoluminescence: A self-consistent hydrodynamic study," *Phys. Rev. E* **57**, 4265.
57. Cheng, H. Y., M. C. Chu, P. T. Leung, and L. Yuan, 1998, "How important are shock waves to single-bubble sonoluminescence?," *Phys. Rev. E* **58**, R2705.
58. Vuong, V. Q., and A. J. Szeri, 1996, "Sonoluminescence and diffusive transport," *Phys. Fluids* **8**, 2354.
59. Hickling, R., 1994, "Transient, High-Pressure Solidification Associated with Cavitation in Water," *Phys. Rev. Letters* **76**, 2853-2856.
60. Hickling, R., and M. S. Plesset, 1964, "Collapse and Rebound of a Spherical Bubble in Water," *Phys. Fluids* **7**, 7-14.
61. Hickling, R., 1965, "Nucleation of Freezing by Cavity Collapse and its Relation to Cavitation Damage," *Nature* **206**, 915 – 917.
62. Eberlein C., 1996, "Sonoluminescence as Quantum Vacuum Radiation," *Phys. Rev. Letters* **76**, 3842-3845.
63. Lambrecht, A., 1997, "Comment on "Sonoluminescence as Quantum Vacuum Radiation"," *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2267.
64. Nesterenko, V. V., and I. G. Pirozhenko, 1998, "Is the Casimir Effect Relevant to Sonoluminescence," *JETP Lett.* **67**, 445.
65. Milton, K. A., and J. Yack Ng, 1998, "Observability of the bulk Casimir effect: Can the dynamical Casimir effect be relevant to sonoluminescence?," *Phys. Rev. E* **57**, 5504.
66. Brevik, V., V. N. Marachevsky, and K. A. Milton, 1999, "Identity of the van der Waals Force and the Casimir Effect and the Irrelevance of These Phenomena to Sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3948.
67. Chodos, A., and S. Groff, 1999, "Modeling sonoluminescence," *Phys. Rev. E* **59**, 3001.

68. Visser, M., S. Liberati, F. Belgiorno, and D. W. Sciama, 1999, "Sonoluminescence: Bogolubov Coefficients for the QED Vacuum of a Time Dependent Dielectric Bubble," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 678.
69. Liberati, S., M. Visser, F. Belgiorno, and D. W. Sciama, 2000, "Sonoluminescence as a QED vacuum effect. I. The physical scenario," *Phys. Rev. D* **61**, 085023-1.
70. Prosperetti, A., 1997, "A new mechanism for sonoluminescence," *J. Acoust. Soc. Am.* **101**, 2003.
71. Oğuz, H. N., and A. Prosperetti, 1990, "Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces," *J. Fluid Mech.* **219**, 143–179.
72. Didenko, Y. T., McNamara III, W. B. and Suslick, K. S., 2000, "Molecular emission from single-bubble sonoluminescence," *Nature* **407**, 877-879.
73. Lohse, D. and Hilgenfeldt, S., 1997, "Inert gas accumulation in sonoluminescing bubbles," *J. Chem. Phys.* **107**, 6986-6997.
74. Hilgenfeldt, S., and Detlef Lohse, 1999, "Predictions for Upscaling Sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1036.
75. Willison, J. R., 1998, "Sonoluminescence: Proton-Tunneling Radiation," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5430.
76. Bernstein, L. S., and Zakin, M. R. , (1995), "Confined Electron Model for Single-Bubble Sonoluminescence," *J. phys. Chem.* **99**, 14619.
77. García, N., Levanyuk, A. P., 1996, "Sonoluminescence: a new electrical breakdown hypothesis," *JETP Lett.*, **64** (12), 849 - 852.
78. Frommhold, L., and A. A. Atchley, 1994, "Is Sonoluminescence due to Collision-Induced Emission?," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2883.
79. Yuan, L., 2005, "Sonochemical effects on single-bubble sonoluminescence," *Phys. Rev. E.* **72**, 046309.
80. Yuan, L., and Ping He, 2005, "Influence of sonochemistry on single-bubble sonoluminescence," *Modern Physics Letters B*, **19**, Nos. 28 & 29, 1711–1714.
81. Bernstein, L. S., Mitchell R. Zakin, Edward B. Flint, and Kenneth S. Suslick, 1996, "Cavitation Thermometry Using Molecular and Continuum Sonoluminescence," *J. Phys. Chem.* **100**, 6612-6619.
82. Barber, B. P., C. C. Wu, Ritva Löfstedt, Paul H. Roberts, and Seth J. Putterman, 1994, "Sensitivity of sonoluminescence to experimental parameters,"

Phys. Rev. Lett. **72**, 1380.

83. Mohanty, P., and S. V. Khare, 1998, "Sonoluminescence as a Cooperative Many Body Phenomenon," Phys. Rev. Lett. **80**, 189.

84. Young, J. B., T. Schmiedel, and W. Kang, 1996, "Sonoluminescence in High Magnetic Fields," Phys. Rev. Lett. **77**, 4816.

85. Yasui, K., 1998, "Effect of surfactants on single-bubble sonoluminescence," Phys. Rev. E. **58**, 4560.

86. Brodsky, M., 1999, "What is the source of light in sonoluminescence?," Modern Phys. Lett. B, **13** (28),1019.

87. Jensen, B., and Iver Brevik, 2000, "Transition radiation and the origin of sonoluminescence," Phys. Rev. E **61**, 6639.

88. Kosky, P.G., 1968, "Bubble growth measurements in uniformly superheated liquids," Chem. Eng. Sci. **23**, 695-706.

89. Kosky, P. G., and Henwood, G. A., 1969, "A new technique for investigating vapor bubble implosion experimentally," Brit. J. Appl. Phys. (J. Phys. D) Ser. 2, **2**, 630-634.

90. Qi-Dai, C., Li-Min, F., Xi-Cheng, A., Jian-Ping, Z., and Long, W., 2005," Spectroscopic characteristic of conical bubble luminescence," Chinese Physics **14**, 826.

91. Leighton, T. G., Cox, B. T., and Phelps, A. D., 2000, "The Rayleigh-like collapse of a conical bubble," J. Acoust. Soc. Am. **107**,130.

92. Shou-Jie, H., Jing, H., and Li-Fang, L., 2010," Conical bubble sonoluminescence for water produced by a conical bubble straight tube," J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 025403.

93. Shou-Jie, H., Jing,H., Xue-Chen, L., Qing, L., Li-Fang, D. and Wang, L., 2007,"The spectra of conical bubble sonoluminescence in 1,2-propanediol and glycol," J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **40**, 3983.

94. Qi-Dai, C, Li-Min, F., Xi-Cheng, A., Jian-Ping, Z.,and Long, W., 2004," Ultrabright cavitation luminescence generation and its time-resolved spectroscopic characterization," Phys. Rev. E **70**, 047301.

95. Ha Jing, Shou-Jie, H., Wang Fang, and Song-Jian, M., 2008, "Cavitation luminescence of argon-saturated alkali-metal solutions from a conical bubble," J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41**,195402.

96. Leighton, T.G., 2007, "Derivation of the Rayleigh-Plesset Equation in Terms of Volume," ISVR Technical Report No 308.
97. Leighton, T. G., 1994, "The Acoustic Bubble," Great Britain: Academic Press.
98. Delgadino, G. A. and Bonetto, F. J., 1997, "Velocity interferometry technique used to measure the expansion and compression phases of a sonoluminescent bubble," *Physical Review E* **56**, R6248.
99. Gilmore, F. R., 1952, "The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid," Technical Report. No. 26-4, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
100. Cope, W. F., 1942, "The equations of hydrodynamics in a very general form," Ministry of Aircraft Prod., R. and M. No. 1903.
101. Prosperetti, A. and Hao Y., 1999, "Modelling of spherical gas bubble oscillations and sonoluminescence," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357**, 203-223.
102. Hilgenfeldt, S., D. Lohse, and M. P. Brenner, 1996, "Phase diagrams for sonoluminescing bubbles," *Phys. Fluids* **8**, 2808.
103. Augsdörfer, U. H., Evans, A. K., and Oxley, D. P., 2000, "Thermal noise and the stability of single sonoluminescing bubbles," *Physical Review E* **61**, 5278-5286.
104. Prosperetti A., 1977, "Viscous effects on perturbed spherical flows," *Quarterly of Applied Mathematics* **34**, 339.
105. Yuan, L., Ho, C. Y., Chu, M. C., Leung, T. 2001, "Role of gas density in the stability of single-bubble sonoluminescence," *Physical Review E* **64**, 016317.
106. An, Y., Lu, T., and Yang, B., 2005, "Instability of sonoluminescing bubbles under a nonspherical symmetrical acoustic-pressure perturbation," *Physical Review E* **71**, 026310.
107. Roberts, P. H. and Wu, C. C., 1998, "On Rectified Diffusion and Sonoluminescence," *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **10**, 357-372.
108. Fyrrillas, M. M. and Szeri, A. J., 1994, "Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles," *J. Fluid Mech* **277**, 381-407.
109. Vaughan, P. W. and Leeman, S., 1989, "Acoustic Cavitation Revisited," *Acustica* **69**, 109-119.
110. Akhatov, I., Mettin, R., Ohl, C. D., Parlitz, U. and Lauterborn, W., 1997, "Bjerknes force threshold for stable single bubble sonoluminescence," *Physical Review E* **55**, 3747.

111. Matula T. J., Cordry S. M., Roy R. A. and Crum L. A., 1997, "Bjerknes force and bubble levitation under single-bubble sonoluminescence conditions," *J Acoust Soc Am* **102**, 1522.
112. Trott, M., 2006, "The Mathematica Guide Book for Numerics," USA: Springer.
113. Storey, B. D., 2001, "Shape stability of sonoluminescence bubbles: Comparison of theory to experiments," *Physical Review E* **64**, 017301.
114. Simon, G., Cvitanović, P., Levinsen, M. T., Csabai, I. and Horovath, ., 2002, "Periodic orbit theory applied to a chaotically oscillating gas bubble in water," *Nonlinearity*, **15**, 25-43.
115. Quaranta G., Masarati P., and Mantegazza P., 2004, "Assessing the local stability of periodic motions for large multibody nonlinear systems using POD," *Journal of Sound and Vibration*, **271**, 1015-1038.
116. Bauchau, O. A. and Nikishkov, Y. G., 2001, "An Implicit Floquet Analysis for Rotorcraft Stability Evaluation," *Journal of the American Helicopter Society* **46**, 200-209.
117. Rand, R. H., 2005, "Lecture Notes on Nonlinear Vibrations," Vibrations Dept. Theoretical & Applied Mechanics, Cornell University, Ithaca NY; <http://audiophile.tam.cornell.edu/randdocs/nlvibe52.pdf>
118. Lynch, S., 2004, "Dynamical systems with applications using MATLAB," Birkhuser, Boston.
119. Ketterling, J. A., and R. E. Apfel, 2000, "Extensive experimental mapping of sonoluminescence parameter space," *Physical Review E* **61**, 3832.
120. Holzfuss, J., 2008, "Surface-wave instabilities, period doubling, and an approximate universal boundary of bubble stability at the upper threshold of sonoluminescence," *Phys. Rev. E* **77**, 066309.
121. Dam, J. S., Levinsen, M. T. and Skogstad, M., 2003, "Stable nonspherical bubble collapse including period doubling in sonoluminescence," *Phys. Rev. E* **67**, 026303.
122. Gaitan, D. F. and Holt, R. G., 1999, "Experimental observations of bubble response and light intensity near the threshold for single bubble sonoluminescence in an air-water system," *Phys. Rev. E* **59**, 5495.
123. Simon, G., 2003, "Experimental and theoretical investigation of single-bubble sonoluminescence," Ph.D. dissertaton Etvos University.

124. Lin H.; Storey B. D. and Szeri, A. J., 2002, "Rayleigh-Taylor instability of violently collapsing bubbles," *Phys. Fluids* **14**, 2925.
125. Urteaga, R., Dellavale, D. H., Puente G. F. and Bonetto, F. J., 2007, "Positional stability as the light emission limit in sonoluminescence with sulfuric acid," *Phys. Rev. E* **76**, 056317.
126. Dan, M., Cheeke, J. D. N., Kondic, L., 1999, "Ambient Pressure Effect on Single-Bubble Sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1870-1873.
127. Moshaii, A., Imani, Kh. and Silatani, M., 2009, "Sonoluminescence radiation from different concentrations of sulfuric acid," *Phys. Rev. E* **80** 046325.
128. Toegel, R., Luther, S. and Lohse, D., 2006, "Viscosity Destabilizes Sonoluminescing Bubbles," *Phys. Rev. Lett.* **96**, 114301.
129. Godínez, F. A. and Navarrete, M., 2008, "Application of the Aqueous Sonoluminescence in the Photocatalysis," 1st IWA Mexico National Young Water Professionals Conference, Mexico City, Mexico. ISBN: 978-970-32-5515-3.
130. Kapitaniak, T., 2000, "Chaos for engineers," Springer, pp. 69,70.
131. Holt, R. G., Gaitan, D. F., Holzfuss, J., 1994, "Chaotic sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1376-1379.
132. Godínez, F. A., Navarrete, M., Sánchez, C., Mejía, E., Villagrán, M., 2010, "Chemical perturbation effects in conical bubble luminescence," *Ultrasonics Sonochemistry*, en revisión.
133. Ohl, C.D., Lindau, O., Lauterborn, W., 1998, "Luminescence from Spherically and Aspherically Collapsing Laser Induced Bubbles," *Phys Rev. Lett.* **80**, 393-397.
134. Ohl, C.D., 2002, "Probing luminescence from nonspherical bubble collapse," *Phys. Fluids* **14**, 2700-2708.
135. Janik, I., Bartels, D.M., Jonah, C.D., "Hydroxyl radical self-recombination reaction and absorption spectrum in water up to 350 °C," 2007, *J. Phys. Chem. A* **111**, 1835-1843.
136. Lepoint, T., Lepoint- Mullie, F., Voglet, N., Labouret, S., Pétrier, C., Avni, R., Luque, J., 2003, "OH/D A₂Σ⁺-X² Π_i rovibronic transitions in multibubble sonoluminescence," *Ultrason. Sonochem.* **10**, 167-174.
137. Colussi, J., Hoffmann, M.R., 1999, "Vapor supersaturation in collapsing bubbles, relevance to the mechanisms of sonochemistry," *J Phys. Chem. A* **103**, 11336-11339.

138. Sharipov, G.L., Abdrakhmanov, A.M., Gainetdinov, R.Kh., 2003, "Sonoluminescence of aqueous solutions of sulfuric acid and sulfur dioxide," Russian Chemical Bulletin **52**, 1966-1968.
139. Sehgal, C., Steer, R.P., Sutherland, R.G., Verrall, R.E., 1979, "Sonoluminescence of argon saturated alkali metal salt solutions as a probe of acoustic cavitation," J. Chem. Phys. **70**, 2242-2248.
140. Benjamin, T.B., Ellis, A.T, 1966, "The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid bodies," Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **260**, 221-240.
141. Yasui, K., Tuziuti, T., Sivakumar, M., Iida, Y., 2005, "Theoretical study of single-bubble sonochemistry," J. Chem.Phys. **122**, 224706.
142. Yasui, K., Tuziuti, T., Lee, J., Kozuka, T., Towata, A., Iida, Y., 2008, "The range of ambient radius for an active bubble in sonoluminescence and sonochemical reactions," J. Chem. Phys. **128**, 184705.
143. Young, F.R., 2005, "Sonoluminescence," CRC Press, Florida.
144. Walton, J., Reynolds, G.T., 1984, "Sonoluminescence," Adv. Phys. **33**, 595-660.
145. Leighton, T.G., Ho, W. L., Flaxman, R., 1997, "Sonoluminescence from the unstable collapse of a conical bubble," Ultrasonics **35**, 399-405.
146. Longtin, J.P., Chang-Lin, T., 1997, "Efficient laser heating of transparent liquids using multiphoton absorption," Int. J. Heat Mass Transf. **40**, 951-959.
147. Agrafiotis, G. K. and Tsoukalas, M. Z., 1995, "On Excess-time Correlated Cumulative Processes," The Journal of the Operational Research Society **46**, 1269-1280.
148. Navarrete, M., Sánchez, C., Godínez, F. A., Valdés, R., Mejía, E., Villagrán, M., 2009, "Probing Luminescence from Conical bubble Collapse," Accepted, MRS Proceedings 6pp.
149. Abarbanel, H. D. I.; M. I. Rabinovich; and M. M. Sushchik, 1993, "Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists," Singapore: World Scientific.
150. Hilborn, R. C., 1994, "Chaos and Nonlinear Dynamics," New York: Oxford University Press.
151. Strogatz, S. H., 1994, "Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering," New York: Perseus Books.

152. Thompson, J. M. T., and H. B. Stewart, 1986, "Nonlinear Dynamics and chaos: Geometrical methods for engineers and scientists," Great Britain: John Wiley & Sons.
153. Sneyers, R., 1997, "Climate Chaotic Instability: Statistical Determination and Theoretical Background", *Environmetrics*, **8**, no. 5, pages 517-532.
154. Matsumoto, T., 1984, "A chaotic attractor form Chua's circuit," *IEEE Trans. Circuits Sist.*, **CAS-31**, 1055-1058.
155. Gray, P., Scott, S., 1986, "Oscillations in forced chemical reactions," *Ber. Bunsenges Phys. Chem.* **90**, 985-997.
156. Lauterborn, W. and Koch, A., (1987) Holographic observation of period-doubled and chaotic bubble oscillations in acoustic cavitation , *Physical Review A* **35**, 1974-1977.
157. Jensen, P. S., (1998), MSc Thesis Niels Bohr Institute/CATS.
158. Thomas, C. R., Roy, R. A., and Holt, R. G., 2004, "Bubble dynamics near the onset of single-bubble sonoluminescence," *Physical Review E* **70**, 066301.
159. Kuttruff, H., 2007, "Acoustics: An introduction," USA: Taylor & Francis.
160. Cole, R. H., 1948, "Underwater Explosions," USA: Princeton University Press.
161. Church, C. C., 1989, "A theoretical study of cavitation generated by an extracorporeal shock wave lithotripter," *J. Acoust. Soc. Am.* **86**, 215-227.
162. Hamilton, M. F., and Blackstock, D. T., 1998, "Nonlinear acoustics," USA: Academic Press.
163. Enflo, B. O., 1996, "Saturation of nonlinear spherical and cylindrical sound waves," *J. Acoust. Soc. Am.* **99**, 1960-1964.
164. Debnath, L., 2005, "Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers," USA: Birkhäuser.
165. Ketterling, J. A., and R. E. Apfel, 1998, "Experimental Validation of the Dissociation Hypothesis for Single Bubble Sonoluminescence," *Physical Review Letters* **81**, 4991.
166. Lohse, D., M. P. Brenner, T. F. Dupont, S. Hilgenfeldt, and B. Johnston, 1997, "Sonoluminescing Air Bubbles Rectify Argon," *Physical Review Letters* **78**, 1359.

167. Holzfuss, J., Rüggeberg, M., and Holt, R. G., 2002, "Acoustical stability of a sonoluminescing bubble," *Physical Review E* **66**, 046630.
168. Brenner, M. P., Lohse, D. and Dupont, T. F., 1995, "Bubble Shape Oscillations and the Onset of Sonoluminescence," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 954.